

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

1

ROČNÍK 55, 1976-1977, ZÁŘÍ

ROČNÍK 55
ZÁŘÍ 1976

1

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1976.

OBSAH

Prof. E. Kraemer: Na prahu padesátého pátého ročníku našich Rozhledů	1
L. Bícon, P. Němec: Určete čísla .	3
Dr. E. Calda: Parabola a vrh šikmý vzhůru	5
Doc. ing. L. Drš, CSc.: Cyklus ve vývojo- vém diagramu	10
S. Horák: Z geometrie trojúhelníka	13
Dr. J. Bednář: Pomůže fyzika atmosféry nalézt nové zdroje energie?	17
Dr. M. Freil: Některá použití součinů vek- torů v praxi	20
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Jak se určují vzdálenosti galaxií	24
Naše soutěž	29
Olympiády	40
F. Golab, J. Procházka: 400 let od smrti Geronima Cardana	43
Dr. J. Mrázek: Trik indického fakira sku- tečností?	46
Recenze	47
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglic- ký	3. a 4 str. obálky

Na prahu padesátého pátého ročníku našich Rozhledů

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Padesát pět let existence časopisu, jehož hlavním posláním je získávat a prohlubovat zájem o matematicko-fyzikální vědy mezi středoškolskou mládeží, je pozoruhodným jevem, a to i v měřítku mezinárodním. Ve skutečnosti jde o tradici ještě starší, neboť předchůdcem Rozhledů byla již od roku 1892 Příloha k Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky, vydávaného v Praze tehdejší Jednotou českých matematiků. Tato příloha vycházela v uvedeném časopisu až do konce jeho padesátého ročníku, tj. do roku 1921. Od počátku školního roku 1921/22 začala Jednota československých matematiků a fyziků vydávat pro středoškolské studenty samostatný časopis s názvem *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*. Obsahovaly články z matematiky a fyziky přiměřené úrovni žáků středních škol a přihlížely také k aplikacím těchto věd. Kromě toho otiskovaly na počátku každého ročníku úlohy o ceny z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie, určené studentům středních škol. Tak se staly předchůdcem našich nynějších matematických a fyzikálních olympiád, založených v osvobozeném Československu v padesátých letech (1951 a 1959).

Dnes, kdy veškeré náklady na vydávání Rozhledů hradí Státní pedagogické nakladatelství, si už ani nedovedeme představit obtíže, které leckdy měla s Rozhledy Jednota čs. matematiků a fyziků, zejména v době vrcholící hospodářské krize na počátku třicátých let. Podařilo se jí udržet vydávání Rozhledů celých 30 let, tj. až do konce školního roku 1950/51. V dalších několika letech byl učiněn pokus změnit Rozhledy na populárně vědecký časopis se širším posláním. Avšak tento experiment se nezdařil, a proto se Rozhledy vrátily počátkem roku 1957 ke svému původnímu poslání. Zároveň dostaly výstižnější název *Rozhledy matematicko-fyzikální*.

Jestliže poslání Rozhledů se zdálo ještě před poměrně nemnoha lety příliš úzké, není tomu tak dnes, zejména po XV. sjezdu KSČ, který výrazně podtrhl význam kvality veškeré práce a nastolil požadavek urychlit vědecko-technický pokrok. Je přirozené, že v souvislosti s těmito požadavky vzrůstá význam odborné kvalifikace i všeobecného vzdělání. Podle Směrnic pro hospodářský a sociální rozvoj ČSSR v letech 1976 až

1980, schválených XV sjezdem KSČ, se do roku 1980 zvýší počet studentů na gymnáziích na 140 až 150 tisíc a počet studentů na středních odborných školách vzroste na 230 až 240 tisíc. Kromě toho se má zvýšit počet dělnické mládeže v učebních oborech s maturitou zhruba na pětinásobek proti roku 1975. Zároveň se do roku 1980 zvýší počet studentů vysokých škol na 140 až 145 tisíc.

Z hlediska těchto směrych perspektiv se musíme hlouběji zamyslet nad úkoly našich Rozhledů, které by měly najít mezi příštími statisíci našich středoškolských studentů aspoň tisíce nových čtenářů. Proto s realizací projektu rozvoje školské soustavy v ČSSR, navazujícího na závěry XV. sjezdu KSČ, bude nutno postupně upravovat i obsah našeho časopisu. Musí se nadále vyznačovat výraznou ideovostí a odborností, ale také — a to v neposlední řadě — přístupným a pokud možno zajímavým výkladem. Je totiž nutno připomenout, že podle výzkumů provedených v posledních letech označují studenti našich gymnázií za nejneoblíbenější předmět vesměs fyziku; za ní v pořadí neoblíbenosti následují chemie s matematikou. Přispět ke změně této neradostné skutečnosti by mělo být snahou všech autorů písicích pro Rozhledy.

Vzhledem k tomu, že převážná většina našich středoškolských studentů studuje a bude studovat na odborných školách, bude nutno usilovat o rozšíření Rozhledů mezi studenty těchto škol, k nimž se druží i odborná učiliště připravující pro náročné učební obory. Učitelé matematiky a fyziky, působící na těchto školách, by měli navázat na dobrou tradici z dřívějších dob, kdy středoškolské profesoři jako zástupci Jednoty čs. matematiků a fyziků doporučovali svým studentům četbu i odběr Rozhledů. S ohledem na studenty odborných škol a učilišť bude ovšem nutno dbát více než dosud na otiskování takových článků a zpráv, které ukazují význam aplikací matematiky a fyziky, zejména pro obory technické a ekonomické. K tomu se druží články z historie exaktních věd i zprávy o jejich rozvoji, které jistě zaujmou mnohé studenty všech druhů středních škol.

K podnícení hlubšího a aktivního zájmu o matematiku a fyziku budou Rozhledy pokračovat ve své tradiční soutěži v řešení úloh, dotované cenami ministerstev školství ČSR a SSR i cenami Státního pedagogického nakladatelství. Kromě toho budou opět otiskovat informace a příklady ze všech kategorií celostátních olympiád (matematické a fyzikální). Pro nejmladší čtenáře otisknou zábavné úlohy a různé hříčky. Konečně nezapomenou ani na recenze takových publikací, které svým obsahem a přístupným výkladem jsou vhodné pro středoškolské studenty.

Jménem redakční rady Rozhledů matematicko-fyzikálních jsem se pokusil připomenout historii i dřívější poslání tohoto časopisu a zároveň naznačit, jak by měl být v dalších letech usměrněn tak, aby jeho působení bylo v souladu s náročnými cíli, které naší socialistické společnosti vytyčil XV. sjezd KSČ.

matematika

Určete čísla

LADISLAV BICAN a PETR NĚMEC, MFF UK Praha

Nedávno nás zaujala jedna matematická hříčka, kterou přivezl dr. M. Vlach z Holandska. Úloha se nám líbila natolik, že jsme se rozhodli seznámit vás nejenom s řešením úlohy samotné, ale i s řešením úlohy poněkud obecnější (druhá část). Nejprve však znění úlohy:

Jsou dána dvě přirozená čísla x, y větší než 1, jejichž součet nepřesahuje číslo 100. Matematik A zná navíc součin $z = xy$ těchto čísel a matematik B jejich součet $w = x + y$. Mezi matematiky A a B proběhl následující rozhovor :

A : Neznám čísla x, y .

B : To jsem věděl.

A : Teď už je znám.

B : Já také.

Naším úkolem je určit čísla x a y .

V tomto okamžiku se obracíme na laskavého čtenáře, aby nepokračoval zatím v dalším čtení a pokusil se o samostatné řešení úlohy. V tomto okamžiku má totiž každý z vás jedinečnou příležitost objevit nějakou originální myšlenku a najít metodu rychlého a elegantního řešení úlohy, která by umožnila snadno řešit úlohy obecnější, z nichž některé budou zformulovány na konci druhé části článku.

Podívejme se nejprve, jaké informace nám tento rozhovor postupně poskytuje. Zřejmě je $w \geq 4$, protože žádné z čísel 1, 2, 3 nelze vyjádřit jako součet dvou přirozených čísel větších než 1.

Z toho, že matematik A nezná čísla x a y , ačkoliv zná jejich součin z , usuzujeme, že z nemůže být součinem dvou prvočísel. V rozkladu čísla z v součin prvočísel se tedy musí vyskytovat alespoň tři činitele.

Dále, matematik B předem věděl, že A nezná čísla x, y . To znamená, že číslo w nelze vyjádřit jako součet dvou prvočísel. Kdyby totiž naopak $w = p + q$, kde p, q jsou prvočísla, pak by číslo z , které B nezná, mohlo být rovno pq a A by v tomto případě nutně obě čísla znal.

Nazvěme pro jednoduchost přirozené číslo n *přípustným*, jestliže $4 \leq n \leq 100$ a n nelze vyjádřit jako součet dvou prvočísel. Všechna ostatní přirozená čísla nazvěme *nepřípustnými*. Po prvních dvou větách rozhovoru matematiků A a B tedy už všichni víme, že w je přípustné číslo.

Matematik A, který nyní rovněž ví, že w musí být přípustné číslo, tvrdí, že teď už obě čísla x, y zná. To je však možné pouze tehdy, když $x + y$ je přípustné číslo a pro každé jiné vyjádření čísla z ve tvaru součinu dvou přirozených čísel větších než 1 je součet těchto činitelů nepřípustné číslo.

Z tohoto důvodu nazveme přirozené číslo m *rozhodnutelným*, jestliže při všech možných různých rozkladech $m = uv$, kde $u, v \geq 2$, (rozklady lišící se pouze pořadím činitelů považujeme za stejné) je právě jeden ze součtů $u + v$ přípustné číslo. Vyjádření přirozeného čísla n ve tvaru součtu dvou přirozených čísel větších než 1, $n = a + b$, nazveme *zápisem* čísla n (jako předtím, dva zápisy, lišící se pouze pořadím sčítanců, považujeme za stejné). Budeme říkat, že zápis $n = a + b$ je *rozhodnutelný*, jestliže součin ab je rozhodnutelné číslo.

Po třetí větě rozhovoru tedy víme (a ví to i matematik B), že z je rozhodnutelné číslo.

Matematik B už nyní také umí určit čísla x a y , to tedy znamená, že mezi všemi možnými různými zápisy čísla w je právě jeden rozhodnutelný zápis, a to $w = x + y$, který udává matematikovi B hledaná čísla.

Matematici A a B tedy už hledaná čísla našli, my jsme však v obtížnější situaci, neboť neznáme ani číslo w , ani číslo z . Nicméně provedené úvahy nás přivádějí k následujícímu postupu:

- a) Najdeme všechna přípustná čísla.
- b) Postupně z nich vyloučíme všechna ta čísla, která mají alespoň dva různé rozhodnutelné zápisy.

Zbývá čísla přicházejí v úvahu jako možné součty hledaných čísel.

- c) Nyní z nich vyloučíme ta čísla, která nemají žádný rozhodnutelný zápis.

- d) Zůstala nám nyní pouze ta přípustná čísla w , která mají právě jeden rozhodnutelný zápis $w = x + y$. Potom zřejmě čísla x, y vyhovují podmínkám naší úlohy.

Nyní tento postup prakticky provedeme:

Přípustná čísla najdeme tak, že v tabulce čísel od 4 do 100 vyškrtáme všechny součty dvou prvočísel. Zbudou nám přípustná čísla: 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 65, 67, 71, 77, 79, 83, 87, 89, 93, 95, 97.

Zvláště si všimněme faktu, že žádné sudé číslo není přípustné. Proto může vyslovit následující jednoduché tvrzení:

Jestliže p je prvočíslo, $k \geq 2$ a číslo $2^k + p$ je přípustné, potom číslo $n = 2^k \cdot p$ je rozhodnutelné.

Vskutku, pro každý jiný rozklad $n = uv$, $u, v \geq 2$, je $u + v$ sudé číslo.

Podívejme se nyní, co platí pro naše přípustná čísla:

$$11 = 4 + 7 = 8 + 3$$

$$17 = 4 + 13$$

$$23 = 4 + 19 = 16 + 7$$

$$27 = 4 + 23 = 8 + 19$$

$$\begin{aligned}
29 &= 16 + 13 \\
37 &= 8 + 29 = 32 + 5 \\
47 &= 4 + 43 = 16 + 31 \\
53 &= 16 + 37 \\
59 &= 16 + 43 \\
67 &= 8 + 59 = 64 + 3 \\
77 &= 4 + 73 = 16 + 61 \\
83 &= 4 + 79 = 16 + 67 \\
89 &= 16 + 73 \\
95 &= 16 + 79
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
35 &= 4 + 31 = 16 + 19 \\
41 &= 4 + 37 \\
51 &= 4 + 47 = 8 + 43 \\
57 &= 16 + 41 = 4 + 53 \\
65 &= 4 + 61 \\
71 &= 4 + 67 = 64 + 7 \\
79 &= 6 + 71 = 32 + 47 \\
87 &= 4 + 83 = 8 + 79 \\
93 &= 4 + 89 = 32 + 61 \\
97 &= 8 + 89
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že všechna přípustná čísla až na 17, 29, 41, 53, 59, 65, 89, 95, 97 mají vzhledem k tvrzení (1) alespoň dva přípustné zápisy.

Uvědomme si dále, že pro každé přípustné číslo $n \geq 35$ je číslo $m = 32 \cdot (n - 32)$ rozhodnutelné. Každý jiný rozklad $m = uv$, $u, v \geq 2$, totiž buď má oba faktory sudé, t.j. $u + v$ je nepřípustné, nebo, vzhledem k tomu, že v rozkladu čísla $n - 32$ na prvočinitele se nemůže vyskytovat číslo 2, je $u \geq 32 \cdot 3 = 96$ a $v \geq 3$, t.j. $u + v \geq 99$, kdežto největší přípustné číslo je 97.

Pro všechna přípustná čísla až na 17 a 29 už tedy máme alespoň dva rozhodnutelné zápisy; ale $29 = 2 + 27$, což jest rovněž rozhodnutelný zápis, neboť $2 \cdot 27 = 6 \cdot 9 = 18 \cdot 3$ a $15 = 6 + 9$ a $21 = 18 + 3$ jsou nepřípustná čísla. Zbývá nám tedy vyšetřit rozhodnutelnost čísel tvaru uv , kde $u + v = 17$:

$$\begin{array}{ll}
2 \cdot 15 = 5 \cdot 6, & 6 + 5 = 11 \\
3 \cdot 14 = 2 \cdot 21, & 2 + 21 = 23 \\
4 \cdot 13 = \text{rozhodnutelné} & \\
5 \cdot 12 = 3 \cdot 20, & 3 + 20 = 23 \\
6 \cdot 11 = 2 \cdot 33, & 2 + 33 = 35 \\
7 \cdot 10 = 2 \cdot 35, & 2 + 35 = 37 \\
8 \cdot 9 = 3 \cdot 24, & 3 + 24 = 27.
\end{array}$$

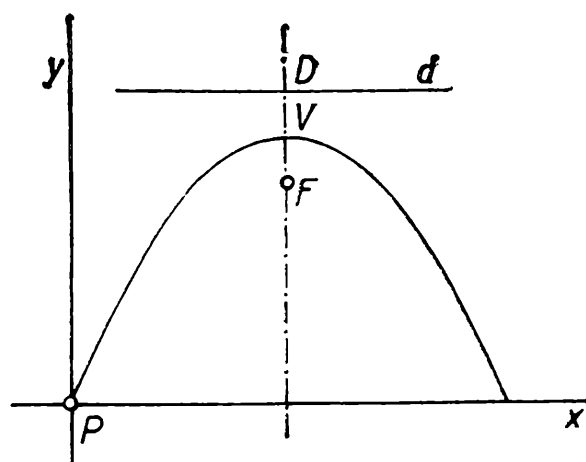
Hledaná čísla jsou tedy 4 a 13.

V příštím čísle budeme řešit v podstatě tutéž úlohu, pouze s tím rozdílem, že součet obou čísel nebudeme omezovat číslem 100.

Parabola a vrh šikmo vzhůru

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK

V 1. ročníku gymnázia se v několika hodinách fyziky zabýváte pohybem v homogenním gravitačním poli a odvozujete některé vlastnosti pohybu nazývaného vrh šikmo vzhůru. Ve 3. resp. ve 4. ročníku probíráte v hodinách matematiky kuželosečky a základy infinitezimálního počtu. Většinou se již nedostává času k tomu, abyste se z hlediska těchto poznatků



Obr. 1

mohli znovu vrátit ke zmíněné partii fyziky. Podívejme se v tomto článku, co nám tento „pohled zpět“ může přinést nového.

Zabývejme se parabolou umístěnou ve zvoleném souřadnicovém systému tak, že prochází počátkem P , má osu rovnoběžnou s osou y a její vrchol $V = [m; n]$ leží v 1. kvadrantu (viz obr. 1). Rovnici této paraboly ve vrcholovém tvaru známe; je to rovnice

$$(x - m)^2 = -2p(y - n),$$

kde p je kladné číslo udávající vzdálenost ohniska F této paraboly od její řídicí přímky d , tj. $p = FD$. Tuto parabolu, resp. její část ležící v 1. kvadrantu, můžeme považovat za trajektorii hmotného bodu vrženého

ho z počátku P počáteční rychlostí v_0 pod elevačním úhlem α , $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Vektor počáteční rychlosti přitom leží na tečně k této parabole v bodě $P = [0; 0]$ a elevační úhel α je odchylka této přímky od osy x .

Určíme nyní rovnici této paraboly v závislosti na daných hodnotách počáteční rychlosti v_0 , elevačního úhlu α a tíhového zrychlení g , přičemž odpor prostředí zanedbáváme. Na základě známých zákonů pro skládání pohybů dostaneme, že v čase t , který měříme od počátku pohybu, pro souřadnice x, y pohybujícího se hmotného bodu platí:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Vyloučením parametru t dostáváme vyjádření dané paraboly ve tvaru kvadratické funkce

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Převedením této rovnice na vrcholový tvar dostaneme po nepříliš obtížných úpravách, které si jistě provedete sami:

$$\left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = -\frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \left(y - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right).$$

Z této rovnice bezprostředně vyplývají známé vzorce pro největší výšku $h_{\max}$, do níž hmotný bod vystoupí,

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

a dále pro tzv. délku doletu l na vodorovné rovině

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Nás však zajímají jiné její důsledky; chceme určit rovnici řídící přímky d a polohu ohniska F této parabolické trajektorie. Pro vzdálenost p ohniska F od řídící přímky d máme z této rovnice

$$p = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

dále platí $VF = VD = \frac{p}{2}$, kde D je pata kolmice spuštěné z ohniska F na řídící přímku (viz obr. 1). Protože souřadnice bodů V , D jsou kladná čísla (tyto body leží v 1. kvadrantu), bude mít řídící přímka d dané paraboly analytické vyjádření

$$y = n + \frac{p}{2}.$$

Po dosazení a jednoduché úpravě máme rovnici řídící přímky:

$$y = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Na tomto výsledku je pozoruhodné, že poloha řídící přímky nezávisí na elevačním úhlu; dále si uvědomíme, že výraz na pravé straně udává výšku vrhu svisle vzhůru s počáteční rychlostí v_0 . Z těchto vlastností získané rovnice vyplývá:

Měníme-li při vrhu šikmo vzhůru elevační úhel α , $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, pak při stále počáteční rychlosti v_0 mají všechny paraboly, jež vržený hmotný bod opisuje, touž řídící přímku. Tato přímka prochází vrcholem dráhy, kterou opíše hmotný bod vržený z počátku svisle vzhůru opět počáteční rychlostí v_0 .

Zkoumejme nyní, jakou křivku opisuje ohnisko $F = [x_F; y_F]$ těchto parabolických drah při stále počáteční rychlosti v_0 a proměnném elevačním úhlu α . Vrátime-li se k obr. 1, dostaneme, že pro souřadnice ohniska F platí:

$$x_F = m, \quad y_F = n - \frac{p}{2}.$$

Po dosazení máme:

$$x_F = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

$$y_F = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g} = - \frac{v_0^2 \cos 2\alpha}{2g}$$

Umocněním na druhou a sečtením dostáváme:

$$x_F^2 + y_F^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}.$$

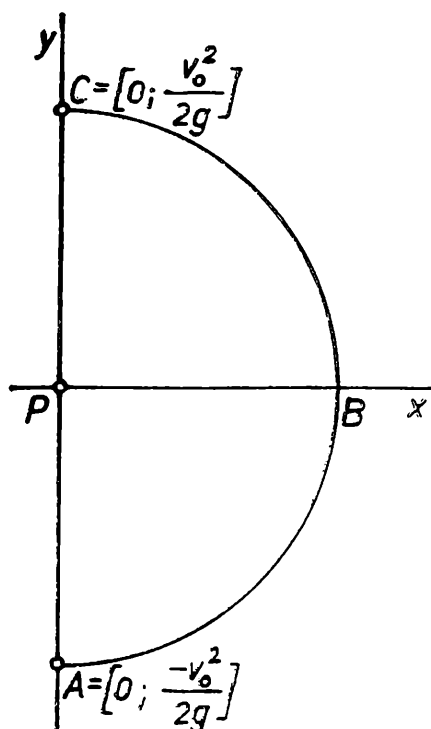
Ohnisko F každé uvažované paraboly tedy leží na kružnici se středem v počátku P , která má poloměr $\frac{v_0^2}{2g}$. Snadno ověříme, že geometrickým místem ohnisek parabol, které opisuje hmotný bod vržený z počátku stálou počáteční rychlostí v_0 pod proměnným elevačním úhlem $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, je kruhový oblouk $\widehat{AC}$ znázorněný na obr. 2. Chceme-li polohu ohniska F specifikovat blíže, pak pro $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ leží ohnisko uvnitř oblouku $\widehat{AB}$ a pro $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ leží ohnisko uvnitř oblouku $\widehat{BC}$. Pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$ leží ohnisko v bodě B , jak se můžeme snadno přesvědčit dosazením za α do vztahů pro x_F a y_F .

Je tedy vrh šikmo vzhůru pod elevačním úhlem $\alpha = \frac{\pi}{4}$ význačný nejen v tom smyslu, že při stálé počáteční rychlosti v_0 má vůči šikmým vrhům vzhůru pod jiným úhlem α největší délku doletu, ale i pro polohu svého ohniska, které jen v tomto případě leží na ose x .

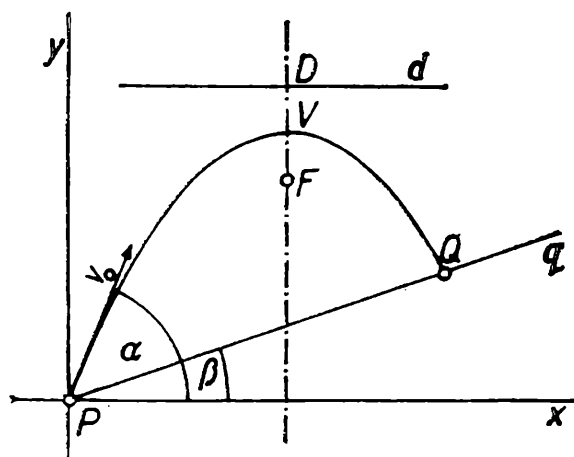
Zkoumejme ještě krátce otázku, pod jakým elevačním úhlem α je nutno při dané počáteční rychlosti v_0 vypustit hmotný bod z místa, kde šikmý svah s úhlem stoupání β se stýká s vodorovnou rovinou, aby délka doletu na tomto svahu byla maximální. Situace ve zvolené souřadnicové soustavě je znázorněna na obr. 3, kde přímka q je průsečnicí roviny šikmého svahu s rovinou vrhu. Chceme tedy určit elevační úhel α vrhu šikmo vzhůru při dané počáteční rychlosti v_0 tak, aby příslušná parabola protála přímku q v bodě Q , pro nějž platí, že PQ je maximální.

Souřadnice bodu Q určíme jako souřadnice průsečíku přímky q o rovnici $y = x \operatorname{tg} \beta$ s parabolou

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$



Obr. 2



Obr. 3

Řešením této soustavy dostáváme, že pro souřadnice x_0 , y_0 bodu Q platí:

$$x_0 = \frac{v_0^2}{2g} (\sin 2\alpha - 2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta), \quad y_0 = x_0 \operatorname{tg} \beta$$

Vzdálenost PQ , kterou chceme mít maximální, je funkcí elevačního úhlu α :

$$\begin{aligned} PQ = f(\alpha) &= \sqrt{x_0^2 + x_0^2 \operatorname{tg}^2 \beta} = |x_0| \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = x_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \\ &= \frac{v_0^2}{2g} (\sin 2\alpha - 2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} \end{aligned}$$

Derivaci této funkce podle proměnné α tedy položíme rovnu nule a dostaneme:

$$\frac{v_0^2}{2g} (2 \cos 2\alpha - 4 \cos \alpha \sin \alpha \operatorname{tg} \beta) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = 0.$$

Máme tak rovnici

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta = 0,$$

kterou převedeme na tvar

$$\cotg 2\alpha = \cotg \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)$$

Ze všech jejích řešení vyhovuje podmínce $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ pouze jediné, a to

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

Druhou derivaci funkce f v bodě α_0 nemusíme vyšetřovat. Z fyzikálních důvodů je zřejmé, že se skutečně jedná o maximum funkce f .

Dolet na šikmém svahu za uvedených podmínek bude tedy maximální pro elevační úhel $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$. Všimněme si ještě, že pro $\beta = 0$ (šikmý svah splyne s vodorovnou rovinou) dostáváme známou podmínku pro maximální dolet na vodorovné rovině.

Cvičení.

1. Vyšetřete polohu řídicí přímky a ohniska paraboly, která je trajektorií vrhu vodorovného resp. vrhu šikmo dolů z počátku P souřadnicové soustavy.

2. Vyšetřete, pod jakým elevačním úhlem má šikmý vrh vzhůru maximální dolet na klesajícím šikmém svahu, tj. v případě, že přímka q (viz obr. 3) má rovnici $y = -x \operatorname{tg} \beta$.

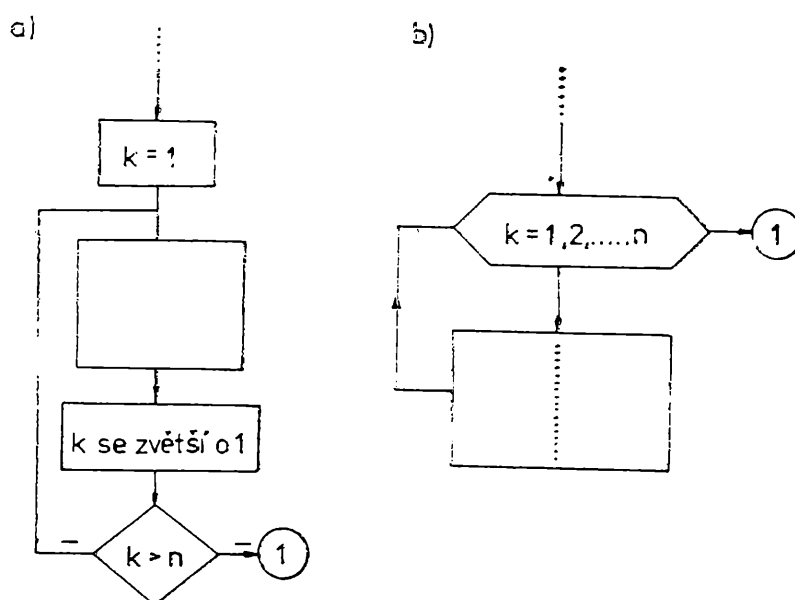
konstruktivní geometrie

Cyklus ve vývojovém diagramu

Doc. Ing. LADISLAV DRS, CSc, ČVUT Praha

V článku „Vývojové diagramy a konstruktivní geometrie“ (Rozhledy č. 7, 1976) jsme se naučili sestavovat vývojové diagramy v těch nejjednodušších případech a aplikovat je při řešení různých geometrických problémů. Následující úvahy budou navazovat na pojmy, které byly v tomto článku zavedeny.

Část nějaké činnosti (např. výpočtu), která se vícekrát s obměnami opakuje, se nazývá cyklus (i v běžném životě, např. cyklus ročních období apod.). Opakování takového děje se řídí tzv. parametrem cyklu. Je to proměnná veličina, na níž závisejí zmíněná opakování. Nabývá postupně hodnot $1, 2, \dots, n$. Číslo n určuje celkový počet opakování činnosti. Úsek



Obr. 1

vývojového diagramu, popisující cyklus, je na obr. 1a, jeho zkrácený tvar na obr. 1b. Výkonná část diagramu, označená tečkami, se provádí nejprve pro $k = 1$, pak pro $k = 2, \dots$ a naposled pro $k = n$. Po n -tém opakování činnosti se přechází na plnění další části programu, označené na obr. 1 spojkami (1).

Symbol $\langle \square \rangle$ je další značkou, se kterou se ve vývojových diagramech setkáváme. Jeho význam spočívá v úpravě (modifikaci) toho úseku diagramu, který je vepsán ve značce $\square$.

Následující příklady ukazují, jak sestavujeme vývojové diagramy s cyklem.

1. Výpočet souřadnic x, y bodů B_k ($k = 1, 2, 3$), jimiž se úsečka s koncovými body $M(m_1, m_2)$ a $N(n_1, n_2)$ rozdělí na čtyři stejné díly.

Souřadnice těchto bodů se určí z rovnic

$$x = m_1 + k \cdot (n_1 - m_1) : 4$$

$$y = m_2 + k \cdot (n_2 - m_2) : 4$$

pro $k = 1, 2, 3$.

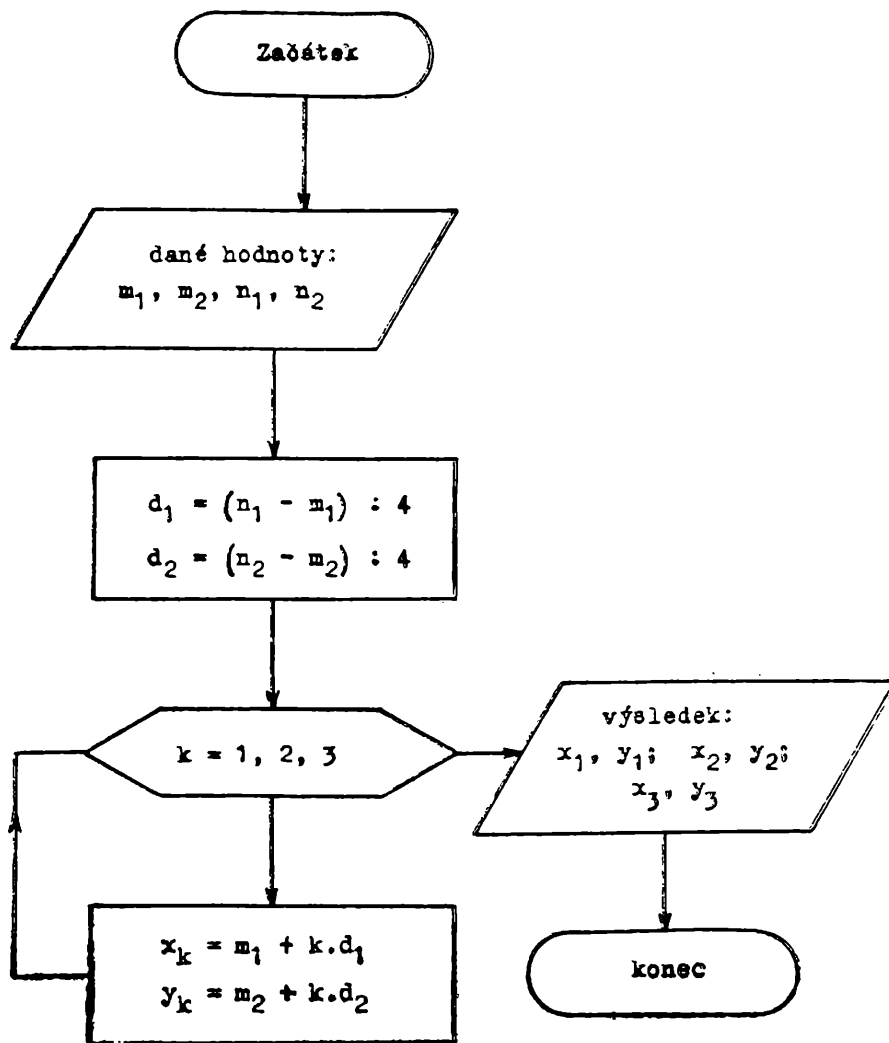
Vývojový diagram pro výpočet (viz obr. 2).

2. Řez na n -boké jehlanové ploše.

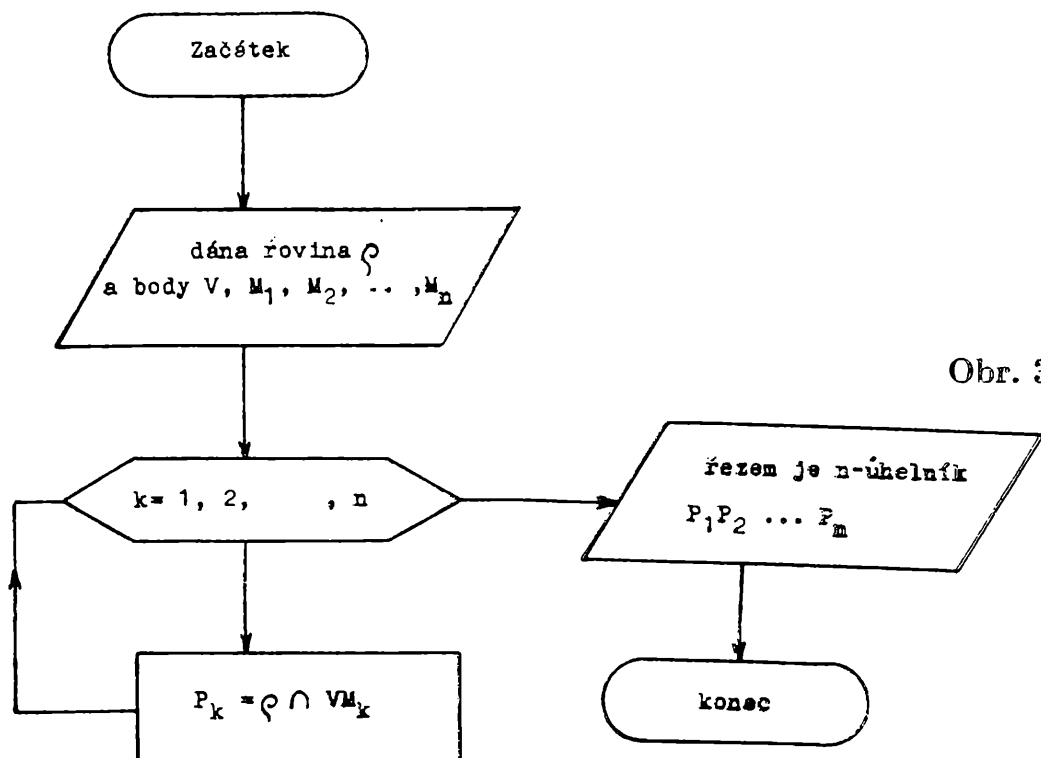
Plocha je určena vrcholem V a řídícím mnohoúhelníkem s vrcholy $M_1, M_2, \dots, M_n$. Předpokládáme, že rovina řezu není rovnoběžná s žádnou z hran $VM_1, VM_2, \dots, VM_n$ a neprochází vrcholem V .

Vývojový diagram konstrukce (viz obr. 3).

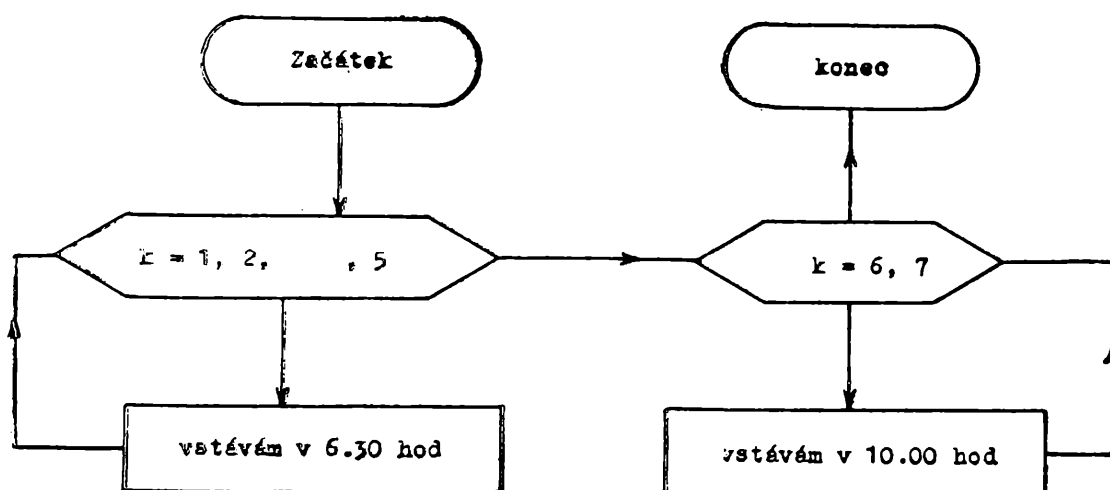
3. Z citovaného článku víme, že se vývojový diagram nemusí týkat pouze oblastí matematiky, ale že má uplatnění daleko obecnější.



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Očísľujeme dny v týdnu: 1-pondělí, 2-úterý, ..., 7-neděle. Určitý den v týdnu bude stanoven konkrétní hodnotou proměnné k , takže např. $k = 3$ je středa apod.

Význam vývojového diagramu s dvěma cykly jistě nepotřebuje vysvětlení (viz obr. 4).

Z geometrie trojúhelníku

STANISLAV HORÁK, Praha

1. Mějme trojúhelník ABC ; jeho ortocentrum (průsečík výšek) označme V , střed opsané kružnice S , střed strany AB je C' . Velikosti stran a úhlů budeme označovat podle běžného zvyku.

Nejprve si dokážeme, že

$$2 \cdot SC' = CV \quad (1)$$

Důkaz tohoto tvrzení provedeme zvlášť pro ostroúhlý, zvlášť pro tupoúhlý a zvlášť pro pravoúhlý trojúhelník.

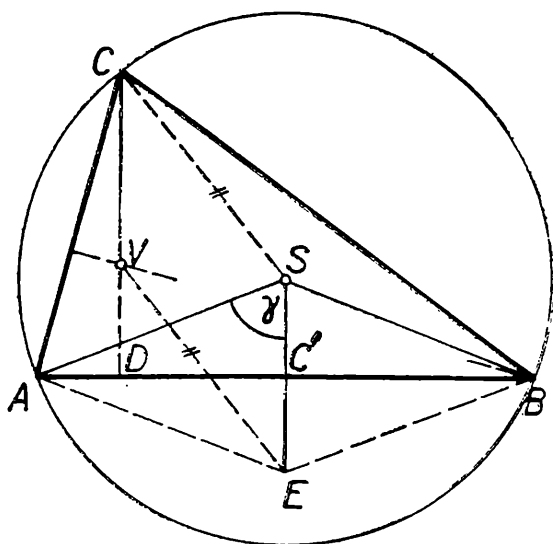
a) Pro pravoúhlý trojúhelník je tvrzení (1) triviální.

b) Pro ostroúhlý trojúhelník (obr. 1) platí (z trojúhelníku ASC')

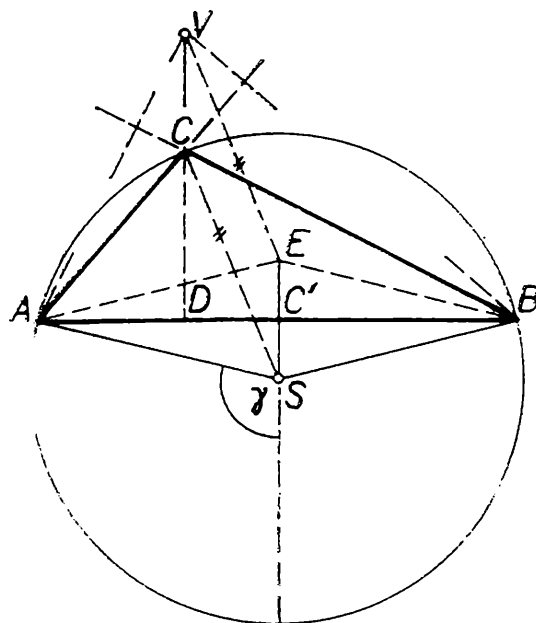
$$SC' = \frac{1}{2} c \cdot \cotg \gamma \quad (2)$$

V trojúhelníku AVC mají vnitřní úhly velikosti po řadě

$$90^\circ - \gamma, \quad 180^\circ - \beta, \quad 90^\circ - \alpha.$$



Obr. 1



Obr. 2

Použijeme-li na tento trojúhelník sinovou větu, dostaneme

$$CV = b \sin (90^\circ - \gamma) : \sin \beta = b \cos \gamma : \sin \beta .$$

Podle sinové věty však platí $b : \sin \beta = c : \sin \gamma$, a tudíž

$$CV = c \cos \gamma : \sin \gamma = c \cotg \gamma . \quad (3)$$

Porovnáním rovností (2) a (3) zjistíme, že tvrzení (1) skutečně platí pro ostroúhlý trojúhelník.

c) Situace pro tupoúhlý trojúhelník je znázorněna na obr. 2. Zde platí

$$SC' = \frac{1}{2} c |\cotg \gamma| \quad (4)$$

Vnitřní úhly trojúhelníku BCV mají po řadě velikosti

$$\gamma - 90^\circ, \quad 90^\circ + \beta, \quad \alpha .$$

Ze sinové věty, platící pro tento trojúhelník, dostaneme

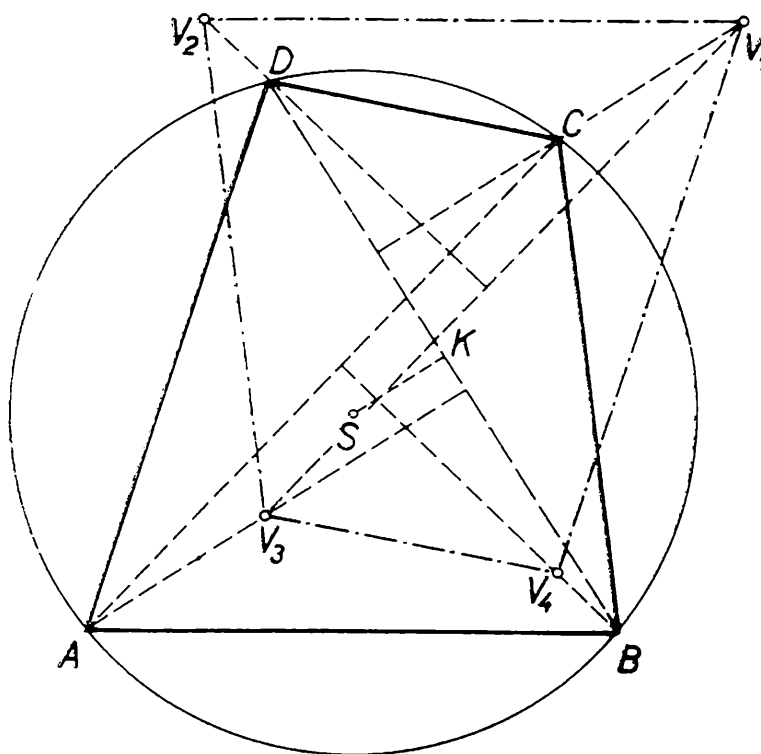
$$BC : CV = \sin \alpha : \sin (\gamma - 90^\circ) .$$

Po kratší úpravě dostaneme

$$CV = -c \cotg \gamma . \quad (5)$$

Srovnáme-li vztahy (4) a (5) zjistíme, že relace (1) platí i pro tupoúhlý trojúhelník, a tudíž platí pro všechny trojúhelníky.

Poznámka. Záporného znaménka v rovnosti (5) se nemusíme lekat, neboť úhel γ je tupý, a proto $\cotg \gamma < 0$, čili $-c \cotg \gamma > 0$.



Obr. 3

2. Právě dokázané věty použijeme k důkazu tzv. Sylvestrovy věty, o níž byla v Rozhledech již vícekrát zmínka. Mysleme si, že v bodě S působí síly $\mathbf{SA}$, $\mathbf{SB}$, $\mathbf{SC}$. Jejich výslednice (vektorový součet) je $\mathbf{SV}$.

Větu vyslovíme takto:

Součet vektorů $\mathbf{SA}$, $\mathbf{SB}$, $\mathbf{SC}$ je vektor $\mathbf{SV}$.

Důkaz (obr. 1 a 2). Součet vektorů $\mathbf{SA}$, $\mathbf{SB}$ je vektor $2 \cdot \mathbf{SC}' = \mathbf{SE} = \mathbf{CV}$, neboť pro velikosti vektorů $\mathbf{SC}'$, $\mathbf{CV}$ platí vztah (1) a přitom vektory $\mathbf{SE}$, $\mathbf{CV}$ jsou souhlasně rovnoběžné. Čtyřúhelník $SCVE$ je rovnoběžník, a proto

$$\mathbf{SE} + \mathbf{SC} = \mathbf{SV}$$

čímž jsme s důkazem hotovi.

3. Rovnice (1) použijeme ještě jednou. Tětivový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ je možné sestavit tyto trojúhelníky: ABC , ABD , ACD , BCD . Tu platí věta:

V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ tvoří ortocentra trojúhelníků ABC , ABD , ACD , BCD vrcholy čtyřúhelníku shodného s daným.

Důkaz (obr. 3). Úhlopříčka BD rozdělí daný čtyřúhelník na trojúhelníky ABD , BCD . Ortocentrum prvního trojúhelníka označíme V_3 , ortocentrum druhého V_1 a střed úhlopříčky BD označíme K . Podle rovnice (1) platí

$$AV_3 = CV_1 = 2 \cdot SK,$$

kde S je střed kružnice opsané danému čtyřúhelníku a zároveň oběma trojúhelníkům ABD , BCD . Poněvadž současně $AV_3 \parallel CV_1$, je čtyřúhelník AV_3V_1C rovnoběžník. To však znamená, že

$$AC = V_3V_1$$

Kdybychom ortocentra trojúhelníků ABC , ACD označili po řadě V_4 , V_2 , mohli bychom úplně stejným postupem dokázat, že

$$BD = V_4V_2.$$

Všimněme si ještě trojúhelníků ABC , ABD . Jejich ortocentra jsou V_4 , V_3 . I zde podle věty dokázané v 1. odst. platí

$$CV_4 = DV_3 = 2 \cdot SL,$$

kde L je střed strany AB . Poněvadž současně je

$$CV_4 \parallel DV_3,$$

jsou body C , D , V_3 , V_4 vrcholy rovnoběžníka. Tudíž

$$V_3V_4 = CD \quad \text{a také} \quad V_3V_4 \parallel CD$$

Podobně bychom dokázali, že

$$V_1V_2 = AB \quad \text{a současně} \quad V_1V_2 \parallel AB$$

Došli jsme k těmto dvěma částečným výsledkům:

a) AV_3V_1C je rovnoběžník s úhlopříčkami AV_1 , CV_3 (které se vzájemně půlí).

b) CDV_3V_4 je rovnoběžník s úhlopříčkami CV_3 , DV_4 (které se vzájemně půlí).

Poněvadž CV_3 je úhlopříčka společná oběma rovnoběžníkům, mají oba rovnoběžníky společný střed. Dá se dokázat, že to je i střed rovnoběžníka BCV_2V_3 . To však znamená, že čtyřúhelníky $ABCD$, $V_1V_2V_3V_4$ jsou podle tohoto středu souměrně sdružené, a tedy i shodné, jak jsme měli dokázat.

Cvičení.

1. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány body C , S , V
2. Sestrojte tětiový čtyřúhelník, jsou-li dány body A , C , V_3 , V_4 .

fyzika

Pomůže fyzika atmosféry nalézt nové zdroje energie?

RNDr. JAN BEDNÁŘ, Praha

V poslední době se naléhavě hledají způsoby, jak uspokojit ve světovém měřítku neustále rostoucí spotřebu energie. Naléhavost tohoto problému si uvědomíme, uvážíme-li, že nároky na produkci energie rostou zhruba o 4 až 6 % ročně, což znamená, že za sto let by vzrostla spotřeba energie asi na třistanásobek vzhledem k dnešnímu stavu, ale klasické energetické zdroje (uhlí, ropa, zemní plyn) jsou omezené a v relativně nedaleké budoucnosti by se při zachování dosavadního tempa růstu produkce energie začalo projevovat jejich postupné vyčerpávání. Je proto přirozené, že hledání nových zdrojů energie se dnes věnuje mimořádná pozornost, neboť zmíněný problém představuje pro zachování lidské civilizace jednu z životně důležitých otázek. Značná naděje se v tomto směru kladla do procesu řízené termonukleární reakce (proces analogický výbuchu vodíkové pumy, který by však neměl za následek jednorázové katastrofické uvolnění obrovských množství energie, ale dodával by energii plynulým a řízeným způsobem). Bohužel ve výzkumu se objevují nad problematikou řízené termonukleární reakce dosud četné otazníky a dnes se zdá pravděpodobné, že i když by se v budoucnosti splnily všechny naděje do ní vkládané, nedostatek klasických zdrojů energie se projeví mnohem dříve. S intenzivním úsilím se proto začaly hledat další možné energetické zdroje. Uvažuje se zejména o využití sluneční energie, geotermální energie (tepelná energie zemského nitra) a energie uvolňované při štěpení jader atomů, které se už dnes využívá v atomových reaktorech.

Zde se chceme zabývat možnostmi, které poskytuje sluneční energie. Zaměříme se hlavně na vyčíslení celkového množství sluneční energie, které vstupuje do soustavy tvořené zemským tělesem a jeho atmosférou. Tato energie je, jak známo, primárním zdrojem veškerých energetických dějů a fyzikálních procesů v atmosféře.

Celkové množství sluneční energie vyjádřené v kaloriích, které dopadá na horní hranici zemské atmosféry při střední vzdálenosti Země od Slunce za jednu minutu na plošku 1 cm^2 orientovanou kolmo ke slunečním paprskům, nazýváme solární konstantou a budeme je značit I_0 . Na základě četných nepřímých a v poslední době i přímých měření pomocí družic

a kosmických sond se dnes hodnota solární konstanty kladě rovna $I_0 = 8,12 \text{ J cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}$, což přepočteno na jednotky soustavy SI dává $I_0 = 1,36 \text{ kW m}^{-2}$. Protože vzdálenost Země od Slunce se v průběhu roku mění, mění se poněkud i množství sluneční energie, které dopadá na horní hranici atmosféry za jednotku času na jednotkovou plochu orientovanou kolmo ke slunečním paprskům. Odchylka od hodnoty solární konstanty však během roku kolísá v mezích pouhých 3,5 % z hodnoty I_0 , a proto ji při hrubších odhadech energetické bilance Země jaké zde budeme provádět, nemusíme uvažovat. Nahradíme-li nyní jednotkovou plochu orientovanou kolmo ke slunečním paprskům touž plochou exponovanou v horizontální poloze, dostaneme, že na horní hranici atmosféry dopadá za jednotku času na jednotkovou horizontální plochu množství sluneční energie

$$I = I_0 \sin \alpha, \quad (1)$$

kde α se rovná výšce Slunce nad obzorem.

Ve sférické astronomii lze odvodit vzorec

$$\sin \alpha = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega, \quad (2)$$

v němž φ je zeměpisná šířka, δ deklinace Slunce a ω hodinový úhel Slunce vyjádřený v radiánech.

Pro ty, kdož snad nejsou obeznámeni se základy sférické astronomie, poznamenáváme, že deklinaci Slunce si lze názorně představit jako úhel sevřený spojnicemi stanoviště pozorovatele na zemském povrchu s body na nebeské klenbě, kde v daný den kulminuje Slunce a kde Slunce kulminuje v den rovnodennosti. Pro rovnodennost platí $\delta = 0$, pro letní slunovrat $\delta = 23,5^\circ$ a pro zimní slunovrat $\delta = -23,5^\circ$. V ostatních dnech se δ pohybuje v rozmezí $\pm 23,5^\circ$. Hodinový úhel Slunce ω volíme tak, že $\omega = 0$ v čase, kdy Slunce kulminuje, směrem k východu se ω počítá záporně a k západu kladně. Označme dále $-\omega_0$ hodinový úhel, v němž Slunce vychází nad obzor a ω_0 hodinový úhel, v němž zapadá. Pro dané místo na Zemi a pro daný den v roce spočteme z hodnot φ a δ příslušné ω_0 následujícím způsobem: Při východu a západu Slunce, kdy $\omega = \pm \omega_0$, platí $\alpha = 0$, a tedy $\sin \alpha = 0$. Použijeme-li nyní vzorce (2), dostaneme při $\alpha = 0$ po jednoduché úpravě

$$\cos \omega_0 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta. \quad (3)$$

Vzorec (3) však neplatí v těch případech, kdy Slunce během 24 hodin vůbec nezapadá pod obzor (léto ve vysokých zeměpisných šířkách), pak však klademe jednoduše $\omega_0 = \pi$.

Jestliže vynásobíme vztah (1) délkou krátkého časového intervalu, kterou označíme dt (dt musí být tak malé, aby během něho nedošlo

k významnější změně výšky Slunce nad obzorem) a dosadíme za $\sin \alpha$ pomocí vztahu (2), dostaneme

$$I dt = I_0 (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega) dt. \quad (4)$$

Výraz $I dt$ představuje množství sluneční energie, které dopadne za časový interval délky dt na horní hranici atmosféry na jednotkovou plochu exponovanou v horizontální poloze. Je-li dále $d\omega$ malá změna hodinového úhlu Slunce, ke které dojde právě během krátkého časového intervalu dt , platí za předpokladu, že zanedbáme z našeho hlediska málo významnou časovou korekci na nerovnoměrnost otáčení Země, $d\omega = 2\pi dt/\tau$, kde τ značí dobu 24 hodin. Dosadíme-li nyní v (4) za dt pomocí $d\omega$, získáme vztah

$$I dt = I_0 \frac{\tau}{2\pi} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega) d\omega. \quad (5)$$

Chceme-li potom vypočítat množství sluneční energie W , které během daného dne v roce na daném místě o zeměpisné šířce φ vstoupí jednotkovou horizontálně orientovanou plochou do zemské atmosféry, zintegrujeme pravou stranu vztahu (5) podle ω od východu do západu Slunce, tj. v mezích od $-\omega_0$ do $+\omega_0$. Pro ty, kdož jsou alespoň trochu obeznámeni se základy integrálního počtu, nepředstavuje zmíněná integrace jistě vážný problém, neboť φ je pro dané místo konstantou a δ je konstantní pro daný den v roce. Příslušné ω_0 spočteme podle vzorce (3). Protože se však domníváme, že značná část čtenářů není dosud s integrací seznámena, uvedeme pouze výsledek

$$W = I_0 \frac{\tau}{\pi} (\omega_0 \sin \varphi \sin \delta + \sin \omega_0 \cos \varphi \cos \delta). \quad (6)$$

Dosadíme-li do vzorce (3) naši zeměpisnou šířku $\varphi = 50^\circ$, dostaneme pro rovnodennost ($\delta = 0$) $\omega_0 = \pi/2$, pro letní slunovrat ($\delta = 23,5^\circ$) $\omega_0 \doteq 2\pi/3$ a pro slunovrat zimní ($\delta = -23,5^\circ$) $\omega_0 \doteq \pi/3$. Vztahu (6) jsme použili k výpočtu množství sluneční energie, které během dne v naší zeměpisné šířce projde horizontálně orientovanou plochou 1 m^2 do zemské atmosféry. Pro rovnodennost jsme tak získali výsledek $W \doteq 2,4 \cdot 10^7 \text{ J.m}^{-2}$ za den, pro letní slunovrat $W = 4,2 \cdot 10^7 \text{ J.m}^{-2}$ za den a pro slunovrat zimní $W = 7 \cdot 10^6 \text{ J.m}^{-2}$ za den. Přepočteme-li tato množství energie na průměrný výkon tak, že je vydělíme dobou jednoho dne, tj. 86 400 s a takto spočtené výkony ještě vynásobíme plochou Československa, dostaneme pro rovnodennost $3,5 \cdot 10^7 \text{ MW}$, což představuje výkon zhruba 44 000 osmisetmegawattových elektráren (dnes v Československu budované tepelné elektrárny mají většinou 4 bloky o výkonu 200 MW). Stejným způsobem obdržíme pro letní slunovrat $6,3 \cdot 10^7 \text{ MW}$ (zhruba 79 000 osmisetmegawattových elektráren) a pro slunovrat zimní 10^7 MW (zhruba 13 000 osmisetmegawattových elektráren).

K tomu, abychom si učinili představu o celkovém příkonu sluneční energie N získávaném zemským tělesem, použijeme vztahu

$$N = \pi R_z^2 I_0,$$

kde R_z je střední poloměr Země a I_0 solární konstanta. Dosadíme-li $R_z = 6\,378 \cdot 10^3$ m a $I_0 = 1,36$ kW.m⁻², dostaneme $N = 1,8 \cdot 10^{11}$ MW, což jest přibližně výkon $2,2 \cdot 10^8$ osmisetmegawattových elektráren.

Z uvedeného je dobře patrné, že celkové množství energie, které získává naše planeta od Slunce, je obrovské a kdyby se podařilo lidstvu vhodným způsobem využít jen jeho malou část, přispělo by to nikoli nevýznamně k řešení energetických problémů. Obtíž však spočívá v tom, že sluneční zářivá energie je rozptýlena v prostoru a její koncentrace a vhodná efektivní transformace představuje technicky nesmírně náročný problém, o jehož způsobu řešení dnes neexistují definitivní představy. Na druhé straně si však musíme uvědomit, že lidstvu se již mnohokrát úspěšně podařilo zvládnout problémy, jež se zprvu zdály technicky neřešitelné. Využívání sluneční energie v širokém měřítku může mít i tu výhodu, že by šlo o čistou produkci energie, která by zřejmě nezamořovala životní prostředí škodlivinami, jako například dnešní tepelné elektrárny. S určitou opatrností však bude třeba předem posoudit vliv masového využívání sluneční energie na fyzikálně-meteorologické procesy v atmosféře, neboť teoretické studie naznačují, že tyto procesy jsou dosti citlivé na případné změny v příkonu sluneční energie. I když veškerá sluneční energie odňatá přirozeným procesům by se neztratila a nakonec by degradovala v tepelnou energii a v této formě by se znovu vrátila do atmosféry (neboť platí zákon zachování energie), došlo by patrně k určitým změnám v rozložení energetické bilance po zemském tělese, což by mohlo dále způsobit jisté změny v cirkulaci atmosféry. Řešením této problematiky může tedy i současná fyzikální meteorologie přispět svým dílem k hledání nových zdrojů energie.

Některá použití součinů vektorů v praxi

RNDr. MILOSLAV FEIL, UK Praha

Studujícím středních škol jsou známy pojmy vektoru, jeho velikosti, úhlu dvou vektorů a jeho souvislosti se skalárním součinem dvou vektorů. Rovněž se na těchto školách probírají nejzákladnější operace — násobení vektoru reálným číslem a sčítání vektorů. K tomu ještě uvedeme pojem vektorového součinu dvou vektorů v prostoru.

Poznamenejme pro úplnost, jak je nejčastěji definován skalární součin. Jsou-li dány dva vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, pak jejich skalárním součinem rozumíme číslo

$$|\mathbf{v}| |\mathbf{u}| \cos \varphi ,$$

kde φ je úhel, který svírají oba vektory. Jsou-li vektory v prostoru zadány pomocí svých souřadnic vzhledem k ortonormální bázi, pak píšeme

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Dá se dokázat, že je možno skalární součin napsat ve tvaru

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 .$$

Nejčastěji se pro skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ používá značení

$$(\mathbf{u}; \mathbf{v}) \quad \text{nebo} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \text{nebo} \quad \mathbf{u}\mathbf{v} .$$

V tomto článku budeme používat označení, které je uvedeno jako první.

Vektorovým součinem vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ nazveme vektor, který má velikost

$$|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \varphi ,$$

je k oběma vektorům kolmý a tvoří s nimi pravotočivý systém. Úhel mezi vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ je opět označen φ . Tak např. vektorový součin vektorů

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0) \tag{1}$$

je vektor $(0, 0, 1)$.

Všimněme si, že takto zavedený součin je nekomutativní. Jestliže tedy počítáme vektorový součin vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, dostaneme jiný vektor, než když podle definice určíme vektorový součin vektorů $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$. Dá se dokázat, že pro vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dané souřadnicemi podle (1) dostaneme vektorový součin, který má tyto souřadnice:

$$u_2 v_3 - u_3 v_2; \quad u_3 v_1 - u_1 v_3; \quad u_1 v_2 - u_2 v_1 .$$

Nejčastěji se vektorový součin značí

$$|[\mathbf{u}; \mathbf{v}]| \quad \text{nebo} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} .$$

V tomto článku použijeme prvního způsobu značení.

Zajímavé jsou některé vztahy, které umožňují upravit výrazy se součiny skalárními i vektorovými. Uvedeme alespoň ty, které se vyskytují při odvozování vztahů, jež v tomto článku uvedeme.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}; [\mathbf{B}; \mathbf{C}]] &= \mathbf{B} (\mathbf{A}; \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A}; \mathbf{B}) \\ (\mathbf{A}; [\mathbf{B}; \mathbf{C}]) &= (\mathbf{B}; [\mathbf{C}; \mathbf{A}]) = (\mathbf{C}; [\mathbf{A}; \mathbf{B}]) . \end{aligned}$$

Věnujme se nyní vlastnímu cíli článku, tj. ukázat užití vektorových součinů při řešení některých fyzikálních problémů. Všimněme si jednoduchých odrazných hranolů. Zajímá nás např., jak se mění směr dopadajícího paprsku po průchodu a odrazem na jeho stěnách. Potřebujeme tedy najít nějaké matematické vyjádření odrazných ploch hranolu a směru paprsků. Nejvhodnější pro tento účel jsou jednotkové vektory. Každému paprsku je možno přiřadit jednotkový vektor, jehož směr a orientace souhlasí se směrem šíření paprsku. Vystižení odrazných rovin je obtížnější, dělá se to většinou tak, že se každé odrazné ploše přiřadí vektor, který je na danou rovinu kolmý a má rovněž jednotkovou velikost. Jeho orientaci volíme tak, aby směřoval do prostředí, ze kterého dopadá na rozhraní paprsek. Odrazné hranoly jsou většinou konstruovány tak, že k lomu dochází jen na vstupní a výstupní ploše hranolu a na ostatních rozhraních dochází pouze k odrazu. Volíme-li dopadající paprsek kolmý na vstupní plochu, pak nemusíme vůbec uvažovat lom na vstupní ploše, a lze tedy vyšetřovat jen odrazy, přičemž lom na výstupním rozhraní zpracujeme zvlášť; většinou lze použít výhodných aproximací. Pro ideální hranol — tedy hranol bez výrobních vad — platí v mnohých případech, že paprsek na výstupní stěnu dopadá kolmo. V konkrétním případě však není možno přesně dodržet při výrobě předepsané hodnoty úhlů a od ideálních hodnot se vyskytují odchylky. Je proto nutno určit obecně závislost chyby odchylky vystupujícího paprsku na těchto výrobních chybách hranolu. K tomu slouží uvedený vektorový aparát.

Označíme-li vektor normály rozhraní i -tého a $i+1$ -ního prostředí $\mathbf{n}_{i+1}$, vektor paprsku na rozhraní dopadajícího $\mathbf{s}_i$, vektor paprsku opouštějícího rozhraní $\mathbf{s}_{i+1}$, pak lze ukázat, že na tomto rozhraní je neproměnná vektorová forma

$$[\mathbf{s}_i; \mathbf{n}_{i+1}] .$$

Je tedy

$$[\mathbf{s}_i; \mathbf{n}_{i+1}] = [\mathbf{s}_{i+1}; \mathbf{n}_{i+1}]$$

Odtud pomocí vlastností operací skalárního a vektorového součinu plyne po delší úpravě

$$\mathbf{s}_{i+1} = -2[\mathbf{n}_{i+1}; [\mathbf{n}_{i+1}; \mathbf{s}_i]] - \mathbf{s}_i .$$

Poslední vztah je zajímavý tím, že vyjadřuje vektor opouštějící rozhraní explicitně. Odráží-li se paprsek na několika rozhraních, lze pro každé rozhraní napsat rovnici uvedeného typu. Z jejich tvaru je vidět, že rovnice pro jednotlivá rozhraní se dají zřetězit, a tedy po tomto procesu obdržíme vztah typu

$$\mathbf{s}_k = f(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_k, \mathbf{s}_0)$$

Vektor paprsku vystupujícího ze soustavy odrazných ploch můžeme tedy vyjádřit pouze v závislosti na vektorech normál rozhraní a paprsku na systém dopadajícího.

Nejčastěji se vyskytují takové hranoly, které mají pouze dvě odrazné plochy. V tomto případě nabývá výše uvedený vztah podoby

$$\mathbf{s}_2 = 4[\mathbf{n}_2; [\mathbf{n}_2; [\mathbf{n}_1; [\mathbf{n}_1; \mathbf{s}_0]]]] + 2[\mathbf{n}_2; [\mathbf{n}_2; \mathbf{s}_0]] + 2[\mathbf{n}_1; [\mathbf{n}_1; \mathbf{s}_0]] + \mathbf{s}_0,$$

jak čtenář snadno sám odvodí zřetězením dvou rovnic, které vystihují situaci na dvou rozhraních s normálovými vektory po řadě $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$.

Jestliže je hranol umístěn při úvaze v ortonormální souřadné soustavě v prostoru, pak každá z normál a vektorů paprsků má tři souřadnice. Tyto souřadnice mohou být různé, záleží na tom, jak hranol do souřadné soustavy umístíme. Umístění volíme tak, aby výpočet byl co možná nejjednodušší. Zpravidla je výhodné volit paprsek dopadající na soustavu v nejjednodušším tvaru,

$$\mathbf{s}_0 = (1, 0, 0) \text{ apod.}$$

Hranol nyní umístíme tak, aby tento paprsek dopadal kolmo na vstupní plochu, a vyjádříme ve složkách vektory normál k rozhraní:

$$\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1),$$

$$\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

Všech těchto šest složek obou vektorů normál rozhraní je v konkrétním případě funkcemi odchylek hodnot úhlů od předepsané velikosti, tedy jsou to funkce výrobních vad hranolu.

Za těchto podmínek rozepsáním vektorových součinů dostaneme přímo vyjádření paprsku, který opustí soustavu se dvěma odrážejícími plochami ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_2 = & (4a_2a_1b_1b_2 + 4b_1^2b_2^2 + 4b_2^2c_1^2 + 4a_1a_2c_1c_2 + 4c_2^2c_1^2 + \\ & + 4c_2^2b_1^2 - 2b_2^2 - 2c_2^2 - 2b_1^2 - 2c_1^2 + 1, \\ & 4a_1b_2c_1c_2 - 4a_1b_1c_2^2 - 4a_2^2a_1b_1 - 4a_2b_2b_1^2 - 4a_2b_2c_1^2 + \\ & + 2a_2b_2 + 2a_1b_1, \\ & 4a_1b_1b_2c_2 - 4a_1c_1a_2^2 - 4c_2a_2c_1^2 - 4c_2a_2b_1^2 - 4b_2^2a_1c_1 + \\ & + 2a_2c_2 + 2a_1c_1) \end{aligned}$$

Tím je určena funkce, která jako proměnné obsahuje jednotlivé chyby úhlů hranolu a udává tedy závislost směru vystupujícího paprsku na nich v případě hranolu se dvěma odrazy. Pro praktický výpočet se někdy používá aproximací, spočívajících v tom, že veškeré goniometrické funkce, vyskytující se v tomto výrazu, se nahradí prvními členy svých rozvojų. Vždy je však třeba uvážit v daném případě oprávněnost té či oné aproximace.

astronomie

Jak se určují vzdálenosti galaxií

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Nejčastěji používanou jednotkou vzdálenosti ve stelární astronomii je parsek (pc). Tato jednotka souvisí s trigonometrickým měřením vzdáleností hvězd, při němž je základem určení roční paralaxy hvězdy, tj. úhlu, pod kterým bychom z dané hvězdy viděli velkou poloosu zemské dráhy. Jednotka parsek je definována jako vzdálenost, z níž bychom velkou poloosu zemské dráhy viděli pod úhlem $1''$. Mezi paralaxou π v obloukových vteřinách a vzdáleností r v parsekách platí vztah

$$r = \frac{1}{\pi}$$

Přímé měření paralaxy hvězdy spočívá v měření poloosy elipsy, kterou hvězda opisuje během roku na pozadí velmi vzdálených hvězd. Přesnost měření je v současné době asi $0,01''$, z čehož plyne, že pro hvězdu, která má paralaxu $0,01''$, dosahuje chyba v určení paralaxy 100 %. Trigonometricky lze tedy určovat vzdálenosti jen poměrně blízkých hvězd, jejichž vzdálenost není větší než 100 pc. Je zřejmé, že s trigonometrickým měřením vzdáleností nevystačíme ani v naší Galaxii, jejíž průměr je 30 kpc, tím méně pak lze tuto metodu použít k určování vzdáleností objektů, ležících daleko za hranicemi naší Galaxie.

Pro měření vzdáleností galaxií (tj. soustav podobných naší Galaxii) se používá několik metod, založených na statistických zákonitostech. U všech těchto metod je předpokladem určení tzv. modulu vzdálenosti daného objektu, tj. rozdílu zdánlivé a absolutní hvězdné velikosti.

Absolutní hvězdnou velikost M dostaneme, přepočteme-li zdánlivou hvězdnou velikost m na vzdálenost 10 pc. Intenzita záření se zmenšuje s druhou mocninou vzdálenosti od daného objektu; označíme-li I intenzitu světla hvězdy, která je ve vzdálenosti r , I_0 intenzitu záření téže hvězdy, kterou by měla ve vzdálenosti $r_0 = 10$ pc, platí

$$\frac{I}{I_0} = \frac{r_0^2}{r^2}$$

Rozdíl hvězdných velikostí je definován Pogsonovou rovnicí

$$M - m = 2,5 \log \frac{I}{I_0}$$

a po dosazení z předchozí rovnice je modul vzdálenosti

$$M - m = 5 \log r_0 - 5 \log r$$

Protože $r_0 = 10$ pc, je $\log r_0 = 1$ a modul vzdálenosti

$$M - m = 5 - 5 \log r$$

Změříme-li zdánlivou hvězdnou velikost objektu a určíme-li nějakým způsobem jeho absolutní hvězdnou velikost, můžeme vypočítat vzdálenost objektu (v parsekách) z rovnice

$$\log r = 1 - \frac{M - m}{5}.$$

Tento vzorec platí za předpokladu, že neexistuje mezihvězdná absorpce světla. Ve skutečnosti však dochází k zeslabení záření, a proto je třeba výpočty opravit o jistý absorpční koeficient, jehož hodnota závisí na poloze galaxie vzhledem k rovině naší Galaxie. Ve směru k centru Galaxie je hodnota mezihvězdné absorpce světla vůbec největší, neboť mezi Sluncem (Zemí) a centrem Galaxie je největší koncentrace mezihvězdné látky.

Při studiu hvězd v naší Galaxii bylo zjištěno, že určité typy hvězd mají přibližně stejnou absolutní hvězdnou velikost; tak např. žhavé hvězdy, označované jako hvězdy Wolfovy-Rayetovy, mají absolutní hvězdné velikosti kolem -7^M , rovněž novy v maximu mají absolutní hvězdné velikosti -7^M , známé jsou rovněž průměrné hvězdné velikosti jasných hvězd spektrálních tříd o a B, obrů a veleobrů. Tyto objekty jsou tak jasné, že je můžeme na snímcích, získaných největšími dalekohledy, rozlišit jako samostatné objekty i u blízkých galaxií. Předpokládáme, že absolutní hvězdné velikosti těchto objektů jsou ve všech galaxiích v průměru stejné. Změříme-li zdánlivou hvězdnou velikost takového objektu v blízké galaxii, můžeme určit modul vzdálenosti daného objektu a vypočítat jeho vzdálenost, čímž zjistíme vzdálenost galaxie, v níž tento objekt pozorujeme. Tato metoda určování vzdáleností galaxií se nazývá „metoda jasných hvězd a nov.“ U nov je ovšem nutným předpokladem správného odhadu vzdálenosti, abychom vzplanutí novy včas zaregistrovali a změřili její zdánlivou hvězdnou velikost v maximu jasnosti.

Velmi významným přínosem pro určování vzdáleností galaxií byl objev H. S. Leawittové z roku 1912, která zjistila, že absolutní hvězdná velikost klasických cefeid i krátkoperiodických cefeid typu RR Lyrae závisí na délce periody světelných změn. Objevíme-li takovou hvězdu v některé galaxii, můžeme z periody světelných změn zjistit poměrně přesně její absolutní hvězdnou velikost a tak vypočítat její vzdálenost. Zde je třeba připomenout, že původně byla v určení závislosti perioda — svítivost u cefeid chyba, která souvisela s chybným určením „nulového bodu“ této závislosti. Cefeidy byly pokládány za méně jasné, než jsou ve

skutečnosti, a vypočtené vzdálenosti galaxií byly tedy rovněž menší, přibližně poloviční vzhledem ke skutečným vzdálenostem. Je samozřejmé, že také lineární rozměry galaxií pak vycházely poloviční a naše Galaxie byla pokládána za jednu z největších galaxií. Na tuto chybu upozornil v roce 1952 W. Baade. Závislost perioda — svítivost byla pak upravena a ukázalo se, že ostatní spirální galaxie mají průměry prakticky stejné jako naše Galaxie. K určování vzdáleností galaxií se nejčastěji používají krátkoperiodické cefeidy typu RR Lyrae, které mají periody od 0,05 dne do 1 dne a absolutní hvězdné velikosti kolem 0^M .

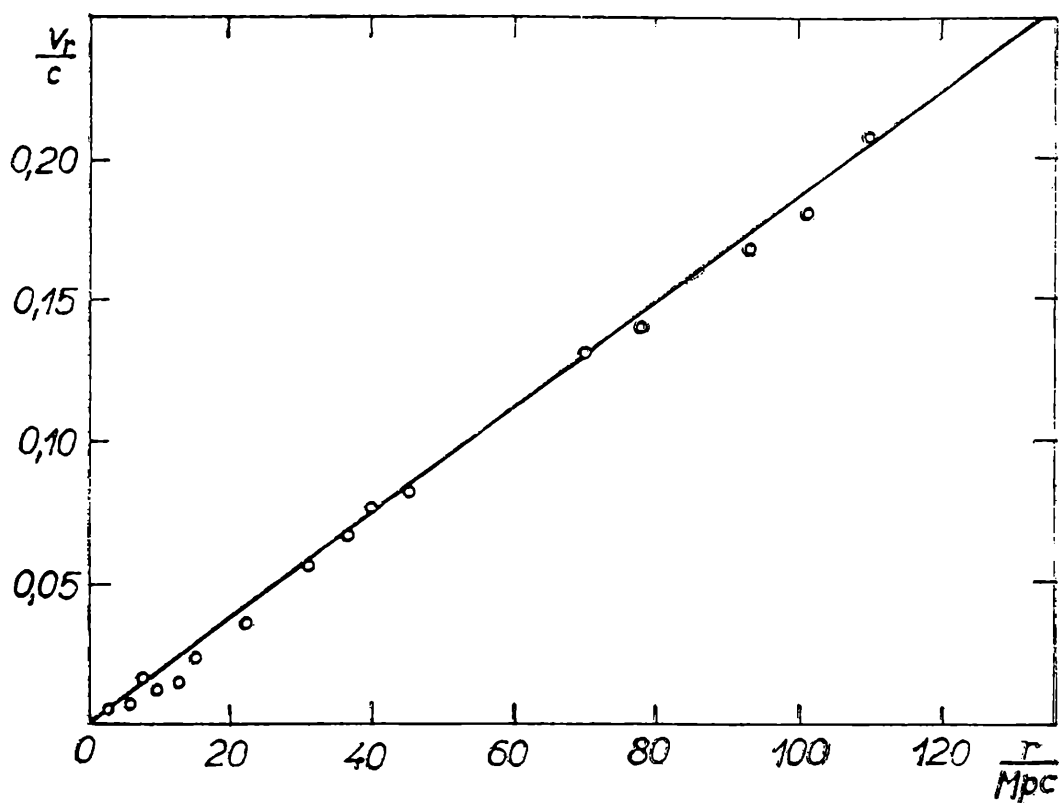
Metodu cefeid lze použít do vzdálenosti asi 300 kpc, ve větších vzdálenostech jsou již nerozlišitelné. Do vzdálenosti 2 Mpc až 3 Mpc lze použít metodu jasných hvězd a nov, které jsou jasnější než cefeidy. Určení vzdálenosti zde však není již tak přesné, neboť absolutní hvězdné velikosti jsou u těchto hvězd ve větším intervalu než u cefeid. Při ještě větších vzdálenostech galaxií již jednotlivé objekty nerozeznáme, je proto třeba použít k odhadu vzdálenosti jiné metody.

Studiem poměrně blízkých galaxií, jejichž vzdálenosti byly určeny na základě pozorování jednotlivých objektů v těchto galaxiích, bylo zjištěno, že celková neboli integrální absolutní hvězdná velikost závisí na strukturním typu galaxie. Tak např. spirální galaxie podobné naší Galaxii a spirální galaxie s příčkou mají absolutní hvězdné velikosti od -16^M až do -20^M , eliptické galaxie a nepravidelné galaxie v průměru od -13^M do -16^M . Této skutečnosti se používá k odhadu vzdálenosti u těch galaxií, které jsou tak vzdálené, že v nich nerozlišíme jednotlivé objekty, ale můžeme ještě rozpoznat strukturní typ galaxie. Tato metoda se nazývá „metoda integrálních hvězdných velikostí“

Na podobném principu je založena metoda středních průměrů galaxií. U jednotlivých typů galaxií můžeme odhadnout na základě statistických údajů jejich skutečné velikosti. Změříme-li úhlový průměr galaxie na obloze, lze pak vypočítat její vzdálenost, neboť úhlový průměr klesá s rostoucí vzdáleností.

U ještě vzdálenějších galaxií, u nichž již nelze rozeznat ani jejich strukturní typ, odhadujeme vzdálenost na základě vztahu mezi vzdáleností galaxie a posuvem spektrálních čar k červenému okraji spektra, tzv. rudým posuvem. Spektra galaxií se skládají ze spekter hvězd a plynných mlhovin; u vzdálených galaxií jsou sice spektra velmi slabá, takže důkladnější spektrální analýzu nelze provést, ale jednotlivé spektrální čáry lze obvykle rozeznat a změřit jejich polohu. Podle velikosti posuvu čar k červenému okraji spektra můžeme stanovit vzdálenost galaxie. Bylo totiž zjištěno, že posuv k červenému okraji spektra je tím větší, čím je galaxie vzdálenější.

Pro vysvětlení tohoto rudého posuvu se vyskytly v podstatě dvě domněnky. Podle první z nich fotony, vysílané galaxiemi, na své cestě mezigalaktickým prostorem — trvající milióny let — postupně „stárnou“,



Obr. 1. Závislost rychlosti vzdalování galaxií na jejich vzdálenosti

tj. ztrácejí část své energie, a vlnová délka světla se tedy zvětšuje. Tento jev však není možno vysvětlit žádným známým fyzikálním procesem, proto byla obecně přijata druhá domněnka, podle níž je rudý posuv způsoben Dopplerovým jevem. Jak je známo, Dopplerův jev spočívá v tom, že vlnová délka záření se zkracuje, jestliže se zářící objekt a pozorovatel vzájemně přibližují, a prodlužuje se při vzájemném vzdalování objektu a pozorovatele. Je-li radiální rychlost v_r malá ve srovnání s rychlostí šíření světla c , můžeme pro změnu $\Delta\lambda$ vlnové délky λ použít vztahu, odvozeného Dopplerem na základě klasické fyziky:

$$\Delta\lambda = \frac{v_r}{c} \lambda.$$

Při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla je třeba použít vztahu, vyplývajícího z relativistické fyziky: vzdalují-li se pozorovatel a zdroj světla rychlostí v_r , pak pozorovatel změří místo vlnové délky λ délku λ' , pro niž platí

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{c + v_r}{c - v_r}}.$$

Dopplerova jevu se v astronomii běžně používá k poměrně přesnému stanovení radiálních rychlostí hvězd i jiných objektů. U hvězd se Dopplerova jevu začalo používat k měření radiálních rychlostí již v minulém

století, u galaxií se podařilo získat první spektra vhodná k měření v roce 1912. S uvedením do provozu tehdy největšího dalekohledu o průměru zrcadla 2,5 m na hvězdárně Mt. Wilson bylo možno proměřit spektra galaxií do zdánlivé hvězdné velikosti 18^m , čímž byl získán bohatý materiál. Proměřením spekter se zjistilo, že s výjimkou několika blízkých galaxií jsou spektrální čáry galaxií posunuty k červenému okraji spektra, a to tím více, čím je galaxie vzdálenější. Předpokládáme-li, že posunutí je způsobeno Dopplerovým jevem, pak se od nás galaxie vzdalují, a to tím rychleji, čím jsou vzdálenější. Závislost rychlosti galaxií na jejich vzdálenosti vyjádřil v roce 1929 E. P. Hubble*) empirickým vztahem

$$v_r = Hr,$$

kde v_r je radiální rychlost, r vzdálenost a H Hubblova konstanta. Hodnota Hubblovy konstanty byla mnohokrát určována, přičemž různí autoři dospěli k různým výsledkům. Podle A. Sandageho je Hubblova konstanta v intervalu

$$30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} \leq H \leq 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

a za nejpravděpodobnější se pokládá hodnota $H = 50 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Na obr. 1 je graficky znázorněna závislost rychlosti na vzdálenosti pro 16 galaxií. Na vodorovné ose je vynesena vzdálenost v megaparsekách, na svislé ose poměr rychlosti vzdalování k rychlosti šíření světla ve vakuu. Z obrázku je zřejmé, že závislost je lineární. Ze směrnice přímky, proložené body na grafu, zjistíme, že pro těchto vybraných 16 galaxií vychází hodnota Hubblovy konstanty $H \simeq 55 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.

Určování vzdáleností galaxií má velký význam pro studium stavby vesmíru. Známe-li totiž vzdálenosti galaxií, můžeme jejich zdánlivé rozložení na obloze převést na skutečné rozložení v prostoru. Tak bylo zjištěno, že galaxie tvoří skupiny a sdružují se v soustavy vyššího řádu, zvané supergalaxie.

*) Edwin Powell Hubble (čti habl) žil v létech 1889 až 1953. Od roku 1919 pracoval na hvězdárně Mt. Wilson v Kalifornii.

NAŠE SOUTĚŽ

Také letos vypisuje naše redakce spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie — nezávisle na Matematické a fyzikální olympiádě. Této soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Při případném umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Pokyny řešitelům :

Řešení každého příkladu pište čitelně (nejlépe strojem) na zvláštní list papíru formátu A4, a to vždy po jedné jeho straně. Dole vpravo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu, školu a své bydliště. Jména členů kolektivu a jejich adresy napište na druhou (nepopsanou) stránku každého listu. Nečitelná nebo nedbale popsaná řešení ze soutěže vyřazujeme.

Text řešení každého příkladu formulujte výstižně, stručně, ale jasně. Přitom užívejte platné terminologie a symboliky. Připojujete-li k řešení některého příkladu obrázek, dbejte o to, aby byl pečlivě narýsován a jasně popsán.

Řešení první části soutěžních příkladů otištěných v tomto čísle zašlete nejpozději do 15. ledna 1977 na adresu redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních, Trojanova 13, Praha 2 PSČ 121 34 s označením: Naše soutěž.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Do čtvercové tabulky s n n čtvercovými poli jsou vepsána čísla $1, 2, \dots, n$ tak, že každý řádek i každý sloupec obsahuje všechna tato čísla; kromě toho je tabulka souměrná podle své hlavní úhlopříčky. Dokažte, že tato úhlopříčka obsahuje všech n čísel $1, 2, \dots, n$ právě tehdy, když n je číslo liché. — Číslo zapsané v i -tém řádku j -tého sloupce označte a_{ij} ; hlavní úhlopříčka tabulky obsahuje čísla a_{ii} a tabulka podle ní souměrná má $a_{ji} = a_{ij}$ pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Ladislav Bican, Petr Němec

2. Vrchol konvexního šestiúhelníku nazveme pravidelně rozděleným, jestliže tři úhlopříčky z něho vedené rozdělují jeho vnitřní úhel na čtyři

stejně díly. Dokažte, že konvexní šestiúhelník $ABCDEF$, který má vrcholy A, B, C pravidelně rozdělené, je pravidelný.

Miroslav Fiedler

3. Řešte v oboru komplexních čísel rovnici

$$x^5 - 4x^4 - x^3 + kx^2 - 18x + 4 = 0,$$

jestliže pro její kořeny x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) platí:

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 \cdot x_5.$$

Vypočtěte koeficient k .

Jan Fráňa

4. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1 = (0; r_1)$, $k_2 = (0; r_2)$, kde je $r_1 < r_2$. Na kružnici k_1 zvolme libovolný bod P a vedme jím libovolnou přímku p tak, aby protínala kružnici k_1 ještě v bodě $A \neq P$. Bodem P sestrojme dále přímku $q \perp p$ a sestrojme její průsečíky B, C s kružnicí k_2 . Dokažte, že při pevně zvoleném bodu P má trojúhelník ABC těžiště, které nezávisí na volbě přímky p .

Stanislav Horák

5. Je dána kulová plocha $\kappa = (S; r)$ a na ní body A, B, C tak, že úhel $ABC = 90^\circ$. K bodům A, B, C sestrojte po řadě body A', B', C' souměrně sdružené podle středu S . Dokažte, že každý ze zborcených pětiúhelníků $ABCA'B'$, $ABCA'C'$, $ABCB'C'$ má všechny úhly pravé. (Zborcený n -úhelník je ten, jehož všechny vrcholy neleží v téže rovině.)

Stanislav Horák

6. V libovolném trojúhelníku ABC označme středy stran BC, CA, AB po řadě písmeny P, Q, R a uvnitř trojúhelníka PQR zvolme libovolný bod L . Potom polopřímka AL protne úsečku QR v jejím vnitřním bodě A' , polopřímka BL protne úsečku RP v jejím vnitřním bodě B' a polopřímka CL protne úsečku PQ v jejím vnitřním bodě C' ; přitom platí:

$$\left| \frac{QA'}{RA'} - \frac{PB'}{RB'} \right| < 1 < \frac{QA'}{RA'} + \frac{PB'}{RB'},$$

$$\left| \frac{RB'}{PB'} - \frac{QC'}{PC'} \right| < 1 < \frac{RB'}{PB'} + \frac{QC'}{PC'},$$

$$\left| \frac{PC'}{QC'} - \frac{RA'}{QA'} \right| < 1 < \frac{PC'}{QC'} + \frac{RA'}{QA'}.$$

Dokažte.

Emil Kraemer

7. Zvolme na elipse se středem O a poloosami a, b ($a > b$) libovolně bod T tak, aby nesplýval se žádným vrcholem elipsy, sestrojme v něm tečnu t a normálu n elipsy. Potom existuje nekonečně mnoho kružnic, které leží v polovině tO , mají střed na normále n a procházejí bodem T (dotýkají se v bodě T elipsy). Dá se dokázat, že právě jedna z nich má tuto vlastnost: je rozdělena normálou n na dvě části (bez bodu T) takové, že v jistém okolí bodu T leží všechny body jedné části uvnitř a všechny body druhé části vně elipsy. Tato kružnice se nazývá *oskulační kružnicí elipsy v bodě T* . Zvolíme-li ortonormální soustavu souřadnic tak, aby její počátek byl ve středu O elipsy a osa x v její hlavní ose, pak bod T má souřadnice $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$. Oskulační kružnice elipsy v bodě T má pak poloměr r , pro který platí (jak lze dokázat) tento vzorec:

$$r = \frac{(a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}. \quad (1)$$

Proveďte tyto dvě (obdobné) konstrukce:

1) Průsečíkem P_1 (resp. P_2) normály n s hlavní (resp. vedlejší) osou elipsy vedte přímku $p_1 \parallel t$ (resp. $p_2 \parallel t$). 2) Sestrojte průsečík Q_1 (resp. Q_2) přímky p_1 (resp. p_2) s průměrem OT elipsy. 3) Bodem Q_1 (resp. Q_2) vedte rovnoběžku s vedlejší (resp. s hlavní) osou elipsy a sestrojte její průsečík S_1 (resp. S_2) s normálou n . Potom dokažte toto tvrzení:

- a) Body S_1, S_2 splývají v jediný bod S ;
- b) kružnice opsaná kolem bodu S poloměrem ST je oskulační kružnicí elipsy v bodě T , tj. má poloměr r udaný vzorcem (1).

Emil Kraemer

8. Užitím metody souřadnic dokažte tuto větu: Libovolné tři tečny paraboly omezují trojúhelník, jehož ortocentrum leží na řídící přímce této paraboly.

Emil Kraemer

9. Na kružnici je dáno 13 bodů $A_1, A_2, \dots, A_{13}$. Kromě toho je dána množina $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Ukažte, že ke každému bodu A_i ($i = 1, 2, \dots, 13$) je možno přiřadit jednu podmnožinu M_i množiny M tak, že dvěma různým bodům A_i, A_j jsou přiřazeny dvě různé podmnožiny M_i, M_j a že pro každé dva sousední body A_i, A_j platí $M_i \cup M_j = M$. Platí toto tvrzení také v případě, kdy je na kružnici dáno 14 bodů?

Jiří Sedláček

10. Dvě kvadratické rovnice

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0, \quad a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0$$

s reálnými koeficienty mají aspoň jeden společný kořen právě tehdy, když

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot (b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

Dokažte vyslovenou větu pro kořeny rovnic v oboru komplexních čísel.

Jaroslav Šedivý

11. Odhadněte největší hodnotu součtu

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$$

pro úhly α, β, γ trojúhelníku. Vyslovte a dokažte příslušnou větu.

Jaroslav Šedivý

12. V prostoru jsou dány různé body $A_1, A_2, \dots, A_k$. Středů úseček $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_kA_1$ označme po řadě $S_1, S_2, \dots, S_k$. Každému bodu X přiřadíme bod X' takto: K bodu X sestrojme bod X_1 souměrně sdružený podle středu S_1 , k bodu X_1 bod X_2 souměrně sdružený podle středu $S_2, \dots$, k bodu X_{k-1} bod $X_k = X'$ souměrně sdružený podle středu S_k . Nalezněte všechny samodružné body tohoto zobrazení, tj. všechny body prostoru, pro něž je $X' = X$.

Antonín Vrba

Konstrukční geometrie

1. Jsou dány dva různé body V, M a přímka t , která není incidentní se žádným z nich. Sestrojte rotační kuželovou plochu, která má tyto vlastnosti: Jejím vrcholem je bod V , jeden její parabolický řez má tečnu t a osa tohoto řezu prochází bodem M .

Stanislav Horák

2. Je dán bod S a rovina ρ , která s ním není incidentní. Sestrojte krychli, která má střed v bodě S a má tu vlastnost, že ji rovina ρ protíná v trojúhelníku, který má ze všech trojúhelníkových řezů krychle největší obsah.

František Hradecký

3. a) Jsou dány přímky p, q, r , z nichž každé dvě jsou mimoběžné, a reálné číslo $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$. Sestrojte přímku x , která protíná přímky p, q, r po řadě v bodech P, Q, R tak, že dělicí poměr $(PQR) = \lambda$.

b) Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte krychli, jejíž protější stěny $ABCD, A'B'C'D'$ jsou popsány tak, že je $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Zobrazte středy S, T jejich hran $AD, C'D'$ a přímky $p = A'D', q = ST, r = BC'$. Dokažte, že každé dvě z těchto tří přímek jsou mimoběžné, zvolte $\lambda = \frac{3}{2}$ a v uvedené projekci rozřešte úlohu a). Popište přesně polohu bodu P vzhledem k bodům A', D' , polohu bodu Q vzhledem k bodům S, T a polohu bodu R vzhledem k bodům B, C'

Emil Kraemer

4. Je dána průmětna π a rovina ϱ , která má od průmětny π odchylku φ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. V rovině ϱ je umístěn pravý úhel a je sestrojen jeho pravoúhlý průmět do roviny π . Potom platí:

a) Tento průmět má největší velikost α tehdy, jestliže je

$$\alpha > \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\cos \varphi}.$$

To nastane právě tehdy, jestliže osa daného pravého úhlu leží na spádové přímce roviny ϱ .

b) Tento průmět má nejmenší velikost α tehdy, jestliže je

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \cos \varphi$$

To nastane právě tehdy, jestliže osa daného pravého úhlu leží na hlavní přímce roviny ϱ .

Dokažte.

Emil Kraemer

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstrukční geometrie

1. Je dána rovina souměrnosti ω pravidelného čtyřstěnu a v ní body T_1, T_2 , které jsou středy dvou stěn tohoto čtyřstěnu. Sestrojte tento čtyřstěn.

František Hradecký

(Došlo 15 řešení)

Riešil Peter Takáč, 3. C Šafárikova gymnasia v Rimavskej Sobote :

Pravidelný štvorsten $ABCD$ má steny rovnostranné trojuholníky. Nech body T_1, T_2 sú radom stredmi stien ACD, BCD a E je stredom hrany CD ; potom je $T_1 \neq T_2$ a rovina ω prechádza bodmi A, B, E .

Trojuholníky ET_1T_2 a EAB sú podobné a rovnoramenné ($EA = EB$), T_1 a T_2 sú ťažiska shodných trojuholníkov ACD a BCD . Preto platí

$$ET_1 = ET_2 = \frac{1}{3} EA, \quad (1)$$

$$AB = 3 T_1T_2. \quad (2)$$

Keďže EA je výška rovnostranného trojuholníka ACD , je

$$EA = \frac{1}{2} AB \sqrt{3}.$$

Preto podľa (1) a (2) je

$$ET_1 = ET_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} 3 \cdot T_1 T_2 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} T_1 T_2 \cdot \sqrt{3}.$$

To značí, že ET_1 je dĺžka výšky rovnostranného trojuholníka o strane $T_1 T_2$.

Konštrukcia: a) V rovine ω zostrojíme vrchol E rovnoramenného trojuholníka $ET_1 T_2$ tak, aby bolo

$$ET_1 = ET_2 = \frac{1}{2} T_1 T_2 \cdot \sqrt{3};$$

to je možné urobiť v oboch polrovinách rozdelajúcich rovinu ω priamkou $T_1 T_2$. b) Zostrojíme úsečku AB rovnolahlú s úsečkou $T_1 T_2$ v rovnolahlosti so stredom E a koeficientom $AB: T_1 T_2 = 3:1$. c) Zostrojíme bodom E úsečku $CD \perp \omega$, $CD = AB$. Tým sú vrcholy hľadaného štvorstena určené.

Správnosť konštrukcie vyplýva z rozboru. Úloha má vždy dve riešenia súmerné podľa osi $T_1 T_2$.

2. Je dán vrchol A pravidelného osmistěnu a přímka o , která prochází středy jeho protějších stěn. Sestrojte tento osmistěn.

František Hradecký

(Došlo 13 řešení)

Autorovo řešení:

Stěny pravidelného osmistěnu jsou shodné rovnostranné trojúhelníky. Tento osmistěn je souměrný podle tří rovin, z nichž každé dvě jsou vzájemně kolmé; řezy těchto rovin s osmistěnem jsou shodné čtverce. Tělesové úhlopříčky pravidelného osmistěnu jsou tedy po dvou vzájemně kolmé a shodné; jejich střed je středem souměrnosti osmistěnu.

Nechť A, B, C jsou tři vrcholy pravidelného osmistěnu se středem S . Protože je $SA \perp SB$, $SA \perp SC$, je přímka SA kolmá k rovině SBC . Proto její pravoúhlý průmět na rovinu ABC je kolmý ke stopě BC této roviny na průmětně ABC ; protože prochází bodem A , splývá s výškou ke straně BC trojúhelníka ABC . Obdobně pravoúhlý průmět přímky SB na rovinu ABC je výškou ke straně AC trojúhelníka ABC . Pravoúhlý průmět bodu S na rovinu ABC je tedy průsečíkem T_1 výšek (čili středem) rovnostranného trojúhelníka ABC ; je tedy $ST_1 = o$ kolmicí k rovině stěny ABC . Ze souměrnosti osmistěnu podle středu S plyne, že přímka o prochází také středem T_2 stěny DEF . Je-li G pata výšky CG ke straně AB trojúhelníka ABC , pak úhel $\angle CSG$ je pravý (neboť přímka CS je kolmá k rovině SAB , v níž leží bod G).

Konstrukce: a) Bodem A vedeme rovinu $\rho \perp o$ a sestrojíme její průsečík T_1 s přímkou o . b) V rovině ρ sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABC daný vrcholem A a průsečíkem výšek T_1 ; patu výšky ke straně AB tohoto trojúhelníka označme G . c) V rovině σ určené přímkami o, CG sestrojíme nad přeponou CG pravoúhlý trojúhelník s vrcholem S na přímce o . d) K trojúhelníku ABC sestrojíme souměrně sdružený trojúhelník DEF podle středu S .

Z konstrukce plyne, že takto sestrojený osmistěn $ABCDEFG$ splňuje dané podmínky. Dále je patrné, že dostaneme dva body S_1, S_2 souměrně sdružené podle roviny ABC , a tedy také dva osmistěny. Úloha má tedy právě dvě řešení.

3. V rovině ρ je dána osová afinita svou osou o a dvojicí různých bodů V_1 (vzor) a V_2 (jeho obraz), které jsou položeny tak, že přímka V_1V_2 je rovnoběžná s osou o . Sestrojte přímky a_1, b_1 , které procházejí bodem V_1 a mají tu vlastnost, že odchylka φ ($0 < \varphi \leq \pi$) jejich obrazů a_2, b_2 je táž jako odchylka vzorů a_1, b_1 . Řešte nejprve pro případ, že jedna z přímek a_1, b_1 splývá s přímkou V_1V_2 , a potom pro případ, že žádná z přímek a_1, b_1 nesplývá s přímkou V_1V_2 .

Emil Kraemer

(Došlo 11 řešení)

Autorovo řešení:

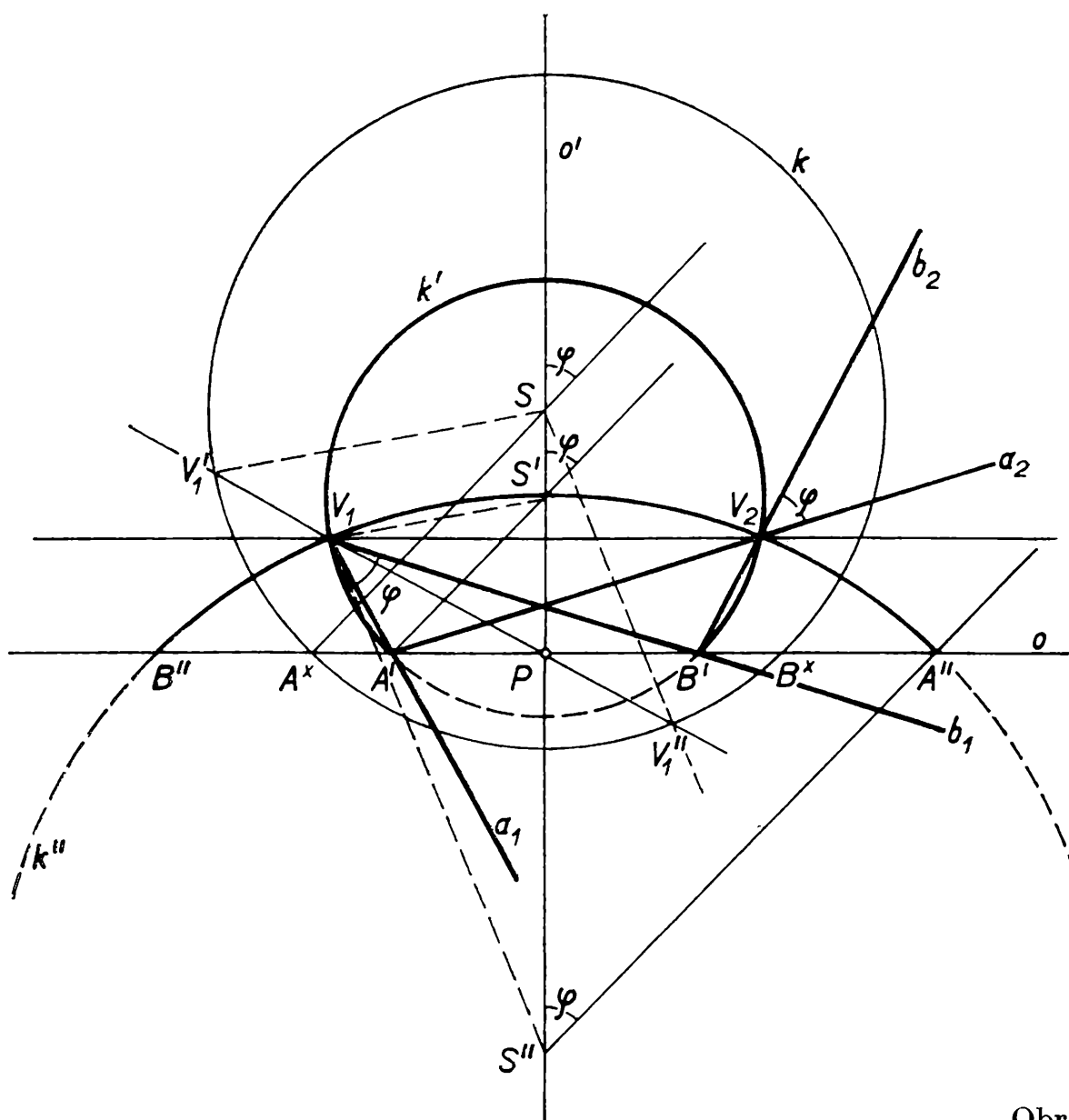
V textu úlohy bohužel vypadlo před slovem „odchylka“ slovo „daná“, čímž se text úlohy stal nejasným. Není-li φ pevně dáno (jak někteří řešitelé úloze rozuměli), pak je úloha celkem jednoduchá a má nekonečně mnoho řešení. Proto podáváme řešení pro obtížnější případ, kdy číslo φ ($0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) je pevně dáno.

a) Jestliže přímka a_1 splývá s přímkou V_1V_2 (takže $a_2 = a_1$), potom přímky b_1, b_2 se protínají na ose o v bodě B . Jestliže tento bod leží na ose úsečky V_1V_2 , je $\sphericalangle BV_1V_2 = \sphericalangle BV_2V_1 = \varphi$ úhel ostrý. Je-li vzdálenost přímek o, V_1V_2 a je-li délka úsečky V_1V_2 rovna v , potom je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2d}{v} \quad (1)$$

Jestliže bod B neleží na ose úsečky V_1V_2 , pak snadno zjistíme, že odchylka přímky $b_1 = V_1B$ od přímky $a_1 = V_1V_2$ není rovna odchylce přímek $b_2 = V_2B, a_2 = a_1$. V případě a) má tedy úloha právě jedno řešení, jestliže pro φ platí (1). V každém jiném případě nemá úloha žádné řešení.

b) Předpokládejme, že žádná z přímek a_1, b_1 nesplývá s přímkou V_1V_2 a že je $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Jsou-li A, B průsečíky přímek a_1, b_1 s osou o , je



Obr. 1

$\sphericalangle AV_1B = \sphericalangle AV_2B = \frac{\pi}{2}$, takže podle Thaletovy věty leží body V_1, V_2 na kružnici s průměrem AB (obrázek si nakreslí čtenář sám). Protože je $V_1V_2 \parallel AB$, leží střed P průměru AB této kružnice na ose úsečky V_1V_2 .

Z toho plyne tato *konstrukce*:

a) Sestrojíme osu úsečky V_1V_2 a její průsečík P s osou o .
b) Kolem bodu P opíšeme kružnici procházející body V_1, V_2 a sestrojíme její průsečíky A, B s osou o . c) Potom hledané přímky jsou $a_1 = V_1A$, $b_1 = V_1B$, $a_2 = V_2A$, $b_2 = V_2B$. Správnost konstrukce je zřejmá. Úloha má v tomto případě právě jedno řešení.

c) Předpokládejme, že žádná z přímek a_1, b_1 nesplývá s přímkou V_1V_2 a že je $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Jsou-li A, B průsečíky přímek a_1, b_1 s osou o (obr. 1), je

bud' $\sphericalangle AV_1B = \sphericalangle AV_2B = \varphi$ (na obr. 1 pro body A', B')

nebo $\sphericalangle AV_1B = \sphericalangle AV_2B = \pi - \varphi$ (na obr. 1 pro body A'', B'').

Aby se obrázek nepřeplnil, nejsou v něm naryšovány přímky $A''V_1$, $A''V_2$, $B''V_1$, $B''V_2$.

Body V_1, V_2 jsou tedy průnikem množiny M' všech bodů, z nichž je vidět úsečku $A'B'$ pod úhlem φ , s množinou M'' všech bodů, z nichž je vidět úsečku $A''B''$ pod úhlem $\pi - \varphi$. Množina M' je oblouk kružnice k' se středem S' ; přitom tento oblouk i bod S' leží uvnitř poloroviny oV_1 a středový úhel $\sphericalangle A'S'B' = 2\varphi$. Množina M'' je oblouk kružnice k'' se středem S'' ; přitom tento oblouk leží uvnitř poloroviny oV_1 , kdežto střed S'' leží uvnitř poloroviny opačné tak, že je $\sphericalangle A''S''B'' = 2\varphi$. Střed S', S'' kružnic k', k'' leží na ose o' úsečky V_1V_2 ; průsečík přímek o, o' označme P . Protože je $o \parallel V_1V_2$, je bod P středem tětiv $A'B', A''B''$ kružnic k', k'' . Sestrojíme-li ke kružnici k' (resp. k'') kružnici k o středu S tak, aby byla s ní stejnohlá podle středu P , pak kružnice k protíná osu o v bodech A^*, B^* stejnohlých k bodům A', B' (resp. A'', B''). Proto je $SA^* \parallel S'A'$, resp. $SA^* \parallel S''A''$; odchylka přímek SA^*, o' je tedy rovna odchylce přímek $S'A', o'$, resp. $S''A'', o'$, tj. je rovna φ .

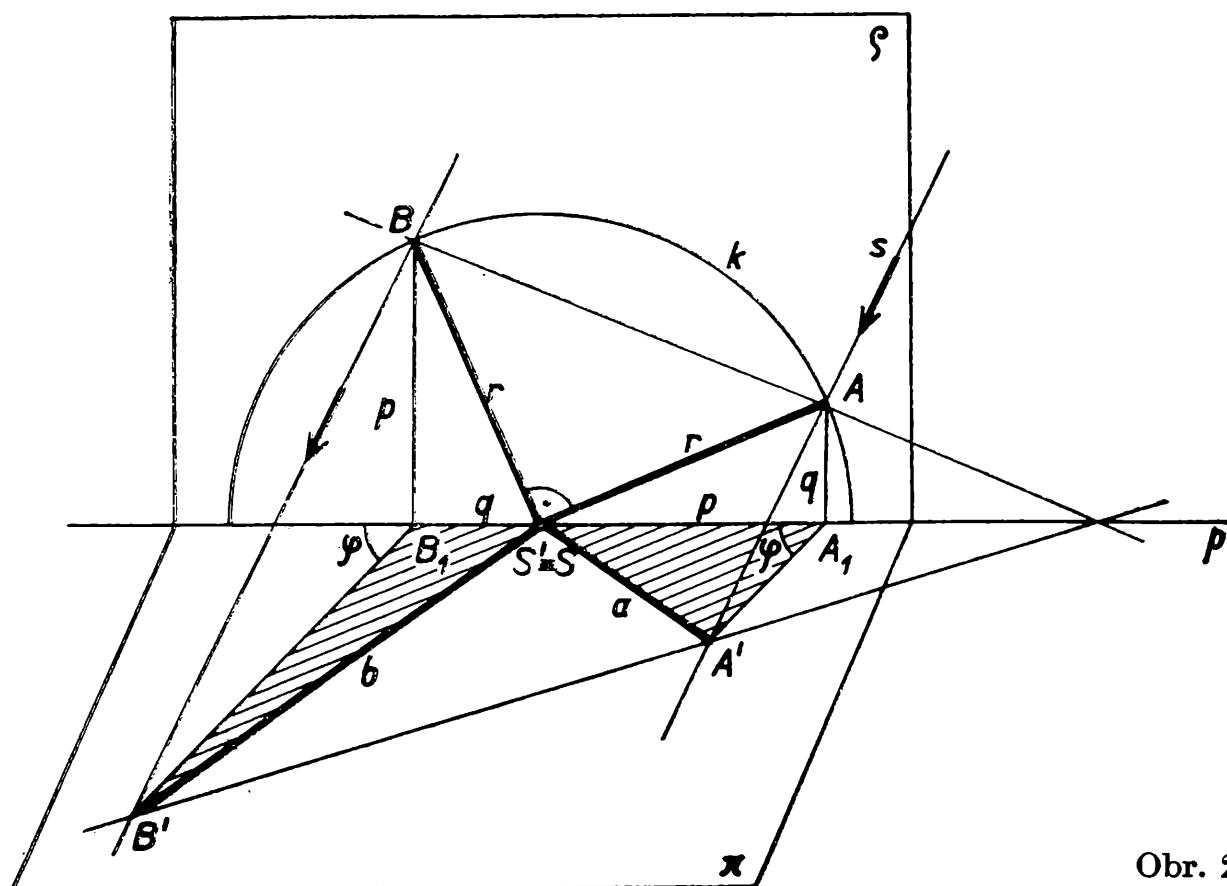
Konstrukce: a) Na ose o' úsečky V_1V_2 zvolíme bod $S \neq P$ (na obr. 1 je zvolen uvnitř poloroviny oV_1) a vedeme jím přímku, která má od přímky o' odchylku φ ; její průsečík s osou afinity o označíme A^* . b) Kolem bodu S opíšeme kružnici k tak, aby procházela bodem A^* . c) Sestrojíme průsečíky V'_1, V''_1 přímky PV_1 s kružnicí k (jsou dva, neboť bod P je vnitřním bodem kruhu omezeného kružnicí k). d) Ve stejnohllosti určené středem P a dvojicí V'_1, V_1 (resp. V''_1, V_1) sestrojíme obraz k' (resp. k'') kružnice k a určíme průsečíky A', B' (resp. A'', B'') osy o s kružnicí k' (resp. k''). e) Přímky $V_1A' = a_1, V_1B' = b_1$ (resp. $V_1A'' = a'_1, V_1B'' = b'_1$) jsou hledanou dvojicí přímek.

Důkaz toho, že přímky a_1, b_1 (resp. a'_1, b'_1) jsou hledanou dvojicí, plyne z konstrukce. Pro $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ má úloha dvě řešení.

4. Je dána rovina ϱ , která je různoběžná s průmětnou π , a přímka s , která je různoběžná s rovinami ϱ, π . V rovině ϱ je dána kružnice k o středu S ; úsečky $SA = SB = r$ jsou její vzájemně kolmé poloměry. Promítneme-li body S, A, B směrem s do průmětny π , dostaneme body S', A', B' ; velikosti úseček $S'A', S'B'$ označme a, b . Potom číslo $a^2 + b^2$ je nezávislé na volbě poloměrů SA, SB kružnice k . Dokažte toto tvrzení bez použití vlastností elipsy. Jakou vlastnost elipsy tím dokážete? Řešení doprovodte pěkně naryšovaným obrázkem.

Emil Kraemer

(Došlo 9 řešení)



Obr. 2

Upravené řešení Petera Takáče, 3.C Šafárikova gymn. v Rimavskej Sobote.

Řešení se opírá o tyto základní věty platné pro rovnoběžné promítání:

- Průměty rovnoběžek, které nepatří směru promítání, jsou rovnoběžky.
- Jsou-li a, b velikosti dvou libovolných úseček na rovnoběžných přímkách, potom pro velikosti a', b' jejich průmětů platí: $a' = ta, b' = tb$, kde $t > 0$ je konstanta.
- Promítneme-li libovolný útvar roviny ρ do dvou rovnoběžných průmětů směrem s , který není rovnoběžný s rovinou ρ , potom oba průměty jsou shodné.

Podle c) můžeme předpokládat, že průmětna π prochází středem S dané kružnice ležící v rovině ρ . Potom průsečnice p rovin π, ρ prochází středem S , který splývá se svým průmětem S' . Podle b) lze předpokládat, že body A, B leží v téže polorovině s hraniční přímkou p .

Předpokládejme nejprve, že bod A neleží na přímce p ; potom ani bod B neleží na přímce p (obr. 2). Vedme v rovině ρ body A, B kolmice k přímce p ; jejich paty označme A_1, B_1 . Protože body A, B jsou v rovině ρ odděleny průměrem kružnice k kolmým k přímce p , jsou body A_1, B_1 odděleny bodem S . Pravoúhlé trojúhelníky SBB_1, ASA_1 mají shodné

přepony a úhly ($\sphericalangle ASA_1 = \sphericalangle SBB_1$); jsou tedy shodné. Je-li $SA_1 = p$, $AA_1 = q$, je

$$SB_1 = AA_1 = q, \quad BB_1 = SA_1 = p. \quad (1)$$

Kromě toho je podle věty Pythagorovy

$$p^2 + q^2 = r^2 \quad (2)$$

Podle a) jsou průměty rovnoběžek AA_1, BB_1 do roviny π rovnoběžky $A'A_1, B'B_1$; podle b) platí pro délky úseček $A'A_1, B'B_1$

$$A'A_1 = t \cdot AA_1, \quad B'B_1 = t \cdot BB_1.$$

Podle (1) je tedy

$$A'A_1 = tq, \quad B'B_1 = tp. \quad (3)$$

V průmětně π vznikly trojúhelníky SA_1A', SB_1B' . Velikost úhlu $\sphericalangle SA_1A'$ budiž φ . Protože je $A'A_1 \parallel B'B_1$ a protože body A_1, B_1 jsou odděleny bodem S , má úhel $\sphericalangle SB_1B'$ velikost $\pi - \varphi$. Je-li $SA' = a, SB' = b$, je podle věty kosinové

$$a^2 = SA_1^2 + A'A_1^2 - 2SA_1 \cdot A'A_1 \cos \varphi,$$

$$b^2 = SB_1^2 + B'B_1^2 - 2SB_1 \cdot B'B_1 \cos (\pi - \varphi);$$

Podle (1) a (3) pak platí

$$a^2 = p^2 + t^2q^2 - 2ptq \cos \varphi,$$

$$b^2 = q^2 + t^2p^2 + 2qtp \cos \varphi.$$

Je tedy

$$a^2 + b^2 = p^2 + q^2 + t^2(p^2 + q^2) = (p^2 + q^2)(1 + t^2);$$

podle (2) je tedy

$$a^2 + b^2 = (1 + t^2) r^2$$

Leží-li bod A na přímce p , je $A' = A$, takže je $S'A' = SA = r$; úsečka $SB = r$ ležící na kolmici k přímce p se pak promítá směrem s do roviny π do úsečky SB' , jejíž velikost je $SB' = tr$. Je tedy

$$a^2 + b^2 = r^2 + t^2r^2 = (1 + t^2) r^2. \quad (4)$$

Dostáváme opět týž výsledek jako dříve. Protože t, r jsou konstanty nezávislé na volbě poloměrů SA, SB , je tím důkaz proveden.

Kružnice k se promítá směrem s do roviny π do elipsy (popřípadě opět do kružnice); přitom k sobě kolmé poloměry kružnice se promítají do sdružených poloměrů elipsy (popřípadě kružnice). Přitom každou elipsu je možno sestavit jako rovnoběžný průmět kružnice. Proto (4) vyjadřuje tuto vlastnost elipsy: „Součet dvojmocí délek sdružených poloměrů elipsy je konstatní.“ Protože osy elipsy jsou též dvojicí sdružených průměrů, je tato konstanta rovna $a^2 + b^2$, kde a, b jsou poloosy elipsy.

olympiády

Soutěžní úlohy I. kola MO

Kategorie

1. Jsou-li z_1, z_2, z_3, z_4 komplexní čísla, pro něž $\operatorname{Re} z_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$, pak

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 \neq 0$$

Dokažte.

2. Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby rovnice

$$x^3 + ax^2 + b = 0$$

s neznámou x a reálnými koeficienty a, b měla tři navzájem různé reálné kořeny.

3. Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z , které jsou řešením rovnice

$$x^2 - y^2 = 3z^2$$

4. Jsou dána tři celá čísla a_0, a_1, a_2 tak, že rozdíl žádných dvou z nich není dělitelný třemi. Z množiny $\mathbf{M}$ všech trojic celých čísel

$$(a_0 + x, a_1 + x, a_2 + x), \quad x \text{ celé}$$

lze vybrat takovou podmnožinu $\mathbf{M}_1$, která dává rozklad množiny celých čísel v trojice po dvou disjunktní.

a) Dokažte vyslovenou větu. b) Popište její znázornění na ose čísel.

5. Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCD A' B' C' D'$, který má výšku v a dolní podstavu o hraně a . Nechť body E a F jsou po řadě středy hran BC a AD .

Najděte množinu středů odvěsen všech pravoúhlých trojúhelníků EXF s přeponou EF , jejichž vrchol X leží v podstavě $A' B' C' D'$. Proveďte diskusi vzhledem k číslům a a v .

6. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Nechť souměrnost podle středu S převádí hranu AB v tutéž úsečku, v kterou převádí souměrnost podle jisté roviny ϱ hranu CD . Vyšetřte množinu všech bodů S této vlastnosti.

Kategorie B

1. Najděte všechna kladná řešení soustavy

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \leq 2, \quad x_2 + \frac{1}{x_3} \leq 2,$$

$$x_{1975} + \frac{1}{x_{1976}} \leq 2, \quad x_{1976} + \frac{1}{x_1} \leq 2.$$

2. Sú dané reálne čísla $a, b \neq 0, c, r, s, t$, pre ktoré platí

$$ar - 2bs + ct = 0, \quad (1)$$

$$ac - b^2 > 0. \quad (2)$$

Potom platí: (3) $rt - s^2 \leq 0$.

Kedy v (3) nastane rovnosť?

3. Nechť $x_1, \dots, x_n$ jsou reálná čísla se součtem nula, m nejmenší z nich, M největší z nich. Pak platí

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq -nmM$$

Dokažte.

4. V rovině jsou dány dva různé body A a D . Najděte množinu středů stran BC všech takových ostroúhlých trojúhelníků ABC , u nichž bod D leží na úsečce BC .

5. V rovině je dáno 50 bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Dokažte: Trojúhelníky určené trojicemi daných bodů mají aspoň 200 vnitřních úhlů velikosti menší než 8° a z toho aspoň 100 vnitřních úhlů, jejichž velikost nepřesahuje $7^\circ 30'$.

6. Uvnitř kulové plochy o poloměru 1 je dáno pět bodů. Dokažte, že alespoň dva z nich mají vzdálenost menší než $\sqrt{2}$.

Kategorie C

1. Najdite všetky trojice jednocifrových čísiel a, b, c , pre ktoré platí $a = b + c$ a číslo s dekadickým zápisom $2ab3c7$ je deliteľné 37.

2. Z miesta A výjdu do miesta B vzdialeného 600 km súčasne dva automobily. Rýchlosť prvého je 60 km/h, druhého 50 km/h. Druhý voz neskôr zvýši svoju rýchlosť tak, že dorazí do miesta B súčasne s prvým vozom. Vyjadrite veľkosť zvýšenia priemernej rýchlosti druhého vozu pomocou veľkosti dráhy, ktoru vykonal s počiatočnou rýchlosťou.

3. Určete všechna přirozená čísla n , pro něž je možno zlomek $\frac{2}{n}$ vyjádřit ve tvaru $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, kde x, y jsou vhodná přirozená čísla.

4. V prostoru je dána krychlová síť (obdoba čtvercové sítě v rovině). Mřížovými body nazýváme vrcholy krychlí této sítě. Zvolme kvádr o rozměrech a, b, c , který je složen z $a \cdot b \cdot c$ krychlí sítě. Označíme n, s

a h počet mřížových bodů po řadě ležících uvnitř kváдру, uvnitř stěn kváдру a uvnitř hran kváдру. Dokažte, že pro objem V kváдру platí:

$$V = n + \frac{a}{2} + \frac{h}{4} + 1$$

5. Je-li v délka nejmenší výšky trojúhelníka a P jeho obsah, pak platí

$$v \leq \sqrt[3]{P\sqrt{3}}$$

Dokažte. Kdy nastane rovnost?

6. Je dána kružnice k a její tětiva AB . Sestrojte množinu těžišť všech trojúhelníků ABX , kde X je bod kružnice k .

Výsledky celostátního kola kategorie A XXV. ročník M0

Vítězové

- 1.— 2. Jiří Navrátil, 3a, g, Olomouc-Hejčín
Peter Takáč, 3c, g, Šafaríkovo
3. Jiří Kolafa, 3d, g, Praha 2, W. Piecka
4. Pavel Quittner, 3b, g, Prievidza
- 5.— 9. Radvan Hájek, 4c, g, Praha 6, Arabská ul.
Jan Kratochvíl, 2a, g, Pardubice
Josef Pavel, 3a, g, Rychnov nad Kněžnou
Ilja Turek, 2g, g, Hradec Králové
Vladimír Technovský, 4d, g, Banská Štiavnica
10. Pavel Vondrák, 4a, g, Ústí n. Labem, Jateční
- 11.—14. Josef Blažek, 3a, g, Mnichovo Hradiště
Martin Čadek, 3a, g, Brno, tř. kpt. Jaroše
Marián Slodička, 4b, g, Bratislava, Novohradská
Miroslav Šedivý, 4c, g, Jevíčko
15. Petr Novák, 4a, g, Pardubice
16. Pavol Makovický, 4a, g, Žilina, Horný Val
17. Pavel Komárek, 4d, g, Praha 2, W. Piecka
- 18.—20. Stanislav Červinka, 4d, Akademické g, Praha 1
Karel Suchomel, 4c, Akademické g, Praha 1
Magdalena Volkeová, 4a, g, Praha 6, Leninova

Ostatní úspěšní řešitelé

- 21.—24. Jan Bázler, 3b, g, Mladá Boleslav
Václav Kelar, 4b, g, Uničov
Jiří Peňáz, 4b, g, Brno, tř. kpt. Jaroše
Pavel Štovíček, 4a, g, Pardubice
25. Vlastimil Klíma, 4b, g, Benešov u Prahy
26. Tomáš Kotrba, 4c, Akademické g, Praha 1
27. Zdeněk Kalousek, 2b, g, Jablonec n. N.
28. Václav Kotěšovec, 4d, g, Praha 2, W. Piecka
- 29.—32. Andrej Blaho, 4b, g, Bratislava, Novohradská
Josef Dočkal, 4c, g, Olomouc, Jiřího z Poděbrad
Ondrej Náther, 4b, g, Bratislava, Novohradská
Miroslav Vancl, 4a, g, Ústí n. Labem, Jateční
- 33.—34. Vladimír Daněk, 4d, g, Praha 2, W. Piecka
Petr Pěnička, 4d, g, Praha 2, W. Piecka
35. Martin Holeňa, 3d, g, Praha 3, Sladkovského nám.
- 36.—38. Igor Böhm, 3b, SPŠS, Zvolen
Zbyněk Brtna, 4b, g, Tábor
Jiří Zlatuška, 3c, g, Brno, tř. kpt. Jaroše
39. Svetozár Malinarič, 4a, g, Nitra, Párovská
- 40.—41. Erik Štěrba, 4c, Akademické g, Praha 1
Miroslav Zeman, 4b, g, Bratislava, Novohradská

různé

400 let od smrti Geronima Cardana

FRANTIŠEK GOLAB, JOSEF PROCHÁZKA, PdF v Ostravě

Geronimo Cardano (Hieronymus Cardanus, obr. 1), významný matematik, lékař a filozof, syn milánského advokáta, žil v letech 1501—1575. Studoval na univerzitách v Pavii a Padově, v r. 1543 byl jmenován profesorem lékařství v Miláně, v r. 1559 v Pavii a roku 1562 v Bologni, kde působil až do jara r. 1570. Konec svého života prožil v Římě.

Jeho jméno je spojováno s řešením kubických rovnic v matematice a s pojmy Cardanův kloub, Cardanova hřídel a Cardanův závěs ve fyzice a technice. Cardano jako první prováděl pokusy, které vedly ke zjištění tíhy vzduchu, a tedy k potvrzení existence atmosférického tlaku.



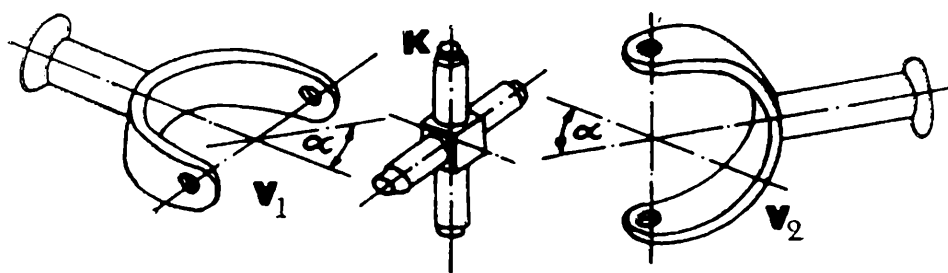
Obr. 1. Geronimo Cardano (1501 – 1576)

Ve spise „*Ars magna sive de regulis algebraicis*“ (Velké umění čili o pravidlech algebry) z roku 1545 se setkáváme se slavným řešením kubických rovnic typu $x^3 + px = q$ (p, q jsou veličiny nezávislé na x) ve tvaru:

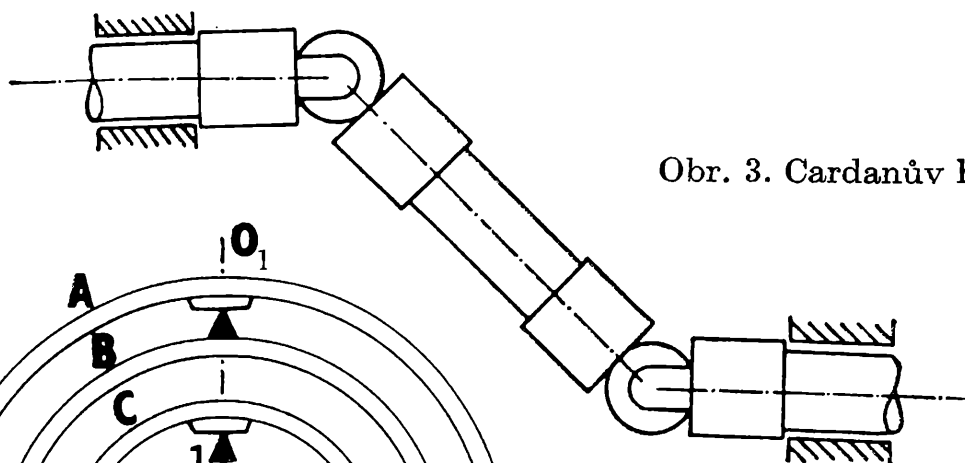
$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

které je dodnes označováno jako Cardanovo pravidlo (vzorec). To ve skutečnosti pochází od Nicola Tartaglia, jenž je Cardanovi důvěrně sdělil v roce 1539 a které sám Cardano ve svém spise připisuje Tartagliovi. V tomto díle nalézáme i mnoho jiných myšlenek, které otevřely algebře cestu k dalšímu rozkvětu. Cardano jako první poznal, že kvadratická rovnice má vždy dva kořeny, byť by byl jeden z nich záporný (*aestimationes falsae*). Poprvé zavádí do algebry i pojem kořenů imaginárních (*vere sophistica*), které jsou vždy komplexně sdružené. Ve svém spise uvádí i metodu řešení obecné bikvadratické rovnice jejím převedením na rovnici kubickou, jak ji už dříve navrhl Scipio Ferro.

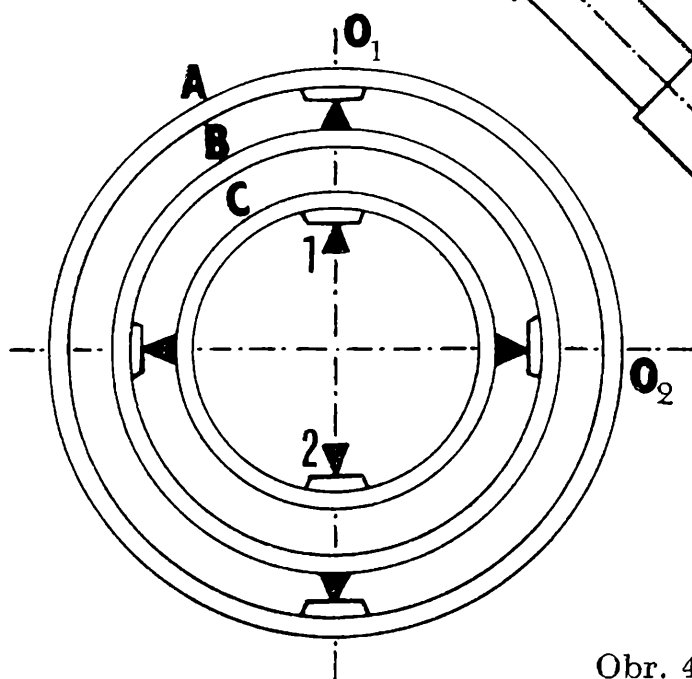
Studium pohyblivého spojení lidských končetin přivedlo Cardana na myšlenku jeho využití v technice k přenosu pohybu.



Obr. 2. Cardanův kloub



Obr. 3. Cardanův hřídel



Obr. 4. Cardanův závěs

Cardanův kloub (kloubová spojka, univerzální spojka — obr. 2) představuje zařízení, které umožňuje přenos točivého pohybu a krouticího momentu mezi nesouosými hřídeli. Jednoduchý Cardanův kloub se skládá ze dvou vidlic V_1 a V_2 , kříže K a umožňuje spojení dvou různoběžných hřídelů, jejichž osy svírají nejvýše úhel $\alpha = 30^\circ$. Cardanův kloub je v podstatě čtyřkloubovým sférickým mechanismem. Zvláštních druhů kloubových spojek (sférických, homokinetických), které nahrazují Cardanův kloubový hřídel, se užívá u automobilů.

Cardanův hřídel (kloubový hřídel, kardan — obr. 3) je hřídel s Cardanovými kloubovými spojkami na koncích a umožňuje stálý převod mezi rovnoběžnými a různoběžnými hřídeli. Používá se např. k přenosu hna-

cího momentu z drážkového hřídele převodovky na hnací nápravu automobilu.

Cardanův závěs (obr. 4) je jednoduché zařízení, které umožňuje zachovávat stálou rovinu rotace tělesa. Skládá se ze tří prstenců A , B , C , z nichž vnější prstenec A je pevný. V něm je kolem osy O_1 otáčivě uložen kruh B , uvnitř něhož je opět otáčivě kolem osy O_2 uložen kruh C . Do kruhu C se upevňuje do čepů 1, 2 rotující těleso (gyroskop), které má dva stupně volnosti a po uvedení do rotačního pohybu zachovává stálou rovinu rotace při jakékoliv změně polohy pevného kruhu A . Cardanova závěsu se používá k zavěšování setrvačníků (gyroskopů) a tvoří hlavní část některých leteckých a lodních přístrojů.

Literatura:

- [1] LAROUSSE DU XX^E SIÈCLE EN SIX VOLUMES, Librairie Larousse, Paris 1928.
- [2] Technický naučný slovník, SNTL, Praha 1962.
- [3] Ottův slovník naučný, 5. díl, vydavatel a nakladatel I. Otto, Praha 1892.

matematickofyzikální zábavy

Trik indického fakira skutečností?

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, Praha

Možná, že jste to viděli ve varieté: vezme se provaz, kus se ho nechá ležet na zemi a většina provazu se vztyčí; a pak, navzdor zemské tíži, ční provaz trvale vzhůru jakoby byl pevný. Je to ovšem trik, ale kosmonautika nedávno naznačila, že existuje docela reálná fyzikální možnost, jak toto vše — ovšem jen v myšlenkovém pokuse — doopravdy uskutečnit.

Jak víte, bývá řada spojových družic naváděna na tzv. kvazistacionární dráhu, ležící nad rovníkem ve výši okolo 39 tisíc kilometrů. Na této dráze je totiž úhlová rychlost družice shodná s úhlovou rychlostí zemské rotace. V každém okamžiku je tedy odstředivá síla až na směr působení stejná jako tíhová síla působící na družici. A teď si představte, že družice je z tvárného materiálu a dá se vytahovat směrem vzhůru i dolů; přitom na každou částici, ležící pod kvazistacionární drahou, bude působit tíhová síla o něco větší a naopak na každou částici, která leží nad touto drahou, o něco málo menší, zatímco úhlová rychlost se nezměnila

(pokud těžiště protažené družice zůstalo na původní dráze). Proto část nad drahou táhne družici vzhůru, avšak část pod drahou dolů — a uděláme-li to šikovně, podaří se nám obě části udržet v rovnováze. A pak můžeme zanedbat vliv zemského ovzduší a družici protahovat oběma směry tak, až z ní bude „provaz“, dotýkající se zemského povrchu a přesto stojící ve svislé poloze. Fakirův provaz se stal fyzikální skutečností.

Ve skutečnosti však k tomu ani v tomto ideálním případě nedojde, byť by pevnost celého útvaru byla sebevětší. Budou totiž vznikat síly, které se budou snažit protaženou družici otočit tak, aby celá ležela na kvazistacionární dráze. Existence těchto sil se dokonce prakticky využívá k tzv. gravitační stabilizaci družic: dvě hmotná tělesa, spojená pevně lanem, se vždy stabilizují tak, aby se obě pohybovala po téže dráze. Využívá se toho všude tam, kde by družicová stabilizace jinými metodami byla buďto technicky nemožná anebo palivově či energeticky nákladná.

Síly, které se budou snažit družici gravitačně stabilizovat, jsou dokonce tak velké, že v případě našeho myšlenkového pokusu by byly schopny „zadarmo“ vynést i značně těžká břemena na kvazistacionární dráhu. Stačilo by původní „provaz“ nahradit pevnou „tyčí“ se dvěma hmotami, umístěnými v nestejně výši nad Zemí. Nejde ovšem ani v tomto případě o práci „zadarmo“: na první pohled vidíme, že se přitom využívá nestejného gravitačního potenciálu ve dvou různých výškách a zajímavé na tom je snad pouze to, že vlastně jde o základní variantu bájněho gravitačního „motoru“. Ostatně lze vyslovit přesvědčení, že různosti gravitačních potenciálů v různém kosmonautickém podnikání bude jednou možno využít i k jiným „zázrakům“, než je onen s provazem a kvazistacionární družicí.

recenze

V. Bucha:

Geomagnetické pole a jeho přínos k objasnění vývoje Země.

Akademia 1975 ve sbírce Cesta k vědě, svazek 24, 368 str., 164 obr., Kčs 30.

Ve dvanácti kapitolách knihy získá čtenář ucelený pohled na hlavní otázky magnetického pole Země včetně experimentálních výzkumů a teorií o vzniku tohoto pole.

Po úvodním globálním pohledu na problematiku geomagnetického po-

le (kapitola 1.) se 2. kapitola věnuje magnetickému mapování s přirozeným soustředěním zájmu na naše území. Závěr kapitoly orientuje o využití umělých kosmických těles pro rozbor magnetického pole v okolí Země i v meziplanetárním prostoru. Vstupní informaci o dlouhodobých (sekulárních) změnách geomagnetického pole podává kapitola 3. a podrobnější pohled na tyto změny je v příští kapitole. Její začátek informuje o dipólovém a zbytkovém poli, závěr kapitoly se dotýká některých

nevyřešených otázek. Krátká 5. kapitola orientuje o analytickém vyjádření geomagnetického pole. V 6. kapitole se informuje o archeomagnetismu a paleomagnetismu s orientačním odstavcem o magnetických vlastnostech některých minerálů. Metodice a laboratorní technice jejich vyšetřování jsou věnovány návazné kapitoly 7. až 10. s vyzdvižením poznatků získaných našimi pracovníky.

Předposlední kapitola 11., věnovaná teoriím geomagnetického pole, objasňuje základní myšlenkové představy instruktivními schematy — včetně modelu ozřejmujícího inverzi. Závěrečná kapitola 12. uvádí souvislost geomagnetismu a pohybů zemské kůry, procesů v zemském nitru a vazbu na vulkanismus. Informuje o předpokládaném putování magnetických pólů v posledních desetitisíciletích.

Kniha je psána snadno srozumitelným, orientačně zaměřeným instruktivním způsobem. Nehledě ke kapitole 5. (v kontextu knihy celkem samoučelné), jejíž matematická úroveň přesahuje středoškolský rámec, je celek přístupným ponaučením středoškolským zájemcům.

Karel Mišoň

A. I. Achiezer:

Vývoj fyzikálního obrazu světa

Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1975, z ukrajinského originálu (Naukova dumka 1973) přeložil a doplnil Vlad. Malíšek. 112 stran, Kčs 7,50.

Českému čtenáři se dostává do rukou zasvěcený obraz základních fyzikálních problémů. Autor světového jména spojuje svůj hluboce fundovaný pohled se vzácnou schopností

soustředěného výběru nejpodstatnějších myšlenek a jejich ztvárnění do přístupné formy. Vysoká úroveň překladu je zaručena jménem prof. I. Úlehly, recenzenta českého textu.

V osmi kapitolách: *Úvod, Klasická mechanika, Klasická elektrodynamika, Teorie relativity, Kvantová mechanika, Kvantová elektrodynamika, Subnukleární fyzika, Fyzika a matematika* prochází čtenář konceptními myšlenkami, které tvoří ideový fond fyziky. V drobné knížce nalezne ucelený obraz nejen fyzikálních, ale i gnoseologických kořenů dnešního stavu teoretické fyziky. Marginální textové výtahy jsou samy o sobě stenografickým záznamem vývoje teoretické fyziky. Autorův soupis dvanácti prací doplnil vhodně překladatel dalšími patnácti tituly (13 českých, jeden slovenský a jeden ruský).

Starší generace fyziků nalezne v knize žádoucí modernizaci názorů. Ruku v ruce s fyzikálními teoriemi se přihlíží k filosofické interpretaci. Připomeňme alespoň konfrontaci Newtonova Klasického *hypotheses non fingo* s moderní fyzikou a filosofií. Hilbertovo okřídlené rčení *fyzika se stala pro fyziky příliš těžkou* uvádí nutnost jednoty a obsahu matematické formy, která je osou poslední kapitoly. Její závěrečný odstavec je výmluvným sjednocením přírodovědeckého a filosofického myšlení: *neexistuje definitivní fyzikální teorie budoucnosti*.

Návaznost zpracování knížky zabezpečuje získání souborného pohledu nejen pro specializovaného odborníka, ale i pro široký okruh čtenářů zabývajících se o soudobé otázky fyziky.

Karel Mišoň

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

funkce

analytická funkce
cyklometrická funkce
exponenciální funkce
funkce komplexní proměnné
funkce mající derivaci
funkce reálné proměnné
goniometrická funkce
harmonická funkce
charakteristická funkce
integrovatelná funkce
inverzní funkce
lichá funkce
lineární lomená funkce
logaritmická funkce
majorantní funkce
monotonní funkce
nespojité funkce
primitivní funkce
rostoucí funkce
složená funkce
spojitá funkce
sudá funkce
funkcionální analýza

function

analytic function
inverse circular function
exponential function
function of a complex variable
differentiable function
function of a real variable
circular trigonometrical function
harmonic function
characteristic function
integrable function
inverse function
odd function
linear fractional function
logarithmic function
majorant function
monotone function
discontinuous function
primitive function, antiderivative
increasing function
composite function
continuous function
even function
functional analysis

G

goniometrický
geometrické místo
geometry
goniometrická funkce

geometric
locus, pl. loci
geometry
circular function, trigonometric(al)
function

goniometrická rovnice
 goniometrický tvar komplexního
 čísla
 gradient
 graf
 ohodnocený graf
 orientovaný graf
 grafické znázornění
 grafický
 grupa
 grupa permutací
 grupa transformací
 komutativní grupa

trigonometric equation
 polar form of complex number
 gradient
 graph, diagram
 labeled graph
 directed graph
 graphic representation
 graphic, graphical
 group
 group of permutations
 group of transformations
 commutative group

H

harmonický
 harmonická funkce
 harmonická posloupnost
 hektar
 hladký
 hlavní
 hlavní bod
 hlavní kružnice
 hlavní osa elipsy
 hlavní přímky
 hledat
 hloubka
 hodina
 hodnocení
 hodnost matice
 hodnota
 homogenní
 homomorfismus
 homotetický
 homotetie
 horizont
 horizontální
 horní
 horní mez
 horní odhad
 hra
 hrana
 pobočná hrana
 hranatý
 hranice
 hraniční bod

harmonic
 harmonic function
 harmonic progression
 hectare
 smooth
 major
 centre of vision
 great circle
 major axis of ellipse
 principal lines, parallels
 look for
 depth
 hour
 evaluation
 rank of a matrix
 value
 homogeneous
 homomorphy
 homothetic
 homothety
 horizon, eye level
 horizontal
 upper
 upper bound, limit
 upper estimate
 game
 edge
 lateral edge
 angular
 boundary
 boundary point

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

2

ROČNÍK 55, 1976-1977, ŘÍJEN



ROČNÍK 55
ŘÍJEN 1976

2

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., CSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1976.

OBSAH

Dr. J. Skuhra: Maticové hry se sedlovým bodem	49
L. Bican, P. Němec: Určete čísla (pokračování)	55
Prof. J. Brejcha: Některé vlastnosti rovního trojúhelníka s jeho Brocardovými body	58
A. Szittayová: Niekoľko slov o počítačovej grafike .	62
Dr. V. Kolesnikov, dr. J. Záhejský: Experimentální ověření závislosti hmotnosti na rychlosti	66
Třetí kolo kat. A XVII. rpč. FO	74
Naše soutěž .	77
Dr. J. Mrázek: Utéci z kosmu nelze jen tak	85
J. Gedei: Súťažné úlohy z fyziky v MLR a ich riešenie	87
Recenze	95
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

matematika

Maticové hry se sedlovým bodem

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

Teorie her je jedna z moderních optimalizačních teorií. Její nejznámější modifikace je lineární programování, které nalézá široké aplikace v obchodě, v průmyslu, v ekonomii vůbec. Teorii her však nelze redukovat na její aplikace v ekonomii, její možnosti jsou mnohem širší. Snad největší její zásluha je v tom, že poskytuje obecnou orientaci lidem, kteří stojí před nadměrně složitými problémy. I když tyto problémy jsou třeba neřešitelné exaktně, teorie her ukazuje směr, kudy se do nich pustit.

Na počátku byly hry společenské: poker, šachy, dáma, hra v kostky, různé hry v karty, atd. Z těchto a jiných her se abstrakcí došlo k teorii, která se ukázala jako vhodný nástroj pro řešení *konfliktních situací* všeho druhu. Přitom konfliktní situací se rozumí střetnutí protichůdných zájmů třeba šachistů (každý z nich chce vyhrát na úkor druhého), ale i vojenských velitelů ozbrojených jednotek (každý z nich chce též vyhrát na úkor druhého). Nebo problém obchodníka: kolik má mít na skladě zboží, aby se mu nekazilo, ale aby měl stále co prodávat.

Uvedme si tři příklady konfliktních situací.

H1. *Operace*. Těžké zranění pacienta vyžaduje okamžitou operaci. Před operací není čas podrobně vyšetřit celkový stav pacienta. Chirurg má dva způsoby provádění operace. Je-li pacient ve zdravotním stavu A , pak podle I. způsobu se operace podaří s pravděpodobností $3/4$, podle II. způsobu se podaří s pravděpodobností $4/5$. Je-li pacient ve stavu B , podaří se operace vedená podle I., resp. II. způsobu, s pravděpodobností $1/2$, resp. $1/4$. Je-li pacient ve stavu C , podaří se operace po řadě s pravděpodobností $2/3$, 1 .

H2. *Veverky kontra Syslové*. Dvě pionýrské skupiny spolu hrají hru. Jedna příslušnice Veverek musí doskákat po jedné noze k vedoucí a té sdělí jedno z čísel $x \in \{-1; 1\}$ a vrátí se zpět. Pak jeden příslušník Syslů kotrmelci dorazí k vedoucí a sdělí jí jedno z čísel $y \in \{-2; 1\}$, na kterém se Syslové dohodli, aniž by znali volbu Veverek. Nakonec jiná z Veverek doručí vedoucí jejich volbu čísla $z \in \{-1; 2\}$, kterou provedly bez znalosti toho, co volili Syslové. Vedoucí vypočte číslo $t = xy - z$. Veverky vyhrají, právě když číslo r bude kladné. Syslové vyhrají, právě když číslo t bude záporné. Je-li $t = 0$, je výsledek nerozhodný.

H3. *Syslové kontra Veverky*. Táž hra jako H2 s tím rozdílem, že vedoucí řekne každému vyslanci před volbou všechny předchozí volby.

Na počátku teorie her bylo studium společenských her. Tak se do teorie dostala slova jako hráč, partie, strategie, atd. V dobře budované teorii musí ale být naprosto jasné, co který pojem znamená. Vysvětlíme si proto nyní některé základní pojmy.

Pojem „hráč“

Vezměme si kanastu. Sedíte u stolu s dalšími hráči. Na stole leží balíček karet, tužka a papír k zapisování bodů. Jedna věc je na první pohled zřejmá: jde o hru o čtyřech hráčích. Avšak je to víc zřejmé než skutečně pravdivé. Hrají-li hráči dva a dva proti sobě, tj. mají společné výhry a prohry, je rozumné předpokládat, že oba hráči se budou snažit hrát jako jeden hráč, aby zvýšili společný zisk. Je proto účelnější pokládat takovou hru za hru o dvou hráčích, i když hrají čtyři osoby. Větší význam má počítat protichůdné zájmy kolem stolu než počítat osoby.

Podle počtu protichůdných zájmů rozdělujeme hry na hry o jednom hráči, dvou hráčích, více hráčích. Hry o jednom hráči nejsou samy o sobě z hlediska teorie her zajímavé. Někdy je však výhodné považovat takovou hru za hru o dvou hráčích, kdy jeden hráč je sama *Příroda*. Hra o dvou hráčích je již velmi zajímavá. Často se vyskytuje a její řešení je v našich možnostech jak po teoretické, tak i po praktické stránce. Jde-li o hru o více hráčích než dvou, nastanou okamžitě velké těžkosti. Během hry totiž mohou vznikat a rozpadat se dočasné koalice.

My se budeme zabývat jen hrami o dvou hráčích, které budeme značit I a II. Ve hře H1 jedním hráčem je chirurg, druhým *Příroda*. Ve hrách H2, H3 je jedním hráčem skupina *Veverek* a druhým skupina *Syslů*.

Pojem „strategie“

Každý hráč chce dosáhnout výsledku, který mu přinese největší užitek. Ve hře má více možností jednání, více možností, jak do hry zasahovat. Chce-li hrát racionálně, musí si promyslet všechny možnosti jednání a zvolit tu nejvýhodnější. Musí si předem připravit přesný plán postupu.

Hráč se může také dát ve hře zastupovat nějakým agentem. Například skupiny *Veverek* a *Syslů* vysílají k vedoucí svého agenta. Aby agent jednal podle přání hráče, musí mu hráč dát přesné instrukce, musí mu dát plán jednání, který předem řeší všechny možné situace, jež se mohou ve hře vyskytnout. Každý úplný plán jednání hráče ve hře, který nemůže být narušen činností soupeře, se v teorii her nazývá *strategie*.

Podle počtu strategií dělíme hry na konečné a nekonečné. Dále se budeme zabývat jen hrami konečnými o dvou hráčích. Každý hráč má konečný počet strategií, které pokládáme za známé. Pro snadnější orientaci mezi nimi si je obvykle číslujeme přirozenými čísly. Množina A , resp. B , bude pro nás znamenat množinu všech strategií hráče I, resp. II. Jsou-li $A = \{1, 2, \dots, m\}$, $B = \{1, 2, \dots, n\}$ množiny strategií hráčů I a II v dané hře, pak říkáme, že jde o hru typu $m \cdot n$.

Ve hře H1 má chirurg dvě strategie: provádět operaci způsobem I nebo II. Příroda má tři strategie: pacient je po řadě ve zdravotním stavu A, B, C .

Ve hře H2 má druhý hráč, skupina Syslů, dvě strategie: volit číslo -2 nebo 1 . První hráč, skupina Veverek, má čtyři strategie, které lze zapsat jako uspořádané dvojice $[-1, -1], [-1, 2], [1, -1], [1, 2]$. Například $[-1, 2]$ znamená, že první agentka Veverek nahlásí číslo $x = -1$ a druhá agentka číslo $z = 2$.

Zdůrazněme, že strategie je úplný plán postupu. Při jedné realizaci hry (partii) je jediný a plně předem plánuje všechny reakce hráče na jednání protihráče. V partii však můžeme mít dojem, že hráč provádí více rozhodnutí. Tato dílčí rozhodnutí nazýváme *tahy*. Každá strategie hráče, který má v jedné partii více tahů, se skládá z posloupnosti instrukcí o každém tahu.

Ve hře H3 má skupina Syslů čtyři strategie: $[-2, -2], [-2, 1], [1, -2], [1, 1]$. $[1, -2]$, resp. šířeji $[(-1, 1), (1, -2)]$ znamená instrukci pro agenta: jestliže Veverky volily číslo $x = -1$, pak zvol číslo $y = 1$; jestliže však volily $x = 1$, pak zvol $y = -2$. Skupina Veverek má osm strategií: $[-1, -1, -1], [-1, -1, 2], [-1, 2, -1], [-1, 2, 2], [1, -1, -1], [1, -1, 2], [1, 2, -1], [1, 2, 2]$. Strategii $[-1, 2, -1]$ lze napsat šířeji $[-1, (-2, 2), (1, -1)]$ a znamená: 1. agentka zvolí číslo $x = -1$; 2. agentka zvolí číslo $z = 2$, jestliže Syslové volili $y = -2$, nebo $z = -1$, a to v případě, že Syslové volili $y = 1$.

Pojem „výplata a výplatní matice“.

Pravidla hry musí určovat výsledek, ke kterému hra dospěje. Budeme předpokládat, že užitek z tohoto výsledku lze vždy zachytit číselně pro každého hráče. Číslm a_{ij} , resp. b_{ij} , označme užitek, který přinese hráči I, resp. II, výsledek hry, použije-li hráč I své strategie $i \in A$ a hráč II své strategie $j \in B$. Číslo a_{ij} , resp. b_{ij} , se nazývá výplata hráče I, resp. II. Mluvíme o výplatě, ale nemusí vždy jít o faktické vyplácení peněz. Například u šachů výsledek hry: vyhrál, nerozhodně, prohrál, označíme čísly $1, 0, -1$. Pak výplata $a_{32} = 1$ znamená: Použije-li hráč I své 3. strategie a hráč II své 2. strategie, hráč I vyhraje.

Udělejme tuto úmluvu: číslo a_{ij} , resp. b_{ij} , je kladné, právě když příslušný výsledek hry přináší hráči I, resp. II, užitek, který hráč hodnotí

jako přínos, a je záporné v opačném případě, tj. je-li užitek hodnocen hráčem jako ztráta. Mohou nastat dvě možnosti:

pro každé $i \in A, j \in B$ platí $a_{ij} + b_{ij} = 0$, nebo

existuje $i \in A, j \in B$ tak, že platí $a_{ij} + b_{ij} \neq 0$.

Nastane-li první případ, mluvíme o hře s nulovým součtem výplat. V takové hře vždy platí: co jeden hráč vyhraje, musí nutně druhý hráč prohrát. Tak je tomu například u šachů, dámy. V druhém případě mluvíme o hře s nenulovým součtem výplat. My se budeme zabývat jen hrami s nulovým součtem výplat.

Ve hrách s nulovým součtem výplat platí pro každé $i \in A, j \in B$ rovnost $b_{ij} = -a_{ij}$. Je proto zbytečné uvádět všechna čísla a_{ij}, b_{ij} , ale stačí uvádět pouze výplaty hráče I. Tyto výplaty si pro přehlednost sestavíme do tabulky

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kterou budeme nazývat výplatní matice hry nebo krátce *matice hry*. Matice hry má tolik řádků, kolik má hráč I strategií, a tolik sloupců, kolik strategií má hráč II. Prvek matice hry a_{ij} je v i -tém řádku a j -tém sloupci a představuje výplatu (pozor na dohodu o znaménku) hráče I a zároveň záporně vzatou výplatu hráče II, bude-li použito při hře strategií $i \in A, j \in B$.

Pro hry H1, H2, H3 sestavíme výplatní matice velice snadno. Zde uvedeme přímo výsledek. Jestliže strategie hráčů očíslováme tak, jak jsou uvedeny v textu výše, dostaneme pro hry H1, H2, H3, výplatní matice po řadě G_1, G_2, G_3 .

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 2/3 \\ 4/5 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Shrňme si dosavadní činnost. Matematizovali jsme reálné konfliktní situace, kde se vyskytují dva antagonistické zájmy s konečným počtem

možností jednání. Přitom jsme si vymezili několik klíčových pojmů. Tím jsme se dopracovali k matematickému modelu, který vyslovíme formou definice.

Definice. Uspořádaná trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{G})$ se nazývá *konečná hra o dvou hráčích s nulovým součtem výplat typu $m \cdot n$* (krátce maticová hra), kde $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, $\mathbf{B} = \{1, 2, \dots, n\}$ jsou neprázdné konečné množiny, $\mathbf{G}$ je matice typu $m \cdot n$ (tj. má m řádků a n sloupců). Množina $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{B}$, se nazývá množina strategií hráče I, resp. II. Matice $\mathbf{G}$ se nazývá výplatní matice hry.

Princip realizace hry. Hráč I zvolí svou strategii $i \in \mathbf{A}$, hráč II zvolí svou strategii $j \in \mathbf{B}$, aniž vědí, co zvolil protihráč. Pak hráč II vyplatí hráči I částku a_{ij} , která je v matici $\mathbf{G}$ v i -tém řádku a j -tém sloupci (pozor na dohodu o znaménku).

Princip minimaxu (princip jednání hráčů). Hráč I se snaží hrát tak, aby nejmenší částka, kterou může vyhrát, byla co největší, a to bez ohledu na to, co udělá hráč II. Hráč II se snaží, aby největší částka, kterou může prohrát, byla co nejmenší bez ohledu na činnost hráče I.

Budeme nyní analyzovat hru $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{G})$ na základě principu minimaxu. Zvolí-li si hráč I strategii $i \in \mathbf{A}$, zaplatí mu hráč II po skončení partie aspoň tolik, kolik činí nejmenší výplata v prvním řádku $\mathbf{G}$

$$\min_{j \in \mathbf{B}} a_{1j}.$$

Může mu však zaplatit i více, zvolí-li hráč II nevhodnou strategii. Použije-li hráč I svou strategii $i \in \mathbf{A}$, zaplatí mu hráč II aspoň

$$\min_{j \in \mathbf{B}} a_{ij}$$

Hráč I chce získat co nejvíce, proto si vybere takovou strategii, která mu zaručí co největší zisk. Tato největší zaručená výplata je

$$v_d = \max_{i \in \mathbf{A}} \min_{j \in \mathbf{B}} a_{ij}$$

Analogická úvaha platí pro hráče II. Ten chce ztratit co nejméně, a proto použije strategie, která mu zaručí co nejmenší ztrátu bez ohledu na činnost protivníka. Tato zaručená nejmenší ztráta je

$$v_h = \min_{j \in \mathbf{B}} \max_{i \in \mathbf{A}} a_{ij}.$$

Číslo v_d se nazývá *dolní hodnota hry*; číslo v_h se nazývá *horní hodnota hry*. Lze dokázat, že pro každou hru platí relace $v_d \leq v_h$. Jestliže platí rovnost $v_d = v_h$, pak číslo $v = v_d = v_h$ nazýváme (čistá) hodnota hry a říkáme, že hra má *sedlový bod*. Sedlovým bodem hry, resp. výplatní

matice, rozumíme uspořádanou dvojici $[i^*, j^*] \in \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, kde prvek výplatní matice $a_{i^*j^*}$ je minimálním prvkem ve svém řádku a maximálním prvkem ve svém sloupci. Strategii $i^* \in \mathbf{A}$ se nazývá optimální (ryzí) strategie hráče I, strategie $j^* \in \mathbf{B}$ se nazývá optimální (ryzí) strategie hráče II.

Protože pro sedlový bod $[i^*, j^*]$ platí

$$v = v_d = \max_{i \in \mathbf{A}} \min_{j \in \mathbf{B}} a_{ij} = a_{i^*j^*} = \min_{j \in \mathbf{B}} \max_{i \in \mathbf{A}} a_{ij} = v_h,$$

snadno jej z výplatní matice určíme. Vpravo od každého řádku výplatní matice zapíšeme jeho minimální prvek a mezi nimi nalezneme (ohvězdičkujeme) maximální prvek. To je dolní hodnota hry. Pod každý sloupec výplatní matice zapíšeme jeho maximální prvek a z nich určíme (ohvězdičkujeme) minimální prvek. To je horní hodnota hry. Jestliže se označené hodnoty sobě rovnají, má hra sedlový bod. Sedlových bodů může být více, viz hru H3, ale hodnota hry je jediná.

Hra H1. Hledejme sedlový bod.

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} 3/4 & 1/2 & 2/3 \\ 4/5 & 1/4 & 1 \end{array} \right) & & \begin{array}{c} 1/2^* \\ 1/4 \end{array} \\ 4/5 & 1/2^* & 1 \end{array}$$

Hra má jeden sedlový bod $[1, 2]$. Chirurg má optimální strategii: operovat způsobem I. Příroda má optimální strategii: uvést pacienta do stavu B. Pacient má pravděpodobnost $1/2$, že operace bude úspěšná. To je čistá hodnota hry. Když Příroda nebude užívat své optimální strategie (a ona to nedělá) a chirurg se jí držet bude, pak se pravděpodobnost úspěchu operace ještě zvýší. Pokud se nebude chirurg držet své optimální strategie, riskuje, že pravděpodobnost úspěchu operace bude menší než je čistá hodnota hry.

Hra H2 nemá žádný sedlový bod. Dolní hodnota hry je $v_d = 0$, horní hodnota hry je $v_h = 1$. Je to pouze dílčí výsledek, ale říká, že když budou Veverky hrát racionálně (podle principu minimaxu), nemohou nikdy prohrát.

Hra H3 má tři sedlové body. Hodnota hry je $v = 0$. Veverky mají tři optimální strategie: $[-1, -1, -1]$, $[-1, 2, -1]$, $[1, 2, -1]$. Syslové mají jedinou optimální strategii a to $[1, -2]$.

Jak nalézt řešení hry, tj. optimální strategii hráčů a hodnotu hry v případě, že hra nemá sedlový bod, si vysvětlíme v příštím článku.

Určete čísla (Pokračování)

LADISLAV BICAN a PETR NĚMEC, MFF UK Praha

Podívejme se nyní na úlohu z první části článku poněkud obecněji. Hloubavý čtenář se jistě ptá, proč je v zadání úlohy součet hledaných čísel omezen právě číslem 100. V této části uvidíme, že počet řešení naší úlohy se mění v závislosti na tom, jakým číslem N omezíme součet w . Všechny úvahy, které jsme provedli při řešení původní úlohy, pochopitelně zůstanou v platnosti, pouze v definici přípustného čísla musíme nahradit číslo 100 číslem N .

Všimněme si, jak jsme pro $N = 100$ vyloučili například číslo 65. Zjistili jsme, že zápis $65 = 32 + 33$ je rozhodnutelný, neboť $32 \cdot 33 = 11 \cdot 96 = 3 \cdot 352$ a ostatní rozklady mají oba faktory sudé. Zvýšíme-li však horní hranici součtu w na $N = 107$, tento zápis už bude nerozhodnutelný, neboť číslo $107 = 11 + 96$ není součtem dvou prvočísel a je tedy přípustné.

Z důvodů, které vysvitnou později, řešme nyní naši úlohu pro $N = 439$. Budeme postupovat stejně jako v první části, tj. budeme v tabulce čísel od 4 do 439 vyškrtávat všechna čísla, která jsou součty dvou prvočísel. Zjistíme, že budou opět vyškrtána všechna sudá čísla, tj. bude i nyní platit tvrzení (1), a z lichých čísel zůstane následujících 135 přípustných čísel:

11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 65, 67, 71, 77, 79, 83, 87, 89, 93, 95, 97, 101, 107, 113, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 131, 135, 137, 143, 145, 147, 149, 155, 157, 161, 163, 167, 171, 173, 177, 179, 185, 187, 189, 191, 197, 203, 205, 207, 209, 211, 215, 217, 219, 221, 223, 227, 233, 237, 239, 245, 247, 249, 251, 255, 257, 261, 263, 267, 269, 275, 277, 281, 287, 289, 291, 293, 297, 299, 301, 303, 305, 307, 311, 317, 321, 323, 325, 327, 329, 331, 335, 337, 341, 343, 345, 347, 353, 357, 359, 363, 365, 367, 371, 373, 377, 379, 383, 387, 389, 393, 395, 397, 401, 405, 407, 409, 413, 415, 417, 419, 425, 427, 429, 431, 437, 439.

Nyní budeme zjišťovat, která z těchto čísel lze zapsat ve tvaru $2^k + p$, kde p je prvočíslo a $k \geq 2$. Vypišme je postupně pro $k = 2, 3$,

$k = 2$: 11, 17, 23, 27, 35, 41, 47, 51, 57, 65, 71, 77, 83, 87, 93, 101, 107, 113, 117, 131, 135, 143, 155, 161, 167, 171, 177, 185, 197, 203, 215, 227, 233, 237, 245, 255, 261, 267, 275, 281, 287, 297, 311, 317, 321, 335, 341, 353, 357, 363, 371, 377, 383, 387, 393, 401, 405, 413, 425, 437.

$k = 3$: 11, 27, 37, 51, 67, 79, 87, 97, 117, 121, 135, 145, 147, 157, 171, 187, 189, 205, 207, 219, 237, 247, 249, 277, 289, 291, 301, 321, 325, 345, 357, 367, 387, 397, 405, 409, 417, 427, 429, 439.

$k = 4$: 23, 27, 29, 35, 47, 53, 57, 59, 77, 83, 87, 89, 95, 113, 117, 119, 123, 125, 143, 147, 155, 167, 173, 179, 189, 197, 207, 209, 215, 227, 239, 245, 249, 255, 257, 267, 287, 293, 297, 299, 323, 327, 329, 347, 353, 363, 365, 383, 389, 395, 405, 413, 417, 425, 437.

$k = 5$: 35, 37, 51, 79, 93, 121, 135, 145, 163, 171, 189, 205, 211, 223, 255, 261, 289, 301, 303, 325, 343, 345, 363, 379, 405, 415, 429.

$k = 6$: 67, 71, 77, 83, 87, 93, 95, 101, 107, 117, 123, 125, 131, 135, 137, 143, 147, 161, 167, 171, 173, 177, 191, 203, 215, 221, 227, 237, 245, 255, 257, 261, 263, 275, 287, 291, 293, 297, 303, 305, 321, 327, 335, 341, 345, 347, 357, 371, 377, 395, 401, 413, 417, 431, 437.

$k = 7$: 131, 135, 145, 147, 157, 171, 187, 189, 207, 211, 217, 237, 255, 267, 277, 291, 301, 307, 321, 325, 327, 357, 367, 379, 397, 405, 409, 439.

$k = 8$: 261, 263, 267, 269, 275, 287, 293, 297, 299, 303, 317, 323, 327, 329, 335, 345, 353, 357, 359, 363, 365, 383, 387, 393, 395, 405, 407, 413, 419, 429, 437.

Nyní můžeme vzhledem k tvrzení (1) vyloučit ta čísla, která se vyskytují alespoň ve dvou z těchto skupin. Zbývajících přípustná čísla rozdělíme podle celkového počtu výskytů v těchto skupinách, tj. podle počtu rozhodnutelných zápisů, které pro ně zatím máme:

0 zápisů: 127, 149, 251, 331, 337, 373.

1 zápis: 17, 29, 41, 53, 59, 65, 89, 97, 119, 137, 163, 179, 185, 191, 209, 217, 219, 221, 223, 233, 239, 247, 269, 281, 305, 307, 311, 343, 359, 389, 407, 415, 419, 427, 431.

Vidíme tedy, že původní počet 135 přípustných čísel jsme již snížili na 41 čísel. Pro vyloučení dalších čísel využijeme toho, že $w \leq 439$. Nabízí se nám následující jednoduchá metoda:

Nechť p je liché prvočíslo a $k \geq 2$ takové, že $2^k \cdot p > 439 - p$. Je-li n přípustné číslo, pak každý zápis $n = 2^k + q$, kde q je složené číslo a žádný z prvočinitelů dělících q není menší než p , je rozhodnutelný.

Skutečně, každý jiný rozklad $2^k q = uv$, $u, v \geq 2$, má buď oba faktory sudé, nebo $u > 439 - p$, $v \geq p$, tj. $u + v > 439$, takže číslo $u + v$ je nepřípustné.

Vypíšme si nyní postupně pro $k = 8, 7, \dots$, ta ze zbývajících přípustných čísel, která mají rozklad tvaru (2) (jakmile máme pro některé číslo celkem dva zápisy, již je dále neuvažujeme):

$k = 8$ (p libovolné): 281, 305, 307, 311, 331, 337, 343, 373, 389, 415, 427, 431.

$k = 7$ ($p = 5$): 163, 219, 223, 247, 331, 337, 373.

$k = 6$ ($p = 7$): 185, 233, 251, 407.

$k = 5$ ($p = 17$): — — —

Zbývají nám nyní již jen 22 čísla:

0 zápisů : 127, 149,

1 zápis : 17, 29, 41, 53, 59, 65, 89, 97, 119, 137, 179, 191, 209, 217, 221, 239, 251, 269, 359, 419.

Tento počet budeme redukovat individuálním vylučováním některých čísel. Čtenář se sám přesvědčí, že následující zápisy jsou rozhodnutelné:

$29 = 2 + 27$	$41 = 9 + 32$	$53 = 13 + 40$
$59 = 4 + 55$	$89 = 43 + 46$	$97 = 16 + 81$
$119 = 31 + 88$	$127 = 16 + 111$	$127 = 48 + 79$
$137 = 40 + 97$	$149 = 48 + 101$	$149 = 21 + 128$
$179 = 6 + 173$	$191 = 18 + 173$	$209 = 73 + 136$
$217 = 53 + 164$	$221 = 19 + 202$	$239 = 13 + 226$
$251 = 37 + 214$	$269 = 43 + 226$	$359 = 6 + 353$
$419 = 37 + 382$		

Zůstala nám tedy pouze čísla 17 a 65. Podobně jako v první části se přesvědčíme, že číslo 17 má jediný rozhodnutelný zápis $17 (= 4 + 13)$. Zkoumejme nyní rozhodnutelnost zápisů čísla 65:

$2 \cdot 63 = 6 \cdot 21, 21 + 6 = 27$	$3 \cdot 62 = 6 \cdot 31, 31 + 6 = 37$
$4 \cdot 61 = \text{rozhodnutelný}$	$5 \cdot 60 = 25 \cdot 12, 25 + 12 = 37$
$6 \cdot 59 = 2 \cdot 177, 177 + 2 = 179$	$7 \cdot 58 = 2 \cdot 203, 203 + 2 = 205$
$8 \cdot 57 = 3 \cdot 152, 152 + 3 = 155$	$9 \cdot 56 = 8 \cdot 63, 63 + 8 = 71$
$10 \cdot 55 = 22 \cdot 25, 25 + 22 = 47$	$11 \cdot 54 = 33 \cdot 18, 33 + 18 = 51$
$12 \cdot 53 = 4 \cdot 159, 159 + 4 = 163$	$13 \cdot 52 = 4 \cdot 169, 169 + 4 = 173$
$14 \cdot 51 = 17 \cdot 42, 42 + 17 = 59$	$15 \cdot 50 = 5 \cdot 150, 150 + 5 = 155$
$16 \cdot 49 = 7 \cdot 112, 112 + 7 = 119$	$17 \cdot 48 = 16 \cdot 51, 51 + 16 = 67$
$18 \cdot 47 = 6 \cdot 141, 141 + 6 = 147$	$19 \cdot 46 = 2 \cdot 437, 437 + 2 = 439$
$20 \cdot 45 = 12 \cdot 75, 75 + 12 = 87$	$21 \cdot 44 = 11 \cdot 84, 84 + 11 = 95$
$22 \cdot 43 = 11 \cdot 86, 86 + 11 = 97$	$23 \cdot 42 = 6 \cdot 161, 161 + 6 = 167$
$24 \cdot 41 = 8 \cdot 123, 123 + 8 = 131$	$25 \cdot 40 = 5 \cdot 200, 200 + 5 = 205$
$26 \cdot 39 = 3 \cdot 338, 338 + 3 = 341$	$27 \cdot 38 = 6 \cdot 171, 171 + 6 = 177$
$28 \cdot 37 = 7 \cdot 148, 148 + 7 = 155$	$29 \cdot 36 = 9 \cdot 116, 116 + 9 = 125$
$30 \cdot 35 = 25 \cdot 42, 42 + 25 = 67$	$31 \cdot 34 = 17 \cdot 62, 62 + 17 = 89$
$32 \cdot 33 = 11 \cdot 96, 96 + 11 = 107$	

Pro $N = 439$ máme tedy ještě druhé řešení úlohy, a to čísla 4 a 61.

Současně je vidět, že $N = 439$ je první, pro které je $65 = 4 + 61$ řešením úlohy. Pro $N = 438$ je totiž zápis $65 = 19 + 46$ rozhodnutelný: $19 \cdot 46 = 23 \cdot 38 = 2 \cdot 437$ jsou všechny možné rozklady a čísla 61 a 439 jsou nepřipustná.

Podobným způsobem je možno zjistit (laskavý čtenář nechť si to ověří sám), že $N = 991$ je první číslo, pro které má úloha ještě další řešení, a to $89 = 16 + 73$.

Úlohu je možno dále zobecňovat a formulovat další různé problémy (o jejichž řešení nám není nic známo). Uvedme na závěr namátkou některé z nich:

- a) Zjistit další průběh řešení úlohy, tj. kdy jaké řešení přibývá.
- b) Formulovat obecné metody pro rozhodnutelnost zápisu (např. obdobné tvrzením (1) a (2)).
- c) Mohou někdy řešení ubývat?
- d) Má každé přípustné číslo (pro libovolné, případně nekonečné N) rozhodnutelný zápis?
- e) Řešit úlohu bez předpokladu $x, y > 1$ (tj. připustit možnost, že některé z hledaných čísel je rovno 1).
- f) Libovolný další problém, který si čtenář vymyslí.

Některé vlastnosti rovinného trojúhelníka s jeho Brocardovými body

Prof. JOSEF BREJCHA, Brno

Body $A_i (i = 1, 2, 3)$ jsou vrcholy rovinného trojúhelníka, a_i jeho strany, α_i jeho vnitřní úhly podle běžného označení. Vnitřní bod B tohoto trojúhelníka se nazývá *Brocardovým bodem*, platí-li vztahy

$$\sphericalangle BA_1A_2 = \sphericalangle BA_2A_3 = \sphericalangle BA_3A_1 = \varphi \quad (1)$$

Z trojúhelníka A_iBA_{i+1} ($i = 1, 2, 3; A_4 \equiv A_1$) plyne:

$$\sphericalangle A_iBA_{i+1} = 2R - (\varphi + \alpha_{i+1} - \varphi) = 2R - \alpha_{i+1}, \alpha_4 = \alpha_1. \quad (2)$$

Vzhledem ke (2) je — jak známo — konstrukce bodu B dána větou 1:

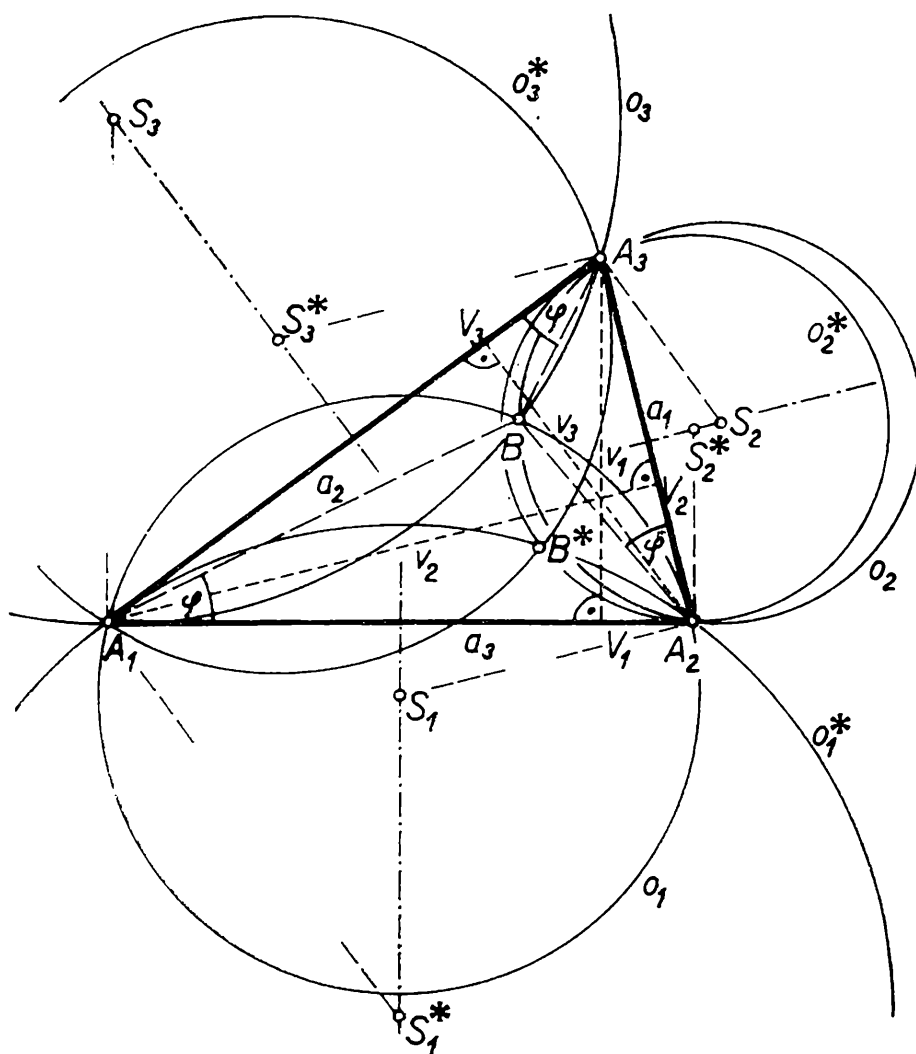
Brocardův bod B daného trojúhelníka o vrcholech A_1, A_2, A_3 je společným průsečíkem kruhových oblouků O_i jako geometrických míst vrcholů obvodových úhlů $\sphericalangle A_iBA_{i+1} = 2R - \alpha_{i+1}$ nad tětivou A_iA_{i+1} , $i = 1, 2, 3; A_4 \equiv A_1$.

Střed S_i kružnice, jejíž částí je oblouk O_i , je tedy průsečíkem symetrály strany A_iA_{i+1} s kolmicí v bodě A_{i+1} na přímkou $A_{i+1}A_{i+2}$.

Úhel φ je *Brocardův úhel* pro daný trojúhelník $A_1A_2A_3$. Kromě bodu B existuje v daném trojúhelníku ještě druhý Brocardův bod B^* ; vztah 1 lze napsat též ve tvaru

$$\sphericalangle B^*A_2A_1 = \sphericalangle B^*A_3A_2 = \sphericalangle B^*A_1A_3 = \varphi$$

Středy S_i^* kružnic, v jejichž společném průsečíku leží bod B^* , jsou v tomto případě vzájemnými průsečíky symetrály strany A_iA_{i+1} s kolmicí v bodě A_i na přímkou $A_{i-1}A_i$.



Obr. 1

Věta 2.

Je-li bod B Brocardovým bodem daného trojúhelníka, platí

$$\cotg \varphi = \cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2 + \cotg \alpha_3 .$$

Důkaz: Ze sinové věty pro trojúhelníky A_1BA_2 , A_1BA_3 máme

$$BA_1 : a_2 = \sin \varphi : \sin \alpha_1 , \quad (3)$$

$$BA_1 : a_3 = \sin (\alpha_2 - \varphi) : \sin \alpha_2 .$$

Ze sinové věty pro daný trojúhelník plyne

$$a_3 : a_2 = \sin \alpha_3 : \sin \alpha_2 . \quad (4)$$

Vzhledem k (3) a (4) je

$$\begin{aligned} BA_1 &= \frac{a_2 \sin \varphi}{\sin \alpha_1} = \frac{a_3 \sin (\alpha_2 - \varphi)}{\sin \alpha_2} \Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha_1} = \\ &= \frac{a_3 \sin (\alpha_2 - \varphi)}{a_2 \sin \alpha_2} \Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_3 \sin (\alpha_2 - \varphi)}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3} = \cotg \varphi - \cotg \alpha_2 \Rightarrow \frac{\sin (\alpha_1 + \alpha_3)}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3} = \\ = \cotg \varphi - \cotg \alpha_2 ,$$

takže

$$\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2 + \cotg \alpha_3 = \cotg \varphi . \quad (5)$$

Věta 3:

Jsou-li a_i ($i = 1, 2, 3$) délky stran libovolného trojúhelníka, φ jeho Brocardův úhel, pak pro plošný obsah tohoto trojúhelníka platí

$$\alpha) P = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \tg \varphi , \quad \beta) P = \frac{1}{2} (a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi .$$

Důkaz: $\alpha)$ Budtež v_i ($i = 1, 2, 3$) výšky daného trojúhelníka, V_i jejich paty na stranách tohoto trojúhelníka. Bude pak

$$\cotg \alpha_1 = \frac{A_1 V_3}{v_3} = \frac{A_1 V_2}{v_2} , \\ \cotg \alpha_2 = \frac{A_2 V_3}{v_3} = \frac{A_2 V_1}{v_1} , \\ \cotg \alpha_3 = \frac{A_3 V_1}{v_1} = \frac{A_3 V_2}{v_2}$$

Sečtením dostaneme

$$2(\cotg \alpha_1 + \cotg \alpha_2 + \cotg \alpha_3) = \\ = \frac{a_3}{v_3} + \frac{a_2}{v_2} + \frac{a_1}{v_1} = \frac{a_3^2 + a_2^2 + a_1^2}{2P} .$$

Vzhledem k (5) pak

$$4P \cotg \varphi = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ \underline{P = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \tg \varphi}$$

$\beta)$ je-li bod B Brocardovým bodem daného trojúhelníka, platí dále:

$$P = \frac{1}{2} (BA_1 a_3 \sin \varphi + BA_2 a_1 \sin \varphi + BA_3 a_2 \sin \varphi) = \\ = \frac{1}{2} \sin \varphi (a_3 BA_1 + a_1 BA_2 + a_2 BA_3) = \\ = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \left(\frac{a_2 a_3}{\sin \alpha_1} + \frac{a_3 a_1}{\sin \alpha_2} + \frac{a_1 a_2}{\sin \alpha_3} \right) ;$$

vzhledem k sinové větě je

$$BA_i : a_{i+1} = \sin \varphi : \sin \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \alpha_4 \equiv \alpha_1, \quad a_4 \equiv a_1 . \quad (6)$$

Užitím vztahů

$$2P = a_1 a_2 \sin \alpha_3 = a_2 a_3 \sin \alpha_1 = a_3 a_1 \sin \alpha_2$$

obdržíme
$$P = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \frac{a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2}{2P},$$

tj.
$$P = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2} \cdot \sin \varphi. \quad (7)$$

Označme $B(\varphi) = BA_1 + BA_2 + BA_3$ součet vzdáleností Brocardova bodu B od vrcholů A_i ($i = 1, 2, 3$) příslušného trojúhelníka. Potom platí:

Věta 4:

Pro součet $B(\varphi)$ vzdáleností Brocardova bodu B od vrcholů A_i ($i = 1, 2, 3$) příslušného trojúhelníka je

$$B(\varphi) = \frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}}},$$

kde a_i ($i = 1, 2, 3$) jsou délky stran tohoto trojúhelníka.

