

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

1

ROČNÍK 54, 1975-1976, ZÁŘÍ



ROČNÍK 54
ZÁŘÍ 1975

1

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišou, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1975.

OBSAH

Prof. E. Kraemer: Na počátku 54. ročníku Rozhledů mat.-fyz.	1
Dr. J. Lizner: Aritmetické posloupnosti vyšších řádů	2
J. Kotyk: Gaussův symbol $[a]$	6
Prof. dr. J. Skotnický: Vzorec pro průměrné hodnoty	8
Dr. J. Skuhra: Problém počtu opravářů	11
Prof. E. Kraemer: O tečně elipsy a hyperboly	14
P. Dub: Coulombův zákon pro magnetismus a jeho užití	17
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroký: Aberace světla	24
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroký: O pohybech Země	27
Ing. Z. Janout: Dvacet let FJFI	31
Matematická olympiáda	33
S. Horák: Zajímavosti z geometrie	39
Naše soutěž	42
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	47
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	
3. a 4. str. obálky	

Na počátku padesátého čtvrtého ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Zahajujeme padesátý čtvrtý ročník našeho časopisu, který už četlo a odebíralo na tisíce dřívějších i nyníšších studentů ze všech končin našeho státu. U zrodu Rozhledů byla Jednota československých matematiků a fyziků, které je dodnes svěřena odborná péče o Rozhledy, i když jejich vydávání převzalo ministerstvo školství prostřednictvím Státního pedagogického nakladatelství. Stále se zachovává i původní poslání Rozhledů, jímž je získávat a prohlubovat zájem mládeže o matematicko-fyzikální vědy a jejich aplikace, informovat ji o vynikajících vědeckých a pedagogických pracovnících z těchto oborů, o společenském významu exaktních věd, o jejich historii i o jejich perspektivách u nás i v zahraničí, zejména ve spřátelených socialistických státech.

Ve shodě s tímto posláním, o jehož plnění usilovalo po více než půl století na sta našich učitelů středních i vysokých škol a desítky dalších vědeckých a odborných pracovníků různých oborů, hodlá redakce Rozhledů s celou obcí svých přispěvatelů pracovat i v letošním školním roce. Toto poslání, které je v plné shodě s úkoly ve výchovně vzdělávací oblasti vytyčenými XIV. sjezdem Komunistické strany Československa a rozvedenými v usneseních ze zasedání ÚV KSČ z let 1973 až 1975, hodláme plnit tak, aby se obsah našeho časopisu vyznačoval výraznou ideovostí a odborností spojenou s přístupným výkladem ukazujícím zároveň spojení matematicko-fyzikálních věd se životem.

Proto budeme otiskovat nejenom články výrazně odborné, ale i stati popularizační, úvahy o rozvoji exaktních věd a pracovišť pro ně určených, články z historie matematicko-fyzikálních věd i informační studie naznačující význam těchto oborů pro moderní socialistickou společnost, články, podporující rozvoj ekonomického myšlení apod. Nezapomeneme ani na stati z těch moderních partií matematiky, fyziky a astronomie, které lze aspoň přiblížit středoškolským studentům a širší čtenářské obci se zájmem o exaktní a technické vědy. V souvislosti s tím budeme otiskovat recenze takových publikací, které svým obsahem a způsobem podání jsou vhodné pro středoškolské studenty.

Školní praxi budou Rozhledy i letos pomáhat otiskováním informací o matematické a fyzikální olympiádě i publikací příkladů z jednotlivých

kategorií obou těchto soutěží. V tomto ročníku přitom vzpomeneme i 25. výročí matematické olympiády. Kromě toho budou Rozhledy pokračovat ve své vlastní tradiční soutěži otiskováním úloh z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie. Nejlepší řešitelé budou odměněni cenami ministerstev školství ČSR a SSR i cenami Státního pedagogického nakladatelství. Pro nejmladší čtenáře uvedeme zábavné úlohy, hříčky apod.

Mnohaleté zkušenosti nás utvrzují v přesvědčení, že se podaří i v letošním ročníku splnit vytyčené úkoly a tím přispět ve výchovně vzdělávací práci s mládeží k řešení složitých problémů spjatých s budováním socialismu a komunismu.

matematika

Aritmetické posloupnosti vyšších řádů

RNDr. JAROSLAV LIZNER, Praha

Většina čtenářů zná aritmetické posloupnosti charakterizované rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n + d$,

kde d je konstanta nazývaná diferencí aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Například posloupnost

$$\begin{aligned} \{2n - 1\}_{n=1}^{+\infty} &= 1, 3, 5, 7, & \text{má diferenci } d &= 2, \\ \{4 - 5n\}_{n=1}^{+\infty} &= -1, -6, -11, \dots & \text{má diferenci } d &= -5. \end{aligned}$$

Dohodněme se, že zjednodušíme zápis posloupnosti a nebudeme ke složeným závorkám připisovat $n = 1, +\infty$.

Všimněme si nyní posloupnosti $\{n^3\}$, vypočtěme čísla $d_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n$ a zapišme je jako členy posloupnosti, dále vypočtěme $d_n^{(2)} = d_{n+1}^{(1)} - d_n^{(1)}$, $d_n^{(3)} = d_{n+1}^{(2)} - d_n^{(2)}$ a zapišme je pod mezery mezi členy předcházejících posloupností.

Získáváme schéma:

$$\begin{array}{ll} \{n^3\} &= 1, 8, 27, 64, 125, \dots & a_n &= n^3 \\ \{d_n^{(1)}\} &= 7, 19, 37, 61, \dots & d_n^{(1)} &= (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \\ \{d_n^{(2)}\} &= 12, 18, 24, \dots & d_n^{(2)} &= 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (3n^2 + 3n + 1) = 6n + 6 \\ \{d_n^{(3)}\} &= 6, 6, & d_n^{(3)} &= 6(n+1) + 6 - (6n + 6) = 6 \end{array}$$

Posloupnost $\{n^3\}$ není zřejmě aritmetickou posloupností ve známém smyslu slova, ani $\{3n^2 + 3n + 1\}$ není aritmetická, zato však $\{6n + 6\}$ je aritmetickou posloupností s diferencí $d = 6$. Poznali jsme posloupnosti diferencí $\{d_n^{(1)}\}$, $\{d_n^{(2)}\}$, $\{d_n^{(3)}\}$, příslušející zvolené posloupnosti $\{n^3\}$.

Vyslovíme nyní několik užitečných definic:

Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$, potom posloupnost $\{d_n^{(1)}\}$, kde $d_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n$ nazýváme *posloupností prvních diferencí* posloupnosti $\{a_n\}$.

Je-li $\{d_n^{(i)}\}$ posloupnost i -tých diferencí posloupnosti $\{a_n\}$, nazveme posloupnost $\{d_n^{(i+1)}\}$, kde

$$d_n^{(i+1)} = d_{n+1}^{(i)} - d_n^{(i)}$$

posloupností $(i + 1)$ -ních diferencí posloupnosti $\{a_n\}$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *aritmetickou posloupností i -tého řádu*, jestliže $\{d_n^{(i)}\}$ je konstantní posloupností nenulových čísel.

Obvyklé aritmetické posloupnosti s diferencí $d \neq 0$ jsou tedy nyní aritmetické posloupnosti prvního řádu- posloupnost $\{3n^2 + 3n + 1\}$ je zřejmě aritmetickou posloupností druhého řádu a $\{n^3\}$ je aritmetickou posloupností třetího řádu. Přesvědčte se, že $\{n^4\}$, $\{n^5\}$ jsou aritmetickými posloupnostmi ještě vyšších řádů.

Všimněme si pozorně posloupností diferencí, přiřazených $\{n^3\}$; první členy těchto posloupností tvoří uspořádanou čtveřici (1, 7, 12, 6), obecně ji zapíšeme $(a_1, d_1^{(1)}, d_1^{(2)}, d_1^{(3)})$. Věřili byste tomu, že tato čtveřice čísel určuje jednoznačně původní posloupnost? Přesvědčte se o tom:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d_1^{(1)} = 1 + 7 = 8; & a_3 &= a_2 + d_2^{(1)} = 8 + 19 = 27, \\ d_2^{(1)} &= d_1^{(1)} + d_1^{(2)} = 7 + 12 = 19, & d_3^{(1)} &= d_2^{(1)} + d_2^{(2)} = 19 + 18 = 37, \\ d_2^{(2)} &= d_1^{(2)} + d_1^{(3)} = 12 + 6 = 18, & d_3^{(2)} &= d_2^{(2)} + d_2^{(3)} = 18 + 6 = 24, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + d_3^{(1)} = 27 + 37 = 64, \\ d_4^{(1)} &= d_3^{(1)} + d_3^{(2)} = 37 + 24 = 61, \dots \text{atd.} \end{aligned}$$

Vidíte, že všechna a_n můžeme postupně získat sčítáním členů posloupností a členu a_1 . To nám umožňuje získat významnou větu, zobecňující známý vzorec

$$a_n = a_1 + (n - 1) d; \quad \text{jinak } a_n = a_1 + (n - 1) d_1^{(1)},$$

který vyjadřuje a_n pro aritmetické posloupnosti prvního řádu.

Snadným výpočtem se přesvědčíme, že pro $\{n^3\}$ platí:

$$a_n = 1 + 7 \frac{(n - 1)}{1} + 12 \frac{(n - 1)(n - 2)}{1 \cdot 2} +$$

$$\begin{aligned}
& + 6 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \\
& = 1 + 7n - 7 + 6(n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) = \\
& = 7n - 6 + 6n^2 - 18n + 12 + n^3 - 5n^2 + 6n - n^2 + 5n - 6 = \\
& = n^3.
\end{aligned}$$

Zformulujme nyní obecnou větu a dokažme ji:

Nechť $\{a_n\}$ je aritmetická posloupnost i -tého řádu. Potom její n -tý člen lze vyjádřit pomocí uspořádané $(i+1)$ -tice $(a_1, d_1^{(1)}, d_1^{(2)}, \dots, d_1^{(i)})$ tímto vzorcem:

$$\begin{aligned}
a_n = & a_1 + d_1^{(1)} \frac{(n-1)}{1} + d_1^{(2)} \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \\
& + d_1^{(3)} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + d_1^{(i)} \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i}
\end{aligned}$$

(1)

Důkaz provedeme indukcí podle i -tého řádu aritmetické posloupnosti. Pro $i = 1$ nemusíme větu dokazovat, vzorec $a_n = a_1 + (n-1)d$ pro aritmetickou posloupnost je dostatečně známý.

Nechť tedy vzorec platí pro i , tj. pro aritmetické posloupnosti i -tého řádu; snažme se dokázat jej pro aritmetické posloupnosti $(i+1)$ -ního řádu. Je-li $\{a_n\}$ aritmetickou posloupností řádu $(i+1)$, je posloupnost jejích prvních diferencí $\{d_n^{(1)}\}$ aritmetickou posloupností i -tého řádu. Podle indukčního předpokladu tedy pro ni platí:

$$\begin{aligned}
d_{n-1}^{(1)} = & d_1^{(1)} + d_1^{(2)} \frac{(n-2)}{1} + d_1^{(3)} \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} + \dots + \\
& + d_1^{(i+1)} \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-1-i)}{1 \cdot 2 \dots i}
\end{aligned}$$

(2)

Dále v důkazu užijeme vzorce:

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}^{(1)}, \quad (3)$$

který přímo vyplývá z konstrukce posloupnosti prvních diferencí.

Dále postupujme indukcí podle n , tedy po členech aritmetické posloupnosti řádu $(i+1)$. Pro $n = 1$, tj. pro a_1 je platnost vzorce (1) zřejmá, neboť na pravé straně vzorce jsou všechny členy vyjma první rovny nule. Nechť tedy platí vzorec pro $n-1$:

$$a_{n-1} = a_1 + d_1^{(1)} \frac{(n-2)}{1} + d_1^{(2)} \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} + \dots$$

$$\begin{aligned}
& + d_1^{(3)} \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3} + \\
& + d_1^{(i+1)} \frac{(n-2)(n-3)(n-4) \dots (n-i-2)}{1.2.3 \dots (i+1)}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Vztahy (2), (4) dosadíme nyní do vztahu (3). Dostáváme

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + d_1^{(1)} \frac{(n-2)}{1} + d_1^{(2)} \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + \\
& + d_1^{(3)} \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3} + \\
& + d_1^{(i+1)} \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-i-2)}{1.2 \dots i} + d_1^{(1)} + \\
& + d_1^{(2)} \frac{(n-2)}{1} + d_1^{(3)} \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + \dots + \\
& + d_1^{(i+1)} \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-1-i)}{1.2 \dots i} = \\
& = a_1 + d_1^{(1)} \left(1 + \frac{n-2}{1}\right) + d_1^{(2)} \frac{(n-2)}{1} \left(1 + \frac{n-3}{2}\right) + \\
& + d_1^{(3)} \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} \left(1 + \frac{n-4}{3}\right) + \dots + \\
& + d_1^{(i+1)} \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-1-i)}{1.2.3 \dots i} \left(1 + \frac{n-i-2}{i+1}\right) = \\
& = a_1 + d_1^{(1)} \frac{(n-1)}{1} + d_1^{(2)} \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \\
& + d_1^{(3)} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \\
& + d_1^{(i+1)} \frac{(n-1)(n-2)(n-3) \dots (n-i-1)}{1.2.3 \dots (i+1)},
\end{aligned}$$

což jsme měli dokázat.

Zamyslíme-li se nad důsledky této věty, dojdeme k tomuto závěru:

Každé aritmetické posloupnosti i -tého řádu lze jednoznačně přiřadit uspořádanou $(i+1)$ -tici reálných čísel $(a_1, d_1^{(1)}, \dots, d_1^{(i)})$, kde $d_1^{(i)} \neq 0$, a naopak, každé takovéto $(i+1)$ -tici reálných čísel lze jednoznačně přiřadit aritmetickou posloupnost i -tého řádu.

To znamená, že mezi množinou všech aritmetických posloupností i -tého řádu a množinou všech $(i+1)$ -tic reálných nenulových čísel

existuje vzájemně jednoznačné zobrazení. Na závěr tohoto krátkého článku si ukažme ještě jedno užití výše uvedeného pojmu.

V mnohých matematických úlohách potřebujeme vzorec pro součet mocnin přirozených čísel. Někteří čtenáři vědí, že vzorec lze snadno dokázat matematickou indukcí, obtížné je však nalézt výraz na pravé straně, neznáme-li jej zpaměti. Odvodme si nyní například vzorec pro součet druhých mocnin přirozených čísel:

$$\text{Nechť } S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

$$\{S_n\} = 1, 5, 14, 30, 55,$$

$$\{d_n^{(1)}\} = 4, 9, 16, 25,$$

$$\{d_n^{(2)}\} = 5, 7, 9,$$

$$\{d_n^{(3)}\} = 2, 2,$$

Tedy posloupnost $\{S_n\}$ je aritmetickou posloupností třetího řádu, charakterizovanou čtveřicí (1, 4, 5, 2).

Užitím vzorce odvozeného v tomto článku dostáváme:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 4 \frac{(n-1)}{1} + 5 \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + 2 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \\ &= \frac{6 + 24(n-1) + 15(n-1)(n-2) + 2(n-1)(n-2)(n-3)}{6} = \\ &= \frac{6 + 24n - 24 + 15n^2 - 30n + 30 + 2n^3 - 10n^2 + 16n - 12}{6} = \\ &= \frac{n}{6} (2n^2 + 5n + 10) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Gaussův symbol $[a]$

JOSEF KOTYK, Pardubice

(Napsáno k 120. výročí Gaussova úmrtí.)

Je-li a libovolné číslo reálné, je z celých čísel menších nebo rovných a jedno největší. Gauss*) pro ně zavedl označení symbolem $[a]$. Můžeme

*) Záslužnou badatelskou činnost Karla Friedricha Gausse (1777 až 1855), „knížete matematiků“ (princeps mathematicorum), zhodnotil autor u příležitosti 120. výročí jeho úmrtí článkem otištěným v Rozhledech, roč. 53, čís. 5, str. 279 až 285.

tedy psáti, že $[a] \leq a$, přičemž rovnost může nastat, jen když a je číslo celé. Číslo $[a] + 1$ je již větší než a . Úhrnem tedy je $[a] \leq a < [a] + 1$ nebo ještě širě $a - 1 < [a] \leq a < [a] + 1$.

Příklady:

$$[5] = 5; \quad [2,718] = 2; \quad [3,14] = 3; \\ [-2,3] = -3; \quad [-4] = -4; \quad [0] = 0.$$

* *

*

O čísle, jež označujeme Gaussovým symbolem $[a]$, provedme nyní několik jednoduchých úvah.

Přemýšlejme nejprve o tom, zda uvedenými podmínkami je číslo $[a]$ určeno jednoznačně. Předpokládejme — provádějící důkaz nepřímý — že existují taková celá čísla dvě $a_1 \neq a_2$ a splňují vztahy $a_1 \leq a < a_1 + 1$, $a_2 \leq a < a_2 + 1$. Je-li např. $a_1 < a_2$, je vzhledem k významu těchto čísel $a_1 + 1 \leq a_2$. Potom by však číslo $a < a_1 + 1$ muselo být menší než a_2 , což není možné, neboť je $a \geq a_2$.

Poněvadž $[a] \leq a$, $[b] \leq b$, je $[a] + [b] \leq a + b$.

Avšak $a + b < [a + b] + 1$, takže úhrnem

$$[a] + [b] \leq a + b < [a + b] + 1$$

Čísla $[a]$, $[b]$, $[a + b]$ jsou však celá, musí proto být

$$[a] + [b] \leq [a + b].$$

Odtud lze již úplnou indukcí dokázat, že obecně platí

$$[a] + [b] + [c] + \dots + [z] \leq [a + b + c + \dots + z]$$

a pro n sčítanců stejných

$$\underbrace{[a] + [a] + [a] + \dots + [a]}_{n\text{-krát}} \leq \underbrace{[a + a + a + a + \dots + a]}_{n\text{-krát}}$$

neboli

$$n \cdot [a] \leq [n \cdot a].$$

Podobně pro reálné a a přirozené k je $\left[\frac{[a]}{k} \right] = \left[\frac{a}{k} \right]$

Důkaz: Označme $a = [a] + p$, kde $0 \leq p < 1$. Vyšetřovaný vztah $\left[\frac{[a]}{k} \right] = \left[\frac{[a] + p}{k} \right]$ nastane, jestliže neexistuje žádné celé číslo m , které by vyhovovalo nerovností

$$\frac{[a]}{k} < m \leq \frac{[a] + p}{k}$$

Avšak takové celé číslo m skutečně neexistuje, neboť by pak platilo

$$\frac{[a]}{k} < m < \frac{[a] + 1}{k},$$

neboli

$$[a] < km < [a] + 1,$$

což není možné. Tím je tvrzení výše vyslovené dokázáno.

Poznámka

Funkcemi $F : x \rightarrow [x]$, $G : x \rightarrow [2x - 3]$, obecně funkcemi $G : x \rightarrow [ax + b]$ — tzv. funkcemi Gaussovy — i řešením lineárních rovnic s výrazy $[ax + b]$ zabýval se s. Josef Straka ve stejnojmenných člancích v minulém ročníku Rozhledů, čís. 6 a 7.

Cvičení

Vztah výše použitý $a = [a] + p$, kde $0 \leq p < 1$, lze snadno dokázat. Učiňte tak!

Vzorec pre priemerné hodnoty

Prof. dr. JOZEF SKOTNICKÝ, Košice

V 8. a 9. čísle Rozhledov 1974 mňa zaujal článok o „Zdanlivej (strednej) hmotnosti kilomolu zmesi dvoch plynov“, v ktorom autorka určovala túto hmotnosť len pre binárne zmesi, ačkoľvek problematiku možno celkom ľahko a stručne riešiť tiež obecné. Preto chcem v tomto zmysle doplniť uvedený článok.

Pojem a vzorec pre priemernú hodnotu by mal byť diskutovaný aj odvodený už na stredných školách. Na stredoškolskej úrovni sa tento vzorec najjednoduchšie získa tak, že sa prediskutuje vhodný príklad:

Obchodník chce vypočítať cenu hrachu získaného zmiešaním viacerých druhov o cenách $c_1, c_2, c_3 \dots$ za kilogram a o množstvách $m_1, m_2, m_3 \dots$ kilogramov. — Za zmiešaný hrach nutno totiž utržiť toľko peňazí ako za jednotlivé druhy spolu, teda

$$mc = m_1c_1 + m_2c_2 + \dots,$$

čo delené hodnotou celkovej hmotnosti

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \sum m_k$$

dá priemernú cenu hrachu

$$c = p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3 + \dots = \sum p_k c_k, \quad (1)$$

kde

$$p_k = m_k / \sum m_k$$

sú váhové percentá obsahu jednotlivých druhov hrachu v ich zmesi.

Ako vidno, je vzorec pre priemerné hodnoty pomerne jednoduchý a má mnohostranné použitie.

Keď plynová zmes obsahuje $n_1, n_2, n_3, \dots$ molov plynov o molekulových váhach $M_1, M_2, M_3, \dots$, potom priemerná molekulová váha zmesi M sa vypočíta z rovnice

$$nM = n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_3 M_3 + \dots \quad (2)$$

pretože počet molov sa pri miešaní nesmie zmeniť, takže

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots = \sum n_k.$$

Ak rovnicu (2) delíme týmto n , môžeme písať $n_k/n = p_k$, pričom p_k udáva koncentráciu plynov v zmesi v molprocentoch, takže rovnica nadobudne obecný tvar

$$M = p_1 M_1 + p_2 M_2 + p_3 M_3 + \dots = \sum p_k M_k. \quad (3)$$

Nakoľko objem plynu za stáleho tlaku je podľa Avogadrovho zákona úmerný počtu jeho molekúl a tým aj molov, molpercentá sú totožné s objemovými percentami plynov v zmesi, čo je dôležité preto, že koncentrácia plynov v zmesiach sa obyčajne neudáva vo váhových, ale práve objemových percentách. Tak aj zloženie suchého vzduchu sa jednoducho udáva ako

$$21 \% \text{ O}_2 + 78 \% \text{ N}_2 + 1 \% \text{ vzácnych plynov a CO}_2.$$

Keď za priemernú molekulovú váhu posledných plynov prijmem približne 40, dostaneme pre priemernú molekulovú váhu vzduchu podľa (3)

$$M = 0,21 \cdot 32 + 0,78 \cdot 28 + 0,01 \cdot 40 = 6,72 + 21,84 + 0,4 = 28,96 \doteq 29 \quad (4)$$

Ak vzduch obsahuje p percent vodných pár, poklesne jeho priemerná molekulová váha na

$$M = p \cdot 18 + (1 - p) 28,96, \quad (5)$$

takže pri $p = 10 \%$ obnáša len $1,8 + 26,06 = 27,86$.

Vzorec (3) možno rozšíriť aj na priemernú mernú váhu zmesi plynov ϱ , keď rovnicu (2) delíme Avogadrovým objemom 22,7 litra

$$\varrho = p_1 \varrho_1 + p_2 \varrho_2 + \dots = \sum p_k \varrho_k \quad (6)$$

Merná váha plynu je totiž úmerná jeho molekulovej váhe $\varrho = M/22,7$, a preto všetky plyny, ktorých molekulová váha je menšia než 29, sú ľahšie, a keď je väčšia než 29, sú ťažšie než vzduch.

S takýmto vzorcom pre priemerné hodnoty sa stretáme aj pri údají atómových váh prvkov v Mendelejevovej tabuľke, lebo atómová váha A prvku, v nej udaná, je vlastne priemernou atómovou váhou všetkých izotopov prvku, ktorých atómové váhy sú prakticky celočíselné, takže

$$A = p_1 A_1 + p_2 A_2 + \dots = \sum p_k A_k, \quad (7)$$

kde p_k značí zastúpenie izotopov v ich zmesi vo váhových percentách.

S týmto vzorcom sa stretáme aj pri miešaní roztokov, keď napr. zmiešame roztoky o koncentráciách tej istej látky $c_1, c_2, c_3 \dots$ a množstvách $q_1, q_2, q_3 \dots$. Výsledná koncentrácia zmesi je daná vzorcom

$$c = p_1 c_1 + p_2 c_2 + \dots = \sum p_k c_k, \quad (8)$$

pričom $p_k = q_k / \sum q_k$.

Ak c značí váhové percentá rozpustenej látky v roztoku, potom aj p musia byť váhové percentá, tj. množstvá q roztokov musia byť udané ich hmotami. Keď je c udané v g %, vol % alebo molarite, potom množstvá q roztokov musia byť udané v ich objemoch (viď učebnicu 1, str. 241).

Objemové percentá sa prevádzajú na váhové a naopak podľa známeho vzorca platného aj pre kvapalné roztoky (viď 1(147)): váh % = vol %. ϱ_k / ϱ , ktorý u plynov možno písať aj vo forme $P_k = p_k M_k / M$, keď váhové percentá označíme P a objemové p .

Zo vzťahu $\sum P_k = 1$ obdržíme pre plyny

$$1 = \sum P_k = p_1 M_1 / M + p_2 M_2 / M + \dots, \quad (9)$$

ako už bolo ukázané, a zo vzťahu $\sum p_k = 1$ dostaneme zase obecný vzorec pro výpočet priemernej molekulovej váhy, vychádzajúc z váhových percent jednotlivých plynov v zmesi

$$1 = \sum p_k = P_1 M / M_1 + P_2 M / M_2 + P_3 M / M_3 \dots, \text{ čiže} \\ 1/M = P_1 / M_1 + P_2 / M_2 + P_3 / M_3 + \dots = \sum P_k / M_k \quad (10)$$

a podobne pre priemernú mernú hmotu ϱ zmesi

$$1/\varrho = P_1/\varrho_1 + P_2/\varrho_2 + P_3/\varrho_3 + \dots = \sum P_k/\varrho_k. \quad (11)$$

Vzorce (6) a (11) odvodené zo [1]/147 možno rozšíriť aj na kvapalné roztoky, ovšem za predpokladu, že pri rozpúšťaní látok a miešaní roztokov nedochádza k ich objemovej konstrikcii. Ináč viď [2].

Literatúra :

- [1] V. Santholzer: Lékařská fyzika. 1971, Praha, Avicenum, str. 109, 139 a 141.
- [2] J. Skotnický: Jednotky koncentrácie roztokov a ich význam. Zborník Lek. fakulty Košice VI. (1963) 37—48.

Problém počtu opravářů

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

V tomto článku se nesetkáte s metodou Monte Carlo, ale dozvíte se o jednom uplatnění teorie pravděpodobnosti v praxi. Následující úloha spadá od oblasti teorie markovských řetězců a speciálně pak do *teorie front*. Výsledky úlohy byly aplikovány ve Švédsku. Úloha sama byla publikována v knize W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications.

Dílna je vybavena automatickými stroji. Automaty normálně nevyžadují lidskou ruku, ale občas se stane, že se porouchají. Porucha je náhodná veličina a lze ji popsat pomocí pravděpodobností. Každý stroj na dílně je charakterizován dvěma konstantami λ a μ :

- a) Jestliže stroj v čase t pracuje, pak pravděpodobnost, že v čase $t + h$ potřebuje opravu [tj., že v časovém intervalu $(t, t + h)$ došlo k poruše], je λh .
- b) Jestliže stroj v čase t je v opravě, pak pravděpodobnost, že v čase $t + h$ bude opraven, je μh .

Poměr $\frac{\lambda}{\mu}$ se nazývá *servisní faktor*. Pro další úvahy zvolme servisní faktor roven 0,1.

Tabulka 1.

n	0	1	2	3	4	5	6
počet strojů čekajících ve frontě	0	0	1	2	3	4	5
p_n	0,4845	0,2907	0,1454	0,0582	0,0175	0,0034	0,0003
počet nečinných opravářů	1	0	0	0	0	0	0

I. Předpokládejme nejprve, že dílna má celkem šest strojů, o které pečuje jeden opravář. Jestliže u některého stroje dojde k poruše a opravář žádný stroj právě neopravuje, začne na tomto stroji okamžitě poruchu odstraňovat. Jestliže však opravář opravoval nějaký stroj a nastala porucha na jiném stroji, nejprve rozděláný stroj opraví a pak bez prodlení přejde k dalšímu nepracujícímu stroji, který uvede do chodu, atd.

Odvodit potřebné vzorce je nad naše středoškolské možnosti, a proto si je půjčíme z příslušné obecné teorie. Označme p_n pravděpodobnost, že nepracuje právě n strojů. Vzorec uvedu pro případ, že na dílně je a strojů.

$$p_a = \left[1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + \dots + \frac{1}{a!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^a \right]^{-1}$$

$$p_{a-k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^k p_a, \text{ pro } k = 0, 1, \dots, a$$

Střední počet strojů s poruchou čekajících „ve frontě na opravu“ se vypočte ze vzorce

$$w = \sum_{k=1}^a (k-1) p_k.$$

Nejprve vypočteme pravděpodobnosti $p_0, p_1, \dots, p_6$ z našeho problému a výsledky zpracujeme do tabulky 1.

Střední počet strojů, které jsou porouchány a čekají na opravu, je $w = 1.0,1454 + 2.0,0582 + 3.0,0175 + 4.0,0034 + 5.0,0003 = 0,3294$.

Lze říci, že stále necelá jedna třetina stroje čeká na opravu. To je jako by na dílně nebylo 6 strojů, ale jen $5 \frac{2}{3}$ stroje. Nebo lze říci, že žádný stroj nepracuje naplno, ale z každého stroje je stále porouchána část vyjádřená číslem $\alpha = w/a = 0,3294/6 = 0,0549$ (nepracuje trvale celých 5,5% každého stroje!). Číslo α vyjadřuje ztrátu z každého stroje, proto ho nazveme *koeficient ztráty strojů*. Je to číslo, které lze srovnávat s jinými v podobných případech, protože udává hodnotu vztaženou na jeden stroj.

Číslo p_0 je pravděpodobnost, že žádný stroj nevyžaduje opravu. Je to pravděpodobnost, že opravář nepracuje. Pro dílnu je to ztráta v neralizované pracovní síle opraváře. Zároveň lze toto číslo interpretovat jako střední počet odpočívajících opravářů

$$\varrho = 1 \cdot p_0 = 0,4845.$$

Abychom mohli srovnávat ztráty pracovní síly opravářů s jinými podobnými případy, vztáhneme tyto ztráty na jednoho opraváře. Sestrojíme si tak *koeficient ztráty opravářů* β . V našem případě $\beta = 0,4845/1 = 0,4845$.

II. Nyní změním počáteční podmínky. Uvažujme případ, kdy dílna má $a = 20$ strojů, o které se stará r opravářů, zvolme $r = 3$.

Tabulka 2.

n	0	1		3	4	5	6
počet strojů čekajících ve frontě	0	0	0	0	1	2	3
p_n	0,13625	0,27250	0,25888	0,15533	0,08802	0,04694	0,02347
Počet nečinných opravářů	3	2	1	0	0	0	0
n	7	8	9	10	11	12	13 až 20
Počet strojů	4	5	6	7	8	9	
p_n	0,01095	0,00475	0,00190	0,00070	0,00023	0,00007	0,00001
Počet nečinných opravářů	0	0	0	0	0	0	0

Vzorce budou tentokrát složitější. Pravděpodobnost p_n znamená opět pravděpodobnost, že na opravu čeká právě n strojů.

$$p_n = \binom{a}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 \quad \text{pro } n < r,$$

$$p_n = \frac{a!}{r!(a-n)!} r^{r-n} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot p_0 \quad \text{pro } n \geq r$$

a p_0 vypočítáme z podmínky $\sum_{k=0}^a p_k = 1$.

Pravděpodobnosti vypočítáme a zapíšeme do tabulky 2.

Střední počet strojů čekajících na opravu je

$$w = p_4 + 2p_5 + 3p_6 + \dots + 17p_{20} = 0,3388.$$

Koeficient ztráty strojů je roven $\alpha = 0,3388/20 = 0,01694$. Střední počet nevyužitých opravářů je

$$\varrho = 3p_0 + 2p_1 + p_2 = 1,21263.$$

Koeficient ztráty opravářů je roven $\beta = \varrho/r = 1,21263/3 = 0,40421$.

Tabulka 3.

Případ	I.	II.
počet strojů	6	20
počet opravářů	1	3
počet strojů připadajících na jednoho opraváře	6	6,67
koefficient ztráty strojů	0,0549	0,01694
koefficient ztráty opravářů	0,4845	0,40421

III. Srovnáme spolu dvě uvedené situace. Důležité hodnoty pro srovnání máme uvedeny v tabulce 3.

Srovnání obou případů vede k preferenci případu II. V tomto druhém případě připadá na jednoho opraváře více strojů než v případě prvním a přitom jsou stroje lépe využity (opravovány efektivněji) a pracovní síla opravářů je lépe využita (platí se jim méně prostojů). Nejdůležitější na tom je, že ztráty na strojích klesly na jednu třetinu.

konstruktivní geometrie

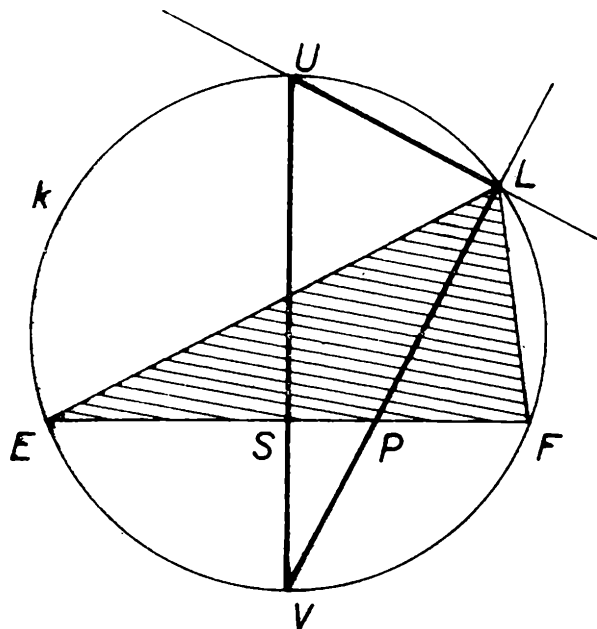
0 tečně elipsy a hyperboly

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

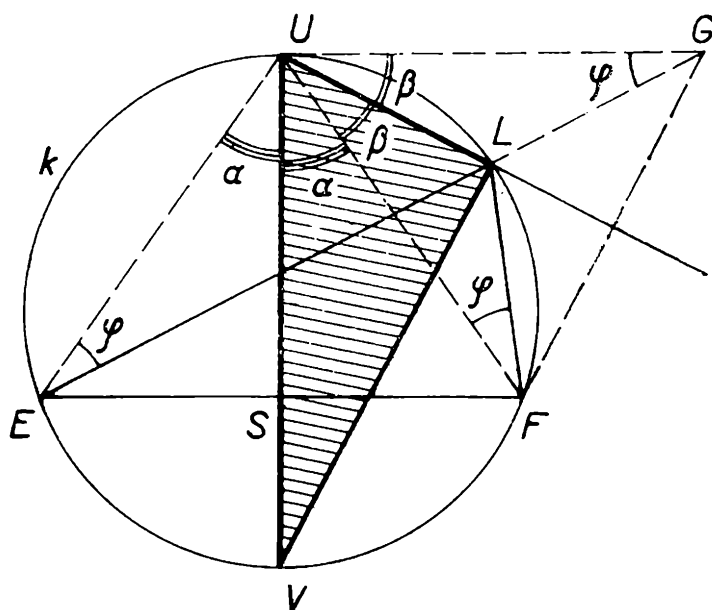
Ve 4. čísle minulého ročníku Rozhledů poukázal Stanislav Horák v článku Středové kuželosečky (str. 155 až 158) na jednu vlastnost elipsy a hyperboly. Odvodil ji metodou souřadnic za předpokladu, že známe rovnice elipsy a hyperboly i rovnice tečny ke každé z nich. Je snad zajímavé ukázat, jak lze tuto vlastnost dokázat bez znalosti analytické geometrie, jestliže známe základní vlastnost tečny elipsy a tečny hyperboly.

Jsou-li E, F ohniska elipsy (hyperboly) a je-li L její bod, který neleží na přímce EF ani na ose úsečky EF , potom víme, že existuje právě jedna elipsa a právě jedna hyperbola, která má ohniska E, F a prochází bodem L . Hlavní osa takto určené elipsy má délku $EL + FL$; hlavní osa takto určené hyperboly má velikost rovnou $|EL - FL|$.

Přímky LE, LF nazýváme průvodiči bodu L , ať jde o elipsu nebo o hyperbolu. Tyto přímky určují čtyři úhly se společným vrcholem L



Obr. 1



Obr. 2

a s rameny na přímkách LE , LF . Jeden z těchto úhlů obsahuje vždy střed S elipsy (hyperboly) jako svůj vnitřní bod. Jde-li o elipsu, říkáme tomuto úhlu a úhlu k němu vrcholovému vnitřní úhel průvodičů; zbývající dva vrcholové úhly se nazývají vnější úhly průvodičů. U hyperboly je tomu obráceně: Ten úhel, který obsahuje střed S (a úhel k němu vrcholový), se jmenuje vnější úhel průvodičů; druhé dva vrcholové úhly se nazývají vnitřními úhly průvodičů. Lze snadno dokázat, že platí tato věta:

Věta 1. Tečna elipsy (hyperboly) sestavená v jejím bodě L , který neleží na hlavní ose, je osou vnějších úhlů průvodičů bodu L .

Důkaz této věty je např. v nyní užívané učebnici deskriptivní geometrie pro gymnasia, sepsané prof. Harantem a jeho spolupracovníky.

Normála elipsy (hyperboly) je kolmice k tečně sestavená v jejím bodu dotyku L ; proto (v důsledku věty 1) je osou vnitřních úhlů průvodičů bodu L .

Předpokládejme nyní, že je dána elipsa (hyperbola), která má ohniska E , F a prochází bodem L ; přitom bod L neleží na žádné ose dané kuželosečky (obr. 1). Opišme trojúhelníku EFL kružnici k ; její střed leží na ose úsečky EF , tj. na vedlejší ose dané elipsy (hyperboly). Tato přímka je tedy průměrem kružnice k . Jeho krajní body označme U , V ; přitom volme označení tak, že bod U leží uvnitř poloroviny EFL . Pak bod V leží uvnitř poloroviny k ní opačné. Proto tětiva LV kružnice k protíná přímku EF v bodě P , který je vnitřním bodem tětivy LV čili vnitřním bodem kružnice k ; proto je také vnitřním bodem tětivy EF . Polopřímka LP tedy rozděluje úhel $\sphericalangle ELF$ na dva úhly. Ze souměrnosti kružnice k podle průměru UV plyne, že je $EV = FV$, proto jsou obvodové úhly $\sphericalangle ELV$, $\sphericalangle FLV$ shodné. To znamená, že přímka LV je osou úhlu

$\sphericalangle ELF$ a úhlu k němu vrcholovému. Podle Thaletovy věty je úhel $\sphericalangle ULV$ pravý, takže přímka $LU \perp LV$ je osou druhých dvou úhlů sevřených průvodiči LE , LF . Jsou tedy přímky LU , LV tečnou a normálou dané kuželosečky. Jde-li o elipsu, je tečnou přímka LU ; jde-li o hyperbolu, je tečnou přímka LV . Platí tedy věta:

Věta 2. Je dána elipsa (hyperbola). V libovolném jejím bodě L , který není vrcholem, sestrojme její tečnu a normálu. Tyto dvě přímky a vedlejší osa dané kuželosečky omezují trojúhelník; kružnice, která je mu opsána, prochází ohnisky dané kuželosečky.

Důkaz této věty můžeme však provést ještě jinak. Sestrojíme osy úhlů průvodičů LE , LF (obr. 2). Protože v trojúhelníku EFL nejsou strany LE , LF shodné, není žádná z těchto os rovnoběžná s vedlejší osou dané kuželosečky. Jedna protíná tuto vedlejší osu v bodě U , druhá v bodě V ; přitom písmenem U označme bod ležící uvnitř poloroviny EFL . Opíšme pravoúhlému trojúhelníku UVL kružnici k ; potom máme dokázat, že tato kružnice prochází body E , F . K tomu stačí dokázat shodnost úhlů $\sphericalangle UEL$, $\sphericalangle UVL$, $\sphericalangle UFL$, jejichž vrcholy leží uvnitř téže poloroviny vyřaté přímkou UL . Pak totiž leží tyto vrcholy na oblouku kružnice, která prochází body U , L ; je tedy totožná s kružnicí k (neboť s ní má společné tři různé body U , L , V).

Sestrojme bod G souměrně sdružený k bodu F podle přímky LU . Protože tato přímka je osou dvou úhlů průvodičů LE , LF , leží bod G na přímce LE , a to na prodloužení úsečky LE za bod L . Potom je

$$UE = UF = UG,$$

takže trojúhelník EGU je rovnoramenný se základnou EG . Proto je $\sphericalangle UEG = \sphericalangle UGE$ čili $\sphericalangle UEL = \sphericalangle UGL$; ze souměrnosti bodů F , G podle přímky LU pak plyne shodnost úhlů $\sphericalangle UGL$, $\sphericalangle UFL$. Je tedy

$$\sphericalangle UEL = \sphericalangle UFL = \varphi.$$

Zbývá dokázat, že také úhel $\sphericalangle UVL = \varphi$ čili, že je $\sphericalangle VUL = R - \varphi$.

Úhel $\sphericalangle EUG$ je grafickým součtem čtyř úhlů: $\sphericalangle EUV$, $\sphericalangle VUF$, $\sphericalangle FUL$, $\sphericalangle LUG$. Přitom je

$$\begin{aligned}\sphericalangle EUV &= \sphericalangle VUF = \alpha, \\ \sphericalangle FUL &= \sphericalangle LUG = \beta;\end{aligned}$$

z trojúhelníku EGU plyne, že je

$$\begin{aligned}2\alpha + 2\beta &= 2R - 2\varphi, \\ \alpha + \beta &= R - \varphi.\end{aligned}$$

Avšak $\alpha + \beta = \sphericalangle VUF + \sphericalangle FUL = \sphericalangle VUL$; je tedy

$$\sphericalangle VUL = R - \varphi$$

čili $\sphericalangle UVL = \varphi$.

Poznámka. Pozorný čtenář si jistě uvědomil, že v obou důkazech nepotřebujeme vůbec mluvit o elipse nebo hyperbole. Podstata celé věci je totiž tato: Je dán trojúhelník EFL , ve kterém strany LE , LF nejsou shodné. Sestrojíme osy úhlů sevřených přímkami LE , LF a jejich průsečíky U , V s osou úsečky EF . Potom body E , F , L , U , V leží na kružnici, jejímž průměrem je úsečka UV . — Přitom ovšem body E , F můžeme interpretovat jako ohniska elipsy a hyperboly, z nichž každá prochází bodem L .

fyzika

Coulombův zákon pro magnetismus a jeho užití

PETR DUB, Brno

Tento článek chce rozšířit učivo o permanentních magnetech probírané na střední škole zavedením tzv. Coulombova zákona pro magnetismus. Článek chce současně ukázat, že při fyzikálních úvahách o permanentních magnetech je výhodné zavádět tzv. magnetické množství jako pomocný pojem.

Historicky probíhalo studium permanentních magnetů dříve, než bylo objeveno magnetické pole elektrického proudu. Předpokládalo se, že látka v magnetickém stavu je prostoupena dvěma fluidy, a s tím souviselo zavedení pojmů dvou magnetických množství, a to kladného a záporného. Pro silové působení mezi bodovými magnetickými množstvími se podobně jako v elektrostatice uvádí Coulombův zákon pro magnetismus (podrobněji např. v [1]).

Magnetické množství, jak se ukázalo později, nemá reálnou existenci, protože magnetické účinky stálých magnetů jsou způsobeny pohybem elektricky nabitých částic látky, čili jsou důsledkem elementárních proudů, které v látce tímto pohybem vznikají. Z toho také plyne poznatek o neoddělitelnosti obou druhů magnetismu, odvozený již předtím experimentálně.

Nelze však upřít, že mnohé úkazy u permanentních magnetů lze vysvětlit snadněji zavedením pojmu neexistujícího magnetického množství. Protože však magnetické množství reálně neexistuje, je to jen pomocný pojem, bylo by nesprávné zavádět Coulombův zákon pro magnetismus jako další základní zákon experimentálně zjištěný. Coulombův zákon pro magnetismus jako zákon pro pomocný pojem musí být důsledkem

platnosti základních zákonů popisujících magnetické pole elektrického proudu.

Coulombův zákon pro magnetismus si proto nyní odvodíme. Použijeme přitom Biotova—Savartova zákona, který vyjadřuje indukci, resp. intenzitu magnetického pole vodiče protékaného proudem, a vztahu pro sílu, kterou působí magnetické pole na vodič protékaný proudem. Nejprve si připomeneme tyto vztahy, zavedeme si magnetické množství jako fyzikální veličinu a určíme její jednotku.

1. Magnetické pole můžeme popsat pomocí indukce **B** magnetického pole a také pomocí intenzity **H**;¹⁾ pro ni platí

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} . \quad (1)$$

Pro jednotku intenzity magnetického pole vychází

$$\frac{\text{T}}{\text{N A}^{-2}} = \frac{\text{N A}^{-1} \text{m}^{-1}}{\text{N A}^{-2}} = \text{A m}^{-1} .$$

2. Pro velikost indukce magnetického pole ve středu kruhové smyčky poloměru r protékané proudem I v prostředí o permeabilitě μ vychází z Biotova—Savartova zákona:

$$B = \mu \frac{I}{2r} . \quad (2)$$

Pro velikost intenzity tohoto magnetického pole pak vzhledem ke vztahu (1) vychází

$$H = \frac{I}{2r} . \quad (2)$$

Orientaci vektoru **H**, resp. **B**, určíme podle Ampèrova pravidla pravé ruky.

3. Pro velikost síly, kterou působí homogenní magnetické pole o indukci B na přímý vodič délky l protékaný proudem I v případě, že je vodič kolmý k indukčním čarám, vychází

$$F = B I l$$

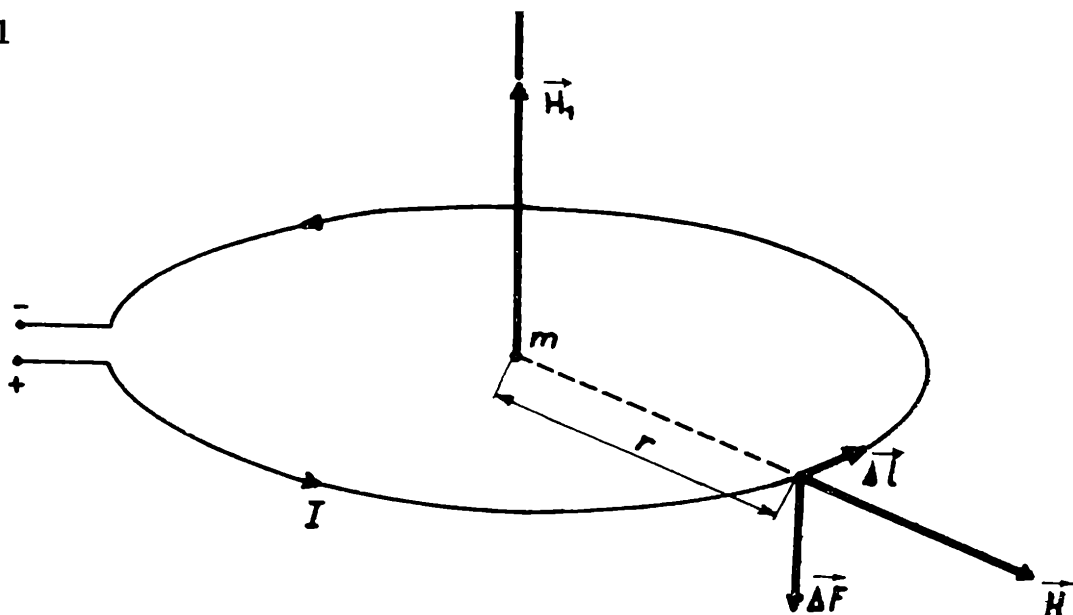
nebo vzhledem k (1)

$$F = \mu H I l . \quad (3)$$

Orientaci síly určíme podle Flemingova pravidla levé ruky.

¹⁾ Tato veličina se na střední škole nezavádí, ale pro naše úvahy je výhodné ji zavést. Intenzita magnetického pole je veličina analogická intenzitě elektrostatického pole.

Obr. 1



4. Pro intenzitu elektrostatického pole platí

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Analogicky zavedeme vztah mezi intenzitou magnetického pole a magnetickým množstvím

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (4)$$

kde $\mathbf{F}$ je síla, kterou magnetické pole působí na dané magnetické množství m' . Ze vztahu (4) vychází pro jednotku magnetického množství

$$\frac{\text{N}}{\text{A m}^{-1}} = \frac{\text{N m}}{\text{A}} = \frac{\text{J}}{\text{A}} = \frac{\text{V A s}}{\text{A}} = \text{V s} = \text{Wb}^1).$$

Nyní, když jsme si připoměli a zavedli všechny potřebné vztahy a veličiny, přistoupíme k vlastnímu odvození Coulombova zákona pro magnetismus. Vyjdeme ze silového působení magnetického pole vodiče protékaného proudem na bodové magnetické množství a ze silového působení magnetického pole bodového magnetického množství na vodič protékaný proudem.

Do středu kruhové smyčky o poloměru r umístíme kladné bodové magnetické množství m (viz obr. 1). Permeabilita prostředí je μ . Smyčkou protéká proud I , jehož směr je vyznačen na obr. 1. Tento proud vytváří ve středu smyčky magnetické pole o intenzitě $\mathbf{H}_1$, jejíž velikost je (vzhledem ke vztahu (2))

$$H_1 = \frac{I}{2r}$$

¹⁾ Je tu uvedena jednotka indukčního toku $\text{Wb} = \text{T m}^2$. Dosadíme-li za $\text{T} = \text{N A}^{-1}\text{m}^{-1}$, dostáváme $\text{Wb} = \text{N A}^{-1}\text{m} = \text{J A}^{-1} = \text{V A s A}^{-1} = \text{V s}$.

a která je vzhledem ke směru proudu na obr. 1 orientována podle Ampèrova pravidla pravé ruky nahoru. Pak podle (4) působí na magnetické množství m síla o velikosti

$$F_1 = m H_1 = m \frac{I}{2r}, \quad (5)$$

která je orientována také nahoru, protože uvažujeme kladné magnetické množství.

Bodové magnetické množství m vytváří radiální magnetické pole, jehož intenzita ve vzdálenosti r , tj. také v místech vodiče vytvářejícího smyčku, má velikost H . Vektor $\mathbf{H}$ ležící v rovině smyčky leží současně ve vektorové přímce normály vodiče a je orientován od magnetického množství m . Potom na zvolený element Δl vodiče působí podle vztahu (3) síla

$$\Delta F = \mu H I \Delta l,$$

protože v délce elementu, který můžeme považovat za úsečku, je magnetické pole homogenní. Síla $\Delta \mathbf{F}$ je podle Flemingova pravidla levé ruky orientována na obr. 1 dolů. Celkovou sílu $\mathbf{F}$, kterou působí na smyčku radiální magnetické pole daného magnetického množství m , dostaneme součtem všech sil $\Delta \mathbf{F}$:

$$F = \Sigma \Delta F = \mu H I \Sigma \Delta l;$$

veličiny μ , H , I jsme mohli vytknout před sumační znaménko, protože jsou v celé délce vodiče stejné. Výraz $\Sigma \Delta l$ představuje obvod kružnice poloměru r . Tedy

$$F = 2\pi \mu r I H. \quad (6)$$

Síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}$ jsou v poměru akce a reakce, tzn., že pro jejich velikosti platí

$$F_1 = F.$$

Sem dosadíme z (5) a (6) a dostáváme pro velikost intenzity magnetického pole bodového magnetického množství:

$$H = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{m}{r^2}. \quad (7)$$

Přihlédneme-li ke vztahu (4), dostáváme výraz pro sílu, kterou na sebe působí dvě bodová magnetická množství m , m' ve vzájemné vzdálenosti r :

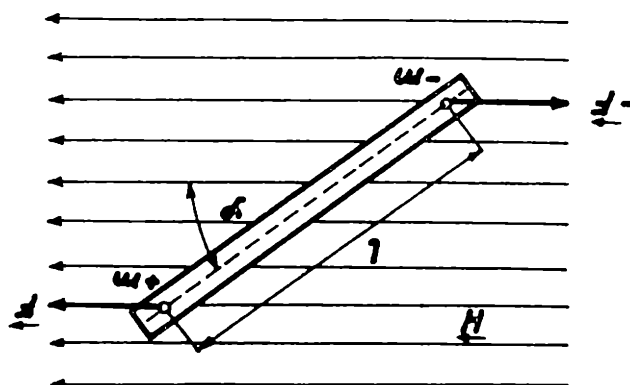
$$F_m = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{m m'}{r^2},$$

což je hledaný Coulombův zákon pro magnetismus. Vážného zájemce odkazují na publikace [3], [4], kde je Coulombův zákon pro magnetismus odvozen pro obecný případ užitím náročnějšího matematického aparátu.

Nyní, když jsme si zavedli magnetické množství jako fyzikální veličinu, určili její jednotku a odvodili Coulombův zákon pro magnetismus, můžeme zavést Coulombův magnetický moment — veličinu, která zcela reálně charakterizuje daný magnet. Dále můžeme odvodit velikost intenzity magnetického pole magnetu v tzv. Gaussových polohách a určit dobu kmitu magnetky v magnetických polích. To jsou příklady kvantitativního popisu úkazů s permanentními magnety.

Coulombův magnetický moment

Uvažujme homogenní magnetické pole o intenzitě H , v němž je umístěn tyčový magnet (viz obr. 2). Permanentní magnet vznikne uspořádáním elementárních magnetů tvořených elementárními proudy, takže



Obr. 2

převládá právě jedna orientace intenzity. To se projeví tak, jako by u jednoho konce existovalo magnetické množství $+m$ a u druhého $-m$. (Již z experimentu plyne, že magnetické účinky magnetů se projevují právě u jejich konců.) Je-li magnet vychýlen z rovnovážné polohy o úhel φ , pak na něj působí silový moment

$$M = F l \sin \varphi,$$

kde l je vzdálenost magnetických množství $+m$ a $-m$, tzv. redukovaná délka magnetu, a kde vzhledem ke (4)

$$F = m H.$$

Tedy

$$M = m_C H \sin \varphi,$$

kde $m_C = ml$ označujeme jako Coulombův magnetický moment. Tato veličina charakterizuje silové účinky daného magnetu v magnetických polích. Je to veličina naprosto reálná, lze ji určit měřením, aniž bychom znali hodnotu m a l . O metodách měření m_C se pojednává např. v [3], [5]. Pro přesnost se omezíme na konstatování, že Coulombův magnetický moment je veličina vektorová.

Je vidět, že zavedení Coulombova magnetického momentu pomocí magnetického množství je jednoduché a názorné.

Intenzita magnetického pole magnetu v tzv. Gaussových polohách

Uvažujme tyčový magnet redukované délky l , jehož Coulombův magnetický moment je m_C . Určeme velikost intenzity magnetického pole v tzv. I. Gaussově poloze, tj. ve vzdálenosti d od středu magnetu na jeho ose (na obr. 3 v bodě A). Protože si tyčový magnet představujeme složený ze dvou bodových magnetických množství $+m$ a $-m$, užijeme k výpočtu hledané intenzity vztahu (7). Nejprve určíme intenzitu H_1 , kterou vyvolává v daném bodě kladný pól, a intenzitu H_2 , kterou vyvolává záporný pól. Pro výslednou intenzitu platí

$$H_I = H_1 + H_2, \quad (8)$$

protože vektory $\mathbf{H}_1$ a $\mathbf{H}_2$ leží v téže vektorové přímce. Vzhledem ke vztahu (7) platí

$$H_1 = \frac{+m}{4\pi\mu\left(d - \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$H_2 = \frac{-m}{4\pi\mu\left(d + \frac{l}{2}\right)^2}$$

Dosadíme-li odtud do (8), pak po úpravě vychází

$$H_I = \frac{ml}{2\pi\mu d^3\left(1 - \frac{l^2}{4d^2}\right)^2}$$

Platí-li $l \ll d$, pak můžeme výraz $l^2/4d^2$ vůči 1 zanedbat. Protože $ml = m_C$, můžeme pro velikost intenzity magnetického pole magnetu v I. Gaussově poloze psát

$$H_I = \frac{m_C}{2\pi\mu d^3}$$

Na procvičení této tematiky uvádím dva příklady:

1. Určete velikost intenzity H_{II} v tzv. II. Gaussově poloze, tj. ve vzdálenosti d od středu magnetu v rovině souměrnosti magnetu (na obr. 3 v bodě B). Předpokládejte, že platí $l \ll d$. Pak dokažte, že platí $H_I \doteq 2H_{II}$.

2. Dokažte, že kmity magnetky v homogenním magnetickém poli o indukci B jsou harmonické. Magnet má Coulombův magnetický

astronomie

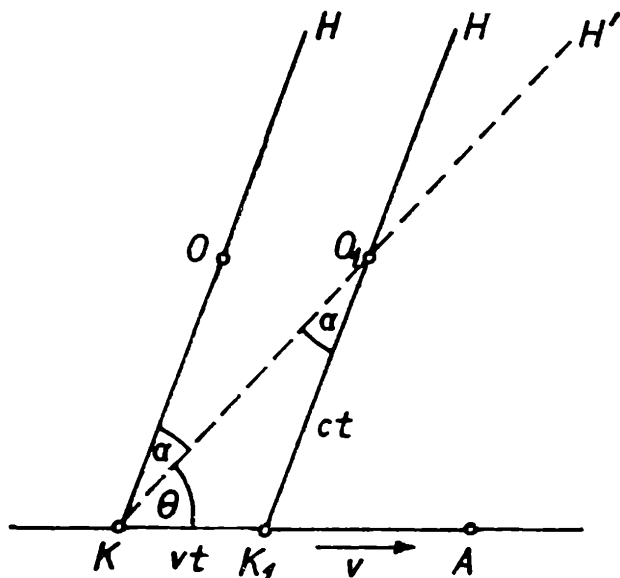
Aberace světla

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

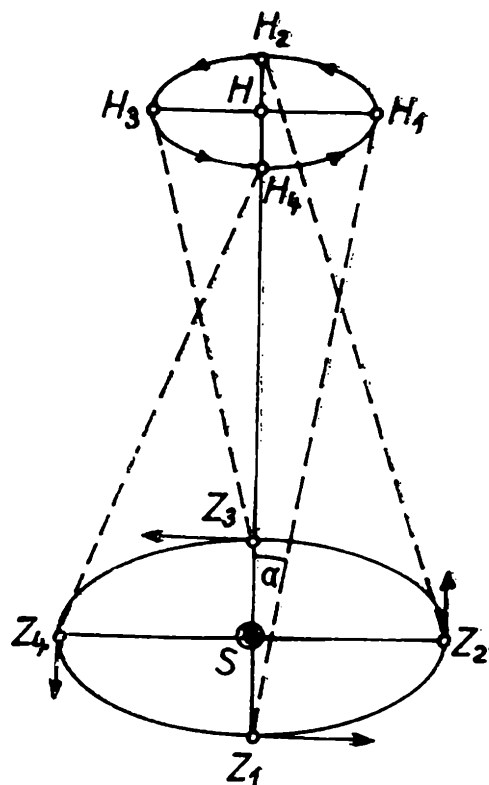
Od dob Koperníkových se astronomové snažili objevit přímý důkaz o pohybu Země kolem Slunce — paralaxu hvězd. Paralaktický posuv i poměrně blízkých hvězd je však velmi malý, nedosahuje ani jedné obloukové vteřiny a mohl být tedy objeven až v době, kdy měřicí technika dosáhla vysoké přesnosti. Jak je známo, paralaxu poprvé změřil F. W. Bessell v roce 1838 u hvězdy 61 Cygni.

Pokusy o změření paralaxy se konaly ovšem už mnohem dříve a při těchto pokusech učinil anglický astronom James Bradley velmi zajímavý objev. V roce 1725 se spolu se svým přítelem Molyneuxem rozhodl pozorovat hvězdu γ Draconis (červená hvězda druhé hvězdné velikosti v souhvězdí Draka), která při zdánlivém otáčení oblohy procházela na daném pozorovacím místě v blízkosti zenitu. Pozorování začala v listopadu 1725 a již v prosinci zjistili pozorovatelé změny v poloze hvězdy. Na počátku března 1726 procházela hvězda o $20''$ jižněji od zenitu než na začátku pozorování, pak se začala vracet, počátkem června procházela tímž místem jako v prosinci, počátkem září byla o $20''$ severněji a do prosince 1726 se vrátila opět do původní polohy. Měření ukázala, že hvězda opisuje na obloze kružnici o průměru asi $40''$ za jeden rok, posunuje se však zcela jinak, než by odpovídalo paralaktickému posuvu. Bradley pak pozoroval několik hvězd na různých místech oblohy a zjistil, že se všechny posunují tímž směrem a opisují elipsy o téže velké poloose; malá poloosa se zmenšuje od pólu ekliptiky (v jehož blízkosti je γ Draconis) směrem k rovině ekliptiky, kde je malá poloosa rovna nule. Posouvání hvězd tedy souvisí s oběhem Země kolem Slunce, nesouvisí však se vzdáleností hvězd. Bradley neobjevil paralaxu, objevil však rovnocenný důkaz o oběhu Země kolem Slunce. Periodické posouvání hvězd, objevené Bradleyem, se nazývá roční aberace hvězd.

Roční aberace hvězd je tedy zdánlivá změna polohy hvězdy, vznikající jako důsledek konečné rychlosti světla a pohybu Země. Vznik aberace si vysvětlíme na obr. 1. Uvažujme, že dalekohledem pozorujeme hvězdu H . Bod O je střed objektivu dalekohledu, bod K střed okuláru. Kdyby Země byla v klidu, dopadl by paprsek procházející středem objektivu na střed okuláru, obraz hvězdy by se vytvořil v bodě K a hvězdu bychom pozorovali ve směru KH . Dalekohled se však spolu se Zemí pohybuje rychlostí v ve směru KA . Světlo se šíří rychlostí c , a proto



Obr. 1. Ke vzniku aberace



Obr. 2. Roční aberační posuv hvězdy

paprsek, dopadající na střed O objektivu, potřebuje určitý čas t , aby dosáhl okuláru. Za tuto dobu t urazí světlo dráhu $OK = ct$ a dopadne do bodu K , avšak dalekohled spolu se Zemí se přesune o dráhu $KK_1 = vt$. Okulár je nyní v místě K_1 , objektiv v místě O_1 . Obraz hvězdy se nevytvoří ve středu okuláru, protože ten se za dobu průchodu světla přesunul do polohy K_1 . Má-li světlo přesto dopadnout na střed okuláru, musí být dalekohled skloněn o úhel α ve směru pohybu dalekohledu tak, aby objektiv dalekohledu byl již v bodě O_1 , zatímco okulár je ještě v poloze K . Světlo hvězdy tedy zdánlivě nepřichází ze směru H , ale ze směru H' , který je posunut o úhel α ve směru pohybu dalekohledu. Zdánlivý směr ke hvězdě KH' svírá se skutečným směrem KH úhel α , který se nazývá *aberační úhel*. Pro velikost aberačního úhlu plyne z trojúhelníku KK_1O' vztah

$$\sin \alpha = \frac{v}{c} \sin \Theta ,$$

kde Θ je úhel, který svírá zdánlivý směr k hvězdě se směrem pohybu pozorovatele. Protože aberační úhel je velmi malý, lze psát

$$\alpha = \frac{v}{c} \sin \Theta$$

a dosadíme-li číselné hodnoty $v = 29,77 \text{ km s}^{-1}$, $c = 3 \cdot 10^5 \text{ km s}^{-1}$ a vyjádříme-li úhel v obloukových vteřinách, je

$$\alpha'' = 20,47'' \sin \Theta .$$

Hodnota $20,47''$ se nazývá *aberační konstanta*. Pro hvězdy na pólu ekliptiky je $\Theta = 90^\circ$ a tyto hvězdy opisují během roku kružnici o polooměru $20,47''$. Ostatní hvězdy opisují elipsy s poloosami $20,47''$ a $20,47'' \sin \beta$, kde β je astronomická šířka hvězdy. Pro hvězdy v rovině ekliptiky, pro něž je $\beta = 0$, se elipsa změní v úsečku o délce $40,94''$. Na obr. 2 je znázorněn aberační posuv hvězdy ležící v blízkosti pólu ekliptiky, jak se jeví během ročního oběhu Země kolem Slunce. Země obíhá kolem Slunce po téměř kruhové dráze. Pozorujeme-li hvězdu H v okamžiku, kdy je Země v poloze Z_1 , jeví se posunuta ve směru pohybu Země o aberační úhel α do polohy H_1 . Za čtvrt roku, kdy je Země v poloze Z_2 , jeví se hvězda v poloze H_2 a za rok opíše aberační elipsu $H_1H_2H_3H_4$.

Roční aberace, jak jsme již uvedli, je důsledkem obíhání Země kolem Slunce. Země však koná ještě jeden pohyb — otáčí se kolem své osy. V důsledku rotace Země — s výjimkou pólů, které jsou v klidu — pohybují se pozorovací místa na povrchu Země po kružnicích určitou rychlostí v . Místa na rovníku mají rychlost $v_0 = 0,464 \text{ km s}^{-1}$, pro rychlost ostatních míst platí

$$v = v_0 \cos \varphi ,$$

kde φ je zeměpisná šířka pozorovacího místa. Vlivem otáčení Země vzniká rovněž zdánlivá změna polohy pozorovaných kosmických těles, tzv. *denní aberace*. Denní aberace má podstatně menší hodnotu než roční aberace, není však při současné přesnosti měření zanedbatelná. Pro aberační úhel platí

$$\sin \alpha = \frac{v_0 \cos \varphi}{c} \sin \Theta ,$$

kde c je rychlost šíření světla, Θ úhlová vzdálenost od zdánlivé polohy hvězdy k bodu východu (měřená po oblouku velké kružnice), neboť Země se otáčí od západu na východ, a tedy i okamžitá rychlost pozorovacího místa směřuje k východu. Nahradíme-li $\sin \alpha$ úhlem α , dosadíme číselné hodnoty a převedeme na obloukové vteřiny, dostáváme pro denní aberaci

$$\alpha'' = 0,319'' \cos \varphi \sin \Theta$$

Denní aberace může dosáhnout maximální hodnoty (pro místo na rovníku) $\alpha'' = 0,319''$; tato hodnota se nazývá *koeficient denní aberace*.

Země se spolu se Sluncem a s celou sluneční soustavou pohybuje kolem středu Galaxie; kosmické těleso, pozorované ze Země, se proto jeví posunuté ve směru, kterým se pohybuje Slunce. Toto posunutí, nazývané *sekundární aberace*, je však v čase konstantní, neboť vzhledem k velké oběžné době Slunce můžeme jeho pohyb považovat za rovnoměrný a přímočarý. Sekulární aberaci přímo měřit nelze a v praktické astronomii k ní nepřihlížíme.

Při přesném určování drah těles sluneční soustavy však musíme brát v úvahu *planetární aberaci*. Dosud jsme nebrali ohled na to, že se pohybuje i zdroj světla. U těles sluneční soustavy musíme uvážit, že se pohybuje nejen Země, ale i pozorované těleso. Světlo potřebuje dobu τ , nazývanou *aberační čas*, aby dospělo od daného tělesa k pozorovateli. Za tuto dobu se však těleso přesune o určitou vzdálenost a v okamžiku pozorování se jeho skutečné souřadnice na sféře poněkud liší od souřadnic pozorovaných. Při přesných výpočtech je pak třeba souřadnice opravit o planetární aberaci.

Kdyby se pozorované těleso sluneční soustavy pohybovalo rovnoběžně se Zemí stejnou rychlostí jako Země, zmizel by rozdíl mezi skutečnými a zdánlivými souřadnicemi tělesa, stejně jako se neprojevuje sekulární aberace při pozorování těles sluneční soustavy a roční ani denní aberace při pozorování těles na povrchu Země.

Na závěr připomeňme ještě některé zajímavé údaje o objeviteli aberace. James Bradley žil v letech 1693 až 1762. Byl členem Královské společnosti a profesorem na Oxfordské univerzitě. Objev aberace, který učinil v letech 1725 až 1726, oznámil vědeckému světu v roce 1728 dopisem Edmundu Halleyovi. Krátce po objevu roční aberace objevil také nutaci zemské osy. Na stopu objevu přišel již v roce 1727, trpělivě však pozoroval 20 roků, aby vyloučil jakýkoli omyl, a svůj objev uveřejnil až v roce 1747. Věnoval se také sestavení rozsáhlého katalogu poloh hvězd, pro který za dvacet let nashromáždil na 60 000 pozorování. Oproti dřívějším pozorovatelům značně zvýšil přesnost pozorování, čehož dosáhl jednak pečlivým měřením, jednak tím, že zavedl opravy nejen na refrakci, ale i na roční aberaci a nutaci. Na sklonku života se stal po Halleyovi třetím královským astronomem.

O pohybech Země

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

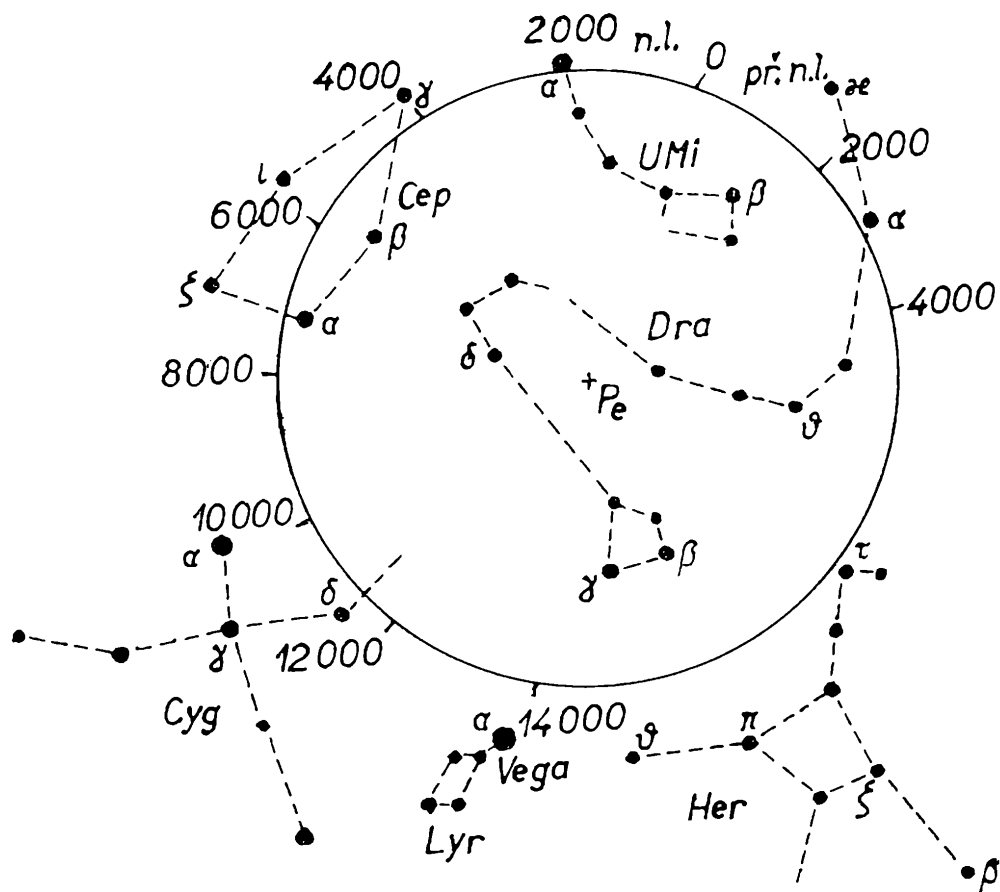
Dnes již nikdo nepochybuje o tom, že zdánlivé otáčení hvězdné oblohy je způsobeno rotací Země kolem osy a právě tak je všeobecně známo, že Země spolu s ostatními planetami obíhá kolem Slunce. Doba jedné otočky Země vzhledem ke Slunci neboli střední sluneční den je 24 hodiny. Vzhledem k hvězdám se Země otočí o 360° za 23 h 56 min 04 s, což je tzv. hvězdný neboli siderický den. Rotace Země kolem osy byla po dlouhou dobu považována za zcela rovnoměrnou, a proto se jí používalo k přesnému měření času. S postupným zlepšováním měřicí techniky se však ukázalo, že rotace Země není dokonale pravidelná. Bylo zjištěno, že se rotace Země postupně zpomaluje asi o jednu tisícinu sekundy za

století, čemuž nasvědčují také staré záznamy o pozorování zatmění Slunce, zákrytech hvězd Měsícem apod. Kromě tohoto prodlužování dne byly zjištěny změny periodického rázu, z nichž hlavní má amplitudu 0,06 s a periodu 1 rok, a také změny nepravidelné, jejichž příčiny nejsou dosud přesně zjištěny. Předpokládá se, že na těchto změnách se podílejí mořské slapy (příliv a odliv), meteorologické vlivy a také přesuny látky v zemském nitru.

Oběh Země kolem Slunce — přesněji řečeno kolem těžiště sluneční soustavy — se děje po eliptické dráze, jejíž velká poloosa má délku $149,6 \cdot 10^6$ km. Numerická excentricita zemské dráhy je poměrně malá, $e = 0,01673$, proto se během roku příliš nemění vzdálenost Země od Slunce ani její rychlost. V přísluní (perihéliu) se Země přiblíží ke Slunci na vzdálenost $147,1 \cdot 10^6$ km a má rychlost $30,276 \text{ km s}^{-1}$, v odsluní (aféliu) je vzdálenost Země od Slunce $152,1 \cdot 10^6$ km a její rychlost $29,271 \text{ km s}^{-1}$. Změny v rychlosti Země na její dráze způsobují, že letní a zimní období nejsou pro obě zemské polokoule stejně dlouhá. Země prochází perihéliem své dráhy v lednu, kdy je na severní polokouli zima, na jižní léto. Protože se v perihéliu Země pohybuje rychleji, trvá na severní polokouli zimní půlrok jen 179 dní, letní pak 186 dní, zatímco na jižní polokouli je tomu naopak.

Rovina zemské dráhy se nazývá rovina ekliptiky a vzhledem k této rovině se udávají sklony drah planet a ostatních těles ve sluneční soustavě. Rovina ekliptiky svírá s rovinou zemského rovníku úhel $23^\circ 27'$. Tento úhel, zvaný sklon ekliptiky, se s časem poněkud mění působením ostatních planet; v současné době se zmenšuje asi o $0,5''$ za rok. V periodě 40 tisíc roků se sklon ekliptiky vzhledem k rovině rovníku mění v mezích od $21^\circ 55'$ do $24^\circ 18'$; tyto změny mohou mít podstatný vliv na zemské podnebí.

Podobně jako u ostatních planet mění se i u Země poloha dráhy v rovině ekliptiky. Spojnice perihélia a afélia neboli přímka apsid se postupně stáčí v přímém směru, tj. ve směru oběhu Země kolem Slunce, a jednu otočku vykoná za 21 000 roků. Během této doby se ocitá Země v perihéliu v různých ročních obdobích. V současné době, jak jsme již uvedli, prochází Země perihéliem v lednu (v roce 1975 to bylo dne 2. ledna ve 14 hodin středoevropského času), v roce 4000 před naším letopočtem prošla Země perihéliem 21. září, v roce 1250 našeho letopočtu dne 21. prosince a v roce 11 900 bude Země v perihéliu 21. června. Tyto změny se také mohou projevit v průměrných teplotách na povrchu Země v zimě a v létě. V současné době je rozdíl teplot v zimě a v létě na severní polokouli zmírňován tím, že v zimě je Země blíže Slunci, v létě je od něj dále — množství energie, kterou Země od Slunce přijímá, se vlivem změn vzdálenosti mění asi o 6 %, což jistě není zanedbatelná hodnota. Přesná měření ukázala, že se poněkud mění i tvar zemské dráhy a dochází ke změnám v excentricitě, která se pozvolna zmenšuje.



Obr. 1. Dráha severního světového pólu kolem ekliptiky Pe .

Dalším pohybem, který koná Země, je precesní pohyb. Jak je známo, tvar Země není přesně kulový a vlivem gravitačního působení Slunce, Měsíce i ostatních planet vzniká kuželový pohyb zemské osy, jehož perioda je něco přes 26 000 let (je to tzv. platónský rok). V důsledku precesního pohybu opisuje průsečík zemské osy se sférou neboli světový pól kolem pólu ekliptiky kružnici o poloměru rovném sklonu ekliptiky, tj. asi $23,5^\circ$. Dráha severního světového pólu mezi hvězdami je nakreslena na obr. 1. Z obrázku je zřejmé, že v průběhu platónského roku směřuje zemská osa postupně k různým hvězdám. Nyní je naší polárkou hvězda α v souhvězdí Malé medvědice (α Ursae Minoris), kolem roku 3000 př. n. l. to byla hvězda Thuban (α v souhvězdí Draka, α Draconis), v roce 4000 bude zemská osa směřovat k hvězdě Alrai (γ Cephei) a v roce 14 000 se promítne do blízkosti Vegy v souhvězdí Lyry (α Lyrae). Je ovšem třeba poznamenat, že i poloha pólu ekliptiky Pe se poněkud mění, takže křivka světového pólu není uzavřená — pohybuje se mezi hvězdami po spirále. Přes precesní pohyb zemské osy se překládá periodické kolísání zemské osy, tzv. nutace. Je způsobena tím, že dráha Měsíce neleží v rovině ekliptiky. Nutace má periodu 18,7 roku a amplitudu $\pm 9,2''$.

Precesní pohyb zemské osy má za následek, že se mění poloha průsečíku ekliptiky se světovým rovníkem — jarního bodu. Jarní bod se posune o $50,2''$ za rok ve zpětném směru a celý oběh vykoná za platónský rok. Jedním znamením zvěrokruhu projde asi za 2200 let. Nyní je jarní bod v souhvězdí Ryb, počátkem našeho letopočtu byl v souhvězdí Berana, proto se jarní bod označuje symbolem podobným symbolu tohoto souhvězdí.

Oběžná doba Země kolem Slunce, měřená vzhledem k hvězdám, je 365 d 06 h 09 min 9,5 s a nazývá se hvězdný neboli siderický rok. Pro život na Zemi má však větší význam tzv. tropický rok, během něhož se vystřídají všechna roční období. Tropický rok je doba mezi dvěma po sobě následujícími průchody Slunce jarním bodem a vzhledem k posouvání jarního bodu je asi o 20 minut kratší než siderický rok, trvá 365 d 05 h 48 min 46 s. Z praktických důvodů při měření času v občanském životě je nutné, aby rok měl celistvý počet dnů. Proto se používá tzv. občanský rok, který má buď 365 dní, anebo, jde-li o rok přestupný, 366 dní. Přestupný je každý čtvrtý rok (letopočty přestupných roků jsou dělitelné čtyřmi). Rozdíl mezi průměrnou délkou občanského roku a délkou tropického roku se vyrovnává vždy na konci století. Z letopočtů končících na 00 jsou přestupné jen ty, které jsou beze zbytku dělitelné 400. Znamená to, že roky 1700, 1800, 1900 nebyly přestupné, rok 2000 však přestupný bude. Malý rozdíl, který mezi průměrnou délkou občanského roku a tropickým rokem ještě zbývá, naroste na jeden den teprve za 3600 roků.

Při sledování pohybu Země kolem Slunce si musíme také uvědomit, že Země má Měsíc, jehož hmotnost je relativně dosti velká: tvoří zhruba $\frac{1}{81}$ hmotnosti Země. Obvykle říkáme, že Měsíc obíhá kolem Země, ve skutečnosti však obě tělesa obíhají kolem společného těžiště, které leží ve vzdálenosti 4680 km od středu Země. Střed Země tedy opisuje dráhu o poloměru 4680 km, přičemž perioda tohoto pohybu je rovna siderickému měsíci, tj. trvá 27,3 dne.

Na závěr připomeňme, že Země se pohybuje spolu se Sluncem a ostatními tělesy sluneční soustavy kolem jádra naší Galaxie. Dráhu Slunce v Galaxii vypočítal před čtvrt stoletím sovětský astronom Pavel Parenago. Podle jeho výpočtů bylo Slunce před 76 milióny roků v apogalaktiku (v největší vzdálenosti od středu Galaxie) a pohybovalo se rychlostí 207 km s^{-1} , v současné době se Slunce pohybuje rychlostí 247 km s^{-1} a za 12 miliónů let dosáhne perigalaktika.

Jak ukazují výpočty francouzského astronoma Gérarda de Vaucourse, pohybuje se naše Galaxie kolem centra místní soustavy galaxií (toto centrum je ve směru souhvězdí Panny) rychlostí asi 500 km s^{-1} , přičemž oběžná doba Galaxie se odhaduje na 10^{11} roků.

Dvacet let FJFI

Ing. ZDENĚK JANOUT, CSc., FJFI ČVUT Praha

V roce 1955 nabídl SSSR zemím lidových demokracií pomoc při budování národních jaderných zařízení a atomových elektráren. Československá vláda přijala sovětskou nabídku a vypracovala čs. jaderný program. Pro uskutečnění tohoto programu bylo ovšem zapotřebí vychovat středoškolsky i vysokoškolsky vzdělané odborníky. Proto byly v polovině roku 1955 založeny dvě školy: Střední průmyslová škola jaderné techniky a Fakulta technické a jaderné fyziky při UK.

V prvních letech po založení se fakulta zaměřila na výchovu studentů pouze v jaderných oborech. Další výchovu odborníků však nepříznivě ovlivnila druhá ženevská konference (1958) o mírovém využití jaderné energie, která poněkud pesimisticky hodnotila perspektivní rozvoj jaderné energetiky.

V touž dobu si rozvoj vědeckotechnického pokroku vynucuje v jiných, nejaderných, avšak perspektivních oborech nový typ odborníka „inženýra — fyzika“, který by byl schopen chápat a ocenit dosah nových objevů v přírodních vědách a zároveň umět aplikovat tyto nové poznatky ve výrobní a v technické praxi. A tak vedle jaderných oborů začala fakulta vychovávat i odborníky v oblasti pevných látek, fyzikální elektrotechniky a stavby a vlastností materiálů. Tato struktura je v podstatě zachována do dneška. Touto změnou zaměření se fakulta přiblížila více technické fakultě, a byla proto v roce 1959 převedena na ČVUT.

Ke změně názvu fakulty z FTJF na Fakultu jadernou a fyzikálně inženýrskou (FJFI), který lépe vystihuje poslání fakulty, dochází při reorganizaci fakulty v roce 1967, kdy byla výchova „čistých“ jaderných fyziků převedena na MFF UK a kdy zároveň došlo i k obsahové změně výuky některých oborů.

Fakulta v dnešní podobě je celostátním vysokoškolským učilištěm, vychovávajícím inženýry — fyziky pro obory na rozhraní mezi fyzikou, matematikou, chemií a technickými směry. Student během pětiletého studia získá potřebné teoretické a experimentální znalosti nezbytné k sledování nových objevů, myšlenek a metod v přírodních vědách s cílem umět těchto poznatků využít ve výrobní a technické praxi.

Absolventi jaderných oborů nacházejí široké uplatnění v průmyslu, v provozech atomových elektráren, v projekčních střediscích jaderné energetiky, ve výzkumných ústavech materiálů pro atomové elektrárny,

ve výzkumných a vývojových pracovištích v lékařství, biologii, strojírenství, kde se pracuje s radioaktivními látkami a ionizujícím zářením, v ochranné dozimetrii, v zařízeních hygienicko-epidemiologické služby atd.

Absolventi fyzikálních oborů nacházejí uplatnění v průmyslových provozech, ve výzkumných a vývojových ústavech zabývajících se mechanickými vlastnostmi látek, výzkumem materiálů a technologie, výzkumem a vývojem elektrických a magnetických vlastností pevných látek, polovodičových součástek a jejich aplikací, výzkumem v oblasti mikroelektroniky, kvantové elektroniky, fyziky plazmatu a mikrovlnné elektroniky.

Během dvaceti let existence FJFI bylo dosaženo řady pozitivních výsledků a jsou předpoklady pro další úspěšný rozvoj fakulty. Lze předpokládat, že v souvislosti s rychlým rozvojem vědy a techniky se bude potřeba odborníků z této fakulty neustále zvyšovat.

V závěru uvádím pro čtenáře z gymnázií, kteří se rozhodnou studovat na FJFI, příklady z fyziky a z matematiky, které byly předmětem přijímací zkoušky v minulém roce.

Matematika :

1. Použitím Moivreovy věty vypočtete:

$$\left(\frac{2 + 4i}{3 + i} \right)^8$$

2. Řešte rovnici: $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$

3. Řešte nerovnost: $\frac{x - 4}{2x + 3} < 8 + 6x - 2x^2$.

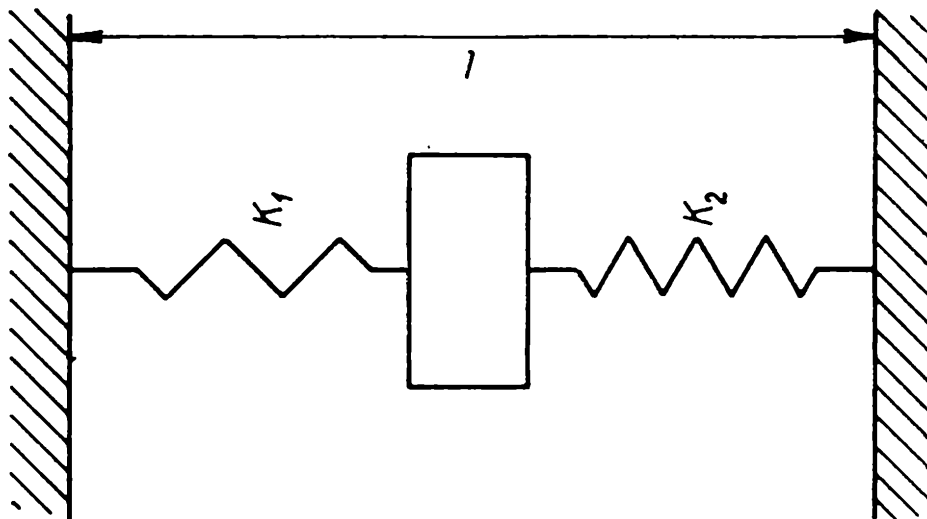
4. Nalezněte rovnice přímek procházejících bodem [1,1] a průsečíkem přímky $2x - y + 4 = 0$ s křivkou $y^2 + 4x = 0$

5. Je dán čtverec o straně a ; spojnice středů jeho stran tvoří vepsaný čtverec. Analogickým způsobem dostaneme další čtverce. Vypočtete obvod n -tého čtverce.

6. Řešte rovnici $x - \sqrt{x - 1} = 7$

Fyzika :

1. Těleso o hmotnosti $m = 50$ g je hozeno z výšky $h = 20$ m nad zemským povrchem rychlostí 18 m/s. Dopadne na zem rychlostí 24 m/s. Najděte práci vykonanou odporem vzduchu.
2. V obvodu se střídavým proudem o frekvenci 50 Hz je zapojen kondenzátor o kapacitě $1 \mu\text{F}$. Vypočítejte, jakému ohmickému odporu je tato kapacita ekvivalentní.
3. Určete rovnovážnou polohu a kmitočet kmitavého pohybu tělesa o hmotnosti $m = 10^{-2}$ kg zavěšeného na nehmotných pružinách



o tuhostech $K_1 = 10 \text{ N/m}$, $K_2 = 5 \text{ N/m}$ (zapojených podle obrázku), když vzdálenost $l = 0,2 \text{ m}$.

4. Olověná střela dopadne na pancéřovou stěnu rychlostí $v = 400 \text{ m/s}$ a na stěně se zastaví. Určete, zda se střela při nárazu roztaví zcela nebo jen zčásti. Předpokládejte, že při nárazu přejde 25 % tepla do okolí (včetně desky) a střela se zahřívá homogenně. Počáteční teplota střely je $t_0 = 0^\circ\text{C}$. (Teplota tání olova je $t_1 = 327^\circ\text{C}$, měrné teplo olova $c = 126 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, skupenské teplo tání olova $l = 21 \cdot 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$.)
5. Malá kulička, nesoucí náboj $q = \frac{5}{3} 10^{-8} \text{ C}$ a mající zanedbatelnou hmotnost, je vzdálena 3 cm od rovinné desky, která je uzemněna. Jakou silou se kulička přitahuje k desce?

olympiády

MO

Přípravné úlohy I. kola

Kategorie A

1. Pro každé tri nezáporné reálné čísla a, b, c platí

$$a(a - \sqrt{bc}) + b(b - \sqrt{ac}) + c(c - \sqrt{ab}) \geq 0;$$

dokážte. V kterých případech nastane rovnost?

2. Nájďte všetky usporiadané n -tice reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, pre ktoré platí

$$1 + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{x_j}{j}\right)^2 = 2 \left[x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{x_j \cdot x_{j+1}}{j(j+1)} \right].$$

3. V rovině je dán trojúhelník T . Najděte množinu středů všech takových úseček, které mají oba krajní body na hranici trojúhelníka T a které ji rozdělují na dvě stejně dlouhé části.

4. Je-li trojúhelník T_1 obsažen v trojúhelníku T_2 , pak

a) délka nejdelší strany trojúhelníka T_1 nepřevyší délku nejdelší strany trojúhelníka T_2 ;

b) délka nejmenší výšky trojúhelníka T_1 nepřevyší délku nejmenší výšky trojúhelníka T_2 .

Dokažte a zjistěte, kdy v případě a a kdy v případě b nastane rovnost délek.

Kategorie B

1. Nájďte všechny také reálné čísla a , které mají tú vlastnosť, že pre každé reálne číslo x platí

$$\left| \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} \right| < a.$$

2. Ak sú čísla a, b, c dĺžky strán trojuholníka T_1 , potom existuje trojuholník T_2 , ktorého strany majú dĺžky

$$\frac{a}{a+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{c}{c+1}$$

Dokažte. Môže byť trojuholník T_1 podobný trojuholníku T_2 ?

3. V rovině je dán pravoúhelník P a trojúhelník T , který je v něm obsažen. Dokažte, že o obsahu S_1 pravoúhelníka P a obsahu S_2 trojúhelníka T platí

$$2S_2 \leq S_1$$

a najděte všechny případy, kdy nastane rovnost.

4. Mají-li čtyřstěny $ABCD$ a $A'B'C'D'$ tu vlastnost, že přímky AB a $A'B'$ splývají, přímky CD a $C'D'$ splývají a přitom $AB = A'B'$, $CD = C'D'$, pak mají oba čtyřstěny stejný objem. Dokažte.

Kategorie C

1. Jsou-li p, q prvočísla větší než 3, pak číslo $p^2 - q^2$ je dělitelné číslem 24. Dokažte.

2. Riešte sústavu rovníc s neznámymi x, y

$$\begin{aligned} ax + |y| &= 1 \\ x + y &= a, \end{aligned}$$

kde a je parameter. Prevedte diskusiu riešiteľnosti vzhľadom na parameter a .

3. Do lichoběžníka $ABCD$ s ostrými úhly při vrcholech A a B je vepsán pravoúhelník $MNPQ$ tak, že vrcholy M, N náležejí straně AB , vrchol P straně BC a vrchol Q straně AD .

Vyšetřte množinu středů všech takových pravoúhelníků $MNPQ$.

4. Je dána kružnice $k = (S; r)$ a bod A jejího vnějšku.

a) Bodem A sestrojte přímku, která protíná kružnici k v bodech B, C tak, že B je středem úsečky AC . Proveďte diskusi.

b) Vyjádřete délku tětivy BC pomocí délek $r, v = AS$.

Kategorie Z

1. Rozhodněte nejprve, pro která a, b, c má smysl výraz

$$V = \frac{(a-b)^2}{c^2 - ac - bc + ab} + \frac{(b-c)^2}{a^2 - ab - ac + bc} + \frac{(c-a)^2}{b^2 - bc - ba + ca}.$$

b) Dokažte, že pro každou trojici čísel a, b, c , pro niž má výraz V smysl, je roven témuž číslu, a vypočítejte toto číslo.

2. Dokažte, že rozdíl každých dvou kladných trojčiferných čísel, z nichž prvé je zapsáno v desítkové soustavě týmiž číslicemi jako druhé, avšak v opačném pořadí, je dělitelný čísly 9 a 11.

3. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Potom pro každý bod X roviny rovnoběžníka platí

$$AX < BX + CX + DX;$$

dokažte.

$$Z - P - 4$$

4. Pro každý trojúhelník ABC se středem S vepsané kružnice platí: Jestliže

$$\sphericalangle CAB > \sphericalangle ABC > \sphericalangle BCA,$$

pak

$$AS < BS < CS$$

Dokažte; platí i věta k této větě obrácená?

Soutěžní úlohy I. kola

Kategorie A

1. Nайдите все́ты usporiadané dvojice (x, y) nezáporných reálných čísel, pre ktoré platí:

$$\frac{64x^2y^2}{4x^2 + y^2} = (x + 1)(y + 2)(2x + y).$$

2. Nech n a k sú prirodzené čísla a $a_1, a_2, \dots, a_n$ kladné reálne čísla, pre ktoré platí $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.

Dokážte, že platí

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + \dots + a_n^{-k} \geq n^{k+1}$$

3. Dané sú prirodzené čísla k a n , $k \leq n$, $n \geq 3$. Určte v intervale $(0, \pi)$ množinu všetkých takých hodnot, ktoré môže nadobúdať veľkosť k -tého najväčšieho vnútorného uhla konvexného n -uholníka. (Pod k -tým najväčším vnútorným uhlom n -uholníka rozumieme k -ty člen nerastúcej n -člennej postupnosti veľkosti jeho uhlov.)

4. V rovine je dán čtverec $P_1P_2P_3P_4$. Určte množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, o nichž platí, že $AC \leq BD$, přičemž celá úhlopříčka BD leží ve čtverci $P_1P_2P_3P_4$.

5. V rovine jsou dány dva trojúhelníky T_1 a T_2 . Sestrojte takový rovnoběžník $ABCD$, že jeho vrcholy A a C leží na hranici trojúhelníka T_1 a rozdělují ji na dvě stejně dlouhé části a zároveň vrcholy B a D leží na hranici trojúhelníka T_2 , kterou také rozdělují na dvě stejně dlouhé části.

6. V rovine jsou dány dva trojúhelníky Δ_1, Δ_2 této vlastnosti: Ke každému rovnoramennému trojúhelníku T_1 , který obsahuje Δ_1 , existuje trojúhelník T_2 , shodný s T_1 , který obsahuje Δ_2 . Dokažte, že trojúhelníky Δ_1, Δ_2 jsou shodné.

Kategorie B

1. Nech a, b, c sú ľubovoľné kladné reálne čísla. Potom neexistuje trojuholník, ktorého strany by mali dĺžky

$$a\sqrt{c^2 - b^2}, b\sqrt{c^2 - a^2}, c^2.$$

Dokážte.

2. Je daný konvexný deväťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$. Päť z jeho vrcholov zafarbíme na červeno, zostávajúce štyri na modro. Koľkými spôsobmi možno realizovať takéto zafarbenie vrcholov, ak má práve trinásť uhlopriečok deväťuholníka spájať vrcholy rovnakej farby?

3. Pre všetky reálne čísla x je definovaná reálna funkcia f takto

$$f \ x \rightarrow \frac{x^2 + 2px - 2}{x^2 - 2x + 2},$$

kde p je parameter.

Určte všetky reálne čísla p , pre ktoré platí $|f(x)| < 2$ pre všetky reálne čísla x .

4. V rovine jsou dány dva tupouhlé trojúhelníky Δ_1, Δ_2 této vlastnosti: Ke každému pravoúhelníku P_1 , který obsahuje Δ_1 , existuje pravoúhelník P_2 , shodný s P_1 , který obsahuje Δ_2 . Dokažte, že trojúhelníky Δ_1, Δ_2 jsou shodné!

5. V rovine je dán čtverec $P_1P_2P_3P_4$. Najděte množinu vrcholů A všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$, jejichž strana CD je celá obsažena ve čtverci $P_1P_2P_3P_4$ a je druhou nejdelší stranou čtyřúhelníka $ABCD$.

6. V rovine je dán čtverec. Najděte množinu těžišť všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží na hranici čtverce tak, že dělí jeho obvod na tři části stejné délky.

Kategorie C

1. Je dáno 7 navzájem různých prvočísel. Pak součin všech jejich kladných rozdílů je dělitelný číslem 163 840. Dokažte.

2. Dokažte, že každé přirozené číslo $x > 1$ lze napsat právě jedním způsobem ve tvaru

$$x = \frac{n(n+1)}{2} + y,$$

kde n je přirozené číslo a pro y 1 platí $1 \leq y \leq n+1$.

3. Pro která reálná m má rovnice

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+mx} = \frac{2}{1+x}$$

celočíslné kořeny? Určete je.

4. Je dán pravoúhelník $ABCD$. Sestrojte množinu vrcholů G všech takových čtverců $EFGH$, že bod E leží na úsečce CD a body F a H po řadě leží na prodlouženích úseček EA , EB za body A , B .

Diskuse.

5. Na dané kružnici se pohybují v témž smyslu stálými rychlostmi tři body A , B , C ; první má dobu oběhu T , druhý $\frac{T}{2}$, třetí $\frac{T}{3}$. V čase $t = 0$ uvedené body splývaly. Kolikrát v časovém intervalu $\langle 0, T \rangle$ tvořily body A , B , C vrcholy pravoúhlého trojúhelníka?

6. Je dán ostroúhlý $\triangle ABC$. Označme M množinu všech pravoúhelníků, jejichž dva vrcholy leží na straně AB a zbývající dva na stranách AC a BC .

a) Dokažte větu V: Jestliže dva různé pravoúhelníky z množiny M mají týž obvod o , pak všechny pravoúhelníky z množiny M mají obvod o .

b) Nalezněte aspoň jeden takový trojúhelník ABC , ve kterém je splněn předpoklad věty V.

Soutěžní úlohy kategorie Z

1. Je dán výraz
$$a^2 + b^2 + \left(\frac{ab}{a-b} \right)^2$$

a) Dosadíme-li $a = 5$, $b = 7$, dostaneme zlomek, jehož jmenovatel i čítec je druhou mocninou přirozeného čísla. Přesvědčte se o tom.

b) Dokažte, že vlastnost popsanou v odstavci a) má každá dvojice navzájem různých celých čísel a , b .

2. Dokažte, že každé přirozené číslo $n \geq 6$ lze vyjádřit jako součet dvou přirozených čísel, z kterých je jedno prvočíslo a druhé je číslo složené.

3. V rovině daného vypuklého čtyřúhelníka $ABCD$ nalezněte všechny body, jejichž součet vzdáleností od vrcholů A , B , C , D je nejmenší.

4. Je dán obdélník $ABCD$ a přirozené číslo n . Sestrojte vně obdélníka $ABCD$ po řadě na přímkách AB , BC , CD , DA body A' , B' , C' , D' tak, aby platilo

$$AA' = CC' = \frac{1}{n} AB \quad \text{a} \quad BB' = DD' = \frac{1}{n} BC$$

a) Dokažte, že body A' , B' , C' , D' jsou vrcholy rovnoběžníka.

b) Vypočtete obsah rovnoběžníka $A'B'C'D'$ pomocí čísla n a obsahu P obdélníka $ABCD$.

c) Pro které přirozené číslo n má rovnoběžník $A'B'C'D'$ největší možný obsah?

matematické zábavy

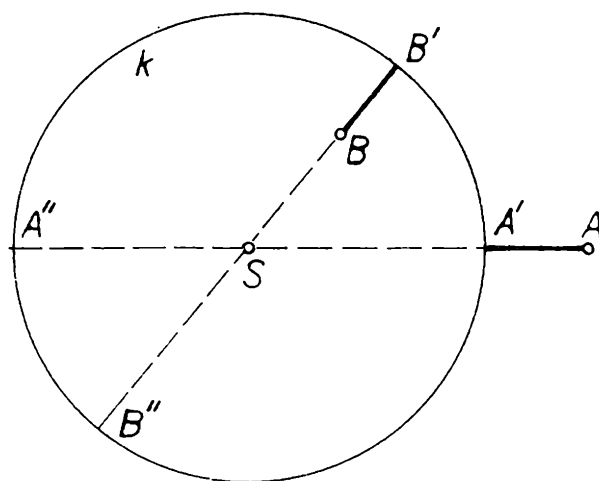
Zajímavosti z geometrie

STANISLAV HORÁK, Praha

I. Začneme úlohou z planimetrie:

V rovině jsou dány čtyři body, z nichž žádné tři neleží v přímce. Sestrojte kružnici, která má od daných čtyř bodů stejné vzdálenosti.

Než uvedeme řešení úlohy, vysvětlíme si, co znamená vzdálenost bodu od kružnice nebo, což je totéž, vzdálenost kružnice od bodu. V obr. 1 je



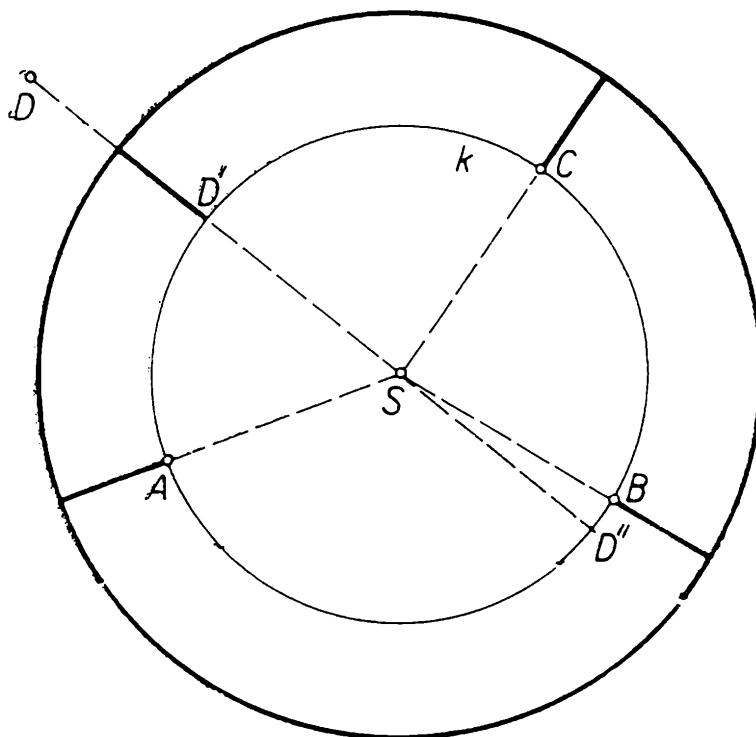
Obr. 1

dána kružnice k o středu S a mimo kružnici je dán bod $A \neq S$. Přímka SA protíná kružnici v bodech A' , A'' . Menší z úseček AA' , AA'' je vzdálenost bodu A od kružnice. To zapisujeme takto: $d = \min(AA', AA'')$. Podobně vzdálenost bodu B , který leží uvnitř kružnice k , je $\min(BB', BB'')$.

Řešení daného příkladu (obr. 2). Dané body označíme A , B , C , D . Třemi z nich, např. body A , B , C proložíme kružnici k . Přímka SD protne tuto kružnici v bodech D' , D'' . Jestliže $DD' < DD''$, pak kružnice o středu S , která pólí úsečku DD' , je řešením naší úlohy.

Důkaz, že takto sestavená kružnice vyhovuje podmínkám úlohy, je zřejmý. Zároveň je patrné, že jsme mohli proložit kružnici body A , B , D nebo A , C , D nebo B , C , D . Úloze podle toho vyhovují čtyři různé kružnice. Výjimku činí případ, kdy kružnice k opsaná trojúhelníku ABC prochází i bodem D . Potom čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový a naší úloze vyhovují všechny kružnice, soustředné s kružnicí k . Úloha má nesčíslně mnoho řešení.

Obr. 2



II. Nyní můžeme přistoupit k řešení tohoto příkladu:

V prostoru jsou dány čtyři vzájemně rovnoběžné přímky a, b, c, d , z nichž žádné tři neleží v rovině. Sestrojte takovou rotační válcovou plochu, od níž by měly všechny body daných čtyř přímek shodné vzdálenosti.

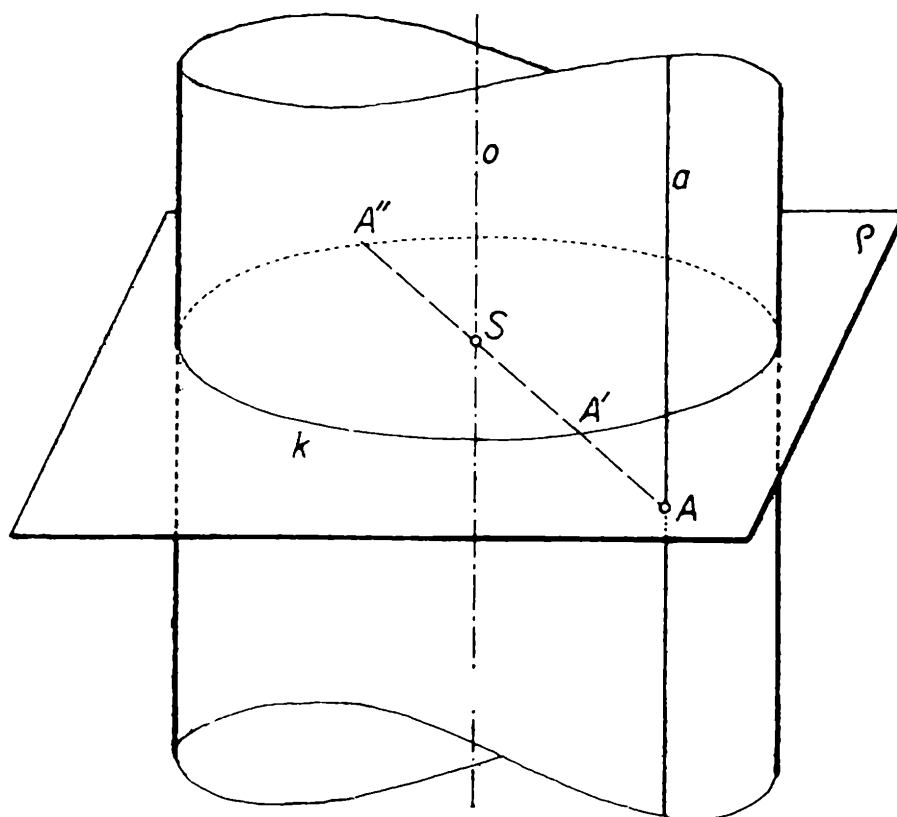
Nejprve si opět řekneme, co rozumíme vzdáleností bodu od rotační válcové plochy. V obr. 3 je zobrazena rotační válcová plocha o ose o a mimo plochu je dán bod A . Bodem A proložíme rovinu ρ kolmou k ose o . Ta protne válcovou plochu v kružnici k , jejíž střed S je na ose o . Přímka SA protne kružnici k v bodech A', A'' . Vzdálenost bodu A od rotační válcové plochy je menší z úseček AA', AA'' , tj. $\min(AA', AA'')$. Je přirozené, že všechny body přímky a , která prochází bodem A kolmo k rovině ρ , mají shodné vzdálenosti od dané válcové plochy.

Řešení předloženého příkladu je pak toto: Dané čtyři přímky protněme libovolnou rovinou ρ , která je k nim kolmá. Průsečíky daných přímek s rovinou ρ označíme po řadě A, B, C, D . V rovině ρ rozřešíme úlohu odst. I. pro body A, B, C, D . Kružnice, která je výsledkem této úlohy, je řídicí kružnicí hledané rotační válcové plochy. Je patrné, že úloha má právě tolik řešení, kolik jich má úloha v odst. I.

III. Úloha odst. I. se dá rozšířit pro prostor též takto:

V prostoru je dáno pět bodů A, B, C, D, E , z nichž žádné tři neleží v přímce a žádné čtyři neleží v rovině. Sestrojte takovou kulovou plochu, aby všech pět daných bodů mělo od ní shodné vzdálenosti.

Před řešením si musíme vyjasnit, co se rozumí vzdáleností bodu od kulové plochy. Mějme kulovou plochu o středu S a mimo ni bod L .



Přímka SL protne kulovou plochu v bodech L' , L'' . Vzdáleností bodu L od dané kulové plochy rozumíme pak $\min(LL', LL'')$.

Po tomto vysvětlení přenechávám čtenářům řešení předloženého příkladu.

Cvičení.

1. Definujte vzdálenost bodu od kružnice, od válcové plochy a od kulové plochy.
2. Jakou vzdálenost má a) střed S kružnice $k \equiv (S; r)$ od kružnice k ; b) střed S kulové plochy $\kappa = (S; r)$ od této plochy; c) bod O na ose o rotační válcové plochy od této plochy?
3. Které body v rovině mají od kružnice k vzdálenost rovnou nule?
4. Sestrojte rotační válcovou plochu, od níž mají všechny body přímek a, b, c, d , které jsou různé a navzájem rovnoběžné, tutéž vzdálenost.
 - a) Přímky jsou rovnoběžné se základnicí a jsou určeny po řadě body $A(0; 3; 3,5)$, $B(0; 5,5; 7,5)$, $C(0; 9,5; 6,5)$, $D(0; 7; 2,5)$.
 - b) $a \equiv [K(-4; 0; 0), L(4; 6,5; 11)]$, $b \equiv [P(-5; 5,5; 0)]$,
 $c \equiv [Q(1; 6,5; 0)]$, $d \equiv [R(3; 2,5; 0)]$.
5. V prostoru je dáno pět různých bodů $A(-1; 5; 10,5)$, $B(4,5; 7,5; 3,5)$, $C(-3; 9,5; 3,5)$, $D(-1; 2; 3,5)$, $E(6; 0; 0)$. Sestrojte aspoň jednu kulovou plochu, od níž by dané body měly stejnou vzdálenost.

naše soutěž

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Konstrukční geometrie

Př. 1: Jsou dány přímka a , na ní bod A , přímka b různoběžná s přímkou a , ale neprocházející bodem A a rovina τ různoběžná s přímkami a , b a neprocházející bodem A . Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká roviny τ , přímky b a přímky a v bodě A . Úlohu proveďte pro případ: $a = [R(-9; 3; 0), A(-2,5; 3; 7,5)]$, $b = [R; L(6; 3; 2,5)]$, $\tau(8; 120^\circ; 90^\circ)$.

(Došlo 11 řešení)

František Hradecký

Upravené řešení Michaela Valáška, 4. D, G. W. Piecka, Praha 2.

Poněvadž délky tečen vedených z bodu ke kulové ploše jsou si rovny, můžeme určit dotkový bod na tečně b . Je-li $R = a \cap b$, sestrojíme bod B tak, aby $RB = RA$. (Pro bod B máme dvě možnosti! V dalším postupu se omezíme na jeden z těchto bodů.)

Střed S kulové plochy leží v rovině $\alpha \perp a$ procházející bodem A a v rovině $\beta \perp b$ procházející bodem B . Tím je zaručeno, že $SA \perp a$, $SB \perp b$. Roviny α , β se protínají v přímce p kolmé k rovině ϱ různoběžek a , b . (Přímka p prochází středem kružnice k dotýkající se různoběžek v bodech A , B). Označme $C = a \cap \tau$, $D = b \cap \tau$. Je-li T dotkový bod hledané kulové plochy κ v rovině τ , pak podle věty o délkách tečen z bodu ke kulové ploše platí: $CA = CT$, $DB = DT$. Leží tudíž dotkové body na kružnicích $l_1(C; CA)$ a $l_2(D; DB)$ v rovině τ . Průsečíky těchto kružnic (pokud existují) jsou hledané dotkové body T .

Kolmice sestrojené v bodech T k rovině τ protínají přímku p ve středech S hledaných kulových ploch.

Z pravoúhlých trojúhelníků $\triangle CTS \cong \triangle CAS$ plyne $ST = SA$ a z $\triangle DTS \cong \triangle DSB$ plyne $ST = SB$; proto je $SA = SB$ a $SA \perp a$, $SB \perp b$. Kulová plocha o středu S , která se dotýká roviny τ , dotýká se přímky a v bodě A a přímky b v bodě B .

Počet řešení závisí na vzájemné poloze kružnic l_1 , l_2 v rovině τ . Úloha může mít 0 až 4 řešení. V daném konkrétním příkladě má úloha 4 řešení.

Pozn. red. Rovina procházející přímkou p kolmo k rovině τ protíná rovinu τ v přímce p' , na níž leží dotkové body T , a rovinu ϱ v přímce q . Přímka q protíná kružnici k v rovině ϱ v bodech E , F a rovinu τ v bodě H . Užitím věty o mocnosti bodu H ke kulové ploše platí $HE \cdot HF = HT^2$;

tím dostaneme na přímce p' dotykové body T hledaných kulových ploch.

Této konstrukce bylo pak možno vhodně využít v daném konkrétním zadání úlohy.

2. Sestrojte kulovou plochu dotýkající se dané roviny π , kulové plochy κ a jdoucí body A, B . Všechny dané útvary leží v témž poloprostoru vyřazeném rovinou π .

(Došlo 5 řešení)

Stanislav Horák

Podle řešení Michaela Valáška, IV. D G. W. Piecka, Praha :

Dříve než přistoupíme k vlastnímu řešení, řekneme si něco o mocnosti bodu ke kulové ploše.

Je dána kulová plocha κ a mimo ni libovolný bod P . Bodem P proložíme libovolnou sečnu s plochy κ a průsečíky označme A, B . Ukazuje se, že součin $PA \cdot PB$ je konstantní, nezávislý na poloze sečny s ; nazývá se mocností bodu P vzhledem ke kulové ploše. Jestliže bod P leží vně koule, určené plochou κ , pak tato mocnost je rovna čtverci délky tečny, která je sestrojena z bodu P k ploše κ .

Hledaná kulová plocha $\mu = (O; x)$ se roviny τ dotýká v bodě E a dané plochy κ se dotýká v bodě T . Obě plochy, κ i μ , jsou stejnohlé, přičemž střed stejnohllosti je T . Kolmice sestrojená středem S k rovině τ protne kulovou plochu κ v bodech H, D a rovinu π v bodě F . Předpokládejme (bez újmy obecnosti), že $D \dashv \tau > H \dashv \tau$. Přímka DE nutně prochází bodem T .

Čtyřúhelník $EFHT$ je tětiový (má protější úhly pravé), a proto mu lze opsat kružnici. Pro mocnost M_1 bodu D vzhledem k této kružnici platí

$$M_1 = DT \cdot DE = DH \cdot DF \text{ (obr. 1) .}$$

Přímka DA protne hledanou kulovou plochu ještě v bodě A' a zase platí

$$M_1 = DA \cdot DA' = DH \cdot DF$$

Odtud se dá sestrojit bod A' . Podobně přímka DB protne plochu μ ještě v bodě B' a platí

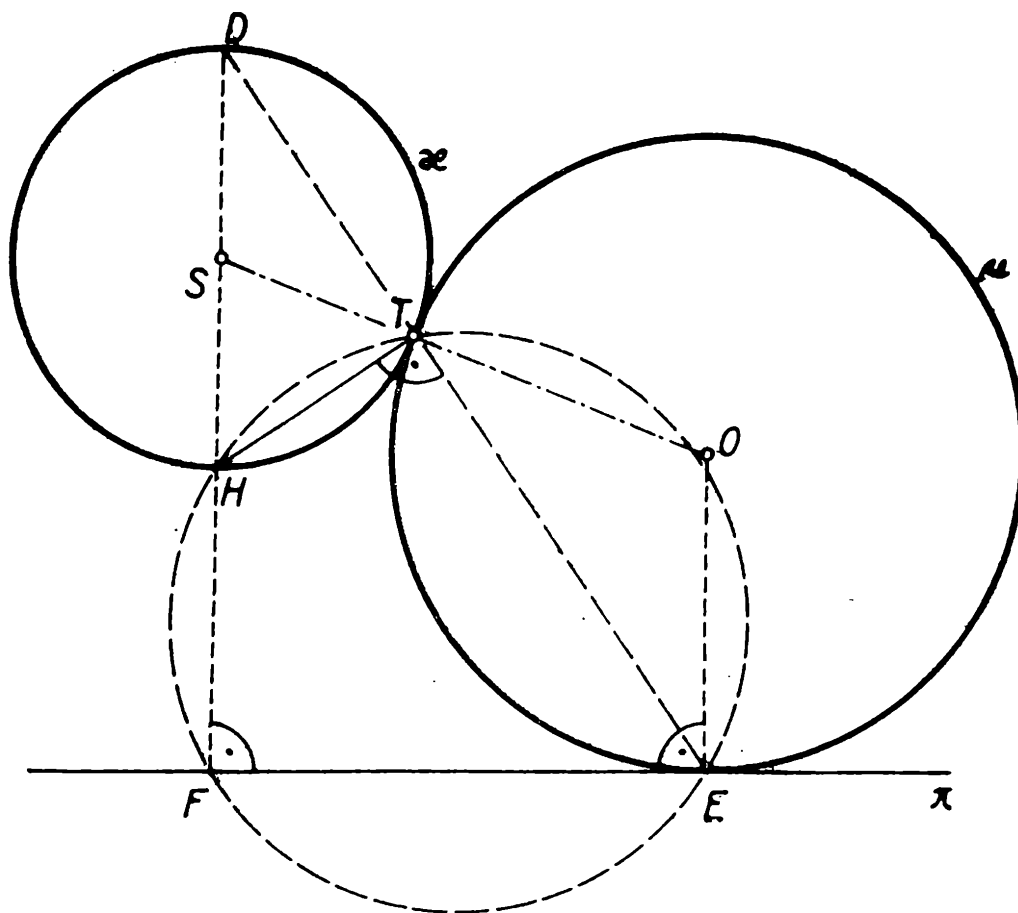
$$M_1 = DB \cdot DB' = DH \cdot DF$$

a dá se sestrojit bod B' . Hledaná kulová plocha tudíž prochází body A, A', B, B' .

Přímka AB protne rovinu τ v bodě P . Mocnost bodu P vzhledem k ploše μ je

$$M_2 = PA \cdot PB = PE^2$$

Bod E leží podle toho v rovině τ na kružnici $m = (P; \sqrt{PA \cdot PB})$. Přímka $A'B'$ protne rovinu τ v bodě Q , a pak bod E leží v rovině τ na kružnici $n = (Q; \sqrt{QA' \cdot QB'})$. Bod E je tudíž průsečík kružnic m, n .



Obr. 1

Poznámka. Kdyby přímka AB (nebo $A'B'$) byla rovnoběžná s τ (průsečík P by byl nevlastní), pak rovina souměrnosti úsečky AB by procházela bodem E .

Sestrojení kulové plochy μ je toto: V rovině τ narýsujeme kružnice m, n . Jejich průsečík je bod E . Přímka DE protne plochu κ v bodě T . Střed O hledané plochy leží v přímce ST a v rovině souměrnosti úsečky AB . (Za upozornění stojí, že střed O můžeme dostat i jinak.) Poněvadž ke konstrukci můžeme místo bodu D použít i bod H , existují za daných předpokladů a za předpokladu, že body A, B jsou vně koule omezené plochou κ , čtyři různá řešení.

3. V rovině je dán trojúhelník ABC a přímka o . Určete osovou afinitu s osou o tak, aby obrazem trojúhelníka ABC byl trojúhelník $A'B'C'$, jehož osy vnitřních úhlů jsou obrazy os vnitřních úhlů trojúhelníka ABC . (Došlo 9 řešení) Emil Kraemer

Upravené řešení Františka Durecha, III. c G. Topolčany:

Osa úhlu $\sphericalangle BAC$ protne stranu BC v bodě A_1 , osa úhlu $\sphericalangle ABC$ protne stranu AC v bodě B_1 a osa třetího vnitřního úhlu protne stranu AB v bodě C_1 . Obrazy bodů A_1, B_1, C_1 v osové afinitě jsou body $A'_1, B'_1,$

C'_1 na stranách $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$, jimiž procházejí osy vnitřních úhlů trojúhelníka $A'B'C'$. Z planimetrie víme, že je

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{B'A'_1}{C'A'_1} = \frac{A'B'}{A'C'}. \quad (1)$$

Protože afinita zachovává dělicí poměr, je

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{B'A'_1}{C'A'_1} \quad (2)$$

Z (1) a (2) plyne, že je

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'};$$

zcela stejně zjistíme, že je

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}.$$

Je tedy

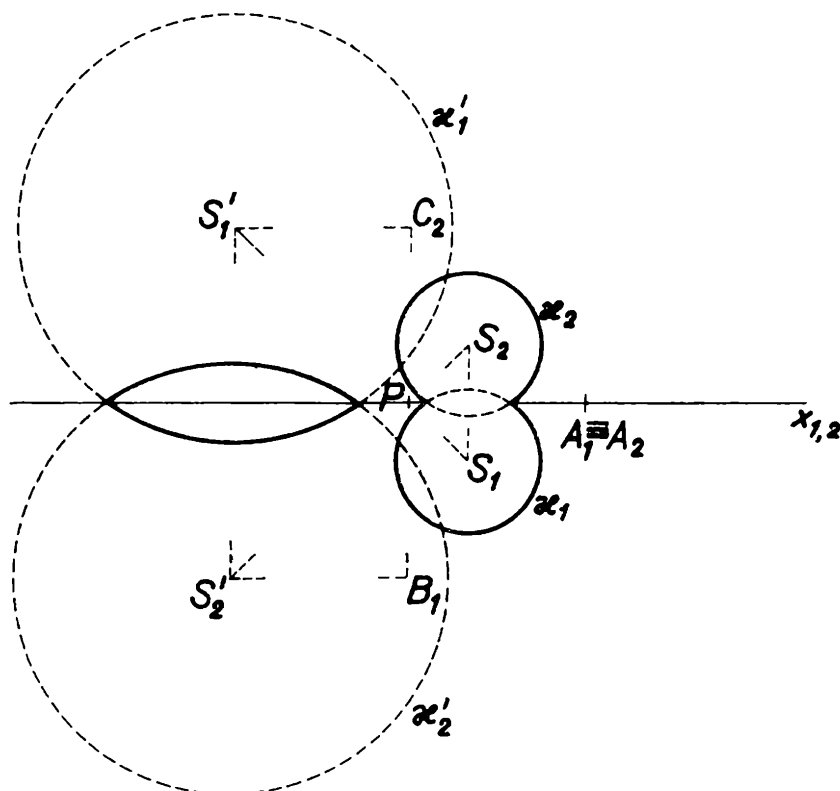
$$AB : AC : BC = A'B' : A'C' : B'C'$$

to znamená, že je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Obrazy vnitřních úhlů trojúhelníka ABC jsou tedy s nimi shodné úhly trojúhelníka $A'B'C'$.

Ze tří stran trojúhelníka ABC aspoň dvě protínají osu afinity o ; předpokládejme, že jsou to strany CA , CB . Bez újmy obecnosti můžeme dále předpokládat, že bod C leží mimo osu afinity o . Její průsečíky s přímkami CA , CB označme P_1 , P_2 ; její průsečík s osou úhlu $\sphericalangle ACB$ označme P .

Protože je $\sphericalangle P_1C'P_2 = \sphericalangle P_1CP_2 = \gamma$, patří body C , C' k množině M_1 všech bodů, z nichž je vidět úsečku P_1P_2 pod úhlem velikosti γ . Tato množina je sjednocením množin vnitřních bodů oblouků shodných kružnic k_1 , k'_1 , které procházejí body P_1 , P_2 ; jeden oblouk leží v polorovině oC , druhý v polorovině k ní opačné. Protože $\sphericalangle PC'P_2 = \sphericalangle PCP_2 = \frac{\gamma}{2}$, patří body C , C' k množině M_2 všech bodů, z nichž je vidět úsečku PP_2 pod úhlem velikosti $\frac{\gamma}{2}$. Tato množina je sjednocením množin vnitřních bodů oblouků shodných kružnic k_2 , k'_2 , které procházejí body P , P_2 ; jeden oblouk leží v polorovině oC , druhý v polorovině k ní opačné.

Množiny M_1 a M_2 mají společné právě dva body; jedním je bod C , druhým bod C' souměrně sdružený k bodu C podle osy o . Hledaná afinita je tedy osovou souměrností s osou o .



4. Zobrazte kulovou plochu, která se z bodů $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a)$ jeví v zorných úhlech $\alpha = 60^\circ$ a z počátku $P(0; 0; 0)$ v zorném úhlu $\beta = 90^\circ$.

(Došlo 11 řešení)

Ota Setzer

Upravené řešení Jaroslava Červenky, IV. B G. v Uherském Brodě:

Pro vzdálenosti d_A, d_B, d_C, d_P bodů A, B, C, P od středu $S(s_1; s_2, s_3)$ hledané koule $\kappa = (S; r)$ platí

$$d_A = d_B = d_C = \frac{r}{\sin 30^\circ} = 2r,$$

$$d_P = \frac{r}{\sin 45^\circ} = r\sqrt{2}.$$

Analyticky lze vyjádřit tyto vzdálenosti ze souřadnic

$$d_A^2 = (a - s_1)^2 + s_2^2 + s_3^2 = 4r^2 \quad (1)$$

$$d_B^2 = s_1^2 + (a - s_2)^2 + s_3^2 = 4r^2 \quad (2)$$

$$d_C^2 = s_1^2 + s_2^2 + (a - s_3)^2 = 4r^2 \quad (3)$$

$$d_P^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2r^2 \quad (4)$$

Odečítáním rovnic (1), (2), (3) dostaneme

$$s_1 = s_2 = s_3.$$

Ze (4) plyne $r^2 = \frac{3}{2} s_1^2$ (5)

Rovnice (3) přejde v

$$3s_1^2 - 2as_1 + a^2 - 4r^2 = 0. \quad (6)$$

Vzhledem k (5): $3s_1^2 - 2as + a^2 - 6s_1^2 = 0$,

$$3s_1^2 + 2as_1 - a^2 = 0.$$

Kořeny jsou

$$s_1 = \frac{a}{3}, \quad s'_1 = -a$$

a řešení úlohy je tedy

$$S\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right), \quad S'(-a; -a; -a), \quad r = \frac{a}{6}\sqrt{6}, \quad r' = \frac{a}{2}\sqrt{6}.$$

Úsečka $a/\sqrt{6}$ se sestrojí užitím Euklidovy věty jako výška pravoúhlého trojúhelníka, jehož úseky na přeponě jsou $2a$, $3a$.

Ze zahraničních časopisů

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Ze sovětského časopisu Kvant:

1. Řešte nerovnost $2^{4x+2} \cdot 4^{-x^2} - 3 \cdot 2^{-x^2} + 2x + 2 + 5 \geq 0$.
(Návod: Položte $y = -x^2 + 2x + 1$).

2. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$. Bod M je střed stěny $AA'B'B$, bod N střed hrany $C'C$, bod K leží na hraně DC a přitom $DK = \frac{1}{4} DC$.

Vypočtěte poměr objemů částí, na něž dělí danou krychli rovina MNK .

3. Řešte rovnici

$$\frac{\sin x - \cos 3x}{1 - \sin 3x} = \frac{1}{2}.$$

Z jugoslávského časopisu Matematičko-fizički list:

4. Najděte koeficienty a , b v rovnici

$$x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b = 0,$$

víte-li, že mezi jejími celistvými kořeny jsou tři stejná čísla.

5. Řešte soustavu rovnic

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = -2$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = -6$$

$$x_5 + x_6 + x_8 = -9$$

$$x_5 + x_6 + x_7 = -3$$

$$x_6 + x_7 + x_8 = 3$$

$$x_7 + x_8 + x_1 = 9$$

$$x_8 + x_1 + x_2 = 6.$$

6. Dokažte, že pro přirozené n je výraz

$$2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$$

dělitelný číslem 1897.

Z německého časopisu Alpha (NDR)

7. Rovnoramenný trojúhelník ABC ($AC = BC$, $AB = 3$) má obvod $o = 13$. Přímka $p \parallel AB$ protíná rameno AC ve vnitřním bodě D a rameno BC v bodě E tak, že obvod čtyřúhelníka $ABED$ měří 7,4. Vypočtete délku úsečky AD .

8. V arabských pohádkách „Tisíc a jedna noc“ najdeme v 458. noci tuto hádanku: Hejno holubů přiletělo ke stromu. Část se usadila na stromě, ostatní pod ním. Horní volali na dolní: „Kdyby jeden z vás vzlétl, byla by vás třetina z nás všech; kdyby naopak jeden z nás slétl dolů, bylo by nahoře i dole stejně. „Kolik holubů sedělo na stromě a kolik pod ním?

9. Dokažte, že se pro libovolné přirozené číslo n dá zlomek $\frac{1 + n^2 + n^7}{1 + n + n^8}$ vždy krátit.

Výsledky: 1. $x \leq 1 - \sqrt{2}$; $x \geq 1 + \sqrt{2}$. 2. $97 : 191$. 3. $x - k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$, $x = x\pi - (-1)^n \arcsin \frac{3}{4}$ (k, n celé). 4. $a = -52$, $b = -40$, $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 = x_4 = -2$. 5. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$, $x_5 = -3$, $x_6 = -4$, $x_7 = 4$, $x_8 = 3$. 7. $AD = 1$ 8. 7 na stromě, 5 pod ním. 9. Lze krátit $n^2 + n + 1$.

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

programming	programování
linear programming	lineární programování
progression	posloupnost
arithmetic progression	aritmetická posloupnost
geometric progression	geometrická posloupnost
harmonic progression	harmonická posloupnost
projecting plane	promítací rovina
projection	promítání, průmět
central projection	středové promítání
oblique projection	kosoúhlé promítání
orthogonal projection	pravoúhlý průmět, pravoúhlé promítání
parallel projection	rovnoběžný průmět, rovnoběžné promítání
profile projection	bokorys
centre of projection	střed promítání
set of projections	sdružené průměty
projective	projektivní
projective geometry	projektivní geometrie
projective transformation	projektivita
projectivity	projektivita
projector	promítací přímka
prolong	prodloužit
proof	důkaz
indirect proof	nepřímý důkaz
proper	vlastní
property	vlastnost
proportion	úměra
continued proportion	postupná úměra
means of the proportion	střední (vnitřní) členy úměry
proportional	úměrný
proposition	výrok, návrh
propositional calculus	výrokový počet
protractor	úhloměr
prove	dokázat
pyramid	jehlan
frustum of a pyramid	komolý jehlan
pentagonal pyramid	pětiboký jehlan
square base pyramid	pravidelný čtyřboký jehlan
triangular pyramid	trojboký jehlan
pyramidal	jehlanový
Pythagorean theorem	Pythagorova věta

quadrangle
 quadrangular
 quadrant
 quadratic equation
 quadratic function
 quadrature of a circle
 quadric
 quadrilateral
 quadruple
 quality
 quantifier
 quantity
 quarter
 quotient

radian
 radical
 radical axis
 index of radical
 radical sign
 radicand
 radius
 long radius
 short radius

radix
 raise to a power
 random
 range
 rank
 rate
 ratio
 double ratio
 harmonic ratio
 ratio of division
 ratio of homothety
 rational
 rationalization of fraction
 ray
 real
 real axis
 real part
 rearrange

Q

čtyřúhelník
 čtyřboký
 kvadrant
 kvadratická rovnice
 kvadratická funkce
 kvadratura kruhu
 kvadrika
 čtyřhran, čtyřstran
 čtyřnásobek, čtyřnásobný, čtvrt
 vlastnost, kvalita
 kvantifikátor
 množství, kvantita
 čtvrtina; dělit čtyřmi
 podíl, kvocient

R

radián
 odmocnina; kořenový
 chordála
 odmocnitel
 odmocnítko
 odmocněnec
 poloměr
 poloměr kružnice opsané
 pravidelnému mnohoúhelníku
 poloměr kružnice vepsané
 pravidelnému mnohoúhelníku
 kořen, základ číselné soustavy
 umocnit
 volitelný, náhodný
 obor proměnné
 hodnota
 četnost
 poměr
 dvojpoměr
 harmonický dvojpoměr
 dělicí poměr
 poměr stejnolehlosti
 racionální
 usměrnění zlomku
 paprsek, polopřímka
 reálný, skutečný
 reálná osa
 reálná složka, část
 přerovnat

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

2



ROČNÍK 54
ŘÍJEN 1975

2

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Sedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1975.

OBSAH

Z. Trefný: Vydavatelská činnost SPN v oblasti matematiky a fyziky	49
Dr. V. Kolesnikov, dr. J. Záhejský: Několik poznámek ke vzniku speciální teorie relativity	52
Dr. J. Bednář: O některých optických jevech v zemské atmosféře	63
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroký: Úplné zatmění Měsíce 18.-19. 11. 1975	66
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroký: Třináctý měsíc planety Jupitera	68
Dr. K. Mišoň, CSc.: Let umělé družice nad zemským povrchem	69
Naše soutěž	75
Ze zahraničních časopisů	89
Matematické zábavy	92
Recenze	96
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

Vydavatelská činnost Státního pedagogického nakladatelství v oblasti matematiky a fyziky

ZDENĚK TREFNÝ, redakce matematiky a fyziky SPN, Praha

V 5. čísle předešlého ročníku Rozhledů pojednal PhDr Zdeněk Šípek, CSc, o dvoustém výročí školské reformy J. I. Felbigera a o historii Státního pedagogického nakladatelství v Praze. Dnešní stať chce stručně informovat o vydavatelské činnosti tohoto nakladatelství na úseku matematiky a fyziky po roce 1948.

V době vzniku redakce ve Státním pedagogickém nakladatelství byly v platnosti učebnice z r. 1948. Školská reforma z r. 1953 vytkla velký úkol: zajistit během jednoho roku *vydání nových učebnic* k 1. září 1954. V oboru matematiky a fyziky šlo o 14 učebnic pro osmileté střední školy a 7 učebnic pro jedenáctileté střední školy. Počínaje rokem 1957 byly dále vydávány tzv. pokusné učebnice pro tehdejší osmileté střední školy a o rok později i pokusné učebnice pro jedenáctileté střední školy. Od r. 1960 byly v redakci matematiky a fyziky připravovány a potom vydávány nové učebnice pro základní devítiletou školu; dělo se tak postupně až do r. 1963. Potom přišly na řadu i učebnice pro I. až III. ročník střední všeobecně vzdělávací školy. V současné době je v platnosti z produkce redakce matematiky a fyziky 22 učebnic matematiky a fyziky pro ZDŠ a 26 učebnic matematiky a fyziky pro gymnasia. Kromě těchto základních učebnic byly v redakci od r. 1955 připravovány první učebnice pro školy vyžadující zvláštní péče (zvláštní, slepecké, hluchoněmé), o které později pečovala nově vytvořená redakce speciálních učebnic.

Dalším okruhem bylo zajišťování učebnic pro pracující; šlo o vydání 25 učebnic. Pro střední odborné školy, zejména pedagogické školy, vyšlo 20 učebnic. Na úseku odborných škol byly vydávány základní učebnice matematiky a fyziky pro střední průmyslové školy, střední zemědělské technické školy, střední zdravotnické školy a střední ekonomické školy. Základní učebnice matematiky pro učňovské školy a odborná učiliště byly doplňovány publikacemi, které se nakonec shrnuly do publikací Praxe v příkladech a nejnověji do Sbírek úloh z matematiky pro odborná učiliště a odborné školy.

Pro vysoké školy (zejména pedagogické fakulty) zajistila redakce matematiky a fyziky již 31 *vysokoškolských učebnic a příruček* celkem ve 40 vydáních. Sem patří např. Metodika počtů pro pedagogické fakul-

ty, Úvod do studia matematiky, Aritmetika a algebra, Geometrie, Úvod do matematické analýzy, Technické kreslení, Kapitoly z didaktiky fyziky, Optika a atomová fyzika, Úvod do obecné astronomie, Elektřina a magnetismus, Základy fyzikálních měření, Pokusy z fyziky a 1. díl Fyziky pro pedagogické fakulty.

Z *neučebnicové literatury* vydávala redakce publikace pro dva velké okruhy čtenářů, jednak pro žáky škol všech typů a stupňů, jednak pro veřejnost, zejména učitelskou.

Vydání této literatury bylo koncepčně zajišťováno ve spolupráci se Slovenským pedagogickým nakladatelstvím v Bratislavě, s pracovníky ministerstev školství, Výzkumných ústavů pedagogických v Praze a Bratislavě, Jednoty československých matematiků a fyziků, krajských i okresních pedagogických ústavů. Ediční záměry redakce vycházely vždy z potřeb učitelské veřejnosti a byly projednávány na různých aktivech a seminářích učitelů a školských pracovníků. Kladně ovlivňovala tyto publikace i spolupráce s nakladatelstvím stejného charakteru v zahraničí (Moskvě, Berlíně, Varšavě, Budapešti, Bukurešti, Sofii). Kladné výsledky přinesla i soustavná péče o naši produkci v činnosti ediční rady pro vydávání literatury v oboru matematiky a fyziky, zřízené v r. 1962 jako poradní orgán nakladatelství, jenž pomáhá při vyhledávání vhodných námětů, autorů, překladatelů i recenzentů, hodnotí vydanou produkci apod. V čele této ediční rady jsou *prof. Emil Kraemer* z University Karlovy v Praze a *prof. Josef Fuka* z University Palackého v Olomouci.

Publikací pro žáky bylo prozatím vydáno 164 titulů ve 263 vydáních. Tuto produkci je možno rozdělit do několika okruhů:

a) Sbírky úloh z matematiky a z fyziky, a to pro základní školy, gymnasia, různé druhy odborných škol i Sbírka řešených úloh z vyšší matematiky.

b) Knižnice všeobecného vzdělání mládeže (Kamarádi čísla, Matematika ZDŠ v otázkách a heslech, Číselné soustavy, 777 matematických zábav a her, Zábavná matematika, Proč děláme důkazy v matematice, Přehled matematiky ZDŠ, Přehled středoškolské matematiky, Svět čísel, Vyprávění o množinách, Geometrické základy fotogrammetrie, Učíme se rýsovat; Základy mechaniky nebeských těles, Kvanta a vlny, Na vysoké otáčky, Poznáváme zemskou atmosféru, Rychlost a bezpečná jízda, Přehled fyziky ZDŠ, Základní poznatky teorie relativity, Fyzika z vlastních pozorování, Kmitání a vlnění, Kapitoly z astrofyziky).

c) Matematická olympiáda — ročníkové brožury (I.—XXII. ročník), Fyzikální olympiáda — ročníkové brožury (I.—XIV. ročník), Vybrané úlohy z matematické olympiády, kategorie B, C, Vybrané úlohy z matematické olympiády, kategorie D.

d) Škola mladých fyziků (Vektorové znázornění střídavých proudů — symbolická metoda, Kirchhoffovy zákony, Mechanika v úlohách,

I. a II. díl, Úlohy z elektřiny, Hodnoty a chyby veličin naměřených a vypočtených, Pohyb umělých družic).

e) Tabulky matematické, fyzikální a chemické, Anaglyfy k učebnicím deskriptivní geometrie, Tabulky matematickotechnické (strojírenské, elektrotechnické, hutnické, stavební, potravinářské, sklářské a keramické).

f) Programovaný text: Jednoduché rovnice.

g) Pracovní sešit z technického kreslení.

Publikací pro veřejnost, zejména učitelskou, bylo prozatím vydáno 217 titulů ve 313 vydáních. Tuto produkci je též možno rozdělit do několika okruhů:

a) Metodické příručky k učebnicím.

b) Pomocné knihy pro učitele (Z dějin elementární matematiky, Názvy a značky školské matematiky, Aritmetika přirozených čísel, Besedy o matematice, Branné prvky v matematice, Několik stereometrických úloh a jejich řešení, Metodika počtů v 1.—5. ročníku).

c) Publikace matematicko-fyzikální knižnice a edice spisů matematicko-fyzikálních (Metodika řešení matematických úloh, Sférická trigonometrie, Základy vektorové algebry, Co víme a nevíme o prvočíslech, O dělitelnosti čísel, Počítání z paměti, O modernizaci školské matematiky, Matematické zájmové kroužky, Tři kapitoly o problémovém vyučování; Pokusy z elektřiny, 1.—3. díl, Dynamické zákony mechaniky a jejich demonstrace, Kosmické rakety a umělé družice Země, Polovodiče, Hartlova optická deska, Dynamické zákony Newtonovy, Elektronky ve školní praxi, Pokusy z optiky, Automatizace a kybernetika, Základní fyzikální pojmy z hlediska marxistické filosofie, Frontální práce ve fyzice, Přehled názvů nejdůležitějších pojmů a veličin ve vyučování fyzice, Vyučujeme o automatizaci, Fyzika pro učitele, Nová měrová soustava, Vlnová povaha světla, Základy přírodních věd v pokusech. Didaktické testy a jejich statistické zpracování, Elektronika ve škole).

d) Publikace pro školení učitelů matematiky a fyziky (Základy moderní matematiky pro učitele 1.—5. ročníku, 1. a 2. díl, Vybrané kapitoly z moderní matematiky pro učitele 6. až 9. ročníku, Základy moderní matematiky pro učitele 6.—9. ročníku, Příspěvek k novému pojetí obsahu a metod vyučování fyzice, Soustava jednotek, Základní pojmy fyziky tepla, Základní pojmy fyziky plynů, Základní pojmy fyziky pevných látek — vlastnosti krystalů, Základní teorie vlnění a optického zobrazení, Diagnostické metody ve vyučování fyzice na ZDŠ, Moderní prostředky pro vyučování fyzice, Základní pojmy fyziky pevných látek — krystalická mřížka.

e) Nově zaváděná knižnice Nové směry ve školské matematice, jejímž cílem je seznámit veřejnost se základními pojmy modernizovaného pojetí matematiky, které se nyní zavádí na našich školách. Zatím vyšly 3 svazky: Množiny, Relace a funkce a Numerační soustavy. V této knižnici se

připravují Množiny bodů, Transformace, Matice, Číselné množiny, Operační systémy.

V současné době připravuje redakce matematiky a fyziky nové pokusné učebnice matematiky pro základní školu a přechodné učebnice matematiky pro gymnasia. Začínají vycházet i učební texty pro třídy gymnasií se zaměřením na matematiku a se zaměřením na fyziku.

Po dobu trvání redakce matematiky (od 1. 9. 1954) a redakce matematiky a fyziky (od 1. 4. 1962) bylo dosud vydáno 639 publikací ve 1 287 vydáních. Přitom se počet edičních úkolů a záměrů stále rozrůstá. Redakce matematiky a fyziky doufá, že se jí podaří ve spolupráci s celou zainteresovanou učitelskou veřejností tyto úkoly i nadále úspěšně plnit k prospěchu našeho školství a mládeže a tak přispět k řešení výchovně vzdělávacích problémů, které souvisejí s velkým dílem socialistické výstavby naší společnosti.

fyzika

Několik poznámek ke vzniku speciální teorie relativity

RNDr. VLADISLAV KOLESNIKOV, RNDr. JIŘÍ ZÁHEJSKÝ, UP Olomouc

Jak je známo, v poslední době se dostává teorie relativity do popředí zájmu také ve středoškolské fyzice. Myšlenková struktura této vědní disciplíny je však velmi náročná, a proto je jistě vhodné si uvědomit některé historické aspekty, které vedly jednoho z nejgeniálnějších fyziků naší doby A. Einsteina k formulaci této teorie.

Fyzika na konci minulého století se zdánlivě jevila na vrcholu svého vývoje a mělo se za to, že další vývoj se bude týkat jen rozvinutí a prohloubení jednotlivých partií. Strukturu fyziky, které dnes říkáme „klasická“, tvořily dvě základní části: nauka o pohybu, která zahrnovala mechaniku, nauku o mechanickém vlnění (akustiku) a termiku, druhou částí pak byla nauka o elektromagnetickém poli včetně optiky.

Zakladatelem nauky o pohybu byl Galileo Galilei (1564—1642), který svými pozorováními vytvořil solidní experimentální základ pro vybudování ucelené teorie, což se zdarem provedl *I. Newton* (1643—1729). K matematické dokonalosti pozvedl tuto teorii *Lagrange* (1736—1813) a na teorii tepla ji rozšířil *Clausius* (1828—1888).

Newton vybudoval klasickou mechaniku na třech pohybových zákonech:*) princip setrvačnosti, zákon síly a zákon akce a reakce. Je zajímavé, že původní Newtonova formulace zákona síly ve tvaru

$$F = \frac{d(mv)}{dt} \quad (1)$$

vyhovuje také teorii relativity. Při definování pojmu *pohyb* zavedl Newton *absolutní čas* a *absolutní prostor*. Pro zajímavost uvádíme definice absolutního prostoru a času tak, jak je Newton formuloval ve svém základním spise *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1867). Uvádí: „Absolutní, pravý a matematický čas plyne o sobě a svou povahou rovnoměrně a bez vztahu na jakýkoliv předmět.“ „Absolutní prostor zůstává svou povahou a bez vztahu na vnější předměty vždy stálý a nepohyblivý.“ Dále pak připojuje definici absolutního pohybu: „Absolutní pohyb je přenesení tělesa z jednoho absolutního místa na jiné absolutní místo.“

Newton však rozeznával *absolutní pohyb* od pohybu *relativního* a uvědomoval si potíže spojené s možností stanovit absolutní pohyb. Vzniká tedy otázka, jak se změni pohybové zákony, budeme-li je vztahovat na soustavu, která se pohybuje.

Jak je známo, mezi dvěma vztažnými soustavami S a S' , z nichž první považujeme za klidnou a druhou za pohybující se vzhledem k první podél osy x stálou rychlostí v , platí pro souřadnice x, y, z , a x', y', z' téhož bodu v obou soustavách vztahy

$$x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t, \quad (2)$$

měříme-li čas od okamžiku, kdy obě soustavy splývaly.

Transformace daná rovnicemi (2) se nazývá *transformací Galileiho*. Poslední rovnice $t' = t$ vyjadřuje předpoklad, že čas je absolutní a plyne v obou soustavách stejně. Z Galileiho transformace dále vyplývá, že hmotný bod, který se v soustavě S' pohybuje ve směru osy x' rychlostí u' , má v soustavě S rychlost rovnou

$$u = u' + v \quad (3)$$

za předpokladu, že soustava S' se pohybuje vzhledem k soustavě S ve směru osy x rychlostí v .

Klasická fyzika neomezuje rovnice (2) pouze na děje ryze mechanické, ale přijímá jejich všeobecnou platnost i pro děje elektromagnetické.

*) Uvedené zákony Newton uvedl ve formě axiomů. Axiom je obecný zákon, který se nedá přímo experimentálně a matematicky dokázat, který však považujeme za správný, protože všechny důsledky z něho plynoucí se shodují se zkušeností.

Podle klasické fyziky bylo tedy možné aplikovat rovnice (2) a také rovnici (3) na šíření světla a na šíření elektromagnetických vln vůbec.

Soustavy S a S' , vázané galileiovskou transformací pomocí vztahů (2), nazýváme *inerciálními*. Klasická fyzika dále předpokládá, že hmotnost tělesa je konstantní a nezávislá na pohybu, a také síla F je absolutní, objektivní vzájemné působení dvou těles, které je nezávislé na volbě souřadného systému. Tedy platí

$$\begin{aligned}m' &= m, \\ F' &= F\end{aligned}\tag{4}$$

Za těchto předpokladů lze ukázat, že Newtonovy zákony použitím Galileiovy transformace se v inerciálních soustavách nemění, jejich platnost zůstává zachována. Říkáme, že Newtonovy pohybové zákony jsou *invariantní* vzhledem ke Galileiově transformaci.

Invariantnost Newtonových pohybových zákonů pro všechny inerciální soustavy má další důsledky. Žádnými mechanickými pokusy provedenými uvnitř inerciální soustavy nelze rozhodnout, zda je soustava v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Z hlediska mechaniky jsou všechny inerciální soustavy rovnocenné. Tak je formulován tzv. *klasický princip relativity v mechanice*. Tedy např. žádnými mechanickými pokusy uvnitř inerciální soustavy nelze zjistit její rychlost. V obdobné situaci se nachází experimentátor na zemi, tj. nemá možnost se přesvědčit žádnými mechanickými pokusy o postupném pohybu Země vesmírem.**)

Fyzikové se tedy obrátili od mechanických jevů k jevům elektromagnetickým. Jak již bylo řečeno, nauka o elektromagnetickém poli včetně optiky, založená na klasických zákonech *Faradayových*, matematicky precizně formulovaná *Maxwellem* a experimentálně ve svých důsledcích potvrzená experimenty *Hertzovými*, tvořila druhou část klasické fyziky minulého století.

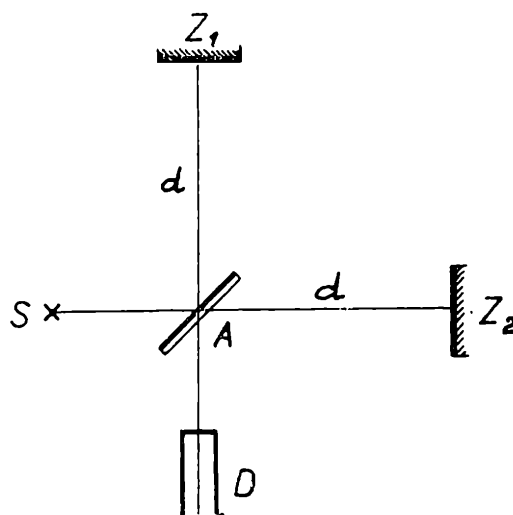
V té době byl čistě z analogických důvodů na základě mechanických představ postulován *éter* jako prostředí, v němž se šíří elektromagnetické vlny. Sám Maxwell předpokládal, že elektromagnetické vlny jsou vlny éteru a rychlost šíření těchto vln c je rychlost elektromagnetického vlnění vzhledem k éteru. Éter byl chápán jako substance vyplňující všechny prostor i prostor mezi molekulami a atomy v tělesech. Z těchto představ o existenci éteru vyplýval i předpoklad, že se éter nachází v absolutním klidu a pohyby k němu vztahované jsou pohyby absolutní. Tedy otázka zjištění absolutního pohybu byla spojena s otázkou existence éteru a jeho experimentální verifikací.

**) Zemskou rotaci dovedeme stanovit známým pokusem Foucaultovým pomocí kyvadla, ale na rotaci se naše úvahy nevztahují.

Při hledání uspokojivého vysvětlení mechanických vlastností a struktury éteru nejen že nebyl nalezen vhodný model, ale vyskytly se značné obtíže zvláště při vypracování elektrodynamiky pohybujících se těles. Nesnáze v souvislosti s existencí éteru se nakupily kolem základních jevů, které lze dobře experimentálně prozkoumat, ale u nichž je nutno učinit určité hypotézy o mechanických vlastnostech postulovaného éteru. Jde o známý pokus *Michelsonův*, jevy *aberace* a pokus *Fizeaův*.

1. Pokus Michelsonův

Americký fyzik Michelson provedl v r. 1881 interferometrické měření, které mělo stanovit absolutní pohyb Země vzhledem k nehybnému éteru. K měření užil interferometru, kde světlo vycházející ze zdroje S je polopropustnou destičkou rozdělováno na dva vzájemně kolmé svazky (obr. 1). Interferometr se pohybuje spolu se Zemí, a to tak, že rameno AZ_1 se pohybuje souhlasně se směrem rychlosti Země. Za předpokladu, že světlo se šíří v absolutně klidné soustavě (reprezentované v našem



Obr. 1

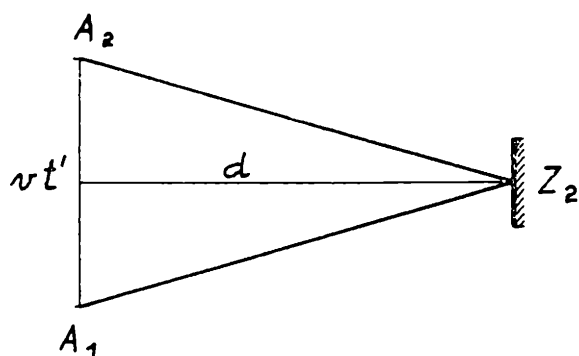
případě nehybným éterem) rychlostí c , pak ve směru AZ_1 předbíhá světlo Zemí rychlostí $c - v$ a ve směru opačném Z_1A se šíří vzhledem k Zemi rychlostí $c + v$. Doby potřebné k proběhnutí drah AZ_1 a Z_1A jsou

$$t_1 = \frac{d}{c - v}, \quad t_2 = \frac{d}{c + v}$$

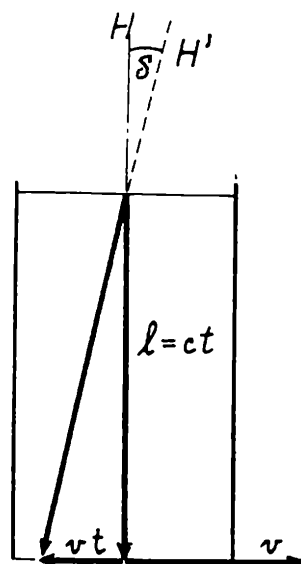
a celková doba potřebná k proběhnutí dráhy AZ_1A je

$$t = \frac{d}{c - v} + \frac{d}{c + v} = \frac{2d}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5)$$

Pro určení doby potřebné k proběhnutí drah AZ_2 a Z_2A je třeba přihlídnout k tomu, že bod A se pohybuje rychlostí Země v a za dobu t' potřeb-



Obr. 2



Obr. 3

nou k tomu, aby světlo proběhlo dráhu AZ_2A , urazí dráhu vt' . Světlo tedy na dráze AZ_2A proběhlo vlastně dráhu, která je tvořena rameny rovnoramenného trojúhelníka, jehož výška je d a základna vt' (obr. 2). Za dobu t' světlo proběhlo dráhu, která se rovná součtu délek obou ramen trojúhelníka $A_1Z_2A_2$, tedy platí

$$ct' = 2 \sqrt{d^2 + \frac{v^2 t'^2}{4}}. \quad (6)$$

Pro čas t' pak máme

$$t' = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)$$

Rozdíl dob t a t' pak je

$$\tau = t - t' = \frac{d}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad (8)$$

Kdyby světelné paprsky proběhly obě dráhy AZ_1A a AZ_2A za stejné doby, pak rozdíl obou časů by byl roven nule a také dráhový rozdíl, vyjádřený jako dráha světla ve vlnových délkách, by byl roven nule. Vhodnou justáží interferometru by se v dalekohledu D objevila soustava interferenčních proužků. V našem případě však časový rozdíl daný rovnicí (8) způsobí dráhový rozdíl a měl by nastat posun interferenčních proužků o

$$\Delta = \frac{c\tau}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \text{ proužku,} \quad (9)$$

kde λ je vlnová délka použitého světla.

Rychlost Země na dráze kolem Slunce je $3 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$, takže při $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ poměr

$$\beta = \frac{v}{c} = 10^{-4}$$

Při délce $d = 11 \text{ m}$ by časový rozdíl průchodu paprsků v obou směrech měl podle (6) hodnotu $\tau = \frac{11}{3} \cdot 10^{-16} \text{ s}$ a příslušný dráhový rozdíl je $c\tau = 11 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. Uvažujeme-li $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ (žluté světlo), pak posun interferenčních proužků by měl být

$$\Delta = \frac{c\tau}{\lambda} = \frac{11 \cdot 10^{-8}}{6 \cdot 10^{-7}} = \frac{11}{6} \cdot 10^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-1} = 0,2 \text{ proužku.}$$

Otočením interferometru o 90° se úloha jeho ramen zamění a posun interferenčních proužků by se měl zdvojnásobit na hodnotu $\Delta \approx 0,4$ šířky světlého a tmavého proužku.

Interferometr byl montován na masivní konstrukci a aby se dal bez otřesů a deformací otočit v dané rovině, celá konstrukce plavala ve rtuti. Aparatura byla tak citlivá, že byla schopna registrovat posuny $0,01$ proužku.

Předpokládaný posun proužků v uvedené hodnotě měl být tedy nezvratným důkazem tzv. *éterového větru* a tedy také absolutního pohybu Země. Přes všechna technická zdokonalení přístroje se Michelsonovi nepodařilo naměřit posunutí proužků. Ani při opakování pokusu s *Morleyem* byl opět naměřen nulový posun proužků. Pokus byl později několikrát opakován (např. v r. 1935 německým fyzikem *Jossem* v Jeně) avšak vždy s negativními výsledky.

Tedy za předpokladu absolutně klidného éteru z výsledku Michelsonova pokusu vyplývá, že rychlost světla je stále c a je nezávislá na pohybu Země. Z toho také vyplývá, že klasický adiční teorém daný rovnicí (3) neplatí. Budeme-li však předpokládat, že éter může být v blízkosti Země jejím polem strháván tak, že je vůči Zemi v relativním klidu, pak by negativní výsledek Michelsonova pokusu byl správný bez zavedení hypotézy o konstantní rychlosti světla. Vystala tedy situace, kdy začala být zkoumána otázka pohybového stavu éteru vzhledem k pohybujícím se tělesům. Odpověď na tuto otázku vyplývá z dalších experimentů a pozorování.

2. Aberace světla

J. Bradley v r. 1728 pozoroval poprvé jev aberace, který je přímým důsledkem oběhu Země kolem Slunce. Klasický výklad tohoto jevu je následující: Pozorujeme dalekohledem ze Země hvězdu H v pólu ekliptiky. Světelný paprsek vyslaný hvězdou vstoupí do dalekohledu středem

objektivu. Než však proběhne délkou dalekohledu l , uplyne čas $t = \frac{l}{c}$ a dalekohled se vlivem pohybu Země kolem Slunce rychlostí v posune za tuto dobu o vzdálenost $x = vt$. Proto se paprsek nepohybuje podél optické osy dalekohledu a nedopadne do středu okuláru. Aby se tak stalo, je nutné dalekohled natočit o úhel δ ve směru jeho pohybu.

Z obr. 3 pro úhel δ plyne

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c}, \quad \delta = 20,5' \quad (10)$$

Vlivem pohybu Země nevidíme tedy hvězdu H v její skutečné poloze, nýbrž v místě H' odchýleném ve směru okamžité rychlosti Země o tzv. *aberační úhel* δ . Důsledek toho je, že hvězda stojící v pólu ekliptiky opisuje během roku kolem své skutečné polohy zdánlivou kružnici o úhlovém poloměru δ . Hvězdy ekliptikální se pak zdánlivě pohybují po úsečce a hvězdy mezi ekliptikou a jejím pólem opisují malé zdánlivé elipsy.

Experimentálně naprosto bezpečně zjištěné jevy aberace vyžadují z éterového hlediska nutný předpoklad, že éter je absolutně nehybný. Země jím prochází, aniž jej nějak ovlivňuje — nestrhává jej. Při strhávání éteru Zemí by tudíž musela existovat vzdálenost od Země, kde by éter přecházel v absolutně nehybný. Pokud by dalekohled byl celý v oblasti Zemí strhávaného éteru, pak by jevy aberace nebyly pozorovány.

3. Pokus Fizeaův

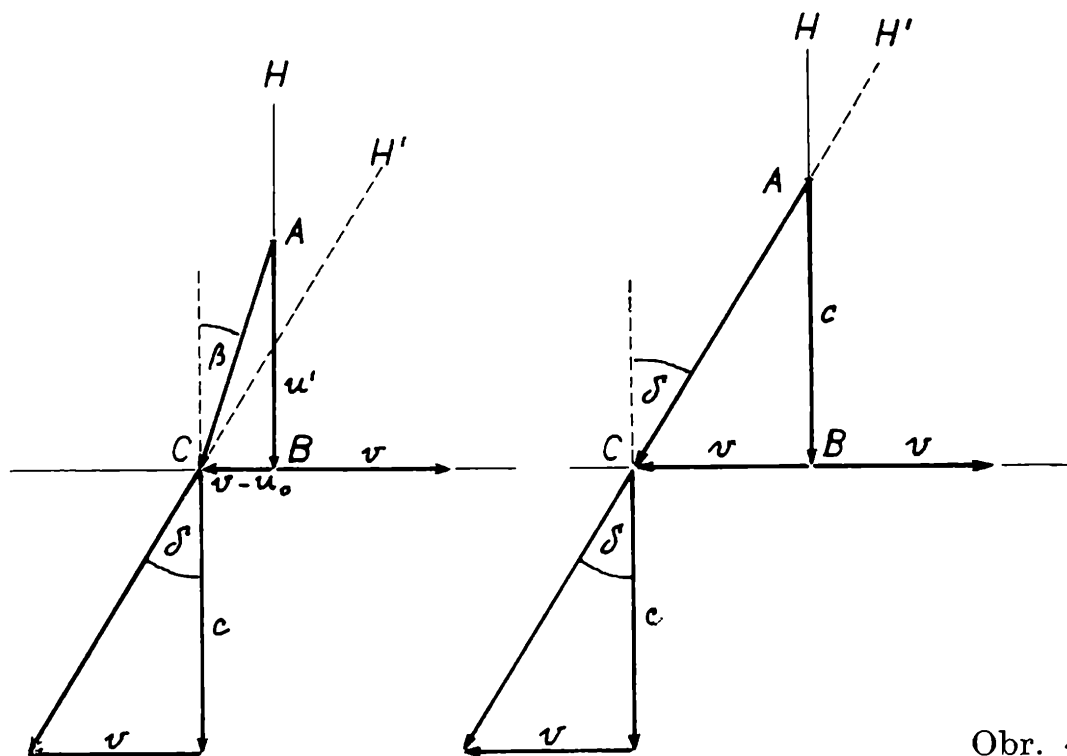
Z Huygensovy teorie světla propracované Fresnelem vyplývá, že rychlost světla v klidném optickém prostředí je menší než ve vakuu (přibližně také ve vzduchu) a zmenší se na hodnotu $u' = \frac{c}{n}$, kde n je index lomu prostředí.

Astronom Airy pozoroval aberaci stálíc dalekohledem naplněným vodou, kde doba, za kterou projde světlo dalekohledem, je větší a rychlost Země se tak výrazněji uplatní. Výsledkem by tedy měla být větší hodnota aberace. Airy však došel k překvapivému výsledku, že hodnota aberace je stejná. Fresnel vysvětlil tuto situaci předpokladem, že voda při svém pohybu se Zemí světlo částečně strhává, čímž se právě vyrovná vliv zmenšené rychlosti při průchodu světla vodou v dalekohledu a tedy aberace zůstává stejná. Fresnel ukázal, že strhávání světla vlivem strhávaného éteru je závislé na tzv. *strhávacím koeficientu*

$$\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad (11)$$

kde n je index lomu prostředí.

Obzr. 4a



Obz. 4b

Jeho úvaha, kterou provedl z éterového hlediska, spočívá v následujícím: Předpokládejme, že světlo z hvězdy H dopadne na objektiv dalekohledu ve směru AB , který je kolmý na směr pohybu Země. Označme $u' = \frac{c}{n}$ rychlost světla v prostředí, které je vůči éteru v absolutním klidu a v rychlost Země kolem Slunce (obr. 4a). Kdyby éter byl prostředím (vodou) uvnitř dalekohledu strháván absolutní rychlostí $u_0 < v$, pohyboval by se éter vůči dalekohledu rychlostí $v - u_0$ v opačném směru, než má rychlost v . Tím by došlo ke skládání rychlosti u' s rychlostí $v - u_0$, takže světlo by se prostředím v dalekohledu šířilo výsledným směrem AC . Světlo z okuláru vychází v bodě C z prostředí hustšího do řidšího a láme se proto od kolmice, tedy ve směru CH' , ve kterém pozorovatel vidí stálici. Podle zákona lomu platí

$$\sin \delta = n \sin \beta \quad (12)$$

Z obr. 3 je zřejmé, že

$$\sin \beta = \frac{v - u_0}{u'} \quad (13)$$

Ale $u' = \frac{c}{n}$, takže rovnici (12) lze upravit na tvar

$$\sin \delta = n^2 \cdot \frac{v - u_0}{c} \quad (14)$$

Z pozorování aberace však vyplývá, že úhel δ nezávisí na tom, je-li uvnitř dalekohledu voda nebo vzduch, takže platí

$$\operatorname{tg} \delta \approx \sin \delta \approx \frac{v}{c} \quad (15)$$

Na obr. 4b je pro srovnání vyznačena situace v případě, že uvnitř dalekohledu je vzduch.

Dosazením rovnice (15) do (14) máme

$$v = n^2(v - u_0),$$

a tedy

$$u_0 = v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad \text{kde} \quad (16)$$

$\left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \alpha$ je Fresnelův strhávací koeficient,

u_0 je rychlost, jakou je strháván éter,

v je rychlost Země a tedy také rychlost prostředí (vody), která je Zemí spolu s dalekohledem nesena.

Budeme-li uvažovat prostředí pohybující se rychlostí v , jímž prochází světlo, pak rychlost světla v tomto prostředí je rovna

$$u = u' \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (17)$$

kde $u' = \frac{c}{n}$ je rychlost světla v klidném prostředí,

v je rychlost prostředí,

n je index lomu prostředí,

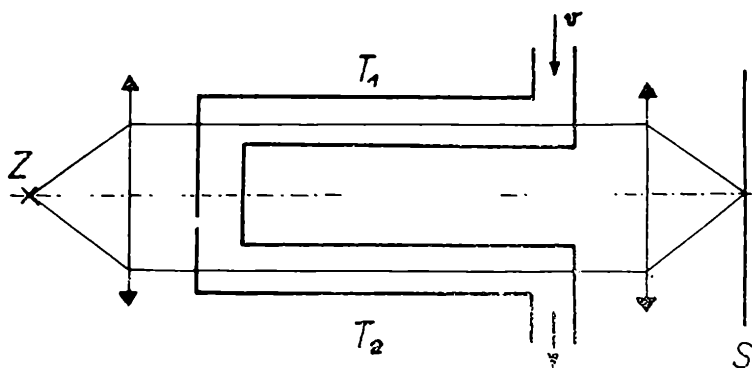
$1 - \frac{1}{n^2}$ je strhávací koeficient.

Znaménko $+$ platí v případě, kdy se světlo šíří v prostředí, které se pohybuje ve směru šíření světla, znaménko $-$ platí v případě opačném.

V r. 1851 provedl Fizeau pokus na zjištění, zda éter (a tedy světlo) je strháván pohybující se látkou, která se pohybuje přímočaře stálou rychlostí v (obr. 5). Do Jaminova interferometru vložil dvě shodné trubice T_1 a T_2 naplněné vodou, jejichž osy byly totožné se směry obou interferenčních paprsků. Voda v trubicích proudila rovnoměrně rychlostí v , a to v jedné trubici ve směru paprsků a v druhé trubici proti směru paprsků. Pozorovaný posun proužků pak potvrdil vztah (17).

Uvedené experimenty ukazují, že za předpokladu existence éteru by musely platit zcela si odporující skutečnosti:

a) éter není pohybujícím se prostředím (tělesem) strháván, je absolutně nehybný (jev aberace),



- b) éter je pohybujícím se prostředím (tělesem) úplně strháván (pokus Michelsonův),
 c) éter je pohybujícím se prostředím částečně strháván (pokus Fizeauův).

Výsledky uvedených pokusů kladly na éter protichůdné požadavky a bylo zřejmé, že hypotéza éteru musí být zamítnuta. Negativní výsledek Michelsonova pokusu (který byl později mnohokrát opakován s větší přesností a vždy se stejným výsledkem), posloužil pak A. Einsteinovi jako východisko k revizi problematiky absolutního a relativního pohybu, k zobecnění principu relativity na všechny fyzikální děje (i elektromagnetické) a k formulaci postulátu o konstantní rychlosti světla ve vakuu (2. postulát speciální teorie relativity), která nezávisí na pohybu pozorovatele ani na pohybu zdroje. Tím A. Einstein položil základy nové obecnější teorie, kterou dále rozpracoval a jejíž hlavní myšlenky a důsledky publikoval r. 1905 v článku v časopise *Annalen der Physik* pod názvem: „Zur Elektrodynamik der bewegten Körper“ (K elektrodynamice pohybujících se těles). Vzhledem k tomu, že tato teorie se zabývala jen inerciálními vztažnými soustavami, byla nazvána speciální teorií relativity. Tato nová teorie popisuje fyzikální děje přesněji než dosavadní klasická teorie a podala vysvětlení řady jevů, které nebylo možno vysvětlit v rámci klasické fyziky a umožnila také rozvoj dalších moderních odvětví fyziky.

Ukážeme ještě závěrem, že výsledek Fizeauova pokusu a také jevy aberace lze vysvětlit na základě speciální teorie relativity.

Jeden z důsledků speciální teorie relativity je známý vzorec pro skládání rychlostí, který nahrazuje klasický vztah (3) a který píšeme ve tvaru

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \quad (18)$$

kde u je rychlost tělesa (částice) v soustavě S ,

u' je rychlost tělesa v soustavě S' , jež se vůči S pohybuje přímočaře rovnoměrně rychlostí v .

Aplikujeme vztah (18) na případ Fizeauova pokusu. Předpokládejme, že směr šíření světla i směr pohybu vody je totožný se směrem osy x (resp. x') souřadné soustavy S (resp. S'). Označíme u' rychlost světla v soustavě S' , která je spojena s proudící vodou a vůči níž je tedy voda v relativním klidu. Pro pozorovatele, který je v klidu v soustavě S' , bude se tedy světlo šířit v klidné vodě, a to rychlostí $\frac{c}{n}$, kde n je index lomu vody. Je tedy

$$u' = \frac{c}{n}.$$

Vzhledem k pozorovateli, který je v klidu v soustavě S , bude se voda pohybovat rychlostí v a pozorovateli v S se bude jevit, že světlo v proudící vodě se pohybuje rychlostí u , která je podle (18) po dosazení za u' dána vztahem

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}} = \left(\frac{c}{n} + v \right) \frac{1}{1 + \frac{v}{nc}} \quad (19)$$

Vzhledem k tomu, že rychlost proudění vody je značně menší než rychlost šíření světla ($v \ll c$), lze zlomek ve vztahu (19) napsat podle přibližného vzorce ve tvaru

$$\frac{1}{1 + \frac{v}{nc}} \approx 1 - \frac{v}{nc}$$

Pak

$$u = \left(\frac{c}{n} + v \right) \cdot \left(1 - \frac{v}{nc} \right) \approx \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2} - \frac{v^2}{cn}$$

Člen $\frac{v^2}{cn}$ je velmi malý pro $v \ll c$ a můžeme jej proto zanedbat. Pro rychlost světla v pohybujícím se prostředí pak dostáváme

$$u = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{v}{nc} \right) \quad (20)$$

což je výsledek experimentálně ověřený Fizeauovým pokusem. Je tedy strhávání světla pohybujícím se prostředím přirozeným důsledkem relativistického skládání rychlostí.

Také jevy aberace vyplývají bezprostředně ze speciální teorie relativity. Pro aberační úhel pak platí vztah***)

***) Viz Rozhledy mat.-fyz., roč. 48, č. 7. (1969–70), s.: 303–313.

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (21)$$

Je-li relativní rychlost v malá ve srovnání s rychlostí světla c , pak poměr $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ a vztah (21) přechází v klasický vztah (10).

Závěr

Jak již bylo řečeno, speciální teorie relativity je vědní disciplínou po myšlenkové stránce velmi náročnou. Článek má za úkol ukázat, že pro hlubší pochopení teorie a jejích základních postulátů je vhodné přihlídnout k vývoji fyziky z historických aspektů, které sehrály důležitou roli při vzniku speciální teorie relativity. Je třeba vidět, že obdobně jak ve vědách společenských, tak také ve vědách přírodních je nutno dosáhnout určitého kvantitativního stavu jednotlivých vědních disciplín, aby mohl být dán základ nové kvality, v našem případě základ vzniku nové fyzikální teorie na vyšším stupni. Na příkladě postulovaného éteru se ukazuje, jak teprve nedílná jednota teorie a fyzikálního experimentu umožňuje správnou cestu vývoje fyziky i za cenu toho, že je v mnoha případech nutno vžitě fyzikální představy revidovat a od základu změnit.

Speciální teorie relativity jako kvalitativně nová teorie vnesla do našeho nazírání na základní fyzikální pojmy *prostor* a *čas* podstatné a revoluční změny, dala vznik řadě nových teorií a ukazuje se i v dnešní době stále živá a aktuální. V životaschopnosti a plodnosti této teorie je třeba vidět velkého génia, jejího zakladatele *A. Einsteina*.

0 některých optických jevech v zemské atmosféře

RNDr. JAN BEDNÁŘ, Praha

S optickými jevy v atmosféře se lidstvo setkávalo prakticky po celou dobu své existence a není proto divu, že tyto namnoze výrazné a nápadné jevy budily odedávna pozornost a zájem člověka. Přestože dnes můžeme říci, že věda dovede zdrcující většinu optických úkazů v atmosféře přesně popsat a vysvětlit, zaráží skutečnost, že většina lidí, počítaje v to i mnohé vysokoškolsky vzdělané odborníky ve fyzikálních specializacích, má o těchto jevech zkreslené a často nesprávné představy. V tomto článku

si proto povšimneme několika běžných úkazů v atmosféře, v jejichž výkladu se podle zkušeností autora nejvíce chybuje.

