

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

1

ROČNÍK 51, 1972-1973, ZÁŘÍ

ROČNÍK 51
ZÁŘÍ 1972

rozhledy

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci,
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

Prof. E. Kraemer: Do druhého půlstol- tí	1
J. Straka: O jedné vlastnosti zobrazení	3
Dr. J. Šedivý: Problém s dvěma mapami	7
Dr. O. Řiha: Determinant čtvercové ma- tice typu (2,2)	8
Ing. dr. V. Šindelář, CSc.: Rozšířené Routhovo pravidlo	13
Ing. B. Vybíral, CSc.: Barometrická for- mule a její aplikace	16
J. Kotyk: Můstkové váhy	23
J. Mandel: Doba výtoku kapaliny	26
Dr. J. Široký – dr. M. Široká: Hvězd- né asociace	28 28
Naše soutěž:	31
MO:	33
Matematické a fyzikální zábavy:	37
Nejmladším čtenářům:	39
Ze zahraničních časopisů:	40
Doc. V. Jozífek: Město Basilej, koléb- ka matematiků	43
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouz- ský	3. a 4. str. obálky

Do druhého půlstoletí

Prof. EMIL KRAEMER, UK PRAHA

Posledním číslem předešlého ročníku dovršil náš časopis 50 let své existence. Začala jej vydávat na podzim r. 1921 Jednota československých matematiků a fyziků s názvem *Rozhledy matematicko-přírodovědecké*, a to jako pokračování dřívější přílohy *Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky*. Tato příloha i *Rozhledy* byly určeny studujícím tehdejších středních škol. Tomuto poslání zůstaly *Rozhledy* věrný po celou dobu svého trvání až na krátké období let 1952—1955 (ročník 31 až 34), kdy byl učiněn pokus změnit je na populárně vědecký časopis pro matematiku, fyziku a chemii vydávaný Československou akademií věd. Protože se tento pokus nezdařil, bylo od 35. ročníku (tj. od počátku r. 1957) obnoveno původní osvědčené zaměření *Rozhledů* jakožto časopisu, který má především získávat a prohlubovat zájem o matematicko-fyzikální vědy mezi naší středoškolskou mládeží. Ve shodě s tím byl pozměněn název časopisu a jeho vydávání bylo svěřeno Státnímu pedagogickému nakladatelství v Praze.

Obnovit dobrou tradici *Rozhledů*, která byla na několik let přerušena, nebylo nikterak snadné. Bylo nutno získat nejen okruh vhodných autorů, ale především dostatečně početnou obec mladých čtenářů. Jestliže se to v poměrně krátké době podařilo, pak o to měl největší zásluhu vedoucí redaktor doc. dr. Miroslav Menšík se svým nejbližším spolupracovníkem docentem Otou Setzerem, který se po smrti docenta Menšíka (1968) ujal řízení *Rozhledů* v těsné spolupráci s dlouholetým členem redakční rady Stanislavem Horákem. Jména všech těchto pracovníků budou v dobrém smyslu trvale zapsána v historii našeho časopisu. Patří jim poděkování celé naší matematicko-fyzikální veřejnosti i ministerstva školství za dlouholetou, obětavou a úspěšnou práci, jejíž výsledky nesporně přispěly k orientaci naší studentské mládeže na obory, jež mají podstatný význam pro další úspěšný rozvoj naší socialistické společnosti.

Jestliže dnes u příležitosti významného jubilea *Rozhledů* matematicko-fyzikálních dochází k rekonstrukci redakční rady, pak se tím nic nemění na poslání tohoto časopisu. I nadále bude přinášet přístupnou formou psané články z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky i z historie těchto oborů, články o životě a díle významných pracovníků z oboru matematicko-fyzikálních věd, drobné zajímavosti a recenze publikací,

které svou náplní a způsobem podání jsou přístupné našim středoškolským studentům. K podnícení hlubšího a aktivního zájmu o matematiku a fyziku bude i napříště v Rozhledech pokračovat tradiční soutěž o řešení úloh, dotovaná cenami ministerstva školství ČSR a SSR i cenami Státního pedagogického nakladatelství. Kromě toho budou Rozhledy opět otiskovat všeobecné informace a příklady ze všech kategorií celostátních olympiád (matematické a fyzikální). Redakce se bude snažit, aby se obsah časopisu co nejvíce přiblížil moderním partiím matematiky a fyziky i jejich aplikacím a významu v dnešním světě. Přirozeně nebude zapomínat ani na širší souvislosti vědeckého a školského dění s životem naší republiky a všech zemí socialistického tábora.

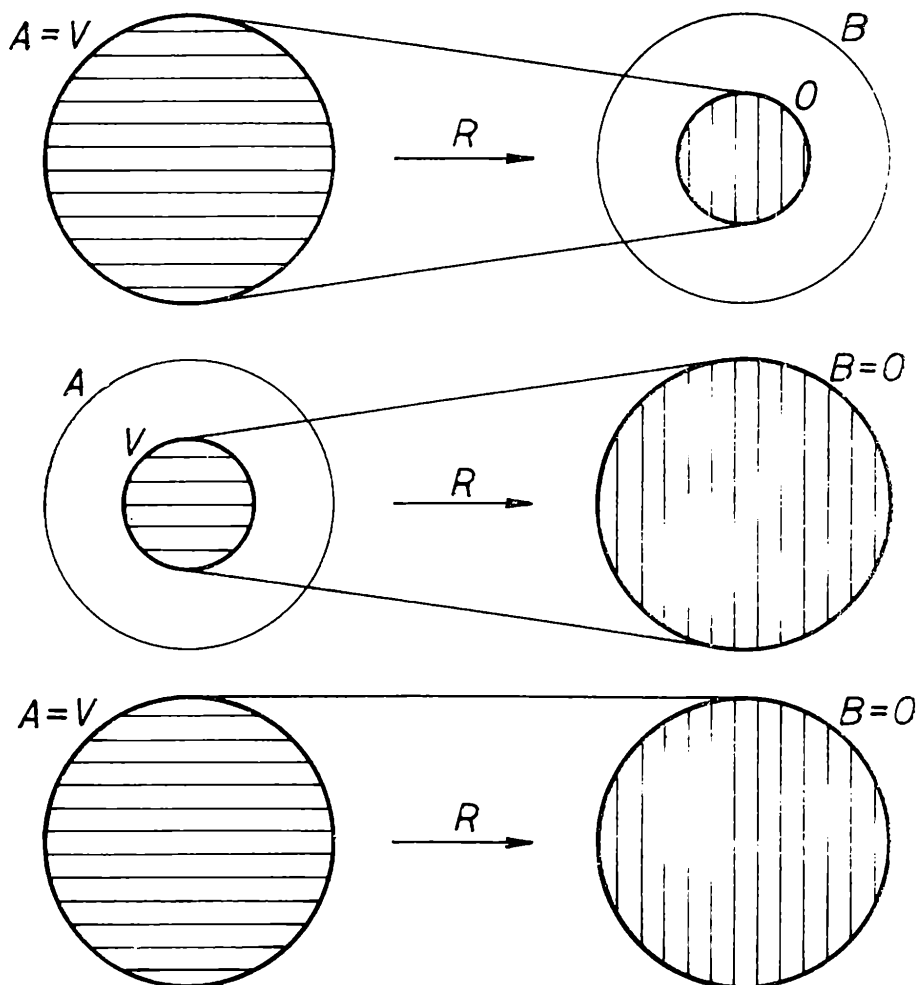
Šťastně obnovená a dnešním podmínkám přizpůsobená tradice našeho časopisu i složení jeho redakční rady, v níž jsou převážně pracovníci v této činnosti již po léta osvědčení, jsou dobrými předpoklady pro to, aby Rozhledy úspěšně vstoupily do druhého padesátiletí své existence a nadále účinně přispívaly k rozvíjení vzdělávací a výchovné činnosti mezi naší mládeží. Tak zároveň pomohou plnit úkoly, které na úseku školství, vědy, kultury a sdělovacích prostředků vytyčil pro příští léta naší společnosti XIV sjezd Komunistické strany Československa.

0 jedné vlastnosti zobrazení

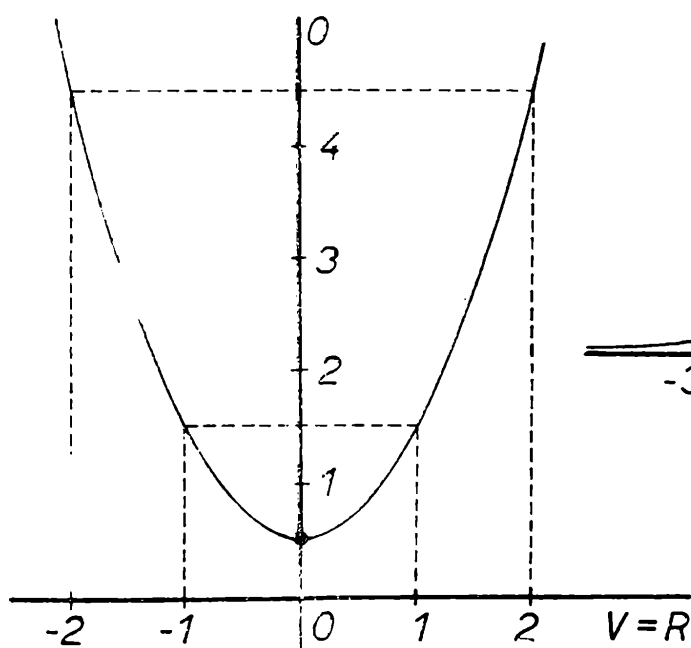
JOSEF STRAKA, Praha

V první části článku si připomeneme pojem zobrazení z množiny do množiny a budeme jej blíže charakterizovat. V druhé části si potom všimneme rozkladu oborů vzorů pomocí jisté relace ekvivalence.

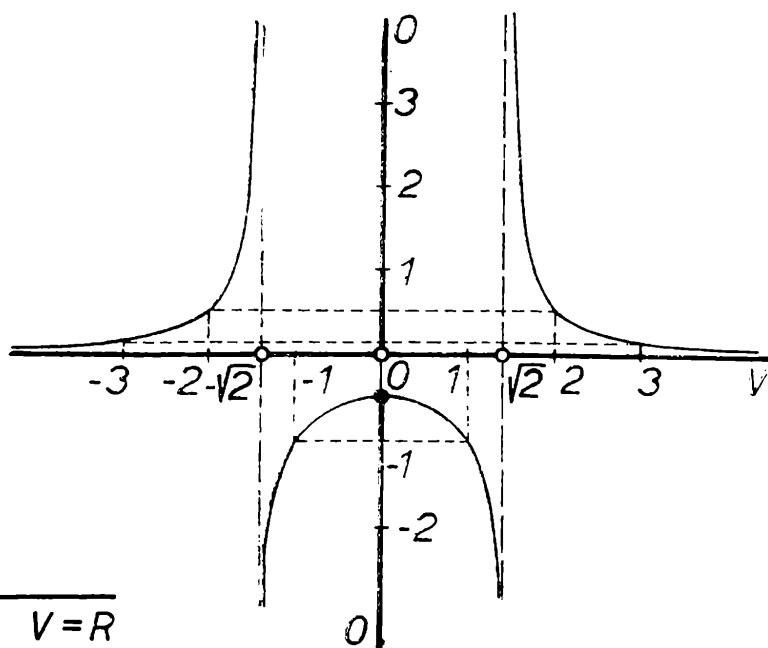
Nechť je dána binární relace R mezi množinami A a B , tj. $R \subset A \times B$. Jestliže každý prvek $x \in A$ je první složkou nejvýše jedné uspořádané dvojice $[x, y] \in R$, $y \in B$, potom relace R se nazývá zobrazení z množiny A do množiny B . Množina A je oborem vzorů, množina B je oborem



Obr. 1abc



Obr. 2



Obr. 3

obrazů při zobrazení R . Pro množinu V všech vzorů a pro množinu O všech obrazů zobrazení R z množiny A do množiny B zřejmě vždy platí inkluze $V \subset A$, $O \subset B$.

Ať o množinách V a O víme či nevíme něco bližšího, vždy jde o „zobrazení z A do B “. Může se ovšem stát, že zjistíme jednu z těchto specifických situací:

- a) $V = A$, $O \subset B$,
- b) $V \subset A$, $O = B$,
- c) $V = A$, $O = B$.

V případě a) mluvíme o zobrazení (celé) množiny A do množiny B , v případě b) o zobrazení z množiny A na (celou množinu B a v případě c) o zobrazení (celé) množiny A na (celou) množinu B . Uvedené typy zobrazení si můžeme přiblížit schematem na obr. 1c.

Každá reálná funkce jedné reálné proměnné je zobrazení z množiny R všech reálných čísel do téže množiny. Po určení množiny V všech vzorů a množiny O všech obrazů můžeme každou funkci charakterizovat jako zobrazení V do R , resp. zobrazení z R na O , resp. zobrazení V na O .

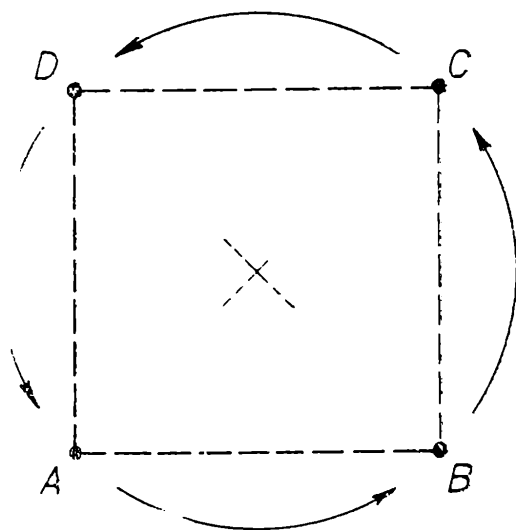
Příklad 1. Funkce F , která je dána rovnicí $y = x^2 + \frac{1}{2}$, je zobrazením z množiny R všech reálných čísel do téže množiny (obr. 2). Pro jeho množiny V a O platí: $V = R$, $O = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, tj. funkci F můžeme charakterizovat jako zobrazení množiny R na interval $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Příklad 2. Funkce G , která je dána rovnicí $y = \frac{1}{x^2 - 2}$, je zobrazení z \mathbf{R} do \mathbf{R} (obr. 3). Pro množinu V všech vzorů zobrazení G platí: $V = \{x \in \mathbf{R}, x \neq -\sqrt{2} \wedge x \neq \sqrt{2}\}$, daná funkce G je zobrazením této množiny V do \mathbf{R} . Určíme-li ještě množinu O všech obrazů (ve zobrazení G), zjistíme, že $O = \{y \in \mathbf{R}; y \leq -\frac{1}{2} \vee y > 0\}$ a můžeme tedy funkci G blíže charakterizovat jako zobrazení V na O .

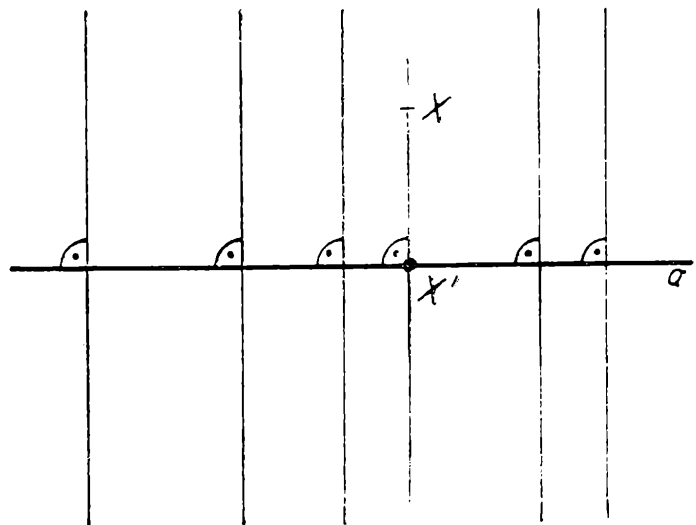
Příklad 3. Budiž Z množina všech celých čísel a B množina všech nezáporných zbytků, které dostaneme při dělení celých čísel pěti tj. $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Jestliže nyní každému celému číslu $x \in Z$ přiřadíme nezáporný zbytek $y \in B$ při dělení čísla x pěti, je binární relace $T \subset Z \times B$ zobrazením množiny Z na množinu B .

Příklad 4. Buď $M = \{A, B, C, D\}$ množina všech vrcholů daného čtverce $ABCD$ (obr. 4). Binární relace S v množině M nechť obsahuje tyto uspořádané dvojice: $[A, B], [B, C], [C, D], [D, A]$. Relace S je zobrazením z množiny M do téže množiny, vzory A, B, C, D mají po řadě obrazy B, C, D, A . Čtenář si jistě sám zdůvodní, že relaci S můžeme charakterizovat jako zobrazení M na M . Geometricky lze uvedené zobrazení interpretovat jako otočení kolem středu daného čtverce o pravý úhel.

Příklad 5. V rovině ρ je dána přímka a (obr. 5): binární relace $P = \{[X, X'] \in \rho \times \rho; X' \text{ je pata kolmice vedená bodem } X \text{ k přímce } a\}$ je zobrazením z množiny ρ do téže množiny, resp. je zobrazením ρ do ρ . Prosím čtenáře, aby si zdůvodnil, že relace P není zobrazením ρ na ρ ani zobrazením z ρ na ρ .



Obr. 4



Obr. 5

Ekvivalenci v množině A nazýváme každou binární relací, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní v množině A. Takovou relaci můžeme určit v oboru vzorců každého zobrazení Z z množiny A do množiny B, tj. v množině A. Považujeme dva prvky x_1, x_2 množiny A za ekvivalentní vzhledem k Z právě tehdy, když oba mají týž obraz y v množině B, nebo oba nemají žádný obraz.

Každé ekvivalenci v množině A odpovídá jeden rozklad množiny A na systém disjunktčních podmnožin A_1, A_2, \dots (tj. podmnožiny A_1, A_2, \dots nemají žádný společný prvek), které nazýváme třídy ekvivalence.

Při zobrazení z množiny A do množiny B tvoří jednu třídu ekvivalence právě ty prvky množiny A, které nemají v množině B obraz.

Příklad 1a. Pomocí funkce F z příkladu 1 můžeme definovat v množině R všech reálných čísel relaci ekvivalence výše popsaného typu např. čísla $-2; 2$ jsou ekvivalentní, protože mají týž obraz v množině R - číslo $\frac{9}{2}$. Jedna třída ekvivalence obsahuje jediný prvek - číslo 0, každá jiná třída ekvivalence obsahuje právě dva prvky, a to navzájem opačná čísla. Třídami ekvivalence jsou např. množiny $\{0\}, \{-1, 1\}, \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, atd.

Příklad 2a. Funkce G z př. 2 určuje v R též ekvivalenci popsaného typu. Existuje nekonečně mnoho tříd této ekvivalence: $\{0\}, \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \{-3, \sqrt{5}, 3\sqrt{5}\}, \dots$

Příklad 3a. V příkladě 3 jsou celá čísla 3 a 8 ekvivalentní, neboť mají týž obraz v množině B při zobrazení T. Každá dvě celá čísla množiny Z jsou ekvivalentní (vzhledem k T) právě tehdy, dají-li při dělení pěti týž zbytek. Této ekvivalenci přísluší rozklad množiny Z na pět disjunktčních podmnožin - tříd ekvivalence (tzv. zbytkových tříd podle modulu 5):

$$\begin{aligned} Z^0 &= \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}, & Z_1 &= \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}, \\ Z_2 &= \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}, & Z_3 &= \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}, \\ & & Z_4 &= \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\} \end{aligned}$$

Příklad 4a. Ekvivalenci určené zobrazením S v př. 4 přísluší rozklad množiny M na čtyři třídy ekvivalence: $M_1 = \{A\}, M_2 = \{B\}, M_3 = \{C\}, M_4 = \{D\}$

Příklad 5a. Zobrazení P v příkladě 5 určuje v množině Q ekvivalenci, které přísluší rozklad roviny na nekonečně mnoho tříd. Každá třída obsahuje právě všechny body ležící na přímce, která je kolmá k dané přímce a.

Příklad 6. Je dána množina $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ a množina Z všech celých čísel. Binární relace $F = \{[x, y] \in A \times Z; y = x^3 - 2x^2 - x + 2\}$ je zobrazení A do Z nebo určitěji zobrazení množiny A na množinu

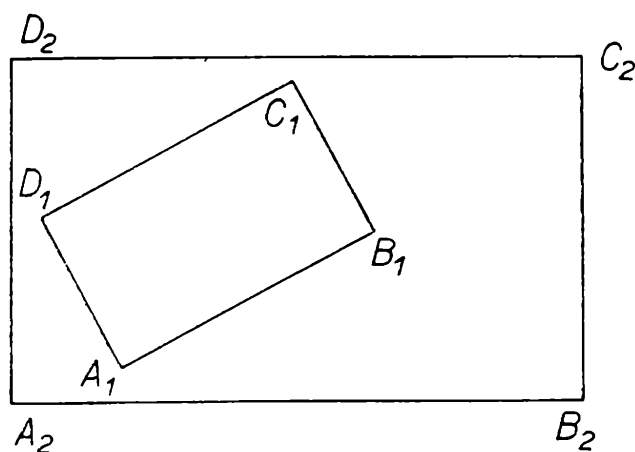
$\{0,2\}$. Všecky uspořádané dvojice zobrazení F můžeme v tomto případě udat výčtem, tj. $F = \{[-1,0], [0,2], [1,0], [2,0]\}$, jak se snadno přesvědčíme. Ekvivalencí určené zobrazením F přísluší rozklad množiny A na dvě disjunktní třídy ekvivalence: $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{-1, 1,2\}$ a platí $A_1 \cup A_2 = A$.

Problém s dvěma mapami

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK

Představte si, že máte před sebou dvě průhledné mapy téhož území, které jsou sestrojeny stejnou kartografickou metodou, ale v různých měřítcích. Položíte-li jednu z nich na druhou, budete vidět případy, kdy se nebudou krýt obrazy téhož místa terénu na první a druhé mapě. Platí to však o každé dvojici bodů znázorňujících totéž místo v terénu. Není snad přece jen možné objevit body, které se kryjí a přitom znázorňují totéž místo v terénu? Kolik může být takových dvojic bodů? Existuje aspoň jedna při jakémkoliv umístění menší mapy uvnitř druhé?

Upřesněme formulaci otázky, abychom dostali planimetrický problém: Jsou dány dva rovinné útvary U_1, U_2 , přičemž U_1 je částí U_2 a je podobný útvaru U_2 . Kolik bodů útvaru U_1 splývá se svým obrazem, uvažujeme-li o jednom podobném zobrazení útvaru U_1 na útvar U_2 ?



Obr. 1

Na obrázku vidíte obdélníky $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$, ve kterých lze spatřovat mapy stejného území s měřítky $1 : 2n, 1 : n$. Můžeme říci, že obdélníky jsou si podobné, existuje podobné zobrazení P ($A_1 \rightarrow A_2, B_1 \rightarrow B_2, C_1 \rightarrow C_2, D_1 \rightarrow D_2$) s koeficientem $k = 2$. Snadno si promyslete způsob, jak pomocí poměrů délek úseček na stranách obdélníků

a pomocí příček přiřadíte libovolnému bodu X_1 jeho obraz X_2 v podobném zobrazení \mathbf{P} . Bod obdélníka $A_1B_1C_1D_1$, který splývá se svým obrazem v obdélníku $A_2B_2C_2D_2$, je zřejmě samodružným bodem zobrazení \mathbf{P} . Naše planimetrická úloha vede k úloze *sestrojit všechny samodružné body podobného zobrazení \mathbf{P} v rovině*.

Předpokládejme, že \mathbf{P} zobrazuje nějaký bod S opět na týž bod S , pak platí $SA_2 = 2 \cdot SA_1$, $SB_2 = 2 \cdot SB_1$, $SC_2 = 2 \cdot SC_1$, $SD_2 = 2 \cdot SD_1$. Odtud naleznete rychlou konstrukci bodu S pomocí Apolloniových kružnic vzhledem k bodům A_1, A_2 a číslu $\lambda = 2$, vzhledem k bodům B_1, B_2 a číslu $\lambda = 2$ atd. Více vám již jistě není třeba napovídat, pokud jste si přečetli článek A. Peřiny v minulém čísle Rozhledů. Chcete-li poznat další možnosti konstrukčního využití Apolloniovy kružnice, prostudujte si 7. svazek Školy mladých matematiků *O podobnosti v geometrii*, zejména jeho odstavce 7–9, 24, 31–36.

Determinant čtvercové matice typu (2; 2)

RNDr. OTA ŘÍHA, PF UJEP Brno

V článku „Násobení matic“, který byl uveřejněn ve 2. čísle minulého ročníku Rozhledů, jsme se seznámili s definicí *inverzní matice*. Připomeňme, že inverzní maticí k matici \mathbf{A} nazýváme matici \mathbf{A}^{-1} , pro kterou platí

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E},$$

kde \mathbf{E} je matice jednotková.

Povšimněme si nyní pozorně příkladů matic a matic k nim inverzních, které byly v citovaném článku uvedeny:

\mathbf{A}	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
\mathbf{A}^{-1}	$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

Porovnáním prvků těchto dvojmatic zjistíme, že v uvedených případech dostaneme inverzní matici takto: Zaměníme mezi sebou 1. prvek 1. řádku s 2. prvkem 2. řádku a místo zbývajících dvou prvků napíšeme čísla k nim opačná.

Pomocí tohoto pravidla, kterému budeme říkat *pravidlo o záměně prvků*, určíme, že k matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ je inverzní matice } \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

o čemž se přesvědčíme vynásobením.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Použijeme-li pravidla o záměně prvků pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ dostaneme matici } \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

která není inverzní k matici \mathbf{A} , neboť

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \neq \mathbf{E}. \quad (1)$$

Abychom z matice

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

dostali matici jednotkovou, museli bychom její prvky dělit osmi. Děleme prvky matice \mathbf{A}_1 osmi a přesvědčme se, že platí:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Z rovnosti (2) vyplývá, že matice

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

je inverzní k matici \mathbf{A} . O správnosti závěru se přesvědčte vynásobením $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$.

Obdobným způsobem se pokusíme určit matici inverzní k matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Použijeme-li „pravidlo o záměně prvků“, dostaneme matici

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Tato matice nemusí být inverzní k matici \mathbf{M} , neboť vynásobením dostaneme

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \quad (3)$$

což nemusí být matice jednotková, je-li $ad - bc \neq 1$.

Abychom i pro $ad - bc \neq 1$ z matice

$$\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

dostali matici jednotkovou, musíme ji násobit číslem

$$\frac{1}{ad - bc},$$

což předpokládá, že

$$ad - bc \neq 0.$$

a) Je-li $ad - bc \neq 0$, platí jednak

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jednak

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a z toho vyplývá, že matice

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix}$$

je inverzní k matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

b) Je-li $ad - bc = 0$, je matice

$$\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

nulová a zlomek $\frac{1}{ad - bc}$ nemá smysl.

V tomto případě matice inverzní k matici

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

neexistuje, což snadno dokážeme nepřímo:

Předpokládejme, že matice inverzní existuje, její prvky označme pořadě x, y, u, v .

Pak platí:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ ax + cy & bx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odtud plyne:

$$\begin{aligned} ax + cy &= 1 \\ bx + dy &= 0. \end{aligned}$$

Jestliže první rovnici vynásobíme číslem d , druhou číslem c a potom od první rovnice druhou rovnicí odečteme, dostaneme

$$(ad - bc)x = 1,$$

což je spor s předpokladem, že $ad - bc = 0$.

Číslu $ad - bc$, na kterém závisí existence matice \mathbf{A}^{-1} inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

říkáme *determinant čtvercové matice \mathbf{A}* . Označíme-li determinant matice \mathbf{A} symbolem $\det \mathbf{A}$ můžeme zapsat

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad ^1)$$

Matici \mathbf{A} , jejíž determinant $\det \mathbf{A} = 0$, nazýváme *matice singulární*; matici, jejíž determinant je různý od nuly, nazýváme *regulární* nebo též *nesingulární*.

¹⁾ Determinant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ nesmíme zaměňovat s maticí $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$!

K singulární matici neexistuje matice inverzní. Ke každé regulární čtvercové matici \mathbf{A} existuje jediná inverzní matice \mathbf{A}^{-1} .

Při určování matice inverzní k matici \mathbf{A} je výhodné dodržovat tento postup:

- vypočteme $\det \mathbf{A}$ (tím zjistíme, je-li matice \mathbf{A} regulární),
- je-li $\det \mathbf{A} \neq 0$, použijeme „pravidlo o záměně prvků“ a každý prvek takto získané matice dělíme číslem $\det \mathbf{A}$.

Příklad 1. Určete matici inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení

a) $\det \mathbf{A} = -3 \cdot 5 - 6 \cdot (-2) = -3 \neq 0$.

b)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{-6}{-3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{-3}{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Zkouška:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2. Určete matici inverzní k matici $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

Řešení a) $\det \mathbf{B} = 6 \cdot (-8) - 12 \cdot (-4) = 0$, matice je singulární a matice k ní inverzní neexistuje.

Cvičení

1. Vypočtěte determinanty

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}, \text{ b) } \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \text{ c) } \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}$$

2. Vypočtěte determinanty čtvercových matic

$$\text{a) } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ b) } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ c) } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ -2 & a \end{pmatrix}$$

3. Pokud existují, určete inverzní matice k maticím

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -45 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

4. Co platí pro determinanty matic, k nimž inverzní matici dostaneme pouhým užitím pravidla o záměně prvků?

Výsledky :

1a) 3, b) -14 , c) 10. 2a) 0, b) 1, c) $2(a^2 + 1)$.

3a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2,5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -0,2 & 4,5 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$, c) neexistuje. 4) $\det \mathbf{A} = 1$.

fyzika

Rozšířené Routhovo pravidlo

Ing. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, CSc.

Routhovo pravidlo slouží svojí jednoduchou formulací k snadnému zapamatování vzorců sloužících k výpočtu momentu setrvačnosti tuhých, homogenních těles, souměrných podle osy, vzhledem k níž je příslušný moment setrvačnosti vztažen. Jde o hmotnostní (hmotový) moment setrvačnosti vztažený k určité ose J , konkrétně k ose souměrnosti tělesa.

Routhovo pravidlo lze vyjádřit jednoduchým vztahem

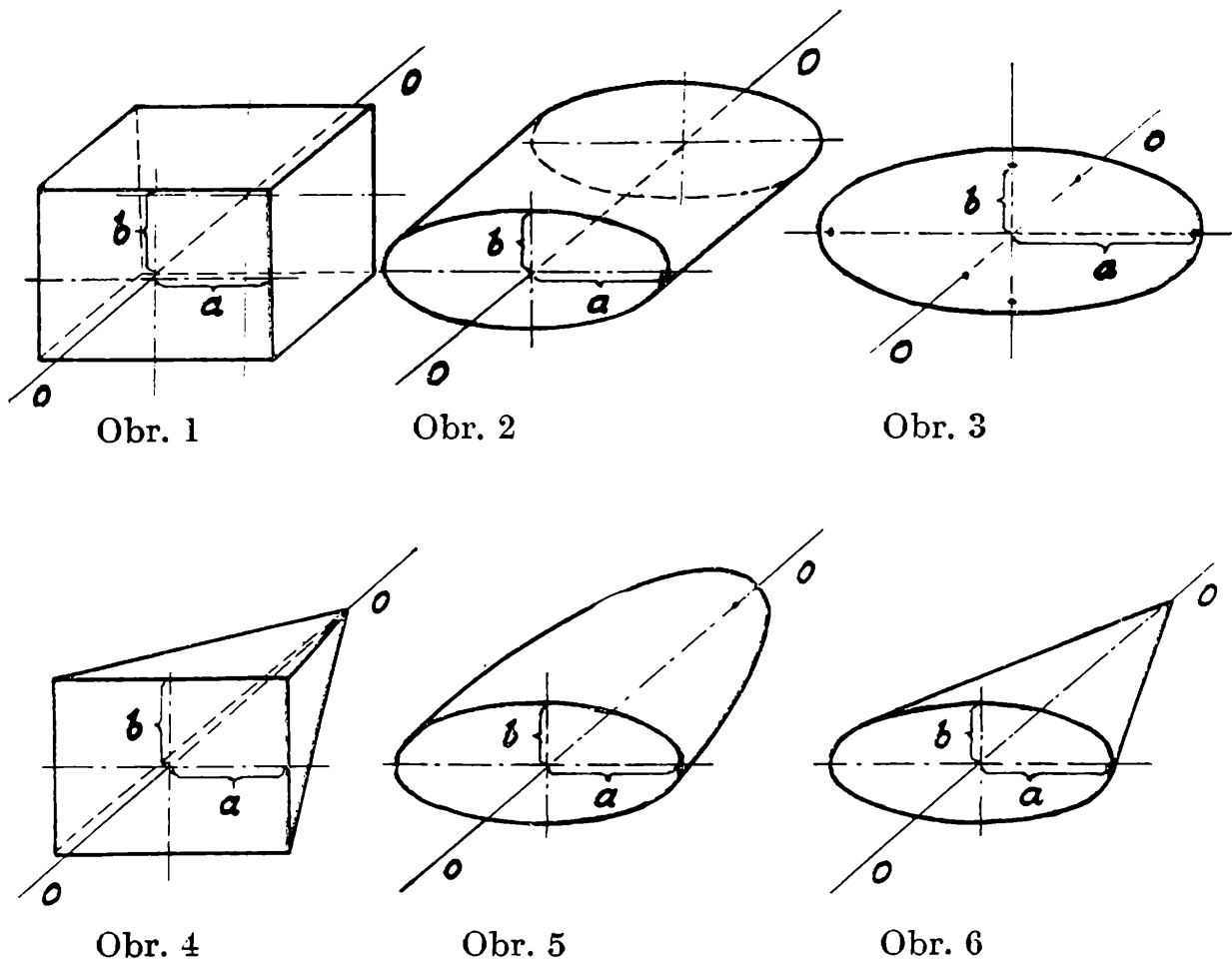
$$J = \frac{m \cdot (a^2 + b^2)}{A} \quad (1)$$

kde značí m hmotnost tělesa,

a a b jsou charakteristické délkové rozměry řezu tělesa, nebo jeho podstavy, měřené od osy souměrnosti,

A snadno zapamatovatelné číslo závislé na tvaru tělesa:

$A = 3$ u pravoúhlého rovnoběžnostěnu* (a, b jsou poloviční délky stran řezu kolmého ke vztažné ose) (obr. 1),

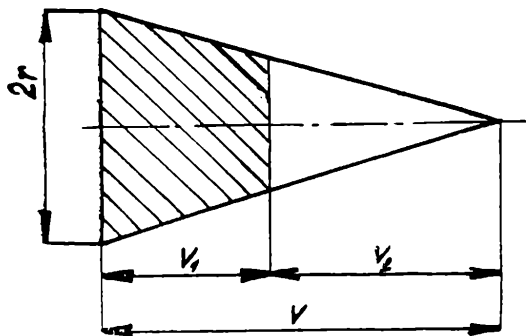


- $A = 4$ u přímého eliptického válce* (a, b jsou poloosy kolmého eliptického řezu) (obr. 2),
 $A = 5$ u obecného elipsoidu* (a, b jsou poloosy kolmého (eliptického) řezu procházejícího středem elipsoidu) (obr. 3) a u přímého čtyřbokého jehlanu s obdélníkovou podstavou (a, b jsou poloviční délky stran podstavy) (obr. 4),
 $A = 6$ u přímého eliptického paraboloidu (a, b jsou poloosy eliptické podstavy) (obr. 5),
 $A = \frac{20}{3}$ u přímého eliptického kužele (a, b jsou poloosy eliptické podstavy) (obr. 6).

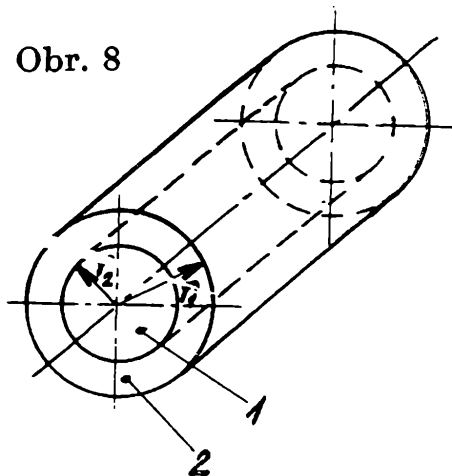
V uvedeném tvaru (1), který vyhovuje zmíněným, dostatečně obecným případům, je nejvhodnější si pravidlo zapamatovat. Jednodušší případy, z nichž si některé uvedeme v příkladech, lze si z tohoto tvaru jednoduše odvodit.

Původní Routhovo pravidlo se týkalo pouze těles, u jejichž názvu je hvězdička. Protože pokládám toto pravidlo za velmi výhodné, rozšířil jsem je po náležité úvaze ještě o další tři tělesa. Poslední číselná hodnota $A = 20/3$ má ovšem nevýhodu, že není celistvá jako u hodnot předchozích, jež jsou celistvé a po sobě jdoucí.

Obr. 7



Obr. 8



Jde vesměs o tělesa celá a plná. Jak již bylo řečeno na začátku musí být složena z homogenního materiálu.

Protože moment setrvačnosti má aditivní charakter, tzn. že jej lze u více těles (nebo částí) sečítat, ovšem tehdy, je-li u všech těles (nebo částí) vztažná osa tatáž. Můžeme tedy např. snadno vypočítat moment setrvačnosti komolého jehlanu nebo kužele nebo některého z dříve uvedených těles, obsahuje-li nějakou pravidelnou dutinu. Tak v případě přímého rotačního kužele (obr. 7). Máme-li stanovit moment setrvačnosti (J_1) komolé části 1, určíme moment setrvačnosti (J) celého původního kužele (s výškou v) a moment setrvačnosti (J_2) malého kužele 2 a použijeme vztahu

$$J_1 = J - J_2, \quad (2)$$

neboť

$$J = J_1 + J_2. \quad (3)$$

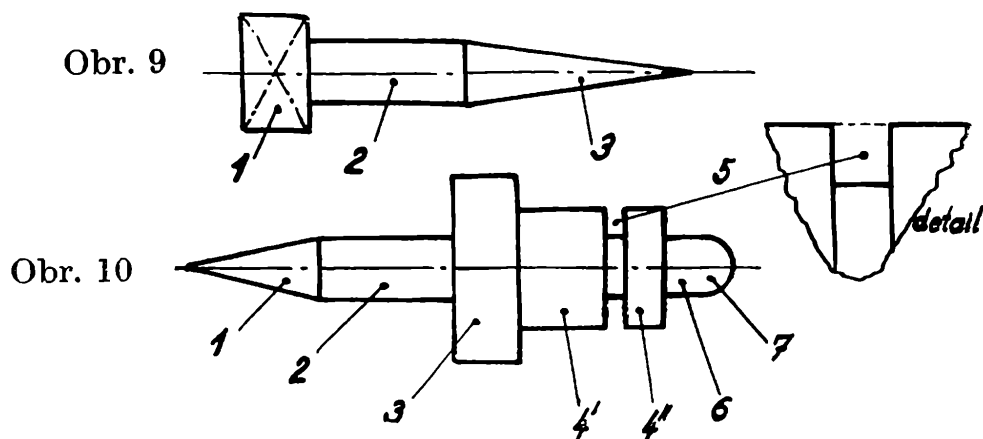
Podobně u tělesa s dutinou, např. dutého přímého rotačního válce (obr. 8). Označíme-li moment setrvačnosti plného válce J , moment setrvačnosti válce 2, který myšleně z původního válce vyjmeme J_2 , pak moment setrvačnosti J_1 dutého válce bude roven opět

$$J_1 = J - J_2.$$

Sečítání momentů setrvačnosti výhodně použijeme při výpočtu momentu setrvačnosti tvarově složitějších těles tak, že si těleso rozdělíme na několik (n) částí (o momentech setrvačnosti J_1, J_2, \dots, J_n) a celkový moment setrvačnosti J je pak roven jejich algebraickému

$$J = \sum_{i=1}^n J_i. \quad (5)$$

Tak bychom postupovali např. u těles na obr. 9 a 10. Naznačené rozčlenění na jednotlivé části by mohlo být případně pozměněno.



Vztah (1) byl formulován obecněji. V jednodušších případech odvodíme z něho také jednodušší vztah. Uvedme si několik příkladů.

Tak např. pro hmotnou krychli s délkou hrany $2a$ budeme psát

$$J = \frac{2}{3} m a^2 \quad (6)$$

pro hmotný přímý rotační váleček s poloměrem $r = a = b$

$$J = \frac{1}{2} m r^2 \quad (7)$$

pro hmotnou kouli, resp. polokouli s poloměrem $r = a = b$

$$J = \frac{2}{5} m r^2, \text{ resp. } J = \frac{1}{5} m r^2, \quad (8a, b)$$

pro hmotný přímý rotační paraboloid s poloměrem základny $r = a = b$

$$J = \frac{1}{3} m r^2 W. \quad (9)$$

Momenty setrvačnosti těles jiných tvarů, než nejsou v rozšířeném Routhově pravidle uvedeny, lze již vypočtené najít v tabulkách.