Důkaz:

Vzhledem k (6):

$$\begin{aligned} B(\varphi) &= \sin \varphi \left(\frac{a_1}{\sin \alpha_3} + \frac{a_2}{\sin \alpha_1} + \frac{a_3}{\sin \alpha_2} \right) = \\ &= \frac{\sin \varphi}{2P} (a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1). \end{aligned} \quad (8)$$

Ze (7) a (8) plyne:

$$\begin{aligned} B(\varphi) &= \frac{a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1}{\sqrt{a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2}} = \\ &= \frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}}} \end{aligned}$$

Poznámka:

Pro druhý Brocardův bod $B^* \neq B$ daného trojúhelníka obdržíme

$$\begin{aligned} B^*(\varphi) &= \sin \varphi \left(\frac{a_3}{\sin \alpha_1} + \frac{a_1}{\sin \alpha_2} + \frac{a_2}{\sin \alpha_3} \right) = \\ &= \frac{\sin \varphi}{2P} (a_1 a_2^2 + a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2); \end{aligned}$$

po dosazení za P podle věty 3 β) a po úpravě získáme

$$B^*(\varphi) = \frac{\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}}} = B(\varphi)$$

Pro vzdálenosti libovolného bodu Q roviny daného trojúhelníka od jeho vrcholů A_i ($i = 1, 2, 3$) platí — jak lehce zjistíme —

$$QA_1 + QA_2 + QA_3 > \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}.$$

S ohledem na větu 4 plyne

$$\frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1}}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2}}} > \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2},$$

takže je dokázána věta 5:

Pro délky stran libovolného trojúhelníka platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{a_{i+1}} > \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 a_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}, a_4 \equiv a_1.$$

Kolem vrcholů A_i daného trojúhelníka opišme kružnice k_i , procházející jedním z Brocardových bodů tohoto trojúhelníka. Kružnice k_i se protnou vzájemně v dalších třech bodech Q_{12} , Q_{23} , Q_{31} (bod Q_{ij} průsečík kružnic k_i , k_j).

(Pokračování)

Niekol'ko slov o počítačovej grafike

ANNA SZITTAYOVÁ, Stavebná fakulta SVŠT Bratislava

S tradičnou predstavou inžiniera-konštruktéra, ktorý sedí za rysovacím stolom a kreslí množstvo kružníc, priamok a oblúkov, sa pomaly musíme rozlúčiť. Už dnes si ho nevieme predstaviť bez kalkulačky, ktorá mu nahrádza logaritmické pravítko a tabuľky. Kalkulačka mu síce pomáha a uľahčuje výpočty, ale neodstraňuje mechanickú prácu, teda rysovanie.

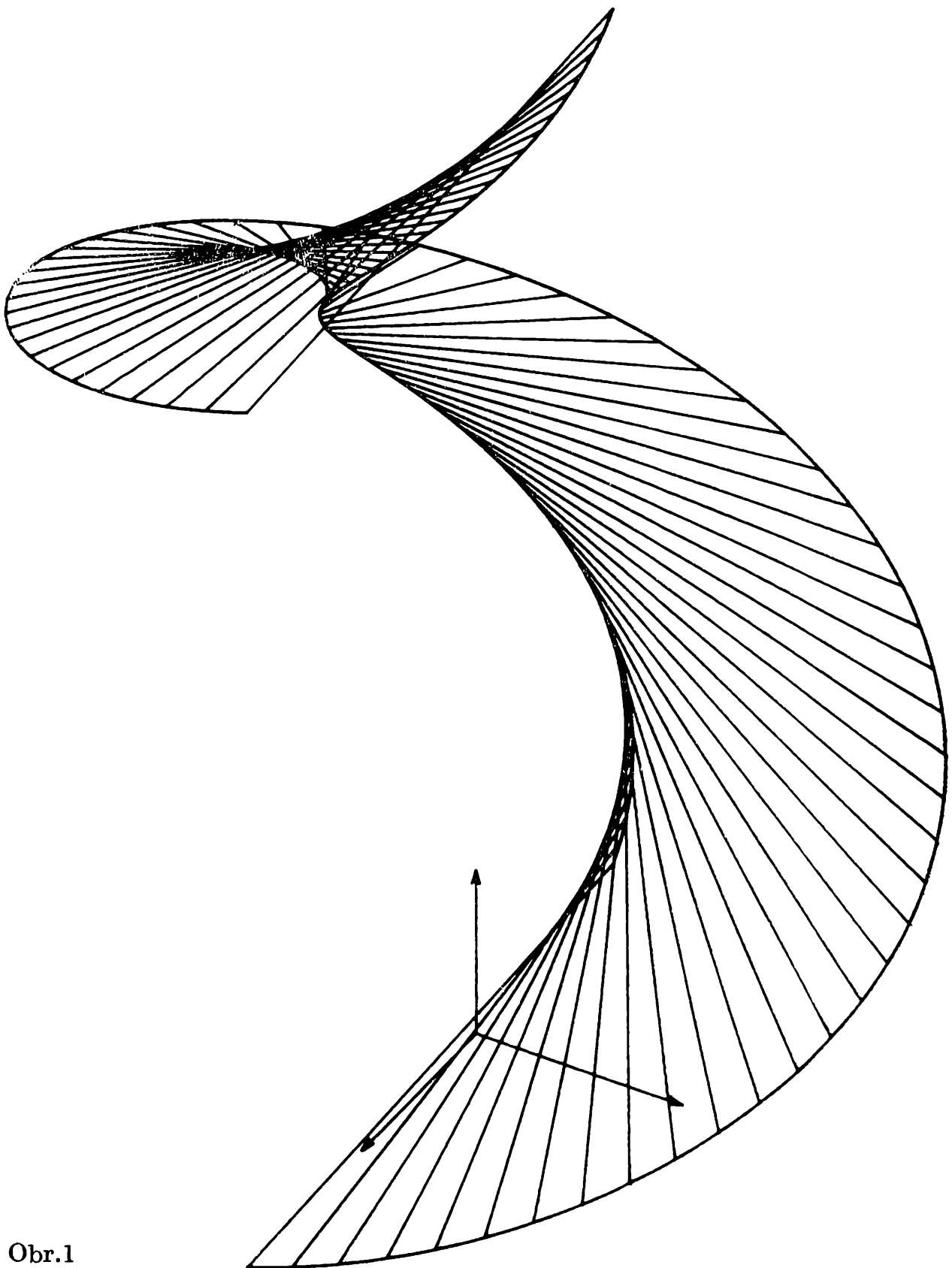
V dnešnej dobe technika prichádza na pomoc aj v tejto oblasti. Počítacie stroje môžu vykonávať nielen výpočty, ale ak sú vybavené prídavným kresliacim zariadením, zabezpečujú aj samotnú kresbu výkresu. Kresliace zariadenia sú schopné kresliť nielen tzv. technické výkresy, ale kvôli názornosti nakresliť aj rovnobežný alebo stredový priemet objektu vrátane viditeľnosti jednotlivých častí plochy.

Odbor, ktorý sa zaoberá touto automatizáciou kreslenia, sa nazýva *počítačová grafika*. Názov nevystihuje presne zameranie, lebo počítačová grafika nie je analógiou grafiky v umení. Podstata názvu spočíva v tom, že odbor vo svojich začiatkoch sa zaoberal zostrojovaním a popisovaním grafov. Je to odbor mladý, pracuje sa v ňom necelých 20 rokov, no už sú pozoruhodné výsledky. Využíva sa vo veľmi rozmanitých oboroch života, i tam, kde by to človek vôbec nečakal. Výrazné uplatnenie našiel napr. v meteorológii, v geológii, v geodézii, v automobilovom, leteckom a lodiarском priemysle, no i v odevnom a obuvníckom priemysle a dokonca i v umení.

Pracuje sa vo výpočtovej technike. Veľké počítače pracujú obrovskou rýchlosťou, a teda napočítajú súradnice bodov, ktoré sa majú pospájať, veľmi rýchle. Kresliace zariadenie je však niekoľkokrát pomalšie, nestačilo by jeho rýchlosti, preto nebýva zvyčajne napojené priamo na veľký počítač, aby nespomaľovalo jeho prevádzku, ale pracuje zvlášť, riadené malým, tzv. riadiacim počítačom. Spojenie medzi veľkým počítačom a riadiacim je rôzne. Napr. z veľkého počítača si necháme výsledky (súradnice bodov, ktoré sa majú spojiť a povel na kreslenie alebo nekreslenie ich spojnice) nadierovať na diernu pásku a tú potom vložíme do riadiaceho počítača. To je len príklad spojenia; možností je viac, podľa typu počítača i kresliaceho zariadenia.

Pred štyrmi rokmi bol už v *Rozhledoch* uverejnený článok doc. Drsa o automatizovanom kreslení a tam boli stručne popísané i spôsoby práce kresliacich zariadení. Princíp kresliaceho zariadenia spočíva v tom, že je vybavené dvoma motorčekmi, ktoré zabezpečujú dva smery pohybu pera. Jeden motor spôsobuje pohyb doľava a doprava, druhý dopredu a dozadu. Kresliace zariadenia (*plottery*) poznáme už trojakého druhu: bubnové, stolové a obrazovkové. U bubnového plottera je perforovaný papier natočený na dvoch kotúčoch a jeden motor spôsobuje otáčanie papiera z jednej strany na druhú. Druhý motor spôsobuje pohyb hlavice, v ktorej je upevnené pero, doprava a doľava. Spájaním týchto dvoch pohybov súčasne vzniká kresba. Rýchlosť kreslenia je 5–10 cm/sek, presnosť 0,1 mm. Plocha, na ktorú sa kreslí, je veľká — jej dĺžka je až 50 m, ale šírka je obmedzená šírkou bubna — zvyčajne nie je väčšia ako 30 cm.

Iným druhom sú stolové plottery, ktoré veľmi pripomínajú rysovacie stoly konštruktérov. Československo vyrába známy DIGIGRAF vo dvoch rozmeroch. Princíp oboch spočíva v tom, že papier je upevnený



Obr.1

na stole a pero vykonáva oba pohyby. Je to zabezpečené tak, že hlavica s perom sa pohybuje po kovovom moste dopredu a dozadu a celý most sa pohybuje pozdĺž stola doprava a doľava. Do nosnej hlavice pera je možné namiesto pera namontovať rezacie, resp. rycie zariadenie a namiesto

papiera použiť kovové fólie, alebo textil a pod. Tak sa dajú zhotovovať napr. modely rôznych telies pomocou množstva rovinných rezov.

Posledný výskum sa zameriaval — hlavne v zahraničí — na možnosť kresby na obrazovku, podobnú televíznej obrazovke. Kreslenie je tu podstatne rýchlejšie, lenže kresba sa nezachová a ak chceme obrázok chvíľu uchovať, treba kresbu mnohokrát za sebou opakovať. Doba uchovania kresby závisí od dosvitu lúča a tiež od zloženia obrazovky. Je tu možnosť tzv. interakcie medzi človekom a počítačom, t.j. zasahovanie do kresby, oprava kresby a pod. Vykonáva sa to pomocou tzv. svetelného pera. Obrazovky sú už aj farebné.

Ak by plotter mal zabezpečiť len spojenie, resp. nespojenie bodov, bolo by to veľmi slabé využitie. Kresliace zariadenia sú už od výrobcu vybavené základným súborom podprogramov, ktoré sú schopné:

- kresliť lomené čiary
- kresliť rôzne typy čiar (plné, čiarkované, . . .)
- písať písmená, čísllice, rôzne symboly a znaky
- kresliť škály na súrad. osiach, príp. celé siete . . .

Zvyčajne majú aj tzv. funkčné softwary (súbory podprogramov), ktoré umožňujú:

- kresliť kružnice a kružnicové oblúky
- kresliť krivky, hlavne kuželosečky
- kresliť mnohoúhelníky
- interpoláciu postupnosti bodov
- transformáciu atď.

Dnes sú už spracované mnohé aplikačné súbory podprogramov, použiteľné v rozličných odboroch — napr. problém šrafovania a kótovania na technických výkresoch; rôzne premietacie programy; metódy rozvíjania plôch; problémy viditeľnosti a pod.

Ukážkou je kreslenie axonometrie priamkovej skrutkovej plochy na Digigrafe. Na ploche je určených 60 polôh úsečky. Zručnému kresličovi by nakreslenie tejto plochy iste zabralo viac času ako počítaču, ktorý bol s výpočtom i kresbou hotový za 25 minút.

Pretože sa už teraz výpočtová technika vyučuje na vysokých školách, je predpoklad, že moderný inžinier si bude vedieť uľahčiť prácu tým, že si svoj problém naprogramuje a dá nakresliť počítačom.

fyzika

Experimentální ověření závislosti hmotnosti na rychlosti

RNDr. V. KOLESNIKOV, CSc., RNDr. J. ZÁHEJSKÝ, CSc., UP Olomouc

Jedním ze závažných důsledků Lorentzovy transformace ve speciální teorii relativity je závislost hmotnosti tělesa (částice) na rychlosti, která je dána vztahem

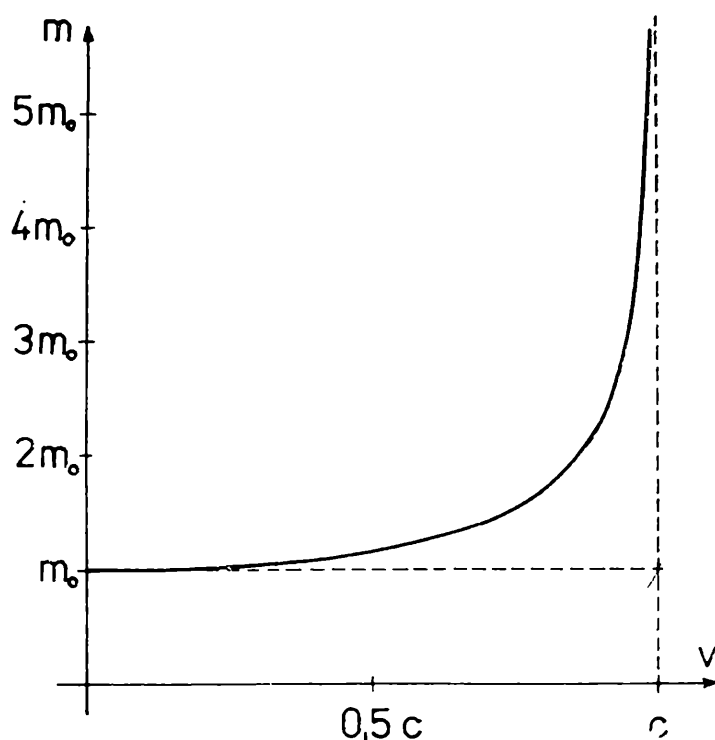
$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1)$$

kde m_0 je klidová hmotnost tělesa.

Ze vztahu (1) vyplývá, že hmotnost tělesa vzrůstá s jeho rychlostí a pro rychlost $v = c$ by hmotnost tělesa dosáhla nekonečně velké hodnoty. (Obr. 1). Nelze tedy žádným způsobem udělit tělesu (látkové částici), jehož klidová hmotnost $m_0 \neq 0$, rychlost v rovnou rychlosti světla c . Rychlost světla je tedy mezní rychlostí pro všechny látkové částice. Rychlostí světla se pohybují jen kvanta elektromagnetického záření (fotony), což však není v rozporu se vztahem (1), neboť jejich klidová hmotnost $m_0 = 0$.

Při obvyklých rychlostech těles vyskytujících se v běžné praxi jsou ovšem přírůstky hmotnosti nepatrné. Tak např. hmotnost rychle letícího letadla by se podle vztahu (1) zvětšila sotva o miliontinu miligramu. Avšak u tělesa, které by se pohybovalo rychlostí blízkou rychlosti světla, vzrostla by jeho hmotnost na mnohonásobek jeho klidové hmotnosti.

I při použití nejmodernější techniky by bylo nesmírně obtížné udělit makroskopickým tělesům rychlosti, při kterých by přírůstek jejich hmotnosti byl snadno měřitelnou veličinou. Vhodnými objekty pro experimentální ověření závislosti (1) jsou však některé elementární částice, např. elektron nebo proton. Zvětšíme-li rychlost takové částice v dané vztažné soustavě z nulové hodnoty na hodnotu $0,6c$ (což odpovídá rychlosti asi $180\,000\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$), zvětší se hmotnost částice v této soustavě vzhledem k její klidové hmotnosti o 25 %, jak je též zřejmé z obr. 1. V průmyslových rentgenových přístrojích se elektrony pro generaci rentgenového záření urychlují tak, že jejich hmotnost při dopadu na antikatuodu je o 50 % větší než je jejich klidová hmotnost. V současných



Obr. 1

urychlovačích částic, užívaných pro výzkum atomového jádra, dovedeme elektrony urychlit tak, že jejich hmotnost je stokrát i tisíckrát větší, než jejich klidová hmotnost. Právě těchto částic lze využívat pro experimentální ověření tohoto závažného důsledku teorie relativity.

V dalším ukážeme některé experimenty, jejichž cílem bylo v daných možnostech ověřit co možná nejpřesněji vztah (1).

1. Ověření závislosti hmotnosti elektronů na jejich rychlosti:

Je zajímavé uvést, že první experimentální zjištění závislosti hmotnosti částice na její rychlosti provedl již v r. 1901 *Kaufmann*, tedy ještě před vznikem speciální teorie relativity. V té době však ještě nebyl znám relativistický vztah (1), ale byly známy dva vztahy:

1. Vzorec *Abrahamův*, který byl odvozen na základě mechanické představy, že elektron je tuhá nestlačitelná kulička:

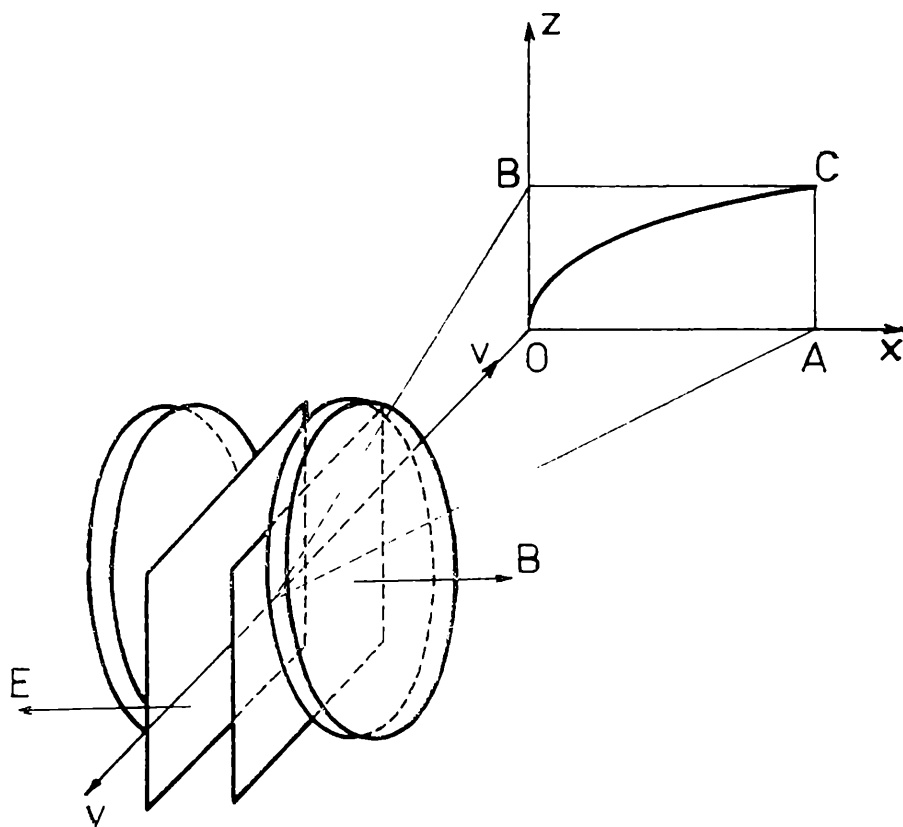
$$m = m_0 \frac{3}{4\beta} \cdot \left[\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right], \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (2)$$

2. Vzorec *Lorentzův*, odvozený na základě představy, že elektron se ve směru pohybu smršťuje

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (3)$$

Vzorec (3), jak se ukázalo později, je shodný se vzorcem (1) vyplývajícím z teorie relativity.

Kaufmann zvolil měřicí metodu, která využívá zákonitostí platných pro průchod elektronů příčným elektrickým a magnetickým polem. Pole



Obr. 2

jsou orientována tak, že výchylky elektronů způsobené oběma poli jsou navzájem kolmé. Elektrické pole je vytvořeno mezi deskami nabitého kondenzátoru, který je umístěn v magnetickém poli tzv. Helmholtzových cívek. (Obr. 2).

Prochází-li mezi deskami kondenzátoru rovnoběžný svazek elektronů stejné rychlosti, pak je ovlivňován jak elektrickým, tak magnetickým polem. Elektronový svazek bude vychylován polem v kladném smyslu osy x a magnetické pole jej vychýlí v kladném smyslu osy z . Je nutno si uvědomit, že elektron má záporný náboj; pro kladnou částici by byly výchylky opačné.

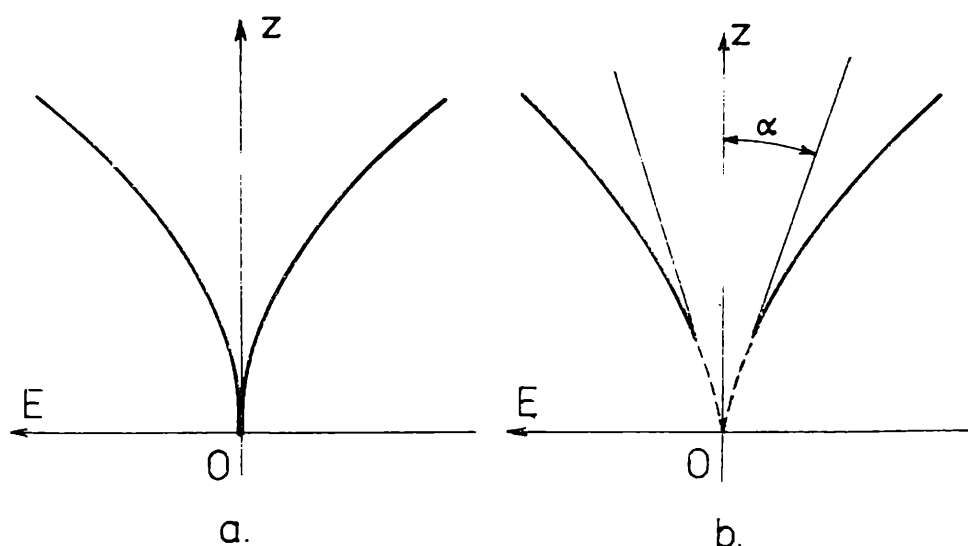
Je-li v bodě O umístěna fotografická deska kolmo ke směru osy y , pak elektrony se shodnou energií dopadnou po průchodu elektrickým a magnetickým polem do bodu C fotografické desky a elektrony, které mají různé rychlosti, zanechají na desce stopu v podobě křivky.

Z teoretických úvah dostaneme pro tuto křivku rovnici

$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2}{B} \frac{e}{m}, \quad (4)$$

kde A , B jsou konstanty měřicí aparatury, e je náboj elektronu ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) a m je hmotnost elektronu ($m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg).

Ze vztahu (4) je zřejmé, že křivka je parabola za předpokladu, že $\frac{e}{m}$ je konstanta.



Obr. 3

Změní-li se směr elektrického pole na opačný při nezměněném poli magnetickém, dostaneme k původní křivce křivku symetrickou podle osy z , která bude společnou tečnou obou křivek v bodě O . (Obr. 3a).

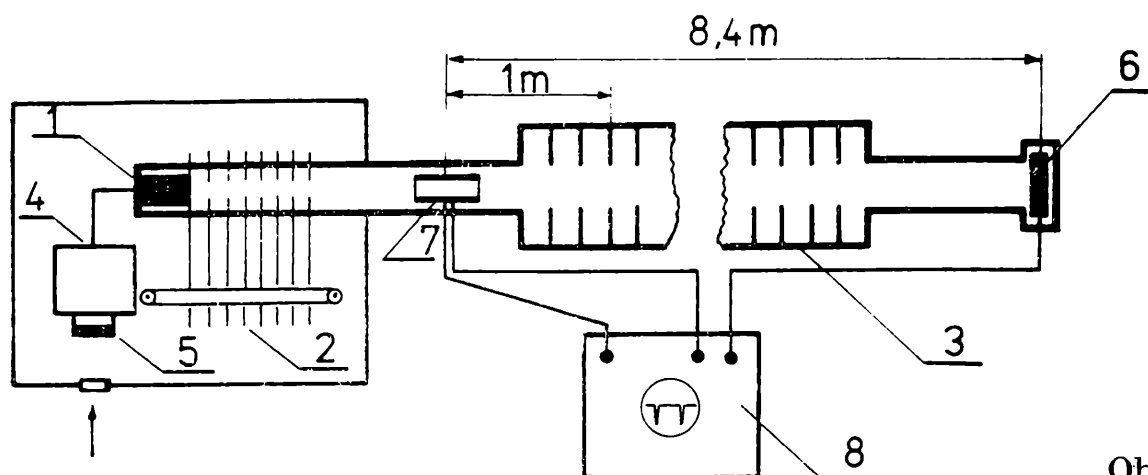
Kaufmann použil jako zdroje elektronů preparátu radia a zjistil, že experimentálně získaný průběh křivek neodpovídá přesně parabolickému průběhu. (Obr. 3b). Tečny k oběma experimentálně zjištěným křivkám v počátku O nesplývají nyní s osou z (jak tomu bylo u teoretických křivek na obr. 3a), ale svírají s osou z úhel $\alpha \neq 0$. Křivky tedy nemají parabolický průběh, jak by tomu muselo být podle (4) za předpokladu, že poměr $\frac{e}{m}$ je konstantní. Z toho tedy plyne, že poměr $\frac{e}{m}$ není konstantní, a tedy hmotnost elektronů musí nutně záviset na rychlosti, poněvadž náboj je na rychlosti nezávislý.*)

Vzhledem k tomu, že získané stopy křivek na fotografické desce nebyly dostatečně ostré, nebylo možno tohoto experimentu užít ke kvantitativnímu určení hodnoty $\frac{e}{m}$, ale kvalitativně lze bez pochyby usuzovat na vzrůst hmotnosti elektronů s rychlostí.

Aby bylo možné určit, který ze vztahů (2), (3) přesněji odpovídá skutečnosti, byla provedena řada dalších experimentálních prací. Možno uvést práce *Guije, Lavachy a Radnovského* (1921), dále pokusy *Trickerovy* motivované *P. L. Kapicou* a pokusy *Zahn-Speesovy* (1938), které nepochybně ukazují na správnost vztahu *Lorentzova-Einsteinova*, daného rovnicemi (3) nebo (1).

Také v poslední době byla provedena řada pokusů, které moderními metodami experimentálně ověřovaly závislost hmotnosti částice na její rychlosti.

*) Fyzikální veličina *náboj* je tzv. *relativistický invariant* — nemění svoji velikost v závislosti na rychlosti.



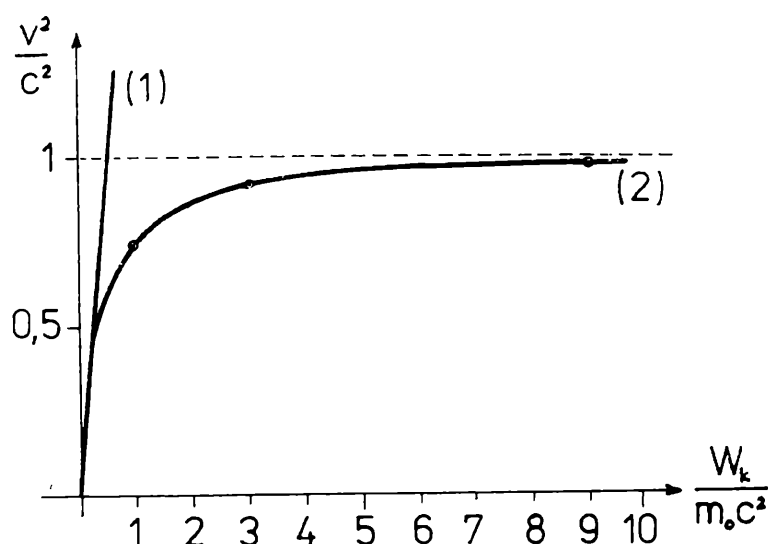
Obr. 4

V roce 1964 provedl *William Bertozzi* měření na moderní aparatuře v Cambridge, kde ověřoval závislost hmotnosti elektronů na jejich rychlosti.

Měřicí zařízení je znázorněno na obr. 4. Elektrony byly urychlovány napětím z van de Graaffova generátoru (2) v lineární urychlovací trubici (3), kde získaly energie od 0,5 MeV do 15 MeV. Rychlost elektronů byla určována přímou metodou, tj. měřením času potřebného k tomu, aby elektrony proběhly dráhu 8,4 m. Proto byly elektrony do urychlovacího systému vysílány v pulsním režimu s dobou trvání každého pulsu okolo $3 \cdot 10^{-9}$ s a s opakovací frekvencí 120 Hz. Elektronové pulsy byly generovány zařízením (4) spojeným s vysokonapěťovým pólem van de Graaffova generátoru, kterým bylo spouštěno elektronové dělo (1). Pulsní zařízení bylo ovládáno fotočlánkem (5). Mezi van de Graaffův generátor (2) a lineární urychlovač (3) byla umístěna elektroda (7), která zachycovala část elektronů při jednotlivých pulsech. Elektrické impulsy ze signalizační elektrody byly přiváděny na osciloskop, kde vytvářely tzv. první signál. Ostatní elektrony po proběhnutí dráhy 8,4 m byly zachycovány hliníkovým diskem (6). Elektrické impulsy z tohoto disku, vznikající při dopadech shluků elektronů, byly rovněž přivedeny na osciloskop (8), kde se zobrazily jako tzv. druhý signál. Vyhodnocením vzdálenosti obou signálů na obrazovce osciloskopu byla pak stanovena doba, kterou elektrony potřebovaly k tomu, aby proběhly dráhu 8,4 m.

Kinetická energie elektronů byla stanovena z přírůstků tepla, které se vyvinulo v hliníkovém disku (6) při dopadu elektronů. Počet elektronů obsažených v jednotlivých pulsech byl stanoven z přírůstků náboje disku.

Pro snadnější porovnání klasického a relativistického případu je závislost mezi energií W_k a rychlostí v elektronů vyjádřena na obrázku 5. graficky tak, že na vodorovnou osu jsou vynášeny hodnoty $W_k (m_0 c^2)^{-1}$ a na svislou osu hodnoty $(v/c)^2$.



V klasickém případě, kdy kinetická energie W_k je dána vztahem

$$W_k = \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad (5)$$

je podíl

$$\frac{W_k}{m_0 c^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \quad (6)$$

Odpovídající závislost mezi veličinami $(v/c)^2$ a $W_k \cdot (m_0 c^2)^{-1}$, která by měla být splněna v případě platnosti klasické fyziky, je lineární a na obr. 5. je znázorněna přímkou (1).

V relativistickém případě je kinetická energie elektronu dána vztahem

$$W_k = (m - m_0) c^2 \quad (7)$$

a výraz

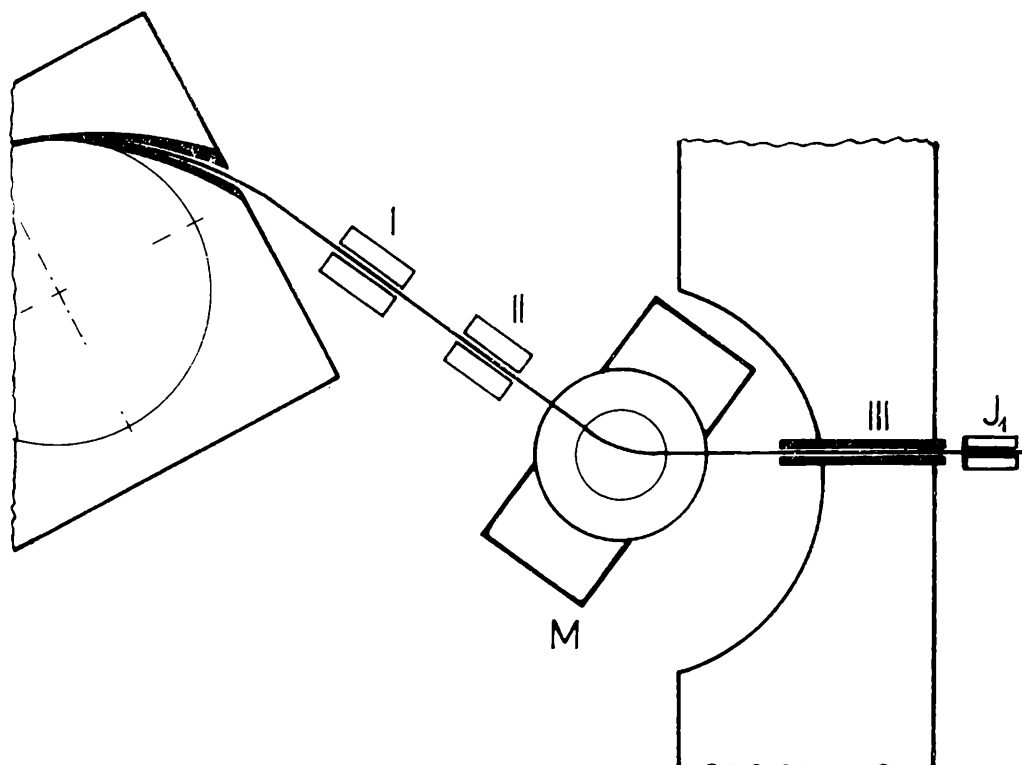
$$\frac{W_k}{m_0 c^2} = \frac{m - m_0}{m_0} \quad (8)$$

představuje relativní přírůstek hmotnosti elektronu. Vztah (8) je možno upravit dosazením (1) na tvar

$$\frac{W_k}{m_0 c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1, \quad (9)$$

ze kterého je patrné, že závislost mezi veličinami $(v/c)^2$ a $W_k \cdot (m_0 c^2)^{-1}$ není lineární. Tato závislost je v grafu na obr. 5. vyznačena křivkou (2).

Ve výše uvedeném experimentu byly měřeny rychlosti v a energie W_k elektronů urychlených napětími 0,5; 1; 1,5; 4,5 a 15 megavoltů a byly stanoveny odpovídající hodnoty $(v/c)^2$ a $W_k \cdot (m_0 c^2)^{-1}$, které jsou v grafu na obr. 5. vyznačeny zakroužkovanými body. Je zřejmé, že naměřené hodnoty velmi dobře souhlasí s relativistickým případem.



Obr. 6

2. Ověření závislosti hmotnosti protonů na jejich rychlosti

V roce 1957 ověřovali závislost hmotnosti protonů na jejich rychlosti fyzikové *V. P. Zrelov*, *A. A. Tjapkin* a *P. S. Faragó* v laboratoři Spojeného ústavu jaderných výzkumů v Dubně. Měření bylo prováděno stanovením rychlosti a impulsu protonů o energii 660 MeV. Urychlení protonů na tuto energii bylo provedeno synchrocyclotronem. (Obr. 6.) Protonový svazek procházel soustavou kolimátorů I a II, dále byl vychýlen v poli silného elektromagnetu M a po průchodu kolimátorem III dopadl do ionizační komory J_1 .

Impuls protonů nebyl určován obvyklou metodou pomocí odchylky v magnetickém poli, poněvadž rozptylová pole elektromagnetů synchrocyclotronu a elektromagnetu M by způsobila značnou nepřesnost měření. Byla proto pro stanovení impulsu protonů zvolena tzv. *metoda proudové nitě*.

Metoda spočívá v tom, že systémem kolimátorů ve směru dráhy protonů byl protažen vodič o průměru 0,2 mm, který byl zakončen nevodivě hedvábnou nití a napínán přes otáčivý blok závažím o hmotnosti m .

Vhodnou hodnotou proudu I , který vodičem protéká, lze dosáhnout toho, že vodič volně prochází přesně osou kolimátorů, tedy zaujme v magnetickém poli kolimátorů takový tvar, který je shodný s tvarem dráhy, po které se pohybují při průletu kolimátory protony. Impuls protonů je pak dán vztahem

$$p = \frac{am}{I}, \quad (10)$$

kde a je konstanta.

Vyjádříme-li m v kilogramech, proud I v ampérech, pak impuls

$$p = 1,5726 \cdot 10^{-18} \frac{m}{I} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Touto metodou byla určena pro hodnoty $m = (0,3 \pm 0,0003) \text{ kg}$, $I = (0,681 \pm 0,001) \text{ A}$ hodnota impulsu

$$p = (6,9281 \pm 0,0123) \cdot 10^{-13} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rychlost protonů byla určována pomocí *Čerenkovovských počítačů* a pro poměr $\frac{v}{c}$ byla experimentálně stanovena hodnota

$$\frac{v}{c} = 0,8112 \pm 0,0005.$$

Střední rychlost protonů tedy byla $v = (2,4318 \pm 0,0015) \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Užitím naměřených hodnot pro rychlost v a impuls p protonů dostaneme pro hmotnost protonu hodnotu

$$m = \frac{p}{v} = (2,8488 \pm 0,0054) \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Poněvadž klidová hmotnost protonu je $m_0 = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, tedy při rychlosti protonů $v = 0,8112 c$ vzrostla jejich hmotnost na hodnotu $m = 2,8488 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, což je $1,7 m_0$.

Provedený výpočet hmotnosti protonu pro uvedenou rychlost podle relativistického vztahu (1) dává hodnotu

$$m = 2,8602 \cdot 10^{-27} \text{ kg},$$

která je v dobré shodě v mezích přesnosti pozorování s naměřenou hodnotou.

3. Závěr

Je nutno říci, že popsané experimenty nejsou jediné, které ověřovaly závislost hmotnosti částic na jejich rychlosti. Existuje celá řada dalších pokusů, které byly provedeny v různých obdobích. Uvedli jsme tři — jeden z období těsně před vznikem teorie relativity a dva z poslední doby, které již využívaly moderní experimentální techniky. Dnes je tedy možné považovat vztah (1) za experimentálně ověřený. Je proto nutno např. při konstrukcích moderních urychlovačů částic pro výzkum atomového jádra počítat se vzrůstem hmotností urychlovaných částic. Musíme si však uvědomit, že vztah (1) platí pro vzrůst *hmotnosti* tělesa, tedy pro vzrůst jeho *setrvačných účinků*, které nelze chápat jako změnu *hmoty*, např. zvětšení počtu molekul tělesa.

Pojem *hmota* je třeba chápat jako *objektivní realitu* nezávislou na našem vědomí a *hmotnost* jako *vlastnost hmoty*, která je mírou jejích setrvačných účinků, tzv. setrvačná hmotnost. Hmota se může vyskytovat ve dvou základních formách jako *látka* a *pole*. Poněvadž hmota jako objektivní realita existuje v prostoru a čase, říkáme, že prostor a čas jsou *formy existence hmoty*. Hmotu nemůžeme chápat oddělenou od pohybu, proto pohyb nazýváme *způsobem existence hmoty*.

Můžeme tedy tyto pojmy shrnout:

objektivní realita — hmota

vlastnost hmoty — hmotnost setrvačná
gravitační

formy hmoty — látka, pole

formy existence hmoty — prostor, čas

způsob existence hmoty — pohyb.

Literatura :

- [1] Špolskij, E. V.: Atomová fyzika I., SNTL, Praha 1957.
- [2] Bertozzi, W.: American Journal of Physics, 32, 1964, 551.
- [3] Zrelov, V. P. — Tjapkin, A. A. — Faragó, P. S.: ŽETF, 34, 1958, 555.
- [4] Zrelov, V. P.: Otčet SSaP AN SSSR, 1954.
- [5] Kozodajev, M. S. — Tjapkin, A. A.: Pribori i técnica experimenta, 1, 1953, 21.

olympiády

Třetí kolo kat. A XVII. roč. FO

Třetí kolo kat. A XVII. roč. FO se konalo letos ve Středočeském kraji, a to v Čáslavi, v době od 8. do 10. dubna 1976.

Účastníci byli vybráni z nejlepších řešitelů 2. kola v jednotlivých krajích, a to všichni až po klasifikaci 2,3,3,4 (s permutací) a 12 z 21 z klasifikace 1,2,4,4. Klasifikace byla od letošního roku čtyřstupňová. Celkem bylo pozváno 80 úspěšných řešitelů 2. kola. Z pozvaných bylo 71 z gymnázií a 9 ze SPŠ; z nich byli 73 ze IV. ročníku, 6 z III. ročníku a 1 z II. ročníku.

Třetí kolo bylo narušeno uspořádáním soustředění pro mezinárodní matematickou olympiádu v době 3. kola kat. A FO, které způsobilo, že

Tabulka 1

Kraj	Počet všech pozvaných řešitelů	Počet úspěšných řešitelů	Z toho počet vítězů	Počet nedosta- vivších se	Počet neúspěš- ných
Praha	10	6	—	2	2
StřČ	6	3	1	—	3
JČ	2	1	1	—	1
ZČ	5	3	1	—	2
SČ	3	2	2	—	1
VČ	9	7	3	1	1
JM	10	10	3	—	—
SM	14	9	4	1	4
Bratislava	10	5	1	—	5
ZS	4	4	2	—	—
StřS	5	4	—	1	—
VS	4	2	1	—	2
Celkem	82	56	19		21

někteří pozvaní se na 3. kolo FO nedostavili; byli to 2 z Prahy, 1 z VČK, 1 ze SMK a 1 ze StřSK. Všichni nedostavivší se byli z gymnázia, 3 ze 4. roč. a 2 z 3. roč. Bylo určeno předem několik náhradníků, z nichž byl pozván 1 z Prahy a 1 ze StřČK, oba z gymnázia ze 4. ročníku.

Třetí kolo bylo slavnostně zahájeno 8. dubna v zasedací síni národního výboru města Čáslavě. Zúčastnil se ho i předseda NV města Čáslavě.

Teoretické úlohy řešili soutěžící 9. dubna na gymnáziu v Čáslavi. Odpoledne byla uspořádána exkurze do Kutné Hory a večer navštívili účastníci 3. kola představení v Dusíkově divadle. Laboratorní úlohu řešili soutěžící 10. dubna rovněž na gymnáziu v Čáslavi a po ukončení práce odjížděli domů.

Prvá tabulka uvádí pro každý kraj počet pozvaných řešitelů (včetně náhradníků), počet úspěšných řešitelů, z toho počet vítězů, počet nedostavivších se řešitelů a počet neúspěšných řešitelů. Ze 77 soutěžících bylo 56 úspěšných řešitelů a z toho 19 vítězů. Jména vítězů jsou uvedena v tabulce 2.

Výsledek 3. kola je letos příznivý. Soutěžící prostudovali dobře studijní téma z geometrické optiky (vysokoškolská látka) a 54 ze soutěžících bylo hodnoceno na úlohu z optiky výborně. V dřívějších letech byly výsledky úloh z geometrické optiky slabé.

Všech 19 vítězů dostalo od MŠ ČSR odměnu v celkové částce 5000 Kčs. Kromě toho SSM věnoval každému účastníku 3. kola publikaci Černý—Einhorn—Feyfar: Střední Čechy.

Tabulka 2

Pořadí	Jméno	Kraj	Škola	Místo	Třída	Zaměření
1.—2.	Kubát Karel	ZČ	G	Plzeň, n. Odborářů	4	MF
	Tarina Pavol	ZS	G	Topolčany	4	P
3.—4.	Turek Ilja	VČ	G	Hradec Králové	2	MF
	Svoboda Jiří	JM	G	Brno, kpt. Jaroše	3	Exp
5.—6.	Strakoš Zdeněk	SM	SPŠ	Ostrava-Vítkovice	4	—
	Bardiovský Vojtěch	VS	SPŠE	Košice	4	—
7.—8.	Šálek Ivo	SČ	G	Jablonec n. Nisou	4	P
	Basler Jiří	SM	G	Opava	4	MF
9.	Jenčík Karel	StřČ	SPŠ	Kutná Hora	4	—
10.	Vondrák Pavel	SČ	G	Ústí nad Labem	4	MF
11.—12.	Linkesch Oskar	SM	SPŠ	Ostrava-Vítkovice	4	—
	Kossey Pavol	Brat.	G	Bratislava, Novohr.	4	MF
13.—14.	Šimek Michal	JČ	G	Strakonice	4	P
	Zimmerman Ján	ZS	G	Šala	4	P
15.—19.	Krmela Václav	VČ	G	Lanškroun	4	P
	Novák Petr	VČ	G	Pardubice	4	MF
	Pavel Miroslav	JM	G	Jihlava	4	P
	Tomíček Leoš	JM	G	Žďár nad Sázavou	4	P
	Walach Kristian	SM	G	Ostrava-Zábřeh	4	P

K získání celkového obrazu o úspěších jednotlivých krajů ve FO všimněme si ještě výsledků třetích kol ze všech 17 ročníků.

a) Účastníci pro 3. kolo se vybírají podle klasifikace v 2. kole v kraji, a to do celkového počtu 80 každý rok. Pořadí krajů podle počtu účastníků v 3. kole je toto:

1. Praha 22,6 %, 2. JMK 14,3 %, 3. SMK 11,4 %, 4. Blava+ZSK 11,1 %

b) Pořadí podle úspěšných řešitelů v 3. kole je toto:

1. Praha 26,5 %, 2. JMK 18,7 %, 3. VČK 11,1 %, 4. Blava+ZSK 10,6 %

Vyšší procento úspěšných než účastníků znamená, že se kraj lépe uplatnil.

c) Pořadí podle počtu vítězů v 3. kole je toto:

1. Praha 28,6 %, 2. JMK 24,8 %, 3. VČK 10,7 %, 4.—5. SMK a Blava+ZSK 8,6 %

Vyšší procento vítězů než úspěšných v kraji znamená, že se účastníci kraje lépe umístili.

d) Nejdůležitější je však, jaká část účastníků z kraje se úspěšně uplatnila v 3. kole. Pořadí je toto:

1. JMK 71,4 %, 2. Praha 64,1 %, 3. VČK 57,3 %, 4. Blava+ZSK 51,7 %
a ostatní kraje jsou již pod 50 % až do 40,0 %.

NAŠE SOUTĚŽ

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Loňské soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních se zúčastnilo 47 jednotlivců a 7 kolektivů. Proti loňsku, kdy bylo celkem 31 soutěžících a 6 kolektivů, je to opět potěšující zlepšení. Po zhodnocení všech soutěžních prací uvádíme nejúspěšnější řešitele v jednotlivých vědních oborech a potom absolutní vítěze celé soutěže:

Matematika :

1. Karol Pekár, G Ružomberok	56 bodů
2.—3. Vlastimil Klíma, G Benešov	53
2.—3. Peter Takáč, G Šafárikovo	53
4. Pavol Tarina, G Topoľčany	51
5. Vladimír Technovský, G B. Štiavnica	49
6.—8. Rupert Leitner, G Semily	44
6.—8. Vladimír Matěna, G Grutnov	44
6.—8. Vladislav Tomášek, G Klatovy	44
9. Ivo Novák, G Handlová	42

Fyzika :

1.—4. Vojtech Bardiovský, SPŠE Košice	30 bodů
1.—4. Pavel Kolařík G Bílovec	30
1.—4. Pavol Tarina, G Topoľčany	30
1.—4. Kolektiv 4. A, G Jihlava (Kováříková, Pavel)	30
5.—6. Zdeněk Škarda, G Blovice	28
5.—6. Peter Takáč, G Šafárikovo	28
7.—8. Václav Krmela, G Lanškroun	26
7.—8. Zdeněk Strakoš, SPŠ Ostrava-Vítkovice	26

Konstrukční geometrie :

1. Peter Takáč, G Šafárikovo	20 bodů
2.—3. Rupert Leitner, G Semily	16
2.—3. Vladislav Tomášek, G Klatovy	16
4. Pavol Tarina, G Topoľčany	15
5. Josef Holda, G Mladá Boleslav	14

Absolutní vítězové :

1. Peter Takáč, G Šafárikovo	101 bodů
2. Pavol Tarina, G Topoľčany	96
3. Vladislav Tomášek, G Klatovy	85
4. Rupert Leitner, G Semily	83
5. Karol Pekár, G Ružomberok	81
6. Kolektiv 4. A, G Jihlava (Kováříková, Pavel)	75
7. Kolektiv G tř. kpt. Jaroše, Brno (Čadek, Svoboda)	74
8. Ivo Novák, G Handlová	73
9. Rostislav Urban, G Ostrava	70
10. Pavel Kolařík, G Bílovec	69

Nakonec připojujeme abecední seznam všech úspěšných řešitelů. Za jménem řešitele uvádíme ústav, na němž řešitel studoval, pak čísla správně řešených příkladů z matematiky, fyziky a konstrukční geometrie. Čísla uvedená v závorce jsou čísla příkladů rozřešených s menšími nedostatky. Příklady řešené nesprávně neuvádíme.

Petr Bahník, G Pardubice, M 7, 10 (3, 9); *Vojtech Bardiovský*, SPŠE Košice, F 1, 2, 3, 4, 5, 6; *Jiří Basler*, G Opava, M 3, 6, 7, 10, G 3; *Igor Böhm*, SPŠS Zvolen, M 1, 7, 8, 10, 11, 12 (2, 3, 4); *Mirko Eisler*, G W. Piecka Praha 2, M 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, G 3; *Tamás Fűri*, G Esztergom, M 7 (3); *Jaroslav Hájek*, G Bílovec, M 7, 8, 10 (3, 9); *Jindřich Halabala*, G Křenová Brno, M 7, 8, 10, 11, 12 (6), F 2, 3, 4, 5, 6, G (2, 3); *Josef Holda*, G Mladá Boleslav G 6 (2, 3, 5); *Miroslav Hralčák*, G Trebišov, M 7 (3), F 2, 3, 4, 5, 6, G (1, 2); *Vladimír Hudec*, G Vrútky, M 7, 8, 10 (3, 6); *Josef Jírů*, G Pelhřimov, M 7, 10 (11), F 2, 4, 5 (6); *Václav Kelar*, G Uničov, M 2, 4, 7, 8, 10, 11, 12 (3, 6); *Vlastimil Klíma*, G Benešov, M 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11 (6); *Pavel Kolařík*, G Bílovec, M 1, 2, 4, 7, 8, 10 (3, 6, 11), F 1, 2, 3, 4, 5, 6; *Miklós Kormóczi*, G Esztergom M 8; *Jan Kratochvíl*, G Pardubice, M 3, 10, 11 (1, 8, 9); *Václav Krmela*, G Lanškroun F 1, 3, 4, 6 (2, 5); *Jan Kučera*, SPŠS Liberec, M 3, 7, 8, 10, 11 (1, 6), F 2, 3, 4, 5, 6; *Rupert Leitner*, G Semily, M 1, 3, 4, 7, 8, 10, 12 (6, 9, 11), F 3, 4, 5, 6 (2), G 3, 4 (1, 2); *Oskar Linkesch*, SPŠ Ostrava-Vítkovice, M 3, 4, 7, 10, 11 (1), F 2, 3, 4, 5, 6, G (1); *Drahomír Malina*, G Semily, F 2, 4 (3, 6); *Jan Matějka*, G W. Piecka Praha 2, M 3, 7, 8, 10, 11 (1, 4, 9, 12); *Vladimír Matěna*, G Trutnov, M 2, 3, 7, 8, 10, 11, 12 (1, 4, 9), F 2, 3, 4, 6; *Danica Medvecká*, G A. Markuša Bratislava, M 3, 7, 10; *Lubomír Mucha*, G Prešov, M 3, 7, 10 (11), F 2, 4, 5 (3, 6); *Ivo Novák*, G Handlová, M 3, 7, 8, 9, 10, 12 (1, 4, 6, 11), F 2, 3, 4, 5, 6, G (1, 2); *Karol Pekár*, G Ružomberok, M 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (2, 6), F 2, 3, 4, 5, 6; *Ferenc Papp*, G Esztergom, M 7 (3); *Milan Repík*, G Trutnov, F 2, 3, 4, (6); *Zdeněk Strakoš*, SPŠ Ostrava-Vítkovice, F 2, 3, 4, 5 (1, 6);

Ruth Šachmanová, G W. Piecka, Praha 2, M 7; *Dušan Šišlák*, G Štúrovo, M 3, 7, F 6; *Zdeněk Škarda*, G Blovice, M 7, 8 (3, 5, 6, 10), F 1, 2, 3, 4, 5 (6); *Miroslav Šulc*, G Turnov, F 2, 3, 4, 6; *Peter Takáč*, G Šafárikovo, M 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (6), F 1, 2, 3, 4, 6 (5), G 1, 2, 3, 4; *Pavol Tarina*, G Topoľčany, M 1, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (2, 6), F 1, 2, 3, 4, 5, 6, G 1, 2, 3; *Petr Tas*, G Bílovec, M 1, 3, 7, 8, 10 (2, 6, 9); *Vladimír Technovský*, G Banská Štiavnica, M 1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (2, 3, 6); *Robin Thomas*, ZDŠ Praha 6, Sušická, M 8, 10; *Vladislav Tomášek*, G Klatovy, M 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12 (1, 2, 6), F 1, 2, 4, 5, 6, G 1, 3 (2, 4); *Miroslav Tůma*, G Nová Paka, M 3, 7, 8, 10 (1, 9, 11); *Rostislav Urban*, G Ostrava 1, M 3, 7, 8, 9, 11, 12 (2, 10), F 1, 3, 4 (2, 5), G 1, 3 (2); *Martin Václavík*, G Vsetín, M 7, 10 (3), F 3, 4, 5, 6 (2); *Róbert Vodiczka*, G Esztergom F 4 (2, 5, 6); *Ladislav Zamboj*, G Štúrovo, M 3, 7; *Jiří Zlatuška*, G tř. kpt. Jaroše Brno, M 3, 7, 10, 11 (4, 9), F 2, 4, 6 (3).

Kolektiv G Banská Štiavnica — G Zvolen (Dzurenko, Kozák), M 2, 3, 7, 8, 10, 12; *kolektiv G, tř. kpt. Jaroše, Brno* (Čadek, Svoboda), M 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11 (6, 12), F 1, 3, 4, 6 (5), G 1, 2; *kolektiv G Gottwaldov* (Liss, Maradová), M 7, 8 (2, 3, 10), F 2, 3, 4, 5, 6, G 1, 3 (2); *kolektiv 4. A G Jihlava* (Kováříková, Pavel), M 6, 7, 8, 9, 10, 11 (3, 4), F 1, 2, 3, 4, 5, 6, G (1, 2, 3); *kolektiv 3. C G Jihlava* (Stuhl, Žatečková), M 7, 10 (3, 6); *kolektiv SPŠ Kutná Hora* (Konvalinka, Kotrla), M 1, 10, 11 (3, 7, 8); *kolektiv G Trutnov* (Matyska, Netušilová), M 7, 10 (2), F 2, 4, 5, 6, G 3.

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních děkuje všem řešitelům za projevený zájem, vítězům blahopřeje a nejúspěšnějším z nich zašle z prostředků ministerstva i SPN věcné výhry.

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

1. Jedným vrcholom rovnoramenného trojuholníka ABC ($AC = BC$) vedte priečku tak, aby rozdelila trojuholník ABC na dva trojuholníky rovnoramenné. Koľko je možností a aké veľké sú vnútorné uhly trojuholníka, ktorý sa dá takým spôsobom rozdeliť?

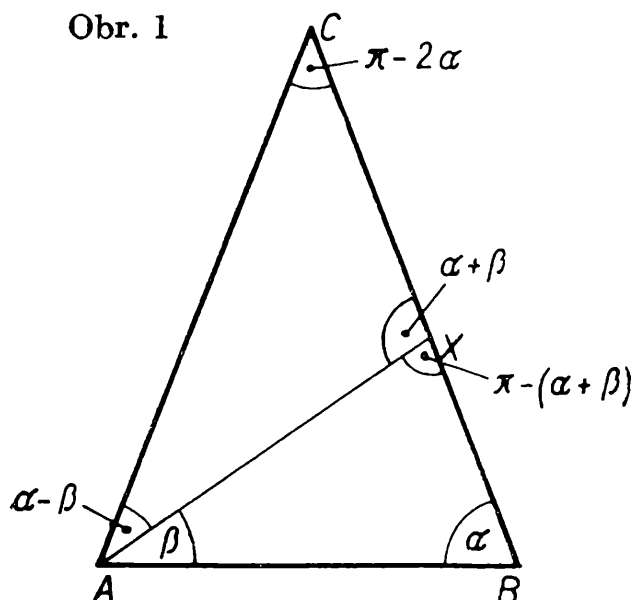
Jozef Filip

(Došlo 37 řešení)

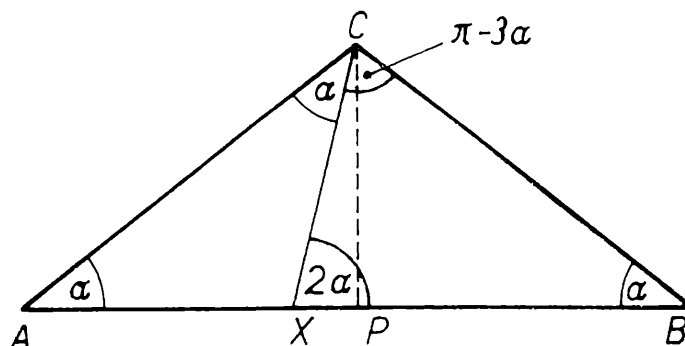
Řešil Vlastimil Klíma, IVb G, Benešov:

- Příčku můžeme vést
- I. vrcholem A ;
 - II. vrcholem B ;
 - III. vrcholem C .

Obr. 1



Obr. 2



I. Předpokládejme, že existuje rovnoramenný $\triangle ABC$ ($AC = BC$) a příčka AX ($X \in BC$), která jej dělí na rovnoramenné trojúhelníky ABX , AXC a že jsme příčku AX sestrojili (obr. 1).

Označme α velikost úhlů $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BAC$ a β velikost $\sphericalangle BAX$. Nyní můžeme určit velikost ostatních úhlů v $\triangle ABX$ a v $\triangle AXC$:

$$\sphericalangle AXB = \pi - (\alpha + \beta), \quad \sphericalangle ACB = \pi - 2\alpha, \quad \sphericalangle CAX = \alpha - \beta$$

a $\sphericalangle AXC = \alpha + \beta$.

Protože $\alpha + \beta > \alpha - \beta$, může být $\triangle AXC$ rovnoramenný jen ve dvou případech, a to:

1. $\alpha - \beta = \pi - 2\alpha \Leftrightarrow \beta = 3\alpha - \pi$;
2. $\alpha + \beta = \pi - 2\alpha \Leftrightarrow \beta = \pi - 3\alpha$.

Protože $\alpha > \beta$, může být $\triangle AXB$ rovnoramenný také jen ve dvou případech:

- a) $\beta = \pi - (\alpha + \beta) \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi - \alpha}{2}$;
- b) $\alpha = \pi - (\alpha + \beta) \Leftrightarrow \beta = \pi - 2\alpha$.

Máme tedy (teoreticky) čtyři možnosti:

$$1a) \quad 3\alpha - \pi = \frac{\pi - \alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{7}\pi, \text{ pak } \beta = \frac{2}{7}\pi;$$

$$2a) \quad \pi - 3\alpha = \frac{\pi - \alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5}\pi, \text{ pak } \beta = \frac{2}{5}\pi > \alpha, \text{ což je spor:}$$

$$1b) 3\alpha - \pi = \pi - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{5}\pi, \text{ pak } \beta = \frac{1}{5}\pi;$$

$$2b) \pi - 3\alpha = \pi - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ což není možné.}$$

Možnosti úloze vyhovující jsou tedy dvě: 1a) a 1b).

Proto existují dva typy*) trojúhelníků, které se dají rozdělit příčkou vycházející z vrcholu A na dva rovnoramenné trojúhelníky. Vnitřní úhly těchto trojúhelníků jsou: u prvního typu $77\frac{1}{7}^\circ$, $77\frac{1}{7}^\circ$, $25\frac{5}{7}^\circ$, u druhého typu 72° , 72° , 36° .

II. Příčku BX' ($X' \in AC$) z vrcholu B nemusíme vyšetřovat, neboť $\triangle ABC$ je souměrný podle osy základny AB a tak i příčka BX' je souměrně sdružená s příčkou AX podle téže osy a rozděluje $\triangle ABC$ na dva rovnoramenné trojúhelníky. Máme tedy u trojúhelníků obou typů po dvou příčkách.

III. Zbývá ještě prozkoumat příčku vycházející z hlavního vrcholu C (obr. 2).

Nechť příčka CX protíná základnu AB v bodě X , který je vnitřním bodem úsečky AP , kde bod P je střed základny AB . Pak $\sphericalangle AXC$ je tupý a ten je vnitřním úhlem $\triangle AXC$. Trojúhelník AXC může být tedy rovnoramenný jen v tom případě, že $\sphericalangle ACX = \sphericalangle CAX$.

Označme α velikost ostrého úhlu $\sphericalangle CAX$ a vypočítejme velikosti ostatních úhlů v $\triangle BCX$ a v $\triangle ACX$:

$$\sphericalangle CBX = \sphericalangle ACX = \alpha, \quad \sphericalangle CXB = 2\alpha \text{ a } \sphericalangle BCX = \pi - 3\alpha.$$

Protože $2\alpha > \alpha$, může být $\triangle BCX$ rovnoramenný jen ve dvou případech:

$$c) 2\alpha = \pi - 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5}\pi;$$

$$d) \alpha = \pi - 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}\pi.$$

Existují zase dva typy trojúhelníků, které je možno rozdělit příčkou vycházející z hlavního vrcholu C na dva rovnoramenné trojúhelníky. Trojúhelník prvního typu má vnitřní úhly 36° , 36° , 108° , trojúhelník druhého typu je pravoúhlý. Protože $\triangle ABC$ je souměrný podle osy základny AB , můžeme v případě c) vést zase další příčku CX' , která je souměrně sdružená s příčkou CX podle téže osy a rozděluje $\triangle ABC$ na dva trojúhelníky rovnoramenné.

Závěr. Existují čtyři typy rovnoramenných trojúhelníků, které je možno rozdělit příčkou vedenou jedním vrcholem na dva rovnoramenné

*) Trojúhelníky určitého typu tvoří množinu trojúhelníků navzájem podobných.

trojúhelníky. Dva z nich jsou ostroúhlé, jeden tupoúhlý a jeden pravoúhlý. U ostroúhlých trojúhelníků možno vést v každém příčku dvojím způsobem, v tupoúhlém trojúhelníku též dvojím způsobem a v pravoúhlém trojúhelníku jedním způsobem — dohromady máme tedy sedm způsobů rozdělení.

2. Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 71x + k = 0, \quad k = \text{konstanta},$$

jestliže pro její kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 platí rovnost $x_1 + x_2 = x_3 \cdot x_4$.

Jan Fráňa

(Došlo 19 řešení)

Upravené řešení Václava Kelara, 4b. G Uničov :

Nechť x_1, x_2, x_3, x_4 jsou kořeny dané rovnice. Označíme-li $x_1 + x_2 = a$, $x_1 \cdot x_2 = c$, pak platí rovnice:

$$x^2 - ax + c = 0 ;$$

pro reálné kořeny musí platit

$$a^2 - 4c \geq 0 .$$

Podobně označíme-li $x_3 + x_4 = b$, pak s ohledem na podmínku $x_3 \cdot x_4 = x_1 + x_2$ platí rovnice:

$$x^2 - bx + a = 0 ;$$

pro reálné kořeny musí opět platit

$$b^2 - 4a \geq 0 .$$

Vynásobením obou kvadratických rovnic a úpravou dostaneme:

$$x^4 - (a + b) \cdot x^3 + (a + ab + c) \cdot x^2 - (a^2 + bc) \cdot x + ac = 0 .$$

Porovnáním koeficientů této rovnice a rovnice dané vyjdou vztahy:

- (1) $a + b = 11$
- (2) $a + ab + c = 43$
- (3) $a^2 + bc = 71$
- (4) $ac = k$.

Odtud: $a = 11 - b$, $c = 43 - a - ab = b^2 - 10b + 32$, což po dosazení do (3) dá rovnici:

$$b^3 - 9b^2 + 10b + 50 = 0 .$$

Substituce $b = m + 3$ dává redukovanou kubickou rovnici:

$$m^3 - 17m + 26 = 0 ,$$

kterou upravíme na tvar:

$$(m^3 - 8) - 17(m - 2) = 0,$$

$$(m - 2)(m^2 + 2m - 13) = 0.$$

Její řešení je

$$m_1 = 2, \quad m_{2,3} = -1 \pm \sqrt{14}.$$

Koeficienty rovnic $x^2 - ax + c = 0$, $x^2 - bx + a = 0$ mají hodnoty:

$$b_1 = 5, \quad a_1 = 6, \quad c_1 = 7$$
$$b_{2,3} = 2 \pm \sqrt{14}, \quad a_{2,3} = 9 \pm \sqrt{14}, \quad c_{2,3} = 30 \pm 6\sqrt{14}.$$

Z nich vyhovují $a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ nejvýše jednomu ze vztahů $a^2 - 4c \geq 0$, $b^2 - 4a \geq 0$, tedy nedávají vesměs reálné kořeny. Uvažujme proto ještě a_1, b_1, c_1 . Dosazením do obou kvadratických rovnic dostáváme:

$$x^2 - 6x + 7 = 0 \text{ s kořeny } x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2};$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ s kořeny } x_3 = 2, \quad x_4 = 3; \text{ konstanta } k = 42.$$

Daná rovnice tedy zní

$$x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 71x + 42 = 0$$

a má reálné kořeny $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$, $x_3 = 2$ nebo 3 , $x_4 = 3$ nebo 2 .

3. Dokažte, že v trojúhelníku (při obvyklém označení jeho stran a úhlů) platí

$$a \geq b \Leftrightarrow \cos \alpha \leq \frac{\sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

Stanislav Horák

(Došlo 42 řešení)

Řešil Vlastimil Klíma, 4.b G Benešov:

V následujících ekvivalencích budeme používat kosinové a sinové věty ve tvaru

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \alpha, \quad c : b = \sin \gamma : \sin \beta$$

a též toho, že $a > 0, b > 0, c > 0$.

$$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow c^2 \geq b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow c^2 \geq 2bc \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2b} \geq \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha \leq \frac{\sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

Ze zahraničních časopisů

Ze sovětského časopisu *Kvant*:

1. Řešte soustavu rovnic

$$2^x + y = 7$$

$$\log_2 \frac{y}{3} = 2 - x.$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$x^5 + y^5 = 33$$

$$x + y = 3.$$

3. Řešte nerovnici

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0.$$

4. Partitura:

$$\text{RE} + \text{MI} = \text{FA}$$

$$\text{DO} + \text{SI} = \text{MI}$$

$$\text{LA} + \text{SI} = \text{SOL}$$

Výsledky:

1. $(2; 3)$, $(\log_2 3; 4)$. 2. $(2; 1)$, $(1; 2)$. 3. $x \leq -5$, $1 \leq x < \frac{8 + \sqrt{22}}{3}$.

4. DOREMIFASOL = 40275683109.

Z bulharského časopisu *Matematika*:

1. Řešte rovnici

$$9 \cdot 5^{\log x} - 5^{\log \frac{x}{10}} = 5500.$$

2. Řešte rovnici

$$0,5x^2 \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$$

3. Řešte rovnici

$$\log_2 (9 - 3^x) = 3 - x.$$

4. Jsou dány množiny

$$\mathbf{A} = \{a, b, c, d\}, \mathbf{B} = \{a, b, 4\}, \mathbf{C} = \{4, 2, c\}, \mathbf{D} = \{a, b, 3\}, \mathbf{E} = \{1, b\}.$$

Určete prvky a, b, c, d tak, aby platilo $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$, $\mathbf{D} \subset \mathbf{A}$, $\mathbf{E} \subset \mathbf{B}$.

Výsledky: 1. 10^4 ; 2. 4, 2; 3; 0. 4. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

Z jugoslávského časopisu *Matematičko fizički list*:

1. V rovnici $x^2 - x + m - 1 = 0$ určete m tak, aby o jejích kořenech platilo

$$x_1^3 + x_2^3 = 7$$

2. Zjednodušte výraz

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot (x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}}),$$

kde

$$x = \left(\frac{a + b}{a - b} \right)^{\frac{2pq}{q-p}}$$

3. Je dáno $\sin x + \cos x = a$. Jako funkce a vyjádřete $S_3 = \sin^3 x + \cos^3 x$, $S_4 = \sin^4 x + \cos^4 x$. Pro $S_n = \sin^n x + \cos^n x$ odvoďte rekurentní formule pomocí S_{n-1} a S_{n-2} .

4. Mnohočlen

$$x^4 - 3x^2 - 12x - 35$$

rozložte na součin dvou kvadratických trojčlenů.

Výsledky :

$$1. m = -1. \quad 2. z = \left(\frac{a + b}{a - b} \right)^{\frac{q+p}{q-p}}. \quad 3. S_3 = \frac{3a - a^3}{2},$$

$$S_4 = \frac{-a^4 + 2a^2 + 1}{2}, \quad S_n = a \cdot S_{n-1} - \frac{a^2 - 1}{2} \cdot S_{n-2}.$$

$$4. (x^2 - x - 7) \cdot (x^2 + x + 5).$$

Doc. OTA SETZER, Praha

fyzikální zábavy

Utéci z kosmu nelze jen tak

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Posledně jsme si ukazovali jednu zajímavost, na které má podíl gravitační pole naší planety, a dnes tu máme druhou, svědčící dokonce o tom, jak často přijímáme téměř bezmyšlenkovitě „pravdy“, tradující se z jedné generace na druhou, aniž si je prověříme výpočtem.

Když se řekne beztlížný stav, nějak se automaticky předpokládá, že tíhová síla je trvale „zrušena“ příslušně velkou silou odstředivou. Na základě toho se vžila představa, že kosmonaut, který opustí kosmickou loď, si musí dávat velký pozor na to, aby na základě nějakého — třeba jen malého — vnějšího impulsu trvale neuletěl do prostoru. Většinou je tedy každý nakloněn představě, že takový impuls způsobí, že kosmonaut jednak třeba upadne do rotace, jednak se začne od své lodi rovnoměrně přímočaře vzdalovat, protože se pohybuje v trvale beztlížném prostředí.

Jenže skutečnost bude zcela jiná, přičemž stačí tužka a papír, abychom se o tom přesvědčili. Kosmonaut i jeho loď se totiž pohybují v gravitačním poli Země, třebaže jsou odpovídající tíhové síly zcela paralyzovány. Kosmonaut, jenž vystoupí z lodi, představuje samostatnou družici, pohybující se prostorem. Jestliže se nějakým způsobem od své lodi odrazí, vznikne dvojice impulsů, takže dráha kosmické lodi i kosmonauta se poněkud změní. Výpočet ukazuje, že se však obě oběžné dráhy budou protínat a že se obě tělesa — loď i kosmonaut — dvakrát za jeden oblet k sobě znovu těsně přiblíží.

Kdyby se kosmonaut nějak přidržel lodi tak, aby mohl pokrčit nohy a pak se vlastní silou odrazil ve směru kolmém na směr dosavadního pohybu, začal by se sice od lodi vzdalovat, avšak po dosažení maxima vzájemné vzdálenosti by se začal neúprosně zase přibližovat a nakonec by se přiblížil tak, že by mohl být snadno zachycen. Lze dokonce vypočítat, že — kdyby se odrazil veškerou silou, které je schopen — by se od lodi vzdálil maximálně o 3,5 km.

Poněkud složitější případ nastane, odrazí-li se kosmonaut ve směru oběžného pohybu nebo v příslušném protisměru. Avšak i v těchto případech platí pravidlo, že by daleko neuletěl; také tentokrát by se po dosažení extrémní vzdálenosti začal ke své lodi přibližovat a nakonec by mohl být zachráněn.

Přesto se však při práci lidí v otevřeném prostoru bude i nadále počítat s bezpečnostním zajištěním; vždyť vodícím lanem či kabelem mu může být dodáván vzduch k dýchání či energie, kterou bude muset při své práci vynaložit. Jak známo, zkoušela se již i raketová „koloběžka“, která by kosmonautovi umožnila návrat v případě, že by bylo jeho spojení s lodí přerušeno. Navíc budou kosmické nástroje opatřeny „paralyzátorem“ reakčních sil, protože jinak by i sebemenší utahování šroubu nebo zatloukání hřebíku bylo téměř [neřešitelným problémem. To je však už docela jiná kapitola.

různé

Súťažné úlohy z fyziky v MLR a ich riešenie

JÁN GEDEI, Stavebná fakulta SVŠT v Bratislave

Súťaženie v riešení fyzikálnych úloh je v Maďarskej ľudovej republike veľmi rozšírené. Nemalú zásluhu na tom má aj mládežnícky časopis pre matematiku a fyziku „Középiskolai Matematikai Lapok“ (Stredoškolské matematické listy). V každom čísle sú uverejnené aj úlohy z fyziky v počte 12, odstupňované podľa jednotlivých tried základnej-, resp. strednej školy. S maďarským textom spolu sú uverejnené aj cudzojazyčné texty úloh — v ruskom a anglickom jazyku — a tak žiaci si môžu osvojiť odborné výrazy z matematiky a fyziky v jazyku ruskom a anglickom hravo.

Úspešné riešenie fyzikálnych úloh okrem splnenia požiadaviek školskej fyziky predpokladá aj hlbšie štúdium ďalšej literatúry, ktorú žiakom časopis vždy odporúča. Pravda, veľkú službu konajú aj vzorové riešenia úloh, ktorých dôkladné štúdium prináša žiakom mimoriadne veľa osohu.

V tejto práci uvediem úlohy stredoškolskej študijnej súťaže z fyziky v MLR v roku 1975 podľa „Középiskolai Matematikai Lapok“ zv. 51, č. 2, str. 81. Súťaž sa usporiadala pre triedy so všeobecnými osnovami a pre triedy so špeciálnymi osnovami — matematické a fyzikálne zameranie — osobitne. Súťažné úlohy boli čiastočne rovnaké. Súťaženie sa uskutočnilo v troch kolách. Uvediem text úloh a ich riešenie.

Úlohy I. kola

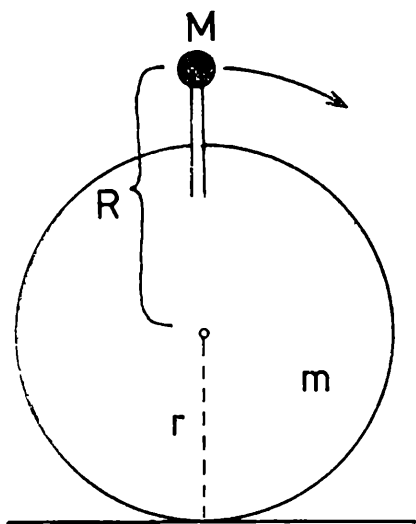
A) Stredné školy so všeobecnými osnovami

1. úloha. Na disk gramofónu vo vzdialenosti $r = 10$ cm od stredu disku položíme mincu. Koeficient trenia mince vzhľadom na kotúč je $\mu = 0,05$. Disk sa dáva do pohybu zo stavu pokoja, jeho uhlové zrýchlenie je konštantné: $\omega = 2 \text{ s}^{-2}$.

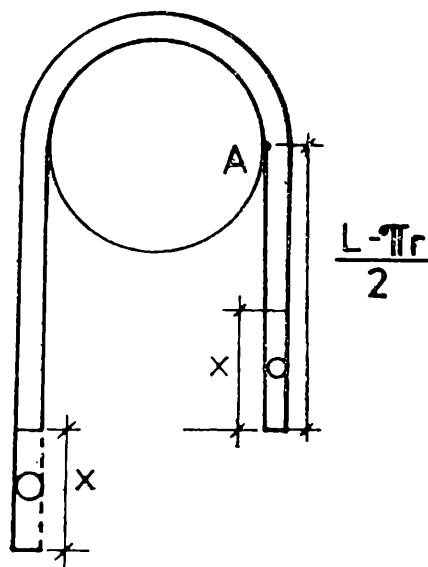
Po uplynutí akého času sa posunie minca na disk?

2. úloha. K plnému valcu, ktorý má polomer $r = 3$ dm, hmotnosť je $m = 40$ kg, pomocou tyče je pripevnené teleso o hmotnosti $M = 4$ kg. Hmotnosť tyče možno zanedbať (obraz 1). Teleso je od osi valca vo vzdialenosti $R = 5$ dm.

Toto zariadenie sa vychýli zo svojej labilnej rovnovážnej polohy. Akou rýchlosťou sa zrazí teleso hmotnosti M so zemou? Valec sa kotúľa bez šmyku, $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Obr. 1



Obr. 2

3. úloha. Vo veľkej nádobe naplnenej ortuťou sa vznáša valec s piestom. Piest je spojený s dnom nádoby pomocou nite. Vo valci je vzduch, ktorého výška je 21,5 cm. Uzavreté dno valca je 4 cm pod hladinou ortute.

Akú polohu zaujme valec, ak niť skrátime o 4,5 cm?

B) *Stredné školy so špeciálnymi osnovami*

1. úloha bola totožná s 2. úlohou A).

2. úloha. Na naklonenej rovine sa šmýkajú sany, uhol sklonu naklonenej roviny je $\alpha = 35^\circ 52'$. Osoby, ktoré sedia na saniach, merajú tlak vzduchu pomocou ortuťového barometra. Keď trubica barometra je kolmá na naklonenú rovinu, veľkosť výšky ortuťového stĺpca je $h_n = 96$ cm, keď je trubica zvislá, veľkosť výšky ortuťového stĺpca je $h_z = 100$ cm.

Aký veľký je koeficient trenia a aký veľký je tlak vzduchu?

3. úloha. V nádobe naplnenej ortuťou sa vznáša valec s piestom. Obsah dna nádoby je 10 cm^2 . Piest je spojený s dnom nádoby pomocou nite. Vo valci je vzduch o výške 47 cm. Uzavreté dno valca je 10 cm pod hladinou ortute.

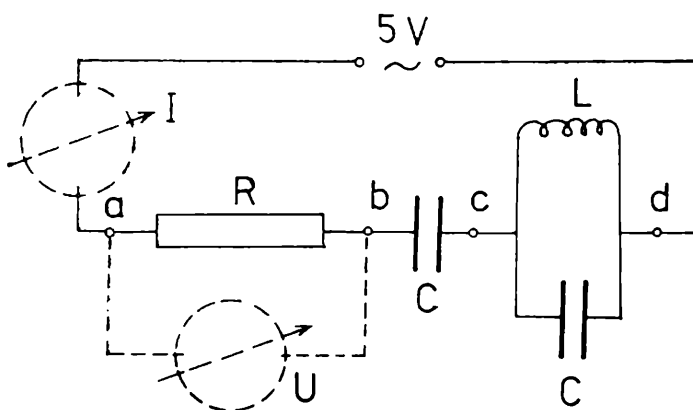
a) Akú polohu zaujme valec, ak niť skrátime o 6 cm?

b) Koľko ortute treba doliať do nádoby, ak chceme, aby po uskutočnení a) hladina ortute bola znova v pôvodnej výške?

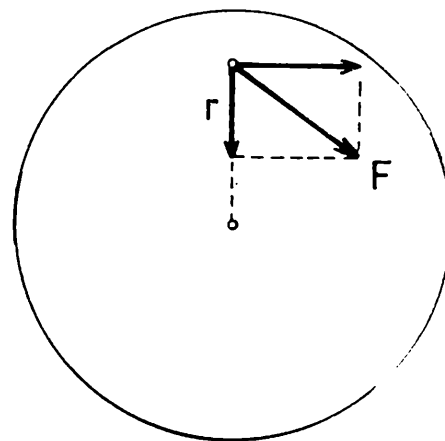
Úlohy II. kola

Úlohy pre obidve skupiny A) a B) boli rovnaké.

1. úloha. Doska dĺžky $L = 3,06$ m o hmotnosti $M = 12$ kg, na jednom konci umiestnená v ložisku, visí vo zvislej polohe. Strelu hmotnosti



Obr. 3



Obr. 4

$m = 0,25$ kg vstreľíme do dolného konca dosky tak, že projektil zostane v dreve a doska sa vychýlí smerom hore.

Akou rýchlosťou treba vystreliť strelu, aby sa doska zodvihla do vodorovnej polohy?

2. úloha. Cez valček, ktorý je vo vodorovnej polohe a má kruhový prierez s polomerom $r = 10$ cm, preložíme povraz dĺžky $L = 2$ m tak (obraz 2), že na obidvoch stranách valčeka visí rovnako dlhá časť. Ak jeden koniec povrazu potiahneme trochu, labilná rovnovážna poloha sa poruší a povraz sa úplne zošmykne.

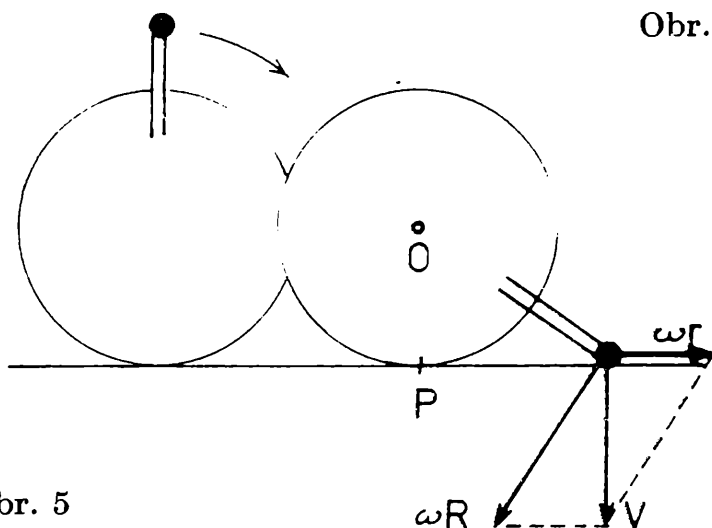
Ako hlboko je dolný koniec povrazu vtedy, keď sa povraz v bode A oddelí od valčeka? Trenie zanedbáme.

3. úloha. V zapojení podľa obrázku 3 odpor R má veľkosť $R = 5$ k Ω ; kapacity C obidvoch kondenzátorov sú rovnako veľké. Ak zariadenie zapojíme na striedavé napätie veľkosti $U = 5$ V, merací prístroj pre intenzitu prúdu ukazuje 1 mA, prístroj na meranie napätia ukazuje 13 V.

Koľko ampérov, resp. koľko voltov ukazujú prístroje, ak frekvenciu znížime na $\sqrt{2}$ -tinu? Odpor voltmetra považujte za nekonečne veľký, odpor ampérmetra možno zanedbať.

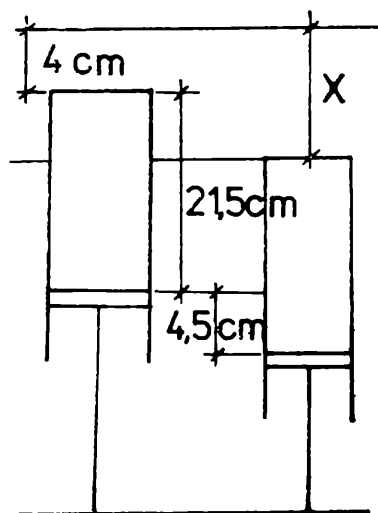
III. kolo

Na základe výsledkov II. kola z oboch skupín A) a B) 11 — 11 žiakov sa zúčastnilo na experimentálnom kole (laboratórne práce) na Katedre všeobecnej fyziky Prírodovedeckej fakulty ELTE (Univerzita vied Lóránda Eötvösa) v Budapešti. Súťažiaci sa zaoberali s dvomi experimentálnymi úlohami. V jednej skúmali otáčanie sa vodiča vo viacfázovom magnetickom poli, v druhej úlohe analyzovali fotografickú snímku obrazu, vznikajúceho v dutom zrkadle.



Obr. 5

Obr. 6



Riešenie úloh I. kola

A) Všeobecné triedy

1. úloha. Uhlová rýchlosť disku je

$$\omega = \beta t .$$

Kolmá zložka sily, pôsobiaca na mincu, je

$$F_t = mr\omega^2. \quad (3)$$

Ak (1) dosadíme do (2), dostaneme

$$F_t = mr\beta^2 t^2. \quad (3)$$

Zložky sily v smere polomeru je (obraz 4)

$$F_n = ma = m\beta r \quad (4)$$

Výslednica síl F_t a F_n je

$$F = \sqrt{[(mr\beta^2 t^2)^2 + (m\beta r)^2]} = mr\beta \sqrt{(\beta^2 t^4 + 1)} . \quad (5)$$

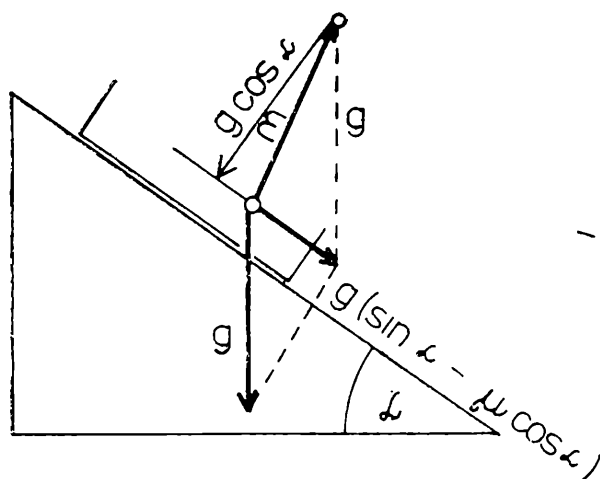
Táto sila (5) je odovzdaná minci zatiaľ, kým sila F nenadobudne veľkosť μmg , t.j.

$$r\beta \sqrt{(\beta^2 t^4 + 1)} = \mu g .$$

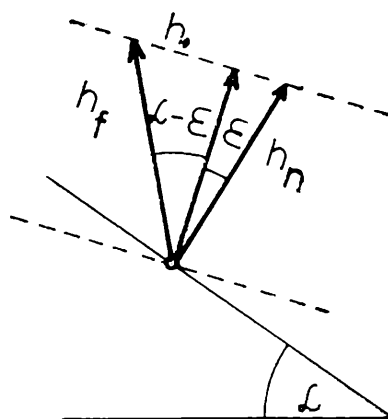
Z toho hľadaný čas je

$$t = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \sqrt[4]{\left[\left(\frac{\mu g}{r\beta}\right)^2 - 1\right]} = 1,07 \text{ s} .$$

2. úloha. Pádcom telesa hmotnosti M (obraz 5) vzniká práca $Mg(R + r)$. Táto práca sa premení na pohybovú energiu postupného a otáčavého pohybu valca, resp telesa hmotnosti M .



Obr. 7a



Obr. 7b

Dá sa ľahko ukázať, že teleso hmotnosti M sa zrazí so zemou zvislou rýchlosťou veľkosti V , pretože stred okamžitého otáčavého pohybu je bod P . Nech v tom okamihu je uhlová rýchlosť valca ω . Teleso hmotnosti M dopadne na zem rýchlosťou V a tá je vektorovým súčtom postupnej rýchlosti bodu O a rýchlosti otáčavého pohybu okolo bodu O . Teda platí

$$Mg(R + r) = \frac{m(\omega r)^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot 0,5mr^2}{2} + \frac{M\omega^2(R^2 - r^2)}{2} \quad (6)$$

Z rovnice (6) pre ω dostaneme

$$\omega = \frac{2g(R + r)}{R^2 + r^2[3m/(2M - 1)]} = 3,22 \text{ s}^{-1}.$$

Potom hľadaná rýchlosť je

$$V = \omega \sqrt{(R^2 - r^2)} = 1,29 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. úloha. Rovnovážna poloha nastane vtedy, keď na dno valca pôsobiace tlaky — vnútorný a vonkajší tlak — budú rovnaké. Použijeme Boyle-Mariottov zákon, pričom počítame v centimetroch ortuťového stĺpca (obraz 6):

$$(76 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) 21,5 \text{ cm} = (76 \text{ cm} + x) [21,5 \text{ cm} + 4,5 \text{ cm} - (x - 4 \text{ cm})]. \quad (7)$$

Po úprave (7) dostaneme rovnicu

$$x^2 + 46 \text{ cm} \cdot x - 560 \text{ cm}^2 = 0,$$

z ktorej je $x = 10 \text{ cm}$. Teda uzavretý koniec valca bude 10 cm pod hladinou ortute.

B) Špeciálne triedy

2. úloha. Najskôr určíme, aký smer a akú veľkosť má tiažové zrýchlenie g , ktoré pozorujeme na saniach (obr. 7a). Uvažujme olovnicu.

Tiažová sila $F_1 = mg$, pôsobiaca na kyvadlo hmotnosti m , a napínacia sila F_2 , pôsobiaca v niti, majú výslednicu síl, ktorá udeľuje hmotnosti na naklonenej rovine zrýchlenie. Táto výslednica F má veľkosť

$$F = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) .$$

Z toho vyplýva, že niť olovnice sa odchýli od zvislého smeru o uhol ε , kde ε je mezdný uhol trenia. Platí

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \mu .$$

Sila, ktorá napína niť, je

$$F_2 = mg \cdot \cos \alpha / \cos \varepsilon ,$$

pričom $F_2 < F_1$. Na saniach hladina ortute je kolmá na smer olovnice a ortuť sa chová tak, akoby jej merná tiaž bola menšia ako $13,6 \text{ p/cm}^3$, totiž $\gamma = 13,6 \text{ p/cm}^3 \cdot \cos \alpha / \cos \varepsilon$.

Označme výšku ortuťového stĺpca pri vonkajšom atmosférickom tlaku, ktorá zodpovedá výške v kľudnej sústave, h_{00} . Otruť by vystúpila (v dôsledku účinkujúcej menšej mernej tiaže) v Toricelliho trubici, ktorú držíme v smere kyvadla, do výšky

$$h_0 = h_{00} \cdot \cos \varepsilon / \cos \alpha . \quad (8)$$

Ak trubicu nakloníme, ortuťový stĺpec ostane kolmý na priamku, kolmú na h_0 (na obraze 7b nakreslená čiarkovane). Z pravouhlého trojuholníka je

$$h_n = h_0 / \cos \varepsilon , \quad (9)$$

resp. po dosadení z (8) vzťah (9) prejde na tvar

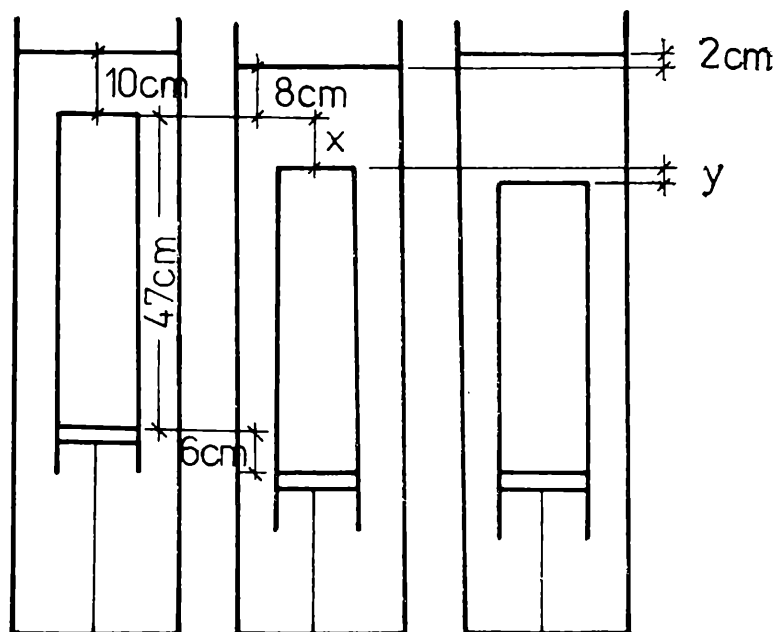
$$h_n = h_{00} / \cos \alpha . \quad (10)$$

Z toho výška ortuťového stĺpca, zodpovedajúca výške skutočného atmosférického tlaku v kľudnej sústave, je

$$h_{00} = h_n \cdot \cos \alpha = 76,8 \text{ cm} .$$

Z pravouhlého trojuholníka (na obraze 7b) dostaneme pre h_z

$$\begin{aligned} h_z &= \frac{h_0}{\cos(\alpha - \varepsilon)} = \frac{h_n \cdot \cos \varepsilon}{\cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \alpha \sin \varepsilon} = \\ &= \frac{h_n}{\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \varepsilon} . \end{aligned} \quad (11)$$



Obr. 8

Pretože koeficient trenia $\mu = \operatorname{tg} \varepsilon$, je z (11)

$$\mu = \frac{h_n}{h_z \cdot \sin \alpha} - \cotg \alpha = \frac{4}{15} = 0,267$$

a z toho je $\varepsilon = 15^\circ$.

3. úloha. a) Pri pohybe valca zmení sa hladina ortute v nádobe. Pomer obsahov dna nádoby a dna valca je 1 : 2. Rovnovážna poloha nastane vtedy, ak tlaky, pôsobiace na dno valca, budú rovnako veľké.

Ak dno valca sa posunie smerom dolu o x cm (obraz 8), potom hladina ortuťového stĺpca poklesne o $(x - 6)/2$ cm. Podľa Boyle-Mariottovho zákona platí:

$$(76 \text{ cm} + 10 \text{ cm}) \cdot 47 \text{ cm} = \left(76 \text{ cm} + x + 10 \text{ cm} - \frac{x - 6 \text{ cm}}{2} \right) \cdot (47 \text{ cm} + 6 \text{ cm} - x). \quad (12)$$

Po úprave (12) dostaneme rovnicu

$$x^2 + 125 \text{ cm} \cdot x - 1350 \text{ cm}^2 = 0,$$

z ktorej je $x = 10$ cm. Ortuťový stĺpec v nádobe teda poklesne o 2 cm.

b) Použijeme Boyle-Mariottov zákon pre prvý a tretí stav valca (obraz 8):

$$(76 \text{ cm} + 10 \text{ cm}) \cdot 47 \text{ cm} = (76 \text{ cm} + 20 \text{ cm} + y)(43 \text{ cm} - y). \quad (13)$$

Z (13) po úprave máme

$$y^2 + 53 \text{ cm} \cdot y - 86 \text{ cm}^2 = 0 ,$$

z ktorej je

$$y = 1,58 \text{ cm} .$$

Pre dosiahnutie pôvodnej výšky hladiny ortuť treba doliať do nádoby ortuť v objeme

$$V = 20 \text{ cm}^2 \cdot 2 \text{ cm} + 10 \text{ cm}^2 \cdot y , \quad (15)$$

čo po dosadení (14) dáva objem $V = 55,8 \text{ cm}^3$.

Riešenie úloh II. kola

1. úloha. Ide o balistické kyvadlo (obraz 9). Pri nepružnom zraze použijeme zákon zachovania hybnosti. Pretože sa jedná o otáčavý pohyb dosky, použijeme moment hybnosti. Moment hybnosti pre jediný hmotný bod je súčinom hybnosti a polomeru otáčania (mvr); pre pevné teleso je moment hybnosti súčinom uhlovej rýchlosti a momentu zotrvačnosti ($\omega \cdot J$).

V okamihu dostrelu doska sa vychýli nejakou uhlovou rýchlosťou ω , na strelu sa dívajme, akoby sa pohybovala na kruhovej dráhe. Preto podľa zákona zachovania hybnosti platí

$$mvL = \omega mL^2 + \omega(1/3) \cdot ML^2 . \quad (16)$$

Zo (16) počiatočná uhlová rýchlosť je

$$\omega = \frac{v}{L} \cdot \frac{1}{1 + M/(3m)} . \quad (17)$$

Na začiatku pohybu súčet pohybovej energie dosky a vstreleného projektilu je

$$\frac{m(\omega L)^2}{2} + \frac{\omega^2 ML^2/3}{2} = 0,5\omega^2 L^2(m + M/3) = \frac{0,5mv^2}{1 + M/(3m)} \quad (18)$$

Ak chceme, aby sa doska, spolu so strelou v nej, zodvihla až do vodorovnej polohy, potom práca, potrebná na zodvihnutie, musí sa rovnať počiatočnej pohybovej energii (18), tj. platí

$$\frac{0,5mv^2}{1 + M/(3m)} = mgL + MgL/2 . \quad (19)$$

Z toho rychlost strely je

$$v = [2gL(1 + M/2m)(1 + M/(3m))] . \quad (20)$$

Po dosazení daných údajov z (20) dostaneme hľadanú rýchlosť $v = 160 \text{ m/s}$.

(Dokončenie)

recenze

Využití publikace

„Metrologie a zavedení soustavy jednotek SI“

na středních odborných školách

V roce 1975 vydalo SNTL-VÚNM publikaci dr. Šindeláře a kolektivu „Metrologie a zavedení soustavy jednotek SI“. Tato čtyřdílná publikace předkládá veřejnosti vysvětlení a vývoj jednotek SI a současně uvádí ve třech dílech bohatou sérii převodních tabulek z technické soustavy na soustavu SI. Koncepce práce vychází z teoreticko-historického výkladu vývoje soustavy SI a metrologie s ohledem na současný a předpokládaný vývoj. Tomu je věnován v podstatě celý první díl výše jmenované publikace.

Praktičnost se ukazuje nejen v možnosti využití pro vyučující na odborných školách, ale i pro školy základní, kde v předmětu fyzika se soustava SI stále ještě zpravidla nepoužívá, a žáci přicházející na střední školy téměř o její existenci nevědí. Z tohoto hlediska je pro výuku fyziky na základních školách a následně i na SPŠ vhodná kapitola 2 I. dílu. Týká se všech

teoreticko-odborných i praktických předmětů. Pro studium jazyků nebo pro využití cizojazyčné literatury je pro žáky velmi vhodná tabulka cizojazyčných názvů veličin v kapitole 4.3. Její potřebnost je zvýšena tím, že žáci mnohdy zpracovávají konstrukční úlohy na základě doporučené literatury (např. prospektů), kterou si obstarávají sami, přičemž jsou často nuceni použít materiálů v cizích jazycích. Kapitoly 14, 16 a 17 jsou velmi vhodné pro přehledné určení obecného převodního vztahu z TS na SI. Velmi názorné jsou křížové tabulky, které na první pohled dávají žákům možnost porovnání číselných hodnot veličiny v různých zvolených jednotkách. Křížové tabulky jsou v 18. kapitole I. dílu. Jejich využití je vhodné zvláště v předmětech mechanika a fyzika a ve strojnických měřeních vzhledem k tomu, že uváděné převody porovnání stejné veličiny v různých jednotkách patří pro studenty k nejobtížnějším úkonům.

Na první díl navazují vlastní převodní tabulky ve formě tří dílů. Těchto tabulek se dá využí-

vat pro převody příkladů zadávaných v technické soustavě, případně pro obdobné případy naměřených veličin při strojnických měřeních. V této oblasti je možné bohaté využití těchto tabulek v předmětech mechanika a stavba a provoz strojů. Ve strojnickém měření znamenají tabulky vysokou racionalizaci práce pro přesné výpočty. To se týká hlavně měření tlaků (zvláště na kapalinových manometrech), krouticích momentů, otáček, výhřevnosti paliv a zkoušek olejů.

Publikace dr. Šindeláře a kol. je vhodná nejenom pro jmenované předměty. Její využití je výhodné též v předmětu fyzika, matematika, technologie a i v neodborných předmětech, zvláště v ruském jazyce, českém jazyce, částečně v dějepisu a z ideového hlediska v občanské nauce.

Ing. Pavel Kalčík

Josef Linhart:

Činnost a poznávání.

Nakladatelství Academia, Praha
1976, 576 stran, Kčs 135.

Kniha podává hluboce fundovaný pohled na současný stav boha-

tého rozvoje těch odvětví psychologie, která se zaměřují na vzájemné prolínání činnosti člověka a poznávacích procesů. Přitom je zpracování přístupné širokým čtenářským kruhům. Důkladný rozbor výsledků jak světových, tak domácích rozvíjí před čtenářem objektivní obraz pojmů činnosti a poznávání. Autor neulpívá na obvyklém nomenklaturním výčtu druhů činnosti a třídění typů paměti, ale studuje vnitřní struktury a jejich vývojové zákonitosti. Výsledkem je model funkčního systému lidské činnosti.

Závěrečná část knihy přihlíží k možnostem využití jednotlivých poznatků ve společenské praxi. Zaměřuje se ke zvyšování pracovní efektivity, k užití v řídicích orgánech, k cestám vnitřní organizace pracovních skupin a k aktivnímu poměru k práci včetně tvořivé činnosti žáků.

Bohatý faktografický materiál (tabulky, grafy) je jako předurčen pro zájmové kroužky vyšších ročníků. Kniha může být vhodnou odměnou za úspěšnou účast v různých soutěžích nebo za obětavou práci, o jejím významu pro školní knihovny ani nemluvě.

Karel Mišoň

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

hranol

osmiboký hranol
pětiboký hranol
pravidelný čtyřboký hranol
přímý hranol
šestiboký hranol
šikmo seříznutý hranol
trojboký hranol

hranolový

hromadný bod

hustý

hvězdička

hyperbola

rovnoosá hyperbola

hyperbolický

hyperboloid

dvojdílný hyperboloid
jednodílný hyperboloid
rotační hyperboloid

hypotéza

chordála

chování

chyba

chyba měření
konstantní chyba
logická chyba
skutečná chyba
systematická chyba

chybný

prism

octagonal prism
pentagonal prism
square prism
right prism
hexagonal prism
truncated prism
triangular prism

prismatic

limit point, cluster point, accumulation point

dense

asterisk

hyperbola

equiangular, equilateral,
rectangular hyperbola

hyperbolic

hyperboloid

hyperboloid of two sheets
hyperboloid of one sheet
hyperbolic spindle, hyperboloid of revolution

hypothesis

CH

radical axis

behaviour

error

error of measurement
constant error
logical error
actual error
constant error

faulty

identický	identical
identita	identity
imaginární	imaginary
imaginární část komplexního čísla	imaginary part of complex number
imaginární číslo	imaginary number
implicitní	implicit
implikace	implication
implikovat	imply
incidence	incidence
incidenční matice	incidence matrix
incidentní	united, incident to
být incidentní	coincide
index	index (pl. indices)
indukce	induction
infimum	lower bound
infinitesimální	infinitesimal
inflexe	inflection
inflexní bod	point of inflection
inkluze	inclusion
integrace	integration
integrace per partes	integration by parts
integrační konstanta	constant of integration
integrační znamení	integral sign
integrál	integral
množný integrál	multiple integral
neurčitý integrál	indefinite integral
nevlastní integrál	improper integral
plošný integrál	surface integral
určitý integrál	definite integral
integrální	integral
integrální funkce	integral function
integrální počet	integral calculus
integrovatelný	integrable
interpolace	interpolation
interval	interval
časový interval	time interval
ohraňčený interval	bounded interval
otevřený interval	open interval
invariant	invariant
invariantní	invariant
invertovat	invert
inverze	inversion
inverzní	inverse, reciprocal
inverzní otočení	counter-revolution
inverzní operace	reverse operation

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

3

ROČNÍK 55, 1976-1977, LISTOPAD

rozhled

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., CSAV Praha, dr. Jaroslav Sedivý, KU Praha, Ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMO Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novln. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1976.

OBSAH

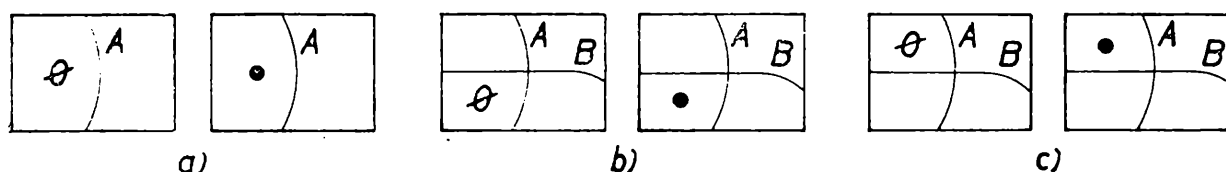
- Dr. J. Sedivý: Množinový rozbor a záznam paradoxních situací . 97
- Dr. V. Mráz, CSc.: Normální formy výrokových formulí I 102
- Prof. J. Brejcha: Některé vlastnosti rovinného trojúhelníka s jeho Brocardovými body (dokončení) 106
- Dr. Libuše Ruprechtová, CSc.: Čs. seismická služba - mezinárodní spolupráce a výměna dat 110
- Naše soutěž: Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů 116
- J. Sedláčková: Ještě o jubilejním roku MO 132
- Prof. dr. F. Kahuda, CSc.: Za profesorem Miloslavem Valouchem . 133
- J. Gedei: Súťažné úlohy z fyziky v MLR a ich riešenie (dokončenie) 135
- Ing. V. Stejskal, CSc.: Kapesní kalkulátor a jeho použití 139
- Dr. J. Mrázek, CSc.: Ještě jedno kosmicko-gravitační zamýšlení 144
- H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický 3. a 4. str. obálky

Množinový rozbor a záznam paradoxních situací

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Množinové pojmy lze uplatnit v situacích, kde se o množinách ani jiných matematických pojmech nehovoří. V mnoha případech tak získáme cenná poučení, odhalíme nepřesnosti hovorového jazyka a zpřesníme své myšlení. V tomto článku poznáte několik příkladů s množinovými rozbory téměř paradoxních zápletek; z každé z nich si odnesete užitečné poučení.

Bylo by jistě zbytečné opakovat základní množinovou symboliku a princip Vennových diagramů*); připomeňme si jen méně známý symbol neprázdnosti pole v diagramu.



Obr. 1

V zápisech obsahujících množinové symboly snadno rozeznáme výrok a jeho negaci. Například:

Výrok	Negace výroku
a) $A = \emptyset$	$A \neq \emptyset$
b) $A \cap B = \emptyset$	$A \cap B \neq \emptyset$
c) $\begin{cases} A \cap B' = \emptyset \\ A \subset B \end{cases}$	$\begin{cases} A \cap B' \neq \emptyset \\ A \not\subset B \end{cases}$

V diagramech vyznačíme uvedené negace pomocí značky pro neprázdnost pole (obr. 1). Použijeme plného kroužku ●, kterým nahradíme symbol $\emptyset$ v diagramu původního výroku.

Oznamovací věty, v jejichž podmětu jsou slova

každý, žádný, některý, aspoň jeden, všichni, někteří, někdo a jim podobná, mají velmi názorný množinový význam. Toho můžeme využít k rozhodování,

*) Přehled těchto symbolů a způsob zakreslování v diagramech najdete ve sbírce Úlohy o výrociích a množinách pro 1. ročník gymnázií.

zda jsme správně vyjádřili negaci výroku,
zda dva výroky vyjadřují totéž,
zda správně usuzujeme apod.

SLOVNÍ ÚLOHY BUDEME MATEMATIZOVAT POMOCÍ MNOŽINOVÝCH POJMŮ TAK, ABYCHOM DOSTALI ÚLOHY O MNOŽINÁCH. SLEDUJTE POZORNĚ POSTUP, ABYSTE TUTO METODU PLNĚ OVLÁDLI.

Příklad 1

Novináři hodnotili výkon domácího družstva velmi odlišně; vyskytly se i tyto výroky ve sportovních rubrikách dvou deníků:

V_1 : Někteří hráči domácích podali dobrý výkon.

V_2 : Někteří hráči domácích nepodali dobrý výkon.

„To je neuvěřitelné,“ pravil jeden čtenář, „jeden výrok popírá druhý, a přitom oba hovoří o témž zápase.“

Je pravda, že výrok V_2 je negací výroku V_1 ?

Řešení. Při množinovém rozboru výroků V_1 , V_2 vyhledáme osoby, kterým se přisuzují vlastnosti; tyto osoby (zde hráči) budou prvky množin. Zvolíme rámcovou množinu H všech hráčů, kteří v zápase hráli, dále pak její podmnožiny:

D ... množinu všech hráčů domácích, kteří v zápase hráli,

V ... množinu všech hráčů, kteří v zápase podali dobrý výkon.

Slovo „někteří“ vyjádříme slovy „aspoň jeden“ a pak na základě definic vztahů mezi množinami zapíšeme

V_1 : Aspoň jeden prvek množiny D je prvkem množiny V $D \cap V \neq \emptyset$

V_2 : Aspoň jeden prvek množiny D není prvkem množiny

$V \dots D \cap V' \neq \emptyset$

Ptáme se, zda V_2 je negací V_1 .

Získané výroky o množinách D , V jsou znázorněny na obr. 2a, b; je zřejmé, že V_2 není negací V_1 , oba mohou platit současně.

POZOR ! Nenechte se zmýlit slovesy při negování výroků obsahujících slova „každý, žádný, někteří“.

Výrok „Žádné a není b“	Výrok „Některá a nejsou b“
není negací	není negací
výroku „Každé a je b“.	výroku „Některá a jsou b“.

Příklad 2

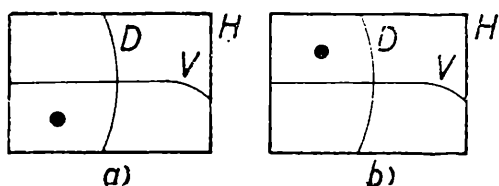
O jedné třídě 1. ročníku byla vyslovena dvě tvrzení:

T_1 : Žádný žák neumí počítat rychle a správně.

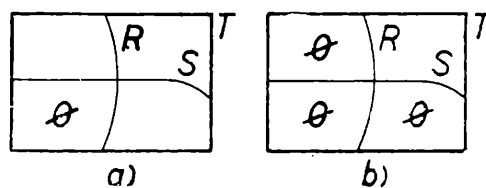
T_2 : Žádný žák neumí počítat rychle a žádný žák neumí počítat správně.

Vyjadřují obě tvrzení totéž?

Řešení. Rozhodnutí nám poskytuje množinový rozbor obou tvrzení. Zvolíme množinu T všech žáků třídy a její podmnožiny



Obr. 2



Obr. 3

R množina v. ž. t., kteří umějí počítat rychle,

S ... množina v. ž. t., kteří umějí počítat správně.

Při pozorném čtení textu obou tvrzení dojdete nutně k závěru, že

$T_1: R \cap S = \emptyset$

Ptáme se, zda obě tvrzení vyjadřují

$T_2: R = \emptyset$ a $S = \emptyset$

totéž.

Diagramy na obr. 3a, b ukazují názorně, že T_2 je „silnější“ tvrzení než T_1 . (T_2 vyjadřuje prázdnotu tří polí, zatímco T_1 jen jednoho).

Kdyby obě tvrzení vyjadřovala totéž, byla by znázorněna stejnými diagramy (v odpovídajících si polích diagramů by byly stejné značky).

POZOR! Obsah sdělení můžeme nevědomky změnit při stylistických úpravách. Souvětí s několika větami, které mají též podmět, může mít jiný význam než z něho utvořená rozvitá věta s jedním podmětem.

Příklad 3

Při rozhovoru o výhrách v loterii prohlásil jeden z přátel: „Každý los, který jsem koupil, vyhrává nějakou cenu.“ Druhý z rozmlouvajících však řekl: „To není pravda, ty jsi žádný los nekoupil“.

Je první tvrzení nepravdivé v případě, že jeho autor nekoupil žádný los?

Řešení. V rámcové množině **L** všech vydaných losů vytvoříme

K množinu všech losů, které koupil autor tvrzení,

V ... množinu všech losů, které vyhrály nějakou cenu.

První tvrzení říká, že $K \subset V$, Ptáme se, zda první tvrzení je ne-

druhé tvrzení říká, že $K = \emptyset$. pravdivé, když druhé je pravdivé.

I bez diagramu poznáváme, že první tvrzení je pravdivé i při $K = \emptyset$.

V příkladě 3 se ukázalo, že v běžném rozhovoru obvykle rozumíme větě „Každé a je b“ tak, že navíc zaručuje existenci aspoň jednoho a.

V přesných logických (a samozřejmě i matematických) úvahách však nemůžeme takové „domýšlení“ připustit.

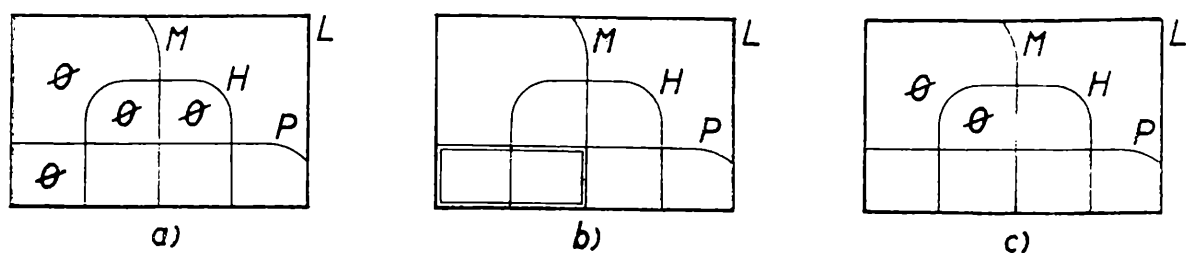
POZOR! To, že o množině **A** hovoříme, neznamena, že jde o neprázdnou množinu.

Platí-li „Každé a je b“, neznamena to, že existuje aspoň jedno a.

Příklad 4

Považujeme za pravdivé tyto předpoklady úsudku:

V_1 : Každý moudrý člověk má smysl pro humor.



Obr. 4

V_2 : Každý člověk se smyslem pro humor je příjemným společníkem.

Usuzujeme, že pak je pravdivý i výrok (tvrzení úsudku):

V_3 : Někteří moudří lidé jsou příjemnými společníky.

Je takové usuzování správné?

Řešení. V rámcové množině L všech lidí vytvoříme tři podmnožiny:

M množinu všech lidí moudrých,

H množinu všech lidí, kteří mají smysl pro humor,

P ... množinu všech lidí, kteří jsou příjemnými společníky.

Pomocí průniků a vztahu inkluze snadno vyjádříme množinový význam jednotlivých vztahů:

V_1 : $M \subset H$ neboli $M \cap H' = \emptyset$, Ptáme se, zda z platnosti V_1 , V_2

V_2 : $H \subset P$ neboli $H \cap P' = \emptyset$, vyplývá nutně platnost V_3 .

V_3 : $M \cap P \neq \emptyset$.

Znázorníme tedy V_1 , V_2 v jednom diagramu (obr. 4a) a V_3 ve druhém (obr. 4b).

Na obr. 4a získáme čtyři prázdná pole; na obr. 4b jen obtáhneme obě pole znázorňující $M \cap P$. V žádném z těchto polí není na obr. 4b symbol neprázdnosti, proto nemůže být platnost výroku V_3 důsledkem platnosti výroků V_1 , V_2 . Tvrzení nevyplývá z předpokladů, úsudek je nesprávný.

Poznámka. Na obr. 4c je znázorněn výrok $M \subset P$ (Každý moudrý člověk je příjemný společník.); prázdnost obou polí je již vyznačena na obr. 4a, proto je výrok $M \subset P$ důsledkem platnosti výroků V_1 , V_2 . Tedy:

z platnosti V_1 , V_2 $\begin{cases} \text{nevyplývá platnost } V_3: M \cap P \neq \emptyset \\ \text{vyplývá platnost } V_4: M \subset P. \end{cases}$

Z příkladu 4 si můžeme odnést poučení:

Usuzujeme-li s výroky, které mají množinové vyjádření, můžeme správnost usuzování kontrolovat na Vennových diagramech takto:

1. V jednom diagramu vyznačíme všechny údaje vyjádřené v předpokladech, v druhém diagramu vyznačíme všechny údaje vyjádřené v tvrzení.

2. Zkontrolujeme, zda všechny značky v polích druhého diagramu jsou již obsaženy v odpovídajících polích prvního diagramu. V kladném případě usuzujeme správně, v záporném případě usuzujeme nesprávně.

Historická poznámka. Výroky s údaji o počtu objektů „každý, žádný, některý apod.“ byly studovány již v antickém Řecku. Zejména filosof Aristoteles (384—321 př. n. l.) podal základy systematického studia úsudků (sylogismů) obsahujících takové výroky. Jeho dílo bylo dále rozvíjeno ve středověké Evropě, později i s grafickým znázorněním těchto výroků pomocí kruhů a pravoúhelníků. Až J. Venn vytvořil v r. 1880 diagramy vhodné k systematickému studiu sylogistických úsudků. Vennovy diagramy vznikly na půdě logiky, nezávisle na teprve se rodící teorii množin; s množinovými představami se spojují až v posledních desetiletích v učebnicích matematiky.

V článku jste získali poznatky důležité pro přesné vyjadřování a logicky správné usuzování. Hlavním ziskem by však měla být dovednost provést množinový rozbor situace. V úlohách najdete příležitosti k jemnému rozboru textu; dvě poslední úlohy jsou hříčkami z díla L. Carrola, známého popularizátora logiky.

Úlohy

1. Vyslovte správné negace daných výroků na základě diagramů:
 - a) Každý plaz je obratlovec.
 - b) Žádný plaz není savec.
 - c) Někteří savci mají křídla.
 - d) Některé želvy nežijí v moři.
 - e) Všechny labutě jsou bílé.
 - f) Žádní velbloudi nemají rohy.
2. Rozhodněte, zda daná dvě tvrzení vyjadřují totéž:
 - a) Každý žák umí číst rychle a správně. Každý žák umí číst rychle a každý žák umí číst správně.
 - b) Někteří žáci dovedou plavat čistým stylem a rychle. Někteří žáci dovedou plavat čistým stylem a někteří žáci dovedou plavat rychle.
3. Porovnejte na pěti diagramech množinový význam těchto sdělení:
 - a) Někteří studenti hrají košíkovou a nehrají odbíjenou.
 - b) Někteří studenti nehrají košíkovou a hrají odbíjenou.
 - c) Každý student hraje košíkovou a odbíjenou.
 - d) Každý student hrající košíkovou hraje odbíjenou.
 - e) Každý student hrající odbíjenou hraje košíkovou.

Je mezi nimi nějaká dvojice výroku a jeho negace?
4. Rozhodněte, zda mohou současně platit tyto výroky:

Všechny kořeny dané rovnice jsou nezáporné.
 Žádný kořen dané rovnice není záporný.
 Žádné záporné číslo není kořenem dané rovnice.

Jak vyslovíte negace těchto výroků?
5. Rozhodněte, zda jsou správné úsudky:
 - a) Každý nudný člověk je nesnesitelný. Žádný nudný člověk není zdržován, když chce odejít. Z těchto předpokladů plyne: Žádný nesnesitelný člověk není zdržován, když chce odejít.
 - b) Žádný císař není zubní lékař. Každý zubní lékař je člověk, kterého se děti bojí. Z těchto předpokladů plyne: Žádného císaře se děti nebojí.
 - c) Žádný poctivý člověk není podvodník. Žádný nepoctivý člověk není důvěryhodný. Z těchto předpokladů plyne: Žádný podvodník není důvěryhodný.

6. Zjistěte závěry, které plynou z těchto dvojic předpokladů:
- a) Všichni bledí lidé jsou flegmatici. Nikdo, kdo není bledý, nevypadá na básníka.
 - b) Žádní lakomci nejsou srdeční. Někteří lakomci jsou hubení.
 - c) Žádná probádaná země není obydlena draky. Všechny neprobádané země jsou tajemné.
- [Závěry formulujte pomocí slov „každý, žádný, někteří“.]

Normální formy výrokových formulí I

Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Na stránkách Rozhledů se nejednou věnovala pozornost formulím výrokové logiky, a to zpravidla logiky dvouhodnotové. To znamená, že každý výrok má pravdivostní hodnotu buď pravdu ($p_h=1$), anebo nepravdu ($p_h=0$). Protože při studiu logiky nejde o stanovení pravdivostních hodnot (p_h) konkrétních výroků, neboť to náleží jiným oborům, pracuje se místo s výroky s výrokovými proměnnými. Umožňuje to dosahovat jisté obecnosti, řekněme jako při užívání písmen ve významu čísel v matematice. Pravdivostní hodnota výrokové formule je ovšem závislá na p_h výrokových proměnných, užitých logických spojek a vzájemné jejich konstelaci. Stanovením pravdivostní hodnoty výrokových formulí věnujeme náš článek.

K poměrně snadnému určení p_h výrokové formule mohou sloužit jisté jejich transformace, které označujeme jako normální formy. Akční rádius užití normálních forem je značně široký. Jsou užitečné např. při fyzikálních, technických a jiných aplikacích výrokové logiky. Nejdříve si pro tyto specifické transformace připravíme půdu. Protože náš čtenář mnohé z výrokové logiky zná, provedeme na začátku článku jakousi inventuru poznatků, na kterých budeme dále stavět.

Čtenář zpravidla dokáže stanovit p_h tzv. tabulkovou metodou. I my tuto metodu použijeme, abychom ji připomněli, a také ji použijeme ke kontrole správnosti transformovaných formulí. Nejdříve však uvedeme příklad, na kterém stručně zopakujeme užití tabulkové metody ke stanovení p_h výrokové formule (f_1)

$$(f_1) \quad (\neg (a \wedge b) \vee c) \Rightarrow (a \Leftrightarrow b)$$

Uplatnili jsme v ní všechny klasické logické spojky; jsou to po řadě tyto logické spojky: jednomístná spojka negace ($\neg$), dvojmištné spojky konjunkce ($\wedge$), disjunkce ($\vee$), implikace ($\Rightarrow$) a ekvivalence ($\Leftrightarrow$). Následující tabulkou jsou uvedené spojky definovány. Tabulka negace uvádí v prvním sloupci obě možnosti p_h výrokové proměnné p , tedy $p_h=1$ a $p_h=0$. Negované proměnné $\neg p$ pak přísluší po řadě $p_h=0$ a $p_h=1$, jak uvádí druhý sloupec tabulky negace. Vzhledem ke dvěma výrokovým proměnným p, q má tabulka dvoumištných spojek čtyři řádky.

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Na základě těchto tabulek určíme ph výrokové formule (f_1). Dříve však, než k pravdivostnímu vyhodnocení formule (f_1) přistoupíme, uvedeme pravidlo, které umožňuje vynechávání některých závorek. Dohodneme se, že více odděluje znak, který je v posloupnosti $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \vee, \wedge, \neg$ zapsán dříve než znak zapsaný později. Pak stačí např. místo formulí ze sloupce I. psát formule ze sloupce II.

I. (f_2) $(a \wedge b) \Rightarrow (\neg a \Leftrightarrow c)$ II. $a \wedge b \Rightarrow (\neg a \Leftrightarrow c)$
 (f_3) $(r \Rightarrow (s \vee v)) \Leftrightarrow (\neg v \wedge r)$ $r \Rightarrow s \vee v \Leftrightarrow \neg v \wedge r$
 (f_4) $a \Rightarrow (\neg b \wedge \neg a) \Leftrightarrow (a \vee b) \Rightarrow b$ $a \Rightarrow \neg b \wedge \neg a \Leftrightarrow a \vee b \Rightarrow b$

Nyní přistoupíme k pravdivostnímu vyhodnocení formule (f_1). Poněvadž formule má tři výrokové proměnné, bude mít tabulka celkem $2^3=8$ řádků. Všechny variace ph výrokových proměnných a, b, c jsou zapsány v prvních třech sloupcích tabulky. Čísla 1 až 13 označující sloupce pod tabulkou současně udávají pořadí, v kterém byly tyto sloupce vyplňovány.

(f_1)

a	b	c	$(\neg (a \wedge b) \vee c)$							$\Rightarrow$	$(a \Leftrightarrow c)$		
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	2	3	10	4	9	6	11	7	13	5	12	8	

V orámovaném sloupci pod spojkou implikace jsou uvedeny ph formule (f_1). V řádcích 1., 2., 3., 6. a 8., v nichž výrokové proměnné a, b, c nabývají po řadě ph 111, 110, 101, 010, 000, má (f_1) ph=1. Ve zbývajících řádcích 4., 5. a 7., v nichž formule (f_1) nabývá pro proměnné a, b, c po řadě ph 100, 011, 001, má ph=0. Např. ve 3. řádku je $a=1, b=0, c=1$ a (f_1) má ph=1; ve 4. řádku je $a=1, b=0, c=0$ a (f_1) má ph=0; to se někdy zapisuje třeba takto: $f_1(1,0,1) = 1$, popř. i ph $f_1(1,0,0) = 0$ apod.

Počet všech řádků při určování ph tabulkovou metodou je dán počtem výrokových proměnných. Nejmenší počet těchto proměnných je jediná proměnná; např. 1 samotnou proměnnou p můžeme pokládat za formuli; příslušná tabulka pak má $2^1=2$ řádky. V případě 2, 3, 4, ..., n proměnných má tabulka po řadě $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, ..., 2^n řádků. Má-li formule alespoň v jednom řádku výslednou $ph=1$ a alespoň v jednom řádku $ph=0$, náleží takové formule do třídy tzv. splnitelných formulí. V dalším půjde právě o stanovení těch ph proměnných, při kterých má formule $ph=1$, popř. při kterých má $ph=0$.

Výrokové formule, které pro všechna možná pravdivostní ohodnocení výrokových proměnných mají $ph=0$, nazýváme **kontradikce**, čili vždy nepravdivé formule. Příkladem kontradikce jsou výrokové formule (k_1) $p \wedge \neg p$ a (k_2) $(p \wedge q) \wedge \neg p$; že jde vskutku o kontradikce, o tom se přesvědčíme tabulkovou metodou na řádcích pod příslušnými formulemi. V orámovaných sloupcích jsou zapsány výsledné ph příslušné formule.

(k_1)	p	p	$\wedge$	$\neg p$		(k_2)	p	q	$(p \wedge q)$	$\wedge$	$\neg p$	
	1	1	0	0	1		1	1	1	0	0	1
	0	0	0	1	0		1	0	0	0	0	1
							0	1	0	0	1	0
							0	0	0	0	1	0

Do zbývajících třetích tříd zařadíme výrokové formule, které vždy mají $ph=1$. Tyto vždy pravdivé formule nazýváme **zákony výrokové logiky** čili **tautologie**. Uvedeme dva příklady tautologií (t_1) $p \vee \neg p$ a (t_2) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$. Orámované sloupce opět určují výsledné ph. Při vyplňování ph pod $\neg p$ jsme již přímo uvedli pravdivostní hodnoty negované proměnné. Tautologie (t_1) se nazývá **zákon vyloučeného třetího**, tautologie (t_2) umožňuje transformovat implikaci na negaci a disjunkci.

(t_1)	p	$p \vee \neg p$		(t_2)	p	q	$p \Rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee q$		
	1	1	1		1	1	1	1	0	1	1
	0	0	1		1	0	0	1	0	0	0
					0	1	1	1	1	1	1
					0	0	0	1	1	1	0

Víme-li, že pod znakem pro ekvivalenci je ve všech řádcích $ph=1$, budeme místo znaku $\Leftrightarrow$ psát znak $\sim$, který můžeme číst „je tautologicky ekvivalentní“. Znak $\sim$ má podobný význam jako rovnítko v matema-

tických vzorcích. V literatuře se někdy znak $\sim$ nezavádí, ale před formulí, která je tautologií, se připisuje znak $\vdash$. Např. de Morganovy zákony (t_3) a (t_4) se pak zapíší buď jako je uvedeno v levé části anebo v pravé části stránky:

$$(t_3) \quad \neg(p \wedge q) \sim \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$(t_4) \quad \neg(p \vee q) \sim \neg p \wedge \neg q \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Znak $\vdash$ se ovšem neváže jen se spojkou $\Leftrightarrow$ pro ekvivalenci, jak to je patrné třeba ze zápisu zákona sporu (t_5) , tedy tautologie

$$(t_5) \quad \vdash \neg(p \wedge \neg p).$$

Znaku $\sim$ s výhodou užíváme v případech, že danou formuli upravujeme na základě zákonů výrokové logiky. Uvedeme příklad: Negací zákona vyloučeného třetího, tedy negací tautologie (t_1) úpravou získáme kontradikci (k_1) takto:

$$(*) \quad \neg(p \vee \neg p) \sim \neg p \wedge \neg \neg p \sim \neg p \wedge p \sim p \wedge \neg p,$$

Při první úpravě jsme užili de Morganův zákon (t_4) , v další úpravě zákona dvojité negace (t_6)

$$(t_6) \quad \neg \neg p \sim p$$

a při poslední úpravě komutativního zákona pro konjunkci (t_7)

$$(t_7) \quad p \wedge q \sim q \wedge p.$$

Negovanou kontradikci (k_1) můžeme ovšem upravit zpět na tautologii (t_1) takto:

$$(**) \quad \neg(p \vee \neg p) \sim \neg p \vee \neg \neg p \sim \neg p \vee p \sim p \vee \neg p,$$

Při úpravách jsme užili tautologií (t_3) , (t_6) a komutativního zákona pro disjunkci (t_8)

$$(t_8) \quad p \vee q \sim q \vee p.$$

Čtenář asi ví, že splnitelných formulí, stejně jako tautologií nebo kontradikcí, je nekonečně mnoho. Není proto možno pořídit úplný seznam např. tautologií, s nimiž se ve výrokové logice pracuje. Je proto užitečné získat jistou praxi v ověřování a užívání tautologií. Z toho důvodu čtenáři doporučujeme, aby si platnost uvedených tautologií, popř. i kontradikcí ověřil tabulkovou metodou, popř. aby uvedených tautologií nebo kontradikcí použil k úpravám, které jsou obdobné úpravám $(*)$ a $(**)$.

K velmi důležitým tautologiím náleží dva distributivní zákony (t_9) a (t_{10}) :

$$(t_9) \quad (p \wedge q) \vee r \sim (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

$$(t_{10}) \quad (p \vee q) \wedge r \sim (p \wedge r) \vee (q \wedge r).$$

Asociativní zákony pro konjunkci (t_{11}) a pro disjunkci (t_{12})

$$(t_{11}) \quad (p \wedge q) \wedge r \sim p \wedge (q \wedge r)$$

$$(t_{12}) \quad (p \vee q) \vee r \sim p \vee (q \vee r)$$

dovolují vynechávat závorky např. u výrazu $p \wedge q \wedge r$, popř. uzávorkovat celý výraz např. $(a \vee b \vee c \vee d)$ apod.

Při úpravách výrokových formulí se často užívá tautologie (t_{13}) dovolující transformovat ekvivalenci na konjunkci dvou implikací

$$(t_{13}) \quad (p \Leftrightarrow q) \sim (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p).$$

Dále uvedeme dva významné zákony idempotence (t_{14}) a (t_{15}), které dovolují upravovat výrokové formule

$$(t_{14}) \quad p \wedge p \sim p$$

$$(t_{15}) \quad p \vee p \sim p.$$

Následující tautologie (t_{16}) a (t_{17}) se nazývají zákony rozšíření. Umožňují k výrokové formuli konjunkcí připojit (libovolnou) tautologii nebo disjunkcí připojit (libovolnou) kontradikci

$$(t_{16}) \quad p \sim p \wedge (q \vee \neg q)$$

$$(t_{17}) \quad p \sim p \vee (q \wedge \neg q).$$

Za cvičení může čtenář stanovit všechny ph formulí (f_2), (f_3), (f_4) shora uvedené, popř. může ještě stanovit ph formulí (f_5), (f_6) a (f_7):

$$(f_5) \quad (a \leftrightarrow c) \Rightarrow (a \vee \neg b)$$

$$(f_6) \quad (a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \neg c$$

$$(f_7) \quad ((a \leftrightarrow b) \vee c) \Rightarrow (\neg a \vee \neg b).$$

(pokračování)

Některé vlastnosti rovinného trojúhelníka s jeho Brocardovými body

Prof. JOSEF BREJCHA, Brno

(Dokončení)

Věta 6:

Trojúhelníky o vrcholech A_1, A_2, A_3 a o vrcholech Q_{12}, Q_{23}, Q_{31} jsou vzájemně podobné. Shodnost může nastat pouze pro

$$\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Důkaz:

Položíme-li

$$\varphi = \sphericalangle BA_1A_2 = \sphericalangle BA_2A_3 = \sphericalangle BA_3A_1,$$

určíme

$$Q_{31}Q_{12} = 2BA_1 \sin \alpha_1 = 2 \frac{a_2 \sin \varphi}{\sin \alpha_1} \sin \alpha_1 = 2a_2 \sin \varphi.$$

(Q_{31}, Q_{12}, B vrcholy trojúhelníka vepsaného do kružnice k_1 o středu A_1 a o poloměru BA_1).

Analogicky:

$$Q_{12}Q_{23} = 2a_3 \sin \varphi, \quad Q_{23}Q_{31} = 2a_1 \sin \varphi.$$

Platí tedy:

$$\begin{aligned} Q_{12}Q_{23} : Q_{23}Q_{31} \quad Q_{31}Q_{12} = a_3 \quad a_1 : a_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle Q_{12}Q_{23}Q_{31} \end{aligned}$$

Shodnost může nastat pouze tehdy, je-li $2 \sin \varphi = 1$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Věta 7:

Vzájemná shodnost trojúhelníků $A_1A_2A_3$ a $Q_{12}Q_{23}Q_{31}$ věty 6 nastane právě tehdy, je-li $A_1A_2A_3$ trojúhelníkem rovnostranným.

Důkaz: Podle věty 6 je v tomto případě $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

a) Nechť trojúhelník $A_1A_2A_3$ je trojúhelníkem rovnostranným, tj.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{3}.$$

Pak podle věty 2 platí

$$\cotg \varphi = 3 \cotg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

b) Nechť délky a_i ($i = 1, 2, 3$) stran daného trojúhelníka jsou vzájemně různé a platí $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Vzhledem k větě 3 $\alpha), \beta)$, obdržíme po snadné úpravě

$$\cos \varphi = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2\sqrt{a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2}}.$$

Pro $\varphi = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{\sqrt{a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - a_1^2a_2^2 - a_2^2a_3^2 - a_3^2a_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Pro dané délky $a_1 \neq a_2$ stran platí pro stranu třetí — a_3 — rovnice

$$a_3^4 - a_3^2(a_1^2 + a_2^2) - a_1^2a_2^2 + a_1^4 + a_2^4 = 0. \quad (9)$$

Jako podmínku reálného řešení dostáváme postupně

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2)^2 - 4(a_1^4 + a_2^4 - a_1^2a_2^2) &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2a_1^2a_2^2 - (a_1^4 + a_2^4) &\geq 0 \Rightarrow 2a_1^2a_2^2 - [(a_1^2 + a_2^2)^2 - 2a_1^2a_2^2] &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4a_1^2a_2^2 - (a_1^2 + a_2^2)^2 &\geq 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (2a_1a_2 - a_1^2 - a_2^2)(2a_1a_2 + a_1^2 + a_2^2) \geq 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2a_1a_2 - a_1^2 - a_2^2 \geq 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \leq 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \leq 2.
\end{aligned}$$

Výsledná nerovnost je ve sporu se známou nerovností

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} > 2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 \neq a_2;$$

trojúhelník sub b) tedy nemůže existovat.

Rovnost $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 2$ platí pouze pro $a_1 = a_2 = a$. Pak rovnice 9 přechází na tvar

$$(a_3^4 - 2a_3^2a^2 + a^4 = 0) \Rightarrow (a_3^2 - a^2)^2 = 0 \Rightarrow a_3 = a.$$

Trojúhelník $A_1A_2A_3$ musí tedy být rovnostranný.

Věta 8:

Trojúhelník, v němž by platila nerovnost $\varphi > \frac{\pi}{6}$, neexistuje. Rovnost $\varphi = \frac{\pi}{6}$ platí pouze pro trojúhelník rovnostranný.

Důkaz: Z definice je zřejmé, že Brocardův úhel libovolného trojúhelníka musí být úhlem ostrým. Proto (viz důkaz věty 7, sub b)) ve vztahu

$$\cos \varphi = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2\sqrt{a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2}}$$

položme

$$\cos \varphi = \frac{t}{2}, \quad 0 < t < 2.$$

Po dosazení a krátké úpravě obdržíme, že pro délky stran daného trojúhelníka a pro parametr t platí rovnice

$$a_i^4 + a_i^2(a_j^2 + a_k^2)(2 - t^2) + a_j^4 + a_k^4 + (2 - t^2)a_j^2a_k^2 = 0, \quad (10)$$

i, j, k libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3.

Podmínka

$$(a_j^2 + a_k^2)^2(2 - t^2)^2 - 4[a_j^4 + a_k^4 + (2 - t^2)a_j^2a_k^2] \geq 0$$

pro existenci reálného řešení a_i rovnice 10 přechází postupně na tvary

$$\begin{aligned}
& t^2(a_j^2 + a_k^2)^2 \geq 4(a_j^4 + a_j^2 a_k^2 + a_k^4) \Rightarrow \\
& \Rightarrow t^2(a_j^2 + a_k^2)^2 \geq 4(a_j^4 + a_j^2 a_k^2 + a_k^4) + 4a_j^2 a_k^2 - 4a_j^2 a_k^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{4} t^2(a_j^2 + a_k^2)^2 \geq (a_j^2 + a_k^2)^2 - a_j^2 a_k^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{4} t^2 \geq 1 - \left(\frac{a_j a_k}{a_j^2 + a_k^2} \right)^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{1}{4} t^2 \geq 1 - \left(\frac{1}{\frac{a_j}{a_k} + \frac{a_k}{a_j}} \right)^2 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{t^2}{4} \geq 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \\
& \Rightarrow t^2 \geq 3 \Rightarrow t \geq \sqrt{3},
\end{aligned}$$

vzhledem ke geometrickému významu úhlu φ a ke známé relaci

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \geq 2, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0,$$

rovnost nastane pouze pro $a_1 = a_2$.

Pro Brocardův úhel φ libovolného trojúhelníka tedy platí

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \varphi < 1, \\
& \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6} \right).
\end{aligned}$$

Že vztahy

$$\frac{a_j}{a_k} + \frac{a_k}{a_j} > 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

nemohou platit současně v žádném trojúhelníku a vztahy

$$\frac{a_j}{a_k} + \frac{a_k}{a_j} = 2, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

platí současně pouze v trojúhelníku rovnostranném, plyne z důkazu věty 7.

fyzika

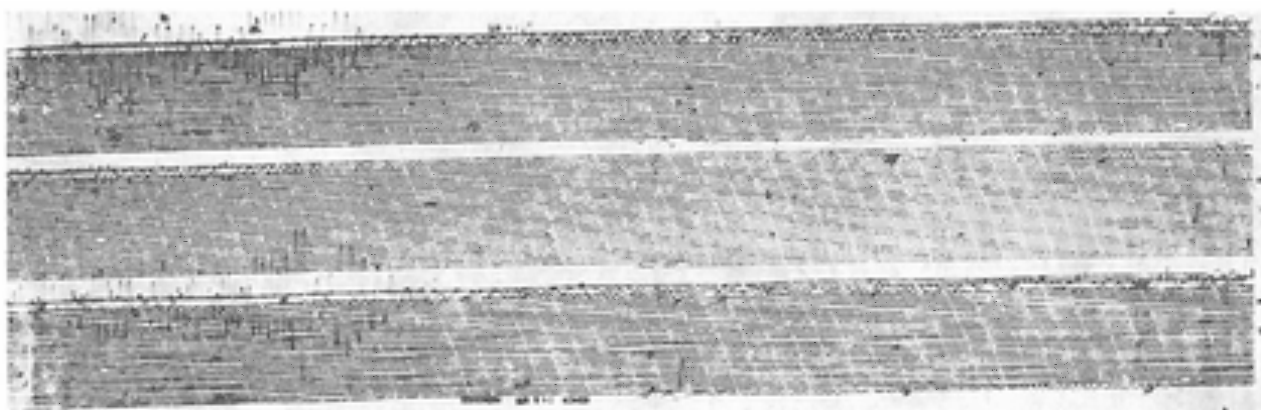
Čs. seismická služba - mezinárodní spolupráce a výměna dat

Dr. LIBUŠE RUPRECHTOVÁ, CSc., Geofyzikální ústav ČSAV, Praha

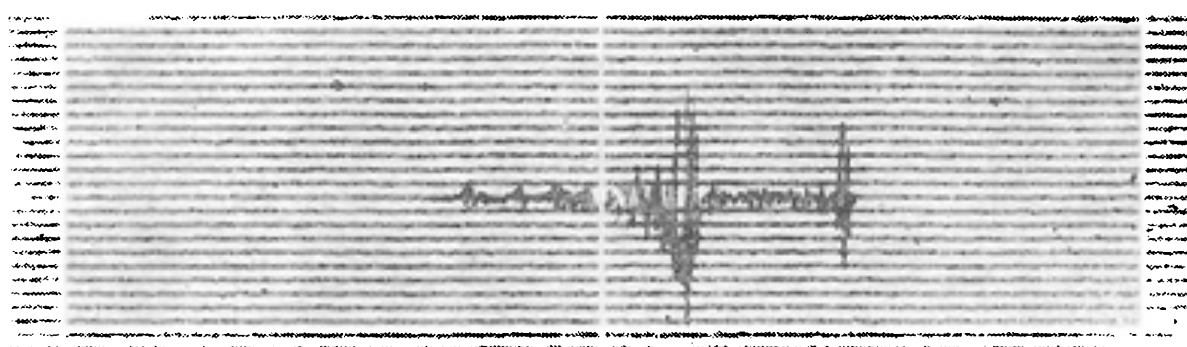
V seismologii, stejně jako i v jiných odvětvích geofyziky, tvoří významnou složku výzkumu observatorní činnost. Nepřetržitou registrací sledovaných jevů se získávají experimentální data pro teoretický výzkum, a to v reálných podmínkách, na rozdíl od laboratorních měření, kdy si lze modelovat vyšetřované jevy za předem stanovených podmínek, které se nutně více či méně odchyľují od skutečnosti. Předností dat získaných observatorní činností je jejich minimální zkreslení; informace, které takto získáme o stavu zemského tělesa, jsou deformovány pouze snímácím zařízením, jehož vlastnosti jsou zpravidla známy. Neznáme však předem většinou nic nebo jen velmi málo o zdroji pozorovaného jevu. Základní údaje o něm si musíme předem dešifrovat ze záznamu, abychom mohli vyšetřovaný jev dále interpretovat.

Seismické observatoře, které dnes pokrývají zemský povrch jako souvislá seismická síť, zaznamenávají nepřetržitě pohyb podloží způsobený elastickými vlnami, které se šíří Zemí z přirozených (zemětřesení) a umělých (exploze) zdrojů. O explozích známe předem všechny základní parametry: čas a místo odstřelu a množství použitých výbušnin. O zemětřeseních však ve většině případů, pokud se neprojeví makroseismicky, nevíme nic. Denně dochází k desítkám zemětřesení, která nejsou na povrchu Země bez pomoci přístrojů pozorovatelná. Buď jsou energeticky slabá, nebo jsou jejich ohniska položena ve velkých hloubkách, takže se na zemském povrchu výrazněji neprojeví. Úkolem určit co nejpřesněji parametry všech zaregistrovaných zemětřesení z dat světové seismické sítě se zabývají světová seismologická centra.

Aby standardní seismická stanice, zapojená do světové seismické sítě, poskytovala spolehlivé informace na současné úrovni, musí mít minimální přístrojové vybavení, sestavené tak, aby bylo vhodné pro registrování co největšího počtu seismických případů. Patří k němu třísložkový seismograf s maximálním zvětšením cca 1000 pro vlny s periodami 1—10 s. Na opěrných stanicích zemí KAPG (Komise akademií socialistických zemí pro mnohostrannou spolupráci na komplexním problému „Planetární geofyzikální výzkum“), mezi něž patří čs. stanice Průhonice, je tento typ přístroje zastoupen seismografem sovětské výroby typu

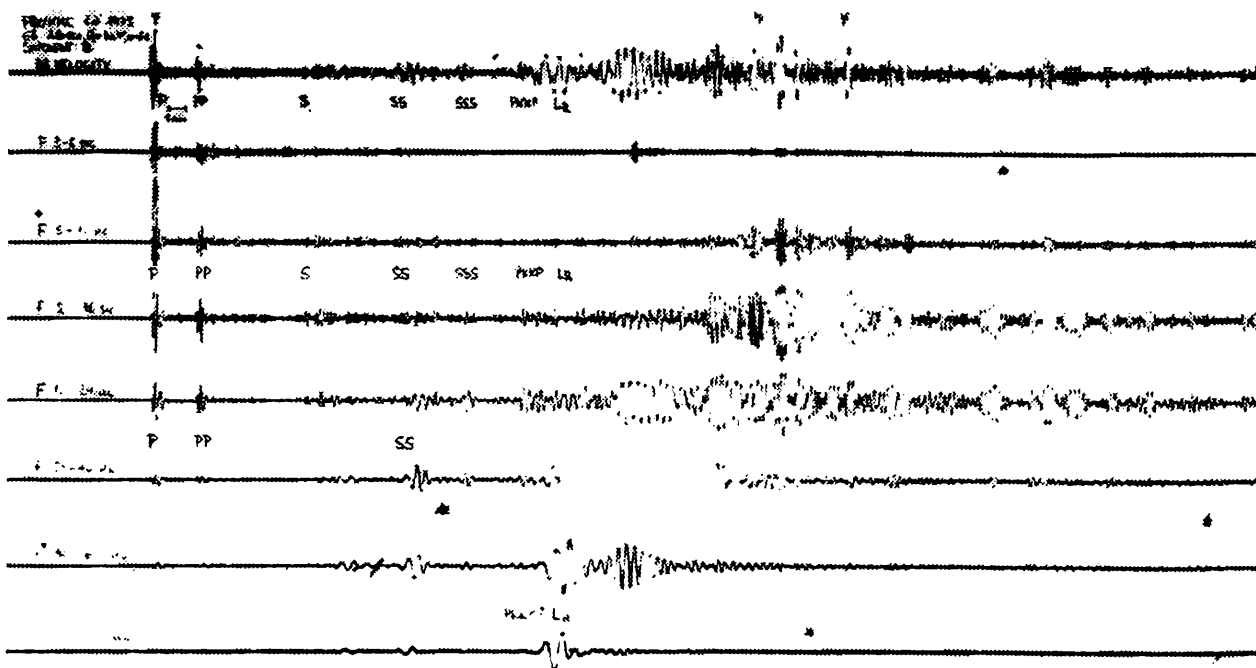


Obr. 1. Záznam tříložkového seismografu Kirnos s max. zvětšením v oboru 1—20 s (zemětřesení z 23. 3. 1975 z oblasti Taiwan, vzdálenost 9400 km, magnitudo 7,2).



Obr. 2. Záznam blízkého zemětřesení ze střední Itálie (vzdálenost 710 km) na krátkoperiodickém seismografu SVSN-4 a záznam komorového odstřelu v lomu vzdáleném 145 km (přístroj SVSN-6).

Kirnos. Tyto přístroje jsou vhodné pro registraci silnějších vzdálených zemětřesení (obr. 1). Další nezbytností ve vybavení moderní seismické stanice je vertikální seismograf s max. zvětšením cca 100 000 pro vlny s periodami kolem 1 s. Krátkoperiodické vertikální seismografy jsou optimální pro registraci slabých lokálních otřesů a explozí a především pro příjem slabých seismických signálů od vzdálených zemětřesení. Na centrální čs. stanici v Průhonicích pracuje tento typ seismografu navržený *dr. Tobýášem* a vyrobený v Geofyzikálním ústavu ČSAV, a to ve dvou modifikacích (SVSN-4 a SVSN-6) s max. zvětšením pro periody 1 s a 0,5 s. Příklady seismogramů z těchto dvou přístrojů jsou na obr. 2, 4 a 5. Přístroje registrují nepřetržitě od Mezinárodního geofyzikálního roku 1957/58. Druhá čs. seismická stanice v Kašperských Horách, která má charakter experimentální stanice, je vybavena krátkoperiodickým seismografem typu Kirnos SVKM-2. Od r. 1973 zde pracuje zcela nový typ registrační aparatury (systém FBV-DPS), vyvinutý *ing. Plešingerem* v Geofyzikálním ústavu ČSAV. Toto zařízení sestává z dlouhoperiodických seismografů typu Kirnos, řízených aktivními frekvenčně závislými zpětnými vazbami, čímž je dosaženo maximálně ploché amplitudové charakteristiky v oboru 2—200 s. Registrace se provádí pomocí systému

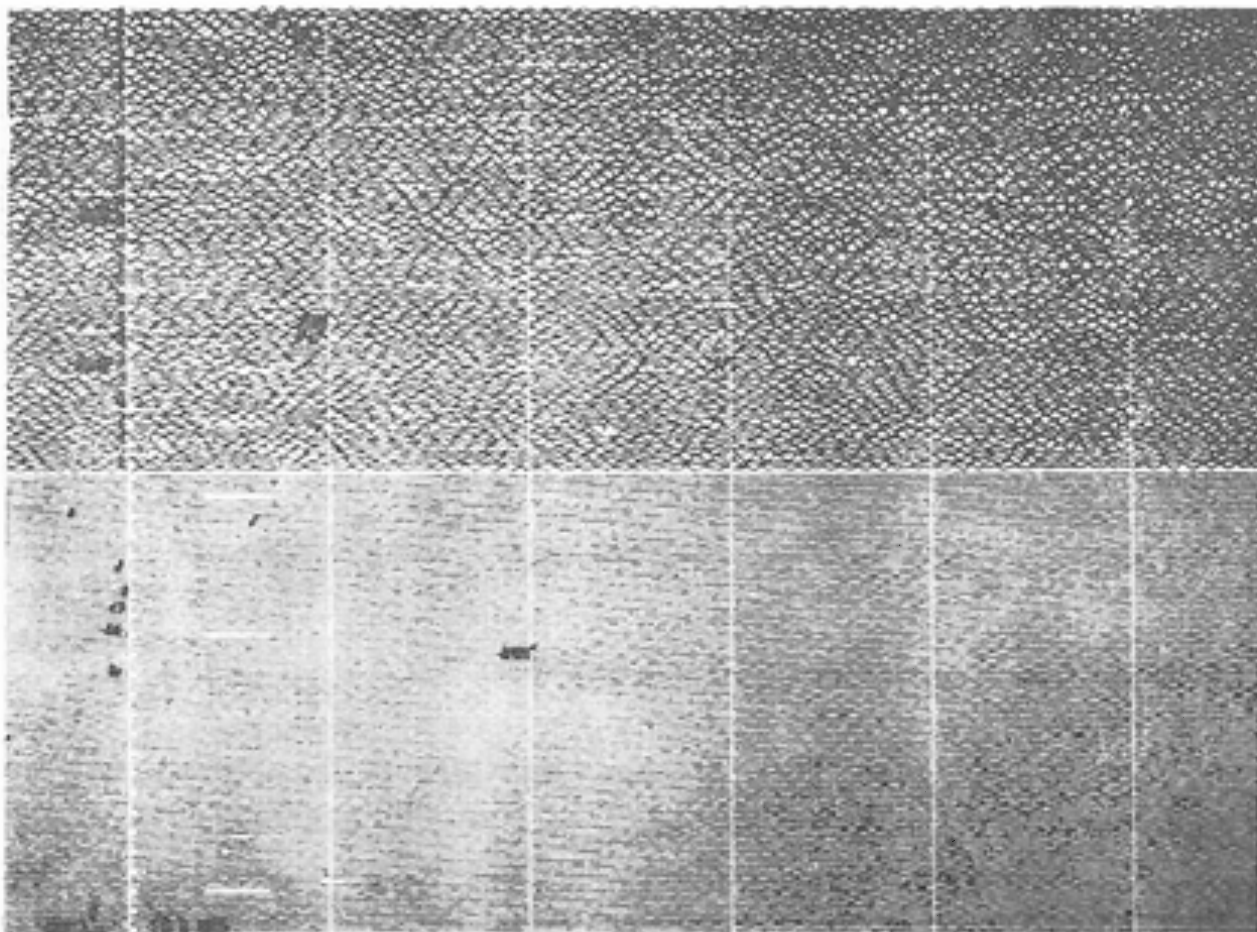


Obr. 3. Analogov zapis asov-frekvenn analýzy širokopásmového záznamu systému FBV/DPS.

RACAL na magnetickou psku. Subsystem DPS umožňuje analogov zpracování seismick informace a automatickou digitalizaci analogových dat. Na obr. 3 je pklad asov frekvenn analýzy širokopásmového záznamu rychlosti pohybu pdy (1. stopa naho — jde o vertikln složku) při zemětřesení s ohniskem na Aljašce z 1. 7. 1973 (vzdálenost 7850 km, magnitudo 6,0). Na dalch 7 stopách jsou zaznamenány výstupy filtrů s různými psmami propustnosti (3—6 s a 50—100 s). Tento systém filtrace je vhodn pro identifikaci zemětřesných fází.

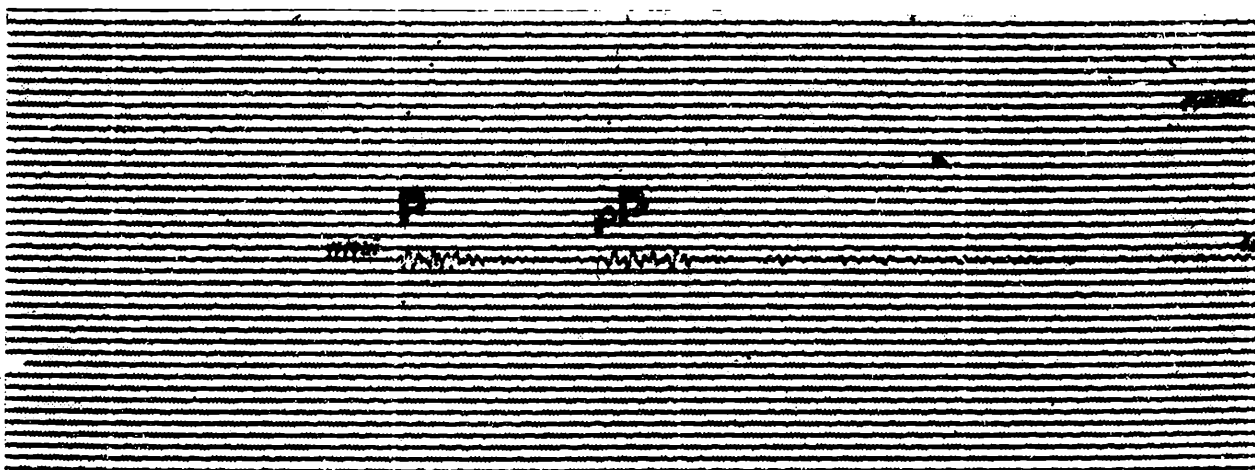
Stanice ležící v seismicky aktivních oblastech musí být vybaveny také seismografem se snizenou citlivostí, kter je nezbytn v ppad silných blízkých zemětřesení. Samozřejmým požadavkem u všech stanic je dokonal asov služba; stanice 1. radu musí být vybaveny křemennými hodinami. Spolehliv fungující stanice musí zajiřovat pravideln denn snímání seismogramů a jejich pbenou interpretaci.

Primrn interpretace seismogramu spočívá ve vyhledání všech význačných nasazení, o kterých se dá soudit, že jsou pro dan seismický ppad první. K nim se přad as, mřen s přesností na 0,1 s. Určit, kter nasazení je skuten patkem zemětřesení, bývá někdy snadn, jde-li však o slabší otřesy, je třeba urit zkušenosti k tomu, aby bylo možno odlišit vstup seismick vlny od mikroseismickho neklidu nebo od lokálních rušivých jev. Proti technickému neklidu se seismick stanice brn tím, že se uchylují z mestskch center, kde bývaly tradin umístěny ve sklepích universitních budov, daleko za msto a pokud možno hluboko pod zem. Mikroseismický neklid meteorologického původu je



Obr. 4. Záznam překrytý mikroseismickým neklidem (přístroje SVSN-4 a SVSN-6).

však všudypřítomný a zvláště v zimních měsících tvoří nepříjemně rušivé pozadí, které často překrývá slabé vstupy seismických vln (obr. 4). První nasazení na seismogramu zpravidla odpovídá příchodu podélné seismické vlny P , která se šíří Zemí s maximální rychlostí. Dále se určují doby vstupu všech dalších význačných fází na seismogramu a s použitím tabelovaných hodnot dob průchodu přímých, odražených a lomených seismických vln se interpretátor pokouší přiřadit k jednotlivým fázím seismogramu vhodný typ vlny tak, aby vznikl ucelený obraz záznamu zemětřesení z určité epicentrální vzdálenosti. Najdeme-li na záznamu prostorové příčné vlny S , pak z rozdílu dob průchodu $T(S) - T(P)$ stanovíme epicentrální vzdálenost zemětřesení už při primární interpretaci s dobrou přesností. Často se dá soudit, že jsme zaznamenali zemětřesení s ohniskem v anomální hloubce, pro které jsou typické poměrně nápadné fáze vstupující hned za prostorovými vlnami P a S , které odpovídají příchodu vln odražených od zemského povrchu v blízkosti epicentra, např. vlna pP (obr. 5). K primární interpretaci patří dále informace o energii zemětřesení, obsažená v amplitudách skutečného pohybu Země. Proto se měří maximální amplitudy především prostorových vln P a maxima vln povrchových, které u mělkých zemětřesení bývají na



Obr. 5. Záznam hlubokého zemětřesení s epicentrem v Ecuadoru (hloubka 176 km, vzdálenost 10 300 km). První nasazení odpovídá přímé podélné vlně P, druhá skupina je vstup vlny pP odražené od povrchu Země téměř nad ohniskem.

seismogramu nejvýznačnější (obr. 1). Kromě toho je v seismogramu zašifrována informace o charakteru pohybu v ohnisku zemětřesení, mimo jiné ve směru prvního nasazení vertikální složky vlny *P*. Proto ve všech jasných příkladech určujeme, jedná-li se o dilataci nebo kompresi. Tyto elementární údaje, získané při prvním proměření záznamů, zasíláme pravidelně dvakrát týdně světovým seismologickým centrům v Moskvě, Strasbourgu a Denveru (USA) a dále vybraným evropským seismickým stanicím, s nimiž si vyměňujeme rychlé zprávy. Jsou to Vídeň, Varšava, Collmberg a Jena (NDR), Sofia, Budapešť, Uppsala (Švédsko) a Erlangen (NSR). V centrech jsou data dodávaná seismickými stanicemi používána k výpočtu parametrů zemětřesných ohnisek, tj. k určení zeměpisné polohy epicentra, hloubky ohniska a doby vzniku zemětřesení. Centra jsou částečně specializována: Strasbourg udává parametry především evropských zemětřesení včetně přilehlých oblastí — Středomoří a Přední Asie. Moskva je zaměřena na zemětřesení ze seismicky aktivních oblastí SSSR a z Indického oceánu. Denver pokrývá všechny světové seismicky aktivní oblasti a určuje parametry slabých zemětřesení na americkém kontinentě. Od těchto center dostáváme zpět během 2—3 měsíců předběžné bulletiny obsahující základní data o jednotlivých zemětřeseních. Známe-li již dobu vzniku zemětřesení, jeho zeměpisnou polohu a tím i epicentrální vzdálenost našich stanic, můžeme zpřesnit a rozšířit primární interpretaci. Pro vlny s měřitelnými amplitudami můžeme určit hodnoty magnituda, tj. veličiny, která slouží k objektivní energetické klasifikaci zemětřesení. Oceňování energie zemětřesení z makroseismických pozorování je vždy subjektivní, nepřesné a velmi často nerealizovatelné, jde-li o slabá zemětřesení, o epicentra podmořská nebo ležící v neobydlených oblastech. Metodika určování magnituda zemětřesení ze seismografických záznamů vycházela původně z maximálních ampli-

tud povrchových vln, které byly na záznamech blízkých zemětřesení nejčastěji měřitelné. Dnes seismické stanice poskytují bohatší materiál pro určování magnitud na základě amplitud krátkoperiodických vln P i jiných druhů vln.

Výsledky druhé fáze interpretace publikujeme ve formě měsíčních bulletinů a předáváme je ve formě děrných štítků dalšímu mezinárodnímu centru v Edinburghu, které sice se zpožděním, ale zato s maximální přesností stanoví parametry zemětřesení s konečnou platností. Tyto definitivní hodnoty používáme při třetí fázi staniční interpretace, která končí vydáním ročního seismického bulletinu.

Kromě zemětřesení dostatečně intenzivních, pro něž je možno přesně určit parametry — a to jsou vzhledem k naší poloze ve střední Evropě převážně zemětřesení vzdálená, teleseismy — registrujeme na našich stanicích také blízké otřesy, většinou tak slabé, že je zachytí v nejlepším případě několik nejbližších stanic v sousedních zemích. Jde často o záznamy průmyslových explozí, o nichž jsme pravidelně informováni příslušnými podniky, ale ve většině případů jsou registrovány slabé tektonické otřesy z poddolovaných oblastí na Kladensku, Příbramsku a Ostravsku. Často zaznamenáváme také slabá zemětřesení z východoalpské ohniskové oblasti, kde čas od času dojde i k silnějšímu otřesu, pozorovatelnému na území Československa i makroseismicky. Také občas registrujeme zemětřesné roje z Kraslicka, série mnoha slabých otřesů, vznikajících na dosud živé tektonické linii krušnohorské. Jsou-li otřesy dostatečně intenzivní, aby je zaznamenaly aspoň dvě nebo tři stanice, pokoušíme se je lokalizovat.

Podrobnější analýzu seismogramů provádíme pomocí tabelovaných teoretických hodnot dob průchodu pro jednotlivé typy vln. Jsou vypočteny pro optimální model rychlostního rozložení v zemském nitru a platí jako střední hodnoty pro Zemi jako celek. Odchyłky od teoretických hodnot již indikují problematiku, která musí být řešena individuálně. Může jít o regionální zvláštnosti ve stavbě zemské kůry v okolí registrující stanice nebo o závislost dob průchodu na azimutu, způsobenou laterálními nehomogenitami ve stavbě zemského pláště.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

4. Na ramenech daného ostrého úhlu s vrcholem V jsou zvoleny body $A \neq V$, $B \neq V$ tak, že je $VA \geq VB$; vrcholem V je vedena přímka p , která rozděluje daný úhel ve dva nenulové úhly. Vzdálenosti bodů A , B od přímky p jsou v_1 , v_2 , vzdálenost bodu A od přímky VB je v . Dokažte, že je

$$v_1^2 + v_2^2 < v^2.$$

Emil Kraemer

(Došlo 30 řešení)

Autorovo řešení :

a) Předpokládejme nejdříve, že je $VA = VB$ (obr. 3). Sestrojme paty A_0 , A_1 kolmic vedených z bodu A na přímky VB , p . Protože úhel $\sphericalangle AVB$ je ostrý, leží pata A_0 uvnitř polopřímky VB ; obdobně je VA_1 ta polopřímka na přímce p , která leží v úhlu $\sphericalangle AVB$. Podle věty Thaletovy leží body A_0 , A_1 na kružnici k_1 sestrojené nad průměrem VA . Pata B_1 kolmice vedené bodem B k přímce p leží uvnitř polopřímky VA_1 , a to na kružnici k_2 opsané nad průměrem VB . Protože je $VA = VB$, jsou kružnice k_1 , k_2 shodné. Úhel $\sphericalangle A_0VA_1$, který je totožný s úhlem $\sphericalangle BVB_1$, je obvodovým úhlem ve shodných kružnicích k_1 , k_2 ; proto jsou tětivy A_0A_1 , BB_1 shodné. V trojúhelníku AA_0A_1 je tedy

$$AA_1 = v_1, \quad A_0A_1 = v_2, \quad AA_0 = v;$$

je-li ε velikost jeho úhlu $\sphericalangle AA_1A_0$, pak podle věty kosinové je

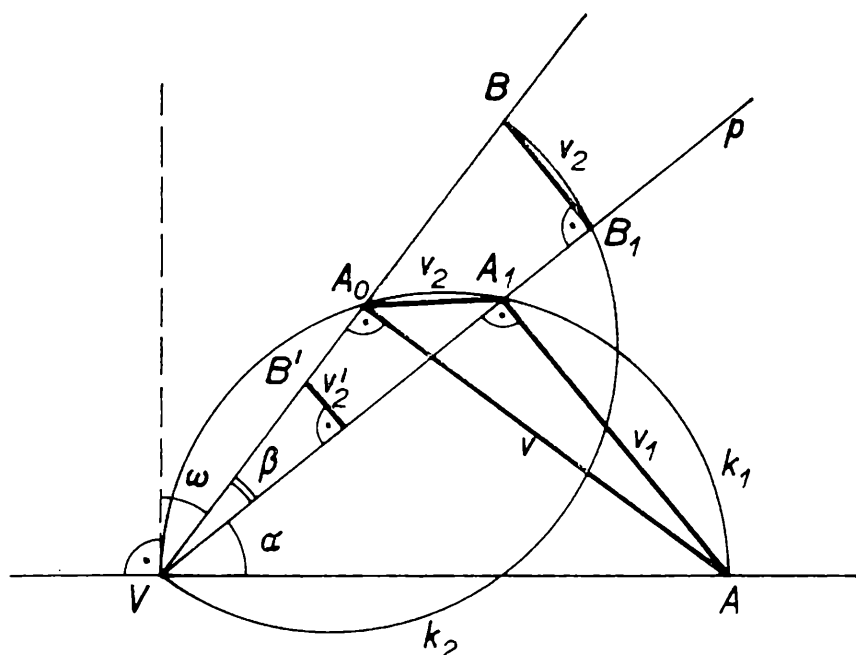
$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \varepsilon. \quad (1)$$

Protože přímka p rozděluje úhel $\sphericalangle AVB \equiv \sphericalangle AVA_0$, jsou body A , A_0 odděleny přímkou p ; proto je

$$\varepsilon = \sphericalangle AA_1A_0 = \sphericalangle AA_1V + \sphericalangle VA_1A_0 > \frac{\pi}{2},$$

neboť úhel $\sphericalangle AA_1V$ je pravý. Proto je $\cos \varepsilon < 0$, takže podle (1) je

$$v^2 > v_1^2 + v_2^2. \quad (2)$$



b) Jestliže uvnitř polopřímky VB zvolíme bod B' tak, aby bylo $VB' < VB$ čili $VB' < VA$, pak ze stejnolehlosti o středu V , která převádí bod B do bodu B' , je zřejmé, že vzdálenost v'_2 bodu B' od přímky p je menší než v_2 . Proto podle (2) je

$$v^2 > v_1^2 + v_2'^2.$$

Poznámka. Téměř všichni řešitelé převedli danou úlohu na goniometrickou. Jak jsme viděli, stačí provést důkaz pro případ, že je $VA = VB = a > 0$. Jsou-li α, β velikosti úhlů $\sphericalangle AVA_1, \sphericalangle BVA_1$, pak je $\alpha + \beta$ velikost úhlu $\sphericalangle AVB$ (obr. 3). Potom při označení, které jsme zavedli, je

$$v_1 = a \sin \alpha, \quad v_2 = a \sin \beta, \quad v = a \sin (\alpha + \beta).$$

Protože je $a > 0$, je nerovnost (2) ekvivalentní s nerovností

$$\sin^2(\alpha + \beta) > \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta. \quad (3)$$

Jde tedy o důkaz nerovnosti (3) za předpokladu, že každé z čísel α , β , $\alpha + \beta$ je menší než $\frac{\pi}{2}$. Užijeme-li vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$, dostaneme

$$\begin{aligned}\sin^2 (\alpha + \beta) &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta - \\ &\quad - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta (\cotg \alpha \cotg \beta - 1)\end{aligned}$$

Jestliže dokážeme, že je

$$\cotg \alpha \cotg \beta > 1, \quad (4)$$

je tím také dokázána nerovnost (3). Protože je $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \omega$ (obr. 3) čili

$$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \omega), \quad \alpha + \omega < \frac{\pi}{2}.$$

Proto je

$$\cotg \alpha \cotg \beta = \cotg \alpha \tg (\alpha + \omega) = \frac{\tg (\alpha + \omega)}{\tg \alpha} > 1,$$

neboť funkce $\tg x$ je v intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ kladná a rostoucí.

5. Jsou dány dva trojúhelníky AB_1C_1 , AB_2C_2 se společným vrcholem A ; žádný z nich není pravoúhlý. Vrchol $B_2 \neq B_1$ leží na přímce AB_1 , vrchol $C_2 \neq C_1$ leží na přímce AC_1 ; přímky B_1C_1 , B_2C_2 jsou vzájemně kolmé a mají společný bod P . Dokažte, že přímka spojující ortocentra V_1 , V_2 daných trojúhelníků prochází bodem P .

Emil Kraemer

(Došlo 20 řešení)

Upravené řešení Vlastimila Klímy, 4.B G Benešov:

Zvolme ortonormální soustavu souřadnic tak, aby její osa x splývala s přímkou B_2C_2 a osa y s přímkou B_1C_1 (obr. 4). Potom je

$$P = (0; 0), \quad A = (a_1; a_2), \quad B_1 = (0; b), \quad C_2 = (c; 0).$$

Protože bod A neleží na přímkách $B_1C_1 = y$, $B_2C_2 = x$, je

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 \neq 0. \quad (1)$$

Aby existoval bod B_2 (resp. C_1), musí být

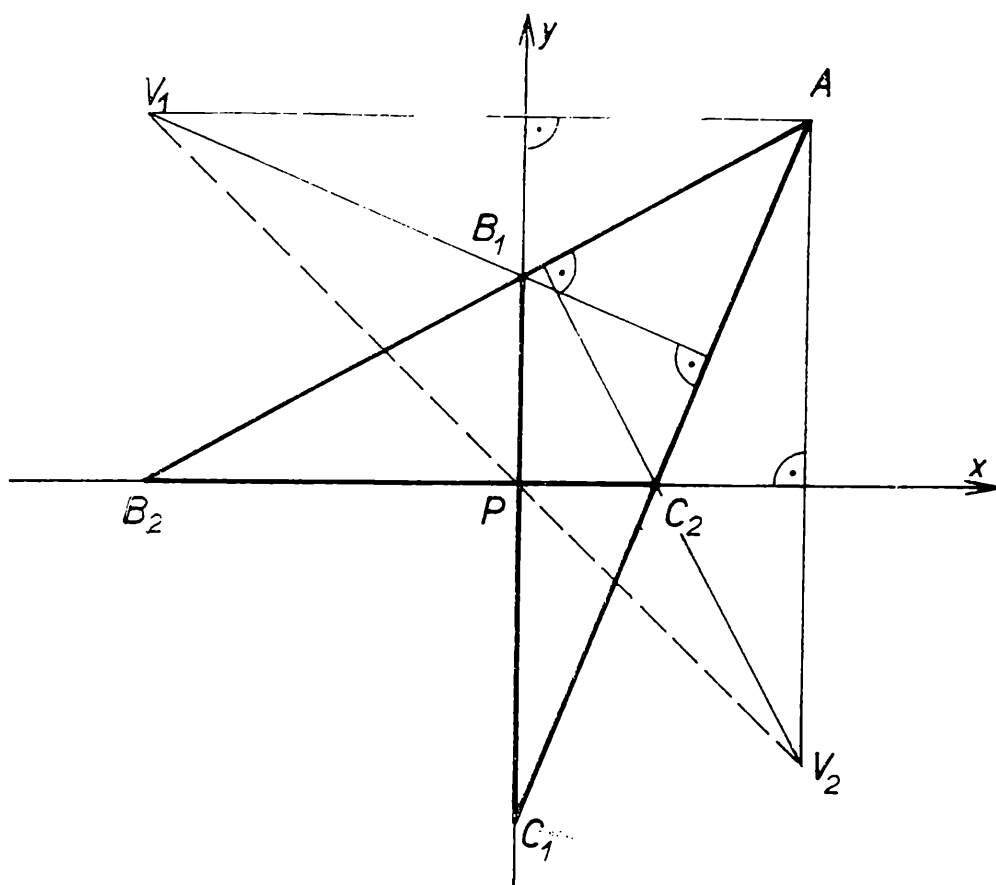
$$b \neq a_2, \quad c \neq a_1. \quad (2)$$

Aby bylo $B_2 \neq B_1$ (resp. $C_2 \neq C_1$), musí být $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Výška ke straně B_1C_1 trojúhelníku AB_1C_1 je rovnoběžná s přímkou B_2C_2 , takže ve zvolené soustavě souřadnic má ortocentrum V_1 trojúhelníku AB_1C_1 druhou souřadnici rovnou a_2 ; jeho první souřadnice budiž ξ . Obdobně ortocentrum V_2 trojúhelníka AB_2C_2 má první souřadnici rovnou a_1 a druhou η . Je tedy

$$V_1 = (\xi; a_2), \quad V_2 = (a_1; \eta).$$

Podle (1) a (2) jsou vektory $\mathbf{B}_1\mathbf{V}_1 = (\xi; a_2 - b)$, $\mathbf{AC}_2 = (c - a_1; -a_2)$ nenulové. Protože V_1 je ortocentrum trojúhelníku AB_1C_1 , jsou tyto vektory vzájemně kolmé, takže jejich skalární součin je rovný nule, tj.



Obr. 4.

$$(c - a_1) \xi - a_2 (a_2 - b) = 0$$

$$\xi = \frac{a_2 (a_2 - b)}{c - a_1} . \quad (3)$$

Obdobně jsou vzájemně kolmé nenulové vektory $\mathbf{V}_2\mathbf{C}_2 = (c - a_1; -\eta)$, $\mathbf{B}_1\mathbf{A} = (a_1; a_2 - b)$, takže je

$$a_1 (c - a_1) - \eta (a_2 - b) = 0$$

$$\eta = \frac{a_1 (c - a_1)}{a_2 - b} \quad (4)$$

Tak dostáváme nenulové vektory

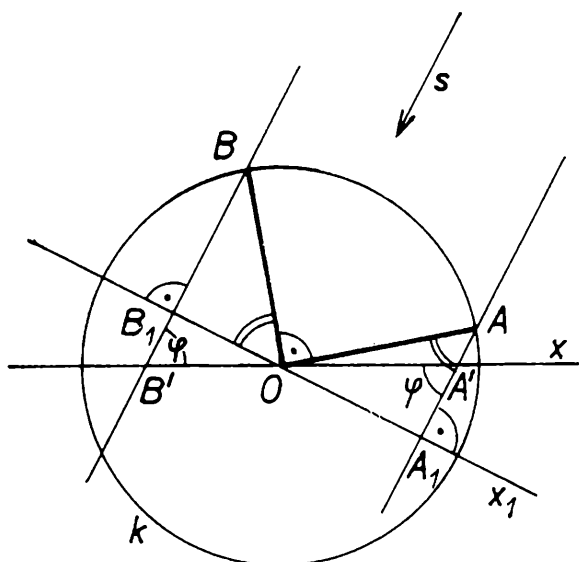
$$\mathbf{PV}_1 = (\xi; a_2), \quad \mathbf{PV}_2 = (a_1; \eta) , \quad (5)$$

kde čísla ξ, η jsou udána vzorci (3) a (4).

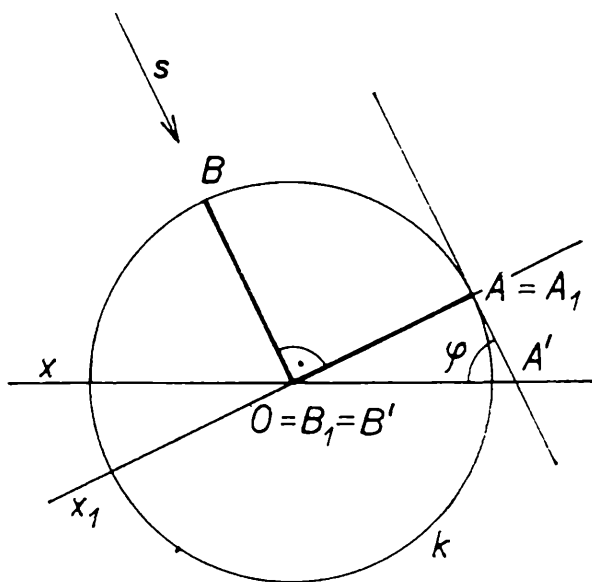
Protože je $a_1 \neq 0, \eta \neq 0$, můžeme vypočít

$$\frac{\xi}{a_1} = \frac{a_2 (a_2 - b)}{a_1 (c - a_1)} = k \neq 0 ,$$

$$\frac{a_2}{\eta} = a_2 \frac{a_2 - b}{a_1 (c - a_1)} = k \neq 0 .$$



Obr. 5.



Obr. 6.

Je tedy $\xi = ka_1$, $a_2 = k\eta$, $k \neq 0$; podle (5) to však znamená, že nenulové vektory $\mathbf{PV}_1$, $\mathbf{PV}_2$ jsou rovnoběžné. Protože mají společný bod P , jsou kolineární; to znamená, že body P , V_1 , V_2 leží v téže přímce.

Poznámka. Úlohu je možno řešit bez užití metody souřadnic na základě vlastností dělicího poměru. Toto řešení uvede autor úlohy ve svém článku, který vyjde v Rozhledech.

6. V rovině je dána kružnice k se středem O a poloměrem r . Přímka x je průměrem kružnice k , úsečky OA , OB jsou její vzájemně kolmé poloměry. Rovnoběžné průměty bodů A , B na přímku x označme A' , B' , vzdálenosti bodu O od bodů A' , B' označme a , b . Dokažte, že číslo

$$a^2 + b^2$$

nezávisí na volbě poloměrů OA , OB kružnice k .

Emil Kraemer

(Došlo 39 řešení)

Upravené řešení kolektivu 4. A gymnasia v Jihlavě (Hana Kovářiková — Miroslav Pavel):

Leží-li poloměry OA , OB v opačných polorovinách s hraniční přímkou x , sestrojíme na přímce OB poloměr OB^x . Potom rovnoběžné průměty úseček $OB^x = OB$ jsou shodné úsečky. Proto stačí provést důkaz pro případ, že poloměry OA , OB leží v téže polorovině s hraniční přímkou x .

a) Předpokládejme nejprve, že směr promítání je k dané přímce x (kterou označíme x_1) kolmý; průměty bodů A , B na přímku x_1 označme A_1 , B_1 . Jestliže žádný z poloměrů OA , OB neleží na přímce x , pak

vzniknou pravoúhlé trojúhelníky OA_1A , OB_1B , které mají shodné přepony a shodné úhly (obr. 5); je tedy

$$\triangle OA_1A \cong \triangle BB_1O.$$

Z toho plyne, že je $OB_1 = AA_1$, takže je

$$OA_1^2 + OB_1^2 = OA_1^2 + AA_1^2 = OA^2 = r^2. \quad (1)$$

Jestliže poloměr OA leží na přímce x_1 , je $A_1 = A$, $B_1 = O$ (obr. 6), takže je $OA_1 = r$, $OB_1 = 0$; platí tedy opět (1).

b) Předpokládejme nyní, že směr promítání není kolmý k dané přímce x . Sestrojme bodem O přímkou x_1 kolmou k danému směru promítání a určíme její průsečíky A_1 , B_1 s promítacími přímkami bodů A , B (obr. 5, 6). Potom pro OA_1 , OB_1 platí (1). Jestliže žádná z přímek OA , OB nepatří do směru promítání, je $A' \neq O$, $B' \neq O$. Potom vzniknou pravoúhlé trojúhelníky OA_1A' , OB_1B' . v nichž je

$$\sphericalangle OB'B_1 = \sphericalangle OA'A_1 = \varphi,$$

kde φ je odchylka směru promítání od přímky x ; je tedy $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

Na obr. 5 je znázorněn případ, kdy body A' , B' jsou odděleny bodem O ; obdobně je tomu i v případě, že body A' , B' nejsou odděleny bodem O . V obou případech je

$$\sin \varphi = \frac{OA_1}{OA'}, \quad \sin \varphi = \frac{OB_1}{OB'},$$

takže je

$$OA'^2 + OB'^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} (OA_1^2 + OB_1^2).$$

Podle (1) je tedy

$$OA'^2 + OB'^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \varphi}. \quad (2)$$

Jestliže přímka OB patří do směru promítání, je $B' = O$. Potom přímka $AA' \parallel OB$ je tečnou dané kružnice (obr. 6), takže vznikne pravoúhlý trojúhelník OAA' , v němž je $\sphericalangle OA'A_1 = \varphi$.

Je tedy

$$OA' = \frac{|OA|}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \varphi}.$$

Protože je $OB' = 0$, platí (2) i v tomto případě. Protože při zvoleném směru promítání je φ pro všechny dvojice poloměrů OA , OB konstantní, je důkaz proveden. Vzorec (2) platí ovšem i pro promítání pravoúhlé,

kdy je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, takže $\sin \varphi = 1$.

7. Riešte nerovnicu

$$|x + 9| - |6x + 14| + |7x + 5| - |4x - 3| \geq x - 3$$

Evžen Říman

Riešenie autora (poslalo 43 riešiteľov):

(a) Určíme nulové body všetkých dvojčlenov, ktorých abs. hodnota sa v zadanej nerovnici vyskytuje. Napr. výraz $7x + 5$ má nulový bod $x = -\frac{5}{7}$, t.j. koreň rovnice $7x + 5 = 0$. Viď tabuľku na str. 123

(b) Naša nerovnica má 4 nulové body, tj. -9 , $-\frac{7}{3}$, $-\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, ktoré vždy treba usporiadať podľa veľkosti vzostupne (čo v našom prípade je už urobené). Preto sa množina $(-\infty, +\infty)$ týmito nulovými bodmi rozdelí na 5 intervalov (označených M_i , viď riadok 1).