Prvním jevem, o kterém se zde zmíníme, je modrá barva oblohy a bílá barva sluncem ozářených oblaků. Bohužel se stává, že i člověk jinak důkladně obeznámený s fyzikou rozpačitě mlčí, zeptá-li se ho náhodou někdo, proč je vlastně obloha modrá, hledá různá zbytečně složitá vysvětlení, zatímco správná odpověď by měla vypadat takto:

Sluneční záření dopadající na zemský povrch si můžeme rozdělit na přímé, které vnímáme jako paprsky přicházející přímo od slunečního disku do našeho oka, a záření rozptýlené atmosférou, které k nám přichází z různých částí nebeské klenby. Kdyby nebylo zemské atmosféry, neexistovalo by ani rozptýlené sluneční záření (zanedbáváme zde z našeho hlediska bezvýznamný rozptyl na částicích přítomných v kosmickém prostoru) a vnímali bychom pak pouze přímé paprsky přicházející od žhnoucího slunečního disku, zatímco obloha by se jevila černě a byly by na ní patrné i ve dne hvězdy tak, jak je tomu na Měsíci a ostatních kosmických tělesech postrádajících vlastní atmosféru.

Čtenáři je pravděpodobně známo, že sluneční světlo je elektromagnetické povahy a skládá se z celého spektra vlnových délek od krátkovlnného ultrafialového záření přes záření viditelné k infračervenému. Pro výklad zbarvení oblohy je velmi důležité, že rozptyl slunečního světla v atmosféře můžeme rozdělit zhruba na dva základní typy. Za prvé je to rozptyl na malých částicích, jež jsou představovány molekulami vzduchu. Pro tento typ rozptylu je charakteristické, že množství rozptýleného slunečního záření je nepřímě úměrné čtvrté mocnině vlnové délky, takže čím má světlo kratší vlnovou délku, tím je více rozptylováno. To znamená, že v oboru viditelného záření je podstatně více rozptylována část z fialového konce spektra než z konce červeného. Kdyby v atmosféře existoval pouze tento typ rozptylu, jevila by se obloha zřejmě temně modře až fialově. Ovšem v atmosféře jsou obsaženy i částice podstatně větších rozměrů než molekuly vzduchu (vodní kapičky, ledové krystalky, různé prachové a jiné částice). Rozptyl slunečního světla na těchto tzv. velkých částicích má vzhledem k vlnové délce neutrální charakter, což znamená, že žádné vlnové délky nejsou při rozptylu preferovány a rozptýlené sluneční světlo je pak bílé. Z tohoto důvodu se zdají zářivě bílými boky oblaků ozářené sluncem. Protože atmosféra není nikdy úplně čistá v tom smyslu, že by obsahovala pouze molekuly vzduchu, ale vždy se v ní vyskytují vodní kapičky, ledové krystalky, prachové nebo jiné částice, jeví se barva oblohy jako nějaký odstín modré barvy. V případě relativně čisté atmosféry převládá molekulární rozptyl a barva oblohy je sytě modrá, naproti tomu čím je atmosféra znečištěnější, tím více převládá bělošedý odstín oblohy. Druhou stranou této skutečnosti je fakt, že molekulární rozptyl způso-

buje zvýšený relativní obsah paprsků z červené části viditelného spektra v přímém slunečním záření, neboť paprsky z modrofialového konce přecházejí ve větší míře do rozptýleného záření. Z tohoto důvodu při malých výškách slunce nad obzorem, kdy paprsky procházejí dlouhou dráhu v atmosféře, se sluneční disk jeví často načervenalé.

Zvědavý čtenář by mohl ještě namítnout, že oblaka se nám často jeví nikoli bíle, ale naopak tmavě. K tomu můžeme vysvětlit, že tmavě se jeví sluncem neosvětlené části hustých oblaků, zatímco náš výklad se týkal světla rozptýleného jasně ozářenými boky oblaků.

Dalšími atmosférickými jevy, v jejichž popisu a výkladu se často chybuje, jsou na jedné straně korony kolem Slunce, Měsíce, případně hvězd a na straně druhé halové jevy. Chybuje se zejména v tom, že tyto dvě skupiny jevů se vzájemně směšují, a není bohužel řídký případ, kdy se korona kolem Slunce nebo Měsíce chybně označuje jako malé halo.

Korona se jeví jako soustava živě zbarvených (někdy však jen světlých a tmavých) kruhů bezprostředně kolem světelného zdroje, v našem případě tedy Slunce, Měsíce, případně hvězd. Výskyt koron svědčí o tom, že v atmosféře se v daném okamžiku vyskytují vodní kapičky, které z optického hlediska jsou analogické kruhovým terčíkům, na nichž dochází k ohybu světla. Nejlépe můžeme korony pozorovat, svítí-li Slunce nebo Měsíc přes tenkou vrstvu nízké oblačnosti nebo mlhy. Zvláště příhodné jsou k tomu horské mlhy.

Koroně se podobá jev nazývaný glorie. V tomto případě jde o zbarvené světelné pruhy kolem stínu vrženého člověkem nebo nějakým předmětem například na vrstvu horské mlhy nebo níže ležící oblak. Tento jev lze vysvětlit pomocí zpětného rozptylu slunečního světla na mlžných resp. oblačných kapičkách. Mezi glorie patří tzv. horská neboli Brocenská strašidla.

Zatímco korony a glorie jsou působeny přítomností vodních kapek v atmosféře, za vznik halových jevů jsou odpovědny výlučně ledové krystalky. Mezi nejznámější halové jevy patří malé halo, které se jeví jako světlý kruh kolem Slunce v úhlové vzdálenosti 22° od jeho středu, a velké halo ve vzdálenosti 46° . Kromě nich se vyskytuje celá řada dalších halových jevů, způsobených odrazem a lomem slunečních paprsků na rozmanitých tvarech ledových krystalků vyskytujících se v ovzduší. Jedním z nejčastěji se vyskytujících halových jevů jsou tzv. boční slunce, jevící se jako světlé plošky v blízkosti místa, kde by malé halo protínalo kruh vedený podél obzorníku ve stejné výšce, jako se právě nachází Slunce. Ve srovnání s často živými barvami koron jsou halové jevy mdle perleťově zbarveny.

Mezi dobře známé optické úkazy patří dále duhy. Zde se jejich výkladem nehodláme blíže zabývat, neboť většina čtenářů jistě dovede správně vysvětlit jejich vznik na základě vnitřního odrazu slunečního

paprsku v kapce použitím principu minimální odchylky. Chtěli bychom jen upozornit, že tento princip, který pro většinu studentů představuje pravděpodobně jakýsi axiom, lze velice názorně odvodit a dokázat, ale bohužel je k tomu třeba matematického aparátu, který zřejmě není většině čtenářů běžný, a proto se zde touto otázkou nebudeme zabývat. Nebudeme rovněž mluvit o jevech působených refrakcí (lomem) paprsků v atmosféře, neboť na toto téma vyšel v tomto časopise článek v nedávné minulosti.

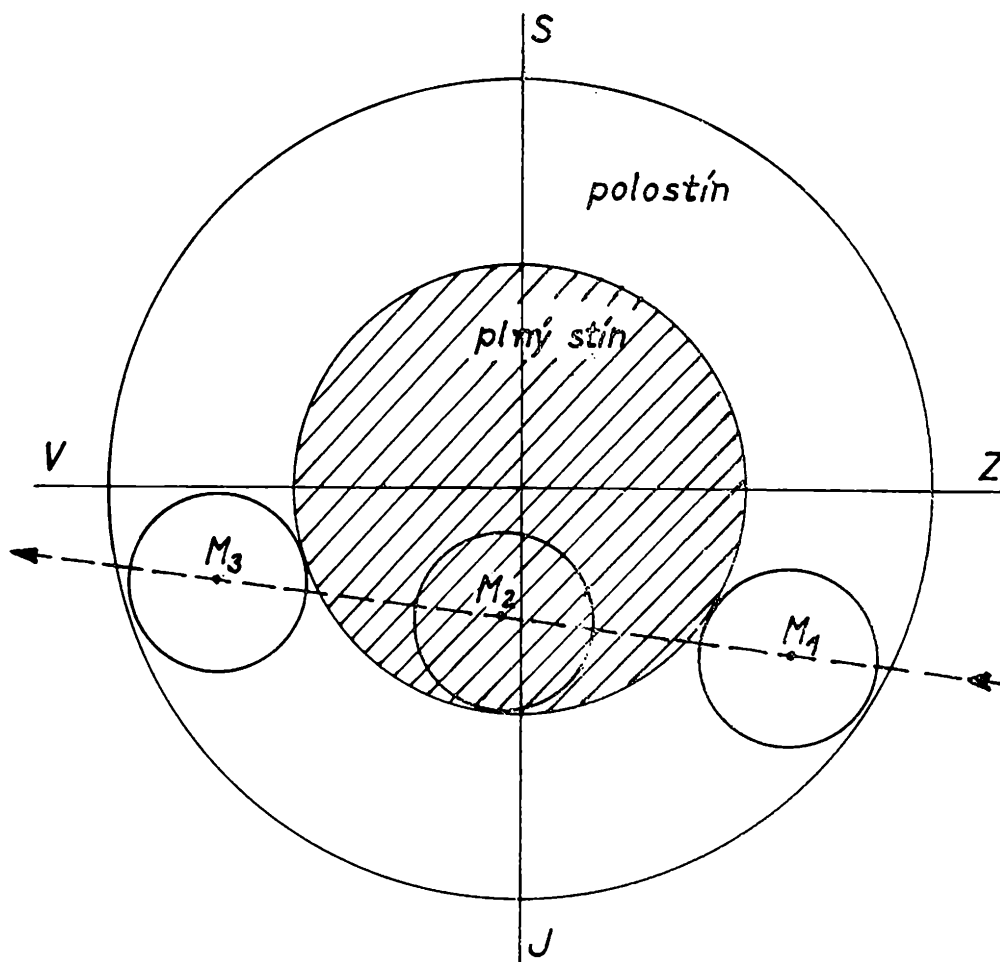
astronomie

Úplné zatmění Měsíce 18./19. listopadu 1975

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Zatmění Měsíce vznikají tak, že Měsíc na své dráze kolem Země vstoupí do stínu, který do prostoru vrhá Země, osvětlená Sluncem. Zatmění může nastat jen tehdy, jsou-li všechna tři tělesa přibližně na téže přímce, tj. je-li Měsíc v úplňku a současně v blízkosti uzlu své dráhy. Zatmění může být buď úplné, vstoupí-li do stínu celý Měsíc, částečné, při němž stín zasáhne jen část Měsíce, nebo polostínové, kdy Měsíc vstupuje jen do polostínu. Zatmění Měsíce je pozorovatelné všude tam, kde je Měsíc v době zatmění nad obzorem, a probíhá — na rozdíl od zatmění Slunce — pro všechna pozorovací místa současně. V jednom roce mohou nastat nejvýše tři úplná nebo částečná zatmění Měsíce, v některých letech nenastává zatmění Měsíce vůbec.

Zatmění Měsíce není tedy příliš vzácný úkaz, domníváme se však, že řada čtenářů dosud úplné zatmění Měsíce neviděla. Příležitost k tomu budou mít v noci z 18. na 19. listopadu, kdy nastane úplné zatmění Měsíce, které bude u nás velmi dobře pozorovatelné (za předpokladu bezmračné oblohy). Dne 18. listopadu zapadá Slunce v $16^{\text{h}}14^{\text{min}}$, v $15^{\text{h}}59^{\text{min}}$ vychází Měsíc, který je tento den v úplňku. Deklinace Měsíce bude $+16^{\circ}49'$, což znamená, že Měsíc bude procházet poměrně vysoko nad jižním obzorem — při kulminaci ve $23^{\text{h}}46^{\text{min}}$ bude jeho výška $56^{\circ}49'$, tj. přibližně jako výška Slunce v poledne začátkem května nebo srpna. Průběh zatmění Měsíce je znázorněn na obr. 1. Vyšrafovaný kruh představuje plný stín Země ve vzdálenosti Měsíce (poloměr stínu je



Obr. 1. Průběh úplného zatmění Měsíce 18./19. listopadu 1975

39,4'), vnější kružnice pak polostín (poloměr polostínu je 71,8'). Úhlový poloměr Měsíce v době zatmění bude 15,1'. Měsíc se dotkne okraje polostínu ve 20^h25,6^{min}, což je začátek polostínového zatmění. Polostínová zatmění, jak je známo, nejsou příliš výrazná a pouhým okem ani nezjistíme zeslábnutí měsíčního světla. Měsíc však postupuje polostínem a ve 21^h38,6^{min} se dotkne okraje plného stínu. Na obr. 1 je tato poloha Měsíce, kdy začíná částečné zatmění Měsíce, označena M_1 . Ve 23^h02,6^{min} se do plného stínu vnoří celý Měsíc a začíná úplné zatmění, jehož střed (poloha Měsíce M_2) nastane ve 23^h23,5^{min}. Velikost zatmění v největší fázi je 1,07, což znamená, že okraj stínu přesahuje Měsíc o 0,07 měsíčního průměru. Konec úplného zatmění bude v 23^h44,1^{min} a konec částečného zatmění (Měsíc v poloze M_3) v 1^h08,3^{min}. Pro úplnost uvedme, že z polostínu vystoupí Měsíc ve 2^h21,2^{min}. Jak je z časových údajů zřejmé, proběhne úplné zatmění v době těsně před kulminací Měsíce, tedy v době, kdy bude Měsíc vysoko nad jižním obzorem a podmínky k pozorování budou velmi příznivé. Pro naše čtenáře znamená jistou nevýhodu, že zatmění nastane v pozdních hodinách, neměli by si však nechat ujít příležitost k jeho pozorování, neboť zatmění Měsíce je velmi efektní

úkaz. Připomeňme, že při úplném zatmění není Měsíc zcela temný, neboť na něj dopadají paprsky Slunce rozptýlené v zemské atmosféře; světlo Měsíce je jen velmi zeslabené a má červenavé zabarvení. Příští úplné zatmění Měsíce, které bude u nás pozorovatelné, nastane až 16. září 1978.

Třináctý měsíc planety Jupitera

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Koncem roku 1974 vešlo ve známost, že v početné rodině dvanácti Jupiterových měsíců byl objeven další, v pořadí již třináctý měsíc. Jeho objev učinil astronom Palomarské observatoře Charles T. Kowal, a to 14. září 1974, kdy zkoumal tři fotografie, pořízené Schmidtovou komorou o průměru 122 cm, speciálně upravenou pro fotografování Jupiterových měsíců. Tyto fotografie byly exponovány 10., 11. a 12. září, každá dvě hodiny. Úprava Schmidtovy komory spočívala v tom, že se přístroj pohyboval tak, že sledoval pohyb planety, hvězdy se tedy během dvouhodinové expozice zobrazily jako čárky, zatímco měsíce planety Jupitera jako body. Proto bylo možno zaznamenat bodový objekt 20. zdánlivé hvězdné velikosti. Týž objekt pozorovali astronomové na hvězdárně Kitt Peak (USA), a to v blízkosti předpověděného místa.

Úkolu vypočítat dráhu nově objeveného tělesa se ujali dva teoretikové, B. Marsden a K. Asknes, kteří vypočítali předběžnou dráhu nového objektu, o němž se s konečnou platností ukázalo, že jde o nový, XIII. měsíc Jupitera. Měsíc se podle jejich výpočtů pohybuje přímým směrem (tj. proti zdánlivému otáčení oblohy) a jeho vzdálenost od planety je 0,08 astronomických jednotek, čili $12,4 \cdot 10^6$ km. Nově objevený měsíc patří do skupiny, kterou tvoří VI., VII. a X. měsíc. Dráhy těchto měsíců jsou nakreslené v článku „Dvanáct Jupiterových měsíců“, který vyšel v 52. ročníku *Rozhledů matematicko-fyzikálních* (1973/74, č. 8, str. 369 až 372). Celkový počet měsíců ve sluneční soustavě dosáhl takto počtu 33.

Předběžně byla určena oběžná doba XIII. měsíce na 282 dní. Po zpracování dalších tří snímků, a to z 18. a 19. října a z 12. prosince 1974, byly elementy dráhy zpřesněny. Oběžná doba byla stanovena na 240 dní, numerická excentricita dráhy na 0,146 a sklon dráhy k rovině ekliptiky $28,7^\circ$. Tyto údaje potvrzují příslušnost nového měsíce k uvedené skupině. Zdánlivá hvězdná velikost XIII. měsíce je $20,5^m$, je to tedy nejslabší dosud objevený Jupiterův měsíc a je zřejmé, že jeho průměr nepřesahuje 20 km. (Průměr X. měsíce, jehož zdánlivá hvězdná velikost je 19^m , je 19 km). Připomeňme, že XII. měsíc byl objeven v r. 1951, což znamená, že do objevu XIII. měsíce uplynulo 23 roků.

Kromě těchto pozorování bylo v minulých letech vykonáno mnoho dalších měření a pozorování již dříve známých Jupiterových měsíců. Tak např. bylo zjištěno, že hustoty prvních čtyř měsíců se zmenšují se vzdáleností od Jupitera. Největší hustotu má první měsíc (Io) $3\,480\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, druhý měsíc (Europa) $3\,070\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, třetí měsíc (Ganymedes) $1\,940\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a čtvrtý měsíc (Kallisto) je $1\,650\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Pomocí měření infračerveného záření bylo zjištěno, že Ganymedes je zřejmě pokryt velmi řídkým sněhem nebo jinovatkou ze čpavku. Na prvním měsíci Io byly zjištěny polární čepičky, které jsou pravděpodobně složeny v polysirníků amonných. Vyplynulo to z jejich barevného srovnání s rudou skvrnou na Jupiteru, která je zřejmě složena z těchto polymerů, vznikajících z NH_3 a H_2S působením ultrafialového záření Slunce.

Let umělé družice nad zemským povrchem

RNDr. KAREL MIŠOŇ, CSc., ČVUT Praha

Již prvé novinářské zprávy o vypuštění historického Sputniku I (1957 X 4) — obr. 1 — byly doprovázeny mapkami jeho obletů nad zemskými kontinenty. Články, knížky i knihy o astronautice se zpravidla v ohledu pohybu umělých kosmických těles omezují na charakteristiky drah v prostoru (*fyzikální stránka problému dvou těles*) bez specifického rozpisu formulí vystihujících polohu tělesa s ohledem na zeměpisné souřadnice (hledisko *sférické astronomie*). Podáme snadno přístupné vztahy, dovolující určit časový sled poloh umělé družice Země nad povrchem s grafickou ilustrací vztaženou na numericky pohodlný případ kruhové dráhy. Východiskem bude běžná geometrická lokalizace dráhy v prostoru.

Ač podaná úvaha zahrnuje jakoukoliv rovinnou dráhu (v problému dvou těles kružnici, elipsu, parabolu, hyperbolu, v jejímž ohnisku je Země — nemluvě o bezprostředním případě přímkové dráhy), konkretizujeme všeobecnou představu na případ eliptického orbitálního letu 0. Prostorové umístění roviny σ této elipsy (obr. 2) určíme polohou *uzlové přímky* U a *úhlem sklonu* i . Uzlovou přímkou rozumíme průsečnici roviny σ s rovinou ϱ proloženou zemským rovníkem (tedy s rovinou, jejíž poloha se zemskou rotací nemění). Příklad splynutí $\sigma \equiv \varrho$, jehož řešení je bezprostřední, zde neuvažujeme. Obě možnosti smyslu, v němž může objekt dráhu 0 obíhat, rozlišíme výběrem jednoho určitého z obou opačných polopaprsků přímky U vycházejících ze středu Země $\odot$ (ohniska dráhy O). Vybereme ten polopaprsek U_+ , v němž letící objekt

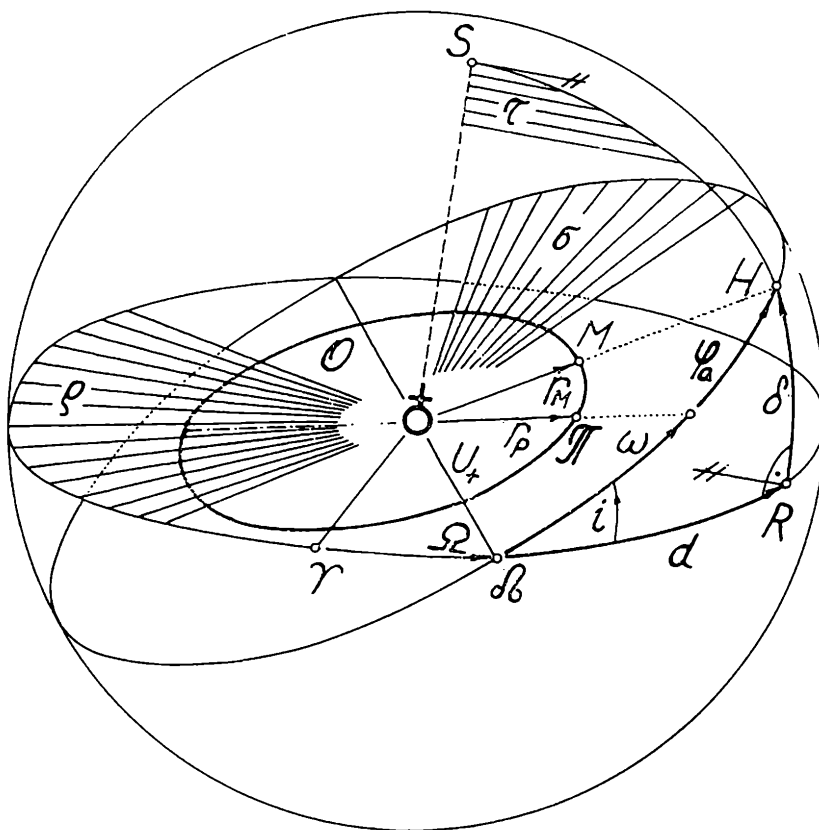


Obr. 1. Modely drah
prvých dvou Sputniků. Bílé
a černé úseky odpovídají pěti-
minutovým letům.

vystupuje nad rovníkovou rovinu (rozuměj: v němž opouští jižní polokouli a vstupuje nad polokouli severní). Polohu polopaprsku U_+ určíme délkou výstupního uzlu Ω , totiž úhlem mezi U_+ a pevně zvoleným směrem v rovníkové rovině (jarní bod Υ). Úhel Ω měříme ve směru zemské rotace. Výstupní uzel, tj. bod světového rovníku (průsečnice ϱ s oblohou) ležící na U_+ (tedy úběžník polopaprsku U_+) označíme ϖ . Úhlem sklonu i rozumíme úhel roviny ϱ (orientované ve smyslu úhlu Ω) a σ (orientované ve smyslu oběhu orbitem O), nepřevyšující 180° .

Umístění dráhy O v rovině σ určíme polohou jejího *perigea*, *přízemí* π (nejbližší bod k Zemi), *pericentrickým úhlem* ω , který svírá spojnice $\nabla\pi$ (*pericentrický průvodič* r_P) s polopaprskem U_+ měřeným od U_+ ve smyslu oběhu v dráze. Rozměry dráhy O považujeme za známé, třeba r_P a délka hlavní osy. Poloha M tělesa v O je určena jednoznačně *pravou anomálií* φ_a , tj. úhlem měřeným ve směru oběhu od r_P k průvodiči místa M . Ze středu Země ∇ se M promítá do nadhlavníku H místa, nad nímž je právě družice.

Proložme bodem M polorovinu τ ohraničenou osou zemské rotace (protínající nebeskou kouli v severním světovém pólu S) a označme její průsečík se světovým rovníkem R . Dvojice úhlů $\Upsilon\nabla R$ (rektascence α)



Obr. 2. Prostorová lokalizace dráhy umělé družice Země.

a $R \oplus H$ (deklinace δ) určují polohu bodu H . Pro rozbor časového sledu nadhlavníkových poloh H poslouží pravoúhlý sférický trojúhelník $\triangle RH$, v němž známe přeponu $c = \omega + \varphi_a$, úhel i a hledáme obě odvěsny: δ , $d = \sphericalangle \triangle RH$. Neperovo pravidlo o sférickém trojúhelníku poskytuje dvojici vztahů (srovn. poznámku na konci článku):

$$\operatorname{tg} d = \operatorname{tg} c \cdot \cos i, \quad \sin \delta = \sin c \cdot \sin i,$$

vedoucích k rektascenci $\alpha = \Omega + d$ i deklinaci δ , které určují polohu $[\alpha, \delta]$ družice na hvězdném nebi pro pozorovatele, který je v průvodiči r_M družice. Hodnota δ určuje přímo zeměpisnou šířku místa, v jeho nadhlavníku je právě družice v okamžiku t , kdy míjí bod M . Stanovení zeměpisné délky λ téhož místa vyžaduje respektovat rotaci Země. Značí-li w úhlovou rychlost zemské rotace (pozor na rozdílné *vteřiny hvězdné a střední sluneční sekundy!**)), je

$$\lambda = \alpha + \lambda_U - wt,$$

kde λ_U je zeměpisná délka jarního bodu $\mathcal{V}$ v okamžiku $t = 0$.

*) K opomenutí podobného rozdílu mezi synodickou a siderickou rotací Slunce došlo svého času při aplikaci tehdy populární „sluneční meteorologie a světové soustavy na základě elektrodynamických zákonů“.

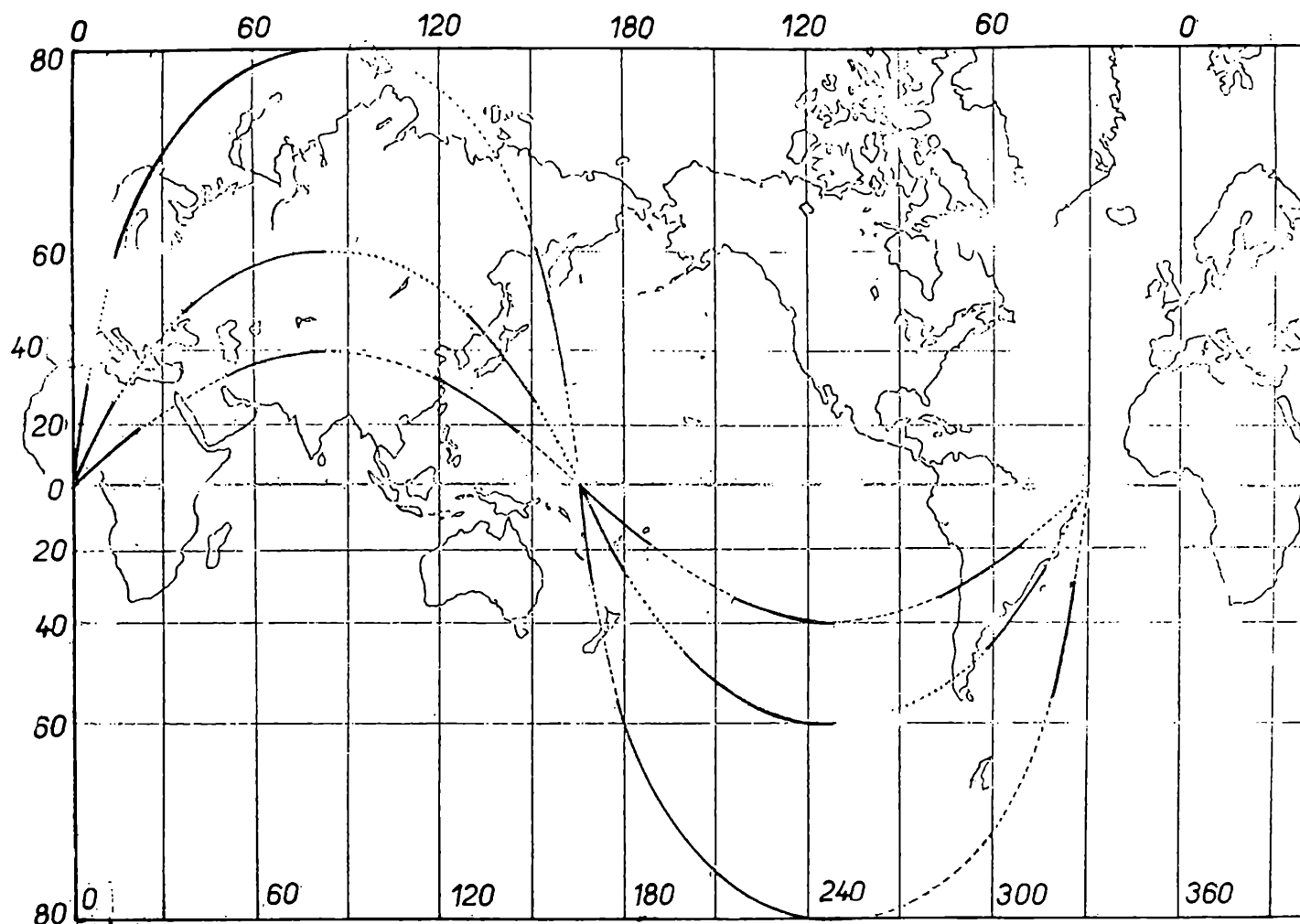
Letový řád první čtvrtperiody drah z obr. 2. Jaké vzdálenosti na zemském povrchu odpovídají úhlovým změnám 1''?

t	λ	δ	i
minuty	°	°	°
0	0 00 00	0 00 00	—
5	10 20 46 6 22 38 1 24 38	9 34 36 12 57 09 14 46 01	40 60 80
10	21 21 07 13 35 38 3 13 06	18 44 50 25 39 32 29 29 55	40 60 80
15	33 41 36 22 48 17 6 05 27	27 02 02 37 45 40 44 08 10	40 60 80
20	47 58 55 35 52 47 11 43 33	33 49 33 48 35 25 58 31 30	40 60 80
25	64 27 14 55 32 46 26 40 43	38 22 51 56 46 27 72 02 10	40 60 80
30	82 28 46 82 28 46 82 28 46	40 00 00 60 00 00 80 00 00	40 60 80

Počtářsky nejnáročnější složkou výpočtu je stanovení závislosti $\varphi_a \equiv \varphi_a(t)$ z Keplerovy rovnice, případně z její varianty pro parabolickou nebo hyperbolickou dráhu. Výpočet se zjednodušuje pro případ kruhového orbitu O , kde $\varphi_a(t)$ roste přímo úměrně s časem. Značí-li T oběžnou dobu, je v radiánech

$$\varphi_a(t) = \frac{2\pi}{T} (t - t_P),$$

kde t_P je *pericentrický čas* družice (okamžik průletu přízemím π). Pro kruhovou dráhu má ovšem π jen význam formální. Jde-li jenom o obecný pohled na časový průběh letu družice nad zemským povrchem (bez aplikace na konkrétní družici), je vedle sklonu i podstatnou jen oběžná



Obr. 3. Dráhy družic se společnou hodnotou oběžné doby $T = 2$ hodiny při $i = 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ nad zemským povrchem.

dobu T . Klademe proto

$$\Omega = \omega = 0; t_P = 0, \lambda_U = 0,$$

tj.:

$$\alpha = d, t - t_P = t, c = \varphi_a(t) = \frac{2\pi}{T} t,$$

takže

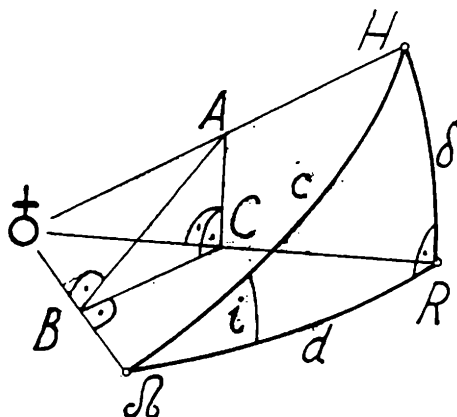
$$(*) \quad \operatorname{tg} \alpha = \cos i \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{T} t; \quad \sin \delta = \sin i \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Případný přechod k explicitnímu zápisu $\alpha = \dots$, $\delta =$ (potřebný pro strojové zpracování) s rozlišením kvadrantových intervalů přenecháváme čtenáři seznámenému s definicí cyklometrických funkcí.

V obr. 3 jsou zakresleny dráhy tří umělých družic obíhajících Zemi v kruhové dráze se společnou oběžnou dobou $T = 2$ hodiny při sklonech $i = 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. Dráhy odpovídají specializovaným vztahům (*).

Plně a tečkovaně vytažené úseky vyznačují desetiminutové doby letu. Číselný pohled pro čtvrtinu drah (*letový řád*) s časovým krokem 5 minut uvádí tabulka.

Vyřešení drah pro různé oběžné doby (tj. pro různé výšky nad zemským povrchem) a pro různé sklony jsou vhodným pracovním námětem. Existují smyčkové dráhy, při nichž by se při téže družici vyskytovaly letové směry jak k východu, tak k západu? Uvažujte také případy $i \geq 90^\circ$ (*retrogradní družice a družici polární*), *družici stacionární* s oběž-



Obr. 4. Souvislost sférického a rovinného trojúhelníka.

nou dobou rovnou hvězdnému dni i odpovídající nestacionární družice $i \neq 0$. Poslední případ zobecněte pro oběžné doby souměřitelné (v malých násobcích) s dobou hvězdného dne!

Poznámka :

Budiž ABC trojúhelník, jehož rovina je kolmá k paprsku $\odot \odot$ (obr. 4). Pak s ohledem na pravoúhlost sférického trojúhelníka $\odot RH$ jsou i oba trojúhelníky BCA a $\odot CA$ pravoúhlé s pravým úhlem při C . Platí

$$\cos i = \frac{BC}{BA} = \frac{\odot B \operatorname{tg} d}{\odot B \operatorname{tg} c} \Rightarrow \operatorname{tg} d = \operatorname{tg} c \cos i ,$$

$$\sin i = \frac{AC}{AB} = \frac{\odot A \sin \delta}{\odot A \sin c} \Rightarrow \sin \delta = \sin c \sin i ,$$

jak bylo v hlavním textu uvedeno. Širší pohled na tematiku sférických trojúhelníků podáme v samostatném článku. Tam poznáme pravidlo, dovolující přímé napsání obou vztahů.

NAŠE SOUTĚŽ

Také letos vypisuje naše redakce spolu se Státním pedagogickým nakladatelstvím soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie — nezávisle na Matematické a fyzikální olympiádě. Této soutěže se mohou účastnit i kolektivy z téže třídy, maximálně trojčlenné. Při případném umístění má ovšem kolektiv nárok na jedinou cenu.

Pokyny řešitelům :

Řešení každého příkladu pište čitelně (nejlépe strojem) na zvláštní list papíru formátu A4, a to vždy po jedné jeho straně. Dole vpravo na každém listu uveďte své celé jméno, třídu, školu a své bydliště. Jména členů kolektivu a jejich adresy napište na druhou (nepopsanou) stránku každého listu. Nečitelná nebo nedbale popsaná řešení ze soutěže vyřazujeme.

Text řešení každého příkladu formulujte výstižně, stručně, ale jasně. Přitom užívejte platné terminologie a symboliky. Připojujete-li k řešení některého příkladu obrázky, dbejte o to, aby byl pečlivě narýsován a jasně popsán.

Řešení první části soutěžních příkladů otištěných v tomto čísle zašlete nejpozději do 15. ledna 1976 na adresu redakce Rozhledů matematicko fyzikálních, Trojanova 13, Praha 2, PSČ 12 134 s označením: *Naše soutěž*.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Jedným vrcholom rovnoramenného trojuholníka ABC ($AC = BC$) vedte priechku tak, aby rozdelila trojuholník ABC na dva trojuholníky rovnoramenné. Kolko je možností a aké veľké sú vnútorné uhly trojuholníka, ktorý sa dá takým spôsobom rozdeliť?

Jozef Filip

2. Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 71x + k = 0, \quad k = \text{konstanta},$$

jestliže pro její kořeny x_1, x_2, x_3, x_4 platí rovnost $x_1 + x_2 = x_3 \cdot x_4$.

Jan Fráňa

3. Dokažte, že v trojúhelníku (při obvyklém označení jeho stran a úhlů) platí:

$$a \geq b \Leftrightarrow |\cos \alpha| \leq \frac{\sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

Stanislav Horák

4. Na ramenech daného ostrého úhlu s vrcholem V jsou zvoleny body $A \neq V$, $B \neq V$ tak, že je $VA \geq VB$; vrcholem V je vedena přímka p , která rozděluje daný úhel ve dva nenulové úhly. Vzdálenosti bodů A , B od přímky p jsou v_1 , v_2 , vzdálenost bodu A od přímky VB je v . Dokažte, že je

$$v_1^2 + v_2^2 < v^2.$$

Emil Kraemer

5. Jsou dány dva trojúhelníky AB_1C_1 , AB_2C_2 se společným vrcholem A ; žádný z nich není pravoúhlý. Vrchol $B_2 \neq B_1$ leží na přímce AB_1 , vrchol $C_2 \neq C_1$ leží na přímce AC_1 ; přímky B_1C_1 , B_2C_2 jsou vzájemně kolmé a mají společný bod P . Dokažte, že přímka spojující ortocentra V_1 , V_2 daných trojúhelníků prochází bodem P .

Emil Kraemer

6. V rovině je dána kružnice k se středem O a poloměrem r . Přímka x je průměrem kružnice k , úsečky OA , OB jsou její vzájemně kolmé poloměry. Rovnoběžné průměty bodů A , B na přímku x označme A' , B' , vzdálenosti bodu O od bodů A' , B' označme a , b . Dokažte, že číslo

$$a^2 + b^2$$

nezávisí na volbě poloměrů OA , OB kružnice k .

Emil Kraemer

7. Řešte nerovnici:

$$|x + 9| - |6x + 14| + |7x + 5| - |4x - 3| \geq x - 3.$$

Evžen Říman

8. Tri kružnice k_1 , k_2 , k_3 , ktorých stredy sú S_1 , S_2 , S_3 , majú rovnaký polomer r a pretínajú sa v spoločnom bode P aj každé dve vzájomne. Dokážte, že ostatné priesečníky vždy dvoch z daných kružníc, tj. body A , B , C , ležia tiež na kružnici rovnakého polomeru r .

Evžen Říman

9. V rovině je dán konvexní n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$, kde $n \geq 12$. Každá jeho úhlopříčka je celá nakreslena červeně nebo celá modře. Potom existuje trojúhelník $A_iA_jA_k$, jehož všechny strany jsou úhlo-

příčkami daného n -úhelníka a všechny jsou nakresleny červeně nebo všechny jsou nakresleny modře. Dokažte. Platí obdobné tvrzení také pro $n = 11$?

Jiří Sedláček

10. Řešte v oboru reálných čísel rovnici

$$(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$$

Jaroslav Šedivý

11. Máte k dispozici sloupec z n karet obvyklého obdélníkového tvaru a pokoušíte se z nich postavit šikmý sloupec. Všechny karty od shora počínajíc vysouváte kratší stranou co nejdále vpravo, ale tak, aby se sloupec nezřítíl. Vyjádřete velikosti posunu sousedních karet (v poměru k jejich délce); přitom uvažujte jen podmínky stability, bez vlivu tření, přilnavosti apod. Výsledek запиšte jako konečnou posloupnost s $(n-1)$ členy.

Jaroslav Šedivý

12. V prostoru je dána ortonormální soustava souřadnic $Oxyz$, v níž je zvolen bod $A \equiv (a; b; c)$, kde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Najděte rovinu ρ , která prochází bodem A tak, že se souřadnicovými rovinami xy , xz , yz omezuje čtyřstěn, který má nejmenší objem. Úlohu řešte bez použití počtu diferenciálního.

Přemysl Vihan

Konstruktivní geometrie

1. Je dána rovina souměrnosti ω pravidelného čtyřstěnu a v ní body T_1 , T_2 , které jsou středy dvou stěn tohoto čtyřstěnu. Sestrojte tento čtyřstěn.

František Hradecký

2. Je dán vrchol A pravidelného osmistěnu a přímka o , která prochází středy jeho protějších stěn. Sestrojte tento osmistěn.

František Hradecký

3. V rovině je dána osová afinita svou osou o a dvojicí různých bodů V_1 (vzor) a V_2 (jeho obraz), které jsou položeny tak, že přímka V_1V_2 je rovnoběžná s osou o . Sestrojte přímky a_1 , b_1 , které procházejí bodem V_1 a mají tu vlastnost, že odchylka φ ($0 < \varphi \leq \mathbf{R}$) jejich obrazů a_2 , b_2 je táž jako odchylka vzorů a_1 , b_1 . Řešte nejprve pro případ, že jedna z přímek a_1 , b_1 splývá s přímkou V_1V_2 , a potom pro případ, že žádná z přímek a_1 , b_1 nesplývá s přímkou V_1V_2 .

Emil Kraemer

4. Je dána rovina ρ , která je různoběžná s průmětnou π , a přímka s , která je různoběžná s rovinami ρ , π . V rovině ρ je dána kružnice k o středu S ; úsečky $SA = SB = r$ jsou její vzájemně kolmé poloměry. Promítneme-li body S , A , B směrem s do průmětny π , dostaneme body S' , A' , B' ; velikosti úseček $S'A'$, $S'B'$ označme a , b . Potom číslo $a^2 + b^2$ je nezávislé na volbě poloměrů SA , SB kružnice k . Dokažte toto tvrzení bez použití vlastností elipsy. Jakou vlastnost elipsy tím dokážete? Řešení doprovodte pěkně narýsovaným názorným obrázkem.

Emil Kraemer

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Loňské soutěže Rozhledů se zúčastnilo 31 soutěžících a 6 kolektivů (2 ze zahraničí). Proti loňsku je to potěšující zlepšení.

V jednotlivých disciplínách uvádíme výsledky nejúspěšnějších řešitelů:

Matematika

1. Pavel Tvrdík, G Kolín	56 bodů
2.—3. Václav Kotěšovec, G W. Piecka, Praha 2.	54
2.—3. Michael Valášek, G W. Piecka, Praha 2	54
4. Martin Baumann, OU ČKD Praha	52
5. Pavol Tarina, G Topolčany	50
6. Vlastimil Klíma, G Benešov	49
7. Josef Voldřich, G Vimperk	47
8. Jaroslav Kotas, G Česká Lípa	43
9.—10. František Ďurech, G Topolčany	38
9.—10. Kolektiv G Bratislava (Janelka, Kučera)	38

Fyzika

1. Jaroslav Červenka, G Uherský Brod	30 bodů
2. Pavel Tvrdík, G Kolín.	29
3.—7. Tomáš Frajer, SPŠS Čáslav	28
3.—7. Rupert Leitner, G Semily	28
3.—7. Zdeněk Strakoš, SPŠ Vítkovice.	28
3.—7. Michael Valášek, G W. Piecka, Praha 2	28
3.—7. Kolektiv G Bratislava (Janelka, Kučera)	28

Konstruktivní geometrie

1. Michael Valášek, G W. Piecka, Praha 2	17 bodů
2. František Ďurech, G Topolčany	16
3. Hana Kovářiková, G Jihlava	15
4. Emil Nitkulinec, G Chomutov . . .	13
5. Jaroslav Červenka, G Uherský Brod	12

Absolutní vítězové

1. Michael Valášek, G W. Piecka, Praha 2 .	99 bodů
2. Pavel Tvrdlík, G Kolín	95
3. Pavol Tarina, G Topolčany	86
4. Josef Voldřich, G Vimperk	82
5. František Ďurech, G Topolčany .	80
6. Jaroslav Červenka, G Uherský Brod	78
7. Vlastimil Klíma, G Benešov	72
8. Kolektiv G Bratislava (Janelka, Kučera)	66
9. Kolektiv G Gottwaldov (Liss, Mazardová).	63
10. Hana Kovářiková, G Jihlava	61

Nakonec připojujeme abecední seznam všech úspěšných řešitelů. Za jménem řešitele je uveden ústav, na němž řešitel studuje, pak čísla správně řešených příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie. Čísla uvedená v závorce jsou čísla příkladů rozřešených s menšími nedostatky. Příklady nesprávně řešené neuvádíme.

Vojtěch Bardiovský, SPŠE Košice, F 1, 3, 4, 6 (2); *Jiří Basler*, G Opava, M 2, 8, 10, 12 (9), F 2—4 (1, 5, 6); *Martin Baumann*, OU ČKD Praha 9, M 2, 4—8, 10, 12 (1, 3, 9, 11); *Jaroslav Červenka*, G JAK Uherský Brod, M 2, 3, 6, 9, 10, (4, 5, 11), F 1—6, G 4(1, 2); *Jozef Doboš*, G Zlaté Moravce, M 8, 10 (1, 4, 9), F 1, 2, 4 (3); *František Ďurech*, M 1, 6, 8—10, 12 (2, 4, 7), F 1—4, 6, G 3, 4 (1, 2); *Tomáš Frajer*, SPŠS Čáslav, F 1, 3—6 (2); *Václav Jirka* M 8, 10, F 1—3; *Vlastimil Klíma*, G Benešov, M 1—3, 7—10, 12 (4, 6, 11), F 2—4, 6 (1); *Jiří Kodousek*, G Olomouc, F 1—3 (4—6); *Jaroslav Kotas*, G Česká Lípa, M 2—4, 8—12 (1), F(6), G (4); *Václav Kotěšovec*, G W. Piecka Praha 2, M 1—3, 5—11 (4); *Hana Kovářiková*, G Jihlava, M 2, 3, 8—10, 12 (1, 6), F 1, 3, G 1, 2, 4; *Václav Krmela*, G Lanškroun, M 2, 10, 12 (1, 9), F 1, 3, 4 (2, 6); *Rupert Leitner*, G Semily, F 1, 3—6 (2); *Radomír Lukáš*, G Havířov, M 8, F 1—3, 6; *Lubomír Mucha*, G Prešov, M (1); *Emil Nitkulinec*, G Chomutov, G 2 (1, 3, 4); *Jiří Peterka*, G Praha 5, M 1, 2, 8, 9 (3, 4, 6, 11); *Zdeněk Strakoš*, SPŠ Vítkovice, F 1—5 (6); *Jiří Sýkora*, G Jihlava, M 2, 8, 10 (1, 4), F 1—3; *Miroslav Šedivý*, G Přerov, M 5—7, 9, 10 (1—4); *Tomáš Šigut*, G Havířov, F 1—3; *Jaroslav Švirák*, G Chomutov, M 2, F 1, G (4); *Pavol Tarina*, G Topolčany,

M 2, 3, 6, 8—12 (4, 5, 7), F 1—4, 6, G 3, 4; *Vladimír Technovský*, G Zvolen, M 2, 3, 8—10 (1, 4), F 1, 3, 4, 6 (2, 5); *Vladislav Tomášek*, G Klatovy, M 2, 8—10, 12; *Pavel Tvrdlík*, G Kolín, M 1—3, 5, 7—12 (4, 6), F 1—6, G 1, 4; *Michael Valášek*, G W. Piecka Praha 2, M 1, 2, 5—10, 12 (3, 4, 11), F 1—4, 6 (5), G 1, 2, 4 (3); *Stanislav Vaneček*, G Michalovce, F 1—4; *Josef Voldřich*, G Vimperk, M 2, 5, 7, 8, 10, 12 (1, 3, 4, 6, 11), F 1—4 (6), G 1 (3, 4); *kolektiv G Bratislava* (Janelka, Kučera), M 1, 9, 10, 12 (2—4, 6, 8, 11), F 1, 2, 4, 6 (5); *kolektiv G Gottwaldov* (Liss, Mazardová), M 2, 8, 10, 12, (1, 3—6, 11), F (2), 1, 3, 6, G (3, 4); *kolektiv SPŠ Jihlava* (Dvořáčková, Pavlas, Svobodová), M 2, 3, 8—10 (1); *kolektiv G Třinec* (Gemeth, Kožusznik), M 7—10, 12 (3); *kolektiv Esztergom* (Szücz, Hell, Hábel), M 2, 5, 9, 10, 12 (6, 8); *kolektiv Esztergom* (Sasvári, Mlinkó), M 9, 10 (4, 12).

Redakce Rozhledů děkuje všem řešitelům za projevený zájem, vítězům blahopřeje a nejúspěšnějším z nich zašle z prostředků ministerstva i SPN věcné výhry.

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

1. Daná je úsečka CP a na nej (eventuálně na jej prodloužení) bod V . Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC , keď CP je jeho výška na základňu AB a bod V ortocentrum (priesečník výšok).

Jozef Filip

(Došlo 28 riešení)

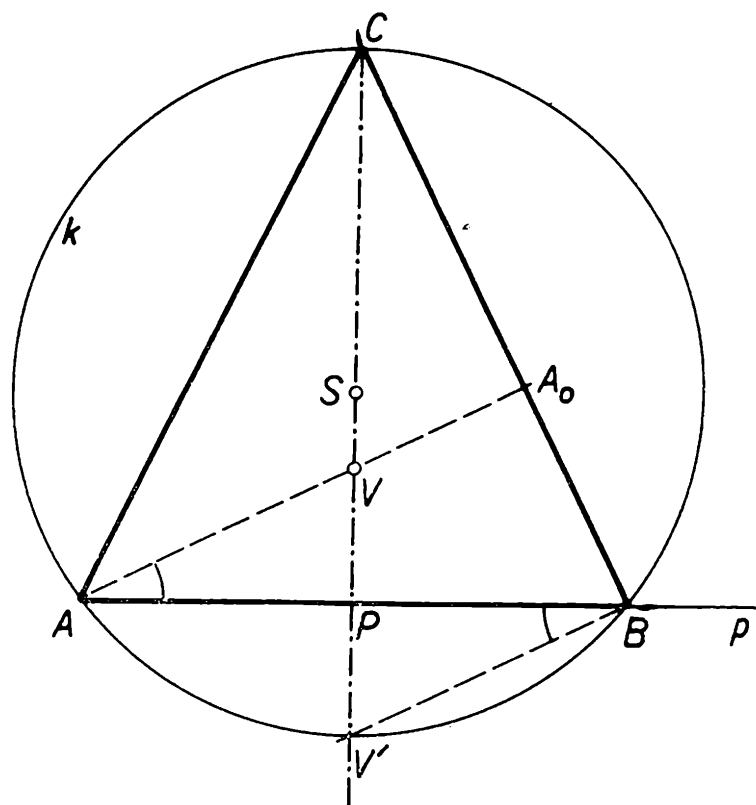
Riešil kolektív gymnázia na Novohradskej ul. v Bratislave (Janelka-Kučera):

1. Predpokladajme, že sme trojuholník ABC zostrojili a opísali mu kružnicu k (obr. 1). Pretože je rovnoramenný a teda súmerný podľa osi CP , stred S kružnice k leží na priamke CP . Ak priamka CP pretína kružnicu k okrem bodu C ešte v bode V' , je úsečka CV' priemerom kružnice k .

$$\text{Zrejme platí: } \sphericalangle APV = \sphericalangle BPV' = \sphericalangle CBV' = R. \quad (1)$$

$$\text{Vzhľadom na spomenutú súmernosť je } AP = PB. \quad (2)$$

Výška $AA_0 \perp BC$ prechádza bodom V a podľa poslednej rovnosti v (1) je $BV' \parallel AA_0$.



Ramená uhla PAV sú teda rovnobežné s ramenami uhla PBV' (a oba uhly sú ostré), preto

$$\sphericalangle PAV = \sphericalangle PBV' \quad (3)$$

Z (1), (2), (3) plynie $\triangle APV \cong \triangle BPV'$ (usu) a v dôsledku tejto zhodnosti je $VP = PV'$. To znamená, že bod V' je súmerne združený s bodom V podľa priamky $p = AB$.

2. Z rozboru vyplýva táto konštrukcia:

- Bodom P vedieme priamku $p \perp CP$,
- zostrojíme bod V' súmerne združený s bodom V podľa priamky p ,
- na priamke CP zostrojíme bod S , aby $SC = SV'$,
- zostrojíme kružnicu k (S ; $r = SC$).
- Priesečníky $p \cap k$ sú vrcholmi A, B trojuholníka ABC .

3. Správnosť konštrukcie overíme takto:

Pretože $CP \perp AB$, $SA = SB$ a $S \in CP$, je priamka CP osou úsečky AB a $AC = BC$. Trojuholník ABC je teda rovnoramenný a CP je jeho výškou na základňu AB . Pretože $V \in AA_0$ a $V \in CP$, je V ortocentrom trojuholníka ABC . Skutočne, trojuholník, ktorý vznikne z daných prvkov CP a V opísanou konštrukciou, je trojuholník ABC , ktorý sme mali zostrojiť.

4. Riešiteľnosť úlohy závisí od toho, či kružnica k pretne alebo nepretne priamku p .

Priesečník neexistuje, keď bod V' symetrický s bodom V podľa priamky p leží na polpriamke PC , resp. keď bod V leží na predĺžení úsečky CP za bod P . Keď $V \equiv P \equiv V'$, kružnica k sa priamky p síce dotkne v bode P , ale trojuholník nemožno zostrojiť.

Úloha má riešenie iba vtedy, keď bod V leží vnútri polpriamky PC . V tomto prípade má úloha vždy 1 riešenie.

Poznámka: Ak bod V leží vnútri úsečky CP , je $\triangle ABC$ ostrouhlý, ak $V \equiv C$, je $\triangle ABC$ pravouhlý, ak V leží na predĺžení úsečky PC za bod C , je $\triangle ABC$ tupouhlý, ak V delí úsečku CP v pomere $(CPV) = -2$, je $\triangle ABC$ rovnouhlý (rovnostranný).

2. V trojuholníku ABC jsou B' , C' po řadě středy stran AC , AB . Na polopřímce opačné k polopřímce $B'B$, $(C'C)$ sestrojme bod K (L) tak, aby $B'K = \frac{2}{3} B'B$ ($C'L = \frac{1}{3} C'C$). Vypočtete úhly trojuholníka ABC , jestliže trojuholníky ACK , ABL jsou pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech K , L .

Stanislav Horák

(Došlo 24 řešení)

Řešil Martin Baumann, tř. S2s OU ČKD Praha 9:

Úvodem odvodíme obecný vzorec pro délku těžnice trojuholníka. Při obvyklém označení z kosinové věty pro trojuholník ABC (obr. 1) máme

$$\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc.$$

Podobně z trojuholníka $AC'C$

$$\cos \alpha = \left(b^2 + \frac{c^2}{4} - t_c^2 \right) / bc$$

Vyloučením $\cos \alpha$ dojdeme k žádanému vzorci

$$t_c^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) - \frac{1}{4} c^2 \quad (1)$$

a cyklicky

$$t_b^2 = \frac{1}{2} (a^2 + c^2) - \frac{1}{4} b^2. \quad (2)$$

Poněvadž bod L leží na kružnici o průměru AB , platí

$$\frac{1}{3} t_c = C'L = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c \Rightarrow t_c = \frac{3}{2} c$$

Analogicky:

$$\cos \beta = \frac{5}{\sqrt[5]{133}}, \quad \log \cos \beta = 9,63\,704,$$

$$\beta = 64^{\circ}18'23''$$

a posléze

$$\cos \gamma = \frac{7}{2\sqrt[7]{19}}, \quad \log \cos \gamma = 9,90\,469,$$

$$\gamma = 36^{\circ}35'13'',$$

čímž je úloha rozřešena.

Za upozornění stojí, že někteří řešitelé si povšimli toho, že trojúhelník ACU je rovnostranný a této vlastnosti při řešení výhodně využili. [Bod U je průsečík kružnice $\left(B'; \frac{b}{2}\right)$ s těžnicí BB' .]

3. Vyjádřete logaritmus výrazu $X = \frac{x+1}{x-1}$, v němž

$$x = \frac{a^5 - 125a^3 + 3004a}{5040}$$

Josef Kotyk.

(Došlo 20 řešení.)

Riešil: Pavol Tarina, III. C, gymnázium Topolčany:

$$\begin{aligned} \text{Pre } x = \frac{a^5 - 125a^3 + 3004a}{5040} \text{ je } X = \frac{x+1}{x-1} &= \\ &= \frac{a^5 - 125a^3 + 3004a + 5040}{a^5 - 125a^3 + 3004a - 5040} \end{aligned}$$

Tento výraz je schopný logaritmovania v 6 prípadoch:

I. $a < -10$

$$\begin{aligned} \log X &= \log(-a-2) + \log(-a-4) + \log(-a-10) + \\ &+ \log(-a+7) + \log(-a+9) - \log(-a+2) - \\ &- \log(-a+4) - \log(-a+10) - \log(-a-7) - \\ &- \log(-a-9); \end{aligned}$$

II. $-9 < a < -7$

$$\begin{aligned} \log X &= \log(-a-2) + \log(-a-4) + \log(a+10) + \\ &+ \log(-a+7) + \log(-a+9) - \log(-a+2) - \\ &- \log(-a+4) - \log(-a+10) - \log(-a-7) - \\ &- \log(a+9); \end{aligned}$$

III. $-4 < a < -2$

$$\begin{aligned}\log X = & \log(-a - 2) + \log(a + 4) + \log(a + 10) + \\ & + \log(-a + 7) + \log(-a + 9) - \log(-a + 2) - \\ & - \log(-a + 4) - \log(-a + 10) - \log(a + 7) - \\ & - \log(a + 9) ;\end{aligned}$$

IV. $2 < a < 4$

$$\begin{aligned}\log X = & \log(a + 2) + \log(a + 4) + \log(a + 10) + \\ & + \log(-a + 7) + \log(-a + 9) - \log(a - 2) - \\ & - \log(-a + 4) - \log(-a + 10) - \log(a + 7) - \\ & - \log(a + 9) ;\end{aligned}$$

V. $7 < a < 9$

$$\begin{aligned}\log X = & \log(a + 2) + \log(a + 4) + \log(a + 10) + \\ & + \log(a - 7) + \log(-a + 9) - \log(a - 2) - \\ & - \log(a - 4) - \log(-a + 10) - \log(a + 7) - \\ & - \log(a + 9)\end{aligned}$$

VI. $10 < a$

$$\begin{aligned}\log X = & \log(a + 2) + \log(a + 4) + \log(a + 10) + \\ & + \log(a - 7) + \log(a - 9) - \log(a - 2) - \log(a - 4) - \\ & - \log(a - 10) - \log(a + 7) - \log(a + 9) .\end{aligned}$$

O základu z uvažovaných logaritmův treba predpokladať, že $z > 0$, $z \neq 1$.

4. Budiž α odchylka tečny hyperboly od její hlavní osy. Vyjádřete vzdálenost středu hyperboly od její tečny jako funkci proměnné α .

Emil Kraemer

(Došlo 20 řešení)

Upravené řešení Martina Baumanna, třída S 2s OU ČKD v Praze :

Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby její osou x byla hlavní osa hyperboly a osou y vedlejší osa hyperboly. Potom má hyperbola rovnici

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \quad (1)$$

kde a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa hyperboly. Její tečna, která není vrcholovou tečnou, je přímka

$$y = kx + q, \quad (2)$$

která protíná obě asymptoty a má s hyperbolou právě jeden společný bod. Proto hledáme společné body čar (1) a (2); po úpravě tak dostaneme rovnici

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kqx - (a^2q^2 + a^2b^2) = 0.$$

Má-li být přímka (2) tečnou, musí být tato rovnice kvadratickou, tj. musí být

$$a^2 k^2 - b^2 \neq 0, \quad (3)$$

a její diskriminant musí být rovný nule. Po úpravě tak dostaneme, že musí být

$$a^2 k^2 q^2 + (b^2 - a^2 k^2)(q^2 + b^2) = 0,$$

z čehož plyne

$$q^2 = a^2 k^2 - b^2. \quad (4)$$

Protože je $q^2 \geq 0$ a protože platí (3), musí být

$$a^2 k^2 - b^2 > 0 \quad (5)$$

Potom vzdálenost středu $S \equiv (0; 0)$ hyperboly (1) od přímky (2) je

$$d = \frac{|q|}{\sqrt{1 + k^2}},$$

kde q je dáno rovnicí (4). Protože $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ (stále předpokládáme, že je $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$), dostáváme po úpravě

$$d = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha}. \quad (6)$$

Jestliže jde o vrcholovou tečnu hyperboly, je $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a její vzdálenost od středu hyperboly je a ; snadno se přesvědčíme, že vzorec (6) platí i v tomto případě.

Zbývá ještě určit definiční obor funkce $d(\alpha)$ definované předpisem (6). Podle (5) musí být

$$a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - b^2 > 0,$$

$$|\operatorname{tg} \alpha| > \frac{b}{a} \quad (7)$$

Protože hyperbola je souměrná podle svých os, stačí se omezit na tu její část, která leží v I. kvadrantu; potom je $\operatorname{tg} \alpha > 0$. Z podmínky (7)

a z toho, že (6) platí i pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$, plyne, že definiční obor funkce $d(\alpha)$ je interval $\left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a}; \frac{\pi}{2} \right)$.

5. Nechť n je dané přirozené číslo a φ dané reálné číslo, přičemž $\varphi \neq 2k\pi$ ($k = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$). Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, pro která $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$, platí

$$|1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n - z_0| \leq \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|},$$

kde $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ a $z_0 = \frac{1}{2} \left(1 + i \cotg \frac{\varphi}{2} \right)$

Jaroslav Morávek

(Došlo 12 řešení)

Řešil Václav Kotěšovec, 3D G Praha 2, W Piecka 2:

Vzhledem k podmínce $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ je také $1 - a_1 \geq 0, a_1 - a_2 \geq 0, a_2 - a_3 \geq 0, \dots, a_{n-1} - a_n \geq 0, a_n \geq 0$.

Potom je ovšem

$$1 - a_1 = |1 - a_1|; a_1 - a_2 = |a_1 - a_2|; \dots; a_n = |a_n| \text{ a } |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n| = 1$$

Číslo z je komplexní jednotka a tudíž $|z| = 1$. Potom užitím trojúhelníkové nerovnosti máme:

$$\begin{aligned} 1 &= |1 - a_1| |z| + |a_1 - a_2| |z|^2 + \dots + |a_{n-1} - a_n| |z|^n + |a_n| |z|^{n+1} \geq \\ &\geq |(1 - a_1) z + (a_1 - a_2) z^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n) z^n + a_n z^{n+1}| = \\ &= |z + (a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots + a_n z^{n+1}) - (a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n)| = \\ &= |z + (z - 1)(a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n)| = \\ &= |-1 + (1 - z)(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n)| \end{aligned}$$

Za předpokladu, že je $z \neq 1$, tj. $\varphi \neq 2k\pi$ dostáváme

$$\left| 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n - \frac{1}{1 - z} \right| \leq \left| \frac{1}{1 - z} \right|$$

Dále platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - z} &= \frac{1}{1 - \cos \varphi - i \sin \varphi} \cdot \frac{1 - \cos \varphi + i \sin \varphi}{1 - \cos \varphi + i \sin \varphi} = \\ &= \frac{1 - \cos \varphi + i \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + i \cotg \frac{\varphi}{2} \right) = z_0 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{1 - z} \right| = \frac{1}{2} \left| 1 + i \cotg \frac{\varphi}{2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{\sin \frac{\varphi}{2} + i \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right| = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|}$$

Celkem tedy dostáváme:

$$|1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n - z_0| \leq \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|},$$

kde $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

$$z_0 = \frac{1}{2} \left(1 + i \cotg \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\varphi \neq 2k\pi.$$

6. Nechť je každému reálnému číslu $x (x \in \mathbf{R})$ přiřazeno nezáporné číslo $f(x)$ (tj. f je nezáporná funkce definovaná na množině všech reálných čísel) a nechť je splněna tato podmínka: Existuje kladné číslo C tak, že pro každou konečnou množinu

$$\mathbf{M} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

reálných čísel platí

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) \leq C. \quad (1)$$

Dokažte, že existuje reálné číslo α , pro které $f(\alpha) = 0$.

(Došlo 17 řešení)

Jaroslav Morávek

Řešil Miroslav Šedivý, 3. B G Přerov:

Důkaz provedeme nepřímou. Předpokládejme, že pro všechna $x \in \mathbf{R}$ je $f(x) > 0$. Podle (1) je $f(x) \leq C$ pro každé $x \in \mathbf{R}$.

Rozdělme nyní interval $\mathbf{I} = (0; C)$ na těchto nekonečně mnoho intervalů:

$$\mathbf{I}_0 = \langle 1; C), \mathbf{I}_1 = \left\langle \frac{1}{2}; 1 \right), \dots, \mathbf{I}_k = \left\langle \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right),$$

Průnik každých dvou těchto intervalů je množina prázdná. Vytvořme dále tyto množiny:

$$\mathbf{M}_i = \{x \in \mathbf{R}; f(x) \in \mathbf{I}_i\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

Označme $|\mathbf{M}_i|$ počet prvků množiny $\mathbf{M}_i$; dokážeme, že $|\mathbf{M}_i|$ je vždy konečné číslo. Předpokládejme, že pro některé i je $|\mathbf{M}_i| > C(i+1)$.

Pak je

$$\sum_{x \in M_i} f(x) \geq |M_i| \frac{1}{i+1} > C \frac{i+1}{i+1} = C,$$

ale to je ve sporu s (1).

Uspořádejme nyní prvky v každé množině M_i podle velikosti. Přiřaďme nejmenšímu prvku v množině M_0 index 1, druhému v pořadí index 2 atd.; všechny prvky množiny M_0 tak označíme pomocí n čísel. Pak nejmenšímu prvku v množině M_1 přiřadíme index $n+1$, druhému v pořadí index $n+2$ atd. Takto můžeme tedy označit všechny prvky množin M_i .

Protože je $I_i \cap I_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=0}^{\infty} I_i = (0; C)$, můžeme tak označit i prvky množiny všech reálných čísel.

Tak jsme získali vzájemně jednoznačné zobrazení množiny N všech přirozených čísel na množinu R všech reálných čísel. Avšak takové zobrazení nemůže existovat. Proto musí existovat (a to dokonce nekonečně mnoho) takových reálných čísel α , pro něž je $f(\alpha) = 0$.

Ze zahraničních časopisů

Z východoněmeckého časopisu *Alpha*:

Ukázky příkladů z XIV. olympiády mladých matematiků NDR

Třída 6.

1. Klaus tvrdí, že jím napsané přirozené číslo z má vlastnosti:

- a) Vyměníme-li v něm dvě vhodné cifry navzájem, pak vzniklé číslo z' je o 198 větší než původní z .
- b) Součet $z + z'$ jest 13 776.

Rozhodněte, zdali existuje číslo uvedených vlastností. V kladném případě je vypočítejte!

2. Anita, Brigita, Krista a Dana závodily. Na otázku, která z nich byla první, druhá, třetí nebo čtvrtá, byly vysloveny tyto 3 odpovědi:

- a) Anita vyhrála, Brigita obsadila druhé místo.
- b) Anita byla druhá, Krista třetí.
- c) Dana byla druhá, Krista čtvrtá.

V každém z daných tvrzení a), b), c) bylo právě jedno umístění správné a jedno falešné. Určete umístění závodnic.

Třída 7.

3. Běda si vypůjčil od svého přítele Maxe knihu na 6 dní. Pavlovi, který si chtěl knihu po něm vypůjčit, pravil ráno 6. dne: „První den jsem přečetl dvanáctinu knihy, další 4 dny vždy po jedné osmině a dnes, chci-li dočíst celou knihu, musím přečíst o 20 stran méně než ve všech minulých dnech dohromady“. Kolik stran má kniha?

Třída 8.

4. Nákladní auta A , B , C , D jezdí na téže trati. Jede-li A průměrnou rychlostí 56 km/h a B 40 km/h, potřebuje A právě o 2 hodiny méně na celou trať než B . Jakou průměrnou rychlostí by muselo jet auto C , jestliže D vyjelo právě o 4 hodiny dříve než C , a to průměrnou rychlostí 35 km/h, a došlo k cíli současně s C ?

Třída 9.

5. Určete nejmenší kladné číslo z , jehož trojmoc je celistvý násobek čísla 588.

Ze sovětského časopisu *Kvant*:

6. Najděte všechna p a q , pro něž mnohočlen

$$x^4 + px^3 + 17x^2 + qx + 16$$

může být čtvercem kvadratického trojčlenu!

7. Je pro libovolné přirozené číslo n výraz

$$p = n^4 + (n + 1)^4$$

vždy prvočíslem?

8. Řešte rovnici

$$x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$$

9. Řešte rovnici

$$4 \sin^4 2x + \sin^2 4x = 2.$$

10. Řešte rovnici

$$\cos x - 2 \sin \left(\frac{3}{2} \pi - \frac{x}{2} \right) = 3.$$

11. Řešte nerovnici

$$(0,2) \frac{2x - 3}{x - 2} > 5.$$

12. Najděte celou část čísla

$$10 \sqrt[10]{1 + \sqrt[10]{2 + \sqrt[10]{3 + \sqrt[10]{\dots + \sqrt[10]{1975}}}}}$$

13. Prvky množin A , B , C jsou některá z čísel 1, 2, 3, 9; najděte množiny A , B , C tak, aby platilo

$$A \cap B = \{1, 2\}, B \cap C = \{3, 7\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\},$$

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

Výsledky 1. $z = 6789$, vyměnit 7 a 9. 2. A_1, D_2, K_3, B_4 . 3. 120 stran. 4. 70 km/h. 5. $z = 42$.

6. $p_1 = 6, q_1 = 24, p_2 = 10, q_2 = -40$. 7. Nikoli, např. pro $n = 5$
 $p = 1921 = 17 \cdot 113$. 8. $x = 1$. 9. $x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4}$ 10. $x = \frac{\pi}{2} +$

$+ k\pi$. 11. $\frac{5}{3} < x < 2$. 12. 17. 13. $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\},$
 $C \equiv \{3, 4, 5, 7, 9\}$.

různé

Gaussův velikonoční recept

(Napsáno k 120. výročí Gaussova úmrtí.)

JOSEF KOTYK, Pardubice

Gauss, slovnutný princeps mathematicorum (kníže matematiků*), se zabýval také — sestavováním receptů? Snad i uměním kuchařským? Jaké překvapení!

Nikoli. Sláva v tomto směru mu zůstala odepřena.

Přece však — čteme dobře — sestavil recept velikonoční! Snad recept na výtečný velikonoční mazanec?

Nikoli, milí čtenáři! Hlubavého Gausse upoutávala jako zvláštní kouzlo jarních svátků jejich pohyblivost. Na rozdíl od vánoc, jejichž hlavní svátek připadá každoročně na den 25. prosince, slavíme první hlavní svátek velikonoční vždy v neděli, přesněji řečeno: některou neděli v období od 22. března do 25. dubna. Gausse zaujala okolnost, že běží o první neděli po jarním úplňku, a problém byl dán: Stanovit pro určitý rok datum tohoto svátku.

*) Jeho záslužnou badatelskou činnost zhodnotil autor článkem „Karl Friedrich Gauss“, otištěným v Rozhledech roč. 53, čís. 5, str. 279 až 285.

Gauss dospěl k tomuto řešení:

Jestliže n značí poslední dvojčíslí letopočtu jistého roku našeho století, a, b, c, d, e pak po řadě zbytky dělení n 19, n 4, $(n + 3) : 7$, $(19a + 23) : 30$, $2(b + 2c + 3d + 2) : 7$, připadá velikonoční neděle v uvažovaném roce buď na $(23 + d + e)$ -ého března anebo na $(d + e - 8)$ -ého dubna.

Cvičení.

Provedte podle Gaussova receptu příslušné výpočty pro poslední tři roky!

matematické zábavy

Jak je to s placením?

Karel pozval Jirku do své garsonky na malou oslavu a zakoupil pohoštění za 108 Kčs. Jirka nepřišel s prázdnou a přinesl zákusky za 72 Kčs. Dohromady bylo pro dva mnoho jídla, proto Karel pozval ještě přítele Pavla. Spojenými silami vše rovným dílem zkonsumovali, Pavel však chtěl uhradit svůj díl a říkal, že dluží Karlovi o polovinu více než Jirkovi. Oba hostitelé odmítli přijmout peníze, ale pro nás vzniká problém: Byli by tři přátelé skutečně vyrovnáni, kdyby Pavel svůj příspěvek 60 Kčs rozdělil tak, že Jirka by dostal 24 Kčs a Karel o polovinu více, tj 36 Kčs? Proč ne, když Karlovy počáteční výlohy byly o polovinu vyšší než Jirkovy?

(Nedejte se zmýlit stejnými poměry, vypočítejte Karlův a Jirkův vklad po Pavlově „refundaci výloh“ Pavel má ve skutečnosti zaplatit Karlovi čtyřikrát více než Jirkovi.)

Matematický souboj ve 13. století

Středověk měl nejen rytířské turnaje, kde vítězili fyzicky zdatní obrněnci, ale i souboje matematiků v řešení problémů. Císař Fridrich II. při svých cestách po Itálii zajel r. 1225 záměrně do Pisy, kde žil slavný matematik Leonardo, zvaný Fibonacci. V císařově doprovodu byli též zdatní matematici Giovanni z Palerma a Theodoros, kteří měli vyzkoušet Leonardův důvtip. V císařově přítomnosti řešil pak Leonardo mimo jiné i tuto úlohu:

Nalézt racionální číslo, které je druhou mocninou racionálního čísla a má tu vlastnost, že jak číslo o pět menší, tak číslo o pět větší je též druhou mocninou racionálního čísla.

(Formulace úlohy je ovšem dnešní, středověké bychom sotva porozuměli.)

Fibonacci obstál, našel čísla $\left(\frac{41}{12}\right)^2$, $\left(\frac{31}{12}\right)^2$, $\left(\frac{49}{12}\right)^2$, která mají požadované vlastnosti. Přesvědčte se o Fibonacciově důmyslu, ověřte správnost jeho řešení a pokuste se sami řešit původní úlohu. Objevíte nějaké jiné řešení?

Souboj A. van Roomena a F. Viète

Holandský matematik Adrian van Roomen uveřejnil r. 1594 výzvu matematikům celého světa, aby vyřešili rovnici 45. stupně

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 + \dots + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = A,$$

kde $A^2 = \frac{7}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{13}{6}} - \sqrt{\frac{45}{64}}$. Nizozemský vyslanec u dvora francouzského krále Jindřicha IV. se v říjnu r. 1594 chlubil učeností van Roomena a vyjádřil se, že ve Francii žádný matematik není, takže tam Roomen ani nemá komu svou výzvu poslat. „Mám zde jednoho vynikajícího matematika,“ řekl prý král a dal povolát Francoise Viète. Ten převzal od vyslance Roomenovu výzvu, přečetl ji a postřehl, že číslo A je délkou strany pravidelného 15-úhelníka vepsaného do jednotkové kružnice; podle koeficientu 45 poznal, že kořen je 45-tinou této strany. Vzápětí napsal jeden kořen rovnice a ohromil tak celý sál, druhý den ráno dodal vyslanci 22 kořenů rovnice.

Viětova sláva se rozletěla Paříží a brzy do celého světa matematiků; na oplátku poslal van Roomenovi svou úlohu: sestrojít (kružítkem a pravítkem) kružnici, která se dotýká tří daných kružnic. A. van Roomen tuto Apolloniovu úlohu sice rozřešil pomocí kuželoseček, F. Viète však znal konstrukci kružítkem a pravítkem a opět zvítězil. Poražený soupeř nezatrpkal, ale rozjel se do Paříže a s Viétou se sprátelil.

[Poznámka: F. Viète (1540–1603) znal již řešení binomické rovnice, uvedl proto kořeny, které můžeme zapsat souhrnně výrazem

$$2 \sin \frac{n \cdot 360^\circ + 12^\circ}{45} \text{ pro } n = 1, 2, \dots, 22.$$

Omezil se však jen na kořeny kladné, protože záporná čísla neuznával.]

0 minutách a vteřinách

Slova „minuta, sekunda“ jsou latinského původu a znamenají „zmenšená, druhá“. Jejich podivný význam vysvětlují úplné názvy, ze kterých jsou zmíněná slova vzata:

pars minuta prima, pars minuta secunda.

První znamená doslova „část zmenšená první“, druhý „část zmenšená druhá“ — jde samozřejmě o části hodiny. Z dlouhých názvů převzaly evropské jazyky po jednom slovu, přitom nesystematicky; proto nemáme primy, ale máme sekundy.

Na počátku 19. století vytvářeli čeští obrozenci domácí názvy, kterými bylo možno nahradit latinské termíny. Plzeňský profesor V. Sedláček navrhl r. 1822 nová slova místo minuta, sekunda, a to „*menšina, vteřina*“. V obou případech jde o překladové slovo s koncovkou přizpůsobenou slovu „hodina“. Zatímco termín „menšina“ se neujal ve významu „minuta“, slovo „vteřina“ žije dodnes. Tvůrci nové terminologie hledali vhodná slova i v jiných slovanských jazycích, zde se inspirovali asi ruským slovem „vtoroj“ nebo polským „wtory“. V. Hanka zařadil do padělku Rukopisu královédvorského slovo „vterý“ jako staročeské, toho patrně využil V. Sedláček při tvorbě slova „vteřina“. Byla to vcelku citlivá volba, protože starší slovo „úterý“ prozrazuje stejný základ i význam „druhý“ (den v týdnu). Je tedy vteřina jazykovou příbuznou úterka.

0 desetinných číslech

Desetinná čísla nemají jediného vynálezce, k jejich zavedení přispěly desítky matematiků v průběhu 16. století. Předpokladem k zápisu desetinného čísla bylo samozřejmě všeobecné rozšíření desítkového pozičního systému, ale ani to nevyvolalo potřebu zapsat v něm zlomky. Matematici 16. století se dokonce vyhýbali desetinným zlomkům, jak mohli; například osmimístné hodnoty goniometrických funkcí byly v té době udávány jako délky úseček sestrojených v kružnici s poloměrem $r = 10^8$, ne v jednotkové kružnici. Najdeme tedy

$$\sin 45^\circ = 70\,710\,678.$$

Velkým propagátorem desítkového systému byl holandský matematik *Simon Stevin*, který r. 1585 vydal knihu, v níž doporučoval odstranit počítání se zlomky a zapisovat čísla posloupnostmi cifer desítkové soustavy. Ukazoval, že všechny výpočty jsou proveditelné celými čísly bez zlomků a smíšených čísel, pohlížel přitom však na desetiny, setiny atd. jako na nové menší jednotky, neodděloval v zápisu tzv. desetinná místa od celků.

Francois Viète použil naproti tomu již r. 1579 zápisů délky kružnic, ve kterých byly číslice za počtem jednotek vytištěny menší a podtrženy. Desetinnou čárku zavedl prý *G. A. Magini* v r. 1592 a desetinnou tečku *Clavius* v r. 1593 (této tečky se dosud běžně užívá v anglosaských zemích, píše se např. 0.53).

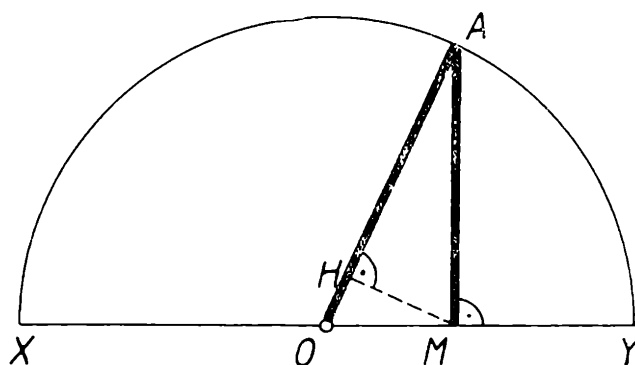
Mocniny ciferného součtu čísla

Hledejme všechna *dvojciferná* čísla, která jsou *druhou* mocninou svého ciferného součtu. Objevíme jen jediné: $81 = (8 + 1)^2$. Snadno objevíte *trojciferné* číslo, které je *třetí* mocninou svého ciferného součtu. Dále lze nalézt *čtyřciferné* číslo, které je *čtvrtou* mocninou svého ciferného součtu: $2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4$. Ale tím končí hodnoty n , pro které lze nalézt takové číslice $c_1, c_2 \dots c_n$, že platí při $c_1 \neq 0$: $c_1 \cdot 10^n + c_2 \cdot 10^{n-1} + \dots + c_n = (c_1 + c_2 + \dots + c_n)^n$. Proč asi tomu tak je?

Tři průměry ze dvou čísel

Jsou-li dána dvě kladná reálná čísla x, y , můžeme jim přiřadit hodnoty tří funkcí

$$a(x, y) = \frac{1}{2}(x + y), \quad g(x, y) = \sqrt[4]{xy}, \quad h(x, y) = \frac{2xy}{x + y}$$

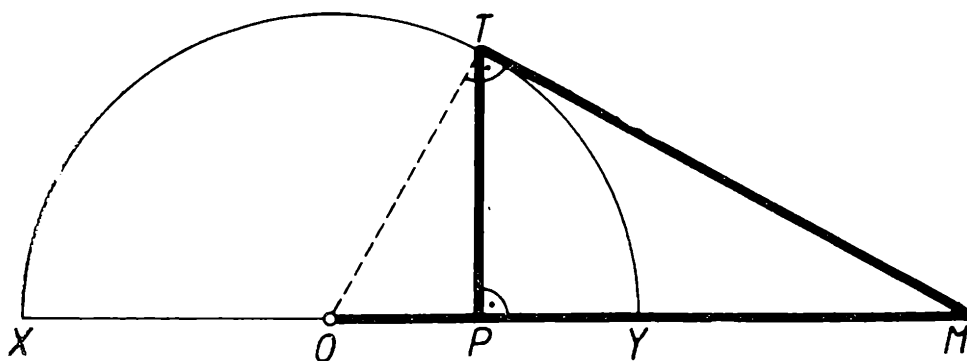


Obr. 1

které nazýváme aritmetickým (geometrickým, harmonickým) průměrem čísel x, y . Označme tato čísla stručněji a, g, h a zapišme dva vztahy, které mezi nimi platí:

$$g^2 = a \cdot h \quad a \geq g \geq h.$$

Dokažte jejich platnost algebraickou cestou, pak se orientujte v připojených obrázcích a dokažte, že při $MX = x, MY = y$ je na prvním



obrázku $OA = a(x, y)$, $AM = g(x, y)$, $AH = h(x, y)$ a na druhém $OM = a(x, y)$, $MT = g(x, y)$, $TP = h(x, y)$. Ve všech případech je zřejmě $a > g > h$. Nakreslete obrázky pro případ, kdy $x = y$.

recenze

Vladislav Vrba:

Moderní aspekty klasické fyzikální optiky

Vydala Academia, Praha 1974; 293 stran, 48 obrázků, vázaný výtisk 35,— Kčs.

Členěna do dvou částí: *interference světla* a *ohyb světla*, podává kniha zasvěcený, moderně netradiční pohled na fyzikální optiku. Označení *klasická* fyzikální optika zdůrazňuje, že jde o fyziku nekvantovou. V některých kapitolách se sice vymyká z rámce středoškolských znalostí matematiky, ale řada kapitol je středoškolským zájemcům bez obtíží přístupná. Učitelům pak poskytuje vhodný, koncepčně jednotný pohled na fyzikální optiku. Pro starší

učitelskou generaci znamená žádoucí „oprášení“ zastaralých představ, evokujících při pojmu optika v první řadě schémata čoček, dalekohledů, mikroskopu a nebeských zatmění.

Čtenář se seznámí s poválečnou renesancí optiky, vyvolanou praktickými potřebami průmyslové interferometrie, kosmonautiky, televize. Zvláště přínosné v tom ohledu jsou kapitoly věnované laserům a holografii. Bohatý jmenný a věcný rejstřík usnadňuje orientaci.

Kniha je vhodná pro školní knihovny, zvláště pak s ohledem na skutečnost, že od vydání dosud jediné (prof. V. Petržílka), dávno rozebrané české učebnice fyzikální optiky uplynulo 23 let.

Karel Mišoň

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

reciprocal	inversní, reciproký, převrácený
reciprocally	vzájemně
rectangle	obdélník
rectangular	pravoúhlý, obdélníkový
rectangular system of coordinates	pravoúhlá soustava souřadnic
rectilinear	přímočarý
recursive	rekurentní
reduce	krátit
reducible	redukovatelný, reducibilní
reduction	krácení
reflection	zrcadlení, odraz, osová souměrnost
region	oblast
regular	pravidelný, nesusulární
regularity	pravidelnost
regulus	regulus
relation	vztah, relace
relationship	vztah
relative	relativní
relatively prime	nesoudělný
remainder	zbytek
repeating decimal	periodické desetinné číslo
represent	představovat
research	výzkum
residue	zbytek, residuum
resolution of vectors	rozklad vektorů
result	výsledek, důsledek
agreement of results	shoda výsledků
resultant	výslednice
reverse	obrátit
reverse order	obrácené pořadí
reverse the order	obrátit pořadí
reverse operations	inversní operace
revolution	otočení, sklopení
revolve	otočit
counter-revolve	otočit zpět
rhombic	kosočtvercový
rhomboid	kosodélník
rhombus	kosočtverec

rhumb line
 right angle
 rigid motion
 ring
 root
 conjugate roots

 cubic root
 multiple root
 square root
 roots of unity

rotation

round

row

rule

ruled surface

saddle

 saddle point

sample

satisfy

scalar

 scalar multiplication

 scalar product

scale

 logarithmic scale

 number scale

 uniform scale

scalene triangle

scope

screw motion

secant

 secant plane

second

section

 conic section

 plane section

sector of a circle

sector of a sphere

segment

 segment of a circle

 segment of a curve

 segment of a sphere

loxodroma

pravý úhel

shodné zobrazení

okruh

kořen, odmocnina

 komplexně sdružené, konjugované
 kořeny

 třetí odmocnina

 vícenásobný kořen

 druhá odmocnina

 odmocniny jedničky

rotace, otáčení

kulatý

řada, řádek

pravidlo

přímková plocha

S

sedlo

 sedlový bod

vzorek

splňovat, vyhovovat

skalární, skalár

 skalární násobení

 skalární součin

stupnice, měřítko

 logaritmická stupnice

 číselná stupnice

 lineární stupnice

obecný trojúhelník

zorný úhel

šroubový pohyb

sečna, sekans

 sečná rovina, rovina řezu

vteřina, druhý

protínání, řez

 řez kuželem

 rovinný řez

kruhová výseč

kulová výseč

úsečka

 kruhová úseč

 oblouk křivky

 kulová úseč, kulová vrstva

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

3



ROČNÍK 54
LISTOPAD 1975

3

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1975.

OBSAH

Dr. J. Skuhra: Včely a matematika .	97
J. Berger: Množství informace v křivce .	100
Dr. K. Mišoň, CSc.: Permutace	102
Dr. J. Mida: O jednom použití dělicího poměru v mechanice tuhého tělesa	105
Ing. J. Rosa: Termolumi	110
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Nové sovětské dalekohledy	114
Dr. K. Mišoň, CSc.: Mezihvězdné poselství	118
Doc. O. Setzer: Naše účast na XVII. MMO v Burgasu	124
Prof. dr. R. Košťál: Třetí kolo kat. A XVI ročníku FO	128
Dr. J. Sedláček: Matematická olympiáda jubuluje	130
Naše soutěž	131
J. Kotyk: Giordano Bruno	138
Dr. J. Šedivý: O několika paradoxech	142
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

matematika

Včely a matematika

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

Každá vědecká disciplína nejprve začne třídít známá fakta a pak poznávat vztahy. Stejně tak i biologie. Nejprve biologové veškerou flóru a faunu roztrídili do velkého množství „škatulek“ — kmenů, tříd, řádů, rodů, druhů atd. Při studiu vztahů mezi zjištěnými fakty začali biologové používat matematiky. V tomto článku se seznámíte s jedním použitím matematické statistiky v biologii. Nejde o věc vymyšlenou. Skutečně, jednoho dne přišli biologové na MFF UK v Praze, aby se poradili s matematiky o problému, jak zjistit délku sosáku včely *Apis mellifica*.

„Z jistých důvodů potřebujeme znát délku sosáku včely. Nejlepší je samozřejmě tuto délku přímo změřit, což se také děje. Jsou s tím však velké problémy. Včela se totiž nechce dobrovolně podrobit tomuto úkonu a odmítá nám sosák pro měření vystrčit. Jsme tedy nuceni použít práva silnějšího. Celá operace vyžaduje mnoho času, trpělivosti, vypětí pracovníků. Na druhé straně snadno změříme délku a šířku křídel a snadno určíme hmotnost včely. Vzhledem k proporcionalitě těla každého živého tvora se domníváme, že je možné délku sosáku, jakožto veličiny obtížně měřitelné, vypočítat z některých snadno měřitelných veličin či jejich kombinace (délka, šířka křídel, hmotnost).“

Statistikové si vyžádali od biologů přesné údaje těchto čtyř veličin měřených u 250 náhodně vybraných včel. Tyto údaje dostali a část z nich máte otištěnu v tabulce na str. 98.

Tabulka poskytuje první informaci. Přehledněji tuto informaci pro dvojice veličin přináší graf. Na připojeném grafu máte znázorněny izolovanými body včely číslo 1—20. Graf napovídá, že by mezi délkou křídla x a délkou sosáku y mohl být lineární vztah. K témuž názoru dospějeme, když uvážíme proporcionalitu těla. Je jistě logické předpokládat, že všechny délky na těle živých tvorů jsou navzájem přímo úměrné. Pozor, my máme svou logickou úvahu experimentálně potvrzenou na grafu! Bez potvrzení experimentem by se mohlo stát, že bychom se opírali o špatnou konstrukci.

Statistikové přijali jako výchozí hypotézu, že vztah mezi veličinami x a y je lineární a rozdíly, které se projevují, jsou náhodné vlivy, které

Číslo včely	Délka křídla x [mm]	Délka sosáku y [mm]
1	8,6	5,8
2	9,2	6,0
3	10,3	6,8
4	10,9	8,1
5	7,8	6,2
6	8,0	5,7
7	9,1	6,4
8	9,8	7,2
9	9,5	6,7
10	9,5	6,9
11	8,8	6,6
12	9,8	6,5
13	8,3	5,9
14	9,9	7,2
15	7,7	6,0
16	8,3	5,6
17	10,7	7,1
18	10,9	7,3
19	8,9	6,5
20	9,6	6,3

při růstu včely působí a porušují přesný lineární vztah. Vychází se tedy z předpokladu, že přesně platí relace

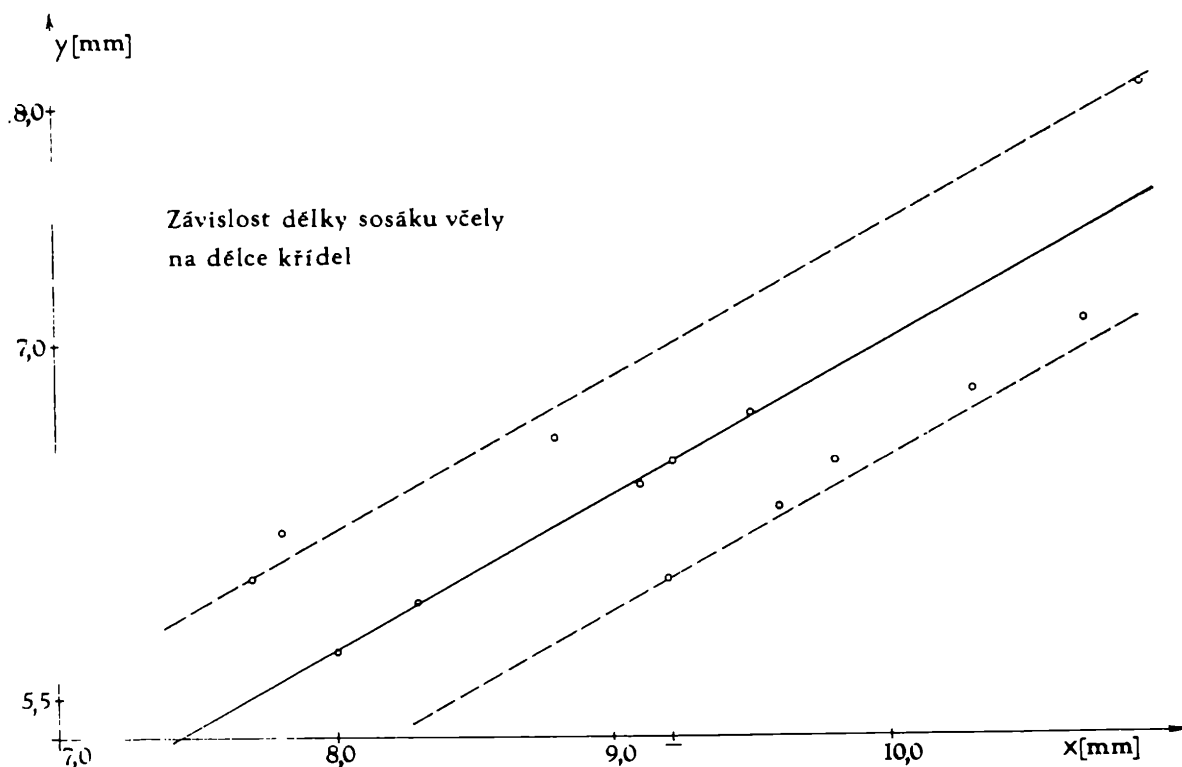
$$y = a + bx .$$

Mezi naměřenými hodnotami x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, 250$) platí tento vztah také až na náhodnou chybu e_i , tj. je splněna pro každé i relace

$$y_i = a + bx_i + e_i .$$

Dále předpokládáme, že chyby e_i působí stejně často v kladném jako v záporném směru. Matematicky řečeno, předpokládáme, že střední hodnota chyb je rovna nule. Z těchto a ještě některých dalších předpokladů vyplývá, že statistik při zpracování naměřených dat použije lineární regresi pro odhad neznámých parametrů a, b v lineárním vztahu. O lineární regresi si povíme více v některém dalším článku. Nyní uvedeme pouze výsledné vzorce, které potřebujeme. Odhady neznámých parametrů a, b označíme $\hat{a}, \hat{b}$. Platí

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} ,$$



$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x},$$

kde $\bar{x}$, $\bar{y}$ jsou aritmetické průměry naměřených hodnot veličin x a y a ve vzorci pro $\hat{b}$ se sčítá přes index $i = 1, 2, \dots, 250$.

Po určité početní námaze dostaneme

$$\bar{x} = 9,21 \text{ mm}, \bar{y} = 6,50 \text{ mm}, \hat{b} = 0,61, \hat{a} = 0,88 \text{ mm}$$

a hledaný lineární vztah je

$$\hat{y} = 0,88 + 0,61x$$

nebo v jiném vyjádření

$$\hat{y} = 6,50 + 0,61(x - 9,21);$$

přitom stříšku nad y děláme proto, abychom podtrhli, že jde o odhad. Na grafu je tato přímka zakreslena. Z druhého vyjádření je ihned patrné, že přímka musí procházet bodem $[\bar{x}, \bar{y}]$. Tento bod je v grafu vyznačen kroužkem.

Nyní stačí změřit včele délku křídla, například naměříme 9,3 mm, a z odvozeného vztahu vypočítáme odhad délky jejího sosáku, což je 6,6 mm. Výhodou je, že nemusíme včelu přesvědčovat, aby si sosák nechala změřit. Ovšem tím, že počítáme odhad, dopouštíme se určité chyby. Skutečná délka sosáku konkrétní včely je obecně jiná, i když blízká hodnotě vypočtené. Chyba, které se dopouštíme v případě uvedeného modelu, je vyjádřena číslem 0,5 mm, které jsme vypočetli z na-

měřených hodnot (blíže o tom pojednáme ve zmíněném článku o lineární regresi). Znamená to asi tolik, že skutečná hodnota délky sosáku zkoumané včely je nejspíše v intervalu (6,1; 7,1). Symbolikou, které používáte ve fyzikálním praktiku, můžeme napsat

$$y = \hat{y} \pm 0,5 \text{ mm .*)}$$

Protože biologové jsou schopni měřit délku sosáku přesněji a také to přesněji potřebují znát, hledá se dále vztah mezi délkou sosáku a nějakou *kombinací* snadno měřitelných veličin, který by dovoloval přesnější odhady, tj. odhady s menší chybou.

Závěrem poznamenejme, že lineární regrese nepoužívají jenom biologové. Regrese se počítá všude, kde jde o hledání vztahů mezi dvěma či více náhodnými veličinami. Nebudeme zde vyjmenovávat všechny obory, kde se tato úloha vyskytuje. Ale jeden obor je nutno jmenovat v souvislosti se zvyšováním životní úrovně — jde o ekonomii, jde o naše národní hospodářství. V některém z dalších článků se k tomu vrátíme.

Množství informace v křivce

J. BERGER, Pardubice

Mnohé moderní měřicí přístroje jsou vybaveny zapisovači, které automaticky zaznamenávají na pruh odvíjejícího se papíru změny sledované fyzikální veličiny v čase. Mnohé záznamy (např. změn teplot) jsou získávány během poměrně dlouhé časové periody (den a více), zatímco samotné vyhodnocení záznamu vyžaduje mnohem méně času. Naopak některé procesy probíhají tak rychle, že sledování změn hodnot příslušných veličin na měřicích přístrojích není v možnostech lidských smyslů. V tomto případě automaticky pořízené záznamy jsou jediným možným zdrojem pro studium sledovaného procesu. Jako příklad můžeme uvést v lékařství používané elektrokardiogramy (EKG), na nichž je zachycena změna elektrického potenciálu v srdci v průběhu jednoho tepu, tj. během méně než jedné vteřiny. EKG je obrazem srdeční činnosti a odchylky v průběhu elektrického napětí v srdečních svalech během tepu ukazují na „závadu“ neboli chorobu srdce.

Položme si otázku: „Jak dlouhou dobu potřebuje lékař, aby si prostudoval křivku zobrazenou na EKG během jedné vteřiny?“ Při řešení této úlohy budeme muset vyjít z toho, že člověk je schopen za vteřinu

*) Přímkou vytaženou přerušovanou čarou znázorňují funkce $y = \hat{y} + 0,5$, $y = \hat{y} - 0,5$.

zpracovat maximálně 25 bitů. Je proto zapotřebí vypočítat množství informace, které je obsaženo v EKG. V minulém ročníku Rozhledů jsme si sice ukázali postup při výpočtu množství informace v živém organismu, který je založený na sčítání množství jednotlivých informací, ale v případě EKG máme před sebou místo jednotlivých prvků spojitou křivku.

Řešení problému představuje metoda podle *N. Wienera*, pomocí níž spojitou křivku nahradíme nejmenším počtem bodů, který je postačující pro určení křivky. Tyto body považujeme za nositele informace obsažené v křivce. Proto nejprve zjistíme nejmenší nutný počet bodů, pak vypočteme množství informace nesené jedním bodem a vynásobením této hodnoty počtem bodů obdržíme množství informace obsažené v křivce.

Použijme k řešení konkrétní příklad, jímž bude EKG získaný na přístroji, který vzhledem ke své konstrukci je schopen rozlišit změny elektrického potenciálu nanejvýše s frekvencí 70 Hz (říkáme, že „kapacitní kanálu je 70 Hz“). Pak podle *E. Zuhrt*a platí, že kontinuální křivku EKG lze nahradit uvnitř časové periody rovné jedné vteřině

$$2 \cdot T \cdot f = 2 \cdot 1 \text{ s} \cdot 70 \text{ s}^{-1} = 140$$

140 navzájem různými body. (T = doba trvání periody, f = nejvyšší možná frekvence změn signálu, rozměr Hz je v rovnici nahrazen s^{-1} .)

Každý z těchto 140 bodů může nabýt hodnoty odpovídající jednomu mV s přesností na 0,03 mV, takže snadno vypočteme, že každý bod může nabýt

$$\frac{1 \text{ mV}}{0,03 \text{ mV}} = 33$$

33 různých hodnot. Pak tedy již podle *Shannonovy* rovnice, s kterou jsme se seznámili v Rozhledech m. f. 53 (1975), č. 10, str. 494:

$$H = - \sum_i p(i) \log_2 p(i) ,$$

(kde H = množství informace v bitech),

$p(i)$ = pravděpodobnost nabytí některé z hodnot), platí, že jeden bod křivky EKG obsahuje množství informace

$$H = 33 \frac{1}{33} \log_2 33 = \log_2 33 \doteq 5 \text{ bitů} .$$

Vzhledem k tomu, že bodů je 140, pak křivka obsahuje množství informace

$$140 \cdot 5 \text{ bitů} = 700 \text{ bitů} .$$

Jak jsme uvedli v úvodu, lékař zpracuje za vteřinu maximálně 25 bitů, tzn. ke zpracování křivky zobrazující elektrickou činnost srdečních

svalů během pouhého jednoho tepu trvajícího asi jednu vteřinu (EKG) potřebuje nejméně

$$\frac{700 \text{ bitů}}{25 \text{ bitů} \cdot \text{s}^{-1}} = 28 \text{ s} ,$$

28 vteřin.

V tomto i v minulém článku jsme si vysvětlili výpočet množství informace u dvou odlišných případů. Oba uvedené postupy může čtenář uplatnit u všech ostatních případů, které si může nalézt i sám a vypočítat např. množství informace obsažené na jedné stránce Rozhledů, množství informace v grafu získaném při některém fyzikálním pokusu apod. Vnímavý čtenář přitom postřehl, že výpočty se týkají informace chápáné poněkud jinak, než je tomu v běžném životě. Zde je informace chápána širě, a to jako míra uspořádanosti nebo organizovanosti. Je to informace, která je ústředním pojmem teorie informace, tj. teorie, která je jedním z nejdůležitějších oborů kybernetiky. Teorie informace našla použití i v jazykovědě např. při studiu původu jazyků, pronikla i do psychologie, do biologie atd.

Permutace

RNDr, KAREL MIŠOŇ, CSc., ČVUT Praha

K pojmu permutace lze v matematice přistoupit dvěma odlišnými způsoby. Starší hledisko (α) spatřuje v permutacích různá pořadí nějakých jakýchkoliv prvků (původně šlo jen o konečný počet prvků — což se ostatně i nadále obyčejně předpokládá). Pozdější hledisko (β) spatřuje v permutacích různá prostá zobrazení množiny na sebe. Obě pojetí se obvykle zahrnuje do nižší, elementární matematiky. Přitom význam (α) bývá v pedagogické praxi úvodním, názorným, středoškolským přístupem (třeba při elementárním pojetí počtu pravděpodobnosti). Pojetí (β) se zavádí na mírně vyšším stupni matematického vzdělání (determinanty, grupy). Přihlédneme k oběma pojetím.

V hledisku (α) znamenají různé permutace různá uspořádání množiny. Např. trojici *různých* prvků (nezávisle na jejich podstatě) a, b, c lze uspořádat celkem do šesti různých pořadí (permutací): a, b, c ; a, c, b ; b, a, c ; b, c, a ; c, a, b ; c, b, a . Příkladem permutace písmen jistého jazyka je třeba jeho abeceda (lexikografický pořádek), příkladem permutace solmizačních slabik je (třeba) jejich uspořádání hudební stupnicí. Vedle uspořádání konečné množiny prvků lze uvažovat i uspořádání množiny

nekonečné. Výchozím příkladem v tom ohledu bývá soubor přirozených čísel uspořádaný do přirozené číselné řady.

V dalším uvažujeme konečný obecný počet n různých prvků, jež rozlišujeme čísly přirozené číselné řady

$$1, 2, 3, \dots, n; \quad n \text{ přirozené číslo.}^*) \quad (1)$$

Pro potřebu obecných úvah o permutacích jsou čísla řady (1) představitelem jakéhokoliv obecného konečného n -členného souboru vzájemně různých prvků. Posloupnost (1) sama pak je jeho jednou (při úvahách zpravidla výchozí) permutací. Každé n -členné pořadí (uspořádaná množina)

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n,$$

sestavené ze všech čísel $1, 2, \dots, n$, je jistou permutací těchto čísel. Tím je i jistou permutací obecného n -členného souboru, jehož prvky jsou reprezentovány prvými n členy přirozené řady číselné. Každá taková (konečná!) permutace neprázdné množiny prvků

- I. obsahuje právě jeden první prvek, který sám jediný nemá žádného předchůdce
- II. obsahuje právě jeden poslední prvek, který sám jediný nemá žádného následovníka.
- III. Za každým z prvků s výjimkou posledního existuje právě jeden následovník.
- IV. Před každým z prvků s výjimkou prvního existuje právě jeden předchůdce.

Případ splývajícího prvního a posledního prvku ($n = 1$) je zřejmý.

Počet všech možných různých pořadí (permutací) uskutečnitelných v n -tici různých prvků je

$$P_n = 1, 2, 3, \dots, (n - 1), n = n!; \quad n = 1, 2, 3, \quad (2)$$

Symbol „!“ čteme *faktoriál*; dříve se říkalo *fakulta*. Pro $n = 0$ klademe definitoricky $P_0 = 0! = 1$: „prázdnou množinu lze uspořádat právě jedním způsobem, resp. všechna pořadí jejích členů jsou stejná, resp. prvky prázdné množiny nelze nijak představovat“. Číslo P_n určuje počet všech možných způsobů, jimiž lze uspořádat množinu o n prvcích.

Důkaz vztahu (2) podáme dvěma způsoby:

Prvý způsob. Budiž P_n počet permutací z n různých prvků $1, 2, \dots, n$ (n přirozené). Další, ode všech odlišný prvek $n + 1$ lze v každé z P_n permutací

$$a_1, a_2, \dots, a_n^{**})$$

*) Ohledně případu $n = 0$ srovn. níže.

**) libovolné pořadí z čísel $1, 2, \dots, n$

umístit buď před první

$$n + 1, a_1, a_2, \dots, a_n$$

nebo za poslední

$$a_1, a_2, \dots, a_n, n + 1$$

nebo mezi kterékoli dva sousedy

$$a_1, a_2, \dots, a_i, n + 1, a_{i+1}, \dots, a_n; \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Získáme tak celkem $1 + 1 + n - 1 = n + 1$ různých permutací z $n + 1$ prvků $1, 2, \dots, n, n + 1$. Provedení takovýchto $n + 1$ lokalizovaných adjunkcí v každé z P_n možných permutací z n prvků vyčerpává právě všechny možné permutace z $n + 1$ prvků, pro jejichž počet tedy platí

$$P_{n+1} = (n + 1)P_n. \quad (3)$$

To je rekurentní závislost, která se zřejmým $P_1 = 1$ indukčně poskytuje

$$P_n = n! \quad (4)$$

Předchozí odvození se týká přirozených n . Položíme-li ještě formálně $P_0 = 1$, zahrne (4) (s ohledem na definici symbolu $0! = 1$) všechna nezáporná celá $n = 0, 1, 2, \dots$.

Druhý způsob. Požadavek, aby jeden určitý prvek (třeba a_i) $(n + 1)$ členného souboru byl na prvním místě posloupnosti všech členů souboru, lze uskutečnit právě tolika způsoby, kolika způsoby lze permutovat (přestavět, přerovnat, přemístit, přeřadit, uspořádat) zbývajících n členů souboru, tj. P_n možnostmi. Za první člen a_i lze postupně volit všech $n + 1$ prvků souboru; přitom každé z voleb přísluší P_n rozmantých pořadí zbývajících prvků. Celkem lze tedy $(n + 1)$ různých prvků permutovati $P_{n+1} = (n + 1)P_n$ způsoby. To je znova dřívější vztah (3).

Na dvě permutace z týchž n prvků

$$a_1, a_2, \dots, a_n; \quad b_1, b_2, \dots, b_n \quad (5)$$

lze pohlížet jako na (prosté, vzájemně jednoznačné) zobrazení čísel (1) na sebe:

$$a_i \rightarrow b_i; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Při zvoleném — řekněme základním — pořadí pak každé permutaci odpovídá právě jedno takové zobrazení a každému takovému zobrazení aplikovanému na uspořádanou množinu odpovídá právě jedna permutace. Je zvykem obě permutace (5) psát do dvojřádkového schématu

$$\begin{Bmatrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Tak je znázorněno zobrazení (6). Ve druhém (prvním) řádku zápisu (7) lze spatřovat permutaci prvního (druhého) řádku. Toto pojetí odpovídá

množinové definici (β), připomenuté úvodem. Přitom je zásadní okolností pro pojetí symbolu (7) jako zápisu zobrazení, že pořadí sloupců v zápise je nepodstatné. Vyčerpáme-li všechna možná zobrazení a zapíšeme je tak, že první řádky v (7) jsou vesměs stejné, třeba

$$\left\{ \begin{matrix} 1, & \dots, & n, \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_n \end{matrix} \right\} \quad \left\{ \begin{matrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_n \end{matrix} \right\}, \dots, \quad (8)$$

nahlédneme:

Konečné množině o n různých prvcích přísluší právě $n!$ různých zobrazení na sebe.

V pojetí (8) jsou permutace tří prvků, jež jsme výše připomenuli, vyčerpány v zobrazeních

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c \\ a, & b, & c \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c \\ a, & c, & b \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c \\ b, & a, & c \end{matrix} \right\}, \\ \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c \\ b, & c, & a \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c \\ c, & a, & b \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c \\ c, & b, & a \end{matrix} \right\} \end{array}$$

Cvičení pro trpělivé počtáře.

Vypočtěte $n!$ pro $n = 0, 1, 2, \dots, 20$. Vyšlo vám

$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$? Tolika způsoby (triliony!) lze rozsadit do dvaceti lavic dvacet žáků. Pro třicet žáků by už šlo o kvintiliony! Uvažujte o případě, kdyby bylo lavic více než žáků! Při jednoúčelovém výpočtu samotné hodnoty $20!$ není ovšem třeba počítat postupně $3!, 4!, \dots, 19!$ a konečně $20!$ Zvolme třeba postup:

$$\begin{aligned} 20! &= 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 10^4 \cdot 2^{14} \cdot 3^8 \cdot 7 \cdot 1001 \cdot 17 \cdot 19 \\ &= 10^4 \cdot 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 1001 \cdot 102 \cdot 114 = 10^4 \cdot 2^8 \cdot 3^6 \cdot 112 \cdot 1001 \cdot 102 \cdot 114 \\ &= 6^4 \cdot 144 \cdot 114 \cdot 112 \cdot 102 \cdot 1001 \cdot 10^4 \cdot 1296 \cdot 144 \\ &\quad \begin{array}{r} 5184 \\ 5184 \\ \hline 186624 \quad 114 \\ \hline 2052864 \\ 746496 \\ \hline 21275136 \quad 112 \\ \hline 234026496 \\ 42550272 \\ \hline 2382815232 \quad 102 \\ 4765630464 \\ \hline 243047153664 \cdot 1001 \\ 243047153664 \\ \hline 243290200817664 \quad 10^4 = 20! \end{array} \end{aligned}$$

Nahlédnutí za oponu školních osnov

Podle předchozího zavedení je symbol $n!$ celočíselnou funkcí celočíselného argumentu. Zobecnění do oboru reálných i komplexních čísel poskytuje nevlastní integrál

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

vyšetřovaný *L. Eulerem* (1707–1783). Označení Γ (gama funkce) pochází od *A. M. Legendra* (1752–1833), který užíval názvu Eulerův integrál druhého druhu. Čtenář znalý integrálního počtu se přesvědčí, že

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Patrně s ohledem na součinnou (produkt, Π) vlastnost užíval *C. F. Gauss* (1777–1855) označení $\Pi(x-1) = (x-1)!$ Bohatá literatura svědčí výmluvně o širokém významu funkce Γ jak v fyzí matematice, tak i v aplikacích. Připomeneme alespoň jednu — ne zcela běžnou — drobnost: Touto funkcí (přesněji její logaritmickou derivací) označovanou

$$\Psi(x) = \frac{(x!)' }{x!}$$

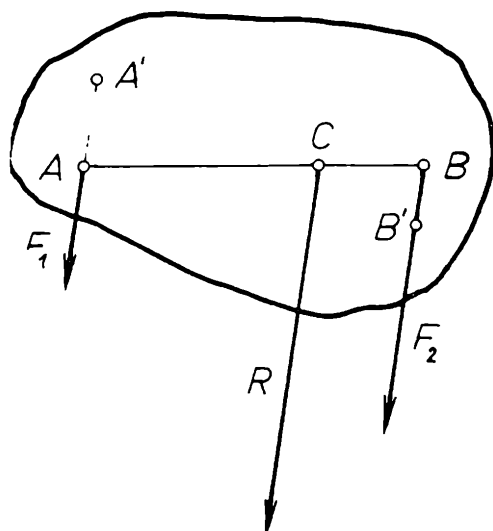
lze vyšetřovat sklon hlediště, který by ekonomicky zabezpečil viditelnost scény návštěvníkům.

fyzika

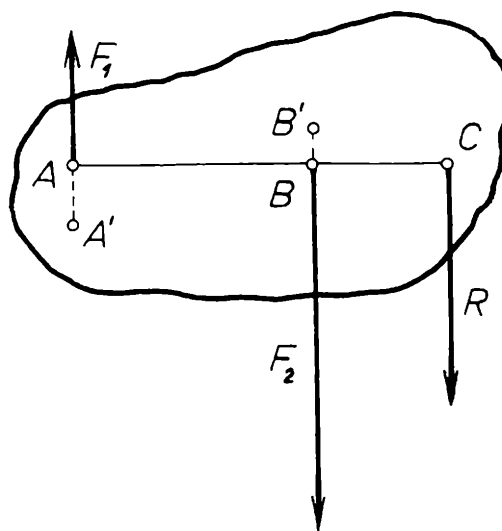
0 jednom použití dělicího poměru v mechanice dokonale tuhého tělesa

RNDr. JIŘÍ MÍDA, UK Praha

V článku „Hmotný střed soustavy hmotných bodů“ od Josefa Kotyka, který byl uveřejněn v 1. čísle Rozhledů v roč. 53, byl definován dělicí poměr pro tři body. Tohoto pojmu pak bylo využito při určování polohy hmotného středu soustavy hmotných bodů. Dalším použitím dělicího poměru v mechanice se budeme zabývat v tomto článku.



Obr. 1



Obr. 2

Nejdříve vyslovíme znovu definici dělicího poměru, a to pomocí prostředků vektorové analytické geometrie. Vystačíme při tom se znalostmi z učebnice [1].

Definice. Necht A, B, C jsou tři navzájem různé body. Pak číslo λ nazýváme *dělicím poměrem bodu C vzhledem k bodům A, B* (v tomto pořadí) a užíváme zápisu

$$\lambda = (ABC),$$

právě když platí

$$C - A = \lambda \cdot (C - B).$$

Z definice dělicího poměru je zřejmé, že pokud body A, B, C neleží v téže přímce, dělicí poměr (ABC) neexistuje. Dále lze snadno zjistit, že leží-li bod C mezi body A, B , pak $(ABC) < 0$, a že v případě, kdy bod C leží na přímce AB vně úsečky AB , je $(ABC) > 0$. Obtíž je dokázat, že neexistuje taková trojice navzájem různých bodů A, B, C , pro kterou by platilo $(ABC) = 0$ nebo $(ABC) = 1$.

Důležitou úlohou v mechanice dokonale tuhého tělesa je *skládání dvou rovnoběžných sil*, jejichž vektorové přímky nesplývají. V případě, že uvažované síly netvoří tzv. dvojici sil, pak se obvykle rozlišují dva případy. Tyto dvě možnosti jsou znázorněny na obr. 1 a 2.

Na obou obrázcích mají síly F_1 a F_2 po řadě působiště A, B a jejich výslednice R působiště C . Předpokládáme-li, že orientované úsečky znázorňující síly F_1, F_2 a R jsou po řadě umístěními vektorů*) f_1, f_2 a r , pak v obou případech platí

$$r = f_1 + f_2. \quad (1)$$

Většině čtenářů je jistě známo, jakou polohu má bod C vzhledem k bodům A, B . Nebude však jistě na škodu, když si to připomeneme. Výklad lze nalézt např. v učebnici [2].

*) Názvu „vektor“ užíváme v souladu s učebnicí [1].

V případě znázorněném na obr. 1 leží bod C mezi body A a B a poměr jeho vzdáleností od bodů A , B je roven poměru velikostí sil $\mathbf{F}_2$ a $\mathbf{F}_1$.

V případě znázorněném na obr. 2 leží bod C na prodloužení úsečky AB za působíště větší síly (tj. za bod B) a poměr jeho vzdáleností od bodů A , B se rovná poměru velikostí sil $\mathbf{F}_2$ a $\mathbf{F}_1$.

Z předešlých dvou odstavců plyne, že v obou případech znázorněných na obr. 1 a 2 platí:

$$(ABC) \cdot \mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2 \quad (2)$$

Platnost rovnosti (2) dokažme. Síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ jsou rovnoběžné, a proto existuje číslo k , pro které platí

$$\mathbf{f}_2 = k \cdot \mathbf{f}_1 \quad (3)$$

Protože vektory $\mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_2$ jsou zřejmě nenulové, platí rovnost (2), právě když

$$(ABC) = -k,$$

tj.

$$C - A = -k (C - B) \quad (4)$$

V případě znázorněném na obr. 1 je $k > 0$, v případě z obr. 2 je $k < 0$. Zamyslíme-li se tedy nad rovnostmi (3) a (4), zjistíme, že pro body A , B , C a vektory $\mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_2$ skutečně rovnost (2) platí.

Pro dané body A , B a síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ je rovností (2) jednoznačně určeno působíště C výslednice R . Nejprve totiž nalezneme číslo k , pro které platí rovnost (3). Takové číslo k existuje právě jedno. Pak z rovnosti (2) dostáváme rovnost (4), kterou upravíme na tvar

$$C - A = -k [(C - A) + (A - B)],$$

odkud plyne

$$(k + 1) (C - A) = k (B - A)$$

Síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ netvoří dvojici sil, takže $k \neq -1$. Tedy z poslední rovnosti plyne

$$C = A + \frac{k}{k + 1} \cdot (B - A)$$

Z předchozích úvah plyne, že výslednice dvou rovnoběžných sil, které působí na totéž dokonale tuhé těleso, přičemž netvoří dvojici sil a mají různé vektorové přímky, je jednoznačně určena rovnostmi (1) a (2).

Rovnosti (2) v dalším užijeme ještě k řešení jednoho problému. Jeden ze základních poznatků z mechaniky dokonale tuhého tělesa je obsažen ve větě (viz [2], str. 109):

„Účinek síly na dokonale tuhé těleso se nezmění, posuneme-li její působíště do libovolného bodu tělesa na vektorové přímce síly.“

Této větě se užívá při skládání různoběžných sil působících na totéž tuhé těleso. Při skládání rovnoběžných sil se o ní obvykle nehovoří. Lze však formulovat následující *problém*:

Posuňme na obr. 1 a na obr. 2 působí síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ do bodů A' a B' , jež leží na vektorových přímkách těchto sil. Mají pak síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ skutečně nezměněný celkový účinek, tj. leží působíště C' výslednice sil $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ s působíšti A' a B' na vektorové přímce síly $\mathbf{R}$?

Nechť pro číslo k platí rovnost (3). Potom podle (2) pro body A, B, C, A', B', C' platí:

$$C - A = -k (C - B) \quad (5)$$

$$C' - A' = -k (C' - B') \quad (6)$$

Z rovnosti (5) dostáváme

$$\begin{aligned} (C - C') + (C' - A') + (A' - A) &= \\ &= -k [(C - C') + (C' - B') + (B' - B)], \end{aligned}$$

odkud podle (6) plyne

$$(C - C') + (A' - A) = -k [(C - C') + (B' - B)]$$

tj.

$$(k + 1) (C - C') = (A - A') + k (B - B')$$

Síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ netvoří dvojici sil, a proto $k \neq -1$. Z poslední rovnosti tedy dostáváme

$$C - C' = \frac{1}{k + 1} (A - A') + \frac{k}{k + 1} (B - B'),$$

odkud je zřejmé, že bod C' skutečně leží na vektorové přímce výslednice $\mathbf{R}$. Odtud také plyne, že bod C' je průsečíkem přímky $A'B'$ a vektorové přímky výslednice $\mathbf{R}$.

Poznámka. Z tohoto článku a z článku uvedeného v jeho úvodu by bylo možno nabýt dojmu, že dělicí poměr byl v matematice zaveden pro potřebu mechaniky. To by však byl značný omyl. Dělicí poměr je velmi důležitým pojmem afinní geometrie. Čtenář se o tom může přesvědčit např. v nedávno vydané brožuře [3] na str. 124 až 127.

Literatura :

- [1] E. Kraemer a kol.: Matematika pro III. roč. SVVŠ (SPN Praha 1965, 1. vydání)
- [2] J. Marek a kol.: Fyzika pro I. roč. SVVŠ (gymnasia) (SPN Praha 1972, 5. vydání)
- [3] J. Výšín a kol.: XXII. ročník matematické olympiády (SPN Praha 1974)

Termoluminiscence

Ing. J A N R O S A, Fyzikální ústav ČSAV, Praha

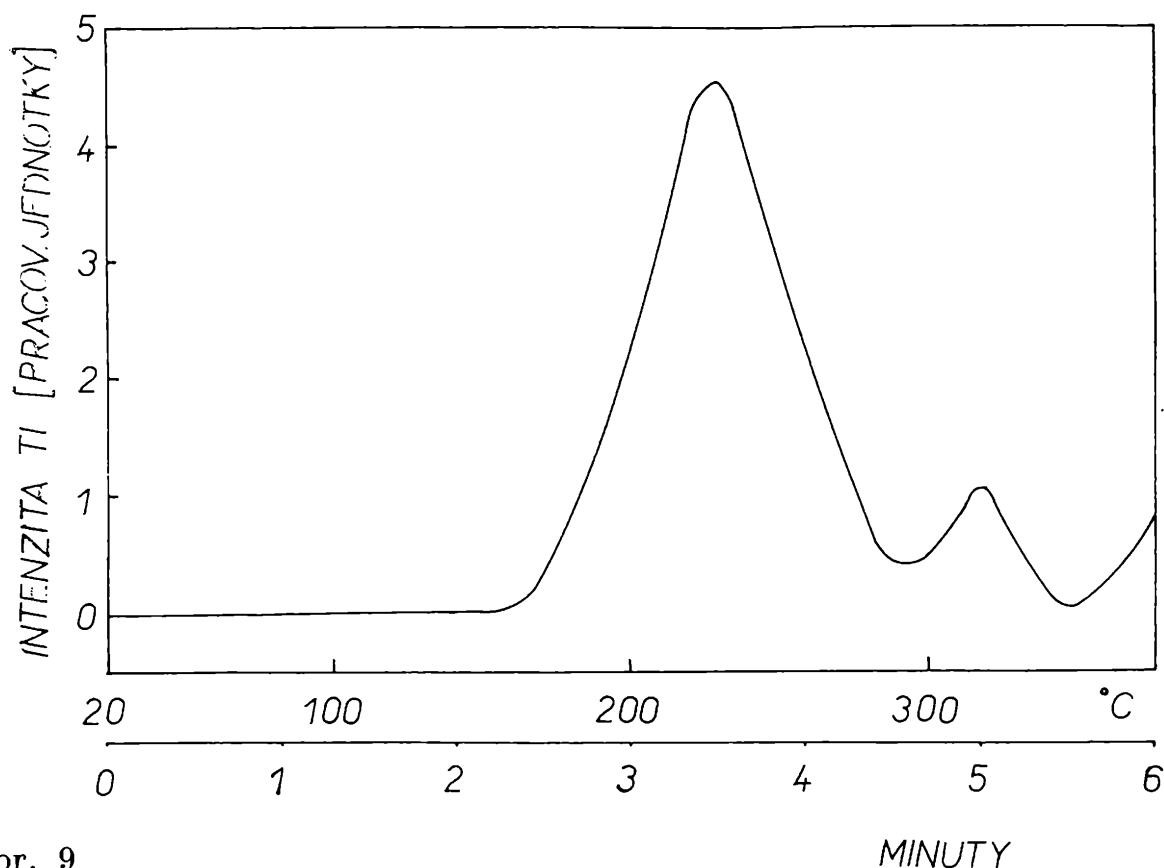
Před časem jsem četl v jednom časopise krátkou zprávu o tom, že angličtí vědci za pomoci termoluminiscence odhalili padělek v sošce jezdce, nalezené v Číně. Tato soška byla pokládána za zcela ojedinělý nález — odborníky datovaný do 3. tisíciletí p.n.l. Pozorný čtenář zajímavostí si jistě vzpomene na některé další podobné zprávy.

Co to vlastně je ta termoluminiscence? (Především dlouhé slovo, a proto si je a od něho odvozené přídavné jméno zkrátíme dvěma písmeny TL). Samo slovo napovídá, že TL patří do skupiny jevů nazývaných luminiscence. (Na toto téma se už v „Rozhledech“ psalo: č. 1, září 1971). Předmětem zkoumání tedy je množství, resp. intenzita světla vycházejícího z předem ozářeného vzorku, závislá v případě TL na plynule rostoucí teplotě vzorku. Ačkoli praktické upotřebení našel jev až v 50tých letech tohoto století, prvou zmínku o něm nalézáme již před 300 léty u Angličana Boyleho.

Prvý úspěšný pokus o teoretický popis jevu byl podniknut v r. 1920 německým fyzikem Urbachem, který jako první předpokládal, že se jedná o tepelně stimulované elektronové procesy v pevné látce. Mezi odborníky, kteří se tvůrčím způsobem podíleli na rozvoji této metody, patří i československý fyzik dr. A. Bohun, DrSc.

Demonstrace jevu by byla asi následující: Vzorek — krystal či destičku s práškem zkoumané látky — umístíme do zařízení, které jej umožňuje ochladit a potom rovnoměrně ohřívat až do teplot 400 až 500 °C při současném zaznamenávání teploty i intensity světla vycházejícího ze vzorku. Po ochlazení vzorek „nabudíme“, tj. posvítíme na něj třeba při —200 °C silnou rtuťovou výbojkou. Lampu vypneme, počkáme jistou dobu, až se luminiscence vzorku ustálí na nízké hodnotě, a vzorek pak začneme rovnoměrně ohřívat. Při různých teplotách vyzařuje vzorek různě intenzivní luminiscenci, kterou zaznamenáváme jako proměnnou závislou na teplotě. Příklad TL křivky vápence, o níž budeme hovořit dále, je uveden na obrázku.

Při ozáření je v látce absorbována část energetických kvant vyzářených zdrojem, a to v těch místech, kde je periodicitu krystalové mřížky látka porušena ať už cizím, příměsným atomem nebo nepřítomností vlastního atomu. Těmto místům se říká rekombinační centra. Při absorpci kvanta energie se v rekombinačním centru uvolní např. elektron. Ten se potom pohybuje krystalovou mříží až do svého zachycení poruchou jiného druhu, nazývanou záchytné centrum (z anglického trap- též někdy past). Záchytné centrum představuje opět poruchu v periodicitě krystalové mřížky, k uvolnění elektronu z pasti však stačí energie zdaleka



Obr. 9

menší, než jsou energie ultrafialového světelného záření či energie radioaktivního záření. Obecně postačí tepelná energie ať už nízkých (mělké pasti) či vysokých teplot (hluboké pasti).

Při postupném ohřevu je vzorku dodávána vyšší a vyšší tepelná energie. Při dosažení teploty odpovídající „hloubce“ zaplněné pasti je elektron z pasti uvolněn a může se vrátit na uprázdněné rekombinační centrum. Při návratu ztrácí buzením nabytou energii, kterou vyzáří ve formě světelného kvanta, které zaregistrujeme. Svícení látky při rovnoměrném ohřevu nám tedy slouží jako prostředek registrace elektronů uvolňovaných z pasti.

Pravděpodobnost toho, že elektron bude při teplotě T [K] uvolněn z pasti, je dána vztahem

$$p = s \cdot \exp(-E_T/kT),$$

kam za E_T [eV] dosazujeme tepelnou aktivační energii záchytného centra, která je ve většině případů totožná s energií tepelné ionizace pasti. Říká se jí někdy též hloubka záchytného centra. s [s^{-1}] bývá nazýváno frekvenčním faktorem a k [eV.K $^{-1}$] je dobře známá Boltzmannova konstanta.

Doba života $\tau = \frac{1}{p}$, po kterou je elektron zachycen na pasti podle hloubky pasti a frekvenčního faktoru vteřiny až miliony let. Právě dlouhé doby života umožňují dlouhodobě akumulovat energii v krystalu

a na tomto faktu se zakládají všechna využití TL, jež můžeme rozdělit do několika skupin, lišících se spíše oborem, v němž je TL využívána, než principy metodiky.

1. *TL jako fyzikální měřicí metoda.*

V tomto případě slouží TL jako nástroj k získávání fyzikálních parametrů pro popis poruch krystalové mříže, například hloubky zachytných center, frekvenční faktory, pravděpodobnosti zachycení nábojů na zachytných centrech a podobně. Všechny tyto informace se získávají více či méně komplikovanými modifikacemi TL metody srovnáváním teoreticky spočtených modelů TL křivek se skutečně naměřenými křivkami.

2. *TL jako radiační dosimetr.*

TL dosimetry, většinou speciální tzv. termoluminiscenční skla jako CaF_2 , CaSO_4 , LiF jsou přesné, citlivé a s obrovským rozsahem 10^{-6} až 10^4 rentgenů. Užívají se především v osobní dosimetrii a v dosimetrii exponovaných pracovišť. Princip je nasnadě: Radioaktivní záření, jemuž je dosimetr vystaven, excituje elektrony a ty jsou zachyceny na pastech s dostatečně dlouhou dobou života. Při vyhodnocování je velikost TL svícení dosimetru mírou dávky ozáření.

3. *TL — pomocník geologů.*

TL minerálů vykazuje obrovskou závislost na místě, kde byly vzorky sbírány. Geologové si byli již dávno vědomi TL minerálů, neuměli jí však využít. V padesátých letech byla vyslovena hypotéza, že přirozená TL minerálů je indukována radioaktivitou uranu, thoria či kalcia, přítomných v minerálech jako nečistoty. Všechny vápence obsahují kolem jedné miliontiny uranu a ačkoli je z něho produkováno pouze několik α — částic/min, stačí to během doby milionů let na zachycení měřitelného počtu elektronů na hlubokých pastech. Na množství a způsob zachycení těchto nábojů má svůj specifický vliv mnoho okolností, toho je pak využíváno v různých geologických aplikacích. Tato hypotéza vedla k zajímavým geologickým nálezům ve Spojených státech, Kanadě a Mexiku. Vznikl rozsáhlý výzkumný program s cílem probádat cesty pro použití TL. Zahrnuje hledání uranových rud a rud obecně, hledání hydrotermálních ložisek a řešení problémů stratigrafie. Neméně zajímavými obory se stalo určování stáří minerálů, datování tektonických událostí a určování teploty magmatu.

Uvedme některé příklady, nejdříve princip metody určené ke stanovení stáří hornin: Nejprve se změří velikost přirozené TL, akumulované v hornině od doby krystalizace. Druhým krokem je stanovení tzv. ekvi-

valentní dávky ozáření, které vyvolává stejně velkou TL, jako byla přirozená TL. Třetím a posledním úkolem je stanovit intenzitu přirozené radioaktivity horniny. Z těchto údajů je již možno spočítat

$$\text{stáří horniny} = \frac{\text{ekvivalentní dávka ozáření [J/kg . s]}}{\text{intenzita přirozené radiace [J/kg]}}$$

Samozřejmě skutečný proces měření je komplikovanější, poněvadž k hlavnímu jevu přistupují vedlejší efekty, jejichž vliv je nutno při měření započítat. Při určování stáří se používají především vápence, dolomity a karbonové materiály, které obsahují dostatečně hluboká záchytná centra. Určování stáří jde od desetitisíců až po miliony let.

Při využití TL ve stratigrafii se srovnává TL jednotlivých sedimentovaných vrstev. Ukazuje se, že vzorky odebrané z jedné vrstvy, třeba i z míst kilometr vzdálených, vykazují stejnou TL, zatímco vzorky z různých vrstev v jednom lomu (v hloubkách lišících se o metry) se v TL liší podstatně. TL křivka se stává „otiskem prstu“ každé vrstvy.

Podobný vliv na TL křivku minerálu má přítomnost hydrotermálního ložiska. TL křivka se stává obrovsky citlivým indikátorem změn teploty v různých vzdálenostech od ložiska.

4. *TL jako archeologické hodiny.*

Pro určování stáří archeologických nálezů se principiálně užívá téže metodiky jako při určování stáří minerálů. Určuje se stáří keramického střepu za předpokladu, že TL se v keramice začala zachycovat po vypálení a je úměrná času, po který byla keramika vystavena přirozené radioaktivitě. Nepřesnost je menší než 300 let.

5. *TL jako nástroj paleoklimatologie.*

Při zkoumání různých hornin se ukázalo, že na TL křivce většiny vápenců zřetelně vystupují tři maxima. Prvé se za pokojové teploty už neobjevuje. Třetí, které vystupuje při teplotě 320 °C, je necitlivé k jakýmkoli změnám teplot na zemském povrchu. Výška druhého maxima (tj. zaplnění záchytných center, která jej vytvářejí), které vystupuje při 230 °C, je výsledkem rovnováhy, ustavivší se mezi teplotou zemského povrchu (odvod nábojů z center) a množstvím radioaktivních nečistot ve vápenci (přívod nábojů na centra). Při teplotních změnách v místech uložení vápence je čas nutný k ustavení nové rovnováhy závislý na velikosti změny a teplotním oboru, ve kterém se změna odehrávala. Malé a rychlé změny teplot způsobí zanedbatelné změny v rovnováze, velké změny teploty změní rovnováhu v takovém rozsahu, že k dosažení nové rovnováhy je zapotřebí už geologicky dlouhé časové periody.

Velikost středního TL maxima vápenců tedy obráží klima sběrného místa.

Za pomoci TL vápencových skel byla stanovována období zalednění různých míst v Arktidě a Antarktidě. Avšak velká citlivost této nové metody ji činí perspektivní i pro vývoj nové techniky měření mikroklimatických efektů. Metoda sice není citlivá na takové krátkodobé variace teplot jako jsou sezónní změny, je však už možno stanovit průměrné teploty. Mimoto nejsou změny v teplotním prostředí hornin způsobovány pouze změnou klimatu, ale i geomorfologickými procesy. Příkladem toho mohou být např. pohyby ledovců či ústupy moří. Za pomoci TL je možno rekonstruovat dosah zalednění či zatopení. Jiným příkladem by např. bylo detegování stínění skalních stěn lesními strukturami, které byly odstraněny. Ale to jsou už perspektivy této nejmladší aplikace metody TL, které mají za sebou v současné době prvá úspěšná srovnávací měření.

astronomie

Nové sovětské dalekohledy

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Vynález dalekohledu znamenal začátek rozvoje moderní astronomie. První dalekohledy byly čočkové a měly poměrně malý průměr objektivu. Postupný rozvoj techniky umožňoval zvětšovat průměr objektivu a tím se astronomům umožnilo sledovat stále slabší světelné zdroje a pronikat tak hlouběji do vesmíru; současně se zvětšovala rozlišovací schopnost dalekohledů. Ukázalo se však, že průměr objektivu čočkového dalekohledu nelze zvětšovat neomezeně. S rostoucím průměrem čočky se velmi rychle zvyšují náklady na výrobu přístroje, především se však vyskytují značné obtíže technického rázu a navíc je zde skutečnost, že s rostoucím průměrem objektivu roste také tloušťka čočky a v tlustých sklech pak dochází k velkým světelným ztrátám. Největší čočkový dalekohled (tzv. refraktor) byl sestaven roku 1897 pro Yerkesovu hvězdárnu ve Spojených státech. Tento dalekohled, který má průměr objektivu 102 cm, je dosud v činnosti — větší čočkový dalekohled však již nebyl od té doby vyroben.

Obtíže spojené s výrobou čočkových dalekohledů vedly k většímu rozmachu zrcadlových dalekohledů (tzv. reflektorů), jejichž výhodou je,



Obr. 2. Kopule
pro šestimetrový dalekohled
v kavkazských horách

zrcadla. Proto není divu, že po dlouhou dobu byl dalekohled na Mt. Palomar největším dalekohledem světa. Tato situace se však nyní změní. V Sovětském svazu je budován dalekohled o průměru zrcadla 6 m a bude uveden do provozu koncem sedmdesátých let. Dalekohled bude umístěn na severních svazích Kavkazu u vesnice Zelenčukskaja (Karačajevsko-čerkeská autonomní oblast) v nadmořské výšce 2080 m. Konstrukce tak velkého dalekohledu je blízko hranic technických možností současné optiky. Dalekohled byl zhotoven v optických závodech v Leningradě a hlavní zrcadlo, odlité ze skla s velmi malým součinitelem teplotní roztažnosti, má tloušťku 65 cm a hmotnost 42 tun. Vzhledem k tak obrovské hmotnosti se sovětští konstruktéři rozhodli pro azimutální montáž, která je u velkých dalekohledů neobvyklá. Obvykle se používá paralaktická montáž, při níž je jedna osa dalekohledu namířena k severnímu světovému pólu, otáčením kolem druhé osy můžeme nastavit deklinaci sledovaného objektu a celý dalekohled se pak kolem první osy otáčí tak, že sleduje denní otáčení oblohy. Nastavení dalekohledu na sledovaný objekt je tedy poměrně jednoduché, neboť dalekohled vykonává jen rovnoměrný otáčivý pohyb. S paralaktickou montáží dalekohledu o tak velké hmotnosti jsou však spojeny četné potíže technického

rázu, které při azimutální montáži odpadají. Na obr. 1 je nakreslen řez šestimetrovým dalekohledem s azimutální montáží. Dalekohled je otáčivý jednak kolem svislé osy (1), jednak kolem vodorovné osy (2). Při denním otáčení oblohy se neustále mění obě souřadnice, a to jak azimut objektu, tak jeho výška, a to s proměnnou rychlostí. Dalekohled se tedy musí otáčet současně kolem obou os tak, aby byl stále namířen na sledovaný objekt a je zřejmé, že pro pohon takového dalekohledu není možné použít hodinového stroje, jak je tomu u paralaktické montáže. Pohyby šestimetrového dalekohledu budou proto řízeny samočinným počítačem, podobně jako pohyby velkých rádiových dalekohledů. Aby se zmenšilo tření při otáčení kolem svislé osy, pohybuje se dalekohled po vrstvě oleje, který je pod velkým tlakem (3); olejová vrstva má tloušťku 0,05 mm a zmenšuje tření natolik, že přes obrovskou tíhu dalekohledu jím bude možné otočit i pouhou rukou. Zrcadlová plocha hlavního zrcadla (4) byla vybroušena do tvaru rotačního paraboloidu s ohniskovou vzdáleností 24 m. Pro práci v primárním ohnisku (5) je připravena speciální kabina, umístěná v optické ose dalekohledu, v níž může pracovat pozorovatel (podobná kabina je také u pětimetrového dalekohledu). Další zrcadlo (6) umožňuje používat tento dalekohled také jako *Cassegrainův* typ s ohniskovou vzdáleností 180 m; při tomto použití budou světelné paprsky, odražené od zrcadla (7), vedeny dutou vodorovnou osou na pozorovací plošinu (8), kde bude umístěn jeden velký spektrograf na jedné straně osy a tři menší spektrografy na druhé straně osy. Disperze spektrografů jsou 4 nm/mm, 2 nm/mm, 1 nm/mm a 0,1 nm/mm. Menší spektrografy mohou být umístěny také v primárním ohnisku, které bude používáno hlavně pro fotometrická měření a pro fotografování. Pomocí Maksutovovy čočky bude možné fotografovat na obloze plochu o průměru $0,3^\circ$. Tubus přístroje je opatřen žebrováním, aby se zabránilo proudění vzduchu a tím případnému zhoršení pozorovacích podmínek. Celková hmotnost přístroje je 840 tun a bude umístěn v kopuli o průměru 50 metrů (obr. 2).

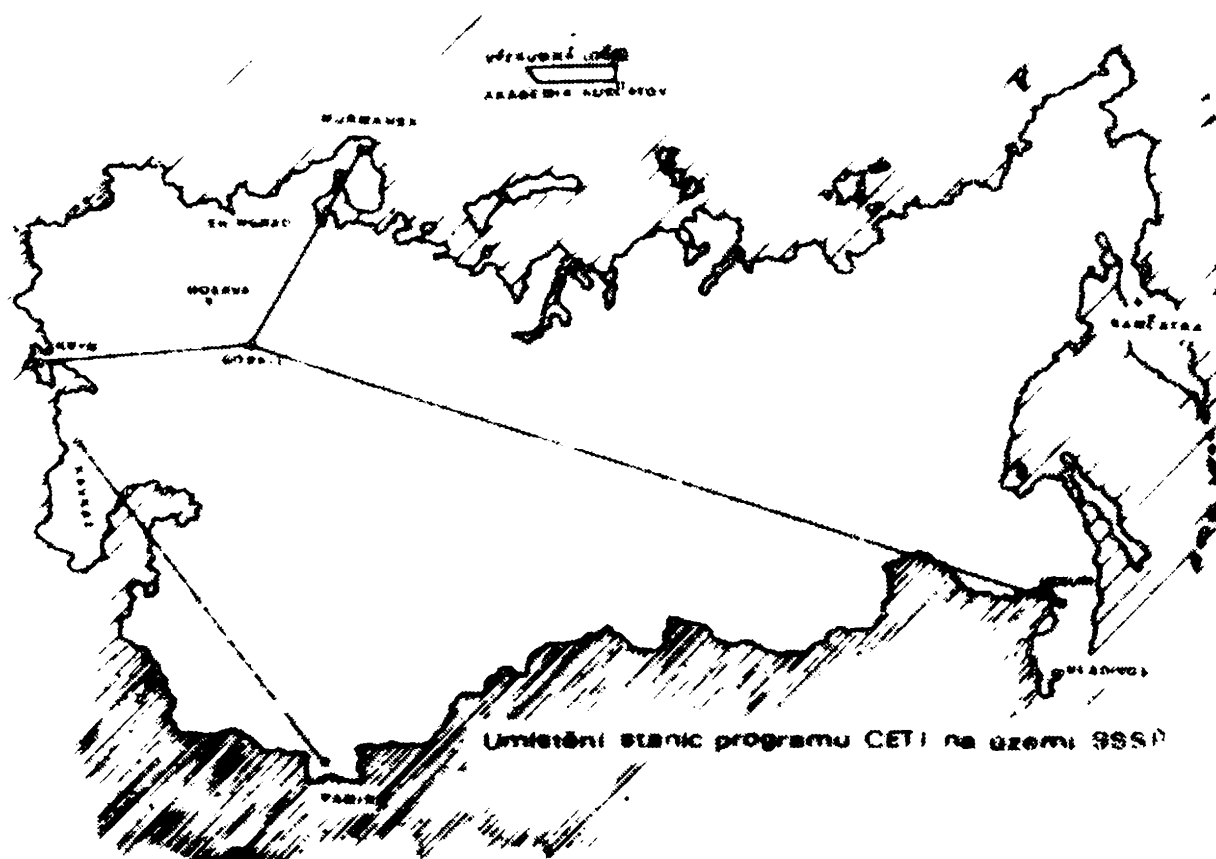
Součástí této nové sovětské vědecké stanice je také rádiový dalekohled o průměru 600 m, nazvaný RATAN (radioastronomičeskij těleskop Akademii nauk). Rovněž tento přístroj je řešen velmi neobvykle. Aby bylo dosaženo co největšího průměru a tím také co největší rozlišovací schopnosti dalekohledu, upustili jeho konstruktéři od klasické antény ve tvaru rotačního paraboloidu. RATAN je tvořen více než 900 pravoúhlými hliníkovými deskami, prohnutými do tvaru paraboloidu, z nichž každá má rozměry $1,5 \times 4$ m. Desky jsou sestaveny do kruhu o průměru 600 m. U každé desky je možný pohyb dopředu a dozadu, aby je bylo možno přesně nastavit, a rovněž je možné natáčení desek. Pohyb desek bude řízen automatickým počítačem, který je po udání souřadnic zaměří na zvolený objekt. Rádiový dalekohled může pracovat ve čtyřech nezávislých částech i jako jeden celek.

Počítá se, že s novými přístroji bude pracovat kolem sta vědeckých pracovníků. Podle dosud uveřejněných plánů se vědci na kavkazské observatoři mají zabývat především studiem atmosfér hvězd se silným magnetickým polem, výměnou látky v soustavách těsných dvojhvězd, studiem Wolfových-Rayetových hvězd, studiem planetárních mlhovin a zkoumáním galaxií v hnízdech galaxií.

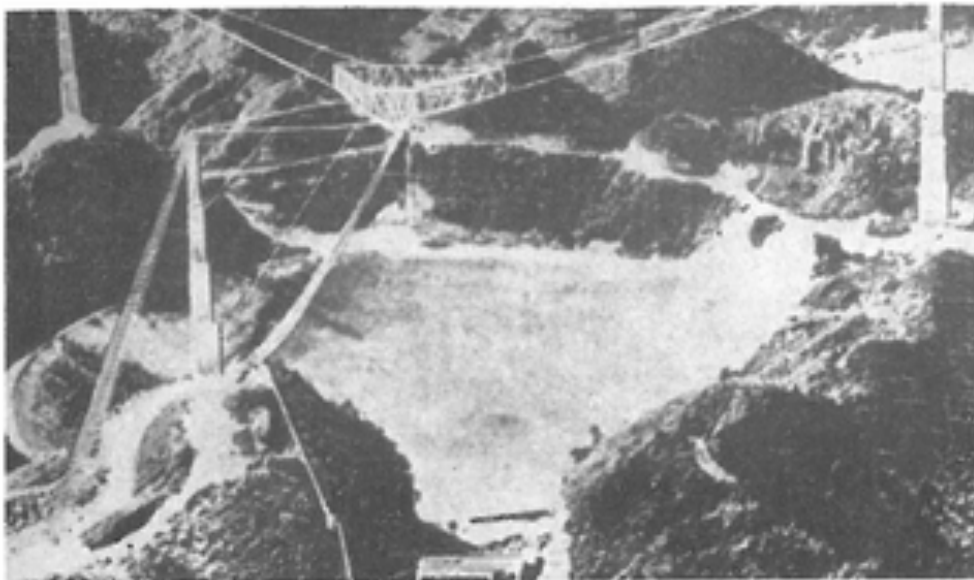
Mezihvězdné poselství

RNDr, KAREL MIŠOŇ, CSc., ČVUT Praha

Světová fantastika a moderní science fiction produkují tituly věnované styku s mimozemšťany. V souvislosti s Mendělejevovou tabulkou se život uvádí v jakousi analogii s magnetismem a s radioaktivitou. Uvažuje se o možnostech různých kódů v makromolekulách desoxyribonukleové kyseliny. Exobiologové konstruují představy o životě na bázi křemíku, spekuluje se o životě, v němž by úlohu našeho kyslíku a vody přejímal



Obr. 1. Rozložení stanic CETI na území SSSR.



Obr. 2. Radioteleskop v Arecibu. V horní části obrázku je patrna ohnisková konstrukce, v dolní polovině obrázku je rozsáhlá parabolická síť vyplňující kráter vyhaslé sopky.

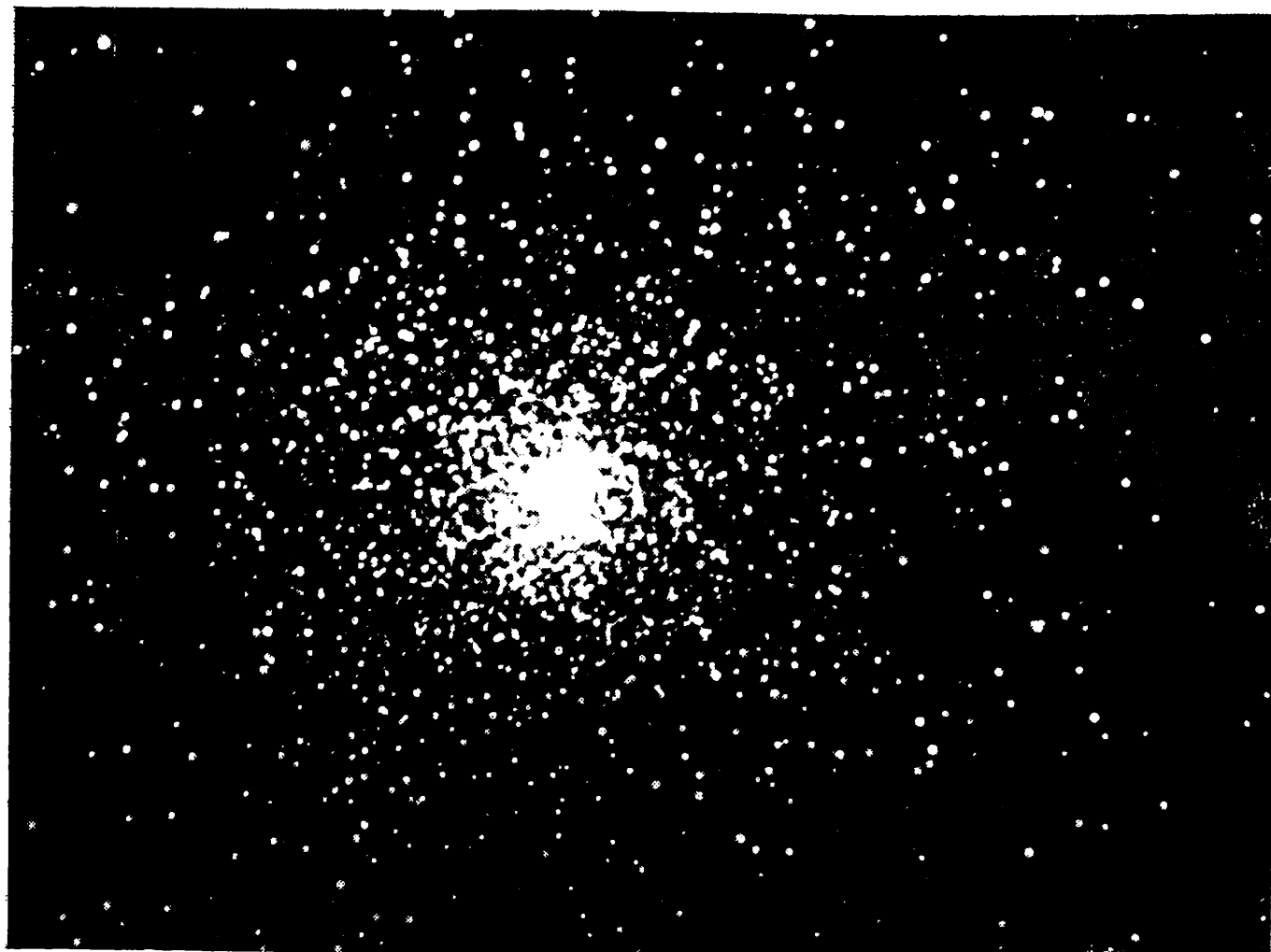
dusík a čpavek. Shledávají se důvody pro myšlenku výskytu kosmických bytostí podobných našim organismům.

Radioteleskopy (obr. 1) nedočkavě pátrají po případných projevech mimozemských civilizací, časopisy i mezinárodní symposia přinášejí teoretické studie o možnostech mezihvězdné rádiové komunikace. Při *Mezinárodní astronautické akademii* existuje *Výbor pro spojení s mimozemskými civilizacemi*. Čtenáře jistě potěší okolnost, že jeho předsedou je Čechoslovák, prof. dr. ing. Rudolf Pešek, DrSc., člen korespondent ČSAV, z jehož podnětu byl výbor ustaven. Akronym Výboru — CETI (Communication with Extraterrestrial Intelligence) — je alegorickým synonymem pro označení hvězdy τ Ceti ze souhvězdí Velryby (Cetus) s předpokládanou planetární soustavou.

Dne 16. listopadu 1974 bylo z radioteleskopu (obr. 2) v Arecibu na Portoriku vysláno prvé kódované rádiové poselství pozemšťanů orientované ke kulové hvězdokupě (obr. 3) v souhvězdí Herkula (obr. 4). Na vlnové délce 12,6 cm — korigované vysílací frekvencí tak, aby se vně Sluneční soustavy vlivem Dopplerova principu neměnila — letí vesmírem posloupnost 1679 signálů (*bitů*) dvou typů. Tabulkový rozpis poselství do prázdných a plných políček je v obr. 5.

Prvé čtyři řádky v deseti skupinách tmavých políček, oddělených prázdnými sloupci *b, d, f, h, j, l, n, q, t*, jsou úvodní instrukcí pro čtení zprávy. Jde o dvoikový zápis začátku přirozené číselné řady

$1 \sim 1, 2 \sim 10, 3 \sim 11, 4 \sim 100, 5 \sim 101, 6 \sim 110, 7 \sim 111, 8 \sim 1000,$
 $9 \sim 1001, 10 \sim 1010;$



Obr. 3. Kulová hvězdokupa M 13 (NGC 6205) v souhvězdí Herkula. Za jasných bezměsíčních nocí je na hranici viditelnosti zdravého zraku.

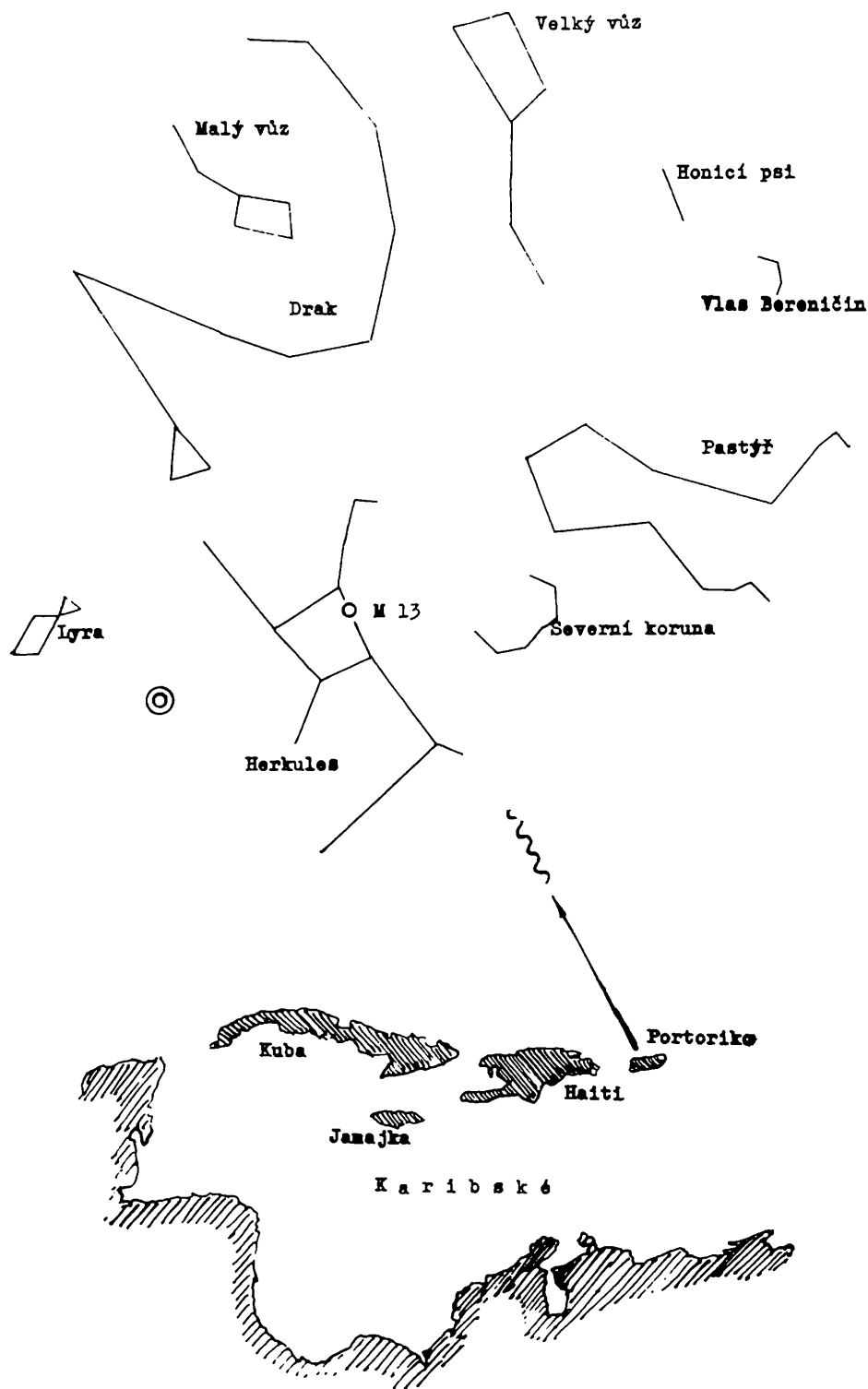
přičemž plná políčka v řádku 4 označují konec (*zárazy*) zapsaných číselných hodnot. *Nad* zárazy jsou při čtení *shora dolů* zapsána jednotlivá čísla tak, že prázdné (plné) políčko znamená nulu (jednotku). Třeba: nad zárazem [1, *i*] čteme pořadí 101, tj. dyadický zápis čísla 5. Při tomto pojetí zápisů by číslo $8 \sim 1000$ se zárazem v [4, *o*] začínalo vně tabulky, v místě nad prázdným políčkem [1, *o*]; zápis proto začíná v následném sloupci *p* a vychází z něho počínaje prvním místem nad zárazem, tj. plným políčkem [3, *p*]. Podobně při zápise dalších čísel 9, 10. Pochopení této instrukce vede ihned k přečtení číselné posloupnosti

(*) 1, 6, 7, 8, 15

v řádcích 6 až 10, kde desátý řádek je tvořen zárazy číselných zápisů. Hodnoty (*) pojaté jako atomová čísla určují prvky

(**) H, C, N, O, P.

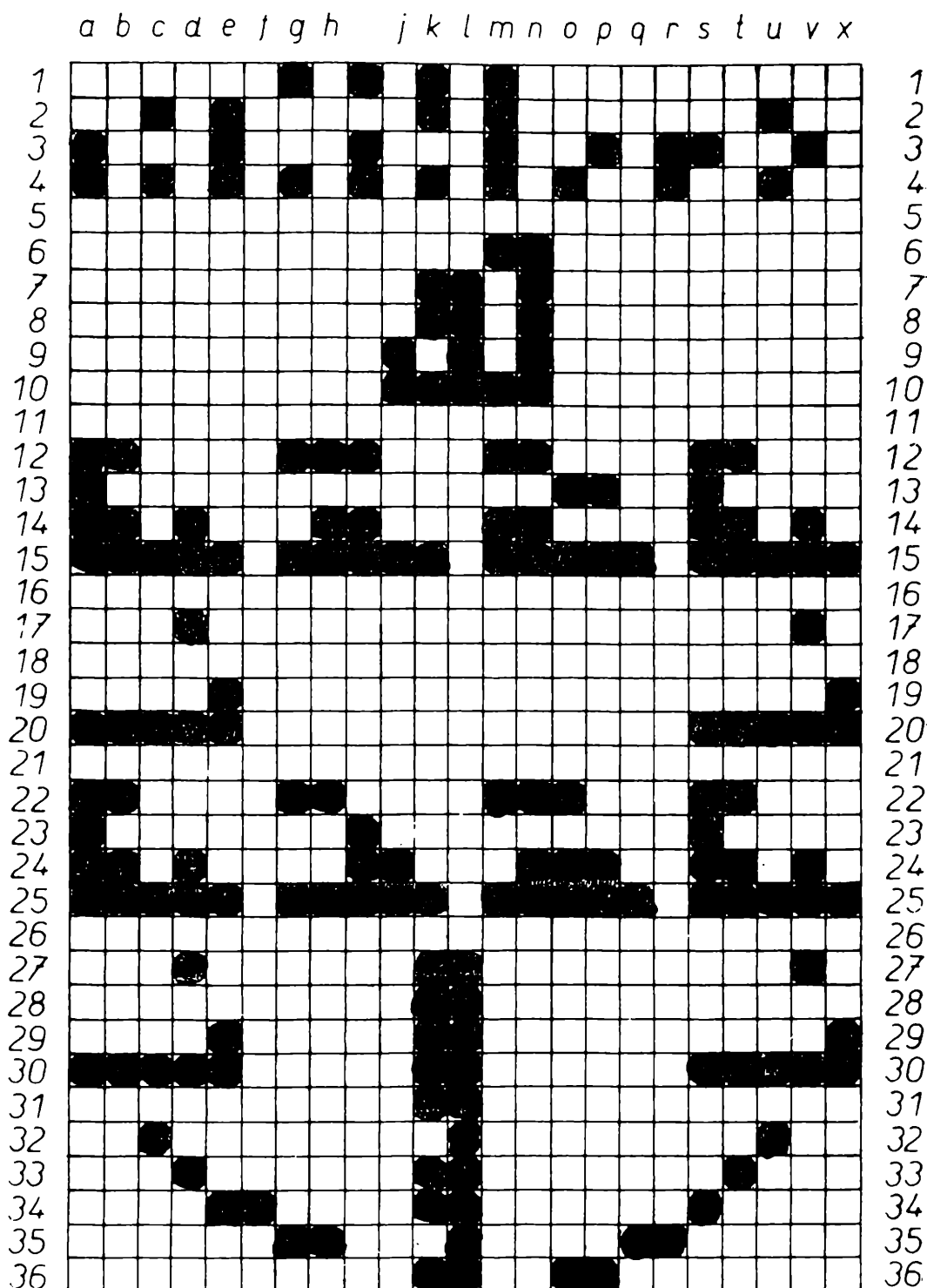
Aplikace (*) na (**) v řádcích 12 až 25 a v obdélnících s úhlopříčkami [27, *a*] — [30, *e*], [27, *s*] [30, *x*] poskytne organickému chemikovi



Obr. 4. Souhvězdí oblohy nad Karibským mořem. Dvojitý kroužek vyznačuje apex slunečního pohybu.

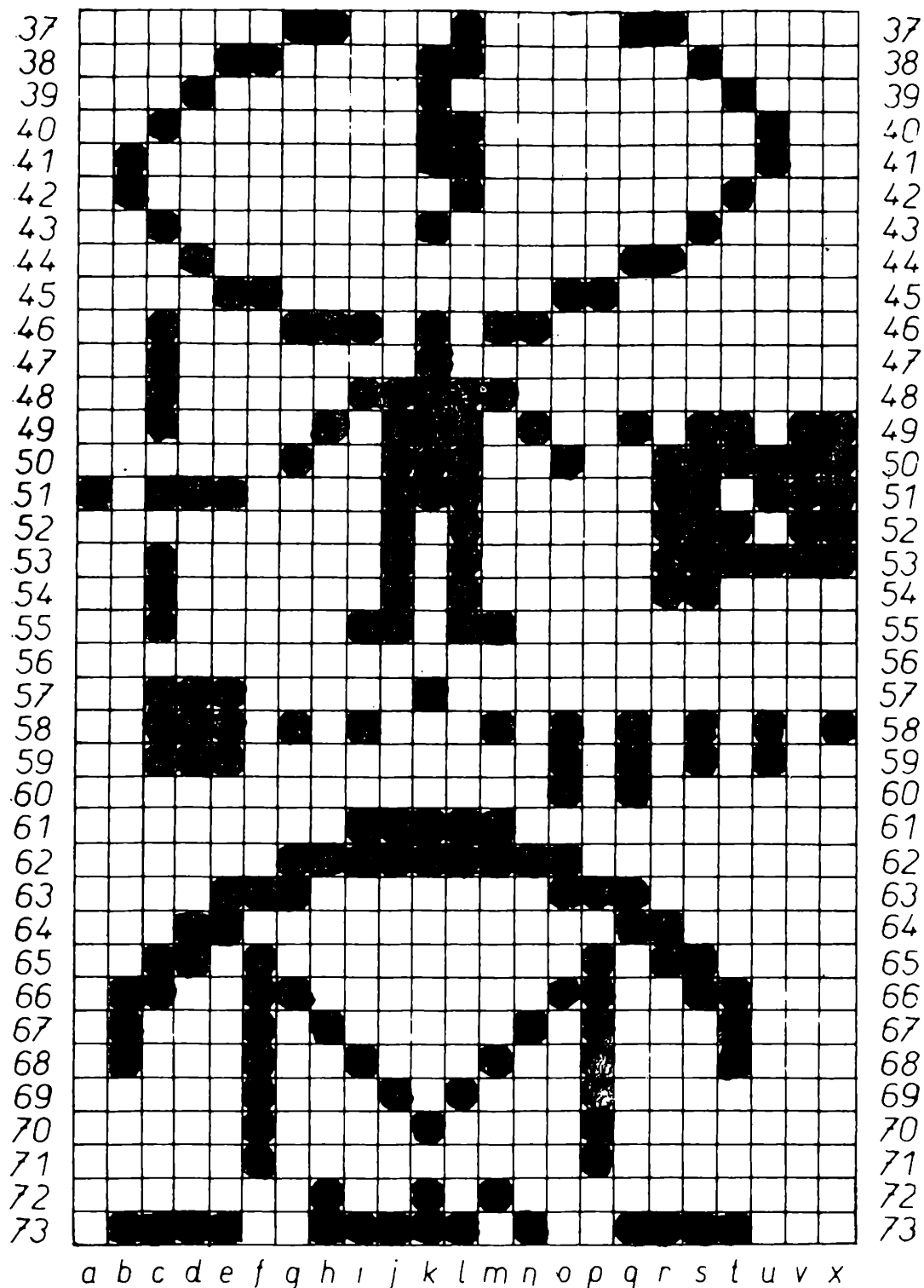
strukturu desoxyribonukleové kyseliny, jež je výběrem genetických kódů charakteristikou pozemského života. Počet párových kombinací jejích bází (podrobnosti chemické stránky pomíjíme) je pro člověka odhadován na 4 miliardy. V poselství je toto číslo orientačně uvedeno ve sloupcích k , l se zárazem [43, k] údajem

111111111111011111111101101011110 ~ 4294441822 .



Obr. 5. Grafická interpretace poselství (Arecibo Message 1974).

Nejde arci o exaktní hodnotu, ale o řádovou informaci, kde v číselném zápise jsou celkem namátkově zařazena prázdná políčka se záměrem usnadnit příjemci poselství možnost postřehnout, že jde o číselný zápis. Zaráz tohoto zápisu je nad hlavou skici člověka a „spirály“ v levé a pravé části pole v rozmezí řádků 32–46 jsou grafickou stylizací tvaru vláken desoxyribonukleové kyseliny.



Napravo od znázorněného člověka je v obdélníku s úhlopříčkou $[49, q] - [54, x]$ číselná hodnota (psaná zprava doleva a zdola vzhůru se zárazem $[49, q]$)

1111111110111111011111111110110 $\sim$ 4292853750

Podle záměru autorů poselství jde o řádový údaj počtu 4 miliard jedinců, jejichž ústy poselství hovoří. Ve sloupci c mezi řádky 46 až 55 je kótovací čára zobrazeného člověka; řádkem 51 v jejím přerušení prochází číselný

zápis (záraz v [51, *a*], čteno *zprava doleva*) 1110 $\sim$ 14 určující v jednotkách rovných délce vysílací vlny velikost lidské bytosti $14.12,6 = 176,4$ cm. Kolem řádku 58 je znázorněna Sluneční soustava počínaje Sluncem a konče Plutem s hrubým rozlišením velikosti planet. Domovská planeta [57, *k*] vysílajících bytostí je z řady vysunuta směrem k obrazu člověka, v jehož ose je zakreslena. Současně jde i o osu geometrického obrazce v rozsahu řádků 61 až 71 stylizujícího vysílací radioteleskop. Paprsky vycházející z ohniska [70, *k*] jsou po odraze na parabolickém zrcadle orientovány rovnoběžně s osou teleskopu. Kótovací čára v řádku 73 s dvouřádkovým číselným údajem (záraz v [73, *n*], čtení *zleva doprava a shora dolů*) 100101111110 $\sim$ 2430 odpovídajícím $2430 \cdot 12,6 = 30618$ cm informuje příjemce zprávy o průměru (305 m) zrcadla vysílače.

Autor prosí čtenáře o kritické připomínky k probranému poselství a o náměty k uskutečňování pokusů o mezihvězdné spojení. Podnětné návrhy budou zpracovány do souborného stanoviska československých pracovníků a tlumočeny autorům odeslaného poselství.

olympiády

Naše účast na XVII. MMO v Burgasu

Doc. O T A S E T Z E R, ČVUT Praha

Jako každoročně zúčastnilo se i letos družstvo ČSSR mezinárodní matematické olympiády, která se již po sedmnácté konala ve dnech 3. až 15. července 1975 v Bulharsku.

Na XVII. MMO se přihlásily tyto země: Rakousko (A), Bulharsko (BG), Československo (CS), Německá demokratická republika (DDR), Francie (F), Velká Británie (GB), Řecko (GR), Maďarsko (H), Mongolsko (MLR), Holandsko (NL), Polsko (PL), Rumunsko (R), Švédsko (S), Sovětský svaz (SU), Spojené státy (USA), Vietnamská demokratická republika (VN) a Jugoslávie (YU).

Naši delegaci, vedenou dr. Františkem Zítkem, CSc., z Matem. ústavu ČSAV a jeho zástupcem dr. Jozefem Moravčíkem, CSc., ze Žiliny, tvořili tito studenti: Martin Baumann — 1956 (č. 1), Vlastimil Klíma — 1957 (č. 2), Jan Kratochvíl — 1959 (č. 3), Jan Malý — 1955 (č. 4), Jiří Navrá-

til — 1958 (č. 5), Ján Slodička — 1956 (č. 6), Michael Valášek — 1956 (č. 7), Josef Voldřich — 1956 (č. 8). (Čísla za jmény studentů značí letopočet narození, číslo v závorce je „startovní“ číslo studentovo.)

Průběh XVII. MMO:

Ve čtvrtek 3. 7. 1975 přijeli do Burgasu vedoucí delegací jednotlivých zemí (bez studentů), aby vytvořili mezinárodní jury. Byli ubytováni v hotelu Bris. Po celý pátek 4. 7. zasedala tato porota v Domě mládeže v Burgasu a radila se o výběru vhodných témat pro soutěž z úloh, které navrhly zúčastněné země. Šlo o to, aby úlohy byly původní z různých partií matematiky a podle možnosti různě obtížné. V sobotu 5. 7. pokračovala jury ve své práci, zatímco se do Burgasu sjížděli soutěžící studenti, kteří byli ihned odváženi do internátu v Meden Rudniku několik km od města. Zde byli ubytováni i stravováni v úplné izolaci od vedoucích. Toto opatření bylo provedeno v zájmu regulérnosti soutěže. V neděli 6. 7. provedla mezinárodní jury přepis vybraných 6 úloh (3 pro každý soutěžní den) do mateřských jazyků soutěžících a stanovila maximální počet bodů za úplné vyřešení jednotlivých úloh. Žáci vykonali ve skupinách výlety do Sozopolu, Ropotama, Primorska, kde vychutnávali za slunečného počasí krásy černomořského pobřeží a zchladili se v mořských vlnách. V pondělí 7. 7. byla v 8 hodin ráno XVII. mezinárodní matematická olympiáda slavnostně zahájena v Domě mládeže. Pak probíhal 1. den soutěže ve škole dr. Petera Berona. Vedoucí vykonali výlet do Pomorie a odpoledne navštívili ovocné a zelinářské zahrady v Aitosu. Žáci měli odpolední oddech. V úterý 8. 7. pokračovala soutěž druhou částí (opět 4 hodiny čistého času) zase ve škole dr. Petera Berona. Odpoledne se žáci slunili na pláži v okolí Otmanli. Vedoucí opravovali úlohy. Ve středu 9. 7. vedoucí kontrolovali práce a koordinovali je. Žáci odpočívali na pláži na Slunečném pobřeží. Čtvrtek 10. 7. byl věnován opět korekci a koordinaci úloh. Žáci trávili den na pláži u ústí Ropotama. V pátek 11. 7. dopoledne byly provedeny poslední opravy a v 15 hodin zasedala jury a rokovala o cenách. Rozhodla, že počet cen nemá překročit poloviční počet soutěžících, 1. cenu obdrží, kdo dosáhnou nad 38 bodů ze 40 dosažitelných, 2. cenu všichni nad 31 bodů a 3. cenu všichni nad 22 bodů. V sobotu 12. 7. opouštěla družstva Burgas. Podle plánu se konal společný výlet do Staré Zagory a po obědě přes vrchol Šipky do Kasanlaku, po krátkém pobytu v městě Gabrovo do Velikoho Tarnova, kde byla večeře a přenocování. V neděli 13. 7. se konala exkurze do Plevnu; vedoucí byli ubytováni u hotelu Orbita, žáci v koleji Ran Basilek. Pondělí 14. 7. bylo věnováno prohlídce památek města Sofie, kde se ve 20 hod. konal kulturní večer. V úterý 15. 7. bylo slavnostní ukončení 17. MMO v Domě pionýrů s rozdáváním cen. V pohoří Vitoša byla slavnostní večeře v restauraci Kopito. Další den odletěla družstva do svých domovů.

Soutěžní úlohy XVII. MMO:

1. den (7. 7. 1975):

1. Nechť x_i, y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) jsou reálná čísla

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$$

Dokažte, že pro libovolnou permutaci $z_1, z_2, \dots, z_n$ čísel $y_1, y_2, \dots, y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

2. Nechť $a_1, a_2, a_3, \dots$ je nekonečná posloupnost přirozených čísel taková, že $0 < a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Dokažte, že nekonečně mnoho členů a_m této posloupnosti lze vyjádřit ve tvaru $a_m = xa_p + ya_q$, $p \neq q$, kde x, y jsou celá kladná čísla.

3. Je dán trojúhelník ABC . Vně tohoto trojúhelníka sestrojíme (v téže rovině) trojúhelníky ABR, BPC, CQA takové, že

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45^\circ, \quad \sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30^\circ, \\ \sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15^\circ$$

Dokažte, že 1. $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$; 2. $PR = QR$.

2. den (8. 7. 1975):

4. Nechť A je součet cifer čísla 4444^{4444} ; nechť B je součet cifer čísla A . Určete součet cifer čísla B . (Všechna čísla jsou zapsána v desítkové soustavě).