Barometrická formule a její aplikace

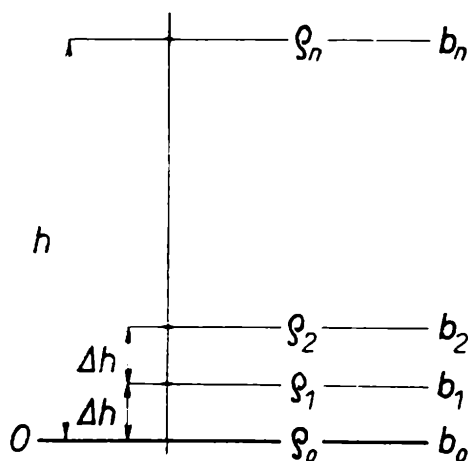
Ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSs., Vyškov

Vzdušný obal Země způsobuje svou tíhou aerostatický tlak, který se nazývá tlak *atmosferický* nebo *barometrický*. Protože s výškou nad zemským povrchem se mění jak hustota tak tíhové zrychlení a protože navíc neznáme ani celkovou výšku vzduchového sloupce, nemůžeme pro výpočet atmosferického tlaku užít vztahu pro hydrostatický tlak. Atmosferic-

ký tlak se určil známým *Torricelliovým* pokusem, při němž aerostatický tlak vzdušného obalu Země srovnáváme s hydrostatickým tlakem rtuti v trubici na jednom konci uzavřené. Za normální atmosferický tlak byl zvolen tlak 760 torrů. Platí

$$760 \text{ torrů} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} = 1,01325 \text{ bar} \doteq 1,0332 \text{ kp cm}^{-2}. \quad (1)$$

Atmosferický tlak se mění — klesá — s výškou nad zemí. Znalost závislosti atmosferického tlaku na výšce je důležitá např. v meteorologii, kde je nutno převádět údaje měřené v různých nadmořských výškách na normální poměry. V geodezii a v letectví se zase využívá této závislosti k měření výšek. Na středních školách se závislost atmosferického tlaku na výšce neodvozuje, protože při běžném odvození se vyžaduje znalost diferenciálního počtu. V tomto článku je podáno odvození, které tuto znalost nevyžaduje. V článku [1] bylo provedeno přibližné odvození závislosti nadmořské výšky na atmosferickém tlaku.



Obr. 1.

Odvození provedeme za předpokladu, že v uvažovaném rozmezí výšek 0 až h zanedbáme změnu tíhového zrychlení a že teplota vzduchu bude v tomto rozmezí výšek konstantní. Při konstantní teplotě platí pro ideální plyn, za který vzduch v tomto případě budeme považovat, Boyleův zákon, podle kterého $pV = \text{konst.}$ Objem můžeme nahradit užitím hustoty ρ podle vztahu $V = m/\rho$, kde m je hmotnost plynu v uvažovaném objemu. Boyleův zákon pak můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{p}{\rho} = \text{konst.} \quad (2)$$

Pro atmosferický tlak budeme užívat značku b .

Nechť při zemském povrchu má atmosferický tlak hodnotu b_0 . Ve výšce Δh nad zemí bude tlak b_1 , který je menší o aerostatický tlak Δb_1 vrstvy tloušťky Δh (viz obr. 1). Tedy

$$b_1 = b_0 - \Delta b_1, \quad (3)$$

kde

$$\Delta b_1 = \rho_1 g \Delta h . \quad (4)$$

Hustota se v uvažovaném rozmezí Δh spojitě mění v závislosti na místní hodnotě tlaku podle (2). Dále bude ukázáno, že se zmenšujícím se Δh není rozhodující zda za ρ_1 dosadíme hodnotu, která odpovídá střední hodnotě hustoty v dílku Δh či hustotě na horním okraji či v jiném místě tohoto dílku. Vezmeme-li pro jednoduchost za ρ_1 hustotu na horním okraji, dostaneme z (2) pro ρ_1 vztah

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{b_0} b_1 \quad (5)$$

Dosadíme-li tento výraz do (4) a výraz (4) pak do (3) dostáváme

$$b_1 = b_0 - \frac{\rho_0}{b_0} g b_1 \Delta h .$$

Zavedeme-li označení

$$\frac{\rho_0}{b_0} g = k , \quad (6)$$

můžeme po úpravě tento výraz přepsat do tvaru

$$b_1 = \frac{b_0}{1 + k \Delta h} \quad (7)$$

Pro tlak b_2 ve výšce $2 \Delta h$ nad zemí dostáváme analogicky

$$b_2 = b_1 - \Delta b_2 ,$$

kde

$$\Delta b_2 = \rho_2 g \Delta h = \frac{\rho_0}{b_0} b_2 g \Delta h = k b_2 \Delta h .$$

Tedy

$$b_2 = \frac{b_1}{1 + k \Delta h}$$

Dosadíme-li sem za b_1 z (7) dostáváme

$$b_2 = \frac{b_0}{(1 + k \Delta h)^2}$$

Pro tlak b_n ve výšce $h = n \Delta h$, kde n je počet dílků, na který jsme uvažovanou výšku h rozdělili, analogicky dostáváme

$$b_n = \frac{b_0}{(1 + k \Delta h)^n} = \frac{b_0}{\left(1 + \frac{k h}{n}\right)^n} \quad (8)$$

Zavedeme-li substituci

$$\frac{kh}{n} = \frac{1}{N}, \quad (9)$$

můžeme výraz (8) přepsat do tvaru

$$b_n = \frac{b_0}{\left[\left(1 + \frac{1}{N} \right)^N \right]^{kh}} \quad (10)$$

V tomto vztahu vystupuje výraz

$$\left(1 + \frac{1}{N} \right)^N \quad (11)$$

který podle vztahu (9) souvisí s počtem dílků n , na který jsme dělili uvažovanou výšku h . Všimněme si blíže výrazu (11) a vypočteme jeho hodnotu pro různá N . Užitím dekadických logaritmů můžeme snadno zjistit, že pro $N = 10; 100; 1000; 10\,000$ má výraz (11) postupně hodnotu $2,594 \dots; 2,705 \dots; 2,717 \dots; 2,718 \dots$. Vidíme tedy, že se vzrůstajícím N se tato hodnota blíží k jisté mezi. V teorii nekonečných řad se dokazuje, že pro $N \rightarrow \infty$ existuje limita výrazu (11). Pro tuto limitu zavedl L. Euler (r. 1731) značku e a tedy

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N} \right)^N = e \quad (12)$$

Číslo e je iracionální a s přesností na 5 desetinných míst má hodnotu

$$e = 2,71828.$$

Toto číslo tvoří základ tzv. *přirozených logaritmů*. Přirozené logaritmy budeme označovat značkou \ln ; tedy $\ln e = 1$. Dá se ukázat, že výraz (11) nabude téže limitní hodnoty (12) roste-li N také v číslech lomených nebo absolutně v číslech záporných.

Určení tlaku b_n podle výrazu (10) bude tím přesnější čím bude větší n a tím i N . V limitním případě kdy $N \rightarrow \infty$ nahradíme výraz (11) výrazem (12) a atmosferický tlak b_n označíme prostě b . Tak z výrazu (10) dostáváme

$$b = \frac{b_0}{e^{kh}}$$

a odtud po úpravě a dosazení z (6) konečně máme výraz

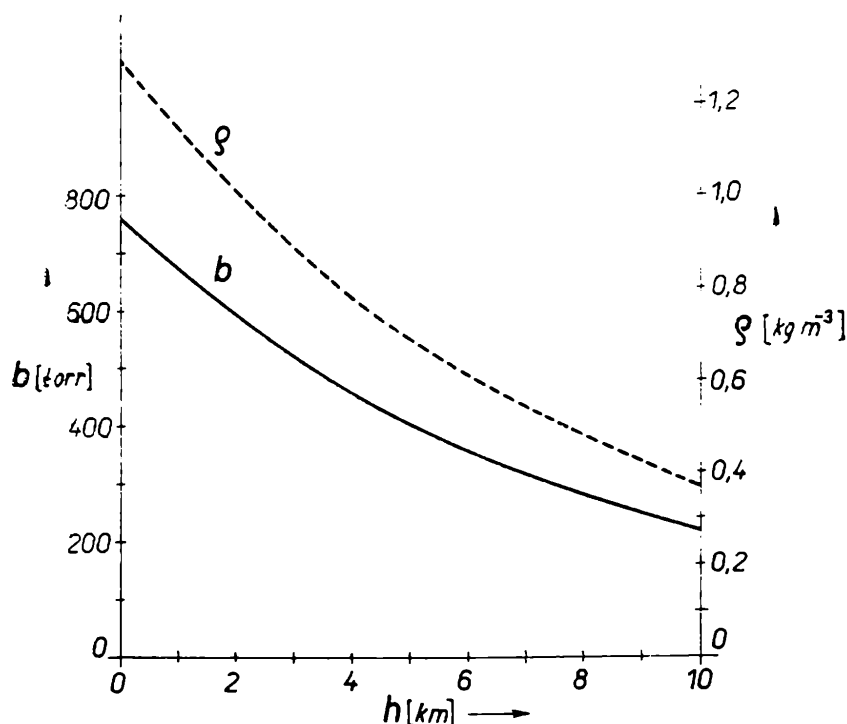
$$b = b_0 e^{-\frac{e_0}{b_0} gh}, \quad (13)$$

kterému se říká *barometrická formule*. Užitím Boylova zákona (2) můžeme

vypočítat rovněž závislost hustoty vzduchu na výšce při konstantní teplotě. Dostáváme

$$\rho = \frac{b_0}{b} \rho_0 = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{b_0} gh} \quad (14)$$

Z výrazů (13) a (14) vidíme, že jak atmosferický tlak, tak hustota vzduchu ubývá s výškou při stálé teplotě podle *exponenciální* funkce. Tuto skutečnost můžeme posoudit i z obr. 2. Znázornění je zde provedeno pro normální fyzikální poměry ve výšce $h = 0$.



Obr. 2

Vraťme se nyní znovu k odvození barometrické formule a dosadíme do výrazu (4) místo hustoty (5) hustotu

$$\rho'_1 = \frac{\rho_0}{b_0} \frac{b_1 + b_0}{2}$$

která odpovídá průměrnému tlaku v rozmezí dílku Δh (v daném případě prvního). Tedy

$$b_1 = b_0 - \frac{\rho_0 g}{2 b_0} (b_1 + b_0) \Delta h = b_0 - \frac{k}{2} (b_1 + b_0) \Delta h$$

a odtud

$$b_1 = b_0 \frac{1 - \frac{k}{2} \Delta h}{1 + \frac{k}{2} \Delta h}$$

Pro n -tý dílek bychom dostali

$$b_n = b_0 \frac{\left(1 - \frac{k}{2} \Delta h\right)^n}{\left(1 + \frac{k}{2} \Delta h\right)^n}$$

Položíme-li $\Delta h = h/n$ a zavedeme-li substituce

$$-\frac{kh}{2n} = \frac{1}{N_1} \quad \frac{kh}{2n} = \frac{1}{N_2}$$

dostaneme

$$b_n = b_0 \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{N_1}\right)^{N_1}\right]^{-\frac{kh}{2}}}{\left[\left(1 + \frac{1}{N_2}\right)^{N_2}\right]^{\frac{kh}{2}}}$$

V limitě $N_1 \rightarrow \infty$, $N_2 \rightarrow \infty$ nabývají oba výrazy v hranatých závorkách hodnoty e a pro tlak dostáváme

$$b = b_0 \frac{e^{-\frac{kh}{2}}}{e^{\frac{kh}{2}}} = b_0 e^{-kh} = b_0 e^{-\frac{\rho_0}{b_0} gh}$$

Tento výraz je shodný s výrazem (13). Vidíme tedy, že při zmenšujícím se Δh není rozhodující, se kterou hodnotou hustoty v rozmezí uvažovaného dílku budeme počítat.

Závislosti (13) lze užít k *barometrickému určování výšek*. Označíme-li pro výšku h_1 tlak b_1 a pro výšku h_2 tlak b_2 , můžeme vztah (13) přepsat do tvaru

$$\frac{b_1}{b_2} = e^{\frac{\rho_0}{b_0} g(h_2 - h_1)}$$

Odtud logaritmováním (přirozenými logaritmy) dostáváme

$$h_2 - h_1 = \frac{b_0}{\rho_0 g} (\ln b_1 - \ln b_2) \quad (15)$$

Jelikož se pro praktické výpočty užívá logaritmů dekadických, převedeme ve vztahu (15) logaritmy přirozené na dekadické. Vyjdeme z identity

$$x = e^{\ln x}$$

Odtud logaritmováním dostáváme převodní vztah

$$\log x = \ln x \cdot \log e, \quad (16)$$

přičemž s přesností na 5 desetinných míst je $\log e = 0,43429$. Výraz (15) pak bude mít tvar

$$h_2 - h_1 = K (\log b_1 - \log b_2), \quad (17)$$

kde

$$K = \frac{b_0}{\rho_0 g \log e} \quad (18)$$

Dosadíme-li za b_0 hodnotu (1) v N m^{-2} , za $\rho_0 = 1,29279 \text{ kg m}^{-3}$ a za $g = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, dostaneme pro teplotu vzduchu 0°C pro konstantu (18) hodnotu $K = 18403 \text{ m}$.

Výrazu (15) resp. (17) se užívá v geodesii k barometrickému určování výšek. Změně tlaku o 1 torr odpovídá v přízemních vrstvách atmosféry změna výšky asi o 11 m. Odvození výrazu (13) a tím i výrazu (17) je zatíženo chybou vyplývající z úvodních předpokladů odvození. Proto se výraz (17) pro praktické užití v geodesii koriguje zavedením oprav na

1. proměnnost teploty v rozmezí uvažovaných výšek,
2. tíhové zrychlení, které se mění jak s nadmořskou výškou, tak se zeměpisnou šířkou,
3. vlhkost vzduchu.

Korigovaný vzorec je uveden např. v [1].

Závislosti (17) také využívá barmetrický výškoměr užívaný v letectví. Je to v podstatě aneroid (tj. kovový barometr) cejchovaný přímo v kilometrech.

Užitím barometrické formule můžeme řešit i zajímavé fyzikální úlohy. Dvě takové úlohy nyní zadáme a ponecháme je čtenáři k samostatnému vyřešení. V příštím čísle pak uvedeme jejich řešení.

1. úloha

Navrhněte velikost balónu (aerostatu), který má sloužit k výstupu do výše H . Balón má být naplněn svítiplynem. Předpokládaná hmotnost konstrukce (bez plynové náplně) balónu a zátěže je m_b . Balón bude opatřen ve spodní části otvorem, který umožní vyrovnávání tlaku s okolním atmosferickým tlakem (jinak by balón po výstupu působením přetlaku mohl prasknout). Při výpočtu předpokládejte, že teplota vzduchu se s výškou nemění.

a) Určete potřebný objem balónu.

b) Jaký bude relativní úbytek hmotnosti svítiplynu po výstupu do výše H za předpokladu, že ve výšce $h = 0$ byl celý objem balónu vyplněn svítiplynem.

c) O jakou výšku Δh vystoupí balón, uvolní-li se ve výšce H část zátěže o hmotnosti Δm_b .

Řešení proveďte pro normální poměry ve výšce $h = 0$ (760 torr, 0°C), při kterých má vzduch hustotu $\rho_n = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$ a svítiplyn hustotu $\rho_0 = 0,40 \rho_n$. Řešení proveďte nejprve obecně a pak pro hodnoty $H = 5000 \text{ m}$, $m_b = 2500 \text{ kg}$, $\Delta m_b = 50,0 \text{ kg}$.

2. úloha

Gumový balónek hmotnosti m_b je naplněn heliem na tlak p_0 tak, že při okolním atmosferickém tlaku $b_0 < p_0$ má objem V_0 . Helium má teplotu okolního vzduchu t_0 .

a) Určete počáteční zrychlení balónku po jeho uvolnění.

b) Vypočítejte výšku, ve které balónek praskne, víte-li z experimentu, že balónek praskne, zvětší-li se jeho objem na hodnotu $V = \alpha V_0$. Předpokládejte přitom, že při výstupu se objem balónku zvětšuje přímo úměrně s přetlakem plynu (vzhledem k okolnímu atmosferickému tlaku) a že teplota vzduchu se s výškou nemění.

c) Stanovte podmínky řešitelnosti úlohy.

Při řešení zanedbejte proudění vzduchu. Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $m_b = 2,50 \text{ g}$, $p_0 = 741,0 \text{ torr}$, $b_0 = 730,0 \text{ torr}$, $v_0 = 7,50 \text{ l}$, $t_0 = 17,00^\circ\text{C}$, $\alpha = 5,00$. Vzduch má za normálních poměrů hustotu $\rho_n = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$, helium $\rho_n = 0,179 \text{ kg m}^{-3}$.

(pokračování)

Můstkové váhy

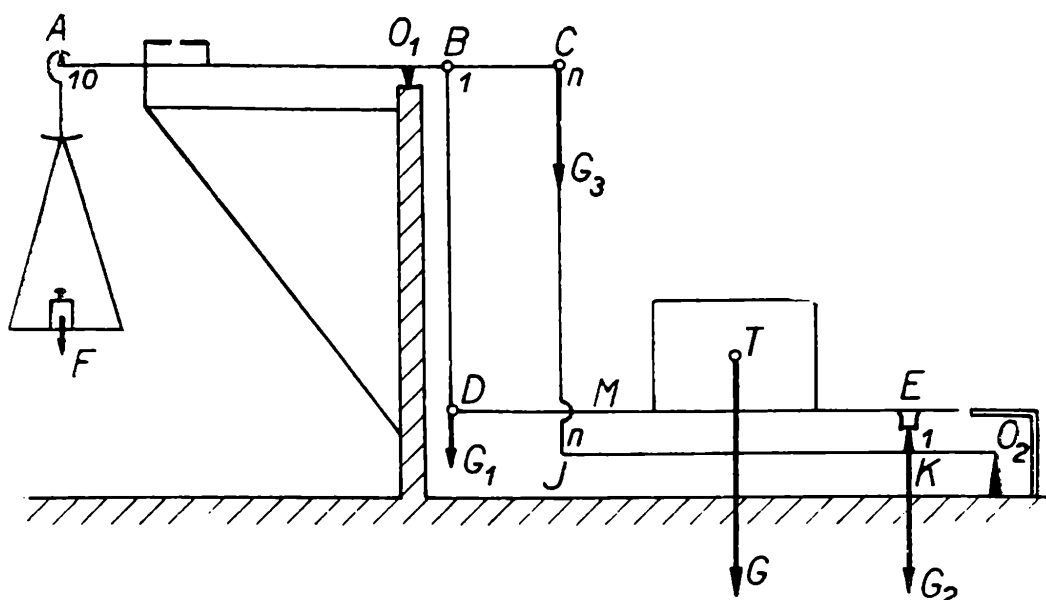
JOSEF KOTYK, Pardubice

Kromě vah rovnoramenných používá se hojně i vah s nestejně dlouhými rameny vahadla, např. přezmenu, vah můstkových aj.

Váhy můstkové mají různé názvy podle způsobu, kterým se velká břemena vyrovnávají na nerovnoramenné páce malými silami. Rozeznáváme váhy desetinné (decimální) a setinné (centesimální). Podrobněji popíšeme hojně používané váhy decimální.*)

Vahadlem decimálních vah je dvojjzratná nerovnoramenná páka AO_1B (viz obr. 1), otáčivá kolem pevné osy O_1 . Působíště síly F je v bodě A na konci páky, kde tíha závaží působí na rameni 10-krát delším než tíha zboží ($AO_1 = 10 \cdot O_1B$). Břemeno, na něž působí tíhová síla G

*) Jejich lidové označení jménem decimálka, je nevhodné; vhodnější je název *decimálky*, užívaný např. dřívějšími Maškovými učebnicemi fyziky pro vyšší třídy středních škol (díl I.) aj.



Obr. 1

v jeho těžišti T , se však z důvodů praktických nezavěšuje přímo na kratší rameno vahadla do bodu B , nýbrž klade se na můstek M , jehož jeden konec D je zavěšen na vahadle v bodě B ; druhý konec E se opírá v bodě K o jednozvratnou páku JKO_2 , otáčivou kolem pevné osy O_2 ; její vzdálenější konec J je zavěšen v vahadle C . Působíště váhy břemene na vahadle jsou tedy dvě, B a C , a pro jejich polohu platí $O_1C : O_1B = O_2J : O_2K = n$ (zpravidla $n = 5$).

Můstek zůstává, i když vahadlo kývá, stále vodorovný.

Abychom se o tom přesvědčili, přemýšlejme takto:

Sníží-li se při pohybu vahadla bod B a tedy i D např. o 1 mm, sníží se body C a J o n mm, body K a E však n -krát méně, tedy o 1 mm, tj. body D, E stejně klesají (viz obr. 2).

Přesvědčte se, že body D, E se při pohybu vahadla také stejně zdvihají!

Obecně:

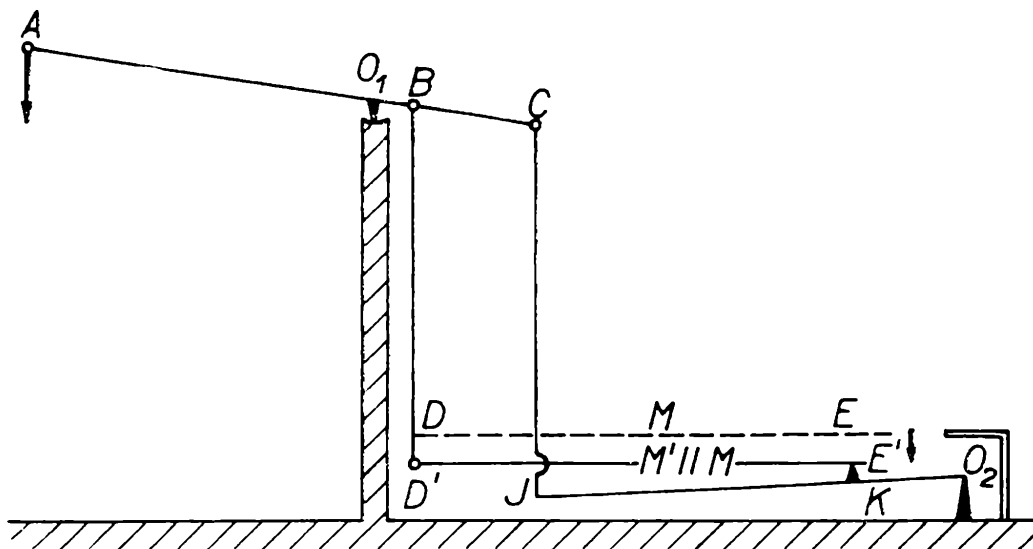
Pošine-li se (nahoru nebo dolů) můstek v E o p , pošine se tím bod J o p' podle úměry $p' : p = O_2J : O_2K$, tj.

$$p' = \frac{O_2J}{O_2K} \cdot p = \frac{n \cdot O_2K}{O_2K} \cdot p = n \cdot p;$$

pošnutí p' se přenáší tyčí z J do C , zároveň s C se však pošine B a tím i D o p'' podle úměry $p'' : p' = O_1B : O_1C$,

$$\text{tj. } p'' = \frac{O_1B}{O_1C} \cdot p' = \frac{O_1B}{n \cdot O_1B} \cdot p' = \frac{1}{n} \cdot p' = \frac{1}{n} \cdot np = p$$

čímž tvrzení, že roviny M', M (viz obr. 2) jsou rovnoběžné, je dokázáno.



Obr. 2

Pro jakoukoli polohu břemene na můstku rozkládá se jeho tíha G na dvě rovnoběžné souhlasně orientované složky G_1 a G_2 , působící v bodech D a E ; je pak $G_1 + G_2 = G$. Účinek složky G_1 se přenáší přímo na vahadlo do bodu B . Tlaková síla G_2 v bodě K způsobuje v bodě J tahovou sílu G_3 , pro kterou platí $G_3 \cdot O_2J = G_2 \cdot O_2K$, z čehož

$$G_3 = G_2 \cdot \frac{O_2K}{O_2J} = G_2 \cdot \frac{O_2K}{n \cdot O_2K} = G_2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{G_2}{n}$$

tj. tah G_3 , působící v bodě J , jenž je od osy O_2 n -krát dále, je n -krát menší než složka G_2 . Síla G_3 působí na vahadlo v bodě C . Rovnováha vahadla vyžaduje, aby

$$\begin{aligned} F \cdot A O_1 &= G_1 \cdot O_1 B + G_3 \cdot O_1 C \\ F \cdot 10 \cdot O_1 B &= G_1 \cdot O_1 B + G_3 \cdot n \cdot O_1 B \quad | : O_1 B \\ 10 \cdot F &= G_1 + G_3 \cdot n \\ 10 \cdot F &= G_1 + \frac{G_2}{n} \cdot n \\ 10 \cdot F &= G_1 + G_2 \\ 10 \cdot F &= G \\ F &= \frac{G}{10} \end{aligned}$$

Můstkové zařízení decimálních vah působí tedy tak, jako by celé břemeno viselo přímo na vahadle v bodě B ; za rovnováhy je tíha zboží 10-krát větší než tíha užitého závaží.

Cvičení

1. Váhy centesimální jsou zařízeny obdobně; rameno vahadla, nesoucí misku, je však 100-krát delší než rameno, jež nese můstek. Podmínka rovnováhy zní zřejmě $F = \frac{G}{100}$ Odvodte ji!

2. V soutěži tvořivosti mládeže se pokuste zhotovit pro fyzikální sbírky školy model decimálních vah!

3. Kolika kladkami musíte opatřit kladkostroj obecný, aby podmínka rovnováhy zněla stejně jako u decimálních vah? Proveďte také pokusně!

Doba výtoku kapaliny

JAN MANDEL, G Náchod

V posledním tématu FO „Hydrodynamika“ (Rozhledy, č. 2, 1970 až 71) byl odvozen vzorec pro okamžitou rychlost snižování hladiny při výtoku ideální kapaliny z nádoby

$$v = \frac{S_2 \sqrt{2}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{p' - p}{\rho} + g y}, \quad (1)$$

kde v je okamžitá rychlost snižování hladiny,

S_1 velikost plochy podstavy nádoby (rovná se libovolnému vodorovnému průřezu),

S_2 velikost plochy otvoru, kterým kapalina vytéká,

p' tlak, působící na hladinu kapaliny v nádobě,

p tlak, působící na vytékající kapalinu,

ρ hustota kapaliny,

y okamžitá výška hladiny,

g tíhové zrychlení.

Veličiny S_1 , S_2 , p' , p , ρ , g pokládáme za konstantní.

Autor uvádí v dalším textu výpočet doby výtoku kapaliny, při čemž uvažuje zjednodušující předpoklad $p' = p$. Chceme-li však odvodit obecnější vzorec pro dobu výtoku bez tohoto zjednodušení, možno postupovat následujícím způsobem

Vztah (1) můžeme upravit na tvar

$$v = f(y) = A \sqrt{g y + B} \quad (2)$$

kde $A = \frac{S_2 \sqrt{2}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}$ a $B = \frac{p' - p}{\rho}$ jsou konstanty.

Nyní hledíme funkci

$$t = g(y), \quad (3)$$

kde t je čas, měřený od počátku výtoku kapaliny.
Derivace této funkce

$$g'(y) = \frac{dt}{dy} \quad (4)$$

Zároveň však platí

$$- \frac{dy}{dt} = v \quad (5)$$

Z toho sloučením (2), (4), (5)

$$g'(y) = - \frac{1}{f(y)} \quad (6)$$

takže podle definice neurčitého integrálu

$$g(y) = - \int \frac{dy}{f(y)} \quad (7)$$

Po dosazení za $f(y)$ z (2) integrujeme podle vzorce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C, \quad (8)$$

takže

$$g(y) = - \frac{2\sqrt{gy+B}}{Ag} + C \quad (9)$$

Konstantu C určíme z rovnice

$$g(h) = 0, \quad (10)$$

kde h je výška hladiny na počátku výtoku, tedy v čase $t = 0$.
Řešením (10) dostáváme

$$C = \frac{2\sqrt{gh+B}}{Ag} \quad (11)$$

Po dosazení do (9) a úpravě

$$g(y) = \frac{2}{Ag} (\sqrt{gh+B} - \sqrt{gy+B}) \quad (12)$$

Dosazením za $y = 0$ dostaneme dobu výtoku kapaliny

$$t_0 = g(0) = \frac{2}{Ag} (\sqrt{gh + B} - \sqrt{B}) \quad (13)$$

Po dosazení za A, B z (2)

$$t_0 = \frac{\sqrt{2(S_1^2 - S_2^2)}}{S_2 g} \left(\sqrt{gh + \frac{p' - p}{\rho}} - \sqrt{\frac{p' - p}{\rho}} \right) \quad (14)$$

Ve zvláštním případě, kdy $p' = p$, tedy když na hladinu nepůsobí přetlak, dojdeme ke stejnému výsledku, jako ve zmíněném článku.

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]}{g}} \quad (15)$$

Pro výtok skutečné kapaliny je nutno upravit vzorec (14) tak, že místo S_2 dosadíme αS_2 , kde α je součinitel zúžení otvoru S_2 a celkovou dobu výtoku násobíme koeficientem $\frac{1}{\beta}$, kde β je součinitel výtokové rychlosti.

Výsledný vzorec pak zní:

$$t_0 = \frac{1}{\beta} \frac{\sqrt{2(S_1^2 - \alpha^2 S_2^2)}}{\alpha S_2 g} \left(\sqrt{gh + \frac{p' - p}{\rho}} - \sqrt{\frac{p' - p}{\rho}} \right) \quad (16)$$

astronomie

Hvězdné asociace

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Koncem roku 1972 uplyne čtvrt století od slavnostního zasedání Akademie věd SSSR, věnovaného 30. výročí VŘSR, na němž akademik Viktor A. Ambarcumjan, prezident Arménské akademie věd (od r. 1967 čestný doktor University Karlovy v Praze) oznámil, že na observatoři v Bjurakanu objevil se svými spolupracovníky nové soustavy hvězd, které nazval *hvězdné asociace*. Jde o poměrně málo kompaktní a poměrně rychle se rozpadající skupiny hvězd, které svědčí o tom, že vznik hvězd není v Galaxii ukončeným procesem, ale že probíhá i v současné době.

Hvězdné asociace, jak potvrdili i jiní badatelé (např. A. Blaauw v Holandsku a W. Morgan v USA), jsou útvary relativně velmi mladé, neboť ze změřené rychlosti rozpínání asociací lze odhadnout jejich stáří asi na milión roků. Toto rozšiřování hvězdných asociací je důsledkem malé gravitační soudržnosti, která je způsobena malou hvězdnou hustotou (počtem hvězd na jednotku prostoru), takže hvězdné asociace netvoří na obloze výrazná seskupení hvězd, jako např. otevřené nebo kulové hvězdokupy. Podle spektrální příslušnosti hvězd, tvořících hvězdné asociace, můžeme je rozdělit na dvě skupiny: *asociace typu O* (složené z hvězd raných spektrálních tříd O a B) a *asociace typu T* (tvořené trpasličími červenými hvězdami, jejichž typickou představitelkou je proměnná hvězda T Tauri — odtud označení písmenem *T*).

Podle Ambarcumjanovy definice z r. 1951 mají hvězdné asociace typu O tyto charakteristiky:

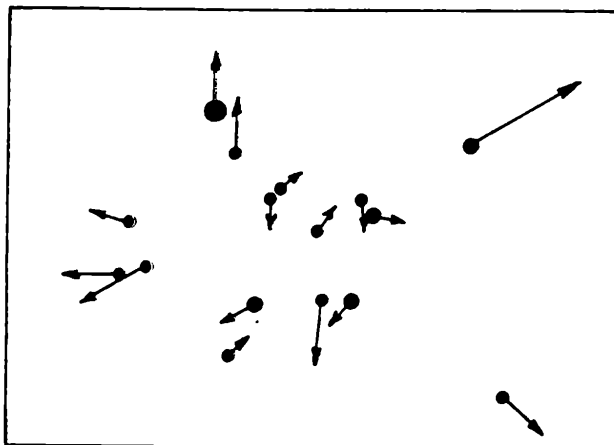
1. Průměry asociací jsou v intervalu od 30 pc do 200 pc.
2. Jádrem hvězdných asociací jsou často otevřené hvězdokupy typu O.
3. Kromě hvězd spektrálních tříd O a B2 jsou v asociacích i hvězdy tříd B3 až B9, dále hvězdy Wolfovy-Rayetovy a P Cygni.
4. Jádrem asociací bývají i vícenásobné nestabilní hvězdy typu Lichoběžníka v Oriónu; žhavé obří hvězdy nejsou jen v jádru asociace, ale po celém jejím objemu.
5. Existují závažné důvody k předpokladu, že asociace jsou nestabilní útvary.

Od této již klasické Ambarcumjanovy definice uplynulo více než 20 roků a můžeme říci, že ani jeden bod nebyl vyvrácen, naopak všechny byly dalšími výzkumy potvrzeny.

Jako příklad dobře prozkoumané asociace můžeme uvést asociaci žhavých hvězd v souhvězdí Orióna, v okolí mlhoviny M 42. Vzdálenost asociace se odhaduje na 500 parseků, průměr asociace na 160 pc. Asociace v Oriónu je poměrně plochý útvar o tloušťce asi 80 pc, rozložený v blízkosti galaktické roviny. Počet hvězd, příslušejících k asociaci, se odhaduje na 1000. Nejbližší asociací je asociace Perseus II, která se rozprostírá kolem hvězdy ζ Persei. Je ve vzdálenosti 380 pc a obsahuje asi 100 hvězd. Nejbližší známé asociace jsou v souhvězdí Kasiopeje. Asociace Cas I obsahuje jen 28 hvězd (jádry této asociace jsou hvězdokupy NGC 381 a 366), asociace Cas II + V obsahuje 160 hvězd (jádro NGC 7510) — obě jsou ve vzdálenosti 2700 parseků. Vzdálenější asociace nebyly pozorovány, neboť záření hvězd je pohlcováno v mračnách mezihvězdné látky.

Teoreticky předpovězené rozšiřování asociací bylo pozorováním potvrzeno. Podle Blaauwa činí rozšiřováním asociace Perseus II $0,0027''/\text{rok}$, což odpovídá rychlosti rozšiřování $10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Za předpokladu, že je tato rychlost stálá, můžeme odhadnout stáří této aso-

ciace na 1,3 miliónu roků. Jiní autoři obdrželi hodnotu 1,5 miliónu roků, což se shoduje s výše uvedenou hodnotou. Rozšiřování asociací je důsledek poklesu gravitační soudržnosti, k němuž dochází při ztrátě látky hvězd, zejména následkem korpuskulárního záření hvězd. Rozšiřování asociace Perseus II je patrné z obr. 1, na němž je nakresleno 16 hvězd této asociace. Šipkami jsou znázorněny tangenciální rychlosti hvězd.



Obr. 1. Rozšiřování asociace Perseus II podle A. Blaauwa.

Hvězdné asociace typu T vytvářejí, jak jsme již uvedli, trpasličí proměnné hvězdy typu T Tauri, jejichž amplitudy světelných změn dosahují 3^m až 4^m . Typickým znakem jsou dále nepravidelné změny v jasnosti, dosahující 1^m během několika hodin. Protože hvězdy T Tauri mají poměrně malou absolutní hvězdnou velikost, můžeme hvězdné asociace typu T hledat a zjistit v poměrně malém objemu prostoru kolem Slunce. Do vzdálenosti 500 parseků bylo objeveno 30 asociací T, které jsou rovněž v malé vzdálenosti od galaktické roviny. Některé asociace typů O a T tvoří někdy jedinou soustavu. V asociacích T byly zjištěny plynné mlhoviny, což všechno svědčí o tom, že tyto útvary můžeme zařadit do plochého subsystému naší Galaxie. Údaje o některých asociacích typů O a T jsou obsaženy v tab. I. Studium hvězdných asociací rozšířilo naše vědomosti o problému vzniku a vývoje hvězd.

Tabulka I. Údaje o některých asociacích typu O

Asociace	Galaktické souřadnice		Počet hvězd	Vzdálenost [pc]
	délka l_{II}	šířka b_{II}		
Cassiopeia I	125°	— 1°	28	2700
Perseus I	135	— 5	180	1900
Perseus II	160	— 17	100	380
Orion I	206	— 18	1000	500
Cassiopeia II + V	111	0	160	2700

Údaje o některých asociacích typu T

Asociace	Galaktické souřadnice		Počet hvězd	Vzdálenost [pc]
	délka l_{II}	šířka b_{II}		
Taurus T1	169°	-16°	12	200
Taurus T2	179	-20	11	170
Auriga T1	172	-7	13	170
Orion T2	209	-19	399	400
Scorpius T1	354	+18	26	210

Číselné hodnoty byly vybrány z knihy C. W. Allen, *Astrophysical Quantities*, 2. vyd., Londýn 1964

NAŠE SOUTĚŽ

Jako každoročně vypisujeme i letos soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie.

Pokyny řešitelům:

Řešení každého příkladu pište čitelně, vždy na zvláštní list formátu A4 (nečitelná řešení vyřazujeme), po jedné straně, dole vpravo uveďte své celé jméno, třídu, školu a své bydliště.

Příklady řešte samostatně, věcně, přitom odborně správně, ekonomicky s užitím platné symboliky. Jako loni mohou se soutěže zúčastnit i kolektivy — maximálně trojčlenné — z téže třídy. Jména členů kolektivu a jejich adresy napište na nepopsanou druhou stránku papíru. Při případném umístění má kolektiv ovšem nárok jen na jedinou cenu.

Řešení první části soutěžních příkladů otištěných v tomto čísle zašlete nejpozději do 15. ledna 1973 na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Danému trojúhelníku ABC , v němž $BC > AC > AB$, je opsána kružnice k . Průsečíky osy vnitřního úhlu CAB (ABC , BCA) s kružnicí k označme A' (B' , C').

a) Ukažte, že pro délky úseček AA' , BB' , CC' může v daném případě platit pouze jediná, ale nikoli libovolná rovnost ze tří možných

$$AA' = BB', \quad BB' = CC', \quad CC' = AA'$$

b) Popište konstrukci trojúhelníku ABC , jsou-li dány ony dvě úsečky, pro něž rovnost sub a) platí, a dva vrcholy trojúhelníka, z nichž tyto úsečky vycházejí.

Josef Brejcha

2. V rovině je dána kružnice $k \equiv (S; r)$. Nechť Q je libovolný vypuklý tečnový čtyřúhelník, jemuž je kružnice k vepsána a který má alespoň jeden úhel velikosti 60° . Najděte geometrické místo druhého nejvzdálenějšího vrcholu od středu S všech takových čtyřúhelníků Q .

Miroslav Fiedler

3. V tětiovém čtyřúhelníku $ABCD$ (při obvyklém označení předpokládejme, že $a < b < c < d$) je dán obsah $S = 30\sqrt{6}$ cm², obvod $2s = 36$ cm, součet čtverců všech jeho stran $\sigma = 350$ cm a součin jeho úhlopříček e, f , $ef = 158$ cm². Určete délky jeho stran. (Při výpočtu použijte vzorce pro obsah tětiového čtyřúhelníka a vzorce pro součin úhlopříček.)

Jan Fráňa

4. V intervalu $[0^\circ, 360^\circ]$ najděte všechny úhly x , které vyhovují nerovnici

$$3\operatorname{tg}x(1 + \operatorname{tg}^2x)\cos 2x < 2(1 - \operatorname{tg}^2x)^2.$$

Stanislav Horák

5. Z kruhové úseče, určené středovým úhlem $2\alpha < \pi$ a poloměrem r , vystřihněte rovnoramenný lichoběžník největšího obsahu.

Jaromír Hroník

6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{2n}{n}$$

František Janeček

Konstruktivní geometrie

1. Je dána rovina τ , dvě nesoustředné kulové plochy $\kappa_1 \equiv (O_1; r_1)$, $\kappa_2 \equiv (O_2; r_2)$ a úsečka délky r , kde $r > r_1$, $r > r_2$. Sestrojte kulovou plochu poloměru r , která se dotýká roviny τ a přitom pólí povrchy ploch κ_1, κ_2 .

Stanislav Horák

2. Sestrojte pravidelný čtyřstěn, je-li dána rovina ρ jeho čtverového řezu a bod M , který neleží v této rovině a který je středem jedné hrany čtyřstěnu. Jedna hrana čtyřstěnu je rovnoběžná s danou rovinou σ (σ není rovnoběžná s rovinou ρ).