(c) Zvolíme (viď riadok 2) vnútri každého z týchto intervalov reálne číslo („bod“). Účel: Treba zistiť znamienko („sign“), aké má vnútri každého intervalu dvojčlen v absolútnej hodnote.

Symbol $-$, 0 značí, že v celom intervale má abs. hodnota znamienko „minus“; znak 0 nám hlási, že ak dosadíme za x ono reálne číslo, akým je interval na pravej strane uzavretý, vtedy hodnota dvojčlena v absolútnej hodnote je nulová. Nula nie je považovaná ani za kladné ani za záporné číslo! Napr. $|7x + 5|$ má v treťom stĺpci (tj. v intervale $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{7}\right)$ znamienko $-$, 0 (viď riadok 5), čiže dosadením $x = -\frac{5}{7}$ do výrazu $|7x + 5|$ dostaneme 0 .

(d) Pomocou zistených znamienok určíme absolútnu hodnotu každého dvojčlena ľavej strany zadanej nerovnice (viď riadky 7, 8, 9, 10) podľa vety: $|a| = a$, ak $a \geq 0$; $|a| = -a$, ak je $a < 0$.

(e) Dajme každej z týchto absolútnych hodnôt také znamienko (sign tj. $+$ alebo $-$), aké mu v uvažovanom intervale patrí. Napr. $|x + 9|$ má v prvom intervale znamienko „minus“ (viď riadok 3 stĺpec prvý). Preto v riadku 7 je $|x + 9| = -x - 9$ (pravdaže v intervale $(-\infty, -9)$).

(f) Sčítajme (v každom intervale zvlášť) riadky 11, 12, 13, 14; tak dostaneme v riadku 15 hodnotu ľavej strany zadanej nerovnice (pre príslušný interval), čo je označené znakom Σ (súčet) = ľavá strana nerovnice.

(g) Ak pridáme aj pravú stranu nerovnice, tj. výraz $\geq x - 3$ vznikne v riadku 16 intervalová nerovnica N_i , ktorú slúčením a anulovaním prevedieme na najjednoduchší tvar (viď riadok 17)

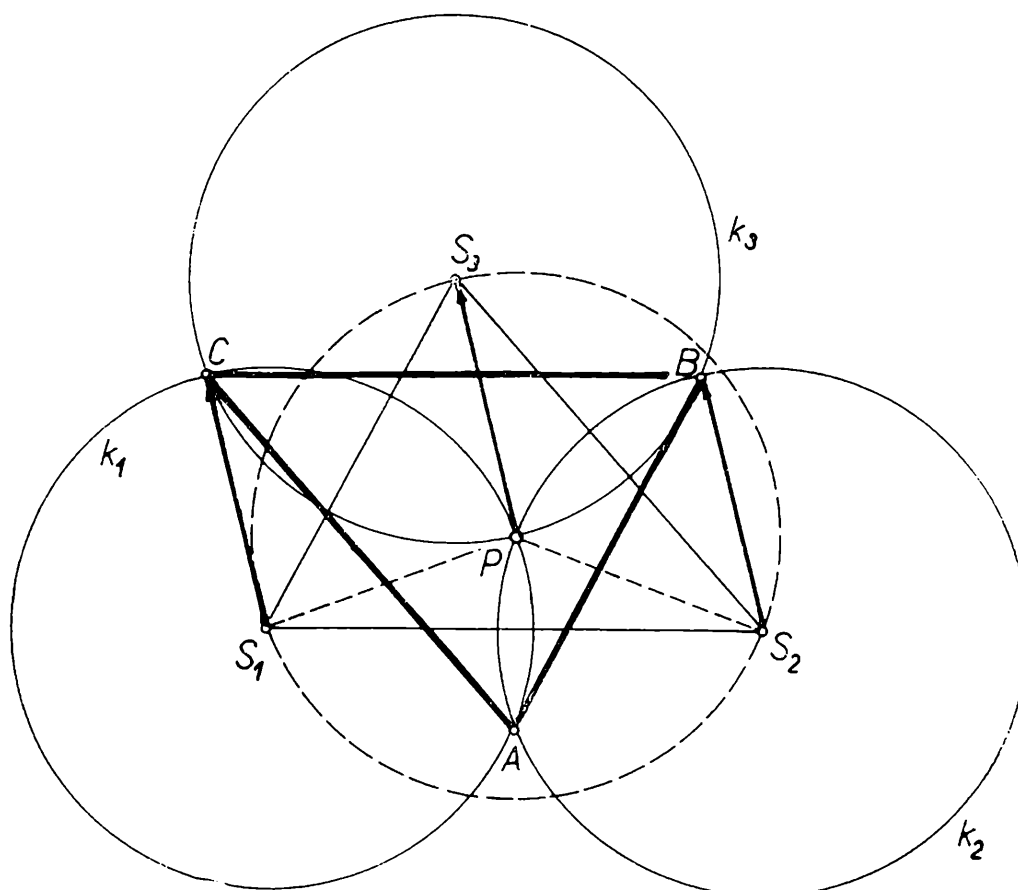
(h) Riadok 18 obsahuje riešenie intervalovej nerovnice (označené R_i).

Stĺpec nultý	prvý	druhý	tretí	štvrtý	piaty	Riadok
Interval M_i	$(-\infty, -9)$	$\left(-9, -\frac{7}{3}\right)$	$\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{7}\right)$	$\left(-\frac{5}{7}, +\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$	prvý
Zvol bod $\in M_i$	-10	-3	-1	0	1	druhý
Znamienka, ktoré má v M_i dvojčlen $(x+9)$ sú dvojčlen $(6x+14)$ dvojčlen $(7x+5)$ dvojčlen $(4x-3)$	- , 0 - - -	+ , 0 - , 0 - -	+ + - , 0 -	+ + + - , 0	+ + + +	tretí štvrtý piaty šiesty
$\begin{vmatrix} x+9 \\ 6x+14 \\ 7x+5 \\ 4x-3 \end{vmatrix} =$	$\begin{vmatrix} -x-9 \\ -6x-14 \\ -7x-5 \\ -4x+3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x+9 \\ -6x-14 \\ -7x-5 \\ -4x+3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x+9 \\ 6x+14 \\ -7x-5 \\ -4x+3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x+9 \\ 6x+14 \\ 7x+5 \\ -4x+3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x+9 \\ 6x+14 \\ 7x+5 \\ 4x-3 \end{vmatrix}$	siedmy 8. 9. 10.
$\begin{vmatrix} x+9 \\ 6x+14 \\ 7x+5 \\ 4x-3 \end{vmatrix} =$	$\begin{vmatrix} -x-9 \\ 6x+14 \\ -7x-5 \\ 4x-3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x+9 \\ 6x+14 \\ -7x-5 \\ 4x-3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x+9 \\ -6x-14 \\ -7x-5 \\ 4x-3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x+9 \\ -6x-14 \\ 7x+5 \\ 4x-3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} x+9 \\ -6x-14 \\ 7x+5 \\ -4x+3 \end{vmatrix}$	11. 12. 13. 14.
$\Sigma \equiv$ ľavá strana nerovnice	$2x-3$	$4x+15$	$-8x-13$	$6x-3$	$-2x+3$	15.
$N_i \equiv$ intervalová nerovnica	$2x-3 \geq x-3$	$4x+15 \geq x-3$	$-8x-13 \geq x-3$	$6x-3 \geq x-3$	$-2x+3 \geq x-3$	16.
$R_i \equiv$ Riešenie intervalovej nerovnice	$x \geq 0$	$3x+18 \geq 0$	$-9x-10 \geq 0$ $x \leq \frac{-10}{9}$	$5x \geq 0$ $x \geq 0$	$-3x+6 \geq 0$ $x \leq 2$	17. 18.
Rovnica grafu intervalovej rovnice	$L_1 \equiv y = x$	$L_2 \equiv y = 3x+18$	$L_3 \equiv y = \frac{-9x-10}{3}$	$L_4 \equiv y = 5x$	$L_5 \equiv y = -3x+6$	19. 20.
Priemik $M_i \cap R_i$	$\emptyset$	$\left\langle -6, \frac{-7}{3} \right\rangle$	$\left\langle \frac{-7}{3}, \frac{-10}{9} \right\rangle$	$\left\langle 0, \frac{3}{4} \right\rangle$	$\left(\frac{3}{4}, 2 \right)$	

Napr. v intervale $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{7}\right)$ má intervalová nerovnica riešenie $x \leq -\frac{10}{9}$.

(j) Celkovým riešením je zjednotenie (znak $\cup$) všetkých prienikov; v našom prípade je to

$$x \in \left\langle -6, -\frac{10}{9} \right\rangle \cup \langle 0, 2 \rangle.$$



8. Tri kružnice k_1, k_2, k_3 , ktorých stredy sú S_1, S_2, S_3 , majú rovnaký polomer r a pretínajú sa v spoločnom bode P aj každé dve vzájomne. Dokážte, že ostatné priesečníky vždy dvoch z daných kružníc, tj. body A, B, C , ležia tiež na kružnici rovnakého polomeru r .

Evžen Říman

(Došlo 30 řešení)

Riešil Igor Böhml, 3. B SPŠS Zvolen :

Polomer opísanej kružnice trojuholníka $S_1S_2S_3$ je r , pričom bod P je stred opísanej kružnice. Potom aj trojuholník zhodný s trojuholníkom $S_1S_2S_3$ má polomer opísanej kružnice r . Stačí preto dokázať, že trojuholníky $ABC, S_1S_2S_3$ sú zhodné.

Kružnice k_1, k_2 mají společné dva různé body P, A . Kružnice k_2, k_3 mají společné dva různé body P, B . Kružnice k_3, k_1 mají společné dva různé body P, C . Preto body P, A, B, C neležia na žiadnej z priamok S_1S_2, S_2S_3, S_3S_1 . Okrem toho je $S_1P = PS_3 = S_3C = CS_1 = r$; útvar S_1PS_3C je teda kosoštvorec (štvorec). Pre vektory $\mathbf{S}_1\mathbf{C}, \mathbf{PS}_3$ preto platí:

$$\mathbf{S}_1\mathbf{C} = \mathbf{PS}_3. \quad (1)$$

Podobne útvar S_2BS_3P je kosoštvorec; preto pre vektory $\mathbf{S}_2\mathbf{B}, \mathbf{PS}_3$ platí:

$$\mathbf{PS}_3 = \mathbf{S}_2\mathbf{B}. \quad (2)$$

Z (1) a (2) plynie, že je

$$\mathbf{S}_1\mathbf{C} = \mathbf{S}_2\mathbf{B}.$$

Preto útvar S_1S_2BC je rovnobežník; teda $BC = S_1S_2$. Podobne dokážeme, že je $AC = S_2S_3, AB = S_1S_3$. Podľa vety sss sú teda trojuholníky $ABC, S_1S_2S_3$ zhodné.

9. V rovině je dán konvexní n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$, kde je $n \geq 12$. Každá jeho úhlopříčka je celá nakreslena červeně nebo celá modře. Potom existuje trojúhelník $A_iA_jA_k$, jehož všechny strany jsou úhlopříčkami daného n -úhelníka a všechny jsou nakresleny červeně nebo všechny jsou nakresleny modře. Dokažte. Platí obdobné tvrzení také pro $n = 11$?

Jiří Sedláček

(Došlo 22 řešení)

Řešil Rostislav Urban, 2. A G Ostrava 1:

a) Na konvexním n -úhelníku ($n \geq 12$) si můžeme vybrat šest vrcholů $A_r, A_s, A_t, A_u, A_v, A_x$ takových, že žádné dva nejsou sousední. Každé dva můžeme spojit úhlopříčkou. Podle Dirichletova principu jsou aspoň tři z úseček $A_rA_s, A_rA_t, A_rA_u, A_rA_v, A_rA_x$ stejné barvy. Necht' jsou to například úsečky A_rA_s, A_rA_t, A_rA_u , které pokládejme třeba za červené. Sestrojme úhlopříčky A_sA_t, A_tA_u . Nemají-li být trojúhelníky $A_rA_sA_t, A_rA_tA_u$ jednobarevné, musí být úsečky A_sA_t, A_tA_u modré. Aby trojúhelník $A_sA_tA_u$ nebyl modrý, je nutné, aby úhlopříčka A_sA_u byla červená. Pak však je trojúhelník $A_rA_sA_u$ celý červený. Existuje tedy vždy stejnobarevný trojúhelník.

b) Pro 11-úhelník naše tvrzení neplatí. To dokážeme tak, že udáme předpis, kterým je určen 11-úhelník, jehož žádný trojúhelník není stejnobarevný. To provedeme takto: Pro každý vrchol A_i jsou úsečky $A_iA_{i+2}, A_iA_{i+3}, A_iA_{i-2}, A_iA_{i-3}$ červené a úsečky $A_iA_{i+4}, A_iA_{i+5}, A_iA_{i+6}, A_iA_{i+7}$ modré. Přitom klademe $A_0 = A_{11}, A_1 = A_{10}, A_{12} = A_1$ atd. Tento 11-úhelník nemá žádný stejnobarevný trojúhelník.

10. Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0.$$

Jaroslav Šedivý

8c ZDŠ Sušická, Praha 6.)

Řešil Ivo Novák, 3. A G Handlová:

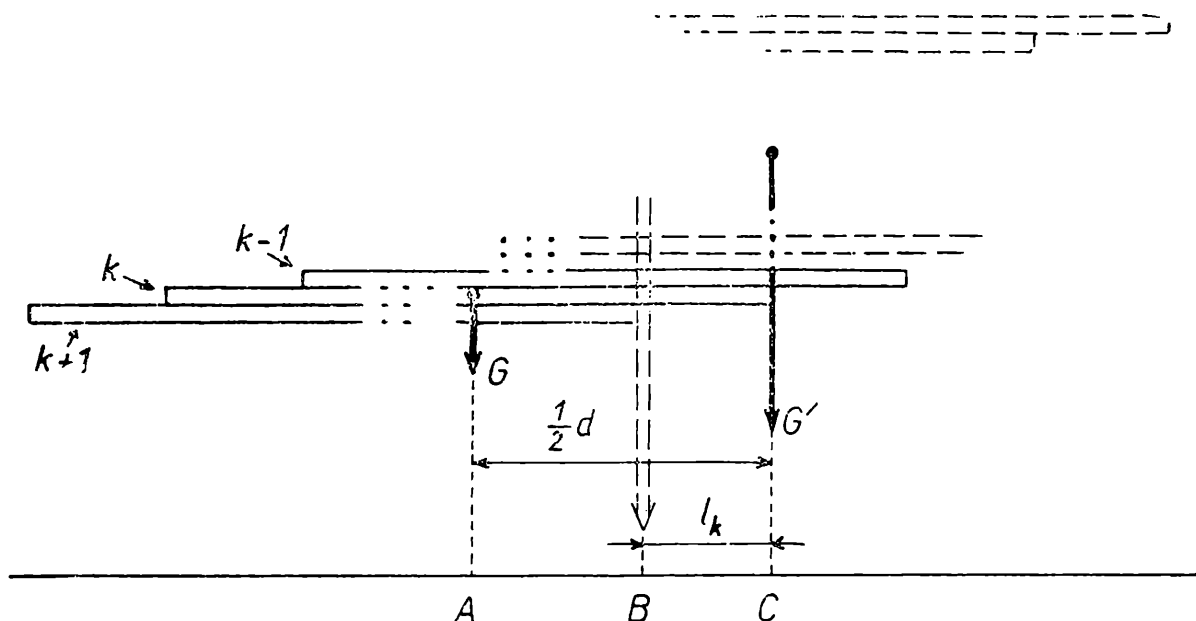
$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2 (x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$$

$$[(x^2 - x + 1)^2 - 9x^2] \cdot [(x^2 - x + 1)^2 - x^2] = 0$$

$$(x^2 - x + 1 - 3x)(x^2 - x + 1 + 3x)(x^2 - x + 1 - x)(x^2 - x + 1 + x) = 0$$

$$(x^2 - 4x + 1 = 0) \vee (x^2 + 2x + 1 = 0) \vee (x^2 - 2x + 1 = 0) \vee \\ \vee (x^2 + 1 = 0)$$

$$x \in \{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; -1; 1\}$$



11. Máte k dispozici sloupec z n karet obvyklého obdélníkového tvaru a pokoušíte se z nich postavit šikmý sloupec. Všechny karty odshora počínajíc vysouváte kratší stranou co nejdále vpravo, ale tak, aby se sloupec nezřítíl. Vyjádřete velikosti posuvu sousedních karet (v poměru k jejich délce); přitom uvažujte jen podmínky stability, bez vlivu tření, přilnavosti apod. Výsledek запиšte jako konečnou posloupnost s $(n - 1)$ členy.

Jaroslav Šedivý

(Došlo 32 řešení.)

Řešil Vladimír Matěna, 1a G v Trutnově:

Hledaná posloupnost má k -tý člen a_k . Velikost posunu k -té karty vzhledem ke $(k + 1)$ -ní kartě shora označme l_k , délku karty označme d . Platí

$$l_k = d \cdot a_k$$

Na k -tou kartu působí dvě síly (viz obrázek):

- a) její tíha G s působištěm v bodě A (středu karty),
 b) tíha G' sloupce $(k - 1)$ karet ležících nad ní; působiště této síly je při dodržení všech udaných podmínek nad pravým okrajem C k -té karty.

Maximálního posunu l_k je dosaženo v případě, kdy výslednice sil G , G' má působiště nad okrajem B $(k + 1)$ -ní karty. Podle pravidla o sčítání rovnoběžných sil platí o velikostech sil a délkách úseček:

$$\begin{aligned} G \cdot AB &= G' \cdot BC \\ G \cdot (\tfrac{1}{2}d - l_k) &= (k - 1) \cdot G \cdot l_k \\ 2k \cdot l_k &= d. \end{aligned}$$

Dosazením do první rovnice zapsané v tomto řešení získáváme

$$a_k = \frac{1}{2k}.$$

Hledaná posloupnost je tedy tvořena čísly

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2k}, \dots, \frac{1}{2(n-1)}.$$

12. V prostoru je dána ortonormální soustava souřadnic $Oxyz$, v níž je zvolen bod $A = (a; b; c)$, kde je $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Najděte rovinu ρ , která prochází bodem A tak, že se souřadnicovými rovinami xy , xz , yz omezuje čtyřstěn, který má nejmenší objem. Úlohu řešte bez použití počtu diferenciálního.

Přemysl Vihan

(Došlo 16 řešení)

Poznámka: Text příkladu měl správně znít takto: ...vedte bodem A rovinu ρ tak, aby z prvního oktantu vyřezala čtyřstěn nejmenšího objemu. V původně uvedené formulaci nemá úloha řešení; toho si také řada řešitelů všimla.

Řešil Václav Kelar, 4. B G Uničov:

Hledaná rovina ρ protíná souřadnicové osy x , y , z po řadě v bodech $X_0 = (x_0; 0; 0)$, $Y_0 = (0; y_0; 0)$, $Z_0 = (0; 0; z_0)$, kde je $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$. Objem čtyřstěnu vyřezaného rovinou ρ z prvního oktantu potom je

$$V = \frac{1}{6} x_0 y_0 z_0. \quad (1)$$

Rovina ρ má rovnici

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1. \quad (2)$$

Protože bod $A = (a; b; c)$ leží v rovině ρ , je

$$\frac{a}{x_0} + \frac{b}{y_0} + \frac{c}{z_0} = 1. \quad (3)$$

A nyní použijeme této poučky: „Aritmetický průměr nezáporných reálných čísel není menší než jejich průměr geometrický; přitom rovnost

obou průměrů nastane právě tehdy, jsou-li si daná reálná čísla rovna.“
V našem případě je tedy

$$\frac{1}{3} \left(\frac{a}{x_0} + \frac{b}{y_0} + \frac{c}{z_0} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{abc}{x_0 y_0 z_0}}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{27} \left(\frac{a}{x_0} + \frac{b}{y_0} + \frac{c}{z_0} \right)^3 \geq \frac{abc}{x_0 y_0 z_0}.$$

Podle (3) dostaneme

$$x_0 y_0 z_0 \geq 27 abc ;$$

podle (1) je tedy

$$V \geq \frac{9}{2} abc .$$

Rovnost nastane (čili objem bude minimální) právě tehdy, bude-li ve (4)

$$\frac{a}{x_0} = \frac{b}{y_0} = \frac{c}{z_0} . \quad (5)$$

Z (3) a (5) dostaneme

$$x_0 = 3a, \quad y_0 = 3b, \quad z_0 = 3c .$$

Dosadíme-li do (2), dostaneme rovnici hledané roviny ϱ , která zní takto:

$$\frac{x}{3a} + \frac{y}{3b} + \frac{z}{3c} = 1 .$$

Fyzika

1. Částice alfa s kinetickou energií 1 MeV se pružně rozptylují na protonech, které jsou v klidu. Vypočítejte:

- maximální hodnotu úhlu rozptylu Θ částice alfa,
- kinetickou energii rozptýlené částice alfa odpovídající maximálnímu úhlu rozptylu.

Zprvu řešte úlohu obecně, potom užitím konečných vztahů proveďte číselný výpočet.

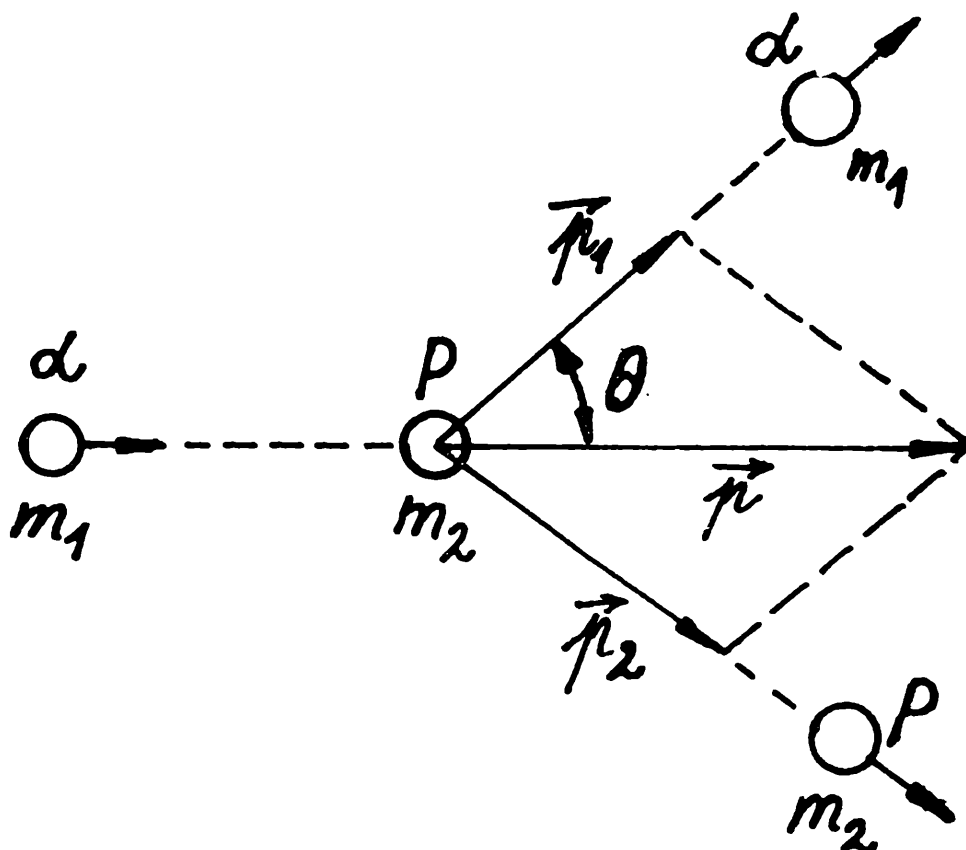
Zdeněk Janout

(Došlo 14 řešení)

Řešil Václav Krmela, IV. roč., gymnázium Lanškroun.

Zavedme následující označení:

- m_1, m_2 jsou hmotnosti částice alfa a protonu,
- p, v jsou prosté hodnoty vektorů hybnosti a rychlosti částice alfa před rozptylem,
- p_1, v_1 jsou tytéž veličiny částice alfa po rozptylem,
- p_2, v_2 jsou prosté hodnoty vektorů hybnosti a rychlosti odraženého protonu.



a) K nalezení vztahu pro maximální úhel rozptylu Θ použijeme zákony zachování energie a hybnosti. Tyto zákony pro pružný rozptyl mají tvar (viz obr.):

$$\frac{2}{1} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2, \quad (1)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \quad (2)$$

Zákon zachování hybnosti (2) můžeme přepsat užitím kosinové věty na tvar:

$$(m_2 v_2)^2 = (m_1 v)^2 + (m_1 v_1)^2 - 2 m_1^2 v v_1 \cos \Theta. \quad (3)$$

Dosadíme-li do rovnice (3) za $(m_2 v_2)^2$ ze zákona zachování energie (1), dostaneme po úpravě vztah:

$$\cos \Theta = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{v}{v_1} + \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{v_1}{v} \right]. \quad (4)$$

Zavedením označení

$$\left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) v = A \quad \text{a} \quad \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{1}{v} = B$$

upravíme rovnici (4) na tvar:

$$\Theta = \arccos \frac{2}{1} \left(\frac{A}{v_1} + B v_1 \right). \quad (5)$$

Maximální úhel Θ určíme tak, že derivaci $\frac{d\Theta}{dv_1}$ položíme rovnu nule.

$$\frac{d\Theta}{dv_1} = - \frac{-\frac{A}{v_1^2} + B}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{A}{v_1} + B v_1 \right)^2}} = 0.$$

Odtud dostáváme podmínku pro rychlost rozptýlené částice alfa pod úhlem $\Theta_{\max}$:

$$\frac{A}{v_1^2} - B = 0;$$

řešením této kvadratické rovnice dostaneme rychlost

$$v_1 = \pm \sqrt{\frac{A}{B}} = \pm v \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} \quad (6)$$

Nyní určíme kořen, který vyhovuje maximálnímu úhlu Θ . Pro maximální úhel musí být druhá derivace záporná, tj.

$$\frac{d^2\Theta}{dv_1^2} < 0. \quad (7)$$

Dvojnásobným zderivováním vztahu (5) a potom dosazením výrazu (6) za v_1 zjistíme, že podmínce (7) vyhovuje pouze kladný kořen, tj.

$$v_1 = v \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} \quad (8)$$

Dosadíme-li (8) do (5), dostaneme pro maximální úhel výraz:

$$\Theta_{\max} = \arccos \sqrt{AB} = \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2} \quad (9)$$

Nyní provedeme číselný výpočet. Za hmotnosti částic dosadíme hmotnosti $m_1 = 6,6560 \cdot 10^{-27}$ kg a $m_2 = 1,6725 \cdot 10^{-27}$ kg. Užitím vztahu (9) dostaneme:

$$\Theta_{\max} = \arccos 0,96792 = 14^\circ 33' 10''$$

maximální úhel rozptylu je tedy $14^\circ 33' 10''$.

b) Kinetickou energii částice alfa rozptýlené pod maximálním úhlem dostaneme užitím vztahu (8). Platí:

$$W_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} W \quad (10)$$

Dosazením číselných hodnot do vztahu (10) dostaneme kinetickou energii částice alfa: $W_1 = 0,6$ MeV.

2. Důležitou roli mezi jadernými palivy hraje izotop uranu ^{235}U . Jádra tohoto izotopu se snadno štěpí pomalými neutrony, přičemž se uvolňuje velké množství energie. Určete:

a) energii (v kJ), která se uvolní při rozštěpení všech jader uranu ^{235}U obsažených v 1 kg,

b) množství nafty (v tunách) o výhřevnosti 41 868 kJ/kg, kterého je zapotřebí k získání ekvivalentního množství energie. Analogickým výpočtem určete i ekvivalentní množství uhlí (výhřevnost 30000 kJ/kg),

c) elektrický výkon (v MW) atomové elektrárny, jestliže roční spotřeba izotopu ^{235}U činí 675 kg a účinnost elektrárny je 25 %.

d) množství izotopu ^{235}U (v kg), které se zúčastní štěpení při výbuchu jaderné bomby s tritolovým ekvivalentem 30 kilotun, jestliže tepelný ekvivalent tritolu je 4186,8 kJ/kg.

Při výpočtech předpokládejte, že se při štěpení jednoho jádra uranu uvolní energie 200 MeV ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Zdeněk Janout

(Došlo 30 řešení)

Řešil Peter Takáč, III. C, gymnázium Šafárikovo.

V texte v odsekoch b), d) sú hodnoty tepelných ekvivalentov vzhľadom k tabuľkám nesprávne; správne majú byť pri daných číslach jednotky kJ/kg a nie J/kg.

Nech $N_A = 6,023 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$ je Avogadrovo číslo,

$W_0 = 200 \text{ MeV}$ je energia uvoľnená pri rozštiepení jednoho jádra uránu,

$Q_n = 41868 \text{ kJ/kg}$ je tepelný ekvivalent nafty,

$Q_u = 30000 \text{ kJ/kg}$ je tepelný ekvivalent uhlia,

$Q_t = 4186,8 \text{ kJ/kg}$ je tritolový ekvivalent a

$\eta = 0,25$ je efektívnosť atomovej elektrárne.

Počet atómov a teda aj jadier v 1 kg uránu ^{235}U bude:

$$n = \frac{N_A}{235} = \frac{6,023 \cdot 10^{26}}{235} = 2,563 \cdot 10^{24}.$$

a) Energia W_1 , ktorá sa uvoľní rozštiepením všetkých jadier v 1 kg uránu ^{235}U je

$$W_1 = n W_0 = 2,563 \cdot 10^{24} \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 8,212 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

Pri rozštiepení všetkých jadier uránu ^{235}U obsiahnutých v 1 kg sa uvoľní $8,212 \cdot 10^{10} \text{ kJ}$ energie.

b) Množstvo hmoty m_1 nafty potrebné na získanie ekvivalentného množstva W_1 energie je potom

$$m_1 = \frac{W_1}{Q_n} = \frac{8,212 \cdot 10^{10}}{41\,868} = 1,961 \cdot 10^6 \text{ kg}.$$

Na získanie ekvivalentného množstva energie je treba 1961 tun nafty.

Analogicky potrebné množstvo m_2 uhlia bude

$$m_2 = \frac{W_1}{Q_u} = \frac{8,212 \cdot 10^{10}}{30\,000} = 2,737 \cdot 10^6 \text{ kg}.$$

Na získanie ekvivalentného množstva energie je treba 2737 tun uhlia.

c) Z 675 kg uránu ^{235}U sa uvoľní množstvo $W = 675 W_1 = 675 \cdot 8,212 \cdot 10^{10} \text{ kJ} = 5,543 \cdot 10^{13} \text{ kJ}$ energie. Elektrický výkon P elektrárne budeme počítať pre normálny 365 dňový rok, tj. pre $t = 3,154 \cdot 10^7 \text{ s}$. Potom

$$P = \frac{W}{t} \eta = \frac{5,543 \cdot 10^{13}}{3,154 \cdot 10^7} \cdot 0,25 = 4,394 \cdot 10^5 \text{ kW}$$

Elektrický výkon atómovej elektrárne je 440 MW.

d) Pri výbuchu jadernej bomby s tritolovým ekvivalentom 30 kiloton sa uvoľní množstvo energie

$$W_2 = 30 \cdot 10^6 \cdot 4186,8 = 1,256 \cdot 10^{11} \text{ kJ}$$

Potom množstvo m hmoty izotopu ^{235}U , ktoré sa zúčastní štiepenia pri výbuchu uvažovanej jadernej bomby je

$$m = \frac{W_2}{W_1} = \frac{1,256 \cdot 10^{11}}{8,212 \cdot 10^{10}} = 1,529 \text{ kg}.$$

Štiepenia sa zúčastní 1,53 kg uránu ^{235}U .

Poznámka autora: Autor príkladu souhlasí s úvodní poznámkou řešitele a omlouvá se všem řešitelům za chybu v jednotkách u ekvivalentů, ke které došlo při přepisu zadání příkladu. Na chybu upozornili i jiní řešitelé. Za správné řešení jsem uznal všechna řešení se správným postupem výpočtu, tj. prominul jsem řešitelům špatné číselné hodnoty, které dostali v důsledku chyby v zadání.

olympiády

Ještě o jubilejním roku MO

Tak už to máme všechno za sebou. Jubileum matematické olympiády probíhalo v minulém školním roce trochu stranou veřejného zájmu, ale řešitelé i organizátoři prožívali tu dobu intenzivněji než jindy. Jak známo, byla MO u nás založena r. 1951 z podnětu akademika E. Čecha a školní rok 1975–76 byl tedy už jejím ročníkem pětadvacátým.

Za čtvrt století se soutěž v mnohém změnila. Z původních dvou kategorií se rozrostla na čtyři, přičemž jedna z nich zahrnuje i žáky ZDŠ. Rozvinula se síť přednášek a seminářů a vznikl i korespondenční kurs pro přípravu vybraných studentů, kteří nemají jiné možnosti studia. Matematická knihovnička byla obohacena skoro čtyřiceti svazky edice Škola mladých matematiků, každoročními brožurami MO a dalšími prameny. Nejschopnější olympionikové dostali ještě další impuls, když r. 1959 vznikla mezinárodní MO. Každoročně má osm našich nejlepších možnost porovnat tak své síly se svými zahraničními vrstevníky.

Jubilejní ročník MO byl předznamenán tiskovou konferencí v pražském Klubu novinářů, jež se za řízení akademika J. Nováka konala 12. září 1975. Snad vám neušlo, že pak hromadné sdělovací prostředky (Mladá fronta, Tvorba, Večerní Praha aj.) věnovaly soutěži zvýšenou

pozornost. Studenti se zatím pilně připravovali. Tak v Praze na gymnáziu W. Piecka už tradičně pokračoval matematický seminář (říjen—únor), v Březnici se v dubnu sjeli vybraní olympionikové, aby se týden připravovali na mezinárodní MO, a rozběhl se i korespondenční kurs. Ještě před celostátním třetím kolem vyšla knížka „Dvacet pět let matematické olympiády v Československu“, o níž Rozhledy referují na jiném místě. Jako zájmový náklad vytiskli v Žilině neprodejnou publikaci „Menný zoznam priekopníkov matematickej olympiády v ČSSR“. Sešit přináší jména známých i opomenutých školských pracovníků, kteří se v českých a slovenských krajích zasloužili o MO za celé čtvrtstoletí. U každého je do několika řádek zhuštěna charakteristika jeho činnosti.

Třetí kolo kategorie A se konalo v Bratislavě ve dnech 6. až 8. května 1976. Sjelo se osmdesát soutěžících z celého státu a pod vedením doc. Jana Vyšína zasedal též Ústřední výbor MO. Ve čtvrtek 6. května v 17 h. byla soutěž slavnostně zahájena v Zrcadlové síni Primaciálního paláce. Další den dopoledne se na gymnáziu v Tomášikově ulici konala první část soutěže. Po polední přestávce si olympionikové prohlédli pamětihodnosti Bratislavy a po večeri zhlédli představení ve Slovenském národním divadle. Také členové ÚV MO měli ten den bohatý program (zasedání v Tomášikově ulici, přijetí delegace na ministerstvu školství, prohlídka pamětihodností a krátký autobusový výlet). Třetí kolo skončilo v sobotu 8. května, kdy se dopoledne řešila druhá část soutěžních úloh. Po obědě se studenti i organizátoři rozejeli zpět do svých domovů. Seznam vítězů třetího kola přináší náš časopis na jiném místě.

Skončil jubilejní ročník, ale před soutěží se otvírají nové úkoly. Noví studenti dostávají olympijský leták, setkávají se ve studijních kroužcích a prohlubují si matematické znalosti. Přejeme všem, aby měli v olympiádě úspěch a aby si tak otevřeli cestu k dalšímu vzdělání.

J. S.

různé

Za profesorem Miloslavem Valouchem

Prof. RNDr. FRANTIŠEK KAHUDA, CSc., UK Praha

Středoškolští studenti, posluchači vysokých škol a široké vrstvy našich občanů znají jméno vysokoškolského profesora RNDr. Miloslava Valoucha a jeho otce — středoškolského profesora matematiky a fyziky PhDr. M. Valoucha především v souvislosti s jejich zpracováním logaritmických tabulek čísel a goniometrických funkcí. Otec Valouchův při-

pravil vydání sedmimístných tabulek logaritmů čísel v roce 1932, kdy toho syn Miloslav byl již dva roky mimořádným profesorem experimentální fyziky na fakultě inženýrského stavitelství Českého vysokého učení technického v Praze. Tyto tabulky, které pak vyšly v dalších vydáních a dotiscích, rozšířil pak Valouchův otec jako hlavní z autorů také o sedmimístné logaritmy goniometrických funkcí v šedesátinném dělení; jejich vydání bylo však druhou světovou válkou přerušeno. Po válce profesor Miloslav Valouch otcovu práci dokončil při plnění jiných naléhavých úkolů až v květnu 1954 a jako spoluautor tabulky vydal v nakladatelství Československé akademie věd v roce 1956. V té době byl profesorem katedry fyziky pevných látek na nově zřízené matematicko-fyzikálně fakultě University Karlovy. Za dva roky nato vydal profesor RNDr. Miloslav Valouch opět v nakladatelství ČSAV v roce 1958 „*Pětimístné logaritmické tabulky čísel a goniometrických funkcí s dalšími matematickými tabulkami a tabulky konstant fyzikálních, chemických, astronomických a jiných*“, které patří dodnes k nejčastěji užívaným jak v praktickém životě, tak i na vědeckých pracovištích. Jimi také jeho jméno, jméno vědce a vysokoškolského učitele žije a bude žít ve vědomí naší mládeže a vědeckých pracovníků.

Profesor RNDr. Miloslav Valouch se narodil 4. srpna 1903 v Litomyšli, kde žil do svých šesti let. Reálné gymnasium vystudoval v Praze — Truhlářské ulici, kde maturoval roku 1921 s vyznamenáním. Rodinné učitelské prostředí a po otci zděděné nadání pro matematiku a fyziku rozhodly o tom, že Miloslav se zápisem na přírodovědecké fakultě University Karlovy rovněž rozhodl pro učitelství vědeckých oborů matematika-fyzika. Vysokoškolské studium, doplněné tříměstrovým studiem fyziky na universitě v Göttingen, ukončil v Praze roku 1926, kdy byl téhož roku prohlášen doktorem přírodních věd na podkladě disertační práce z oboru elektrických výbojů v plynech, kterou začal připravovat již za svého studijního pobytu na göttingenské universitě. Po jednorroční vědecké stáži ve školním roce 1928—29 v laboratoři rentgenových paprsků v Paříži se jako vysokoškolský asistent roku 1929 habilitoval pro obor technické fyziky nejprve na Českém vysokém učení technickém v Praze a v roce 1931 také na Karlově universitě. Po dalším půlročním pobytu v Ústavu pro výzkum kovů v Berlíně ve školním roce 1932—33 byl jmenován ve svých 31 letech mimořádným vysokoškolským profesorem na fakultě inženýrského stavitelství ČVUT v Praze roku 1934. Od té doby patřil mezi významné osobnosti experimentálních fyziků.

Válka a uzavření našich vysokých škol německými okupanty jeho vědeckou i pedagogickou činnost přerušila. V té době profesor Valouch pracoval hlavně v Jednotě československých matematiků a fyziků, která tajně připravovala návrh na reformu našeho školství tak, aby zřízením jednotné školy a novou organizací vysokých škol, zvláště též pokud jde

o přijímání studentů na vysoké školy, bylo dosaženo úplné demokratizace naší vzdělávací soustavy. V této činnosti pokračoval profesor Valouch i po válce jako člen řady odborných komisí státních i politických. Jako generální sekretář Státního výboru pro vysoké školy a vedoucí odboru vysokých škol na ministerstvu školství uváděl do života nový zákon o vysokých školách a aktivně se zúčastnil přípravy zákona o Československé akademii věd, kde byl členem vědeckého kolegia fyziky.

Jako řádný profesor experimentální fyziky byl od roku 1953 vedoucím katedry pevných látek na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university, zabýval se též v součinnosti s mezinárodní organizací UNESCO otázkami modernizace vyučování fyzice, od roku 1966 jako vedoucí Kabinetu pro modernizaci vyučování fyzice při ČSAV. Vždy mu záleželo na tom, aby vyučování fyzice důsledně vycházelo z dialekticko-materialistického chápání přírodních zákonů a aby bylo přísně založeno na důkladném osvojování základních fyzikálních vztahů a pojmů. Proto též do vydání svých logaritmických tabulek zařazoval část o fyzikálních konstantách, kterou v každém novém vydání aktualizoval, aby byla ve shodě s nejnovějšími experimentálními měřeními.

Profesor RNDr. Miloslav Valouch byl oddaným členem KSČ od roku 1945, poslancem Národního shromáždění, nositelem řádu 25. února II. stupně, medaile Jana Ámose Komenského a řady dalších vyznamenání našich i zahraničních, čestným členem Jednoty československých matematiků a fyziků. Svou významnou práci vždy spojoval s aktivní politickou činností, byl vynikajícím organizátorem a aktivním spoludovatelem naší socialistické společnosti.

Zemřel 13. března 1976 ve věku 72 let. Vzpomínáme ho s úctou k jeho osobě i práci a zachováme jej trvale ve své paměti.

Súťažné úlohy z fyziky v MLR a ich riešenie

JÁN GEDEI, Stavebná fakulta SVŠT v Bratislave

(Dokončení)

2. úloha. Považujme za premennú x dráhu, ktorú prejde koniec povrazu od začiatku (obraz 2). Na začiatku na oboch stranách valčeka visí povraz dĺžky

$$(L - \pi r)/2 = 0,843 \text{ m} .$$

Označme hmotnosť 1 m dlhého povrazu σ . Vyjadrieme rýchlosť a zrýchlenie pohybu povrazu ako funkciu x . Podľa zákona zachovania energie je

$$\sigma x g x = \sigma L \cdot v^2/2 \quad (21)$$

Z (21) je rýchlosť

$$v = \sqrt{\left(\frac{2g}{L}\right) \cdot x} . \quad (22)$$

Ak (22) derivujeme podľa času, dostaneme zrýchlenie

$$a = \frac{dv}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2g}{L}\right)} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2g}{L}\right)} \cdot v = \frac{2g}{L} \cdot x . \quad (23)$$

Dĺžka povrazu, zodpovedajúca stredovému uhlu $\Delta\alpha$, sa oddelí od valčeka v bode A práve vtedy, keď normálová zložka sily F_n (pochádzajúca od povrazu), pôsobiaca na túto časť hmotnosti, bude sa rovnáť mv^2/r , t.j.

$$\frac{mv^2}{r} = F_n . \quad (24)$$

Vypočítajme veľkosti premenných, ktoré sa vyskytujú v (24). Hmotnosť m , ktorá sa má zrýchliť (obraz 10), je

$$m = \sigma r \cdot \Delta\alpha . \quad (25)$$

Štvorec rýchlosti podľa (22) je

$$v^2 = 2gx^2/L .$$

Normálovú zložku sily F_n dostaneme pomocou dvoch tangenciálnych zložiek síl F_t (obraz 11):

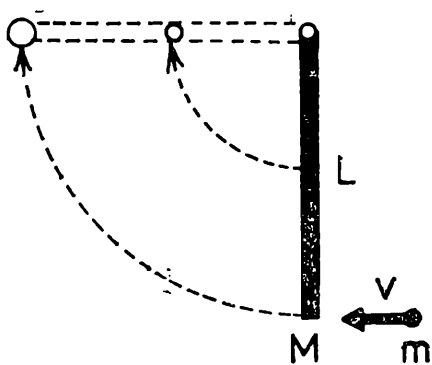
$$F_n = 2F_t \sin \frac{\Delta\alpha}{2} \approx F_t \cdot \Delta\alpha . \quad (27)$$

Treba vypočítať F_t . Tangenciálna zložka sily F_t je tá zložka sily, ktorá odovzdáva zrýchlenie a časti povrazu (smerom hore), visiacej v bode A . Preto (viď obraz 2) použitím (23) je

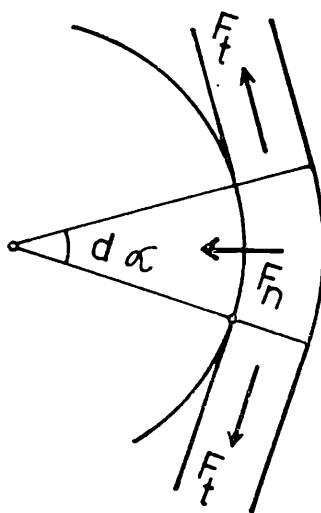
$$\begin{aligned} F_t &= \left(\frac{L - \pi r}{2} - x \right) \cdot \sigma \cdot (g + a) = \\ &= \left(\frac{L - \pi r}{2} - x \right) \cdot \sigma \left(g + \frac{2g}{L} \cdot x \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Ak do (24) dosadíme (25), (26), resp. použijeme vzťahy (27) a (28), dostaneme

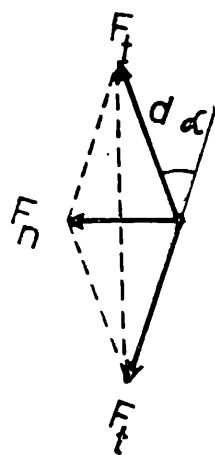
$$\frac{\sigma r \cdot \Delta\alpha \cdot 2g}{Lr} \cdot x^2 = \left(\frac{L - \pi r}{2} - x \right) \cdot \sigma g \left(1 + \frac{2}{L} \cdot x \right) \cdot \Delta\alpha ,$$



Obr. 9.



Obr. 10.



Obr. 11.

čo po úprave dáva rovnicu

$$4x^2 + \pi r x - \frac{L(L - \pi r)}{2} = 0. \quad (29)$$

Riešením (29) je

$$x = \frac{L}{8} \cdot \left[-\frac{\pi r}{L} + \sqrt{\left[\left(\frac{\pi r}{L} \right)^2 + 8 \left(1 - \frac{\pi r}{L} \right) \right]} \right]. \quad (30)$$

Po dosadení daných údajov dostaneme $x = 0,611$ m. Dolný koniec povrazu je v hĺbke

$$h = \frac{L - \pi r}{2} + x, \quad (31)$$

čo po dosadení dáva $h = 0,843$ m + $0,611$ m = $1,454$ m.

3. úloha. V určitom okamihu veľkosť intenzity elektrického prúdu na úsekoch medzi označenými bodmi (a, b, c, d) je rovnaká. Veľkosť napätia $U = 5$ V je súčtom veľkosti napätí medzi týmito bodmi (obraz 3).

Našou úlohou je najskôr, aby sme vyšetrili zapojenie pri kruhovej frekvencii ω . Pretože je $I = 1$ mA a $R = 5$ k Ω , veľkosť napätia medzi bodmi $a-b$ je $U_{ab} = 5$ V. Z toho máme $U_{bd} = 0$ V. To znamená, že medzi bodmi $b-d$ je rezonancia. Úsek $b-c$ má kapacitný charakter, teda paralelný oscilačný okruh na úseku $c-d$ musí mať induktívny charakter, tj.

$$\omega L < \frac{1}{\omega C}. \quad (32)$$

Výsledný odpor medzi bodmi $c-d$ (podľa známeho pravidla paralelne spojených odporov pri striedavom prúde) je

$$X_{cd} = \frac{\omega L(1/\omega C)}{(1/\omega C) - \omega L}, \quad (33)$$

alebo po úprave

$$X_{cd} = \frac{L/C}{(1/\omega C) - \omega L} . \quad (34)$$

Podmienkou rezonancie je, aby

$$\frac{L/C}{(1/\omega C) - \omega L} = \frac{1}{\omega C} . \quad (35)$$

Z (35) pre počiatočnú frekvenciu ω dostaneme podmienku

$$\omega^2 = \frac{1}{2 \cdot LC} . \quad (36)$$

Z údajov voltmetra dostaneme veľkosť napätia medzi bodmi $b-c$:

$$(13 \text{ V})^2 = (5 \text{ V})^2 + U_{bc}^2 ,$$

z čoho je $U_{bc} = 12 \text{ V}$. Ale potom

$$X_{bc} = \frac{U_{bc}}{I} = \frac{12 \text{ V}}{0,001 \text{ A}} = 12 \text{ k}\Omega .$$

Ďalej je z (36)

$$\omega L = \frac{1}{2\omega C} = 6 \text{ k}\Omega \quad (37)$$

Týmto poznáme všetky údaje pri kruhovej frekvencii ω . Teraz treba vyšetriť, aké zmeny nastanú, ak frekvenciu ω znížime na $\omega/\sqrt{2}$.

Ak do (33) dosadíme (37), dostaneme impedanciu paralelného oscilačného okruhu medzi bodmi $c-d$ s induktívnym charakterom

$$X_{cd} = \frac{(6 \text{ k}\Omega/\sqrt{2}) \cdot 12 \text{ k}\Omega \cdot \sqrt{2}}{12 \text{ k}\Omega \sqrt{2} - 6 \text{ k}\Omega/\sqrt{2}} = 4 \sqrt{2} \text{ k}\Omega .$$

Výsledná impedancia medzi bodmi $b-d$ je

$$12\sqrt{2} \text{ k}\Omega - 4\sqrt{2} \text{ k}\Omega = 8\sqrt{2} \text{ k}\Omega$$

s kapacitným charakterom. Jej sériová výslednica s odporom $R = 5 \text{ k}\Omega$ je

$$X_{ad} = \sqrt{[(5 \text{ k}\Omega)^2 + (8\sqrt{2} \text{ k}\Omega)^2]} = \sqrt{153} \text{ k}\Omega = 12,37 \text{ k}\Omega .$$

Veľkosť intenzity prúdu je

$$I = \frac{5 \text{ V}}{12,37 \text{ k}\Omega} = 0,404 \text{ mA}$$

a to je hľadaný údaj ampérmetra.

Výsledná impedancia medzi bodmi $a-c$ je

$$X_{ac} = \sqrt{\lambda(5 \text{ k}\Omega)^2 + (12\sqrt{(2) \text{ k}\Omega)^2}} = \sqrt{(313) \text{ k}\Omega} = 17,69 \text{ k}\Omega$$

Veľkosť príslušného napätia — hľadaný údaj voltmetra — je

$$U_{ac} = X_{ac} \cdot I,$$

tj. po dosadení

$$U_{ac} = 7,15 \text{ V}$$

Kapesní kalkulátor a jeho použití

Ing. VLADIMÍR STEJSKAL CSc., ČVUT Praha

V poslední době se i u nás rozšířily kapesní kalkulátory nejrůznějších typů včetně československého TESLA. Přichází tím k širokému použití zařízení, které nám i ve svém nejjednodušším provedení vytváří nové možnosti v kvantitativních rozborech i složitých fyzikálních zákonitostí a je ovšem i vynikajícím nástrojem v matematice samé. Umožňuje velice operativně provádět číselné výpočty, které jsme dříve ať již z pohodlnosti nebo nedostatku času neprováděli, a přispívá tak značnou měrou k hlubšímu pochopení zkoumaných souvislostí.

V tomto článku se pokusíme stručně seznámit čtenáře se základními možnostmi, které nám kapesní kalkulátor (dále jen *kk*) při výpočtech poskytuje, a zmíníme se i o několika úskalích, na která můžeme při jeho použití narazit.

Je velmi obtížné zaměřit se při výkladu na jeden typ *kk* pro jejich velkou různorodost a odchylky v detailech funkce i provedení. Budeme proto hovořit pouze o základních vlastnostech a funkcích, které jsou většině *kk* společné, a popíšeme základní odlišnosti jednotlivých typů. Pomineme-li konstrukční provedení, vnější vzhled a způsob napájení, liší se *kk* hlavně ve způsobu vstupu a výstupu numerických údajů a v možnostech, které pro výpočet poskytují.

Způsob vstupu velmi úzce souvisí s celkovým ovládáním *kk*. Používá se hlavně dvou způsobů: algebraického a obráceného polského způsobu. Algebraický způsob se velmi podobá zápisu matematického výrazu, jak ho používáme při běžném počítání v algebře. Chceme-li např. sečíst dvě čísla A a B , provedeme

$$A \boxed{+} B \boxed{=}$$

a výsledek $(A + B)$ se objeví na displeji. Pro svou jednoduchost i proto, že tento postup zcela souhlasí s našimi zvyklostmi při zacházení s alge-

braickými výrazy, je tento způsob ovládání velmi oblíben. Existuje však úspornější a zvláště ve spojení s automatickou pamětí rychlejší a efektivnější způsob ovládání *kk*, a to obrácený polský způsob, jehož autorem je polský logik Lukasiewicz. Formálně se tento postup liší od algebraického zejména tím, že zde čísla vstupují dříve než znak operace. Na př. při dělení čísel *A* a *B* postupujeme takto:

$$A \boxed{\text{ENTER}} B \boxed{\text{ENTER}} \boxed{\div}$$

a na displeji se objeví výsledek. Na první pohled poznáme *kk* tohoto typu podle toho, že na klávesnici není klávesa $\boxed{=}$, je tam však klávesa pro vstup čísla obvykle značená $\boxed{\text{ENTER}}$. Výhoda obráceného polského způsobu se výrazně projeví při vyčíslování složitějších výrazů a zejména při práci s výrazy obsahujícími závorky.

Pokud jde o typy výstupu, používá se dvou: čísla s pevnou desetinnou tečkou a čísla s pohyblivou desetinnou tečkou. Při obou způsobech může mít displej různý počet zobrazovaných cifer, nejčastěji 8. V obou případech bývá displej opatřen ještě dalším znakem indikujícím tzv. přeplnění, tj. případ, kdy zobrazované číslo má větší počet cifer než je na displeji k dispozici.

V prvním případě má při všech početních operacích desetinná tečka své pevné místo. V druhém případě se desetinná tečka pohybuje tak, že je stále zobrazována nejdůležitější část čísla, tj. cifry nejvyšších řádů. U výkonnějších typů *kk* je tento způsob používán spolu se zobrazením čísla v semilogaritmickém tvaru, tedy např.

$$b.bbbbbbb(\pm)bb \quad (b \text{ znamená cifru}),$$

kde první část čísla je mantisa a poslední dvě cifry udávají charakteristiku. Jde o zápis známý z počítání s logaritmy. Tento způsob umožňuje pracovat s čísly od $0.0000001 \times 10^{-99}$ do $99999999. \times 10^{99}$.

Hlavní rozdíl mezi soustavou s pevnou a pohyblivou desetinnou tečkou po stránce matematické je v nerovnoměrném pokrytí celého číselného intervalu čísly. Tuto skutečnost si uvědomíme, vezmeme-li v úvahu velikost minimálního přírůstku čísla, který můžeme použít. Tak např. v soustavě s desetinnou tečkou pevnou před druhou cifrou zprava bude minimální přírůstek ke každému zobrazovanému číslu mít hodnotu 0.01 a všechna zobrazovaná čísla jsou tedy v celém intervalu 000000.00 až 999999.99 (pro osmimístný displej) rozložena rovnoměrně. V soustavě s pohyblivou desetinnou tečkou a osmimístný displej je nejmenší přírůstek 0.0000001 v případě, že desetinná tečka je nejvíce vlevo, nebo 1 v případě, že desetinná tečka je nejvíce vpravo (99999998.). Tyto přírůstky se liší řádově o 10^7 a rozložení zobrazovaných čísel v intervalu kladných čísel, která jsme měli při výše uvedené úvaze na mysli, je velmi nerovnoměrné. Je užitečné si uvědomit, že mezi čísly 0 a 1 je právě tolik čísel jako mezi čísly 1 a 99999999.

Uvedme ještě několik poznámek k možnostem, které *kk* poskytují pro numerické výpočty. Záleží zde samozřejmě na typu *kk*. Nejjednodušší (a také nejlacinější) *kk* umí řešit pouze čtyři základní početní operace, tedy jsou vybaveny klávesami $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$. I tyto nejjednodušší *kk* jsou však velmi užitečné a umožňují i dost přesný výpočet na př. goniometrických funkcí, jak bude ještě ukázáno. Dalším obvyklým vybavením jednoduchých kalkulačků je možnost výpočtu druhé odmocniny a procent, tedy klávesy $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{\%}$. Vyšším typem jsou *kk* opatřené paměťovým registrem, který lze ovládat z klávesnice. Pak již následují *kk* s možností výpočtu základních funkcí, jako jsou $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ (a to obvykle s možností volby argumentu ve stupních nebo v radiánech), $\ln x$, $\log x$, e^x , 10^x , x^y , $1/x$. U některých *kk* těchto typů se používá obráceného polského způsobu, a proto jsou vybaveny obvykle třemi automatickými paměťovými registry. Na konci řady typů *kk* pak stojí nejdokonalejší (a také nejdražší) programovatelné *kk*, které kromě všech dříve popsaných možností umožňují i sestavení jednoduchých programů v délce na př. 70 nebo 100 kroků. To jsou již vlastně malé počítače. Některé z nich umožňují i uchování programu na magnetické kartě, ze které lze kdykoliv odladěný program do paměti kalkulačků přehrát a okamžitě použít.

Ať již máme k dispozici jakkoliv dokonalý *kk*, vždy musíme při jeho použití dbát na zachování některých pravidel z numerické matematiky. Především je třeba upozornit na problém přesnosti získaných výsledků. Počet osmi i více zobrazovaných cifer ve výsledku vede k dojmu, že počítáme velmi přesně. Nemusí tomu tak vždy být. Počet míst, na která počítáme, má svou úlohu, nemusí však být rozhodující. Do značné míry záleží i na tvaru vyčíslovaných výrazů, na pořadí, ve kterém operace provádíme, a na přesnosti, s jakou známe vstupní údaje. Známe-li např. vstupní údaje s přesností na jedno desetinné místo, nemůžeme očekávat, že výsledek bude přesný na osm desetinných míst. Podrobnější rozbor této zajímavé a pro praktické počítání velmi důležité problematiky přechází rámec tohoto článku. Pro ilustraci uvedeme jen příklad, který zdůrazňuje vliv pořadí operací na velikost zaokrouhlovací chyby. Vliv této chyby může být podstatný zejména při počítání s čísly, která mají za desetinnou tečkou více nul. Počítejme např. na *kk* s pohyblivou desetinnou tečkou a osmimístným displejem tento příklad

$$\frac{0,0006314 \times 0,00023}{0,00077} = \frac{a \times b}{c}.$$

Provedeme-li $\left(\frac{a}{c}\right) \cdot b$, dostaneme přesný výsledek 0,0001886. Bude-li však pořadí operací takové, které odpovídá zápisu, tj. $(a \cdot b)/c$, dostaneme výsledek 0,0001298. Definujeme-li absolutní chybu předpisem

přesná hodnota = přibližná hodnota + absolutní chyba
a relativní chybu v % vztahem

$$\text{relativní chyba} = \frac{\text{absolutní chyba}}{\text{přesná hodnota}} \times 100 \quad \%,$$

dostali jsme v druhém případě výsledek s relativní chybou 31,2 %. Hlavním zdrojem tak velké chyby je zde zaokrouhlení mezivýsledku, vyplývající z nemožnosti pracovat s větším počtem cifer než osm. Přesná hodnota mezivýsledku je $a \cdot b = 0,000000145222$. Tato hodnota je zaokrouhlena (u některých systému jsou přebytečné cifry jen „odříznuty“) na osm cifer, tedy $a \cdot b \doteq 0,0000001$. S tímto nepřesným číslem pak pokračujeme ve výpočtu.

Jinou „nebezpečnou“ operací je rozdíl čísel s velmi blízkou absolutní hodnotou, zvláště je-li v dalším výpočtu tento rozdíl použit jako dělitel.

S ohledem na to, že cenově jsou nejpřístupnější nejjednodušší *kk*, ukažme v dalším, že jich lze jednoduše použít též k vyčíslení funkčních hodnot základních funkcí i jiným složitějším výpočtům. Předpokládejme, že máme k dispozici *kk* jen pro čtyři základní operace s pohyblivou desetinnou tečkou.

Pro běžné výpočty nám na takovém *kk* bude především chybět číslo π . Lze si ho však snadno opatřit s chybou menší než $4 \cdot 10^{-7}$ dělením

$$\pi \doteq \frac{355}{113}.$$

V případě, že na klávesnici není klávesa $\sqrt{\quad}$, lze výpočet druhé odmocniny provést iteračně s využitím *Newton-Raphsonova* vzorce

$$(\sqrt[n]{n})_{k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{(\sqrt[n]{n})_k} + (\sqrt[n]{n})_k \right)$$

Jako příklad použití tohoto vzorce je v tabulce 1. uveden postup výpočtu $\sqrt[5]{5}$ ($n = 5$).

krok k	$(\sqrt[5]{5})_k$
0	2.0 (odhad)
1	2.25
2	2.2361111
3	2.2360679
4	2.2360679

Tab. 1.

Obdobného vzorce lze použít pro r -tou odmocninu:

$$({}^r\sqrt[n]{n})_{k+1} = \frac{1}{r} \left[(r-1) ({}^r\sqrt[n]{n})_k + \frac{n}{[({}^r\sqrt[n]{n})_k]^{r-1}} \right].$$

Výpočet goniometrických a jiných základních funkcí lze provést jednoduše a rychle s využitím *Taylorových řad* příslušných funkcí zapsaných

ve tvaru vhodném pro použití *kk*. Je to tzv. „závorkový“ tvar, který pro vyčíslení vůbec nevyžaduje operace s pomocnou pamětí. Běžně uváděný tvar Taylorovy řady na př. pro funkci $\sin x$ (x v radiánech) je

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!},$$

uvážujeme-li jen 5 členů řady. Tento vztah přepíšeme do „závorkového“ tvaru:

$$\sin x \doteq x \left(1 - \frac{x^2}{6} \left(1 - \frac{x^2}{20} \left(1 - \frac{x^2}{42} \left(1 - \frac{x^2}{72} \right) \right) \right) \right); \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

a jeho vyčíslení provedeme pro $x = 0.11$ rad takto:

$$\begin{aligned} & \boxed{\text{CL}} \ 0.11 \ \boxed{\times} \ 0.11 \ \boxed{\div} \ 72 \ \boxed{\text{CHS}} \ \boxed{+} \ 1 \ \boxed{\times} \ 0.11 \ \boxed{\times} \ 0.11 \ \boxed{\div} \\ & 42 \ \boxed{\text{CHS}} \ \boxed{+} \ 1 \ \boxed{\times} \ 0.11 \ \boxed{\times} \ 0.11 \ \boxed{\div} \ 20 \ \boxed{\text{CHS}} \ \boxed{+} \ 1 \ \boxed{\times} \ 0.11 \\ & \boxed{\times} \ 0.11 \ \boxed{\div} \ 6 \ \boxed{\text{CHS}} \ \boxed{+} \ 1 \ \boxed{\times} \ 0.11 \ \boxed{=} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{CL}}$ v tomto zápisu znamená nulování displeje a $\boxed{\text{CHS}}$ je změna znaménka. Jako výsledek dostaneme

$$\sin 0.11 = 0.1097783$$

Obdobné výrazy lze napsat i pro další goniometrické funkce, cyklo-metrické funkce, hyperbolické funkce, logaritmus, e^x apod. Tak např.

$$\begin{aligned} \cos x & \doteq \left(1 - \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{12} \left(1 - \frac{x^2}{30} \left(1 - \frac{x^2}{56} \right) \right) \right) \right); \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \\ \text{tg } x & \doteq x \left(1 + \frac{x^2}{3} \left(1 + \frac{2x^2}{5} \left(1 + \frac{17x^2}{42} \left(1 + \frac{628x^2}{2835} \right) \right) \right) \right); \quad |x| < \frac{\pi}{4}, \\ \text{cotg } x & \doteq \frac{1}{x} - \frac{x}{3} \left(1 + \frac{x^2}{15} \left(1 + \frac{2x^2}{21} \left(1 + \frac{x^2}{10} \right) \right) \right); \quad |x| < \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

S využitím těchto a podobných vzorců lze pak i s nejjednodušším kalkulátorem provádět i dosti složité výpočty. Vyžádá si to ovšem více času a častějšího zapisování mezivýsledků než při použití dokonalejších *kk*.

Ještě jedno kosmicko - gravitační zamyšlení

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Už dvakrát jsme se zde zamýšleli nad některými zajímavostmi, za něž „odpovídá“ gravitace při kosmických letech. Dnes jsme z téže oblasti vybrali situaci, kterou musí řešit posádky lodí, mající za úkol přiblížit se k nějakému obíhajícímu tělesu. Kdysi dávno bývala tímto tělesem raketa Agena, později ji nahradila jiná kosmická loď s lidskou posádkou nebo dokonce orbitální laboratoř. Vždy však šlo v podstatě o jedno: jak to zařídit, aby se jedno těleso přiblížilo ke druhému.

Zde na Zemi to není problém; potřebuji-li dohonit někoho, kdo jede na silnici přede mnou, přidám trochu plyn a je to. Potřebuji-li naopak na někoho počkat, přibrzdím. Jenže v podmínkách kosmického letu je všechno úplně jinak. Jestliže totiž jakkoli změním svou rychlost, změní se současně i moje dráha. Kdybychom si to přenesli do pozemských podmínek, potom bychom museli na silnici počítat s tím, že přidáním plynu či přibrzděním se změní nejen dosavadní rychlost vozidla, ale současně i silnice. Proto naše běžné zkušenosti v tomto ohledu pro kosmické lodi neplatí, ba dokonce platí částečný opak: jestliže chceme na oběžné dráze někoho dohonit, přibrzdíme. Jestliže naopak chceme na někoho počkat, přidáme „plyn“.

Takto to totiž požadují zákony nebeské mechaniky a dokonce i jednoduché Keplerovy zákony. Přibrzděním totiž loď přejde na nižší dráhu, než byla dráha dosavadní, a ze zákona ploch vyplývá, že se úhlová rychlost zvětší. Tím budeme těleso, které potřebujeme dohonit, skutečně také dohánět, takže je nakonec můžeme předběhnout, ovšem „zdola“. Jestliže jsme naopak o něco napřed, pak svůj pohyb zrychlíme. Přejdeme sice na vyšší dráhu, avšak naše úhlová rychlost klesne. Vidíme tedy, že všechno je úplně jiné než zde na Zemi a aby to nakonec dobře dopadlo, musí být do práce zapojeny počítače, které byly „vyškoleny“ v používání zákonů nebeské mechaniky a jsou navíc vybaveny „zpětnou vazbou“: navigační čidla, např. vzdálenostní palubní radary, ustavičně kontrolují situaci a předávají své údaje do zmíněného počítače, který s nimi zachází jako s „počátečními podmínkami“ příslušného výpočtu.

V této počáteční fázi přibližování obou obíhajících těles pracují tedy výhradně automaty a činnost kosmonautů se omezuje pouze na kontrolu. Teprve když se obě kosmické lodi k sobě přiblíží na vzdálenost několika málo set metrů, ujmou se řízení kosmonauti; neustále kontrolují vzájemnou rychlost i vzdálenost a podle toho pohyb svých plavidel „dolaďují“. Že se i tuto druhou fázi přibližovacího manévru podařilo zvládnout na výbornou, dosvědčil např. první společný let sovětských a amerických kosmonautů.

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

involuce
involutorní
iracionální
 iracionální výraz
ireducibilní
iterační
izolovaný
izometricky
izomorfní

involution
involutory
irrational
 surd
irreducible
iterative
isolated
isometric
isomorph

jádro
jeden
jedenáct
jediný
jednoduchý
jednoprvková množina
jednotka
jednotkový
 jednotkový čtverec
 jednotková kružnice
 jednotková krychle
jednoznačně určené
jednoznačný
jednoznačnost řešení
jehlan
 komolý jehlan
 pětiboký jehlan
 pravidelný čtyřboký jehlan
 trojboký jehlan
jehlanový
jen
jestliže
jev

kernel
one
eleven
unique
simple
unit set
unit
unit
 unit square
 unit circle
 unit cube
uniquely determined
unique, single-valued
uniqueness of solution
pyramid
 frustum of a pyramid
 pentagonal pyramid
 square base pyramid
 triangular pyramid
pyramidal
only
if
event

náhodný jev
neslučitelné jevy
jistota
jistý
jmenovatel

random event
disjoint events
certainty
definite, certain
denominator

K

kanonický
kardinální číslo
kartézské souřadnice
kartézský součin
kartografie
kategorie
každý
kilogram
kilometr
kladný
klesající
klesat
klín
kód
koeficient
kofunkce
kolem
kolineace
kolineární
kolmice
kolmý
 kolmá přímka
kombinace
 lineární kombinace
kombinační číslo
kombinatorická analýza
komolý kužel
komplanární
komplement
komplementární
komplexní
 komplexní číslo
 komplexní proměnná
 sdružená komplexní čísla
 sdružené komplexní kořeny
komutativní
 komutativní grupa
 komutativní okruh
 komutativní operace
 komutativní zákon
koncový bod
konečný
konfokální
konformní

canonical
cardinal number
Cartesian coordinates
Cartesian product
cartography
category
every
kilogram
kilometre
positive
decreasing, descending
decrease, fall, descend
dihedron, dihedral, angle, plane angle
code
coefficient
cofunction
around, about
colineation
colinear
perpendicular, orthogonal
perpendicular
 perpendicular line
selection
 linear combination
combination
combinatorial analysis
frustum of a cone
coplanar
complement
complementary
complex, complex-valued
 complex number
 complex variable
 conjugate complex numbers
 conjugate complex roots
commutative
 commutative group
 commutative ring
 commutative operation
 commutative law
end point, terminal point
finite, final
confocal
conformal

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

4

ROČNÍK 55, 1976-1977, PROSINEC

ROČNÍK 55
PROSINEC 1976

4

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1975.

OBSAH

O B S A H

A. Plocki: Náhodná bloudění	145
Dr. V. Mráz: Normální formy výrokových formulí II (pokračování)	156
Dr. S. Trávníček, CSc.: Geometrická pravděpodobnost I	160
Prof. E. Kraemer: Užití dělicího poměru v geometrii	174
Dr. D. Procházková, CSc.: Charakter zemětřesené činnosti v Československu	185
Recenze	191
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Náhodná bloudění

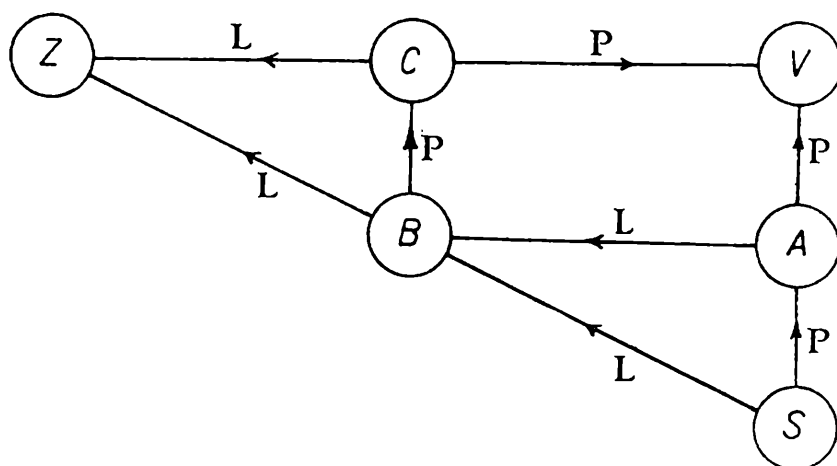
ADAM PLOCKI, Krakow

S pojmem náhodné bloudění se seznámíme nejdříve na dvou úlohách o koze, vlku a zelí.

Úloha 1. Představme si bludiště znázorněné na obr. 1. Na startu S je koza s korunovou mincí. U jednosměrných cest bludiště stojí značky L a P , ukazující na levou a pravou stranu. Koza vrhá mincí. Vyjde-li lev, koza putuje po cestě se značkou L , jestliže panna, jde po cestě P . Putování končí, dojde-li koza k vlkovi V (z pochopitelných důvodů) nebo do zelí Z . Množina všech možných cest kozy je množinou možných výsledků pokusu. Je to množina

$$\{SAV, SABCV, SAB CZ, SABZ, SBCZ, SBCV, SBZ\},$$

kde například $SAB CZ$ znamená případ, kdy koza putovala přes body A, B, C do zelí.



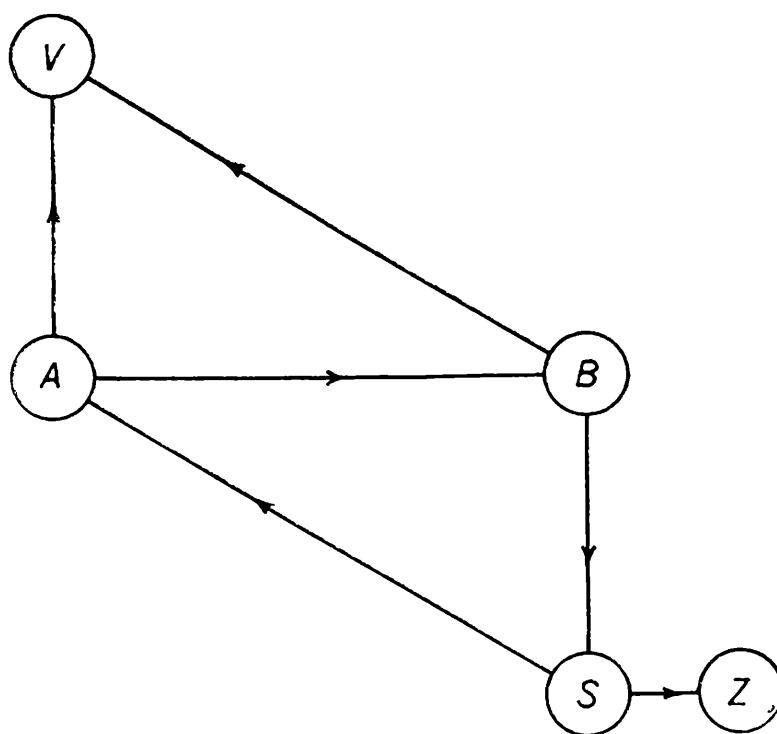
Obr. 1

Jednotlivé výsledky putování kozy je možno ztotožnit s jistými posloupnostmi výsledků házení mincí, tj. lvů, panen.

Například výsledek SAV znamená, že vyšla dvakrát panna.

Úloha 2. Ještě zajímavější je množina všech možných cest kozy v poněkud pozměněném labyrintu, jenž je znázorněn na obr. 2. Zjistíme, že množina všech výsledků je v tomto případě nekonečná.

*) Použití stejných písmen pro označení náhodných jevů a bodů v bludišti nevede zde k žádným nedorozuměním.



Obr. 2

Cestu k vlkovi, jejíž předposlední etapou je bod B , označíme

$$S(ABS)_nABV,$$

kde index n znamená stejně jako v chemických vzorcích n -kráte vzatou skupinu ABS v závorce. Pro $m = 0, 1, 2$, $S(ABS)_mAV$ znamená cestu k vlkovi, jejíž poslední etapou je bod A . Obdobným způsobem je možno zavést označení zbývajících cest (vedoucích do zelí).

O směru putování kozy rozhoduje na každém rozcestí vrh mincí — přesněji řečeno — náhoda. Název pro putování tohoto typu se nabízí sám — jsou to *náhodná bloudění*. Body V a Z , příchod k nimž znamená konec putování, pojmenujeme *absorpční uzly*.

Položme si otázku: jak vypočítat pravděpodobnost, že vlk sežere kozu, jaká je pravděpodobnost, že koza dojde do zelí?

Skutečnost, že koza dojde k vlkovi či k zelí, je určena náhodou, řekneme, že jde o *náhodnou událost*. Náhodná událost, že koza dojde k vlkovi, je v úloze 1. množina $V = \{SAV, SABCV, SBCV\}$. Náhodná událost, že koza dospěje k zelí, je množina $Z = \{SABCZ, SABZ, SBCZ, SBZ\}$.

Na každém rozcestí může pokračovat koza dvěma směry L a P . Rozhodnutí, kterou cestou skutečně jde, je ponecháno náhodě, výsledku hodu mincí. Oba výsledky jsou stejně pravděpodobné, mají pravděpodobnost $1/2$. Bude-li se na každém rozcestí rozhodovat o další pouti ne jedna, ale naopak celé množství koz, pak přibližně polovina z nich půjde vlevo a polovina vpravo. Uvažujme tedy ne jednu kozu, ale celé stádo skládající se z n kusů. Každé koze dáme vlastní minci a pozorujeme její osud. Budeme předpokládat, že na ujiti jednoho úseku cesty koza spotřebuje jeden den.

V „ideálním“ případě bude první den večer v místě *A* polovina koz a v místě *B* také polovina. Další putování koz je naznačeno na obrázku 3 a též v tabulce č. 1. Putování koz končí 4. den večer.

Tabulka č. 1

místo den	0	1	2	3	4
<i>S</i>	n	—	—	—	—
<i>A</i>	—	$\frac{n}{2}$	—	—	—
<i>B</i>	—	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{4}$	—	—
<i>C</i>	—	—	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{8}$	—
<i>V</i>	—	—	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{4} + \frac{n}{8}$	$\frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16}$
<i>Z</i>	—	—	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{8}$	$\frac{n}{4} + 2\frac{n}{8} + \frac{n}{16}$

K vlkovi se dostalo z celkového počtu n koz (jaké musí být n , aby putovaly celé kozy?)

$$\frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16} = \frac{7}{16}n$$

a k zelí

$$\frac{n}{4} + 2\frac{n}{8} + \frac{n}{16} = \frac{9}{16}n.$$

Pravděpodobnost, že koza skončí u vlka, je

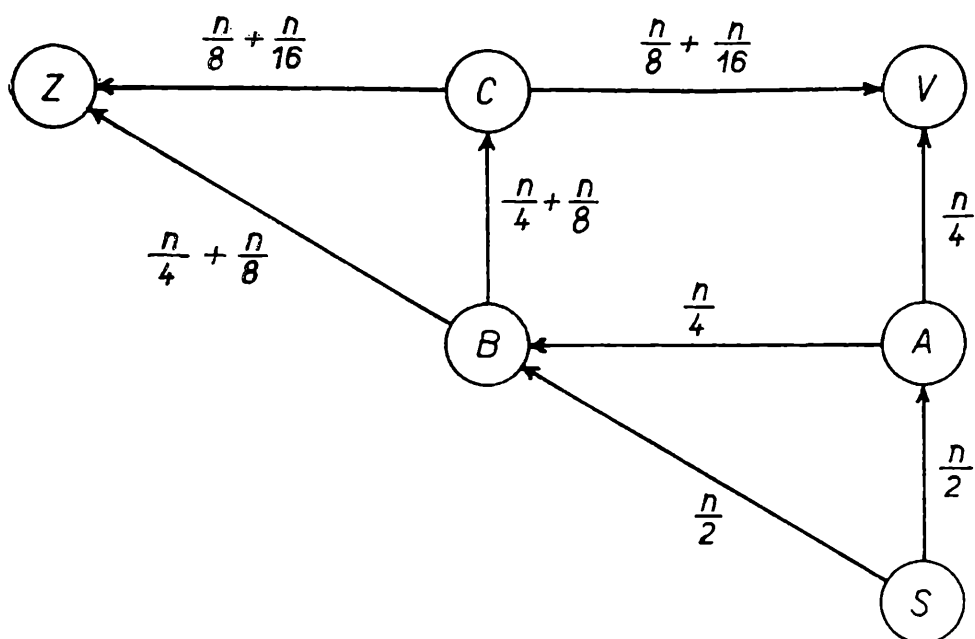
$$P(V) = \frac{7}{16},$$

u zelí

$$P(Z) = \frac{9}{16}.$$

Přejdeme k úloze 2. Všimněme si, že náhodné jevy V a Z (stejně tomu bylo i v předchozím případě), představují všechny možnosti a jsou zároveň disjunktní. Každý z těchto náhodných jevů je doplňkem druhého. Postačí tedy zabývat se např. pravděpodobností jevu Z , neboť

$$P(V) = 1 - P(Z).$$



Obr. 3

Uvažujme obdobně jako dříve. Pozorujme putování stáda n koz. První den dojde polovina do zelí, druhá polovina do A. Druhý den ráno čtvrtina stáda zahájí cestu k vlkovi, druhá část (tedy $\frac{1}{4} n$) k B, z této čtvrtiny se vrátí polovina třetí den večer do S. Další den polovina z nich ($\frac{1}{16} n$) půjde z S do zelí, zbývající začnou putování znova.

Tabulka č. 2

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
S	n	—	—	$\frac{n}{2^3}$	—	—	$\frac{n}{2^6}$	—
A	—	$\frac{n}{2}$	—	—	$\frac{n}{2^4}$	—	—	$\frac{n}{2^7}$
B	—	—	$\frac{n}{2^2}$	—	—	$\frac{n}{2^5}$	—	$\frac{n}{2^7}$
Z	—	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2} + \frac{n}{2^4}$	$\frac{n}{2} + \frac{n}{2^4}$	$\frac{n}{2} + \frac{n}{2^4}$	$\frac{n}{2} + \frac{n}{2^4} + \frac{n}{2^7}$
V	—	—	$\frac{n}{2^2}$	$\frac{n}{2^2} + \frac{n}{2^3}$	$\frac{n}{2^2} + \frac{n}{2^3}$	$\frac{n}{2^2} + \frac{n}{2^3} + \frac{n}{2^5}$	$\frac{n}{2^2} + \frac{n}{2^3} +$	$\frac{n}{2^2} + \frac{n}{2^3} +$
							$+ \frac{n}{2^5} + \frac{n}{2^8}$	$+ \frac{n}{2^5} + \frac{n}{2^8}$

Na kolik dní kozy vystačí?

Ty, jež jsou v zeli po $3k - 2$ dnech putování*), tvoří stádo složené z

$$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 n + \dots + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{k-1} n$$

kusů.

Uvažujme $n = 2^{3k-2}$. V tom případě v posledním (k -tém) peletonu dorazila do zeli pouze jedna koza. Druhá z těch dvou posledních šla k A. Užitím vzorce pro součet k členů geometrické posloupnosti zjistíme počet koz, které došly k zeli:

$$\frac{\frac{1}{2}n \left(1 - \frac{1}{2^{3k}}\right)}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4}{7}n \left(1 - \frac{1}{2^{3k}}\right).$$

Zanedbáme poslední dvě kozy, které se během prvních $3k - 3$ dní ještě nedostanou na konec své cesty. Pokud je n dostatečně velké, nemůže to mít podstatný vliv na další výsledek. Do zeli tedy dojde

$$z = \frac{4}{7}n \left(1 - \frac{1}{2^{3k}}\right) - 1 = \frac{4}{7}2^{3k-2} \left(1 - \frac{1}{2^{3k}}\right) - 1 = \frac{2^3(2^{3k-3} - 1)}{7}$$

koz z celkového počtu $n - 2 = 2^{3k-2} - 2 = 2(2^{3k-3} - 1)$ odstartovaných zvířat. Pravděpodobnost, že koza dojde do cíle Z, je tedy

$$P(Z) = \frac{z}{n - 2} = \frac{4}{7},$$

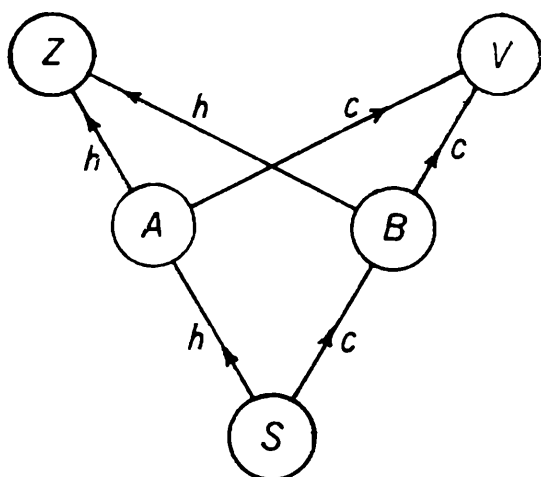
a odtud

$$P(V) = \frac{3}{7}.$$

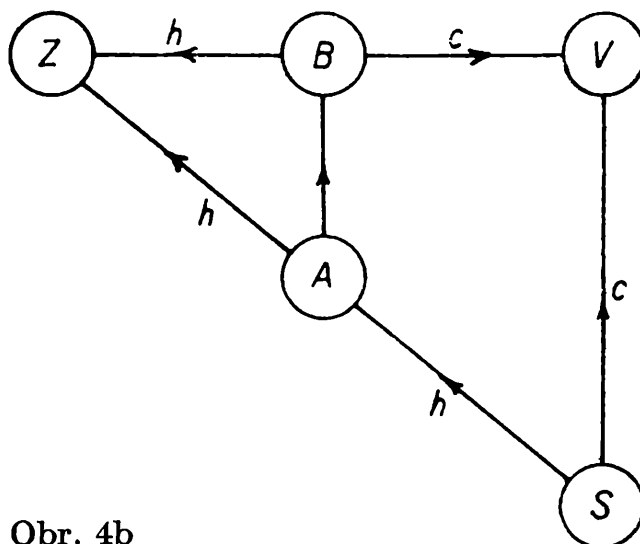
Týž výsledek je možno získat jednodušší cestou. Proč zanedbat pouze dvě kozy? Neuvažujme ty, které se jako první vrátily na start. Zahájilo-li cestu n kusů, vrátil se na start první peleton v počtu $\frac{1}{8}n$ koz, zatímco $\left(\frac{4}{1} + \frac{1}{8}\right)n$ dorazilo k vlkovi a $\frac{1}{2}n$ do zeli. Nechť $n = 8k$. U vlka je tedy $\frac{1}{4}8k + \frac{1}{8}8k = 3k$ koz a u zeli je $\frac{1}{2}8k = 4k$ koz, putování tedy skončilo $7k$ koz. Z těchto $7k$ koz dorazily $\frac{4}{7}k$ k zeli a $\frac{3}{7}k$ k vlkovi, dostáváme tedy stejné výsledky.

Přejdeme k dalším dvěma úlohám. Bude to bloudění v labyrintech na obr. 4 a, b.

*) Během těchto dnů přišlo do Z postupně k peletonů koz; v $2k - 2$ dnech nepřišla žádná koza.



Obr. 4a



Obr. 4b

Předpokládejme, že v každém bodě volbu směru cesty provádí koza vrhem mince a ukazatelé určují směr pochodu.

V případě prvního bludiště možné cesty tvoří množinu

$$E_1 = \{SBV, SAV, SAZ, SBZ\}.$$

Elementární jevy, popisující putování po druhém bludišti, tvoří množinu

$$E_2 = \{SV, SABV, SABZ, SAZ\}.$$

Množiny E_1 a E_2 jsou o čtyřech prvcích. Všechny čtyři náhodné jevy o jednom prvku mají v případě množiny E_1 stejnou pravděpodobnost

$$P(\{SBV\}) = P(\{SAV\}) = P(\{SAZ\}) = P(\{SBZ\}) = \frac{1}{4}.$$

V případě putování po druhém labyrintu to už neplatí, neboť např.

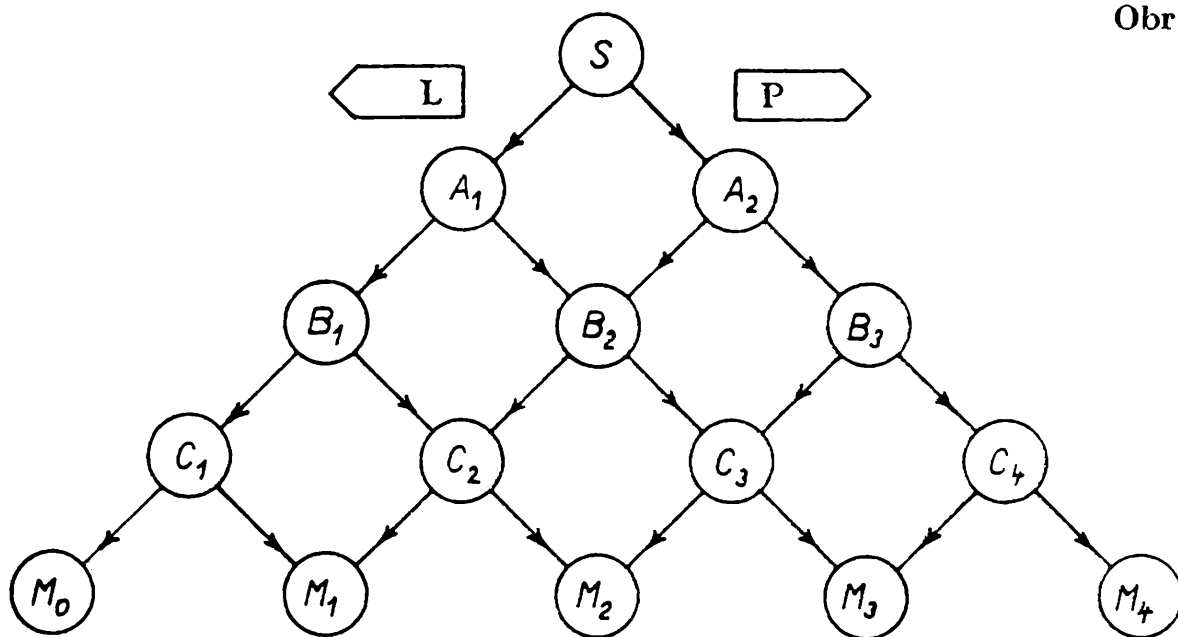
$$P(\{SABV\}) = \frac{1}{8}, \quad P(\{SV\}) = \frac{1}{2}.$$

V prvním případě nazveme množinu E_1 — *prostorem stejně pravděpodobných jevů*. Podstatou tohoto prostoru je rovnost pravděpodobností všech *náhodných* jevů o jednom prvku (a nikoliv, jak se zdá naznačovat název — výsledků, neboť ty jsou elementárními jevy a jejich pravděpodobnost jsme neurčovali).

Příklady náhodných pokusů, jejichž popisem je prostor stejně pravděpodobných jevů, mohou být slosování sportky, vrhy normální kostkou, vrhy ideální mincí.

Bernoulliovo schéma

Uvažujme následující bludiště (obr. 5), které je náčrtem tratí jistého závodu. Závod trvá 4 dny, každý den ráno mužstvo losuje vrhem mince (později necháme losovat směr cesty jinak) směr svého putování. Pravidla závodu jsou taková, že vyjde-li panna, mužstvo putuje vpravo (při pohledu z bodu S), vyjde-li lev — vlevo.



Je to známý případ náhodného bloudivení. Cíle M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 nazveme absorpčními uzly (někdy se užívá názvu absorpční hrany). Předpokládejme, že čím větší je k , tím větší odměna je v cíli M_k . Ptejme se tradičně na pravděpodobnost, že mužstvo dorazí k absorpčnímu uzlu M_k (pro $k = 0, 1, 2, 3, 4$). Prostorem elementárních jevů E je množina všech možných cest (přípustných, ježto cesty jsou jednosměrné) k jednomu z pěti absorpčních uzlů. Každá z těchto cest může být ztotožněna s posloupností o čtyřech prvcích s hodnotami z množiny $\{L, P\}$. Pravidla závodu zaručují, že prostor elementárních jevů je prostorem stejně pravděpodobných jevů. Uvažujme cíl M_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$). Mužstvo dorazí do tohoto cíle, vyjde-li ve čtyřech vrzích mincí právě k -krát panna. Jelikož pro rostoucí k vzrůstá přitažlivost cíle, hod panny je možno pokládat za úspěch.

Počet cest vedoucích k cíli M_k je $\binom{4}{k}$, protože toliko různými způsoby lze získat k hlav při čtyřech krocích (dnech). Označme již tradičně symbolem M_k náhodný jev, že mužstvo dorazilo do M_k . Dostaneme tedy

$$P(M_k) = \frac{\binom{4}{k}}{2^4} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Nyní je nasnadě zobecnění. Kdyby závod trval n dnů, bylo by nutno vrh mincí zopakovat n -krát (nezáleží na tom, zda v jednodenních intervalech, bylo přece možno stanovit trasu putování hned první den vyznačením směrů pro jednotlivé dny). Cílů by pak bylo $n + 1$ a pravděpodobnost dosažení cíle M_k by byla (pro $k = 0, 1, 2, \dots, n$)

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Jednoduché ověření, zda naše teoretické úvahy souhlasí se skutečností, je možno provést pomocí tzv. *Galtonova prkénka*, které se podobá našemu schématu na obr. 5 a které není ničím jiným než strojkem (stimulátorem) k automatickému vyznačování tratí jednotlivých mužstev v popsaném závodu.

Kdybychom do horního otvoru nasypali ideální kuličky (dřevěné nebo olověné) s čísly mužstev, pak volba cesty kuličky napodobuje losování směru cesty pomocí mince. Je-li deska zhotovena dokonale, pak pravděpodobnosti, že kulička půjde vpravo a vlevo, jsou $\frac{1}{2}$. Bude-li kuliček dostatečně mnoho, pak poměrné četnosti kuliček, které padnou do M_k , budou blízké námi nalezeným hodnotám pravděpodobnosti $P(M_k)$, tedy

$$P(M_k) \approx \frac{m_k}{m},$$

kde m je počet všech kuliček a m_k počet kuliček, které jsou v cíli M_k .

Dalším zobecněním je případ stejného bludiště, kde však pravděpodobnost volby cesty vlevo je p , vpravo q ,

$$p + q = 1 \quad \text{a} \quad p \neq q$$

Dosažení cíle M_k je zde také množinou těch posloupností úspěchů a neúspěchů, v nichž přesně k členů je úspěšných. Trval-li závod n dnů a cesta k cíli M_k vedla nejprve k -krát vlevo a pak $(n - k)$ -krát vpravo, je pravděpodobnost „této cesty“ (přesněji: pravděpodobnost náhodného jevu sestávajícího z této jediné trati) v souladu s dříve získanými výsledky:

$$\underbrace{pp \dots pp}_{\leftarrow k \rightarrow} \underbrace{qq \dots qq}_{\leftarrow n-k \rightarrow} \cdot q = p^k q^{n-k}$$

Dosažení cíle M_k je množinou $\binom{n}{k}$ cest, v nichž právě k úseků vedlo vlevo.

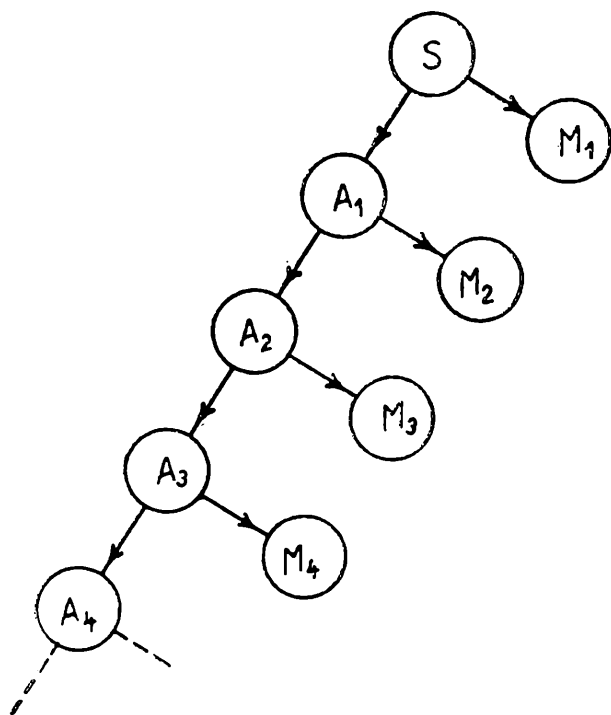
Pravděpodobnost „každé takové cesty“ je $p^k \cdot q^{n-k}$, tudíž

$$P(M_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

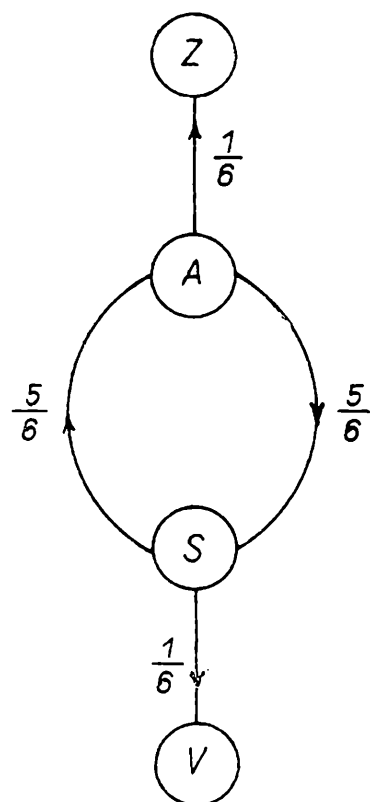
Uvažujme náhodný pokus spočívající ve vrhání kostkou tak dlouho, dokud poprvé nevyjde šestka. Sestavme prostor elementárních jevů a nalezneme pravděpodobnost P , že šestka vyjde poprvé až při k -tém vrhu. Prostorem elementárních jevů popisujících tento pokus je množina všech cest v labyrintu na obr. 6, jež končí v některém z nekonečně mnoha cílů — absorpčních uzlů $M_1, M_2, M_3 \dots$

Pojmenujme hod šestky úspěchem, hození jiného počtu puntíků — neúspěchem. Cesta končí v M_k , vede-li každá z předcházejících $k - 1$ cest vpravo a k -tá cesta vlevo. Pravděpodobnost „této cesty“ je tedy

$$p_k = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}.$$



Obr. 6



Obr. 7

Ježto ke každé absorpční hraně vede pouze jedna cesta, je dosažení M_k jednoprvkový náhodný jev s pravděpodobností $P(M_k) = p_k$. Prostorem elementárních jevů je množina $\mathbf{E} = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, kde e_k znamená, že při k -tém vrhu vyšla šestka poprvé. Platí $P(\{e_k\}) = P(M_k)$ pro $k = 1, 2, 3, \dots$. Ověříme, zda pro nalezené pravděpodobnosti jednoprvkových jevů platí $p_1 + p_2 + \dots = 1$? Levá strana je součtem „nekonečné geometrické řady“ s prvním členem rovným $\frac{1}{6}$ a kvocientem

$\frac{5}{6}$. Její součet je tedy

$$\frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = 1$$

Nalezení pravděpodobností, že šestka vyjde v sudých vrzích, nebo že vyjde v lichých vrzích, je již jednoduchou záležitostí. Počítání těchto pravděpodobností zahájme následujícím problémem:

Nechť právě popsany pokus rozhoduje v následující hře: Já a můj přítel zahajujeme hru spočívající ve střídavém vrhání kostkou. Vyhrává korunu ten, kdo první vyhodí šestku (tuto korunu ztrácí soupeř). Dejme tomu, že jsem byl gentleman a první vrh jsem přenechal soupeři. Jsou naše šance stejné? Jaká je pravděpodobnost, že vyhraji já a jaká, že můj přítel?

Vyhrát, to dříve znamenalo dorazit do zeli, prohrát — dostat se k vlkovi. Zkoumejme situaci z mého hlediska. Mohu prohrát již při prvním vrhu (můj přítel vrhá první). Po tomto vrhu — nehodí-li můj přítel šestku, jsem „na cestě“ k výhře já. Hodím-li šestku, „putuji“ k vítězství, jestliže ne, hra bude probíhat opět chvíli ve směru mé porážky.

Hru můžeme charakterizovat obrázkem 7. Vyjde-li při prvním vrhu šestka, „putuji“ k vlkovi, při výsledku jiném putuji do A . Druhý vrh je můj. Hodím-li šestku, putuji „do zeli“, při počtu puntíků jiném než šest se vracím na start (čímž se blížím „k vlkovi“) atd. Mojí výhrou je dostat se do Z , mou porážkou — dostat se do V .

Máme tedy

$$P(Z) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} + \dots = \frac{5}{11}, P(V) = \frac{6}{11}.$$

Doplatil jsem na svoji galantnost, snížil jsem si šanci své výhry.

Další problém, související logicky s poslední úlohou, je hledání odpovědi na následující otázku:

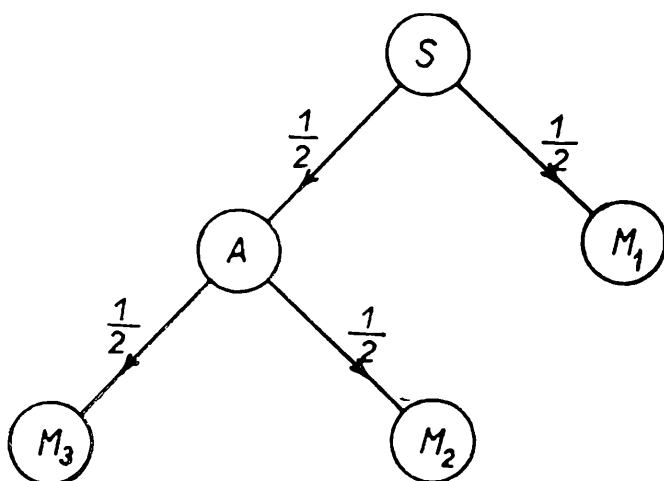
Dva hráči se účastní hry, v níž o výhře nebo prohře — hra nepřipouští nerozhodné výsledky — rozhoduje náhoda (schopnosti obou hráčů nemají na výsledek této hry žádný vliv). Hrají tak dlouho, až jeden z nich vyhraje pět kol. Ten, jenž je po páté vítězem kola, vyhrává celou odměnu a . Hráč G již vyhrál tři kola, hráč H čtyři kola. Z nějakých důvodů nebylo možno utkání dohrát. Jak rozhodnout otázku spravedlivého rozdělení odměny, která původně byla určena pro jednoho?

Častá odpověď je: $\frac{3}{7}a$ patří hráči G , $\frac{4}{7}a$ — hráči H . Vzniká problém, zda je toto rozdělení spravedlivé. K rozhodnutí celého utkání postačí nanejvýš dvě kola. Vyhraje-li první kolo G , rozhodne hru následující kolo, vyhraje-li H , bude to jeho páté vítězství a hra tím skončí.

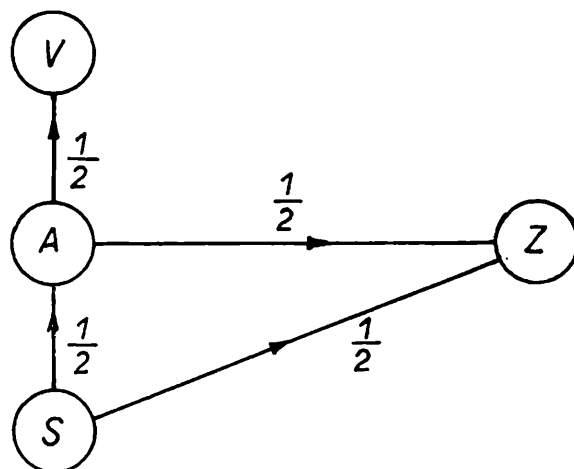
Jaká je pravděpodobnost výhry (kdyby utkání pokračovalo) každého z hráčů? Šance výhry každého kola jsou pro oba hráče stejné (o výsledku — výhře rozhoduje náhoda). Situaci v okamžiku přerušení hry zobrazuje již známé schéma (obr. 8). Pravděpodobnost, že hráč H dojde k absorpčnímu uzlu M_1 (jež je jeho pátou výhrou) je $\frac{1}{2}$, že dojde k M_2 (jež je také jeho pátou výhrou, avšak v následujícím kole) je pravděpodobnost $\frac{1}{4}$.

Obr. 8.

Pravděpodobnost rozhodnutí hry ve dvou chybějících kolech ve prospěch hráče H je tedy $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, pravděpodobnost, že při pokračující hře by zvítězil G , je pouze $\frac{1}{4}$.



Obr. 8



Obr. 9

Pravděpodobnosti, jež jsme našli, je možno stanovit snadněji pomocí schématu bludiště, jež je nám známo z našich dřívějších úvah s putováním kozy (obr. 9).

Pravděpodobnost výhry hráče H v prvním kole po přerušení hry je $\frac{1}{2}$. (H se tím dostává do Z), v opačném případě dojde hráč H do bodu A (to je pak čtvrtá výhra hráče G). Přišel-li hráč H do A , dostane se s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ z A do Z , což bude jeho výhra, v opačném případě se dostane do V , což bude jeho druhá porážka a tím druhá výhra hráče G . Pravděpodobnost, že H dojde do V , je $\frac{1}{4}$; je to pravděpodobnost, že celé utkání vyhraje G . Pravděpodobnost, že H dojde do Z , je $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; je to pravděpodobnost výhry hráče H . Spravedlivé rozdělení odměny je tedy $\frac{3}{4}a$ pro hráče H a $\frac{1}{4}a$ pro hráče G .

*Přeložil a pro Rozhledy upravil
RNDr. Milan Koman, CSc.*

Normální formy výrokových formulí II

Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

V předchozím článku jsme se zabývali pravdivostním ohodnocováním výrokových formulí. Užili jsme k tomu tzv. tabulkové metody. To umožnilo rozdělit všechny výrokové formule do tří disjunktčních tříd. Do třídy splnitelných formulí náležejí všechny formule, které nabývají pravdivostní hodnoty pravda ($ph=1$) i nepravda ($ph=0$). Zákonem výrokové logiky čili tautologií jsme nazvali třídu výrokových formulí, které jsou vždy pravdivé, tedy formule, které pro všechna možná pravdivostní ohodnocení mají $ph=1$. Konečně třídu kontradikcí tvoří výrokové formule vždy nepravdivé, tedy ty formule, které pro všechny možné ph svých proměnných mají $ph=0$. V dnešní tématice užijeme tautologie a kontradikce uvedené v předchozím článku. Předpokládáme tedy, že se s nimi náš čtenář dobře seznámil.

Slíbili jsme, že probereme transformace výrokových formulí na tvar, který se nazývá normální konjunktivní forma (nkf) nebo normální disjunktivní forma (ndf). Jak dále uvidíme, užívá se v normálních formách jen logických spojek pro konjunkci, disjunkci a negaci; přitom se negace vztahuje bezprostředně jen na výrokovou proměnnou. Vyskytují-li se ve výrokové formulí spojky ekvivalence nebo implikace, musíme tyto spojky převést na konjunkci, disjunkci nebo negaci. Např. výrokovou formulí

$$(f_8) \quad (a \wedge \neg b \Leftrightarrow c$$

upravíme na tvar (f'_8)

$$(f'_8) \quad (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$$

takto:

$$\begin{aligned} (a \wedge \neg b) \Leftrightarrow c &\sim [(a \wedge \neg b) \Rightarrow c] \wedge [c \Rightarrow (a \wedge \neg b)] \sim \\ &\sim [\neg (a \wedge \neg b) \vee c] \wedge [\neg c \vee (a \wedge \neg b)] \sim (\neg a \vee b \vee c) \wedge \\ &\wedge (\neg c \vee a) \wedge (\neg c \vee \neg b) \sim \underline{(\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge} \\ &\underline{\wedge (\neg b \vee \neg c)} \end{aligned}$$

Když jsme se seznámili s pěti základními logickými spojkami, mohli bychom si položit otázku, zda je možno zavést další spojky. Nebudeme se touto problematikou hlouběji zabývat; uvedeme jen, že existují čtyři jednomístné spojky, z nichž jsme poznali spojku negace. Kromě dvojmístných spojek $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ a $\Leftrightarrow$ existuje ještě dalších dvanáct dvojmístných logických spojek, které však lze nahradit uvedenými spojkami základními.

Pro náš úkol je užitečné odpovědět na otázku, zda jsou některé ze základních spojek postradatelné. Odpověď je vlastně obsažena v dosud

probrané tématice; počet základních spojek je možno redukovat třeba na tři spojky, a to na spojky $\vee$, $\wedge$ a $\neg$. Ukažme to na příkladu transformace pravé strany tautologie (t_{13}) $(p \Leftrightarrow q) \sim (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$. Příslušná úprava je tato: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \sim (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \sim (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$. Platí tedy tautologie (t_{18})

$$(t_{18}) \quad (p \Leftrightarrow q) \sim (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q).$$

Je užitečné sledovat další úpravu pravé strany tautologie (t_{18}) , která vede k tautologii (t_{19})

$$(t_{19}) \quad (p \Leftrightarrow q) \sim (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Provedená úprava probíhá např. takto: $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \sim \sim [p \wedge (\neg p \vee q)] \vee [\neg q \wedge (\neg p \vee q)] \sim \underline{(p \wedge \neg p)} \vee (p \wedge q) \vee \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee \underline{(\neg q \wedge q)} \sim (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Při první úpravě jsme dvakrát užili distributivního zákona (t_{10}) , jak je naznačeno v hranatých závorkách; opětovným užitím tohoto zákona při další úpravě vzniklo disjunktivní spojení čtyř konjunkcí, z nichž dvě podtržené konjunkce je možno vypustit, a to podle zákona (t_{16}) . Poznamenejme, že komutativita ekvivalence dovoluje v tautologii (t_{16}) a (t_{17}) obě strany zaměnit takto:

$$(t_{20}) \quad p \wedge (q \vee \neg q) \sim p$$

$$(t_{21}) \quad p \vee (q \wedge \neg q) \sim p.$$

Je tedy zřejmé, že vystačíme se spojkami $\wedge$, $\vee$ a $\neg$. Říkáme, že tyto tři spojky tvoří funkčně úplný systém. Čtenář asi přišel na to, že funkčně úplný systém mohou tvořit jen dvě logické spojky, a to $\neg$ a $\vee$ nebo spojky $\neg$ a $\wedge$. Eliminaci spojky $\vee$ v prvním případě a spojky $\vee$ ve druhém případě ukážeme na úpravě výrokové formule

$$(a \wedge \neg b) \vee (b \Rightarrow c).$$

Nechť se v upravené formuli vyskytují jen spojky a) $\neg$ a $\vee$, b) $\neg$ a $\wedge$. Případ a):

$$\begin{aligned} (a \wedge \neg b) \vee (b \Rightarrow c) &\sim \neg \neg (a \wedge \neg b) \vee (\neg b \vee c) \sim \\ &\sim \neg (\neg a \vee \neg \neg b) \vee (\neg b \vee c) \sim \neg (\neg a \vee b) \vee (\neg b \vee c). \end{aligned}$$

Případ b):

$$\begin{aligned} (a \wedge \neg b) \vee (b \Rightarrow c) &\sim (a \wedge \neg b) \vee (\neg b \vee c) \sim \\ &\sim \neg \neg [(a \wedge \neg b) \vee (\neg b \vee c)] \sim \neg [\neg (a \wedge \neg b) \wedge \\ &\wedge \neg (\neg b \vee c)] \sim \neg [\neg (a \wedge \neg b) \wedge (b \wedge \neg c)]. \end{aligned}$$

Doporučujeme čtenáři, aby si výsledky obou úprav ověřil tabulkovou metodou. Zjistí, že jde o splnitelnou formuli, která v šesti případech má $ph=1$ a ve dvou případech má $ph=0$.

Nyní jsme dostatečně připraveni k tomu, abychom definovali normální formy.

Říkáme, že výroková formule je dána v normální konjunktivní formě (nkf) právě tehdy, když je konjunkcí výrokových formulí, z nichž každá je disjunkcí některých daných proměnných nebo jejich negací.

$a \ b \ c$	f_1	f_2	f_3	f_5	f_6	f_7	f_8
1 1 1	1	0	0	0	0	0	0
1 1 0	1	1	1	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	0	1	0
0 1 1	0	1	0	1	0	0	0
0 1 0	1	1	0	0	1	1	1
0 0 1	0	1	0	1	0	0	0
0 0 0	1	1	0	0	0	0	1

Říkáme, že výroková formule je dána v normální disjunktivní formě (ndf) právě tehdy, když je disjunkcí výrokových formulí, z nichž každá je konjunkcí některých daných proměnných nebo jejich negací.

Příklady na normální konjunktivní formy:

$$(a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg a \vee c) \wedge \neg b \wedge (\neg a \vee b) \quad (1)$$

$$\neg a \wedge b \wedge c \quad (2)$$

$$a \vee \neg b \vee c \vee c. \quad (3)$$

Ve formuli (1) je třetí člen redukován na jedinou proměnnou, ve formuli (2) jsou všechny členy konjunkce redukovány na jedinou proměnnou a ve formuli (3) je konjunkce redukována na jediný člen.

Příklady na normální disjunktivní formy:

$$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg b) \vee c \quad (4)$$

$$a \vee b \vee \neg c \quad (5)$$

$$a \wedge \neg a \wedge b \wedge c. \quad (6)$$

Ve formuli (5) jsou členy disjunkce redukovány na jeden člen; uvedený tvar však můžeme pokládat i za jednočlennou nkf. Ve formuli (6) je disjunkce redukována na jediný člen; tento třetí tvar výrokové formule můžeme ovšem považovat za čtyřčlen nkf, v níž všechny členy jsou redukovány na jednu proměnnou.

Konjunktivních i disjunktivních forem k dané výrokové formuli je nekonečně mnoho. Např. s nkf (3) jsou ekvivalentní nkf $a \vee \neg b \vee c$ nebo $(a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg a)$ nebo ndf $a \vee b \vee c \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee \vee (\neg a \wedge b)$ nebo $a \vee c \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$ atd., jak se čtenář může přesvědčit tabulkovou metodou nebo úpravou.

Je patrné, že ke každé výrokové formuli existuje nekonečně mnoho ekvivalentních nkf nebo ndf. Existuje však jediná normální forma, kterou nazýváme úplnou normální konjunktivní formou (únkf) nebo jediná forma, kterou nazýváme úplnou normální disjunktivní formou (úndf).

Únkf můžeme sestavit následujícím způsobem: Uvažujeme výrokovou formuli o n proměnných. Sestavme konjunkci z těchto n proměnných nebo jejich negací tak, aby konjunkce měla právě n vesměs různých

proměnných nebo jejich negací, nikoli však současně proměnnou i její negací. Tento výraz nazveme elementární konjunkcí; elementárních konjunkcí je 2^n . Obdobně sestavíme z n proměnných elementární disjunkce, kterých je rovněž 2^n . Jestliže vesměs různé elementární disjunkce spojíme konjunkcí máme již úkf. Spojíme-li vesměs různé elementární konjunkce disjunkcí, získáme úndf.

Uvedme několik příkladů na převod výrokové formule na obě úplné normální formy. Shora jsme k formuli $(f_8) (a \wedge \neg b) \Leftrightarrow c$ napsali s ní ekvivalentní formuli $(f'_8) (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg c)$, která je nkf. Převod (f'_8) na úkf bude spočívat v rozšíření druhého a třetího členu o chybějící proměnné. S použitím tautologie (t_{17}) získáme po naznačené úpravě úkf: $(\neg a \vee b \vee c) \wedge [(a \vee \neg c) \vee (b \wedge \neg b)] \wedge [(\neg b \vee \neg c) \vee (a \wedge \neg a)] \sim (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \sim (\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$.

Mějme výrokovou formuli (4) $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg b) \vee c$ transformovat na úndf. Tautologie (t_{17}) nám dovoluje vypustit kontradikci $(b \vee \neg b)$, takže budeme na úndf převádět formuli $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee c$. S užitím tautologie (t_{16}) rozšíříme člen c o proměnnou a takto: $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee [c \wedge (a \vee \neg a)] \sim (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (c \wedge a) \vee (c \wedge \neg a)$. Druhý a třetí člen rozšíříme podle téže tautologie o proměnnou b . Dostaneme $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee [(a \wedge c) \wedge (b \vee \neg b)] \vee [(\neg a \wedge c) \wedge (b \vee \neg b)] \sim \sim (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge c \wedge b) \vee (a \wedge c \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge c \wedge b) \vee (\neg a \wedge c \wedge \neg b) \sim (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$. Tato úndf umožňuje stanovit ph výrokových proměnných a, b, c , pro které tato i původní formule (4) nabývá ph=1. Aby naše úndf měla ph=1, stačí, aby alespoň jeden z členů disjunkce měl ph=1. První člen má ph=1 pro $a=1, b=1, c=1$ (budeme stručně psát $(1; 1; 1)$), druhý člen má ph=1 pro $(1; 0; 1)$, třetí člen pro $(1; 1; 0)$, čtvrtý člen pro $(0; 1; 1)$ a pátý člen pro $(0; 0; 1)$. Zřejmě formule (4) nabývá ph=1 v pěti uvedených případech z osmi. Ve zbývajících třech případech je ovšem ph=0.

Ještě převedeme výrokovou formuli (4) na úkf: $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee \vee (b \wedge \neg b) \vee c \sim (a \wedge b \wedge \neg c) \vee c \sim (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg c \vee c) \sim \sim (a \vee c) \wedge (b \vee c) \sim [(a \vee c) \vee (b \wedge \neg b)] \wedge [(b \vee c) \vee (a \wedge \neg a)] \sim \sim (a \vee c \vee b) \wedge (a \vee c \vee \neg b) \wedge (b \vee c \vee a) \wedge (b \vee c \vee \neg a) \sim (a \vee \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$. Úkf umožňuje stanovit ph výrokových proměnných, pro které tato úkf nabývá ph=0. K tomu stačí, aby alespoň jeden člen úkf měl ph=0. První člen nabývá ph=0 pro $(0; 0; 0)$, druhý člen pro $(0; 1; 0)$ a třetí pro $(1; 0; 0)$. Tím jsme stanovili tři případy ph proměnných a, b, c , pro které formule (4) nabývá ph=0.

Má-li výroková formule n proměnných, může mít úndf nebo úkf nejvýše 2^n elementárních konjunkcí nebo elementárních disjunkcí. Nej-

větší počet elementárních konjunktí má tautologie a největší počet elementárních disjunktí má kontradikce. Únkf neexistuje k tautologii a úndf neexistuje ke kontradikci. Splnitelná formule, která je transformována na úndf nebo na únkf má ovšem méně než 2^n elementárních konjunktí nebo elementárních disjunktí. Např. o výrokové formuli $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \vee \neg a$ se transformací na úndf přesvědčíme, že jde o tautologii: $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$. Převod výrokové formule $(a \vee \neg a) \Rightarrow (b \wedge \neg b)$ na únkf nás poučí o tom, že původní formule je kontradikce: $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$. Ponecháváme pilnému čtenáři, aby si příslušné transformace provedl za cvičení.

Úplná normální forma dovoluje poměrně snadno rozhodnout o tom, při kterých ph výrokových proměnných nabývá tato forma a ovšem i původní výroková formule $ph=1$ (při úndf) a $ph=0$ (při únkf). Někdy bývají dány ph výrokové formule pro jednotlivá seskupení ph proměnných např. tabulkou. Na základě těchto údajů můžeme snadno sestavit únkf nebo úndf. V první části jsme k formuli $(f_1) \neg (a \wedge b) \vee c \Rightarrow (a \Leftrightarrow b)$ o proměnných a, b, c stanovili ph , které uvádíme v následující tabulce ve sloupci f_1 . Zjišťujeme, že úspornější bude zápis únkf, neboť $ph=0$ se vyskytuje jen třikrát, zatímco $ph=1$ pětkrát. Ve čtvrtém řádku tabulky má f_1 $ph=0$, čemuž odpovídá elementární disjunkce $\neg a \vee b \vee c$. V pátém řádku má f_1 rovněž $ph=0$, takže elementární disjunkce je $a \vee \neg b \vee \neg c$. Konečně sedmému řádku odpovídá elementární disjunkce $a \vee b \vee \neg c$. Únkf formule f_1 má tvar $(\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee b \vee \neg c)$. Disjunkce elementárních konjunktí pro řádky s $ph=1$ dává úndf $(a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$.

Pravdivostní hodnoty výrokových formulí f_2 a f_3 jsou uvedeny v tabulce. Doporučujeme čtenáři, aby si za cvičení pro tyto formule sestavil únkf a úndf.

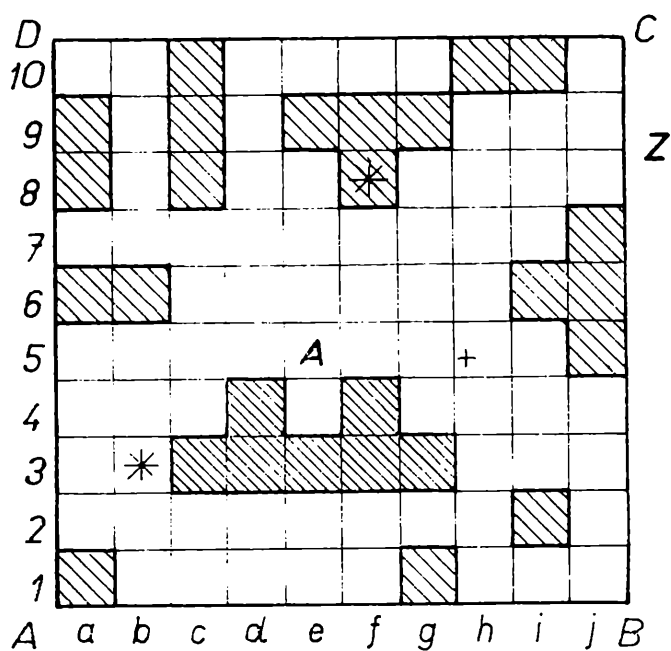
(Pokračování příště)

Geometrická pravděpodobnost

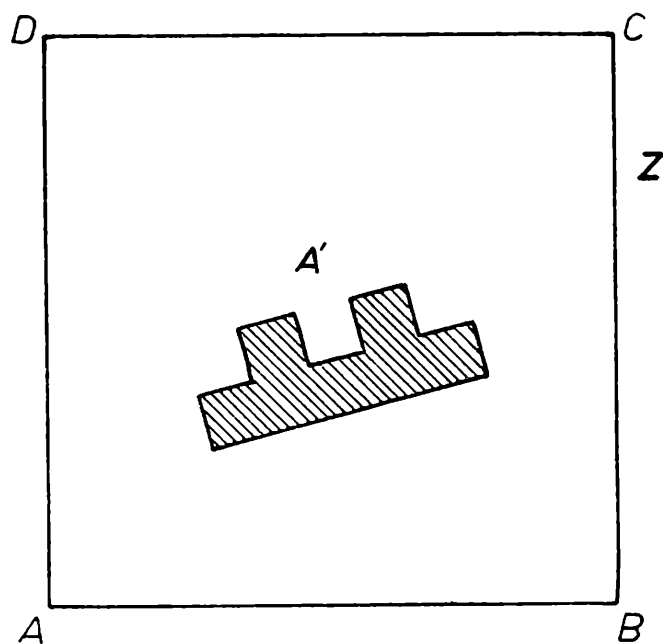
RNDr. STANISLAV TRÁVNÍČEK, CSc., Šternberk

Při našem výkladu o tom, co je to geometrická pravděpodobnost a k čemu ji lze použít, vyjdeme ze známé hry „Na lodě“ (zvané též „Námořní bitva“). Začneme jejím stručným popisem. (Viz [5].)

Každý ze dvou hráčů si na čtverečkováný papír nakreslí dva čtverce Z, Z' o straně 10 čtverečků. Po dohodě o počtu a tvaru lodí si oba hráči do svého čtverce Z zakreslí postavení své flotily tak, aby je soupeř ne-



Obr. 1



Obr. 2

spatřil a neznal. Jedno z možných postavení je na obr. 1. Cíl hry je poněkud krvelačný: odhalit a zničit nepřátelskou flotilu. Hráči se střídají v ohlašování svých střel a dostávají od soupeře odpovědi „voda“ (jako po střele $b3$), „zásah“ (např. po střele $f8$). Útočník si výsledek své střelby zaznamenává do čtverce Z' , napadený do postavení své flotily ve svém čtverci Z . Loď se považuje za zničenou, jsou-li zasaženy všechny její čtverečky. Při zásahu posledního čtverečku lodi musí postižený hlásit „zásah—celá“ Tak např. člun na $g1$ je zničen jediným zásahem, zatímco na potopení křižníku A je jich třeba sedm.

Na počátku hry má každý hráč k výběru 100 možností pro vyslání první střely: $a1, a2, \dots, j9, j10$; postupem hry těchto možností ubývá. Po každé střele ubude jistě alespoň jedna, např. po střele do vody právě jedna, ale někdy i více. Kdybychom náhodou jako první střelu měli $i2$, pak se počet možných střel sníží najednou o 5 (dvě lodi se nesmějí stýkat podél strany čtverečku, takže kromě $i2$ vynecháme z další hry i $h2, j2, i1, i3$). Vidíme, že takový zásah je pro útočníka velmi výhodný. Hráči se snaží zabránit úspěchu protivníka tím, že postavení své flotily volí nahodile, aby rozestavení lodí nebylo možno objevit žádnou rozumnou úvahou a zásah skutečně zůstal jen dílem náhody. To pak znamená, že při útoku můžeme první střelu vyslat, jak nás právě napadne, a v tomto nahodilém ostřelování bojiště pokračujeme tak dlouho, dokud nějakou loď nezasáhneme. Po zásahu ovšem už nevysíláme střely náhodně, ale snažíme se objevit tvar a polohu zasažené lodi a potřebným počtem zásahů ji likvidovat. Kouzlo této hry spočívá ve spojení dovednosti a náhody, my se dál zabýváme jen touto druhou stránkou.

První vyslaná střela (první volba čtverečku) je *náhodný jev*; takových jevů může na počátku hry nastat 100. Nemáme-li důvod předpokládat, že hráč dává přednost některému čtverečku před jiným, jsou uvedené jevy (označíme je též $a_1, a_2, \dots, a_{10}$) stejně možné. Jsou též jediné možné (nelze volit např. e_{11}) a disjunktí (např. střelou b_3 není zasaženo c_3 a tím ani křižník A, přestože mají čtverečky b_3, c_3 společnou stranu; při hodnocení střel tedy neuvažujeme hranice čtverečků).

Jevy stejně možné, jediné možné a disjunktí nazýváme *elementární* a množinu všech elementárních jevů nazveme *základní prostor*. Na počátku naší hry je tedy v základním prostoru $N = 100$ prvků, elementárních jevů (možných případů).

Ptejme se, jakou naději má soupeř, který nezná naše postavení, že první střelou zasáhne křižník A (jev A^*). Zásah křižníku, tj. jev A^* , už není elementární jev, ale je složen ze sedmi elementárních jevů: $c_3, d_3, e_3, f_3, g_3, d_4$ a f_4 v tom smyslu, že nastoupení kteréhokoli z nich hodnotíme tak, že nastal jev A^* . Pro zásah křižníku tak máme $M = 7$ příznivých případů.

Podle klasické definice pravděpodobnosti je *pravděpodobnost* $P(A^*)$ jevu A^* definována vztahem

$$(1) \quad P(A^*) = \frac{\text{počet všech případů příznivých}}{\text{počet všech případů možných}} = \frac{M}{N}.$$

V naší úloze je $P(A^*) = 7/100 = 7\%$.

Úlohy pro čtenáře:

1. Vypočtete pravděpodobnost jevu B , že první střelou se zasáhne některá loď.

2. Jak se změní základní prostor a pravděpodobnost jevu A i jevu B , když po 1. střele se hlásí „voda“, když se hlásí „zásah — celá“.

3. Co když se hlásí „zásah“? V tomto případě je situace značně komplikovaná. Poznámky k řešení úloh uvádíme na konci článku.

Nyní si představme situaci poněkud pozměněnou. Přímkou AB , AD volme za souřadnicové osy x, y , volme $B(10, 0)$, $D(0, 10)$. Nechť „střela“ značí volbu bodu čtverce Z , tj. dvojice (x_0, y_0) , kde $0 \leq x_0 \leq 10$, $0 \leq y_0 \leq 10$. Na obr. 1 je křížkem znázorněna střela $(7, 2; 4, 31)$; pro jednoduchost nepřipouštíme za souřadnice celá čísla.

Ptejme se na pravděpodobnost jevu A , že první vyslanou střelou bude zasažen křižník A. Klasická definice (1) nám odpověď nedává, neboť nyní by byl základní prostor nekonečný — všech možných případů je nekonečně mnoho, ale rovněž bodů v obrazci A, tj. příznivých případů je nekonečně mnoho. Přesto musíme mít oprávněný pocit, že i pro jev A by měla být pravděpodobnost nějak vhodně definována a dokonce že by mělo platit $P(A) = 7\%$ stejně jako pro jev A^* . Oprávněnost uvedeného pocitu lze potvrdit tím, že tu lze vcelku snadno převést jev A na jev A^* : zvolení bodu vlastně znamená volbu čtverečku, v němž onen bod leží.

Této myšlenky by však už nebylo možno použít, kdyby byl křížník zakreslen např. v poloze A' (obr. 2) a šlo opět o jeho zásah volbou libovolného bodu čtverce. Pravděpodobnost tohoto jevu A' nelze určit ani pomocí (1) ani užitím nějaké pomocné sítě čtverečků, přestože si můžeme myslet, že by rozumná definice pravděpodobnosti měla dávat opět $P(A') = 7\%$. Zároveň tu dostáváme impuls, jak by bylo možno klasickou definici pravděpodobnosti rozšířit; vrátíme se k tomu za chvíli.

Ještě jeden názorný příklad na selhání klasické definice. Představme si bílou kulečnickovou kouli a udělejme na ni červenou skvrnu (raději jen myšlenkově, ne doopravdy), která pokryje např. $1/4$ povrchu. Vhodme tuto kouli na kulečnickový stůl a ptejme se na pravděpodobnost jevu C , že po zastavení koule bude její nejvyšší bod červený. Bodů na povrchu koule i ve skvrně je opět nekonečně mnoho, takže klasické definice (1) nelze použít. Můžeme mít ze zkušenosti ovšem dojem, že by rozumná definice měla dávat $P(C) = 1/4$.

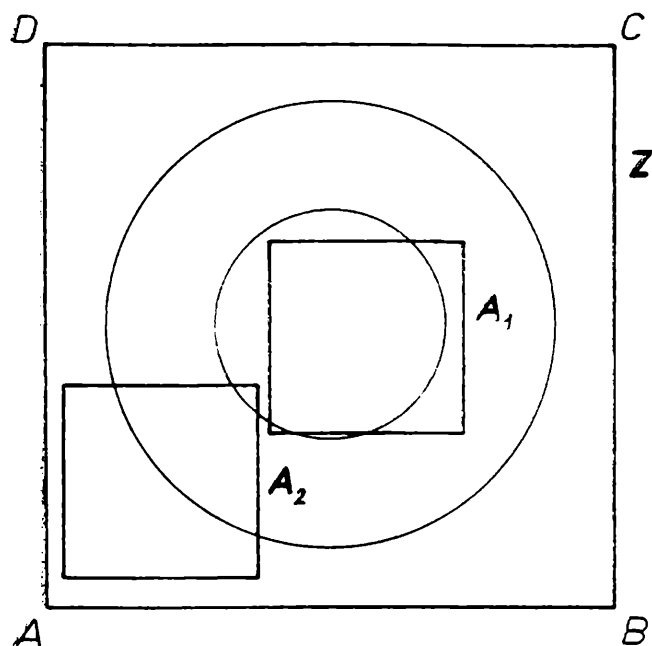
V této chvíli je třeba si uvědomit, co to znamená, že znám pravděpodobnost nějakého jevu J ; např. pravděpodobnost toho, že při hodu hrací kostkou padne sudé číslo, je $1/2$. Provedu-li velké množství n pokusů ($n = 100$ nebo $n = 1000$ nebo $n = 50\,000$ apod.), budu si zapisovat, kolikrát nastal jev J (počet nastoupení jevu J označíme m a nazveme *četnost jevu J*), a vypočtu poměr $r_n = m/n$ (zvaný *relativní četnost jevu J* při n pokusech), pak podstata významu pravděpodobnosti spočívá v přibližné rovnosti $r_n \doteq P(J)$. Např. při 1000 hodech kostkou můžeme očekávat kolem 500 sudých čísel.

Tento postup lze obrátit. Tam, kde $P(J)$ není definováno, provedu velké množství pokusů, zjistím četnost m a relativní četnost r_n jevu J a mohu požadovat, aby pro pravděpodobnost platilo $P(J) \doteq r_n$. Kdybychom tento postup volili např. u jevu C , provedli třeba 1000 hodů kulečnickovou koulí a zjistili m , dostali bychom jistě číslo kolem 250, které by potvrdilo náš dojem, že by mělo být $P(C) = 1/4$.

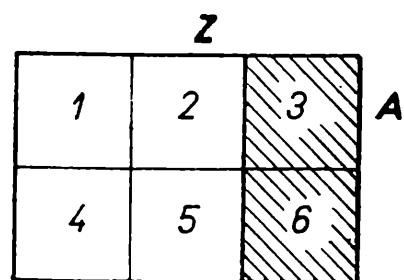
Nepoužitelnost klasické definice pravděpodobnosti i v některých jednoduchých případech, jejichž dva typy jsme si tu naznačili, vedla k nutnosti rozšíření a zobecnění definice (1).

Nejjednodušším rozšířením je tzv. *geometrická pravděpodobnost*, o níž nám jde v tomto článku.

Výchozí situace: Máme nějaký geometrický útvar Z (těleso, plochu, rovinný obrazec, čáru) a jeho část A . Předpokládáme, že dovedeme útvar Z i jeho část A měřit, tj. stanovit objem, povrch, obsah, délku; příslušnou *míru* označíme jednotně mZ , mA . V případě křížníku A (na čtverečkováném papíře se stranou čtverečku 0,5 cm) jsou $mZ = 25$ [cm²], $mA = 1,75$ [cm²] obsahy čtverce Z a obrazce A . Ptáme se na pravděpodobnost jevu A : *Náhodně zvolený bod útvaru Z leží rovněž v útvaru A .*



Obr. 3



Obr. 4

V případě křížníku jsme zjistili $P(A) = P(A^*) = 7/100$. Rozšířením zlomku číslem 0,25 (obsah jednoho čtverečku v cm^2) dostáváme $P(A) = 7 \cdot 0,25/100 \cdot 0,25 = 1,75/25$, což nás vede k závěru

$$(2) \quad P(A) = \frac{mA}{mZ}.$$

Kdybychom vzorec (2) považovali za definici pravděpodobnosti, měli bychom v našich příkladech pro jev A' $P(A') = mA'/mZ = 7/100$ ($= P(A^*)$) a pro jev C je dán přímo poměr povrchů, tedy $P(C) = mC/mZ = 1/4$.

Než však vzorcí (2) přisoudíme úlohu definice geometrické pravděpodobnosti, je třeba pojednat o významné podmínce, jejíž splnění musí být zajištěno; budeme ji nazývat *podmínka homogenosti* a je obdobou podmínky „jevy stejně možné“ u prvků základního prostoru při klasické definici. Lze ji formulovat např. takto: možnost jevu, že libovolně zvolený bod útvaru Z leží v nějaké jeho části A , nemá záviset na poloze ani na tvaru A , ale pouze na její míře, tj. pro všechny části s touž mírou má být uvedený jev stejně možný.

Pro lepší pochopení si uveďme příklad, kdy podmínka homogenosti není splněna. Mějme čtvercový terč (obr. 3) a narýsujme na něj shodné čtverečky A_1, A_2 . Dejme nyní do terče střilet dobrému střelci s cílem zasáhnout střední kruh. Je zřejmé, že možnost zásahu čtverce A_1 jedinou střelou je mnohem větší než možnost zásahu čtverce A_2 , přestože mají oba čtverce týž obsah. Není splněna podmínka homogenosti, možnost zásahu závisí na poloze čtverce: čím je blíže ke středu čtverce, tím je možnost zásahu větší. K výpočtu pravděpodobnosti tu nelze použít vzorce (2). Kdybychom týž terč dali na déšť a ptali se na pravděpodobnost jevu, že první kapka deště, která zasáhne terč, zasáhne

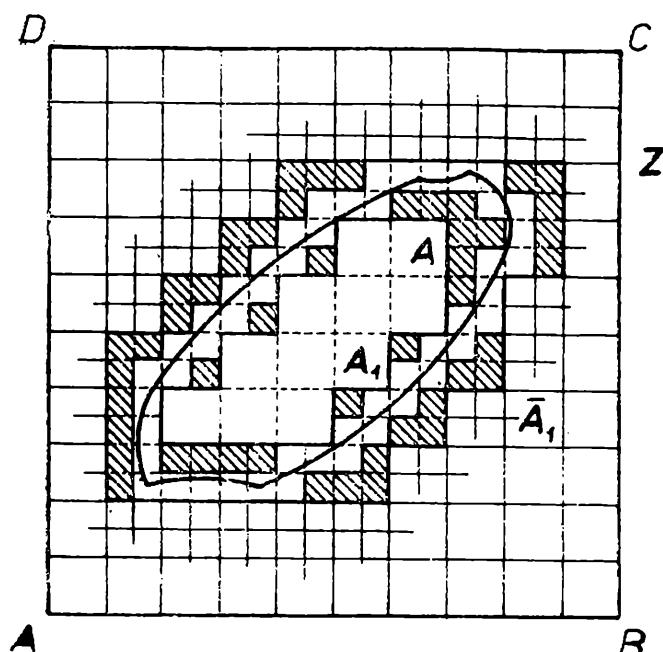
i čtverec A_1 (resp. A_2), pak by podmínka homogenosti splněna byla, mohli bychom použít vzorce (2) a pravděpodobnost by byla stejná pro oba čtverce.

V dalším textu budeme už bez dlouhých úvah předpokládat, že je podmínka homogenosti splněna. Geometrickou pravděpodobnost pak definujeme vzorcem (2). Samozřejmým předpokladem je $mZ > 0$. Pokud jde o míru, můžeme ji často nahradit vyjádřením konkrétním, např. jsou-li Z , A úsečky, řekneme, že mZ , mA jsou délky, apod. Může se ovšem stát (a my to pak uvidíme na příkladě), že Z nebo zejména A se může skládat z několika složek. Např. Z je úsečka a A je sjednocení konečného počtu úseček, tj. A se skládá z několika úseček (disjunktních). Pak řekneme o mA , že je to součet délek složek části A , nebo ponecháme vyjádření „míra množiny A “. K definici (2) si ještě uvědomíme, že $P(A)$ nezávisí na jednotkách měření, ovšem mZ , mA musí být vyjádřeno v týchž jednotkách.

Na jednoduchém příkladě si ukažme, že klasická pravděpodobnost je zvláštním případem geometrické pravděpodobnosti. Ptejme se např. na pravděpodobnost jevu D^* , že při jednom pokusu (hodu) hrací kostkou padne číslo dělitelné třemi. Podle (1) je $P(D^*) = 2/6 = 1/3$, neboť základní prostor má 6 prvků a jsou dva příznivé případy (3, 6). Zobrazení nyní základní prostor jako obdélník a každý jeho prvek jako jednotkový čtverec (viz obr. 4); část A odpovídá příznivým případům. Mírou zde bude obsah, takže u geometrické pravděpodobnosti můžeme bez obav vynechávat z úvah strany všech nakreslených čtverců (obsah těchto stran je roven nule). Volba libovolného bodu obdélníka Z (jev D) nyní znamená volbu libovolného ze šesti jednotkových čtverců (jev D^*), podmínka homogenosti je splněna. Náhodnou volbu jednoho z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 tedy nemusíme provádět pomocí hrací kostky, ale náhodnou volbou bodu v obdélníku Z ; jde jen o jinou metodu. Proto $P(D^*) = P(D) = mA/mZ = 2/6 = 1/3$.

Na závěr této teoretické části o geometrické pravděpodobnosti si ještě naznačíme, jak se dospěje ke vzorci (2) v obecném případě, např. pro rovinné obrazce. Pro ukázkou obecného postupu zvolme konkrétně Z jako čtverec o straně 10 jednotek (cm) a v něm část A (obr. 5). Vzpomeňme si, že při zvláštní poloze „křížníku A “ jsme mohli s výhodou využít čtvercové sítě (obr. 1). Tato pomůcka se nám osvědčí i nyní.

Nejprve zvolíme čtvercovou síť S_1 se čtverci o straně 1 cm (jsou to tzv. *elementy sítě*). Sjednocení všech elementů sítě S_1 ležících v A označme A_1 a jejich počet a_1 , sjednocení všech elementů sítě S_1 majících s A alespoň jeden společný bod označme $\bar{A}_1$ a jejich počet $\bar{a}_1$. Obrazce A_1 , $\bar{A}_1$ jsou vzhledem k síti ve zvláštní poloze a proto lze použít naší dřívější úvahy: pravděpodobnost jevu A_1 , že náhodně zvolený bod čtverce Z leží v A_1



Obr. 5



Obr. 6

položíme rovnou klasické pravděpodobnosti jevu $\bar{A}_1$, že náhodně zvolený element sítě S_1 leží v obrazci A_1 ; podobně pro A_1 . Proto

$$P(A_1) = a_1/100 = a_1[\text{cm}^2]/100[\text{cm}^2] = m\mathbf{A}_1/m\mathbf{Z},$$

$$P(\bar{A}_1) = \bar{a}_1/100 = \bar{a}_1[\text{cm}^2]/100[\text{cm}^2] = m\bar{\mathbf{A}}_1/m\mathbf{Z}.$$

Nám jde o pravděpodobnost jevu A , že náhodně zvolený bod čtverce $\mathbf{Z}$ leží i v obrazci A . Protože $A_1 \subset A \subset \bar{A}_1$, musí pro rozumně definovanou $P(A)$ platit $P(A_1) \leq P(A) \leq P(\bar{A}_1)$.

Nyní zjourníme síť např. tak, že strany elementů nové sítě S_2 jsou 0,5 cm. Obdobně vytvoříme „vepsaný“ obrazec A_2 a „opsaný“ obrazec $\bar{A}_2$, počet elementů sítě v nich obsažených nechť je $a_2, \bar{a}_2$. Celkem je v $\mathbf{Z}$ 400 elementů sítě S_2 . Platí

$$P(A_2) = a_2/400 = a_2 \cdot 0,25/400 \cdot 0,25 = m\mathbf{A}_2/m\mathbf{Z},$$

$$P(\bar{A}_2) = \bar{a}_2/400 = \bar{a}_2 \cdot 0,25/400 \cdot 0,25 = m\bar{\mathbf{A}}_2/m\mathbf{Z}$$

Ježto $A_2 \subset A \subset \bar{A}_2$, lze opět požadovat $P(A_2) \leq P(A) \leq P(\bar{A}_2)$. Navíc $A_1 \subset A_2, \bar{A}_1 \supset \bar{A}_2$, takže $P(A_1) \leq P(A_2), P(\bar{A}_1) \geq P(\bar{A}_2)$, $P(A)$ je pomocí sítě S_2 dána „přesněji“.

V příkladě vyznačeném na obr. 5 je $a_1 = 11, \bar{a}_1 = 35, m\mathbf{A}_1 = 11, m\bar{\mathbf{A}}_1 = 35, P(A_1) = 11/100 = 0,11, P(\bar{A}_1) = 35/100 = 0,35$, takže $0,11 \leq P(A) \leq 0,35$.

Pro síť S_2 je $a_2 = 60, \bar{a}_2 = 108, m\mathbf{A}_2 = 15, m\bar{\mathbf{A}}_2 = 27, P(A_2) = 15/400 = 0,0375, P(\bar{A}_2) = 27/400 = 0,0675$, takže $0,0375 \leq P(A) \leq 0,0675$.

Tak lze pokračovat dále. Čtenář, který zná limity posloupnosti, už jistě tuší závěr.

Při dalším zjemňování sítí dostáváme posloupnost $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$ o níž předpokládáme, že velikosti stran elementů se blíží nule. V k -tém

kroku máme dolní aproximaci $m\mathbf{A}_k$ a horní aproximaci $m\bar{\mathbf{A}}_k$ obsahu $m\mathbf{A}$ obrazce $\mathbf{A}$, $m\mathbf{A}_k \leq m\mathbf{A} \leq m\bar{\mathbf{A}}_k$, přičemž $m\mathbf{A}_k \rightarrow m\mathbf{A}$, $m\bar{\mathbf{A}}_k \rightarrow m\mathbf{A}$ pro $k \rightarrow \infty$ a nezávisle na způsobu zjemňování sítí. Tím získáváme i dolní aproximace $P(\bar{\mathbf{A}}_k)$ a horní aproximace $P(\mathbf{A}_k)$ pravděpodobnosti $P(\mathbf{A})$, tj.

$$P(\mathbf{A}_k) = \frac{m\mathbf{A}_k}{m\mathbf{Z}} \leq P(\mathbf{A}) \leq \frac{m\bar{\mathbf{A}}_k}{m\mathbf{Z}} = P(\bar{\mathbf{A}}_k).$$

Pro $k \rightarrow \infty$ je limita výrazu vlevo i výrazu vpravo rovna $m\mathbf{A}/m\mathbf{Z}$, takže podle vlastností posloupností je $P(\mathbf{A}) = m\mathbf{A}/m\mathbf{Z}$.

Zároveň jsme došli k vysvětlení, proč se někdy o geometrické pravděpodobnosti mluví jako o limitním případě pravděpodobnosti klasické.

Pomocí geometrické pravděpodobnosti lze řešit řadu zajímavých (a často vůbec ne geometrických) problémů. O některých z nich pojednáme v další části.

Užití geometrické pravděpodobnosti

Shrňme si hlavní výsledky 1. části článku: Máme geometrický útvar $\mathbf{Z}$ (např. rovinný obrazec) a jeho část $\mathbf{A}$; geometrická pravděpodobnost jevu $\mathbf{A}$, že náhodně zvolený bod útvaru $\mathbf{Z}$ leží i v $\mathbf{A}$, je rovna

$$P(\mathbf{A}) = m\mathbf{A}/m\mathbf{Z}, \quad (2)$$

kde $m\mathbf{A}$, $m\mathbf{Z}$ je míra (např. obsah) útvarů $\mathbf{A}$, $\mathbf{Z}$ a je splněna podmínka homogenosti: žádná část $\mathbf{A}_1$ útvaru $\mathbf{Z}$ nemá při náhodné volbě bodu v útvaru $\mathbf{Z}$ přednost před jinou částí $\mathbf{A}_2$, pokud $m\mathbf{A}_1 = m\mathbf{A}_2$. A nyní slíbené aplikace.

Příklad 1. Na nádraží dnes čeká na vlak tolik cestujících, že vytvořili podél nástupiště souvislou řadu. Vlak přijíždí a zastavuje. Někteří cestující měli smůlu, zastavil u nich zrovna střed vagonu. Jiní měli štěstí, přímo před nimi jsou dveře. „Smůla“ a „štěstí“ jsou však zde jen různými projevy pravděpodobnosti.

Ptejme se na pravděpodobnost jevu V : Jestliže před cestujícím zastaví vlak, pak před ním zastaví vchod do některého vozu.

Jsou-li v soupravě vozy téhož typu, stačí se omezit na jeden vůz. Cestujícího zobrazme jako bod C , osobní vůz jako úsečku $\mathbf{Z}$, vchody jako úsečky $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, přičemž bod C nebudeme zobrazovat vedle úsečky $\mathbf{Z}$, ale přímo na ní (obr. 6). Jev V lze totiž formulovat takto: Jestliže na úsečce $\mathbf{Z}$ zvolím náhodně bod C , pak $C \in \mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$. Podmínka homogenosti žádá, aby vlak nezastavoval vždy přesně na tomtéž místě, případně aby o tom cestující nevěděl. (Jinak si cestující znalý poměrů stoupne na místo „kde obvykle bývá vchod“ a tím pravděpodobnost jevu V podstatně zvýší.) Podle (2) máme $P(V) = m\mathbf{A}/m\mathbf{Z}$, kde $m\mathbf{Z}$ je délka vozu (i s nárazníky) a $m\mathbf{A} = m\mathbf{V}_1 + m\mathbf{V}_2$ je součet šířek vstupů do vozu po jeho jedné straně. Např. pro čtyřnápravový osobní vůz řady Bai máme $m\mathbf{Z} = 23,3$ m a do vozu jsou na každém boku dva vstupy s dvojími dveřmi, každá dvojice má šířku 2 m, tedy podle (2) je

$P(V) = 4/23,3 = 0,17$. U vozů uvedeného typu tak můžeme se 17 % pravděpodobností očekávat, že přímo před námi zastaví vchod. Výsledek ovšem platí pro cestujícího, který stojí na té části nástupiště, u níž jistě vlak zastaví.

Úloha pro čtenáře: Porovnejte tuto pravděpodobnost se situací, kdy je vlak složen z jiných typů vozů, např.:

- starší dvounápravové osobní vozy řady Be (délka 15,73 m, 2 vstupy po 87 cm);
- rychlíkové čtyřnápravové vozy (délka 23,3 m, 2 vstupy po 1 m);
- čtyřvozová patrová souprava řady Bp (výrobek NDR), délka soupravy 73,4 m, 8 dvojitých dveří po 1,75 m.

Příklad 2. Jan zašel během třicetiminutové polední přestávky na 10 minut do bufetu, Eva také. Jaká je pravděpodobnost, že se tu setkali.

Setkání Jana s Evou v bufetu označme jako jev S . Nechť $x(y)$ udává počet minut po začátku polední přestávky, kdy vstoupil Jan (Eva) do bufetu. Zřejmě, x může nabýt libovolné hodnoty $0 \leq x \leq 20$ a též $0 \leq y \leq 20$, neboť plánovaný desetiminutový pobyt je třeba začít alespoň 10 minut před koncem přestávky. Předpokládejme, že příchody Jana a Evy jsou na sobě nezávislé, nahodilé a že žádné období v uvedených dvaceti minutách nemá vzhledem k příchodům Jana a Evy přednost před jiným (podmínka homogenosti).

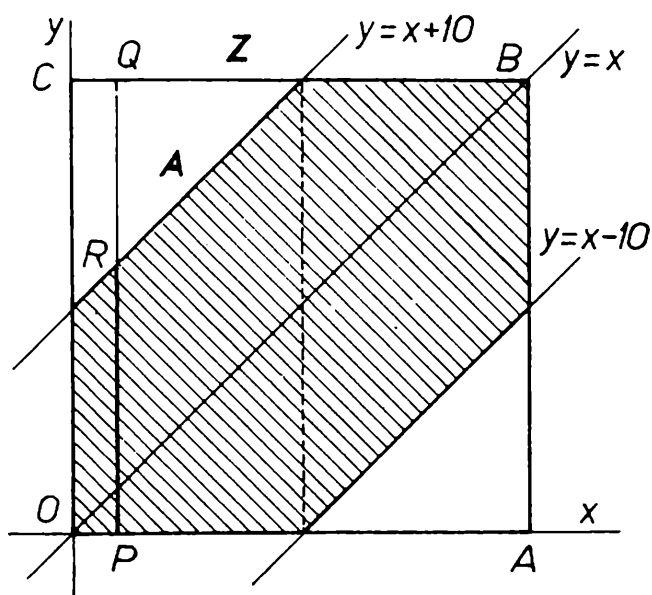
Každý možný případ příchodů je vyjádřen jako prvek (x, y) kartézského součinu intervalů $\langle 0, 20 \rangle \times \langle 0, 20 \rangle$. V kartézském grafu volme jednotku tak, aby t minut bylo na obou osách zobrazeno t jednotkami délky. Grafem kartézského součinu intervalů je pak čtverec $\mathbf{Z}$ (obr. 7) o straně 20 jednotek, tedy $m\mathbf{Z} = 400$.

Podmínka setkání Jana s Evou říká, že se doba jejich příchodů (x a y) má lišit navzájem nejvýše o 10 minut, tj. $|y - x| \leq 10$. Odsud $-10 \leq y - x \leq 10$, tj.

$$x - 10 \leq y \leq x + 10$$

Grafem množiny všech bodů $(x, y) \in \mathbf{Z}$, které vyhovují uvedené nerovnici, je šestiúhelník $\mathbf{A}$ (v obr. 7 vyčárkovaný); podle obrázku lehce vypočteme $m\mathbf{A} = 300$. Vidíme, že jev A vlastně znamená: při náhodné volbě bodu čtverce $\mathbf{Z}$ leží tento bod i v obrazci $\mathbf{A}$. Podle (2) je $P(A) = m\mathbf{A}/m\mathbf{Z} = 300/400 = 0,75$. Setkání Jana s Evou je tedy pravděpodobné na 75 %.

Zůstaňme ještě chvíli u popsané reálné situace. Jde-li Jan x_0 minut po začátku polední přestávky do bufetu, může užitím grafu na obr. 7 určit pravděpodobnost setkání s Evou takto: sestrojí ve čtverci $\mathbf{Z}$ úsečku PQ , pro niž je $x = x_0$ (v obr. 7 je voleno $x_0 = 2$) a porovná délku úsečky $PR = PQ \cap \mathbf{A}$ s délkou úsečky PQ . Tím dostane hledanou pravděpodobnost setkání $P = mPR/mPQ = 12/20 = 0,6$. Vidíme, že Jan může vhodnou volbou x_0 (doby příchodu) zvětšovat i zmenšovat pravděpodobnost setkání s Evou. Dokonce pro $x_0 = 10$ leží celá úsečka $x = x_0$

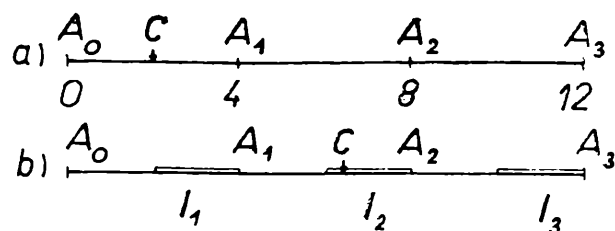


Obr. 7

(průnik se **Z**) v **A**, tedy přijde-li Jan 10 minut po začátku přestávky, je $P = 1$ a lehce zjistíme, že se určitě s Evou setká. Podobně může uvažovat i Eva (zde jsou příslušné úsečky $y = y_0$ rovnoběžné s osou x). Chce-li Eva např. zmenšovat pravděpodobnost setkání s Janem, volí takové y_0 , aby co nejmenší část úsečky $y = y_0$ (průnik se **Z**) ležela v **A**. Takové úsečky jsou dvě: OA a BC ; v obou případech je $P = 1/2 = 0,5$, takže přichází-li Eva hned na začátku nebo 10 minut před koncem polední přestávky, snižuje pravděpodobnost setkání na 64 % (stále za předpokladu nahodilého Janova příchodu). Kdyby chtěla pravděpodobnost ještě dále snížit, pak už by musela zkracovat svůj pobyt v bufetu.

Všimněme si ještě jedné zajímavosti na vztahu mezi klasickou a geometrickou pravděpodobností. U klasické pravděpodobnosti jsou jevy jisté právě ty, pro něž $P = 1$, a jevy nemožné právě ty, pro něž $P = 0$. U geometrické pravděpodobnosti mají jevy jisté pravděpodobnost 1 a jevy nemožné pravděpodobnost 0, ale opačný vztah neplatí. Jev s pravděpodobností 1 nemusí nastat (není jistý), jev s pravděpodobností 0 může nastat (není nemožný). K ilustraci můžeme užít předchozího příkladu. Pravděpodobnost toho, že Jan s Evou přijdou do bufetu současně, tj. $x = y$ (viz úsečku OB), dostaneme podle (2): $P = \text{obsah úsečky } OB / \text{obsah } Z = 0/400 = 0$. Přesto je zřejmé, že uvedený jev je možný. Čtenář sám jistě podobně najde jev s pravděpodobností 1, který nemusí nastat (není jistý).

Připomeňme, že hovorový jazyk má různá vyjádření pro velikost pravděpodobnosti jevu. Tak např. setkání Jana s Evou ($P = 75\%$) můžeme nazvat „dosti pravděpodobné“, zatím co zásah křižníku první střelou ($P = 7\%$, viz začátek článku) označíme za „málo pravděpodobný“. Říkáme, že něco je „skoro jisté“, „skoro nemožné“, apod.; jestliže se čtenář nad tím chvíli zamyslí, jistě najde mnoho dalších podobných vyjádření. V praxi však i při těchto přibližných vyjádřeních záleží na



Obr. 8a, b

konkrétní situaci. Kdyby např. pravděpodobnost toho, že přehrada neudrží jarní vody a zborší se, byla 7 %, pak bychom asi tento jev nenazývali „málo pravděpodobný“, ale rychle bychom se z údolí pod přehradou klidili.

Příklad 3. Víme, že umělé družice Země a zbytky raket, jejichž návrat po splnění úkolu není nutný, jsou ponechány na oběžné dráze, odkud po určité době samy padnou k Zemi. Jaká je pravděpodobnost toho, že takový kosmický zbytek (neshoří-li) padne 1) na souši, 2) do obydlených krajín, 3) do Evropy, 4) na území ČSSR.

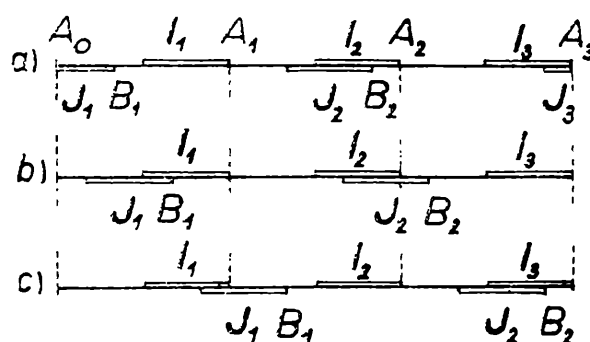
Označme Z zemský povrch; platí $mZ = 510,6$ [milionů km^2]. Předpokládejme, že je splněna podmínka homogenosti, tj. že každý km^2 na povrchu zeměkoule má stejnou možnost být zasažen zbytkem kosmického tělesa (vzhledem k magnetickému poli Země tomu ve skutečnosti tak docela není). Pak hledané pravděpodobnosti dostaneme z (2) pomocí vhodných zeměpisných údajů. Rozloha souší je 149,4 (vše dále uvádíme v miliónech km^2), tedy $P_1 = 149,4/510,6 \doteq 0,293 = 29,3 \%$. Odečteme-li Antarktidu, severní Grónsko, horké a kamenité pouště, dostaneme „obydlené krajiny“ (ekumena), u nichž se spokojíme s hrubším odhadem rozlohy: 100, takže $P_2 = 100/510,6 \doteq 0,2 = 20 \%$. Rozloha Evropy je 10,56, tedy $P_3 = 10,56/510,6 \doteq 0,0207 = 2,07 \%$. Rozloha ČSSR je 0,128, odkud $P_4 = 0,128/510,6 \doteq 0,00025 = 0,025 \%$.

Pravděpodobnost toho, že zbytek kosmického tělesa spadne na území ČSSR je tedy asi 1/4 promile, tj. lze očekávat, že ze 4000 zbytků by jeden mohl padnout na naše území. Přitom zhruba každé páté těleso padá na obydlené krajiny, každé padesáté na Evropu.

Příklad 4. Ze zastávky místní dopravy odjíždí každé 4 minuty vůz (autobus, trolejbus nebo tramvaj) linky A a každých 6 minut vůz linky B , oběma se můžeme dostat k cíli své cesty. Jaká je pravděpodobnost jevu, že po našem náhodném příchodu na zastávku z ní do dvou minut odjede vůz jedné z uvedených linek (jev D).

Předně zjistíme, že odjezdy vozů obou linek tvoří periodický děj s periodou 12 min, tj. vždy po 12 minutách se teoreticky přesně opakuje táž situace (nebudeme přihlížet k situaci praktické a v poruchách dodržování jízdního řádu). Stačí se tedy omezit na libovolný dvanáctiminutový časový úsek, podobně jako jsme se u př. 1 omezili na sledování jediného vagónu.

Za počátek svých úvah vezmeme např. odjezd vozu linky A a na číselné (časové) ose (obr. 8a) znázorníme další odjezdy vozů linky A ; jsou to



Obr. 9a, b, c

body A_0, A_1, A_2, A_3 . Příchod cestujícího je na časové ose zobrazen jako bod C úsečky $Z = A_0A_3$ (bod A_3 k ní však nebudeme počítat). Jev D nastane právě tehdy, leží-li bod C (viz obr. 8b) v některém z intervalů I_1, I_2, I_3 (možné příchody do dvou minut před odjezdem A); příchod v okamžiku odjezdu bereme jako nevyhovující, tedy $I_1 = \langle 2, 4 \rangle$, $I_2 = \langle 6, 8 \rangle$, $I_3 = \langle 10, 12 \rangle$. Kdybychom neuvažovali linku B , pak by hledaná pravděpodobnost byla podle (2) $P = m(I_1 \cup I_2 \cup I_3)/mZ = 6/12 = 0,5 = 50\%$. Přidáme-li linku B , pravděpodobnost se jistě zvětší. Nazveme b dobu odjezdu prvního vozu linky B po odjezdu A_0 ; zřejmě $0 \leq b < 6$. Další vozy linky B odjedou pak v čase $b + 6, b + 12$; uvedený druhý odjezd je už sice mimo náš dvanáctiminutový interval, ale dvouminutové čekání sem ještě může zasáhnout. Dvouminutové intervaly před odjezdem vozů linky B jsou $\langle b - 2, b \rangle$, $\langle b + 4, b + 6 \rangle$, $\langle b + 10, b + 12 \rangle$, jejich průniky se Z označíme J_1, J_2, J_3 . Načrtneme-li si situaci na číselnou osu, vidíme, že je vhodné uvažovat tři případy:

a) $0 \leq b < 2$ (obr. 9a).

Jev D nastane právě tehdy, leží-li bod C v množině

$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3$, což je v tomto případě

$I = \langle 0, b \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle \cup \langle b + 4, 8 \rangle \cup \langle 10, 12 \rangle$, tj. $mI = 8$. Podle (2) je $P(D) = 8/12 = 2/3 = 66,7\%$.

b) $2 \leq b < 4$ (obr. 9b).

Jev D nastane právě tehdy, leží-li bod C v množině

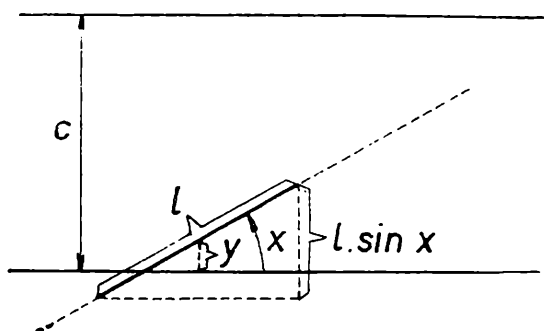
$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup J_1 \cup J_2 = \langle b - 2, 4 \rangle \cup \langle 6, b + 6 \rangle \cup \langle 10, 12 \rangle$; opět $mI = 8$, $P(D) = 2/3 = 66,7\%$.

c) $4 \leq b < 6$ (obr. 9c).

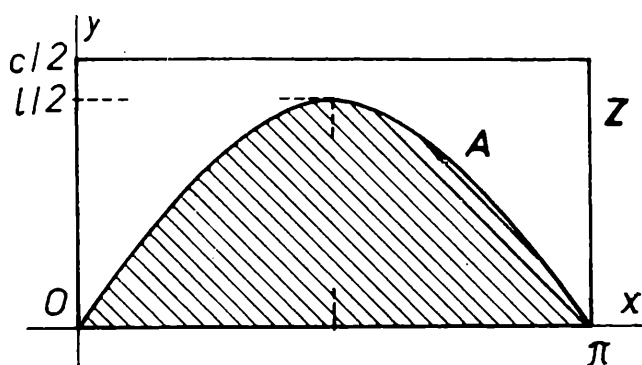
Nyní $I = \langle 2, b \rangle \cup \langle 6, 8 \rangle \cup \langle b + 4, 12 \rangle$, $mI = 8$, $P(D) = 2/3 = 66,7\%$.

Vidíme, že řešení nezávisí na b , takže příklad 4 je vyřešen s odpovědí: $P(D) = 2/3 = 66,7\%$.

Znalce možná překvapilo, že řešení nezáviselo na b , tj. na vzájemném posunu odjezdů obou linek. Šlo skutečně jen o náhodu (autorem záměrně připravenou). Jestliže bychom nahradili dvouminutové čekání jen minutovým, pak už by pravděpodobnost závisela na b a nabývala by hodnot (v závislosti na b) mezi $4/12$ a $5/12$. Jestliže se o tom čtenář přesvědčí, bude to pro něj dobré cvičení; postup je stejný jako při řešení př. 4.



Obr. 10



Obr. 11

Příklad 5. Na závěr této části aplikací pojednáme ještě o tzv. Buffonově úloze o jehle (George L. L. Buffon 1707–1788).

Uvažujme rovinu, na níž je zvolen systém rovnoběžek ve stejných vzdálenostech c od sebe (linkovaný papír). Na tuto rovinu budeme náhodně umísťovat úsečku J o délce l (na onen linkovaný papír házíme jehlu — odtud název úlohy). Zajímá nás pravděpodobnost jevu R , že úsečka J (říkejme jí dále jen jehla) po dopadu protíná některou z rovnoběžek.

Vezměme dvě rovnoběžky ve vzdálenosti c a zakresleme některou možnou polohu jehly (obr. 10). Tato poloha může být vyjádřena pomocí dvou proměnných: x — velikost orientovaného úhlu určeného linkou a jehlou; budeme brát jen $0 \leq x < \pi$; y — vzdálenost středu jehly od nejbližší linky, tedy $0 \leq y \leq c/2$. Množina všech poloh jehly vzhledem k lince nejbližší ke středu jehly je tak ekvivalentní s množinou všech dvojic $(x, y) \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, c/2 \rangle = \mathbf{Z}$. Zobrazena je v rovině jako obdélník $\mathbf{Z}$ na obr. 11. Z obr. 10 vidíme, že jev R nastane, právě když $y \leq (l \sin x)/2$; množinu všech dvojic (x, y) , které vyhovují uvedené podmínce, označme $\mathbf{A}$. Zřejmě žádné „natočení“ jehly vzhledem k linkám nemá (nesmí mít) přednost před jiným, žádná vzdálenost středu jehly od nejbližší linky nemá přednost před jinou, podmínka homogenosti je splněna. K zobrazení množiny $\mathbf{A}$ potřebujeme i část sinusoidy (obr. 11). Je R tedy znamená: při náhodné volbě bodu $(x, y) \in \mathbf{Z}$ leží tento bod současně v množině $\mathbf{A}$. K výpočtu $P(R)$ podle (2) potřebujeme $m\mathbf{A}$, $m\mathbf{Z}$. Výpočet $m\mathbf{Z}$ je snadný, jde o obdélník a $m\mathbf{Z} = \pi c/2$. K výpočtu $m\mathbf{A}$ je třeba použít integrálního počtu. Podle něj je

$$m\mathbf{A} = \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin x \, dx = \frac{l}{2} [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{l}{2} (-\cos \pi + \cos 0) = l.$$

Podle (2) je po úpravě $P(R) = 2l/\pi c$.

Tento výsledek je docela zajímavý, proto u něj chvíli zůstaňme. Uvedeného vzorce lze totiž použít k experimentálnímu určení čísla π . Čísla l a c samozřejmě známe (dovedeme je změřit), číslo $P(R)$ nahradíme relativní četností m/n : provedeme dosti velký počet n pokusů, v těchto

pokusech nastal jev R celkem m -krát, $P(R) \doteq m/n$. Tedy $m/n \doteq 2l/\pi c$ a z toho $\pi \doteq 2ln/mc$.

Švýcarský astronom R. Wolf provedl v letech 1849–53 5000 pokusů ($n = 5000$) a dostal $\pi \doteq 3,1507$. Zkusíte to také?

Největším praktickým problémem tu je zajištění náhodnosti umístování jehly (tj. podmínky homogennosti) tak, aby výsledek pokusů nebyl ovlivněn způsobem házení jehly, natočením papíru s linkami apod. Dobře může posloužit průhledné kolečko s ryskou. Volíme-li pak ještě např. $c = l$ (vzdálenost linek stejnou jako je délka jehly), máme po n pokusech $\pi \doteq 2n/m$.

Poznámky k řešení úlohy pro čtenáře:

1. V plánu hry (obr. 1) je obsazeno celkem 27 čtverečků, takže pravděpodobnost zásahu některého z nich je $P(B) = 27/100 = 27\%$.

2. Jestliže po 1. střele ohlásí soupeř „voda“, pak se základní prostor zmenší o jeden možný jev a pravděpodobnost zásahu druhou střelou vzroste na $P = 27/99 = 27,3\%$.

Je-li po 1. střele hlášeno „zásah—celá“, pak nová situace závisí na tom, který z člunů byl zasažen. V každém případě ubude jeden případ příznivý a jeden možný, ale základní prostor se navíc zmenší o všechny čtverečky sousední; např. člun na $a1$ má dva sousedy, takže pro druhý zásah bude $P = 26/97 = 26,8\%$, na $g1$ má tři sousedy, $P = 26/96 = 27,1\%$, na $i2$ má čtyři sousedy, takže po zásahu $i2$ se pravděpodobnost změní na $P = 26/95 = 27,4\%$.

3. Po ohlášení „zásah“ se zmenší počet možných i počet příznivých případů o 1. Ve skutečnosti však po úspěšném zásahu chce útočník objevit a potopit celou loď, takže další střely zaměřuje do sousedních čtverečků; ty mohou být dva, tři nebo čtyři. Některé z nich mohou být obsazeny, některé ne, takže dostáváme řadu možností. Např. po zásahu $a9$ je pravděpodobnost příštího zásahu $1/3 = 33,3\%$, po zásahu $c9$ je pravděpodobnost dalšího zásahu 50% , po $f9$ je to 75% a po $j6$ je dokonce zásah příští střelou jistý, $P = 100\%$, všechny sousední čtverečky jsou obsazeny.

Chcete-li pravděpodobnost pokoušet ještě jinou hrou a jste aspoň tři, zahrajte si hru „Prospektoři“ (viz [5]), která je „Námořní bitvě“ dost podobná, je stejně dobrodružná, ale její cíle jsou mírumilovnější.

(Dokončení)

konstruktivní geometrie

Užití dělicího poměru v geometrii

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V člancích prof. Kotyka a dr. Mídy otištěných v 1. čísle 53. ročníku (str. 18 až 21) a ve 3. čísle 54. ročníku (str. 106 až 109) Rozhledů matematicko-fyzikálních bylo pojednáno o užití dělicího poměru v mechanice. Všimněme si nyní užití tohoto poměru v geometrii.

Dva různé body A, B určují úsečku AB , které říkáme nenulová úsečka; jestliže body A, B splynou, mluvíme o úsečce nulové. Každé nenulové úsečce přiřadíme kladné číslo tak, aby platily tyto podmínky: 1. Shodné úsečky mají stejné velikosti. 2. Součet úseček má velikost rovnou součtu velikostí jednotlivých úseček. 3. Určitá předem daná nenulová úsečka má velikost 1 (jednotková úsečka). Jsou-li splněny tyto tři podmínky, pak lze dokázat, že každé nenulové úsečce AB lze přiřadit právě jedno kladné číslo zvané velikost úsečky AB . Tato velikost se dříve zapisovala znakem AB ; nyní se často užívá znaku $|AB|$. Budeme však užívat jenom zápisu AB nebo BA . Pro velikost nenulové úsečky AB tedy je $AB = BA > 0$.

Zvolíme-li dvě jednotkové úsečky, které nejsou shodné, pak pro velikost dané úsečky AB dostaneme dvě různá kladná čísla. Důležité však je, že platí tato věta:

Podíl velikostí dvou nenulových úseček nezávisí na volbě jednotkové úsečky.

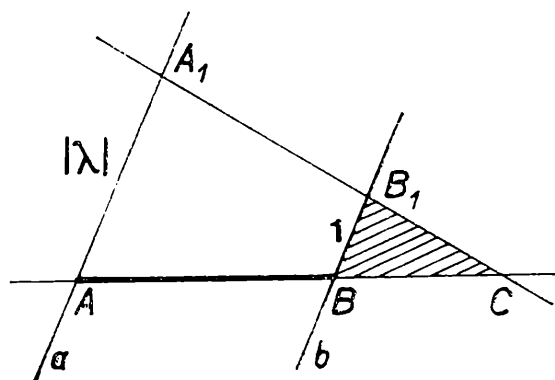
Na základě toho je vhodné zavést pojem dělicího poměru takto:

Na přímce jsou zvoleny tři různé body A, B, C . Potom *dělicím poměrem bodu C* nazýváme reálné číslo λ , které je určeno takto: a) Jeho absolutní hodnota je rovna podílu $AC : BC$; b) je kladné, leží-li bod C na prodloužení úsečky AB a je záporné, je-li bod C vnitřním bodem úsečky AB . — Dělicí poměr λ bodu C zapisujeme znakem (ABC) .

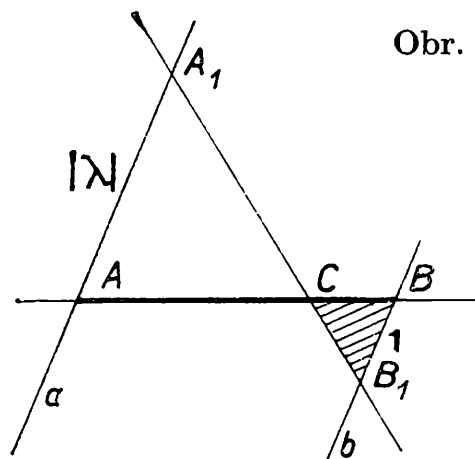
Z definice ihned plyne, že je $\lambda \neq 0$. Kromě toho je $\lambda \neq 1$, neboť podíl $AC : BC$ je rovný jedné jenom pro případ, že je $AC = BC$, tj. jediné tehdy, jestliže bod C je středem úsečky AB ; pak však jeho dělicí poměr je rovný -1 .

Podle věty uvedené před definicí dělicího poměru nezávisí dělicí poměr (ABC) na volbě jednotkové úsečky; závisí však na pořadí bodů A, B . Platí totiž tato věta:

Obr. 2



Obr. 1



Věta 1. Jsou-li A, B, C tři různé body přímky, potom je

$$(BAC) = \frac{1}{(ABC)}.$$

Důkaz: Z definice dělicího poměru plyne, že čísla (ABC) , (BAC) jsou obě kladná nebo obě záporná. Přitom absolutní hodnota dělicího poměru (BAC) je rovna $BC : AC$.

Poznámka. Je-li $(ABC) = \lambda$, pak podle věty 1 je $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$. Kromě toho lze dokázat, že platí:

$$(ACB) = 1 - \lambda, \quad (BCA) = \frac{\lambda - 1}{\lambda},$$

$$(CAB) = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad (CBA) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

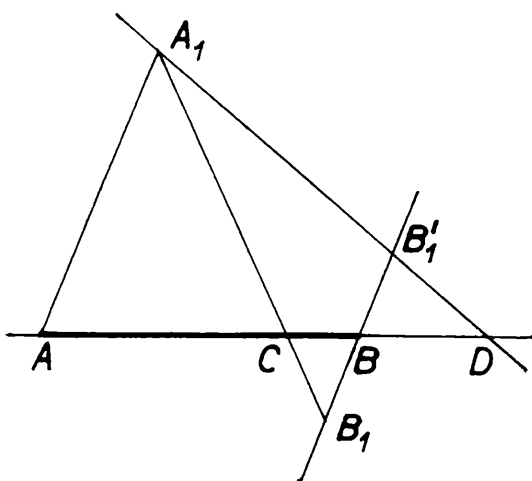
Důkazy neuvádíme, neboť tyto vzorce nebudeme v dalším potřebovat. Poznamenejme jenom, že je nutno nejdříve dokázat vzorec $(ACB) = 1 - \lambda$; ostatní tři lze odvodit pomocí tohoto vzorce a vzorce z věty 1.

Podle definice má každý bod $C \neq A$, $C \neq B$ na přímce AB právě jeden dělicí poměr $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$. Dá se dokázat, že platí i věta obrácená:

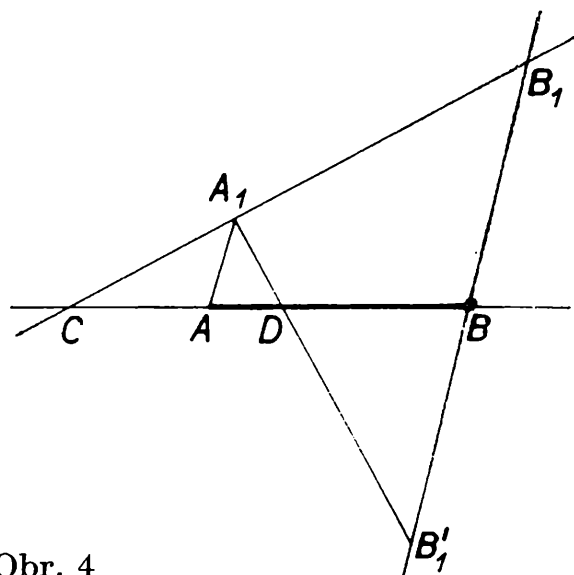
Věta 2. Budtež A, B dva různé body a $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ reálné číslo. Potom na přímce AB existuje právě jeden bod C , pro který je $(ABC) = \lambda$.

Sestrojení bodu C daného dělicím poměrem $(ABC) = \lambda$ je snadné: Body A, B vedeme rovnoběžky a, b , $a \neq b$, na přímce a sestrojíme bod A_1 tak, aby bylo $AA_1 = |\lambda|$ a na přímce b bod B_1 tak, aby bylo $BB_1 = 1$. Je-li $\lambda > 0$, sestrojíme úsečku BB_1 v polorovině ABA_1 (obr. 1); je-li $\lambda < 0$, sestrojíme úsečku BB_1 v polorovině opačné k polorovině ABA_1 (obr. 2). Potom bod C je průsečíkem přímky AB s přímkou A_1B_1 . — Správnost konstrukce plyne z podobnosti trojúhelníků ACA_1 , BCB_1 .

Poznámka 1. Místo úseček AA_1 , BB_1 o velikostech $|\lambda|$, 1 můžeme sestrojovat úsečky o délkách $k|\lambda|$, k , kde je $k > 0$. Tak např. pro $\lambda = \frac{2}{3}$ volíme výhodně $k = 3$.



Obr. 3



Obr. 4

Jsou-li A, B, C, D čtyři navzájem různé body téže přímky, pak číslo $\frac{(ABC)}{(ABD)}$ nazýváme *dvojpoměrem čtyř bodů* A, B, C, D (v uvedeném pořadí) a zapisujeme je znakem $(ABCD)$.

Jsou-li body C, D sestrojeny tak, že je $(ABD) = -(ABC)$, pak říkáme, že bod D je čtvrtý harmonický k bodům A, B, C (v tomto pořadí). V tomto případě je dvojpoměr $(ABCD) = -1$. Je-li bod C středem úsečky AB , pak k bodům A, B, C neexistuje čtvrtý harmonický bod D ; dělicí poměr středu C úsečky AB je totiž -1 , takže dělicí poměr bodu D by musil být roven 1 , ale to není možné. Jinak ke každé trojici různých bodů A, B, C existuje čtvrtý harmonický bod D ; jeho konstrukce je patrna z obr. 3, 4 kde je $AA_1 \parallel BB_1, BB'_1 = BB_1$.

Poznámka 2. Je-li bod D čtvrtý harmonický k bodům A, B, C , pak je patrna, že jeden z bodů C, D leží uvnitř úsečky AB a druhý na jejím prodloužení za bod A nebo za bod B (obr. 3, 4). Obráceně je zřejmé, že jeden z bodů A, B leží uvnitř úsečky CD a druhý na jejím prodloužení za bod C nebo za bod D .

Věta 3. Je-li $(ABCD) = -1$, je též $(ABDC) = (BACD) = (BADC) = (CDAB) = (CDBA) = (DCAB) = (DCBA) = -1$.