5. Zjistěte, zdali na kružnici s poloměrem 1 existuje 1975 bodů takových, že délky všech jimi určených tětiv jsou racionální čísla.

6. Najděte všechny mnohočleny P dvou proměnných s těmito vlastnostmi:

1. P je homogenní mnohočlen stupně n (n je přirozené číslo), tzn. že pro všechna reálná čísla t, x, y platí $P(tx, ty) = t^n \cdot P(x, y)$;

2. pro všechna reálná čísla a, b, c platí

$$P(a + b, c) + P(a + c, b) + P(b + c, a) = 0;$$

3. $P(1, 0) = 1$.

Ukázková řešení některých soutěžních úloh otiskneme později.

Tabulka

Stát	závodník číslo								Součet Σ	Pořadí	Ceny			Uznání
	1	2	3	4	5	6	7	8			1.	2.	3.	
A	34	39	13	28	20	17	23	18	192	6.	1	1	2	—
GB	24	36	23	40	40	32	19	24	238	5.	2	2	3	—
BG	13	16	33	14	25	27	30	28	186	7.	—	1	4	—
VN	36	25	26	20	21	17	30	—	175	10.	—	1	3	—
DDR	36	33	26	29	34	34	27	30	249	2.	—	4	4	—
GR	8	20	7	10	4	11	2	33	95	15.	—	1	—	—
MLR	13	3	7	2	2	12	26	10	75	16.	—	—	1	—
PL	4	13	11	16	16	4	27	33	124	14.	—	1	1	—
R	35	27	19	16	14	18	28	23	180	8.	—	1	3	2
SU	32	25	25	34	40	26	28	36	246	4.	1	3	4	—
USA	29	40	28	40	32	14	28	39	247	3.	3	1	3	1
H	27	34	37	23	28	35	37	37	258	1.	—	5	3	—
F	40	19	27	14	35	11	20	10	176	9.	1	1	1	—
NL	9	8	29	4	0	8	6	3	67	17.	—	—	1	—
CS	18	13	16	18	27	20	30	20	162	12.	—	—	2	—
S	13	22	16	17	11	34	37	10	160	13.	—	2	—	—
YU	36	18	20	26	13	11	22	17	163	11.	—	1	1	—
Celkem											8	25	36	3

Výsledky soutěže:

Mezinárodní matematická olympiáda je soutěží jednotlivců, a proto lze hodnotit úspěch či neúspěch jednotlivých zemí podle počtu získaných cen, u jednotlivých závodníků podle počtu získaných bodů.

V tabulce uvádím v 1. sloupci stát, v dalších osmi sloupcích počet bodů, získaných závodníky č. 1 až 8, dále celkový počet bodů získaných celým družstvem a z toho plynoucí pořadí družstva, konečně počet prvních, druhých, třetích cen, event. počet uznání za originální řešení.

Kdybychom oceňovali zisk 1. ceny pěti body, 2. ceny třemi body a 3. ceny jedním bodem, vypadalo by pořadí zemí takto:

1. USA = 21 b., 2. GB = 19 b., 3.—4. H + SU = 18 b., 5. DDR = 16 b., 6. A = 10 b., 7. F = 9 b., 8. BG = 7 b., 9.—11. VN + R + S = 6 b., 12.—13. PL + YU = 4 b., 14. GR = 3 b., 15. CS = 2 b., 16.—17. MLR + NL = 1 bod.

Zamysleme se nyní nad naší tabulkou. Nejúspěšnější Maďarsko i druhá NDR se mohou pochlubit velmi vyrovnanými družstvy, v nichž každý člen získal některou z cen právě tak jako čtvrtý Sovětský svaz. Největší počet „zlatých“ si odváží třetí USA (3) a pátá Anglie (2). Domácí prostředí mělo příznivý vliv na umístění Bulharů — byli sedmí. Potěšující je poměrně pěkné umístění Vietnamců, kteří nás předstihli o dvě místa.

(o 13 b.). Zato naše družstvo se stále nemůže vymotat z dolní poloviny tabulky. I když získalo proti loňsku o 4 body více, měla úroveň matematiky v ostatních státech rychlejší vzestup než u nás. Nelze též přehlédnout, že náš nejúspěšnější student Valášek startoval podruhé a proti loňsku se znatelně polepšil.

Vzniká otázka, jak zamezit našim dalším neúspěchům v MMO. Po vzoru úspěšnějších zemí je třeba věnovat se přípravě družstva po celý rok, výběr provést již počátkem školního roku a pak pravidelně s vybranými talentovanými studenty pracovat, třebas i korespondenčně. To jsou však problémy, s nimiž si snad nejlépe poradí ÚV MO, který jistě najde pro svou práci pochopení i prostředky u našich ministerstev školství.

Na závěr nutno k XVII. MMO dodat, že bulharští soudruzi vycházeli nám všemožně vstříc a celou akci dobře zorganizovali. Naši studenti jim svou ukázněností jejich práci usnadňovali.

Třetí kolo kat. A XVI. ročníku FO

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno

Ve dnech 12.—14. května 1975 se konalo 3. kolo fyzikální olympiády kat. A. Účastníci byli vybráni z nejlepších řešitelů 2. kola v jednotlivých krajích, a to všichni až po klasifikaci 1133 (s permutací) a 24 z 34 úspěšných řešitelů s klasifikací 1233. Celkem bylo pozváno 79 úspěšných řešitelů 2. kola; do 3. kola se z nich nedostavilo 5. Z pozvaných bylo 76 ze 4. roč., 2 z 3. roč. a 1 z 2. roč. škol 2. cyklu. Ze 79 pozvaných bylo 69 z gymnasií a 10 ze SPŠ.

Prvá tabulka uvádí pro každý kraj počet všech pozvaných řešitelů, počet úspěšných řešitelů, z toho počet vítězů, počet nedostavivších se řešitelů a počet neúspěšných řešitelů.

Třetí kolo bylo slavnostně zahájeno v sále střední průmyslové školy stavební v Táboře. Slavnostního zahájení se zúčastnili: prof. PhDr. *Bohumír Janoušek*, CSc., děkan pedagogické fakulty v Českých Budějovicích, pracovníci KV KSČ v Českých Budějovicích, ústřední školní inspektoři, člen ÚV SSM, členka KV SSM a vedoucí katedry MFZpv fakulty pedagogické Emanuel Luhan. Po ukončení byl kulturní program.

Teoretické úlohy řešili soutěžící 13. května na střední průmyslové škole v Táboře. Odpoledne byla uspořádána prohlídka města Tábora.

Dne 14. května ráno byli účastníci soutěže přepraveni dvěma autobusy do Českých Budějovic, kde se v laboratořích katedry fyziky pedagogické fakulty provádělo měření laboratorní úlohy a po ukončení výpočtu odjížděli soutěžící domů.

Tabulka 1

Kraj	Počet všech pozva- ných ře- šitelů	Počet úspěš- ných ře- šitelů	Z toho počet vítězů	Počet nedosta- vivších se	Počet neúspěš- ných
Praha	18	8	4	2	8
Středočeský	3	1	1	—	2
Jihočeský	2	1	—	—	1
Západočeský	5	4	3	—	1
Severočeský	3	1	1	—	2
Východočeský	7	2	2	1	4
Jihomoravský	10	6	4	1	3
Severomoravský	7	4	1	1	2
Bratislava	15	8	2	—	7
Západoslovenský	2	1	1	—	1
Středoslovenský	3	3	1	—	—
Východoslovenský	4	1	—	—	3
Celkem	79	40	20	5	34

Tabulka 2

Pořadí	Vítězové 3. kola kat. A XVI. roč. FO		
	Jméno žáka	Kraj	Škola a místo
1	Vyskočil Jiří	Praha	G Praha 7, Nad štolou
2	Lýčka Miroslav	SM	G Vsetín
3	Valášek Michal	Praha	G Praha 2, W. Piecka
4— 5	Krásný Vladislav	ZČ	G Plzeň, nám. Odborářů
	Hůlka Jiří	VČ	G Hradec Králové
6	Hula Jan	JM	G Ždár n. Sáz.
7— 8	Vlach Jiří	Praha	G Praha 7, Nad štolou
	Klusáček Martin	JM	G Třebíč
9	Miklánek Dušan	Blava	G Bratislava, Novohradská
10— 13	Tvrdík Pavel	StřČ	G Kolín
	Svrček Michal	ZČ	G Karlovy Vary
	Maryška Jiří	SČ	G Jablonec n. N.
	Dobročka Edmund	ZS	G Šala
14— 20	Hugo Jan	Praha	G Praha 3, Sladkovského nám.
	Janský Stanislav	ZČ	G Plzeň, nám. Odborářů
	Blažek Jan	VČ	G Chrudim
	Jirovský Jiří	JM	SPŠE Brno, Leninova
	Vláčil Lubomír	JM	G Prostějov
	Slodička Ján	Blava	G Bratislava, Novohradská
	Martina Dušan	StřS	G Prievidza

Ze 74 účastníků bylo 40 úspěšných řešitelů, z toho 20 vítězů. Přehled výsledků podle jednotlivých krajů udává tabulka 1. Jména vítězů jsou uvedena v tabulce 2.

Prvých 9 vítězů dostalo od MŠ ČSR odměnu po 3000,— Kčs, další 4 vítězové po 250,— Kčs a dalších 7 vítězů po 175,— Kčs. Kromě toho SSM věnoval každému účastníku publikaci Jižní Čechy od Jiřího Kuthana, Mojmíra Horyny, Ivana Muchky a Marie a Josefa Šechtlových. Vedle toho SSM věnoval desíti nejlepším vítězům čtrnáctidenní pobyt na Slapské přehradě a absolutnímu vítězi týdenní pobyt v SSSR.

Matematická olympiáda jubiluje

V tomto školním roce si připomínáme, že uplývá už čtvrt století od vzniku naší matematické olympiády. Matematické soutěže pro žáky středních škol mají ovšem u nás mnohem starší tradici, jež se datuje téměř od samého vzniku Jednoty čs. matematiků a fyziků. Tato vědecká společnost vznikla r. 1862 pod původním názvem Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky a od r. 1870 začala ve svých časopisech uveřejňovat matematické a fyzikální úlohy pro středoškoláky. Tyto soutěže později pokračovaly v Rozhledech matematicko-fyzikálních a tato tradice na stránkách našeho časopisu stále žije. Přes veškerou snahu redakčního kolektivu může mít ovšem čtenářská soutěž jen omezený okruh řešitelů.

Podnětem ke vzniku matematické olympiády byl návrh akademika *Eduarda Čecha* (1893—1960), aby se u nás pořádala celostátní matematická soutěž pro žáky středních škol. Dne 12. září 1951 se ustavil přípravný výbor MO, jenž vypracoval návrh organizačního řádu. V prosinci 1951 vychází ve Věstníku MŠVU oběžník č. 190, jímž se zřizuje pro žáky naše soutěž. Prvním předsedou Ústředního výboru MO se stal prof. dr. *František Vyčichlo* (1905—1957), od 2. do 15. ročníku vykonával tuto funkci akademik *Josef Novák* a od 16. ročníku je předsedou doc. *Jan Vyšín*, CSc. Ze slovenských matematiků se o soutěž zvláště zasloužil akademik *Jur Hronec* (1881—1959), jenž byl od vzniku MO až do konce svého života místopředsedou Ústředního výboru MO.

Na popud rumunských matematiků se od roku 1959 pořádají mezinárodní matematické olympiády, jichž se každoročně účastní i čs. družstvo. Dva ročníky MMO se konaly též v naší republice — čtvrtý v jižních Čechách na zámku Hluboká r. 1962 a třináctý v Žilině r. 1971. Národní družstvo je vždy osmičlenné a reprezentanti jsou většinou vybíráni z vítězů III. kola nejvyšší kategorie naší MO.

Za čtvrt století prošly matematickou olympiádou už tisíce a tisíce řešitelů a mezi vítězi starších ročníků nacházíme i jména, jež jsou dnes ve vědeckém světě dobře známá (Juraj Bosák, Evžen Kindler, Oldřich Kowalski, Břetislav Novák a další). Každý ročník soutěže přináší něco nového a zajímavého a zůstane jistě trvale v paměti všech, kdo v něm soutěží. Přehled o celé historii MO podávají brožury, jež po ukončení každého ročníku vycházejí ve Státním pedagogickém nakladatelství. V nich se najde i spousta příkladového materiálu, jehož se dá využít ve studijních kroužcích. Od roku 1961 vychází v nakladatelství Mladá fronta edice Škola mladých matematiků. Jistě znáte její svazečky s typickými iniciálami MO- o mnohých z nich náš časopis přinesl už recenze.

Dovršuje se čtvrt století od vzniku MO a soutěž stojí před novými a ještě složitějšími úkoly. Chce i nadále přispívat k výchově nových matematických generací a také ke zlepšení vyučovacích výsledků v matematice. Náš časopis bude i nadále propůjčovat své stránky této pěkné matematické soutěži a věříme, že další a další mladí řešitelé najdou v soutěžních úlohách MO mnoho nových podnětů pro své studium.

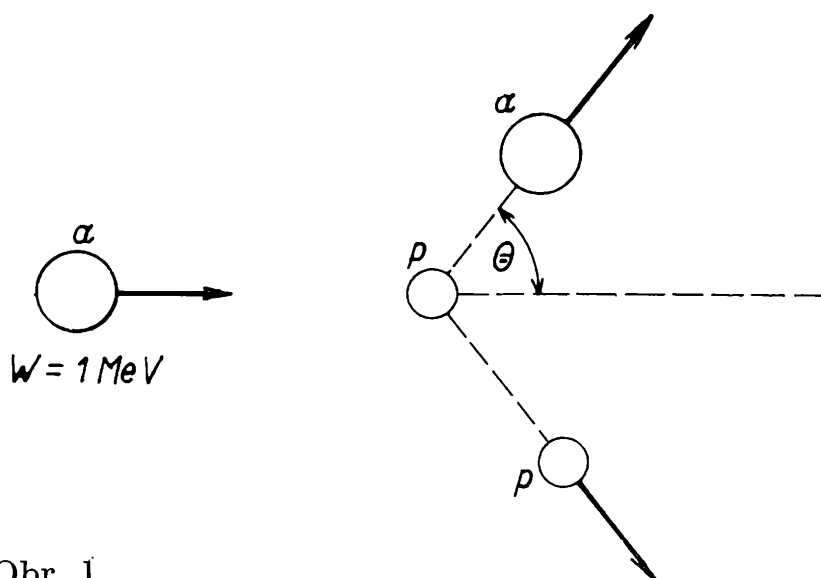
JIŘÍ SEDLÁČEK

naše soutěž

Úlohy k řešení

Fyzika

1. Částice alfa s kinetickou energií 1 MeV se pružně rozptylují na protonech, které jsou v klidu (viz obr. 1). Vypočítejte:



Obr. 1

- a) maximální hodnotu úhlu rozptylu θ částice alfa,
- b) kinetickou energii rozptýlené částice alfa odpovídající maximálnímu úhlu rozptylu.

Zprvu řešte úlohu obecně, potom užitím konečných vztahů proveďte číselný výpočet.

Zdeněk Janout

2. Důležitou roli mezi jadernými palivy hraje izotop uranu ^{235}U . Jádra tohoto izotopu se snadno štěpí pomalými neutrony, přičemž se uvolňuje velké množství energie. Určete:

- a) energii (v kJ), která se uvolní při rozštěpení všech jader uranu ^{235}U obsažených v 1 kg,
- b) množství nafty (v tunách) o výhřevnosti 41 868 J/kg, které je zapotřebí k získání ekvivalentního množství energie. Analogickým výpočtem určete i ekvivalentní množství uhlí (výhřevnost 30 000 J/kg).
- c) elektrický výkon (v MW) „atomové“ elektrárny, jestliže roční spotřeba izotopu ^{235}U činí 675 kg a účinnost elektrárny je 25 %,
- d) množství izotopu ^{235}U (v kg), které se zúčastní štěpení při výbuchu jaderné bomby s tritolovým ekvivalentem 30 kilotun, jestliže tepelný ekvivalent tritolu je 4186,8 J/kg.

Při výpočtech předpokládejte, že se při štěpení jednoho jádra uranu uvolní energie 200 MeV ($1 \text{ eV} \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Zdeněk Janout

3. Vo vodorovnej rovine sa pohybujú dve telesá: prvé o hmotnosti $m_1 = 45 \text{ [g]}$ má vektor rychlosti $\mathbf{v}_1 = 12 \mathbf{i} + 19 \mathbf{j}$, druhé o hmotnosti $m_2 = 36 \text{ [g]}$ má rýchlosť $\mathbf{v}_2 = 6 \mathbf{i} + 19 \mathbf{j}$. V čase $t_0 = 0$ sa m_1 nachádza v bode $A = [-20, -30]$, teleso m_2 v bode $B = [34, 24]$ (Súradnice sú udané v centimetroch)

1. Stanovte priesečník $P = [x_P, y_P]$ dráh obidvoch telies!
2. Koľko sekúnd trvá telesu m_1 pohyb z bodu A do P , a koľko sekúnd potrebuje teleso m_2 , aby sa dostalo z B do P ?

Evžen Říman

4. Vlákno 90-wattovej žiarovky pre napätie $U = 220 \text{ [V]}$ je z wolframu, ktorého teplotný koeficient odporu $\alpha = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ [}^\circ\text{C}^{-1}]$ a má za studena (pri teplote $\vartheta_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ odpor $R_0 = 12 \Omega$.

Stanovte:

- a) počiatočný prechádzajúci prúd I pri napätí 220 [V];
- b) odpor R_1 tohoto vlákna po plnom rozžeravení a prechádzajúci prúd I_1 ;
- c) vzrast teploty od okamihu zapnutia prúdu do plného rozžeravenia.

d) Aké z toho vyplýva poučenie pre konštrukciu zapínačov lustrov s veľa žiarovkami?

Evžen Říman

5. Každý cm^2 zemského povrchu prijme za minútu približne $8,4 \text{ [W.s]}$ žiarivej energie slnečnej. Vzdialenosť Zeme od Slnka je $R \doteq 150 \cdot 10^6 \text{ [km]}$.

Na koľko rokov takého žiarenia, ako je dnešné, by stačila hmotnosť Slnka, ktorá je dnes $m_0 = 2 \cdot 10^{30} \text{ [kg]}$? (Podľa Einsteinovej teórie relativity odpovedá zotrvačnej hmotnosti m množstvo energie $W = mc^2$ kde c = rýchlosť svetla)

Evžen Říman

6. Veľmi tenký kruhový kotúč polomeru 15 [cm] má byť na obidvoch stranách elektrolyticky pokrytý vrstvou striebra o hrúbke $0,05 \text{ [mm]}$ prúdom 3 ampéry pri napätí 50 voltov.

Vypočítajte (na 3 platné číslice):

- α) Koľko hodín trvalo pokovovanie?
- β) Koľko elektrickej energie sa spotrebovalo?
- γ) Koľko gramov striebra je na kotúči?

Dané veličiny sú: hustota striebra je $10,3 \text{ [g.cm}^{-3}\text{]}$, elektrochemický ekvivalent striebra je $1,118 \cdot 10^{-3} \text{ [gram/coulomb]}$.

Evžen Říman

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Matematika

7. Buď n přirozené číslo. Určete všechny n -tice celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ takové, že platí identicky:

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n),$$

tj. všechny kořeny polynomu P se shodují s jeho koeficienty.

(Došlo 13 řešení)

Břetislav Novák

Upravené řešení Pavla Tvrdíka 4. B G Kolín:

Je zřejmé, že n -tice složená ze samých nul je řešením naší úlohy. Vyloučíme-li v dalším tento triviální případ a uvážíme-li, že n -tice $a_1, a_2, \dots, a_n$ je řešením úlohy, tj. platí identicky

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n), \quad (1)$$

právě když $(n + k)$ -tice $a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots, 0$ řeší naši úlohu ($a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou celá čísla), stačí vyšetřovat případ $a_n \neq 0$.

Porovnáním koeficientů u x^{n-1} , x^{n-2} a x^0 ve vztahu (1) dostaneme

$$a_1 = -(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad (2)$$

$$a_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n, \quad (3)$$

$$a_n = (-1)^na_1a_2 \dots a_n, \quad (4)$$

kde vztah (3) uvažujeme jen pro $n > 1$. Je-li $n = 1$, dostaneme z (2) spor s předpokladem $a_n \neq 0$. Buď tedy v dalším $n > 1$. Z (4) plyne $a_1a_2 \dots a_{n-1} = (-1)^n$, a protože $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou čísla celá, je

$$a_j = \pm 1 \text{ pro } j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

Ze vztahu (3) dostaneme použitím (2) a (5)

$$2a_2 = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_{n-1}a_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 = -a_2^2 - a_3^2 - \dots - a_n^2 = -n + 2 - a_n^2,$$

tj.

$$a_n^2 = 2 - n - 2a_2 \quad (6)$$

Je-li $n = 2$, plyne z (6) $a_2 = -2$ a z (4) $a_1 = 1$. Je-li $n > 2$, plyne z (6) a (5) ihned $a_2 = -1$ a dosazením opět do (6) dostaneme $a_n^2 = 4 - n$. Odtud plyne nutně $n = 3$, z (4) dosazením $a_2 = -1$ vyjde $a_1 = 1$ a z (2) $a_3 = -1$. Celkem tedy dostaneme, že všechny n -tice, řešící naši úlohu, mají tvar $0, 0, \dots, 0$ neb $1, -2, 0, 0, \dots, 0$ neb $1, -1, -1, 0, 0, \dots, 0$, tj. odpovídají polynomům x^n , $x^n + x^{n-1} - 2x^{n-2}$, $x^n + x^{n-1} - x^{n-2} - x^{n-3}$.

8a. V množině komplexních čísel řešte systavy lineárních rovnic s komplexními koeficienty:

$$\begin{aligned} 3x + (i - 1)y - 3z &= 5 - 7i \\ ix - y + 3iz &= 1 \\ (2 + i)x - iy + (3 + 6i)z &= 5 + 2i \end{aligned}$$

Evžen Říman

(Došlo 24 řešení)

Řešil Martin Baumann, OU ČKD Praha 9, třída S 2s:

Označme rovnice pořadovými čísly (1), (2), (3). Rovnici (2) násobme číslem $(-i)$ a sečtěme s rovnicí (1); tím obdržíme

$$4x + (2i - 1)y = 5 - 8i \quad (4)$$

Rovnici (1) a (3) násobíme číslem 1, rovnici (2) číslem (-2) a sečteme; po vynásobení a sloučení vznikne rovnice

$$x(5 - i) + y = 8 - 5i. \quad (5)$$

Rovnici (5) násobíme číslem $(1 - 2i)$ a sečteme s rovnicí (4); vznikne rovnice

$$x(7 - 11i) = 3 - 29i. \quad (6)$$

kterou znásobíme číslem $(7 + 11i)$ a po úpravě obdržíme

$$170x = 340 - 170i, \text{ tj. } x = 2 - i. \quad (7)$$

$$\text{Dosazením (7) do (5) získáme } y = -1 + 2i. \quad (8)$$

Výsledky (7) a (8) dosadíme do kteréhokoliv z daných rovnic; tím obdržíme

$$z = \frac{1}{3}i, \quad (9)$$

Všechny úpravy byly ekvivalentní, nalezená čísla jsou tedy skutečně jediným řešením soustavy, jak ukáže zkouška:

$$L = 3(2 - i) + (i - 1)(2i - 1) - 3\frac{i}{3} = 5 - 7i \Rightarrow L = P \quad (1)$$

$$L = i(2 - i) - (2i - 1) + 3i\frac{i}{3} = 1 \Rightarrow L = P \quad (2)$$

$$L = (2 + i)(2 - i) - i(2i - 1) + (3 + 6i)\frac{i}{3} = 5 + 2i \Rightarrow L = P \quad (3)$$

8b. V množině komplexních čísel řešte soustavu lineárních rovnic s komplexními koeficienty:

$$\begin{aligned} 4x + iy + (1 - i)z &= 4 + 3i \\ -ix + (i - 1)y + 2z &= 7 - 6i \\ (3 + i)x - 5y + (2 + i)z &= 1 + 7i \end{aligned}$$

Evžen Říman

(Došlo 24 řešení)

Redakce lituje, že v zadání (viz Rozhledy roč. 53, 1974/75, str. 81, úloha M 8b) vznikla tisková chyba, neboť ve třetí rovnici nebylo vytištěno x .

Část soutěžících řešila soustavu, jak byla vytištěna, což bylo obtížnější. Ostatní si chybu sami opravili. Při klasifikování ovšem uznáváme v obojím případě (ať byla řešena soustava vytištěná anebo opravená) správné řešení za plně vyhovující.

Riešili Pavol Tarina, 3c. gymn. Topoľčany a Jiří Basler, 3b. gymn. Opava :

Užili metódu determinantovú (tak isto ako mnohí iní riešitelia). Určili determinant sústavy D , potom determinanty D_x , D_y , D_z , ktoré vzniknú z determinantu D tak, že v ňom stĺpec obsahujúci koeficienty neznámej x , resp. y alebo z nahradíme stĺpcom pravých strán zadanych rovníc. Zo zadanej sústavy si vytvoríme maticu

$$\begin{pmatrix} 4, & i, & 1-i & 4+3i \\ -i, & i-1, & 2 & 7-6i \\ 3+i, & -5, & 2+i & 1+7i \end{pmatrix}$$

Potom je

$$D = \begin{vmatrix} 4, & i, & 1-i \\ -i, & i-1, & 2 \\ 3+i, & -5, & 2+i \end{vmatrix} =$$

$$= + [4(i-1)(2+i) + i \cdot 2(3+i) + (1-i)(-i)(-5)] - \\ - [(1-i)(i-1)(3+i) + 4 \cdot 2 \cdot -5 + i \cdot (-i) \cdot (2+i)] = 31 + 8i.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4+3i, & i, & 1-i \\ 7-6i, & i-1, & 2 \\ 1+7i, & -5, & 2+i \end{vmatrix} =$$

$$= + [(4+3i)(i-1)(2+i) + 2i(1+7i) + (1-i) \cdot -5 \cdot (7-6i)] - \\ + (7-6i) \cdot i \cdot (2+i)] = 15 + 70i.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4, & 4+3i, & 1-i \\ -i, & 7-6i, & 2 \\ 3+i, & 1+7i, & 2+i \end{vmatrix} =$$

$$= + [4(7-6i)(2+i) + (4+3i)(3+i) \cdot 2 + (1+7i)(1-i)(-i)] - \\ - [(1-i)(7-6i)(3+i) + 8(1+7i) + (2+i)(4+3i)(-i)] = \\ = 70 - 15i.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 4, & i, & 4+3i \\ -i, & i-1, & 7-6i \\ 3+i, & -5, & 1+7i \end{vmatrix} =$$

$$= + [4(1+7i)(i-1) + i(7-6i)(3+i) + (4+3i) \cdot -i \cdot -5] - \\ - [(4+3i)(i-1)(3+i) + (7-6i) \cdot 4 \cdot -5 + (1+7i) \cdot i \cdot (-i)] = \\ = 125 - 100i.$$

Teraz určíme neznáme veličiny x , y , z tak, že determinanty D_x , D_y , D_z delíme determinantom sústavy (tj. D), čiže použijeme Cramerovo pravidlo:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15 + 70i}{31 + 8i} = \frac{(15 + 70i)(31 - 8i)}{(31 + 8i)(31 - 8i)} = 1 + 2i.$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{70 - 15i}{31 + 8i} = \frac{(70 - 15i) \cdot (31 - 8i)}{(31 + 8i) \cdot (31 - 8i)} = 2 - i.$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{125 - 100i}{31 + 8i} = \frac{(125 - 100i)(31 - 8i)}{(31 + 8i)(31 - 8i)} = 3 - 4i.$$

Pre kontrolu vykonáme skúšku dosadením do ľavej strany každej z rovníc. Keďže pre každú z rovníc platí, že hodnota ľavej strany po dosadení dá pravú stranu, čiže $L = P$, sú riešením danej sústavy rovníc korene $x = 1 + 2i$; $y = 2 - i$; $z = 3 - 4i$.

9. Řešte rovnici

$$\sqrt[3]{3-x} - \sqrt{\frac{1-x}{2-x}} = 1.$$

Sovětský časopis Kvant

(Došlo 24 řešení)

Řešil Pavel Tvrdík, IV. B G Kolín:

Nejprve určíme definiční obor $D(f)$ funkce $\sqrt[3]{3-x} - \sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$:

$$D(f) = (-\infty; 1) \cup (2; 3).$$

Rovnici řešíme metodou inkluze:

$$\sqrt[3]{3-x} - \sqrt{\frac{1-x}{2-x}} = 1, \quad x \in M_1 \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{(3-x)(2-x)} - \sqrt{1-x} = \sqrt{2-x} \quad |^2$$

$$x^2 - 5x + 5 = 2\sqrt{(1-x)(2-x)(3-x)} \quad |^2.$$

Po úpravě dostaneme kladně reciprokou rovnici 4. stupně, kterou řešíme zavedením substituce:

$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$y = x + \frac{1}{x}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \quad (3)$$

Dostaneme rovnici

$$y^2 - 6y + 9 = 0,$$

která má dvojný kořen

$$y_{1,2} = 3.$$

Dosadíme do rovnice (3)

$$x^2 - 3x + 1 = 0 ,$$

která má kořeny

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) , \quad M_2 = \{ \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) ; \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \}$$

Oba kořeny patří do $D_f = (-\infty ; 1) \cup (2 ; 3)$

M_1 je obor pravdivosti výrokové formy $f(x) = 1$ a protože $M_1 \subset M_2$, musíme provést zkoušku dosazením do (1):

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$L = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = -1 , \quad L \neq P$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$L = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = 1 , \quad L = P$$

Jediným kořenem rovnice (1) je $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, který je zároveň dvojným kořenem rovnice (2).

Oborem pravdivosti výrokové formy (1) je množina $M_1 = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$

různé

Giordano Bruno

JOSEF KOTYK, Pardubice

Doba gigantických bojů mezi odumírajícím feudalismem a nastupujícím panstvím buržoazie potřebovala a zrodila v umění i ve vědách podle pamětihodných slov Engelsových¹⁾ „obry silou mysli, vášnivostí a charakterem, všestranností a učeností“ Z géníů 16. století, kteří jsou produktem tohoto obrovského střetnutí dvou společen-

¹⁾ B. Engels: Dialektika přírody (Praha 1952), str. 25.

ských řádů, budeme letos častěji než jindy vzpomínat zásluh jednoho z nejvýznamnějších renesančních filosofů GIORDANA BRUNA, největšího popularizátora Koperníkova díla a mučedníka nového vědeckého světového názoru. Od jeho tragické smrti uplynulo letos právě 375 let.

GIORDANO BRUNO (lat. NOLANUS) se narodil roku 1548, pět let po smrti Koperníkově, v Nole u Neapole. Patnáctiletý vstoupil do dominikánského řádu v Neapoli, po 13 letech však z kláštera uprchl do severní Itálie. Hnán obavami před pronásledováním a velkým zájmem o vědu, pobýval řadu let i v zahraničí, ve Švýcarsku, Francii, Anglii



a Německu, v roce 1588 půl roku i v rudolfinské Praze a všude se stýkal s významnými humanisty a předními filosofi té doby. Ve svých přednáškách i v činnosti literární podával vědeckou kritiku scholastiky a základy „nové filosofie“, materialistického světového názoru. Pokusím se objasnit našim čtenářům stručně velikost a krásu, která tkví v životním díle i smrti tohoto slavného filosofa.

Po celý svůj život vystupoval Giordano Bruno proti scholasticismu a velebil Koperníka pro sílu i odvahu jeho myšlenky povznést se nad smyslový klam nazírání geocentrického ke skutečnému poznání záhad světových. V jeho osobnosti se stupňovaly známé spory o uznání Koperníkovy světové soustavy²⁾ a nabývaly na prudkosti. Rozvíjející se zápas o názor heliocentrický teprve ukázal, jak veliká a dalekosáhlá je myšlenková revoluce, jež nadcházela.

Koperníkovu soustavu hodnotil Bruno kriticky a doplnil ji. Svým učením přivodil v rozvíjení heliocentrických představ veliký pokrok a podstatně přispěl k obohacení, nutnému doplnění a rozšíření Koper-

²⁾ V podrobnostech viz autorovo pojednání „O vývoji heliocentrické soustavy“, otištěné k 500. výročí narození Mikuláše Koperníka v ROZHLEDECH, roč. 51, čís. 5, 6 a 7.

níkových názorů. Podrobné studium řecké filosofie a myšlenek Koperníkových ho podnítilo k pozoruhodnému pokusu o nový ucelený názor kosmický. Základní ideou jeho učení je nekonečnost vesmíru. Od Aristotela (384—322 před n. l.) až po Keplera (1571—1630) si učenci představovali stálice připevněny na sféře (kulové ploše), která ohraničuje svět; za touto domněle tenkou skořápkou nebylo podle nich už nic, zhoula nic. Teprve Newtonův gravitační zákon (1687) znamenal v pojetí soustavy stálic úplný převrat. Podle Giordana Bruna neexistuje sféra, která by ohraničovala svět. Uzavřený svět středověku nahradil Bruno nekonečným vesmírem s nespočetnými světy a tělesy, jež mají určitou formu³⁾ a strukturu a jsou v ustavičném pohybu. Vesmírná tělesa nejsou však v ničem nebesky dokonalá, jak se do té doby věřilo; nejsou „dokonale“ kulatá, ani se nepohybují po drahách kruhových jako „dokonalých“ křivkách. Jsou mimoto složena ze stejných elementů jako Země a Slunce.⁴⁾ Navzájem se liší jen tím, že na některých převládá oheň, na jiných země a voda, sucho a teplo apod. Podle toho se podobají Slunci nebo Zemi, jsou zářící nebo temná. Mnohá jsou způsobila, aby na nich mohl také vzniknout a rozvíjet se život...

Pro nekonečný vesmír Giordana Bruna neexistuje střed. Žádné nebeské těleso, zejména pak Země, není středem vesmíru. Země vůbec není tělesem ve vesmíru výjimečným, a to ani svým postavením a svou povahou, ani tím, že je domněle jediná nositelkou života. Člověk není již centrem, avšak ani vrcholem všeho stvoření. Kosmický názor Giordana Bruna ukazoval na Zemi a zároveň i na lidstvo na ní žijící jako na příliš nepatrné činitele v ohromnosti světů. Jeho učení přinášelo jako nutný důsledek pokorné zařazení Země — a tedy i člověka — do vesmíru.

Nekonečný vesmír nemá ani střed ani obvod, je podle duchaplných slov Pascalových (*Pensées* XVII., 1.) „une sphère infinie, dont le centre est partout, la circonférence nulle part“, tj. sférou nekonečnou, jejíž střed je všude a obvod nikde. I Slunce zbavil proto Bruno jeho výlučného postavení v domnělém středu vesmíru. Slunce je pouze centrálním tělesem naší planetární soustavy. Bruno učil také, že Slunce není tvořeno jedinou látkou, nýbrž skládá se z elementů; jako důkaz a zároveň námitku proti dosavadním představám o neposkvrněnosti Slunce uváděl, že sluneční kotouč je uprostřed temnější než na okraji. Slunci připisoval také pohyb, a to dvojí: otáčivý a všeobecný neboli vlastní (*motus proprius*) — možno si snad přát více? Když záhy na to slavný Galileo Galilei (1564—1642), vyzbrojen dalekohledem, objevil sluneční skvrny a pozoroval jejich pohyby, dospěl rovněž k závěru, že Slunce se otáčí

³⁾ Úkol, objasnit rozdílné formy hmoty, které pozorujeme ve vesmíru, jako momenty vývoje hmoty, vytyčil Bedřich Engels; poukázal také na jeho význam pro další vývoj kosmogonie.

⁴⁾ Vědecký důkaz jednotnosti hmotného složení vesmíru podala však teprve spektrální analýza, vynalezená až roku 1860 Bunsenem a Kirchhoffem.

kolem osy. Pohyb zv. vlastní byl později také zjištěn; směřuje k bodu zv. apex s rektascenzí $\alpha = 285^\circ$ a deklinací $\delta = 35^\circ$ rychlostí asi 20 km/s.

Měsíc podle Giordana Bruna „není nám o nic více nebem než my Měsíci“ Ani lidé atomového věku, pozemšťané doby kosmických letů, jejichž noha stanula také již na Měsíci, by to neřekli lépe.

Giordano Bruno byl vůbec mistrem vytríbeného stylu. V díle „De l'infinito, universo e mondi“ (O nekonečnu, universu⁵) a světech), vydaném v Londýně roku 1584, napsal mj. tyto pamětihodné verše:

„Tep mocných křídel v nebojácném letu
mě nese, aniž skelné sféry potká,
a žádný konec nenaskytá se tu...
A k dalším glóbulům mířím nad planetu,
jež vzadu mizí, zdlouhavá a krotká,
skrz nebesa do nekonečných světů.“

GIORDANO BRUNO je nejhlubší myslitel období renesance. Jeho soustava přírodní filosofie patří k největším pokusům na počátku nového věku vůbec. Svým návratem k antickému materialismu a celou svou orientací je i v názorovém kvasu renesančního myšlení ojedinělá. V době revolučního pozdvižení myslí a příboje nových teorií filosofických bylo však pojednou veta po dosavadním soběstačném klidu a vědeckém i náboženském uspokojení středověkého člověka. Názory Giordana Bruna vzbudily proto odpor římské inkvizice. Je pak tragickým údělem velikánů, kteří daleko předstihli svou dobu, že musí mučednickou smrtí dobýt morálního vítězství nad přesilou. Také Giordano Bruno, slavný vyznavač nového světového názoru, zpečetil na přelomu věků vznešenost bědného údělu lidského dne 17. února 1600 smrtí upálením. K jeho počtě vytvořil sochař Ettore Ferrari roku 1889 na Campo dei Fiori (Náměstí květů) v Římě pomník, na němž čteme: „Století jím tušené postavilo mu památník na místě, kde hranice jeho plála...“

Giordano Bruno svým životem dokázal, že smrt opravdového filosofa není ani náhoda ani neštěstí, nýbrž naplnění. „Smrt v jednom století“, napsal, „je zdrojem života ve všech stoletích následujících.“ Jdouce v jeho šlépějích i jiní myslitelé (Galilei, Leibniz, Spinoza) pochopili dialektickou jednotu hmoty a formy, celku a částí, makrokosmu a mikrokosmu, a v ní úchvatnou harmonii světa.

⁵) Lat. universum = vesmír, přidržuji se však obvyklého překladu de universo = o universu; viz např. knihu Rud. Ráže „Bohyně raněná slepotou“ (Albatros, Praha 1972, str. 31) aj.

matematické zábavy

0 několika paradoxech

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Paradoxním běžně nazýváme to, co je sotva uvěřitelné, co zdánlivě odporuje jiným tvrzením nebo vžitým představám. Znáte například hydrostatický paradox ve fyzice; při jeho výkladu se předvádí pokus s různě tvarovanými nádobami a tak se ozřejmí, že jde o fyzikální zákon, který se jen „na první poslech“ zdá neuvěřitelný.

V dějinách filozofie, logiky a matematiky je zaznamenáno mnoho případů, kdy se nové tvrzení zdálo nepřijatelné, protože bořilo dosavadní představy o světě. Slyšeli jste jistě o objevu, že úhlopříčka jednotkového čtverce nemá délku vyjádřenou racionálním číslem. Takové tvrzení připadalo paradoxní antickým matematikům pytagorejské školy, kteří zastávali názor, že každé dvě úsečky jsou souměřitelné (tj. nějaký přirozený násobek jedné se rovná některému přirozenému násobku druhé). Víte, jak to v dalším vývoji dopadlo — obor racionálních čísel byl nakonec rozšířen o čísla iracionální, vznikl nový obor reálných čísel, ve kterém se pro každou úsečku „najde“ číslo vyjadřující její délku při zvolené jednotce.

Jiné antické paradoxy však mají „tužší život“ a k jejich objasnění přispívají vědci dodnes. Připomeneme si nejslavnější paradoxy a naznačíme složitou problematiku, kterou odkrývají.

Paradox Achilles a želva patří do skupiny tzv. aporií Zenona z *Eley* (490—430 př. n. l.). V době, kdy se řeční filozofové vášnivě přeli o podstatu pohybu, Zenon vymyslel názorné situace, které odhalovaly složitost pojmu pohyb a ukazovaly, že zjednodušené úvahy o něm vedou snadno ke sporu se zkušeností. V případě Achillea a želvy jde o situaci, kdy rychlonohý válečník Achilles má před sebou v nějaké vzdálenosti stále lezoucí želvu. Předpokládejme, že se Achilles pustí do stíhání želvy na společné přímé dráze, která prochází místy, kde se právě nacházejí; označme tato místa startu Achilla a želvy A_0, Z_0 . Achilles po chvíli doběhne do místa Z_0 , ale želva je zatím už v místě Z_1 , Achilles dorazí do Z_1 , ale želva se mezitím přesune do Z_2 atd., kdykoliv Achilles doběhne do místa Z_i , bude želva v místě $Z_{i+1} \neq Z_i$ atd. Úsečky $Z_i Z_{i+1}$, mají při každém i nenulové délky, proto bude Achillovi stále zbývat „kousek“ dráhy k dostižení želvy. Úvaha se zdá být správná, a přesto její výsledek odporuje zkušenosti.

Důmyslné Zenonovy paradoxy odhalovaly složitou podstatu pohybu času a prostoru, kterou se snažily vyložit stovky filozofů a přírodovědců

po celá staletí. O Zenonových paradoxech se zmiňují i klasikové marxistické filozofie, kteří k jejich řešení přistupují dialektickou metodou, jež umožňuje i výklad pohybu v obecnějším smyslu (vývoje), např. společenský vývoj. Problematika Zenonových paradoxů se dotýká v matematice především pojmu nekonečna, limity posloupnosti, součtu nekonečně mnoha čísel (tzv. nekonečné řady), pojmu reálného čísla, integrálu apod. Složitě pojmy uvedené v tomto odstavci nebudeme dále rozebírat, uvědomte si jen dalekosáhlé souvislosti „nevinných“ paradoxů o pohybu.

Jiným světově proslulým paradoxem je Lhoucí Krétan, za jeho autora je označován *Eubulides z Miletu*, který byl učitelem známého filozofa Demokrita. Paradox snad původně zněl takto:

Krétan Epimenides říká: „Všichni Krétané jsou lháři“. Ptáme se, zda Epimenides řekl pravdu či lhal.

Tato formulace je dost nejasná, protože význam slova „lhář“ je neurčitý — je to člověk, který stále lže, nebo ten, který někdy lže (a my nevíme, kdy)? Proto se obvykle upřesňuje, že Epimenidův výrok se vztahuje k jednomu okamžiku a že žádný Krétan v tu chvíli nic jiného neřekl. Pak se uvažuje takto:

a) Předpokládejme, že Epimenides řekl pravdivý výrok, potom je to ale výrok Krétana, a tedy nepravdivý výrok.

b) Předpokládejme, že Epimenides řekl nepravdivý výrok, potom není pravda, že všichni Krétané lžou, a tedy v uvažovaném okamžiku aspoň jeden Krétan řekl pravdivý výrok. Z omezujících podmínek pak plyne, že mluvil jen Epimenides, proto je jeho výrok pravdivý.

Z předpokladu o platnosti Epimenidova výroku jsme vyvodili jeho neplatnost, z předpokladu o jeho neplatnosti vyplývá jeho platnost. Tento výrok tedy zároveň platí a neplatí, a to odporuje základnímu principu logiky o jediné pravdivostní hodnotě každého výroku.

Všimněte si, že bez dodatečného zpřesnění textu paradoxu bychom v případě b) nedostali spor, ale jen důsledek, že aspoň jeden Krétan není notorický lhář. Paradox „Lhoucí Krétan“ má tedy jakési „jádro“, které není v jeho původním znění dost výstižně vyjádřeno. Aristotelova stručná formulace

Lže ten, kdo říká, že lže?

je bližší zpřesněné verzi paradoxu. Středověký učenec *Buridan* (1300—1358) vyjádřil podstatu paradoxu takto:

Výrok napsaný na tomto řádku neplatí.

Ptáme se, zda tento výrok je pravdivý či není; přitom je jasné, že na řádku je napsán pouze posuzovaný výrok. Promyslete si sami úvahy obdobné s a), b), které ukáží, že posuzovaný výrok platí právě tehdy, když neplatí.

O paradoxu lháře a jeho variantách byly popsány tisíce stran v učených spisech; řešitelé zdůvodňují většinou, že *v paradoxu nejde o správně tvo-*

řený výrok a že proto tomuto sdělení nelze přiřazovat pravdivostní hodnoty. Tato skupina paradoxů přispívá tedy k upřesnění pojmu výrok; jednou ze zásad je to, že nelze připustit, aby si výrok sám přiřazoval pravdivostní hodnotu. Dále se jeví účelné rozlišovat výroky (o čemkoliv kromě výroků) a výroky o výrocích.

Připojme ještě při této příležitosti zmínku, že okřídlené Sokratovo rčení „*Vím, že nic nevím*“ patří také mezi „nevýroky“, pokud není jasné vymezeno, na které věci se vztahuje ono „nic“. Rozhodně nemůže mezi tyto věci patřit vyslovený výrok, protože jinak bychom mohli namítnout, že mluvčí přece něco ví, totiž to, co vyslovil, a točili bychom se opět ve sporech.

Na závěr tohoto článku zařadíme ještě druhý Eubulidův paradox, který přetrval věky; je to paradox hromady:

Jedno zrno netvoří hromadu; přidáním dalšího zrna k něčemu, co není hromadou, také nedostaneš hromadu. Jak lze získat hromadu zrn přidáváním zrna po zrnu?

Tento paradox poukazuje na nedostatečné vymezení mnoha „hromadných pojmů“ a souvisí poněkud i s množinovými představami. Paradoxům teorie množin však budeme věnovat samostatný článek.

Problémy k přemýšlení

1. Pokuste se prokázat paradoxní charakter výroku „Já lžu“.
2. Nahraďte Buridanův text na jednom řádku sdělením „Výrok napsaný na tomto řádku nelze dokázat“ a ukažte, že úvahy o jeho dokazatelnosti i nedokazatelnosti vedou ke sporům.
3. Vymyslete si vlastní analogie k paradoxu hromady. (Vyhledejte slova, která označují shluky jednotlivostí, ale nevymezují jejich potřebný minimální počet.)
4. Promyslete si podstatu antického paradoxu o holohlavém: „Kolik vlasů musí člověku vypadnout, aby byl holohlavý? Není-li holohlavý, pak ztráta jednoho vlasu neznamená, že se stane holohlavým.“

Úspěšní řešitelé 3. kol všech ročníků FO

Žádáme úspěšné řešitele 3. kol všech ročníků fyzikální olympiády, aby oznámili své zaměstnání, akademický titul, vědecké hodnosti a adresu ÚV FO, Koněvova 131, 639 00 Brno.

Prosíme jejich známé, aby je na tuto výzvu upozornili.

ÚV FO

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

selection	kombinace
self-conjugat	sám k sobě sdružený
semicircle	polokruh
senary	šestkový
sense	smysl
separate	oddělit
sequence	posloupnost
arithmetic sequence	aritmetická posloupnost
convergent sequence	konvergentní posloupnost
decreasing sequence	klesající posloupnost
divergent sequence	divergentní posloupnost
geometric sequence	geometrická posloupnost
increasing sequence	rostoucí posloupnost
null sequence	nulová posloupnost
partial sequence	vybraná posloupnost
element of sequence	člen posloupnosti
series	řada
alternating se	alternující řada
Fourier series	Fourierova řada
geometric series	geometrická řada
number series	číselná řada
power series	mocninná řada
uniformly convergent series	stejněoměrně konvergentní řada
set	množina
bounded set	ohraničená množina
closed set	uzavřená množina
dense set	hustá množina
denumerable set	spočetná množina
disjoint, disjunct sets	disjunktní množiny
empty set	prázdná množina
finite set	konečná množina
infinite set	nekonečná množina
non-denumerable set	nespočetná množina
nowhere-dense set	řídká množina
open set	otevřená množina
point set	bodová množina
set function	množinová funkce
set of projections	sdružené průměty

seven	sedm
seventh	sedmý, sedmina
seventeen	sedmnáct
sexagesimal	šedesátinný, šedesátkový
shadow	stín
sheaf of lines	trs přímek
sheaf of planes	trs rovin
short	krátký
short radius	poloměr kružnice vepsané mnohoúhelníku
shortage	nedostatek
shorten	zkrátit
side	strana, odvěsna
side of angle	rameno úhlu
sign	znak, znaménko
similar	podobný
similarity	podobnost
similitude	stejnolehlost
simple	jednoduchý
simplify	zjednodušit
simultaneous	současný
simultaneous equations	soustava rovnic
sine	sinus
sine curve	sinusoida
sine formula	sinová věta
single-valued	jednoznačný
singular point	singulární bod
size	velikost
true size	skutečná velikost
skew curve	prostorová křivka
skew lines	mimoběžné přímky
skew ruled surface	zborcená přímková plocha
slant height of cone	délka strany kužele
slant height of pyramid	výška stěny pravidelného jehlanu
slide rule	logaritmické pravítko
slide runner	běžec (log. pravítka)
slope	sklon, spád
small	malý
small circle	vedlejší kružnice
smooth	hladký
solid	těleso
solution	řešení
solve	řešit, vyřešit
source	vzor, pramen, zdroj
space	prostor, prostorový
space curve	prostorová křivka
metric space	metrický prostor
n-dimensional space	n-rozměrný prostor
spatial	prostorový
speed	rychlost

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

4



ROČNÍK 54
PROSINEC 1975

4

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1975.

OBSAH

Dr. E. Calda: Faktoriály a subfaktoriály	145
Dr. J. Šedivý: Paradoxy teorie množi	149
Prof. J. Brejcha: Některé charakteristické vlastnosti rovinného čtyřúhelníka, jehož úhlopříčky jsou vzájemně kolmé	153
Ing. Z. Janout, CSc.: Kosmické záření	159
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Úkazy na obloze v roce 1976	165
Prof. dr. R. Košťál: Osmá mezinárodní fyzikální olympiáda v NDR	170
Prof. dr. R. Košťál: Chyby v žákovských řešeních úloh fyzikální olympiády	172
Naše soutěž	175
J. Kotyk: Rozhledy pomáhají škole	182
Dr. J. Šedivý: Několik zajímavostí	185
J. Diblík: Zmatlíkův „objev“	188
Dr. K. Mišoň, CSc.: Regula Nicomachi	189
Recenze	192
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

Faktoriály a subfaktoriály

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

S pojmem faktoriálu jste se už jistě setkali, patrně v souvislosti s počtem $P(n)$ všech různých permutací n -prvkové množiny: $P(n) = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$. Permutací libovolné množiny přitom rozumíme každé její prosté zobrazení na sebe. Zobrazuje-li některá permutace množiny A prvek $x \in A$ na prvek x , říkáme, že tato permutace *reprodukuje* prvek x nebo že prvek x je v této permutaci *samodružný*. Např. množina P_A všech permutací množiny $A = \{1, 2, 3\}$ má právě tyto prvky:

$$\begin{aligned} p_1 &= \{[1,1], [2,2], [3,3]\}, & p_2 &= \{[1,1], [2,3], [3,2]\}, \\ p_3 &= \{[1,2], [2,1], [3,3]\}, & p_4 &= \{[1,2], [2,3], [3,1]\}, \\ p_5 &= \{[1,3], [2,1], [3,2]\}, & p_6 &= \{[1,3], [2,2], [3,1]\}. \end{aligned}$$

Tyto permutace jsou zapsány způsobem, kterým obvykle zapisujete zobrazení. U permutací je zvykem používat jiného druhu zápisu, který v případě uvedených permutací množiny A vypadá takto:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozdíl mezi oběma způsoby je pouze formální a nepodstatný.

Všimněme si, že všechny tři prvky množiny A jsou samodružné v jediné permutaci p_1 ; jediný prvek je samodružný právě v permutacích p_2, p_3, p_6 ; žádný prvek není reprodukován právě permutacemi p_4, p_5 . Množiny $\{p_1\}$, $\{p_2, p_3, p_6\}$ a $\{p_4, p_5\}$ jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocení je množina P_A ; říkáme, že tyto množiny tvoří rozklad množiny P_A . Víte-li, že každý rozklad dané množiny je určen relací ekvivalence na této množině (a obráceně), můžete se pokusit určit relaci R na množině P_A , které uvedený rozklad odpovídá. Jedná se zřejmě o relaci R na množině P_A definovanou takto: každé dvě permutace z množiny P_A patří do relace R právě tehdy, když reprodukují též počet prvků z množiny A . Snadno se přesvědčíte, že relace R je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Třídy ekvivalentních prvků příslušné relaci ekvivalence R jsou pak uvedené množiny $\{p_1\}$, $\{p_2, p_3, p_6\}$, $\{p_4, p_5\}$.

Budeme se zabývat otázkou, kolik prvků má každá třída takového rozkladu množiny P_M všech permutací dané n -prvkové množiny M .

Nejprve určíme počet všech permutací množiny $\mathbf{M}$, které neobsahují žádné samodružné prvky; tento počet určíme podle principu inkluze a exkluze (viz Rozhledy č. 8 minulého ročníku). Bez újmy na obecnosti lze označit $\mathbf{M} = \{1, 2, \dots, n\}$; vezmeme množinu $\mathbf{P}_M$ všech permutací množiny $\mathbf{M}$ a její podmnožiny $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ takové, že:

$\mathbf{P}_1$ je množinou všech permutací z $\mathbf{P}_M$, které reprodukují prvek 1,

$\mathbf{P}_2$ je množinou všech permutací z $\mathbf{P}_M$, které reprodukují prvek 2,

$\mathbf{P}_n$ je množinou všech permutací z $\mathbf{P}_M$, které reprodukují prvek n .

Pro počet D_n všech hledaných permutací dostáváme:

$$D_n = p(P'_1 \cap P'_2 \cap \dots \cap P'_n) = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

Výraz $D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$ bývá označován jako subfaktoriál; pro $n=0$ se definuje: $D_0 = 1$. Subfaktoriál D_n udává počet všech permutací n -prvkové množiny, které neobsahují žádné samodružné prvky. V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty D_n pro všechna celá nezáporná $n \leq 10$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n	1	0	1	3	9	44	265	1854	14833	133496	1334961

Užitím definice kombinačního čísla $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ můžeme D_n vyjádřit i v jiném tvaru:

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

Na tomto vyjádření D_n je zajímavé to, že se jeho prostřednictvím objevuje i v kombinatorice Eulerovo číslo e , s nímž se v jiných partiích matematiky (zejména v matematické analýze) setkáváme velmi často. Výraz e^x lze totiž pro každé reálné x vyjádřit jako součet nekonečné řady:

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$; podle toho tedy $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ udává součet prvních $n + 1$ členů rozvoje e^{-1} v nekonečnou řadu.

Užitím vztahu $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ dokážeme, že pro všechna přirozená $n \geq 2$ platí rekurentní vzorec:

$$D_n = (n - 1) (D_{n-1} + D_{n-2});$$

dosazením za D_{n-1} a D_{n-2} , po vytknutí výrazu $(n - 2)!$ a dalších jednoduchých úpravách máme vskutku:

$$\begin{aligned} (n - 1) (D_{n-1} + D_{n-2}) &= (n - 1)! \left[(n - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} \right] = \\ &= n! \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n - 1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = D_n \end{aligned}$$

Pomocí tohoto vzorce lze určovat hodnoty D_n často výhodněji než podle definice. Snadno si sami dokážete, že stejný rekurentní vzorec platí i pro faktoriály:

$$n! = (n - 1) [(n - 1)! + (n - 2)!].$$

Zamyslete se nad tím, proč obecně platí $D_n \neq n!$, když pro všechna přirozená $n \geq 2$ platí pro D_n i $n!$ týž rekurentní vzorec. Zřejmě proto, že v obou rekurentních vzorcích jsou jiné počáteční podmínky; pro $n = 0$ je sice $D_0 = 0!$ ale pro $n = 1$ je $D_1 \neq 1!$.

Označme dále $D_{n,r}$ počet všech permutací n -prvkové množiny $\mathbf{M}$, které reprodukují právě r jejích prvků při $0 \leq r \leq n$; pro $r = 0$ je zřejmě $D_{n,0} = D_n$. Jistě sami snadno určíte hodnoty $D_{n,n}$ a $D_{n,n-1}$. Je jasné, že musí být $D_{n,n} = 1$ (tzv. identická permutace) a $D_{n,n-1} = 0$; jestliže je totiž v nějaké permutaci n -prvkové množiny $n - 1$ jejích prvků samodružných, musí i n -tý její prvek být samodružný.

Určíme nyní počet $D_{n,r}$ uvedených permutací množiny $\mathbf{M}$. Vybereme libovolnou r -tici prvků z $\mathbf{M}$, které mají být samodružné; ze zbývajících $n - r$ prvků množiny $\mathbf{M}$ pak žádný nesmí být zobrazen sám na sebe. Počet permutací $(n - r)$ -prvkové množiny, ve kterých žádný její prvek není zobrazen sám na sebe, je — jak už víme — roven subfaktoriálu D_{n-r} . Protože r -tici prvků lze z množiny $\mathbf{M}$ vybrat právě $\binom{n}{r}$ různými způsoby, máme pro $D_{n,r}$ vzorec:

$$D_{n,r} = \binom{n}{r} D_{n-r}$$

Pro výše uvedené hodnoty $r = n$ a $r = n - 1$ skutečně dostáváme:

$$D_{n,n} = \binom{n}{n} D_0 = 1 \text{ a } D_{n,n-1} = \binom{n}{n-1} D_1 = 0$$

Snadno si ještě můžete zdůvodnit platnost vzorce:

$$\sum_{r=0}^n D_{n,r} = n!$$

Na závěr vyřešíme jednoduchý příklad. Vezmeme množinu všech permutací množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a určíme počty permutací, které reprodukuji právě r prvků dané množiny. Užitím tabulky hodnot D_n máme:

$$\begin{aligned} D_{6,0} &= D_6 = 265, & D_{6,1} &= \binom{6}{1} D_5 = 6 \cdot 44 = 264, \\ D_{6,2} &= \binom{6}{2} D_4 = 15 \cdot 9 = 135, & D_{6,3} &= \binom{6}{3} D_3 = 20 \cdot 2 = 40, \\ D_{6,4} &= \binom{6}{4} D_2 = 15 \cdot 1 = 15, & D_{6,5} &= \binom{6}{5} D_1 = 6 \cdot 0 = 0, \\ D_{6,6} &= \binom{6}{6} D_0 = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Abychom vyloučili možnost numerické chyby, snažíme se obecně u každého dosaženého výsledku provést nějakou kontrolu. V našem případě ověříme aspoň, že platí: $\sum_{r=0}^6 D_{6,r} = 6!$.

Cvičení

1. Každý z deseti žáků si přinesl do školy knihu, kterou nečetl nikdo z ostatních; určete, kolika způsoby si mohou tyto knihy mezi sebou navzájem půjčit. (D_{10}).

2. Pět závodníků se startovními čísly se zcela náhodně posadilo na pět laviček opatřených týmiž čísly. Jaká je pravděpodobnost, že právě u tří závodníků se shoduje startovní číslo s číslem lavičky, na níž sedí? $\left(\frac{1}{12}\right)$

3. Odvoďte, že pro všechna přirozená n platí rekurentní vzorec:

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n.$$

4. Zdůvodněte, že platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1}$.

Paradoxy teorie množin

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

V článku „O několika paradoxech“ v 2. čísle Rozhledů jsme poznali různé typy neobvyklých paradoxů. Někdy byl paradox jen překvapujícím poznatkem (např. iracionalita $\sqrt{2}$), jindy šlo o rozpor mezi výsledkem příliš zjednodušené úvahy a zkušeností (Achilles a želva), narazili jsme však i na logický spor v případě Lháře.

Objev každého typu paradoxu vyvolával ve vědeckém světě pozornost, objevy sporů však působily poplach. Sporné výsledky odvozené z daných tvrzení signalizují, že není něco v pořádku s oněmi tvrzeními nebo s postupem odvozování. Nejinak tomu bylo na počátku 20. století s paradoxy teorie množin, o kterých si něco povíme v tomto článku.

Úvahy označované dnes jako množinové se zdály paradoxní už dlouho před zrodem teorie množin. Přirozený jazyk odlišoval zvláštními tvary slov situace, kdy se jednalo o jednoho jedince, dva jedince (slyšeli jste o tzv. duálu?) či o více jedinců. Nebyl tedy k dispozici ani jazykový prostředek k úvahám o obecném pojmu, který by označoval libovolně početný souhrn individuí (víte, že množiny mohou být prázdné, mít 1, 2, ... i nekonečně mnoho prvků). Paradox hromady citovaný v závěru prvního článku ukazuje, jak tvrdošíjně si kladli antičtí filozofové otázku, *kolik* předmětů musí být pohromadě, aby se dalo mluvit o hromadě, hrstce a podobných obecných pojmech. Úvahy o prázdné množině byly v antickém Řecku stejně nemožné jako úvahy o čísle nula. „Je přece nesmyslné uvažovat o počtu předmětů tam, kde žádný předmět není“, mohl říci kterýkoliv starořecký filozof.*)

I po dvou tisíciletích se objevily *paradoxní úvahy o nekonečných množinách*. Známému axiomu „část je menší než celek“ odporoval výsledek úvahy, o které píše *G. Galilei* v jednom svém dopise. Můžeme ji vyjádřit takto:

a) Přirozených čísel n^2 (tj. druhých mocnin nějakého přirozeného čísla n) je méně než všech přirozených čísel, protože ne každé přirozené číslo lze napsat ve tvaru n^2 .

b) Možnost zapsat dvojice $[n, n^2]$ a vyčerpát jimi všechna přirozená čísla n i všechny jejich druhé mocniny ukazuje, že čísel n^2 je stejně mnoho jako přirozených čísel.

Tento příklad cituje ještě v r. 1833 L. Cauchy a potvrzuje názor, že s nekonečnými množinami nelze pracovat, obdobné stanovisko zastával i K. F. Gauss. Vysvětlení uvedeného paradoxu spočívá v tom, že tvrzení

*) Úvahy o prázdné množině se objevují až u indických matematiků, ti také začali užívat číslice nula.

a) neplatí, protože neoprávněně přenáší na nekonečné množiny argumentaci použitelnou jen pro *konečné* množiny.

Bernard Bolzano (1781—1848) byl zřejmě prvním, kdo uznal možnost uvažovat o nekonečných množinách; ve svém díle „Paradoxy nekonečna“ z r. 1847 charakterizuje nekonečné množiny a definuje stejnou mohutnost množin. Jeho práce však neměla žádný ohlas, nikdo na ni nenavazoval.

Až *G. Cantor* (1845—1918) měl odvalu systematicky studovat vlastnosti nekonečných množin a stát se v letech 1874—84 osamoceným zakladatelem teorie množin. I on sám se setkával s paradoxními poznatky, např. o svém důkazu, že strana čtverce má právě tolik bodů jako celý čtverec, napsal: „Vidím ho, ale nevěřím mu“. Pevného přesvědčení nabyl až tehdy, když si uvědomil, že rozměrnosti útvarů nelze směšovat s jejich mohutnostmi; přispěl tak významně k upřesnění obou pojmů.

Zatím jsme hovořili o paradoxech, které byly jen překvapujícími výsledky teorie množin. Větší počet takových vět našli čtenáři minulého ročníku *Rozhledů* v článcích dr. B. Kussově a dr. M. Kočandrlové. Připravme si nyní půdu pro sporný výsledek teorie množin, který znal *G. Cantor* už na konci minulého století. Jak víte ze zmíněných článků, mezi základními poznatky teorie množin patří věty:

(1) Množina $\mathfrak{P}(\mathbf{M})$ všech podmnožin libovolné množiny $\mathbf{M}$ má větší mohutnost než množina $\mathbf{M}$.

(2) Je-li $\mathbf{A} \subset \mathbf{M}$, pak $\mathbf{A}$ má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny $\mathbf{M}$.

Cantorova definice množiny jako libovolného souhrnu dobře rozlišitelných objektů nevylučovala možnost považovat i souhrn všech množin za množinu.

Paradox množiny všech množin

Předpokládejme, že souhrn všech množin je množinou a označme ji $\mathfrak{M}$; pak je nutně $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$. Dosazením do vět (1) a (2) získáme:

1. mohutnost $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) >$ mohutnost $\mathfrak{M}$,

2. mohutnost $\mathfrak{P}(\mathfrak{M}) \leq$ mohutnost $\mathfrak{M}$.

Dokázali jsme platnost výroku a jeho negace, dostali jsme tedy spor.

Ze sporného vyústění úvahy plyne, že neplatí její předpoklad, a že tedy *souhrn všech množin není množinou*. Tento výsledek zbořil idylu, že každý souhrn věcí je množinou; mnozí matematici, kteří teorii množin nepřáli, v něm však viděli „hrob teorie množin“.

Kolem r. 1900 se objevilo mnoho příkladů sporných úvah, které ukazovaly, že je nutno přesněji vymezit pravidla pro tvoření množin. Paradoxy tohoto druhu se obvykle nazývají antinomie; ukažme si některé z těch, které nevyžadují dlouhé přípravné úvahy.

Antinomie množiny všech množin, které nejsou svými prvky

Označme písmenem W množinu všech množin, které nejsou svými vlastními prvky; je-li X libovolná množina, platí tedy

$$X \in W \Leftrightarrow X \notin X$$

Ptejme se, zda množina W je sama svým prvkem; dosadíme-li W na místo X , dostaneme okamžitě sporný výrok

$$W \in W \Leftrightarrow W \notin W$$

Je tedy jasné, že W dosazovat nemůžeme a že souhrn všech množin, které nejsou svými vlastními prvky, sám množinou není. Autorem této pěkné antinomie je patrně *B. Russell*, píše o ní v jednom dopise z r. 1902.

Antinomie názvů přirozených čísel

České názvy některých přirozených čísel se skládají z aspoň třiceti slabik, např. název devětset devadesát devět milionů devět set devadesát devět tisíc čtyřistapadesátjedna má 32 slabik. Každá množina přirozených čísel má nejmenší prvek, proto existuje číslo A , jež jest

„nejmenší přirozené číslo, které nelze pojmenovat méně než třiceti slabikami“

Tento výraz v uvozovkách je však názvem čísla A , který má jen 27 slabik, proto A není nejmenší přirozené číslo, které nelze pojmenovat méně než 30 slabikami. Číslo A tedy uvedenou vlastnost má a zároveň nemá, a to je spor.

Tuto antinomii sestavil pro anglické názvy čísel *G. B. Berry* asi v r. 1905; jak patrně, podrobuje se v ní výraz v uvozovkách tomu kritériu, které sám vyjadřuje. Z hlediska teorie množin je tu situace, kdy číslo A je definováno pomocí jisté množiny přirozených čísel a pak uvažujeme o jeho příslušnosti do této množiny. Spornost výsledků naší úvahy ukazuje, že ani takové počínání není vždy přípustné.

Výskyt antinomií v teorii množin vyvolal určitou „krizi důvěry“ v nově budovanou teorii, zároveň však přinesl mnoho poučení pro výstavbu matematických teorií vůbec. Matematika prošla jakoby „očistnou lázní“, upřesněny byly logické nástroje úvah a zejména jazyk matematiky, matematici začali budovat teorie množin axiomaticky. To znamená, že vyslovují základní věty, z nichž některé zaručují existenci jistých množin nebo popisují způsoby konstrukce dalších množin. Tyto věty jsou vybrány tak, že v příslušné teorii nelze sestavit množinu, která by byla základem známých antinomií.

Antinomie jako vůbec všechny úvahy vedoucí k logickému sporu jsou jakési „nemoci růstu teorií“, nutí matematiky k jejich opatrnější a pozornější výstavbě a přinášejí trvalou „imunitu“ teorií vůči překonaným

druhům antinomií. A vyskytne-li se nějaká nová antinomie? Bude se řešit jako všechny dosavadní a nakonec bude vědě prospěšná.

Jaké poučení si můžeme vzít pro středoškolské úvahy o množinách?

Nesmíme podléhat iluzi, že slovo množina se hodí kamkoliv místo slov souhrn, soubor, obor apod. *Ne všechny souhrny objektů jsou množiny*; poznali jsme již, že *souhrn všech množin není množinou*, dále též platí, že *souhrn všech výroků není množinou*, *souhrn všech výrokových forem není množinou*, *souhrn všech binárních relací není množinou* apod,

Naproti tomu však souhrn všech funkcí reálné proměnné, souhrn všech vektorů v prostoru, souhrn všech přímek v prostoru tvoří množiny. Tyto skutečnosti můžete sami zdůvodnit, použijete-li těchto několika vět:

Je-li nějaký souhrn S množinou, pak platí :

- I. *Každá část souhrnu S je množinou (nazývá se podmnožina množiny S),*
- II. *Souhrn všech podmnožin množiny S je množinou (nazývá se potenční množina množiny S).*
- III. *Souhrn všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde x, y jsou prvky S, je množinou (nazývá se kartézský součin $S \times S$).*
- IV *Lze-li souhrn T zobrazit vzájemně jednoznačně na souhrn S, je T též množinou.*

Vezměme nyní bez důkazu i tvrzení, že souhrn všech reálných čísel je množinou a označme ji $\mathbf{R}$, pak jsou podle I množinami i další známé číselné obory. Podle II a I je množinou souhrn všech intervalů, podle IV je množinou bodů číselná osa a vůbec každá přímka. Podle III je $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ množinou, podle II je množinou i souhrn všech binárních relací v $\mathbf{R}$ a podle I je množinou i souhrn všech funkcí v $\mathbf{R}$. Podle IV je množinou i souhrn všech bodů v rovině, podle I pak je množinou i každý rovinný útvar apod. Použijete-li vzájemně jednoznačného přiřazení

$$[x, y, z] \Leftrightarrow [(x, y), z],$$

dokážete i skutečnost, že prostor je množinou bodů atd. atd.

Znáte-li dobře definice dalších matematických objektů, najdete snadno důkazy, kdy souhrny takových objektů jsou množinami; několik takových úloh je zařazeno ve cvičeních.

Cvičení

1. Pokuste se porovnat s antinomiemi již popsány následující *paradox Grellinga - Nelsona* o slově heterologický (z r. 1908): Každé přídavné jméno buď samo má vlastnost, kterou označuje, nebo ji nemá. V prvním případě je nazveme autologickým (např. český, pětislabičný), ve druhém heterologickým (např. německý, jednoslabičný). Ptáme se, kam patří přídavné jméno heterologický, je autologické či heterologické?
[Ukažte, že je heterologické právě tehdy, když je autologické.]

2. Domyslete paradoxní charakter této situace: Za dávných dob žil v zapadlé vsi jeden člověk, který holil právě ty vesničany, kteří se neholili sami. Patří tento muž do množiny všech vesničanů, které holí?

[Držte se doslovně textu a ukažte, že holič patří do zmíněné množiny právě tehdy, když do ní nepatří.]

3. Zdůvodněte pomocí vět I–IV, že množinou je souhrn všech

a) lineárních funkcí $y = kx + q$, b) kružnic v rovině, c) zobrazení v rovině, d) posunutí (vektorů) v rovině, e) přímek v prostoru, f) kvadratických rovnic $x^2 + px + q = 0$.

4. Znáte-li definici komplexního čísla, zdůvodněte, že i obor komplexních čísel je množinou.

konstruktivní geometrie

Některé charakteristické vlastnosti rovinného čtyřúhelníka, jehož úhlopříčky jsou vzájemně kolmé

Prof. JOSEF BREJCHA, Brno

Symbolem $\{A_i\}$ označme rovinný čtyřúhelník, jehož úhlopříčky jsou vzájemně kolmé a jehož vrcholy A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou uspořádány na jeho obvodu v přirozeném pořadí indexů v kladném či záporném smyslu. Dále označme S_i středy, r_i poloměry kružnic, opsaných trojúhelníkům $A_j A_i A_m$ ($i = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$); i, j, m vzájemně různá; A_j, A_m vrcholy úhlopříčky, neprocházející bodem A_i . Středy stran o vrcholech A_i, A_j označme M_{ij} , vnitřní úhly čtyřúhelníka $\{A_i\}$ při vrcholech A_i budtež α_i .

Věta 1.

Přímky $A_i S_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) se protínají v jednom bodě.

Důkaz (pro čtyřúhelník konvexní):

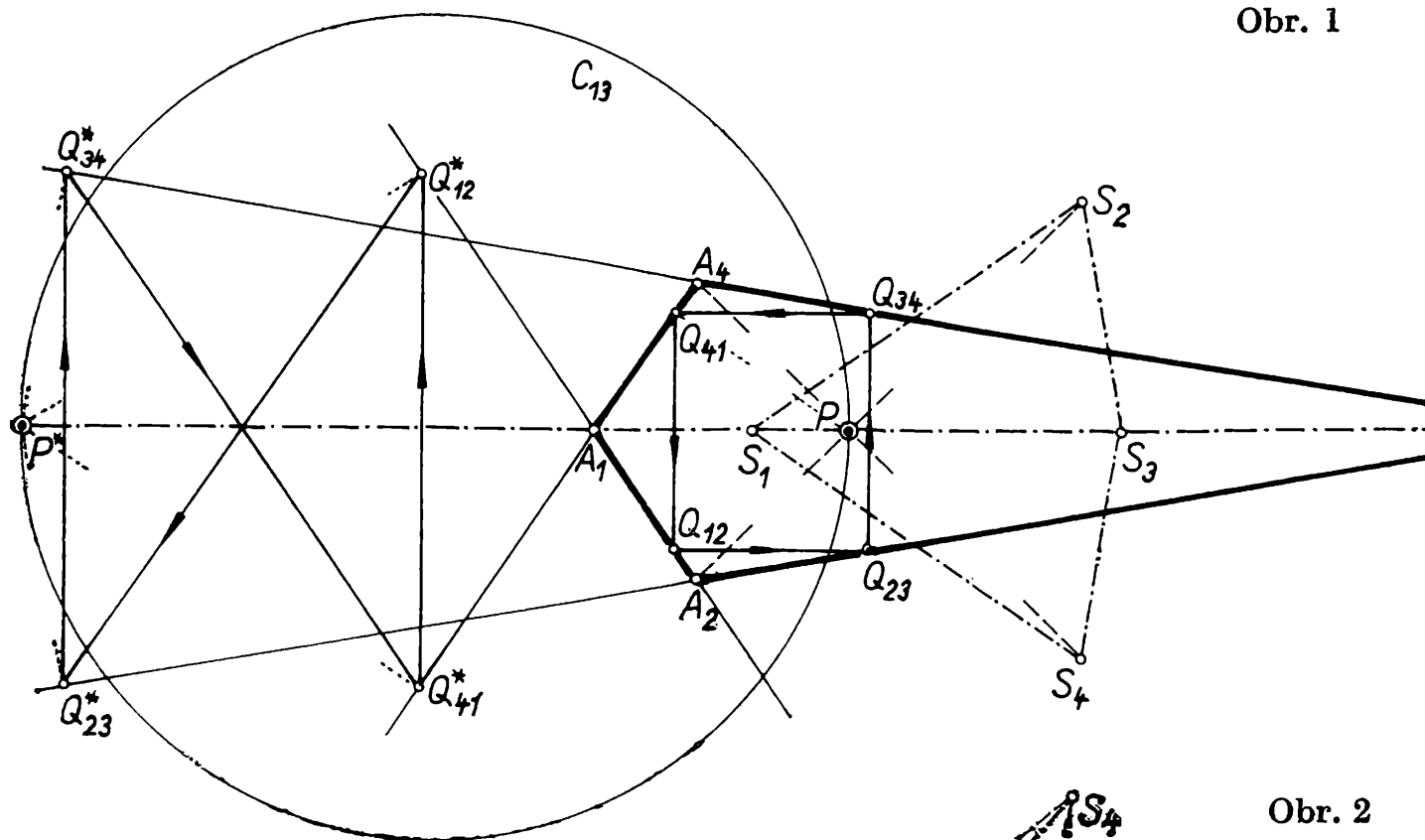
a) Nechť P_{13} je průsečík přímek $A_1 S_1, A_3 S_3$, které jsou obecně různoběžné. Podle konstrukce bodů S_1, S_3 je zřejmé, vzhledem k předpokladu $A_1 A_3 \perp A_2 A_4$,

$$(S_1 S_3 \perp A_2 A_4) \Rightarrow (S_1 S_3 \parallel A_1 A_3).$$

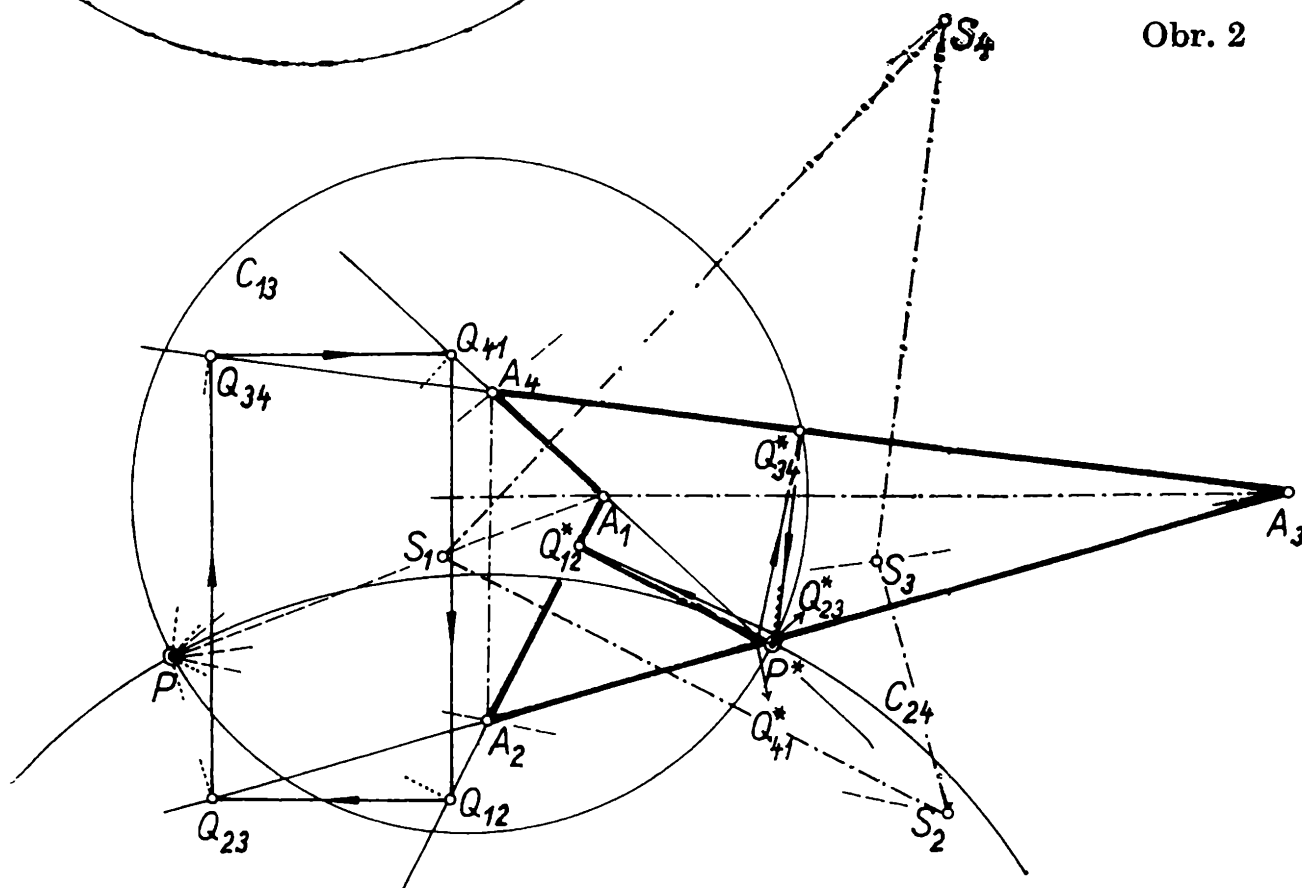
Pak přímky $P_{13} A_1, P_{13} A_3$ tvoří svazek paprsků o vrcholu P_{13} , protať rovnoběžkami $S_1 S_3 \parallel A_1 A_3$ a platí

$$P_{13} S_1 : P_{13} A_1 = P_{13} S_3 : P_{13} A_3. \quad (1)$$

Obr. 1



Obr. 2



V případě, že úhlopříčky A_1A_3 , A_2A_4 nepůlí jedna druhou, je nutno rozlišit dvě možnosti:

1. Bod P_{13} leží vně pásu, tvořeného rovnoběžkami $S_1S_3 \parallel A_1A_3$. Z relace (1) vzhledem k užitému označení pak plyne

$$\begin{aligned}(A_1P_{13} - r_1) : A_1P_{13} &= (A_3P_{13} - r_3) : A_3P_{13}, \\ A_1P_{13} : A_3P_{13} &= r_1 : r_3.\end{aligned}\quad (2)$$

2. Bod P_{13} leží uvnitř shora zmíněného pásu. Pak platí

$$\begin{aligned}(r_1 - A_1P_{13}) : A_1P_{13} &= (r_3 - A_3P_{13}) : A_3P_{13}, \\ A_1P_{13} : A_3P_{13} &= r_1 : r_3.\end{aligned}\quad (2')$$

Budiž nyní P_{24} průsečík přímk A_2S_2 , A_4S_4 . Zcela analogicky pouhou cyklickou záměnou indexů získáme

$$A_2P_{24} : A_4P_{24} = r_2 : r_4. \quad (3)$$

Z dosavadních výsledků plyne *lemma* 1:

Bod $P_{i, i+2}$ leží na Apolloniově kružnici

$$C_{i, i+2} \left(\text{základní body } A_i, A_{i+2}; \lambda_{i, i+2} = \frac{A_iP_{i, i+2}}{A_{i+2}P_{i, i+2}} = \frac{r_i}{r_{i+2}}; i = 1, 2 \right)$$

b) *Lemma* 2:

Nechť body Q_{ij} jsou paty kolmic, spuštěných z bodu P_{13} na strany A_iA_j čtyřúhelníka $\{A_i\}$. Pak pouze v tomto případě platí

$$Q_{41}Q_{12} = Q_{23}Q_{34}, \quad Q_{41}Q_{12} \parallel Q_{23}Q_{34}$$

Důkaz: Podle vět o úměrnosti úseček na paprskových svazcích prořatých rovnoběžkami lze vzhledem k danému označení psát

$$\left. \begin{aligned} Q_{41}Q_{12} : M_{41}M_{12} &= A_1P_{13} : r_1 \\ Q_{23}Q_{34} : M_{23}M_{34} &= A_3P_{13} : r_3 \end{aligned} \right\} \quad (4),$$

$$M_{41}M_{12} \parallel A_2A_4 \parallel M_{23}M_{34}; \quad M_{41}M_{12} = M_{23}M_{34} = \frac{1}{2} A_2A_4. \quad (5)$$

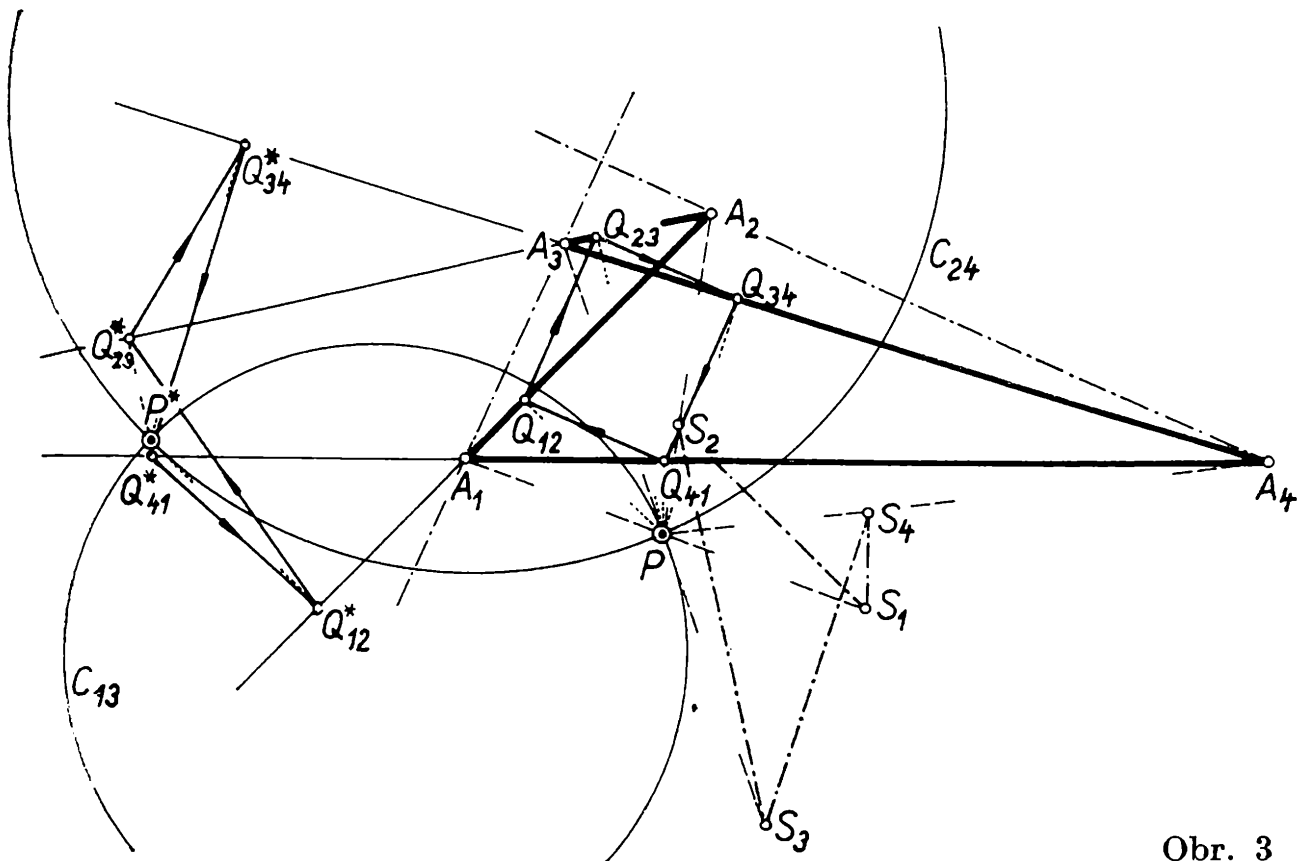
Dělením získáme:

$$\frac{Q_{41}Q_{12}}{Q_{23}Q_{34}} = \frac{\frac{M_{41}M_{12} \cdot A_1P_{13}}{r_1}}{\frac{M_{23}M_{34} \cdot A_3P_{13}}{r_3}} = \frac{M_{41}M_{12}}{M_{23}M_{34}} \cdot \frac{A_1P_{13}}{A_3P_{13}} \cdot \frac{r_3}{r_1},$$

odkud vzhledem k (2) a (5) plyne $Q_{41}Q_{12} = Q_{23}Q_{34}$, c . b . d .

Nechť platí obráceně $Q_{41}Q_{12} = Q_{23}Q_{34}$. Pak z tětiových čtyřúhelníků $A_1Q_{41}Q_{12}P_{13}$, $A_3Q_{23}Q_{34}P_{13}$ obdržíme:

$$(Q_{41}Q_{12} = Q_{23}Q_{34}) \Rightarrow (2A_1P_{13} \sin \alpha_1 = 2A_3P_{13} \sin \alpha_3) \Rightarrow$$



Obr. 3

$$\Rightarrow (A_1P_{13} : A_3P_{13} = \sin \alpha_3 : \sin \alpha_1) \Rightarrow (A_1P_{13} : A_3P_{13} = \frac{A_2A_4}{2r_3} : \frac{A_2A_4}{2r_1}) \Rightarrow (A_1P_{13} : A_3P_{13} = r_1 : r_3)$$

ve shodě s relací (2) resp. (2'), čímž je lemma 2 dokázáno.

Ze vzájemné rovnoběžnosti a rovnosti úseček $Q_{41}Q_{12}$, $Q_{23}Q_{34}$ za předpokladu, že body Q_{12} , Q_{23} , Q_{34} , Q_{41} jsou v uvedeném pořadí vrcholy konvexního čtyřúhelníka, plyne též rovnost a vzájemná rovnoběžnost úseček $Q_{12}Q_{23}$, $Q_{34}Q_{41}$. Pak ovšem z tětiových čtyřúhelníků $P_{13}Q_{34}A_4Q_{41}$, $P_{13}Q_{12}A_2Q_{23}$ vychází

$$(Q_{12}Q_{23} = Q_{34}Q_{41}) \Rightarrow (2r_4 \sin \alpha_4 : 2r_2 \sin \alpha_2) \Rightarrow (r_2 : r_4 = \sin \alpha_4 : \sin \alpha_2) \Rightarrow (A_2P_{13} : A_4P_{13} = r_2 : r_4),$$

tj. bod P_{13} leží na Apolloniově kružnici C_{24} , která prochází bodem P_{24} . Cyklickou záměnou příslušných indexů obdržíme analogon lemmatu 2 pro bod P_{24} .

Lemma 3: *Body P_{13} a P_{24} splývají.*

Důkaz: Kdyby platilo $P_{13} \neq P_{24}$, existovaly by v každém bodě Q_{ij} dvě vzájemně různé kolmice $Q_{ij}P_{13}$, $Q_{ij}P_{24}$ na přímce A_iA_j , což není možné.

c) Půlí-li např. ve čtyřúhelníku $\{A_i\}$ úhlopříčka A_1A_3 úhlopříčku A_2A_4 , platí: 1) $A_1A_3 \equiv A_1P_{13} \equiv A_3P_{13}$,

$$2) (\Delta A_1A_2A_3 \cong \Delta A_1A_4A_3) \Rightarrow (r_2 = r_4) \Rightarrow \left(\frac{A_2P_{13}}{A_4P_{13}} = 1 \right).$$

Apolloniova kružnice C_{24} degeneruje na přímku A_1A_3 ; bod $P_{13} \equiv P_{24}$ je pak jedním ze společných průsečíků této přímky a Apolloniovy kružnice C_{13} . Věta 1 je dokázána.

Bod $P \equiv P_{i,i+2}$ je jedním ze vzájemných průsečíků Apolloniových kružnic $C_{i,i+2}$; poněvadž tyto kružnice jsou určeny pouze polohou základních

bodů A_i, A_{i+2} a poměrem $\lambda_{i,i+2} = \frac{A_iP}{A_{i+2}P} = \frac{r_i}{r_{i+2}}$, $i = 1, 2$, tj. nezávisle na tvaru čtyřúhelníka $\{A_i\}$, platí věta 1 pro libovolný rovinný čtyřúhelník $\{A_i\}$ (tj. konvexní, nekonvexní bez dvojního bodu anebo i s ním), jehož úhlopříčky jsou vzájemně kolmé.

Pro čtyřúhelník $\{A_i\}$, jehož úhlopříčky nejsou vzájemně kolmé, věta 1 neplatí; věta 1 vyjadřuje tedy vlastnost charakteristickou pro čtyřúhelník $\{A_i\}$ s úhlopříčkami vzájemně kolmými.

Věta 2.

Paty Q_{ij} kolmic, spuštěných z bodu $P \equiv P_{13} \equiv P_{24}$ na strany A_iA_j čtyřúhelníka $\{A_i\}$ tvoří uzavřenou lomenou čáru $[Q_{ij}] = [Q_{12}Q_{23}Q_{34}Q_{41}Q_{12}]$, jejíž vrcholy v uvedeném pořadí jsou vrcholy pravoúhelníka. Strany tohoto pravoúhelníka jsou rovnoběžné s úhlopříčkami čtyřúhelníka $\{A_i\}$. Bod P jako společný průsečík přímek A_iS_i ($i = 1, 2, 3, 4$) je současně jedním ze společných průsečíků Apolloniových kružnic $C_{i,i+2}$

$$\left(\text{zákl. body } A_i, A_{i+2}, \lambda_{i,i+2} = \frac{A_iP}{A_{i+2}P} = \frac{r_i}{r_{i+2}}, i = 1, 2 \right)$$

Věta 3.

Apolloniovy kružnice $C_{i,i+2}$ ($i = 1, 2$) čtyřúhelníka $\{A_i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) mají vždy aspoň jeden reálný společný bod. Tímto bodem je bod P jako vždy existující společný průsečík přímek A_iS_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Důkaz: Věty 2 a 3 jsou přímými důsledky věty 1 a lemmat 1, 2, 3.

Budiž nyní $P^* \neq P$ druhý průsečík Apolloniových kružnic $C_{i,i+2}$ čtyřúhelníka $\{A_i\}$. Pak platí zřejmě

$$\left. \begin{aligned} A_1P^* : A_3P^* &= r_1 & r_3 \\ A_2P^* : A_4P^* &= r_2 & r_4 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Označme Q_{ij}^* paty kolmic spuštěných z bodu P^* na strany A_iA_j čtyřúhelníka $\{A_i\}$. Pomocí tětivových čtyřúhelníků o vrcholech $A_iQ_{ij}^*P^*Q_{ik}^*$ (j, k indexy vrcholů úhlopříčky neprocházející bodem A_i) lze ukázat,

že pro uzavřenou lomenou čáru $[Q_{ij}^*] = [Q_{12}^* Q_{23}^* Q_{34}^* Q_{41}^* Q_{12}^*]$ v uvedeném pořadí vrcholů platí $Q_{41}^* Q_{12}^* = Q_{23}^* Q_{34}^*$, $Q_{12}^* Q_{23}^* = Q_{34}^* Q_{41}^*$ právě tehdy, platí-li relace (6). Označme $Q_{41}^* Q_{12}^* = Q_{23}^* Q_{34}^* = d_1$, $Q_{12}^* Q_{23}^* = Q_{34}^* Q_{41}^* = d_2$. Budiž $d_1 \neq d_2$. Pak uzavřená lomená čára $[Q_{ij}^*]$ tvoří buď obvod konvexního rovnoběžníka nebo má dvojný bod ve společném průsečíku dvou svých delších nesousedních úsečků.

Věta 4.

Je-li $d_1 \neq d_2$, pak lomená čára $[Q_{ij}^]$ bodu P^* , příslušná ke čtyřúhelníku $\{A_i\}$, má dvojný bod.*

Důkaz Nechť platí $d_1 \neq d_2$ a lomená čára $[Q_{ij}]$ bodu P podle věty 2 uzavírá obdélník. Pak lomená čára $[Q_{ij}^*]$ bodu P^* vzhledem k témuž čtyřúhelníku $\{A_i\}$ musí mít dvojný bod. Kdyby totiž obě vzájemně různé lomené čáry $[Q_{ij}]$, $[Q_{ij}^*]$ bodů P a P^* ($P \neq P^*$) vzhledem k témuž čtyřúhelníku $\{A_i\}$ uzavíraly obdélníky, pak pro odpovídající jim nekonvexní případy by musely existovat další dva reálné různé průsečíky R , R^* ($R \neq R^*$) Apolloniových kružnic $C_{i,i+2}$, které by pak měly čtyři vzájemně různé společné body P , P^* , R , R^* , což není možné. Může ovšem též platit $d_1 = d_2$. Pak lomená čára $[Q_{ij}]$ bodu P uzavírá čtverec. Možnost dvojného bodu je v tomto případě vyloučena, jak lze snadno ukázat; pak musí nutně být $P^* \equiv P$. Apolloniovy kružnice $C_{i,i+2}$ se vzájemně dotýkají v bodě P .

Věta 5 (důsledek vět 3, 4):

Apolloniovy kružnice $C_{i,i+2}$ čtyřúhelníka $\{A_i\}$, jehož úhlopříčky jsou vzájemně kolmé, se buď protínají ve dvou reálných různých bodech nebo se vzájemně dotýkají.

Poznámka:

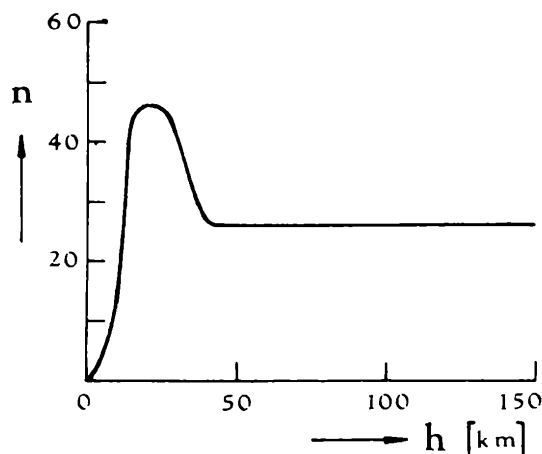
Věty 1 až 4 vyjadřují charakteristické vlastnosti rovinného čtyřúhelníka, jehož úhlopříčky jsou vzájemně kolmé; věta 5 platí i pro rovinný čtyřúhelník, jehož úhlopříčky vzájemně kolmé nejsou. Rovněž věty 2, 3, 4 lze upravit a dokázat pro obecný rovinný čtyřúhelník; z nich lze pak pro tento čtyřúhelník odvodit některé věty další s možnostmi aplikace i na úplný čtyřstran. Příslušné důkazy jsou ovšem složitější a vyžadují rozsáhlejší planimetrický aparát než ten, kterého bylo použito v tomto článku.

fyzika

Kosmické záření

Ing. ZDENĚK JANOUT CSc., FJFI ČVUT

Výzkum kosmického záření (dále jen k. z.) započal začátkem tohoto století v souvislosti se studiem samovolného vybíjení elektroskopů. Experimentální fyzikové zjistili, že hermeticky uzavřený elektroskop se vybíjí, aniž v jeho blízkosti je zdroj nabitých částic. Z počátku se předpokládalo, že příčinou vybíjení je přirozená radioaktivita prvků, které jsou v stopovém množství přítomny v okolním prostředí. V tomto případě by se mělo samovolné vybíjení zmenšovat, vzdalujeme-li elektroskop od zemského povrchu. Pokus k velkému překvapení ukázal pravý opak.



Obr. 1. Závislost počtu částic kosmického záření na výšce. Počet částic je uveden v relativních jednotkách.

Začátkem dvacátých let bylo různými pokusy prokázáno, že příčinou tohoto jevu je pronikavé záření, které vzniká mimo naši Zemi. Toto záření vyvolává ionizaci vzduchu v elektroskopu a tím i jeho vybíjení. Americký fyzik R. E. Millikan nazval nově objevené záření kosmickými paprsky. Je lépe však mluvit o kosmickém záření.

V dalších experimentech za použití balonů a geofyzikálních raket byla zjištěna změna intenzity kosmického záření v závislosti na výšce pozorování (obr. 1). Z obrázku vidíme, že intenzita k. z. poměrně rychle roste asi do výšky 10 km (měřeno od mořské hladiny), potom se tempo růstu zpomalí a ve výšce 22 km dosahuje intenzita maximální hodnoty. Při dalším růstu výšky se pozoruje klesání intenzity k. z. a počínaje

výškou asi 60 km se stává intenzita k. z. konstantní. Pochopení této experimentálně naměřené závislosti přimělo fyziky rozdělit kosmické záření na dvě složky: primární kosmické záření přicházející k Zemi z vesmíru (převládá ve výškách nad 30 km) a na sekundární kosmické záření, které bylo vyvoláno interakcí primárního k. z. se zemskou atmosférou (převládá v malých výškách).

Primární k. z. je tvořeno protony (91 %), částicemi alfa (7,5 %) a jádry lehkých prvků (s atomovým číslem do $Z \leq 41$). V malém množství jsou ještě přítomny jaderně neaktivní částice — fotony, elektrony a neutrina. Experimentálně bylo zjištěno, že primární k. z. přichází k Zemi ze všech stran izotropně a že ve vesmíru není místo, které by se mohlo nazvat zdrojem záření. Střední energie částic primárního k. z. je řádově rovna 10 GeV ($= 10^{10}$ eV; $1 \text{ eV} \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). Avšak existují i částice mající velmi vysokou energii až 10^{21} eV. Tak zvaná všesměrová intenzita, jež je určena počtem částic procházejících jednotkou rovinné horizontální plochy za jednotku času ve všech směrech je na hranici atmosféry asi 1 částice/(s. cm^2) (měřeno na 50° geomagnetické šířky).

Dříve než dopadnou částice primárního k. z. na vrchní vrstvy zemské atmosféry, musí projít slabým zemským magnetickým polem, které odklání nabitě částice. Proto musí mít částice k. z. poměrně velkou energii, aby překonaly působení magnetického pole a pronikly do zemské atmosféry. Nejvíce jsou magnetickým polem Země odkláněny částice pohybující se v rovině geomagnetického rovníku. Proto do oblasti geomagnetického rovníku dopadají částice s minimální energií vyšší, než je minimální energie částic dopadajících do polární oblasti. Z toho důvodu intenzita k. z. klesá od geomagnetického pólu směrem ke geomagnetickému rovníku (šířkový efekt). Dále bylo zjištěno, že intenzita k. z. jdoucího od západu je vyšší než od východu (tzv. východo-západní asymetrie).

Zemská atmosféra odstiňuje zemský povrch a představuje pro primární k. z. absorbátor tloušťky asi 1030 g/cm^2 , což odpovídá v prvním přiblížení tloušťce vody 10 m. Rychlý proton primárního k. z. urazí v atmosféře do okamžiku, kdy se srazí s jádrem atomu vzduchu, dráhu asi 80 g/cm^2 . Jádra lehkých prvků urazí dráhu ještě kratší (21 g/cm^2). Při srážce s jádrem atomu vzduchu částice primárního k. z. ztrácí zhruba polovinu své původní energie a je po několika po sobě následujících srážkách atmosférou absorbována. Proto ve výškách nižších než 20 km má k. z. prakticky sekundární charakter. Detektor umístěný v úrovni mořské hladiny bude registrovat pouze sekundární částice.

S výjimkou částic nízkých energií, které se zabrzdí v atmosféře v důsledku ztráty energie na ionizaci atomů vzduchu, vyvolávají ostatní částice primárního k. z. jaderné interakce s jádry atomů vzduchu v horních vrstvách atmosféry. Přitom dochází ke zrodu nových elementárních částic, které jsou většinou nestabilní. Produkty primárních srážek jsou

převážně nukleony (protony, neutrony) a piony (π^+ , π^0 , π^-). Mají-li vzniklé nukleony dostatečnou energii, mohou vyvolat další jaderné srážky, což vede k tzv. jaderné kaskádě. Souběžně s vývojem jaderné kaskády probíhají v atmosféře další procesy. Neutrální piony π^0 se rozpadají za velmi krátký čas ($0,8 \cdot 10^{-16}$ s) na dva fotony ($\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$). Vysoce energetické fotony rodí elektrono-pozitronové páry ($\gamma \rightarrow e^+ + e^-$), což je počátek vzniku elektrono-fotonové kaskády (spršky). Skutečně, elektron či pozitron zabrzděním v poli atomových jader vzduchu vyše fotony brzdného záření a ty pak produkují v blízkosti jiných jader další elektrono-pozitronové páry. Celý děj nabývá lavinovité povahy, vzniká kaskáda (sprška) částic. Počet částic ve spršce se rozrůstá do té doby, dokud energie elektronu, pozitronu neklesne níže než je hodnota 72 MeV a dokud energie fotonů neklesne na hodnotu, kdy začne převládat pružný (comptonovský) rozptyl fotonů a absorpce fotoelektrickým jevem nad tvorbou párů. Elektrony a pozitrony s energií nižší než 72 MeV již nemají schopnost emitovat fotony brzdného záření a ztrácí svoji energii pouze ionizací atomů vzduchu. Počet částic ve spršce (až miliarda), jakož i plošný rozsah spršky (řádově km^2) závisí na kinetické energii primární částice, která spršku vyvolala. Elektrono-fotonová sprška má největší rozsah ve výškách od 5 do 17 km, níže 5 km se utlumuje.

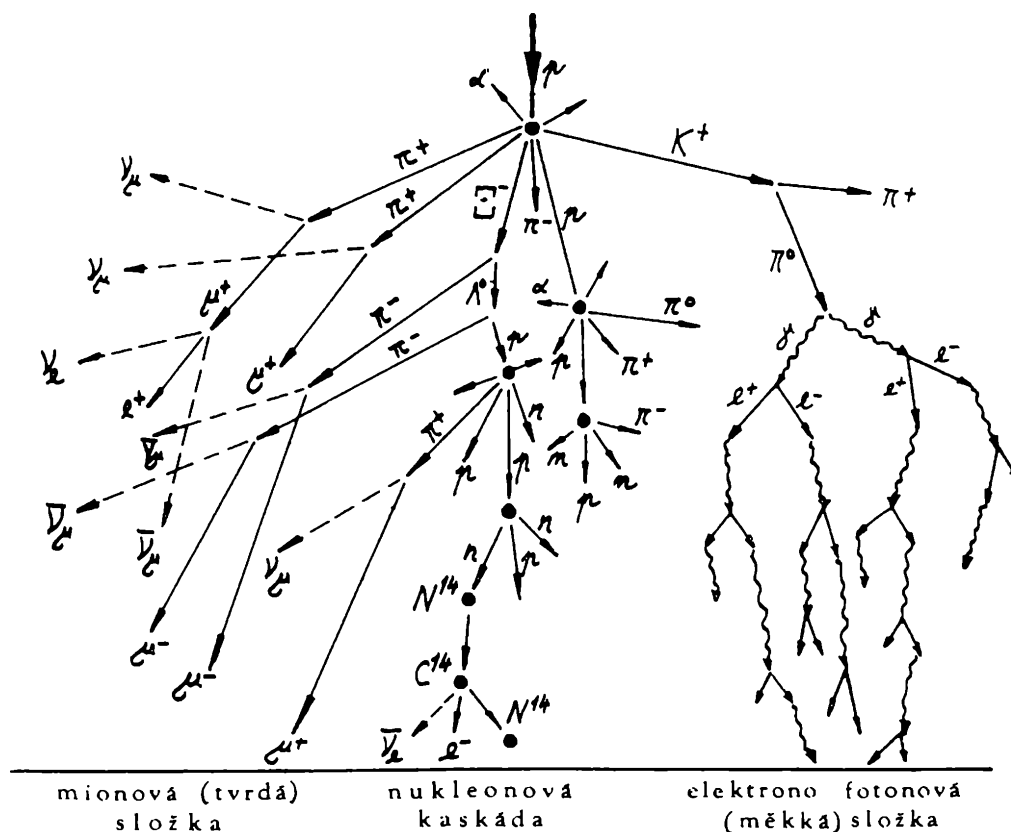
Nabité piony se rozpadají hlavně na mion μ a mionové neutrino ν_μ se střední dobou života $2,6 \cdot 10^{-8}$ s ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$). Miony jsou jaderně neaktivní částice, tj. nejsou schopny interagovat s atomovými jádry prostřednictvím jaderných sil. Dále mají nízké jak ionizační tak i radiační ztráty, což znamená, že miony ve srovnání s elektrony ztrácejí v atmosféře pouze malou část své kinetické energie na ionizaci atomů vzduchu a na emisi fotonů brzdného záření. Tyto skutečnosti způsobují, že miony mají velkou pronikavost.

K úbytku mionů v atmosféře dochází pouze v důsledku jejich rozpadu na elektron (pozitron) a dvě neutrina — elektronové a mionové ($\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$, $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$). Střední doba života mionu, který je ve stavu klidu, je $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s. Avšak v důsledku relativistické časové dilatace se prodlužuje střední doba života letících mionů natolik, že miony s energií několika GeV dosáhnou zemského povrchu dříve, než se rozpadnou.

Střední dobu života pohybujícího se mionu určíme podle vztahu

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \tau_0 \left(1 + \frac{W}{m_0 c^2} \right) \quad (1)$$

kde $\beta = v/c$ je rychlost mionu měřená v jednotkách rychlosti světla c , W je kinetická energie mionu a $m_0 c^2$ je klidová energie mionu (106 MeV). Užitím vztahu (1) zjistíme, že vlivem relativistické časové dilatace bude střední doba života mionu s energií 2 GeV rovna $4,4 \cdot 10^{-5}$ s, což



Obr. 2. Schematické zobrazení procesů vyvolané protonem primárního k. z. při interakci s jádrem atomu vzduchu. Plnými kroužky jsou označena jádra atomů vzduchu. Symbolem $\bar{\nu}$ je označeno antineutrino.

značí, že pohybující se mion žije dvacetkrát delší dobu než mion v klidu. Za tuto dobu mion urazí dráhu $L = v\tau \approx c\tau = 13,3 \text{ km}$ (neboť $v \approx c$).

Lze říci naopak, že studiem k. z. byla skvěle potvrzena platnost Einsteinovy speciální teorie relativity.

Z výše uvedeného plyne, že mezi sekundárním k. z. existují tři složky (viz obr. 2): 1. jaderně aktivní složka, která je tvořena částicemi (protony, neutrony, piony atd) majícími schopnost vyvolávat jaderné procesy. Tato složka se silně utlumuje při průchodu atmosférou. 2. Elektrono-fotonová složka, jejíž původci jsou neutrální piony, které dají vznik procesům párové produkce $e^+ + e^-$ a brzděného záření. Tato složka se zpravidla nazývá měkkou, neboť částice (e^- , e^+ a γ) této komponenty se rychle v atmosféře absorbují. 3. Mionová složka — vzniká rozpadem nabitých pionů. Tato složka se nazývá tvrdou, neboť miony procházejí snadno atmosférou. Při mořské hladině je mionů asi 80 % a elektronů asi 20 %.

Všesměrová intenzita sekundárního k. z. je asi stokrát nižší než intenzita primárního k. z. a činí na úrovni mořské hladiny asi $0,02 \text{ částice}/(\text{s} \cdot \text{cm}^2)$ (měřeno na 50° geomagnetické šířky).

Někdy se rozlišuje ještě čtvrtá komponenta sekundárního k. z. neutrinová. Neutrino vznikají při rozpadu nestabilních částic, hlavně pionů

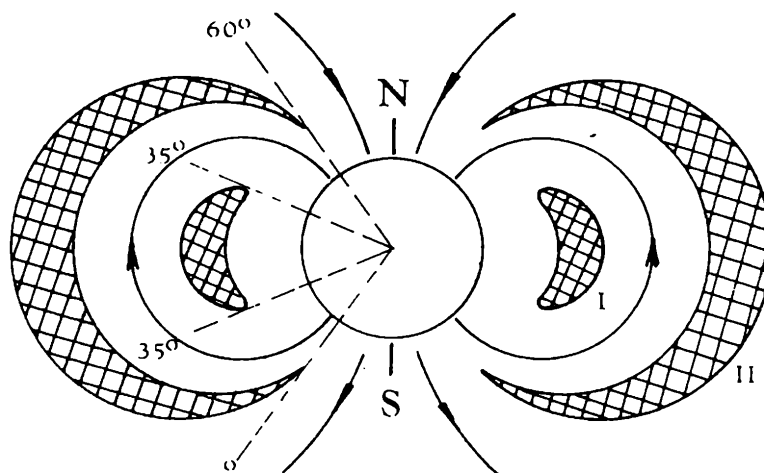
a mionů. Neutrína mají velkou pronikavost, jsou schopná projít skrze Zemi bez jakéhokoli podstatného zeslabení.

Při jaderných interakcích vznikají v atmosféře v nepatrném množství i radioaktivní izotopy (Be^{10} , C^{14} , H^3 , Na^{22} atd), kterých lze využít jako „značkovanych“ atomů při studiu výměnných procesů mezi atmosférou, hydrosférou a biosférou. V největším množství se tvoří radiouhlík C^{14} (asi 6,8 kg v celé atmosféře za rok). Tento izotop uhlíku je vázán v molekule CO_2 , a proto nedopadá na Zemi v dešti či sněhu. Je však částečně pohlcován živými organismy. Jakmile se živý organismus izoluje od biosféry, poměr $\text{C}^{14}/\text{C}^{12}$ v jeho tkáních se začíná zmenšovat (C^{12} je stabilní izotop uhlíku). Ze změny tohoto poměru lze určit okamžik skonu bytosti a tím i stáří zbytků organismu. Předpokládá se ovšem, že aktivita k. z. byla stejná za života bytosti jako je dnes. V této metodě hraje izotop uhlíku C^{14} úlohu „atomových“ hodin, pomocí kterých lze určit stáří archeologických nálezů organického původu mladších než 35000 let. Tuto metodu navrhl a prvně prakticky použil americký radiochemik W. F. Libby, za což mu byla v roce 1960 udělena Nobelova cena za chemii. Radiouhlíková metoda umožňuje určit historická data, která nelze stanovit jinými metodami. Například užitím této metody byly prověřeny písemné údaje historiků, týkající se zničení antického města Pompéjí. Podle dochovaných pramenů bylo město zasypáno lávou během výbuchu sopky Vesuv v 70-tém roce našeho letopočtu. Při vykopávkách města v tomto století byly nalezeny ohořelé kousky chleba. Stáří chleba z Pompéjí, určené podle množství C^{14} se dobře shoduje s údaji historiků.

Přítomnost jiného izotopu, tricia H^3 , se používá při řešení mnoha geofyzikálních úloh, zejména při studiu vertikální cirkulace vody v mořích a oceánech, při studiu rychlosti výměny podzemních vod, při procesu výměny mezi vodou oceánů a atmosférou apod. Izotopu berylia Be^{10} bylo použito k určení stáří pravěkých oceánských naplavenin.

Při studiu vlastností k. z. bylo učiněno mnoho principiálně důležitých objevů. V roce 1932 americký fyzik C. D. Anderson objevil v k. z. první antičástici — pozitron, jejíž existenci teoreticky předpověděl anglický fyzik P. A. M. Dirac. Za tento objev byla Andersonovi udělena v r. 1936 Nobelova cena za fyziku. V roce 1936 objevil Anderson společně S. H. Neddermeyerem mion a našli způsob jeho rozpadu. O deset let později objevil anglický fyzik C. F. Powell piony, které byly v r. 1935 postulovány teoretickým japonským fyzikem H. Yukawou jakožto kvanta pole vyvolávající jaderné síly. V roce 1955 byly v k. z. objeveny mezony K (kaony) a hyperony (částice těžší než nukleony).

V roce 1953 polští fyzikové M. Danysz a J. Pniewski pozorovali v jaderné fotoemulsi nový typ atomového jádra — tzv. hyperjádro, které vzniklo při interakci částice k. z. s jádrem fotoemulse. V hyperjádre je zpravidla jeden z neutronů nahrazen hyperonem Λ^0 a proto se těmto jádrům někdy říká Λ jádra.



Obr. 3. Radiační pásy Země. N(S) severní (jižní) geomagnetický pól Země. I — vnitřní (protonový) radiační pás, II — vnější (elektronový) radiační pás. Šipkami je označen směr magnetických siločar.

V k. z. jsou obsaženy protony s fantastickými energiemi až do 10^{21} eV. Protony takovýchto energií není zatím možné získat v laboratorních podmínkách. Připomeňme, že na dosud největším urychlovači částic v Batavii (USA) lze získat protony s energií pouze $4 \cdot 10^{11}$ eV, což je zhruba miliardkrát menší energie než jakou mají protony k. z. A tak protony k. z. s energiemi 10^{12} až 10^{21} eV jsou jediným zdrojem částic tak vysokých energií. Při interakci těchto protonů s jádry a elementárními částicemi se objevuje řada principiálně nových procesů. Nevýhodou však je velmi nízká četnost dopadajících protonů.

Použití raket a družic ke studiu k. z. přispělo k novým objevům. V roce 1958 byly americkými družicemi Explorer I a III a sovětskou družicí Sputnik III objeveny dva radiační pásy Země (v západní literatuře nazývané Van Allenovy pásy). Oba pásy mají tvar toroidů — prstenců a obepínají Zemi v šířkovém směru (viz obr. 3). Vnitřní radiační pás obsahuje převážně protony a je zhruba rozložen mezi výškami od 460 km do 6000 km nad zemským povrchem. Vnější radiační pás obsahuje většinou elektrony a rozprostírá se ve výškách od 10 000 km do 60 000 km.

Kosmonaut ničím nechráněný a cestující přímo skrze tyto dva pásy by obdržel dávku záření převyšující i profesionální dávky pracovníků se zářením. Proto dráhy kosmických lodí se volí pod okrajem vnitřního pásu a kosmonauti se musí držet tzv. radiačně nejklidnějších drah.

Před deseti lety navrhl americký fyzik L. Alvarez použít k. z. k hledání skrytých místností a chodeb v egyptských pyramidách. S tímto návrhem vyjádřili souhlas egyptští archeologové a tak se zrodil společný americko-egyptský projekt „Pyramida“.

Na jaře v roce 1967 instalovali fyzikové v jedné prázdné prostora pyramidy faraona Chefrena speciální detektory s velkou citlivostí —

tzv. jiskrové komory, které registrují nabité částice — miony (tvrdá složka k. z.). Miony přicházející k detektorům shora, se v pyramidě různě pohlcují, a to v závislosti na tom, jakou tloušťkou hmotnosti (kamene) musely projít. Jestliže jejich dráha prochází dutinou, potom se mionů pohltí méně a detektor zaregistruje zvýšenou intenzitu záření.

Během několika měsíců v roce 1968 bylo prozkoumáno asi 20 % objemu (horní část) Chefrenovy pyramidy. Skryté dutiny se zatím nepodařilo objevit, avšak byla prokázána vhodnost této metody k archeologickým výzkumům.

V závěru článku poznamenejme, že zatím neexistuje přesná teorie, která by vysvětlila původ k. z. Podle současných poznatků je většina částic k. z. galaktického původu, pouze částice velmi vysokých energií (vyšších než 10^{17} eV) mohou vznikat vně naší galaxie.

astronomie

Úkazy na obloze v roce 1976

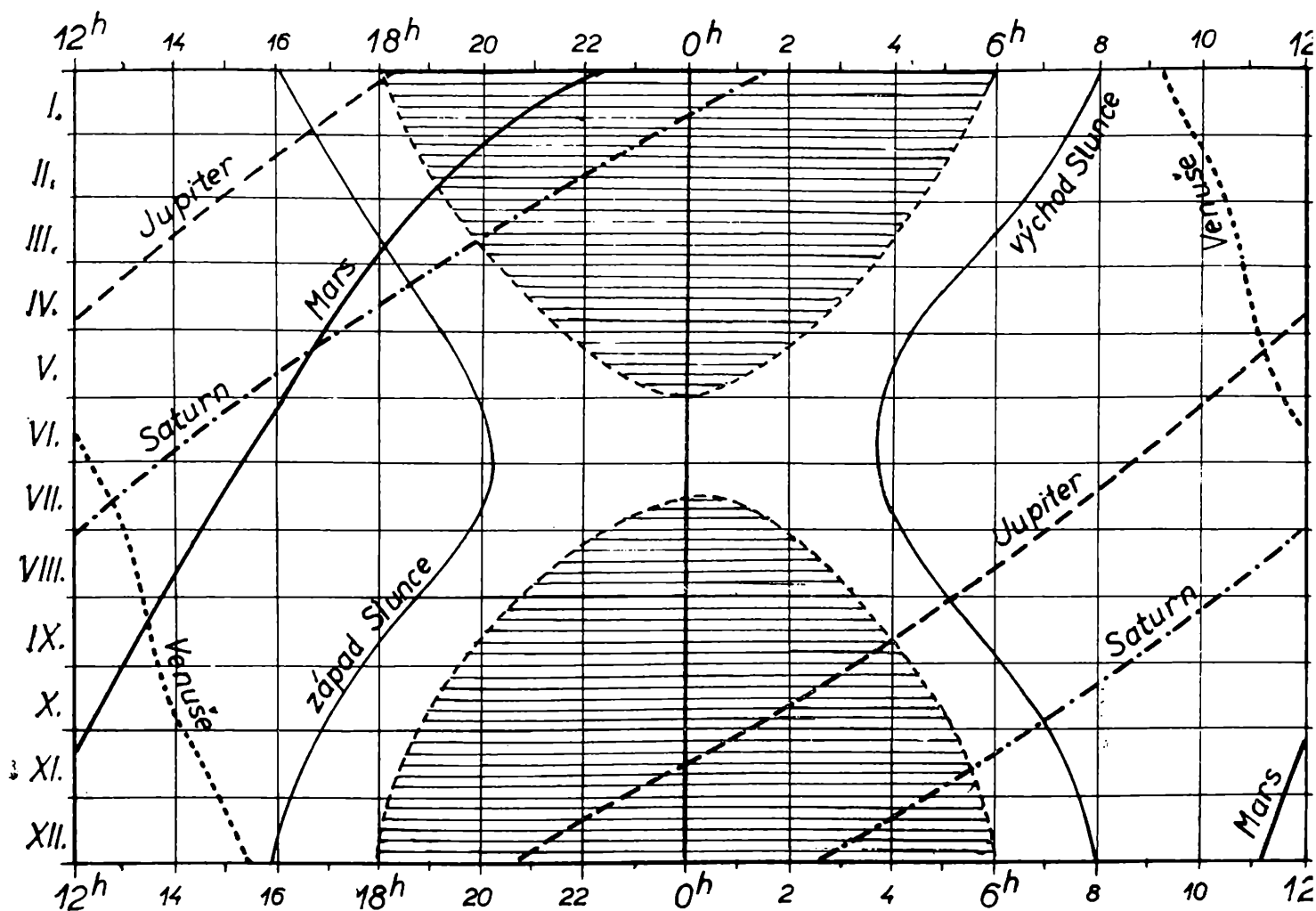
RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Abychom zájemcům o astronomii usnadnili pozorování planet a některých dalších úkazů na obloze, připravili jsme podle ročenky Astronomičeskij ježegodnik SSSR na rok 1976 výběr některých zajímavých údajů.

Především uvedme, že rok 1976 začíná podle astronomické definice dne 1. ledna v $5^h17,4^{min}$ efemeridového času, tj. asi v 6^h17^{min} středoevropského času. Začátek tohoto tzv. *Besselova* roku je okamžik, v němž astronomická délka Slunce dosáhne 280° ; nastává tedy pro celou Zemi současně a nezávisle na tom, ve kterém časovém pásmu žijeme.

Země, obíhající kolem Slunce po eliptické dráze, bude v roce 1976 v perihéliu dne 4. ledna (vzdálenost od Slunce bude $147 \cdot 10^6$ km) a v aféliu (ve vzdálenosti $152 \cdot 10^6$ km) dne 3. července. Začátek astronomického jara bude 20. března, léta 21. června, podzimu 22. září a zimy 21. prosince.

Na obr. 1 je grafické znázornění některých astronomických úkazů. Na vodorovné ose jsou vyneseny hodiny od 12 hodin (poledne) přes půlnoc, na svislé ose měsíce v roce. Začátek každého měsíce je označen vodorovnou čarou. Z grafu můžeme odečíst doby východu a západu Slunce během celého roku (platí pro poledník 15° východní délky a pro



Obr. 1. Grafické znázornění horních kulminací planet Venuše, Marsu, Jupitera a Saturna v roce 1976

rovnoběžku $+50^\circ$ severní zeměpisné šířky). Vyšrafované části znázorňují trvání astronomické noci, tj. dobu, po kterou je Slunce níže než 18° pod obzorem. V době kolem letního slunovratu nenastává astronomická noc vůbec, po celou noc trvá astronomický soumrak (ve vyšších zeměpisných šířkách jsou v této době tzv. „bílé noci“ — Slunce buď vůbec nezapadne, anebo je velmi nízko pod obzorem, takže po celou noc je světlo). Na obr. 1 jsou dále vyneseny doby horních kulminací planet, viditelných pouhým okem. Kulminace Venuše je znázorněna tečkovaně, Marsu souvislou čarou, Jupitera čárkovaně a Saturna čerchovaně. Z grafu můžeme odhadnout, kdy je planeta nejlépe pozorovatelná. Nejlepší podmínky pro pozorování planety jsou tehdy, kulminuje-li nad obzorem o půlnoci (0 hod.). V té době je planeta v opozici se Sluncem, vychází tedy přibližně při západu Slunce, zapadá při východu Slunce a je nad obzorem po celou noc. V době opozice dosahuje také úhlový průměr planety největší hodnoty. Z křivek na obr. 1 je zřejmé, že v roce 1976 budou v opozici planety Saturn a Jupiter. Úhlový průměr Saturna

Merkur	Datum			
Největší východní elongace	7. I. (19°)	28. IV. (21°)	26. VIII. (27°)	20. XII. (20°)
Zastávka	13. I.	9. V.	8. IX.	27. XII.
Dolní konjunkce	23. I.	20. V.	22. IX.	
Zastávka	3. II.	1. VI.	30. IX.	
Největší západní elongace	16. II. (26°)	15. VI. (23°)	7. X. (18°)	
Horní konjunkce	1. IV.	15. VII.	7. XI.	

Planeta	Zastávka	Opozice	Zastávka	Konjunkce
Mars	20. I.	—	—	25. XI.
Jupiter	19. IX.	18. XI.	—	27. IV.
Saturn	28. XI.	20. I.	27. III.	29. VII.
Uran	11. II.	25. IV.	11. VII.	30. X.
Neptun	16. III.	3. VI.	23. VIII.	5. X.

Datum	Čas	Planety
12. IV.	17,6h	Merkur s Jupiterem (Merkur 2° severně)
11. V.	14,5	Venuše s Jupiterem (Venuše 0,1° jižně)
12. V.	2,0	Mars se Saturnem (Mars 1° severně)
24. VII.	14,3	Merkur s Venuší (Merkur 0,4° severně)
9. IX.	3,5	Merkur s Venuší (Merkur 5° jižně)
10. IX.	21,6	Venuše s Marsem (Venuše 0,4° severně)
30. IX.	22,2	Venuše s Uranem (Venuše 0,5° jižně)
18. X.	22,0	Mars s Uranem (Mars 0,3° jižně)

dosáhne 18,5'', Jupitera přes 45''. Polohy Merkura nejsou na obr. 1 zakresleny, neboť jej lze pouhým okem pozorovat jen za výjimečně dobrých podmínkách. Pro čtenáře, kteří mají k dispozici alespoň malý dalekohled, uvádíme význačné polohy Merkura v tab. I. Nejlepší podmínky pro nalezení Merkura na obloze jsou v době jeho největší východní nebo západní elongace, kdy jeho úhlová vzdálenost od Slunce dosáhne maximální hodnoty a můžeme jej vyhledat buď na ranní obloze před východem Slunce anebo na večerní obloze krátce po západu Slunce.

V tab. II jsou uvedeny význačné polohy vnějších planet. Kromě planet pozorovatelných pouhým okem jsou uvedeny ještě polohy Urana,

I. pololetí

Planeta	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen
Venuše	Lib, Sgr	Srg, Cap	Cap, Aqr	Aqr, Psc	Psc, Ari	Tau, Gem
Mars	Tau	Tau	Tau, Gem	Gem	Gem, Cnc	Cnc, Leo
Jupiter	Psc	Psc	Psc, Ari	Ari	Ari	Ari
Saturn	Cnc	Cnc	Cnc, Gem	Gem	Gem	Cnc

II. pololetí

Planeta	Červe- nec	Srpen	Září	Říjen	Listo- pad	Prosi- nec
Venuše	Gem, Cnc	Leo, Vir	Vir	Vir, Lib	Scs, Sgr	Sgr, Cap
Mars	Leo	Leo, Vir	Vir	Vir, Lib	Lib, Scs	Scs, Sgr
Jupiter	Ari	Tau	Tau	Tau	Tau	Tau
Saturn	Cnc	Cnc	Cnc	Cnc	Cnc	Cnc

kterého můžeme vyhledat malým astronomickým dalekohledem, a Neptuna, pro jehož pozorování je však potřeba již poměrně dobrý dalekohled.

V tab. II jsou v posledním sloupci uvedena také data konjunkcí planet se Sluncem. V této době planeta vychází i zapadá současně se Sluncem, je na denní obloze, a není proto pozorovatelná.

Planety mohou být v konjunkci nejen se Sluncem, ale i s Měsícem anebo spolu navzájem. Vzájemná konjunkce dvou planet je velmi zajímavý a poměrně nápadný úkaz, proto v tab. III uvádíme vzájemné konjunkce planet v r. 1976. Konjunkce je tím nápadnější, čím menší je úhlová vzdálenost planet.

Z tab. III vyčteme, že nejmenší úhlová vzdálenost planet bude u konjunkce Venuše s Jupiterem dne 11. května. Tato konjunkce však u nás nebude pozorovatelná, neboť nastává v denních hodinách a navíc obě planety kulminují kolem poledne, nebudou tedy na noční obloze vidět. Podobná situace nastane u konjunkce Venuše s Marsem dne 10. 9. Pozorovatelná bude konjunkce Marsu se Saturnem 12. 5., kdy obě planety kulminují před 17. hodinou a budou pozorovatelné na večerní obloze.

Označení	Trvání ve dnech	Datum maxima činnosti	Počet za hodinu
Lyridy	2 až 3	22. IV.	12
η Aquaridy	18	5. V.	15
δ Aquaridy	10	29. VII.	20
Perseidy	5	13. VIII.	50
Orionidy	8	22. X.	25
Leonidy	4	18. XI.	12
Geminidy	6	14. XII.	60

Pro snadné vyhledání planet na obloze uvádíme v tab. IV souhvězdí, do nichž se budou čtyři nejjasnější planety během roku promítat.

Zkratky zvířetníkových souhvězdí v tab. IV znamenají: *Ari* Aries — Beran, *Tau* Taurus — Býk, *Gem* Gemini — Blíženci, *Cnc* Cancer — Rak, *Leo* Leo — Lev, *Vir* Virgo — Panna, *Lib* Libra — Váhy, *Sco* Scorpius — Štír, *Sgr* Sagittarius — Střelec, *Cap* Capricornus — Kozorožec, *Aqr* Aquarius — Vodnář, *Psc* Pisces — Ryby.

V roce 1976 nastanou dvě zatmění Slunce. První z nich bude prstencové zatmění Slunce dne 29. dubna a bude viditelné v Atlantickém oceánu, v Africe, Evropě a Asii, v severní části Indického oceánu, v Severním ledovém moři a ve východní části Severní Ameriky. U nás bude toto zatmění pozorovatelné jako částečné zatmění a proběhne v dopoledních hodinách.

Dne 23. října nastane úplné zatmění Slunce. Pás totality bude probíhat od východních břehů Afriky Indickým oceánem k jižním břehům Austrálie a u nás nebude toto zatmění pozorovatelné ani jako částečné.

Pokud jde o zatmění Měsíce, nastane dne 13. května částečné zatmění Měsíce, největší fáze zatmění však bude jen 0, 127 (tj. jen tato část Měsíce bude ve stínu Země). Zatmění bude u nás pozorovatelné. Začátek zatmění bude ve 20^h16^{min}, střed ve 20^h55^{min} a konec v 21^h34^{min}.

V noci ze 6. na 7. listopadu 1976 nastane polostínové zatmění Měsíce. Jak je však známo, polostínová zatmění nejsou příliš výrazným úkazem, neboť Měsíc nevstoupí do plného stínu Země.

Závěrem připomínáme čtenářům některé pravidelné meteorické roje. Jejich přehled uvádíme v tab. V. V prvním sloupci tabulky je název roje, který současně udává, ve kterém souhvězdí leží radiant roje (tj. místo na obloze, z něhož zdánlivě meteory vyletují). Ve druhém sloupci je uvedeno trvání roje ve dnech, ve třetím datum, na které připadne maximum činnosti roje, a v posledním sloupci průměrný počet meteorů viditelných pouhým okem za hodinu při maximu činnosti roje.

olympiády

Osmá mezinárodní fyzikální olympiáda v NDR

Prof. RNDr. ROSTISLAV KOŠŤÁL

Ve studijním roce 1974/75 uspořádala Německá demokratická republika osmou mezinárodní fyzikální olympiádu (VIII. MFO).

Zúčastnila se jí družstva devíti států: Bulharska, Československa, Francie, Maďarska, Německé demokratické republiky, Německé spolkové republiky, Polska, Rumunska a SSSR.

Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících, jeden vedoucí družstva a jeden pedagogický instruktor. Vedoucím družstva ČSSR byl doc. RNDr. Ivan Náter, docent elektrotechnické fakulty SVŠT v Bratislavě, 1. místopředseda ÚVFO, pedagogickým instruktorem byl RNDr. Alois Kleveta, profesor gymnázia ve Vyškově, člen užšího ÚVFO.

Pro účastníky VIII. MFO a jejich náhradníky bylo uspořádáno soustředění na SZTS ve Vyškově v době od 15. 6. do 25. 6. 1975. Do našeho družstva byli na tomto soustředění vybráni:

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| 1. Jiří Vyskočil | z G Praha 7, Nad štolou |
| 2. Miroslav Lýčka | z G Vsetín |
| 3. Vladislav Krásný | z G Plzeň |
| 4. Jiří Hůlka | z G Hradec Králové a |
| 5. Jan Hula | z G Žďár n. S. |

VIII. MFO se konala ve dnech 7. až 17. 7. 1975 v Güstrowě, okres Schwerin. Předsedou mezinárodní komise FO byl akademik prof. G. Kelbg.

Byly zadány tři teoretické úlohy a jedna úloha laboratorní. Na vypracování tří teoretických úloh byla vyměřena doba 5 hodin, na vypracování laboratorní úlohy doba 4 hodin.

Prvá úloha byla z mechaniky, druhá z geometrické optiky, třetí z iontové optiky a laboratorní úloha z elektřiny (stanovení voltampérové charakteristiky polovodičového prvku).

Každá teoretická úloha se hodnotila nanejvýš 10 body, laboratorní úloha nanejvýš 20 body. Každý soutěžící mohl tedy dosáhnout maximálně 50 bodů.

Mezinárodní komise se usnesla, aby výchozím počtem bodů nebyl možný dosažitelný počet bodů, tj. 50 bodů, nýbrž nejlepší dosažený počet bodů, tj. 43 bodů. Pak tedy připadla řešitelům

1. cena na 43 až 39 bodů,
2. cena na 38 až 34 bodů,

3. cena na 33 až 28 bodů,
pochvalné uznání na 27 až 22 bodů.

Řešitelé s nižším počtem dosažených bodů byli neúspěšní.

Následující tabulka uvádí pořadí družstev podle získaných bodů a k tomu počet cen a pochvalných uznání.

Stát	Počet bodů	Počet cen			Pochv. uznání	Neúsp.
		1.	2.	3.		
1. NDR	186	3	1	1	—	—
2. SSSR	176	1	2	2	—	—
3. MLR	171	1	2	2	—	—
4. PLR	164	—	1	4	—	—
5. ČSSR	146	1	1	1	1	1
6. F	144	—	1	2	2	—
7. RSR	135	1	1	—	1	2
8. BLR	109	—	—	—	3	2
9. NSR	97	—	—	—	1	4
Celkem		7	9	12	8	9

Cenu za originální řešení 1. úlohy dostal Polák Jerzy Blawdziewicz a cenu za nejlepší řešení teoretických úloh dostal Rumun Radu Oprea.

Bylo uděleno:

7 prvních cen, 9 druhých cen, 12 třetích cen a 8 pochvalných uznání; 9 soutěžících bylo neúspěšných.

Na jednotlivé úlohy získala družstva tento počet bodů:

Pořadí	Stát	Bodů za úlohu				Celkem bodů
		1	2	3	4	
1.	NDR	37	24	40	85	186
2.	SSSR	43	21	34	78	176
3.	MLR	41	16	37	77	171
4.	PLR	45	21	35	63	164
5.	ČSSR	38	12	36	60	146
6.	F	36	21	36	51	144
7.	RSR	43	26	26	40	135
8.	BLR	29	9	29	42	109
9.	NSR	14	2	17	64	97
Celkem bodů v % (ze 450 bodů)		326 72,4	152 33,8	290 64,4	560 62,2	1328 59,0

Naši soutěžící dosáhli mezi 45 soutěžícími těchto výsledků:

Po- řadí	Jméno	Úloha				Cel- kem	Vyhodnoce- ní
		1	2	3	4		
6.—7.	Miroslav Lýčka	9	2	9	19	39	1. cena
12.-13.	Jan Hula	9	4	9	14	36	2. cena
22.-24.	Jiří Hůlka	9	3	8	10	30	3. cena
35.-36.	Jiří Vyskočil	2	3	5	13	23	pochv. uznání
41.	Vladislav Krásný	9	0	5	4	18	neúspěšný
Celkem bodů		38	12	36	60	146	
v % (z 50 bodů)		76	24	72	60	58,4	

Již během soutěže a pak po jejím ukončení bylo uspořádáno mnoho exkurzí a procházek v Güstrowě, Rostocku, Berlíně a jeho okolí.

Chyby v žákovských řešeních úloh fyzikální olympiády

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL

Pro zlepšení žákovských řešení úloh fyzikální olympiády chci upozornit na chyby, kterých se žáci velmi často dopouštějí.

1. Chybné psaní písmen řecké abecedy:

Ludolfovo číslo π je malé písmeno, proto píšeme $2\pi r$, πr^2 a nikoliv $2\Pi r$, Πr^2 ,

Δ je velké písmeno, proto píšeme $\Delta r = r_2 - r_1$ a nikoliv $\triangle r = r_2 - r_1$, některá řecká písmena bývají špatně zařazena do linek; bývá to např. γ , ϱ , φ , ψ , χ atd.

Nesprávné psaní π a Δ se vyskytuje u převážné většiny soutěžících.

2. Určování počtu platných míst.

Počet platných míst čísla je dán počtem míst od první jeho nenulové číslice zleva až po poslední číslici na pravé straně. Tak např.

0,5	má 1 platné místo
0,50	má 2 platná místa

0,00307 = 307 · 10⁻⁵
 0,003070 = 3070 · 10⁻⁶
 307000

má 3 platná místa
 má 4 platná místa
 má 6 platných míst

Nula na konci čísla má význam. Je to místo, které zasahuje chyba měření. Snažíme se měřit na 3 platná místa, v nejhorším případě aspoň na dvě.

3. Při násobení a dělení čísel měřených, tj. čísel neúplných, lze počítat jen na tolik platných míst, kolik jich má činitel s nejnižším počtem platných míst. (Přesně by se mělo určit podle chyby výsledku.)

a) Když je např. u součinu dvou dvouciferných čísel prvá číslice nižší než prvá číslice jednotlivých činitelů, lze někdy v součinu připustit počet platných míst o 1 větší. Např. $5,3 \times 24$. Činitel 5,3 může mít chybu 0,1, tj. 2 %, činitel 24 může mít chybu 1, tj. 4 %; proto součin může mít chybu maximálně 5 % ($\sqrt{2^2 + 4^2}$), tedy výsledek může být 127 ± 6 . Proto lze psát výsledek na 3 místa (na prvním platném místě je zde u výsledku nižší číslice než u obou činitelů).

b) Je-li jeden činitel měrné teplo vody udané hodnotou $1 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, tj. udané na jedno platné místo, mohu výsledek počítat jen na jedno platné místo. Aby bylo možno výsledek určovat na tři platná místa, muselo by být udáno měrné teplo hodnotou $c = 1,00 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$, i když ve větším intervalu nemá c stálou hodnotu.

c) Jestliže výraz $z = \pi \frac{x}{y}$, kde jsou $x = 0,50$ a $y = 0,50$ číselné hodnoty získané měřením s přesností na (1 až 2) %, pak nelze psát, že $z = \pi = 3,141592\dots$, nýbrž jen na dvě platná místa, tj. $z = 3,1$.

d) Chci-li ze vztahu

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta t)$$

vypočíst l na 3 platná místa, musí být l_0 udáno na 3 platná místa, nikoliv však α a Δt , poněvadž součin $\alpha \Delta t$ přispívá jen ke změně čísla 1 (přesně by mělo být číslo 1 dvakrát podtrženo nebo tučně napsáno). Stačí např. udat $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\Delta t = 30 \text{ }^\circ\text{C}$, tedy α jen na jedno platné místo, a dostáváme v závorce $(1 + 0,0006)$, tedy hodnotu dostatečně přesnou.

e) Je-li pro výpočet práce dáno $U = 150 \text{ V}$, $I = 4 \text{ A}$, $t = 60 \text{ s}$, nemohu psát

$$A = 150 \cdot 4 \cdot 60 \text{ J} = 36\,000 \text{ J},$$

protože I je dáno jen na jedno platné místo; proto $A = 3,6 \cdot 10^4 \text{ J}$ (nikoliv 36 000 J). Nad rovnítkem nemůže být tečka, protože číslo nezaokrouhlu-

jeme, nýbrž počítáme na možný počet platných míst. Kdyby bylo dáno $I = 4,0 \text{ A}$, pak můžeme psát $A = 36 \cdot 10^3 \text{ J}$.

f) Měříme-li rozměry obdélníkové místnosti na m, dm, cm, např. 5,32 m, 4,21 m, nemůžeme plošný obsah určit na cm^2 , nýbrž jen na tři platná místa. Následující hodnoty rozměrů budou mít po zaokrouhlení též uvedené rozměry: 5,324 m $\times$ 4,214 m a 5,316 m $\times$ 4,206 m. Po vynásobení vyjde v jednotlivých případech

$$\begin{aligned} 5,32 \text{ m} \times 4,21 \text{ m} &= 22,3972 \text{ m}^2, \\ 5,324 \text{ m} \times 4,214 \text{ m} &= 22,435\,336 \text{ m}^2, \\ 5,316 \text{ m} \times 4,206 \text{ m} &= 22,359\,096 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Z těchto tří výsledků je vidět, že můžeme v tomto případě plošný obsah určit jen na desítky dm^2 , tj. na tři platná místa, i když měříme na cm. Vychází $P = 22,4 \text{ m}^2$.

4. V numerických výpočtech se musí psát vždy jednotky.

a) Např. při výpočtu rychlosti musíme psát

$$v = \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

a nikoliv připsat jednotku až na konci

$$v = \quad = \quad = \quad \text{m} \cdot \text{s}^{-1};$$

to je hrubá chyba.

b) Jednotku nedáváme do závorek, např. $v = 3,5 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$. Jednotka patří k hodnotě a má význam při převádění jednotek. Součin číselné hodnoty a jednotky je konstantní. Proto např. $72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 72 \frac{10^3}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) Když chceme psát jen číselnou hodnotu bez pojmenování, uveďme nejdříve, v jakých jednotkách jsou hodnoty uvedeny, např. v hlavní jednotce $[\text{h}] = \text{m}$ nebo v jiné jednotce $[\text{h}]' = \text{mm}$, a pak píšeme jen číselnou hodnotu $\{h\} = 6,7$.

d) V tabulkách uvádíme jen číselné hodnoty, a proto do hlavičky tabulek píšeme buď veličinu dělenou užitou jednotkou, např. $\frac{V}{\text{m}^3}$, $\frac{I}{\text{A}}$, nebo připouštíme též psaní ve tvaru $V[\text{m}^3]$, $I[\text{A}]$, i když se má dávat do hranaté závorky veličina, jejíž rozměr uvádíme.

e) U diagramů připisujeme ke kladné ose podobně $\frac{V}{\text{m}^3}$, $\frac{I}{\text{A}}$ nebo $V[\text{m}^3]$, $I[\text{A}]$. U os proto šipky neděláme.

f) Někdy se uvádějí jednotky k veličinám např. takto:

$$P = UI \quad [W; V, A]$$

V technické praxi, kde se užívá vhodnějších jednotek, vychází ve vztazích číselný součinitel, a to pak zdůvodňuje uvedené psaní jednotek, aby po dosazení vyšel výsledek v žádané jednotce.

5. Ve fyzice máme vztahy mezi veličinami, pracuje se s veličinovými rovnicemi a nikoliv se vzorci a vzorečky.

6. Pro zaokrouhlování čísel vyšla norma ČSN 01 1010 a na tu odkazují.

7. Všeobecné pokyny

a) Úlohy se řeší nejdříve obecně a pak se dosazují čísla.

b) Úlohy i správně rozřešené, ale bez slovního výkladu jsou nevhovující. Slovní výklad znamená fyzikální zdůvodnění. Do slovního výkladu nepatří např. toto: Nyní převedu z jedné strany rovnice na druhou. Nejprve zapíši stručné zadání, potom vztah, apod.

c) Každý list musí být podepsán a uvedena škola a kraj (opatřen hlavičkou). V hlavičce uvádět specializaci třídy.

d) Soutěžící má používat jen modrého nebo černého inkoustu nebo psát strojem.

e) Je třeba dbát na jazykovou správnost a na úpravu.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

10. Upravte výraz

$$5^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}}.$$

(Došlo 26 řešení.)

Sovětský časopis Kvant

Řešil Jiří Kožusznik, IV C, G v Trinci:

Nejprve dokážeme větu:

Pro každou trojici reálných čísel a, u, v , kde $a > 0$, $u > 0$, $u \neq 1$ a $v \neq 0$, platí

$$\log_{u^v} a = \log_u a^{\frac{1}{v}}.$$

Důkaz. Označme

$$\log_{u^v} a = x.$$

Pak zřejmě platí

$$(u^v)^x = a,$$

tj.

$$u^x = a^{\frac{1}{v}},$$

odkud plyne

$$x = \log_u a^{\frac{1}{v}},$$

cbd.

Pomocí této věty upravíme prvního sčítance v daném výrazu. Zřejmě tedy platí:

$$5^{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2}} = 5^{\log_5^{-1} \frac{1}{2}} = 5^{\log_5 2} = 2.$$

Nyní budeme upravovat zbývající dva sčítance:

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10 + 2\sqrt{21}} = \log_2 (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 +$$

$$\log_2 (10 + 2\sqrt{21}) = \log_2 (10 - 2\sqrt{21})(10 + 2\sqrt{21}) = \log_2 16 = 4.$$

Tím tedy docházíme k závěru, že daný výraz je roven

$$2 + 4 = 6.$$

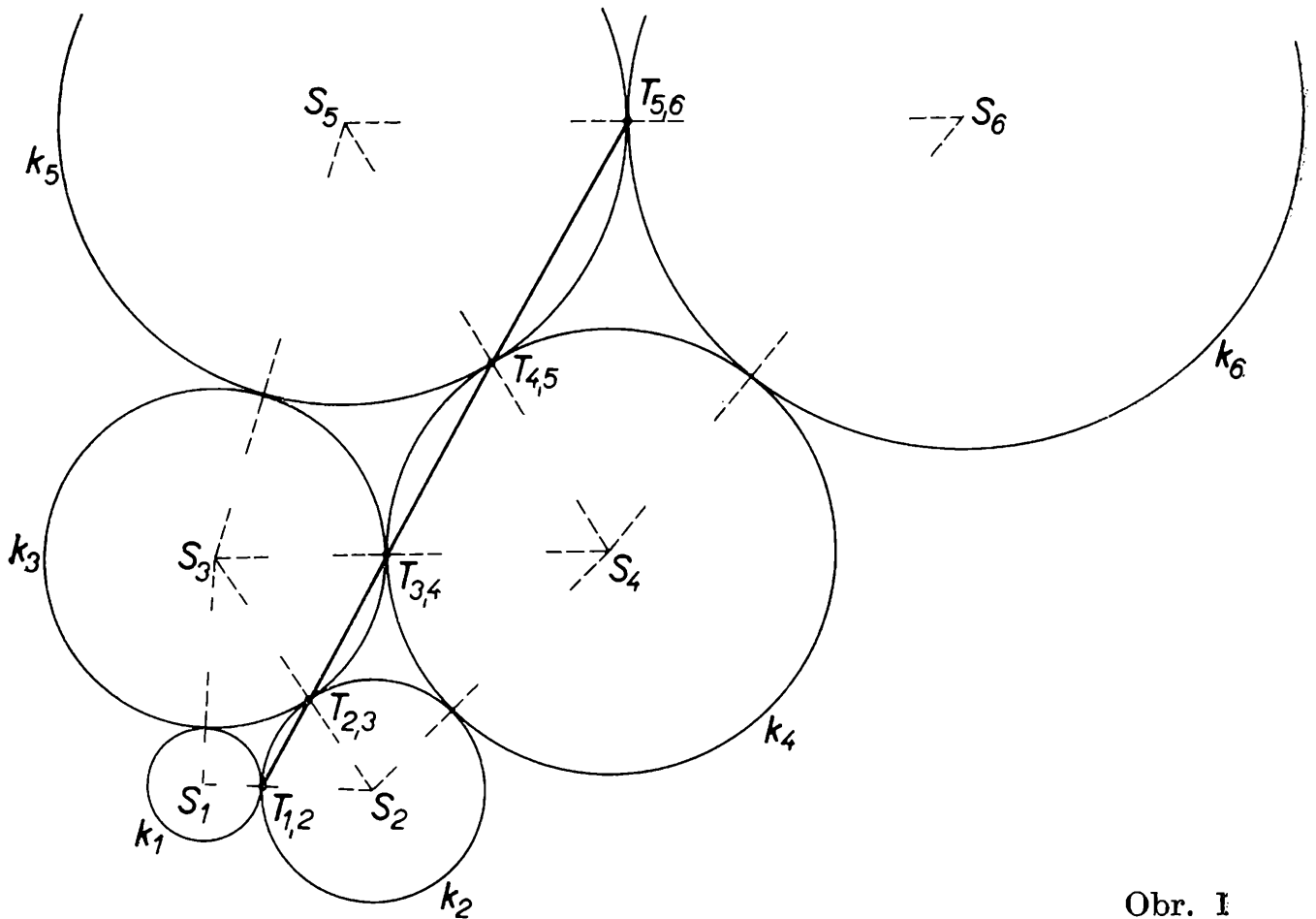
11. Narýsujte přesně kružnice $k_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ těchto vlastností: a) kružnice k_i má poloměr $r_i = i$; b) každé kružnice k_i, k_{i+1}, k_{i+2} se navzájem vně dotýkají. Dotykový bod kružnic k_i, k_{i+1} označme znakem $T_{i, i+1}$. Co lze říci o úsečkách $T_{1,2}, T_{2,3}, T_{2,3}, T_{3,4}, \dots, T_{n-2, n-1}, T_{n-1, n}$? Své tvrzení (i negativní) dokažte analyticky!

Ota Setzer

(Došlo 13 řešení)

Upravené řešení Jaroslava Kotase, IV B G v České Lípě:

Přesně narysovaný obr. 1 vede k domněnce, že úsečky $T_{1,2}T_{2,3}, T_{2,3}T_{3,4}, \dots, T_{n-2, n-1}T_{n-1, n}$ leží na téže přímce. V tom případě by však úhly při základně v rovnoramenných trojúhelnících $T_{1,2}T_{2,3}S_2, T_{2,3}T_{3,4}S_3, \dots, T_{n-2, n-1}T_{n-1, n}S_{n-1}$ byly shodné, uvedené trojúhelníky by byly podobné a jejich úhly $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}$ při vrcholech $S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$ by byly též shodné. Avšak podle kosinové věty plyne pro úhel α_2



Obr. I

$$z \triangle S_1 S_2 S_3 \quad \cos \alpha_2 = \frac{(r_1 + r_2)^2 + (r_2 + r_3)^2 - (r_1 + r_3)^2}{2(r_1 + r_2) \cdot (r_2 + r_3)},$$

$$z \triangle S_2 S_3 S_4 \quad \cos \alpha_3 = \frac{(r_2 + r_3)^2 + (r_3 + r_4)^2 - (r_2 + r_4)^2}{2(r_2 + r_3) \cdot (r_3 + r_4)},$$

$$\text{obdobně } \cos \alpha_{n-1} = \frac{(r_{n-2} + r_{n-1})^2 + (r_{n-1} + r_n)^2 - (r_{n-2} + r_n)^2}{2(r_{n-2} + r_{n-1}) \cdot (r_{n-1} + r_n)};$$

$$\text{protože však } r_i = i, \text{ jest } \cos \alpha_2 = \frac{3^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{3}{5},$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{5^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{19}{35},$$

$$\cos \alpha_{n-1} = \frac{(2n-3)^2 + (2n-1)^2 - (2n-2)^2}{2 \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)} = \frac{2n^2 - 4n + 3}{4n^2 - 8n + 3}$$

Protože $\alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_{n-1}$, neleží uvažované úsečky v přímce. Pavel Tvrdík poznamenal, že s rostoucím n se blíží α_n úhlu $\frac{\pi}{3}$.

Poznámka redakce: Mnozí řešitelé zkoumali navíc vztahy mezi délkami uvedených úseček a odvodili zajímavé závislosti. Z neúplnosti úlohy vyplynulo, že řešitelé neuvažovali v textu neuvedenou podmínku dotyku kružnic k_i a k_{i+2} .

12. V rovině je dán konvexní devítiúhelník. Rozhodněte, zdali každá jeho úhlopříčka může být obarvena jednou z devíti daných barev tak, že každou barvou jsou vždy obarveny tři úhlopříčky tvořící strany trojúhelníku.

Jiří Sedláček

(Došlo 22 řešení)

Řešil Martin Baumann, třída S 2s OV ČKD v Praze 9:

Vzhledem k tomu, že nebudeme zkoumat daný konvexní devítiúhelník z hlediska velikosti stran, úhlů apod., ale pouze z hlediska možnosti obarvení úhlopříček, nebude na újmu obecnosti, budeme-li předpokládat, že daný konvexní devítiúhelník $ABCDEFGHIK$ je pravidelný se středem S . Jeho úhlopříčky můžeme rozdělit do těchto tří skupin:

1. úhlopříčky „ob 1 bod“ např. AC ;
2. úhlopříčky „ob 2 body“ např. AD ;
3. úhlopříčky „ob 3 body“ např. AE .

Úhlopříčky „ob 4 body“ by již byly shodné s úhlopříčkami 3. skupiny. Každou úhlopříčku můžeme tedy zařadit právě do jedné skupiny. Otáčením libovolné úhlopříčky 1. skupiny kolem středu S dostaneme postupně všechny úhlopříčky 1. skupiny a žádné jiné. Totéž platí o úhlopříčkách 2. a 3. skupiny.

Strana AC trojúhelníku ACF patří do 1. skupiny, strana CF do 2. a strana AF do 3. skupiny. Budeme-li jej postupně devětkrát otáčet vždy o 40° a pokaždé ho nakreslíme jinou barvou, nakreslíme všechny úhlopříčky a každou právě jednou barvou. Neboť např. strana AC bude vytvářet pouze úhlopříčky 1. skupiny a protože trojúhelník ACF otočíme o $9 \cdot 40^\circ = 360^\circ$, nakreslí strana AC právě všechny úhlopříčky 1. skupiny. Obdobná úvaha platí pro strany CF , FA .

Jako řešení je tedy např. ACF , BDG , CEH , DFK , EGA , FHB , GKC , HAD , KBE . Nakreslíme-li každý z těchto trojúhelníků jinou barvou, splníme požadavky úlohy.

Redakční poznámka: V. Klíma z gymnasia v Benešově uvádí ve svém řešení, že na danou otázku stačí odpovědět ano a vypsát jednu možnost obarvení. Tento přístup je zcela správný, v řešení není třeba popisovat, jak se k výsledku došlo.

Fyzika

1. V jaderné fyzice se zpravidla klidové hmotnosti elementárních částic vyjadřují v energetických jednotkách, tzv. elektronvoltech ($1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$; $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$). Například klidová hmotnost elektronu vyjádřená v kg je $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ a v energetických jednotkách $E_e = m_e c^2 = 9,11 \times 10^{-31} (3 \times 10^8)^2 = 81,99 \times 10^{-15} \text{ J} = 0,511 \text{ MeV}$.

Konstanta c je rychlost světla.

Vyjádřete:

a) klidovou hmotnost těžké elementární částice Σ^- (hyperonu) v kg, víte-li, že je 2347,72 krát větší než klidová hmotnost elektronu.

b) klidovou hmotnost částice Σ^- v energetických jednotkách MeV.

(Došlo 25 řešení)

Zdeněk Janout

Řešil Jiří Sýkora, IV. A. G Jihlava:

a) Klidová hmotnost Σ^- hyperonu je v kg

$$m_{\Sigma^-} = 2347,72 \times m_e = 2347,72 \times 9,11 \times 10^{-31} = 2,138 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

b) Klidová hmotnost Σ^- hyperonu v energetických jednotkách je

$$E_{\Sigma^-} = m_{\Sigma^-} c^2 = 2347,72 \times m_e c^2 = 2347,72 \times E_e = 2347,72 \times 0,51 = 1197,34 \text{ MeV}$$

Klidová hmotnost Σ^- hyperonu je $2,138 \times 10^{-27} \text{ kg}$; v energetických jednotkách to odpovídá 1197,34 MeV

Poznámka autora:

Správný postup měli i ti řešitelé, kteří přímo dosadili číselné hodnoty za hmotnost hyperonu a rychlost světla, tj.

$$E_{\Sigma^-} = m_{\Sigma^-} c^2 = 2,138 \times 10^{-27} (3 \times 10^8)^2 = 1201,62 \text{ MeV}$$

V tomto případě vyšla hmotnost hyperonu poněkud větší.

2. Radioaktivní jádro uranu ${}_{92}^{238}\text{U}$, které je v klidu, se rozpadá na jádro ${}_{90}^{234}\text{Th}$, přičemž vyletuje částice s hmotností m_1 . Energie E_r , uvolněná při rozpadu, je rovna 4,26 MeV ($1 \text{ MeV} = 1,602 \times 10^{-13} \text{ J}$).

a) Určete, o jaký typ radioaktivity se jedná; zda jde o rozpad beta či alfa.

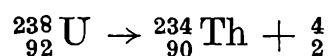
b) Užitím zákonů zachování energie a hybnosti vypočítejte kinetickou energii vyletující částice v energetických jednotkách MeV.

(Došlo 23 řešení)

Zdeněk Janout

Řešil: Josef Voldřich, IV. tř. G Vimperk:

a) Protože při rozpadu se hmotnostní číslo zmenší o čtyři a atomové číslo o dvě, jedná se o rozpad alfa. Platí:



b) Vysláním částice alfa dostane jádro zpětný náraz a bude se pohybovat opačným směrem než částice alfa. Podle zákona zachování hybnosti můžeme tedy psát:

$$m_2 v_2 = m_1 v_1, \quad (1)$$

kde m_2 , v_2 jsou hmotnost a rychlost jádra thoria, m_1 , v_1 jsou hmotnost a rychlost částice alfa.

Podle zákona zachování energie je celková uvolněná energie E_r rovna součtu kinetické energie jádra W_{Th} a částice alfa W_α , kdy

$$E_r = W_\alpha + W_{\text{Th}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (2)$$

Vyloučíme-li užitím rovnice (1) z rovnice (2) rychlost jádra thoria v_2 , dostaneme hledaný vztah:

$$W_\alpha = \frac{E_r}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{E_r}{1 + \frac{A_1}{A_2}}, \quad (3)$$

kde A_1 , A_2 jsou hmotnostní čísla částice alfa a jádra thoria.

Dosadíme-li do vztahu číselné hodnoty $E_r = 4,26$ MeV, $A_1 = 4$, $A_2 = 234$ dostaneme $W_\alpha = 4,19$ MeV.

Jádro uranu ${}_{92}^{238}\text{U}$ se rozpadá alfa rozpadem. Kinetická energie částice alfa je obecně dána vztahem (3) a její číselná hodnota v daném typu rozpadu je rovna $W_\alpha = 4,19$ MeV.

3. Má sa navrhnuť spirála ohrievača o výkone $P = 700$ [W] z nichromového drôtu o priemeru $d = 0,72$ [mm]; spirála má dávať teplo pri teplote $\vartheta_1 = 870$ °C, kým teplota okolia sa predpokladá $\vartheta_0 = 20$ °C. Nichrom má merný odpor $\varrho_0 = 1,1 \cdot 10^{-4}$ [$\Omega \cdot \text{cm}$] pri teplote $\vartheta_0 = 20$ [°C], teplotný koeficient odporu je $\alpha = 1,73 \cdot 10^{-4}$ [°C] $^{-1}$, napätie el. siete je $U = 240$ V Stanovte dĺžku l navrhovanej spirály obecné, spravte dimenzionálnu skúšku nájdeného vzorca a urobte výpočet pre zadané hodnoty.

Evžen Říman

(Došlo 24 řešení)

Řešila Hana Kovaříková, III. A G Jihlava :

Spirála ohřívače o odporu R má mít při napětí U výkon P . Vyjádříme si odpor pomocí napětí a výkonu:

$$R = \frac{U}{I}, P = UI \Rightarrow R = \frac{U^2}{P} \quad (1)$$

Závislost odporu R na délce a průměru vodiče a na materiálu udává vzorec

$$R = \varrho \frac{l}{S} = \varrho \frac{l}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4\varrho l}{\pi d^2}, \quad (2)$$

kde ϱ (měrný odpor, jehož jednotkou je $\Omega \text{ m}$) závisí na teplotě ϑ_1 vztahem

$$\varrho_1 = \varrho_0(1 + \alpha\Delta\vartheta), \quad (3)$$

kde ϱ_0 je měrný odpor při teplotě ϑ_0 , $\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ je rozdíl teplot.

V našem případě známe ϱ_0 (při teplotě $\vartheta_0 = 20^\circ\text{C}$) a hledáme ϱ_1 (při teplotě $\vartheta_1 = 870^\circ\text{C}$). Bude tedy při teplotě ϑ_1 odpor

$$R_1 = \frac{4\varrho_1 l}{\pi d^2} = \frac{4\varrho_0(1 + \alpha\Delta\vartheta)l}{\pi d^2}. \quad (4)$$

Ze vzorce $R = \frac{U^2}{P}$ (1) potom dostáváme

$$\frac{4\varrho_0(1 + \alpha\Delta\vartheta)l}{\pi d^2} = \frac{U^2}{P} \quad (5)$$

a odtud již vyjádříme jedinou neznámou, tj. délku l :

$$l = \frac{\pi d^2 U^2}{4\varrho_0(1 + \alpha\Delta\vartheta)P} \quad (6)$$

„Rozměrová“ zkouška:

$$[l] = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{V}^2}{\Omega \cdot \text{m} \cdot \text{W}} = \frac{\text{m} \cdot \text{V}^2}{\text{V} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{V} \cdot \text{A}} = \text{m} = \text{metr}.$$

Číselný výpočet: Musíme vyjádřit zadané veličiny (tj. měrný odpor ϱ_0 a průměr d základní jednotkou soustavy SI, tj. centimetry a milimetry nutno převést na metry; současně si určíme hodnotu bezrozměrného výrazu $(1 + \alpha\Delta\vartheta)$.

Užijeme převodní vztahy $1 \text{ [mm]} = 10^{-3} \text{ [m]}$; $1 \text{ [cm]} = 10^{-2} \text{ [m]}$, takže $d = 0,72 \text{ [mm]} = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ [m]}$; $\varrho_0 = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ [cm]} = 1,1 \cdot 10^{-6}$

$$[m] \ 1 + \alpha \Delta \vartheta = 1 + \alpha(\vartheta_1 - \vartheta_0) = 1 + 1,73 \cdot 10^{-5} [^{\circ}\text{C}]^{-1} \times \\ \times (870 - 20) [^{\circ}\text{C}] = 1 + 1,73 \cdot 10^{-5} \cdot 850 = 1,147 \text{ (bezrozměrné číslo)}$$

Logaritmický výpočet vztahu (5) provedme v přehledné tabulce:

Veličiny	Logaritmický výpočet
(dané, hledané, pomocné a výsledky)	(Nejprve vyhledáme logaritmy veličiny, které ve vztahu (6) jsou umocněny!)
$U = 240 \text{ [V]}$	$\log d = 0,85 \ 733 - 4$
$P = 700 \text{ [W]}$	$\log U = 2,38 \ 021$
$\vartheta_1 = 870 [^{\circ}\text{C}]$	$\log \pi = 0,49 \ 715$
$\vartheta_0 = 20 [^{\circ}\text{C}]$	$2 \log d = 1,71 \ 466 - 8$
$\varrho_0 = 1,1 \cdot 10^{-6} [\Omega \text{ m}]$	$2 \log U = 4,76 \ 042$
$d = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ [m]}$	$\log \text{ čit.} = 6,97 \ 223 -$
$\alpha = 1,73 \cdot 10^{-4} [^{\circ}\text{C}]^{-1}$	$\log 4 = 0,60 \ 206$
$\Delta \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_0 = 850 [^{\circ}\text{C}]$	$\log P = 2,84 \ 510$
$1 + \alpha \Delta \vartheta = 1,147$	$\log (1 + \alpha \Delta \vartheta) = 0,05 \ 956$
	$\log \varrho_0 = 0,05 \ 038 - 6$
	$-\log \text{ jmen.} = -3,55 \ 710 + 6$
$l \doteq 26,009 \text{ [m]}$	$\log l = 3,41 \ 513 - 2$

Délka spirály bude přibližně $l = 26,01 \text{ [m]}$

různé

Rozhledy pomáhají škole

JOSEF KOTYK, Pardubice

Na téma „Rozhledy pomáhají škole“ bylo v našem časopise uveřejněno při různých příležitostech již několik článků¹⁾. Všechny se shodovaly v tom, že Rozhledy matematicko-fyzikální se za půl století svého trvání staly našim středním školám při vyučování reálným předmětům vydatným a obecně uznávaným pomocníkem. Významného

¹⁾ Viz také autorovy články „Rozhledy pomáhají škole“ v roč. 41, čís. 1, str. 44 až 47, v roč. 45, čís. 6, str. 302 až 303 a v roč. 50, čís. 2, str. 92 až 96.

ocenění dostalo se jim již v roce 1962 udělením státního vyznamenání „Za zásluhy o výstavbu“. Z mnoha zkušeností, které jsem s nimi sám učinil, vyličím opět jednu podrobněji.

Za vhodný program zájmového kroužku z matematiky volil jsem jednu součty k -tých mocnin nezáporných celých čísel, kde k je rovněž nezáporné číslo celé, tedy součty tvaru $S_{(n)}^{(k)} = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ pro $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. V nejjednodušším případě je $k = 0$, symbol 0^0 je však neurčitý. Definujeme tedy $S_{(n)}^{(0)}$ vztahem $S_{(n)}^{(0)} = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \dots + n^0 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ (celkem n -krát) neboli $S_{(n)}^{(0)} = n$. Jako zvláštní případ byl účastníkům kroužku znám také

součet aritmetické řady $S_{(n)}^{(1)} = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$

a ze Sbírky úloh z algebry pro I.—III. ročník SVVŠ (1964), str. 202,

úř. 8 součet $S_{(n)}^{(2)} = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) (2n + 1)}{6}$

odvozený matematickou indukcí. Touž metodou odvodili žáci v naší schůzce ještě součty

$$S_{(n)}^{(3)} = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2}{4}$$

$$S_{(n)}^{(4)} = 0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

$$\text{a } S_{(n)}^{(5)} = 0^5 + 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{n^2 \cdot (n + 1)^2 \cdot (2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

Bylo by snadné takto pokračovat. Všem, zejména ovšem nejmladším účastníkům kroužku, byl dosavadní postup vzácnou a jistě velmi potřebnou příležitostí dobře se seznámit s podstatou důležité metody matematické indukce.

Žádoucí osvěžení a nové oživení vnesla do atmosféry našeho kroužku malá exkurze do dějin matematiky. Připomněl jsem, že Babylóňané uvádějí součet dvojmocí prvních deseti čísel přirozené řady výrazem

$$\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{2 \cdot 10 + 1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{10} k; \text{ nám je znám v obecném tvaru } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n + 1}{3} \cdot \sum_{k=1}^n k \text{ nebo — poněvadž } \sum_{k=1}^n k = S_{(n)}^{(1)} = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} —$$

$$\text{v tvaru } \sum_{k=1}^n k^2 = S_{(n)}^{(2)} = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}. \text{ Babylóňané uvádějí}$$

zpravidla hotový výraz, nepodávají však odvození.

Někteří účastníci kroužku připojili na to zkoušku správnosti nalezených výrazů. Žák A se přihlásil s tím, že pro $n = 20$ dostal sčítáním mocnin postupně $S^{(0)}20 = 20$, $S^{(1)}20 = 210$, $S^{(2)}20 = 2870$, $S^{(3)}20 = 44100$. „S hodnotou dalšího výrazu $S^{(4)}20$ nám již v minulém století práci ušet-

řil — čtrnáctiletý chlapec“, připomněl jsem k všeobecnému překvapení, „Henri Mondeux, zázračný počtář, jenž předváděl roku 1840 své umění na École polytechnique v Paříži. Jeden z profesorů této vysoké školy, slavný matematik A. L. Cauchy²⁾, uložil tehdy chlapci, aby říkal hodnoty mocnin $1^4, 2^4, 3^4, \dots, 20^4$ a pak je sečetl. Malý Henri sklonil hlavu, přivřel oči, počítal. Jeho ruce byly neklidné, rty se chvěly — chlapec, slabě rozčilen, byl už blízek výsledku... Avšak i Cauchy přivřel oči a počítal. Z obecného výrazu $S_{(n)}^{(4)}$, s kterým nedávno pracoval a který proto ještě pamatoval, dospěl počítáním z paměti snadno k součinu $574 \cdot 1259$, jehož hodnotu rovněž bez větší námahy z paměti udal; činí 722 666. Cauchy otevřel náhle oči a s nedočkavostí dobré věci hodnou — vykřikl tento výsledek svému neškolenému protivníkovi, jemuž uložil kráčet cestou obtížnější...”

V záloze zůstal ještě dobrý časopis, Rozhledy matematicko-fyzikální, osvědčený a většině účastníků kroužku známý pomocník školy. V 9. čísle 39. ročníku napsal čtenářům, tj. studujícím na školách všeobecně vzdělávacích a odborných, Karel Kunc, rovněž studující, na naše téma článek, který jsem jako přípravný úkol předem doporučil prostudovat několika výborným žákům vyšších tříd. Ti přišli nyní postupně k slovu:

Žák B poukázal na vztahy

$$2 \cdot S_{(n)}^{(1)} = (n+1)^2 - 1 - S_{(n)}^{(0)}$$

$$3 \cdot S_{(n)}^{(2)} = (n+1)^3 - 1 - 3 \cdot S_{(n)}^{(1)} - S_{(n)}^{(0)}$$

$$4 \cdot S_{(n)}^{(3)} = (n+1)^4 - 1 - 6 \cdot S_{(n)}^{(2)} - 4 \cdot S_{(n)}^{(1)} - S_{(n)}^{(0)}$$

$$5 \cdot S_{(n)}^{(4)} = (n+1)^5 - 1 - 10 \cdot S_{(n)}^{(3)} - 10 \cdot S_{(n)}^{(2)} - 5 \cdot S_{(n)}^{(1)} - S_{(n)}^{(0)}$$

Žák C se zabýval vyjádřením součtů $S_{(n)}^{(k)}$ mocninnými řadami neboli polynomy proměnné n s reálnými koeficienty

$$S_{(n)}^{(0)} = n$$

$$S_{(n)}^{(1)} = \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} n^2$$

$$S_{(n)}^{(2)} = \frac{1}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3$$

$$S_{(n)}^{(3)} = \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^4$$

²⁾ Augustin Louis Cauchy žil v letech 1789 až 1857. Zasloužil se zejména o základy počtu infinitesimálního a teorii funkcí komplexní proměnné. Jako náš Bolzano proslul také důsledným úsilím o přesnost v matematické analýze; některé její věty nesou dodnes jména obou badatelů (věta Bolzano-Cauchyova o existenci limity posloupnosti čísel, obecné kritérium Bolzano-Cauchyovo o limitách funkcí aj.)

$$S_{(n)}^{(4)} = -\frac{1}{30}n + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{5}n^5$$

$$S_{(n)}^{(5)} = -\frac{1}{12}n^2 + \frac{5}{12}n^4 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

a ukázal, že součet $S_{(n)}^{(k)}$ lze obecně vyjádřit mnohočlenem stupně $k + 1$ tvaru $S_{(n)}^{(k)} = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \dots + a_kn^k + a_{k+1}n^{k+1}$, jehož reálné koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ snadno určíme řešením jednoduché soustavy lineárních rovnic (učinil tak pro $k = 2$ a pro $k = 4$);

Žák *D* stanovil pomocí součtů $S_{(n)}^{(k)}$ součet řady $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ výrazem $S_{(n)}^{(3)} + 3 S_{(n)}^{(2)} + 2 S_{(n)}^{(1)}$ – tolik podnětů vnesl do našeho zájmového kroužku jediný článek ROZHLEDŮ! V pracovním prostředí, jež pomohl vytvořit, jsme zcela zapomněli na čas. „Práce máme, díky ROZHLEDŮM, stále dost“, podotkl jsem. „To je štěstí naší mládeže. ROZHLEDY jsou časopisem pracovitě a vědychtivě mládeže. Zaslouží, abyste je pravidelně četli a vhodnými články do nich i přispívali. Stanou se vám stálým pomocníkem, spolehlivým průvodcem po celý život“

Od našeho kroužku uplynulo již několik let a zájem o dané téma neutuchá. V ročnících ROZHLEDŮ nalézáme znovu a znovu články, jež nejrozmanitějšími způsoby odvozují součty mocnin přirozených čísel.³⁾ O několik dalších referátů v zájmových kroužcích máte tedy postaráno. Pojednejte o nich a napište nám, jak i nyní ROZHLEDY stále pomáhají škole.

Cvičení

Úvahy žáka *B* lze snadno zobecnit v rekurentní relaci. Učiňte tak!