František Hradecký

3. Sestrojte kulovou plochu, jsou-li dány tři její tečny a, b, c ležící v rovině σ a neprocházející jediným bodem, a další tečna d , neležící v rovině σ .

† Josef Langr

4. Sestrojte parabolu, znáte-li oskulační kružnici k v jejím vrcholu a bod M na parabole.

Ota Setzer

Soutěžní úlohy I. kola

1. Kategorie A



1. Je dána posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = 7^n - 3^{n+4}$.

a) Rozhodněte, zdali je tato posloupnost rostoucí nebo klesající.

b) Určete mezi členy a_n nejmenší a největší (pokud existují).

c) Určete, pro která n platí $a_n \leq 0$.

d) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí: a_n je dělitelno čtyřmi.

2. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y zobrazte množinu všech bodů, o jejichž souřadnicích x, y platí:

$$|x| + |y| \leq 1$$

a zároveň

$$[\sqrt{8 - x^2}] \geq y \geq [x],$$

kde symbol $[a]$ značí celou část reálného čísla a . V této množině určete všechny body, jejichž souřadnice jsou celá čísla a vyhovují vztahu

$$y = |[x] - |x||$$

3. Nech je daný pravidelný n -úhelník $A_1 A_2 \dots A_n$ vpísaný jednotkové kružnici. Vypočítajte

$$\sum_{\substack{i, j=1; \\ i < j}}^n A_i A_j^2.$$

4. Dokažte:

a) V tětívovém pětiúhelníku s vnitřními úhly $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ (v tomto pořadí) platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3\pi$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 > \pi, \alpha_2 + \alpha_4 > \pi, \alpha_3 + \alpha_5 > \pi, \alpha_4 + \alpha_1 > \pi, \alpha_5 + \alpha_2 > \pi.$$

b) Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ duté úhly (tj. $0 < \alpha_i < \pi$) splňující všechny uvedené vztahy, pak existuje tětívový pětiúhelník s těmito vnitřními úhly (v tomto pořadí).

5. V množině všech reálných čísel je dána binární operace

$$x * y = x + y + xy$$

Zjistěte, pro které trojice reálných čísel x, y, z platí

$$(x * y) * z = (x * z) * (y * z),$$

(tj. distributivnost operace $*$ vzhledem k téže operaci).

6. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož protější strany se protínají v bodech E, F . Dokažte:

a) Kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 , které jsou opsány pořadě trojúhelníkům AED, BEC, ABF a DCF , procházejí týmž bodem G .

b) Středů O_1, O_2, O_3, O_4 těchto kružnic leží na kružnici procházející bodem G .

c) Paty kolmic z bodu G na všechny strany čtyřúhelníka $ABCD$ leží na téže přímce.

2. Kategória B

1. Dokážte, že pre každé dve reálne čísla a, b platí

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}$$

Zistite všetky prípady, v ktorých nastane rovnosť.

2. Dokažte, že pro každé α platí

$$\sin \alpha = (-1)^{\left[\frac{\alpha}{\pi}\right]} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha},$$

kde $[x]$ je celé číslo vyhovující vztahům

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Nalezněte obdobný vztah pro vyjádření $\cos \alpha$ pomocí $\sin \alpha$.

3. Ze 100 osob koupilo na předvánočním trhu 80 lidí textilní zboží, 70 lidí knihy a 55 lidí elektrotechnické výrobky. Kolik nejméně osob koupilo výrobky všech tří druhů? Kolik nejvýše osob koupilo výrobky všech tří druhů, jestliže každá z uvažovaných 100 osob si koupila aspoň jeden z uvedených výrobků.

4. V rovině je dána kružnice k a na ní bod A . Najděte množinu vrcholů B všech trojúhelníků ABC , u nichž bod C leží na kružnici k a o nichž platí $BC \leq AB \leq AC$.

5. V množině všech reálných čísel je dána binární operace

$$x * y = x + y + xy$$

a) Zjistěte, zda je tato operace komutativní a asociativní a zda má neutrální prvek.*)

b) Určete všechna reálná čísla x , pro která platí

$$a * (x * x) = b * x ;$$

provedte diskusi vzhledem k reálným parametrům a, b .

6. Ak možno lichobežníku vpísať kružnicu, potom geometrický priemer dĺžok oboch jeho ramien je väčší ako geometrický priemer dĺžok oboch jeho základní. Dokážte.

3. Kategorie C

1. Množiny $M_1, M_2, M_3, M_4, M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ mají po řadě n_1, n_2, n_3, n_4, s prvků; přitom platí $M_1 \cap M_3 = M_2 \cap M_4 = \Phi$. Dokážte, že platí

$$2s \geq n_1 + n_2 + n_3 + n_4 .$$

Může nastat rovnost a v kterém případě?

2. Vypočítajte súčet všetkých šesticiferných čísel, z ktorých každé má dekadický zápis obsahujúci všetky číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3. Řešte graficky a početně v oboru reálných čísel rovnici

$$[3x + 2] = [x + 1] ;$$

přitom $[a]$ značí celou část čísla a .

4. Nech $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ sú dĺžky strán dotýčnicového štvoruholníka $ABCD$.

Ak platí $a^2 + b^2 = ab + cd + bc + ad - ac - bd$, je $ABCD$ deltooid. Ak okrem toho platí

$$b^2 + c^2 = bc + ad + cd + ab - bd - ac ,$$

je $ABCD$ kosoštvorec. Dokážte.

5. V rovině je dána čtvercová síť složená z jednotkových čtverců. Zvolme libovolný pravoúhlý trojúhelník T , jehož vrcholy leží ve vrcholech sítě a odvěsny v přímkách sítě. Označme p obsah trojúhelníka T , h , resp. v počet vrcholů sítě, které jsou na hranici, resp. ve vnitřku trojúhelníka T . Dokážte, že platí

$$2p - h - 2v + 2 = 0 .$$

*) Poznámka k úloze B-I-5: Použité pojmy jsou vysvětleny ve svazku č. 26 „Školy mladých matematiků“ (dr. K. Hruša: Polynomy v moderní algebře).

6. V rovině je dán vypuklý pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$ a uvnitř něho bod A_6 , který neleží na žádné úhlopříčce. Kolika způsoby lze sestavit dva trojúhelníky s vrcholy v bodech A_i tak, aby trojúhelníky neměly žádný společný bod. (Diskuse!)

Soutěžní úlohy kategorie Z

1. Dokažte, že existuje jediné prvočíslo p takové, že $p, p + 2, p + 4$ jsou prvočísla.

2. V písemné práci se vyskytl lomený výraz

$$\frac{ax + b}{x + c}$$

a, b, c byla určitá čísla. Luděk si pamatuje, že při dosazení $x = 1$ dostal výsledek 1, při dosazení $x = -1$ dostal -1 , když dosadil $x = 2$, zjistil, že se nedá hodnota daného výrazu vypočítat. Pomozte mu najít čísla a, b, c .

3. Je-li bod O libovolný vnitřní bod trojúhelníka ABC a jsou-li A_1, B_1, C_1 po řadě průsečíky přímek AO, BO, CO s protějšími stranami, pak platí

$$\text{a) } \frac{OA_1}{AA_1} + \frac{OB_1}{BB_1} + \frac{OC_1}{CC_1} = 1$$

$$\text{b) } \frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2$$

4. Je dán kvádr $ABCDEFGH$ se středem S , jehož hrany mají délky $AB = a, AD = b, AE = c$. Uvnitř kvádrů je dán bod X .

a) Vyjádřete součet druhých mocnin vzdáleností bodu X od všech vrcholů kvádrů pomocí a, b, c, SX .

b) Platí výsledek odstavce a) i pro body ležící vně kvádrů nebo na jeho povrchu?



Seznam vítězů III. kola kat. A v XXI. ročníku MO šk. r. 1971/72

1. Miroslav Kmošek, 3a, gymn. tř. kpt. Jaroše, Brno
2. Karel Horák, 3b, gymn. Strakonice
3. Imrich Vrto, 3a, gymn., Rimavská Sobota
4. Jan Frynta, 3f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
- 5.—8. Jiří Binder, 4a, gymn., Moravské Budějovice
- 5.—8. Jan Brychta, 4a, gymn., Pražáčka, Praha 3
- 5.—8. Jan Knytl, 4r., gymn., Palackého, Nový Jičín

- 5.—8. Petr Slačálek, 2f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
 9.—10. František Drašnar, 3f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
 9.—10. Pavel Ferst, 2d, gymnasium, Sladkovského, Praha 3
 11.—12. Jaroslav Švrček, 4r., gymn., Komenského, Přerov
 11.—12. Dalibor Volný, 3f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
 13.—14. Milan Menšík, 4r. gymn., Šmeralova ul., Ostrava
 13.—14. Miron Tegze, 3f, gymn., ul. W. Piecka, Praha 2
 15.—16. Jaromír Šimša, 2r. gymn., Šmeralova ul., Ostrava
 15.—16. Milan Kolibiar, 3. r. gymn., Novohradská, Bratislava
 17. Milan Lehotský, 3b., gymn., Novohradská ul., Bratislava
 18.—19. Petr Hejl, 3c, gymn., Štěpánská ul., Praha 1
 18.—19. Josef Tvarožek, 3f, SVŠ, Horný Val, Žilina

Dále následuje ještě 14 úspěšných řešitelů.

matematické a fyzikální zábavy

1. Eda, Jirka a Karel fandili třem různým sportovním klubům, každý jinému. Tyto kluby — nazveme je A, B, C — obsadily v soutěži první tři místa. Dovedete určit pořadí těchto klubů, jestliže právě jedno tvrzení z následujících tří je pravdivé?

A je první,
 B není první,
 C není třetí.

Těm nejmladším poradíme. Uvažujte tyto tři možnosti:

- 1) A je pravdivý výrok, B a C nejsou pravdivé výroky,
- 2) B je pravdivý výrok, A a C nejsou pravdivé výroky,
- 3) C je pravdivý výrok, A a B nejsou pravdivé výroky.

2. Rodičovské sdružení uspořádalo pro žáky soutěž ve sběru odpadových surovin a udělilo 1. cenu Pavlovi, 2. cenu Evě a 3. cenu Milošovi. Každý dostal nově ražené mince. Eva a Miloš mohli (každý z nich) sestavit své mince do čtverce. Pavel dostal tolik jako Miloš a Eva dohromady. Kolik každý z nich dostal, jestliže bylo rozdáno celkem 122 mincí?

3. Znázorněte graficky

$$y = \frac{2}{3} \left\{ \frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2} \right\}$$

Pošle-li nám někdo správně sestrojený graf, otiskneme jej i se jménem autora.

4. Dvě zrcadla OX , OY svírají ostrý úhel. Mezi nimi stojí osoby A , B . Do kterého místa zrcadla OY se musí dívat osoba B , aby viděla osobu A ?
S. H.

5. V Německé demokratické republice vystupoval Ference Pataki, počtářský fenomén, který z paměti velmi rychle počítal to, na co si my obyčejní smrtelníci musíme vzít tužku a papír. Televizním divákům předložil tuto zajímavost:

Číslo, udávající velikost vašich bot, znásobte dvěma, k součinu, který tak vznikl přičtete 39 a tento součet znásobte číslem 50; k výsledku přičtete 21 a od vzniklého součtu odečtete rok vašeho narození. Dostanete čtyřmístné číslo, v němž první dvojčíslí je číslo vašich bot a druhé dvojčíslí udává váš věk.

Důkaz, že tomu tak vždy je, je velmi jednoduchý. Až prohlédnete podstatu této hříčky, je možné, že sami utvoříte podobnou. Podaří-li se vám to, pošlete nám ji, rádi ji uveřejníme.

6. V knihovně je slovník, který má 4 díly. Kolika způsoby je možné přemístit jednotlivé díly tak, aby žádný z nich nestál na místě, které má na přiloženém obrázku.

7. Náš čtenář p. Emil Hlávka z Vysokého Mýta nám poslal tuto zajímavou vlastnost několika čísel.

$$12 \times 24 = 288$$

$$21 \times 24 = 882$$

$$288 : 882 = 12^2 : 21^2$$

Tato zajímavost nemá asi v desítkové soustavě obdoby.

SEDMÉ FERMATOVO ČÍSLO

Bylo podrobněji studováno r. 1971 a byl nalezen jeho rozklad v prvočinitele. Ale povězte si o tom trochu podrobněji.

Fermatova čísla jsou tvaru $2^n + 1$, kde exponent n je mocninou čísla 2, tedy $n = 2^k$. Stručně se k -té Fermatovo číslo označuje F_k . Tak např. máme $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ atd. P. Fermat vyslovil kolem r. 1640 domněnku, že všechny čísla F_k jsou prvočísla. Jeho tvrzení se ukázalo nesprávným, když L. Euler v XVIII. století zjistil, že F_5 je složené. Páté Fermatovo číslo je totiž dělitelno prvočíslem 641. Dnes je už známa řada Fermatových čísel složených — jedním z nich je např. F_{1945} . Jejich rozklad v prvočinitele ovšem není znám.

M. A. Morrison a J. Brillhart zkoumali nedávno číslo F_7 a užili při tom počítače IBM 360/91. Toto číslo je složené a oba autoři si kladli za úkol

najít jeho rozklad v prvočinitele. Zjistilo se, že F_7 je součinem dvou prvočísel, z nichž první je 59 649 589 127 497 217 a druhé 5 704 689 200 685 129 054 721. Je to opět ukázka, že nová početní technika pomáhá i při řešení úkolů čistě teoretických.

nejmladším čtenářům

1. Najděte 5 prvočísel té vlastnosti, že rozdíl každého (kromě prvního) s předcházejícím je vždy a) 6, b) 12.

2. Z prvočísel 1. příkladu vyberte ty trojice, které mohou být délkami stran trojúhelníka.

3. Rovnice $x^2 + y^2 = 29$ má jediné řešení přirozenými čísly: 2, 5. To znamená: buď $x = 2$, $y = 5$, nebo $x = 5$, $y = 2$. — Rovnice $x^2 + y^2 = 65$ má však dvě různá řešení přirozenými čísly. Pokuste se je najít.

4. Jistě znáte několik prvočísel a mnohá si můžete najít Eratosthenovým sítím. Přesvědčte se, že o každém prvočíslu, $p > 2$, které znáte, platí

$$p = 6a \pm 1,$$

kde a je přirozené číslo. Napsaná rovnice platí pro všechna prvočísla $p > 2$.

5. Na zvolených číslech se přesvědčte o pravdivosti tvrzení: Číslo, které končí cifrou 5, se umocní na druhou tak, že číslo před cifrou 5 znásobíme číslem o 1 větším a k takto vzniklému součinu připišeme 25.

Např. 145^2 . Nejdříve $14 \cdot 15 = 210$ a k tomu připišeme 25. Tedy $145^2 = 21\ 025$.

6. Všimněte si následující zajímavosti:

$$1^2 = 1^3$$

$$(1 + 2)^2 = 1^3 + 2^3$$

$$(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

atd.

Je zajímavé (a dá se to dokázat), že to platí pro libovolný počet prvních přirozených čísel.

S. H.

Řešení. 1. a) 5, 11, 17, 23, 29. b) 5, 17, 29, 41, 53. — 2. a) (11, 17, 23), (11, 23, 29), (17, 23, 29). b) (17, 29, 41), (17, 41, 53), (29, 41, 53). — 3. (1, 8), (4, 7).

ze zahraničních časopisů

Předložené ukázky zkušebních testů byly dány na elektrotechnických fakultách v Záhřebu a Sarajevu na podzim roku 1971. Pokuste se spolu s jugoslávskými studenty vybrat správná řešení daných úloh.

1. Rovnice společné normály kružnic

$$k_1 \equiv x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0 \text{ a}$$

$$k_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0 \text{ jest:}$$

a) $2x - y + 4 = 0$, b) $x - 2y + 1 = 0$, c) $x + 2y + 5 = 0$, d) $2x + y + 5 = 0$, e) $x - y - 4 = 0$.

2. Je-li $a = \log_3 \frac{2}{\sqrt[3]{216}}$, pak

a) $a = 0$, b) $a = -1$, c) $a = 1$, d) $a = \frac{1}{3}$, e) $a = 2$.

3. V obecném trojúhelníku jest $b = 26$, $c = 28$, $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, strana a

se rovná: a) 20, b) 40, c) 30, d) 50, e) 60.

4. Je-li $a = \frac{i}{\sqrt{2} + i}$, pak po usměrnění

a) $a = 1 - i\sqrt{2}$, b) $a = \frac{1 + i\sqrt{2}}{2}$, c) $a = \frac{1 - i\sqrt{2}}{5}$,

d) $a = \frac{1 - i\sqrt{2}}{3}$, e) $a = \frac{1 + i\sqrt{2}}{3}$

5. Mnohočlen $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x + a$ je dělitelný mnohočlenem $x^2 + x - 1$, když: a) $a = 2$, b) $a = 0$, c) $a = -3$, d) $a = 5$, e) $a = -10$.

6. Určete poloměr r větší kružnice, která jde bodem $T(2; -1)$ a dotýká se souřadných os: a) $r = 2$, b) $r = \frac{3}{2}$, c) $r = \frac{2}{3}$, d) $r = 5$,

e) $r = \frac{4}{3}$

7. Je-li $f(x) = x^2 + 2x - 3$, potom hodnota funkce $f(x)$ pro $x = 2^{\log_2 5}$ se rovná: a) 32, b) 10, c) -6, d) 40, e) 0.

8. Ze vztahu $\sin\alpha + \cos\alpha = a$ plyne, že výraz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ se rovná:

a) $\frac{a+1}{2}$, b) $\frac{1-a^2}{2}$, c) $\frac{a^2-1}{2}$, d) $\frac{a-1}{2}$, e) $\frac{a^2+1}{2}$.

9. Největší společný dělitel výrazů $x^3 - 1$ a $x^2 - 1$ jest

a) $x + 1$, b) $x - 1$, c) $x^2 - 1$, d) $x^3 - 1$.

10. Soustava rovnic: $2x + 3y = -1$, $4x + ay = 5$ nemá řešení, když:

a) $a = 3$, b) $a = -1$, c) $a = 6$, d) $a = -3$.

11. Výraz $x = (\sqrt{-4})^3 + (\sqrt{-9})^4 - (\sqrt{-8})^3$ lze upravit na:

a) $x = 4i(2\sqrt{2} + 1) + 81$, b) $x = i(2\sqrt{2} - 1) + 21$,

c) $x = 2i(\sqrt{2} + 1) + 21$, d) $x = 8i(2\sqrt{2} - 1) + 81$.

12. Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti

$$\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \dots \text{ jest}$$

a) $s_n = \frac{n+1}{2}$, b) $s_n = \frac{n^2-1}{2}$, c) $s_n = \frac{n-1}{4}$, d) $s_n = \frac{n-1}{2}$

13. Je-li $x = \sqrt{3} - 2 \cos 20^\circ$, potom po úpravě:

a) $x = 4 \sin 25^\circ \cos 5^\circ$, b) $x = -4 \sin 25^\circ \sin 5^\circ$, c) $x = 2 \sin 5^\circ \cos 15^\circ$,
d) $x = 2 \sin 15^\circ \cos 5^\circ$.

14. Když $a = \log \operatorname{tg} 1^\circ + \log \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \log \operatorname{tg} 89^\circ$, potom

a) $a = 1$, b) $a = 0$, c) $a = -1$, d) $a = 10$.

15. Přímka $y = b$ je tečnou elipsy $9x^2 + 4y^2 = 36$, když

a) $b = 5$, b) $b = \pm 2$, c) $b = \pm 3$, d) $b = 5$.

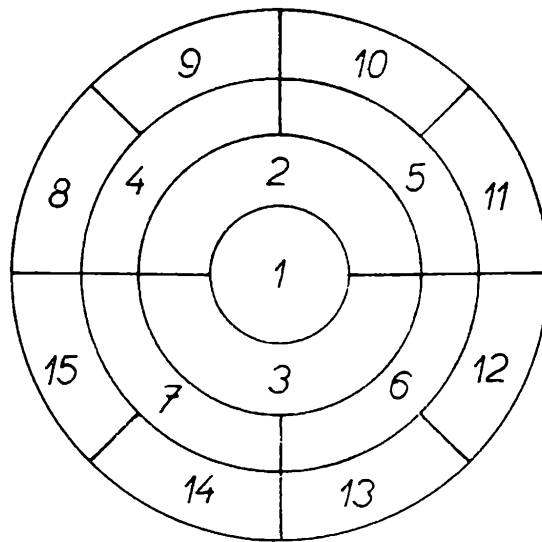
Správná řešení: 1c, 2b, 3c, 4e, 5c, 6d, 7a, 8d, 9b, 10c, 11d, 12d, 13b, 14b, 15c.

Doc. OTA SETZER, Praha

16. V obr. 1 jsou naryšovány čtyři soustředné kružnice. Kruh nejmenšího poloměru je označen 1. Mezikruží mezi ním a další kružnicí je rozděleno na dvě shodné části, které jsou označeny 2, 3. Další mezikruží je rozděleno na čtyři shodné části, označené 4, 5, 6, 7. Poslední mezikruží je rozděleno na osm shodných částí, označených 8, 9, ..., 15.

V jakém poměru jsou poloměry kružnic, jestliže všech 15 částí má navzájem stejné obsahy?

17. Pumpou P_1 se nádrž naplní přesně za 4 h 30 min. Pumpou P_2 se naplní tatáž nádrž za 4 h 45 min. Při naplňování nádrže byla v činnosti po dobu 30 min pouze pumpa P_1 a potom pracovaly obě pumpy, dokud nádrž nebyla plná.



Obr. 1

Vypočtete, jak dlouho se nádrž naplňovala. Předpokládáme, že během čerpání vody pracovaly obě pumpy stále se stejným výkonem.

18. Je dána přímka p a body A, B , z nichž každý je vnitřním bodem jiné poloroviny, vytaté přímkou p . Na přímce p najděte bod X takový, aby přímka BX půlila úhel přímek p, AX .

19. Jsou dána dvě přirozená čísla a, b , kde $a > b$. Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby rozdíl $a^2 - b^2$ byl prvočíslo.

20. Petřík tvrdí svým spolužákům:

- V našem domě bydlí více dospělých než dětí.
- V našem domě je více chlapců než děvčat.
- Každý chlapec má nejméně jednu sestru.
- Bezdětní manželé se u nás nevyskytují.
- Všechny manželské páry v našem domě mají pouze děti školou povinné.

f) Kromě manželských párů s dětmi již nikdo víc u nás nebydlí.

Bětuška, která vyslechla tato tvrzení, však prohlásila, že všechna nemohou být pravdivá. Můžete Bětuščinu prohlášení podepřít důkazem?

21. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Paty jeho výšek jsou D, E, F . Dokažte: Výšky trojúhelníka ABC jsou osami vnitřních úhlů trojúhelníka DEF .

Poznámky. V příkladě 3. si uvědomte, kde leží bod A' , který je souměrně sdružený s bodem A podle přímky BX .

Příklad 6. je dost obtížný. Je-li V průsečík výšek trojúhelníku ABC , potom kružnice opsaná nad průměrem BV prochází dvěma patami výšek. Další postup při důkazu se opírá o rovnost obvodových úhlů. Důkaz najdete v knížce Horák, Kružnice, str. 15. Vypůjčte si ji ve škole.

Příklady, které jsme tu uveřejnili, jsou opět z německého časopisu Alpha a jsou určeny pro kategorii Olympiadeklasse 8.

S. H.

různé

Město Basilej - kolébka matematiků

Doc. VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, Praha

Basilej, město ve Švýcarsku na hranicích Švýcarska, Francie a Německé spolkové republiky, má dnes čtvrt miliónu obyvatel. Jeho původ se klade do římských dob. Jeho původní jméno bylo Robur, později Basilia, dnes Basel. Město vyměnilo mnoho pánů a bylo od roku 1263 říšským svobodným městem. Nebylo ušetřeno ani velkých pohrom, neboť v r. 1313 prožilo mor, v letech 1348—1349 černou či basilejskou nemoc, v níž zahynulo 14 tisíc lidí, a v r. 1356 zemětřesení.

Pro nás, Čechy, je památné Basilejským sněmem, který trval v různých přestávkách s dramatickými změnami od r. 1431 do r. 1448. Připomeňme si, jakou důležitou úlohu, a to sociální a revoluční, hráli tehdy Čechové, i když samozřejmě v náboženském rouše. Češi dostali dne 20. června 1432 pozvání na sněm a byl jim zaručen bezpečný průvod. Delegace se vydala s Prokopem Holým v čele na třech stech koních dne 10. ledna 1433 do Basileje a zde hájila tyto 4 články. Mistr Jan Rokycan, kazatel v Týnu, hájil přijímání pod obojí, Mikuláš z Pelhřimova řečnil o trestání veřejných hříchů u církevních, duchovních a světských osob, Oldřich ze Znojma mluvil o svobodném hlásání slova Božího a Petr Engliš navrhoval článek proti kněžskému vládnutí pozemskými statky. Nakonec byly po třech měsících bezúspěšného rokování koncipovány známé čtyři pražské artikule, v tzv. kompaktátech.

Basilej má od r. 1460 universitu, která je nejstarší ve Švýcarsku, a v r. 1880 měla již 61 400 obyvatel. Dlouhou dobu byla střediskem učenosti, neboť již v době Erasmově byla basilejská universita známým vědeckým centrem. Erasmus Rotterdamský, vlastním jménem Gerhard Gerhards (1467—1536), humanista, žil od r. 1521 v Basileji.

Tato Basilej dala světu celý rod Bernoulliů a Eulera, všímáme-li si jen nejvýznačnějších matematiků. Dříve nežli nahlédneme do jejich historie, všimněme si několika dobových pozoruhodností také proto, abychom lépe pochopili dobu, v které žili.

Sedmnácté století bylo poznamenáno třicetiletou válkou, která skončila r. 1648. Tato strašlivá válka přinesla naší zemi a Německu velký kulturní úpadek. Ale přesto byly v tomto století položeny základy k novému světovému názoru a rozvoji věd.

Astronomie činí nezadržitelné pokroky díky slavným jménům Tycho de Brahe, Jan Kepler, Galileo Galilei. V druhé polovině tohoto století

vzrůstá studium přírody a exaktních věd. Nové učené společnosti vydávají vědecké časopisy. Připomeňme si jména fyziků Christian Huygens, Isaac Newton, filosofů René Descartes, Gottfried Leibniz, kteří oba jsou i objeviteli nových matematických disciplín.

Vítězí stále víc důvěra v rozum. V umění se rozšiřuje z Itálie baroko, opera, vzniklá rovněž v Itálii, podivuje celý svět. V malířství dominují Nizozemčani Pavel Rubens, Anthonis van Dyck, Rembrandt van Rijn, v dramatickém umění udivuje svět na počátku 17. století William Shakespeare. Z Čechů vynikli Karel Škréta a Václav Hollar.

Za Ludvíka XVI. se hlásí v Evropě o primát Francie. Je založena francouzská Akademie. Takový je kulturní svět v 17. století. V 18. století objevy přírodních věd pokračují. Zároveň s nimi se vytváří nový světový názor vedoucí ke kritice společenských řádů. Klade se stále větší důraz na historická práva přirozená, a to ústy Johna Locka, Françoise Aroueta Voltaira a Denise Diderota. Osvícenské myšlenky vznikají mezi vyššími společenskými třídami. Mezi osvícené panovníky této doby patří Friedrich II. pruský, Kateřina II., ruská carevna, Josef II. rakouský, Ludvík XVI. francouzský.

Vědecká činnost se soustřeďovala na Akademii, zatímco univerzitní výuka hrála nanejvýš jen nepatrnou úlohu.

Evropští monarchové, např. Friedrich II., Kateřina Veliká, Ludvíkové XV. a XVI., zvali k sobě na dvory učence. Sledovali při tom i zlepšení výroby ve svých státech, zvýšení úderných sil svých armád, ke kterým mohly přispět přírodověda i aplikovaná matematika. Tak pracovalo mnoho matematiků na akademiích mimo svou vlast, někde dočasně, jindy doživotně.

Poněvadž nebyla žádná z tehdejších věd natolik obsáhlá a poněvadž se nerozšiřovaly vědecké poznatky tak rychle jako dnes, setkáváme se s matematiky, kteří byli mimo to i lékaři, astronomy, nebo pracovníky v jiných oborech. Mnozí z nich studovali matematiku i soukromě, a přece zaujali významné místo mezi matematiky.

Důležitými podněty k úvahám, pojednáním a potom i k objevům byly dopisy, které si matematici vyměňovali ještě před založením akademií, mezi sebou. V nich si dávali vzájemné úkoly, problémy a sdělovali si i úspěchy jejich řešení. Společná práce se omezovala na spolupráci dvou nebo tří vědců. V těchto dopisech se objevovaly i vášnivé spory a boje jejich pisatelů.

Snad celá historie středověké a i v začátku novověké matematiky je poznamenána spory vědců o prioritu. V době počátku knihtisku je to zvláště pochopitelné. Je bezpočet případů, že objevy čekaly na zveřejnění a zatím mnohý zákon byl dříve zveřejněn. Nebylo by nezajímavé vypsát takové případy, alespoň v matematice. Jsou známy i v jiných vědách, zvláště v přírodovědě.

Rod Bernoulliů pochází z Nizozemska. Za vlády vévody z Alby, který velel španělské armádě a okupoval v r. 1567 Nizozemí, se Bernoulliové přestěhovali do Antverp. Z Antverp přišli Bernoulliové přes Frankfurt do Basileje. Zde zaujal Mikuláš Bernoulli (1623—1708), otec slavných matematiků, důležité společenské postavení. Byl členem velké rady města a soudu. Později v r. 1860 bylo založeno v Basileji na počest této rodiny tzv. Bernoullianum, ústav pro fyziku, chemii, astronomii při tamní universitě.

Dva ze synů Mikuláše, Jacob (1654—1705) a Johann (1667—1748), oba narození v Basileji, byli zakladateli slavné matematické rodiny Bernoulliovy. Jacob studoval původně teologii a matematice se učil soukromě jako samouk. Matematikem se rozhodl stát se svým bratrem Johannem po vyjití Leibnizových článků o infinitezimálním počtu, které vyšly r. 1684 v Acta eruditorum. Oby byli první významní Leibnizovi žáci. S Leibnizem si začal dopisovat r. 1687 a byl s ním stále v písemném styku. Byl jeho obdivovatelem i sokem a pokračoval v jeho započatých pracích, prohluboval a rozšiřoval je. Roku 1687 vydal významné dílo *Dissertatio de gravitate Aetheris*. V roce 1687 převzal stolicí matematiky na basilejské universitě, kterou zastával až do své smrti.

V r. 1690 se objevuje v Acta eruditorum, v časopisu založeném Leibnizem, Jacobovo pojednání o izochroně, zapsané tam v tvaru diferenciální rovnice $dy \sqrt{b^2y - a^3} = dx \sqrt{a^3}$. Leibniz ji definoval r. 1687 jako křivku, po níž padá těleso rovnoměrnou rychlostí. Huygens (1629—1695), zámožný Holanďan, žijící mnoho let v Paříži, významný fyzik a astronom, autor vlnové teorie světla, ukázal, že izochrona je semikubická parabola ($y^3 = ax^2$). Jacob použil v úvahách polární souřadnice. Po Huygensovi studoval Jacob křivku, zvanou řetězovku, jejíž tvar je tvarem homogenního, dokonale ohebného vlákna, když je zavěšeno ve dvou bodech. V r. 1699 studoval lemniskátu, nazvanou Bernoulliho lemniskátou, tj. pravoúhlou úpatnici rovnoosé hyperboly s pólem v jejím středu. Je to jedna z křivek Cassiniových, tj. křivek, jejíž body mají od dvou pevných bodů stálý součin vzdálenosti. Zabýval se dále logaritmickou spirálou, která protíná průvodiče svých bodů (v polárních souřadnicích) pod konstantním úhlem, zamiloval se do ní a nazýval ji podivuhodnou.

Čtenář si jistě povšimne, že problémy zde studované a i v dalším mají úzkou spojitost s fyzikou. Jacob studoval v r. 1701 obrazce stejného obvodu. Tyto úvahy vedly k objevu variačního počtu, který je důležitý v mechanice. V něm jde zpravidla o to, najít mezi funkcemi určitých vlastností takové funkce, pro které daný integrál, jehož hodnota závisí na těchto funkcích, nabývá extrémní hodnoty. Objevitelem variačního počtu bývá označován spíše jeho bratr Johann, poněvadž přispěl k řešení brachystochrony, tj. křivky, po níž urazí hmotný bod nejrychleji vzdále-

nost mezi dvěma body v gravitačním poli. Oba bratři našli kolem roku 1697 rovnice geodetických křivek na ploše. Máme-li rozvinutelnou plochu (kuželovou, válcovou, šroubovou), potom po jejím rozvinutí do roviny je obrazem geodetické křivky plochy přímka. Na kulové ploše jsou geodetickými křivkami hlavní kružnice. Jacob studoval řady, o nichž napsal 5 pojednání. Druhé z těchto pojednání byla i jeho disertační práce.

Jacob byl také průkopníkem počtu pravděpodobnosti. Jeho pojednání o tomto tématu bylo uveřejněno až po jeho smrti v r. 1713 jeho synovcem Niclausem I. (Mikulášem) pod jménem *Ars conjectandi*. Při diskusi Pascalova trojúhelníku v této knize se objevují tzv. Bernoulliho čísla. Na Jacobově pomníku je jeho logaritmická spirála, bohužel zde se podobají spíše Archimedově spirále s nápisem (v latině), který v češtině zní: Zůstávám táž, i když se měním. V roce 1699 se stává spolu se svým bratrem Johannem členem Akademie pařížské a v r. 1701 členem Akademie berlínské.

Johann Bernoulli, mladší bratr Jacoba, pro přehlednost Johann I., studoval lékařství a získal r. 1694 doktorát medicíny. Jeho disertační práce byla psána na téma užití matematiky při fyziologii. Roku 1692 se vrací po svých studiích z Paříže do Basileje a r. 1695 je jmenován profesorem matematiky na universitě v Groningen v Nizozemí. Tato universita byla založena r. 1614. Po smrti svého bratra Jacoba se stává r. 1705 profesorem v Basileji a zůstává zde až do své smrti. Velmi cenná je jeho korespondence s Leibnizem, s bratrem Jacobem, se svým synovcem Niclausem I. a dopisy psané Eulerovi, které byly uveřejněny r. 1845 v Petrohradě. Z této korespondence je patrná jeho spolupráce na učebnicích Eulerových. Johann I. prováděl cenné výzkumy z chemie, fyziky, medicíny, teorie matematiky i aplikované matematiky.

Vedle počtu infinitesimalního, v němž zpřesnil úvahy, které v době rychlého rozkvětu teorie této disciplíny ztrácely na přesnosti, a vedle nauky o řadách, v nichž pracovali oba bratři společně, jsou Johannovi přisuzovány některé metody integrace, pojem funkce a tzv. Bernoulliho rozvoj funkce v řadu. Znal se velmi dobře s vědcem l'Hôspitem a spolupracoval s ním v souvislosti výpočtu limit podílu funkcí (pravidlo l'Hôpitalovo), ale přicházel s ním i do sporů. V kinematice jsou ve spojení s diferenciálním počtem pozoruhodná pojednání o bodech vratu trajektorií, kterým dal právě on toto jméno, o poloměrech křivosti křivek a s tím spojené úvahy o evolutách křivek, dnes probíraných často v analytické geometrii. Můžeme si opět všimnout, jak jeho úvahy jsou spojeny vždy s problémy fyziky, kinematiky. Vedle matematiky patří jeho zájem i medicíně. Johann Bernoulli, byl jak již bylo řečeno, jmenován r. 1699 členem Akademie pařížské a r. 1712 členem Akademie londýnské, r. 1724 bolognské a petrohradské Akademie.

Seznam úspěchů obou bratří je rozsáhlý a obsahuje mnoho z toho, co je dnes zahrnuto do úvodních učebnic diferenciálního a integrálního počtu. Jsou zde např. integrace mnoha obyčejných diferenciálních rovnic. Díla obou bratří byla ve velmi úzkém vztahu a dá se někdy těžko rozeznat, komu patří ten který objev. Práce obou znamenají zpřesnění tehdejších úvah diferenciálního počtu, jehož rozvoj byl nepředvídaně rychlý, a to často na újmu nepřesnosti.

Jako třetí matematik se objevuje Nicolaus Bernoulli, zvaný Nicolaus I. (1698—1759). Je synem prostředního bratra obou matematiků Nicolause Bernoulliho, narozeného r. 1662. Byl žákem nejdříve Jacoba, a potom Johanna Bernoulliho na universitě v Groningen, s nímž se také vrátil r. 1705 do Basileje. Své práce dělí mezi matematiku a práva, neboť byl zároveň právníkem a filosofem. V roce 1716 odchází do Padovy jako profesor matematiky, ale vrací se již r. 1719 do Basileje, kde je profesorem logiky a od r. 1731 profesorem lenního práva.

Jeho jméno je spojeno s jmény strýců a s jménem Leibniz. Z korespondence s Leibnizem vyplynula řada pojednání o řadách, o polynomech (teorie algebraických rovnic), o diferenciálních rovnicích a o jejich integraci, z kinematiky o pravoúhlých trajektoriích. Nicolaus I. byl členem Akademií berlínské a bolognské.

Johann I. dal světu 3 syny, matematiky. I když nebyli, s výjimkou Daniela a částečně Niclausa, tak průbojní ve vědě jako jejich otec, jsou pozoruhodní jako celý rod Bernoulliů.

Nejstarší syn je Nicolaus II. (1695—1726), narozený v Basileji. Byl matematikem a právníkem. Již v r. 1715 získává licenciát (hodnost na universitě mezi bakalářem a doktorem). V r. 1716 se vydává na studijní cesty, v r. 1723 je profesorem v Bernu, v r. 1725 je povolán carem Petrem Velikým do Petrohradu, a to se svým bratrem Danielem na tamní Akademii, kde již po roce umírá.

V době pobytu v Petrohradě vytyčil v teorii pravděpodobnosti známý petrohradský problém (morální pojem jmení). V teorii pravděpodobnosti studoval její aplikaci na právní otázky.

Nicolaus II. řešil již v r. 1716 náročné úlohy o hyperbole, diskutované jeho otcem a Leibnizem ve vzájemných jejich dopisech. Později řeší úlohy o trajektoriích užitím diferenciálních rovnic. V letech 1720—1722 je Nicolaus II. učitelem italského šlechtice v Benátkách. Zde se také seznamuje s matematikem Jacobem Ricattim (1676—1754), známým řešením speciálních rovnic zvaných Ricattiových, jejichž jeden tvar jsou diferenciální rovnice Bernoulliovy. V dopisech s Christianem Goldbachem (1690—1764), narozeným v Königsbergu v Prusku, přichází k úlohám o integraci diferenciálních rovnic. Nicolaus II. byl členem Akademie bolognské.

Druhým synem Johanna I. byl Daniel I. Bernoulli (1700—1782). Daniel I. se narodil v Groningen, ale umírá v Basileji. Matematice byl vyučován nejdříve svým bratrem Nicolaem II, později, od r. 1721, svým otcem. Ten podceňoval nadání a úspěchy syna a chtěl, aby se syn věnoval nejdříve obchodu. Později ho dal studovat medicínu. Tu studoval v Basileji, v Heidelbergu a ve Strasbourgu. V době, kdy se ubírá na studijní cesty do Itálie, přišlo mu pozvání do Petrohradu na tamní Akademii, kam skutečně v r. 1725 odjíždí se svým bratrem Nicolaem II. Později je profesorem v Basileji, a to až do roku 1777. Je zajímavé, že v Basileji je profesorem anatomie a botaniky a od r. 1750 ještě profesorem fyziky. Roku 1724 je jmenován členem Akademie bolognské, r. 1747 Akademie berlínské, r. 1748 přespolním členem Akademie pařížské a r. 1750 členem Royal société.

Ve své rozsáhlé vědecké činnosti se věnoval hlavně astronomii, fyzice a hydrodynamice. Jeho *Hydrodynamica* vyšla r. 1738 a jedna z vět zde vyslovených nese jeho jméno. Je to věta o hydraulickém tlaku. V téže roce zpracoval teorii chvění strun. V r. 1747 se objevila teorie chvění strun zpracovaná Eulerem. Touto prací se stali Euler a Daniel Bernoulli zakladateli teorie parciálních diferenciálních rovnic. Jinak pracoval Daniel I. ještě v počtu pravděpodobnosti, pokud uvažujeme práce z matematiky. (Pokračování)

redakce hovoří

Konkurs JČSMF na návrhy úloh pro MO

Odstavec se stejným nadpisem byl otištěn v 9. čísle minulého ročníku *Rozhledů*. Nyní chceme upozornit zájemce o tento konkurs, že se začíná měnit tematika úloh MO. Již v právě probíhajícím XXII. ročníku MO jsou zařazeny úlohy zmodernizované školské matematiky. Jde o úlohy, při jejichž řešení se užívá Vennových diagramů, úlohy, v nichž se vyšetřují vlastnosti binárních operací apod. Původní úlohy z moderní matematiky mají v konkursu značnou naději, že budou přijaty a odměněny.