Důkaz: Podle předpokladu je

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = -1, \quad (1)$$

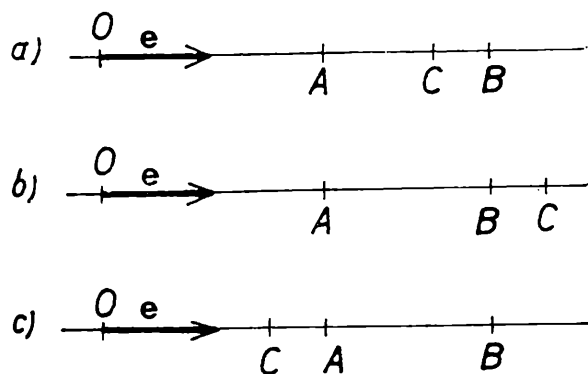
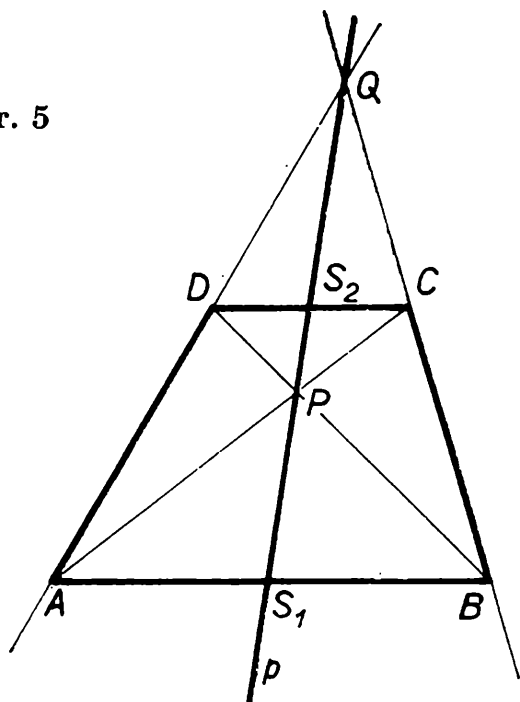
čili

$$\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}, \text{ tj. } AC \cdot BD = -AD \cdot BC \quad (2)$$

Podle definice dvojpoměru a podle (1) je

$$(ABDC) = \frac{(ABD)}{(ABC)} = -1$$

Obr. 5



Obr. 6a, b, c

Užijeme-li věty 1, pak je podle (1) obdobně

$$(BACD) = \frac{(BAC)}{(BAD)} = \frac{1}{(ABC)} \cdot \frac{(ABD)}{1} = -1$$

Zcela stejně se dokáže, že je $(BADC) = -1$. Dále je podle definice dělicího poměru a podle poznámky 2

$$(CDAB) = \frac{(CDA)}{(CDB)} = -\frac{CA}{DA} \cdot \frac{DB}{CB};$$

avšak tento výsledek se podle (2) rovná -1 . Zbývající tři vzorce plynou ze vzorce $(CDAB) = -1$ zcela stejně, jako tomu bylo v prvních třech případech.

Poznámka 3. Je-li D čtvrtý harmonický bod k bodům A, B, C , pak podle věty 3 je též C čtvrtým harmonickým bodem k bodům A, B, D nebo D je čtvrtým harmonickým bodem k bodům B, A, C atd. Proto se říká, že body A, B, C, D tvoří *harmonickou čtveřinu bodů*. V pořadí těchto bodů však musí být na prvních dvou místech buď body A, B (v libovolném pořadí) nebo body C, D (v libovolném pořadí); zbývající dva body mohou být opět v libovolném pořadí.

Věta 4. V libovolném lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD sestrojme průsečík P úhlopříček AC, BD a průsečík Q prodloužených ramen AD, BC . Potom přímka PQ prochází středy S_1, S_2 základen AB, CD a body S_1, S_2, P, Q tvoří harmonickou čtveřinu (*harmonická vlastnost lichoběžníku*).

Důkaz: Spojme středy S_1, S_2 základen AB, CD přímkou p a sestrojme její průsečík P s přímkou AC (obr. 5). Tento bod existuje, neboť přímka p odděluje body A, C ; proto bod P leží uvnitř úsečky AC , tj. uvnitř lichoběžníku $ABCD$ a tedy též uvnitř úsečky S_1S_2 . Potom je

$$(S_1S_2P) = -\frac{S_1P}{S_2P} = -\frac{S_1A}{S_2C}. \quad (1)$$

Obdobně sestrojme průsečík P' přímky p a přímkou BD . Potom je

$$(S_1S_2P') = -\frac{S_1P'}{S_2P'} = -\frac{S_1B}{S_2D}. \quad (2)$$

Protože je $S_1B = S_1A$, $S_2D = S_2C$, plyne z (1) a (2), že je

$$(S_1S_2P') = (S_1S_2P) = \lambda.$$

Avšak podle věty 2 existuje na přímce $S_1S_2 \equiv p$ jediný bod s dělicím poměrem λ ; proto bod P' splývá s bodem P . Obdobně dokážeme, že se přímky AD , BC protínají v bodě Q na přímce p ; přitom je

$$(S_1S_2Q) = \frac{S_1Q}{S_2Q} = \frac{S_1A}{S_2D} = \frac{S_1A}{S_2C}.$$

Proto podle (1) je $(S_1S_2Q) = -(S_1S_2P)$, takže body S_1 , S_2 , P , Q tvoří harmonickou čtveřinu.

Zvolíme-li na přímce p , kde jsou dány tři různé body A , B , C soustavu souřadnic (tj. počátek a vektor e o velikosti 1), pak je možno vyjádřit dělicí poměr (ABC) pomocí souřadnic bodů A , B , C .

Věta 5. Budtež na přímce p dány tři různé body A , B , C , které mají ve zvolené soustavě souřadnic po řadě souřadnice x_1 , x_2 , x . Potom platí:

$$(ABC) = \frac{x - x_1}{x - x_2}.$$

Důkaz: Podle vzorce pro vzdálenost dvou bodů na přímce je $AC = |x - x_1|$, $BC = |x - x_2|$. Podle vzorce $|a : b| = |a| : |b|$ je tedy

$$\frac{AC}{BC} = \frac{|x - x_1|}{|x - x_2|}. \quad (1)$$

a) Předpokládejme, že soustava souřadnic na přímce p je zvolena tak, že při probíhání bodu X po přímce p „zleva do prava“ jeho souřadnice roste (obr. 6). Potom pro bod C ležící mezi body A , B (ať je jejich pořadí jakékoliv) je jedno z čísel $x - x_1$, $x - x_2$ kladné a druhé záporné; jejich podíl je tedy záporný. Podle definice dělicího poměru a podle (1) je tedy

$$(ABC) = \frac{x - x_1}{x - x_2}. \quad (2)$$

Pro bod C ležící na prodloužení úsečky AB (při libovolném pořadí bodů A , B) jsou obě čísla $x - x_1$, $x - x_2$ kladná nebo obě záporná; jejich podíl je tedy kladný. Podle definice dělicího poměru a podle (1) platí tedy opět (2).

b) Změníme-li orientaci přímky p , pak důkaz probíhá zcela stejně jako v případě a).

Důsledek věty 5. Budtež na přímce dány tři různé body A , B , C takové, že je $(ABC) = \lambda$; přitom body A , B , C mají ve zvolené soustavě souřadnic po řadě souřadnice x_1 , x_2 , x . Potom platí:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}. \quad (3)$$

Tento vzorec dostaneme, vypočteme-li ze vzorce uvedeného ve větě 5 souřadnici x . Tak dostaneme

$$\lambda x - \lambda x_2 = x - x_1 .$$

a odtud výsledek (3).

Příklad 1. Na přímce jsou dány body A, B, C, D tak, že tvoří harmonickou čtveřinu; dělicí poměr bodu C je $(ABC) = \lambda$. Dokažte, že střed S úsečky CD má dělicí poměr $(ABS) = \lambda^2$.

Řešení: Jestliže body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřinu, pak pro dělicí poměr $(ABC) = \lambda$ platí

$$\lambda \neq 1, \quad \lambda \neq -1 . \quad (1)$$

Zvolme na dané přímce soustavu souřadnic tak, že jejím počátkem je bod A a že bod B má souřadnici $b = 1$; souřadnice bodů C, D jsou po řadě c, d . Potom podle důsledku věty 5 je

$$c = \frac{-\lambda}{1 - \lambda} .$$

Protože $(ABCD) = -1$, je dělicí poměr bodu D roven číslu $-\lambda$. Podle důsledku věty 5 je tedy

$$d = \frac{\lambda}{1 + \lambda} ;$$

podle (1) je $1 + \lambda \neq 0$.

Střed S úsečky CD má souřadnici

$$s = \frac{c + d}{2} ,$$

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{-\lambda}{1 - \lambda} + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\lambda^2}{1 - \lambda^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} . \quad (2)$$

Je-li $(ABS) = \kappa$, je podle důsledku věty 5

$$s = \frac{-\kappa}{1 - \kappa} . \quad (3)$$

Podle (2) a (3) je tedy

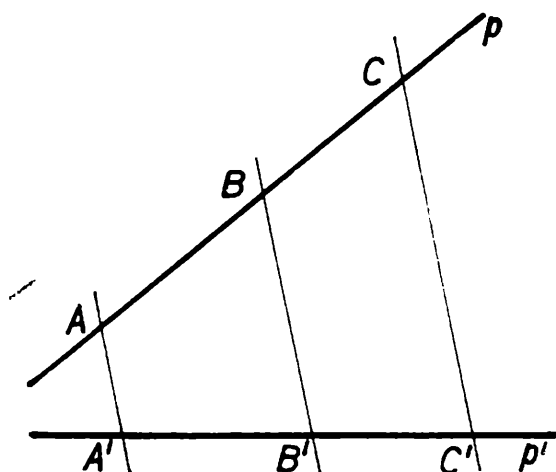
$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} ,$$

takže je

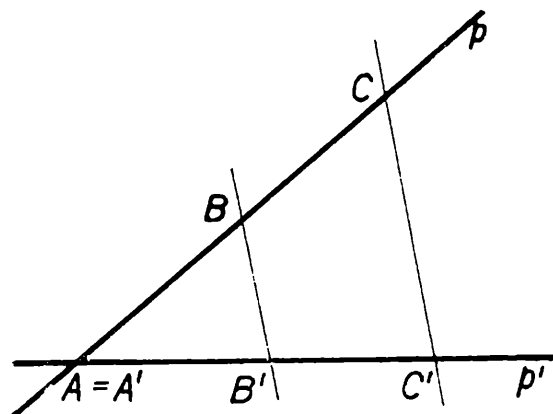
$$\begin{aligned} \lambda^2 \kappa - \lambda^2 &= \lambda^2 \kappa - \kappa , \\ \kappa &= \lambda^2 . \end{aligned}$$

Je tedy skutečně $(ABS) = \lambda^2$.

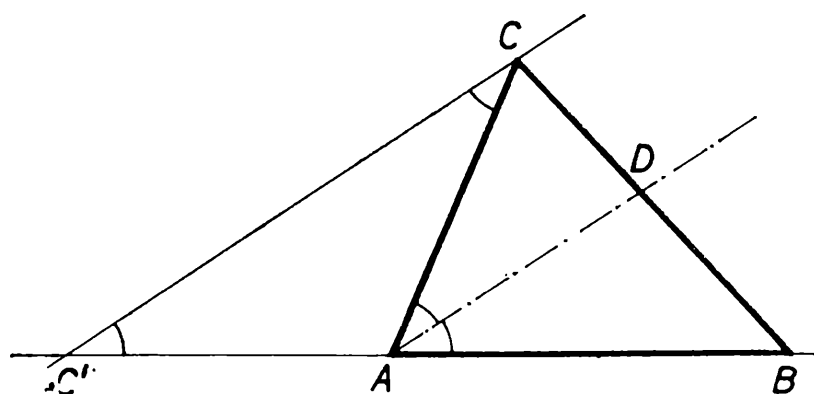
Všimněme si nyní jedné velmi důležité vlastnosti dělicího poměru. Zvolme v rovině dvě různé přímky p, p' (rovnoběžné nebo různoběžné); na přímce p zvolme tři různé body A, B, C a na přímce p' tři různé body A', B', C' . Jestliže přímky AA', BB', CC' jsou rovnoběžné (obr. 7) anebo je-li např. $A = A', BB' \parallel CC'$ (obr. 8), pak říkáme, že body A', B', C' jsou rovnoběžnými průměty bodů A, B, C na přímku p' ; stejně ovšem



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

lze říci, že body A, B, C jsou rovnoběžnými průměty bodů A', B', C' na přímku p . Pro rovnoběžné promítání pak platí tato základní věta:

Věta 6. Nechť A, B, C jsou tři různé body přímky p , A', B', C' jejich rovnoběžné průměty na přímku p' ; potom je $(A'B'C') = (ABC)$.

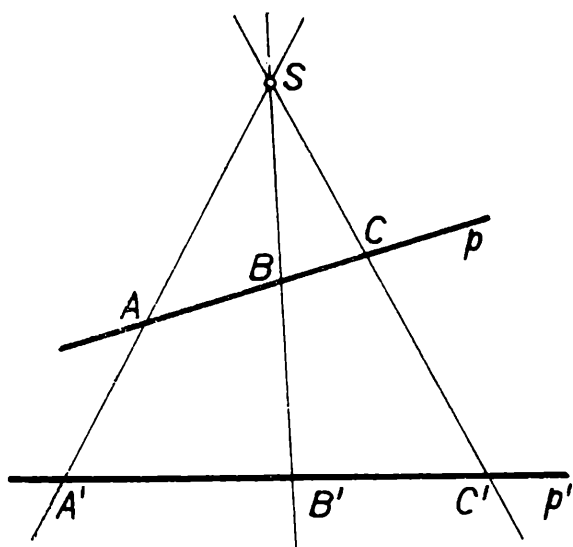
Důkaz této věty najde čtenář např. v učebnici *Geometrie pro pedagogické fakulty*, II. díl, str. 11 až 19. Věta 6 říká především, že se rovnoběžným promítáním nemění uspořádání bodů na přímce; to znamená, že je-li např. bod C mezi body A, B , je jeho průmět C' mezi průměty A', B' bodů A, B . Kromě toho však věta 6 ještě říká, že je $A'C' : B'C' = AC : BC$. Její obsah se stručně vyjadřuje takto: *Dělicí poměr se rovnoběžným promítáním zachovává*; jinak se též říká, že dělicí poměr je *invariantem* rovnoběžného promítání.

Příklad 2. Nechť bod D je vnitřním bodem strany BC trojúhelníku ABC . Potom polopřímka AD je osou úhlu $\sphericalangle BAC$ právě tehdy, je-li

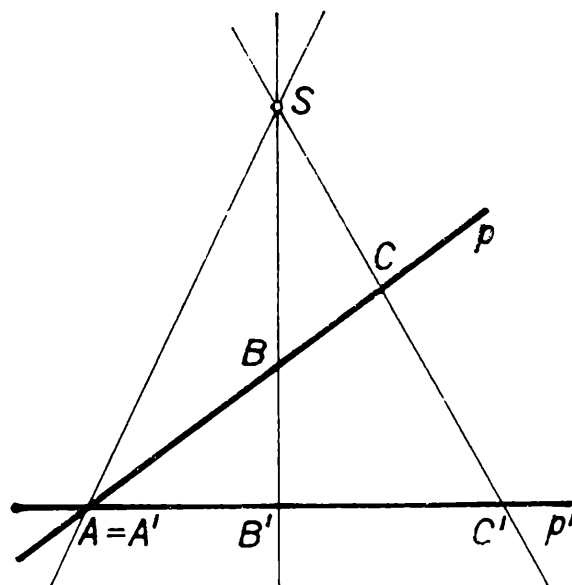
$$(BCD) = -\frac{AB}{AC}.$$

Dokažte.

Řešení: a) Sestrojme osu úhlu $\sphericalangle BAC$; tato osa protíná stranu BC v jejím vnitřním bodu D (obr. 9). Potom přímka vedená bodem C rovnoběžně s přímkou AD protíná přímku AB v bodě C' . Trojice různých



Obr. 10



Obr. 11

bodů B, A, C' je rovnoběžným průmětem trojice bodů B, D, C ; podle věty 6 je tedy $(BCD) = (BC'A)$. Protože bod D leží mezi body B, C , leží bod A mezi body B, C' , takže je

$$(BCD) = (BC'A) = -\frac{BA}{C'A} = -\frac{AB}{AC'}. \quad (1)$$

Protože úhly $\sphericalangle AC'C \equiv \sphericalangle BC'C$, $\sphericalangle BAD$ leží v téže polorovině s hraniční přímkou BC' tak, že je $C'C \parallel AD$, je

$$\sphericalangle AC'C = \sphericalangle BAD. \quad (2)$$

Protože je $C'C \parallel AD$ a úhly $\sphericalangle C'CA$, $\sphericalangle CAD$ jsou střídavé, je

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle C'CA \quad (3)$$

Protože polopřímka AD je osou úhlu $\sphericalangle BAC$, je

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD \quad (4)$$

Z (2), (4) a (3) plyne, že je $\sphericalangle AC'C = \sphericalangle C'CA$ takže trojúhelník $C'CA$ je rovnoramenný se základnou CC' ; proto je

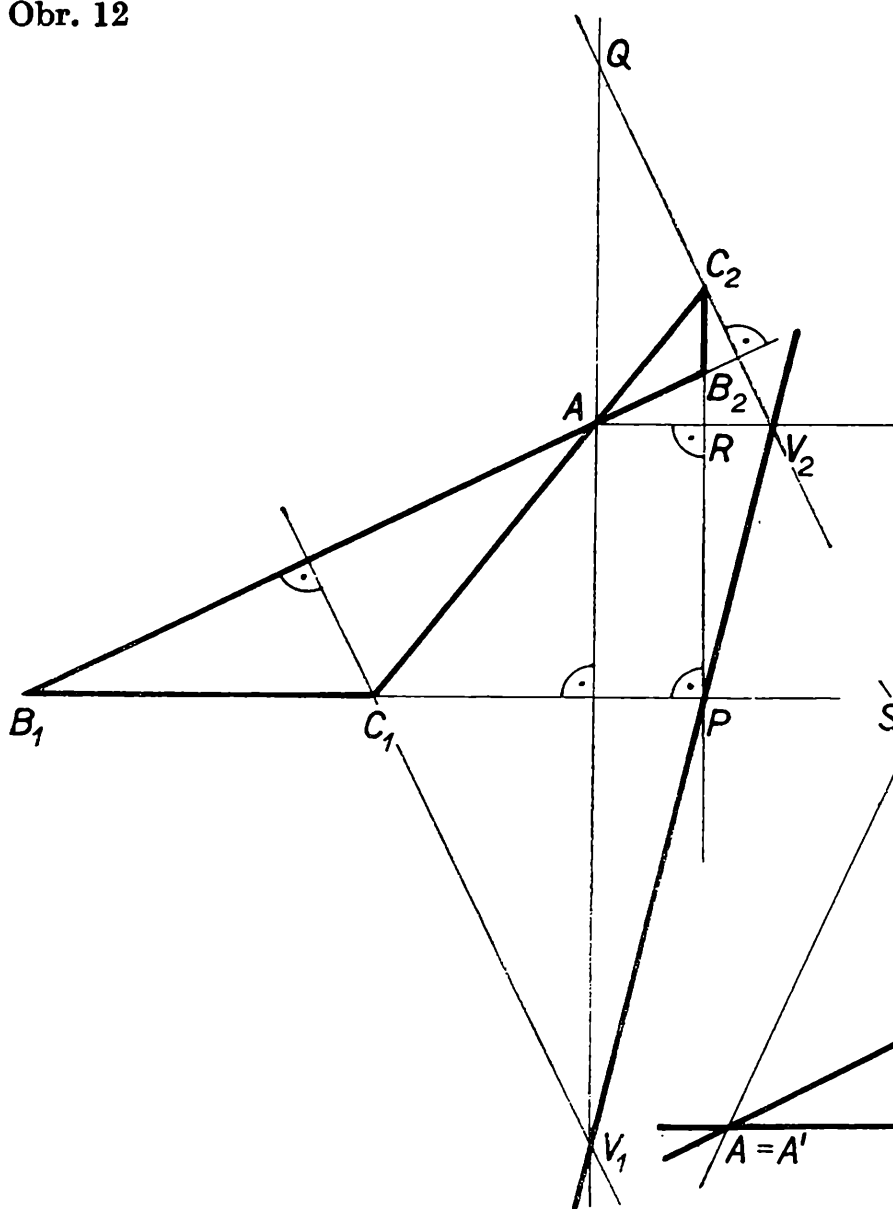
$$AC' = AC \quad (5)$$

Podle (1) a (5) je tedy

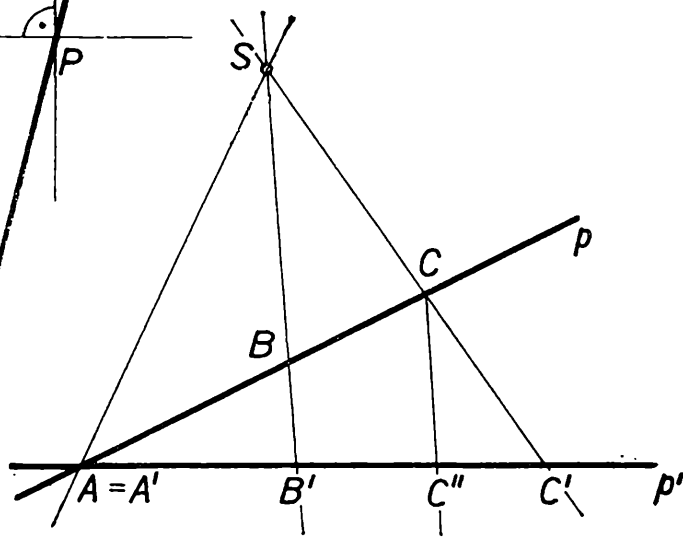
$$(BCD) = -\frac{AB}{AC}. \quad (6)$$

b) Obráceně, nechť uvnitř strany BC je dán bod D tak, že platí (6). Podle věty 2 je takový bod na přímce BC právě jeden; podle a) je to průsečík strany BC s osou úhlu $\sphericalangle BAC$.

Zvolme opět v rovině dvě různé rovnoběžné nebo různoběžné přímky p, p' . Na přímce p zvolme tři různé body A, B, C a na přímce p' tři různé body A', B', C' . Jestliže přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem S (obr. 10) anebo jestliže je např. $A = A'$ a přímky BB', CC' procházejí bodem S (obr. 11), pak říkáme, že body A', B', C' jsou středovými průměty bodů A, B, C na přímku p' ; obdobně jsou body A, B, C středovými průměty bodů A', B', C' na přímku p . Bod S se nazývá středem tohoto promítání.



Obr. 13



Věta 7. Nechť A, B, C jsou tři různé body přímky p , A', B', C' jejich středové průměty na přímku $p' \parallel p$; potom je $(A'B'C') = (ABC)$.

Důkaz této věty najde čtenář opět např. v druhém dílu výše citované učebnice geometrie pro pedagogické fakulty.

Příklad 3. Jsou dány dva trojúhelníky AB_1C_1 , AB_2C_2 se společným vrcholem A ; žádný z nich není pravoúhlý. Vrchol $B_2 \neq B_1$ leží na přímce AB_1 , vrchol $C_2 \neq C_1$ leží na přímce AC_1 ; přímky B_1C_1 , B_2C_2 jsou vzájemně kolmé a mají společný bod P (obr. 12). Dokažte, že přímka spojující ortocentra V_1, V_2 daných trojúhelníků prochází bodem P .

Řešení: Tento příklad byl zadán v loňském ročníku „Naší soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních. Všichni řešitelé použili k jeho řešení metody souřadnic; toto řešení bylo otištěno ve 2. čísle letošního ročníku. Uvádíme nyní řešení, v němž se nepoužívá analytické geometrie.

Výška $AV_2 \perp B_2C_2$ protíná přímku B_2C_2 v bodě R . Protože je $AV_2 \perp B_2C_2$, $B_1C_1 \perp B_2C_2$, je $AV_2 \parallel B_1C_1$. Proto trojice různých bodů C_2 ,

R, P ležících na jedné přímce je rovnoběžným průmětem trojice různých bodů C_2, A, C_1 ležících opět na jedné přímce; podle věty 6 je tedy

$$(C_2AC_1) = (C_2RP). \quad (1)$$

Přímky AB_1, B_1C_1 jsou různoběžky. Proto přímky $C_2V_2 \perp AB_1, AV_1 \perp B_1C_1$ jsou též různoběžky; jejich průsečík označme Q . Protože je $C_1V_1 \perp AB_1, C_2V_2 \perp AB_2$ (kde přímka AB_2 splývá s přímkou AB_1), je $C_1V_1 \parallel C_2V_2$. Proto trojice různých bodů Q, A, V_1 ležících na téže přímce je rovnoběžným průmětem trojice bodů C_2, A, C_1 ležících v jedné přímce; podle věty 6 je tedy

$$(QAV_1) = (C_2AC_1). \quad (2)$$

Promítněme trojici bodů Q, A, V_1 ležících na téže přímce z bodu V_2 na přímku $B_2C_2 \parallel AV_1$. Potom průmětem bodu Q je bod C_2 , průmětem bodu A je bod R ; průmět bodu V_1 označme V'_1 . Podle věty 7 je

$$(C_2RV'_1) = (QAV_1). \quad (3)$$

Z (3), (2) a (1) potom plyne, že je

$$(C_2RV'_1) = (C_2RP) = \lambda.$$

Avšak podle věty 1 existuje na přímce C_2R právě jeden bod, jehož dělicí poměr je λ ; proto je $V'_1 = P$, tj. přímka V_1V_2 prochází bodem P .

Poznámka 4. Věta 7 o invarianci dělicího poměru při středovém promítání neplatí, jestliže přímky p, p' jsou různoběžné. O tom se snadno přesvědčíme takto (obr. 13):

Nechť se přímky p, p' protínají v bodě $A = A'$. Na přímce p jsou dány tři různé body A, B, C a na přímce p' tři různé body $A' = A, B', C'$, a to tak, že body A', B', C' jsou středovými průměty bodů A, B, C ze středu S . Vedme bodem C rovnoběžku s přímkou BB' ; tato přímka protne přímku p' v bodě $C'' \neq C'$. Trojice různých bodů A', B', C'' je rovnoběžným průmětem trojice různých bodů A, B, C ; proto podle věty 6 je

$$(A'B'C'') = (ABC). \quad (1)$$

Protože je $C' \neq C''$, je podle věty 1 nutně $(A'B'C') \neq (A'B'C'')$, čili podle (1) je

$$(A'B'C') \neq (ABC).$$

V dalším článku ukážeme ještě jiná užití dělicího poměru v geometrii. Zatím připojujeme cvičení, které čtenář už teď může snadno řešit.

Cvičení.

1. Úhlopříčky AE, DF pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ se protínají v bodě P . Dokažte, že je $EP = \frac{1}{3} AE$.

2. Budiž dán libovolný trojúhelník ABC . Na přímce BC zvolte bod $A_0 \neq B, A_0 \neq C$, který není středem strany BC . Bod A_0 promítněte rovnoběžně směrem AB na přímku AC do bodu A_1 (tj. $A_0A_1 \parallel AB$). Potom promítněte bod A_1 směrem BC na přímku AB do bodu A_2 . Bod

A_2 promítněte směrem AC na přímku BC do bodu A_3 . Tento bod promítněte směrem AB na přímku AC do bodu A_4 a ten směrem BC na přímku AB do bodu A_5 . Konečně bod A_5 promítněte směrem AC na přímku BC do bodu A_6 . Dokažte, že bod A_6 splyne s bodem A_0 . — *Návod*: Užijte věty 6 a věty 1.

3. Budiž dán libovolný trojúhelník ABC ; střed jeho strany AB budiž bod S a bod O budiž středem těžnice CS . Přímka AO protíná stranu BC v bodě L . Dokažte, že platí: a) $(BCL) = -2$; b) $(ALO) = -3$. — *Návod*: a) Vedte bodem C rovnoběžku se stranou AB a sestrojte její průsečík s přímkou AO ; b) vedte bodem O rovnoběžku se stranou BC a sestrojte její průsečík se stranou AB .

4. Budiž dán trojúhelník ABC , ve kterém nejsou strany AB , AC shodné; nechť bod E je vnějším bodem strany BC . Potom polopřímka AE je osou vedlejšího úhlu k úhlu $\sphericalangle BAC$ právě tehdy, je-li $(BCE) = \frac{AB}{AC}$. Dokažte.

5. Jsou dány dvě různoběžky a , b a bod C , který leží v jejich rovině a není bodem žádné z nich. Vedte bodem C přímku p protínající přímky a , b po řadě v bodech A , B tak, že je $(ABC) = \lambda$, kde $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ je dané reálné číslo (např. $\lambda = -\frac{1}{2}$ nebo $\lambda = \frac{1}{3}$). — *Návod*: Promítněte body A , B , C směrem a na přímku b .

6. Jsou dány dvě různé rovnoběžky b , c a v jejich rovině bod A , který neleží na žádné z nich, a to tak, že polorovina bA je opačná k polorovině s hraniční přímkou b obsahující přímku c . Sestrojte trojúhelník ABC , který má vrchol B na přímce b , vrchol C na přímce c a je podobný danému trojúhelníku $A'B'C'$ — *Návod*: Je-li P průsečík přímky b se stranou AC a P' jeho obraz v trojúhelníku $A'B'C' \sim ABC$, pak je $(ACP) = (A'C'P')$.

7. Je dán rovnoběžník $ABCD$, ve kterém je bod M středem strany BC a bod N středem strany CD . Potom přímky AM , AN protínají úhlopříčku BD v bodech P , Q tak, že platí: a) $BP = PQ = QD$; b) $PM = \frac{1}{3} AM$, $QN = \frac{1}{3} AN$. Dokažte! — *Návod*: a) Uvažte, že je $MN \parallel BD$, takže body P , Q jsou středovými průměty bodů M , N z bodu A na přímku $BD \parallel MN$; lze tedy užít věty 7. b) Promítněte body A , P , M směrem BD na přímku AB .

Charakter zemětřesné činnosti v Československu

RNDr. DANA PROCHÁZKOVÁ, CSc., Geofyzikální ústav ČSAV, Praha

Československo nenáleží k územím se zemětřeseními katastrofálních účinků. Otřesena je obvykle pouze některá část našeho státu a jen zřídka vznikají přitom škody. K zemětřesnému obrazu Československa přispívají podstatně i zemětřesení ze sousedních ohnisek, tj. z východních Alp, jižního Německa a z karpatské kotliny. Zemětřesná činnost na území naší republiky je dána tou skutečností, že jeho podklad tvoří dva geologicky zcela odlišné celky, Český masiv a západní Karpaty, které se podstatně liší co do intenzity i charakteru zemětřesné činnosti.

Studovat zemětřesnou činnost určité oblasti v celku znamená zkoumat zemětřesení této oblasti nejen z hlediska jejich účinků, ale zejména z hlediska časového a prostorového rozložení otřesů. Časové a prostorové rozložení zemětřesné činnosti dává důležitou informaci o dynamických procesech v zemské kůře a ve svrchním plášti. Zemětřesná činnost určité oblasti je objektivně určena množstvím energie, které se při otřesech uvolní. Hlavní část této energie se uvolní při silných zemětřeseních, ačkoliv slabá zemětřesení mají na počet naprostou převahu, což vyplývá ze statistické funkce popisující rozdělení počtu zemětřesení podle magnituda zemětřesení, přičemž veličina magnitudo je objektivní mírou energie uvolněné v ohnisku zemětřesení.

Výchozím materiálem pro studium zemětřesné činnosti na území našeho státu je *katalog V Kárníka*, který zahrnuje zprávy o zemětřeseních z období 998 až 1956, a *Bulletiny čsl. seismických stanic z let 1957 až 70*. V Kárníkově katalogu je „velikost“ zemětřesení charakterizována pomocí zemětřesné intenzity, vyjádřené ve stupních MCS stupnice (Mercalli-Cancani-Siebergova stupnice). Magnitudo M určujeme ze zemětřesné intenzity I_0 podle vztahu

$$(1) \quad M = 0.63 I_0 + 0.5 \quad \text{v Českém masivu}$$

a

$$(2) \quad M = 0.53 I_0 + 0.96 \quad \text{v západních Karpatech.}$$

Charakter zemětřesné činnosti konkrétních oblastí je popsán prostorovým rozložením ohnisek otřesů, vztahem mezi počtem zemětřesení a magnitudem, Benioffovými grafy, největším možným zemětřesením v dané oblasti, typy skupin otřesů, které se v dané oblasti vyskytují atd.

O charakteristikách, které při posuzování zemětřesné činnosti Československa použijeme, se zmíníme nyní podrobněji.

V jistém intervalu magnitud (M_1, M_2), přičemž hodnota M_1 je podstatně ovlivněna úplností materiálu, platí

$$(3) \quad \log N = a - b M,$$

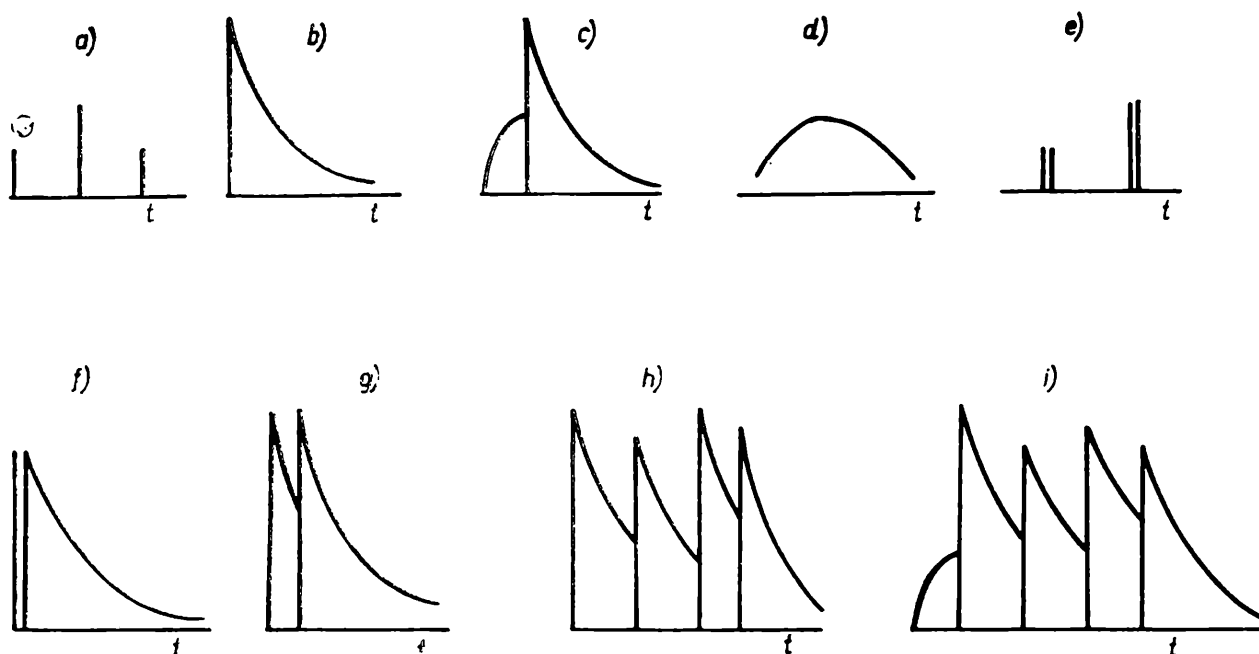
kde N je počet zemětřesení s magnitudem v intervalu ($M - dM, M + dM$), a, b jsou parametry a $2dM$ označuje šířku tříd M (obvykle volíme $2dM = 0.5$ jednotky M). Parametry a, b mohou být spočítány několika metodami, tj. metodou nejmenších čtverců, zobecněnou metodou nejmenších čtverců a metodou maximální věrohodnosti. V přiložené tabulce jsou uvedeny hodnoty těchto parametrů, přičemž při výpočtu bylo použito tříd s krokem 0.5 jednotky magnituda a bylo použito rozložení prosté i kumulativní četnosti. Pod pojmem *kumulativní četnost* zemětřesení v seismologii rozumíme počet zemětřesení s magnitudem větším nebo rovným M . Z tabulky vyplývá, že parametry spočtené z rozložení prosté četnosti se dost hodnotou liší od parametrů spočtených z kumulativní četnosti, což znamená, že tyto dva výpočetní postupy nemůžeme navzájem zaměňovat.

V předchozím odstavci byla zmínka o jisté roli, kterou hraje úplnost materiálu. Při posuzování úplnosti dat je zřejmé, že údaje o slabých zemětřeseních nejsou úplné. Hranice úplnosti, tj. hodnota magnituda, pro kterou platí, že všechna zemětřesení s magnitudem větším jsou zaznamenána a že nejsou zaznamenána všechna zemětřesení s magnitudem menším, se posouvá směrem k vyšším magnitudům tím více, čím starší údaje bereme v úvahu. Hranice úplnosti je jiná v Českém masivu (asi $M = 3$ pro období od r. 1871) a jiná na Slovensku (asi $M = 4$ pro období od r. 1871).

Vzhledem k tomu, že se zpráv z období 998 až 1551 a ze zpráv o některých pozdějších zemětřeseních nebylo možno určit magnitudo zemětřesení, jsou magnitudo četností vztahy pro území naší republiky sestrojeny pro období od r. 1552 až do dnešní doby. Vzhledem ke kusým zprávám o některých starších zemětřeseních je vhodné brát za směrodatné závislosti sestrojené pro období 1871 až 1970.

Dalším charakteristickým rysem jednotlivých oblastí jsou typy zemětřesných posloupností, které se tam vyskytují. Zemětřesení nejsou izolovaným jevem, mají tendenci shlukovat se v čase a v prostoru. Vznikají různé skupiny otřesů, které nazýváme zemětřesné posloupnosti. Tyto skupiny otřesů se od sebe liší různou strukturou a rozdílnými vlastnostmi. Typy zemětřesných posloupností, které se vyskytují v Evropě, jsou na prvním obrázku, na kterém na vodorovné ose je čas a na svislé ose je počet otřesů, resp. energie, uvolněná v časovém intervalu ($t, t + dt$), kde t je čas měřený od prvního otřesu a dt je šířka časového intervalu (obvykle uvažujeme $dt = 1$ den). V případě *a*) jsou

Prostá četnost						Kumulativní četnost						Poznámka			
Metoda						Metoda									
nejmenších čtverců			zobecněných nejmenších čtverců			maximální věrohodnosti			zobecněných nejmenších čtverců				maximální věrohodnosti		
a	b		a	b		a	b		a	b			a	b	
7.09	1.33	6.81	1.25	6.90	1.27	7.44	1.39	6.92	1.25	6.97	1.27	ČSR, 1552—1970, $M > 3$			
7.07	1.33	6.99	1.30	7.07	1.23	7.39	1.39	7.07	1.30	7.11	1.31	ČSR, 1871—1970, $M > 3$			
6.71	1.27	7.06	1.36	7.13	1.38	7.00	1.32	7.07	1.34	7.10	1.35	ČSR, 1901—70, $M > 3$			
7.30	1.41	7.14	1.36	7.24	1.39	7.60	1.46	7.20	1.36	7.25	1.37	oblast zemětřesných rojů v západních Čechách, 1871—1970, $M > 3$			
6.90	1.34	7.14	1.40	7.22	1.43	7.18	1.39	7.15	1.38	7.19	1.40	oblast zemětřesných rojů v západních Čechách, 1901—70, $M > 3$			
6.19	1.31	8.09	1.81	8.75	1.80	6.31	1.32	7.89	1.74	8.40	1.90	zemětřesný roj v oblasti Kraslic r. 1903, $M > 3$			
4.96	1.02	4.18	0.98	4.30	1.01	4.97	1.02	5.21	1.04	5.39	1.13	zemětřesný roj v oblasti Kraslic r. 1908, $M > 3$			
4.32	1.01	3.82	0.99	3.89	0.98	5.01	1.14	4.49	0.99	4.54	1.01	zemětřesný roj v Jeseníkách r. 1931, $M > 3$			
4.17	0.61	3.48	0.47	3.57	0.49	5.28	0.78	4.35	0.60	4.45	0.62	SSR, 1552—1970, $M > 4$			
3.80	0.64	3.75	0.63	3.75	0.63	4.36	0.72	3.98	0.64	4.00	0.64	SSR, 1871—1970, $M > 4$			
3.05	0.51	3.06	0.51	3.06	0.51	3.76	0.62	3.52	0.56	3.54	0.56	SSR, 1901—70, $M > 4$			



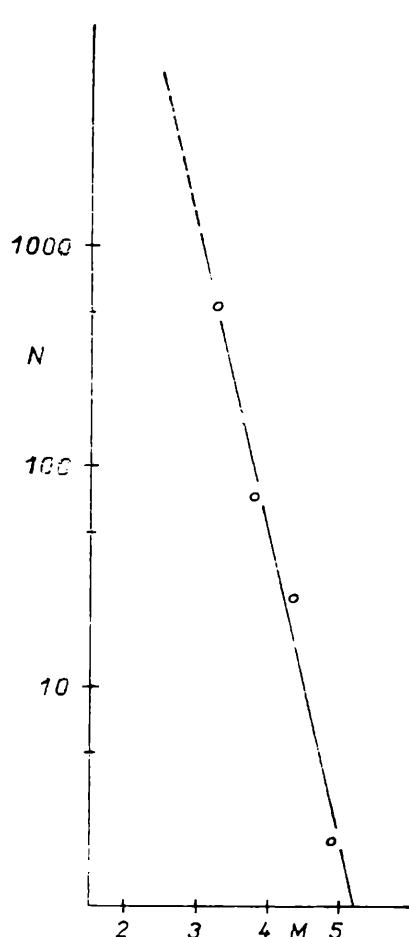
Obr. 1

zobrazeny osamocené otřesy, jejichž definice je zřejmá z názvu. V případě b) jde o skupinu hlavní otřes a dotřesy, tj. takovou skupinu, ve které je první otřes mnohem silnější než následující otřesy. Příklad c) představuje skupinu předtřesy, hlavní otřes a dotřesy, ve které před a po nejsilnějším otřesu jsou slabé otřesy. V případě d) je znázorněn zemětřesný roj, který představuje skupinu otřesů, ve které není žádný otřes, který by svou velikostí výrazně převyšoval ostatní; doba trvání roje se mění od několika dní až k několika měsícům. Příklad e) znázorňuje dvojče, tj. dvojici téměř stejně silných otřesů, které následují za sebou v krátkém časovém intervalu, zpravidla menším než několik dní. Případy f)-i) zobrazují nejčastěji se vyskytující druhy složených otřesových posloupností.

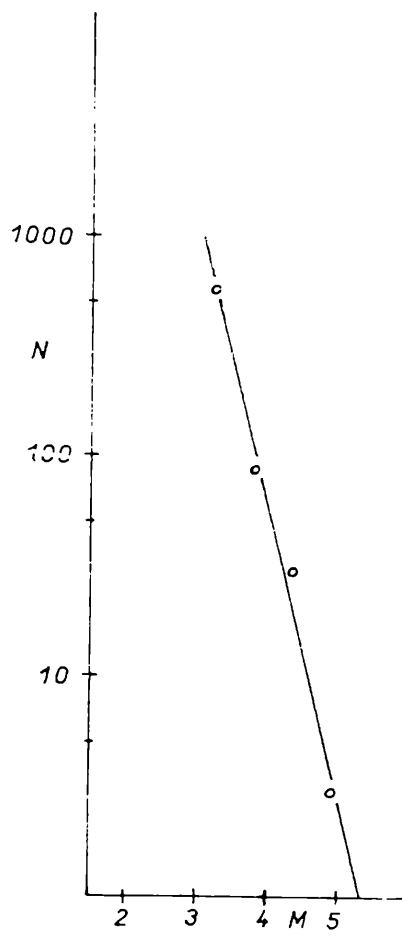
Dle vzniku rozeznáváme *zemětřesení řítivá, sopečná (vulkanická), tektonická (dislokační) a zemětřesení s hlubokými ohnisky*. Zemětřesení vyskytující se většinou v našich krajích jsou původu tektonického.

Zemětřesná činnost Českého masivu

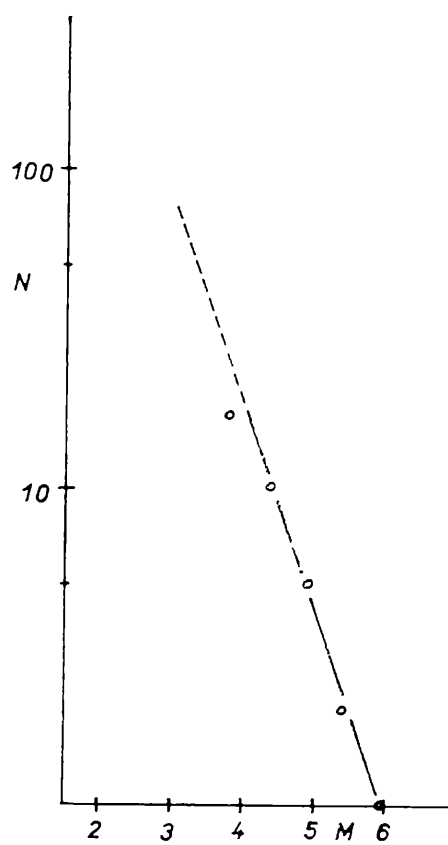
Na zemětřesnou činnost Českého masivu mají vliv jednak zemětřesení, jejichž ohniska leží na území Českého masivu a jednak zemětřesení z východních Alp a Německa. Zemětřesení z východních Alp, popřípadě z alpského předhůří se přenášejí abnormálně silně na sever do Čech a západní části Moravy, zatímco směrem do karpatské kotliny se silně tlumí, jak ukazují výsledky *A. Zátopka*. Větší otřesy (s intenzitami v epicentru okolo 8° MCS stupnice) se projevují makroseismicky až k Drážďanům, a to zřetelněji v mobilních páslech, jejichž poloha souhlasí s hlavními zlomovými pásmy Českého masivu. Tato pohyblivější pásma statistickou metodou vyšetřil *A. Zátopek*. Ohniska zemětřesení, která



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

vznikla na území Českého masivu, jsou mělká a leží hlavně v okrajových horských oblastech a jen z malé části ve vnitřních částech masivu. Zemětřesení vznikající v těchto oblastech jsou vesměs tektonická a za jejich společnou příčinu se považuje alpský tlak od jihu k severu na Český masiv.

Otřesy jsou obvykle slabé, nejsilnější mají intenzitu 7° MCS stupnice, tj. $M = 4.9$ podle vztahu (1). Patrně nejsilnější zemětřesení, jehož ohnisko leželo v Českém masivu, bylo v oblasti mezi Trutnovem a Náchodem 10. 1. 1901. Zemětřesení se obvykle vyskytují ve skupinách dvou typů. V okrajových horských pásmech (hlavně Krušné hory, Smrčiny a Český Les) se vyskytují převážně zemětřesné roje a v oblasti Trutnova a Náchoda se vyskytují zemětřesné posloupnosti typu hlavní otřes a dotřesy. Zemětřesné roje trvají až několik měsíců a někdy se vyskytne kolem 100 otřesů za den. Pro zemětřesné roje, pro které jsou k dispozici spolehlivé údaje o rozložení počtu zemětřesení podle magnitudy, jsme sestavili funkci $\log N(M)$. Tato funkce je lineární kromě oblasti slabých otřesů ($M < 3$), kde už pravděpodobně materiál není úplný a v důsledku toho se objevuje odklon bodů od přímky směrem dolů. Parametry a , b ze vztahu (3) jsou v přiložené tabulce. Z ní je zřejmé, že parametr

$b \geq 1$, což souhlasí s výsledky, které jsou pro zemětřesné roje uváděny v literatuře.

Na obrázku 2 je zobrazen empirický vztah $\log N(M)$ pro Český masiv a pro období 1871–1970; vidíme, že pro $M > 3$ je tato funkce vyjádřena rovnicí (3). Z tabulky plyne, že parametr $b > 1$, což je způsobeno skutečností, že při sestavování tohoto vztahu se uplatňuje hlavně oblast zemětřesných rojů v západních Čechách, pro kterou je typické $b \geq 1$; je to patrné ze srovnání obrázků 2 a 3 (na obrázku 3 je vztah $\log N(M)$ pro oblast zemětřesných rojů v západních Čechách pro období 1871 až 1970).

Zemětřesná činnost západních Karpat

Ve srovnání s Českým masivem leží zdroj zemětřesných jevů ve vlastní tektonice mladé horské soustavy Karpat a kromě toho sem zasahují zemětřesení z východních Alp a z okraje Maďarské pánve. Zemětřesná činnost západních Karpat se projevuje hlavně ve vnitřních částech pohorí. Nejsilnější otřesy mají intenzitu 9–10° MCS stupnice (tj. $M = 5.7$ až 6.3 dle vztahu (2)). Nejsilnější otřes r. 1763 měl intenzitu 10° MCS stupnice. Po tomto otřesu byly v celé postižené oblasti, tj. v okolí Komárna, po řadu let slabší otřesy. Epicentra zemětřesení na Slovensku leží hlavně v Malých Karpatech, Pováží, v okolí Banské Bystrice a na východním Slovensku. Hloubka ohnisek otřesů je obvykle malá; většinou je 5 km a u silnějších 10 až 20 km.

Zemětřesení s magnitudem $M \geq 5.3$ se vyskytují v zemětřesných posloupnostech typu hlavní otřes a dotřesy a otřesy s $M < 5.3$ buď mají vlastní dotřesy, nebo jsou dotřesy silnějších zemětřesení, nebo patří do zemětřesných rojů, které se zřídka vyskytují, anebo se jeví osamocená, na což má pravděpodobně vliv i neúplnost materiálu v oboru slabých zemětřesení.

Na obrázku 4 je vztah mezi počtem zemětřesení a magnitudem pro oblast západních Karpat a pro období 1871 až 1970; vidíme, že pro $M > 4$ je funkce $\log N(M)$ lineární. Z přiložené tabulky plyne, že $b < 1$, čímž se oblast západních Karpat odlišuje od Českého masivu, kde $b > 1$. Tento jev je vyjádřením skutečnosti, že jde o dvě oblasti s charakterem zemětřesné činnosti velmi rozdílným.

recenze

Prof. RNDr. Václav Medek, —
doc. Ladislav Menšík, DrSc —
prof. Tibor Šalát, DrSc
**Repetitóriium stredoškolskej
matematiky**

Vydala ALFA, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry n. p., Bratislava, Hurbanovo nám. 3, v júni 1976 ako svoju 5920. publikáciu. Cena 26,— Kčs.

Pred nami je malá knížka praktického formátu s názvom Repetitóriium stredoškolskej matematiky. Čo obsahuje? Štyri hlavné kapitoly s názvami: Logika a teória množín, čísla a úvod do algebry, analýza, geometria, tiež výsledky úloh, vysvetlivky značiek a register.

Vzhľadom na modernizačný proces vo vyučovaní matematiky, nové osnovy na školách atď., sú tieto kapitoly propracované a rozšírené o niektoré state, napr. o množinách, o logike alebo analytickej geometrii v priestore.

Každá stať má riešené príklady, ba i cvičenia, úlohy, ktorých výsledky môže čitateľ nájsť na konci knížky. Je to knížka veľmi vítaná žiakmi gymnázia, všetkými uchádzačmi o štúdium na vysokých školách (ako pomôcka k príprave na prijímacie skúšky) a osožná i žiakom iných škôl, ktorí potrebujú získať rýchlu orientáciu v matematike v rozsahu, v akom sa vyučuje na stredných školách, ba i o trochu viac.

Jej rozsah, 655 strán, 161 obrázkov, 11 tabuliek, sa zdá na „prehľad“ až priveľký, čo je spôsobené množstvom príkladov, cvičení, viet a dôkazmi týchto viet. Oproti starším prehľadom stredoškolskej matematiky je novum tejto knížky v tom, že sa venuje aj statiam analytickej geometrii v priestore, „strašiaku“ modernej výuky matematiky — množinám a stati z teórie čísel, ktorá môže pomôcť aj učiteľom, ako doplnok k učebniciam.

Rozsah látky je v Repetitóriu stredoškolskej matematiky rozhodne väčší, ako sú osnovy, a tak je možno získať hlbší a väčší rozhľad v tomto obore.

Viera Zedníčková

Hvězdářská ročenka 1976

Sestavili J. Bouška, Vl. Guth, B. Onderlička, J. Ruprecht a spolupracovníci. Academia 1975, 269 stran, 14 pérovek, brožováno s ochranným přebalem. 22 Kčs.

Ročenka je členěna do pěti zcela samostatných částí: A) Kalendářní data (3 str.), B) Efemeridy (128 str.), C) Časové signály (5. str.), D) Přehled pokroků v astronomii (112 str.), E) Umělé družice a kosmické sondy vypuštěné v roce 1974 (12. str.). Část A kromě údajů odpovídajících nadpisu obsahuje zeměpisné souřadnice našich hvězdáren. Poslouží tak ke konkrétní formulaci číselných příkladů s té-

matikou matematického zeměpisu. Některé kapitoly tabulkové části (B) jsou jako stvořeny pro aktualizaci učiva i s případnou formou žákovských referátů. Jmenujme v tom ohledu alespoň stati 4: *Zatmění Slunce, Měsíce a zákryty hvězd Měsícem* a 5: *Kalendář úkazů*. Amatéři vlastníci dalekohled (stačí malý „brejlák“) uvítají spojitě grafy určující rozložení Medicejských družic (*JO, Europa, Gany-medes, Kallisto*) Jupiterových. Pozorovatel triedrem musí však pamatovat, že grafy v ročence zachycují stav v převracejícím dalekohledu!

Část C informuje o československých i o některých zahraničních (Nauen, Mainflingen, Collins, Kounai, Prangins, Rugby) časových signálech.

Ze šestnácti kapitol *Přehledu pokroků v astronomii* připomínáme alespoň atraktivní tematiku posledních let: *Pulsary a neutronové hvězdy* (10) a *Kvasary* (14). Předposlední odstavec závěrečné kapitoly (16) *Vznik a vývoj hvězd* obsahuje Reesův soubor pozorovatel-

ných projevů *černých děr*, včetně pojmu „*mini-černá díra*“. V kapitole *Komety* (5) v reminiscenci na kometu Kohoutek 1973 XII upoutají některé číselné hodnoty poskytující aposteriorní vysvětlení nesprávných apriorních předpovědí o perihelové jasnosti komety. Připomíná se práce českých autorů (Mrkos, Bouška, Müllerová), věnovaná spektrografii komety.

Závěrečná část (E) je vyčerpávajícím soupisem umělých kosmických objektů vypuštěných v roce 1974 s uvedením mezinárodního označení, data startu, sklonu dráhy, oběžné doby, apsidálních výšek, hmotnosti a (skutečné nebo odhanuté) doby existence. Jde o 106 startovních konstruktivních celků, jež představují 284 (nomenklaturně označených) jednotlivých objektů.

Ročenka poskytuje vítaného průvodce zájemcům o astronomii a měla by být samozřejmým inventárním číslem školních knihoven.

Karel Mišoň

Redakce upozorňuje čtenáře, že nemůže zasílat chybějící nebo poštou nedodaná čísla *Rozhledů*, protože je neskládá. Obracejte se na ústřední sklad expedice tisku PNS, Praha 1, Jindřišská 14.

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

ongruence
ongruentní
onjugovaný
konjugované kořeny
onjunkce
onkávní
onstanta
konstanta úměrnosti

onstrukce
konstrukce pravítkem a kružítkem
ontinuum
strakee
ontraponovaný
ontrolovat
onvergence
stejněoměrná konvergence
onvergentní
absolutně konvergentní
neabsolutně konvergentní
stejněoměrně konvergentní
onvexní
onvexnost
onvoluce
orelace
koeficient korelace
ořen
komplexně sdružené kořeny
vícenásobný kořen
ořenový
osekants
osinus
směrový kosinus
osočtřeresov
osočtverec
osodélník

congruence
congruent
conjugate
konjugate roots
conjunction
concave
constant, factor
constant of proportionality, factor
of proportionality
construction, constructing
ruler and compass construction
continuum
contraction
contrapositive
check
convergence
uniform convergence
convergent
absolutely convergent
conditionally convergent
uniformly convergent
convex
convexity
convolution
correlation
correlation coefficient
root, radix
conjugate roots
multiple root
radical
cosecant
cosine
direct
rhombic
rhomb, rhombus
rhomboid

kosý	oblique
kóta	elevation
kotangens	cotangent
koule	sphere
opsaná koule	circumscribed sphere
vepsaná koule	inscribed sphere
krácení	reduction
krajní bod	end point
krát	multiplied by, times
krátit	cancel, reduce
krátký	short
kriterium	criterion, test
dodatečné kriterium	additional criterion
kriterium konvergence	convergence test
Leibnitzovo kriterium	alternating series test
srovnávací kriterium	comparison test
krok	step
kruh	circle
kruhový	circular
kruhová úseč	segment of a circle
kruhová výseč	sector of a circle
kružítko	compass, (pair of) compasses
kružnice	circle
hlavní kružnice	great circle
kružnice devíti bodů	9-point circle
kružnice opsaná mnohoúhelníku	circumscribed circle of polygon
kružnice vepsaná trojúhelníku	incircle, inscribed circle
krychle	cube
krychlový	cubic
krýti	cover
krýti se	coincide
křivka	curve
prostorová křivka	skew (space) curve
stupeň křivky	curve order
uzavřená křivka	closed curve
křivost	curvature
křivý	curved
kubická rovnice	cubic equation
kulatý	round, circular
kulový	spherical
kulový pás	zone of a sphere
kulová plocha	spherical surface
kulová úseč	segment of a sphere
kulový vrchlík	cap
kulová vrstva	segment of sphere
kulová výseč	sector of sphere
kužel	cone
komolý kužel	frustum of a cone
rotační kužel	cone of revolution, right circular cone

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

5

ROČNÍK 55, 1976-1977, LEDEN

ROČNÍK 55
LEDEN 1977

5

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1977.

OBSAH

O B S A H

Dr. J. Skuhra: Matlcové hry bez sedlového bodu . . .	193
S. Horák: Vektory v geometrii I . . .	198
Dr. J. Šedivý: Ekvidistanty rovinného útvaru . . .	203
Dr. S. Trávníček, CSc.: Geometrická pravděpodobnost (dokončení) . . .	205
J. Straka: Lze každé celé číslo zapsat stejnými číslicemi? . . .	209
Prof. E. Kraemer: Věta Menelaova a Cevova . . .	211
Ing. Z. Janout, CSc.: Elementární částice a interakce mezi nimi . . .	221
Dr. J. Mrázek, CSc.: Zázraky beztlžného prostoru . . .	225
Dr. R. Tulak: Tlak světelného záření . . .	226
Dr. J. Mrázek, CSc.: Družice měří tvar Země . . .	230
Naše soutěž . . .	232
M. Koman: Tři hry s barevnými koulemi . . .	238
Recenze . . .	240
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický . . .	3. a 4. str. obálky

Maticové hry bez sedlového bodu

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

Jak nalézt řešení maticové hry, tj. jak nalézt optimální strategie obou hráčů a hodnotu hry v případě, že hra nemá sedlový bod? Postup vhodný pro některé typy her vysvětlíme v tomto článku.

Mějme danu hru 2×2 zadanou maticí

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Při hledání sedlového bodu nalezneme nejprve dolní a horní hodnotu hry, $v_d = 4$, $v_h = 5$. Hra nemá sedlový bod. Hráč I má jistou výhru 4 jednotky, hráč II nezaplatí více než 5 jednotek. Tyto hodnoty si může dobře hrající hráč pro sebe zaručit. Rozmezí mezi těmito hodnotami je „honebním revírem“ pro mistrovského hráče, který zde může „ulovit“ něco navíc.

Pro další úvahy předpokládejme, že nehrajeme jen jednu partii, ale celou sérii partií. Bude-li hráč I užívat pouze strategie $1 \in A$, může počítat s tím, že na to hráč II přijde a sníží mu příjem na 3 jednotky na partii. Použije-li pouze strategie $2 \in A$, mohou jeho příjmy poklesnout na 4 jednotky. Protože v každé partii je hráč I omezen na použití právě jedné strategie (neboť strategie je úplný návod, jak hrát), musí své strategie v jednotlivých partiích střídat, chce-li si zvýšit zisk. Nesmí však své strategie vybírat pravidelně, protože toho by hráč II využil ke svému prospěchu. Je důležité, aby protivník nevěděl, jaké strategie hráč použije v příští partii. Proto je pro hráče nejlepší nechat výběr strategií vhodnému náhodovému mechanismu. Ale než použijeme nějaký náhodový mechanismus, musíme znát pravděpodobnosti, se kterými má hráč té které strategie používat, tj. musíme znát *pravděpodobnostní rozložení* na množině strategií hráče.

Mějme množinu $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, jejíž prvky tvoří úplný systém disjunktních jevů. To znamená, že při realizaci náhodného pokusu nastane právě jeden jev z množiny M (nastane určitě některý a nemohou nastat dva či více současně). Nechť x_i je pravděpodobnost, se kterou nastane jev a_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reprezentuje pravděpodobnostní rozložení na množině M . Jeho k -tá složka říká, s jakou pravděpodobností nastane jev a_k . Pro složky vektoru $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ přitom platí: pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je $0 \leq x_i \leq 1$ a $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Vraťme se zpět k problémům teorie her. Pravděpodobnostní rozložení na množině strategií hráče nazýváme *smíšená strategie*. Smíšená strategie říká hráči, s jakými pravděpodobnostmi má vybírat své strategie.

Rozdíl mezi smíšenou strategií a strategií si musíme dobře uvědomovat zvláště při interpretaci výsledků. Ale pro výpočty je výhodné učinit tuto úmluvu:

Smíšená strategie

$$e_i = (0, 0, \quad 0, 1, 0, \quad 0)$$

(jednička na i -tém místě, ostatní složky jsou nulové) znamená, že hráč má vybírat i -tou strategií s pravděpodobností 1, tedy má stále užívat své i -té strategie. Proto v dalším i -tou strategií hráče ztotožníme s jeho smíšenou strategií e_i a budeme krátce mluvit o strategiích.

Lze dokázat, že v každé maticové hře má každý hráč aspoň jednu optimální (smíšenou) strategii a hra má svou hodnotu hry. Tomuto tvrzení se říká *základní věta teorie maticových her*.

Označme symbolem v hodnotu hry, kterou jsme začali zkoumat na začátku článku; nechť (x_1, x_2) je optimální strategie hráče I. Podle principu minimaxu zaručuje optimální strategie hráči I průměrnou výhru rovnou aspoň hodnotě hry bez ohledu na to, co udělá protivník. Proto pro případ, že hráč II hraje svou strategií $1 \in B$, musí být splněna nerovnice

$$3x_1 + 5x_2 \geq v$$

a pro případ, že hráč II hraje svou strategií $2 \in B$, musí platit

$$6x_1 + 4x_2 \geq v.$$

Na levé straně nerovnic je střední hodnota (průměrná hodnota) výhry hráče I.

Protože v je hodnota hry a protože hráč I má při užívání optimální strategie zaručenu výplatu

$$\min (3x_1 + 5x_2, 6x_1 + 4x_2) = v,$$

musí být aspoň jedna z nerovnic rovnicí.

Ukažme, že pro naši hru bez sedlového bodu jsou obě nerovnice rovnicemi. Kdyby například platilo

$$3x_1 + 5x_2 > v,$$

pak by pro hráče II bylo výhodnější užívat pouze druhé strategie, neboť by mu přinášela menší ztrátu. Pak by však pro hráče I bylo nejvýhodnější, kdyby užíval pouze svou první strategii a bod $[2, 1]$ by byl sedlovým bodem, což je spor. Stejně vyloučíme případ

$$6x_1 + 4x_2 > v$$

Abychom určili hodnotu hry v a optimální strategii (x_1, x_2) hráče I, musíme řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - v &= 0, \\ 6x_1 + 4x_2 - v &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 1, \end{aligned}$$

za podmínky

$$x_1 > 0, x_2 > 0$$

Řešením soustavy je $(1/4, 3/4)$, $v = 9/2$.

Analogickou úvahou určíme optimální strategii hráče II. V naší hře je to vektor $(1/2, 1/2)$.

Předchozí úvahu jsme sice provedli pro konkrétní hru, ale obdobná úvaha je možná pro všechny hry 2×2 bez sedlového bodu. Výsledek takové obecné úvahy zapíšeme ve formě matematické věty:

Věta. Nechť H je hra typu 2×2 , která nemá sedlový bod. Nechť

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je výplatní matice hry. Smíšené strategie (x_1, x_2) , (y_1, y_2) jsou po řadě optimální strategie hráčů I, II a číslo v je hodnotou hry, právě když čísla x_1, x_2, y_1, y_2, v jsou řešením soustav rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 - v &= 0, & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 - v &= 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 - v &= 0, & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 - v &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 1, & y_1 + y_2 &= 1, \end{aligned}$$

splňující podmínky

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \quad y_1 > 0, y_2 > 0.$$

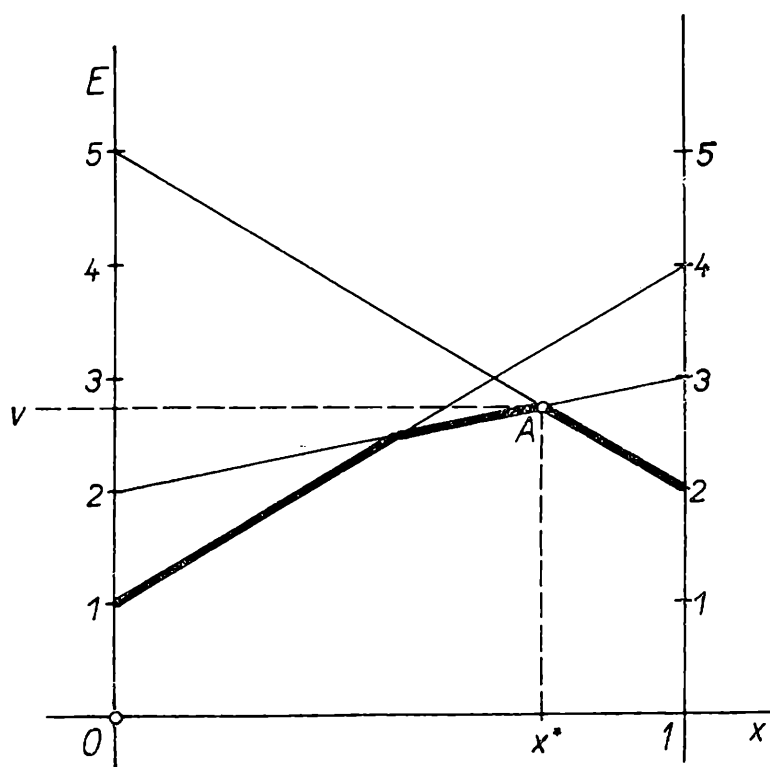
Při řešení her typu $2 \times n$ nebo $m \times 2$ použijeme s výhodou grafického řešení. Je to snadná metoda, která vás pravděpodobně nejvíce zaujme. Bohužel, jako všechny grafické metody má i tato metoda omezenou přesnost. Její princip si osvětlíme na příkladu. Mějme hru s výplatní maticí

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nejprve se přesvědčíme, že hra nemá sedlový bod. Skutečně, $v_d = 2$ a $v_h = 3$. Smíšená strategie hráče I je určena vektorem $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$, kde $x_1 + x_2 = 1$, $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$. Platí $x_2 = 1 - x_1$ a proto můžeme smíšenou strategii hráče I psát jako vektor $\mathbf{X} = (x, 1 - x)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Označme symbolem $E(\mathbf{X}, j)$ střední hodnotu výhry hráče I za předpokladu, že hráč II užívá své strategie $j \in \mathbf{B}$. Je-li vektor $\mathbf{X}$ optimální strategií a číslo v hodnotou hry, pak podle principu minimaxu musí platit

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}, 1) &= 2x + 5(1 - x) = -3x + 5 \geq v, \\ E(\mathbf{X}, 2) &= 3x + 2(1 - x) = x + 2 \geq v, \\ E(\mathbf{X}, 3) &= 4x + 1(1 - x) = 3x + 1 \geq v \end{aligned}$$

Sestrojme v rovině soustavu souřadnic a zakresleme do ní grafy funkcí $E(\mathbf{X}, 1)$, $E(\mathbf{X}, 2)$, $E(\mathbf{X}, 3)$. Nezapomeňme, že tyto funkce jsou definovány



Obr. 1

pouze pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Pro rychlejší zakreslení grafů těchto funkcí bude výhodné si uvědomit, že pro $x = 0$ jde o smíšenou strategii $\mathbf{X} = (0, 1)$, a tedy $E(\mathbf{X}, j) = a_{2j}$; pro $x = 1$ máme strategii $\mathbf{X} = (1, 0)$, a tedy $E(\mathbf{X}, j) = a_{1j}$. Na obr. 1 je dále vytažen graf funkce $f(x) = \min_{j \in \mathbf{B}} E(\mathbf{X}, j)$.

Racionálně hrající hráč I si může zajistit pro sebe výhru rovnou

$$v = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} f(x) = \max \min_{j \in \mathbf{B}} E(\mathbf{X}, j),$$

Tomu odpovídá v grafu bod $A = [x^*, v]$. Optimální strategie hráče I je $\mathbf{X}^* = (x^*, 1 - x^*)$, a hodnota hry je rovna v . Z grafu vyčteme $\mathbf{X}^* = (0,75; 0,25)$, $v = 2,75$. Dále je z grafu patrné, že hráč II nemá používat strategie $3 \in \mathbf{B}$, protože by se poškodil (umožnil by hráči I vyhrát více než je hodnota hry). Má používat pouze strategie $1, 2 \in \mathbf{B}$, které proto nazýváme *aktivní strategie*. Přesnou hodnotu hry a optimální strategie hráčů vypočítáme podle výše uvedené věty, přičemž se omezíme na výplatní matici

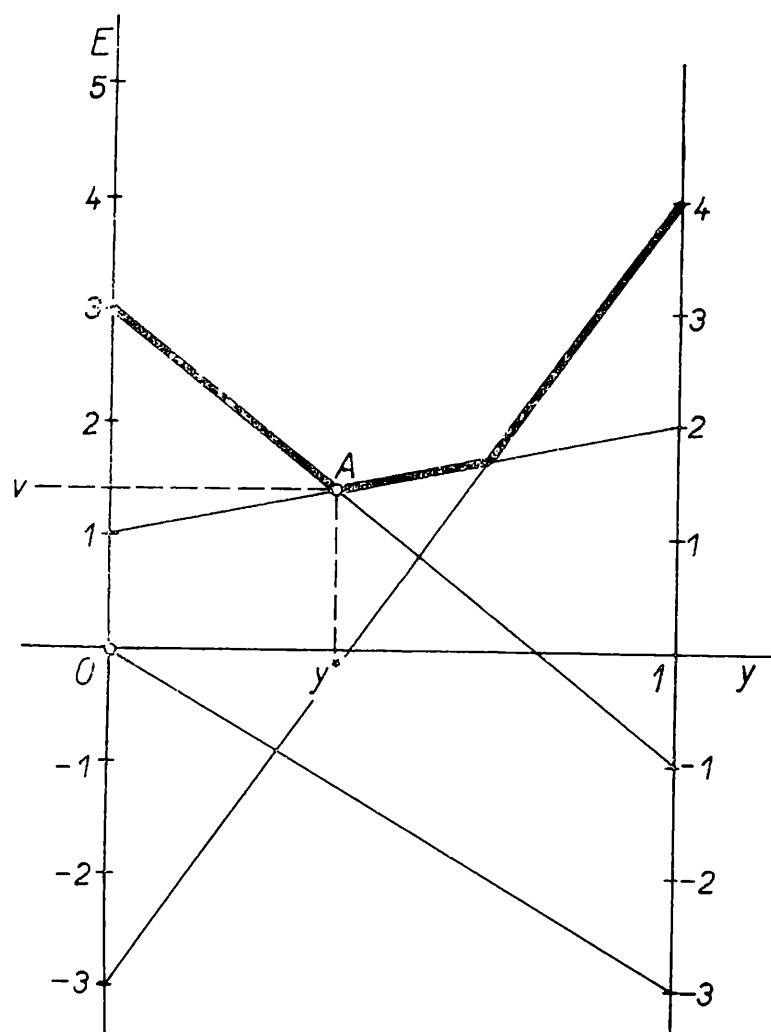
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Úplné řešení zkoumané hry je $\mathbf{X}^* = (3/4, 1/4)$,
 $\mathbf{Y}^* = (1/4, 3/4, 0)$,
 $v = 11/4$.

Spočítejme si ještě, kolik zaplatí hráč II hráči I, když bude užívat své strategie $3 \in \mathbf{B}$.

$$E(\mathbf{X}^*, 3) = 4 \cdot 0,75 + 0,25 = 3,25$$

Zaplatí tedy o $1/2$ více než je hodnota hry.



Obr. 2

To byla grafická metoda řešení her typu $2 \times n$. Pro hry typu $m \times 2$ nalezneme grafickou metodou hodnotu hry a optimální strategii hráče II následujícím postupem, který si ukážeme ve stručnosti na hře s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Smíšená strategie hráče II je obecně vektor $\mathbf{Y} = (y, 1 - y)$, $y \in \langle 0, 1 \rangle$. Sestrojíme grafy funkcí $E(i, \mathbf{Y})$ (značení je analogické) pro $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Na obr. 2 je dále sestaven graf funkce $g(y) = \max E(i, \mathbf{Y})$. Pro souřadnice bodu $A = [y^*, v]$ platí

$$v = g(y^*) = \min \max E(i, \mathbf{Y})$$

Číslo v je tedy hodnota hry a $\mathbf{Y}^* = (y^*, 1 - y^*)$ je optimální strategie hráče II. Z grafu dále vyčteme, že hráč I má dvě aktivní strategie $2, 3 \in \mathbf{A}$. Vyřešíme-li tedy hru s maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

dostaneme přesné řešení původní hry $\mathbf{X}^* = (0, 4/5, 1/5, 0, 0)$,
 $\mathbf{Y}^* = (2/5, 3/5)$,
 $v = 1, 5$.

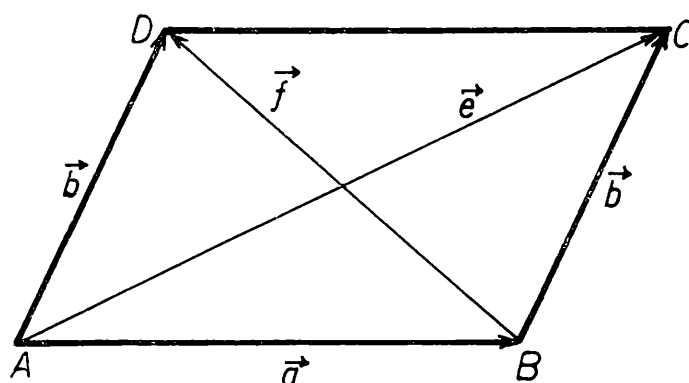
Jako cvičení vyřešte hru H2. Některé hry ekonomického charakteru a zvláštnosti her proti přírodě prostudujeme v příštím článku.

Vektory v geometrii I

STANISLAV HORÁK, Praha

Ve dvou člancích si na několika příkladech ukážeme, jak lze vektorů použít při řešení geometrických úloh. Tato první část je věnována příkladům na použití skalárního součinu.

1. Dokažte, že v každém rovnoběžníku součet čtverců nad oběma úhlopříčkami je roven součtu čtverců nad všemi stranami.



Obr. 1

Řešení (obr. 1). V daném rovnoběžníku $ABCD$ označme

$$a = AB, \quad b = BC = AD, \quad e = AC, \quad f = BD$$

O vektorech $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{a} + \mathbf{b}, & \mathbf{f} &= \mathbf{b} - \mathbf{a} \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

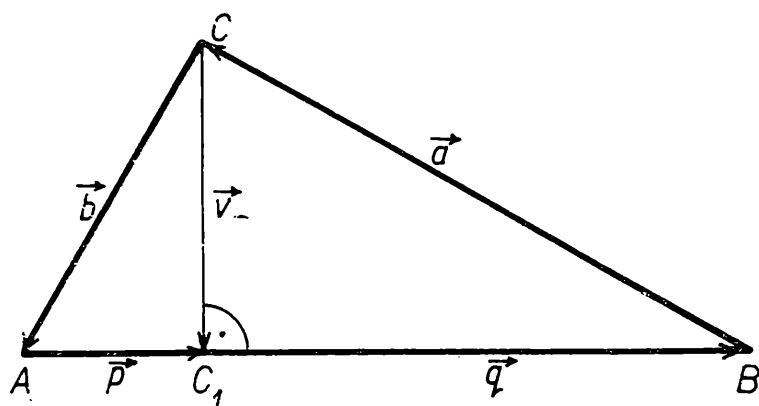
Sečtením obou posledních vztahů dostaneme

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

a věta je dokázána.

2. Použitím vektorového počtu dokažte Euklidovu větu o výšce.

Řešení (obr. 2). V daném trojúhelníku ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) označme $AC = b$, $BC = a$. Patu výšky z vrcholu C na přeponu označme C_1 . Pro



Obr. 2

jednoduchost zavedme ještě $CC_1 = v$, $AC_1 = p$, $C_1B = q$. O vektorech $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ platí:

$$\begin{array}{lll} \triangle CAC_1 & \mathbf{b} + \mathbf{p} - \mathbf{v} = 0 & \mathbf{b} = \mathbf{v} - \mathbf{p} \\ \triangle CC_1B & \mathbf{a} + \mathbf{v} + \mathbf{q} = 0 & \mathbf{a} = -\mathbf{v} - \mathbf{q} \end{array} \quad (1)$$

Avšak o nenulových vektorech $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

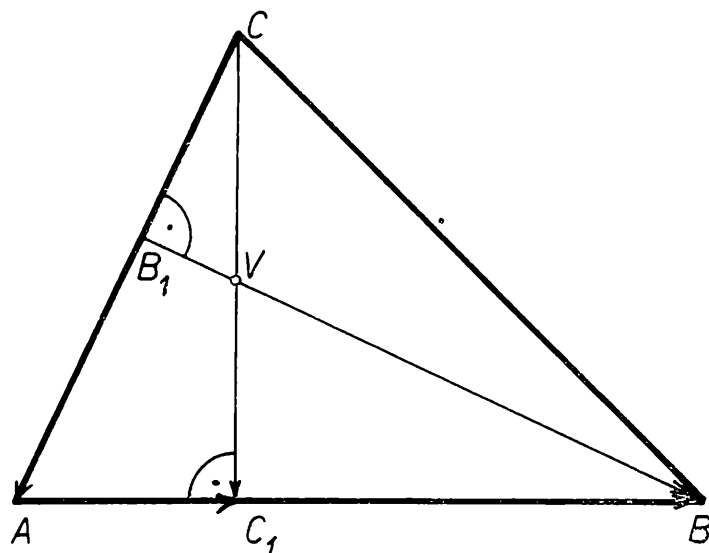
A do této rovnice dosadíme z rovnic (1):

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{p}) \cdot (-\mathbf{v} - \mathbf{q}) &= 0, \\ -\mathbf{v}^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= 0 \end{aligned}$$

Avšak $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} = 0$ a $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = pq \cos 0^\circ$ a náš vztah se tím převede na jednodušší $v^2 = pq$ a jsme s důkazem hotovi.

3. Je dán trojúhelník ABC . Výška z vrcholu B je BB_1 , výška z vrcholu C je CC_1 a ortocentrum je V . Dokažte, že platí

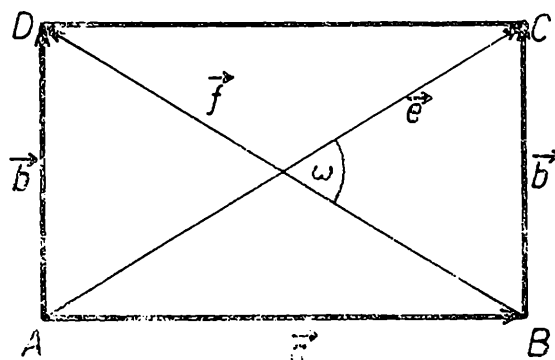
$$CC_1 \cdot VC_1 = AC_1 \cdot C_1B$$



Obr. 3

Řešení (obr. 3). Z trojúhelníků CAC_1 a BVC_1 postupně dostaneme tyto vztahy mezi vektory:

$$\mathbf{CA} = \mathbf{CC}_1 - \mathbf{AC}_1, \quad \mathbf{VB} = \mathbf{VC}_1 + \mathbf{C}_1\mathbf{B} \quad (2)$$



Obr. 4

Je zřejmé, že platí (proč?)

$$\mathbf{CA} \cdot \mathbf{VB} = 0$$

a sem dosadíme ze vztahů (2):

$$(\mathbf{CC}_1 - \mathbf{AC}_1) \cdot (\mathbf{VC}_1 + \mathbf{C}_1\mathbf{B}) = 0,$$

$$\mathbf{CC}_1 \cdot \mathbf{VC}_1 - \mathbf{AC}_1 \cdot \mathbf{VC}_1 + \mathbf{CC}_1 \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{B} - \mathbf{AC}_1 \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{B} = 0$$

Avšak

$$\mathbf{AC}_1 \perp \mathbf{VC}_1 \Rightarrow \mathbf{AC}_1 \cdot \mathbf{VC}_1 = 0, \quad \mathbf{CC}_1 \perp \mathbf{C}_1\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{CC}_1 \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{B} = 0$$

a tím se náš vztah zjednoduší:

$$\mathbf{CC}_1 \cdot \mathbf{VC}_1 - \mathbf{AC}_1 \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{B} = 0,$$

čímž důkaz vysloveného tvrzení je proveden.

4. Je dán obdélník $ABCD$. Určete úhel ω , který svírají jeho úhlopříčky.

Řešení (obr. 4). Jednotlivé vektory, které se v obrázku vyskytují, označíme

$$\mathbf{AB} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{BC} = \mathbf{AD} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{AC} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{BD} = \mathbf{f}$$

Z trojúhelníku ABC plyne $\mathbf{e} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, z trojúhelníku ABD zase máme $\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Vypočítáme skalární součin

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

$$ef \cos \omega = a^2 - b^2$$

Poněvadž $|\mathbf{e}| = |\mathbf{f}|$, máme výsledek

$$\cos \omega = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Na závěr dva obtížnější příklady.

5. Je dán tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že při obvyklém označení jeho stran a úhlopříček platí (ω je úhel úhlopříček)

$$|ac - bd| = ef |\cos \omega|$$

Řešení (obr. 5). Jestliže O je střed kružnice vepsané danému čtyřúhelníku, pak označíme

$$\mathbf{OA} = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{OB} = \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{OC} = \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{OD} = \mathbf{r}_4$$

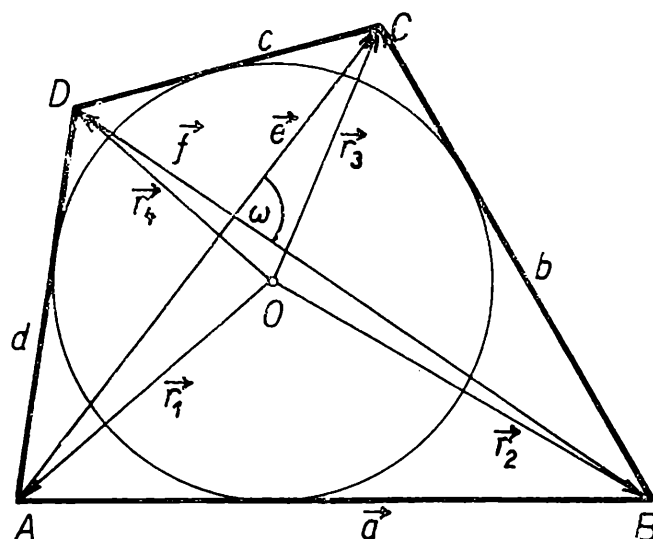
Dále

$$\mathbf{AC} = \mathbf{e} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{BD} = \mathbf{f} = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2$$

Nyní utvoříme skalární součin $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}$ a hned upravujeme:

$$|\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}| = |(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2)| =$$

$$= \frac{1}{2} |2\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 + 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2| =$$



Obr. 5

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} |\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 - \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 - \mathbf{r}_3^2 + \mathbf{r}_4^2 - \mathbf{r}_4^2 + \\
 &\quad + 2\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 + 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2| = \\
 &= \frac{1}{2} |(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)^2| = \\
 &= \frac{1}{2} |AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2| = \frac{1}{2} |d^2 + b^2 - a^2 - c^2| = \\
 &= \frac{1}{2} |(b + d)^2 - 2bd - (a + c)^2 + 2ac|.
 \end{aligned}$$

Avšak o velikostech stran v tečnovém čtyřúhelníku platí

$$a + c = b + d$$

a použijeme-li této relace na předešlý skalární součin, máme

$$ef |\cos \omega| = |ac - bd|,$$

což je vztah, uvedený v textu úlohy.

Poznámka. Poněvadž $|\cos \omega| \leq 1$, plyne z výsledku $ef \geq |ac - bd|$.

6. Do kulové plochy je vepsán čtyřstěn $OABC$. Přímka $p = OT$, kde T je těžiště trojúhelníku ABC , protne kulovou plochu ještě v bodě D . Dokažte, že

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3 OT \cdot OD$$

Řešení (obr. 6). Nechť S je střed kulové plochy opsané danému čtyřstěnu, R je velikost jejího poloměru. Označme

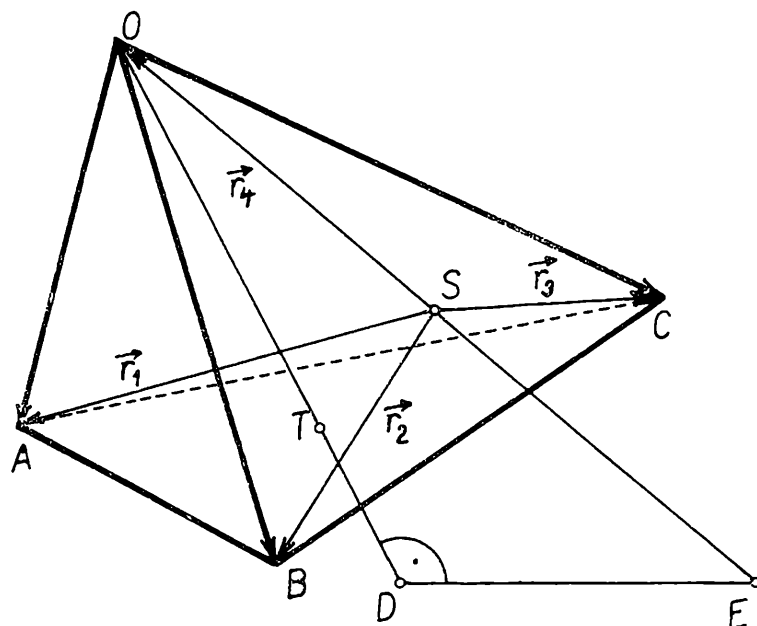
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{SA}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{SB}, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{SC}, \quad \mathbf{r}_4 = \mathbf{SO}$$

Těžiště G trojúhelníku ABC je určeno vektorem

$$3 \mathbf{ST} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3.$$

Dále platí

$$\mathbf{OA} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4, \quad \mathbf{OB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4, \quad \mathbf{OC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4$$



Obr. 6

Podle toho

$$\begin{aligned}
 OA^2 + OB^2 + OC^2 &= \\
 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - 2(r_1 r_4 + r_2 r_4 + r_3 r_4) + 3 r_4^2 = \\
 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 3 r_4^2 - 2 r_4 (r_1 + r_2 + r_3) = \\
 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 3 r_4^2 - 2 r_4 \cdot 3 \mathbf{ST}
 \end{aligned}$$

Ale

$$r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = r_4^2 = R^2$$

a tím se náš vztah zjednoduší:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 6 R^2 - 6 r_4 \mathbf{ST}$$

Z trojúhelníku SOT dostaneme

$$\mathbf{ST} = \mathbf{OT} + r_4$$

Po dosazení získáme

$$\begin{aligned}
 OA^2 + OB^2 + OC^2 &= 6 R^2 - 6 r_4^2 - 6 r_4 \mathbf{OT} = \\
 &= -6 r_4 \mathbf{OT} = 3 OT \cdot 2 R \cos \widehat{SOT}
 \end{aligned}$$

Přímka OS je průměr naší kulové plochy a protne tuto plochu ještě v bodě E . Trojúhelník OED je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D (obvodový úhel nad průměrem kulové plochy). Z tohoto trojúhelníku vyplývá

$$OD = 2 R \cos \widehat{SOT}$$

a tím docházíme ke konečnému tvaru

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3 OT \cdot OD,$$

jak jsme měli dokázat.

Ekvidistanty rovinného útvaru

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Čtete-li slovo ekvidistanta, pomyslíte si jistě, že se týká stejných vzdáleností (distancí). V planimetrii se nejčastěji studují ekvidistanty jednoho útvaru a ekvidistanty dvou útvarů. V tomto článku se zaměříme na první typ úloh a ukážeme si „množinové pozadí“ konstrukcí ekvidistant pro části přímek, kružnic, kruhů a pro mnohoúhelníky. Ve všech případech budeme pracovat jen s uzavřenými útvary, tj. s útvary, které obsahují všechny své hraniční body vzhledem k přímce (kružnici, rovině).

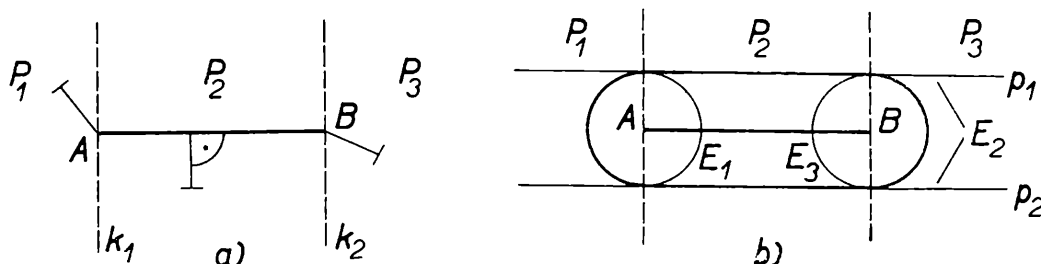
Ekvidistantou útvaru v rovině nazýváme množinu všech bodů roviny, které mají od útvaru stejnou vzdálenost.

Vzdálenost bodu X od útvaru M se udává nejmenší úsečkou XY při všech volbách bodu Y v útvaru M . Zvolíme-li nějakou jednotku délky, pak má tato úsečka nejmenší délku ze všech úseček XY ; označíme ji symbolem $v(X, M)$, který čteme slovy „vzdálenost bodu X od útvaru M “.

Jistě dovedete popsat konstrukci úsečky udávající vzdálenost bodu od přímky a od kružnice. Znáte také množiny všech bodů, které mají stejnou nenulovou vzdálenost od přímky, resp. kružnice. Je to ve všech případech sjednocení dvou disjunktních čar? Promyslete si své odpovědi.

Položme si zdánlivě jednoduchou úlohu:

Popište konstrukci ekvidistant úsečky $AB = 4$ cm pro $v = 1, 2, 3$ cm.
Řešení (obr. 1). Vzdálenost $v(X, AB)$ se měří kolmicí na přímku AB , pokud její pata padne na úsečku AB . Jinak se $v(X, AB)$ rovná $v(X, A)$ nebo $v(X, B)$, jak je patrné z obr. 1a. Kolmicemi k_1, k_2 k přímce AB rozdělíme rovinu na dvě poloroviny P_1, P_3 a pás P_2 .



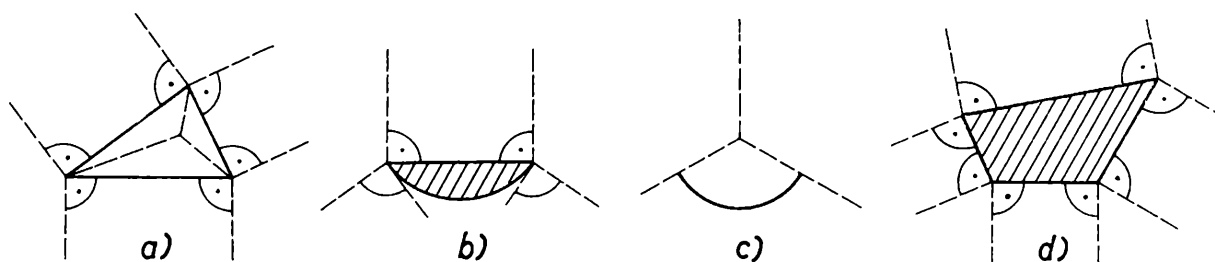
Obr. 1a, b

$\varrho = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, $P_1 \cap P_2 = k_1$, $P_2 \cap P_3 = k_2$, $P_1 \cap P_3 = \emptyset$
 Označme

$E_1 = \{X \in \varrho; v(X, A) = 2 \text{ cm}\}$, E_1 je kružnicí se středem A ,

$E_2 = \{X \in \varrho; v(X, \overleftrightarrow{AB}) = 2 \text{ cm}\}$, $E_2 = p_1 \cup p_2$,

$E_3 = \{X \in \varrho; v(X, B) = 2 \text{ cm}\}$, E_3 je kružnicí se středem B .



Obr. 2

Potom hledaná ekvidistanta $E = \{X \in \varrho; v(X, AB) = 2 \text{ cm}\}$ se sestrojí jako

$$E = (E_1 \cap P_1) \cup (E_2 \cap P_2) \cup (E_3 \cap P_3)$$

Výsledek konstrukce je zřejmý z obr. 1b, připojte další ekvidistanty. Na obr. 2a-d jsou naznačena rozdělení roviny pro několik útvarů: *obvod trojúhelníka, kruhovou úseč, oblouk kružnice, čtyřúhelník*. Vidíte, že čárkované čáry spolu s obvodem daného útvaru rozdělují rovinu na rozmanité útvary. Dovedete si představit tvar ekvidistant pro milimetrové vzdálenosti, i změny jejich tvaru při zvětšování vzdálenosti?

Přesvědčili jste se, že při konstrukcích ekvidistant útvaru často uplatňujeme „sjednocení průniků dvojic množin; jednou složkou takové dvojice je ekvidistanta bodu (přímky, kružnice apod.), druhou složkou je část roviny, získaná vhodným rozdělením roviny. Při řešení úloh tohoto druhu si procvičíte svou představivost.

Cvičení

1. Naznačte účelné dělení roviny při sestrojování ekvidistant

a) obvodu rovnostranného trojúhelníka, b) půlkružnice, c) kruhové výseče se středovým úhlem 60° , d) kosočtverce. Sestrojte pak ekvidistanty pro vzdálenost rovnou největší vzdálenosti dvou bodů útvaru.

2. Sestrojte tenkými čarami pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S a pak výrazně vyznačte v obrázcích:

a) lomenou čáru $FASBC$, b) lomenou čáru $EFABCDSE$, c) sjednocení úseček AD , BE , CF , d) sjednocení obvodů $\triangle FAS$, BCS , DES . V každém obrázku vyznačte ekvidistanty pro $a/4$, $a/2$, a , $3a/2$, $2a$, kde $a = v(A, S)$. Jaké jsou délky těchto ekvidistant?

3. Sestrojte obvod libovolného trojúhelníka, pravoúhelníka, kosočtverce, lichoběžníka, kruhu, šestiúhelníka, jejichž výška je aspoň 3 cm. Zobraďte pak pro každou z těchto čar L množinu bodů

$$M = \{X \in \varrho; v(X, L) \leq 1 \text{ cm}\}.$$

Geometrická pravděpodobnost

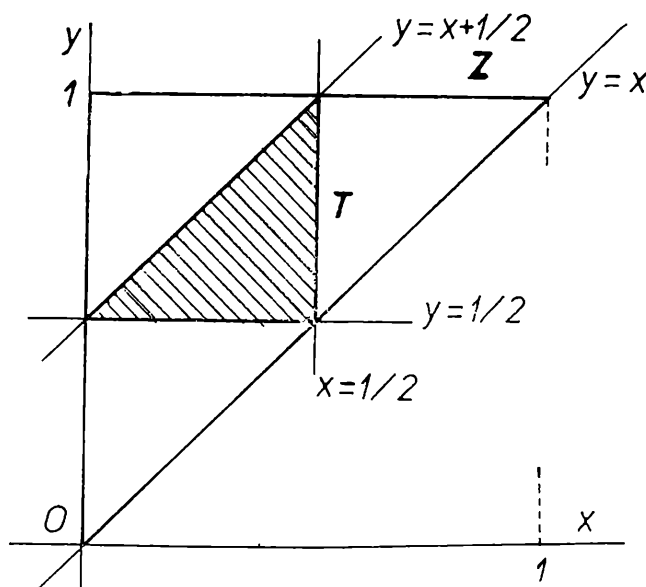
(Dokončení)

RNDr. STANISLAV TRÁVNÍČEK, CSc., Šternberk

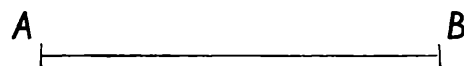
Geometrická pravděpodobnost a náhodná volba bodu

Příklad 6. Je dána úsečka AB (tyč). Určete pravděpodobnost jevu T , že při náhodné volbě bodů X, Y na úsečce AB (v nich tyč zlomíme) lze ze vzniklých částí úsečky AB sestrojit trojúhelník; velikost částí označíme a, b, c .

Jev T nastává právě tehdy, když platí trojúhelníková nerovnost mezi a, b, c , tj. $|a - b| < c < a + b$. Zvolme úsečku AB na číselné ose tak, aby A byl počátek a B jednotkový bod. Náhodně zvolené body X, Y jsou



Obr. 12



Obr. 13

pak obrazy jistých čísel $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$; označení volíme např. tak, aby $x \leq y$ (kreslete obrázek). Pak tedy $a = x, b = y - x, c = 1 - y$ a uvedená trojúhelníková nerovnost říká, že jev T nastává právě tehdy, když

$$(3) \quad |2x - y| < 1 - y < y$$

Znázorníme (viz obr. 12) množinu Z všech dvojic (x, y) , pro něž $0 \leq x \leq y \leq 1$ a její část T jako obor pravdivosti nerovnice (3), tj. soustavy $y > 1/2 \wedge x < 1/2 \wedge y < x + 1/2$. Vidíme, že jev T spočívá v tom, aby při náhodné volbě dvojice (x, y) , tj. bodu trojúhelníka Z , ležel tento bod současně v trojúhelníku T . Předpokládáme-li opět splnění

podmínky homogenosti, dostáváme $P(T) = m\mathbf{T}m\mathbf{Z} = 1/4 = 0,25 = 25\%$.

Nebylo to zde poprvé, kdy jsme se setkali s vyjádřením „náhodná volba bodu úsečky AB “. Co to vlastně znamená? První zdání je toto: náhodná volba bodu — to je volba bodu „jak mne právě napadne“. Zkusme si to. Vezměte si tužku a ještě než budete číst dále, zvolte na úsečce AB na obr. 13 náhodně bod X . Hotovo? Tuto vaši náhodnou volbu budeme nazývat „subjektivní náhodná volba“; ještě se k ní vrátíme. Kromě toho máme ještě objektivní možnost náhodné volby bodu a ta bývá spojena s přirozenými čísly zvanými *náhodná čísla*.

Pro sestavení posloupnosti nebo tabulky náhodných čísel je vždy zvolen určitý formát; např. formát 3 značí čísla jedno až trojčiferná, formát 6 čísla jedno až šesticiferná, apod. Pro další úvahy zvolíme formát 3, tj. přirozená čísla v rozsahu 0 až 999. V tabulce 1 sestavené podle [1], str. 235 uvádíme jako ukázkou 100 náhodných čísel.

Tabulka 1: Náhodná čísla

221	671	166	464	954	81	402	153	515	924
59	667	520	899	922	271	437	798	18	202
253	65	599	555	327	219	629	19	928	434
818	689	509	543	170	66	718	456	15	957
981	415	242	239	865	980	807	957	586	245
810	328	909	761	953	499	160	20	679	120
710	372	218	772	37	732	631	574	102	946
491	787	549	374	949	655	757	47	694	133
308	502	981	216	808	18	781	260	870	806
30	680	845	645	953	541	631	545	829	17

Posloupnost náhodných čísel si v podstatě můžeme představit jako posloupnost, u níž nedovedeme předpovědět první člen (tj. pravděpodobnost splnění každé naší předpovědi je 0,001) a u níž ani při znalosti prvních n členů (ať je n jakkoli veliké) nedovedeme předpovědět další člen s pravděpodobností $P > 0,001$. Na osvětlení uvažujme několik příkladů:

- a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
- b) 910, 1, 929, 2, 998, 3, 944, 4, 908, 5, 987,
- c) 467, 646, 712, 982, 117, 838, 558, 474, 217, 186,
- d) 663, 168, 702, 425, 297, 811, 376, 930, 79,
- e) 221, 671, 59, 667, 253, 65, 818, 689, 981, 415,

Předpokládejme, že v těchto několika prvních členech posloupností se projevuje případné pravidlo, jak jsou členy vytvářeny.

V případě a) dovedeme jednoznačně předpovědět (s pravděpodobností $P = 1$) další člen a pokračování posloupnosti, nejde o náhodná čísla.

V případě b) dovedeme u členů na sudých místech předpovědět pokračování přesně (1, 2, 3, 4, ...), členy na lichých místech mají na začátku devítku, tj. dovedeme je předpovědět s pravděpodobností $P = 0,01 > 0,001$.

V případě c) jsou na sudých místech sudá čísla, tj. dovedeme je předpovědět s pravděpodobností 0,002. Na lichých místech se možná střídají lichá a sudá čísla, k tomu bychom potřebovali znát více členů posloupnosti. Navíc v žádném z čísel se nevyskytuje nula, takže pravděpodobnost splnění předpovědi ještě vzroste. V b) ani c) tedy nejde o posloupnost náhodných čísel.

U posloupnosti d) nejde rovněž o náhodná čísla, objev jakési „pravidelnosti“ necháváme k úvaze bystrého čtenáře.

Posloupnost e) je typickou posloupností náhodných čísel; bez pohledu do tabulky 1 nelze žádnou rozumnou úvahou dojít k závěru, že další člen 810 je pravděpodobněji než kterékoli jiné číslo mezi nulou a 999.

Naše předchozí závěry byly ovšem trochu odvážné, pro rozumné uplatnění neúplné indukce známe příliš málo členů, ale jako ilustrace to snad stačí.

Vytvoření posloupnosti náhodných čísel není vůbec snadné. Stejně obtížný může být i průzkum, zda daná posloupnost čísel má vlastnosti posloupnosti náhodných čísel (čtenář, který se pokoušel odhalit tajemství posloupnosti d), to může potvrdit), ale o tom všem až někdy jindy.

Věnujme se nyní užití tabulky (posloupnosti) náhodných čísel. Náhodnou volbu bodu úsečky AB můžeme pro vhodné účely nahradit náhodnou volbou racionálního čísla z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ se třemi desetinnými místy (tj. nevolíme libovolný bod úsečky, ale jen libovolný z 1000 možných bodů AB). Při použití posloupnosti e) tak vytvoříme tuto posloupnost bodů úsečky AB : 0,221, 0,671, 0,059, atd. Kdyby nám stačila méně jemná volba bodů, mohli bychom vzít např.: 0,22, 0,16, 0,71, 0,05, atd., chceme-li naopak mít jemnější možnost volby, vytvoříme podle tabulky 1 např. posloupnost: 0,221671, 0,059667, 0,253065, atd. Popsaným způsobem je dána objektivní náhodná volba bodu.

Nyní se můžeme vrátit k volbě bodu X na úsečce AB (obr. 13). Autor prováděl několik desítek pokusů a zjistil, že překvapivě velké procento dotázaných lidí volilo $X \in (0, 25; 0, 45)$; je váš bod X také v tomto intervalu? Ukazuje se, že při subjektivní náhodné volbě hrají roli psychologické vlivy, estetické cítění (volba poblíž zlatého řezu?), zkušenost (při konstrukcích bývá často nevýhodné volit nějaký bod blízko konců úsečky nebo blízko jejímu středu) apod. Při subjektivní náhodné volbě tak

zřejmě není splněna podmínka homogenosti, takže pokud jsme v minulých příkladech mluvili o náhodné volbě bodu, měli jsme na mysli objektivní náhodnou volbu. V příkladě 6, v němž šlo o náhodnou volbu dvou bodů, musí být tato volba pro oba body navzájem nezávislá, ale to je zajištěno už objektivní náhodnou volbou obou bodů.

Čtenář, který snad u posloupnosti d) marně hledal nějakou pravidelnost, nechť si u jejích členů všimne součtu první a třetí cifry.

Vraťme se ještě k příkladu 6. V [2] se na str. 43 dočteme: „Zvolím-li na tyči dva libovolné body a v těch tyč zlomím, jaká je pravděpodobnost, že ze tří kusů, které tím dostanu, se dá sestavit trojúhelník?“ Vidíme, že jde o jiné znění příkladu 6. V uvedené knížce se však po řešení dočteme (čtěte pozorně): „...Čárkovaný trojúhelník má plošný obsah rovný čtvrtině obsahu velkého trojúhelníku, proto se zdá, že pravděpodobnost požadovaného výsledku při lámání tyče bude $1/4$. Toto řešení najdete v četných učebnicích, a přece je nesprávné. Body A nejsou rozloženy v čárkovaném trojúhelníku rovnoměrně, u rohů je jich nejméně. Také s nekonečným počtem bodů nemůžeme počítat, neboť teoreticky se na špendlíkovou hlavičku vejde stejný počet bodů jako na celou zeměkouli. Prosté porovnání obsahů nedává správný poměr pravděpodobností. Obsáhlým matematickým rozbořem (Mathematics of Physics and Modern Engineering, Graw Hill 1958) bylo určeno, že pravděpodobnost, že ze tří zlomků tyče se dá sestavit trojúhelník, je $2 \cdot \ln 2 - 1 = 2 \cdot 0,69315 - 1 = 1,38630 - 1 = 0,38630$. Zde $\ln$ je přirozený logaritmus se základem $e = 2,718 \dots$ “

V příkladu 6 jsme vypočítali $P(T) = 25 \%$ a též výsledek potvrzují např. knížky [3], str. 64, [4], str. 19–21. Na druhé straně je tu citované tvrzení z [2], že $P(T) = 38,6 \%$. Čtenář se tu stal svědkem vzniku rozepře; proč vznikla a kdo má pravdu? Nejprve budeme hledat odpověď na druhou otázku.

O výsledku se přesvědčíme pokusem. Budeme náhodně volit dvojice bodů, zjišťovat, zda nastal jev T , zapisovat počet n pokusů a počet m nastoupení jevu. Pro dosti velké n je pak $P(T) = m/n$ a protože 25% a $38,6 \%$ jsou čísla výrazně odlišná, měli bychom dostat průkazné výsledky už pro nepříliš veliké n . K náhodné volbě bodů použijeme tabulky 1 náhodných čísel; ve shodě s metodou řešení v př. 6 volíme označení tak, že $x \leq y$.

Pokus č. 1 $x = 0,221, y = 0,671; x < 0,5, y > 0,5, y - x = 0,450 < 0,5$; nastává jev T .

Pokus č. 2: $x = 0,059, y = 0,667; x < 0,5, y > 0,5, y - x = 0,608 > 0,5$; nenastává jev T .

Pomocí čísel v tabulce 1 můžeme tak provést 50 pokusů; zkuste to, jde to rychle. Autor provedl 1000 pokusů; v prvních 500 nastal jev T ve 117

případech, $P(T) = 23,4 \%$; ve druhých 500 pokusech nastal jev T ve 133 případech, tj. $P(T) = 26,6 \%$. V celé tisícovce nastal jev (náhodou) právě ve 250 případech, $P(T) = 25 \%$. Pokus dal za pravdu nám.

Kde se však vzal výsledek $38,63 \%$, o němž je řeč v [2]? Můžeme jej prostě škrtnout nebo také něco znamená? Autor tohoto článku prošetřoval příbuzné jevy a došel k jevu T_1 : Je dána úsečka AB (tyč). Na úsečce AB zvolíme náhodně bod X (v něm tyč zlomíme) a na větší z úseček AX , XB zvolíme náhodně bod Y (v něm zlomíme větší z částí). Ze vzniklých tří částí lze sestavit trojúhelník.

Dá se ukázat, že zde už není splněna podmínka homogenosti, dá se dokonce najít i jakási „hustota pravděpodobnosti“. Pak lze vcelku už jednoduchým výpočtem pomocí dvojnásobného integrování (to se budou zájemci učit až na vysoké škole) zjistit, že $P(T_1) = 2 \ln 2 - 1 = 0,3863$; příslušný jev k pravděpodobnosti $0,3863$ je objeven. Je třeba si uvědomit, že jev T_1 je skutečně jiný než jev T ; u T volíme náhodně dva body nezávisle na sobě, v případě T_1 volíme náhodně jeden bod a druhý volíme náhodně na větší z obou částí (tj. tím volba 2. bodu závisí na volbě 1. bodu). V [2] tak došlo k záměně jevů T a T_1 .

Nyní si čtenář může už sám odpovědět na druhou otázku, proč vznikla uvedená rozepře. A neplatí to jen pro matematiku.

Literatura:

- [1] Janko, J.: Statistické tabulky. ČSAV, Praha 1958.
- [2] Dobrovolný, B.: Matematické rekreace. NTL Praha 1969.
- [3] Rényi, A.: Teorie pravděpodobnosti. Academia Praha 1972.
- [4] Gmurman, V. E.: Rukovodstvo k řešení zadač po teorii věrojatnostej i matematiceskoj statistike. Vysšaja škola, Moskva 1970.
- [5] Zapletal, M.: Pokladnice her. Mladá fronta, Praha 1968.

Lze každé celé číslo zapsat stejnými číslicemi?

JOSEF STRAKA, Praha

V šestém čísle minulého ročníku Rozhledů mě zaujal příspěvek dr. Mrázka, CSc., na který v tomto článku volně navazuji.

Pro každé přirozené číslo $n > 1$ a každé celé číslo x platí

$$-|x| = \log_n \log_n \sqrt[n^{|x|}]{n} \quad (1)$$

Položíme-li $\log_n \sqrt[n^{|x|}]{n} = t$, tj. $n^t = \sqrt[n^{|x|}]{n} = n^{\frac{1}{n^{|x|}}} = n^{n^{-|x|}}$, je $t = n^{-|x|}$.

Dále dostaneme

$$\log_n \log_n \sqrt[n^{|x|}]{n} = \log_n t = \log_n n^{-|x|} = -|x|,$$

čímž je rovnost (1) ověřena.

Každé celé číslo můžeme tedy vyjádřit pomocí rovnosti (1). Přitom z této rovnosti vyplývá, že pro libovolné nezáporné celé číslo x platí

$$-x = \log_n \log_n \sqrt[n^x]{n}$$

a pro libovolné záporné celé číslo x je

$$x = \log_n \log_n \sqrt[n^{-x}]{n}$$

Tak např.

$$0 = \log_n \log_n n,$$

$$-1 = \log_n \log_n \sqrt[n]{n},$$

$$1 = -\log_n \log_n \sqrt[n]{n},$$

$$-4 = \log_n \log_n \sqrt[n^4]{n},$$

$$4 = -\log_n \log_n \sqrt[n^4]{n}, \text{ atd.}$$

Konkrétně je např.

$$3 = -\log_4 \log_4 \sqrt[4^3]{4} \quad \text{ale také}$$

$$3 = -\log_7 \log_7 \sqrt[7^3]{7} \quad \text{atd.}$$

Z těchto příkladů je vidět možnost „logaritmického“ zápisu každého celého čísla pomocí konečného počtu stejných číslic. Sami si snadno zjistíte, že každé celé číslo x je možné zapsat rovností (1) pomocí $|x| + 3$ stejných číslic. V posledně uvedeném příkladě bude celé číslo 3 (a také celé číslo -3) zapsáno pomocí šesti čtyřek, resp. šesti sedmiček, rozepíšeme-li mocniny $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$, $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$.

Množina všech čísel tvaru $\log_n \log_n \sqrt[n^{|x|}]{n}$ se vzhledem k rovnosti (1) (což je relace ekvivalence!) rozkládá na systém disjunktních podmnožin, kde každá podmnožina reprezentuje jedno celé číslo. Tak např.

$$\begin{aligned} 3 &= -\log_2 \log_2 \sqrt[2^3]{2} = -\log_5 \log_5 \sqrt[5^3]{5} = -\log \log \sqrt[10^3]{10} = \\ &= -7 = \log_2 \log_2 \sqrt[2^7]{2} = \log_5 \log_5 \sqrt[5^7]{5} = \log \log \sqrt[10^7]{10} = \end{aligned}$$

Při tomto způsobu vyjádření celého čísla je možné připustit analogii s vyjádřením racionálního čísla nekonečně mnoha zlomky.

Sčítání a násobení celých čísel si také můžete „zkomplikovat“:

$$\log_5 \log_5 \sqrt[5^7]{5} - \log_2 \log_2 \sqrt[2^3]{2} = -7 + 3 = -4 ,$$

$$\log \log \sqrt[10^7]{10} \cdot (-\log_5 \log_5 \sqrt[5^3]{5}) = (-7) \cdot 3 = -21 , \text{ apod.}$$

Obdobnými příklady můžete „potrápit“ své spolužáky.

Poučení: Zdánlivá hříčka se může stát podnětem hlubšího zamyslení.

konstruktivní geometrie

Věta Menelaova a věta Ceva

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V článku Užití dělicího poměru v geometrii (letošní ročník Rozhledů, č. 4) byl vyložen pojem dělicího poměru a zároveň byly uvedeny jeho základní vlastnosti. Navážeme na tento článek a ukážeme další užití dělicího poměru v geometrii. Je to především věta označovaná obvykle podle starověkého matematika *Menelaa* (žil okolo roku 100 našeho letopočtu v Alexandrii).

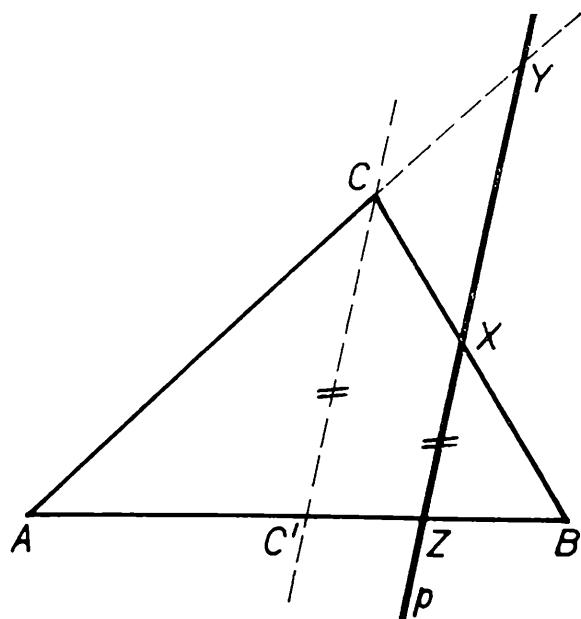
Věta Menelaova. Budiž dán trojúhelník ABC a přímka p , která neprochází žádným jeho vrcholem, ale protíná přímky AB , BC , CA po řadě v bodech Z , X , Y . Potom platí:

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = 1$$

Důkaz. Přímka p rozděluje rovinu trojúhelníka ABC ve dvě navzájem opačné poloroviny. Potom buď všechny tři body A , B , C leží uvnitř jedné poloroviny vyřazené přímkou p anebo jeden z nich leží uvnitř jedné z obou polorovin a druhé dva leží uvnitř poloroviny opačné. V prvním případě je každý z dělicích poměrů (ABZ) , (BCX) , (CAY) kladný, v druhém případě jsou dva záporné a jeden je kladný. V obou případech je tedy

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) > 0 \quad (1)$$

Promítněme rovnoběžně body C , X , Y směrem určeným přímkou p na přímku AB . Potom průměty bodů X , Y splynou s bodem Z ; průmět



Obr. 1

bodu C označme C' (obr. 1). Podle věty o invariantnosti dělicího poměru při rovnoběžném promítání (věta 6 výše citovaného článku) je

$$(BCX) = (BC'Z), \quad (CAY) = (C'AZ) \quad (2)$$

Užijeme-li vzorce $|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c|$, který platí pro libovolná reálná čísla a, b, c , dostaneme tento výsledek:

$$|(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY)| = \frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY}.$$

Z toho a z (2) plyne, že je

$$|(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY)| = \frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BZ}{C'Z} \cdot \frac{C'Z}{AZ} = 1$$

Z toho podle (1) plyne tvrzení věty Menelaovy.

Poznámka. Důležité je, že platí také obrácení věty Menelaovy. Toho se dá leckdy užít při důkazu kolineárnosti tří různých bodů.

Obrácení věty Menelaovy Budiž ABC trojúhelník, Z, X, Y tři body rozdílné od vrcholů A, B, C ležící po řadě na přímkách AB, BC, CA tak, že platí:

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = 1$$

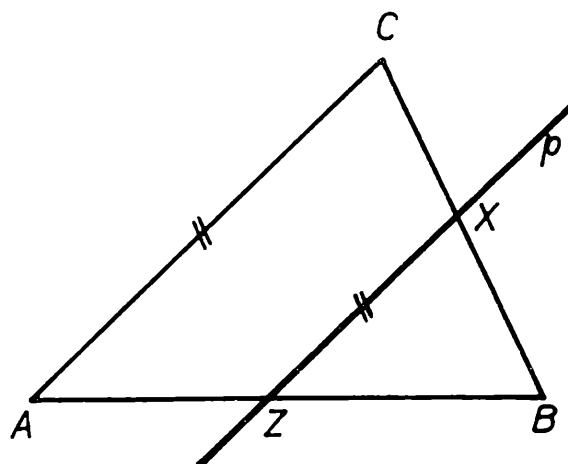
Potom body Z, X, Y leží v přímce.

Důkaz. Podle předpokladu je

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY) = 1 \quad (3)$$

Dané dva různé body Z, X určí přímku p ; dokážeme nejprve, že není $p \parallel AC$. Kdyby bylo $p \parallel AC$ (obr. 2), pak podle věty o invariantnosti dělicího poměru při rovnoběžném promítání by bylo

$$(BCX) = (BAZ) \quad (4)$$



Obr. 2

Avšak podle věty 1 z výše citovaného článku je

$$(BAZ) = \frac{1}{(ABZ)}.$$

Podle toho a podle (4) by bylo

$$(ABZ) (BCX) = 1;$$

podle (3) by pak bylo $(CA Y) = 1$, ale to není možné, neboť dělicí poměr není nikdy roven jedné.

Přímka $p = ZX$ není rovnoběžná s přímkou AC , takže ji protíná v bodě, který označíme Y' ; přitom je $Y' \neq A$, $Y' \neq C$. Podle věty Menelaovy je

$$(ABZ) (BCX) \cdot (CA Y') = 1$$

Porovnáme-li tuto rovnost s rovností (3), zjistíme, že je $(CA Y') = (CA Y)$; avšak na přímce CA existuje jediný bod, který má daný dělicí poměr (viz větu 2 z výše citovaného článku); je tedy $Y' = Y$. To však znamená, že body Z, X, Y leží v přímce p .

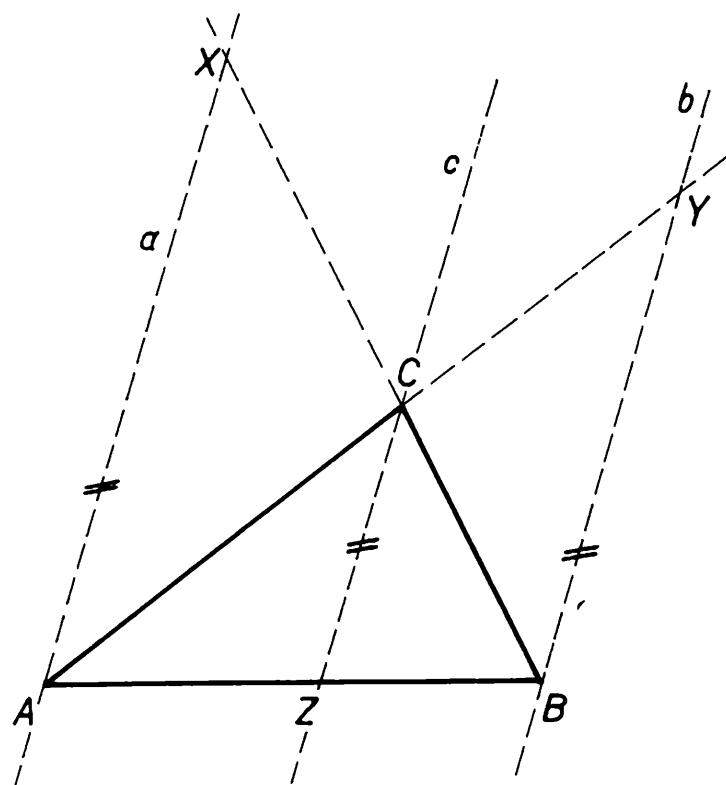
Příklad 1. Je dán trojúhelník ABC a přímka p , která neprochází žádným jeho vrcholem, avšak protíná přímky AB, BC, CA po řadě v bodech Z, X, Y . Sestrojme tyto body: Bod Z' souměrně sdružený k bodu Z podle středu strany AB ; bod X' souměrně sdružený k bodu X podle středu strany BC ; bod Y' souměrně sdružený k bodu Y podle středu strany CA . Potom body Z', X', Y' leží v přímce. Dokažte.

Řešení. Bod Z ležící na přímce AB má dělicí poměr (ABZ) , pro který je

$$|(ABZ)| = \frac{AZ}{BZ}. \quad (5)$$

Protože body A, B a rovněž body Z, Z' jsou středově souměrné podle středu strany AB , je $AZ' = BZ$, $BZ' = AZ$. Pro dělicí poměr (ABZ') tedy podle (5) platí:

$$|(ABZ')| = \frac{AZ'}{BZ'} = \frac{BZ}{AZ} = \frac{1}{|(ABZ)|} \quad (6)$$



Obr. 3

Leží-li bod Z uvnitř úsečky AB , platí to i pro bod Z' ; leží-li bod Z na prodloužení úsečky AB , platí to i pro Z' . Proto jsou čísla (ABZ) , (ABZ') kladná nebo obě záporná; podle (6) je tedy

$$(ABZ') = \frac{1}{(ABZ)}.$$

Docela stejně se dokáže, že je

$$(BCX') = \frac{1}{(BCX)}, \quad (CAY') = \frac{1}{(CAY)}.$$

Proto je

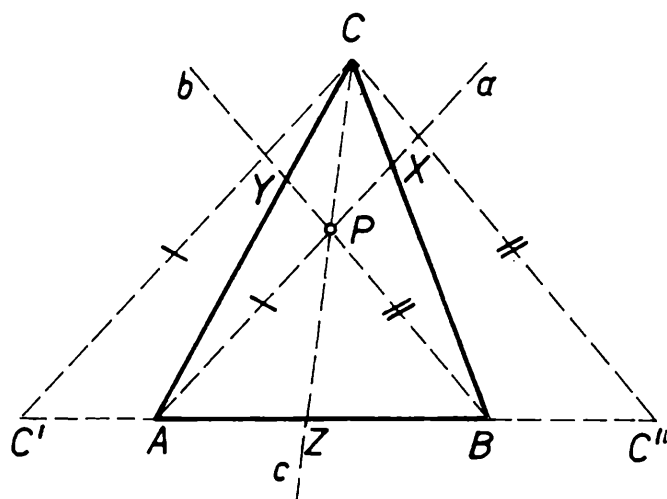
$$(ABZ') (BCX') (CAY') = \frac{1}{(ABZ) (BCX) (CAY)}. \quad (7)$$

Avšak podle věty Menelaovy je $(ABZ) (BCX) (CAY) = 1$; podle (7) je proto také $(ABZ') (BCX') (CAY') = 1$. Podle obrácení věty Menelaovy leží body Z' , X' , Y' v přímce.

Vedle věty Menelaovy platí ještě další věta (i její obrácení) označovaná podle jména italského matematika *Cevy* (čti čevy), který žil v druhé polovině 17. století.

Věta Cevova. Budiž dán trojúhelník ABC a tři různé přímky a, b, c , které po řadě procházejí body A, B, C tak, že jsou vzájemně rovnoběžné anebo se protínají v bodě P neležícím na žádné z přímek AB, BC, CA ; přitom přímky a, b, c protínají přímky BC, CA, AB po řadě v bodech X, Y, Z . Potom platí:

$$(ABZ) (BCX) (CAY) = -1$$



Obr. 4

Důkaz. a) Nechť přímky a , b , c jsou vzájemně rovnoběžné. Potom jedna z nich leží uvnitř pásu omezeného zbývajícími dvěma; při označení podle obr. 3. je to přímka $c = CZ$. Bod Z leží tedy uvnitř úsečky AB , takže je

$$(ABZ) < 0 ; \quad (8)$$

naproti tomu je $(BZA) > 0$, $(ZAB) > 0$. Body B , C , X jsou rovnoběžné průměty bodů B , Z , A na přímku BC ; body C , A , Y jsou rovnoběžné průměty bodů Z , A , B na přímku CA . Podle věty o invariantnosti dělicího poměru při rovnoběžném promítání je proto

$$(BCX) = (BZA) > 0 , \quad (CA Y) = (ZAB) > 0 \quad (9)$$

Podle (8) a (9) je tedy

$$(ABZ) (BCX) (CA Y) < 0 . \quad (10)$$

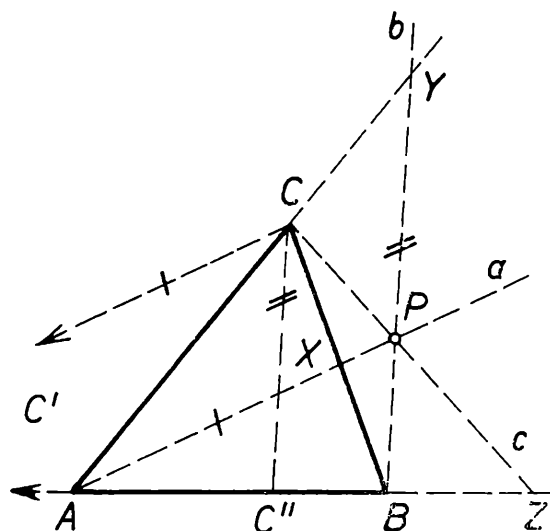
Užijeme-li nejprve vzorce $|abc| = |a| |b| |c|$ platného pro reálná čísla a , b , c a potom rovností (9), dostaneme tento výsledek:

$$|(ABZ) (BCX) (CA Y)| = \frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = \frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BA}{ZA} \cdot \frac{ZB}{AB} = 1 .$$

Podle (10) z toho plyne, že je

$$(ABZ) (BCX) (CA Y) = -1$$

b) Nechť přímky a , b , c procházejí bodem P , který neleží na žádné z přímek AB , BC , CA (obr. 4, 5). Leží-li bod P uvnitř trojúhelníku ABC (obr. 4), patří polopřímka AP s výjimkou bodu A k vnitřnímu úhlu $\sphericalangle BAC$; protíná tedy úsečku BC v jejím vnitřním bodě X . Obdobně polopřímka BP protíná úsečku CA v jejím vnitřním bodě Y a polopřímka CP protíná úsečku AB v jejím vnitřním bodě Z . Proto je $(ABZ) < 0$, $(BCX) < 0$, $(CA Y) < 0$, takže opět platí (10). Leží-li bod P vně trojúhelníku ABC , ale uvnitř úhlu $\sphericalangle BAC$ (obr. 5), je bod X opět vnitřním bodem úsečky BC , takže je $(BCX) < 0$. Avšak polopřímky BP , CP leží s výjimkou svých počátečních bodů uvnitř poloroviny opačné k poloro-



Obr. 5

vině BCA ; proto bod Y neleží uvnitř úsečky CA a bod Z neleží uvnitř úsečky AB . Je tedy $(CAY) > 0$, $(ABZ) > 0$. Protože je $(BCX) < 0$, platí opět (10). Obdobně zjistíme, že tomu tak je, když bod P leží uvnitř úhlu vrcholového k úhlu $\sphericalangle BAC$. Totéž pak platí i pro ostatní možné polohy bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC . V každém případě tedy platí (10).

Vedme bodem C po řadě rovnoběžky k přímkám AP , BP a sestrojme jejich průsečíky C' , C'' s přímkou AB (obr. 4, 5). Potom body Z , C , P jsou rovnoběžnými průměty bodů Z , C' , A na přímku CP a body Z , C'' , B jsou rovnoběžnými průměty bodů Z , C , P na přímku AB . Podle věty o invariantnosti dělicího poměru při rovnoběžném promítání je

$$(ZC'A) = (ZCP) = (ZC''B) ;$$

proto je

$$\frac{ZA}{C'A} = \frac{ZB}{C''B} ,$$

čili

$$\frac{ZA}{ZB} = \frac{C'A}{C''B} \quad (11)$$

Podle věty o invariantnosti dělicího poměru při rovnoběžném promítání je také

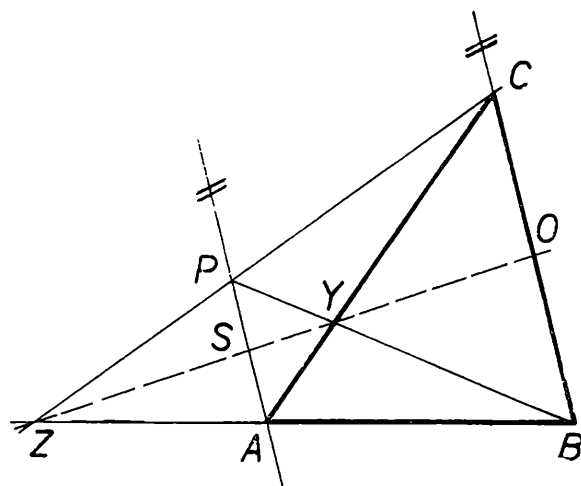
$$(BCX) = (BC'A) , \quad (CAY) = (C''AB) ,$$

takže je

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BA}{C'A} , \quad \frac{CY}{AY} = \frac{C''B}{AB} . \quad (12)$$

Užijeme-li nejprve vzorce $|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c|$ a potom rovností (11) a (12), dostaneme, že je

$$|(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CAY)| = \frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = \frac{C'A}{C''B} \cdot \frac{BA}{C'A} \cdot \frac{C''B}{AB} = 1$$



Obr. 6

Protože platí také (10), je

$$(ABZ) (BCX) (CA Y) = -1$$

Obrácení věty Cevovy Budiž ABC trojúhelník a body X, Y, Z rozdílné od jeho vrcholů ležící po řadě na přímkách BC, CA, AB tak, že je

$$(ABZ) (BCX) (CA Y) = -1$$

Potom přímky AX, BY, CZ jsou buď vzájemně rovnoběžné nebo se protínají v témž bodě.

Důkaz. Podle předpokladu je

$$(ABZ) (BCX) (CA Y) = -1 \quad (13)$$

Přímky BY, CZ jsou buď vzájemně rovnoběžné anebo se protínají v bodě, který označíme P .

a) Předpokládejme, že je $BY \parallel CZ$; dokážeme, že potom také přímka AX je s těmito dvěma přímkami rovnoběžná. Vedme bodem A přímku a rovnoběžnou s přímkami BY, CZ a sestrojme její průsečík X' s přímkou BC ; podle věty Cevovy je

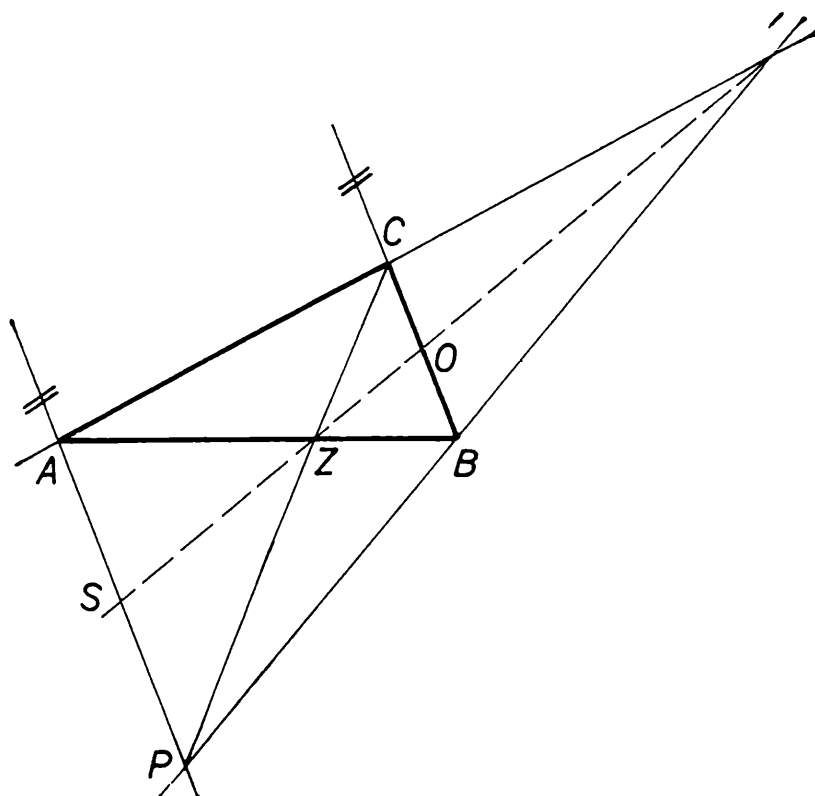
$$(ABZ) (BCX') (CA Y) = -1$$

Podle toho a podle (13) je tedy $(BCX') = (BCX)$. Avšak na přímce BC existuje právě jeden bod, který má daný dělicí poměr (viz větu 2 z výše citovaného článku); je tedy $X' = X$. To však znamená, že je

$$AX \parallel BY \parallel CZ$$

b) Předpokládejme, že se přímky BY, CZ protínají v bodě P ; potom bod P zřejmě neleží na žádné z přímek AB, BC, CA . Body A, P určí přímku; dokážeme nejprve, že tato přímka není rovnoběžná s přímkou BC . Důkaz provedeme nepřímou.

Předpokládejme, že je $AP \parallel BC$. Leží-li bod P uvnitř poloroviny ABC , vznikne lichoběžník $ABCP$ (obr. 6); leží-li bod P uvnitř poloroviny opačné k polorovině ABC , vznikne lichoběžník $APBC$ (obr. 7). V obou případech jsou úsečky BC, AP základnami lichoběžníku. Jeho úhlopříčky se protínají v bodě Y (resp. Z) a prodloužení jeho ramen se protínají



Obr. 7

v bodě Z (resp. Y). Podle harmonické vlastnosti lichoběžníku (viz větu 4 výše citovaného článku) protíná přímka XY základny BC , AP po řadě v jejich středech O , S ; přitom je

$$(SOZ) = -(SOY) \quad (14)$$

Body A , B , Z jsou rovnoběžnými průměty bodů S , O , Z na přímku AB a body C , A , Y jsou rovnoběžnými průměty bodů O , S , Y na přímku CA . Podle věty o invariantnosti dělicího poměru je

$$(ABZ) = (SOZ), \quad (CAY) = (OSY).$$

Proto je

$$(ABZ) \cdot (CAY) = (SOZ) \cdot (OSY) \quad (15)$$

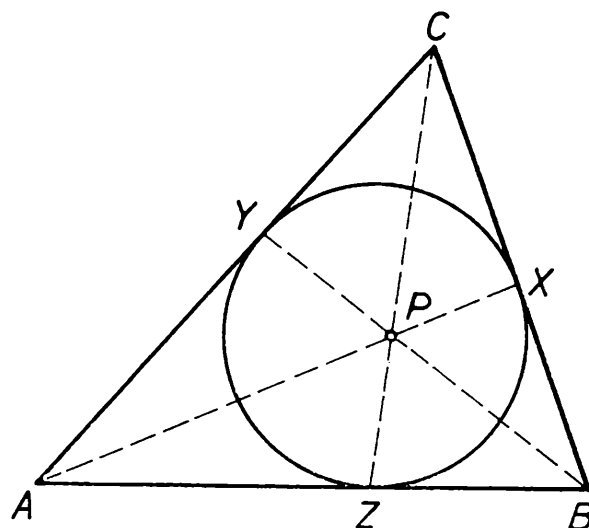
Avšak podle věty 1 z výše citovaného článku je

$$(OSY) = \frac{1}{(SOY)},$$

takže podle (15) a (14) je

$$(ABZ) \cdot (CAY) = (SOZ) \cdot \frac{1}{(SOY)} = -1$$

Z toho a z předpokladu (13) plyne, že je $(BCX) = 1$, ale to není možné, neboť dělicí poměr se nikdy jedné nerovná. Došli jsme ke sporu; proto předpoklad o rovnoběžnosti přímek AP , BC byl nesprávný. Přímka AP tedy protíná přímku BC v bodě, který označíme X' . Přímky AY' , BY , CZ procházejí bodem P , který neleží na žádné z přímek AB , BC , CA .



Obr. 8

Podle věty Cevovy je tedy

$$(ABZ) (BCX') (CA Y) = -1$$

Podle toho a podle (13) je $(BCX') = (BCX)$. Protože na přímce BC je právě jeden bod s daným dělicím poměrem, je $X' = X$. To však znamená, že přímky AX , BY , CZ procházejí bodem P .

Příklad 2. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB , BC , CA po řadě v bodech Z , X , Y . Dokažte, že přímky AX , BY , CZ procházejí jedním bodem (obr. 8).

Řešení. Protože body Z , X , Y leží po řadě uvnitř stran AB , BC , CA , je

$$(ABZ) = -\frac{AZ}{BZ}, \quad (BCX) = -\frac{BX}{CX}, \quad (CA Y) = -\frac{CY}{AY}. \quad (16)$$

Podle známé věty o tečnách vedených z bodu ke kružnici platí:

$$AZ = AY, \quad BX = BZ, \quad CY = CX \quad (17)$$

Podle (16) a (17) je tedy

$$(ABZ) (BCX) (CA Y) = -\frac{AY}{BZ} \cdot \frac{BZ}{CX} \cdot \frac{CX}{AY} = -1$$

Podle obrácení věty Cevovy jsou přímky AX , BY , CZ rovnoběžné nebo procházejí jedním bodem. Avšak přímka AX odděluje body C , Z , takže úsečka CZ protíná přímku AX ve svém vnitřním bodě P . Přímky AX , BY , CZ tedy procházejí bodem P .

Cvičení.

1. Uvnitř stran BC , AC trojúhelníku ABC jsou dány body D , E tak, že je $CD = \frac{1}{3} BC$, $CE = \frac{1}{3} AC$; středem strany AB je bod T . Potom přímky AD , BE se protínají v bodě S , který je středem úsečky CT .

Dokažte. — *Návod*: Užijte harmonické vlastnosti lichoběžníku a věty Menelaovy.

2. Jsou dány tři kružnice k_1, k_2, k_3 o různých středech S_1, S_2, S_3 a různých poloměrech r_1, r_2, r_3 . Potom každé dvě z těchto kružnic jsou stejno-
lehlé podle dvou středů podobnosti; jeden je vnější a jeden vnitřní. Vznikají tedy celkem tři vnější a tři vnitřní středy podobnosti. Dokažte, že tři vnější středy podobnosti leží v přímce a vždy jeden vnější a další dva vnitřní středy podobnosti rovněž leží v přímce.

3. Je dán trojúhelník ABC a bod P , který neleží na žádné z přímek AB, BC, CA ; přímka AP protíná přímku BC v bodě X , přímka BP protíná přímku CA v bodě Y a přímka CZ protíná přímku AB v bodě Z . Sestrojme tyto body: Bod X' souměrně sdružený k bodu X podle středu strany BC ; bod Y' souměrně sdružený k bodu Y podle středu strany CA a bod Z' souměrně sdružený k bodu Z podle středu strany AB . Potom přímky AX', BY', CZ' jsou rovnoběžné nebo procházejí jedním bodem. Dokažte.

4. Nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou AB jsou sestrojeny čtverce $ACC'A', BCC''B'$ tak, že vrcholy C', A', C'', B' leží vně trojúhelníku ABC . Potom přímky AB', BA' se protínají v bodě P ležícím uvnitř výšky trojúhelníku ABC . Dokažte. — *Návod*: Užijte obrácení věty Cevovy a Euklidovy věty o výšce.

5. Danému trojúhelníku ABC jsou vně vepsány kružnice k_1, k_2, k_3 . Kružnice k_1 se dotýká strany BC v bodě T_1 a prodloužení stran CA, AB po řadě v bodech T_2, T_3 . Kružnice k_2 se dotýká strany CA v bodě U_2 a prodloužení stran BC, AB po řadě v bodech U_1 a U_3 . Kružnice k_3 se dotýká strany AB v bodě Z_3 a prodloužení stran BC, CA po řadě v bodech Z_1, Z_2 . Potom platí: a) Přímky AT_1, BU_2, CZ_3 procházejí jedním bodem; b) přímky AT_1, BT_2, CT_3 procházejí jedním bodem; c) přímky AU_1, BU_2, CU_3 procházejí jedním bodem; d) přímky AZ_1, BZ_2, CZ_3 procházejí jedním bodem. Dokažte. — *Návod*: $AT_3 = AT_2, AT_3 + AT_2 = AB + BT_1 + AC + CT_1 = AB + BC + AC = a + b + c$, takže $AT_3 = AT_2 = 1/2 (a + b + c) = s$. Obdobně je $BU_1 = BU_3 = CZ_1 = CZ_2 = s$.

Elementární částice a interakce mezi nimi

Ing. ZDENĚK JANOUT CSc, FJFI ČVUT Praha

Jedním z dávných přání člověka je nalézt několik prostých obecných zákonů, které by objasnily, proč příroda vypadá tak, jaká právě je. V současné době se ukazuje jako nejbližší cesta, vedoucí k jedinému pohledu na přírodu, popis přírody pomocí elementárních částic a interakcí mezi nimi. Vše, co nás obklopuje, je složeno všeho všudy ze tří různých elementárních částic: z *elektronů*, z *protonů* a z *neutronů*. Skutečně, všechna hmotná tělesa jsou složena z molekul, molekuly z atomů, atomy z jader a obíhajících elektronů a atomová jádra se skládají z protonů a neutronů. Výčet těchto tří částic je zapotřebí doplnit ještě třemi částicemi s nulovou klidovou hmotností, jmenovitě: *fotonem* neboli kvantem elektromagnetického záření; *neutrinem*, které hraje podstatnou úlohu v určitých typech radioaktivních rozpadů a *gravitonem* neboli kvantem gravitačního záření. Kromě gravitonu byly vyjmenované částice experimentálně pozorovány. Graviton však interaguje s látkou natolik slabě, že se nám ho zatím nepodařilo pozorovat, avšak není žádných vážných příčin, proč pochybovat o jeho existenci.

Kromě uvedených částic existuje celá množina elementárních částic (dnes jich známe přes sto), jejichž poslání v přírodě je nám dosud většinou neznámé. Tyto částice byly objeveny jednak v kosmickém záření, jednak při vzájemných srážkách elementárních částic, z nichž jedna anebo obě byly uměle urychleny. Přehled pozorovaných elementárních částic se střední dobou života delší než 10^{-20} s je uveden v tabulce.

1. Neuvažujeme-li foton, lze tyto částice rozdělit na dvě skupiny: leptony a hadrony. Hadrony jsou částice, které mezi sebou působí prostřednictvím silných interakcí (viz dále), zatímco leptony nikoliv. Hadrony dále dělíme na mezony a baryony. Baryony dělíme ještě na nukleony (p, n), hyperony (Λ^0 , Σ^+ , Σ^0 , Σ^-) a kaskádní hyperony (Ξ^0 , Ξ^- , Ω^-). Toto rozdělení není v tabulce 1 vyznačeno. Pro úplnost poznamenejme, že elementární částice se střední dobou života kratší než 10^{-20} s nazýváme rezonance. Počet těchto částic převyšuje počet částic uvedených v tabulce 1 a jejich přehled lze nalézt v odborné literatuře, na příklad v časopisu *Reviews of Modern Physics* 48 (1976). Rezonance na rozdíl od částic uvedených v tabulce 1 nezanechávají v důsledku velmi krátké

Tabulka 1

částice		označení	náboj v e_0	hmotnost v m_e	doba života (s)	spin ($\hbar$)	hlavní rozpad
Leptony	foton	γ	0	0	∞	1	stabilní
	neutrino elektronové	ν_e	0	0	∞	1/2	stabilní
	neutrino mionové	ν_μ	0	0	∞	1/2	stabilní
	elektron	e^-	-1	1	∞	1/2	stabilní
Mezony	mion	μ	-1	206,77	$2,2 \times 10^{-6}$	1/2	$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$
	piony	π^+	+1	273,13	$2,6 \times 10^{-8}$	0	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
	kaony	π^0	0	264,11	$0,83 \times 10^{-16}$	0	$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$
		K^+	+1	966,16	$1,24 \times 10^{-8}$	0	$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
Hadrony		K^0	0	973,97	$K_1^0 0,89 \times 10^{-10}$ $K_2^0 5,18 \times 10^{-8}$ $\sim 10^{-19}$	0	$K_1^0 \rightarrow 2\pi$
	eta mezon	η^0	0	1073,97		0	$K_2^0 \rightarrow 3\pi$
							$\eta^0 \rightarrow 2\gamma; \eta^0 \rightarrow 3\pi$
Baryony	proton	p	+1	1836,15	∞	1/2	stabilní
	neutron	n	0	1838,69	918	1/2	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
	lambda hyperon	Λ	0	2183,17	$2,58 \times 10^{-10}$	1/2	$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$
	sigma hyperony	Σ^+	+1	2327,53	$0,8 \times 10^{-10}$	1/2	$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0, \Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$
		Σ^0	0	2333,60	$< 1,0 \times 10^{-14}$	1/2	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$
	ksi hyperony	Σ^-	-1	2343,15	$1,48 \times 10^{-10}$	1/2	$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$
		Ξ^0	0	2573,19	$2,96 \times 10^{-10}$	1/2	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$
	omega hyperon	Ξ^-	-1	2585,69	$1,65 \times 10^{-10}$	1/2	$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$
		Ω	-1	3272,41	$1,3 \times 10^{-10}$	3/2	$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$ $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$

$$e_0 = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Tabulka 2

Typ interakce	relativní velikost síly	dosah působení (m)	příklad stabilního systému	příklad procesu
silné	1	10^{-15}	atomové jádro	jaderná reakce rozpad rezonancí
elektromagnetické	10^{-2}	∞	atom molekula krystal	chemické reakce rozpad π^0 , η^0 a Σ^0
slabé	10^{-14}	$\ll 10^{-16}$		beta rozpad rozpad některých leptonů a hadronů
gravitační	10^{-36}	∞	sluneční soustava	volný pád těles

doby života ($\sim 10^{-23}$ až 10^{-21} s) v registračním zařízení (bublinová nebo jiskrová komora) viditelnou stopu. Proto existenci a vlastnosti rezonancí prokazujeme nepřímou rozbořem produktů jejich rozpadu. Částice uvedené v tabulce 1 žijí dlouhou dobu ($> 10^{-20}$ s) oproti rezonancím a mají možnost během své existence projevit svůj částicový charakter tím, že vyvolávají stopu v registračním zařízení. Z tohoto hlediska částice uvedené v tabulce 1 nazýváme někdy, na rozdíl od rezonancí, pravými částicemi. Dohromady je počet pravých částic a rezonancí vyšší než sto. Připočteme-li k těmto částicím ještě jim odpovídající antičástice (liší se od částic znaménky některých charakteristických veličin, například opačným nábojem), dostaneme celkový počet částic a antičástic přes dvě stě.

I přes tak velký počet a různorodost částic lze vzájemná působení (*interakce*) mezi nimi rozdělit do čtyř skupin (tabulka 2). Nejintenzivnější síly mezi částicemi vyvolávají silné interakce, následují elektromagnetické, pak slabé a nakonec gravitační. Zhruba platí, že elektromagnetické interakce vyvolávají síly 10^2 krát, slabé interakce 10^{14} krát a gravitační interakce 10^{36} krát slabší než silné interakce. Nejznámější z uvedených interakcí jsou gravitační elektromagnetické interakce, se kterými se setkáváme v makrosvětě, tj. ve světě, který nás bezprostředně obklopuje. Pro tyto interakce je typické, že vyvolávají síly působící na velkou vzdálenost, a proto není nutno, aby se integrující částice vzájemně dostaly do těsné blízkosti, jako je tomu v případě silných a slabých interakcí. Gravitační interakce vyvolávají síly, které nás udržují na povrchu Země a které udržují planety na jejich orbitech kolem Slunce. Díky jejich

existenci je zaručena stabilita naší sluneční soustavy. Elektromagnetické interakce vyvolávají síly mezi elektricky nabitými částicemi. Zabezpečují stabilitu atomů, molekul, krystalů a jsou zodpovědny za všechny známé chemické a fyzikální vlastnosti pevných látek, kapalin a plynů, dále jsou zodpovědny za chemické a biologické reakce a procesy.

Za těmito interakcemi se pak podle stupně současného poznání a podle dosahu sil, které vyvolávají, řadí silné interakce. Tyto interakce vyvolávají jaderné síly, které udržují protony a neutrony v atomových jádrech. Kdyby neexistovaly silné interakce, nebylo by v přírodě takových stabilních útvarů, jakými jsou atomová jádra. Dosah jaderných sil je přibližně roven 10^{-15} m, takže jsou zcela nepozorovatelné nejen v makrosvětě, nýbrž i v rozměrech samotného atomu ($\sim 10^{-10}$ m).

Nakonec uvedme nejméně prostudované slabé interakce. Tyto interakce vyvolávají síly krátkého dosahu (menší než 10^{-16} m) a jsou natolik slabé, že se zdá, že nevytvářejí stabilní útvary v přírodě. Spíše se projevují v určitých typech srážek nebo v procesech rozpadu, které nemohou z jakýchsi příčin probíhat prostřednictvím silných elektromagnetických a gravitačních interakcí. Prostřednictvím slabých interakcí probíhá beta rozpad některých atomových jader či rozpad některých elementárních částic, například rozpad volného neutronu. Jedinými částicemi, které interagují s látkou pouze slabou interakcí, jsou obě neutrina: elektronové a mionové. Jelikož je tato interakce velmi slabá, nedařilo se po dlouhou dobu experimentálně prokázat jejich existenci. Avšak i slabé interakce se nicméně nepřímo podílí i na životě lidstva. Díky jim probíhá první krok v cyklu termojaderných reakcí na Slunci, krok, v kterém se spojují dva protony a vytváří se jádro deuteria, pozitron a elektronové neutrino. Přestože jsou slabé interakce v současné době předmětem intenzivního studia, neznáme dosud jejich pravé poslání v přírodě.

Podle představ moderní fyziky jsou uvedené typy silových působení vyvolávány tím, že si interagující částice během vzájemného působení nepřetržitě vyměňují jistý druh částic. Například mezi nabitými částicemi je jejich vzájemné působení uskutečňováno nepřetržitou vzájemnou výměnou fotonů. První nabitá částice vyšle foton, druhá jej pohltí a naopak. Tento děj se neustále opakuje a výsledkem je buď přitažlivá nebo odpudivá síla v závislosti na tom, jsou-li elektrické náboje opačného či souhlasného znaménka. V případě silné interakce jsou vyměňovány piony. Výsledkem je silná přitažlivá síla, například mezi protonem a neutronem. Za přenos gravitačních sil mezi hmotnými částicemi odpovídají gravitony. Jakými částicemi jsou zprostředkovány slabé interakce, to je zatím předmětem intenzivního výzkumu.

Fyzikové se neustále snaží nahradit uvedené čtyři interakce čtyřmi projevy interakce jediné. Tomuto sjednocení jsou pravděpodobně největší překážkou jejich značné rozdíly ve velikosti sil, které vyvolávají

(36 řádů). Pokrok v řešení této otázky nastal v posledních letech, kdy se zdá, že byly experimentálně potvrzeny teorie fyziků *Salama* a *Weinbergera* sjednocující slabé a elektromagnetické jevy. Situace zdá se být obdobná situaci z minulého století, kdy se *Maxwellovi* podařilo sjednotit v jednu teorii zdánlivě nesouvisející jevy elektrické a magnetické.

Jak již bylo poznamenáno, jednou z charakteristik nestabilních částic je střední doba jejich života. Tato doba je tím kratší, čím je interakce vyvolávající rozpad částice silnější. To znamená, že nejkratší dobu života mají částice rozpadající se vlivem silné interakce (pouze rezonance), déle žijí částice rozpadající se vlivem elektromagnetické interakce (π^0 , η^0 , Σ^0) a nejdéle žijí částice rozpadající se vlivem slabých interakcí (μ , π , K , n , Λ , Σ , Ξ , Ω). Zpravidla hovoříme o silném, elektromagnetickém či slabém rozpadu částice. Absolutně stabilních je pět částic: foton, dvě neutrina, elektron a proton.

Závěrem uveďme, že pozornost fyziků je rovněž zaměřena na otázku, jsou-li elementární částice skutečně elementární, tj. bez další vnitřní struktury, anebo jsou-li složeny z elementárnějších částic v tom smyslu, v jakém chápeme, že atomová jádra jsou složena z protonů a z neutronů a atom je složen z jader a z elektronů. Americký fyzik *Gell-Mann* vytvořil teorii, podle které lze hadrony sestavit ze tří částic, které nazval kvarky. Avšak tato teorie nebyla zatím experimentálně potvrzena, kvarky se zatím nepodařilo najít, a tak na odpověď na otázku týkající se struktury elementárních částic si budeme muset ještě počkat.

Zázraky beztížného prostoru

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc, Praha

Vše nasvědčuje tomu, že na orbitálních stanicích blízké budoucnosti budou díky trvale beztížnému prostředí prováděny experimenty, které způsobí revoluci v technologii. Ledacos již bylo při dosavadních kosmických letech zkoušeno, takže jsou po ruce první zkušenosti. Např. odléváním předem odváženého množství kovu vznikne v beztíží přesná koule, přičemž případné odchylky od teoretického tvaru téměř nezáleží na poloměru. Jednou to povede k odlévání koulí do velkých ložisek, která při dnešní technologii nemají právě pro relativně velké odchylky „kulíček“ od ideálního tvaru dlouhou životnost.

V trvale beztížném prostoru však bude možno vyrábět zcela nové druhy kovových slitin a skel, protože bude možno udržet v homogenním tvaru pohromadě i takové komponenty, které se značně liší hustotou, takže se zde na Zemi od sebe mechanicky oddělují. Bylo např. vypočteno,

že např. 13% oceli a 87% jemně rozptýleného plynu vytvoří taveninu, která po ztuhnutí dá vzniknout ocelové „pěně“, jejíž mechanické vlastnosti budou téměř shodné s mechanickými vlastnostmi běžné oceli, která však bude tak lehká, že bude plavat na vodě. Netřeba připomínat, co to bude znamenat např. pro letecký průmysl. Podobně budou na oběžné dráze vznikat zcela nové druhy optických skel a jiné podobné materiály.

Zcela samostatnou kapitolou bude výroba krystalů a krystalických struktur vůbec. Zde na zemském povrchu vznikají při růstu krystalů tzv. dislokace — nepravidelnosti v počtu mnoha milionů na krychlový centimetr. Příčin tohoto jevu je mnoho, avšak mezi nimi jsou dvě zvláště důležité: teplotní nestabilita, vedoucí při krystalizaci k mikropohybům roztoku následkem změny hustoty, a styk roztoku se stěnami nádoby. V beztlákovém prostředí však obě tyto příčiny odpadají (nezapomeňme, že roztok lze v beztlákovém prostředí uchovávat ve tvaru volně se vznášející koule bez nádoby!) a počet dislokací krystalů bude podstatně menší. Tak bude možno vyrábět např. kovové membrány silné jen 3 až 5 molekul a krystalické materiály se budou blížit teoretickému optimu svých mechanických vlastností (např. pevnost lan může být při zachování téhož průřezu i několiktisíckrát větší). Totéž platí i pro umělá vlákna, jichž se bude díky beztlákovému prostředí vyrábět mnohem větší počet druhů.

Nesmí nás tedy divit, že vývoj kosmonautiky lidských letů směřuje k budování obřích létajících pracovišť s pravidelně se střídajícími posádkami. To ovšem předpokládá zavedení raketoplánů jakožto ekonomicky výhodného přepravního prostředku mezi Zemí a orbitálními pracovišti. Protože první raketoplány se začnou zkoušet již koncem tohoto desetiletí, lze očekávat, že to budou osmdesátá léta, která pomocí kosmonautiky zmíněnou technologickou revoluci uskuteční.

Tlak světelného záření

(K 75. výročí pokusu P. N. Lebeděva)

RNDr. RUDOLF TULAK, Martin

Světelné vlny přenášejí energii, kterou získávají ze zdroje světla, a odevzdávají ji tomu tělesu, které je pohlcuje. Tak dochází k přímé přeměně elektromagnetické energie v energii mechanickou; světlo účinkuje tlakovou silou na plochu, která je odráží nebo pohlcuje. Při prakticky dosažitelných tocích záření je tlak záření malý, a tudíž velmi těžko měřitelný. Například sluneční paprsky za jasného dne mají při úplné

absorpci tlak přibližně $4 \cdot 10^{-6}$ Pa. Tak nepatrnou hodnotu tlaku záření je těžké měřit. Proto byl tlak světelného záření nejprve předpověděn, a to *J. C. Maxwellem*, a po prvé experimentálně změřen profesorem moskevské univerzity *P. N. Lebeděvem* v r. 1901.

V astronomii se tlakem světla na malé částice komet podrobně zabýval ruský astronom *F. A. Bredichin* a stanovil orientaci chvostu komet při průchodu komety v blízkosti Slunce. Když se kometa přiblíží k Slunci, uvolňují se oteplováním z pevného jádra částice, které jsou pak působením záření vytlačovány a tvoří ohon. Ten je největší v přísluní.

K závěru o tlaku záření lze dospět, předpokládáme-li, že světlo má nejen energii, nýbrž i hybnost. Foton má hybnost

$$p_f = \frac{h}{\lambda}$$

a energii

$$\varepsilon = h\nu$$

Směr vektoru **M** je týž jako směr šíření světla. Nastane-li při vzájemném působení světla s libovolným tělesem změna vektoru hybnosti **M**, působí na těleso impuls síly **F** Δt vázaný se změnou hybnosti $\Delta \mathbf{M}$ jednoduchým vztahem

$$\mathbf{F} \Delta t = \Delta \mathbf{M},$$

kde Δt je doba, za niž nastane změna vektoru hybnosti o hodnotu $\Delta \mathbf{M}$. Tedy na těleso pohlcující nebo odrážející světlo musí působit určitá síla **F**. Velikost normálové složky této síly, vztažená na jednotku plochy, dává velikost na ni působícího tlaku záření p . Abychom určili velikost tohoto tlaku p , budeme předpokládat, že na povrch látky dopadá ve směru normály n fotonů za sekundu.

Pak platí:

$$n = \frac{\Phi}{\varepsilon},$$

kde Φ je zářivý tok.

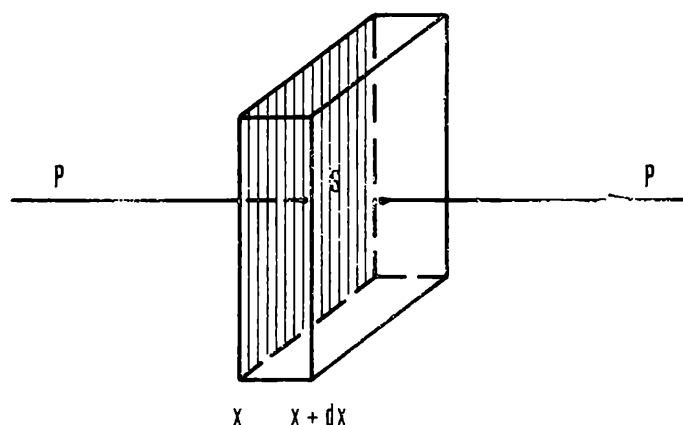
Pohlcuje-li povrch tělesa fotony, předávají mu celkovou hybnost, která se projevuje tlakem

$$p = \frac{\Phi p_f}{S\varepsilon}.$$

Odráží-li povrch dokonale světlo, mění se hybnost každého fotonu na opačnou a tlak světla je roven

$$p = \frac{2\Phi p_f}{S\varepsilon},$$

tj. dvakrát větší než při pohlcování (v důsledku dvojnásobné změny hybnosti $2M$).



Obr. 1

Nabývá-li součinitel (koeficient) odrazu světla od stěny hodnot v intervalu $0 \leq \varrho \leq 1$, je

$$p = \frac{\Phi p_f}{S\varepsilon} (1 + \varrho)$$

Poněvadž pro foton pohybující se rychlostí c platí

$$\varepsilon = h\nu = \frac{h\nu}{c} c = p_f c,$$

dostaneme pro světelný tlak vzorec

$$p = \frac{\Phi}{Sc} (1 + \varrho) = \frac{I (1 + \varrho)}{c}, \quad (1)$$

kde $I = \Phi S$ je intenzita dopadajícího záření,
 ϱ = součinitel odrazu světla.

Energie se při vlnění přenáší tím směrem, jímž se šíří vlnění. Aby bylo možno vystihnout směr přenosu energie, byl zaveden vektor **P** (Umovův-Poyntingův vektor), jehož vyjádření pomocí vektorů **E** a **H** je následující (obr. 1):

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \mathbf{H}$$

Pro lineárně polarizované vlnění, při kterém elektrický vektor **E** kmitá rovnoběžně s osou y , platí kromě $E_x = H_x = 0$ ještě $E_z = 0$, $H_y = 0$, takže

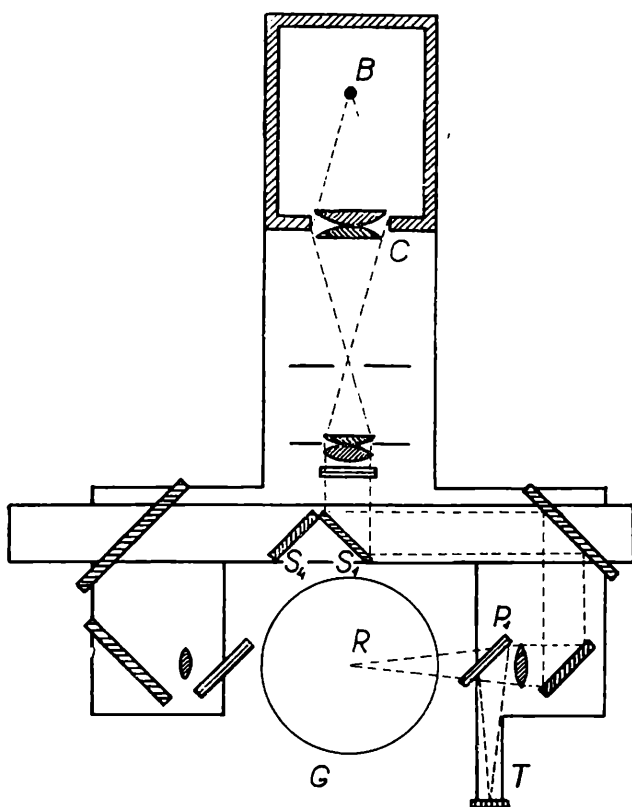
$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = (E_y H_z) \mathbf{i},$$

a proto pro velikost vektoru plyne

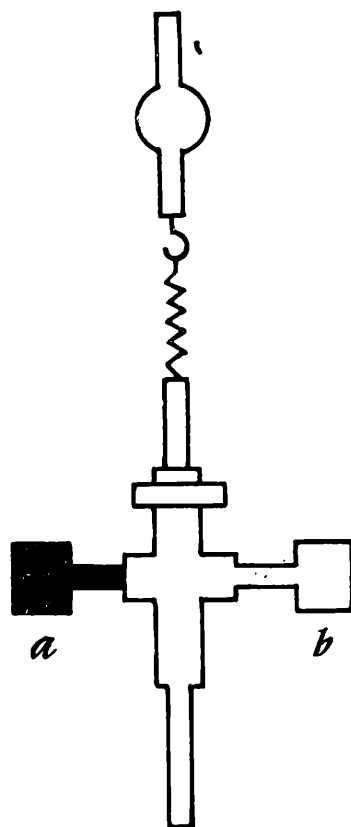
$$P = E_y H_z,$$

která v libovolném místě je rovna součinu rychlosti c šíření vln a celkové hustoty energie v tomto místě

$$P = c\omega$$



Obr. 2



Obr. 3

Na nabité částice působí tedy, nezávisle na znaménku jejich náboje, Lorentzova síla ve směru dopadajícího světelného svazku, tj. směrem dovnitř tělesa. Tato síla určuje tlak světla na povrch látek, který je dán vztahem

$$p = \omega (1 + \varrho) = \frac{P}{c} (1 + \varrho)$$

nebo

$$p = \frac{E_y H_z}{c} (1 + \varrho) ,$$

což je v souladu se vztahem (1).

Základní částí *Lebeděvova* přístroje k experimentálnímu ověření tlaku záření byl velmi lehký závěs na tenkém vlákně, k němuž byla připevněna lehká křídélka a, b, (obr. 2), z nichž jedno bylo začerněné a druhé lesklé. Závěs byl umístěn ve vyčerpané baňce G (obr. 3). Světlo z obloukové lampy B se soustřeďovalo soustavou čoček a zrcadel na jedno křídélko v bodě R. Působením tlaku záření na křídélko se závěs otočil a zkroutil vlákno závěsu. Zkroucení vlákna pozoroval autor dalekohledem a zrcátkem, připevněným k vláknu. Posunutím dvojitého zrcadla $S_1 S_2$ bylo možno vrhnout proud světla buď na přední nebo na zadní stranu křídélka a tím měnit smysl zkroucení vlákna. Srovnáním zkroucení vyvolaných

při osvětlení začerněného a lesklého křídélka mohl Lebeděv určit, že v soulase s teorií je tlak na lesklou plochu dvakrát větší než na plochu začerněnou.

Určitá část toku záření byla odvedena destičkou P_1 na termočlánek T , takže bylo možno měřit velikost dopadající světelné energie a provést kvantitativní ověření teorie. Podle měření P. N. Lebeděva hodnota tlaku záření v mezích pozorovacích chyb souhlasila s hodnotou vypočtenou podle rovnice (1).

Zjištění tlaku záření a tím spíše jeho přesné měření bylo spojeno se značnými experimentálními potížemi, protože otočení zavěšeného systému může být vyvoláno řadou vedlejších příčin. K těmto příčinám patří zejména takzvaný radiometrický tlak, vyvolaný zahříváním zbytků plynu na povrchu křídélka. Později, r. 1908, P. N. Lebeděv řešil ještě obtížnější experimentální úlohu. Objevil a změřil tlak záření na plyny. Tato práce potvrdila pravdivost hypotézy F. A. Bredichina, o které byla zmínka v úvodu článku.

Literatura :

1. Friš Timoreva, Kurs fyziky III, ČSAV, Praha 1964
2. Karjakin N. I. a kol., Přehled fyziky, SNTL, Praha 1970
3. Fuka Havelka, Elektřina a magnetismus, SPN, Praha 1965

Družice měří tvar Země

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Dnes se v našich „gravitačně-kosmonautických“ úvahách zmíníme o družicích, jejichž posláním je sledování gravitačních nepravidelností. Kdybychom zanedbali odpor prostředí, létaly by družice po drahách, připomínajících keplerovské elipsy. Od teoretických křivek se budou odlišovat proto, že nejsou dodrženy počáteční podmínky předpokládané Keplerem: naše planeta a ovšem ani družice nejsou hmotné body a dokonce ani hodnota v jejich nitru není rovnoměrně rozložena; kromě toho se uplatňuje i gravitační působení jiných blízkých nebeských těles, zejména Měsíce a Slunce.

Přesto můžeme všechny tyto vlivy s výjimkou nepravidelností způsobených zemským tělesem zahrnout do výpočtu dráhy a pak konfrontovat výpočet se skutečností. Právě tomu slouží tzv. geodetické družice, které jsou poměrně malé (aby je neovlivňovalo okolní prostředí), vysílají obvykle v astní světelné záblesky (sloužící k zaměřování na obloze

a k časové synchronizaci měření) a navíc jsou uvedeny na takovou dráhu, která se s časem příliš nemění.

Je zřejmé, že případné pozorované odchylky dráhy družice od dráhy vypočtené budou způsobovány především samotným zemským tělesem. Země totiž není ani přesně kulatá, ani hmotně uvnitř stejnorodá; obojí způsobuje gravitační nepravidelnosti, na něž družice reaguje změnou své polohy: družice svůj teoretický „vzor“ náhle buďto předběhne nebo se za ním opozdí. Tímto způsobem lze gravitační nepravidelnosti naší planety „mapovat“ a odtud usuzovat buď na nerovnoměrnosti rozložení hmoty pod povrchem či dokonce na odchylky tvaru Země od teoretického modelu.

Obojí již bylo mnohokrát prováděno, dokonce — zásluhou našeho prof. Dr. *Emila Buchara*, člena korespondenta ČSAV, již pomocí tří prvních sovětských sputníků. Vedlo to k podstatnému upřesnění základních parametrů naší planety, což se zpětně promítlo do přesnějších výpočtů drah družic. To zas mělo za následek zvýšení přesnosti kosmické triangulace při mapování: přesně letící družice, zaměřená současně z několika míst na zemském povrchu, umožní podstatné upřesnění kartografických parametrů.

Při gravimetrických aplikacích družicových měření se přišlo i na to, že na Měsíci existují značné nepravidelnosti nad největšími „moři“; začalo se jim říkat „mascony“ (slovo bylo vytvořeno z termínu „mass concentration“) a jejich další výzkum se ukázal být důležitým nejen pro poznávání měsíční struktury, nýbrž především pro dosažení větší bezpečnosti při nízkých letech nad Měsícem. Bylo např. vypočteno, že lety níže než 5 km nad měsíčním povrchem by mohly skončit havárií, kdyby se loď dostala nad některým masconem do oblasti s odchylnou gravitací.

A ještě jedna zajímavost: dnes se některých družic používá i ke stanovení přesné polohy lodí na oceánu. Ostatně rozdíl mezi těmito tzv. navigačními družicemi a družicemi geodetickými je minimální a týká se pouze způsobu jejich používání.

NAŠE SOUTĚŽ

V soutěži o ceny, kterou jsme vypsali ve druhém čísle Rozhledů, otiskujeme další příklady, a to z fyziky. Řešení těchto příkladů upravená podle návodu ve druhém čísle zašlete nejpozději do konce března 1977 na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13, PSČ 12 134 s označením Naše soutěž.

Úlohy k řešení

Fyzika

1. Určete množství tepla (v joulech), které se uvolní v 10 mg preparátu obsahujícím pouze radioaktivní jádra polonia ^{210}Po za dobu rovnou poločasu rozpadu jader ^{210}Po . Jádro polonia se rozpadá podle schématu: $^{210}\text{Po} \rightarrow ^4\alpha + ^{206}\text{Pb}$. Kinetická energie vysílané částice alfa je rovna 5,3 MeV ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Úlohu nejdříve řešte obecně a pak číselně.

Zdeněk Janout

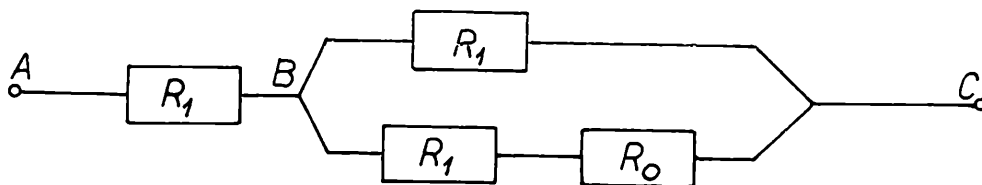
2. Užitím Bohrovy teorie atomu vypočítejte pro pozitronium (soustava tvořená částicemi elektronem a pozitronem, které rotují kolem společného těžiště):

a) vzdálenost mezi oběma částicemi v základním stavu a jejich obvodovou rychlost. Porovnejte vypočtenou rychlost s druhou kosmickou rychlostí.

b) energii (v eV) pozitronia v základním stavu a vlnovou délku elektromagnetického záření, které může pozitronium ionizovat.

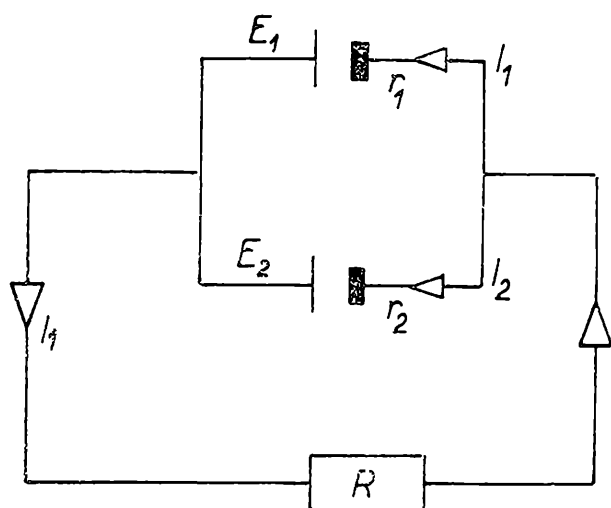
Úlohu řešte nejdříve obecně a potom číselně.

Zdeněk Janout

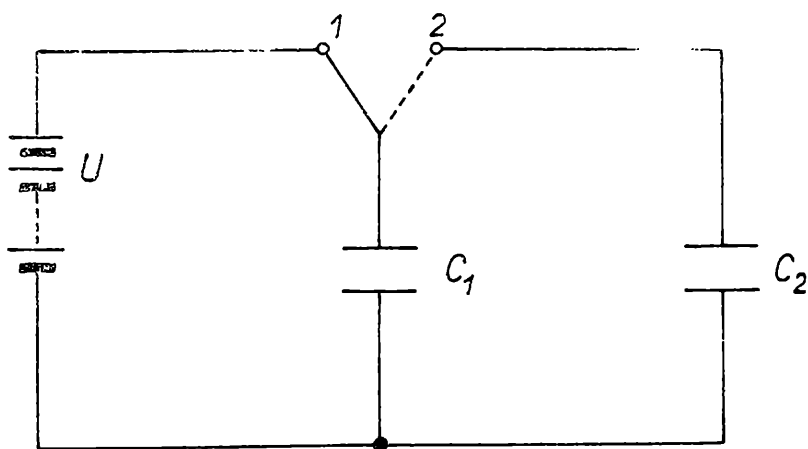


3. Vo vetvenom obvode elektrického prúdu (podľa obr. 1) je daný odpor $R_0 = 5 \text{ ohmov}$. Stanovte odpor R_1 tak, aby celkový odpor medzi bodmi A, C bol tiež R_0 !

Evžen Říman



Obr. 2



Obr. 3

4. V okamžiku, keď sa elektrický vlak dáva do pohybu, pozorovateľ, ktorý stojí u začiatku prvého vagóna, zaznamenal, že prvý vagón išiel mimo neho za dobu $t = 4$ sekundy. Koľko sekundy bude sa mimo neho pohybovať n -tý vagón? Určete pre $n = 7$. (Považujte pohyb za rovnomerne zrýchlený; všetky vagóny sú rovnako dlhé).

Evžen Říman

5. Dva galvanické články, ktorých elektromotorické napätia sú $E_1 = 3,6$ V, $E_2 = 4,5$ V a vnútorné odpory resp. sú $r_1 = 0,4$ Ω a $r_2 = 0,5$ Ω , sú zapojené do obvodu, ktorý má v hlavnom vedení odpor R (viď obr. 2). Stanovte: 1) Aké veľké sú prúdy I_1 , I_2 , I , ak $R = 22$ Ω ? 2) Aké veľké sú prúdy pri skratu, tj. pre $R \rightarrow 0$? 3) Aké veľké je elektromotorické napätie (E) a vnútorný odpor (r) zdroja, ktorý je danej baterii ekvivalentný? 4) Aký veľký by musel byť vonkajší odpor R , aby odpor v prvej vetve bol nulový? 5) Pri akom vonkajšom odpore R sú prúdy v oboch vetvách rovnaké?

Evžen Říman

6. Dva kondenzátory sú paralelne spojené. Kondenzátor s kapacitou $C_1 = 200$ pF bol nabitý na potenciál $U = 120$ V. Potom bola nabíjacia

batéria odpojená a nabitý kondenzátor bol spojený paralelne s iným kondenzátorom neznámej kapacity C_2 (obr. 3). Tým napätie kleslo na $U' = 48$ V. Určete pôvodný náboj Q_1 prvého kondenzátora, kapacitu C_2 , ďalej náboje Q_1 , Q_2 každého z kondenzátorov, keď boli paralelne spojené, a množstvo rozptýlenej energie $\Delta W = W - W'$. Kam sa podela táto energia?

Evžen Říman

Řešení úloh loňské soutěže

Fyzika

3. Vo vodorovnej rovine sa pohybujú dve telesá; prvé o hmotnosti $m_1 = 45$ [g] má vektor rýchlosti $\mathbf{v} = 12 \mathbf{i} + 19 \mathbf{j}$, druhé o hmotnosti $m_2 = 36$ [g] má rýchlosť $\mathbf{v}_2 = -6 \mathbf{i} + 19 \mathbf{j}$. V čase $t_0 = 0$ sa m_1 nachádza v bode $A = [-20, -30]$, teleso m_2 v bode $B = [34, 24]$. (Súradnice sú udané v centimetroch).

1. Stanovte priesečník $P = [x_P, y_P]$ dráh obidvoch telies!

2. Koľko sekúnd trvá telesu m_1 pohyb z bodu A do P a koľko sekúnd potrebuje teleso m_2 , aby sa dostalo z B do P ?
(Došlo 29 riešení).

Evžen Říman

Riešil Vojtech Bardiovský, 4f. SPŠE Košice takto:

Telesá sa pohybujú po priamkach. Rovnica dráhy telesa je teda rovnicou priamky tvaru $y - y_1 = k(x - x_1)$, kde k je smernica vektorevej priamky $\mathbf{v}_1$ (resp. $\mathbf{v}_2$):

$$1. \quad y + 30 = \frac{19}{12}(x + 20) \text{ tj. } 12y - 19x - 20 = 0, \quad (1)$$

$$2. \quad y - 24 = -\frac{19}{6}(x - 34) \text{ tj. } 6y + 19x - 790 = 0 \quad (2)$$

Súradnice priesečníka dráh $[x_P, y_P]$ dostaneme riešením sústavy rovníc (1), (2); dostaneme $x_P = 27,4$ cm; $y_P = 45$ cm.

Teleso m_1 prejde dráhu $\varrho(A, P)$ za čas

$$t_1 = \frac{\varrho(A, P)}{|\mathbf{v}_1|} = \frac{\sqrt{(x_P - x_1)^2 + (y_P - y_1)^2}}{\sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}}$$

Teleso m_2 prejde dráhu $\varrho^r(B, P)$ za čas

$$t_2 = \frac{\varrho(B, P)}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{\sqrt{(x_P - x_2)^2 + (y_P - y_2)^2}}{\sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}}$$

Číselné riešenie je $t_1 \doteq 3,95$ [s]; $t_2 \doteq 1,11$ [s].

4. Vlákno 90-wattovej žiarovky pre napätie $U = 220$ [V] je z wolframu, ktorého teplotný koeficient odporu $\alpha = 4,8 \cdot 10^{-3} [^{\circ}\text{C}^{-1}]$ a má za studena (pri teplote $\vartheta_0 = 20$ $^{\circ}\text{C}$) odpor $R_0 = 12$ Ω .

Stanovte: a) počiatkový prechádzajúci prúd I pri napätí 220 [V];

b) odpor R_1 tohoto vlákna po plnom rozžeravení a prechádzajúci prúd I_1 ;

c) vzrast teploty od okamihu zapnutia prúdu do plného rozžeravenia,

d) Aké z toho vyplýva poučenie pre konštrukciu zapínačov lustrov s veľa žiarovkami?

(Došlo 30 riešení).

Evžen Říman

Václav Krmela, 4. roč. gymn. Lanškroun řešil úlohu takto:

a) Počáteční proud I , procházející žárovkou při připojení na napětí 220 V, je podle Ohmova zákona

$$I = \frac{U}{R_0} = \frac{220 \text{ V}}{12} \doteq 18 \text{ A}.$$

b) Odpor R_1 žárovky při plném rozžhavení určíme takto:

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{90} \frac{\text{volt}^2}{\text{watt}} \doteq 538 \Omega;$$

proud I_1 procházející v tomto případě žárovkou je

$$I_1 = \frac{P}{U} = \frac{90}{220} \frac{\text{watt}}{\text{volt}} \doteq 0,41 \text{ ampér}$$

c) Odpor R_1 lze vyjádřit také takto:

$$R_1 = R_0 [1 + \alpha (\vartheta_1 - \vartheta_0)].$$

Odtud určíme konečnou teplotu ϑ_1 rozžhaveného vlákna

$$\vartheta_1 = \frac{R_1 - R_0}{R_0 \alpha} + \vartheta_0 = \frac{\frac{U^2}{P} - R_0}{R_0 \alpha} + \vartheta_0 \doteq 9\,148 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Teoreticky by se měla teplota vlákna žárovky ustálit na hodnotě 9 148 $^{\circ}\text{C}$. Ve skutečnosti této teploty nemůže dosáhnout, protože teplota tání wolframu je 3 380 $^{\circ}\text{C}$ (dokonce i teplota varu je nižší) a vlákno se přepálí!

Poznámka řešitelova: Zřejmě mělo být v zadání napětí $U = 120$ voltů. Potom by vypočtené hodnoty byly tyto: $I = 10$ A; $I_1 = 0,75$ A; $R_1 = 160$ Ω ; $\vartheta_1 = 2\,590$ °C.

Poznámka autora: Řešitel má úplnou pravdu, což také mnozí jiní řešitelé hlásili. Byla tam zmíněná tisková chyba!

d) Vypínače je nutno konstruovat tak, aby vydržely velký proudový náraz při rozsvícení.