Několik zajímavostí

Pytagorejské trojúhelníky byly v dávném starověku ty pravoúhlé trojúhelníky, které měly délky stran udány celými čísly. Již staří Babylonané znali nejmenší z nich se stranami 3, 4 a 5 jednotek, další se stranami 5, 12 a 13 jednotek apod. Pytagorejci údajně našli recept pro určování takových trojic; dnes bychom ho zapsali pomocí parametru p takto:

³⁾ Připomínám např. článek Zd. Ungermanna (roč. 46, čís. 10, str. 459 až 461), Fr. Janečka (roč. 47, čís. 2, str. 56 až 59), ing. dr. E. Reicha (roč. 48, čís. 9, str. 394 až 396), J. Nečase (roč. 52, čís. 8, str. 344 až 347) aj.

$$2p + 1, \quad 2p(p + 1), \quad 2p(p + 1) + 1.$$

Zkuste si dosadit $p = 1, 2, 3, 4, \dots$; všechny trojice, které získáte, obsahují dvojici sousedních čísel. Přitom existují pytagorejské trojúhelníky, které nelze získat popsáním postupem (ukážte některý). Obecnější recept je dvojparametrický s hodnotami $m > n$ v obou přirozených čísel:

$$m^2 - n^2, \quad 2mn, \quad m^2 + n^2.$$

Pokuste se nalézt vhodnou dvojici čísel m, n pro každý pytagorejský trojúhelník, který znáte. Odvážnější a zkušenější z vás mohou objevit i důkaz, že každý pytagorejský trojúhelník má takovou dvojici čísel m, n . Součiny délek tří stran pytagorejských trojúhelníků jsou násobky poměrně velkého přirozeného čísla; určete je a dokažte svou hypotézu.

Tři nejznámější průměry dvou čísel (aritmetický, geometrický, harmonický) mají starodávný původ, zrodily se však z dosti složitých úvah o trojicích přirozených čísel a, b, c splňujících podmínku $a > b > c$. Podívejte se na tyto tři sloupce:

$$\begin{array}{llll} (a-b) & (b-c) = a & a & a-b = b-c & b_1 = \frac{1}{2}(a+c) \\ (a-b) & (b-c) = a & b & a-b = b-c & b_2 = \sqrt{ac} \\ (a-b) & (b-c) = a & c & \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} & b_3 = \frac{2ac}{a+c} \end{array}$$

V levém sloupci jsou nejstarší vyjádření těchto poměrů (všimněte si systematické klasifikace), v prostředním jsou jejich ekvivalentní vyjádření, která podal pytagorejce Archytos; v pravém sloupci je náš běžný „funkční“ zápis. Najdete závislost b_3 na b_1, b_2 ? Dovedete dokázat, že každé z čísel b_1, b_2, b_3 leží mezi a, c ? Které z čísel b_1, b_2, b_3 je největší (nejmenší) při stejné dvojici hodnot a, c ? Mohou si být rovna čísla b_1, b_2, b_3 ? Platí, že $b_1 \cdot b_2 = b_2 \cdot b_3$?

Aristoteles vyložil, jak pytagorejci udělali z čísel fetiš (posvátný objekt): „Když se tzv. pytagorejci začali zabývat matematikou, zprvu ji obohatili, ale pak začali považovat její základy, které si osvojili, za základ všeho“

Pytagorejce Hippas byl podle legendy potrestán bohy (utonul v moři) za to, že prozradil lidem nepatřícím do kruhu pytagorejců poznatek o iracionálnosti čísla $\sqrt{2}$. Tento objev nezapadal do schématu pytagorejského učení, že přirozená a racionální čísla (poměry přirozených čísel) jsou základem světa.

Iracionalismus je nevědeckým názorem o nemožnosti rozumového poznání světa, „iracionální“ dnes znamená „rozumem nepochopitelné, vymykající se rozumu“. Termín „iracionální číslo“ však původně neměl význam „číslo rozumem nepochopitelné“, ale „číslo nepoměrové“.

dříve slovo *ratio* znamenalo poměr (v tomto jediném významu je dodnes najdete např. v angličtině, ovšem s výslovností „rejšiou“).

Matematické talismany pro dvojice lidí, kteří si chtěli „pojistit“, že na sebe nezapomenou, obsahovaly počty zrněk či jiných předmětů udané tzv. spřízněnými čísly. Jde o dvojice čísel, z nichž každé je součtem všech dělitelů druhého čísla (menších než to číslo). V antice byla známa dvojice spřízněných čísel 220 a 284; číslo 284 má dělitele 1, 2, 4, 71, 142 jejichž součet je roven 220; číslo 220 má dělitele 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 a jejich součet je 284. Tuto dvojici údajně objevil legendární, Pythagoras. Máte-li chuť překonat Pythagoru, najděte další dvojici spřízněných čísel. V r. 1866 objevil italský student Nicolo Paganini dvojici spřízněných čísel, kterou přehlédli i slavní matematici; možná, že i vy ji najdete.

Š. J.

K. F. Gauss (1777—1856) byl jedním z největších matematiků všech dob; talent a vynalézavost projevil už v dětství. Připomeňme si příhodu s exemplárním trestem pro neposlušnou třídu, kdy učitel uložil žákům sečíst všechna čísla od 1 do 100. Všichni neposedové hned počítali na břídicových tabulkách, ale malý Gauss se chvíli díval do vzduchu a pak napsal na svou tabulku jen výsledek 5050. Měl šťastný nápad, jak si ušetřit počítání, součet $1 + 2 + \dots + 99 + 100$ nahradil součtem $(1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 50 \cdot 101$. Dovedli byste hned teď „Gaussovou metodou“ určit součet všech lichých čísel od 1 do 999?

K. F. Gauss si až do svých 18 let vedl poznámkový sešit; v něm lze nalézt mnoho matematických objevů. Už v tak mladém věku zapsal do sešitu ideu geometrického znázornění komplexních čísel v rovině. Zapsal tam i objev, který nikdy neuveřejnil — neeuklidovskou geometrii. Teprve po Gaussově smrti byl sešit nalezen a vydal tak svědectví o autorově genialitě. Říká se, že kdyby Gauss objevil jen to, co má poznamenáno ve svém sešitě „z mladých let“, patřil by mezi velké matematiky.

K. F. Gauss našel ve svých 19 letech konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníka kružítkem a pravítkem a téměř plně rozřešil problém, které pravidelné n -úhelníky lze tak sestavit. (Při $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18$ a 19 nelze například sestavit kružítkem a pravítkem pravidelný n -úhelník.) Sám považoval tento objev za významný úspěch svého matematického bádání, podle jeho přání byl na jeho náhrobní desku vyryt pravidelný sedmnáctiúhelník.

Š. J.

matematické zábavy

Zmatlíkův „objev“

JOSEF DIBLÍK, Červená Voda

Student s přezdívkou Zmatlík*) vždy přistupoval s velikým elánem k řešení úloh z matematiky. Jednoho dne, když měl najít kořeny dvou rovnic

$$x + 2 = 3$$

$$3 = 2x + 1 \quad (1) \quad (2)$$

se rozhodl, že místo rovnic (1) a (2) bude řešit jenom jednu rovnici, která vznikne vynásobením levých a pravých stran rovnic (1), (2) mezi sebou. Dospěl tak k rovnici

$$3(x + 2) = 3(2x + 1),$$

která má kořen $x = 1$. Jak se však podivil, když se přesvědčil, že kořen $x = 1$ vyhovuje i rovnicím (1) a (2). Zkusil proto právě takovým způsobem vyřešit dvě rovnice:

$$x - 1 = 2x - 2, \quad (3)$$

$$x - 2 = 3x - 6 \quad (4)$$

Vynásobením levých a pravých stran dostal kvadratickou rovnici

$$5x^2 - 15x + 10 = 0, \quad (5)$$

která má dva kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Dosadil první kořen do rovnice (3) a druhý do rovnice (4). Ulevil si, protože, jak se domníval, libovolný kořen rovnice (5) bude buď kořenem rovnice (3) nebo rovnice (4) nebo společným kořenem obou rovnic, a každý kořen rovnice (3), (4) bude kořenem rovnice (5). Udělal hned logický závěr, že to tak musí být v libovolném případě a zformuloval „Zmatlíkovu větu“:

Máme-li dvě rovnice, ve kterých je jedna neznámá x , zapsány ve tvaru

$$g_1(x) = f_1(x) \quad (6)$$

$$g_2(x) = f_2(x), \quad (7)$$

*) Postavy studentů Zmatlíka a Štourala oživovaly matematické hříčky, které pod názvem „Záhady Zmatlíkova zápisníku“ publikoval J. Šedivý ve 47. a 48. ročníku Rozhledů.

potom libovolný kořen rovnice

$$g_1(x) \cdot g_2(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \quad (8)$$

bude buď řešením rovnice (6) nebo řešením rovnice (7) nebo bude kořenem obou rovnic (6) i (7) a naopak, libovolný z kořenů rovnic (6), (7) bude kořenem rovnice (8).

Důkaz považoval za zřejmý. Vždyť, jestliže se rovnají výrazy na levé i na pravé straně rovnice (6) i na levé a na pravé straně rovnice (7), potom se rovnají i strany rovnice (8). Z rovnosti (8) vyplývají zřejmě i rovnosti (6) a (7).

V opojení ze svého matematického úspěchu ukázal větu kamarádovi Štouralovi. Ten, věren svému jménu, vzal namátkou rovnice

$$x - 1 = 5x - 11 ,$$

$$x - 1 = 1 ,$$

s kořeny $x = \frac{5}{2}$ a $x = 2$. Potom podle Zmatlíkova postupu dospěl k rovnici

$$x^2 - 7x + 12 = 0 ,$$

s kořeny $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, a tím vyvrátil „Zmatlíkovu větu“

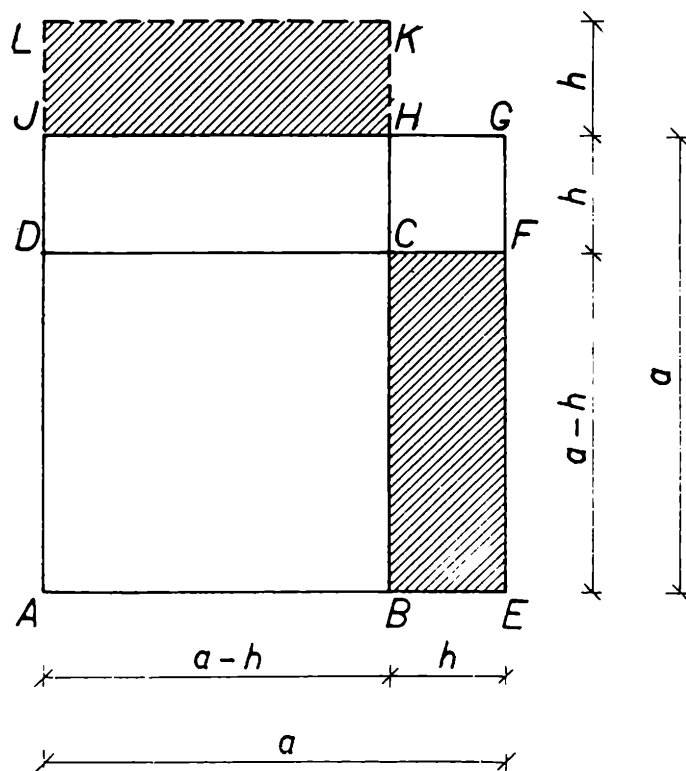
Zmatlík udělal tedy v „důkazu“ nějaké chyby. Ale kde? Najdete je?

Nejmladším čtenářům

Regula Nicomachi

RNDr KAREL MIŠOŇ, CSc., ČVUT Praha

Historický pohled na rozvoj matematiky ukazuje průběžnou tendenci zobecňovat výsledky s jejich současným shrnováním do široce platných vět. Ale i tak již dávno nejen matematika jako celek, nýbrž i mnohé její specializace daleko přesáhly mentální možnosti jednotlivce. Neexistuje již badatel polyhistor. Současné užívání tohoto pojmu je už jen jazykovou nadsázkou, spadající do souboru básnických figur. Jiné poměry byly v začátcích vědy, kdy „široce fundovaní“ vědci se namnoze soustřeďovali na vyhledávání a podrobný rozbor otázek jevících se dnes jako drobnosti. V nynějších učebnicích — s realistickou tendencí dospět stránkově co nejekonomičtěji k širokým výsledkům — zbývá na detaily nejvýše příležitostná stručná připomínka pod čarou, většinou však ani



Geometrická interpretace vztahu $a^2 = (a - h)(a + h) + h^2$, resp. formule pro rozdíl čtverců:

$$a^2 = AEGJ = AEFCHJ + CFBH = ABKL + CFBH = (a - h)a(a + h) + h^2.$$

ta ne. Přesto právě podrobné promýšlení elementárních pohledů na vstupní drobnosti z prehistorie oboru uvádí začátečníka do okruhu tvůrčích myšlenek a představ důkladného analytického myšlení. Přihlédneme k jedné drobnosti z raných dob algebry.

Pytagorejské pojetí „aritmické úměry“ čtveřice veličin b, e, c, f

$$b - e = f - c$$

přechází specializací $e = f (= a)$ ve „spojitou úměru“

$$b - a = a - c, \quad (1)$$

definující *aritmický průměr* a hodnot b, c . Označme h společnou hodnotu obou stran vztahu (1)

$$b - a = a - c = h,$$

takže $b = a + h, c = a - h$. Odtud $bc = a^2 - h^2$,

což je starověká (kolem roku 100) *regula Nicomachi* (Nicomachos z Gerasy):

$$a^2 - bc = h^2 \quad (2)$$

Slovy: Čtverec středního členu spojitě aritmetické úměry zmenšený o součin vnějších členů je roven čtverci společného rozdílu.

Převvedeno na současnou terminologii jde o vztah mezi čtverci aritmetického průměru $a = (b + c)/2$ a geometrického průměru $g = \sqrt{bc}$ čísel, případně úseček b, c . Pro nezáporná b, c je $a \geq g$, $(b + c)/2 \geq \sqrt{bc}$ s možnostmi rovnosti jen pro $h = 0$ a regula Nicomachi je zostřením známé skutečnosti:

Aritmetický průměr dvou různých (stejných) nezáporných čísel je větší než (stejně velký jako) jejich průměr geometrický. Planimetrická interpretace Euklidovou větou o výšce pravoúhlého trojúhelníka je bezprostřední.

Uvedeme některé jiné zápisy vztahu (2):

$$\begin{aligned} a^2 &= bc + h^2, \\ a^2 &= (a + h)(a - h) + h^2 \quad \text{s geometrickým významem v obrázku,} \\ \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 &= bc + \left(b - \frac{b+c}{2}\right)^2 = bc + \left(\frac{b+c}{2} - c\right)^2 = bc + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \\ a^2 - h^2 &= (a + h)(a - h) \quad \text{vzorec pro rozdíl čtverců,} \\ a^2 &= (a - b)(a + b) + b^2, \\ a^2 &= g^2 + h^2; \quad g^2 = bc \end{aligned} \tag{3}$$

Původcem názvu regula Nicomachi je Boethius (též Boëtius) Anicius Manlius Torquatus Severinus, narozený asi 480. V roce 524 byl popraven z politických důvodů na základě podvržených dopisů včetně udání, že se (v souvislosti s matematikou) zabývá magií.

Ve dvanáctém století Ocreatus užívá názvu regula Nicomachi při speciální podmínce $a + h = 10$ v (3) pro závislost

$$a^2 = 10(a - h) + h^2 \quad (a + h = 10), \tag{4}$$

sloužící tehdy k umocňování jednociferných čísel. Píšeme-li (4) ve tvaru

$$a^2 = 10[a - (10 - a)] + (10 - a)^2, \tag{5}$$

máme zvláštní případ formule *komplementárního násobení*

$$ab = 10[a - (10 - b)] + (10 - a)(10 - b), \tag{6}$$

která se pro $a = b$ redukuje na (5), tj. na formuli *komplementárního umocňování*. Tvar (6) je vyjádřením algoritmu komplementárního násobení ze Salemského rukopisu (ne mladší než z roku 1200). Přepis vztahu (5) do tvaru

$$a^2 = 10[(a - 5) + (a - 5)] + (10 - a)^2$$

umožňuje *prstové zdvojmocňování* převádějící nalezení dvojmoci čísel 6, 7, 8, 9, 10 na dvojmoci čísel nepřevyšujících 5. Třeba pro $a = 7$:

Počínaje palcem jako prstem šestým čítáme prsty k malíčku až na prst odpovídající číslu a ($= 7$), tedy k ukazováčku. Počet zbývajících prstů k malíku včetně (totiž prostředník, prsteník, malík) 3 určuje rozdíl $10 - a$ a jeho čtverec $3^2 = 9$ udává *jednotky* hledané mocniny 7^2 . Počet prstů od palce k prstu odpovídajícímu číslu a včetně (ukazováku), totiž (palec a ukazovák) 2 určující číslo $a - 5$, je po zdvojnásobení $2 + 2 = 2 \quad 2 = 4$ počtem desítek hledané mocniny. Tedy celkem $7^2 = 4 \quad 10 + 9 = 49$.

recenze

Artur Beiser:

Úvod do moderní fyziky

Vydala Academia, Praha 1975; 630 stran, 289 obrázků, vázaný výtisk 46,— Kčs.

Kniha je — jak české přetlumočení původního titulu *Perspectives of Modern Physics* říká — úvodním pohledem do moderní fyziky. Středoškolský zájemce získá ve vstupní části knihy (přístupně a obsírně vyložené) rozšíření znalostí z Fokovy

(SPN 1973) knížky o relativitě. Navazující kapitoly podávají základní pohled na dualitu vln a částic s podrobným výkladem principu neurčitosti. Přes Bohrov atom se dospívá ke kvantové mechanice s instruktivním výkladem chemických vazeb a molekulárních struktur. Další kapitoly uvádějí do vysokoškolského studia moderní fyziky.

Mnohé z knihy je bez obtíží přístupné středoškolákům, leccos rámec středoškolských osnov matematiky přesahuje.

Karel Mišoň

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

sphere
 circumscribed sphere
 inscribed sphere
spherical
 spherical surface
spiral
square

 square meter
 square root
 perfect square
 unit square
squared
squaring a circle
statement
step
straightedge
straight line
strict inequality
strike an arc
subgraph
subject to
subnormal
subset
substitute
subtangent
subtract
subtrahend
subtraction
successor
suffice
sufficient
 sufficient condition
sum
superset

koule
 opsaná koule
 vepsaná koule
kulový, sférický
 kulová plocha
spirála
čtverec, druhá mocnina; umocnit
 na druhou
 čtvereční metr
 druhá odmocnina
 úplný čtverec
 jednotkový čtverec
umocněno na druhou
kvadratura kruhu
tvrzení, výrok
krok
pravítko
přímka
ostrá nerovnost
opsat oblouk
podgraf
vyhovující
subnormála
podmnožina
dosadit
subtangent
odečíst
menšitel
odčítání
následovník
stačit
postačující
 postačující podmínka
součet
nadmnožina

suppose
supposition
 removal of supposition
surd
surface
 conical surface
 curved surface
 developable surface
 ruled surface
 surface of a sphere
 surface of revolution
 surface of translation
symmetric
symmetry
system
 number system
 system of coordinates
systematic

předpokládat
předpoklad
 odstranění předpokladu
iracionální výraz
plocha, povrch
 kuželová plocha
 zakřivená plocha
 rozvinutelná plocha
 přímková plocha
 kulová plocha
 rotační plocha
 translační plocha
souměrný
souměrnost
soustava
 číselná soustava
 soustava souřadnic
systematický

T

table
taking the derivative
tangency
tangent
tangent (line)
 tangent curve
 tangent law
 tangent plane
 be tangent to
Taylor's expansion
ten
tend to
tenth
tensor
term
terminal point
ternary number system
tessellation
test
tetragon
tetrahedral
tetrahedron
then
theodolite
theorem
 auxiliary theorem
 cover theorem
 mean value theorem

tabulka
derivování
dotyk
tangens, tečný, dotykový
tečna
 tangentoida
 tangentová věta
 tečná rovina
 dotýkat se
Taylorův rozvoj
deset
konvergovat, blížit se
desátý, desetina
tenzor
člen, výraz
koncový bod
trojková číselná soustava
pokrytí pravidelnými obrazci
kritérium, zkouška
čtyřúhelník
čtyřboký
čtyřstěn
pak, tedy
teodolit
věta, poučka
 pomocná věta
 věta o pokrytí
 věta o střední hodnotě

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ



ROČNÍK 54
LEDEN 1976

5

rozhled

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMO Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1975.

OBSAH

Dr. A. Vrba: Vennovy diagramy kontra sel- ský rozum .	193
Dr. E. Calda: Subfaktoriály v kombinator- ických úlohách	196
L. Dvořák, Z. Kupka: Kapalně krystaly .	201
Dr. J. Novák: Geometrie a fyzika .	207
J. Kotyk: Dvě kapitoly z počátků vzducho- plavby	211
Dr. J. Mrázek, CSc.: Matematická mini- atura I	216
Naše soutěž .	217
Dr. J. Šedivý: Zajímavosti o kalendářích .	220
Dr. K. Mišoň, CSc.: Staroměstský orloj .	224
Dr. J. Šedivý: Mimořádné výročí I. Newtona	231
D. Jedinak: Benjamin Franklin - veda, slo- boda a vlast .	232
Dr. J. Sedláček: Sjezdy JČSMF a JSMF .	235
Olympiády	236
Nejmladším čtenářům	238
Recenze	240
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český 3. a 4. str. obálky	

Vennovy diagramy kontra selský rozum

ANTONÍN VRBA, MÚ ČSAV Praha

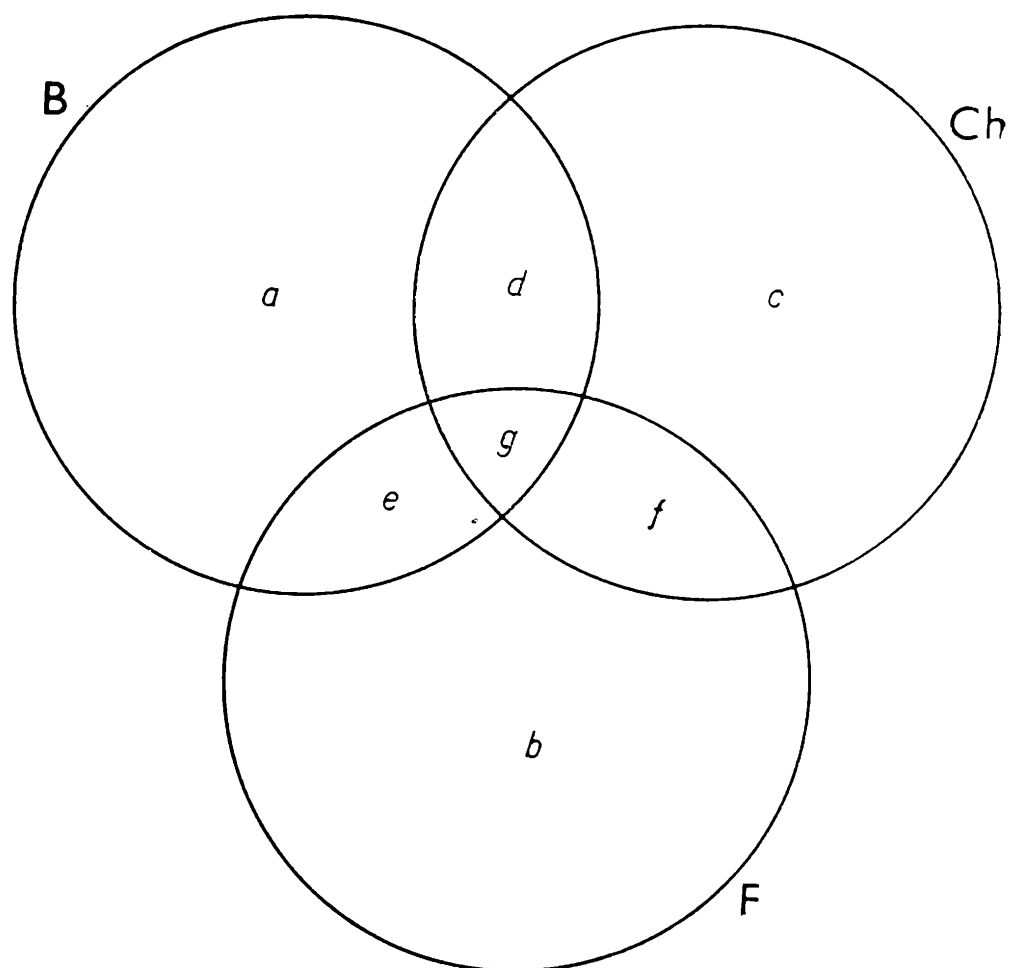
Už i do některých středoškolských učebnic matematiky pronikly tzv. Vennovy diagramy. Setkáváme se s nimi při řešení kombinatorických úloh, v nichž se uvažuje několik konečných množin a jsou dány informace o počtu prvků některých množin, utvořených z nich pomocí operací průnik a sjednocení, přičemž se mají zjistit jiné informace tohoto typu. Jedna z metod řešení takových úloh spočívá v tom, že uvažované množiny znázorníme v rovině jako kruhy, ovály, šišky nebo podobné „koláče“ v obecné poloze a představíme si, že prvky každé množiny jsou umístěny uvnitř příslušného „koláče“ (Tomuto obrázku se „učení“ říká Vennův diagram.) Informace o počtu prvků v průnicích a sjednoceních množin jsou pak informacemi o počtu prvků v „políčkách“ příslušného diagramu. Není-li množin mnoho (asi tak maximálně pět), je diagram natolik přehledný, abychom z něho mohli vyčíst, jak hledané informace souvisejí s informacemi danými.

Popsaná metoda je však v některých případech trochu těžkopádná a existují elegantnější řešení. Ukážeme si to na dvou úlohách XXIII. ročníku matematické olympiády kategorie C.

Žáci jedné školy se zúčastnili biologické, fyzikální a chemické olympiády. Účastníků FO bylo dvakrát tolik jako účastníků ChO a účastníků ChO třikrát tolik jako účastníků BO. Jen jedné z těchto olympiád se zúčastnilo 12 žáků, dvou olympiád 4 žáci, ale FO a zároveň BO žádný; těch, kteří řešili jen BO, bylo právě tolik jako těch, kteří řešili ChO i BO. Určete, kolik žáků se zúčastnilo každé z uvedených soutěží a kolik bylo všech účastníků olympiád dohromady.

Označme B, F a Ch množiny řešitelů BO, ChO a FO. Řešení většiny účastníků (tentokrát matematické olympiády) i řešení autorské byla založena na studiu Vennova diagramu množin B, F a Ch. Ani řešení, publikované v chystaném sborníku „XXIII. ročník matematické olympiády“, nebude asi jiné. Označíme-li počty prvků v jednotlivých částech diagramu tak, jak je to provedeno v obr. 1, převádí se úloha na následující problém: Jsou dána nezáporná celá čísla $p, q, \dots, v$, pro něž platí

Obr. 1



$$\begin{aligned}
 b + e + f + g &= 2(c + d + f + g), \\
 c + d + f + g &= 3(a + d + e + g), \\
 a + b + c &= 12, \quad d + e + f + g = 4, \quad e + g = 0, \quad a = d + g; \\
 \text{má se najít } a + d + e + g, \quad c + d + f + g, \quad b + e + f + g \quad \text{a} \\
 a + b + c + d + e + f + g.
 \end{aligned}$$

Můžeme postupovat jinak. Označíme-li b, f a ch počty prvků množin **B**, **F** a **Ch** a dále p_i (resp. a_i) počet prvků ležících právě (resp. alespoň) v i z těchto množin (pro $i = 1, 2, 3$), je mj. dáno

$$f = 2ch, \quad ch = 3b, \quad p_1 = 12, \quad a_2 = 4$$

(ostatní předpoklady nebudeme vůbec potřebovat).

Zřejmě je

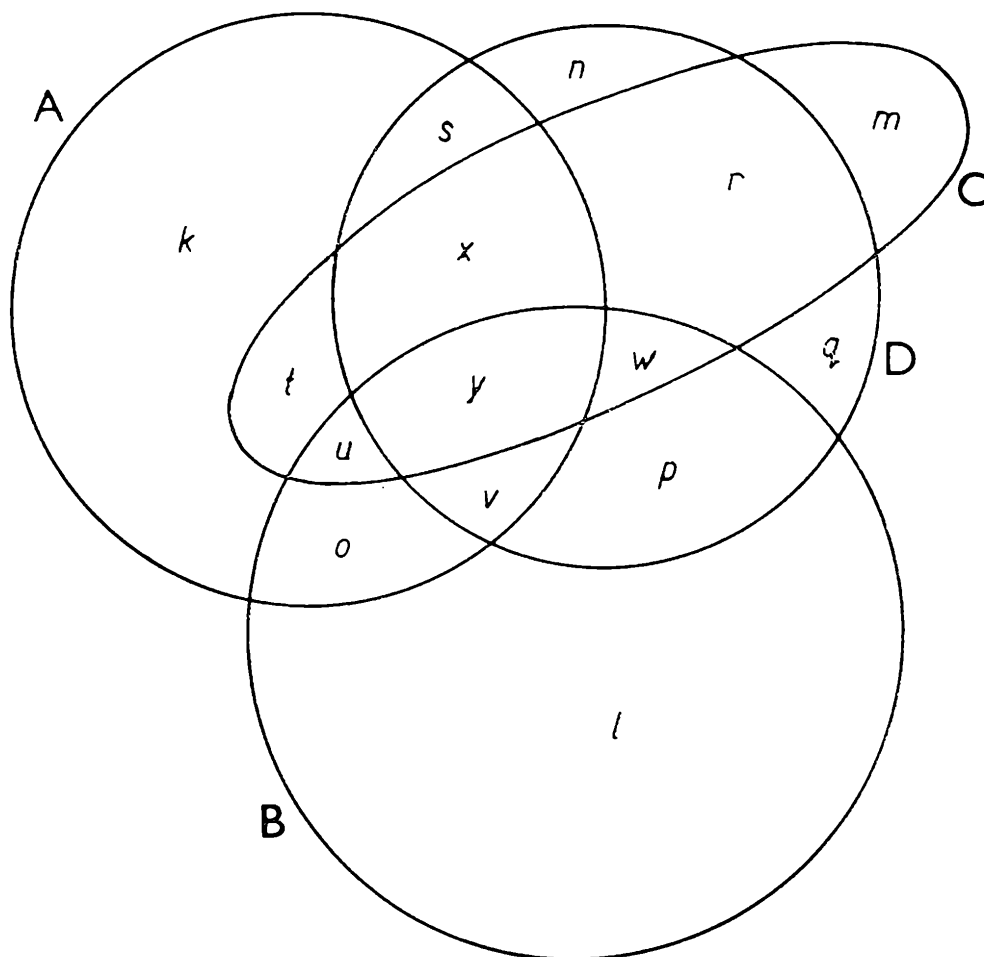
$$a_1 = p_1 + a_2 = 12 + 4 = 16.$$

Dále je

$$f \leq a_1 \leq b + f + ch,$$

čili

$$6b \leq 16 \leq 10b.$$



Tuto nerovnost splňuje jediné celé číslo, a to $b = 2$. Je tedy $b = 2$, $ch = 6$ a $f = 12$. Tím je úloha vyřešena, předpoklady, že $F \cap B = \emptyset$ a že počet prvků množiny B , neležících v žádné jiné množině, je, roven počtu prvků množiny $B \cap Ch$, jsme vůbec nepotřebovali.

Podobná situace je u druhé úlohy:

Cestovní kancelář organizovala čtyři typy týdenních rekreací, z nichž žádné dvě se časově nepřekrývaly. Označme je postupně symboly A, B, C, D . Pracovnice cestovní kanceláře zjistila:

Na rekreaci A, B, C, D se postupně hlásí 195, 203, 106, 329 osob, přičemž se nikdo nehlásí na právě tři z těchto rekreací. Na právě dvě rekreace se hlásí 267 lidí, a to na rekreace A a B 64 lidí, na rekreace A a C 58 lidí, na rekreace B a C 32 osob, na rekreace C a D 14 osob a na rekreace B a D 51 osob. Na všechny čtyři rekreace se přihlásili dva lidé.

Může pracovníce z těchto údajů zjistit:

- kolik lidí se přihlásilo na právě jednu z těchto rekreací,
- kolik lidí se celkem přihlásilo na organizované rekreace?

V označení z diagramu (viz obr. 2) je dáno

$$k + o + s + t + u + v + x + y = 195,$$

$$l + o + p + q + u + v + w + y = 203,$$

$$m + q + r + t + u + w + x + y = 106,$$

$$n + p + r + s + v + w + x + y = 329,$$

$$u + v + w + x = 0,$$

$$o + p + q + r + s + t = 267,$$

$$o = 64, t = 58, q = 32, r = 14, p = 51, y = 2$$

a má se najít $k + l + m + n$ a $k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y$.

Vyřešme úlohu jiným způsobem: Označme a, b, c, d počty rekreantů přihlášených na typ A, B, C, D a p_i a a_i nechť má (pro $i = 1, 2, 3, 4$) analogický význam jako u předchozí úlohy. Je dáno mj.

$a = 195, b = 203, c = 106, d = 329, p_3 = 0, p_2 = 267, p_4 = 2$, ostatní předpoklady nebudeme potřebovat. Máme určit p_1 a a_1 . Zřejmě je

$$a + b + c + d = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4,$$

tj. $115 + 203 + 106 + 329 = p_1 + 2 \cdot 267 + 4 \cdot 2$; vyjde $p_1 = 291$. Dále je

$$a_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 291 + 267 + 2 = 560.$$

S řešením jsme hotovi; předpoklady o počtech rekreantů, hlásících se na jednotlivé dvojice rekreací, jsme nepotřebovali.

Z toho plyne naučení: Vyplatí se trochu se zamyslet, než nasadíme zavedené postupy.

Subfaktoriály v kombinatorických úlohách

RNDr. EMIL CALDA, MFF UK Praha

V minulém čísle Rozhledů jste se v článku „Faktoriály a subfaktoriály“ mohli seznámit s pojmem a základními vlastnostmi subfaktoriálu D_n . Některých výsledků tam uvedených použijeme při řešení úloh, kterými se budeme zabývat nyní.

Určíme, kolika způsoby lze v daném n -členném zástupu přemístit jeho prvky tak, aby po tomto přemístění byl v novém zástupu před každým jeho prvkem jiný prvek než v zástupu daném.

Počet těchto způsobů označíme E_n ; uvědomíme si, že v zadání úlohy je nutno předpokládat $n > 1$. Jedná se zřejmě o určení počtu

všech permutací n -prvkové množiny, které mají jistou vlastnost; tuto vlastnost nejprve matematicky vyjádříme.

Mějme n -prvkovou množinu $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ a vezměme libovolnou její permutaci

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Symbol $\pi(x)$ přitom znamená obraz prvku $x \in \mathbf{M}$ v permutaci π množiny $\mathbf{M}$; z definice permutace jako prostého zobrazení dané množiny na sebe vyplývá: $\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\} = \{1, 2, 3, \dots, n\} = \mathbf{M}$. Ze sousedních prvků horního resp. dolního řádku zápisu permutace π utvoříme množinu $\mathbf{A}$, resp. množinu $\mathbf{B}(\pi)$, skládající se z $n-1$ uspořádaných dvojic takto:

$$\mathbf{A} = \{[1,2], [2,3], \dots, [n-1, n]\}, \mathbf{B}(\pi) = \{[\pi(1), \pi(2)], [\pi(1), \pi(3)], \dots, [\pi(n-1), \pi(n)]\}.$$

Snadno zdůvodníte, že hledané číslo E_n je rovno počtu všech permutací π dané n -prvkové množiny, pro něž platí: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}(\pi) = \emptyset$.

V počátečním stadiu řešení úlohy by pro čtenáře mohlo být užitečné, kdyby si sám určil čísla E_n pro $n = 2, 3, 4$ výčtem všech permutací dané vlastnosti; dostane tak: $E_2 = 1$, $E_3 = 3$, $E_4 = 11$. Pro srovnání uvedme všechny permutace vyhovující naší úloze pro $n = 4$; zapíšeme je přitom pouze dolním řádkem $[\pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4)]$ ze zápisu permutace π :

$$(1 \ 3 \ 2 \ 4), (1 \ 4 \ 3 \ 2), (2 \ 1 \ 4 \ 3), (2 \ 4 \ 1 \ 3), (2 \ 4 \ 3 \ 1), (3 \ 1 \ 4 \ 2), \\ (3 \ 2 \ 1 \ 4), (3 \ 2 \ 4 \ 1), (4 \ 1 \ 3 \ 2), (4 \ 2 \ 1 \ 3), (4 \ 3 \ 2 \ 1).$$

K určení obecného vzorce pro E_n použijeme principu inkluze a exkluze (viz minulý ročník Rozhledů, č. 8); pro větší názornost a srozumitelnost si číslo n pevně zvolíme, třeba $n = 4$ (pro možnost porovnání s výsledkem nám již známým). Vezmeme množinu $\mathbf{P}$ všech permutací množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ a její podmnožiny $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ definované takto:

$$\mathbf{P}_1 = \{\pi \in \mathbf{P}; [1,2] \in \mathbf{B}(\pi)\}, \mathbf{P}_2 = \{\pi \in \mathbf{P}; [2,3] \in \mathbf{B}(\pi)\}, \\ \mathbf{P}_3 = \{\pi \in \mathbf{P}; [3,4] \in \mathbf{B}(\pi)\}.$$

Podle principu inkluze a exkluze platí:

$$E_4 = p(\mathbf{P}'_1 \cap \mathbf{P}'_2 \cap \mathbf{P}'_3) = p(\mathbf{P}) - p(\mathbf{P}_1) - p(\mathbf{P}_2) - p(\mathbf{P}_3) + \\ + p(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2) + p(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_3) + p(\mathbf{P}_2 \cap \mathbf{P}_3) - p(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 \cap \mathbf{P}_3).$$

Určíme-li nyní počty prvků jednotlivých množin, máme:

$$p(\mathbf{P}) = 4!, p(\mathbf{P}_1) = p(\mathbf{P}_2) = p(\mathbf{P}_3) = 3!, p(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2) = p(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_3) = \\ = p(\mathbf{P}_2 \cap \mathbf{P}_3) = 2!, p(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 \cap \mathbf{P}_3) = 1!$$

Dostáváme tak konečně:

$$E_4 = 4! - 3 \cdot 3! + 3 \cdot 2! - 1 \cdot 1! = 11.$$

Na základě podobného výpočtu pro E_3 a E_2 , kdy dostáváme

$$E_3 = 3! - 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 3, \quad E_2 = 2! - 1 \cdot 1! = 1,$$

a případně i pro další zvolené hodnoty n můžeme vyslovit domněnku, že pro číslo E_n platí:

$$\begin{aligned} E_n &= n! - \binom{n-1}{1} (n-1)! + \binom{n-1}{2} (n-2)! - \\ &- \binom{n-1}{3} (n-3)! + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} 1! = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)! \end{aligned}$$

O této domněnce lze dokázat, že je pravdivá; v tomto článku se však spokojíme s tím, že ukážeme souvislost mezi čísly E_n a subfaktoriály D_n a D_{n-1} . Na základě poměrně jednoduchých úprav dostáváme:

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)! = \\ &= (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{k!} (-1)^k = (n-1)! \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{k!} (-1)^k = \\ &= (n-1)! \left(\sum_{k=0}^n \frac{n(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-k)(-1)^k}{k!} \right) = \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = D_n + D_{n-1}. \end{aligned}$$

Lze tedy říci, že počet E_n všech přemístění n -členného zástupu ($n > 1$) v nový zástup takový, že před každým jeho prvkem je jiný prvek, než byl v zástupu daném, je roven součtu subfaktoriálů $D_n + D_{n-1}$. Určeme počet $E_{n,r}$ všech permutací π množiny M , jejichž příslušná množina $B(\pi)$ neobsahuje žádnou z následujících r uspořádaných dvojic: $[1,2], [2,3], \dots, [r, r+1]$, kde $1 \leq r \leq n-1$. Na základě principu inkluze a exkluze a úvah, které jsme již prováděli při odvozování vzorce pro E_n , dostaneme:

$$\begin{aligned} E_{n,r} &= n! - \binom{r}{1} (n-1)! + \binom{r}{2} (n-2)! - \binom{r}{3} (n-3)! + \dots + \\ &+ (-1)^r \binom{r}{r} (n-r)! = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} (n-k)! \end{aligned}$$

Všimněme si, že pro $r = n - 1$ je $E_{n, n-1} = E_n$; je to ostatně zřejmé přímo z významu obou čísel $E_n, E_{n, n-1}$.

Ptejme se dále, jak se pozmění výsledek dosažený pro E_n v případě, že požadujeme, aby množina $\mathbf{B}(\pi)$ neobsahovala opět žádnou z uspořádaných dvojic $[1, 2], [2, 3], \dots, [n - 1, n]$, navíc však ani uspořádanou dvojici $[n, 1]$. Označíme-li $E_{n, n}$ hledaný počet permutací π množiny $\mathbf{M} = \{1, 2, \dots, n\}$, platí

$$E_{n, n} = p(\mathbf{P}'_1 \cap \mathbf{P}'_2 \cap \dots \cap \mathbf{P}'_n), \text{ kde pro } i = 1, 2, \dots, n - 1 \text{ je}$$

$\mathbf{P}_i = \{\pi \in \mathbf{P}; [i, i + 1] \in \mathbf{B}(\pi)\}$ a $\mathbf{P}_n = \{\pi \in \mathbf{P}; [n, 1] \in \mathbf{B}(\pi)\}$; $\mathbf{P}$ je přitom množina všech permutací množiny $\mathbf{M}$. Výraz $p(\mathbf{P}'_1 \cap \mathbf{P}'_2 \cap \dots \cap \mathbf{P}'_n)$ vyjádříme známým způsobem podle principu inkluze a exkluze; přitom je nutno si uvědomit, že je $p(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 \cap \dots \cap \mathbf{P}_n) = 0$. Dostaneme tak:

$$\begin{aligned} E_{n, n} = n! - \binom{n}{1} (n - 1)! + \binom{n}{2} (n - 2)! - \binom{n}{3} (n - 3)! + \dots + \\ + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1! = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! \end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou tohoto vzorce můžeme vyjádřit $E_{n, n}$ pomocí subfaktoriálu D_{n-1} :

$$E_{n, n} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)! = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} = nD_{n-1}$$

Podstatnějším způsobem původní úlohu pozměníme, představíme-li si, že daný zástup je uzavřen do kruhu tak, že před posledním jeho členem, před nímž již žádný člen zástupu nebyl, bude nyní první člen tohoto zástupu. Jednodušeji lze naši novou úlohu formulovat takto:

Na kolotoči sedí za sebou n dětí, kde $n \geq 2$; určíme počet všech jejich umístění, v nichž před každým dítětem sedí jiné, než sedělo v původní sestavě.

Tuto úlohu lze opět řešit na základě principu inkluze a exkluze; její řešení je však možno dostat i ze známého výsledku pro $E_{n, n}$, uvědomíme-li si všechny zmíněné okolnosti.

Hledáme všechny permutace π množiny $\mathbf{M} = \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že příslušné množiny $\mathbf{B}(\pi)$ neobsahují žádnou z uspořádaných dvojic $[1, 2], [2, 3], \dots, [n - 1, n], [n, 1]$. Na rozdíl od případu, kdy jsme určovali $E_{n, n}$, jsou však nyní prvky množiny $\mathbf{M}$ rozmístěny na kružnici, takže již není $p(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 \cap \dots \cap \mathbf{P}_n) = 0$, ale — jak snadno zdůvodníte — $p(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 \cap \dots \cap \mathbf{P}_n) = 1$. Okolnost, že prvky množiny $\mathbf{M}$ jsou rozmístěny na kružnici, vede dále k tomu, že každé dvě z násle-

dujících n permutací je nutno považovat za totožné: $(1\ 2\ 3\ \dots\ n)$, $(2\ 3\ 4\ \dots\ n\ 1)$, $(3\ 4\ \dots\ n\ 1\ 2)$, $(n\ 1\ 2\ \dots\ n-2\ n-1)$.

Na základě vzorce pro $E_{n,n}$ tak dostáváme, že pro počet Q_n hledaných přemístění n dětí na kolotoči platí:

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{n!}{n} - \binom{n}{1} \frac{(n-1)!}{n-1} + \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n-2} - \\ &- \binom{n}{3} \frac{(n-3)!}{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \frac{1}{1!} + \\ &+ (-1)^n \binom{n}{n} = (n-1)! - \binom{n}{1} (n-2)! + \binom{n}{2} (n-3)! - \\ &- \binom{n}{3} (n-4)! + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 0! + (-1)^n \binom{n}{n} = \\ &= (-1)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k-1)! \end{aligned}$$

Jako jednoduché cvičení můžete vypočítat hodnoty Q_n pro $n = 2, 3, 4$ a určit jednotlivé permutace, které vyhovují dané podmínce. Dostanete: $Q_2 = 0$, $Q_3 = Q_4 = 1$.

Závěrem ukážeme opět souvislost čísel Q_n se subfaktoriály. Vyjádříme-li číslo

$$Q_{n-1} = (-1)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k-2)!$$

ve tvaru

$$Q_{n-1} = (-1)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} (n-k-1)!$$

a použijeme-li známé vlastnosti kombinačních čísel, a to

$$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}$$

dostáváme po poměrně jednoduchých úpravách, že platí: $Q_n + Q_{n-1} = D_{n-1}$. Považujeme-li hodnoty subfaktoriálu D_n za známé, máme pro Q_n rekurentní vzorec:

$$Q_n = D_{n-1} - Q_{n-1}.$$

Cvičení:

1. Na základě vlastností subfaktoriálu odvoďte, že pro všechna přirozená $n > 1$ platí $E_n = \frac{1}{n} D_{n+1}$
2. Určete, kolika způsoby lze přestavět tradiční zástup: dědeček — babička — vnučka — pejsek — kočka — myš z pohádky o velké řepě tak, aby každý zúčastněný se v nové sestavě držel někoho jiného, než je od pradávna zvyklý.

3. Určete počet všech devíticiferných přirozených čísel, jejichž dekadický zápis obsahuje každou z cifer 1, 2, 3, ..., 8, 9 a v němž lze nalézt aspoň jednu dvojici (a, b) sousedních cifer a, b takovou, že pro čísla a, b je $b = a + 1$. (Výsledek: 214 551, tj. $9! - E_9$).
4. Určete čísla $E_{4,1}, E_{4,2}, E_{4,3}, E_{4,4}$ výpočtem ze vzorců i výčtem příslušných permutací.
5. Určete číslo Q_5 výpočtem ze vzorce i výčtem příslušných permutací.
6. Odvoďte, že pro $n \geq 2$ platí: $E_{n+2}, n+2 = n(n+2) E_n$.
7. Na základě rekurentního vzorce pro Q_n odvoďte, že platí:

$$Q_3 = D_2, Q_4 = D_3 - D_2, Q_5 = D_4 - D_3 + D_2, \dots, \\ Q_n = D_{n-1} - D_{n-2} + D_{n-3} - D_{n-4} + \dots + (-1)^{n-3} D_2 \text{ při } n \geq 3.$$

fyzika

Kapalné krystaly

LUBOMÍR DVOŘÁK, ZDENĚK KUPKA

V posledním období se pojem kapalné krystaly stále častěji objevuje na stránkách odborných i populárních časopisů, zejména v souvislosti s jejich použitím v různých technických aplikacích a v lékařství. Co jsou to vůbec kapalné krystaly? Sám název zní jako paradox. Současné spojení určitých vlastností kapalin (tekutost) a krystalických látek (pravidelné uspořádání molekul), dává těmto látkám podivuhodné vlastnosti. Kapalné krystaly např. reagují barevnými změnami na sebemenší změny teploty — stačí třeba pouhé přiblížení ruky k destičce potřená kapalným krystalem, jsou citlivé na elektrické a magnetické pole, reagují na přítomnost malého množství různých látek v ovzduší, dovedou zaznamenávat a uchovávat informace. Mohou být tedy univerzálním čidlem pro lékařskou diagnostiku i pro průmyslovou defektoskopii, je možné je použít pro výrobu displejů (číslicových a abecedních ukazovatelů) i paměťových prvků počítačů aj. Již dnes by byl kompletní výčet současných použití velmi dlouhý, jejich vlastnosti jsou však mnohem větším příslibem do budoucnosti. V článku se pokusíme přiblížit fyzikální podstatu látek tak zvláštních vlastností a seznámit čtenáře se základními druhy kapalně krystalických látek.

Co jsou kapalné krystaly

Samotný název naznačuje, že kapalně krystalické látky v sobě slučují protichůdné vlastnosti dvou fázových stavů látky: kapaliny a pevné

krystalické fáze. Pevný krystalický stav je charakterizován pravidelným trojrozměrným uspořádáním atomů, resp. molekul v krystalové mříži. Z tohoto uspořádání potom vyplývá, že jednotlivé fyzikální parametry krystalu se v závislosti na typu struktury mění různě v různých směrech. Hovoříme potom o anizotropii např. roztažnosti, permitivity, indexu lomu, o dvojlomu apod. Krystaly jsou pevné a zachovávají svůj tvar i při působení poměrně vysokých tlaků, dají se štípat v charakteristických krystalových rovinách. Krystalický stav je stálý v teplotním intervalu od nízkých teplot až po určitou, při daném tlaku charakteristickou teplotu, nazývanou *teplota tání*. V celém tomto teplotním intervalu daná látka vytváří buď jeden typ krystalové struktury nebo několik různých krystalických modifikací, které jsou stabilní v určitých teplotních intervalech s přesnými teplotními rozhraními.

Na druhé straně kapaliny jsou charakteristické tím, že mění svůj tvar podle tvaru nádoby, vzájemné působení mezi molekulami kapaliny je mnohem slabší než u pevných látek, což má mj. za následek jejich tekutost. Pokud je možno hovořit o uspořádání, tak pouze v malých mikroobjemech, a i to se neustále mění. Není tedy možno za normálních podmínek u nich pozorovat anizotropii fyzikálních vlastností.

Některé organické látky, které jsou tvořeny dlouhými tyčinkovitými molekulami, nepřecházejí ze stavu krystalického do stavu izotropní kapaliny přímo. Při teplotě tání přecházejí sice do kapalného stavu, ale zachovávají si i nadále určitý stupeň uspořádání dlouhých molekul v jednotlivých vrstvách. Při dalším zahřívání teprve při určité vyšší teplotě přecházejí do stavu izotropní kapaliny. Tyto látky se tedy chovají tak, jako by měly dvě teploty tání. Při první teplotě tání se rozrušují vazby ve směru kolmém k podélné ose molekul a teprve při vyšší teplotě i ve zbývajících dvou rozměrech.

Kapalně krystalická fáze je přechodovou (*mezomorfní*) fází mezi krystalickými látkami a kapalinami, která existuje za daných fyzikálních podmínek (tlak, přítomnost elektrického a magnetického pole, přítomnost příměsí a nečistot aj.) v přesně určeném teplotním intervalu. Kapalně krystaly jsou tedy v podstatě kapaliny, které si zčásti uchovaly pravidelnou krystalickou strukturu v tom smyslu, že jejich molekuly jsou v jednotlivých molekulárních vrstvách seřazeny určitým způsobem. Kombinace vlastností pevných látek a kapalin dává kapalným krystalům vlastnosti nové, které nenalzáme ani u kapalin ani u pevných látek.

Z historie kapalných krystalů

Kapalně krystaly jsou prakticky známé již od konce minulého století, kdy v r. 1888 rakouský botanik *F. Reinitzer* popsal určité tepelné a optické anomálie syntetizovaného *cholesteryl benzoátu*. Zjistil, že tato látka má zřejmě dvě teploty tání. Při 140 °C se pevná látka měnila v kalnou

kapalinu, která se stávala průhlednou až při 179 °C. Brzy poté německý fyzik *O. Lehmann* ukázal, že kapalná mezofáze obsahuje oblasti, mající podobnou molekulovou strukturu jako krystalická fáze. Navrhl, aby se tato mezofáze nazývala kapalným krystalem a tento název se dodnes zachoval.

Kolem roku 1910 bylo syntetizováno již asi 200 látek s podobnými vlastnostmi. Studium kapalných krystalů poprvé vrcholilo v 30. letech tohoto století. Vedle velkého počtu experimentátorů upoutala tato oblast bádání pozornost i takových vynikajících teoretiků, jakými byli *W. H. Bragg*, *L. de Broglie* a *M. Born*. Brzy však tento zájem poklesl a převládl názor, že hlavní otázky v této oblasti již byly vyřešeny a možnosti širšího praktického použití kapalných krystalů nebyly známy.

Teprve velký rozvoj fyziky a techniky v posledních 20 letech vyvolal nový zájem o kapalné krystaly. Kolem roku 1960 *J. L. Ferguson* a *G. H. Brown* na universitě v Kentu (USA) a skupina *I. G. Čistjakova* v SSSR započali s novým detailním studiem molekulové struktury, optických vlastností i praktického využití kapalných krystalů. O tom, že kapalné krystaly přestaly být zajímavou kuriozitou a staly se předmětem intenzivního výzkumu i rozsáhlých aplikací, rozhodly především jejich dvě vlastnosti:

1. Závislost barvy tzv. cholesterických kapalných krystalů na vnějších vlivech, z nichž nejvýznamnější je závislost na teplotě.

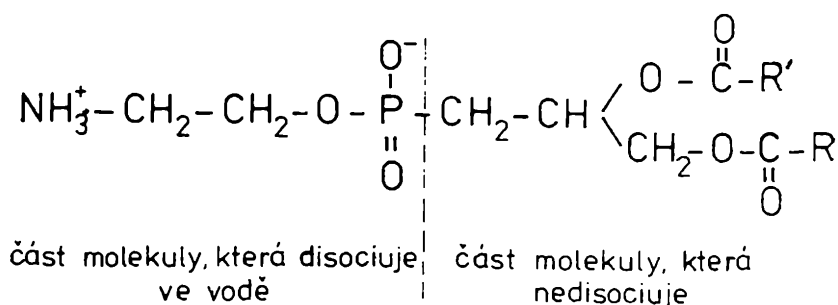
2. Změny optických vlastností tzv. *nematických kapalných krystalů*, způsobené především elektrickým a magnetickým polem.

ČSSR se připojila k tomuto vývoji poměrně pozdě. Až do r. 1970 se u nás neprováděl ani technologický ani fyzikální výzkum kapalných krystalů. Teprve v posledních letech došlo též u nás ke značnému rozvoji i této oblasti výzkumu, který — stejně jako tomu bylo u polovodičů — je založen na těsné spolupráci chemiků a fyziků při přípravě materiálů s různými specifickými fyzikálními vlastnostmi.

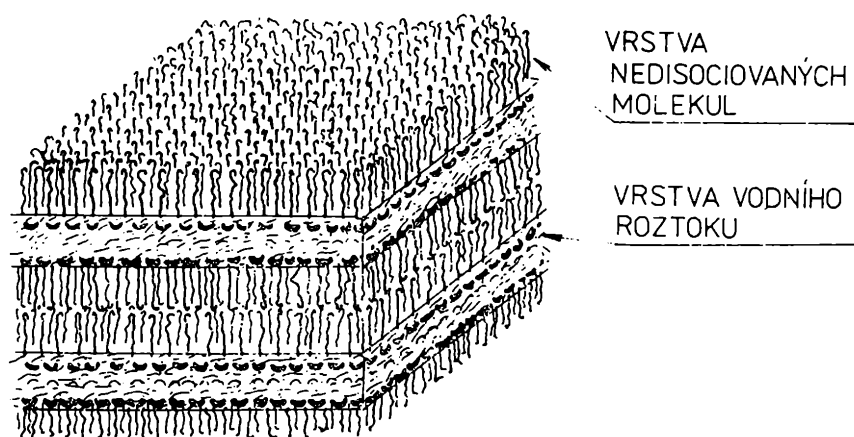
Struktura kapalných krystalů

Kapalné krystaly můžeme rozdělit do dvou velkých skupin. První skupinu tvoří tzv. *termotropní kapalné krystaly*, které jsou charakterizovány určitým teplotním intervalem své existence. Vznikají při zahřátí některých pevných organických látek blízko nad teplotu tání, jestliže přitom nedochází k úplnému rozrušení vazeb v látce, ale do určité míry se zachovává vzájemné uspořádání molekul. Taková látka si pak uchovává vlastnosti kapalných krystalů až po určitou teplotu, při níž přechází v izotropní kapalinu.

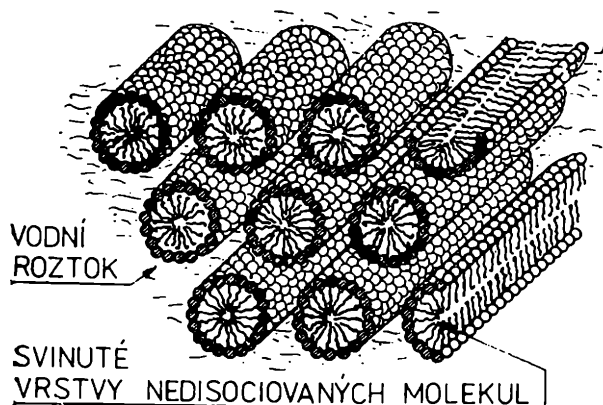
Kromě termotropních kapalných krystalů existuje dosti početná skupina *liotropních kapalných krystalů*, což jsou kapalně krystalické látky vzniklé při rozpouštění některých organických sloučenin v silně



Obr. 1. Schematický vzorec molekuly fosfolipidu

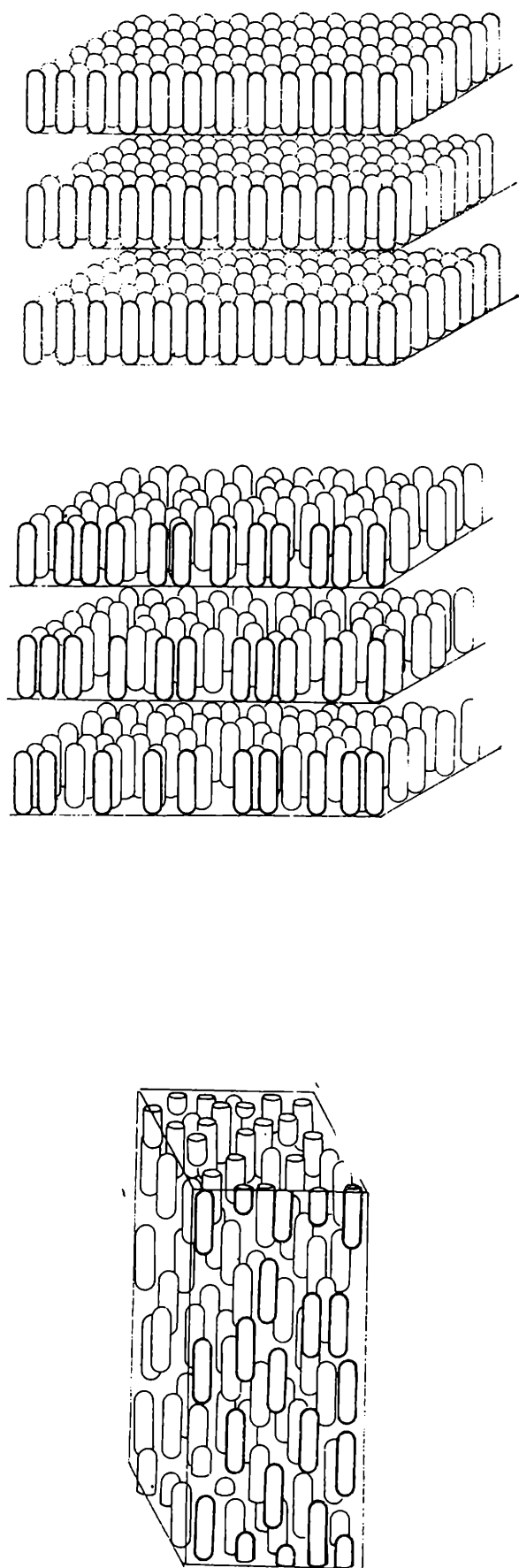


Obr. 2. Vrstevné uspořádání liotropních kapalných krystalů



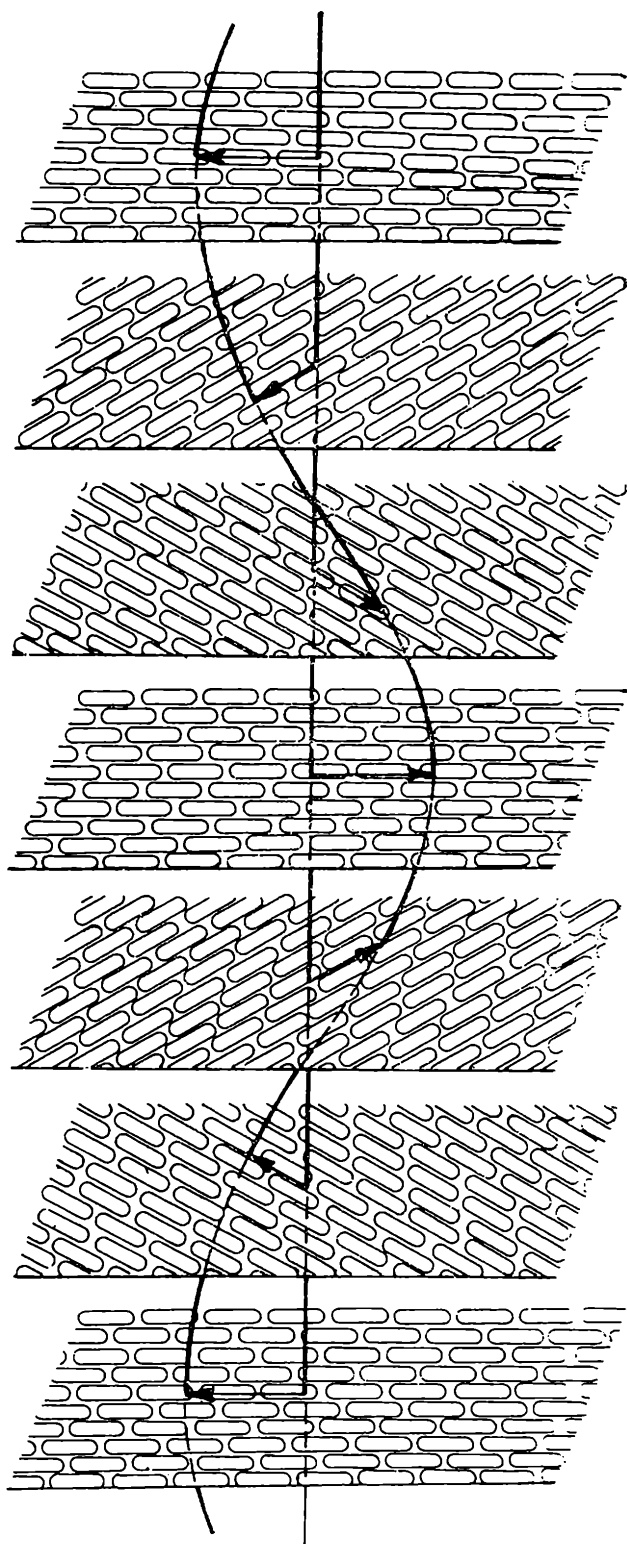
Obr. 3. Hexagonální uspořádání liotropních kapalných krystalů

polárním rozpouštědle, např. ve vodě. Patří k nim vodní roztoky solí mastných kyselin, vodní roztoky fosfolipidů, vodní roztok viru tabákové mozaiky, mýdlové roztoky aj. Molekuly těchto látek jsou charakteristické zpravidla tím, že ve vodě disociuje pouze jejich část, zatímco zbytek molekuly zůstává nedisociován — viz příklad molekuly fosfolipidu na obr. 1, kde části R, R' jsou tvořeny řetězci o 14 až 18 uhlíkových atomů. Roztoky takových látek mají *lamelovou strukturu*. Molekulární



Obr. 5. Schéma uspořádání molekul nematických kapalných krystalů

◀ Obr. 4. Schéma uspořádání molekul smectických kapalných krystalů



Obr. 6. Schéma uspořádání molekul cholesterických kapalných krystalů

uspořádání v lamelové struktuře je dvojvrstevné — v jedné vrstvě jsou zastoupeny rozpuštěné (disociované) části molekul a ve druhé nerozpustné části molekul. Tyto dvojvrstvy jsou uspořádány rovnoběžně nad sebou (obr. 2). U liotropních kapalných krystalů se velmi často také setkáváme s hexagonální strukturou uspořádaných dvojvrstev svinutých do tvaru válců (obr. 3). Liotropní kapalné krystaly mají důležitou funkci v činnosti živých organismů a mají i zajímavé fyzikální vlastnosti — jsou opticky aktivní, dvojlomé apod., větší praktické aplikační použití dosud nemají.

V dalším výkladu se proto zaměříme na termotropní kapalné krystaly. Na základě typu uspořádání molekul v objemu resp. v jednotlivých molekulárních vrstvách rozlišujeme tři druhy termotropních kapalných krystalů — *smektické*, *nematické* a *cholesterické*. U smektických kapalných krystalů jsou dlouhé tyčinkovité molekuly uspořádány vzájemně paralelně a vytvářejí molekulární vrstvy uspořádané podle obr. 4. V některých smektických látkách je toto uspořádání tak dokonalé, že pravidelnost se zachovává i ve dvou sousedních molekulárních vrstvách (obr. 4a), u jiných je uspořádání molekul v sousedních vrstvách nahodilé (obr. 4b). Tato uspořádání můžeme přirovnat k lánům kukuřice, z nichž jeden je zaset v rovnoběžných řádcích, druhý chaoticky. Zajímavou vlastností těchto látek je, že pokud je umístíme na rovný čistý povrch, vytvářejí kapky hranatého tvaru, na kterých je možno při vibraci pozorovat posuv jednotlivých vrstev. Představiteli těchto kapalných krystalů jsou některé mýdlové roztoky (odtud je odvozen jejich název — v řečtině *smegma* značí mýdlo), diethylazoxybenzoat aj.

U nematických kapalných krystalů (řecky *nema* značí nit) je uspořádání méně symetrické než u smektických. Struktura nemusí být vrstvenatá. Molekuly jsou však seřazeny vedle sebe tak, že jejich dlouhé osy jsou paralelní, ale jejich těžiště jsou volně pohyblivá (obr. 5). Struktura nematických kapalných krystalů tedy připomíná uspořádání špendlíků v krabičce, v níž jsou jednotlivé špendlíky vůči sobě podélně posunuté, ale rovnoběžné. Následkem volnější vazby mezi molekulami je možno působením vnějších vlivů, zejména elektrického a magnetického pole, poměrně snadno měnit uspořádání a tím i fyzikální vlastnosti tohoto druhu kapalných krystalů.

Název cholesterických kapalných krystalů je odvozen od toho, že většina známých látek této skupiny je tvořena deriváty cholesterolu. Molekuly cholesterických kapalných krystalů vytvářejí tenké vrstvy, v nichž jsou jednotlivé molekuly uspořádány vzájemně rovnoběžně. Každá molekula má rovinnou konfiguraci, k níž jsou jako vedlejší řetězce připojeny metylové skupiny CH_3 umístěné nad i pod rovinou molekulární vrstvy. Tato neobvyklá konfigurace má za následek to, že orientace podélných os molekul je v sousední vrstvě o několik úhlových minut stočena a postupným ukládáním molekulárních vrstev na sebe se vytváří

spirálovitá struktura (obr. 6). Tato svérázná molekulární architektura má za následek to, že cholesterické kapalné krystaly mají velmi zajímavé optické vlastnosti, z nichž jsou nejvýznamnější barevné změny s teplotou a optická aktivita.

Vlastnostmi a praktickým využitím se budeme zabývat důkladněji v dalším článku.

Geometrie a fyzika

Dr. JOSEF NOVÁK, MFF UK Praha

Fyzikální tělesa (jimiž ve fyzice rozumíme jakékoli ohraničené části látky) se vyskytují a přemísťují v prostoru. V prostoru, v němž se pohyb těles děje, určujeme polohu, vzdálenosti těles, přímočaré posunutí tělesa a jiné údaje, které potřebujeme znát. Vzdálenost dvou těles nebo rozměry tělesa určujeme měřením. Proto pro fyziku mají principiální význam geometrická měření. Žijeme na Zemi, která má přibližně tvar koule. Provádíme tedy jednak svá měření na povrchu Země (na kulové ploše) a jednak v trojrozměrném prostoru kolem nás. V souvislosti s tím je třeba řešit otázku, jaké geometrie můžeme užít k popisu prostoru a světa kolem nás. Můžeme užít geometrie (s jejímiž základy jste se již ve škole seznámili), která se podle jednoho ze zakladatelů nazývá často Eukleidova, nebo musíme užít jiné (neeuclidovské) geometrie?

Rozdělme tuto otázku na dvě části:

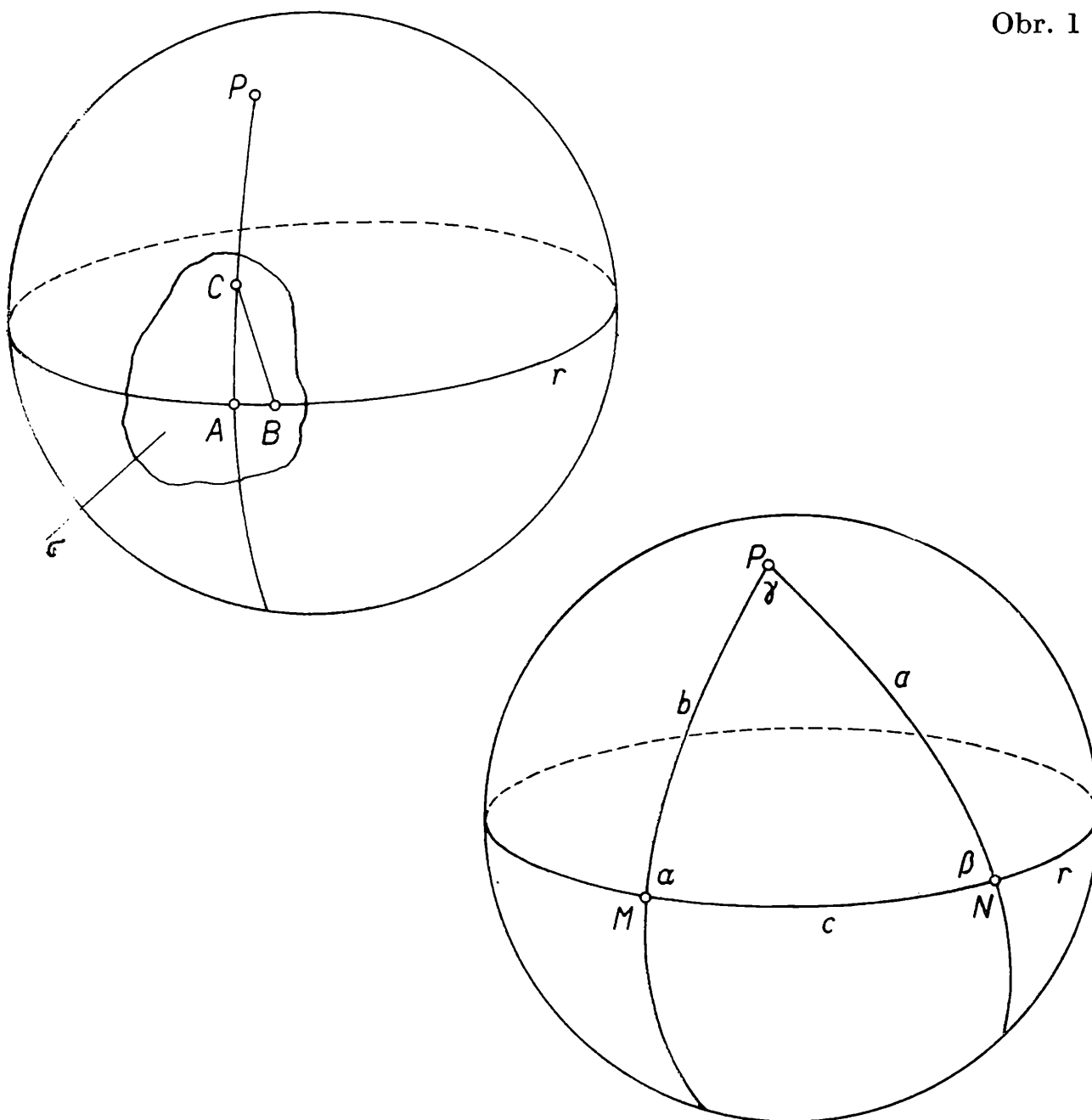
1. Lze užít eukleidovské geometrie k rovinným měřením na kulové ploše Země?
2. Lze užít eukleidovské geometrie k měření v trojrozměrném prostoru kolem nás?

Jednou z nejznámějších vět, plynoucích z eukl. geometrie, je Pythagorova věta a věta o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku (jejich součet je roven 180°). Platí tyto věty také v reálném světě, který studuje fyzika?

Abychom mohli odpovědět na první část otázky, znázorníme si kulovou plochu naší Země a všimněme si některých skutečností (obr. 1a, 1b).

Na obr. 1a je r rovník (znázorněný kružnicí o velkém poloměru). P je severní pól Země, oblouky AB a AC jsou části křivek (kružnic) rovníku a poledníku a leží v ploše τ , která je částí kulové plochy. Poledník protíná rovník pod úhlem 90° . Z obrázku je patrné, že pro velmi „malé“*

*) Tzn., že jejich rozměry (strany) jsou mnohem menší ve srovnání s poloměrem Země.



trojúhelníky ABC , sestrojené na malé části kulové plochy (kterou můžeme považovat za rovinnou), budou obě výše uvedené věty platit s velkou (ale ne absolutní) přesností: $a^2 + b^2 \doteq c^2$, $\alpha + \beta + \gamma \doteq 180^\circ$ (součet je jen o málo větší).

Pro „velké“** trojúhelníky, sestrojené na kulové ploše, např. MNP (viz obr. 1b) je patrné, že tyto věty neplatí. Spojnice PM a PN jsou části poledníků, které protínají rovník pod úhly α a β , které jsou rovny 90° . Proto neplatí Pythagorova věta ($a^2 + b^2 \neq c^2$) a součet vnitřních úhlů je vždy větší než 180° ($\alpha + \beta = 180^\circ - \alpha > \beta + \gamma > 180^\circ$). Pro přesná geometrická i fyzikální měření na povrchu Země, zvláště pro rozměry srovnatelné s poloměrem Země, je třeba užít a opravdu se užívá jiné

**) Tím zde rozumíme rozměrů řádově $10^3 r$ a více.

geometrie (neeuclidovské). Úlohy z našich obrázků bychom vyřešili pomocí sférické geometrie (geometrie na kouli). Rovinné geometrie (eukleidovské) můžeme užít s dobrou přesností k měření na Zemi pro „malé“ trojúhelníky (v tom smyslu, jak jsme o nich hovořili), sestrojené na části kulové plochy, kterou je možno považovat za rovinnou.

Obraťme nyní pozornost k druhé části otázky, tj. zda je možno užít eukleidovské geometrie k měření v trojrozměrném prostoru kolem nás. *A. Einstein* ve své obecné teorii relativnosti vyslovil názor, že hmota a její rozložení v prostoru určuje geometrii prostoru. Geometrie prostoru se tím více liší od eukleidovské geometrie, čím větší je hustota těles. Hmota má vliv na vlastnosti prostoru ve svém okolí. Zakřivení světelných paprsků hvězd v blízkosti Slunce, pozorované při zatmění Slunce i pozorovaná odchylka dráhy Merkuru v blízkosti Slunce by mohly být důsledkem zakřivení vesmírného prostoru v blízkosti Slunce. Uvažujme tedy vesmírný prostor jako zakřivený. Hodnota nejnižší meze zakřivení (velikosti „poloměru“ křivky „rovníku“ či „poledníku“ našeho vesmíru) vyplývá z astronomických pozorování uvnitř sluneční soustavy. Krajní planeta naší sluneční soustavy je Pluto a střední poloměr jeho dráhy je $6 \cdot 10^{12}$ m. Z dalších astronomických pozorování se odhaduje, že veličina řádově 10^{26} m je charakteristická délka, která se někdy (ne zvláště přesně) nazývá „poloměrem“ vesmíru. S těmito údaji není v rozporu, když připustíme, že poloměr křivky prostoru je roven ∞ , tzn. že světový prostor je rovinný.

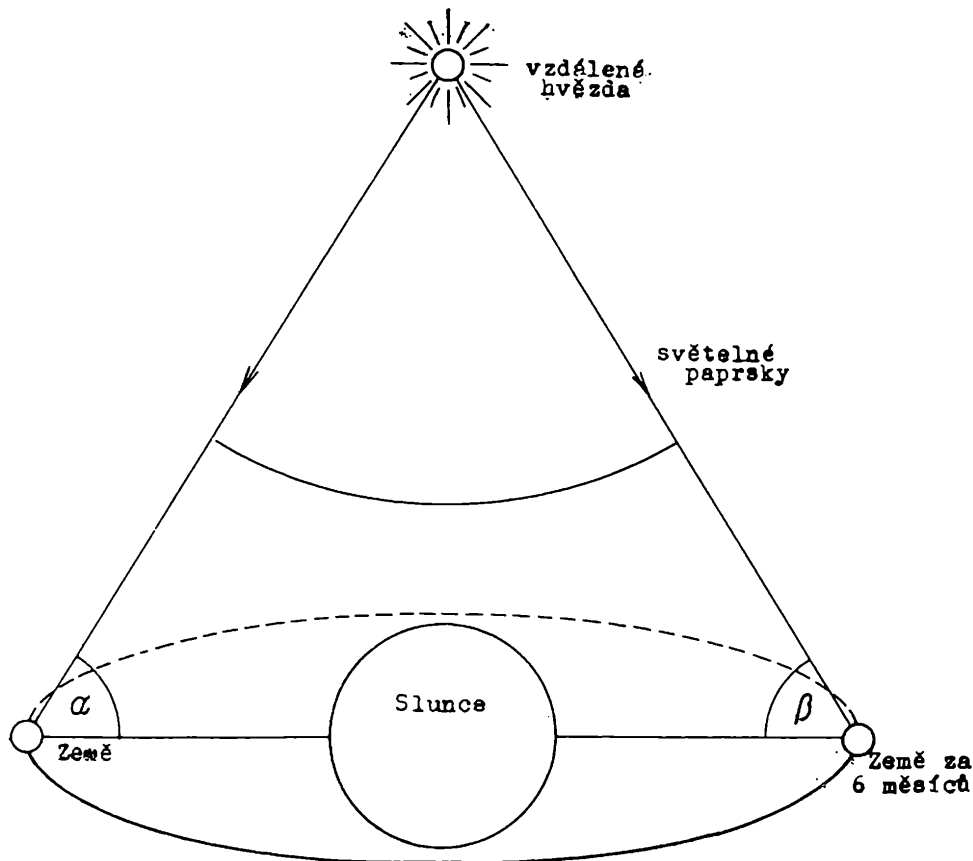
Lidé, jako trojrozměrné bytosti, jsou v trojrozměrném prostoru ve stejné situaci, jako by byly dvojrozměrné bytosti na kulové ploše. Pro tyto dvojrozměrné bytosti, žijící na zakřivené ploše, by byly přímkové čáry spojnice libovolných blízkých bodů na povrchu koule. Pro „malé“ trojúhelníky (viz obr. 1a) by mohli užívat rovinné (eukleidovské) geometrie, která v tomto případě platí s poměrně velkou přesností. Pokud by se nedostali k měření „velkých“ trojúhelníků (viz obr. 1b), nezjistili by ani, že pro přesná měření je třeba užít jiné geometrie — sférické trigonometrie.

Lidé, jako trojrozměrné bytosti, měří vzdálenosti mezi blízkými body na křivkách ve vesmírném prostoru.

Vidíme tedy, že odpověď na druhou část otázky, „jaká je skutečná geometrie vesmíru — prostoru kolem nás?“ představuje fyzikální problém, podléhající experimentálnímu zjištění.

Německý matematik *K. F. Gauss* (19. stol.) přišel s požadavkem prověřit, zda existuje vliv zakřivení v třírozměrném prostoru. Vyšel z toho, že vliv zakřivení by se projevil při měření vnitřních úhlů trojúhelníka. Gauss měřil vnitřní úhly trojúhelníka, jehož vrcholy tvořily vrcholky tří hor (nejdelší strana trojúhelníka byla asi 100 km). V mezích přesnosti svých měření nenalezl odchylku součtu úhlů od 180° . Zjistil tedy, že měřený prostor je eukleidovský (platí v něm eukl. geom.). Měření prováděl

Obr. 2



děná Gaussem by se však mohla týkat jen „malých“ vzdáleností („malých“ trojúhelníků), neboť 10^5 m je ve vesmíru skutečně malá vzdálenost. Abychom se přesvědčili o tom, že je náš třírozměrný prostor skutečně rovinný, je třeba provést měření s velmi „velkými“ trojúhelníky, jehož vrcholy by byly např. Země a vzdálené hvězdy nebo galaxie. Jednu z metod prověření navrhl a užil astronom *Schwarzschild* (viz obr. 2).

Metoda měření spočívá v měření úhlů α a β . Dosud nemáme údaje o pozorováních astronomů, při nichž by byl součet úhlů $\alpha + \beta > 180^\circ$. Takováto měření byla provedena pro hvězdy, jejichž vzdálenost od Země je 10^{18} m. Odtud je možno udělat závěr, že „poloměr křivky“ prostoru (zakřivení prostoru) musí být větší než $3 \cdot 10^{18}$ m. Tím bylo prokázáno, že Eukleidova geometrie je použitelná pro měření v prostoru a přesnost měření je vysoká, přinejmenším do té doby, než dosáhneme ohromných délek řádu 10^{26} m. Charakteristická délka spojená s vesmírem, která byla určena z pozorování a má velikost 10^{26} m, bývá též interpretována jako poloměr „křivky“ (zakřivení) světového prostoru. Není známo, bude-li se světový prostor jevit zakřivený v měřítku délek, které převyšují 10^{26} m.

Tím jsme probrali a diskutovali užití „rovinné“ (eukl.) geometrie pro makrosvět. Položme si ještě otázku: Jak je to s užitím této geometrie pro mikrosvět? K tomu je možno říci toto: Mezi jevy mikrosvěta, jejichž výklad fyzika podává, nejsou žádné, které by vedly k rozporu

platností eukl. geom. Jde o svět malých rozměrů srovnatelných s rozměry atomu (10^{-10} m) nebo atomového jádra (10^{-14} m). Teorie popisující děje v mikrosvětě vycházejí z platnosti eukl. geom. V tomto smyslu vydržela „rovinná“ (eukleid.) geometrie experimentální prověrku do rozměrů řádově 10^{-15} m.

Dvě kapitoly z počátků vzduchoplavby

JOSEF KOTYK, Pardubice

Bylo-li dávnou tužbou lidstva zmocnit se oceánů¹⁾, bylo neméně starým přáním člověka volně se vznést do výše a létat jako ptáci, zmocnit se ohromného oceánu vzduchového.

I. TRAGIKOMIČTÍ IKAROVÉ

Pohled na létající ptáky vedl člověka k domněnce, že problém vzduchoplavby vyřeší prakticky jen letadlo, jehož technické vybavení bude věrnou kopií ptačího těla. Již v řecké mytologii se např. vypravuje²⁾ o Daidalovi a jeho synu Ikarovi, jak si zhotovili na cestu vzduchem důvtipně upravená křídla; napodobuje otrocky přírodu, konstruktér Daidalos³⁾

*.pokládal v řadu pera,
nejprve nejkratší a stále delší, až zdála se v postupu býti vzrostlá.
Pera pak uprostřed a dole voskem upevnil,
a když pak spojil je, ohnul je mírně,
takže zpodobil perut ptáků. “*

Vzduchoplavba probíhala zprvu úspěšně. Mladicky nerozvážný Ikaros se z ní velmi radoval; neuposlechnuv však rady moudrého otce,

*. . výše a výše letí. Sousedství Slunce žhavého
změkčilo vosk vonný, per křídelních spojovadlo.
Později vosk roztál; hoch třepotal lokty nahými,
leč křídel zbaven jsa, žádný vzduch již nenabíral.*

¹⁾ Půvaby tohoto vývoje vylíčil autor našim čtenářům podrobněji v článku „Z počátků paroplavby“ v Rozhledech, ročník 53, číslo 9, str. 476 až 480.

²⁾ Cit. str. 110 a 111 knihy Imre Trencsényiho-Waldapfela „Mytologie“ (Odeon, Praha 1967).

³⁾ Přidržuji se názorného popisu, jenž pochází od římského básníka Ovidia (43 před n. l. až asi 17 n. l.); viz jeho „Metamorphoses“ (Proměny), díl VIII., verše 183 až 235.

Ikaros zahynul. Jeho tragická havárie však následovníky nepoučila. Dějiny svědčí, že těžkým problémem vzduchoplavby se zabývalo mnoho lidí. Zpráv o okřídlených strojích se zachovalo rovněž dost. Pozoruhodné je zejména tvrzení anglického filosofa Rogera Bacona (asi 1214—1294), slovného „doctora mirabilis“, matematika a přírodovědce, autora řady objevů v mechanice a v optice, že mohou být sestavena instrumenta volandi, létací stroje, v nichž člověk uprostřed sedící může otáčením jistého zařízení a prostřednictvím jakýchsi převodů způsobit pohyb uměle sestavených křídel; ta budou prorážet vzduch jako letící pták...

Ne tedy již prosté a pochybené mávání pažemi, opatřenými umělými perutěmi, nýbrž létací stroje s mávajících křídly, ornitoptéry! Tato myšlenka zapalovala. Po mnoha staletích zapálila ještě fantazii nadšeného českého vynálezce VÁCLAVA KADEŘÁVKA (1835—1881), osobního přítele Nerudova a Hálkova. Po léta pozoroval z pražských mostů a věží pohyby křídel za letu racků a holubů — od roku 1865 je dokonce i fotografoval — a pustil se do konstrukce maličkého modelu umělého opeřence váhy pouhých 5,6 g se skutečnými vlaštovčími křídly, jimiž probíhaly vlasové ocelové drátky, spojující model s elektrickou baterií. Skutečností téměř neuvěřitelnou jest, že mechanický ptáček opravdu třepetal křídly, vznesl se — a létal. Povzbuzen tímto úspěchem, Kadeřávek uveřejnil již dne 18. ledna 1866 v Nerudových „Květech“ podrobný popis svého „českého samoletu“, v podstatě asi stokrát zvětšeného dřívějšího modelu s ptačími křídly. Dvě zkoušky vykonané na veřejnosti skončily však zklamáním: Samolet se zmítal jako raněný pták, ale nelétal. Ze složitého a nákladného stroje nezachovala se pak ani jediná součástka; snad jej nešťastný vynálezce sám zničil...⁴⁾

Václav Kadeřávek, chudý kamnář, zemřel vyčerpan bídou dne 2. února 1881 v Praze. Jiní tragikomičtí Ikarové končili svou honbu za bludičkou podobného tzv. svalomotorového létání zpravidla romantičtěji v troskách své ornitoptéry. Jim platí poslední slova, jež pronesl jeden z nich, Otto Lilienthal, po smrtelné havárii dne 9. srpna 1896: „Je třeba obětí!“⁵⁾

II. BALÓNY A VZDUCHOLODI

„Bylo by dost nesnadné říci, která příčina vzbudila bratřím Montgolfierovým první ideu balónů“, uvažují francouzští autoři Dhombres

⁴⁾ Obrázek Kadeřávkova „českého samoletu“ podle současné rytiny přináší např. sborník „Devatenácté století slovem i obrazem“ (nakl. Jos. R. Vilímek v Praze), díl II., svazek 1., str. 90, nejnověji pak kniha Ludvíka Součka „Blázniví vynálezci“ (Kapitoly z dějin nesmyslů), nakl. Albatros, Praha 1974, str. 109.

⁵⁾ Obrázek Lilienthalova létacího stroje s dvojitými křídly (dvoj-plošného kluzáku) přináší sborník cit. v pozn. 4), str. 91 a kniha Ludvíka Součka, citovaná tamtéž, na str. 103.



a Mondod ve svém díle *Scènes et biographies historiques*. „Snad pohled na mračna, vznášející se a plynoucí v ovzduší, kde jsou jako zavěšena. Snad i pohled na papírek, zvedaný teplým vzduchem nad lampou, či kouř stoupající do výše“. Snad by stačilo uzavřít zahřátý (tedy lehčí) vzduch do nějakého obalu...

Římský historik Strabo z Pontu (kolem r. 65 př. n. l. — kolem r. 25 n. l.) se zmiňuje o zvláštní sektě hyperborejců, jejíž příslušníci vzlétali „pomocí kouře“ do výše. Staří Číňané již dávno vyráběli ohromné papírové balóny, naplněné teplým vzduchem, a lampióny, jež se vznášely ve výši. A tak to jde opět dějinami. Věčná a neuhasitelná byla touha člověka vznést se do vzduchu. Pokusy o let balónů mohly však být po úspěšném rozvoji aeromechaniky konány teprve v 18. století.

V roce 1709 sestrojil portugalský fyzik don Guzman z vrbových prutů veliký balón a potáhl jej papírem. Když pod otevřeným ústím balónu rozdělal oheň, vzduch uvnitř se zahřál a vynesl balón do výše asi 60 m. Pokus, provedený v Lisabonu za přítomnosti krále Jana V vzbudil všeobecný rozruch. Vynálezce don Guzman-L'Ovoador (= Létařící muž) byl proto z opatrnosti zajištěn ve vězení inkvizice...

Za skutečné vynálezce balónů jsou však pokládáni teprve bratři MONTGOLFIEROVÉ⁶⁾, majitelé papírny v Annonay ve Francii. Zkonstruovali balón objemu 34 m³, slepený z papíru a plněný zahřátým vzduchem (tzv. montgolfiéru), a vykonali s ním úspěšně první veřejnou zkoušku v Annonay památného dne 5. června 1783. Pařížský fyzik prof. J. Al. César Charles, dověděl se o tom, vypustil záhy nato dne 27. srpna 1783 na Martově poli v Paříži balón „Globus“, naplněný vodíkem. Dne 19. září 1783 byl předveden za přítomnosti krále Ludvíka XVI. a královny Marie Antoinetty na hradním nádvoří ve

⁶⁾ Starší Joseph[†] Michel Montgolfier žil v letech 1740 až 1810, mladší Jacques Étienne[†] Montgolfier v letech 1745 až 1799.

Versailles vzlet montgolfiéry, k níž byla připevněna klec s kohoutem, kachnou a ovci; balón se snesl šťastně ve vzdálenosti asi 2 km. Již dne 21. října 1783 byl uskutečněn první výstup člověka nad zemský povrch: V nádherně vyzdobené montgolfiére objemu 2000 m³ vznesli se ze zahrady zámku La Mutte do výše první vzduchoplaci Pilâtre de Rozier a markýz d'Arlandes; vykonali balónem dráhu asi 8 km a sestoupili bez nehody na blízkém poli. Charles sestrojil záhy nato balón značně menší (objemu 380 m³), v němž vzlétl sám do výše 2900 m. Obr. 1 ukazuje vzlet balónu dne 1. prosince 1783 v Paříži.

U nás byla první montgolfiéra vypuštěna dne 2. září 1784 z parku hraběte Ditrichštejna v Židlochovicích na Moravě. V roce 1785 přeletěli Blanchard a Jefferies kanál La Manche. V roce 1804 dostoupil Gay-Lussac balónem výše 7016 m, v roce 1862 Glaisher a Coxwell výše 10 000 m. Od roku 1818 plnily se balóny podle Greena zpravidla svítiplynem, později také nehořlavým héliem.

V první polovině 20. století dosáhl největší výše v balónu s otevřenou gondolou kapitán Gray v roce 1928, ale ve výši 12 945 m omylem přeřízl rourku od nádrže s kyslíkem a zadusil se. V balónu s gondolou uzavřenou dosáhl švýcarský fyzik prof. Auguste Piccard roku 1932 výše 16 940 m, letci ruští a američtí v roce 1933 téměř 19 000 m. Meteorologické balónky s měřicími a samočinně zapisujícími přístroji dosáhly již v roce 1912 výše až 40 km.

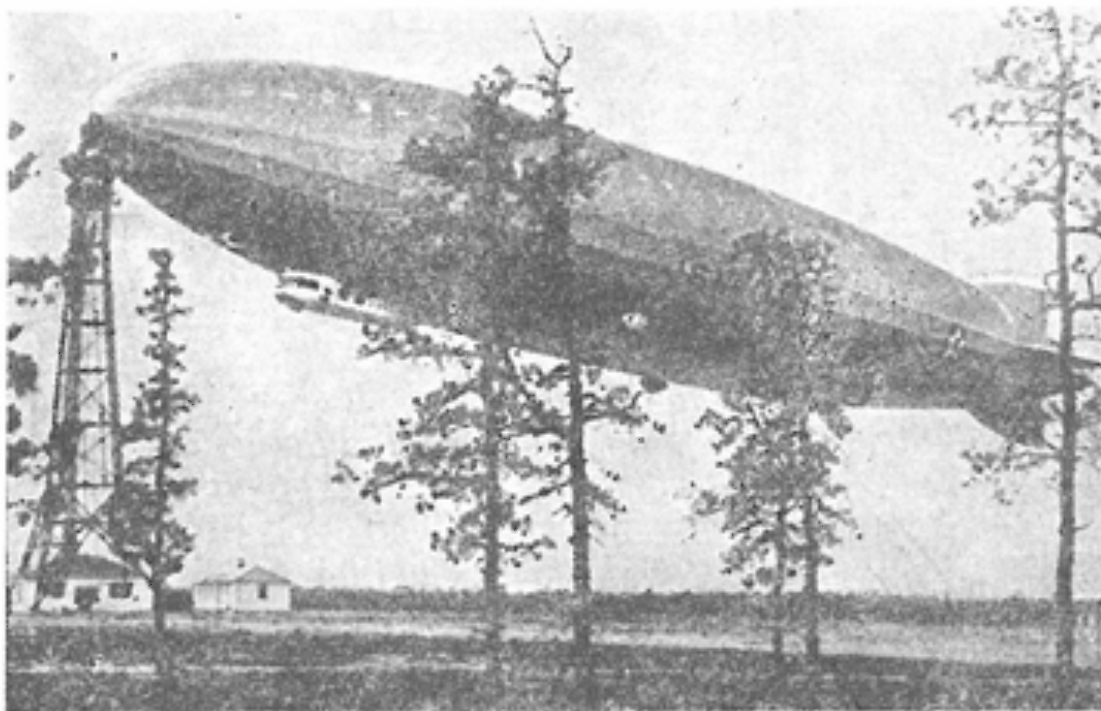
Problematikou o sobě byla řiditelnost balónů. Daly se řídit jen ve směru svislém; ve směru vodorovném byly hříčkou větru. Avšak již roku 1784 navrhl Meusnier pařížské Akademii balón všemi směry řiditelný a uvedl též hlavní podmínky řiditelnosti: doutníkový tvar balónu, kompenzační balón vzduchový (balonet), udržující uvnitř velkého balónu jeho stálý tvar, a užití vrtule, poháněné vhodným motorem, aby byl umožněn vlastní pohyb balónu. Změna směru se měla provádět kormidly. Šlo jen o účinný a při tom lehký motor, který teprve mnohem později byl nalezen v motoru výbušném.

Z řiditelných balónů staly se v našem století nejznámější vzducholo-di Zeppelinovy (Obr. 2 ukazuje vzducholoď připoutanou k stožáru.) Prvý „Zeppelin“ se vznesl na Bodamském jezeře dne 2. června 1900; byl 130 m dlouhý, pouze 11,65 m široký a obsahoval 11 300 m³ nosného plynu; byl poháněn 2 motory po 16 k.⁷⁾ Jiný byl 146 m dlouhý, měl objem 20 000 m³ a byl poháněn 3 motory po 140 k.⁸⁾

Národní dar umožnil generálu Ferdinandovi hraběti von Zeppelinovi (1838—1917) stavbu veliké továrny na budování vzducholodí ve Friedrichshafenu; versailleským mírem v roce 1919 byla továrna

⁷⁾ Číselné údaje uvádím podle sborníku cit. v pozn. 4, str. 100.

⁸⁾ Cituji údaje učebnic fyziky pro vyšší třídy býv. středních škol, např. učebnice Maškovy, str. 162.



Obr. 2.

zrušena, později byla však opět obnovena. Německý pilot Hugo Eckener podnikl v roce 1924 let vzducholodí do Severní Ameriky, v roce 1929 kolem světa a v roce 1931 k severnímu pólu; v roce 1932 zavedl vzducholodí pravidelnou dopravu z Německa do Brazílie za 3 dny. Italský generál Umberto Nobile podnikl v roce 1928 vzducholodí „Italia“ výpravu k severnímu pólu, jíž se účastnil i Čech František Běhounek. Výprava však ztroskotala. Při jejím zachraňování zahynul slavný polární badatel Roald Amundsen; trosečníky na kře ledové⁹⁾ obětavě zachránil teprve sovětský ledoborec „Krasin“

Nakonec ještě zajímavý úsudek, který dne 13. srpna 1883 pronesl při odhalení pomníku bratří Montgolfierů v Annonay plukovník Perrier: „Kdyby byl měl rakouský generál Benedek u Sadové v roce 1866 pozorovací balón, byl by se vyhnul přepadení od Chlumu, jež bylo příčinou jeho porážky“ Skutečně již roku 1794 pozorovali Francouzové před vítěznou bitvou u Fleurus nedaleko Charleroi postavení nepřátelských vojsk — z balónu! Váhavé Rakousko v předvečer války s Pruskem několik balónů sice objednalo, avšak — než „přípravné práce byly vykonány“, dodává historik¹⁰⁾ — bylo již po válce...

⁹⁾ Přečtěte si také Běhounkovu knihu „Trosečníci na kře ledové“.

¹⁰⁾ Viz str. 107 stati red. Karla Jonáše „Plavba vzduchem“ sborníku citovaného v pozn. 4.

matematické zábavy

Matematická miniatura I

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc.

Následující úloha vznikla jen tak mimochodem během jednoho mezinárodního matematického sympozia:

Matematik potkal svého přítele, který byl obtěžkán množstvím balíků. Zeptal se ho, proč to všechno nese.

„Mám tři syny, zítra mají všichni narozeniny, nesu jim dárky,“ odvětil pečlivý otec.

„A jak jsou tví synové staří?“ zvědavě položil další otázku matematik.

„Jsi matematik, vypočti si to: jestliže jejich zítřejší stáří navzájem vynásobíme, dostaneme třicet šest.“

„To mi však nestačí, budeš muset přidat ještě nějakou informaci,“ popravdě požádal matematik.

„Dobře,“ řekl otec, „podívej se na dům, před nímž právě stojíme; má tolik oken, kolik činí součet zítřejších stáří mých tří synů.“

Matematik se pozorně zadíval na dům, zakroutil hlavou a pravil: „Je mi to líto, ale stále ještě mi to nestačí. Prozrad' mi o svých synech ještě něco navíc.“

Otec se zasmušil: „Jdeš mi tak trochu na nervy, ale budiž, naposled ti ještě něco řeknu: Můj nejstarší syn se jmenuje Karel.“

Matematikovi se rozzářily oči a zajásal: „Právě to jsem potřeboval ještě vědět, nyní je úloha již jednoznačná.“ Hned nato určil správně stáří všech synů; dovedli byste to také?

Následující řádky si přečtete teprve, až sami úlohu rozřešíte. I když vypadá na první pohled podobně jako známá nesmyslně žertovná úloha o lodi s otázkou, jak stará byla kapitánova babička, jde tentokrát o vážný matematický příklad. Předně je jasné, že rozkladem čísla 36 na součiny tří přirozených čísel dostaneme osm trojic, z nichž jedna představuje řešení úlohy. Tyto trojice jsou:

(1, 1, 36), (1, 2, 18), (1, 3, 12), (1, 4, 9), (1, 6, 6), (2, 2, 9), (2, 3, 6),
(3, 3, 4).

Jestliže čísla každé trojice sečteme, dostaneme postupně čísla 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11, 10. Dům, před nímž proběhl náš rozhovor, měl tedy počet oken rovný některému z těchto čísel. Kdyby měl např. 14 oken (což mohl matematik pohledem na dům snadno zjistit), mohla

být ihned jmenována správná trojice (1, 4, 9). Protože to matematik neudělal, nýbrž naopak prohlásil, že mu to stále ještě k jednoznačnému řešení nestačí, musel mít dům 13 oken, takže stále ještě v úvahu přicházely dvě trojice (1, 6, 6) a (2, 2, 9). Jakmile však byl vysloven jakýkoli výrok o nejstarším synovi, vyplývá z toho, že nejstarší syn byl pouze jeden (zanedbáváme totiž okolnost, že dvojčata se rodí po sobě); synové tedy byli staří 2, 2 a 9 let.

A obvyklé naučení? Zase docela jednoduché. Uvedený příklad je totiž takového druhu, že k jeho řešení pouhý matematický dril nestačí. Žádné rovnice nám zde nepomohou, nebudeme-li mít pravého matematického „filipa“, tj. nebudeme-li matematicky myslet. A k tomu nás vede právě nové pojetí vyučování matematiky.

naše soutěž

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů

Fyzika

4. Dve tělesa o hmotnosti m_1 , m_2 a konstantních rychlostech $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ se pohybují po vodorovné rovině. Dané hodnoty sú: $m_1 = 45$ [kg], $m_2 = 36$ [kg]; $\mathbf{v}_1 = 12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_2 = -6\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Nájdite: α) Rychlost hmotného středu. Pokyn: hmotný střed = = ťažisko T = barycentrum (z gréc. „barys“ = ťažký) je myslený bod, v ktorom možno predpokladať, že pôsobí celá tiažová sila („váha“ G) telesa; jeho polohový vektor $\mathbf{r}_T$ (počítaný pre ľubovoľne zvolený počiatok súradníc) je pre 2 hmotné body daný vzťahom

$$\mathbf{r}_T = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Vektor rýchlosti ťažiska $\mathbf{v}_T$ sa určí derivovaním podľa času t , takže hľadané $v_T = \frac{d\mathbf{r}_T}{dt}$.

β) Celkovú hybnosť ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$).

γ) Rychlosti $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ uvažované v tej súradnicovej sústave, kde hmotný střed je v klude. (Pokyn: Od rýchlosti $\mathbf{v}$ odčítame rýchlosť hmotného středu).

Evžen Říman

(Došlo 18 riešení)

Riešil Vojtech Bardiovský, 3 F SPŠE Košice :

α) Polohový vektor ťažiska je daný vzťahom $\mathbf{r}_T = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$

Derivovaním rovnice podľa času dostávame

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_T &= \frac{d\mathbf{r}_T}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)\end{aligned}$$

Predpokládajme sústavu SI. Číselným výpočtom dostávame hodnotu

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_T &= \frac{1}{45 + 36} 45 (12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}) + 36 (-6\mathbf{i} + 1\mathbf{j}) = \\ &= \frac{1}{81} (324\mathbf{i} + 891\mathbf{j}) = \underline{4\mathbf{i} + 11\mathbf{j}}\end{aligned}$$

$$v_T = |\mathbf{v}_T| = \sqrt{4^2 + 11^2} = \sqrt{137} \doteq 11,70 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}].$$

) Celková hybnosť sústavy telies sa rovná vektorovému súčtu hybností bech telies: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$

Číselne: $\mathbf{p} = 45(12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}) + 36(-6\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 324\mathbf{i} + 891\mathbf{j}$.

Ten istý výsledok dá súčin celkovej hmotnosti a rýchlosti $\mathbf{v}_T$ tj.

$$(m_1 + m_2)\mathbf{v}_T = 81 (4\mathbf{i} + 11\mathbf{j}) = 324\mathbf{i} + 891\mathbf{j}$$

γ) Rýchlosť $\mathbf{c}_1$ (resp. $\mathbf{c}_2$) určíme odčítaním vektora $\mathbf{v}_T$ od vektora $\mathbf{v}_1$ (resp. $\mathbf{v}_2$), preto

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_T = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

Číselný výpočet dá

$$\mathbf{c}_1 = 12\mathbf{i} + 19\mathbf{j} - (4\mathbf{i} + 11\mathbf{j}) = 8(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

ale tiež (dosadením do výsledku)

$$\mathbf{c}_1 = \frac{36 \cdot (12\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 6\mathbf{i} - \mathbf{j})}{45 + 36} = \frac{36 (18\mathbf{i} + 18\mathbf{j})}{81} = 8(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

$$|\mathbf{c}_1| = c_1 = 8\sqrt{2} \doteq 11,32 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_T = -6\mathbf{i} + \mathbf{j} - (4\mathbf{i} + 11\mathbf{j}) = 10(-\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$c_2 = |\mathbf{c}_2| = 10\sqrt{2} \doteq 14,14 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Poznámka autora : $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ značia rýchlosti telies v súradnicovej sústave, ktorej počiatok je unášaný konštantnou rýchlosťou $\mathbf{v}_T$, akú má ťažisko sústavy. S tým súvisí veta o zachovaní pohybu ťažiska: „Ťažisko osamotenej sústavy hmotných bodov sa pohybuje podľa zákona zotrvačnosti (tj. zostáva v klude alebo sa pohybuje priamočiario rovnomerne).“

5. V jednom fantastickom románe byl navržen tento projekt: Pro zkrácení dopravy provrtat Zemí přímý tunel, jdoucí jejím středem. Ponechme stranou diskusi o možnosti nebo nemožnosti projektu. Rozhodněte, jaký pohyb by konalo těleso, např. vlak (jeho těžiště), spuštěné do takového tunelu a ponecháno dále samo sobě, mění-li se tíha tělesa se vzdáleností r jeho těžiště od středu Země podle vztahu $G = mg - \frac{r}{R}$ (m je hmotnost tělesa, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ je tíhové zrychlení na povrchu Země a $R = 6400 \text{ km}$ je poloměr Země). Jiné síly už na těleso nepůsobí. Vypočtete dobu, za kterou proletí těleso tunel a udejte jeho rychlost ve středu Země.

František Vencálek

(Došlo 20 řešení)

Upravené řešení Zdeňka Strakoše, SPŠ O – Vítkovice :

Zvolme osu tunelu za osu y s počátkem ve středu Země. Síla G působí vždy ke středu Země, tedy proti výchylce tělesa od středu Země. Můžeme tedy napsat, že

$$G = - \frac{mg}{R} \cdot y ,$$

kde $|y| = r$. Poněvadž m, g a R jsou konstanty, je i $k = \frac{mg}{R}$ konstanta a

$$G = -ky$$

Vratná síla G je přímo úměrná výchylce tělesa ze středu Země. Těleso bude konat harmonický pohyb kolem středu Země s amplitudou výchylky R . Doba kmitu harmonického pohybu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{je pro } k = \frac{mg}{R} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} .$$

Doba průletu tunelem je poloviční

$$T' = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} .$$

Ve středu Země, tj. v rovnovážné poloze, nabude těleso největší rychlosti $v_{\max} = \omega R$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{R}}$.
Je tedy

$$v_{\max} = R \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{gR}$$

Pro dané hodnoty je $T' = 2537,5 \text{ s} = 42 \text{ min } 17,5 \text{ s}$ a $v_{\max} = 7923,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

různé

Zajímavosti o kalendářích

Jak vzniklo slovo kalendář? Kalendy (Calendae) byly dny, kdy starořímsí kněží svolávali lid při objevení nového srpku Měsíce a oznamovali, kolik dní se bude v tomto měsíci počítat. *Calendarium* byla v té době kniha dlužníků, kteří platili prvního dne v měsíci úroky, až ve středověku se stal kalendář seznamem dní v roce s vyznačenými svátky, astronomickými jevy a památnými dny. Slova kalendář se však užívá i v abstraktním smyslu k označení soustavy časových intervalů, která slouží k vystižení periodicky se opakujících přírodních jevů (v tomto smyslu o něm zde budeme mluvit).

Proč jsou nesnáze s kalendáři? Měsíc a Slunce jako nejvýznačnější objekty na obloze určily opakováním svého vzhledu, resp. svých účinků, přirozené periody — základ kalendářových jednotek. Zvolí-li se doba otočení Země kolem osy jako 1 den, pak oběh Země kolem Slunce (tzv. tropický rok) trvá přibližně 365,242195 dní a oběh Měsíce kolem Země (tzv. synodický měsíc) přibližně 29,530588 dní. Potíže s kalendáři působí okolnost, že nejde o přirozená čísla; každý kalendář musí dodatečně vyrovnávat počty dní, jak uvidíme.

Zkusíme to s Měsícem? Většina starověkých národů dala při tvorbě kalendáře přednost Měsíci, ve 3. tisíciletí př. n. l. užívaly v Mezopotámii „měsíčního roku“ s 354 dny rozdělenými do 12 měsíců, které měly střídavě 30 a 29 dní. Také Mohamed, zakladatel islámu, vytvořil v 7. století n. l. složitější kalendář s „měsíčními roky“ o 354 a 355 dnech (ve 30 rocích za sebou se objeví 19 kratších a 11 delších). Rozdíl 11 dnů oproti slunečnímu roku je značný, proto se např. data jarní rovnodennosti v tomto kalendáři stále posouvají, stejně tak etapy zemědělských prací nemají pravidelně se opakující data.

Kolik měsíců do roka? Sluneční den a sluneční rok jsou realitami příliš určujícími koloběh přírody, aby je bylo možno opomenout při tvorbě kalendáře. Sluneční rok však nelze „pokrýt“ celým počtem synodických měsíců, podíl $365,242195 \div 29,530588 \doteq 12,37$, proto dvanáct měsíců (dob oběhu Měsíce kolem Země) nestačilo. A tak se zrodil nápad s občasným přidáváním třináctého měsíce do roku, zprvu na vladářův rozkaz či z rozhodnutí kněží. Babylonští astronomové doporučili systematické střídání roků s 12 a s 13 měsíci v osmiletém cyklu; delší byl vždy druhý, pátý a sedmý rok cyklu. Doplnované měsíce byly také delší — 30tidenní, takže v tomto babylonském osmiletém cyklu bylo 48 měsíců po 29 dnech a 51 měsíců po 30 dnech, tj. celkem 2922 dní. Snadno si vypočítáte, že osm slunečních roků má přibližně 2921,94 dne; dosáhli tedy Babyloňané poměrně přesného vyrovnání. Obdobné zásahy do počtu měsíců v roce se prováděly i v starověké Číně, Řecku, Římě a jinde; některé varianty tohoto typu kalendáře se zachovaly dodnes v jihovýchodní Asii.

Kolik dní do týdne? U nás týden uplyne, když se opakuje „týž den“ podle jména, a těchto jmen je sedm. Ve starověkém Babyloně dělili měsíce na čtyři sedmidenní až osmidenní části. Sedmidenní týden nakonec převládl, nejspíše z náboženských důvodů, číslo sedm se ostatně stalo posvátným číslem i pro Židy (biblická legenda o stvoření světa „zdůvodňuje“ sedmidenní týden). Egypťané v té době dělili 365denní rok na 12 měsíců po 30 dnech a na pětidenní zbytek, každý měsíc byl dělen na desetidenní období. Ve starém Římě nebyly dny odpovídající našim nedělím, ale data v měsíci se opírala o tři významné dny se zvláštními jmény (Nonae, Idae, Calendae). Desetidenní „týden“ se objevil na konci 18. století též v republikánském kalendáři porevoluční Francie, která důsledně prosazovala desítkovou soustavu.

Jak zasáhl Caesar? Gaius Julius Caesar rozhodl v r. 46 před n. l., že se opravy počtu měsíců a dní v roce budou v římské říši provádět pravidelně tím způsobem, že se každý čtvrtý rok přidá do 365denního roku jeden den navíc. Uskutečnil ideu alexandrijských vědců navrženou už ve 3. století př. n. l. Podle druhého Caesarova jména dostal nový kalendář název juliánský, čtyři juliánské roky jsou však o více než 11 minut delší než čtyři astronomické roky, proto se za 128 let nastrádá rozdíl již na jeden celý den. Snadno si vypočítáte, že v naší době připadá již Nový rok juliánského kalendáře na polovinu ledna našeho kalendáře.

Proč máme delší prázdniny a nejkratší měsíc únor? Dva prázdninové měsíce mají po 31 dnech, a to je pozoruhodné, protože je to jediná dvojice 31denních měsíců v jednom roce (druhá dvojice vzniká z prosince jednoho roku a z ledna následujícího roku). Taková „štědrost“ pro dva měsíce za sebou by nebyla možná, kdyby se nešetřilo na únoru, zřejmě tedy byla porušena rovnoměrnost počtu dní v měsících. Důvod najdeme v osobě Caesara a jeho nástupce Octaviana, podle jejichž

druhých jmen Julius, Augustus byly nazvány letní měsíce kvintilis, sextilis. Původní rozdělení dní v měsících bylo v Římě pravidelné v tom smyslu, že v přestupném roce s 366 dny měly liché měsíce 31 dní a sudé 30 dní, v nepřestupném se druhý měsíc krátil na 29 dní. Měsíc julius (červenec, júl) byl tedy obdařen 31 dny, ale jeho „nástupce“ augustus (srpen, august) jen 30 dny. Z malicherné ctižádosti či pochlebnictví byl císaři Octavianovi „jeho“ měsíc augustus prodloužen na 31 dní, aby se vyrovnal svému předchůdci. Tím vznikly tři dlouhé 31denní měsíce za sebou (julius, augustus, september) a rok byl o jeden den delší; další úprava změnila proto počty dní v posledních čtyřech měsících na 30, 31, 30, 31 a o jeden den „obrala“ už tak krácený februarius (únor, február).

Proč není den 31. 12. jednou za čtyři roky? Nástavce prodlužující tyče, trubky a pod. dáváme vždy na konec dosavadního předmětu, proto se zdá přirozenější měnit v přestupném roce počet dní posledního měsíce a ne druhého. Ve starém Římě tomu tak bylo, protože rok začínal prvním jarním měsícem zvaným martius (náš březen, marec); kterému dal jméno bůh války Mars. Římané si navykli měnit počty dní posledního zimního měsíce i po přenesení začátku roku na january (náš leden, január). A tak má pevné datum a místo v kalendáři Silvestr (poslední den každého roku), zatímco 29. únor má jen 25 % prezenci.

Co se stalo ve dnech 5. 10.—14. 10. 1572? Pokud jde o Itálii, Francii, Španělsko, Polsko, Nizozemí a Portugalsko, nestalo se tam v uvedené dny vůbec nic, protože dny s těmito daty byly vypuštěny při reformě kalendáře vyhlášené papežem Řehořem XIII. Jejím cílem bylo vyrovnání rozdílu 10 dní, o které se juliánský kalendář v té době lišil od slunečních roků, protože měl příliš mnoho přestupných roků. Nový kalendář se nazývá též gregoriánský (Řehoř = Gregorius), i když jeho princip navrhl italský učenec A. Lilio; v průběhu 400 let se snižuje počet přestupných dní ze 100 na 97 (z letopočtů dělitelných stem jsou totiž přestupné jen ty, které jsou dělitelné čtyřmi sty). Tato úprava zajišťuje, že se rozdíly gregoriánských roků od slunečních „složí“ na jeden celý den až po 3323 letech. Nejde tedy ani nyní o absolutně přesné vystižení slunečních roků, to je ostatně nemožné, jak ukazují čísla otištěná v prvním odstavci.

Jak se sjednocoval svět na kalendáři? Gregoriánský kalendář nebyl přijat najednou ani v Evropě, která byla v poslední čtvrtině 16. století nábožensky rozdělena a papežský akt odmítali protestanté i pravoslavní. Naše země patřící do rámce německého císařství jej zavedly v roce 1584, v Uhrách v r. 1587. Dánsko přijalo nový kalendář až v r. 1700, Velká Británie 1752, Švédsko 1753, Japonsko 1873, Čína 1911. Juliánský kalendář držela pak už jen pravoslavná církev svým vlivem v Bulharsku (1916), Rusku (1918), Rumunsku (1919) aj. Sovětské Rusko přešlo ke gregoriánskému kalendáři po dekretu z 24. 1. 1918, kterým byl po 31. 1. 1918 zařazen den 14. 2. 1918. Po 1. světové válce přijaly tento

kalendář i první země s mohamedánským kalendářem — Turecko (1925), Egypt (1928). Sjednocení kalendáře zjednodušuje styk mezi státy, proto dnes užívají všechny instituce v mezinárodním styku jednoho kalendáře, i když není ideální.

Proč se neujal francouzský republikánský kalendář? Jak víme, francouzská buržoazní revoluce přinesla závažné změny v systému měr, které byly přijaty většinou států (nedávno i anglosaským světem). Pokus o změnu kalendáře byl spojen s vyhlášením republiky 22. 9. 1792, které náhodou připadlo na podzimní rovnodennost. Autoři kalendáře se vrátili k staroegyptskému členění roku na 12 měsíců po 30 dnech s dodatečnými 5 či 6 dny v roce. Měsíce byly členěny na tři dekády, Nový rok začínal podzimní rovnodenností. Kalendář byl zrušen císařem Napoleonem v r. 1805, který tak odstranil i tohoto svědka připomínajícího republiku a zavedl znovu gregoriánský kalendář.

Lze nynější kalendář vylepšit? Gregoriánský kalendář nezabraňuje mírné „vibraci“ významných okamžiků slunečního roku — slunovratů a rovnodenností v rozmezí dvou dní; například jarní rovnodennost připadá někdy na 21. 3., jindy na 22. 3. Tato drobnost však v praxi nevádí, více se poukazuje na nestejně počty dní ve čtvrtletích a zejména na to, že dny se stejnými daty nepřipadají ve dvou následujících letech na týž den v týdnu. Proto nelze použít např. nástěnný kalendář po několik let, vyplývá se dost papíru na každoroční obměny milionů publikací vázaných nějak na kalendář. Existuje celkem 14 různých variant ročního kalendáře, přihlížíme-li k datům jednotlivých dní v týdnech, a to je zase příliš mnoho na nějaké souborné vydání všech variant pohromadě (některé se uplatní jednou za 28 let).

Dočkáme se reformy kalendáře? Snahy o úpravy kalendáře vedly k dlouhým jednáním v bývalé Společnosti národů před 2. světovou válkou, která skončila bez rozhodnutí. V r. 1953 předložila indická vláda OSN návrh reformy spočívající ve vyrovnaní každého čtvrtletí na tři měsíce s 31, 30 a 30 dny a s vyřazením 31. 12. z číslování (dostal by zvláštní název jako světový svátek). V přestupném roce by byl takový den i mezi druhým a třetím čtvrtletím. Tento návrh se, jak víme, nerealizoval, od r. 1956 se o něm už nejedná.

N. V. Volodomonov, autor publikace „Kalendar, prošloje, nastojaščeje, buduščeje“, z níž jsou vzaty základní údaje obsažené v tomto příspěvku, předkládá svůj projekt stálého světového kalendáře, který vyžaduje minimální změny. Nezměnily by se totiž zaběhnuté počty dní v měsících nepřestupného roku, jen prosinec byl ztratil svůj 31. den, ze kterého by se stal nultý leden v roli Nového roku, ale bez označení dnem v týdnu. Obdobně by se v přestupném roce zacházelo s 29. únorem. Uvidíme, zda Organizace spojených národů dá světu nový trvalý kalendář, splňující současné požadavky.

Š. J.

Staroměstský orloj

RNDr. KAREL MIŠOŇ, CSc. ČVUT Praha

*Pánům k poctivosti v té věži jest orloj správný,
přepodivně zrychtovaný, arci právě zmistrovaný.
Protož o něm dotknu krátce pro schválení mistra práce,
jenž se v něj v dělání vložil, věčné pochvaly zasloužil.*

Blažej Jičínský, řečený Domin(a) r. 1589.

Desítky kolemjdoucích postávají v obdivu před starobyklým pražským orlojem. Očekávají napjatě průvod apoštolů a symbolickou figurální atrakci pohyblivých sošek po obou stranách číselníku. Dítka se s radostným vzrušením soustřeďují na závěrečné kohoutí zakokrhání. Mistrná kulturně historická památka, stojící ve světě na prvním místě mezi uměleckými hodinami, si zasluhuje pozornost především svou hvězdářsko-časoměrnou náplní. Připomeňme slova *Bohuslava Balbína* (1621 až 1688):

Mezi nejdrahocennějšími a nejvzácnějšími výtvary, kterým se spisovatelé v Praze obdivují, je oslavován dávno široko daleko staroměstský orloj. Je vpravdě skvělým šperkem a ozdobou, jejíž velkolepost a uměleckou vzácnost nemohou má slova sdostatek popsat. Mluví o něm Dreserus¹), Gerradus Mercator²), Typotius³), Chytraeus⁴), Blaëu⁵), zkrátka každý, kdokoliv Prahu opouští, vzpomíná jejího orloje.

Látka může být vhodným oživením hodin astronomie — zvláště na pražských školách. Několik pohlednicových snímků z různých ročních dob je v tom ohledu dostatečnou učební pomůckou pro pochopení myšlenek vtělených názorně tvůrcem stroje do důmyslného mechanismu.

Ručička hodin se otáčí rovnoměrně v záporném smyslu jednou kolem za dobu středního slunečního dne. Její konec se zlaceným znamením ruky ukazuje ke dvěma — vzájemně sousedním — číselným, časoměrným kruhům. Vnitřní z nich, *pevný*, má dvojí římské číslování: od I zdola vlevo vzhůru do XII a odtud dále vpravo dolů znova od I do XII. Stoupající (klesající) rafe na něm ukazuje dopolední (odpolední) čas shodně s běžným občanským dělením dne. O půlnoci (v poledne) míří

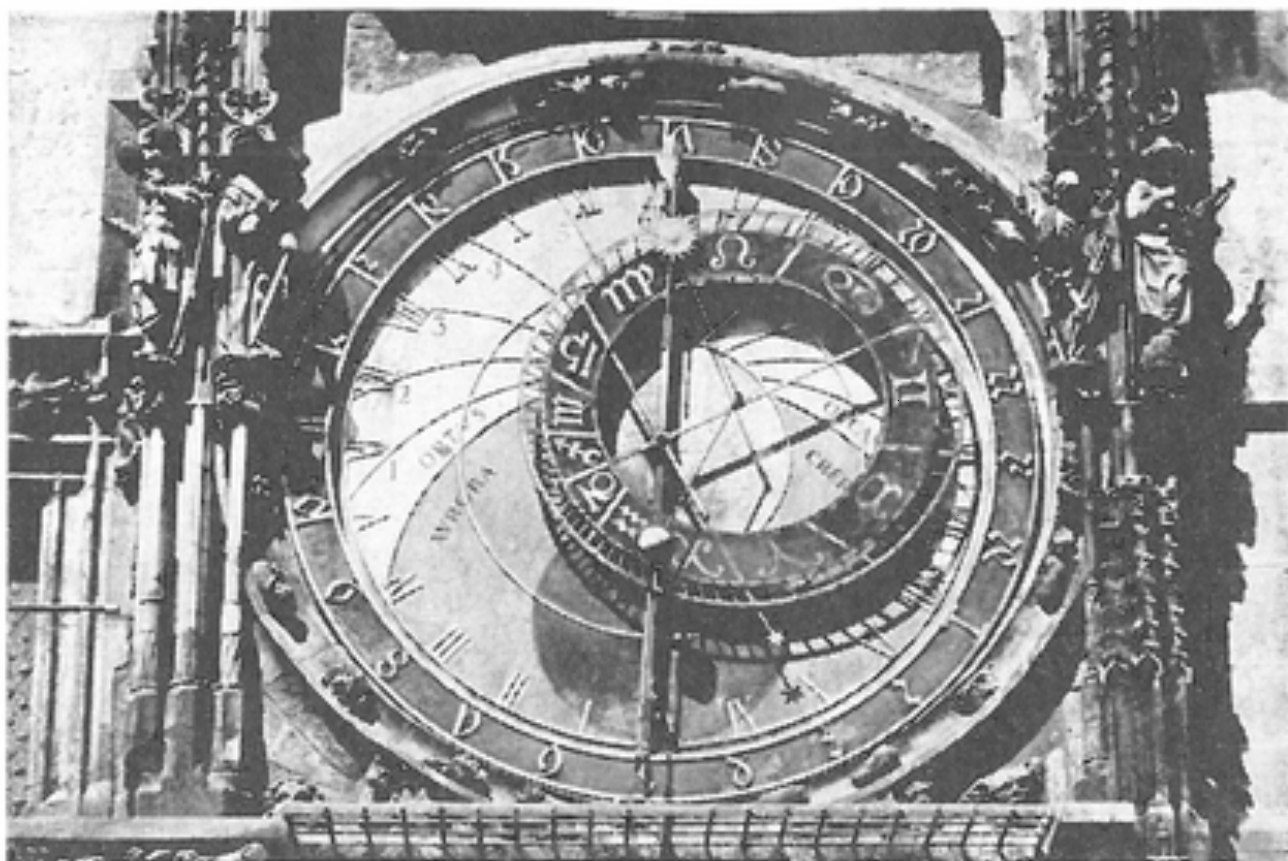
¹) český spisovatel (1693—1749)

²) zeměpisec a kartograf (1512—1594)

³) Typoest, přítel Jesseniův, císařský historiograf Rudolfa II., autor Tychonova epitafu. Na deseti místech o něm mluví Polišínského kniha: Jan Jesenský Jessenius

⁴) theolog (1530—1600)

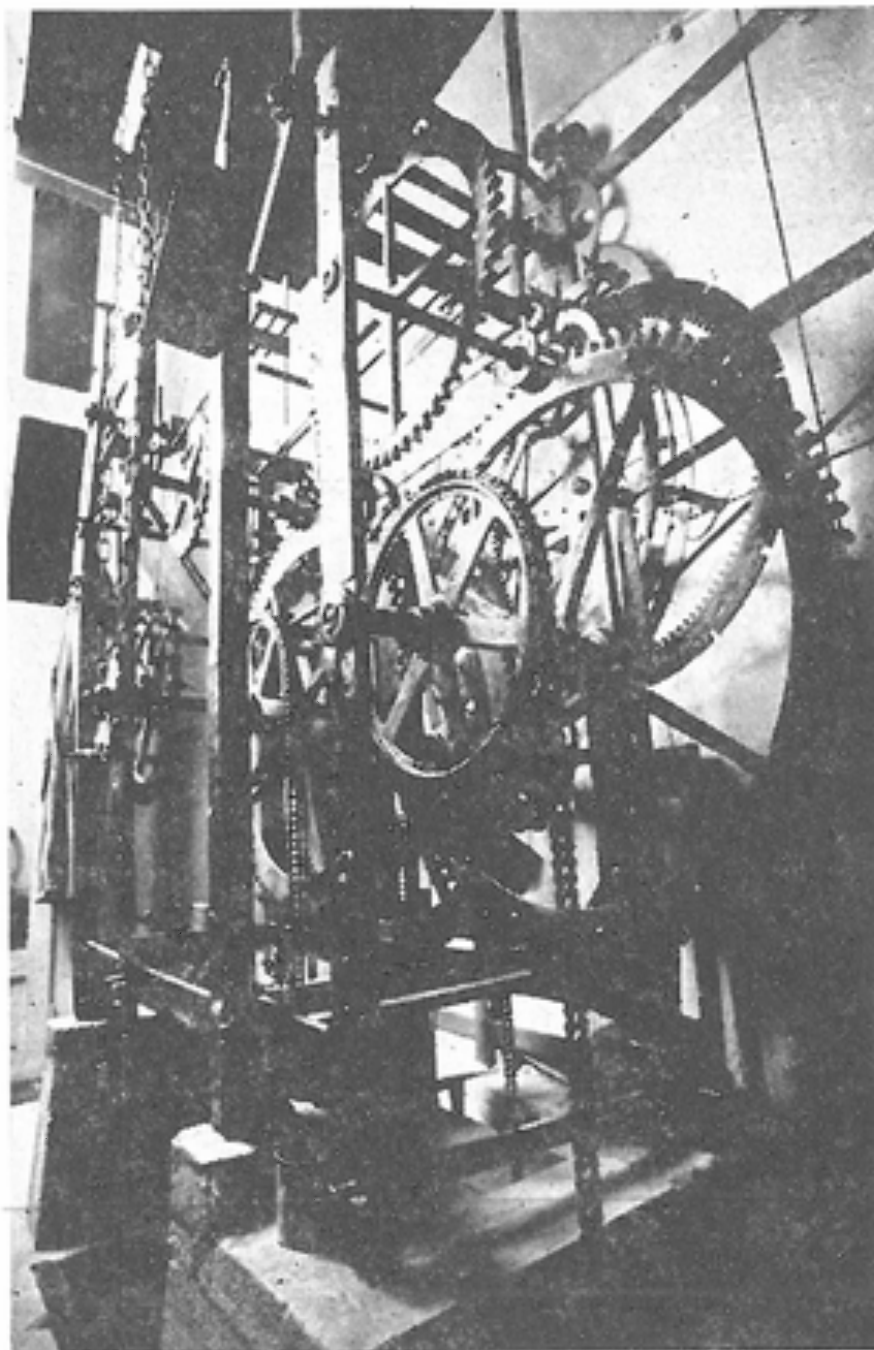
⁵) knihtiskař, matematik, výrobce globů (1571—1638), žák Tychona de Brahe



Obr. 1. Číselník pražského orloje. Čteme: Občanský čas poledne, Slunce v horní kulminaci. Hvězdný čas 10 hodin. Staročeský čas 17 hodin po posledním západu Slunce, tj. 7 hodin před Slunce západem. Přirozený (planetní) čas 6 hodin. Slunce přechází ze znamení Lva do znamení Panny. Měsíc v úplňku na hranici znamení Vodnáře a Ryb v dolní kulminaci.

ručička svisle dolů (vzhůru). Na ručičce je posuvně umístěn zlatený sluneční disk (v dalším jen *disk*), jehož periodický roční posuv podél rafie mění poloměr kružnic opisovaných diskem. V době letního (zimního) slunovratu, kdy skutečné Slunce opisuje na obloze obratník Raka (Kozoroha), je denní kružnice opsaná diskem největší (nejmenší). Tyto obě dráhy jsou na orloji vyznačeny kružnicemi znázorňujícími nebeské obratníky. V tom pojetí je tedy hodinový kruh (*číselník*) obrazem nebeské sféry a je v literatuře o orloji označován stručně jako *sféra*.

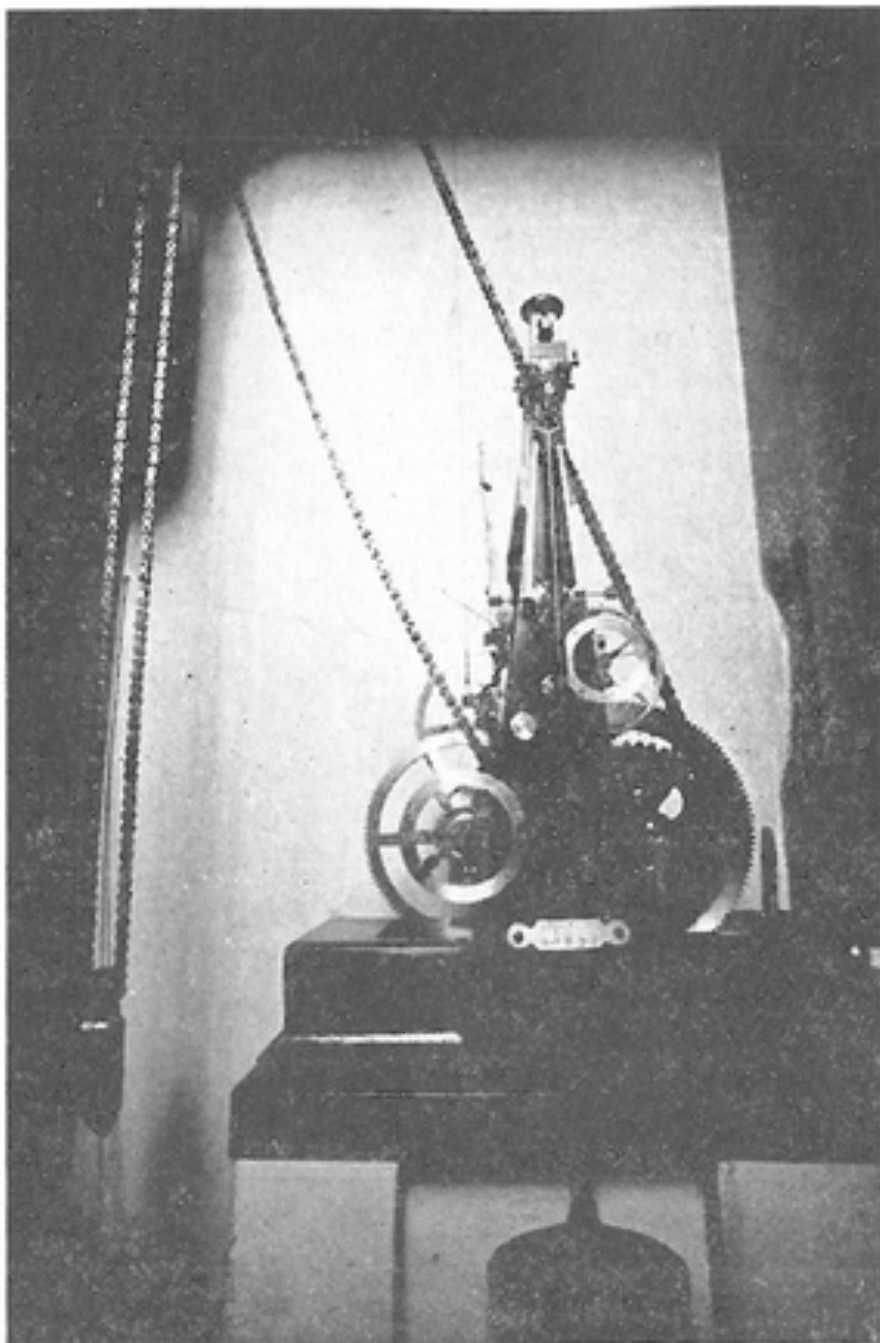
Kružnice opsaná diskem *v době rovnodennosti* (disk je na rafii mezi krajními polohami) je na sféře vyznačena jako nebeský rovník. Slunce vychází (zapadá) v šest hodin ráno (večer), kdy horizontální rafie hodin ukazuje vlevo (vpravo). Horní (dolní) polokružnice dvacetičtyřhodinové dráhy disku na sféře v době rovnodennosti odpovídá dennímu (nočnímu) oblouku skutečného Slunce. Vyrůstá-li (klesá-li) denní oblouk Slunce, zvětšuje (zmenšuje) se poloměr dráhy disku a jeho dráha na sféře se přibližuje obratníku Raka (Kozoroha). Na sféře je světle a tmavě rozlišen obor denních a nočních slunečních oblouků. Hranice světlého



Obr. 2. Hlavní mechanismus orloje. Na levé straně je patrna část řídicího chronometru (obr. 3). Na pravém kraji stroje, přivráceném ke sféře, je trojice kol z obr. 4.

a tmavého pole v levé (pravé) části sféry odpovídá slunečním východům (západům).

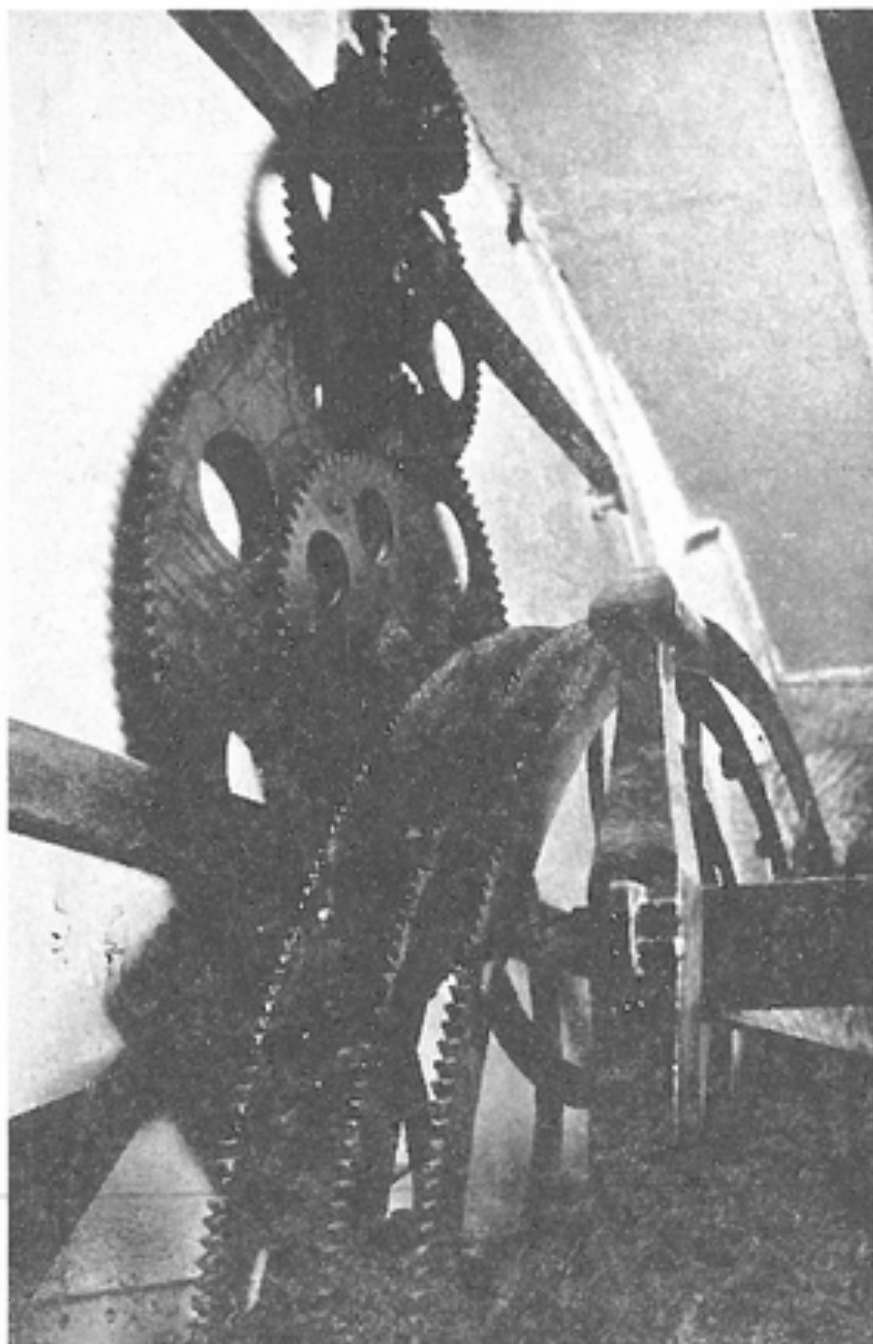
Vnější časový kruh je vzhledem k průběžnému — gotickému číslování 1, 2, ..., 24 nazýván *čtyřiadvacetník*. Odpovídá staročeskému počítání hodin od Slunce západu; tomu tedy přísluší hodina 24. S ohledem na proměnné doby slunečních západů je čtyřiadvacetník *pohyblivý*. Jeho pohyb je řízen tak, aby v době, kdy disk přechází ze světlé do tmavé



Obr. 3. Moderní srdce orloje, kyvadlový chronometr.

oblasti sféry, byla 24. hodina u zlaceného znamení sluneční ruky.

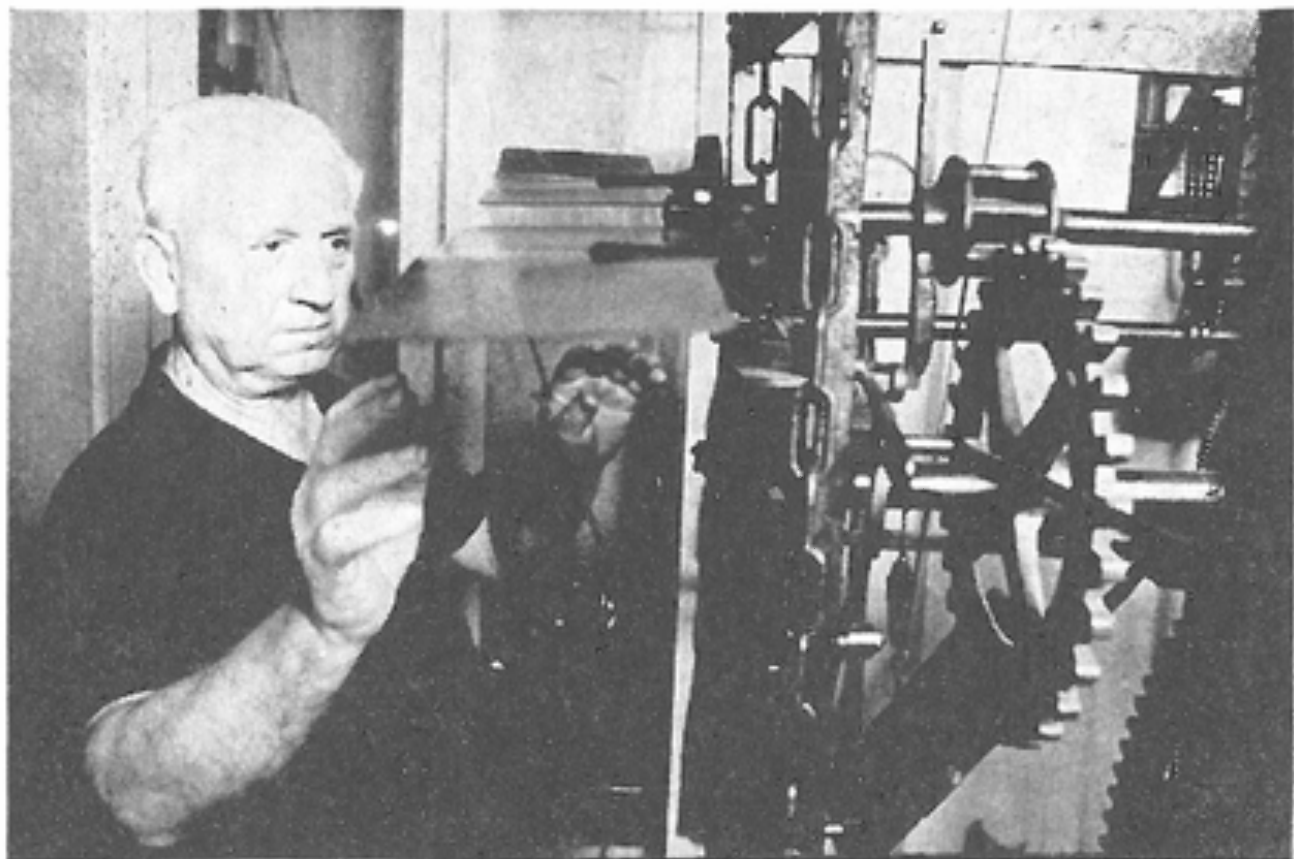
Z kraje číselníku mezi římským číslováním občanských hodin vychází soustava třinácti zlacených křivek směřujících k centrálnímu planiglobu. Dvanáct z nich je při vnitřní hranici římského číslování označeno arabsky 1 až 12. Poslední, s označením 12, je rozhraním světlé a tmavé části v pravé polovině sféry — odpovídá tedy západu Slunce (*occusus*). První, nečíslovaná, je rozhraním v levé polovině; vyznačuje sluneční východy (*ortus*). Tvar křivek je volen tak, že při různých ročních polohách disku připadají mezi jednotlivé křivky stejné úhlové úseky, tj.



Obr. 4. Trojice soustředných kol řídících pohyb zvířokruhu, Slunce a Měsíce.

dvanáctiny doby mezi východem a západem Slunce. Z polohy disku v poli křivek lze tedy vyčíst, kolikátá dvanáctina sluneční cesty nad obzorem právě probíhá, tzv. *přirozenou hodinu*. V astrologii byl příslušný údaj směrodatný pro určení planety, která právě vládne (*regent*), takže arabské číslování (*planetník*) určuje *hodiny planetní*. Podle dobové zprávy „pro obecný lid nebyly, jen pro učené“

Na společné ose se sluneční rafí se otáčí *pás zvířokruhu* (v dalším *zvířetník*). Jeho excentrické umístění je podstatnou myšlenkou pro zobrazení denního a nočního pohybu disku, vázaného na vnější obvod



Obr. 5. Mistr Vesecký justuje tlumící větrníky.

zvířetníku, který tedy na sféře vyznačuje ekliptiku (ve staré terminologii *sluník*). Oproti disku se zvířetník otáčí poněkud rychleji: roční počet jeho otoček je o jednu větší než počet otoček disku. Projde tedy disk během roku — v kladném smyslu — postupně nad všemi dvanácti znameními zvířetníku, či jinak řečeno: celý zvířetník podeběhne — v záporném smyslu — během roku pod diskem. Otáčení zvířetníku tak odpovídá otáčení Země, tj. měření hvězdného času. Z polohy zvířetníku lze tedy hvězdný čas číst. K tomu účelu je na rozhraní znamení Ryb ♉ a Berana ♈, tj. v místě jarního bodu (jeden z obou průsečíků nebeského rovníku s ekliptikou a tedy i zobrazeného rovníku sféry s vnější hranicí zvířetníku), upevněna k zvířetníku rafi se zlatou hvězdíčkou. Její pohyb odpovídá pohybu jarního bodu nad místním obzorem a na pravé polovině orloje ukazuje v římském číslování hvězdný čas. Po průchodu hvězdíčky nejnižším bodem (12 hodin hvězdného času) je třeba si při určování hvězdného času představit na místě levého číslování I až XII návazné pokračování z pravé poloviny XIII až XXIV. V tomto smyslu představuje konstrukce sféry jednu z řady variant starověkých a středověkých astronomických přístrojů, zvaných *astroláby*. Jejich teorie byla v době vzniku orloje samostatnou universitní přednáškou.

Na společné ose s diskem se otáčí měsíční koule, která (podobně jako



Obr. 6. Pohled z kapitánského můstku orloje s jižní věží Týnského chrámu.

disk) je vázána na vnější hranici zvířetníku. Její pohyb je řízen tak, že vzájemná poloha vůči disku odpovídá současné poloze Slunce a Měsíce při pozorování se Země; měsíční koule prochází nad jednotlivými znameními zvířetníku ve shodě s pohybem Měsíce na obloze. Např.: v novu (úplňku) jsou rafie měsíční koule a disku souhlasně (protisměrně) rovnoběžné, v době poslední (první) čtvrti měsíční koule předchází (se zpožďuje) vzhledem k dennímu pohybu disku o 90° , tj. o úhlový rozsah tří zvířetníkových znamení. Vtipná konstrukce v měsíční kouli (sestavující ze dvou dutých polokoulí) umožnila, aby orloj ukazoval měsíční fáze.

Omezili jsme se na stručný popis orloje. V zájmu stránkových možností nepřihlížíme k bohaté historii. V tom ohledu upozorňujeme na obsáhlou kritickou studii Zdeňka Horského a Emanuela Procházky v IX. svazku Sborníku pro dějiny přírodních věd a techniky, ČSAV 1964, str. 83. Na 64 stránkách, uzavřených citací 104 pramenů, je vyčerpávajícím způsobem zachycen současný stav bádání o stáří orloje.

Závěrem připomínáme záslušnou a obětavou práci mistra Rudolfa Veseckého (*16. 4. 1908), který se orloji věnuje již 38 let. Nejde jen



Obr. 7. Komůrka apoštolů. Se skeptickým úsměvem Suchardova ztvárnění opouští svatý Tomáš otevřené okénko.

o občasné odstranění spadlého námrazového stalaktítu do citlivého chronometru, který je zdrojem minutových impulsů. Soustavnou péči vyžaduje dohlížení, čištění, promazávání technicky náročných mechanismů. Přejeme mu do radostné práce na unikátní světové vzácnosti mnoho dalších let!

Mimořádné výročí I. Newtona

Číslo 333 se dovoláváme v některých říkánkách a je tedy pro nás svým způsobem mimořádné. Použijeme ho i k zcela neoficiální vzpomínce na mládí slavného fyzika Newtona, od jehož narození uplynulo 25. 12. právě 333 let.

Mladý Isaac byl chudý, dost neduživý a ve škole, kam přišel ve 12 letech studovat, patřil mezi prospěchově nejslabší žáky. Mezi spolužáky si vytrpěl své, byl často bit a urážen. Traduje se, že v jedné takové šarvátce mu nejlepší žák třídy dal ránu do žaludku a ještě se mu vysmí-

val jako hlupákovi. Ponížený Newton si prý v té chvíli umínal, že ho musí předčít ve studiu; začal houževnatě studovat a během tří let se sám stal prvním žákem třídy. Stal se však i samotářem, nehrál si se svými vrstevníky, volný čas trávil sestrojováním mechanických hraček, přístrojů a modelů strojů (větrný mlýn, vodní hodiny, kočárek na pero, sluneční hodiny apod.), pro dcerku své bytné sestrojil dokonce mlýn poháněný uvnitř zavřenou myší. I dětská hračka — papírový drak — mu poskytla problém, hledal, počítal a experimentálně zjišťoval, kde přivázat draka, aby rychle stoupal.

V 15 letech věku ho podruhé ovdovělá matka povolala domů, aby hospodařil na statku. Isaac však byl nešetrný v tom smyslu, že si stále kupoval knihy, při zemědělské práci byl nespolehlivý — zaujal-li ho nějaký vědecký problém, hluboce se zamýšlel a zapomínal na svět kolem sebe. A tak byl po přímluvě a finanční pomoci strýce vyslán na studia do Cambridge, kde získal stipendium. O jeho dalších osudech a vědecké práci se bude hodně psát v r. 1977, kdy celý svět vzpomene 250 let od jeho úmrtí. Zatím jsme si připomněli několik drobností z jeho mládí.

Š. J.

Benjamin Franklin - veda, sloboda a vlasť

DUŠAN JEDINÁK, Gymnázium Topolčany

*„Vytrhol nebesiam blesk
a tyranom žezlo“*

d'Alembert

Prikladom, kde sa v jednej osobe spojili dobré vlastnosti vedca a politika, sú osudy štátnika, spisovateľa a vynálezcu *Benamina Franklina*.

V rodine mydlára sa v Bostone 17. januára 1706 ako desiate dieťa narodil B. Franklin. Po neradostných rokoch detstva sa už ako desaťročný začal zarábať vlastnou prácou. Pracoval v tlačiarňi svojho brata, vystriedal niekoľko zamestnaní v New Yorku, Filadelfii i v Londýne. V roku 1728 si zriadil vo Filadelfii vlastnú knihtlačiareň, vydával noviny, do ktorých aj sám prispieval. Vo voľnom čase veľa študoval, aby si rozšíril svoje vedomosti a jazykové znalosti. Zúčastňoval sa na činnostiach pre verejné blaho.

Jeho túžba po fyzikálnom poznaní vyvrcholila pri populárnej prednáške z elektriny v roku 1746. Odvtedy začal Franklin skúmať elektrické javy sám. Usporiadal prvé poznatky o elektrine a vyslovil tzv. unitárnu teóriu elektrických javov. Zaviedol pojem elektrického kladného a záporného náboja. Vložením skla medzi dve olovené platne vynašiel prvý doskový kondenzátor (Franklinova doska). Benjamin Franklin robil



a opísal rôzne pokusy s elektrinou, napr. elektrický vietor, sršanie elektriny z hrotu apod. Výsledky zverejnil v spise „Experimenty a pozorovania z elektriny vykonané vo Filadelfii“, ktorý sám vydal v roku 1751. Neskôr bolo toto dielo preložené do viacerých jazykov a presvedčilo aj Kráľovskú spoločnosť v Londýne, aby zvolila B. Franklina za svojho člena. Franklin sa zaoberal aj vyžarovaním a vedením tepla (navrhol úsporné a výhrevnejšie kachle), meteorológiou (objasnil vznik severovýchodných búrok na pobreží Novej Anglie) a hydrodynamikou (práca na mape Golfského prúdu).

Vedecké zásluhy vo svete si nesporne získal experimentálnym dôkazom elektrickej podstaty blesku, objavením a zostrojením bleskozvodu. To, čo vyslovil anglický prírodovedec *Wall* a tvrdil *S. Gray*, pokusmi s lietajúcim šarkanom v rokoch 1748—1752 dokázal Benjamin Franklin. Zviedol elektrický náboj z búrkových mrakov pomocou mokrej nite na kľúč, z ktorého potom priblížením k iným kovovým predmetom preskakovali iskry sprevádzané praskotom ako pri pokusoch s výbojmi na trecej elektrike. Pokračovanie v riskantných pokusoch (sám Franklin raz po zasiahnutí elektrickým prúdom stratil vedomie; v Petrohrade zahynul pri pokusoch s atmosférickou elektrinou *G. Richman*, spolupracovník *M. V. Lomonosova*) priviedlo Franklina k poznaniu, že kovové tyče „prťahujú“ blesk, a že je možné tento výboj zneškodniť blesko-

zvodom. V dopise svojmu londýnskému priateľovi *Collinsovi* píše Franklin toto: „Blesk železnú tyč neopustí, pretože je dobre vodivá. Neprenikne svorkami do steny, lebo stena je zo zle vodivého stavebného materiálu. Omnoho skôr sa môže stať, že elektrina zo steny prejde do ocelevej tyče, lebo týmto vodičom sa dostane do zeme rýchlejšie. Dolný koniec tyče musí byť zavedený do zeme tak hlboko, až dosiahne miesta trvale vlhkého.“

Je treba pripomenúť, že u nás v *Príměticiach* pri Znojme postavil 15. VI. 1754 uzemnený bleskozvod *Prokop Diviš*; v Rusku skonštruoval bleskozvod *M. V. Lomonosov*; v Ženeve to bol švajčiarsky prírodovedec *H. B. de Saussure*. Predpokladalo sa, že bleskozvod vytvorí priaznivejšie podmienky pre vznik blesku, hlavne v prípade zakončenia ostrým hrotom. Neskoršie poznatky s výbojom v plynch však ukázali, že na obyčajnom bleskozvode tvar zakončenia nie je rozhodujúci, a že tichý výboj neutralizuje náboj oblaku až vtedy, ak koniec bleskozvodu je na úrovni porovnateľnej s výškou mraku.

Druhou túžbou Benjamína Franklina, ktorý hlásal, že vedecké poznatky majú patriť celému ľudstvu, a preto si nedal svoj objav patentovať, bolo snaženie sa vo veciach verejného dobra. Založil spolok pre vzdelávanie remeselníkov a obchodníkov, akadémiu pre vzdelávanie mládeže, vytvoril prvú verejnú knižnicu v Amerike. Ako poslanec pennsylvánskej snemovne za Filadelfiu (od roku 1747) podporoval každú sociálnu a verejnoprospešnú činnosť. Bol aj generálnym poštmajstrom všetkých anglických kolónií v Amerike. V hnutí za nezávislosť amerických kolónií bojuje a podnecuje novinárskymi článkami, túto zásadu proklamuje pred anglickým parlamentom a obhajuje aj pred Tajnou radou v Anglicku. Po vyhlásení Deklarácie nezávislosti 4. VII. 1776, ktorej bol redaktorom, sa B. Franklin zúčastnil na vypracovaní ústavy USA (1787), stal sa prezidentom štátu Pennsylvánie a bol prvým veľvyslancom Spojených štátov amerických v Európe v Paríži. V perspektívach ľudskosti neustupuje ani v boji proti utláčaniu černochovcov a v snahe po zrušení otroctva.

Benjamin Franklin zomrel vo Filadelfii 17. apríla 1790. Jeho slová „Bolo by pekné, keby bolo možné naučiť žiakov všetko, čo je užitočné, aj všetko, čo ozdobuje človeka; ale umenie je dlhé a čas krátky. Preto je potrebné, aby žiaci študovali to, čo je pravdepodobne najužitočnejšie a najozdobnejšie“ sú odkazom človeka chápaného hodnotu vedomostí i ľudskosti.

O p r a v a (str. 76):

Správný text 3. súťažných úloh z matematiky:

$$a \geq b \Leftrightarrow \cos \alpha \leq \frac{\sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

Sjezdy JČSMF a JSMF

Jednota československých matematiků a fyziků (JČSMF) a Jednota slovenských matematikov a fyzikov (JSMF) se dohodly, že budou pořádat své sjezdy na stejném místě a ve stejnou dobu — ve Vsetíně ve dnech 22. až 24. září 1975. Protože náš časopis vychází za odborné péče JČSMF, povězme si stručně o této důležité události v životě obou Jednot.

Po zahájení sjezdů a obvyklých spolkových náležitostech vyslechli delegáti a pozvaní hosté několik referátů o rozvoji našich vědních oborů za uplynulých třicet let a o celostátních problémech obou Jednot. Odezněly též dvě informativní přednášky odborného rázu (o algoritmech jako centrálním pojmu informatiky a o struktuře a vývoji vesmíru). V oddělených zasedáních byla probrána činnost JČSMF a JSMF za uplynulé období 1972—75 a načrtnut program pro léta 1975—78. Jedním z důležitých bodů byla volba obou ústředních výborů, náhradníků a revizorů. Předsedou JČSMF byl opět zvolen akademik *Josef Novák*, předsedou JSMF prof. dr. *Václav Medek*. Rozsáhlá diskuse se týkala všech možných bodů, jež souvisejí s matematikou a fyzikou a mluvilo se tu samozřejmě i o našich Rozhledech. Podrobná zpráva o sjezdech bude otištěna ve spolkovém časopise *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*.

Často se mladí matematikové a fyzikové táží, co jim může dát práce v Jednotě. Tato společnost, jež u nás rozvíjí svou činnost už déle než sto let, sdružuje ve svých řadách matematiky a fyziky z vysokých škol a výzkumných ústavů, zaměřuje se i na středoškolské profesory a učitele obou předmětů — a v neposlední řadě též na studenty. Podporuje ve svých sekcích činnost vědeckou i pedagogickou, vydává spolkový časopis a udržuje vědecké styky s podobnými společnostmi v zahraničí. Každoročně cestuje díky Jednotě několik matematiků a fyziků do zahraničí na vědecké konference nebo studijní pobyt. Pro mladé vědecké pracovníky vypisuje JČSMF i JSMF ceny a naši čtenáři vědí, že jsou obě Jednoty zapojeny do matematické a fyzikální olympiády. Konečně sleva při koupi vědeckých a odborných publikací, kterou může člen získat, není také zanedbatelná.

Přejeme oběma Jednotám, aby se jejich činnost zdárně rozvíjela i v dalším období a aby k tomu přispěla i mladá generace našich matematiků a fyziků.

J. S.

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Dodatkem k článku „Naše účast na XVII. MMO v Burgasu“ uveřejníme text a řešení prvních úloh:

1. Necht x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou reálná čísla

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n,$$

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n.$$

Dokažte, že pro libovolnou permutaci $z_1, z_2, \dots, z_n$ čísel $y_1, y_2, \dots, y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

Československo, 6 bodů

Řešení: Dokazovanou nerovnost

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

přepíšeme na tvar

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n z_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i z_i.$$

Poněvadž zřejmě

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

je nerovnost (1) ekvivalentní nerovnosti

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Označme

$$S_k = \sum_{i=1}^k y_i, \quad T_k = \sum_{i=1}^k z_i$$

pro $k = 1, 2, \dots, n$ a položíme $S_0 = T_0 = 0$. Bude pak

$$y_k = S_k - S_{k-1}, \quad z_k = T_k - T_{k-1}$$

pro každé $k = 1, 2, \dots, n$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k y_k &= \sum_{k=1}^n x_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^n x_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} S_k = \\ (3) \quad &= x_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) S_k - x_1 S_0. \end{aligned}$$

Obdobně je také

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n x_k z_k = x_n T_n + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) T_k - x_1 T_0.$$

Poněvadž však čísla $z_1, z_2, \dots, z_n$ tvoří jen permutaci čísel $y_1, y_2, \dots, y_n$, je nutně $S_n = T_n$. Pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ pak platí $S_k \geq T_k$, neboť je $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$. Dále je též $x_k \geq x_{k+1}$, a tedy $x_k - x_{k+1} \geq 0$ pro $k = 1, 2, \dots, n-1$, takže

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) S_k \geq \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) T_k.$$

Odtud a z rovností (3) a (4) již vyplývá dokazovaná nerovnost (2), a tedy i (1).

Jiné řešení této úlohy je založeno na přímém důkazu nerovnosti (1), tj. bez redukce na (2), a to indukcí podle n . Místo indukčního kroku je ostatně možno se též odvolat na známou skutečnost, že každou permutaci lze složit z transpozic.

2. Nechť

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

je nekonečná posloupnost přirozených čísel taková, že

$$0 < a_k < a_{k+1} \quad \text{pro } k = 1, 2, 3,$$

Dokažte, že nekonečně mnoho členů a_m této posloupnosti lze vyjádřit ve tvaru

$$a_m = xa_p + ya_q, \quad p \neq q,$$

kde x, y jsou celá kladná čísla.

Anglie, 7 bodů

Řešení: Členy posloupnosti

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n,$$

s výjimkou a_1 rozdělíme do a_1 tříd podle zbytků při dělení číslem a_1 . V každé neprázdné třídě vezmeme nejmenší číslo a_q ; všechny další

členy a_m posloupnosti (1), patřící do téže třídy jako a_q , se od a_q liší o násobek čísla a_1 , takže je lze psát ve tvaru

$$(2) \quad a_m = a_q + ya_1,$$

kde y je celé kladné číslo. Poněvadž všech tříd je a_1 , tzn. konečný počet, vidíme, že nejen nekonečně mnoho členů posloupnosti (1), ale dokonce všechny členy až na nejvýše $a_1 + 1$ výjimku lze vyjádřit v požadovaném tvaru (2), přičemž se navíc (aspoň) jedno z čísel x, y rovná 1.

nejmladším čtenářům

Počtářské kuriozity

Čtenáři z prvních ročníků gymnazií si v prvních měsících školního roku připomínali platné věty pro výpočty se zlomky, s mocninami i odmocninami a vehementně vyvraceli pomocí protipříkladů tvrzení, že pro každá čtyři přirozená čísla platí

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}, \quad a^r \cdot a^s = a^{rs} \text{ apod.}$$

Nejednou se však stává, že i špatný postup vede ke správnému výsledku; přesvědčte se například, že v těchto případech lze vynechat (zanedbat) zlomky:

$$\begin{aligned} \left(6 + \frac{1}{4}\right) \left(5 - \frac{1}{5}\right) &= 6 \cdot 5, & \left(3 + \frac{6}{11}\right) \left(4 - \frac{8}{13}\right) &= 3 \cdot 4 \\ \left(21 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(4 - \frac{1}{16}\right) &= 21 \cdot 4, & \left(9 + \frac{9}{32}\right) \left(11 - \frac{1}{3}\right) &= 9 \cdot 11 \end{aligned}$$

Jistě máte oprávněné pochybnosti, že by se vám takové pohodlí vždy vyplatilo, a pohotově najdete protipříklady, které vyvrátí „větu“, že

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) \cdot \left(k - \frac{m}{n}\right) = a \cdot k \text{ pro libovolná přirozená } a, b, c, k, m, n.$$

Na druhé straně však můžete pátrat, jak lze najít takové šťastné případy, kdy je dovoleno zlomky ignorovat. Sladké tajemství spočívá v této větě:

Pro každá čtyři přirozená čísla a, b, c, d platí

$$\left[a + \frac{a(d-c)}{c} \right] \left[b - \frac{b(d-c)}{d} \right] = a \cdot b$$

Dokažte tuto větu a pokuste se o rozšíření její platnosti do dalších číselných oborů, třeba pro iracionální a, b .

Jak by se vám líbilo škrtání exponentů v těchto zlomcích:

$$\frac{5^2 + 7^2}{\left(\frac{74}{12}\right)^2} = \frac{5 + 7}{\frac{74}{12}}, \quad \frac{13^2 - 11^2}{24^2} = \frac{13 - 11}{24} \quad ???$$

$$\frac{5^3 + 7^3}{5^3 + 2^3} = \frac{5 + 7}{5 + 2}, \quad \frac{3^3 - 7^3}{3^3 + 10^3} = \frac{3 - 7}{3 + 10} \quad ???$$

Je to lákavé, ale přesto sotva přijatelné jako obecný recept. Z prvního příkladu snadno odhadnete tvar zlomku, který lze zjednodušit vyznačeným způsobem ($74 = 5^2 + 7^2$, $12 = 5 + 7$); vyslovte a dokažte příslušnou větu. Druhý případ je pak jen znaménkovou obměnou prvního. Třetí a čtvrtý příklad jsou zvláštními případy stejné věty o rovnosti dvou výrazů (čísla 2 a 10 jsou rozdíly základů mocnin zapsaných v čitatelích).

Objevte sami, proč lze v některých případech pardonovat tiskařského šotka, když vytiskne exponenty jako druhé číslice „spadlé na linku“, například:

$$\text{místo } 7^2 - 3^2 \text{ vytiskne } 72 - 32.$$

A ejhle! Oba rozdíly jsou si rovny. Určete všechny rozdíly druhých mocnin přirozených čísel, u kterých se taková tisková chyba se šťastným koncem může vyskytnout.

Dobře dopadnou i jiné šotkovy kousky:

$$3^4 \cdot 425 = 34425,$$

$$2^5 \cdot 9^2 = 2592,$$

projde i tato nepozornost s tečkou:

$$73 \cdot 9 \cdot 42 = 7 \quad 3942.$$

Nakonec se potěšte tím, že ve zvlášť vybraném případě vlastně na exponentech vůbec nezáleží:

$$\begin{aligned} \frac{2^3 + 3^3 + 10^3 + 11^3}{1^3 + 5^3 + 8^3 + 12^3} &= \frac{2^2 + 3^2 + 10^2 + 11^2}{1^2 + 5^2 + 8^2 + 12^2} = \\ &= \frac{2 + 3 + 10 + 11}{1 + 5 + 8 + 12} \end{aligned}$$

Vidíte, že leccos je dovoleno i v říši čísel, ale jsou to pěšinky úzké, nepříliš bezpečné. Raději se držte spolehlivých obecně platných vět o počítání s čísly.

Š. J.

recenze

K. Križalkovič, A. Cuninka, O. Šedivý:

Riešené úlohy z modernej matematiky

Vydalo: ALFA, Bratislava 1974. 560 stran, 216 obrázků, vázaná 29,50 Kčs.

Řešené úlohy z moderní matematiky jsou další publikací osvědčené trojice autorů, s jejichž knihami *Riešené úlohy na nerovnice*, 500 riešených úloh z geometrie, 500 riešených slovných úloh z matematiky se jistě již mnohý z čtenářů setkal. Úkolem knihy je, podle autorů, poskytnout čtenáři základní informace z některých částí moderní matematiky, a to formou řešených úloh.

Sbírka je rozdělena do 12 kapitol. Každá kapitola obsahuje stručný přehled základních pojmů a vztahů, řešené úlohy a cvičení, jejichž řešení najde čtenář na konci knihy.

První kapitola je nejrozsáhlejší. Nese název *Úvod do výrokovej logiky a teórie množín*. Autoři v ní předkládají zajímavé příklady na výroky a výrokové formy, na operace s nimi, zabývají se stavbou matematické věty a různými typy jejích důkazů

množinami a množinovými operacemi a Vennovými diagramy.

Názvy dalších kapitol vystihují i jejich obsah: II. *Reálne čísla*, III. *Binárne relácie*, IV. *Zobrazenia* (druhy zobrazení, zobrazení inverzní, skládání zobrazení), V. *Funkcie* (vlastnosti funkce, graf, základní, elementární funkce, funkce složená) VI. *Niektoré druhy rovníc*, VII. *Úvod do planimetrie* (základní rovinné útvary a jejich vlastnosti, konstruktivní úlohy), VIII. *Zhodné zobrazenie v rovine*, IX. *Podobné zobrazenie v rovine*, X. *Základné útvary v priestore*, XI. *Polohové vlastnosti lineárnych útvarov. Vektorová algebra* (operace s vektory, afinní vektorový prostor, analytická geometrie), XII. *Metrické vlastnosti lineárnych útvarov* (velikost vektoru, kolmost vektorů, skalární součin).

Svým obsahem je sbírka určena studentům I. a II. ročníku gymnasií a posluchačům I. ročníku pedagogických fakult. Bude však dobrým pomocníkem i učitelům, neboť v ní najdou množství zajímavých, netradičně řešených úloh.

Anežka Wohlmuthová

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

theory
thickness
third
thirteen
thirty
thousand
thousandth
three
 three-digit
 three-dimensional
time
times
ton
tool
topological
topology
torus
touch
trace of a line
trace of a plane
transcendental
transformation
 one-one transformation
transitive
translation
transpose
transversal
trapezium
trapezoid
triangle
 acute triangle
 congruent triangles
 equilateral triangle
 isosceles triangle
 obtuse triangle
 right(-angled) triangle
 scalene triangle
triangle inequality
triangular
triaxial

teorie
tloušťka
třetí, třetina
třináct
třicet
tisíc
tisící, tisícina
tři
 trojciferný
 trojrozměrný
čas
krát
tuna
nástroj
topologický
topologie
anuloid
dotýkat se
stopník
stopa
transcendentní
zobrazení, úprava
 vzájemně jednoznačné zobrazení
transitivní
translace, posunutí
transponovat
příčka
lichoběžník
různoběžník
trojúhelník
 ostroúhlý trojúhelník
 shodné trojúhelníky
 rovnostranný trojúhelník
 rovnoramenný trojúhelník
 tupoúhlý trojúhelník
 pravoúhlý trojúhelník
 obecný trojúhelník
trojúhelníková nerovnost
trojboký, trojúhelníkový
trojosý

trichotomy
trigonometric(al) equation
trigonometric function
trigonometry
trihedral
trinomial
triple
truncated

true
truth set
twelfth
twelve
twenty
twentieth
twisted
twice
two
two-digit
two dimensional space
type

trichotomie
goniometrická rovnice
goniometrická funkce
trigonometrie
trojhran
trojčlen
trojice, trojnásobný
seříznutý (rovinou nerovnoběžnou
s podstavou)
skutečný, pravdivý
obor pravdivosti
dvanáctý, dvanáctina
dvanáct
dvacet
dvacátý, dvacetina
zborcený, prostorový
dvakrát
dva
dvojciferný
dvojrozměrný prostor
druh, typ

U

unbounded
undefined
undetermined
uniform
 uniform scale
uniformly convergent
union
unique
uniquely determined
uniquely invertible correspondence
uniqueness of solution
unit
 unit circle
 unit cube
 unit set
united
universal set
unknown
unlimited
untrue
upper
 upper bound
 upper estimate
use

neohraničený, neomezený
nedefinovaný
neurčený, nedostatečně určený
stejnoměrný, rovnoměrný
 lineární stupnice
stejnoměrně konvergentní
sjednocení, součet
jediný, jednoznačný
jednoznačně určené
prosté zobrazení
jednoznačnost řešení
jednotka, jednotkový
 jednotková kružnice
 jednotková krychle
 jednoprvková množina
incidentní, sjednocené
základní množina
neznámý
neomezený
nepravdivý
horní
 horní mez, majoranta
 horní odhad
použití

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

6



ROČNÍK 54
ÚNOR 1976

6

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1976.

OBSAH

Dr. R. Wohlgemuthová: Historické místo únorového vítězství v roce 1948 v našich dějinách	241
Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Duální čísla v přímkové geometrii	243
V. Blažek: Apolloniovy úlohy	251
L. Dvořák, Z. Kupka: Praktické využití kapalných krystalů	255
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Astronomické katalogy	259
Naše soutěž	265
Olympiády	268
J. Voříšek, S. Šmakal: Příjímací zkoušky z matematiky na vysokých školách inženýrských směrů	271
Matematické zábavy	278
S. Horák: Nejmladším čtenářům	283
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	286
H. Hofmanová: Slovníček anglicko-český	3. a 4. str. obálky

Historické místo únorového vítězství v roce 1948 v našich dějinách

PhDr. RENATA WOHLGEMUTHOVÁ, CSc., UK Praha

V moderních dějinách můžeme zaznamenat řadu historických událostí, které napomáhají urychlení společenského vývoje. Také únorové události v Československu v roce 1948 patří k takovým historickým předělům. Zaujímají významné místo nejen v procesu naší revoluce, ale jsou i příspěvkem k zformování světové socialistické soustavy. Průběh šesti únorových dnů v roce 1948 vešel do historie jako rozhodující mocenské střetnutí o další charakter a vývoj v Československu a jeho místo v třídně rozděleném světě. Díky únorovému vítězství se však podařilo, že byl odražen pokus vnitřních i zahraničních reakčních sil o zvrácení vývoje, který pracující lid pod vedením KSČ zvolil v roce 1945.

Únorové vítězství bylo výsledkem dlouholetého revolučního zápasu dělnické třídy a jejího předvoje - komunistické strany. Ukončilo proces přerůstání revoluce národně demokratické v revoluci socialistickou a otevřelo cestu k budování nové etapy našich dějin, k budování socialistické společnosti. Únor 1948 se tak stal východiskem a počátkem nástupu závažných socialistických přeměn ve všech oblastech společenského života. Tyto revoluční přeměny československé společnosti byly složité a obtížné, ale vítězné. V historicky krátké době zvítězily socialistické vztahy ve všech odvětvích národního hospodářství a podařilo se vybudovat rozvinutou socialistickou republiku. Rozmach socialistické výroby zabezpečil i trvalý vzestup hmotné a kulturní úrovně našeho lidu. Zatímco buržoazie v předmnichovské republice nevyřešila žádnou ze základních sociálních, národnostních a mezinárodních otázek, prokázala dělnická třída pod vedením KSČ, že socialismus je schopen zajistit trvalý rozvoj Československé republiky, její mezinárodní bezpečnost a poskytnout lidu kvalitativně vyšší možnosti. Během krátké doby se podařilo dosáhnout velkých úspěchů při budování socialismu, což mělo podstatný vliv i na celkové postavení Československa ve světě. Naše republika se stala vyspělým průmyslovým celkem, státem dvou rovnoprávných národů Čechů a Slováků a nedílnou součástí světové socialistické soustavy.