Konečně je ještě jeden druh úloh, které ÚVMO pro soutěž velmi potřebuje. Totiž úlohy, které vyúsťují v aplikacích. Takové úlohy se během 22 ročníků v MO prakticky nevyskytovaly a to nikoli snad proto, že by ÚVMO byl názoru, že takové úlohy nejsou pro MO vhodné, ale prostě proto, že tyto úlohy neměl. Je tedy také u úloh s aplikacemi, pokud jsou přístupné středoškolákům, značná pravděpodobnost, že budou v konkursu přijaty a odměněny.

ÚVMO

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

neviditelný	invisible
nevlastní	impropre
nezávislost	indépendance <i>ž</i>
nezávislý	indépendant, e
po dvou nezávislé	indépendants deux à deux
nezkratitelný	irréductible
neznámá	inconnue <i>ž</i>
nomografie	nomographie <i>ž</i>
nomogram	nomogramme <i>m</i>
norma	norme <i>ž</i>
normála	normale <i>ž</i>
normalizace	normalisation <i>ž</i>
normalizovat	normaliser
normální	normal, e, aux
normovaný	normé, e
normovat	normer
nositelka	support <i>m</i>
nula	zéro <i>m</i>
nulita	nullité <i>ž</i>
nulový	nul, nulle
numerace	numérotage <i>ž</i> ; numérotation <i>ž</i>
numerický	numérique
nutně	nécessairement
nutný	nécessaire
je nutné a stačí	il est nécessaire et suffisant

O

obálka	enveloppe <i>ž</i>
občísli	période <i>ž</i>
obdélník	rectangle <i>m</i>
obdélníkový	rectangulaire
obecně	en général

obecný	général, e, aux
objem	volume m
oblast	domaine m
oblouk	arc m
kruhový oblouk	arc de cercle m
oblý	rond, e
obor	domaine m
obraz	image ž
obrazec	figure ž
obrázek	illustration ž
obrys	contour m
obsah	aire ž
obsah pláště kužele	aire latérale du cône
obsahovat	contenir
obsažen	contenu, e; inclus, e
obvod	périmètre m; circonférence ž
obvodový úhel	angle m inscrit (dans une circonférence)
obzor	horizon m
očíslovat	numéroter
odčítání	soustraction ž
odčítat	retrancher
odmocnina	racine ž
druhá odmocnina	racine carrée
třetí odmocnina	racine cubique
odmocňovat	extraire une racine
odpovídající	correspondant, e
odpovídat si	correspondre
odraz	réflexion ž
úhel odrazu	angle m de réflexion
odstranit	chasser, supprimer
odstranit jmenovatele	chasser le dénominateur
odstranit závorky	chasser les parenthèses
odvėsna	cathète ž
odvodit	déduire
odvoditelný	déductible
odvoditelnost	déductibilité ž
odvození	déduction ž
ohnisko	foyer m
ohniskový	focal, e, aux
ohnisková vzdálenost	distance ž focale
ohraničený	borné, e
ohraničovat	borner
okamžitý	instantané, e; momentané, e
okolí	entourage ž; voisinage ž
okruh	anneau m
oktant	octant m
omezený	borné, e
omeziti	borner

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

2

ROČNÍK 51, 1972-1973, ŘÍJEN



ROČNÍK 51
ŘÍJEN 1972

2

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci,
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönl. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

OBSAH

J. Drábek: O jedné úloze kombinatorické geometrie	49
M. Foltinský - dr. E. Jokl: Konstrukce speciálního interpolačního mnohočlenu .	54
J. Dítě: Užití komplexních čísel	59
F. Hradecký: Skládání kruhových zobrazení	65
A. Vrba: O chytrém předsedovi	70
Ing. K. Nedbal: Přibližná konstrukce úhlu 10° pravítkem a kružítkem	76
Ing. B. Vybíral: Barometrická formule a její aplikace	77
Prof. dr. J. Skotnický: O volnej a viazanej energii	81
Dr. J. Široký - dr. M. Široká: Planetka č. 1 - Ceres	82
Naše soutěž	84
Olympiády	88
Doc. V. Jozífek: Město Basilej, kolébka matematiků (dokončení)	90
J. Kotyk: Hrst vzpomínek	93
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	96
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

matematika

0 jedné úloze kombinatorické geometrie

JAROSLAV DRÁBEK, PF Plzeň

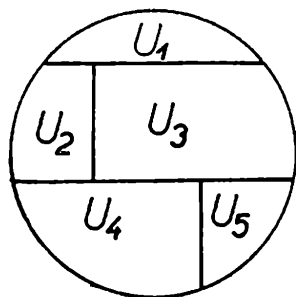
V posledních desetiletích tohoto století vznikla nová matematická disciplína, kombinatorická geometrie, která bezprostředně navazuje na elementární geometrii. Tento článek pojednává o první ze tří základních úloh kombinatorické geometrie. Předpokládám znalost pojmu konvexního útvaru v rovině, omezeného a uzavřeného rovinného útvaru, hraničního a vnitřního bodu rovinného útvaru. V celém článku považuji rovinný útvar za uzavřený.

Předem však definujme několik základních pojmů.

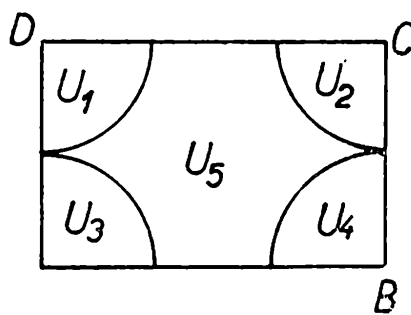
Definice 1. Jestliže U je omezený rovinný útvar, potom průměrem d tohoto rovinného útvaru budeme rozumět nezáporné číslo d , pro které platí:

- (1) $\overline{XY} \leq d$ pro všechna $X, Y \in U$,
- (2) Existují takové body $X, Y \in U$, pro které platí $\overline{XY} = d$.

Je-li U neomezeným rovinným útwarem, je průměr d roven $+\infty$.



Obr. 1



Obr. 2

Cvičení.

1. Dokažte, že průměr jednobodového rovinného útvaru je roven nule!
2. Dokažte, že průměr kruhu o poloměru r je roven $2r$!
3. Dokažte, že průměr trojúhelníka je roven velikosti největší strany tohoto trojúhelníka!
4. Dokažte, že průměrem čtverce je velikost jeho úhlopříčky!
5. Jestliže $U_1 \subset U_2$, potom $d_1 \leq d_2$, kde d_1 je průměr U_1 a d_2 průměr U_2 . Dokažte!

Na obrázcích 1 a 2 jsou příklady „rozřezání“ kruhu a obdélníka na pět rovinných útvarů.

Precizujme však definici toto „rozřezání“, které v geometrii nazýváme rozkladem.

Definice 2. Říkáme, že množina rovinných útvarů U_1, U_2, \dots, U_n vytváří rozklad rovinného útvaru U , jestliže:

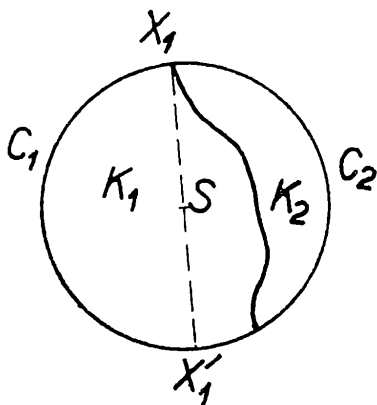
(1) $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n = U$,

(2) $U_i \cap U_j$ pro $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \dots, n$, je buď prázdná množina, nebo nejvýše hraniční body společné těmto rovinným útvarům.

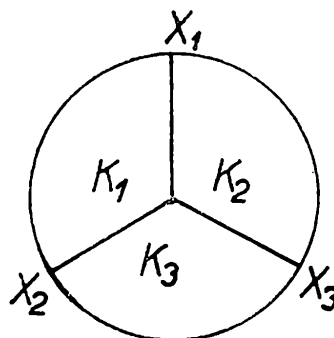
Nyní již můžeme formulovat první úlohu kombinatorické geometrie.

Úloha. Daný omezený rovinný útvar U o průměru d máme rozložit na nejmenší počet rovinných útvarů o menším průměru.

Příklad 1. Ukažme, že kruh K o průměru d nelze rozložit na dva útvary K_1 a K_2 o menším průměru.



Obr. 3



Obr. 4

Předpokládejme, že kruh K je rozložen na dva útvary K_1 a K_2 o menším průměru. Nechť C_1 a C_2 jsou po řadě oblouky hraniční kružnice kruhu K , které jsou částmi hranic útvarů K_1 a K_2 .

Společné krajní body oblouků C_1 a C_2 označme X_1 a X_2 . Bod X_1 zřejmě náleží útvarům K_1 a K_2 . Sestrojme bod X_1' středově souměrný podle středu kruhu k bodu X_1 . Bod X_1' náleží do alespoň jednoho z útvarů K_1 a K_2 a tedy alespoň jeden z těchto útvarů má průměr rovný d , což je spor s předpokladem, že oba útvary K_1 a K_2 mají průměr menší než d .

Cvičení.

6. Ukažte, že rozklad kruhu K podle obr. 4 na tři útvary K_1, K_2 a K_3 je rozkladem na útvary menšího průměru!
7. Ukažte, že rozklad pravidelného šestiúhelníka $ABCDEF$ na obr. 5 na tři útvary K_1, K_2 a K_3 je rozkladem na útvary menšího průměru!

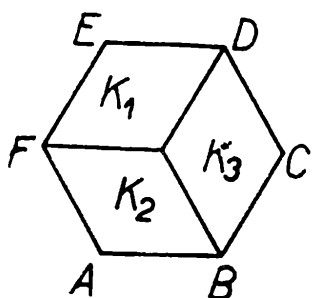
Předchozí příklad a cvičení vedou k domněnce polského matematika Borsuka, která říká, že každý omezený rovinný útvar se dá rozložit na tři útvary o menším průměru.

Nejprve ukáží, že stačí tuto domněnku dokázat pro omezené konvexní útvary. Zavedme však předem pojem konvexního uzávěru rovinného útvaru.

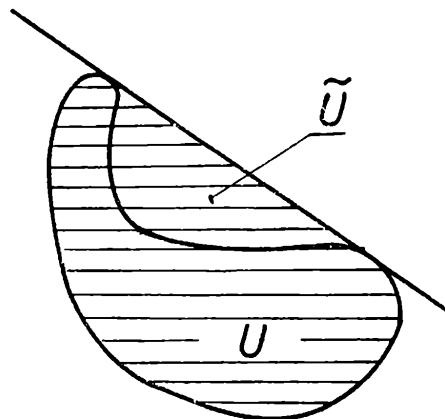
Definice 3. Nechť U je rovinný útvar a K je množina všech konvexních rovinných útvarů, které obsahují útvar U jako svou část. Konvexním uzávěrem útvaru U budeme rozumět průnik všech těchto

konvexních útvarů z množiny K . Tento konvexní uzávěr útvaru U označme \tilde{U} .

Zbývá ukázat, že konvexní uzávěr \tilde{U} útvaru U vždy existuje. Množina K je zřejmě neprázdná, poněvadž rovina vždy náleží do této množiny a tedy existuje konvexní uzávěr \tilde{U} , který je zřejmě nejmenším konvexním útwarem obsahující útvar U .



Obr. 5



Obr. 6

Na obrázku 6 je znázorněn konvexní uzávěr U rovinného útvaru U .

Cvičení.

8. Nalezněte konvexní uzávěr dvou různých bodů v rovině!
9. Nalezněte konvexní uzávěr tří bodů v rovině, které neleží v jedné přímce!
10. Nalezněte konvexní uzávěr nekonvexního čtyřúhelníka!
11. Nalezněte konvexní uzávěr konvexního útvaru!

Následující věta nám umožní redukovat domněnku Borsuka pouze na omezené konvexní útvary.

Věta 1. Jestliže U je omezený rovinný útvar o průměru d , potom $d = \tilde{d}$, kde \tilde{d} je průměrem konvexního uzávěru \tilde{U} .

Důkaz. Poněvadž $U \subset \tilde{U}$ je $d \leq \tilde{d}$ podle cvičení 5.

Ukažme, že platí nerovnost $\tilde{d} \leq d$.

Nechť $X \in U$ a $Y \in \tilde{U}$. Sestrojíme kruh K se středem v bodě X a poloměrem d . Platí, že $U \subset K$, poněvadž d je průměr U . Kruh K je prvkem množiny K z definice 3, a proto je $\tilde{U} \subset K$. Pro body X, Y tedy platí $XY \leq d$. Uvažujme nyní body $R, S \in U$. Opišme opět kruh K' se středem v bodě R a poloměrem d . Podle předchozí úvahy platí pro všechny $Z \in U$, $ZR \leq d$. Útvar U je tedy částí kruhu K' a konvexní uzávěr \tilde{U} částí kruhu K' . Pro všechny body R, S konvexního uzávěru \tilde{U} platí $\overline{RS} \leq d$. Podle vlastnosti 2 z definice 1 existují body $A, B \in \tilde{U}$ tak, že platí $\overline{AB} = \tilde{d}$, ale zároveň je $\overline{AB} \leq d$, tedy $d \leq \tilde{d}$.

Tím jsme dokázali rovnost $d = \tilde{d}$.

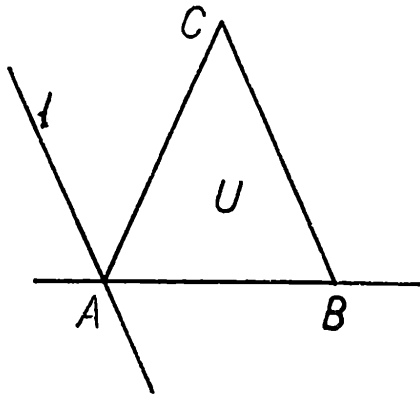
Cvičení.

12. Jestliže se podaří dokázat domněnku Borsuka pro omezené konvexní útvary, potom tato domněnka je platná pro libovolný omezený rovinný útvar. Dokažte!

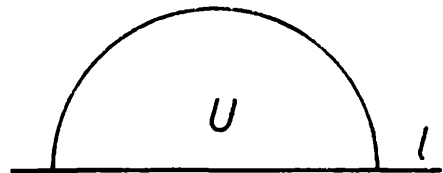
Definujme ještě pojem opěrné přímky konvexního útvaru.

Definice 4. Přímku l nazveme opěrnou přímkou konvexního útvaru U , jestliže obsahuje aspoň jeden hraniční bod útvaru U , ale neobsahuje žádný vnitřní bod tohoto útvaru.

Na obrázcích 7 a 8 jsou znázorněny opěrné přímky trojúhelníka a půlkruhu.



Obr. 7



Obr. 8

Bez důkazu nyní uvedu Pálovu větu, specializovanou na omezené konvexní rovinné útvary.

Věta 2. Každému omezenému rovinnému konvexnímu útvaru lze opsat středově souměrný šestiúhelník.

Na obrázku 9 je konvexnímu útvaru opsán středově souměrný šestiúhelník $ABCDEF$.

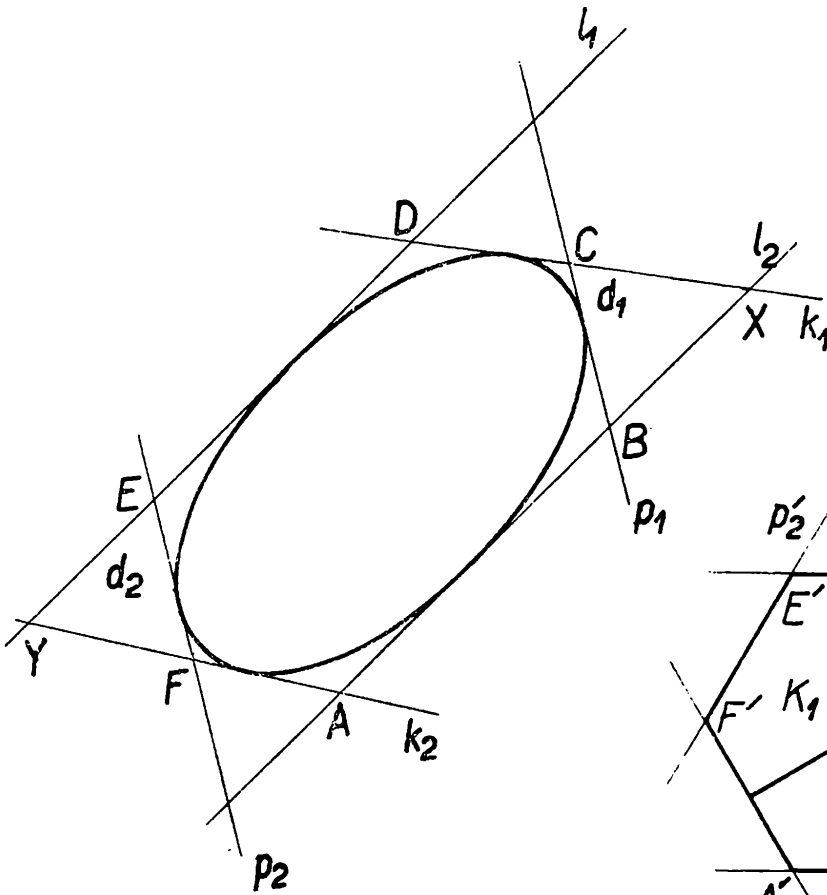
Zbývá poslední úvaha. Jestliže vzdálenost l opěrných přímek l_1 a l_2 na obr. 9 je menší než d , kde d je průměr konvexního útvaru, potom provedeme rovnoběžné posunutí přímek l_1 a l_2 o $\frac{1}{2}(l - d)$ ve směru od středu souměrnosti opsaného šestiúhelníka $ABCDEF$. Takto vzniklé přímky l'_1 a l'_2 mají již vzdálenost d . Stejnou úvahu provedeme pro dvojici opěrných přímek k_1, k_2 a p_1, p_2 . Dostali jsme pravidelný šestiúhelník $A'B'C'D'E'F'$, který má vlastnost, že vzdálenost dvou protějších stran je rovna d . Zbývá podotknout, že tento pravidelný šestiúhelník obsahuje daný konvexní útvar.

Cvičení.

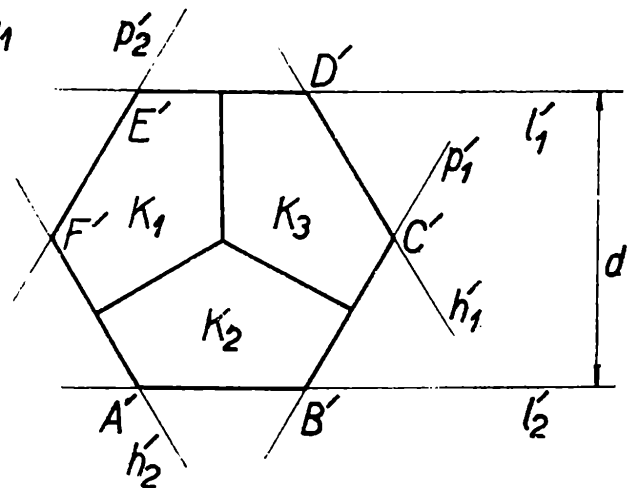
13. Ukažte, že rozklad šestiúhelníka $A'B'C'D'E'F'$ na obr. 10 na útvary K_1, K_2 a K_3 je rozkladem na útvary o průměru menším než d ! Poněvadž rovinný útvar U je částí šestiúhelníka $A'B'C'D'E'F'$, vytváří rozklad ze cvičení 13 též rozklad útvaru U na tři útvary K'_1, K'_2 a K'_3 , kde $K' = K_i \cap U, i = 1, 2, 3$. Je zřejmé, že průměr těchto útvarů je menší než průměr útvaru U . Ukažte!

Kombinatorická geometrie se nespécializuje na rovinné problémy, ale zabývá se též problémy stereometrickými. Námi řešená úloha se dá formulovat i pro prostor.

Úloha. Daný omezený prostorový útvar U o průměru d máme rozložit na nejmenší počet prostorových útvarů o menším průměru.



Obr. 9



Obr. 10

Zájem matematiků se především zaměřil na kouli. Snadno se dá ukázat, že koule o daném průměru d se dá rozložit na čtyři prostorové útvary o menším průměru. Tento rozklad snadno sestojíme pomocí pravidelného čtyřstěnu vepsaného dané kouli. Netriviálními topologickými úvahami se ukázalo, že neexistuje rozklad koule na tři části o menším průměru. Úsilí matematiků se soustředilo na důkaz Borsukovy domněnky pro prostor, která říká, že každý omezený prostorový útvar se dá rozložit na čtyři útvary menšího průměru. Důkaz této domněnky poprvé provedl v roce 1955 anglický matematik Eggleston. Důkaz byl ovšem dlouhý, složitý a nebyl proveden prostředky elementární geometrie. V roce 1957 podal jednoduchý důkaz pomocí analytické geometrie izraelský matematik Grünbaum.

Uvedená úloha pro rovinu a prostor se obecně formulovala pro n -rozměrný prostor, kde Borsukova hypotéza říká, že každý omezený n -roz-

měrný útvar se dá rozložit na $(n + 1)$ útvarů o menším průměru. Pro $n \geq 4$ není tato hypotéza dosud dokázána.

Čtenář, který se zajímá o další dvě úlohy kombinatorické geometrie, najde poučení v monografii Boltjanskij, Gochbert: „Teoremy a zadači kombinatornoj geometrii“.

Konstrukce speciálního interpolačního mnohočlenu

MILAN FOLTINSKÝ, EVŽEN JOKL, ČVUT Praha

V matematice užíváme často funkcí, jejichž funkční hodnoty nepočítáme přímo, ale vyhledáváme je v tabulkách. Jsou to např. funkce sinus, logaritmus, exponenciální funkce a jiné. Může se však stát, že nemáme tabulky po ruce, nebo že pro určitou funkci tabulky neexistují, nebo že chceme znát funkční hodnotu s větší přesností, než jakou dávají konkrétní tabulky. Ve všech těchto případech jsme nuceni nahradit funkci jinou funkcí, jež bude mít funkční hodnoty přibližně stejné jako první, ale její funkční hodnoty se snadno určí přímým výpočtem. Takovou náhradní funkcí je často mnohočlen (polynom). Funkční hodnota mnohočlenu se počítá pomocí konečného počtu operací sčítání, odčítání a násobení. Jestliže náhradní mnohočlen sestrojujeme tak, že v určitých bodech splňuje předem dané podmínky a přitom jeho stupeň je co nejnížší, pak mluvíme o interpolačním mnohočlenu. Podmínky, jež splňuje interpolační mnohočlen, jsou obecně následující: označíme-li původní funkci $f(x)$ a interpolační mnohočlen $P(x)$, pak v bodech x_0, x_1, \dots, x_m navzájem různých se sobě rovnají funkční hodnoty $f(x_i) = P(x_i)$ a rovnají se i derivace až do určitého řádu n : $f^{(j)}(x_i) = P^{(j)}(x_i)$ pro $j = 1, 2, \dots, n$. Označujeme, jak známo, j -tou derivaci buď číslem j v závorkách nebo j apostrofy, takže je např. $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$ apod. Pokud v obecných vzorcích se připouští také $j = 0$, rozumí se pojmem nultá derivace $f^{(0)}(x)$ přímo funkce $f(x)$. Celkový počet kladených podmínek je $(m + 1)(n + 1)$, a interpolační mnohočlen tedy bude stupně nejvýše $(m + 1)(n + 1) - 1 = mn + m + n$. Čím více je podmínek, a tedy čím vyšší stupeň má interpolační mnohočlen, tím větší bude přesnost vypočtených funkčních hodnot, ale současně poroste i počet operací, potřebných k výpočtu.

Nejjednodušší případ interpolačního mnohočlenu dostaneme při $n = 0$, takže mnohočlen v $m + 1$ daných bodech pouze nabývá předepsaných funkčních hodnot. Jeho stupeň bude obecně m a bude mít $m + 1$ součinitelů a_0, \dots, a_m

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (1)$$

Pro výpočet těchto součinitelů můžeme dostat $m + 1$ lineárních rovnic jestliže dosadíme do (1) postupně x_i za x a $f(x_i)$ za $P_m(x)$.

Abychom se však vyhnuli obtížnému řešení takové soustavy rovnic, můžeme mnohočlen upravit na jiný tvar, v němž součinitelé se snadněji určí. Je to např. známý Langrangeův tvar

$$L_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_m)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_m)} \quad (2)$$

kam stačí jen dosadit $x_0, x_1, \dots, x_m, f(x_0), \dots, f(x_m)$ a pronásobit závorky. Za jiný příklad interpolačního mnohočlenů můžeme pokládat také známý Taylorův mnohočlen, který dostaneme při $m = 0$. Tento mnohočlen tedy v jediném bodě x_0 nabývá předepsané funkční hodnoty $f(x_0)$ a jeho derivace v tomto bodě až do řádu n mají předepsané hodnoty. Taylorův mnohočlen má tvar

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (3)$$

V tomto článku se budeme zabývat jiným mnohočlenem, který bude mít ve dvou různých bodech x_0 a x_1 předepsané funkční hodnoty a všechny derivace až do řádu n . Jeho stupeň bude $2n + 1$ a jeho koeficienty vypočteme snadno, jestliže budeme mnohočlen psát ve tvaru

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x-x_0)^{i+1} (x-x_1)^i + \sum_{i=0}^n b_i (x-x_0)^i (x-x_1)^{i+1} \quad (4)$$

Poznámka. Při symbolickém označování součtu nabývá sčítací index i všech hodnot celých čísel od nejnižší do nejvyšší. Přitom, aby vzorce měly správný smysl, klademe $(x-x_0)^0 = 1$ pro $x = x_0$ i pro $x \neq x_0$, dále $(x-x_0)^i = 0$ pro $x = x_0$ při $i \neq 0$ atd.

Derivaci tohoto mnohočlenů snadno určíme podle známých pravidel pro derivaci mocniny a složené funkce $(u^r)' = r u^{r-1} u'$ a pro derivaci součinu $(uv)' = u'v + uv'$. Další derivace součinu se pak počítají podle Newtonova vzorce

$$(uv)^{(j)} = u^{(j)}v + j u^{(j-1)}v' + \binom{j}{2} u^{(j-2)}v'' + \dots + u v^{(j)} = \sum_{k=0}^j u^{(j-k)} v^{(k)} \quad (5)$$

Bude tedy mít j -tá derivace mnohočlenů (4) následující tvar

$$P_{2n+1}^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{(i+1)! i!}{(i-k+1)! (i+k-j)!} (x-x_0)^{i-k+1} \cdot (x-x_1)^{i+k-j} + \sum_{i=0}^n b_i \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{i! (i-k)!}{(i-k)! (i+k-j+1)!} (x-x_0)^{i-k} (x-x_1)^{i+k-j+1} \quad (6)$$

Poznámka. V tomto symbolickém označení se uvažují jen mocniny s nezáporným mocnitelem, protože při derivování mnohočlenu dostáváme zase mnohočlen. V případě, že mocnitel je nula, pak se mocnina rovná jedné, jak už bylo řečeno. Také faktoriály jsou definovány jen pro nezáporná čísla, a to $0! = 1$, $1! = 1$, $k! = k \cdot (k-1)!$ a kombinační čísla $\binom{p}{k}$ jsou definována pro celá nezáporná $k \leq p$

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \quad (7)$$

takže je např. $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{p}{0} = 1$, atd.

Tak např. je pro $n = 1$ mnohočlen (4) třetího stupně

$$P_3(x) = a_0(x - x_0) + a_1(x - x_0)^2(x - x_1) + b_0(x - x_1) + b_1(x - x_0)(x - x_1)^2 \quad (8)$$

a jeho derivace jsou podle (6)

$$P'_3(x) = a_0 \left[\binom{1}{1} \frac{1! 0!}{0! 0!} (x - x_0)^0 (x - x_1)^0 + b_0 \left(\binom{1}{0} \frac{0! 1!}{0! 0!} (x - x_0)^0 (x - x_1)^0 + a_1 \left[\binom{1}{0} \frac{2! 1!}{2! 0!} (x - x_0)^2 (x - x_1)^0 + \binom{1}{1} \frac{2! 1!}{1! 1!} (x - x_0)^1 \cdot (x - x_1)^1 \right] + b_1 \left[\binom{1}{0} \frac{1! 3!}{1! 1!} (x - x_0)^1 (x - x_1)^1 + \binom{1}{1} \frac{1! 2!}{0! 2!} (x - x_0)^0 \cdot (x - x_1)^2 \right] \right], \quad (9)$$

neboli

$$P'_3(x) = a_0 + b_0 + a_1 [(x - x_0)^2 + 2(x - x_0)(x - x_1) + b_1] [2(x - x_0)(x - x_1) + (x - x_1)^2] \text{ a druhá derivace}$$

$$P''_3(x) = a_1 \left[\binom{2}{1} \frac{2! 1!}{1! 0!} (x - x_0)^1 (x - x_1)^0 + \binom{2}{2} \frac{2! 1!}{0! 1!} (x - x_0)^0 \cdot (x - x_1)^1 \right] + b_1 \left[\binom{2}{0} \frac{1! 2!}{1! 0!} (x - x_0)^1 (x - x_1)^0 + \binom{2}{1} \frac{1! 2!}{0! 1!} (x - x_0)^0 \cdot (x - x_1)^1 \right] \quad (10)$$

neboli

$$P''_3(x) = a_1 [4(x - x_0) + 2(x - x_1)] + b_1 [2(x - x_0) + 4(x - x_1)] \text{ atd.}$$

Ze vzorce (6) dostaneme speciálně hodnoty derivací v bodech x_0 a x_1 . Při sčítání podle k odpadnou všechny členy kromě jednoho a po úpravě máme

$$P_{2n+1}^{(j)}(x_0) = \sum_{i=0}^n \left[a_i \binom{j}{i+1} + b_i \binom{j}{i} \right] \frac{i!(i+1)!}{(2i-j+1)!} (x_0 - x_1)^{2i-j+1} \quad (11)$$

$$P_{2n+1}^{(j)}(x_1) = \sum_{i=0}^n \left[a_i \binom{j}{j-i} + b_i \binom{j}{j-i-1} \right] \frac{i!(i+1)!}{(2i-j+1)!} \cdot (x_1 - x_0)^{2i-j+1} \quad (12)$$

Tak např. pro prve uvedený P_3 by bylo

$$P'_3(x_0) = \left[a_0 \binom{1}{1} + b_0 \binom{1}{0} \right] \frac{0!1!}{0!} (x_0 - x_1)^0 + b_1 \binom{1}{1} \frac{1!2!}{2!} (x_0 - x_1)^2 = \\ = a_0 + b_0 + b_1 (x_0 - x_1)^2 \quad (13)$$

$$P'_3(x_1) = \left[a_0 \binom{1}{1} + b_0 \binom{1}{0} \right] \frac{0!1!}{0!} (x_1 - x_0)^0 + a_1 \binom{1}{0} \frac{2!1!}{2!} (x_1 - x_0)^2 = \\ = a_0 + b_0 + a_1 (x_1 - x_0)^2 \quad (14)$$

Ze vztahu (11) a (12) můžeme získat rovnice pro výpočet koeficientů a_i , b_i , jež platí pro libovolné n , to znamená, že jich můžeme použít ke konstrukci interpolačního mnohočlenu libovolného stupně. Jinými slovy to znamená, že chceme-li zvýšit stupeň interpolačního mnohočlenu, stačí jen přidat další členy, tak jako u Taylorova mnohočlenu (3). U Langran-geova mnohočlenu (2) podobná výhoda není. Vzorce pro výpočet a_i , b_i jsou rekurentní, což znamená, že nové koeficienty se počítají s použitím koeficientů již známých. To je do značné míry výhodné, může to však nepříznivě ovlivnit přesnost koeficientů v důsledku zaokrouhlovacích chyb, jež se přenášejí. Uvádíme vzorce pro a_i , b_i až do $i = 4$. Další by se daly snadno odvodit.

$$a_0 = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \quad b_0 = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \\ a_1 = \frac{f'(x_1)}{(x_1 - x_0)^2} - \frac{a_0 + b_0}{(x_1 - x_0)^2} \quad b_1 = \frac{f'(x_0)}{(x_0 - x_1)^2} - \frac{a_0 + b_0}{(x_0 - x_1)^2} \\ a_2 = \frac{f''(x_1)}{2(x_1 - x_0)^3} - \frac{2a_1 + b_1}{(x_1 - x_0)^2} \quad b_2 = \frac{f''(x_0)}{2(x_0 - x_1)^3} - \frac{a_1 + 2b_1}{(x_0 - x_1)^2} \quad (15)$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_1)}{6(x_1 - x_0)^4} - \frac{a_1 + b_1}{(x_1 - x_0)^4} - \frac{3a_2 + b_2}{(x_1 - x_0)^2}$$

$$b_3 = \frac{f'''(x_0)}{6(x_0 - x_1)^4} - \frac{a_1 + b_1}{(x_0 - x_1)^4} - \frac{a_2 + 3b_2}{(x_0 - x_1)^2}$$

$$a_4 = \frac{f''''(x_1)}{24(x_1 - x_0)^5} - \frac{3a_2 + 2b_2}{(x_1 - x_0)^4} - \frac{4a_3 + b_3}{(x_1 - x_0)^2}$$

$$b_4 = \frac{f''''(x_0)}{24(x_0 - x_1)^5} - \frac{2a_2 + 3b_2}{(x_0 - x_1)^4} - \frac{a_3 + 4b_3}{(x_0 - x_1)^2}.$$

Praktické použití takového mnohočlenu ukážeme na příkladě. Nahradíme funkci $y = \sin x$ mnohočlenem 5. stupně tak, aby v bodech $x_0 = 0$ a $x_1 = \pi$ měl stejné funkční hodnoty prvních a druhých derivací jako $\sin x$. tedy

$$\begin{aligned} P_5(0) &= 0 & P_5(\pi) &= 0 \\ P'_5(0) &= 1 & P'_5(\pi) &= -1 \\ P''_5(0) &= 0 & P''_5(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Koeficienty a_i, b_i jsou pak podle (15)

$$a_0 = 0, b_0 = 0, a_1 = \frac{1}{\pi^2}, b_1 = \frac{1}{\pi^2}, a_2 = \frac{1}{\pi^4}, b_2 = -\frac{1}{\pi^4} \quad (17)$$

Interpoláční mnohočlen je tedy podle (4)

$$\begin{aligned} P_5(x) &= -\frac{1}{\pi^2} x^2(x - \pi) + \frac{1}{\pi^2} x(x - \pi)^2 + \frac{1}{\pi^4} x^3(x - \pi)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi^4} x^2(x - \pi)^3 \end{aligned} \quad (18)$$

neboli po úpravě

$$P_5(x) = x - \frac{2}{\pi^2} x^3 + \frac{1}{\pi^3} x^4 \quad (19)$$

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty $\sin x$ od 0° do 180° po 10° , dále hodnoty mnohočlenu (19) a rozdíly $\sin x - P_5$. Pro srovnání jsou uvedeny také hodnoty Taylorova mnohočlenu 5. stupně při $x_0 = 0$ $T_5 = x - x^3/6 + x^5/120$ a rozdíly $\sin x - T_5$. Ze srovnání je vidět, že mezi 0° a 90° je Taylorův mnohočlen přesnější, od 90° do 180° zase naopak mnohočlen (19). Kdybychom ovšem byli použili Taylorova mnohočlenu při $x_0 = \pi/2$, byly by maximální odchylky přibližně stejné.

Tabulka.

x (ve stupních)	$\sin x$	P_5	$(\sin x - P_5) \cdot$ $\cdot 10^5$	T_5	$(\sin x - T_5) \cdot$ $\cdot 10^5$
0	0,00000	0,00000	0	0,00000	0
10	0,17365	0,17438	17	0,17365	0
20	0,34202	0,34093	109	0,34202	0
30	0,50000	0,49693	307	0,50000	0
40	0,64279	0,63684	595	0,64280	-1
50	0,76604	0,75670	934	0,76612	-8
60	0,86603	0,85327	1276	0,86630	-27
70	0,93969	0,92405	1564	0,94048	-79
80	0,98481	0,96723	1758	0,98681	-200
90	1,00000	0,98175	1825	1,00452	-452
100	0,98481	0,96723	1758	0,99419	-938
110	0,93969	0,92405	1564	0,95782	-1813
120	0,86603	0,85327	1276	0,89905	-3302
130	0,76604	0,75670	934	0,82327	-5727
140	0,64279	0,63684	595	0,73786	-9507
150	0,50000	0,49693	307	0,65227	-15227
160	0,34202	0,34093	109	0,57824	-23622
170	0,17365	0,17348	17	0,52991	-35626
180	0,00000	0,00000	0	0,51489	-51489

Užití komplexních čísel

JOSEF DÍTĚ, Sušice

V článku ukážeme možnosti použití komplexních čísel v trigonometrii. Dříve musíme získat několik nových poznatků o komplexních číslech.

Předpokládejme, že je dáno n komplexních jednotek $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ s amplitudami $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$. Goniometrický tvar daných komplexních jednotek je $z_1 = \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1, z_2 = \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2, \dots, z_n = \cos \varphi_n + i \sin \varphi_n$. Čísla komplexně sdružená s danými komplexními jednotkami jsou $\bar{z}_1 = \cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1, \bar{z}_2 = \cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2, \dots, \bar{z}_n = \cos \varphi_n - i \sin \varphi_n$. Víte, že součinitelem komplexních jednotek je komplexní jednotka, jejíž amplituda je rovna součtu amplitud všech komplexních jednotek. Proto

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots z_n = \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n),$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_3 \dots \bar{z}_n = \cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) - i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n).$$

Z těchto rovnic plyne

$$\sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) = \frac{z_1 z_2 \dots z_n - \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n}{2i},$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) = \frac{z_1 z_2 \dots z_n + \overline{z_1 z_2 \dots z_n}}{2}.$$

Poněvadž je $z_i \cdot \overline{z_i} = 1$; $i = 1, 2, \dots, n$, můžeme do posledních dvou rovnic dosadit $\overline{z_i} = z_i^{-1}$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) &= \frac{z_1^2 z_2^2 \dots z_n^2 - 1}{2i z_1 z_2 \dots z_n}, \\ \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) &= \frac{z_1^2 z_2^2 \dots z_n^2 + 1}{2z_1 z_2 \dots z_n} \end{aligned}$$

Tím také

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) = \frac{z_1^2 z_2^2 \dots z_n^2 - 1}{i(z_1^2 z_2^2 \dots z_n^2 + 1)}; \text{ při čemž}$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i \neq (2l + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cotg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) = \frac{i(z_1^2 z_2^2 \dots z_n^2 + 1)}{z_1^2 z_2^2 \dots z_n^2 - 1}; \text{ přičemž } \sum_{i=1}^n \varphi_i \neq l\pi$$

Písmeno l značí libovolné celé číslo.

a) Je-li $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, pak také $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \alpha$ a vztah (1) můžeme psát ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} \sin n\alpha &= \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}, \quad \cos n\alpha = \frac{z^{2n} + 1}{2z^n}, \\ \operatorname{tg} n\alpha &= \frac{z^{2n} - 1}{i(z^{2n} + 1)}; \quad \alpha \neq (2l + 1) \frac{\pi}{2n} \\ \operatorname{cotg} n\alpha &= \frac{i(z^{2n} + 1)}{z^{2n} - 1}; \quad \alpha \neq l \frac{\pi}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Pro $n = 1$ dostaneme vztahy, které budeme užívat nejčastěji. Tyto vztahy mají tvar

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad \cos \alpha = \frac{z^2 + 1}{2z}, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{z^2 - 1}{i(z^2 + 1)}; \quad \alpha \neq (2l + 1) \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{i(z^2 + 1)}{z^2 - 1}; \quad \alpha \neq l\pi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

b) Bude-li mezi n danými komplexními jednotkami k jednotek rovno komplexní jednotce z_1 s amplitudou α a $m = n - k$ komplexních jedno-

tek rovno komplexní jednotce z_2 s amplitudou β , pak vzorce (1) dostanou tvar

$$\left. \begin{aligned} \sin (k\alpha + m\beta) &= \frac{z_1^{2k} z_2^{2m} - 1}{2i z_1^k z_2^m}, \\ \cos (k\alpha + m\beta) &= \frac{z_1^{2k} z_2^{2m} + 1}{2 z_1^k z_2^m}, \\ \operatorname{tg} (k\alpha + m\beta) &= \frac{z_1^{2k} z_2^{2m} - 1}{i (z_1^{2k} z_2^{2m} + 1)} \quad k\alpha + m\beta \neq (2l + 1)\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{cotg} (k\alpha + m\beta) &= \frac{i (z_1^{2k} z_2^{2m} + 1)}{z_1^{2k} z_2^{2m} - 1}; \quad k\alpha + m\beta \neq l\pi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Vzorce (2), (3), (4) k řešení úloh z trigonometrie nestačí. Odvodíme proto další vzorce. Poněvadž jejich odvozování je analogické k odvození vzorců (2), (3), (4), budeme postupovat poněkud rychleji.