5. Každý cm^2 zemského povrchu přijme za minutu přibližně $8,4$ [Ws] žiarivej energie slunečnej. Vzdialenosť Zeme od Slnka je $R \doteq 150 \cdot 10^6$ [km].

Na koľko rokov takého žiarenia, ako je dnešné, by stačila hmotnosť Slnka, ktoré je dnes $m_0 = 2 \cdot 10^{30}$ [kg]? (Podľa Einsteinovej teórie relativity odpoveda zotrvačnej hmotnosti m množstvo energie $W = m c^2$, kde c = rýchlosť svetla).

(Došlo 29 řešení).

Evžen Říman

Martin Václavík, 2. D gymn.-Vsetín řešil úlohu takto

Určíme nejdříve celkové množství sluneční energie W odpovídající hmotnosti m_0 :

$$W = m_0 c^2 = 2 \cdot 10^{30} \text{ [kg]} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ [m}^2 \text{ s}^{-2}] = 18 \cdot 10^{46} \text{ [J]}$$

Nyní vyjádříme ono množství energie, které Slunce vyzáří za minutu, ze vztahu

$$\overline{W} = S \cdot W_m,$$

kde S je povrch koule o poloměru $r = 150 \cdot 10^9$ [m] a W_m je množství energie, které přijme $1 \text{ [m}^2]$ povrchu za 1 minutu:

$$S = 4\pi r^2 \doteq 4 \cdot 3,14 \cdot 150^2 \cdot 10^{18} \text{ [m}^2] \doteq 28,3 \cdot 10^{22} \text{ [m}^2]$$

Energie přijatá od Slunce v době jedné minuty jest podle zadání

$$W_m = 8,4 \text{ [J min}^{-1} \text{ cm}^{-2}] \doteq 8,4 \cdot 10^4 \text{ [J min}^{-1} \text{ m}^2],$$

takže Slunce vyzáří v době jedné minuty energii

$$\begin{aligned} \overline{W} = S \cdot W_m &\doteq 28,3 \cdot 10^{22} \text{ [m}^2] \cdot 8,4 \cdot 10^4 \text{ [J min}^{-1} \text{ m}^{-2}] \doteq \\ &\doteq 238 \cdot 10^{26} \text{ [J min}^{-1}] \end{aligned}$$

Celkovou dobu t , ve které vydrží hmotnost Slunce vysílat stejné záření jako je dnešní, určíme z podílu

$$t = \frac{W}{\overline{W}},$$

přičemž použijeme převodních vztahů

$$1 \text{ [min]} = \frac{1}{1440} \text{ [dne]}; 1 \text{ [den]} = \frac{1}{365,25} \text{ [roku]},$$

takže

$$1 \text{ [min]} = \frac{1}{1440 \cdot 365,25} \text{ [roku]} \doteq 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ [roku]}$$

Tudíž

$$t = \frac{W}{\overline{W}} = \frac{18 \cdot 10^{46} \text{ [J]}}{238 \cdot 10^{26} \text{ [J} \cdot \text{min}^{-1}]} \doteq 7,563 \cdot 10^{18} \text{ [min]} \doteq \\ \doteq 7,563 \cdot 10^{18} \cdot 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ [roku]} \doteq 1,44 \cdot 10^{13} \text{ [rokov]},$$

tj.: *Dnešní hmotnost Slunce by vydržela zářit stejně jako dnes asi 14,4 biliónu rokov.*

6. Veľmi tenký kruhový kotúč polomeru 15 [cm] má byť na obidvoch stranách elektrolyticky pokrytý vrstvou striebra o hrúbke 0,05 [mm] prúdom 3 ampéry pri napätí 50 voltov.

Vypočítajte (na tri platné číslice):

α) Koľko hodín trvalo pokovovanie?

β) Koľko elektrickej energie sa spotrebovalo?

γ) Koľko gramov striebra je na kotúči?

Dané veličiny sú: hustota striebra je $10,3 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$, elektrochemický ekvivalent striebra je $1,118 \cdot 10^{-3} \text{ [gram/coulomb]}$.

(Došlo 31 riešení).

Evžen Říman

Dušan Šišlák, III. A gymn. Štúrovo riešil úlohu takto:

α) Ak označíme množstvo vylúčeného striebra m , prechádzajúci prúd I , dobu pokovovania t , potom platí podľa prvého Faradayova zákona vzťah

$$t = \frac{m}{A_{Ag} I}, \quad (1)$$

kde A_{Ag} je elektrochemický ekvivalent striebra.

Pre hmotnosť striebra m , ktorá je potrebná na zadané pokovovanie kotúča, platí vzťah $m = \rho_{Ag} \cdot V$, kde V je objem potrebného (vylúčeného) striebra, pre ktorý platí $V = 2\pi r^2 d$, teda

$$m = 2\rho_{Ag}\pi r^2 d. \quad (2)$$

Po dosadení (2) do (1) dostávame

$$t = \frac{2 \rho_{Ag} \pi r^2 d}{I A_{Ag}}$$

Dosadením daných číselných veličín (v sústave SI) dostaneme

$$t = \frac{2 \cdot 10 \cdot 300 \cdot 3,14 \cdot 0,0225 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 1,118 \cdot 10^{-6}} \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{kg} \cdot \text{C}^{-1}} \right] = \\ = 21 \cdot 738 \left[\frac{1}{\text{C} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}} \right] = 21 \cdot 738 \text{ [s]} \doteq 6,038 \text{ [h]}$$

Pokovovanie trvalo 6,038 hodín.

β) Pre elektrickú energiu W , ktorá bola spotrebovaná za čas t pri napätí U a prúde I platí vzťah

$$W = U I t$$

Po dosadení daných veličín je:

$$W = 50 \text{ [V]} \cdot 3 \text{ [A]} \cdot 6,038 \text{ [h]} = 905,7 \text{ [W h]}.$$

Spotrebovalo sa 905,745 [W h] elektrickej energie.

γ) Vzhľadom na to, že kotúč je veľmi tenký, môžeme jeho hrúbku zanedbať a potom pre hmotnosť striebra vylúčeného na kotúči platí vzťah

$$m = \rho_{Ag} \cdot 2\pi r^2 d.$$

Po dosadení daných číselných hodnôt (v sústave SI) je

$$\begin{aligned} m &= 2 \cdot 10^3 \text{ [m]} \cdot \pi \cdot 0,15^2 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ [kg]} = 0,072\,911 \text{ [kg]} = \\ &= 72,911 \text{ [g]} \end{aligned}$$

Na kotúči je 72,911 gramov striebra.

matematickofyzikální zábavy

Tři hry s barevnými koulemi

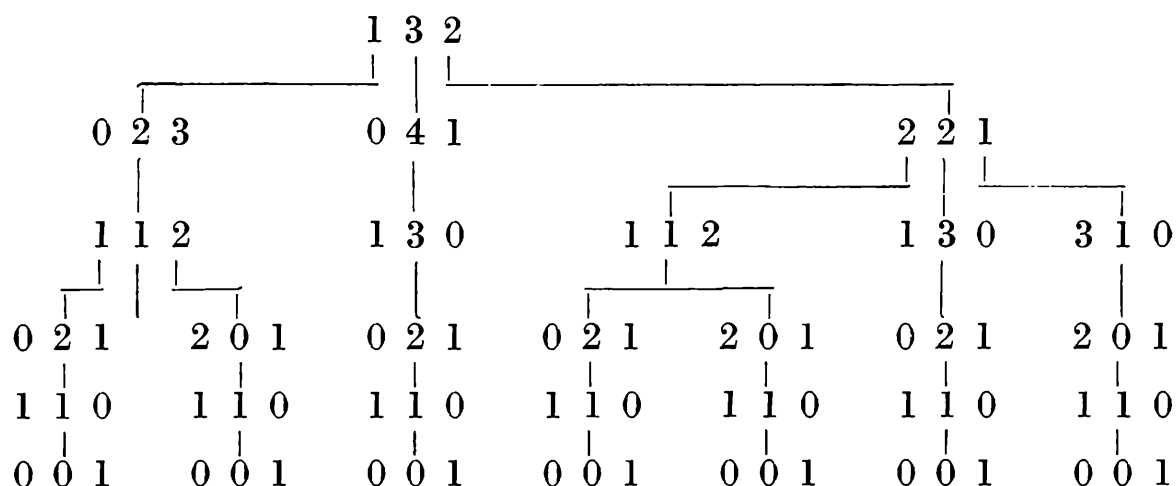
Matematické hry se stávají často středem zájmu větších či menších skupin lidí. Tak tomu bylo i s hrou s barevnými koulemi, kterou se zabývali členové PO SSM při ZDŠ v Praze 8, Lyčkovo náměstí:

Hra I. Na stole leží několik červených, bílých a modrých koulí. Z výchozí pozice se postupuje tak, že při každém tahu se odeberou dvě koule různých barev a nahradí se novou koulí zbývající barvy. Hra končí, jestliže na stole zůstanou pouze koule téže barvy. Máme dokázat, že ve všech případech, kdy na stole zůstane jen jedna koule, je barva této koule závislá pouze na výchozí pozici, nikoliv na průběhu hry.

Uvedeme řešení, ke kterému došel Jan Krajíček, žák 9. ročníku ZDŠ. Poučný je zejména jeho přístup k této úloze. Nejdříve vyšetřoval konkrétní případy. Například hru s výchozím postavením

$$1 \quad 3 \quad 2.$$

V této uspořádané trojici značí první číslo (1) počet červených, druhé číslo (3) počet bílých a třetí číslo (2) počet modrých koulí. Přehled všech her, které končí jedinou koulí, udává strom logických možností:



Porovnáním řady takových pokusů došel Jan Krajíček k *hypotéze* :

Jestliže ve výchozí pozici je právě jedna barva zastoupena lichým nebo právě jedna sudým počtem koulí, pak tuto barvu má i poslední koule (skupina koulí). Jestliže jsou ve výchozí pozici zastoupeny všechny barvy sudým nebo všechny barvy lichým počtem koulí, pak hra nemůže končit tím, že by na stole zůstala jen jedna koule.

Například v uvedené ukázce je ve výchozí pozici červených a bílých koulí lichý počet a modrých koulí sudý počet. Na konci hry zůstala na stole skutečně modrá koule.

Po objevení této hypotézy už není těžké ji dokázat, protože to nejtěžší je již hotovo. Po každém tahu přejde postavení hry

$$A \quad B \quad C$$

do některého ze tří nových postavení

$$(A-1)(B-1)(C+1) \quad (A-1)(B+1)(C-1) \quad (A+1)(B-1)(C-1)$$

Označíme-li sudá čísla S a lichá L , zjistíme, že jediným tahem se změní pozice takto:

$$\begin{array}{ccccccc} S & S & S & L & L & L & S & S & L & L & L & S & \text{atd.} \\ L & \downarrow & L & S & \downarrow & S & L & \downarrow & L & S & \downarrow & S & \\ L & L & L & S & S & S & L & L & S & S & S & L \end{array}$$

To znamená, že se změní parita (vlastnost „být sudý“ nebo „být lichý“) všech barev. Poslední pozice je podle předpokladu 001 anebo 100. Tedy například do konečného postavení

$$1 \quad 0 \quad 0$$

se lze dostat jedině z pozice typu $L \ S \ S$ nebo $S \ L \ L$. Tím je hypotéza dokázána a stává se matematickou větou.

Po rozřešení hry I se celkem přirozeně nabízí další dva problémy, které formulujeme jako hry II a III.

Hra II. Vyšetřete, zda při hře I v těch případech, kdy ve výchozí pozici mají všechny tři barvy stejnou paritu (počty koulí všech tří barev

jsou buď vesměs lichá nebo vesměs sudá čísla) může hra končit kteroukoliv barvou.

Hra III. Na stole leží několik červených, bílých a modrých koulí, přitom počty koulí všech tří barev mají stejnou paritu. Hráč A si zvolí jednu barvu, např. červenou, a hráč B jinou barvu, např. modrou. Hráči táhnou střídavě podle pravidel hry I; začíná hráč A. Jestliže po posledním tahu zůstanou na stole jen červené koule, vyhrává hráč A, zůstanou-li na stole jen modré koule, vítězí hráč B. Ve zbylém případě končí hra remízou. Určete strategii obou hráčů. Zjistěte, při kterých výchozích pozicích si může zajistit vítězství hráč A (hráč B).

Řešení obou her přenecháme čtenářům.

Milan Koman, Jan Krajiček

recenze

E. Madelung:

Průručka matematiky pro fyziků

Vydalo nakladatelství technické a ekonomické literatury Bratislava, 1975; 636 stran, vázaná 44,50 Kčs.

V knize je shrnut rozsáhlý materiál z matematiky a teoretické fyziky. Prvá část knihy je věnována matematickým pojmům, vztahům a metodám řešení s ohledem na potřeby teoretického fyzika. Druhá její část se zabývá základními fyzikálními zákony, vztahy mezi fyzikálními veličinami. Rozvádí problémy, týkající se použití

matematického aparátu pro řešení fyzikálních úloh. V celé knize výrazně vyniká sepětí matematické a fyzikální části. Výběrem a neobyčejným zpracováním látky se autorovi podařilo dosáhnout maximální „fyzikálnosti“ matematické a „matematicčnosti“ fyzikální části.

Předkládaná publikace je určena vědeckým pracovníkům, studentům matematicko-fyzikálních věd a inženýrům, kteří se zabývají problémy teoretické fyziky. Sedmé vydání knihy potvrzuje její vysokou odbornou i metodickou úroveň.

A. Wohlmuthová

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

kuželosečka
středová kuželosečka
kuželový
kuželová plocha
kvádr
kvadrant
kvadratický
kvadratická funkce
kvadratická rovnice
kvadratura kruhu

kvadrika
kvalita
kvantifikátor
kvantita
kvocient
kybernetika

lema
ležet
libovolně zvolený
libovolný
lichoběžník
lichý
limita
limita zleva
limita zprava
lineární
lineární kombinace
lineární lomenná funkce
lineární stupnice
lišit se
litr

conic
central conic
conic
conical surface
cuboid, rectangular parallelepiped
quadrant
quadratic
quadratic function
quadratic equation
quadrature of a circle, squaring
a circle
quadric
quality
quantifier
quantity
quotient
cybernetics

L

lemma
lie
chosen at random
arbitrary
trapezium
odd
limit
left hand limit
right hand limit
linear
linear combination
linear-fractional function
uniform scale
differ
litre

logaritmus
logaritmický
 logaritmická funkce
 logaritmická křivka
 logaritmické pravítko
 logaritmická rovnice
 logaritmická stupnice
 logaritmické tabulky
logaritmování
logika
logický
lokální
lomená čára
loxodroma

logarithm
logarithmic
 logarithmic function
 logarithmic curve
 slide rule
 logarithmic equation
 logarithmic scale
 logarithmic tables
logarithmic calculus
logic
logical
local
broken line
loxodromic line, rhumb line, loxodromic curve

M

magický čtverec
mající derivaci
mající společný bod
mající stejné úhly
majoranta
malý
mantisa
matematický
 matematická analýza
 matematická naděje
 matematická statistika
matematika
matice
 antisymetrická matice
 jednotková matice
 čtvercová matice
 řádková matice
 sloupcová matice
maximální
maximum
medián
méně
měnit
menšenec
menší
menšitel
meridián
měření
měřit

magic square
differentiable
concurrent
isogonal
majorant, upper bound
small
mantissa
mathematical
 calculus
 mathematical expectation
 mathematical statistics
mathematics
matrix
 skew symmetric matrix
 identity matrix, unity matrix
 square matrix
 row matrix
 column matrix
maximal
maximum
median
less
change, vary
minuend
smaller, less than
subtrahend
meridian, north-south line
measurement
measure

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

6

ROČNÍK 55, 1976-1977, ÚNOR



ROČNÍK 55
ÚNOR 1977

6

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMO Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1977.

OBSAH

Dr. J. Žofka, CSc.: Otevřená cesta .	241
Dr. J. Šedivý: Zobrazení zachovávající dělitelnost sedmi	243
Dr. J. Skuhra: Maticové hry proti přírodě	248
L. Železný: O prvočíselných aritmetických posloupnostech	253
Dr. V. Mráz: Normální formy výrokových formulí II	255
S. Horák: Vektory v geometrii II .	266
Dr. P. Kršňák: O zvězku a trse rovin	273
Dr. J. Mrázek, CSc.: O některých aplikacích kosmonautiky I .	278
Dr. M. Koman, CSc.: Korespondenční seminář z kombinatoriky	280
J. Kotyk: Beseda s čtenáři	282
Matematicko-fyzikální zábavy .	284
Recenze	287
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický .	3. a 4. str. obálky

Otevřená cesta

PhDr. JOSEF ŽOFKA, CSc., UK Praha

Každé zamyšlení nad výročím významné historické události je zpravidla též hledáním odpovědi na otázku, co přítomnost s minulostí spojuje a co ji od minulosti dělí. Je prověrkou našich schopností hledat a nalézat souvislosti mezi různými etapami vývoje, nezaměňovat je navzájem, událost posuzovat v souvislosti s konkrétní situací, v níž se udála, která ji vyvolala a určila další vývoj.

Únor 1948 je spolu s květnem 1945 nejvýznamnějším mezníkem novodobých československých dějin. Výsledky únorového vítězství hodnotil na dubnovém zasedání ÚV KSČ v roce 1948 přiléhavými slovy Klement Gottwald: „V Únoru, vezmeme-li vše vnitropoliticky, šlo o to, zda má náš lidově demokratický vývoj pokračovat dále úspěšně na cestě k socialismu, nebo má-li být zvrácen, má-li dojít k zvratu, který by byl začátkem ústupu zpět k dobám předmnichovským, k dobám kapitalismu... Únor 1948 znamenal rozhodnou porážku reakce, upevnění lidově demokratického režimu a uvolnění cesty k rychlejšímu postupu k socialismu.“

Zdroje k pochopení února 1948 spočívají v předcházejícím vývoji národní a demokratické revoluce a složitého procesu jejího přerůstání v revoluci socialistickou v letech 1944–1948. Když byly překročeny meze zájmů buržoazních stran a jevila se nereálnost budování státu na buržoazně demokratických principech, byl další politický, ekonomický a sociální vývoj směrem k socialismu pro ně nepřijatelný. Růst politického napětí se neomezoval jen na vedoucí orgány, ale promítal se do všech nižších článků a celého společenského života. Základní otázkou únorových událostí se stala otázka moci, v níž nešlo jen o zvrát vnitropolitického vývoje, nýbrž i celkovou zahraničně politickou orientaci. Politické střetnutí, k němuž dal podnět okrajový problém odvolání osmi důstojníků SNB, přerostl ve vládní krizi, která vyústila demisí dvanácti ministrů stran národně socialistické, lidové a demokratické z 26členné vlády. Ti očekávali, že prezident republiky demisi odmítne, dosavadní Gottwaldova vláda bude nucena odstoupit a bude vytvořena nová vláda úřednická. Komunisté viděli řešení v přijetí demise a v doplnění vlády

zástupci obrozené Národní fronty. Zdůrazňovali, že Gottwaldova vláda jako celek demisi nepodává a vyzvali všechny lid ke své podpoře. Politická iniciativa komunistů nalezla ohlas ve vytváření akčních výborů Národní fronty, které si vynutily tak rozsáhlou pravomoc, že v těchto vzrušených a dramatických dnech se staly klíčovým orgánem demokratické jednoty našeho lidu. Spolu s podporou Lidových milicí, sjezdu závodních rad a mohutných táborů lidu bylo dosaženo, že prezident republiky dr. Edvard Beneš podle ústavních zvyklostí demisi přijal a jmenoval novou vládu obrozené Národní fronty.

Únor 1948 je předělem, jímž končí etapa boje o politickou moc. Únorové vítězství nebylo jen vnitřní záležitostí Československa, ale také nedílnou součástí třídního zápasu mezi socialismem a kapitalismem ve světovém měřítku, bojem o místo Československa v třídně rozděleném světě. Únorem 1948 ztratila buržoazie podíl na politické moci a vedoucí politickou silou se stala dělnická třída v čele s Komunistickou stranou Československa. Současně vznikly příznivé podmínky k urychlené realizaci záměrů KSČ, které v předchozím období narážely na odpor reakčních sil, např. dokončení znárodnění a vydání nových zákonů, zakotvení revolučních přeměn v Ústavě 9. května, ukončení dlouholetého politického rozštěpení československého dělnického hnutí sloučením KSČ se sociální demokracií. Před Československem se otevřela cesta socialistické výstavby. Generální linii výstavby socialismu v Československu formuloval IX. sjezd KSČ v květnu 1949. Začínala se nová etapa československých dějin.

Nedílnou součástí revolučních přeměn, jimiž se upevňuje a rozvíjí moc dělnické třídy, socialistický stát a socialistická ekonomika, jež utvářejí nové společenské vztahy, jsou výchova a vzdělávání mládeže. Ihned po osvobození a zejména po únoru 1948 se přikročilo k hluboké demokratizaci, k zásadním obsahovým i organizačním přeměnám ve školství, které položily základ jeho socialistického vývoje. Významným činem bylo uzákonění povinné školní docházky pro všechnu mládež do 15 let v rámci jednotné školy, postupné rozšiřování sítě středních a vysokých škol. Jestliže v roce 1938 studovalo na vysokých školách 19 000 studentů, z toho na Slovensku pouze 2200, bylo ve školním roce 1975/76 119 300 studentů denního studia, z toho na Slovensku 47 500. Rychlý růst poznatků ve všech oblastech života společnosti a úsilí, aby každý článek výchovně vzdělávací soustavy důsledně uskutečňoval poslání socialistické školy, vedly k vypracování dlouhodobého programu rozvoje výchovy a vzdělání v naší vlasti, zakotveném v dokumentu „Další rozvoj československé výchovně vzdělávací soustavy“. Konkretizuje se jím program politiky KSČ vychovat vlastní inteligenci třídně a ideologicky spjatou s dělnickou třídou, formulovaný na IX. sjezdu KSČ Klementem Gottwaldem, naplňují se závěry XIV. sjezdu KSČ, červencového zasedání ÚV KSČ v roce 1973 a XV. sjezdu KSČ v roce 1976.

matematika

Zobrazení zachovávající dělitelnost sedmi

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

V základní škole jste poznali tzv. znaky dělitelnosti přirozených čísel dvěma, třemi, čtyřmi, pěti, šesti, osmi a devíti. Dovedete je vyjádřit ve tvaru kritérií se slovy „právě tehdy“? Například:

Přirozené číslo n je dělitelné dvěma právě tehdy, když (jednociferné) číslo zapsané jeho poslední číslicí je dělitelné dvěma.

Zkuste obdobně vyslovit kritérium dělitelnosti čísla n pěti. Formulace zjednodušíme, vyjádříme-li $n = 10a + b$; $n = 100c + d$; $n = 1000e + f$ při $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq d \leq 99$, $0 \leq f \leq 999$. Posuďte sami:

Přirozené číslo $n = 10a + b$ je dělitelné pěti právě tehdy, když číslo b je dělitelné pěti.

Přirozené číslo $n = 100c + d$ je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když číslo d je dělitelné čtyřmi.

Přirozené číslo $n = 1000e + f$ je dělitelné osmi právě tehdy, když číslo f je dělitelné osmi.

Při používání uvedených kritérií nahrazujeme úvahu o čísle n úvahou o jiném čísle n' přiřazeném číslu n předpisem:

$$10a + b \rightarrow b, \quad 100c + d \rightarrow d, \quad 1000e + f \rightarrow f.$$

Tak definujeme určitá zobrazení v množině N_0 všech nezáporných celých čísel; přitom buď vzor n i obraz n' jsou čísla dělitelná uvažovaným číslem (2, 5, 4, 8), nebo žádné z nich jím není dělitelné. Stručně můžeme říkat, že zobrazení zachovává dělitelnost dvěma (resp. pěti, čtyřmi, osmi).

Jak je tomu se znaky dělitelnosti čísel třemi, šesti a devíti?

Vzpomeňte si na pojem tzv. ciferného součtu daného čísla. Číslo 275418 má ciferný součet $2 + 7 + 5 + 4 + 1 + 8 = 27$, číslo 27 má ciferný součet $2 + 7 = 9$. Přiřazujeme-li přirozenému číslu n zapsanému v desítkové poziční soustavě ve tvaru

$$n = c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0$$

ciferný součet, přiřazujeme mu číslo $n' = c_k + c_{k-1} + \dots + c_2 + c_1 + c_0$.

Zobrazení $n \rightarrow n'$ zachovává, jak víte, dělitelnost třemi a devíti; proto můžete snadno vyslovit příslušná kritéria. O dělitelnosti čísel šesti rozhodujete pomocí kritérií pro dělitelnost čísel dvěma a třemi; máte tedy znalosti, které vám umožňují rozhodovat o dělitelnosti libovolného čísla jednociferným dělitelem různým od sedmi.

Chcete poznat některá kritéria dělitelnosti přirozených čísel sedmi?

Ukážeme si, jak „fungují“ dvě zobrazení, která zachovávají dělitelnost sedmi. Ve dvou sloupcích sledujte dvě souběžné úvahy se společnými poznámkami:

Je-li číslo $n = 10a + b$ dělitelné sedmi, existuje celé číslo k , tak, že

$$\begin{array}{ll} 10a + b &= 7k \\ 10a - 20b &= 7k - b - 20b \\ 10(a - 2b) &= 7(k - 3b) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 10a + b &= 7k \\ 10a + 50b &= 7k - b + 50b \\ 10(a + 5b) &= 7(k + 7b) \end{array}$$

Levá strana je dělitelná deseti, proto existuje celé číslo h takové, že

$$\begin{array}{ll} k - 3b &= 10h \\ a - 2b &= 7h \end{array} \qquad \begin{array}{ll} k + 7b &= 10h \\ a + 5b &= 7h \end{array}$$

Ale to znamená, že také číslo zapsané na levé straně je dělitelné sedmi.

Zobrazení $10a + b \rightarrow a - 2b$ zachovává dělitelnost sedmi.

Při tomto zobrazení oddělíme v zápise čísla n poslední cifru a dvojnásobek jí označeného čísla odečteme od čísla zapsaného zbylou částí zápisu.

Zobrazení $10a + b \rightarrow a + 5b$ zachovává dělitelnost sedmi.

Při tomto zobrazení oddělíme v zápise čísla n poslední cifru a pětinasobek jí označeného čísla přičteme k číslu zapsanému zbylou částí zápisu.

Příklad. Začneme číslem $198\,492 = 7.2835$ a sledujme jeho „dráhu“ v množině všech celých čísel při obou popsanych zobrazeních:

$$\begin{array}{ll} 198492 \rightarrow 19849 - 4 = 19845 & 198492 \rightarrow 19849 + 10 = 19859 \\ 19845 \rightarrow 1984 - 10 = 1974 & 19859 \rightarrow 1985 + 45 = 2030 \\ 1974 \rightarrow 197 - 8 = 189 & 2030 \rightarrow 203 + 0 = 203 \\ 189 \rightarrow 18 - 18 = 0 & 203 \rightarrow 20 + 15 = 35 \end{array}$$

Jak vidíte, všechny vzory a obrazy jsou čísla dělitelná sedmi; v obou případech nás opakované zobrazování získávaných čísel dovedlo k číslům nejvýše dvojciferným, jejichž dělitelnost sedmi snadno zjistíme.

Drahou (trajektorii) čísla n v kterémkoliv zvoleném zobrazení rozumíme posloupnost začínající tímto číslem n , pokračující pak jeho obrazem, obrazem obrazu, obrazem obrazu obrazu atd.

Lze dokázat, že dráha libovolného přirozeného čísla n v obou uvažovaných zobrazeních „projde“ oblastí nejvýše dvojciferných čísel? Zkontrolujte tyto argumenty:

V zápise přirozeného čísla $n = 10a + b$ je $a \geq 0$, $0 \leq b \leq 9$, přitom a, b nejsou současně rovna nule.

Protože $9a + 3b > 0$, $0 \leq b \leq 9$,
platí při $a > 18$, že

$$10a + b > a - 2b > 0,$$

tj. obraz každého $n > 189$ je
přirozené číslo menší než vzor.

Pokud $10a + b \leq 189$,

tj. $0 \leq a \leq 18$, $0 \leq b \leq 9$,

platí $-18 \leq -2b \leq 0$, a tedy

$$-18 \leq a - 2b \leq 18.$$

Protože $9a - 4b > 0$ při $a > 4$,

platí $10a + b > a + 5b$ při $a > 4$,

tj. obraz každého přirozeného čísla
 $n > 49$ je přirozené číslo menší
než vzor.

Pokud je $10a + b \leq 49$,

tj. $0 \leq a \leq 4$, $0 \leq b \leq 9$,

platí $0 \leq a + 5b \leq 49$.

V obou případech se tedy po konečném počtu kroků dostaneme do oblasti dvojciferných čísel, ve které známe všechny násobky sedmi. První zobrazení, které vzorům $10a + b$ přiřazuje rozdíly $a - 2b$, dostává i obrazy menší než nula, např. $179 \rightarrow -1$, $28 \rightarrow -14$, $33 \rightarrow -3$, $9 \rightarrow -18$; mezi nimi však též poznáme násobky sedmi.

Obě naše zobrazení mohou poskytnout kritéria dělitelnosti přirozených čísel sedmi, pokud dokážeme ještě toto tvrzení:

Každé přirozené číslo, jehož dráha v daném zobrazení obsahuje násobek sedmi, je samo dělitelné sedmi.

Jestliže $a - 2b = 7h$,

můžeme sestrojit celé číslo

$$k = 3b + 10h$$

a zapsat $10(a - 2b) = 7(k - 3b)$

$$10a + b = 7k$$

Jestliže $a + 5b = 7h$,

$$k = -7b + 10h$$

$10(a + 5b) = 7(k + 7b)$

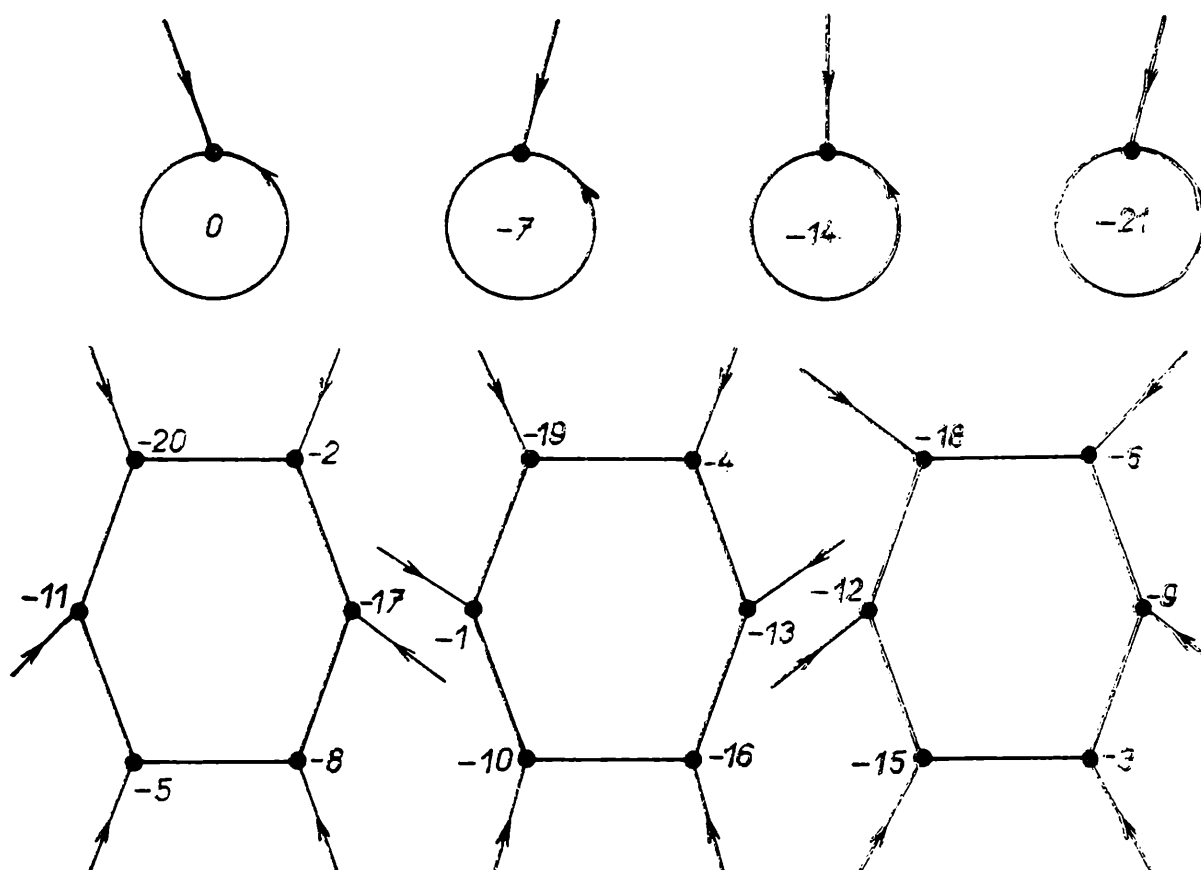
$$10a + b = 7k$$

Zjistili jsme: je-li obraz dělitelný sedmi, pak i vzor je dělitelný sedmi.

Protože každé číslo v dráze čísla n má konečný počet předchůdců, vyplývá odtud, že i první číslo v dráze, tj. číslo n , je dělitelné sedmi.

Vyslovme toto dokázané kritérium dělitelnosti přirozeného čísla sedmi:

Číslo $10a + b$ je dělitelné sedmi právě tehdy, když jeho dráha v zobrazení $10a + b \rightarrow a - 2b$, resp. $10a + b \rightarrow a + 5b$, obsahuje aspoň jedno číslo dělitelné sedmi.



Obr. 1

Příklady

- Číslo 598 není dělitelné sedmi, protože $598 \rightarrow 59 - 16 = 43$ a 43 není dělitelné sedmi.
- Číslo $9758 \rightarrow 975 - 16 = 959 \rightarrow 95 - 18 = 77$, proto 9758 je dělitelné sedmi.
- Číslo $6608 \rightarrow 660 + 40 = 700$, proto 6608 je dělitelné sedmi.

(Dobrý počtář zvládne výpočty z paměti a získá rychlou odpověď.)

Popsaná zobrazení jsou zajímavá, studujeme-li je v oboru $\mathbf{Z}$ všech celých čísel; položme si např. otázku, která celá čísla jsou v nich samodružná. Chceme-li najít odpovědi, musíme řešit v oboru $\mathbf{Z}$ rovnice

$$10a + b = a - 2b$$

$$10a + b = a + 5b.$$

Po snadných úpravách získáme

$$3a = -b$$

$$9a = 4b.$$

Přihlédneme-li k tomu, že $0 \leq b \leq a$, získáme řešení:

$a = 0, b = 0$	$n = 0$	$a = 0, b = 0$	$n = 0$
$a = -1, b = 3$	$n = -7$	$a = 4, b = 9$	$n = 49$
$a = -2, b = 6$	$n = -14$		
$a = -3, b = 9$	$n = -21$		

První zobrazení má zajímavé dvojice vzorů a obrazů v oboru záporných čísel větších než -30 , zatímco druhé nezvyklým způsobem „přehazuje“ přirozená čísla menší než 50 . Zapište si tabulky pro tato zobrazení v naznačených oborech, získáte zajímavé poznatky o zakončeních drah libovolných celých čísel. Na připojeném obrázku vidíte grafický záznam „smyčkových“ konců drah v prvním zobrazení, pořídte si obdobný záznam pro druhé zobrazení.

Náměty pro výzkumníky

- Zobrazení $10a - b \rightarrow a - 2b$ zachovává dělitelnost i dalším prvočíslem různým od sedmi. Kterým?
- Zobrazení $10a + b \rightarrow a + 2b$, $10a + b \rightarrow a - 5b$ zachovávají také dělitelnost jistými prvočísly. Objevíte tato prvočísla?
- Lze využít obdobným způsobem i zobrazení $10a + b \rightarrow a - b$, $10a + b \rightarrow a + b$, $10a + b \rightarrow a + 10b$?
- Objevíte kritéria dělitelnosti přirozených čísel dvojcifernými prvočísly na základě vhodných zobrazení?
- Které z těchto zobrazení má největší počet samodružných čísel? Která z nich mají největší počet smyčkových zakončení drah?

Maticové hry proti přírodě

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

V předchozích článcích jsme si definovali pojem maticová hra a naučili se řešit hry typu $2 \times n$ a $m \times 2$. Nyní si probereme některé zvláštnosti řešení her proti přírodě.

H4. *Ekonomické problémy.* Plánovací komise jednoho výrobního podniku má vypracovat plán pro příští rok. Podnik vyrábí dva druhy výrobků. Investice do výrobku *A* slibuje čistý zisk 35 %, ale pouze tehdy, podaří-li se vládě navázat hospodářské styky se státem USIB. Nebude-li možné výrobek *A* vyvážet, pak se na tuzemském trhu může počítat pouze s 15% ziskem. Výrobek *B* přináší na tuzemském trhu 70% zisk. Budou-li však navázány styky s USIB, bude se k nám podobný výrobek dovážet a podnik musí počítat s 10% ztrátou. Jak má plánovací komise vypracovat plán?

Hráčem I je výrobní podnik, hráčem II je příroda. Výrobní podnik má dvě strategie:

1. strategie — investovat pouze do výrobku *A*,
2. strategie — investovat pouze do výrobku *B*.

Příroda má také dvě strategie:

1. strategie — dopustit, aby hospodářské styky byly navázány,
2. strategie — nedopustit, aby hospodářské styky byly navázány.

Výplaty jsou v tomto případě procenta čistého zisku. Hra H4 je hra typu 2×2 s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 35 & 15 \\ -10 & 70 \end{pmatrix}$$

Hra nemá sedlový bod. Řešení hry dostaneme řešením soustavy rovnic

$$\begin{array}{ll} 35x_1 - 10x_2 - v = 0, & 35y_1 + 15y_2 - v = 0, \\ 15x_1 + 70x_2 - v = 0, & -10y_1 + 70y_2 - v = 0, \\ x_1 + x_2 = 1, & y_1 + y_2 = 1, \end{array}$$

za podmínky $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$.

Vyřešením této soustavy rovnic dostaneme řešení hry

$$\begin{array}{l} X^* = (0,8; 0,2), \\ Y^* = (0,55; 0,45), \\ v = 26. \end{array}$$

Z řešení vyplývá, že plánovací komise si má nalézt náhodný pokus se dvěma výsledky, z nichž jeden má pravděpodobnost 0,8 a druhý 0,2. Mohou například vložit do urny čtyři koule černé a jednu bílou. Vytažení černé koule má pravděpodobnost 0,8, vytážení bílé koule má pravděpodobnost 0,2. Když předseda plánovací komise vytáhne kouli černou, rozhodne tím, že podnik má vložit celou investici do výrobku *A*; vytáhne-li kouli bílou, pak podnik vloží celou investici do výrobku *B*.

V tomto případě je ovšem možná, díky dělitelnosti investic (vždyť jde o peníze), ještě jiná interpretace řešení hry. Pro podnik je nejvýhodnější vložit 80 % investic do výroby výrobku *A* a 20 % investic do výroby výrobku *B*. Tím si podnik zajistí *stálý zisk* 26 %, *ať už příroda dopustí cokoli*. Skutečně, budou-li navázány hospodářské styky s USIB, vynese 80 % investic do výrobku *A* zisk 0,8.35 % a 20 % investic do výrobku *B* ztrátu 0,2.10 %, což dohromady dává

$$0,8 \cdot 35 - 0,2 \cdot 10 = 26.$$

Rovněž pro případ, že hospodářské styky s USIB navázány nebudou,

$$0,8 \cdot 15 + 0,2 \cdot 70 = 26.$$

Druhá interpretace je možná jen díky dělitelnosti peněz a souvisí se sedlovým bodem větší hry o témž konfliktu. Takovou hru lze sestavit například takto:

Podnik, hráč I, bude mít 11 strategií:

1. investovat 100 % do výroby výrobku *A* a 0 % do výrobku *B*,
2. investovat 90 % do výroby výrobku *A* a 10 % do výrobku *B*,
3. investovat 80 % do výroby výrobku *A* a 20 % do výrobku *B*,

11. investovat 0 % do výroby výrobku *A* a 100 % do výrobku *B*.

Příroda, hráč II, bude mít 21 strategií. Až dojde k jednání o navázání styků s USIB, bude mít příroda připraven náhodový mechanismus, který s pravděpodobností p rozhodne, že hospodářské styky budou navázány a s pravděpodobností $q = 1 - p$ rozhodne, že navázány nebudou. Strategie přírody můžeme popsat takto:

1. vybrat náhodový mechanismus s parametry $p = 1, q = 0$,
2. vybrat náhodový mechanismus s parametry $p = 0,95, q = 0,05$.

10. vybrat náhodový mechanismus s parametry $p = 0,55, q = 0,45$,

21. vybrat náhodový mechanismus s parametry $p = 0,00$, $q = 1,00$.
Matice hry je

	1.	10.	21.
1.	35,0	26,0	15,0
2.	30,5	26,0	20,5
3.	26,0	26,0	26,0
4.	21,5	26,0	31,5
...			
11.	-10,0	26,0	70,0

Bod 3,10 je sedlovým bodem této hry a udává nám již známé řešení.

H5. *Problém prodavače.* Prodavač ve stánku na koupališti prodává každou neděli pivo za 3 Kčs a limonádu za 1 Kčs. Přitom pivo nakupuje za 2 Kčs a limonádu za 0,50 Kčs. Je-li slunečno, prodá 500 limonád a 200 piv. Je-li chladno, prodá jen 100 limonád, ale zato 400 piv. Vše, co neprodá, je jeho ztráta, protože prodavač nemá vhodné skladovací prostory a za týden se nápoje zkazí. Jiné počasí přes léto neuvažujeme. Jakou objednávku má prodavač udělat?

Jde opět o hru proti přírodě s ekonomickým charakterem. Hráčem I je prodavač, hráčem II je příroda. Oba hráči mají dvě strategie. 1. strategie prodavače je objednat 500 limonád a 200 piv, jeho 2. strategie je objednat 100 limonád a 400 piv. Příroda má 1. strategii „bude slunečno“ a 2. strategii „bude chladno“. Výplatní matici, jejíž prvky značí zisk, zapíšeme:

$$\begin{pmatrix} 450 & 50 \\ -150 & 450 \end{pmatrix}$$

Tato hra nemá sedlový bod. Její řešení dostaneme opět pomocí systému rovnic, optimální strategií prodavače je vektor $(3/5, 2/5)$, optimální strategií přírody je vektor $(2/5, 3/5)$, hodnota hry je $v = 210$ Kčs.

Stejně jako v předchozí hře není nutné, aby prodavač před napsáním nové objednávky „spustil“ nějaký vhodný náhodový mechanismus. Může stabilně objednávat stále stejné množství piv a limonád, které zjistíme, vytvoříme-li vhodnou širší maticovou hru, která má sedlový bod. Stálá objednávka prodavače bude zahrnovat

$$\frac{3}{5} \cdot 500 + \frac{2}{5} \cdot 100 = 340 \text{ limonád}$$

$$\text{a } \frac{3}{5} \cdot 200 + \frac{2}{5} \cdot 400 = 280 \text{ piv.}$$

Objednávka 340 limonád a 280 piv mu zaručí stálý zisk 210 Kčs bez ohledu na skutečné počasí.

H6. *Péče o nemocné.* Pacienti jsou postiženi chorobou tak dobře známou, že bylo objeveno pět jejích variant, které vyvolává pět kmenů bakterií. Lékař není schopen určit, o který kmen bakterií u jednotlivých pacientů jde. Má k dispozici tři léky. První zaručuje na 50 % zdolání prvních čtyř bakteriálních kmenů. Druhý lék bezpečně potírá první kmen, ale na zbývající kmeny vůbec nepůsobí. Třetí lék ničí v 50 % druhý kmen a je zaručeným prostředkem proti pátému kmenu. Který lék má lékař pacientům předepisovat?

Hráčem I bude pro nás lékař, hráčem II příroda. Hráč I má tři strategie: dát pacientovi pořadě 1., 2., 3. lék. Hráč II má pět strategií: nakazit pacienta po řadě 1., 2., 3., 4., 5. kmenem bakterií. Výplatní matice je typu 3×5

$$\begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 & 50 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

a nemá sedlový bod; $v_d = 0$, $v_h = 50$.

Takovou hru jsme dosud neřešili, proto si důkladně prohlédneme výplatní matici. Hráč II chce snížit své ztráty na minimum. Bude tedy pro něj výhodnější užívat 4. strategie než 1. strategie. Užije-li v partii hráč I svou 1. nebo 3. strategii, výsledek bude stejný. Ale užije-li hráč I svou 2. strategii, budou ztráty hráče II při volbě jeho 1. strategie větší než při volbě 4. strategie.

Říkáme, že 4. sloupec výplatní matice je *dominován* 1. sloupцем výplatní matice. Obecně: sloupec s_1 (řádek $\check{r}_1$) je *dominován* sloupcem s_2 (řádkem $\check{r}_2$), právě když všechny prvky sloupce s_1 (řádku $\check{r}_1$) jsou menší nebo rovny příslušným prvkům sloupce s_2 (řádku $\check{r}_2$). Za stejných podmínek mluvíme též o tom, že sloupec s_2 (řádek $\check{r}_2$) *dominuje* nad sloupcem s_1 (řádkem $\check{r}_1$).

Racionálně hrající hráč II nikdy nebude užívat takové své strategie, která *dominuje* nad jinou strategií z množiny **B** všech jeho strategií. Racionálně hrající hráč I nebude nikdy používat takovou svou strategii, která je *dominována* jinou strategií z množiny **A** všech jeho strategií. Dominování nám umožňuje výplatní matici zredukovat. V našem případě zjistíme ještě, že strategie 1., 2., 3. hráče II dominují nad jeho 4. strategií. Proto strategie 1, 2, 3 $\in$ **B** vypustíme ze svých úvah a dostaneme výplatní matici

$$\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}.$$

Nyní je zřejmé, že strategie $2 \in \mathbf{A}$ je dominována strategií $1 \in \mathbf{A}$. Vypustíme tedy i tuto strategii hráče I a dostaneme hru typu 2×2 , kterou umíme řešit,

$$\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Tato hra má řešení $X = (2/3, 1/3)$, $Y = (2/3, 1/3)$, $v = 100/3$.

Původní hra tedy má řešení $X^* = (2/3, 0, 1/3)$,

$$Y^* = (0, 0, 0, 2/3, 1/3),$$

$$v = 100/3 = 33,3.$$

$$v \doteq 100/3 \doteq 33,3.$$

Lékař má aplikovat 1. lék s pravděpodobností $2/3$ a 2. lék s pravděpodobností $1/3$. Za náhodný pokus mu poslouží třeba pohled na hodinky s vteřinovou ručičkou. Jestliže se delší dobu nedíval na hodinky (řekněme déle než 2 minuty), je poloha vteřinové ručičky náhodná. Jev, že bude ukazovat od 12 do 8, má pravděpodobnost $2/3$ a jev, že bude ukazovat od 8 do 12, má pravděpodobnost $1/3$. Lékaři tedy stačí změřit pacientovi tep (pacientova důvěra v lékaře vzroste) a podle polohy vteřinové ručičky v okamžiku pohledu na hodinky mu předepsat lék. Lék zabere v 33,3 % případů a příroda to nemůže ovlivnit. Příroda má přitom řídit výskyt bakteriálních kmenů tak, že 1., 2., 3. se nebude vůbec vyskytovat a 4. a 5. kmen se vyskytne v poměru 2 : 1.

Ale to příroda nikdy neudělá. Příroda nehraje svou optimální strategií. A v tom se liší hry proti přírodě od ostatních her o dvou hráčích. Obměňme ještě situaci další informací:

Řekněme, že podle vědeckého výzkumu víme, že příroda „míchá“ výskyt bakteriálních kmenů v poměru 1 : 3 : 2 : 1 : 5, tj. že používá smíšené strategie $Y = (1/12, 1/4, 1/6, 1/12, 5/12)$. Účinnost jednotlivých léků v tomto případě je

$$E(1, Y) = \frac{1}{12} 50 + \frac{1}{4} 50 + \frac{1}{6} 50 + \frac{1}{12} 50 + \frac{5}{12} 0 \doteq 29,1,$$

$$E(2, Y) \doteq 8,3,$$

$$E(3, Y) \doteq 56,1.$$

Z toho vyplývá, že lékař má užívat výhradně 3. lék, pokud neví, jakým kmenem bakterií je pacient napaden. Pak budou bakterie zdo-lány v 56,1 % případů.

Předpokládejme, že lékař tuto dodatečnou informaci nezná a hraje stále svou strategií X^* . Pak jeho průměrná výhra je

$$\frac{2}{3} \cdot 29,1 + 0,8,3 + \frac{1}{3} \cdot 56,1 = 36,1.$$

Shrňme: Jestliže se příroda snaží napáchat to nejhorší, co může, pak lékař použije své strategie X^* a jeho terapie bude účinná v 33,3 % pří-padů. Jestliže ale příroda není tak krutá a používá své strategie Y a přitom lékař to neví a stále užívá svou strategií X^* , bude jeho léčba úspěšná v 36,1 % případů. Zná-li však lékař strategii přírody Y , pak bude užívat svou strategií $3 \in \mathbf{A}$, čímž účinnost jeho terapie vzroste na 56,1 %. Dodatečná informace o strategii přírody nám dává vždy mož-nost zlepšit si očekávanou výhru. Získat nějaké znalosti o přírodě se nám vždy vyplatí.

Literatura :

Turnovec F., Chobot M.: Teória hier. SPN, Bratislava 1967

Williams J. D.: Dokonalý stratég. Orbis, Praha 1966

Říha O.: Teorie her. JČSMF 1973

0 prvočíselných aritmetických posloupnostech

LUBOMÍR ŽELEZNÝ, studující VŠE, Praha

Jedním ze zajímavých problémů teorie čísel a rekreační matematiky je problém prvočíselných aritmetických posloupností, tj. posloupností, ve kterých patří větší počet za sebou následujících členů mezi prvočísla. Zpravidla se tyto členy zařazují na „začátek“ posloupnosti a jejich počet nazýváme délkou prvočíselné aritmetické posloupnosti. Není roz-řešena otázka, zda existuje libovolně dlouhá aritmetická posloupnost prvočísel, ani nevíme, zda existuje aritmetická posloupnost prvočísel, která má 100 členů. Cílem článku je informovat čtenáře o současném stavu v této oblasti. Autor našel v roce 1975 tyto aritmetické posloup-nosti prvočísel pro $n = 0, 1, \dots, 9$:

$$\begin{array}{rcl}
23\,100\,n + & & 74\,201; \\
2\,310\,n + & & 2\,564\,251; \\
42\,200\,n - & & 150\,533;
\end{array}$$

Všechny tři uvedené posloupnosti mají délku $k = 10$.

Vztah mezi diferencí a počtem členů je vyjádřen následující větou: Jestliže aritmetická posloupnost $\{an + b\}$ má k prvočíselných členů pro $n = 0, 1, \dots, k - 1$, musí být její difference a dělitelná všemi prvočísly menšími nebo rovnými k .

Jestliže je tedy dána difference a , je maximální počet za sebou následujících prvočíselných členů v libovolné posloupnosti $\{an + b\}$ roven

$$p' - 1$$

kde p' je nejmenší prvočíslo, které se nevyskytuje v rozkladu difference a na součin prvočísel.

Dosavadní počty nalezených aritmetických posloupností s aspoň deseti za sebou následujícími prvočíselnými členy shrnuje tabulka, kde čísla v záhlaví udávají délku posloupností:

	16	15	14	13	12	11	10
Golubev (SSSR)	—	—	—	1	3	18	52
Seredinskij (SSSR)	—	—	1	1	1	—	6
Karst (USA)				1	9	4	11
Root (USA)	1	—	—	—	2	—	—
Karst a Root	—	—	—	1	6	14	48
Escott	—	—	—	—	—	1	—
Železný (ČSSR)	—	—	—	—	—	—	3
	1	0	1	4	20	37	120

Rok	Autor	a_n pro $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$	
1958	V. A. Golubev	$30\,030n + 23\,143$	$k = 12$
1964	V. N. Seredinskij	$60\,060n - 55\,117$	$k = 14$
1969	S. C. Root	$223\,092\,870n + 2\,236\,133\,941$	$k = 16$

Literatura :

- (1) Anzeiger der Öster. Akademie der Wissen.
1969 str. 189—91, 1970 str. 111—112, 1972 str. 20, 178—79
- (2) Journal of Recreational Mathematics
1969 str. 214, 1970, str. 99
- (3) Sierpiński: Co víme a nevíme o prvočíslech

Normální formy výrokových formulí III

Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

V první části jsme ukázali pravdivostní ohodnocení výrokových formulí tabulkovou metodou a uvedli jsme některé významné zákony výrokové logiky. V druhé části jsme poznali, že počet pěti klasických výrokovtvořných spojek můžeme redukovat na menší počet. Zejména jsme dospěli k transformování výrokové formule na úplnou normální disjunktivní formu (úndf) nebo na úplnou normální konjunktivní formu (únkf). Úndf dovoluje stanovit všechna seskupení pravdivostních hodnot výrokových proměnných, pro která tato forma nabývá pravdivostní hodnoty *pravda* ($ph = 1$). Únkf je výhodným tvarem pro určení pravdivostní hodnoty *nepravda* ($ph = 0$), které výroková formule nabývá. Také jsme se naučili zapsat úndf nebo únkf přímo na základě tabulky ph výrokové formule. V této části uvedeme technické modelování výrokových formulí pomocí kontaktů elektrotechnických relé. Využijeme k tomu dosavadních znalostí o úpravách výrokových formulí i tabulkové metody.

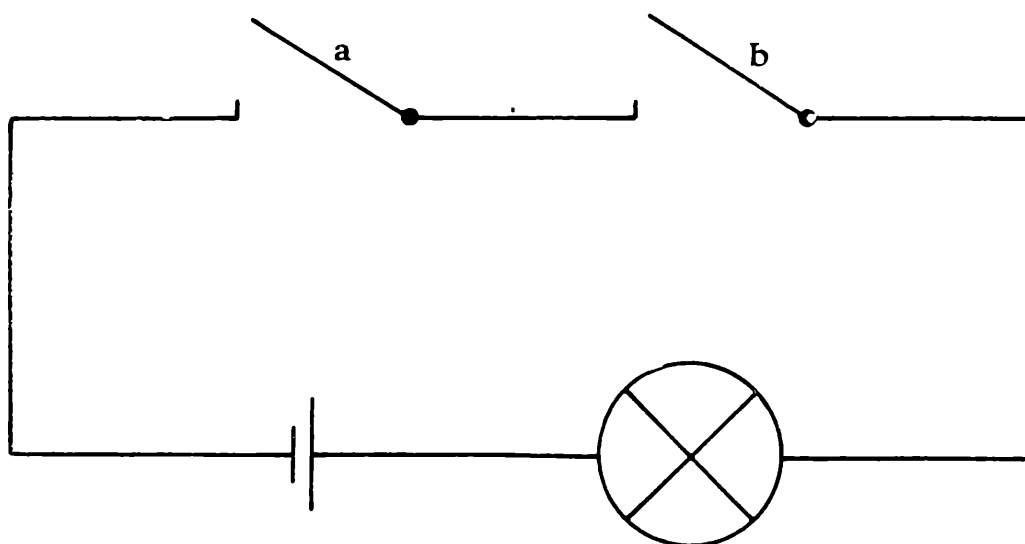


Obr.1a



Obr.1b

Na obrázku 1 jsme znázornili a) spínací kontakt, b) rozpínací kontakt. Funkce kontaktů spočívá v tom, že umožňují nebo zabraňují průchodu elektrického proudu vodičem. Spínací kontakt v klidové poloze nedovolí průchodu elektrickému proudu. Teprve při jeho přeložení do pracovní polohy může elektrický proud vodičem procházet. Rozpínací kontakt naopak v klidové poloze funguje jako nepřerušovaný elektrický vodič a v pracovní poloze vedení elektrického proudu přerušuje. Učinme do-



Obr. 2

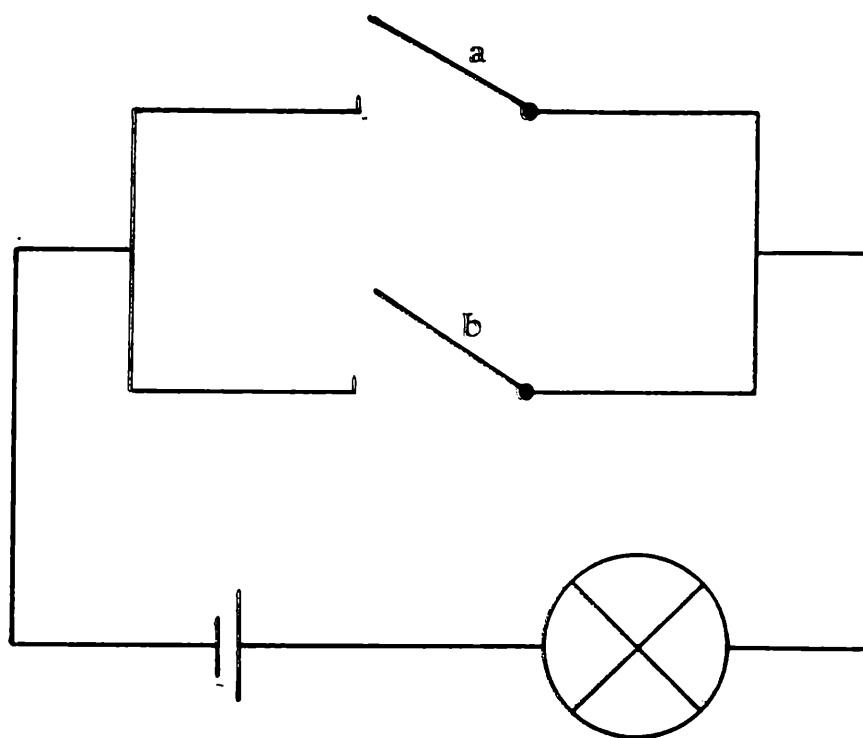
hodu, že ve schématech technických modelů budeme zpravidla kreslit příslušný kontakt v klidové (nepracovní) poloze. V obrázku 1 jsme čárkovaně zakreslili polohu kontaktů v pracovní poloze. Kontakty v elektrotechnických schématech budeme označovat písmenem, kterým označujeme proměnnou ve výrokové formuli. Toto označení je velmi důležité, neboť při jeho záměně by kontaktní obvod nepracoval správně — nebyl by modelem realizované formule.

Model konjunkce. Již jsme poznali, že každou výrokovou formuli můžeme zapsat jen pomocí výrokovtvořných spojek pro negaci „ $\neg$ “, pro konjunkci „ $\wedge$ “ a pro disjunkci „ $\vee$ “. Toho nyní využijeme. Na obrázku 2 jsou zakresleny dva spínací kontakty a , b , jejichž vzájemné zapojení se nazývá *sériové zapojení*. Do elektrického obvodu, do kterého jsou kontakty zapojeny, jsme připojili i zdroj elektrického proudu a žárovku.

Schéma sériového zapojení kontaktů

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Sledujme funkci kontaktního obvodu z obrázku 2 ve srovnání s připojenou tabulkou logické konjunkce. Ukážeme, že čtyři různé polohy kontaktů odpovídají čtyřem řádkům tabulek a obráceně. V nakreslené kli-



Obr. 3

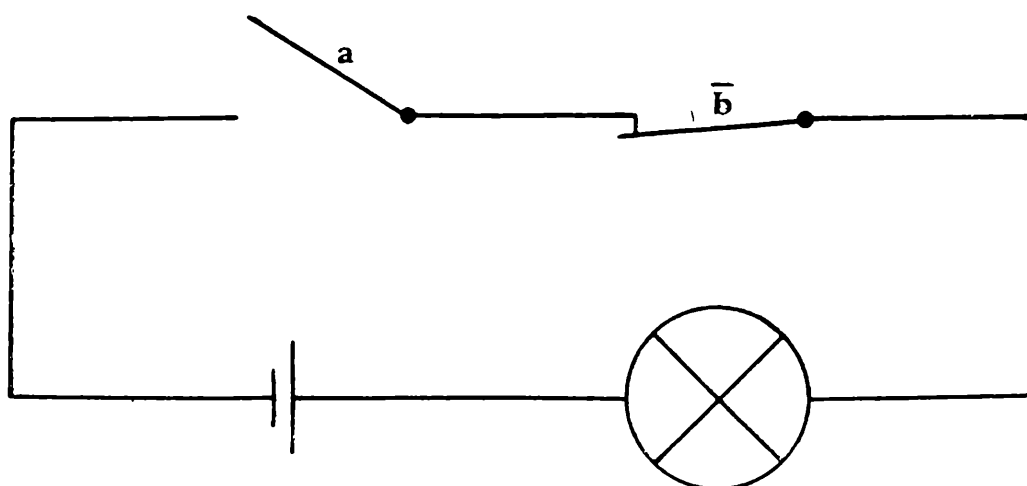
dové poloze jsou oba spínací kontakty a , b rozpojeny ($a = 0$, $b = 0$) a žárovka nesvítí ($a \wedge b = 0$); to odpovídá čtvrtému řádku tabulky.*) Přeloží-li se jen kontakt b do pracovní polohy ($a = 0$, $b = 1$), žárovka opět nebude svítit ($a \wedge b = 0$), což koresponduje se třetím řádkem tabulky. Přeloží-li se jen kontakt a do pracovní polohy ($a = 1$, $b = 0$), což odpovídá druhému řádku tabulky, žárovka rovněž nesvítí ($a \wedge b = 0$). Jen v případě, že oba kontakty a , b jsou v pracovní poloze ($a = 1$, $b = 1$), žárovka se rozsvítí ($a \wedge b = 1$), a to odpovídá prvnímu řádku tabulky konjunkce. Sériové zapojení dvou spínacích kontaktů je elektrotechnickým modelem logické konjunkce.

Model disjunkce. Budeme porovnávat dva spínací kontakty a , b ze schématu v obrázku 3 s tabulkou disjunkce, která je připojena. Nakreslené zapojení se nazývá *paralelní zapojení*. Podle dohody kreslíme kontakty v klidové poloze. Nakreslená poloha tedy odpovídá čtvrtému

Schéma paralelního zapojení kontaktů

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*) Přesněji bychom měli psát např. $\text{ph } a = 0$, $\text{ph}(a \wedge b) = 0$ apod., avšak toto zjednodušení jistě nezpůsobí nedorozumění.



Obr. 4

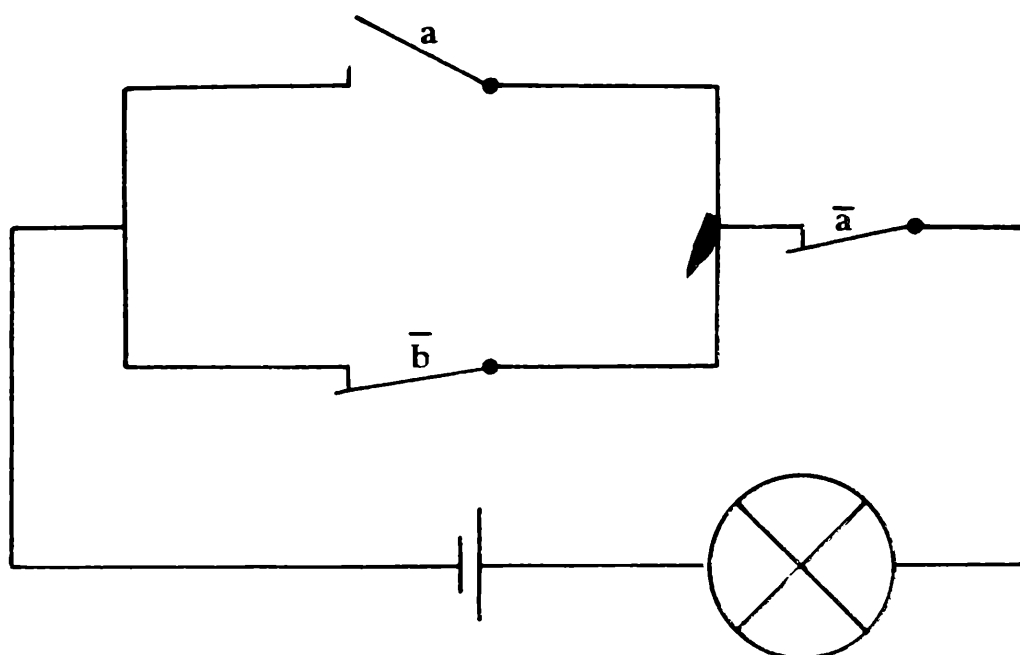
řádku tabulky. Oba kontakty jsou rozpojeny a žárovka nesvítí ($a = 0$, $b = 0$, $a \vee b = 0$). Stačí uvést do pracovní polohy kterýkoliv z kontaktů nebo oba kontakty a průchod elektrického proudu obvodem umožňuje rozsvícení žárovky. Po řadě odpovídá třetímu, druhému a prvnímu řádku tabulky tato korespondence kontaktů a rozsvícení žárovky: $a = 0$, $b = 1$, $a \vee b = 1$; $a = 1$, $b = 0$, $a \vee b = 1$; $a = 1$, $b = 1$, $a \vee b = 1$. Ukázali jsme, že paralelní zapojení dvou spínacích kontaktů je elektrotechnickým modelem logické disjunkce.

Kombinovaná zapojení. Mějme za úkol sestavit technický model k formuli $a \wedge \bar{b}$ (píšeme $\bar{b}$ místo dosavadního $\neg b$, jak je v technice zvykem). Konjunktivní spojení obou výrokových proměnných povede k sériovému zapojení spínacího kontaktu a a rozpínacího kontaktu b . Situaci znázorňuje obrázek 4. V příslušné tabulce je uvedeno pravdivostní

Model formule $a \wedge \bar{b}$

a	b	$a \wedge \bar{b}$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

ohodnocení výrokové formule $a \wedge \bar{b}$. Čtenář si sám porovná všechny čtyři možné polohy obou kontaktů se čtyřmi řádky tabulky na obrázku 4. Snadno zjistí, že v jediném případě bude elektrický obvod uzavřen a žárovka bude svítit. Spínací kontakt a bude přeložen do pracovní polohy a rozpínací kontakt $\bar{b}$ bude v klidové poloze. Všechna ostatní zapojení kontaktů vedou k přerušení elektrického proudu v obvodu.



Obr. 5

Uvedme složitější případ paralelního i sériového zapojení kontaktů, ve kterém jsou zařazeny spínací i rozpínací kontakty. Jistou konkrétní situaci znázorňuje obrázek 5. Schéma na tomto obrázku koresponduje s tabulkou, která uvádí k všem pravdivostním hodnotám proměnným a , b pravdivostní hodnoty formule $(a \vee \bar{b}) \wedge \bar{a}$. Z porovnání tabulky

Model formule $(a \vee \bar{b}) \wedge \bar{a}$

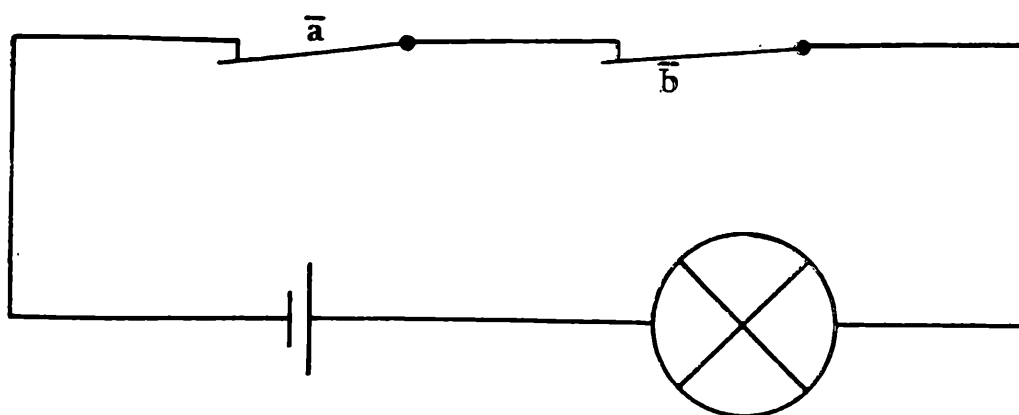
a	b	$(a \vee \bar{b}) \wedge \bar{a}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

a kontaktního obvodu zjistíme, že jedině v klidové poloze všech kontaktů ($a = 0$, $b = 0$) bude žárovka svítit, protože jen v tomto případě má daná formule $\text{ph} = 1$ — viz čtvrtý řádek tabulky.

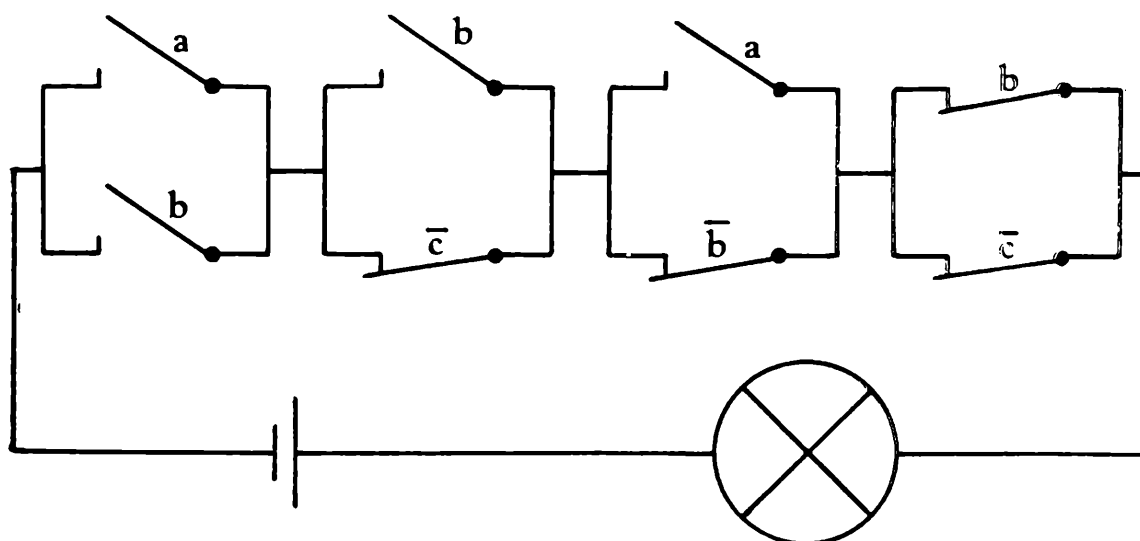
Probraný příklad vede k následující úvaze. Formule $(a \vee \bar{b}) \wedge \bar{a}$ je ekvivalentní s formulí $\bar{a} \wedge \bar{b}$, jak je možno se přesvědčit:

$$(a \vee \bar{b}) \wedge \bar{a} \sim (a \wedge \bar{a}) \vee (\bar{b} \wedge \bar{a}) \sim \bar{a} \wedge \bar{b}.$$

Sériové zapojení dvou rozpínacích kontaktů z obrázku 6 musí splňovat stejné požadavky jako obvod z obr. 5. Dokládá to i příslušná tabulka



Obr. 6



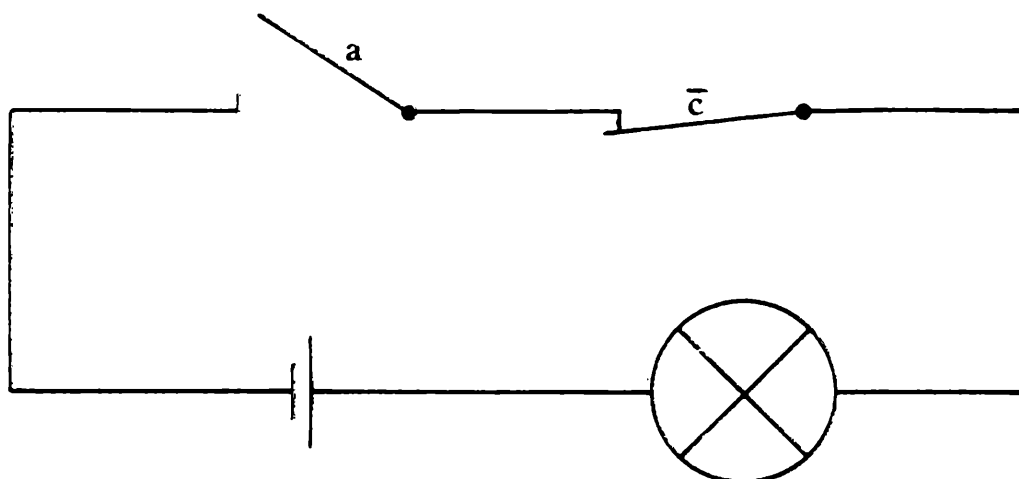
Obr. 7

Model formule $\bar{a} \wedge \bar{b}$

a	b	$\bar{a} \wedge \bar{b}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

pravdivostních hodnot, která obrázek 6 doplňuje. Stačí porovnat obě tabulky z obr. 5 a z obr. 6, popř. i prozkoumat funkci obou kontaktních obvodů. Připomeňme ještě jednou, že oba kontakty a , $\bar{a}$ z obrázku 5 se vždy překládají současně.

Z porovnání plyne poučení. Ukazuje se, že je výhodné upravit formuli tak, aby měla co nejmenší výskyt proměnných, ovšem při zachování ekvivalentnosti. Vede to k zlevnění realizovaného kontaktního obvodu, k menší poruchovosti obvodu i k lepší přehlednosti zařízení.



Obr. 8

Při úpravách formule se může stát, že některá proměnná zcela vypadne. Ukážeme to v následujícím příkladu se třemi proměnnými a , b , c . Sestrojme kontaktní obvod, který realizuje výrokovou formuli

$$(*) \quad (a \vee b) \quad (b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge (b \vee \bar{c})$$

Z formule je patrné, že vystačíme se dvěma kontakty a , se dvěma kontakty b , se dvěma $\bar{b}$ a se dvěma $\bar{c}$. Příslušný obvod je nakreslen na obrázku 7 i s příslušnou tabulkou pravdivostních hodnot:

Model formule $(a \vee b) \quad (b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})$

a	b	c	$(*)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

S formulí $(*)$ je ovšem ekvivalentní řada jiných formulí, které je možno realizovat kontaktními obvody. Z těchto formulí uvedme tu „nejúspornější“ formuli

$$(*)' \quad a \wedge \bar{c}$$

K této formulí nakreslený obvod na obrázku 8 ovšem funguje stejně jako obvod z obrázku 7. Vyplývá to i z porovnání obou tabulek, kterými jsou oba obvody doplněny. Vidíme, že při úpravě formule $(*)$ na tvar $(*)'$ zcela odpadla proměnná b , resp. $\bar{b}$, a ušetří se další kontakty.

Model formule $a \wedge \bar{c}$

a	c	$a \wedge \bar{c}$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Nyní sestrojíme kontaktní obvod k výrokové formuli $f(a, b, c, d)$ dané následující tabulkou. Z důvodu úspornosti jsme v tabulce uvedli jen ta seskupení výrokových proměnných a, b, c, d , pro která nabývá daná

a	b	c	d	$f(a, b, c, d)$
1	1	1	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1

formule pravdivostní hodnoty 1; zbývající seskupení výrokových proměnných, pro něž je pravdivostní hodnota 0, nejsou v tabulce uvedena. Čtenář by si je snadno doplnil (jde o 12 řádků, např. 1, 1, 1, 1; 1, 1, 0, 1; ...; 0, 0, 0, 0 s $\text{ph} = 0$).

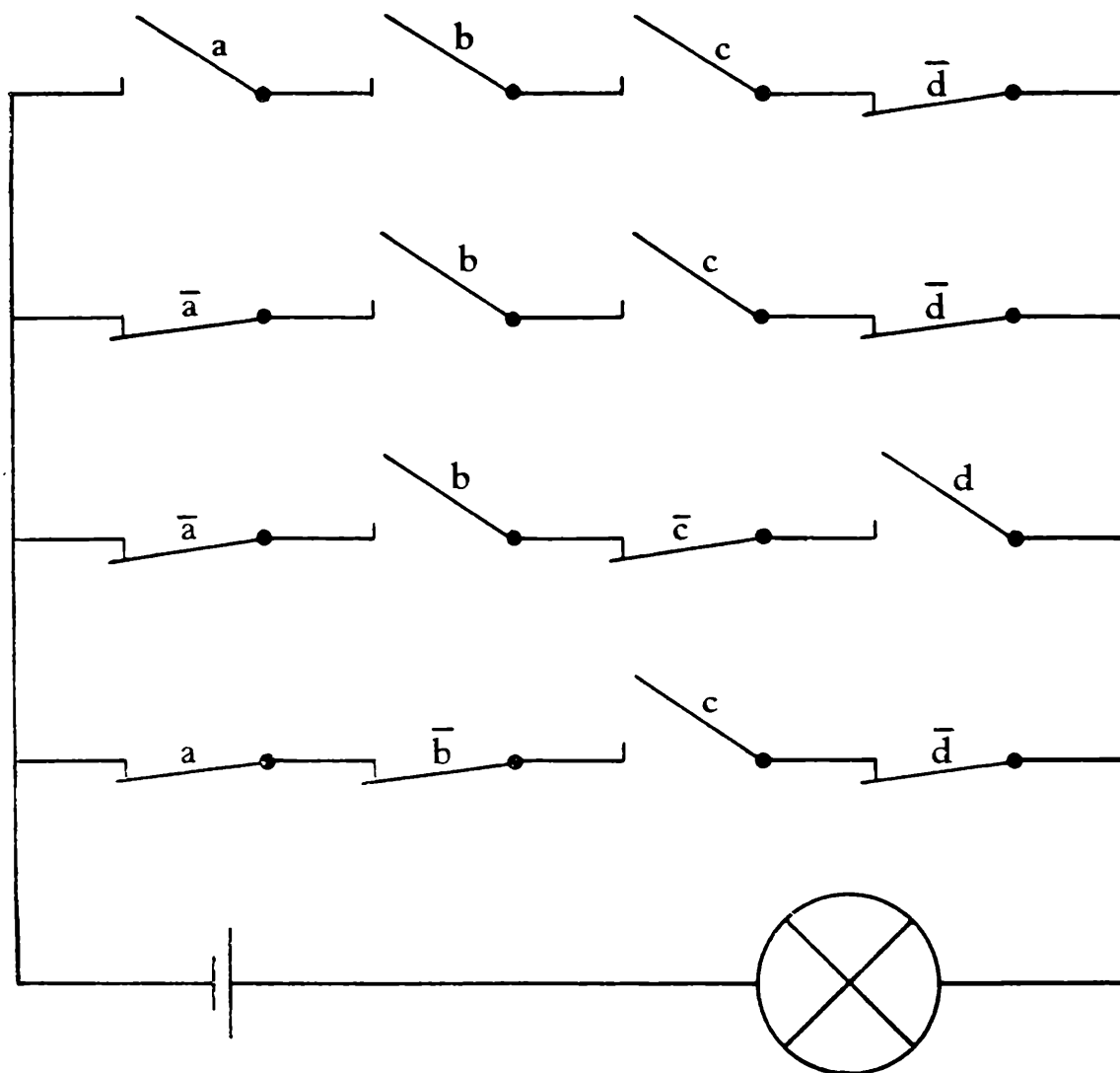
Výrokovou formuli $f(a, b, c, d)$ umíme zapsat ve tvaru úndf, který je:

$$(**) \quad (a \wedge b \wedge c \wedge \bar{d}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c \wedge \bar{d}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d) \vee \\ \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge d).$$

Příslušné kontaktní schéma je na obrázku 9. K ověření správnosti funkce kontaktního obvodu by bylo třeba projít celkem čtyřmi případy různě postavených kontaktů, kdy žárovka svítí, a dvanáct těchto případů, kdy žárovka nesvítí.

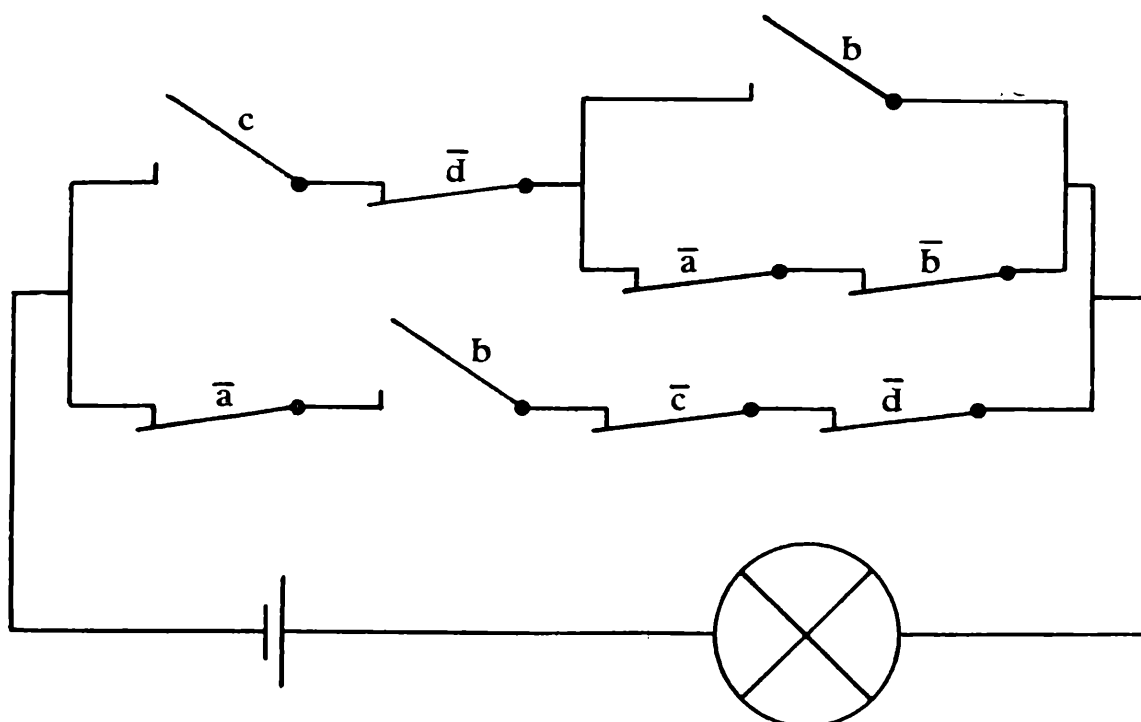
Úpravou formule (**) lze redukovat počet 16 kontaktů čtyř relé na menší počet. Uvedeme jednu z možných úprav, která nakonec vede ke kontaktnímu obvodu s 9 kontakty, jak znázorňuje obrázek 10.

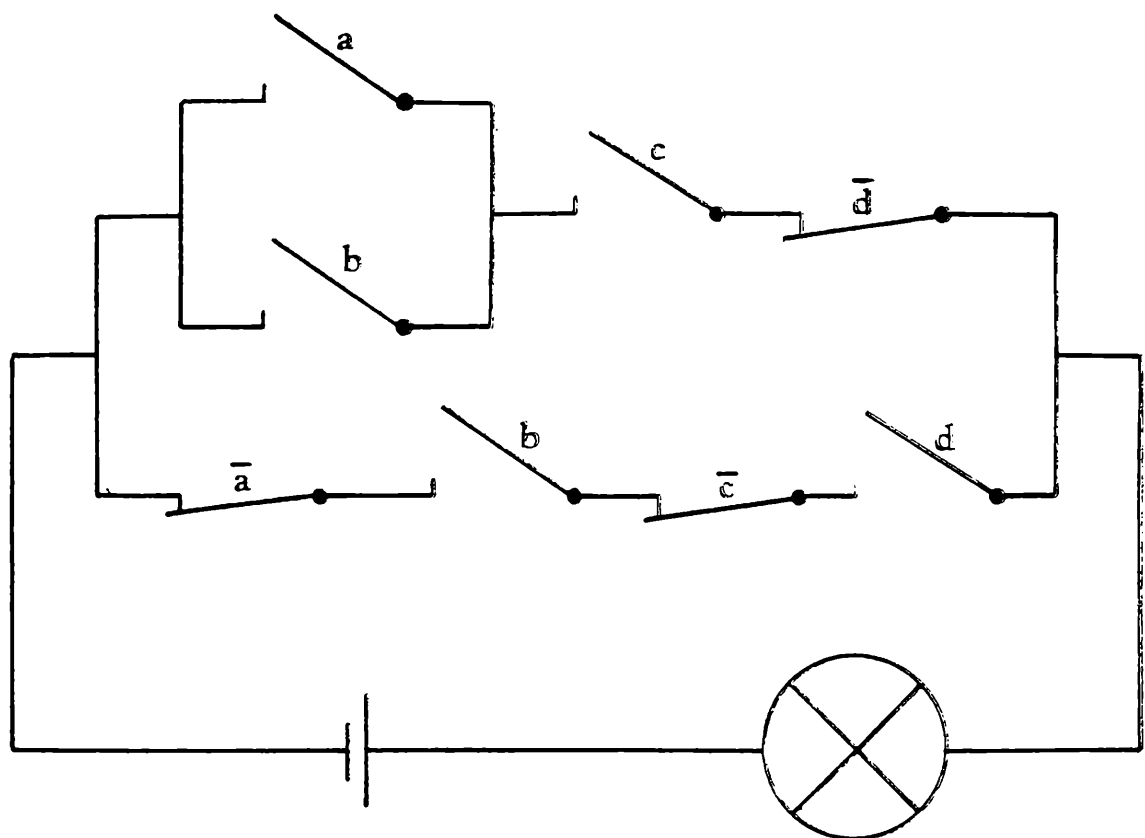
$$\begin{aligned} & (a \wedge b \wedge \bar{c} \wedge \bar{d}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c \wedge \bar{d}) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c \wedge \bar{d}) \sim \\ & \sim (c \wedge \bar{d}) \wedge [(a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})] \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d) \sim \\ & \sim (c \wedge \bar{d}) \wedge \{[b \wedge (a \vee \bar{a})] \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})\} \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d) \sim \\ & \sim (c \wedge \bar{d}) \wedge [b \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})] \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d). \end{aligned}$$



Obr. 9

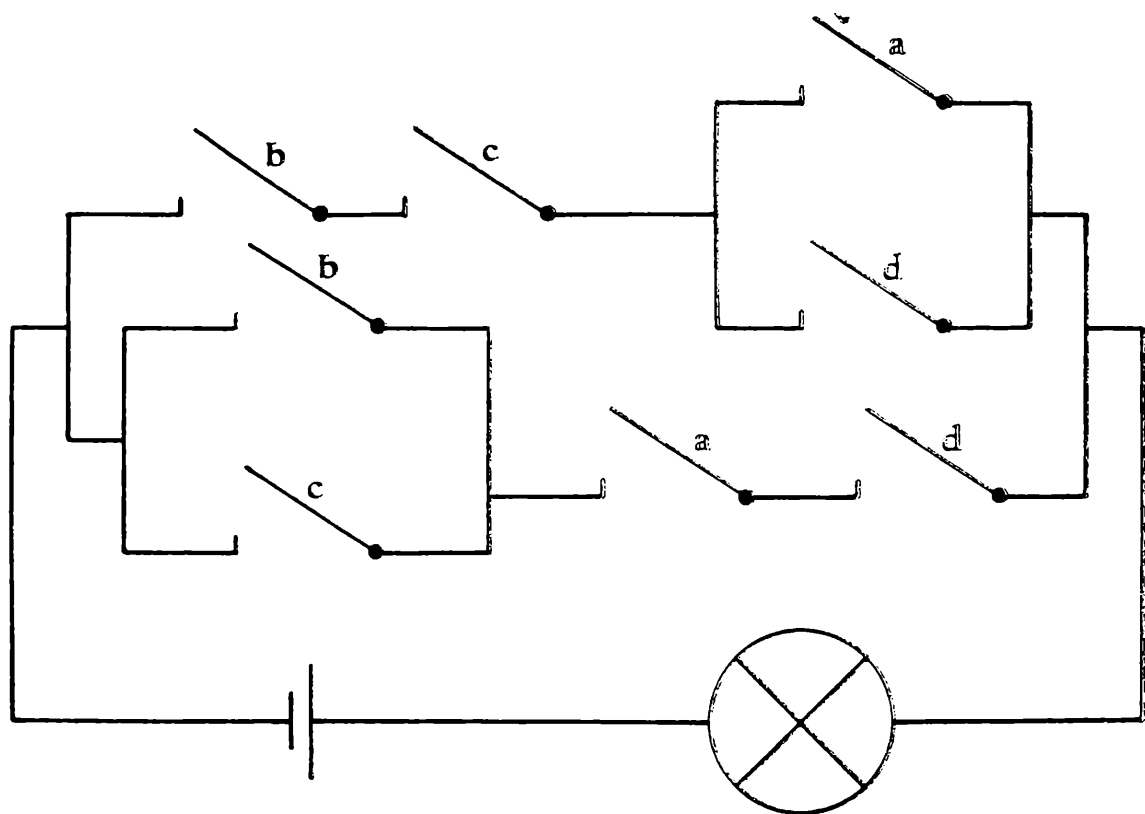
Obr. 10





Obr. 11

Obr. 12



Avšak i tento počet devíti kontaktů lze redukovat jen na osm. Příslušná formule je $[(a \vee b) \wedge c \wedge \bar{d}] \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d)$ a kontaktní obvod je nakreslen na obrázku 11.

Čtenář jistě tuší, že probraná tematika má své četné praktické uplatnění. Z bohaté palety aplikací uvedeme jednu z jednoduchých. Mějme sestrojít zařízení k tajnému hlasování pro čtyři členy výboru. Požadujeme, aby žárovka svítila při většině hlasujících „pro“. V případě rovnosti nebo při menším počtu hlasů „pro“ žárovka svítit nemá. Označíme-li členy výboru písmeny a, b, c, d , číslem 1 hlas „pro“ a číslem 0 hlas „proti“, pak v posledním řádku tabulky číslo 1 značí rozsvícení

a	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
c	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
d	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

žárovky a číslo 0 značí žárovku nerozsvícenou. Podle posledního řádku tabulky již můžeme psát formuli v úplné normální disjunktivní formě. Úplná normální disjunktivní forma bude mít zřejmě pět elementárních konjunkcí:

$$(a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge \bar{d}) \vee (a \wedge b \wedge \bar{c} \wedge d) \vee \\ \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c \wedge d) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge c \wedge d).$$

Po úpravě je $[(b \wedge c) \wedge (a \vee d)] \vee [(b \vee c) \wedge (a \wedge d)]$ a kontaktní obvod s požadovanou funkcí je nakreslen na obrázku 12. Pilný čtenář jistě všech 16 případů projde, aby si ověřil, že sestaveného zařízení je možno použít jako hlasovacího přístroje.

Vektory v geometrii II

STANISLAV HORÁK, Praha

Mějme trojúhelník ABC a označme (obr. 1)

$$AB = \mathbf{c}, BC = \mathbf{a}, CA = \mathbf{b}.$$

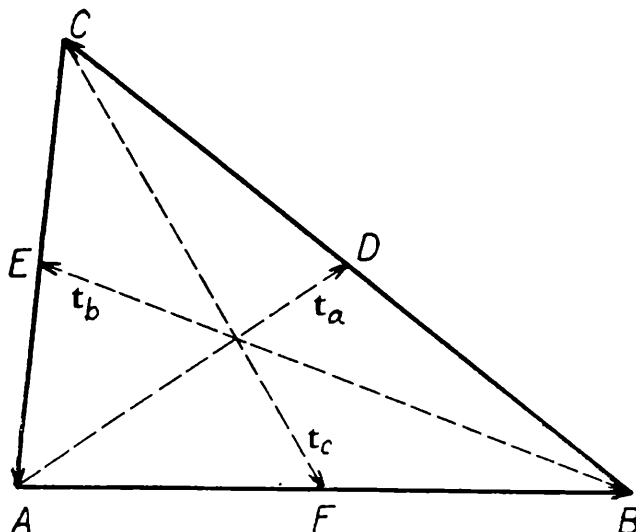
Potom jistě platí

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

kde $\mathbf{0}$ značí nulový vektor. Ale i o vektorech těžnic platí

$$\mathbf{t}_a + \mathbf{t}_b + \mathbf{t}_c = \mathbf{0}, \quad (2)$$

což znamená, že z vektorů těžnic se dá sestrojit trojúhelník.



Obr. 1

Důkaz je snadný. Jestliže F je střed strany AB , pak

$$\frac{1}{2} \mathbf{c} + \mathbf{b} = \mathbf{t}_c$$

a cyklicky další dva vztahy:

$$\frac{1}{2} \mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{t}_a,$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{t}_b.$$

Sečtením všech tří rovnic

$$\mathbf{t}_a + \mathbf{t}_b + \mathbf{t}_c = \frac{3}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0},$$

a tím jsme s důkazem u konce.

Příklad 1. Je dán trojúhelník ABC a jeho těžiště T . V rovině tohoto trojúhelníku je zvolen libovolný bod $P \neq T$. Označíme-li $\mathbf{PA} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{PB} = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{PC} = \mathbf{r}_3$, $\mathbf{PT} = \mathbf{r}_0$, pak platí

$$3 \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3.$$

Dokažte.

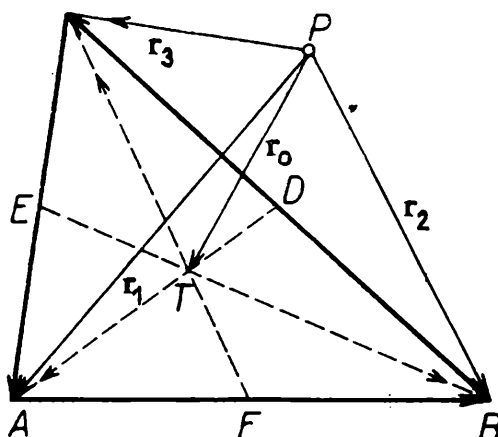
Důkaz (obr. 2). Z trojúhelníku PAT plyne

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{t}_a.$$

Další dvě rovnosti už cyklicky

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_2 + \frac{2}{3} \mathbf{t}_b$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_3 + \frac{2}{3} \mathbf{t}_c.$$



Obr. 2

Důkaz (obr. 2). Z trojúhelníku PAT plyne

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{t}_a.$$

Další dvě rovnosti už cyklicky

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_2 + \frac{2}{3} \mathbf{t}_b,$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_3 + \frac{2}{3} \mathbf{t}_c.$$

Sečtením všech tří vztahů a s použitím vztahu (2) máme

$$3 \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3. \quad (3)$$

což jsme měli dokázat.

Příklad 2 (viz obr. 2). Dokažte, že platí

$$3.PT^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 - (TA^2 + TB^2 + TC^2). \quad (4)$$

Důkaz. Z obr. 2 snadno vyčteme

$$\mathbf{TA} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{TB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0, \mathbf{TC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0.$$

Sestrojíme druhé mocniny délek těchto vektorů a sečteme; užijeme vztahu

$$\begin{aligned} |\mathbf{TA}|^2 + |\mathbf{TB}|^2 + |\mathbf{TC}|^2 &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)^2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0)^2 = \\ &= \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2 + 3\mathbf{r}_0^2 - 2\mathbf{r}_0(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 3r_0^2 = \\ &= PA^2 + PB^2 + PC^2 + 3.PT^2 \quad *) \end{aligned}$$

a tím jsme v podstatě s řešením úlohy hotovi. Právě dokázané větě se říká Leibnizova.

Ve škole probíráte skalární součin vektorů. Existuje však i vektorový součin dvou vektorů. Vektorový součin vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je vektor $\mathbf{w}$.

Píšeme

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}.$$

Vektor $\mathbf{w}$ je kolmý současně k vektoru $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ a pro jeho velikost platí

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \sin \alpha, \quad (5)$$

kde α je úhel vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Dále platí

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

Ze vzorce (5) vyplývá, že $|\mathbf{w}|$ je obsah rovnoběžníku utvořeného z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Okamžitě je také vidět, že pro kolinéární vektory (tj. pro $\alpha = 0^\circ$ nebo $\alpha = 180^\circ$) je $|\mathbf{w}| = 0$ a potom také $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Speciálně platí $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Pro vektorový součin platí též distributivní zákon:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}.$$

Pomocná věta. Mějme tři vektory $\mathbf{PA}$, $\mathbf{PB}$, $\mathbf{PC}$. Nutná a postačující podmínka pro to, aby jejich koncové body A , B , C ležely v přímce, je

*) Symbol $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)^2$ znamená skalární součin $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$.

$$\mathbf{PC} = (1 - k) \mathbf{PA} + k \mathbf{PB}, \quad (6)$$

kde k je libovolné reálné číslo.

Důkaz (obr. 3). Pro stručnost označme

$$\mathbf{PA} = \mathbf{a}, \mathbf{PB} = \mathbf{b}, \mathbf{PC} = \mathbf{c}; \mathbf{AC} = \mathbf{n}, \mathbf{AB} = \mathbf{m}.$$

Pak platí

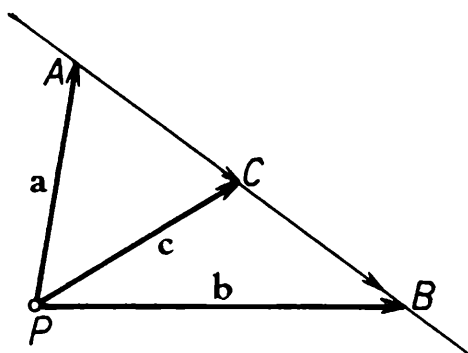
$$\mathbf{m} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{n} = \mathbf{c} - \mathbf{a}.$$

Vektory $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ jsou kolineární, a proto jsou lineárně závislé, tj. $\mathbf{n} = k \cdot \mathbf{m}$, kde k je libovolné reálné číslo.

Dosadíme:

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = k(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{c} = (1 - k)\mathbf{a} + k \mathbf{b}. \quad (7)$$

Obrácením postupu dostaneme, že to je také podmínka postačující.



Obr. 3

Příklad 3. Je dán rovnoběžník $ABCD$; M je střed strany CD , N je střed strany AD . Přímky AM , BN se protínají v bodě P . Dokažte, že obsah trojúhelníku APN je roven $\frac{1}{20}$ obsahu rovnoběžníku $ABCD$.

Řešení (obr. 4). Označme

$$\mathbf{AB} = \mathbf{DC} = \mathbf{a}, \mathbf{BC} = \mathbf{AD} = \mathbf{b}, \mathbf{AM} = \mathbf{m},$$

$$\mathbf{AP} = \mathbf{p}, \mathbf{AN} = \mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{b}, \mathbf{DM} = \frac{1}{2} \mathbf{a}.$$

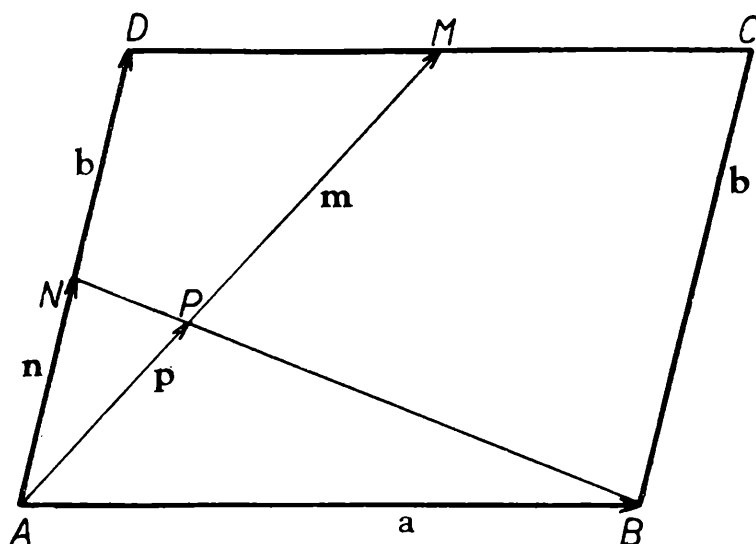
Platí (viz vztah 6):

$$\mathbf{p} = k \mathbf{n} + (1 - k) \mathbf{a} = \frac{1}{2} k \mathbf{b} + (1 - k) \mathbf{a}. \quad (8)$$

Poněvadž P je vnitřní bod úsečky BN , potom k je nějaké reálné číslo z intervalu $(0; 1)$.

Z trojúhelníku ADM dostaneme

$$\mathbf{m} = \mathbf{AM} = \frac{1}{2} \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \mathbf{p} = h \mathbf{m} = h \left(\frac{1}{2} \mathbf{a} + \mathbf{b} \right), \quad (9)$$



Obr. 4

kde h je nějaké reálné číslo. Porovnáním vztahů (8) a (9) dojdeme k rovnici

$$\frac{1}{2} h \mathbf{a} + h \mathbf{b} = \frac{1}{2} k \mathbf{b} + (1 - k) \mathbf{a}$$

a odtud

$$h = \frac{1}{2} k, \quad k = \frac{4}{5}.$$

Tudíž

$$\mathbf{p} = \frac{2}{5} \mathbf{b} + \frac{1}{5} \mathbf{a}.$$

Obsah trojúhelníku APN je

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2} |\mathbf{n} \times \mathbf{p}| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \mathbf{b} \times \left(\frac{2}{5} \mathbf{b} + \frac{1}{5} \mathbf{a} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{10} \mathbf{b} \times \mathbf{a} \right| = \frac{1}{20} |\mathbf{b} \times \mathbf{a}|. \end{aligned}$$

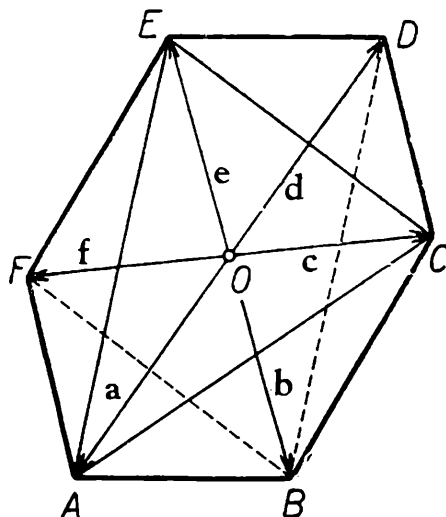
Tím je důkaz proveden, neboť $|\mathbf{b} \times \mathbf{a}|$ je obsah rovnoběžníku $ABCD$.

Příklad 4. Protější strany konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou navzájem rovnoběžné a shodné. (Tj. $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$, ale také $AB \cong DE$, $BC \cong EF$, $CD \cong FA$.) Jakou část obsahu celého šestiúhelníku obsahuje trojúhelník ACE ?

Řešení (obr. 5). Úhlopříčky AD , BE , CF daného šestiúhelníku procházejí jedním bodem, označíme jej O . Důvod tohoto tvrzení je tento:

Čtyřúhelník $ABDE$ je rovnoběžník, a proto jeho úhlopříčky AD , BE — což jsou zároveň úhlopříčky šestiúhelníku $ABCDEF$ — se vzájemně

půlí v bodě O . Čtyřúhelník $BCEF$ je též rovnoběžník, a proto jeho úhlopříčky BE , CF se taky vzájemně půlí. Úhlopříčka BE je oběma rovnoběžníkům společná a poněvadž každá úsečka má právě jeden střed, procházejí všechny tři úhlopříčky bodem O .



Obr. 5

Nyní už můžeme přistoupit k vlastnímu řešení příkladu 4. Označme $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$, $\mathbf{OC} = \mathbf{c}$, $\mathbf{OD} = \mathbf{d}$, $\mathbf{OE} = \mathbf{e}$, $\mathbf{OF} = \mathbf{f}$.

Pro obsah S_3 trojúhelníku ACE platí

$$\begin{aligned} S_3 &= S(ACO) + S(CEO) + S(EAO) = \\ &= \frac{1}{2} (|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| + |\mathbf{c} \times \mathbf{e}| + |\mathbf{e} \times \mathbf{a}|) \end{aligned}$$

Platí však

$$\mathbf{d} = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{e} = -\mathbf{b}, \quad \mathbf{f} = -\mathbf{c}, \quad (10)$$

a tedy po dosazení

$$S_3 = \frac{1}{2} (|\mathbf{a} \times \mathbf{c}| + |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| + |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|).$$

O obsahu S_6 daného šestiúhelníku podobně platí

$$S_6 = \frac{1}{2} (|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| + |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| + |\mathbf{c} \times \mathbf{d}| + |\mathbf{d} \times \mathbf{e}| + |\mathbf{e} \times \mathbf{f}| + |\mathbf{f} \times \mathbf{a}|).$$

S ohledem na (10) se výraz pro S_6 zjednoduší:

$$S_6 = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| + |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| + |\mathbf{c} \times \mathbf{d}| = 2 S_3.$$

Obsah trojúhelníku ACE je dvakrát menší než obsah šestiúhelníku $ABCDEF$.

Příklad 5. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Jestliže platí $AB \parallel CE$, $BC \parallel DA$, $CD \parallel EB$, $DE \parallel AC$, potom též $EA \parallel BD$. — Dokažte.
Řešení (obr. 6). Pro stručnost označme

$$\mathbf{AB} = \mathbf{a}, \mathbf{BC} = \mathbf{b}, \mathbf{CD} = \mathbf{c}, \mathbf{DE} = \mathbf{d}, \mathbf{EA} = \mathbf{e};$$

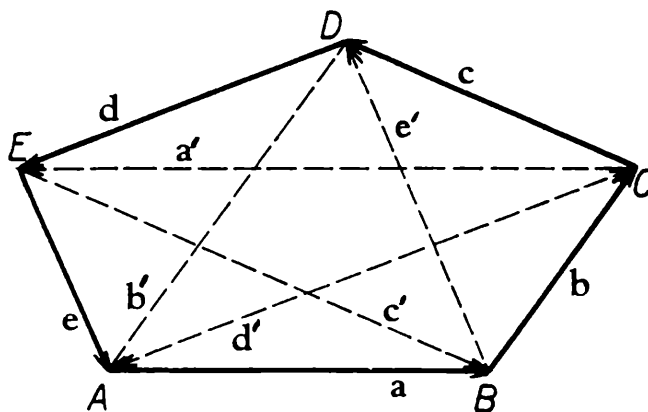
$$\mathbf{CE} = \mathbf{a'}, \mathbf{DA} = \mathbf{b'}, \mathbf{EB} = \mathbf{c'}, \mathbf{AC} = \mathbf{d'}, \mathbf{BD} = \mathbf{e'}.$$

Nyní můžeme psát:

$$\begin{aligned} AB \parallel CE &\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{a'} = \mathbf{0}, \\ BC \parallel DA &\Rightarrow \mathbf{b} \times \mathbf{b'} = \mathbf{0}, \\ CD \parallel EB &\Rightarrow \mathbf{c} \times \mathbf{c'} = \mathbf{0}, \\ DE \parallel AC &\Rightarrow \mathbf{d} \times \mathbf{d'} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{11}$$

Ale

$$\mathbf{a'} = \mathbf{c} + \mathbf{d}, \mathbf{b'} = \mathbf{d} + \mathbf{e}, \mathbf{c'} = \mathbf{e} + \mathbf{a}, \mathbf{d'} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$



Obr. 6

To dosadíme do rovnic (11), které hned sečteme:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{e} + \mathbf{a}) + \mathbf{d} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Vynásobíme:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{e} + \mathbf{c} \times \mathbf{e} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{d} \times \mathbf{a} + \mathbf{d} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Poněvadž

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{d} = -\mathbf{d} \times \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{d} = -\mathbf{d} \times \mathbf{b},$$

zjednoduší se naše rovnice:

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{e} = \mathbf{0},$$

což znamená, že vektory (jsou to vektory nenulové) $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{e}$ jsou rovnoběžné. Ale $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{e'}$, a proto jsou rovnoběžné vektory $\mathbf{e}$, $\mathbf{e'}$ (tj. přímky EA , BD), což jsme měli dokázat.

Cvičení

1. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$: K (L) je střed strany AB (BC). Užitím vektorového počtu dokažte, že $KL \parallel AC$.

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Střed strany CD označme M . Úhlopříčka AC protíná přímku BM v bodě P . Vypočítejte poměr $S(PBC) : S(ABCD)$.

3. Uvnitř daného ostrého úhlu XPY je dán bod M . Tímto bodem je proložena přímka m , která ramena PX , PY protíná po řadě v bodech A , B . Dokažte, že poměr

$$V = S^2(PAE) \cdot S(PAM) \cdot S(PBM)$$

je nezávislý na volbě přímky m .

[Obsah $S(PAB) = |\mathbf{PA} \times \mathbf{PB}| = PA \cdot PB \cdot \sin(\angle APB)$. Stejným způsobem vyjádřete obsahy druhých dvou trojúhelníků.]

konstruktivní geometrie

0 zväzku a trse rovín

RNDr. PAVEL KRŠŇÁK, PF v Ban. Bystrici

V zbierke úloh pre 2. roč. gymnázia (SPN, Bratislava, 1971) sú okrem iných uvedené aj príklady parametrického a neparametrického vyjadrenia priamky a roviny, ďalej príklady na vyšetrovanie vzájomnej polohy priamky a roviny, resp. dvoch alebo troch rovín. Vzhľadom na preberané učivo na strednej škole predpokladáme, že čitateľ pozná podmienky rôznobežnosti dvoch rovín α , β , ktoré sú dané neparametrickými rovnicami, t. j.

$$\alpha: p_1x + p_2y + p_3z + p_4 = 0$$

$$\beta: q_1x + q_2y + q_3z + q_4 = 0, \quad (1)$$

kde $x, y, z \in R$, $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0$, $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \neq 0$.

pričom R je teleso reálnych čísiel;

Ďalej predpokladáme, že čitateľ vie riešiť dve (tri) lineárne rovnice s tromi neznámymi, pozná geometrický význam riešenia a geometrický význam usporiadanej trojice (p_1, p_2, p_3) koeficientov neparametrickej rovnice roviny $p_1x + p_2y + p_3z + p_4 = 0$.

1. Nech roviny α , β dané rovnicami (1) sú rôznobežné. Sčítaním rovníc (1) dostaneme

$$(p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)y + (p_3 + q_3)z + p_4 + q_4 = 0 \quad (2)$$

Vzhľadom na predpoklad, že roviny α, β sú rôznobežné, rovnica (2) je lineárna, a pretože oborom premenných x, y, z je množina R^3 , je (2) rovnicou roviny, ktorá obsahuje priesečnicu rovín α, β . (Rozmyslite si spôsob dôkazu posledného tvrdenia).

Ak druhú z rovníc (1) odčítame od prvej, potom rovnica

$$(p_1 - q_1)x + (p_2 - q_2)y + (p_3 - q_3)z + p_4 - q_4 = 0$$

je znova rovnicou roviny, ktorá obsahuje priesečnicu rovín α, β .

Analogický záver dostaneme, ak λ — násobok ľubovoľnej z rovníc (1) pripočítame k druhej.

Uvedená úvaha sa dá zovšeobecniť. Najskôr uvidíme definíciu.

Definícia 1. Nech o je priamka. Množina všetkých rovín priestoru π_3 , ktoré obsahujú priamku o , sa nazýva zväzok rovín; priamka o je os tohoto zväzku.

Poznámka 1. Nech α, β sú rôznobežné roviny. Zväzok, ktorého osou je priesečnica rovín α, β , budeme označovať (α, β) .

Veta 1. Nech roviny α, β dané rovnicami (1) sú rôznobežné; potom každá rovina priestoru π_3 patrí do zväzku (α, β) práve vtedy, keď jej rovnicu je možno napísať vo tvare

$$\lambda_1 (p_1x + p_2y + p_3z + p_4) + \lambda_2 (q_1x + q_2y + q_3z + q_4) = 0 \quad (3)$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ a $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$.

Dôkaz. Rovnica (3) je skutočne rovnicou roviny, lebo je to lineárna rovnica o troch premenných. Rovina ňou určená patrí do zväzku (α, β) lebo súradnice všetkých bodov priesečnice rovín α, β , t. j.

$$x = \frac{p_2q_3 - p_3q_2}{p_1q_2 - p_2q_1} u + \frac{p_2q_4 - p_4q_2}{p_1q_2 - p_2q_1}, \quad p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0,$$

$$y = \frac{p_3q_1 - p_1q_3}{p_1q_2 - p_2q_1} u + \frac{p_4q_1 - p_1q_4}{p_1q_2 - p_2q_1}, \quad z = u, \quad u \in R,$$

vyhovujúce rovniciam (1) splňajú zrejme aj rovnicu (3).

Obrátené tvrdenie platí tiež, dokazovať ho nebudeme.

Príklad 1. Napíšte neparametrickú rovnicu roviny γ , ktorá prechádza bodom $P(2, -1, 1)$ a patrí do zväzku (α, β) , keď

$$\alpha: x - 3y + z - 4 = 0$$

$$\beta: 2x + y - 2z + 2 = 0.$$

Riešenie. Rovina γ patrí do zväzku (α, β) , preto jej rovnicu je možno napísať vo tvare

$$\lambda_1(x - 3y + z - 4) + \lambda_2(2x + y - 2z + 2) = 0. \quad (4)$$

Pretože rovina γ má prechádzať bodom P , jeho súradnice musia splňať rovnicu (4), čiže musí platiť

$$\lambda_1(2 + 3 + 1 - 4) + \lambda_2(4 - 1 - 2 + 2) = 0$$

alebo

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0.$$

Obor pravdivosti poslednej rovnice je množina o nekonečne veľa prvkoch. Pre našu úlohu stačí vziať z tohoto oboru ľubovoľnú dvojicu. Pre $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ dostaneme hľadanú rovnicu

$$-3(x - 3y + z - 4) + 2(2x + y - 2z + 2) = 0$$

alebo po úprave

$$x + 11y - 7z + 16 = 0.$$

Poznámka 2. Po dosadení rôznych nenulových dvojíc vyhovujúcich rovnici $2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$ dostaneme ekvivalentné rovnice, ktorým odpovedá tá istá rovina.

Príklad 2. Napíšte neparametrickú rovnicu roviny γ , ktorá je kolmá na rovinu σ : $3x - y + 4z - 6 = 0$ a patrí do zväzku (α, β) z príkladu 1.

Riešenie. Rovnica roviny γ je tvaru (4), odkiaľ po úprave dostaneme

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2)x + (-3\lambda_1 + \lambda_2)y + (\lambda_1 - 2\lambda_2)z - 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0.$$

Z rovnice roviny σ vyplýva, že vektor $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ je smerový vektor všetkých priamok kolmých na rovinu σ . Podobne $\mathbf{w} = (\lambda_1 + 2\lambda_2, -3\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - 2\lambda_2)$ je smerový vektor všetkých priamok kolmých na rovinu γ , a teda

$$\sigma \perp \gamma \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

Dosadením do poslednej rovnice za $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ dostaneme

$$(3, -1, 4) \cdot (\lambda_1 + 2\lambda_2, -3\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0,$$

alebo po vykonaní skalárneho násobenia

$$3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0,$$

t. j.

$$10\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0.$$

Usporiadaná dvojica $[3, 10]$ patrí do oboru pravdivosti poslednej rovnice, a preto rovnica roviny γ je

$$3(x - 3y + z - 4) + 10(2x + y - 2z + 2) = 0$$

alebo

$$\gamma \equiv 23x + y - 17z + 8 = 0.$$

Roviny σ , γ sú skutočne kolmé, lebo:

$$(3, -1, 4) \cdot (23, 1, -17) = 69 - 1 - 68 = 0.$$

2. Majme dané tri roviny α, β, γ s rovnicami

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv p_1x + p_2y + p_3z + p_4 = 0 \\ \beta &\equiv q_1x + q_2y + q_3z + q_4 = 0 \\ \gamma &\equiv r_1x + r_2y + r_3z + r_4 = 0,\end{aligned}\tag{5}$$

kde $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \neq 0, q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \neq 0, r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \neq 0$.

Predpokladajme, že roviny α, β, γ majú spoločný práve jeden bod $M(x_0, y_0, z_0)$. Vieme, že takýto bod existuje práve vtedy, keď sústava (5) má jediné riešenie (x_0, y_0, z_0) .

Definícia 2. Množinu všetkých rovín priestoru π_3 , ktoré majú spoločný práve jeden bod S , nazývame trs rovín o strede S .

Poznámka 3. Nech α, β, γ sú roviny, ktoré majú spoločný práve jeden bod S . Trs rovín so stredom S budeme označovať (α, β, γ) .

Veta 2. Nech roviny α, β, γ dané rovnicami (5) majú spoločný práve jeden bod, potom každá rovina priestoru π_3 patrí do trsu (α, β, γ) práve vtedy, keď jej rovnicu je možno napísať vo tvare

$$\begin{aligned}\lambda_1(p_1x + p_2y + p_3z + p_4) + \lambda_2(q_1x + q_2y + q_3z + q_4) + \\ + \lambda_3(r_1x + r_2y + r_3z + r_4) = 0\end{aligned}\tag{6}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ a $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$.

Dôkaz. a) Rovnicu (6) upravme do tvaru

$$\begin{aligned}x(p_1\lambda_1 + q_1\lambda_2 + r_1\lambda_3) + y(p_2\lambda_1 + q_2\lambda_2 + r_2\lambda_3) + \\ + z(p_3\lambda_1 + q_3\lambda_2 + r_3\lambda_3) + p_4\lambda_1 + q_4\lambda_2 + r_4\lambda_3 = 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Podľa predpokladu je aspoň jedno z čísel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rôzne od nuly, preto v rovnici (7) je aspoň jeden z koeficientov pri premenných x, y, z rôzny od nuly, teda (7) je lineárna rovnica s tromi neznámymi, a preto (6) je rovnicou roviny. Súradnice stredu trsu spĺňajúce rovnice (5) spĺňajú aj rovnicu (6), preto rovina o rovnici (6) patrí do trsu (α, β, γ) .

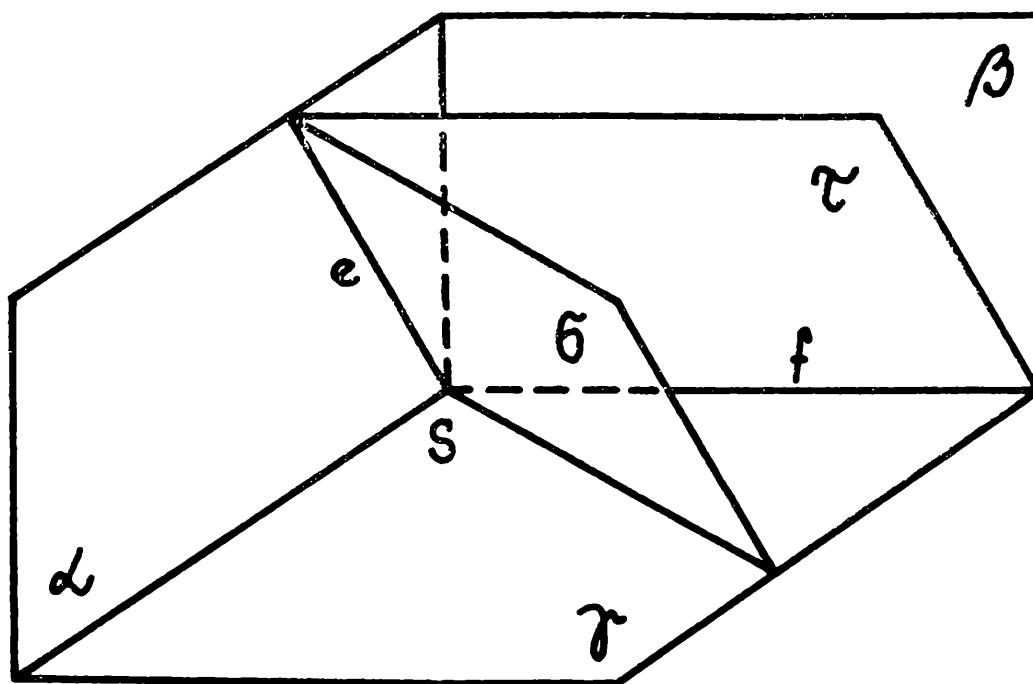
b) Ukážeme, že každá rovina σ trsu (α, β, γ) má rovnicu tvaru (6).

Ak $\sigma = \alpha$, zrejme má σ rovnicu (6), pričom $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Podobne, ak $\sigma = \beta$ alebo $\sigma = \gamma$.

Nech rovina σ je rôzna od každej z rovín α, β, γ . (Pozri obr. 1.). Označme e priesečnicu roviny σ s rovinou α . Je zrejmé, že priamka e prechádza stredom trsu S . Označme f priesečnicu rovín β, γ ; potom priamky e, f sú rôznobežné, určujú rovinu τ , ktorá patrí do zväzku (β, γ) , preto jej rovnica je tvaru

$$\begin{aligned}\tau: v_1(q_1x + q_2y + q_3z + q_4) + v_2(r_1x + r_2y + r_3z + r_4) = 0, \\ v_1 \neq 0, v_2 \neq 0.\end{aligned}$$

Rovina σ na základe prevedenej úvahy patrí do zväzku (α, τ) , preto jej rovnica má tvar



Obr. 1

$$\sigma \equiv \varphi_1(p_1x + p_2y + p_3z + p_4) + \varphi_2[v_1(q_1x + q_2y + q_3z + q_4) + v_2(r_1x + r_2y + r_3z + r_4)] = 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0.$$

Posledná rovnica má tvar (6), čo bolo treba dokázať.

Príklad 3. Napíšte neparametrickú rovnicu roviny σ , ktorá prechádza bodmi $A(-1, 0, 3)$, $B(2, 1, -2)$ a patrí do trsu (α, β, γ) , keď

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv x - 2y + z - 1 = 0 \\ \beta &\equiv y - z = 0 \\ \gamma &\equiv 2x + y + z + 1 = 0 \end{aligned}$$

Riešenie. Rovnica roviny σ má tvar

$$\lambda_1(x - 2y + z - 1) + \lambda_2(y - z) + \lambda_3(2x + y + z + 1) = 0, \quad (8)$$

a pretože má prechádzať bodmi A , B , súradnice týchto bodov musia spĺňať rovnicu (8), t. j. musí platiť

$$\begin{aligned} \lambda_1(-1 + 3 - 1) + \lambda_2(-3) + \lambda_3(-2 + 3 + 1) &= 0 \\ \lambda_1(2 - 2 - 2 - 1) + \lambda_2(1 + 2) + \lambda_3(4 + 1 - 2 + 1) &= 0, \end{aligned}$$

alebo po úprave

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Uvedená sústava má obor pravdivosti $O_P = \{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]; \lambda_1 = 3t, \lambda_2 = 5/3t, \lambda_3 = t; t \in R\}$, z ktorého ak vyberieme trojicu $[9, 5, 3]$, potom

po jej dosadení do (8) dostaneme rovnicu hľadanej roviny, t. j. $15x - 10y + 7z - 6 = 0$.

Úlohy

1. Napíšte neparametrickú rovnicu roviny γ , ktorá je rovnobežná so súradnou osou x a patrí do zväzku (α, β) , keď

$$\alpha \equiv 2x - y + z - 4 = 0$$

$$\beta \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0.$$

Rovinu γ graficky znázornite.

[Výsl.: $z + 5 = 0$]

2. Napíšte neparametrickú rovnicu roviny σ , ktorá prechádza priamkou o parametrických rovniciach: $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 1$, $t \in R$; σ patrí do trsu (α, β, γ) , keď

$$\alpha \equiv x + y - z + 1 = 0$$

$$\beta \equiv x + z - 1 = 0$$

$$\gamma \equiv y + 2z + 3 = 0.$$

[Výsl.: $-5x - 5y + 9z - 4 = 0$]

fyzika

0 některých aplikacích kosmonautiky I

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Doby, kdy odvážné a někdy i překvapující kosmické experimenty udržovaly v napětí i neodborníky, již minuly. Dnes se i v kosmonautice začínají uplatňovat zákony ekonomie, což jinými slovy znamená, že se na kosmonautice požaduje, aby splácela investice, které do ní byly vloženy. Proto se stále častěji objevují v pracovních programech kosmonautů různé experimenty praktického rázu; většinou jde o získání zkušeností z oblasti národního hospodářství a technologie, někdy však i o klíčové experimenty, jejichž dosah nelze dnes ani tušit.

V několika samostatných pojednáních se budeme snažit uvedená tvrzení doložit příklady. Naší snahou přitom bude poukázat na vzrůsta-

jící význam člověka na oběžné dráze. Hlavním směrem kosmonautiky současnosti a blízké budoucnosti je právě posílit úlohu člověka ve vesmíru; cílem jsou orbitální laboratoře příštího desetiletí, které budou spíše výzkumnými ústavy nebo továrnami než tím, co pod tímto názvem rozumíme nyní. Posádky takových kosmických pracovišť budou mezinárodní a komunikace se Zemí bude relativně tak snadná, že umožní jejich operativní střídání asi tak, jak tomu dnes je v případě stanic vysokohorských a polárních. Máme na mysli hlavně raketoplány, ony „křížence“ dosavadních raket s kluzáky, které se pravděpodobně začnou uplatňovat již koncem tohoto desetiletí a budou schopny zcela změnit nejen tvářnost, nýbrž i náplň kosmonautiky.

*

Když se v roce 1961 vrátil *Gagarin* ze svého prvního letu, překvapil i odborníky tvrzením, že z výše větší než 300 kilometrů lze pouhým okem spatřit i kouř z jedoucí lokomotivy. Dnes víme, že jeho sdělení bylo pravdivé, třebaže zde na Zemi by se nám takový rekord nepodařil ani při sebelepší přímé viditelnosti. Hlavní příčinou toho je především pouze osmikilometrová tloušťka ovzduší, kterým světelný paprsek musí procházet (máme na mysli stlačený „ekvivalent“ hustoty standardní atmosféry). Později se podařilo zdokonalováním fotografických metod a zejména transformováním zachycených fotonů na odpovídající elektrony tuto rozlišovací schopnost ještě o několik řádů zvětšit. Úplnou revoluci do dálkového pozorování naší Země vnesla barevná fotografie, doplněná automatickým potlačením vlivu rychlého pohybu kosmického plavidla. Přes různé filtry včetně infračerveného se pořizují synchronní snímky, načež se srovnává barevný index vyobrazených předmětů. Metodou srovnávání se známými objekty lze pak identifikovat i takové podrobnosti, které unikají přímému pozorování. Tak byly rozpracovány metody, jak poznat druh obilí rostoucího na poli, či jak zjistit, zda půda zůstala neobdělána. V tomto úseku výzkumu vykonal největší kus práce hlavně Sovětský svaz, avšak i v USA se dopracovali pozoruhodných úspěchů; tak se tam např. podařilo vypracovat specifickou metodu, jak nalézt místa, na kterých se tajně pěstuje marihuana.

Význam takovýchto a podobných pozorování tkví především v tom, že za krátkou dobu nejvýše několika málo dní lze získat informace z rozsáhlých, ne-li ze všech částí zemského povrchu. Tím se národohospodářům, statistikům a plánovačům dostávají do rukou cenné homogenní materiály. Stejnou metodou lze na hladinách oceánů sledovat výskyt planktonu (kde je plankton, tam asi je i dosti ryb, protože naleznou potravu) a dokonce tahy rybích skupin (např. sardinek). Byla publikována pozorování, která jsou zřejmě vrcholem současných možností

a která nasvědčují tomu, že v lese bylo možno infračerveným snímkováním z vesmíru nalézt škůdcem napadený strom (jediný!) zhruba o čtvrt roku dříve, než si ho povšiml lesní personál. Podobně byli během války ve Vietnamu takto zaměřováni skrytí partyzáni. I když by se před družicí skryli, místo jimi opuštěné v trávě vyzařovalo ještě řadu minut infračervené paprsky navíc a ty neunikly družicové fotografii. Dálková pozorování Země však mohou posloužit i geologickému a meteorologickému průzkumu, ale o tom až příště.

různé

Korespondenční seminář z kombinatoriky

RNDr. MILAN KOMAN, CSc., UK Praha

Podobně jako ve sportovních soutěžích, tak i v matematických soutěžích lze dosáhnout úspěchu jedině pravidelným, cílevědomým, náročným a kontrolovaným tréninkem.

V Sovětském svazu takovýto pravidelný matematický trénink umožňuje například „Všesvazová dálková matematická škola“. Její účastníci (kteří jsou vybíráni v průběhu 7. ročníku na základě výsledků řešení konkursních úloh uveřejňovaných např. v časopise „Kvant“) dostávají několikrát ročně zadané úlohy, ke kterým je připojena studijní literatura. Vypracovaná řešení odesílají do příslušných center Všesvazové dálkové matematické školy. Opravené práce se žákům opět vracejí.

Jistou obdobou této formy výchovy mladých matematiků v ČSSR je tzv. „Korespondenční seminář“ z různých matematických disciplín. Organizátorem je ÚV MO, který vybírá účastníky semináře na základě výsledků soutěže MO v kategorii B a mladších řešitelů kategorie A.

Jedno téma korespondenčního semináře bylo věnováno kombinatorice. Jeho 1. ročník se uskutečnil v roce 1975. Tento seminář, vedený RNDr. Milanem Komanem, CSc., si klade vedle taktického cíle přípravy potencionálních účastníků Mezinárodní MO i obecnější výchovně vzdělávací cíle, které byly formulovány do dvou hypotéz:

Hypotéza 1. Korespondenční seminář kombinatoriky poskytuje členům možnosti hlubšího vzdělání, než dává střední škola, a rozvíjí tvůrčí matematické schopnosti.

Hypotéza 2. Korespondenční seminář kombinatoriky napomáhá k poznávání a osvojování důležitých pracovních metod užívaných při řešení matematických, ale i nematematických problémů, např. metody související s experimentováním, obměňování problémů, ověřování výsledků a podobně.

Uvedeme znění všech deseti zadaných úloh 1. ročníku korespondenčního semináře z kombinatoriky.

Úloha 1. (O devítkách.) Určete nutnou a postačující podmínku pro to, aby k danému přirozenému číslu existoval násobek, který lze v desítkové soustavě napsat pouze pomocí devítek, tzn. má tvar $9999\dots 9$.

Úloha 2. (O deseti přirozených číslech.) Zjistěte, zda je mezi libovolnými po sobě následujícími deseti přirozenými čísly vždy aspoň jedno nesoudělné se zbývajících čísly.

Úloha 3. (O letištích.) Na každém z 12 letišť startuje letadlo a odlétá na nejbližší sousední letiště. Vzdálenosti mezi letišti jsou navzájem různá čísla. Určete maximální počet letadel, které mohou přistát na jednom letišti.

Úloha 4. (O lodích.) Na volném moři plují rozptýleně tři lodi L_1 , L_2 , L_3 , které mají stejnou nejvyšší rychlost. Na admirálův rozkaz se mají co nejdříve setkat na jednom místě. Určete nejvýhodnější polohu místa setkání. (Pokuste se úlohu řešit též pro případ většího počtu lodí nebo pro případ různých maximálních rychlostí.)

Úloha 5. (O červené cestě.) Čtverec C je rozdělen na $4n^2$ shodných čtvercových polí. Pole jsou černá a bílá, přitom každá dvě pole souměrně položená podle středu S čtverce C mají různou barvu. Strany polí obarvíme červeně právě tehdy, patří-li různě obarveným polím. Dokažte, že existuje červená cesta spojující některé dva body ležící na protějších stranách čtverce C .

Úloha 6. (První úloha o šachovnici.) Všechna pole libovolné šachovnice $n \times n$ jsou očíslována nezápornými reálnými čísly tak, že číslo libovolného pole se rovná aritmetickému průměru čísel napsaných ve všech sousedních polích. Charakterizujte všechna přípustná očíslování.

Úloha 7. (Druhá úloha o šachovnici.) Všechna pole šachovnice 100×100 polí jsou očíslována přirozenými čísly tak, že čísla na každých dvou sousedních polích se liší nejvýše o 50. Zjistěte, zda mohou být všechna pole šachovnice očíslována navzájem různými čísly.

Úloha 8. (O kolejích dětského vláčku.) Dráhu pro elektrický vláček je možno sestavit ze shodných úseků, které mají tvar čtvrtkružnice. Byla postavena okružní rovinná dráha (bez křižovatek a nadjezdů). Při zvoleném smyslu probíhání tvoří n_1 dílců levotočivou zatáčku a n_2 dílců pravotočivou zatáčku. Dokažte, že čísla n_1 a n_2 jsou sudá a číslo $n_1 + n_2$ je násobek čísla 4.

Úloha 9. (O n bodech.) V rovině je dáno n ($n > 4$) bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že existuje aspoň $\binom{n-3}{2}$ konvexních čtyřúhelníků, jejichž vrcholy jsou některé z daných bodů.

Úloha 10. (O n -úhelnících.) Konvexní n -úhelník P_n neobsahuje žádné tři úhlopříčky, které by procházely jediným společným vnitřním bodem. Kolik trojúhelníků omezují jeho úhlopříčky?

Zajímavá řešení některých z těchto úloh zaslaných účastníky semináře uvedeme v příštím čísle Rozhledů.

Beseda s čtenáři

(K 250. výročí úmrtí Isaaca Newtona.)

JOSEF KOTYK, Pardubice

Dotaz: Články „Newtonův zákon gravitační“, „Actio in distans“ a „Newtonův zákon setrvačnosti“ nám u příležitosti 330. výročí Newtonova narození¹⁾ dovolily hlouběji nahlédnouti do duševní dílny génia Newtonova. Zajímá nás ještě, jakou měrou Newton podléhal vlivům tehdejší záliby pro absolutno.

Odpověď: Záliba pro absolutno nezůstala ovšem na Newtona bez vlivu. Newton abstrahoval např. prostor a čas nejen navzájem, ale i od pohybu a hmoty. Tyto základní formy bytí hmoty chápe sice jako objektivně existující, avšak jako vnější, ani s hmotou ani s pohybem nespojené, jako „prázdné“. Tak vznikla představa absolutního času i představa absolutního pohybu.

Dotaz: Jakými definicemi zavedl Newton tyto pojmy do své dynamiky?

Odpověď: Učinil tak ve svých slavných „Principiích“ (1687), kde čteme²⁾:

a) „Absolutní, pravý a matematický čas plyne sám v sobě a svou povahou bez vztahu k jakémukoli vnějšímu předmětu rovnoměrně. Nazývá se také trvání.

b) „Absolutní prostor zůstává svou povahou a bez vztahu k jakémukoli vnějšímu předmětu vždy stejný a nehybný.

¹⁾ Viz Rozhledy, roč. 51, čís. 10 a roč. 52, čís. 1 a 2.

²⁾ Viz Is. Newton: *Mathematische Principien der Naturlehre*. Anmerkung zu den einleitenden Definitionen. (Lipsko, 1889.)

Prostor relativní je míra nebo nějaká pohyblivá část absolutního prostoru, která je stanovena našimi smysly svou polohou vůči tělesům a která bývá obyčejně brána místo prostoru nehybného.“

K tomuto absolutnímu prostoru a absolutnímu času jest podle Newtona vztahovati všechny pohyby, o nichž se mluví v principu setrvačnosti a v dynamice vůbec. Pohyb se tím stává rovněž absolutním. Newtonova definice absolutního pohybu zní:³⁾

„Absolutní pohyb je posuv nějakého tělesa z jednoho absolutního místa do druhého.“

Dotaz: Jak byly tyto Newtonovy definice přijímány?

Odpověď: Velkolepý rozvoj klasické mechaniky Newtonem založené utlumil předem jakékoli námitky. Ještě roku 1748 napsal slavný Leonhard Euler (od jeho narození uplyne dne 15. dubna t. r. 270 let): „Popírati z filosofických důvodů skutečnost absolutního prostoru a absolutního času znamená zbavovati základní zákony dynamiky jejich významu. Filosof musí všech námitek proti možnosti absolutního prostoru a absolutního času zanechat; skutečnost obou je přímým důsledkem pohybových zákonů a jejich objektivní existence je dokázána tak, jak je pro naše poznání vůbec možno.“⁴⁾

Dotaz: Došlo také k sporům o reálnost absolutního prostoru a absolutního času?

Odpověď: Ano. Newtonovy názory byly přijímány zejména v XIX. století kritičtěji. Nejrozhodněji proti nim vystoupil rakouský fyzik a filosof (pův. z Chrlic u Brna) Ernst Mach (1838 až 1916). Ve svém spise „Mechanik“⁵⁾ vytýká Newtonovi, že se svými představami zpro-
nevěřil svému původnímu úmyslu vyšetřovat jen skutečnosti. Absolutní prostor, absolutní čas i absolutní pohyb jsou podle Macha pouhé myšlenkové výtvary, jimž ve skutečnosti nic neodpovídá.

Dotaz: Jak dlouho vládly Newtonovy představy ve fyzice?

Odpověď: Dlouho. Velmi dlouho. Až do začátku XX. století.

Dotaz: Nebylo by možno definovat absolutní prostor soustavou souřadnic, jejíž počátek leží v hmotném středu sluneční soustavy (prakticky ve středu Slunce) a jejíž osy mají vzhledem k stálícím neproměnné

³⁾ Viz W. Hollitscher: Příroda ve vědeckém obrazu světa. (Státní nakladatelství politické literatury, Praha 1961.)

⁴⁾ Viz Leonhard Euler: Réflexions sur l'espace et le temps. (Úvahy o prostoru a čase.)

⁵⁾ Ernst Mach: Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 7. vyd., 1912.

směry? Tuto tzv. základní soustavu pokládá světový názor heliocentrický vzhledem k stálícím za klidnou.

Odpověď: Ovšem. Příslušné teoretické konstrukce, které se toho (obdobně pak i časové míry) týkají, jsou však dosti složité a není v tom nic absolutního. Kdybychom snad jiných soustav souřadnic užívatí ne-směli a vztahovali pohyby těles jen k uvedené soustavě základní, bylo by snadné říci, že je vždy v klidu, tedy v absolutním klidu. Za klidnou můžeme však prohlásiti každou jinou tzv. inerciální⁶⁾ soustavu souřadnic, která koná vzhledem k ní rovnoměrný přímočarý pohyb. Absolutně klidnou soustavu souřadnic a absolutně klidný prostor v mechanice Newtonově neznáme, neboť nemáme prostředku, jak bychom ji odlišili od soustavy souřadnic a od prostoru, které konají vůči nim rovnoměrnou translaci. Přiznáte, milí čtenáři, že pohyb v dynamice Newtonově je — i když jen částečně — relativní?

matematickofyzikální zábavy

Chcete zkoumat dokonalost přirozených čísel?

Přečtěte si několik informací a pak zkuste sami ověřit hypotézy, které budou vysloveny nebo vás napadnou. Podaří-li se vám dokázat zajímavý poznatek, zpracujte jej jako příspěvek do našeho časopisu.

Každé přirozené číslo má dělitele, číslo 1 má jen jednoho, ostatní přirozená čísla mají aspoň dva různé dělitele. Zajímejme se o součet všech dělitelů přirozeného čísla n , například

$$n = 2, \text{ součet dělitelů } 1 + 2 = 3,$$

$$n = 6, \text{ součet dělitelů } 1 + 2 + 3 + 6 = 12,$$

$$n = 12, \text{ součet dělitelů } 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28.$$

Antické matematiky upoutal vztah mezi dvojnásobkem čísla n a součtem jeho dělitelů. V případě rovnosti těchto čísel považovali n za *dokonalé* číslo, tedy číslo 6 je příkladem dokonalého čísla. Dokonalých

⁶⁾ Pojem byl objasněn v autorově článku „Newtonův zákon setrvačnosti“ v Rozhledech, roč. 51, čís. 10, str. 452 až 454.

čísel je „málo“, v posloupnosti všech přirozených čísel menších než 10^{10} jsou to tato čísla:

6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056

Jak vidíte, jsou všechna uvedená dokonalá čísla sudá čísla. Otázka, zda existují lichá dokonalá čísla, nemá zatím odpověď; pokud existují, jsou větší než 10^{20} . Je známo, že všechna sudá dokonalá čísla mají tvar

$$n = 2^{p-1} (2^p - 1),$$

kde p , $2^p - 1$ jsou prvočísla.

Ostatní, tj. „nedokonalá“ čísla se rozdělují na *nadbytková a deficitní* (nedostatková) podle toho, zda součet všech dělitelů čísla je větší nebo menší než dvojnásobek čísla. Číslo 2 je tedy deficitní, číslo 12 nadbytkové. Výzkum se zaměřuje na obecné hypotézy tohoto typu:

Každá přirozená mocnina každého prvočísla je deficitní číslo.

Každý dělitel dokonalého čísla je číslo deficitní nebo dokonalé.

Každý k -násobek dokonalého čísla je nadbytkové číslo při $k > 1$.

Každý násobek nadbytkového čísla je nadbytkové číslo.

Získáte-li zkušenosti při důkazu těchto hypotéz, pokuste se objevit liché nadbytkové číslo, vyslovte a ověřte svou hypotézu. Můžete též zkoumat třídy čísel typu $3 \cdot 2^r$, $5 \cdot 2^r$, $2 \cdot 3^r$ apod. Nedejte se odradit případy, kdy pro $r = 1$ vyjde něco jiného než pro $r = 2$; vyslovte obecnou hypotézu pro $r > 1$, zdá-li se vám pravděpodobná. Všimněte si i toho, kterými číslicemi končí zápisy dokonalých čísel, jaké zbytky dává při dělení devíti apod. Dopřejte si radost z objevu!

Š. J.

Dvě matematické pohádky

Pohádky se vypravují nejmenším, ale ty naše matematické mají jádro, které dovedou vyloupnout až „dorostenci“. Zkuste své síly, zmobilizujte i své znalosti o grafech funkcí a řešení rovnic.

Zkouška nápadníků

Starý král dával nápadníkům své dcery různé otázky, úkoly apod. Jednoho rána si sedl na trůn a řekl shromážděným nápadníkům: „Vidíte, že můj trůn je ozdoben zlatými sloupky. Stonásobek váhy*) kterého-

*) Starý král neznal moderní fyzikální terminologii, proto mu odpustíme, že užívá termínu „váha“ místo „hmotnost“.

kolik z těchto sloupků vypočítáte tak, že její osminásobek zmenšíte o 2, výsledek vynásobíte číslem udávajícím váhu sloupku, od získaného čísla odečtete 1, výsledek opět vynásobíte číslem udávajícím váhu sloupku a připočtete 140. Kdo z vás mi první řekne, kolik liber váží jeden sloupek, dostane mou dceru za ženu. Ale nečekám déle než půl hodiny.“

Zjistěte žádaný údaj, nespokojte se však jen hádáním jako princové. Královým zetěm se stal princ, který objevil, že úloha má i řešení, o kterém král nevěděl. Zjistěte tedy všechna řešení úlohy.

Zkouška poctivosti zlatníka

Vypráví se, že kdysi chtěl mladý vzdělaný princ vyzkoušet poctivost zlatníka. Objednal si stříbrnou kouli pokrytou čtvrtalcovou vrstvou zlata. Protože v té době stála hrouda zlata čtyřikrát více než stejně veliká hrouda stříbra, žádal princ, aby zlatník spotřeboval přesně čtyřikrát více stříbra než zlata (objemově měřeno). Oba věděli, že v tom případě bude snadné stanovit cenu koule, změří-li se objem vody, kterou koule vytlačí z vhodné nádoby. Když zlatník kouli přinesl, ujišťoval prince, že je zhotovena přesně podle přání. Princ však změřil průměr koule a řekl: „Vím, že jsi dost chytrý, abys neošidil sebe, ale v tom případě se snažíš ošidit mne, budeš potrestán.“

Jak zdůvodníte oprávněnost princova postupu ?

Š. J.

Tři elektrotechnické hádanky

Ing. JIŘÍ VAVŘÍN, Praha

1) Oblíbená elektrotechnická hádanka zní takto: Je dána kostra krychle zhotovená z odporového drátu. Každá ze dvanácti hran má odpor R . Určete výsledný odpor mezi body A a B , kde A , B jsou krajní body tělesové úhlopříčky krychle.

2) Zapojte mezi sebou čtyři stejné odpory R tak, aby výsledný odpor R_v se opět rovnal R . Jaký vznikne zisk na výkonu odporu R_v oproti odporu R ?

3) Jestliže jste správně vyřešili druhou hádanku, pokuste se i o třetí: Zapojte mezi sebou pět stejných odporů R tak, aby výsledný odpor R_v se opět rovnal R . Jaký je zde zisk na výkonu odporu R_v oproti R ?

recenze

J. Vyšín - P. Fabinger - J. Mída -
J. Moravčík - F. Zítek:

Dvacátý třetí ročník matematické olympiády

Státní pedagogické nakladatelství,
Praha 1976, edice Pomocné knihy
pro žáky, stran 264, obr. 93, cena
10,50 Kčs.

Opět je tu nový svazek ve známé edici, kterou jistě sledují řešitelé matematické olympiády i jejich profesori a učitelé matematiky. Třicetý ročník soutěže probíhal u nás ve školním roce 1973—74 a tato knížka o něm přináší zevrubnou informaci.

Svazek je rozdělen do šesti kapitol. V první z nich se popisuje průběh XXIII. ročníku, je tu složení Ústředního výboru MO, popis jednotlivých kol soutěže, přehled pomocných akcí a vydané studijní literatury. Dováme se též o konkursu na úlohy pro MO, jsou připojeny statistické tabulky o výsledcích jednotlivých kategorií a kapitola končí seznamem nejúspěšnějších řešitelů. Do druhé kapitoly jsou zařazeny přípravné úlohy I. kola s podrobnými komentáři a podobně třetí kapitola obsahuje komentáře k soutěžním úlohám I. kola ve všech čtyřech kategoriích. Kapitola čtvrtá přináší řešení soutěžních úloh II. kola a kapitola pátá řešení soutěžních úloh třetího kola kategorie A, jež se konala ve Strakonici v květnu 1974. Už tradičně autoři přihlíželi ke studentským pracím a do knížky zařadili nejzdařilejší řešení i se jménem řešitelovým. Poslední, šestá kapitola informuje o XVI. mezinárodní MO, jež se konala v červenci 1974 v NDR. Popisuje se tu průběh soutěže i dosažené

výsledky a samozřejmě tu najdeme texty a zevrubná řešení všech úloh.

Není jistě třeba knížku příliš doporučovat našim žákům a studentům. Sama si zajisté najde cestu k nim i k jejich učitelům a profesorům matematiky.

Jiřina Sedláčková

Ján Černý: 0 aplikáciach matematiky, Škola mladých matematiků, sv. 36, nakladatelství Mladá fronta, Praha 1976, stran 120, obr. 33, cena 7 Kčs.

Vyšel opět nový svazek známé edice, který tentokrát napsal slovenský autor. Co je aplikovaná matematika, jak pracují aplikovaní matematikové, kdo se hodí na aplikovanou matematiku — to je několik otázek, které nám předkládá úvodní kapitola této zajímavé knížky. Mnozí studenti gymnázia se o matematiku zajímají a rádi by si ji zvolili za své životní povolání, ale nevědí, na který směr v matematice se mají orientovat. Mají jít na učitelství, na čistou matematiku nebo na matematiku aplikovanou? Trochu žertem a trochu vážně předkládá takovým adeptům náš autor malý test, jenž jim má pomoci při rozhodování. Zde jsou namátkou některé jeho otázky:

Máte raději algebru než geometrii? Jde vám těžko studium cizích

řečí? Články v Rozhledech vás zajímají méně než příklady v nich? Studujete nejraději večer? Pěstujete vášnivě turistiku? Máte rádi samotu?

Neberte test příliš vážně, ale trochu vám jistě pomůže, až budete uvažovat o volbě svého budoucího povolání. Testem končí první kapitola tohoto svazku. Kapitola druhá je věnována aplikacím středoškolské matematiky (pravidelné mnohoúhelníky a doprava) a kapitola třetí nás uvádí do teorie grafů, jež je podle slov autora jednou z nejvíce aplikova-

ných disciplín. Seznámíme se se základními pojmy teorie grafů, s nejčastějšími metodami a s dopravními sítěmi. Poslední čtvrtá kapitola nám představuje lineární programování jako „zbraň v rukou ekonoma“. Po zavedení základních pojmů se řeší úloha o skladbě výroby, představuje se simplexová metoda a dopravní problém.

Druhá, třetí a čtvrtá kapitola končí vždy několika cvičeními pro čtenáře. Knížku uzavírá doslov a seznam použité literatury. Můžeme svazek doporučit všem, kdo se zajímají o matematiku.

Jiřina Sedláčková

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

měřitelná funkce

měřítka

metoda

metr

čtvereční metr

metrický

metrický prostor

metrika

mez

horní mez

dolní mez

mezi

mezikruží

milión

milióntina

milióntý

mimoběžné

mimoběžné přímky

minimální

minimum

minus

minuta

míra

teorie míry

místo

mnohočlen

mnohonásobný

mnohoúhelník

mnohostěn

mnohoznačný

measureable function

scale

method

meter

square meter

metric

metric space

metric

extreme, limit

upper limit

lower limit

between

annulus, circular ring

million

millionth

millionth

skew

skew lines

minimal

minimum

minus

minute

measure

measure theory

place

polynomial

multiple

polygon

polyhedron

multiple-valued

množina
 bodová množina
 disjunktní množiny
 hustá množina
 konečná množina
 nespočetná množina
 nekonečná množina
 ohraničená množina
 otevřená množina
 prázdná množina
 řidká množina
 spočetná množina
 uzavřená množina
 množinová funkce
 množství
 mocnina
 mocninná řada
 mocnitel
 mocnost bodu ke kružnici

 model
 modul
 modus
 mohutnost množiny
 moment
 monotonní
 mříž

nabývající komplexních hodnot
 nade všechny meze
 nadmnožina
 nadplocha
 nadrovina
 náhoda
 náhodně
 náhodný
 nahradit
 nakloněný
 nákres
 nanejvýš
 naopak
 nárys

 narýsovat
 následovat
 následovník
 následující

set, system
 point set
 disjoint, disjunct sets
 dense set
 finite set
 non-denumerable set
 infinite set
 bounded set
 open set
 empty set
 nowhere-dense set
 denumerable set
 closed set
 set function
 quantity, amount
 power
 power series
 exponent
 power of a point with respect to
 a circle
 model
 module, modulus
 mode
 power of a set
 moment
 monotonic, monotone
 lattice

N

complex-valued
 ad infinitum
 superset
 hypersurface
 hyperplane
 chance
 at random
 random, chance
 substitute
 oblique
 drawing
 at the most
 on the contrary
 elevation, front view, vertical
 projection
 draw
 follow
 successor
 following

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

7

ROČNÍK 55, 1976-1977, BŘEZEN

ROČNÍK 55
BŘEZEN 1977

7

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřižská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1977.

OBSAH

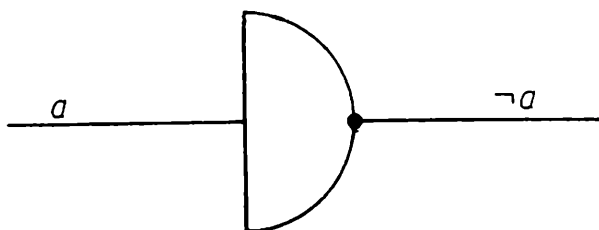
Dr. V. Mráz: Normální formy výrokových formulí IV	289
Dr. M. Koman, CSc.: Pět úloh z kombinatoriky	299
E. Říman, CSc.: Zákoný žiarových spektrier, Balmerov objav a jeho význam	311
Dr. J. Mrázek, CSc.: O některých aplikacích kosmonautiky II	316
J. Zlatuška: Modely vesmíru	319
Prof. dr. R. Košťál: Devátá mezinárodní fyzikální olympiáda v Maďarsku	328
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	330
Matematické zábavy	332
Dr. J. Šedivý: Studium prvočísel pomocí strojů	334
Recenze	335
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

Normální formy výrokových formulí IV

Dr. VLASTIMIL MRÁZ, CSc., UK Praha

Tímto článkem uzavíráme jistou část tematiky výrokové logiky, která nachází uplatnění v nejrůznějších oborech lidské činnosti, technické, resp. fyzikální a matematické obory nevyjímaje. V předcházejícím článku jsme věnovali pozornost technickým modelům výrokové logiky, speciálně realizaci tzv. logických obvodů či logických sítí pomocí elektrotechnických kontaktních relé. Dnes doplníme technické modely o tzv. logické členy, z kterých se velmi často sestavují i nejsložitější logické sítě, které jsou podkladem četných automatických zařízení, jako jsou např. samočinné počítače. Nakonec ukážeme aplikace výrokové logiky na ověřování platnosti logického úsudku a na vyvozování možných závěrů z daných premis.

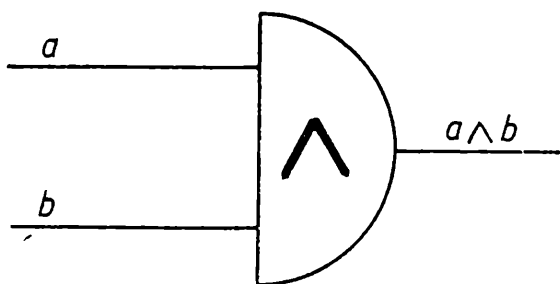
Logické členy je souhrnný název pro základní stavební prvky logických obvodů či sítí. Soudobá technologie má k dispozici řadu elektronických součástek, jako jsou vakuové elektronky, polovodičové prvky, diody,



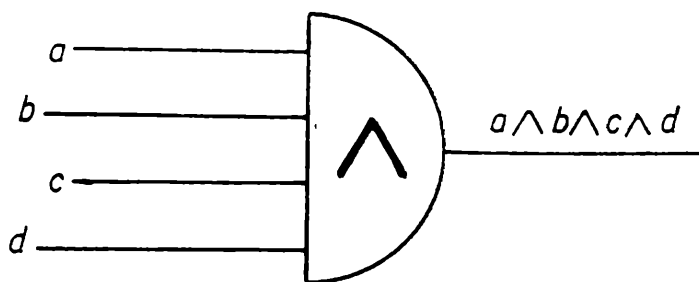
Obr. 1

tunelové diody, integrované obvody, magnetické prvky, včetně speciálních typů kryotronů, a také pneumatické prvky, z nichž se logické obvody sestavují. Aniž věnujeme pozornost fyzikálně technickým podrobnostem jednotlivých elementů, přece můžeme snadno pochopit princip fungování logických obvodů, které jsou z různých logických členů budovány.

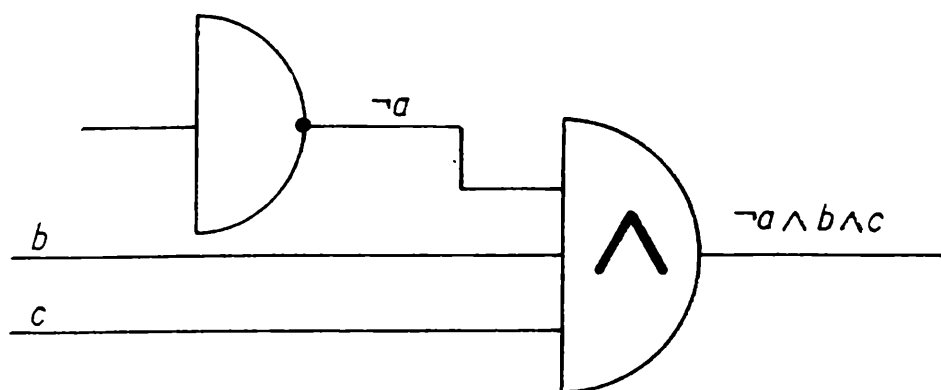
Invertor je název pro logický člen s jedním vstupem a s jedním výstupem. Jeho schematické vyobrazení je na obr. 1; charakteristická je výrazná tečka na výstupu invertoru. Zatímco vstup je ve stavu 1 — elektrický proud vodičem prochází, je výstup ve stavu 0 — elektrický proud vodičem neprochází a obráceně. Zřejmě je invertor technickým



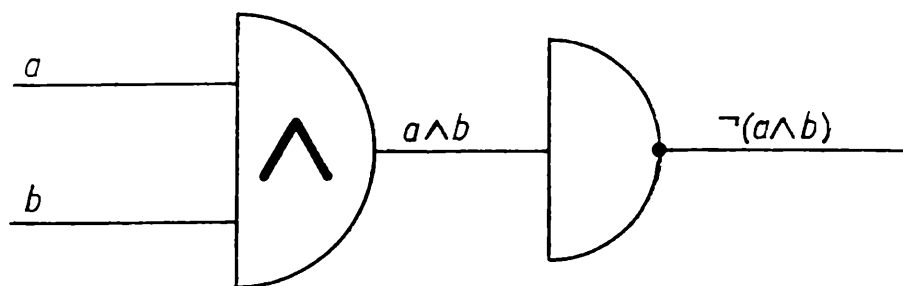
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



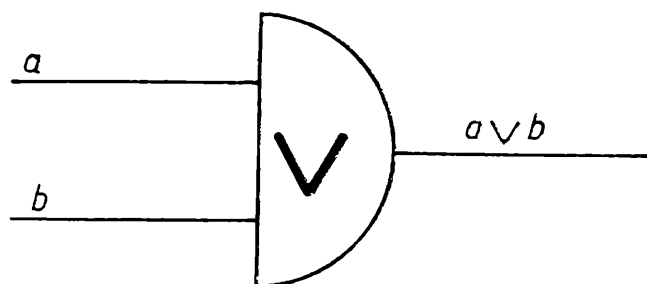
Obr. 5

modelem negace. To napovídá i popis vstupu, který je označen proměnnou a a výstupu, který je označen negovanou proměnnou $\neg a$.

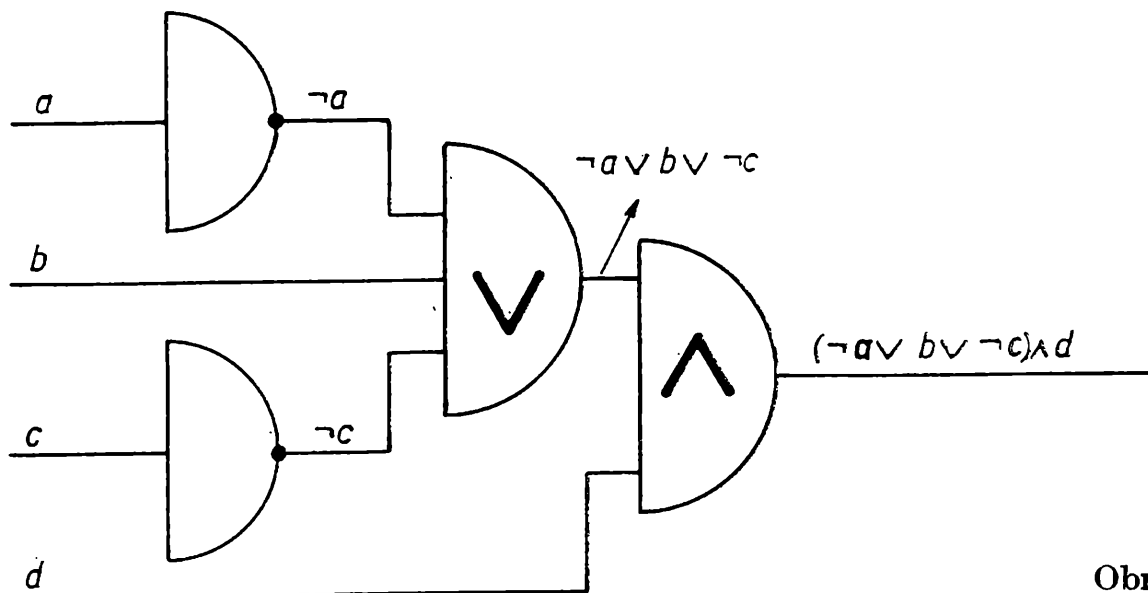
Ostatní logické členy, které dále popíšeme, mají nejméně dva (nebo i větší počet) vstupů, avšak vždy jediný výstup. Také logický obvod nebo logická síť mívají řadu vstupů, ale jediný výstup.

Součinnový člen modeluje logickou konjunkci. Jeho značení v technických schématech je uvedeno na obr. 2 a na obr. 3. Pro součinnový člen je charakteristický znak konjunkce $\wedge$. Součinnový člen na obr. 2 má dva vstupy označené a , b , součinnový člen na obr. 3 má čtyři vstupy, označené a , b , c , d . V souhlase s tabulkou, kterou je konjunkce definována, je výstup ve stavu 1 právě tehdy, jsou-li ve stavu 1 všechny vstupy součinnového členu. Zřejmě bychom formuli $\neg a \wedge b \wedge c$ realizovali podle vyobrazení z obr. 4. Před vstup součinnového členu je vřazen invertor, který se postará o negaci proměnné a na tvar $\neg a$.

Na obr. 5 je schéma technického modelu výrokové formule $\neg(a \wedge b)$. Při realizaci kontaktního logického obvodu bychom museli převést formuli na tvar $\neg a \vee \neg b$.



Obr. 6



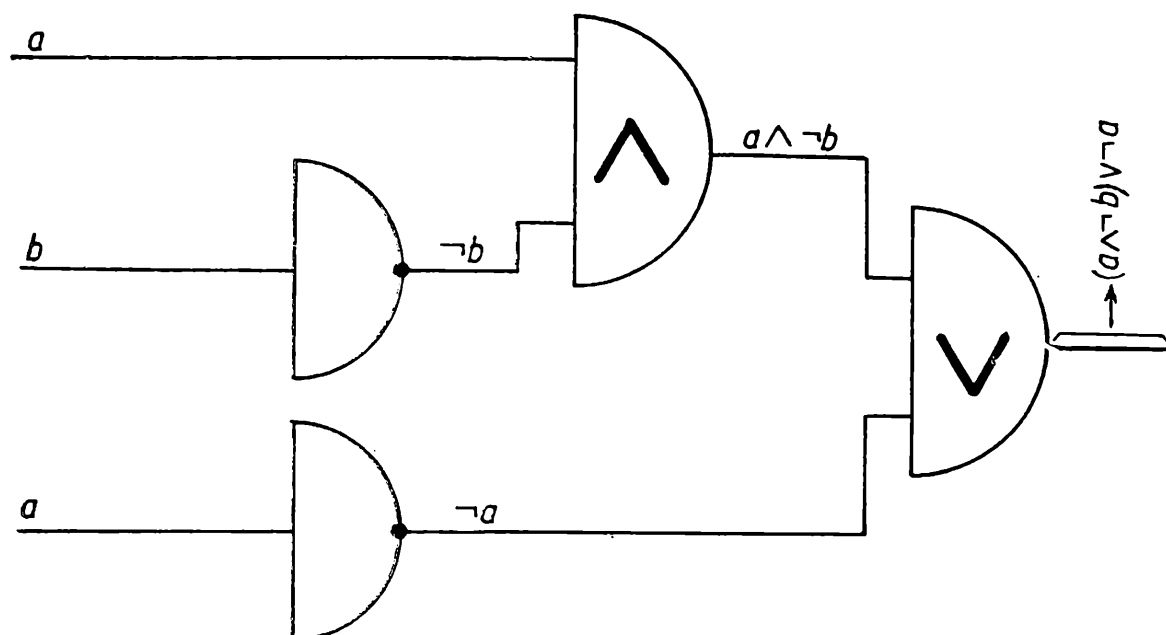
Obr. 7

Součtový člen technicky realizuje logickou disjunkci. Značení součtového členu v technických schématech je uvedeno v obr. 6. Znak $\vee$ připomíná spojku pro logickou disjunkci. Výstup součtového členu je ve stavu 1 právě tehdy, když je ve stavu 1 alespoň jeden ze vstupů. Součtový člen má nejméně dva vstupy — viz obr. 6. Snadno nahlédneme, že na obr. 7 je schéma výrokové funkce o čtyřech výrokových proměnných: $(\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge d$.

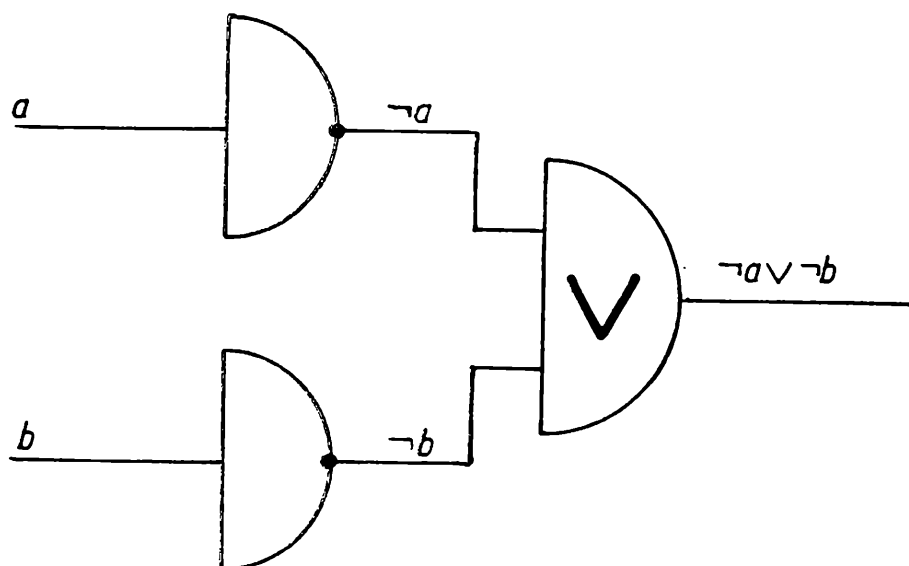
Navzájem ekvivalentní formule jsou technicky modelovány na dalších dvou obrázcích. Na obr. 8 je schéma výrokové formule $(a \wedge \neg b) \vee \neg a$, na obr. 9 je schéma formule $\neg a \vee \neg b$. Čtenář se může buď algebraickou úpravou nebo tabulkovou metodou přesvědčit o ekvivalenci obou formulí. S těmito oběma formulemi je ekvivalentní též formule $\neg(a \wedge b)$, kterou jsme poznali na obr. 5.

Technická realizace výrokových formulí s pěti klasickými spojkami výrokové logiky spočívá na transformaci spojek implikace a ekvivalence na spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, které dokážeme modelovat logickými členy. K této transformaci vede v podstatě dvojí cesta.

a) Algebraické úpravy dané výrokové formule podle platných zákonů (tautologií) výrokové logiky,



Obr. 8



Obr. 9

b) vyjádření pravdivostní hodnoty tabulkou, na jejímž základě stanovíme buď úplnou normální disjunktivní formu nebo úplnou normální konjunktivní formu. Před realizací logického obvodu se zpravidla úplná normální forma ještě upravuje (minimalizuje) tak, aby logický obvod měl co nejmenší počet logických členů. Uvedeme příklad.

Mějme realizovat obvod s logickými členy, který odpovídá výrokové formuli

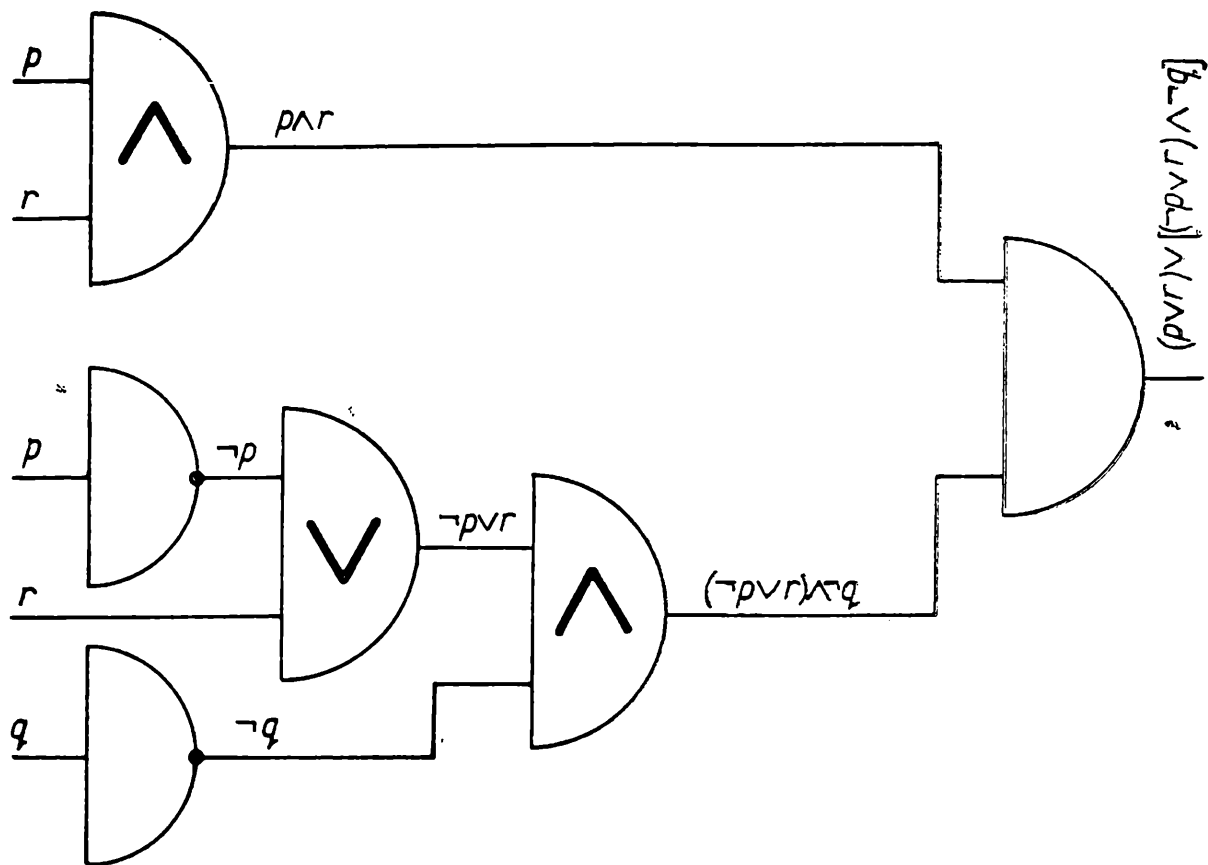
$$(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge r) \quad (1)$$

a) Podle dříve uvedené tautologie (t_2) odstraníme implikaci:

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$$

a podle tautologie (t_{19}) odstraníme ekvivalenci:

$$[(p \vee q) \wedge (p \wedge r)] \vee [\neg (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge r)]$$



Obr. 10

Tento tvar lze upravit užitím zejména distributivních zákonů na úplnou normální disjunktivní formu (2) a na úplnou normální konjunktivní formu (3):

$$[(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)], \quad (2)$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r). \quad (3)$$

b) Tabulková metoda:

p	q	r	$(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$			
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0

Podle 1., 3., 7. a 8. řádku tabulky, v nichž nabývá ekvivalence (1) pravdivostní hodnoty 1, již můžeme psát úndf (2), kterou jsme dříve získali

algebraickou cestou. Podle řádku 2., 4., 5., a 6., v nichž má formule (1) $ph = 0$, dojdeme k tvaru únkf (3). Úpravami výrokové formule (1) nebo formulí (2), (3) lze získat jiné formule, které jsou s uvedenými formulemi ekvivalentní. Obvykle se snažíme o takový tvar formule, která obsahuje co nejméně výrokových proměnných, neboť to se projeví i v zjednodušení logického obvodu a tím i v jeho menší poruchovosti a nižších pořizovacích nákladech na celý obvod. Jedním takovým minimalizovaným tvarem naší formule (1) je formule

$$[r \wedge (p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \quad (4)$$

nebo následující formule (5), která je podkladem pro technický model, kterým se tato výroková formule realizuje na obr. 10:

$$(p \wedge r) \vee [(\neg p \vee r) \wedge \neg q]. \quad (5)$$

Logický úsudek. Dík metodologické obecnosti je logický úsudek základním pojmem moderní i tradiční logiky a jeho spontánní i uvědomělé užívání je běžné nejen v denním životě, ale i při řešení vědecké problematiky. Ve složitějších případech ovšem s logickou intuicí při úsudku nevystačíme. Právě zde se výroková logika při ověřování nebo vyvracení úsudku dobře uplatní.

Poznali jsme, že tautologie je pravdivá pro všechna možná pravdivostní ohodnocení elementárních výroků (výrokových proměnných); jak říkáme, je vždy pravdivá. Demonstrujeme to zákonem vyloučeného třetího, který symbolicky zapišme $(p \vee \neg p)$, a jak jsme dříve dokázali, jeho $ph = 1$, ať je $ph p = 1$ nebo $ph p = 0$. Např. výroky „dnes je pondělí nebo není pravda, že je dnes pondělí“, „číslo 51 je prvočíslo nebo není prvočíslo“ jsou vždy pravdivé. Při logickém úsudku nás zajímá, je-li možno na základě uznaných pravdivých výroků pokládat za pravdivý i další výrok nebo výroky. Pravdivost uznaných výroků vyplývá třeba z empirického zjištění pravdivosti těchto výroků. Těmito výchozími výroky mohou být přijaté hypotézy — výroky, které jsou za pravdivé přijaty, třeba jen proto, aby se ověřilo, k čemu jejich přijetí povede. Uzané výchozí pravdivé výroky $P_1, P_2, \dots, P_n$ ($n \geq 1$) nazveme předpoklady úsudku a výrok, který je důsledkem těchto výroků, nazveme závěrem úsudku a označíme ho Z . Schematicky tento úsudek zapišeme

$$\frac{P_1, P_2, \dots, P_n}{Z} \quad (1)$$

Říkáme, že výrok Z je logickým důsledkem předpokladů $P_1, P_2, \dots, P_n$, resp. říkáme, že z předpokladů $P_1, P_2, \dots, P_n$ vyplývá závěr Z apod.

Úsudkové schéma (1) platí, právě když pro každé pravdivostní ohodnocení elementárních výroků (výrokových proměnných), jež činí pravdivými všechny předpoklady $P_1, P_2, \dots, P_n$, činí pravdivým též výrok (proměnnou) Z .

Zvolme úsudek, kterého člověk často užívá zcela neuvědoměle. Z platnosti předpokladů, kterými jsou implikace a její přední člen, vyplývá jako závěr zadní člen implikace. Schéma, které uvedený úsudek charakterizuje, nazveme pravidlem odloučení. Ač nás konkrétní obsah jed-

(PO)

$$\frac{p \Rightarrow q, p}{q}$$

notlivých výroků nemusí vůbec zajímat, přece uvedeme tyto dvě konkretizace úsudku podle pravidla (PO). Z předpokladů „jestliže je přirozené číslo n dělitelné 6, pak je toto číslo dělitelno 2“, „číslo n je dělitelno 6“ plyne závěr, že „číslo n je dělitelno 2“. Jiný příklad: „napiji-li se, přestanu žíznit“, „napiji se“ (předpoklady), tedy „přestanu žíznit“ (závěr).

Dokažme pomocí pravdivostní tabulky, že závěr q je vskutku důsledkem předpokladů $p \Rightarrow q, p$. Tabulka bude obsahovat sloupce ph výrokových proměnných p, q a formule $p \Rightarrow q$. — Budeme uvažovat

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

všechny řádky této tabulky, v nichž oba předpoklady $p \Rightarrow q, p$ nabývají současně ph = 1; je to jen v prvním řádku tabulky. V tomto tzv. signifikantním řádku má mít i závěr úsudku ph $q = 1$ a tomu tak vskutku je. Proto je uvedený úsudek obecně platný (bez ohledu na jeho obsah).

Následující úsudkové schéma vyžaduje osm řádků pravdivostní tabulky, z nichž jsou jen tři signifikantní — jen ve druhém, třetím a šestém

a	b	c	$\neg a \Rightarrow b$	$\neg b \Leftrightarrow c$	$c \Rightarrow a$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1

$$(p) \quad \frac{\neg a \Rightarrow b, \quad \neg b \Leftrightarrow c}{c \Rightarrow a}$$

řádku mají současně oba předpoklady $\neg a \Rightarrow b$, $\neg b \Leftrightarrow c$, $ph = 1$. V těchto řádcích je i závěr úsudku pravdivý, $ph(c \Rightarrow a) = 1$.

Dokázali jsme obecnou platnost daného úsudkového schématu (p). Konkrétní ilustraci demonstrovaného úsudku si čtenář může zformulovat na základě těchto údajů:

a = topné těleso,

b = vzduch se ohřívá,

c = laboratoř je mimo provoz.

Pilný čtenář si může dokázat, že i výrokové formule např. $(a \vee b)$, $(a \vee b \vee c)$, $b \Rightarrow \neg c$, popř. i jejich konjunkce jsou závěrem (důsledkem) uvedených předpokladů ve schématu (p); např. formule $(\neg a \wedge b)$ není logickým závěrem daných předpokladů, jak se čtenář může přesvědčit.

Někdy se užívá chybného úsudku, jehož schéma je

$$(n) \quad \frac{p \Rightarrow q, \quad \neg p}{\neg q}$$

Např. z předpokladů „jestliže má pacient zvýšenou teplotu, pak je nemocen“, „pacient nemá zvýšenou teplotu“ nevyplývá závěr „pacient není nemocen“. V příslušné pravdivostní tabulce je třetí a čtvrtý řádek signifikantní (ph předpokladů je současně 1), avšak závěr v třetím řádku má $ph \neg q = 0$ (nikoliv 1).

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

Ukážeme jiný způsob dokazování platnosti úsudků. Tento způsob se opírá o normální formu, na kterou transformujeme implikaci, jejímž předním členem je konjunkce předpokladů a zadním členem je závěr (konjunkce závěrů) implikace.

Naznačeným způsobem dokažme platnost schématu (PO), které jsme nazvali pravidlo odloučení. V prvním řádku je uvedena konjunkce předpokladů $(p \Rightarrow q)$ a p , které implikují závěr úsudku q . V dalších řádcích pak jsou postupné úpravy, které vedou k úplné normální disjunktivní formě, z níž ihned určíme, že jde o tautologii (v obou posledních závorkách jsou tautologie, jejichž konjunkce je ovšem tautologií).

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

$$\neg [(\neg p \vee q) \wedge p] \vee q$$

$$\neg (\neg p \vee q) \vee \neg p \vee q$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q)$$

$$(p \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q)$$

Obdobně dokážeme, že (n) není schématem platného úsudku:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg p] \Rightarrow \neg q$$

$$\neg [(\neg p \vee q) \vee \neg p] \vee \neg q$$

$$\neg (\neg p \vee q) \vee \neg \neg p \vee \neg q$$

$$(p \wedge \neg q) \vee p \vee \neg q$$

$$(p \wedge \neg q) \vee [p \wedge (q \vee \neg q)] \vee [\neg q \wedge (p \vee \neg p)]$$

$$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge \neg p)$$

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Poslední řádek úprav, který je splnitelnou formulí (nikoliv tautologií), svědčí o tom, že úsudkové schéma není platné.

Za cvičení si čtenář může obdobným způsobem dokázat, že úsudkové schéma (p) je platné. Stačí dokázat, že implikace

$$[(\neg a \Rightarrow b) \wedge (\neg b \Leftrightarrow c)] \Rightarrow (c \Rightarrow a)$$

je tautologie. Může to provést buď transformací na úplnou normální disjunktivní formu, anebo může danou implikaci doplnit pravdivostní tabulkou (s osmi řádky).

Často se intuitivně užívá logických úsudků, jejichž schémata i názvy uvádíme. Také obecnou platnost těchto úsudků si čtenář může snadno dokázat popsanými způsoby.

Pravidlo doplnění konjunkce (DK) $\frac{p, q}{p \wedge q}$

Pravidlo odnětí konjunkce (OK) $\frac{p \wedge q}{p}, \frac{p \wedge q}{q}$

Pravidlo doplnění disjunkce (DD) $\frac{p}{p \vee q}, \frac{q}{p \vee q}$

Pravidlo odnětí disjunkce (OD) $\frac{p \vee q, \neg p}{q}, \frac{p \vee q, \neg q}{p}$

Pravidlo doplnění ekvivalence (DE) $\frac{p \Rightarrow q, q \Rightarrow p}{p \Leftrightarrow q}$

Pravidlo odnětí ekvivalence (OE) $\frac{p \Leftrightarrow q}{p \Rightarrow q}, \frac{p \Leftrightarrow q}{q \Rightarrow p}$

Pravidlo doplnění implikace (DI) $\frac{p, q}{p \Rightarrow q}, \frac{p, q}{q \Rightarrow p}$

Nakonec ukážeme, jak lze řešit zajímavou úlohu nalézt všechny závěry (důsledky) daných předpokladů. Tyto závěry získáme tak, že převedeme konjunkci všech předpokladů na úplnou normální konjunktivní formu. Další postup ukážeme na příkladu.