Hodnotíme-li tedy s odstupem 28 let význam a odkaz Února 1948, rýsuje se zcela zřetelně jeho místo v dějinách jako historického předělu a zdroje významných poučení. Únorové vítězství prokázalo především životnost marxleninských idejí a jejich mezinárodní platnost. Znamenalo také mimořádně cenný příspěvek naší komunistické strany do zkušeností mezinárodního revolučního dělnického hnutí, neboť únor 1948 potvrdil a prověřil obecnou platnost marx-leninského učení i pro zemi, která buduje socialismus již v průmyslově rozvinutém celku.

V únoru 1948 se rovněž rozhodně potvrdily záruky, jež spočívaly v našem spojení se Sovětským svazem a ostatními lidově demokratickými státy, i rozhodnutí, že tato politika musí patřit i nadále k základním a trvalým hodnotám při zabezpečení naší socialistické společnosti.

Základní podmínkou vítězství čs. pracujícího lidu v únoru 1948 byla také skutečnost, že se dělnická třída stala vedoucí složkou již v předchozí etapě v procesu národní a demokratické revoluce let 1945—1948. Svého konečného vítězství dosáhla pak proto, že byla vedena zkušenou Komunistickou stranou Československa. Únor zůstane také navždy spojen s postavou Klementa Gottwalda, jehož politické mistrovství a schopnost tvořivého marxistického přístupu významně přispěly k zabezpečení únorového vítězství. K základním revolučním odkazům Února 1948 patří tedy i historická zkušenost, že socialismus je možno budovat jen pod vedením komunistické strany.

Letošní výročí únorového vítězství není pro nás tedy jen pouhou vzpomínkou, ale má stále aktuální platnost, neboť „nebýt Února, nebylo by naší socialistické přítomnosti“ Letošní výročí si připomínáme ve zvláště významném období dalšího všestranného rozvoje socialistické společnosti v Československu. Vstupujeme do roku hrdých bilancí a smělých perspektiv, jak je rýsuje XXV sjezd KSSS, a vyvrcholení příprav a všelidové aktivity k XV sjezdu KSČ. V trvalém spojení Února 1948 s touto současností je jeho nejvlastnější a nejzávažnější historický odkaz.

Duální čísla v přímkové geometrii

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

Jestliže za základní prvek geometrie roviny vezmeme přímku, pak mluvíme o *přímkové geometrii v rovině*. Bod je potom dán jako množina všech přímek, které jím procházejí¹⁾ v obdobě k přímce jako množině bodů na ní ležících atp.

Orientované přímky euklidovské roviny můžeme v analytické geometrii přiřadit duálním číslům.²⁾ Přitom je v rovině zvolena *polární soustava souřadnic* $\{O; o\}$ a přímka je dána duálním číslem

$$z = a + b\varepsilon = \operatorname{tg} \vartheta(1 + \varepsilon s),$$

kde a, b jsou reálná čísla, ε je jednotka, pro kterou $\varepsilon^2 = 0$, $2\vartheta = \Theta = \angle op$, $s = OM$ je souřadnice bodu M na orientované polární ose o , $M = o.p$ (obr. 1).

V tomto článku si všimneme některých přímkových příbuzností.

1) *Změna orientace* je dána příbuzností

$$w\bar{z} + 1 = 0, \quad (1)$$

kde (z) je daná přímka, (w) přímka k ní přiřazená.

Důkaz (obr. 1): Nechť $z = \operatorname{tg} \vartheta(1 + \varepsilon s)$, pak přímka opačné orientace je dána duálním číslem $w = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \vartheta \right) (1 + \varepsilon s)$ a úpravou postupně dostáváme

$$\begin{aligned} w &= -\operatorname{cotg} \vartheta(1 + \varepsilon s) = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} (1 + \varepsilon s) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta(1 - \varepsilon s)} = -\frac{1}{\bar{z}} \end{aligned}$$

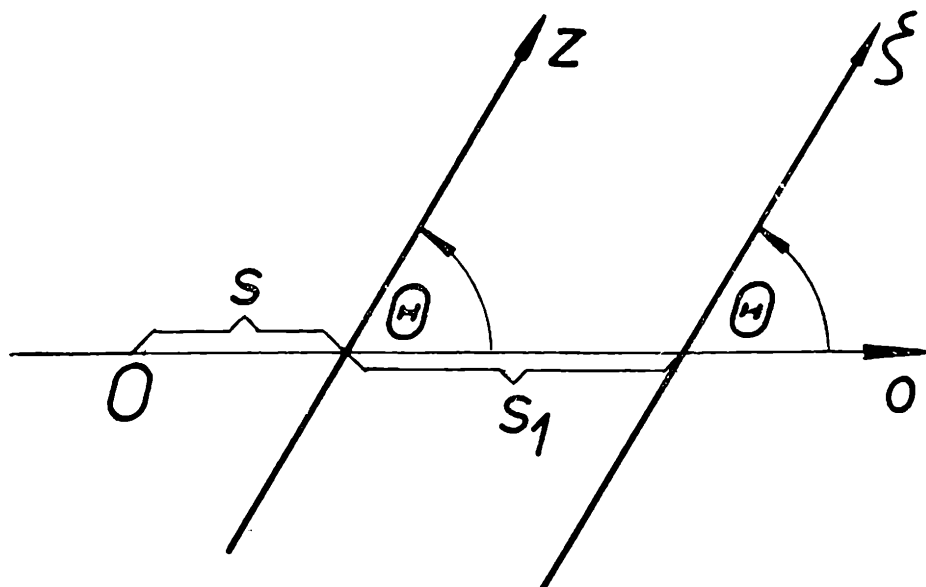
a odtud již plyne rovnice (1) hledané příbuznosti.

¹⁾ Tj. všech přímek svazku s vrcholem v tomto bodě. V. Hlavatý v knize *Projektivní geometrie I, II*; Praha 1944, 1945, užívá pro takto určený bod názvu hvězdice.

²⁾ Viz např. článek: K. Drábek, Duální čísla. *Rozhledy* (49), 1970–71, str. 13–16. Duální čísla v geometrii použil (pravděpodobně) jako první anglický matematik W. K. Clifford (1845–79), jak poznamenává na str. 257 F. Klein v knize *Vorlesungen über höhere Geometrie* (Přednášky o vyšší geometrii), Berlín 1926, 3. vyd.

$$z = \operatorname{tg} \vartheta(1 + \varepsilon s), \quad w = \operatorname{tg} \vartheta_1(1 + \varepsilon s_1)$$
$$w\bar{z} = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta_1 (1 + \varepsilon s_1)(1 - \varepsilon s) = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta_1 (1 + \varepsilon(s_1 - s)) = -1.$$
$$\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \vartheta_1 = -1, s_1 - s = 0.$$
$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} = -\operatorname{cotg} \vartheta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \vartheta \right), \operatorname{tg} \Theta_1 + \pi = \Theta,$$
$$s_1 = s,$$

3) Jestliže do algebry duálních čísel (více viz článek uvedený v pozn. 2) zavedeme definitoricky dvě zvláštní čísla, a to $\frac{1}{\varepsilon} = \omega, \frac{1}{0} = \infty$, potom není třeba v důkazu pro změnu orientace předpokládat, že $\vartheta \neq 0, \frac{\pi}{2}$. Přímce o , pro kterou $z = 0$, odpovídá v příbuznosti (1) opačná přímka $\omega = \infty$, přímce $z = \varepsilon v$ odpovídá přímka $w = \frac{w}{v}$ opačného smyslu, přičemž zůstává zachována rovnoběžnost s polární osou o .



2) *Středová souměrnost podle pólu O* (obr. 1) je dána rovnicí

$$wz + 1 = 0. \quad (2)$$

Důkaz: Pro přímku (w) středově souměrnou podle pólu O k přímce (z) platí

$$s_1 = -s, \quad \Theta_1 + \pi = \Theta,$$

takže rovnici (2) dostaneme z rovnice (1), když v ní položíme z místo $\bar{z}$. Postačitelnost se dokáže obdobně jako v prvním případě.⁴⁾

3) *Souměrnost podle polární osy o* je dána rovnicí

$$w + z = 0. \quad (3)$$

Důkaz (obr. 1): Pro přímku (w) požadované vlastnosti je

$$\Theta_1 = 2\pi - \Theta, \quad s_1 = s,$$

a tedy

$$w = \operatorname{tg}(\pi - \vartheta)(1 + \varepsilon s) = -\operatorname{tg} \vartheta(1 + \varepsilon s) = -z,$$

což jsme chtěli dokázat.

Obráceně necht pro dvě dané přímky (z) , (w) platí rovnice (3). Potom je

$$\operatorname{tg} \vartheta_1(1 + \varepsilon s_1) + \operatorname{tg} \vartheta(1 + \varepsilon s) = 0,$$

a tedy

$$\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg} \vartheta_1 = 0, \quad s \operatorname{tg} \vartheta + s_1 \operatorname{tg} \vartheta_1 = 0.$$

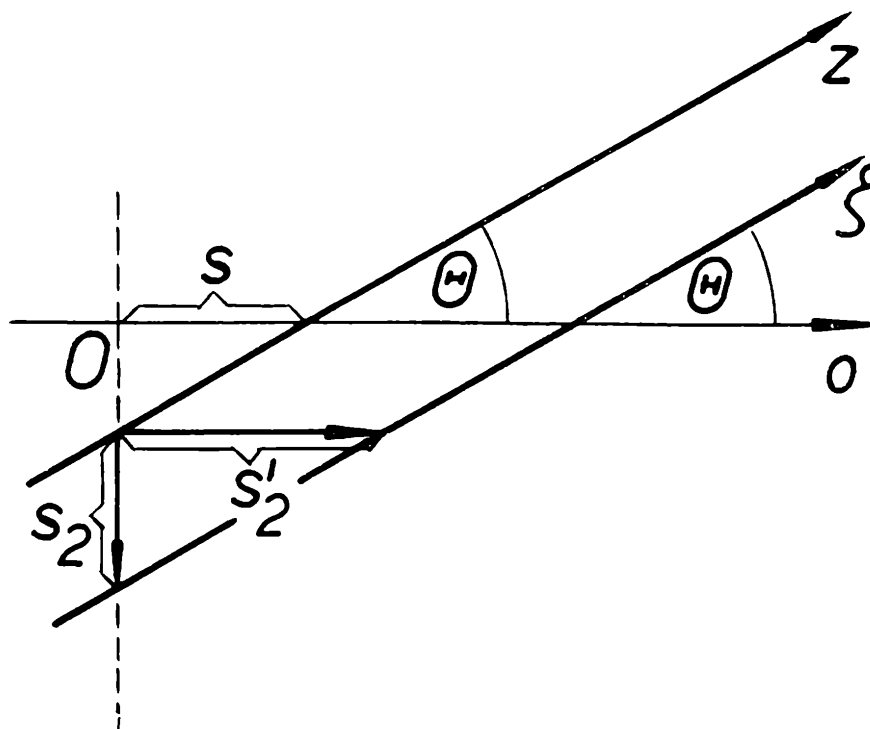
Z první rovnice ihned máme

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = -\operatorname{tg} \vartheta, \text{ tj. } \vartheta_1 = \pi - \vartheta \text{ (až na celistvý násobek } \pi)$$

⁴⁾ Přímky (z) , (w) jsou tedy opačně orientované. Při zachování smyslu má příbuznost rovnici

$$w = \bar{z}. \quad (2a)$$

Obr. 3



a potom dostaneme z druhé

$$s = s_1$$

a tím postačitelnost našeho tvrzení.

4. Další příbuzností, kterou se budeme zabývat, je *posunutí (translace)*. Přitom danou translaci rozložíme na dvě (jednodušší) translace a jejich složením obdržíme pak obecnou translaci.

a) Danou přímku $z = \operatorname{tg} \vartheta(1 + \varepsilon s)$ posuneme o úsečku délky s_1 souhlasně orientovanou se zvolenou orientací v polární ose o (obr. 2) do přímky (ζ) s ní rovnoběžné a téhož smyslu. Je tedy

$$\zeta = \operatorname{tg} \vartheta[1 + \varepsilon(s + s_1)] = \operatorname{tg} \vartheta(1 + \varepsilon s)(1 + \varepsilon s_1) = az, \quad (4)$$

kde $a = 1 + \varepsilon s_1$, a tudíž $|a| = 1$.

Ptejme se po přímkách (z) , které v posunutí (4) jsou pevné, tj. po přímkách, pro které platí

$$z = az.$$

To znamená, že je

$$z(a - 1) = 0, \text{ tj. } z(\varepsilon s_1) = 0.$$

Odtud (s_1 je zvoleno různé od nuly)

$$\operatorname{tg} \vartheta (1 + \varepsilon s) (\varepsilon s_1) = \varepsilon(\operatorname{tg} \vartheta) \cdot s_1 = 0,$$

takže

$$\operatorname{tg} \vartheta = 0, \text{ tj. } \vartheta = 0^\circ,$$

a proto jsou přímky $z = \varepsilon v$ při posunutí (4) samodružné. Vzhledem k rovnici příbuznosti měnící orientaci jsou také samodružné přímky $z = \omega \ v$.

b) Posuňme teď přímku (z) ve směru kolmém k ose o o orientovanou úsečku s_2 (obr. 3). Tento posun převedeme na posun ve směru polární osy o o úsečku s'_2 , pro kterou je

$$s'_2 = s_2 \cotg 2\vartheta,$$

takže podle předešlého

$$\begin{aligned}\zeta &= \tg \vartheta [1 + \varepsilon(s + s_2 \cotg 2\vartheta)] = \tg \vartheta(1 + \varepsilon s) + \varepsilon s_2 \tg \vartheta \cotg 2\vartheta = \\ &= z + \varepsilon s_2 \tg \vartheta \frac{1 - \tg^2 \vartheta}{2 \tg \vartheta} = z + \varepsilon \frac{s_2}{2} - \varepsilon \frac{s_2}{2} \tg^2 \vartheta.\end{aligned}$$

Protože $z^2 = [\tg \vartheta(1 + \varepsilon s)]^2 = \tg^2 \vartheta(1 + 2\varepsilon s)$ a tedy $\varepsilon z^2 = \varepsilon \tg^2 \vartheta$, je

$$\begin{aligned}\zeta &= z + \varepsilon \frac{s_2}{2} - \varepsilon \frac{s_2}{2} z^2 = \left(z + \varepsilon \frac{s_2}{2}\right) \left(1 - \varepsilon \frac{s_2}{2} z\right) = \\ &= \frac{z + \varepsilon \frac{s_2}{2}}{\varepsilon \frac{s_2}{2} z + 1}\end{aligned}$$

Položíme-li $\varepsilon \frac{s_2}{2} = b$, $|b| \neq 0$, zapíšeme tento posun ve tvaru

$$\zeta = \frac{z + b}{bz + 1} \quad (5)$$

Hledáme-li přímky (z), které v posunutí (5) jsou samodružné, musí pro ně platit

$$z = \frac{z + b}{bz + 1}, \text{ tj. } bz^2 + z = z + b,$$

takže z podmínky

$$b(z^2 - 1) = 0$$

dostaneme

$$z^2 = 1,$$

tudíž, píšeme-li duální číslo z ve tvaru $u + \varepsilon v$, je $u = \pm 1$, v libovolné. Tedy přímky $z = \pm 1 + \varepsilon v$ jsou v posunutí (5) samodružné.

c) Složením obou posunutí (4), (5) dostaneme

$$\zeta = \frac{az + b}{bz + 1} \quad *$$

Tento výsledek získáme dosazením $\zeta' = az$ do

$$\zeta = \frac{\zeta' + b}{b\zeta' + 1},$$

jestliže použijeme v tomto případě platného vztahu $ab = b$. Tých výsledků obdržíme dosazením

$$\zeta = a\zeta' \text{ do } \zeta' = \frac{z + b}{bz + 1}.$$

Položíme-li ještě $a = a_1^2 = (1 + \varepsilon r)^2$, pak z rovnosti $1 + \varepsilon s_1 = 1 + \varepsilon 2r$ máme $r = \frac{s_1}{2}$, $a_1 = 1 + \varepsilon \frac{s_1}{2}$. Ze vztahů

$$b = a_1 \bar{b}, \quad a_1 \bar{a}_1 = 1, \quad \bar{b} = -b \quad (6)$$

plyne

$$\zeta = \frac{a_1 z + b}{-\bar{b}z + \bar{a}_1} \quad (7)$$

Vzorce (4), (5), (7) platí také pro přímky stejně, příp. opačně orientované vzhledem k orientaci polární osy o .

Při hledání samodružných orientovaných přímek, které splňují vztah (*), položíme

$$u + \varepsilon v = \frac{a(u + \varepsilon v) + b}{b(u + \varepsilon v) + 1}.$$

Po dosazení $a = 1 + \varepsilon s$, $b = \varepsilon \frac{s_2}{2}$ dostaneme

$$u + \varepsilon v = u + \varepsilon v + \varepsilon \left(s_1 u + \frac{s_2}{2} - \frac{s_2}{2} u^2 \right)$$

Abychom dostali touž přímku, musí být

$$2s_1 u + s_2(1 - u^2) = 0,$$

odkud za předpokladu $u \neq 0$, $u \neq \pm 1$ (případy uvažované v a), příp. b)) plyne

$$s_1 : s_2 = (u^2 - 1) : 2u,$$

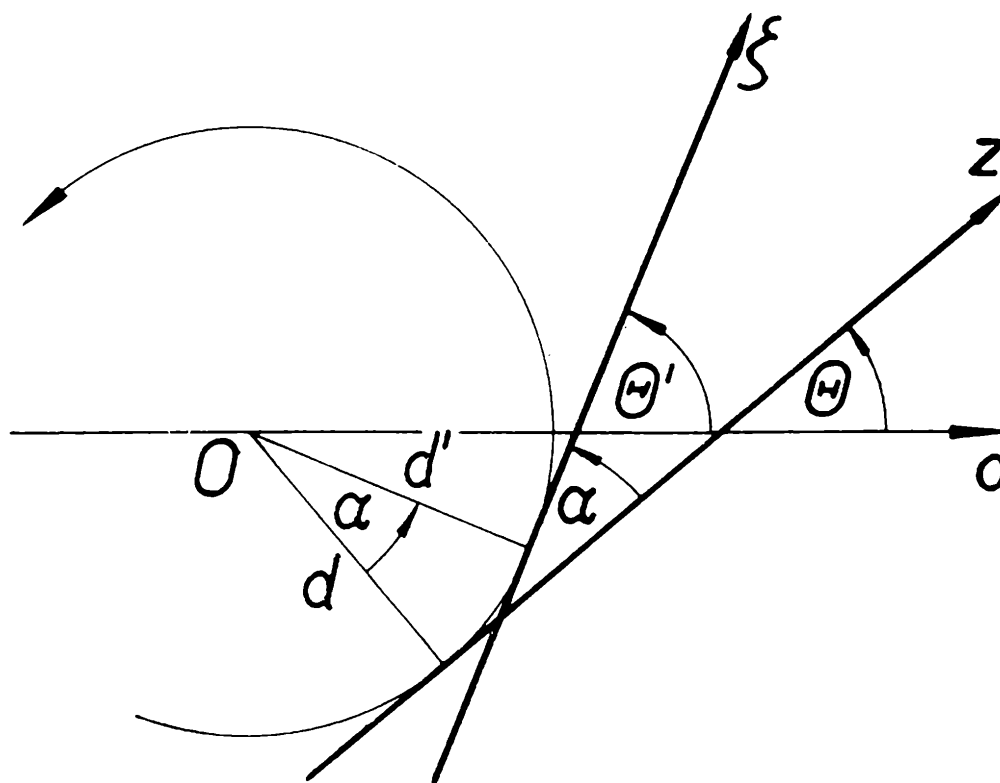
což je při daném u podmínka pro parametry posunutí (*), příp.

$$u_{1,2} = s_1 \pm \sqrt{s_1^2 + s_2},$$

což je při daných parametrech posunutí podmínka pro u .

5) Konečně si povšimněme tzv. *otočení (rotace)*. Najdeme duální číslo ζ , které je přiřazeno přímce (ζ), vzniklé z přímky (z) otočením kolem pólu O o orientovaný úhel α (obr. 4). Pro toto duální číslo tedy máme

$$\zeta = \operatorname{tg} \vartheta' (1 + \varepsilon s').$$



Z otočení o daný úhel α plyne

$$\Theta' = \Theta + \alpha, \text{ tj. } \vartheta' = \vartheta + \frac{\alpha}{2}$$

a odtud

$$d' = s' \sin 2\vartheta', \quad d = s \sin 2\vartheta$$

(jsou proto v této úvaze zatím vyloučeny úhly rovné 0 nebo π).

Protože $d = d'$,

$$\text{je } s' = s \frac{\sin 2\vartheta}{\sin 2\vartheta'} = s \frac{\sin 2\vartheta}{\sin (2\vartheta + \alpha)}$$

a pro vyjádření otočené polohy (ζ) máme

$$\zeta = \operatorname{tg} \left(\vartheta + \frac{\alpha}{2} \right) \left(1 + \varepsilon s \frac{\sin 2\vartheta}{\sin (2\vartheta + \alpha)} \right)$$

Pro modul čísla ζ platí

$$|\zeta| = \left| \operatorname{tg} \left(\vartheta + \frac{\alpha}{2} \right) \right| = \left| \frac{\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{z + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right|$$

Pro argument duálního čísla ζ daného v trigonometrickém tvaru platí

$$\operatorname{Arg} \zeta = \operatorname{Arg} \frac{z + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = s \frac{\sin 2\vartheta}{\sin (2\vartheta + \alpha)}$$

Tento vztah ověříme užitím vztahů

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} (u + \varepsilon v) = \frac{v}{u}$$

$$\operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$$

a dosazením $z = \operatorname{tg} \vartheta (1 + \varepsilon s)$, takže pro přímkou (ζ) obdržíme

$$\zeta = \frac{z + c}{-cz + 1}, \quad c = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \text{ reálné (tj. } \operatorname{Arg} c = 0.) \quad (8)$$

Pro otočení (8) neexistují samodružné přímky. Vztah (8) platí také pro přímky (z) stejně, příp. opačně orientované vzhledem k polární ose.

Jestliže $\alpha = \pi$, pak $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \rightarrow \infty$. Pro určení tohoto typu otočení dělme ve vzorci (8) v čitateli i jmenovateli c . Dostaneme

$$\zeta = \frac{\frac{z}{c} + 1}{-z + \frac{1}{c}}$$

a pro $\lim c \rightarrow \infty$ máme

$$\zeta = -\frac{1}{z},$$

tedy středovou souměrnost pro střed v pólu O .

6. Složením otočení (8) a posunutí (7) obdržíme *obecné přemístění* v rovině, vyjádřené ve tvaru

$$\zeta = \frac{Pz + Q}{-Qz + \bar{P}} \quad (9)$$

kde $P = a_1 - bc$, $Q = a_1c + b$, $|P| = |Q| = 1$.

Vztah (9) dostaneme, provedeme-li na otočení $\zeta = \frac{z + c}{-cz + 1}$ posunutí $\zeta = \frac{a_1\zeta + b}{-\bar{b}\zeta + \bar{a}_1}$

Zaměníme-li pořadí přemístění, tj. provedeme-li na posunutí

$$\zeta = \frac{a_1z + b}{-\bar{b}z + \bar{a}_1} \text{ otočení } \zeta = \frac{\zeta + c}{-c\zeta + 1}, \text{ dostaneme opět výraz (9),}$$

kde však $P = a_1 - \bar{b}c$, $Q = \bar{a}_1c + b$, $|P| = |Q| = 1$, tedy obě složení nejsou obecně záměnná.

V obecném přemístění (9) jsou tedy obsaženy tři parametry: s_1 , s_2 , α .

Na přemístění (9) můžeme použít také příbuznosti uvedené v 1), 2) nebo 3). Odvození rovnice tohoto typu přemístění, které je obdobné k odvození obecného přemístění (9), ponecháváme čtenáři.

konstruktivní geometrie

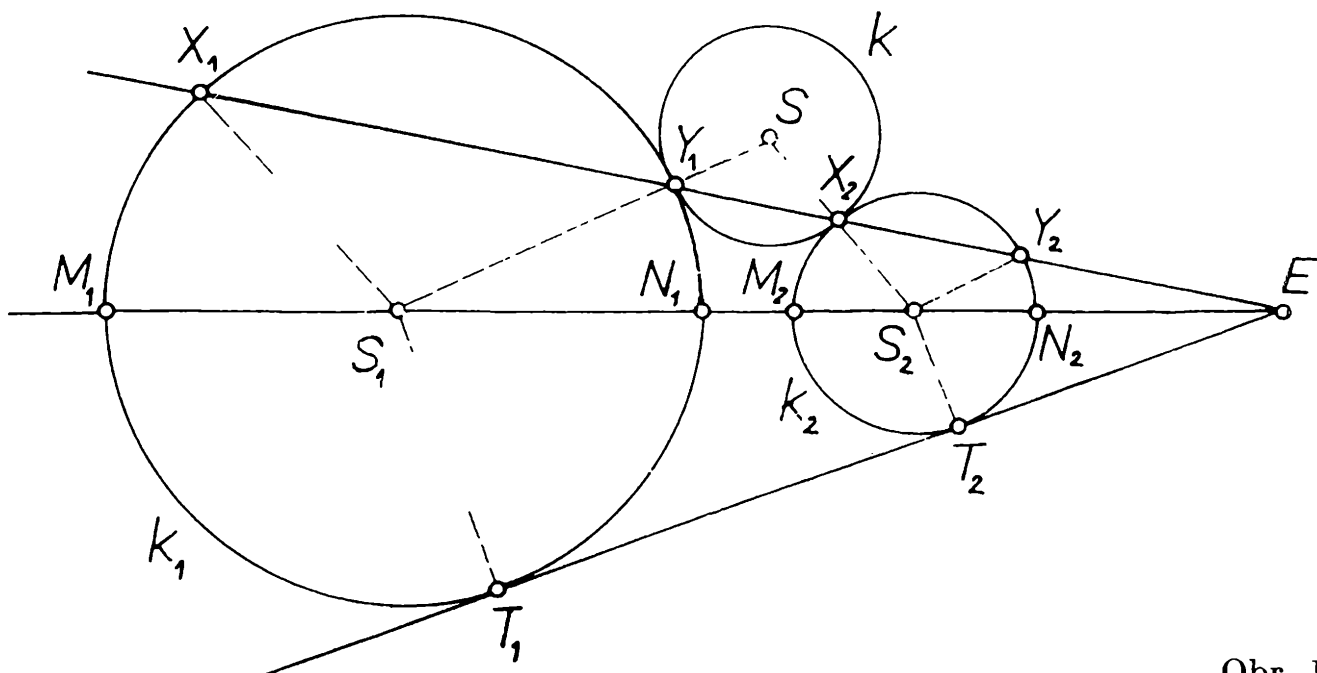
Apolloniovy úlohy

VLADIMÍR BLAŽEK, Ústí nad Labem

Obecná úloha Apolloniova požaduje sestrojení kružnice, která se dotýká tří libovolných daných kružnic. Jejím zvláštním případem jsou úlohy, ve kterých některé z daných kružnic jsou nahrazeny body nebo přímkami. Tato klasická úloha zajímala geometry již od období starořecké matematiky. Jedním z prvních, kdo úlohu řešil, byl Apollonios z Pergy. Žil pravděpodobně kolem roku 260—170 př. n. l. Jeho jméno má tato úloha, jejíž řešení podal ve spise „O dotycích“ Ten se nezachoval, a proto nevíme, jakým způsobem úlohu řešil. Domníváme se, že užil dilatace. V novější době bylo podáno mnoho způsobů řešení Apolloniových úloh. Ukážeme jednoduché řešení jedné z nich.

Nejprve dokážeme dvě pomocné věty.

Věta 1. Jsou dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$. Označme E jejich vnější a J vnitřní střed stejnolehlosti. Sestrojme libovolnou přímku, která prochází středem stejnolehlosti obou kružnic a protíná je nebo se jich dotýká. Označme X_1, X_2 , resp. Y_1, Y_2 dvojice stejnohleklých průsečíků této přímky s kružnicemi k_1, k_2 , (resp. body dotyku T_1, T_2 , pokud existují).



Obr. 1

Potom součin $EX_1 \cdot EY_2 = EX_2 \cdot EY_1$ je konstantní pro všechny uvažované přímky a je roven $ET_1 \cdot ET_2$, pokud existuje společná tečna. Totéž platí pro bod J .

Důkaz. (Obr. 1). Označme M_1, M_2 , resp. N_1, N_2 stejnohlé průsečíky daných kružnic s jejich střednou. Pak ve stejnolehlosti s koeficientem k platí

$$\frac{EX_2}{EX_1} = \frac{EY_2}{EY_1} = \frac{ET_2}{ET_1} = \frac{EM_2}{EM_1} = \frac{EN_2}{EN_1} = k. \quad (1)$$

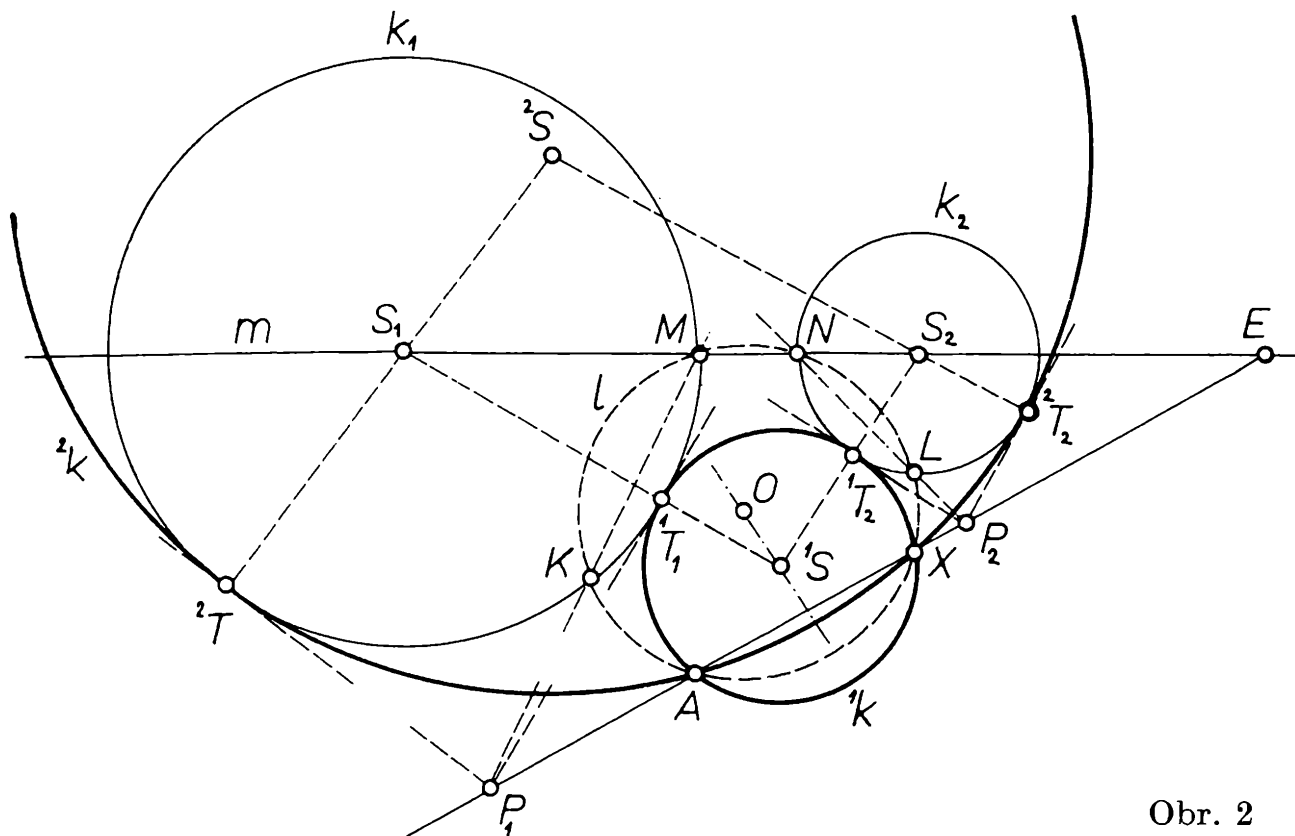
Vhodným rozšířením zlomků ve vztahu (1) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{EX_2 \cdot EY_1}{EX_1 \cdot EY_1} &= \frac{EY_2 \cdot EX_1}{EY_1 \cdot EX_1} = \frac{ET_2 \cdot ET_1}{ET_1 \cdot ET_1} = \\ &= \frac{EM_2 \cdot EN_1}{EM_1 \cdot EN_1} = \frac{EN_2 \cdot EM_1}{EN_1 \cdot EM_1} = k \end{aligned} \quad (2)$$

Všechny zlomky vztahu (2) mají stejného jmenovatele, neboť $EX_1 \cdot EY_1 = EM_1 \cdot EN_1 = ET_1 \cdot ET_1$ na základě mocnosti bodu E ke kružnici k_1 . Poslední rovnost platí, pokud existuje společná tečna. Je tedy

$$EX_2 \cdot EY_1 = EY_2 \cdot EX_1 = ET_2 \cdot ET_1 = EM_2 \cdot EN_1 = EN_2 \cdot EM_1.$$

Protože body M_1, M_2, N_1, N_2 jsou jednoznačně určeny, je tvrzení pro vnější střed stejnolehlosti dokázáno. Důkaz pro vnitřní střed stejnolehlosti je obdobný; dostaneme jej z předchozího jen výměnou označení. Tím je věta 1 dokázána.



Obr. 2

Věta 2. Jsou-li dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, pak dotykové body Y_1, X_2 kružnice k , která se kružnic k_1, k_2 dotýká, leží na přímce procházející středem stejnolehlosti daných kružnic.

Důkaz (obr. 1). Obdobně jako ve větě 1 označme X_1, Y_2 zbývající průsečíky přímky Y_1X_2 s kružnicemi k_1, k_2 . Trojúhelníky $S_1X_1Y_1$, SX_2Y_1 a $S_2X_2Y_2$ jsou rovnoramenné a mají shodné úhly

$$\sphericalangle S_1X_1Y_1 = \sphericalangle S_1Y_1X_1 = \sphericalangle SY_1X_2 = \sphericalangle SX_2Y_1 = \sphericalangle S_2X_2Y_2 = \sphericalangle S_2Y_2X_2.$$

Proto jsou přímky S_1Y_1 a S_2Y_2 rovnoběžné a přímky S_1X_1 a S_2X_2 rovněž. Body X_1, X_2 resp. Y_1, Y_2 jsou tedy stejnohlé a jejich spojnice prochází středem stejnolehlosti daných kružnic. Tím je věta 2 dokázána.

Nyní přikročíme k řešení některých Apolloniových úloh.

Úloha 1.

Jsou dány kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ a bod A , který na žádné z nich neleží. Sestrojte kružnici $k \equiv (S, r)$, která se obou daných kružnic dotýká a prochází bodem A .

Rozbor. (Obr. 2). Předpokládejme, že existuje kružnice $k \equiv (S, r)$, která vyhovuje podmínkám úlohy. Podle věty 2 oba dotykové body T_1, T_2 ¹⁾ této kružnice s kružnicemi k_1, k_2 leží na přímce procházející

¹⁾ Prosím čtenáře, aby sledoval na obr. 2 body označené vlevo nahoře indexem 1 a potom aby promyslel ostatní případy sám.

středem E (nebo J) stejnolehlosti těchto kružnic. Sestrojíme kružnici l procházející bodem A a protínající kružnice k_1, k_2 v bodech M, N , ležících na přímce procházející bodem E , a neodpovídajících si ve stejnolehlosti se středem E . Za tuto přímku můžeme zvolit střednou S_1S_2 . Tato kružnice protne přímku AE v bodě X (může ovšem být $A \equiv X$) a platí $EA \cdot EX = EM \cdot EN$. Podle věty 1 je $ET_1 \cdot ET_2 = EM \cdot EN$. Spojením posledních dvou vztahů dostaneme: $ET_1 \cdot ET_2 = EA \cdot EX$, proto bod X leží na hledané kružnici. Pro stručnost vyjadřování jsme prováděli úvahu jen pro bod E , pro bod J je obdobná; prosím čtenáře, aby promyslel sám tento případ a nakreslil obrázek.

Tím je úloha převedena na sestrojení kružnice, dotýkající se kružnice k_1 a procházející body A, X pro $A \neq X$ nebo dotýkající se tečny EA v bodě A pro $A \equiv X$. Poslední případ je jednoduchý a nebudeme jej provádět. Je-li $A \neq X$, rozřešíme úlohu užitím mocnosti bodu ke kružnici. Přímka MK , kde K je druhý průsečík kružnic k_1, l , protne přímku EA v bodě P_1 , podobně NL , kde L je druhý průsečík kružnic k_2, l , protne EA v bodě P_2 . Alespoň jeden z těchto průsečíků existuje, neboť přímky MK, NL nejsou stejnohlé ve stejnolehlosti se středem E , a proto nejsou rovnoběžné. To stačí pro další řešení. Sestrojíme-li z bodu P_1 nebo P_2 tečnu ke kružnici k_1 nebo k_2 , dostaneme dotykový bod T_1 , resp. T_2 této kružnice a kružnice hledané.

Konstrukce.

1. Narýsujeme přímku m , $E \in m$, označíme $M \equiv m \cap k_1$, $N \equiv m \cap k_2$. Body M, N jsou průsečíky, které si neodpovídají ve stejnolehlosti. Na obr. 2 je voleno $m \equiv S_1S_2$.

2. Sestrojíme kružnici $l \equiv (M, N, A)$ a označíme $K \equiv k_1 \cap l$, $L \equiv k_2 \cap l$.

3. Sestrojíme průsečík $X \equiv EA \cap l$.

4. Sestrojíme $P_1 \equiv MK \cap EA$, $P_2 \equiv NL \cap EA$.

5. Sestrojíme tečnu t_1 z bodu P_1 ke kružnici k_1 , t_2 z bodu P_2 ke kružnici k_2 a dostaneme dotykové body T_1, T_2 .

6. Sestrojíme kružnici $k \equiv (A, X, T_1, T_2)$.

Důkaz konstrukce. Kružnice k prochází bodem X . Toto tvrzení vyplývá z věty 1, věty 2 a mocnosti bodu E ke kružnici k . Je třeba ještě dokázat správnost konstrukce bodů T_1, T_2 . Bod P_1 má stejnou mocnost ke kružnicím k_1, k, l , a tedy přímka P_1T_1 je společnou tečnou kružnic k, k_1 , a proto bod T_1 je jejich dotykovým bodem. Obdobně dostaneme důkaz pro T_2 . Sestrojíme-li z bodu P_1 , resp. P_2 , druhou tečnu ke kružnici k_1 , resp. k_2 , dostaneme druhé řešení. Podobnou úvahu můžeme provést pro vnitřní střed J . Čtenář ji jistě promyslí snadno sám.

Prosím čtenáře, aby si zajímavou diskusi provedl sám.

Nyní bychom mohli přistoupit k řešení obecné Apolloniovy úlohy. K jejímu provedení je možno užít výsledku předchozí úlohy a dilatace, s níž se čtenář seznámil na stránkách tohoto časopisu, např. v článku O. Berky: Dilatace v č. 7, roč. 43, str. 295.

Praktické využití kapalných krystalů

LUBOMÍR DVOŘÁK, ZDENĚK KUPKA

Základní představy o kapalných krystalech a jejich rozdělení byly uvedeny v článku (1). Vzhledem k současnému praktickému využití se zaměříme na *termotropní kapalně krystalové*, pro které je charakteristický určitý teplotní interval existence kapalně krystalické mezofáze. Při postupném zahřívání nebo ochlazování takových látek se při teplotách odpovídajících hraničním teplotního intervalu mezofáze skokem mění jednotlivé charakteristiky materiálu, jako je měrné teplo, objem, hustota, viskozita, permitivita, index lomu aj., podobně jako je tomu u běžných fázových přeměn. Navíc se mohou u některých druhů kapalných krystalů projevit vlastnosti nové, jako jsou barevné rozptylové efekty a výrazná rotační polarizace cholesterických látek, změna průhlednosti působením elektrického nebo magnetického pole na nematkové látky, některé látky jsou dvojlomé a vlivem pravidelného uspořádání molekul se projevuje anizotropie různých fyzikálních vlastností. Vzhledem k poměrně malým vazebným silám mezi molekulami ve stavu kapalně krystalické mezofáze reagují tyto látky velmi citlivě na změny vnějších podmínek, jako je např. nepatrná změna teploty, tlaku, slabá elektrická a magnetická pole, přítomnost určitých chemických látek apod. To dává předpoklady k širokým možnostem praktického využití v technické i lékařské praxi.

Kapalně krystalové jako citlivé teplotní čidlo

K teplotním měřením se nejčastěji využívá barevných rozptylových efektů v cholesterických kapalných krystalech. Spirálová struktura cholesterických molekul vytváří totiž určitý druh rozptylové mřížky, která rozptyluje při dané teplotě světlo jen v určitém úzkém intervalu vlnových délek, zatímco světlo ostatních vlnových délek kapalným krystalem prochází. Tento jev nazýváme *selektivní rozptyl*. Při ozáření bílým světlem látka potom nabývá jasné zářivé barvy, jejíž dominující vlnová délka se výrazně mění s teplotou. Co do barevnosti můžeme selektivní rozptyl na cholesterických kapalných krystalech srovnat s barevnými interferenčními obrazci v tenké vrstvě oleje na vodě. Je

¹⁾ Dvořák, L., Kupka, Z. Kapalně krystalové. Rozhledy matematicko — fyzikální, roč. 54, č. 5, str. 201.

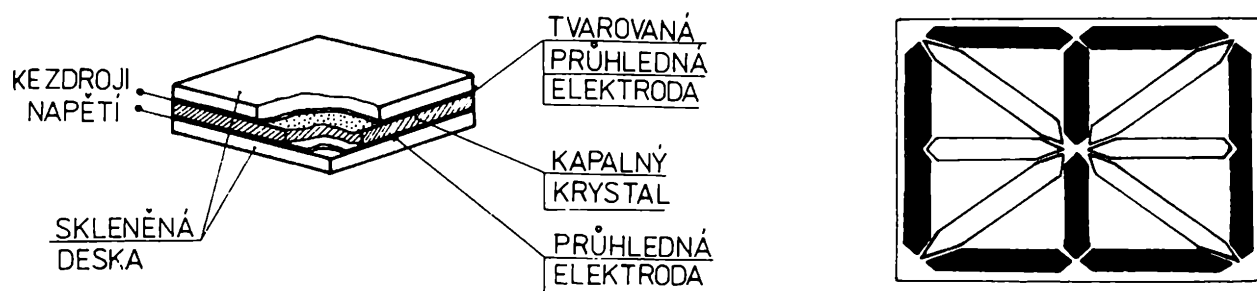
zde však zásadní fyzikální rozdíl. Olejový film bude dávat barevné efekty pouze v případě, že jeho tloušťka je srovnatelná s vlnovou délkou dopadajícího světla. Výsledná barva pak závisí na tloušťce vrstvy a na úhlu dopadu. Tloušťka cholesterické vrstvy (pokud není extrémně malá) nemá na dominující vlnovou délku rozptýleného světla podstatný vliv. Jev je objemovou vlastností uspořádané cholesterické mezofáze, je způsoben rozptylem na spirálové struktuře cholesterického kapalného krystalu.

Vlnová délka maxima rozptylovaného světla je určena velikostí stoupání cholesterické spirály, která zase závisí na teplotě, jakou má daný kapalný krystal. Změna teploty o 1 K může způsobit posuv vlnové délky maxima rozptylovaného světla o více než 100 nm. To umožňuje v některých případech rozlišení změny teploty až o 0,01 K.

Teplotní barevné změny je možné využít nejen k prostému měření teploty, ale i k určování rozdělení teploty na povrchu látek (k tzv. *mapování teplotních polí*). To umožňuje nedestruktivním způsobem odhalovat objemové defekty v materiálu pomocí sledování šíření tepla a rozšiřuje nedestruktivní experimentální prostředky používané v defektoskopii. Časté je např. použití v elektronice k teplotnímu mapování nerovnoměrného rozdělení teploty na zatížených elektronických obvodech na bázi tištěných spojů nebo integrovaných obvodů, kde umožňují velmi přesně lokalizovat místa poruch, nedokonalých kontaktů apod. Podobné je využití pro testování akustických a mikrovlnných polí. V lékařské praxi se používají cholesterické kapalné krystaly k teplotnímu mapování povrchu částí těla k diagnostice zánětových a nádorových onemocnění. V praxi byly také vyzkoušeny jednorázové klinické teploměry reagující trvalými barevnými změnami v rozsahu teplot 36 až 41 °C.

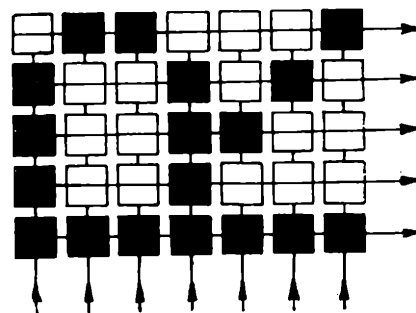
Většina cholesterických kapalných krystalů mění svou barvu se stoupající teplotou od červené do fialové přes celou viditelnou oblast spektra. Teplotu je možné určovat buď subjektivně srovnáním s cejchovací barevnou tabulkou nebo objektivně určováním maxima selektivního rozptylu. Některé vzorky mění barvy v širokém, jiné ve velmi úzkém teplotním intervalu. Dosud známé cholesterické kapalné krystaly umožňují pomocí barevných změn zjišťovat teploty v rozmezí 0 °C až 250 °C. Přitom šířka teplotního intervalu, v němž dochází k barevným změnám, se dá měnit vhodným mísením několika různých kapalných krystalů. Barevné efekty jsou nejvýraznější v tenké vrstvě kapalného krystalu umístěné na tmavé podložce, aby se zamezilo jejich rušení nerozptýleným světlem.

Užití kapalných krystalů jako citlivých teplotních čidel a k teplotnímu mapování rozšiřuje experimentální možnosti teplotních měření. Nedá se říci, že tyto látky univerzálně nahradí dosud užívané metody (teploměry, termočlánky, termistory, termochromní materiály, nejnověji termovizi). Svými specifickými vlastnostmi však umožní ve speciál-



Obr. 1. Schéma displeje s kapalným krystalem

Obr. 2. Dvě schémata segmentového rozdělení elektrod pro alfanumerické displeje



ních případech získat rychlejší a někdy i přesnější výsledky. V neposlední řadě hraje úlohu také stránka ekonomická, kdy vzhledem k malému množství potřebného materiálu je použití kapalných krystalů relativně levné při jednoduché manipulaci s nimi.

Displeje na bázi kapalných krystalů

Rychlý rozvoj konstrukce měřicích přístrojů a výpočetní techniky si vynutil nutnost použití přehledných numerických, případně abecedních zobrazovacích prvků, tzv. *displejů*. Jako vhodný materiál pro tyto displeje je možno vedle luminiscenčních prvků použít *nematické kapalně krystaly*. I velmi slabá elektrická a magnetická pole vyvolávají mnohobarevnou výraznou „ozvěnu“ kapalných krystalů. Na tomto principu potom pracují displeje pro elektronické měřicí přístroje a počítačové stroje, pro náramkové hodinky a jakákoliv jiná zařízení, v nichž je třeba rychle měnit číslice, písmena nebo značky. Na stejném principu jsou založeny neobvyklé světelné filtry a modulátory intenzity světla s možností užití u brýlí, automobilových skel, okenních tabulí atd. Stačí stisknout knoflík a stávají se zcela neprůzračnými. V případě potřeby je možno jejich průzračnost regulovat. Byly realizovány prototypy plošné televizní obrazovky na principu kapalných krystalů, hledá se možnost konstrukce těchto obrazovek i pro barevnou televizi.

Při aplikacích v zobrazovacích prvcích se kapalně krystaly umísťují mezi dvě vodivá skla (obr. 1). Vrstva kapalného krystalu má tloušťku 10 až 20 μm . Vodivá vrstva na skle je rozdělena na jednotlivé segmenty vytvářející zobrazovací matici displeje. Dva z možných způsobů rozdělení segmentů, umožňující záznam abecedy i čísel (tzv. *alfanumerický displej*), jsou znázorněny na obr. 2.

Pro realizaci zobrazovacích prvků s kapalnými krystaly lze použít v podstatě čtyř fyzikálních dějů. — dynamického rozptylu, dvojlomu, optické aktivity a přechodu cholesterické fáze v nematickou. Nejjednodušším z nich je dynamický rozptyl. Nematický krystal je dvojlomý a vykazuje anizotropii elektrické vodivosti, pod jejímž vlivem vznikají v krystalu elektrické proudy směru odlišného od směru přiloženého elektrického pole. Tím vyvolaný příčný pohyb molekul, podporovaný anizotropií permitivity, vyvolá turbulenci uvnitř krystalu, vrstva začne silně rozptylovat světlo a stává se neprůzračnou. Dalším použitelným jevem je elektrické ovládání dvojlomu. Vrstva nematického krystalu, jejíž molekuly jsou orientovány kolmo na vodivá skla (elektrody), se jeví pro kolmo dopadající světlo jednolomou. Po přiložení napětí na elektrody se molekuly stáčí a krystal se stává dvojlomým. Při určitém napětí, odpovídajícím fázovému posuvu $(2n - 1)\pi$, světlo nebude procházet.

Dále je možno využít umělé optické aktivity, vyvolané změnou orientace molekul nematického krystalu otáčením jednoho z podložních skel. Při pozorování v lineárně polarizovaném světle lze stočení polarizační roviny kompenzovat vnějším elektrickým polem. Jiný z mechanismů je založen na přechodu cholesterické fáze v nematickou. Elektrickým polem je možno rozvinout šroubovitou cholesterickou strukturu a vrstva tak přejde z barevného rozptylového stavu cholesterické mezofáze do čirého stavu nematické mezofáze.

Výhodou zobrazovacích prvků s kapalnými krystaly je značná energetická úspornost a také to, že výsledných efektů se dosahuje malými napětími. Displeje jsou výrobně jednoduché a levné, jsou dobře čitelné i při silném osvětlení. Určitou nevýhodou je omezený teplotní obor, ve kterém pracují, a jistá časová nestabilita.

Kapalné krystaly citlivě reagují také na tlak, pohyb a vibrace. Vrstvička takové látky umístěná mezi dvěma rovnoběžnými skly mění své zabarvení při sebemenším dotyku prstem. Na tomto principu pracují jemné snímací prvky, které dávají informace o složité škále pohybů, provázejících provoz každého stroje, motoru, chvění konstrukcí apod.

Jako velmi perspektivní se jeví využití směsí některých látek cholesterického a nematického typu, u nichž je možno dosáhnout paměťových efektů. Zatím bylo získáno uchování informací po dobu několika dnů při hustotě záznamů 20 řádků na mm. Dosavadní výzkumy naznačují, že se s kapalnými krystaly budeme v budoucnu setkávat stále častěji i v oborech a aplikacích, které si ještě dnes nedovedeme ani představit. Lze se právem domnívat, že i zárodky veškerého života na Zemi, první buňky živé plazmy, měly stavbu kapalných krystalů. Jak ukazují výzkumy, podobnou strukturu mají buněčné membrány živých organismů, člověka nevyjímaje. Kapalné krystaly jsou součástí svalových vláken, tuků, fermentů a šlach. I lidský mozek má podle názorů vědců

složitou kapalně krystalickou strukturu. Výzkum funkce kapalných krystalů v živých organismech může tedy přinést ucelenější pohled na přírodní jevy. Studium kapalných krystalů a jejich praktického využití se nadále intenzivně rozvíjí. Je možno předpokládat, že tyto látky v dohledné době budou mít pro techniku podobný význam, jako mají dnes polovodiče.

astronomie

Astronomické katalogy

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Bohatým a nesmírně cenným zdrojem vědomostí o hvězdách a dalších kosmických objektech jsou katalogy. V dnešní době jsou vydávány katalogy speciálně zaměřené, protože pro množství údajů není již v silách jednotlivce ani celého kolektivu obsáhnout všechna fakta, získaná na desítkách astronomických observatoří. Naše čtenáře chceme upozornit na některá nejvýznamnější díla, protože se zkratkami různých katalogů se setkáváme i v populární astronomické literatuře.

Hvězdné katalogy

Mezi první katalogy hvězd můžeme zařadit katalog Eudoxův (z poloviny 4. století př. n. l.) a Hipparchův (2. stol. př. n. l.). Do konce devatenáctého století bylo vydáno přes 500 katalogů poloh hvězd a asi 250 katalogů vlastních pohybů hvězd. Velmi významný je katalog, který byl sestaven za vedení F. Argelandera pod názvem Bonner Durchmusterung (BD) a vydán v Bonnu v letech 1859 až 1862. Obsahuje 324 198 hvězd do 9,5 hvězdné velikosti od severního pólu do deklinace -2° . Hvězdy, obsažené v tomto katalogu, se označují zkratkou BD, zónou podle stupňů deklinace a pořadovým číslem. Tak např. údaj BD $+4^\circ 4048$ znamená, že jde o hvězdu s pořadovým číslem 4048 v zóně od $+4^\circ 0'$ do $+5^\circ 0'$ severní deklinace v katalogu Bonner Durchmusterung. (Termín „Durchmusterung“, znamenající seznam, soupis, zmezinárodněl a používá se běžně v odborné literatuře.) Katalog BD byl sestaven pro epochu 1855,0 a pro zajímavost uvedme, že čtvrté vydání vyšlo v r. 1968.

Pokračování katalogu BD na jižní obloze (od deklinace -2° do -23°) bylo vydáno v r. 1886 za vedení E. Schönfelda a obsahuje 133 659 hvězd do 10. hvězdné velikosti. Označuje se jako Südliche Durchmusterung

(SD) a třetí vydání vyšlo v r. 1967. Pokračováním SD až do jižního světového pólu je Cordoba Durchmusterung (CD nebo CoD), které sestavili J. Thoma a C. Perrine. Obsahuje údaje o 613 953 hvězdách do 10. hvězdné velikosti a pro epochu 1875,0. Katalog CD vyšel v letech 1892 až 1932 v publikacích hvězdárny v Cordobě.

Čtvrtým významným dílem v této řadě je Cape Photographic Durchmusterung (CPD), které sestavili D. Gill a J. Kapteyn podle fotografií, získaných na Kapské observatoři. Tento katalog zahrnuje hvězdy od deklinace -19° do jižního světového pólu a obsahuje 454 875 hvězd do 9,2 fotografické hvězdné velikosti.

V první třetině dvacátého století bylo již zřejmé, že je třeba sestavovat katalogy specializované. Jako příklad může posloužit Katalog jasných hvězd (v originálu Catalogue of Bright Stars, BS), jehož první vydání z r. 1930 připravil F. Schlesinger, druhé vydání z r. 1940 F. Schlesinger a L. Jenkinsová a třetí opravené vydání z roku 1964 připravila D. Hoffleitová. Třetí vydání katalogu BS obsahuje údaje o 9110 hvězdách do 6,5 hvězdné velikosti z celé oblohy. Předností tohoto katalogu je, že obsahuje nejen přesné souřadnice hvězd pro epochu 1900,0 a pro 2000,0, nýbrž i změny souřadnic způsobené precesí, dále radiální rychlosti hvězd, spektrální třídy, paralaxy, vlastní pohyby a další údaje o jasných hvězdách.

Vydávání tzv. fundamentálních katalogů hvězd, které obsahují přesné polohy hvězd, je spojeno se jménem hvězdáře F. W. Bessela, který v r. 1830 vydal pod názvem *Tabulae Regiomontanae* (TR) seznam poloh a vlastních pohybů 38 hvězd. O další rozvoj fundamentálních katalogů se zasloužili S. Newcomb, A. Auwers, J. Peters a A. Kopff, kteří postupně zvětšovali počet hvězd s přesně změřenými polohami. Např. Auwersův *Fundamental Catalogue* z r. 1879 obsahoval 539 jasných hvězd, Kopffův *Dritter Fundamentalkatalog* (označovaný (FK3), vydaný ve dvou částech v r. 1937 a 1938, obsahoval již 1535 hvězd, stejně jako i čtvrté vydání (FK4) z roku 1963.

V r. 1910 vydal L. Boss tzv. *Preliminary General Catalogue of 6188 Stars* (PGC), který obsahoval polohy a vlastní pohyby všech hvězd do 6^m (viditelných pouhým okem), a to na základě zpracování údajů, obsažených v 82 dříve vydaných katalozích. Mnohem obsáhlejší katalog vydal B. Boss pod názvem *General Catalogue of 33 342 Stars for the Epoch 1950* (GC, Washington, 1936—37, 5 dílů), který obsahuje polohy a vlastní pohyby všech hvězd, jasnějších než 7. zdánlivé hvězdné velikosti. Významným přínosem v těchto pracích jsou i katalogy, vydané sovětskými astronomy. Např. M. S. Zverev vydal v r. 1951 seznam 931 hvězdy spektrálních tříd G a K (od 7^m do 9^m), který byl rozšířen v r. 1956 na Katalog slabých zvezd (KSZ), obsahující již 15 690 hvězd od severního světového pólu do deklinace -30°

Koncem minulého století zahájili astronomové velmi rozsáhlou mezinárodní spolupráci na sestavení zonálních katalogů. První impuls vyšel z Německé astronomické společnosti v r. 1869, aby byl sestaven katalog poloh všech hvězd do 9. hvězdné velikosti, a to na základě meridiánových měření. Pod názvem Astronomie Gesellschaft Katalog (AGK) vyšla první část v letech 1890 až 1910. Práce se zúčastnilo 12 observatoří v šesti zemích a katalog obsahoval 144 128 hvězd. Druhá část, uveřejněná v letech 1904 až 1924, obsahovala 43 830 hvězd a třetí část obsahuje 60 542 hvězd. Pásmo od -82° do jižního světového pólu měla zpracovat hvězdárna v Cordobě; výsledky měření však dosud nebyly uveřejněny.

V souvislosti s rozvojem pozorovací a měřicí techniky bylo v roce 1926 navrženo, aby katalog AGK byl opakován pomocí fotografií hvězdné oblohy. Kromě německých hvězdáren (Hamburg, Bonn) se prací zúčastnila i sovětská hvězdárna v Pulkově. Práce byly dokončeny v letech 1927 až 1940 a tak byly získány přesné polohy 180 000 hvězd do 9. hvězdné velikosti od severního pólu do $-2,5^\circ$ deklinace.

Druhým významným mezinárodním podnikem, který však zůstal nedokončen, byl francouzský návrh z r. 1887, aby byla sestavena série katalogů pod názvem Catalogue Astrographique nebo též Carte du Ciel (AC nebo CdC). Práce zahájilo 18 observatoří se stejným přístrojovým vybarvením, tj. fotografickými dalekohledy o průměru 33 cm (měřítko snímků bylo zvoleno tak, aby 1' na obloze se rovnala 1 mm na fotografii). S kratší expozicí měly být vyfotografovány hvězdy do 11^m, s delší expozicí do 14,5^m. Zvolený způsob se však postupně ukázal jako příliš zdlouhavý a málo efektivní, takže z plánované práce byla realizována jen malá část.

Katalogy vlastních pohybů a radiálních rychlostí hvězd

Stěžejním dílem v tomto oboru je Schorrův katalog vlastních pohybů hvězd z r. 1936 (Bergedorfer Eigenbewegungs-Lexicon, EBL), obsahující 94 731 hvězdu. Sovětský astronom A. N. Dež vydal v roce 1940 katalog vlastních pohybů 18 000 hvězd, podobně N. V. Fatčichin v r. 1971 uveřejnil katalog vlastních pohybů 14 650 hvězd. Nejobsáhlejším dílem je však Smithsonianský katalog (Smithsonian Astrophysical Observatory Star Catalogue, SAO SC) z roku 1966, který obsahuje vlastní pohyby 258 997 hvězd.

Často používaným dílem je i katalog, vydaný R. Wilsonem (General Catalogue of Stellar Radial Velocities, GCVr) z r. 1953, který obsahuje radiální rychlosti 15 106 hvězd, doplněný o radiální rychlosti dalších 824 hvězd. Kromě toho vyšly speciální katalogy, např. pro červené trpaslíky, hvězdy pozdních spektrálních tříd, cefeidy, hvězdy spektrálních tříd B, A apod.

Katalogy hvězdných spekter

Stěžejním dílem v tomto oboru je Henry Draper Catalogue (HD, nazvaný podle mecenáše), který vydali E. Pickering a A. Cannonová jako devítisvazkové dílo v letech 1918 až 1924. Zkratkou HD je označeno 225 300 hvězd (úplný je katalog do 8,25^m). Pod názvem Henry Draper Extension (HDE) vydala A. Cannonová seznam dalších 175 000 hvězd, takže celkový počet známých spekter hvězd dosáhl počtu 400 000. Kromě toho vydaly i další observatoře katalogy spekter hvězd, např. Postupimská observatoř (66 700 hvězd), hvězdárna v Hamburku-Bergedorfu (173 500 hvězd do 13. fotografické hvězdné velikosti) a kanadská hvězdárna McCormickova vydala katalog, obsahující 75 600 hvězd. Kromě katalogů byly vydány i atlasy hvězdných spekter. Z nich uvedme alespoň dílo, sestavené W. Morganem, P. Keenanem a E. Kellmanovou z r. 1943 pod názvem *An Atlas of Stellar Spectra*, v němž navrhli rozlišovat u hvězd ještě třídy zářivosti.

Katalogy dvojhvězd a vícenásobných hvězd

Mezi první autory katalogů dvojhvězd patří W. Herschel, známý objevitel planety Urana. Obsáhlý katalog dvojhvězd, obsahující 3112 hvězd severně od deklinace -15° , sestavil v letech 1824 až 1837 W. Struve. Výsledky měření z novější doby obsahují tyto katalogy: S. Burnham, *General Catalogue of Double Stars within 121° of the North Pole (BDS)*, obsahující 13 665 dvojhvězd. Dále R. Innes, *Souther Double Star Catalogue (SDS)*, obsahující 3100 dvojhvězd z jižní oblohy, a konečně R. Aitken, *New General Catalogue of Double Stars within 120° of the North Pole (ADS, z r. 1932)*, obsahující 17 180 dvojhvězd a vícenásobných hvězd.

Nejrozsáhlejší dílo v tomto oboru vydali v r. 1963 H. Jeffers, W. van den Bos a F. Greeby pod názvem *Index Catalogue of Visual Double Stars (ICDS)*, obsahující 65 000 hvězd. Kromě toho byla vydána řada katalogů, obsahujících dráhy dvojhvězd, z nichž třetí katalog, sestavený W. Finsenem a C. Worleyem v r. 1970, obsahuje 975 vypočtených drah pro 696 vizuálních dvojhvězd. Katalog Z. Kopala z r. 1956 obsahuje elementy dráhy 83 soustav zákrytových proměnných hvězd.

Katalogy proměnných hvězd

Po první světové válce vydali němečtí astronomové G. Müller a E. Hartwig třísvazkové dílo pod názvem *Geschichte und Literatur der Lichtwechsels der veränderlichen Sterne* (Dějiny a literatura o změnách jasnosti proměnných hvězd), znovu vydané R. Pragerem v letech 1934 až 1936. V tomto díle (GuL) můžeme najít údaje o identifikaci, souřadni-

cích, velikostech srovnávacích hvězd, spektrech a dalších charakteristikách proměnných hvězd.

Po druhé světové válce se stala světovým centrem studia proměnných hvězd Moskva. Došlo k vydání Generálního katalogu proměnných hvězd (v originálu Obščij katalog peremennych zvezd, OKPZ), jehož druhé vydání v r. 1952 sestavili B. V. Kukarkin, P. P. Parenago, J. I. Jefremov a P. N. Cholopov. Obsahovalo údaje o 14 708 hvězdách. Titíž autoři vydali v r. 1951 Katalog zvezd, zapodozrennych v peremennosti (KZP), obsahující 8134 hvězd. Druhé vydání KZP z r. 1965 obsahuje dalších 3907 hvězd. O tom, jak se postupně rozšířilo studium proměnných hvězd, svědčí ta okolnost, že třetí vydání OKPZ z r. 1969 obsahuje informace o 20 437 proměnných hvězdách, objevených a označených do roku 1968. Z tohoto počtu je 13 782 pulsujících, 1618 eruptivních a 4002 zákrytových proměnných hvězd; zbytek připadá na hvězdy s neobvyklými vlastnostmi a na málo studované hvězdy. V r. 1974 vyšel druhý doplněk k třetímu vydání OKPZ, takže celkový počet dosud známých proměnných hvězd dosáhl počtu 25 140.

Ještě je třeba poznamenat, že hvězdárny označují nově objevené hvězdy svými zkratkami. Tak např. proměnné hvězdy objevené na Harvardské hvězdárně v USA se označují zkratkou HV (Harvard Variable) a pořadovým číslem, hvězdy objevené v Sovětském svazu se označují zkratkou SVS (Sovietic Variable Star), na hvězdárně v Hamburku-Bergedorfu používají zkratku HBV (např. HBV 475 objevil dr. Luboš Kohoutek).

Katalogy rádiových zdrojů

Rozsáhlý výzkum kvazarů, tj. kvazistelárních zdrojů rádiového záření, je spojen s katalogy, postupně označovanými 1C, 2C, 3C, 4C a 5C, což jsou 1. až 5. Cambridgeský katalog rádiových zdrojů. Pořadí v katalogu 3C je podle rektascenze, v katalogu 4C rovněž, ale v pásech po 1° , takže údaj 4C 30.26 znamená 26. zdroj v pásu od 30° do 31° deklinace. V dalším významném katalogu, jehož autory jsou Mills, Slee a Hill (MSH), je použito číslic k udání přibližných souřadnic zdroje. První dvě číslice udávají rektascenzi, plus nebo minus je severní nebo jižní polokoule a další číslice udávají desítky stupňů deklinace, takže označení objektu MSH 14—121 čteme jako 21. objekt v zóně rektascenze 14^h a deklinace od -10° do -20° .

Další katalog (PKS) byl sestaven pracovníky radioastronomické observatoře v Parkesu (Austrálie). Ve značení objektů tohoto katalogu udávají první čtyři číslice hodiny a minuty rektascenze, dvojice číslic po znaménku udává stupně deklinace. Označení NRAO, CTA a CTD je pro katalogy rádiových zdrojů, které sestavili pracovníci Národní radioastronomické observatoře v Owens Valley v Kalifornii, zkratka

Ton udává katalog observatoří Tonantzintla y Tacubaya, katalog PHL sestavili G. Haro a W. J. Luyten, katalog HZ pak M. L. Humason a F. Zwicky. Je třeba poznamenat, že mnoho kvazarů nese označení BSO (z anglické zkratky Blue Stellar Objects), neboť některé kvazary byly objeveny při podrobném studiu tzv. „modrých objektů“

Katalogy pulsarů

Pulsary, zdroje pulsujícího rádiového záření, objevené v roce 1967, se označují podle katalogů různých observatoří. Tak např. CP je označení pro pulsary objevené na Cambridgeské observatoři (Cambridge Pulsed Source), HP (Harvard — Green Bank), JP (Jodrell Bank v Anglii), AP (Arecibo Pulsed Source) atd. Číslice pak udávají rektascenzi pulsaru, čili 1919 znamená $19^h 19^{min}$, někdy se také připojuje údaj o deklinaci objektu. Označení JP 1933 + 16 tedy znamená, že jde o pulsar objevený na observatoři Jodrell Bank, jehož rektascenze je $19^h 33^{min}$ a deklinace + 16°

Československé katalogy

Prvním dílem, vydaným v Československu, byl Atlas Coeli Skalnaté Pleso — II. katalog, vydaný v Praze v roce 1951. Autorem nyní světově známého atlasu je A. Bečvář (1901—1965), zakladatel a první ředitel hvězdárny na Skalnatém plese. Katalog obsahuje 6362 hvězd do $6,25^m$ pro epochu 1950,0. Kromě základního katalogu hvězd obsahuje ještě dílčí seznamy dvojhvězd a násobných hvězd (do $6,75^m$), elementy drah vizuálních dvojhvězd a spektroskopických dvojhvězd, proměnných hvězd, otevřených hvězdokup, kulových hvězdokup, planetárních mlhovin, plynných mlhovin, galaxií, zdroje rádiového záření a všechny objekty Messierova katalogu (M), tabulky pro převod z katalogů GC na HD a další pomocné tabulky. Toto dílo bylo znovu vydáno v r. 1959 a v r. 1964.

V roce 1958 vydalo Nakladatelství Československé akademie věd v Praze katalog hvězdokup a hvězdných asociací, který sestavili G. Alter, J. Ruprecht a V. Vanýsek, pod názvem Catalogue of Star Clusters and Associations. Obsahuje údaje o 576 otevřených hvězdokupách, 46 hvězdných asociacích a 117 kulových hvězdokupách. Druhé doplnění vydání katalogu zpracovali Alter a Ruprecht spolu s maďarským astronomem Balászem a vydalo jej v r. 1970 nakladatelství Maďarské akademie věd v Budapešti.

Třetím dílem je katalog planetárních mlhovin sestavený L. Perkem a L. Kohoutkem pod názvem Catalogue of Galactic Planetary Nebulae. Obsahuje údaje o 1036 objektech a vydala jej Academia v Praze v roce 1967 u příležitosti XIII. kongresu Mezinárodní astronomické unie.

V tomto článku jsme mohli uvést jen ta nejvýznamnější díla, která jsou nejčastěji citována ve světové literatuře. Kromě výše uvedených katalogů existuje řada dalších významných děl, jako je např. Dreyerův Nový generální katalog mlhovin a hvězdokup (NGC, New General Catalogue of Nebulae and Clusters) z r. 1888, obsahující údaje o 7840 objektech, později doplněný dvěma katalogy (Index Catalogue I., 1529 objektů a Index Catalogue II., dalších 3857 objektů). Celkový počet mlhovin a galaxií ve všech třech katalozích je 13 226. Katalog B. V. Voroncova-Veljaminova, vydávaný v letech 1962 až 1968 (Morfologičeskij katalog galaktik), obsahuje charakteristiky 29 000 galaxií do 15,1 hvězdné velikosti. Ponechali jsme stranou katalogy temných i jasných galaktických mlhovin, katalogy proměnných hvězd v kulových hvězdokupách, katalogy prostorových rychlostí, rotačních rychlostí a magnetických vlastností hvězd. Vždyť jen seznam hvězdných katalogů, vydaný v r. 1964 za období 1900 až 1962, obsahuje 514 údajů. Proto jen pouhé vyjmenování všech dosud vydaných katalogů by si vyžádalo mnoho tiskových stran.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

Fyzika

6. Je dána soustava dvou lichoběžníkových tenkých desek (obr. 1) s délkami vzájemně kolmých stran a , b a l . Obě desky mají společnou stranu délky a a jejich roviny svírají vzájemně úhel α . Soustava desek je umístěna na vodorovné podložce a je na ni vložen rotační dvojkužel tak, aby rovina proložená kruhovou hranou dvojkužele ležela v rovině souměrnosti soustavy desek. Průměr kruhové hrany dvojkužele je d a jeho celková výška $2v$. Určete hodnotu d tak, aby se po umístění na soustavu desek dal právě do pohybu ve směru šipky (od bodu A k bodům B a B'). Tření přitom zanedbáváme. Je dáno a , b , l , α , $2v$. Řešte nejprve obecně, pak pro zvláštní případ, $a = 8$ cm, $b = 12$ cm, $l = 30$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $2v = 35$ cm.

Václav Šindelář

(Došlo 30 řešení)

The diagram illustrates a wedge-shaped body with a rectangular hole. The wedge has a base length l and a height a . The hole has a width b and a depth l' . The angle of the wedge is α . The top surface of the wedge is labeled 2ν . The points A, B, C are on the top surface, and A_0, B_0, C_0 are on the bottom surface. The points B', C' are on the top surface of the hole, and B_1, C_1 are on the bottom surface of the hole. The distance between the hole and the right edge is l' . The distance between the hole and the left edge is l . The height of the wedge is a . The height of the hole is b . The angle of the wedge is α . The top surface of the wedge is labeled 2ν .

Při řešení příkladu využijeme známé věty z fyziky: Těžiště tělesa se snaží zaujmout takovou polohu, kde má nejmenší potenciální energii. Má-li se tedy těleso (rotační dvojkužel) pohybovat ve směru $A \rightarrow B, B'$ pak musí jeho těžiště klesat vzhledem k vodorovné podložce. Uvažujme prodloužení lichoběžníkové desky. Nechť se dvojkužel pohybuje ve směru šipky; pak v určitém okamžiku s těchto desek spadne, neboť jeho „šířka“ $2v$ bude menší než „rozpětí“ desek. V tom okamžiku bude

(neboť těžiště se podle předpokladu pohybuje v rovině souměrnosti desek). Má-li se dvojkužel pohybovat ve směru šipky, pak musí platit

Budeme diskutovat podmínku (2) pro různé velikosti základen a , b lichoběžníka A_0C_0CA .

Protože bod C leží ve směru šipky od bodu A , platí

Pro každé $d > 0$ tedy vychází platnost podmínky (2)

266

b) $b = a$ (koleje jdou vodorovně):

Zřejmě platí

$$a = b = c$$

Pro každé $d > 0$ tedy vychází platnost podmínky (2)

$$c < a + \frac{d}{2}$$

c) $b > a$ (koleje jdou vzhůru):

Z obr. 1 vychází z podobnosti $\triangle AC_1C \sim \triangle AB_1B$

$$\frac{c - a}{l'} = \frac{b - a}{l},$$

$$c = \frac{l'}{l} (b - a) + a$$

a po dosazení z rovnice (1)

$$c = \frac{v(b - a)}{l \sin \frac{\alpha}{2}} + a$$

Nerovnost (2) je tedy splněna, jestliže platí

$$\frac{v(b - a)}{l \sin \frac{\alpha}{2}} < \frac{d}{2}$$

Odtud

$$d > \frac{2v(b - a)}{l \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Výsledek:

Pro $b \leq a$ se těleso pohybuje zrychleně bez ohledu na velikost průměru d hrany dvojkužele. Pro $b > a$ se těleso pohybuje zrychleně, pokud pro průměr d platí

$$d > \frac{2v(b - a)}{l \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Pro uvedené hodnoty a, b, l, α, v je $d > 9,3 \overline{3}$ cm.

olympiády

Úlohy ze XVII. MMO v Burgasu

Redakce otiskuje znění i vzorná řešení dalších dvou úloh ze XVII. mezinárodní matematické olympiády, konané v roce 1975 v Burgasu.

3. Je dán trojúhelník ABC . Vně tohoto trojúhelníka sestrojíme (v téže rovině) trojúhelníky ABR , BPC , CQA takové, že

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle CAQ = 45^\circ,$$

$$\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30^\circ,$$

$$\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15^\circ$$

Dokažte, že

$$1) \sphericalangle PRQ = 90^\circ, \quad 2) PR = QR$$

Holandsko, 7 bodů

4. Nechť A je součet cifer čísla 4444^{4444} ; nechť B je součet cifer čísla A . Určete součet cifer čísla B . (Všechna čísla jsou zapsána v desítkové soustavě.)

Sovětský svaz, 6 bodů

Řešení: 3. Označme

$$\sphericalangle ABC = \beta, \quad \sphericalangle BAC = \alpha, \quad \sphericalangle ACB = \gamma,$$

$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AR = BR = y$, $AQ = x$, $QC = t$, $BP = z$, $PC = v$. Dle sinové věty je

$$x \cdot b = \sin 30^\circ \cdot \sin 105^\circ,$$

takže

$$x = \frac{b}{2 \cos 15^\circ}$$

a obdobně

$$z = \frac{a}{2 \cos 15^\circ}.$$

Dále je

$$y = \frac{c}{2 \cos 15^\circ}$$

a

$$t = x \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = x \sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2} \cos 15^\circ},$$

$$v = t \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{2} \cos 15^\circ}$$

K vyjádření délek stran trojúhelníka PQR uijeme kosinové věty:

$$QR^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\alpha + 60^\circ),$$

$$PR^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\beta + 60^\circ),$$

$$PQ^2 = t^2 + v^2 - 2tv \cos(\gamma + 60^\circ)$$

Tyto rovnosti platí, i když některý z úhlů α, β, γ je $\geq 120^\circ$

Dle sinové věty je ovšem

$$a \sin \beta = b \sin \alpha,$$

a tedy

$$a \sin \beta - b \sin \alpha = 0,$$

takže

$$\sqrt{3} \cdot c(a \sin \beta - b \sin \alpha) = 0 = \frac{1}{2} (b^2 - c^2 + a^2 - 2a^2 + a^2 + c^2 - b^2).$$

Odtud plyne dále rovnost

$$\begin{aligned} b^2 - \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2) + bc \sqrt{3} \cdot \sin \alpha &= \\ &= a^2 - \frac{1}{2} (a^2 + c^2 - b^2) + ac \sqrt{3} \sin \beta, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} b^2 - \frac{1}{2} (2bc \cos \alpha) + bc \sqrt{3} \sin \alpha &= \\ &= a^2 - \frac{1}{2} (2ac \cos \beta) + ac \sqrt{3} \sin \beta, \end{aligned}$$

$$b^2 - 2bc \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \alpha \right) = a^2 - 2ac \left(\frac{1}{2} \cos \beta - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \beta \right),$$

což lze psát též jako

$$b^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) = a^2 - 2ac \cos(\beta + 60^\circ)$$

Nyní celou rovnost dělíme číslem $4 \cos^2 15^\circ$ a dostaneme

$$\frac{b^2}{4 \cos^2 15^\circ} - \frac{bc \cos(\alpha + 60^\circ)}{2 \cos^2 15^\circ} = \frac{a^2}{4 \cos^2 15^\circ} - \frac{ac \cos(\beta + 60^\circ)}{2 \cos^2 15^\circ}$$

neboli

$$x^2 - 2xy \cos(\alpha + 60^\circ) = z^2 - 2yz \cos(\beta + 60^\circ)$$

To však znamená, že $PR^2 = QR^2$, čili $PR = QR$. Dokázali jsme tak druhou část úlohy: trojúhelník PQR je rovnoramenný.

První část, tj. rovnost $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$, dokážeme z Pythagorovy věty. Platí totiž

$$PR^2 + QR^2 = PQ^2.$$

Poněvadž už víme, že

$$PR = QR, \text{ je}$$

$$PR^2 + QR^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4xy \cos(\alpha + 60^\circ)$$

Zároveň je

$$PQ^2 = t^2 + v^2 - 2tv \cos(\gamma + 60^\circ)$$

Podle sinové věty je však

$$a \sin \gamma - c \sin \alpha = 0$$

odtud stejným postupem jako v předchozím dostaneme rovnost

$$c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ) = a^2 - 2ab \cos(\gamma + 60^\circ) \quad (*)$$

Dosadíme-li do výrazů pro $PR^2 + QR^2$ a pro PQ^2 za x, y, t, v , dostaneme

$$PR^2 + QR^2 = \frac{b^2}{2 \cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{2 \cos^2 15^\circ} - \frac{bc \cos(\alpha + 60^\circ)}{\cos^2 15^\circ}$$

$$PQ^2 = \frac{b^2}{2 \cos^2 15^\circ} + \frac{a^2}{2 \cos^2 15^\circ} - \frac{ab \cos(\gamma + 60^\circ)}{\cos^2 15^\circ}$$

Porovnáním s (*) dostáváme pak požadovanou rovnost:

$$PR^2 + QR^2 = PQ^2$$

trojúhelník PRQ je tedy pravoúhlý: $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$

Existují i jiná správná řešení, z nichž jedno je založeno na znalosti pojmu podobnosti jakožto zobrazení roviny.

4. Řešení úlohy se skládá ze dvou částí. Nejprve odhadneme shora součet cifer čísla B ; označme si jej C . Zřejmě je

$$4444 < 1\,0000 = 10^4,$$

takže číslo 4444^{4444} má nanejvýš 4 4444 = 17776 cifer. Každá z nich je nanejvýš rovna 9; pro jejich součet A tak dostáváme odhad

$$A \leq 9 \cdot 17776 = 159\,984$$

Číslo B je tedy nejvýše rovno číslu

$$9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$$

Z přirozených čísel ≤ 45 má největší součet cifer číslo 39, totiž 12. Je tedy celkem

$$C \leq 12$$

Druhá část řešení spočívá ve využití známé skutečnosti, že každé číslo dává při dělení devíti týž zbytek, jaký dává jeho ciferný součet. Platí tedy

$$\begin{aligned} 4444^{4444} &\equiv A \pmod{9}, \\ A &\equiv B \pmod{9}, \\ B &\equiv C \pmod{9} \end{aligned}$$

Avšak

$$4444 \equiv 7 \pmod{9},$$

a tedy také

$$4444 \equiv 1 \pmod{3}$$

Snadno si ověříme, že pro každé přirozené k je

$$7^{3k+1} \equiv 7 \pmod{9}$$

je tedy

$$4444^{4444} \equiv 7 \pmod{9}$$

To však z namená, že také

$$C \equiv 7 \pmod{9}$$

Poněvadž je $C \leq 12$, vidíme, že nutně $C = 7$. Hledaný součet cifer čísla B je tedy právě 7

různé

Přijímací zkoušky z matematiky na vysokých školách inženýrských směrů

JAN VOŘÍŠEK, STANISLAV ŠMAKAL

Komise JČSMF pro matematiku na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských nabídla prostřednictvím tohoto časopisu studentům středních škol poradenskou službu o studiu matematiky na vysokých školách inženýrských směrů. Řada studentů se již dotazovala na problematiku přijímacích zkoušek z matematiky. Poněvadž základní informace jsou pro všechny stejné, odpovídáme všem souhrnně tímto článkem. Tím nechceme vyloučit nabídnutou pomoc, tj. odpovídat na individuální dotazy, pokud budou přesahovat rámec této informace.

Přijímací řízení je dáno pokyny ministerstva školství a vedení jednotlivých vysokých škol. Na většině škol a fakult inženýrských směrů se dělá

písemná přijímací zkouška z matematiky, někde i zkouška ústní. V tomto článku si všimneme písemné části přijímací zkoušky a požadavků na znalosti matematiky u absolventů středních škol. Při ústních zkouškách se nepožaduje více, než je v uváděných tématických celcích.

Jak ukazují připojené ukázkové varianty písemných přijímacích zkoušek ze školního roku 1975/76, nejsou písemné zkoušky příliš náročné a nejsou tu plně zastoupeny některé obtížnější partie středoškolské matematiky, především ty, kterým se vyučuje jen na přírodovědných větvích gymnázií (např. užití diferenciálního a integrálního počtu se neobjevilo v žádné z variant, komplexní čísla jen na jedné fakultě ČVUT, základy analytické geometrie a kombinatoriky již častěji). Rovněž formulace úloh přihlíží k velkému procentu uchazečů, kteří na vysokou školu přicházejí ze středních odborných škol, kde dosud kurs matematiky nezačal být modernizován. Uváděné varianty nelze jistě brát za závazné pro příští školní rok, uvádíme je pouze jako vodítko pro přípravu k přijímací zkoušce. Proto připojujeme i minimální požadavky z matematiky, které lze považovat za závazné pro všechny typy vysokých škol inženýrských směrů. Spolu s pozvánkou k přijímací zkoušce zasílají jednotlivé fakulty zpravidla přihlášeným uchazečům informační letáky, v kterých zpřesňují požadavky příslušné fakulty. Odchytky od uvedených požadavků jsou však již minimální, jak ukazují i uvedené varianty písemných přijímacích zkoušek.

Čtenář si jistě povšimne, že na různých fakultách byly předloženy k řešení různé počty příkladů. Je přirozené, že počet příkladů souvisí s dobou, která je přijímací zkoušce z matematiky vyhrazena. Při stejné časové dotaci se předpokládá, že větší počet úloh má přiměřeně lehčí povahu.

1. ROZSAH LÁTKY KE ZKOUŠCE Z MATEMATIKY

vychází z osnov matematiky pro přírodovědnou větev gymnázia a zaměřuje se především na tyto tématické celky:

- a) Úprava algebraického výrazu (užití rozkladů $a^3 \pm b^3$, $a^2 - b^2$; rozklad kvadratického trojčlenu; mocniny s reálným exponentem).
- b) Goniometrie (goniometrické funkce obecného úhlu, součtové věty pro sinus a kosinus; jednoduché goniometrické rovnice).
- c) Algebraické rovnice a nerovnice (i s absolutní hodnotou nebo s parametrem, jednoduché iracionální rovnice).
- d) Funkce a jejich grafy (lineární, kvadratické, exponenciální, logaritmické. Jednoduché logaritmické a exponenciální rovnice).
- e) Analytická geometrie v rovině (úlohy na hledání průsečíku přímek, úhel, kolmost; elementární úlohy vedoucí k rovnici kružnice, elipsy, hyperboly a paraboly v základní poloze).
- f) Planimetrie a stereometrie (výpočty obvodu, obsahu, povrchu a objemu základních útvarů i s užitím trigonometrie).

- g) Jednoduché konstruktívne úlohy v rovine s použitím základných planimetrických vät (Thaletova, Pythagorova, Eukleidova, stredové a obvodové uhly, rovnolehlost).
- h) Základné kombinatorické úlohy a binomická veta.
- i) Aritmetická a geometrická postupnosť, nekonečná geometrická rada.
- j) Komplexné čísla a ich zobrazenie v rovine. Elementárne početné výkony s komplexnými číslami.

2. VZOROVÉ VARIANTY NĚKTERÝCH VYSOKÝCH ŠKOL

Vybrali jsme jednu variantu z každé pražské vysoké školy inženýrského směru a ze dvou fakult bratislavské SVŠT:

a) ČVUT — stavební fakulta

1. Vypočtete

$$\left[\frac{12}{3 - \sqrt{6}} - \frac{15}{\sqrt{6} + 1} + \frac{4}{2 - \sqrt{6}} \right] (\sqrt{6} + 11)$$

2. Řešte rovnici

$$1975^{\log(x^2 - 4x + 4)} = 1$$

3. Řešte rovnici

$$\operatorname{tg}^4 2x - 4 \operatorname{tg}^2 2x + 3 = 0$$

4. Ze tří kovových koulí poloměrů $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $r_3 = 5$ byla ulita jediná koule. Jaký je její povrch?

5. Strany obdélníka jsou v poměru 3 : 4. Kolik procent obsahu opsaného kruhu tvoří obsah obdélníka?

b) Stavebná fakulta — SVŠT Bratislava

1. Najdte všetky reálne hodnoty koeficienta a , pre ktoré má rovnica

$$x^2 + 2a \sqrt{a^2 - 3} x + 4 = 0$$

dvojnásobný koreň.

2. Určite polomer kružnice, v ktorej tetiva, vzdialená od stredu kružnice o 8 cm, je o 13 cm dlhšia ako polomer kružnice.

3. Najdte všetky riešenia rovnice

$$2 \sin^2 x = 2 - \cotg x$$

4. Daná je kružnica o polomere 1 so stredom v $S = [2; 2]$. Pre aké čísla k pretína priamka $y = kx$ túto kružnicu práve v jednom bode?

5. Pre ktoré x platí

$$-1 \leq \operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \leq 1?$$

c) *SVŠT elektrotechnická fakulta — Bratislava*

1. Určite veľkosť strán obdĺžnika, ktorý má rovnako veľký plošný obsah ako štvorec so stranou dĺžky 3 cm a ktorého obvod je $\frac{5}{3}$ obvodu toho štvorca.

2. Nájdite všetky čísla x , ktoré vyhovujú rovnici

$$4 \sqrt[4]{2^{5-7x}} = \sqrt{2} \sqrt[3]{4^{3-5x}}$$

3. Ukážte, že pre každé reálne číslo x platí

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

4. Napíšte rovnicu kružnice, ktorej priemer je úsečka s koncovými bodmi $A = [-3; 0]$, $B = [3; 6]$.

d) *ČVUT — elektrotechnická fakulta*

1. Řešte rovnici

$$\log_2 (x + 14) + \log_2 (x + 2) = 6$$

2. Bez použití tabulek najděte všechny velikosti úhlu, které vyhovují rovnici

$$\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2 \sqrt{3} \sin x \cos x = 1$$

3. Vymezte množinu všech reálných čísel x , vyhovujících nerovnici

$$\frac{|x + 1|}{2} < x$$

4. Najděte všechna reálná čísla x , která vyhovují rovnici

$$\frac{2}{2 + \sqrt{3 - x^2 - 2x}} - \frac{1}{2 - \sqrt{3 - x^2 - 2x}} = \frac{1}{x + 1}$$

5. Určete hodnoty goniometrických funkcí sinus, kosinus a tangens úhlu, který svírají stěny pravidelného čtyřstěnu.

6. V rovině s pravoúhlou soustavou souřadnic má rovnoramenný trojúhelník ABC základnu AB , $A = [2; 4]$, $B = [-6; -4]$. Vrchol C leží na přímce o rovnici

$$2x - y - 8 = 0$$

Najděte jeho souřadnice.

e) ČVUT – strojní fakulta

1. Zjednodušte a udejte podmínky existence

$$\left(\frac{x^2 - 3x - 10}{x - 2} \right)^3 \left(\frac{x - 5}{x^2 - 4} \right)^{-3}$$

2. Určete koeficienty a, b tak, aby graf funkce

$$y = a \sin x + b$$

procházel body

$$A = [0; -3], \quad B = \left[\frac{\pi}{2} \quad -4 \right]$$

Rozhodněte, zda na grafu leží body

$$C = \left[\frac{3}{2} \pi; -2 \right], \quad D = \left[\frac{\pi}{6}; -1 \right]$$

3. Řešte nerovnici

$$|x + 3| < \frac{1}{2}$$

Řešení zobrazte na číselné ose.

4. Řešte rovnici

$$\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 2$$

5. Určete číslo m tak, aby bod $A = [3; m]$ ležel na přímce, která prochází bodem $B = [1; 4]$ a je kolmá na přímku

$$x + 4y - 12 = 0$$

6. Najděte přirozené číslo n , které vyhovuje rovnici

$$\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-2}{2} = 4$$

7 Do kružnice k o daném poloměru r vepište trojúhelník, jehož úhly α, β jsou dány. Proveďte rozbor, konstrukci jednoho řešení pro $r = 3, \alpha = 30^\circ, \beta = 45^\circ$, důkaz a diskusi.

f) ČVUT – fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

1 Řešte nerovnici

$$\frac{1}{|x|} \leq -\frac{x}{x+1}$$

2. Je dána aritmetická posloupnost, jejíž členy jsou přirozená čísla. Součet prvních devíti členů této posloupnosti je 108; určete je.
3. Vypočtete $\sin \frac{\alpha}{2}$, je-li $\operatorname{tg} \alpha = 2$
4. Kolik je hodin, kryjí-li se obě hodinové ručičky mezi 2 a 3?
5. Je dán pravoúhlý trojúhelník o stranách 3, 4, 5; do něj je vepsán čtverec, jehož jedna strana je částí přepony a zbývající dva vrcholy leží na odvěsnách. Kolik procent obsahu daného trojúhelníka tvoří obsah vepsaného čtverce?

g) *Vysoká škola ekonomická*

1. Řešte rovnici

$$\frac{5}{4}n + 1 = \binom{n}{2}$$

2. Pro která reálná x platí

$$x - |1 - 2x| \leq 1$$

3. Napište rovnici lineární funkce, její graf prochází body $A = [1; -2]$, $B = [4; 1]$. Vypočtete vzdálenost průsečíků grafu této funkce se souřadnicovými osami.

4. Určete a_1, q v geometrické posloupnosti, jestliže platí

$$a_2 + a_3 = 1$$

$$a_2 + a_5 = 3$$

5. Řešte rovnici

$$\sin^4 x - 1 = 0$$

h) *Vysoká škola zemědělská*

1. Zjednodušte zlomek

$$\frac{b^3 r^2 - b^3 s^4}{(r^3 - s^6) \cdot b^3}$$

2. Řešte rovnici

$$x - \frac{5}{x} = \frac{11}{4}$$

3. Pro která reálná x je zlomek

$$\frac{x - 4}{5 - x}$$

záporný?

4. Vyjádřete x jako funkci t, u, v , víte-li, že

$$\log x = \frac{1}{2} \log t - \frac{2}{3} \log u - \frac{1}{3} \log v$$

Udejte podmínky.

5. Povrch koule je $s = \frac{1}{4} \pi$. Vypočtete obsah kruhu omezeného její hlavní kružnicí. (Obsah vyjádřete rovněž jako násobek čísla π .)

6. Zjednodušte výraz

$$\frac{2 \cotg m}{1 + \cotg^2 m}$$

7. Řešte goniometrickou rovnici

$$\operatorname{tg}(x + 30^\circ) = 1.$$

8. Co je geometrickým místem středů kružnic o poloměru r dotýkajících se dané kružnice o poloměru R ? ($r < R$). (Úloha je z rovinné geometrie.)

i) *Vysoká škola chemicko-technologická*

1. Z daného vztahu vyjádřete b

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 c}{b}} = \sqrt[3]{ab^2 c} \quad (a, b, c > 0).$$

2. Vyjádřete x jako funkci z ($b \dots$ konstanta)

$$z = \log \frac{1}{x + b}$$

3. Vyjádřete s chybou menší než 10^{-4} (užijte logaritmických tabulek)

$$M = \sqrt[8]{0,0856}.$$

4. Do koule o poloměru a je vepsán rovnostranný kužel (každý osový řez je rovnostranný trojúhelník). Určete jeho objem.

5. Řešte rovnici

$$\cos^2 2x = \frac{3}{4}$$

6. Určete hodnotu

$$\sin \left(-\frac{11}{3} \pi \right)$$

Najděte všechna reálná x , pro něž platí

$$|3x - 1| > 2x.$$

8. Napište rovnici kružnice, která má střed v bodě

$$A = \left[4; -\frac{2}{3}\right] \text{ a dotýká se přímky}$$

$$4x - 3y + 2 = 0.$$

9. Určete konstantu m tak, aby přímka

$$(m - 2)x + 5y + m^2 - m - 2 = 0$$

procházela počátkem souřadnic a nebyla totožná s osou souřadnic.

10. Určete přirozené číslo n , které vyhovuje rovnici

$$\binom{n}{n-2} - \binom{n-1}{n-3} = 4$$

Nepochybujeme o tom, že podrobně propočítáte alespoň variantu té fakulty, na kterou podáváte přihlášku ke studiu. Přesvědčíte se, že varianty jsou poměrně snadné. Máte ještě dostatek času případné nedostatky odstranit. Získáte tím potřebnou sebedůvěru, abyste mohli k přijímací zkoušce přistupovat klidně a bez zbytečné nervozity.

Za komisi pro matematiku na VŠTEZ vám přejeme hodně úspěchů.

matematické zábavy

Vaněčkova úloha o sudech

V jedné pokusné učebnici matematiky pro 6. ročník ZDŠ (autoři M. Koman a J. Taišl) můžeme nalézt pohádkovou úlohu „O Honzových sudech“. Úloha zní přibližně takto:

Král si zavolal Honzu a dal mu úkol: „Dobře poslouvej, Honzo! Ve sklepě jsem dal připravit osm sudů plných zlaťáků, ale jen v jednom jsou zlaťáky pravé. Pravé zlaťáky váží po 11 gramech, falešné o 1 gram méně. Vedle sudů je váha se dvěma miskami a sada závaží. Zjistíš-li jediným vážením sud s pravými zlaťáky, je tvůj. V opačném případě přijdeš o hlavu.“ Co byste dělali, kdybyste byli na místě Honzy?

V učebnici je naznačeno toto řešení:

Očísľujeme sudy čísla 1, 2, 3, ..., 8. Z prvého sudu vezmeme jeden zlaták, z druhého dva zlatáky, z tretieho tri zlatáky, atď. až z posledného osm zlatákov. Kdyby byly všechny zlatáky falešné, vážily by vybrané mince

$$10 + 20 + 30 + \dots + 80 = 360$$

gramů. O kolik gramů bude výsledek vážení větší než 360 g, v tolikátém sudu budou pravé mince.

Například, je-li výsledná váha mincí 365 g, jsou pravé zlatáky v pátém sudu, neboť

$$10 + 20 + 30 + 40 + 55 + 60 + 70 + 80 = 365$$

Sami snadno nahlédnete, že v těch případech, kdy jsou pravé mince v jiném než pátém sudu, dostaneme jiný součet. Například, kdyby sud s pravými zlatáky byl až sedmý, byl by součet

$$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 77 + 80 = 367$$

Úloha se zalíbila *Stanislavu Vaněčkovi*, členu matematického PO při ZDŠ, Lyčkovu nám., Praha 8, tolik, že se nad jejím řešením i zněním zamyslel hlouběji. Úlohu postupně zobecňoval, až přišel ke konečnému znění:

Vaněčkova úloha: Mezi n sudy ($n > 1$) naplněnými zlatáky je několik sudů s falešnými mincemi. Falešná mince váží 10 g, pravá 11 g. Jediným vážením na rovnoramenných vahách máme zjistit všechny sudy s pravými penězi.

Úlohu předkládáme našim čtenářům. Řešení autora úlohy Stanislava Vaněčka uvedeme v některém z příštích čísel.

(MK)

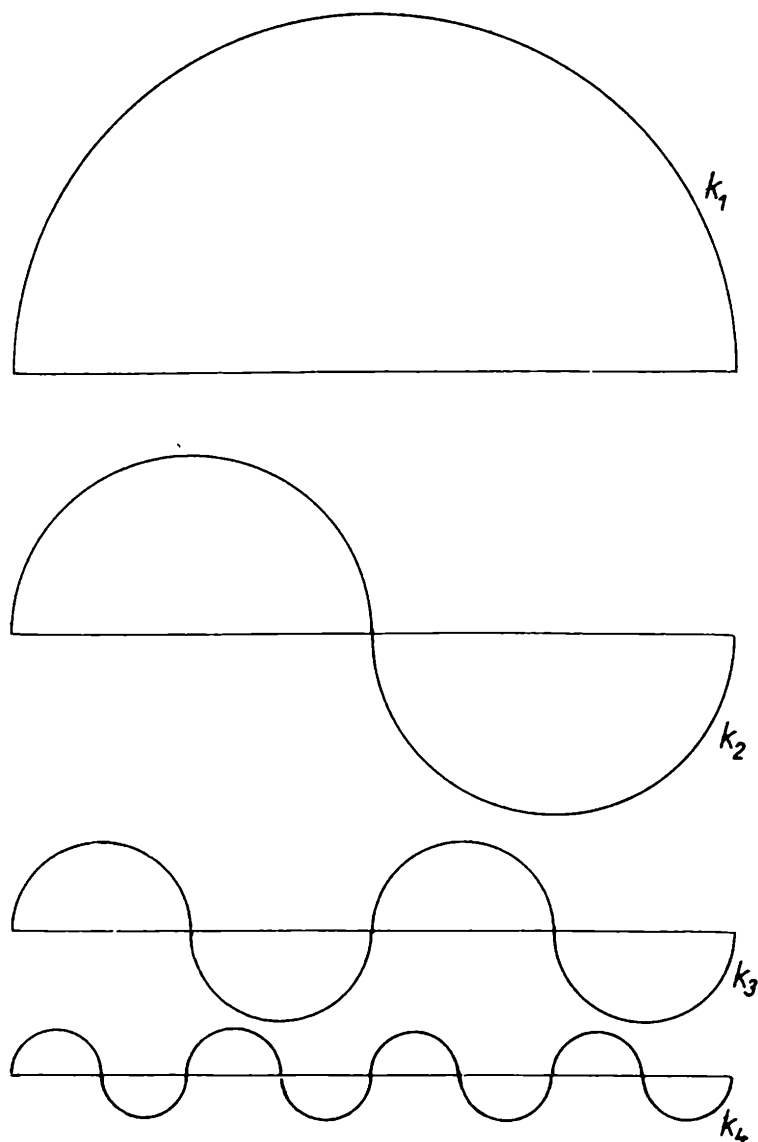
Zmatlík, Archimédes nové doby

JOSEF KOTYK, Pardubice

Do předmaturitního týdne prázdná čítacího včetně sobot a nedělí devět dní po 24 hodinách, věnovaných beze zbytku nejpilnějšímu studiu, spadl jako posel z lepšího světa vítaný pomocník: číslo Rozhledů! Známý barevný sešit, sympatický vzhledem i obsahem, neodolatelně přitažlivý! Zmatlík a Štoural rázem odložili sešity i knihy a sáhli po oblíbeném časopise. Dychtivě pročtli článek úvodní „O čísle π “ i jiný, téměř poslední, „Archimédes“.*) Povzdychli si nad idylickými časy, kdy

*) Jsou to články dr. J. Šedivého z roč. 52, číslo 8 (duben 1974), str. 337–9, 381–2.

Obr. 1



se místo iracionálního čísla π , které nelze přesně vyjádřit žádným desetinným číslem, pracovalo prostě s číslem 3. Připomněli si, že Archimédes při své důkladnosti „oddálil“ číslo π od čísla 3 a sevřel je v mezích $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{1}{2}$

Štoural podotkl, že tento objev Archiméda zřejmě tak nevzrušil jako jeho zákon o nadnášení těles. Historici nepíší, že by Archimédes běhal nahý po ulici a vykřikoval „Heuréka“ Zmatlík si živě představoval Archimédovy 96-úhelníky nakreslené v písku a oceňoval přednosti i obtíže jeho postupu od pravidelného 6-úhelníka vepsaného do kružnice k 12, 24, 48 a 96úhelníku. Pojednou mu však zahořel v očích plamen objevitelského nadšení a Zmatlík zvolal: „Teď jsem přišel na lepší limitní postup než Archimédes, zkusím to jako on!“ a rychle se vzdálil. Štoural jen z okna zahlédl, jak Zmatlík pádí do městského sadu a vydal se za ním.

Co tam neviděl, neuslyšel! Zmatlík už měl nakresleny v písku obrazy, odháněl od nich vědyčtivou mládež i jiné dotěrné zvědavce a volal

„Heuréka, heuréka!“ Jakýsi lysý mudřec v. v. sedící na lavičce hlesl polohlasně: „Kreslí do písku, křičí heuréka. Je to nějaký Archimédes.“

Jak zahlédl Štourala, zvolal Zmatlík: „Heuréka! Už to mám! Archimédes se zmýlil! Číslo π se rovná dvěma!“ Užaslému Štouralovi ukázal své kresby v písku (vidíte je na připojených obrázcích) a horlivě vysvětlo-

val: „Je-li daná úsečka jednotková, má polokružnice k_1 délku $\frac{\pi}{2}$, vlnitá

čára k_2 má délku $2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, vlnitá čára k_3 je dlouhá $4 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$,

k_4 je dlouhá $8 \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$ atd. Tak můžeme bez omezení pokračovat,

vlnitá čára k_n má délku $2^{n-1} \cdot \frac{\pi}{2^n} = \frac{\pi}{2}$ při každém přirozeném n .

Všechny křivky k_n mají stejnou délku $\frac{\pi}{2}$ a při velmi velkých hodnotách

n se liší od dané úsečky tak málo, jak chceme, až s ní splynou. Proto je

$\frac{\pi}{2} = 1$ a tedy $\pi = 2$. To tvrdím já, Archimédes nov é doby!“ Městského

zřízence, který zjednával pořádek a málem stoupl na jeho kresby, varoval Zmatlík obměnou klasického Archimédova výroku: „*Noli tangere semicirculos meos!*“

Milí čtenáři, Zmatlík po těchto slovech nebyl proboden. Srdce mu zlomil přítel Štoural, když ho vyvedl z omylů. Jistě i vy jste byli uneseni vědeckým nadšením svého nesmrtelného kolegy Zmatlíka. Věřím, že neodoláte a prozkoumáte jeho postup. Svůj úkol si usnadníte, prostudujete-li dříve rubriky ZZZ (Záhady Zmatlíkova Zápisníku) ve starších ročnících Rozhledů, zejména však článek „Záhada s délkami čar“ v roč. 48, č. 10, str. 479–80 aj.

Matematická miniatura

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Často se na stránkách různých časopisů setkáváme s úlohou asi tohoto znění: Pomocí tří (čtyř, pěti apod.) dvojek (trojek atd.) a matematických symbolů vyjádřete každé celé číslo od jedné např. do deseti. Řešitelé pak provádějí složitou eskamotáž s početními znaménky, než se jim podaří úlohu rozřešit.

Tato úloha však existuje v mnohem obecnější a elegantnější formě: DOVEDLI BYSTE KTERÉKOLI CELÉ ČÍSLO VYJÁDŘIT ZA

POUŽITÍ LIBOVOLNÝCH MATEMATICKÝCH SYMBOLŮ POUZE TŘEMI DVOJKAMI ?

Jinými slovy máte kterékoli celé číslo (nulu, kladné i záporné) vyjádřit pomocí matematických symbolů a tří dvojek. Zdá se to téměř nemožné, a přece je řešení poměrně jednoduché. Je-li $n = 0$, je řešení triviální, např. $0 = 2 \cdot (2 - 2)$. Je-li $n > 0$, pak snadno dokážeme, že platí vztah

$$n = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{2}}}},$$

kde počet druhých odmocnin je právě n . Výraz, který se má dvakrát za sebou při základu 2 logaritmovat, je totiž vlastně roven $2^{2^{-n}}$, takže po prvním logaritmování vyjde 2^{-n} a po druhém $(-n)$. Je-li $n < 0$, je řešení obdobné.

Je to zajímavý příklad na to, jaká kouzla lze v matematice provádět nemusíme-li u symbolu, vyjadřujícího druhou odmocninu, vypisovat číselní odmocninový exponent.

Hra s uspořádanými dvojicemi

Dr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, Praha

Dva hráči si vylosují pořadí (první, druhý) a dohodnou se na nějaké uspořádané dvojici přirozených čísel $[a, b]$. Má-li být hra zajímavá, volte a, b větší než 20, například dvojici $[31, 27]$. Hráči „táhnou“ střídavě tím způsobem, že zmenšují složky uspořádané dvojice podle těchto pravidel:

a) První hráč v prvním tahu zvolí číslo $k_1 \leq 10$ a zmenší o k_1 buď jedinou ze složek a, b nebo obě; tím vytvoří dvojici $[a_1, b_1]$ pro druhého hráče, který obdobně vytvoří pomocí $k_2 \leq 10$ dvojici $[a_2, b_2]$.

b) V každém tahu si každý hráč volí číslo k_i a vytváří z dvojice $[a_{i-1}, b_{i-1}]$ jednu ze tří možných dvojic $[a_i, b_i]$:

$$[a_{i-1} - k_i, b_{i-1}], \quad [a_{i-1}, b_{i-1} - k_i], \quad [a_{i-1} - k_i, b_{i-1} - k_i]$$

c) Hra končí, dosáhne-li jeden z hráčů dvojice $[0, 0]$, tento hráč je vítězem hry.

Příklad hry se „šachovým“ záznamem a komentářem:

1. $[21, 27]$, $[21, 24]$. 2. $[11, 14]$, $[11, 12]$. Bílý volil rychlý postup (odečítal 10), zatímco černý byl opatrnější, nechce zřejmě do jednociferných čísel. 3. $[10, 12]$, $[10, 6]$. I bílý se zarazil, černý však „sjel“ pod 10.

4. [5, 6], [5, 3]. 5. [4, 3], [2, 1]. Bílý zvolil strategii složek lišících se o jedna, černý zřejmě ví, co chce. 6. [1, 1], [0, 0] a černý vítězí.

Promyslete si, že po dosažení dvojice [2, 1] už černý neodvratně musí zvítězit, protože bílému zbývala už jen volba mezi [1, 1], [1, 0], [0, 1]. Věříte, že existují i jiné uspořádané dvojice, jejichž dosažení může hráči zajistit výhru? Pokuste se je objevit! (K problematice obdobných her se vrátíme v některém z dalších čísel Rozhledů.)

Nejmladším členům

Tentokrát si všimneme polského časopisu „Matematyka“, který vychází ročně šestkrát, a uvedeme si odtud několik lehčích příkladů.

1. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y , které splňují rovnici

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (x + y)^2 + 1$$

Řešení: Po úpravě dostaneme

$$xy(xy - 2) = 0$$

Odtud: 1. $x = 0$. Toto řešení nevyhovuje; x není přirozené číslo.

2. $y = 0$. Nevyhovuje z téhož důvodu.

3. $xy - 2 = 0$ nebo jinak $xy = 2$. Máme dvě řešení:

$$x_1 = 1, y_1 = 2; \quad x_2 = 2, y_2 = 1.$$

2. Jestliže o číslech a, b, c platí $a + b + c = 0$, potom $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Dokažte.

Řešení. Rovnost $a + b + c = 0$ umocníme na třetí a hned budeme upravovat:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc &= 0, \\ a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b + c) + 3bc(a + b + c) + 3ac(a + b + c) - & \\ - 3abc &= 0, \end{aligned}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

a tím je důkaz proveden.

3. Kolik trojčíslných čísel je dělitelných číslem 17?

Řešení. Dvojciferných čísel, které jsou dělitelná číslem 17, je 5. Počet všech čísel menších než 999 (je to největší trojciferné číslo), která jsou dělitelná číslem 17, je

$$999 : 17 = 58$$

Podle toho je $58 - 5 = 53$ trojciferných čísel dělitelných číslem 17.

4. Ukažte, že číslo

$$N = \frac{m^3}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3}$$

je přirozené pro každé přirozené číslo m .

Řešení. Uvedením na společného jmenovatele a rozkladem čitatele dostaneme

$$N = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$$

Čísla m , $m+1$, $m+2$ jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla. Proto aspoň jedno z nich je sudé a právě jedno z nich je dělitelné třemi. Tudíž číselník je dělitelný číslem 6 a po zkrácení dostaneme přirozené číslo.

5. Jestliže trojčlen $a + b + c$ je dělitelný šesti (a , b , c jsou přirozená čísla), je šesti dělitelný i výraz $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. Dokažte.

Důkaz. Víme, že

$$a + b + c = 6k.$$

Tuto rovnici umocníme na třetí a hned upravujeme.

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc = (6k)^3,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b + c) + 3ac(a + b + c) + 3bc(a + b + c) - 3abc = (6k)^3,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (6k)^3 - 3ab \cdot 6k - 3ac \cdot 6k - 3bc \cdot 6k = 6k(36k^2 - 3ab - 3ac - 3bc)$$

a tím je důkaz proveden.

6. Tzv. tetraedrální (čtyřstěnová) čísla jsou dána vzorcem

$$T_n = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2),$$

kde $n \geq 1$ je přirozené číslo. — Dokažte:

$$\text{a)} \quad T_{n+1} - T_{n-1} = (n+1)^2 \text{ pro } n \geq 2 ;$$

$$\text{b)} \quad T_n + T_{n+1} = \frac{1}{4} T_{2n+2} \text{ pro } n \geq 1 .$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad T_{n+1} - T_{n-1} &= \frac{1}{6} [(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)] = \\ &= (n+1)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad T_n + T_{n+1} &= \frac{1}{6} [n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3)] = \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2n+2}{2} \cdot \frac{2n+4}{2} (2n+3) = \\ &= \frac{1}{4} T_{2n+2} . \end{aligned}$$

7. Dokažte, že

$$\sqrt[3]{\sqrt{242} + \sqrt{243}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Důkaz. Podle běžného zvyku označme strany této identity L , P .

$$P = \sqrt[3]{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3} = \sqrt[3]{11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}},$$

jak dostaneme umocněním. Upravíme ještě levou stranu:

$$L = \sqrt[3]{11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}.$$

Tím jsme dokázali, že $L = P$.

Stanislav Horák

Ze zahraničních časopisů

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Ze sovětského časopisu Kvant:

1. Řešte rovnici

$$6 \sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5 \quad \sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

Návod: Položte $u = \sqrt[6]{|x-2|}$ $v = \sqrt[6]{|x-3|}$

2. Řešte soustavu rovnic v oboru reál. č.:

$$x^2 + y \sqrt{xy} = 420$$

$$y^2 + x \sqrt{xy} = 280.$$

3. Řešte rovnici

$$2(x^2 + 2) = 5 \sqrt{x^3 + 1}$$

Návod: Užijte vztahu: $x^2 + 2 = (x + 1) + (x^2 - x + 1)$.

4. Řešte rovnici:

$$\frac{(34-x) \cdot \sqrt[3]{x+1} - (x+1) \cdot \sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x} - \sqrt[3]{x+1}} = 30.$$

Návod: Položte $u = \sqrt[3]{34-x}$, $v = \sqrt[3]{x+1}$

5. Řešte rovnici:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{x^2 - 8x + 7} + \sqrt[3]{x^2 - 8x - 9} \right)^x + \\ & + \left(\sqrt[3]{x^2 - 8x + 7} - \sqrt[3]{x^2 - 8x - 9} \right)^x = 2^{x+1} \end{aligned}$$

Návod: Položte $u = 2^x$, $v = \sqrt[3]{x^2 - 8x + 7} - \sqrt[3]{x^2 - 8x - 9}$

Výsledky: 1. $x_1 = \frac{190}{63}$, $x_2 = \frac{2185}{728}$; 2. $x = 18$, $y = 8$; 3. $x =$
 $= \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$; 4. $x_1 = 26$, $x_2 = 7$; 5. $x_1 = -1$, $x_2 = 9$.

Z německého časopisu Alpha:

1. Kolikrát během dne svírá malá ručička hodin s velkou pravý úhel?
2. Máme zabalit m předmětů do n shodných krabic. Vložíme-li do každé krabice 5 kusů, zbudou pro poslední krabici 2 předměty; zabalíme-li do každé krabice po 4 kusech, zůstane jeden předmět nezabalen. Kolik bylo předmětů a kolik krabic?
3. Na otázku, kolik je hodin, odpověděl mladý matematik: „Do konce dne zbývají dvakrát dvě pětiny času, který uplynul od začátku dne“. Kolik bylo hodin?
4. V trojúhelníku ABC je vnitřní úhel $\beta = \sphericalangle ABC = 45^\circ$; uvnitř strany BC leží bod P tak, že $BC = 3 \cdot BP$; úhel $\delta = \sphericalangle APC = 60^\circ$. Jak velký je úhel $\gamma = \sphericalangle ACB$?
5. Součin tří přirozených čísel je 1120. Druhý činitel je o 2 větší než polovina prvního činitele. Třetí činitel je o 2 větší než druhého činitele. Vypočtěte tyto faktory.
6. Nalezněte všechny uspořádané dvojice $(m; n)$ přirozených čísel $m < n$, pro něž platí: a) všechna uvažovaná čísla jsou dvojciferná; b) druhé číslo dvojice vznikne z prvního výměnou cifer; c) součet obou cifer každého páru dá při dělení pěti zbytek 3.
7. V pravidelném pětiúhelníku $ABCDE$ označme F průsečík prodloužených stran BC a ED . Přirovnejte délky úseček CE a DF .

Výsledky: 1. 44krát; 2. $m = 17$, $n = 4$; 3. 13^{20} ; 4. 75° ; 5. 16, 10, 7; 6. (12; 21), (17; 71), (26; 62), (35; 53), (49; 94), (58; 85), (67; 76); 7. $CE = DF$.

Z bulharského časopisu Matematika:

1. Řešte nerovnost

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} > \sqrt[3]{2x-3}.$$

2. Sečtěte n členů posloupnosti

$$\frac{7}{5}, \frac{29}{25}, \frac{133}{125}, \frac{641}{625},$$

Výsledky: 1. $1 < x < \frac{3}{2}, x > 2$; 2. $s_n = n + \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right]$.

OPRAVA

V článku prof. dr. Košťála „Chyby v žákovských řešeních úloh fyzikální olympiády“ (Rozhledy č. 4) provedla redakce změny, o nichž vzhledem k časové tísní nemohla uvědomit autora a ani mu nemohla dát korektury k nahlédnutí. Při těchto úpravách vznikly některé chyby. Proto zde uvádíme správné znění, jaké bylo v zaslaném autorově článku:

1. Odst. 3b zněl takto:

Je-li jeden činitel měrné teplo vody udané hodnotou $1 \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}$, tj. udané na jedno platné místo, mohu výsledek počítat jen na jedno platné místo. Aby bylo možné výsledek určovat na tři platná místa, muselo by být udáno měrné teplo hodnotou $c = 1,00 \frac{\text{kcal}}{\text{kg K}}$, i když ve větším intervalu nemá c stálou hodnotu.

2. Odst. 3e zněl takto:

Je-li pro výpočet práce dáno $U = 150 \text{ V}$, $I = 4 \text{ A}$, $t = 60 \text{ s}$, nemohu psát

$$A = 150 \cdot 4 \cdot 60 \text{ J} = 36\,000 \text{ J},$$

protože I je dáno jen na jedno platné místo; proto $A = 4 \cdot 10^4 \text{ J}$ (nikoliv $40\,000 \text{ J}$). Nad rovnítkem nemůže být tečka, protože číslo nezaokrouhlujeme, nýbrž počítáme na možný počet platných míst. Kdyby bylo dáno $I = 4,0 \text{ A}$, pak můžeme psát $A = 36 \cdot 10^3 \text{ J}$.

3. Odst. 4f zněl takto:

Někdy se uvádějí jednotky k veličinám např. takto:

$$P = UI \quad [W; V, A].$$

Není to vhodné a nemá to oporu v normě. Může to vést k domněnce, že uvedený vztah platí jen při užití uvedených jednotek.

V technické praxi, kde se užívá vhodnějších jednotek, vychází ve vztazích číselný součinitel, a to pak zdůvodňuje uvedené psaní jednotek, aby po dosazení vyšel výsledek v žádané jednotce.

4. V odst. 4d je tisková chyba: $[m^3]$ má být psáno jako index.

SLOVNÍČEK

ANGLICKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

V

validity
value
vanish
vanishing line
vanishing point
variable
 random variable
 dependent variable
 independent variable
variance
variation
vary
vector
 vector product
 vector space
velocity
 average velocity
Venn diagram
vertex
 initial vertex
 terminal vertex
 vertex angle
vertical
 vertical angles
 vertical projection
vice versa
vicinity
visible
visibility
visualize
volume

platnost
hodnota
rušit, rovnat
úběžnice
úběžník
proměnný
 nahodilá proměnná
 závisle proměnná
 nezávisle proměnná
disperze, rozptyl
variance, odchylka
měnit se
vektor, vektorový
 vektorový součin
 vektorový prostor
rychlost
 průměrná rychlost
Vennův diagram
vrchol, uzel (grafu)
 výchozí uzel
 koncový uzel
 úhel při vrcholu
svislý
 vrcholové úhly
 nárys
obráceně
okolí
viditelný
viditelnost
představit si
objem, díl

W

weight	váha
weighted average	vážený průměr
whole	celý
width	šířka
without	vně, bez
within	uvnitř
within reach	přístupný
with respect to	vzhledem k

Y

year	rok
------	-----

Z

zero	nula
zero of function	nulový bod funkce
zero point	nula, nulový bod
zone of a sphere	kulový pás, kulová vrstva

UPOZORNĚNÍ ČTENÁŘŮM;

Po ukončení anglicko-českého slovníčku matematických výrazů začneme v příštích číslech otiskovat obdobný slovníček česko-anglický, opět na zadních stránkách obálky našeho časopisu.

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ



ROČNÍK 54
BŘEZEN 1976

7

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1976.

OBSAH

Dr. J. Skuhra: Víte, co je statistika?	289
Dr. K. Mišoň, CSc.: Sférický trojúhelník	293
Prof. E. Kraemer: Různá řešení jedné úlohy o elipse	298
Doc. ing. L. Drs: Vývojové diagramy v konstruktivní geometrii	311
Dr. M. Šířoká, dr. J. Šedivý: Planetka Ikar	316
J. Zymák: Středověký kalendář	319
Doc. O. Setzer: XVII. MMO v Burgasu (pokračování)	324
Dr. J. Sedláček, CSc.: Z jubilejního roku MO	327
Dr. J. Mrázek, CSc.: Hra o životě a smrti I.	328
M. Kosman: Řešení Vaněčkovy úlohy	331
J. Kotyk: Hrst vzpomínek	333
Recenze	336
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

matematika

Víte, co je statistika?

RNDR. JIŘÍ SKUHRA, Praha

V současné době je možno statistikou rozumět jednak číselné údaje o hromadných jevech a jejich praktické opatřování, jednak teoretickou disciplínu, zabývající se metodami zkoumání kvantitativní stránky hromadných jevů (určitěji mluvíme v tomto případě o matematické statistice).

Předmětem zájmu statistiky jsou *hromadné jevy*, tj. jevy v početných souborech jedinců, tzv. statistických jednotek, kterými mohou být osoby, předměty, instituce atd. Souhrn těchto statistických jednotek se nazývá *statistický soubor* nebo též *populace*. Rozsahem populace rozumíme počet statistických jednotek ve statistickém souboru, budeme jej důsledně označovat symbolem N .

Statistické jednotky třídíme podle určitého statistického znaku, který může být kvalitativní nebo kvantitativní. Pro konkrétní představu si uveďme příklad.

Na pokusném políčku bylo vypěstováno 18 kusů květáku. Při sklizni byla každá hlávka květáku zvážena a byly zjištěny tyto hodnoty v gramech:

312, 327, 376, 405, 439, 452, 468, 481, 490, 493, 511, 519, 524, 538,
546, 561, 570, 578.

Populací je zde soubor květáků z pokusného políčka. Rozsah populace je $N = 18$. Jednotlivé hlávky květáku jsou statistické jednotky. Ty jsou tříděny podle váhy v gramech, což je statistický znak.

I. Základní statistické charakteristiky.

Představme si, že máme statistický soubor o rozsahu N . Na každé statistické jednotce jsme měřili hodnotu kvantitativního znaku X . Na i -té jednotce jsme naměřili hodnotu x_i , získali jsme tak N čísel $x_1, \dots, x_N$.

Máme-li ze statistického šetření populace udělat nějaké závěry a rozhodnutí, musíme roztržitěnou informaci, která je obsažena v naměřených hodnotách znaku X , nějakým způsobem shrnout do jednoho či několika málo údajů, tzv. statistických charakteristik, krátce statistik.

V první řadě půjde o to, nalézt takovou hodnotu znaku, která by mohla zastupovat hodnoty znaku v celé populaci. Musíme nalézt takovou statistiku, která by brala v úvahu všechny změřené hodnoty znaku. Označme tuto statistiku $\bar{x}$.

Budeme-li brát hodnotu $\bar{x}$ za reprezentativní hodnotu znaku, pak veličina $e_i = x_i - \bar{x}$ představuje absolutní chybu, které se dopouštíme na i -té statistické jednotce. Chceme-li, aby hodnota x zastupovala celou populaci, budeme požadovat nulový součet všech chyb. Tak dostaneme rovnici, která má jednoznačné řešení:

$$\sum_{i=1}^N e_i = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i - N\bar{x} = 0,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Statistika $\bar{x}$ se nazývá aritmetický průměr. Je nutno podotknout, že aritmetický průměr jako reprezentující hodnota znaku nemusí být nutně z množiny hodnot znaku. Často se s tím setkáváte ve škole. Znamky (hodnoty znaku) mohou být pouze 1, 2, 3, 4, 5, ale aritmetický průměr známek je málokdy celočíselný. To je hlavní nevýhoda aritmetického průměru, a proto zvláště při jeho interpretaci musíme být opatrní.

V našem příkladu o kvěťáku snadno spočítáme aritmetický průměr $\bar{x} = 477,2$. Lze tedy říci, že průměrná váha jedné hlávky kvěťáku je 477,2 g.

Uvažme tři soubory hodnot jistého měření:

A: 8, 10, 10, 10, 12,

B: 5, 8, 10, 12, 15,

C: 1, 5, 10, 15, 19.

Aritmetický průměr je ve všech souborech stejný

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B = \bar{x}_C = 10$$

Přesto se soubory od sebe na první pohled podstatně liší. Soubor **C** je více rozptýlený než soubor **B** a ten je více rozptýlený než soubor **A**.

Tento příklad ukazuje, že informace obsažená v aritmetickém průměru je menší než informace, kterou přinášejí naměřené hodnoty.

Abychom postihli informaci o rozptýlenosti souboru, zavádíme další statistiku. Při odvození aritmetického průměru jsme použili podmínku, že součet všech chyb e_i je roven nule. Chyby e_i číselně vystihují rozptýlenost naměřených hodnot, proto hledaná statistika bude funkcí všech chyb. Prostý součet chyb vzít nelze (proč?), proto vezmeme součet druhých mocnin chyb a utvoříme součet čtverců chyb:

$$S = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Protože v posloupnosti chyb $e_1, e_2, \dots, e_N$ je jich pouze $N-1$ nezá-

vislých*), definujeme rozptyl formulí

$$s^2 = \frac{1}{N-1} S = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Odmocnina s z rozptylu s^2 se nazývá směrodatná odchylka.

Pro výpočet rozptylu s^2 není uvedený vzorec nejvýhodnější, trochu si jej upravíme:

$$\begin{aligned} (N-1) s^2 &= \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \\ &= \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + N\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x}N\bar{x} + N\bar{x}^2 = \\ &= \sum x_i^2 - N\bar{x}^2. \end{aligned}$$

Pro výpočty se nejčastěji používá vzorce

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2 \right]$$

V našem příkladě je rozptyl váhy hlávky kvěťáku $s^2 \doteq 6306,9$ a směrodatná odchylka $s \doteq 79,4$ g.

Uvedené statistiky jsou vám celkem známé. Nejčastěji jich používáte ve fyzikálním praktiku při zpracování naměřených hodnot. Ve fyzice se však užívá jiné terminologie. Uvedeme si tedy *překladový slovníček*:

rozsah populace	počet měření n
aritmetický průměr	pravděpodobná hodnota $\bar{x}$
směrodatná odchylka	absolutní chyba jedné hodnoty s
směrodatná odchylka	(absolutní) střední chyba
aritmetického průměru	$\bar{\delta} = s/\sqrt{n}$.

Ve fyzice pak obvykle zapisujeme výsledek měření veličiny X ve tvaru

$$X = \bar{x} \pm \bar{\delta}$$

Zkusme si někdy udělat jiné statistické šetření, než děláte ve fyzikálním praktiku. Postůjte hodinku (třeba v dopravní špičce) na nástupišti tramvaje a sledujte, jak dlouho trvá, než nějaká tramvaj přijede. Statistické jednotky budou intervaly mezi tramvajemi v dané hodině; statistickým znakem bude časová délka těchto intervalů.

II. Statistická závislost

Na střední škole se pracuje s funkční závislostí. Při této závislosti je možno na základě změn jedné proměnné přesně vyjádřit změny druhé proměnné. Při statistické závislosti nemůžeme přesně stanovit změnu

*) Součet všech chyb je roven nule, proto můžeme N -tou chybu vypočítat, známe-li jich $N-1$.

jedné veličiny v závislosti na změně druhé veličiny. Tuto změnu můžeme vyjádřit pouze v průměru.

S funkční závislostí se nejčastěji setkáváme ve vědách přírodních, ovšem i tam je velké množství závislostí, které nejsou funkční. Můžeme sice přesně určit změnu napětí při změně odporu a proudu v daném obvodu z Ohmova zákona $U = R \cdot I$, ale naproti tomu nemůžeme určit množství srážek při změně barometrického tlaku, přestože barometrický tlak a množství srážek jsou na sobě jistě závislé. Můžeme určit jen průměrné množství srážek, protože vedle barometrického tlaku ovlivňuje množství srážek i mnoho jiných jevů, a to i jevů náhodných. U společenských jevů se s funkční závislostí vůbec nesetkáváme, neboť na každý zkoumaný společenský jev působí vždy velký počet náhodných jevů. Tak například jistě existuje závislost mezi množstvím dopravních nehod a množstvím dopravních prostředků. Nemůžeme však přesně určit, o kolik vzroste počet dopravních nehod, zvýší-li se počet dopravních prostředků třeba o 1000. Vzrůst počtu dopravních nehod můžeme pouze odhadnout.

Při statistické závislosti dvou veličin neodpovídá tedy jednoznačně jisté hodnotě jedné veličiny jediná hodnota druhé veličiny, ale jen určité rozdělení hodnot druhé veličiny. Tento druh závislosti nazýváme korelační závislostí, stručně korelací. Teorie nazývaná korelační počet si klade dvě základní úlohy: charakterizovat „těsnost“ závislosti a zjistit „formu“ závislosti vyjádřenou matematickým zápisem. O těchto úlohách si povíme více v dalších článcích.

Než ukončíme tento článek, odvodíme si ještě jednu vlastnost rozptylu, kterou budeme příště potřebovat.

Představme si, že na dané populaci jsme zkoumali dva různé znaky X, Y . Předpokládejme, že tyto znaky jsou spolu vázány lineárním vztahem $Y = aX + b$, kde a, b jsou konstanty. Ptáme se, jaký je vztah mezi aritmetickými průměry $\bar{x}, \bar{y}$ a mezi rozptyly s_x^2, s_y^2 .

Protože $Y = aX + b$, platí

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum y_i = \frac{1}{N} \sum (ax_i + b) = \frac{1}{N} [a \sum x_i + Nb] = a\bar{x} + b$$

Dále

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{N-1} \sum (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{N-1} \sum (ax_i + b - a\bar{x} - b)^2 = \\ &= \frac{1}{N-1} \sum [a(x_i - \bar{x})]^2 = \frac{a^2}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 = a^2 s_x^2. \end{aligned}$$

Máme tedy odvozeny dva důležité vztahy:

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \quad s_y^2 = a^2 \cdot s_x^2$$

Dodejme ještě, že při statistické analýze dvou znaků X, Y na statistickém souboru používáme vedle aritmetických průměrů a rozptylů ještě kovarianci

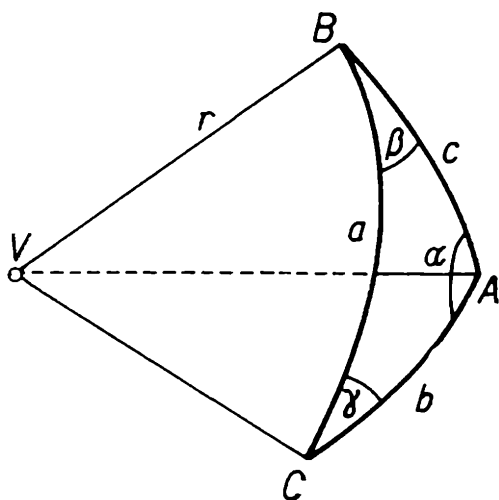
$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \\ &= \frac{1}{N-1} [\sum \sum x_i y_j - N \bar{x} \bar{y}]. \end{aligned}$$

Snadno nahlédnete, jak spolu souvisí s_x^2, s_{xy}, s_y^2 .

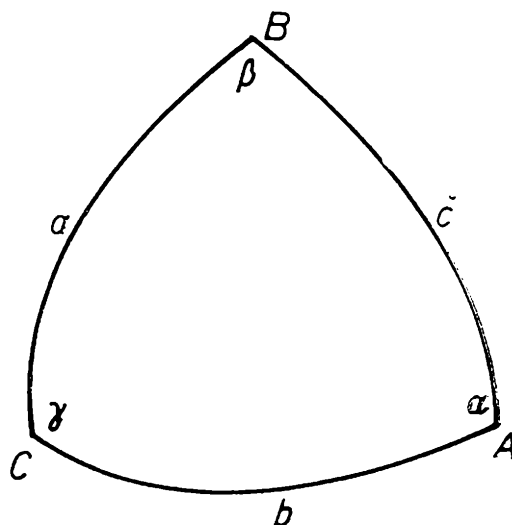
Sférický trojúhelník

Dr. KAREL MIŠOŇ, CSc, ČVUT Praha

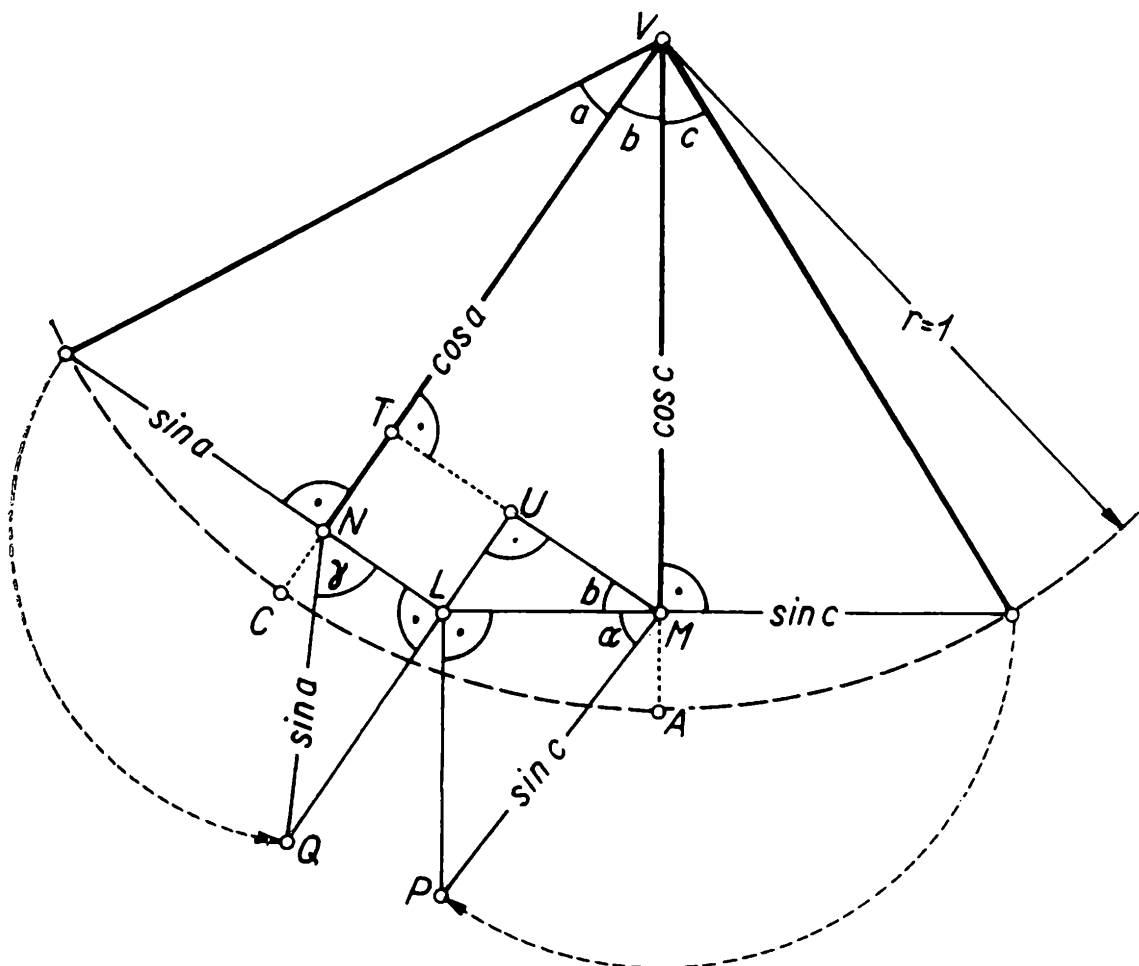
Od rovinné trigonometrie je jen krok ke trigonometrii sférické. V podstatě nejde o víc než o specializaci některých aplikací rovinné trigonometrie na úlohy stereometrické. Solidní odvození trigonometrických formulí a vět vyžaduje trpělivý disjunktní pohled, respektující členění úhlů co do kvadrantů. Vhodné transformační relace dovolují obecné formule pro řešení rovinného trojúhelníka převést bezprostředně na případ obecného trojúhelníka sférického. Pomíjejíce takovýto obecný přístup, spokojujeme se stručným a instruktivně názorným pohledem, vedoucím k řešení sférického trojúhelníka.



Obr. 1. Sférický trojhran



Obr. 2. Sférický trojúhelník



Obr. 3. Rozvinutí sférického trojhranu. Zhotovte si lepenkový model!

Trojúhelník obecný

Pro charakteristiku sférického trojúhelníka uvažujeme trojhran $V(ABC)$ (obr. 1), který na kulové ploše se středem V a s poloměrem r vytíná oblouky délek

$$r \operatorname{arc} a, \quad r \operatorname{arc} b, \quad r \operatorname{arc} c, \quad (1)$$

kde a, b, c je obvyklé označení *úhlů* sevřených hranami trojhranu. Úhly mezi jeho stěnami označíme α, β, γ . Bez ohledu na různé hodnoty poloměru r charakterizujeme sférický trojúhelník šesticí základních prvků: trojicí stran a, b, c a trojicí úhlů α, β, γ (obr. 2). Přitom je třeba pamatovat, že *všech šest veličin jsou úhly!* Případný přechod k délkovému vyjádření vztahem (1) je bezprostřední.

Spustíme z vrcholu B trojúhelníka kolmice na stěnu AVC a na hrany VA a VC . Jejich paty označíme postupně L, M, N , jak je z rozvinutí v obr. 3 patrné. Promítněme dále M kolmo do hrany VC (průmět označen T) a trojúhelníky BLM , resp. BLN (v trojhranu) sklopme do roviny obrázku 3. Obě sklopené polohy vrcholu B značíme P, Q a prů-

sečík prodloužené QL se spojnicí TM budiž U . Z obr. 3 postupně vyčteme

$$\begin{aligned} VN &= VT + TN \Rightarrow \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \\ LP &= LQ \Rightarrow \sin a \sin \gamma = \sin c \sin \alpha, \\ NL &= TM - UM \Rightarrow \sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha. \end{aligned}$$

Tím získáváme trojici základních vět pro řešení obecného sférického trojúhelníka. Připojujeme podrobný rozpis cyklických tvarů:

Kosinová věta :

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned}$$

Sinová věta :

$$\begin{aligned} \sin a \sin \gamma &= \sin c \sin \alpha, \\ \sin b \sin \alpha &= \sin a \sin \beta, \\ \sin c \sin \beta &= \sin b \sin \gamma, \end{aligned}$$

případně v ekonomičtějším zápise postupnou úměrou

$$\sin a \quad \sin b \quad \sin c = \sin \alpha \quad \sin \beta \quad \sin \gamma$$

Sinová-kosinová věta :

$$\begin{aligned} \sin a \cos \beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha, \\ \sin a \cos \gamma &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha; \\ \sin b \cos \gamma &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta, \\ \sin b \cos \alpha &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta; \\ \sin c \cos \alpha &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma, \\ \sin c \cos \beta &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \gamma \end{aligned}$$

Pravoúhlý trojúhelník

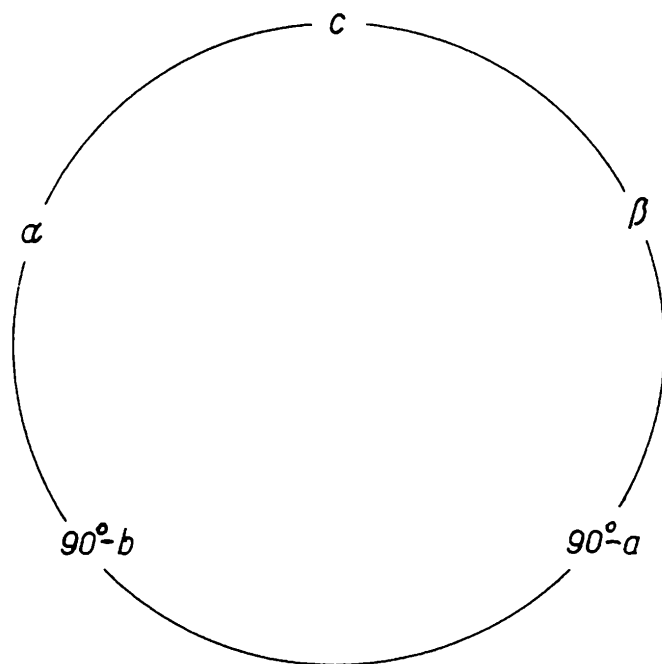
Obdobně s rovinným trojúhelníkem klademe i pro pravoúhlý sférický trojúhelník

$$\gamma = 90^\circ, \tag{2}$$

takže zůstává pětice proměnných základních prvků

$$a, b, c; \quad \alpha, \beta \tag{3}$$

Úhlové údaje a, b, c nazýváme *odvěsnami* a *přeponou*.



Obr. 4. Neperův kruh

Třináct předešlých závislostí nalezených pro obecný trojúhelník se při (2) specializuje na

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \quad (4.1)$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta, \quad (4.2)$$

$$\cos c = \cos a \cos b, \quad (4.3)$$

$$\sin a = \sin c \sin \alpha, \quad (5.1)$$

$$\sin b \sin \alpha = \sin a \sin \beta, \quad (5.2)$$

$$\sin c \sin \beta = \sin b, \quad (5.3)$$

$$\sin a \sin b \sin c = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad (5.4)$$

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha, \quad (6.1)$$

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos \beta, \quad (6.3)$$

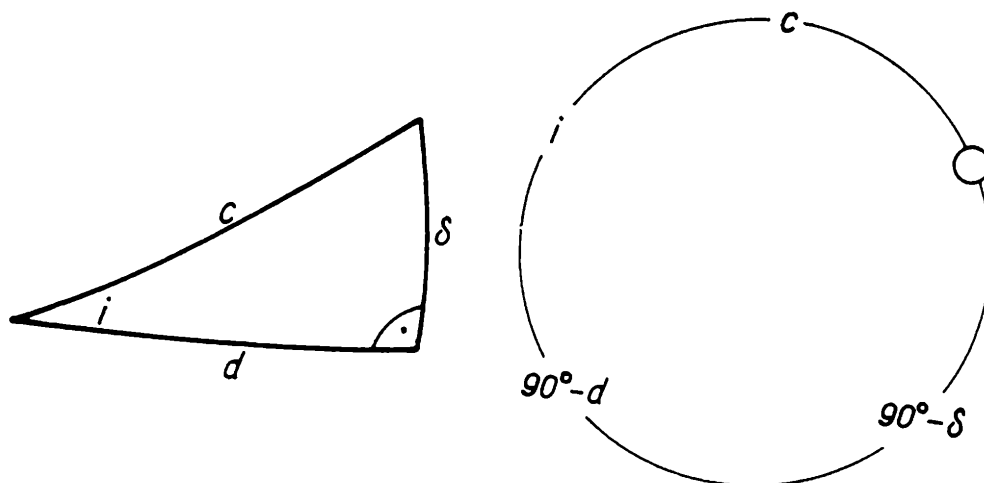
$$\sin b \cos \alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta, \quad (6.4)$$

$$\sin c \cos \alpha = \cos a \sin b, \quad (6.5)$$

$$\sin c \cos \beta = \cos b \sin a \quad (6.6)$$

Pro mechanické řešení pravoúhlého sférického trojúhelníka se běžně užívá *Neperova pravidla*. Než je vyslovíme, provedeme některé úpravy. Spojením vztahů (5.3) a (6.5) získáme

$$\cos \alpha = \cos a \sin \beta \quad (7)$$



Obr. 5. Pravoúhlý sférický trojúhelník deklinace δ a sklonu dráhy i s odpovídajícím Neperovým kruhem

Podobně dvojice (5.1), (6.6) dává cyklické vyjádření,

$$\cos \beta = \cos b \sin \alpha \quad (8)$$

a z (5.1) s (6.5) vyčteme

$$\sin b = \cotg \alpha \tg a \quad (9)$$

s cyklickým (srovn. dvojici (5.3) s (6.6))

$$\sin a = \cotg \beta \tg b \quad (10)$$

Konečně součin rovnic (9), (10) s ohledem na (4.3) poskytuje

$$\cotg \alpha \cotg \beta = \cos c \quad (11)$$

Neperovo pravidlo

Kruhové schéma v obr. 4 nazveme *Neperovým kruhem*. Platí:

Kosinus každé z pěti hodnot Neperova kruhu se rovná součinu kotangent obou hodnot sousedních a součinu sinů obou hodnot nesousedních.

K důkazu stačí vzpomenout deseti vztahů (11), (4.3); (6.2), (7); (9), (5.3); (10), (5.1); (6.3), (8). Napíšeme-li je ve tvaru

$$\begin{aligned} \cos c &= \cotg \alpha \cotg \beta = \sin(90^\circ - b) \sin(90^\circ - a), \\ \cos \alpha &= \cotg(90^\circ - b) \cotg c = \sin(90^\circ - a) \sin \beta, \\ \cos(90^\circ - b) &= \cotg(90^\circ - a) \cdot \cotg \alpha = \sin \beta \sin c, \\ \cos(90^\circ - a) &= \cotg \beta \cotg(90^\circ - b) = \sin c \sin \alpha, \\ \cos \beta &= \cotg c \cotg(90^\circ - a) = \sin \alpha \sin(90^\circ - b), \end{aligned}$$

máme vyčerpávající zápis tvrzení Neperova pravidla.

Jako příklad uvažujeme pravoúhlý sférický trojúhelník se známou přeponou c a s přilehlým úhlem i . Úkolem je určit odvěsnu δ ležící proti

úhlu i a druhou odvěsnu d (obr. 5). Z odpovídajícího Neperova kruhu poznáváme jednak $\cos i = \cotg(90^\circ - d) \cotg c$, jednak $\cos(90^\circ - \delta) = \sin c \sin i$, takže

$$\operatorname{tg} d = \operatorname{tg} c \cos i, \quad \sin \delta = \sin c \sin i$$

To jsou znovu vztahy, které jsme v závěrečné poznámce článku „Let umělé družice nad zemským povrchem“ získali bez užití sférické trigonometrie.

Historický dovětek

John Neper (Napier, Nepper, Nepair, Napeir, Napair, Joannes Neperus) (1450–1617), skotský matematik, horlivý puritán, původce logaritmického počítání, dospěl k uvedenému pravidlu v patrné návaznosti na Nathaniela Torpoley; ten se kromě matematiky zabýval i astrologií. S podrobným terminologickým rozlišením přicházejících veličin bylo pravidlo uveřejněno 1614 v latinském spise *Descriptio mirifici logarithmorum canonis*. Anglický překlad vyšel 1616. V literatuře je spis stručně označován jako Neperovo *Descriptio*. Bohatou teorii má sférický hvězdnicový pětiúhelník přiřazený pravoúhlému trojúhelníku (*pentagramma mirificum*), studovaný opětovně C. F. Gaussem. Problém má analogii v rovinné trigonometrii neeuklidovské geometrie. V poslední době zobecnil na přírodovědecké fakultě university v Jeně profesor Johannes Böhm Neperovo pravidlo pro n -rozměrný prostor.

Různá řešení jedné úlohy o elipse

Prof. EMIL KRAEMER, UK Praha

Někteří naši čtenáři si přejí, aby Rozhledy poskytovaly více možností k řešení úloh než dosud. Otiskujeme proto tento článek, uvádějící několik způsobů řešení jedné úlohy o elipse. Jako cvičení mohou čtenáři řešit obdobnými způsoby touž úlohu pro hyperbolu a pro parabolu.

Z analytické nebo deskriptivní geometrie víme, že k dané elipse lze vždy sestrojit tečnu, která je rovnoběžná s libovolnou přímkou ležící v rovině elipsy. Existuje tedy nekonečně mnoho dvojic vzájemně kolmých tečen elipsy, čili existuje nekonečně mnoho bodů, které mají tu vlastnost, že každým z nich procházejí dvě vzájemně kolmé tečny dané elipsy. Ptáme se, co je množinou $\mathbf{M}$ všech takových bodů.

Ze souměrnosti elipsy podle jejích os a jejího středu plyne, že také množina $\mathbf{M}$ je souměrná podle os a středu elipsy. Sestrojíme-li několik dvojic vzájemně kolmých tečen elipsy, pozorujeme, že průsečík přímek

každé takové dvojice je pravděpodobně bodem kružnice opsané kolem středu elipsy. Dokážeme, a to čtyřmi způsoby, že hledaná množina **M** je skutečně takovou kružnicí.

Při prvním a druhém způsobu řešení naší úlohy užijeme metody souřadnic. Přitom v obou případech se budeme opírat o tyto dvě věty:

Věta 1. Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ různé nebo splývající kořeny x_1, x_2 , je $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

Věta 2. Budiž ortonormální soustava souřadnic zvolena tak, že její osa x splývá s hlavní osou elipsy a její počátek se středem elipsy; hlavní poloosa elipsy budiž a , vedlejší poloosa b . Potom platí:

a) Rovnice elipsy je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;

b) bod $P \equiv (x_0; y_0)$ je vnějším bodem elipsy právě tehdy, je-li $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 > 0$.

První věta je obsažena např. v učebnici matematiky pro 2. ročník gymnázií, druhá v učebnici pro 3. a 4. ročník přírodovědné větve gymnázií. Obdobně další věty, které uvedeme bez důkazů, najde čtenář rovněž v učebnicích pro gymnázia.

V dalších výkladech budeme stále předpokládat, že se používá ortonormální soustavy souřadnic, která je zvolena způsobem popsáním ve větě 2.

Při *prvním způsobu řešení* použijeme ještě těchto dvou vět:

Věta 3. Přímký o rovnicích $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ jsou vzájemně kolmé právě tehdy, je-li $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

Věta 4. Tečna elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ v jejím bodě $T \equiv (x_1; y_1)$ má rovnici $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$.

Předpokládejme, že zvolený bod $P \equiv (x_0; y_0)$ je vnějším bodem dané elipsy. Potom víme, že jím procházejí dvě různé tečny elipsy, které mají dotykové body $T_1 \equiv (x_1; y_1)$, $T_2 \equiv (x_2; y_2)$.

Podle věty 4 mají tyto tečny rovnice

$$\begin{aligned} b^2x_1x + a^2y_1y &= a^2b^2, \\ b^2x_2x + a^2y_2y &= a^2b^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Podle věty 3 jsou tyto tečny vzájemně kolmé právě tehdy, jestliže je

$$b^4x_1x_2 + a^4y_1y_2 = 0.$$

Protože tečny dané rovnicemi (1) procházejí bodem P , je

$$b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 = a^2b^2, \quad b^2x_2x_0 + a^2y_2y_0 = a^2b^2.$$

To znamená, že dvojice čísel $(x_1; y_1)$ a $(x_2; y_2)$ splňují rovnici

$$b^2x_0\xi + a^2y_0\eta = a^2b^2. \tag{3}$$

Protože body T_1, T_2 jsou body elipsy, splňují jejich souřadnice též rovnici

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2. \quad (4)$$

Bod P je vnějším bodem elipsy; proto nejvýše jedno z čísel x_0, y_0 je rovné nule. Předpokládejme nejprve, že je $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$. Potom z rovnice (3) plyne, že je

$$\eta = \frac{b^2(a^2 - x_0\xi)}{a^2y_0};$$

z toho a ze (4) dostaneme po úpravě rovnici

$$(b^2x_0^2 + a^2y_0^2)\xi^2 - 2a^2b^2x_0\xi + a^4(b^2 - y_0^2) = 0. \quad (5)$$

Protože je $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$, je to rovnice kvadratická. Pro její diskriminant D platí:

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^4b^4x_0^2 - a^4(b^2 - y_0^2)(b^2x_0^2 + a^2y_0^2), \\ \frac{D}{4} &= a^4y_0^2(b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2) \end{aligned}$$

Podle věty 2b) je $D > 0$, takže existují dva reálné různé kořeny x_1, x_2 rovnice (5). Podle věty 1 je

$$x_1x_2 = \frac{a^4(b^2 - y_0^2)}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2} \quad (6)$$

Vyloučíme-li obdobně z rovnic (3) a (4) neznámou ξ , dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou η ; přitom tato rovnice vznikne z (5) tak, že se všude vzájemně vymění čísla a, b a čísla x_0, y_0 . Rovnice má dva reálné různé kořeny y_1, y_2 , pro něž podle věty 1 platí:

$$y_1y_2 = \frac{b^4(a^2 - x_0^2)}{a^2y_0^2 + b^2x_0^2}. \quad (7)$$

Tak dostaneme dva různé body $T_1 \equiv (x_1; y_1), T_2 \equiv (x_2; y_2)$.

Je-li $x_0 = 0$ (a tedy $y_0 \neq 0$), dostaneme z rovnice (3) jediný kořen

$$\eta = \frac{b^2}{y_0} \quad (8)$$

Po jeho dosazení do (4) vznikne kvadratická rovnice

$$\begin{aligned} b^2\xi^2 + \frac{a^2b^4}{y_0^2} &= a^2b^2, \\ y_0^2\xi^2 + a^2(b^2 - y_0^2) &= 0. \end{aligned}$$

Pro její diskriminant D platí:

$$\frac{D}{4} = -a^2 y_0^2 (b^2 - y_0^2) = a^2 y_0^2 (y_0^2 - b^2).$$

Protože bod $P \equiv (0; y_0)$ je vnějším bodem elipsy, je $|y_0| > b$, takže je $y_0^2 - b^2 > 0$. Je tedy $D > 0$ a naše rovnice má dva reálné různé kořeny x_1, x_2 , pro něž podle věty 1 platí:

$$x_1 x_2 = \frac{a^2 (b^2 - y_0^2)}{y_0^2}.$$

Protože jsme předpokládali, že je $x_0 = 0$, je to též výsledek jako v (6). Pro jediné η dané rovnicí (8) jsme dostali dvě různá x_1, x_2 ; existují tedy opět dva $T_1 \equiv (x_1; y_1)$; $T_2 \equiv (x_2; y_2)$, kde $y_1 = y_2$ je udáno v (8).

Proto je podle (8)

$$y_1 y_2 = \frac{b^4}{y_0^2};$$

avšak to je totéž jako (7), pokud je $x_0 = 0$.

Obdobně pro $y_0 = 0$ dostaneme pro součiny $x_1 x_2, y_1 y_2$ tytéž výsledky jako v (6) a (7).

Zjistili jsme tedy, že každým vnějším bodem $P \equiv (x_0; y_0)$ elipsy procházejí její dvě různé tečny, které se jí dotýkají v bodech $T_1 \equiv (x_1; y_1)$, $T_2 \equiv (x_2; y_2)$. Přitom vždy platí (6) a (7). Podle (2) jsou tyto tečny vzájemně kolmé právě tehdy, je-li

$$b^4 x_1 x_2 + a^4 y_1 y_2 = 0,$$

tj. podle (6) a (7) právě tehdy, je-li

$$a^4 b^4 \frac{b^2 - y_0^2}{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2} + a^4 b^4 \frac{a^2 - x_0^2}{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2} = 0.$$

Protože je $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 \neq 0$ a též je $a \neq 0, b \neq 0$, je tato rovnice ekvivalentní s rovnicí

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

To znamená, že tečny jsou vzájemně kolmé právě tehdy, je-li bod $P \equiv (x_0; y_0)$ bodem kružnice opsané kolem středu elipsy poloměrem $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Druhý způsob řešení je variantou prvního způsobu; proto jej vyložíme zcela stručně. Opírá se o tyto dvě věty, z nichž první je obecně známá; druhou snadno dokážeme.

Věta 5. Dvě přímky o směrnících k_1, k_2 jsou vzájemně kolmé právě tehdy, je-li $k_1 k_2 = -1$.

Věta 6. Přímka $y = kx + q$ je tečnou elipsy $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ právě tehdy, je-li $q^2 = a^2 k^2 + b^2$.

Důkaz: Pro společný bod $M \equiv (x; y)$ dané přímky a dané elipsy platí obě rovnice uvedené v textu věty 6, a tedy platí též rovnice

$$\begin{aligned} b^2 x^2 + a^2 (k^2 x^2 + 2kqx + q^2) &= a^2 b^2, \\ (a^2 k^2 + b^2) x^2 + 2a^2 kqx + a^2 (q^2 - b^2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Daná přímka je tečnou elipsy právě tehdy, je-li diskriminant kvadratické rovnice (9) rovný nule, tj. je-li

$$4a^4 k^2 q^2 - 4a^2 (a^2 k^2 + b^2) (q^2 - b^2) = 0.$$

Snadno zjistíme, že to nastane právě tehdy, je-li

$$q^2 = a^2 k^2 + b^2.$$

Tečny elipsy, které se jí dotýkají v jejích vrcholech, jsou po dvou vzájemně kolmé; jejich průsečíky leží na kružnici opsané kolem středu elipsy poloměrem $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zbývá tedy najít ty body množiny $\mathbf{M}$, které neleží na vrcholových tečnách elipsy. To znamená, že jde o tečny, z nichž žádná není rovnoběžná s osou y ; každá taková tečna má rovnici

$$y = kx + q \quad (10)$$

a platí pro ni věta 6. Souřadnice vnějšího bodu $P \equiv (x_0; y_0)$ elipsy, který je bodem takové tečny, splňují rovnici (10) a podmínku pro q ve větě 6. Proto platí také rovnice

$$(y_0 - kx_0)^2 = a^2 k^2 + b^2,$$

tj. rovnice

$$(a^2 - x_0^2) k^2 + 2x_0 y_0 k + (b^2 - y_0^2) = 0. \quad (11)$$

Protože bod P neleží na tečně sestrojené v hlavním vrcholu elipsy, je $x_0^2 \neq a^2$, takže (11) je rovnicí kvadratickou: Její diskriminant je

$$D = 4(b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2).$$

Protože P je vnějším bodem elipsy, je podle věty 2 tento diskriminant kladný, takže rovnice (11) má dva reálné různé kořeny k_1, k_2 . To znamená, že bodem P procházejí právě dvě různé tečny elipsy o směrnících k_1, k_2 . Podle věty 1 je

$$k_1 k_2 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2}$$

Tyto tečny o směrnících k_1, k_2 jsou podle věty 5 vzájemně kolmé právě tehdy, je-li

$$\frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1$$

Tato rovnice je však ekvivalentní s rovnicí

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

To znamená, že tyto tečny jsou vzájemně kolmé právě tehdy, je-li bod P bodem kružnice

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Třetí způsob řešení naší úlohy je více geometrický než první dva; opírá se o tyto dvě věty:

Věta 7. Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen je kružnice, která má střed ve druhém ohnisku a poloměr rovný velikosti $2a$ hlavní osy elipsy.

Věta 8. Nechť F, F' jsou ohniska elipsy a t_1, t_2 její dvě různé tečny, které se protínají v bodě P a dotýkají se elipsy v bodech T_1, T_2 . Potom osa úhlu $\sphericalangle T_1PT_2$ je zároveň osou úhlu $\sphericalangle FPF'$.

Leží-li bod P na hlavní ose elipsy, má úhel $\sphericalangle FPF'$ velikost $\varphi = 0$; jeho osou rozumíme polopřímku PF .

Věta 7 je velmi známá, neboť se uvádí ve středoškolských učebnicích analytické nebo deskriptivní geometrie. Věta 8 se někdy nazývá Ponceletova podle slavného francouzského geometra *Jeana Victora Ponceleta* (1788–1867), který patří k nejvýznamnějším žákům tvůrce vědecké deskriptivní geometrie *Gasparda Monga* a je proslulý jako zakladatel projektivní geometrie. Je zajímavé, že na základní myšlenky této disciplíny přišel Poncelet v Saratově nad Volhou, kde žil v r. 1813 v ruském zajetí po nezdařeném tažení Napoleonových armád do Ruska.

Důkaz věty 8: Ohniska F, F' leží uvnitř elipsy, a tedy uvnitř úhlu $\sphericalangle T_1PT_2$. Neleží-li bod P na hlavní ose elipsy, pak při označení bodů jako na obr. 1 je

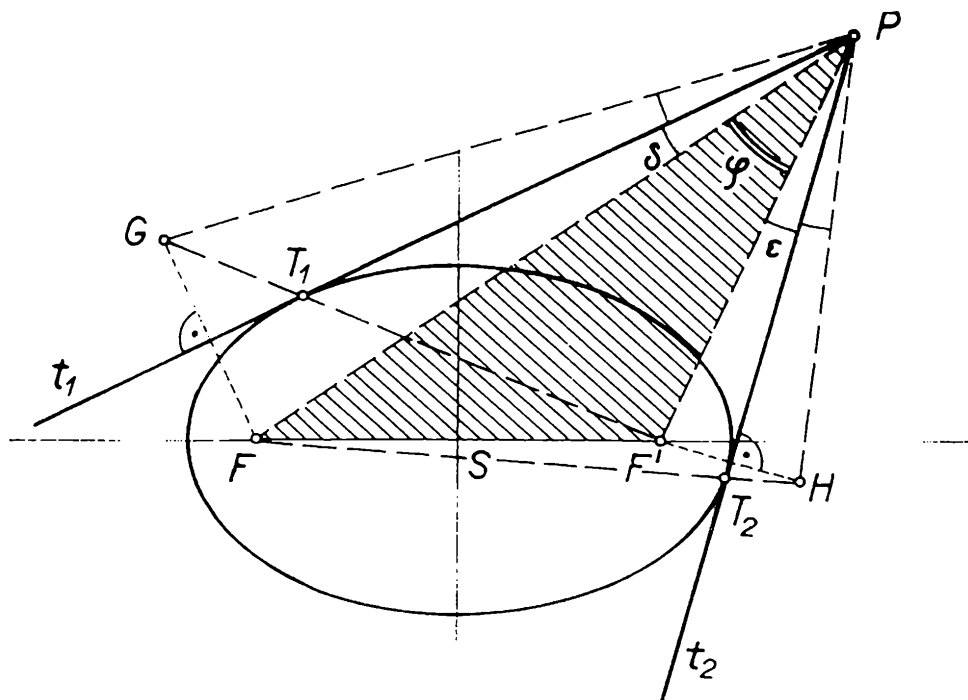
$$\sphericalangle T_1PT_2 = \sphericalangle FPF' + \sphericalangle FPT_1 + \sphericalangle F'PT_2.$$

Totéž platí v případě, že bod P leží na hlavní ose elipsy; potom je však úhel $\sphericalangle FPF'$ nulový. Označíme-li velikosti výše uvedených čtyř úhlů po řadě písmeny $\alpha, \varphi, \delta, \varepsilon$, dostaneme rovnost

$$\alpha = \varphi + \delta + \varepsilon. \quad (12)$$

Pro bod P hlavní osy elipsy je $\varphi = 0$, avšak (12) i následující úvahy platí i pro tento případ, jak si čtenáři ověří, načrtnou-li si příslušný obrázek.

Obr. 1



Sestrojíme bod G souměrně sdružený k ohnisku F podle tečny t_1 a bod H souměrně sdružený k ohnisku F' podle tečny t_2 . Potom bod G leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině t_1F a bod H leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině t_2F' . Proto úhel $\sphericalangle T_1PT_2$ je částí úhlu $\sphericalangle GPH$. Podle věty 7 je

$$FH = F'G = 2a. \quad (13)$$

Z konstrukce bodů G a H plyne, že je

$$\begin{aligned} PG = PF = p, \quad PH = PF' = q, \\ \sphericalangle GPT_1 = \sphericalangle FPT_1 = \delta, \quad \sphericalangle HPT_2 = \sphericalangle F'PT_2 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

Z toho plyne, že je

$$\begin{aligned} \sphericalangle GPF' &= \sphericalangle FPF' + 2\sphericalangle FPT_1 = \varphi + 2\delta, \\ \sphericalangle FPH &= \sphericalangle FPF' + 2\sphericalangle F'PT_2 = \varphi + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (15)$$

Ze (13) a (14) plyne, že je

$$\triangle FPH \cong \triangle GPF' \quad (\text{sss})$$

Proto jsou úhly $\sphericalangle FPH$, $\sphericalangle GPF'$ shodné; podle (15) je

$$\begin{aligned} \varphi + 2\delta &= \varphi + 2\varepsilon, \\ \delta &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

To však znamená, že osa úhlu $\sphericalangle T_1PT_2$ je také osou úhlu $\sphericalangle FPF'$

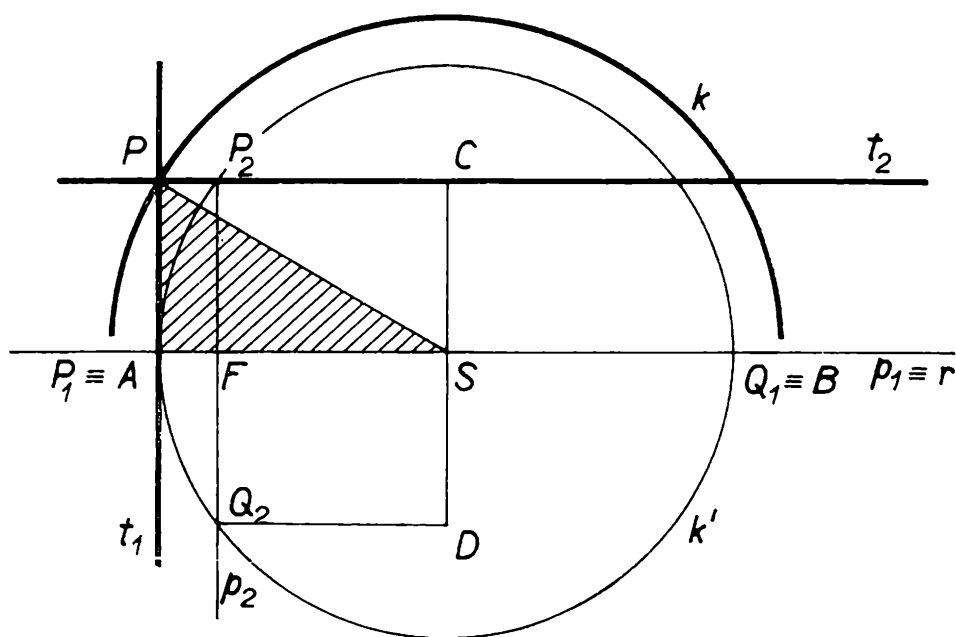
Vraťme se nyní k naší úloze. Podle (12) a (16) je $\alpha = \varphi + 2\delta$. Avšak toto číslo je velikostí úhlu $\sphericalangle GPF'$ v trojúhelníku GPF' , jehož strany

mají velikosti udané ve (14) a (15). Podle věty kosinové, užitě pro tento trojúhelník, je

$$4a^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha.$$

Tečny t_1, t_2 jsou vzájemně kolmé právě tehdy, je-li $\cos \alpha = 0$, tj. právě tehdy, je-li

$$p^2 + q^2 = 4a^2. \quad (17)$$



Obr. 2

Zvolíme-li ortonormální soustavu souřadnic způsobem popsáným ve větě 2 a označíme-li souřadnice bodu P písmeny x, y , bude

$$P \equiv (x; y), \quad F \equiv (-e; 0), \quad F' \equiv (e; 0),$$

kde je

$$e^2 = a^2 - b^2. \quad (18)$$

Potom rovnice (17) platí právě tehdy, je-li

$$(x + e)^2 + y^2 + (x - e)^2 + y^2 = 4a^2,$$

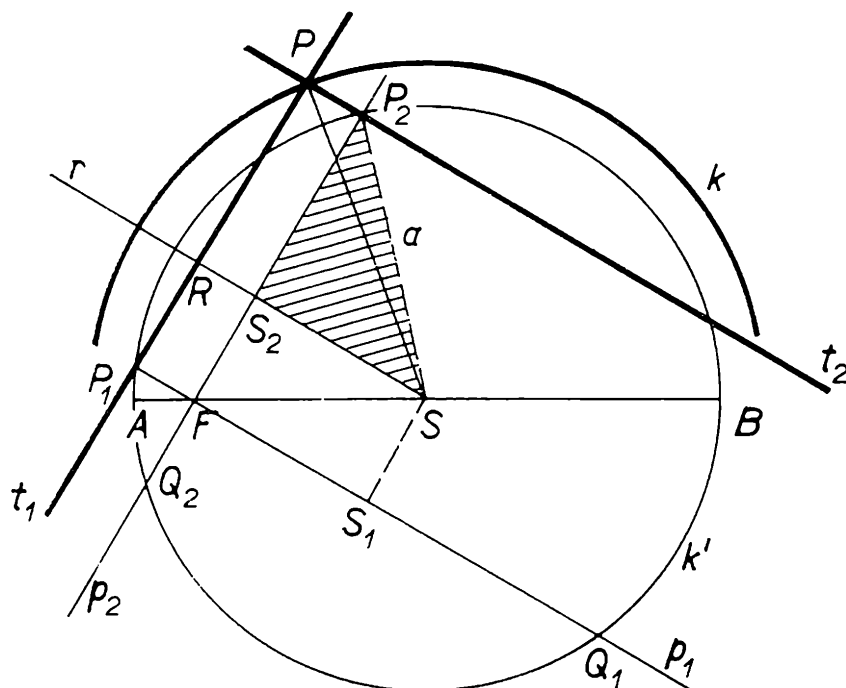
což je ekvivalentní s rovnicí

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Čtvrtý způsob řešení neuzívá vůbec metod souřadnic, opírá se o tyto dvě věty:

Věta 9. Budiž F vnější nebo vnitřní bod kružnice k , jejíž sečna vedená bodem F má krajní body P, Q . Potom součin velikostí úseček FP, FQ je týž pro každou sečnu kružnice k procházející bodem F .

Obr. 3



Věta 10. Množina všech pat kolmic vedených ohnisky elipsy k jejím tečnám je kružnice opsaná kolem středu elipsy poloměrem rovným velikosti její hlavní poloosy.

Věta 9 je uvedena např. v učebnici matematiky pro první třídu gymnázií (str. 232); věta 10 se běžně uvádí ve středoškolských učebnicích deskriptivní geometrie.

Nechť elipsa má střed S , ohnisko F , vrcholy hlavní osy A, B , vrcholy vedlejší osy C, D ; a je její hlavní poloosa, b vedlejší poloosa, e excentricita. Kolem bodu S opíšeme kružnici k' o poloměru a i kružnici k o poloměru $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (obr. 2, 3).

a) Nejprve dokážeme, že průsečík P každých dvou tečen t_1, t_2 elipsy, které jsou vzájemně kolmé, leží na kružnici k . Pokud jsou to tečny vrcholové (obr. 2), pak je to zcela zřejmé. Předpokládejme tedy, že t_1, t_2 nejsou tečnami vrcholovými; jejich průsečík budiž P (obr. 3). Ohniskem F vedme přímky $p_1 \perp t_1, p_2 \perp t_2$ a jejich paty označme P_1, P_2 ; podle věty 10 leží tyto body na kružnici k' . Přímky FP_1, FP_2 protnou kružnici k' ještě v bodech $Q_1 \neq P_1, Q_2 \neq P_2$; středy tětiv P_1Q_1, P_2Q_2 označme S_1, S_2 . Potom je $SS_1 \perp P_1Q_1, SS_2 \perp P_2Q_2$, a tedy též $SS_2 \perp t_1$; průsečík přímek SS_2, t_1 budiž R . Podle Pythagorovy věty je

$$\begin{aligned} SP^2 &= SR^2 + RP^2, \\ SP^2 &= S_1P_1^2 + S_2P_2^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Je-li $FP_1 = p, FQ_1 = q$, je

$$S_1P_1 = \frac{p + q}{2} \quad (20)$$

Podle Pythagorovy věty je

$$\begin{aligned} S_2P_2^2 &= SP_2^2 - SS_2^2, \\ S_2P_2^2 &= a^2 - FS_1^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Avšak $FS_1 = S_1P_1 - FP_1$, čili podle (20)

$$FS_1 = \frac{p+q}{2} - p = \frac{q-p}{2} \quad (22)$$

Podle (19), (20), (21) a (22) je tedy

$$\begin{aligned} SP^2 &= \frac{(p+q)^2}{4} + a^2 - \frac{(q-p)^2}{4}, \\ SP^2 &= a^2 + pq. \end{aligned} \quad (23)$$

Avšak podle věty 9 je

$$pq = FP_1 \cdot FQ_1 = FA \cdot FB = (a-e)(a+e) = a^2 - e^2.$$

Podle (18) tedy z (23) dostaneme

$$SP^2 = a^2 + b^2.$$

To však znamená, že bod P leží na kružnici k .