Uvažujme, že jsou dány komplexní jednotky z_1, z_2 s amplitudami α, β . Potom je

$$\frac{z_1^k}{z_2^m} = \frac{\cos k\alpha + i \sin k\alpha}{\cos m\beta + i \sin m\beta} = \cos (k\alpha - m\beta) + i \sin (k\alpha - m\beta),$$

$$\frac{z_1^{-k}}{z_2^{-m}} = \frac{\cos k\alpha - i \sin k\alpha}{\cos m\beta - i \sin m\beta} = \cos (k\alpha - m\beta) - i \sin (k\alpha - m\beta)$$

Z posledních rovnic odvodíme, že

$$\left. \begin{aligned} \sin (k\alpha - m\beta) &= \frac{z_1^{2k} - z_2^{2m}}{2i z_1^k z_2^m}, \quad \cos (k\alpha - m\beta) = \frac{z_1^{2k} + z_2^{2m}}{2 z_1^k z_2^m}, \\ \operatorname{tg} (k\alpha - m\beta) &= \frac{z_1^{2k} - z_2^{2m}}{i (z_1^{2k} + z_2^{2m})}; \quad k\alpha - m\beta \neq (2l + 1)\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{cotg} (k\alpha - m\beta) &= \frac{i (z_1^{2k} + z_2^{2m})}{z_1^{2k} - z_2^{2m}}; \quad k\alpha - m\beta \neq l\pi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Zvolíme-li si v předcházejících vzorcích $k = 1$ a $m = 1$, dostaneme vzorce

$$\left. \begin{aligned} \sin (\alpha - \beta) &= \frac{z_1^2 - z_2^2}{2iz_1z_2}, \quad \cos (\alpha - \beta) = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2z_1z_2}, \\ \operatorname{tg} (\alpha - \beta) &= \frac{z_1^2 - z_2^2}{i (z_1^2 + z_2^2)}; \quad \alpha - \beta \neq (2l + 1)\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{cotg} (\alpha - \beta) &= \frac{i (z_1^2 + z_2^2)}{z_1^2 - z_2^2}; \quad \alpha - \beta \neq l\pi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Poznatky, získané v předcházející části článku, použijeme k řešení příkladů na nichž ukážeme možnosti užití komplexních čísel v trigonometrii.

Příklad 1. Bez tabulek určete hodnotu součinu $A = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

Řešení. Zvolíme-li $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ a použijeme-li vzorce pro $\cos n\alpha$ uvedeného ve vzorcích (2), dostaneme

$$\begin{aligned} \cos 20^\circ &= \frac{z^2 + 1}{2z} & \cos 40^\circ &= \cos 2 \cdot 20^\circ = \frac{z^4 + 1}{2z^2}, & \cos 80^\circ &= \\ & & & & &= \cos 4 \cdot 20^\circ = \frac{z^8 + 1}{2z^4} \end{aligned}$$

Po dosazení je

$$A = \frac{(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1)}{8z^7} = \frac{1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12} + z^{14}}{8z^7}.$$

V čitateli posledního zlomku máme určit součet prvních osmi členů geometrické posloupnosti, ve které je $a_1 = 1$ a $q = z^2$.

Proto

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12} + z^{14} = \frac{z^{16} - 1}{z^2 - 1}$$

Poněvadž $z^9 = \cos 180^\circ - i \sin 180^\circ = -1$, můžeme nakonec psát

$$A = \frac{z^{16} - 1}{8(z^9 - z^7)} = \frac{-z^7 - 1}{8(-1 - z^7)} = \frac{1}{8}.$$

Příklad 2. Vypočítejte součet

$$A = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n}$$

Řešení. Položíme-li

$$z = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}, \quad \text{pak } z^n = -1 \text{ a } z^{2n} = 1$$

Opět užijeme vzorce pro $\cos n\alpha$ uvedeného ve vzorcích (2) a dostaneme

$$\begin{aligned} A &= \frac{z^2 + 1}{2z} + \frac{z^4 + 1}{2z^2} + \dots + \frac{z^{2n-2} + 1}{2z^{n-1}} = \\ &= \frac{z^n + z^{n-2} + z^{n+1} + z^{n-3} + \dots + z^{2n-3} + z + z^{2n-2} + 1}{2z^{n-1}} = \\ &= \frac{z^{2n-2} + z^{2n-3} + \dots + z^{n+1} + z^n + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1}{2z^{n-1}} \end{aligned}$$

V čitateli přičteme a odečteme z^{n-1} , a tak poslední zlomek můžeme upravit na tvar

$$A = \frac{\frac{z^{2n-1} - 1}{z - 1} - z^{n-1}}{2z^{n-1}} = \frac{z^{2n-1} - 1 - z^n + z^{n-1}}{2(z-1)z^{n-1}}$$

Ale $z^n = -1$ a $z^{2n-1} = z^n \cdot z^{n-1} = -z^{n-1}$, proto

$$A = \frac{-z^{n-1} - 1 + 1 + z^{n-1}}{2(z-1)z^{n-1}} = 0$$

Příklad 3. Dokažte rovnost

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta; \quad \alpha \neq (2l + 1) \frac{\pi}{2}, \quad \beta \neq (2l + 1) \frac{\pi}{2}$$

Řešení. V tomto případě položíme $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ a $z_2 = \cos \beta + i \sin \beta$. Použitím vhodných vzorců z (3), (6) a postupným dosazením do levé a pravé strany identity dostaneme

$$L = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{(z_1^2 - z_2^2) 4z_1 z_2}{2iz_1 z_2 (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)} = \frac{2(z_1^2 - z_2^2)}{i(z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)},$$

$$P = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{z_1^2 - 1}{i(z_1^2 + 1)} - \frac{z_2^2 - 1}{i(z_2^2 + 1)} = \frac{2(z_1^2 - z_2^2)}{i(z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)}$$

Daná rovnost platí, poněvadž $P = L$.

Poznámka. Uvedený příklad lze ovšem řešit velmi jednoduše užitím vztahů pro sinus a kosinus rozdílu úhlů, a to bez komplexních čísel.

Příklad 4. Vypočítejte součet

$$A = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2 nx.$$

Řešení. Položíme opět $z = \cos x + i \sin x$, použijeme vzorce pro $\sin nx$ uvedeného ve vzorcích (2) a postupně dostaneme

$$\begin{aligned} A &= \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \dots + \sin^2 nx = \\ &= \left(\frac{z^2 - 1}{2iz} \right)^2 + \left(\frac{z^4 - 1}{2iz^2} \right)^2 + \left(\frac{z^6 - 1}{2iz^3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{z^{2n} - 1}{2iz^n} \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{4} \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right)^2 + \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right)^2 + \dots + \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \left[z^2 - 2 + \frac{1}{z^2} + z^4 - 2 + \frac{1}{z^4} + z^6 - 2 + \frac{1}{z^6} + \dots + z^{2n} - 2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ \frac{1}{z^{2n}} \Big] &= -\frac{1}{4} \cdot \left[-2n + (z^2 + z^4 + z^6 + \dots + z^{2n}) + \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots + \frac{1}{z^{2n}} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{4} \cdot \left[-2n + \frac{z^2(z^{2n} - 1)}{z^2 - 1} + \frac{1 - z^{2n}}{z^{2n}(1 - z^2)} \right] = \\
&= \frac{n}{2} - \frac{z^{2n+2}(z^{2n} - 1) + (z^{2n} - 1)}{4z^{2n}(z^2 - 1)} = \frac{n}{2} - \frac{(z^{2n} - 1)(z^{2n+2} + 1)}{4z^{2n}(z^2 - 1)}
\end{aligned}$$

Musí ovšem platit $z \neq \pm 1$; tj. $x \neq l\pi$.

Poslední výraz lze upravit tak, že

$$A = \frac{n}{2} - \frac{\frac{z^{2n} - 1}{2iz^n} \cdot \frac{z^{2n+2} + 1}{2z^{n+1}}}{2 \cdot \frac{z^2 - 1}{2iz}}$$

Podíváme-li se na vzorce (2), vidíme, že můžeme napsat

$$A = \frac{n}{2} - \frac{\sin nx \cdot \cos(n+1)x}{2 \sin x}; \quad \text{pokud } x \neq l\pi$$

Komplexní čísla lze také použít k řešení goniometrických rovnic. Použití komplexních čísel k řešení všech goniometrických rovnic není výhodné, poněvadž při jejich řešení někdy dostaneme algebraické rovnice vyšších stupňů, které nedovedeme řešit elementárními metodami.

Příklad 5. Řešte goniometrickou rovnici

$$\sin 3x = 8 \sin^3 x.$$

Řešení. Zvolíme si $z = \cos x + i \sin x$. Použitím vzorce pro $\sin nx$ uvedeného ve vzorcích (2), danou rovnici napíšeme ve tvaru

$$\frac{z^6 - 1}{2iz^3} = 8 \left(\frac{z^2 - 1}{2iz} \right)^3$$

Odtud po úpravách dostaneme rovnici

$$z^6 - 2z^4 + 2z^2 - 1 = 0,$$

kterou můžeme napsat ve tvaru

$$(z^2 - 1)(z^4 - z^2 + 1) = 0.$$

Řešením rovnice $z^2 - 1 = 0$ je $z^2 = 1$.

Řešením rovnice $z^4 - z^2 + 1 = 0$ je $z^2 = 1/2 \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$

Odtud plyne

a) $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x = 1$; tj. $\cos 2x = 1$ a tím $x = l\pi$,

$$b) z^2 = \cos 2x + i \sin 2x = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} ; \text{ tj. } \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\text{a tím } x = \pm \frac{\pi}{6} + l\pi .$$

Čtenář si jistě sám ověří, že nalezená řešení vyhovují dané goniometrické rovnici.

Cvičení

$$1. \text{ Dokažte rovnosti: a) } \operatorname{tg} \frac{3\pi}{7} - 4 \sin \frac{\pi}{7} = \sqrt{7}$$

$$b) 1 + 4 \cos \frac{2\pi}{7} - 4 \cos^2 \frac{2\pi}{7} - 8 \cos^3 \frac{2\pi}{7} = 0 .$$

2. Vypočítejte

$$\sum_{n=1}^6 \frac{\sin n\alpha}{\sin 5n\alpha}, \quad \sum_{n=1}^6 \frac{\sin 5n\alpha}{\sin n\alpha} \quad \text{je-li } \alpha = \frac{2\pi}{7}$$

3. Vypočítejte součet

$$\cos \alpha + \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha + 2\beta) + \dots + \cos (\alpha + n\beta) .$$

$$\text{Návod. Zvolte si } z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha \text{ a } z_2 = \cos \frac{\beta}{2} + i \sin \frac{\beta}{2} .$$

4. Řešte goniometrickou rovnici

$$\sin^{10} x + \cos x^{10} = \frac{19}{16} \cos^4 2x .$$

Skládání kruhových zobrazení

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

V tomto článku se budeme zabývat skládáním těch zobrazení, v nichž obrazem přímky je přímka nebo kružnice a obrazem kružnice je kružnice nebo přímka. Taková zobrazení nazýváme *kruhovými zobrazeními*. V nich je každému bodu roviny přiřazen právě jeden obraz, přičemž dvěma různým vzorům přísluší dva různé obrazy.

K vyšetřování budeme užívat komplexních souřadnic, s nimiž se čtenář seznámil již v článcích v 48. ročníku tohoto časopisu.*)

*) Viz článek: Fr. Hradecký: Užití komplexních čísel v geometrii, str. 153, 207, 249, K. Drábek: Geometrické příbuznosti, str. 359.

A. Skládání osových souměrností

Jsou dány dvě osové souměrnosti C_1 o ose $o_1 \equiv x$,

C_2 o ose o_2 svírající s osou o_1 úhel α .

Osová souměrnost C_1 je vyjádřena rovnicí

$$z' = \bar{z}$$

(\bar{z} je číslo komplexně sdružené k číslu z).

Osová souměrnost C_2 má osu souměrnosti

$$o_2 : z \bar{t} - \bar{z} t = 0$$

(t je kompl. jednotka příslušná k úhlu α).

Ve složeném zobrazení $C_1 * C_2$ přísluší bodu Z_0 bod Z' , který sestrojíme tak, že k bodu Z_0 určíme nejprve v souměrnosti C_1 bod \bar{Z}_0 a pak v souměrnosti C_2 k bodu \bar{Z}_0 bod sdružený Z' . Komplexní čísla k těmto bodům příslušná budeme označovat stejnými písmeny malé abecedy.

Z rovnice $(z' - \bar{z}_0) \cdot \bar{t} + (\bar{z}' - z_0) \cdot t = 0$, která značí podmínku, že bod Z' leží na přímce procházející bodem Z_0 a kolmé na osu o_2 a z rovnice $(z' + \bar{z}_0) \cdot \bar{t} - (\bar{z}' + z_0) \cdot t = 0$, která vyjadřuje, že střed úsečky $Z'\bar{Z}_0$ leží na ose o_2 , dostaneme vzhledem k tomu, že $\bar{t} = 1/t$

$$z' = z_0 \cdot t^2, \quad (1)$$

což je rovnice zobrazení složeného z osových souměrností $C_1 * C_2$ v tomto pořadí. Vzhledem k tomu, že komplexní jednotce t^2 přísluší úhel 2α , z rovnice (1) plyne:

Složením dvou osových souměrností C_1, C_2 s různoběžnými osami o_1, o_2 v tomto pořadí je otáčení (rotace) kolem společného průsečíku os o_1, o_2 v kladném smyslu o dvojnásobek úhlu, který tyto osy svírají.

Jsou-li osy o_1, o_2 k sobě kolmé, pak složením osových souměrností je středová souměrnost podle středu $0 \equiv o_1 \cdot o_2$, její rovnice zní

$$z' = -z.$$

Je-li osa $o_1 \equiv x$ a osa o_2 rovnoběžná s osou x , pak jejich rovnice jsou $o_1 : z = \bar{z}$, $o_2 : z = \bar{z} + 2di$, kde d je vzdálenost obou os, a osové souměrnosti jsou dány rovnicemi

$$z' = \bar{z}, \quad z' = \bar{z} + 2di;$$

jejich složením dostaneme zobrazení: $z'' = z + 2di$, které přiřazuje bodu Z_0 bod Z'' . Zřejmě platí $|z'' - z_0| = |2di| = 2d$, což znamená: *Složením dvou osových souměrností C_1, C_2 , jejichž osy jsou rovnoběžné (v tomto pořadí), je posunutí (translace) ve směru kolmém na osy $o_1 \parallel o_2$ o dvojnásobek vzdálenosti obou os souměrností.*

Otáčení kolem pevného bodu, posunutí a identické zobrazení jsou *přímá shodná zobrazení* (přímé shodnosti). Jejich společné vyjádření je dáno rovnicí:

$$z' = t \cdot z + p, \quad (2)$$

která značí složení otáčení kolem počátku o úhel α příslušný ke komplexní jednotce t a posunutí dané komplexním číslem p .

Je-li $p = 0$, $t \neq 1$, značí (2) *rotaci kolem počátku*, je-li $t = 1$, $p \neq 0$ *posunutí*, je-li $t = 1$, $p = 0$ *identitu*.

Souměrnost podle osy je nepřímým shodným zobrazením (nepřímou shodností).

Zobecněním předcházejících výsledků dostáváme:

Složením sudého počtu osových souměrností dostáváme přímé shodné zobrazení, složením lichého počtu osových souměrností dostáváme nepřímé shodné zobrazení.

Nabývá-li t všech komplexních jednotek a p všech komplexních čísel, dostaneme z (2) množinu všech přímých shodností (S). Pro množinu S definovanou na množině všech bodů v rovině (množině všech komplexních čísel) platí tyto vlastnosti:

1. Jsou-li $S_i : z' = t_i z + p_i$, ($i = 1, 2$) dvě shodná zobrazení náležející množině S, pak jejich složením (v tomto pořadí) dostaneme $S_1 * S_2$:

$$z'' = t_2(t_1 z + p_1) + p_2 = t_1 t_2 z + t_2 p_1 + p_2, \quad (3)$$

což je opět *přímé shodné zobrazení náležející množině S*.

2. Složením zobrazení $(S_1 * S_2) * S_3$ dostaneme $z' = t_1 t_2 t_3 z + t_2 t_3 p_1 + t_3 p_2 + p_3$; složením zobrazení $S_1 * (S_2 * S_3)$ dostaneme též výsledek; to znamená, že *pro skládání těchto zobrazení platí zákon asociativní*.

3. Je-li v (3) $t_1 t_2 = 1$ a $t_2 p_1 + p_2 = 0$, dostáváme *identické zobrazení*.

4. Ke každému zobrazení $z' = t z + p$ existuje *zobrazení inverzní* $z' = \frac{z - p}{t} = t' z + p'$

Množina zobrazení, která splňuje vlastnosti 1—4, se nazývá grupou vzhledem ke skládání těchto zobrazení. Platí tedy:

Přímá shodná zobrazení v rovině tvoří grupu (vzhledem k jejich skládání).

Snadno lze dokázat, že *množina všech rotací kolem téhož středu v rovině tvoří grupu, podobně množina všech posunutí v rovině tvoří grupu*. Tyto grupy (grupa rotací kolem téhož středu v rovině, grupa posunutí v rovině) jsou *podgrupami* grupy přímých shodností v rovině.

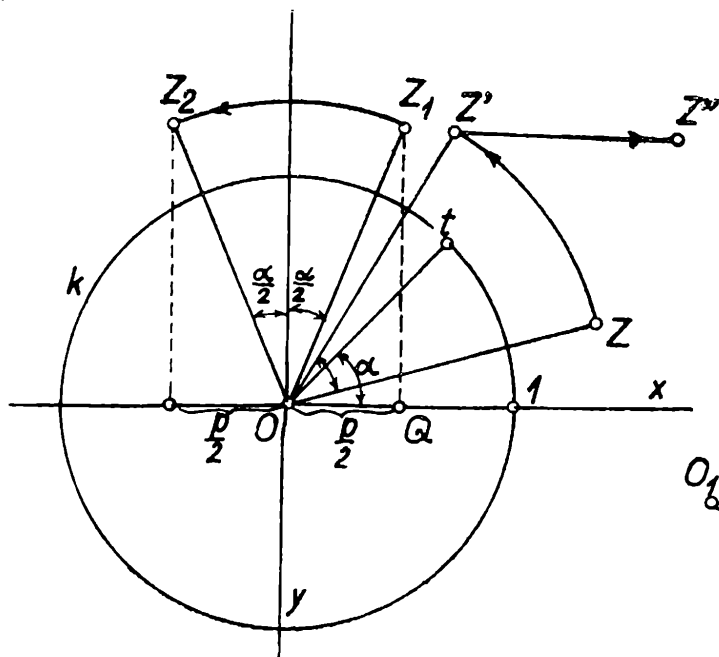
Složíme-li zobrazení v 1. bodě předcházejícího odstavce v obráceném pořadí $S_2 * S_1$, dostaneme

$$z'' = t_1 t_2 z + t_1 p_2 + p_1. \quad (3')$$

Srovnáním (3) a (3') shledáváme, že dostáváme různé výsledky, což znamená: *Při skládání zobrazení záleží na pořadí provedených operací*

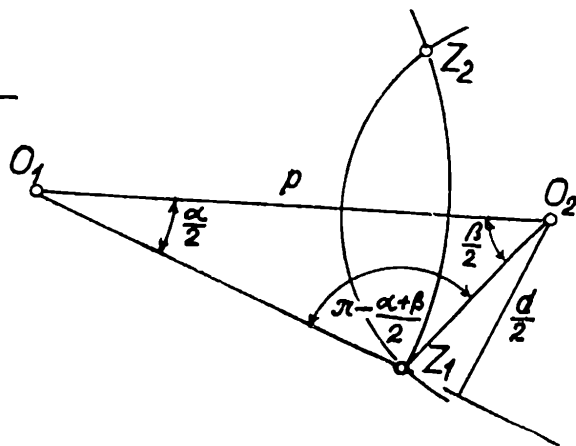
tj. *neplatí zákon komutativní*; což vede k závěru: *Grupa přímých shodných zobrazení je nekomutativní grupou vzhledem ke skládání zobrazení*. Existují však přímá shodná zobrazení, při jejichž skládání nezáleží na pořadí. Tato zobrazení tvoří pak *komutativní grupu*, která je podgrupou grupy přímých shodných zobrazení. Příkladem může být např. *množina všech rotací v rovině o témže středu*.

Při skládání zobrazení nás zajímají body, jejichž obrazy po provedeném složení zobrazení splynou se svými vzory. Jsou to *samodružné body* složeného zobrazení. Jejich určení a konstrukci provedeme v následujících příkladech.



Obr. 1

Obr. 2



Příklad 1. Máme určit samodružné body v zobrazení, složeném z rotace kolem počátku a posunutí ve směru osy x v tomto pořadí. Velikost otočení je dána komplexní jednotkou t a velikost posunutí číslem $p > 0$. Rovnice složeného zobrazení zní

$$z' = t \cdot z + p, \quad \text{kde } t = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha, \quad p \text{ je reál. kladné číslo.}$$

Pro samodružný bod Z_1 platí: $z = t \cdot z + p$, odkud vypočítáme

$$z_1 = \frac{p}{1 - t}, \quad t \neq 1.$$

Poněvadž $|z_1| = \frac{p}{|1 - t|} = \frac{p}{\left| 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right|}$, docházíme k následující konstrukci:

Na osu x nanese se od počátku úsečku OQ (viz obr. 1) délky $p/2$ a sestrojíme úhel $\sphericalangle QOZ_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$; kolmice vedená bodem Q k ose x protíná koncové rameno úhlu v bodě Z_1 .

Složíme-li uvedená zobrazení v obráceném pořadí, dostaneme výsledné zobrazení $z' = (z + p) \cdot t$, jehož samodružný bod Z_2 určíme z rovnice

$$z_2 = \frac{p \cdot t}{1 - t} = z_1 \cdot t.$$

Bod Z_2 dostaneme otočením bodu Z_1 kolem počátku v kladném smyslu o úhel α .

Příklad 2. Máme určit samodružné body zobrazení, složeného ze dvou rotací o různých středech otáčení, jsou-li dány velikosti úhlů otáčení α, β .

Otáčení R_1 kolem počátku O_1 je dáno rovnicí ... $z' = t_1 z$,

otáčení R_2 kolem bodu O_2 na ose x ($O_1 O_2 = p$) rovnicí: $z' - p = t_2(z - p)$, přitom je $t_1 = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$, $t_2 = \cos \beta + i \cdot \sin \beta$.

Složení zobrazení $R_1 * R_2$ v tomto pořadí dostaneme:

$$z'' = t_1 t_2 z + p(1 - t_2)$$

Samodružný bod Z_1 tohoto složeného zobrazení je určen číslem

$$z_1 = \frac{p(1 - t_2)}{1 - t_1 t_2}.$$

Abychom tento bod snadno sestrojili, zjistíme jeho vzdálenosti od bodů

$$\begin{aligned} O_1 Z_1 &= \left| \frac{p \cdot (1 - t_2)}{1 - t_1 t_2} \right| = \frac{p \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\left| \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right|}, \text{ neboť } |1 - t_2| = \\ &= |1 - \cos \beta + i \sin \beta| = \sqrt{(1 - \cos \beta)^2 + \sin^2 \beta} = 2 \sin \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

$$O_2 Z_1 = \left| \frac{p \cdot t_2(t_1 - 1)}{1 - t_1 t_2} \right| = \frac{p \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\left| \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right|}$$

Odtud plyne konstrukce bodu Z_1 : Úhel $\sphericalangle Z_1 O_1 O_2 = \frac{\alpha}{2}$ $\sphericalangle Z_1 O_2 O_1 =$

$= \frac{\beta}{2}$ (viz obr. 2)

Složíme-li obě rotace v obráceném pořadí $R_2 * R_1$, dostaneme

$$z'' = t_1 [p + t_2(z - p)];$$

samodružný bod Z_2 je určen číslem $z_2 = \frac{p \cdot t_1(1 - t_2)}{1 - t_1 t_2} = z_1 \cdot t_1$, což znamená, že bod Z_2 dostaneme otočením bodu Z_1 kolem počátku o úhel $+\alpha$.

V každém z těchto složených zobrazení existuje právě jeden samodružný bod. Je-li $t_1 t_2 = 1$, je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \pi$ a bod Z_1 , resp. Z_2 není definován (je bodem nevlastním). Složením takových dvou rotací je pak *posunutí* ve směru kolmém na přímku, která po otočení o úhel $\frac{\alpha}{2}$ v kladném smyslu přejde v přímku $O_1 O_2$ a velikost posunutí je $d = 2p \sin \frac{\alpha}{2}$.

Závěr: Složením dvou rotací kolem různých středů je rotace nebo posunutí.
(Pokračování)

O chytrém předsedovi

ANTONÍN VRBA, Praha

V jednom městečku byla tělovýchovná jednota a ta měla čtyři oddíly: lehkou atletiku, kopanou, odbíjenou a šachy. Předseda jednoty byl proslulý tím, že neustále prováděl mezi sportovci všelijaké průzkumy a výzkumy a získané závěry pak publikoval v odborných tělovýchovných časopisech. Jednou si také všiml, že mnozí členové jednoty jsou činní hned v několika oddílech najednou a rozhodl se zjistit, jak často a za jakých okolností jsou jednotlivé sporty spolu kombinovány. Pokladník mu k tomu sestavil tento přehled:

celkem	102	AK	7	AKO	5
—	15	AO	18	AKŠ	0
A	26	AŠ	3	AOŠ	2
K	17	KO	9	KOŠ	0
O	58	KŠ	0	AKOŠ	0
Š	... 19	OŠ	... 5		

Prvé číslo udávalo počet všech členů jednoty, druhé počet členů, kteří nebyli registrováni v žádném z oddílů (tj. všelijakých příznivců, funkcionářů apod.) a dále byly uvedeny počty členů provozujících jednotlivé kombinace sportů (tak např. AO znamenalo počet všech členů, kteří byli organizováni současně v atletickém i odbíjenkářském oddíle — bez ohledu na to, byli-li třeba ještě v některém dalším).

Předseda se na dodaný přehled letmo podíval, okamžik cosi z paměti počítal a hned ho pokladníkovi vrátil s tím, že v něm určitě musí být chyba. Pokladník nejprve prohlédl tabulku, neobsahuje-li snad nějaké na první pohled patrné nedopatření, zda třeba není počet atletů menší než počet těch, kdo pěstují atletiku i kopanou apod., ale nic nenašel. Marně pak přepočítával sportovce, stále docházel ke shodným údajům. Předseda

však trval na svém. Nakonec se ukázalo, že mezi členy jednoty byli započtení i dva čestní členové, od nichž ovšem pokladník nevybíral příspěvky a tak je zapomněl zahrnout do druhé položky přehledu, kde tedy mělo být správně uvedeno 17. Teď už byl předseda spokojen.

I když pokladník dobře znal předsedovu bystrost a kombinační schopnosti vypěstované dlouholetým hraním odbíjené a šachů, nemohl se vynadivit. A ti, kdo také žasnou nad předsedovou pohotovostí, se v tomto článku dozvědí, jak na to mohl přijít. K výkladu budeme potřebovat základní pojmy a poznatky z kombinatoriky. Kdo je ještě neprobíral ve škole, může je nalézt v učebnici matematiky pro čtvrtý ročník gymnasia.

Mějme dány konečné množiny M_1, M_2, \dots, M_k . Symbolem $|R|$ budeme značit počet prvků množiny R . Pro $j = 1, 2, \dots, k$ označme

$$s_j = \sum |M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}|$$

(sčítáme přes všechny j -členné kombinace $\{r_1, r_2, \dots, r_j\}$ indexů $1, 2, \dots, k$). Množinu všech prvků, ležících alespoň (resp. právě) v j z daných množin M_1, M_2, \dots, M_k označme A_j (resp. P_j). Dále označme $|A_j| = a_j$, $|P_j| = p_j$ pro každé $j = 1, 2, \dots, k$. Ukážeme, jak lze pomocí čísel s_1, s_2, \dots, s_k vyjádřit každé z čísel $a_1, a_2, \dots, a_k, p_1, p_2, \dots, p_k$. Příklad $k = 1$ je triviální a v případě $k = 2$ snadno usoudíme, že $a_1 = s_1 - s_2$, $p_1 = s_1 - 2s_2$, $a_2 = p_2 = s_2$. Příklad $k = 3$ bychom „selským rozumem“ ještě také zvládli, ale se vzrůstajícím k se situace komplikuje a s prostou úvahou už nevystačíme.

Uvažujeme-li např. množiny M_1, M_2, M_3, M_4 tvořené členy čtyř oddílů zmíněné tělovýchovné jednoty, vidíme, že pokladníkův přehled obsahoval dost informací k tomu, aby předseda mohl hbitě spočítat příslušná čísla $s_1 = 26 + 17 + 58 + 19 = 120$, $s_2 = 7 + 18 + 3 + 9 + 5 = 42$, $s_3 = 5 + 2 = 7$ a $s_4 = 0$. Z nich, jak uvidíme, jde mj. snadno spočítat číslo a_1 , které zde znamená počet všech členů jednoty registrovaných alespoň v jednom oddíle. Odtud je vidět, že odečtením tohoto čísla od celkového počtu členů jednoty dostaneme druhou položku přehledu, v níž byla chyba.

Vraťme se však opět k obecnému případu. Buď j pevné a uvažujeme množiny

$$M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j} \tag{1}$$

pro všechny j -členné kombinace $\{r_1, r_2, \dots, r_j\}$ indexů $\{1, 2, \dots, k\}$. Vezměme nějaký prvek $m \in M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ a ptejme se, v kolika z množin (1) je obsažen. Zřejmě je $m \in P_q$ pro jediné q , tj. $m \in M_{v_1} \cap M_{v_2} \cap \dots \cap M_{v_q}$, kde $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ je jistá kombinace indexů $\{1, 2, \dots, k\}$, a $m \notin M_u$, jakmile $u \notin \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$. Prvek m tedy leží v právě těch množinách (1), pro něž platí $\{r_1, r_2, \dots, r_j\} \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$.

Vidíme, že v případě $j \leq q$ leží prvek m v právě $\binom{q}{j}$ množinách (1) a v případě $j > q$ v žádné takové množině. Podle definice čísla s_j tedy platí

$$s_j = p_j + \binom{j+1}{j} p_{j+1} + \dots + \binom{k}{j} p_k.$$

To platí pro všechna $1 \leq j \leq n$ a dodefinujeme-li kombinační číslo $\binom{q}{j}$ pro $q < j$ nulou (což je vzhledem ke kombinatorickému významu kombinačního čísla přirozené rozšíření), dostaneme soustavu rovností

$$\begin{aligned} \binom{1}{1} p_1 + \binom{2}{1} p_2 + \dots + \binom{k}{1} p_k &= s_1 \\ \binom{1}{2} p_1 + \binom{2}{2} p_2 + \dots + \binom{k}{2} p_k &= s_2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\binom{1}{k} p_1 + \binom{2}{k} p_2 + \dots + \binom{k}{k} p_k = s_k$$

Naším cílem je vyjádřit každé z čísel p_1, p_2, \dots, p_k pomocí čísel s_1, s_2, \dots, s_k . Budeme tedy (2) pokládat za soustavu rovnic o neznámých p_1, p_2, \dots, p_k a vyřešíme ji.

Nejprve však trochu odbočíme a řekneme si něco obecného o soustavách rovnic. Obdélníkovému schématu

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,s} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,s} \end{pmatrix}$$

sestavenému z čísel $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{r,s}$ se říká matice typu (r, s) . Je výhodné označovat matici jediným symbolem, např. \mathbf{A} , \mathbf{a} nebo $(a_{i,k})$. Tak např. matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 19 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}$$

typu $(3, 4)$ bychom mohli zapsat $(b_{p,q})$ a pak by bylo např. $b_{2,3} = -3$. (O maticích se v poslední době v tomto časopise několikrát psalo.)

Jsou-li dány dvě matice $\mathbf{A} = (a_{i,k})$ typu (r, s) a $\mathbf{B} = (b_{i,k})$ typu (s, t) , můžeme utvořit matici $\mathbf{C} = (c_{i,k})$ typu (r, t) tak, aby pro její prvky platilo

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{1,k} + a_{i,2} b_{2,k} + \dots + a_{i,s} b_{s,k}$$

(všimněte si, že číslo $c_{i,k}$ dostaneme „vynásobením“ i -tého vodorovného řádku matice \mathbf{A} k -tým svislým sloupcem matice \mathbf{B}). Matice \mathbf{C} se nazývá

součin matic \mathbf{A} , \mathbf{B} a označuje se $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. Toto násobení matic je asociativní, ale není komutativní (snadno se o tom přesvědčíte). Jeho význam je mj. v tom, že umožňuje přehledně zapsat soustavu r rovnic

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,s}x_s = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,s}x_s = b_2$$

$$a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \dots + a_{r,s}x_s = b_r$$

o s neznámých x_1, x_2, \dots, x_s ve tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{A} = (a_{i,k})$ je matice koeficientů levých stran typu (r, s) , $\mathbf{b} = (b_i)^*$ je matice pravých stran typu $(r, 1)$ a $\mathbf{x} = (x_i)^*$ je matice neznámých typu $(s, 1)$.

Zvláštní význam mají matice

$$\mathbf{I}_r = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 1 \end{pmatrix}$$

typu (r, r) . Pro každou matici \mathbf{A} typu (q, r) a pro každou matici \mathbf{B} typu (r, s) totiž, jak snadno zjistíme, platí $\mathbf{AI}_r = \mathbf{A}$, $\mathbf{I}_r\mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Jestliže k nějaké matici \mathbf{A} existuje matice \mathbf{Z} tak, aby (pro jisté r) bylo $\mathbf{AZ} = \mathbf{ZA} = \mathbf{I}_r^{**}$ (vidíme, že pak jsou obě matice \mathbf{A} , \mathbf{Z} typu (r, r)), říká se, že matice \mathbf{A} , \mathbf{Z} jsou navzájem inverzní.

Uvažujme soustavu rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a předpokládejme, že k matici \mathbf{A} existuje inverzní matice \mathbf{Z} . Vynásobíme-li obě strany maticí \mathbf{Z} , dostaneme

$$\mathbf{ZAx} = \mathbf{I}_r\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{Zb}.$$

Existuje-li tedy řešení soustavy, platí pro ně $\mathbf{x} = \mathbf{Zb}$ a je tak jednoznačně určeno. Dosadíme-li však matici \mathbf{Zb} do soustavy za \mathbf{x} , vyjde

$$\mathbf{AZb} = \mathbf{I}_r\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

a \mathbf{Zb} je tedy řešení. Došli jsme k tomuto závěru:

Pomocná věta. Existuje-li k matici \mathbf{A} inverzní matice \mathbf{Z} , má soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jediné řešení a to $\mathbf{x} = \mathbf{Zb}$.

Tuto obecnou pomocnou větu budeme aplikovat na soustavu (2). Nejprve si všimneme matice koeficientů levých stran soustavy (2) a dokážeme následující lemma technické povahy.

Lemma. Matice $(a_{p,q})$ a $(z_{p,q})$ typu (k, k) , pro jejichž prvky platí

*) Není třeba uvádět druhý index, který je zde stále 1.

***) Dá se ukázat, že pro matici \mathbf{A} typu (r, r) z $\mathbf{AZ} = \mathbf{I}_r$ již plyne $\mathbf{AZ} = \mathbf{I}_r$.

$a_{p,q} = \binom{q}{p}$, $z_{p,q} = (-1)^{p+q} \binom{q}{p}$, jsou navzájem inverzní.

Důkaz. Označme $(c_{p,q}) = (a_{p,q})(z_{p,q})$. Pro $p = q$ je

$$c_{p,p} = \sum_{s=1}^k a_{p,s} z_{s,p} = \sum_{s=1}^k \binom{s}{p} (-1)^{p+s} \binom{p}{s}.$$

Zde jsou všechny sčítance nulové až na p -tý, jenž je roven $(-1)^{2p} \binom{p}{p}^2 = 1$

Dále buď $p \neq q$. Pak je

$$c_{p,q} = \sum_{s=1}^k a_{p,s} z_{s,q} = \sum_{s=1}^k \binom{s}{p} (-1)^{q+s} \binom{q}{s}.$$

Pro $p > q$ jsou zřejmě všechny sčítance nulové. Pro $p < q$ je

$$\begin{aligned} c_{p,q} &= \sum_{s=p}^q (-1)^{q+s} \frac{s! q!}{p! (s-p)! s! (q-s)!} = \sum_{s=p}^q (-1)^{q+s} \\ &\cdot \frac{q!}{p! (q-p)!} \frac{(q-p)!}{(q-s)! (s-p)!} = \binom{q}{p} \sum_{s=p}^q (-1)^{q+s} \binom{q-p}{q-s} = \\ &= \binom{q}{p} \sum_{s=1}^{q-p} (-1)^{p+s} \binom{q-p}{s}. \end{aligned}$$

Poslední suma kombinačních čísel se střídavými znaménky je, jak známo, nulová.

Zjistili jsme tedy, že $(a_{p,q})(z_{p,q}) = \mathbf{I}_k$. Analogicky dojdeme k tomu, že $(z_{p,q})(a_{p,q}) = \mathbf{I}_k$ a tím je lemma dokázáno.

Teď už máme všechno připraveno k řešení soustavy (2).

Věta. Pro $j = 1, 2, \dots, k$ je

$$p_j = s_j - \binom{j+1}{j} s_{j+1} + \dots + (-1)^{k-j} \binom{k}{j} s_k \quad (3)$$

$$a_j = s_j - \binom{j}{1} s_{j+1} + \dots + (-1)^{k-j} \binom{k-1}{k-j} s_k. \quad (4)$$

Důkaz. Soustavu (2) lze psát ve tvaru $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{s}$, kde matice $\mathbf{A} = (a_{r,q})$ vyhovuje předpokladům lemmatu, $\mathbf{p} = (p_i)$ je matice neznámých typu $(k, 1)$ a $\mathbf{s} = (s_i)$ je matice typu $(k, 1)$. V lemmatu je popsána matice $\mathbf{Z} = (z_{r,q})$ inverzní k matici \mathbf{A} a podle pomocné věty má soustava (2) jediné řešení $\mathbf{p} = \mathbf{Z}\mathbf{s}$. Ve větě je uvedena jiná forma (3) tohoto vztahu.

Je zřejmé, že pro každé j je $a_j = p_j + p_{j+1} + \dots + p_k$. Když sem dosadíme ze (3) a provedeme jednoduché úpravy, dospějeme ke (4) a s důkazem jsme hotovi.

Pro $j = 1$ nabývá vztah (4) jednoduchého tvaru

$$a_1 = s_1 - s_2 + \dots + (-1)^{k-1} s_k,$$

který je znám pod názvem *princip inkluze a exkluze*. Vrátime-li se do naší tělovýchovné jednoty, zjistíme podle něho, že počet členů organizovaných alespoň v jednom oddíle je

$$a_1 = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 = 120 - 42 + 7 - 0 = 85.$$

Bylo-li v jednotě 102 členů, pak druhá položka v seznamu musela být $102 - 85 = 17$. Určeme ještě třeba, kolik sportovců pěstuje právě dva sporty. Podle (3) je

$$p_2 = s_2 - \binom{3}{2} s_3 + \binom{4}{2} s_4 = 42 - 3 \cdot 7 = 21.$$

Věta, kterou jsme odvodili v tomto článku, má také zajímavé teoretické aplikace. V dalších dvou článcích se dozvíte o jejím využití v kombinatorice a v teorii čísel.

Cvičení

1. Při testování jedné série televizorů jich bylo deset shledáno vadnými. Přitom vadná součástka byla v sedmi z nich, vadný kontakt v pěti a poškozená skříň u čtyř. Vadnou součástku i kontakt a přitom bezvadnou skříň měl jeden televizor, jeden měl vadný kontakt i skříň a přitom bezvadné součástky a dva měly vadnou součástku i skříň a přitom bezvadné kontakty.

a) U kolika televizorů byly všechny tři závady? (1)

b) Kolik televizorů mělo pouze poškozenou skříň? (2)

(Návod. a) Za M_i vezměte množinu televizorů s i -tou vadou. Ve vzorcích (3) pro $j = 2$ a (4) pro $j = 1$ znáte a_1, s_1, p_2 .

b) Za M_i vezměte množinu televizorů s poškozenou skříňí a i -tou další vadou. Znáte p_1 a z případu a) též p_2 , určete a_1 .)