Stanovte všechny závěry z předpokladů $p \Rightarrow q$, $\neg q$. Úlohu řešíme tak, že utvoříme konjunkci obou předpokladů

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$$

a transformujeme ji na úplnou normální konjunktivní formu, která má tvar

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q).$$

Z ní lze vytvořit celkem sedm tautologických implikací:

1. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (p \vee \neg q)$
2. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$
3. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
4. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
5. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
6. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
7. $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \Rightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Pravé strany těchto implikací jsou hledané závěry. Jistě můžeme převést pravé strany tautologií 4., 5., 6. na jednodušší (ekvivalentní) tvary

$$4'. p \Leftrightarrow q$$

$$5'. \neg q$$

$$6'. \neg p$$

Nebude bez zajímavosti porovnat chybný úsudek, který jsme označili (n), s platným úsudkem, jehož schéma je

$$\frac{p \Rightarrow q, \quad \neg q}{\neg p}.$$

Toto platné schéma mj. vyplývá z příkladu, který jsme nakonec řešili. K ilustraci platného úsudku, jehož schéma jsme uvedli, může posloužit úsudek s podobným obsahem jako u schématu (n).

Jestliže pacient má horečku, pak je nemocen.

Pacient není nemocen.

Pacient nemá horečku.

Oprava

Ve dvou člancích dr. Mráze Normální formy výrokových formulí (Rozhledy č. 3 a č. 4) došlo k některým nedopatřením. Žádáme čtenáře, aby si tato nedopatření takto opravil:

Str. 103 ve sloupci I na levé straně stránky u (f_4) chybějí závorky.

Správně má být $(a \Rightarrow (\neg b \wedge \neg a)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \Rightarrow b)$.

Str. 103 na dolní tabulce měly být sloupce s pravdivostními hodnotami 1, 0 umístěny pod výrokové proměnné a pod příslušné logické spojky, zapsané v záhlaví tabulky. Uvedeme alespoň formuli a první dva řádky tabulky:

$$\frac{(\neg (a \wedge b) \vee c) \Rightarrow (a \Leftrightarrow c)}{\begin{array}{ccccccc|c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}}$$

Str. 105 v 5. a 6. řádku na pravé straně stránky patří před obě formule znak $\vdash$.

Str. 105 formule (**) má začínat takto: $\neg (p \wedge \neg p)$ místo chybného znaku $\vee$ má být znak $\wedge$.

Str. 156 u formule (f_8) chybí závorka. Správně je $(a \wedge \neg b) \Leftrightarrow c$.

Str. 157 ve 3. řádku shora má být správně $\dots (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ — chybně je uveden znak $\vee$

Str. 157 ve 24. řádku shora má věta začínat: Eliminaci spojky $\wedge$ v prvním... (chybně je vytištěn znak $\vee$).

Str. 159 15. řádek shora správně začíná $\vee b \vee c) \wedge (a \vee b \dots$ místo vytištěného $\neg b$ má být jen b).

Str. 160 ve 3. řádku od konce článku má být správně f_2 až f_8 místo chybného f_2 a f_3 .

Str. 158 — tabulka měla být umístěna na str. 160 ke konci textu.

Pět úloh z kombinatoriky

RNDr. MILAN KOMAN, CSc., UK Praha

V minulém čísle Rozhledů jsme vás seznámili se zněním úloh 1. ročníku „korespondenčního semináře z kombinatoriky“. V tomto článku uvedeme nejzajímavější řešení pěti úloh z tohoto semináře zaslané jeho účastníky. Všimněte si zejména různých řešení téže úlohy i rozboru některých neúspěšných pokusů o řešení.

Úloha 1. O devítkách.*)

Úloha byla řešena třemi způsoby. Při 1. způsobu užívali studenti *Dirichletova principu*:

Jestliže je více než n předmětů rozděleno do n skupin, potom aspoň v jedné skupině jsou aspoň dva předměty. (Viz např. 25. svazek ŠMM, Bukovský - Kluváněk: Dirichletův princip.)

Při 2. způsobu řešení užívali řešitelé tzv. *Eulerovy věty*:

Budiž m přirozené číslo. Potom pro každé celé číslo a nesoudělné s m platí:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1$$

je násobkem čísla m . (Přitom značí $\varphi(m)$ počet nesoudělných přirozených čísel s číslem m , která jsou menší než m . Např. $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(12) = 4$.) (Viz např. 21. svazek ŠMM, Apfelbeck: Kongruence, věta 28, str. 37.)

Při 3. způsobu řešení se užívá periodicity nekonečného desetinného rozvoje racionálních čísel.

Řešení 1. (P. Makovický) Řešením úlohy je věta:

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby pro přirozené číslo n existoval násobek, který lze v desítkové soustavě zapsat pouze pomocí devítek, je, aby dané číslo n bylo nesoudělné s čísly 2 a 5 (tj. aby nebylo násobkem čísla 2 nebo čísla 5).

Je zřejmé, že podmínka je nutná. Stačí dokázat, že je postačující. Uijeme pomocné věty:

Mezi libovolnými $n + 1$ přirozenými čísly lze vždy vybrat aspoň dvě taková, že jejich rozdíl je dělitelný číslem n .

Důkaz pomocné věty: Každé z $n + 1$ čísel napíšeme ve tvaru

$$k \cdot n + a, \quad \text{kde } 0 \leq a < n.$$

Celkem je možných n různých zbytků (0, 1, 2, ..., $n - 1$), ale daných čísel je $n + 1$. Podle Dirichletova principu aspoň dva zbytky se musí sobě rovnat. Rozdíl příslušných čísel je dělitelný číslem n .

Vlastní řešení úlohy 1: Vezměme $n + 1$ čísel

$$9, 99, 999, \quad \underbrace{9999 \dots 9}_{n+1 \text{ číslic}}$$

Potom mezi nimi existují dvě čísla, jejichž rozdíl je dělitelný číslem n . Tedy n dělí rozdíl

$$9999 \dots 9 - 999 \dots 9 = 10^n \cdot 999 \dots 9. \quad (1)$$

Jestliže n je nesoudělné s čísly 2 a 5, musí n dělit číslo $999 \dots 9$ z pravé strany rovnosti (1).

(Podobné řešení zaslali J. Borsík a J. Svoboda)

*) Přesné znění úloh viz ve zmíněném článku z minulého čísla Rozhledů, str. 281.

Řešení 2. (P. Takáč) Dokážeme větu:

Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby číslo n mělo násobek tvaru $999 \dots 9$, je nesoudělnost čísla n s číslem 10.

Nutná podmínka je zřejmá. Postačující podmínka je důsledkem Eulery vĕty, neboť pro n nesoudělné s číslem 10 je

$$10^{\varphi(n)} - 1 = \underbrace{999 \dots 9}_{\varphi(n) \text{ devítek}}$$

násobkem čísla n .

(Podobné řešení zaslali J. Navrátil a J. Voldřich)

Řešení 3. Hledané řešení vyjadřuje věta:

K danému přirozenému číslu n existuje násobek, který je v desítkové soustavě zapsán q devítkami, právě když k němu převrácené číslo $1/n$ má ryze periodický desetinný rozvoj s q -místnou periodou.

Důkaz: a) Nechť n je přirozené číslo, jehož p -násobek lze v desítkové soustavě zapsat pomocí q devítek, tzn.

$$p \cdot n = 10^q - 1.$$

Potom

$$\frac{1}{n} = \frac{p}{10^q - 1}.$$

Číslo $1/(10^q - 1)$ má nekonečný desetinný rozvoj

$$\overline{0,000 \dots 01}$$

q -místná perioda

Proto i číslo

$$\frac{1}{n} = \frac{p}{10^q - 1} = p \cdot \overline{0,000 \dots 01}$$

má nekonečný desetinný rozvoj ryze periodický s q -místnou periodou.

b) Nechť n je přirozené číslo, jehož převrácené číslo $1/n$ má ryze periodický rozvoj s q -místnou periodou, tzn.

$$\frac{1}{n} = 0, \overline{A_1 A_2 \dots A_q}.$$

Potom

$$\frac{1}{n} = \underbrace{\overline{A_1 A_2 \dots A_q}}_{\text{přir. č. } p} \cdot \underbrace{\overline{0,00 \dots 01}}_{q\text{-místná perioda}} = p \cdot \frac{1}{10^q - 1}$$

Proto je součin

$$p \cdot n = 10^q - 1$$

zapsán v desítkové soustavě q devítkami.

Poznámka k úloze 1.

1. Všimněte si, v čem se liší řešení 1 od zbývajících dvou řešení. V 1. případě je podán existenční důkaz bez konstrukce hledaného násobku $999\dots 9$. V ostatních řešeních je udána konstrukce tohoto čísla. První řešení má však na druhé straně proti ostatním dvěma řešeními jednu přednost. Lze je aplikovat i pro případ, kdy ve znění úlohy 1 zaměníme číslo $999\dots 9$ libovolným číslem tvaru $AAA\dots A$, kde $A = 1, 2, \dots, 8$. O řešení pozměněné úlohy se pokuste sami.

2. Všimněme si ještě jednoho zajímavého pokusu o řešení. (I na chybách a nedomyšlenostech je v matematice — podobně jako v šachové hře — možno se mnoho naučit.)

Nechť zápis čísla n v desítkové soustavě končí některou z číslic 1, 3, 7, 9. Potom existuje násobek čísla n tvaru $999\dots 9$.

Pokus o důkaz: Nechť n má v desítkové soustavě tvar

$$n = A_k A_{k-1} \dots A_2 A_1 A_0.$$

Hledáme číslo (zapsané v desítkové soustavě)

$$p_r = B_r B_{r-1} \dots B_2 B_1 B_0$$

tak, aby součin $p_r \cdot n$ byl tvaru $999\dots 9$.

Uřídíme B_0 tak, aby součin $p_r \cdot n$ měl devítku na místě jednotek. Například podle tabulky:

A_0	1	3	7	9
B_0	9	3	7	1

Potom určíme B_1 tak, aby měl součin $p_r \cdot n$ devítku na místě desítek. Číslo B_1 lze vždy určit (přesvědčte se o tom sami). Podobným způsobem určíme postupně zbylé číslice $B_2, B_3, \dots$.

V čem je nedostatek? Přemýšlejte chvíli sami, pak teprve porovnejte svůj úsudek se správnou odpovědí.

Uvedeným algoritmem dostáváme od určitého i počínaje stále součiny tvaru

$$p_i \cdot n = \underbrace{X999\dots 9}_{i \text{ číslic}}$$

přítom X je některá z číslic 0, 1, 2, $\dots$, 9. Je-li $X = 0$ nebo $X = 9$, je $p_i \cdot n$ hledaný násobek. V ostatních případech hledáme další číslo p_{i+1} a tím i součin $p_{i+1} \cdot n$. Uvedeným způsobem však není zaručeno, že proces někde skončí.

Úloha 3. O letištích.

Všechna správná řešení používala ve větší či menší míře dobře známé věty:

V každém trojúhelníku ABC je $a > b$ právě tehdy, je-li $\alpha > \beta$.

Řešení. (J. Svoboda). *Maximální počet m letadel, která mohou přistát na jednom letišti, je roven číslu 5.*

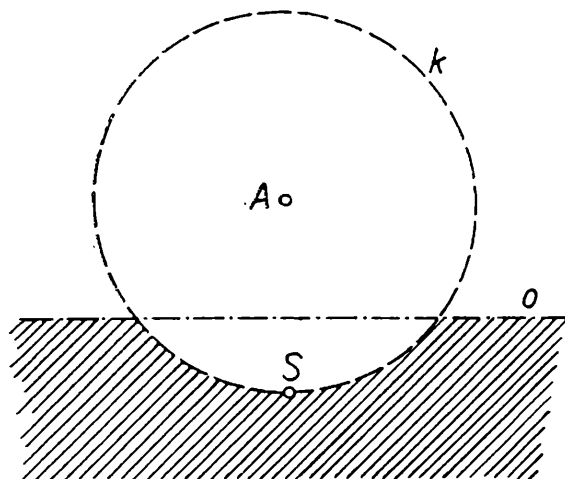
Důkaz: a) Snadno lze nalézt rozmístění, při kterém na jednom letišti přistane 5 letadel. Tedy $m \geq 5$.

b) Dokážeme $m \leq 5$. Aby letadla z letišť A, B letěla na letiště C , musí být úsečka AB z úseček AB, AC, BC nejdelší. Jsou-li body A, B, C v přímce, je úhel ABC roven 180° . Tvoří-li body A, B, C vrcholy trojúhelníku, pak je v tomto trojúhelníku při vrcholu C největší úhel, tj. úhel větší než 60° .

Úhel 360° lze rozdělit nejvýše na 5 nepřekrývajících se úhlů větších než 60° . Na kterékoliv letiště může proto přiletět nejvýše 5 letadel.

(Podobná řešení zaslali: P. Takáč, J. Navrátil, J. Peňáz, J. Borsík, L. Balanda, J. Voldřich a J. Tišer.)

Poznámka k úloze 3. Rozebereme si ještě dva neúspěšné pokusy řešení, v prvním z nich je však zajímavá myšlenka.



Obr. 1

1. Nechť letadlo z letiště A letí na letiště S . Zjistíme polohu letiště B , ze kterého letí letadlo též do místa S . Pro bod B musí platit

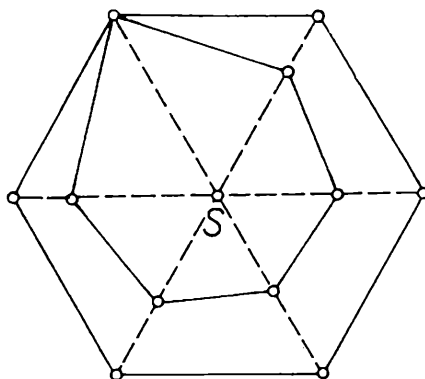
$$AS < AB \text{ a } BS < AB. \quad (2)$$

Množina M_A , všech bodů B , pro něž platí obě nerovnosti (2), je znázorněna na obr. 1. Je to průnik vnějšku kružnice $k = (A; AS)$ a otevřené poloroviny oS , kde o je osa úsečky AS .

Až sem nelze proti řešení nic namítat. Nedostatek byl v dalším postupu. V množině M_A byl zvolen bod B a podobným způsobem se hledala množina M_B takových bodů C , že letadla z obou míst B, C letí do bodu S . Podobně se našly množiny M_C, M_D . Ukázalo se (ovšem jen experimentálně), že nejvýše 4 množiny M_A, M_B, M_C, M_D mohou mít neprázdný průnik.

2. Druhý neúspěšný pokus vycházel z pravidelného šestiúhelníka, který ovšem nesplňuje podmínky různosti vzdáleností. Aby se tento

nedostatek odstranil, posunou se vrcholy 6-úhelníka blíže ke středu. Pak se konstatuje, že do středu S původního šestiúhelníku může letět nejvýše 5 letadel. Tím ovšem nejsou vyčerpána všechna možná rozmístění letišť. Vždyť např. úhly při vrcholu S zůstávají 60° a jiný případ se nevyšetřuje (obr. 2).



Obr.

Úloha 4. O lodích.

Úloha 4 byla řešena ve všech případech v podstatě stejným způsobem. Vždy řešitelé využili toho, že nejvýhodnějším bodem setkání je takový bod S , pro který hodnota

$$\max (L_1S, L_2S, L_3S)$$

nabývá svého minima. (Doba trvání „manévru“ flotily je totiž určena příjezdem poslední lodi do místa S .)

Řešení. (J. Pavlas) Rozlišíme 3 případy:

a) Nechť body L_1, L_2, L_3 leží v přímce a nechť L_2 je mezi body L_1, L_3 . Pak nejvýhodnějším místem setkání je střed S úsečky L_1L_3 . Do kteréhokoli jiného bodu X plují buď L_1 nebo L_3 déle než do bodu S .

b) Body L_1, L_2, L_3 jsou vrcholy tupoúhlého trojúhelníku nebo pravoúhlého trojúhelníku s nejdelší stranou L_1L_3 . Potom je řešení stejné jako v případě a).

c) Body L_1, L_2, L_3 tvoří vrcholy ostroúhlého trojúhelníku. Pak se všechny lodi mohou nejdříve setkat ve středu S kružnice opsané trojúhelníku $L_1L_2L_3$. Také zde kterýkoli bod $X \neq S$ má aspoň k jednomu z bodů L_1, L_2, L_3 větší vzdálenost než ke středu S .

(Podobná řešení zaslali: P. Takáč, J. Navrátil, Z. Ondrák, V. Zadražil, J. Paňáz, P. Makovický, J. Borsík, J. Voldřich, J. Trubelík, L. Obrdlík.)

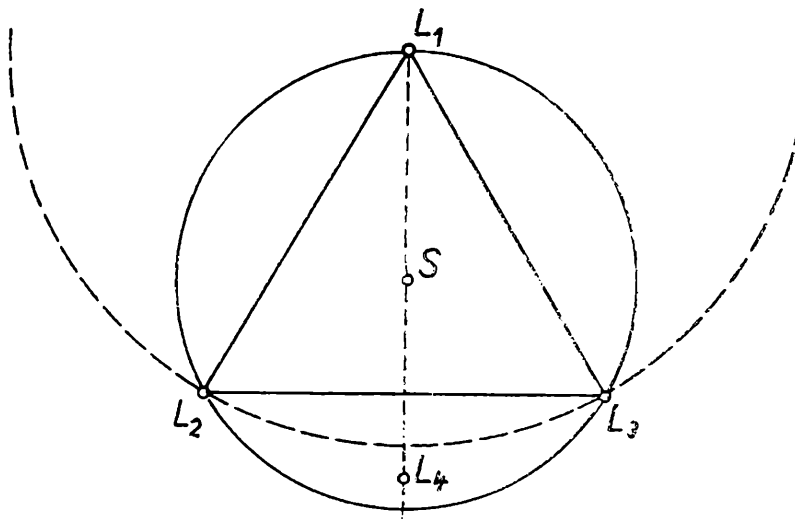
Řešení zobecněné úlohy 4 pro případ n lodí (P. Takáč). Nechť $L_1L_n = d$ je nejdelší vzdálenost dvou lodí z daných n lodí. (Je-li takových dvojic více, zvolíme jednu z nich.) Nechť K je kruh s průměrem L_1L_n .

a) Jestliže kruh K obsahuje všechny lodě, pak je zřejmě nejvýhodnějším místem setkání střed S kruhu K .

b) Jestliže nepatří všechny lodě kruhu K , potom je nejvýhodnějším místem setkání střed S kružnice k , která má maximální poloměr a je opsaná ostroúhlému trojúhelníku, jehož vrcholy jsou některé tři z daných lodí.

Poznámka k zobecněné úloze pro n lodí.

1. Uvedené řešení lze zjednodušit takto: Hledaným místem S je střed kruhu L , který obsahuje všechny lodě a má co nejmenší poloměr. Rozdíl oproti řešení pro případ $n = 3$ je v tom, že zde není uvedena konstrukce bodu S .



Obr.

2. Uvedeme ještě jeden nesprávný pokus o řešení. Nechť nepatří všechny lodě kruhu K opsanému nad nejdelší z úseček (označíme ji L_1L_n) určených danými n body. Pak hledaný bod je střed S kružnice k , která prochází body L_1L_n a bodem L_i , který má od kruhu K největší vzdálenost.

Nesprávnost plyne pro $n = 4$ z obrázku 3, kde $L_1L_2L_3$ je rovnostranný trojúhelník a $L_1L_4 > L_1L_2$. V tomto případě kružnice k opsaná ostroúhlému trojúhelníku $L_1L_2L_4$ má bod L_3 ve svém vnějšku.

Řešení obměněné úlohy pro 3 lodě různých rychlostí. (P. Takáč)

Použijeme věty:

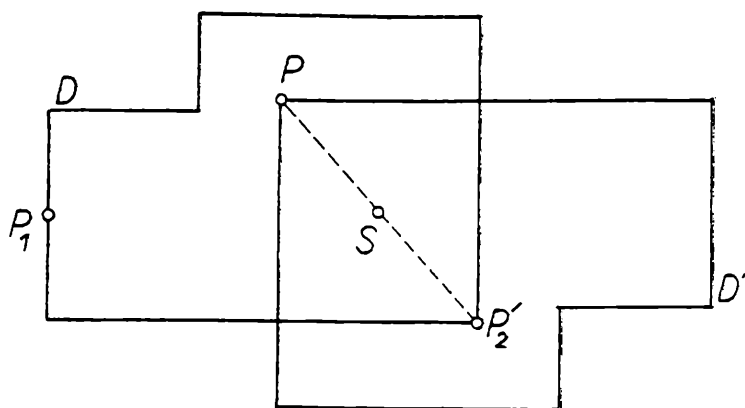
Nechť jsou dány dva různé body A , B a kladné číslo $k \neq 1$. Potom množina všech bodů X , pro něž platí $AX : BX = k$ je kružnice (tzv. Apolloniova kružnice). Viz např. 15. svazek ŠMM: Koman — jak vyšetřujeme geometrická místa bodů metodou souřadnic, str. 30 cvičení 2 nebo 16. svazek ŠMM: Horák — Kružnice, str. 88.

Sestrojíme množiny (Apolloniovy kružnice nebo osy úseček):

$$k_1 = \{X; L_2X \mid L_3X = v_2 \mid v_3\}, \quad k_2 = \{X; L_1X : L_3X = v_1 \mid v_3\},$$

kde v_1, v_2, v_3 jsou rychlosti lodí L_1, L_2, L_3 .

Jestliže mají množiny k_1, k_2 společný bod S , který patří konvexnímu obalu trojice L_1, L_2, L_3 (je to buď trojúhelník nebo úsečka určená dvěma



Obr. 4

z daných bodů), pak je bod S hledaným bodem. V ostatních případech je hledaným místem takový bod S úsečky L_1L_2 , pro který platí

$$L_1S : L_2S = v_1 : v_2.$$

Důkaz uvedeného tvrzení je v podstatě stejný jako při řešení úlohy 4.

(Podobné řešení zaslal J. Voldřich.)

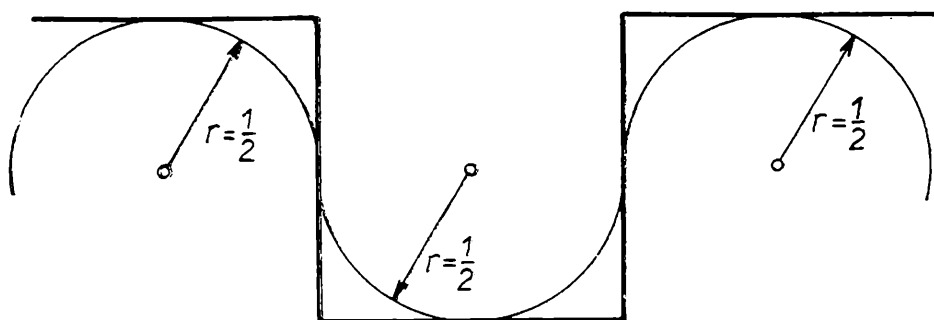
Úloha 5. O červené cestě.

Úloha byla řešena dvěma způsoby, v obou případech byl proveden důkaz sporem.

Řešení 1. (P. Takáč). Předpokládejme, že taková cesta neexistuje. Potom existuje taková dráha D_1 šachové věže po bílých polích vedoucí z levého okraje čtverce C na pravý okraj a zároveň dráha D_2 opět po bílých polích spojující horní a dolní okraj čtverce C . Dráha D'_1 souměrně sdružená s dráhou D_1 podle středu S čtverce C je složena vesměs z černých polí; přitom spojuje také oba svislé okraje čtverce C . Dráhy D'_1 a D_2 musí mít společné pole (jedna spojuje svislé okraje, druhá vodorovné okraje). To je však spor, neboť dráha D'_1 je černá a dráha D_2 je bílá. Předpoklad neexistence červené cesty spojující protější okraje čtverce C vede tudíž ke sporu.

Řešení 2. (J. Peňáz) Protože pole souměrně sdružená podle středu S mají různou barvu, musí střed S ležet na červené cestě. Předpokládejme, že žádná cesta jdoucí bodem S neobsahuje některý bod ležící na obvodu čtverce C . Pak musí být červená cesta obklopena uzavřenou drahou D šachové věže, skládající se z polí téže barvy. Dráha D' souměrně sdružená s drahou D podle středu S má opačnou barvu. Dráhy D a D' musí mít společné pole. (Je-li např. $P_1 \in D$ vnějším polem dráhy D' a $P_2 \in D'$ vnitřním polem dráhy D , pak P'_2 souměrně sdružené s polem P_2 podle středu S je vnitřní pole dráhy D' ; viz obr. 4. Na dráze D leží tedy dvě pole, z nichž jedno je uvnitř a druhé vně D' . Ze spojitosti a uzavřenosti drah D a D' tedy plyne, že mají aspoň 2 společná pole.) Dráhy D a D' však nemohou mít společná pole, neboť obě mají různou barvu. Dostáváme tak spor.

(Podobné řešení zaslali: J. Voldřich a J. Navrátil.)



Obr. 5

Poznámka. Uvedeme ještě jeden zajímavý, i když nedokončený pokus o řešení:

Množina červených stran čtvercových polí tvoří jistý červený graf G . Jeho uzly (vrcholy čtvercových polí) buď leží na obvodu čtverce C a jsou koncové, tj. stupně jedna, nebo leží uvnitř čtverce C a pak jsou buď stupně 2 nebo stupně 4.

Graf G je souměrný podle středu S , se kterým inciduje. Vezmeme tu souvislou část grafu G , která obsahuje střed S . Nyní je třeba dokázat, že tato část obsahuje aspoň 1 koncový uzel. V zaslaném „řešení“ však byl důkaz nesprávný.

Úloha 8. O kolejích dětského vláčku.

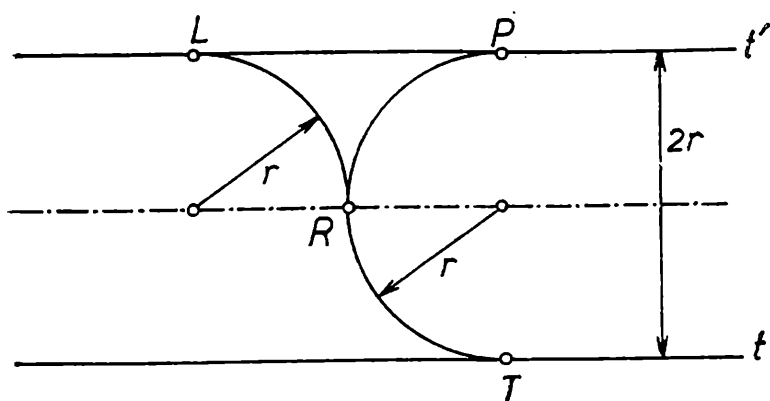
Úloha byla pro opravujícího velmi zajímavá, neboť skoro všichni řešitelé užili navzájem různých postupů. Dva řešitelé nahradili dráhu vláčku jistou lomenou čarou, kterou pak vyšetřovali. Jiný řešitel zkoumal, jak se bod pohybující se ve zvoleném smyslu postupně vzdaluje a opět přibližuje k výchozímu bodu. Další řešitel použil úhlů. Konečně poslední student vyšel z kruhové dráhy, kterou různě prodlužoval. Bohužel ne všechna řešení byla správná.

Řešení 1. (J. Peňáz) V krajních bodech čtvrtkružnicových oblouků sestrojíme tečny délky $2r = 1$, viz obr. 5 (poloměry čtvrtkružnic volíme $r = 1/2$). Dráha vláčku je nahrazena lomenou čarou složenou z jednotkových úseček, z nichž každé 2 sousední jsou navzájem kolmé. (Některé vrcholy lomené čáry mohou splynout.) Směry úseček označíme jako vodorovné a svislé. Aby vznikla uzavřená dráha, a tedy i uzavřená lomená čára, musí být počet svislých i vodorovných úseček sudý. (To plyne z toho, že každá vodorovná i svislá přímka musí protnout ve vnitřních bodech vždy sudý počet úseček.) Protože směry vodorovných a svislých úseček se pravidelně střídají, je obou druhů úseček stejný počet. Počet jednotkových úseček je tedy $4k$ a je roven počtu všech čtvrtkružnic, tedy

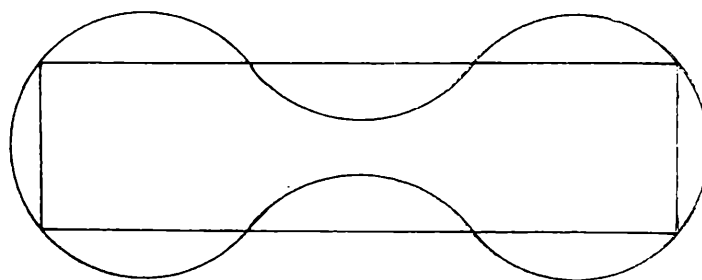
$$n_1 + n_2 = 4k. \quad (3)$$

Levotočivé, resp. pravotočivé čtvrtkružnici odpovídá otočení tečny o $+90^\circ$, resp. -90° . Při projití uzavřené dráhy se tečna otočí o $\pm 360^\circ$, proto je

$$|n_1 - n_2| = 4. \quad (4)$$



Obr. 6



Obr. 7

Z rovností (3) a (4) se již snadno odvodí

$$n_1 = 2(k \pm 1) \text{ a } n_2 = 2(k \mp 1).$$

(Podobné řešení zaslal J. Navrátil)

Řešení 2. (P. Takáč) Poloměry všech čtvrtkružnic označíme r . V krajním bodě T jedné čtvrtkružnice sestojíme tečnu t . Vláček přejede z bodu T do bodu R po první čtvrtkružnici a po druhé čtvrtkružnici do bodu P nebo L ; obr. 6. Tím se dostane na přímku t' rovnoběžnou s tečnou t ; vzdálenost přímek t a t' je $2r$. Po projetí dalších dvou čtvrtkružnic se vláček dostane na přímku t'' , která je rovnoběžná s t' a má od ní vzdálenost $2r$. Přímky t'' a t mají tedy vzdálenost $2r \pm 2r$. Tak můžeme pokračovat, dokud vláček neprojde celou dráhou. Z toho je vidět, že okružní dráha musí mít sudý počet takových dvojic čtvrtkružnic, tedy $n_1 + n_2$ je násobek čísla 4.

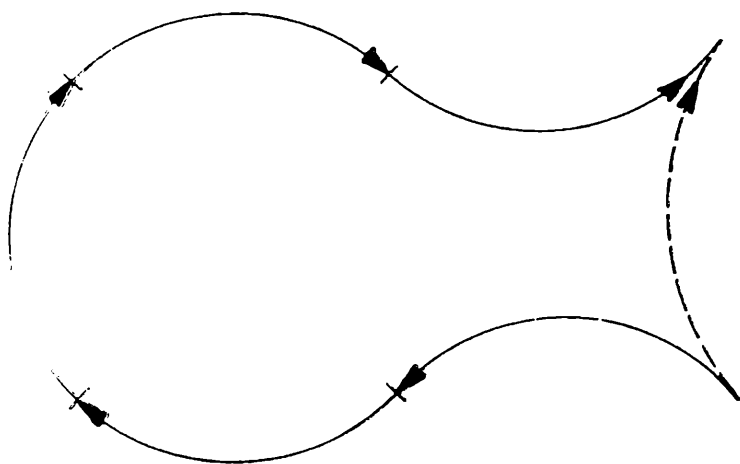
Další část řešení je stejná s řešením 1.

Poznámky k úloze 8. Rozebereme si další méně úspěšné pokusy o řešení.

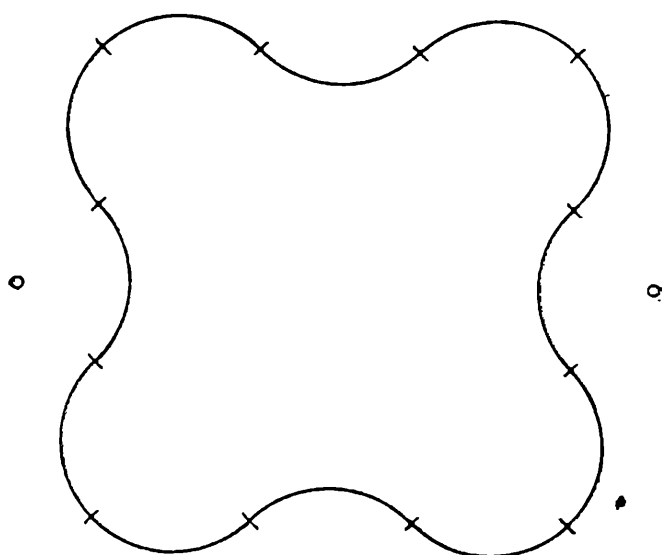
1. Jeden řešitel nahradil dráhu vláčku lomenou čarou spojující krajní body jednotlivých čtvrtkružnic. Lomená čára se skládá z úseček dvou směrů S_1 a S_2 . V dalším se však dopustil chyby, když uvedl, že úseček obou směrů je též počet; viz obr. 7.

2. V jednom řešení bylo uvedeno: Proběhnutí každé čtvrtkružnice představuje otočení o $+90^\circ$ nebo -90° . Jde-li o okružní dráhu, potom celkové otočení je rovno $\pm 360^\circ$, tj.

$$90^\circ \cdot n_1 - 90^\circ \cdot n_2 = \pm 360^\circ.$$



Obr. 8



Obr. 9

Hned nato se však uvádí bez jakéhokoli odůvodnění, že

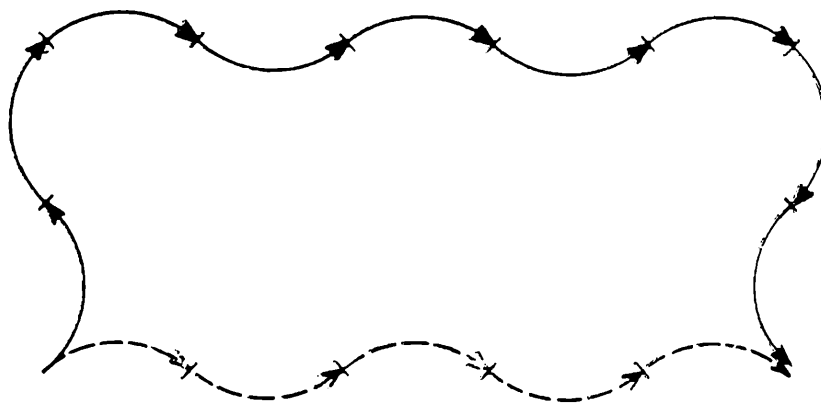
$$90^\circ \cdot n_1 + 90^\circ \cdot n_2 = k \cdot 360^\circ.$$

3. Poslední pokus, o kterém se zmíníme, skončil neúspěchem zřejmě malou zkušeností autora. Začal dobře vyšetřením kruhové dráhy, pro kterou jsou obě dokazované vlastnosti splněny. Pak začal tuto dráhu „prodlužovat“ tím, že se 1 oblouk vynechá a pak se přidají nové dva levotočivé a dva pravotočivé oblouky. Dráha se opět „uzavře“ doplněním vynechaného oblouku; obr. 8. Tímto způsobem však nelze konstruovat všechny přípustné dráhy, např. dráhu z obr. 9. Ukážeme si však, jak by šlo toto „řešení“ spravit. Použijeme matematické indukce.

Pro dráhy celkové délky $n = n_1 + n_2 \leq 4$ je tvrzení zřejmé. (Pro $n < 4$ žádná okružní dráha neexistuje, pro $n = 4$ je to kruhová dráha.)

Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny okružní dráhy, které mají délku d nejvýše rovnou číslu n . (Tzn., že pro d , které není násobkem 4, okružní dráha neexistuje a pro d , které je násobkem 4, jsou počty levotočivých i pravotočivých zatáček rovny sudým číslům.) Ukážeme, že tvrzení platí i pro dráhy délky $n + 1$.

Obr. 10



Rozlišíme dva případy: a) V dráze D délky $n \neq 1$ existuje úsek složený postupně z oblouků

$$L, P, P, P, L \quad (5)$$

(L značí levotočivou, P pravotočivou zatáčku); viz obr. 8. Potom sestrojíme novou dráhu D' , která vznikne z dráhy D nahrazením úseku (5) jediným obloukem P . Dráha D' má tyto počty levotočivých a pravotočivých čtvrtkružnic

$$n'_1 = n_1 - 2, \quad n'_2 = n_2 - 2, \quad (6)$$

kde n_1 , resp. n_2 jsou počty levotočivých a pravotočivých čtvrtkružnic v dráze D . Pro čísla n'_1 , n'_2 , $n' = n_1 + n_2 = n - 4$ věta podle předpokladu platí. Proto platí i pro dráhu D .

b) V dráze D neexistuje úsek obsahující 3 za sebou jdoucí pravotočivé nebo levotočivé oblouky. Pak najdeme nejkratší úsek tvaru

$$L, P, \underbrace{P, L, P, L, \dots, P, L, P, L, P, P, L}_{k \text{ dvojic } P, L} \quad (7)$$

(resp. $P, L, L, P, L, P, L, \dots, L, P, L, L, P$). Protože dráha D je okružní, musí takový úsek existovat — viz obr. 10. Potom místo dráhy D sestrojíme dráhu D' tak, že v dráze D nahradíme úsek (7) úsekem

$$P, L, P, L, \dots, P, L. \quad (k \text{ dvojic } P, L)$$

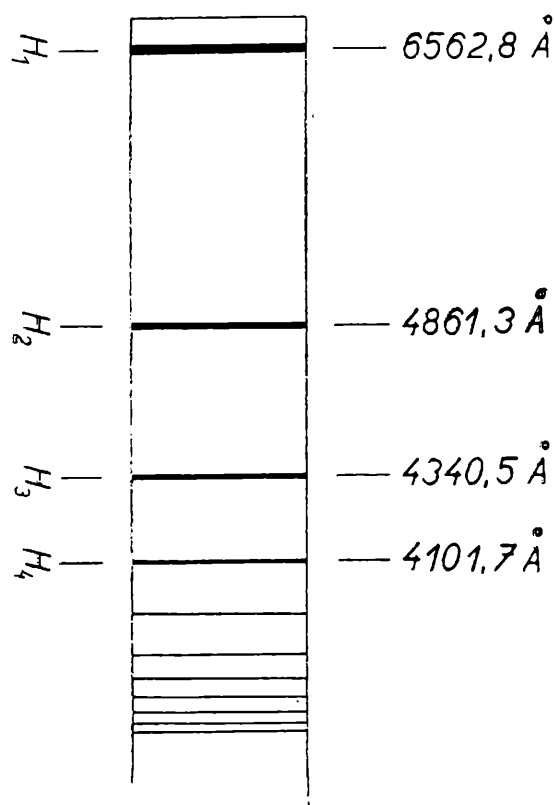
Pro dráhu D' opět platí rovnosti (6), takže další postup je stejný jako v případě a).

fyzika

Zákony čiarových spektier Balmerov objav a jeho význam

E. ŘÍMAN, Praha

Oddávna sa fyzikovia snažili vysvetliť pozorovateľné fyzikálne javy pomocou teoretických modelov, vyjadritelných matematickými formulami. Túto snahu najlepšie ilustruje vývoj modelov atómu, kde skúmanie čiarového spektra vodíka (pomocou spektrometrov) viedlo k netušeným výsledkom. Veľkú zásluhu na tom má *Johann Jakob Balmer* (1825—1898), učiteľ na gymnáziu v Basilei, ktorý však nebol fyzikom (!).



Obr. 1

1. Prvé štyri čiary viditeľného spektra, ktoré sú čiarami slnečného spektra, zbadal *J. Fraunhofer* (1787—1826) a premeral ich vlnové dĺžky. Tieto čiary si označíme H_1 , H_2 , H_3 , H_4 (viď obr. 1).

Prvá čiara H_1 leží v červenej časti spektra, druhá H_2 v modrej, tretia a štvrtá vo fialovej.

Vlnová dĺžka λ_1 (lambda) spektrálnych čiar sa udáva v nanometroch $= \text{nm} = 10^{-9} \text{ m}$. Dříve se používalo jednotky „angström“ $= \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$. Okrem veličiny zvanej vlnová dĺžka užíva fyzika tiež veličinu „vlnočet“ ν (čítaj „ný“), ktorý je definovaný vzťahom $\nu = \frac{1}{\lambda}$ a má jednotku $[\text{m}^{-1}]$ resp. $[\text{cm}^{-1}]$.

Tabuľka T_1 pre vlnové dĺžky a vlnočty Frauenhoferových čiar

Ozna- čenie	Farba	Vlnová dĺžka	Vlnočet $\nu = \frac{1}{\lambda}$
H_1	červená	$\lambda_1 = 6562,8 \text{ nm}$	$\nu_1 = 15\,237 \text{ cm}^{-1}$
H_2	modrá	$\lambda_2 = 4861,3 \text{ nm}$	$\nu_2 = 20\,571 \text{ cm}^{-1}$
H_3	fialová	$\lambda_3 = 4340,5 \text{ nm}$	$\nu_3 = 23\,039 \text{ cm}^{-1}$
H_4	ultrafialová	$\lambda_4 = 4101,7 \text{ nm}$	$\nu_4 = 24\,380 \text{ cm}^{-1}$

V roku 1884 požiadal Balmera profesor basilejskej univerzity *Hagenbach*, aby pomohol pri riešení ťažkého problému: „Súvisia veličiny λ resp. ν Frauenhoferových čiar (uvedených v tabuľke T_1) nejako spolu a v kladnom prípade, aký by bol empirický vzorec udávajúci ich závislosť?“

Balmer sa najsamprv díval na tento problém veľmi skepticky: Kto vie, čo tí fyzikovia namerali? Veď tie čísla nemuseli vzniknúť podľa nejakého matematického pravidla!

Potom si však začal uvedomovať, že problém sa podobá úlohe, ktorú učil riešiť žiakov na gymnáziu: Má sa určiť obecný člen postupnosti, pre ktorú sú dané hodnoty niekoľkých počiatočných členov. — A to rozhodlo! Mozgové bunky matematikov podráždí každý záhadný problém.

Najprv sa rozhodol, že bude skúmať len vlnočty; tvoril prvé a druhé diferencie vždy dvoch susedných členov, potom skúmal, či tie dané čísla netvorí akýsi zložitý geometrický rad, znázorňoval najdené čísla graficky, vyratúval ich odmocniny, logaritmy atď.

Týždne ubiehali bezvýsledne. Ľudia pozorovali jeho zádumčivosť a žiaci sa čudovali, že opravy písomných prác a rysov z deskriptívnej geometrie teraz prichádzali oveľa neskoršie. Ale Balmer vytrvával!

Prvým jeho úspechom bolo zistenie, že pomer vlnočtov $\nu_4 : \nu_1$ sa veľmi približne rovná zlomku $\frac{8}{5}$, keďže

$$\nu_4 : \nu_1 = 24\,380 : 15\,237 = 1,60005 \doteq \frac{8}{5} \quad (1)$$

Krátko potom našiel ďalšie dva racionálne pomery

$$\nu_2 : \nu_1 = 20\,571 : 15\,237 = 1,35007 \doteq \frac{27}{20} \quad (2)$$

$$\nu_3 : \nu_2 = 23\,039 : 20\,571 = 1,11997 \doteq \frac{28}{25} \quad (3)$$

Balmer poznal hudobnú akustiku a vedel o Pythagorových pokusoch so strunami; preto prvý najdený zlomok (1) ho priviedol na domnienku,

že vlnočty vodíkových čiar sú podobné stupnici tónov (keďže $\frac{8}{5}$ je v hudbe interval nazvaný „malá sexta“). Pravdaže ďalšie pomery (2) a (3) ukázaly, že fakty spektroskopické sú inakšie ako hudobné.

Študujúci získa veľa, ak bude ďalšie výpočty samostatne robiť a kontrolovať!

S víťazným úsmevom napísal Balmer výsledok vo tvare

$$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 : \nu_4 = 1 : \frac{27}{20} : \frac{29 \cdot 27}{500} : \frac{8}{5} \quad (4)$$

Ale nebolo ešte všetko vyhraté; veď bolo treba nájsť predpis, podľa ktorého sú utvorené zlomky pravej strany.

Aby sa zmenšily hodnoty druhého a tretieho čitateľa, násobil Balmer pravú stranu vzťahu (4) zlomkom $\frac{1}{36}$, čím dostal

$$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 : \nu_4 = \frac{1}{36} : \frac{3}{80} : \frac{7 \cdot 3}{500} : \frac{2}{45}$$

Zlomky sú teraz — pravdaže — v tzv. základnom tvare (tj. čitateľ a menovateľ nemajú spoločného deliteľa) a majú v menovateli štvorce čísel 6, 4, 10 a 3, ale druhý a štvrtý zlomok nejako nezapadajú do celkového postupu. Ale stačilo násobiť čitateľa aj menovateľa druhého zlomku číslom 4 a štvrtého zlomku číslom 16, čím vzniklo

$$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 : \nu_4 = \frac{5}{36} : \frac{12}{64} : \frac{21}{100} : \frac{32}{144} \quad (5)$$

Je pochopiteľné, že Balmer sa zaradoval vidiac pravidelnosť menovateľov (tj. 6^2 , 8^2 , 10^2 , 12^2) aj čitateľov (pravidelne rastúce diferencie $12 - 5 = 7$, $21 - 12 = 9$, $32 - 21 = 11$) a po troch dňoch našiel konečnú úpravu nahradením každého zo zlomkov vo výraze (5) rozdielom dvoch zlomkov! Je totiž

$$\frac{5}{36} = \frac{5}{9 \cdot 4} = \frac{9-4}{9 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9};$$

a podobne

$$\frac{12}{64} = \frac{16-4}{16 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \quad (6a)$$

To isté spravil s tretím a štvrtým zlomkom vzťahu (5). Dostal

$$\frac{21}{100} = \frac{25-4}{25 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{25}; \quad \frac{32}{144} = \frac{36-4}{36 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{36} \quad (6b)$$

Pozn.: Výborný teoretický fyzik *Arnold Sommerfeld*, autor knihy „Stavba atomov a spektrálne čiary“ pochválil Balmera vraviac, že táto náhrada jedného zlomku rozdielom dvoch vhodnejších bola pri celom tom odvodzovaní vrcholným výkonom!

Tým bol daný problém rozriešený a hľadaná zákonitosť nájdená. Výraz (4) možno nahradiť štyrmi rovnicami

$$\nu_1 = \frac{5}{36} R; \nu_2 = \frac{12}{64} R; \nu_3 = \frac{21}{100} R; \nu_4 = \frac{32}{144} R, \quad (7)$$

kde hodnotu čísla R (ktoré dostalo meno RYDBERGOVA konštanta čiže Rydbergov vlnčet) vyrátame dosadením hodnôt vlnčtov ν zo stĺpca 4 tabuľky T_1 do rovníc (7) a určením aritmetického priemeru (veď ide o čísla získané meraním, teda nepresné!), aby sme dostali hodnotu najpravdepodobnejšiu.

Z prvej rovnice vzťahov (7) dostaneme dosadením $\nu_1 = 15237$ pre R hodnotu 109706 cm^{-1} , dosadením ďalších vlnčtov vyjde hodnota pre R len maličko odlišná.

Ešte bolo treba v rovniciach (7) nahradiť zlomky úpravou podľa (6). A tak hlásil Balmer fyzikálnemu svetu prekvapujúcu zprávu: Vlnčty prvých štyroch spektrálnych čiar vodíka vyhovujú vzorcom

$$\begin{aligned} \nu_1 &= R \cdot \frac{5}{36} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right); \quad \nu_2 = R \cdot \frac{12}{64} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) \\ \nu_3 &= R \cdot \frac{21}{100} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right); \quad \nu_4 = R \cdot \frac{32}{144} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} \right), \\ \text{čiže všeobecne } \nu_k &= R \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(2+k)^2} \right), \text{ kde } k = 1, 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

značí poradové číslo čiary.

Pozn. 1. Balmer už sám uvažoval o tom, či neexistujú spektrálne čiary vodíka, ktorých vlnčty by vyhovovali pozmenenej rovnici (8), kde by sa číslo 2 v menovateli prvého zlomku nahradilo číslom 3. Túto otázku nebolo možné rozhodnúť za života Balmerovho; roku 1908 sa však podarilo nemeckému fyzikovi *Paschenovi* nájsť v ultračervenej časti vodíkového spektra čiary, ktorých vlnčty vyhovujú rovniciam

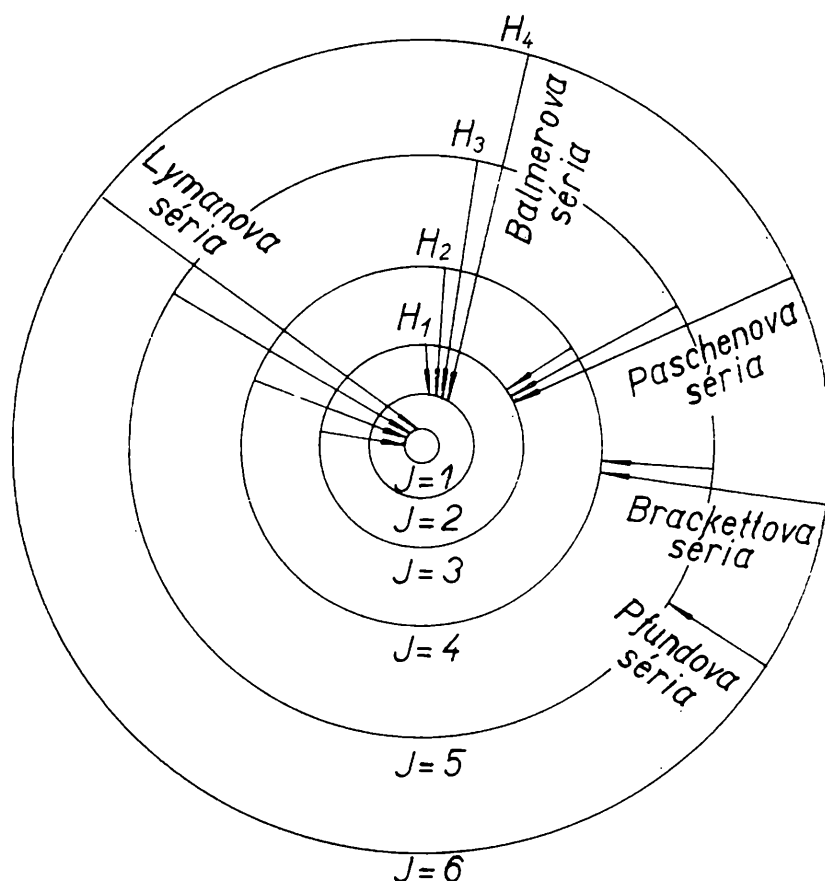
$$\nu = R \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) \quad \text{a} \quad \nu = R \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right),$$

čiže sú počiatočnými členmi tretej série vodíkového spektra, ktorá podľa svojho objaviteľa bola nazvaná Paschenova.

3. Existencia série Lymanovej a Paschenovej (viď pozn. 1 a 2 hore) presvedčily fyzikov, že Balmerov pôvodný vzorec (8) môže byť nahradený komplikovanejším vzorcom, čo asi Balmer tušil, ale neodvážil sa navrhnúť, totiž

$$\nu = R \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

kde n, s sú celé čísla, pre ktoré platí $n > s$.



Obr. 2

Potvrdením toho bolo najdenie *Bracketovej série* pre $s = 4$, $n = 5, 6, 7$, objavenej roku 1922 a *Pfundovej série* pre $s = 5$, $n = 6, 7, 8$ ktorá bola objavená r. 1924.

Záverom tohoto článku buď krátky výklad:

Bohrova theória vodíkového atomu.

Žiarivá energia kmitočtu ν môže byť podľa fyzika *Plancka* vysielaná alebo pohlcovaná len v celistvých násobkoch tzv. svetelného kvanta (čiže fotonu) o energii $W = h \cdot \nu$, kde $h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ je Planckova konštanta.

Bohr predpokládal, že pre vodík, ktorý má v atome jeden obiehajúci elektron, musia existovať neaké obežné dráhy, na ktorých elektron nežiari (tj. nevydá svetelnú energiu), a že vodík v normálnom stave má svoj elektron v takejto obežnej dráhe, ktorá má najmenší polomer.

Polomer r_1 tejto obežnej dráhy odvodil a potom vyrátal vzorcom

$$r_1 = \frac{h^2 \epsilon_0}{m_e e^2}, \quad (9)$$

kde $h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ = Planckova konštanta

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ = influenčná konštanta

$\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ = permitivita vakua

$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ = náboj elektronu

$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ = hmotnosť elektronu.

Výsledok výpočtu bol $5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

Pri prudkom zohriatiu narážajú atomy na seba, takže niektoré elektrony sú vyrazené do vyšších stabilných obežných dráh, nabývajú tak vyššiu energiu, než mali v pôvodnej dráhe. Po nejakom čase klesajú do niektorej nižšej stabilnej dráhy, odovzdávajú rozdiel energie, ktorú mali vo vyššej dráhe, a energie, ktorú majú v dráhe dopadovej, ako „zásvit“ čiže čiaru vyžiareného svetla.

Bohr si vypočítal energiu každej dráhy, kde vodík nežiari, a zistil, že Balmerova séria vzniká „pádom“ z rôznych vyšších obežných dráh do dráhy druhej.

Pripojený obr. 2 znázorňuje, ako tieto kvantové „pády“ tvoria rozličné spektrálne čiary vodíka.

O některých aplikacích kosmonautiky II

RNDr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Posledně jsme uvedli, jak se při dálkových pozorováních Země uplatnila barevná fotografie. Dnes budeme v započaté úvaze pokračovat.

Na snímcích Země můžeme sledovat jednak části zemského povrchu, jednak různé druhy oblaků. Podívejme se nejprve na strukturu povrchu, která je z výše několika málo set kilometrů zcela jiná, než jak se jeví při pozorování z letadel. Kdo znáte plastické mapy našeho státu, jistě jste si již uvědomili, jaké zajímavé průrvy v terénu jsou názorné od okamžiku, kdy tuto mapu pozorujeme z velké vzdálenosti. Neruší totiž mnoho menších detailů, čímž vynikne základní struktura. Je tomu nějak podobně, jako když sami sebe pozorujeme v zrcadle. Budeme-li se chtít vidět jako celek, poodstoupíme raději do větší vzdálenosti od zrcadla.

A tak se na družicových snímcích jeví povrch Země jako zvláštní geologická mapa, na níž jsou patrné různé terénní zlomy a jiné podrobnosti. Počet informací lze ještě zvětšit, sledujeme-li části povrchu i v infračerveném světle, takže se projevuje jejich tepelná „setrvačnost“; v poslední době byla rozpracována i řada pozorovacích metod, opírajících se o vlny rádiové. Dlouhé vlny totiž pronikají do určité hloubky pod povrchem a jejich šíření závisí na hodnotách dielektrické konstanty a elektrické vodivosti prostředí, do něhož pronikly. Vlny se vysílají družicovou stanicí a nakonec se k ní po odrazu (kombinovaném s ohybem) od Země opět vracejí a přinášejí své informace.

Souhrn všech těchto pozorování umožňuje poznat geologickou strukturu terénu často lépe a jistě z jiných hledisek, než kdyby byl obdobný průzkum prováděn na zemském povrchu či z letadel. A tak kosmonautika slavila své úspěchy i při hledání nových zdrojů ropy a dokonce

i zlata. Táž pozorovací metoda se však osvědčila i při usvědčování viníka, odpovědného za znečišťování říční vody odpadovými chemikáliemi; konkrétně šlo o jeden průmyslový podnik na řece Hudson a družicový snímek sloužil jako „corpus delicti“ při soudním pojednávání (nezapomeňme, že vypouštěné odpady mají obecně jinou teplotu, než je teplota vody v řece, a to se na infračervených snímcích zřetelně projevílo). Kombinováním se zmíněným rádiovým průzkumem lze úspěšně vyhledávat (dokonce i pod povrchem) vodu; takto bylo v severní Kanadě nalezeno trvale zamrzlé a zasněžené jezero, o němž nevěděli ani místní obyvatelé.

Kromě zemského povrchu lze ovšem sledovat i oblaka, jejich vývoj, pohyb a rozložení. Má to význam pro praktickou i teoretickou meteorologii. Zatímco na „obyčejných“ snímcích je patrné, co je světlejší a co méně světlé, prozrazují infračervené snímky, co je chladnější a co naopak teplejší. Zvláště cenné jsou snímky, prozrazující rychlý vývoj tajfunu, který někdy vznikne nad oceánem a pak náhle nečekaně „překvapí“ obyvatele na pevnině; díky kosmické meteorologii jsou nyní taková nemilá překvapení vyloučena.

Avšak i dálkové pozorování oblaků má dnes svůj význam v boji za čistotu životního prostředí. V SSSR byla vyvinuta metoda, jak sledovat vznik a vývoj tzv. aerosolových oblaků, které vznikají v místech se zvýšeným průmyslovým odpadem do ovzduší. Tyto oblaky mají totiž specifické vlastnosti, které je prozrazují. Na některých lodích typu Sojuz i na orbitální stanici Saljut se tato metoda úspěšně zkoušela a až budou lépe známy zákony vývoje aerosolových oblaků, bude nepochybně po ruce metoda, jak účinně kontrolovat jakékoli zvýšené průmyslové porušování čistoty ovzduší v celosvětovém měřítku.

Všimněme si ještě využívání stavu beztíže, který je na oběžné dráze trvalý, a tedy zde na Zemi zcela nenapodobitelný. Jen tak mohlo dojít k tomu, že v našich dosavadních představách jsou takové pojmy jako např. „povrchové napětí“ prakticky opomíjeny a málokdo se asi vážněji zamyslel nad tím, že mohou být vytvořeny podmínky, při nichž se molekulární síly na rozhraní dvou prostředí mohou dokonce stát určujícím činitelem.

A přece to byl již v roce 1932 *M. Appell*, jenž ve svých „*Traité de Mécanique*“ (vydal Gauthier-Villars v Paříži) řešil problém, zda mohou existovat kapaliny bez nádoby a jak, jestliže existují, mohou být ovlivňovány a ovládány. Dnes se vědci k těmto myšlenkám vracejí znovu a jejich práce jsou — možno říci — tak převratné, že se snad stanou v budoucnosti klíčem k nepředstavitelné technologii.

Nové technologické éře bude pochopitelně předcházet mnoho let výzkumu na orbitálních pracovištích. Je však pravděpodobné, že se tam lidé naučí zhotovovat stroje z tekutých materiálů; budou je v kosmickém beztíží vyvíjet molekulu po molekule asi podobně, jako příroda dává

vyrůstat lidem, hmyzu a rostlinám. Bude-li možno takový postup uskutečnit, vznikne svět strojů bez koleček, čerpadel, pístů a ozubených kol. Vyrostou zázračné systémy stejně důmyslné jako je lidská ledvina či hovězí játra.

A tak se před inženýry náhle otevírá zcela nový svět, svět bez tíže, kdy gravitační působení je vyváženo odstředivou silou kroužícího kosmického objektu. Navíc bude možno využívat i trvalého vysokého vakua, nízkých teplot a nejrůznějších druhů záření.

První pokusy s kapalinami v kosmickém beztíží jsme viděli při přímých televizních přenosech z posledních lodí Sojuz. Voda se ihned „sbalila“ do tvaru koule, která se vlivem příslušného impulsu všelijak tvarově měnila, ale držela pohromadě. Byla to první ukázka kapaliny bez nádoby. V budoucnu (a jistě již v příštím desetiletí) bude možno na takto volně se vznášející materiál působit tak, aby se zahřál na teplotu, kterou by zde na Zemi stěny nádoby „nepřežily“; máme na mysli tavení těžko tavitelných kovových materiálů nebo směsí různých kyslíčníků, potřebných pro výrobu skla. Tak např. směsi kyslíčníků hliníku, hafnia, zirkonu a titanu mají po ztuhnutí výborné optické vlastnosti, ale sotva je lze tavit v nádobách, protože jde o vysoké teploty; v beztížném prostoru však bude něco podobného relativně snadné, protože kyslíčnícíky se budou volně vznášet v prostoru, takže se k nim bude moci přiblížit velická sluneční pec (s menším prototypem se prováděly na oběžné dráze cenné experimenty při společném letu Sojuz - Apollo); v ohnisku její čočky se materiál roztaví, avšak stále bude držet pohromadě a pomalu ztuhne, aby byl potom snesen k Zemi či vybroušen na orbitální stanici. Je zajímavé, že již existuje kosmický projekt, který to vše dokáže splnit i bez spoluúčasti člověka. Směs kyslíčníků ve formě tablet by byla dopravena na oběžnou dráhu, načež by tam byla dirigována obíhající družicová sluneční pec tak, aby se kyslíčnícíky ocitly v ohnisku její čočky. Po roztavení a opětném ztuhnutí by byla koule z kyslíčnickové směsi snesena na Zemi podobnou technikou, jakou jsou dnes dopravovány z Měsíce vzorky půdy sovětskými Lunami k dalšímu zpracování. Výsledkem by byly zcela nové druhy skel, přičemž by bylo možno při výrobě používat i směsí hustotou tak odlišných materiálů, které by zde na Zemi neudržely svou homogenitu až do okamžiku ztuhnutí. V prostoru bez tíže by to ovšem bylo docela jednoduché.

Začíná se nám tedy v mysli rýsovat obraz, jak může kosmonautika pomáhat v oblasti technologie. Bude to jednak v oblasti tavenin, jednak v oboru krystalických materiálů vůbec, protože krystaly, které se vytvářejí z roztoků držících pohromadě bez jakékoli nádoby, mohou růst daleko dokonaleji. O tom však zase až příště.

Modely vesmíru

JIŘÍ ZLATUŠKA, Brno

Kosmologie je vědní obor, který se zabývá studiem vlastností vesmíru jako celku. Výsledky tohoto vědního oboru jsou formulovány v kosmologických modelech, které popisují ty vlastnosti vesmíru, které pokládáme za podstatné.

Při tvorbě takového modelu je třeba brát za základ nějakou fyzikální teorii, o které si myslíme, že je vhodná pro popis vlastností celého vesmíru. Touto teorií bude zřejmě některá teorie gravitace, neboť právě gravitační síla převládá ve vzdálenostech, které ve vesmíru panují. Jelikož však vesmír je velice složitá soustava, musíme použít také jistých zjednodušujících předpokladů pro to, abychom mohli extrapolovat nám známé lokální vlastnosti vesmíru na celý vesmír. Musíme nutně předpokládat homogenitu a izotropii přinejmenším na úrovni fyzikálních zákonů (tj. že fyzikální zákony platí stejně v celém vesmíru). Dále také obvykle předpokládáme, že vesmír je homogenní a izotropní i co se týče fyzikálních podmínek v něm. To je zformulováno v tzv. kosmologickém principu. Tento předpoklad je, jak se zdá, splněn velice dobře, bereme-li za základ délkové měřítko větší než asi 10^8 světelných let. Lze uvažovat i nehomogenní a anizotropní vesmír, ale není zcela jasné, jakou cestou se dát (zda zvolit počáteční odchylky a ty pak zvětšovat, nebo předpokládat, že se v různých oblastech vesmíru realizují různé „podvesmíry“ takových typů, o nichž bude řeč dále).

Vůbec první model vesmíru na „solidnějších“ základech sestavil již *I. Newton*; neuvažujeme zde tedy modely vesmíru, které by vypadaly asi tak, jak si vesmír představovali staří Indové nebo Egypťané. Podle Newtona byl vesmír nekonečný a rovnoměrně vyplněný hvězdami. Tento model, i když se zdá na první pohled velice pěkný, má několik podstatných vad — tzv. kosmologických paradoxů, jak říkáme neshodám mezi kosmologickou teorií a pozorovanými fakty.

Prvním z nich je *paradox fotometrický*. Podle Newtonova modelu bychom totiž vůbec neměli znát něco, čemu říkáme noc. Průměrný počet hvězd ve vzdálenosti r je úměrný r^2 . Množství záření, které z každé přichází, je úměrné r^{-2} . Celkový světelný přírůstek hvězd, respektive galaxií, ve vzdálenosti r nebude tedy na r vůbec záviset. Budeme-li pak r zvětšovat do nekonečna a integrovat dopadající světlo, dostaneme ten výsledek, že jas hvězd na obloze by vůbec existenci noci neměl připustit. Tento paradox se nedá odstranit např. zavedením temných mraků mezihvězdné hmoty, protože záření nikam nezmizí, ale je pouze rovnoměrně rozptýleno do prostoru, což vzhledem k nekonečnému množství světelných zdrojů nemá žádaný výsledek. Můžeme však zavést

systematický pohyb hvězd směrem od pozorovatele — v tom případě se totiž světlo vlivem *Dopplerova efektu* zeslabí a množství světla ze vzdálenosti r již klesá spolu s rostoucím r .

Jiným paradoxem je tzv. *paradox gravitační*, který již nelze odstranit tak, jako paradox fotometrický. Podobným postupem jako výše totiž dojdeme k tomu, že nemůže existovat Newtonův gravitační potenciál a že tedy vůbec nemůžeme sledovat projevy gravitace. Jak se ukazuje, je tedy Newtonův model vesmíru přímo v rozporu s Newtonovou teorií gravitace.

Tyto paradoxy odstraňuje *Charlierův hierarchický model vesmíru*, ve kterém hustota hvězd v prostoru stále klesá se vzrůstající vzdáleností od nás. Oba paradoxy jsou sice odstraněny, ale za cenu toho, že Zemi stavíme někam poblíž středu vesmíru.

V obou těchto „klasických“ modelech se objevuje ještě třetí *paradox* — *termodynamický*. Podle třetí věty termodynamické totiž vesmír spěje do stavu, kdy se všechny teploty ve vesmíru vyrovnají a nastane tepelná smrt vesmíru, kdy již další přeměna energie nebude možná. Tento paradox však může být pokládán za sporný. Je totiž otázkou, zda lze aplikovat statistické zákony termodynamiky na celý vesmír. Faktem však je, že ve vyvíjejících se modelech obecné teorie relativity tento paradox nevzniká, jak ukázal např. americký fyzik *J. A. Wheeler*.

Brzy po zformulování obecné teorie relativity aplikoval *A. Einstein* rovnice z ní vyplývající na celý vesmír. Tehdy ještě nebyl znám rudý posuv galaxií, a tak si pomohl tím, že do rovnic zavedl tzv. kosmologickou konstantu Λ s její kritickou hodnotou. Díky tomu se mu podařilo dostat stacionární vesmír, který je v klidu; nenajdeme v něm žádný systematický pohyb hvězd. Později, jak dál uvidíme, se však ukázaly jako správnější právě vyvíjející se modely — modely se systematickým pohybem hvězd.

Kosmologickou konstantu Λ lze zavést i do Newtonovy teorie gravitace. V ní pro sílu F , která působí na těleso jednotkové hmotnosti na povrchu koule hustoty ϱ o poloměru r , platí

$$F = - \frac{4}{3} \pi G \varrho r, \quad (1)$$

kde G je gravitační konstanta. Zavedením kosmologické konstanty Λ tato rovnice přejde v

$$F = - \frac{4}{3} \pi G \varrho r + \Lambda r.$$

Klademe-li $\Lambda = \frac{4}{3} \pi G$, což můžeme udělat, protože tím pouze stanovíme fyzikální rozměr Λ , dostáváme odtud

$$F = \frac{4}{3} \pi G (\varrho - \Lambda) r \quad (2)$$

Rovnice (2) je svou formou shodná s rovnicí (1), pouze hustota ρ je zde zmenšena o Λ . Kosmologická konstanta má tedy funkci jakési všudypřítomné fiktivní hmoty o hustotě Λ , která může být i záporná. Je-li $\Lambda > 0$, má odpuzující účinky proti gravitaci, zmenšuje gravitační sílu oproti původní síle z rovnice (1). Naopak, je-li $\Lambda < 0$, má přitažlivé účinky, zvětšuje ρ a tím i gravitační působení.

Z experimentů je vidět, že původní vztah (1) platí ve sluneční soustavě s dostatečnou přesností, musí tedy být velikost Λ blízká nule.

V obecné teorii relativity má Λ opět podobnou úlohu jako v Newtonovské gravitaci: celé odvození by však bylo nesrovnatelně těžší. Jeden podstatný rozdíl tu však je. Zatímco v newtonovské gravitaci jsme ji zavedli jaksi „dodatečně“, v obecné teorii relativity se objeví při odvozování rovnic gravitačního pole přímo jako jedna z integračních konstant, a nelze ji tedy jen tak položit rovnu nule. Můžeme-li však použít rovnic bez Λ , je to mnohem výhodnější, neboť se tím značně zjednoduší.

Roku 1922 našel ruský meteorolog *Friedman* vyvíjející se modely vesmíru s $\Lambda = 0$ a později nezávisle na něm našel r. 1925 *Lemaitre* vyvíjející se modely i pro $\Lambda \neq 0$.

Při zkoumání modelů vesmíru budeme používat funkci expanze R . Velikost této funkce nám neudává přímo velikost vesmíru, ale poměr vzdáleností mezi galaxiemi v časovém okamžiku t vůči vzdálenosti, kterou měly v čase t_0 . Platí tedy

$$l_t = R(t) l_0,$$

kde l_t je vzdálenost dvou galaxií v čase t , $R(t)$ hodnota funkce R v čase t a l_0 vzdálenost stejných galaxií v čase t_0 . Pro R zřejmě platí

$$R(t_0) = 1.$$

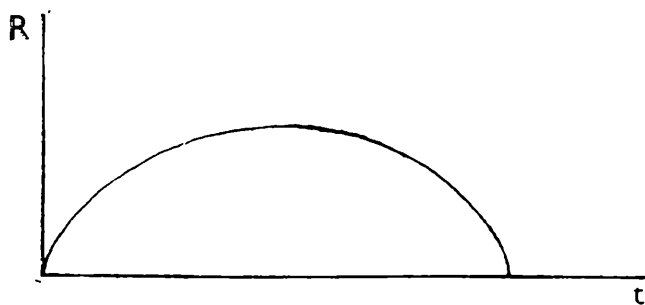
Při zkoumání Friedmanových modelů budeme dále používat parametr k určující křivost prostoru. V obecné teorii relativity totiž prostor, ve kterém působí gravitační síly, není euklidovský, ale právě odchylky od euklidovské geometrie určují velikost a charakter gravitačního pole. Podle toho, jak se lokální deformace promítnou do celkového zakřivení prostoru, rozeznáváme tři případy:

1. $k > 0$: Prostor má vlastnosti obdobné vlastnostem povrchu koule. Součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180° . Prostor má konečný objem, i když je bez hranic.

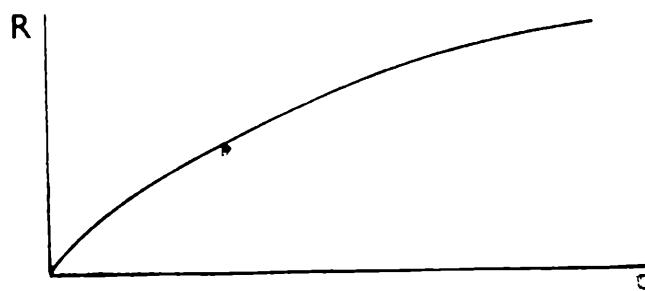
2. $k = 0$: V tomto případě platí ve vesmíru euklidovská geometrie tak, jak se jí učíme ve škole. Součet úhlů v trojúhelníku je roven 180° , prostor je nekonečný.

3. $k < 0$: V tomto případě má prostor vlastnosti podobné povrchu hyperboloidu. Součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180° , prostor je nekonečný.

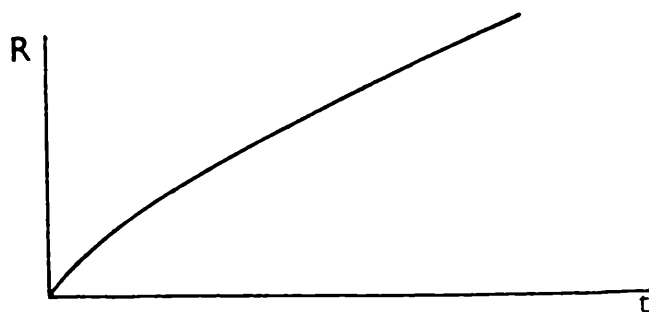
Popíšeme nyní všechny tři Friedmanovy modely.



Obr. 1. Závislost funkce expanze R na čase t v uzavřeném vesmíru s $k > 0$.



Obr. 2. Vývoj funkce R v otevřeném euklidovském vesmíru s $k = 0$.



Obr. 3. Závislost R na t v otevřeném hyperbolickém vesmíru s $k < 0$.

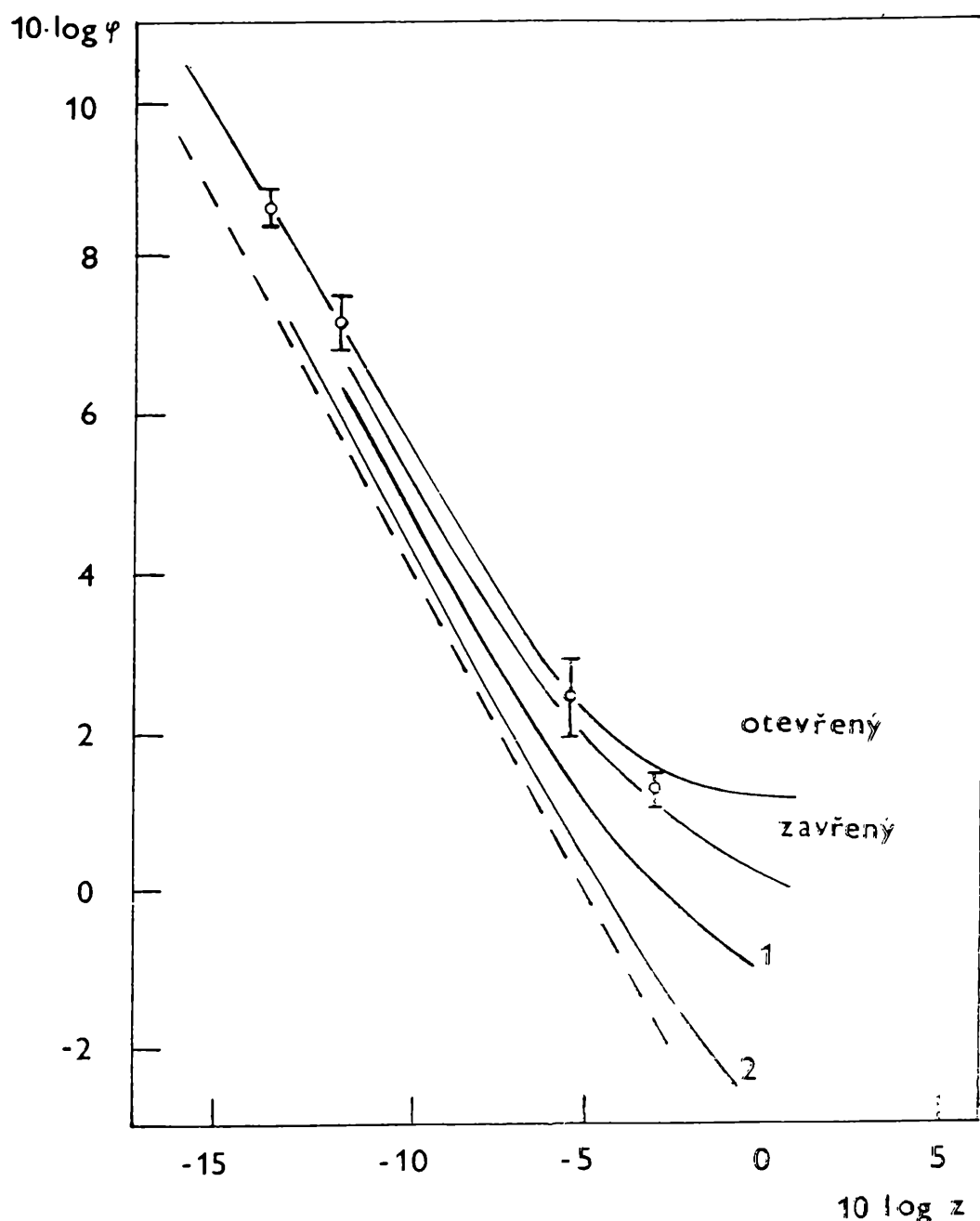
1. $k > 0$: Vesmír se rozpíná od počáteční singularity, kde je $R = 0$ (viz obr. 1). Rozpínání se pozvolna zpomaluje, až nakonec ustane docela. Po dosažení maxima převládnu opět gravitační síly a vzdálenosti ve vesmíru se začnou zmenšovat, až nakonec celý vesmír skončí znovu v singularitě. Vesmír je uzavřený a má konečný objem. Křivka závislosti R na t je cykloida.

2. $k = 0$: Vesmír (viz obr. 2) se rozpíná od počáteční singularity stále dál, rychlost rozpínání se zpomaluje a v nekonečném čase se úplně zastaví. Vesmír se rozpíná právě únikovou rychlostí, je nekonečný a euklidovský. Pro R platí: $R \sim t^{2/3}$.

3. $k < 0$: Rozpínání probíhá opět z počáteční singularity (viz obr. 3) a nikdy se nezastaví, probíhá rychlostí větší než je rychlost úniková. Prostor je hyperbolický a nekonečný. Pro malá t platí $R \sim t^{2/3}$, pro velká t platí $R \sim t$.

Friedmanovy expandující modely vesmíru byly posíleny *Hubbleovým* objevem rudého posuvu galaxií. Interpretujeme-li tento rudý posuv dopplerovsky, vidíme, že se od nás všechny galaxie vzdalují — svědčí to o rozpínání vesmíru a potvrzuje to Friedmanovy modely.

Přijetí Friedmanových modelů však vede k tomu, že musíme kdesi daleko v minulosti připustit existenci jediného bodu — počáteční singularity — ze kterého se celý vesmír začal rozpínat. V singularitě panují takové fyzikální podmínky, že na ně již nelze aplikovat žádnou stávající



Obr. 4. Graf závislosti úhlového průměru galaxie na jejím rudém posuvu. Na rozhraní zavřeného a otevřeného modelu je vesmír s $k = 0$, křivka 1 udává teoretickou závislost pro stacionární vesmír a křivka 2 pro unavené světlo. Čárkovaně je vyznačena závislost.

fyzikální teorii (při hustotách řádu $10^{35} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, což odpovídá času asi 10^{-23} s). To bylo příčinou, že se často tvrdilo, že OTR (obecnou teorii relativity) nelze aplikovat na celý vesmír; proto by nebyly platné ani modely z ní vyvozené, rudý posuv galaxií by nemusel být dopplerovský, ale mohl by být způsoben nějakým jiným mechanismem — např. jakýmsi „stárnutím“ světla, které na své dlouhé cestě ztrácí část své energie a tak červená (prodlužuje se jeho vlnová délka). Tento model

„unaveného světla“ však dnes již můžeme považovat za vyvrácený pozorováními. Svědčí proti němu např. závislost zdánlivého průměru φ galaxie na jejím rudém posuvu z . Tato závislost pro různé modely je vynesena na obr. 4. Kromě již zmíněných Friedmanových modelů (uzavřený, otevřený) je zde vynesena zmíněná závislost pro unavené světlo a teorii stacionárního vesmíru (o ní ještě bude řeč). Čárkovaně je vynesena závislost, kdy zdánlivý průměr φ je nepřímo úměrný rudému posuvu z . Jak je vidět z obr. 4, je teorie unaveného světla ještě méně pravděpodobná než teorie stacionárního vesmíru.

Teorie stacionárního vesmíru byla zastávána hlavně fyziky *Bondim*, *Goldem* a *Hoylem*. Je v ní rovněž odstraněna počáteční singularita. Základní myšlenkou této teorie je tzv. *dokonalý kosmologický princip*: vesmír vypadá stejně v každém místě prostoru i času. Aby se udržely stejné fyzikální podmínky ve vesmíru i při stálém rozpínání, je nutno předpokládat stálou tvorbu hmoty z ničeho — to by si vyžádalo modifikaci zákona o zachování energie. Množství nově vytvořené hmoty na jednotku času a prostoru je rovno $3 \varrho H$ (současná hodnota asi $5,8 \cdot 10^{-44} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$), kde ϱ je hustota hmoty ve vesmíru (je stálá!) a H je hodnota Hubbleovy konstanty (o které ještě bude řeč), která má také stále stejnou hodnotu a je zde tedy skutečně konstantou, na rozdíl od Friedmanových modelů, ve kterých je funkcí času a závisí na derivaci funkce expanze R podle času. V teorii stacionárního vesmíru je závislost R na t exponenciála (viz obr. 5).

Proti tomuto modelu však mluví několik pozorovaných faktů:

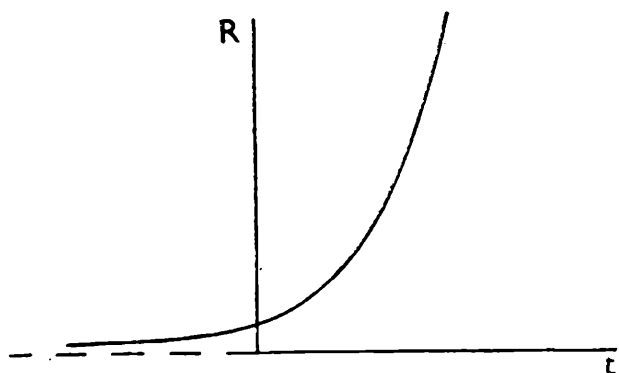
1. Existence reliktového záření. V současné době pozorujeme v rádiové oblasti záření z vesmíru, které odpovídá teplotě 2,7 K. Toto záření je dnes vysvětlováno jako pozůstatek po počáteční singularitě (big bangu), při které panovaly ve vesmíru mnohem vyšší teploty. Postupem času vesmír díky rozpínání chladl a teplota v něm dosáhla nynější hodnoty 2,7 K. V teorii stacionárního vesmíru žádný počáteční výbuch nemáme a reliktové záření zde nemá z čeho vzniknout.

2. Závislost zdánlivého průměru galaxie na jejím rudém posuvu. Hodnota předpovídaná touto teorií je (viz obr. 4) ještě vně pozorovacích chyb.

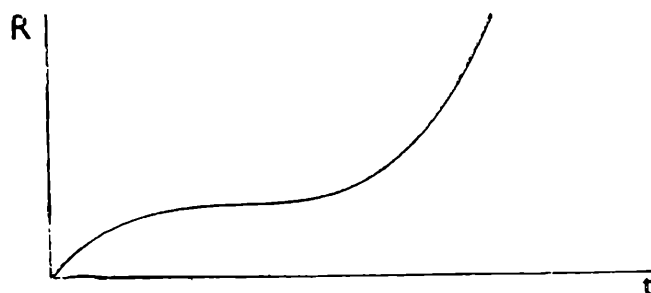
3. Současná pozorování quasarů. Quasary jsou objekty, které se ve směs vyskytují ve velkých vzdálenostech a jak se zdá, vznikaly již v raných fázích vývoje vesmíru a dnes se již netvoří. V teorii stacionárního vesmíru lze oproti tomu odvodit vztah pro střední stáří objektů $\langle t \rangle$ ve vesmíru jako

$$\langle t \rangle = \frac{1}{3H},$$

kde H je hodnota Hubbleovy konstanty. Podle současných pozorování by bylo $\langle t \rangle = 5,7 \cdot 10^9$ let. Teorii stacionárního vesmíru však odpo-



Obr. 5. Závislost R na t v teorii stacionárního vesmíru.



Obr. 6. Vývoj funkce expanze R v Lemaitreově modelu.

ruje nejen rozložení quasarů v čase (průměrné stáří vesmírných objektů), ale i jejich rozložení v prostoru. Quasary totiž pozorujeme převážně ve vzdálenějších oblastech vesmíru, zatímco podle dokonalého kosmologického principu by měly být rozloženy stejně v celém vesmíru. Dnes se hlavně quasary, respektive jejich vlastnosti, a existence reliktového záření pokládají za hlavní argumenty proti teorii stacionárního vesmíru.

Koncem 60. let se začala kupit pozorování quasarů s rudým posuvem $z = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}$ splňujícím $z \leq 2$ (ve speciální relativitě rudý posuv $z > 1$ stále ještě odpovídá rychlosti vzdalování menší než je rychlost světla c). To vedlo k obnovenému zájmu o modely vesmíru s kosmologickou konstantou $\Omega \neq 0$; jmenovitě k tzv. Lemaitreovu modelu s $k > 0$ a $\Omega > \Omega_c$, kde Ω_c je hodnota kosmologické konstanty v Einsteinově vesmíru. Závislost R na t v tomto modelu je vynesena na obr. 6. O quasarech s rudým posuvem $z \approx 2$ se soudilo, že leží ve vodorovné části této křivky. Jelikož tato část je poměrně velká, nemohli bychom pozorovat quasary s rudým posuvem $z > 2$. V dnešní době však již pozorujeme i quasary s mnohem větším z (současný rekord je $z = 3.60$), a proto tento model nemůže platit.

Jak je vidět, bude se zřejmě realizovat jeden z Friedmanových modelů, jde jen o to zjistit, který.

Pro konfrontaci těchto modelů s pozorováními zavádíme několik parametrů (tečkou značíme derivaci podle času):

$$\text{Hubbleovu konstantu} \quad H = \dot{R}/R \quad \text{rozměr (čas)}^{-1}$$

$$\text{decelerační parametr} \quad q = -\ddot{R}R/\dot{R}^2 \quad \text{bezrozměrné číslo}$$

$$\text{kritická hustota} \quad \rho_k = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Hubbleova konstanta H vystupuje ve známém vztahu pro rychlost v vzdalování galaxie

$$v = Hl,$$

kde l je vzdálenost galaxie. Obvykle se H z praktických důvodů udává v jednotkách $\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Pro parabolický vesmír ($k = 0$) se z ní přímo zjistí stáří t vesmíru jako

$$t = \frac{2}{3H}.$$

Decelerační parametr umožňuje přímo rozlišit jednotlivé modely a určit, ve které jejich části zrovna jsme. Není však přímo měřitelný, k jeho určení je třeba znát hodnotu H_0 (tj. současnou hodnotu Hubbleovy konstanty).

Kritická hustota je definována jako hustota hmoty ve vesmíru s $k = 0$ při dané hodnotě H . Je-li skutečná hustota rozložení hmoty ve vesmíru větší, jedná se o vesmír s $k > 0$, je-li menší, jedná se o vesmír s $k < 0$.

Parametry k , ϱ (skutečná hustota hmoty ve vesmíru), ϱ_k a q jsou spolu svázány následující tabulkou:

$k < 0$	$\varrho < \varrho_k$	$q < \frac{1}{2}$
$k = 0$	$\varrho = \varrho_k$	$q = \frac{1}{2}$
$k > 0$	$\varrho > \varrho_k$	$q > \frac{1}{2}$

Ke stanovení křivosti vesmíru k potřebujeme znát současnou hodnotu H_0 Hubbleovy konstanty a dále buď skutečnou hustotu hmoty ve vesmíru ϱ nebo decelerační parametr q .

Z měření Hubbleovy konstanty H_0 v současné době plyne, že $H_0 = 50 - 100 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Podle posledních *Sandageových* měření je to $H_0 = 57 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, rozptyl měření je však značný. Tomu by odpovídala kritická hustota $\varrho_k = 8,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a stáří vesmíru $t = 1,1 \cdot 10^{10}$ let.

Určení skutečné hustoty ϱ je tvrdý oříšek. Máme totiž možnost přímo pozorovat pouze zářící hmotu, ze které vychází skutečná hustota ϱ asi o dva řády menší než je hustota kritická. Nevíme však, kolik hmoty je skryto našemu pozorování např. ve formě černých děr či mezigalaktické hmoty. Navíc, jak se ukazuje, hustota určená z dynamických charakteristik se velice blíží kritické hustotě, její určení je tedy značně nejasné.

Zbývá tedy možnost určit decelerační parametr q . Ten lze zjistit ze závislosti

$$m = M + 25 - 5 \log H_0 + 5 \log cz + 1,086(1 - q_0)z,$$

kde m je zdánlivá magnituda galaxie, M její absolutní magnituda (tj. ve vzdálenosti 10 pc), H_0 současná hodnota Hubbleovy konstanty, c rychlost světla ve vakuu, z rudý posuv galaxie a q_0 současná hodnota deceleračního parametru. Z empirického přiblížení k tomuto vztahu

$m = \text{konst} + 5 \log cz$ vyvodil roku 1929 Hubble svůj zákon $v = Hl$. I když by se na první pohled možná zdálo, že určení hodnoty q_0 z tohoto vztahu je jednoduché, že stačí pouze proložit pozorováními křivku a z ní určit q_0 , zůstává problémem, že pro určení absolutní magnitudy galaxie potřebujeme znát dostatečně přesně její vzdálenost, což není příliš často splněno. Zvláště se to projeví u vzdálených galaxií, ve kterých již nemůžeme pozorovat jednotlivé hvězdy. Právě tyto galaxie však k určení hodnoty q_0 nejvíce potřebujeme, neboť v blízkých oblastech vypadá vesmír pro všechna q_0 přibližně stejně. Z pozorování asi 2 roky starých bylo možno určit pouze rozmezí pro q_0 jako $0,2 \leq q_0 \leq 1$; s určitostí bylo možno tvrdit jedině to, že v žádném případě nemůže být $q_0 = -1$, což je hodnota předpovídaná teorií stacionárního vesmíru. Z posledních Sandageových měření však plyne, že $q_0 = 0,15 \pm 0,09$, což svědčí pro nekonečný vesmír s $k < 0$.

V poslední době se zdá být velice nadějnou zcela „neastronomická“ metoda určení charakteru vesmíru, kterou rozpracoval především *Wagoner* — určení z množství prvků, které se tvořily z vodíku za vysokých teplot poblíž singularity v čase asi 10^2 s až 10^4 let po počátečním výbuchu. Jedná se především o deuterium D, u něhož poměr D/H (zde H není Hubbleova konstanta, ale chemická značka vodíku) závisí velice citlivě na charakteru vesmíru — při $k < 0$ je tento poměr o několik řádů větší než při $k > 0$. V současné době pozorujeme pro D/H hodnotu $D/H \approx 2 \cdot 10^{-5}$; ve vesmíru s $k = 0$ by tato hodnota měla být o sedm řádů menší, kontrast při $k > 0$ je pak ještě zřetelnější. Podle těchto pozorování tedy vychází $q_0 \approx 0,1$. Tato hodnota je, když uvážíme velké nepřesnosti v pozorovacích datech, ve výborné shodě se Sandageovým určením „astronomickými“ metodami.

Z výsledků pozorování zde ukázaných by se mohlo usoudit na to, že vesmír, v němž žijeme, je otevřený a nekonečný, že se expanze v něm již nikdy nezastaví. Musíme však mít na paměti, že — vzhledem k velikému rozptylu pozorovacích dat — stačí jen malá systematická chyba v pozorováních a výsledky mohou vyznít naprosto opačně. Na definitivní určení toho, jak vypadá náš vesmír, si tedy zřejmě budeme muset počkat až do doby, kdy bude nashromážděno větší množství pozorovacích dat; to je také hlavním úkolem současné kosmologie.

olympiády

Devátá mezinárodní fyzikální olympiáda v Maďarsku

Prof. RNDr. ROSTISLAV KOŠTÁL

Ve dnech 1. VII.—8. VII. 1976 se konala v Budapešti devátá mezinárodní fyzikální olympiáda.

Zúčastnila se jí pětičlenná družstva z desíti států: Bulharska, Československa, Francie, Maďarska, Německé demokratické republiky, Německé spolkové republiky, Polska, Rumunska, Sovětského svazu a Švédska.

Každé družstvo mělo jednoho vedoucího a jednoho pedagogického instruktora. Vedoucím družstva ČSSR byl doc. RNDr. *Ivan Náter*, 1. místopředseda ÚVFO, pedagogickým instruktorem byl doc. ing. *Bohumil Vybíral*, člen užšího ÚVFO.

Pro naše účastníky IX. MFO a jejich náhradníky bylo uspořádáno soustředění v době od 11. do 25. června na střední zemědělské technické škole ve Vyškrčě. Do našeho družstva byli na tomto soustředění vybráni:

1. Kubát Karel	ZČK	G Plzeň, 4. r. MF
2. Tarina Pavol	ZSK	G Topolčany, 4. r. P
3. Turek Ilja	VČK	G Hradec Králové, 2. r. MF
4. Svoboda Jiří	JMK	G Brno, kpt. Jaroše, 3. r. Exp
5. Bardiovský Vojtěch	VSK	SPŠE Košice, 4. r.

Předsedou organizačního výboru a předsedou mezinárodní komise MFO byl akademik *Marx*; jeho zástupcem byl prof. *Kunfalvi*.

Byly zadány tři teoretické úlohy, na jejichž vypracování byla dána doba 5 hodin. Na vypracování laboratorní úlohy byla dána rovněž doba 5 hodin. Každá teoretická úloha — z nichž jedna byla problémová — se hodnotila nejvýš 10 body, laboratorní úloha nejvýš 20 body. Každý soutěžící mohl tedy dosáhnout maximálně 50 bodů.

Prvá úloha byla z mechaniky, druhá z termodynamiky, třetí úloha byla problémová z geometrické optiky a čtvrtá — laboratorní úloha — byla z termiky.

Nejvyšší počet dosažených bodů byl 47,5 a z tohoto počtu bodů se vycházelo jako ze 100 %. Ceny a pochvalná uznání byly pak dány podle těchto směrnic:

1. cena 100 % až 90 % bodů, tedy od 47,5 do 42 bodů,
 2. cena 89 % až 78 % bodů, tedy pod 42 do 37 bodů,
 3. cena 77 % až 65 % bodů, tedy pod 37 do 30 bodů,
 pochvalná uznání 64 % až 50 % bodů, tedy pod 30 do 23 bodů. Pod 50 % bylo vydáno potvrzení o účasti.

Následující tabulka uvádí pořadí družstev podle získaných bodů a k tomu počet cen a pochvalných uznání.

Po- řadí	Stát	Počet bodů	Počet cen			Počet pochval. uznání	Počet neúspěš- ných
			1.	2.	3.		
1	SSSR	192,75	3	1	—	1	—
2	RSR	179,5	1	1	3	—	—
3	NDR	174	—	3	1	1	—
4	PLR	170,5	2	—	—	3	—
5	ČSSR	158	—	2	1	1	1
6	MLR	134,25	—	—	1	3	1
7	F	134	1	—	1	2	1
8	BLR	120	—	—	1	2	2
9	NSR	114	—	—	3	—	2
10	Š	81	—	—	1	—	4
Celkem			7	7	12	13	11

Za jednotlivé úlohy získala družstva tento počet bodů

Po- řadí	Stát	Počet bodů za úlohu				Celkem bodů
		1	2	3	4	
1	SSSR	36,75	42	42	72	192,75
2	RSR	43	41,5	28	67	179,5
3	NDR	39	38	31	66	174
4	PLR	41,5	22	26	81	170,5
5	ČSSR	33	39	16	70	158
6	MLR	42,25	45	19	28	134,25
7	F	30	36	25	43	134
8	BLR	28	32	21	39	120
9	NSR	33	2	28	51	114
10	Š	13	1	10	57	81
Celkem bodů v % (z 500 bodů)		339,5 67,9	298,5 59,7	246 49,2	574 57,4	1458 58,3

Tři nejlepší družstva v úloze z mechaniky byla: RSR, MLR a PLR (naše bylo na 6.—7. místě).

Tři nejlepší družstva v úloze z termodynamiky byla: MLR, SSSR a RSR (naše bylo na 4. místě).

Tři nejlepší družstva z problémové úlohy z optiky byla: SSSR, NDR a RSR a NSR (naše družstvo bylo na 9. místě).

Tři nejlepší družstva z laboratorní úlohy z termiky byla: PLR, SSSR a ČSSR.

Naši soutěžící dosáhli mezi 50 soutěžícími těchto výsledků:

Po- řadí	Jméno	Úloha				Celkem	Vyhod- nocení
		1	2	3	4		
8.	Jiří Svoboda	8,5	9	8	15	40,5	2. cena
10.	Pavol Tarina	8,5	10	5	16	39,5	2. cena
24.	Ilja Turek	6	6,5	3	15	30,5	3. cena
35.	Karel Kubát	7	5,5	—	14	26,5	pochvalné uznání
40.–41.	Vojtěch Bardiovský	3	8	—	10	21	neúspěšný

Během soutěže se konal celodenní výlet do oblasti Balatonu spojený s prohlídkou měst Székesfehérváru, Balatonfüredu, Siófoku a prohlídkou kláštera v Tihány, pak celodenní výlet do Visegrádu a Esztergomu a další kratší výlety.

Ze zahraničních časopisů

Z jugoslávského časopisu „*Matematičko-fizički list*“:

1. Jsou-li x_1, x_2, x_3 kořeny rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, která rovnice pro y má kořeny $y_1 = \frac{1}{1 - x_1}, y_2 = \frac{1}{1 - x_2}, y_3 = \frac{1}{1 - x_3}$?

2. Středem jednoho ramene vedte přímku, která dělí daný lichoběžník na dva stejné díly.

3. V trojúhelníku jsou známy strany $a = 7, b = 3$ a úhel $\alpha = 30^\circ$. Bez trigonometrie vypočtete na 1 desetinné místo stranu c .

Z bulharského časopisu „*Matematika*“:

4. Určete hodnotu výrazu

$$M = \frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}, \text{ jestliže } x = \frac{2am}{b(b+m^2)}$$

($a > 0, b > 0, m > 0$).

5. Celými čísly řešte rovnici $7^x - 3^y = 100$.

6. Je správná nerovnost $\log_{17} 71 < \sqrt[7]{17}$?

Z východoněmeckého časopisu „*Alpha*“:

7. V osudí leží sto různobarevných koulí, a to 28 červených, 20 zelených, 12 žlutých, 20 modrých, 10 bílých a 10 černých. Kolik koulí musíme z osudí alespoň vytáhnout, aniž se na ně díváme, abychom měli jistotu, že mezi vytaženými koulemi je 15 stejnobarevných?

8. Ze žáků 6. třídy má v lednu narozeniny dvakrát tolik a v květnu čtyřikrát tolik žáků než v březnu. V červenci je o 4 méně narozených než v květnu. V září má narozeniny polovina počtu žáků, kteří mají narozeniny v červenci. V ostatních měsících se nikdo ze třídy nenarodil. Ve třídě je více než 30 a méně než 40 žáků. Kolik žáků má třída?

9. Je dán pravý úhel s vrcholem S a rameny p a q . Vnitřní bod B tohoto úhlu má od ramene p vzdálenost $m = 3$ a od ramene q vzdálenost $n = 4$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrchol A ležel na p a vrchol C na q .

10. Najděte všechna celá záporná čísla k , pro něž číslo

$$z = k \cdot (k + 5) (k + 7) \text{ není záporné.}$$

11. Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku je součet délek odvěsen roven součtu délek průměrů kružnice vepsané a opsané.

Ze sovětského časopisu „*Kvant*“:

12. Rozhodněte, zdali výraz

$$A = 1,000001^{0,999999} \cdot 0,999999^{1,000001}$$

je větší nebo menší než 1.

13. Rozložte v součin dvou mnohočlenů

a) $2^{17} + 2^5 - 1$; b) $2^{12} - 2^5 - 1$; c) $2^{13} - 2^4 + 1$

14. Řešte rovnice ($\overline{yz}$ je číslo napsané ciframi y a z):

$$\begin{aligned} \text{a) } \overline{x^x} &= \overline{yz}, \text{ b) } \overline{xy^x} = \overline{yx(y+2)}, \text{ c) } \overline{xx^{2x}} = \overline{x(2x)x}, \text{ d) } \overline{xyz^x} = \\ &= \overline{yz(x-1)yz}. \end{aligned}$$

Některé výsledky: 1. $(1 + 2a + b)y^2 + (3 + a)y - 1 = 0$. 3. $c \doteq 9,4$;

4. $M = \frac{1}{m}$ 5. $x = 3, y = 5$; 8. 33; 10. $k = -5, -6, -7$; 12. $A < 1$;

13. a) $(2^6 - 1)(2^{11} + 2^5 + 1)$; b) $(2^4 + 1)(2^8 - 2^4 - 1)$;

c) $(2^4 + 1)(2^9 - 2^5 + 1)$; 14. a) $x = 3, y = 2, z = 7$; b) $x = 2, y = 7$;

c) $x = 1$; d) $x = 2, y = 7, z = 6$.

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

matematické zábavy

Nová úloha o sudech a mincích

Čtenáři minulého ročníku Rozhledů si možná vzpomenou na *Vaněčkovu* úlohu o sudech. Ostatním čtenářům ji připomeneme:

N sudů je naplněno dukáty, avšak jen v jednom z nich jsou pravé dukáty, které váží 11 gramů. V ostatních sudech jsou vesměs falešné dukáty — o 1 gram lehčí. Jediným vážením se měl určit sud s pravými mincemi.

Zajímavé zobecnění této úlohy nám zaslal *Ladislav Žák*, studující gymnasia v Tanvaldu:

N sudů je zcela naplněno mincemi o k různých, ale známých celočíselných vahách $v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_k$. Přitom v každém sudu jsou mince vesměs stejně těžké. (Proto je $k \leq N$.) Máme jediným vážením zjistit váhy jednotlivých mincí ve všech N sudech.

Uvedeme autorovo řešení, důkaz však přenecháme čtenářům. (Metoda důkazu je stejná jako při řešení původní Vaněčkovy úlohy.)

- Označíme rozdíl mezi největší a nejmenší vahou mincí d , tj.

$$d = v_k - v_1$$

- ● Sudy očíslováme přirozenými čísly $1, 2, \dots, N$ a vybereme z nich pořadě

$$D, D^2, D^3, \dots, D^N$$

mincí, kde $D = d + 1$. (Sudy musí být dostatečně objemné, aby bylo možno tento výběr uskutečnit.) Zjistíme celkovou váhu všech vybraných mincí a označíme ji W

- ● ● Zjistíme výpočtem, kolik by vážily vybrané mince, kdyby měly vesměs váhu v_1 , tj. stejnou váhu jako nejlehčí mince. Toto číslo označíme V .

- ● ● Rozdíl $R = W - V$ vyjádříme v číselné soustavě o základě D . Tedy

$$R = a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_N D^N \quad (*)$$

(Koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_N$ jsou z množiny čísel $0, 1, 2, \dots, d = D - 1$.)

- ● ● V libovolném i -tém sudu ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) jsou mince váhy

$$w_i = v_1 + a_i,$$

kde a_i je koeficient z pravé strany rovnosti (*).

Uvedeme si *příklad*. V sedmi sudech jsou mince těchto vah: 10, 11, 13 (v gramech).

- $d = 13 - 10 = 3$.
- ● $W = 220\,312$ (zjištěno vážením).
- ● ● $V = 218\,440$.
-
- ● ● $R = W - V = 1872 = 0.4 + 1.4^2 + 1.4^3 + 3.4^4 + 1.4^5 + 0.4^6 + 0.4^7$.
- ●
- ● ● $w_1 = 10,$ $w_2 = 11,$ $w_3 = 11,$
 $w_4 = 13,$ $w_5 = 11,$ $w_6 = 10,$
 $w_7 = 10.$

Milan Koman

O třech princeznách

Otvíráme Informace matematické vědecké sekce JČMF. Tu mezi zprávami o vědeckých konferencích, letních školách, seminářích a vysokoškolských skriptech nacházíme i jednu žertovnou úlohu, která by mohla zajímat čtenáře Rozhledů:

Král měl tři dcery: Anežku, Bertu a Cecilii. Anežka vždy mluvila pravdu, Berta vždy lhala, Cecilie někdy mluvila pravdu, někdy lhala. Ke dvoru přijel cizí princ, aby se ucházel o Anežku. Král ho zavedl do místnosti, kde všechny tři dcery seděly vedle sebe, a slíbil, že mu Anežku dá, pokud princ zjistí, která z nich to je. Přitom smí každé z nich položit jedinou otázku. Princ položil všem princeznám stejnou otázku: „Jak se jmenuje princezna, která sedí uprostřed?“ Princezna sedící vlevo odpověděla: „Anežka“, princezna sedící uprostřed: „Berta“, princezna sedící vpravo: „Cecilie“. Podle těchto odpovědí už princ dovedl určit, která z princezen byla Anežka. Která to byla?

Tu je řešení této zajímavé úlohy: Označme princezny podle začátečních písmen jejich jmen po řadě A , B , C . Je vidět, že vlevo nemůže sedět A , neboť na otázku odpovídá, že uprostřed sedí A , a tedy by lhala. A nemůže být ani uprostřed, neboť pak by lhala, když praví, že uprostřed je B . Musí tedy být A vpravo. Přicházejí proto v úvahu pořadí B , C , A a pořadí C , B , A . První z nich vyhovuje úloze, druhá však nikoliv (B by mluvila pravdu, když prohlašuje, že uprostřed je B).

Je tedy vidět, že se dalo zjistit ještě o něco více, než žádala úloha.

Jiřina Sedláčková

Studium prvočísel pomocí strojů

V článku L. Železného „O prvočíselných aritmetických posloupnostech“ je uvedeno jméno sovětského badatele *V. A. Golubjeva*, který objevil větší počet takových posloupností. Povězme si více o něm, o způsobu jeho práce a o změně ve způsobu zkoumání těchto otázek v poslední době.

V. A. Golubjev učil na škole v obci Kuvšinovo v Kalininské oblasti až do r. 1956, kdy odešel v 65 letech do penze. Přibližně od r. 1932 se začal intenzívně zabývat elementární teorií čísel, shromažďovat známé výsledky a nerozřešené problémy, popularizovat toto odvětví matematiky. S neobyčejným nadšením a pílí se pustil do pracných výpočtů nezbytných k sestavení tabulek, zahrnujících všechny výskyty čísel, dvojic a jiných skupin čísel s jistými vlastnostmi od 1 do několika miliónů. Uvedme si několik příkladů:

V r. 1940 měl zpracovány tabulky všech prvočísel do 15 miliónů, přičemž prokázal řadu chyb v knižně vydaných tabulkách.

Do r. 1958 našel 48 619 prvočíselných dvojčat (tj. dvojic prvočísel $p, p + 2$) menších než 8 miliónů; později zjistil 1209 prvočíselných čtveřic $(p, p + 2, p + 6, p + 8)$ s členy menšími než 15 miliónů.

Prozkoumal též rozklady čísel tvaru $x^2 + 1$ na součin prvočísel, a to pro všechna $x < 190\,000$, rozklady čísel tvaru $p^2 + p + 1$ pro prvočísla $p < 10\,000$ apod.

Objevil, že kvadratické trojčleny $9x^2 - 231x + 1523$, $8x^2 - 326x + 2659$ dávají po řadě 40 prvočíselných hodnot obdobně jako známý Eulerův trojčlen $x^2 + x + 41$.

V. A. Golubjev byl už od 30. let v čilém kontaktu se zahraničními vědci zabývajícími se obdobnou tematikou, např. polským matematikem *W. Sierpinskim*, americkým badatelem *D. N. Lemerem*. Svých výsledků dosahoval *V. A. Golubjev* bez pomoci výpočetní techniky v dnešním smyslu slova, ne však pouhým probíráním „čísla po číslu“, vytvořil si své metody „sít“, které mu umožnily ekonomičtější postup. I tak je ovšem jeho vytrvalost a pracovitost obdivuhodná.

Je pochopitelné, že možnost využít počítače k řešení stereotypních úloh vedla už na úsvitu éry počítačů k prověřování výsledků získaných *V. A. Golubjevem*. Nutno říci, že obstál na výbornou; tabulky sestavené strojem se shodovaly s Golubjevovými až neuvěřitelně, např. stroj našel 48 618 prvočíselných dvojčat do 8 miliónů, zatímco *V. A. Golubjev* jich uvedl 48 619.

Lze říci, že V. A. Golubjev je asi posledním významným badatelem, který v naznačené problematice pracoval bez pomoci počítačů. V posledních 15–20 letech jsou v ní dosahovány objevy už výhradně pomocí strojů. Um badatele se soustřeďuje na sestavení účelného programu pro stroj a mnohdy asi i na opatření nezbytného strojového času (tj. možnosti zaměstnat některý počítač pro několik hodin). Jde ovšem jen o úzkou tematiku teorie čísel, převážně o důkazy existence čísel či skupin čísel s danými vlastnostmi nebo o výčet všech takových skupin v daném „rozsahu“ několika desítek miliónů. Teorie čísel zahrnuje zejména věty s kvantifikátorem „pro každé přirozené (celé) číslo platí...“, jejichž důkaz nelze naznačeným strojovým způsobem získat.

Zamyslete se třeba nad tím, proč nemá význam pomocí stroje hledat trojice prvočísel $(p - 2, p, p + 2)$. Jaký výsledek by dal stroj, kdyby pracoval i několik hodin? Můžete sami dříve odpovědět? (Promyslete, jaké zbytky při dělení šesti dávají prvočísla větší než šest.)

Jaroslav Šedivý

recenze

J. Moravčík-J. Vyšín: **Dvacet pět let matematické olympiády v Československu**, vydal ÚVMO v nakladatelství Mladá fronta, Praha 1976, 184 stran, 11 fotografií, 8 pérovek, cena váz. výtisku 13,— Kčs.

Přesně načasován k nedávnému jubileu naší celostátní matematické soutěže objevil se na knižním trhu tento pěkný sborník, jenž je z poloviny knížkou memoárů a z poloviny matematickou pomůckou. Úvod napsal akademik Josef Novák, bývalý dlouholetý předseda Ústředního výboru MO. Připomíná, že naše MO byla založena r. 1951 z podnětu akademika Eduarda Čecha a hodnotí úspěchy v uplynulém čtvrtstoletí.

Sborník je rozdělen do pěti kapitol, jichž si zde všimneme podrobněji. Kapitola první obsahuje tři články, v nichž se čtenářům představí tři významní organizátoři naší olympiády (prof. dr. Miroslav Fiedler, DrSc., doc. Jan Vyšín, CSc. a doc. dr. Jozef Moravčík, CSc.). Ve druhé kapitole najdeme nejprve kroniku MO, kterou sestavili V. Macháček a J. Mída. Zajímavé je např. sledovat tabulku vítězů MO a nacházet jména, jež dnes jsou dobře známá ve vědeckém světě. B. Novák a J. Morávek vzpomínají na olympiádu v bývalém Pardubickém kraji a na neúnavného propagátora matematiky prof. J. Honzáka. Nejmladší soutěžící jsou žáci ZDŠ, pro něž je určena kategorie Z. Objemný balík

dokumentů posbíraných za třináct let práce v této kategorii otvírá před námi na dalších stránkách K. Jakoubek. Mezi ty, kteří na Slovensku věnovali soutěži nejvíce času a úsilí, patří nesporně dr. L. Bergerovi, kterého nám tu představí J. Moravčík. V posledním článku druhé kapitoly vzpomíná J. Vyšín na dlouholetého jednatele R. Zelinku. Třetí kapitola je cele věnována Škole mladých matematiků, která už po řadu let zásobuje naše studenty pomocnou studijní literaturou. Malou procházku několika dosud vyšlými svazky této edice zorganizoval J. Vyšín se spolupracovníky. Kapitola čtvrtá je dílem zahraničních autorů. Ti, kdo sledují mezinárodní MO, rozpočtenou se jistě na jejich jména.

I. S. Petrakov, V. Mičič, H. Bausch, J. Lehmann, T. Roman, E. Hódi a A. Małkowski; byli vyzváni, aby přispěli do tohoto jubilejního sborníku. Odpověděli každý po svém. Jeden hrstí vzpomínek, jiný výběrem příkladů z olympiády své země a poslední dokonce krátkým matematickým příspěvkem. „Jak pracuje matematik?“ ptá se B. Zelinka v závěrečné páté kapitole sborníku a odpovídá trochu poučným, hlavně však vtipně napsaným fejetonem.

Jubileum MO je už za námi, ale tato knížka nám je bude stále připomínat. Věříme, že si ji rádi přečtou i další ročníky olympioniků a spolu s nimi i jejich učitelé a profesori matematiky.

Jiřina Sedláčková

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

násobek	multiple
nejmenší společný násobek	least common multiple
násobení	multiplication
násobeno	multiplied
násobit	multiply
násobitel	multiplicand
násobnost	multiplicity
násobnost kořene	order of root
nástroj	implement, tool
na třetí	cubed
návod	instruction
návrh	design, proposition
nedefinovaný	undefined
nedostatek (množství), (jakosti)	deficiency, shortage
nedostatečně určený	undetermined
nedosažitelný	inaccessible
negace	denial, negation
nejbližší	nearest
nejméně	at the least
nejmenší	smallest, lowest, least
nejmenší společný jmenovatel	lowest common denominator
největší	largest, highest, greatest
největší spád	maximum inclination
největší společný dělitel	greatest common divisor
nejvýše	at the most
nekonečně	infinitely
nekonečno	infinity
v nekonečnu	at infinity
neměnnost	invariance
nemožný	impossible
neohraničený	unbounded
neomezený	unlimited, unbounded
nepravdivý	untrue, false
nepravý	dummy
nepřímý	indirect

nepřístupný	inaccessible
nepřítomnost	absence
nerovnoběžník	trapezoid
nerovnost	inequality
ostrá nerovnost	strict inequality
trojúhelníková nerovnost	triangle inequality
nerozložitelný	irreducible
nesingulární	regular
nesoudělný	relatively prime
nesoudělná vzájemně	prime to each other
nesouvislý	disconnected
nespočetný	non-denumerable
nespojité	discontinuous
netotožný	oblique
neúplný	incomplete
neurčený	undetermined
neurčitý	indefinite, indeterminate
neutrální	neutral
neutrální prvek	identity element
neviditelný	invisible
nevlastní	ideal, improper
nevlastní bod	ideal point
nevlastní zlomek	improper fraction
nezáporný	non-negative
nezávislý	independent
nezávislost	independence
nikdy	never
neznámý	unknown
nikde	nowhere
nomogram	nomogram
normála	normal
normální	normal
normálový řez	cross section
n-tice	n-tuple
n-úhelník	n-gon
nula	zero, naught, zero point
nulový bod	null-point, zero point
nulový bod funkce	zero of function
numerický	numerical
nutně	necessarily
nutný	necessary
nutná podmínka	necessary condition

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

8

ROČNÍK 55, 1976-1977, DUBEN

ROČNÍK 55
DUBEN 1977

8

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMO Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 £, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nář. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1977.

OBSAH

O. Horák: O násobení matic .	337
Dr. L. Hrdina: Paradox s procentami .	340
Prof. J. Brejcha: Poznámka k vlastnostem pat výšek rovinného trojúhelníka .	343
A. Tabinský: Geometrická konstrukce součtu převrácených čísel	346
Prof. E. Kraemer: Užiti věty Menelaovy a Cevovy	348
S. Horák: Lemoinův bod	354
Dr. Jiří Mrázek, CSc.: O některých aplikacích kosmonautiky III .	360
J. Procházka, F. Golab: Sto let od narození prof. ing. Viktora Kaplana	362
Jan Bednář: Použití komplexních čísel k popisu šíření elektromagnetických vln .	366
J. Gedei: XVIII. mezinárodní matematická olympiáda	371
Nejmladším čtenářům .	378
Matematicko-fyzikální zábavy .	382
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

matematika

0 násobení matic

OTTO HORÁK, Pedagogická fakulta Hradec Králové

Na obr. 1 jsou znázorněny všechny mezinárodní letecké linky, které existují mezi letišti a_1, a_2, a_3, a_4 státu A, letišti b_1, b_2, b_3 státu B a letišti c_1, c_2 státu C. Kolika způsoby se můžeme letecky dopravit ze státu A do státu C s mezipřistáním ve státě B.

Úlohu bychom jistě podle obr. 1 snadno vyřešili. Pokusme se ji však vyřešit početně takovým způsobem, který využívá tabulkových zápisů údajů. Nejprve si načrtněme uvažovaná letecká spojení schematicky (obr. 2).

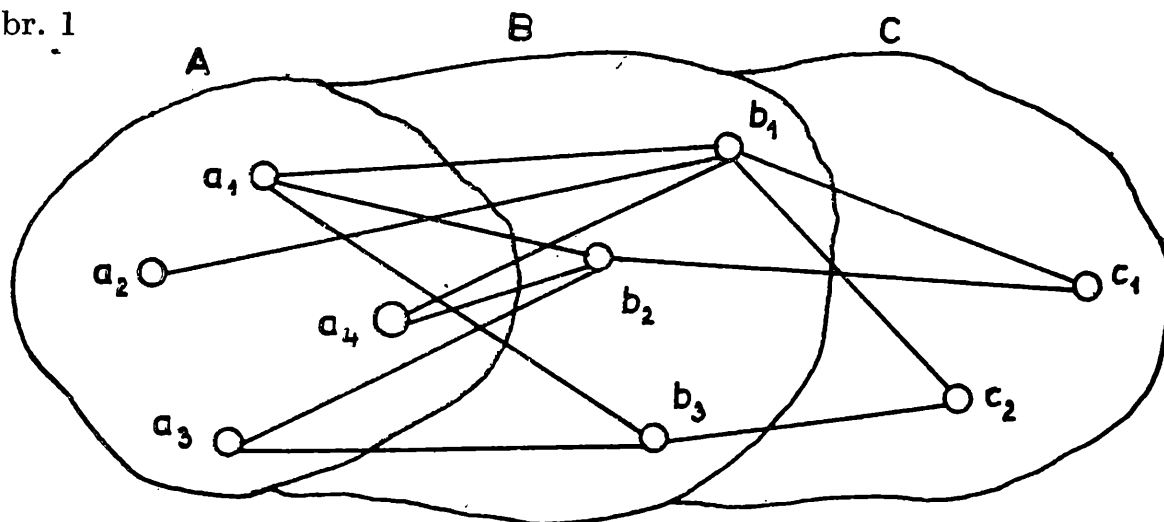
Počty spojení můžeme přehledně zapsat v tabulkách:

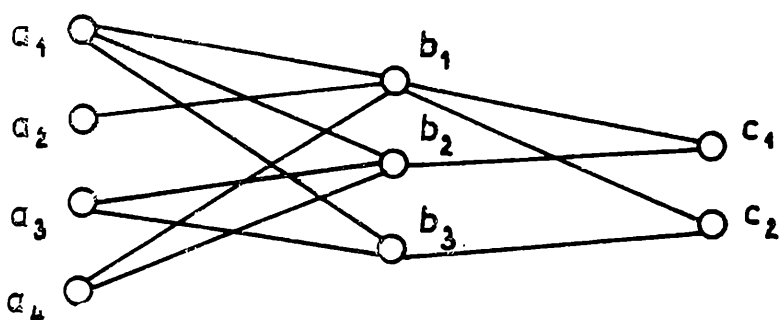
	b_1	b_2	b_3		c_1	c_2		c_1	c_2
a_1	1	1	1	b_1	1	1	a_1	2	2
a_2	1	0	0	b_2	1	0	a_2	1	1
a_3	0	1	1	b_3	0	1	a_3	1	1
a_4	1	1	0				a_4	2	1

Pole tabulek můžeme zapsat schémata, která nazýváme *matice*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obr. 1





Obr.

Připomeňme si definici matice.

Maticí rozumíme $m \times n$ čísel zapsaných ve schématu o m řádcích a n sloupcích. Jestliže prvky matice A jsou čísla a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$), píšeme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nebo stručně $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$.

Je-li $m = n$, říkáme, že matice A je čtvercová.

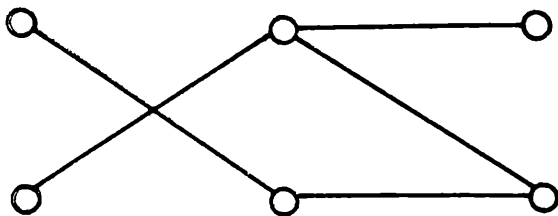
Vraťme se k naší úloze. Hledané řešení je zřejmě součtem prvků matice C . Všimněme si však, jak spolu souvisí matice A , B a C . Zajímá-li nás počet spojení z a_1 do c_1 (tedy prvek v 1. ř. a v 1. sl. matice C), prozkoumáme postupně spojení z a_1 do b_1, b_2, b_3 . Tato spojení dále „nastavíme“ spojeními (pokud existují) z b_1, b_2, b_3 do c_1 . Počet hledaných spojení z a_1 do c_1 lze tedy zapsat takto:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Počet spojení z } a_1 \text{ do } c_1 & & & & \\ & & | & & & & \\ & \text{počet spojení} & & \text{počet spojení} & & \text{počet spojení} & \\ & \text{přes } b_1 & + & \text{přes } b_2 & + & \text{přes } b_3 & \\ & | & & | & & | & \\ \begin{array}{cc} \text{z } a_1 & \text{z } b_1 \\ \text{do } b_1 & \text{do } c_1 \end{array} & \times & \begin{array}{cc} \text{z } a_1 & \text{z } b_2 \\ \text{do } b_2 & \text{do } c_1 \end{array} & \times & \begin{array}{cc} \text{z } a_1 & \text{z } b_3 \\ \text{do } b_3 & \text{do } c_1 \end{array} & \\ | & & | & & | & & | \\ 1 & & 1 & + & 1 & & 0 \end{array}$$

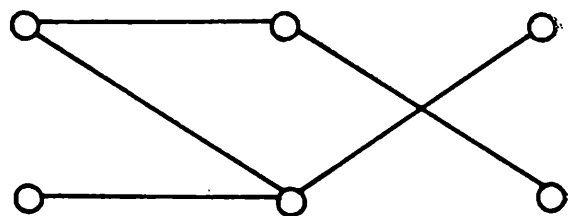
Přesvědčte se, že i ostatní prvky matice C můžeme zapsat podobným způsobem.

$$C = \begin{pmatrix} 1.1 + 1.1 + 1.0 & 1.1 + 1.0 + 1.1 \\ 1.1 + 0.1 + 0.0 & 1.1 + 0.0 + 0.1 \\ 0.1 + 1.1 + 1.0 & 0.1 + 1.0 + 1.1 \\ 1.1 + 1.1 + 0.0 & 1.1 + 1.0 + 0.1 \end{pmatrix}$$

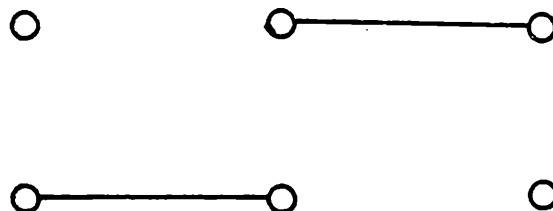
Matici C nazýváme součinem matic A a B .



Obr. 3a



Obr. 3b



Obr. 4

Zapisujeme: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Shrňme nyní předcházející úvahy do definice násobení matic.

Součinem matic $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, p}}$

nazýváme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, p}}$ jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Tento součet stručně zapisujeme: $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Příklad 1:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočteme $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. (Násobení matic obecně není komutativní operací.) Toto tvrzení můžeme snadno ilustrovat nám již známou spojovací interpretací (obr. 3 ab).

Příklad 2:

Součinem dvou nenulových matic může být matice nulová. (Nulovou maticí nazýváme matici, jejíž prvky jsou vesměs nuly).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spojovací interpretace (obr. 4).

Víme, že matice nejsou čísla, ale jistá schémata. Přesto pro ně definujeme násobení (jde vlastně o násobení schémat). Výše zavedené násobení

matic má v matematice značný význam, o čemž se jistě v dalším studiu matematiky sami přesvědčíte.

Cvičení:

Vypočtete součin matic (pro kontrolu vymyslete spojovací interpretaci).

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (3 \quad 4) \quad 4. (3 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Literatura:

[1] Kliot - Dašinskij, Algebra matic i vektorov, Leningrad, 1974

[2] Kuřina, F., Množiny a relace, SPN Praha, 1971

Paradox s percentami

RNDr. L. HRDINA, Bratislava

V dvoch triedach 1. ročníka gymnázia v meste N odoberá Rozhledy mnoho žiakov (slovom „žiak“ označme ľubovoľného príslušníka triedy, t. j. chlapca alebo dievča). V 1. A i 1. B odoberá Rozhledy zhruba tri štvrtiny chlapcov a približne tri osminy dievčat, a to je dohromady viac ako polovica všetkých žiakov každej zo spomínaných tried. Presnejšie údaje v percentách obsahuje tabuľka 1.

Tabuľka 1

Žiaci	1. A trieda			1. B trieda		
	Z cel- kového počtu	Roz- hledy odoberá	%	Z cel- kového počtu	Roz- hledy odoberá	%
Chlapci	16	12	75,0	19	14	73,7
Dievčatá	18	7	38,8	16	6	37,5
Celkove	34	19	55,9	35	20	57,1

Všimnime si pozorne nerovnosti medzi percentuálnymi údajmi:

V 1. A odoberá Rozhledy *väčší* počet percent chlapcov ako v 1. B,
a zároveň i *väčší* počet percent dievčat ako v 1. B,
ale celkove *menší* počet percent žiakov ako v 1. B.

Presvedčte sa vlastným výpočtom, že všetky výsledky v tabuľke 1 sú správne. Je to iste nečakaná situácia, ktorá s percentuálnymi údajmi nastala. Nenastáva však vždy. Lahko zistíte, že postačí v tabuľke 1 zmeniť len údaj 12 na 13 a opraviť v nej výsledky, ktoré sa vzťahujú na tento nový údaj, a získate hneď „normálnu“ situáciu (v 1. A bude odoberať Rozhledy taktiež väčší počet percent žiakov ako v 1. B). To znamená, že zmienená paradoxná situácia môže nastať, ale nemusí. Ak ju chceme pre niekoho pripraviť, musíme zvlášť obozretne voliť údaje o počte chlapcov a dievčat vo všetkých stĺpcoch.

Aby sme príliš netápali, odvodme postačujúce podmienky pre vznik paradoxu s percentami. Označme písmenami, podľa tabuľky 2, tie *prirodzené* čísla, ktoré udávajú počty chlapcov a dievčat.

Tabuľka 2

Žiaci	1. A trieda			1. B trieda		
	Z celkového počtu	Rozhledy odoberá	%	Z celkového počtu	Rozhledy odoberá	%
Chlapci	m	m_1	$\frac{m_1}{m} \cdot 100$		r_1	$\frac{r_1}{r} \cdot 100$
Dievčatá	n	n_1	$\frac{n_1}{n} \cdot 100$	s	s_1	$\frac{s_1}{s} \cdot 100$
	$m + n$	$m_1 + n_1$	$\frac{m_1 + n_1}{m + n} \cdot 100$	$r + s$	$r_1 + s_1$	$\frac{r_1 + s_1}{r + s} \cdot 100$

Nech platia nerovnice (súčiniteľom 100 skrátime)

$$(1) \quad \frac{m_1}{m} > \frac{r_1}{r} \qquad (2) \quad \frac{n_1}{n} > \frac{s_1}{s}$$

Naším cieľom je zaistiť, aby pri platnosti (1) a (2) tiež platil vzťah

$$(3) \quad \frac{m_1 + n_1}{m + n} < \frac{r_1 + s_1}{r + s}.$$

Rozbor. Z nerovnic (1) a (2) ľahko získame ekvivalentné nerovnice

$$(1a) \quad m_1 r > m r_1 \qquad (2a) \quad n_1 s > n s_1.$$

Z nerovnice (3) obdobnými úpravami dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$(3a) \quad (m_1 + n_1) \cdot (r + s) < (m + n) \cdot (r_1 + s_1).$$

Postačí teda zvoliť hodnoty osmich premenných $m, n, r, s, m_1, n_1, r_1, s_1$ tak, aby platili nerovnice (1a) (2a) a (3a). Prílišná voľnosť voľby premenných je tu skôr na obtiaž, preto si svoju úlohu uľahčíme tým, že zvolíme nejaké

väzby medzi m, n, r, s . Napríklad čísla v tabuľke 1 boli získané po voľbe $n = m + 2, r = m + 3, s = m$. Potom dostávame

$$(1b) \quad 3m_1 > m(r_1 - m_1) \quad (2b) \quad m(n_1 - s_1) > 2s_1$$

$$(3b) \quad (2m + 3) \cdot (m_1 + n_1) < (2m + 2) \cdot (r_1 + s_1)$$

Z (1b) a (2b) po ich sčítaní a úprave dostaneme

$$(4) \quad m(r_1 + s_1 - m_1 - n_1) < 3m_1 - 2s_1.$$

Ak zvolíme $r_1 + s_1 = m_1 + n_1 + 1$, platí, že

$$(3c) \quad 2m + 3 > r_1 + s_1$$

$$(4a) \quad m < 3m_1 - 2s_1.$$

Všetky zvolené rovnice a všetky odvodené nerovnice nám pomôžu pri ďalších voľbách hodnôt premenných. V tab. 1 bolo zvolené $m = 16$. Potom je $n = 18, r = 19, s = 16$. Ak sme ďalej zvolili $r_1 + s_1 = 20$, potom $m_1 + n_1 = 19$. Zároveň platí, že

$$(4b) \quad 16 < 3m_1 - 2s_1$$

$$(1c) \quad 19m_1 > 16r_1 \quad (2c) \quad 16n_1 > 18s_1$$

Pokusným výberom hodnôt $m_1 = 12, n_1 = 7, r_1 = 14, s_1 = 6$ môžeme zistiť, že uvedené údaje vyhovujú všetkým tu uvedeným rovniciam a nerovniciam. Takto zvolené údaje zrejme vedú k paradoxnej situácii s percentami.

Čitateľ si môže skúsiť vlastný postup pri iných závislostiach n, r, s na $m, r_1 + s_1$ na $m_1 + n_1$ atď. Ide o existenčný dôkaz nájdením príkladov vhodnej osmice hodnôt premenných $m, n, r, s, m_1, n_1, r_1, s_1$.

V čom je podstata paradoxu? Porovnajte súčty strán nerovnic (1) a (2), t. j.

$$\frac{m_1}{m} + \frac{n_1}{n}, \quad \frac{r_1}{r} + \frac{s_1}{s}$$

so stranami nerovnice (3)

$$\frac{m_1 + n_1}{m + n}, \quad \frac{r_1 + s_1}{r + s}$$

Percentuálne údaje pre celé triedy sú vyjadrené *podielmi súčtu*, zatiaľ čo naša situácia sa opiera o *súčty podielov*. Ide teda o našu chybu. V uvedenom príklade zvädza nás okolnosť, že počty percent sú desatinné čísla, za ktorými sprvu nevidíme podiely, resp. zlomky.

Pri porovnávaní percentuálnych údajov je treba dávať veľký pozor. Porovnávanie je vhodné uskutočňovať vtedy, ak sa vychádza z rovnako početných základov, ale málokedy má nejaký význam, ak sa vychádza z rozličných základov.

Poznámka k vlastnostem pat výšek rovinného trojúhelníka

Prof. JOSEF BREJCHA, Brno

Nechť body A_i ($i = 1, 2, 3$) jsou vrcholy rovinného trojúhelníka, a_i velikosti jeho stran, α_i velikosti jeho vnitřních úhlů, v_i délky jeho výšek podle běžného označení. Dále budtež

A_4 orthocentrum tohoto trojúhelníka,

P jeho obsah,

V_i paty jeho výšek na stranách $A_j A_k$, i, j, k libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3,

M_i^{ri} paty kolmic, spuštěných z bodu V_i na strany $A_r A_i$,

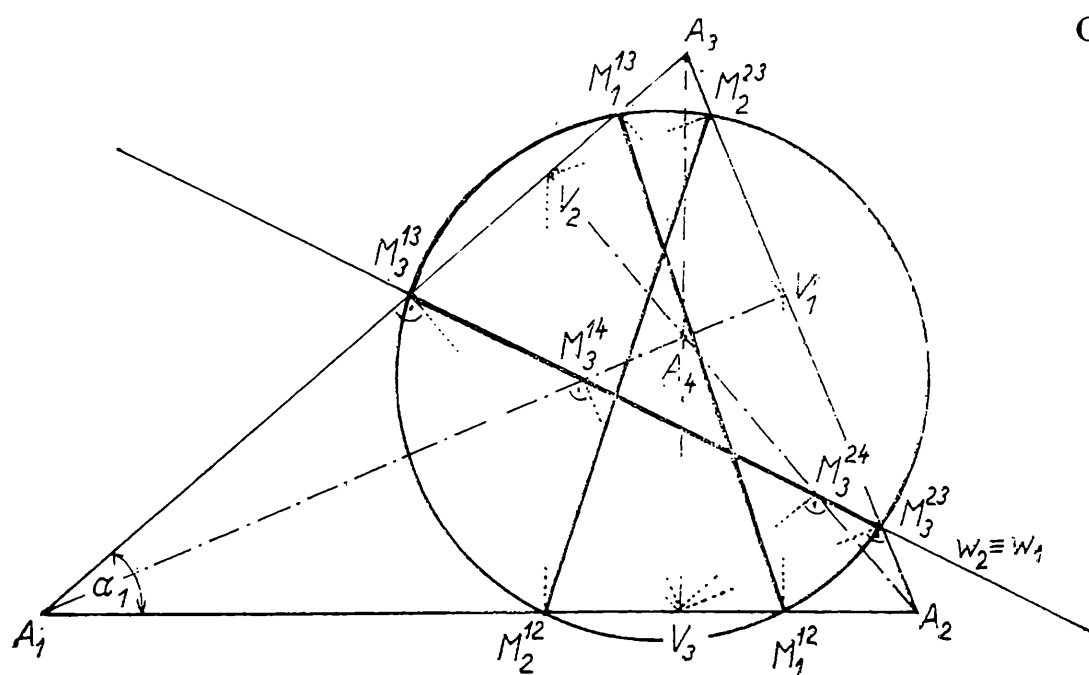
M_i^{r4} paty kolmic, spuštěných z bodu V_i na výšky $A_r A_4$,

$i, r = 1, 2, 3$; i, r navzájem různá.

Platí věty:

1. Šest bodů M_i^{ri} ($i, r = 1, 2, 3, i \neq r$) leží na kružnici.
2. Délky úseček $M_i^{ri} M_i^{si}$ ($i, r, s = 1, 2, 3$; i, r, s navzájem různá čísla) jsou si rovny.
3. Čtyři body M_i^{ri}, M_i^{r4} ($i, r = 1, 2, 3, i \neq r$) leží v přímce.

Důkaz (obr. 1)



Obr. 1

1. Nechť trojúhelník o vrcholech A_i ($i = 1, 2, 3$) je ostroúhlý. Pak — vzhledem k obrázku — položíme

$$\mathfrak{M}_{A_1}^{(2)} = A_1 M_2^{12} \cdot A_1 M_1^{12},$$

$$\mathfrak{M}_{A_1}^{(3)} = A_1 M_3^{13} \cdot A_1 M_1^{13}$$

Z obrázku určíme snadno

$\mathfrak{M}_{A_1}^{(2)} = a_3 \cdot \cos^2 \alpha_1 \cdot v_1 \cdot \sin \alpha_2$; užitím známých vztahů mezi obsahem P daného trojúhelníka a jeho stranami a výškami a vzhledem ke kosi-
nové větě obdržíme

$$\mathfrak{M}_{A_1}^{(2)} = a_3 \left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{2 a_2 a_3} \right)^2 \cdot \frac{2P}{a_1} \cdot \frac{2P}{a_1 a_3} = P^2 \left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{a_1 a_2 a_3} \right)^2 \quad (1)$$

Pro součin $\mathfrak{M}_{A_1}^{(3)}$ vychází

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{A_1}^{(3)} &= a_2 \cos^2 \alpha_1 \cdot v_1 \cdot \sin \alpha_3 = \\ &= a_2 \left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{2 a_2 a_3} \right)^2 \cdot \frac{2P}{a_1} \cdot \frac{2P}{a_1 a_2} = P^2 \left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{a_1 a_2 a_3} \right)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \mathfrak{M}_{A_1}^{(2)} = \mathfrak{M}_{A_1}^{(3)} \quad (3)$$

Společnou hodnotu výrazů (3) označme $\mathfrak{M}_{A_1}$.

Pro další dva vrcholy A_2, A_3 plyne cyklickou záměnou

$$\mathfrak{M}_{A_2} = A_2 M_1^{12} \cdot A_2 M_2^{12} = A_2 M_3^{23} \cdot A_2 M_2^{23} = P^2 \left(\frac{a_3^2 + a_1^2 - a_2^2}{a_1 a_2 a_3} \right)^2 \quad (4)$$

$$\mathfrak{M}_{A_3} = A_3 M_2^{12} \cdot A_3 M_3^{23} = A_3 M_1^{13} \cdot A_3 M_3^{13} = P^2 \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{a_1 a_2 a_3} \right)^2 \quad (5)$$

tj. platí obecně

$$\mathfrak{M}_{A_i} = P^2 \left(\frac{a_r^2 + a_s^2 - a_i^2}{a_r a_s a_i} \right)^2 \quad i, r, s \text{ libovolná cyklická permutace čísel } 1, 2, 3. \quad (6)$$

Vzhledem k tomu, že vztah (6) závisí pouze na velikostech a_i stran daného trojúhelníka a nikoli na velikosti jeho vnitřních úhlů, platí tento vztah pro *každý* trojúhelník.

Pro náš důkaz je nyní nutno připomenout známou větu Steinerovu o tzv. mocnosti bodu ke kružnici:

Budiž k kružnice, A libovolný bod její roviny, s_1, s_2 sečny této kružnice procházející bodem A . Nechť S_1, S_1^* (S_2, S_2^*) jsou společné body sečny s_1 (s_2) s kružnicí k . Pak podle Steinerovy věty platí

$$A S_1 \cdot A S_1^* = A S_2 \cdot A S_2^* \quad (7)$$

pro libovolnou dvojici sečen kružnice k procházejících bodem A . Společnou hodnotu součinu (7) označujeme obvykle symbolem $\mathfrak{M}_A$ a nazýváme ji *mocností bodu A ke kružnici k* .

Steinerova věta platí i obráceně:

Nechť s_1, s_2 jsou dvě různoběžky, procházející bodem A . Nechť S_1, S_1^*, S_2, S_2^* jsou dva různé body na přímkách s_1 resp. s_2 a platí

$$A S_1 \cdot A S_1^* = A S_2 \cdot A S_2^* (= \mathfrak{M}_A).$$

Pak body S_1, S_1^*, S_2, S_2^* leží na jediné kružnici.

Poznámka: Je-li bod A vnějším (vnitřním, koncovým) bodem úsečky $S_i S_i^*$, je nutno klásti $\mathfrak{M}_A > 0$ ($\mathfrak{M}_A < 0$, $\mathfrak{M}_A = 0$)

Poněvadž podle (1), (2) a (3) platí

$$\mathfrak{M}_{A_1} = A_1 M_1^{13} \cdot A_1 M_3^{13} = A_1 M_2^{12} \cdot A_1 M_1^{12},$$

leží podle obrácené věty Steinerovy body $M_1^{13}, M_3^{13}, M_2^{12}, M_1^{12}$ na jediné kružnici k_1 ,

Dále platí podle (4):

$\mathfrak{M}_{A_2} = A_2 M_1^{12} \cdot A_2 M_2^{12} = A_2 M_3^{23} \cdot A_2 M_2^{23}$, tj. body $M_1^{12}, M_2^{12}, M_3^{23}, M_2^{23}$ leží na jediné kružnici k_2 . Kružnice k_1, k_2 mají společnou tětivu $M_2^{12} M_1^{12}$. Pak však mocnost $\mathfrak{M}_{A_1}$ bodu A_1 ke kružnici k_2 je táž jako ke kružnici k_1 ($\mathfrak{M}_{A_1} = A_1 M_2^{12} \cdot A_1 M_1^{12}$); z podmínky $\mathfrak{M}_{A_1} = A_1 M_3^{13} \cdot A_1 M_1^{13}$ ovšem plyne, že kružnice k_1, k_2 mají společné dvě vzájemně různé tětivy $M_1^{12} M_2^{12}, M_3^{13} M_1^{13}$, tj. platí $k_1 \equiv k_2$; body $M_1^{12}, M_2^{12}, M_3^{13}, M_1^{13}, M_2^{23}, M_3^{23}$ leží na jediné kružnici.

2. Pro délku $M_1^{12} M_1^{13}$ najdeme podle kosinové věty a po dalších úpravách:

$$\begin{aligned} (M_1^{12} M_1^{13})^2 &= (A_1 M_1^{12})^2 + (A_1 M_1^{13})^2 - 2 A_1 M_1^{12} \cdot A_1 M_1^{13} \cos \alpha_1 = \\ &= v_1^2 \sin^2 \alpha_2 + v_1^2 \sin^2 \alpha_3 - 2 v_1^2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 = \\ &= 4 P^2 v_1^2 \left(\frac{1}{a_3^2 a_1^2} + \frac{1}{a_1^2 a_2^2} - \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \right) = \\ &= \frac{16 P^4}{a_1^2} \cdot \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2 - a_3^2 + a_1^2}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} = \frac{16 P^4}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow M_1^{13} M_1^{12} = \frac{4 P^2}{a_1 a_2 a_3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Výraz (8) se nemění cyklickou permutací a závisí pouze na délkách stran a_i ; platí proto i pro další dvě úsečky $M_2^{12} M_2^{23}, M_3^{23} M_3^{12}$ a pro libovolný trojúhelník.

3. Poněvadž podle konstrukce je

$\sphericalangle A_1 V_3 A_3 = \sphericalangle A_1 V_1 A_3 = R$, $\sphericalangle A_2 V_3 A_3 = \sphericalangle A_2 V_2 A_3 = R$,
 $\sphericalangle A_1 V_3 A_3 = \sphericalangle A_1 V_1 A_3 = R$, $\sphericalangle A_2 V_3 A_3 = \sphericalangle A_2 V_2 A_3 = R$,
je bod V_3 druhým společným bodem kružnice k_1 opsané trojúhelníku Δ_1 o vrcholech A_1, V_1, A_3 a kružnice k_2 opsané trojúhelníku Δ_2 o vrcholech A_2, V_2, A_3 .

Pak vzájemně různé paty $M_3^{13}, M_3^{14}, M_3^{23}$ kolmic, spuštěných z bodu V_3 na strany trojúhelníka Δ_1 , leží na Wallaceově*) (Simsonově) přímce w_1 trojúhelníka Δ_1 , příslušné bodu V_3 ; analogicky vzájemně různé paty $M_3^{13}, M_3^{24}, M_3^{13}$ kolmic, spuštěných z bodu V_3 na strany trojúhelníka Δ_2 , leží na Wallaceově přímce w_2 trojúhelníka Δ_2 , příslušné rovněž bodu V_3 .

Wallaceovy přímky w_1, w_2 mají zřejmě společné dva vzájemně různé body M_3^{13}, M_3^{23} ; je tedy nutně $w_1 \equiv w_2$ a čtyři vzájemně různé body $M_3^{13}, M_3^{14}, M_3^{24}, M_3^{23}$ leží v jediné přímce.

Pro body V_1, V_2 je důkaz analogický.

Geometrická konstrukce součtu převrácených čísel

A. TABINSKÝ, Chomutov

Sledujme konstrukci v obrázku, kde jsou v libovolných bodech vodorovné přímky sestrojeny kolmice a v horní polorovině jsou na těchto kolmicích vyznačeny body. Délky úseček DC, AB, EH, FG označme písmeny a, b, c, d , body úseček ležící na přímce nazvěme paty a druhé krajní body nazvěme vrcholy úseček.

Vrchol první úsečky zleva je spojen s patou druhé a vrchol druhé s patou první úsečky, z průsečíku spojnic je spuštěna na vodorovnou přímku kolmice, jejíž délka je označena v_1 . Obdobnou konstrukcí s úsečkami, které mají délky v_1, c , je získána úsečka s délkou v_2 , dále pak úsečka s délkou v_3 . Dokážeme, že platí:

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{v_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{v_3} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Z obrázku je zřejmé, že $AN = MP, BP = b - v_1$ a dále $\triangle ANM \sim \triangle ADC, \triangle BPM \sim \triangle DAB$, proto

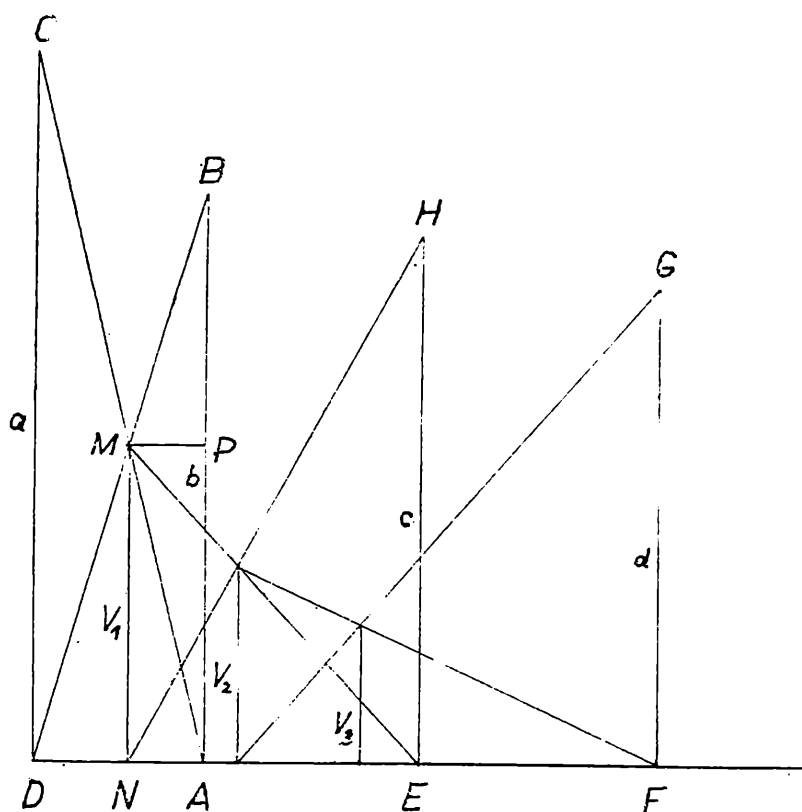
$$\frac{MN}{DC} = \frac{AN}{AD}, \quad \frac{MP}{AD} = \frac{BP}{AB}.$$

Odtud získáme $MN \cdot AB = DC \cdot BP$

$$v_1 \cdot b = (b - v_1) \cdot a$$

$$v_1 \cdot (a + b) = ab$$

*) Wallaceova (Simsonova) přímka je přímka, na níž leží paty kolmic, spuštěných z libovolného bodu (různého od každého z vrcholů) kružnice opsané danému trojúhelníku na přímky, na nichž leží jeho strany.



$$v_1 = \frac{ab}{a+b}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Obdobným postupem dostaneme

$$\frac{1}{v_2} = \frac{c+v_1}{cv_1} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ atd.}$$

V součtu kladných čísel je každý sčítanec menší než součet, proto $\frac{1}{v_1} < \frac{1}{v_2}$ a $v_1 > v_2$. Při další konstrukci získáváme průsečíky ve stále menších vzdálenostech od vodorovné přímky.

Získané poznatky můžeme uplatnit při grafickém řešení rovnic

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{u}.$$

konstruktivní geometrie

Užití věty Menelaovy a věty Cevovy

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

V návaznosti na články *Užití dělicího poměru v geometrii* (letošní ročník Rozhledů, č. 4), *Věta Menelaova a věta Cevova* (letošní ročník Rozhledů, č. 5) uzavřeme tematiku věnovanou dělicímu poměru v geometrii několika poněkud náročnějšími aplikacemi věty Menelaovy a věty Cevovy. Odkazy na citované dva články budeme stručně označovat Rozhledy č. 4 nebo č. 5.

Příklad 1. Dokažte tyto věty: a) Těžnice trojúhelníku procházejí jedním bodem. b) Osy vnitřních úhlů trojúhelníku procházejí jedním bodem. c) Výšky trojúhelníku procházejí jedním bodem. d) Osy stran trojúhelníku procházejí jedním bodem.

Řešení: Ve všech případech označme vrcholy trojúhelníku písmeny A, B, C . Obrázky k případům a), b) si čtenář snadno načrtne.

a) Středy stran BC, CA, AB označme po řadě S_1, S_2, S_3 . Potom těžnice trojúhelníku ABC jsou úsečky AS_1, BS_2, CS_3 . Protože střed úsečky má dělicí poměr rovný -1 , je

$$(BCS_1) \cdot (CAS_2) \cdot (ABS_3) = -1.$$

Podle obrácené věty Cevovy (Rozhledy, č. 5) jsou přímky AS_1, BS_2, CS_3 vzájemně rovnoběžné nebo procházejí jedním bodem. Avšak těžnice AS_1 odděluje body B, S_2 , takže přímka AS_1 protíná úsečku BS_2 v jejím vnitřním bodu T , který je vnitřním bodem trojúhelníku ABC . Těžnice AS_1, BS_2, CS_3 procházejí tedy jedním bodem T .

b) Osy úhlů $\sphericalangle BAC, \sphericalangle CBA, \sphericalangle ACB$ protínají strany BC, CA, AB po řadě v bodech D_1, D_2, D_3 ; přitom platí (Rozhledy, č. 4, příklad 2):

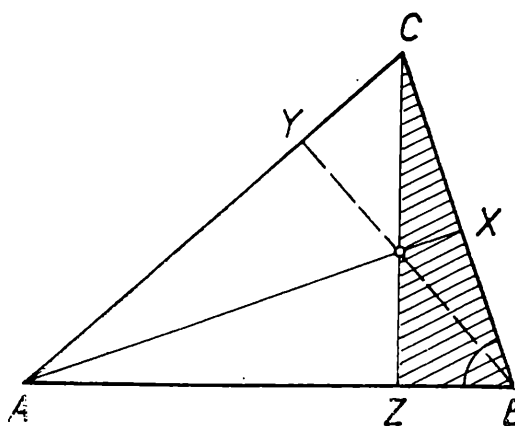
$$(BCD_1) = -\frac{AB}{AC}, \quad (CAD_2) = -\frac{BC}{BA}, \quad (ABD_3) = -\frac{CA}{CB}.$$

Je tedy

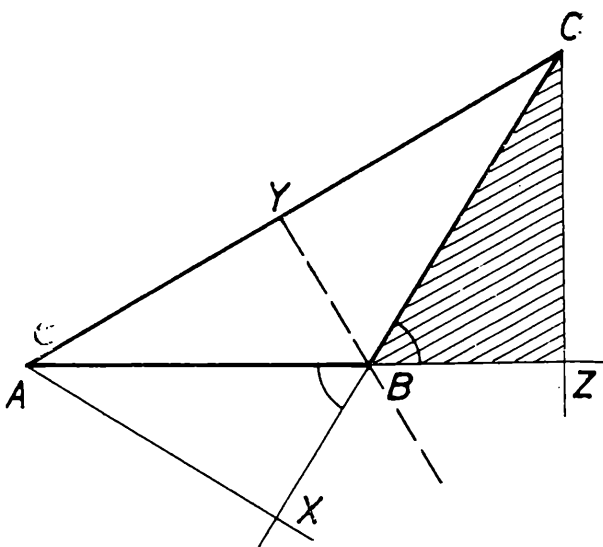
$$(BCD_1) \cdot (CAD_2) \cdot (ABD_3) = -1.$$

Stejně jako v a) dokážeme, že úsečky AD_1, BD_2, CD_3 procházejí jedním bodem.

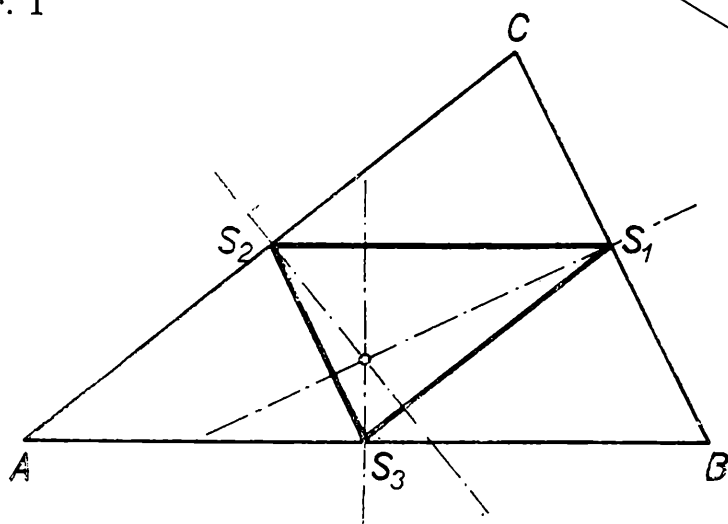
c) Výškami trojúhelníku ABC zde rozumíme přímky $AX \perp BC, BY \perp CA, CZ \perp AB$; přitom X, Y, Z jsou paty těchto kolmic. Je-li trojúhelník ostroúhlý, leží body X, Y, Z uvnitř jeho stran (obr. 1); je-li



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

tupoúhlý, leží jeden z těchto bodů uvnitř příslušné strany a dva zbývající na prodloužení příslušných stran (obr. 2).

V obou případech je tedy

$$(BCX) \cdot (CA Y) \cdot (ABZ) < 0. \quad (1)$$

Trojúhelníky ABX , CBZ jsou pravoúhlé a mají shodné úhly při vrcholu B ; je tedy $\triangle ABX \sim \triangle CBZ$, takže je

$$\frac{BX}{BZ} = \frac{AB}{CB}. \quad (2)$$

Obdobně dokážeme, že je

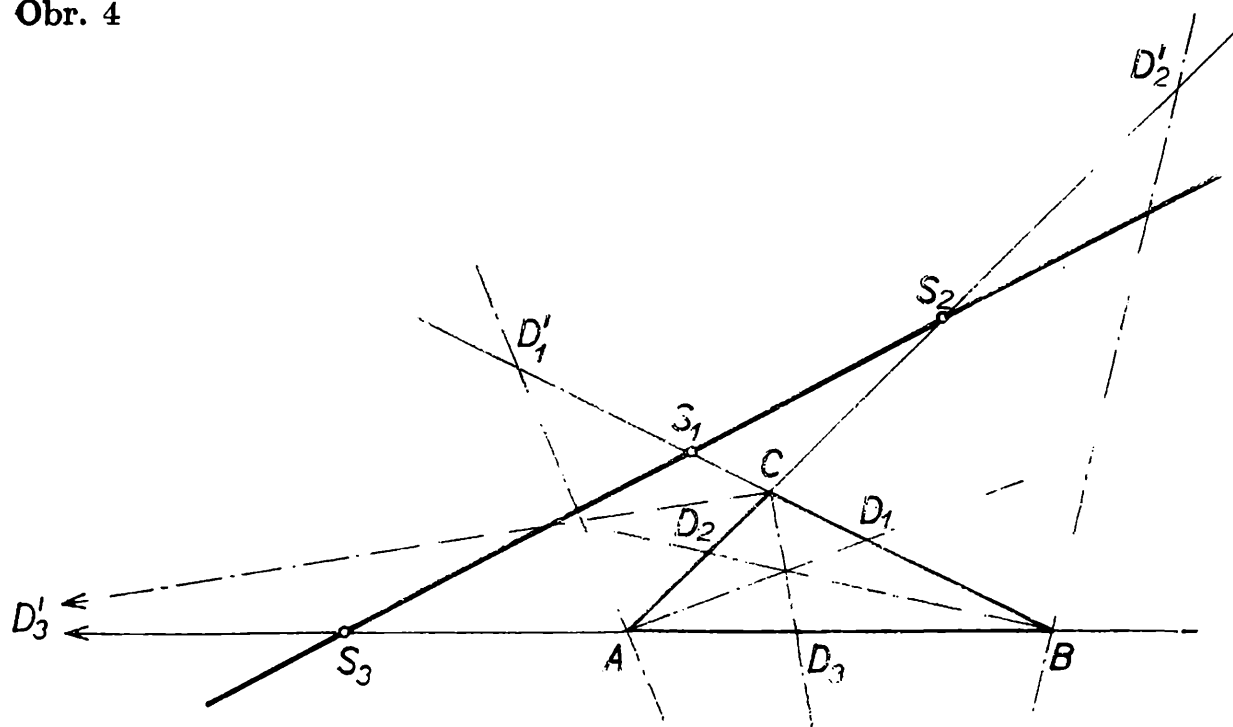
$$\frac{CY}{CX} = \frac{BC}{AC}, \quad \frac{AZ}{AY} = \frac{CA}{BA}. \quad (3)$$

Podle definice dělicího poměru a podle (2), (3) je

$$|(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CA Y)| = \frac{AZ}{BZ} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} = \frac{CA \cdot AB \cdot BC}{BA \cdot CB \cdot AC} = 1.$$

Z toho podle (1) plyne, že je

$$(ABZ) \cdot (BCX) \cdot (CA Y) = -1.$$



Podle obrácené věty Cevovy (Rozhledy, č. 5) jsou přímky AX , BY , CZ vzájemně rovnoběžné nebo procházejí jedním bodem. Protože kolmice AX , BY k různoběžkám BC , CA jsou opět různoběžky, nastává druhý případ.

d) Jsou-li S_1 , S_2 , S_3 středy stran BC , CA , AB , je $S_1S_2 \parallel AB$, $S_2S_3 \parallel BC$, $S_3S_1 \parallel AC$ (obr. 3). Proto osy stran trojúhelníku ABC jsou zároveň výškami trojúhelníku $S_1S_2S_3$; podle c) procházejí tedy jedním bodem.

Příklad 2. Budiž dán různonostranný trojúhelník ABC (obr. 4). Potom osa úhlu $\sphericalangle BAC$ protíná stranu BC v jejím vnitřním bodu D_1 a přímka, na které leží osa úhlu vedlejšího k úhlu $\sphericalangle BAC$, protíná prodloužení strany BC v bodu D'_1 ; střed úsečky $D_1D'_1$ označme S_1 . Obdobně se sestrojí body D_2 , D'_2 na přímce CA , body D_3 , D'_3 na přímce AB a středy S_2 , S_3 úseček $D_2D'_2$, $D_3D'_3$. Potom každý z bodů S_1 , S_2 , S_3 leží vně trojúhelníku ABC a všechny tři leží na téže přímce. Dokažte.

Řešení: Víme, že platí (Rozhledy, č. 4, příklad 2 a cvičení 4):

$$(BCD_1) = -\frac{AB}{AC}, \quad (BCD'_1) = \frac{AB}{AC}.$$

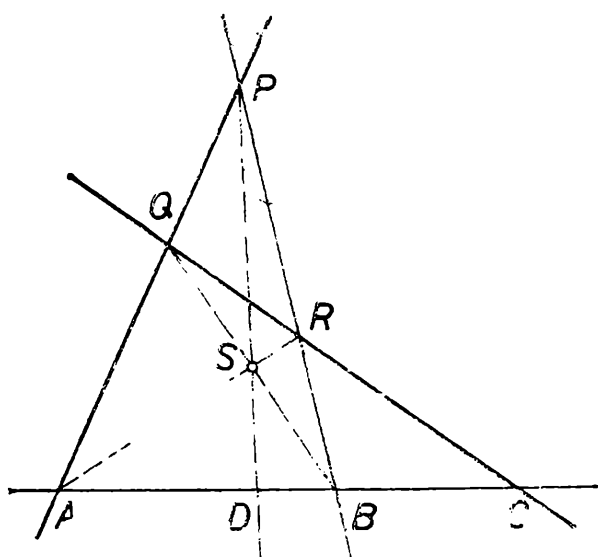
Je tedy $(BCD'_1) = -(BCD_1)$, takže body B , C , D_1 , D'_1 tvoří harmonickou čtveřinu (Rozhledy, č. 4). Obdobně body C , A , D_2 , D'_2 a rovněž body A , B , D_3 , D'_3 tvoří harmonickou čtveřinu.

Budiž

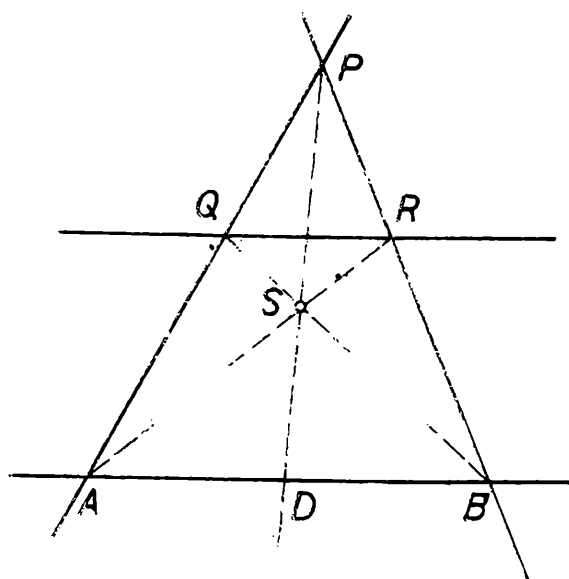
$$(BCD_1) = \lambda_1, \quad (CAD_2) = \lambda_2, \quad (ABD_3) = \lambda_3.$$

Potom platí (Rozhledy, č. 4, příklad 1):

$$(BCS_1) = \lambda_1^2, \quad (CAS_2) = \lambda_2^2, \quad (ABS_3) = \lambda_3^2. \quad (4)$$



Obr. 5



Obr. 6

Protože je $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, je

$$\lambda_1^2 > 0, \quad \lambda_2^2 > 0, \quad \lambda_3^2 > 0$$

Proto leží body S_1, S_2, S_3 po řadě na prodloužených stranách BC, CA, AB , tj. vně trojúhelníku ABC .

Protože osy AD_1, BD_2, CD_3 vnitřních úhlů trojúhelníku ABC procházejí jedním bodem, je podle věty Cevovy (Rozhledy, č. 5)

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1 \quad (5)$$

Podle (4) a (5) je tedy

$$(BCS_1) \cdot (CAS_2) \cdot (ABS_3) = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 = 1$$

Podle obrácené věty Menelaovy (Rozhledy, č. 5) leží body S_1, S_2, S_3 v téže přímce.

V článku Užití dělicího poměru v geometrii byla uvedena na obr. 3 a 4 konstrukce čtvrtého harmonického bodu k daným bodům A, B, C (Rozhledy, č. 4, str. 176). V této konstrukci se rýsují rovnoběžky, takže k jejímu provedení je třeba dvou pravítek. Nyní uvedeme konstrukci, v níž vystačíme s jedním pravítkem.

Příklad 3. Na přímce jsou dány tři různé body A, B, C tak, že bod C leží na prodloužení úsečky AB . Potom čtvrtý harmonický bod D k bodům A, B, C sestrojíme takto (obr. 5): 1. Mimo přímku AB zvolíme bod P a sestrojíme přímky PA, PB ; 2. bodem C vedeme přímku protínající přímky PA, PB v bodech $Q \neq A, Q \neq P, R \neq B, R \neq P$; 3. sestrojíme průsečík S přímek AR, BQ ; 4. sestrojíme bod D jako průsečík přímek AB, PS . Potom je $(ABCD) = -1$. Dokažte.

Řešení: Přímky AR, BQ, PD se protínají v bodu S , který neleží na žádné z přímek AB, BP, PA omezujících trojúhelník ABP . Podle věty Cevovy (Rozhledy, č. 5) platí:

$$(ABD).(BPR).(PAQ) = -1 \quad (6)$$

Přímka CQ neprochází žádným vrcholem trojúhelníku ABP ; podle věty Menelaovy (Rozhledy, č. 5) platí:

$$(ABC).(BPR).(PAQ) = 1 \quad (7)$$

Vyjádříme-li z (6) součin $(BPR).(PAQ)$ a výsledek dosadíme do (7), dostaneme:

$$(ABD) = - (ABC)$$

To však znamená, že body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřinu.

Poznámka 1. Z obr. 5 je zároveň patrné, jak sestrojíme čtvrtý harmonický bod C k daným bodům A, B, D , jestliže bod D leží uvnitř úsečky AB . Konstrukce: 1. Mimo přímku AB zvolíme bod P a sestrojíme přímky PA, PB ; 2. sestrojíme přímku PD a na ní zvolíme bod $S \neq D, S \neq P$; 3. sestrojíme průsečík Q přímek AP, BS a průsečík R přímek BP, AS ; 4. sestrojíme bod C jako průsečík přímek AB, QR .

Poznámka 2. Bod D sestrojený konstrukcí popsanou v textu příkladu 3 vždy existuje. Avšak při konstrukci popsané v poznámce 1 se může stát, že přímky AB, QR ($AB \neq QR$) jsou rovnoběžné, takže nemají žádný společný bod. Pak vzniká buď lichoběžník $ABRQ$ (jestliže zvolíme bod S uvnitř polopřímky PD , obr. 6) nebo lichoběžník $ABQR$ (zvolíme-li bod S uvnitř polopřímky opačné k polopřímce PD). V obou těchto případech prochází přímka PS středy stran lichoběžníku (Rozhledy, č. 4, věta 4 na str. 177); to znamená, že bod D je středem úsečky AB . Pak však skutečně neexistuje čtvrtý harmonický bod k bodům A, B, D (Rozhledy, č. 4, str. 176).

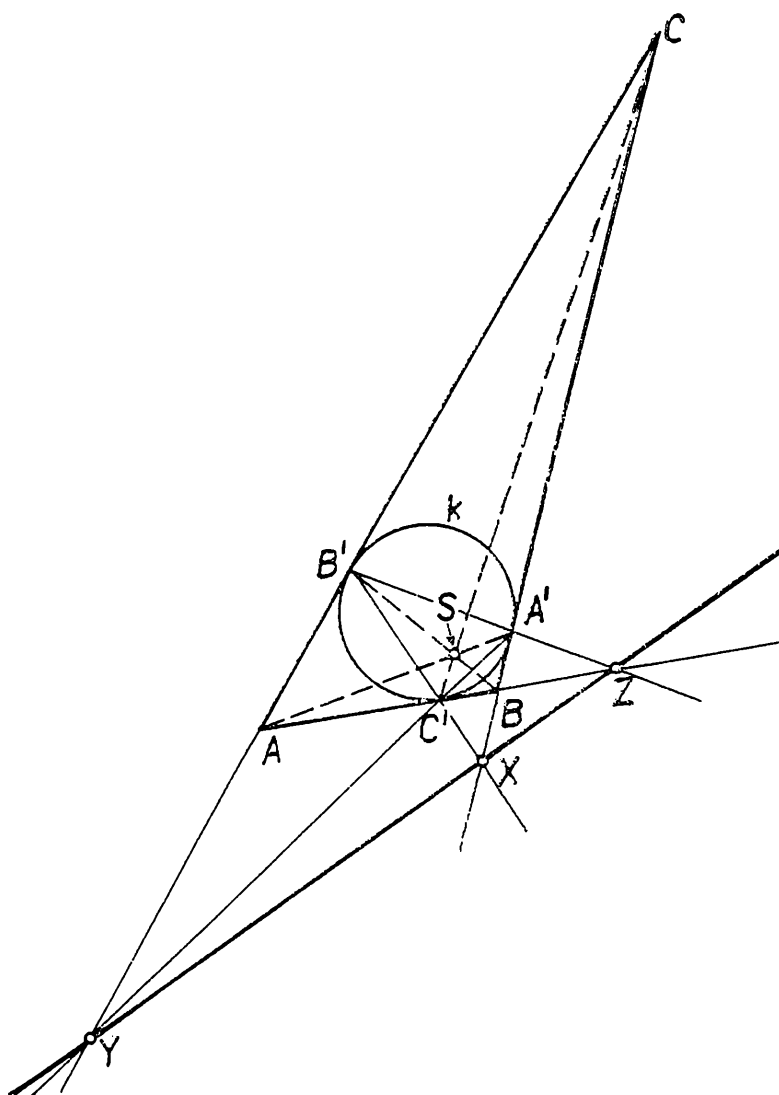
Příklad 4. Do různostranného trojúhelníku ABC je vepsána kružnice, která se dotýká jeho stran BC, CA, AB po řadě v bodech A', B', C' (obr. 7). Potom přímka $B'C'$ protíná prodloužení strany BC v bodu X , přímka $C'A'$ protíná prodloužení strany CA v bodu Y a přímka $A'B'$ protíná prodloužení strany AB v bodu Z . Body X, Y, Z leží v téže přímce. Dokažte.

Řešení: Bod X skutečně existuje. Kdyby totiž bylo $B'C' \parallel BC$, byly by body B', C' i tečny $B'C, C'B$ vepsané kružnice souměrně sdruženy podle jejího průměru kolmého k přímce $B'C'$; trojúhelník ABC by tedy byl rovnoramenný s rameny AB, AC , což odporuje předpokladu. Stejně se dokáže existence bodů Y a Z .

Přímky AA', BB', CC' se protínají v bodu S , který leží uvnitř trojúhelníku ABC (Rozhledy, č. 5, příklad 2). Podle věty Cevovy (Rozhledy, č. 5) proto platí:

$$(BCA').(CAB').(ABC') = -1 \quad (8)$$

K bodům B, C, A' je sestrojen čtvrtý harmonický bod X konstrukcí popsanou v poznámce 1: Místo bodu P je zvolen bod A , na přímce AA'



Obr. 7

je zvolen bod $S \neq A'$, $S \neq A$, jsou sestrojeny průsečíky $C' = BA \cap CS$, $B' = CA \cap BS$ a bod X jako průsečík přímek BC , $C'B'$. Je tedy

$$(BCX) = -(BCA') \quad (9)$$

Zcela obdobně dokážeme, že je

$$(CAY) = -(CAB'), \quad (ABZ) = -(ABC') \quad (10)$$

Z (9), (10) a (8) plyne, že je

$$(BCX) \cdot (CAY) \cdot (ABZ) = -(BCA') \cdot (CAB') \cdot (ABC') = 1 \quad (11)$$

Žádný z bodů Y , X , Z nesplývá s žádným vrcholem trojúhelníku ABC ; přitom platí (11). Podle obrácené Menelaovy věty leží body X , Y , Z v téže přímce.

Cvičení

1. Je dán trojúhelník ABC a přímka p , která protíná přímku BC v bodu $A' \neq B$, $A' \neq C$, přímku CA v bodu $B' \neq C$, $B' \neq A$ a přímku AB v bodu $C' \neq A$, $C' \neq B$. K bodům B , C , A' je sestrojen čtvrtý harmonický bod A'' , k bodům C , A , B' čtvrtý harmonický bod B'' a k bodům A , B , C' čtvrtý harmonický bod C'' . Potom přímky AA'' ,

BB'' , CC'' procházejí jedním bodem nebo jsou vzájemně rovnoběžné. Dokažte.

2. Je dán trojúhelník ABC . Jeho vrcholy A , B , C jsou vedeny vzájemně rovnoběžné přímky, které protínají po řadě strany BC , CA , AB v bodech A' , B' , C' . K bodům B , C , A' je sestrojen čtvrtý harmonický bod A'' , k bodům C , A , B' čtvrtý harmonický bod B'' a k bodům A , B , C' čtvrtý harmonický bod C'' . Potom body A'' , B'' , C'' leží v téže přímce. Dokažte.

3. Je dán různostranný trojúhelník ABC , který není pravoúhlý; paty jeho výšek na stranách BC , CA , AB jsou po řadě A' , B' , C' . Potom se přímky BC a $B'C'$ protínají v bodu A'' , přímky CA a $C'A'$ v bodu B'' a přímky AB , $A'B'$ v bodu C'' ; přitom body A'' , B'' , C'' leží v téže přímce. Dokažte.

Lemoinův bod

STANISLAV HORÁK, Praha

Je dán různostranný trojúhelník ABC . Sestrojme jeho vnitřní bod L tak, aby o jeho vzdálenostech d_a , d_b , d_c od stran po řadě BC , CA , AB platilo

$$d_a \ d_b \ d_c = a \ b \ c. \quad (1)$$

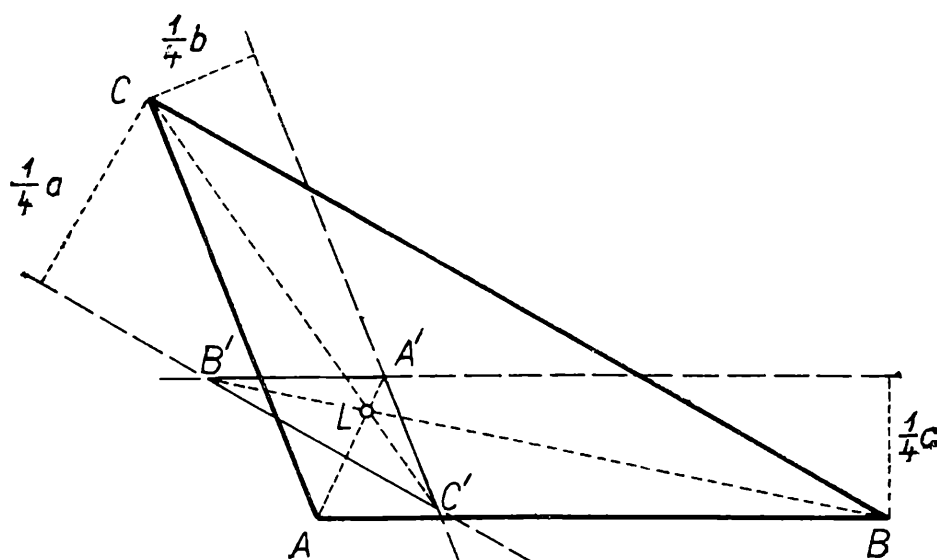
Konstrukce bodu L je provedena v obr. 1 a je následující: Zvolme libovolné kladné číslo k (nejlépe $k < 1$) a vedme v polorovině BCA (CAB , ABC) ve vzdálenosti ka (kb , kc) rovnoběžku. Dostaneme tak tři přímky, které omezují trojúhelník $A'B'C'$, jenž je stejnohlehlý s trojúhelníkem ABC . Střed stejnohlelosti těchto dvou trojúhelníků je žádaný bod L .

Bodu L se říká Lemoinův bod podle francouzského matematika Emila Lemoine (čti Lemoana), který žil v 2. polovině minulého století. Lemoine nebyl příliš zdravý a jeho zdravotní stav mu nedovolil, aby se ucházel o učitelskou dráhu, a proto se stal technickým úředníkem u pařížské obce. Svou lásku k matematice si však ponechal a během svého života uveřejnil řadu originálních prací z elementární geometrie. Zde uvedeme několik základních vlastností Lemoineova bodu.

Věta 1. Vzdálenosti Lemoineova bodu od stran BC , CA , AB daného trojúhelníku ABC jsou po řadě

$$2aS \ (a^2 + b^2 + c^2), \quad 2bS \ (a^2 + b^2 + c^2), \quad 2cS \ (a^2 + b^2 + c^2),$$

přičemž S je obsah trojúhelníku ABC .



Důkaz (obr. 1). Lemoinův bod L spojíme se všemi vrcholy trojúhelníku ABC . Daný trojúhelník se tím rozdělí na tři nepřekrývající se trojúhelníky BCL , CAL , ABL . Obsahy těchto tří trojúhelníků jsou po řadě

$$S(BCL) = \frac{1}{2} ad_a, \quad S(CAL) = \frac{1}{2} bd_b, \quad S(ABL) = \frac{1}{2} cd_c.$$

Z rovnice (1) však plyne

$$d_a = ka, \quad d_b = kb, \quad d_c = kc,$$

kde $k \neq 0$ je nějaké kladné číslo. Obsah S daného trojúhelníku je pak roven součtu částečných trojúhelníků:

$$S = \frac{1}{2} ad_a + \frac{1}{2} bd_b + \frac{1}{2} cd_c = \frac{1}{2} k(a^2 + b^2 + c^2),$$

z čehož

$$k = 2S / (a^2 + b^2 + c^2),$$

a proto

$$d_a = 2aS / (a^2 + b^2 + c^2), \quad (2a)$$

$$d_b = 2bS / (a^2 + b^2 + c^2), \quad (2b)$$

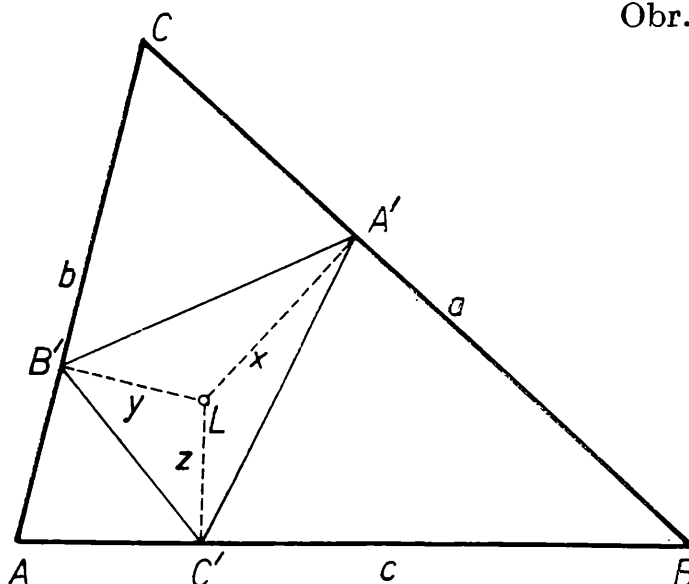
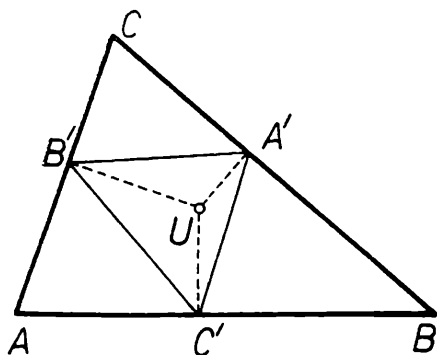
$$d_c = 2cS / (a^2 + b^2 + c^2). \quad (2c)$$

Tím jsme s důkazem věty 1 hotovi.

K důkazu další věty budeme potřebovat i jinak velmi důležitou Lagrangeovu identitu (podle francouzského matematika jménem Lagrange, čti Lagranž), která platí pro nezáporná čísla a, b, c, x, y, z :

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) &= \\ &= (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2. \end{aligned}$$

O správnosti se každý může přesvědčit provedením naznačených početních výkonů.



Věta 2. Lemoinův bod má ze všech vnitřních bodů daného trojúhelníku ABC minimální součet čtverců vzdáleností od stran tohoto trojúhelníku.

Důkaz. Čísla a, b, c v Lagrangeově identitě považujeme za délky stran daného trojúhelníku a čísla x, y, z považujeme za vzdálenosti Lemoinova bodu od stran (postupně) BC, CA, AB trojúhelníku ABC . Hledáme tedy minimum výrazu $x^2 + y^2 + z^2$.

Probereme si jednotlivé mnohočleny, které se vyskytují v Lagrangově identitě. Výraz $(a^2 + b^2 + c^2)$ je pro daný trojúhelník konstanta. Trojčlen $(ax + by + cz)$ vyjadřuje dvojnásobný obsah daného trojúhelníku, tudíž je to opět konstanta. Velikost výrazu $(x^2 + y^2 + z^2)$ závisí tudíž jedině na velikosti proměnného součtu

$$(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

Tento součet nezáporných čísel musí být minimální, aby součet $(x^2 + y^2 + z^2)$ mohl být minimální. To nastane právě tehdy, když

$$ay - bx = 0 \Rightarrow x : y = a : b,$$

$$bz - cy = 0 \Rightarrow y : z = b : c,$$

$$cx - az = 0 \Rightarrow x : z = a : c$$

Z posledních tří úměr dostaneme

$$x : y : z = a : b : c,$$

tj. dostali jsme Lemoinův bod. Tím je důkaz věty 2 proveden.

Věta 3. O vzdálenostech d_a, d_b, d_c Lemoinova bodu od stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC platí

$$a) d_a d_b \sin \gamma = d_b d_c \sin \alpha = d_c d_a \sin \beta;$$

$$b) d_a d_b \cos \gamma + d_a d_c \cos \beta + d_b d_c \cos \alpha = 2 S^2 (a^2 + b^2 + c^2)$$

Důkaz. a) Použijeme-li výsledku věty (1), můžeme psát

$$d_a d_b \sin \gamma = 4 S^2 ab \sin \gamma \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2 = \\ = 8 S^3 \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Tím jsme v podstatě s důkazem hotovi, neboť jsme dostali symetrický výraz vzhledem k číslům a, b, c , a proto se tento výraz cyklickou záměnou nezmění. Ten z mladých čtenářů, kterému by toto tvrzení nestačilo, si může stejným způsobem vypočítat zbývající dva součiny.

b) Z kosinové věty pro daný trojúhelník ABC máme

$$2 ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2 \quad (3)$$

S použitím vztahů (2ab) můžeme upravit levou stranu této identity následujícím způsobem:

$$2 ab \cos \gamma = d_a d_b (a^2 + b^2 + c^2)^2 \cos \gamma \quad 2 S^2. \quad (3')$$

Ze vztahů (3) a (3') docházíme k rovnici

$$d_a d_b (a^2 + b^2 + c^2)^2 \cos \gamma \quad 2 S^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

odkud

$$d_a d_b \cos \gamma = 2 S^2 (a^2 + b^2 - c^2) \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Analogicky platí

$$d_b d_c \cos \alpha = 2 S^2 (-a^2 + b^2 + c^2) \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

$$d_c d_a \cos \beta = 2 S^2 (a^2 - b^2 + c^2) \quad (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Sečtením všech tří rovnic dojdeme ke vztahu, uvedenému v textu úlohy.