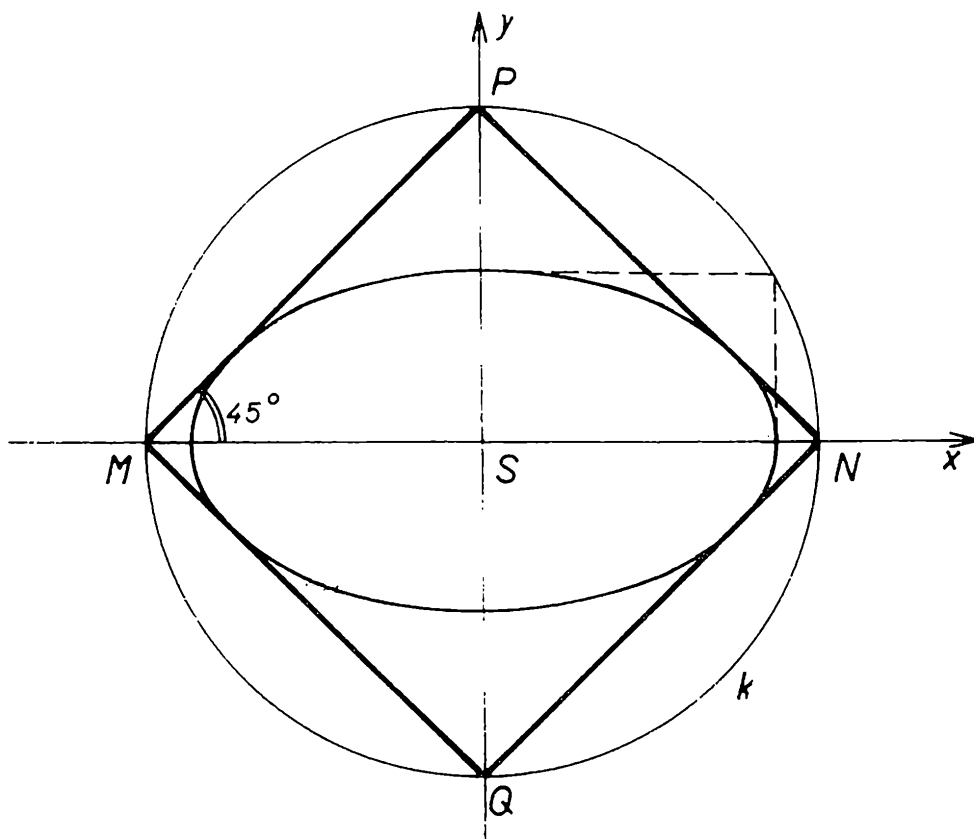
b) Nyní dokážeme, že každým bodem P kružnice k procházejí dvě vzájemně kolmé tečny dané elipsy. Protože bod P leží vně kružnice k' , je vnějším bodem elipsy, a tedy jím lze vést k elipse tečny; jedna z nich budiž t_1 (obr. 2 nebo obr. 3). Podle věty 10 leží pata P_1 kolmice vedené ohniskem F k tečně t_1 na kružnici k' . Sestrojíme ohniskem F přímkou $p_2 \perp FP_1$, čili $p_2 \parallel t_1$; její průsečíky s kružnicí k' označme P_2, Q_2 . Tyto body jsou souměrně sdruženy podle přímky $r \perp t_1$ vedené středem S ; jako P_2 označme ten bod, který leží uvnitř poloroviny rP . Podle věty 10 prochází bodem P_2 tečna t_2 elipsy tak, že je $t_2 \perp FP_2$, čili $t_2 \perp t_1$; průsečík tečen t_1, t_2 označme P' . Podle části a) důkazu leží bod P' na kružnici k . Přímka t_1 má tedy s kružnicí k společné body P, P' , které leží uvnitř poloroviny rP ; z toho plyne, že je $P \equiv P'$. Bodem P procházejí tedy dvě vzájemně kolmé tečny dané elipsy.

Z a) a b) plyne, že kružnice k je množinou všech bodů, z nichž lze vést k dané elipse vzájemně kolmé tečny.

Příkladem aplikace věty o vzájemně kolmých tečnách elipsy je řešení této úlohy:

Je dána elipsa se středem S a poloosami a, b . Zjistěte, zda lze sestavit čtverec, jehož strany leží na přímkách, které jsou tečnami dané elipsy (říkáme, že čtverec je elipse opsán).

Obr. 4



Z dané podmínky plyne, že vrcholy hledaného čtverce jsou body kružnice k opsané kolem středu S poloměrem

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (24)$$

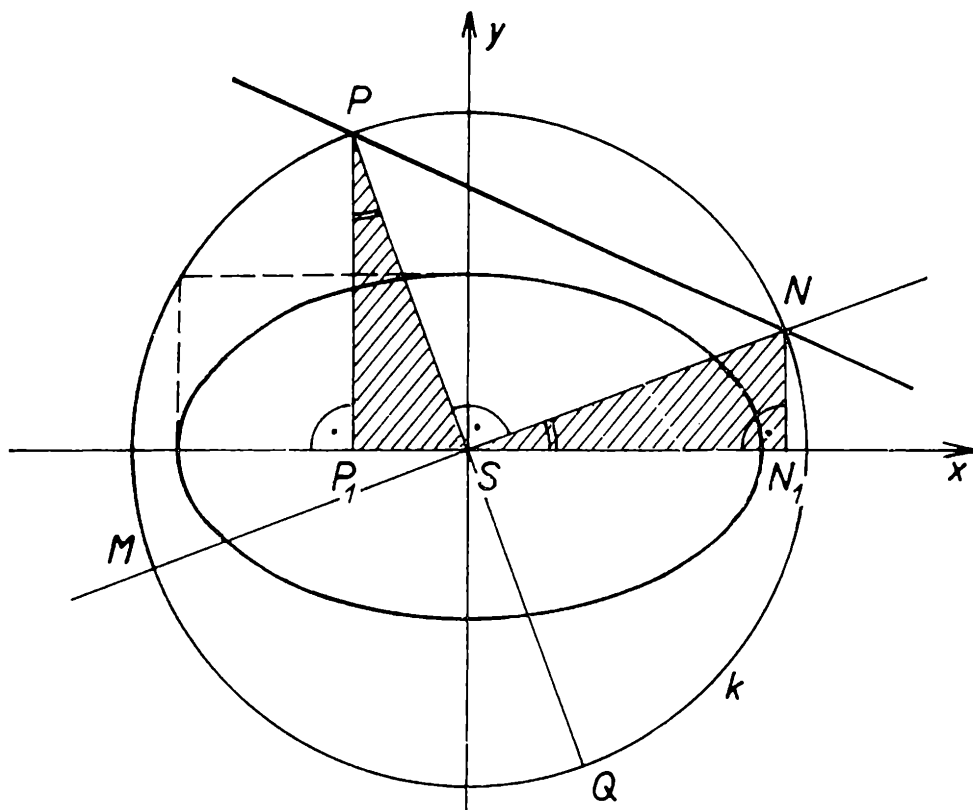
Bod S je středem každého takového čtverce. Dokážeme, že jenom ten z nich, který má vrcholy na osách elipsy, je elipse opsán. Přitom použijeme ortonormální soustavy souřadnic uvedené ve větě 2.

a) Vrcholy čtverce ležící na osách elipsy označme podle obr. 4. Potom je $\sphericalangle PMS = 45^\circ$, takže přímka MP má směrnici $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$; osu y protíná v bodě $P \equiv (0; q)$, kde $q = r$ je udáno ve (24). Rovnice $y = kx + q$ přímky MP splňuje tedy podmínky věty 6 a proto tato přímka je tečnou elipsy.

b) Sestrojme libovolný čtverec, jehož vrcholy jsou body kružnice k , ale neleží na osách elipsy. Zvolíme označení jako na obr. 5 a dokážeme, že přímka NP není tečnou elipsy; tím bude dokázáno, že čtverec s vrcholy M, N, P, Q není elipse opsán.

Přímka MN procházející počátkem má rovnici $y = sx$, $s > 0$. Je-li tedy $\varepsilon > 0$ první souřadnice bodu N , je

$$N \equiv (\varepsilon; s\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, s > 0. \quad (25)$$



Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků SNN_1 , PSP_1 plyne, že je $P_1S = NN_1$, $P_1P = SN_1$. Protože první souřadnice bodu P je záporná, je

$$P \equiv (-s\varepsilon; \varepsilon). \quad (26)$$

Protože bod N leží na kružnici k , je

$$\varepsilon^2 + s^2\varepsilon^2 = a^2 + b^2,$$

takže je

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{s^2 + 1} \quad (27)$$

Jak víme, je směrnice přímky určené body $A \equiv (x_1; y_1)$, $B \equiv (x_2; y_2)$, $x_1 \neq x_2$, dána vzorcem

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Podle tohoto vzorce a podle (25) a (26) je směrnice přímky NP

$$k = \frac{s - 1}{s + 1}, \quad s > 0 \quad (28)$$

Přímka NP má potom rovnici $y = kx + q$. Protože prochází bodem $N \equiv (\varepsilon; s\varepsilon)$, je

$$s\varepsilon = \frac{s - 1}{s + 1} \varepsilon + q,$$

z toho plyne, že je

$$q = \frac{s^2 + 1}{s + 1} \varepsilon \quad (29)$$

Jestliže přímka NP je tečnou elipsy, pak podle věty 6 a podle (27), (28) a (29) je

$$\frac{(s^2 + 1)^2}{(s + 1)^2} \frac{a^2 + b^2}{s^2 + 1} = a^2 \frac{(s - 1)^2}{(s + 1)^2} + b^2,$$

čili

$$(a^2 + b^2)s^2 + a^2 + b^2 = (a^2 + b^2)s^2 + 2s(b^2 - a^2) + a^2 + b^2.$$

Avšak tato rovnost nastane jedině pro $s = 0$ (neboť je $a \neq b$). Pro přímkou NP však je $s > 0$. Proto přímka NP není tečnou dané elipsy.

Obdobnou úlohu, jako je námi řešená úloha o elipse, lze řešit také v případech, kdy jde o hyperbolu nebo o parabolu. Pomocné věty z teorie těchto křivek, které jsou obdobné k větám 2 a 4 našeho článku, najde čtenář v učebnici matematiky pro 3. ročník přírodovědné větve gymnázií na str. 99, 103 a 106 (pro hyperbolu) a na str. 63, 69 a 71 (pro parabolu).

U hyperboly je ovšem situace poněkud složitější, a to proto, že k hyperbole nelze sestavit tečnu rovnoběžnou s libovolně zvolenou přímkou ležící v její rovině. Kromě toho lze vnějším bodem hyperboly vést k ní dvě tečny jenom tehdy, jestliže tento bod neleží na žádné asymptotě hyperboly. Je-li daný bod bodem asymptoty, ale není-li středem hyperboly, pak jím prochází právě jedna tečna hyperboly; středem hyperboly neprochází žádná její tečna. Věta Ponceletova (zde věta 8) pak zahrnuje nejen případ dvou tečen, nýbrž také případ, kdy jde o jednu tečnu a jednu asymptotu hyperboly. Její důkaz se opírá o větu, která je táž jako zde uvedená věta 7 pro elipsu. Avšak na kružnici uvedené ve větě 7 leží též dva body, které jsou souměrně sdruženy k ohnisku hyperboly podle jejích asymptot.

Úlohu o parabole lze řešit také bez užití metody souřadnic pomocí těchto dvou vět:

a) Množina všech bodů souměrně sdružených k ohnisku paraboly podle jejích tečen je její řídící přímka.

b) Množina všech pat kolmic vedených ohniskem paraboly k jejím tečnám je vrcholová tečna paraboly.

Důkazy obou těchto vět najde čtenář např. ve středoškolských učebnicích deskriptivní geometrie.

Cvičení.

- 1) Přímka $y = kx + q$ je tečnou hyperboly $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ právě tehdy, je-li $q^2 = a^2k^2 - b^2 > 0$. Dokažte.
- 2) Nechtě F F' jsou ohniska hyperboly a t_1 , t_2 její dvě tečny, které se

protínají v bodě P a dotýkají se hyperboly v bodech T_1, T_2 . Potom osa úhlu $\sphericalangle T_1PT_2$ je zároveň osou úhlu $\sphericalangle FPF'$. Dokažte.

- 3) Necht F, F' jsou ohniska hyperboly, S její střed, t_1 její tečna s bodem dotyku T_1 a p její asymptota protínající tečnu t_1 v bodu P . Potom osa úhlu $\sphericalangle T_1PS$ je zároveň osou úhlu $\sphericalangle FPF'$. Dokažte.
- 4) Množina všech bodů, z nichž lze vést k hyperbole o poloosách a, b (a je hlavní poloosa) vzájemně kolmé tečny, existuje právě tehdy, je-li $a > b$; je to kružnice opsaná kolem středu hyperboly poloměrem $r = \sqrt{a^2 - b^2}$ s výjimkou průsečíků s asymptotami. Dokažte třemi způsoby, které jsou obdobné prvním třem způsobům řešení uvedeným v našem článku pro elipsu.
- 5) Jestliže pro poloosy a, b hyperboly (a je hlavní poloosa) platí $a > b$, potom existují právě čtyři tečny této hyperboly, které omezují čtverec; jeho vrcholy leží na osách hyperboly. Dokažte.
- 6) Přímka $y = kx + q$ o směrnici $k \neq 0$ je tečnou paraboly $y^2 = 2px$ právě tehdy, je-li $2kp = p$. Dokažte.
- 7) Množina všech bodů, z nichž lze vést k parabole vzájemně kolmé tečny, je její řídící přímka. Dokažte dvěma způsoby, které jsou obdobné prvním dvěma způsobům řešení uvedeným v našem článku pro elipsu. Potom tuto větu dokažte ještě pomocí vět a), b) uvedených v tomto článku před textem všech cvičení.

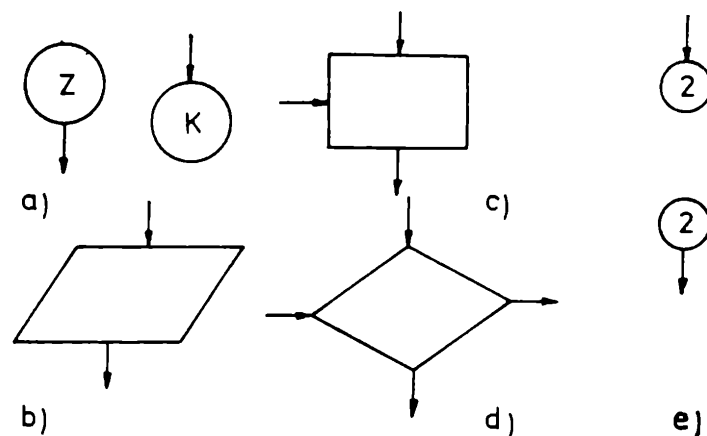
konstruktivní geometrie

Vývojové diagramy v konstruktivní geometrii

Doc. Ing. LADISLAV DRS, ČVUT Praha

Vývojové diagramy se používají především ve výpočetní technice. Výpočetní postup, zapsaný do vývojového diagramu, je přehledný a obsahuje-li řešení více alternativních cest, pak svou formální stavbou napovídá programátorovi, které z alternativ ještě nejsou dořešené, a tak sám napomáhá „vyvíjet“ program. Diagramy mají však pro svou obecnou povahu daleko širší použití. V tomto článku ukážeme jejich užitečnost v konstruktivní geometrii.

Řešení nějakého problému (nejen matematického) lze popsat asi takto: Máme k dispozici určité údaje (informace, číselné hodnoty), ty



Obr 1

zpracujeme podle nějakého předpisu (programu, algoritmu) a výsledek řešení sdělíme (napíšeme, vytiskneme). Tak například podnikový ekonom dostane informace o výrobě, z nich sestaví zprávu o plnění plánu, o zvyšování produktivity práce atd. a hlášení zašle nadřízeným orgánům. Student dostane za úkol vyřešit matematický příklad. Vypočítá podle předpisů, kterým se naučil v matematice, z daných hodnot výsledek a ten sdělí učiteli.

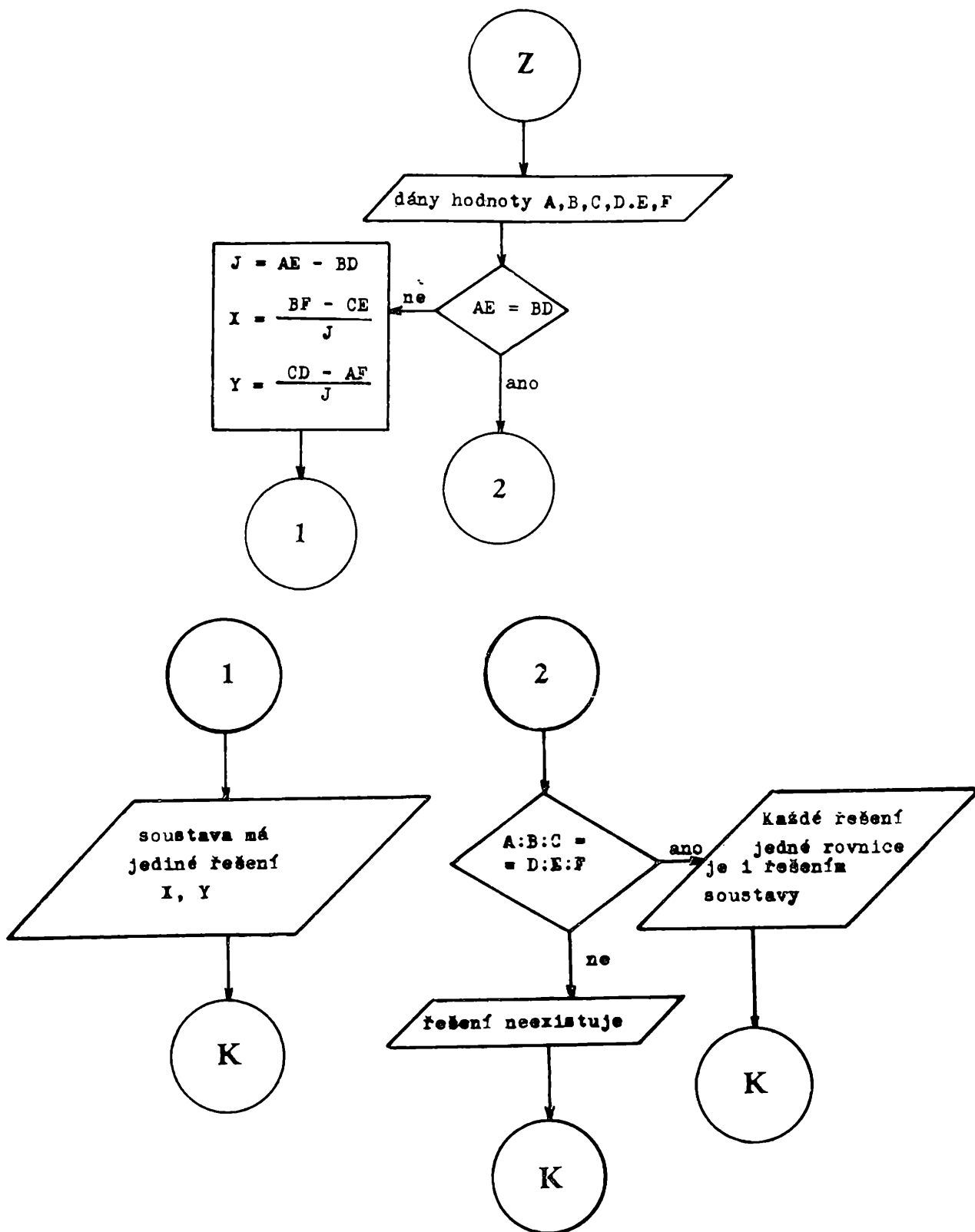
Tuto činnost lze vyjádřit symbolicky právě vývojovým diagramem. Diagram se skládá ze značek, do nichž se zapisují kratší úseky řešení, a ze spojnic těchto značek, které určují pořadí, v jakém se budou tyto úseky zpracovávat. Některé nejdůležitější značky (se spojnicemi) jsou na obr. 1. Začátek a konec řešení mají značky a). Do značky b) se zapisují vstupní informace (zadání) a výstupní údaje (výsledek řešení). Do značky c) se zapíše část řešení, která zpracovává vstupní informace (výkonná část řešení) a do značky d) se zapisuje podmínka, jejíž splnění ovlivňuje další průběh řešení (rozhodovací část řešení). Vyskytne-li se v programu taková podmínka, pak se další část řešení větví do několika alternativ.

Do značky c) může ústít několik spojnic, ale jen jedna z ní vychází (na obr. vstupují do značky dvě spojnice). Do značky d) může ústít několik spojnic a alespoň dvě spojnice z ní vycházejí (na obr. vstupují dvě a vystupují dvě).

Přesahuje-li diagram formát papíru, ukončí se spojnice spojkou, značkou e), do níž se zapíše číslice, a stejnou značkou a číslicí pak diagram na další stránce pokračuje.

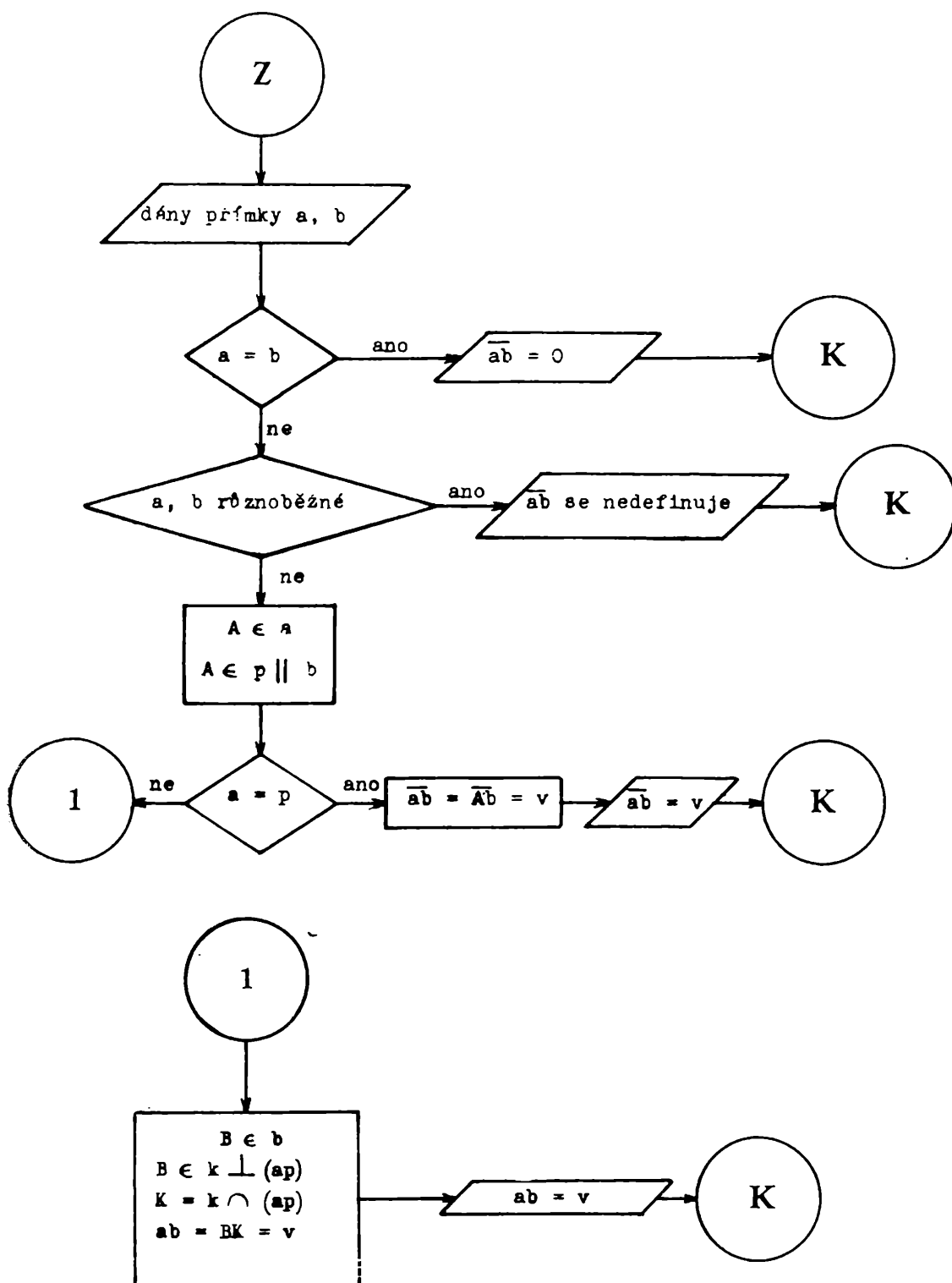
Jako příklad sestavme vývojový diagram pro řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ Dx + Ey + F &= 0. \end{aligned}$$



Vývojové diagramy můžeme použít i při řešení úloh konstruktivní geometrie (kde se žádné výpočty neprovádějí). Zejména při rozborech a diskusích jsou dobrou pomůckou, která rozbor zpřehlední a usnadní.

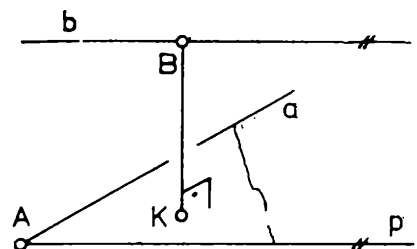
Sestavme vývojový diagram pro stereometrickou úlohu: určit vzdálenost *v* dvou přímek. Předpokládáme, že je z planimetrie známé určení vzdálenosti dvou bodů a vzdálenosti bodu od přímky.



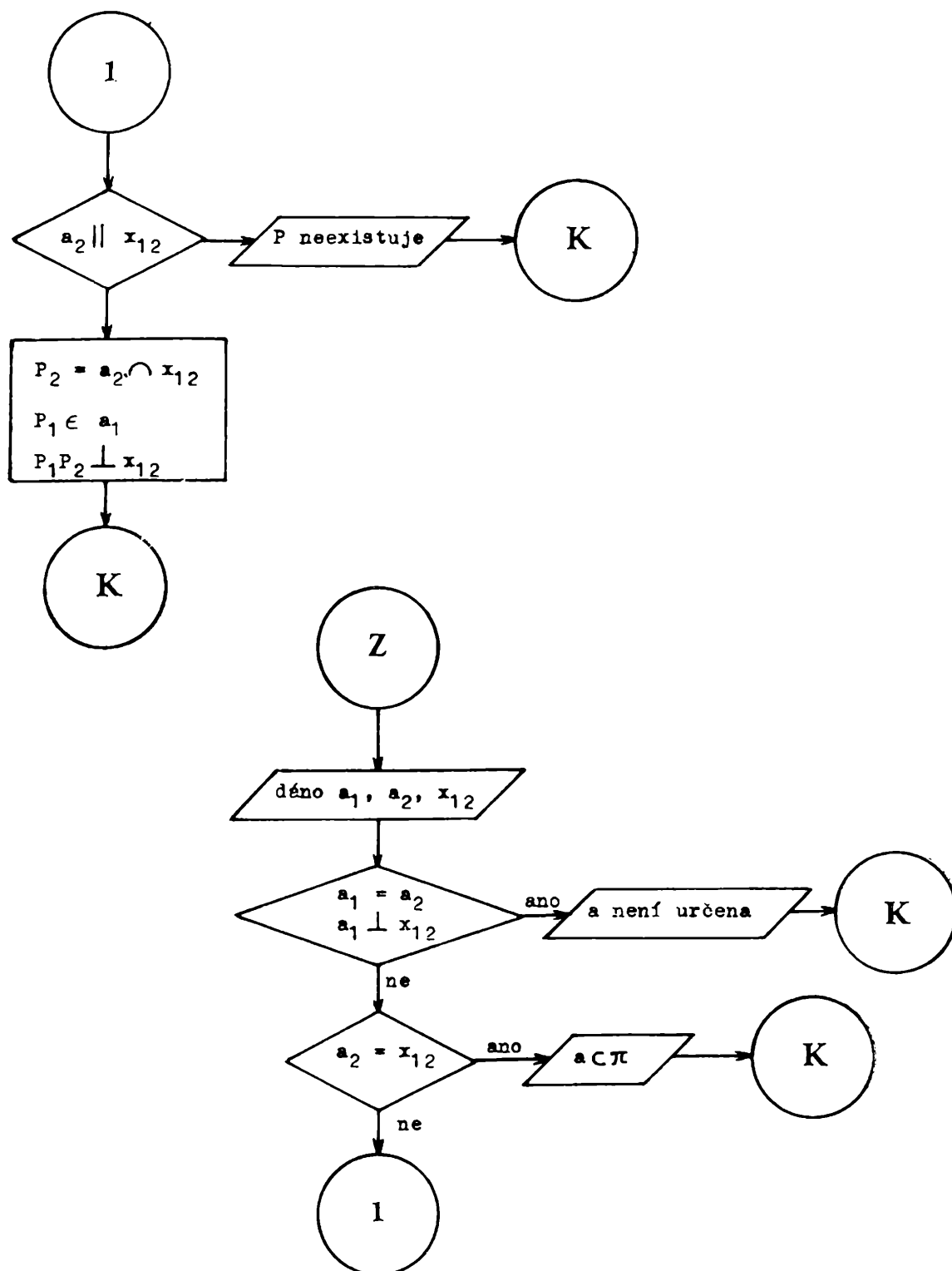
Nejprve zjistíme, zda jsou dané přímky totožné. V kladném případě je jejich vzdálenost 0, v záporném případě zkoumáme dále, jsou-li přímky a, b různoběžné. Vzdálenost různoběžek nedefinujeme; nejsou-li přímky různoběžné, zvolíme na přímce a bod A a jím vedeme rovnoběžku p s přímkou b (obr. 2). Jsou-li přímky a, p totožné, jsou přímky a, b rovnoběžné a jejich vzdálenost v je rovna vzdálenosti Ab . Jinak jsou přímky a, b mimoběžné a jejich vzdálenost určíme konstrukcemi popsaný-

mi symbolicky v poslední výkonné části diagramu a odpovídajícími názornému obr. 2.

Další příklad vezmeme z deskriptivní geometrie. Sestavme vývojový diagram pro úlohu: určit půdorysný stopník P přímky a .



Obr 2



Zdá se, že řešení pomocí diagramu je příliš pracné, když vlastní konstrukce je tvořena jedinou ordinálou. Vývojový diagram však může sloužit jako podklad pro práci počítače, jehož činnost je proti práci člověka těžkopádnější. Stroj nevidí a nemá zkušenosti. Proto mu diagram poradí, jak pracovat ve všech myslitelných případech. Deskriptivář však pozná na první pohled, o kterou polohu z těch, které se v diagramu podrobně rozlišují, jde a spíš podvědomě se rozhodne pro správnou alternativu.

Zkuste si jako cvičení sestavit vývojový diagram pro oba stopníky přímký. Bude již dosti komplikovaný.

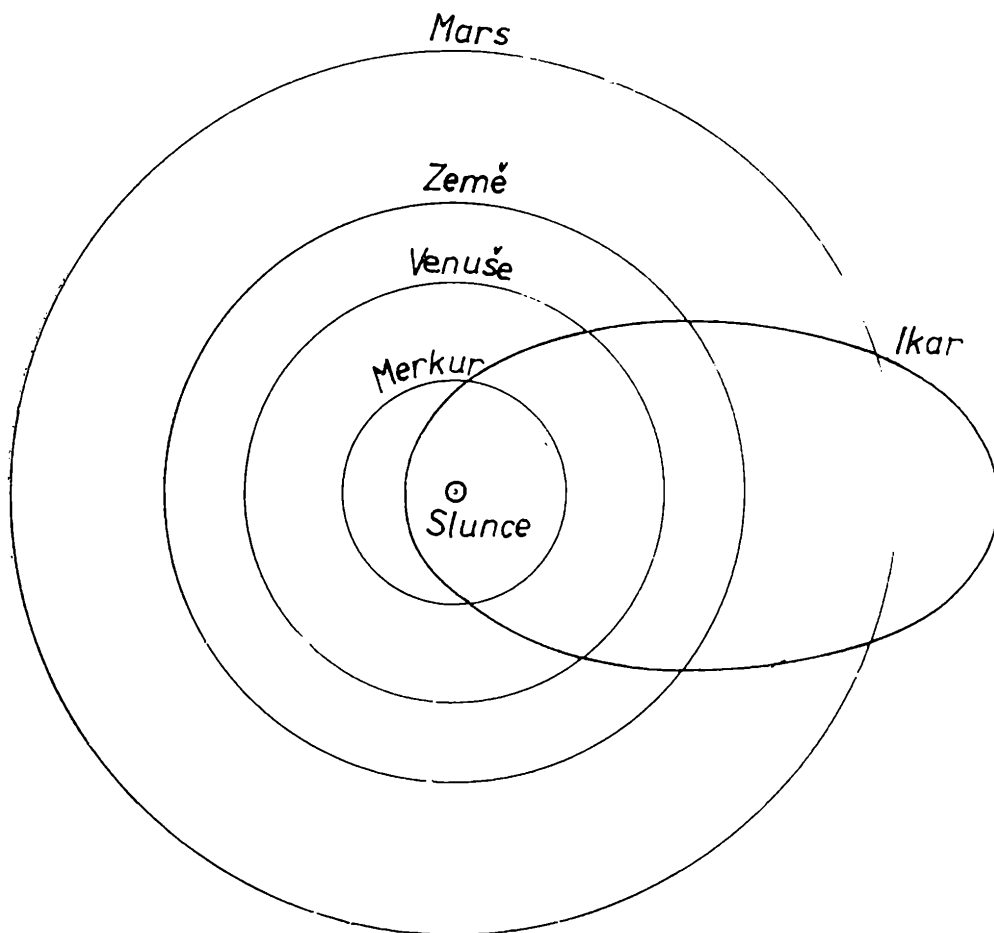
astronomie

Planetka Ikar

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Planetky jsou tělesa, která obíhají kolem Slunce v prostoru mezdráhami Marsu a Jupitera. První planetku objevil 1. ledna 1801 italský astronom *G. Piazzi* na hvězdárně v Palermu. Tato planetka, nazvaná Ceres, je ze všech planetek největší — má průměr 770 km a její zdánlivá hvězdná velikost je 7^m až 8^m. Objevy dalších planetek následovaly pak poměrně rychle po sobě a do začátku roku 1975 jich bylo objeveno celkem 1816. Planetky se označují jmény a pořadovými čísly. Střední vzdálenost planetek od Slunce je 2,9 UA, střední oběžná doba 4,5 roku, střední hodnota numerické excentricity je 0,15 a střední hodnota sklonu drah k ekliptice je 9,7°. Dráhy jednotlivých planetek se však navzájem značně liší jak co do velikosti, tak zejména co do excentricity a sklonu dráhy. Dráhy některých planetek jsou téměř kruhové (např. Ceres má excentricitu dráhy jen 0,079), jiné planetky mají velmi protáhlé dráhy, takže se v perihéliu dostávají ke Slunci blíže než Země, Venuše nebo i Merkur. Rovněž sklony drah jsou v poměrně velkém intervalu, od 0° do 52°.

Velkou pozornost astronomů vzbudila planetka, kterou objevil 26. června 1949 *Walter Baade* na hvězdárně Mt. Palomaru a která byla zpočátku nazývána Baadeho objekt. Tato planetka má totiž ze všech planetek největší excentricitu $e = 0,827$ a velkou poloosu dráhy jen o málo větší než je velká poloosa zemské dráhy $a = 1,0777$ UA. V perihéliu své dráhy se tedy přibližuje ke Slunci na vzdálenost 0,186 UA (tj.



Obr. 1. Dráha Ikara (velikost a tvar) ve srovnání s dráhami Merkura, Venuše, Země a Marsu

28 miliónů kilometrů), což znamená, že je dvakrát blíže ke Slunci než Merkur. Proto byla tato planetka pojmenována Ikar (Icarus) podle bájného letce Ikara, o kterém řecká mytologie vypráví, že se pokusil vzlétnout ke Slunci a zaplatil za to životem. Po výpočtu dráhy bylo planetce Ikar přiděleno pořadové číslo 1566. V aféliu je Ikar ve vzdálenosti 1,97 UA od Slunce, tedy až za dráhou Marsu. Sklon dráhy Ikara k rovině ekliptiky je 23° . Na obr. 1 je znázorněna velikost a tvar dráhy Ikara ve srovnání s dráhami Merkura, Venuše, Země a Marsu. Ve skutečnosti dráha Ikara svírá s rovinou ekliptiky úhel 23° a neprotíná dráhu Země ani ostatních planet.

Nejzajímavější na této planetce je skutečnost, že se může ze všech planetek nejvíce přiblížit k Zemi, a to na vzdálenost asi 7 miliónů kilometrů. Taková je totiž nejmenší vzdálenost obou drah a procházejí-li obě tělesa současně příslušnými body na svých dráhách, můžeme Ikara pozorovat ze vzdálenosti 7 miliónů km, tedy ze vzdálenosti jen asi osmnáctkrát větší, než je vzdálenost Měsíce od Země. Tyto příznivé podmínky pro pozorování Ikara ovšem nenastávají při každém jeho oběhu, neboť oběžné doby Ikara a Země se liší. Oběžná doba Ikara kolem

Slunce je 409 dní, Země 365,25 dne, můžeme tedy vypočítat, že 17 oběhů Ikara trvá 6953 dní, což je přibližně 19 roků. Přiblížení Ikara na nejmenší možnou vzdálenost od Země se tedy opakuje vždy jednou za 19 roků. Poslední takové přiblížení planety nastalo v červnu 1968.

Jak jsme již uvedli, planeta byla objevena v roce 1949, tj. v době kolem největšího přiblížení k Zemi. Podobně jako téměř všechny ostatní planety byla objevena fotografickou cestou. Při fotografování se totiž planeta projeví tím, že se během expoziční doby posune vzhledem k hvězdám a zobrazí se jako čárka. Pohyb Ikara v době objevu byl velmi rychlý, větší než 1° za hodinu, takže pořízení jeho záznamu na fotografické desce bylo velmi obtížné, neboť stopa byla velmi slabá, nehledě k tomu, že u většiny dalekohledů je zobrazované pole mnohem menší. Na základě tří fotografických snímků, získaných během měsíce června 1949, pokusili se teoretikové *Nicholson* a *Richardson* vypočítat dráhu nového tělesa a již 5. července oznámili tři základní polohy Baadeho objektu Mezinárodní astronomické ústředně pro rychlou informaci ostatních observatoří. Za další tři dny byla již dráha nově objeveného tělesa vypočtena. Vyskytly se obavy, aby se nová planeta „neztratila“, jak se to již dříve stalo s planetkami *Apollo*, *Adonis* a *Hermes*. K rychlému pohybu planety mezi hvězdami přistoupila navíc ještě ta nepříznivá okolnost, že Měsíc byl v úplňku, což znemožnilo fotografování tak slabého objektu. Další snímky se podařilo zhotovit až 12. července pomocí Schmidtovy komory. V té době se již úhlová rychlost planety zmenšila, i když její vyhledání mezi statisíci hvězdami nebyla ani pak snadná záležitost. Pomocí dvou nově získaných poloh zpřesnili *Nicholson* a *Richardson* výpočty elementů dráhy Ikara.

Planeta *Ikar* je velmi významná z hlediska kosmické mechaniky, astrofyziky i fyziky. Pro kosmickou mechaniku je důležitá přesná znalost její dráhy, která je nutným předpokladem pro zpřesnění údajů o hmotnosti Merkura. Obvykle se hmotnost Merkura určovala z poruch v pohybu Enckeovy komety, která se v perihéliu své dráhy přibližuje k Merkuru na vzdálenost 12 miliónů kilometrů. *Ikar* se k Merkuru přibližuje na tutéž vzdálenost, má však třikrát kratší oběžnou dobu, takže rušivé vlivy Merkura se na jeho pohybu musí projevit výrazněji. K velmi těsnému přiblížení Ikara k Merkurovi dochází vždy po 14 nebo 17 obězích planety, k méně těsnému po každých třech obězích.

Astrofyzika se *Ikarem* zabývá především z hlediska tepelných poměrů. V perihéliu se *Ikar* přibližuje ke Slunci natolik, že teplota na jeho povrchu by mohla dosáhnout až 900 K. Tato hodnota byla vypočtena za předpokladu, že *Ikar* je obrácen ke Slunci stále stejnou stranou (podobně jako Měsíc k Zemi) a že jeho povrch má vlastnosti absolutně černého tělesa. Pak by ke Slunci obrácená strana musela vyzařovat již v oboru viditelného záření a měla by červenou barvu. Pravděpodobnější však je, že planeta rotuje kolem své osy. Pak je její povrchová teplota

mnohem nižší — asi 600 K — a září jen odraženým světlem slunečním. S rostoucí vzdáleností od Slunce povrchová teplota Ikara rychle klesá a v aféliu má hodnotu jen 200 K, tedy méně, než je průměrná teplota na Marsu (240 K). V červnu 1968 byl Ikar sledován rovněž rádioastronomicky. Z měření na kmitočtech 7840 MHz a 2388 MHz vyplynulo, že Ikar je přibližně kulovité těleso o průměru (1030 ± 60) m a otáčí se kolem osy se siderickou dobou rotace $2^{\text{h}}15,5^{\text{min}}$.

Význam Ikara pro fyziku spočívá v tom, že může posloužit jako vhodný objekt pro ověření jednoho z důsledků obecné teorie relativity — stáčení perihélia. Tento jev byl dosud ověřen jen u Merkura, u něhož relativistické stáčení perihélia má hodnotu $43''$ za století a je v souladu s výpočty. U Ikara vychází podle obecné teorie relativity hodnota $10''$ za století, což je hodnota více než čtyřikrát menší než u Merkura, avšak vzhledem k velké excentricitě Ikarovy dráhy bude pozorovaná odchylka lépe měřitelná než u Merkura. Na tuto možnost upozornil poprvé sovětský astronom *I. I. Putilin* již v roce 1949. Přesné určení relativistické odchylky však bude možné až po stanovení všech poruch v pohybu Ikara.

Vyskytly se rovněž úvahy o tom, že by bylo možné Ikara využít k vytvoření meziplanetární sondy — realizaci těchto úvah však v dohledné době nelze očekávat. V době největšího přiblížení je sice planetka ve vzdálenosti pouhých 7 miliónů kilometrů od Země, pohybuje se však rychlostí 31 km s^{-1} pod poměrně velkým úhlem k dráze Země, takže dopravit na ni kosmickou loď by bylo velmi složitým úkolem.

Středověký kalendář

JIŘÍ ZYMÁK, Dobřany

Ve středověku nebyly vydávány ani roční kalendáře ani přehledy o postavení planet a zejména Měsíce na obloze, a přesto byla s časovým předstihem určována například data pohyblivých svátků v následujícím roce. Dlouholetým pozorováním se totiž zjistily jisté zákonitosti, které se periodicky opakují, a pomocí nich se mohly informace o libovolném roce shrnout do několika kalendářních čísel.

Jak byla tato čísla odvozena? Obyčejný rok má 365 dní. Platí: $365 = 7 \cdot 52 + 1$, čili rok má 52 týdnů po 7 dnech a jeden den navíc. (Odtud pravděpodobně pochází rčení „...do roka a do dne...“) Tedy je-li v určitém nepřestupném roce 1. ledna v pondělí, příští rok bude 1. ledna v úterý. Je-li v přestupném roce 1. ledna v pondělí, následující rok to bude středa.

První kalendářní číslo je tzv. *konkurenta*, která udává, na jaký den v týdnu připadne datum 24. března daného roku. Bude-li to neděle, je konkurenta 1, pro pondělí je konkurenta 2 atd., až sobotu označuje konkurenta 7. Z předchozího je tedy vidět, že příští rok bude konkurenta o jednu větší, než je letos, pokud příští rok nebude přestupný. Pokud bude příští rok přestupný, zvětší se konkurenta o dvě (tab. 1).

Tabulka 1.

rok	konkurenta	
1973	7	
1974	1	
1975	2	
1976	4	přestupný rok
1977	5	
1978	6	
1979	7	
1980	2	přestupný rok

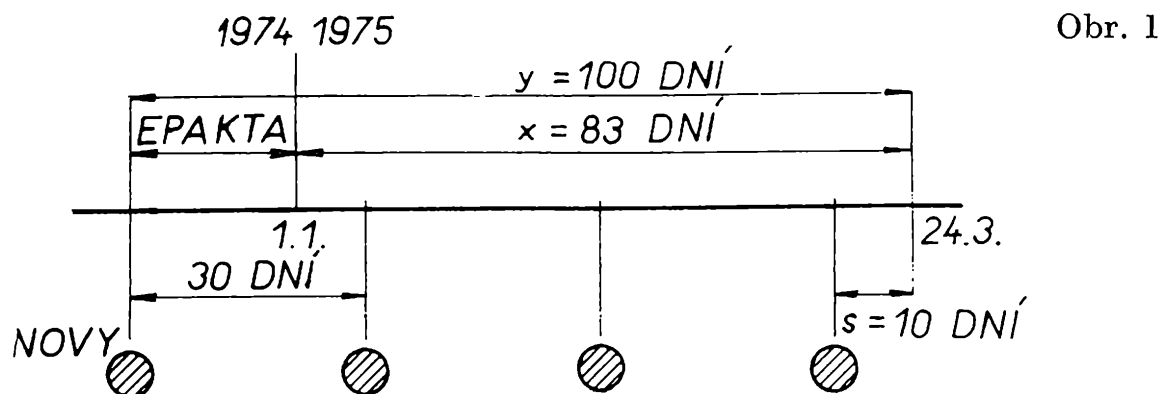
Po Slunci zajímal středověké chronology Měsíc. Měsíční rok má 354 dny, tedy o 11 dní méně než rok sluneční. To znamená: je-li 1. ledna stáří Měsíce např. 6 dní, za 354 dnů (za měsíční rok) je Měsíc opět starý 6 dní. Do konce slunečního roku zbývá ještě 11 dní, tedy 1. ledna následujícího roku bude Měsíc starý $6 + 11 = 17$ dní. V každém následujícím roce je stáří Měsíce při určitém datu vždy o 11 větší. Stáří Měsíce v noci z 31. prosince na 1. ledna daného roku se nazývá *epakta* daného roku (obr. 1). Odtud plyne, že epakta se každý rok zvětší o 11. Překročí-li však číslo epakty 30, odečítá se od něho 30 jako počet dní celého měsíce. Ve středověku byla konvencí stanovena změna epakty ne na 1. ledna, ale na 1. září předcházejícího roku.

Například roku 1973 byla epakta XXV do 31. 8. 1973,
VI od 1. 9. 1973,
roku 1974 byla epakta VI do 31. 8. 1974,
XVII od 1. 9. 1974.

(Epakta se značí římskými číslicemi.) Jinak vždy první ze dvou epakt se považuje za epaktu pro daný rok (tedy pro celý rok 1973 je epakta XXV).

Posledním číslem, které si bylo nutno pamatovat, bylo tzv. *zlaté číslo*. Řecký matematik *Meton* zjistil, že vždy za 19 let připadají přibližně tytéž fáze Měsíce na stejná data. Synodická oběžná doba Měsíce (doba mezi dvěma stejnými fázemi) se totiž rovná 29,53059 dne, pak 235 synodických měsíců je 6939,69 dne. Také 19 juliánských roků po 365,25

dne se rovná 6939,75 dne [1]. To znamená, že roky tak, jak jdou po sobě, se číslují od jedné do devatenácti a pak opět od jedné počínaje. Pořadí roku v tomto měsíčním cyklu se jmenuje zlaté číslo. Nultý rok našeho letopočtu měl zlaté číslo 1 (první rok měsíčního cyklu).



Zlaté číslo souvisí s epaktou tímto způsobem: synodický měsíc není přesně 30 dní, ale jen 29,53059 dne, a proto se na konci devatenáctiletého měsíčního cyklu musí srovnat měsíční fáze se slunečním rokem. To se děje tak, že se na konci měsíčního cyklu nepřipočte k epaktě číslo 11, ale 12 (tab. 2).

Tabulka 2.

rok	zlaté číslo	epakta
1973	17	XXV
1974	18	VI
1975	19	XVII
1976	1	XXIX
1977	2	X

Kalendářních čísel existuje více (např. indikce, sluneční cyklus), která však nejsou nutná pro sestavení kalendáře na daný rok.

Praktické použití kalendářních čísel:

Pomocí epakty můžeme (s určitou přesností) spočítat stáří Měsíce v libovolném dnu v roce. Jako epaktu označujeme stáří Měsíce v noci z 31. 12. na 1. 1. To znamená, že stáří Měsíce v libovolném dnu v roce určíme tak, že k epaktě přičteme pořadové číslo dne v roce. Od součtu odečteme takový násobek čísla 30, abychom dostali výsledek od 1 do 30.

Například stáří Měsíce dne 24. 3. 1975 (obr. 1.):

Vypočteme nejprve, kolikátým dnem v roce je 24. 3.: leden má 31 dní, únor 28, tedy

$$x = 31 + 28 + 24 = 83.$$

24. 3. 1975 je 83-tím dnem v roce. Epakta je XVII., takže stáří Měsíce bude:

$$y = 83 + 17 = 100; 100 - 30 = 3, \text{ zbytek } 10.$$

Stáří Měsíce 24. 3. 1975 je 10 dní.

Podobně lze postupovat i pro jiná data. Ovšem čím více se data, v nichž počítáme fázi Měsíce, blíží ke konci roku, tím více se vypočtená hodnota liší od hodnoty tabulkové. Například 5. 10. 1974 je

$$31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 5 = 278$$

den v roce. Epakta byla VI, takže

$$278 + 6 = 284; 284 - 30 = 9, \text{ zbytek } 14.$$

Stáří Měsíce by tedy mělo být 14 dní, ale tabulková hodnota je 18,9 dne pro 0 h světového času (viz [1]).

Pro taková data je výhodné při výpočtu postupovat od konce roku. Jak bylo uvedeno, měsíční rok má $354 = 12 \cdot 29,5$ dne (12 měsíců po 29,5 dne). Začne-li měsíční rok 1. ledna, pak jeho posledním dnem je 20. prosinec. 21. prosince má Měsíc stáří stejné, jako měl 1. ledna (viz zavedení pojmu epakta), čili o den dříve, 20. prosince je stáří Měsíce udáno přímo epaktou. Nyní vypočteme, kolikátým dnem byl např. 5. říjen 1974 před 20. prosincem 1974: postupujeme odzadu (obr. 2)

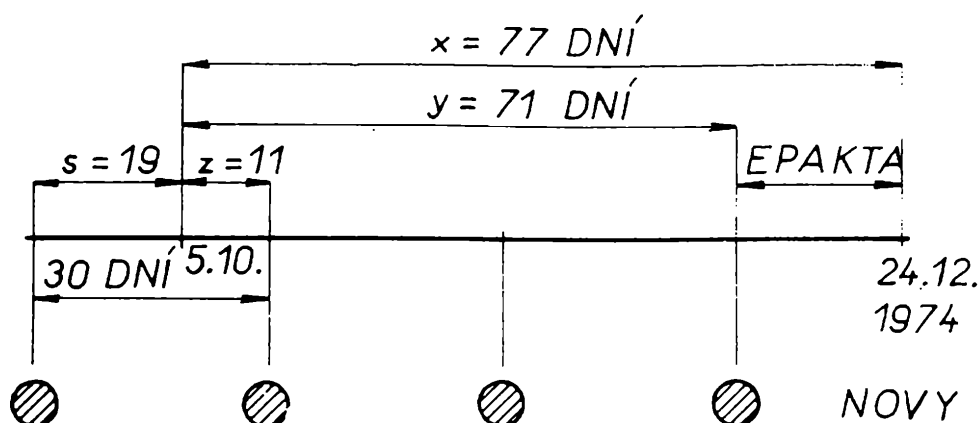
$$x = 20 + 30 + 27 = 77$$

Z obrázku je zřejmé, že nyní musíme epaktu odečíst, abychom zjistili počet celých lunárních měsíců mezi daty 5. 10. a 20. 12. Tedy

$$y = 77 - 6 = 71; 71 - 30 = 2, \text{ zbytek } z = 11.$$

Stáří Měsíce s ovšem určuje veličina $s = 30 - z = 19$. Je vidět, že vzhledem k tabulkové hodnotě 18,9 dne je nyní chyba nepatrná. Obecně lze říci, že první metoda je vhodná pro dny prvního pololetí (do 30. 6.), druhá metoda pro dny v druhém pololetí.

Pomocí epakty a konkurenty můžeme vypočítat i datum velikonoční neděle v libovolném roce. Jak známo, velikonoční neděle je neděle bezprostředně následující po prvním jarním úplňku. Určíme datum velikonoční neděle roku 1975: využijeme k tomu dříve vypočteného stáří Měsíce dne 24. 3. 1975, které činí 10 dní. V úplňku má Měsíc stáří 15 dní. Tento stav nastane o 5 dní později, čili 29. 3. 1975. Roku 1975



je konkurenta 2, což znamená, že 24. 3. 1975 je pondělí, 29. 3. 1975 je sobota, tedy neděle 30. 3. 1975 je neděle velikonoční.

Velikonoční neděli roku 1976 určíme tak, že vypočteme opět nejprve stáří Měsíce dne 24. 3. 1976. Epakta je XXIX, konkurenta 4 (tab. 2, tab. 1). 24. 3. 1976 je 84. den v roce; stáří Měsíce určíme podle metody I.:

$$84 + 29 = 113; 113 : 30 = 3, \text{ zbytek } 23.$$

24. 3. 1976 je Měsíc starý 23 dní. Nyní najdeme nejbližší jarní úplňk. Ten jistě nemůže nastat před dnem 24. 3., ovšem za osm dní, tj. 1. 4. bude nov a za dalších 14 dní, tj. 15. 4. bude úplňk. Podle konkurenty je 24. 3. středa, tedy středy jsou i dny 31. 3., 7. 4., 14. 4.; 15. 4. je čtvrtek a 18. 4. je neděle velikonoční.

Literatura

- [1] Hvězdářská ročenka 1974. ČSAV, Praha 1973, s. 263—266.
- [2] Fiala, Z.: Přemyslovské Čechy, Svoboda, Praha 1975, s. 132.

olympiády

XVII. MMO v Burgasu

(Pokračování)

Doc. OTA SETZER, ČVUT Praha

Redakce otiskuje texty i řešení dalších dvou úloh řešených na 17. mezinárodní matematické olympiádě, konané v červenci 1975 v Burgasu.

5. Zjistěte, zda na kružnici s poloměrem 1 existuje 1975 bodů takových, že délky všech jimi určených tětiv jsou racionální čísla.

Sovětský svaz, 6 bodů

6. Najděte všechny mnohočleny P dvou proměnných s těmito vlastnostmi:

1. P je homogenní mnohočlen stupně n (n je přirozené číslo), tzn., že pro všechna reálná čísla t, x, y platí

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y);$$

2. pro všechna reálná čísla a, b, c platí

$$P(a + b, c) + P(a + c, b) + P(b + c, a) = 0;$$

3. $P(1, 0) = 1$.

Velká Británie, 8 bodů

Řešení:

5. V kružnici s poloměrem 1 má tětiva odpovídající středovému úhlu α délku $2 \sin \frac{\alpha}{2}$. Nyní dokážeme dvě pomocná tvrzení:

1. Je-li δ úhel takový, že $\sin \delta, \cos \delta$ jsou racionální čísla, pak také $\sin k\delta, \cos k\delta$ jsou racionální čísla pro všechna přirozená k .

2. Existuje libovolně malý úhel δ takový, že $\sin \delta$ a $\cos \delta$ jsou racionální čísla.

První tvrzení dokážeme snadno indukcí podle k : pro $k = 1$ je triviální a pro indukční krok využijeme známých vzorců

$$\begin{aligned}\sin(k+1)\delta &= \sin k\delta \cos \delta + \cos k\delta \sin \delta, \\ \cos(k+1)\delta &= \cos k\delta \cos \delta - \sin k\delta \sin \delta.\end{aligned}$$

K důkazu druhého tvrzení stačí např. vzít úhel δ takový, že je

$$\sin \delta = \frac{2t}{t^2 + 1}, \quad \cos \delta = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

kde t je dostatečně velké přirozené číslo.

Budiž nyní δ úhel takový, že $\sin \delta$ i $\cos \delta$ jsou racionální čísla a že $1975 \cdot \delta < \pi/2$. Na dané kružnici nyní umístíme 1975 bodů $A_1, A_2, \dots, A_{1975}$ tak, aby středové úhly odpovídající tětivám $A_k A_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, 1974$) byly všechny právě 2δ . Libovolné dvojici bodů $A_j A_k$ ($j < k$) bude odpovídat středový úhel $2(k - j)\delta$, příslušná tětiva bude mít délku $2 \sin(k - j)\delta$, což je vždy racionální číslo.

Nad kružnicí s poloměrem 1 je tedy možné umístit 1975 (a snadno se vidí, že i libovolný jiný konečný počet) bodů tak, aby všechny jimi určené tětivy měly racionální délky.

6. Nejprve probereme případ $n = 1$, tj. hledáme lineární homogenní mnohočlen

$$P(x, y) = Ax + By$$

vyhovující podmínkám 2. a 3. Položíme-li $a = 1, b = c = 0$, dostaneme z podmínky 2.

$$P(0, 1) = -2P(1, 0),$$

podle 3. podmínky je tedy $P(0, 1) = -2$. Odtud a ze 3. už vyplývá $A = 1, B = -2$, tzn.

$$P(x, y) = x - 2y$$

Snadno ověříme, že tento lineární mnohočlen opravdu vyhovuje všem třem podmínkám úlohy; při $n = 1$ je to jediné řešení.

Nechť nyní $n > 1$. Platí opět $P(1, 0) = 1, P(0, 1) = -2$; položíme-li $a = 2, b = c = -1$, dostaneme z podmínky 2. rovnost

$$P(-2, 2) = -2P(1, -1)$$

Z podmínky 1. však zároveň vyplývá, že je

$$P(-2, 2) = (-2)^n P(1, -1).$$

Jelikož je $n > 1$, je ovšem $(-2)^n \neq -2$, a tedy nutně

$$P(1, -1) = 0.$$

Vzhledem k homogenitě mnohočlenu P je pak také

$$P(x, -x) = 0$$

pro všechna reálná x . Odtud však již vyplývá, že polynom P lze psát ve tvaru

$$P(x, y) = (x + y) \cdot Q(x, y),$$

kde Q je polynom.

Ukážeme nyní, že také polynom Q vyhovuje podmínkám 1., 2. a 3. Skutečně, při $x + y \neq 0$ je

$$Q(tx, ty) = \frac{P(tx, ty)}{tx + ty} = \frac{t^n P(x, y)}{t(x + y)} = t^{n-1} \cdot Q(x, y),$$

takže Q je nutně homogenní polynom stupně $n - 1$. Podobně je — při $a + b + c \neq 0$ — také

$$\begin{aligned} & Q(a + b, c) + Q(a + c, b) + Q(b + c, a) = \\ &= \frac{1}{a + b + c} [P(a + b, c) + P(a + c, b) + P(b + c, a)] = 0. \end{aligned}$$

Také

$$Q(1, 0) = \frac{P(1, 0)}{1} = 1.$$

Poněvadž při $n = 1$ už řešení známe, vidíme, že řešením mohou být jen polynomy tvaru

$$P(x, y) = (x + y)^{n-1} (x - 2y);$$

snadno se ověří, že tyto polynomy skutečně vyhovují všem třem podmínkám úlohy (při každém přirozeném n).

Jiné řešení. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:

Je-li polynom P řešením úlohy, potom

$$P(x, 1 - x) = 3x - 2$$

pro všechna reálná x .

Tvrzení dokážeme nejdříve jen pro celé hodnoty argumentu x , a to indukcí.

I. Tvrzení zřejmě platí pro $x = 1$; podle podmínky 3. je totiž

$$P(1, 0) = 1 = 3 \cdot 1 - 2.$$

II. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna celá čísla v mezích $1 - k$ až $1 + k$ (včetně), kde k je celé nezáporné číslo. Podle podmínky 2., kde položíme $a = -k$, $b = 0$, $c = 1 + k$, bude

$$P(-k, 1 + k) = -P(1, 0) - P(1 + k, -k)$$

Podle indukčního předpokladu se však pravá strana rovná

$$-1 - [3(1 + k) - 2] = 3(-k) - 2,$$

takže dokazovaná rovnost platí i pro $x = -k = 1 - (k + 1)$.

Nyní položíme $a = k + 1$, $b = 1$, $c = -(k + 1)$; podle podmínky 2. bude

$$P(k + 2, -k - 1) = -P(0, 1) - P(-k, 1 + k).$$

Podle první části důkazu je však pravá strana rovna

$$-(3 \cdot 0 - 2) - [3(-k) - 2] = 3k + 4 = 3(k + 2) - 2,$$

dokazované tvrzení tedy platí i pro $x = k + 2 = 1 + (k + 1)$.

Tvrzení tedy platí pro všechny celé hodnoty x ; poněvadž však P je polynom, plyne odtud platnost tvrzení pro všechna reálná x vůbec.

Dále využijeme podmínky 1., tj. homogenity polynomu P a napíšeme (pro $x + y \neq 0$)

$$P(x, y) = (x + y)^n P\left(\frac{x}{x + y}, \frac{y}{x + y}\right)$$

Avšak

$$\frac{y}{x + y} = 1 - \frac{x}{x + y}$$

takže podle pomocné věty je

$$P\left(\frac{x}{x + y}, \frac{y}{x + y}\right) = 3 \frac{x}{x + y} - 2 = \frac{x - 2y}{x + y}$$

Celkem je tedy

$$P(x, y) = (x + y)^{n-1} (x - 2y),$$

a to pro každé přirozené n . Ježto P je polynom, platí výsledek i při $x + y = 0$.

Snadno se ověří, že výsledný polynom skutečně vyhovuje všem třem podmínkám úlohy.

Z jubilejního roku MO

Už jsme psali, že matematická olympiáda má v tomto školním roce svůj pětadvacátý ročník. První z jubilejních akcí byla tisková konference v pražském Klubu novinářů. Konala se 12. září 1975, řídil ji akademik *Josef Novák* a vedle novinářů se jí zúčastnil též předseda ústředního výboru MO doc. *Jan Vyšín*, CSc., a několik organizátorů soutěže.

O soutěži se nyní více píše v tisku odborném a informace pronikají i do jiných sdělovacích prostředků. Tak 9. října 1975 přinesl deník

Mladá fronta obsáhlý článek s názvem „Do pětadvacátého olympijského roku“. Byl to rozhovor s ředitelem Matematického ústavu ČSAV akademikem Josefem Novákem o letošním jubilejním roce. Vyjímáme z článku jeden zajímavý údaj: Ve 24 ročnících olympiády bylo zadáno asi 1700 úloh a opraveno 2 611 000 jejich řešení.

J. S.

matematické zábavy

Hra o životě a smrti I.

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Dnes se začneme zamýšlet nad zajímavou hrou, která byla původně vymyšlena pro samočinné počítače. Je to hra o životě a smrti či ještě lépe vyjádřeno hra o imitování vývoje živých společenstev. Může si ji docela dobře zahrát i jednotlivec, jen když má k dispozici dostatečně velkou šachovnici (hra předpokládá tuto šachovnici neomezenou, tj. rozprostírající se na všechny strany do nekonečna) a příslušný počet hracích kamenů (např. koleček).

Hra začíná tím, že na šachovnici položíme jednu či více skupin kamenů, představujících „výchozí generaci“. Další vývoj tohoto „společenství“ je pak dán třemi pravidly, která se vždy uplatňují společně, a tedy najednou. Je to pravidlo zrodu, smrti a přežití.

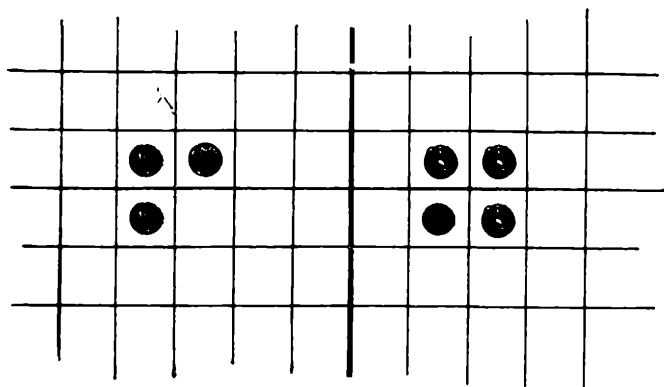
Nejprve sluší poznamenat, co rozumíme pod pojmem „sousedí“: kámen sousedí s jiným kamenem tehdy, mají-li „jejich“ políčka na šachovnici buď společnou stranu anebo se navzájem jedním rohem dotýkají. Zmíněná tři pravidla hry je pak možno formulovat takto:

1. Pravidlo zrodu: na každém prázdném políčku, které sousedí právě se třemi kameny obsazenými políčky, se zrodí nový kámen.

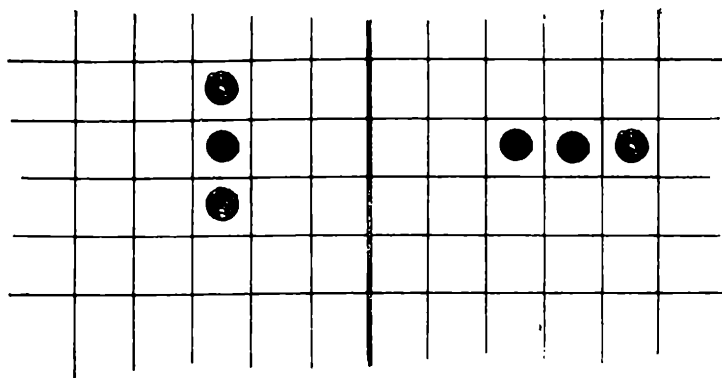
2. Pravidlo smrti: každý kámen, který nesousedí se žádným jiným kamenem anebo sousedí právě s jediným kamenem, umírá na „izolaci“ a odstraní se ze šachovnice; každý kámen sousedící se čtyřmi a více jinými kameny, umírá na „přelidněnost“ a rovněž se odstraní.

3. Pravidlo přežití: každý kámen se dvěma nebo třemi sousedy přežívá do další generace.

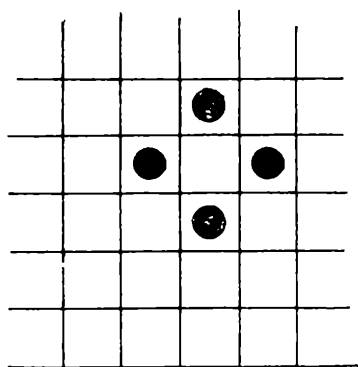
Ukažme si uplatnění uvedených pravidel v praxi. V levém postavení na obr. 1 žádný kámen neumírá, protože každý má dva nebo tři sousedy; jeden nový kámen se však zrodí, protože bude mít právě tři sousedy.



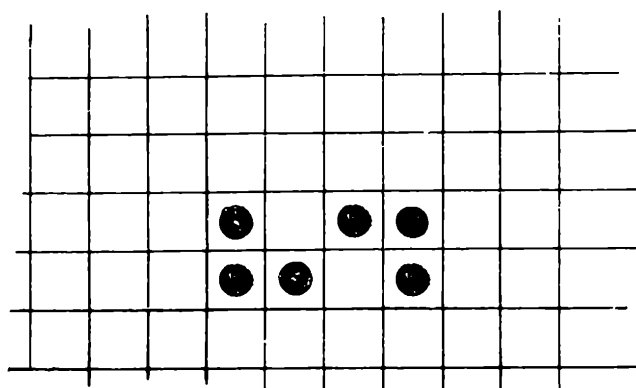
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

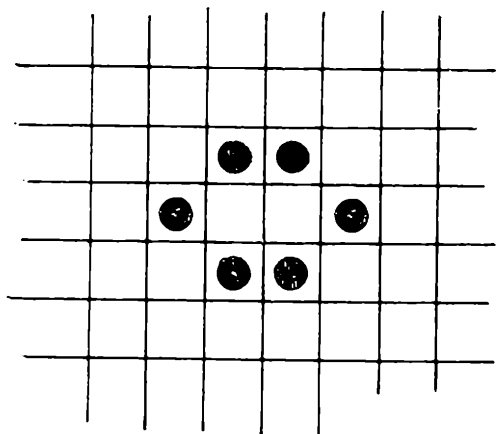


Obr. 4

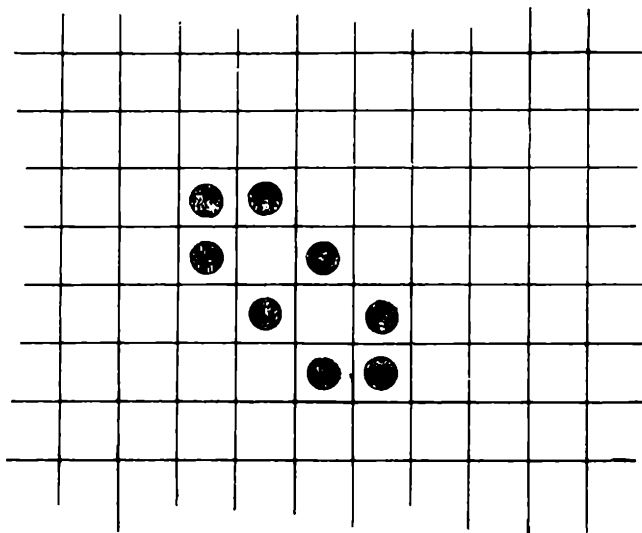
Vznikne tedy nová generace, znázorněná na pravém postavení téhož obrázku. Na levé části obr. 2 je postavení, na němž umírají oba krajní kameny, protože mají pouze jediného souseda; avšak ještě předtím, než zahynou, zrodí se nové dva kameny na polích se třemi sousedy, takže výsledkem je generace znázorněná napravo od výchozí situace. Na tomto příkladě si uvědomíme, co jsme měli na mysli, když jsme zdůraznili, že všechna pravidla hry se uplatňují „současně“. Nové kameny se kladou na šachovnici zásadně ještě dříve, než se „zemřelé“ kameny ze šachovnice odstraní. Jak to provádět a přitom na nic nezapomenout, povíme si v příštím pokračování.

Příklad na obr. 2 nám znázorňuje situaci, která se v dalších generacích periodicky opakuje. Obecně se však původní obrazec na šachovnici generaci po generaci rozrůstá nebo také náhle zaniká a vymírá — inu zrovna tak jako v „obyčejném“ životě...

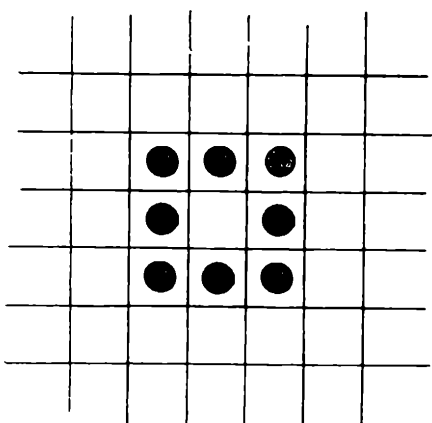
Než si ukážeme několik dalších příkladů, podívejme se na několik situací, které se již dále nevyvíjejí (ale ani nevymírají), takže zůstávají konstantní. Nejjednodušší je tzv. „blok“ na obr. 1 vpravo nebo jeho pozměněná varianta na obr. 3. Také „plástev“ na obr. 4, „zmije“ na obr. 5 a „lod“ na obr. 6 jsou definitivní tvary, které se dalším vývojem nemění. Ve skutečnosti se ovšem může stát, že se k nim během hry při-



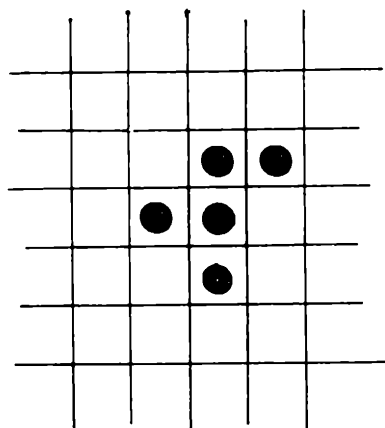
Obr. 5.



Obr. 6.



Obr. 7.



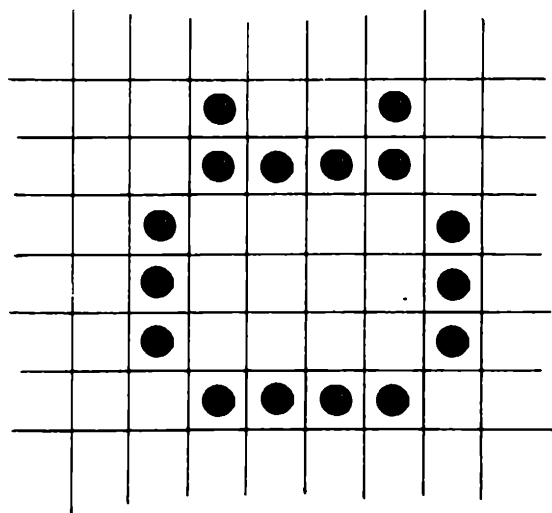
Obr. 8.

blíží některý jiný rostoucí útvar a nakonec způsobí vzájemnou interakci, vedoucí k vytváření zcela nových společenství.

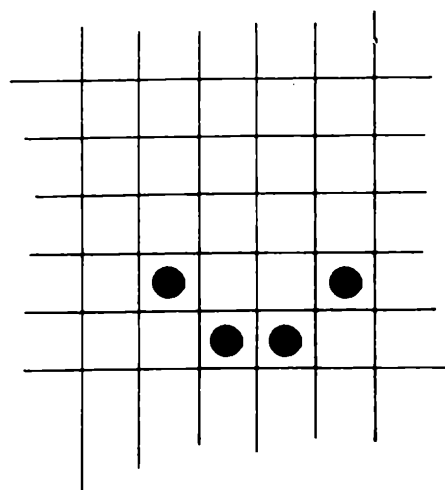
A teď si již sami zkuste rozehrát situaci na obr. 7. Poznáte, že toto společenství se bude docela zajímavě rozvíjet, avšak tento vývoj nakonec povede k celkové záhubě a celé společenství vyhyne. Zcela jiný osud čeká situaci na obr. 8. Co se bude dít, o tom se přesvědčte sami; vydržíte-li hru hrát aspoň do vzniku desáté generace, budete se moci obdivovat přeměnám, k nimž bude na šachovnici docházet.

Jedním z nejzajímavějších výchozích společenství je tzv. „cheshirská kočka“ na obr. 9. Postupně se bude měnit a jakoby scvrkávat, až z ní po šesti generacích zůstane „škleb“ na obr. 10. Ten však nebude konečným tvarem a bude se dále měnit, až nakonec z celé „kočky“ zbude pouze její „otisk“, totiž nám už známý a dále se neměnicí „blok“ z obr. 3.

Pro začátek to stačí a zkuste si sami vyjít z nějakého počátečního postavení. Budete překvapeni obraty, které budou při vývoji výchozího společenství nastávat, a vžijete se do uvedených pravidel této zajímavé



Obr. 9



Obr. 10

hry. Někdy příště si ukážeme, že existují zvláště zajímavé situace, napodobující např. hodiny, oscilátor, pulzar, letící roj letadel či dokonce sečení trávy na louce nebo rozmnožování bakterií v živném roztoku agar-agaru.

Hra o životě a smrti se zrodila roku 1970; vymyslel ji *John Horton Conway*, matematik na univerzitě v Cambridge. Hru popularizoval odborník na matematické hry *Martin Gardner* v časopise *Scientific American*. Pomocí počítačů se od té doby hledají nové a nové zajímavé varianty a přívrženci hry mají dokonce svůj vlastní časopis, ve kterém si vyměňují zkušenosti. Hledají, jak imitovat výbuch vodíkové bomby nebo virovou infekci — prostě snaží se napodobit nejružnější situace, známé ze života této planety.

Do příště se tedy snažte získat základní zkušenosti řešením libovolných výchozích postavení, to nejzajímavější nás teprve čeká.

Řešení Vaněčkovy úlohy

Nejdříve připomeneme znění úlohy uvedené v minulém čísle *Rozhledů*.

Mezi n sudy ($n > 1$) naplněnými zlatáky je několik sudů s falešnými mincemi. Falešná mince váží 10 g, pravá 11 g. Jediným vážením na rovnoramenných vahách máme zjistit všechny sudy s pravými penězi.

Autor úlohy, žák ZDŠ Stanislav Vaněček, našel velmi jednoduchý postup umožňující určit všechny sudy s pravými mincemi. Užívá přitom dvojkové soustavy.

a) *Metoda zjištění pravých zlatáků :*

Očíslujeme sudy přirozenými čísly 1, 2, 3, . . . n a současně z nich odebíráme $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ mincí (tzn. z prvního sudu 2 mince, z druhého

$2^2 = 4$, z třetího $2^3 = 8$ atd.) Všechny vybrané mince zvážíme. Výsledek označíme P . Vypočítáme váhu V , kterou by měly mince, kdyby byly všechny falešné.

$$V = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) \cdot 10 = 20 (2^n - 1)$$

Je-li rozdíl $R = P - V = 0$, pak jsou ve všech sudech falešné mince. Je-li $R = P - V > 0$, jsou aspoň v jednom sudu pravé zlatáky. Čísla všech sudů s pravými mincemi určíme takto:

Číslo R vyjádříme ve dvojkové soustavě, tzn.

$$R = a_1 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \dots + a_n 2^n.$$

Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou nuly nebo jedničky. V k -tém sudu jsou mince pravé nebo falešné podle toho, je-li $a_k = 1$ nebo $a_k = 0$.

Než přistoupíme k důkazu, uvedeme si konkrétní ukázkou. Máme 7 sudů. Vážením zjistíme například $P = 2584$.

Vypočteme

$$\begin{aligned} V &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) \cdot 10 = \\ &= (2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) \cdot 10 = 2540 \end{aligned}$$

Rozdíl $R = 2584 - 2540 = 44$ vyjádříme ve dvojkové soustavě:

$$R = 44 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7$$

Pravé mince jsou tedy ve druhém, třetím a pátém sudu. Váha vybraných mincí je skutečně

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 11 + 2^3 \cdot 11 + 2^4 \cdot 10 + 2^5 \cdot 11 + 2^6 \cdot 10 + 2^7 \cdot 10 = \\ = 2584 = P. \end{aligned}$$

Zbývá však dokázat, že číslo $P = 2584$ nelze získat žádným jiným rozmístěním pravých a falešných mincí do sudů. To ukážeme obecně.

b) *Důkaz metody uvedené v první části řešení :*

Zřejmě stačí ukázat, že číslo $R = P - V$ lze ve dvojkové soustavě vyjádřit pouze jedním způsobem.

Předpokládejme, že by existovala dvě různá vyjádření čísla R ve dvojkové soustavě:

$$\begin{aligned} R &= a_0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + \dots + a_n 2^n, \\ R &= b_0 + b_1 2^1 + b_2 2^2 + \dots + b_n 2^n, \end{aligned}$$

kde čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ i čísla $b_0, b_1, \dots, b_n$ jsou vesměs nuly nebo jedničky.

$$\text{Potom} \quad a_0 + a_1 2^1 + \dots + a_n 2^n = b_0 + b_1 2^1 + \dots + b_n 2^n. \quad (1)$$

Nechť je k největší z čísel $0, 1, 2, \dots, n$, pro něž je $a_k \neq b_k$. Můžeme předpokládat, že $a_k = 1, b_k = 0$. Rovnost (1) můžeme přepsat ve tvaru

$$a_0 + a_1 2^1 + \dots + a_{k-1} 2^{k-1} + 2^k = b_0 + b_1 2^1 + \dots + b_{k-1} 2^{k-1}. \quad (2)$$

Pro levou stranu L rovnosti (2) platí

$$L = a_0 + a_1 2^1 + \dots + a_{k-1} 2^{k-1} + 2^k \geq 2^k,$$

pro pravou stranu P platí zase

$$P = b_0 + b_1 2^1 + \dots + b_{k-1} 2^{k-1} \leq 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}.$$

Ale zřejmě platí nerovnost*)

$$2^k > 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1,$$

proto je

$$L \geq 2^k > 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2 + 1 \geq P.$$

Tedy je $L > P$, což je spor.

Tím je úloha úplně vyřešena.

(mk)

r ů z n ě

Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

(Napsáno k 100. výročí narození Fr. Lexy)

Dne 3. dubna 1876, právě před 100 lety, narodil se v Pardubicích v rodině advokáta dr. Vilibalda Lexy syn František, pozdější slovatný egyptolog, vědec světového jména. Ponechávaje hodnocení výsledků badatelského úsilí akademika Františka Lexy časopisům odborným, omezím se v Rozhledech na několik osobních vzpomínek.

*) Tuto nerovnost můžeme ověřit například takto:

$$\begin{aligned} 2^k &= 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-2} = 2^k + 2^{k-2} + 2^{k-3} + 2^{k-3} = \\ &= \dots = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 + 2 > 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + \\ &+ 2^3 + 2^2 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Prof. dr. Františka Lexu jsem poznal v Praze na filozofické fakultě Karlovy univerzity. Ač posluchač tehdejší fakulty přírodovědecké, neodolal jsem a již v 1. ročníku svých studií jsem navštěvoval také některé z přednášek tohoto věhlasného učenice. Témata jeho přednášek a cvičení byla neobyčejně přitažlivá, např. v zimním semestru školního roku 1922/23 uvedení do hieroglyfického písma a gramatiky staroegyptské řeči, čtení démotických textů, jejich výklad aj. Profesor Lexa byl mimoto obecně znám tím, že se snažil navázat přímé individuální styky s posluchači a poznat tak hloubku jejich osobních zájmů. Ani já, ač pouhý příležitostný host z jiné fakulty, jsem neušel jeho pozornosti. Profesor Lexa měl rád lidi a po kapsách prý i během kolokvií samou pohodu dobrého slova a humoru. Vyzván jeho skromnými slovy, abych se po přednášce „maličko zdržel“, čekával jsem bez rozpaků před jeho pracovnou na vzácnou besedu. Vzhledem k mému studijnímu oboru upouštěl Lexa zpravidla od obvyklých námětů filologických a předmětem naší rozmluvy učinil s oblibou matematiku starých Egyptanů.

Již při „přijímacím“ pohovoru přeorientoval prof. Lexa řeč na hieroglyfické vypisování čísel. Věděl jsem, že k němu v starověkém Egyptě stačil zcela malý počet základních znaků, že psaní čísel bylo proto velmi těžkopádné, čtení však přístupné, usnadněné aditivní strukturou zápisu (principem přičítání). Vyzván, abych to doložil příkladem, zvolil jsem k velikému překvapení a zřejmému potěšení pana profesora právě úlohu zapsat letopočet jeho narození 1876; nakreslil jsem květ posvátného lotosu jako obraz čísla 1000, připojil 8 stočených listů palmových jako obrazů čísla 100, pak 7 hieroglyfů znamenajících spínadla na nohy dobytčat jako obrazů čísla 10 a nakonec 6 měřicích holí jako obrazů jednotek.¹⁾ Obličej pana profesora zářil uspokojením.

Jindy vykládal prof. Lexa, jak určovali výběrčí daní ve starém Egyptě výměru obdělávaných pozemků. Dovedl vyprávět tak poutavě, že posluchači měli dojem, že vypravuje o tom, co před nějakými čtyřmi tisíci lety sám zažil. Všechno bylo živé a prosté. Obsah čtyřúhelníka počítali staří Egyptané součinem průměrů délek protějších stran; trojúhelník považovali pak za čtyřúhelník s jednou stranou nulovou. Pan profesor položil otázku, při jakém tvaru pozemku platil egyptský rolník daň odpovídající skutečné výměře, kdy prodělával a zdali mohl vůbec někdy vydělat. Odpověděl jsem, že jen pro pravoúhlé rovnoběžníky (obdélník, čtverec) platil rolník daň odpovídající výměře, vydělat pak nemohl nikdy. Pan profesor byl velmi spokojen, při své všeobecně známé přesnosti žádal jen, abych mu „na příště“ vypracoval písemně důkaz svého tvrzení pro všechny čtyřúhelníky. Odcházel jsem tenkrát výjimečně s domácí úlohou. To bylo ovšem vyznamenání!

¹⁾ Srovnejte se zápisem čísla 1876 číslicemi zv. římskými.

Největší radost působil prof. Lexovi egyptský výpočet objemu „pyramidy nemající vrchol“, pravidelného čtyřbokého jehlanu komolého (Moskevský papyrus,²⁾ př. 14). Pro zajímavost jej reprodukuje podle interpretace ruského egyptologa Borise Alexandroviče Turajeva („Ancien Egypt“, roč. 1917) takto:

„Máš-li dánu pyramidu nemající vrchol, vysokou 6 loktů, s dolní hranou 4 a horní 2 lokty, učíš toto:

Umocni 4 dole na druhou, což dá 16; znásob 4 dole a 2 nahoře, což dá 8; umocni 2 nahoře na druhou, což dá 4.

1. Přičti oněch 16
2. k těmto 8 a 4
3. a máš 28; vezmi dále
4. 3 ze 6, dostaneš 2; vezmi tedy ještě
5. 28 dvakrát, dostaneš 56.

Je to skutečně 56, což shledáš správným.“

Zpráva Turajevova vrhla na egyptskou matematiku nové světlo. Výpočet, který jsme sledovali, je přesný a dá se zapsat výrazem $V =$

$$= (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2) \frac{v}{3},$$
 známým vzorcem pro objem pravidelného

čtyřbokého jehlanu komolého. Staří Egypťané ovšem neznali vzorce algebraicky formulované. Nikde v matematice starověkého Orientu nenalzáme také pokus o jakýkoli důkaz. K dosaženému výsledku nebyla mimoto v ostatních formách starověké matematiky dosud nalezena žádná obdoba. Pouhá empirie by k němu nestačila; i teoretických znalostí bylo k němu třeba. Prof. Lexa prohlásil jej proto právem za perlu matematického vědění starých Egypťanů.

Egypt byl láskou prof. Lexy. V roce 1956 se tam vrátil s první československou kulturní delegací, ale to již naposled. Bylo mu již přes 80 let, na pyramidy egyptských faraónů šplhal však podle vyprávění účastníků výpravy³⁾ ještě velmi statečně. Dne 13. února 1960 zemřel. Podle vlastních slov nejstarší egyptolog světa „nalodil se na sluneční loď egyptské mytologie a odplul podsvětím noci daleko, daleko od života...“

Svým významným vědeckým dílem stal se však akademik František Lexa už za živa nesmrtelným.

²⁾ Moskevský papyrus, uložený ve Státním muzeu výtvarných umění v Moskvě, je nejstarší dochovaný rukopis matematický; jeho vznik se klade do 18. století před n. l. Je asi 5,5 m dlouhý, avšak jen 8 cm široký, relativně dobře zachovaný. Obsahuje 25 úloh.

³⁾ Viz např. článek Adolfa Hoffmeistera „Neúnavný žák přírody a učitel“ v Rudém právu, roč. 40, čís. 47 ze 17. února 1960.

recenze

František Latka:

Minilexikon matematiky

Vydalo nakladatelství Alfa, Bratislava 1975, kapesní formát, 83 stran, brožovaná 5 Kčs.

Obsahem publikace je soupis základních vzorců a pravidel středoškolské matematiky. Je rozdělena do 32 kapitol. Prvních deset je věnováno operacím s čísly (zaokrouhlování, dělitelnost, absolutní hodnota, počítání se zlomky). Další kapitoly obsahují soupis základních pravidel pro počítání s mocninami, odmocninami, pravidla pro řešení rovnic, pro počítání s logaritmy, vzorce pro součet aritmetické a geometrické posloupnosti a řady. V kapitole 24 najde čtenář přehledně seřazené základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi, věty pro řešení pravoúhlého i obecného trojúhelníka. Zbý-

vající část příručky je věnována vzorcům pro výpočet obvodů a obsahů rovinných útvarů, povrchů a objemů těles, základním rovnicím analytické geometrie v rovině a vzorcům pro derivaci a integraci elementárních funkcí. Knihu uzavírá kapitola, obsahující přehled měř a vah.

Knihy je autory určena studentům střední školy, jimž má nahradit zápisky, které si studenti obvykle při samostatném studiu dělají a jichž pak dále používají pro rychlé oživení vědomostí. Zvolený formát i grafická úprava textu jsou k tomuto účelu vhodné.

Přestože se jedná již o čtvrté vydání, nevyhnula se kniha některým tiskovým chybám a nepřesnostem (zvláště v podmínkách platnosti vztahů), které u publikace tohoto druhu jsou zvláště nepříjemné.

A. Wohlmuthová

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ

A

abecední pořadí
Abelova, abelovský
absolutně konvergentní
absolutní hodnota
abstraktní
aditivní
aditivnost
afinita
afinní
algebra
algebraický
algebraicky uzavřený
algoritmus
alternující
amplituda
analogický
analýza
analytický
 analytická funkce
 analytická geometrie
anuloid
anulovat
aplikace
aplikovaná matematika
aproximace
ar
aritmetický
 aritmetická posloupnost
 aritmetický průměr
aritmetika
argument
asi

alphabetical order
Abelian
absolutely convergent
absolute, numerical value
abstract
additive
additivity
affinity
affine
algebra
algebraic
algebraically closed
algorithm
alternating
amplitude
analogous
analysis, calculus
analytic
 analytic function
 analytic geometry
torus
annul, disappear
application
applied mathematics
approximation
are
arithmetic
 arithmetic progression, sequence
 arithmetic mean, average
arithmetic
argument
about, approximately

asociativní
 aspoň
 asymetrický
 asymptota
 automorfismus
 axióm
 axiomatický
 axonometrie

associative
 at least
 asymmetric
 asymptote, asymptotic line
 automorphism
 axiom
 axiomatic
 axonometry

B

báze
 bez
 běžec (na logaritmickém pravítku)
 bilineární funkce
 binární operace
 binomický
 binomický koeficient
 binomický rozvoj
 binomická věta
 blízko
 blížit se
 blokdiagram
 bod
 bod kondenzace
 dělicí bod
 dotykový bod
 hlavní bod
 hromadný bod
 hyperbolický bod
 inflexní bod
 isolovaný bod
 koncový bod
 mřížový bod
 nevlastní bod
 nulový bod
 samodružný bod
 sedlový bod
 singulární bod
 úběžný bod
 bodová množina
 bokorysna
 bokorys
 Booleova algebra
 Briggsův logaritmus
 buď anebo

basis
 without
 slide runner, cursor
 bilinear function
 binary operation
 binomial
 binomial coefficient
 binomial expansion
 binomial theorem
 near
 tend to
 block graph
 point
 condensation point
 point of division
 point of contact, tangency
 centre of vision
 accumulation, limit point
 saddle point
 point of inflexion
 isolated point
 end point
 integral point
 ideal point, point at infinity
 null point, zero
 double point
 saddle point
 singular point, singularity
 ideal point, point at infinity
 point set
 profile plane
 profile (projection)
 Boolean algebra
 Briggs' logarithm
 either or

C

celý
 celé číslo
 cifra
 dvojciferný

whole, entire
 integer, integral number
 digit
 two-digit

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ



ROČNÍK 54
DUBEN 1976

8

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibeika, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Sindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nář. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1976.

OBSAH

T. Rezáčová: Hazardní hry	337
S. Horák: Úloha o elipsách	343
F. Golab, F. Kamenčák: Seebeckův termoelektrický jev	349
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šedivý: Planetka 952 Vladilena	357
J. Gedei: Úlohy VIII. ročníku MFO	359
Dr. J. Mrázek: Hra o životě a smrti II.	372
Dr. J. Mrázek: Matematická miniatura III.	376
Dr. B. Zelinka: O odborném slohu v matematice	377
Dr. J. Mrázek: Kapesní počítače ve škole - ano či ne?	382
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

matematika

Hazardní hry

TAMARA ŘEZÁČOVÁ, stud. gymnázia, Praha 3

Hry, jejichž výsledek pro jednotlivce se nedá předem odhadnout a závisí tedy čistě na náhodě, jsou hry hazardní. Takové jsou například všechny loterie nebo Mates, Sportka, většinou i Sazka. Přesto, či právě proto se těší velké oblibě u široké veřejnosti. Ovšem málokdo z vášnivých sázejících ví, jaké je procento jeho hazardu. Zabývala jsem se touto problematikou v soutěži samostatných prací na gymnáziu, které navštěvuji. Domnívám se, že téma by mohlo zajímat i čtenáře Rozhledů.

Co je to hazard? Hazard budeme chápat jako průměrnou částku, která se hráči z jeho vkladu nevrátí. Můžeme jej vyjádřit v procentech podle jednoduchého vzorce, který si odvodíme. Napřed si musíme zavést potřebné symboly.

Cenu jednoho losu nebo tiketu označme a . Všechny uvažované hry mají různé výhry v několika pořadích. Označme si velikost vyplacené výhry v i -tém pořadí jako x_i a počet těchto výher n_i . Nechť los (tiket) má pravděpodobnost p_i , že získá právě výhru x_i v i -tém pořadí.

Jak se vypočítají jednotlivé pravděpodobnosti? Pravděpodobnost nějakého jevu je rovna poměru všech případů příznivých tomuto jevu ke všem možným případům v daném pravděpodobnostním pokusu. Když si uvědomíme tuto jednoduchou definici, snadno již jednotlivé pravděpodobnosti p_i vypočítáme. V loterii označme počet všech vydaných losů písmenem N . Pravděpodobnost, že jeden los získá i -tou výhru, je tedy rovna

$$p_i = \frac{n_i}{N} \text{ při } i = 1, 2, \dots$$

U Matesa a Sportky, kde celková vyplacená částka nezáleží na počtu výher, vyjádříme pravděpodobnost p_i vzorcem

$$p_i = \frac{\binom{M}{M+1-i} \binom{T-M}{i-1}}{\binom{T}{M}} \text{ při } i = 1, 2, \dots$$

V tomto výrazu je T počet všech čísel na tiketu, M je počet tažených čísel; proměnná i označuje pořadí a nabývá tolika hodnot, kolik je vyhrávajících pořadí.

Na mnoho losů (tiketů) se nic nevyhraje; přesněji řečeno: vyhraje se 0 Kčs. Přisudme takové výhře nulté pořadí, pak $x_0 = 0$. číslo n_0 zjistíme a p_0 vypočítáme. Pravděpodobnost p_0 nultého pořadí určíme v obou případech (u loterií stejně jako u Matesa a Sportky) ze vzorce:

$$p_0 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n)$$

A tím jsme se dostali k výrazu, který pro výpočet procenta hazardu potřebujeme, totiž ke střední výhře, kterou označíme m . Průměrná výhra na jeden tiket není nic jiného než střední hodnota definovaná rovností

$$m = p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n.$$

Nyní obraťme pozornost na určení koeficientu hazardu k , který bude vyjadřován v procentech. Je-li a částka, která se za jeden los (tiket) zaplatí, a vyhraje-li se na tento los (tiket) v průměru m Kčs, pak $(a - m)$ Kčs se v průměru za jeden los (tiket) ztrácí, tuto částku jsme nazvali hazard. Koeficient hazardu tedy definujeme rovností

$$k = \frac{a - m}{a} \cdot 100 \%$$

Uvažme, že mohou nastat tyto tři případy: je-li $k > 0$, pak hazard nesou sázející, při $k < 0$ hazarduje provozovatel příslušné hry. Konečně, je-li $k = 0$, nehraje hazardně nikdo; to, co se do hry vloží, se zase vyplácí formou výher.

A nyní pro ilustraci pár příkladů. Jako první hru prostudujeme Československou státní loterii, ve které je patnáct sérií šestimístných čísel. To znamená, že počet všech losů daných do prodeje je $N = 15 \cdot 10^6$. Další potřebné údaje nám poskytne slosovací listina kteréhokoliv tahu. Pro lepší orientaci je dobré si je spolu s vypočítanými p_i zaznamenat do tabulky (viz tab. I). Ze vzorce pro střední výhru jsme zjistili, že ačkoliv za jeden los zaplatíme 10 Kčs, průměrná výhra na los je 50 haléřů. Koeficient hazardu se tedy rovná 95 %.

Loterie Českého fondu výtvarných umění vypadá podle slosovací listiny atraktivněji. Způsobují to nejen druhy výher — zájezdy do Francie a umělecké originály, nýbrž i jejich hodnoty (tab. II). Los této loterie stojí pouze 5 Kčs, počet všech losů $N = 5 \cdot 10^6$. Střední výhra mluví také pro loterii ČFVU, kde dosahuje 60 haléřů na los, jehož cena je 5 Kčs. Koeficient hazardu 88 % je však stále dost vysoký.

Jak jsme zjistili v předcházejících případech, v loteriích sázející hraje s vysokým koeficientem hazardu. Jak je tomu u Sportky a Matesa? Tady má sázející větší iniciativu — kombinuje, někdy dokonce volí čísla podle snáře či si pomáhá magickými čísly. Jakou má on šanci na úspěch?

Tabulka I

výhra	0	1	2	3	4	5
n_i	0	1	15	15	15	30
x_i	0	100 000	50 000	20 000	10 000	5 000
p_i	0,977	$6 \cdot 10^{-6}$	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-6}$

výhra	6	7	8	9	10
n_i	300	1 500	6 000	30 000	300 000
x_i	1 000	500	100	50	10
p_i	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$

Tabulka II

výhra	0	9	8	7	6	5
n_i	0	30 000	3 000	250	30	10
x_i	0	50	100	400	2 000	4 000
p_i	0,993	$6 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$

výhra	4	3	2	1
n_i	40	1	1	1
x_i	10 000	100 000	200 000	300 000
p_i	$8 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$

U Sportky (stejně jako u Matesa) je počet i hodnota výher v každém tahu jiná. Z toho důvodu počítejme s aritmetickým průměrem výher prvních tahů v několika týdnech (tabulka III). Průměrnou výhru na tiket v jednom pořadí určíme jako podíl celkové sumy výher vyplacených v tomto pořadí a počtu vyhrávajících sázek v tomto pořadí. Dále

Tabulka III

pořadí	I.	II.	III.	IV.
1. týden n_i x_i	1 200 000	241 6 195	8 314 245	121 857 30
2. týden n_i x_i	1 200 000	161 9 470	6 320 355	101 310 35
3. týden n_i x_i	— —	66 18 415	3 475 485	68 912 45
4. týden n_i x_i	— —	59 26 260	3 769 600	77 368 50
celkem vyhrávajících tiketů	2	527	21 878	368 447
celkem vyplaceno	400 000	5 782 395	9 754 295	14 171 10 ³
prům. výhra na 1 tiket	2 000 000	10 972	446	38

Tabulka IV

pořadí	0	I.	II.	III.	IV.
x_i	0	$2 \cdot 10^5$	10 972	446	38
p_i	0,982	$7 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}	0,017

k výpočtu pravděpodobnosti potřebujeme tyto údaje: pořadí jsou čtyři, na sázence je $T = 49$ čísel a vylosuje se vždy $M = 6$ čísel.

Tabulka se změní, protože nepotřebujeme znát počet losů vyhrávajících v jednotlivých pořadích (tab. IV). Střední výhra 1 Kčs 30 haléřů je při ceně tiketu 3 Kčs víc než nadějná. Stejně tak procento hazardu — 56 % — mluví spíše pro Sportku než pro loterie.

U Matesa si zjistíme průměrné výhry na tiket stejným způsobem jako u Sportky (tab. V). Počet čísel na sázence Matesa je $n = 35$, je vždy taženo $M = 5$ čísel a jsou tři nenulová pořadí. Pravděpodobnosti výher nám ukazuje tabulka VI. Střední výhra činí 3 Kčs, což je více

Tabulka V

pořadí	I.	II.	III.
1. týden n_i x_i	5 72 860	359 1 600	7 979 110
2. týden n_i x_i	1 200 000	514 1 985	16 804 130
3. týden n_i x_i	— —	465 2 420	19 113 130
4. týden n_i x_i	5 135 450	609 1750	16 416 100
5. týden n_i x_i	— —	371 2 820	15 292 160
celkem vyhrávajících tiketů	11	2 318	75 603
celkem vyplaceno	1 241 550	4 831 960	9 635 220
prům. výhra na 1 tiket	112 868	2 084	127

Tabulka VI

pořadí	0	I.	II.	III.
x_i	0	112 868	2 084	127
p_i	0,986	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-4}$	0,013

než polovina vkladu (tiket Matesa stojí 5 Kčs). Mates je tedy pro sázejícího výhodnější svými 39 % koeficientu hazardu.

Jedinou loterií, v níž nenese riziko ztráty sázející, jsou Výherní knižní poukázky. Každý los (i ten, který nevyhrál), je pro slosování směnitelný za knížku — kromě poukázek, které získaly 1. až 6. cenu. Za nultou výhru považujeme tedy 10 Kčs (cenu losu) a k 7. až 9. ceně těchto 10 Kčs přičteme, neboť celá výhra je směnitelná za knihy. (1. až 6. cenu tvoří automobily, barevný televizor, turistické zájezdy atp. — pro výpočet je převádím na peníze.)

Tabulka VII

pořadí	0	1	2	3	4
n_i	1 479 884	1	1	1	3
x_i	10	79 000	75 600	66 300	12 000
p_i	0,97	$7 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-6}$

pořadí	5	6	7	8	9
n_i	5	5	600	1 500	18 000
x_i	8 000	5 000	110	60	20
p_i	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	0,012

Tabulka VIII

hra	a	m	k
Čs. st. loterie	10 Kčs	0,50 Kčs	95 %
loterie ČFVU	5 Kčs	0,60 Kčs	88 %
Sportka	3 Kčs	1,30 Kčs	56 %
Mates	5 Kčs	3,— Kčs	39 %
knižní poukázky	10 Kčs	10,40 Kčs	—4 %

Emise všech losů je $N = 15 \cdot 10^5$. Potřebné údaje si zpracujeme do tabulky (tab. VII). Střední výhra ukazuje, že ačkoliv za los zaplatíme 10 Kčs, vyhraje v průměru 10 Kčs 40 haléřů, tedy hazard jde na vrub podniku, který loterii pořádá. V našem případě je to Knižní velkoobchod. Riziko ztráty nám udávají —4% hazardu. Toto riziko se knižnímu velkoobchodu vyplatí, neboť prodá více knížek — koupí si je mnohdy i lidé, kteří by si jinak knihu nekoupili.

Zabývali jsme se hazardem několika her závisících na náhodě. Jak vypadá srovnání těchto her mezi sebou, ukazuje tabulka VII. Jak je vidět, pro sázejícího je nejvýhodnější loterie knižních poukázek, na nichž opravdu neprodělá. Naproti tomu u ostatních loterií je značné procento hazardu. Avšak i zde může být sázející v Československu klidný. Výtěžek z těchto loterií je buď určen na konkrétní účely veřejně

prospěšné (tak je tomu např. u Matesa, kde je zisk použit na renovaci, údržbu a zpřístupnění hradů, zámků a jiných kulturních památek), nebo jde přímo do státní pokladny — z čehož mají užitek všichni občané našeho státu.

Použitá literatura:

1. V. Dupač — J. Hájek: Pravděpodobnost ve vědě a technice (Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1962)
2. B. Šofr: Populárne o počte pravdepodobnosti (Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava 1967)
3. RNDr. J. Skuhra: Statistika a pravděpodobnost (přednáška na KPÚ, Praha 1974—75)
4. B. Gněděnko: The Theory of Probability (překlad z ruštiny, Nauka, Moskva 1969)
5. Matematika III pro přírodovědnou větev (učebnice, SPN, Praha 1967)

konstruktivní geometrie

Úloha o elipsách

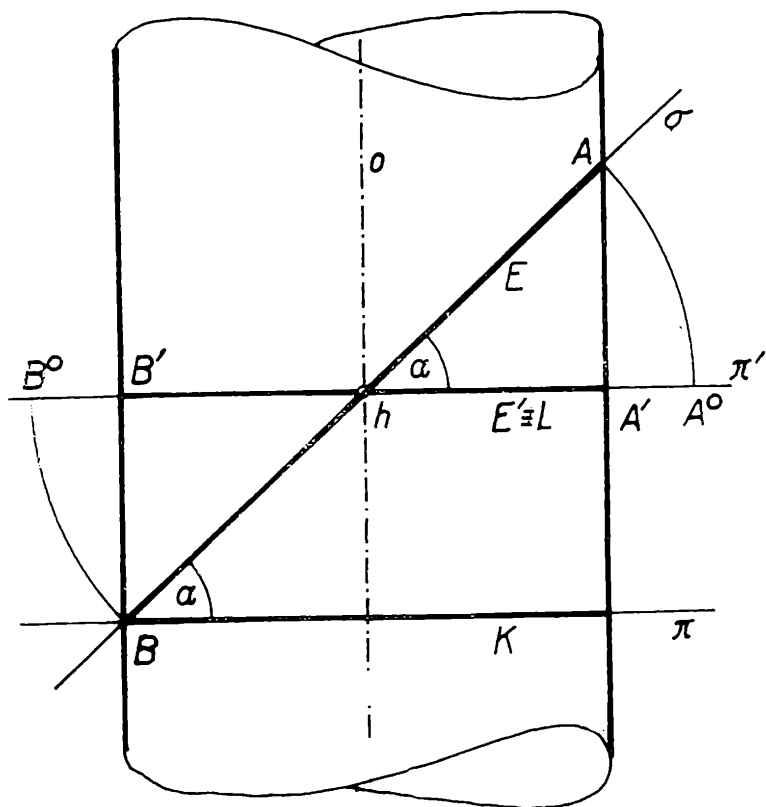
STANISLAV HORÁK, Praha

I. Obrázek 1 připomíná tak trochu skicu pro důkaz věty Quételet-Dandelinovy. My však jej tu máme proto, abychom si připomněli známý fakt, že pravoúhlým průmětem elipsy může být kružnice nebo, což je totéž, k elipse lze vždy afinně přiřadit kružnici. V obr. 1 je znázorněna rotační válcová plocha o ose o , rovina σ , která plochu protíná v elipse E (rovina σ není tedy kolmá k ose) a pak roviny π , π' , které jsou kolmé k ose o a protínají tudíž válcovou plochu po řadě v kružnicích K , L . Odchylka rovin σ , π (rovin σ , π') je α . Pravoúhlým průmětem E' elipsy E do roviny π (π') je kružnice K (L). Jestliže poloměr těchto kružnic označíme r (je to poloměr válcové plochy) a délku hlavní poloosy elipsy označíme a , platí

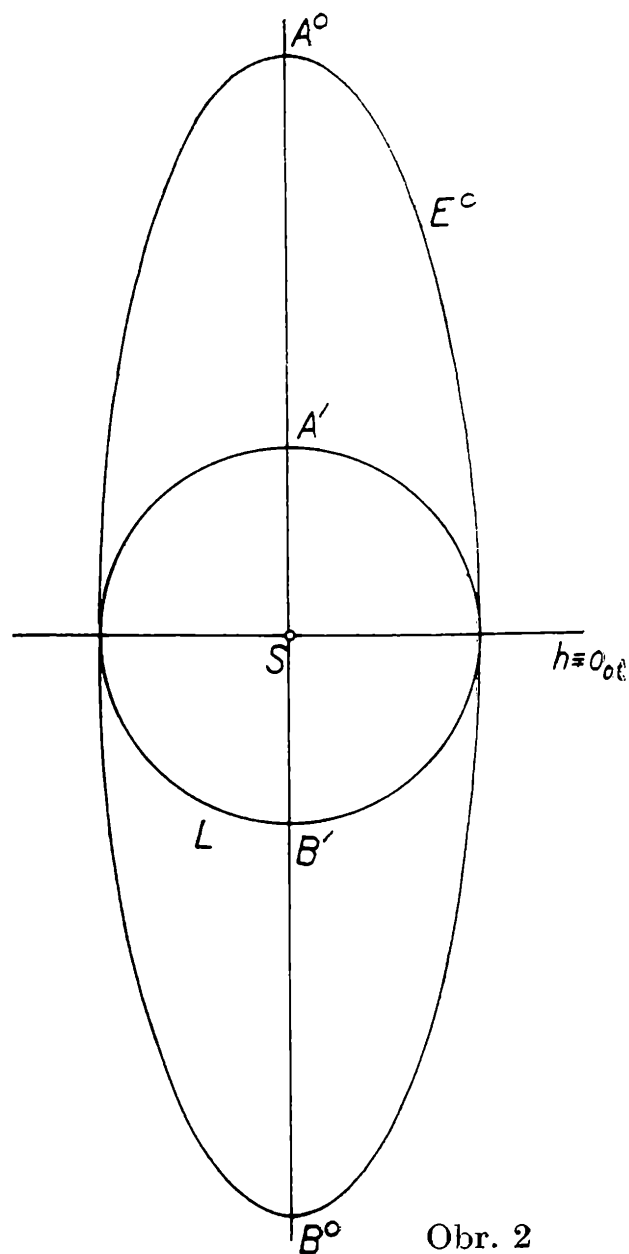
$$r : a = \cos \alpha \quad a = r \cos \alpha \quad (1)$$

Mezi elipsou E a kružnicí L je vztah osové afinity; osou afinity je průsečnice h rovin σ , π' a směr afinity je dán směrem osy válce.

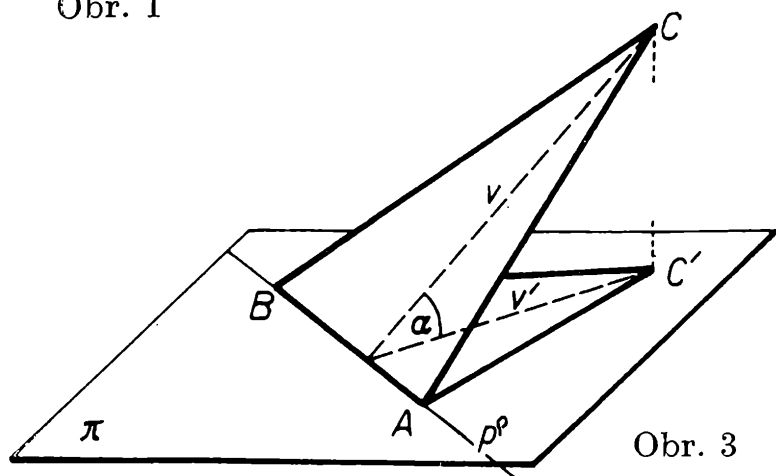
Otočme nyní rovinu σ kolem osy h do roviny π' ; elipsa E tak přejde v elipsu E^0 , hlavní vrcholy A , B elipsy E přejdou v hlavní vrcholy A^0 , B^0 elipsy E^0 . Mezi elipsou E^0 a mezi kružnicí L platí vztah pravoúhlé osové



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

afinity s osou v přímce h . (Obr. 2.). Bodu A^0 (B^0) elipsy E^0 je touto afinitou přiřazen bod A' (B') kružnice L .

II. V názorném obrázku 3 je znázorněna průmětna π a trojúhelník ABC , který leží v rovině ρ , svírající s průmětnou kosý úhel α , kde $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$. Strana AB leží v průmětně, tudíž na stopě p^p , vrchol C je mimo průmětnu. Velikost výšky z vrcholu C je v ; její průmět je výška trojúhelníku ABC' jdoucí vrcholem C' (C' je pravoúhlý průmět vrcholu C do průmětny π .) Její velikost je v' . Poněvadž výška trojúhelníku ABC leží na spádové přímce, platí

$$v' = v \cos \alpha.$$

Počítejme nyní obsah trojúhelníku ABC a obsah jeho pravoúhlého průmětu ABC'

$$P(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot v$$

$$P(ABC') = \frac{1}{2} AB \cdot v' = \frac{1}{2} AB \cdot v \cos \alpha = P(ABC) \cos \alpha.$$

A toto je vzorec, který platí pro obsah pravoúhlého průmětu jakéhokoli trojúhelníku, tedy i trojúhelníku, který nemá se stopou p^e žádný společný bod. (Viz cvičení.) Ale tento vzorec má mnohem širší platnost. Jestliže P je obsah jakéhokoli obrazce v rovině ρ (může být omezen i oblouky různých křivek), P' je obsah jeho pravoúhlého průmětu do roviny π , platí stále

$$P' = P \cos \alpha. \quad (2)$$

Tento článek by se velmi rozrostl, kdybychom chtěli vzorec (2) dokazovat, i když má pro nás velkou důležitost. Ukážeme si však, jak jeho pomocí lze odvodit obsah elipsy.

Obsah té části roviny, která je ohraničena elipsou E , budeme značit $P(E)$ a obsah kruhu ohraničeného kružnicí L budeme značit $P(L)$. Podle vzorce (2) máme

$$P(E) \cdot \cos \alpha = P(L) = \pi r^2.$$

Odtud již plyne (během úpravy použijeme vzorce (1))

$$P(E) = \pi r^2 : \cos \alpha = \pi r (r \cos \alpha) = \pi ab,$$

kde b je délka vedlejší poloosy elipsy a víme o ní, že $b = r$. Výsledek tedy je $P(E) = \pi ab$.

III. To, co jsme si až dosud řekli, nebylo samoúčelné, má to však význam pro řešení následující úlohy:

Jsou dány dvě navzájem shodné a soustředné elipsy E_1, E_2 , jejichž hlavní osy jsou vzájemně kolmé. Jaký je poměr délek jejich poloos, jestliže všech pět oblastí, které tyto elipsy omezují, má stejný obsah?

Řešení (obr. 4). Zavedme soustavu souřadnic tak, aby osa x obsahovala hlavní osu elipsy E_2 a osa y obsahovala hlavní osu elipsy E_1 . Při obvyklém označení délek poloos mají dané elipsy rovnice

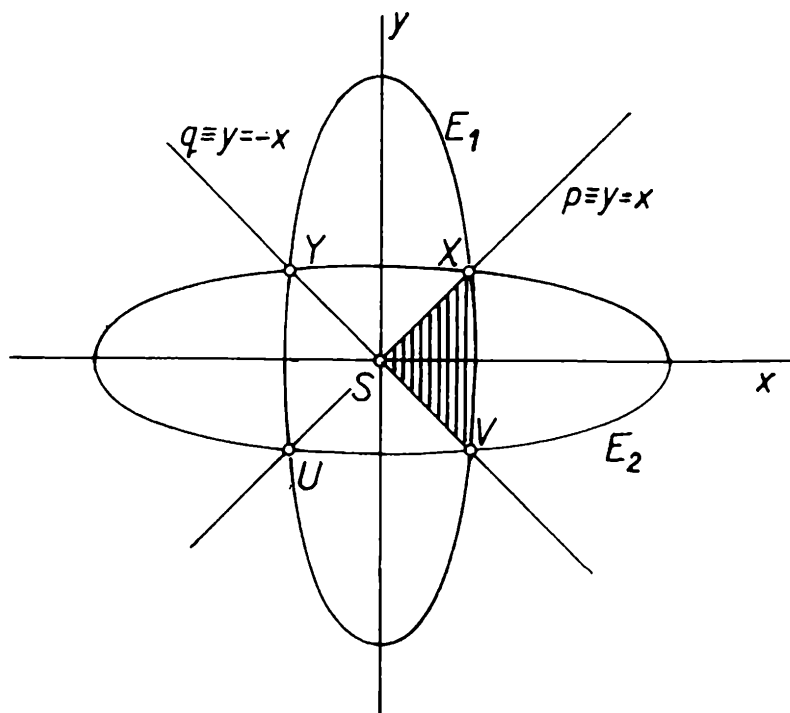
$$E_1 \equiv a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2,$$

$$E_2 \equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

Velmi rychle zjistíme, že společné body obou elips jsou

$$X = \left[\frac{ab}{j}; \frac{ab}{j} \right], Y = \left[\frac{-ab}{j}; \frac{ab}{j} \right],$$

$$U = \left[\frac{-ab}{j}; \frac{-ab}{j} \right], V = \left[\frac{ab}{j}; \frac{-ab}{j} \right],$$

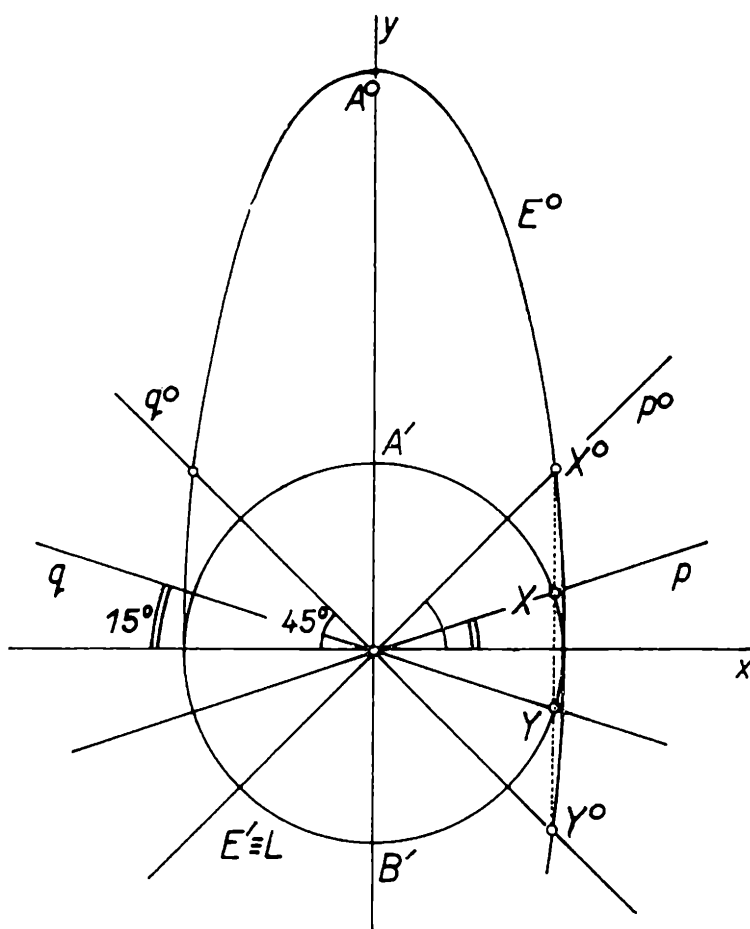


kde $j = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ještě si všimněme pro nás velmi důležité okolnosti, že body X , U a body Y , V leží na osách kvadrantů, vyřazených osami souřadnic. Tudíž $p \equiv XU \perp q \equiv YV$

Oblast $(XYUV)$, která je ohraničena oblouky obou elips, má obsah rovný $\frac{1}{3}$ obsahu $P(E_1)$. Přímky p , q rozdělují tuto oblast na 4 shodné části, a proto vyšrafovaná část v obr. 4 má obsah P , pro nějž platí

$$P = \frac{1}{12} P(E_1) \left[= \frac{1}{12} P(E_2) \right]$$

A nyní si mysleme, že elipsa E_1 je rovinným řezem na rotační válcové ploše poloměru b . To je vždy možné, neboť naši elipsu E_1 můžeme položit nebo „navléci“ na rotační válcovou plochu poloměru b . Elipsa E_1 je pak ve vztahu osově afinity s každou kružnicí této válcové plochy. O tom jsme ostatně mluvili již v odst. I. Jestliže rovinu elipsy E_1 otočíme (i s touto elipsou) kolem přímky h do roviny π' (obr. 1), dostaneme situaci, znázorněnou v obr. 5. (Útvary, které vznikly z útvarů roviny σ otočením do roviny π' , budeme značit X^0 , Y^0 , p^0 , q^0 atd.) Přímky p^0 a q^0 jsou afinně přidruženy přímkám p a q . Poněvadž přímky p^0 a q^0 vytínají z obsahu elipsy $P(E_1)$ jednu dvanáctinu, pak přímky p , q vytínají z obsahu $P(L)$ také dvanáctinu. To vyplývá z výsledku odst. II. Vzhledem k souměrnosti podle osy h musí být odchylka přímek p , h rovna 15° a podobně odchylka přímek q , h je rovna 15° (V obr. 5 je tato odchylka poněkud větší, aby body X , Y nebyly příliš blízko elipsy E^0 .) Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, jak to je učiněno v obr. 5, je rovnice kružnice L a přímek p , q



$$L \equiv x^2 + y^2 = b^2, \quad p \equiv y = x \operatorname{tg} 15^\circ \quad q \equiv y = -x \operatorname{tg} 15^\circ$$

Ještě vypočítáme $\operatorname{tg} 15^\circ$:

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{1 - \cos 30^\circ}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

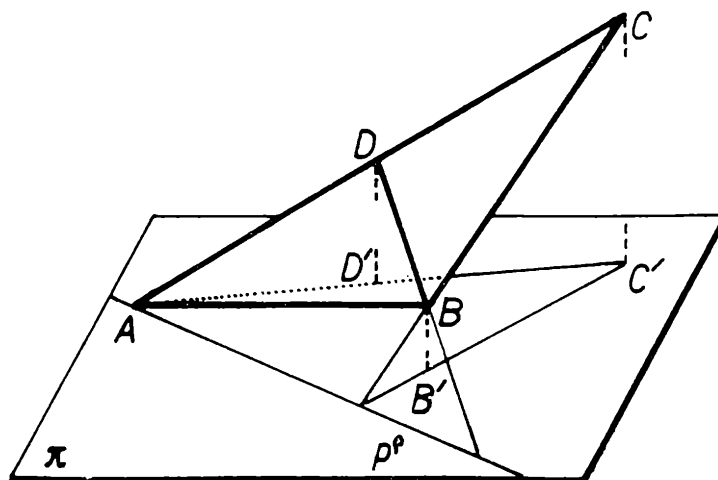
Podle toho rovnice přímek p , q jsou

$$p \equiv y = x(2 - \sqrt{3}), \quad q \equiv y = -x(2 - \sqrt{3})$$

Bod X (průsečík p s kružnicí L) je

$$X = \left[\frac{b}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}; \frac{b}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right]$$

Afinita, o níž jsme mluvili, je pravoúhlá, a proto body X , X^0 si vzájemně odpovídají. Jejich souřadnice x musí se sobě rovnat a tím jsme přivedeni k rovnici



$$\frac{b}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Úpravou tohoto vztahu dojdeme ke vztahu jednoduššímu

$$a^2 + b^2 = 4a^2(2 - \sqrt{3})$$

a odtud dalšími úpravami

$$b : a = 2 - \sqrt{3},$$

čímž jsme dostali odpověď na otázku položenou v textu úlohy.

Poznámka. Podnět k napsání tohoto článku vyšel z jedné úlohy uveřejněné ve švýcarském časopisu „Elemente der Mathematik“ roč. XII (1957), str. 65, úloha 267, jejíž znění je toto:

Jsou dány 2 shodné elipsy, které se kryjí a jejichž poměr délek poloos $b : a \leq 2 - \sqrt{3}$. Jedna z těchto elips se kolem společného středu otočí tak, že všech 5 oblastí, které jsou ohraničeny těmito elipsami, má stejný obsah. Určete, o jak velký úhel se musí elipsa otočit, aby tato podmínka byla splněna.

Oč se naše úloha liší od původní, pozná čtenář na první pohled. K řešení původní úlohy je ovšem potřebí aparátu trochu náročnějšího a není divu; vždyť tyto úlohy řeší vysokoškolští učitelé z Maďarska, Polska, ze všech zemí Západní Evropy i z USA a Kanady.

Cvičení.

Ukažte, že pravoúhlý průmět trojúhelníku ABC do roviny má obsah $P(AB'C') = P(ABC) \cdot \cos \alpha$. — Odtud již snadno dokážete, že též platí $P(BCE) = P(B'C'E') \cdot \cos \alpha$. (Obr. 6.)

Seebeckův termoelektrický jev

FRANTIŠEK GOLAB, FRANTIŠEK KAMENČÁK, Ped. fak. Ostrava

Když jsme v článku [1] podali výklad vzniku kontaktního napětí, můžeme přistoupit k vysvětlení Seebeckova termoelektrického jevu [2]. Fyzikální výklad tohoto jevu provedeme na základě znalostí o vzniku kontaktního napětí. Úplnou teorii Seebeckova jevu lze podat jen užitím kvantové teorie.

Seebeckův termoelektrický jev lze pozorovat u kovů, jejich slitin i u polovodičů. V tomto článku se omezíme na jeho výklad u kovů a jejich slitin [3, 4].

1. Termoelektrické napětí, termoelektrický článek

Až dosud jsme ve vztazích (1a) nebo (1b) v [1] mlčky předpokládali, že teploty styčných míst kovů jsou stejné. Roku 1821 zjistil *Seebeck*, že při nestejných teplotách styčných míst prochází uzavřeným obvodem malý proud a že tedy v obvodu vzniklo elektromotorické napětí.

K ověření tohoto tvrzení sestavme obvod ze dvou různých kovových vodičů (např. Cu a Fe) ve tvaru tenkého drátu podle obr. 1. V místech 1 a 2 oba vodiče spájíme jiskrou, obloukem apod. Jeden vodič asi uprostřed přerušíme a vzniklými konci připojíme k citlivému galvanometru.

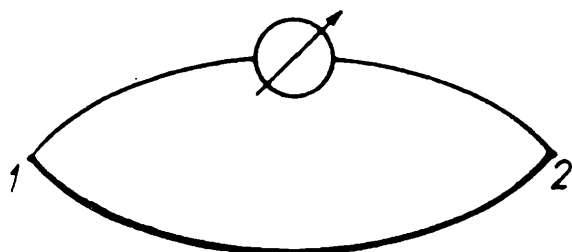
Pokud budou teploty obou spojů 1 a 2 stejné, pak podle [1] neukáže ručka galvanometru žádnou výchylku. Zahřejeme-li jeden spoj (třebas jen tím, že jej uchopíme do prstů), ručka galvanometru se vychýlí, v obvodu se objevil zdroj elektromotorického napětí (EMN) a obvodem prochází proud. Výchylka galvanometru se bude zvětšovat s rostoucím rozdílem teplot $\Delta\Theta$ obou spojů.

Z uvedeného pokusu plyne, že příčinou vzniku EMN je rozdíl teplot obou spájených míst. Proto se vzniklé napětí nazývá termoelektromotorické nebo běžněji jen termoelektrické. Uvedené spojení dvou různých kovových vodičů se nazývá termoelektrický článek, v technické praxi běžně označován jako termočlánek.

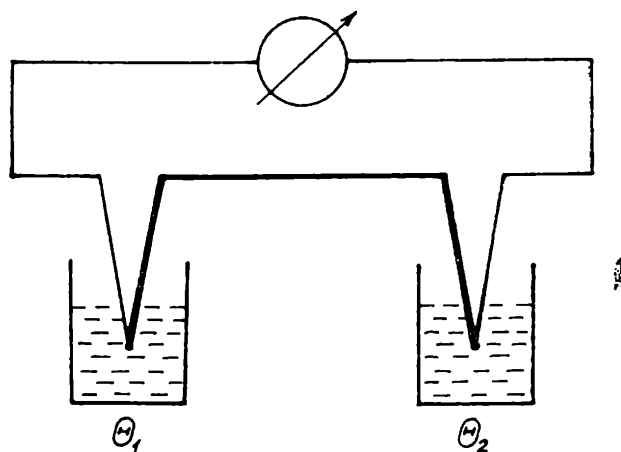
Na základě svých pokusů sestavil Seebeck čisté kovy v tzv. termoelektrickou řadu, která je tvořena kovy v tomto pořadí:

Sb, Fe, Zn, Ag, Au, Sn, Pb, Hg, Cu, Pt, Bi .

Podle něho termočlánkem vytvořeným kterýmikoliv dvěma z uvedených kovů prochází ve spoji s vyšší teplotou proud směrem od následujícího kovu řady ke kovu předcházejícímu.



Obr. 1



Obr. 2

Z rozboru uvedené termoelektrické řady kovů dále plyne, že termoelektrické napětí mezi dvěma různými kovy se zvětšuje s rostoucí vzdáleností kovů v Seebeckově řadě. Skutečně, největší napětí ($100 \mu\text{V } ^\circ\text{C}^{-1}$)¹⁾ přísluší dvojici kovů Bi - Sb.

V Seebeckově řadě jsou uvedeny jen čisté kovy. Ke zhotovení termoelementů můžeme však použít i různých kovových slitin (konstantan, niklchrom, chromel, alumel, platinarhodium aj.).²⁾ Seebeckův jev lze pozorovat i mezi různými polovodiči, kde termoelektrické napětí dosahuje hodnot několikrát vyšších než u kovů.

Matematicky lze velikost termoelektrického napětí E v obvodu tvořeném dvěma různými vodiči, mezi jejichž spoji 1 a 2 je teplotní rozdíl $\Delta\Theta$, vyjádřit vztahem

$$E = \alpha \Delta\Theta \quad (1)$$

kde α [$\mu\text{V } ^\circ\text{C}^{-1}$] je součinitel termoelektrického napětí, udávající napětí příslušné teplotnímu rozdílu jednoho stupně:

$$\alpha = \frac{E}{\Delta\Theta}$$

Hodnota α je však poněkud závislá na teplotě (tabulka I).

2. Vznik termoelektrického napětí

Vznik termoelektrického napětí vysvětlíme na základě toho, co již víme o vzniku kontaktního napětí ([1], odst. 2).

¹⁾ Pro teplotní rozdíl používáme označení $^\circ\text{C}$ místo dříve obvyklého označení deg; tedy $\mu\text{V } ^\circ\text{C}^{-1}$ místo $\mu\text{V deg}^{-1}$.

²⁾ Podle ČSN 35 6710 je přibližné složení jednotlivých slitin pro termoelementy následující [5]:

konstantan — 45% Ni, 55% Cu, niklchrom — 85% Ni, 10% Cr, zbytek jsou desoxid. a jiné přísady, chromel — 10% Cr, 87% Ni, alumel — 94,5% Ni, platinarhodium — 90% Pt, 10% Rh fyzikálně čisté.

I. Hodnota součinitele termoelektrického napětí α jednotlivých termočlánků v různých teplotních intervalech (podle [5]).

Termočlánek	Cu Ko	Fe Ko	NiCr Ni	Ch A	PtRh Pt
Teplota od — do [°C]	α [$\mu\text{V} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$]	α [$\mu\text{V} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$]	α [$\mu\text{V} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$]	α [$\mu\text{V} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$]	α [$\mu\text{V} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$]
— 200 — — 100	23	36			
— 100 — 0	34	46		40	
0 — 100	43	54	40	42	6
100 — 200	50	56	41	40	8
200 — 300	57	56	41	41	9
300 — 400	61	56	41	42	9
400 — 500	64	57	42	43	10
500 — 600	96	58	43	43	10
600 — 700		61	42	42	10
700 — 800		65	41	42	11
800 — 900		69	41	41	11
1100 — 1200			38	37	12
1500 — 1600					12

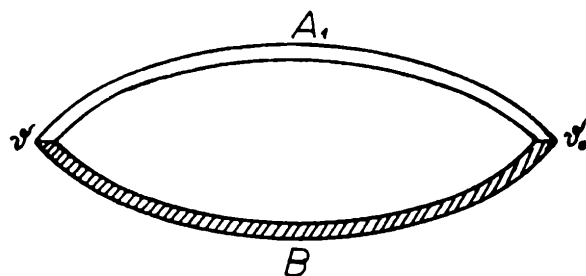
Za výchozí bod vezmeme vztahy (3) a (4) uvedeného pojednání, v nichž jsou vyjádřeny dvě příčiny ovlivňující velikost kontaktního napětí: rozdílnost výstupních napětí U_A a U_B a rozdílnost koncentrací n_{0A} a n_{0B} volných elektronů v kovech A a B. Spojením obou uvedených vztahů obdržíme pro kontaktní napětí U_{AB} výraz

$$U_{AB} = U_B - U_A + \frac{k\Theta}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}},$$

kde k je Boltzmannova konstanta, Θ absolutní teplota a e náboj elektronu.

Budeme-li koncentrace n_{0A} a n_{0B} volných elektronů v obou kovech A, B pokládat za nezávislé na teplotě a v obvodu sestaveném ze dvou různých kovů udržovat spájená místa na různých teplotách $\Theta_1 > \Theta_2$ (obr. 2), je celkové elektromotorické napětí v obvodu vyjádřeno rovnicí

$$E = U_{AB} + U_{BA} = U_B - U_A + \frac{k\Theta_1}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}} + \\ + U_A - U_B + \frac{k\Theta_2}{e} \ln \frac{n_{0B}}{n_{0A}}$$



Po úpravě vychází pro EMN vztah

$$E = \frac{k}{e} (\Theta_1 - \Theta_2) \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}} \quad (2)$$

Je tedy zřejmé, že EMN je úměrné teplotnímu rozdílu $\Delta\Theta = \Theta_1 - \Theta_2$.³⁾ Ze zkušeností však víme, že pro EMN různých dvojic kovů není tato úměrnost splněna zcela přesně a součinitel termoelektrického napětí α v rovnici (1) je, jak již bylo uvedeno, teplotně závislý. To souvisí s tím, že koncentrace volných elektronů je proti námi učiněnému předpokladu na teplotě poněkud závislá.

Srovnáme-li výrazy (1) a (2), dostaneme pro α vztah

$$\alpha = \frac{k}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}}, \quad (3)$$

z něhož je závislost součinitele α na koncentracích volných elektronů zřejmá.

3. Výpočet termoelektrického napětí

Výpočet termoelektrického napětí E termočlánku podle (2) a součinitele α podle (3) je ztížen tím, že musíme přesně znát koncentrace volných elektronů n_{0A} a n_{0B} v kovech A, B pro příslušné teploty. Určení těchto koncentrací je však značně obtížné. Byl však odvozen empirický vzorec, jenž dostatečnou přesností a ve značném intervalu teplot vyjadřuje termoelektrické napětí termočlánku.

Mějme obvod (obr. 3) tvořený dvěma různými kovy: libovolným kovem A_1 a normálním vztažným kovem B. Za tento normální kov volíme obvykle olovo. Jedno spájené místo udržujeme na stálé (tzv. vztažné) teplotě ϑ_0 (obvykle 0°C), druhé na teplotě $\vartheta \neq \vartheta_0$.

Z měření plyne, že vztah (1) nevyjadřuje z příčin nám již známých zcela přesně termoelektrické napětí termočlánku, ale že se toto napětí dá ve značném teplotním intervalu vyjádřit jako kvadratická funkce teploty empirickým vztahem

$$E_{A_1B} = a(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{1}{2} b(\vartheta - \vartheta_0)^2, \quad (4)$$

³⁾ Protože se jedná o teplotní rozdíly, můžeme dále užívat teplotní stupnice Celsiovy a označení ϑ , $\Delta\vartheta$.

II. Seebeckovy konstanty a , b některých kovů (podle [4]). Označení Ko pro konstantan nemá význam chemické značky, ale je ustálenou a v normě ČSN 35 6710 [5] užívanou značkou. (Viz i tab. III — označování termočlánků.)

Kov	a [$\mu\text{V } ^\circ\text{C}^{-1}$]	b [$\mu\text{V } ^\circ\text{C}^{-2}$]
Sb — antimon	35,6	0,145
Bi — vizmut	−74,4	0,032
Fe — železo	16,7	−0,0297
Cu — měď	2,71	0,0079
Ni — nikl	−19,1	3,02
Pt — platina	3,03	−3,25
Ko — konstantan	−38,1	−0,0888

v němž a , b jsou Seebeckovy konstanty, jež pro některé kovy jsou uvedeny v tabulce II.

Nahradíme-li olovo některým jiným kovem A_2 , určíme elektromotorické napětí pro dvojici kovů A_1A_2 podle Voltova vztahu

$$E_{A_1A_2} = E_{A_1B} + E_{BA_2} = E_{A_1B} - E_{A_2B},$$

který užitím rovnice (4) upravíme na tvar

$$E_{A_1A_2} = (a_1 - a_2)(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{1}{2} (b_1 - b_2)(\vartheta - \vartheta_0)^2, \quad (5)$$

kde a_1 , b_1 jsou Seebeckovy konstanty pro kov A_1 , a_2 , b_2 pro kov A_2 .

Užitím vztahu (5) a tabulky II vychází pro elektromotorické napětí termočlánku Fe — Cu [4]:

$$\begin{aligned} E_{\text{Fe, Cu}} &= (16,7 - 2,71)(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{1}{2} (-0,0297 - 0,0079)(\vartheta - \vartheta_0)^2 = \\ &= 13,99(\vartheta - \vartheta_0) - \frac{1}{2} 0,0376(\vartheta - \vartheta_0)^2 \end{aligned}$$

a pro $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$

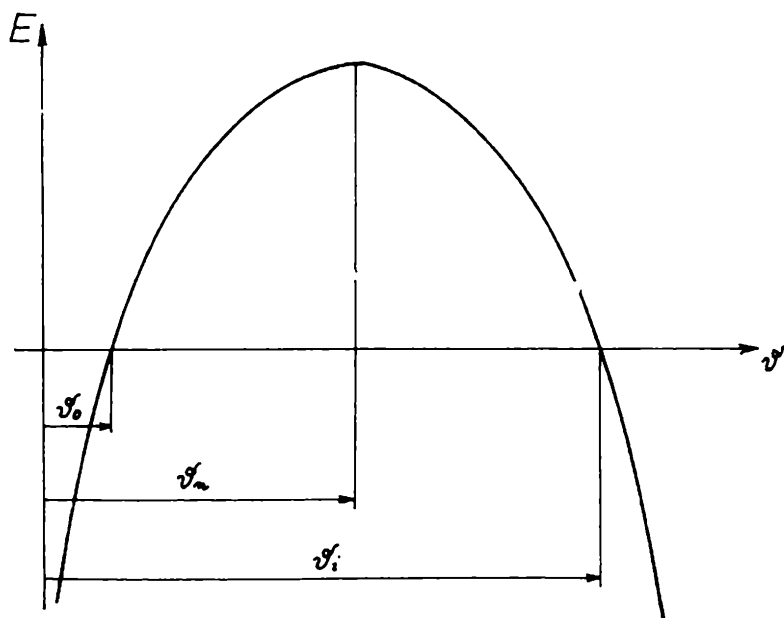
$$E_{\text{Fe, Cu}} = 13,99 \cdot \vartheta - \frac{1}{2} 0,0376 \cdot \vartheta^2$$

Grafem rovnice (4) je parabola (obr. 4). Z něho je zřejmé, že při stálé vtažné teplotě ϑ_0 roste elektromotorické napětí termočlánku s rostoucí teplotou ϑ měřeného místa stále pomaleji, až při určité teplotě ϑ_n , zvané neutrální, dosáhne maximální hodnoty.⁴⁾ Elektromotorické napětí odpovídající neutrální teplotě určíme z podmínky pro extrém funkce:

$$\frac{dE}{d\vartheta} = 0.$$

⁴⁾ Pohled na tabulku I to v plném rozsahu nepotvrzuje; skutečně pro některé dvojice kovů je závislost E na teplotě složitější a mívá často průběh zcela opačný.

Obr. 4



Dosazením (5) do této podmínky obdržíme po provedené derivaci rovnici

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)(\vartheta_n - \vartheta_0) = 0,$$

z níž pro neutrální teplotu ϑ_n při $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$ plyne

$$\vartheta_n = -\frac{(a_1 - a_2)}{b_1 - b_2} \quad (6)$$

Této neutrální teplotě při sluší maximální elektromotorické napětí

$$E_{\max} = -\frac{(a_1 - a_2)^2}{2(b_1 - b_2)} \quad (7)$$

které obdržíme dosazením vztahu (6) do rovnice (5).

Z grafu je dále zřejmé, že elektromotorické napětí termočládku nabývá nulové hodnoty pro teplotu $\vartheta = \vartheta_0$ a pro nějakou jinou teplotu $\vartheta = \vartheta_i$, tzv. teplotu inverzní. Při jejich překročení ($\vartheta < \vartheta_0$ a $\vartheta > \vartheta_i$) změní proud svůj směr v opačný v důsledku změny polaritý větví termočládku.

Položíme-li v rovnici (5) $E_{A_1A_2}$ rovno nule, dostaneme pro inverzní teplotu ϑ_i při $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$ vztah

$$\vartheta_i = -\frac{2(a_1 - a_2)}{b_1 - b_2} \quad (8)$$

Srovnáním (6) a (8) zjistíme, že inverzní teplota je při $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$ rovna dvojnásobku teploty neutrální. Jinak lze též říci, že rozdíl teplot

III. Přehled nejužívanějších termočlánků s teplotním rozsahem použití a barevným rozlišením průmyslově vyráběných [5].

Název	Označení	Rozliš. barva	Rozsah použití
měď — konstantan	Cu — Ko	hnědá	— 200 °C až 400 °C krátkodobě do 600 °C
železo — konstantan	Fe — Ko	modrá	— 200 °C až 600 °C krátkodobě do 900 °C
niklchrom — nikl	NiCr — Ni	zelená	0 °C až 900 °C
chromel — alumel	Ch — A	žlutá	krátkodobě do 1200 °C
platinarhodium — platina	PtRh — Pt	bílá	0 °C až 1300 °C krátkodobě do 1600 °C

$\vartheta_i - \vartheta_0$, pro který je EMN rovno nule, je dvojnásobkem rozdílu teplot $\vartheta_n - \vartheta_0$, při němž EMN nabývá maximální hodnoty:

$$\vartheta_i - \vartheta_0 = 2(\vartheta_n - \vartheta_0) \quad (9)$$

Jako příklad užití vzorců (6), (7) a (9) určíme neutrální teplotu, maximální elektromotorické napětí a inverzní teplotu termočlánku Fe — Cu pro $\vartheta_0 = 0\text{ °C}$ [4]:

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= - \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = - \frac{16,7 - 2,71}{-0,0297 - 0,0079} = \\ &= \frac{13,99}{0,0376} = 372\text{ °C} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\max} &= - \frac{a_1 - a_2^2}{2b_1 - b_2} = \frac{-13,99^2}{-2 \cdot 0,0376} = \\ &= \frac{195,7}{0,0752} = 2\,606\text{ }\mu\text{V} \end{aligned}$$

$$\vartheta_i = 2 \quad \vartheta_n = 2 \cdot 372 = 744\text{ °C}$$

4. Závěr

Termoelektrické napětí je pro všechny dvojice kovů velmi malé a rovněž velmi malá je i účinnost termočlánků (v průměru kolem 3 %).

Proto se termočlánků jako zdrojů napětí (až na malé výjimky) nepoužívá. K velkému rozšíření jejich používání však došlo v oblasti měřicí techniky, a to především při měření teplot. Termočlánky se vyznačují malou teplotní setrvačností (změnu teploty sledují prakticky okamžitě), malou tepelnou kapacitou, značným měřicím rozsahem (viz tabulka III) a možností číst teploty ve značných vzdálenostech od měřeného zdroje, což má význam při zavádění automatizace.

Obrat ve využívání termočlánků přineslo studium Seebeckova a Peltierova jevu v polovodičích. V posledních letech byly vyrobeny chladičí termočlánekové baterie, používané k termoelektrickému ochlazování. Zvláštní pozornost se v současné době soustřeďuje na polovodičové termoelektrické generátory, tj. generátory elektromotorického napětí pro přímou přeměnu energie tepelné v elektrickou, které neobsahují žádné točivé ani jinak pohyblivé části.

A tak jeden a půl století starý objev může teprve ve společnosti, která prožívá při budování socialismu období vědeckotechnické revoluce, přinést lidstvu plný prospěch.

Literatura :

- [1] Golab, F., Kontaktní napětí a jeho vznik, zadáno do Rozhledů mat.-fyz.
- [2] Golab, F. — Kamenčák, F., Termoelektrické jevy, Rozhledy mat.-fyz., 46, 1967—68, 10, 473—478
- [3] Friš, S. E. — Timoreva, A. V., Kurs fyziky II. NČSAV Praha 1953
- [4] Fuka, J. — Havelka, B., Elektřina a magnetismus, SPN Praha 1965
- [5] Československá státní norma ČSN 35 6710, Termoelektrické články, Úřad pro normalisaci, Praha 1955
- [6] Cejchovní řady termoelektrických článků, Závody průmyslové automatizace, 1963

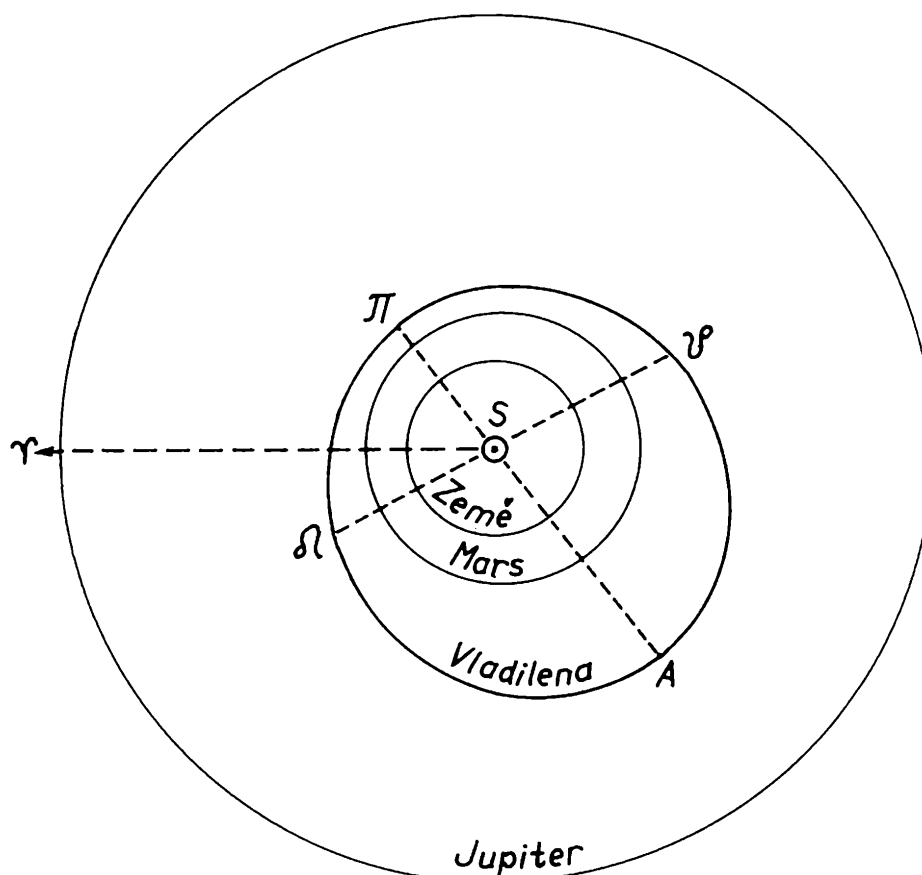
Planetka 852 Vladilena

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Čtenáře našeho časopisu jsme již informovali o dvou zajímavých planetkách sluneční soustavy. Byla to jednak první objevená planetka Ceres a planetka čís. 1566, nazvaná Ikar. Třetí planetkou, kterou si nyní připomeneme, je planetka číslo 852, nazvaná na počest *Vladimíra Iljiče Lenina* — Vladilena.

V roce 1976 uplynulo 60 roků od okamžiku, kdy tuto planetku fotograficky objevil ruský astronom *Sergej Ivanovič Beljavskij* (1883—1953) na Simeizské hvězdárně na Krymu. (Beljavskij byl odborníkem v astro-nomické fotometrii a fotografii, objevil více než 250 proměnných hvězd, 37 planetek a jednu kometu.) První snímek nově objeveného tělesa zhotovil 2. dubna 1916, další snímky pak získal ve dnech 4. dubna, 4. května a 26. května 1916. Na základě změřených poloh planetky vzhledem k hvězdám bylo možné přistoupit k výpočtu předběžné dráhy. V roce 1918 byla planetka označena pořadovým číslem 852 a na návrh objevitele dostala v r. 1924 nynější jméno. Podle údajů *I. I. Putilina* [1] z roku 1953 je velká poloosa dráhy Vladileny $a = 2,362$ astronomických jednotek (UA), sklon dráhy k rovině ekliptiky $i = 23,0^\circ$ a zdánlivá hvězdná velikost ve střední opozici $12,7^m$. Výzkumem planetky se kromě sovětských astronomů zabývali Japonec *Takeonuti* a Američan *Herget*, kteří znovu počítali elementy dráhy tělesa (obr. 1). Podle současných údajů, které uveřejnila *N. S. Jachontova* [2], je velká poloosa dráhy $a = 2,36$ UA, excentricita dráhy $e = 0,274$, sklon roviny dráhy $i = 23^\circ$, oběžná doba planetky kolem Slunce $P = 3,63$ roků a zdánlivá hvězdná velikost $11,3^m$. Průměr planetky byl určen na 30 km. Vzhledem k hodnotě hvězdné velikosti je možno planetku jen fotografovat astronomickými dalekohledy. Nejmenší vzdálenost planetky Vladileny od Země může být 292 miliónů kilometrů.

Je poměrně málo známo, že otec Vladimíra Iljiče Lenina, *Ilja Nikolajevič Uljanov*, se pod vlivem známého ruského astronoma *Mariana Albertoviče Kovalského* zabýval astronomií. V roce 1855 dokončil I. N. Uljanov studia na matematické fakultě kazaňské univerzity a předložil kandidátskou disertační práci pod názvem „Olbersova metoda a její použití k výpočtu dráhy komety Klinkerfuesovy 1853“. Kometu objevil německý astronom *Klinkerfues* v roce 1853 a pozorování, která byla vykonána na hvězdárně v Hamburku, použil I. N. Uljanov k výpočtu



Obr. 1. Dráha planetky č. 852 (Vladilena) ve sluneční soustavě

dráhy nově objevené komety. Práci v rozsahu 74 stran předložil radě univerzity 10. května 1854. Vědecká práce I. N. Uljanova byla univerzitní radou ohodnocena jako výborná a jejímu autorovi byla udělena vědecká hodnost kandidáta matematických věd. Zbývá dodat, že v té době bylo umožněno jen vynikajícím absolventům obhájit vědeckou práci ihned po skončení studia na univerzitě.

Pro zajímavost poznamenejme, že planetka č. 787 byla nazvána Moskva, č. 786 Bredichina (na počest akademika *Fedora Alexandroviče Bredichina*, 1831—1904). První ženou, která fotograficky objevila planetku, byla *Pelageja Šajnová* (v r. 1928), která rovněž pracovala na Simeizské hvězdárně na Krymu. Planetka obdržela pořadové číslo 1112 a byla nazvána Polonia.

Literatura :

- [1] *Putilin, I. I.* : Malyje planěty. GITTL, Moskva 1953.
- [2] *Jachontova, N. S.* „Zemlja i Vselennaja“ 1972, č. 2, s. 60.

olympiády

Úlohy VIII. ročníka MFO

JÁN GEDEI, Stavebná fakulta SVŠT v Bratislave

Tohtoročná Medzinárodná fyzikálna olympiáda znova jasne ukázala, že len viacročná vytrvalá práca vo fyzike vedie k takým vedomostiam a schopnostiam, ktorými žiak môže obstať aj na medzinárodnej súťaži. Pravda, k vytrvalej práci patrí aj riešenie dostatočného počtu náročnejších fyzikálnych úloh.

Medzinárodná komisia pre MFO vydala na VIII. MFO 7 prvých, 9 druhých, 12 tretích cien a 2 zvláštne ceny. Prvú cenu dostali: S. Koršunov (43 b.) ZSSR, J. Schmidt (40 b.) MLR, R. Oprea (40 b.) RLR, V. Fritsche (40 b.) NDR, M. Wagner (40 b.) NDR, M. Lýčka (39 b.) ČSSR a J. Bergmann (39 b.) NDR.

O náročnosti jednotlivých súťažných úloh hovoria nasledovné údaje podľa výkonu súťažiacich žiakov:

1. úloha — mechanika, z maximálneho počtu 10 bodov dosiahnutý priemer bol 6,3 bodu;
2. úloha — optika, dosiahnutý priemer bol 3,4 bodu;
3. úloha — iónová optika, dosiahnutý priemer bol 6,4 bodu;
4. úloha — experiment, z maximálneho počtu 20 bodov dosiahnutý priemer bol 12,3 bodu.

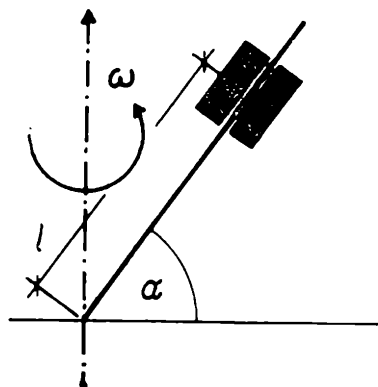
Vidíme, že stupeň obťažnosti 1., 3. a 4. úlohy pre súťažiacich bol rovnaký, kým 2. úloha znamenala pre nich už vyšší stupeň náročnosti. Pri riešení prvých troch fyzikálno-matematických úloh R. Oprea, súťažiaci rumunského družstva, dosiahol z 30 možných bodov 26, čo bol najlepší výkon. Za tento výkon dostal zvláštnu cenu medzinárodnej komisie.

Podľa jednoznačného konštatovania súťažnej komisie optická úloha vyžadovala o niečo lepšiu matematickú pripravenosť ako ostatné úlohy. Zvlášť zaujímavá a hodnotná bola úloha z iónovej optiky.

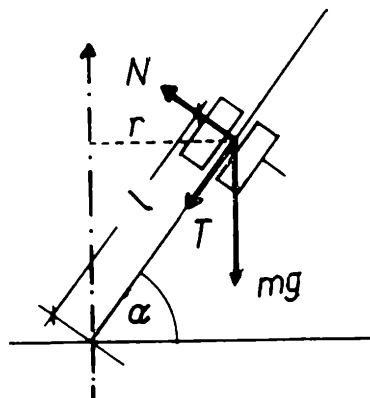
Súťažné úlohy boli nasledovné [1]. Vzorové riešenia úloh ešte neboli uverejnené v NDR, uvádzam ich podľa [2] trochu v zjednodušenej forme.

1. úloha. K zvislej osi A pod uhlom $0,5\pi - \alpha$ je pripevnené bočné rameno (obr. 1). Toto zariadenie sa môže otáčať okolo osi A uhlovou rýchlosťou ω . Na bočnom ramene sa nachádza posúvateľné teleso

Obr. 1



Obr. 2



s tiažou $G = mg$. Pri posunutí telesa vzniká trenie, koeficient trenia je μ ($\mu = \operatorname{tg} \beta$, β je uhol trenia).

a) Pri akej veľkosti uhla α je teleso pri $\omega = 0$ v pokoji, a pri akej veľkosti α je teleso v pohybe?

b) Nech zariadenie sa otáča s konštantnou uhlovou rýchlosťou ω . V ktorých polohách sa nachádza teleso vzhľadom k ramenu v pokoji?

Pri počítaní použite nasledovné vzťahy:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Riešenie. Nech vzdialenosť telesa a dolného konca ramena je l . Potom polomer kruhovej dráhy pri otáčaní okolo osi A je (obr. 2) $r = l \cos \alpha$. Keď sa teleso nachádza na hranici šmyku smerom hore, pohybové rovnice sú

$$\begin{aligned}mr\omega^2 &= N \cdot \sin \alpha + T \cos \alpha, \\ 0 &= mg - N \cos \alpha - T \sin \alpha.\end{aligned}\tag{1}$$

Ak normálovú (tlakovú) silu N a treciu silu T z (1) dosadíme do podmienky šmyku

$$T \leq \mu N\tag{2}$$

dostaneme

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \geq \omega^2 r / g,\tag{3}$$

pričom $\alpha + \beta < \pi/2$. Pre uhol β platí podmienka $\mu = \operatorname{tg} \beta$. Keď je $\alpha + \beta \geq \pi/2$, teleso sa môže šmýkať len smerom dole po ramene.

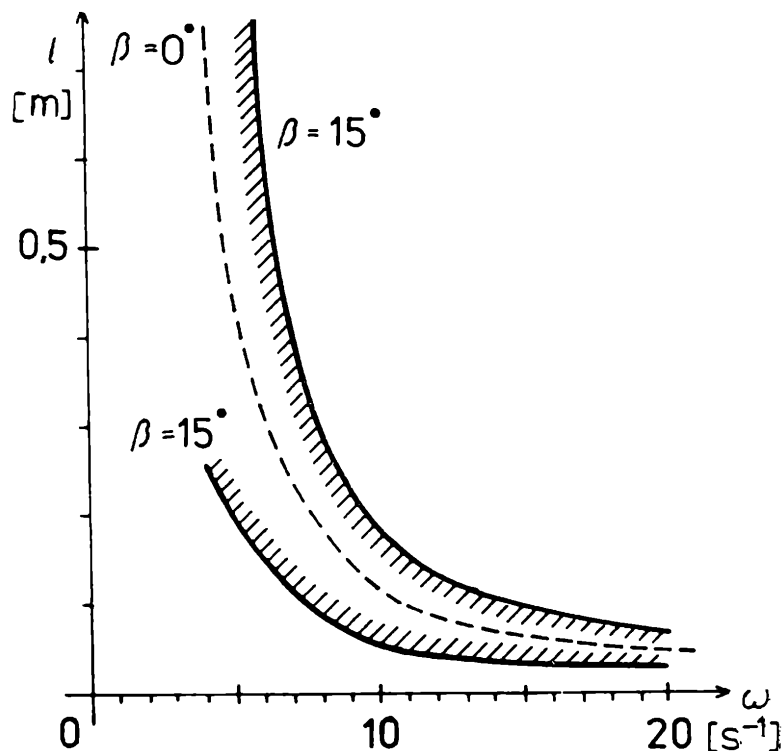
Analogicky môžeme uvažovať pri šmyku telesa smerom dole. Trecia sila T v pohybových rovniciach (1) má vtedy opačný zmysel ako v predošlej úvahe, a tak platí

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \leq \omega^2 r / g,\tag{4}$$

pretože je $\cos(\alpha - \beta) > 0$.

Ak doterajšie výsledky zhrnieme, zo vzťahov (3) a (4) dostaneme podmienku toho, aby sa teleso nachádzalo v pokoji vzhľadom k ramenu:

Obr. 3



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \geq (\omega^2 l \cos \alpha) / g \geq \operatorname{tg}(\alpha - \beta) & \text{ pre } \alpha + \beta < \pi/2, \\ (\omega^2 l \cos \alpha) / g \geq \operatorname{tg}(\alpha - \beta) & \text{ pre } \alpha + \beta \geq \pi/2. \end{aligned} \quad (5)$$

Podmienka (5) obsahuje 4 premenné, jej vyšetrenie všeobecne je zložité.

Ak $\omega = 0$, rameno je v pokoji; vtedy dostaneme triviálne riešenie pre (5)

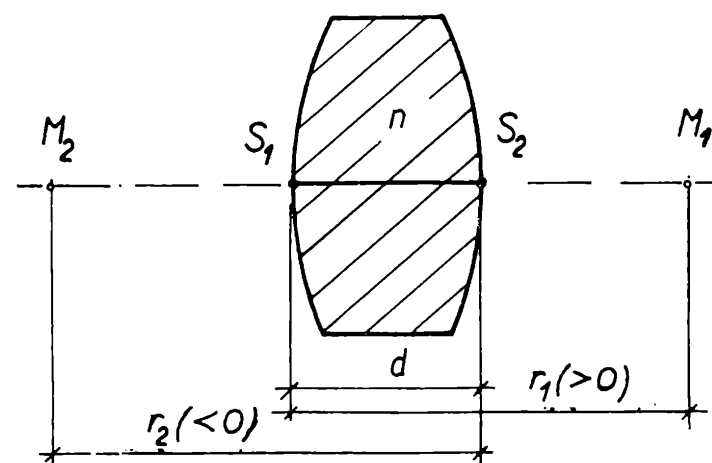
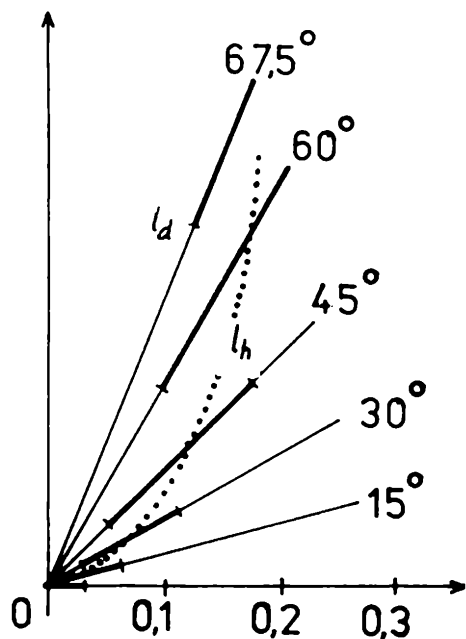
$$\alpha \leq \beta \quad (6)$$

Ak šmyk telesa je bez trenia, $\beta = 0^\circ$; vtedy rovnovážna poloha (5) je daná podmienkou

$$(\omega^2 l \cos \alpha) / g = \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

V inakšom prípade teleso zostane v pokoji na temene v intervale $\langle l_d, l_h \rangle$. Ak je $\alpha \leq \beta$, dolná hranica l_d je na osi A , t.j. $l_d = 0$. Na obraze 3 vzdialenosť l telesa s tiažou G je zobrazená ako funkcia ω pri konštantnom uhle $\alpha = 30^\circ$. Ak $\beta = 0^\circ$, prerušovaná čiara znázorňuje možné rovnovážne polohy. Rastom trenia pásmo pre rovnovážnu polohu sa rozširuje. Na obraze 3 je nakreslený prípad pre $\mu = 0,268$, $\beta = 15^\circ$.

Na obraze 4 sú nakreslené rôzne polohy ramena pri $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, $\beta = 15^\circ$. Hrubšie vytiahnuté časti ramena znázorňujú polohy telesa v pokoji. Dolná hranica $l_d = 0$ pre uhly $0^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$; pre uhly $15^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ je $l_d \in (0, +\infty)$. Horná hranica $l_h = \mu g / \omega^2$ pre $\alpha = 0^\circ$. Pre $\alpha > 0^\circ$ l_h neustále rastie až do nekonečna. Ak $\alpha = 60^\circ$, je $l_h = 0,731 \text{ m}$, ak $\alpha = 67,5^\circ$ $l_h = 1,944 \text{ m}$ (tieto body na obr. 4 už nie sú vyznačené). Pre $\alpha > \alpha_k = 90^\circ - \beta = 75^\circ$ horná hranica l_h je nekonečne veľká, pre



Obr. 5

Obr. 4

všetky $l > l_d$ teleso zostane v pokoji. Bodkovaná čiara na obr. 4 znázorňuje rovnovážne polohy telesa pre $\beta = 0$ (bez trenia).

Čo sa otázky stability telesa týka, situácia je taká, že akonáhle vystúpi z pásma rovnovážnej polohy, buď spadne na dolný koniec alebo „vyletí“ na horný koniec ramena. Bez trenia ($\beta = 0^\circ$) teleso je v labilnej polohe. V prípade zvislého ramena ($\alpha = 90^\circ$) aj pri nenulovom trení ($\beta > 0^\circ$) je rovnovážna poloha telesa po celej dĺžke ramena labilná a teleso spadne na dolný koniec ramena.

2. úloha. Ohnisková vzdialenosť f hrubej šošovky je daná výrazom

$$f = \frac{n \cdot r_1 \cdot r_2}{(n - 1) [n(r_2 - r_1) + d(n - 1)]}, \quad (8)$$

kde n je index lomu, r_1, r_2 sú polomery krivostí, d je hrúbka šošovky (obraz 5.) Šošovka sa nachádza vo vzduchu.

Poznámka. $r_i > 0$ ($r_i < 0$) znamená, že stred krivosti šošovky je vpravo (vľavo) od vrcholu S_i povrchu šošovky, $i = 1; 2$.

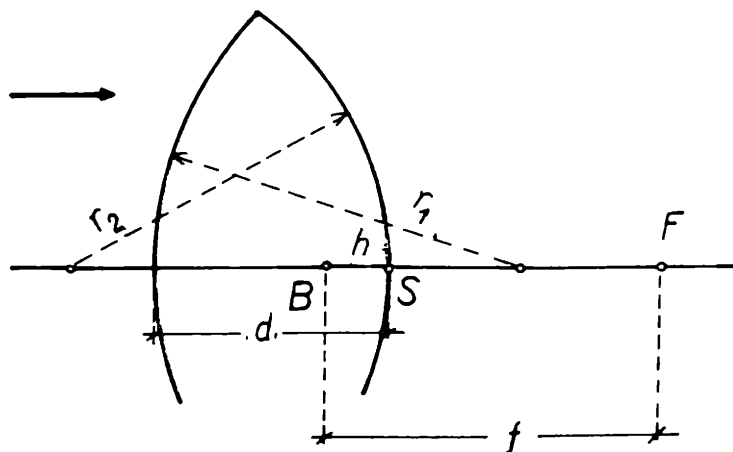
Pre určité praktické použitia žiadame, aby ohniskové vzdialenosti boli nezávislé od vlnových dĺžok svetla.

a) Pre aké rôzne vlnové dĺžky možno dosiahnuť tie isté ohniskové vzdialenosti?

b) Nájdite vzťah medzi r_i, d a indexom lomu, v ktorom požadovaná nezávislosť vlnových dĺžok je splniteľná a diskutujte tento vzťah!

Nakreslite jeden možný tvar šošovky! Udajte polohu stredov krivosti M_1 a M_2 !

c) Ukážte, že pre plankonvexnú šošovku určitú ohniskovú vzdialenosť možno dosiahnuť len pre jednu vlnovú dĺžku!



d) Určte podmienky pre parametre pre ďalšie dva prípady hrubej šošovky, pre ktoré jednu určitú ohniskovú vzdialenosť možno realizovať len jednou vlnovou dĺžkou! Majte pri tom na zreteli fyzikálnu a geometrickú situáciu!

Riešenie. Preberme najprv vlastnosti hrubej šošovky. Parametre šošovky sú: polomery krivostí guľových plôch r_1, r_2 (pre duté plochy sú polomery záporné), hrúbka šošovky d , index lomu n (obraz 6) a ohnisková vzdialenosť f . Pre ohniskovú vzdialenosť $f = BF$ platí

$$1/f = (n - 1) [1/r_1 + 1/r_2 - d(n - 1)/n \cdot 1/r_1 r_2] \quad (9)$$

Vzdialenosť bodu B od bodu S je

$$BS = h = dr_2 / [n(r_1 + r_2) - d(n - 1)] \quad (10)$$

Látka šošovky má disperziu, t.j. že pre rôzne svetelné vlnové dĺžky index lomu šošovky je rôzne číslo: pre vlnovú dĺžku λ_a je index lomu n_a , pre vlnovú dĺžku $\lambda_b \neq \lambda_a$ je index lomu $n_b \neq n_a$.

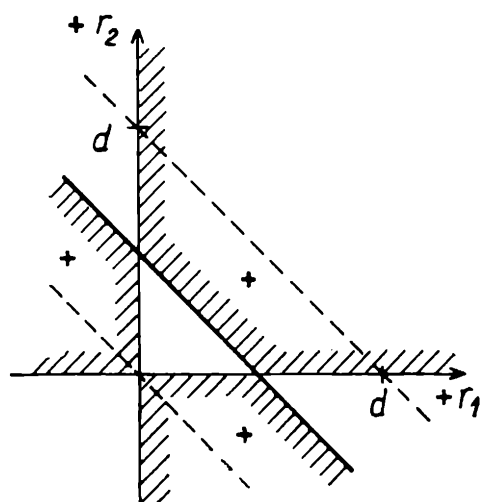
Upravme (9) a usporiadajme ho podľa stupňa n ; dostaneme kvadratickú rovnicu pre n :

$$f(r_1 + r_2 - d)n^2 + [2fd - f(r_1 + r_2) - r_1 r_2]n - fd = 0 \quad (11)$$

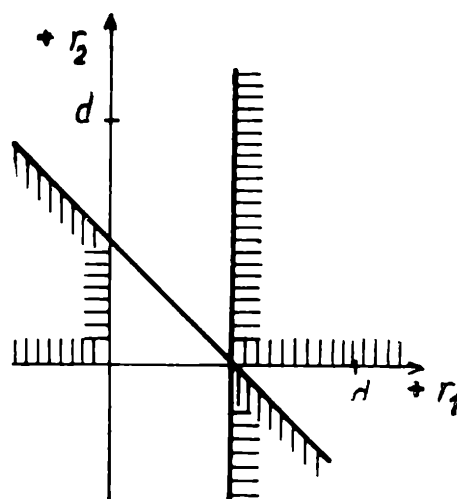
To teda znamená, že vo všeobecnosti k danej ohniskovej vzdialenosti f môžeme dostať dve rôzne hodnoty n .

Zo vzťahu (9) pre f dostaneme výraz (8). Vypočítajme ohniskovú vzdialenosť f_a , resp. f_b pre indexy lomu n_a , resp. n_b a napíšme ich rovnosť. Dostaneme

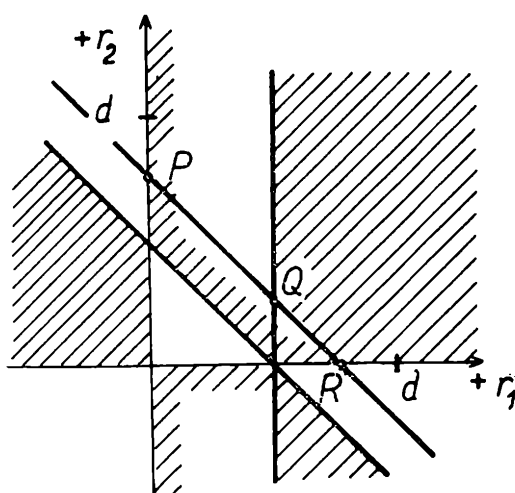
$$\begin{aligned} & \frac{n_a r_1 r_2}{(n_a - 1) [n_a (r_1 + r_2) - d(n_a - 1)]} = \\ & = \frac{n_b r_1 r_2}{(n_b - 1) [n_b (r_1 + r_2) - d(n_b - 1)]} \end{aligned}$$



Obr. 7a



Obr. 7b



Obr. 7c

čo po úprave dáva jednoduchú podmienku pre $f_a = f_b$

$$r_1 + r_2 = d[1 - (1/n_a n_b)] . \quad (12)$$

Diskutujeme vzťah (12). Hneď vidíme, že podmienka (12) pre plosko-vypuklé (plankonvexné) a ploskoduté (plankonkávne) šošovky nemôže byť splnená, pretože ľavá strana (12) je pre ne nekonečne veľká, ale pravá strana je vždy konečné číslo.

Pre indexy lomu n vždy platí $n > 1$, preto na pravej strane (12) v zátvorke je vždy číslo menšie ako jednička. Teda súčet polomerov

$$r_1 + r_2 < d .$$

Z toho vyplýva, že vo všeobecnosti dostaneme veľmi hrubé šošovky. Podľa vzťahu (12) už vieme zostrojiť možný tvar šošovky. Je zaujímavé, že v podmienkach (12) pre $f_a = f_b$ disperzia $n_a - n_b$ sa nevyskytuje.

Aby sme úlohu mohli ďalej diskutovať a mali aj prehľad, nanesme veľkosti polomerov r_1, r_2 na súradnicové osi, na ktorých za jednotkovú úsečku si zvolíme veľkosť d (obraz 7 a), b), c)). Vyšetříme problém vo

všeobecnosti najprv pre jeden index lomu a predpokladajme, že $n = 2$, čo je možné v prípade šošovky zo špeciálneho flintového skla.

Šošovku, ktorá sa chová ako planparalelná doska, dostaneme vtedy, ak $f \rightarrow \infty$. To znamená, že menovateľ výrazu (8) je nula:

$$(n - 1)[n(r_1 + r_2) - d(n - 1)] = 0 \quad (13)$$

Z (13) vyplýva

$$r_1 + r_2 = d[1 - (1/n)] \quad (14)$$

Na obraze 7 a pre $n = 2$ príslušné dvojice hodnôt (r_1, r_2) znázorňuje hrubo vytiahnutá priamka, ktorej rovnica je podľa (14)

$$r_1 + r_2 = d/2 .$$

Nech sa n mení v intervale $\langle 1, +\infty \rangle$. Priamka (14) pre $n = 1$ prechádza počiatkom súradnicovej sústavy a má rovnicu

$$r_1 + r_2 = 0 ,$$

pre $n \rightarrow +\infty$ rovnica má tvar

$$r_1 + r_2 = d$$

Spojnú šošovku dostaneme vtedy, ak $f > 0$. Pretože pre $f > 0$ aj $1/f > 0$, z výrazu (8) vyplýva, že

$$\frac{(n - 1)[n(r_1 + r_2) - d(n - 1)]}{nr_1r_2} > 0 \quad (15)$$

Po úprave (15) dostaneme podmienku pre spojnú šošovku:

$$\frac{r_1 + r_2}{r_1r_2} > \frac{d}{r_1r_2} \cdot (1 - 1/n) \quad (16)$$

Vyšetrimo (16) v jednotlivých kvadrantoch.

V prvom kvadrante zo (16) vyplýva, že spojnú šošovku dostaneme vtedy, ak súradnice bodov (r_1, r_2) vyhovujú podmienke

$$r_1 > 0, r_2 > 0, r_1 + r_2 > d/2 , \quad (17)$$

(vyčiarkovaná časť obrazu 7a)).

Pre $r_1 > 0, r_2 > 0, r_1 + r_2 < d/2$ hrubá šošovka bude rozptylka, napriek tomu, že obidve jej guľové plochy sú vypuklé.

V ďalších kvadrantoch vzhľadom na znamienko polomerov musíme byť opatrní.

V treťom kvadrante je $r_1 < 0, r_2 < 0$, preto podmienka (16) pre spojku nemôže byť splnená.

V druhom a štvrtom kvadrante je $r_1 r_2 < 0$. Vynásobíme nerovnosť (16) záporným číslom $r_1 r_2$; dostaneme

$$r_1 + r_2 < d(1 - 1/n) \quad (18)$$

Z (18) pre spojnú šošovku dostaneme podmienky v druhom a štvrtom kvadrante:

$$r_1 < 0, r_2 > 0, r_1 + r_2 < d/2 \quad (19)$$

$$r_1 > 0, r_2 < 0, r_1 + r_2 < d/2 \quad (20)$$

(na obraze 7a vyčiarknutá časť roviny).

Týmto sme pre spojnú šošovku vyšetrili celú rovinu.

Pre praktické použitie šošovky je prirodzená požiadavka, aby jej ohnisko neležalo v priestore vyplnenom sklom. Táto požiadavka bude splnená podľa (10) a (8) práve vtedy, ak $f \geq h$, t. j. ak

$$\begin{aligned} \frac{nr_1 r_2}{(n-1)[n(r_1 + r_2) - d(n-1)]} &\geq \\ &\geq \frac{dr_2}{n(r_1 + r_2) - d(n-1)} \end{aligned} \quad (21)$$

Ohnisko F padne do bodu S pre $f = h$, z čoho dostaneme podmienku

$$r_1 = d(1 - 1/n) \quad (22)$$

Na obraze 7b) pre $n = 2$ podmienka (22) je znázornená priamkou

$$r_1 = 0,5d$$

Vyšetríme podmienku (21) v jednotlivých kvadrantoch.

V prvom kvadrante je $r_1 > 0$; ohnisko F leží mimo šošovky, ak $r_1 > d(1 - 1/n)$, t. j. ak

$$r_1 > 0, r_2 > 0, r_1 > d(1 - 1/n) \quad (23)$$

(na obraze 7b) vpravo od priamky $r_1 = d(1 - 1/n)$, vyčiarkovaná časť roviny).