2. Každému prvku $m \in M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ přiřadme nějaké číslo $f(m)$. Každé množině $T \subseteq M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ je pak přiřazeno číslo $f(T) = \sum_{m \in T} f(m)$. Definujme čísla s_j, p_j a a_j podobně jako byla definována

čísla s_j, p_j a a_j v článku, jen místo $|T|$ všude bereme $f(T)$. Projděte příslušné úvahy a uvědomte si, že vztahy (3) a (4) platí beze změny i pro čárkovaná čísla. Pro které f dostaneme větu v původním znění?

Oprava: V matematických zajímavostech opravte v č. 1, str. 38: $21 \times 42 = 882$.

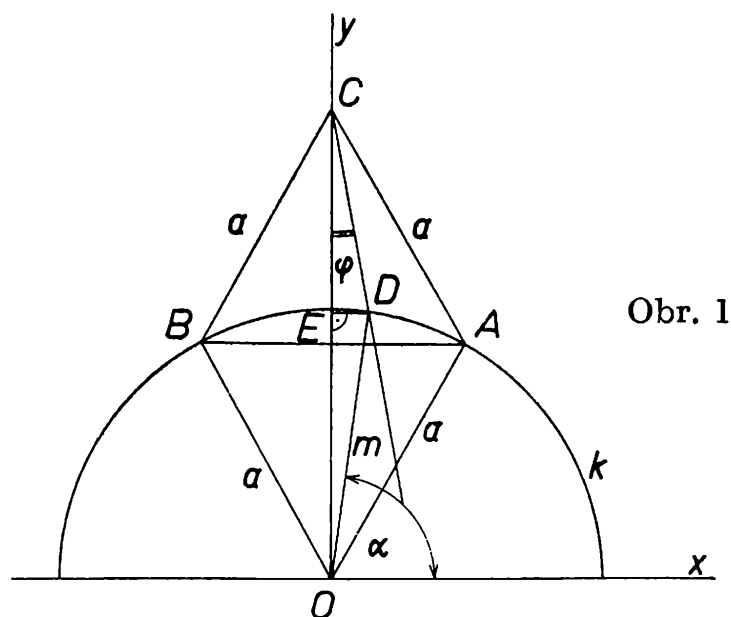
konstruktivní geometrie

Přibližná konstrukce úhlu 10° pravítkem a kružítkem

Ing. KLEMENT NEDBAL, Praha

Čas od času dojde do redakce dopis, v němž čtenář dokazuje svou vlastní „přesnou“ konstrukci některého z klasických geometrických problémů (trisekce úhlu, rektifikace kružnice, kvadratura kruhu), o nichž bylo mnohokrát dokázáno, že je nelze eukleidovsky (tj. kružítkem a pravítkem) přesně vyřešit.

Jinou skupinu tvoří úlohy, o nichž autor podává sice jen přibližné řešení problému, ale s velmi malou a tudíž zanedbatelnou chybou. Takové řešení je tím cennější, čím menší je počet pomocných konstrukcí a čím menší je relativní chyba. V tomto směru je konstrukce ing. Nedbala opravdu zdařilá. O. S.



Obr. 1

V pravoúhlé soustavě souřadnic (obr. 1) narýsujeme shodné rovnostranné trojúhelníky OAB a OAC o straně a a společné výšce OC v ose y .

Kružnice $k(O; a)$ má rovnici

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (1)$$

a přímka $m \equiv OD$, vedená počátkem O a svírající s osou x úhel $\alpha = 82^\circ 30'$, který lze snadno sestrojít ($\alpha = 90^\circ - \frac{1}{4} \cdot 30^\circ$):

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

Řešením rovnic (1) a (2) určíme souřadnice x_0, y_0 průsečíku D přímky m s kružnicí k :

$$x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = a^2, \quad \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} = a^2$$

a pro průsečík D v 1. kvadrantu

$$x_0 = a \cdot \cos \alpha; \quad y_0 = a \cdot \sin \alpha.$$

Protože $C(0; a\sqrt{3})$, měří úsečky

$$ED = a \cdot \cos \alpha, \quad EC = a \cdot (\sqrt{3} - \sin \alpha),$$

$$\text{proto } \operatorname{tg} \varphi = \frac{ED}{EC} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{3} - \sin \alpha}$$

$$\text{Dosadíme-li za } \alpha = 82^\circ 30', \text{ pak } \operatorname{tg} \varphi = \frac{0,13053}{0,74061}$$

z toho $\varphi = 9^\circ 59' 44''$.

Absolutní chyba uvedené konstrukce je tedy $\Delta = -16''$.

Relativní chyba jest

$$\delta = \frac{-16''}{10^\circ} = -0,00044; \quad |\rho| \doteq 0,044 \%$$

Při konstrukci úhlu $\varphi = 10^\circ$ sestrojíme podle obr. 1 úhel EOD rovný čtvrtině úhlu EOA , tedy úhel $7^\circ 30'$ a vzniklý bod D na kružnici k spojíme s vrcholem C .

Čtyřnásobek $4\varphi = 40^\circ$ se vyskytuje v pravidelném devítiúhelníku $\left(\frac{1}{9} \cdot 360^\circ\right)$ a lze ho použít k jeho konstrukci.

fyzika

Barometrická formule a její aplikace

Ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., Vyškov

(dokončení)

Řešení 1. úlohy ze str. 22.

a) Ve výšce H , do které má balón vystoupit, musí nastat rovnováha sil. Označíme-li potřebný objem balónu V a hustotu vzduchu a svítíplynu ve výšce H písmeny ρ a ρ' , musí podle Archimedova zákona platit

$$[V(\rho - \rho') - m_b] g = 0. \quad (19)$$

Hustotu vzduchu ve výšce H vypočteme ze vztahu (14), podle kterého

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{b} g H} \quad (20)$$

Při výstupu svítiplyn expanduje isotermicky a přitom vyrovnává tlak okolním atmosferickým tlakem. Pro hustotu svítiplynu ve výšce H tedy užitím Boylova zákona (2) a vztahu (13) dostáváme

$$\rho' = \rho'_0 \frac{b}{b_0} = \rho'_0 e^{-\frac{\rho_0}{b_0} gH} \quad (21)$$

Dosadíme-li do vztahu (19) výrazy (20) a (21) dostaneme pro potřebný objem balónu vztah

$$V = \frac{m_b}{\rho_0 - \rho'_0} e^{\frac{\rho_0}{b_0} gH} \quad (22)$$

Číselně vychází $V = 6025 \text{ m}^3$.

b) Svítiplyn expanduje isotermicky. Ve výšce H bude tedy podle Boylova zákona pro jeho objem V' platit

$$V' = V \frac{b_0}{b} = V e^{\frac{\rho_0}{b_0} gH}$$

Jelikož balón má stálý objem V , unikne z něj svítiplyn o hmotnosti

$$\Delta m' = (V' - V) \rho'$$

Dosazením za ρ' z (21) a za V' dostáváme

$$\Delta m' = V \left(e^{\frac{\rho_0}{b_0} gH} - 1 \right) \rho'_0 e^{-\frac{\rho_0}{b_0} gH} = V \rho'_0 \left(1 - e^{-\frac{\rho_0}{b_0} gH} \right),$$

kde $V \rho'_0 = m'_0$ je hmotnost svítiplynu v balónu ve výšce $h = 0$. Relativní úbytek hmotnosti svítiplynu tedy bude

$$\frac{\Delta m'}{m'_0} = 1 - e^{-\frac{\rho_0}{b_0} gH}$$

číselně $\Delta m'/m'_0 = 0,466$.

c) Protože i při uvolnění zátěže o hmotnosti Δm_b , musí být zachován objem podle vztahu (22), vzroste výška výstupu o Δh , tedy

$$V = \frac{m_b - \Delta m_b}{\rho_0 - \rho'_0} e^{\frac{\rho_0}{b_0} (H + \Delta h)} \quad (23)$$

Vydělíme-li rovnicí (23) rovnicí (22) dostáváme

$$1 = \frac{m_b - \Delta m_b}{m_b} e^{\frac{\rho_0}{b_0} g\Delta H}$$

a odtud logaritmováním

$$\Delta h = \frac{b_0}{\rho_0 g} \ln \frac{m_b}{m_b - \Delta m_b}.$$

Číselně vychází $\Delta h = 166 \text{ m}$.

Řešení 2. úlohy

a) Označíme-li m' hmotnost helia v balónku a m_0 hmotnost vzduchu vytlačeného balónkem ve výšce $h = 0$, bude podle Archimedova a Newtonova zákona pro počáteční zrychlení a_0 platit

$$(m' + m_b)a_0 = (m_0 - m' - m_b)g.$$

Z toho

$$a_0 = \frac{m_0 - m' - m_b}{m' + m_b} g. \quad (24)$$

Hmotnosti m_0 a m' v tomto vztahu určíme z definice hustoty a ze stavové rovnice psané pro hustoty. Pro hmotnost vzduchu tak dostáváme

$$m_0 = \rho_0 V_0,$$

kde

$$\rho_0 = \frac{b_0}{b_n} \frac{T_n}{T_0} \rho_n \quad (25)$$

je hustota vzduchu ve výšce $h = 0$ při daném tlaku b_0 a teplotě t_0 . Indexem n je označen normální stav, tj. $t_n = 0^\circ\text{C}$, $b_n = 760 \text{ torr}$. Pro hmotnost vzduchu tedy vychází.

$$m_0 = \frac{b_0 T_n}{b_n T_0} \rho_n V_0. \quad (26)$$

Podobně pro hmotnost helia vychází

$$m' = \frac{p_0 T_n}{b_n T_0} \rho'_n V_0. \quad (27)$$

Číselně dostáváme $\rho_0 = 1,176 \text{ kg m}^{-3}$, $m_0 = 8,78 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, $m' = 1,233 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, $a_0 = 1,255 g = 13,30 \text{ m s}^{-2}$.

b) Poněvadž mezi objemem balónku a přetlakem plynu platí lineární závislost, můžeme pro výšku 0 a h psát

$$V_0 = k(p_0 - b_0),$$

$$\text{Vydělením } V = k(p - b).$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{p - b}{p_0 - b_0} \quad (28)$$

Tlak p plynu v balónku ve výši h určíme ze zákona Boylova (podle předpokladu je $T_0 = \text{konst.}$):

$$p = p_0 \frac{V_0}{V}. \quad (29)$$

Dosadíme-li do vztahu (28) za p z (29) a za b z(13) máme

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{p_0 - b_0} \left(p_0 \frac{V_0}{V} - b_0 e^{-\frac{\rho_0}{b_0} gh} \right),$$

odtud pak pro výšku, ve které balónek praskne dostáváme

$$h = -\frac{b_0}{\rho_0 g} \ln \frac{V}{V_0} \left\{ 1 - \frac{p_0}{b_0} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V} \right)^2 \right] \right\} = -\frac{b_0}{\rho_0 g} \ln \alpha \left[1 - \frac{p_0}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right]. \quad (30)$$

Číselně dostáváme $h = 17,1$ km.

c) 1. Jelikož funkce logaritmus je definována jen pro kladné argumenty a jelikož mají význam jen $h > 0$, musí platit

$$0 < \alpha \left[1 - \frac{p_0}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] < 1.$$

Pravá část nerovnosti je splněna vždy, neboť $\alpha > 1$; z levé části vychází

$$\alpha < \sqrt{\frac{p_0}{p_0 - b_0}} \quad (31)$$

Tuto podmínku dostaneme také přímo ze vztahu (28) pro $b = 0$. Fyzikální význam podmínky (31) spočívá v tom, že její pravá část udává horní mez (pro $h \rightarrow \infty$) možného relativního objemu balónku $\alpha = V/V_0$. Má-li balónek prasknout, musí být, „tak málo pevný“, že se tak stane při menší změně objemu, než udává pravá strana nerovnosti.

2. Aby balónek vůbec vystoupil do výšky h , musí podle Archimedova zákona v této výšce platit

$$(m - m' - m_b)g \geq 0, \quad (32)$$

kde

$$m = \rho V$$

je hmotnost vzduchu vytlačeného balónkem ve výšce h . Hmotnost helia m' je dána vztahem (27). Hustotu vzduchu ve výšce h vypočteme ze vztahu (14), dosadíme-li za h ze vztahu (30). Tedy

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{b_0} gh} = \rho_0 \alpha \left[1 - \frac{p_0}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right].$$

Dosazením do (32) pak máme

$$m' + m_b \leq \rho_0 \alpha^2 V_0 \left[1 - \frac{p_0}{b_0} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] \quad (33)$$

Aby došlo k prasknutí balónku, musí byť súčasne splnené podmienky (31) a (33). V našom číselnom príklade sú obe podmienky splnené, pretože z vzťahu (31) plyne $\alpha = 5 < 8,22$ a vyčíslením vzťahu (33) dostávame $3,733 \cdot 10^{-3} \text{ kg} < 5,82 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$.

0 voľnej a viazanej energie

Prof. MUDr. JOZEF SKOTNICKÝ, Katedra lekárskej fyziky Univerzity
P. J. Šafárika, Košice

I. Termodynamická hádanka

Termodynamika učí, že celková vnútorná energia U systému sa rozpadá na voľnú F a viazanú TS , teda

$$U = F + TS. \quad (1)$$

Závažie hmotnostní m , pohybujúce sa izotermicky vo zvislom smere, nemení svoju viazanú energiu, takže jeho voľná energia F je daná potenciálnou energiou mgh , ktorú môžeme označiť aj ako vnútornú energiu U systému závažia — Zem; je teda

$$F = mgh = U. \quad (2)$$

Plyn (ideálny) pri izotermickej reverzibilnej expanzii nemení svoju vnútornú energiu, takže vzrast jeho voľnej energie je daný poklesom jeho viazanej energie, logaritmicky závislej na počiatocnom a konečnom objeme, ktorá pre mol ideálneho plynu obnáša

$$\Delta F = -T\Delta S = RT \ln (V_2/V_1). \quad (3)$$

Ak pomocou závažia reverzibilne izotermicky komprimujeme ideálny plyn, prechádza vnútorná energia závažia ΔU_z prostredníctvom plynu do okolia plynu vo forme tepla $Q = \Delta U_z$ a voľná energia plynu stúpne o rovnakú hodnotu $\Delta F_p = \Delta U_z$. Pri stonásobnej kompresii plynu obnáša u molu plynu vzostup voľnej energie $\Delta F = 2,3 RT \log (V_1/V_2) = 2,3 \cdot 2 \text{ cal} \cdot T \cdot 2 \doteq 9 T$ kalórií.

Systém má teda v konečnom stave dvakrát väčšiu energiu než v stave počiatocnom, lebo počiatocný stav systému je charakterizovaný zvýšenou potenciálnou energiou závažia ΔU_z a konečný stav zvýšenou tepelnou energiou okolia plynu $Q = \Delta U_z$, ako aj zvýšenou voľnou energiou plynu

samotného $\Delta F_p = \Delta U_z$. — Jedna z týchto dvoch energií musela teda novo vzniknúť — ktorá, a ako je to možné?

Podľa súčasnej termodynamiky vznikla na novo voľná energia ΔF_p plynu a to tak, že viazaná energia plynu sa o rovnakú hodnotu zmenšila. Toto tvrdenie môže však obstáť len vtedy, keď plyn má viazanej a tým aj celkovej energie U dostatočné zásoby. Nakoľko však (mol) atomového plynu (napr. He) má celkovú tepelnú vnútornú energiu, ktorá tu prichádza v úvahu (svoju atomovú a jadrovú energiu si plyn pre obyčajnú expanziu a kompresiu zaiste nevypožičiava), len $U = 3/2 RT = 3 T$ kalórií, nemôže byť jeho viazaná energia, ktorá je súčasťou vnútornej, väčšia, a preto nemôže ani poklesnúť o $9 T$ kalórií, aby nahradila vzostup voľnej energie. — Slovné operácie s voľnou a viazanou energiou predstavujú teda len lacné frázy bez reálneho podkladu.

Existuje nejaké iné energetické vysvetlenie tejto izotermickej kompresie plynu?

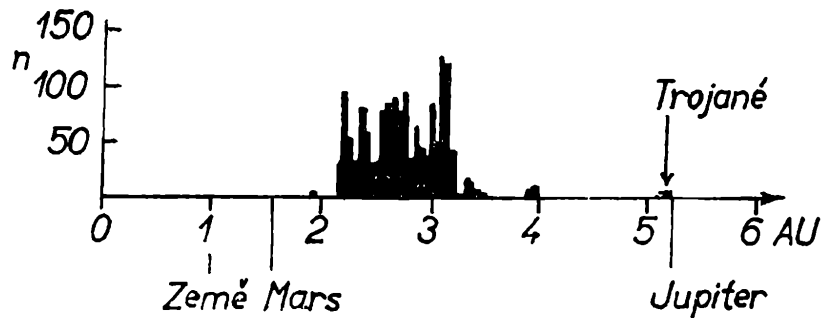
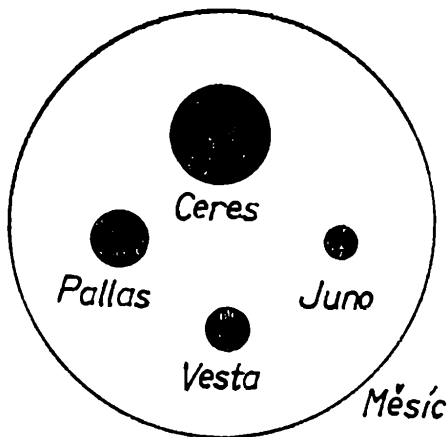
astronomie

Planetka č. 1 - Ceres

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V novoročnej noci 19. storočia, 1. ledna 1801, objavil Giuseppe Piazzi, riaditeľ hvězdárny v Palermu, teleso sedmé hvězdnej veľikosti, ktoré javilo znateľný pohyb medzi hvězdami. Zpočiatku ho považoval za kometu. Teleso pozoroval do 11. února, kedy onemocnel a ďalšie pozorovania nemohl již konat. O svém objeve napsal zprávu několika astronomům. Mezi nimi byl i německý astronom J. Bode, který zprávu obdržel až 5. dubna. V té době již nebylo možno nově objevené těleso pozorovat, protože se přiblížilo ke Slunci. Zdálo se již, že bude ztraceno; úlohy vypočítat dráhu tělesa se ujalo několik matematiků. Mezi nimi byl i matematik C. F. Gauss, který vypočítal polohu tělesa pro rok 1802. A skutečně, přesně za rok po prvním pozorování, bylo „ztracené“ těleso znovu pozorováno astronomem H. W. Olbersem na místě, které se od Gaussem vypočtené polohy lišilo jen o 30'. Gaussův úspěch vynikne zejména tehdy, když si uvědomíme, že první Piazziova pozorování trvala jen 40 dní a za tuto dobu opsalo těleso oblouk asi 3°. To již bylo zřejmé, že nejde o kometu a po nějakou dobu se astronomové domnívali, že konečně našli dlouho hledanou planetu, která vyplňuje velkou mezeru mezi drahou Marsu a Jupitera. Brzy však zjistili, že těleso je vzhledem k planetám příliš malé a po-

stupně objevili další podobná tělesa, která nazvali planetoidy nebo asteroidy, čili planetky. K výpočtu dráhy planetky č. 1, nazvané Ceres, se Gauss ještě vrátil. Na základě přesnějšího pozorovacího materiálu bylo možno již v r. 1830 vypočítat dráhu planetky znovu a dosáhl přesnosti v poloze planetky na obloze hodnoty 8'. A s ohledem na poruchy, které svou gravitací působí Jupiter, dosáhl astronom J. F. Encke přesnosti až 6'' za rok. Pozdější výpočty byly natolik zpřesněny, že lze polohu planetky vypočítat s velkou přesností.



Obr. 2. Počet planetek v závislosti na vzdálenosti od Slunce.

Obr. 1. Srovnání velikosti prvních čtyř planetek s velikostí Měsíce.

Není jistě bez zajímavosti připomenout, že se 21. září 1800 ustavila v Lilienthalu vědecká společnost, složená z významných evropských astronomů, která si vytkla za cíl co nejdříve zjistit, zda existuje mezi Marsem a Jupiterem nějaká planeta. Za tím účelem si rozdělilo 24 členů této společnosti zvěřníkové souhvězdí, aby konali příslušná pozorování. V důsledku poštovních potíží, způsobených napoleonskými válkami, došlo oznámení Piazzimu až v době, kdy již hledanou planetku objevil.

Dnes víme, že jde o největší planetku vůbec — její průměr je 768 km a obíhá kolem Slunce ve střední vzdálenosti 2,77 astronomických jednotek (UA) za 1681,6 dní. Hmotnost této planetky činí 1/55 hmotnosti Měsíce. Srovnání velikosti Cerery a tří dalších planetek s Měsícem je nakresleno na obr. 1. Číselné údaje o těchto a některých dalších planetkách najde čtenář v tab. 107, otištěné v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro střední školy, které vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze (4. vydání z roku 1970, str. 315). Do roku 1971 bylo objeveno již 1748 planetek, jejichž dráhy jsou vypočteny. Předpokládá se, že ve sluneční soustavě je těchto těles asi 44 tisíc.

V naší literatuře se připomíná, že planetku č. 1055 objevil český astronom dr. Emil Buchar v r. 1925, za svého pobytu na hvězdárně v Alžíru. Planetka byla nazvána Tynka. Mezi objevitele planetek se zařadil i slovenský astronom Milan Antal. V r. 1970 objevil na hvězdárně Slovenské

akademie věd na Skalnatém plese těleso, které bylo předběžně označeno 1969 *TB*, další objekt vyfotografoval 20. srpna 1971 v souhvězdí Ryb, kdy měl zdánlivou hvězdnou velikost $14,5^m$. Konečně třetí těleso objevil rovněž Milan Antal 9. září 1971 na fotografické desce exponované 25. srpna. Hvězdná velikost byla kolem 15^m a objekt byl v souhvězdí Vodnáře. Definitivní potvrzení těchto pozorování si však vyžádá ještě dalších měření a výpočtů.

Planetky obíhají kolem Slunce ve střední vzdálenosti $\bar{a} = 2,9$ UA a oběžné doby P většiny z nich jsou v intervalu od 3,3 do 6,0 roku (střední hodnota je $\bar{P} = 4,5$ roku). Na obr. 2 je znázorněn počet n planetek v závislosti na vzdálenosti od Slunce. Je zřejmé, že převážná většina planetek obíhá ve střední vzdálenosti od 2,2 UA do 3,6 UA, některé však mají dráhy mnohem větší, dosahující až ke dráze Jupitera. Zajímavou skupinu planetek tvoří Trojané (tyto planetky byly pojmenovány po hrdinech trojské války), kteří s pohybují kolem Slunce tak, že neustále tvoří se Sluncem a s Jupiterem rovnostranný trojúhelník. Počet Trojanů dosáhl 15, když poslední planetka této skupiny byla objevena v r. 1949, ale její příslušnost do skupiny Trojanů byla dokázána až po 21 letech, tj. v r. 1970.

Výstřednost drah planetek je poměrně velká a její střední hodnota je $\bar{e} = 0,15$; střední hodnota sklonu dráhy k ekliptice je $\bar{i} = 9,7^\circ$ (větší, než u velkých planet). Po fyzikální stránce se planetky podobají planetám zemské skupiny, neboť jejich střední hustota je 3500 kg m^{-3} .

NAŠE SOUTĚŽ

Matematika

7. Řešte následující úlohu z tzv. lineárního programování. Je dána lineární funkce vzorcem

$$f(x, y) = -x + y + C$$

s definičním oborem všech řešení soustavy lineárních nerovností

$$\begin{aligned} -2x + y &\leq 2 \\ x - 2y &\leq 2 \\ x + y &\leq 5 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Najděte graficky absolutní minimum funkce $f(x, y)$.

Milan Pišek

8. Je dána nekonečná aritmetická posloupnost s prvním členem a_1 a s diferencí d , přičemž a_1, d jsou kladná racionální čísla. Potom je možné ze členů posloupnosti vybrat trojčlennou geometrickou posloupnost. Dokažte. Platí tvrzení, vypustíme-li z předpokladu slovo „racionální“?

Jiří Sedláček

9. Řešte rovnici

$$\lfloor 6 - 5 \lfloor 4 - 3 \lfloor x - 2 \rfloor \rfloor = 1.$$

Udejte vztahy mezi kořeny.

Ota Setzer

10. Určete, kolik z čísel $1, 2, \dots, 100.000$ je mocninou jiného přirozeného čísla.

Antonín Vrba

11. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod X . Dokažte, že existuje kladné číslo r takové, že každá koule o poloměru r , která neobsahuje žádný z vrcholů A, B, C, D , neobsahuje ani bod X .

Jaroslav Zemánek

12. Určete všechny posloupnosti celých čísel

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

s těmito vlastnostmi:

a) Je $a_0 = 2$ a kromě toho existují ještě aspoň dvě přirozená čísla p, q , pro která je $a_p = a_q = 2$.

b) Existuje celé číslo α tak, že pro každé přirozené n platí

$$a_{n+1} + a_{n-1} = \alpha a_n.$$

U každé posloupnosti s vlastnostmi 1) a 2) udejte též množinu M těch přirozených čísel m , pro něž je $a_m = 2$.

František Zítek

Fyzika

1. Určete množství olova ${}^{207}_{82}\text{Pb}$, které vznikne rozpadem z 1 kg čistého isotopu uranu ${}^{238}_{92}\text{U}$ za dobu rovnou stáří Země ($2,5 \cdot 10^9$) let. Poločas rozpadu isotopu uranu je ($4,5 \cdot 10^9$) let.

Zdeněk Janout

2. Podle Einsteinovy teorie se zpomalují při pohybu všechny fyzikální procesy tak, že doba libovolného fyzikálního procesu se prodlouží

$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ krát. Tento efekt se projevuje i ve zvětšení poločasu rozpadu

nestabilních částic, např. π mesonů. Meson π je nestabilní částice s klidovou energií 140 MeV a s poločasem rozpadu v klidu $T_0 = 1,8 \cdot 10^{-8}$ s.

Vypočítejte:

a) O kolik se prodlouží poločas rozpadu svazku π mesonů, jsou-li urychleny na energii 140 MeV.

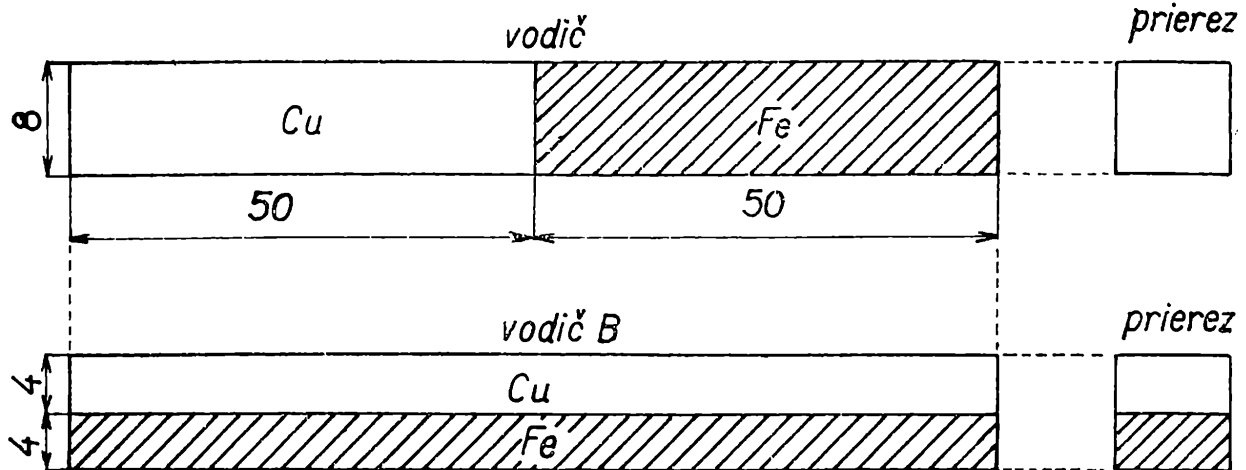
b) Jakou dráhu urazí π mesony za tuto dobu.
(v je rychlost π mesonu, c je rychlost světla.)

Zdeněk Janout

3. Náboj q kondenzátoru o kapacite C , nabitého na potenciál U_0 , ktorého dosky byly spojené cez ohmický odpor R , klesá s časom na hodnotu danú výrazom

$$q = CU_0 e^{-t/\tau}, \quad (1)$$

kde e je základ prirodzených logaritmov, $\tau = RC$ je tzv. časová konstanta.



Obr. 1

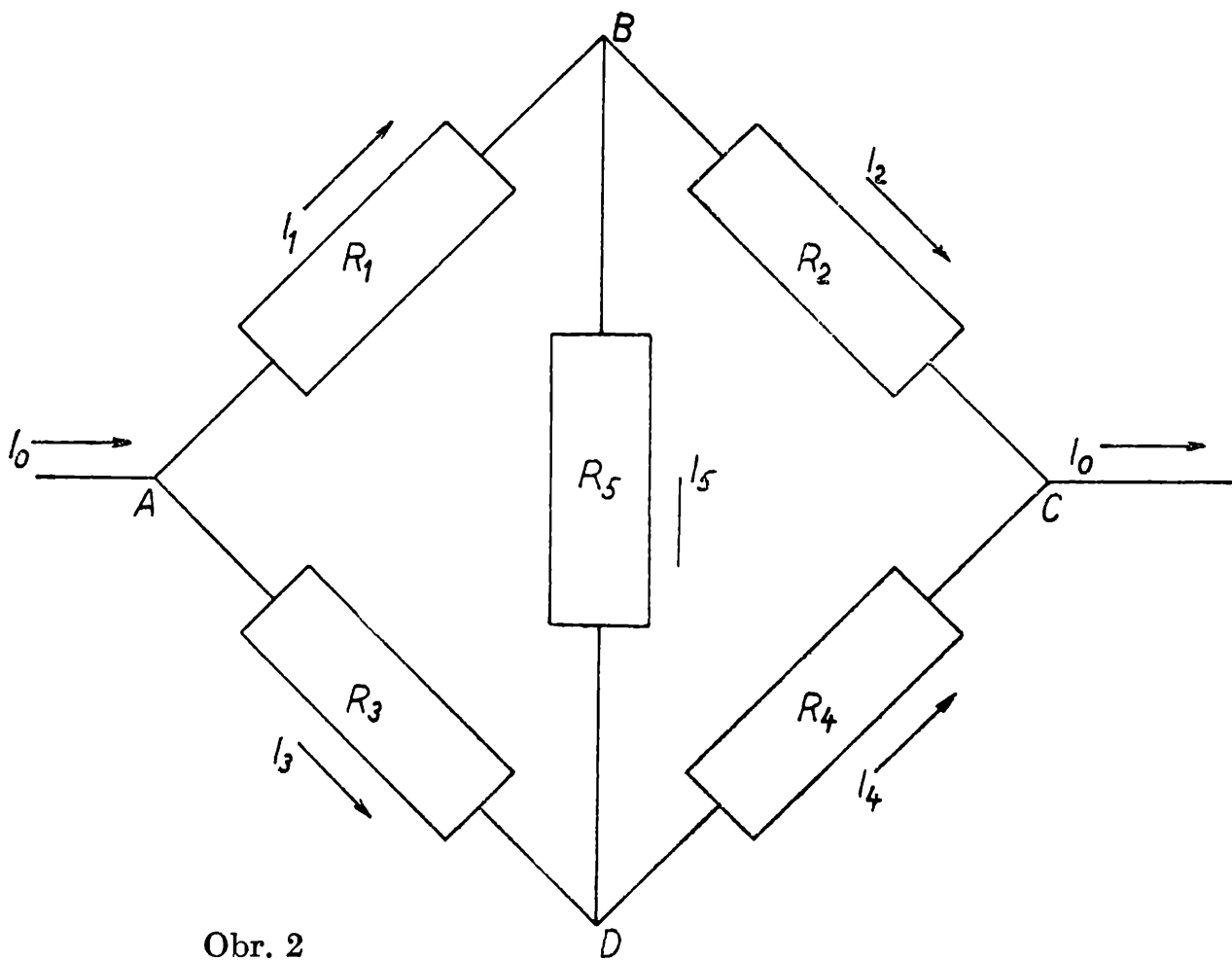
Volakto by mohol namietaf, uvažujúc vzťah (1), že kondenzátor se vlastne nikdy celkom nevybije, veď náboj sa sice ustavične zmenšuje, ale nabudne nulovú hodnotu až v čase $t \rightarrow \infty$. Abyste túto námietku vyvrátili, vyrátajte dobu t_1 , potrebnú k tomu, aby náboj kondenzátora klesnul na hodnotu jedného elementárneho kvanta, tj. $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ As, ak je dané $C = 1 \mu\text{F}$, $U_0 = 100$ V, $R = 0,5 \cdot 10^6 \Omega$. Robte dimenzionálne kontroly.

Evžen Říman

4. Pri laboratórnej teplote je rezistivita (= špecifický odpor) pre čistú meď $\rho_1 = 1,55 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm}$, pre čisté železo $\rho_2 = 10,0 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm}$. Stanovte odpor každého zo dvoch rozlične složených vodičov: obidva majú rovnakú dĺžku a rovnaký prierez. Vodič A je zhotovený sériovým spojením dvoch tyčiek, medenej a železnej; dĺžka každej tyčky je $1/2 l = 50$ cm a prierezom každej je štvorec o strane $a = 8$ mm. Vodič B je zhotovený spojením tyčky medenej a železnej, položených na seba plochou 8 mm krát 1 meter; obidve tyčky majú rovnakú dĺžku $l = 1$ m a obdĺžnikový prierez 4 mm krát 8 mm. (Vid' obr. 1.)

a) Zistite odpor každého z vodičov medzi obidvoma koncami.

b) V ktorom materiále (medi či železa) vo vodiči A sa konštantným prúdom vyvíja viacej tepla?



Obr. 2

c) Odpovezte na tu istú otázku pre vodič B a odôvodnite.

Evžen Říman

5. V zapojení podľa obr. 2 (Wheatstoneov mostík) je daný prúd I_0 a odpory R_k , kde $k = 1, 2, 3, 4, 5$. (Vid' obr. 2)

a) Nájdite vzťahy pre veľkosť každého z prúdov I_k (kde $k = 1, 2, 3, 4, 5$).

b) Aká podmienka vznikne, ak $I_5 = 0$?

Evžen Říman

6. Těleso o hmotnosti $m = 0,5$ kg je postaveno na kraji vodorovné desky stolu. Tento okraj desky byl zdvižen o $h = 0,025$ m. S jakou rychlostí dorazí těleso na druhý konec stolu za předpokladu, že deska stolu je absolutně hladká ?

František Vencálek

Oprava př. 6 na str. 32.

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

olympiády

Třetí kolo kat. A XIII. roč. FO

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠTÁL, Brno

Třetí kolo kat. A XIII. roč. FO se konalo 26. až 28. dubna 1972 v Plzni. Účastníci byli vybráni z nejlepších řešitelů 2. kola kat. A v jednotlivých krajích, a to všichni až po klasifikaci 1, 2, 3, 3 a z klasifikace 2, 2, 3, 3 jen někteří, jichž bylo zapotřebí, aby kraj byl zastoupen aspoň dvěma účastníky (JČK a SSK). Celkem bylo pozváno 77 řešitelů a všichni se dostavili.

Tabulka 1

Kraj	Účastníků	Úspěšných	Z toho vítězů	Neúspěš.
Praha	4	3	1	1
StČ	6	2	—	4
JČ	2	1	—	1
ZČ	6	1	—	5
SČ	2	2	1	—
VČ	19	8	4	11
Brno	2	—	—	2
JM	7	2	1	5
SM	13	1	—	12
Bratislava	9	3	2	6
ZS	3	—	—	3
StS	2	1	—	1
VS	2	—	—	2
Celkem	77	24	9	53

Třetí kolo bylo zahájeno na slavnostní schůzi 26. dubna za přítomnosti prorektora Vysoké školy strojní a elektrotechnické a proděkana pedagogické fakulty. Teoretické úlohy řešili účastníci 27. dubna a laboratorní úlohu 28. dubna. Péči o hospodářskou stránku převzala Vysoká škola strojní a elektrotechnická. Účastníci byli ubytováni v kolejích v Malešicích. Dne 27. dubna byl organizován zájezd do okolí Plzně.

Ze 77 účastníků bylo jen 24 úspěšných, z toho 9 vítězů, tj. těch, kteří měli nanejvýš jednu úlohu hodnocenu známkou nevyhovující.

Přehled počtu účastníků a výsledků podle jednotlivých krajů udává tabulka 1, jména vítězů tabulka 2. Absolutním vítězem FO byl v tomto roce Jiří Binder, žák 4. roč. gymnasia v Moravských Budějovicích.

Tabulka 2

Pořadí	Jméno	Třída	Škola	Kraj
1	Binder Jiří	4	G Mor. Budějovice	JM
2	Horák Jiří	4	G Děčín	SČ
3—4	Koropečký Igor	4 S	G Pardubice	VČ
3—4	Lehotský Milan	3 S	SVŠ Bratislava, Novohradská	Brat.
5	Dolejší Jiří	4	G Praha 7, Nad štolou	Praha
6	Slezák Libor	4 S	G Pardubice	VČ
7—8	Drábek Pavel	4 S	G Pardubice	VČ
7—8	Vít Jan	4	SPŠStr. Nové Město nad Metují	VČ
9	Kolibiar Milan	3	G Bratislava, Novohradská	Brat.

Prvých 16 úspěšných řešitelů dostalo odměnu ve výši od 1300,— Kčs do 400,— Kčs. SSM věnoval každému účastníku 3. kola publikaci Josefa Kubína Plzeň v ceně 55,— Kčs.

Stručná zpráva o XIV. MMO

XIV. mezinárodní matematická olympiáda se letos konala v Polsku, ve Varšavě a v Toruni ve dnech 5.—17. července 1972. Zúčastnila se jí žákovská družstva ze 14 zemí: Rakouska, Bulharska, Kuby, Československa, NDR, Velké Británie, Mongolské lidové republiky, Holandska, Polska, Rumunska, Švédka, Sovětského svazu a Jugoslávie; celkem 107 žáků. V organizaci nebyly žádné vážné změny. Za vyřešení 6 úloh bylo možno získat maximálně 40 bodů. Bylo uděleno 8 prvních cen (40 bodů), 16 druhých cen (30—39 bodů) a 30 třetích cen (19—29 bodů). Čtyři účastníci získali třetí cenu: J. Brychta z Prahy (26 bodů), I. Vrto z Rimavské Soboty (21 bodů), J. Šimša z Ostravy (20 bodů) a M. Kmošek z Brna (19 bodů). Další žáci získali: P. Slačálek z Prahy 18 bodů, J. Frynta 11 bodů, K. Horák ze Strakonice 10 bodů a P. Ferst z Prahy 5 bodů.

V neoficiálním pořadí zemí skončilo Československo na 9. místě (celkem 130 bodů). O místě konání příští XV. MMO není zatím rozhodnuto.

Podrobnější zpráva o průběhu XIV. MMO bude vydána později.

*Dr. František Zítek, CSc.
vedoucí delegace*

různé

Město Basilej - kolébka matematiků

Doc. VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, Praha

(dokončení)

Třetím synem Johanna I. je Johann II. Bernoulli (1710—1789, podle dat udávaných historikem M. Cantorem je rok jeho úmrtí 1790). Johann II. byl více fyzikem a právníkem. Získal cenu pařížské Akademie za práci o šíření světla a z aplikované fyziky o lodní kotvici a o lodním jeřábu. V roce 1743 byl jmenován profesorem řečnictví a později i matematiky na universitě v Basileji. Byl také členem Akademie berlínské.

Johann III. Bernoulli byl synem Johanna II. Žil v letech 1744—1807, narozen v Basileji, ale umírá v Kopniku u Berlína. Byl spíše astronomem než matematikem. Ve svých dvaceti letech byl pozván Friedrichem Velikým na berlínskou Akademii, jejímž se stal později ředitelem. Založil také v r. 1767 hvězdárnu v Berlíně. Přeložil Eulerovu algebru do franštiny a své příspěvky psal do lipského Magazin für reine und angewandte Mathematik. Byl členem Akademií bolongnské, stockholmské, petrohradské a v r. 1785 se stal i členem Královské české společnosti nauk v Praze.

Nejmladším synem Johanna II. byl Jacob II. Bernoulli, narozený r. 1759 v Basileji. Zemřel r. 1789 v Petrohradě. V roce 1780 zastupoval svého strýce Daniela Bernoulliho v přednáškách o experimentální fyzice v Basileji, byl sekretářem hraběte Breunera v Benátkách a od r. 1787 pracoval v Akademii v Petrohradě. Byl členem Akademie v Turinu. Jeho práce se týkají hlavně teoretické mechaniky. Utonul nešťastně v Něvě.

V Basileji se narodilo ještě více, ale méně známých a pro matematiku méně důležitých matematiků. Např. Jacob Hermann (1678—1733), původně basilejský teolog. Jeho práce se týkaly ponejvíce mechaniky.