Pro další úlohu budeme potřebovat zavedení nového pojmu. Mějme trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod U (obr. 2). Paty kolmic, spuštěných z bodu U na strany BC, CA, AB označme po řadě A', B', C' . Pokud tyto tři body jsou vnitřními body stran trojúhelníku ABC , pak trojúhelník $A'B'C'$ se nazývá úpatnicový trojúhelník trojúhelníku ABC vzhledem k bodu U . Někdy se tento pojem rozšiřuje i pro případ, kdy některý z bodů A', B', C' není vnitřním bodem strany trojúhelníku ABC .

I Lemoineův bod má svůj úpatnicový trojúhelník, o němž platí:

Věta 4. Těžiště úpatnicového trojúhelníku $A'B'C'$ Lemoineova bodu je právě Lemoineův bod.

Důkaz. V obr. 3 je narysován daný trojúhelník ABC , jeho Lemoineův bod L a úpatnicový trojúhelník $A'B'C'$ Lemoineova bodu. Je ihned patrné, že

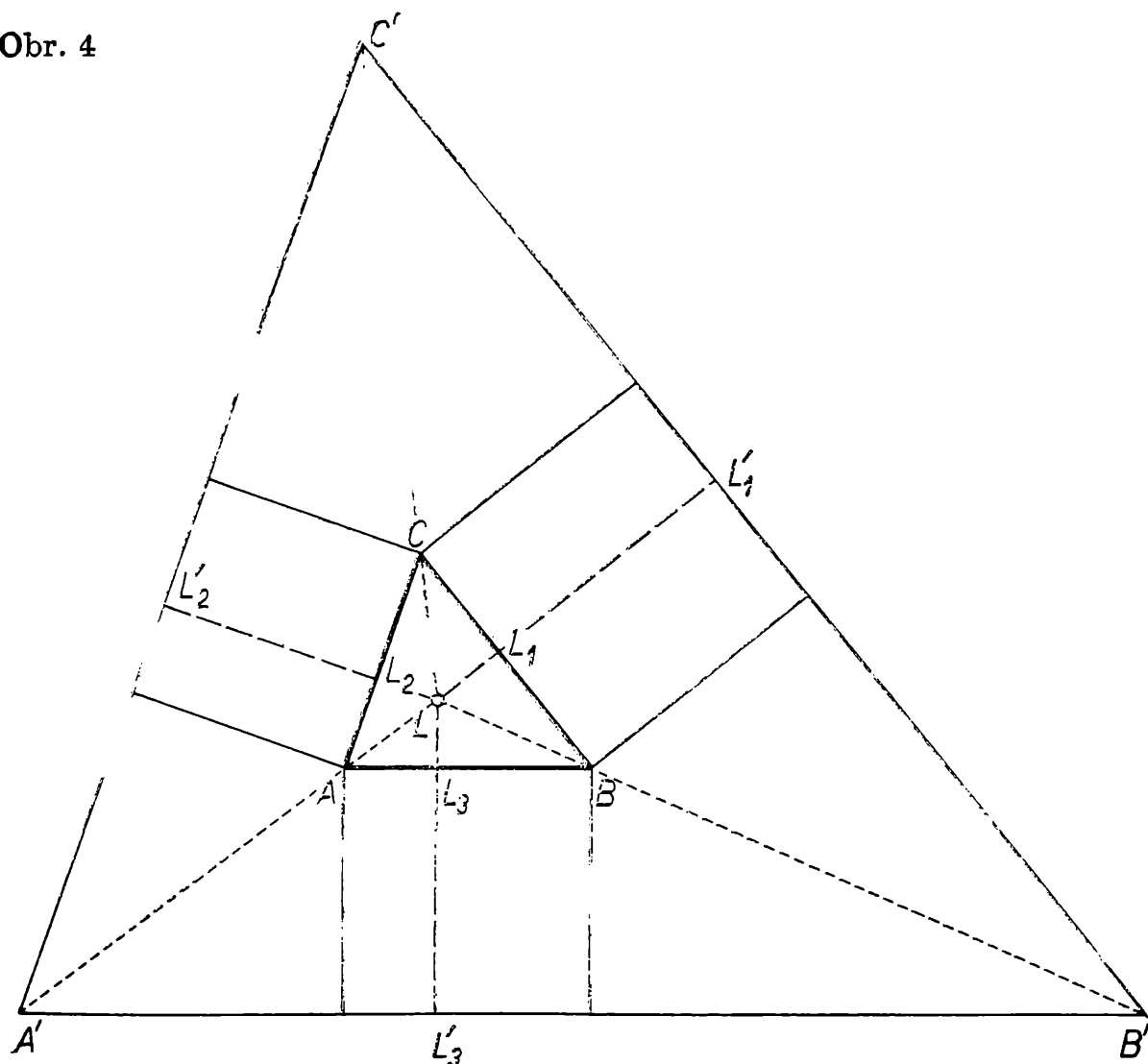
$$LA' = d_a, \quad LB' = d_b, \quad LC' = d_c.$$

Pro obsahy trojúhelníků $B'C'L, C'A'L, A'B'L$ platí po řadě

$$\frac{1}{2} d_b d_c \sin \alpha, \quad \frac{1}{2} d_c d_a \sin \beta, \quad \frac{1}{2} d_a d_b \sin \gamma$$

Avšak tyto výrazy jsou si rovny (viz výsledek věty 3a), a proto bod L je těžiště trojúhelníku $A'B'C'$, neboť to je jediný vnitřní bod trojúhelníku ABC této vlastnosti.

Obr. 4



Věta 5. Je dán různostranný trojúhelník ABC . Vně tohoto trojúhelníku jsou sestaveny čtverce $ABDE$, $BCFG$, $CAHK$. Přímky DE , FG , HK omezují trojúhelník $A'B'C'$, který je stejnoolehý s daným trojúhelníkem ABC . Střed stejnoolehlosti obou trojúhelníků je bod, který je společným Lemoinovým bodem obou těchto trojúhelníků.

Důkaz (obr. 4). Střed stejnoolehlosti, který označíme L , je společný bod přímek AA' , BB' , CC' . Z bodu L spustíme na strany AB ($A'B'$), BC ($B'C'$), CA ($C'A'$) kolmice a jejich paty postupně označme L_3 (L'_3), L_1 (L'_1), L_2 (L'_2). Všimněme si nyní, že

$$\triangle CL_1L \sim \triangle C'FC \Rightarrow LL_1 : LC = CF : CC' \quad (4)$$

Podobně

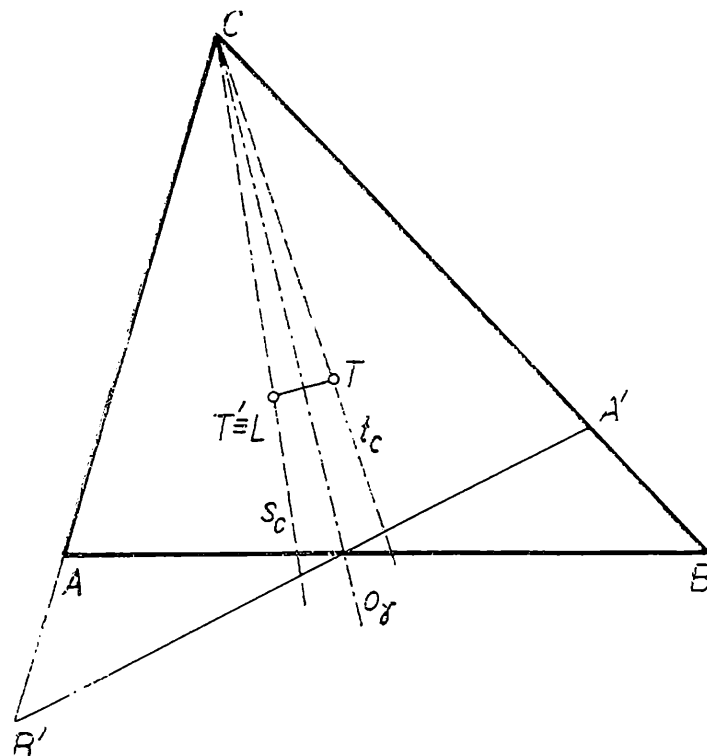
$$\triangle CL_2L \sim \triangle C'KC \Rightarrow LL_2 : LC = CK : CC' \quad (4')$$

Z úměr (4) a (4') dostaneme novou úměru

$$LL_1 : LL_2 = CF : CK = a : b$$

Podobně se dá zjistit (doporučuji čtenářům, aby příslušný výpočet skutečně provedli)

$$LL_2 : LL_3 = b : c, \quad LL_3 : LL_1 = c : a.$$



Obr. 5

Ze všech tří úměr pak vyplývá, že bod L je Lemoinovým bodem trojúhelníku ABC .

Je to však i Lemoinův bod trojúhelníku $A'B'C'$ neboť

$$LL_1 \quad LL_2 \quad LL_3 = LL'_1 \quad LL'_2 \quad LL'_3$$

a současně

$$a \quad b \quad c = a' \quad b' \quad c'$$

kde a' , b' , c' jsou délky stran $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Obě úměry plynou z podobnosti trojúhelníků ABC , $A'B'C'$. Tím je také v podstatě důkaz věty 5 proveden.

Věta 6. Jestliže k danému trojúhelníku ABC sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ souměrně sdružený podle osy vnitřního úhlu ACB , pak těžiště a Lemoinův bod jsou podle této osy souměrně sdružené.

Důkaz (obr. 5) je celkem jednoduchý.

V daném trojúhelníku ABC sestrojme osu o_C vnitřního úhlu ACB a pak sestrojme trojúhelník $A'B'C'$, který je podle této osy souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC . Těžiště T daného trojúhelníku přejde osovou souměrností do bodu T' , což je těžiště trojúhelníku $A'B'C'$. Patu kolmice, spuštěné z bodu T' na stranu AC (BC), označme U (V). Potom (v_a , v_b jsou délky výšek daného trojúhelníku z vrcholů A , B nebo délky výšek trojúhelníku $A'B'C'$ z vrcholů A' , B') platí

$$UT' = \frac{1}{3} v_a = \frac{2S}{3a}, \quad VT' = \frac{1}{3} v_b = \frac{2S}{3b}$$

Poměr je

$$VT' : UT' = a : b$$

Podobně zjistíme, že poměr vzdáleností bodu T' od stran AB , BC je c/a , což ukazuje na to, že bod T' je Lemoinovým bodem trojúhelníku ABC .

Cvičení.

1. Najděte Lemoinův bod a) v trojúhelníku rovnostranném, b) v trojúhelníku rovnoramenném, c) v pravoúhlém trojúhelníku rovnoramenném.

2. Dá se z úseček, jejichž velikosti jsou d_a, d_b, d_c , sestrojit trojúhelník?

3. Z věty 3a se dá dokázat, že obsah S_L úpatnicového trojúhelníku Lemoinova bodu je dán vzorcem

$$S_L = \frac{3}{2} d_a d_b \sin \gamma = \frac{3}{2} d_b d_c \sin \alpha = \frac{3}{2} d_c d_a \sin \beta$$

Dokažte.

4. Z věty 6 vyplývá, že $\sphericalangle BCT = \sphericalangle LCA$. Podobné dva vztahy platí pro úhly s vrcholem A a B . Dokažte správnost těchto tří relací. — Přímký (někdy pouze úsečky) AL , BL , CL se nazývají symediány. Symediána jdoucí vrcholem C je souměrně sdružená podle osy vnitřního úhlu ACB a tak ji lze také sestrojit. Lemoinův bod bývá obvykle definován jako průsečík symedián. Sestrojte jej tímto způsobem.

5. Na začátku tohoto článku jsme sestrojili Lemoinův bod pomocí jistých rovnoběžek se stranami trojúhelníku, které jsme rýsovali v polorovinách ABC , BCA , CAB . Věta 5 však ukazuje, že tyto rovnoběžky můžeme vést vždy v polorovinách opačných. Odůvodněte toto tvrzení.

fy zika

0 některých aplikacích kosmonautiky III

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Ve svých úvahách jsme se dostali až ke kosmické technologii. I když jsme před časem přinesli z tohoto oboru některé základní informace, nebude na škodu, jestliže nastíníme poněkud obecnější pohled na tuto problematiku. Především jde o to uvědomit si, jakou cenu bude mít pro člověka trvalé kosmické vzduchoprázdno. Již „pozemské“ vakuum lidem nesmírně prospělo. Jeho objevem se *Toricelli* stal vlastně otcem moderní technologie, protože bez znalosti vakua by nebylo ani parních strojů, ani oceli, televize a elektroniky.

Protože se tekutiny na oběžné dráze okolo Země stávají samostatným objektem nezávislým na nádobě, objevují se téměř neomezené možnosti jejich využití. Řízenou energií bude totiž možno zpracovávat tekuté kovy prostřednictvím počítačově ovládaných elektrických polí a vytvářet veškeré formy a tvary, jež jsou vyráběny zde na Zemi. Protože však v beztížném prostředí nejsou vztahové síly ani tepelná proudění, bude možno kovy mísit tak, aby splňovaly určité dané požadavky pružnosti a pevnosti, a to dokonce bez pomoci strojů, takže odpadne vnitřní pnutí, které jinak vzniká při jakémkoli procesu v zemském prostředí.

Už jsme psali o tom, že v beztíži bude možno vyrobit kovovou membránu o tloušťce pouhých dvou angstroemů, tj. dvě až tři molekuly silnou. Na ni by bylo možno nanášet další vrstvy kovu tak dlouho, až by vznikl požadovaný systém.

Převratnou novinkou výrobních procesů na oběžné dráze bude především rozvinutí molekulárních sil z jejich dnešní málo významné role ve výrobním procesu na Zemi; stanou se důležitými činiteli, ovlivňujícími výrobní proces i u největších sérií. Přilnavost a soudržnost materiálů se stanou silami zásadní důležitosti. Výkyvy při chlazení či zahřívání látek, k nimž dochází v tíhovém prostředí, na oběžné dráze odpadnou; nebudou tedy narušovat rovnováhu fyzikálních procesů, což bude výhodné nejen při tuhnutí nejrůznějších tavenin, ale i při růstu pravidelných krystalů. Tekutiny nebudou vysávány přilnavými silami, protože nádoba zde nebude; to se příznivě uplatní např. při výrobě tzv. *kovových pěn*, vznikajících ztuhnutím taveniny, která obsahuje značné množství mikroskopických bublinek plynu. Znovu se na tomto místě odvoláváme na to, o čem jsme přinesli zprávu před časem: tekutá ocel s 87procentní přísadou plynu vytvoří po ztuhnutí kovovou pěnu prakticky o stejné pevnosti, avšak současně tak lehkou, že materiál bude na vodě plavat.

Na tomto místě budiž upozorněno na to, že kosmická technologie umožní přiblížit se k pasivnímu perpetuu mobile. Zde na Zemi překází uskutečnění tohoto „snu“ především okolnost, že je nutno překonávat tření v ložiskách a vnější odpor prostředí. V prostředí kosmického beztíží a vzduchoprázdna však odpadá jak tření součástí, tak odpor prostředí, takže bude možno — obrazně řečeno — roztočit kolo, jež se pak — ponecháno samo sobě — bude točit téměř neomezeně dlouho.

Inženýři budou tedy moci uvažovat o novátorských postupech v beztížném prostředí. Tak např. lití a foukání skla s využitím povrchového napětí je uskutečnitelné již v dohledné budoucnosti. Kdo někdy pracoval s pájkou, dobře ví, že když nabere více cínu, spadne mu po roztažení na zem: povrchové napětí nestačilo vyvážit mrtvou váhu roztaženého materiálu. V beztížném prostředí však nezáleží na tloušťce pájecí vrstvy, takže bude možno materiál nechat volně plynout a formovat tak mnohavrstvé odlitky. Protože neexistuje konvekční proudění tepla,

bude dokonce možno odlévat tekuté materiály o vysokých teplotách přes povrch materiálů s nižší tavnou hodnotou, aniž se poruší jejich tvar.

Již tento příklad sám o sobě ukazuje, co bude kosmonautika znamenat pro technologii. Příště si ukážeme další možné aplikace.

Sto let od narození prof. ing. Viktora Kaplana

JOSEF PROCHÁZKA
- FRANTIŠEK GOLAB,

Pedagogická fakulta v Ostravě



V r. 1976 jsme si připomněli 100. výročí narození jednoho z největších vynálezců tohoto století (zařazené mezi významná výročí UNESCO pro loňský rok) — prof. ing. *Viktora Kaplana*, tvůrce moderní vodní turbíny.

Narodil se 27. 11. 1876 ve štýrském Mürzzuschlagu. Po studiích na vídeňské technice nastoupil r. 1900 své první zaměstnání ve strojírně firmy Ganz v Leobersdorfu, kde vyhotovil projekt nového vznětového motoru, jehož účinnost měla být vyšší, než u dosud vyráběných typů. Projekt přihlásil k patentování a současně jej předložil jako disertační práci na vídeňské Vysoké škole technické. Ta jeho práci nepřímě odmítla a leobersdorfská strojírna viděla v novém návrhu vážné ohrožení výroby vlastního Dieselova motoru. Proto se Kaplan po dvouletém působení v Leobersdorfu rozhodl opustit své první působiště a v r. 1903 byl přijat na německou Vysokou školu technickou v Brně jako asistent prof. *Musila* v oddělení vodních turbín.

Brzy po svém přijetí byl 27letý ing. Kaplan pověřen konat přednášky z nauky o strojích. První publikovaná práce se týkala oblasti jeho někdejšího zájmu — provozu tepelných motorů a je také jedinou prací, ve které se nejedná o vodních turbínách, k nimž zakrátko soustředil veškeré své celoživotní úsilí. První práce z oboru vodních turbín se vy-



Patent-Urkunde.

n^o 74244

Auf Grund des Patentgesetzes vom 11. Jänner 1897,
R. G. Bl. Nr. 30, ist dem

Dr. techn. Victor Kaplan in Brünn

ein Patent nach Maßgabe der angehefteten Patentschrift
erteilt worden.

Wien, am 30. April 1917.

K. k. Patentamt.

Der Präsident:

značují snahou zdokonalit tvar lopatek dosavadních turbín a upravit obrysy oběžných kol rychloběžných Francisových turbín.

Francisovy turbíny však nebyly vhodné pro naše řeky (s poměrně velkým průtočným množstvím vody, ale malým spádem). Proto ing. Kaplan tolik usiloval o to, jak zvýšit frekvenci otáček oběžných kol velkých Francisových turbín k získání poměrně levné elektrické energie. Od r. 1909 vybudoval s pomocí brněnské firmy Ignaz Storek v nevelkém sklepení nové budovy brněnské techniky turbínovou laboratoř.

Zkoušel desítky modelů oběžných kol o průměru asi 100 mm, u kterých měnil tvar, velikost, počet i sklon jednotlivých lopatek. Po dlouhém experimentování radikálně změnil tvar i počet lopatek z osmi až na dvě, takže oběžné kolo Francisovy turbíny se změnilo na tvar podobný lodnímu šroubu. Laboratorní zkoušky byly až překvapivě dobré. Při zachování vysoké účinnosti se zvýšila frekvence otáček na 2–3násobek nejrychlejších Francisových turbín. Navíc vyřešil i natáčení lopatek oběžného kola podle množství protékající vody.

R. 1913 přihlásil Kaplan základní konstrukční úpravy k patentování, ale ve svých experimentech pokračoval dále. Všechny námítky odborníků, že oběžné kolo bude pro vodu příliš „propustné“ se ukázaly být neopodstatněné. Svými vynálezy, které přihlásil k patentování, dovršil své vítězství — byl jmenován profesorem brněnské techniky a pověřen vedením nově vzniklé katedry teorie a stavby vodních motorů.

K technické realizaci Kaplanových vynálezů došlo až po r. 1918 v samostatné ČSR. Firma *Storek* (nyní *Šmeralovy závody* n. p.) v Brně tehdy vyrobila první provozní Kaplanovu turbínu s oběžným kolem o průměru 600 mm. Po jejím uvedení do provozu se potvrdily teoretické předpoklady a výsledky laboratorních zkoušek.

Tím však jeho práce zdaleka neskončila. Když byly vyrobeny Kaplanovy turbíny pro větší výkony a větší spády (kolem r. 1924 to bylo nejvýše asi 10 m), začaly se projevovat ztráty ve výkonu, velmi rychlé opotřebování lopatek a poruchy v klidném chodu turbín. Podrobným výzkumem prof. Kaplan zjistil, že jde o kavitační jevy, které vznikají v proudící kapalině s velkými rychlostními a tlakovými gradienty, přičemž v ní vznikají bublinky vodní páry. Při zániku bublinky na lopatce oběžného kola udeří v tom místě na lopatku voda, která velmi rychle zaplňuje prostor po zanikající bublince. Náraz bývá často tak mohutný, že dochází k únavě materiálu, k slyšitelným úderům a dokonce i k proděravění lopatek. Teprve po teoretickém objasnění kavitačních jevů mohl pokračovat další úspěšný rozvoj Kaplanových turbín.

R. 1922 Kaplan těžce onemocněl. K chorobě se přidružila i těžká duševní deprese z nezaviněných neúspěchů, z finančních starostí a ze zklamání, způsobených zahraničními výrobci, kteří řadu Kaplanových

KAIS. KÖNIGL.



PATENTAMT.

Österreichische

PATENTSCHRIFT N^o 74244.

DR. TECHN. VICTOR KAPLAN IN BRÜNN.

**Laufschauflerregelung für schnelllaufende Kreiselmaschinen mit Leitvorrichtung
(Wasser-, Dampf- oder Gasturbinen, Kreiselpumpen oder -gebläse).**

Angemeldet am 7. August 1913. — Beginn der Patentdauer: 15. Februar 1917.

- Es ist bekannt, daß der Wirkungsgrad der Kreiselmaschinen bei einem bestimmten Gefälle H von der durchfließenden Wassermenge Q und der vorhandenen Drehzahl n abhängig ist. Für einen bestimmten Wert von Q und n erreicht der Wirkungsgrad seinen Höchstwert und hat jede Veränderung dieses günstigsten Wertes von Q und n eine Abnahme des Wirkungsgrades zur Folge. Theoretisch ist zwar ein solcher idealer Mechanismus denkbar, der es ermöglicht, auch bei beliebigen Werten von Q und n einen gleich guten Wirkungsgrad zu erzielen, doch scheitert die vollständige praktische Verwirklichung einestheils an der Unmöglichkeit der Herstellung einer mit Q und n gesetzmäßig deformierbaren Leit- und Laufschauflerfläche, andererseits an der Verschiedenheit der im allgemeinen mit Q und n veränderlichen Flüssigkeitsreibungsverluste.
- 10 Aus diesem Grunde können nur Näherungswege beschritten werden, von denen zunächst die bisher bekannten kurz geschildert werden sollen.

- Am einfachsten wird die Regelung der Menge des durch die Turbine oder die Kreiselpumpe fließenden Arbeitsmittels entweder durch Drosselung mit Hilfe von Schiebern, Drosselklappen, Ventilen, Hähnen oder dgl. erzielt oder man verwendet drehbare Leitschaufler (Finksche Dreh-
- 15 schaufler), die die lichte Durchgangsweite zwischen zwei Nachbarleitschauflern von einem bestimmten Höchstwert bis auf Null herabzubringen gestatten. Obwohl die letztere Regelungsart der ersteren überlegen ist, so hat doch die Regelung mit drehbaren Leitschauflern besonders bei hochwertigen Schnellläufern den Nachteil, daß der Wirkungsgrad mit abnehmender Beaufschlagung rasch sinkt. Der rasche Abfall des Wirkungsgrades ist durch den Umstand begründet, daß durch
- 20 eine Verdrehung der Leitradschaufler zwar eine Veränderung der Leitradsquerschnitte und der Leitradschwenkwinkel stattfindet, die Laufradsquerschnitte und die Laufradschwenkwinkel jedoch ungeändert bleiben. Wird daher der Wasserzufluß zum Laufrad verringert, so muß sich auch die Durchflußgeschwindigkeit des Wassers durch das Laufrad verkleinern, weil an den Zellenquerschnitten des Laufrades nichts geändert wurde. Durch diesen Umstand ist jedoch die geordnete (stoßfreie)
- 25 Strömung des Wassers durch das Laufrad gestört, weshalb im Laufrad und im Saugrohr Wirbel auftreten müssen, die den erwähnten Abfall des Wirkungsgrades verursachen.

- Es lag daher die Anwendung solcher Vorrichtungen nahe, die eine teilweise oder vollständige Absperrung des freien Laufradzellenquerschnittes gestatten, um auch bei veränderlicher Beaufschlagung die Beibehaltung der gleichen Durchflußgeschwindigkeit durch das Laufrad zu
- 30 ermöglichen. Soll eine solche Vorrichtung wirklich den gewünschten Zweck erfüllen, so müßte z. B. bei halber Beaufschlagung auch die Hälfte des freien Durchgangsquerschnittes der Laufradzellen abgesperrt werden. Es müßte daher die Wandstärke der Laufradschaufler bis zum halben freien Zellenquerschnitt reichen. Es ist selbstverständlich, daß bei derartig verdickten Schauflerkanten eine geordnete Strömung nicht möglich ist und die auftretenden Stoß- und Wirbelverluste
- 35 einen erheblichen Wirkungsgradabfall bedingen. Wird jedoch die Schauflerverdickung (Querschnittsversperrung) nur in die Mitte der Laufradzellen verlegt, so läßt sich der gewünschte Zweck einer bei allen Beaufschlagungen gleichen Durchflußgeschwindigkeit nur an der verengten Stelle der Laufradzelle erreichen, wogegen in den übrigen Zellenquerschnitten die eingangs erwähnten Wirbelbildungen im gleichen Maße auftreten, als ob von einer Querschnittsversperrung im Laufrad
- 40 überhaupt abgesehen worden wäre.

Es sind auch Laufräder mit festen Laufradschauflern bekannt, an denen zungenförmige Klappen derart drehbar gelagert sind, daß durch deren Verdrehung eine Versperrung des Lauf-

patentů různým způsobem obcházeli a využívali ve svůj prospěch. Ostré útoky a boj proti celému štábu zkušených patentových zástupců v řadě států stálo prof. Kaplana nadlidské vypětí sil i velký kus zdraví.

Přes všechny potíže se vynálezce dožil v r. 1925 úspěšného spuštění velké turbíny s výkonem kolem 8000 kW při spádu 6,5 m ve švédské hydroelektrárně *Lilla Edet*. Firma Storek si potom zajistila dodávky Kaplanových turbín nejen pro ČSR, Rakousko a Švédsko, ale i pro Itálii, Belgii a Holandsko.

Pro trvající nemoc opustil prof. Kaplan r. 1931 brněnskou techniku a 23. 8. 1934 zemřel, stižen mozkovou mrtvicí. Nedočkal se ani svého jmenování čestným doktorem technických věd brněnské vysoké školy technické, které bylo koncem července 1934 potvrzeno čs. ministerstvem školství a národní osvěty. O tomto jmenování byl zpraven ústně krátce před svou smrtí.

Prof. Kaplan se domníval, že mezní spád pro jeho vodní turbíny je 20 m, ale ukázalo se, že lze jít mnohem dále. Ve Slapech jsou dnes instalovány Kaplanovy turbíny pro spád vody 56 m a provoz vysokotlakých turbín ukázal jejich mnohé výhody. Proto se konstruktéři u nás pustili do turbíny pro spád 71 m na Orlíku.

Jediným výrobcem Kaplanových turbín v ČSSR jsou ČKD Blansko, závody Jiřího Dimitrova n. p. Jsou důstojným reprezentantem čs. strojírenství v tomto náročném oboru. K největšímu rozmachu výroby došlo po 2. světové válce, kdy ČKD Blansko vyvezly téměř 200 turbín různých typů pro desítky vodních děl v 15 zemích světa. Podnik zajistil celý komplex obrovské výstavby vodních děl v ČSSR, představující téměř 80 investičních hydroenergetických celků. Projektují a vyrábějí se zde Kaplanovy turbíny v rozmezí od 100 do 320 otáček za minutu, pro maximální spády do 80 m, do průměru oběžného kola 8000 mm a o výkonu až 150 000 kW.

Použití komplexních čísel k popisu šíření elektromagnetických vln

JAN BEDNÁŘ, MFF-UK Praha

Ze středoškolské fyziky je známo, že harmonický pohyb lze získat průmětem rovnoměrného kruhového pohybu hmotného bodu na přímku ležící v rovině, v níž probíhá zmíněný kruhový pohyb. Zvolme v rovině kruhové trajektorie pravoúhlý souřadný systém tvořený osami x a y s počátkem ležícím ve středu kružnice, symbol t nechť značí čas a po-

ložme $t = 0$ v okamžiku, kdy po kružnici rovnoměrně obíhající hmotný bod je právě v místě o souřadnicích $x = r$, $y = 0$, když r značí poloměr kruhové trajektorie. Pohyb hmotného bodu se potom promítá jak na osu x , tak na osu y jako harmonický pohyb, který lze popsat rovnicemi

$$x = r \cos \omega t \quad \text{na ose } x, \quad (1)$$

$$y = r \sin \omega t \quad \text{na ose } y, \quad (2)$$

v nichž velikost poloměru r představuje amplitudu harmonického pohybu a ω značí úhlovou rychlost pohybu hmotného bodu po kružnici.

Rovnice (1) a (2) můžeme výhodně vyjádřit jediným zápisem, užijeme-li komplexních čísel. Označme $F \equiv x + i y$ okamžitou hodnotu komplexní výchylky, jejíž velikost je rovna vzdálenosti hmotného bodu vykonávajícího rovnoměrný kruhový pohyb od středu jeho trajektorie; potom lze podle (1) a (2) psát

$$F = r(\cos \omega t + i \sin \omega t). \quad (3)$$

V matematice je definována komplexní exponenciální funkce e^{iA} proměnné A (e je základ přirozených logaritmů a i imaginární jednotka) vztahem

$$e^{iA} = \cos A + i \sin A, \quad (4)$$

a proto přepíšeme (3) do tvaru

$$F = r e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Mějme nyní elektromagnetické pole buzené kmity harmonického oscilátoru o frekvenci f . Symbol E představuje v dalším intenzitu elektrického a H intenzitu magnetického pole. V souladu s předešlým výkladem a podle vztahu (5) můžeme psát

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \quad (6a)$$

$$H = H_0 e^{i\omega t}, \quad (6b)$$

kde E_0 a H_0 jsou amplitudy intenzit, faktor $e^{i\omega t}$ vyjadřuje vlnovou podstatu procesu a ω značí kruhovou frekvenci (resp. úhlovou rychlost) harmonického oscilátoru.

Předpokládejme nejprve, že elektromagnetické vlnění se šíří v elektricky nevodivém prostředí (v dielektriku) rychlostí v . Poměr c/v , kde c je rychlost světla ve vakuu, potom představuje absolutní index lomu daného dielektrika. Mějme dále dvě různá dielektrika označená jako 1 a 2, v_1 a v_2 nechť jsou rychlosti šíření elektromagnetických vln v těchto dvou prostředích; potom nazýváme relativním indexem lomu prostředí 2 vzhledem k prostředí 1 poměr v_1/v_2 . Z teorie elektromagnetického pole lze odvodit, že pro rychlost šíření elektromagnetických vln v daném nevodivém prostředí o dielektrické konstantě ϵ a magnetické permeabilitě μ platí vztah

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (7)$$

a tedy absolutní index lomu je roven $\sqrt{\epsilon \mu}$.

Přejdeme-li od dielektrik k elektricky vodivým prostředím, v nichž se šíří elektromagnetické vlnění, vyplýne z rovnic popisujících strukturu elektromagnetického pole (Maxwellovy rovnice), že rychlost $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ je možno formálně nahradit komplexním výrazem (tzv. komplexní rychlostí)

$$v_{\text{kompl.}} = c \sqrt{\frac{\omega}{\epsilon \mu \omega - 4\pi i \sigma \mu}}, \quad (8)$$

kde σ je elektrická vodivost prostředí a význam ostatních symbolů byl již vysvětlen v předcházejícím textu. Položíme-li $\sigma = 0$, dostaneme se zpět k dielektriku a není těžké odvodit, že vztah (8) se v tomto případě zjednoduší přímo na (7). Komplexní rychlost je tedy zobecněním pojmu obyčejné rychlosti šíření elektromagnetického vlnění a nám zbývá si ozřejmit její fyzikální smysl. Nejprve si však zavedeme tzv. komplexní index lomu m , jenž se definuje vztahem

$$m = \sqrt{\epsilon \mu - i \frac{4\pi \sigma}{\omega} \mu} \equiv c/v_{\text{kompl.}} \quad (9)$$

a v případě dielektrika, kdy elektrická vodivost σ je nulová, platí zřejmě $m = \sqrt{\epsilon \mu}$, což se rovná obyčejnému absolutnímu indexu lomu daného nevodivého prostředí. Komplexní index lomu je tedy opět zobecněním pojmu obyčejného absolutního indexu lomu.

Pro jednoduchost si komplexní index lomu zapišme ve tvaru $m = n - i\kappa$, kde n značí jeho reálnou a $-\kappa$ imaginární část. Z (9) můžeme vyjádřit n i κ pomocí veličin ϵ , μ , σ , ω , a to následujícím způsobem: Položme podle (9)

$$n - i\kappa = \sqrt{\epsilon \mu - i \frac{4\pi \sigma}{\omega} \mu}$$

což po umocnění na druhou dává

$$n^2 - \kappa^2 - 2i n \kappa = \epsilon \mu - i \frac{4\pi \sigma}{\omega} \mu$$

Porovnáme-li na levé a pravé straně tohoto vztahu reálné i imaginární části, obdržíme ihned

$$n^2 - \kappa^2 = \epsilon \mu, \quad (10)$$

$$2 n \kappa = \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega} \quad (11)$$

a z této soustavy tvořené lineární a kvadratickou rovnicí vypočteme n i κ . Upravme (11) na tvar

$$\kappa = \frac{2\pi \sigma \mu}{n \omega} \quad (12)$$

a dosadíme jej za κ do (10). Po jednoduché úpravě pak dostaneme

$$n^4 - n^2 \varepsilon \mu - \frac{4\pi^2 \sigma^2 \mu^2}{\omega^2} = 0, \quad (13)$$

s použitím substituce $n^2 = p$ posléze získáme kvadratickou rovnici

$$p^2 - p \varepsilon \mu - \frac{4\pi^2 \sigma^2 \mu^2}{\omega^2} = 0,$$

která má řešení

$$p = \frac{\varepsilon \mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \mu^2}{4} + \frac{16\pi^2 \sigma^2 \mu^2}{4\omega^2}}$$

z čehož okamžitě vyplývá

$$n = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \mu^2}{4} + \frac{16\pi^2 \sigma^2 \mu^2}{4\omega^2}}} \quad (14)$$

Výraz (14) představuje čtyři algebraické kořeny rovnice (13), ale fyzikální smysl má pouze

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \mu^2}{4} + \frac{16\pi^2 \sigma^2 \mu^2}{4\omega^2}}} \quad (15)$$

Veličinu n , kterou nazýváme absorpčním indexem, vypočteme dále pomocí (12). V případě dielektrika, kdy $\sigma = 0$, se reálná část komplexního indexu lomu redukuje, jak patrně ze vztahu (15), na tvar $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$, což není nic jiného, než obyčejný absolutní index lomu.

Vzorec (8) lze zjednodušeně zapsat jako

$$v_{\text{kompl.}} = v_r + i v_{im}, \quad (16)$$

když v_r a v_{im} značí reálnou a imaginární složku komplexní rychlosti. Vraťme se nyní ke vztahu (6a) a postupně s ním provedme několik úprav. Úplně tentýž postup můžeme aplikovat i na (6b), což si pozorný čtenář jistě sám ověří. Úhlovou rychlost ω vyjádříme pomocí vzorce

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (17)$$

v němž T představuje dobu jednoho kmitu harmonického oscilátoru. Použijeme-li dále známého vztahu

$$\lambda = v T \quad (18)$$

kde λ značí vlnovou délku a v obyčejnou rychlost šíření elektromagnetických vln, dostaneme pro úhlovou rychlost ω vztah

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} v \quad (19)$$

Dosazením (19) do (6a) obdržíme okamžitě

$$E = E_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} vt} \quad (20)$$

a v tomto vztahu formálně nahraďme obyčejnou rychlost v zobecněnou

komplexní rychlostí vyjádřenou pomocí (16). Tímto způsobem obdržíme

$$E = E_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (v_r + i v_{im}) t},$$

což po úpravě v exponentu přejde do tvaru

$$E = E_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} v_r t - \frac{2\pi}{\lambda} v_{im} t}$$

a další zcela zřejmou úpravou získáme

$$E = E_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda} v_{im} t} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} v_r t} \quad (21)$$

Faktor $e^{-\frac{2\pi}{\lambda} v_{im} t}$ reprezentuje útlum elektromagnetického vlnění v elektricky vodivém prostředí, neboť se dá dokázat, že s rostoucím časem t se jeho hodnota stále více blíží nule. V případě dielektrika, kdy elektrická vodivost $\sigma = 0$, musí podle (8) platit $v_{im} = 0$ a imaginární složka komplexní rychlosti tedy vyjadřuje schopnost elektrických vodičů tlumit elektromagnetické vlnění. Reálná složka komplexní rychlosti v_r je rovna obyčejné rychlosti šíření elektromagnetických vln v daném prostředí a užitím (19) dostaneme z (21) okamžitě

$$E = E_0 e^{-\alpha t} e^{i \omega t},$$

když $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} v_{im}$ představuje koeficient útlumu.

Z uvedeného je zřejmé, že nahrazením obyčejné rychlosti komplexní rychlostí zobecníme popis šíření elektromagnetických vln o proces útlumu v elektricky vodivých prostředích. Komplexní index lomu potom představuje charakteristiku prostředí, jež na rozdíl od obyčejného indexu lomu zachycuje i schopnost tlumit elektromagnetické vlnění.

Pojem komplexního indexu lomu se široce používá v teoriích rozptylu elektromagnetických vln na různých částicích. Tyto teorie mají značný význam například v astronomii nebo v meteorologii při studiu optických vlastností atmosféry.

olympiády

XVIII. medzinárodná matematická olympiáda

JÁN GEDEI, Bratislava

1. Tohtoročnú v poradí už XVIII. MMO usporiadalo Ministerstvo školstva a umenia Rakúskej republiky v dňoch 7.—21. júla 1976 v mestách Eisenstadt, Lienz, Viedeň a v dedinke Heiligenblut. Samotná súťaž — písomné skúšky — sa konala 12. a 13. júla 1976 v malebne krásnom sídelnom meste Východného Tirolska Lienz.

Predsedom XVIII. MMO bol dr. *Eduard Hlawka*, profesor viedenskej univerzity. Zasadania medzinárodnej jury, skladajúcej sa z vedúcich delegácií (a ich zástupcov) jednotlivých krajín, riadil profesor technickej univerzity dr. *Gerd Baron*. Dr. Gerd Baron spolu s ďalšími zástupcami Ministerstva školstva a umenia bol členom aj organizačného výboru XVIII. MMO.

Na XVIII. MMO súťažili družstvá 19 krajín. Zúčastnené krajiny v abecednom poradí podľa použitého medzinárodného označenia boli tieto: Rakúska republika (A), Bulharská ľudová republika (BG), Kubánska republika (C), ČSSR (CS), Nemecká spolková republika (D), NDR (DDR), Francúzska republika (F), Spojené kráľovstvo Veľkej Británie a Severného Írska (GB), Grécka republika (GR), Maďarská ľudová republika (H), Holandské kráľovstvo (NL), Poľská ľudová republika (PL), Rumunská socialistická republika (R), Švédske kráľovstvo (S), Fínska republika (SF), ZSSR (SU), Spojené štáty americké (USA), Vietnamská socialistická republika (VN), Federatívna socialistická republika Juhoslávie (YU).

V súlade s tradíciou MMO delegácie jednotlivých zúčastnených krajín sa skladali z vedúceho delegácie a jeho zástupcu ako aj zo súťažiacich žiakov v počte 8. Podľa štatútu MMO súťažiaci v školskom roku 1975/76 mali byť ešte žiakmi stredných škôl a do 12. júla 1976 nemali dovrieť 20. rok veku. Od vyššie povedaného výnimku tvorila delegácia Kuby a NSR. Delegácia Kuby okrem vedúceho sa skladala len z troch žiakov. Delegácia NSR sa zúčastnila na XVIII. MMO prvýkrát v histórii MMO a aj teraz len ako pozorovateľ. Jej členovia boli vedúci delegácie, zástupca vedúceho a dvaja žiaci.

Na XVIII. MMO súťažilo celkove 141 žiakov. Medzi súťažiacimi bolo 5 dievčat: po jednom v družstvách ZSSR, Francúzska, Rumunska, Kuby a Vietnamskej socialistickej republiky. Žiačka zo ZSSR získala 39 bodov

Tabuľka 1

Por. č.	Označenie krajiny	Celkový počet získaných bodov								Súčet bodov
		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
		žiaka								
1.	A	21	23	34	16	17	24	17	15	167
2.	BG	20	22	21	20	19	21	24	27	174
3.	C	13	1	2	—	—	—	—	—	16
4.	CS	5	14	24	19	8	22	17	7	116
5.	D	7	1	—	—	—	—	—	—	8
6.	DDR	21	12	12	16	30	28	16	7	142
7.	F	10	21	3	27	40	11	30	23	165
8.	GB	21	30	28	29	28	34	35	9	214
9.	GR	9	1	13	7	9	1	6	4	50
10.	H	22	18	25	18	21	7	26	23	160
11.	NL	14	2	17	7	14	12	6	6	78
12.	PL	13	18	18	14	20	19	19	17	138
13.	R	14	19	17	16	12	13	4	23	118
14.	S	16	9	22	24	18	10	12	9	120
15.	SF	0	11	5	3	15	13	1	4	52
16.	SU	22	37	26	24	34	31	37	39	250
17.	USA	14	23	31	21	38	25	10	26	188
18.	VN	9	19	4	5	27	13	16	19	112
19.	YU	27	19	8	7	20	19	9	7	116

a tým aj prvú cenu (viď tab. 1 — SU9); žiacka z VSR získala druhú cenu (tab. 1 — VN5). Obidve žiačky sa zúčastnili aj XVII. MMO a boli najúspešnejšie medzi súťažiacimi svojich družstiev.

Hostiteľská krajina pozvala na súťaž aj Indiu, Kanadu, Mongolsko, Taliansko a Švajčiarsko. Z nich Švajčiarsko bez odôvodnenia odmietlo účasť, ďalšie pozvané krajiny nereagovali na pozvánku. Mongolská ľudová republika sa zúčastňovala na posledných MMO stále. Jej neúčasť na XVIII. MMO možno odôvodniť s tým, že medzi Rakúskom a MoLR nie sú nadviazané diplomatické styky.

Podľa usporiadateľa XVIII. MMO o túto súťaž prejavilo záujem ešte Belgicko, Španielsko a Turecko. Zodpovedné kruhy Turecka oznámili, že v pozdejšom období sa hodlajú zapojiť do súťaže MMO.

2. Plánovaný program jury MMO bol takýto: Vedúci delegácií jednotlivých krajín prišli do Viedne 7. júla 1976. Ubytovali sa v „Hotelí Park“ v meste Eisenstadt. Jury MMO mala svoje prvé zasadnutie ráno 8. júla 1976. Tu odovzdali vedúcim delegácií texty 12 navrhnutých úloh spolu s náčrtmi ich riešenia. Tieto úlohy si vybrala a pripravila komisia usporiadateľskej krajiny, ktorá bola ustanovená na tento účel. Táto komisia obdržala od zúčastnených krajín 47 písomne predložených ná-

vrhov súťažných úloh. Z uvedených 12 úloh si jury po dlhšej diskusii vybrala väčšinou hlasov 3—3 úlohy, ktoré mali súťažiaci vyriešiť vo dvoch súťažných dňoch za čas 4—4 hodiny denne.

9. júla 1976 sa preložili texty vybraných súťažných úloh do štyroch úradných jazykov MMO (ruština, angličtina, nemčina a francúzština). Vybrané úlohy sa rozdelili na jednotlivé súťažné dni. Taktiež bol stanovený maximálny počet bodov za bezvadné riešenie úloh. Potom sa text úloh preložil do jazykov zúčastnených krajín. Korekcia chýb, resp. modifikácie zistených odchýlok po preklade, sa previedla 10. júla 1976. V dňoch 11.—17. júla vedúci delegácií bývali v dedinke Heiligenblut. Tu vykonávali všetky práce, ktoré súviseli s opravami úloh.

3. Súťažiaci mali trochu odlišný program od programu ich vedúcich. Deň ich príchodu do Viedne bol stanovený na 9. júl 1976. Na druhý deň sa vydali na cestu autobusmi do mesta Lienz, kde sa konala vlastná súťaž — písomné skúšky. Ich cesta viedla cez mestá Graz, Klagenfurt a Villach. Cestou sa žiaci kochali v krásne panorámy najkrajších častí rakúskych Álp. Členovia nášho družstva cestovali spolu v jednom autobuse s členmi družstiev USA, VSR, PLR a MLR. Už tu v autobuse sa začalo meranie síl. Žiaci sa snažili čím ťažšími úlohami „vyčerpať“ súpera, kým — podľa princípu modernej psychologickéj vojenskej taktiky — úlohy súpera riešili v rekordnom čase. Takto chceli oslabiť vieru súpera vo víťazstvo. Jazykové prekážky sa rýchlo prekonali, veď vzorec alebo náčrt hovorí viac ako dlhá reč (obzvlášť vtedy, keď ju ani nerozumíme).

Už bolo okolo 21 hodín, keď súťažiaci vyčerpaní od dlhého cestovania sa púšťali dolu priesmykom Iselberg a uvideli svetlá najväčšieho mesta Východného Tirolska Lienzu. Hostitelia mesta prijali hostí z celého sveta s veľkou láskou. Ubytovali ich v modernom a útulnom kolégiu Bundeskonviktu v Lienzi. Nesúťažiaci členovia delegácií cestovali ďalej do dedinky Heiligenblut, kde až do ukončení súťaže boli „izolovaní“ od súťažiacich.

V nedeľu 11. júla 1976 už všetky delegácie došli do Lienzu. V pondelok 12. júla ráno o 8. hodine mešťanosta Lienzu v sprievode tirolských muzikantov oblečených do ľudového kroja pozdravil súťažiacich. Podľa tamojších zvyklostí dievčatko v ľudovom kroji chodilo dookola s fľaškou páleného a núkalo jej obsah každému okrem súťažiacich.

Po slávnostnom ceremoniáli súťaž sa začala v učebniach školy patriacej ku kolégiu.

Medzi súťažiacimi veľký úspech malo určenie miesta súťaže jednotlivcov. Každý súťažiaci obdržal kartičku, na ktorej okrem znaku — písmena — jeho krajiny bolo aj poradové číslo súťažiaceho (od 1 do 8). Túto kartičku nosili na prsiach ako menovku. Kartičky mali tvar kruhu alebo obdĺžnika. Súťažiaci s kruhovými kartičkami súťažili v učebniach na prvom poschodí, súťažiaci s obdĺžnikovými kartičkami súťažili v učeb-

niach na druhom poschodí. Učebne sa našli podľa farby kartičiek. Súťažiaci boli rozdelení tak, aby v jednej učebni neboli dvaja z jednej krajiny.

Každý súťažiaci si našiel na svojom stole obálku s 3 úlohami na príslušný deň. Texty súťažných úloh boli v materinskom jazyku, riešenie úloh sa písali tiež v materinskom jazyku súťažiaceho. Riešenia troch úloh sa vložili do pripravených troch obalov. Riešenia úloh sa písali na papieri bielej farby. Na papieri žltej farby sa písali prípadné dotazy súťažiacich, ktoré potom posol odniesol jury MMO. Prípadné zodpovedanie otázok dostali súťažiaci na tom istom žltom papieri.

Opravu úloh prevádzali vedúci delegácií a ich zástupcovia. Na každú úlohu pripísali svoje návrhy počtu bodov. Po oprave úloh nasledovala koordinácia opravy. Na olympiáde pracovalo 18 koordinátorov, 3—3 vždy ako správcovia jednej úlohy. Úlohou koordinátorov bolo prezrieť všetkých 141 písomiek a rozhodnúť o konečnom počte bodov. Prirodzene koordinátori neovládali všetky jazyky súťažiacich, a tak jednak na základe vzorcov a náčrtov v písomkách, jednak podľa prekladov vedúcich delegácií rozhodovali o udelení počtu bodov. Koordinácia bola tohto roku veľmi prísna. Pravda, táto prísnosť v rovnakej miere sa týkala všetkých súťažiacich. V sporných prípadoch bodovania, keď koordinátori a vedúci delegácií sa nedohodli o konečnom počte bodov, rozhodovala o výsledku jury.

Jedinému súťažiacemu, členovi francúzskeho družstva, sa podarilo dosiahnuť maximálny počet bodov 40, to znamená, že jedine tento súťažiaci podal úplné riešenie všetkých úloh.

Práce jury, ako sme už povedali, nezačala s opravami úloh. Po výbere, preklade a rozmnožení súťažných úloh jury rozhodla o spôsobe udelenia cien: za koľko správnych riešení sa udelí prvá, druhá resp. tretia cena.

Kým jury ešte pracovala na horeuvedených prácach, súťažiaci po dobre vykonanej práci podnikli výlety do okolitých hôr. Vrcholy hôr, aj v lete zasnežené, poskytli každému nezabudnuteľné zážitky.

Družstvá vystúpili na 3788 m vysoký Großglockner, navštívili a prezreli tečúcu lávu na úpätí Großglockneru, najvyššej hory Rakúska. Videli Kals pri Großglockneri a prekonali tu výškový rozdiel 1700 m. Navštívili aj najvyššie položené parkovisko Rakúska vo výške 2500 m. Napriek veľkej horúčave bola tu všade hrubá vrstva snehu a súťažiaci len po výdatnej bitke so snehovými guľôčkami sa pohli ďalej. K vodojemu na horé Reisseck došli až po hodinovej jazde. Do tohto vodojemu každú noc sa napumpuje voda z údolia, aby potom v dennej špičke vyrábali z energie vody elektrickú energiu. Pri mohutných jazerách všade stoja tu moderné hotely. Každá tehla, každý kus materiálu sa dostal na miesto určenia práve tak ako výletníci: 3 prestupmi na lanovkách a jednou miestnou železnou dráhou.

Vo štvrtok večer 15. júla 1976 sa súťažiaci zúčastnili na slávnostnej večere v mestskom dome v Lienzi. Pred večerou v sprievode harmoník

miestna mládež predstavila tirolské tance. Po odznení zdravíc v jazykoch súťažiacich sa začala tanečná zábava a trvala až do pôlnoci.

V nedeľu 18. júla družstvá odcestovali z Lienzu. Od toho času program vedúcich delegácií aj súťažiacich bol už totožný. Ich cesta viedla cez Salzburg, kde medzi inými si prezreli aj rodný dom W. A. Mozarta. Pravda, prehliadka mesta sa uskutočnila na poludnie v horúčave 35 °C. Ale stálo to za to. Večera bola už vo Viedni. V pondelok a utorok až do odpoludnia bol voľný program.

4. Aké boli súťažné úlohy a aký bol výsledok súťaže? Podľa rozhodnutia jury na prvý súťažný deň — 12. júla 1976 — ako aj na ďalší deň boli určené nasledovné súťažné úlohy:

1. Obsah rovinného konvexného štvoruholníka je 32 cm², súčet veľkostí jednej uhlopriečky a dvoch protilahlých strán je 16 cm.

Určte všetky možné veľkosti druhej uhlopriečky štvoruholníka.

(ČSSR, 5 bodov)

2. Nech $P_1(x) = x^2 - 2$; $P_j(x) = P_1[P_{j-1}(x)]$; $j = 2, 3, \dots$

Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n všetky korene rovnice $P_n(x) = x$ sú reálne a po dvoch rôzne.

(Fínsko, 7 bodov)

3. Nech krabica tvaru kvádra má tú vlastnosť, že ju možno úplne vyplniť jednotkovými kockami.

Ak do krabice vložíme najväčší možný počet kociek s objemom 2 tak, aby ich hrany boli rovnobežné s hranami krabice, potom tieto kocky vyplnia presne 40 % vnútorného priestoru krabice.

Určte všetky možné vnútorné rozmery krabice s uvedenou vlastnosťou. ($\sqrt[3]{2} = 1,2599\dots$)

(Holandsko, 8 bodov)

4. Vypočítajte maximum súčinu celých kladných čísel, ktorých súčet je 1976.

(USA, 6 bodov)

5. Nech je daná nasledovná sústava p rovníc o $q = 2p$ neznámych

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

kde $a_{ij} \in \{0, -1, +1\}$, $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, q$.

Dokážte, že existuje riešenie sústavy rovníc (1) $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ s nasledovnými vlastnosťami:

a) všetky x_j ($j = 1, 2, \dots, q$) sú celé čísla;

b) aspoň jedno z čísel x_j ($j = 1, 2, \dots, q$) je rôzne od nuly;

c) $|x_j| \leq q$ ($j = 1, 2, \dots, q$).

(Holandsko, 7 bodov)

Tabuľka 2

Poradie umiestne- nia krajiny	Znak krajiny	Súčet získ. bodov	Počet cien				Spolu cien
			I.	II.	III.	dip.	
I.	SU	250	4	3	1	—	8
II.	GB	214	2	4	1	1	8
III.	USA	188	1	4	1	—	6
IV.	BG	174	—	2	6	—	8
V.	A	167	1	2	5	—	8
VI.	F	165	1	3	1	—	5
VII.	H	160	—	3	4	—	7
VIII.	DDR	142	—	2	3	—	5
IX.	PL	138	—	—	6	—	6
X.	S	120	—	1	3	—	4
XI.	R	118	—	1	3	—	4
XII.	CS	116	—	1	3	—	4
XIII.	YU	116	—	1	3	—	4
XIV.	VN	112	—	1	3	—	4
XV.	NL	78	—	—	1	—	1
XVI.	SF	52	—	—	1	—	1
XVII.	GR	50	—	—	—	—	—
XVIII.	C	16	—	—	—	—	—
XIX.	D	8	—	—	—	—	—
Spolu:		2384	9	28	45	1	83

6. Nech postupnosť čísel u_0, u_1, u_2 je definovaná takto:

$$u_0 = 2,$$

$$u_1 = 5/2,$$

$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Dokážte, že platí

$$[u_n] = 2^{[2^n - (-1)^n]/3} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$[x]$ znamená to najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x .

(Veľká Británia, 7 bodov)

V zátvorke sme uviedli krajinu, ktorá príslušnú úlohu navrhla, ako aj maximálny počet bodov za úplné riešenie úlohy. Úlohy 1. — 3. sa riešili prvý deň, úlohy 4. — 6. sa riešili druhý deň. Podľa rozhodnutia jury ceny boli udelené takto:

I. cena sa udelila za dosiahnutie aspoň 34 bodov. II. cenu dostali súťažiaci, ktorí získali aspoň 23 bodov. (32 a 33 bodov nezískal ani jeden súťažiaci.) III. cenu dostali súťažiaci, ktorí získali celkový počet bodov najmenej 15 a najviac 22.

Jury rozhodla aj o udelení zvláštnej ceny — diplomu — za zvlášť originálne a vtipné riešenie úlohy. Diplom dostal súťažiaci anglického družstva označený znakom GB7 za podstatné zovšeobecnenie riešenia piatej súťažnej úlohy.

V tab. 1 je uvedený počet bodov získaných podľa jednotlivých súťažiacich a podľa krajín v abecednom poriadku. Tabuľka 2 ukazuje počet cien, ktoré získali jednotlivé krajiny, ako aj poradie umiestnenia jednotlivých krajín podľa počtu celkove získaných bodov.

Z tabuľky 1 a 2 vidíme, že naše čs. družstvo sa umiestnilo na XII. — XIII. mieste (vlani na XII. mieste) s celkovým počtom bodov 116 (vlani 162 bodov). Naši súťažiaci získali jednu druhú cenu a tri tretie ceny (vlani dve tretie ceny).

Možno konštatovať, že na XVIII. MMO len 42 % (2384 bodov) celkove možných bodov bol dosiahnutý (v roku 1975: 55 %). Tento fakt svedčí o vysokom stupni obťažnosti vytýčených súťažných úloh.

5. Slávnostný ceremoniál a vyhlásenie výsledkov XVIII. MMO sa konali v utorok 20. júla 1976 odpoľudnia vo Viedni v jednej ozdobnej sále Burgu. Predseda MMO prof. dr. *E. Hlawka* privítal a pozdravil prítomných. Po odznení hudobnej vložky prehovoril krátko spolkový minister školstva a umenia dr. *Fred Sinowatz*. Vysoko hodnotil význam MMO a súčasne odovzdal súťažiacim ceny a odmeny. K prvej cene ako odmenu obdržali súťažiaci kazetový magnetofón s rádiom. K druhej cene za odmenu dostali malú vreckovú kalkulačku a k tretej cene fotoaparát, rešp. poľovnícky ďalekohľad podľa výberu.

Na záver vyhlásenia výsledku prehovoril k prítomným predseda medzinárodnej jury.

V mene súťažiacich prehovorila *Tatjana Galiebna* zo ZSSR a *Laurent Pierre*, člen družstva Francúzska. Poďakovali usporiadateľom za starostlivú a svedomitú prípravu MMO a jej priebeh ako aj za srdečné a priateľské pohostenie.

Na koniec vedúci juhoslovanskej delegácie *Zoran Kadelburg* poďakoval usporiadateľom v mene jury za vysokú úroveň organizácie MMO. Zopakoval svoje vyhlásenie na záverečnom zasadnutí jury: XIX. MMO v roku 1977 usporiada Juhoslávia v Belehrade. Na túto MMO súčasne pozval delegácie všetkých krajín, ktoré boli zastúpené na XVIII. MMO.

Na záver dňa v ozdobnej sále viedeňského mestského domu sa konala rozlúčková večera, na ktorú mešťanosta Viedne pozval všetkých účastníkov a usporiadateľov MMO. Na tejto večere sa zoznámili súťažiaci s osobami, ktorí počas 12 dní sa starali o organizáciu a o úspešný priebeh súťaže.

Literatúra:

- [1] Gedei, J., XVII. MMO a 17 rokov MMO. MFŠ, roč. 6, č. 9, květen 1976.
- [2] XVIII. Internationale Mathematikolympiade, Lienz/Wien, Juli 1976. Alpha, roč. 10, č. 5, strana 104.
- [3] A Matematika Tanítás, XXIII. roč., č. 4, strana 103.
- [4] Középiskolai Matematikai Lapok, 53. zväzok, č. 1, strana 7, č. 3—4, strana 107.

nejmladším čtenářům

Opět zde uvádíme dva příklady pro nejmladší matematiky. Jsou vybrány z polského časopisu *Matematyka*. Byl bych rád, kdyby naši čtenáři prováděli všechny početní výkony, úpravy rovnic atd. sami, tj. sami si je pro počítali. Jedině tak je možné se v matematice dostat trochu výš. — Hodně zdaru, naši nejmladší.

1. Přirozená čísla a, b, c uspořádejte podle velikosti a napište jejich poměr, jestliže o nich platí

$$\frac{c}{a+b} = 2, \quad \text{kde } a+b \neq 0,$$

$$\frac{c}{b-a} = 3, \quad \text{kde } b-a \neq 0.$$

Řešení. Z druhé rovnice vyplývá $b-a > 0$ (tj. $b > a$), neboť $c > 0, 3 > 0$. (Podíl dvou kladných čísel je kladný.)
A poněvadž z první rovnice plyne

$$c > a+b \Rightarrow \begin{cases} c > a, \\ c > b, \end{cases}$$

můžeme přirozená čísla a, b, c srovnat podle velikosti:

$$a < b < c.$$

Zbývá napsat ještě poměr čísel a, b, c . To si vyžádá trochu počítání. Dané rovnice přepíšeme

$$2a + 2b = c, \tag{a}$$

$$-3a + 3b = c. \tag{b}$$

Poněvadž pravé strany obou rovnic se sobě rovnají, rovnají se sobě i strany levé. Docházíme tak k rovnici

$$2a + 2b = -3a + 3b$$

Z ní dostaneme (čtenáři, propočítat!)

$$b = 5a.$$

Za b dosadíme do rovnice (a) a dojdeme ke vztahu

$$c = 12a.$$

Teď už můžeme sestavit poměr:

$$a \quad b \quad c = a \quad 5a \quad 12a.$$

Poněvadž $a \neq 0$ (je to přirozené číslo), docházíme k výsledku

$$a \quad b \quad c = 1 \quad 5 \quad 12$$

Cvičení. Za b jsme do rovnice (a) dosadili hodnotu $5a$. Dosadte tuto hodnotu do rovnice (b). Vyšel vám stejný výsledek?

Opakujte touž úlohu, jestliže o přirozených číslech x, y, z platí

$$\frac{z}{x-y} = 1, \quad \frac{z}{2y-x} = 5.$$

$$(x \quad y \quad z = 3 \quad 2 \quad 5).$$

2. Jestliže v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ obvody trojúhelníků ABC a CDE jsou si rovny a současně jsou si rovny obsahy trojúhelníků ABD a BCD , pak daný čtyřúhelník je rovnoběžník. — Dokažte!

Řešení. Pro jednoduchost zavedme toto označení

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f.$$

Podle textu úlohy platí současně tyto dvě rovnice

$$\begin{aligned} a + b + e &= c + d + e, \\ b + c + f &= a + d + f \end{aligned}$$

Z nich po zjednodušení máme

$$\begin{aligned} a + b &= c + d, \\ b + c &= a + d. \end{aligned}$$

(Zápis obou rovnic se snažte vyjádřit slovy.) Z obou těchto rovnic plyne

$$\begin{aligned} (d =) a + b - c &= b + c - a, \\ a &= c. \end{aligned} \tag{I}$$

Můžeme však dostat ještě jeden vztah

$$\begin{aligned} (c =) a + b - d &= a + d - b, \\ b &= d. \end{aligned} \tag{II}$$

[Vztahy, zapsané rovnicemi (I) a (II), vyjádřete slovy.] Rovnice (I) a (II) ukazují však na to, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.

S. H.

Úloha o trojúhelníku

STANISLAV HORÁK, Praha

Při řešení úlohy, uvedené v textu, budeme potřebovat několik vzorců z geometrie trojúhelníku, které, jak se domnívám, nejsou tak příliš známé. Aby výklad mohl být plynulý, uvedeme je hned zde a pak se budeme na ně odvolávat.

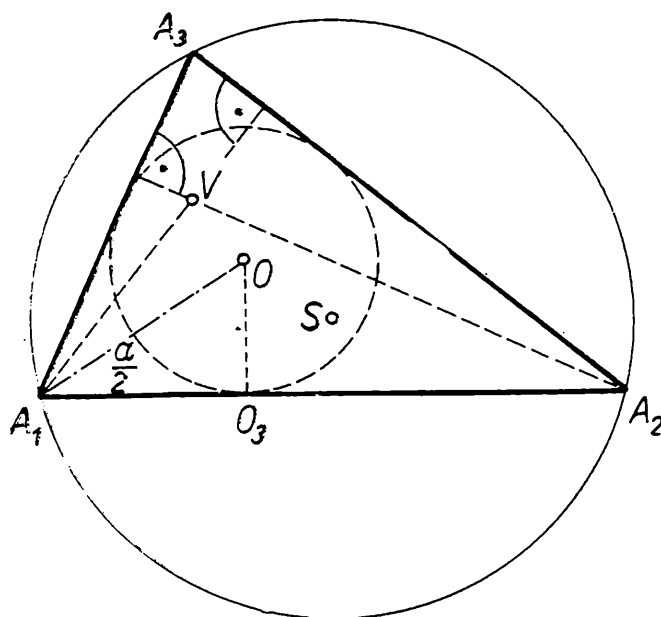
Velikosti stran a úhlů jsou označeny obvyklým způsobem. R a r značí délku poloměru kružnice opsané a vepsané, S je obsah trojúhelníku.

$$a = 2 R \sin \alpha, \quad b = 2 R \sin \beta, \quad c = 2 R \sin \gamma, \tag{I}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \tag{II}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \tag{III}$$

$$r = 4 R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \tag{IV}$$



Obr. 1

Je dán trojúhelník $A_1A_2A_3$, V , O , S jsou po řadě ortocentrum, střed kružnice vepsané a střed kružnice opsané. Nechť $R = 1$.

Položme

$$c_i = (-1)^k VA_i - OA_i + \frac{2r}{OA_i} \text{ pro } i = 1, 2, 3.$$

Přitom $k = 2n$, jestliže daný trojúhelník je ostroúhlý, $k = 2n + 1$ jestliže úhel při vrcholu A_i je tupý. Číslo n je vždy přirozené.

Co vyplývá pro úhly trojúhelníku $A_1A_2A_3$, jestliže platí

$$c_1 + c_2 + c_3 = 3 ?$$

Řešení (obr. 1). a) Předpokládejme, že daný trojúhelník je ostroúhlý. Podle (I) platí

$$a = 2R \sin \alpha = 2 \sin \alpha, \quad b = 2 \sin \beta, \quad c = 2 \sin \gamma.$$

Pro obsah trojúhelníku platí (během úpravy použijeme vzorců I a II):

$$\begin{aligned} S &= 0,5 ab \sin \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = rs = \\ &= r(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

kde s je poloviční obvod trojúhelníku. Podle IV je

$$r = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \text{ neboť } R = 1.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku A_1OO_3 , kde O_3 je bod dotyku vepsané kružnice se stranou A_1A_2 , dostaneme

$$OA_1 = r \sin \frac{\alpha}{2} = 4 \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

a analogicky

$$OA_2 = r : \sin \frac{\beta}{2} = 4 \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$OA_3 = r \sin \frac{\gamma}{2} = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}.$$

Z trojúhelníku A_1VA_2 při použití sinové věty dojdeme ke vztahu

$$VA_1 : c = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \gamma \Rightarrow VA_1 = c \cdot \cos \alpha : \sin \gamma.$$

Avšak podle I je

$$c = 2R \sin \gamma = 2 \sin \gamma \Rightarrow c \sin \gamma = 2,$$

a proto

$$VA_1 = 2 \cos \alpha.$$

Podobně můžeme napsat

$$VA_2 = 2 \cos \beta, \quad VA_3 = 2 \cos \gamma.$$

Ted' již můžeme dosadit do daného součtu:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) - \\ &- 4 \left(\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) + \\ &+ 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right) = \\ &= 2 \left(1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right) - \\ &- 4 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \\ &+ 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \right) = \\ &= 2 + \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left(2 \sin \frac{\beta}{2} - 1 \right) \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} - 1 \right) + 1 = 3. \end{aligned}$$

Dospíváme tak ke konečnému tvaru

$$\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left(2 \sin \frac{\beta}{2} - 1 \right) \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} - 1 \right) = 0.$$

Odtud vyplývá, že aspoň jeden z činitelů musí být roven nule, jinak řečeno, aspoň jeden úhel trojúhelníku musí mít velikost 60° .

b) Kdyby daný trojúhelník měl tupý úhel při vrcholu A_1 ,

$$\text{tj. } \alpha > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow -VA_1 = 2 \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow VA_1 = -2 \cos \alpha > 0$$

a další postup by byl stejný.

Tento článek je v podstatě úloha 397 uveřejněná i s řešením v XVII. ročníku *Elemente der Mathematik*, upravená metodicky pro naše středoškoly.

matematicko - fyzikální zábavy

Řešení tří elektrotechnických hádanek otištěných v 6. čísle Rozhledů

1. Myslíme si, že vnucený proud I je zaveden do bodu A kostry krychle a vychází ven v bodě B ; počítejme úbytek ΔU mezi oběma body (viz obr. 1). Výsledný odpor je pak

$$R_v = \frac{\Delta U}{I}.$$

Z důvodů symetrie se rozdělí proud I v bodě A na tři stejné díly, takže napětí mezi body $A - A_1$, $A - A_2$ a $A - A_3$ je stejné a rovno

$$\Delta U_{A-A_1} = \frac{I}{3} R$$

Z těchto důvodů se v bodech A_1 , A_2 a A_3 rozdělí proudy $I/3$ vždy na dva stejné díly, takže napětí mezi body $A_1 - B_4$, $A_1 - B_5$, $A_2 - B_4$, $A_2 - B_6$, $A_3 - B_5$ a $A_3 - B_6$ je opět stejné a rovné

$$\Delta U_{A_1-B_4} = \frac{I}{6} R.$$

V bodech B_4 , B_5 , B_6 se vždy dvě šestiny proudu spojí ve třetinu a napětí mezi body $B_4 - B$, $B_5 - B$ a $B_6 - B$ je zase stejné a rovné

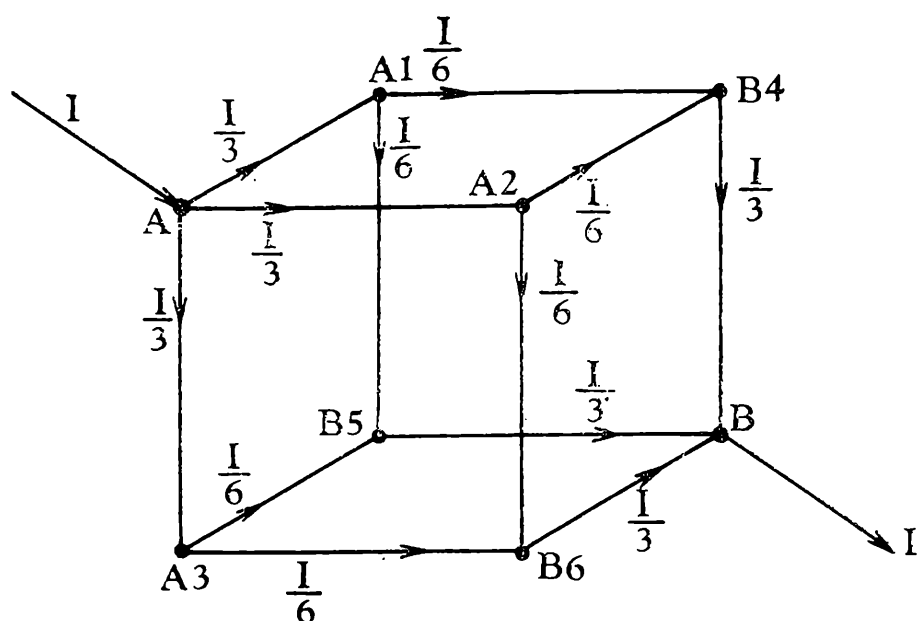
$$\Delta U_{B_4-B} = \frac{I}{3} R.$$

Celkem máme napětí mezi body A , B rovno součtu

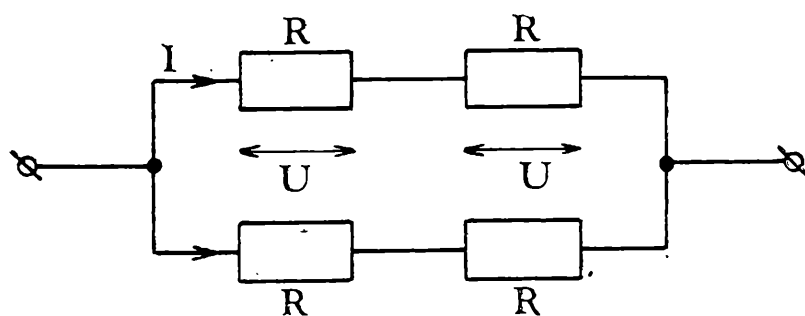
$$\Delta U_{AB} = \Delta U_{A-A_1} + \Delta U_{A_1-B_4} + \Delta U_{B_4-B} = \frac{RI}{3} + \frac{RI}{6} + \frac{RI}{3} = \frac{5}{6} RI.$$

Proto výsledný odpor

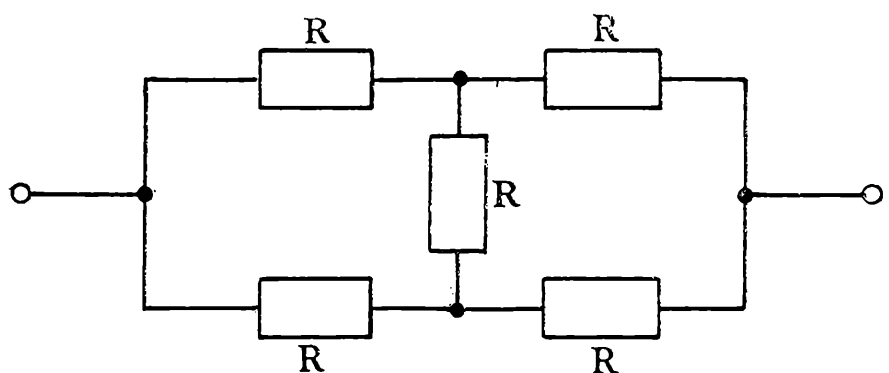
$$R_v = \frac{\Delta U}{I} = \frac{5}{6} R.$$



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Výsledek si můžete ověřit sletováním dvanácti stejných odporů do kostry krychle a změřením výsledného odporu měřicím můstkem.

2. Čtyři stejné odpory R zapojíme serioparalelně podle obr. 2. Každá větev má odpor $2R$ a jejich paralelní spojení má odpor

$$\frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = \frac{4R^2}{4R} = R.$$

Je-li každý z odporů R dimenzován na výkon

$$N = U_{\max} \cdot I_{\max},$$

je celek dimenzován na výkon

$$N_v = 2I_{\max} \cdot 2U_{\max} = 4N$$

3. Odpory R zapojíme podle obr. 3. Pátý odpor spojuje dva ekvipotenciální body a neteče jím tedy žádný proud. Proto je toto zapojení obdobné schématu z obr. 2. I zde je $N_v = 4N$.

Ing. Jiří Vavřín

Kolik je jim let?

RNDr. MILAN KOMAN, CSc., UK Praha

Setkal se nedávno známý japonský matematik JAKNATO (údajně prý českého původu) s jedním našim matematikem. Jak to mezi takovými lidmi bývá, hovořili nejdříve o matematice, ale časem se jejich řeč stočila i na rodinné záležitosti. Každý nezasvěcený posluchač by však ani v tomto případě ani na chvíli nezapochyboval, že jde o dva matematiky. Posuďte sami.

Když přišla řeč na děti, sdělil náš matematik svému kolegovi, že má dvě dcery. Jsou to sestry Hana a Ivana. Dále uvedl:

Chceš-li zjistit věk mých dcer — školaček, nahraď nejdříve v zápise

$$\begin{array}{r} \text{H A N A} \\ \text{I V A N A} \\ \hline \text{S E S T R Y} \end{array}$$

různá písmena různými číslicemi. Až to budeš mít, můžeš snadno určit, kolik je mým dcerám roků, neboť

- (1) „H A N A je násobek věku Ivany,
- (2) „I V A N A + 1 je násobek věku Hany,
- (3) součet věků obou sester je soudělný s číslem „S E S T R Y“.

Dovedete i vy, milí čtenáři, rozluštit, jak na to profesor JAKNATO šel? Svá řešení zašlete do 15. V 1977. Jména správných řešitelů uveřejníme.

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)



O

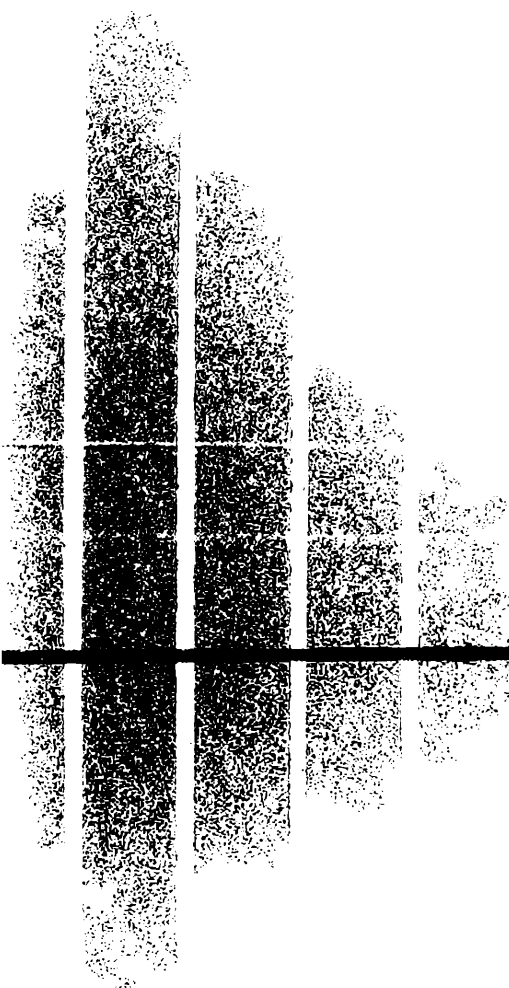
obálka
obdélník
obdélníkový
období
obecně
obecný
 obecný trojúhelník
obecnost
objem
oblast
oblouk
 kruhový oblouk
 oblouk křivky
obměněný výrok
obor
obráceně
obrácení
obrácený
 obrácené pořadí
 obrácená věta
obraz
obrazec
obrázek
obrys
obsah
obsahovat
obvod

obzor
očíslovat

envelope
rectangle
 angular
period
in general
general
 scalene triangle
generality
volume, cubical contents
region, domain
arc, curve
 arc of circle
 segment of a curve
contrapositive statement
domain
vice versa, conversely
converse
converse
 reverse order
 converse
image
figure
figure, diagram
contour
area, measure of interior
include
boundary, perimeter, circumference, periphery
horizon
enumerate

odčítání	subtraction
oddělený	detached
oddělit	separate
odečíst	subtract
odhad	estimate
odchylka	deviation, inclination, error, bias, variation
odmocnina	root, radical
druhá odmocnina	square root
třetí odmocnina	cubic root
odmocniny jedničky	roots of unity
odmocnítko	radical sign
odmocněnec	radicand
odmocnitel	index of the radical
odmocnit	extract, find root of number
odmocňování	evolution
odpovídající	corresponding
odpovídat	correspond, conjugate
odraz	reflection
odstranění zlomků	clearing of fractions
odtud	hence
odvěsna	side, leg
odúročitel	present value
odvodit	deduce, derive
odvození	deduction
odvozený	derived
odvozovat se	originate
ohnisko	focus
ohniskový	focal
ohraničený	bounded
okamžik	instant. moment
okruh	ring, circuit
okolí	neighbourhood, proximity, vicinity
olovnice	plumbline
omezený	limited, bounded
opačný	opposite
opakované skládání	iterated composition
operace	operation
operátor	operator
oprava	correction
opsaná kružnice	circumscribed circle
opsat kružnici	describe a circle, circumscribe
opsat oblouk	strike an arc
orientace	orientation, direction
orientovaný	directed, oriented
orientovaný úhel	directed angle
ortocentrum	orthocentre

rozhledy



**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

9

ROČNÍK 55, 1976-1977, KVĚTEN

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mižoš, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMO Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1977.

OBSAH

O. Horák: O jednom využití násobení matic .	385
Dr. A. Vrba: O hlemýždi, koberečcích a jak to souvisí s pokrýváním úsečky i	389
S. Horák: Jeřábkové body .	391
Prof. E. Kraemer: Apolloniova kružnice .	393
Doc. Ing. B. Vybíral: Síly při cvičení na gymnastickém nářadí .	401
Dr. J. Mrázek, CSc.: O některých aplikacích kosmonautiky IV	406
Prof. dr. J. Skotnický: O entropii .	407
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Hertzsprung-Russelův diagram	415
J. Kotyk: Leonhard Euler	420
J. Kotyk: Matematické myšlení	426
J. Sedláčková: Znova problém čtyř barev	428
Matematické zábavy	429
Recenze	431
H. Holmanová: Slovníček česko-anglický .	3. a 4. str. obálky

0 jednom využití násobení matic

OTTO HORÁK, Pedagogická fakulta Hradec Králové

V minulém čísle našeho časopisu jsme v článku *O násobení matic* zavedli násobení matic pomocí tzv. spojovací interpretace.

Pokusme se nyní využít tuto myšlenku ke snadnému zjištění tranzitivity binární relace R definované v konečné množině M , pro naše úvahy v nepříliš početné množině.

Připomeňme si, že binární relace R je tranzitivní v množině M právě tehdy, když pro každé tři prvky x, y, z množiny M platí

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$$

Podrobné zpracování vlastností binárních relací nalezne čtenář např. v knize [4] J. Šedivého.

Řešme následující úlohu:

Binární relace R je dána uzlovým grafem (obr. 1). Dokažte, že tato relace je v množině $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ tranzitivní.

Čtenář by mohl formou cvičení vyřešit úlohu pomocí stromu logických možností. Pokusme se však vyřešit úlohu početně.

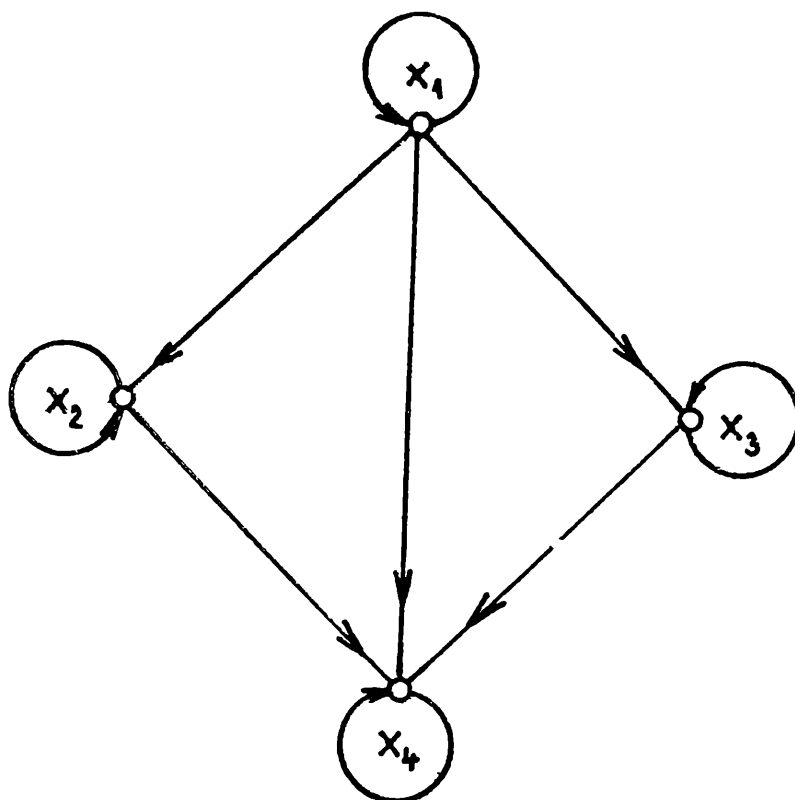
Relaci R přiřadme čtvercovou matici $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,4}}$ (počet řádků resp. sloupců matice A se řídí počtem prvků množiny M) takto: Platí-li $x_i R x_k$ (jinak řečeno — existuje-li hrana $\overrightarrow{x_i x_k}$ v příslušném uzlovém grafu), pak položíme $a_{ik} = 1$. Neplatí-li $x_i R x_k$ (neboli — taková hrana $\overrightarrow{x_i x_k}$ neexistuje), pak položíme $a_{ik} = 0$.

Čtvercovou matici A , kterou získáme, nazýváme *incidenční matice relace R* .

Incidenční matice relace R z naší úlohy je tedy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abychom se mohli v dalším textu stručně a přesně vyjadřovat o uvažované situaci, zavedme ještě jeden snadno srozumitelný pojem. Jestliže je dán uzlový graf binární relace R , můžeme vytvářet konečné posloupnosti uzlů a hran, v nichž je každá hrana zapsána vždy bezprostředně



Obr. 1

za uzlem, z něhož vychází, a bezprostředně před uzlem, do něhož vchází. Např. podle obr. 1

$$x_1, \overrightarrow{x_1x_2}, x_2, \overrightarrow{x_2x_4}, x_4 \quad (1)$$

$$x_1, \overrightarrow{x_1x_1}, x_1 \quad (2)$$

$$x_1, \overrightarrow{x_1x_3}, x_3, \overrightarrow{x_3x_3}, x_3, \overrightarrow{x_3x_4}, x_4 \quad (3)$$

Takové posloupnosti nazýváme *orientovaná spojení*.

Počet hran v orientovaném spojení nazveme *délkou orientovaného spojení*. (Délka orientovaných spojení (1), (2), (3) je tedy postupně 2, 1, 3). Jak můžeme nyní chápat prvky matice A ? Jako počty orientovaných spojení délky 1 mezi příslušnými dvěma uzly grafu relace R .

Vypočteme dále matici $C = A \cdot A$:

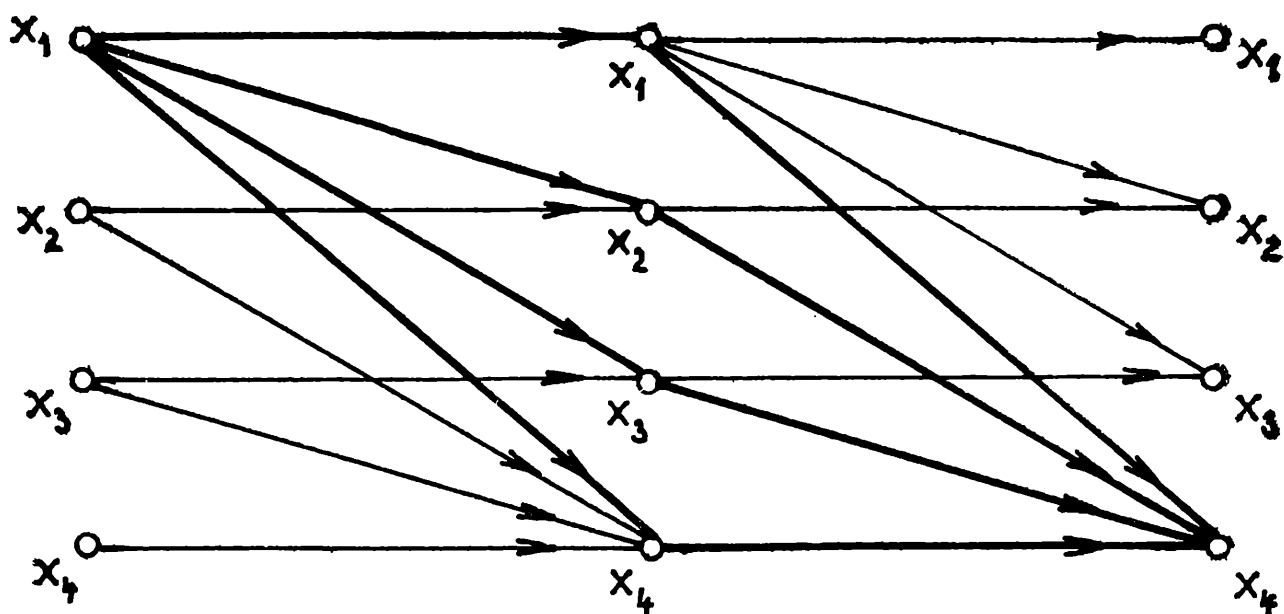
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spojovací interpretace: obr. 2.

Rozváží-li si nyní čtenář dobře princip spojovací interpretace (obr. 2) při násobení matic, zavedené v již citovaném článku [2], a vezme-li v úvahu pojem orientované spojení resp. délka orientovaného spojení, může prvky matice C chápat jako *počty orientovaných spojení délky 2* mezi příslušnými uzly grafu relace R .

Např.: $c_{14} = 4$; vypišme čtyři orientovaná spojení délky 2 mezi uzly x_1, x_4 !

(V obr. 2 jsou tato spojení vyznačena silněji).



Obr. 2

1. $x_1, \overrightarrow{x_1x_1}, x_1, \overrightarrow{x_1x_4}, x_4$
2. $x_1, \overrightarrow{x_1x_2}, x_2, \overrightarrow{x_2x_4}, x_4$
3. $x_1, \overrightarrow{x_1x_3}, x_3, \overrightarrow{x_3x_4}, x_4$
4. $x_1, \overrightarrow{x_1x_4}, x_4, \overrightarrow{x_4x_4}, x_4$

Zjištění orientovaných spojení pro další prvky matice C přenecháváme čtenáři jako cvičení.

V úloze jsme si však vytkli jiný cíl než zkoumat orientovaná spojení. Přesto nám však tento pohled na orientovaná spojení dobře poslouží. Pro početní zjištění tranzitivity relace je důležitá existence orientovaných spojení délky 2 (obr. 3), (počet spojení pro toto zkoumání podstatný není).

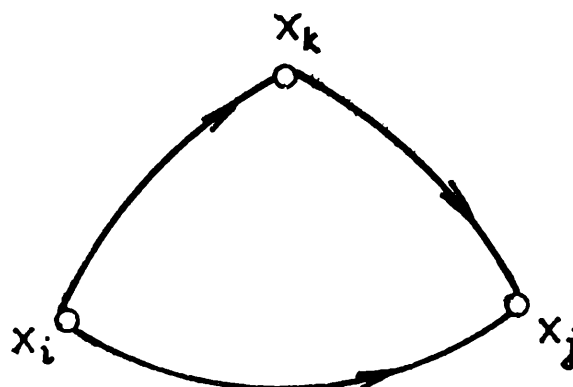
Je-li prvek c_{ij} matice C nenulový, pak existuje v uzlovém grafu relace R orientované spojení délky 2 mezi uzly x_i, x_j (neboli existuje uzel x_k tak, že x_iRx_k a zároveň x_kRx_j). Aby nyní relace R byla tranzitivní, musí být „stejnolehlý“ prvek a_{ij} matice A roven 1 (neboli musí platit x_iRx_j). Prozkoumáme-li v tomto smyslu všechny prvky matic C a A , zjistíme, že relace R daná uzlovým grafem (obr. 1) je v množině $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ tranzitivní.

Zformulujme závěrem podstatu řešení našeho problému:

Nechť R je binární relace definovaná v konečné množině $M = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Incidenční matici relace R označme $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$, dále označ-

me matici $C = (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} = A \cdot A$.



Obr. 3

Jestliže pro libovolné indexy i, j platí $c_{ij} \neq 0 \Rightarrow a_{ij} = 1$, pak binární relace R je v množině M tranzitivní.

Čtenáři, který by chtěl tuto problematiku studovat hlouběji, doporučuji literaturu [1].

Tato metoda zjištění tranzitivity relace je vhodná zejména k důkazům, že binární relace R je relací uspořádání konečné množiny. (Čtenář jistě ví, že tranzitivita v těchto případech hraje důležitou roli).

Cvičení:

1. V množině $M = \{a, b, c, d\}$ je definována relace $R = \{[b, c], [b, d], [c, d], [b, a], [d, a], [c, a]\}$. Dokažte, že R je relací uspořádání množiny M .
2. V množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ je definována relace S výrokovou formou: „číslo x je dělitelem čísla y “. Zjistěte, zda S je tranzitivní v množině M .
3. Pokuste se formulovat podmínku pro zjištění reflexivity a symetrie binární relace R v konečné množině M pomocí vlastností prvků incidenční matice relace R .

Literatura :

- [1] Busacker, R., Saaty, T.: Finite Graphs and Networks, ruský překlad, izd. Nauka, Moskva 1974
- [2] Horák, O.: O násobení matic, Rozhledy mat. fyz., 1977, č. 8
- [3] Sedláček, J.: Kombinatorika v teorii a praxi, NČSAV, Praha 1964
- [4] Šedivý, J.: O modernizaci školské matematiky, SPN, Praha 1973

O hlemýždi, koberečkách a jak to souvisí s pokrýváním úsečky I.

ANTONÍN VRBA

Vyřešíme dvě úlohy a ještě předtím si dokážeme jednu větu z kombinatorické geometrie, která se nám pak při řešení úloh bude hodit.

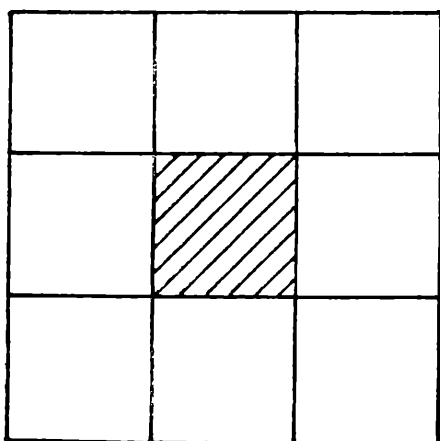
Úloha o hlemýždi: Hlemýžď leze po přímé dráze. (Jeho rychlost nemusí být rovnoměrná, může se zastavovat, ale necouvá.) Po dobu 6 min. ho sleduje skupina pozorovatelů. Každý z nich ho pozoruje 1 min. (vcelku) a zjistí, že za tu dobu ulezl 1 dm. Jakých hodnot může nabývat vzdálenost, kterou ulezl hlemýžď během celého šestiminutového pokusu, pokud byl v každém okamžiku pozorován některým z pozorovatelů?

Poslední podmínka má zřejmý význam. Pokud by nebyla splněna, mohl by hlemýžď v nestřeženém okamžiku urazit jakoukoli vzdálenost a úloha by neměla dobrý smysl. Všimněte si, že počet pozorovatelů není dán; ze zadání však vyplývá, že jich je aspoň šest. Na první pohled se zdá, že hlemýžď za 6 min. ulezl 6 dm. Skutečně, pokud by ho pozorovalo šest pozorovatelů tak, že následující by vždy začal, právě když předcházející skončil (a třeba ještě další pozorovatelé), bylo by tomu tak. Nebude vám jistě trvat dlouho a vymyslíte takový rozvrh pozorování a takový pohyb hlemýžďe, že podmínky úlohy budou splněny a hlemýžď přitom urazí jinou celkovou vzdálenost. Trochu předběhnu a prozradím už teď, že všechny možné hlemýžďovy dráhy (v dm) jsou právě všechna reálná čísla d , pro něž $4 \leq d \leq 10$. Teď vezměte rozum do hrsti a naplánujte pozorování i pohyb zvířátka tak, aby vyšly krajní možnosti. Až to budete mít, nedá vám mnoho práce upravit extrémní situaci tak, aby hlemýžď urazil libovolnou předem danou vzdálenost v uvedených mezích, třeba $d = 2\pi$.

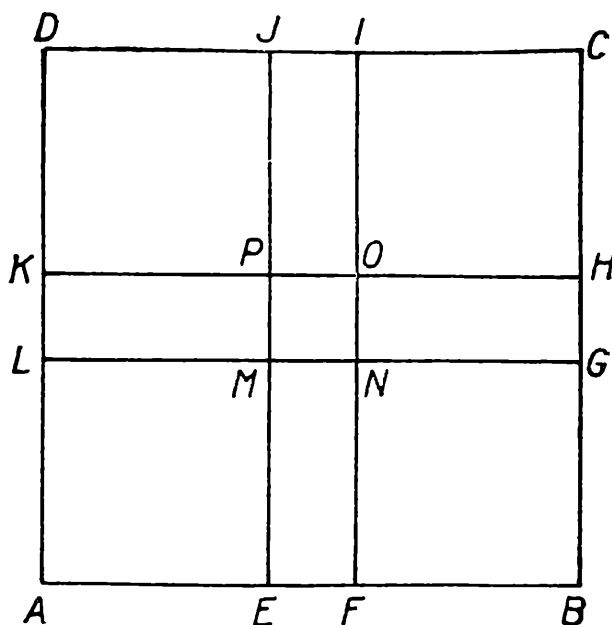
Ať jste byli úspěšní nebo zatím ne, jistě rádi přijdete na nové myšlenky. To vám umožní

Úloha o koberečkách: Podlaha pokoje má tvar obdélníka a je pokryta čtvercovými koberečky, jejichž strany jsou rovnoběžné se stranami podlahy. (Koberečky nemusí být stejně veliké, mohou se všelijak překrývat, nikde však není ani kousek holé podlahy.) Dokažte, že lze odstraněním některých koberečků (zbylé přitom ponecháme na původním místě a nehledíme na to, který koberec je vespod a který navrch) dosáhnout toho, aby zbylé koberečky pokrývaly alespoň $\frac{1}{4}$ podlahy a přitom se žádné dva nepřekrývaly.

Kdyby v úloze byla $\frac{1}{9}$ místo $\frac{1}{4}$, řešení by bylo snadné, zkuste to. Jako nápovědu si prohlédněte obr. 1. My však máme dokázat silnější



Obr. 1



Obr. 2

tvrzení a to bude o trochu těžší. Pomůže nám přitom, stejně jako při řešení úlohy o hlemýždi (zbývá přece ještě dokázat, že nemohl urazit méně než 4 dm ani více než 10 dm), následující teorie.

Nejprve několik *definic*. Řekneme, že množiny $M_1, M_2, \dots, M_k$ tvoří *pokrytí množiny M*, jestliže

$$M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k = \bigcup_{i=1}^k M_i = M.$$

Minimálním pokrytím množiny M nazveme každé takové pokrytí $M_1, M_2, \dots, M_k$ množiny M , které přestane být po odstranění kterékoli z množin $M_1, M_2, \dots, M_k$ pokrytím množiny M , tj.

$$\bigcup_{i=1}^k M_i = M \text{ a pro každé } j \in \{1, 2, \dots, k\} \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k M_i \neq M.$$

Od každého pokrytí množiny M můžeme postupným vynecháváním pokrývajících množin zřejmě dojít k některému minimálnímu pokrytí množiny M .

Zajímavé vlastnosti má minimální pokrytí v případě, kdy množiny $M, M_1, M_2, \dots, M_k$ jsou úsečky. O jedné nás informuje následující *věta*:

Tvoří-li úsečky $U_1, U_2, \dots, U_k$ minimální pokrytí úsečky U , lze je rozdělit na dvě skupiny tak, že žádné dvě úsečky z téže skupiny nemají společný bod.

Důkaz je velmi názorný. Jeden z krajních bodů úsečky U označme A . Pro každou z úseček $U_1, U_2, \dots, U_k$ nazvěme jejím počátečním bodem ten krajní bod, který je blíže k bodu A . Z minimality pokrytí vyplývá, že žádné dva počáteční body nesplynou (odůvodněte). Počáteční body očísľujme $1, 2, \dots, k$ tak, aby číslování odpovídalo jejich pořadí na úsečce U . Potom žádné dvě úsečky, jejichž počáteční bod má liché číslo,

nemají společný bod (odůvodněte) a totéž platí o úsečkách se sudým počátečním bodem. Konec důkazu.

Všimněte si ještě, že z právě dokázané věty vyplývá, že každý bod úsečky U leží nejvýše ve dvou z úseček $U_1, U_2, \dots, U_k$, které tvoří její minimální pokrytí. Přitom je podstatné, že jde o úsečky, tedy jedno-rozměrné objekty. Na obr. 2 vidíme pokrytí čtverce $ABCD$ čtverci $AFOK, EBHP, MGCI$ a $LNID$. Zřejmě je to minimální pokrytí. Přitom však každý bod čtverce $MNOP$ leží ve všech čtyřech uvedených čtvercích.

Teď zbývá jen aplikovat větu na naše úlohy. Nechci vám hned prozradit řešení a zkazit vám radost, až na ně přijdete sami. Najdete je až v některém z příštích čísel.

konstruktivní geometrie

Jeřábkovy body

STANISLAV HORÁK, Praha

V minulém čísle Rozhledů jsme jeden článek věnovali Lemoinovu bodu. Je na místě, abychom se nyní zmínili o Jeřábkových bodech (tak je nazval prof. Neuberg z Belgie), a to hned ze dvou důvodů. Jednak to jsou body podobně definované jako Lemoinův bod, jednak chceme uctít památku skromného středoškolského profesora Václava Jeřábka (1841–1931). Působil na reálce v Telči jako profesor a později jako ředitel. Své práce uveřejňoval nejen v českých časopisech, ale také ve francouzských a belgických. Kromě Jeřábkových bodů nese jeho jméno i jistá hyperbola.

Definice. Je dán trojúhelník ABC . Délky jeho stran budeme označovat obvyklým způsobem. Vnitřní bod tohoto trojúhelníku, jehož vzdálenosti x, y, z postupně od stran BC, CA, AB jsou v poměru

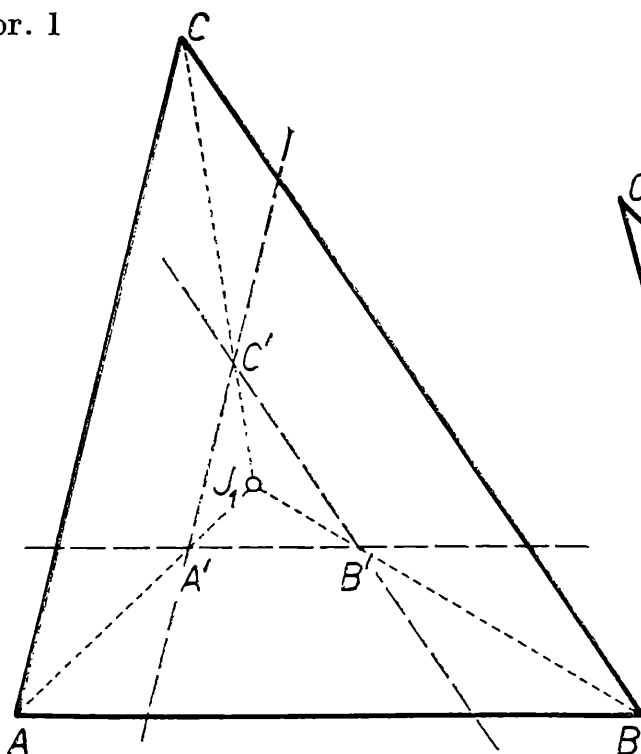
$$x : y : z = b : c : a \quad (x \ y \ z = c \ a : b), \quad (1a, b)$$

se nazývá první (druhý) Jeřábkův bod.

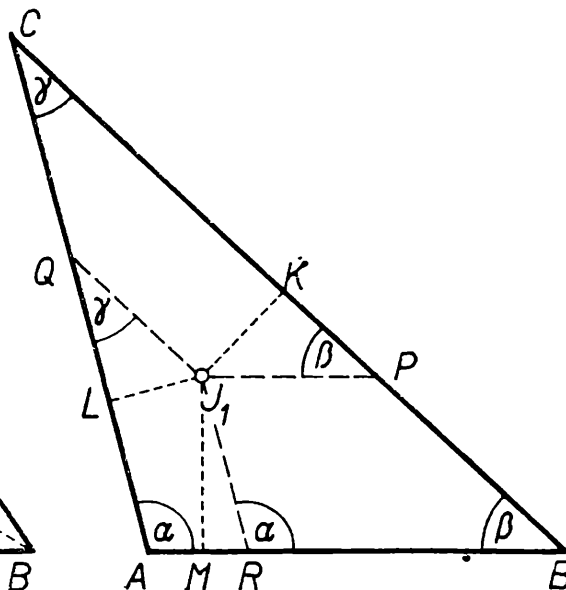
Konstrukce prvního Jeřábkova bodu. Zvolme libovolné kladné číslo k (nejlépe $k < 1$) a v polorovině ABC ($BCA; CAB$) sestrojíme rovnoběžku se stranou AB ($BC; CA$) ve vzdálenosti ka ($kc; kb$). Takto získané tři přímky omezují trojúhelník $A'B'C'$, který je stejnolehý s daným trojúhelníkem. Střed stejnolehlosti je první Jeřábkův bod J_1 . — Druhý Jeřábkův bod se sestrojí podobně.

Poznámka. Tentýž Jeřábkův bod bychom dostali, i kdybychom rovnoběžky sestrojili v opačných polorovinách.

Obr. 1



Obr. 2



Věta 1. Vzdálenosti x, y, z prvního Jeřábkovy bodu od stran BC, CA, AB daného trojúhelníku jsou

$$x = 2bS \quad (ab + bc + ca),$$

$$y = 2cS \quad (ab + bc + ca),$$

$$z = 2aS \quad (ab + bc + ca)$$

Důkaz (obr. 1). Obsah S daného trojúhelníku ABC se dá vyjádřit vzorcem

$$2S = ax + by + cz. \quad (2)$$

Z rovnice (1a) plyne

$$x = kb, \quad y = kc, \quad z = ka, \quad (3)$$

kde $k \neq 0$ je libovolné kladné číslo. Po dosazení do (2) máme

$$2S = k(ab + bc + ca)$$

$$k = 2S \quad (ab + bc + ca),$$

a tudíž

$$x = 2bS \quad (ab + bc + ca)$$

a podobně z rovnic (3) dostaneme vzorce pro y a z .

Věta 2. Je dán trojúhelník ABC a v něm první Jeřábkův bod J_1 . Jím vedená rovnoběžka se stranou AB ($BC; CA$) protne stranu BC ($CA; AB$) v bodě P ($Q; R$). Dokažte, že platí

$$J_1P = J_1Q = J_1R$$

Důkaz (obr. 2). Z bodu J_1 spusťme kolmici na stranu BC a její patu označme K . Pak platí

$$\begin{aligned} J_1P = J_1K \quad \sin \beta &= 2bS \quad (ab + bc + ca) \sin \beta = \\ &= 2bS \quad (ab + bc + ca) \frac{2S}{ac} = abc : (ab + bc + ca). \end{aligned}$$

K témuž výrazu bychom dospěli, kdybychom počítali velikosti úseček J_1Q a J_1R . Ostatně to plyne z toho, že výraz pro J_1P je symetrický vzhledem k číslům a, b, c , a tudíž permutováním těchto čísel se nemění.

Platí však i věta obrácená:

Věta 2'. Nechť uvnitř daného trojúhelníku ABC je dán bod J_1 a nechť jím vedená rovnoběžka se stranou AB (BC ; CA) protne stranu BC (CA ; AB) v bodě P (Q ; R). Jestliže platí

$$J_1P = J_1Q = J_1R,$$

pak bod J_1 je první Jeřábkův bod.

Důkaz (obr. 2). Mějme tedy daný trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod J_1 té vlastnosti, že $J_1P = J_1Q = J_1R$. Spustíme z bodu J_1 kolmici na stranu BC (CA ; AB) a její patu označme K (L ; M). Pak platí

$$J_1K : J_1M = J_1P \sin \beta : J_1R \sin \alpha = \sin \beta : \sin \alpha = b : a.$$

Analogicky bychom dostali

$$J_1K : J_1L = b : c,$$

a tudíž

$$J_1K : J_1L : J_1M = b : c : a,$$

což znamená, že bod J_1 je první Jeřábkův bod.

Cvičení

Pro druhý Jeřábkův bod odvoďte věty podobné větám 1. a 2.

Apolloniova kružnice

PROF. EMIL KRAEMER, UK Praha

Zopakujeme nejprve některé poznatky vyložené v článku *Užití dělicího poměru v geometrii*, který vyšel ve čtvrtém čísle letošního ročníku *Rozhledů matematicko-fyzikálních*.

Dva různé body A, B určují nenulovou úsečku, jejíž velikost zapisujeme AB nebo BA ; je tedy $AB = BA > 0$. Podíl velikostí dvou nenulových úseček nezávisí na volbě jednotkové úsečky. To umožňuje vhodnou definici dělicího poměru bodu C vzhledem ke dvěma různým bodům A, B , z nichž jeden pokládáme za první. Ke každému bodu $C \neq A, C \neq B$ přímky AB existuje totiž právě jedno reálné číslo λ zvané *dělicí poměr bodu C* a definované takto: a) jeho absolutní hodnota $= \frac{AC}{BC}$;

b) je kladné, leží-li bod C na prodloužení úsečky AB a je záporné, je-li C vnitřním bodem úsečky AB . Dělicí poměr λ bodu C zapisujeme zna-

kem (ABC) ; z jeho definice plyne, že je $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$. Důležité je, že platí tato věta:

Věta 1. Budtež A, B dva různé body a $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ reálné číslo. Potom na přímce AB existuje právě jeden bod $C \neq A$, $C \neq B$, pro který je $(ABC) = \lambda$.

Jsou-li na přímce dány čtyři různé body A, B, C, D tak, že je $(ABD) = - (ABC)$, pak říkáme, že bod D je *čtvrtý harmonický k bodům A, B, C, D* .

Jsou-li dány tři různé body A, B, C přímkou p a sestrojíme-li na přímce $p' \neq p$ tři různé body A', B', C' tak, že přímky AA', BB', CC' jsou rovnoběžné, pak říkáme, že body A', B', C' jsou *rovnoběžnými průměty* bodů A, B, C na přímku p' , nebo že body A, B, C jsou rovnoběžnými průměty bodů A', B', C' na přímku p . Totéž říkáme, je-li $A = A', B \neq B', C \neq C', BB' \parallel CC'$. Potom platí věta, kterou nazýváme *větou o invariantnosti dělicího poměru při rovnoběžném promítání*.

Věta 2. Nechť A, B, C jsou tři různé body přímkou p a A', B', C' jejich různé rovnoběžné průměty na přímku $p' \neq p$; pak $(A'B'C') = (ABC)$.

Po tomto úvodním přehledu dokážeme dvě jednoduché, ale pro další výklad důležité věty.

Věta 3. Nechť bod P_1 je vnitřním bodem strany AB trojúhelníku ABC . Potom polopřímka CP_1 je osou úhlu $\sphericalangle ACB$ právě tehdy, je-li

$$(ABP_1) = - \frac{AC}{BC}. \quad (1)$$

Věta 4. Nechť bod P_2 leží na prodloužení strany AB trojúhelníku ABC , jehož strany AC, BC nejsou shodné. Potom polopřímka CP_2 je osou vedlejšího úhlu k úhlu $\sphericalangle ACB$ právě tehdy, je-li

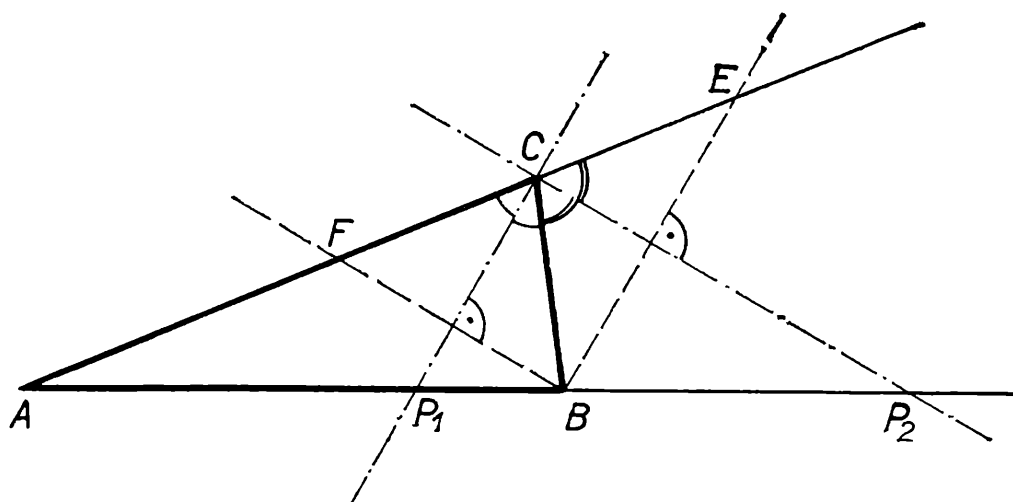
$$(ABP_2) = \frac{AC}{BC}. \quad (2)$$

Důkaz. Jsou-li strany AC, BC trojúhelníku ABC shodné, je osa úhlu $\sphericalangle ACB$ výškou k základně AB ; prochází tedy jejím středem P_1 . Proto je

$$(ABP_1) = - \frac{AP_1}{BP_1} = - 1 = - \frac{AC}{BC}.$$

Obráceně, jestliže platí (1), pak je $(ABP_1) = -1$, takže bod P_1 je středem strany AB . Podle věty 1 je takový bod na přímce AB právě jeden, a to (jak jsme dokázali) průsečík strany AB s osou úhlu $\sphericalangle ACB$. Pro tento případ je tedy věta 3 dokázána.

Předpokládejme nyní, že strany AC, BC trojúhelníku ABC nejsou shodné; označení vrcholů zvolme třeba tak, aby bylo $AC > BC$ (obr. 1). Pro tento případ dokážeme nyní větu 3 i větu 4.



a) Průsečík P_1 osy úhlu $\sphericalangle ACB$ s přímkou AB leží uvnitř úsečky AB , takže je

$$(ABP_1) < 0. \quad (3)$$

Přímka CP_1 není kolmá k přímce AB (kdyby byla, plynula by ze shodnosti trojúhelníků AP_1C , BP_1C shodnost stran AC , BC). Proto přímka, na níž leží osy obou vedlejších úhlů k úhlu $\sphericalangle ACB$ (a která je kolmá k přímce CP_1), protíná přímku AB v bodu P_2 ležícím vně trojúhelníku ABC , tj. na prodloužení strany AB ; je tedy

$$(ABP_2) > 0. \quad (4)$$

Sestrojme body E , F souměrně sdružené k bodu B podle přímek CP_2 , resp. CP_1 ; tyto body E , F leží na přímce AC , a to tak, že je

$$EC = BC = FC. \quad (5)$$

Protože je $BE \perp CP_2$, $CP_2 \perp CP_1$, je $BE \parallel CP_1$; obdobně je $BF \parallel CP_2$. Podle věty o invariantnosti dělicího poměru při rovnoběžném promítání a podle (3) a (4) je

$$(ABP_1) = (AEC) = -\frac{AC}{EC},$$

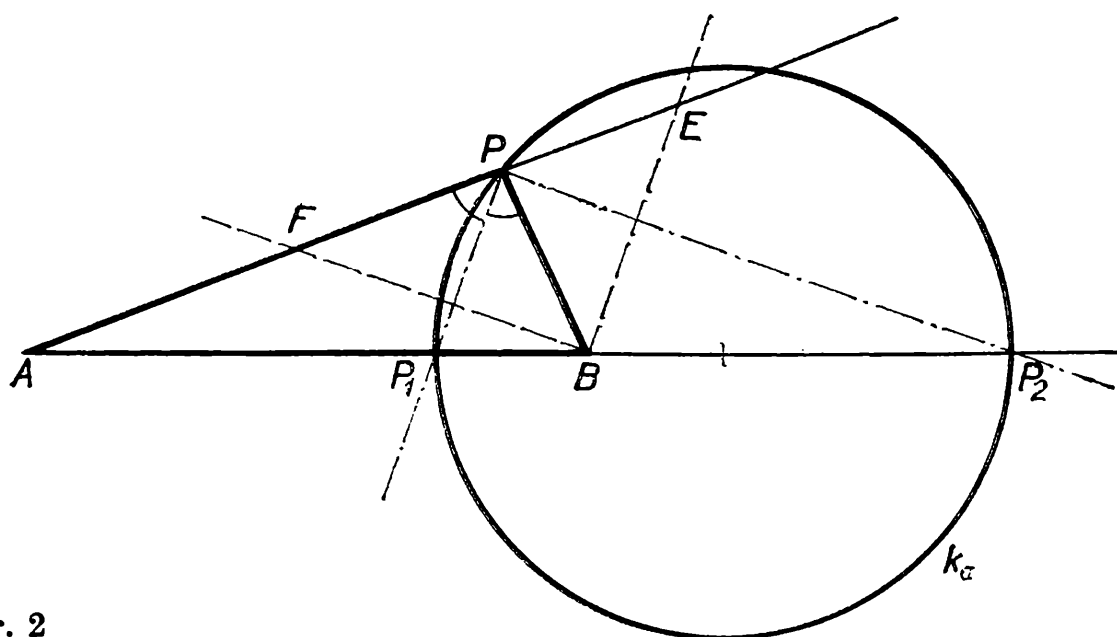
$$(ABP_2) = (AFC) = \frac{AC}{FC}.$$

Podle toho a podle (5) je tedy

$$(ABP_1) = -\frac{AC}{BC}, \quad (ABP_2) = \frac{AC}{BC}.$$

b) Obráceně, nechť uvnitř strany AB je dán bod P_1 tak, že platí (1). Podle věty 1 je takový bod na přímce AB právě jeden; podle a) je to průsečík strany AB s osou úhlu $\sphericalangle ACB$. Obdobně se provede důkaz pro případ, že platí (2).

Poznámka 1. Jsou-li dány dva různé body A , B a reálné číslo $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, potom na přímce AB existují právě dva různé body P_1 , P_2 , pro něž platí:



Obr. 2

$$\frac{AP_1}{BP_1} = \frac{AP_2}{BP_2} = \lambda.$$

Jeden z nich (třeba P_1) má dělicí poměr $(ABP_1) = -\lambda$, takže leží uvnitř úsečky AB ; druhý (tedy P_2) má dělicí poměr $(ABP_2) = \lambda$, takže leží na prodloužení úsečky AB . Je-li $\lambda > 1$, je $AP_2 > BP_2$, takže bod P_2 leží na prodloužení úsečky AB za bod B ; je-li $\lambda < 1$, je $AP_2 < BP_2$, takže bod P_2 leží na prodloužení úsečky AB za bod A .

Věta 5. Budiž dána nenulová úsečka AB a reálné číslo $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. Potom množina všech bodů P (v rovině), pro něž je

$$\frac{AP}{BP} = \lambda, \quad (6)$$

je kružnice, jejíž střed leží na přímce AB .

Důkaz. a) Podle předešlé poznámky existují na přímce AB právě dva různé body P_1, P_2 , pro něž platí (6). Bod P_1 leží uvnitř úsečky AB , bod P_2 na jejím prodloužení (obr. 2); je tedy

$$(ABP_1) = -\lambda, \quad (ABP_2) = \lambda. \quad (7)$$

Budiž nyní P libovolný bod, který leží mimo přímku AB tak, že platí (6). Potom pro trojúhelník ABP platí:

$$(ABP_1) = -\frac{AP}{BP}, \quad (ABP_2) = \frac{AP}{BP}.$$

Podle věty 3 je polopřímka PP_1 osou úhlu $\sphericalangle APB$ a podle věty 4 je polopřímka PP_2 osou úhlu vedlejšího k úhlu $\sphericalangle APB$; je tedy $PP_1 \perp PP_2$, tj. bod P je vrcholem pravoúhlého trojúhelníku s pevnou přeponou P_1P_2 . Podle věty Thaletovy leží bod P na kružnici k_a s průměrem P_1P_2 . Každý bod P hledané množiny bodů je tedy bodem kružnice k_a .

b) Nyní dokážeme, že každý bod P kružnice k_a je bodem hledané množiny, tj. že pro něj platí (6). Pro body P_1, P_2 to platí. Budiž tedy P libovolný bod kružnice k_a ležící mimo přímku AB ; potom podle věty Thaletovy je $PP_1 \perp PP_2$. Vedme bodem B po řadě rovnoběžky s přímkami PP_1, PP_2 a sestrojme jejich průsečíky E, F s přímkou AP . Potom je

$$BE \perp BF. \quad (8)$$

Podle věty o invariantnosti dělicího poměru a podle (7) je

$$(AEP) = (ABP_1) = -\lambda, \quad (AFP) = (ABP_2) = \lambda.$$

Z toho plyne, že dělicí poměry $(AEP), (AFP)$ mají stejnou absolutní hodnotu, takže je

$$\lambda = \frac{AP}{FP} = \frac{AP}{EP}; \quad (9)$$

z toho však plyne, že je

$$EP = FP \quad (10)$$

Z (8) a (10) plyne, že trojúhelník EFB je pravoúhlý s přeponou EF mající střed v bodu P ; to znamená, že je

$$EP = BP = FP$$

Podle toho a podle (9) tedy je

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AP}{EP} = \lambda;$$

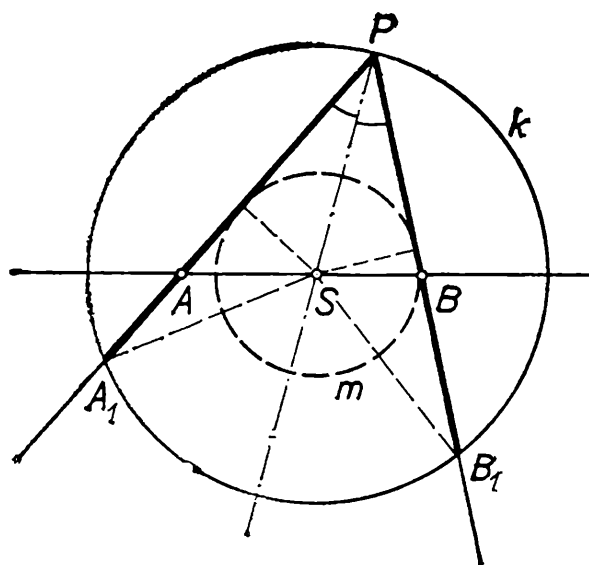
to však znamená, že bod P patří k hledané množině.

Z a) a b) plyne, že množina všech bodů P (v rovině), pro něž platí (6), je kružnice k_a ; nazývá se *Apolloniiovou kružnicí příslušnou k bodům A, B a k číslu $\lambda > 0, \lambda \neq 1$* . Tento název je odvozen od jména významného řeckého geometra jménem Apollonius, který žil asi v letech 260 až 170 a proslavil se svými pojednáními o kuželosečkách.

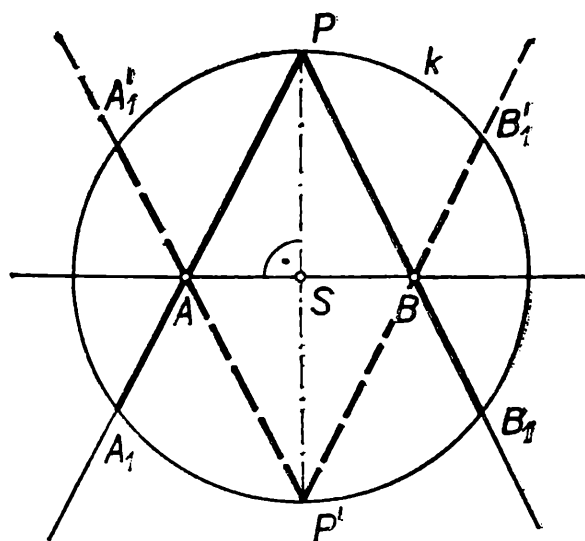
Poznámka 2. Konstrukci Apolloniovy kružnice příslušné k bodům A, B a k číslu $\lambda > 0, \lambda \neq 1$ provedeme tak, že sestrojíme nejprve její body P_1, P_2 na přímce AB , a to na základě toho, že je $(ABP_1) = -\lambda, (ABP_2) = \lambda$. Tato konstrukce bodu P_i daného dělicím poměrem (ABP_i) je provedena ve výše citovaném článku ve čtvrtém čísle letošního ročníku Rozhledů na str. 175. Potom úsečka P_1P_2 je průměrem Apolloniovy kružnice. Bod P_2 je čtvrtým harmonickým bodem k bodům A, B, P_1 .

Příklad. Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r ; uvnitř jednoho jejího průměru jsou dány dva různé body A, B , oddělené středem S kružnice k . Sestrojte na kružnici bod P tak, aby přímky PA, PB byly různé a aby na nich daná kružnice vytínala shodné tětivy PA_1, PB_1 .

Řešení. a) Provedme nejprve *rozbor*, tj. předpokládejme, že je úloha rozřešena a hledejme podmínky pro existenci shodných tětiv PA_1, PB_1



Obr. 3



Obr. 4

(obr. 3). Z jejich shodnosti plyne, že rovnoramenné trojúhelníky SPA_1 , SPB_1 ležící v opačných polorovinách s hranicí PS jsou (podle věty *sss*) shodné; mají tedy také shodné výšky k základnám PA_1 , PB_1 . To znamená, že přímky PA , PB jsou tečnami kružnice m soustředné s danou kružnicí k . Z toho plyne, že polopřímka PS je osou úhlu $\sphericalangle A_1PB_1$ splývajícího s úhlem $\sphericalangle APB$ trojúhelníku APB .

Podle věty 3 je tedy

$$(ABS) = -\frac{AP}{BP},$$

takže je

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AS}{BS} = \lambda > 0. \quad (10a)$$

Je-li $AS = BS$ (čili $\lambda = 1$), je podle (1) též $AP = BP$, takže bod P leží na ose úsečky AB . Není-li $AS = BS$, je $\lambda \neq 1$; podle věty 5 leží bod P na Apolloniově kružnici k_a příslušné k bodům A , B a k číslu λ určenému rovností (10a).

b) Z provedeného rozboru plyne tato *konstrukce*: Je-li $AS = BS$, sestrojíme osu úsečky AB , tj. průměr kružnice k kolmý k přímce AB (obr. 4). Potom jeho společný bod s danou kružnicí k je hledaným bodem P . — Není-li $AS = BS$, sestrojíme (viz poznámku 2) Apolloniovu kružnici k_a příslušnou k bodům A , B a k číslu

$$\lambda = \frac{AS}{BS}. \quad (11)$$

Její společný bod s kružnicí k neležící na přímce AB je hledaným bodem P .

Jde tedy o vyjádření čísla $\frac{1}{a}$ pomocí velikostí úseček AS , BS . Protože body S , S' leží na Apolloniově kružnici příslušné k bodům A , B , je podle věty 5

$$\frac{AS'}{BS'} = \frac{AS}{BS}, \quad (13)$$

takže je

$$AS' = \frac{AS}{BS} \cdot BS' \quad (14)$$

$$BS' = \frac{BS}{AS} \cdot AS' \quad (15)$$

Jestliže je $AS > BS$, je podle (13) také $AS' > BS'$, takže bod S' leží na prodloužení úsečky AB za bod B (obr. 5). Proto je $SS' = BS + BS'$, $AS' = AS + SS'$; protože je $SS' = 2a$, je

$$2a = BS + BS', \quad (16)$$

$$AS' = AS + 2a. \quad (17)$$

Podle (16), (15) a (17) je

$$2a = BS + \frac{BS}{AS} (AS + 2a),$$

$$2a = 2 BS + \frac{BS}{AS} \cdot 2a,$$

$$a(AS - BS) = AS \cdot BS,$$

$$\frac{1}{BS} - \frac{1}{AS} = \frac{1}{a}.$$

Pro $AS > BS$ je tedy podmínkou řešitelnosti (12):

$$\frac{1}{BS} - \frac{1}{AS} < \frac{2}{r}. \quad (18)$$

Jestliže je $AS < BS$, je podle (13) také $AS' < BS'$, takže bod S' leží na prodloužení úsečky AB za bod A (obrázek si čtenář snadno načrtne). Proto je $SS' = AS + AS'$, $BS' = BS + SS'$; protože je $SS' = 2a$, je

$$2a = AS + AS', \quad (19)$$

$$BS' = BS + 2a. \quad (20)$$

Podle (19), (14) a (20) je

$$2a = AS + \frac{AS}{BS} (BS + 2a),$$

$$2a = 2 AS + \frac{AS}{BS} \cdot 2a,$$

$$a(BS - AS) = AS \cdot BS,$$

$$\frac{1}{AS} - \frac{1}{BS} = \frac{1}{a}.$$

Pro $AS < BS$ zní tedy podmínka řešitelnosti (12) takto:

$$\frac{1}{AS} - \frac{1}{BS} < \frac{2}{r}. \quad (21)$$

Podmínky (18) a (21) můžeme však vyjádřit touto jedinou podmínkou:

$$\left| \frac{1}{AS} - \frac{1}{BS} \right| < \frac{2}{r}. \quad (22)$$

Závěr diskuse: Je-li $AS = BS$, má úloha vždy dvě řešení. Není-li $AS = BS$, má úloha řešení, a to dvě, právě tehdy, jestliže platí (22).

Cvičení

1. Je dán trojúhelník ABC . Sestrojte v jeho rovině bod P tak, aby bylo $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$.

2. V rovině jsou dány nenulové úsečky AB , BC ležící na téže přímce tak, že bod B je vnitřním bodem úsečky AC . Určete v této rovině množinu všech bodů P , které mají tu vlastnost, že úhly $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$ jsou shodné. — *Návod*: V trojúhelníku APC je polopřímka PB osou úhlu $\sphericalangle APC$.

3. V rovině je dána přímka a na ní čtyři různé body A , B , C , D tak, že bod B leží mezi body A , C a bod C mezi body B , D . V dané rovině sestrojte bod P , který má tu vlastnost, že úhly $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$, $\sphericalangle CPD$ jsou shodné.

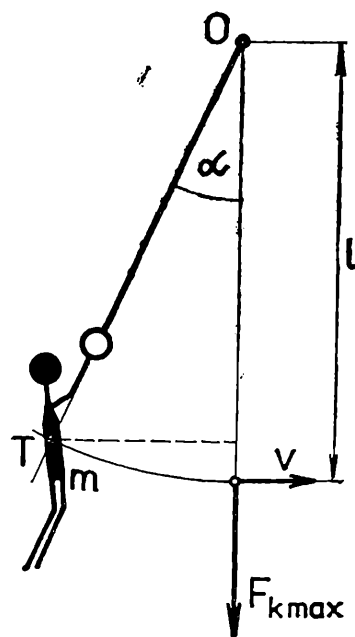
fyzika

Síly při cvičení na gymnastickém nářadí

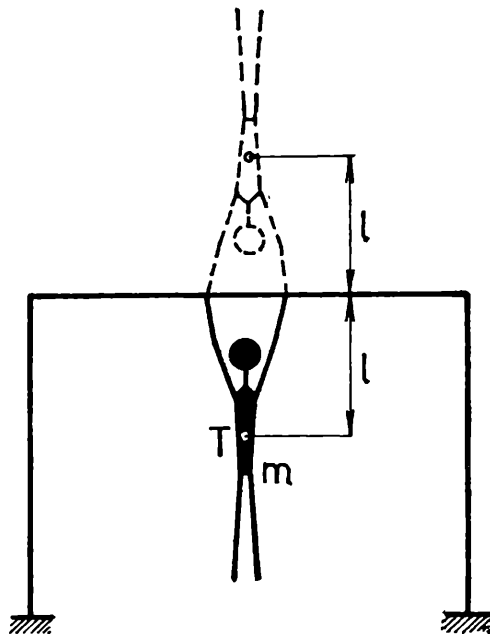
DOC. ING. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., Vysoká voienská škola, Vyškov

Při cvičení na gymnastickém nářadí působí na cvičence vedle tíhové síly ještě dynamické síly, které tíhovou sílu mohou několikrát převyšovat. Protože z fyzikálního hlediska jde o zajímavé problémy, všimneme si jich blíže. Omezíme se přitom na výpočet maximální síly při *kyvech na kruzích* a při *veletoči na hrazdě*. Řešení lze provést jednak zjednodu-

Obr. 1



Obr. 2



šeně, nahradíme-li cvičence hmotným bodem v těžišti, jednak přesněji, budeme-li cvičence považovat za fyzikální těleso s příslušným momentem setrvačnosti.

a) Zjednodušené řešení

Hmotnost cvičence m redukuje do jeho těžiště. Budeme řešit maximální sílu při kyvech na kruzích a ukážeme, že sílu při veletoci dostaneme jako zvláštní případ kyvů na kruzích.

Vzdálenost těžiště cvičence od bodu uchycení lan kruhů označíme l (obr. 1). Největší síla bude na cvičence působit v dolní úvrati; bude to síla tíhová zvětšená o sílu odstředivou:

$$F_{k \max} = mg + m \frac{v^2}{l}. \quad (1)$$

Velikost odstředivého zrychlení určíme z rozboru energie: potenciální energie v horní úvrati (při vychýlení o úhel α) se musí rovnat kinetické energii při průchodu rovnovážnou polohou. Tedy

$$mgl(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} m v^2; \quad (2)$$

odtud

$$\frac{v^2}{l} = 2g(1 - \cos \alpha).$$

Po dosazení do (1) vychází

$$F'_{k \max} = m g(3 - 2 \cos \alpha). \quad (3)$$

Při veletoci na hrazdě (obr. 2), při němž se cvičenec v horní úvrati na

okamžik zastaví, vypočteme maximální sílu jako zvláštní případ výrazu (2), neboť $\alpha = \pi$. Pak

$$F'_{v \max} = 5mg. \quad (4)$$

b) *Přesné řešení*

Cvičenec má kromě hmotnosti m ještě moment setrvačnosti I_0 vzhledem k ose procházející jeho těžištěm kolmo na rovinu kyvu. Při pohybu koná pohyb složený z postupného a rotačního pohybu. Pak jeho kinetická energie při průchodu rovnovážnou polohou bude

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2,$$

kde

$$\omega = \frac{v}{l}$$

je úhlová rychlost a v postupná rychlost cvičence při průchodu rovnovážnou polohou.

Místo rovnice (2) musíme tedy psát

$$mgl(1 - \cos \alpha) = \frac{v^2}{2} \left(m + \frac{I_0}{l^2} \right).$$

Odtud

$$\frac{v^2}{l} = 2g \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \frac{I_0}{m l^2}}.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

$$F_{k \max} = mg \left(1 + 2 \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \frac{I_0}{m l^2}} \right). \quad (5)$$

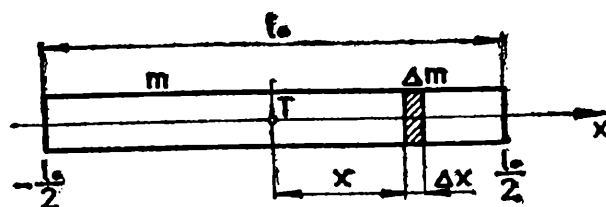
Pro případ veletoce na hrazdě ($\alpha = \pi$) vychází

$$F_{v \max} = mg \left(1 + \frac{4}{1 + \frac{I_0}{m l^2}} \right). \quad (6)$$

Problémem pro užití výrazů (5) a (6) zůstává neznalost momentu setrvačnosti I_0 těla cvičence v poloze, při které prochází rovnovážnou polohou. Přesný výpočet není možný, avšak I_0 lze dostatečně přesně určit experimentálně — např. užitím teorie kmitů obecného kyvadla. Použijeme „houpačky“, na niž postavíme zkoumaného cvičence do určité polohy (odpovídající určitému cviku), změříme dobu kmitu T a uijeme vztah pro úhlovou frekvenci obecného kyvadla:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgl + m_1gl_1}{(I_0 + ml^2) + (I_1 + m_1l_1^2)}},$$

Obr. 3



kde l je vzdálenost těžiště těla cvičence od závěsu houpačky, m hmotnost houpačky, I_1 moment setrvačnosti houpačky vzhledem k ose procházející jejím těžištěm kolmo k rovině kyvu a l_1 vzdálenost jejího těžiště od závěsu. Aby určení I_0 bylo dostatečně přesné, musí být vzdálenost l malá (menší než rozměry postavy) a houpačka lehká.

Moment setrvačnosti houpačky I_1 a vzdálenost jejího těžiště l_1 můžeme určit výpočtem nebo na základě měření doby kmitu prázdné houpačky a houpačky se závažím. Podobně polohu l těžiště těla cvičence (pokud ji neurčíme statickým měřením) určíme společně s I_0 dvojím měřením, přičemž při druhém měření přidáme na houpačku ke cvičenci závaží.

Pro přibližné analytické posouzení velikosti sil podle výrazů (5) a (6) a pro jejich srovnání s výrazy (3) a (4) předpokládejme, že v prvním přiblížení je tělo cvičence *štíhlý válec* hmotnosti m a délky l_0 , rovné délce cvičence se vzpaženými pažemi.

Moment setrvačnosti elementu tyče (obr. 3) je

$$\Delta I_0 = \Delta m x^2,$$

kde

$$\Delta m = \frac{m}{l_0} \Delta x.$$

Rozdělíme-li polovinu tyče na n dílů, bude mít element délku

$$\Delta x = \frac{l_0}{2n}$$

a i -tý element bude mít od těžiště vzdálenost

$$x = i \Delta x.$$

Pak

$$\Delta I_0 = \frac{m l_0^2}{8n^3} i^2$$

a tyč jako celek (složený ze dvou polovin) bude mít moment setrvačnosti

$$\begin{aligned} I_0 &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{m l_0^2}{8n^3} i^2 = \frac{m l_0^2}{4n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= \frac{m l_0^2}{4n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{m l_0^2}{24} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Výpočet bude tím přesnější, čím větší bude n . V limitě pro $n \rightarrow \infty$ dostaneme

$$I_0 = \frac{ml_0^2}{12}. \quad (7)$$

K témuž výsledku dojdeme rychleji užitím integrálního počtu. Pro moment setrvačnosti nekonečně tenkého elementu tyče platí

$$dI_0 = x^2 dm = \frac{m}{l_0} x^2 dx.$$

Integrací v mezích $-\frac{l_0}{2}, \frac{l_0}{2}$ dostaneme

$$I_0 = \frac{m}{l_0} \int_{-\frac{l_0}{2}}^{\frac{l_0}{2}} x^2 dm = \frac{m}{3l_0} \left[\left(\frac{l_0}{2} \right)^3 - \left(-\frac{l_0}{2} \right)^3 \right] = \frac{ml_0^2}{12}$$

ve shodě se (7).

Dosadíme-li výsledek (7) do (5), bude mít maximální síla při kyvech na kruzích velikost

$$F_{k \max} = mg \left[1 + 2 \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{l_0}{2l} \right)^2} \right]. \quad (8)$$

Při veletoci na hrazdě bude $l = \frac{l_0}{2}$; pak po dosazení (7) do (6) dostaneme

$$F_{v \max} = mg \left(1 + \frac{4}{1 + \frac{1}{3}} \right) = 4mg. \quad (9)$$

Srovnáme-li přesné výsledky (5) a (6) resp. (8) a (9) s přibližnými výsledky (3) a (4), vidíme, že přesné řešení dává menší hodnoty. Je to dáno tím, že potenciální energie se nemění jen na kinetickou energii postupného pohybu, ale i na kinetickou energii rotačního pohybu cvičence. Skutečné hodnoty maximálních sil budou větší, než dávají výsledky (8) a (9), avšak menší než podle výsledků (3) a (4). Ukázal by to přesnější výpočet, při kterém bychom tělo nahradili třemi rozdílnými válci: paže — trup s hlavou — nohy.

Pro posouzení číselných hodnot sil uvažujme cvičence o hmotnosti $m = 70,0$ kg a pro případ kruhů vzdálenost těžiště $l = 2l_0$ a úhel $\alpha = 45^\circ$. Pak

$$\begin{aligned} F_{k \max} &= 1081 \text{ N}, & F'_{k \max} &= 1089 \text{ N (chyba } + 0,74 \% \text{)}, \\ F_{v \max} &= 2747 \text{ N}, & F'_{v \max} &= 3436 \text{ N (chyba } + 25 \% \text{)}. \end{aligned}$$

O některých aplikacích kosmonautiky IV

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Také dnes zůstaneme ještě u kosmické technologie. Předěšlou úvahu o významu mezimolekulárních sil zakončíme zjištěním, že v podmínkách kosmického vakua bude možno „svařovat“ materiály za studena prostě tím, že dvě dostatečně hladké desky prostě přiložíme k sobě; protože mezi nimi nebudou překážet atomy plynu, může se podařit vzájemné spojení desek prostým „přilnutím“. Výsledek bude ovšem lepší než v případě sebelepšího normálního svařování; první pokusy v tomto směru již prováděli sovětští kosmonauti.

Nebudeme zvlášť rozvádět výrobu přesných kuličkových ložisek, protože jsme o tom psali již dříve v samostatném článku. Pouze k tomu dodáme, že odváženým množstvím plynu vstříknutého dovnitř kulovité taveniny docílíme toho, že vyrobené kuličky budou uvnitř přesně soustředně duté. Odchyłky od dokonalého tvaru budou minimální a prakticky nezávislé na poloměru koule; bude tedy možno vyrábět přesné kuličky i do velkých ložisek, čímž se např. mnohonásobně prodlouží doba použitelnosti vrtulníků, v nichž právě dnešní závěsná ložiska hlavní vrtule se vlivem nepřesností rychle opotřebovávají. Rovněž se „kosmická“ ložiska vydatně uplatní v obřích radarech; bylo vypočteno, že celková doba jejich použitelnosti bude ve srovnání s ložisky dosavadními nejméně desetinásobná.

Ze všeho nejdůležitější však patrně bude možnost zcela přesně určovat žádanou hustotu strukturálních materiálů, protože tím odpadne potřeba sestavování konstrukcí z mnoha malých součástí o vysoké hustotě jen proto, aby bylo dosaženo potřebné pevnosti. Je docela dobře možné, že snížení výrobních nákladů vyrovná výdaje, spojené s dopravou a zpracováváním sypkého materiálu na oběžné dráze. Příroda dosahuje nejlepších výsledků při uspořádání hustoty organických materiálů normálním růstem; přirozeným způsobem vzniká z týchž prvků téměř nekonečné množství rozdílných struktur. Zdá se, že výrobní procesy ve stavu beztlíže přiblíží člověka k podobným výsledkům při práci s materiály neorganickými. Snad nejpřevratnější změnou v úvahách a výpočtech při projektování různých zařízení pro oběžnou dráhu bude nepřítomnost „mrtvé“ váhy. V pozemském prostředí dostaly budovy, mosty a stroje své běžné tvary pouze proto, že jejich „mrtvá“ váha je důležitým činitelem. V kosmickém prostoru bude moci být stroj či budova desettisíckrát až stotisíckrát objemnější prostě proto, že vlastní tíha bude zcela zanedbatelná či spíše vůbec odpadne.

Tak např. zcela odpadnou jednotlivá podlaží — vše bude moci být instalováno ve „volném“ prostoru. Již dnes se v jednom světovém

kosmickém středisku vyvíjí mechanismus, který by mohl přesouvat jednotlivá zařízení z místa na místo. Také v kosmických kancelářích bude více místa — vždyť co se nevejde na „podlahu“, může být klidně instalováno na „zdi“ nebo dokonce na „stropě“ či kdesi uprostřed ohraničeného prostoru. V kosmickém prostoru bez tíže je takovéto řešení nejen možné, ale dokonce zcela ekvivalentní způsobům, odvozeným na základě běžných pozemských zkušeností.

Zcela nezvyklá je také představa, že zde na Zemi již na leckteré pokusy nemáme dostatek místa. Tak např. bude mnohem výhodnější provádět některé jaderné procesy na oběžné dráze a nikoli přímo na Zemi. Dělení izotopů si vyžádá vakuové zařízení dlouhé až 16 km; takové zařízení se bude ovšem mnohem lépe instalovat v kosmickém beztíží, kde bude možno navíc disponovat mnohem dokonalejším vzduchoprázdňem a dokonce i chlazením. Ve velmi nízkých teplotách bude možno dlouhodobě experimentovat např. se supravodivými materiály. Že se ke slovu dostanou ještě i jiné technologické postupy, o tom si povíme příště v našem posledním technologickém zamyšlení.

0 entropii

Prof. dr. JOZEF SKOTNICKÝ, Košice

Pojem entropie bol od svojho vzniku spájaný s druhou hlavnou vetou termodynamickou a mnohí autori nazývajú druhý hlavný zákon termodynamiky aj zákonom o entropii. Preto musíme hovoriť najprv o oboch súčasne. História termodynamiky a jej druhého hlavného zákona začína spisom francúzskeho inžiniera Sadiho Carnota z roku 1824: „Úvahy o pracovnej schopnosti ohňa (tepla) a o strojoch vhodných na jej využitie.“ Spis vyšiel v dobe, kedy vďaka vynálezu parného stroja ľudstvo sa oslobodilo od otrockej práce a začínala epocha industrializácie výroby, takže technická verejnosť mala záujem na zdokonalení parného stroja. Aj francúzska Akadémia prírodných vied vypísala r. 1793 cenu na tému: „Teoretická analýza účinnosti parných strojov“.

Carnotov teoretický parný stroj konal prácu tým, že teplo klesalo z teplejšieho telesa na studenšie. Carnot prišiel na túto myšlienku analogizovaním vtedy bežného „tepelného fluida“ s vodou, lebo stroje poháňané padajúcou vodou boli dávno známe. Carnotova práca zostala 10 rokov nepovšimnutá a až po jeho predčasnej smrti zpracoval jeho myšlienky kvantitatívne-matematicky druhý francúzsky inžinier E. Clapeyron, ktorý uviedol diagram Carnotovho kruhového deja. Ale vlastné energetické zpracovanie tohoto cyklického procesu sa podarilo až r. 1850

zürichskému R. Clausiovi. Vtedy bol práve objavený zákon o zachovaní energie, a tak mohol Clausius ukázať, že nie všetko teplo, ktoré opúšťa teplejšie teleso, prechádza na teleso studenšie, a že práve rozdiel oboch sa mení na užitočnú prácu, ktorá je tým väčšia, čím je väčší teplotný rozdiel oboch telies. Tak bola nakoniec správne určená pracovná schopnosť tepla resp. tepelných lázní (rezervoárov), ako to kvalitatívne správne formuloval už Carnot vo svojom spise.

Ďalšou zásluhou Carnotovou bolo, že upozornil prírodovedcov na kruhové procesy. Aj v tom ho nasledoval Clausius, ktorý vyšetroval zmeny vlastností systémov pri rôznych kruhových dejoch; čoskoro našiel, že mnohé sa nemenia, keď systém sa vráti do pôvodného stavu: k týmto patrí hmota, objem, teplota a aj vnútorná energia, ale nie teplo a vykonaná práca. Pri dôkladnej analýze kruhových dejov a systematickom hľadaní ďalších stavových vlastností látok našiel Clausius čoskoro a čiste matematicky, že aj kvocient Q_{rev}/T sa chová ako stavová veličina. Čoskoro poznal význam svojho objavu a nazval tento kvocient najprv „Verwandlungsinhalt“ a neskôr entropiou podľa gréckeho „entrepein“ = = obracať, meniť.

Celkovú zmenu nejakej veličiny po uzavretej kruhovej dráhe vyjadrujeme matematicky pomocou kruhového integrálu $\oint$ a tento je teda u stavových vlastností látok rovný nule; s tým súvisí aj skutočnosť, že diferenciál stavových vlastností je totálny. S týmito kvantitatívnymi vlastnosťami pripojila se teda entropia k vnútornej energii, a tak mohla byť v druhej polovici minulého storočia vybudovaná fyzikálna termodynamika. Takto na základe analýzy cyklického procesu podarilo sa už r. 1836 Clapeyronovi a neskôr r. 1850 aj Clausiovi formulovať prvú termodynamickú rovnicu po nich nazvanú o tlakovej zmene bodu tuhnutia a bodu varu kvapalín.

Prácami Clausiovými vyrástla entropia na termodynamickú kategóriu prvoradého významu, a preto sa mnohí termodynamikovia neuspokojovali s entropiou ako s obyčajným matematickým kvocientom, ktorým aj bola podľa svojho vzniku, ale snažili sa predstaviť ju ako prírodovedckú veličinu. Ale ich snahy nemali veľký úspech, lebo v literatúre nachádzame objasnenia a definície entropie len sporadicky a aj to veľmi rozdielne:

W. Baker: Entropia je súradnicou teploty tepla (coordinate with the temperature of heat) (Inchley's theory of heat engines, Longmans, Green, London 1944).

Oxford concise dictionary: Entropia je mierou nepoužitelnosti teplotnej zmeny systému pre premenu na mechanickú prácu.

Webster's new collegiate dictionary: Entropia je matematický faktor, ktorý je mierou nepoužitelnej energie v termodynamickom systéme (G. C. Merriam Co, Springfield, USA, 1949).

R. Brdička: Entropia je účelne definovaná termodynamická veličina,

zavedená R. Clausioma r. 1854, ktorá sa užíva k vyjadreniu degradácie energie pri rôznych fyzikálnych a chemických dejoch (Základy fyzikální chemie, s. 244, Praha 1952).

S. Glasstone: Entropia sa priamo popisuje ťažko, a preto sa najlepšie definuje spôsobom svojho vzrastu v systéme, tak ako tento možno merať (Textbook of physical chemistry, s. 224, 1950 a Thermodynamics for chemists, s. 143, 1955, Van Nostrand Co).

G. N. Lewis, M. Randall, s. 115: Pri bežnej definícii entropie je naša pozornosť sústredená na reverzibilný proces, a nie na irreverzibilný, ale práve tento vyžaduje predstavu entropie. S. 119: Je dôležité jasne vidieť, že existencia irreverzibilných procesov vyžaduje pojem entropie a reverzibilné procesy sme tu uvádzali len kvôli pohodlnému meraniu zmien entropie. S. 444: Entropia je veličina definovaná kvôli matematickému vyjadreniu druhého zákona termodynamiky. S. 110: Druhý zákon termodynamiky, ktorý je známy aj ako zákon o rozptyle a degradácii energie, alebo ako zákon o vzraste entropie, bol vyvinutý temer súčasne s prvým zákonom... Ale stihol ho iný osud, lebo žiadnym rozumným spôsobom nemohol splynúť s našim myslením a predsudkami (Thermodynamics and the free energy of chemical substances, Mc Graw-Hill, 1923).

K. Jellinek: Zatiaľ čo zákon o zachovaní energie je pre súčasnú generáciu už veľmi ľahko pochopiteľný, neplatí to vôbec pre zákon o vzraste entropie; jeho plné pochopenie môže byť dosiahnuté len pomocou jeho četných aplikácií a dlhodobého zaoberania sa s ním (Lehrbuch der physikalischen Chemie I., s. 64, 1928).

G. Falk, W. Ruppel, s. 281: Entropiu môžeme považovať za mieru použiteľnosti a tým vôbec za mieru hodnoty energie v systéme. Energia je technicky tým hodnotnejšia, čím menšia entropia ju doprevádza. S. 247: S entropiou môžeme narábať ako so substanciou, ktorú fyzikálny systém vždy prijíma alebo odovzdáva, keď prijíma alebo odovzdáva energiu vo forme tepla. S. 366: Druhú hlavnú vetu sme formulovali za pomoci entropie ako princíp o nemožnosti zničenia entropie (Energie und Entropie, 1976, Springer Verlag, Berlin).

Z týchto sporadických citátov vidno, že autori sa definícii entropie často vyhýbajú a obyčajne sa uspokojujú s údajmi o jej meraní. Pokiaľ však sú nútení k tejto definícii z dôvodov pedagogických alebo popularizačných, tak majú ich definície miestami dosť fantastické znenie. Mnohí autori označujú tiež zákon o vzraste entropie za druhý hlavný zákon termodynamiky, čo ale znamená, že druhý, zatiaľ len ťažko srozumiteľný zákon, je objasňovaný ešte ťažšie pochopiteľným pojmom entropie a naopak. Tým sa vytvára circulus vitiosus, z ktorého ťažko nájsť východisko a ktorý vedie ešte k ďalšiemu zahmleniu oboch pojmov, takže Lewis-Randall na s. 109 svojho diela označujú entropiu ako postrach mnohých študentov.

Existuje ešte jedna „štatistická“ definícia entropie, pochádzajúca od L. Boltzmannu z r. 1877, podľa ktorej entropia je rovná logaritmu pravdepodobnosti stavu systému. Z tejto definície vyplýva každému už a priori známy vývod, že systémy sa spontánne usporadúvajú do pravdepodobnejšieho stavu, ktorý však u makroskopických systémov sa len podľa tejto poučky bohužiaľ nedá a priori zistiť. Mimo to Boltzmannova poučka nesedí ani matematicky, lebo zo vzrastu pravdepodobnosti vyplývajú z Boltzmannovho vzorca pre entropiu len kladné hodnoty. Mnohé látky, najmä ióny, majú ale záporné hodnoty entropie, čo Boltzmannova koncepcia nevysvetľuje. Táto existencia záporných entropií látok je pre súčasnú termodynamiku veľmi nepríjemná, lebo Lewis-Randall v svojom spise na s. 447 píše: Na základe jestvujúcich experimentálnych výsledkov veríme, že môžeme generalizovať a tvrdiť, že žiadna skutočná látka nemôže mať zápornú hodnotu entropie. Ďalej veríme, že si ani nemožno predstaviť látku, ktorá by mohla mať zápornú entropiu. A tak na miesto staršieho matného a beztvareho pojmu entropie prichádzame k predstave entropie ako kladnej veličiny, lebo podľa tohoto hľadiska záporná entropia neznamenalaby viac než záporná hmota alebo záporný objem. Ak prijmemo názor, že entropia je logaritmom pravdepodobnosti, potom táto pravdepodobnosť musí byť tak definovaná, aby bola vždy väčšia než jednotková.

Historické údaje o entropii a druhej hlavnej vete termodynamiky môžeme zakončiť slovami technického termodynamika Z. Ranta z poslednej doby: Druhá hlavná veta nedá sa tak priamo formulovať ako prvá. Uvádza sa väčšinou v dvoch známych formuláciach Clausiovej a Thompsonovej. Jestvuje však ešte rad ďalších formulačných možností. Ale zdá sa ak logicky, tak esteticky neuspokojivým, že tak dôležitý a všetko prírodné dejstvo ovládajúci základný zákon, akým je druhý hlavný zákon termodynamiky, sa nedá formulovať jednoduchým a silným výrokom, ale môže byť formulovaný viacerými medzi sebou rovnocennými, ba dokonca komplikovanými výpoveďami [Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden 13 (1964) 1148]. •

S týmito názormi slovinského termodynamika Zorina Ranta možno plne súhlasiť už aj preto, že problematika entropie a druhého hlavného zákona dnes už zďaleka nie je taká komplikovaná, ako by sa zdalo z citátov uvedených zhora.

Termodynamika pôvodne pojednávala o premenách tepla v iné formy energie a naopak. Dnes keď nám je známy zákon o zachovaní energie a vieme, že energia sa môže len presúvať medzi systémami a pritom sa prípadne ešte aj transformovať na iné druhy, môžeme termodynamiku resp. energetiku vhodnejšie definovať ako nauku o týchto presuvoch (transportoch) energie. — Štúdiným objektom fyzikov sú telesá a ich sústavy, u chemikov sú to látky a ich sústavy, a keď chceme zahrnúť oboje pospolu, hovoríme krátko o sústavách resp. systémoch.

Konkrétnou termodynamickou úlohou, s ktorou sa najčastejšie stretáme v prírodovede aj technike, je udeliť určitému systému, ktorý si sami volíme a ktorý preto vhodne môžeme označovať ako „ľubovoľný“, určité množstvo energie určitého druhu. Napr. pri výstupe do vyšších poschodí potrebujeme udeliť výťahu (liftu) určitú potenciálnu mechanickú energiu. Túto energiu sa samozrejme nebudeme snažiť vytvoriť z ničoho, ale budeme sa snažiť presunúť ju na onen ľubovoľný systém zo systémov iných, lebo to je jediná možnosť riešenia danej úlohy, najmä keď uvážime, že v prírode sú nashromaždené obrovské zásoby energie, ktoré nijako neubúdajú, nakoľko energia je nezničiteľná, ale ovšem aj nestvoriteľná. V prípade zdviže poháňanej elektromotorom, ktorý dostáva elektrický prúd z hydroelektrárne, získavame energiu vo forme potenciálnej resp. kinetickej energie padajúcej vody a presun tejto energie na zdviž obstarávame strojovým zariadením: turbína, dynamo, elektrické vedenie a elektromotor. Že pritom dochádza k určitým malým ztratám energie, je pochopiteľné, ale výhoda tohoto strojového zariadenia spočíva v tom, že takto môžeme potenciálnu energiu padajúcej vody presunúť nielen na zdviž, ale aj na iný ľubovoľný systém a v ľubovoľnej forme.

Stroje môžeme teda obecne označiť za zariadenia, pomocou ktorých nútime systémy konať užitočnú prácu, tj. presúvať energiu tam, kde ju chceme mať a v želateľnej forme. Padnutá voda je už pracovne menejcenná, odteká ďalej a musí byť nahradzovaná vodou stále znovu zhora pritekajúcou. Strojové zariadenie je však stále to isté a opotrebováva sa len málo, lebo ono prácu nekoná, ono prácu len zprostredkuje. Prácu koná padajúca voda, ktorá sa tým opotrebováva, lebo prechodom cez turbínu ztráca svoju kinetickú energiu a stáva sa pracovne menejcennou, alebo účelnejšie a výhodnejšie povedané: ztráca svoju pracovnú schopnosť. Voda z vrchov ztekajúca nevie totiž, či poteče cez turbíny alebo volne v svojom koryte. V prvom prípade sa jej pracovná schopnosť účelne a užitočne využije, v druhom sa prakticky ztráca, lebo kinetická energia vody podmýva brehy koryta a zbytočne zohrieva aj vodu samotnú (preto tečúca voda zamrzá ťažšie než stojatá). Čiastočný pojem „schopnosť“ označuje teda tieto okolnosti a skutočnosti veľmi výstižne, lebo a priori vystihuje „pracovnú schopnosť“ vody (systému) bez ohľadu na to, či sa táto vlastnosť systému následne využije alebo nie.

S podobnými pracovnými pomermi ako v predošlom prípade sa stretáme aj pri práci výbušných strojov. U týchto prácu konajú vybuchujúce benzínové pary, ktoré po vykonanej práci úplne ztrácajú svoju pracovnú schopnosť, sú preto vyfukované a musia byť nahradzované novými. Sám výbušný motor len núti benzínové pary k užitočnej práci, lebo pri výbuchu na voľnom priestranstve by sa ich pracovná schopnosť ztratila, resp. nevyužila účelne.

Elektromotor dvíhajúci výťah nemusí byť poháňaný elektrickým prú-

dom z hydroelektrárne, môže to byť aj z akumulátorovne. Chemické látky zostavené do galvanických článkov presúvajú svoju vnútornú (chemickú) energiu do vonkajšieho elektrického okruhu, a keď je v tomto okruhu zapojený miesto obyčajného odporu (elektrická pec) elektromotor, vybavuje sa v ňom chemická energia nie vo forme tepla, ale ako mechanická kinetická energia.

Pracovný proces galvanických článkov je ovšem složitejší než u padajúcej vody, lebo v oboch prípadoch sa síce do výťahu presúva vnútorná energia ak chemických látok, tak vody (potenciálnu energiu vody možno považovať za vnútornú energiu systému voda-zemeguľa), ale chemické látky mimo to presúvajú do zdviže vo forme jej potenciálnej energie aj určité množstvo tepla, ktoré naberajú zo svojho okolia, takže ich pracovná schopnosť ΔA je dvojaká: vnútorná ΔU s vlastným energetickým podkladom ΔU a vonkajšia resp. „entropická“ Q , ktorá práve určuje, koľko tepla môžu látky zo svojho okolia nábrať a premiestiť do výťahu:

$$\Delta A = A_1 - A_2 = \Delta U + Q = U_1 - U_2 + Q. \quad (1)$$

Schopnosť naberať z okolia teplo a premiestňovať ho vo forme inej energie do ľubovoľných systémov za pomoci strojov majú všetky látky bez rozdielu: plynne, kvapalné, tuhé aj rozpustené v roztokoch; nemajú ju samozrejme všetky rovnakú a jej veľkosť nemôže ovšem určovať okolie látok, kde je tepla vždy dosť, ale musí ju určovať určitá vlastnosť látok za toto teplo zodpovedná, ktorú práve nazývame „entropiou“ a značíme S . Mimo to možno pomocou Carnotovho cyklu ukázať (viď „Entropický význam Carnotovho cyklu“ [1]), že toto teplo je aj priamo úmerné absolutnej teplote T , takže môžeme písať

$$Q_{\text{rev}} = T(S_2 - S_1) = -T(S_1 - S_2) = -T \Delta S. \quad (2)$$

Index rev pri Q (ktorý sa často zanedbáva) znamená, že látky toto teplo naberajú z okolia len vtedy, keď sú pomocou vhodných strojov nútené konať prácu, tj. premiestňovať energiu, alebo ináč povedané, keď proces prebieha pracovne reverzibilne. Posledná rovnica sa užíva aj k meraniu vzrastu entropie látok ($\Delta S = S_1 - S_2$ je pokles entropie a jej vzrast $S_2 - S_1 = -\Delta S$)

$$-\Delta S = Q_{\text{rev}}/T, \quad \text{resp.} \quad dS = dQ_{\text{rev}}/T \quad (3)$$

Entropia je extenzívna vlastnosť látok, závislá od ich množstva, a preto jako všetky extenzívne vlastnosti málo názorná, aj keď matematicky jednoduchá. Je ovšem samozrejmé, že nikde nie je a priori predpísané, že by sme túto vlastnosť látok, ktorá rozhoduje o resorbovatelnosti látok pre teplo, museli vyjadrovať extenzívne. Úplne rovnakým právom môžeme túto vlastnosť vyjadriť aj intenzívne a pri tom už vopred očakávať, že tento spôsob bude názornejší, lebo intenzívne veličiny sú všeobecne názornejšie než extenzívne. U ideálnych plynov vyjadrujeme reverzibilne a izotermicky resorbované molárne teplo vzťahom

$$Q_{\text{rev}} = T \cdot R \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = -T(S_1 - S_2), \quad (4)$$

kde p_1 je počiatočný a p_2 konečný tlak plynu.

Túto rovnicu možno použiť aj pre zriedené roztoky, kde ovšem p znamená tlak osmotický. Tento je tlak latentný a manifestuje sa len za pracovných podmienok: za prítomnosti poloprepustnej blany alebo v koncentračných a galvanických článkoch. Vzhľadom na svoju skrytosť-latentnosť za bežných nepracovných podmienok musel byť ovšem osmotický tlak najprv objavený — učinil tak Pfeffer r. 1867, ale odvtedy je osmotický tlak všeobecne uznávaný.

Latentný tlak, ktorý sa prejavuje za pracovných podmienok v galvanických článkoch, vykazujú aj látky kvapalné a tuhé, takže rovnicu (4) možno prepísať pre latentné tlaky P všetkých látok

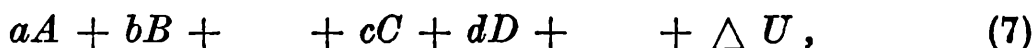
$$Q_{\text{rev}} = T \cdot R \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} = -T(S_1 - S_2), \quad (5)$$

takže vzťah

$$S = -R \cdot \ln P \quad (6)$$

vyjadruje závislosť medzi extenzívnym (S = molárna entropia) a intenzívnym (P = latentný tlak) vyjadrením onej vlastnosti látok, ktorá určuje veľkosť resorbovateľného tepla za pracovných-reverzibilných podmienok. Táto rovnica ukazuje tiež, že z hľadiska latentných tlakov záporná entropia je práve tak prípustná a prirodzená ako kladná.

Keď sa jedná o sústavu látok, medzi ktorými prebieha chemická reakcia



potom pracovná schopnosť tejto sústavy v exotermickom smere bude podľa rovnice (1) daná vzťahom

$$\Delta A = aA_A + bA_B + \dots - cA_C - dA_D - \dots, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{a teda } \Delta A &= \Delta U + Q = \Delta U - T \Delta S = \Delta U + RT \Delta n_i \ln P_i \\ &= aU_A + bU_B + \dots - cU_C - dU_D - \dots \\ &\quad - T(aS_A + bS_B + \dots - cS_C - dS_D - \dots) \\ &= \Delta U + RT(a \ln P_A + b \ln P_B + \dots - c \ln P_C - \\ &\quad - d \ln P_D - \dots) \\ &= \Delta U + RT \ln K, \end{aligned} \quad (9)$$

kde $K = P_A^a \cdot P_B^b \dots / P_C^c \cdot P_D^d \dots$ sa nazýva kvocient latentných tlakov.

Vnútná pracovná schopnosť ΔU púdi chemickú sústavu vždy smerom exotermickým, lebo v tomto smere klesá, ale entropická pracovná schopnosť $-T \Delta S$ resp. $RT \ln K$ púdi sústavu v tom smere, v ktorom sa znižuje produkt latentných tlakov, lebo je pochopiteľné, že látky sa vždy snažia dostať z vyšších tlakov na nižšie, aj keď pri tom musia konať značnú prácu. V tomto zmysle sú teda latentné tlaky látok názornejšie než entropie látok, lebo tvrdiť, že entropická pracovná schopnosť

puď sýstavu v tom smere, v ktorom entropia látok rastie, je málo názorné, a preto aj málo presvedčivé, a už vôbec nevysvetľuje, prečo sú látky pri tom schopné konať aj primeranú prácu.

Analýza veľkosti a smeru entropickej pracovnej schopnosti vedie k vytvoreniu „Energetického mechanizmu chemických reakcií“, ako je tento popísaný v prácach [2] s. 29 a [3] s. 24, 28. Z rovnice (9) vyplýva, že systém môže mať pracovnú schopnosť ΔA , aj keď nemá vlastnú energiu ($\Delta U = 0$), ale jeho látky majú vysoké latentné tlaky, lebo potom prechodom na nižšie môžu látky resorbovať z okolia teplo a toto presúvať za pomoci strojov vo forme inej energie na ľubovoľné systémy. Sem patrí práca ideálnych plynov a ideálnych rozpustených látok, ako ju tieto látky konajú vo váleci s pohyblivým piestom a vo van't Hoffovom osmotickom stroji alebo v plynových a koncentračných článkoch. Entropická pracovná schopnosť $-T \Delta S$ resp. $RT \ln K$ je teda čistá pracovná schopnosť bez energetického podkladu vo vlastnom systéme.

Procesy v chemickej sústave prebiehajú vždy tak, že jej celková pracovná schopnosť

$$\Delta A = \Delta U - T \Delta S = \Delta U + RT \ln K \quad (10)$$

vždy klesá. Túto skutočnosť možno zovšeobecniť pre všetko prírodné dejstvo, lebo možno ukázať, že tento výrok platí aj pre anizotermické deje a že pracovná schopnosť je stavovou vlastnosťou systémov, lebo za vykonanú prácu musí byť vždy nejaký systém zodpovedný (viď „Carnotov cyklus a pracovná schopnosť látok“ [1]). Tak možno dospieť k druhej hlavnej vete termodynamiky: Prírodné dejstvo prebieha vždy v tom smere, v ktorom klesá pracovná schopnosť systémov. Túto vetu možno vyjadriť aj kauzálne vo forme zákona monokauzality: Jednotnou príčinou všetkého prírodného diania je snaha telies, látok a ich systémov po snížení ich pracovnej schopnosti [4].

Z uvedených skutočností vyplýva, že pojem entropie nemá s druhou hlavnou vetou a priori nič spoločné, lebo entropie látok resp. ich latentné tlaky sú len pomocnými veličinami k vyjadreniu ich entropickej pracovnej schopnosti. Sekundárne ovšem vyplýva z poklesu pracovnej schopnosti v priebehu prírodného dejstva, že keď vnútorná pracovná schopnosť ΔU je stála alebo vzrastá, musí klesať entropická pracovná schopnosť a tým potom vzrastá aj entropia látok, resp. klesajú ich latentné tlaky. Keď však naopak vnútorná pracovná schopnosť ΔU spontánne klesá, potom môže entropická pracovná schopnosť stúpať a tým entropia látok spontánne klesať resp. ich latentné tlaky stúpať.

Nakoniec stojí za námahu zamyslieť sa aj nad otázkou, či entropia je vôbec reálnou prírodovedeckou veličinou? Táto otázka je zaiste kacírka z hľadiska súčasnej termodynamiky, ale plne oprávnená, keď porovnáme rovnicu (6) so známym vzťahom medzi koncentráciou vodíkových ionov cH^+ a pH: $pH = -\log cH^+$. V tomto vzťahu cH^+ je reálna prírodovedecká veličina, lebo určuje množstvo vodíkových ionov v určitom

objeme roztoku. PH je však len pomocnou matematickou veličinou, lebo je záporným logaritmom cH^+ a sotva kto by mu prisúdil charakter reálnej prírodovedeckej veličiny. — Ale rovnaký vzťah vyjadruje aj rovnica (6): latentný tlak je prírodovedeckou veličinou, ale je ňou aj jeho záporný logaritmus? Pojem pH nemožno pochopiť bez predchádzajúceho vysvetlenia cH^+ . Možno pochopiť entropiu bez predchádzajúceho poznania latentného tlaku? Je teda pravdepodobné, že nie oba tieto pojmy, aj entropia aj latentný tlak sú reálnymi prírodovedeckými veličinami, pravdepodobne len jeden z nich, ale ktorý?

Literatura

- [1] Rozhledy mat. fys. 43 (1964/65) 358—367
- [2] Sborník VŠT Košice (1957) 19—36
- [3] Sborník Lek. fak. Košice 28 (1971) 3—49
- [4] Rozhledy mat. fys. 52 (1973/74) 376—380

astronomie

Hertzprungův - Rusellův diagram

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Zdrojem všech poznatků o hvězdách je elektromagnetické záření, které vysílají. Již při pozorování hvězdné oblohy pouhým okem si můžeme povšimnout nejen velmi nápadných rozdílů v jasnostech hvězd, ale také rozdílů v jejich barvách. Jasnost hvězdy je charakterizována termínem „hvězdná velikost“. Tento historicky vzniklý termín nemá ovšem nic společného s rozměry hvězdy; podle definice vyjadřuje zdánlivá hvězdná velikost intenzitu osvětlení, vyvolaného hvězdou na rovině, proložené pozorovacím místem a kolmé k dopadajícím paprskům. Zdánlivá hvězdná velikost závisí nejen na množství záření, vysílaného hvězdou, ale také na vzdálenosti hvězdy. Intenzita záření klesá s druhou mocninou vzdálenosti, proto se hvězda jeví tím méně jasná, čím je vzdálenější. Aby bylo možno porovnávat skutečné jasnosti různých hvězd, byla definována absolutní hvězdná velikost M jako hvězdná velikost, přepočtená na vzdálenost 10 parseků. Známe-li skutečnou vzdálenost r hvězdy a její zdánlivou hvězdnou velikost m , pak z Pogsonovy rovnice plyne pro absolutní hvězdnou velikost vztah

$$M = m + 5 - 5 \log r,$$

do něhož dosazujeme vzdálenost r v parsekách (pc). Pro zajímavost.

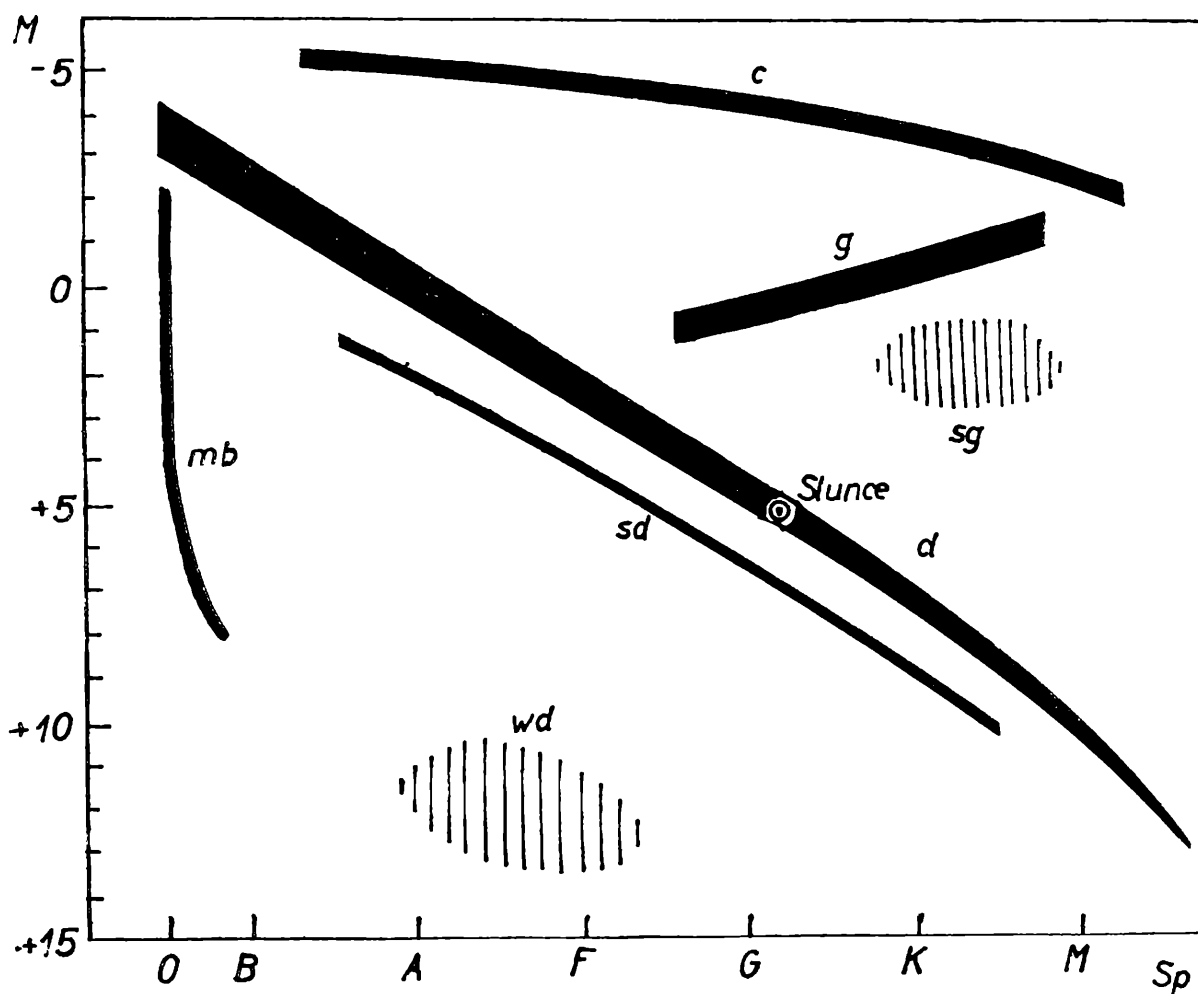
Tabulka I.

Průměrné povrchové teploty hvězd některých spektrálních tříd

Spektrální třída	$\frac{T}{[K]}$	Barva
O5	35 000	} modrobílá
B0	21 000	
B5	13 500	
A0	9 700	} bílá
A5	8 100	
F0	7 200	} žlutobílá
F5	6 500	
G0	6 000	} žlutá
G5	5 400	
K0	4 700	} oranžová
K5	4 000	
M0	3 300	} červená
M5	2 600	

uvedme, že absolutní hvězdná velikost našeho Slunce je asi $+5^M$, takže ze vzdálenosti 10 pc by se tedy Slunce jevilo jako poměrně málo jasná hvězda.

Barvy hvězd souvisejí především s jejich povrchovými teplotami. Chladnější hvězdy se jeví zabarveny červeně, hvězdy s vysokými povrchovými teplotami mají barvu bílou až modrobílou. Podrobnější informace o složení záření, vysílaného hvězdou, poskytuje spektrální analýza světla hvězd. Spektra hvězd pozoroval poprvé *J. Fraunhofer* v roce 1815 hranolovým spektroskopem. Od té doby se vizuálním a později výlučně fotografickým studiem hvězdných spekter zabývalo mnoho badatelů, kteří získali početný pozorovací materiál. S rostoucím počtem prozkoumaných spekter bylo třeba začít s jejich tříděním. Vodítkem přitom je výskyt a intenzita jednotlivých spektrálních čar; hvězdy se dělí na skupiny tak, že určité skupině přísluší spektra v hlavních rysech podobná. Jako nejvhodnější se ukázala tzv. harvardská klasifikace spekter, kterou vypracovali *E. C. Pickering* a *A. Cannonová*. V současné době je podle harvardské klasifikace do spektrálních tříd zařazeno asi 400 000 hvězd. Hlavní spektrální třídy jsou označeny písmeny O, B, A, F, G, K a M. Pořadí je voleno tak, aby byly hvězdy seřazeny podle klesající povrchové teploty; stupnice spektrálních tříd tvoří tedy současně stupnici povrchových teplot a s nimi souvisejících barev hvězd. Ke spektrálním třídám O až M patří 99 % všech hvězd. Před třídu O byla zařazena ještě třída W, zahrnující velmi žhavé hvězdy Wolfovy-



Obr. 1. Schematické znázornění posloupností na Hertzsprungově-Russellově diagramu

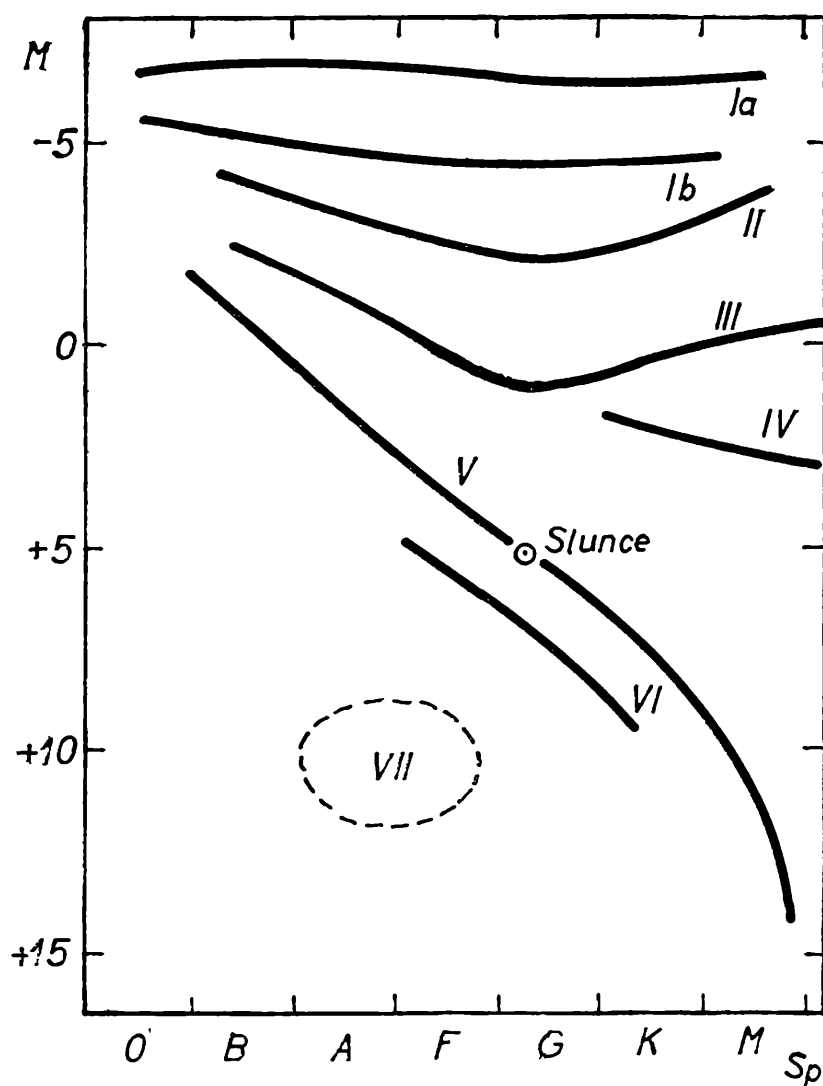
-Rayetovy, u třídy G se z hlavní klasifikační řady odštěpují ještě dvě podružnější třídy R a N a konečně u třídy K se připojuje málo početná třída S.

Hvězdy z hlavní klasifikační řady se dělí na deset podtříd, označených číslicemi 0, 1, ..., 9. Tak např. G0 znamená čistou třídu G, G5 přechodnou třídu mezi G a K, G9 pak třídu jen málo se lišící od třídy K. Naše Slunce je zařazeno do třídy G2. V tab. I uvádíme průměrné povrchové teploty hvězd tříd O až M a s nimi související barvy hvězd.

V roce 1909 objevil astronom *E. Hertzsprung* souvislost mezi spektrální třídou a absolutní hvězdnou velikostí. Diagram, který tuto souvislost znázorňuje, upravil *H. N. Russell*, proto se tento diagram nazývá podle svých objevitelů Hertzsprungův-Russellův diagram.*)

Na vodorovnou osu tohoto diagramu vynášíme spektrální třídy hvězd, na svislou osu jejich absolutní hvězdné velikosti M . Znázorníme-li takto velký počet hvězd, zjistíme, že odpovídající body na diagramu se sesku-

*) Ejnar Hertzsprung (1873–1967), dánský astronom. — Henry Norris Russell (1877–1957), americký astronom. (Výslovnost: hercšprung, rasl).



Obr. 2. Třídý zářivosti na Hertzsprungově-Russellově diagramu podle W. Morgana

pují do určitých pásů, které byly nazvány posloupnosti. Schematicky je Hertzsprungův-Russellov diagram znázorněn na obr. 1.