V treťom kvadrante podmienka (21) nemôže byť splnená, pretože väčšia strana (21) je záporná, menšia strana (21) je kladná, čo je nemožnosť.

V druhom kvadrante nerovnosť (21) možno krátiť r_2 . Nerovnosť (21) je splnená len vtedy, ak je menovateľ záporný, t. j.

$$n(r_1 + r_2) - d(n-1) < 0$$

Z toho vyplýva podmienka

$$r_1 + r_2 < d(1 - 1/n) \quad (24)$$

Pre vyšetrenie podmienky (21) vo štvrtom kvadrante vytvorme rozdiel $f - h$ použitím vzťahov (8) a (10). Po úprave $f - h$ dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{nr_1r_2 - dr_2(n-1)}{(n-1)[n(r_1+r_2) - d(n-1)]} = \\ & = r_2 \frac{r_1 - d(1-1/n)}{(1-1/n)[n(r_1+r_2) - d(n-1)]} \end{aligned}$$

Vo štvrtom kvadrante je $r_2 < 0$, preto rozdiel $f - h$ daný vzťahom (25) môže byť kladný len vtedy (viď (21), ak je menovateľ (25) záporný:

$$r_1 + r_2 < d(1 - 1/n) \quad (26)$$

Na obraze 7b) vyčiarknuté oblasti znázorňujú množinu bodov (r_1, r_2) , kde ohnisko F leží mimo šošovky.

A teraz zostrojme oblasť bodov (r_1, r_2) , v ktorej $f_a = f_b$ pre indexy lomu $n_a \neq n_b$ (obraz 7c).

Podmienkou (12) je určená priamka, ktorá súradnicové osi or_1, or_2 pretína v úsekoch

$$d(1 - 1/n_a n_b)$$

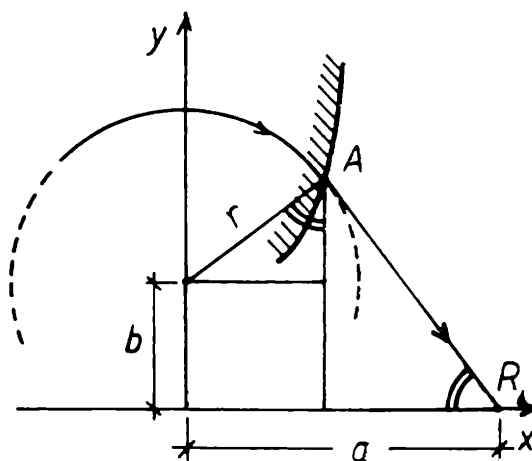
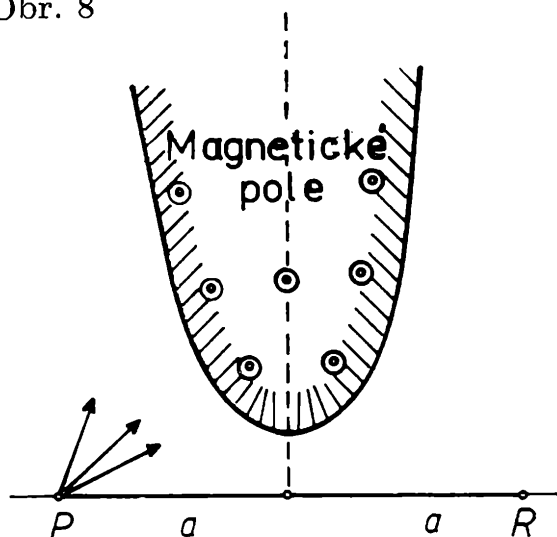
(Zvoľme si napr. $n_a = 2,02$, $n_b = 1,98$; potom $1 - 1/n_a n_b = 0,75$). Na priamke (12) vľavo od bodu P (obraz 7c)) sa nachádzajú také vypukloduté (konvexkonkávne) rozptylky, ktorých ohniská ležia vnútri šošovky. Od bodu P po bod Q nasledujú také dvojvypuklé (bikonvexné) spojky, ktorých ohniská ešte stále ležia vnútri šošovky. Medzi bodmi Q a R ohniská ležia už mimo šošovky, ktoré sú bikonvexné spojky. Vpravo od bodu R ležia vypukloduté rozptylky, ale ich ohniská sú vnútri šošovky.

Akýsi praktický zmysel majú spojky, ležiace medzi bodmi Q a R . Ale v praxi ani tieto spojky nemajú veľkú „cenu“, pretože napriek tomu, že ich ohniská sa zhodujú, $f_a = f_b$, ale tieto vzdialenosti f_a, f_b treba merať od hlavného bodu B , ktorého poloha podľa (10), resp. (8) je závislá na indexe lomu.

3. úloha. Riešte nasledovnú úlohu z iónovej optiky: Z bodu P roviny obrázka vychádza divergujúce žiarenie, nabité jednoduchými kladnými iónmi (náboj $+e$) rovnakej hmotnosti m . Ióny sú urýchlené napätím U . Magnetické pole homogénne indukcie B smeruje odzadu dopredu kolmo na rovinu obrázku. Týmto poľom sú ióny vychýlené.

Ohraničenie magnetického poľa má byť také, aby sa divergentné ióny pretínali ako konvergentné v bode R ($PR = 2a$). Dráhy iónov nech sú symetrické podľa osi PR .

Z možných ohraničení magnetického poľa uvažujte o tom, pre ktoré okolí osi PR pôsobí súvislé magnetické pole a body P, R ležia mimo pôsobnosti magnetického poľa.



a) Určte polomer krivosti r dráh častíc v magnetickom poli ako funkciu napätia U a indukcie B !

b) Určte charakteristické vlastnosti dráh častíc v magnetickom poli horeopísaného zariadenia!

c) Nájdite ohraňenie magnetického pola geometrickou konštrukciou v prípadoch $r < a$, $r = a$, $r > a$!

d) Určte všeobecnú rovnicu pre ohraňenie magnetického pola!

Riešenie. Dráhy iónov ukazuje obraz 8. V homogennom magnetickom poli indukcie B nabitá častica sa pohybuje po kruhovej dráhe. Centripetálna sila mv^2/r je vyvolaná Lorentzovou silou veľkosti QvB , ktorá pôsobí na náboj Q . Teda platí

$$QvB = mv^2/r, \quad (27)$$

odkiaľ polomer krivosti kruhovej dráhy častice e je

$$r = vm/(eB) \quad (28)$$

Zo vzorca (28) vypočítame rýchlosť v častice e :

$$v = reB/m.$$

Veľkosť indukcie B magnetického pola možno vypočítať z Lorentzovej sily F . Platí

$$B = F/(Qv),$$

čo po použití známych vzorcov $U = P/I = Fs/(It)$ prejde na tvar

$$B = U/vs$$

Odtiaľto urýchľujúce napätie je

$$U = Bvs$$

V našom prípade v homogénnom magnetickom poli každý ión sa pohybuje po kruhovej dráhe s rovnakým polomerom r . V prípade kladných iónov magnetické pole má smerovať odzadu dopredu, čo je podľa úlohy splnené. Kým sa ión pohybuje v magnetickom poli, zatiaľ jeho dráha je kružnica s daným polomerom. Akonáhle ión opustí magnetické pole, letí ďalej po dotyčnici kružnice v bode, v ktorom opustí kruhovú dráhu. Pretože ohraničenie magnetického poľa má byť také, aby sa všetky ióny zbíjali v bode R , treba vyriešiť nasledovný matematický problém. Ktorá dotyčnica kružnice smeruje do bodu R ?

Vzhľadom na symetriu stačí vyšetriť problém len v jednej časti obrázku; stredy kruhových dráh nech ležia na y -ovej osi.

Nech ión, letiaci po kruhovej dráhe o polomere r , opustí magnetické pole v bode A , ktorého pravouhlé súradnice sú (x, y) , a letí v smere dotyčnice do bodu R (obrázok 9). Z podobných trojuholníkov na obrázku 9 dostaneme

$$(y - b)/x = (a - x)/y \quad (29)$$

Okrem toho pre kruhovú dráhu platí

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (30)$$

Vylúčením y , resp. $(y - b)$ z rovníc (29) a (30) dostaneme množinu bodov A s požadovanou vlastnosťou. To znamená, že dostaneme funkciu

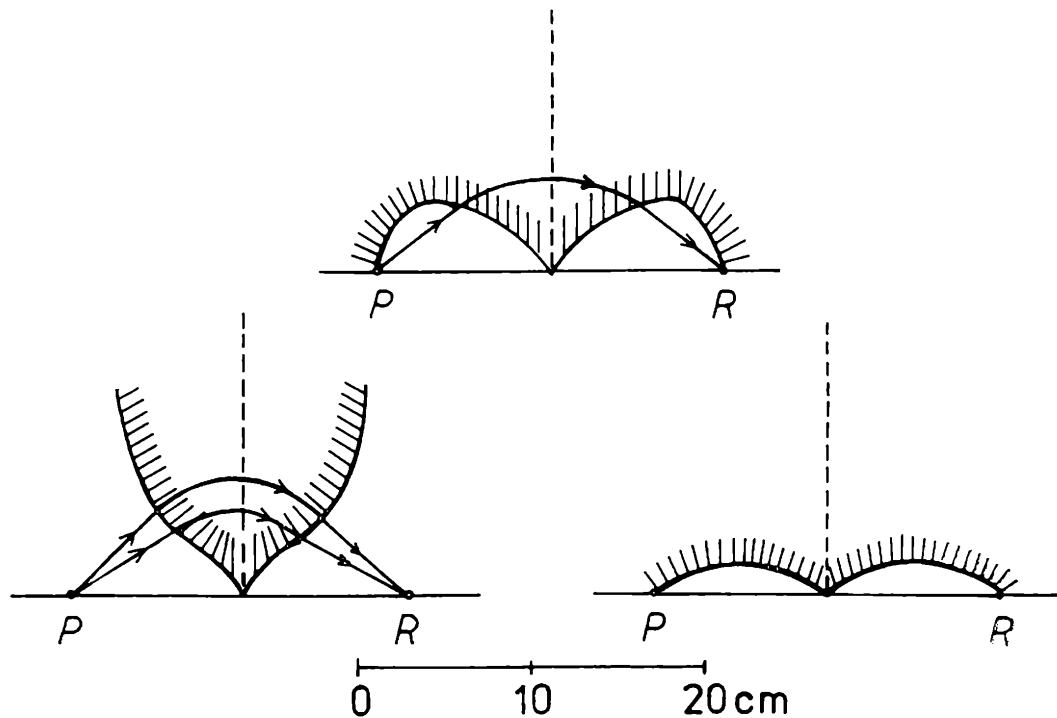
$$y = \frac{x(a - x)}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}, \quad (31)$$

ktorá určuje hranicu magnetického poľa. Funkcia (31) je funkcia štvrtého stupňa. Graf funkcie zostrojíme v prvom kvadrante, potom zostrojíme súmerný obraz tohto grafu podľa osi o_y .

Tri prípady ohraničenia magnetického poľa sú znázornené na obraze 10. Tvar ohraničenia magnetického poľa závisí od vzájomného vzťahu veľkostí úsečiek $a = PR/2$ a polomeru r . Môžu nastať tri prípady: $r < a$, $r = a$, $r > a$. Na obraze 10 zvolili sme si $a = 10$ cm. Polomery sú po rade $r_1 = 7,5$ cm, $r_2 = 10$ cm, a $r_3 = 20$ cm. Predpokladajme, že ide o kyslíkové ióny s veľkosťou hmotnosti $m = 1,67 \cdot 10^{-22}$ kg, s nábojom veľkosti $e = 1,602 \cdot 10^{-16}$ C a magnetickou indukciou poľa veľkosti $B = 0,1$ T. Potom podľa (28) potrebné rýchlosti pohybu iónov $v_1 = 420$ km/s, $v_2 = 960$ km/s a $v_3 = 1920$ km/s vznikajú pod účinkom urýchľujúceho napätia $U_1 = 2700$ V, $U_2 = 4800$ V a $U_3 = 19\,200$ V.

Zásadne v každom prípade na obraze 10 všetky ióny vychádzajúce z bodu P konvergujú do bodu R . Ale v prípade $r < a$ ku konvergencii by bolo potrebné magnetické pole rozprestierajúce sa až do nekonečna. Vetva hraničnej čiary magnetického poľa, ktorá smeruje do nekonečna,

Obr. 10



zrazu padne do bodu R , keď $r = a$. Ak r porastie ďalej ($r > a$), ohraničenie magnetického poľa je stále plochejšie.

Experimentálna úloha. S pomôckami, pripravenými na pracovnom stole: polovodičový prvok H , posunovací odpor rozsahu $110\ \Omega$, pevný odpor rozsahu $300\ \Omega$, zdroj napätia veľkosti $9\ \text{V}$, dva mnohonásobné meracie prístroje, spojovacie káble, bolo treba riešiť nasledovnú úlohu.

a) Opíšte I - U charakteristiku polovodičového prvku H v daných medziach, ak maximálna prípustná strata výkonu H je $250\ \text{mW}$!

Namerané veľkosti si zaznačte v tabuľke a nakreslite charakteristiku polovodiča.

Pred začatím meraní uvažte si, ako sa možno istotne vyhnúť preťaženiu polovodičového prvku a túto úvahu si zafixujte v protokole!

Urobte náčrt zapojenia zvoleného meracieho zariadenia a diskutujte systematickú chybu zapojenia!

b) Vypočítajte veľkosti vnútorných odporov (veľkosť dynamických odporov) polovodičového prvku pre intenzitu prúdu $25\ \text{mA}$!

c) Pomocou zapojenia v náčrte odmerajte závislosť veľkosti koncového napätia U_2 na veľkosti pripojeného napätia U_1 a znázornite ju graficky!

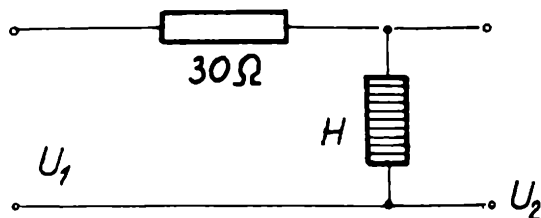
Pripojené napätie má byť menené medzi $0\ \text{V}$ a $9\ \text{V}$. Pri tom polovodičový prvok je tak pripojený, aby U_2 bolo čo najväčšie.

V protokole dajte úplný náčrt zapojenia a komentujte výsledok meraní!

d) Určte, o akú hodnotu sa zmení veľkosť koncového napätia U_2 pri tomto zapojení, ak veľkosť pripojeného napätia U_1 sa zvýši zo $7\ \text{V}$ na $9\ \text{V}$!

Odôvodnite pomer $\Delta U_1 : \Delta U_2$ kvalitatívne!

Obr. 11



e) Do akej skupiny polovodičov patrí v experimente použitý polovodič?

K čomu možno použiť načrtnuté zapojenie prakticky? (obr. 11).

Upozornenie. Meracie prístroje sa môžu použiť na meranie napätia alebo intenzity. Patria do presnostnej triedy 2,5 % a majú nasledovné vlastnosti:

Merací rozsah	Vnútorne napätie	Merací rozsah	Vnútorne napätie
50 μA	2 $\text{k}\Omega$	0,3 V	6 $\text{k}\Omega$
300 μA	1 $\text{k}\Omega$	1 V	20 $\text{k}\Omega$
3 mA	100 Ω	3 V	60 $\text{k}\Omega$
30 mA	10 Ω	10 V	200 $\text{k}\Omega$
300 mA	1 Ω		

Riešenie. Merania boli takej povahy, že bolo treba brať do úvahy spád napätia, resp. intenzitu voltmetra. Z charakteristiky sa zistilo, že polovodičový prvok bol: Zenerova dióda.

Literatúra.

[1] Physik in der Schule, č. 9, 1975, str. 373—379.

[2] Középiskolai Matematikai Lapok fizikai rovattal böbítve, zv. 51, č. 3—4 str. 161—166.

matematické zábavy

Hra o životě a smrti II.

RNDr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc.

Dnes budeme pokračovat v úvahách nad neobyčejně zajímavou hrou, modelující vývoj a zánik živých společenství. Pro ty, kdo nečetli naše úvodní zamyšlení, uvádíme stručně pravidla:

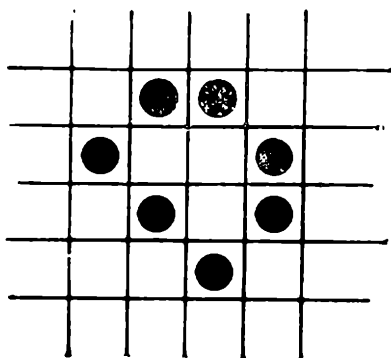
Na čtvercovou síť se položí určitý počet kamenů, vytvářejících základní postavení. Ty kameny, které přímo nebo diagonálně sousedí se dvěma nebo třemi jinými, přežívají do příští generace. Kameny, které nesousedí s ničím nebo jen s jedním kamenem, ale také s více než třemi kameny, umírají. Konečně na všech polích, jež budou sousedit právě se třemi kameny, se „zrodí“ nové kameny. Toto vše se provede současně, čímž vznikne další generace „obyvatel“. Tak se tvoří další a další generace — a před vašimi očima vznikají „města“ a „sídliště“, která rostou a všelijak se přetvářejí a třeba zase zanikají, právě tak jako ve skutečnosti.

Posledně jste dostali úkol, který jste jistě aspoň do takové osmé až desáté generace vyřešili. Přitom jste asi přišli na to, že se při větším počtu kamenů situace stává pro praktickou hru nepřehlednou. Proto dnes začneme návodem, jak to zařídit, abychom na nic nezapomněli.

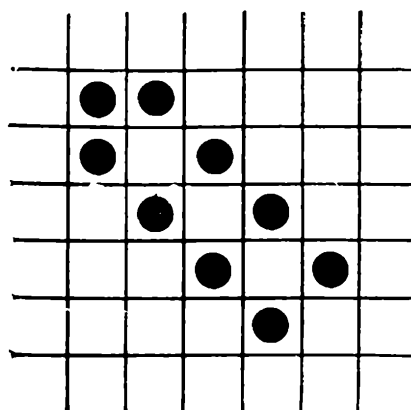
Představte si, že máte před sebou určité postavení. Nejprve nalezněte všechny kameny, které jsou odsouzeny vymřít — tj. kameny, které nesouvisí s ničím, nebo jen s jedním, ale také s více než třemi kameny. Na tyto kameny vložte stejné kameny, avšak jiné barvy, ponechte je však prozatím na šachovnici. Tyto kameny totiž stále ještě hrají, dokud neprovedeme najednou vše, co pravidla hry předepisují. Nejprve si ověřte, zda všechny zbývající kameny skutečně přecházejí do další generace. Nakonec pokládejte nové kameny všude tam, kde budou sousedit právě se třemi kameny, počítajíc v to i kameny odsouzené k smrti. Až to všechno budete mít hotovo, zkontrolujte, zda jste při „rození“ nových kamenů omylem nepoužili už některého jiného kamene příští generace (ty ještě nehrají!), a pak odstraňte všechny kameny, které jste si označili jako jisté adepty smrti. To, co vznikne, bude nejbližší příští generace „obyvatel“. Podobně budete postupovat dále, přičemž nesmíte zapomenout, že hrací šachovnice je ve všech směrech neohraničená.

Po tomto úvodu si rozřešte některá postavení z minulého čísla ještě jednou; seznáte, že takto to jde docela dobře a mnohem rychleji. Již jsme

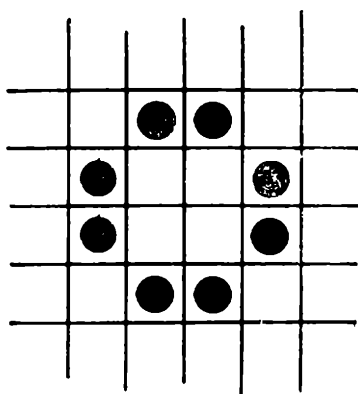
Obr. 1



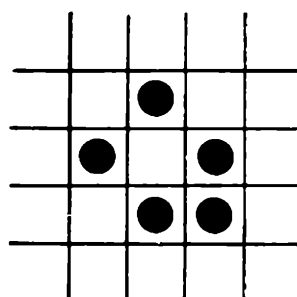
Obr. 4



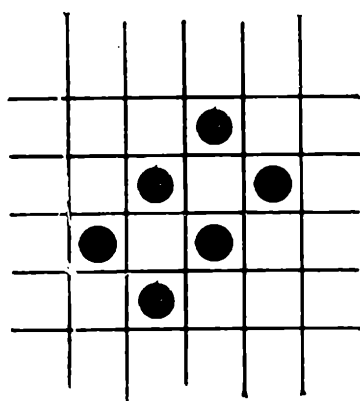
Obr. 2



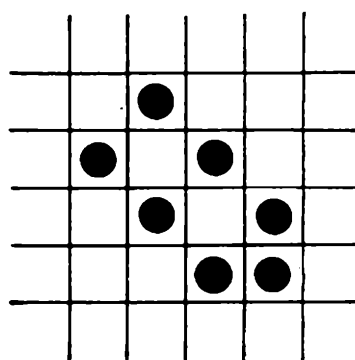
Obr. 5



Obr. 3



Obr. 6

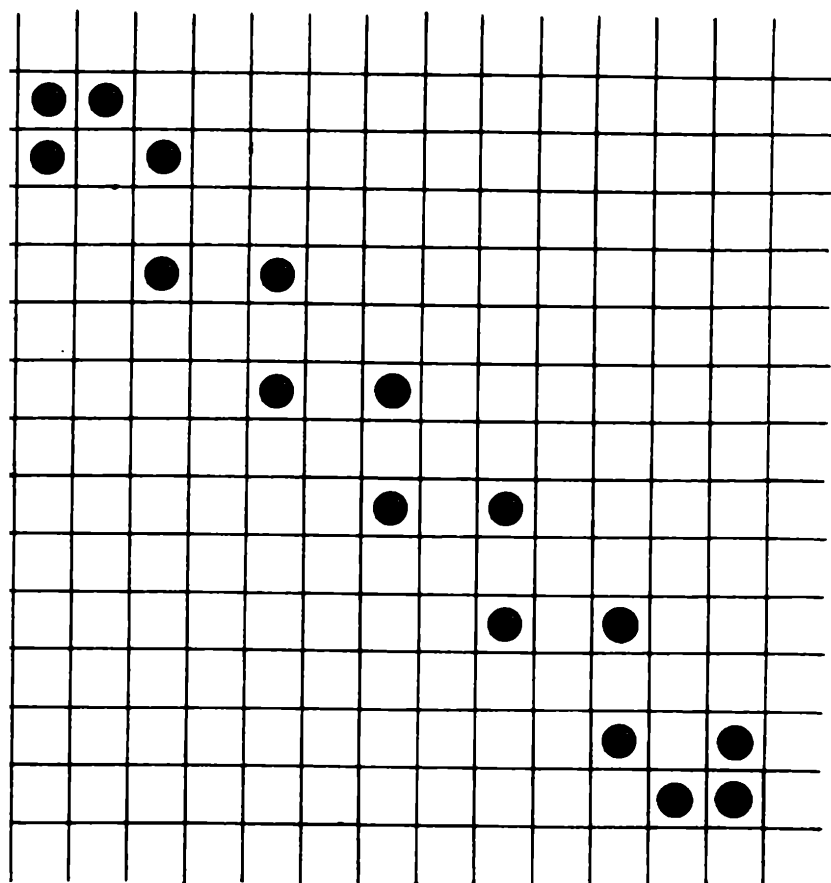


tedy dostatečně vyzbrojeni k tomu, abychom ve světě možných variant odkrývali další, mnohdy nečekané situace.

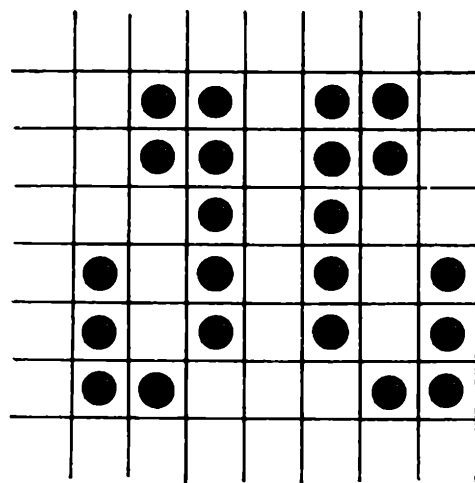
Vlastně ještě něco: už minule jsme poznali některé stacionární útvary, které se dalším vývojem vlastně nemění. Dnes si uvedeme některé další, např. „bochník“ (obr. 1), „rybník“ (obr. 2), „bárku“ (obr. 3), „dlouhou bárku“ (obr. 4), „loďku“ (obr. 5) a „dlouhou loďku“ (obr. 6).

Lépe si však vyhrajdeme s „oscilátory“, tj. útvary, které periodicky oscilují. Jeden z nich jsme již poznali posledně (tři kameny vedle sebe). Zajímavější je „pálka“ (obr. 7), která se z generace na generaci převrací směrově, jakoby „hrála“. Ještě složitější je útvar na obr. 8. Ten se bude neustále kolem myšlené vodorovné osy sem a tam „překlápět“. Skutečný Hertzův oscilátor má základní postavení, uvedené na obr. 9. Při hře bude základní útvar zůstat neměnný, pouze vnitřní kámen (na obrázku vyznačený tučným kroužkem) bude periodicky „oscilovat“ sem a tam.

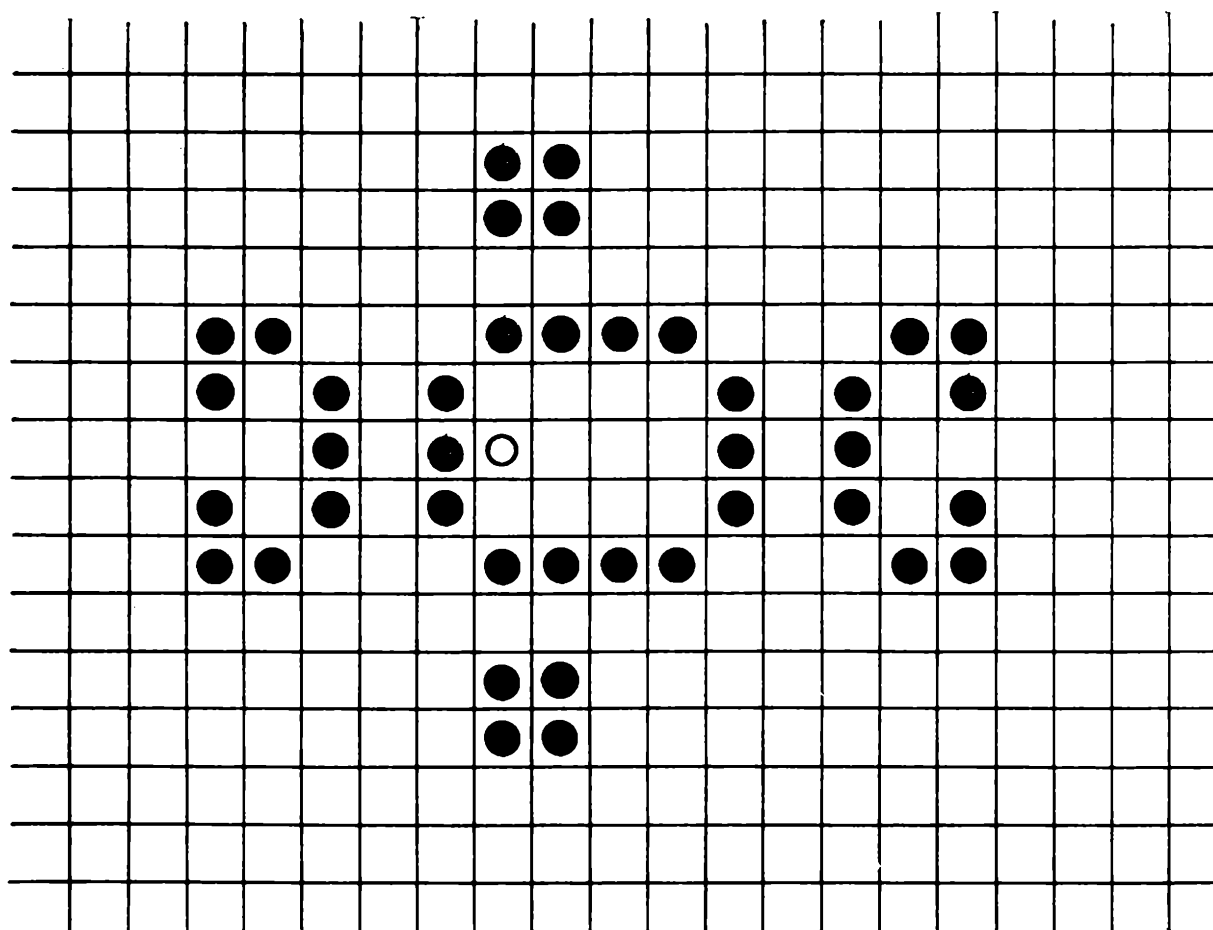
Jsou jiné útvary, které se opakují každou druhou generaci. Ty dostaly

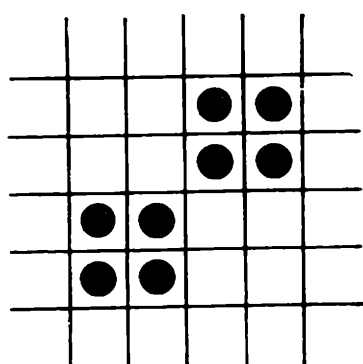


Obr. 7

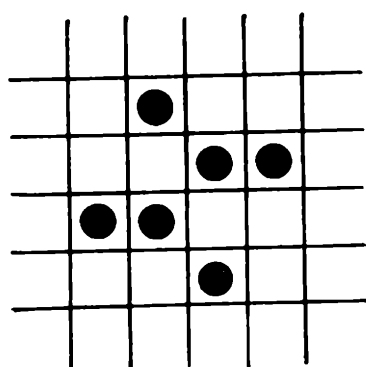


Obr. 8

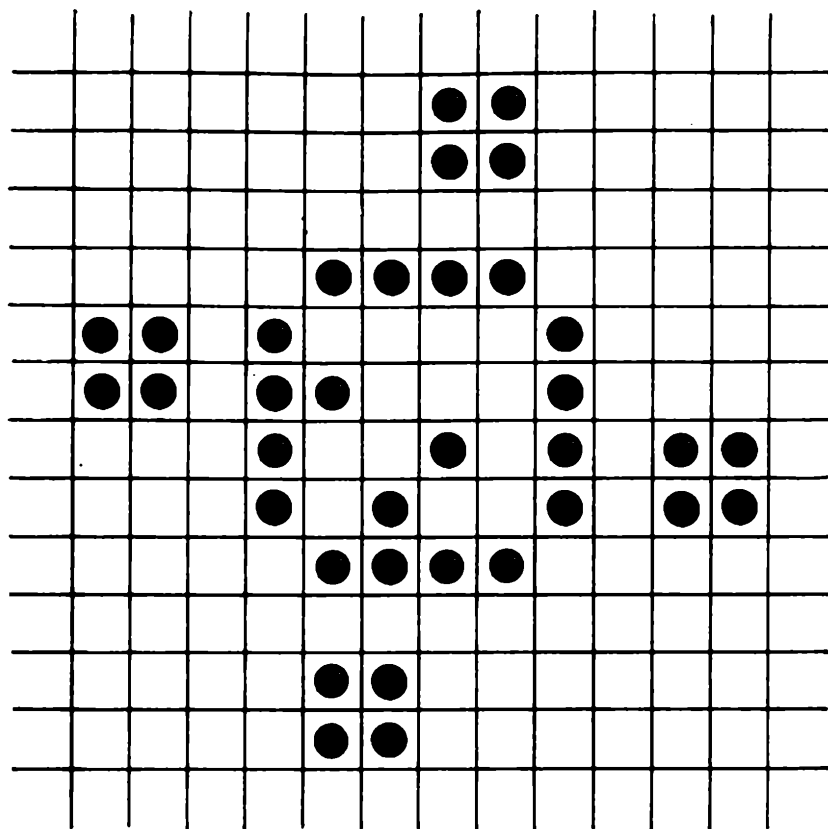




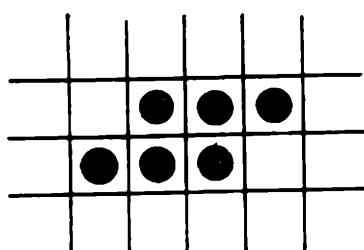
Obr. 10



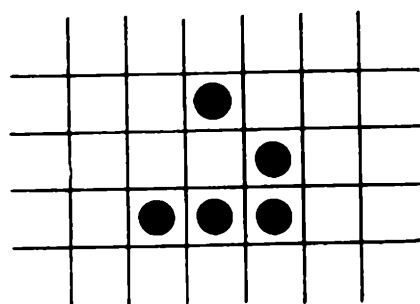
Obr. 11



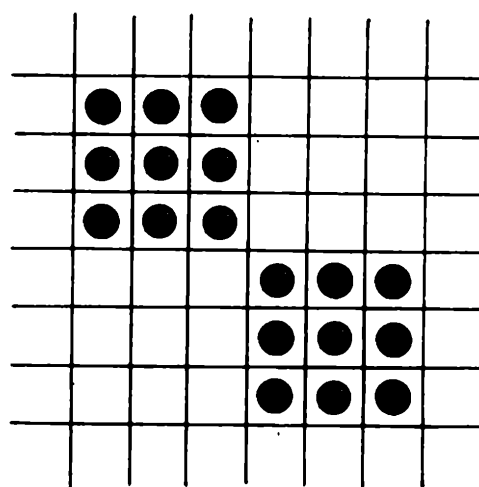
Obr. 12



Obr. 13



Obr. 14



Obr. 15

výstižný název „flip flopy“ Ověřte si to např. na základním útvaru, který je na obr. 10. Ještě hezčí je „větrník“ na obr. 11, který se po každé hře „otočí“ o 90 stupňů, přičemž vnější kameny vždy zůstanou na svých místech. Roztomilá hra vznikne rozehráním postavení na obr. 12. Jsou to „hodiny“, jejichž vnější tvary zůstávají neměnné, avšak tři vnitřní kameny se periodicky „otáčejí“ kolem dokola, jakoby hodiny „tikaly“ Sami si zkuste, jak se bude chovat útvar na obr. 13.

Všechny dosavadní útvary, třebaže se „pohybovaly“, zůstávaly na

původním místě. Ukážeme si nyní „letadlo“, které se bude na hrací ploše pohybovat.

Základní postavení je na obr. 14. Všimněte si toho, že vždy po dvou generacích vznikne týž útvar, jenže v obrácené poloze, a přitom se bude vždy po čtyřech generacích posouvat o jedno pole vpravo dolů. Matematici vymysleli útvary, které se pohybují i mnohem rychleji — až o jedno políčko z generace na generaci. Takto je modelována největší možná rychlost pohybu — „rychlost světla“. Naše letadlo se tedy — nehledíme-li na převrácené pozice — pohybuje vpřed rychlostí, která je rovna čtvrtině „rychlosti světla“

Závěrem dnes představíme „pulzar“ na obr. 15. Rozehrejte si jej a budete překvapeni, jak periodicky vypouští svou „hmotu“ do okolního prostoru. Příště se podíváme ještě na jiná, snad ještě zajímavější výchozí postavení.

Matematická miniatura III.

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Učí se, že trojúhelník bývá jednoznačně určen, jsou-li dány tři vzájemně nezávislé prvky. My si však dnes uvedeme úlohu, která se tomuto požadavku zdánlivě vymyká, a proto budí dojem úlohy značně nedo-určené. Přesto existuje jediné řešení.

URČETE TROJÚHELNÍK O OBSAHU 50 cm^2 , VÍTE-LI, ŽE DVĚ JEHO STRANY MAJÍ DÉLKU NEJVÝŠE 10 cm !

Skoro to vypadá jako příklad s nekonečně mnoha řešeními, ale pouze na první pohled. Označme obsah P a dvě zmíněné strany a , b . Pak podle zadání platí

$$P = 50, \quad a \leq 10, \quad b \leq 10.$$

Podle známého vzorce pro obsah obecného trojúhelníka můžeme psát

$$ab \sin \gamma = 100.$$

Zadíváme-li se na tento vztah pozorně a uvážíme-li, že platí $a \leq 10$, $b \leq 10$, $\sin \gamma \leq 1$, pak vidíme ihned, že jediné možné řešení je $a = 10$, $b = 10$, $\gamma = 90^\circ$

A naučení? I nejjednodušší matematická úloha může být v pravém smyslu slova někdy krásná.

0 odborném slohu v matematice

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

Každá věda má svou speciální terminologii a svůj odborný sloh. Je tomu tak i v matematice a každý, kdo se chce vážně touto vědou zabývat, musí zvládnout její výrazové prostředky, Dnes si tedy povíme něco o jejím slohu.

Při zmínce o slohu si možná někteří z vás vzpomenou, že jim obvykle dělají potíže školní slohové úkoly na témata jako „Přišlo jaro“ nebo „Náš školní výlet“, a obávají se tedy i slohu matematického. Ale nemusejí mít takové obavy, zde půjde o něco trochu jiného. Samozřejmě — rozhodně bych nechtěl nikoho nabádat k tomu, aby podceňoval školní slohové úlohy. Ty vás mají naučit správnému vyjadřování v běžném životě, a nejen vyjadřování správnému, ale také pokud možno krásnému. Na jejich sloh se kladou měřítká estetická. Použijete-li například v jedné větě pětkrát slova „člověk“, nemusí taková věta být nesprávná věcně ani gramaticky, ale prostě nezní pěkně. Proto jste vedeni k tomu, aby vaše vyjadřování bylo bohatší, abyste například slovo „člověk“ střídali se slovy „muž“, „osoba“ a podobně. Vaším vzorem má být sloh umělecký, kterého používají spisovatelé beletrie neboli krásné literatury. Už z toho je vidět, že je zde hlavním požadavkem krása vyjadřování.

Jinak je tomu u odborného slohu. Do jisté míry sice i zde je snaha po určité kráse nebo lépe řečeno eleganci vyjadřování, to hlavní je však přesnost. Popsat školní výlet dokáže každý, kdo na něm byl. Při slohovém úkolu však nezáleží ani tak na tom, co o něm napíšete, ale jak to napíšete. Vašemu profesorovi češtiny nejde o to, abyste ho informovali o tom, co se na výletě událo; vždyť tam třeba byl s vámi. Jde o to, zda ten výlet dokážete popsat krásně nebo méně krásně; podle toho vás známkuje. Tedy z mnoha možností, jak slovy vyjádřit určitou skutečnost, musíte vybrat tu, která nejlépe vyhovuje estetickým měřítkům. Naproti tomu ve slohu matematického pojednání není vlastně z čeho vybírat. Vezměme si například definici: „Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných bodů stejný součet vzdáleností.“ Je možno se snažit říci to nějak krásněji? Nelze to dost dobře ani říci nějak jinak; nanejvýše místo „které“ bychom mohli říci „jež“, což by na věci mnoho nezměnilo. Nejde nám tedy o to, abychom z mnoha možností správného vyjádření vybrali tu nejkrásnější, ale abychom vůbec dovedli najít nějakou možnost správného vyjádření. Je-li takových možností

několik, je jich poměrně málo a nestane se nic hrozného, když nevybereme právě tu nejelegantnější. Tedy spíše než otázkou jazykového a estetického citu je matematický sloh věcí dobré znalosti tématu, o němž mluvíme nebo píšeme, a smyslu pro přesnost. Komu obojí nechybí, může psát dobře o matematice, i když ve školních slohových úkolech příliš úspěšný nebyl.

Už jsme se zmiňovali o používání synonym. Je to něco, co v uměleckém slohu je zcela běžné. Jednak se tím zabráňuje častému opakování téhož slova, jednak to může mít i jiné důvody. Například v Jiráskových „Starých pověstech českých“ praotec Čech říká, že země oplývá mlékem a strdím. Spisovatel mohl samozřejmě místo „strdí“ užít výrazu „med“; užil však úmyslně neobvyklého archaického slova, aby zdůraznil, že jde o příběh z dávné minulosti. I v běžné mluvě užijeme třeba jednou výrazu „přímka“ a podruhé „rovná čára“. V matematice si to dovolit nemůžeme; tam je správným termínem pouze „přímka“ a tohoto termínu musíme použít i za cenu toho, že se toto slovo bude v jedné větě třeba několikrát opakovat. K matematickým termínům prostě synonyma neexistují; matematika si nemůže dopřát toho přepychu, aby pro tentýž pojem zaváděla několik různých názvů. To by bylo nepříjemné především pro vás, studenty, kdybyste se měli naučit několika různým výrazům pro tentýž matematický pojem.

Jsou ovšem výjimky, které potvrzují pravidlo. Pro některé křivky se užívá jednak výrazů mezinárodních (řeckého nebo latinského původu), jednak názvů českých. Tak například máme kardioиду neboli srdcovku a nefroidu neboli ledvinovku. Takových případů však není mnoho.

Stává se však, že pro některý pojem není ustálen jediný termín, ale různí autoři používají různých výrazů. Například místo normální podgrupa grupy se někdy říká normální dělitel grupy. To však nevede k zpestření slohu, protože každý autor důsledně používá pouze jednoho termínu, toho, který se mu zdá vhodnější. U pojmů, které se probírají na základních a středních školách, tato situace nastat nemůže. Existuje státní norma „Názvy a značky školské matematiky“, která je závazná pro všechny učitele matematiky. Takže i kdyby se snad některému učiteli zdálo vhodnější říkat „rovná čára“ místo „přímka“, muselo by to zůstat věcí jeho osobního názoru, ale ve škole by musel užívat zavedeného termínu.

Matematický sloh nelze zpestřovat ani užíváním zdrobnělin. Ke slovu „čtverec“ sice v běžném jazyce existuje zdrobnělina „čtvereček“, v odborné literatuře však této zdrobněliny užít nelze. Čtverec o straně délky jedné tisícin milimetru je pro matematika stále čtverec, nikoli čtvereček. Stejně tak „trojúhelníček“ může být označením pro jistý druh balení taveného sýra, ale nikoliv matematickým pojmem. A zdrobněliny jako „kružnička“ nebo „elipsička“ by byly už zcela absurdní.

Pověděli jsme si tedy něco o rozdílech mezi matematickým slohem a slohem běžné řeči. Teď upozorníme na několik zvláštností matematického slohu.

Jeho nápadným znakem je pluralis maiestaticus neboli majestátní plurál. Je to obdoba vykání v první osobě, tedy jakési vykání sobě samému či „mykání“ (neplést s mykáním příze). Majestátní se mu říká proto, že jej užívali panovníci v úředních dokumentech. Napsalo-li se „My, Karel IV z Boží milosti císař římský a král český, vyhláshujeme...“, byla tím vyjádřena nadřazenost panovníka nad jeho poddanými. Užívá-li se majestátního plurálu v matematickém pojednání, má to význam opačný, vyjadřuje to spíše autorovu skromnost. Kdyby autor napsal „Dokáži následující větu“, znělo by to jako „Podívejte se, jaký jsem pašák, když umím dokázat takovouhle větu!“ Naproti tomu „Dokážeme následující větu“ znamená spíše jistou spolupráci autora s čtenářem: Však my spolu tu větu nějak dokážeme!“

Nyní pár slov o určitých slovních obratech, kterých používají matematikové. Především o obratu „tehdy a jen tehdy“. Nematematikům se někdy zdá, že je to zbytečné opakování téhož slova, že by stačilo říci „jen tehdy“. To ovšem není pravda. Něco jiného znamená „tehdy“, něco jiného „jen tehdy“ a opět něco jiného „tehdy a jen tehdy“. Vezměme si větu: „Půjdu na výlet tehdy, jestliže nebude pršet.“ Znamená to toto: „Nebude-li pršet, půjdu; bude-li pršet, pak možná půjdu, možná nepůjdu, zatím o tom nic neříkám.“ Nyní mějme větu: „Půjdu na výlet jen tehdy, jestliže nebude pršet.“ Tím se říká toto: „Bude-li pršet, pak rozhodně nepůjdu; nebude-li pršet, pak možná půjdu, ale možná také ne, zatím o tom nic neříkám.“ A konečně mějme větu: „Půjdu na výlet tehdy a jen tehdy, jestliže nebude pršet.“ Znamená to: „Bude-li pršet, nepůjdu; nebude-li pršet, půjdu.“ V matematické logice se tomu říká ekvivalence dvou výroků. Uvedená věta znamená ekvivalenci výroků „Nebude pršet“ a „Půjdu na výlet“; buď budou oba tyto výroky pravdivé, nebo nebude pravdivý žádný z nich.

Příkladem jednoduchého matematického tvrzení tohoto druhu je toto: „Reálné číslo je druhou mocninou reálného čísla tehdy a jen tehdy, je-li nezáporné.“ Je-li tedy reálné číslo nezáporné, je druhou mocninou reálného čísla; je-li záporné, není druhou mocninou reálného čísla.

Místo „tehdy a jen tehdy“ se může také říci „právě tehdy“; tento obrat byl zaveden proto, že je kratší a lépe zní. Můžeme tedy říci: „Reálné číslo je druhou mocninou reálného čísla právě tehdy, je-li nezáporné.“

Ekvivalenci dvou výroků můžeme vyjádřit i pomocí obratu „nutnou a postačující podmínkou je“ Můžeme tedy říci: „Nutnou a postačující podmínkou, aby reálné číslo bylo druhou mocninou reálného čísla, je, aby bylo nezáporné.“ Kdybychom řekli, že nutnou podmínkou, aby reálné číslo bylo druhou mocninou reálného čísla, je, aby bylo nezáporné, znamenalo by to pouze, že je-li reálné číslo druhou mocninou reálného

čísla, pak je nezáporné, nic by se však neříkalo o tom, zda může existovat nezáporné reálné číslo, které není druhou mocninou reálného čísla. Řekneme-li, že postačující podmínkou, aby reálné číslo bylo druhou mocninou reálného čísla, je, aby bylo nezáporné, říkáme tím, že každé nezáporné číslo je druhou mocninou reálného čísla, ale nic není řečeno o tom, zda může existovat záporné číslo, které je druhou mocninou reálného čísla. Musíme tedy mluvit o nutné a postačující podmínce.

Jsou ještě další možnosti. Lze říci: „Každé nezáporné reálné číslo je druhou mocninou reálného čísla a obráceně.“ Někdy místo „obráceně“ se říká „naopak“, ale to je nesprávné. Řekneme-li: „Každé nezáporné reálné číslo je druhou mocninou reálného čísla a naopak“, znamená to: „Každé nezáporné reálné číslo je druhou mocninou reálného čísla a není druhou mocninou reálného čísla“, což je ovšem nesmysl. Dále lze ještě říci: „Je-li r reálné číslo, pak následující dva výroky jsou ekvivalentní: 1. r je nezáporné. 2. r je druhou mocninou reálného čísla. Tohoto způsobu nejčastěji užíváme tehdy, když nemáme pouze dva ekvivalentní výroky, ale máme jich více. Vidíme tedy, že totéž tvrzení lze někdy vyjádřit různými způsoby, ve srovnání se slohem běžné řeči těch způsobů však není mnoho.

Musíme se také zmínit o používání slova „respektive“ Je to slovo latinské, které se však už vžilo v naší řeči a užívá se ho i v běžném hovoru. Jeho psaní se přizpůsobilo českému pravopisu; v latině by se psalo „respective“ Že se tam píše měkké *i* a čte se tvrdě, to už nám ani nepřijde. Je to proto, že pro toto slovo nemáme vhodný český ekvivalent. Dříve se sice někdy toto slovo překládalo jako „potažmo“ to se však neujalo; snad proto, že by se zde mohla hledat analogie se slovem „koňmo“ a tak by vznikla představa jízdy s potahem. Říkáme tedy „respektive“ a ani nám to nepřipadá jako cizí slovo. V matematické řeči má toto slovo zvláštní význam, který nám umožňuje zkracovat určité věty. Místo „Nechť M je střed úsečky AB a nechť N je střed úsečky CD “ můžeme říci „Nechť M (resp. N) je střed úsečky AB (resp. CD)“ Při tomto vyjadřování užíváme závorek a slovo „respektive“ zkracujeme na „resp.“ Mohli bychom dokonce napsat: „Nechť M (resp. N , resp. P , resp. Q) je střed úsečky AB (resp. CD , resp. EF , resp. GH).“ Znamenalo by to, že M je střed úsečky AB , N je střed úsečky CD , P je střed úsečky EF a Q je střed úsečky GH . Tuto větu lze zkrátit i použitím obratu „po řadě“ Můžeme říci: „Nechť M , N , P , Q jsou po řadě středy úseček AB , CD , EF , GH .“

Dalším užívaným obratem matematické řeči je obrat „bez újmy na obecnosti“ Lze například říci: „Nechť a a b jsou dvě libovolná reálná čísla. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \leq b$.“ Co to znamená? Čísla a a b jsou libovolně zvolená reálná čísla. Mohou být zvolena tak, že skutečně platí $a \leq b$. Mohou být však zvolena i tak, že to neplatí, že tedy $a > b$. Co pak? Potom prostě změnímme označení tak,

že to číslo, které bylo původně označeno jako a (resp. b), označíme b (resp. a). Čísla a a b jsou stále libovolná dvě reálná čísla a přitom $a \leq b$. Nedošlo tedy k žádné újmě na obecnosti; to, že má být $a \leq b$, nás nijak neomezuje při volbě čísel a a b . Užívání tohoto obratu vyžaduje ovšem velkou opatrnost a jistou rutinu v matematické práci. Kdykoliv napíšeme „bez újmy na obecnosti“, musíme skutečně bedlivě uvážit, zda k újmě na obecnosti skutečně nedojde. Bylo by chybou například napsat: „Nechť a a b jsou dvě libovolná reálná čísla. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že a je kladné a b je záporné.“ Tento příklad je značně průhledný, mohou však nastat případy, kdy chyba v úvaze není tak zřetelná. Začátečnickům bych doporučoval, aby se obratu „bez újmy na obecnosti“ raději vyhýbali a zvolili vyjádření třeba těžkopádnější, ale takové, v němž se případná chyba snadněji pozná.

Jistá odlišnost od běžné řeči je i v užívání spojek „buď — nebo“. Řekne-li se „Dnes večer půjdu buď do divadla nebo do kina“, zpravidla se tím myslí, že nastane právě jedna (tedy jedna a ne více) z těchto možností. Člověk obvykle nepočítá s tím, že by za jeden večer stihl divadlo i kino. Avšak jsou-li A a B nějaké dva výroky a napíše-li se v matematickém textu „Platí buď A nebo B “, pak tu jsou tři možnosti: může platit A a neplatit B nebo může platit B a neplatit A , nebo konečně může platit A i B . Uvedme jako příklad toto tvrzení: „Jsou-li a a b dvě reálná čísla a platí-li $a^2 + b^2 > 0$, pak buď $a \neq 0$, nebo $b \neq 0$.“ Zde samozřejmě mohou být a a b obě současně různá od nuly.

Zmíníme se ještě o tom, jak se vyjadřují tvrzení o počtu určitých prvků. Říkáme například: „Každá kvadratická rovnice má nejvýše dva různé kořeny.“ Znamená to, že jich nemůže mít více než dva, nevylučuje se však, že by jich mohla mít méně. Na druhé straně můžeme říci: „Každá kvadratická rovnice má nejméně jeden kořen.“ Nemůže se tedy stát, že by neměla žádný, ovšem může jich mít více (mluvíme ovšem o komplexních kořenech). Místo „nejméně“ se také říká „alespoň“; tedy: „Každá kvadratická rovnice má alespoň jeden kořen.“ Jestliže chceme vyjádřit přesný počet, říkáme „právě“ Tedy: „Rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$ má právě dva různé kořeny.“ Kdybychom to „právě“ vynechali, mohlo by tomu být rozuměno tak, že víme o dvou kořenech, ale že nevylučujeme, že by jich mohlo být více.

Tím jsme probrali některé slovní obraty matematické řeči, které je třeba při četbě i psaní matematických textů znát. Je ovšem nutno také něco vědět o matematické terminologii, ale o tom si povíme v jiném článku.

Kapesní počítače ve škole - ano či ne?

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, CSc., Praha

Moderní technika přichází stále s novými zázraky. Tentokrát to jsou miniaturní kapesní počítače nejrozličnějších výrobců. V mnohých zahraničních zemích doslova zaplavily trh a znám státy, ve kterých se tyto pomůcky prodávají dokonce v drogériích a trafikách. Jsou od nejrozličnějších firem a liší se různým stupněm dokonalosti a tedy i možnostmi, které poskytují.

Nejjednodušší počítače mají osmimístný displej a potřebnou elektrickou energii odebírají z baterií; obvykle dokáží sčítat, odečítat, násobit a dělit a mají-li zabudovanu tzv. „konstantu“, dovedou vypočít i celočíselné mocniny. Dokonalejší z nich mívají i tlačítko pro výpočet druhé odmocniny nebo převrácené hodnoty a některé jsou vybaveny i tzv. přídatnou pamětí, v níž je možno si přechodně uchovat dílčí výsledek a později jej znovu vybavit k dalším početním operacím. Těchto kapesních počítačů lze tedy běžně používat pro numerické výpočty, s jakými se setkáváme v rámci výuky v ZDŠ. Zejména možnost výpočtu převrácených hodnot na osm míst převyšuje možnost, kterou poskytují běžné školní matematické tabulky. Pro výpočty jiných matematických funkcí se tento druh kapesních počítačů nehodí, avšak budiž zde zaznamenán spíše jako zajímavost fakt, že byly vypracovány návody, umožňující na strojích tohoto typu počítat i hodnoty logaritmických, exponenciálních, goniometrických a cyklometrických funkcí s přesností obvykle na tři desetinná místa. Tyto návody se většinou opírají o polynomy, které příslušnou funkci v určitém rozsahu aproximují, a snad se s některými jednou setkáme i na stránkách našeho časopisu.

Podívejme se však na dokonalejší typ kapesních počítačů. Jejich displej bývá nejméně desetimístný, takže kromě deseti číslic existuje i možnost vyjádřit příslušný exponent deseti; lze tedy desetimístně vyjádřit kterékoli číslo v rozsahu od 10^{-99} do $9,999999999 \cdot 10^{99}$.

Kromě základních výše uvedených početních operací poskytuje počítač tohoto typu možnost počítat hodnoty goniometrických, cyklometrických, logaritmických i exponenciálních funkcí a navíc počítá i libovolnou mocninu či odmocninu nezáporného základu. Mívá vloženou konstantu π a jeho přídatná paměť je často uzpůsobena k průběžnému sčítání vložených hodnot. Nejméně tři počítačí registry umožňují i výpočet dlouhých a složitých výrazů, aniž si musíme někde stranou poznamenávat dílčí mezivýsledky. S počítači tohoto druhu lze tedy operativně počítat matematické výrazy, vyskytující se v inženýrské či jinak aplikované matematice.

Některé počítače této vyšší kategorie počítají na jediný stisk tlačítka i základní veličiny statistické, např. aritmetický průměr vložených čísel a jejich směrodatnou odchylku. Někdy se setkáme i s tlačítkem pro výpočet faktoriálů či kombinačních čísel a s tlačítkem pro převod úhlů z desetinného vyjádření na vyjádření, obsahující stupně, minuty a vteřiny a naopak. Také lze rychle převádět kartézské souřadnice na polární a zpět, pracovat s úhly ve stupňovém či obloukovém vyjádření a někdy dokonce přepočítávat vložené číslo z jedné číselné soustavy do druhé.

Tím se však pomalu dostáváme ke kapesním počítačům nejvyšší kategorie. Ty kromě operací již uvedených umožňují zakódovat i interní program o maximálně stanoveném počtu operací nebo takový program dokonce nahrát na úzký magnetický proužek, který se může stát částí programové „knihovny“. Základní vyšší operace — např. gamma funkce, eliptické integrály apod. — jsou naprogramovány již předem od dodavatele těchto štítků. Pomocí takovýchto kapesních počítačů lze snadno počítat např. doby východu a západu Slunce v libovolném dni roku a na libovolném místě zemského povrchu stejně snadno jako numerické integrály či dráhy umělých družic. Všechny počítače střední a vyšší kategorie bývají napájeny buďto ze sítě nebo z vestavěného a automaticky dobíjeného akumulátoru, takže jsou neobyčejně operativní.

Pokud jde o ceny kapesních počítačů, lze konstatovat, že všeobecně rychle klesají, i když u nás prozatím zůstávají poměrně vysoko nad světovým průměrem. V sousedním Rakousku stály kapesní počítače střední kategorie (tj. počítající hodnoty prakticky všech běžných matematických funkcí) ještě předloni kolem 250—300 dolarů, loni kolem 170 dolarů a od podzimu 1975 dokonce jen 100—110 dolarů. Počítač americké výroby s možností vnitřního i vnějšího programování včetně knihovny základních programů, jehož cena byla ještě poměrně nedávno asi 1000 dolarů, stojí nyní dvaapůlkrát méně. Nejjednodušší počítače či spíše kapesní kalkulátory stojí jen 20—40 dolarů. Zmiňujeme se tu o tom proto, abychom si uvědomili, že není daleko doba, kdy si v civilizovaných státech bude moci takovéto zařízení obstarat prakticky každý. Ještě však dokud ceny byly mnohem vyšší, vznikaly při některých zahraničních vysokých školách půjčovny počítačů; studenti si mohli na den či několik dnů půjčit vhodný kapesní počítač např. v období zkoušek nebo při provádění složitějších numerických výpočtů.

A tady se již dostáváme konečně k našemu hlavnímu tématu. Stávalo se totiž již tehdy, že počítači vybavení studenti byli v nesporné výhodě proti svým kolegům, kteří počítali „klasickým“ způsobem, tj. pomocí tabulek a nejvýše logaritmických pravítek. Vedlo to nakonec k tomu, že používání počítačů bylo zakazováno či omezováno, většinou ovšem marně. A tak museli pedagogové dát hlavy dohromady a začali při

zkouškách zadávat docela nový typ příkladů, řešitelných bez potřeby používání této moderní výpočetní pomůcky.

Ještě více problémů nastalo na školách nižšího a středního typu. Poznal jsem školy, které používání kapesních počítačů výslovně zakazovaly, ale také školy, kde se naopak používání počítačů propagovalo. Příslušní pedagogové totiž upozorňovali na to, že podobná „modernizace“ výpočetní techniky proběhla ve školství již několikrát a že to vždy nakonec vyhrály prostředky modernější. Vždyť bývaly doby, kdy neexistovaly ani logaritmické, ani jiné tabulky! Později se zavedla i logaritmická pravítka a tehdy kupodivu málokde vznikla otázka, zda jsou pro výpočet ve škole účelná či nikoli. Tentokrát se tedy historie opakuje znovu, byť na výrazně vyšší úrovni. Bránit se technickému pokroku nemá smysl, naopak zastánci kapesních počítačů z řad pedagogů vyslovili docela zajímavou myšlenku:

Jestliže někdo špatně vidí, dáme mu brýle a má po starostech. Jestliže někdo špatně numericky počítá, dejme mu kapesní počítač; možná, že se pak dokonce ukáže, že příslušný žák je jinak docela dobrým matematikem.

Na této myšlence je asi hodně pravdy, a protože se i u nás budeme muset brzy smířit s invazí počítačů do běžného (tedy i školního) života, budeme raději hledat pro tyto zázračné přístroje nejsprávnější uplatnění. Otázka tedy nikdy nebude znít tak, jak jsme ji uvedli v nadpise této úvahy, nýbrž docela jinak: nikoli *ano* či *ne*, nýbrž *jak*.

Tady se nemohu ubránit dojmu, jak krásně mohou kapesní počítače zapadnout do československé metodiky vyučování. Již dávno se totiž snažíme vymýtit dříve tak často vyzvedávané výpočetní algoritmy a dřívější dril nahrazujeme logickým uvažováním. Kapesní počítače nám umožní dovést tuto myšlenku ještě dále; žáci se na nich budou moci učit poznávat výpočetní logiku a dokonce i programovat složitější výpočty. Jestliže tedy vycházíme z poznání, že matematika dneška nevystačí s vyučovacími metodami včerejška a že matematika zítřka nás nesmí zastihnout nepřipraveny, pak kapesní počítače si nezaslouží žádného „pronásledování“, ale naopak pedagogické podpory. Ony si totiž své místo mezi námi a našimi žáky zákonitě vybojují vítězně, ať s tím souhlasíme nebo nesouhlasíme. Čím dříve a lépe tedy budeme na jejich invazi kladně připraveni, tím budeme pedagogicky úspěšnější.

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ

Cramerovo pravidlo
cvičení
cyklický
cyklolda
cyklometrická funkce
cyklus

Cramer's rule
exercise
cyclic
cycloid
inverse circular function
cycle

Č

čára
čerchovaná čára
lomená čára
průsečná čára
tečkovaná čára
zlomková čára
čárka (interpunkční)
desetinná čárka (tečka)
čárkovaný
čas
část
částečně
částečně uspořádaný
částečný
četnost
rozdělení četností
činitel
číselný
číselná osa
číselná řada
číslice
číslicový
číslo
celé číslo

line, curve
dot and dash line
broken line
line of intersection
dotted line
fraction line
comma
decimal point
dotted, dashed, broken
time
part, portion
partly, partially
partially ordered
partial
rate, frequency
frequency distribution
factor, multiplier, multiplicand
numer(ic)al
number line, number scale
number series
figure, digit, numeral
numeric(al), numeral, digital
number
integral, whole number

desetinné číslo	decimal number
imaginární číslo	imaginary number
iracionální číslo	surd number, irrational number
kardinální číslo	cardinal number
kladné číslo	positive number
komplexní číslo	complex number
liché číslo	odd number
ordinální číslo	ordinal number
přirozené číslo	integer, natural number
racionální číslo	rational number
reálné číslo	real number
ryze imaginární čísla	pure imaginary number
sdrúžená komplexní čísla	conjugate complex numbers
složené číslo	composite number
smíšené číslo	mixed number
sudé číslo	even number
číslovka	numeral
čítání	counting
čítatel	numerator
člen	term, member
čtrnáct	fourteen
čtverec	square, square number
jednotkový čtverec	unit square
úplný čtverec	perfect square, perfect trinomial
čtverečný metr	square meter
čtveřice	quadruple
čtvrtina	quarter
čtvrtit	quarter
čtvrtý	fourth
čtvrtá měřická úměrná	fourth proportional
čtyřboký	quadrangular, tetrahedral
čtyřhran	quadrilateral
čtyři	four
problém čtyř barev	four-colour problem
čtyřicet	fourty
čtyřnásobek	quadruple
čtyřnásobný	quadruple
čtyřstěn	tetrahedron
čtyřstran	quadrilateral
čtyřúhelník	quadrangle, tetragon

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ



ROČNÍK 54
KVĚTEN 1976

9

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mižoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMO Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5; Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1976.

OBSAH

Dr. J. Ladman: Jak dál ve světle XXV. sjezdu KSSS .	385
I. Bušek: Zajímavé řešení jedné maturitní úlohy	387
A. Šarounová: Afinní elace .	393
Dr. J. Skuhra: Lineární a statistická závislost	397
F. Hradecký: Cassiniho křivky a Bernoulliho lemniskáta	404
Dr. O. Lepil: Jak plovou tělesa .	410
Dr. J. Skotnický: Nové názory o termodynamice .	414
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Pohyb Slunce v Galaxii .	317
Dr. B. Zelinka: O matematické terminologii	420
J. Gedei: N. I. Lobačevskij a 150-ročná neeuklidovská geometria	422
Dr. J. Mrázek: Hra o životě a smrti III .	427
Recenze	432
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Jak dál ve světle XXV. sjezdu KSSS

PhDr. JAROSLAV LADMAN, CSc., UK Praha

Jsou události, nad nimiž čas nemá moc. K nim patří sociální přestavba světa, kterou před více než půlstoletím zahájil houževnatý, hrdinný ruský proletariát. Z jeho země se za historicky krátkou dobu zrodila socialistická velmoc, stojící v čele všech pokrokových sil lidstva. Vybudovat nový svět na troskách starého vyžadovalo však neuvěřitelně velkého úsilí.

Dvacátý pátý sjezd KSSS potvrdil, že vliv socialistického tábora na světové události je stále silnější a hlubší. Nedávná, ale přitom historicky vzdálená je doba, kdy kapitalistický svět viděl ve sjezdech KSSS jen vnitřní událost SSSR nebo nejvýše událost významnou pro socialistické společenství. Letošní jednání XXV sjezdu sovětských komunistů bylo očekáváno se značnou pozorností celým světem. Dokonce i protikomunisticky a protisovětsky zaměřený tisk na Západě psal o průběhu sjezdu umírněně a neútočně a projevoval snahu o objektivní hodnocení této významné světové události. Bylo tomu tak proto, že celý průběh sjezdu prokazoval, jak sovětská společnost pokročila v budování materiálně technické základny komunismu. Jak v referátu *L. I. Brežněva*, tak i v referátu *A. N. Kosygina* bylo možno vypožorovat, jak diametrálně rozdílné jsou politické, hospodářské a sociální cíle buržoazních a socialistických států. Svědčí o tom hlavní sociální a ekonomické cíle. Hlavním úkolem sovětské desáté pětiletky je důsledné uskutečňování kursu komunistické strany, směřující k vzestupu životní úrovně lidu na základě dynamického a proporcionálního rozvoje společenské výroby a zvýšení její efektivity, urychlení vědeckotechnického pokroku a růstu produktivity práce.

Sjezd zároveň potvrdil, že jedině za socialismu se vědeckotechnická revoluce obrací správným směrem — k odpovídajícím zájmům člověka a společnosti. Jedině na základě urychleného rozvoje vědy a techniky mohou být splněny konečné úkoly sociální revoluce — může být vybudována komunistická společnost. Za pozornost stojí ta část referátu *L. I. Brežněva*, ve které říká: „Revoluce ve vědě a technice vyžaduje pronikavé změny ve stylu a metodách hospodářské činnosti, rozhodný boj proti zkosnatělosti a rutinérství, skutečnou úctu k vědě, schopnost

a vůli radit se s ní a počítat s ní.“ Při pročítání sjezdových materiálů si plně uvědomujeme, že úspěch vědeckotechnické revoluce a její vliv nejen na ekonomiku, nýbrž i na všechny stránky života společnosti nemůže zajistit pouze úsilí vědeckých pracovníků. Stále důležitější je zapojovat do tohoto historického procesu všechny účastníky společenské výroby a všechny články hospodářského mechanismu, neboť praktické uplatňování nových vědeckých myšlenek je dnes úkol stejně důležitý jako jejich vývoj.

Z tribuny sjezdového paláce zazněla i slova navazující, na pokračující realizaci mírového programu vyhlášeného před pěti lety. Svět se dozvěděl znovu, že základní orientace sovětské zahraniční politiky zůstává nezměněna — SSSR je odhodlán rozvíjet další boj za mír, spolupráci, svobodu a nezávislost národů. Je proto nepochybné, že XXV. sjezd KSSS pozitivně ovlivní další politický vývoj ve světě a že příští cesta sovětského státu, sovětského lidu pod vedením KSSS bude cestou pravdy, cestou svobody, cestou štěstí lidu.

Závěrem je možno říci, že jak XXV. sjezd KSSS, tak sjezdy komunistických a dělnických stran ve státech socialistického společenství přispějí k ovlivnění myšlenek a citů stamiliónů na světě. Socialismus znamená mír, respektování svrchovanosti všech zemí, rovnoprávnou spolupráci mezi státy; je oporou pro národy, které bojují za svobodu a nezávislost. Zítřek nesporně přinese nové důkazy o tom, že za pouhých 128 let přestalo Evropou obcházet strašidlo komunismu — dokonce naopak, že se komunismus stal reálnou záležitostí pracujících na celém světě, neboť výrazně prokazuje historickou převahu nad kapitalismem.

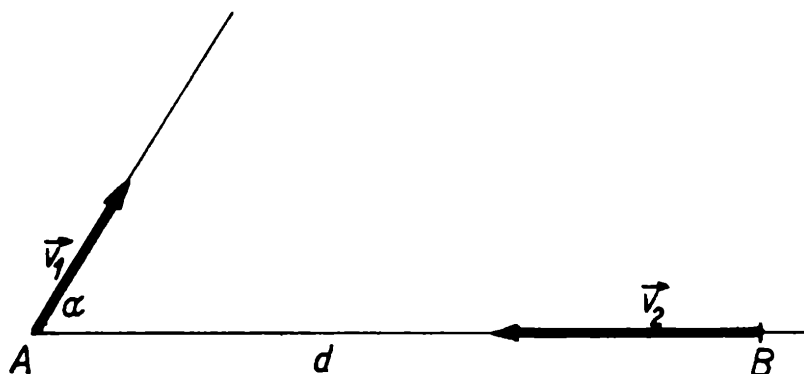
matematika

Zajímavé řešení jedné maturitní úlohy

IVAN BUŠEK, Pedagogický ústav hl. m. Prahy

Součástí maturitních zkoušek v přírodovědných třídách gymnázií se zaměřením na matematiku a fyziku nebo se zaměřením na programování a obsluhu počítačích strojů je povinná písemná maturitní zkouška z matematiky. Při této zkoušce jsou žákům zadány čtyři příklady. První dva příklady jsou povinné, u třetího a čtvrtého příkladu jsou dvě varianty a u každého z nich má žák právo volit si variantu a nebo b . V minulém školním roce 1974/75 byl jako volitelný příklad 3a zadán příklad tohoto znění :

Obr. 1

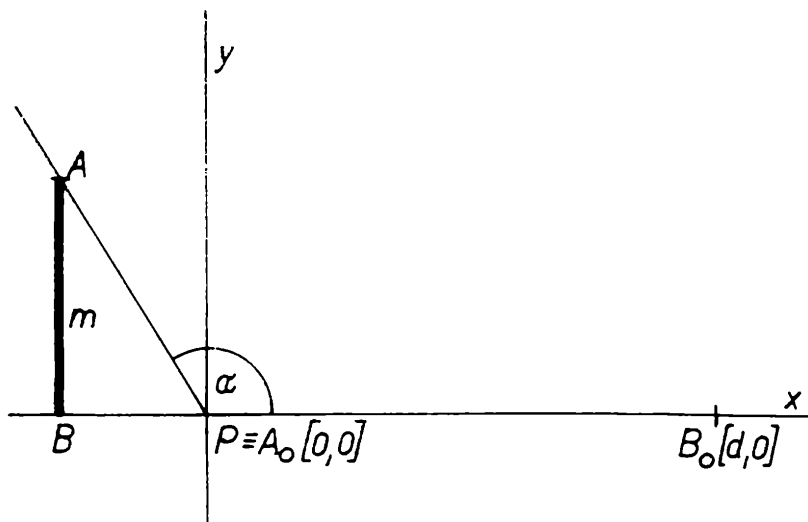


Na klidné vodní hladině vyjíždějí z míst A a B , vzdálených od sebe o délku d , současně dvě lodi (obr. 1). První se pohybuje z bodu A stálou rychlostí v_1 tak, že směr jejího pohybu svírá se spojnicí AB úhel α . Druhá se pohybuje z místa B směrem k místu A stálou rychlostí v_2 . Určete obecně dobu t , za kterou budou obě plavidla sobě nejbližší. Pro hodnoty $v_1 = 16 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 40 \text{ km h}^{-1}$, $d = 156 \text{ km}$, $\alpha = 60^\circ$ vypočítejte t a minimální vzdálenost plavidel.

Na pražských gymnáziích si z celkového počtu 260 žáků, kteří psali písemnou práci z matematiky, tento příklad zvolilo 32 % řešitelů. Přitom většina z nich — s výjimkou tří — řešila příklad přibližně takto: Úmluva: Místo o pohybu lodí budeme hovořit o pohybu hmotných bodů (dále jen bodů) A a B , přitom polohu bodu A (B) v čase $t = 0$ označíme A_0 (B_0). Čas $t \in R_0^+$, tj. $t \geq 0$.

I když obr. 1 svádí k tomu, že $\alpha < 90^\circ$, musíme uvažovat, že $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Je-li $\alpha = 0^\circ$ nebo $\alpha = 180^\circ$, jde o známou úlohu o „dohánění“ či „potkávání“ na přímce, kterou dovedou řešit již absolventi ZDŠ.

Obr. 2



Zvolme systém souřadnic v rovině tak, jak ukazuje obr. 2. Potom $A = [v_1 t \cos \alpha, v_1 t \sin \alpha]$, $B = [d - v_2 t, 0]$ a pro vzdálenost bodů A , B , kterou označíme $m(t)$, platí $m(t) \geq 0$ a

$$m^2(t) = [v_1 t \cos \alpha - (d - v_2 t)]^2 + (v_1 t \sin \alpha)^2 \quad (1)$$

V intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ platí: $m^2(t)$ je minimální $\Leftrightarrow m(t)$ je minimální. Budeme proto hledat v $\langle 0, \infty \rangle$ minimum funkce, která vyjadřuje $m^2(t)$. Zapišme ji

$$y = [v_1 t \cos \alpha - (d - v_2 t)]^2 + (v_1 t \sin \alpha)^2 \quad (2)$$

Zkoumejme však nejprve její průběh v celém intervalu $(-\infty, \infty)$. Upravíme-li rovnici (2), obdržíme

$$y = v_1^2 t^2 + (d - v_2 t)^2 - 2(d - v_2 t)v_1 t \cos \alpha$$

a dále

$$y = (v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha)t^2 - 2d(v_2 + v_1 \cos \alpha)t + d^2 \quad (3)$$

Funkce má derivaci v každém $t \in R$, proto nutná podmínka pro extrém funkce je $y' = 0$; získáme rovnici

$$y' = 2t(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha) - 2d(v_2 + v_1 \cos \alpha) = 0.$$

Z této rovnice vyjádříme její kořen v R

$$t_m = \frac{d(v_2 + v_1 \cos \alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha} \quad (4)$$

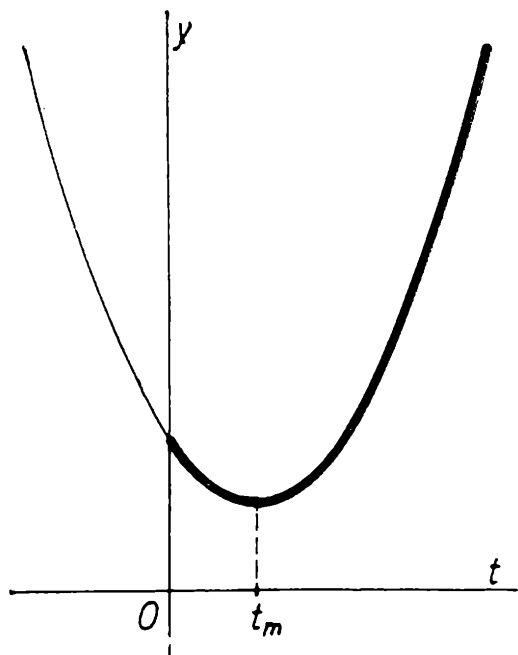
Jedná-li se o minimum, musí dále platit $y'' > 0$; vypočítáme

$$y'' = 2(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha)$$

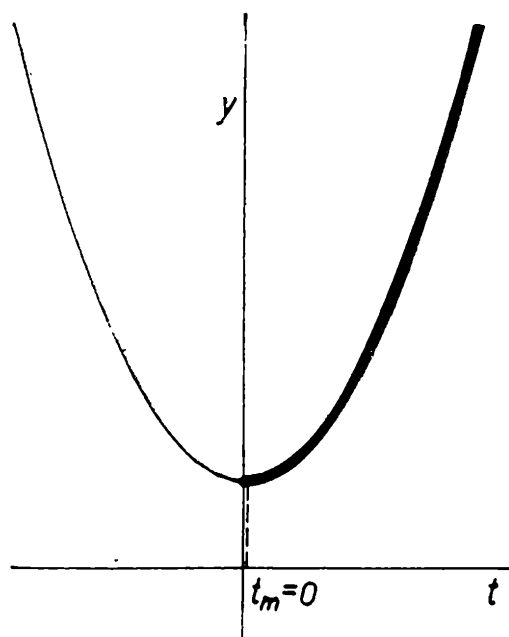
Máme tedy rozhodnout, zda platí nerovnice

$$v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha > 0. \quad (5)$$

Obr. 3



Obr. 4



Pro $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ zřejmě platí

$$|v_2 \cos \alpha| < v_2.$$

Po umocnění dostaneme

$$v_2^2 \cos^2 \alpha < v_2^2. \quad (6)$$

Dále platí

$$(v_1 + v_2 \cos \alpha)^2 \geq 0,$$

tj.

$$v_1^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha + v_2^2 \cos^2 \alpha \geq 0 \quad (7)$$

Z (6) a (7) plyne

$$v_1^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha + v_2^2 > 0,$$

což je nerovnice (5), a tedy vztah (4) určuje to číslo $t_m \in R$, ve kterém je hodnota y minimální.

Protože máme zkoumat průběh funkce v $\langle 0, \infty \rangle$, musíme si ujasnit, jak budeme postupovat, kdyby vyšlo $t_m < 0$. Vyšetřujeme průběh funkce určené vztahem (3), který lze zapsat jako

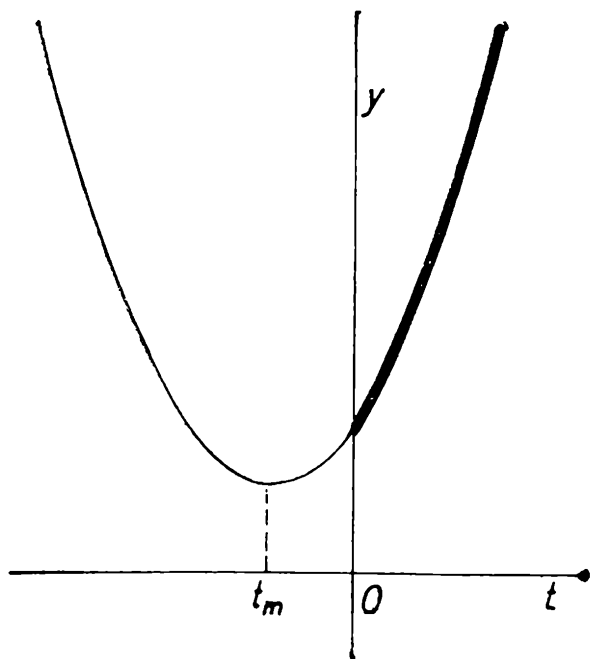
$$y = at^2 + bt + c, \text{ kde } a > 0 \quad (8)$$

Jedná se o kvadratickou funkci, jejímž grafem je parabola; vzhledem k $a > 0$ vždy existuje minimum funkce v R . Mohou však nastat případy, že funkce nabývá v R minima

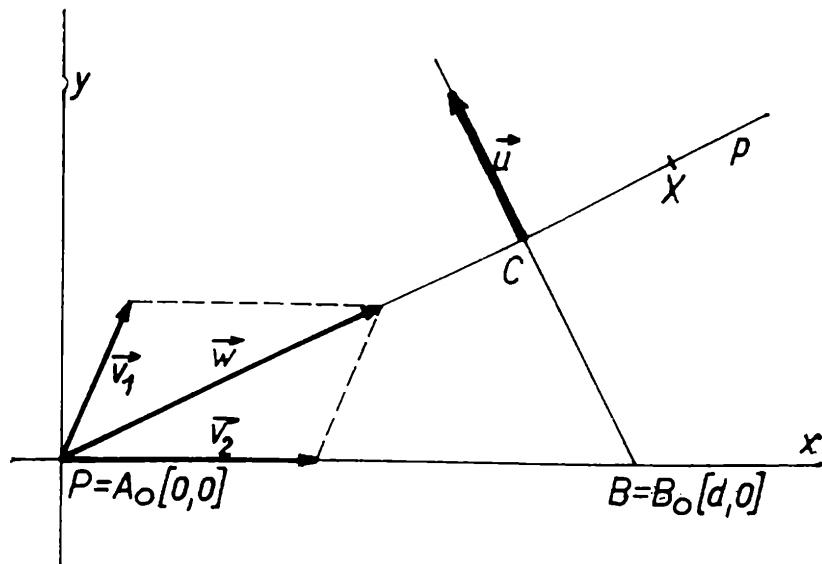
1. pro $t_m > 0$ (obr. 3)
2. pro $t_m = 0$ (obr. 4)
3. pro $t_m < 0$ (obr. 5)

Při důkazu nerovnice (5) jsme současně dokázali, že jmenovatel zlomku (4) je kladný, a proto první dva případy, tj. $t \geq 0$, nastanou při $d > 0$, právě když

$$v_2 + v_1 \cos \alpha \geq 0$$



Obr. 5



Obr. 6

Vyjde-li $t < 0$, tj. když $v_2 + v_1 \cos \alpha < 0$, je zkoumaná funkce (3) v $\langle 0, \infty \rangle$ rostoucí a nabude minimální hodnoty pro nejmenší hodnotu nezáporného t , tj. pro $t = 0$. Ve druhém a třetím případě je minimální vzdáleností lodí vzdálenost d .

Poznámka: Je-li $\alpha = 0^\circ$, nebo $\alpha = 180^\circ$, může kromě těchto tří uvedených případů nastat ještě případ čtvrtý. Ve vztahu $y = at^2 + bt + c$, se pro uvedené hodnoty α může $a = 0$, tj. $v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha = 0$. Pro $\alpha = 0^\circ$ je $\cos \alpha = 1$, tento případ nastane, když $v_1 = -v_2$, pro $\alpha = 180^\circ$ je $\cos \alpha = -1$; to platí, je-li $v_1 = v_2$. V obou případech je však současně i $b = 0$, tj. $v_2 + v_1 \cos \alpha = 0$ a vzdálenost bodů je dána rovnicí $y = c$. Jedná se tedy o konstantu, vzdálenost bodů se nemění.

Dosadíme do (4) hodnoty uvedené v zadání, po úpravě vyjde $t_m = 3$. Dále dosadíme hodnoty uvedené v zadání příkladu a $t = 3$ do rovnice (1), ze které takto vypočítáme minimální vzdálenost bodů A, B

$$x \doteq 43,27 \text{ km} .$$

Obě plavidla budou sobě nejbližší za 3 hodiny a jejich minimální vzdálenost bude v této době 43, 27 km.

Zcela jiný, zajímavý přístup k řešení tohoto příkladu se objevil v práci tří studentů z gymnázia Nad štolou 1 v Praze 7. I když každý z nich má svůj způsob řešení, vycházejí všichni tři z následující základní úvahy:

Popis pohybu tělesa (hmotného bodu) závisí na tom, v jaké vztažné soustavě jej sledujeme. Zvolíme-li např. inerciální vztažnou soustavu spojenou s bodem B (bod B je v této soustavě v klidu), pak bod A se v této soustavě pohybuje rychlostí v_1 a současně rychlostí v_2 (jejíž

orientace je opačná k původní rychlosti bodu B). Podle principu nezávislosti pohybů se bod A pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem s výslednou rychlostí w , která se rovná vektorovému součtu rychlostí v_1 a v_2 (obr. 6). Minimální vzdálenost obou bodů je v tomto případě vzdáleností nehybného bodu B od polopřímky p , po které se pohybuje bod A . Je-li X libovolný vnitřní bod polopřímky p , můžeme tuto polopřímku zapsat jako PX .

Parametrické rovnice polopřímky PX jsou

$$\begin{aligned}x &= tw_1, \\y &= tw_2,\end{aligned}\tag{1}$$

kde parametr $t \in R_0^+$ vyjadřuje dobu pohybu bodu A od počátku děje, kdy byl $A \equiv A_0 \equiv P$.

Protože platí, že

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

kde $\mathbf{v}_1 = (v_1 \cos \alpha; v_1 \sin \alpha)$ a $\mathbf{v}_2 = (v_2; 0)$,

lze parametrické rovnice (1) psát ve tvaru

$$\begin{aligned}x &= t(v_1 \cos \alpha + v_2), \\y &= tv_1 \sin \alpha\end{aligned}\tag{2}$$

Při $t \in (-\infty, \infty)$ popisují rovnice přímku PX , při $t \in [0, \infty)$ polopřímku PX . Vzdálenost bodů A, B bude nejmenší v okamžiku, kdy bod $A \equiv C$, $C \in PX \cap q$, kde přímka q je dána bodem $B = [d; 0]$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$.

Užitím skalárního součinu vypočítáme souřadnice vektoru $\mathbf{u}$;

$$\mathbf{u} = (-v_1 \sin \alpha; v_1 \cos \alpha + v_2)$$

Parametrické rovnice přímky q jsou

$$\begin{aligned}x &= d - sv_1 \sin \alpha \\y &= s(v_1 \cos \alpha + v_2),\end{aligned}\text{ kde parametr } s \in R.\tag{3}$$

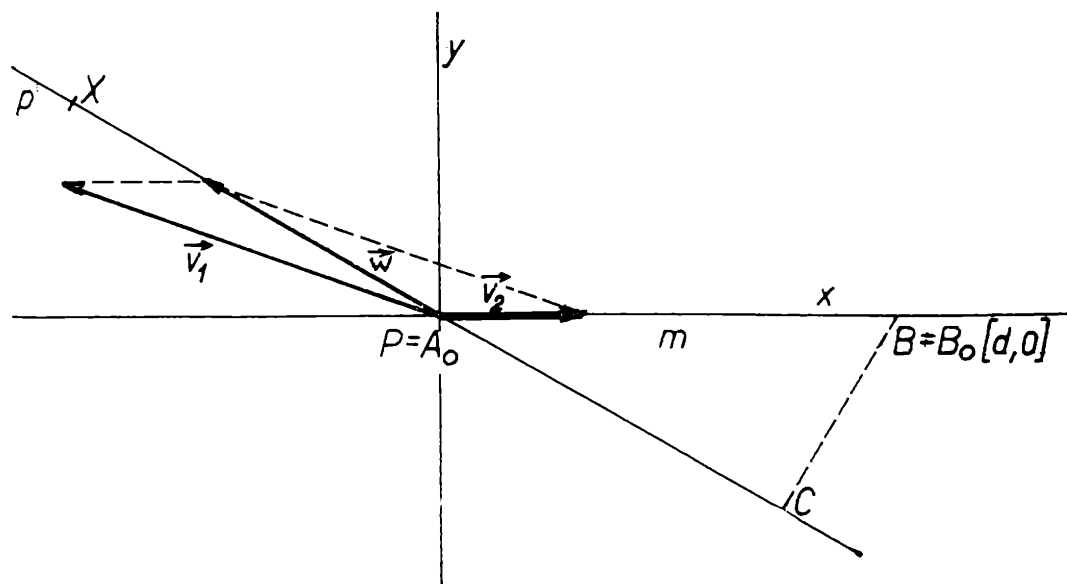
$C \in PX \cap q$

$$\begin{aligned}t(v_1 \cos \alpha + v_2) &= d - sv_1 \sin \alpha \\tv_1 \sin \alpha &= s(v_1 \cos \alpha + v_2)\end{aligned}\tag{4}$$

Ze soustavy rovnic (4) vyjádříme hledanou hodnotu t_c

$$t_c = \frac{d(v_1 \cos \alpha + v_2)}{v_1^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha + v_2^2}.\tag{5}$$

Po dosazení zadaných hodnot do vztahu (5) vypočteme, že $t_c = 3$ hodiny.



Pozn.: Je-li $PX \cap q = \emptyset$ nebo je-li $PX \cap q = \{P\}$, to znamená, nastane-li případ $t \leq 0$ (obr. 7), je hledaná minimální vzdálenost lodí opět vzdálenost bodu B od PX , v tomto případě je to vzdálenost d bodů B, P , tedy stejně jako v předcházejícím řešení.

Je-li $t > 0$, můžeme minimální vzdálenost lodí počítat jako

- vzdálenost bodů B, C ,
- vzdálenost bodu B od přímky $p = PX$.

a) Máme $B = [156, 0]$. Souřadnice bodu C určíme z parametrických rovnic (2), dosadíme-li číselné údaje ze zadání příkladu a za t vypočtenou hodnotu 3.

$$\begin{aligned} x &= 3 \left(16 \frac{1}{2} + 40 \right) = 144 \\ y &= 3 \cdot 16 \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \end{aligned} \quad C = [144; 24\sqrt{3}]$$

$$\text{Vzdálenost bodů } BC = \sqrt{(156 - 144)^2 + (-24\sqrt{3})^2} = 12\sqrt{13} \doteq 43,27$$

- Z (2) plyne, že parametrické rovnice přímky p jsou

$$\begin{aligned} x &= 48t \\ y &= 8\sqrt{3}t, \text{ kde } t \in R \end{aligned}$$

Eliminací parametru t dostaneme rovnici přímky p : $\sqrt{3}x - 6y = 0$. Pak vzdálenost bodu $B = [156; 0]$ od přímky $\sqrt{3}x - 6y = 0$ je

$$x = \frac{|156\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-6)^2}} = 12\sqrt{13} \doteq 43,27$$

Minimální vzdálenost lodí je 43,27 km.

Druhé řešení je početně snazší a nevyžaduje znalost derivací. Potěšitelné je však na něm především to, že studenti dovedli při řešení příkladu tvořivě využít i poznatků z fyziky.

Afinní elace

ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF UK Praha

V hodinách matematiky jste se zabývali některými druhy geometrických zobrazení v rovině a studovali jste jejich vlastnosti. Znáte osovou a středovou souměrnost, posunutí, otočení a stejnoolehlost. Ti z vás, kdo studují deskriptivní geometrii, poznají ještě osovou afinitu a základy středové kolineace. Každé z těchto zobrazení můžeme popsat také početně pomocí rovnic zobrazení. Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic vhodně (samodružné body daného zobrazení leží na některé z os souřadnic), jsou rovnice jednoduché.

Příklad 1: Určete, které ze známých zobrazení je dáno těmito rovnicemi:

$$\begin{aligned}x' &= x \\ y' &= -y\end{aligned}\tag{1}$$

Soustavou rovnic (1) je dáno zobrazení **Z**. Má-li libovolný bod L roviny v dané kartézské soustavě souřadnic souřadnice $[x, y]$, pak je bod o souřadnicích $[x', y']$ z (1) obrazem bodu L v zobrazení **Z**. Zobrazení **Z** je osová souměrnost, jejíž osou je osa x kartézské soustavy souřadnic.

Příklad 2: V rovině je dána kartézská soustava souřadnic a zobrazení **S**, **T** těmito rovnicemi:

$$\begin{array}{ll}\text{S: } x' = -x & \text{T: } x' = x + a \\ y' = -y & y' = y + b\end{array}\tag{2}\tag{3}$$

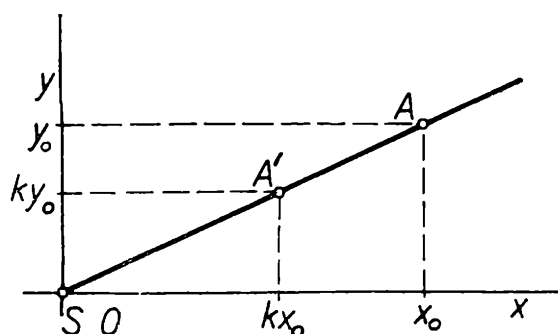
Určete vlastnosti a názvy těchto zobrazení!

Příklad 3: Sestavte zobrazovací rovnice stejnoolehlosti **H** v rovině, je-li jejím středem bod S a koeficient stejnoolehlosti číslo $k \neq 0$, $k \neq 1$.

Řešení: Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby střed stejno-
lehlosti — bod S — ležel v jejím počátku (obr. 1). Nechť má libovolný
bod roviny vzhledem k této soustavě souřadnic souřadnice $[x_0, y_0]$.
Obraz bodu A — bod A' — musí mít souřadnice $[kx_0, ky_0]$.

$$\mathbf{H}: x' = kx$$

$$y' = ky \quad k \neq 0, \quad k \neq 1 \quad (4)$$



Obr. 1

Obrazem počátku $O = [0, 0]$ je bod $O' = [0, 0]$. Protože $k \neq 0$, není počátek obrazem žádného jiného bodu roviny. Protože $k \neq 1$, platí pro každý bod X , že

$$X \neq O \Rightarrow X \neq X',$$

tj., zobrazení $\mathbf{H}$ dané rovnicemi (4) má jediný samodružný bod. Ověřte sami, že jsou splněny i další vlastnosti stejnolehlosti!

Nechť je v rovině α dána kartézská soustava souřadnic a zobrazovací rovnice zobrazení $\mathbf{E}$.

$$\mathbf{E}: x' = x + ky$$

$$y' = y, \quad k \neq 0. \quad (5)$$

Pokusme se určit vlastnosti zobrazení $\mathbf{E}$ z rovnic (5)!

Samodružné body zobrazení $\mathbf{E}$.

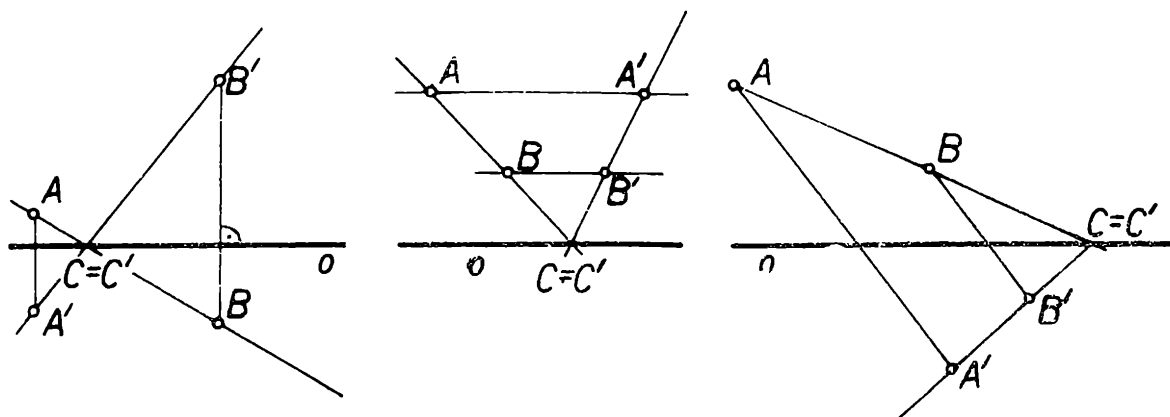
Je-li bod $[x, y]$ samodružným bodem zobrazení $\mathbf{E}$, tj.

$$x = x' \wedge y = y',$$

je (podle (5))

$$x = x + ky$$

Protože $k \neq 0$, je $y = 0$. Všechny samodružné body zobrazení $\mathbf{E}$ leží tedy na ose x . Obráceně též všechny body $[x, 0]$ osy x jsou samodružnými body zobrazení $\mathbf{E}$, jak se přesvědčíte dosazením. Zobrazení $\mathbf{E}$ má tedy jednu přímku samodružných bodů.



Obr. 2

Bod a jeho obraz.

Je-li bod $A' = [x', y']$ obrazem bodu $A = [x, y]$ v zobrazení E , je přímka AA' rovnoběžná s osou x , protože $y' = y$. Vyslovme tento poznatek v jiné formě:

Pro každé dva body A, B roviny α platí:

Jsou-li A, B body neležící na ose x a A', B' jejich obrazy v zobrazení E (daném rovnicemi (5)), jsou přímky AA', BB' rovnoběžné.

Tuto vlastnost má například i osová souměrnost; každá taková přímka AA' je však kolmá k přímce samodružných bodů, zatímco v zobrazení E je přímka AA' rovnoběžná s osou.

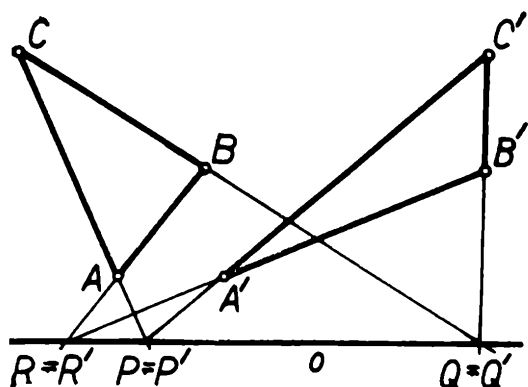
Rovnice (5) můžeme odvodit, je-li dána přímka samodružných bodů (tzv. osa o) a jedna dvojice bodů X, X' (vzor, obraz) taková, že XX' je přímka rovnoběžná s osou. Ale osou o a dvojicí X, X' bodů roviny α neležících na této ose je jednoznačně určena osová afinita v rovině. Zvláštní případ osově afinity již dlouho znáte. Směr osově afinity s je vzhledem k ose o libovolný. Je-li $s \perp o$, hovoří se o pravoúhlé afinitě, tou je například osová souměrnost (obr. 2a). Je-li $s \parallel o$, jde o afinní elaci (obr. 2b), v ostatních případech o šikmou osovou afinitu (obr. 2c).

Protože zobrazení E je osovou afinitou, má všechny vlastnosti této afinity (ověřte je u osově souměrnosti!):

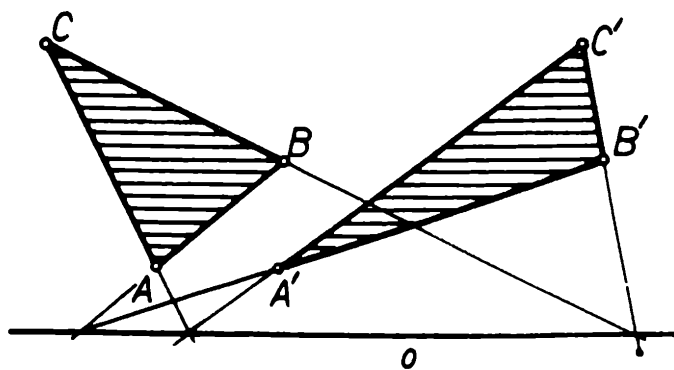
- (a) obrazem každé přímky p roviny je přímka p' ,
- (b) jestliže přímka p protíná osu o v bodě P , prochází bodem P i přímka p' ,
- (c) jsou-li přímky p, q rovnoběžné a p', q' jsou jejich afinní obrazy, jsou i přímky p', q' rovnoběžné,
- (d) je-li bod S' obrazem bodu S , úsečka $A'B'$ obrazem úsečky AB a bod S středem úsečky AB , je také bod S' středem úsečky $A'B'$

Afinní elace má však i další zajímavé vlastnosti. Jedné si všimneme blíže (obr. 3).

Je dána osa o (osa elace) a trojúhelník ABC . V elaci E ($o, C \rightarrow C'$) je jeho obrazem trojúhelník $A'B'C'$. Samodružné body přímek AB, BC, AC



Obr. 3



Obr. 4

jsou body R, P, Q . Trojúhelníky $\triangle PCQ$, $\triangle PC'Q$ mají stejné obsahy ($PQ = P'Q'$, $v_C = v_{C'}$). Určíme další takové dvojice trojúhelníků:

$$\begin{aligned} P_{\triangle PAR} &= P_{\triangle PA'R} \\ P_{\triangle QBR} &= P_{\triangle Q'B'R}. \end{aligned} \quad (6)$$

Pro obsahy čtyřúhelníků $PABQ$, $PA'B'Q$ platí:

$$\begin{aligned} P_{\text{t}PABQ} &= P_{\triangle QBR} - P_{\triangle PAR} \\ P_{\text{t}PA'B'Q} &= P_{\triangle Q'B'R} - P_{\triangle PA'R}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ze (6) a (7) vyplývá: obsahy čtyřúhelníků $PABQ, PA'B'Q$ jsou si rovny. Porovnejme obsahy trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$:

$$\begin{aligned} P_{\triangle A'B'C'} &= P_{\triangle PC'Q} - P_{\text{t}PA'B'Q} \\ P_{\triangle ABC} &= P_{\triangle PCQ} - P_{\text{t}PABQ} \end{aligned} \quad (8)$$

Tedy: obsahy obou trojúhelníků jsou si opět rovny.

Dokažte stejné tvrzení v případě, že jedna strana trojúhelníka ABC je rovnoběžná s osou elace!

Afinní elace zachovává obsahy trojúhelníků.

Tuto vlastnost mají všechna shodná zobrazení, afinní elace však není shodné zobrazení, a přesto je „plochojevné“.

Na závěr si prohlédněte obr. 4! Nepřípomíná vám Cavalieriho princip? Pokud jste o něm již slyšeli, pokuste se vyslovit větu obdobnou větě Cavalieriho pro rovinu!

Afinní elace zobrazuje zřejmě trojúhelník na trojúhelník, rovnoběžník na rovnoběžník, ale nezobrazuje každý čtverec na čtverec (zobrazte si některý čtverec se stranou na ose elace). Co se však stane s kružnicí v elaci? Zobrazte si větší počet bodů kružnice v elaci, jejíž osa je průměrem kružnice; přesvědčte se, že získáte elipsu. Sdružené průměry této elipsy jsou obrazy dvou kolmých průměrů kružnice.

Lineární a statistická závislost

RNDr. JIŘÍ SKUHRA, Praha

V minulém článku v č. 7 jsme definovali statistiky: *aritmetický průměr, rozptyl a směrodatnou odchylku*. Pak jsme se zabývali statistickou závislostí. Na závěr jsme si odvodili vztah mezi aritmetickými průměry a mezi rozptyly dvou znaků vázaných lineárním vztahem. Jsou-li a, b konstanty a pro znaky X, Y platí $Y = aX + b$, pak pro aritmetické průměry platí $\bar{y} = a\bar{x} + b$ a pro rozptyly platí $s_y^2 = a^2 s_x^2$.

Představme si, že rozsah statistického souboru je veliký. Potřebujeme znát hodnoty základních statistik pro důležité rozhodnutí, ale úplné šetření by bylo příliš nákladné. Provedeme tedy náhodný výběr a získanou část statistického souboru zpracujeme obvyklým způsobem. Musíme však při rozhodování mít na mysli, že získané hodnoty nejsou vypočítány z celé populace, ale jen z její části, a že jde tedy o více méně přesné *odhady skutečných hodnot*. V tomto případě také přesněji mluvíme o *výběrovém aritmetickém průměru* a *výběrovém rozptylu*. Používáme pro ně stejné symboly $\bar{x}, s_x^2$. Abychom symbolicky rozlišili výběrové statistiky a (teoretické) statistiky vážící se na celý soubor, značíme ty druhé po řadě symboly $EX, \text{var}X$. V tomto článku budeme potřebovat vlastnost teoretického rozptylu, o kterém jsme již mluvili. V nové symbolice je vlastnost vyjádřena vzorcem

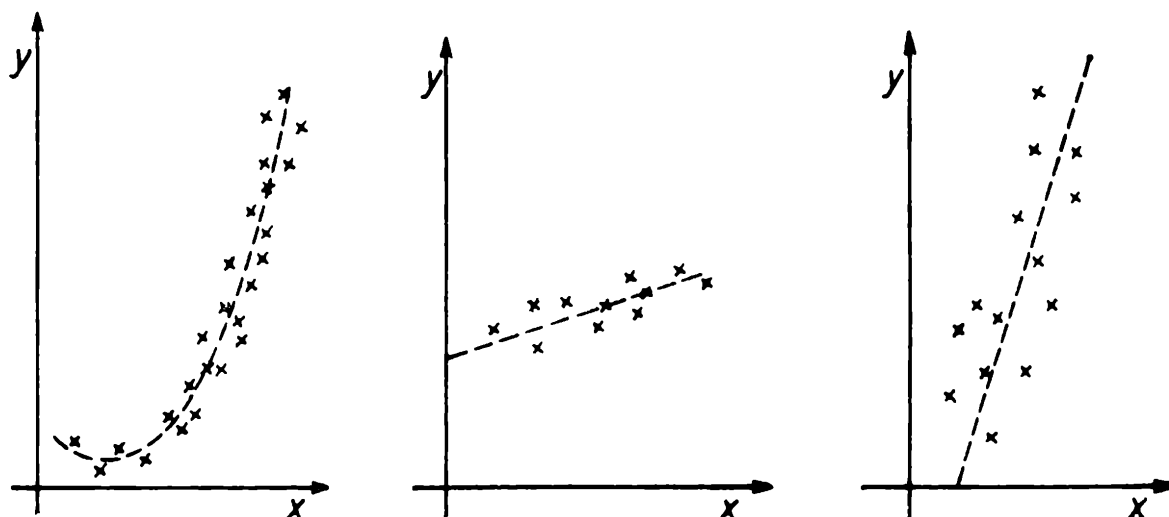
$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}X$$

Tématem tohoto článku jsou dva případy regrese. Cíl regrese si můžeme naznačit na obr. 1, kde body znázorňují dvojice hodnot $[x_i, y_i]$ dvou znaků X, Y změřených na jednotkách nějakého souboru. „Mezi“ sestrojenými body kreslíme graf nějaké jednoduché funkce, který se k nim „co nejvíce“ přibližuje. Tuto funkci nazýváme *regresní funkcí*; pro jednoduchost se zaměříme na lineární regresi, která si klade za cíl nalézt regresní přímku.

1. Lineární regrese procházející počátkem

Vyjdeme z příkladu. Při zjišťování velikosti odporu příslušného prvku elektrického obvodu byly naměřeny tyto hodnoty proudu a napětí:

I [A]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
U [V]	5,2	9,9	14,8	20,1	25,0	29,9	34,8	40,3	45,0	50,1



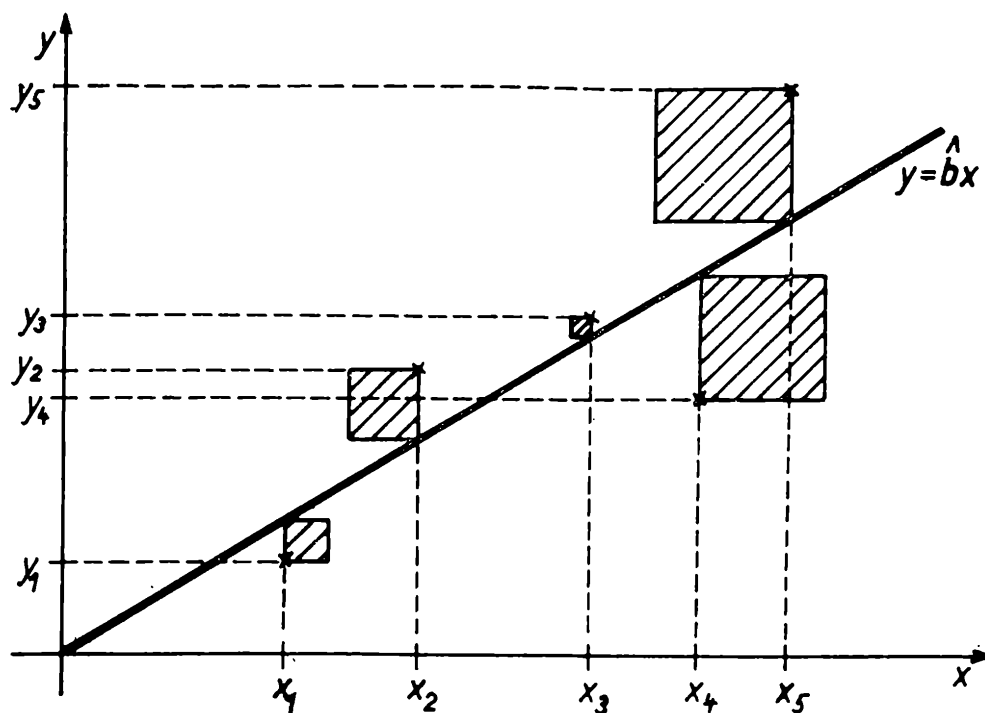
Obr. 1

Ten, kdo bude uvedené výsledky zpracovávat tak, že si z naměřených hodnot vypočte deset různých hodnot odporu a z těchto hodnot pak vypočítá pravděpodobnou hodnotu $R = 48,9 \, \Omega$ a střední chybu $\bar{\delta} = 0,75 \, \Omega$, dopustí se velké chyby. Statistické zpracování naměřených hodnot veličin přímo měřitelných je jiné než veličin, které přímo neměříme, ale vypočítáváme je z naměřených hodnot jiných veličin. O tomto problému se můžete více dovědět z knížky R. Košťála: *Hodnoty a chyby veličin měřených a vypočítaných*, kterou vydalo SPN v roce 1972 v edici ŠMF. My k tomuto problému přistoupíme z jiné strany.

Z fyziky víme, že mezi proudem I , napětím U a odporem R existuje vztah zvaný Ohmův zákon, kterým je veličina elektrický odpor definována. Dále víme, že elektrický odpor je pro daný obvod veličina konstantní. Závislost napětí na proudu lze zapsat jako lineární funkci $U = RI$. Napětí U a proud I jsou přístupné přímému měření přístroji. Nás zajímá, jak určit pravděpodobnou hodnotu odporu R a velikost chyby tohoto odhadu.

Zkoumejme tento matematický model. Můžeme měřit hodnoty veličin X, Y a víme, že mezi nimi má platit lineární vztah $Y = bX$. Při sběru dat získáme N dvojic (x_i, y_i) , což znamená, že i -tá statistická jednotka vykázala hodnotu znaku X rovnou x_i a hodnotu znaku Y rovnou y_i . Při měření působily náhodné chyby. Pro jednoduchost předpokládejme, že hodnoty x_i naměříme přesně (lze je tedy pokládat za konstanty), kdežto hodnoty y_i jsou ovlivňovány náhodnými chybami e_i . Přitom pro teoretický rozptyl platí $\text{var} Y = \text{var} y_1 = \text{var} y_2 = \dots = \text{var} y_N$; teoretická hodnota rozptylu jednotlivých realizací veličiny Y je nutně stejná jako teoretická hodnota rozptylu veličiny Y . Předpokládejme tedy mezi naměřenými hodnotami pro každé $i = 1, \dots, N$ vztah

$$y_i = bx_i + e_i.$$



Obr. 2

Nyní přistoupíme k hledání odhadu regresního koeficientu b . Odhad provedeme *metodou nejmenších čtverců*. Protože chceme, aby chyba odhadu byla co nejmenší, klademe si požadavek, aby součet čtverců chyb byl co nejmenší. Hledáme takový odhad $\hat{b}$ regresního koeficientu b , aby forma

$$S = \sum e_i^2 = \sum (y_i^2 - bx_i)^2$$

nabyla minimální hodnoty. Geometricky jde o to, dosáhnout nejmenšího součtu obsahů čtverců, viz obrázek 2 pro $N = 5$. Odtud má tato metoda své jméno.

Součet čtverců S lze pokládat za funkci jedné proměnné b . Nutná podmínka pro to, aby S nabyla v bodě $\hat{b}$ svého minima, je to, že derivace S podle b se v bodě $\hat{b}$ rovná nule.

$$\frac{dS(\hat{b})}{db} = 2\sum(y_i - \hat{b}x_i)(-x_i) = -2(\sum y_i x_i - \hat{b}\sum x_i^2) = 0$$

Úpravou dostáváme *normální rovnici*

$$\hat{b} \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

Odhad regresního koeficientu b metodou nejmenších čtverců je

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

Protože

$$\begin{aligned}
 S &= \sum (y_i - bx_i)^2 = \sum (y_i - \hat{b}x_i + \hat{b}x_i - bx_i)^2 = \\
 &= \sum [(y_i - \hat{b}x_i) + x_i(\hat{b} - b)]^2 = \\
 &= \underbrace{\sum (y_i - \hat{b}x_i)^2}_{S_0} + 2(\hat{b} - b) \underbrace{\sum (x_i y_i - \hat{b}x_i^2)}_{=0} + (\hat{b} - b)^2 \sum x_i^2 = \\
 &= S_0 + (\hat{b} - b)^2 \sum x_i^2 \geq S_0,
 \end{aligned}$$

nabývá funkce $S(b)$ v bodě $\hat{b}$ skutečně minima. Minimální hodnota se značí S_0 a nazývá se *residuální součet čtverců*. Dosazením $\hat{b}$ do S za b a upravením získáme vzorec, pomocí kterého můžeme snadno residuální součet čtverců počítat.

$$S_0 = \sum (y_i - \hat{b}x_i)^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2}$$

Odhad směrodatné odchylky (střední chyby) veličiny Y je

$$s_Y = \sqrt{\frac{S_0}{N-1}}.$$

Odhad směrodatné odchylky odhadu b dostaneme teoretickou úvahou. Použijeme vlastnosti teoretického rozptylu, formulované v předchozím článku, a předpokladů učiněných v tomto článku.

$$\begin{aligned}
 \text{var } b &= \text{var } \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} \text{var } \sum x_i y_i = \\
 &= \frac{1}{(\sum x_i^2)^2} \sum x_i^2 \text{var } y_i = \frac{\text{var } Y}{\sum x_i^2}
 \end{aligned}$$

Tento výsledek přepíšeme pro výběrové rozptyly

$$s_b = \frac{s_Y}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

Pro náš příklad po výpočtech dostaneme

$$\begin{aligned}
 R &= 50,03 \, \Omega, \\
 s_R &= 1,25 \, \Omega
 \end{aligned}$$

2. Obecná lineární regrese

Mějme dva znaky X, Y a předpokládejme o nich, že jsou spolu v lineárním vztahu $Y = a + bX$. Budeme studovat závislost se dvěma regresními koeficienty a, b . Naměřené hodnoty spolu souvisejí formulí $y_i = a + bx_i + e_i$ pro každé $i = 1, \dots, N$; čísla e_i jsou náhodné chyby

a platí všechny předpoklady vyslovené u lineární regrese procházející počátkem.

Odhad regresních koeficientů a , b provedeme opět metodou nejmenších čtverců. Tentokrát nebudeme dělat detailní úpravy a odvození. To přenechávám čtenáři jako cvičení.

Položíme-li derivace součtu čtverců chyb

$$S = \sum (y_i - a - bx_i)^2$$

rovný nule, dostaneme soustavu normálních rovnic pro odhady $\hat{a}$, $\hat{b}$ regresních koeficientů a , b .

$$\begin{aligned} N\hat{a} + \hat{b} \sum x_i &= \sum y_i, \\ \hat{a} \sum x_i + \hat{b} \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme a dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}, \\ \hat{a} &= \bar{y} - \hat{b}\bar{x}. \end{aligned}$$

Jestliže rozšíříme zlomek u odhadu $\hat{b}$ číslem $1/(N - 1)$, můžeme psát

$$\hat{b} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

Residuální součet čtverců je po úpravě

$$S_0 = \sum (y_i - a - bx_i)^2 = \sum y_i^2 - N\bar{y}^2 - \hat{b}(\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y})$$

a odhad střední chyby s_y je

$$s_y = \sqrt{\frac{S_0}{N - 2}}$$

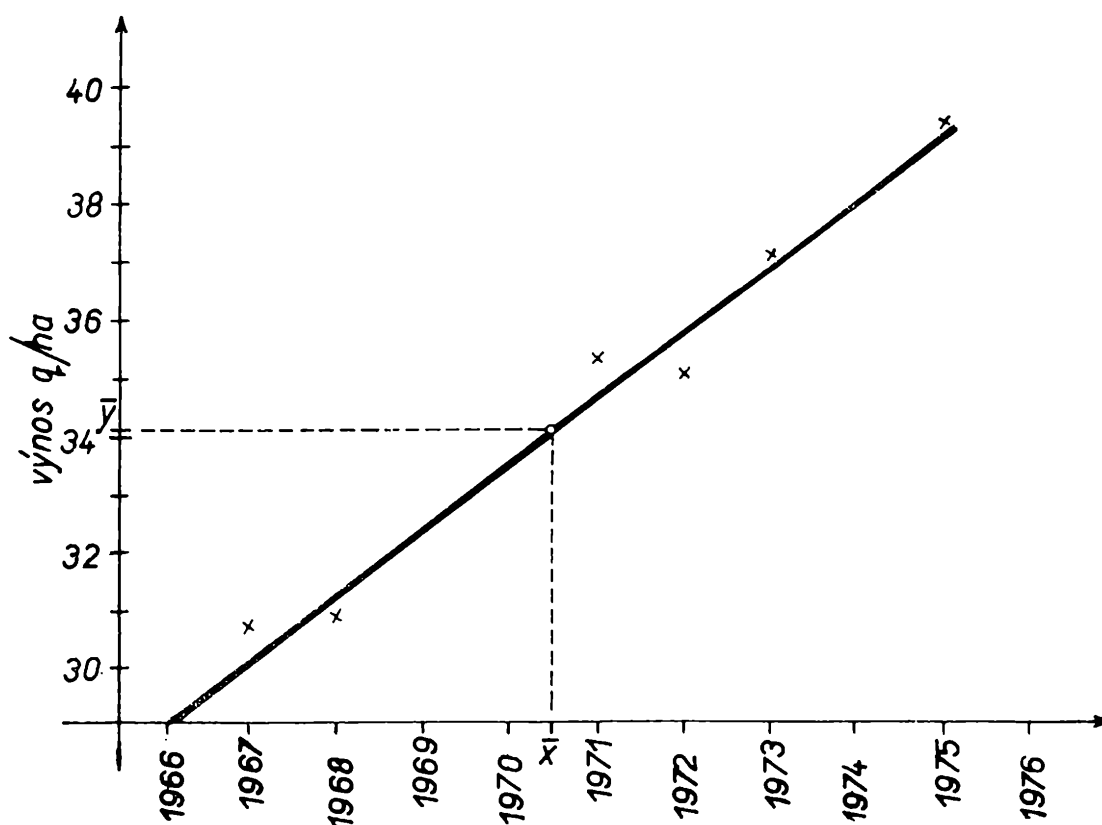
Residuální součet čtverců S_0 dělíme číslem $N - 2$ proto, že naměřené hodnoty jsou vázány dvěma podmínkami: $\sum x_i = N\bar{x}$, $\sum y_i = N\bar{y}$. Stejným postupem jako v předchozím případě dostaneme odhad pro chybu odhadu $\hat{b}$ regresního koeficientu b

$$s_b = \frac{s_y}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}};$$

použijeme přitom úpravy

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2} = \frac{\sum (x_i y_i - \bar{x}\bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum y_i (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

Obr. 3



Regresní přímka $y = \hat{a} + \hat{b}x$ prochází vždy bodem $[\bar{x}, \bar{y}]$, jak ukazuje tato úprava

$$y = \hat{a} + \hat{b}x = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} + \hat{b}x = \bar{y} + \hat{b}(x - \bar{x})$$

V tomto článku jsme si odvodili všechny vzorce a vlastnosti, kterých jsme použili při řešení problému délky sosáku včely *Apis mellifica* v článku nazvaném Včely a matematika. Příště použijeme vysvětlené teorie a vzorců lineární regrese v některé jiné lidské činnosti.

3. Aplikace lineární regrese v plánování

Podařilo se mi získat skutečné hodnoty hektarových výnosů obilovin dosažených v jistém JZD, tyto údaje jsou uvedeny v připojené tabulce. Předpokládejme, že jsou splněny všechny předpoklady nutné pro použití lineární regrese, a uijme získaných výsledků k vyslovení prognózy na 1. rok 6. pětiletky.

Dosazení do vzorců a podrobné výpočty přenechávám čtenářům jako cvičení. Po určitých numerických útrapách dostanete regresní přímku

$$y = -2231,9 + 1,15x$$

a odhady chyb veličiny y a regresního koeficientu b

$$s_y = 1,57 \quad s_b = 0,17$$

pořadí	rok x_i	výnos q/ha y_i
1	1966	31,2
2	1967	30,7
3	1968	30,9
4	1969	29,8
5	1970	31,9
6	1971	35,2
7	1972	34,8
8	1973	37,2
9	1974	40,0
10	1975	39,5

Z grafu 3 lze vyčíst, že v posledních letech minulého desetiletí výroba obilovin stagnovala a že v páté pětiletce došlo k jejímu rozvoji. Příčiny z grafu nevyčteme, ale z jiných pramenů víme, že je to způsobeno intenzifikací našeho zemědělství.

Regresní přímku použije ekonom družstva pro plánování. Dosadí za x rok 1976 a tak dostane hodnotu 40,5 q/ha, která bude sloužit jako prognóza na rok 1976. Tuto prognózu jsme dostali, stejně jako ekonom družstva, extrapolací skutečných hodnot získaných v průběhu minulých deseti let. Přitom rozmary počasí a další faktory, které ovlivňují velikost výnosu, jsou zhodnoceny v chybě veličiny y . S pravděpodobností 0,68 lze očekávat skutečný výnos dosažený v roce 1976 v intervalu (38,9 q/ha; 42,1 q/ha).

Stejným způsobem bychom mohli provést prognózu pro celou šestou pětiletku, ale museli bychom uvažovat i chybu regresního koeficientu. K odhadu chyby extrapolované hodnoty y , řekněme pro rok 1980, se musíme dostat přes relativní chyby. Základem nám bude celková směrodatná odchylka

$$s_c = \sqrt{s_Y^2 + s_b^2} = 1,58.$$

a dále relativní chyba, vztažená na aritmetický průměr $y = 34,12$, a ta je 4,7%. Tedy skutečný výnos v roce 1980 lze s pravděpodobností 0,68 očekávat v intervalu (43,0 q/ha; 47,4 q/ha). Absolutní chyba se tímto postupem ovšem stále zvětšuje. Proto je nutno plán každý rok upřesňovat tím, že extrapolaci na rok 1977 vypočteme pomocí nové regresní funkce, kterou nalezneme již také ze známého skutečného výnosu v roce 1976 atd. Extrapolace o jeden rok je rozhodně přesnější a není zatížena takovou chybou jako extrapolace o pět let, která díky tak velké chybě už v podstatě postrádá reálného významu. K tomu, provádět extrapolaci vždy pouze o rok, nás vede také vědomí, že zvyšování

výnosů má nějakou objektivní hranici (biologické příčiny), kterou nelze překročit, a tedy nemůžeme do nekonečna používat jen lineární regrese. Každý rok je nutno znovu ověřit aspoň bodovým grafem, zda je lineární regrese ještě použitelná. Ale nemylte se! Existují přesnější metody k rozhodnutí, zda je možno použít lineární regrese, než je bodový graf.

Lineární regrese a regrese vůbec je jedním ze statistických prostředků, které nám umožňují seriózně plánovat rozvoj našeho národního hospodářství a zároveň nám ukazují přesnost našich předpovědí.

konstruktivní geometrie

Cassiniho křivky a Bernoulliho lemniskáta

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

V tomto článku budeme vyšetřovat *množiny všech bodů, které mají od dvou (různých) bodů stálý součin vzdáleností*.

Nechť dané body mají souřadnice $E_1[-e, 0]$, $E_2[e, 0]$ při $e > 0$ a nechť bod $X[x, y]$ náleží hledané množině. Označíme-li danou konstantu s^2 (jde o součin), platí pro body X hledané množiny

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = s^2.$$

Po umocnění dostaneme

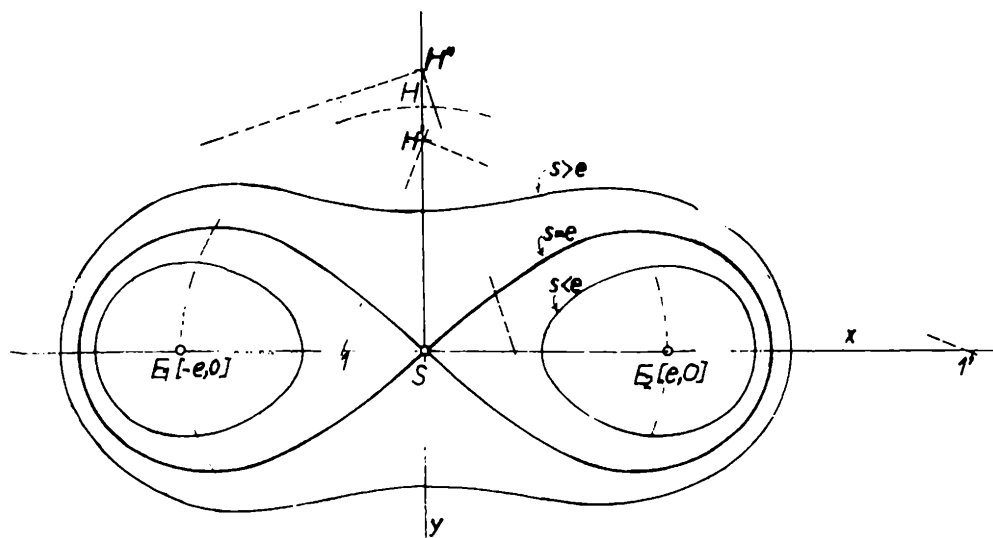
$$[(x+e)^2 + y^2] [(x-e)^2 + y^2] = s^4$$

a po úpravách získáme

$$\begin{aligned} (x^2 + e^2 + y^2)^2 - 4x^2e^2 &= s^4, \\ (x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)e^2 - 4x^2e^2 &= s^4 - e^4, \\ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)e^2 &= s^4 - e^4. \end{aligned} \tag{1}$$

Platí též obráceně, že bod $X[x, y]$, jehož souřadnice splňují tuto rovnici, má vlastnost $E_1X \cdot E_2X = s^2$.

Ptejme se, zda hledaná množina má nějaké body na osách x, y zvolené soustavy souřadnic.



Přímka E_1E_2 má rovnici $y = 0$, body $[x, 0]$ množiny splňují rovnici

$$x^4 - 2x^2e^2 - (s^4 - e^4) = 0$$

s diskriminantem

$$D = 4e^4 + 4s^4 - 4e^4 = 4s^4 > 0$$

Tuto rovnici můžeme psát

$$(x^2 - e^2 + s^2)(x^2 - e^2 - s^2) = 0,$$

z níž dostaneme

$$x^2 = e^2 - s^2 \quad \text{nebo} \quad x^2 = e^2 + s^2.$$

Při každé dvojici e^2, s^2 dostáváme body $[\sqrt{e^2 + s^2}, 0], [-\sqrt{e^2 + s^2}, 0]$; při $e^2 = s^2$ navíc i bod $[0, 0]$ a při $e^2 > s^2$ navíc dva body

$$[\sqrt{e^2 - s^2}, 0], [-\sqrt{e^2 - s^2}, 0].$$

Osa úsečky E_1E_2 má rovnici $x = 0$, body $[0, y]$ množiny splňují rovnice

$$y^4 + 2e^2y^2 - (s^4 - e^4) = 0$$

s diskriminantem

$$D = 4e^4 + 4s^4 - 4e^4 = 4s^4 > 0;$$

$$(y^2 + e^2 - s^2)(y^2 + e^2 + s^2) = 0,$$

pak platí

$$y^2 = s^2 - e^2 \quad \text{nebo} \quad y^2 = -(e^2 + s^2)$$

Dostáváme tak při $e^2 < s^2$ dva body $[0, \sqrt{s^2 - e^2}], [0, -\sqrt{s^2 - e^2}]$, při $e^2 = s^2$ jediný bod $[0, 0]$. Při $e^2 > s^2$ prázdnou množinu.

V obrázku 1 je zobrazeno několik vyšetřovaných množin bodů. Jde zřejmě o křivky, které mají s osami x, y různé počty průsečíků (nejvýše čtyři na ose x a nejvýše dva na ose úsečky E_1E_2).

Při konstrukci jednotlivých bodů těchto množin bylo užito Euklidovy věty pro výšku v pravoúhlém trojúhelníku lHl' . Je-li $SH = s$, $S1 = \varrho_1$, $S2 = \varrho_2$, pak platí $SH^2 = S1 \cdot S1'$, tj. $s^2 = \varrho_1 \cdot \varrho_2$. Kružnice opsaná kolem bodu $E_1(E_2)$ poloměrem ϱ_1 protíná kružnici opsanou kolem bodu $E_2(E_1)$ poloměrem ϱ_2 v bodech vyšetřované množiny. Podrobněji je konstrukce vyznačena na obr. 2 pro případ $s = e$. V obr. 1 je $SH' < e$, $SH'' > e$.

Zdůvodněte, že body $[x, y]$, $[x, -y]$, $[-x, y]$, $[-x, -y]$ patří křivce buď všechny nebo žádný z nich; tím bude dokázáno, že křivky jsou souměrné podle obou os i podle počátku soustavy souřadnic.

Zkoumané křivky se nazývají *Cassiniho křivky*; zahrnují jednak křivky složené ze dvou nesouvisejících uzavřených čar (při $e^2 > s^2$), jednak křivku, která sama sebe protíná (při $e^2 = s^2$), jednak křivky připomínající „preclík“ (na obr. 1 vnější křivka). Přesvědčte se sami, že při $e^2 < s^2$ dostanete zvětšováním parametru s^2 postupně až křivky připomínající ovály. Středem našeho zájmu bude nyní křivka získaná při rovnosti $e^2 = s^2$. A tou je *Bernoulliho lemniskáta*.

Bernoulliho lemniskáta je množinou všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů (ohnisek) stálý součin vzdáleností rovný druhé mocnině poloviční vzdálenosti těchto bodů.

Protože je $e^2 = s^2$, dostaneme z rovnice (1) rovnici *Bernoulliho lemniskáty*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = 0 \quad (2)$$

Snadno zjistíme, že přímky $y = x$, $y = -x$ mají s křivkou (2) právě jeden bod společný. Jsou to její tečny v bodě $[0, 0]$, který je jejím *dvojnásobným uzlovým bodem*.

Průsečíky Bernoulliho lemniskáty s osou x jsou jejími *hlavními vrcholy*. $A[-e\sqrt{2}; 0]$, $B[e\sqrt{2}; 0]$.

Abychom určili její dvojnásob dotykové tečny rovnoběžné s osou x , dosadíme do (2) $y = t$ a určíme podmínku, aby diskriminant rovnice

$$x^4 + 2x^2(t^2 - e^2) + 2e^2t^2 + t^4 = 0 \quad (3)$$

byl roven nule (tj. aby průsečíky uvažované přímky s křivkou po dvou splynuly). Dostaneme

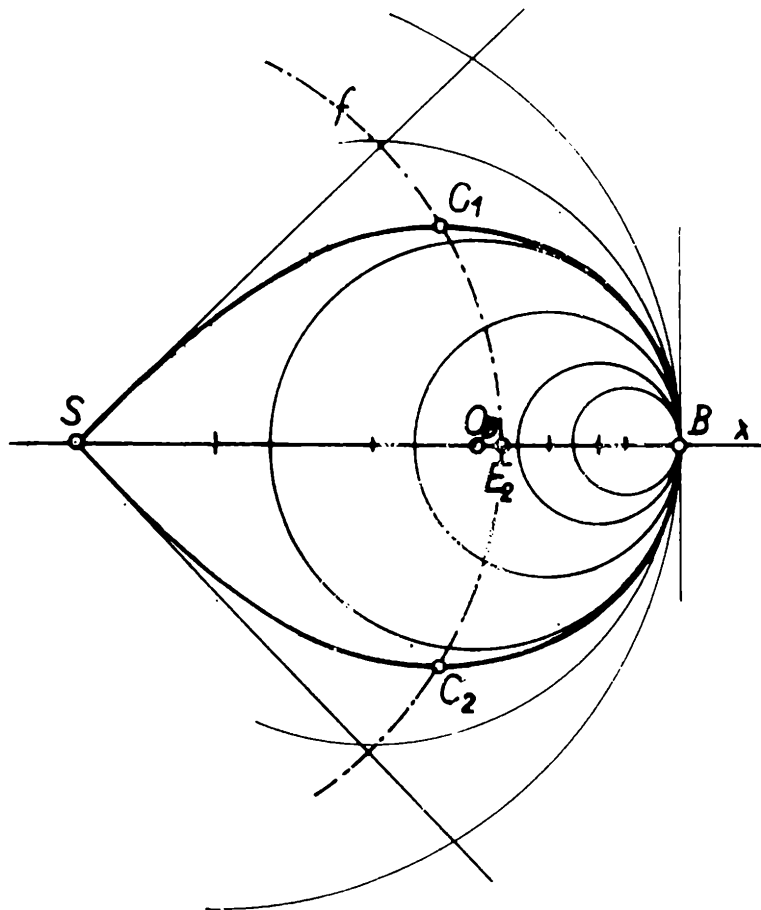
$$D = 4e^2(e^2 - 4t^2) = 0$$

a odtud $t = \frac{e}{2}$ nebo $t = -\frac{e}{2}$. Z rovnice (3) pak vypočteme

$$x = \frac{1}{2} e\sqrt{3}, \quad x = -\frac{1}{2} e\sqrt{3}$$

a získáme (*vedlejší*) *vrcholy*

Obr. 3



Některé z těchto kružnic jsou obsaženy v obrazci omezeném smyčkou lemniskáty, jiné obsahují i body ležící mimo tento obrazec (obr. 3). Hledáme takovou hodnotu m_0 , že pro $0 < m < m_0$ leží některé body kružnice mimo obrazec omezený smyčkou a při $m_0 \leq m < e\sqrt{2}$ leží všechny body kružnice v tomto obrazci. Body obrazce splňují zřejmě podmínku $E_1X \cdot E_2X \leq s^2 + e^2$, jejich souřadnice $[x, y]$ pak vyhovují nerovnicím

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 2e^2(x^2 - y^2), \quad 0 \leq x \leq e\sqrt{2}. \quad (5)$$

Hledejme hodnotu m_0 parametru m :

Z rovnice (4) získáme

$$x^2 + y^2 = 2e^2 - 2em\sqrt{2} + 2xm$$

a po vyjádření

$$2y^2 = 4e^2 - 4em\sqrt{2} + 4xm - 2x^2$$

a odečtení vyjde:

$$x^2 - y^2 = -2e^2 + 2em\sqrt{2} - 2xm + 2x^2.$$

Dosadíme-li do (5), získáme po zkrácení čtyřmi nerovnici

$$(e^2 - em\sqrt{2} + xm)^2 \leq e^2(x^2 + em\sqrt{2} - xm - e^2)$$

a jejími dalšími úpravami

$$m^2(e\sqrt{2} - x)^2 - e^2(e\sqrt{2} - x)(3m - x - e\sqrt{2}) \leq 0.$$

Vzhledem k tomu, že první člen je nezáporný, platí

$$3m - x - e\sqrt{2} \geq 0$$

pro každé $x \in \langle 0, e\sqrt{2} \rangle$ právě tehdy, když $3m - e\sqrt{2} - e\sqrt{2} \geq 0$, tj.
 $m \geq \frac{2}{3} e\sqrt{2}$.

Hledaná hodnota $m_0 = \frac{2}{3} e\sqrt{2}$ určuje souřadnici středu tzv. *hyperoskulační kružnice lemniskáty* v bodě $B[e\sqrt{2}; 0]$, poloměr této kružnice je $\varrho_0 = \frac{1}{3} e\sqrt{2}$

Při rýsování Bernoulliho lemniskáty je tedy výhodné sestrojit bod ve třetině úsečky SB bližší k bodu B a opsat kolem něho kružnici procházející bodem B .

Podstatně obtížnějším způsobem lze vypočítat i poloměry *oskulačních kružnic ve vedlejších vrcholech lemniskáty*. Získáme výsledek

$$\varrho = \frac{2}{3} e ,$$

který můžeme uplatnit při pečlivé konstrukci lemniskáty; vzdálenost dvou vedlejších vrcholů na téže smyčce je rovna e , rozdělíme-li jejich nejkratší spojnicí na třetiny, získáme středy oskulačních kružnic. (Všimněte si, že oskulační kružnice mají k obrazci omezenému smyčkou jinou polohu než kružnice hyperoskulační v hlavních vrcholech).

Cvičení :

1. Narýsujte sami Bernoulliho lemniskátu pomocí všech poznatků obsažených v tomto článku, zvolte $e = 4$, $s^2 = 16$. Sestrojte vrcholy a využijte oskulačních i hyperoskulačních kružnic.

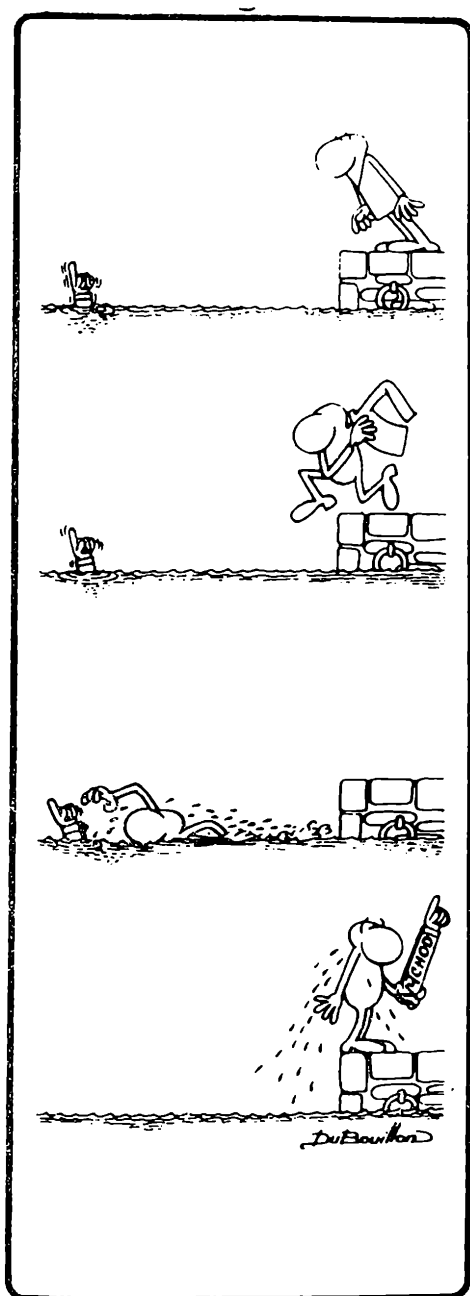
2. Ověřte, že parametrickými rovnicemi s parametrem $t \in R$

$$x = e\sqrt{2} \frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \quad y = e\sqrt{2} \frac{t(1-t^2)}{1+t^4}$$

je vyjádřena Bernoulliho lemniskáta. Určete hodnoty parametru pro vrcholy a střed lemniskáty.

3. Znáte-li polární souřadnice bodů v rovině, přesvědčte se, že Bernoulliho lemniskáta je popsána rovnicí

$$\varrho^2 = 2e^2 \cdot \cos 2\varphi .$$



Jak plovou tělesa?

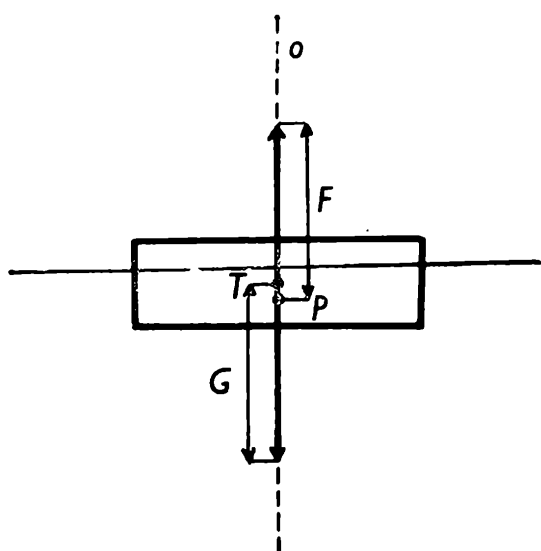
RNDr. OLDŘICH LEPIL, Olomouc

Nepochybuji o tom, že dobře znáte Archimédův zákon, ale položme si otázku: co ví o plování těles kreslíř *Du Bouillon*, jehož vtipnou kresbu jsme použili jako úvod našich úvah. Může dřevěná ruka plovat ve vodě tak, že přiměje obětavého záchránce tonoucích k zákroku s neočekávaným koncem? Za jakých podmínek by nakreslená situace měla reálné jádro?

Abychom si tyto otázky mohli zodpovědět, provedeme abstrakci plovoucí ruky na stejnorodý obdélníkový kvádr zhotovený z materiálu o menší hustotě, než má voda, a rozebereme plování takového předmětu. Budeme uvažovat o dvou základních případech naznačených na obr. 1 a všimneme si, jaké síly na plovoucí kvádr působí.

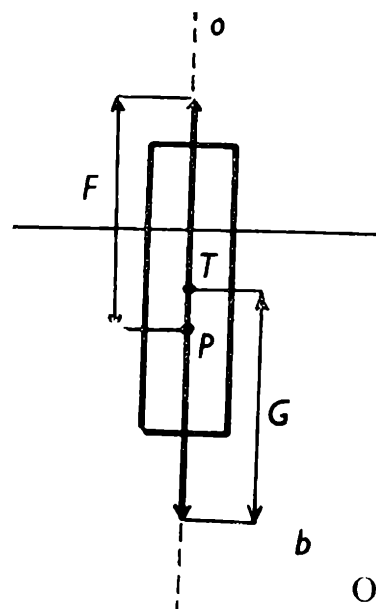
Je to jednak tíhová síla G , jejíž působíště je v těžišti T kvádrů, jednak vztlaková síla F vyvolaná kapalinou, v níž je kvádr ponořen. Poněvadž předpokládám, že čtenář dobře ovládl učivo o Archimédově zákonu, stačí zopakovat, že velikost vztlakové síly určuje tíha kapaliny vytlačené ponořenou částí kvádrů a že její působíště je v těžišti P této ponořené části tělesa.

Dále víme, že podmínkou plování tělesa je rovnováha tíhové a vztlakové síly, takže obě síly jsou stejně veliké, avšak mají opačnou orientaci.



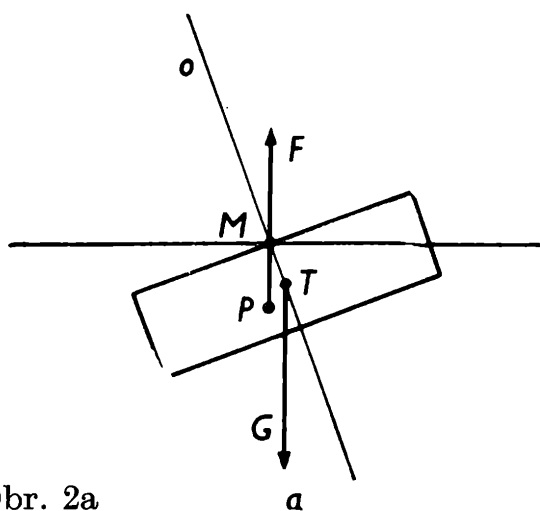
Obr. 1a

a



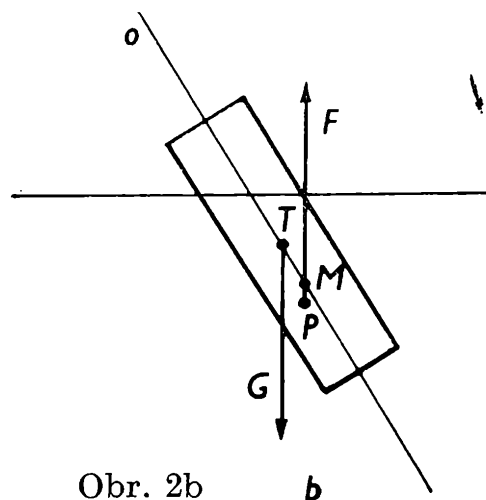
Obr. 1b

b



Obr. 2a

a



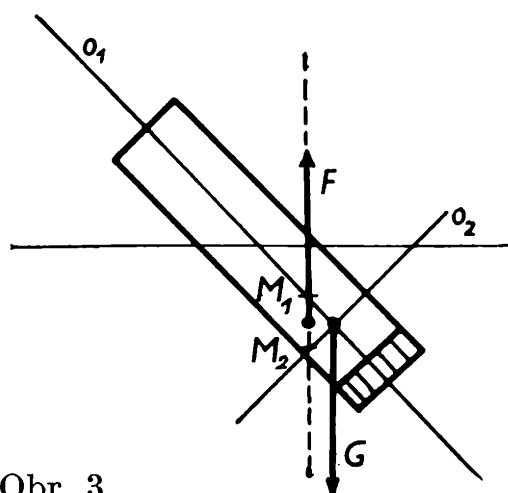
Obr. 2b

b

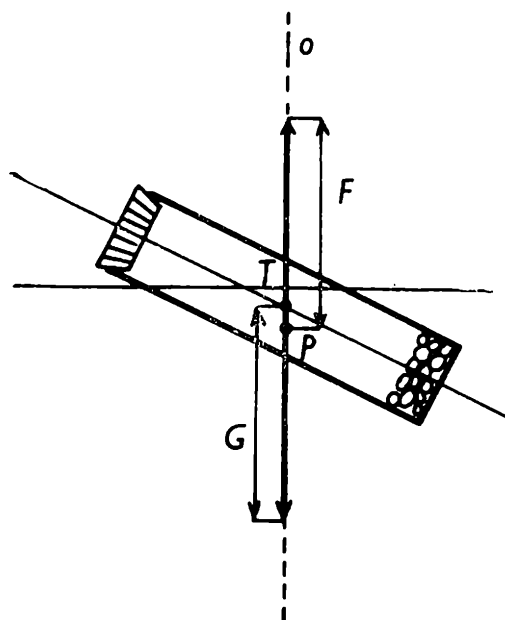
To ovšem neznamena, že rovnovážné podmínky kvádrů budou ve všech jeho polohách stejné. Z názoru i z denní zkušenosti je například zřejmé, že poloha kvádrů na obr. 1a je mnohem pravděpodobnější, než poloha na obr. 1b. To souvisí s rovnovážnou polohou plovoucího tělesa, která může být volná, stálá nebo vratká.

Volná rovnovážná poloha je charakteristická tím, že tíhová síla a vztlaková síla mají společné působíště, čili, že body T a P splývají. Jistě je vám zřejmé, že tento případ může nastat jen u zcela ponořeného tělesa.

V našem případě vyčnívá část plovoucího tělesa nad hladinu, takže působíště tíhové síly a vztlakové síly leží při rovnováze v různých bodech na přímce, kterou označíme osa plování o . O tom, která z poloh kvádrů na obr. 1 je stálá, popř. vratká, rozhodneme na základě poznatku, že



Obr. 3



Obr. 4

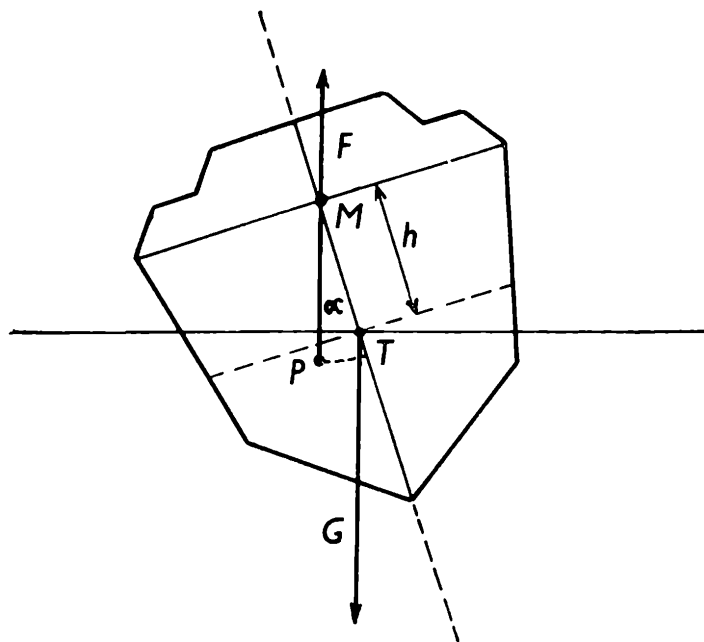
těleso vychýlené z polohy stálé se do ní opět vrací, kdežto těleso vychýlené z polohy vratké přechází do polohy stálé.

Tato situace je naznačena na obr. 2. Vychýlením kváдру z rovnovážné polohy vznikne z obou působících sil dvojice sil, která svým otáčivým účinkem těleso uvede do polohy stálé. Z obrázku 2a je patrné, že se těleso vrací do původní polohy, čili že poloha na obr. 1a je poloha stálá, kdežto z obr. 2b vyplývá, že dvojice sil těleso převede rovněž do polohy na obr. 1a, takže na obr. 2b je zobrazena poloha vratká.

Pro posouzení rovnovážné polohy plovoucích těles se zavádí pojem *metacentrum* M , což je bod, v němž se protíná vektorová přímka vztlakové síly F s osou plování vychýlenou ze svislé polohy. Jestliže je metacentrum nad těžištěm tělesa, je poloha tělesa stálá; jestliže je bod M pod těžištěm, zaujímá těleso polohu vratkou. A ovšem, když metacentrum splývá s těžištěm, je těleso v poloze volné.

Vybaveni potřebnou teorií můžeme odpovědět na otázky položené v úvodu. Kreslíř nás zřejmě šidí, když považuje za možné, aby ruka vyřezaná z prkna plovla ve vratké poloze. Ta by nepochybně plovla „jako prkno“, plochou splývající s hladinou. Ale to kreslíři promineme a budeme si myslet, že ruku do vody hodil vtipálek fyziky znalý, který věděl, jak na to, aby ruka plovla v nakreslené poloze.

Zřejmě postačí, když ponořený konec ruky vhodným způsobem zatížíme, ovšem jen tolik, aby se celé těleso nepotopilo. To znamená, že vztlaková síla F bude stále větší než tíhová síla G , ale těžiště tělesa se posune blíže k ponořenému konci. Při určitém zatížení nastane situace naznačená na obr. 3. Metacentrum je nad těžištěm pro podélnou osu o_1 a pod těžištěm pro příčnou osu o_2 , takže zaujímá rovnovážnou polohu, když je podélná osa svislá.



Naše úvahy snadno ověříme experimentálně. Stačí nám k tomu tuba od léků se zátkou, několik skleněných perliček a umyvadlo naplněné vodou.

Prázdná tuba představuje homogenní těleso menší hustoty než má voda a zaujímá rovnovážnou polohu stálou podle obr. 1a. Jestliže na dno tuby vložíme několik málo perliček, zaujme tuba ve vodě polohu, při níž je osa plování v rovnovážné poloze stále šikmá k osám souměrnosti tělesa (obr. 4). Teprve když přidáme několik dalších perliček, plove tuba v poloze svislé a v žádné jiné poloze se neudrží.

Ale nemyslete si, že pojem metacentrum byl zaveden jen pro rozbor kreslených vtipů. Teorie plování, jejíž nejzákladnější myšlenky jsme si naznačili, je velmi důležitá pro konstrukci lodí. Základním požadavkem je, aby se při naklonění lodi působíště vztlakové síly posunulo na tu stranu lodi, na niž se loď naklonila. Tím vzniká dvojice sil, která loď vrací do původní polohy (obr. 5).

Pro stabilitu lodi je důležitá metacentrická výška h , což je vzdálenost metacentra od těžiště ($\overline{TM} = h$). Jestliže se loď nakloní o úhel α , působí na loď dvojice sil

$$M = - mgh \sin \alpha ,$$

která loď uvede do kývavého pohybu. Loď tedy můžeme považovat za fyzické kyvadlo zavěšené v metacentru a při malých amplitudách výchylky pro periodu kmitů lodi platí vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgh}} ,$$

v němž J je moment setrvačnosti lodi.

Jestliže je metacentrická výška větší, je sice loď stabilnější, ale její kymáčení je rychlejší. Proto je vhodnější snížit metacentrickou výšku a prodloužit tak periodu příčného kývání lodi. Současně lze volbou výšky metacentra zabránit rezonanci kývání lodi s nárazy vln, jejichž nejčastější perioda je 6 až 10 sekund.

Stejným způsobem bychom mohli určit také kývání plovoucí ruky, které je na naší úvodní kresbě rovněž naznačeno. Ale k tomu bychom potřebovali znát moment setrvačnosti ruky, což je spojeno s výpočtem, který vyžaduje poněkud podrobnější výklad. Proto se raději zamyslete nad několika závěrečnými otázkami:

1. Jak musíme nastavit tělesa na obr. 3 a 4, aby byla v poloze vratké?
2. V jaké rovnovážné poloze je homogenní dřevěná koule plovoucí ve vodě?
3. Plovoucí tyč můžeme uvést do svislé stálé rovnovážné polohy připevněním zátěže v různých vzdálenostech od konce tyče. Jak ovlivní různá poloha zátěže periodu kmitů plovoucí tyče?
4. Jakým způsobem lze určit polohu působíště vztlakové síly v situacích zachycených na obr. 2?

Nové názory o termodynamike

Dr. JOZEF SKOTNICKÝ, Košice

V posledných desaťročiach sa systematicky konajú pokusy modernizovať didaktiku prírodných vied i matematiky. Do tohoto rámca patrí aj modernizácia termodynamiky, a to z dvoch dôvodov. Termodynamika patrí totiž podľa súhlasného názoru všetkých pedagógov k najťažšie zvládnuteľným partiám prírodných vied, takže *Lewis-Randall* píše v svojej „Termodynamike“ o entropii ako o postrachu študentov. Mimo toho termodynamika má všeobecné prírodovedecké poslanie, lebo je práve tak dôležitá pre fyziku ako pre chémiu a má veľké použitie aj v biologických vedách; jej závery majú však aj filozofický význam, takže spoluvytvárajú aj náš vedecký svetový názor. Pro všetky tieto dôvody by sme sa mali snažiť o dobrú srozumiteľnosť a jasnosť všetkých termodynamických pojmov a viet, aby tieto boli prístupné aj širokej verejnosti.

Súčasná koncepcia termodynamiky však nesplňuje tieto požiadavky a preto sa periodicky opakujú pokusy tieto pomery zlepšiť. K posledným patrí aj dielo „Energia a exergia“ deviatich popredných nemeckých

a juhoslovanských odborníkov. Všetci títo autori patria však k predstaviteľom fyzikálnej resp. technickej termodynamiky, ktorá ale na rozdiel od chemickej poskytuje pre revíziu termodynamiky len málo vhodného materiálu. Táto okolnosť vyplýva aj z vyjadrenia *Z. Ranta*, navrhovateľa názvu exergia, ktorý píše: „Zdá sa logicky aj esteticky neuspokojivým, že tak dôležitý a všetko ovládajúci zákon, akým je druhý zákon termodynamiky, nie je formulovaný jednoduchým a výstižným výrokom, ale môže sa vyjadriť radom rovnako oprávnených ba aj komplikovaných viet.

S revíziou termodynamických pojmov sa zaoberá aj *Lehrmann* v svojom článku „Energy is not the ability to do work“. Opierajúc sa o historické pramene o vývoji pojmu energie pokúša sa o jej definíciu. Pri tom si sťažuje, že vo väčšine učebníc fyziky energia je ztotožňovaná s pracovnou schopnosťou — ability resp. capacity to do work, ačkoľvek to vôbec nie je pravda (it is not true), lebo energia je konzervatívna nezničiteľná veličina, zatiaľ čo pracovná schopnosť systémov sa znižuje. Tieto Lehrmannove názory treba vysoko hodnotiť, lebo každá revízia termodynamiky musí skutočne začínať s diskrimináciou energie, práce a pracovnej schopnosti, teda pojmov, ktoré sú ztotožňované dokonca aj v učebniciach.

V pokračovaní týchto modernizačných snáh chcem upozorniť na rad článkov zdanlivo rozdielnych, publikovaných v *Rozhledoch* (1964/65, 1972/73, 1973/75), ktoré ale tvoria ohniská súvislej reťaze článkov pojednávajúcich o základných pojmoch, zákonoch a rovniciach fyzikálnej a chemickej termodynamiky. Táto tematika reprezentuje ovšem základy našich prírodných vied a môže preto zaujímať každého prírodovedca i filozofa, lebo má aj prírodne-filozofický dosah. Aby čitatelia *Rozhledov* poznali vzájomnú súvislosť uvedených článkov a zoznámili sa tiež s celou problematikou v nich riešenou, v ďalšom sú uvedené nové výsledky, ktoré tieto články priniesli.

1. Bola formulovaná všeobecná rovnica chemickej termodynamiky, ktorá zjednocuje desať najdôležitejších zákonov chemickej termodynamiky v jedinom tvare. Podobnú unifikáciu prírodných zákonov previedol v minulom storočí *Maxwell*, keď zjednotil zákony elektromagnetizmu do svojich štyroch rovníc, a na prelome storočia *Planck* zjednotením troch zákonov žiarenia čierneho telesa do svojej známej rovnice. Všeobecná rovnica chemickej termodynamiky je ovšem platná nie len pre procesy chemické, ale aj pre fyzikálne, ktoré možno písať vo forme chemických rovníc, napr. mrznutie, vyparovanie a podchladenie kapáln aj roztokov, činnosť galvanických a koncentračných článkov a pod., takže rovnica táto má význam tak fyzikálny ako aj chemický. V súlade s tým je v práci otištené v *Der math. naturwiss. Unterricht* 27(1974) obecná rovnica použitá aj na rozbor čiste fyzikálnych dejov premeny skupenstiev čistých látok.

2. Bola podaná nová a jednoznačná interpretácia entropie, podľa ktorej táto je daná záporným logaritmom latentného tlaku látok (násobeným energetickou veličinou). Tak totiž možno predbežne najjednoduchšie vysvetliť pracovnú pohotovosť látok prechádzajúcich z nižších entropií na vyššie a to tým viac, že latentný tlak vo forme osmotického tlaku rozpustených látok je už dávno všeobecne uznaný. Až na základe takéhoto objasnenia entropie mohol byť vybudovaný názorný energetický mechanizmus chemických reakcií. Z uvedenej definície entropie automaticky vyplýva, že latentný tlak látok a tým aj entropie je stavová vlastnosť látok, a je preto zbytočné chcieť to ešte dokazovať pomocou Carnotovho cyklu. Carnotov cyklus má iné poslanie, a to určiť pracovnú schopnosť tepelných lázní (tepla) a ukázať, že všetky látky sú schopné resorbovať teplo z okolia len podľa rovnice $Q = T\Delta S$, tj. priamo úmerne prvej mocnine absolutnej teploty. Táto definícia entropie je jedine správna, lebo sa zakladá na fyzikálne-chemickom prístupe k entropii, ktorý je historicky najstarší a tiež najspoľahlivejší, čím ovšem iné predstavy o entropii nutne strácajú svoju bázu. Treba tu tiež zdôrazniť, že u mnohých látok, najmä u ionov v elektrolytoch, boli novšie namerané záporné entropie, čo možno pomocou latentných tlakov ľahko vysvetliť, ale ťažko podľa doterajších predstáv o entropii.

3. Pojmy voľnej a viazanej energie a preto tiež voľnej enthalpie (ktorá sa od voľnej energie líši len malým členom PV), sú anulované, lebo o nich bolo ukázané, že odporujú zákonu o zachovaní energie. Mimo to nie sú tiež vhodné pre výstavbu energetického mechanizmu chemických reakcií, takže musia byť opustené. To platí aj pre Rantovu exergiu a anergiu, ktoré jako transportabilná a netransportabilná energia mali nahradiť voľnú a viazanú energiu. Nakoľko ale termodynamika nemôže jestvovať bez takýchto pojmov, boli nahradené pracovnou schopnosťou a o tejto bolo ukázané, že je stavovou vlastnosťou látok, napriek doterajšiemu opačnému názoru. Treba tu tiež zdôrazniť, že pomenovanie energie, či už voľnej, viazanej alebo inej, nie je vhodné pre vlastnosť látok, ktorej veľkosť klesá, ktorá teda čiastočne mizne, lebo energiu si prajeme uchovať práve ako konzervatívnu nezničiteľnú veličinu. Pomenovanie pracovnej schopnosti pre takú vlastnosť je preto celkom vhodné.

4. Na základe týchto záverov bol vybudovaný „energetický mechanizmus chemických reakcií“, ktorý umožňuje názorné aj ľahko pocho-piteľné vysvetlenie chemických procesov, a tak podstatne uľahčuje výuku fyzikálnej chémie. Výstavba energetického mechanizmu chemických procesov musí byť hodnotená kladne, aj keď si súčasná termodynamika zakladá na tom, že dokáže formulovať základné rovnice a zákony termodynamiky čisto matematickým spôsobom, bez toho že by sa starala o detailné dianie pri chemických procesoch. Tento postup sa totiž už teraz stáva nedostatočným, lebo takto sa termodynamike doteraz ne-

podarilo odvodiť dôležitú sesterskú rovnicu van't Hoffovej izobary, tlakovú izotermu, a ovšem ani všeobecnú rovnicu chemickej termodynamiky. Spolahlivejší je preto aj všade inde bežne užívaný postup, analyzovať prírodné procesy najprv kvalitatívne a až potom kvantitatívne.

Z týchto výsledkov vidno, aký veľký význam prislúcha pojmu pracovnej schopnosti. Analýza pojmu pracovnej schopnosti ukazuje, že pomocou neho možno jednoznačne formulovať druhý zákon termodynamiky, ktorý potom vedie bezprostredne k zákonu monokauzality, podľa ktorého možno všetko prírodné dianie chápať kauzálne jednotne. Prvý pekný a názorný príklad k tomu poskytuje práve prírodné dianie v chemických systémoch. Pre modernizáciu našej pedagogiky a didaktiky má toto jednotné kauzálne chápanie všetkého prírodného dejstva najvyššiu hodnotu a je vysoko oceňované aj *Helmholtzom*. Zákon monokauzality má ovšem aj prírodne-filozofický dosah, lebo vylučuje religiozitu.

astronomie

Pohyb Slunce v Galaxii

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

V dnešní době je již samozřejmé, že nejen Země, ale ani Slunce není „středem vesmíru“. Je známo, že Slunce je poměrně malá hvězda, která spolu s ostatními hvězdami a jinými kosmickými objekty tvoří soustavu, nazývanou Galaxie. Rovněž je známo, že se všechny kosmické objekty a tedy i naše Slunce pohybují a opisují poměrně složité dráhy kolem středu Galaxie.

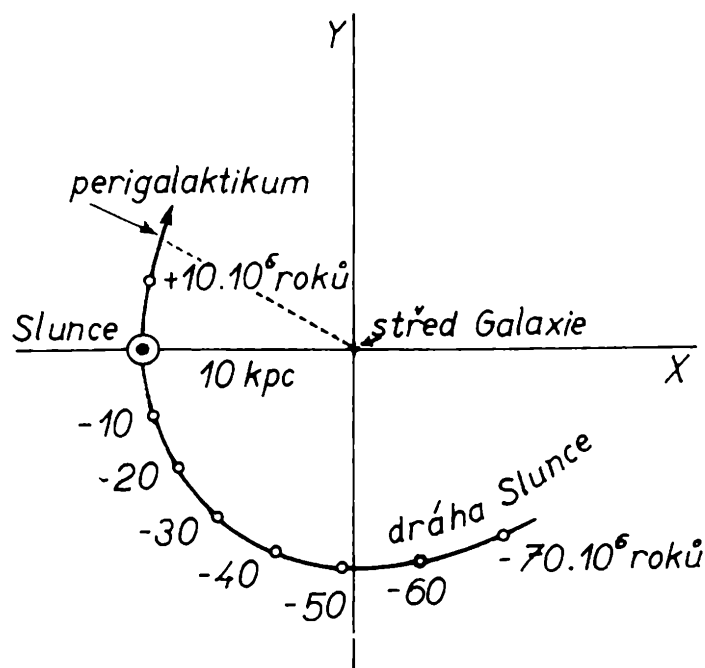
První pokusy o určení pohybu Slunce spadají do 18. století a zásluhu na nich mají *E. Halley*, *J. Bradley*, *T. Mayer* a *W. Herschel*. První z jmenovaných, Halley, objevil vlastní pohyby hvězd, tj. změny v poloze hvězd na obloze a měřením vlastních pohybů hvězd se zabýval také Bradley. T. Mayer přišel na myšlenku, že ve vlastních pohybech hvězd by se měl zrcadlit pohyb Slunce vzhledem k těmto hvězdám. Z místa, k němuž směřuje vektor rychlosti Slunce, by se hvězdy měly zdánlivě „rozbíhat“ a naopak do protilehlého bodu by se měly „sbíhat“. V roce 1783 určil W. Herschel z vlastních pohybů sedmi jasných hvězd, že Slunce směřuje ke hvězdám v souhvězdí Herkula. I když někteří astronomové o Herschelově výsledku pochybovali, ukázalo se, že je v podstatě

správný. Pouhých sedm hvězd ovšem nestačí k přesnému určení bodu, k němuž směřuje Slunce, a Herschelův výsledek byl později upřesněn na základě rozboru vlastních pohybů několika tisíc hvězd. Bod, ke kterému zdánlivě směřuje Slunce, se nazývá apex Slunce a úkolu stanovit jeho souřadnice se ujalo několik teoretiků, z nichž jmenujme alespoň *Bessela*, *Bravais*, *Kovalského* a *Airyho*. Tito astronomové vypracovali metody k určení polohy apexu Slunce a také k určení relativní rychlosti Slunce vzhledem k okolním hvězdám, a to na základě určení vlastních pohybů a radiálních rychlostí hvězd. Při výpočtech má velký význam přesnost měření, přičemž je nutno vzít v úvahu, že vlastní pohyby hvězd nelze zdaleka určit tak přesně, jako radiální rychlosti hvězd. Během doby se ukázalo, že záleží také na tom, jaké hvězdy jsou k výpočtům vybrány (např. jsou-li to obři nebo trpaslíci), neboť rychlosti jednotlivých typů hvězd se navzájem liší. V tabulce I. uvádíme výsledky, získané při určování polohy apexu Slunce různými autory. V tabulce je uveden autor výpočtů, letopočet, výchozí materiál, rektascenze a deklinace vypočtené polohy apexu a použitá metoda výpočtu.

Tabulka I. Souřadnice apexu Slunce

Autor	Rok	Hvězdy	Rektascenze	Deklinace	Metoda
Newcomb	1899	3171 hvězd	273,4°	31,3°	Airy
Kapteyn	1900	Bradleyovy hvězdy	271,8	29,0	všechny metody
Woersma	1908	3616 hvězd	268,0	31,4	Bravais
Boss, L.	1911	5413 hvězd	270,8	34,3	Airy
Wilson	1926	2748 hvězd	270,8	27,0	Bravais
Wilson-Raymond	1938	4606 hvězd	268,7	30,0	Airy
Gliese	1940	1283 hvězd FK3	266,5	29,4	Airy
Široký	1953	4256 hvězd BSC	271,7	30,7	Airy
průměr			270,2°	30,4°	

Z hodnot v tab. I. vidíme, že Slunce směřuje k bodu, jehož rektascenze je přibližně 270° a deklinace asi +30°. Pokud jde o rychlost Slunce, bylo na základě výpočtů mnohých autorů stanoveno, že rychlost Slunce vzhledem k okolním hvězdám je přibližně 20 km . s⁻¹. Slunce spolu s ostatními hvězdami obíhá kolem centra Galaxie a v současné době je asi ve vzdálenosti 10 kpc od centra Galaxie. Rychlost 20 km . s⁻¹ tedy musíme chápat jako rozdíl rychlosti Slunce a průměrné rychlosti okolních hvězd, které jsou přibližně ve stejné vzdálenosti od centra Galaxie. Výpočet dráhy Slunce v Galaxii je velmi složitá úloha, mnohem složitější, než je výpočet dráhy tělesa ve sluneční soustavě. Pohyb těles ve sluneční



Obr. 1. Úsek dráhy Slunce v Galaxii (podle P. Parenaga)

soustavě se děje v gravitačním poli Slunce. Protože ve Slunci je soustředěno 99 % hmotnosti celé sluneční soustavy, je pohyb těles popsán v podstatě třemi Keplerovými zákony a dráhy těles se počítají poměrně snadno. Pohyb těles v Galaxii je složitější proto, že v Galaxii není podobného „centrálního tělesa“, hmotnost jádra se odhaduje jen na 5 % až 7 % hmotnosti celé galaktické soustavy.

Dráhu Slunce v Galaxii (obr. 1.) odvodil poprvé v padesátých létech našeho století sovětský astronom *Pavel Petrovič Parenago* na základě velmi složitých výpočtů. Ukázalo se, že se hvězdy v Galaxii nepohybují v jedné rovině, jako je tomu u planet, ale jejich dráhy lze přirovnat k prostorové spirále. Bod na dráze, který je nejbližší centru Galaxie, se nazývá perigalaktikum, nejvzdálenější bod pak apogalaktikum. Rychlost hvězd na dráze závisí na vzdálenosti od centra Galaxie, závislost však rovněž není tak jednoduchá jako u planet. V blízkosti Slunce, tj. ve vzdálenosti kolem 10 kpc od centra Galaxie, je oběžná rychlost hvězd $200 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ až $300 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Oběžná doba Slunce kolem centra Galaxie je asi 200 miliónů roků. V apogalaktiku bylo Slunce před 80 milióny roků a v současné době se blíží k perigalaktiku, jehož dosáhne za 20 miliónů roků. Rychlost Slunce v apogalaktiku byla $210 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, v perigalaktiku se zvýší na $265 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Dráha Slunce leží prakticky v rovině Galaxie; v současné době se sklon dráhy vzhledem k rovině Galaxie odhaduje na 1° až 2° .

Době jednoho oběhu Slunce kolem středu Galaxie se říká galaktický rok. Zde se nabízí zajímavé srovnání. Galaktický rok trvá 200 miliónů roků (tj. oběhů Země kolem Slunce). Rozdělíme-li galaktický rok analogicky s pozemským rokem na 365 „galaktických dní“ a ty pak dále na

„galaktické“ hodiny, minuty a sekundy, pak v těchto časových jednotkách je stáří zemské kůry 16 galaktických roků, život na Zemi existuje 5 galaktických roků, člověk se objevil na Zemi před jedním galaktickým dnem, astronomií se zabývá 15 galaktických minut, dalekohled používá jen jednu minutu a současné názory na vesmír panují pouhé čtyři galaktické sekundy. V této časové stupnici vystupuje názorně nejen nesmírně dlouhá doba oběhu Slunce kolem středu Galaxie, ale především stále se zvyšující rychlost lidského poznání a rozvoje vědy.

různé

0 matematické terminologii

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., Liberec

V článku „O odborném slohu v matematice“ jsme popsali některé slovní obraty, kterých se užívá v matematických textech. Nyní si řekneme něco o matematické terminologii.

Matematické termíny máme jednak ryze české, jednak převzaté z řečtiny nebo latiny. V elementární matematice převládají termíny české (číslo, čtverec, trojúhelník, obdélník). Jsou to označení pojmů, které jsou dobře známé i lidem, kteří s matematikou nemají nic společného, a užívá se jich v hovorů zcela běžně. Pokud jde o geometrii, všimněme si toho, že termíny, které označují určitý bod (střed, průsečík, stopník, úběžník), jsou rodu mužského stejně jako slovo „bod“. Snad jedinou výjimkou je termín „těžiště“, který byl ovšem převzat z fyziky. Termíny označující určitou přímku (osa, průsečnice, stopa, úběžnice) jsou rodu ženského stejně jako slovo „přímka“. Ženského rodu jsou i názvy křivek (kružnice, elipsa, parabola, hyperbola, spirála, šroubovice, řetězovka). Že jste si ani neuvědomili, jak vám tato skutečnost ulehčuje studium geometrie?

Naproti tomu ve vyšší matematice se dává přednost cizím slovům (derivace, integrál, diferenciál, funkcionál). Proč se nesnažíme například pro diferenciál nalézt ryze český termín? Polština má termín „róźniczka“; je to zdrobnělina slova „róźnica“, což znamená „rozdíl“. Zdrobněliny je užito proto, že diferenciál může být pojímán jako „nekonečně malý rozdíl“. (O výrazu „nekonečně malá veličina“ se zde nebudeme šířit; vydalo by to na speciální článek.) Kdybychom v češtině říkali diferen-

ciálu „rozdílek“, asi by nám to připadalo komické. Všeobecně, nejen v matematice, platí, že se snažíme počestovat takové cizí výrazy, kterých se skutečně často užívá v běžném hovoru. U slov, která nejsou tak běžná, to potřeba není. Vidíme to třeba u zeměpisných názvů: Paris počestujeme na Paříž, London na Londýn, Roma na Řím, Leipzig na Lipsko, Beograd na Bělehrad. Nenapadlo by nás hledat český název třeba pro Kuala Lumpur nebo Luang Prabang. A stejně nehledáme český výraz pro diferenciál. Texty, v nichž se toto slovo vyskytuje, nechtou široké vrstvy lidí, zato však musíme počítat s tím, že je budou číst i cizí matematikové, kteří češtinu ovládají třeba jen slabě. Setkají-li se se slovem „diferenciál“, budou vědět, oč jde. Kdyby však v polském textu našli slovo „różniczka“, museli by je hledat ve slovníku a ještě by je zdaleka v každém nenašli. Z tohoto důvodu se někdy také přebírají termíny i z moderních cizích jazyků. V abstraktní algebře se vyskytuje pojem, který se anglicky označuje „group“, francouzsky „le groupe“, německy „die Gruppe“ a rusky „gruppa“. Všechna tato slova znamenají v češtině „skupina“. Přesto naše matematická terminologie má pro tento pojem termín „grupa“, ačkoliv v běžné řeči bychom takové slovo zavrhlí jako nežádoucí germanismus.

České termíny se však často vyskytují tam, kde jde o pojmy, které lze přirovnat k některým předmětům známým z běžného života. Bývá tomu tak zvláště v teorii grafů. Tam se vyskytují termíny jako „strom“, „had“, „hvězda“, „kostra“, „dráha“, „cesta“

Často tvoříme z matematických termínů nové termíny pomocí předpon, a to českých i cizích. Tak ze slova „grupa“ tvoříme českou předponou slovo „pologrupa“ a cizí předponou slovo „kvazigrupa“. Podobně se to dělá i u ryze českých termínů. Slova běžné řeči se nemají tvořit z českých slov cizími předponami; říkáme „antisemitismus“, nikoliv „antižidovství“. Přesto však v matematice máme „kvazitěleso“ a dokonce „kojádro“ (tvořeno ze slova „jádro“ podobně jako „kosinus“ ze slova „sinus“).