Basilej dala světu největšího matematika tehdejší doby Leonharda Eulera, který se narodil r. 1707 v Basileji a zemřel r. 1783 v Petrohradě Euler byl synem Paula Eulera, který miloval matematiku a byl žákem Jacoba I. Bernoulliho. Hodnost magistra získává již v r. 1723. Jeho spolužáky byli o 12 let starší Niclaus II. Bernoulli a o 7 let starší Daniel I. Bernoulli. Tyto věkové rozdíly vyrovnává Euler brzy svým matematickým nadáním. Ještě jako žák Johanna I. Bernoulliho je zván v r. 1727 Kateřinou I. do Petrohradu. Přijíždí tam dne 17. května, v den, kdy carevna umírá. Poněvadž její nástupce Petr II. nepřál rozkvětu vědy,

musí Euler přijmout místo námořního poručíka až do r. 1730, kdy nastoupila na trůn Anna. Teprve potom se stává členem Akademie petrohradské a profesorem. V roce 1735 zpracovává astronomické tabulky ve třech dnech. Uvádí se, že tato práce by trvala jinému pracovníku několik měsíců. Leonharda Eulera tato práce nesmírně vyčerpala, Euler onemocněl a ztratil jedno oko. V dopise Goldbachovi uvádí v r. 1741 jako příčinu ztráty oka námahu v kartografických pracích.

Když r. 1740 vypukla v Petrohradě palácová revoluce, přijímá Euler nabídku Friedricha Velikého a odchází r. 1741 do Berlína, i když srdcem stále žije v Petrohradě. V Berlíně se stává ředitelem nově zřízeného oddělení matematiky na Akademii a v r. 1755 členem berlínské Akademie. Na prosbu Kateřiny II. se vrací v červnu 1766 do Petrohradu. Průtahy s jeho odjezdem trvaly 4 roky. Bohužel, hned na podzim tohoto roku oslepl úplně. Jeho síla však neochabla. Naopak se zdálo, že ztrátou oka a jeho myšlením jen na matematiku síla jen rostla. Píše se o něm, že dokázal recitovat Vergilia Aeneis z paměti od začátku až do konce. Své úvahy a myšlenky diktoval nejdříve svému synu Jonannu Albertovi a nejvíce od roku 1773 až do své smrti Niclausu Fussovi (1755—1826), který byl povolán z Basileje do Petrohradu. Uvědomíme-li si, že jeho dílo obsahuje podle jedněch výzkumů 886 prací zhruba na 21 600 stránkách, vidíme teprve jeho úctyhodnou práci. Mnoho je obsaženo v dopisech rodákům, vědcům z Basileje a se všemi význačnými matematiky tehdejší doby.

Není disciplíny matematiky, do které by nezasáhl. Existovaly nadhrožené problémy, i problémy řešené mnoha jeho předchůdci a současníky, ale Euler je dovedl prohloubit, zjednodušit, zpřesnit, vymyslet nové jejich důkazy, vyčíslení. Je zajímavé, že Euler nepodceňoval úlohy stylizované žertovnými otázkami a znal jejich vědeckou cenu. Tak jsou známy matematické hříčky např. 7 královských mostů, skoky koněm na šachovnici, které Euler předkládal k řešení a sám řešil.

Své výsledky uveřejňoval nejen ve vědeckých pojednáních různých rozsahů, ale i v obdivuhodném počtu učebnic, které nejen ukazovaly pečlivě seřazený a metodicky upravený materiál všech předchozích dob, ale zpřesněný a obohacený o nové úpravy a objevy, které přetrvaly dodnes, jsou v mnohých oblastech konečné, a jejich význam si těžko uvědomujeme, poněvadž je přijímáme jako samozřejmé.

Známým příkladem konečnosti jeho úprav je trigonometrie, v níž chápání trigonometrických hodnot a symbolika je z jeho díla *Introductio in analysin infinitorum* (1748). Podobně je tomu se symbolikou algebry infinitesimálního počtu. *Introductio* obsahuje např. rozvoj funkcí e^x , $\sin x$, $\cos x$, a předkládá vztah $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, který byl objevem Johanna I. Bernoulliho. Algebraické vyšetřování křivek a ploch v tomto dílu vede k názoru, že zde jde o první soustavnou učebnici analytické geometrie.

Další významné dílo byla učebnice diferenciálního počtu (1755), integrálního počtu (1768—1774). Obsahují vedle elementárního počtu i teorii diferenciálních rovnic. Zde mají vliv i práce Bernoulliů. Jsou zde např. známé Eulerovy integrály, Taylorova věta s aplikacemi. Eulerova klasifikace diferenciálních rovnic se uplatňuje dodnes. Euler věnoval svou péči i mechanice spisy z r. 1736, 1765. Algebra je obsažena v učebnici z r. 1770 a zahrnuje v sobě již teorii kubických a bikvadratických rovnic. První souborné zpracování variačního počtu vyšlo r. 1744. Také zde přispěl Jacob Bernoulli svými objevy.

Jen příspěvky z teorie čísel by stačily k zajištění nesmrtelné slávy. Velkou část své činnosti věnoval Euler astronomii. V roce 1739 se objevila jeho nová teorie hudby, o níž se říkalo, že je pro matematiky příliš muzikální a pro hudebníky příliš matematická. O teorii chvění strun z r. 1747 bylo již hovořeno ve zmínce o Danielovi Bernoulliovi. Filosofické zdůvodnění problémů přírodních věd najdeme v dopisech německé princezně (1760—1761), které jsou ukázkou vzorné popularizace.

Ukažme alespoň zběžně, jak Euler zasáhl do partií matematiky, která patří dnes do středoškolské látky: Zavedl znak $\sqrt{-1} = i$, a rozvedl vůbec teorii komplexních čísel, podal důkaz fundamentální věty algebry v teorii řešení rovnic, předložil řešení neurčitých rovnic prvního stupně,

dal základ přirozeného logaritmu. Od něho pochází také symbol $\binom{n}{k}$ v kombinatorice. Z geometrie jde o Eulerovu přímku, symbol π a jeho výpočet, označování stran a protilehlých úhlů v trojúhelníku, ve stereometrii o větu Eulerovu ($s + v = h + 2$), nadhozenou již Descartem i Leibnizem, o terminologii a symboliku řešenou částečně již před ním v r. 1626 A. Girardem a r. 1748 Simpsonem, hlavně ve zmíněné trigonometrii, o trigonometrii sférickou (1753), o vzorce pro transformaci pravoúhlé soustavy souřadnic, o klasifikaci kvadratických ploch v analytické geometrii, o teorii křivek a ploch, o teorii křivosti ploch.

Z tzv. vyšší matematiky to byla teorie řad, počet pravděpodobnosti, diferenciální rovnice a jejich řešení, rozvinutí trigonometrických a cyklo-metrických funkcí v řady, Eulerova čísla v teorii čísel, využití řetězových zlomků, analýza komplexních čísel, rozšiřující všeobecné věty Fermatovy a jiné, méně známé problémy.

Matematici tehdejší doby a doby pozdější např. Lagrange, Gauss, Laplace převzali úplně jeho symboliku. Laplace říkával mladým matematikům: Čtete Euleru, je učitelem nás všech a Gauss prohlásil: Studium Eulerova díla zůstane nejlepší školou pro nejrůznější oblasti matematiky a nemůže je nic nahradit.

Význam Eulerova díla dnes ve škole těžko doceníme. Je pravda, že rozsah vědy v tehdejší době byl nepoměrně menší než dnes, a že mohl Euler zasáhnout do všech disciplín matematiky. Z hlediska metodického

je nutné ocenit zjednodušení úvah. Jeho učebnice byly vzorem a jsou v mnohém dodnes dalším základním dílům vědeckým.

Eulerovy úvahy měly také své slabiny, posuzováno očima dnešní vědy, ale neobsahovaly zpravidla nepřesnosti, i když se nemůže se všemi jeho předpoklady a hypotézami souhlasit.

Leonhard Euler je pro nás příkladem člověka, kterého nezlomil ani nejhorší úděl slepoty. Při tom se vždy počítal mezi ruské matematiky, neboť miloval Petrohrad, který mu byl po Basileji nejmilejší.

V tomto článku jsem se pokusil jen naznačit důležitost vlivu matematické školy basilejské a jistě i vědomí, že všichni uvedení matematici patřili, i když ne zcela jedné rodině, tedy alespoň k jednomu rodnému městu, ke kterému se hrdě hlásili a na konec, s výjimkou Eulera a dvou nejmladších Bernoulliů, vraceli. Jejich zásluha není nijak zmenšována tehdejším rozsahem vědy. Poměry, v kterých pracovali, přístupnost pramenů byla zato mnohem obtížnější.

Litetatura.

Ottův slovník naučný III., IV.

Dirk J. Struik, Dějiny matematiky (český překlad)

Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik II., III.

Hrst vzpomínek ■ JOSEF KOTYK, Pardubice

Roku 1972 si připomínáme některá významná výročí.

CHARLES WHEATSTONE (čti Čárlz Huitstoun), narozený před 170 lety roku 1802 v Gloucesteru, zabýval se zprvu výrobou hudebních nástrojů. Jeho první fyzikální práce se proto týkají oboru akustiky. Podal výklad chvění pevných těles, tyčí a desek, a vysvětlil vznik některých obrazců Chladniho¹). Shledal zejména, že táž deska může vydávati kromě tónu základního velmi mnoho vrchních tónů neharmonických; čím vyšší je její vrchní tón, tím složitější je příslušný obrazec Chladniho. Rozechvějeme-li pružnou tyčinku pravoúhelníkového průřezu, jež je na jednom konci upevněna a na druhém opatřena lesklou kuličkou (kaleidofon Wheatstoneův, 1827), opisuje kulička křivku zvanou později Lissajousovu²), která je vzhledem k trvání dojmu celá zároveň viditel-

¹) Rodina Ernsta Chladniho pocházela ze Slovenska, odkud se za náboženského pronásledování vystěhovala do Sas. Chladni se narodil již v cizině roku 1756 ve Wittenbergu. Hlavní své dílo „Akustik“ vydal před 170 lety téhož roku 1802, v němž se narodil Wheatstone. Zemřel před 145 lety roku 1827.

²) Křivky, jež opisuje hmotný bod, koná-li současně dva harmonické pohyby ve dvou různých přímkách, tj. obecně křivočarý pohyb periodický, pozoroval francouzský fyzik Jules Antoine Lissajous (čti Žyl Antoan Lisažu), narozený před 150 lety roku 1822 ve Versailles.

ná³). Sestrojil také první vlnostroj po něm Wheatstoneův zvaný, jenž umožnil demonstrovati různé druhy vlnění.

Roku 1835 pozoroval Wheatstone spektrum výboje mezi kovovými hroty a studoval čárové spektrum kovů. Shledal, že barevné čáry emisního spektra jsou pro určité kovy charakteristické a dovolují takto podle spektra tento kov zjistiti. Tyto možnosti došly však teprve po dalších 25 letech ve spektrální analýze kvalitativní, jejímiž zakladateli se roku 1860 stali Gustav Kirchhoff a Robert Bunsen, náležitěho uplatnění.

Roku 1838 studoval Wheatstone podstatu stereoskopického (prostorového) vidění. Shledal, že obrazy vytvořené v levém a v pravém oku se od sebe liší a to tím více, čím je pozorovaný předmět blíže; levým okem vidíme jej více zleva, pravým více zprava. Wheatstone poznal, že prostorové vidění je způsobeno tím, že oba tyto poněkud různé vjemy se skládají v jeden vjem prostorový. Předměty, jež jsou od oka vzdálenější než 450 m, vidíme však již jen jako útvary rovinné. Dovedný Wheatstone sestrojil také zrcadlový stereoskop, jímž dosáhl prostorového vidění uměle.

Roku 1840 sestrojil Wheatstone elektromagnetický chronoskop k měření velmi malých intervalů časových, roku 1844 známý můstek (Wheatstoneův můstek) k měření odporu vodičů. Zdokonalil také magnetkový telegraf, u něhož telegrafované značky byly dávány výchylkami ukazatele spojeného s magnetkou; Wheatstoneův telegraf byl zaveden na londýnské severozápadní dráze před 135 lety roku 1837. Tehdy pokoušel se Wheatstone určití také dobu elektrického výboje a rychlost, kterou se elektřina šíří drátem. Experiment uspořádal takto: Od kuličky a vnějšího polepu leydské láhve vedl dva měděné dráty dlouhé 1/4 anglické míle (1 angl. míle = 1855 m). Při výboji přeskočily tři jiskry, na obou koncích a uprostřed mezi dráty, a to zdánlivě současně. Když však pozoroval výboj v rotujícím zrcadle, jež konalo 800 otáček za sekundu, Wheatstone zjistil, že uprostřed nastal výboj trochu později. Ze svých pokusů a měření stanovil pak dobu jiskrového výboje na 24 miliontiny sekundy a rychlost šíření elektřiny drátem na 62 000 zeměpisných mil (1 zem. míle = 7420,432 m) za sekundu — úkol, o jehož řešení se Wheatstone pokoušel, byl zajisté příliš delikátní. Tvrzení, že telegrafními linkami jsou zprávy přenášeny téměř okamžitě, byla však zcela opodstatněná.

V těchto letech projevuje svůj zájem o rozvoj telegrafie také již WERNER von SIEMENS (čti Símens). Se svým spolupracovníkem Johannem Georgem Halskem sestrojil ukazatelový telegraf a stroj na

³) Universální kaleidofon sestrojil roku 1861 Franz Melde, profesor fyziky na universitě v Mariboru, narozený před 140 lety roku 1832. Sestával ze dvou pružných tyčinek prvoúhelníkového průřezu, upevněných na sobě a kmitajících ve dvou směrech vzájemně kolmých. Měníme-li volnou délku tyčinek, mění se i poměr kmitových dob a tím i příslušná Lissajousova křivka.

izolaci měděných drátů gutaperčou; tím byla umožněna výroba kabelů. Dráty takto izolovanými realizoval Siemens před 125 lety roku 1847 první podzemní telegrafní vedení z Berlína do Großbeeren. Roku 1849 založil s Halskem později velmi proslulou a po celém světě známou společnost Siemens-Halske pro stavbu telegrafů a výrobu elektrických přístrojů⁴). Z této doby pocházejí také Siemensovy metody ke zkoumání elektrického vedení a zvláště ke zjištění místa, v němž nastala porucha. Siemens budoval pak po léta mnohá telegrafní vedení doma i za hranicemi a velmi se zasloužil o rychlé šíření telegrafní sítě⁵). V letech 1848 a 1849 vystavěl podzemní vedení z Berlína do Frankfurtu nad Mohanem, roku 1857 položil podmořský kabel ze Sardinie do Alžíru, později vedení ze Suezu do Adenu, atd.; roku 1869 vybudoval vedení z Anglie přes Německo, Rusko a Persii (Írán) do Indie, zmechanizované tak, že na lince dlouhé 10 000 km nebylo, kromě konečných stanic, lidí třeba. Roku 1879 vystavěl na průmyslové výstavě v Berlíně první elektrickou dráhu v Evropě. Jeho věhlasu nemálo přispěl také Siemensův princip dynamoelektrický z roku 1867⁶); jím se Siemens zasloužil o velkolepý rozvoj elektrotechniky.

Málo je známo⁷), že Siemens se pokusil také o vysvětlení vzniku a udržování obrovské energie sluneční. Světový prostor je podle něho vyplněn velmi zředěnými plyny, hlavně lehkým vodíkem. Rychlou rotací sluneční koule vzniká pak mohutná odstředivá síla, jež vyvrhuje v rovníkovém pásmu produkty, které povstaly hořením plynů; na póly přitahuje se zároveň zředěný vodík, jenž svým velikým spalným teplem — 34 200 kcal/kg — vyzářenou energii nahradí. Sluneční „atmosféra“ nemění při tom svého složení, přesněji řečeno vrací se do něho a obnovuje je, neboť sloučeniny Sluncem odvržené se slunečními paprsky zase rozkládají v původní prvky. Siemens poukazoval např. na obdobný rozklad zředěných vodních par v Geisslerových trubicích aj., k dnešním závěrům, že zdrojem sluneční energie jsou atomové proměny v jádře Slunce, podrobeném tlaku kolem 10^{11} atmosfér a teplotě kolem 10 miliónů stupňů, bylo tehdy ovšem ještě příliš daleko...

⁴) Roku 1893 spojil se závod Siemensův se závody Schuckertovými v Norimberku v společnost nazvanou Siemens-Schuckert Werke, jež nabyla záhy rovněž velikého významu.

⁵) O dějinách telegrafie pojednává autor v samostatném článku.

⁶) V podrobnostech viz autorův článek „Siemensův princip dynamoelektrický“, otištěný u příležitosti jeho 100. výročí v Rozhledech roč. 46, čís. 1, str. 48 a 49. Je však pozoruhodné, že základní zkušenosti s magnetickým residuem (zbytkem, zbytkovým magnetismem) učinil skoro současně také Wheatstone.

⁷) Referuje o tom např. prof. dr. Vladimír Novák ve sborníku „Deváté století slovem i obrazem“ (nakl. Jos. R. Vilímek, Praha), díl II., svazek první, str. 237.

Siemensovy zásluhy o pokrok vědy a zejména rozvoj techniky byly obecně uznávány. Např. jednotka elektrické vodivosti byla po něm zvána siemens; s jednotkou později zavedenou 1Ω souvisí vztahem $1\Omega = 1,063$ siemens. Roku 1860 byl Siemens jmenován čestným doktorem university v Berlíně, roku 1886 čestným doktorem university v Heidelbergu, roku 1874 členem Akademie věd v Berlíně. Roku 1888 byl povýšen do stavu šlechtického. Zemřel v Charlottenburku před 80 lety dne 6. prosince 1892.

Ze zahraničních časopisů

Ze sovětského časopisu *Kvant*:

1. Najděte přirozená čísla m , pro něž platí

$$1!3!5! \dots (2m-1)! = \left(\frac{m(m+1)}{2} \right) !.$$

2. Řešte rovnici

$$2^{\log \sqrt{2}^{(x-0,5)}} + x = x^{0,5x^2} + \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

Ze západoněmeckého čas. *Archimedes*:

3. Řešte rovnici

$$4 \log_4 x + 3 = 2 \log_x 2.$$

4. Která trojčiferná čísla jsou tak veliká jako součet všech dvojciferných čísel, jež lze vytvořit z jejich různých cifer?

Z bulharského časopisu *Matematika*:

5. Je-li výraz $7x + 4y$ dělitelný 19, potom i výraz $A = 15x + 14y$ je také dělitelný 19 (x, y přirozená).

Dokažte!

6. Řešte rovnici

$$\log_{\frac{4}{5}} (x-2)^2 + \log_{\frac{5}{2}} (x-2)^3 = 25$$

Z jugoslávského čas. *Matematičko-fizički list*:

7. Vypočtete:

a) $1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + n! \cdot n$;

b) $1! \cdot 2 + 2! \cdot 5 + 3! \cdot 10 + \dots + n! \cdot (1 + n^2)$

8. Nechť $y \neq 0, y \neq 1$. Položme

$$x_1 = \frac{y-1}{y+1}, \quad x_2 = \frac{x_1-1}{x_1+1}, \quad x_3 = \frac{x_2-1}{x_2+1} \quad \text{atd.}$$

Pro které y jest $x_{1973} = 3$?

Některé výsledky: 1) 1, 2, 3, 4; 2) 2; 3) 2; 0,25; 4) 132, 264, 396; 6) 7; 2,2;

7a) $(n+1)! - 1$; b) $(n \neq 2)! - 2 \cdot (n+1)!$; 8) $y = -2$.

O. S.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

opačný	inverse
opačné prvky	éléments inverses
opak	m
opakování	répétiti
opakovaný	répété, e
opakovati	répète
opatřený	affecté, e
opatřený znaménkem	affecté d'un signe
operace	operation composition loi de
operátor	opérateur
opisovat	décrire
opsaný	consécutif, e
opsati	circonscrire
mnohouhelníku opsati kružnici	circonscrire un cercle à un polygone
optimální	optimum
ordináta	ordonnée ž
orientace	orientation ž
orientovaný	orienté, e
orientovat	orienter
ortogonální	orthogonal, e, aux
ortonormální	orthonormal, aux
osa	axe m
osa symetrie	axe de symétrie ž
osa úhlu	bissectrice ž
osilace	oscillation ž
osilovat	osciller
oskulační	osculateur, trice
oskulační kružnice	cercle m osculateur
osm	huit
osmdesát	quatre-vingt
osmina	huitième ž
osmistěn	octaèdre m

osmiúhelník
osmý
osnova
ostrý
ostrouhlý
ostrý
otáčení
otevřený
otočení
ovál
ovální
označení
označovat

octogone
huitième
chaîne *ž*
aigu, *e*
acutangle
aigu, *e*
rotation *ž*
ouvert, *e*
rotation *ž*
ovale *m*
ovale
notation *ž*
désigner

P

pak
paprsek
pár
parabola
parabolický
paraboloid
parametr
parametrický
parita
parciální
pás
 kulový pás
pata kolmice
patnáct
patnáctina
patnáctiúhelník
patnáctý
patřit
 a patří do A
pátý
perioda
periodický
permutace
permutovat
perspektiva
perspektivní
pevný
pět

alors
demi-droite *ž*
couple *m*
parabole *ž*
parabolique
paraboloide *m*
paramètre *m*
paramétrique
parité *ž*
partiel, elle
zone *ž*
 zone sphérique
pied *m* d'une perpendiculaire
quinzo
quinzième *m*
pentadécagone *m*; pentédécagone *m*
quinzième
appartenir
 a appartient à A
cinquième
période *ž*
périodique
permutation *ž*; arrangement *m*
permuter
perspective *ž*
perspectif, ive
fixe; solide
cinq

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

3

ROČNÍK 51, 1972-1973, LISTOPAD



ROČNÍK 51
LISTOPAD 1972

3

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ Praha, prof. dr. Ján Vanovič, UK Bratislava, František Vencálek, SPŠ Praha.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Höhlig. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

OBSAH

PhDr. J. Pátek: K 55. výročí Velké říjnové socialistické revoluce .	97
RNDr. B. Zelinka, CSc.: Hlavoлам s barevnými kostkami .	100
F. Hradecký: Skládání kruhových zobrazení (dokončení) .	103
Dr. A. Vrba: Jak se předseda nudil .	108
RNDr. M. Koman, CSc.: Přibližný výpočet délky elipsy	113
RNDr. B. Jurek, DrSc.: Ohyb a optický obraz	114
A. Halouzka: Problémy s časomírou .	119
RNDr. M. Bednařík: Trochu fyziky v jezdoucím vlaku I	124
MUDr. J. Skotnický: O voľnej a viazanej energii	129
J. Kotyk: „Nové“ hvězdy	131
J. Filip: O jednej vlastnosti pravoúhleho promietania	135
Naše soutěž	141
Recenze:	142
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

K 55. výročí Velké říjnové socialistické revoluce

PhDr. JAROSLAV PÁTEK CSc., UK Praha

V historii nenajdeme jinou událost, která by zasáhla do všech oblastí společenského života tak, jak to učinila před 55 lety Velká říjnová socialistická revoluce. Uprostřed nedokončené první světové války, za stálé hrozby vojenské intervence i jejího uskutečnění položila základy novému socialistickému společenskému řádu. U příležitosti letošního výročí této vsutku historické události si aspoň stručně připomeňme celé období, které od VŘSR uplynulo a snažme se z toho získat poučení pro další vývoj.

Carské Rusko mělo sice na konci 19. a na začátku 20. stol. starou vyspělou kulturu a bohaté tradice, ale jinak bylo politicky nejzaostalejším státem Evropy. Nepřekvapuje proto, že právě zde v ovzduší bídy, vykořisťování a policejního útlaku znásobeného válečnými obtížemi a útrapami vzniklo revoluční ohnisko a došlo k první socialistické revoluci na světě. Byly to především Leninovy myšlenky obsažené v četných dílech napsaných před revolucí i po ní, které předznamenaly celý její další vývoj. Lenin dokonale poznal hospodářskou, politickou a ideologickou situaci světa na přelomu století, situaci, která se už lišila od oné, již analyzoval Karel Marx. Lenin první viděl v dravém imperialismu počátek soumraku kapitalistického systému, který již nedokáže zajistit pro svou kapitalistickou zbožní výrobu výnosné domácí trhy a je proto nucen orientovat se na mezinárodní sféry vlivu a volit k tomu jako prostředek i válku. I kdyby se Lenin nestal politickým vůdcem, zůstal by pro svou intelektuální velikost v dějinách společenských věd (filosofie, ekonomie) patrně tím, čím je Einstein v dějinách věd přírodních. Ne náhodou se obě tyto významné osobnosti staly symbolem vědeckých a společenských přeměn dvacátého století.

Pozoruhodná Leninova myšlenka, že monopolní stadium kapitalismu se vyznačuje vysokým stupněm zespolečenštění výroby, který se kvalitativně liší od předcházejícího stadia volné soutěže, vede nás k racionálnímu pochopení socialistické revoluce, jejíž hlavní úlohou je zajistit zespolečenštění výroby, odstranit soukromé přivlastňování a tím také v tomto procesu plně uplatnit pokrok vědecký a technický. Není proto náhodou, že právě při promýšlení nejbližších úkolů sovětské moci uvažuje Lenin o tom, jak využít vědy a techniky ke zlepšení hospodářského stavu Ruska. Když se ukázalo, že není možno okamžitě počítat s Akademií věd, která při svém tehdejší složení a zaměření nebyla s to tento úkol zvládnout, vytvořila se r. 1920 z Leninova podnětu Státní komise pro elektrifikaci Ruska. Komise zapojila do práce na 200 předních vědců a techniků a vypracovala za 10 měsíců plán elektrifikace Ruska, který byl ještě téhož roku schválen VIII. všeruským sjezdem sovětů. Byl to první velkorysý a ve svých důsledcích úspěšný pokus o plánovité využití vědy ve prospěch celé společnosti.

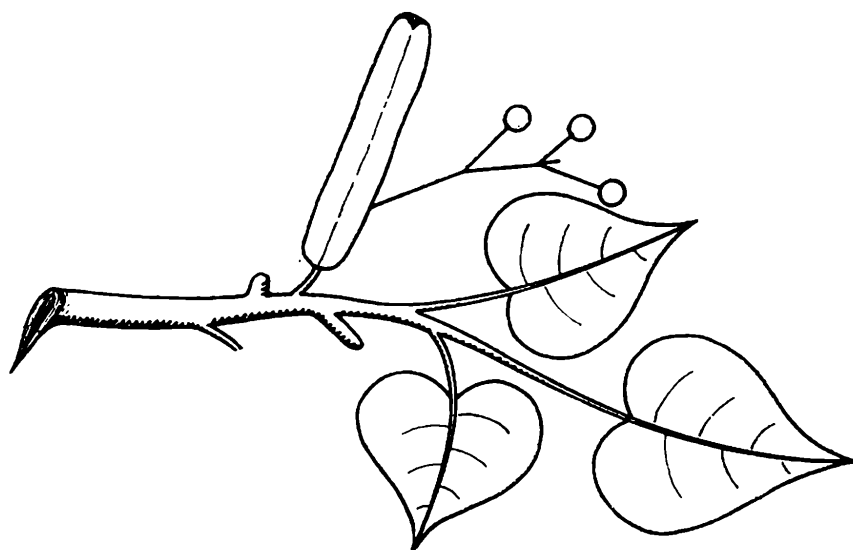
Společenská angažovanost sovětské vědy se v plné šíři projevila zejména ve třicátých letech a významně ovlivnila přístup k této problematice i v západních kapitalistických zemích. Stalo se tak na mezinárodním kongresu o vývoji vědy a techniky v r. 1931 v Londýně. („Science at the Cross Roads“ – příspěvky Jeffoe, Zavadskiho, Colmana, Vavilova, Nitlewitsche, Rubinštejna, Bucharina, Hessena). Pod vlivem kongresových jednání a vystoupení sovětských vědců se pak např. v Anglii konstituuje skupina anglických vědců tzv. vědeckých humanistů (Bernal, Lilley, Crowther, Halden aj.).

Dalším největším přínosem pro hospodářský rozvoj SSSR byla socialistická industrializace v průmyslu a kolektivizace v zemědělství uskutečňována na principech socialistického plánování. Úspěchy sovětských pětiletok se dostavily ještě před druhou světovou válkou a výrazně přispěly k tomu, že z ní vyšel SSSR jako vítěz. Po válce se socialistická revoluce rozšířila na další země, které společně se SSSR vytvořily socialistický tábor jako jeden z určujících faktorů světového vývoje, který svým příkladem má velký význam nejen pro dělnickou třídu v kapitalistických zemích, ale především pro rozvojové země.

Sovětský příklad ukazuje, že jen pomocí společensky angažované vědy a techniky se může uskutečnit přetvoření společnosti ve společnost osvobozenou od vykořisťování. Věda a technika v socialistické společnosti se nemůže rozvíjet ani při staré morálce ani za starých hospodářských a politických systémů. Nová věda a technika vyžaduje vyšší stupeň individuální i kolektivní odpovědnosti než kdykoliv dříve. V současné době věda stále více prostu-

puje průmyslovou výrobu a zase naopak vědecké poznání se industrializuje. Zároveň přestává být jenom záležitostí silných vědeckých individualit, ale stává se záležitostí kapitálových investic a komplexní organizace vědecké práce, které často vyžadují kvalifikované rozhodování na nejvyšší politické úrovni.

Z tohoto hlediska vidíme, jakým anachronismem byl proud československého liberálního myšlení šedesátých let, který nakonec vedl až k relativizaci všech hodnot. Ve své kritice dvacátého století a při zdůrazňování jeho regresí a omylů ignoroval tento proud VŘSR, která proti zrelativizovaným hodnotám kapitalistického světa postavila hodnoty nové – úctu k práci a pracujícímu člověku, skutečnou lásku k vlasti a opravdovou socialistickou humanitu. Zároveň tato revoluce ve svých důsledcích poskytla vědě a technice nebývalé možnosti. Je proto povinností techniků a vědců, k nimž patří i pracovníci v oblasti věd matematicko-fyzikálních, aby v duchu VŘSR usilovali o využití moderní vědy a techniky ve prospěch lidstva a bojovali proti jejich zneužití pro nízké a ničivé cíle.

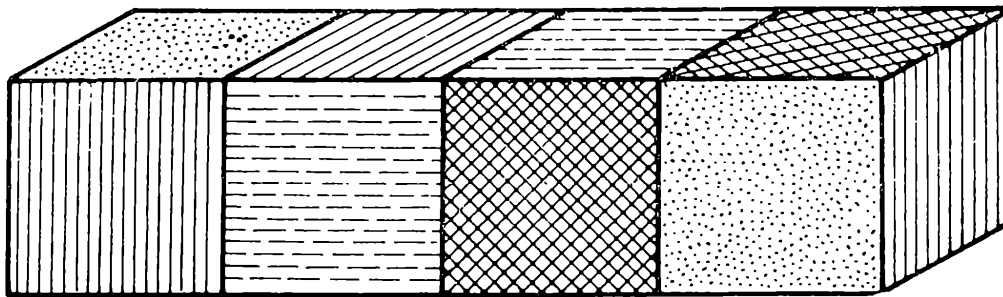


matematika

Hlavlom s barevnými kostkami

RNDr. BOHDAN ZELINKA, CSc., VŠST Liberec

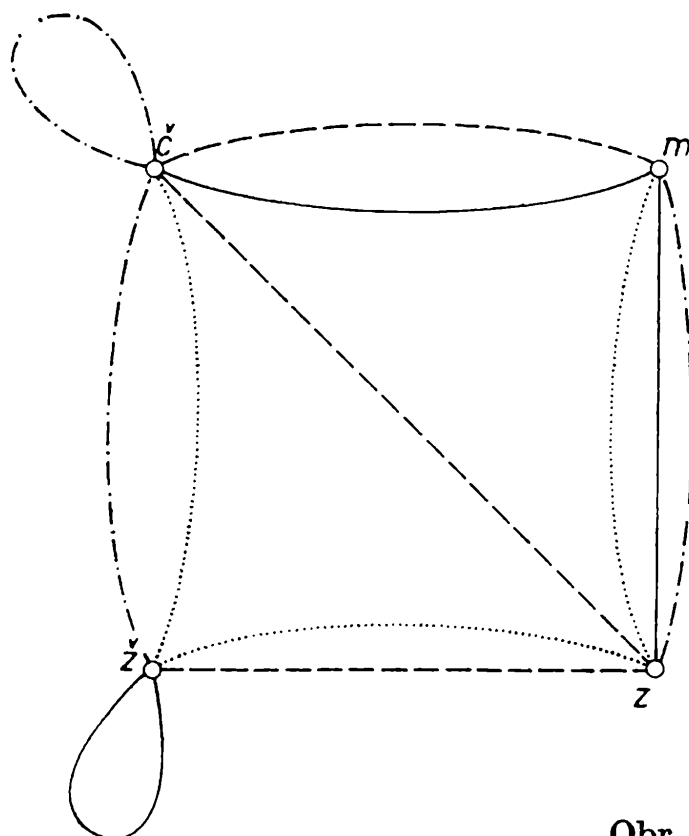
V poslední době se mezi různými hlavlomy prodávány v obchodech objevily i kostky (krychle) s různě zbarvenými stěnami. Krychle jsou čtyři a na jejich stěnách se vyskytují čtyři barvy: červená, modrá, zelená a žlutá. Úkolem je srovnat krychle do řady, tj. vytvořit z nich kvádr s rozměry $4 \times 1 \times 1$ tak, aby se na každé obdélníkové stěně kvádrů vyskytovaly všechny čtyři barvy (obr. 1).



Obr. 1

Tento hlavlom lze řešit pomocí grafů, jejichž konstrukci si popíšeme. Nejprve uspořádáme krychle v libovolném pořadí, tj. označme je symboly K_1, K_2, K_3, K_4 ; k označení libovolné krychle použijeme symbolu K_i , kde $i = 1, 2, 3, 4$. Sestrojíme graf G , jehož uzly jsou $\check{c}, m, z, \check{z}$ a odpovídají barvám s příslušným začátečním písmenem. Hrany grafu G budou znázorňovat dvojice protilehlých stěn jednotlivých krychlí; hrany odpovídající jedné krychli odlišíme v grafu od hran odpovídajících ostatním krychlím (viz plné, čárkované, čerchované a tečkované oblouky na obr. 2). Protože na každé krychli jsou tři dvojice protilehlých stěn, obsahuje graf celkem 12 hran rozdělených do čtyř tříd po třech hranách. Hrana patřící do i -té třídy spojuje dva uzly x, y grafu G právě tehdy, když se na i -té krychli K_i vyskytuje dvojice protilehlých stěn majících barvy x, y . Je zřejmé, že v grafu G mohou existovat smyčky i vícenásobné hrany, dokonce mohou být dva uzly spojeny i více než jednou hranou téže třídy.

Předpokládejme, že máme sestaven graf G odpovídající dané čtveřici krychlí a že máme hlavlom vyřešen, tj. máme sestaven kvádr s požadovanými vlastnostmi. Předpokládejme dále, že tento kvádr leží na stole



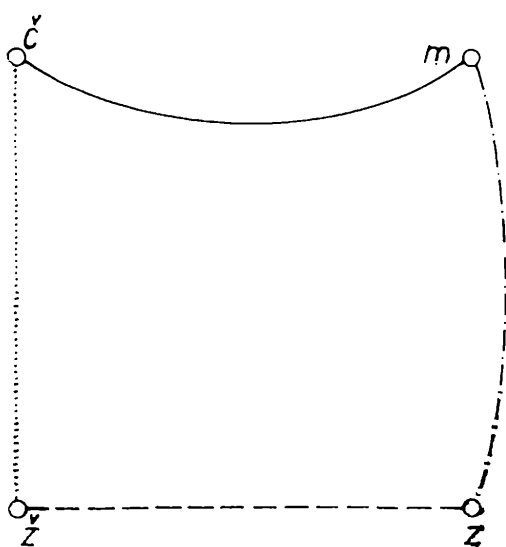
Obr. 2

a že tedy můžeme mluvit o stěně dolní, horní, přední a zadní, které mají vesměs rozměry 4×1 . Podobně nazýváme stěny jednotlivých krychlí tvořící tyto stěny kvádru. Zorientujeme hrany grafu G odpovídající dvojicím horních a dolních stěn krychlí tak, že je-li na i -té krychli horní stěna s barvou x a dolní s barvou y , připojíme k příslušné hraně i -té třídy šipku směřující od uzlu x k uzlu y . Graf vytvořený takto zorientovanými hranami obsahuje všechny uzly grafu G , z nichž každý je počátečním uzlem právě jedné hrany a rovněž koncovým uzlem právě jedné hrany; přitom patří každá hrana tohoto orientovaného grafu do jiné třídy než ostatní hrany.

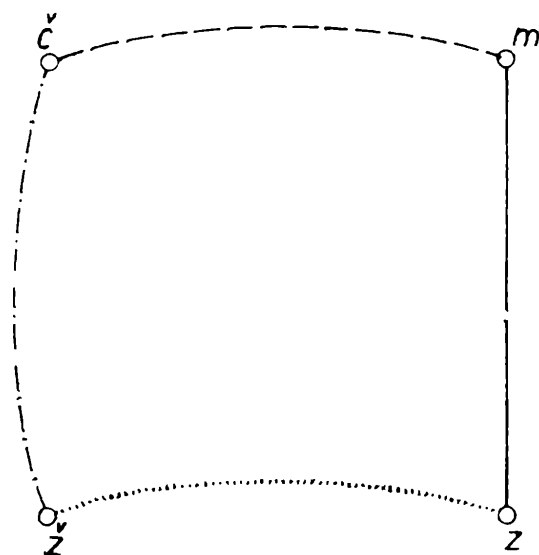
Obr. 3 ukazuje dva takové podgrafy grafu G , šipky nejsou zakresleny; je zřejmé, že po zrušení orientace hran dostaneme pravidelný neorientovaný graf s uzly vesměs druhého stupně, který má touž množinu uzlů jako graf G , jde o tzv. kvadratický faktor grafu G . Dvojici horní a dolní stěny požadovaného kvádru tedy odpovídá kvadratický faktor grafu G , jehož každá hrana patří do jiné třídy. Provedeme-li obdobnou úvahu pro přední a zadní stěnu kvádru, dostaneme v grafu G druhý kvadratický faktor, jehož každá hrana patří do jiné třídy hran; přitom jsou oba faktory hranově disjunktí. Má-li tedy úloha řešení, existují v grafu G dva hranově disjunktí kvadratické faktory, z nichž každý obsahuje právě jednu hranu každé třídy hran.

Snadno zdůvodníme, že platí obrácená věta: *existují-li v grafu G přiřazeném dané čtveřici krychlí dva hranově disjunktí kvadratické faktory, z nichž každý obsahuje právě jednu hranu každé třídy hran, pak má hlavo-*

lam řešení. Označme tyto faktory písmeny F_1, F_2 a popišme postup, kterým získáme řešení hlavolamu. Hrany faktoru F_1 zorientujme tak, aby se každá jeho kružnice stala uzavřeným orientovaným sledem; hraně i - té třídy směřující od uzlu α k uzlu γ pak odpovídá poloha i -té krychle, při které má její horní stěna barvu x a dolní barvu y . Provedeme-li pro to každou hranu faktoru F_1 a složíme-li z krychlí kvádr, dostaneme na horní i dolní stěně všechny čtyři barvy. Obdobným způsobem pracujeme s faktorem F_2 , jeho hraně i -té třídy směřující od uzlu x k uzlu z přiřadíme tu polohu i -té krychle, při které má přední stěna barvu x a zadní barvu z , ale barvy horní a dolní stěny krychle K_i se nezmění (krychli otáčíme jen kolem svislé osy). Tak získáme řešení hlavolamu.



Obr. 3a



Obr. 3b

V případě, že máte sadu čtyř krychlí vybarvených tak, jak ukazuje obr. 2, je řešením hlavolamu kvádr, na jehož horní stěně jsou barvy v pořadí červená, zelená, modrá, žlutá, na dolní stěně modrá, žlutá, zelená, červená, na přední stěně modrá, červená, žlutá, zelená a na zadní stěně zelená, modrá, červená, žlutá. Další řešení úlohy získáte např. přeskupením krychlí, záměnou protilehlých stěn (každou krychli otočíte o 180° kolem svislé osy) nebo otočením kvádru podle jeho podélné osy.

Popsané kvadratické faktory grafu G vyhledáváme při tak malém počtu hran zkusmo, systematicky probereme jednotlivé možnosti. Uvedené metody lze použít i v případech, kdy počet krychlí a barev jejich stěn je jiný než čtyři; dostáváme pak pouze grafy s jiným počtem uzlů a tříd hran, jinak je postup stejný.