Nejvýraznější charakteristikou H-R diagramu je seskupení hvězd v pásu od spektrální třídy O a absolutní hvězdné velikosti -5^M ve směru úhlopříčky směrem ke spektrální třídě M a absolutní hvězdné velikosti $+15^M$. Toto seskupení hvězd se nazývá hlavní posloupnost. V oblasti spektrálních tříd G, K, M a absolutní hvězdné velikosti 0^M je patrná další skupina, kterou nazýváme posloupnost obrů. Protože tyto hvězdy mají při stejné spektrální třídě mnohem větší absolutní hvězdnou velikost, musí mít také větší průměr a odtud jejich název obří hvězdy. Další skupinu vytvářejí hvězdy s absolutní hvězdnou velikostí -5^M , které mají ještě větší zářivost než obři, nazýváme je proto veleobry. Nad hlavní posloupností, ale pod větví obrů, je kolem spektrální třídy K skupina hvězd, které nazýváme podobři; jejich absolutní hvězdná velikost je asi $2,5^M$. V oblasti spektrálních tříd A, F a absolutní hvězdné velikosti $+12^M$ je poměrně málo početná skupina bílých trpas-

Tabulka II.
Charakteristiky spektrálních tříd

Spektrální třída	Popis spektra	Příklady
W	hvězdy Wolfovy-Rayetovy; na intenzivním spojitém spektru jsou široké emisní čáry, především vodíku, neutrálního a ionizovaného hélia	λ Cephei ϵ a δ Orionis
O	na intenzivním spojitém spektru absorpční čáry ionizovaného hélia	
B	héliové hvězdy; absorpční čáry neutrálního hélia, Balmerovy série vodíku a ionizovaného kyslíku	
A	vodíkové hvězdy; absorpční čáry vodíku jsou velmi silné. Vyskytují se početné, ale slabé a tenké čáry	Sírius, Vega
F	čáry vodíku slábnou a zesilují se čáry vápníku a kovů	Procyon
G	absorpční čáry vápníku dosahují největší intenzity, také čáry kovů jsou intenzivní; vodíkové čáry jsou dosud patrné	Slunce, Capella
K	nejsilnější jsou čáry kovů, počínají se objevovat absorpční pásy molekul; čáry vodíku jsou dále zeslabeny	Arcturus
M	nejvýraznější jsou pásy molekul, zejména TiO; mnoho absorpčních čar železa	Betelgeuze, Antares
R	pásy uhlovodíkových sloučenin, tzv. uhlíkové hvězdy	19 Piscium
N	spektrum je podobné spektru hvězd třídy M; místo absorpčních pásů sloučenin titanu jsou pásy sloučenin uhlíku	
S	zirkonové hvězdy, podobné třídě M, ve spektru se pozorují pásy ZrO	

líků. Jsou to hvězdy, které mají malý průměr a malou zářivost. V r. 1938 objevil *G. P. Kuiper* posloupnost podtrpaslíků, kteří jsou spektrálních tříd A až M, ale o 1^M až $2,5^M$ méně jasní než hvězdy hlavní posloupnosti. Konečně v r. 1947 upozornil *B. A. Voroncov-Veljaminov* na možnou existenci tzv. modrobílé posloupnosti hvězd, která je v oblasti hvězd spektrálních tříd O od -5^M až do $+5^M$.

V roce 1943 navrhl *W. W. Morgan*, aby se k označení spektrální třídy připojila ještě římská číslice, která by označovala posloupnost, na níž je daná hvězda v H-R diagramu. Toto označení nyní jednoznačně určuje polohu hvězdy (obr. 2). Podle Morgana se používají tyto třídy zářivosti:

- Ia — velmi jasní veleobři (např. Rigel, β Orionis)
- Ib — méně jasní veleobři (např. Antares)

- II — jasní obři (σ Orionis)
- III — normální obři (Capella, α Aurigae)
- IV — podobři (Procyon, α Canis Minoris)
- V — trpaslíci, hvězdy hlavní posloupnosti (Slunce)
- VI — podtrpaslíci (Kapteynova hvězda)
- VII — bílí trpaslíci (Sirius B)

K bližšímu popisu spektrálních tříd se užívají buď předpony, anebo přípony:

Předpony vyjadřují odlišné druhy hvězd stejné spektrální třídy: c — veleobr, g — obr (giant), sg — podobr (subgiant), d — trpaslík (dwarf), sd — podtrpaslík (subdwarf), wd — bílý trpaslík (white dwarf);

přípony blíže popisují vzhled spektra pomocí těchto symbolů: e — emisní čáry, s — úzké a ostré čáry (sharp), n — neostré čáry (nebulous), m — čáry kovů (metallic), v — proměnné čáry (variable), p — neobvyklé a zvláštní spektrum (peculiar).

Charakteristiky jednotlivých spektrálních tříd z fyzikálního hlediska jsou uvedeny v tab. II.

Podrobnější informace o hvězdách na některých posloupnostech Hertzsprungova-Russellova diagramu budou obsahem dalších článků.

různé

Leonhard Euler

(Napsáno k 270. výročí jeho narození)

JOSEF KOTYK, Pardubice

Neobyčejného rozmachu a velkorysého formátu nabyly matematické vědy v 18. století. Přední zásluhu o to má švýcarský matematik a fyzik *Leonhard Euler*, jehož jméno je jedním z nejslavnějších v dějinách.

Eulerův život je příkladem závratné kariéry mladého člověka s nadáním zcela mimořádným, zaníceného láskou k práci a čistou touhou po poznání vědeckých pravd. Narodil se 15. dubna 1707 v Basileji. Za studií, jež konal na universitě v rodném městě, byl jeho učitelem věhlasný *Johann Bernoulli* (1667—1748), člen slavného rodu, který v 17. a 18. století daroval matematickým vědám ve čtyřech generacích osm vynikajících učenců. Již od roku 1727 působil Euler při Akademii věd v Petrohradě. V roce 1741 povolal jej Friedrich II., král pruský, na Akademii věd v Berlíně. Roku 1766 se však Euler vrátil do Petrohradu, kde 18. září 1783 také zemřel.

Eulerova činnost vědecká je opravdu neobyčejná, činnost literární pak přímo podivuhodná. Ztráta oka v roce 1735 a úplné oslepnutí po roce 1766 ji netoliko neohrozily, nýbrž dokonce — možno-li — snad ještě vystupňovaly. Své práce ovšem diktoval.¹⁾ Vynikají obšírností ve vyjadřování, jasností a přirozeností v provádění důkazů. Elegance po stránce obsahové i formální prozrazuje ve všem nadaného a svědomitého vědeckého pracovníka. Hluboká koncepce literárního díla a pečlivost neomezovaly však Eulera v jeho činnosti badatelské. O jeho mimořádných schopnostech svědčí, že v jeho duchovní dílně vznikla světoznámá fundamentální díla matematické analýsy (*Introductio in analysam infinitorum*, 1748), počtu diferenciálního (*Institutiones calculi differentialis*, 1755) a integrálního (*Institutiones calculi integralis*, 1768—1774), mechaniky (*Mechanica sive motus scientia*, 1736) aj. Počet jeho spisů se odhaduje na více než 800.²⁾ Euler zanechal v matematice i ve fyzice své doby trvalou pečeť svého tvůrčího ducha. Četl jsem kdesi o slibu, který Euler dal jednomu šlechtici, že prý zanechá vědě tolik dosud neuveřejněných novinek, aby mohly vycházet ještě 20 let po jeho smrti. Skutečně uveřejňovala petrohradská Akademie pojednání tohoto svého vynikajícího člena ještě v roce 1830. To byl Euler už téměř půl století mrtev! Jakou měrou tento génus předstihl vrstevníky a vývoj, ukazuje nejlépe okolnost, že dodnes není všechna jeho práce snad ještě plně zhodnocena.

Euler vyšetřoval podrobně číslo, jež nabylo v matematické analýze zvláštního významu a právě od dob Eulerových jest označováno *e* (*Eulerovo číslo*); jeho hodnotu (základ přirozených logaritmů)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = 2,718281828459045 \dots$$

si můžeme snadno zapamatovat. Joh. Bernoulli a Euler definovali také již pojem funkce analytickým výrazem, složeným z nezávisle proměnné a konstant; Euler užil také poprvé označení $f(x)$. Studoval zejména vlastnosti funkce exponenciální $y = a^x (a > 1)$, potvrdil, že je spojitá a stále rostoucí v každém intervalu, má tedy také spojitou a stále rostoucí inverzní funkci $x = \log_a y$, logaritmus čísla y při základu a ; oborem proměnné y jsou všechna reálná kladná čísla. Euler má tedy již přesnou představu o logaritmu jako funkci a včleňuje-li logaritmus do nauky o funkcích, činí tak cílevědomě.

K označování imaginární jednotky užíval Euler již roku 1777 dosud užívaného písmene *i*. Také písmeno π pro označení čísla Ludolfova uvedl

¹⁾ Podobný tklivý osud stihl později také českého matematika prof. *Stanislava Vydrů* (1741—1804); o tom, jak tento muž vroucího poměru k českému lidu vykládal *ars mathematica*, vypráví Al. Jirásek v F. L. Věkoví, díl I., stať XIV. „*Cordatus Bohemus*“.

²⁾ Ing. *Juraj Bober*, CSc.: *Malá encyklopédia bádateľov a vynálezcov* (Obzor, Bratislava 1973). Cit. str. 201.

ve všeobecné užívání. V nauce o skupinách zavedl k označení kombinačního čísla $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$ účelný

symbol $\binom{n}{k}$. V jeho slavné knize „Anleitung zur Algebra“, kterou sepsal zcela osleplý a která patří dosud ke klasickým dílům matematickým, shledáváme již také od něho pocházející název rovnic reciprokových. Vtipná je také Eulerova metoda řešení rovnice 4. stupně.

Ve vyšší analýze je Eulerovo jméno hojně uváděno. Není téměř kapitoly, do které by tvůrčí duch Eulerův nezasáhl. Vzpomenu nejprve *Eulerovy konstanty*, po číslech e a π nejdůležitější konstanty analýsy.

Je dána limitou $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+k) \right]$, kde

k je nějaké číslo na n nezávislé; její hodnota je $C = 0,5772156649$, jak Euler vypočetl jako prvý na 14 desetinných míst. Pro výpočet je nejvýhodnější v definici volit $k = \frac{1}{2}$; s prospěchem lze užít asymptotického

rozvoje $C = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m-1} - \ln m \right) + \frac{1}{2m} + \frac{B_1}{2m^2} - \frac{B_2}{4m^4} + \frac{B_3}{6m^6} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{B_{n-1}}{2 \cdot (n-1) \cdot m^{2(n-1)}} + R_n$, kde B_1 ,

B_2 , B_3 , jsou čísla zv. *Bernoulliská*, daná Moivreovým³⁾ vztahem

$\binom{2p+1}{1} \cdot B_p - \binom{2p+1}{3} \cdot B_{p-1} + \binom{2p+1}{5} \cdot B_{p-2} - \dots + (-1)^{p-1} \times \times \binom{2p+1}{2p-1} \cdot B_1 = (-1)^{p-1} \cdot \frac{2p-1}{2}$, a $R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{r \cdot B_n}{2n \cdot m^{2n}}$ tzv.

zbytek ($0 < r < 1$). Připomínám dále *Eulerovu větu pro homogenní funkce* o několika proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$; pro funkci stupně k -tého zní:

$x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} = k \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. V integrál-

ním počtu poskytuje velmi účinný prostředek k numerickým výpočtům

*Euler-Maclaurinův*⁴⁾ vzorec důležitého rozvoje pro $\int_a^{a+h} f(x)dx$; v základním

tvaru zní: $\int_a^{a+h} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)] - \frac{B_1 h^2}{2!} \cdot [f'(a+h) - f'(a)] +$

³⁾ Jméno *Abrahama de Moivre*, Eulerova současníka (†1754), je našim čtenářům spjata s Moivreovou větou $(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha$, jež se však objevuje teprve v Eulerově díle *Introductio*.

⁴⁾ Skotský matematik *Maclaurin Colin* (1698–1746), současník Eulerův, působil na universitě v Edinburghu.

$$+ \frac{B_2 h^4}{4!} \cdot [f'''(a+h) - f'''(a)] - \dots + (-1)^p \cdot \frac{B_p h^{2p}}{(2p)!} \cdot [f^{(2p-1)}(a+h) - f^{(2p-1)}(a)] + R_p; \text{ zbytek } R_p \text{ lze odhadnouti různým způsobem a dáti mu pak i různý tvar podle odvození. Z teorie nekonečných řad uvádím}$$

$$\text{Eulerovu transformaci řady (u níž předpokládáme konvergenci) } S = u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \dots \text{ v řadu } S = \frac{u_1 x}{1-x} - \frac{\Delta u_1 \cdot x^2}{(1-x)^2} + \frac{\Delta_2 u_1 \cdot x^3}{(1-x)^3} - \frac{\Delta_3 u_1 \cdot x^4}{(1-x)^4} + \dots, \text{ kde } x \neq 1 \text{ a } \Delta u_1 = u_1 - u_2, \Delta_2 u_1 = \Delta u_1 - \Delta u_2,$$

$\Delta_3 u_1 = \Delta_2 u_1 - \Delta_2 u_2$, atd., Eulerovy práce o řadě hypergeometrické

$$1 + \frac{a \cdot b}{c \cdot 1} \cdot x + \frac{a \cdot (a+1) \cdot b \cdot (b+1)}{c \cdot (c+1) \cdot 1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot b \cdot (b+1) \cdot (b+2)}{c \cdot (c+1) \cdot (c+2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots, \text{ konvergentní při}$$

$|x| < 1$, mimo to při $x = -1$, jestliže $a + b < c + 1$, a při $x = +1$, jestliže $a + b < c$, a o rozvoích funkcí goniometrických i funkcí k nim inverzních (cyklometrických) v potenční (mocninné) řady, např. $\cos x =$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \text{ konvergentní pro každé } x, \arctg x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \text{ pro } |x| \leq 1 \text{ apod. Celočíselným koeficientům}$$

$$E_k = (2k)! \cdot \frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}} \cdot \left(\frac{1}{1^{2k+1}} - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \dots \right) \text{ rozvoje}$$

$$\frac{1}{\cos x} = E_0 + E_1 \cdot \frac{x^2}{2!} + E_2 \cdot \frac{x^4}{4!} + E_3 \cdot \frac{x^6}{6!} + \dots, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

říkáme Eulerova čísla. Také nekonečným součinům věnoval Euler zvláštní pozornost; součiny platné pro každé x

$$\sin x = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{1^2 \pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}\right) \dots$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2 \pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4x^2}{3^2 \pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4x^2}{5^2 \pi^2}\right) \dots$$

se jmenují Eulerovy. Vzorce $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$, ač byly známy již Joh. Bernoulliho, se označují rovněž jménem Eulerovým; z nich plynoucí vyjádření goniometrických funkcí $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x =$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ patří k fundamentálním vztahům analýsy.}$$

Veliké důležitosti nabyly práce, v nichž Euler vyšetřoval funkce, k jejichž zavedení do analýsy dal podnět počet integrální, zejména loga-

ritmus integrál li $x = \int_0^x \frac{dx}{\ln x}$, jenž při $x > 0$ udává přibližně počet prvočísel menších než x , Eulerův integrál 1. druhu $\int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} \cdot dx$, ($p > 0, q > 0$) a Eulerův integrál 2. druhu $\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} \cdot dt$, jenž jako funkce argumentu $x > 0$ může i žáky středních škol zajímat tím, že se jeví zobecněním pojmu faktoriál⁵⁾; značí se stručně $\Gamma(x)$ a nazývá funkcí gama. Eulerův integrál 1. druhu, nazývaný funkcí beta, značíme stručně $B(p, q)$. Souvislost obou Eulerových integrálů udává vztah $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Po stránce formální nás zajímá kritické stanovisko, jež Euler zaujal k integračnímu znaménku $\int$, zavedenému roku 1675 Leibnizem; vzniklo přeměnou ze sumačního znaménka Σ — Leibniz nazval integrační počet skutečně „calculus summatorius“. Svědčí o důslednosti Eulerova myšlení, prohlašuje-li v „Institutiones calculi integralis“, že znaménko, ač se již vžilo, je nevhodné, neboť nevystihuje pojem integrálu jakožto primitivní funkce, jak byl toho času většinou předmětem úvah. Vývoj šel však zatím k tomu, definovat integrál skutečně limitou součtu (Cauchy 1823. Riemann 1854), čímž bylo teprve s náležitou přesností stanoveno, co Leibniz pouze v obrysech tušil.

Eulerovy klasifikace *diferenciálních rovnic* na „lineární“, „exaktní“ a „homogenní“ užívají elementární učebnice dodnes. Euler se zabýval také integrací parciálních rovnic 1. a 2. řádu a singulárním řešením rovnic. V teorii čísel budiž vzpomenuto zásluh, jichž nabyl řešením rovnic neurčitých, a úspěchů v odůvodnění proslulých vět Fermatových. Roku 1771 se zabýval teorií ortogonálních transformací. Z několika charakteristických úloh Johanna Bernoulliho a jeho staršího bratra Jakoba položil v roce 1744 základy počtu variačnímu.

V druhém svazku Eulerova díla „Introductio“ shledáváme také první, možno říci důsledně analytickou teorii kuželoseček. Euler tu obrátě shrnuje obšírnou a vzorně uspořádanou látku, přináší však i nové výsledky. Předkládá obecnou teorii algebraických křivek a buduje analytickou teorii ploch 2. st. První provádí rozbor obecné rovnice 2. st. ve 3 proměnných a klasifikaci ploch. Překvapuje, že znal i střed těchto ploch, dokonce i v případě, že je bodem nevlastním. Proslavil se krásnou teorií křivosti ploch; vzorec pro křivost normálního řezu ploch nese rovněž jméno Eulerovo (1760).

Z počátků analytické geometrie trojrozměrné je známo, jak provádíme

⁵⁾ Poučení o tom přinesl také článek „Permutace“ Dr. K. Mišoně v Rozhledech matematicko fyzikálních, roč. 54, čís. 3, zejména pak jeho stať „Nahlédnutí za oponu školních osnov“, str. 106.

transformaci souřadnic změnou směru os; devět směrových kosinů, určujících polohu nových os v původní soustavě, vyjadřujeme přitom jednoznačným způsobem třemi čísly, tzv *úhly Eulerovými*.

Po stránce formální přispěl Euler i v geometrii k vnitřnímu ucelení a uvedl ji v nynější jednoduchý a přehledný tvar. Ustálil zejména jednoduchou terminologii a symboliku, jaké se dosud v goniometrii a v trigonometrii užívá; např. dnes požadovaná důslednost v označování stran a úhlů trojúhelníka, tak důležitá pro symetrii vzorců, je jeho dílem. Euler budoval však nejen trigonometrii rovinnou, nýbrž v díle „*Trigonometria sphaerica universa*“ (1782) i sférickou. V ní omezuje své úvahy namnoze na trojúhelníky, mající všechny strany a úhly menší než dva pravé; nazýváme je dodnes zpravidla *trojúhelníky Eulerovými*.

Ve stereometrii nabyla zvučného jména slavná *Eulerova věta o mnohostěnech* (1752): V každém mnohostěnu vypuklém je součet počtu stěn a vrcholů o 2 větší než počet hran. *Mnohostěny*, o nichž platí, jmenují se *Eulerovy*; patří k nim však nejen všechny tvary vypuklé, nýbrž i mnohé vyduté (např. též hranoly a jehlany, jejichž podstavou je vydutý mnohoúhelník), vůbec takové mnohostěny, jejichž každá stěna i celý povrch rozpadá se každým řezem, jdoucím od okraje k okraji nebo uzavřeným, ve dvě nesouvislé části.

V planimetrii platí o poloměrech r , ρ kružnic trojúhelníku opsané a vepsané *Eulerova nerovnost* $r \geq 2\rho$.⁶⁾ Eulerovým jménem označujeme také přímkou, která prochází průsečíkem těžnic, výšek a os stran trojúhelníka. Kružnice devíti bodů, procházející středy stran trojúhelníka, patami výšek a středy úseček, které spojují vrcholy trojúhelníka s jeho orthocentrem, se nazývá někdy rovněž Eulerova; její střed leží na *Eulerově přímce*.

Ve fyzice získal si Euler neobyčejné zásluhy o rozvoj mechaniky. K řešení problémů mechaniky užíval metod matematické analýsy. S Lagrangem a Hamiltonem je Euler předním z budovatelů analytické mechaniky. Z diferenciálních principů dynamiky pochází princip zvaný dnes obvykle *d'Alembertův* v podstatě již od Eulera (1740). Z integrálních principů dynamiky náleží Maupertuisův princip nejmenší akce dosud k nejzákladnějším; avšak teprve Euler a Lagrange mu dali správný a přesný tvar (*princip Maupertuisův-Eulerův*). V roce 1753 se Euler zabýval šikmým vrhem v případě, že prostředí klade hmotnému bodu odpor úměrný druhé mocnině rychlosti (tzv. balistický problém). Roku 1760 podal řešení problému atrakce hmotného bodu dvěma pevnými centry, a to pomocí kvadratur. V kinematice tuhé soustavy hmotných bodů pracoval v roce 1770 na analytickém vyjádření jejího obecného

⁶⁾ Odvodil ji ve stejnojmenném článku St. Horák v *Rozhledech matematicko-fyzikálních*, roč. 53, čís. 9, str. 444 a 445, v obsahu ročníku (str. III.) byl však článek uveden s nadpisem Eulerova konstanta.

přemístění a na parametrickém vyjádření její rotace kolem pevného bodu (*Eulerovy parametry*); dokázal, že rotace tuhé soustavy kolem pevného bodu je rovnocenná její rotaci kolem pevné osy tímto bodem procházející (*věta d'Alembertova-Eulerova*, 1775). O dynamiku tuhého tělesa se zasloužil objevem jeho hlavních os setrvačnosti (1758); jméno pojmu moment setrvačnosti pochází rovněž od něho (1765).

V přehledu, který si ovšem nemůže v omezeném rámci tohoto článku činit nároky na úplnost, ukázal jsem všestrannost Eulerových zájmů a uvedl některé úspěchy, jichž Euler dosáhl v řešení tak mnohých problémů. *Euler byl nesporně vůdčím matematikem své doby*. Velcí matematikové zdůrazňovali proto také neustále svůj dluh vůči němu; jejich práce jsou hluboce poznamenány Eulerovým vlivem. „Lisez Euler! C'est notre maître à tous“ (Čtěte Eulera! Je učitelem nás všech), prohlásil *Laplace*, „Newton Francie“. Studium Eulerova díla zůstalo pak dlouho nejlepší školou pro nejrozumnější oblasti matematických věd.

Matematické myšlení

(K 200. výročí narození Karla Friedricha Gausse)

JOSEF KOTYK, Pardubice

Cílem pěstování matematiky je cvičit se v dovednosti provádět výpočty, grafické práce a v přesném vyjadřování, v obratnosti užívat uvědomělého, jistého, rychlého a úsporného postupu při řešení úloh, na prvním místě však v rozvíjení logického myšlení. Myšlení je největší zábavou lidstva. Pravdivost těchto slov, jež vložil svému Galileovi do úst německý básník *Bertold Brecht* (†1956), můžeme doložit již z pozorování dětí.

V dějinách matematiky se dočítáme o zajímavém příběhu, který se stal v osmdesátých letech 18. století v nižší třídě jedné německé základní školy. Učitel, chtěje žáky zaměstnat na delší dobu, uložil jim sčítat všechna celá čísla od 1 do 100. V krátké chvíli, sotva to dořekl, hlásil však malý Karel: „Už to vím! Součet činí 5050.“ Třída, ač znala bystrost Karlových úsudků, pozorovala v němém úžasu chlapce, podivujíc se pohotovosti, klidu, vnitřní jistotě a sebedůvěře. „Ano“, přerušil ticho učitel. „A jak jsi to tak rychle vypočítal?“ Chlapec vysvětloval: „Sečetl jsem první a poslední číslo dané řady ($1 + 100$), pak druhé a předposlední ($2 + 99$), atd. a všiml jsem si, že vždy dostanu 101. Takových párů se dá utvořit 50. Hledaný součet je tedy roven součinu $101 \cdot 50 = 5050$.“

Vtipné, že ano? Velmi vtipné!

Malí spolužáci Karlovi by se byli na přání svého učitele sčítáním

mechanicky prováděným jistě dlouho zaměstnávali. A pro další srovnání: Mnozí, velmi mnozí žáci dnešní střední školy by řešili danou úlohu pravděpodobně tak, že by se s pohodlím spoléhali na vzorec pro součet členů aritmetické posloupnosti

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2},$$

do něhož by pak už jen (většinou dokonce písemně) dosazovali $a_1 = 1$, $a_n = n = 100$. Očsamostatnější a pronikavější bylo však myšlení malého Karla, jenž pohotově prohlásil, že (dávám jeho výroku algebraickou formulaci) součet

$$s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$$

a vlastním úsilím dospěl k logické podstatě tohoto vzorce? Oč uvědomější byl jeho postup? Oč rychlejší a úspornější bylo i numerické řešení úkolu, jež Karel provedl celé počítáním z paměti?

Čtenáři nebudou zajisté překvapeni, jestliže jim nyní prozradím, že z Karla, jenž vynikal již jako dítě mimořádným nadáním počtářským a vědomostmi v jeho věku neobyčejnými, vyrostl znamenitý matematik, jenž vstoupil s věhlasem myslitele světového jména do dějin. Jeho jméno znáte také z učiva fyziky. Je to *Karl Friedrich Gauss*, pozdější slavný princeps mathematicorum, kníže matematiků, jeden z největších matematiků všech dob.¹⁾ Narodil se dne 30. dubna 1777, právě před 200 lety; když dne 23. února 1855 zemřel, dal Jiří V., král hannoverský, razit na jeho počest pamětní medaili s nápisem: „Georgius V. rex Hannoverae mathematicorum principi.“

Slavný filosof, matematik a fyzik francouzský *Blaise Pascal* (1623 až 1662) stavěl z normativních věd na první místo matematiku a logiku; podle něho mají na morálku člověka dalekosáhlý vliv tím, že učí správnému myšlení. Pascal je oceňuje těmito pamětihodnými slovy: „Všechna lidská důstojnost spočívá v myšlení, proto se snažme, abychom správně mysli. To je počátek morálky.“ Správné myšlení a vědecké poznání zušlechťuje člověka a usnadňuje mu cestu za hlavním cílem jeho životního snažení; tím jest mravní dobro. Věda je víc otázkou charakteru, než se myslívá. Věda vychovává.

Vám pak, milí čtenáři, pokud snad také považujete matematické myšlení za namáhavé či dokonce obtížné, připomenu i slova z přednášek svého vzácného universitního učitele *prof. Dr. K. Petra*²⁾: „Nepopírám,

¹⁾ V podrobnostech viz autorovo pojednání „Karl Friedrich Gauss“ v *Rozhledech*, roč. 53, čís. 5, str. 279 až 285, k němuž zároveň odkazujeme.

²⁾ Vědecké dílo Dr. Karla Petra (1868—1950), od roku 1903 profesora matematiky na Karlově universitě v Praze, je vysoko ceněno doma i v zahraničí.

že každému člověku je zpravidla příjemnější málo myslet (nebo vůbec nemyslet) než trochu namáhavěji myslet. Také pro získání vědomostí platí však staré přísloví: »Jak nabyt, tak pozbyt.« Zvláště studující musí proto mít stále na vědomí přesnost, s níž pracují, a vyhledávat každou příležitost, aby zesílili svou inteligenci. Povrchnost v myšlení považují pro národy, jejichž jazyk má tak malé rozšíření jako národ náš, přímo za nebezpečí, jež by je neodvratně vedlo k duchovní i materiální závislosti na národech vyšší vědecké úrovně.“

Pěstování matematiky zbystřuje rozumové schopnosti člověka; poskytuje každému možnost samostatné činnosti, vede ho k vědomí vlastní síly duševní, posiluje jeho sebedůvěru a zdravé sebevědomí. Nechť vám jsou, mladí přátelé, slova velikých myslitelů tak silným povzbuzením k lepší práci jako živý příklad malého Karla F. Gausse. I vám bude pak matematika školou logického myšlení, školou moudrosti a jako Gaussovi „královnou věd, jež s krásnou literaturou lidského ducha nejvíce vzdělává.“³⁾

Znova problém čtyř barev

Před časem se v tomto časopise psalo, že prý byl rozřešen problém čtyř barev. Autorem „řešení“ byl r. 1971 *Y. Shimamoto* a podstatnou úlohu v jeho práci hrály počítače. Známý kanadský matematik *W. T. Tutte* záhy upozornil na chybu v úvaze, a tak se potvrdilo, co mnozí očekávali: problém zůstal nerozřešen.

Problém čtyř barev patří k nejznámějším dosud nedokázaným domněnkám moderní matematiky a pro svou obtížnost bývá někdy srovnáván s velkou větou Fermatovou z teorie čísel. Tato domněnka o čtyřech barvách, jež pochází z minulého století, zjišťuje, že každou zeměpisnou mapu na kouli (nebo v rovině) je možno přípustně obarvit čtyřmi barvami. Přitom se každý stát (i moře nebo jezero) barví jedinou barvou, a to tak, že dvě oblasti, jež mají společnou hraniční čáru, dostanou vždy různé barvy. Zkušenost několika generací ukazuje, že každou mapu lze takto čtyřmi barvami obarvit, ale správný matematický důkaz nebyl dosud uveřejněn.

V červenci 1976 dva matematikové z university v Illinois (USA), *W. Haken* a *K. Appel*, dokončili analýzu problému, jež využila počítačů

³⁾ Cituji vzpomínky *Sartoria Waltershausena*: Gauss zum Gedächtnis, Lipsko 1856.

a trvala prý čtyři roky. Oznámili, že domněnka byla ověřena a zprávu zaslali do červencového čísla Science News a do srpnového čísla Science. Autoři uvádějí, že jejich metoda v podstatě vychází ze stejné myšlenky, na níž spočíval první nezdařený pokus o důkaz (*A. B. Kempe* 1879). Tři a půl roku prý trvala příprava algoritmu a pak následovalo šest měsíců poměrně rutinní práce na počítačích. Údajně se spotřebovalo 1200 hodin strojového času. Na dokreslení se uvádí, že W. T. Tutte, o němž byla výše řeč, se vyjádřil, že podle jeho názoru Appel a Haken opravdu domněnku dokázali.

Mnoho matematiků zůstává však skeptickými a bude trvat určitou dobu, než řešení bude důkladně prověřeno. Nevíme, jak diskuse dopadne, ale jedno ještě mluví pro to, že důkaz je snad přece správný: *F. Allaire* a *E. Swart* se též pokoušejí o důkaz domněnky a používají téže metody, ale jejich algoritmus je odlišný.

Jiřina Sedláčková

matematické zábavy

Jirkové, Jiřiny, geometrie a energie

Původ jmen i jiných slov odhaluje někdy nečekané souvislosti. Všimněme si našich jmen Jiří, Juraj, Jiřina, která jsou očividně příbuzná s ruským Jurij, polským Jerzy. Starší ruský tvar jména Jurij zněl Georgij, a ten ukazuje na řecké jméno Georgios, ze kterého jsou odvozena i jména George, Georg, Giorgio, György, Jorge, Georgine v dalších jazycích. Původní jméno Georgios znamená „zemědělský“, geórgos byl každý řecký zemědělec.

Krátké jméno „Gé“ patřilo v antické řečtině bohyni Země (též Gáia), jako gé pak označovalo povrch země ve smyslu blízkém dnešnímu. Slovo geometrie, jak víte, znamenalo původně umění měřit (vyměřovat) na zemském povrchu; předponu „geo“ mají i názvy věd geografie, geologie, geodesie.

Při „pitvě“ slova geórgos objevujeme i druhou část — orgos, která souvisí se slovem ergon značícím práci, dílo. Fyzikální termín energie připomíná souvislost s prací zcela výstižně (zopakujte si honem definici energie), také už vysloužilá jednotka práce erg měla svůj název odvozen

ze slova ergon. Připomeňme si, že ve tvaru „urg“ se podílí slovo ergon i na významu slov chirurgie, metalurgie, dramaturgie a jiných.

Ergo (tak tedy) Jiřiny, Jurové, Jurajové a Jirkové, čiňte zadost svému jménu a jeho příbuzným, buďte nejen energičtí geometři v době studií, ale energičtí v práci kdekoli na „Gé

Š. J.

Řešení úlohy: Kolik je jim let

RNDr. MILAN KOMAN, CSc., UK Praha

Klíčem k řešení úlohy uveřejněné v 8 čísle našeho časopisu je rozřešení algebrogramu

$$\begin{array}{r} H A N A \\ I V A N A \\ \hline S E S T R Y \end{array}$$

Snadno se zjistí, že $S = 1$, $E = 0$, $I = 9$. Dále je vidět, že T je liché číslo (v opačném případě by totiž bylo $T = Y$). Z toho zároveň plyne, že $T = Y + 1$. Rozebereme tři případy pro $T = 3, 7, 5$. (T nemůže být rovno 1 ani 9.)

a) Je-li $T = 3$, pak je $A = 6$ (neboť $A \neq S = 1$). V tom případě je $Y = 2$ a $H + V = 10$. Dvojice čísel H, V musí být tedy některá z dvojic

$$9,1 \quad 8,2 \quad 7,3 \quad 6,4 \quad 5,5,$$

ale všechny tyto možnosti jsou ve sporu s tím, že různá písmena značí různé číslice. Tedy $T \neq 3$.

b) Je-li $T = 7$, pak $Y = 6$ a pro A mohou nastat dva případy $A = 3$ nebo $A = 8$. V prvním případě je součet $H + V$ roven 11, ve druhém 10. Avšak obě možnosti, podobně jako v části a), vedou ke sporu. Proto případ $T = 7$ je také nemožný.

c) Nechť $T = 5$, pak $Y = 4$. Pro A mohou nastat dvě možnosti $A = 2$ nebo $A = 7$. V prvním případě dojdeme, stejně jako ve všech předešlých případech, ke sporu. Zbývá tedy možnost $A = 7$. Odtud dostaneme

$$N = 6, \quad R = 3.$$

Pro H a V zbývají dvě možnosti

$$H = 2, \quad V = 8 \quad \text{nebo} \quad H = 8, \quad V = 2.$$

Daný algebrogram má tedy právě dvě řešení

$$\begin{array}{r} 2\ 7\ 6\ 7 \\ 9\ 8\ 7\ 6\ 7 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 5\ 3\ 4 \end{array}$$

$\begin{array}{r} 8\ 7\ 6\ 7 \\ 9\ 2\ 7\ 6\ 7 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 5\ 3\ 4 \end{array}$

Dále víme, že první čtyřciferné číslo je násobkem věku Ivany. Protože číslo 2 767 je prvočíslo, musel by být věk Ivany buď jeden rok nebo 2 767 roků. První možnost je vyloučena tím, že obě dívky jsou školačky, druhá možnost je vyloučena omezeností lidského věku. Klíčem k dané úloze musí být tudíž druhé řešení algebrogramu, které je uvedeno v rámečku. Rozložíme číslo 8 767 na prvočinitele a dostaneme

$$8\ 767 = 11 \cdot 797$$

Ivaně je tedy 11 let.

Podobně rozložíme číslo $92\ 767 + 1$ na prvočinitele

$$92\ 768 = 2^5 \cdot 13 \cdot 223$$

Abychom mohli určit věk Hany, musíme využít ještě třetí podmínky: Součet věků Hany a Ivany je soudelný se součtem 101 534. To znamená, že součet věků obou děvčat musí být násobkem některého dělitele čísla 101 534. Proto rozložíme i toto číslo na prvočinitele, dostaneme

$$101\ 534 = 2 \cdot 50767 \quad (50\ 767 \text{ je prvočíslo}).$$

Odtud plyne, že součet věků obou dívek musí být sudé číslo. Protože Ivaně je 11 let, plyne z rozkladu čísla 92 768 na prvočinitele, že věk Hany může být jedině 13 let.

Výsledek: Starší sestra Haně je 13 roků, mladší Ivaně je 11 roků.

recenze

T. Varga: **Mathematik 1**, 97 stran, 98 obr., **Mathematik 2**, 119 stran, 157 obr., Akadémiai Kiadó, Budapest 1976, cena neuvedena.

Do redakce Rozhledů přišla zásilka ze zahraničí a v ní dvě úhledné matematické knížky. Obě napsal známý autor *Tamás Varga* z Budapešti, jsou psány německy a vyšly jako společné vydání maďarského nakladatelství Akadémiai

Kiadó a západoněmeckého nakladatelství E. Kletta ve Stuttgartu.

Obě publikace tvoří vlastně jediný celek a podle autorova záměru jsou určeny dětem od 10 do 14 let a na jejich chápavost jsou také striženy. Vývojové diagramy, děrné štítky, množiny, dvojková soustava, pravděpodobnost, různé hry v rovině a v prostoru, logika a kombinatorika — to je několik ná-

mětů, jež si T. Varga vybral do svého díla. Už při letmém prolistování vidíme, že obrázků je tu asi tolik, kolik tištěného textu (v obou knížkách je jich celkem 255!). Mnohobarevné přílohy na tuhém papíře mají sloužit k vystříhování při studiu některých úloh a vůbec celé vybavení ukazuje, že text chce být co nejprístupnější. Protože výběr látky je většinou z netradiční matematiky, domnívá se autor i vydavatelství, že dílko bude užitečné i pro starší čtenáře, kteří takovou matematiku ve škole neměli. Je to prostě další pokus zpřístupnit moderní matematiku dětem i neodborné veřejnosti.

Jiřina Sedláčková

Bohumil Vybíral: Fyzikální pole z hlediska teorie relativity.

Vydalo SPN, Praha 1976, 363 stran, 126 obrázků a grafů, vázaná 32 Kčs.

Výkladový text knihy je rozdělen do čtyř částí. V první části, nazvané Statická fyzikální pole, se seznámíme se základními fyzikálními jevy a veličinami, které charakterizují materiální objekty. Autor podrobně rozebírá vlastnosti gravistatického a elektrostatického pole. V poslední

kapitole této části nás pak seznámí se současnými představami o gravitačním a elektrostatickým poli vesmíru.

Druhá část Relativistická transformace pole studuje vlastnosti materiálních objektů, které se vzhledem k pozorovací vztažné soustavě pohybují. Je zde vyložen základ teorie relativity, nikoli však tradičním způsobem, ale z hlediska existence gravitačního pole vesmíru.

Předmětem třetí části — Dynamická fyzikální pole — je podrobný výklad elektrodynamického a gravitodynamického pole. Je zde odvozen relativistický vztah pro transformaci síly, který umožňuje najít souvislost mezi poli statickými a dynamickými.

Čtvrtá část Šíření fyzikálních polí shrnuje v úvodu obecnou teorii šíření vln. Hlavní pozornost je zde věnována šíření elektromagnetického pole a vlivu místního gravitačního pole na šíření elmag. pole. Přístupnou formou jsou zde probrány základy obecné teorie relativity.

Knihy je určena především středoškolským studentům, ale i ostatním zájemcům o fyziku. Autor u čtenáře předpokládá jistý stupeň fyzikálního myšlení a znalosti středoškolské matematiky (na úrovni gymnázia). Text knihy vyniká srozumitelností, logičností úvah a jejich návazností. Je doprovázen množstvím obrázků a grafů.

Tato velice pěkná a zajímavá kniha bude obohacením knihovny každého zájemce o fyziku.

Anežka Wohlmuthová

SLOVNÍČEK

ČESKO - ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

ortografický
ortonormální báze
osa

číselná osa
hlavní osa
osa strany
osa úhlu
osa úsečky
vedlejší osa

oscilace

oskulační

oskulační kružnice
oskulační rovina

osm

osmiboký

osmdesát

osmina

osmistěn

osmiúhelník

osmnáct

osmý

osová souměrnost

ostrý

ostrá nerovnost

ostrý úhel

ostrouhlý trojúhelník

otáčení

otevřený

otočení

inverzní otočení

otočit

otočit zpět

označení

označit

označit písmenem

orthographic
orthonormal basis
axis, bisector

number scale

major axis

perpendicular bisector

bisector of an angle

perpendicular bisector

conjugate, minor axis

oscillation

osculatory, osculating

osculating circle

osculating plane

eight

octagonal

eighty

eighth

octahedron

octagon

eighteen

eighth

reflection, axial symmetry

acute, strict

strict inequality

acute angle

acute(-engled) triangle

revolution, rotation

open

revolution

counter-revolution

revolve

counter-revolve

notation

denote,

designate letter

P

padesát	fifty
pak	then
paprsek	ray, half-line
pár	couple, pair
parabola	parabola
parabolický	parabolic
paraboloid	paraboloid
rotační paraboloid	paraboloid of revolution
paradox	paradox
paralaxa	parallax
parametr	parameter
parita	parity
pata kolmice	foot of perpendicular
patnáct	fifteen
pátý	fifth
perioda	period, cycle
periodický	periodic
periodické číslo (v des. soustavě)	periodic decimal, repeating decimal
periodická funkce	periodic function
permutace	arrangement, permutation
lichá permutace	odd permutation
sudá permutace	even permutation
perspektivita	perspective transformation
perspektiva	perspective projection, perspective view
perspektivní průmět	perspective projection
pět	five
pětiboký	pentagonal
pětina	fifth
pětistěn	pentahedron
pětiúhelník	pentagon
pevný	fixed
plán	plan
planimetrie	plane geometry
platit	holds
platnost	validity
plášť	lateral area
plocha	surface, area
kulová plocha	surface of a sphere
kuželová plocha	conical surface
přímková plocha	ruled surface
rotační plocha	surface of revolution, rotary surface
rozvinutelná plocha	developable surface
translační plocha	surface of translation
zakřivená plocha	curved surface

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

10

ROČNÍK 55, 1976-1977, ČERVEN



ROČNÍK 55
ČERVEN 1977

10

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřižská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1977.

OBSAH

Dr. J. Šedivý: Jak objevovat kritéria dělitelnosti	433
H. Husová: Úloha o minimalizaci odpadu	436
Dr. A. Vrba: O hlemýždi, koberečcích a jak to souvisí s pokrýváním úsečky	439
S. Horák: O jedné vlastnosti elipsy	442
Dr. M. Šíroková, dr. J. Šedivý: Hvězdy hlavní posloupnosti	445
F. Golab, J. Procházka: 250 let od smrti Isaaca Newtona	449
Soutěžní úkoly prvního kola XIX. ročníku fyzikální olympiády	452
Přípravné úlohy I. kola MO	469
Soutěžní úlohy I. kola MO	470
Ze zahraničních časopisů	473
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Jak objevovat kritéria dělitelnosti

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK, Praha

V článku *Zobrazení zachovávající dělitelnost sedmi* (v 6. čísle Rozhledů tohoto ročníku) jste mohli poznat dvě kritéria pro dělitelnost přirozených čísel sedmi:

Přirozené číslo $10a + b$ je dělitelné sedmi právě tehdy, když jeho dráha v zobrazení $10a + b \rightarrow a - 2b$, resp. $10a + b \rightarrow a + 5b$, obsahuje aspoň jedno číslo dělitelné sedmi.)*

Jak víte, zápis $10a + b$ byl provázen podmínkou, že a, b jsou celá nezáporná čísla a že platí $0 \leq b \leq 9$. Tak získáme uspořádanou dvojici $[a, b]$, která pak slouží k výpočtu obrazů $a - 2b, a + 5b$ v uvedených zobrazeních. Snadné vytvoření dvojice čísel a, b je podstatnou výhodou zvolených zobrazení.

Jistě vás napadne otázka:

Existuje pro každé prvočíslo p nějaké zobrazení typu $10a + b \rightarrow a + sb$, resp. $10a + b \rightarrow a - sb$, které zachovává dělitelnost číslem p ?

Přesvědčíte se, že pro všechna prvočísla p různá od 2 a 5 lze nalézt vhodná čísla s tak, že příslušná zobrazení zachovávají dělitelnost číslem p . Dříve než přistoupíme k obecné úvaze, zamysleme se nad „víceúčelovým“ použitím zobrazení $10a + b \rightarrow a - 2b$, o kterém jste se v citovaném článku dozvěděli, že zachovává dělitelnost sedmi.

Zobrazení $10a + b \rightarrow a - 2b$ zachovává dělitelnost prvočísly 7 a 3 i složeným číslem 21.

Je zřejmé, že při $21 = 3 \cdot 7$ je zachovávání dělitelnosti číslem 21 zárukou zachovávání dělitelnosti třemi i sedmi. Zaměříme se proto na číslo 21 a úvahy o něm:

Je-li číslo $n = 10a + b$ dělitelné 21, existuje přirozené číslo k , že platí

$$10a + b = 21k$$

$$10a - 20b = 21k - 21b$$

$$10(a - 2b) = 21(k - b).$$

Levá strana je dělitelná deseti, proto i pravá strana je násobkem deseti. Číslo 21 však není soudělné s deseti, proto existuje celé číslo h tak, že platí

$$k - b = 10h,$$

po dosazení $10(a - 2b) = 210h,$

a po zkrácení $a - 2b = 21h$, pak číslo $a - 2b$ je dělitelné 21.

*) Drahou čísla ve zvoleném zobrazení rozumíme posloupnost začínající tímto číslem a pokračující jeho obrazem, obrazem obrazu atd.

Uvědomujete si jistě, že klíčem k důkazu je odečtení $21b$ od stran první rovnice. Dalším významným místem důkazu je využití nesoudělnosti čísel 10 a 21. [Tímto místem „neprojde“ obecná úvaha pro čísla soudělná s deseti, tj. pro prvočísla 2 a 5 a jejich celočíselné násobky.] Poté už důkaz hladce spěje k závěru.

Přesvědčte se vlastní úvahou, že též zobrazení $a - 2b \rightarrow 10a + b$ zachovává dělitelnost číslem 21. Dokážete tak málo známé kritérium dělitelnosti přirozených čísel číslem 21.

Jaké poučení si vezmeme z předvedeného důkazu? Číslo 21 je tvaru $10s + 1$, přebytek 1 přes násobek deseti umožnil přechod od $10a + b$ k $10a - 20b$. Umožní nám stejný postup i další čísla tohoto tvaru, tj. 11, 31, 41, 51 atd.? Získáme i pro ně a pro jejich dělitele kritérium dělitelnosti? Podaří se obdobný „tah“ i s přirozenými čísly ve tvaru $10s - 1$, např. 9, 19, 29, 39 atd.? Zapišme souběžnou úvahu:

Zvolme přirozené číslo d , které lze pomocí kladného s zapsat

$$d = 10s + 1$$

$$d = 10s - 1$$

Dále uvažujme o libovolném přirozeném čísle $n = 10a + b$, kde $a \geq 0$, $0 \leq b \leq 9$. Jestliže n je dělitelné d , existuje přirozené číslo k tak, že platí:

$$10a + b = k \cdot (10s + 1)$$

$$10a - 10sb = k \cdot (10s + 1) - b \cdot (10s + 1)$$

$$10(a - sb) = (k - b) \cdot (10s + 1)$$

$$10a + b = k \cdot (10s - 1)$$

$$10a + 10sb = k \cdot (10s - 1) + b \cdot (10s - 1)$$

$$10(a + sb) = (k + b) \cdot (10s - 1).$$

Levá strana je dělitelná deseti, proto i pravá, ale tam není $10s + 1$ dělitelné deseti ani soudělné s deseti. Existuje tedy celé číslo h tak, že platí

$$k - b = 10h$$

$$k + b = 10h.$$

Po dosazení získáme

$$10(a - sb) = 10h(10s + 1)$$

$$10(a + sb) = 10h(10s - 1)$$

a po zkrácení deseti

$$a - sb = h(10s + 1)$$

$$a + sb = h(10s - 1),$$

pak $a - sb$ je dělitelné d ,

$a + sb$ je dělitelné d .

Dokázali jsme tedy, že v oboru přirozených čísel platí:

Zobrazení $10a + b \rightarrow a - sb$ zachovává dělitelnost číslem $10s + 1$,

zobrazení $10a + b \rightarrow a + sb$ zachovává dělitelnost číslem $10s - 1$.

Snadno dokážete obdobné tvrzení i o opačných (inverzních) zobrazeních $a - sb \rightarrow 10a + b$, $a + sb \rightarrow 10a + b$.

[Postačí obrátit postup důkazu, který jsme absolvovali.]

Ve všech úvahách lze uplatnit i libovolného dělitele čísla $10s + 1$, resp. $10s - 1$. Tento poznatek nám otevírá cestu k objevům zobrazení, která zachovávají dělitelnost čísel prvočísky.

Pro všechna prvočísla různá od 2 a 5 snadno najdeme nějaký jejich násobek, jehož zápis končí číslicí 1 nebo 9, tj. je tvaru $10s + 1$ nebo $10s - 1$.

Například:

Prvočíslo	Vyjádření	Zobrazení
$p = 3$	$3.3 = 9 = 1.10 - 1, s = 1$	$10a + b \rightarrow a + b$
	$7.3 = 21 = 2.10 + 1, s = 2$	$10a + b \rightarrow a - 2b$
$p = 7$	$3.7 = 21 = 2.10 + 1, s = 2$	$10a + b \rightarrow a - 2b$
	$7.7 = 49 = 5.10 - 1, s = 5$	$10a + b \rightarrow a + 5b$
$p = 11$	$11 = 1.10 + 1, s = 1$	$10a + b \rightarrow a - b$
$p = 13$	$3.13 = 39 = 4.10 - 1, s = 4$	$10a + b \rightarrow a + 4b$
$p = 17$	$3.17 = 51 = 5.10 + 1, s = 5$	$10a + b \rightarrow a - 5b$
$p = 19$	$19 = 2.10 - 1, s = 2$	$10a + b \rightarrow a + 2b$
$p = 23$	$3.23 = 69 = 7.10 - 1, s = 7$	$10a + b \rightarrow a + 7b.$

Je jasné, že zápisy všech prvočísel různých od 2 a 5 končí jednou z číslic 1, 3, 7, 9. Snadno z toho zdůvodníte platnost tvrzení, že *číslíci 1 nebo 9 končí zápis prvočísla, jeho trojnásobku nebo sedminásobku*. Můžeme tedy tvrdit:

Pro každé prvočíslo p různé od 2 a 5 existuje takové přirozené číslo s , že platí aspoň jedna z rovností

$$\begin{aligned} p &= 10s - 1, 3p = 10s - 1, 7p = 10s - 1, \\ \text{resp.} \quad p &= 10s + 1, 3p = 10s + 1, 7p = 10s + 1. \end{aligned}$$

Po zjištění vhodného čísla s lze dokázat:

Libovolné přirozené číslo $n = 10a + b$ je dělitelné prvočíslem p právě tehdy, když je jím dělitelné aspoň jedno číslo v dráze čísla n v zobrazení $10a + b \rightarrow a + sb$, resp. $10a + b \rightarrow a - sb$.

Příklad 1. Chceme rozhodnout (bez zkusného dělení), zda čísla 826457 a 774375 jsou dělitelná číslem 59.

Řešení. Protože $59 = 6 \cdot 10 - 1$, použijeme $s = 6$ a zobrazení $10a + b \rightarrow a + 6b$.

$826457 \rightarrow 82687 \rightarrow 8310 \rightarrow 831 \rightarrow 89$, není dělitelné 59,

$774375 \rightarrow 77467 \rightarrow 7788 \rightarrow 826 \rightarrow 118$, je dělitelné 59.

Otázkou položenou na 15. řádku tohoto článku jsme zaměřili svůj zájem na kritéria dělitelnosti přirozených čísel *prvočísly*. Teoretické poznatky získané během úvah a důkazů však umožňují zformulovat kritérium dělitelnosti libovolným *složeným* číslem nesoudělným s dvěma a pěti:

Nechť přirozené číslo r je dělitelem některého přirozeného čísla $10s - 1$, resp. $10s + 1$. Pak každé přirozené číslo $n = 10a + b$ je při $0 \leq b \leq 9$ dělitelné r právě tehdy, když je jím dělitelné aspoň jedno číslo v dráze čísla n při zobrazení $10a + b \rightarrow a + sb$, resp. $10a + b \rightarrow a - sb$.

Příklad 2. Rozhodněme bez dělení, zda číslo 684321 je dělitelné číslem 33.

Řešení. Protože $3 \cdot 33 = 99 = 10 \cdot 10 - 1$, máme $s = 10$ a použijeme zobrazení $10a + b \rightarrow a + 10b$.
 $684321 \rightarrow 68442 \rightarrow 6864 \rightarrow 726 \rightarrow 132 \rightarrow 33$, dělitelné 33.

Náměty pro přemýšlení

1. Je číslo posuzované v příkladě 2 dělitelné číslem 99?
2. Jaké kritérium pro dělitelnost číslem 67 bude nejvhodnější?
3. Jak zdůvodníte, že dráhy všech přirozených čísel v zobrazeních $10a + b \rightarrow a - sb$, $10a + b \rightarrow a + sb$ vstoupí do intervalu $\langle -10s - 1; 10s + 1 \rangle$, resp. $\langle 0; 10s - 1 \rangle$.

Úloha o minimalizaci odpadu

HELENA HUSOVÁ, MFF UK Praha

Představme si následující situaci. Máme k dispozici libovolně velký počet stejně dlouhých tyčí a chceme z nich nařezat soupravu kratších tyčí, jejichž délky a počet jsou předem dány. Každému způsobu nařezání takové soupravy budeme říkat řešení. Obvykle zbudou při takovéto činnosti odřezky, které již nemůžeme pro naše účely použít — buď proto, že jsou kratší než kterákoli z tyčí požadované soupravy, nebo proto, že jsme všechny dostatečně krátké tyče soupravy nařezali dříve, než tento odřezek vznikl.

Všimněme si, že odřezky prvního typu jsou speciálním případem odřezků druhého typu. Větší odřezky jsou z jistého hlediska výhodnější. Můžeme je přece uchovat a použít později, což má význam zejména tehdy, jde-li o cenný materiál. V naší variantě úlohy však budeme i tyto odřezky považovat za součást odpadu. Úloha je nasnadě: chceme najít takové řešení, aby celkový odpad, tj. součet délek odřezků z použitých tyčí, byl minimální.

Úloha o minimalizaci odpadu se v praxi vyskytuje v různých obměnách a interpretacích velmi často a byla již mnohokrát matematicky řešena. Přesto je dosud předmětem určitých dalších bádání. *V čem je potíže?* Nalezení optimálního řešení (tj. takového řešení, při němž je nejmenší možný odpad) bývá v konkrétních případech často značně náročné. Byly nalezeny velmi jednoduché postupy (algoritmy), které sice v obecném případě nejsou optimální, ale při nichž se nikdy celkový odpad příliš neliší od minimálního možného odpadu. Přesto však při použití těchto obecných postupů je v některých konkrétních případech odpad zbytečně velký. Snažíme se proto tyto algoritmy dále zdokonalovat, aniž bychom je příliš zkomplikovali.

Některé jednoduché otázky spojené s touto tematikou lze řešit i středoškolskými prostředky. V tomto článku a případně i v dalších bychom chtěli v nejjednodušší možné podobě seznámit s touto problematikou naše čtenáře. Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad 1. Máme k dispozici tyče o délce $d = 7$ a chceme z nich nařezat soupravu o šesti kusech, popsanou seznamem požadovaných délek

$$D = (3, 3, 2, 2, 2, 2) .$$

Řešeními jsou např. tyto postupy:

- a) ze tří tyčí nařezeme části naší soupravy o seznamech délek $(3, 3), (2, 2, 2), (2)$;
- b) ze dvou tyčí nařezeme části soupravy o seznamech $(3, 2, 2), (3, 2, 2)$;
- c) použijeme pět tyčí, z nichž nařezeme části soupravy o seznamech $(3, 2), (3), (2), (2), (2)$.

Předpokládejme, že délka tyčí, z nichž řežeme, je rovna pevně zvolenému kladnému reálnému číslu d . Každou soupravu (neprázdnou a konečnou), kterou je možno z těchto tyčí nařezat, lze popsat seznamem délek

$$D = (a_1, a_2, \dots, a_m) , \tag{1}$$

kde $0 < a_i \leq d$ pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Každému seznamu D tvaru (1) přiřadíme hodnotu

$$S(D) = a_1 + a_2 + \dots + a_m .$$

Symbolem $N(D)$ budeme značit počet tyčí použitých při optimálním řešení. Čtenář nechť si promyslí, že číslo $N(D)$ je určeno jednoznačně, ačkoli v obecném případě může existovat optimálních řešení více.

Jestliže jsme při některém řešení použili k tyčí, budeme délky použitých částí tyčí označovat $d_1, d_2, \dots, d_k$. Na i -té tyči se tedy zbytek, tj. velikost odřezku, rovná $d - d_i$.

V našem příkladě je $S(D) = 14$, $N(D) = 2$, při prvním řešení je $k = 3$, $d_1 = d_2 = 6$, $d_3 = 2$. Čtenář si jistě všiml, že třetí uvedené řešení je značně nevýhodné — nechávali jsme při něm zbytky „úmyslně“.

Zavedeme si následující pojem. Řešení budeme nazývat ekonomickým, jestliže velikost zbytku na i -té tyči je menší než velikost kteréhokoli kusu ze soupravy, uříznutého z j -té tyče pro $j > i$.

Ke každému seznamu D existuje aspoň jedno ekonomické řešení (dokažte). Můžeme proto každému seznamu délek D přiřadit jednoznačně určené přirozené číslo $E(D)$ jako největší počet tyčí použitých při ekonomických řešeních. Ukažte, že v našem příkladu je $E(D) = 3$.

Pro porovnání libovolného ekonomického řešení s řešením optimálním si ukážeme jistý horní odhad. K jeho důkazu budeme potřebovat toto

Lemma. Budiž k celé kladné číslo a mějme dáno k reálných čísel $b_1, \dots, b_k$ takových, že

$$b_1 + \dots + b_k \leq k .$$

Potom aspoň jedno z čísel $b_1, \dots, b_k$ je menší nebo rovno 1.

Důkaz přenecháme čtenáři.

Platí následující

Věta. Pro libovolné D je splněna nerovnost:

$$E(D) < 2 \cdot N(D)$$

Důkaz (sporem). Zvolme pevně seznam D a označme $N(D) = p$, $E(D) = q$. Předpokládejme, že $q \geq 2p$. Pro některé z ekonomických řešení, při němž se použije q tyčí, označme $d_1, d_2, \dots, d_q$ délky použitých částí tyčí. Platí $p \cdot d \geq S(D) = (d_1 + d_2) + \dots + (d_{2p-3} + d_{2p-2}) + \dots + (d_{2p-1} + \dots + d_q)$, přičemž i v poslední závorce jsou podle předpokladu aspoň dva sčítance. Podle lemmatu aspoň jeden ze součtů $d_1 + d_2, \dots, d_{2p-3} + d_{2p-2}, d_{2p-1} + \dots + d_q$ je menší nebo roven d . To je však spor, neboť zvolené řešení bylo ekonomické.

Obvykle nepožadujeme pouze jednu soupravu o seznamu D , ale c takových souprav (kde c je celé kladné číslo). Jejich seznam délek označujeme symbolem $c \cdot D$ (např. seznam z příkladu 1 lze zapsat také ve tvaru $2 \cdot (3, 2, 2)$). Takovýmto soupravám jsou věnována některá z cvičení, která předkládáme našim čtenářům.

Cvičení.

Ve cvičení 2, 4 a 5 předpokládáme, že hodnota d je zvolena pevně.

1. Je každé optimální řešení ekonomické ve smyslu naší definice?

2. Ukažte, že pro každé D platí: je-li $N(D) \geq 2$, potom

$$S(D) \leq N(D) \cdot d < 2 \cdot S(D).$$

Pro každé $r \in \langle 1, \infty \rangle$ nalezněte příklad seznamu D , pro který je $N(D) \cdot d = r \cdot S(D)$.

3. Ukažte, že v příkladu 1 je $E(D) = \frac{3}{2} \cdot N(D)$, avšak hodnota výrazu

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{E(c \cdot D)}{N(c \cdot D)} \quad (2)$$

je rovna $\frac{7}{6}$.

4. Zjistěte, zda hodnota výrazu (2) může být pro některé D a) rovna,

b) větší než $\frac{E(D)}{N(D)}$?

5. Pokuste se zjistit, zda existují seznamy D , pro něž je hodnota výrazu (2) rovna

a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{5}{3}$; c) $\frac{7}{4}$; d) jiným zvoleným hodnotám z intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.

O hlemýždi, koberečcích a jak to souvisí s pokrýváním úsečky II.

ANTONÍN VRBA

V čísle 9 jsme se zabývali dvěma úlohami.

Úloha o hlemýždi: Hlemýžď leze po přímé dráze. (Jeho rychlost nemusí být rovnoměrná, může se zastavovat, ale necouvá.) Po dobu 6 min. ho sleduje skupina pozorovatelů. Každý z nich ho pozoruje 1 min. (vcelku) a zjistí, že za tu dobu ulezl 1 dm. Jakých hodnot může nabývat vzdálenost, kterou ulezl hlemýžď během celého šestiminutového pokusu, pokud byl v každém okamžiku pozorován některým z pozorovatelů?

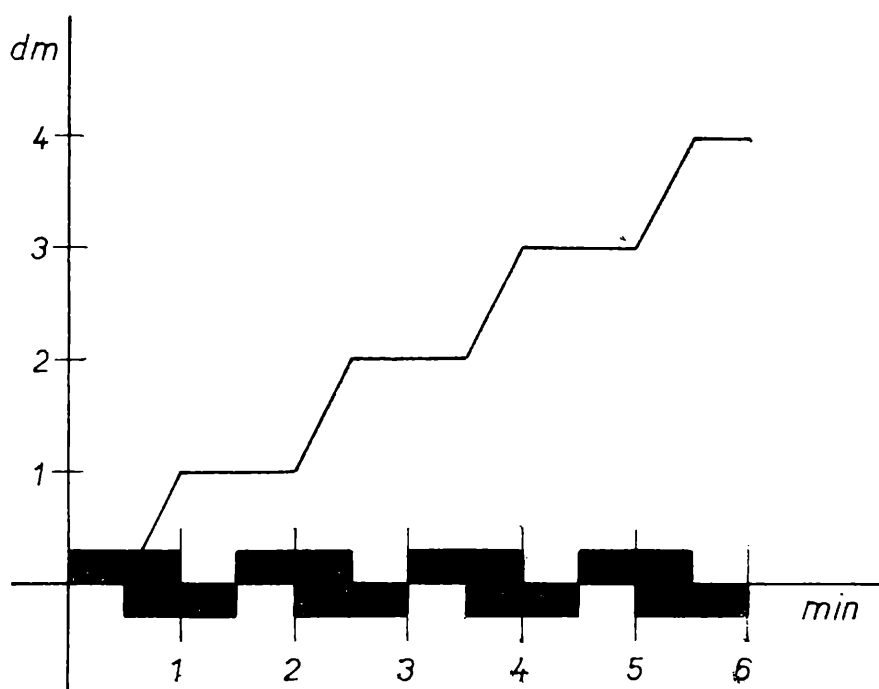
Úloha o koberečcích: Podlaha pokoje má tvar obdélníka a je pokryta čtvercovými koberečky, jejichž strany jsou rovnoběžné se stranami podlahy. (Koberečky nemusí být stejně veliké, mohou se všelijak překrývat, nikde však není ani kousek holé podlahy.) Dokažte, že lze odstraněním některých koberečků (zbylé přitom ponecháme na původním místě a nehledíme na to, který koberec je vespod a který navrch) dosáhnout, aby zbylé koberečky pokrývaly alespoň $\frac{1}{4}$ podlahy a přitom se žádné dva nepřekrývaly.

Dále jsme odvodili jednu větu z kombinatorické geometrie, která s oběma úlohami souvisí: Tvoří-li úsečky $U_1, U_2, \dots, U_k$ minimální pokrytí úsečky U , lze je rozdělit na dvě skupiny tak, že žádné dvě úsečky z téže skupiny nemají společný bod. Minimálním pokrytím rozumíme takové pokrytí úsečky U (tj. $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$), že po odstranění kterékoliv z úseček $U_1, U_2, \dots, U_k$ již zbylé úsečky netvoří pokrytí úsečky U (tj. pro každé $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ je $U \neq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k U_i$).

Řešení úlohy o hlemýždi. Všechny možné vzdálenosti v dm, které mohl hlemýžď urazit, jsou právě všechna reálná čísla d , pro něž platí $4 \leq d \leq 10$. Na obrázcích 3 a 4 je znázorněn rozvrh pozorování (podél časové osy) a jízdní řád hlemýždě pro obě krajní možnosti.

Bud' dále d libovolné reálné číslo, pro něž platí $4 \leq d \leq 8$. Ponechme stejný rozvrh pozorování jako na obr. 3 a hlemýždi nařídme, aby v každém časovém intervalu, kdy je sledován dvěma pozorovateli současně (takové intervaly jsou zde čtyři), ujel $\frac{8-d}{4}$ dm a v každém intervalu,

kdy je pozorován jen jedním pozorovatelem (je jich osm), ujel $\frac{d-4}{4}$ dm.



Obr. 3

Celková dráha pak bude

$$4 \cdot \frac{8-d}{4} + 8 \cdot \frac{d-4}{4} = d$$

a každý pozorovatel zjistí, že za jeho minutu se zvíře pohnulo o

$$\frac{8-d}{4} + \frac{d-4}{4} = 1$$

(vše v dm). Všimněte si, že pro $d = 4$ dostaneme pohyb z obr. 3.

Nechť je nyní d libovolné reálné číslo, pro něž $5 \leq d \leq 10$. Vyjdeme od uspořádání pozorovatelů jako na obr. 4 a hlemýžď ať v intervalech, kdy je sledován dvěma pozorovateli (je jich pět) popoleze vždy o $\frac{10-d}{5}$

a v případě jediného pozorovatele (10 intervalů) o $\frac{d-5}{5}$. Celková dráha pak bude

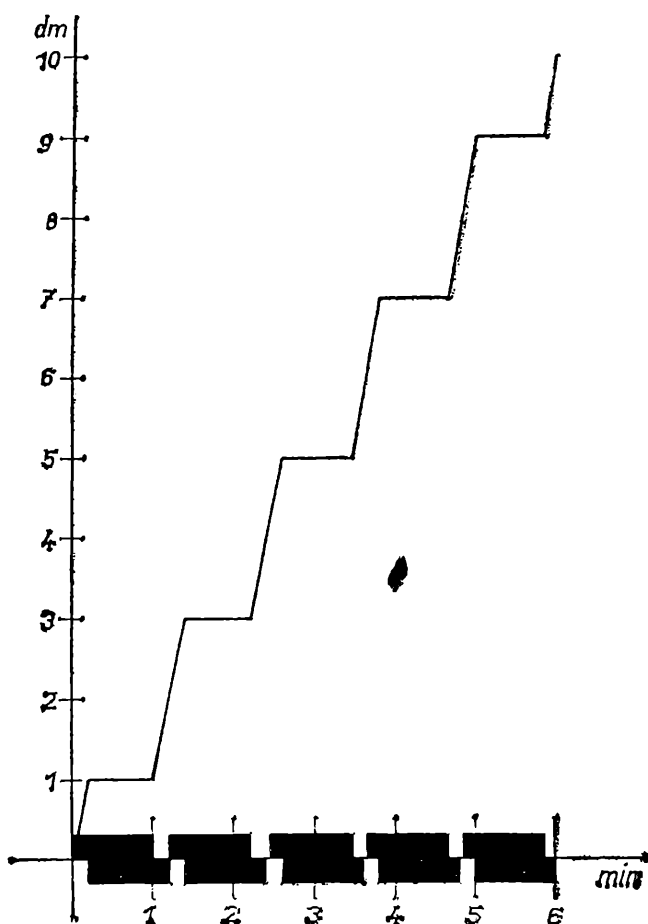
$$5 \frac{10-d}{5} + 10 \frac{d-5}{5} = d$$

a každý pozorovatel naměří

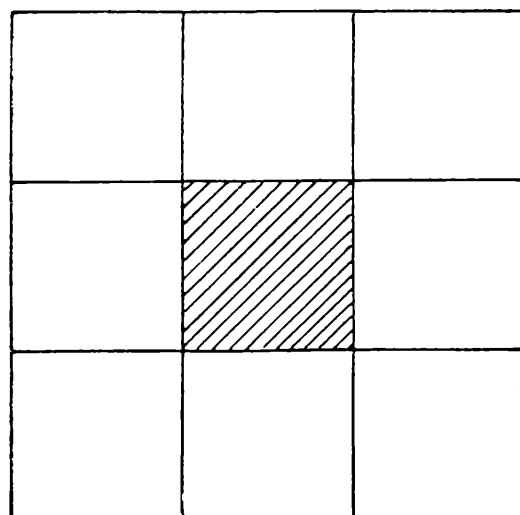
$$\frac{10-d}{5} + \frac{d-5}{5} = 1$$

(vše v dm). Pro $d = 10$ dostaneme pohyb z obr. 4.

Zatím jsme tedy zjistili, že hlemýžď může urazit jakoukoli vzdálenost $4 \leq d \leq 10$. Pro $5 \leq d \leq 8$ jsme to ukázali dokonce dvěma způsoby. Jsou ovšem i jiné možnosti. Zbývá ještě ukázat, že žádnou vzdálenost $d < 4$ nebo $d > 10$ hlemýžď ulézt nemůže.



Obr. 4



Obr. 5

Uvažujme libovolný pokus. Je tedy dán rozvrh pozorování a pohyb hlemýžďe po dobu 6 min., během nichž urazí celkem d dm, přičemž jsou splněny podmínky úlohy. Úsečka velikosti 6 jednotek na časové ose, odpovídající době, po kterou probíhal celý pokus, je pokryta úsečkami jednotkové velikosti, odpovídajícími jednotlivým pozorováním. (Jde skutečně o pokrytí, neboť v každém okamžiku někdo pozoruje.) Vynechme některé úsečky tak, aby zbylo minimální pokrytí. Podle věty již zmíněné lze úsečky tvořící toto minimální pokrytí rozdělit do dvou skupin tak, že žádné dvě úsečky z téže skupiny nemají společný bod. Během pozorování odpovídajících úsečkám jedné skupiny ulezl hlemýžď celkem tolik dm, kolik je ve skupině úseček (neboť mají neprázdný průnik). V každé z obou skupin je ovšem nejvýše pět úseček, a tedy $d \leq 5 + 5 = 10$. Pomineme-li nezajímavý případ, kdy obě skupiny obsahují právě po třech úsečkách (tomu odpovídá celková dráha 6 dm), vidíme, že alespoň jedna skupina obsahuje alespoň čtyři úsečky. Je tedy $d \geq 4$. Tím je úloha o hlemýždi kompletně vyřešena.

Přejdeme k úloze o koberečkách. Snadné je řešení úlohy, v níž místo $\frac{1}{4}$ je $\frac{1}{9}$. K tomu stačí najít největší kobereček (pokud je jich více, kterýkoli z nich) a odstranit všechny koberečky, které s ním mají neprázdný průnik (největší kobereček ponecháme na místě). Ze zbylých

koberečků opět vybereme ten největší a odstraníme všechny, které se s ním překrývají. Tak pokračujeme tak dlouho, až se žádné koberečky nepřekrývají. Jak je vidět z obr. 5, při odstraňování koberečků se vždy odkrylo nejvýše osmkrát tolik podlahy, než byl obsah příslušného koberečku. Odtud hned plyne odhad s $1/9$.

My však máme dokázat víc. Promítněme čtverce (koberečky) na delší stranu obdélníka (podlahy). Každému čtverci tak bude přiřazena úsečka (bude mít stejnou velikost jako jeho strana), přičemž všechny tyto úsečky budou tvořit pokrytí strany obdélníka. Vynechme některé úsečky (tj. odstraňme některé koberečky) tak, abychom dostali minimální pokrytí. Alespoň jedna ze dvou skupin úseček, o nichž se mluví v naší větě, má součet velikostí rovný alespoň polovině strany obdélníka, na niž jsme promítali. Vynechme všechny úsečky patřící do druhé skupiny (tj. odstraňme příslušné koberečky). Zbylé koberečky se nepřekrývají a pokrývají, jak je hned vidět, alespoň $1/4$ obdélníka. Úloha je vyřešena.

konstruktivní geometrie

0 jedné vlastnosti elipsy

STANISLAV HORÁK, Praha

V 53. ročníku Rozhledů na str. 155 byla dokázána věta: Je dána středová kuželosečka. V libovolném jejím bodě L , který není vrcholem, sestrojme její tečnu a normálu. Tyto dvě přímky protnou vedlejší osu po řadě v bodech U , V . Kružnice k sestrojená nad průměrem UV prochází oběma ohnisky dané kuželosečky.

Účelem tohoto článku je upozornit na jinou kružnici v elipse, která také prochází oběma jejími ohnisky.

V obr. 1 je narysována elipsa. Její hlavní vrcholy označíme A , B , vedlejší C , D a ohniska E , F . Střed křivosti ve vrcholu A je S_A a ve vrcholu C je S_C . Podobně středy křivosti ve vrcholech B , D jsou po řadě S_B , S_D . Poloměry kružnic křivosti ve vrcholech A , C mají po řadě délku

$$\rho_A = b^2 / a ,$$

$$\rho_C = a^2 / b ,$$

jak plyne z podobnosti trojúhelníků SCA , AS_AK , popřípadě trojúhelníků SCA , CKS_C .

Tolik úvodem a dál budeme užívat analytické metody.

Hlavní a vedlejší osu elipsy zvolme za souřadnicové osy x, y . Při obvyklém označení délek os elipsy je elipsa dána rovnicí

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Kružnice k_1 sestrojená nad průměrem AS_A má poloměr

$$r_1 = \frac{1}{2} \varrho_A = b^2 / 2a .$$

Kružnice k_1 má pak rovnici

$$k_1 \equiv (x - m)^2 + y^2 = \frac{b^4}{4a^2} .$$

Číslo m je zatím neurčené. Dostaneme je z podmínky, že tato kružnice prochází bodem $A = [a; 0]$ a bodem $S_A = \left[a - \frac{b^2}{a}; 0 \right] = \left[\frac{e^2}{a}; 0 \right]$. Tím přicházíme k dvěma rovnicím pro m :

$$A \in k_1 \quad (a - m)^2 = \frac{b^4}{4a^2} ,$$

$$S_A \in k_1 \quad \left(\frac{e^2}{a} - m \right)^2 = \frac{b^4}{4a^2} .$$

Z rovnosti pravých stran vyplývá i rovnost levých stran:

$$a^2 - 2am + m^2 = \frac{e^4}{a^2} - \frac{2e^2m}{a} + m^2 .$$

Odtud po krátkém výpočtu

$$m = (a^2 + e^2) / 2a = (2a^2 - b^2) / 2a .$$

Rovnice kružnice k_1 je tedy

$$k_1 \equiv \left(x - \frac{2a^2 - b^2}{2a} \right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{4a^2} . \quad (1)$$

Podobně zjistíme rovnici kružnice sestrojené nad průměrem CS_C :

$$k_2 \equiv x^2 + \left(y - \frac{2b^2 - a^2}{2b} \right)^2 = \frac{a^4}{4b^2} . \quad (2)$$

Kružnice k'_1 , která je souměrně sdružená s kružnicí k_1 podle vedlejší osy CD (k'_1 je sestrojena nad průměrem BS_B), má rovnici

$$k'_1 \equiv \left(x + \frac{2a^2 - b^2}{2a} \right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{4a^2} \quad (3)$$

a kružnice k'_2 , která je souměrně sdružená s kružnicí k_2 podle hlavní osy AB (k'_2 je sestrojena nad průměrem DS_D), má rovnici

$$k'_2 \equiv x^2 + \left(y + \frac{2b^2 - a^2}{2b} \right)^2 = \frac{a^4}{4b^2} . \quad (4)$$

Obr. 1 nám napovídá, že kružnice k_1 a také k'_1 nemají s osou CD žádný společný bod, ale my se o tom raději přesvědčíme početně.

$$x = 0 \quad \left(\frac{2a^2 - b^2}{2a} \right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{4a^2}.$$

Odtud již snadno dostaneme

$$y_{1,2} = \pm ie.$$

Poznámka. Geometrie, v níž jsou zavedeny imaginární body a přímky a přitom zůstávají zachovány všechny axiomy eukleidovské geometrie, říká bodům $E^* = [0; ie]$, $F^* = [0; -ie]$ také ohniska. Jsou to ovšem imaginární ohniska. Podle toho elipsa — a také hyperbola — má čtyři ohniska; dvě jsou reálná na hlavní ose a dvě imaginární na vedlejší ose.

Cvičení.

1. Sestrojte elipsu, je-li dáno: C , S_C , a . Provedte diskusi.

astronomie

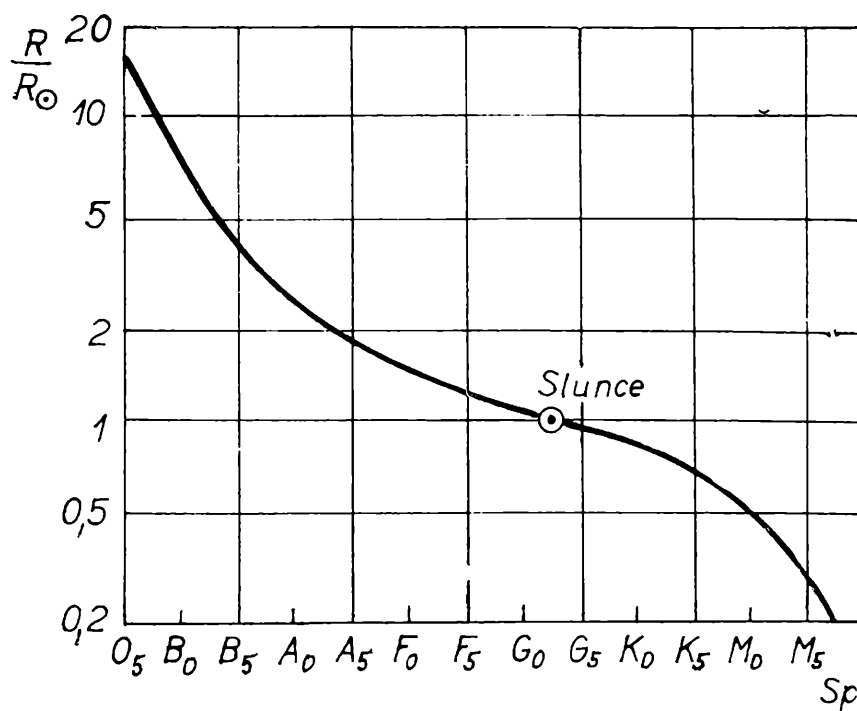
Hvězdy hlavní posloupnosti

†RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Z Hertzsprungova-Russellova diagramu můžeme pro hvězdy hlavní posloupnosti, na níž leží převážná většina všech hvězd, vyčíst, že jejich absolutní hvězdné velikosti postupně klesají od -5^M u hvězd spektrální třídy O do $+15^M$ u hvězd spektrální třídy M . Tento pokles zářivosti souvisí především s efektivní povrchovou teplotou hvězd, která dosahuje 30 000 K u hvězd třídy O , podél hlavní posloupnosti klesá a u chladných červených hvězd spektrální třídy M je kolem 3000 K, tedy desetkrát menší. Ze zákonů záření plyne, že celkový výkon, vyzařovaný plošnou jednotkou povrchu hvězdy, je přímo úměrný čtvrté mocnině absolutní teploty povrchu. Vyjadřuje to Stefanův-Boltzmannův zákon, odvozený pro zářivost absolutně černého tělesa

$$H = \sigma T^4,$$

kde konstanta úměrnosti σ se nazývá Stefanova konstanta a její hodnota je $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. Při stejných poloměrech hvězd by tedy zářivost hvězd spektrální třídy O byla 10^4 krát větší než zářivost hvězd



Obr. 1. Průměrné hodnoty poloměrů hvězd hlavní posloupnosti (v logaritmické stupnici) v jednotkách poloměru Slunce v závislosti na spektrální třídě (Sp)

třídy M . Tomuto poměru zářivostí by odpovídal podle Pogsonovy rovnice rozdíl hvězdných velikostí

$$M_2 - M_1 = 2,5 \log 10^4 = 10^M,$$

ve skutečnosti je však tento rozdíl téměř dvojnásobný. Tuto skutečnost si můžeme vysvětlit jen tím, že podél hlavní posloupnosti klesá nejen povrchová teplota, ale také poloměr hvězd. Označíme-li R_1 poloměr hvězd spektrální třídy O , T_1 jejich povrchovou teplotu, R_2 , T_2 odpovídající veličiny pro hvězdy spektrální třídy M , pak celkový výkon, vyzařovaný celým povrchem neboli zářivost hvězd spektrální třídy O je

$$L_1 = 4 \pi R_1^2 \sigma T_1^4,$$

zářivost hvězd spektrální třídy M pak

$$L_2 = 4 \pi R_2^2 \sigma T_2^4$$

Dosadíme-li tyto zářivosti do Pogsonovy rovnice, dostáváme pro rozdíl hvězdných velikostí

$$M_2 - M_1 = 2,5 \log \frac{L_1}{L_2} = 2,5 \log \frac{R_1^2 T_1^4}{R_2^2 T_2^4}.$$

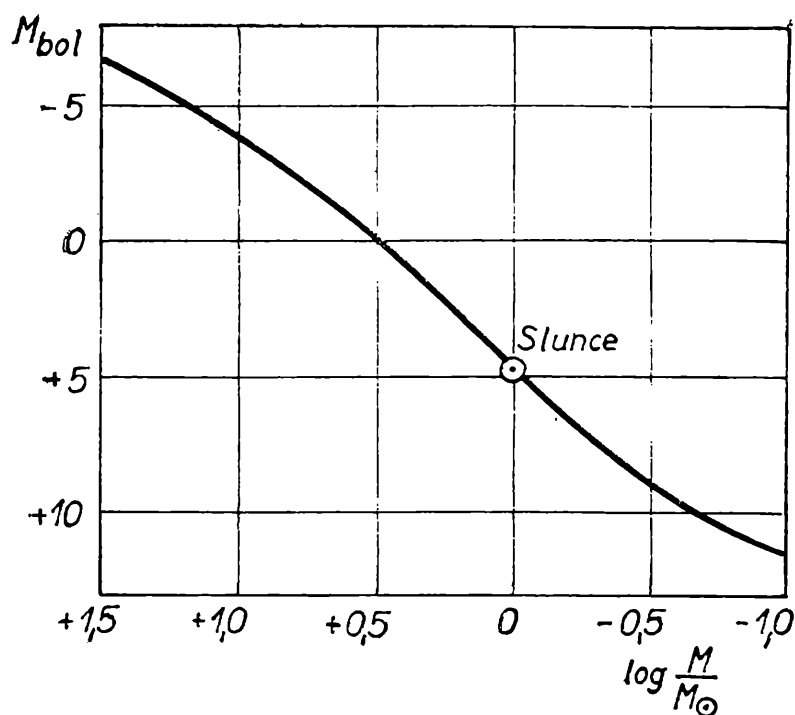
Přijmeme-li, že rozdíl hvězdných velikostí $M_2 - M_1 = 20^M$, poměr absolutních teplot $\frac{T_1}{T_2} = 10$, vychází z Pogsonovy rovnice pro poměr poloměrů hvězd spektrální třídy O a hvězd spektrální třídy M hodnota

$\frac{R_1}{R_2} = 100$; hvězdy třídy *O* mají tedy přibližně stokrát větší poloměry než hvězdy spektrální třídy *M*.

Poloměry hvězd se obvykle vyjadřují v jednotkách poloměru našeho Slunce. Připomeňme, že poloměr Slunce je $6,96 \cdot 10^5$ km, tj. asi 109krát větší než poloměr Země. Bylo zjištěno, že hvězdy spektrální třídy *O* mají poloměry v průměru dvacetkrát větší než Slunce, hvězdy třídy *M* jsou v průměru čtyřikrát až pětkrát menší než Slunce. Závislost poloměrů hvězd na spektrální třídě je znázorněna na obr. 1. Vzhledem k malým zářivostem i poloměrům se někdy nazývá část hlavní posloupnosti od třídy *G* po třídu *M* posloupnost trpaslíků.

Teorie vnitřní stavby hvězd vede k výsledku, že povrchové teploty hvězd i jejich poloměry, a tedy také zářivosti jsou určeny především jejich hmotnostmi a chemickým složením. Chemické složení hvězd hlavní posloupnosti, jak ukazuje spektrální analýza, je zhruba stejné — skládají se převážně z vodíku a hélia (např. Slunce se skládá z 76 % vodíku, 23 % hélia a 1 % těžkých prvků). Můžeme tedy očekávat, že zářivost hvězd hlavní posloupnosti bude záviset jen na jejich hmotnosti. Závislost hmotnost-zářivost byla teoreticky poprvé odvozena A. S. Eddingtonem a existence této závislosti byla také měřením dokázána. Na rozdíl od poloměrů hvězd, které s výjimkou několika jasných a blízkých hvězd přímo měřit nemůžeme, lze hmotnosti hvězd určit v případě, když jde o složky dvojhvězdy. Protože dvojhvězdy bylo již proměřeno velmi mnoho, bylo možno určit také závislost zářivosti na hmotnosti hvězdy. Graficky je tato závislost znázorněna na obr. 2. Hmotnosti hvězd vyjadřujeme obvykle, podobně jako poloměry, v jednotkách hmotnosti Slunce; proto připomeňme, že hmotnost Slunce je $1,99 \cdot 10^{30}$ kg. Na obr. 2 je na vodorovné ose vynesena logaritmus hmotnosti hvězd v jednotkách hmotnosti Slunce, na svislé ose absolutní hvězdná velikost, která vyjadřuje zářivost hvězd v logaritmické stupnici. Závislost platí pro tzv. bolometrické hvězdné velikosti, tj. velikosti, které vyjadřují celkové množství energie, vyzařované hvězdou v oboru všech vlnových délek, nikoliv jen v oboru viditelného záření. Bolometrickou hvězdnou velikost můžeme vypočítat z vizuální nebo fotografické hvězdné velikosti, známe-li spektrální třídu hvězdy.

Na základě vztahu mezi hmotností a zářivostí hvězdy můžeme odhadovat hmotnosti i těch hvězd, které nejsou složkami dvojhvězdy. Závislost na obr. 2 platí pro hvězdy hlavní posloupnosti, pro hvězdy na jiných větvích Hertzsprungova-Russellova diagramu má tato závislost poněkud jiný průběh. Ze vztahu hmotnost-zářivost vyplývá, že se hmotnosti hvězd podél hlavní posloupnosti mění v dosti širokém intervalu: hmotnosti hvězd spektrální třídy *O* jsou asi třicetkrát větší než hmotnost Slunce, trpasličí hvězdy třídy *M* mají hmotnosti asi pětkrát menší než Slunce.



Obr. 2. Závislost absolutní bolometrické hvězdné velikosti (M_{bol}) na logaritmu hmotnosti (v jednotkách hmotnosti Slunce) pro hvězdy hlavní posloupnosti na Hertzsprungově-Russellově diagramu

Podél hlavní posloupnosti tedy klesá teplota, poloměr i hmotnost hvězd. S průměrem a hmotností souvisí další fyzikální veličina, charakterizující hvězdu — její průměrná hustota. Ukazuje se, že průměrná hustota hvězd podél hlavní posloupnosti roste: žhavé velké hvězdy spektrální třídy *O* mají průměrnou hustotu asi dvěstěkrát menší než Slunce (průměrná hustota Slunce je $1,41 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), chladnější malé hvězdy třídy *M* mají hustotu až dvacetkrát větší než Slunce.

Z tvaru hlavní posloupnosti se ještě v první polovině našeho století usuzovalo, že podél hlavní posloupnosti probíhá vývoj hvězd; předpokládalo se, že mladé, nově vznikající hvězdy jsou velmi žhavé a hmotné, a proto jsou na začátku posloupnosti, postupně chladnou a posouvají se podél hlavní posloupnosti až k třídě *M*, pak dále chladnou a přestávají zářit. Proto se také nazývaly spektrální třídy *O* a *B* „rané“, třídy *K* a *M* „pozdní“. Moderní astrofyzika dokázala, že tato představa neodpovídá skutečnosti. Vývoj hvězdy je na Hertzsprungově-Russellově diagramu charakterizován poměrně složitou křivkou, jejíž průběh závisí především na počáteční hmotnosti hvězdy. Počáteční hmotnost také určuje, na kterém místě hlavní posloupnosti se hvězda objeví na H-R diagramu. Skutečnost, že valnou většinu hvězd pozorujeme právě na hlavní posloupnosti, vyplývá z toho, že ve stadiu vývoje, odpovídajícímu některé části H-R diagramu, setrvává hvězda po velmi dlouhou dobu, ostatní části vývoje probíhají relativně rychleji. Celková rychlost vývoje

hvězdy závisí rovněž na její hmotnosti — vývoj hmotnějších hvězd probíhá rychleji než vývoj hvězd s malou počáteční hmotností. I když tedy vývoj hvězdy neprobíhá podél hlavní posloupnosti, je stáří hvězd „raných“ spektrálních tříd menší (řádově několik miliónů roků) než stáří hvězd chladnějších. Stáří našeho Slunce se odhaduje na několik miliard let, u chladnějších hvězd „pozdních“ spektrálních tříd se předpokládá stáří ještě větší.

různé

250 let od smrti Isaaca Newtona

FRANTIŠEK GOLAB, Dr. JOSEF PROCHÁZKA, PdF, Ostrava

Narodil se 4. ledna 1643 ve vesnici Woolsthorp. O jeho dětství a mládí známe jen velmi málo. Narodil se krátce po otcově smrti a již v raném věku projevoval veliké nadání. Studoval na střední škole v blízkém městečku Grantham. Rád sestrojoval složité hračky a různé modely, výborně kreslil a mnoho času trávil nad různými chemickými pokusy.

Od roku 1661 studoval na slavné Trinity-College v Cambridgi aritmetiku, geometrii, trigonometrii, teologii a klasické jazyky. Zde se rovněž seznámil s Koperníkovým heliocentrickým systémem a Keplerovou optikou. Roku 1665 dosáhl hodnosti bakaláře, po třech letech byl zvolen za mladšího člena kolegia a brzy poté magistrem, tj. mistrem umění.

K vědecky nejplodnějšímu období jeho života patří léta 1665—1687. V pozdějších letech se zabýval bez většího úspěchu některými filozofickými a teologickými problémy. V té době byl Newton i veřejně činný. Byl členem parlamentu v letech 1688—1705, tedy v době nástupu Viléma Oranžského k moci, od kdy se datují začátky anglického parlamentarismu. O jeho členství v parlamentu se vypráví anekdota, že promluvil ve sněmovně jen jednou, aby požádal stráž o zavření okna v zasedací síni. Od roku 1699 byl mincmistrem v Londýně a v ocenění služeb byl jmenován doživotně ředitelem mincovny. Od roku 1703 až do své smrti byl předsedou Královské společnosti. V roce 1705 byl za zásluhy o vědu povýšen do šlechtického stavu (sir Isaac).

První Newtonovy vědecké práce se týkaly algebry, analytické a syntetické geometrie, objevil metodu nekonečných řad a začal s experimentálními pracemi z optiky. Důležitým obdobím v jeho životě byla léta 1665—1667, strávená v rodném Woolsthorpu, kam se uchýlil před straš-



nou morovou epidemií, která zachvátila Londýn a jiná velká města. Tu vytvořil Newton základy diferenciálního a integrálního počtu. Výsledky zveřejnil v pěti publikacích v letech 1665 a 1666, později (asi v roce 1671) vypracoval souhrnnou studii, která však byla vydána až po jeho smrti. Nezávisle na Newtonovi objevil základy diferenciálního a integrálního počtu německý matematik Leibnitz; mezi oběma vědci vznikl mnohaletý spor o prvenství objevu, jímž si vzájemně znepřijemňovali poslední roky života.

Výsledky Newtonovy práce ve fyzice jsou shrnuty ve dvou základních dílech „*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*“ (1687) a „*Optica*“ (1704).

V prvním z nich, jehož název se uvádí v češtině jako *Matematické principy přírodní filozofie*, vykládá Newton ve třech knihách své objevy z mechaniky hmotného bodu, tuhého tělesa, hydrostatiky, hydrodynamiky, vlnění a základů nebeské mechaniky. Není proto náhodné, že základní dynamické zákony a zákon všeobecné gravitace nesou jeho jméno.

Nejdůležitějším cílem *Principů* byl důkaz gravitačního zákona, který vyplývá z aplikace zákonů mechaniky na pohyb nebeských těles. New-

ton aplikoval své principy dynamiky na pohyb planet, komet, Měsíce, na volný pád, přílivy atd.

Podle ústního podání objevil Newton zákon všeobecné gravitace zcela náhodně, sedě pohroužen do svých myšlenek na zahradě ve Woolsthorpu. Nečekaný pád jablka obrátil jeho pozornost na myšlenku, proč padá jablko vždy svisle směrem ke středu Země a nikoliv šikmo. Z toho usoudil, že musí existovat přitažlivá síla, soustředěná v centru Země. Podle principu akce a reakce přitahuje jablko Zemi stejně, jako Země jablko. Existuje tedy síla podobná té, kterou nazýváme tíže.

Ve druhém základním díle „Optica“, které vyšlo poprvé v angličtině r. 1704, shrnul Newton své výzkumy o světle. První kniha zahrnovala geometrickou optiku, učení o disperzi světla a složení bílého světla s různými přílohami. Ve druhé knize popsal barvy tenkých vrstev a třetí knihu věnoval difrakci (ohybu) a polarizaci světla.

Jeho jméno vešlo do historie vývoje poznatků na podstatu světla jakožto autora korpuskulární hypotézy. Mezi ním a Hoochem, zastánce vlnové hypotézy, vznikla polemika, která trvala několik let. Roku 1675 se snažil vytvořit jakousi kompromisní korpuskulárně vlnovou hypotézu světla; kromě korpuskulí připouští i existenci éteru, kde účinkem světelných částic vznikají a šíří se světelné vlny.

Newton byl vynikající experimentátor. Vytvořil v té době nejmodernější optickou laboratoř. Vrcholem jeho mistrovství byla konstrukce zrcadlového dalekohledu, který vyrobil r. 1668 (o tři roky později vyrobil druhý takový přístroj větších rozměrů a lepší kvality). V té době podal návrh i na zrcadlový mikroskop.

Nutno přiznat, že velké Newtonovy objevy byly završením vědecké práce mnohých učenců, např. Galileiho (setrvačnost, volný pád), Koperníka (gravitace) a dalších, kteří sami nedovedli ještě své objevy formulovat a zobecnit. Sám Newton hovořil o svých úspěších takto: „Jestliže jsem viděl dále než druzí, pak jen proto, že jsem stál na zádech gigantů.“

Z Newtonovy korespondence vyplývá, že problémem přitažlivosti se zabýval už v roce 1665—1666. V dopise Halleyovi r. 1686 píše, že už r. 1665 nebo 1666 vyvodil z Keplerových zákonů, že síly přitažlivosti musí ubývat se čtvercem vzdálenosti mezi přitahujícími se tělesy. V jeho poznámkách se našel tento záznam: „Z Keplerova pravidla, že periody planet jsou v jedenapůlnásobném poměru ke vzdálenosti od středů jejich drah, jsem vyvodil, že síly udržující planety na oběžných drahách musí být nepřímě úměrné čtvercům jejich vzdáleností od středů, kolem nichž obíhají. Odtud jsem srovnal sílu, potřebnou na udržení Měsíce na jeho oběžné dráze se silou přitažlivosti na povrchu Země a zjistil jsem, že si vzájemně odpovídají. Tohle všechno jsem objevil ve dvou letech morové nákazy (1665—1666) neboť tehdy jsem byl na vrcholu svých

objevitelských sil a přemýšlel jsem o matematice a filozofii více než v pozdější době“.

Newtonovy objevy sehrály důležitou roli v rozvoji tzv. klasické mechaniky a nebeské mechaniky. Bylo ověřeno, že gravitační zákon platí i pro vzdálenější nebeská tělesa, např. pro pohyb dvojhvězd, které jsou daleko za hranicí naší sluneční soustavy. Triumfem Newtonovy mechaniky byl předem vypočtený objev planet Neptuna (1846) a Pluta (1930).

Teprve začátkem XX. století objevy Plancka a Einsteina ukázaly na omezenou platnost zákonů, na nichž byla vybudována Newtonova klasická mechanika.

V letech 1692–1693 trpěl Newton psychickou poruchou, pravděpodobně jako následek dlouholeté vyčerpávající duševní práce. Soudí se, že příčinou choroby mohl být i požár v jeho pracovně, při němž bylo zničeno mnoho rukopisů a nedokončených prací. Byla to pro něj hrozná událost, z níž se jen pomalu a velmi dlouho zotavoval.

Newton prožil pokojné stáří. Po celý život byl velmi skromný, přímý a čestný. Když se pohroužil do své práce, zapomínal na jídlo a spánek. Zešedivěl, když mu bylo 30 let (sám žertovně uvádí — zešedivěl jsem od častých pokusů se rtutí). Nebyl však dobrým společníkem, neboť byl stále pohroužen do svých myšlenek.

Zemřel 31. března 1727 ve věku 85 let a byl pochován se všemi poctami ve Westminsterském opatství.

Na Newtonově památníku v Trinity College v Cambridgi je vytesán citát z Lucretia: „Qui genus humanum ingenio superavit“ (Ten, kdo umem překonal lidský rod).

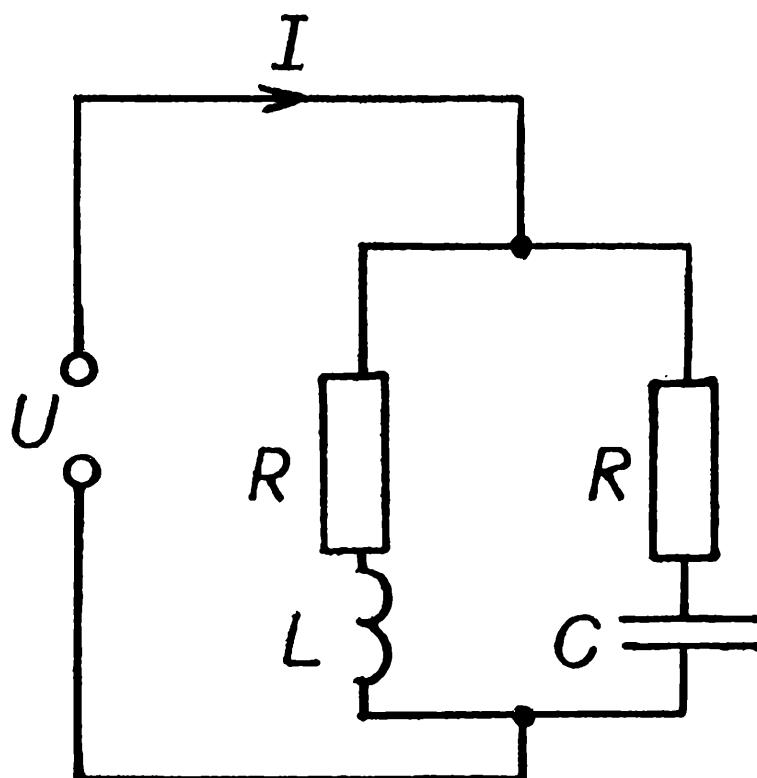
olympiády

Soutěžní úkoly prvního kola XIX. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A.

1. K měření malých délkových posunutí se často využívá změna kapacity rovinného kondenzátoru způsobená změnou vzájemné vzdálenosti jeho desek.

Označme d vzájemnou vzdálenost desek, Δd změnu této vzdálenosti, tj. vzájemné posunutí desek.



Obr. A-1

a) Vyjádřete posunutí Δd jako funkci změny ΔC kapacity kondenzátoru. Ve výsledném vztahu se objeví záporné znaménko; vysvětlete jeho význam.

b) V praxi se často používá přibližný vztah pro posunutí $\Delta d^* = -\frac{\Delta C}{C_0} d_0$, kde d_0 je původní vzájemná vzdálenost desek a C_0 příslušná kapacita kondenzátoru. Zjistěte, za jakých podmínek můžeme tento vztah používat, nemá-li chyba tím vzniklá překročit 1 % správné hodnoty posunutí Δd .

2. Obvod podle obr. A-1 je připojen ke zdroji harmonického střídavého napětí U . Proud I , který obvodem protéká, je ve fázi s napětím U , a to při každém kmitočtu.

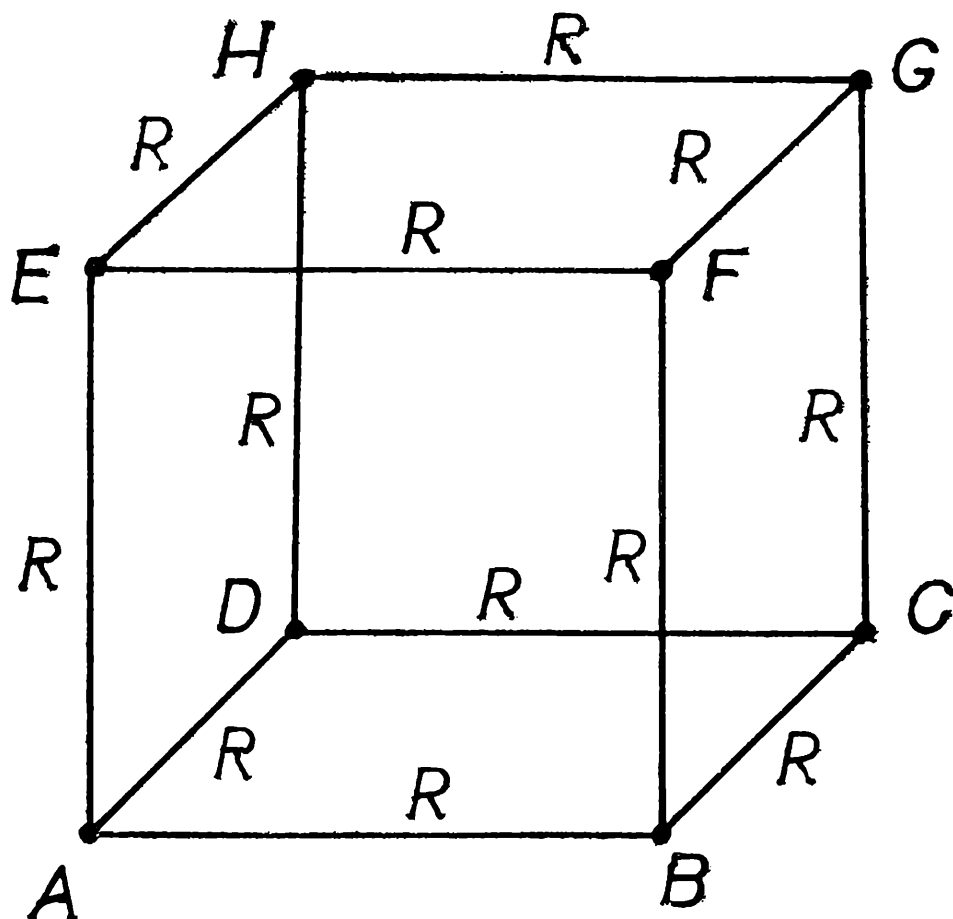
a) Jaký je vztah mezi veličinami R , L , C ?

b) Jaký je odpor R_0 obvodu? Platí výsledek i pro stejnosměrný proud? Odpověď zdůvodněte.

3. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Všechny dvojice vrcholů, které určují hrany krychle, jsou spojeny vodiči o stejných odporech R . Určete, jaký je odpor mezi vrcholy a) A , B ; b) A , C ; c) A , G . Situace je na obr. A-2.

4. Rovinné zrcadlo je ve vzdálenosti d za tenkou spojnou čočkou o ohniskové vzdálenosti f . Špendlík je ve vzdálenosti x před čočkou, $x > f$.

a) Pro které hodnoty x se může vytvořit skutečný obraz špendlíku touto zobrazovací soustavou?



Obr. A-2

b) Zobrazení znázorněte graficky pro vhodně zvolené hodnoty f , d . Předpokládejte, že zobrazovací paprsky jsou v paraxiálním prostoru.

5. Na obr. A-3 je schéma jednoduché tzv. elektrické výhybky. Rezistor o odporu R_1 nahrazuje reproduktor pro nízké tóny, rezistor o odporu R_2 nahrazuje reproduktor pro vysoké tóny.

a) Vyložte činnost této elektrické výhybky.

b) Stanovte indukčnost L a kapacitu C tak, aby při tzv. dělicím kmitočtu f_d dostával každý reproduktor polovinu příkonu, který by dostával, kdyby byl ke zdroji harmonického střídavého napětí připojen přímo.

Řešte nejprve obecně, potom pro $R_1 = 5,0 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $f_d = 2,0 \text{ kHz}$.

c) Pro obecné hodnoty L , C nalezené v části b) stanovte funkce $y_1 = F_1(x)$, $y_2 = F_2(x)$, kde $y_1 = P_1/P_{1 \max}$, $y_2 = P_2/P_{2 \max}$, $x = f/f_d$; P_1 , P_2 zde značí příkony reproduktorů R_1 , R_2 při obecném kmitočtu f , $P_{1 \max}$ a $P_{2 \max}$ příkony, které by reproduktory dostávaly při přímém připojení ke zdroji napětí.

d) Znázorněte graficky tyto funkce do téhož grafu. Stupnici pro x volte logaritmickou. Funkční hodnoty počítejte pro $x = 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8$.

6. *Experimentální-alternativní*; podle vybavení školy (reverzní kyvadlo, tónový generátor, voltmetr s malou vlastní spotřebou) a podle vlastního zájmu si soutěžící zvolí buď alternativu A nebo alternativu B.



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 55, 1976-77

VEDOUCÍ REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER,

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Doc. Ota SETZER,

nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA: Dr. Jaroslav Bayer, VÚT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha.

Vydává ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

O B S A H

Úvodníky

Kraemer Emil: Na prahu 55. ročníku našich Rozhledů	1
Žofka Josef: Otevřená cesta	241

Matematika

Bican Ladislav, Němec Petr: Určete čísla	3, 55
Brejcha Josef: Některé vlastnosti rovinného trojúhelníka s jeho Brocardo- vými body	58, 106
Poznámka k vlastnostem pat výšek rovinného trojúhelníka	343
Calda Emil: Parabola a vrh šikmo vzhůru	5
Horák Otto: O jednom využití násobení matic	385
O násobení matic	337
Horák Stanislav: Vektory v geometrii	198, 266
O jedné vlastnosti elipsy	442
Hrdina Ladislav: Paradox s percentami	340
Husová Helena: Minimalizace odpadu	436
Koman Milan: Pět úloh z kombinatoriky	299
Mráz Vlastimil: Normální formy výrokových formulí	102, 156, 255, 289
Plocki Adam: Náhodná bloudění	145
Skuhra Jiří: Maticové hry bez sedlového bodu	193
Maticové hry proti přírodě	248
Maticové hry se sedlovým bodem	49
Straka Josef: Lze každé celé číslo zapsat stejnými číslicemi?	201
Sittayová Anna: Niekoľko slov o počítačovej grafike	62

II.

Šedivý Jaroslav: Ekvidistanty rovinného útvaru	203
Jak objevovat kritéria dělitelnosti	433
Množinový rozbor a záznam paradoxních situací	97
Zobrazení zachovávající dělitelnost sedmi	243
Tablinský Antonín: Geometrická konstrukce součtu převrácených čísel	340
Trávníček Stanislav: Geometrická pravděpodobnost	160, 205
Vrba Antonín: O hlemýždi, koberečcích a jak to souvisí s pokrýváním úsečky	389, 439
Železný Lubomír: O prvočíselných aritmetických posloupnostech	253

Konstruktivní geometrie

Drs Ladislav: Cyklus ve vývojovém diagramu	10
Horák Stanislav: Jeřábkovy body	391
Lemoínův bod	354
O jedné vlastnosti elipsy	4
Z geometrie trojúhelníka	13
Kraemer Emil: Apolloniova kružnice	393
Užití dělicího poměru v geometrii	174
Užití věty Menelaovy a Cevovy	348
Věta Menelaova a věta Cevova	211
Kršňák Pavel: O zvězdku a trse rovín	273

Fyzika

Bednář Jan: Pomůže fyzika atmosféry nalézt nové zdroje energie?	17
Použití komplexních čísel k popisu šíření elektromagnetických vln	361
Feil Miloslav: Některá použití součinu vektorů v praxi	20
Janout Zdeněk: Elementární části a interakce mezi nimi	221
Kolesnikov V., Záhejský J.: Experimentální ověření závislosti hmotnosti na rychlosti	66
Mrázek Jiří: Družice měří tvar Země	230
O některých aplikacích kosmonautiky	278, 316, 360, 406
Zázraky beztížného prostoru	225
Procházková Dana: Charakter zaměřené činnosti v Československu	185
Ruprechtová Libuše: Čs. seismická služba — mezinárodní spolupráce a výměna dat	110
Říman Evžen: Zákony čiarových spektier, Balmerov objav a jeho význam	311
Skotnický Jozef: O entropii	407
Tulak Rudolf: Tlak světelného záření	226

Vybíral Bohumil: Síly při cvičení na gymnastickém nářadí	401
Zlatuška Jiří: Modely vesmíru	319

Astronomie

Široká Mir., Široký Jaromír: Hertzsprungův-Rusellův diagram	415
Hvězdy hlavní posloupnosti	445
Jak se určují vzdálenosti galaxií	24

Naše soutěž

Řešení úloh minulého ročníku	33, 79, 116, 234
Úlohy k řešení	29, 232
Výsledky loňské soutěže Rozhledů	77

Olympiády

MO a MMO	40, 42, 132, 459
FO a MFO	74, 328, 371, 452

Různé

Golab Frant., Procházka Josef: 400 let od smrti Geronima Cardana	43
Sto let od narození prof. ing. Viktora Kaplana	362
250 let od smrti I. Newtona	449
Gedei Ján: Súťažné úlohy z fyziky v MLR a ich riešenie	87, 135
Kahuda František: Za profesorem Miloslavem Valouchem	133
Koman Milan: Korespondenční seminář z kombinatoriky	280
Kotyk Josef: Beseda s čtenáři	282
Leonhard Euler	420
Matematické myšlení	426
Sedláčková Jiřina: Znova problém čtyř barev	428
Stejskal Vladimír: Kapesní kalkulátor a jeho použití	139
Šedivý Jaroslav: Studium prvočísel pomocí strojů	334

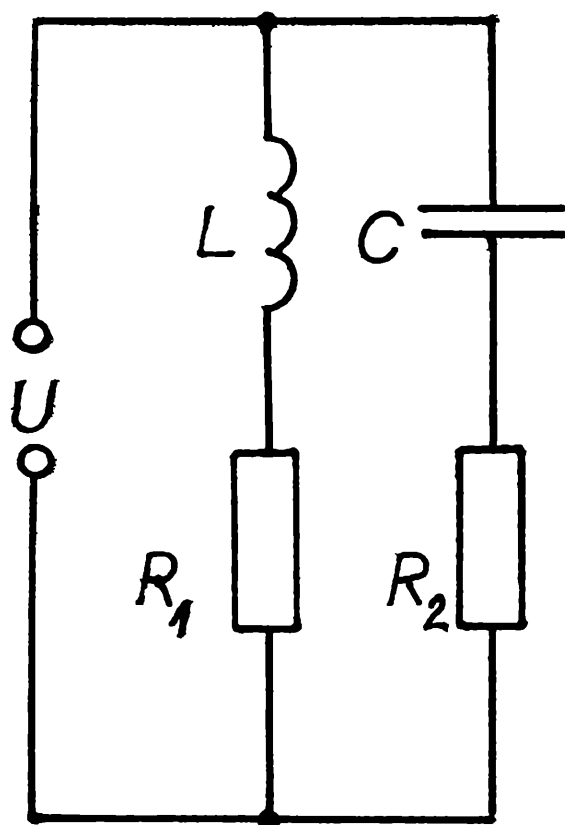
Matematicko-fyzikální zábavy	46, 85, 144, 238, 284, 332, 429
-------------------------------------	---------------------------------

Recenze	47, 95, 191, 240, 287, 336, 431
----------------	---------------------------------

Ze zahraničních časopisů	84, 330, 473
---------------------------------	--------------

Nejmladším čtenářům	378
----------------------------	-----

IV.



Obr. A-3

Alternativa A:

Určení tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla.

Podle návodu ve studijním textu určete tíhové zrychlení pomocí reverzního kyvadla.

Alternativa B:

Měření přenosové charakteristiky kmitočtově závislého děliče napětí.

Úloha se týká děliče napětí schematicky znázorněného na obr. A-4.

Přenosem takového děliče nazýváme poměr

$$\beta = \frac{U_2}{U_1},$$

kde U_2 značí výstupní, U_1 vstupní napětí děliče.

Přenosová charakteristika je graf funkce $\beta = F(f)$, kde f značí kmitočet harmonických napětí U_1 , U_2 .

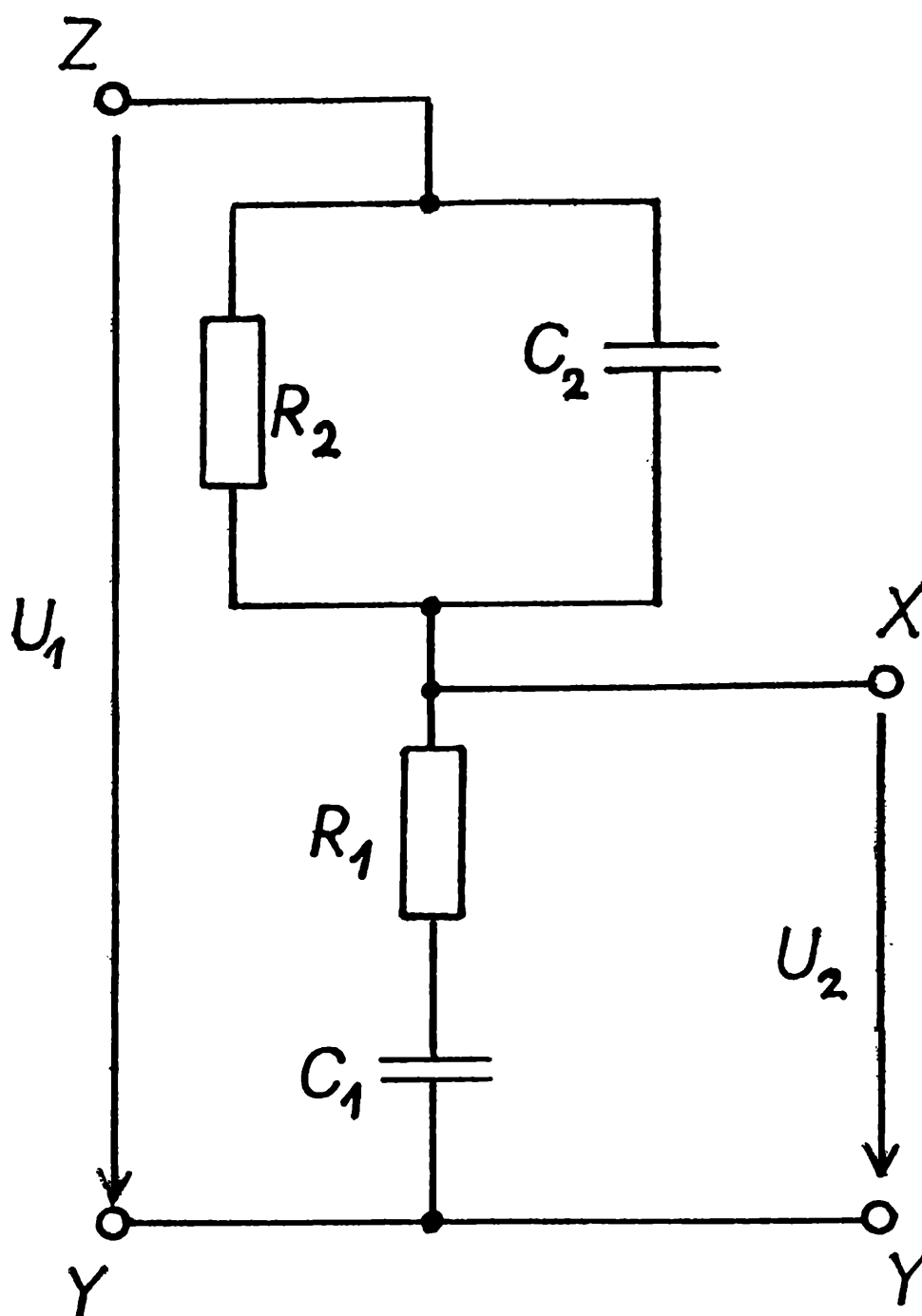
Zadání:

Změřte a zakreslete přenosovou charakteristiku děliče napětí podle obr. A-4 pro $R_1 \doteq 2 \text{ k}\Omega$, $R_2 \doteq 8 \text{ k}\Omega$, $C_1 \doteq 0,1 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 \doteq 10 \text{ }\mu\text{F}$.

Pomůcky:

Rezistory s uvedenými odpory, kondenzátory s uvedenými kapacitami, nízkofrekvenční (tónový) generátor, střídavý voltmetr s malou vlastní spotřebou (elektronkový, tranzistorový, avomet II apod.), popř. dva takové voltmetry (pro usnadnění práce). Vstupní napětí na děliči můžete určovat i pomocí voltmetru vestavěného v nf generátoru.

Obr. A-4



a) Postup:

1. Sestavte dělič napětí podle obr. A-4.
2. Máte-li dva voltmetry vyhovujících vlastností, připojte jeden z nich ke svorkám Y, Z , druhý ke svorkám Y, X . Máte-li jen jeden a nemůžete-li vstupní napětí na děliči zjišťovat elektronkovým voltmetrem vestavěným v nf generátoru, budete jej při každém měření připojovat jednou ke svorkám Y, Z , podruhé ke svorkám Y, X .
3. Nízkofrekvenční generátor připojte ke svorkám Y, Z .
4. Na generátoru nastavujte různé kmitočty v rozmezí od 30 Hz do 10 kHz a voltmetrem (popř. dvěma voltmetry) měřte napětí U_1, U_2 .

5. Pro každý nastavený kmitočet vypočítejte poměr $\beta = \frac{U_2}{U_1}$, výsledky sestavte do přehledné tabulky.
6. Podle tabulky sestrojte graf. Stupnici pro kmitočty volte logaritmickou, stupnici pro β lineární.

b) Použití:

Dělič napětí podle obr. A-4 může sloužit k pozvednutí hlasitosti nízkých i vysokých tónů např. při reprodukci hudby z gramofonových desek. Vysvětlete!

Poznámky:

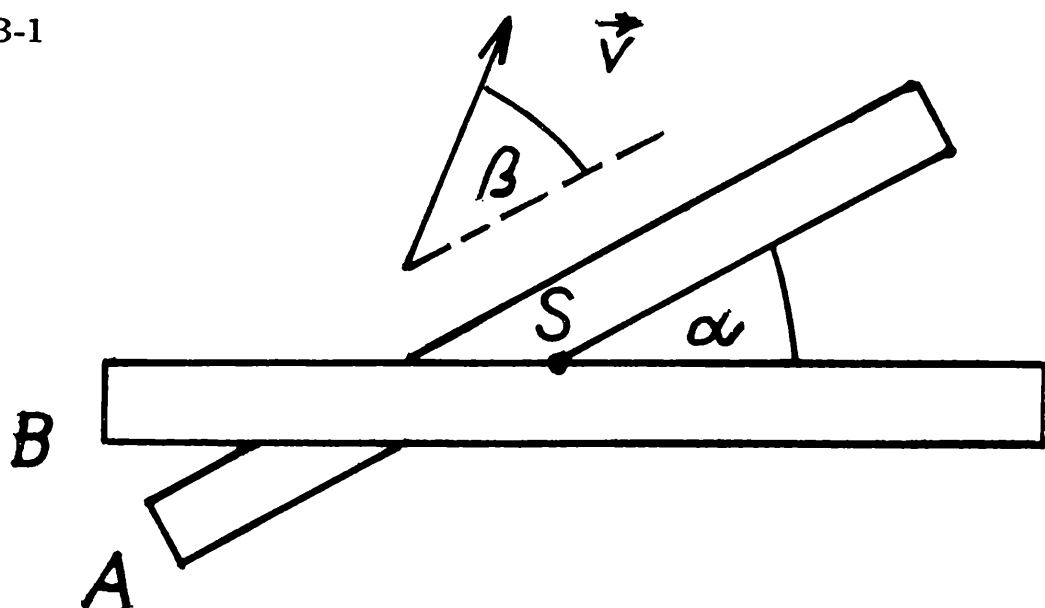
1. Uvedené hodnoty odporů a kapacit jsou informační; můžete použít i poněkud jiné, ale nepřiliš odlišné. Rezistory použijte takové, jejich indukčnosti jsou zanedbatelné, kondenzátory kvalitní, s malými ztrátami v dielektriku a se zanedbatelnými indukčnostmi.
2. Doporučené hodnoty kmitočtů: 30, 40, 50, 100, 200, 300, 400, 500 Hz; 1, 2, 3, 4, 5, 10 kHz.
7. Vnitřní povrch nádoby má tvar rotačního kužele se svislou osou a rozšiřuje se nahoru. Spádnice svírají s vodorovnou rovinou úhel α . Tělísku zanedbatelných rozměrů, které je na vnitřní stěně nádoby ve výšce h_0 nad vrcholem kužele, udělíme rychlost $\vec{v}$ ve vodorovném směru tak, že se pohybuje (bez tření) po vnitřní stěně nádoby.
 - a) Určete, do jaké výšky h nad vrcholem kužele se tělísko dostane.
 - b) Jakou největší rychlost $\vec{v}_1$ ve vodorovném směru tělísko získá?
 - c) Jakou největší rychlost $\vec{v}_2$ ve svislém směru tělísko získá?

Kategorie B.

1. Pravítka A a B zvierajú uhol α (obr. B-1). Bod S je priesečník hrán oboch pravítok.
 - a) Určte veľkosť v_{S1} rýchlosti $\vec{v}_{S1}$ pohybu bodu S , ak $\vec{v}$ je rýchlosť pohybu pravítka B vzhľadom na pravítko A .
 - b) Určte veľkosť v_{S2} rýchlosti v_{S2} pohybu bodu S , ak $\vec{v}$ je rýchlosť pohybu pravítka A vzhľadom na pravítko B . Rýchlosť v zvierá s pravítkom A uhol β .

V oboch prípadoch určte podmienky pre uhol β , ktoré musia byť splnené, aby rýchlosti v_{S1} , v_{S2} boli nulové, resp. maximálne.
2. Do vody, ktorej hustota je ρ , je ponorená sklená kruhová doska tak, že podstava dosky je vodorovná a časť dosky je nad povrchom vody. Obsah podstavy kruhovej dosky je S , hmotnosť dosky je m .
 - a) Nakreslite tvar povrchu vody v blízkosti dosky (tzv. meniskus) a určte polomer krivosti R povrchu vody v bode, ktorý je vo výške h nad vodorovným povrchom vody.
 - b) Dosku začneme dvíhať zvisle nahor z vody silou $\vec{F}$ tak, že jej podstava zostane trvale vodorovná. Nakreslite tvar povrchu vody v okolí

Obr. B-1



dosky v niekoľkých charakteristických fázach tohto deja až do odtrhnutia dosky od povrchu vody.

c) Určte najväčšiu veľkosť F_1 sily $\vec{F}$ počas tohto deja. Odtrhnutie dosky od povrchu vody nastane vtedy, keď dolná podstava dosky je vo výške h_0 nad vodorovným povrchom vody. Pre jednoduchosť ďalej predpokladáme, že meniskus vo výške $\frac{h_0}{2}$ má polomer $R_0 = \frac{h_0}{2}$.

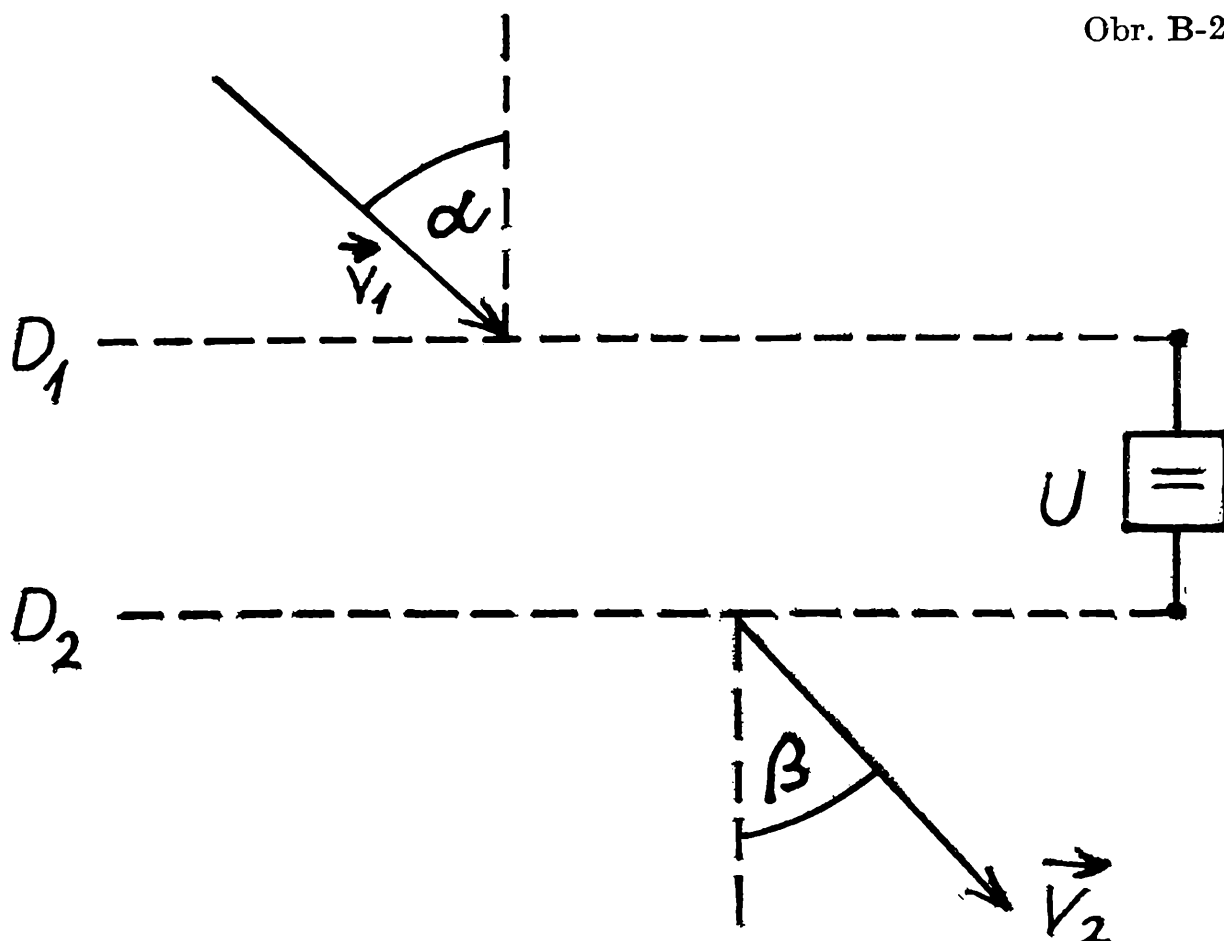
Polomer R zakrivenia povrchu vody počítajte ako polomer krivosti čiary, ktorá je priesečnicou zvislej roviny, prechádzajúcej stredom dosky, s povrchovou plochou vody. Polomer kružnice, ktorá je priesečnicou vodorovnej roviny s meniskom vody, je neporovnateľne väčší ako R .

3. Elektron, jehož rýchlosť je $\vec{v}_1$ (rýchlosť v_1 je veľmi malá vzhľadom k rýchlosti svetla vo vakuu), vstupuje do homogenného elektrického pole medzi dvoma rovinnými vzájemne rovnobežnými jemnými sítkami D_1 , D_2 . Napätí medzi sítkami je U . Směr pohybu elektronu před vstupem do elektrického pole svírá se směrem kolmým k sítkám ostrý úhel, který označíme α (obr. B-2). Po vystoupení z elektrického pole se elektron pohybuje setrvačností dále, přičemž směr jeho pohybu svírá se směrem kolmým k sítkám úhel, který označíme β .

a) Nakreslete dráhu pohybu elektronu, když sítko D_2 je vůči sítku D_1 kladná. Určete pro tento případ poměr $p_1 = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$.

b) Nakreslete dráhu pohybu elektronu, když sítko D_2 je vůči sítku D_1 záporná. Určete pro tento případ poměr $p_2 = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$.

V obou případech proveďte diskuzi a určete úhel β , když $\alpha = 45^\circ$, $U = 100 \text{ V}$, $v_1 = 6,0 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



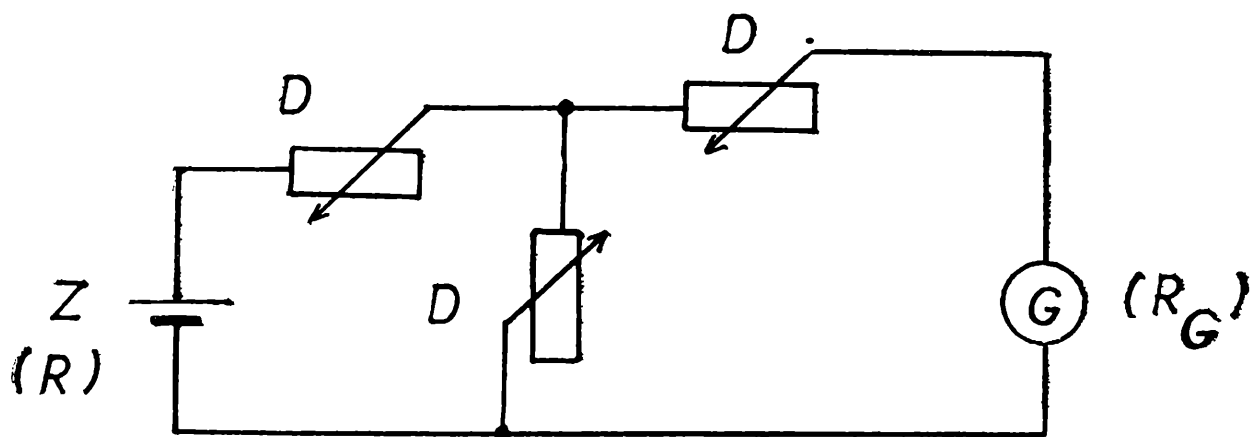
4. Na vodorovném homogenním válcovém kotouči o hmotnosti m a poloměru r stojí ve vzdálenosti r_1 od svislé osy procházející středem kotouče člověk o hmotnosti m_1 . Kotouč, který je v klidu, se může otáčet bez tření okolo svislé osy procházející jeho středem. Člověk se začne pohybovat po dráze tvaru kružnice o poloměru r_1 , jejíž střed je na ose kotouče, s rychlostí $\vec{v}$, jejíž velikost v je stálá.

- Určete úhlovou rychlost $\vec{\omega}$ kotouče vzhledem k povrchu Země.
- Určete rychlost v_1 pohybu člověka z hlediska pozorovatele, který je vzhledem k povrchu Země v klidu.

5. Vnitřní odpor R_G galvanometru G můžeme měřit v zapojení podle obr. B-3, kde Z je zdroj napětí s vnitřním odporem R ; D_1 , D_2 , D_3 jsou odporové normály (dekády).

Nejprve nastavíme na dekádě D_1 nulový odpor, na dekádě D_3 odpor dosti velký a na dekádě D_2 odpor dosti malý, aby na galvanometru byla vhodná výchylka α . Za vhodnou považujeme výchylku ručky přístroje ve třetí třetině stupnice.

Potom na dekádě D_2 nastavíme odpor $2R_2$ a na dekádě D_1 odpor R_1 takový, aby na galvanometru byla výchylka stejná jako v prvním případě.



Obr. B-3

Pomocí R , R_1 , R_2 , R_3 určete vnitřní odpor R_G galvanometru. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $R = 1,00 \cdot 10^{-3} \Omega$; $R_1 = 33,5 \Omega$; $R_2 = 10,0 \Omega$; $R_3 = 100 \Omega$.

6. Meranie usmerňovacej charakteristiky kremíkovej fotoelektrickej diódy 1 PP 75 pri rôznych osvetleniach diódy.

Pomôcky: Fotoelektrická dióda 1 PP 75, meracie prístroje DU 10 — 2 kusy, príp. avometry, alebo iný mikroampérmetr s rozsahom do $600 \mu\text{A}$ a milivoltmeter s rozsahom do 1000 mV , plochá batéria alebo monočlánok, reostat s odporom okolo 150Ω , luxmeter.

Cieľ merania: Určenie usmerňovacích charakteristík fotoelektrickej diódy 1 PP 75 pre štyri rôzne osvetlenia E :

$E_1 = 0 \text{ lx}$ (neosvetlená dióda), $E_2 = 1000 \text{ lx}$, $E_3 = 1500 \text{ lx}$, $E_4 = 2000 \text{ lx}$. Fyzikálne interpretovať získané výsledky.

Postup:

1. Zostavíme elektrický obvod podľa schémy na obr. B-4. Dbáme na to, aby dióda bola najskôr pripojená na zdroj v priepustnom smere.

2. Postupne zvyšujeme napätie U_1 od nulovej hodnoty a meriame prúd I , ktorý preteká diódou.

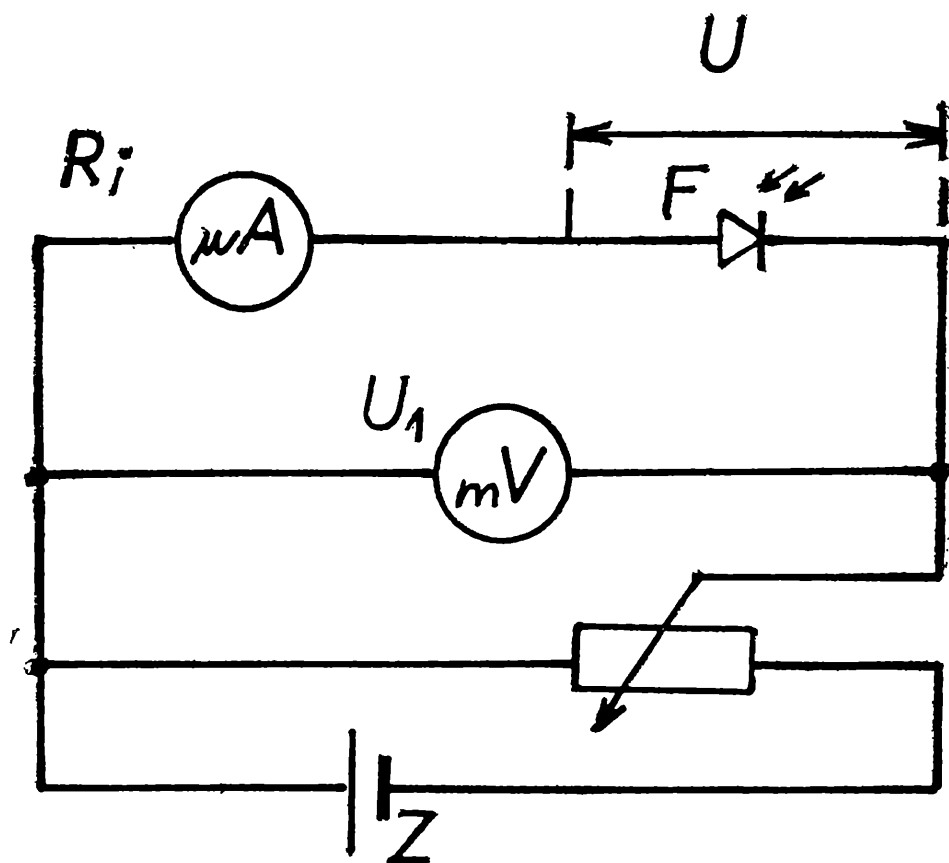
Pre napätia U na dióde platí

$$U = U_1 - R_i I,$$

kde R_i je vnútorný odpor ampérmetra. Usmerňovacia charakteristika fotoelektrickej diódy je graf funkcie $U = U(I)$.

Zvyšovaním napätia U_1 prúd I sa postupne znižuje až na nulovú hodnotu, kedy $U_1 = U = U_f$, kde U_f je fotoelektromotorické napätie diódy pri danom osvetlení. Pri ďalšom zvyšovaní napätia U_1 tečie diódou prúd v priepustnom smere.

3. Napätie U_1 znížime na nulu a zmeníme polaritu pripojenia zdroja. Dióda je pripojená na zdroj v závernom smere. Nameriame niekoľko hodnôt U_1 a I pre zobrazenie usmerňovacej charakteristiky diódy v závernom smere.



Obr. B-4

4. Napätie U v priepustnom i v závernom smere zvyšujeme približne do hodnoty $U' = 800 \text{ mV}$.

5. Meranie, ktorého postup je uvedený v bodoch 1. až 4., robíme najskôr pre neosvetlenú diódu (napr. diódu zabalíme do čierneho papiera), potom meranie opakujeme pre tri rôzne osvetlenia E_2 , E_3 , E_4 , ktoré v mieste uloženia diódy odmeriame luxmetrom. Merané hodnoty U_1 , I a vypočítanú hodnotu U zapisujeme do tabuliek. Pre každú charakteristiku získame dostatočný počet hodnôt U , I , potrebných na zostrojenie grafov funkcie $U = U(I)$.

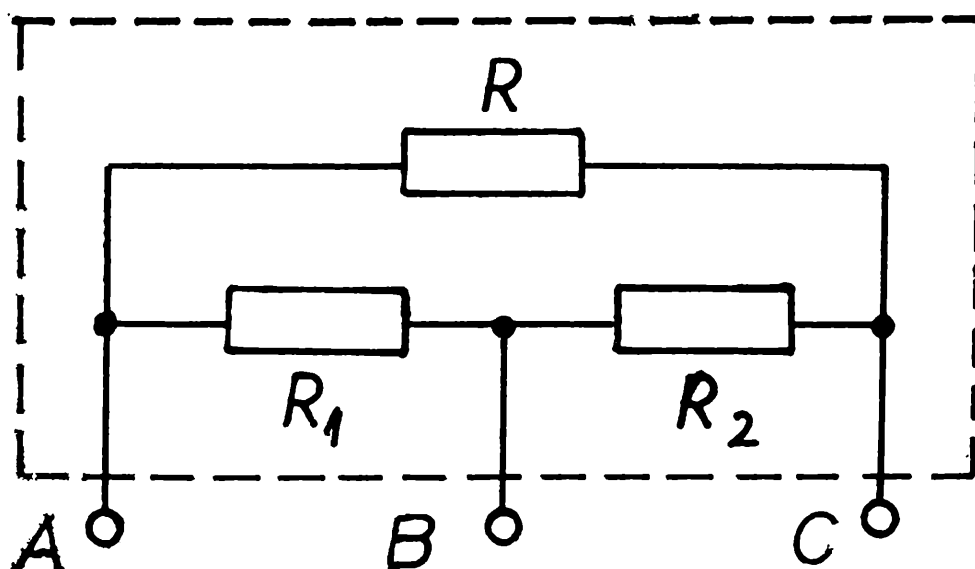
6. Zostrojíme usmerňovacie charakteristiky $U_i = U_i(I)$, kde $i = 1, 2, 3, 4$, pre štyri rôzne osvetlenia, uvedené v cieľoch merania. Vysvetlite tiež stručne princíp fotoelektrickej diódy a fyzikálne interpretujte získané výsledky.

Poznámky:

a) Kladný pól vnútorného fotoelektrického napätia diódy je vyznačený červenou bodkou.

b) V meraniach i v grafickom zobrazení odlišujte znamienkom priepustné a záverné hodnoty napätia U a prúdu I .

c) V prípade, že nemáte k dispozícii luxmeter, zvolte subjektívne tri ľubovoľné, ale rôzne osvetlenia diódy, čo dosiahnete napr. umiestnením diódy do rôznych vzdialeností od svietiacej žiarovky.



Obr. B-5

d) Vnútorný odpor R_i mikroampérmetra zistíte z prospektu prístroja, príp. ho odmerajte priamou metódou.

7. Jednosmerný ampérmeter, ktorého schéma je na obr. B-5, bol vyrobený pre dva rozsahy: ampérmeter, zapojený do obvodu svorkami A , B , má rozsah I_1 ; druhý rozsah ampérmetra, keď ho do obvodu pripojíme svorkami A , C , je I_2 . Usporiadanie otočnej cievky a bočnikov ampérmetra je také, ako je znázornené na obr. B-5. Predpokladáme, že odpor otočnej cievky je R , odpor bočnikov R_1 a R_2 . Veľkosti odporov R , R_1 a R_2 nie sú známe. Tento ampérmeter je možné použiť ešte v inom zapojení. Opíšte ho a určte rozsah I_3 ampérmetra v tomto zapojení. Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $I_1 = 200 \text{ mA}$, $I_2 = 40 \text{ mA}$.

Kategorie C.

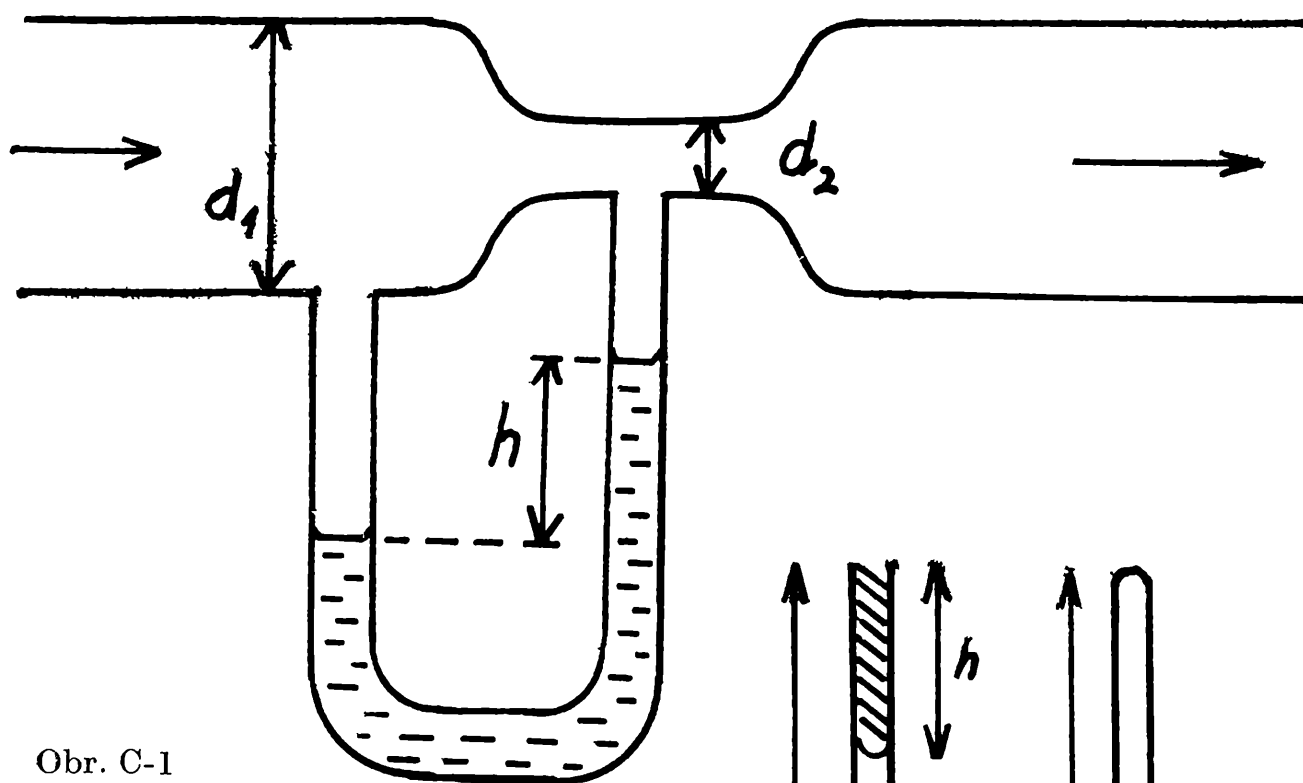
1. Velmi malé těleso je zavěšeno na vlákně, jehož hmotnost je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti tělesa.

a) Určete úhel α , o který je nutno vychýlit napjaté vlákno s tělesem, aby při kývání celkové zrychlení tělesa v krajních polohách mělo stejnou velikost jako celkové zrychlení tělesa při průchodu rovnovážnou polohou.

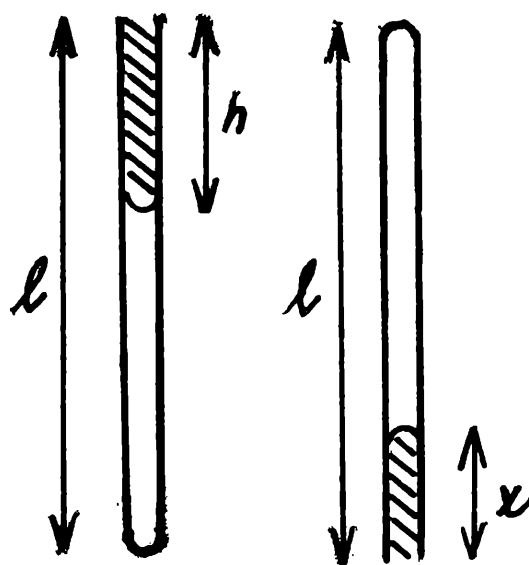
b) Určete úhel α_1 , o který je nutno vychýlit vlákno, aby síla napínající vlákno v rovnovážné poloze měla dvojnásobnou velikost jako síla napínající vlákno v krajních polohách.

Změny délky vlákna neuvažujeme.

2. Na obr. C-1 je znázorněn ve schematickém řezu přístroj k průběžné kontrole průtokové rychlosti plynu v potrubí. Potrubí o vnitřním poloměru d_1 je v určitém místě zúženo na vnitřní průměr d_2 . Potrubím proudí plyn o hustotě ρ , která je konstantní ve všech částech potrubí. Plyn považujeme za ideální. V trubici tvaru U připojené k potrubí je



Obr. C-1



Obr. C-2

kapalina o hustotě ρ_0 . Svislá vzdálenost volných povrchů kapaliny v trubici je h .

a) Stanovte průtokovou rychlost plynu v potrubí o vnitřním průměru d_1 .

b) Určete objemový průtok Q_V plynu v potrubí o průměru d_1 jako funkci vzdálenosti h .

c) Znázorněte funkci $Q_V = f(h)$ graficky na milimetrový papír v oboru $0 \text{ mm} \leq h \leq 20 \text{ mm}$ pro veličiny: $d_1 = 50 \text{ mm}$, $d_2 = 5,0 \text{ mm}$, $\rho = 9,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3. V kapilární trubici o délce l , která je na dolním konci zatavena, je sloupec vzduchu uzavřen sloupcem rtuti o délce h (obr. C-2a). Když trubici převrátíme dnem vzhůru, část rtuti vyteče (obr. C-2b).

a) Určete délku x rtuťového sloupce v trubici v poloze podle obr. C-2b, je-li atmosférický tlak p_a a hustota rtuti ρ . Proveďte diskusi řešení. Vzduch v trubici považujeme za ideální plyn a děj, při kterém se změní objem vzduchu v trubici, považujeme za izotermický.

b) Podle výsledku diskuse stanovte vztah, který platí mezi veličinami l , h , p_a , ρ v případě, že v poloze trubice podle obr. C-2b všechna rtuť vyteče.

c) V poloze trubice podle obr. C-2a byly změřeny tyto hodnoty: $l = 0,70$ m, $h = 0,20$ m, $p_a = 1,0 \cdot 10^5$ Pa, $\rho = 1,36 \cdot 10^4$ kg $\cdot$ m $^{-3}$, $g = 9,8$ m $\cdot$ s $^{-2}$.

Rozhodněte, zda v tomto případě v poloze trubice podle obr. C-2b všechna rtuť z trubice vyteče nebo v ní zůstane sloupec o délce x . V tomto případě stanovte délku x .

4. Máte k dispozici pět stejnorodých koulí o stejném objemu. Čtyři z nich mají stejnou hmotnost m_1 , pátá koule má hmotnost m_2 , $m_2 > m_1$. Všechny koule považujeme za dokonale pružné.

a) Tři koule o hmotnosti m_1 položíme vedle sebe na vodorovnou dokonale hladkou podložku tak, že jejich středy leží v téže vodorovné přímce a mezi koulemi jsou malé mezery. Čtvrtá koule o téže hmotnosti m_1 se pohybuje rychlostí $\vec{v}_1$ a narazí na první kouli řady dokonale pružným rázem. Popište a vysvětlete, které děje probíhají při pokuse se čtyřmi koulemi. Určete konečné rychlosti koulí a porovnejte je s rychlostí $\vec{v}_1$.

b) Počáteční situaci v úloze a) pozměníme tak, že nahradíme střední kouli v trojčlenné řadě koulí o hmotnosti m_2 . Popište a vysvětlete děje, které probíhají nyní při pokuse se čtyřmi koulemi se stejnou počáteční fází pokusu jako v úloze a). Určete rychlosti koulí a porovnejte je s rychlostí $\vec{v}_1$. Zjistěte, zda pro soustavu čtyř koulí je v daných podmínkách splněn zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti.

5. Setrvačník tvaru kotouče o hmotnosti m a poloměru r byl při frekvenci otáčení f ponechán sám sobě a zastavil se působením třecí síly. Určete moment třecí síly, jestliže se setrvačník zastaví a) za dobu t , b) po vykonání n otočení od okamžiku, kdy příkon setrvačníku se stal nulovým.

Moment setrvačnosti setrvačníku $I = \frac{m r^2}{2}$.

Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty: $m = 50$ kg, $r = 0,20$ m, $f = 8,0$ s $^{-1}$, $t = 50$ s, $n = 200$ otočení.

6. Přibližné určení průměru molekuly kyseliny olejové

1. Popis experimentální metody.

Přeneseme-li na volný povrch vody poprášený jemným korkovým práškem kapku kyseliny olejové, pozorujeme, že se na volném povrchu vody roztéká. Kdyby roztékání nebylo omezeno stěnami nádoby, vytvořila by kapka kyseliny olejové na volném povrchu vody souvislou kruhovou monomolekulární vrstvu. Určíme-li objem kapky a průměr kruhové vrstvy, můžeme vypočítat její výšku, která odpovídá průměru molekuly kyseliny olejové.

Praktické provedení pokusu s čistou kyselinou olejovou by bylo v laboratorních podmínkách neproveditelné, protože kapka této kyseliny by vytvořila na volném povrchu vody monomolekulární vrstvu o průměru několika metrů. Proto zředíme kyselinu olejovou vhodným způsobem benzínem a na volný povrch vody přeneseme kapku tohoto roztoku. Benzín se z přenesené kapky rychle vypaří a na volném povrchu vody se vytvoří monomolekulární vrstva kyseliny olejové přijatelných rozměrů.

2. Dílčí úkoly:

- Určete popsanou experimentální metodou přibližně průměr molekuly kyseliny olejové.
- Určete přibližně průměr molekuly kyseliny olejové výpočtem s použitím Avogadrovy konstanty.
- Porovnejte řady číselných hodnot získaných veličin.

3. Pomůcky:

Kruhová miska o průměru asi 200 mm, odměrný válec s měřicím rozsahem do 5 ml, lékařské kapátko, posuvné délkové měřítko, kyselina olejová, lékařský benzín, jemný korkový prášek.

4. Provedení:

- Připravte si roztok kyseliny olejové v lékařském benzínu o objemovém zlomku $\varphi = \frac{V_k}{V_r} = \frac{1}{2000}$; V_k je objem kyseliny olejové, V_r je celkový objem roztoku.

- Do čistého, suchého odměrného válce oddělte lékařským kapátkem n kapek roztoku a určete počet kapek v jednotkovém objemu. Vyjádřete objem jedné kapky roztoku.

Určete objem kyseliny olejové obsažené v jedné kapce roztoku $V = \frac{\varphi}{n}$.

- Do kruhové misky pečlivě očištěné a propláchnuté tekoucí vodou nalejte destilovanou vodu. Po uklidnění vody poprašte volný povrch vody jemným korkovým práškem.

- Kapátkem přeneste na povrch vody doprostřed misky kapku roztoku. Po vypaření benzínu se na volném povrchu vody ustálí kruhová monomolekulární vrstva kyseliny olejové.

Změřte její průměr D tak, že přiblížíte hroty posuvného měřidla k protilehlým místům vrstvy.

- Vypočítejte obsah kruhu S a výšku monomolekulární vrstvy, která odpovídá průměru d molekuly kyseliny olejové.
 - V jednom molu kyseliny olejové je $6 \cdot 10^{23}$ molekul. Ze známé hustoty kyseliny olejové $\rho = 9 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ určete přibližně průměr d' molekuly kyseliny olejové za předpokladu, že molekula kyseliny olejové má kulový tvar.
 - Porovnejte řady číselných hodnot zjištěných veličin d a d'

5. Doplnkové úkoly:

1. Benzín se vypařuje z roztoku podstatně rychleji než kyselina olejová. Jaký vliv má změna objemového zlomku kyseliny olejové v roztoku způsobená vypařováním benzínu na určení průměru molekuly? Uvažte, jakým způsobem lze při práci tento nežádoucí vliv omezit.
2. Které zjednodušující předpoklady v bodech a) a b) vedou k tomu, že výpočet průměru molekuly je jen přibližný? Které měřené veličiny v bodě a) ovlivňují relativní chybu výpočtu?
3. Podle výsledku úlohy a) určete průměr kruhu, který by vytvořila na volném povrchu vody kapka čisté kyseliny olejové stejného objemu jako kapka roztoku.
4. Představte si, že kyselina olejová obsažená v jedné kapce roztoku se oddělí a vytvoří kulovou kapku. Určete její průměr. Byla by tato kapka viditelná pouhým okem?
5. Podle výsledku úlohy a) určete počet molekul kyseliny olejové, které vytváří při pokuse monomolekulární vrstvu. Jak dlouho by trvalo vytvoření této vrstvy, kdybychom za každou sekundu přenesli na volný povrch vody milión molekul? Určete délku řady, která by vznikla těsným seřazením všech molekul vrstvy do přímky?
6. Které vlastnosti kyseliny olejové ($C_{17}H_{33}COOH$) jsou příznivé pro použití této látky k přibližnému určení průměru její molekuly uvedenou experimentální metodou? Jaký význam má v experimentální metodě použití korkového prášku?
7. Kotouč o poloměru r a o hmotnosti m_1 se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy procházející jeho středem s frekvencí otáčení f vzhledem k podlaze. Člověk, jehož tělo má hmotnost m_2 , stojí v jednom případě uprostřed kotouče, ve druhém případě na okraji kotouče.
 - a) Jaká je rychlost a kinetická energie člověka v prvním a ve druhém případě vzhledem ke kotouči jako otáčející se vztažné soustavě?
 - b) Jaká je rychlost člověka v prvním a ve druhém případě vzhledem k podlaze jako inerciální vztažné soustavě?
 - c) Jak se změní kinetická energie člověka vzhledem k podlaze, přejde-li ze středu kotouče na okraj kotouče? Vysvětlete tuto změnu.

Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k ose otáčení $I_1 = \frac{m_1 r^2}{2}$;

moment setrvačnosti I_2 člověka vzhledem k ose otáčení určíme jako moment setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti m_2 . Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty: $r_1 = 1,5 \text{ m}$; $m_1 = 180 \text{ kg}$; $m_2 = 60 \text{ kg}$; $f = 0,20 \text{ s}^{-1}$.

Kategorie D

1. Cestující sedí u dveří v oddělení rychlíkového vozu. Rychlík jede rovnoměrným pohybem. Stožáry elektrického vedení jsou pravidelně

rozmístěny rovnoběžně s tratí ve vzdálenosti 150 m od tratě. Cestující může současně vidět oknem nejvýše dva sloupy. Šířka okna je 1,2 m a cestující je vzdálen od okna 2,0 m.

a) Určete, jak lze z údaje doby Δt , po kterou může cestující pozorovat jeden stožár, stanovit rychlost v pohybu vlaku.

b) Vezměte v úvahu reálné možnosti pro rychlost vlaku a sestrojte graf funkce $v = f(\Delta t)$.

2. Cyklovač stírače osobního automobilu Š 100 reguluje chod stírače v těchto frekvencích: $7,5 \text{ min}^{-1}$, 15 min^{-1} , 30 min^{-1} , 60 min^{-1} .

a) Automobil jede rychlostí $72,0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a jeho přední sklo bylo znečištěno předjíždějícím automobilem v okamžiku, kdy raménko stírače se dostalo do základní polohy. Stanovte, jakou maximální vzdálenost ujede automobil za dobu zhoršené viditelnosti pro jednotlivé frekvence cyklovače.

b) Zjistěte, jak závisí délka dráhy s automobilu při zhoršené viditelnosti na jeho rychlosti v pro jednotlivé stupně cyklovače.

c) Nakreslete na milimetrový papír do jednoho grafu funkce $s = f(v)$ pro jednotlivé stupně cyklovače.

3. Automobil o hmotnosti m , který se rozjížděl z klidu působením stálé síly po vodorovné silnici, získal za dobu t rychlost v .

a) Vypočtete průměrnou rychlost v_1 automobilu ve druhé polovině doby tohoto pohybu.

b) Vypočtete jeho průměrnou rychlost v_2 ve druhé polovině dráhy tohoto pohybu.

c) Vypočtete velikost síly působící na automobil.

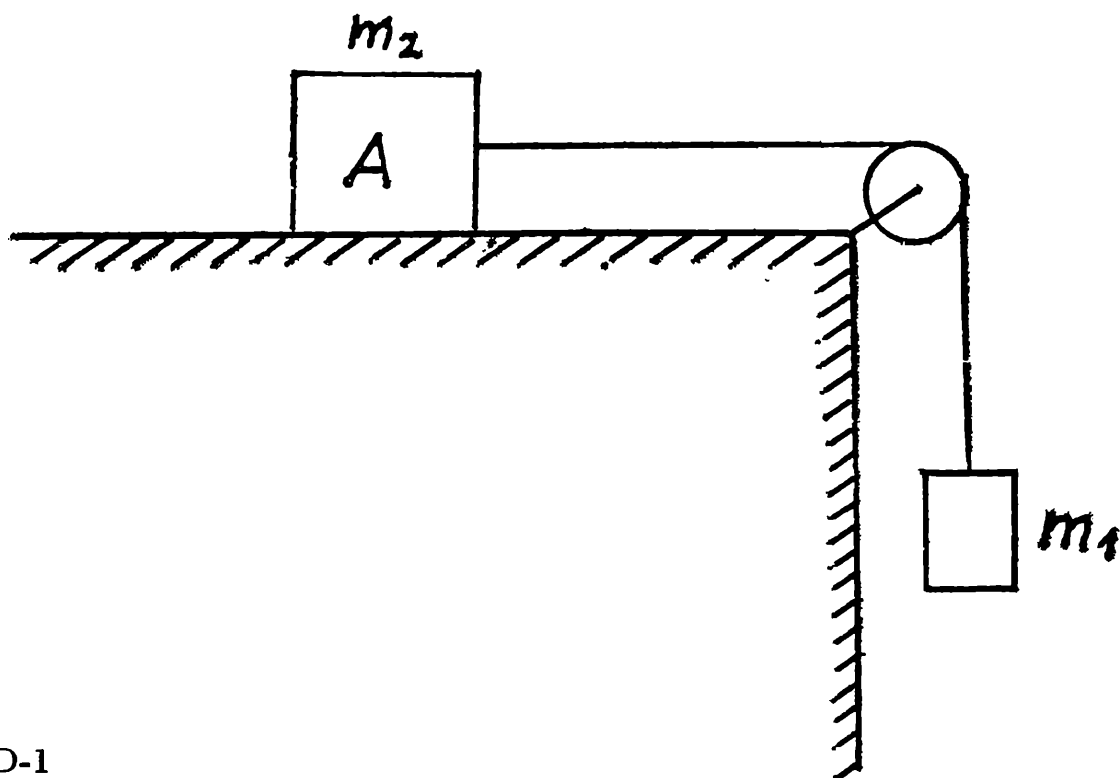
d) Sestrojte graf délky dráhy automobilu jako funkce času $s = f(t)$. Vysvětlete, jak lze tohoto grafu využít k určení průměrné rychlosti. Stanovte pomocí grafu průměrné rychlosti v_1 , v_2 a porovnejte s výpočty podle bodů a), b).

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $t = 6,0 \text{ s}$, $v = 24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $m = 1100 \text{ kg}$.

4. Hranol A o hmotnosti m_2 je tažen po vodorovné podložce tíhou závaží o hmotnosti m_1 (obr. D-1) a pohybuje se se stálým zrychlením a . Bylo zjištěno, že velikost tohoto zrychlení se změní na na , jestliže závaží o hmotnosti m_1 se nahradí závažím o hmotnosti nm_1 . Jak velký je součinitel f smykového tření mezi hranolem a podložkou? Hmotnost kladky s nití zanedbáváme.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $m_1 = 30 \text{ g}$, $m_2 = 200 \text{ g}$, $n = 2$.

5. Z okna bytu v pátém patře ve výšce h_1 pustil chlapec tenisový míček. Zjistil, že po odrazu na vodorovném povrchu Země se míček dostal do výšky h_2 , $h_2 < h_1$. Dále zjistil, že míč dopadl na vodorovný povrch Země poprvé za dobu $t_1 = 2,0 \text{ s}$, podruhé za dobu $t_2 = 5,0 \text{ s}$ od začátku pohybu.



Obr. D-1

- a) Stanovte výšky h_1 a h_2 .
- b) Stanovte podíl rychlostí v_2 a v_1 míčku po odrazu a před odrazem. Tento podíl určuje tzv. součinitel restituce dvou těles při rázu.
- c) Za jakou dobu dopadne míč na vodorovný povrch Země po třetí?
- d) Jak se změní situace v případě, jestliže chlapec hodil míč ve směru vodorovném rychlostí v_0 ?
- e) Na milimetrový papír znázorněte dráhu míčku v rovině vrhu pro $v_0 = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Počítejte s hodnotou $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

6. Na vodorovnou desku stolu polož řetízek délky 70 až 100 cm a natáhni ho ve směru kolmém k hraně desky.

a) Navrhni způsob, jak pouze pomocí délkového měřítka lze stanovit součinitel smykového tření při pohybu řetízku po desce stolu.

b) Proveď podle svého návrhu měření, opakuj toto měření a vypočti několik hodnot součinitele smykového tření. Stanov absolutní a relativní chybu měření na základě získaných hodnot. Pokus se odhadnout velikost možných chyb, vzniklých při měření. K pokusu je vhodné užít řetízek s malými články. Vysvětli.

c) Navrhni způsob, jak pouze pomocí siloměru lze stanovit součinitel smykového tření při pohybu řetízku po stole.

d) Navrhni způsob, jak pouze pomocí laboratorních vah a sádky závaží lze stanovit součinitel smykového tření při pohybu řetízku po stole.

e) Proveď podle svých návrhů obě další měření; získané hodnoty zpracuj podle úlohy b).

f) Porovnej přesnost měření v úloze b) a e); vysvětli.

g) Úlohu a) opakuj pro silnější šňůru; porovnej přesnost měření a vysvětli.

7. Při hašení požáru stojí požárník na žebříku ve výšce h nad vodorovným povrchem Země. Z ústí stříkačky, která má obsah průřezu S , tryská voda ve vodorovném směru. Voda dopadá na povrch Země ve vzdálenosti d od polohy umístění stříkačky.

a) Stanovte objemový tok Q_V .

b) Stanovte objem V vody, spotřebované za dobu t .

Odpor prostředí zanedbáváme. K řešení nakreslete situační náčrtek, v němž vyznačíte dané hodnoty. Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $h = 10$ m, $d = 10$ m, $S = 1,0$ cm², $t = 1,0$ min.

Přípravné úlohy I. kola MO

Kategorie A

1. Součin n po sobě jdoucích kladných lichých čísel násobený 2^{n-1} je dělitelný číslem $n!$. Dokažte.

2. Jsou-li $c_1, c_2, \dots, c_n$ reálná čísla, pak

$$n(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) \geq (c_1 + c_2 + \dots + c_n)^2.$$

Dokažte.

3. Jsou-li p a q nezáporná čísla, pak platí

$$p^2q \leq \frac{4}{27} (p + q)^3;$$

rovnost nastane, právě když $p = 2q$. Dokažte.

4. Trojúhelník má obsah 32 cm², součet velikostí dvou jeho stran je 16 cm. Určete velikost třetí strany.

Kategorie B

1. Funkce $x \rightarrow \text{sign } x$ je definována na množině $\mathbb{R}$ všech reálných čísel takto: Je-li $x > 0$, je $\text{sign } x = 1$; je-li $x = 0$, je $\text{sign } x = 0$; je-li $x < 0$, je $\text{sign } x = -1$.

Nalezněte všechny dvojice reálných čísel x, y , pro něž platí

$$\text{sign}(x + y) = \text{sign } x + \text{sign } y.$$

Pro která x, y nastane rovnost?

2. Plechový kryt má tvar kužele s poloměrem základne r a výškou v . Bolo by možné z toho istého množství rovnakého plechu zhotovit iný kryt kuželového tvaru s rovnakým objemom? Ak áno, koľko?

3. Je-li trojúhelník T_1 celý obsažen v trojúhelníku T_2 , pak platí:

a) délka největší strany trojúhelníku T_1 je menší nebo rovna délce největší strany trojúhelníku T_2 ;

b) délka nejmenší výšky trojúhelníku T_1 je menší nebo rovna délce nejmenší výšky trojúhelníku T_2 .

Dokažte.

4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána délka přepony a délka těžnice k jedné odvěsně. Uveďte podmínky řešitelnosti.

Kategorie C

1. Kolkými spôsobi je možné rozložiť číslo 78 na súčet troch prirodzených čísel? Pritom dva rozklady lišiace sa len poradím sčítancov, teda napríklad rozklady $10 + 10 + 58$, $10 + 58 + 10$, $58 + 10 + 10$, pokladáme za rovnaké.

2. Ak prirodzené číslo $n > 10$ je druhou mocninou nepárneho čísla, potom predposledná cifra dekadického zapisu čísla n je číslo párne. Dokážte.

3. Je dána kružnice k (S ; r) a priamka p vo vzdálenosti $v = \frac{1}{2}r$ od bodu S .

Sestrojte čtverec $ABCD$ opsaný kružnici k , jehož vrchol A leží na přímce p . Dokážte, že úloha má právě dvě řešení.

4. Je daná kocka $ABCD A'B'C'D'$ s hranou dĺžky $a = 3$ a body E a F určené podmienkami:

a) $E \in DD'$ a $ED = \frac{1}{4} DD'$,

b) bod F je priesečníkom uhlopriečok steny $DCC'D'$. Vypočítajte obsah F časti roviny AEF ohraničenej prienikom tejto roviny so stenami kocky.

Soutěžní úlohy I. kola MO

Kategorie A

1. Nech a, b , $a < b$ sú dané reálne čísla a $I_1, I_2, \dots, I_n$ otvorené intervaly také, že $\langle a, b \rangle \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$. Potom možno spomedzi intervalov $I_j, j = 1, 2, \dots, n$ vybrať $k \leq n$ takých, že žiadne tri z nich nemajú spoločný bod a $\langle a, b \rangle$ je podmnožinou ich zjednotenia. Dokážte.

2. Jsou-li $c_1, c_2, \dots, c_n$ ($n \geq 2$) reálná čísla taková, že

$$(n-1)(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) = (c_1 + c_2 + \dots + c_n)^2,$$

pak nastane aspoň jeden z těchto případů:

- a) všechna čísla c_i jsou nezáporná,
- b) všechna čísla c_i jsou nekladná.

Dokažte.

3. Pro přirozené číslo $n \geq 2$ označme L_n součin všech $n - 1$ lichých čísel od $2n + 3$ do $4n - 1$. Pak číslo $L_n \cdot 2^{n-1}$ je dělitelné číslem $n!$. Dokažte.

4. Sestrojte obdélník $ABCD$, je-li dána délka jeho strany $d = AB$ a velikost φ úhlu EAF , kde E je střed strany BC a F střed strany CD . Najděte podmínky řešitelnosti.

5. Čtyřstěn $ABCD$ má objem 36 cm^3 , součet délek jeho hran AB , BC a CD je roven 18 cm . Určete délku hrany AD .

6. Ve čtverci Q je dána konečná množina bodů $\mathbf{M}$. Každý z nich obarvíme právě jednou ze čtyř barev, a to tak, že každé barvy je pro alespoň jeden bod použito. Dokažte, že existuje takový čtverec Q' se stranami rovnoběžnými se stranami čtverce Q , který obsahuje body všech čtyř barev, a přitom ty body množiny $\mathbf{M}$, které jsou vnitřními body čtverce Q' , jsou nejvýše dvou barev.

Kategorie B

1. Dokážte, že medzi prirodzenými číslami, ktorých dekadický zápis končí skupinou číslic 1978, existuje číslo deliteľné číslom 1977.

2. Nech $\mathbf{A} = \{a, b\}$ je dvojprvková množina a f, g zobrazenie množiny $\mathbf{A}$ na $\mathbf{A}$ definované predpismi:

$$f(a) = a, f(b) = b, g(a) = b, g(b) = a.$$

Na množine R všetkých relácií $\mathbf{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ je definovaná relácia S takto: $\mathbf{R}_1 S \mathbf{R}_2$, kde $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A}$, ak $\mathbf{R}_2$ je obrazom $\mathbf{R}_1$ pri zobrazení f alebo g .

a) Dokážte, že S je ekvivalencia.

b) Určte, koľko rôznych tried ekvivalentných relácií vzhľadom na S existuje na množine R .

3. Určete parametr a tak, aby rovnice

$$a \cdot \text{sign}(x - 1) - 2x = \text{sign}(x^2 + 2x - 3)$$

měla pro neznámou x právě čtyři řešení.

(Poznámka: Funkce $x \rightarrow \text{sign } x$ je definována v textu 1. přípravné úlohy I. kola kategorie B.)

4. V trojúhelníku $\mathbf{T}$ je dán bod P . Nechť $\mathbf{T}'$ je trojúhelník vzniklý z $\mathbf{T}$ posunutím o vektor $\mathbf{v}$, nechť r popř. r' je poloměr nejmenšího kruhu se středem v P , v němž je obsažen trojúhelník $\mathbf{T}$ popř. $\mathbf{T}'$.

Dokažte, že platí

$$r \leq 2r',$$

a najděte příklad, kdy nastane rovnost.

5. Na stranách rovnostranného trojúhelníka ABC jsou dány body C_1, C_2 na AB , A_1, A_2 na BC a B_1, B_2 na AC tak, že strany jsou jimi rozděleny na tři shodné úsečky. Příčky AA_i, BB_i, CC_i ($i = 1, 2$) rozdělují

trojúhelník na mnohoúhelníky. Vypočtete, jakou částí obsahu trojúhelníka je obsah toho šestiúhelníka rozkladu, ve kterém leží střed trojúhelníka.

6. V rovině jsou dány dva body A, B a kružnice k . Sestrojte na kružnici k body C a D tak, aby body A, B, C, D byly vrcholy rovnoramenného lichoběžníku s rameny AB a CD .

Kategorie C

1. Pro každé reálné číslo $a > 1$ platí

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} < 2\sqrt{a}.$$

Dokažte.

2. Určte všechny reálné čísla a , pro které je zlomek

$$\frac{a+2}{a^2+1}$$

rovný prirodzenému číslu.

3. Z cifer „nula, jedna“ je utvořena posloupnost

10100100010000...;

za n -tou jedničkou stojí n nul ($n = 1, 2, 3, \dots$). Kolik jedniček stojí na prvním miliónu míst této posloupnosti? Na kolikátém místě stojí poslední z nich?

4. Je dán čtverec $ABCD$. Označme E střed strany CD a k kružnici o středu A a poloměru AC . Určte všechny body $X \in k$ takové, že trojúhelníky XDE a XBC mají obsahy sobě rovné.

5. Určte množinu středů všech čtverců, jejichž všechny strany leží na stěnách dané krychle.

6. Jsou dány tři různé body A, B, C , které neleží v přímce. V rovině ABC určte všechny takové body M , pro které kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ a $\triangle CAM$ jsou shodné.

Kategorie Z

1. Napišme za sebou bez mezer všechna sudá přirozená čísla. Dostaneme tak sled čísl

24681012

Která čísllice stojí v tomto sledu na 1977. místě?

2. Aritmetický průměr dvou kladných čísel je jejich poloviční součet. Harmonický průměr dvou kladných čísel je převrácené číslo k aritmetickému průměru převrácených čísel k oběma daným číslům.

a) Zvolte kladná čísla x, y (např. $x = 80, y = 20$), vypočtete jejich aritmetický průměr a a harmonický průměr h a ověřte si, že platí

$$ah = xy$$

b) Pokuste se dokázat tento vzorec obecně.

c) Nákladní vůz projel dvakrát tutéž trasu: po prvé rychlostí 40 km/h, po druhé rychlostí 60 km/h. Jaká je průměrná rychlost obou jízd: aritmetický průměr obou rychlostí nebo jejich harmonický průměr?

3. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC . Bod D je středem jeho přepony AB a bod S je středem jemu vepsané kružnice.

Dokažte: Jestliže $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, potom platí $CS = DS$.

4. Je dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Sestrojte obdélník $KLMN$ tak, že úsečka AB je částí úsečky KL , úsečka ED je částí úsečky MN a body C, F leží po řadě uvnitř úseček LM a KN .

Vypočtěte poměr obsahů obdélníka $KLMN$ a daného šestiúhelníka.

Ze zahraničních časopisů

STANISLAV HORÁK, Praha

Tentokrát si všimneme maďarského časopisu pro středoškoláky *Középiskolai Matematikai Lapok*, z něhož uvedeme řešení dvou pěkných příkladů. Naše čtenáře-olympioniky budou příklady jistě zajímat, neboť maďarští účastníci jsou na MMO mezi prvními. Naše účastníky MO tak seznámíme aspoň trochu s časopisem, jenž je jedním z několika zdrojů značných vědomostí maďarských olympioniků.

I. Je dána posloupnost $a_0, a_1, \dots, a_n$, o níž platí

$$a_0 = 5 \tag{1}$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{2}$$

Dokažte, že platí

$$45 < a_{1000} < 45,1.$$

Řešení. Ze vztahu (2) vyplývá, že daná posloupnost je rostoucí, tj.

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

Avšak potom posloupnost převrácených hodnot je klesající, tj.

$$\frac{1}{a_0} > \frac{1}{a_1} > \frac{1}{a_2} > \dots > \frac{1}{a_n}.$$

Odtud je patrné, že též

$$\frac{1}{a_0^2} > \frac{1}{a_1^2} > \frac{1}{a_2^2} > \dots > \frac{1}{a_n^2}.$$

I můžeme psát, že

$$\frac{n+1}{a_n^2} < \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} < \frac{n+1}{a_0^2}. \quad (3)$$

(Nechť si čtenář uvědomí, že součet mezi oběma znaménky nerovnosti má $n+1$ členů.)

Ze vztahu (2) dostaneme

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}.$$

Dosazujme sem postupně $n = 0, 1, 2, \dots, k$. Dojdeme tak k rovnicím

$$a_1^2 = a_0^2 + 2 + \frac{1}{a_0^2}$$

$$a_2^2 = a_1^2 + 2 + \frac{1}{a_1^2}$$

$$a_3^2 = a_2^2 + 2 + \frac{1}{a_2^2}$$

$$a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{k-1}^2}.$$

Nyní všechny tyto rovnice sečteme:

$$a_k^2 = a_0^2 + 2k + \underbrace{\left(\frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}^2} \right)}_{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{a_n^2}}.$$

Podle toho

$$a_k^2 = 25 + 2k + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{a_n^2}. \quad (4)$$

Položme nyní $k = 1000$ a dostaneme

$$a_{1000}^2 = 2025 + \sum_{n=0}^{999} \frac{1}{a_n^2} > 2025 = 45^2, \quad (5)$$

$$a_{1000} > 45.$$

Tím máme první část úlohy rozřešenou.

Ve vztahu (4) položíme $k = 100$:

$$a_{100}^2 = 25 + 200 + \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{a_n^2} = 15^2 + \sum_{n=0}^{99} \frac{1}{a_n^2}. \quad (6)$$

$$a_{100}^2 > 15^2$$

V dalším pro stručnost místo $\sum_{n=0}^k \frac{1}{a_n^2}$ budeme psát pouze $\sum_{n=0}^k$

O součtu řad jistě platí

$$\sum_{n=0}^{999} = \sum_{n=0}^{99} + \sum_{n=100}^{999}. \quad (7)$$

Ze vztahu (3) máme dva pro nás důležité vztahy

$$\sum_{n=0}^{99} < \frac{100}{a_n^2} = \frac{100}{25} = 4$$

$$\sum_{n=100}^{999} < \frac{900}{a_{100}^2}.$$

K tomu přičteme (6)

$$225 < a_{100}^2.$$

Obě poslední dvě nerovnosti vynásobíme (tj. utvoříme součin levých stran a součin pravých stran)

$$225 \sum_{n=100}^{999} < 900 \Rightarrow \sum_{n=100}^{999} < 4.$$

Po dosazení do (7) máme

$$\sum_{n=0}^{999} < 4 + 4 = 8.$$

Odtud a ze vztahu (5) máme

$$a_{1000}^2 = 2025 + \sum_{n=0}^{999} < 2025 + 8 = 2033,$$

$$a_{1000} < \sqrt{2033} = 45,08 \dots < 45,1$$

a tím máme dokázanu druhou část našeho tvrzení.

II. O funkci $f(x)$ platí

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}, \quad a \neq 0, \quad f(x) \neq 1.$$

Dokažte, že funkce $f(x)$ je periodická.

Řešení. Počítejme

$$f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1 + \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = \frac{-1}{f(x)}.$$

Podle toho již bez počítání můžeme psát, že

$$f(x + 4a) = \frac{-1}{f(x + 2a)} = f(x) .$$

Tím jsme dokázali, že nenulové číslo $4a$ je periodou funkce $f(x)$.

Na procvičení postupu při důkazu této zajímavé drobnůstky proveďte celý postup pro a) $f(x) = x$, b) $f(x) = x^2$.

III. Najděte takové přirozené číslo x , aby trojčlen

$$K = 4^{10} + 4^{16} + 4^x$$

byl dvojmocí přirozeného čísla N . Najděte i číslo N .

Řešení. Daný trojčlen upravíme

$$K = 4^{10} + 4^{16} + 2^{2x} = (4^5 + 2^x)^2 .$$

Odtud plyne, že

$$2 \cdot 4^5 \cdot 2^x = 4^{16}$$

$$2^{x+11} = 2^{32}$$

$$x_1 = 21 .$$

Potom

$$K = 4^{10}(1 + 4^6 + 4^{11}) = 4^{10}(1 + 2^{11})^2 = (4^5 \cdot 2049)^2 = N^2 .$$

Tím jsme dostali jedno řešení, ale existuje ještě jedno, k němuž dojdeme následující úpravou daného trojčlenu:

$$K = 4^{16} + 4^{10} + 2^{2x} = (4^8 + 2^x)^2 .$$

To znamená, že

$$2 \cdot 4^8 \cdot 2^x = 4^{10}$$

$$2^{x+17} = 2^{20}$$

$$x_2 = 3 .$$

Tudíž

$$K = 4^{16} + 4^{10} + 4^3 = (4^8 + 2^3)^2 = N^2 .$$

Předložené úloze vyhovují tedy čísla $x_1 = 21$, $x_2 = 3$.

Oprava. Nadpis článku A. Tabinského na str. 346 opravte na „Sestrojení reciproké hodnoty součtu převrácených čísel“.

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

plyne	follows
pobočná hrana	lateral edge
počátek	origin
počáteční	initial
počet	number
konečný počet	finite number
diferenciální a integrální počet	differential and integral calculus
počet pravděpodobnosti	calculus of probability
variační počet	calculus of variations
počítač	computer
analogový počítač	analogue computer
číslicový počítač	digital computer
počítat	count, calculate, numerate, compute
počítání	counting, numeration
podél	along
podgraf	subgraph
podíl	quotient
podle	according to
podmínka	condition, constraint
nutná a postačující podmínka	necessary and sufficient condition
podmnožina	subset
podobnost	similarity
podobný	similar, identical in form
podržet	keep
podstata	base
podstatný	essential
pohyb	movement
pojem	concept
pojmenované číslo	denominate number
pokračovat	continue
pokrytí	cover
pokrytí pravidelnými obrazy	tessellation
pokrývat	cover
pokus	experiment

pól	pole
polára	polar line
sdružené poláry	polar lines, lines conjugate with respect to a conic
pole	field
poledník	meridian, north-south line
poledníkový řez	meridian section
poloha	location, position, attitude
polokoule	hemisphere
polokruh	semicircle
poloměr	radius (pl. radii)
poloměr opsané kružnice	long radius
poloměr vepsané kružnice	apothem, short radius
polopřímka	half-line, ray
poloprostor	halfspace
polorovina	half-plane
polovina	half
polynom	polynomial
poměr	ratio
dělicí poměr	ratio of division
poměr stejnolehlosti	ratio of homothety
pomocný	auxiliary
pomocná plocha	auxiliary surface
pomocná průmětna	secondary plane of projection
pomocná rovina	auxiliary plane
popření	denial
popis	description
porovnat	compare, equate
pořadí	order
posloupnost	progression, sequence
aritmetická posloupnost	arithmetic progression
divergentní posloupnost	divergent sequence
geometrická posloupnost	geometric progression
harmonická posloupnost	harmonic progression
klesající posloupnost	decreasing sequence
konvergentní posloupnost	convergent sequence
nulová posloupnost	null sequence
růstoucí posloupnost	ascending sequence
vybraná posloupnost	partial sequence
postačující	sufficient
postačující podmínka	sufficient condition
postoj	attitude
postulát	postulate
postup	proceeding
posunutí	translation
poučka	theorem, corollary
pouze	only