Někdy se setkáte s výrazy, které vás možná uvedou do rozpaků, například „ p -podgrupa“ nebo „ σ -úplný svaz“. Nelekejte se toho, přečtěte to klidně tak, jak je to napsáno, tedy „pé-podgrupa“ a „sigma-úplný svaz“. Jsou to výrazy poněkud zvláštní, ale není snad vážného důvodu, proč by se jich nemělo používat. Horší už je, když se třeba nějaká algebraická operace označí symbolem $*$ a zobrazení, které zachovává tuto operaci, se nazve „ $*$ -homomorfismus“. Ale budiž, říkejme tomu „hvězdička-homomorfismus“. Matematické texty jsou určeny především pro tiché čtení, nikoliv pro hlasité předčítání. A pokud jde o přednášku, ta bývá vždy doprovázena psaním na tabuli, takže přednášející tam prostě to slovo napíše a pak se odvolává na to, co napsal na tabuli. Ostatně takovými výrazům se lze vyhnout třeba tím, že se řekne „homomorfismus vzhledem k operaci $*$ “. V germánských jazycích

ovšem takováto slova nepůsobí žádné rozpaky, neboť je lze chápat jako složená slova, která se v těchto jazycích mohou tvořit prakticky bez omezení.

Matematický termín se ovšem může skládat z několika slov (přirozené číslo, celé nezáporné číslo, rovnoramenný trojúhelník, kružnice opsaná trojúhelníku, parciální derivace). Tady je ovšem třeba dát pozor na to, že v některých případech se přidáním přívlastku popírá význam původního slova. V běžném životě není možné, aby třeba pan Vopršálek měl slaměný klobouk a přitom neměl klobouk. Funkce však může mít v některém bodě limitu zleva a třeba současně i limitu zprava a přitom nemusí mít vůbec limitu. Podobně v abstraktní algebře může existovat slabě asociativní svaz, který vůbec není svazem.

Některé pojmy a věty se označují podle významných matematiků, kteří je zavedli nebo se na jejich vzniku podíleli. Tak v elementární geometrii známe Pythagorovu větu, Eukleidovu větu o výšce, Eukleidovu větu o odvěsně a Thaletovu větu. Ve vyšší matematice je řada vět pojmenovaných po novověkých vědcích, například Borelova věta nebo Fubiniova věta. Známe rovněž Thaletovu kružnici. V teorii grafů máme Hamiltonovu kružnici (což je ovšem něco jiného než kružnice v geometrickém smyslu). Můžeme také říkat „hamiltonovská kružnice“, pak to ovšem píšeme s malým začátečním písmenem. Je-li něco pojmenováno po dvou matematicích, tvoříme přídatná jména přivlastňovací od obou jmen a klademe mezi ně spojovací čárku. Je tedy například Bolzanova-Cauchyova věta. Někdy se jí sice také říká Bolzano-Cauchyova, ale to není vhodné, protože z toho vzniká nesprávný dojem, že šlo o jednu osobu s dvojitým příjmením Bolzano-Cauchy.

To byly tedy některé věci, které je potřeba znát o matematické terminologii. O tom, jak se píše matematická publikace, si řekneme někdy příště.

N. I. Lobačevskij a 150-ročná neeuklidovská geometria

JÁN GEDEI

Historický vývoj matematiky ukazuje jasne, že skutočne plodné matematické abstrakcie nie sú „slobodným výtvorom“ čistého rozumu, ale zhrnutím a syntézou množstva špeciálnych konkrétnych faktov, odrážajúcich zákonitosti skutočného sveta. Abstraktné matematické teórie sú len vtedy trvalým ziskom vedy, ak vedú k zdolaniu nových konkrétnych problémov kladených spoločenskou praxou. Tak je to aj v prípade geometrie.

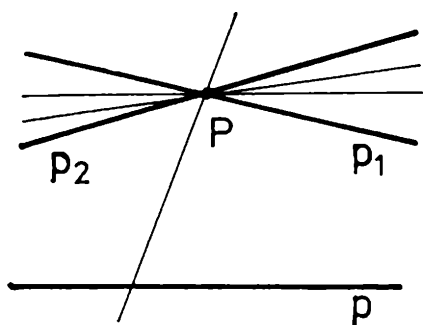
Rozvoj praxe ukázal, že euklidovská geometria, ktorá sa ešte aj dnes učí v škole s určitými obmenami, je len prvým priblížením v poznaní geometrických vlastností a vzťahov reálneho priestoru. Ďalším priblížením je neeuklidovská geometria. Neeuklidovská geometria — hyperbolická geometria — je len špeciálnym a jednoduchým prípadom neeuklidovskej geometrie v širšom zmysle. O výstavbe planimetrie v Lobačevského geometrii nás oboznámi napríklad knižka Gatiala-Hejného „Stavba Lobačevského planimetrie“, ktorá vyšla v knihovni Škola mladých matematiků, 24, v roku 1969.

Neeuklidovská geometria sa zrodila 23. februára 1826, teda práve pred 150 rokmi. Vytvoril ju *Nikolaj Ivanovič Lobačevskij*, jeden z najväčších matematikov XIX. storočia. 120. výročie smrti Lobačevského si spomíname tak isto tohto roku 24. februára.

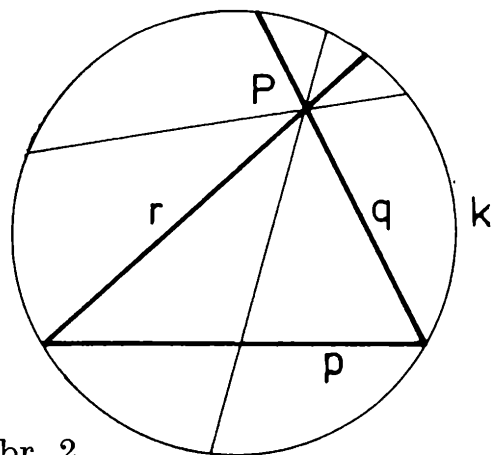
Objav neeuklidovskej geometrie zrevolucionizoval geometrické myslenie a znamenal obrat vo vývoji matematiky najnovšej doby. Ako prvý uverejnil Lobačevskij základné princípy neeuklidovskej geometrie; ako prvý sa postavil proti skostnateným názorom svojich súčasníkov, ktoré sa opierali o kantovské apriórne chápanie priestoru a času. Po celý svoj život pevne presvedčený hlásal poznanú pravdu, že: pre odraz priestorových vzťahov objektívnej reality nie je euklidovská geometria jedinou formou; priestor má reálny význam, nezávislý od nášho nazerania; euklidovský pojem priestoru nie je nám vrozený pojem. Keď si teraz spomíname geniálnu tvorbu N. I. Lobačevského, skláňame sa pred jeho pamiatkou s úctou, ktorá patrí hrdinom bojujúcim za pokrok.

Tvorca novej geometrie N. I. Lobačevskij sa narodil 2. decembra 1792 v Nižnom Novgorode, dnešnom Gorkom. Po dokončení „žiackeho“ a „univerzitného“ kurzu stal sa učiteľom kazaňskej univerzity. O týchto udalostiach môžeme čítať v *Rozhledoch*, ročník 32 (1953) č. 4, v článku N. I. Lobačevskij.

Dve desaťročia zastával aj funkciu rektora kazaňskej univerzity veľmi úspešne. Roku 1823 predložil fyzikálno-matematickej fakulte kazaňskej univerzity rukopis s nadpisom „*Geometria*“ K vytlačeniu ale nedôjde, pretože recenzent neodporúča ho k vytlačeniu. Medzi inými napríklad upozorňuje, že autor zavádza metrický systém; táto okolnosť zrejme bola priťažujúcou okolnosťou. Rukopis bol vytlačený až r. 1909. Ukazuje, že r. 1823 Lobačevskij ešte nenašiel riešenie problému rovnobežiek. Len po ďalšom trojročnom usilovnom bádání predložil kazaňskej univerzite 23. februára 1826 prácu, v ktorej rozriešil 2000-ročný spor o Euklidovej V. axióme rovnobežnosti. Tento deň považujeme za deň zrodu novej geometrie. Práca znova nebola vytlačená, teraz pre odpor kolegov Lobačevského, ktorí pre základy geometrie nemali pochopenie. Rukopis sa stratil. Obsah práce poznáme len z prvej vytlačenej práce Lobačevského, ktorou bola práca „*O základoch geometrie*“ Táto práca vychádza v r. 1829 — 1830 v univerzitnom časopise „*Kazaňský vestník*“ po častiach.



Obr. 1



Obr. 2

O aký 2000-ročný spor vlastne išlo? Geometria, ktorá sa učí na školách, pochádza od Euklida. *Euklides* celú svoju geometriu odvodzuje zo 14 axiém, z ktorých 5 nazýva postulátmi. Postuláty znejú takto.

- I. Dvomi bodmi možno viesť jedinou priamku.
- II. Úsečku možno neobmedzene predĺžiť.
- III. Z ľubovoľného stredu možno ľubovoľným polomerom zostrojiť kružnicu.
- IV. Všetky pravé uhly sú zhodné.
- V. Daným bodom prechádza vždy práve jedna priamka rovnobežná s inou danou priamkou.

Spor spočíval v otázke, či sa V Euklidov postulát dá odvodiť z prvých štyroch postulátov alebo nie. Lobačevskij ukázal, že nie. Dôkaz previedol tak, že V. Euklidov postulát nahradil tvrdením: „Ak je v rovine daná priamka a bod mimo nej ležiaci, potom všetky priamky, ktoré týmto bodom prechádzajú a danú priamku nepretínajú, vyplňujú akýsi uhol.“ Na obrázku 1 môžeme sledovať toto tvrdenie. — Lobačevskij nazval ramená uhla rovnobežkou k danej priamke (na obr. 1 priamky p_1 , p_2).

Na uvedenom základe vybudoval potom Lobačevskij svoju novú geometriu, ktorá neobsahuje logický spor. Je zaujímavé, že kým napr. v euklidovskej geometrii súčet vnútorných uhlov trojuholníka sa rovná dvom pravým uhlom, zatiaľ v Lobačevského geometrii je tento súčet vždy menší ako dva pravé uhly a jeho veľkosť sa znižuje súčasne s obsahom trojuholníka. Lobačevského cesta dôkazu je namáhavá a abstraktná, pretože sa opiera väčšinou o matematickú logiku. Ale našťastie jeho geometriu možno realizovať na názorných modeloch, na ktorých môže vec sledovať aj začiatočník.

Jeden z takýchto modelov je na obrázku 2. Tento model sa nazýva *Beltrami-Kleinov* model. V základnej rovine π si zvolíme kružnicu k . Vnútri tejto kružnice si zostrojíme náš model. Pod „bodom“ budeme rozumieť len bod vnútri kružnice k . Pod „priamkou“ budeme rozumieť každú tetivu kružnice bez koncových bodov. Uhly meriame v našom obrázku — modele — nezvykle. Predstavme si na našom obrázku

polguľu, ktorá je zostrojená nad našou základnou rovinou π a pretína ju práve v kružnici k . Zvislé roviny prechádzajúce tetivami q , r kolmo k rovine π , pretínajú povrch tejto polguľe vo dvoch polkružniciach; tie sa pretínajú v bode, ktorého kolmý priemet do roviny π je priesečník P tetív q , r . „Uhol“ tetív q , r je uhol dotyčníc zostrojených k obom týmto polkružniciam v ich priesečníku.

Teraz už ľahko zistíme, že „priamky“ p , q alebo p , r na obrázku 2 zvierajú „uhol“ veľkosti nula. Teda v našom modeli majú tú istú vlastnosť ako rovnobežky v euklidovskej geometrii. V uvedenej interpretácii „bodom“ P prechádzajú dve rovnobežky s „priamkou“ p , a to: „priamky“ q a r .

Je jasné, že Lobačevského geometria nie je euklidovská; ona patrí medzi geometrie neeuklidovské. Preto sme tu písali pre neeuklidovské pojmy „bod“, „priamka“, „uhol“ úvodzovky.

Aké boli ohlasy na epochálne dielo „O základoch geometrie“? Prvé pojednanie o novej geometrii bolo prijaté s výsmechom a urážkami. Aj akademik *Ostrogradskij* z petrohradskej Akadémie vied napísal vtedy o tomto diele, že nezaslúži pozornosť Akadémie. Urážlivé, posmešné odmietania a nepochopenia dnes už nepotrebuje žiaden komentár. Dejiny ukázali, že Lobačevskij vytvoril práve týmto spisom nesmrteľné dielo.

Lobačevskij neprestal bojovať ani po prvom neúspechu. Napísal ďalšie práce, ako: „*Nové základy geometrie*“, „*Geometrische Untersuchungen*“ a „*Pangeometria*“ Vo všetkých sa snažil sprístupniť svoj objav súčasníkom nielen doma, ale aj v zahraničí.

Dňa 24. februára 1856 veľký vedec umiera. Geometrické idey Lobačevského však za jeho života neboli vôbec pochopené a ocenené. Epochálne dielo „O základoch geometrie“ podľa Lobačevského vedomie poznal len jeden človek, veľký matematik *K. F. Gauss* a len on uznal tento objav. Gauss Lobačevskému v liste vyjadril svoje úprimné uznanie a hlbokú úctu a súčasne mu oznámil, že na jeho návrh Lobačevskij bol zvolený za dopisujúceho člena Vedeckej spoločnosti v Göttingách.

Hodnotu a význam Lobačevského diela charakterizuje fakt, že práve z perspektívy dlhšieho času je merateľné v skutočnej veľkosti.

Hoci geometria bola považovaná začiatkom XIX. storočia za podradnú — aplikačnú — oblasť matematiky, prekvapivo sa rozmnožili pokusy dokázať V postulát. Príčina obnovenia záujmu o starý problém je mimo geometrie. Kantovská filozofia potrebovala dôkaz V postulátu.

I. Kant sa pokúsil podprieť svoje tvrdenie o priestore s odvolávaním sa na geometriu. Podľa Kanta geometria je nezávislá od našich skúseností; axiómy geometrie sú jedine možnými, nezmeniteľnými zákonmi myslenia. Matematici, ktorí stáli na pozíciách kantizmu, aj matematici, ktorí túto filozofiu neprijali, súhlasili v jednom: pravdivosť V postulátu

nemožno uznať nezávisle od našich skúseností. Teda toto miesto bolo zraniteľným miestom kantovskej filozofie..

Ochráncovia kantovských ideí si mysleli, že ak túto nepríjemnú axiómu — V. postulát — odvodí z ostatných axiém, ktoré sú „nezávislé od skúseností“, potom každého budú môcť presvedčiť o tom, že celá geometria je nezávislá od skúseností, a tak kantovská filozofia nebude mať ďalej zraniteľné miesto.

Lobačevskij bol dobre informovaný aj o filozofických otázkach svojej doby. Bol vzdelaným astronómom, fyzikom a tieto vedy aj v praxi aplikoval. Preto je pravdepodobné, že jeho záujmy o základné otázky geometrie sa zrodili pri riešení filozofických problémov a že jeho materialistické nazeranie a chápanie sa prehĺbilo pri riešení problémov prírodných vied.

Tým, že Lobačevskij vytvoril svoju novú geometriu, dokázal neplatnosť kantovskej filozofie v geometrii.

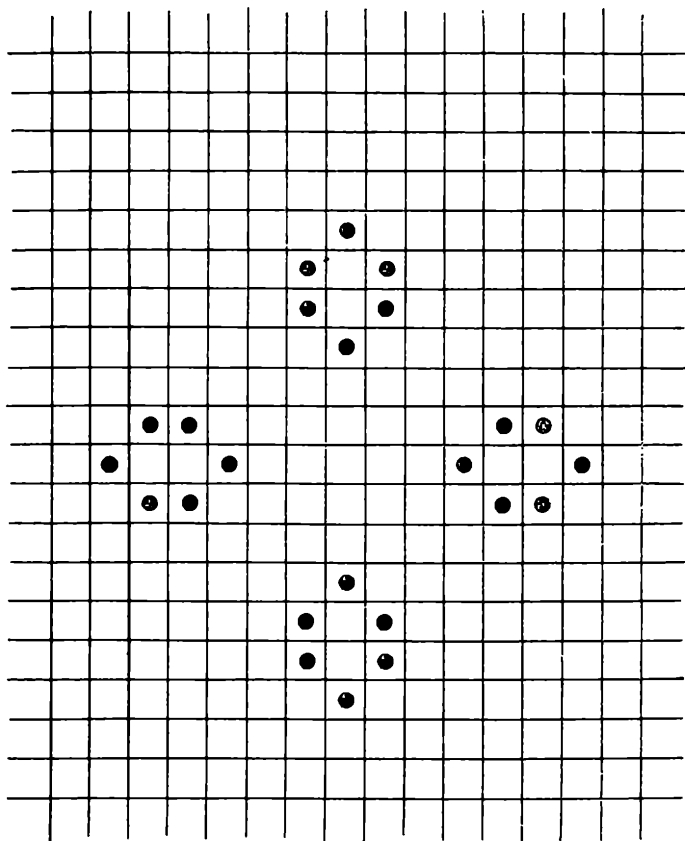
Význam nového poňatia geometrie v súčasnosti je veľký. Objav vyvolal zmenu matematického myslenia od základov. Rýchlo sa rozvíjal tak dôležitý pojem, ako je matematický pojem priestoru. Ožili axiomatické metódy matematiky, ba aj fyziky. Myšlienka tvorenia modelov, problém bezospornosti a úplnosti axiém, vznik nových odvetví matematiky — to všetko je dôsledok Lobačevského objavu.

Bez neeuklidovskej geometrie nemali by sme dnes všeobecnú teóriu relativity, naše poznatky o gravitačných a elektromagnetických polích by boli veľmi chudobné alebo nijaké. Lorenzove transformácie, tak dôležité pri kozmických letoch a pri uvoľnení jadernej energie, možno chápať aj ako pohyb hyperbolického priestoru.

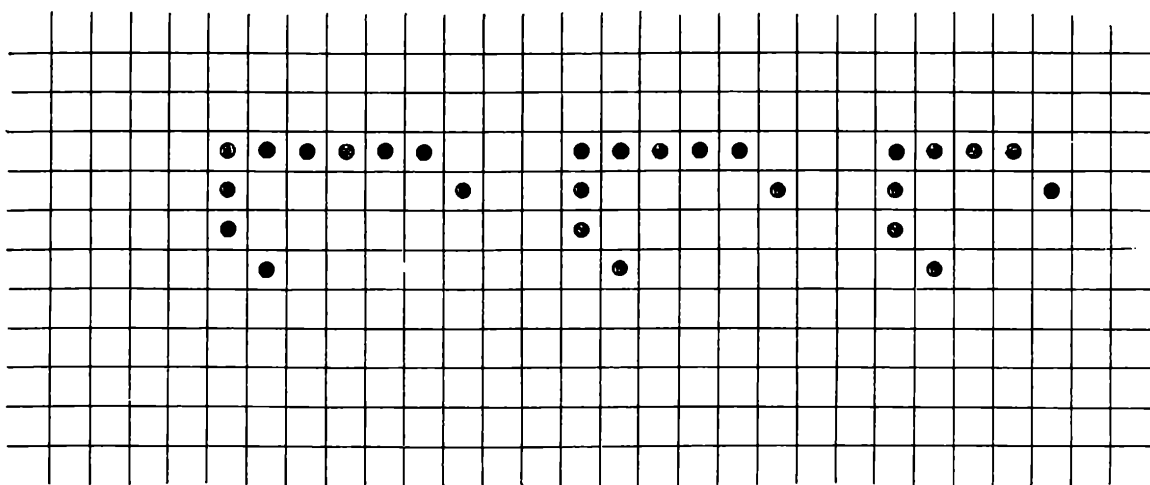
Je ťažko oceniť genialitu a odvahu, ktorú prejavil Lobačevskij, keď r. 1835 napísal slová: „*Nie je žiaden rozpor v tom, ak pripustíme, že niektoré sily v prírode sa riadia tou, iné opäť inou geometriou.*“ Tieto slová boli pochopené až dlho po jeho smrti.

V plnej šírke sa objavuje zásluha Lobačevského aj v tom, že vybojoval v dobe plnej predsudkov novej geometrii miesto, ktoré jej právom prináleží. Na príklade Lobačevského vidíme tiež, že veľký vedec okrem vedeckej erudície musí mať aj odvahu hlásať nové názory a nebáť sa niest zodpovednosť za tie názory.

Matematika vždy bola, je a bude nástrojom triedneho boja. Proces poznania prírody je asymptotickým priblížením k postihnútiu nekonečnej zložitosti sveta ako celku. Neeuklidovská geometria v tomto procese hrala a hrá dôležitú úlohu. Preto zamyslime sa nad týmito otázkami dnes, keď si spomíname veľké výročia.



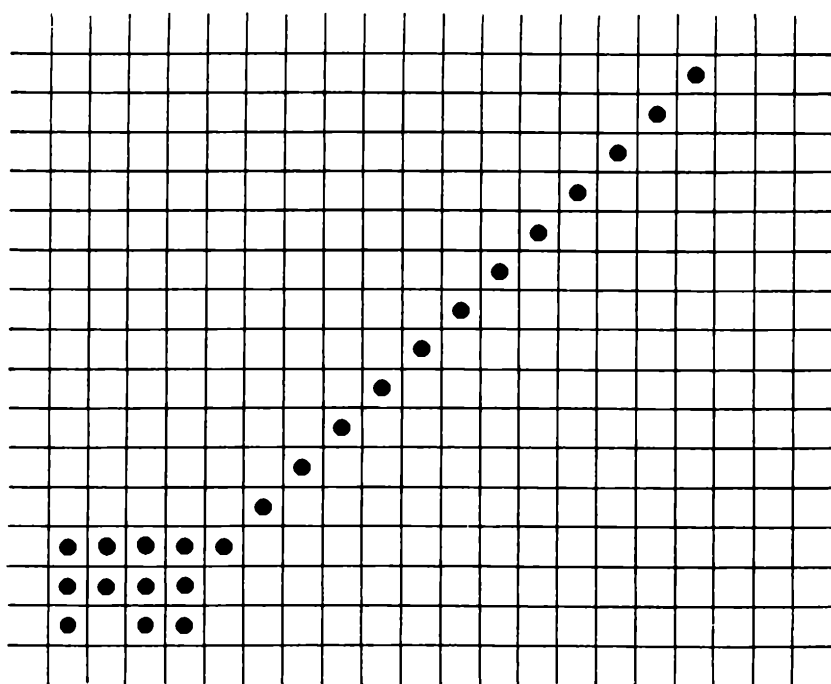
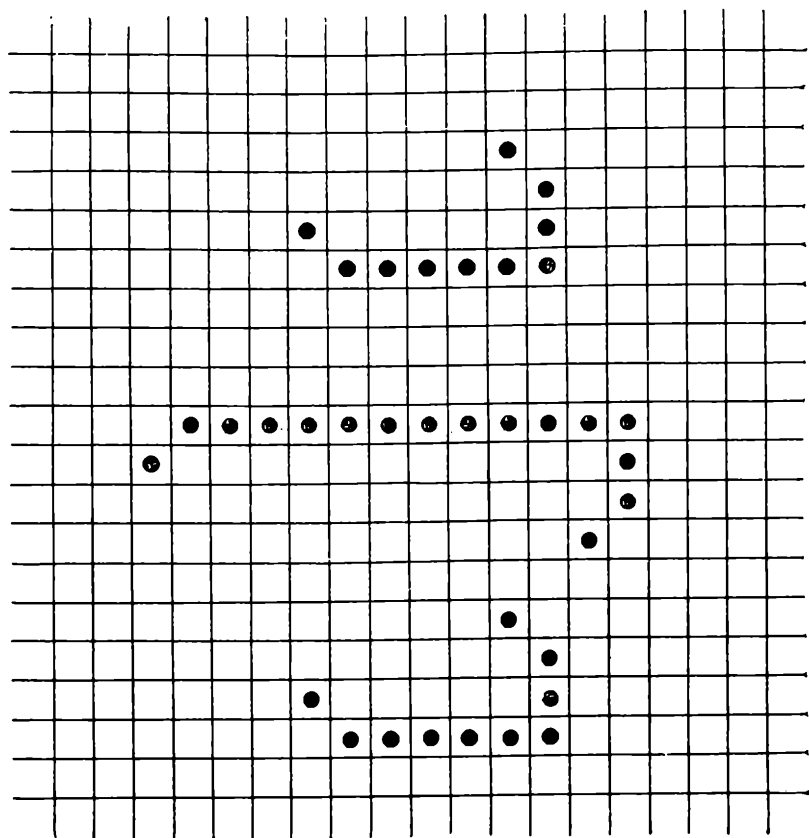
Obr. 3



„zachránit“, dáme-li jim ochranu pomocí určitého počtu menších „kluzáků“. Tak např. útvar na obr. 4 je stabilní a pomalu se po určitém počtu generací přesouvá vpřed. Ještě delší „kluzáky“ potřebují úměrně větší počet doprovodných „kluzáků“ menšího typu.

Je celá řada základních útvarů, které v průběhu hry „vyrábějí“ „kluzáky“. Tak matematici pomocí komputera našli útvar, který vždy po určitém počtu generací produkuje malý „kluzák“ a po určitém počtu malých „kluzáků“ vyprodukuje jeden velký „kluzák“, načež se vše periodicky opakuje. Přitom všechny vyrobené „kluzáky“ z místa svého vzniku skutečně odlétají. Jiná začáteční postavení produkují kluzáky, které pak vytvářejí celé flotily. Velmi zajímavý je „souboj“ dvou klu-

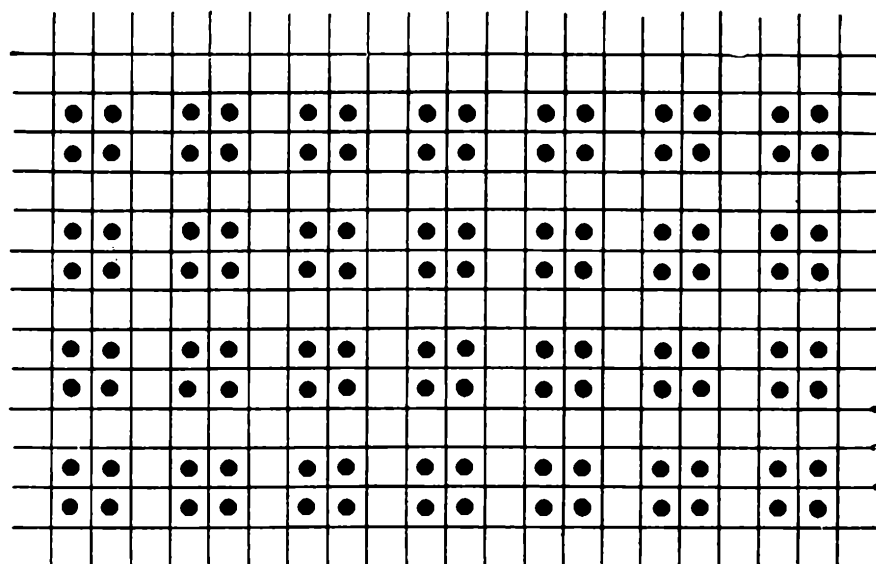
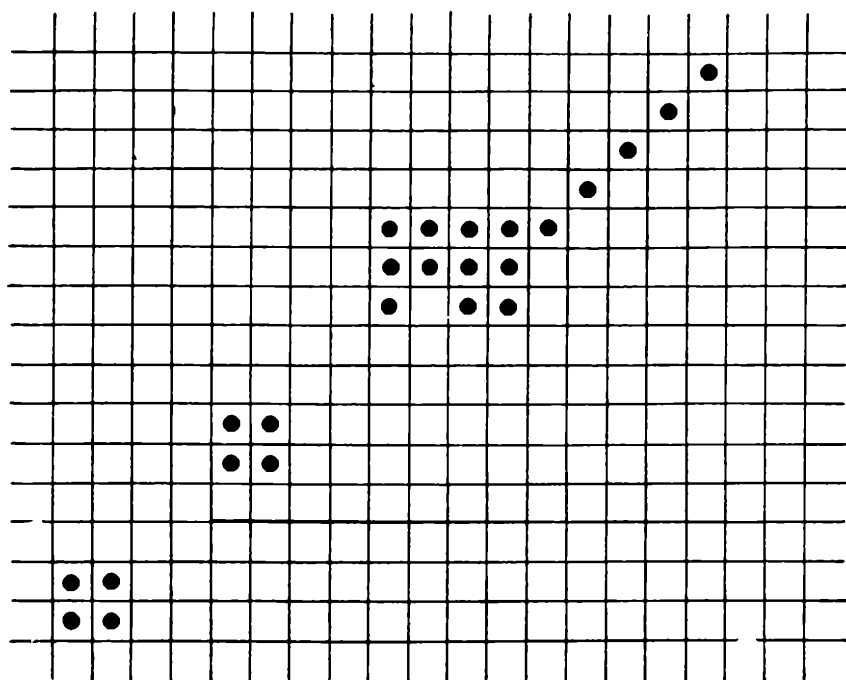
Obr. 4



Obr.

záků, letících proti sobě. Řešení bude značně závislé na počáteční poloze, a někdy se vám může podařit hotová „bitva“, končící rozpadem útočících „kluzáků“

To vše však není nic proti postavení, které pravidelně vypouští „vyrobená“ letadla, která se po hrací desce pohybují za sebou v pravidelných odstupech. Umístíme-li do směru jejich pohybu jiný zcela konkrétní útvar, bude je tento druhý útvar zase „polykat“, aniž sám



Obr. 7

přítom změni svůj tvar a své postavení. Je samozřejmé, že tyto složité úlohy se již sotva dají hrát normálním způsobem. Lze však sestavit výpočetní program, podle něhož pak mnohem rychleji pracují komputery, často mnoho set až i několik tisíc „generací“ dopředu.

Avšak jeden či dva takové zajímavé případy si uvedeme docela konkrétně, protože si je můžete zahrát sami. První z nich má základní postavení na obr. 5. „Obdélník“ vlevo dole je „žací stroj“, vyznačená diagonála „tráva“. Když to rozehrájete, „pojede“ základní „obdélník“ po travnatém terénu šikmo vzhůru a za sebou zanechá požaté kupky ve tvaru pravidelně rozmístěných „bloků“. Tak např. v jednom okamžiku vznikne postavení na obr. 6, na němž kromě již posečené „trávy“ snadno rozeznáme i původní „žací stroj“ a dosud neposečenou diagonálu.

Tak trochu jako horor působí čtvercové pole, sestavené ze samých „bloků“ na obr. 7. Jednotlivé bloky jsou umístěny přesně vedle sebe a pod sebou, odděleny vždy kolem dokola sloupcem a řádkem z prázdných políček. Tento útvar nazvali tvůrci hry o životě a smrti „agar-agar“, který slouží při pěstování bakterií za živnou půdu. Vložíte-li do tohoto útvaru „bacil“, tj. jeden kámen, rozvine se situace podle toho, kam jste tento „bacil“ umístili. Bude-li to v některém průsečíku „prázdných“ sloupců a řádků, „bacil“ neúprosně zahyne, aniž agar-agar naruší. Ocitne-li se však „bacil“ na kterémkoli jiném prázdném místě, začne se „rozmnožovat“, přičemž agar-agaru v jeho okolí bude elipticky ubývat. Kolem bacilů se bude vytvářet eliptický prázdný prostor právě tak, jak tomu bývá v Petriho miskách v mikrobiologických laboratořích.

Pomocí počítačů lze řešit i jiná zajímavá postavení. Tak např. vznikají „nebeská tělesa“, která oddělují značné vzdálenosti. Některá z těchto „těles“ se pohybují, jiná jsou stálá nebo se otáčejí. Nelezneme mezi nimi i dříve zmíněné „pulzary“ — stejně jako na obloze.

Nyní již chápeme, proč tato podivná hra dostala název „hra o životě a smrti“. Matematikům se s její pomocí již podařilo namodelovat mnoho situací, s nimiž se setkáváme v praktickém životě. Vyskytly se již také odvážné myšlenky, jak tuto, již v nejjednodušší hře značně složitou hru ještě více přiblížit skutečnosti. Pravidla zrodu, přežití i smrti lze učinit složitější, celou hru pak je možno hrát nikoli v rovině, nýbrž v prostoru. Ukazuje se, že program je tak složitý, že bude možno postupovat vpřed jen velmi pomalu, třebaže se jednotlivá řešení svěří těm nejmodernějším počítačům.

Kdosi již dávno vyslovil myšlenku, že „život je hra“ — je to však „hra“ podle pravidel, která ještě dobře neznáme; kdybychom je znali, vrhlo by to možná docela nové světlo i na takové problémy jako je možnost existence mimozemských civilizací apod. Hry uvedeného typu nás možná přivedou blíže k lepšímu chápání těchto skutečných přírodních zákonitostí.

Prozatím z toho vzniká, jak se zdá, docela nové odvětví matematiky, navazující na tzv. teorii grup. A tak z původní hry začíná vyrůstat něco, co v tom jistě nehledali ani ti, kdo hru o životě a smrti v původní podobě formulovali. A nám ostatním, kteří nesaháme tak vysoko, jistě to, co jsme při našich zamyšleních poznali, přineslo aspoň trochu zábavy a řadu nečekaných překvapení.

Pavel Nevřiva:

Simulace řídicích systémů na číslicovém počítači

SNTL Nakladatelství technické literatury, Praha 1975. Stran 136, cena 21 Kčs.

Recenzovaná kniha se zabývá analýzou dynamických systémů, prováděnou na samočinných počítačích. Pojednává se v ní rovněž o přibližném řešení problému syntézy řídicího systému metodou opakované analýzy a optimalizace.

Kniha má celkem 7 kapitol. První kapitola je úvod, druhá pojednává o základních metodách numerické matematiky používaných k řešení počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice. Třetí kapitola je věnována porovnání integrace na analogovém a číslicovém počítači. V kapitole 4 se autor zabývá některými charakteristickými vlastnostmi řídicích dynamických systémů. Rozsáhlá pátá kapitola a kapitola 6 seznamují čtenáře s použitím simulačních jazyků k zápisu a řešení studovaných problémů. Poslední, sedmá kapitola je krátký závěr.

Autor píše se značným odborným nadhledem a pro stručnost a přehlednost dává v matematických partiích přednost názornému výkladu před důkazy vět. Kniha bude vhodnou četbou pro programátory a výzkumné pracovníky; pro středoškolského studenta nezdá se mi vzhledem ke stručnosti výkladu a náročnosti studované problematiky přístupnou.

Petr Příkryl, Praha

E. Aisberg:

Fyzika všude kolem nás

Vydalo SPN, Praha 1976, 204 stran, bohatě ilustrováno, vázaný výtisk 13,50 Kčs.

Proč se nám zdá, díváme-li se ve filmu na jedoucí automobil, že se jeho kola nepohybují? Čím je způsobeno zbarvení ptačího peří a duhové zbarvení perleti? Proč se domníváte, že magnetofon zkresluje váš hlas a věrně reprodukuje hlas jiných lidí? Uslyšíte v nadzvukovém letadle hluk reaktivních motorů umístěných na zádi letadla?

Odpověď na tyto a mnohé další otázky najdete ve výše uvedené knize E. Aisberga, která vyšla v Knihovnici všeobecného vzdělání pro širokou veřejnost, zejména však pro mladé čtenáře.

Kniha, která je zdařilým překladem francouzského originálu, obsahuje jednoduchý fyzikální výklad řady jevů a situací každodenního života. Z fyzikálního hlediska jsou popisovány jevy mechaniky, akustiky, optiky, termiky a molekulové fyziky, elektřiny a magnetismu a sdělovací techniky (radiotechnika, černobílá a barevná televize). Jejich zpracování je téměř beletristické. Formou rozhovoru mezi členy rodiny profesora fyziky autor vykládá nejruznější jevy, které probíhají každý den kolem nás a kterým většinou nevěnujeme pozornost, považujeme je za samozřejmé a nepátráme po jejich příčinách. Autor se snaží vytvořit jakýsi most mezi vědou a všedním životem. Proto podává jednoduchá a jasná vysvětlení a vede čtenáře k pozorné analýze toho, co se děje v jeho bezprostředním okolí.

Překladatelé doc. dr. Jaroslav Vachek a Josef Kvita knihu upravili pro naše čtenáře a doplnili poznámkami charakteru fyzikálního i všeobecně vzdělávacího. Nový text přispívá ke zlepšení původního francouzského výkladu a doplňuje jej tak, že čtenář získá ucelené představy, a to nejen po kvalitativní, ale mnohdy i po kvantitativní stránce.

Božena Horáková

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

D

daný
dedukce
defekt
definovat
definice
definovaný
deformace
degenerace
degenerovat
degenerovaný
dekadický
 dekadický logaritmus
délka
 délka strany kužele
deltoid
derivace
 parciální derivace
 první derivace
derivování
derivovaný
derivovat
desátý
deset
desetina
desetinný
 desetinné číslo
 desetinné místo
 desetinná soustava
 desetinná tečka
 desetinný zápis

given
deduction
deficiency
define
definition
defined
deformation
degeneration, degeneracy
degenerate
degenerate
decadic
 Brigg's logarithm
length
 slant height of cone
deltoid, kite
 derivative, differential coefficient,
 derived function
 partial derivative
 first(-order) derivative
differentiation, derivation, taking
 the derivative
derived
differentiate
tenth
ten
tenth
decimal, denary
 decimal number
 decimal place
 denary system
 decimal point
 decimal notation

desetinný zlomek	decimal fraction
desetistěn	decahedron
desetiúhelník	decagon
desítkový	decadic, denary
desítková soustava	decimal system
deskriptivní geometrie	descriptive geometry
determinant	determinant
devadesát	ninety
devátý	ninth
devět	nine
devítina	ninth
devítiúhelník	nonagon
dělenec	dividend
dělení	division, subdivision
dělit	divide
dělit dvěma	halve
dělit čtyřmi	quarter
dělitel	divisor
největší společný dělitel	highest common factor, greatest common divisor
dělitelnost	divisibility
diagonála	diagonal
diagram	diagram
bodový diagram	dot diagram
sloupcový diagram	bar graph, column chart
Vennův diagram	Venn diagram
diference	difference
diferenciál	differential
diferenciální	differential
diferenciální počet	differential calculus
diferenciální rovnice	differential equation
diferencování	differentiation
diferencovat	differentiate
diferencovatelný	differentiable
dilatace	dilatation
díl	part, volume (knihy)
dimenze	dimension
direktrix	directrix
disjunkce	disjunction
disjunktní	disjoint
diskriminant	discriminant
disperze	dispersion, variance
distributivní	distributive
divergence	divergence
divergentní	divergent
divergovat	diverge
dlouhý	long
dodatek	appendix, corollary
dokázat	prove

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

10



rozhledy

ROČNÍK 54
ČERVEN 1976

10

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Dobroslav Lehotský, UK Bratislava, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, dr. Karel Mišoň, CSc., ČVUT Praha, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMU Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava RNDr. Marie Valešová, CSc. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1976.

OBSAH

Dr. R. Wohlgemuthová: Za splnění úkolů XV. sjezdu KSČ .	433
J. Kotyk: Harmonický průměr dvou čísel .	435
Ing. J. Hylán: O jisté konstrukci obdélníka	437
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Kosmické soustavy	442
Matematická olympiáda: Přípravné úlohy I. kola	448
Fyzikální olympiáda: Úlohy pro I. kolo soutěže 1976/77	450
Dr. R. Tulak: K osmdesátému výročí vzniku jaderné fyziky	463
Dr. B. Zelinka: Jak se publikují vědecké výsledky v matematice	470
Dr. J. Mrázek: Ještě ke hře o životě a smrti	474
Dr. K. Mišoň: S algebrou roku 1976 .	475
Recenze	476
H. Hofmanová: Slovníček česko-anglický	3. a 4. str. obálky

Za splnění úkolů XV. sjezdu KSČ

PhDr. RENATA WOHLGEMUTHOVÁ, CSc., UK Praha

V těchto dnech nás dělí od XV. sjezdu KSČ, který se sešel ve dnech 12.—16. dubna 1976, již určitý čas, takže je možno daleko hlouběji a náročněji posoudit jeho celkové poslání a inspirující příklad. V jednom z komentářů byl tento sjezd označen jako sjezd odpovědných a cílevědomých hospodářů. Tato charakteristika je skutečně výstižná, neboť celé zasedání naplňoval nejen duch otevřené kritičnosti a realismu v hodnocení úkolů, ale i oprávněný optimismus při určování perspektivních cílů.

Patnáctý sjezd se zabýval všemi rozhodujícími otázkami našeho současného života. Ve své první části hodnotil celkovou linii našeho hospodářství, jak byla plněna od r. 1971, kdy se konal XIV. sjezd KSČ. S pocitem uspokojení, jenž doprovází člověka při úspěšné bilanci, bylo konstatováno, že program XIV. sjezdu — budování všestranně vyspělé socialistické společnosti — byl splněn a že plány, s nimiž vedení strany předstoupilo na XIV. sjezdu před veřejnost, se staly skutečností.

Patnáctý sjezd KSČ navázal ve svém programu na linii předchozího sjezdu, neboť se plně osvědčila. Nadcházející hospodářský a sociální vývoj naší společnosti bude proto i nadále rozvíjen v duchu všestranného budování vyspělé socialistické společnosti. Národní důchod dosáhne v r. 1980 o 27 až 29 % vyšší úrovně než v r. 1975, průmyslová výroba stoupne o 32 až 34 %, zvýší se naše soběstačnost v základních zemědělských produktech, prohloubí se exportní schopnost ekonomiky. Uskutečňování těchto záměrů předpokládá, že budou postupně provedeny hluboké přeměny v průmyslové struktuře naší země, hlavně ve strojírenství, a budou vynaloženy obrovské investice v rozsahu asi 800 miliard korun, což je o 31 % více než v páté pětiletce.

Při stanovování takových náročných cílů bylo však na sjezdu zároveň zcela reálně a střízlivě konstatováno, že jejich plnění bude klást na nás všechny stále vyšší nároky. Mobilizující síla sjezdového jednání však spočívala v tom, že konkrétně ukázala i na prostředky a metody ke zvládnutí vytyčených cílů. Jako rozhodující článek nadcházejícího období byla nastolena především otázka celkové efektivnosti, neboť je nutno počítat s tím, že naše ekonomika již extenzivní zdroje v podstatě vyčer-

pala. K intenzifikačním faktorům je třeba počítat i urychlené zlepšování metod řízení a plánování, zvláště pak posílení hospodářské integrace v rámci RVHP a všestranné spolupráce se Sovětským svazem.

Na tomto poli připadají neobyčejně závažné úkoly i vědě a výzkumu. Nejen ve sjezdových referátech a přijaté Směrnici pro hospodářský a sociální rozvoj ČSSR v letech 1976 až 1980, ale i v řadě diskusních příspěvků byla podtržena významná úloha vědy a výzkumu, jež se mají stát hlavním činitelem při rozvíjení moderní a efektivní výroby s širokým uplatněním racionalizace ve všech oblastech ekonomiky. O významu, který strana úloze vědy a techniky přikládá, svědčí i skutečnost, že plánované investice na tomto úseku mají během 6. pětiletky dosáhnout 18 miliard korun, což je proti minulému pětiletému plánu částka o 4 miliardy vyšší. Do roku 1980 je také plánován růst podílu pracovníků vědy a výzkumu na celkovém počtu pracujících tak, aby na každý tisíc pracujících připadlo 21 osob z oblasti vědy a výzkumu.

Nový program, který XV. sjezd vytyčil, je mimo jiné postaven i na urychlení vědeckotechnického pokroku. Tuto skutečnost zdůraznil ve svém referátě také generální tajemník strany Gustáv Husák, který upozornil, že „vědeckotechnický pokrok je třeba urychlit a zvýšit jeho váhu v hospodářském a společenském rozvoji“. Rozhodujícím předpokladem k tomuto cíli bude i lepší propojení plánu vědy a techniky s celkovým národohospodářským plánem jako základním nástrojem realizace jednotné státní vědeckotechnické politiky v hospodářství.

Při realizaci nového programu počítá tedy XV. sjezd s všeobecnou mobilizací tvůrčího ducha všech výzkumníků a vědců a s jejich novátorstvím. Současné pokolení vědeckých pracovníků stojí tak před velkou a náročnou úlohou — vytvářet zdroje podnětů pro vědeckotechnický pokrok a pomáhat rozvoji naší socialistické ekonomiky. Při plnění generální linie XV. sjezdu musíme proto usilovat, aby podíl československých vědců byl skutečně všestranný a důsledný, aby tak i vědecká fronta přispěla na čelném místě k dalšímu rozkvětu naší vlasti.

Harmonický průměr dvou čísel

JOSEF KOTYK, Pardubice

Jsou-li m, n kladná reálná čísla, lze z nich, jak známo¹⁾, utvořit tři průměry: aritmetický $a = \frac{1}{2}(m + n)$, geometrický $g = \sqrt{mn}$ a harmonický $h = \frac{2mn}{m + n}$. Zkušenosti s numerickými výpočty jejich hodnot (např. pro $m = 4\frac{1}{2}$, $n = 2$ vychází $a = 3\frac{1}{4}$, $g = 3$, $h = 2\frac{10}{13}$, nutí čtenáře dokázat obecný vztah (předpokládáme, že $m \geq n$)

$$m \geq a \geq g \geq h \geq n,$$

uvážit, kdy nastává rovnost, případně doložit tato tvrzení i názornými obrázky apod. Jestliže středoškolské učivo poskytuje poměrně dost příležitostí k užití průměru aritmetického a geometrického, zůstává průměr harmonický studujícím téměř neznám; budeme se jím proto poněkud podrobněji zabývat.

Harmonický průměr dvou čísel lze definovat tzv. harmonickou úměrou, jež zní

$$(m - h) : (h - n) = m : n \quad (1)$$

Je tedy důležitou vlastností harmonického průměru dvou čísel, že rozdíly $m - h$, $h - n$ jsou v poměru daných čísel²⁾.

Harmonickou úměru (1) lze snadným počtem upravit takto:

$$\begin{aligned} (m - h) : (h - n) &= m : n \\ 2mn &= h \cdot (m + n) \quad \left| \cdot \frac{1}{2hmn} \right. \\ \frac{1}{h} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \end{aligned} \quad \dots (2)$$

Reciproká hodnota harmonického průměru dvou kladných reálných čísel je aritmetickým průměrem reciprokých hodnot těchto čísel.

¹⁾ Viz článek „Tři průměry ze dvou čísel“ stati „Matematické zábavy“ v Rozhledech roč. 54, čís. 2, str. 95 a 96.

²⁾ Doporučuji čtenářům, aby si v této souvislosti uvědomili, v jakém poměru jsou obdobné rozdíly $m - a$, $a - n$.

Výrok (2) lze snadno zobecnit i pro větší počet daných čísel. (Viz níže „Poznámku“.)

Mimoto je identicky $m \cdot n = \frac{m+n}{2} \cdot \frac{2mn}{m+n}$, je proto $m \cdot n = a \cdot h$, neboli

$$a \cdot m = n \cdot h. \quad (3)$$

Obsah této úměry zv. hudební vyslovíme větou: Harmonický průměr dvou kladných reálných čísel m, n je čtvrtou úměrnou k veličinám a, m, n .

Zároveň však je $m \cdot n = g^2$, takže také $g^2 = a \cdot h$, neboli

$$a : g = g : h, \quad (4)$$

což vyslovíme větou: Geometrický průměr dvou kladných reálných čísel je střední (geometrickou) úměrnou aritmetického a harmonického průměru těchto čísel.

Ve stereometrii může být harmonický průměr dvou čísel uváděn v souvislost např. s vlastnostmi krychle, nejznámějšího z pěti pravidelných mnohostěnů — zvaných někdy mnohostěny Pythagorovými, jindy Platónovými nebo také tělesa kosmickými — neboť má 12 hran, 6 stěn a 8 vrcholů; jest pak $8 = \frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{12 + 6}$. To znamená: Počet vrcholů krychle je harmonickým průměrem počtu hran a stěn tohoto tělesa.

Tak bychom mohli pokračovat.

V geometrické optice mohou veličiny m, n znamenat vzdálenosti sdružených bodů M, N hlavní optické osy od vrcholu V kulového (dutého) zrcadla poloměru $r = SV$. Srovnání známé zobrazovací rovnice zrcadla $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{r}$ se vztahem (2) dovoluje pak vyslovit ihned tento závěr: $h = r$. Harmonický průměr vzdáleností sdružených bodů hlavní optické osy od vrcholu kulového (dutého) zrcadla je roven jeho poloměru.

Harmonická úměra (1) nabývá pak v tomto případě tvaru $(m - r) : (r - n) = m : n$ a uvádí v úzkou souvislost čtveřinu bodů M, N, S, V ; tvrdí, že dělicí poměr³⁾ bodu M je (nehledíme-li k znaménku, tj. k smyslu úseček) roven dělicímu poměru bodu N vzhledem k základním bodům S, V . Stručně říkáme, že body M, N jsou vzhledem k bodům S, V harmonicky sdruženy, nebo že body M, N oddělují harmonicky body S, V . Uvažované čtyři body M, N, S, V tvoří tzv. harmonickou čtveřinu.

³⁾ O pojmu dělicího poměru bylo v Rozhledech často psáno. Viz např. autorův článek „Hmotný střed soustavy hmotných bodů“ v roč. 53, čís. 1, str. 18 až 21.

Cvičení.

Jestliže body M, N oddělují harmonicky body S, V , oddělují také body S, V harmonicky body M, N . Přesvědčte se o tom!

Poznámka.

Definice průměru aritmetického, geometrického a harmonického lze snadno zobecnit. Je-li dáno k kladných reálných čísel $c_1, c_2, c_3, \dots, c_k$, jest jejich průměr aritmetický stanoven výrazem

$$a = \frac{1}{k} \cdot (c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_k),$$

geometrický výrazem

$$g = \sqrt[k]{c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \dots \cdot c_k}$$

a harmonický výrazem

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots + \frac{1}{c_k} \right).$$

konstruktivní geometrie

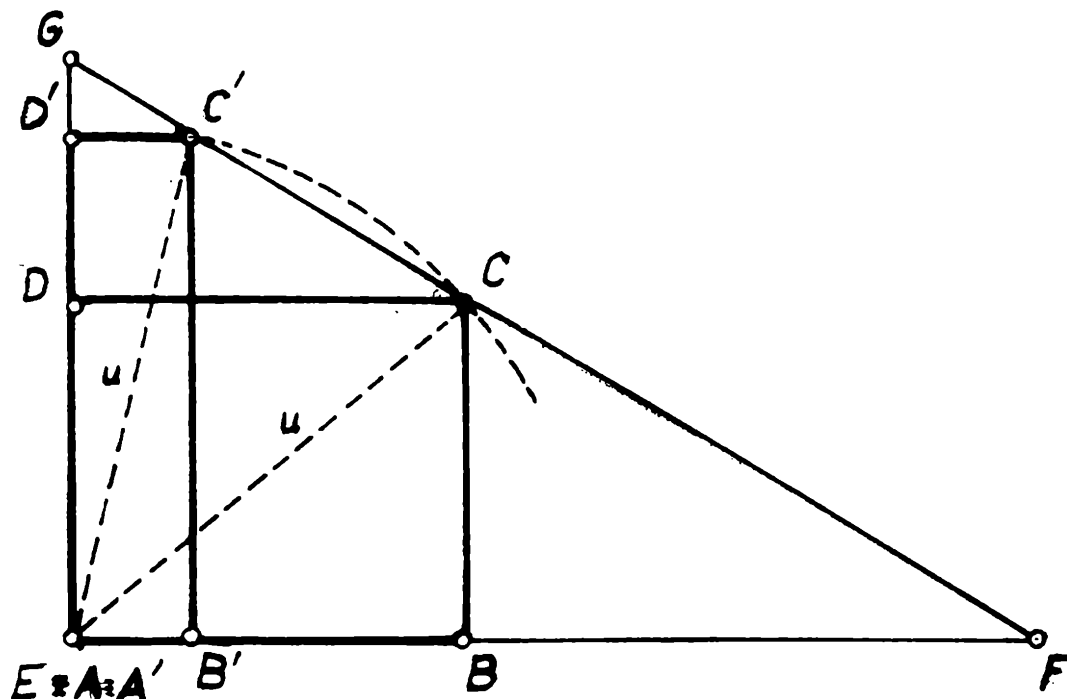
0 jisté konstrukci obdélníka

Ing. JAROSLAV HYLÁN, Vysoká škola dopravní Žilina

V tomto článku budeme sestrojovat obdélníky vepsané do trojúhelníků. Použijeme při tom málo známé množiny bodů V (viz hlavní věta). Zformulujme text úlohy:

Je dán trojúhelník EFG a délka u . Máme sestřit všechny obdélníky $ABCD$ o úhlopříčce délky u , vepsané do trojúhelníka EFG tak, že strana AB leží ve straně EF a zbývající vrcholy incidují se stranami FG a EG .

Nejprve uvažujme případ, kdy trojúhelník EFG je pravoúhlý a strana AB hledaného obdélníka leží v jedné z obou odvěsen EF, EG např. v EF , přičemž $A = E$ (obr. 1). Potom stačí opsat z vrcholu E pravého úhlu kružnici k o poloměru u , její průsečík s přeponou FG určí



vrchol C hledaného obdélníka. Z vrcholu C spustíme pak kolmice na EF a EG ; paty těchto kolmic budou zbývající vrcholy B a D .

Diskuse

Označme v délku výšky trojúhelníka EFG příslušnou k přeponě FG . Dále budiž $m = \max(EF, EG)$ a $n = \min(EF, EG)$.

Nechť nejprve trojúhelník EFG je pravoúhlý rovnoramenný, tzn., že $m = n$. Potom platí:

- a) $v = u \Rightarrow$ úloha má jedno řešení,
- b) $v < u < m \Rightarrow$ úloha má dvě řešení,
- c) $u < v$ nebo $u \geq m \Rightarrow$ úloha nemá řešení.

Jestliže trojúhelník EFG bude pravoúhlý nerovnoramenný, potom

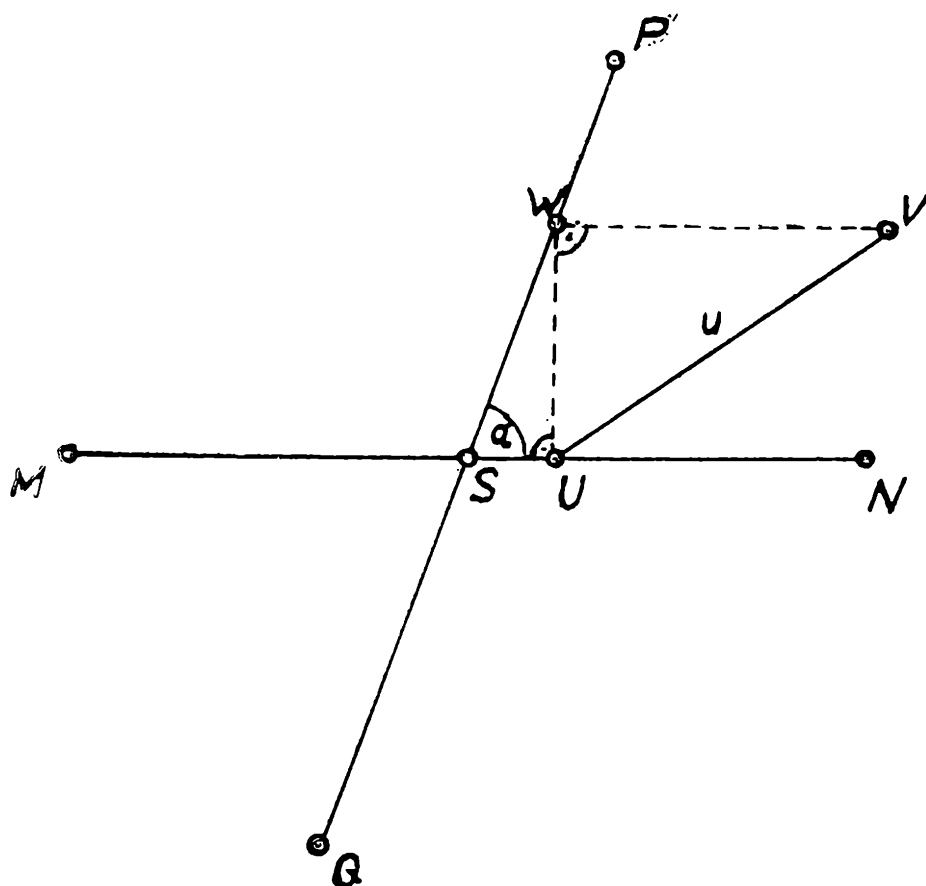
- a) $v = u \Rightarrow$ úloha má jedno řešení,
- b) $v < u < n \Rightarrow$ úloha má dvě řešení,
- c) $n \leq u < m \Rightarrow$ úloha má jedno řešení,
- d) $u < v$ nebo $m \leq u \Rightarrow$ úloha nemá řešení.

Zabývejme se nyní případem, kdy trojúhelník EFG je buď obecný s ostrými úhly při vrcholech E, F nebo pravoúhlý s vrcholem pravého úhlu v bodě G .

V případě, že trojúhelník EFG má tupý úhel u vrcholu E nebo F , nemá úloha řešení, jak snadno zdůvodníte.

Pomocná věta.

Nechť elipsa V je dána sdruženými průměry $MN = 2u$ a $PQ = \frac{2u}{\sin \alpha}$, kde α je ostrý úhel, který svírají sdružené průměry. Potom



rovnice této elipsy v pravoúhlé souřadnicové soustavě (x, y) bude

$$x^2 - 2xy \cotg \alpha + y^2(1 + \cotg^2 \alpha) - u^2 = 0, \quad (1)$$

přičemž její střed $E(0, 0)$ a průměr MN leží v ose x .

Důkaz (obr. 3). Elipsa se sdruženými průměry MN a PQ je vzorem kružnice s průměrem $M'N'$ v elaci s osou $MN = M'N'$, která zobrazí sdružený průměr PQ elipsy do průměru $P'Q'$ kružnice kolmého k průměru $M'N'$.

Nechť pravoúhlá soustava (x, y) je soustavou hledané elipsy a pravoúhlá soustava (x', y') soustavou kružnice, přičemž odpovídající si osy obou souřadnicových systémů budou totožné.

Rovnice každé elace s osou x jsou*)

$$\begin{aligned} x' &= x + ay, \quad \text{kde } a \text{ je libovolné reálné číslo,} \\ y' &= y. \end{aligned} \quad (2)$$

Volme $a = -\cotg \alpha$, kde α je úhel sdružených průměrů elipsy. Rovnice elace pak budou

$$\begin{aligned} x' &= x - y \cotg \alpha, \\ y' &= y. \end{aligned} \quad (3)$$

*) Tyto rovnice jsou uvedeny v článku dr. A. Šarounové v 9. čísle Rozhledů.

Uvažujme nyní kružnici V' o rovnici

$$x'^2 + y'^2 = u^2. \quad (4)$$

Je zřejmé, že $M'(-u, 0)$, $N'(u, 0)$, $P'(0, u)$, $Q'(0, -u)$ jsou koncové body kolmých průměrů kružnice.

Dosadíme nyní vztahy (3) do (4), čímž obdržíme

$$(x - y \cotg \alpha)^2 + y^2 = u^2 \quad (5)$$

Po úpravě dostaneme rovnici elipsy

$$x^2 - 2xy \cotg \alpha + y^2(1 + \cotg^2 \alpha) - u^2 = 0, \text{ což je rovnice (1).}$$

Nyní dokážeme, že body M' , N' , P' , Q' kružnice jsou vzory koncových bodů M , N , P , Q takových sdružených průměrů elipsy, že

$$\sphericalangle (MN, PQ) = \alpha \quad MN = 2u \quad \text{a} \quad PQ = \frac{2u}{\sin \alpha}$$

Stačí dosadit souřadnice x' , y' bodů M' , N' , P' , Q' do rovnic (3) a vypočítat x , y ; dostáváme

$$M(-u, 0), \quad N(u, 0), \quad P(u \cotg \alpha, u), \quad Q(-u \cotg \alpha, -u)$$

$$\text{Dále } MN = M'N' = |u - (-u)| = 2u \text{ a}$$

$$PQ = \sqrt{(2u \cotg \alpha)^2 + (2u)^2} = 2u \sqrt{1 + \cotg^2 \alpha} = \frac{2u}{\sin \alpha}.$$

Tím je dokázáno, že rovnice (1) je rovnicí elipsy V .

Hlavní věta

Nechť jsou dány sdružené průměry MN , PQ elipsy V se středem S , které svírají ostrý úhel $\alpha = \sphericalangle NSP$, dále nechť $SN = u$, $SP = u : \sin \alpha$. Potom vnitřek oblouku PN elipsy V je geometrickým místem vrcholů V pravoúhlých trojúhelníků UWV , ve kterých $UV = u$, W leží na úsečce SP , $WU \perp SN$, $WV \parallel SN$.

Důkaz. Zvolíme stejný systém souřadnic jako v pomocné větě, souřadnice bodu V zapíšeme (x_0, y_0) , dále $W(x_1, y_1)$, $U(x_1, 0)$. Zřejmě platí:

$$0 < x_1 < u \cotg \alpha, \quad 0 < y_1 < u, \quad y_1 = x_1 \tg \alpha.$$

Pro souřadnice bodu V plynou potom vztahy

$$x_0 = x_1 + \sqrt{u^2 - y_1^2}, \quad y_0 = y_1 = x_1 \tg \alpha. \quad (6)$$

příčce délky u , jehož jedna strana AB bude ležet na straně EF trojúhelníka EFG .

Jelikož vrchol C musí ležet současně i na úsečce FG , dostaneme jej jako průsečík této úsečky s danou elipsou V .

Další postup je již zřejmý. Přetneme-li z bodu C poloměrem délky u stranu EF , dostaneme vrchol A hledaného obdélníka. V bodě A vztyčíme kolmici k EF a ta protne stranu FG ve vrcholu D . Vrchol B získáme jako průsečík kolmice spuštěné z bodu C na stranu EF s touto stranou.

Konstrukci průsečíku přímky FG s elipsou V určenou sdruženými průměry MN a PQ provedeme graficky pomocí elace (Obr. 3).

Spojnici MN volíme za osu elace; pak $M = M'$, $N = N'$, kde M' a N' jsou koncové body průměru kružnice V' o poloměru u , přidružené v elaci dané elipse V . Sdruženému průměru PQ elipsy V odpovídá průměr $P'Q'$ kružnice V' kolmý k ose elace. Při tom $PP' \parallel MN \parallel QQ'$ (vyplývá z vlastnosti elace). Dále sestrojíme k přímce $e = FG$ přidruženou přímku e' , jdoucí samodružným bodem $F = F'$ a bodem $G' \in Q'P'$, přičemž $GG' \parallel MN$. Přímka e' protne kružnici V' v bodě C' , jemuž odpovídá na přímce e její průsečík C s elipsou V , který je zároveň vrcholem hledaného obdélníka $ABCD$.

Na závěr naznačme hlavní výsledky diskuse, kterou si čtenář může provést podrobněji. Budiž g délkou strany EF a v délka výšky vycházející z vrcholu G trojúhelníka EFG . Úloha má nejvýše dvě řešení, žádné řešení nemá v případech, kdy $g = u = v$ nebo kdy $v < u$ a $g \leq u$.

astronomie

Kosmické soustavy

RNDR. MIROSLAVA ŠIROKÁ — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Začátkem dvacátého století vypracoval švédský astronom *Carl Charlier* (1862—1934) schéma stupňovitě (hierarchicky) uspořádaného vesmíru. Podle jeho hypotézy je vesmír složen z nekonečného počtu soustav, přičemž vždy větší nebo menší počet soustav nižšího řádu vytváří soustavu vyššího řádu.

Za nejjednodušší kosmické soustavy můžeme pokládat planety se soustavami měsíců; takovou soustavu tvoří naše Země s Měsícem a v sou-

časné době také s umělými družicemi Země, Mars a Jupiter se svými měsíci, Saturn se soustavou měsíců a známým prstencem atd.

Slunce, planety se svými měsíci, planetky a další tělesa (komety, meteorické roje, prachové a plynové částice) vytvářejí již vyšší typ kosmické soustavy — sluneční soustavu. Považujeme-li za „hranici“ sluneční soustavy vzdálenost Pluta od Slunce, pak je její poloměr 40 astronomických jednotek (UA). Vyjádříme-li tuto vzdálenost pomocí rychlosti šíření světla ve vakuu, je poloměr sluneční soustavy 10 světelných hodin. Takto „ohraničená“ sluneční soustava se někdy nazývá „malá sluneční soustava“, neboť do ní nejsou zahrnuty komety, které obíhají kolem Slunce a v aféliu se některé z nich dostávají daleko za dráhu Pluta. Jako poloměr „velké sluneční soustavy“ se někdy označuje poloměr sféry přitažlivosti Slunce, který se udává na 67 000 UA. Známe však komety, jejichž vzdálenost v aféliu je ještě větší: např. kometa Delavane, jejíž oběžná doba byla vypočtena na $24 \cdot 10^6$ roků, má afélium dráhy ve vzdálenosti 170 000 UA od Slunce.

Ve sluneční soustavě můžeme rozlišit tři základní subsystémy: subsystém plochý, střední a kulový. Do plochého subsystému zařazujeme tělesa, jejichž dráhy leží přibližně v téže rovině, tj. která mají poměrně malý sklon k rovině ekliptiky. Patří sem devět velkých planet, jejichž střední sklon roviny dráhy k ekliptice je $\bar{i} = 4^{\circ}28'$. Největší podíl na této hodnotě má nejvzdálenější planeta Pluto, která má sklon dráhy $17^{\circ}09'$; vynecháme-li tuto planetu, pak střední sklon ostatních osmi planet je $\bar{i} = 2^{\circ}39'$. Dále se do plochého subsystému zařazují částice, vytvářející tzv. zodiakální světlo. Střední sklon těchto částic je ve vzdálenosti 1 AU od Slunce $\bar{i} = 1,6^{\circ}$.

Do středního subsystému sluneční soustavy patří planetky, které obíhají přibližně mezi dráhou Marsu a Jupitera a jejichž sklony drah jsou v mnohem větším intervalu než je tomu u planet. Některé planetky mají sklony drah až 52° a střední hodnota je $\bar{i} = 9,7^{\circ}$.

Do kulového subsystému zařazujeme komety, u nichž se vyskytují sklony drah od 0° až do 180° . Podle *S. K. Vsechsvjatského* je střední hodnota sklonu drah komet $\bar{i} = 94,3^{\circ}$, z čehož vyplývá, že jsou skutečně zastoupeny všechny sklony drah zhruba rovnoměrně a sklony nad 90° nejsou jen ojedinělé.

Obdobné subsystémy bychom mohli hledat i v soustavách měsíců některých planet, u nichž ovšem nenajdeme všechny tři subsystémy. Tak např. dráhy všech pěti měsíců planety Urana leží v rovině rovníku Urana a tvoří tedy zcela plochý subsystém, u jiných planet tvoří měsíce plochý anebo střední subsystém. Saturnův prstenec lze pokládat za zcela plochý subsystém; jeho měsíce (s výjimkou Phoebe, která má sklon dráhy 150°) tvoří plochý subsystém. Pět nejbližších měsíců Jupitera obíhá v rovině jeho rovníku a tvoří tedy zcela plochý subsystém, u ostat-

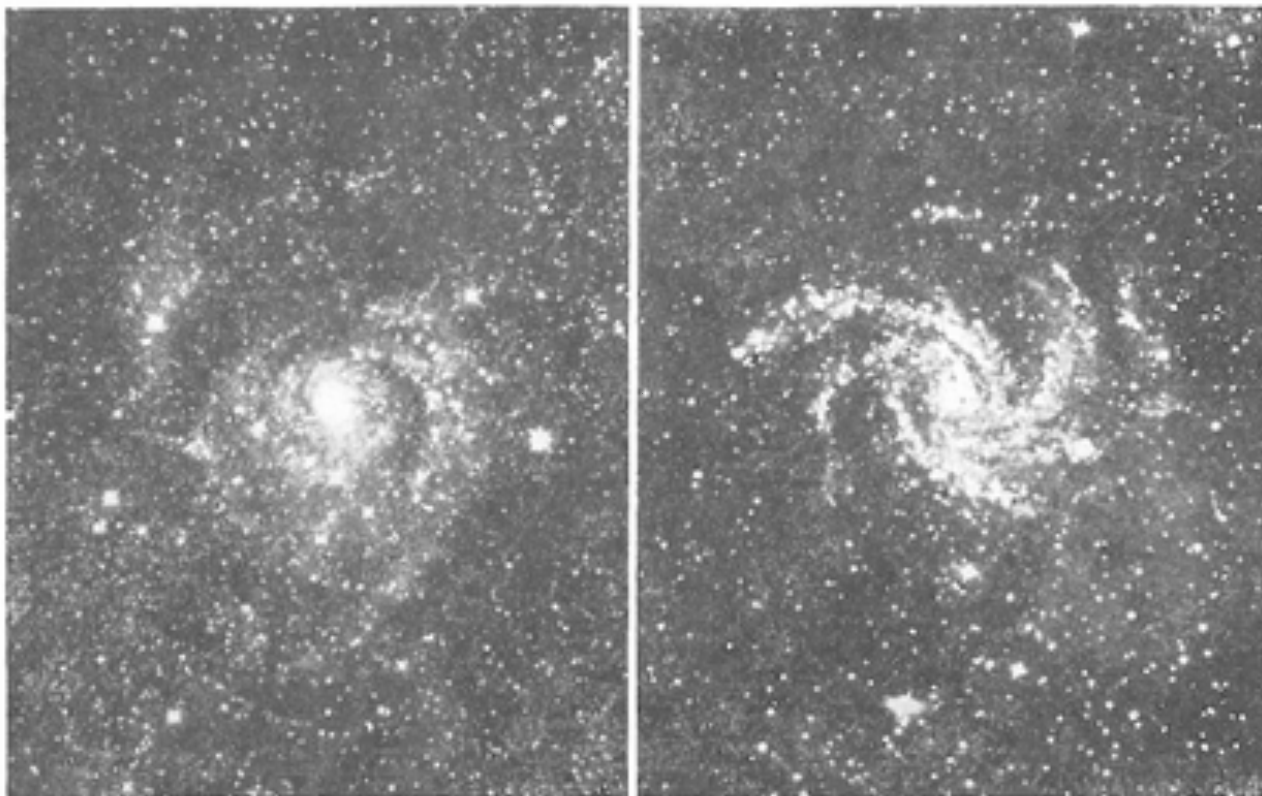
ních měsíců je střední sklon přibližně 90° , mohli bychom je tedy pokládat za kulový subsystém.

Sluneční soustava, ostatní hvězdy se svými soustavami a další tělesa včetně mezihvězdného plynu a prachu tvoří soustavu vyššího řádu — Galaxii. Poloměr Galaxie je asi 15 kpc, neboli, vyjádřeno pomocí rychlosti šíření světla, 50 tisíc světelných roků. Slunce leží ve vzdálenosti asi 10 kpc od centra Galaxie poblíž galaktické roviny. V centru Galaxie je soustředěno asi 5 až 7 % látky Galaxie, proto jsou pohyby hvězd mnohem složitější než pohyby planet ve sluneční soustavě. V Galaxii rozlišujeme rovněž tři základní subsystémy (rozlišování na subsystémy bylo provedeno nejdříve u Galaxie, analogicky se pak hledaly subsystémy i u jiných soustav).

Do plochého subsystému Galaxie patří především mezihvězdná látka složená z plynu a prachu, která se koncentruje do poměrně tenké vrstvy v rovině Galaxie, hvězdné asociace typů O a T (objevené v r. 1947 sovětským astronomem *V. A. Ambarcumjanem*), žhavé hvězdy Wolfovy-Rayetovy a hvězdy raných spektrálních tříd (tj. O až B9), hvězdy typu T Tauri a klasické cefeidy. Do středního subsystému se řadí hvězdy galaktického jádra, hvězdy hlavní posloupnosti (spektrálních tříd dG až dM), polopravidelné proměnné hvězdy, novy, planetární mlhoviny a podobři. Kulový subsystém vytvářejí bílí trpaslíci, dlouhoperiodické proměnné hvězdy spektrální třídy M5e, proměnné hvězdy typu RR Lyrae, podtrpaslíci a kulové hvězdokupy.

Podobně jako planety mají měsíce, má i naše Galaxie dva satelity: Velké a Malé mračno Magellanovo. Magellanova mračna jsou ve vzdálenosti asi 50 kpc a co do velikosti i hmotnosti jsou mnohem menší než naše Galaxie. Obě jsou viditelná jen na jižní obloze.

Podobných hvězdných soustav, jako je naše Galaxie, známe dnes již velký počet a nazýváme je galaxie. Dělí se na spirální galaxie (sem patří i naše Galaxie), spirální galaxie s přičkou, eliptické galaxie a nepravidelné galaxie (např. obě mračna Magellanova). Na obr. 1 jsou fotografie dvou poměrně blízkých spirálních galaxií, označených IC 342 a NGC 6946. Z fotografií je zřejmá spirální struktura galaxií. Nejbližší spirální galaxií je M 31 v souhvězdí Andromedy (známá jako „mlhovina v Andromedě“), která je na hranici viditelnosti pouhým okem — za bezměsíční noci ji můžeme spatřit jako mlhavý obláček. Rovněž tato galaxie má dva satelity: nepravidelnou galaxii NGC 205 a eliptickou galaxii M 32. Naše Galaxie s Magellanovými mračny, galaxie v Andromedě se svými satelity, spirální galaxie M 33 v Trojúhelníku a další nepravidelné, eliptické a trpasličí galaxie tvoří soustavu vyššího řádu, kterou označujeme jako Místní soustavu galaxií. Tato Místní soustava galaxií má poloměr řádově 1 Mpc a tvoří ji 23 galaxií. Podobných soustav galaxií bylo objeveno více a lze říci, že v jedné místní soustavě galaxií je v průměru 20 galaxií.

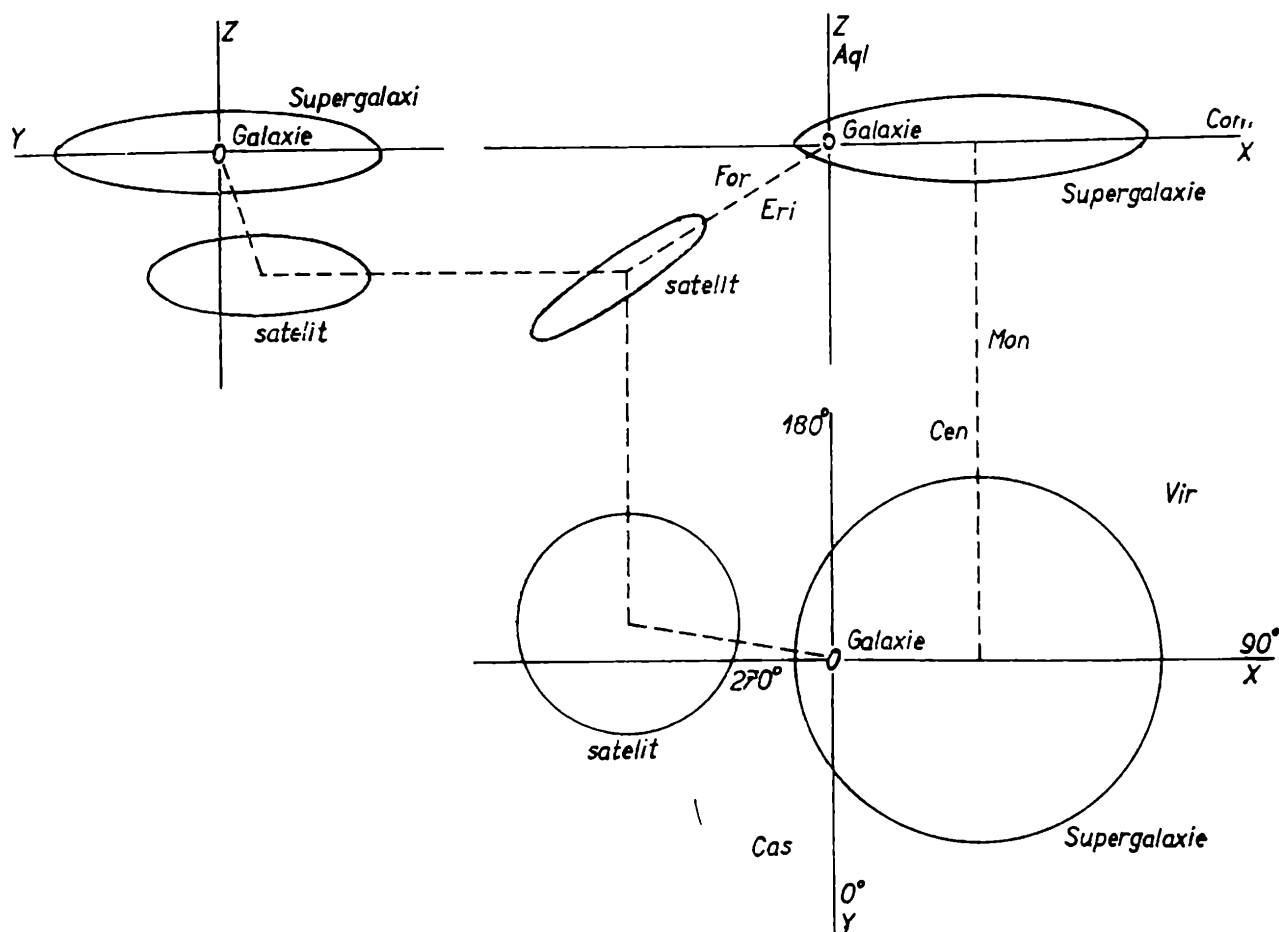


Obr. 1. Spirální galaxie IC 342 a NGC 6946

Místní soustavy galaxií vytvářejí opět soustavy vyššího řádu, nazývané hnízda (nebo kupy) galaxií. Podle současných představ tvoří přibližně sto místních soustav jedno hnízdo galaxií. Jsou však známa i velmi početná hnízda galaxií, která obsahují i několik tisíc soustav. Údaje o některých známých hnízdech galaxií podává tab. I.

V padesátých letech našeho století se o výzkum vnějších galaxií významně zasloužil francouzský astronom *Gérard de Vaucouleurs*, který ukázal, že existuje soustava ještě vyššího řádu, nazvaná Supergalaxie. Vytváří ji asi deset tisíc galaxií a její průměr je asi 30 Mpc. Naše Galaxie je od jádra Supergalaxie, které leží v kupě galaxií v souhvězdí Panny, vzdálena asi 10 Mpc, takže její poloha připomíná polohu Slunce v Galaxii. Hmotnost Supergalaxie se odhaduje na 10^{15} hmotností Slunce. Supergalaxie se otáčí kolem svého centra, přičemž rotační doba je pro galaxie v blízkosti jádra asi 50 miliard roků, ve vnějších oblastech kolem 200 miliard roků. Na obloze se jeví Supergalaxie jako pás galaxií, jehož rovina je téměř kolmá na rovinu naší Galaxie. Zde opět můžeme vidět analogii s naší Galaxií, která se na obloze jeví jako světlý pás okem nerozlišitelných hvězd, nazývaný „Mléčná dráha“.

Analogie s naší Galaxií ještě pokračuje: ukázalo se, že i Supergalaxie má satelit, jehož průměr je asi polovina průměru Supergalaxie. Poloha satelitu vzhledem k Supergalaxii je ve třech různých rovinách znázorněna na obr. 2, přičemž počátek souřadnic byl položen do středu Galaxie. Osa



Obr. 2. Schéma místní Supergalaxie podle G. de Vaucouleurse

+X směřuje k centru Supergalaxie, osa Y leží v rovině Supergalaxie a osa Z je kolmá k rovině Supergalaxie. Vidíme, že Supergalaxie má, podobně jako Galaxie, přibližně tvar disku.

Předpokládá se, že soustavy supergalaxií vytvářejí soustavu vyššího řádu, která byla nazvána Metagalaxie. Původně se termínem „metagalaxie“ označovaly všechny soustavy, které byly pozorovány za hranicemi naší Galaxie. Podle sovětského astrofyzika *G. M. Idliše* můžeme za Metagalaxii považovat kosmickou soustavu, která obsahuje všechny galaxie pozorovatelné současnými prostředky.

V tomto článku jsme chtěli upozornit na to, že názor Charlierův se v podstatě potvrzuje současnými výzkumy. Je třeba si uvědomit, jak velkého rozmachu dosáhla astronomie v posledních padesáti letech. Vždyť ještě koncem první čtvrtiny našeho století bylo vlastně velkým překvapením zjištění amerického astronoma *Edwina Hubblea*, že se spirální ramena vnějších galaxií skládají z hvězd, že to tedy nejsou mlhoviny, ale soustavy podobné naší Galaxii. V r. 1932 objevil též astronom, že v některých blízkých galaxiích existují kulové hvězdokupy a v r. 1944, že i v jádrech galaxií jsou hvězdy. To bylo v době, kdy astronomové na základě teoretických výpočtů holandského astronoma *Jana Oorta* jen

Tabulka I. Hnízda galaxií

Název	Počet soustav	Vzdálenost Mpc	Radiální rychlost km . s ⁻¹
Virgo .	2 544	16	1 200
Perseus . . .	500	79	5 200
Coma Berenices	1 000	88	6 600
Leo	300	260	20 000
Corona Borealis	400	280	21 000
Bootes . . .	150	520	39 000
Ursa Major II..	200	560	42 000

Vzdálenosti byly vypočteny za předpokladu hodnoty Hubbleovy konstanty $H = 76 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.

tušili, kde asi leží jádro naší vlastní hvězdné soustavy — Galaxie. Dnes víme, že je to v souhvězdí Střelce ve vzdálenosti asi 10 kpc.

Poloměr pozorované části vesmíru se díky rychlému rozvoji moderních pozorovacích prostředků stále zvětšuje. Jestliže jsme ještě před dvaceti lety vystačili v astronomii s jednotkou vzdálenosti megaparsek ($\text{Mpc} = 10^6 \text{ pc}$), pak nyní lze již s výhodou používat gigaparsek ($\text{Gpc} = 10^9 \text{ pc}$). Za nejvzdálenější pozorované útvary ve vesmíru považujeme kvazary; např. vzdálenost kvazaru 4C 04.34 se odhaduje na 7,4 Gpc. Vzdálenost 1 Gpc urazí světlo přibližně na 3 miliardy roků. Tak velké vzdálenosti si prakticky vůbec nelze představit. Stačí, když uvážíme, že stáří Země se odhaduje na 5 miliard roků. To znamená, že nejvzdálenější útvary, které nyní pozorujeme, vyslaly své záření v době, kdy Země ještě neexistovala. Je možné, že za dobu, než světlo dospělo k nám, změnily pozorované útvary svou strukturu, my je však pozorujeme takové, jaké byly před několika miliardami let.

Kategorie A

1. Určete všechny trojice nezáporných celých čísel x, y, z , pro něž platí

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

2. Je-li z komplexní číslo, označujeme $\operatorname{Re} z$ reálnou část čísla z (tj. $\operatorname{Re} z = a$ pro $z = a + ib$).

Dokažte:

1) Je-li z komplexní číslo takové, že $\operatorname{Re} z > 0$, je i $\operatorname{Re} \frac{1}{z} > 0$.

2) Jsou-li z_1 a z_2 komplexní čísla taková, že $\operatorname{Re} z_1 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$, pak číslo $z_1 z_2$ není reálné záporné.

3. Z úseček, jejichž délky jsou $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ lze sestrojit trojúhelník právě tehdy, platí-li pro všechny dvojice x, y , pro něž je $x + y = 1$,

$$a^2 x + b^2 y > c^2 xy.$$

4. Je dán kruh K ; dokažte, že nelze zvolit tři body A, B, C uvnitř K tak, aby přímky AB, AC, BC rozdělily K na sedm částí stejného obsahu.

Kategorie B

1. Je dána množina funkcí $f(x) = x^2 + b|x| + c$, kde b, c jsou reálné parametry. Najděte všechny funkce z této množiny, které mají v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 1 \rangle$ největší hodnotu 2 a nejmenší hodnotu 1.

2. Určete všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}.$$

3. Na kulovém vrchlíku o poloměru 1 a výšce 1 jsou dány čtyři body, z nich žádný neleží na hraniční kružnici. Potom alespoň dva z těchto bodů mají vzdálenost menší než 2. Dokažte.

4. Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se skládá ze čtverce o straně délky 1 a z rovnostranného trojúhelníka CDE . Vyšetřte množinu M středů

všech úseček rovnoběžných s přímkou AC , jejichž oba krajní body náležejí hranici pětiúhelníka $ABCDE$, a vypočtete délku čáry M .

Kategorie C

1. Určete všechna celá čísla x , která jsou řešením rovnice

$$3|x - 1| - 2x = 2|3x + 1|$$

2. Auto jelo z města A do města B stálou rychlostí. Po hodině jízdy pokračuje rychlostí sníženou na $\frac{3}{5}$ rychlosti původní. Tím se jeho příjezd do B opozdí o 2 hodiny. Kdyby k tomuto snížení došlo o 50 km blíže k B , opozdilo by se jen o 80 minut. Vypočtete vzdálenost AB a původní rychlost auta.

3. Je dána kružnice k s průměrem AB . Na kružnici k zvolíme bod $X \neq A, B$ a na polopřímce AX sestrojíme bod Y tak, aby platilo $AY = AX + XB$. Vyšetřte množinu středů Z úseček AY pro všechny takové body X .

4. Pětiúhelník $ABCDE$ se skládá ze čtverce $ABCE$ a z rovnoramenného trojúhelníka CDE se základnou CE . Vyšetřte množinu středů všech úseček rovnoběžných s přímkou AC , jejichž oba krajní body náležejí hranici pětiúhelníka $ABCDE$.

FO Úlohy pro I. kolo soutěže 1976/77

Kategorie A

1. Dva monočlánky o rovnakom elektromotorickom napätí U_e majú rozdielne vnútorné odpory R_1 a R_2 a sú spojené sériovo v batériu, ktorá napája spotrebič o odpore R , pričom svorkové napätia jednotlivých článkov sú U_1 a U_2 .

Úlohy:

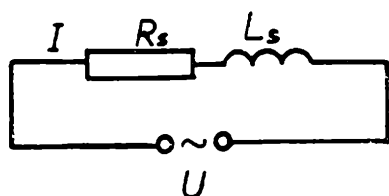
- Nakreslite schému zapojenia.
- Ak sú známe veličiny U_e , U_1 , U_2 a R , vypočítajte vnútorné odpory článkov a prúd v obvode.
- Aká je účinnosť batérie?
- Ak nahradíme druhý článok novým článkom o rovnakom elektromotorickom napätí, vzrastie prúd v obvode o p %. Ktoré iné veličiny ešte vzrástli a ktoré poklesli? Aké sú ich nové hodnoty? Ktorá vlastnosť nového článku mala vplyv na tieto zmeny?
- O koľko percent môže teoreticky najviac narásť prúd po výmene druhého článku?

Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty: $U_e = 1,65$ V, $U_1 = 1,35$ V, $U_2 = 1,15$ V, $R = 2,50$ Ω , $p = 10,0$ %.

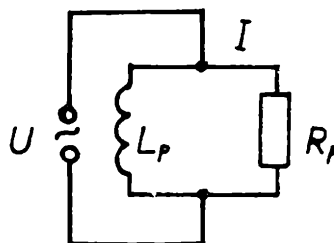
Upozornenie: Jednotlivé výsledné vzťahy zoradte v takej následnosti a dajte im taký tvar, aby číselný výpočet bol časove hospodárny.

2. Sklená trubica so štvorcovým prierezom o strane d je ohnutá do tvaru obdĺžnika a naplnená elektricky vodivou kvapalinou hustoty ρ . Rovina obdĺžnikovej nádoby je zvislá a steny trubice majú polohu len zvislú alebo vodorovnú. Časť spodnej vodorovnej vetvy zasahuje do homogénneho magnetického poľa indukcie $\mathbf{B}$, a to tak, že vektor $\mathbf{B}$ je kolmý na rovinu nádoby. V tejto časti trubice sú na jej vnútorných stenách umiestnené nad sebou vodorovne dve tenké rovinné elektródy tvaru štvorca o strane d , ktoré sú pripojené cez spínač S k zdroju Z konštantného prúdu. V jednej zvislej vetve nádoby je uzáver U . Pri zapnutí spínača prechádza elektrickým obvodom prúd I v takom smere, aby nastali javy, ktoré sú predmetom nasledujúcich úloh:
- Nech celý objem nádoby je vyplnený kvapalinou. Opíšte chovanie kvapaliny z mechanického hľadiska, ak otvoríme uzáver U a zapneme spínač S . Nakreslite obrázok zariadenia s úplným elektrickým obvodom.
 - Nádoba je len čiastočne naplnená kvapalinou tak, že pri otvorení uzáveru U hladina kvapaliny siaha práve po kohútik uzáveru. Nad kvapalinou je plyn tlaku p a objemu V . Ak uzavrieme uzáver a potom zapneme spínač, nastane proces, ktorý výstižne opíšte. Určte tlak plynu v trubici po ustálení stavu. O teplote kvapaliny i plynu pred-

Obr. 1



Obr. 2



pokladajte, že sa nemenia. Nakreslite príslušný obrázok obdobne, ako v prípade a).

- c) Posúďte na základe výsledkov z bodu b), akú maximálnu hodnotu môže mať prúd, aby kvapalina sa nedostala ani do hornej vodorovnej vetvy nádoby, ani sa nestalo, že by vyplňovala spodnú vodorovnú vetvu nádoby iba čiastočne.

Predpokladajte, že vodivosť kvapaliny sa počas spomínaných dejov nemení a že kvapalina je ideálna.

Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty: $d = 1,0 \text{ cm}$, $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $g = 10,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $p = 1000 \text{ Pa}$, $I = 100 \text{ A}$, $B = 1,0 \text{ T}$, $V = 1,0 \text{ l}$.

3. Doskový vákuový kondenzátor sa skladá z dvoch štvorcových dosiek o stranách a a vzájomnej vzdialenosti d . Jedna doska kondenzátora je spojená cez spínač S_p s kladným pólom zdroja konštantného napätia. U Druhá doska je pripojená cez rezistor s odporom R na záporný pól zdroja.

Dosky kondenzátora možno od seba oddaľovať, pričom treba pôsobiť silou.

Po načrtnutí schémy zapojenia určte:

- Akou silou sa priťahujú dosky kondenzátora v závislosti od ich vzájomnej vzdialenosti?
- Aká práca sa vykonala počas oddaľovania dosiek na n -násobok ich pôvodnej vzdialenosti?
- Ako sa zmenila energia kondenzátora oddialením dosiek na n -násobok ich pôvodnej vzdialenosti a v akej súvislosti je táto zmena energie s vykonanou prácou?
- Aké teplo sa vyvinie v rezistore pri oddaľovaní dosiek? Ktorá okolnosť vplýva podstatne na teplo vzniknuté v rezistore?

Úlohy a) až d) riešte v nasledujúcich dvoch prípadoch:

- Kondenzátor bol po nabití odpojený od zdroja pred oddaľovaním dosiek.
- Kondenzátor zostal spojený so zdrojom aj pri oddaľovaní dosiek.

Riešte najprv všeobecne a potom pre hodnoty: $a = 50,0 \text{ cm}$, $d = 1,50 \text{ mm}$, $U = 1000 \text{ V}$, $R = 10,0 \text{ k}\Omega$, $n = 10$.

4. Obvod podľa obr. 1 je sestaven z rezistoru o odporu R_s a cívky o indukčnosti L_s . Pri pripojení ke zdroji harmonického striedavého napätia U o úhlovém kmitočtu ω jím protéká prúd I .

- a) Stanovte odpor R_p a indukčnost L_p v obvodu podle obr. 2 tak, aby při připojení k témuž zdroji protékal obvodem týž proud a aby i fázové posunutí mezi napětím a proudem bylo v obou případech stejné.
- b) Podle výsledků ukažte, že při $\frac{\omega L_s}{R_s} \gg 1$ je $L_p \approx L_s$ a že odpor R_p je přibližně nepřímo úměrný odporu R_s .
5. Osobní automobil hmotnosti m projíždí rychlostí v levotočivou neklopenou zatáčkou poloměru R . Těžiště automobilu (obr. 3) je uprostřed rozvoru l ve výšce h nad vozovkou. Rozchod d předních i zadních kol je stejný. Kolo má poloměr r a spolu s rotujícími částmi (např. bubny brzd) hmotnost m_0 .

Vypočtěte:

- a) Síly F_e a F_p , kterými působí levé a pravé kolo na vozovku.
- b) Kritickou rychlost v_k automobilu, při které styková síla mezi kolem a vozovkou na jedné straně vozidla je nulová. Jakou silou působí kola na vozovku na druhé straně vozidla?
- Při výpočtu uvažujte vedle odstředivých sil také gyroskopický jev. Moment setrvačnosti kola počítejte zjednodušeně jako u kruhové desky.
- Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty: $m = 1100$ kg, $v = 65,0$ km $\cdot$ h⁻¹, $R = 40,0$ m, $l = 2400$ mm, $h = 480$ mm, $d = 1250$ mm, $r = 300$ mm, $m_0 = 16,0$ kg.
6. Měření zatěžovacích charakteristik síťového usměrňovače (experimentální úloha)

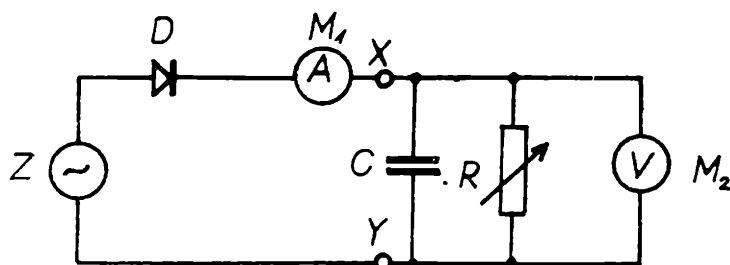
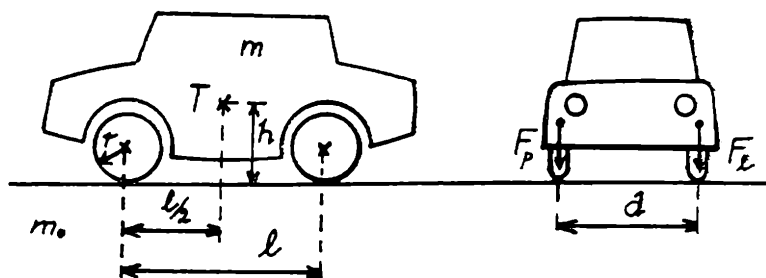
Úvod:

Zatěžovací (pracovní) charakteristika usměrňovače je graf funkce $U = f(I)$, kde U značí stejnosměrné napětí na spotřebiči o odporu R , měřené voltmetrem M_2 , I stejnosměrný proud protékající spotřebičem a měřený miliampérmetrem M_1 . Obvod je napájen ze zdroje Z stálého harmonického střídavého napětí. Proud je usměrňován diodou D . Kondenzátor C připojený paralelně ke spotřebiči má potlačovat střídavé složky, které „zvlňují“ usměrněné napětí.

Pomůcky:

- Z ...zdroj stálého střídavého napětí o efektivní hodnotě alespoň 20 V a kmitočtu 50 Hz,
- D křemíková (nebo i germaniová) dioda, jejíž přípustný proud v propustném směru je alespoň 0,3 A a jejíž přípustné napětí v závěrném směru je alespoň čtyřnásobkem efektivní hodnoty použitého střídavého napětí,
- R reostat s vhodným maximálním odporem a s přípustným proudem alespoň 0,2 A,

Obr. 3



Obr. 4

- C .kondenzátory o rôznych kapacitách (doporučené hodnoty: $2 \mu\text{F}$, $4 \mu\text{F}$, $8 \mu\text{F}$, $16 \mu\text{F}$, popr. i väčší),
 M_1 .miliampérmetr (např. avomet),
 M_2 voltmetr (např. avomet).

Úkoly

- Sestavte obvod podľa obr. 4. Nepripojte medzi svorky X , Y spotrebič ani kondenzátor.
- Zmeňte napätie $U_{\max}$ medzi svorkami ($I = 0 \text{ mA}$).
- Ke svorkám X , Y pripojte spotrebič (reostat) a postupne nastavujte prúdy v intervale $0 \text{ mA} < I < 200 \text{ mA}$, s krokom najľepšie 10 mA , a ke každej nastavené hodnote prúdu I prečtete odpovedajúce napätie U . Výsledky zapíšte do tabuľky a znázorníte graficky. Ke krivke (zatěžovací charakteristice pro $C = 0 \mu\text{F}$) pripíšte parametr $C = 0 \mu\text{F}$.
- Měření podle bodů 2. a 3. opakujte s různými kapacitami kondenzátoru C , výsledky znázorníte graficky, ke každé křivce pripíšte kapacitu použitého kondenzátoru (např. $C = 2 \mu\text{F}$ apod.).
- Vysvětlete (na základě fyzikálních úvah) odlišnost v průbězích změřených závislostí, zejména však výraznou odlišnost křivky pro $C = 0 \mu\text{F}$ a křivek pro $C > 0 \mu\text{F}$.
- Usudte, jak by grafy probíhaly při zvětšování kapacity C až do $C \rightarrow \infty$. Vysvětlete.
- Dve tenké spojky tvoria centrovanú sústavu šošoviek. Ich vzdialenosť je $d < f_1 < f_2$, kde f_1 je ohnisková vzdialenosť prvej šošovky, bližšej k predmetu, f_2 je ohnisková vzdialenosť druhej šošovky. Túto sústavu možno približne nahradiť jedinou spojkou, ktorej poloha i ohnisková vzdialenosť závisia okrem parametrov d , f_1 , f_2 aj od polohy predmetu voči sústave šošoviek. Od náhradnej šošovky požadujeme, aby vytvorila obraz na tom istom mieste ako sústava a mala aj rovnaké zväčšenie. Jej poloha nech

je určená vzdialenosťou y od druhej šošovky, meranou smerom k predmetu. Ohniskovú vzdialenosť náhradnej šošovky označme f .

Vykonajte postupne nasledujúce úlohy:

- Vyhotovte prehľadný rovinný náčrtok sústavy pri hodnotách: $f_1 = 5$ cm, $f_2 = 10$ cm, $d = 2,5$ cm. Predmetom nech je úsečka AB dĺžky 3 cm, kolmá na optickú os s bodom A na osi, umiestnená vo vzdialenosti 9 cm od prvej šošovky.
- Nájdite konštrukciou obraz $A'B'$ úsečky AB , vytvorený len prvou šošovkou a napíšte príslušné vzťahy.
- Nájdite konštrukciou obraz $A''B''$ úsečky AB , vytvorený sústavou oboch šošoviek a jeho vzdialenosť od druhej šošovky označte x .
- Určte vzhľadom na druhú šošovku súvislosť medzi obrazmi $A'B'$ a $A''B''$ a napíšte príslušné vzťahy.
- Napíšte vzťahy, ktoré vyjadrujú požiadavky kladené na náhradnú šošovku.
- Získané všeobecné rovnice použite postupne na číselný výpočet hodnôt y a f pre niektoré vybrané vzdialenosti a predmetu od prvej šošovky. Počítajte pre hodnoty: $a = 9$ cm, 5 cm, 4 cm a ∞ . Ostatné potrebné hodnoty vezmite z bodu a). Tieto hodnoty považujte za „absolutne presné“, výsledky výpočtu stačia s presnosťou na tri miesta.

Kategorie B

- Těleso je zavěšeno na pružném vlákne, jehož délka, není-li zatíženo, je d . Toto vlákno vychýlíme z rovnovážné polohy o 90° (vlákno přitom nenapínáme) a volně pustíme. Při průchodu rovnovážnou polohou má vlákno délku d_1 , $d_1 > d$.
Určete rychlost tělesa při průchodu rovnovážnou polohou. Rozměry tělesa a hmotnost vlákna neuvažujte.
Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $d = 0,80$ m, $d_1 = 1,00$ m.
- Rebrík dĺžky l a tiaže $\mathbf{G}$ sa jedným koncom opiera o vodorovnú podlahu a druhým koncom o zvislú stenu. Súčiniteľ statického trenia rebríka s podlahou je f_1 a so stenou f_2 . Rebrík môžeme považovať za homogénnu tyč.
 - Aký najmenší uhol α_0 môže zvieriť rebrík s podlahou, aby sa ešte nezošmykol?
 - Ako sa zmení táto podmienka, ak stojí na rebríku, vo vzdialenosti $l \leq l$ od jeho dolného konca, človek tiaže $\mathbf{G}'$?
Urobte diskusiu riešenia úlohy.
- Dvojica rovnakých kondenzátorov (1) a (2) o kapacitách C_0 a zdroj napätia U_0 sú zapojené v obvode s dvoma spínačmi K_1 a K_2 tak, ako je to znázornené v schéme na obr. 5.



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 54, 1975-76

VEDOUČÍ REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Doc. Ota SETZER,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA: Dr. Jaroslav Bayer, VÚT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha

**Vydává ministerstvo školství
ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze
za odborné péče
Jednoty československých matematiků a fyziků**

OBSAH

Úvodníky

Kraemer Emil: Na počátku 54. ročníku Rozhledů mat. fyz.	1
Ladman Jaroslav: Jak dále ve světle XXV sjezdu KSSS	385
Trefný Zdeněk: Vydavatelská činnost SPN v oblasti M a F	49
Wohlgemuthová Renata: Historické místo únorového vítězství v roce 1948 v našich dějinách	241
Za splnění úkolů XV. sjezdu KSČ	433

Matematika

Berger Jiří: Množství informace v křivce	100
Bušek Ivan: Zajímavé řešení jedné maturitní úlohy	387
Calda Emil: Faktoriály a subfaktoriály	145
Subfaktoriály v kombinatorických úlohách	196
Drábek Karel: Duální čísla v přímkové geometrii	243
Kotyk Josef: Gaussův symbol [a]	6
Harmonický průměr dvou čísel	435
Kraemer Emil: Různá řešení jedné úlohy o elipse	298
Lízner Jaroslav: Aritmetické posloupnosti vyšších řádů	2
Mišoň Karel: Permutace	102
Sférický trojúhelník	293
Řezáčová Tamara: Hazardní hry	337
Skotnický Jozef: Vzorec pre priemerné hodnoty	8
Skuhra Jiří: Lineární a statistická závislost	397
Problém počtu opravářů	11
Včely a matematika	97
Víte, co je statistika?	289
Šarounová Alena: Afinní elace	393
Šedivý Jaroslav: Paradoxy teorie množin	149
Vrba Antonín: Vennovy diagramy kontra selský rozum	193

Konstruktivní geometrie

Blažek Vladimír: Apolloniovy úlohy	251
Brecha Josef: Některé charakteristické vlastnosti rovinného čtyřúhelníka, jehož úhlopříčky jsou navzájem kolmé	153
Drs Ladislav: Vývojové diagramy v konstruktivní geometrii	311

II.

Horák Stanislav: Úloha o elipsách	343
Hradecký František: Cassiniho křivky a Bernoulliho lemniskata	404
Hylán Jaroslav: O jisté konstrukci obdélníka	437
Kraemer Emil: O tečně elipsy a hyperboly	14

Fyzika

Bednář Jan: O některých optických jevech v zemské atmosféře	63
Dub Petr: Coulombův zákon pro magnetismus a jeho užití	17
Dvořák Lubomír, Kupka Zdeněk: Kapalně krystaly	201
Praktické využití kapalných krystalů	255
Golab František, Kamenčák František: Seebeckův termoelektrický jev	349
Janout Zdeněk: Kosmické záření	159
Kolesnikov Vladislav, Záhejský Jiří: Několik poznámek ke vzniku speciální teorie relativity	52
Kotyk Josef: Dvě kapitoly z počátků vzduchoplavby	211
Lepil Oldřich: Jak plovou tělesa	410
Mída Jiří: O jednom použití dělicího poměru v mechanice dokonale tuhého tělesa	106
Novák Josef: Geometrie a fyzika	207
Rosa Jan: Termoluminiscence	110
Skotnický Jozef: Nové názory o termodynamice	414

Astronomie

Mišoň Karel: Let umělé družice nad zemským povrchem	69
Mezihvězdné poselství	118
Široká M., Široký J.: Aberace světla	24
Astronomické katalogy	259
Kosmické soustavy	442
Nové sovětské dalekohledy	114
O pohybech Země	27
Široká M., Široký M.: Planetka Ikar	316
Planetka 852 Vladilena	357
Pohyb Slunce v Galaxii	417
Třináctý měsíc planety Jupitera	68
Úplné zatmění Měsíce 18./19. XI. 1975	66
Zymák Jiří: Středověký kalendář	319

Různé

Gedei Jan: N. I. Lobačevskij a 150ročná neeuklidovská geometrie	422
Janout Zdeněk: Dvacet let FJFI	31
Jedinák Dušan: Benjamin Franklin — veda, sloboda a vlast	232
Kotyk Josef: Gaussův velikonoční recept	91
Giordano Bruno	138
Hrst vzpomínek	333
Rozhledy pomáhají škole	182
Mišoň Karel: Staroměstský orloj	224
Mrázek Jiří: Kapesní počítače ve škole — ano či	382
Sedláčková Jiřina: Sjezdy JČSMF a JSMF	235
Šedivý Jaroslav: Mimořádné výročí I. Newtona	231
Několik zajímavostí	185
Zajímavosti o kalendářích	220

Tulak Rudolf: K 80. výročí vzniku jaderné fyziky	465
Voříšek Jan, Šmakal Stanislav: Přijímací zkoušky z matematiky na vysokých školách inženýrských směrů	271
Zelinka Bohdan: O odborném slohu v matematice	377
O matematické terminologii	420

Olympiády

FO úlohy	450
MO úlohy	33, 36, 448
Gedei Jan: Úlohy VIII. ročníku MFO	359
Košťál Rostislav: Chyby v žákovských řešeních úloh FO	172
Osmá MFO v NDR	170
Třetí kolo kat. A XVI. ročníku FO	128
Sedláček Jiří: MO jubiluje	130
Sedláčková Jiřina: Z jubilejního roku MO	327
Setzer Ota: Naše účast na XVII. MMO v Burgasu	124
Úlohy XVIII. MMO a jejich řešení	236, 268, 324

Matematické zábavy

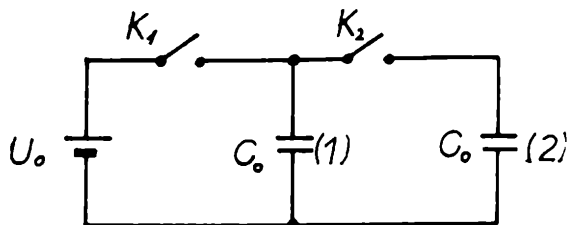
Diblík Josef: Zmatlíkův objev	188
Horák Stanislav: Zajímavosti z geometrie	39
Kotyk Josef: Zmatlík, Archimédes nové doby	279
Mišoň Karel: S algebrou roku 1976	475
Mrázek Jiří: Hra o životě a smrti	328, 372, 427, 474
Matematická miniatura	216, 281, 376
Šedivý Jaroslav: Hra s uspořádanými dvojicemi	282
O několika paradoxech	142

Nejmladším čtenářům

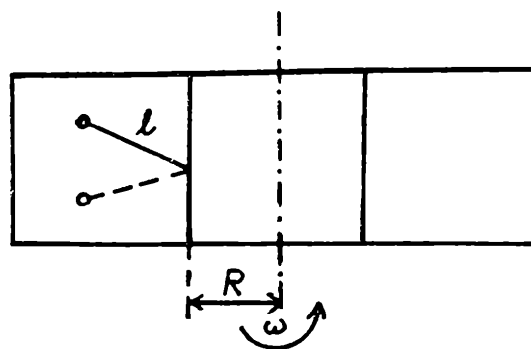
Horák Stanislav: Z polského časopisu „Matematyka“	283
Mišoň Karel: Regula Nicomachi	189
Šedivý Jaroslav: Počtářské kuriozity	238

Naše soutěž

Řešení úloh minulého ročníku Rozhledů	42, 80, 133, 175, 217, 265
Úlohy k řešení	75, 131
Výsledky loňské soutěže Rozhledů	78
Ze zahraničních časopisů	47, 89, 286
Recenze	96, 192, 240, 336, 432, 476



Obr. 5



Obr. 6

- Zapneme spínač K_1 (spínač K_2 je vypnutý). Vypočítajte napätia U_{a1} , U_{a2} a náboje Q_{a1} a Q_{a2} na kondenzátoroch (1) a (2).
- Vypneme spínač K_1 a zapneme spínač K_2 . Určte napätie U_b a náboje Q_{b1} a Q_{b2} na kondenzátoroch.
- Dosky kondenzátora (1) presunieme na dvojnásobok pôvodnej vzdialenosti tak, aby sme neodviedli do okolia ani časť náboja. Určte náboj ΔQ_c , ktorý prejde z jedného kondenzátora na druhý. Vypočítajte napätie U_c na kondenzátoroch.
- Do vzduchovej medzery kondenzátora (2) vsunieme dielektrikum o relatívnej permitivite ϵ_r , ktoré zaplní celú vzduchovú medzeru medzi doskami kondenzátora. Určte náboj ΔQ_d , ktorý prejde z jedného kondenzátora na druhý. Vypočítajte napätie U_d na kondenzátoroch.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $C_0 = 10 \text{ nF}$, $U = 120 \text{ V}$, $\epsilon_r = 2,0$.

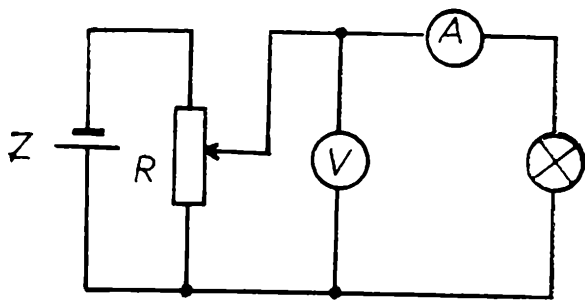
- Valec o priemere d_1 je pevne uložený na vodorovnej podložke tak, že jeho geometrická os je vodorovná. Druhý valec o priemere d_2 , ktorý je homogénny, položíme na prvý valec tak, že jeho geometrická os je vodorovná a je kolmá na geometrickú os prvého valca; ťažisko druhého valca leží na zvislej priamke, ktorá pretína geometrickú os prvého valca. Súčiniteľ statického šmykového trenia valcov je f .

- Určte podmienku, ktorú musí spĺňať pomer $\frac{d_1}{d_2}$, aby druhý valec bol v rovnovážnej stálej polohe.

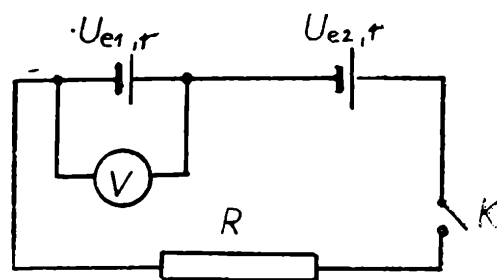
- Predpokladajte, že pomer $\frac{d_1}{d_2}$ splňuje podmienku a). Určte najväčší uhol α , o ktorý možno odkloniť geometrickú os druhého valca od horizontálnej roviny, napr. pôsobením sily zvislého smeru na koniec druhého valca, aby sa po zrušení tejto sily vrátil valec do pôvodnej rovnovážnej polohy.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $\frac{d_1}{d_2} = 1,20$ a $f = 0,500$.

- Kosmická stanica tvaru veľkého prstence (obr. 6) o vnútornom polomere R rotuje kolem své osy konstantní úhlovou rychlostí. Na „stropě“



Obr. 7



Obr. 8

uvnitř stanice jsou zavěšeny hodiny, jejichž kyvadlo délky l lze považovat za matematické. Doba kmitu kyvadla je T_1 . Za dobu τ se následkem rovnoměrně zrychleného rotačního pohybu stanice změní její úhlová rychlost na jinou konstantní hodnotu. Doba kmitu kyvadla se přitom změní na T_2 . Určete, kolik otáček vykonala kosmická stanice za dobu τ . Gravitační působení jiných těles na kosmickou stanici je zanedbatelné.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $R = 24 \text{ m}$, $l = 1,0 \text{ m}$, $T_1 = 1,0 \text{ s}$, $T_2 = 0,40 \text{ s}$, $\tau = 20 \text{ s}$.

V případě potřeby si prostudujte část studijního tématu pro kategorii D v XVII. ročníku FO, v letáku pro XVII. ročník FO na str. 119 a 120.

6. Vyšetrovanie charakteristiky žiarovky. (experimentálna úloha)

Pomôcky: Akumulátor alebo iný zdroj o napätí 12 V ; reostat 11Ω , 5 A ; automobilová žiarovka 40 W , 12 V ; voltmeter, ampérmeter (v oboch prípadoch je možné použiť avomet). Doporučené hodnoty pomôcok považujte za orientačné.

Cieľ merania: Zistiť údaje potrebné na grafické znázornenie charakteristiky žiarovky, t.j. grafu funkcie $I = f_1(U)$, kde I je prúd a U napätie na žiarovke. Pomocou týchto údajov znázorniť aj funkcie $R = f_2(U)$ a $P = f_3(U)$, kde R je odpor žiarovky a P príkon žiarovky.

Postup

1. Zapojíme obvod podľa schémy na obr. 7.
2. Postupne zvyšujeme napätie na žiarovke od 0 V do 12 V a meriame hodnoty prúdu. Potom postupne znižujeme napätie a meriame prúd k rovnakým hodnotám napätia ako v prvom meraní. Z oboch meraných hodnôt vypočítame priemer. Príslušné napätia a prúdy zapisujeme do vhodnej tabuľky.

Spracovanie výsledkov merania:

1. Zostrojte graf funkcie $I = f_1(U)$, tzv. charakteristiku žiarovky.

2. Z nameraných hodnôt prúdu I a napätia U vypočítajte odpor $R = \frac{U}{I}$ žiarovky pri rôznych napätiach U . Zostrojte graf závislosti $R = f_2(U)$.
3. Žiarovka má wolframové vlákno. Teplotný súčiniteľ odporu wolframu je $\alpha = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Zo zmeny ΔR odporu R žiarovky pri zmene napätia na žiarovke z 0 V na 12 V určte približnú teplotu T vlákna žiarovky pri napätí $U = 12 \text{ V}$
Vieme, že teplota špirály pri plnom výkone žiarovky má približne hodnotu $T' = 2100 \text{ °C}$. Zdôvodnite rozdiel $T' - T$.
4. Vypočítajte prúd I_m , ktorý tečie žiarovkou v okamihu pripnutia napätia $U = 12 \text{ V}$ na žiarovku.
5. Pre rôzne hodnoty napätia U na žiarovke vypočítajte príkon P žiarovky a graficky zobrazte funkciu $P = f_3(U)$. Určte napätie U_1 , pri ktorom príkon žiarovky je polovicou plného príkonu žiarovky.
7. Dva galvanické články o elektromotorických napätiach U_{e1} a U_{e2} a rovnakých vnútorných odporoch r sú pripojené na vonkajší odpor $R = r$ tak, ako je to znázornené na obr. 8. K prvému zdroju je pripojený voltmeter, ktorého nula je v strede stupnice. Pri rozpojení spínači K ukazuje voltmeter výchylku v pravej časti stupnice.

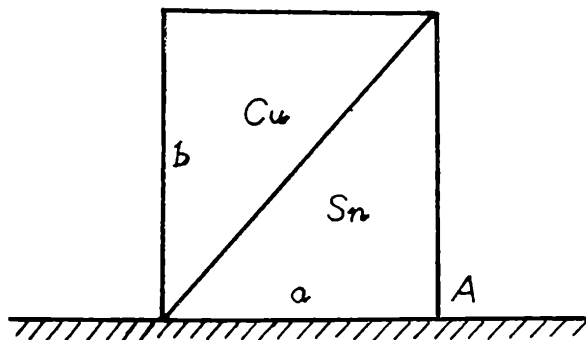
Určte podmienku, ktorú musí splňovať pomer $p = \frac{U_{e1}}{U_{e2}}$ aby pri zapnutí spínači K ukazoval voltmeter výchylku

- a) v pravej časti stupnice,
- b) na nule stupnice,
- c) v ľavej časti stupnice.

Vnútorný odpor voltmetra je veľmi veľký v porovnaní s odporom r .

Kategorie C

1. Neukázněný cestující běží rychlostí $v = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, aby nastoupil do posledního vagónu vlaku, který je na nástupišti připraven k odjezdu. V okamžiku, kdy cestující je ve vzdálenosti $d_1 = 20 \text{ m}$ od dveří posledního vagónu, vlak se začne rozjíždět se stálým zrychlením $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
 - a) Určete dráhu s_1 cestujícího a dráhu s_2 vlaku jako funkce času. Na milimetrový papír sestrojte grafy těchto funkcí do téže soustavy souřadnic. Z grafu rozhodněte, zda cestující dohonil poslední vagón vlaku.
 - b) Určete vzdálenost d cestujícího od dveří posledního vagónu vlaku jako funkci času. Na milimetrový papír sestrojte graf funkce $d = f(t)$. Ověřte z grafů správnost řešení úlohy a). Za kterou dobu od okamžiku uvedení vlaku do pohybu je cestující svému cíli nejbližší?
2. Soustava těles se skládá z pevné kladky, z dvou těles o hmotnostech $m_1, m_2, m_2 > m_1$, a z vlákna, jehož hmotnost je zanedbatelná vzhledem



k hmotnostem těles. Tělesa jsou zavěšena na koncích vlákna vedeného na obvodu kotouče kladky. Tření v soustavě neuvažujeme.

- a) Jakými silami $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ jsou napínány části lana mezi tělesy a kladkou, je-li hmotnost kladky zanedbatelná vzhledem k hmotnostem těles?
- b) Jakými silami $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ jsou napínány části lana mezi tělesy a kladkou, je-li moment setrvačnosti kladky I a poloměr kladky r ?

Pozn.: Úhlové zrychlení otáčivého pohybu kladky $\alpha = \frac{a}{r}$, kde a je zrychlení posuvného pohybu tělesa zavěšeného na vlákně.

3. Dvě hvězdy o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují po soustředných kruhových drahách v téže rovině tak, že jejich vzdálenost l je stálá.
 - a) Určete poloměry drah r_1 , r_2 a oběžné doby T_1 a T_2 kolem společného středu. Provedte diskusi pro dva případy:
 - hmotnosti obou hvězd jsou stejné ($m_1 = m_2$),
 - hmotnost m_1 je velmi velká vzhledem k hmotnosti m_2 ($m_1 \gg m_2$).
 - b) Použijte výsledku úlohy a) ke stanovení hmotného středu soustavy Země—Měsíc, víte-li, že střední vzdálenost středů obou těles je $l \doteq 60 R_z$, R_z je střední poloměr Země, a že poměr hmotností obou těles $\frac{m_Z}{m_M} \doteq 81$.
4. Jeden mol ideálního plynu, který má dvouatomové molekuly, má počáteční objem V a počáteční tlak p_1 . Plyn projde cyklickým dějem složeným ze čtyř částí: 1. Izochorickým dějem se zvýší tlak plynu na $p_2 = 1,5 p_1$; 2. izobarickým dějem se zvýší objem na $V_3 = 2 V_1$; 3. izochorickým dějem nabývá plyn tlak $p_4 = p_1$, izobarickým dějem se vrací do původního stavu o objemu V_1 a tlaku p_1 .
 - a) Narýsujte na milimetrový papír cyklický děj, je-li $V_1 = 12,3$ litru, $p_1 = 2,00 \cdot 10^5$ Pa.
 - b) Určete obecné teploty T_1 , T_2 , T_3 , T_4 plynu na počátku každého dílčího děje, potom je určete pro hodnoty uvedené v úloze a).
 - c) Určete obecně termodynamickou účinnost η cyklu, potom ji určete pro hodnoty uvedené v úloze a).
5. Deska tvaru kvádrů o rozměrech podstavy a , b a o tloušťce c má jednu polovinu z mědi o hustotě ρ_1 a druhou z cínu o hustotě ρ_2 (obr. 9).

- a) Určete polohu T hmotného středu desky.
 b) Deska je postavena na vodorovné podložce boční stěnou o rozměrech a , c . Jakou práci vykoná dělník, překlopí-li desku z této polohy na vodorovné podložce kolem vodorovné hrany procházející pravým dolním vrcholem A (obr.)?

Řešte nejprve obecně, potom pro veličiny: $a = 0,960$ m, $b = 1,100$ m, $c = 0,210$ m, $\rho_1 = 8,93 \cdot 10^3$ kg m⁻³, $\rho_2 = 7,28 \cdot 10^3$ kg m⁻³.

- c) Z výchozí polohy podle bodu b) byla deska překlopena na vodorovné podložce kolem vodorovné osy procházející bodem A o 90°. Nakreslete její novou polohu. Z této polohy ji dělník překlopí na vodorovné podložce opět kolem vodorovné osy procházející pravým dolním vrcholem ve stejném smyslu otáčení jako v úloze b). Vykoná stejně velkou práci jako v případě b), větší nebo menší než v případě b)?
 6. Určení setrvačné hmotnosti tělesa použitím kuželového kyvadla.
 (experimentální úloha)

1. Teoretická příprava úlohy

Těleso, jehož setrvačnou hmotnost máte určit, je tělesem kuželového kyvadla, které koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru r ve vodorovné rovině (obr. 10). Na těleso přitom působí napjaté vlákno tahovou silou F_1 a tíhové pole silou $F_2 = mg$. Výslednice těchto sil je dostředivá síla F vodorovného směru.

Dokažte, že platí

$$m = \frac{FT^2}{4\pi^2 r} \quad (1)$$

Z tohoto vztahu určíte setrvačnou hmotnost tělesa m , jestliže změříte tři veličiny: periodu T pohybu, poloměr dráhy r a dostředivou sílu F .

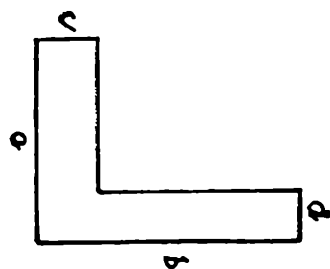
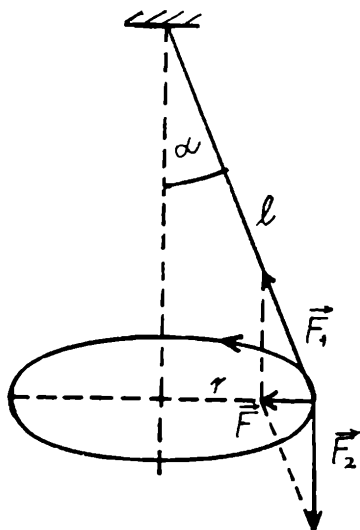
2. Příprava pokusu

Na vodorovnou podložku pokrytou kreslicím papírem narýsujete kružnici o poloměru r . Těleso zavěsíte na silonové vlákno tak, že v rovnovážné poloze se stále dotýká vodorovné podložky ve středu kružnice. Těleso vychýlíte při napjatém vlákně z rovnovážné polohy stále tak, aby se nacházelo nad některým bodem narýsované kružnice. Vhodně velkým impulsem ve směru tečny ke kružnici uvedete těleso do rovnoměrného kruhového pohybu nad kružnicí. Velikost impulsu splňující tuto podmínku je nutno nacvičit. Těleso, jehož setrvačnou hmotnost máte určit, je např. kovová kulička nebo tělísko válcového nebo kuželového tvaru, používané u olovnice, nebo závaží opatřené háčkem.

3. Měření veličin

- a) K měření periody T :

Obr. 10



Obr. 11

Podle obrázku dokažte, že pro periodu T platí vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} \quad (2)$$

Vyjádřete, jak se mění perioda T s rostoucí délkou l při konstantním úhlu α . Vyjádřete, jak se mění perioda T s rostoucím úhlem α při konstantní délce l . Uvažte dále, že periodu T naměříte daným měřidlem času tím přesněji, čím je perioda větší. Jak využijete těchto poznatků k tomu, abyste zvětšili přesnost měření periody T ?

Podle vztahu (2) perioda T nezávisí na hmotnosti tělesa. Za kterých podmínek pro těleso je to splněno?

Jestliže jste dosáhli vhodným impulsem síly toho, aby se těleso pohybovalo po kruhové dráze, za kterých předpokladů můžete periodu T považovat za konstantní?

Před měřením periody T postavíte tenkou svislou tyč do středu kružnice na podložce. Měříte dobu $t = 10 T$, v počátečním a konečném okamžiku se pro vaše oko vlákno kyvadla kryje s osou tyče za kyvadlem. Měření doby t opakujte např. desetkrát, z každého měření vypočítáte periodu T_i . Periodu T určíte jako aritmetický průměr veličin T_i .

b) K měření poloměru r :

Poloměr dráhy r zvolíte tak, aby při zvolené délce l kyvadla nepřesáhl úhel α velikost 10° . Pro zvolenou délku kyvadla l si připravíte tři různé poloměry r_i , které uvedenou podmínku splňují.

c) K měření síly F :

Místo síly F změříte sílu F , která je stejně veliká, ale opačně orientovaná. Postupujte např. takto: K tělesu kyvadla v rovnovážné poloze stálé připevníte siloměr se stupnicí, jejíž jeden dílek odpovídá $0,1 \text{ N}$. Těleso se siloměrem posunete ve vodorovném směru od středu kružnice tak, aby se těleso nacházelo nad některým bodem kružnice

o poloměru r_i , kterou při měření použijete. Siloměr upevníte ve vodorovné poloze a přečtete na stupnici velikost tahové síly F .

4. Pomůcky

Zapište pomůcky, které si zvolíte k řešení úlohy. Popište je a odůvodněte svou volbu. Popište stupnice použitých měřidel a stanovte přesnost měření, kterou jimi dosáhnete, odhadem absolutní chyby měření.

5. Provedení pokusu

Proveďte měření periody T a síly F pro tři různé poloměry r_i . Stanovte odhadem absolutní chybu měření každé veličiny a stanovte relativní chybu. Pro každou volbu r_i určete podle vztahu (1) setrvačnou hmotnost tělesa. Z nich vypočítejte aritmetický průměr a správně zaokrouhlete.

Porovnejte takto zjištěnou setrvačnou hmotnost tělesa s jeho hmotností gravitační, změřenou použitím rovníramenných vah.

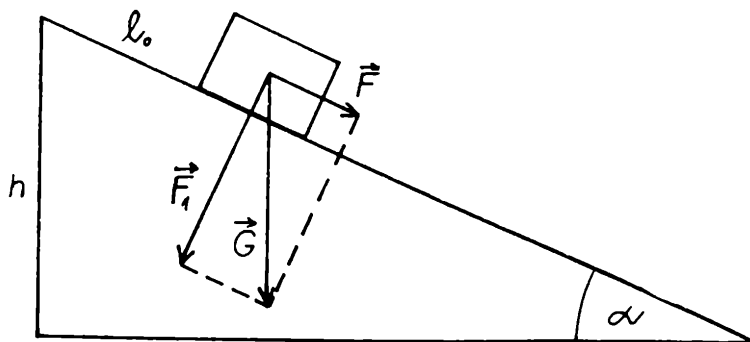
Zápis řešení úlohy rozdělte na 5 částí podle zadání úlohy. Proveďte shrnutí všech zjednodušujících předpokladů měření (délka a hmotnost vlákna, velikost úhlu α , stálost periody T , záměna tělesa s hmotným bodem apod). Posudte, jak jsou tyto předpoklady ve vaší práci splněny.

7. Na obr. 11 je znázorněn úhelník zhotovený ze stejnorodého materiálu. Jeho rozměry jsou $a = 350$ mm, $b = 450$ mm, $c = 100$ mm, $d = 75$ mm. Tloušťka h je zanedbatelná vzhledem k ostatním rozměrům.
- Narýsujte úhelník na milimetrový papír do soustavy pravoúhlých souřadnic ve vhodném měřítku a ve vhodné poloze.
 - Určete polohu hmotného středu T úhelníka. K tomu účelu rozdělte úhelník znázorněný v úloze a) na vhodné části. Řešte úlohu nejprve obecně, potom pro zadané rozměry.
 - V obrázku v úloze a) určete polohu hmotného středu T úhelníka graficky a vyjádřete jeho souřadnice v dané soustavě souřadnic. Porovnáním výsledků úlohy b) a c) ověřte správnost řešení úlohy.

Kategorie D

- Na křižovatkách velkých měst, zejména na tzv. výpadových silnicích, se používají elektronická zařízení, která automaticky vyhodnocují a na světelných signálech ukazují řidičům doporučenou rychlost. Dodrží-li ji, dojedou k následujícímu semaforu „na zelenou“. Obvykle se udávají hodnoty v této posloupnosti: $v_1 = 45$ km $\cdot$ h $^{-1}$, $v_2 = 50$ km $\cdot$ h $^{-1}$, $v_3 = 55$ km $\cdot$ h $^{-1}$, $v_4 = 60$ km $\cdot$ h $^{-1}$. Potom údaj zhasne, neboť rychlost vyšší než 60 km $\cdot$ h $^{-1}$ je dovolena pouze na malém počtu ulic.

Obr. 12

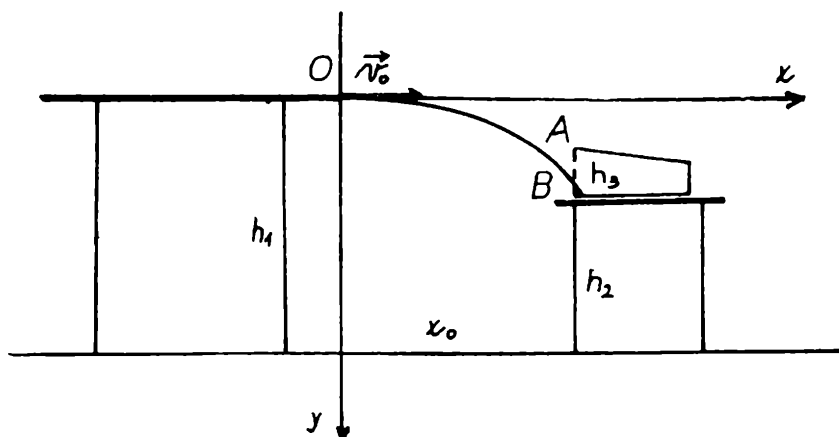


Vysvětlete, jak pomocí stopek určíte z pozorování světelných údajů na křižovatce vzdálenost d nejbližšího semaforu.

Řešte nejprve obecně, potom pro $d = 1\,200\text{ m}$.

2. Cestující stojící na nástupišti pražského metra zjistil, že první vagón přijíždějící soupravy projel kolem něho za dobu $t_1 = 1,0\text{ s}$. Určete, po jakou dobu bude míjet cestujícího poslední vagón soupravy, složené z n vagónů ($n = 4$). Konec posledního vagónu se zastavil právě u cestujícího. Pohyb soupravy považujte za rovnoměrně zpomalený. Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty.
3. Pavel si vymyslel tuto hru: Položil malou kuličku na desku stolu, která je ve výšce h_1 nad podlahou, a do vzdálenosti x_0 od okraje desky umístil na stoličku do výšky h_2 „lapač“, jehož výška je h_3 (viz obr. 12). Do kuličky cvrnkne tak, že zaznamená zásah, tj. kulička vletí do lapače.
 - a) Určete, jakou rychlost v_0 musí udělit kuličce.
 - b) Změní se rychlost v_0 , když uvede kuličku do pohybu ve vzdálenosti od kraje desky stolu? Odpory proti pohybu jsou velmi malé.
 - c) Změní se rychlost v_0 z úlohy a), když lapač přeneseme do vzdálenosti $2x_0$ od okraje desky stolu?

Své úvahy zdůvodněte.
4. Na klidné vodě jezera je v klidu plovoucí pramice o délce l a hmotnosti m .
 - a) Dva chlapci, z nichž první má hmotnost m_1 a druhý hmotnost m_2 , stojí na protilehlých koncích pramice. Současně se začnou pohybovat proti sobě stejnou rychlostí rovnoměrným pohybem a zastaví se při setkání. Určete posunutí pramice vzhledem k vodě.
 - b) Po uklidnění pramice pokračují oba chlapci ve svých pohybech, a to tak, že druhý běží dvojnásobnou rychlostí než první; oba se zastaví, jakmile doběhne druhý chlapec na konec pramice. Určete posunutí pramice vzhledem k vodě.
 - c) Porovnejte orientaci posunutí pramice s rychlostí prvního chlapce v případě a) a b); proveďte diskusi.
 - d) Určete velikost a orientaci posunutí pramice vzhledem k vodě pro tyto hodnoty: $m_1 = 60\text{ kg}$, $m_2 = 40\text{ kg}$, $m = 400\text{ kg}$, $l = 10\text{ m}$, v případě a) a b).



5. Těleso o hmotnosti m padá z počáteční klidové polohy z desátého poschodí k zemi.
- Jakou práci vykoná tíhová síla působící na těleso při pádu tělesa z 10. do 5. poschodí? Jak se změní při tom potenciální energie tíhová a kinetická energie tělesa?
 - Jakou práci vykoná tíhová síla působící na těleso, pokračuje-li pád tělesa z 5. poschodí k zemi? Jak se změní na tomto úseku potenciální energie tíhová a kinetická energie tělesa?
 - Po obecném vyřešení řešte pro hodnoty: $m = 10 \text{ kg}$, vzájemná vzdálenost dvou po sobě následujících poschodí $d = 2,8 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Do téže soustavy os na milimetrovém papíře sestrojte ve vhodném měřítku grafy potenciální energie tíhové tělesa a kinetické energie tělesa jako funkce dráhy tělesa. Ověřte z grafu správnost obecného řešení.
6. Určení okamžité rychlosti a zrychlení tělesa při pohybu rovnoměrně zrychleném. (experimentální úloha)

I. Úvod.

A) Při pohybu tělesa po nakloněné rovině působí na těleso tíha $G = mg$ a reakce podložky, kolmá k nakloněné rovině $F_1 = mg \cos \alpha$. Výslednice těchto sil $F = mg \sin \alpha$ způsobí pohyb tělesa po nakloněné rovině dolů (obr. 13).

a) Odvoďte vztah pro velikost zrychlení tělesa $a_1 = g \sin \alpha = g \frac{h}{l_0}$.

b) Kuličku spustíme z výšky h . Určete velikost rychlosti tělesa na konci dráhy l_0 : $v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2a_1 l_0}$.

B) K hodnotám zrychlení a rychlosti tělesa na konci dráhy lze dojít i na základě měření doby t , za kterou těleso urazí dráhu l .

a) Odvoďte vztah pro zrychlení $a_2 = \frac{2l}{t^2}$.

b) Odvoďte vztah pro rychlost na konci dráhy $v_2 = \frac{2l}{t}$.

V případě A) i B) podrobně запиšte své fyzikální úvahy.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ϵ	h (m)	l (m)	$a_1 = g \frac{h}{l}$ (m . s ⁻²)	$v_1 = \sqrt{2gh}$ (m . s ⁻¹)	t (s)	$a_2 = \frac{2l}{t^2}$ (m . s ⁻²)	$v_2 = \frac{2l}{t}$ (m . s ⁻¹)	$\frac{a_1 - a_2}{a_1}$	$\frac{v_1 - v_2}{v_1}$
		1,40							
		1,80							
		2,20							
		2,60							
		3,00							
P	×	×		×	×		×		×

II. Měření.

A) Pomůcky: Navrhujeme vám, abyste použili k měření nakloněné roviny, vytvořené kovovým profilovým materiálem (tvar L), popř. dvou latí tak, aby se vytvořil žlábek. Délku nakloněné roviny zvolte 2—3 m, aby měření bylo přesvědčivé. Abychom mohli zanedbat nebo podstatně snížit účinek odporových sil proti pohybu, zvolme jako těleso kuličku. Další pomůcky zvolte podle potřeby a запиšte je.

B) Provádějte měření na základě úvah v bodě I. a popište je.

C) Tabulky naměřených hodnot:

Hmotnost kuličky $m_1 =$

Poloměr kuličky $r_1 =$

Sklon $\sin \alpha_1 = \frac{h}{l_0} =$

Hodnoty ve sloupci 3 jsou uvedeny pro příklad; v případě kratší dráhy zvolte úseky ve 2. a 3. třetině délky l_0 .

D) Úlohu opakujte pro jiný úhel sklonu α , запиšte do tabulky podle bodu C).

E) Znázorněte rychlosti jako funkce času $v(t)$ na jeden milimetrový papír do téže soustavy souřadnic podle sloupců 5 a 8 tabulky. V záznamu $v_1(t)$ v sloupci 5 tabulky určete teoreticky čas $t_i = \frac{2l_i}{a_1}$, ve kterém kulička urazí dráhu l_i podle sloupce 3 tabulky.

III. Závěr.

A) Pokuste se vysvětlit rozdíly dvojic hodnot a_1 , a_2 (sloupce 4) a 7) a v_1 , v_2 (sloupce 5 a 8).

B) Zatím jsme uvažovali jen posuvný pohyb kuličky. Kulička však vykonává složený pohyb valivý. Při studiu tohoto pohybu docházíme k závěru, že rychlost kuličky na konci dráhy při pohybu po nakloněné rovině z výšky h se stanoví

$$v_3 = \sqrt{\frac{10}{7} gh} ,$$

v případě, že odpory proti pohybu kuličky lze zanedbat. Vysvětlete, proč se vzájemně liší hodnoty v_1 a v_3 ; proč se vzájemně liší hodnoty v_2 a v_3 ?

7. Dva chlapci soutěží, kdo z nich dopraví dříve sáňky s nákladem do vzdálenosti s po vodorovné cestě. Jeden sáňky táhne, druhý tlačí. V prvním případě působí chlapec na sáňky silou F šikmo vzhůru, druhý chlapec působí stejně velkou silou, která svírá týž úhel α s vodorovnou rovinou, ale směřuje šikmo dolů. Hmotnost sáněk je v obou případech m , součinitel smykového tření mezi sáňkami a sněhem má velikost f . Který z chlapců dopraví sáňky do cíle dříve? Zdůvodněte. K řešení nakreslete obrázek.

r ů z n é

K osmdesátému výročí vzniku jaderné fyziky

RNDr. RUDOLF TULAK, Marti

V historii vědy nalezneme málo příkladů tak rychlého rozvoje určitého vědního oboru, jakým prošla fyzika atomů a jejich jader od konce minulého století. Jejím nejpozoruhodnějším použitím je uvolnění ohromných zásob energie jaderného původu, kterou jsme si zvykli nazývat atomovou energií. Nesmírný dosah objevů, které vedly k takovému použití, dovoluje nám oprávněně hovořit o nové éře lidstva, o atomovém věku.

Prvním jaderným jevem, který byl přímo pozorován, bylo záření uranové soli. Tento základní objev z roku 1896 učinil H. Becquerel, který pojmenoval neznámé záření „uranovými paprsky“. Navázal tak na objev rentgenových paprsků, uveřejněný počátkem ledna 1896. Tím vším se otevřel vědeckému bádání nový rozsáhlý obor. Neprodleně se do něho

pustilo mnoho badatelů, neboť Röntgenovým objevem dozrál čas k ocenění takových odhalení. V prosinci 1897 začala studovat tento nový jev M. Curieová. Když zkoumala uranové rudy, pozorovala, že jejich aktivita je mnohem vyšší, než bylo možno očekávat podle obsahu uranu. Šest měsíců po zahájení prací, v červenci 1898, oznamuje M. Curieová spolu s Pierrem Curie objev polónia a v prosinci téhož roku objev rádia. Tento významný objev podnítil řadu evropských vědců k usilovné práci v této oblasti výzkumu. Výsledky proto přicházely mimořádně rychle. Práce uvedených autorů i dalších vědců na čele s E. Rutherfordem ukázaly v krátké době, že radioaktivní látky vysílají tři druhy záření: 1. částice alfa — jádro hélia, nesoucí dva kladné náboje, 2. částice beta — elektrony nabité jedním záporným nábojem, 3. záření gama — elektromagnetické záření. Někteří vědci již od roku 1901 vysvětlovali radioaktivitu jako atomovou přeměnu a v roce 1903 dostala tato myšlenka přesnou formu teorií E. Rutherforda a E. Soddyho o radioaktivních přeměnách. Od té doby mluvíme o radioaktivním rozpadu a naučili jsme se poněkud rychle zařazovat všechny „přirozené“ radioaktivní prvky do tří rozpadových řad. Jejich praotci jsou uran, protaktinium a thorium. Tím padl starý názor o nezměnitelnosti a nevytvořitelnosti chemických atomů. Bylo nesmírným pokrokem, když r. 1905 E. Schweidler vysvětlil empirický zákon rozpadu. Na první umělou přeměnu muselo si však lidstvo počkat až do roku 1919. Podařila se Rutherfordovi, který ozařoval dusík částicemi alfa a získal tak vedle izotopu kyslíku protony s velkým doletem. Tak byla objevena cesta k celé řadě jaderných reakcí, při nichž zachycení jedné částice alfa nebo deuteronu mělo za následek vyražení neutronu.

Roku 1934 narazili I. Curieová a F. Joliot při takových pokusech na reakce, při nichž nově vzniklé jádro nebylo stabilní, ale po odštěpení pozitronu se dále radioaktivně přeměňovalo. Objevili tak jev, který označujeme jako umělou radioaktivitu. Bezprostředně po tomto významném objevu podařilo se E. Fermimu v Římě vytvořit velký počet radioizotopů, vyzařující částice beta stejně jako přirozené zářiče. Fermi považoval tyto nové radioaktivní prvky za transurany. V této představě setrval až do své smrti.

Počátek třicátých let byl současně dobou objevu nových elementárních částic. Když r. 1913 navrhl Rutherford svůj model atomu s jádrem, byly známy tři elementární částice — elektron, proton a „foton“. V r. 1932 k nim přistoupil neutron. I když objev neutronu je výsledkem série pokusů řady vědců několika států, autorství bylo přisouzeno J. Chadwickovi. Neméně důležitým objevem téže doby (r. 1933) bylo zjištění kladného elektronu v kosmickém záření, popsané Alexandrem a Blacketem. Jde o antičástici elektronu, tzv. pozitron. Na objev dalších antičástic bylo třeba čekat až do r. 1956, kdy velký urychlovač umožnil vytvoření antiprotonu.

Vraťme se však k pokusům započatým r. 1934 v Římě E. Fermim, k ozařování uranu neutrony, jejichž výsledkem byly radioaktivní prvky, které autor a jeho spolupracovníci považovali za transurany. Oficiální věda nechtěla dlouho uvěřit německé chemičce Noddackové, která jako první předpokládala, že při Fermiho pokusech nevznikají transurany, ale že uran se rozštěpí na dvě jádra se středními atomovými hmotnostmi z oblasti vzácných zemin. Bylo však nutno počkat do roku 1939, než O. Hahn se Strassmannem s jistotou potvrdili, že jádro uranu se štěpí. Historie objevu štěpení patří mezi nejdramatičtější kapitoly historie vědy. Roku 1939 se podařilo Lise Meitnerové a O. Frischovi teoreticky vypočítat a Frischovi i změřit obrovskou energii, uvolňovanou při štěpení uranu. Kromě toho objevil roku 1940 Flerov a Petržák spontánní štěpení uranového jádra, charakteristické uvolněnými neutrony. Krátce potom sestrojil Fermi první atomový reaktor a uvedl ho do chodu. Stalo se to dne 2. prosince 1942 v Chicagu, kam se Fermi uchýlil před italským fašismem. Tyto objevy umožnily ono využití atomové energie, které tanulo již mnoha lidem na mysli jako verneovská fantazie, ale které ještě Rutherford prohlásil za iluzi. Druhá světová válka, která vypukla osm měsíců po uveřejnění Hahnova objevu, byla příčinou, že prvním jeho využitím bylo sestrojení nové strašlivé zbraně. Dne 16. 7. 1945 došlo k prvnímu pokusnému výbuchu v Novém Mexiku, 6. srpna 1945 byla atomová bomba svržena nad Hirošimu. Jediná bomba si v jednom okamžiku vyžádala 224 000 obětí, z toho 47 000 mrtvých a 100 000 těžce raněných, z nichž 65 000 zemřelo během měsíce. Pak přišlo Nagasaki, celkem 360 000 obětí.

Souběžně a neméně úspěšně jako na Západě probíhal vědecký výzkum jaderné fyziky v prvním socialistickém státě, v Sovětském svazu. Na přímý pokyn zakladatele sovětského státu V. I. Lenina založili v Petrohradě Státní ústav rentgenologie, později přejmenovaný na Fyzikálně-technický institut Akademie věd SSSR. Ten se stal významným střediskem přírodních a fyzikálních výzkumů nového socialistického státu. Jeho pracovníci uveřejnili mnohé základní práce a objevy. Roku 1927 se podařilo L. V. Skobelicinovi jako prvnímu pozorovat dráhy kosmických částic pomocí Wilsonovy mlžné komory umístěné v magnetickém poli. R. 1932, záhy po Chadwickově objevu, I. J. Tamm a D. D. Ivaněnko odvodili na základě kvantové teorie model jádra atomu, skládajícího se z protonů a neutronů. R. 1933 L. L. Mandleštam a M. A. Leontovič rozpracovali teorii radioaktivního rozpadu, jehož podstata byla do té doby nejasná. V témže roce podařilo se sovětským fyzikům zhotovit urychlovací trubici, ve které získali svazek urychlených protonů s energií 350 000 eV. R. 1934 známý teoretický fyzik I. K. Tamm detailně rozpracoval teorii o podstatě jaderných sil a jako první ukázal, že jsou výsledkem výměny částic. V témže roce aspirant leningradského institutu P. A. Čerenkov pod vedením vynikajícího fyzika S. L. Vavilova

objevil nový jev — vznik světelného záření při průchodu rychlých elektronů látkou. O tři roky později tento jev teoreticky zdůvodnili I. E. Tamm a I. M. Frank. Objev interpretovali jako záření vysílané elektrony pohybujícími se v prostředí rovnoměrnou rychlostí, která je větší než rychlost světla v daném prostředí. O mnoho let později, r. 1958, dostali Čerenkov, Tamm a Frank za objev a interpretaci Čerenkovova-Vavilovova záření Nobelovu cenu. R. 1937 spustili v Leningradě první cyklotron v Evropě. O rok později zveřejňuje největší leningradský teoretický fyzik J. I. Frankel sérii prací, týkající se kapkové teorie jádra. Za jeho práci dostává se mu světového uznání. R. 1940 J. B. Chariton a J. B. Zeldovič jako první teoreticky ukázali, že při malém obohacení přírodního uranu izotopem uranu 235 lze vytvořit podmínky pro nepřetržitě štěpení atomových jader. Tak byl položen základ pro další rozvoj jaderné energie. Doba Velké vlastenecké války a poválečné monopolní postavení USA v atomových zbraních nutí sovětské fyziky podílet se i na výrobě těchto nových strašlivých válečných prostředků. První sovětská atomová bomba byla vyzkoušena 23. září 1949 a o čtyři roky později — 12. 8. 1953 byla odpálena první sovětská vodíková bomba. Monopol Spojených států byl v tak závažné otázce definitivně zlikvidován.

Řetězová reakce, vedoucí u bomby k výbuchu, poskytla v reaktoru využití energie atomového jádra. Stalo se tak poprvé 27. června 1954 v Obminsku (Kaluzská oblast), kde byla uvedena do provozu první atomová elektrárna na světě s výkonem 5 000 kW. Je docela možné, že příští historie se bude dívat právě na toto datum jako na nejdůležitější z celé epochy druhé poloviny 20. století. Roku 1957 spustili v Leningradě na vodu atomový ledoborec Lenin, první loď pro mírové účely, vybavenou atomovým pohonem.

V současné době jsme svědky průmyslového využití „atomu“ v desítkách oblastí, z kterých ekonomicky nejpodstatnější je výroba elektrické energie. Avšak i množství uranového paliva je omezené. Ložiska, z kterých je uran možno levně těžit, se jednou vyčerpají. Proto je pozornost fyziků upřena k syntéze jader lehkých prvků, doposud prakticky realizované ve vodíkové bombě. Kontrola termonukleárních reakcí je úkol mimořádně obtížný. Cílem je zřejmě vytvoření reaktoru pro řízenou jadernou reakci, který by odolával teplotám deset až sto milionů stupňů Celsia. Velmi elegantní metodou k izolování tak žhavé plazmy od stěn reaktoru je použití magnetického pole. Velikou nadějí v tomto směru je sovětské zařízení zv. TOKAMAK, které dovoluje vyslovit předpověď, že první termojaderný reaktor bude uveden do chodu v SSSR. I když tento okamžik je ještě daleko, slibuje lidstvu dodání nesmírného množství levné energie.

Je přirozené, že v současné době se dostávají do popředí otázky těsné spolupráce jednotlivých zemí v oblasti atomové energie. R. 1954 je založen v Ženevě CERN (Conseil européen de la recherche nucléaire),

sdružující 13 západoevropských států. Fyzikové socialistických států spolupracují ve Spojeném ústavu jaderných výzkumů v Dubně, založeném r. 1956. Jeho úkolem je zajišťování teoretických a experimentálních výzkumů v oblasti jaderné fyziky pro mírové využití jaderné energie. S tímto ústavem mají naše vědecká pracoviště rozsáhlé styky a naši vědci se účastní i v práci vedení SÚJV. Cyklotron tohoto ústavu byl „kolébkou“ nových prvků č. 104 a 105. O prozkoumání chemických vlastností prvku č. 104 se zasloužil i náš radiochemik Ivo Zvara.

Valné shromáždění OSN dalo r. 1955 podnět ke svolání 1. mezinárodní vědecké konference o mírovém využití atomové energie. Od této doby proběhla řada konferencí této celosvětové instituce. Věnovaly se především praktickým, životně důležitým problémům využití jaderné energie. Mimořádnou pozornost věnovali delegáti konferencí dalšímu rozvoji mezinárodní spolupráce s tím, aby atomová energie mohla sloužit co nejširšímu okruhu zemí. V této souvislosti je nutno znovu podtrhnout důležitost dohody o nerozšiřování atomových zbraní pro upevnění vzájemné mírové spolupráce. V teoretické oblasti položily konference důraz na další výzkum elementárních částic.

V podmínkách ČSSR byl r. 1955 zřízen Ústav jaderné fyziky, který má od roku 1959 název Ústav jaderného výzkumu. Úkolem tohoto ústavu je základní i aplikovaný výzkum v oboru jaderné fyziky, radiochemie a jaderné energetiky. Výsledků tohoto výzkumu využívá energetické hospodářství naší republiky a jiné vědní obory i průmyslová odvětví, zemědělství a zdravotnictví v oblasti využití radioizotopů.

Podobně jako v Čechách, i na Slovensku se pracuje v oborech jaderné fyziky i ve fyzice plazmatu a elementárních částic. Práce zde probíhá v úzké spolupráci s českými ústavy. Na území Slovenska se v současnosti buduje již druhá jaderná elektrárna. Zatímco první, zvaná A-1, má spíše experimentální charakter a slouží k výchově vědeckých a technických kádrů, druhá jaderná elektrárna typu V-1 pokryje při výkonu 880 MeW asi 10% roční spotřeby elektrické energie našeho státu.

Za osmdesát let nastaly doslova radikální změny ve vztahu atom—společnost. Z historie jaderné fyziky je patrna její cena. Hodnotu tohoto nástroje v budoucnosti lze těžko odhadnout. Může vydatně přispět ke zrodu nejvyššího typu společnosti anebo i k jejímu ohrožení. Socialistickou společnost zajímají především užitečné a člověku prospěšné plody vědy. Tomuto cíli podřizuje naše společnost i veškeré své úsilí.

Literatura :

1. Atomový věk, populární encyklopedie, přel. J. Pergner a Zd. Plajner, SNTL, Praha 1966.
2. Informace APN, Moskva.
3. Lane M., Dějiny fyziky, ORBIS, Praha 1959.

Jak se publikují vědecké výsledky v matematice

RNDr. BOHDAN ZELINKA CSc, Liberec

Přijde-li matematik na nové vědecké výsledky, publikuje je ve formě článku v některém matematickém časopise nebo sborníku. Jde ovšem o vědecký matematický časopis, který je právě k tomuto účelu určen, na rozdíl například od Rozhledů, které jsou časopisem populárně naučným. Jak takový článek vypadá? Připomeňme si školní slohové úkoly. Učili jste se, že v takovém úkolu máte vždy mít úvod, stať a závěr. Podobně je tomu i u vědeckých článků, až na to, že závěr někdy chybí; o tom si ještě něco řekneme později.

Článek má úvod, v němž se naznačí, jaká problematika se v článku zkoumá, a stručně se popíše, co je o té věci již známo. Zdůrazňuji slovo „stručně“; bylo by omylem domnívat se, že se kvalita vědecké práce zvýší tím, že se přidá hodně „mluvení kolem“ neboli lidově „omáčky“. Zde naopak platí, že méně bývá více.

Hlavní část článku (tedy stať) obsahuje především definice a věty. Řekněme si nejdříve něco o definicích. Už po dlouhá desetiletí se traduje tento odstrašující příklad, jak definice vypadat nemá: „Vývěva je, když pod zvonek chcípne myš.“ Na této „definici“ si všimněme především obratu „je, když“ a zapamatujme si, že tento obrat musí pro nás být prostě tabu. Každá definice má dvě složky, z nichž jedna se označuje latinsky jako genus proximum, druhá jako differentia specifica. Mějme definici: „Obdélník je čtyřúhelník, jehož všechny úhly jsou pravé.“ Užší pojem „obdélník“ zařazujeme pod širší pojem „čtyřúhelník“; tento širší pojem je právě to genus proximum. Každý obdélník je čtyřúhelník, ale ne každý čtyřúhelník je obdélník. Znamená to, že obdélník má všechny vlastnosti čtyřúhelníka, ale navíc musí mít nějakou vlastnost, která jej odlišuje od čtyřúhelníků, které nejsou obdélníky. To je ta vlastnost, že má všechny úhly pravé; tato vlastnost je differentia specifica. Takto musí vypadat každá definice, a to nejen v matematice, ale ve všech vědách. Za sponou „je“ tedy musí následovat nějaký širší pojem, nikoliv čárka a slovo „když“.

Matematické výsledky se uvádějí ve formě vět. Věty se číslují v pořadí, v jakém jsou v článku uváděny. Výraz „věta“ má v matematice trochu jiný význam než v gramatice; matematická věta se může skládat i z několika vět (v gramatickém smyslu). Každá věta se skládá z předpokladu a závěru. Příklad: „Nechť a a b jsou dvě reálná čísla a nechť platí $a^2 + b^2 > 0$. Potom alespoň jedno z čísel a a b je různé od nuly.“ Zde je předpoklad „Nechť a a b jsou dvě reálná čísla a nechť platí $a^2 + b^2 > 0$ “ a tvrzení (o němž věta tvrdí, že z tohoto předpokladu vyplývá) je „Potom alespoň jedno z čísel a a b je různé od nuly“. Zdálo

by se, že třeba ve větě „V rovnostranném trojúhelníku mají všechny úhly velikost šedesát stupňů“ není tato forma zachována. Ve skutečnosti i zde je předpoklad a závěr; mohli bychom říci: „Nechť ABC je rovnostranný trojúhelník a α, β, γ velikosti jeho úhlů. Potom platí $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ “. Je-li věta vyjádřena ve formě ekvivalence (viz článek „O odborném slohu v matematice“), jsou to vlastně dvě věty v jedné. Například: „Reálné číslo je druhou mocninou reálného čísla tehdy a jen tehdy, je-li nezáporné“. To jsou tedy dvě tvrzení. První: „Budiž a reálné číslo a nechť a je druhou mocninou reálného čísla. Potom a je nezáporné.“ Druhé: „Budiž a nezáporné reálné číslo. Potom a je druhou mocninou reálného čísla.“

Za větou následuje důkaz. Dávat nějaké recepty na správné psaní důkazů, to dost dobře nejde. Tomu musí člověka naučit praxe ve vědecké práci. Zmiňme se jen o tom, že v některé části důkazu lze napsat: „Snadno se dokáže, že...“ nebo „Je zřejmé, že...“ V učebnicích se také psává: „Toto tvrzení si laskavý čtenář dokáže sám.“ Vede to někdy k tomu nešvaru, že takového obratu používají autoři tehdy, když některá část důkazu není ani tak zřejmá jako piplavá a náročná na vyjadřování a symboliku. V takovém případě čtenář pozbývá veškeré laskavosti a začne autora proklínat; zvláště tehdy, je-li tento čtenář student, který potřebuje důkaz znát u zkoušky, nebo recenzent, který je povinen ověřit správnost všech výsledků.

Někdy si můžeme dokazování usnadnit tím, že napřed dokážeme určité tvrzení, které by nemělo smysl publikovat jako samostatnou větu, ale na které se potom můžeme odvolat v důkaze věty. To je takzvaná pomocná věta neboli *lema*. (Pozor, je to slovo středního rodu a skloňuje se jako téma nebo panoráma.) Výsledek, který je poměrně jednoduchý na to, aby byl nazván větou, a nemá charakter lematu, ale který přesto potřebujeme v práci uvést, nazýváme prostě „tvrzení“. Výsledek, který bezprostředně vyplývá z věty, kterou jsme právě dokázali, a který tedy můžeme uvést bez důkazu, se označuje jako „důsledek“. Potřebujeme-li něco vsunout do textu mezi jednotlivé věty nebo mezi větu a její důkaz, označíme to slovem „poznámka“. Konečně v matematických publikacích bývají uvedeny i problémy. Nepodaří-li se nám něco vyřešit, můžeme to položit jako problém, aby se tím mohli trápit i druzí. Zdá-li se nám, že nějaké tvrzení platí, ale neumíme-li je dokázat, můžeme je do článku napsat a označit slovem „hypotéza“ nebo „domněnka“; je to vlastně zvláštní případ problému.

Závěr se píše pouze tehdy, je-li třeba uvést další možnosti rozvoje určité problematiky nebo její aplikace. Jinak se prostě závěr vynechává a článek může končit důkazem věty. Pro závěr ještě ve větší míře platí to, co bylo řečeno o úvodu. Musí být velmi stručný a držet se věci. Hlavně se autor nesmí snažit své výsledky nějak hodnotit, protože by se to mohlo zvrhnout v sebechválu. I kdybychom snad své výsledky po-

važovali za světoborné, musíme dopřát čtenáři, aby to objevil sám; nemůžeme si dělat reklamu typu „Nenajdete na světě lepší sýr než v Ma-detě“.

Za článkem bývá seznam literatury. Jednotlivé publikace jsou v něm očíslovány čísly v hranatých závorkách. Odvoláváme-li se na některou z těchto publikací, stačí do textu vložit příslušné číslo opět v hranaté závorce.

Popsali jsme si sloh vědeckého článku. Sloh učebnice nebo monografie bývá v podstatě stejný, až na to, že toho „mluvení kolem“ musí být přece jen trochu více, ovšem i zde se musí mluvit k věci, nesmí to být mlácení prázdné slámy.

|| Vezmete-li do ruky vědecký matematický časopis, jistě si všimnete toho, že některé články jsou psány v cizích jazycích, i když jde o časopis československý a autoři jsou Češi nebo Slováci. Je to něco jiného než u beletrie. Spisovatelé beletrie píšou svým mateřským jazykem, protože jejich úkolem je tento jazyk zvelebovat. Krásná literatura představuje vlastně písemný doklad o jazyce a jeho vývoji; například při sestavování jazykového slovníku se slovní zásoba vybírá právě z ní. Beletrii také čtou široké vrstvy lidí a těm vlastně slouží jako škola mateřského jazyka. Z běžné konverzace by si nikdo neosvojil tak širokou slovní zásobu, jakou získává četbou. Naproti tomu (jak už jsme o tom mluvili v souvislosti s diferencíálem) matematické práce čte poměrně úzký okruh odborníků, zato však nejen našich, nýbrž i cizích. Čechov napsal, že neexistuje národní věda, jako neexistuje národní násobilka. Je tedy třeba, aby se s výsledky našich matematiků seznámili i cizinci, a bylo by kruté požadovat od nich, aby se kvůli tomu učili tak obtížnému jazyku, jakým je čeština. Proto matematikové často píšou ve světových jazycích a nelze jim to vytýkat jako nedostatek vlastenectví, stejně jako nevytýkáme hudebním skladatelům, že údaje o tempu skladby píšou italsky. Pro vás to ovšem znamená, že nesmíte zanedbávat asi studium cizích jazyků.

Už jsme si řekli, jak má vypadat závěr vědecké publikace, a měli bychom teď také přistoupit k závěru tohoto článku. Jak se naučit dobře psát matematickou literaturu? V hodinách češtiny jste se asi dověděli, že dobře psát se naučí jen ten, kdo hodně čte. Pokud jde o sloh běžné řeči, znamená to číst beletrii. Chcete-li se naučit psát matematické texty, musíte číst tyto texty; zatím alespoň školní učebnice, Rozhledy a populárně naučné knížky, například z knihovny „Škola mladých matematiků“. V samotném psaní se pak nejlépe pocvičíte při formulaci řešení úloh Matematické olympiády.

Je to ovšem něco trochu jiného než číst beletrii. Při čtení beletrie nám mechanicky a skoro podvědomě utkvívají v paměti určitá slova a obraty, ty se nám potom při psaní nebo mluvení vybavují a my jich užíváme, vedeni svým jazykovým citem. Při psaní odborného textu se ovšem nemůžeme spoléhat na nějaký cit. Proto musíme při čtení přemýšlet nad

každou definicí a nad každou větou. Musíme uvažovat o tom, proč je psána právě takto a ne jinak, co by se stalo, kdybychom v ní některé slovo vynechali nebo přidali, nebo kdybychom změnili slovosled. V matematických definicích a větách totiž žádné slovo není zbytečné, každé má svou funkci. Proto se nesmíte zlobit na svého profesora matematiky, když na vás požaduje, abyste definice a věty znali skutečně přesně. Nesmíte si myslet, že „svými slovy“ byste to dovedli říci lépe (nebo dokonce stručněji), než jak to je psáno v učebnici nebo jak vám to profesor vykládal. Někteří studenti se dopouštějí velikého nešvaru tím, že si zapamatují z definice nebo věty některá slova a obraty, potom z nich sestaví hrozný galimatyáš a domnívají se, že to přece řekli správně nebo skoro správně, jenže „svými slovy“. Toho se musíte vždy vystríhat. Jste-li zkoušeni, představte si, že jste si s profesorem vyměnili úlohy, že on je studentem, který o věci nic neví, a vaším úkolem je správně mu všechno vysvětlit. Samozřejmě to není tak snadné, zvláště když víte, že on přece dá známku vám a ne vy jemu. Ale aspoň si přitom budete moci uvědomit, co byste tomu říkali, kdyby profesor vykládal třeba takto: „Elipsa je, když je součet průvodičů roven dvěma a .“

Kdo se nechce naučit přesnému vyjadřování, tomu nezbyvá, než aby si vybral povolání, které má velmi daleko k matematice. Ale pozor! Dostane-li se takový člověk třeba na právnickou fakultu, ať se moc neraduje! Matematice sice unikl, neunikl však tomu, co ho od ní odpuzovalo. Přesnost se na něm bude vyžadovat i tam. Místo matematických vět bude muset znát zákony a definicím se bude učit také, i když to nebudou zrovna definice elipsy nebo hyperboly. Kdyby si právník pletl například definici vraždy s definicí zabití, mohlo by to mít tragické následky. A je tomu tak i na jiných fakultách.

Tak se nám článek trochu zvrhl v mravoučné kázání. Doufám však, že právě vás nebylo ani potřebí takto poučovat, že se to týká spíše těch studentů, kteří Rozhledy nečtou. Vy si pamatujte především: Nejprve číst a přemýšlet, potom přemýšlet a psát! A při psaní samotném se řiďte starým latinským heslem „Rem tene, verba sequentur!“ čili „Drž se věci, slova budou následovat!“

matematické zábavy

Ještě ke hře o životě a smrti

Dr. JIŘÍ MRÁZEK, Praha

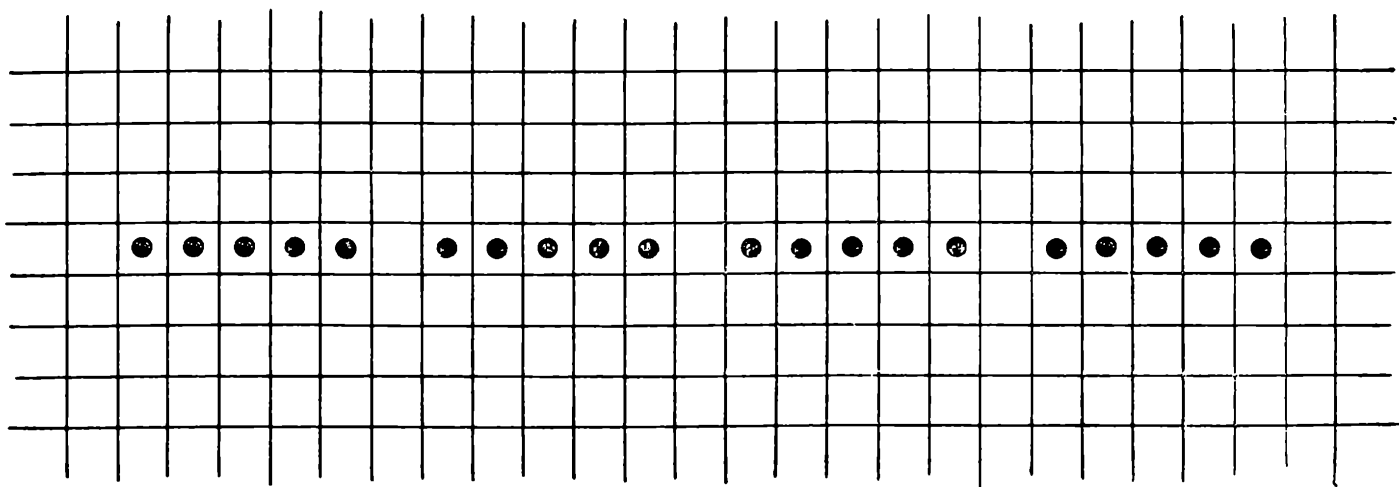
Dodatkem k našim třem zamyšlením nad hrou, která „modeluje“ vývoj a zánik organismů, přinášíme dnes ještě několik zajímavých úloh, které jsme našli v odborné literatuře.

Základní postavení pozůstává z vodorovného řetězce, vytvořeného tak, že je vedle sebe n kamenů, načež je jedno políčko prázdné a řada pokračuje dalšími n kameny s jednou mezerou, což se opakuje ještě několikrát (obr. 1).

Je nasnadě, že řada $1-1-1-1-\dots$ vymizí a stejný osud stihne také řadu $2-2-2-2-\dots$. V případě řady $3-3-3-3-\dots$ nastanou oscilace, zatímco řady $4-4-4-4-\dots$ vyústí v stabilizovanou sérii „úhlů“.

Zajímavější situace nastane, je-li $n \geq 5$. Např. je-li za sebou v základním postavení sedm pětic (vždy oddělených jedním prázdným políčkem), lze dokázat počítačem, že stacionární situace nastane po 323 krocích. Vznikne nepředstavitelně krásná mosaika stacionárních útvarů, složená ze 192 kamenů.

Jiná skupina úloh vznikne, složíme-li několik stabilizovaných útvarů (co je to, popsali jsme v našich zamyšleních) do zcela symetrického postavení. Již např. dva „úly“, mající jeden vrchol společný, se po několika



Obr. 1

krocích od sebe „oddálí“ do bezpečné vzdálenosti, takže vznikne útvar, neschopný dalšího vývoje. Ještě zajímavější průběh má hra např. v případě, kdy se symetricky navzájem jedním rohem dotýkají čtyři „úly“ apod.

Dáváme to našim čtenářům k dobru v domnění, že jim to přinese další zábavu při hraní hry o životě a smrti; můžete se pokusit o další experimenty, přičemž posunutí části základního útvaru třeba jen o jediné políčko může mít za následek nečekaná překvapení.

S algebrou roku 1976

V reminiscenci na příklad 6 na stránce 48 prvního čísla vítáme rok 1976 souborem čtyřčlenů, dělitelných pro všechna přirozená n číslem 1976:

$$\begin{aligned} 1042^n + 952^n - 16^n - 2^n, \\ 1611^n + 999^n - 623^n - 11^n, \\ 2198^n + 2087^n - 222^n - 111^n, \\ 2222^n + 3087^n - 246^n - 1111^n. \end{aligned}$$

Zdůvodněte, že tomu tak je! Jak oba poslední příklady naznačují, lze na vystupující základy klást různé požadavky. Každé takové vyjádření umožňuje napsat posloupnost dalších, třeba:

$$\begin{aligned} 1601^n + 989^n - 613^n - 1^n, \\ 1602^n + 990^n - 614^n - 2^n, \\ 1603^n + 991^n - 615^n - 3^n, \\ 1604^n + 992^n - 616^n - 4^n. \end{aligned}$$

Tvořte podobná vyjádření! Požadavek násobků méněciferných čísel inspiruje k námětům počítání z paměti. Tak třeba kamarádovi, který se narodil 22/9 1963, pográtulujte k letošním třináctým narozeninám násobky třináctky

$$22^n - 9^n + 1976^n + 1963^n; n = 1, 2, 3,$$

Přitom poslední člen lze potlačit; stejně i předposlední člen.

Karel Mišoň

recenze

M. Fiedler — J. Zemánek:

Vybrané úlohy matematické olympiády, kategorie A + MMO,

Státní pedagogické nakladatelství,
Praha 1976, stran 245, obr. 86,
cena 12,50 Kčs.

Toto je knížka, která výborně doplní knihovničku našich olympioniků. Za čtvrt století své existence nashromáždila matematická olympiáda nepřeberné množství úloh, jež zůstávají rozesety v ročníkových brožurách a pomalu upadají do zapomnutí. Dva známí autoři přicházejí nyní s reprezentativním výběrem úloh z kategorie A a z mezinárodní MO doplněným ještě dalšími podobnými příklady. V knížce postihují všechny složky tzv. elementární matematiky (aritmeticko-algebraickou, geometrickou, funkční, logickou, numerickou i kombinatorickou) a zdůrazňují jejich vzájemnou jednotu. Čtenář pozná důkazy konstruktiv-

ní i existenční, početní i geometrické, čistě logické, přímé i nepřímé. Úlohami se každý může zabývat celkem v libovolném pořadí, a proto je knížka vhodná i pro studijní skupiny a práci v kroužcích. Je tu celkem 113 příkladů a třicet z nich je označeno hvězdičkou. Ta upozorňuje na zvláštní náročnost.

Knížka má sloužit k samostatnému studiu, a proto se v první části uvádějí jenom zadání úloh. V další části jsou podrobná řešení s poznámkami a na závěr ještě přehled literatury. V poznámkách k některým úlohám se autoři zaměřili zejména na konvexní funkce, na vlastnosti čtyřstěnu, na geometrii mřížových bodů, na kombinatorickou geometrii a na pojem limity a kompaktnosti.

Knížku doporučujeme náročnějším studentům, středoškolským profesorům i všem zájemcům o elementární matematiku.

Jiřina Sedláčková

SLOVNÍČEK

ČESKO-ANGLICKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

dolní	lower
dolní mez	lower bound, limit
dolní odhad	lower estimate
doplňěk	complement, cofactor
doplnění na čtverec	completing the square
doplnit	complete
doplňkový	complementary
dosadit	substitute
dosáhnout	gain
dosazitelný	accessible
dotyk	tangency, contact
dotýkat se	touch, be tangent to
dotykový	tangent
dotykový bod	point of tangency, point of contact
dráha	path
druh	kind, class, type, order
druhý	second
druhá mocnina	square
druhá odmocnina	square root
dualita	duality
duální	dual
důkaz	proof
nepřímý důkaz	indirect proof, reduction ad absurdum proof
důsledek	consequence, result
dutý	hollow
dva	two
dvacátý	twentieth
dvacet	twenty
dvacetina	twentieth
dvacetistěn	icosahedron
dvakrát	twice

dvanáct
dvanáctina
dvanáctistěn
dvanáctiúhelník
dvanáctkový
dvanáctý
dvojciferný
dvojčlen
dvojice
dvojitý
dvojková číselná soustava
dvojpoměr
 harmonický dvojpoměr
dvojměrný prostor

twelve
twelfth
duodecahedron, dodecahedron
dodecagon
duodenary
twelfth
two-digit
binomial
binary number system
couple, pair
double
double ratio, cross ratio
 harmonic ratio
two dimensional space

E

ekvidistantní
ekvivalence
ekvivalentní
 ekvivalentní výrok
elementární
eliminovat
elevační úhel
elipsa
elipsoid
elipsovitý
eliptický
empirický
eukleidovský
evolventa
evidentní
existence
existovat
exponenciální
 exponenciální funkce
 exponenciální rovnice
exponent
extrém

equidistant
equivalence
equivalent
 contrapositive statement
elementary
eliminate
angle of elevation
ellipse
ellipsoid
elliptic(al), ellipse-shaped
elliptic
empirical
Euclidean
involute
evident
existence
exist
exponential
 exponential function
 exponential equation
exponent, power
extreme

F

faktoriál
forma
formální
formulace
fotogrametrie

factorial
form
dummy, formal
formulation, posing
photogrammetry