Skládání kruhových zobrazení

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

(dokončení)

B. Stejnolehlost (homotetie) se středem v počátku a koeficientem k (k je reálné číslo) má rovnici ... $z' = k \cdot z$,

stejnolehlost se středem v bodě P má rovnici ... $z' - p = k \cdot (z - p)$, kde p je komplexní číslo příslušné bodu P .

Složením stejnolehlosti o středu v počátku a koef. k ($k \neq 0$, $k \neq 1$) a posunutí určeném kompl. číslem b dostaneme zobrazení

$$z' = k \cdot z + b,$$

což je *stejnolehlost* se středem v bodě Z ... $z = \frac{b}{1 - k}$ a koef. k .

Toto zobrazení je zvláštním případem zobrazení daného rovnicí

$$z' = az + b, \quad (4)$$

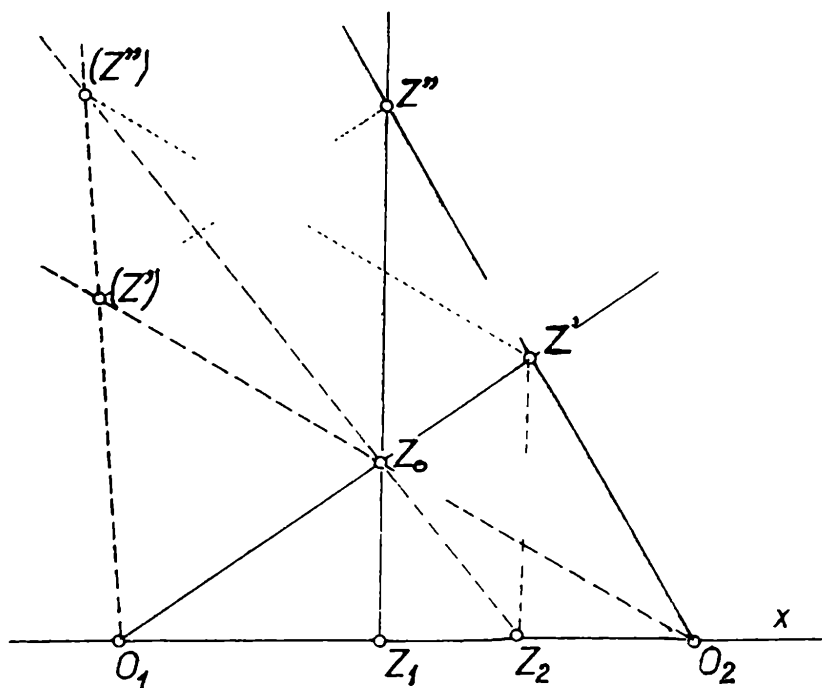
v níž a , b jsou komplexní čísla. Zobrazení (4) vznikne složením rotace kolem počátku, určené kompl. jednotkou t , stejnolehlostí se středem v počátku a koef. k ($a = k \cdot t$) a posunutí daného kompl. číslem b . Zobrazení určené rovnicí (4) nazveme *přímým podobným zobrazením* nebo *přímou podobností*. Složíme-li zobrazení (4) ještě se souměrností podle osy x , dostaneme *nepřímé podobné zobrazení (nepřímou podobnost)*, které je vyjádřeno rovnicí

$$z' = a \cdot \bar{z} + b. \quad (4')$$

Snadno si můžeme ověřit, že všechna zobrazení daná rovnicí (4) splňují vlastnosti uvedené na str. 67, což znamená, že *množina všech přímých podobných zobrazení je grupou (vzhledem ke skládání těchto zobrazení)*. Naproti tomu množina všech zobrazení daných rovnicí (4') *není grupou*. Je dále zřejmé, že *složením libovolného počtu přímých podobností dostaneme vždy přímou podobnost. Složením sudého počtu nepřímých podobností dostaneme přímou podobnost a složením lichého počtu nepřímých podobností dostaneme nepřímou podobnost.*

Z rovnice (4) a (4') plyne, že každou *přímou podobnost* můžeme rozložit v otočení a stejnolehlost podle téhož středu a posunutí a každou *nepřímou podobnost* můžeme osovou souměrností převést v přímou podobnost a pak ji rozložit uvedeným způsobem.

*Příklad 3. Máme určit samodružné body zobrazení $H_1 * H_2$ a $H_2 * H_1$, která vzniknou složením dvou stejnolehlostí o různých středech O_1 , O_2 a koef. k_1 , k_2 .*



Obr. 3

Bod O_1 zvolíme v počátku soustavy souřadnic a bod O_2 na ose x tak, aby $O_1O_2 = p$. Rovnice těchto stejnoolehlostí jsou:

$$H_1 \dots z' = k_1 z ; \quad H_2 \dots z' - p = k_2(z - p) ,$$

k_1, k_2, p jsou reálná čísla.

Složené zobrazení $H_1 * H_2$ je: $z'' = k_1 k_2 z + p(1 - k_2)$, což je (pokud $k_1 k_2 \neq 1$) stejnoolehlost. Samodružný bod Z_1 tohoto složeného zobrazení

je dán číslem $z_1 = \frac{p(1 - k_2)}{1 - k_1 k_2}$, $k_1 k_2 \neq 1$

a je středem výsledné stejnoolehlosti.

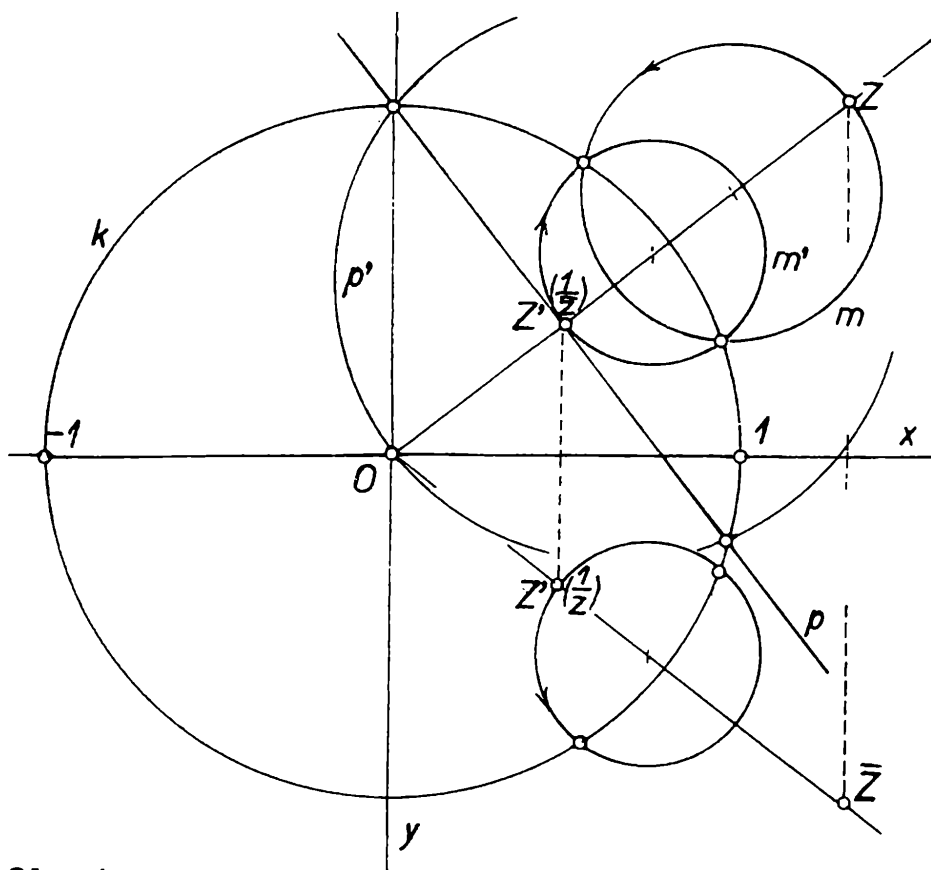
Složením uvedených stejnoolehlostí v obráceném pořadí dostáváme $H_2 * H_1 \dots z'' = k_1 k_2 z + p k_1(1 - k_2)$, což je stejnoolehlost se středem v bo-

dě $Z_2 : z_2 = \frac{p k_1(1 - k_2)}{1 - k_1 k_2}$, $k_1 k_2 \neq 1$

Středů Z_1, Z_2 obou výsledných stejnoolehlostí leží na přímce spojující středy daných stejnoolehlostí O_1, O_2 a odpovídají si v těchto stejnoolehlostech. Platí totiž (viz obr. 3)

$$O_1 Z_2 : O_1 Z_1 = k_1 ; \quad O_2 Z_2 : O_2 Z_1 = k_2 .$$

Je-li $k_1 k_2 = 1$, není bod $Z_1 \equiv Z_2$ definován (je nevlastním bodem přímky $O_1 O_2$). Složením těchto stejnoolehlostí je pak posunutí ve směru $O_1 O_2$. Závěr: Složením dvou stejnoolehlostí o různých středech stejnoolehlosti je buď stejnoolehlost, jejíž střed leží na přímce spojující středy daných stejnoolehlostí a jejíž koeficient se rovná součinu koeficientů daných stejnoolehlostí, nebo (ve zvláštním případě) posunutí ve směru přímky, na níž leží středy daných stejnoolehlostí.



Obr. 4

C. V dosud uvedených zobrazeních je vždy obrazem přímky přímka a obrazem kružnice opět kružnice, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením z transformačních rovnic zobrazení za proměnné do rovnice přímky resp. kružnice. V dalších zobrazeních, která uvedeme, může být obrazem přímky kružnice nebo přímka a obrazem kružnice kružnice nebo přímka.

Tato zobrazení mají nejjednodušší rovnice:

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} \quad (5); \quad z' = \frac{1}{z} \quad (6)$$

V zobrazení (5), které nazýváme *kruhovou inverzí* (o základní kružnici $z \cdot \bar{z} = 1$) jsou všechny body kružnice $z \cdot \bar{z} = 1$ samodružné. V zobrazení (6) jsou samodružnými body pouze dva body osy x ležící na jednotkové kružnici se středem v počátku.

V kruhové inverzi (5) je každému bodu $Z \neq 0$ přiřazen právě jeden bod Z' roviny na polopřímce OZ (viz obr. 4) tak, aby $OZ' \cdot OZ = 1$.

Abychom ukázali, že obrazem přímky v tomto zobrazení je kružnice nebo přímka a obrazem kružnice opět kružnice nebo přímka, vyjděme ze společné rovnice

$$a\bar{z}z + \bar{b}z + \bar{b}z + c = 0, \quad (7)$$

kde a, c jsou reálná, b komplexní; rovnice (7) vyjadřuje přímku, je-li $a = 0$ a kružnici, je-li $a \neq 0$ a $b\bar{b} - ac > 0$.

Dosadíme-li do (7) za $z = 1/z'$, dostaneme po vynechání čárek

$$a + \bar{b}z + b\bar{z} + cz\bar{z} = 0 \quad (7')$$

Z této rovnice plyne:

Je-li $a = 0$, $c \neq 0$ pak obrazem přímky o rovnici $\bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$ je kružnice o rovnici $\bar{b}z + b\bar{z} + cz\bar{z} = 0$ procházející počátkem a (jak se snadno přesvědčíme) průsečíky dané přímky se základní kružnicí $z\bar{z} = 1$, tj. bo-

$$\text{dy } z_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4b\bar{b}}}{2\bar{b}}$$

Obrazem kružnice, která prochází počátkem, je přímka určená průsečíky dané kružnice se základní kružnicí inverse.

Snadno dokážete další věty:

Obrazem kružnice, která neprochází počátkem ($a \neq 0$), je kružnice, která se s danou kružnicí protíná na základní kružnici inverse.

Obrazem přímky procházející počátkem ($a = 0$, $c = 0$) je přímka totožná s danou přímkou. Jsou tudíž přímky procházející počátkem samodružné jako celek nikoliv jako množiny samodružných bodů.

V tomto článku se nechceme zabývat dalšími zajímavými vlastnostmi tohoto zobrazení. Budeme jen sledovat ty vlastnosti, jimiž jsme se zabývali v předcházejících odstavcích.

Především je zřejmé, že kruhová inverse náleží mezi zobrazení nepřímá. Složíme-li dvě kruhové inverse o téže středu, jejichž rovnice jsou $z' = k_1/\bar{z}$, $z' = k_2/\bar{z}$, kde čísla k_1 , k_2 značí druhé mocniny poloměrů základních (samodružných) kružnic inverse, dostaneme zobrazení

$$z' = \frac{k_1}{k_2} z,$$

což v případě $k_1 \neq k_2$ je rovnice stejnolehlosti, v případě $k_1 = k_2$ rovnice identity. Dostáváme tudíž: Složením dvou kruhových inverzí o společném středu dostaneme buď stejnolehlost podle společného středu nebo identitu.

Složením kruhové inverse (5) a souměrnosti podle osy x dostaneme zobrazení (6), které je *přímým zobrazením*. V tomto zobrazení bodu Z přísluší bod Z' , který dostaneme tak, že nejprve sestrojíme k bodu Z bod \bar{Z} souměrně sdružený podle osy x a k tomuto bodu pak určíme bod Z' na polopřímce $O\bar{Z}$, aby $OZ' \cdot O\bar{Z} = 1$ (viz obr. 4)

Nyní bychom mohli skládat tato zobrazení s dříve uvažovanými zobrazeními a hledat samodružné body výsledných zobrazení. Uvedeme jen složení zobrazení určených rovnicemi

$$z' = mz + n \quad (m, n \text{ jsou komplexní čísla}),$$

$$z' - z_0 = \frac{k}{z - z_0},$$

z nichž první, jak víme, vyjadřuje *přímé podobné zobrazení* a druhé

kruhovou inverzi se středem v bodě Z_0 a základní kružnicí inverse o polo-
měru \sqrt{k} , $k > 0$. Jejich složením dospějeme po provedené úpravě k rovni-
ci tvaru

$$z' = \frac{\overline{az + b}}{\overline{cz + d}},$$

kde a, b, c, d jsou komplexní čísla, o nichž platí $ad - bc \neq 0$.

Rovnice (8) značí *nejobecnější vyjádření všech nepřímých kruhových zobrazení*.

Nahradíme-li v této rovnici z místo \overline{z} , dostaneme rovnici

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (8')$$

která značí *nejobecnější vyjádření všech přímých kruhových zobrazení*.

Lze dokázat, že jediné množina všech přímých kruhových zobrazení (8') splňuje všechny podmínky 1–4 uvedené na str. 67. To znamená, že *jedině přímá kruhová zobrazení tvoří grupu vzhledem ke skládání těchto zobrazení* (viz cvič. př. 5). *Všechny grupy přímých zobrazení, s nimiž jste se v tomto článku seznámili, jsou podgrupami této grupy všech přímých kruhových zobrazení.*

Cvičení

1. Dokažte, že a) množina všech rotací kolem počátku, b) množina všech posunutí, c) množina všech přímých podobností je grupou vzhledem ke skládání těchto zobrazení.
2. Najděte některá přímá zobrazení, která tvoří komutativní grupy.
3. Složte tři rotace o témže počátku a dokažte, že platí pro jejich skládání *zákon asociativní*, tj. $(R_1 * R_2) * R_3 = R_1 * (R_2 * R_3)$; dokažte tuto vlastnost i pro jiné grupy přímých zobrazení.
4. Dokažte, že a) složením stejnolehlosti a posunutí, b) složením tří stejnolehlostí o různých středech dostaneme stejnolehlost nebo posunutí.
5. Dokažte, že zobrazení dané rovnicí $z' = \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$ je *grupou kruhových zobrazení*.
6. Přesvědčte se, že zobrazení (8) a (8') jsou kruhová zobrazení. Určete samodružné body těchto zobrazení.
7. Jaká zobrazení dostanete složením zobrazení:

$$\text{a) } z' = az + b, z' = \frac{k}{z}, \text{ b) } z' = kz + b, z' = \frac{k}{z}, \text{ c) } z' = tz + p, z' - p = \\ = k(z - p), \text{ d) } z' = az + b, z' - p = \frac{k}{z - p}, \text{ kde } a, b, \text{ jsou komplexní}$$

čísla, k, p jsou reálná čísla, t je komplexní jednotka.

Určete samodružné prvky těchto složených zobrazení a rozhodněte, která z těchto zobrazení jsou grupy a o kterou grupu jde.

8. Ke kružnici $|z - r| = r$, $r > 0$, určete odpovídající kružnici ve stejno-
lehlosti se středem v bodě O_1 určeném číslem $[1 + i]$ a koef. $k_1 = 1/2$ a k
této kružnici pak stejnolehlou kružnici podle středu O_2 určeného reálným
číslem $[2r]$ a koef. stejnolehlosti $k_2 = 2$. Dokažte, že výsledná kružnice
se dostane z dané kružnice otočením kolem společného středu v počátku
o úhel $\alpha = \pi/2$.
9. Určete množinu všech bodů Z , které po otočení kolem bodu O_1 o úhel $+\alpha$
přejdou do bodů Z' , a tyto body po otočení kolem bodu $O_2 \neq O_1$ o úhel
 $+\beta$ přejdou do bodů Z'' té vlastnosti, že body Z, Z', Z'' leží v přímce.
[Užijte podmínky $\frac{z'' - z}{z'' - z'} = \frac{\bar{z}'' - \bar{z}}{\bar{z}'' - \bar{z}'}$].
10. V „posunutém zrcadlení podle osy x “ je přiřazen bodu Z bod Z' tak, že
k bodu Z určíme nejprve bod \bar{Z} souměrně sdružený podle osy x a pak k
bodům \bar{Z} určíme bod Z' v posunutí ve směru osy x . Máme určit množinu
všech bodů Z , kterým v uvedeném zobrazení odpovídají body Z' té vlast-
nosti, že přímky ZZ' procházejí pevným bodem $M \neq 0$ na ose y . Posu-
nutí je určeno reál. číslem p . [Užijte podmínky z př. 9].

Jak se předseda nudil

Dr. ANTONÍN VRBA, Praha

V článku *O chytrém předsedovi* v 2. čísle našeho časopisu jsme se sezná-
mili s matematicky nadaným předsedou jedné tělovýchovné jednoty
a s tzv. *principem inkluze a exkluze*:

Budte dány konečné množiny M_1, M_2, \dots, M_k . Symbolem $|R|$ značme
počet prvků množiny R . Pro $j = 1, 2, \dots, k$ označme

$$s_j = \sum |M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}|$$

(sčítáme přes všechny j -členné kombinace $\{r_1, r_2, \dots, r_j\}$ indexů $1, 2, \dots, k$).
Pak platí

$$|M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| = s_1 - s_2 + \dots + (-1)^{k+1} s_k.$$

Předseda je též vynikajícím lehkotletickým odborníkem a tak občas
jezdí s našimi atlety k mezinárodním utkáním jak trenér. Nedávno byli
na závodech, jichž se zúčastnilo $n > 2$ států. Na závěr pozval starosta
pořádajícího města z každé účastníci se země po jednom trenérovi a zá-
vodníkovi na menší slavnost.

Nejprve se podával oběd, při kterém se sedělo u dlouhého stolu. V čelech
seděli starosta s chotí, po pravé straně závodníci a po levé trenéři, žádná
židle nezůstala volná. Ze společenských důvodů byli hosté rozesazeni
tak, aby žádní dva krajané neseseděli proti sobě.

Po obědě odjeli sportovci na výlet k moři, zatímco každý trenér se zúčastnil jedné z $e \leq n$ připravených exkurzí do městských sportovních zařízení.

Den byl zakončen večerí, při níž seděli trenéři a závodníci u kulatého stolu s $2n$ židlemi. Přitom se střídali závodníci s trenéry a opět ze společenských důvodů byli rozesazeni tak, aby žádní dva krajané neseděli vedle sebe. Na to předseda doplatil: posadili ho mezi tureckého mílaře a maďarskou výškařku, kteří sice vynikali ve svých disciplínách, ale, jak předseda záhy zjistil, nešlo se s nimi dorozumět žádným ze světových jazyků. Předseda se tedy brzo začal nudit a z dlouhé chvíle uvažoval:

1. Kolika způsoby mohli být podle uvedených pravidel rozesazeni hosté při obědě?

Trenéry lze rozesadit $n!$ způsoby. Uvažujme jedno jejich pevné rozesazení a ptejme se, kolika způsoby lze proti nim rozesadit závodníky. Očíslujme trenéry od 1 do n a pro $i = 1, 2, \dots, n$ označme M_i množinu všech rozesazení závodníků, při nichž proti i -tému trenérovi sedí jeho krajan. K určení počtu všech nevhodných rozesazení se nabízí princip inkluze a exkluze. Buď $1 \leq j \leq n$ a spočtěme číslo s_j . Sčítanec $|M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}|$ odpovídá počtu všech rozesazení závodníků, při nichž trenéři r_1, r_2, \dots, r_j sedí proti svým krajanům, a je tedy zřejmě roven $(n - j)!$. Všechny sčítance jsou stejné, je jich $\binom{n}{j}$, a tedy

$$s_j = \binom{n}{j} (n - j)! = \frac{n!}{j!}.$$

Ze všech $n!$ rozesazení závodníků je tedy právě

$$n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \right)$$

nevhodných a tak hosté mohli k obědu zasednout

$$(n!)^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

způsoby podle uvedených pravidel.

Úspěšné zodpovězení této otázky vrátilo předsedovi dobrou náladu a opět se pokusil o konverzaci se svou sousedkou. Vzpomněl si na několik maďarských výrazů, které kdysi pochytil, a pokusil se z nich sestavit otázku, který den že se bude maďarská výprava vracet do vlasti. Maďarka po krátkém zaváhání pravila „Igen“, což znamená ano. A tak se předseda raději opět ponořil do svých úvah:

2. Kolika způsoby se mohli trenéři rozdělit na exkurze tak, aby se ze zdvořilostních důvodů každé z exkurzí někdo zúčastnil?

Očíslujme exkurze do 1 do e . Pro $i = 1, 2, \dots, e$ označme M_i množinu všech rozdělení trenérů, při nichž se nikdo nezúčastní i -té exkurze. Podle principu inkluze a exkluze určíme počet nezdvořilých rozdělení. Buď $1 \leq j \leq e$ a spočtěme číslo s_j . Sčítanec $|M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}|$ odpovídá počtu všech rozdělení, při nichž se exkurzí r_1, r_2, \dots, r_j nikdo nezúčastní. Každý z n trenérů má pak na vybranou jednu z $e-j$ exkurzí a mohou se tedy rozdělit $(e-j)^n$ způsoby. To platí pro každý z $\binom{e}{j}$ sčítanců a tedy

$$s_j = \binom{e}{j} (e-j)^n$$

Nezdvořilých rozdělení tedy bude

$$\sum_{j=1}^e (-1)^{j+1} \binom{e}{j} (e-j)^n.$$

Ze všech e^n rozdělení proto

$$\sum_{j=0}^e (-1)^j \binom{e}{j} (e-j)^n$$

vyhovuje uvedenému požadavku. (Klademe $\binom{e}{0} = 1$.)

Radostný pocit z úspěšně zodpovězené otázky byl ještě umocněn skutečností, že se předsedova sousedka mezitím zabrala do živého rozhovoru s americkým ternérem, který vedle ní seděl z druhé strany. Problémy se společenskou konverzací byly tak pro předsedu vyřešeny a mohl se pustit do dalšího oříšku:

3. Kolika způsoby mohli být podle uvedených pravidel rozesazeni hosté při večeři?

Hledané číslo označme m_n . Trenéry lze ob židli rozesadit $2 \cdot n!$ způsoby. Uvažujme jedno pevné rozesazení trenérů a hledejme počet q_n všech rozesazení závodníků mezi ně, při nichž nebudou žádní dva krajané sedět vedle sebe. Zřejmě bude

$$m_n = 2 \cdot n! q_n.$$

Očíslujme trenéry od 1 do n a pro $i = 1, 2, \dots, n$ označme M_i množinu všech rozesazení závodníků, při nichž i -tý trenér sedí vedle svého krajana. Podle principu inkluze a exkluze budeme opět hledat počet všech nevhodných rozesazení závodníků. Buď $1 \leq j \leq n$ a počítejme číslo s_j .

Nejprve se zabývejme sčítancem $|M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}|$. Množina $M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}$ se skládá ze všech rozesazení n závodníků, při

nichž trenéři r_1, r_2, \dots, r_j sedí vedle svých krajanů. Počet všech způsobů, jimiž lze vedle trenérů r_1, r_2, \dots, r_j rozesadit j jejich krajanů, označme $q(r_1, r_2, \dots, r_j)$. Spolu s každým rozesazením uvedená j -tice závodníků uvažujeme všechna rozesazení všech n závodníků, při nichž uvedená j -tice zůstává na svých místech. Vidíme, že se množina $M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}$ rozpadá na $q(r_1, r_2, \dots, r_j)$ navzájem disjunktivních podmnožin, z nichž každá má $(n - j)!$ prvků (klademe $0! = 1$). Je tedy

$$|M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}| = (n - j)! q(r_1, r_2, \dots, r_j)$$

a

$$s_j = (n - 1)! q_{n,j},$$

kde $q_{n,j}$ je součet čísel $q(r_1, r_2, \dots, r_j)$ přes všechny j -členné kombinace $\{r_1, r_2, \dots, r_j\}$, neboli souhrnný počet všech rozesazení všech j -tic závodníků vedle jejich trenérů.

Představme si, jak nějaká j -tice závodníků sedí vedle svých krajanů a vyznačme mezery mezi židlemi krajanů. Pak nebudou žádné dvě vyznačené mezery vedle sebe; to by totiž znamenalo, že buď nějaký trenér nebo nějaký závodník sousedí z obou stran se svým krajanem. Obráceně: Vyznačme j mezer mezi židlemi tak, aby žádné dvě z nich nebyly vedle sebe. Vyznačené mezery pak budou mezi j páry sousedních židlí, z nichž j židlí je obsazeno trenéry a na j židlí se mohou vedle nich posadit jejich krajané. Číslo $q_{n,j}$ tedy udává, kolika způsoby lze z $2n$ mezer vybrat j -člennou kombinaci tak, aby žádné dvě vybrané mezery nebyly vedle sebe.

Odhlédněme však od mezer mezi židlemi a číslo $q_{n,j}$ hledejme třeba ve formě počtu všech způsobů, kolika lze do $2n$ -místního kruhového schématu rozmístit j znamének $+$ a $2n - j$ znamének $-$ tak, aby žádná dvě $+$ nesousedila. Zde poněkud vadí „uzavřenost“ kruhu znamének. Lépe by se nám jistě hledal počet $z(a, b)$ všech způsobů, kolika lze a znamének $+$ a b znamének $-$ sestavit do řádku tak, aby žádná dvě $+$ nesousedila. Hledání čísla $q_{n,j}$ však na tuto úlohu snadno převedeme. Zvolme určité pevné místo v kruhovém schématu a vyjádřeme nejprve počet všech uvažovaných kruhů znamének, jež mají na tomto místě $+$, a pak těch, co na něm mají $-$. Dostaneme

$$q_{n,j} = z(j - 1, 2n - j - 2) + z(j, 2n - j - 1).$$

Budeme hledat číslo $z(a, b)$. Každý popsaný řádek můžeme zřejmě sestavit tak, že nejprve a znamének $+$ oddělíme $a - 1$ znaménky $-$ a pak ještě nějak rozmístíme zbylých $b - a + 1$ znamének $-$ do $a + 1$ úseků, které jsou před, mezi a za znaménky $+$.

Kolika způsoby lze c stejných znamének rozdělit do d úseků? Máme $d - 1$ hranic mezi úseky. Rozdělování můžeme chápat tak, že z řádku $c + d - 1$ symbolů jich $d - 1$ prohlásíme za hranice úseků, v nichž tak

bude rozděleno ostatních c symbolů, které budeme považovat za znaménka. Výběr lze ovšem uskutečnit právě

$$\binom{c+d-1}{d-1} = \binom{c+d-1}{c}$$

různými způsoby.

Je tedy

$$z(a,b) = \binom{b+1}{a},$$

$$q_{n,j} = \binom{2n-j-1}{j-1} + \binom{2n-j}{j} = \frac{2n}{2n-j} \binom{2n-j}{j}$$

a konečně

$$s_j = (n-j)! \frac{2n}{2n-j} \binom{2n-j}{j}.$$

Podle principu inkluze a exkluze je ze všech $n!$ rozesazení závodníků právě

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} (n-j)! \frac{2n}{2n-j} \binom{2n-j}{j}$$

nevhodných. Hosté mohli tedy k večeři zasednout podle uvedených pravidel

$$2 \cdot n! \left[n! + \sum_{j=1}^n (-1)^j (n-j)! \frac{2n}{2n-j} \binom{2n-j}{j} \right]$$

způsoby.

Mezitím slavnost skončila a hosté se rozcházel. Předseda byl člověk velmi společenský a zvláště rád besedoval se zajímavými lidmi. Teď proklínal osud, který mu ze všech $\binom{n-1}{2}$ možných dvojic sousedů vybral zrovna lidi, s nimiž se nemohl dorozumět, a donutil ho bavit se tak divným způsobem. Nedalo mu to a na zpáteční cestě se zeptal amerického trenéra, jakým jazykem se s Maďarkou domluvil. Kupodivu to bylo slovensky, oba měli totiž předky ze Slovenska.

Přibližný výpočet délky elipsy

RNDr. MILAN KOMAN, CSc., Praha

Pro délku d kružnice k s poloměrem r znáte velmi dobře vzorec

$$d = 2\pi r$$

Pro výpočet délky d elipsy E s poloosami a, b není znám podobný jednoduchý vzorec. Užitím integrálního počtu lze však dokázat, že d je limitou následující posloupnosti:

$$\begin{aligned}d_0 &= \pi(a + b), \\d_1 &= d_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \right], \\d_2 &= d_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 \right], \\d_3 &= d_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \right. \\&\quad \left. + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 \right],\end{aligned}$$

Můžeme proto k přibližnému výpočtu využít některého z prvních členů posloupnosti. Pro stanovení délky d elipsy E lze však použít také některého z těchto přibližných vzorců

$$d \approx \pi \left\{ \frac{3}{2} (a + b) - \sqrt{ab} \right\}, \quad (1)$$

respektive

$$d \approx \frac{\pi}{8} \left[9(a + b) - 5\sqrt{ab} + 3 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right]. \quad (2)$$

Výhodou těchto vzorců je např. to, že dávají možnost přibližné rektifikace elipsy pomocí kružítka a pravítka (samozřejmě za předpokladu, že ke konstrukci úsečky délky $\pi\rho$, kde

$$\rho = \frac{3}{2} (a + b) - \sqrt{ab},$$

respektive

$$e = \frac{1}{8} \left[9(a + b) - 5\sqrt{ab} + 3\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right]$$

užijeme některé vhodné přibližné konstrukce, např. známé Kochaňského konstrukce).

Pro hodnoty $a = 1$, $b = 0,5$ je délka elipsy E (s přesností na 5 platných číslic) rovna

$$d \doteq 4,8442 .$$

Zjistěte, který ze vzorců (1), (2) je pro tyto hodnoty přesnější, a který člen posloupnosti d_0, d_1, d_2 , musíte určit, chcete-li dostat ještě přesnější výsledek.

fyzika

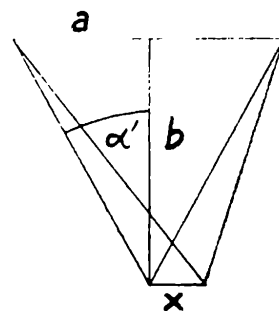
Ohyb a optický obraz

RNDr. BOHUMIL JUREK, DrSc., Praha

Když se laik dozví o nějakém dalekohledu nebo mikroskopu, obvykle se ptá, kolikrát zvětšuje. Podobnou otázku měli na mysli konstruktéři zobrazovacích přístrojů ještě v první polovině minulého století. Ještě Amici, když r. 1818 podával zprávu o svém typu zrcadlového objektivu (viz *Rozhledy m. f.* roč. 49, str. 364), zdůrazňoval jeho velké zvětšení. Dnes se nám zdá hodnocení optického přístroje podle zvětšení, jehož s ním můžeme dosáhnout, poněkud naivní. Samo stupňování zvětšení totiž nestačí ke zvýšení výkonnosti. Ukázalo se, že značná zvětšení, získaná volbou krátkoohniskových okulárů, mnohdy nevedou k rozmnožení informací o předmětu. Nepřinášejí nám další podrobnosti; detaily, pozorované již při menších zvětšeních, jsou teď větší, ale zorné pole je malé a obraz nepřehledný. Velké zvětšení je v takovém případě nevýhodné. Tato skutečnost se zprvu zdála záhadnou. Teprve Ernst Abbe, který se okolo r. 1870 zabýval soustavným studiem vlastností mikroskopu, vysvětlil toto omezení výkonnosti vlnivou povahou světla.

Vlnová teorie světla, poprvé vypracovaná Christianem Huygensem (1629—1695), přinesla nové prvky do teorie zobrazení. Geometrická optika, jejíž základy podal Jan Kepler v letech 1604 a 1611, je založena na představě, že světlo se šíří stejnorodým prostředím v přímkách, zvaných světelné paprsky. Bodový (stigmatický) skutečný obraz bodo-

vého předmětu vzniká, protínají-li se paprsky z předmětu po průchodu zobrazovacím zařízením v jediném bodě. Obrazem bodu je podle tohoto pojetí jediný bod a jeho okolí nemá s obrazem nic společného. Z hlediska vlnové teorie to tak není. Podle vlnové teorie je bodový skutečný obraz charakterizován tím, že se v něm setkává vlnivý pohyb z celého otvoru přístroje v téže fázi. Avšak blízké okolí obrazového bodu také patří k obrazu. Vlnění z různých míst otvoru přístroje se v bodech tohoto okolí sice nesetkává se stejnou fází, ale fáze nejsou tak odlišné, aby se dílčí kmitavé pohyby vzájemně rušily. Ukážeme si na příkladě, jak se můžeme vzdálit z geometrického obrazu, aniž by se vlnění ze vzájemně protilehlých bodů otvoru rušila. Mysleme si dalekohled, zobrazující stigmaticky nekonečně vzdálený bod na optické ose. Všechny útvary si myslíme v jediné rovině, procházející optickou osou, která je rovinou nákresny (obr. 1). Označme a poloměr otvoru, b vzdálenost ohniska od otvoru, α' úhel paprsku s optickou osou, x vzdálenost bodu od optické osy. Před pokládejme stejné plošky na okrajích průměru objektivu. Světelné vlnění, prošlé těmito ploškami, se zruší, když rozdíl fází dosáhne π . V tomto případě bude platit rovnice



Obr. 1

$$\sqrt{(a+x)^2 + b^2} - \sqrt{(a-x)^2 + b^2} = \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

kde λ je vlnová délka použitého světla. Úpravou rovnice (1) dostaneme

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left(\sqrt{1 + \frac{2ax + x^2}{a^2 + b^2}} - \sqrt{1 - \frac{2ax - x^2}{a^2 + b^2}} \right) = \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

Hodnota odmocnin v závorce je blízká 1. Položíme

$$\sqrt{1 + \frac{2ax + x^2}{a^2 + b^2}} = 1 + A_1 \quad (3)$$

$$\sqrt{1 - \frac{2ax - x^2}{a^2 + b^2}} = 1 + A_2 \quad (4)$$

Umocněním obou stran rovnic (3), (4) na druhou dostaneme

$$\frac{2ax + x^2}{a^2 + b^2} = 2A_1 + A_1^2 \quad (5)$$

$$-\frac{2ax - x^2}{a^2 + b^2} = 2A_2 + A_2^2. \quad (6)$$

Veličiny A_1, A_2 jsou malé proti 1, tedy A_1^2, A_2^2 jsou malé proti A_1, A_2 a můžeme je při výpočtu vynechat. Použitím rovnic (3) až (6) nabude rovnice (2) tvaru

$$\frac{2ax}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\lambda}{2}$$

z něhož plyne hodnota

$$x = \frac{\lambda}{4 \sin \alpha'}$$

Teprve když se vzdálíme od optické osy o veličinu x rovnoběžně se spojnicí obou krajních bodů otvoru, dosáhneme fázový rozdíl hodnoty π . Kdybychom uvažovali vzájemné účinky vlnění ze všech míst otvoru, zjistili bychom výpočtem, který zde neprovedeme, že účinky vlnění se vzájemně neruší v kruhu o poloměru

$$r = \frac{0,61 \lambda}{\sin \alpha'} \quad (7)$$

se středem v místě geometrického obrazu. Okolo geometrického bodového obrazu vznikne světlý kruh, který nazýváme *Airyho skvrnou*. Překročíme-li temnou hranici tohoto kruhu, je výsledek skládání vlnivých pohybů zase odlišný od klidového stavu. Je to pochopitelné z faktu, že při fázovém rozdílu $> \pi$ dostáváme znovu nenulovou výslednici. Vzniká tak prvé světlé mezikruží. Takových mezikruží vidíme v obraze svítícího bodu (prakticky také v obraze stálice) několik. Rozměry obrazce závisí podle (7) na vlnové délce světla. Je-li světlo zdroje bílé, nejsou hranice mezi mezikružími černé, ale barevné. Podobný jev pozorujeme také v mikroskopu. Svítícími body mohou v tomto případě být trhliny v tenké kovové vrstvě.

Odchytky od geometrické optiky, způsobené vlnivou povahou světla, nazýváme *ohybem*. Okolnost, že ohybové obrazy blízkých bodů jsou plošné a částečně se překrývají, ovlivňuje výkonnost zobrazovacího přístroje. Předpokládá se v dobré shodě se zkušenostmi, že přístroj může rozlišit obrazy dvou nezávislých bodových zdrojů jen tehdy, spadá-li střed Airyho skvrny jednoho z nich na hranici nebo za hranici Airyho skvrny druhého. Z toho je možné pomocí (7) odvodit nejmenší vzdálenost dvou předmětových bodů, které je možné přístrojem rozlišit. U dalekohledu je to úhel

$$\delta = \frac{0,61 \lambda}{f \sin \alpha'}$$

vyjádřený v radiánech; veličina f je ohnisková vzdálenost objektivu. Jmenovatel zlomku na pravé straně může nabýt u různých typů daleko-

hledových objektivů různých hodnot. U dobře korigovaných objektivů se rovná polovině průměru objektivu. U mikroskopových objektivů předpokládáme

$$r \sin \alpha' = d \sin \alpha,$$

kde d je nejmenší délková vzdálenost rozlišitelných předmětových bodů (přesněji dolní hranice těchto vzdáleností a α polovina vrcholového úhlu využitého paprskového kužele od předmětového bodu na optické ose. Tento vztah je u dobře korigovaných objektivů vždycky splněn. Platí tedy vzhledem k (7) pro mikroskopový objektiv vztah¹⁾

$$d = \frac{0,61 \lambda}{\sin \alpha}.$$

Veličinu δ resp. d nazýváme *mezi rozlišení* objektivu. Její převrácená hodnota se nazývá *rozlišovací schopnost*.

Mez rozlišení je důležitá charakteristika zobrazovacího přístroje a optické laboratoře věnují mnoho péče jejímu měření. Je to zdánlivě jednoduchá úloha. Podle definice meze rozlišení stačí realizovat dva svítící body a podívat se na ně přístrojem. Podle toho by jediná obtíž měření meze rozlišení spočívala v realizaci zdrojů dostatečně malých rozměrů. Avšak jsou tu podstatnější nesnáze. Pozorovatel, zejména ví-li, že předmětem je dvojice svítících bodů, bývá na pochybách, jsou-li jejich obrazy rozlišeny nebo ne. Jakmile je ohybový obraz dvojice bodů protažen, přiklání se k mínění, že jsou body rozlišeny. To je přípustné v astronomii při studiu dvojic stálic (dvojhvězd), které jsou na obloze tak blízko sebe, že jsou za některých okolností nerozlišitelné. Poněvadž se ve vesmíru nesetkáváme s podélnými tělesy, znamená každé protažení obrazu domnělé stálice, že jde vlastně o dvě tělesa. Pozorovatel považuje dvojhvězdu za rozlišenou, dovede-li udat úhel mezi směrem protažení obrazu a spojnicí některé složky dvojhvězdy s Polárkou. Takto astronom rozliší dvojice stálic, vzájemně vzdálené o pouhou polovinu meze rozlišení dalekohledu. Při studiu útvarů, kde jsou možné jak dvojice bodů, tak i krátké čárky, podobné kritérium nestačí. Proto hledáme další způsoby měření meze rozlišení.

Mezi nejoblíbenější pomůcky měření rozlišovací schopnosti, resp. meze rozlišení je periodický čárové test. Je to osnova ekvidistantních rovných světlých pruhů, oddělených temnými mezerami. Pruhy i mezery mají stejné tloušťky. Pro přesná měření je výhodné, nejsou-li hranice mezi pruhy a mezerami ostré, ale je-li průběh jasů sinusovitý. Pruhy považujeme za rozlišené, je-li osvětlení obrazu v místě podélných os světlých pruhů vyšší než na osách mezer. Je-li osvětlení obrazu stejné na podél-

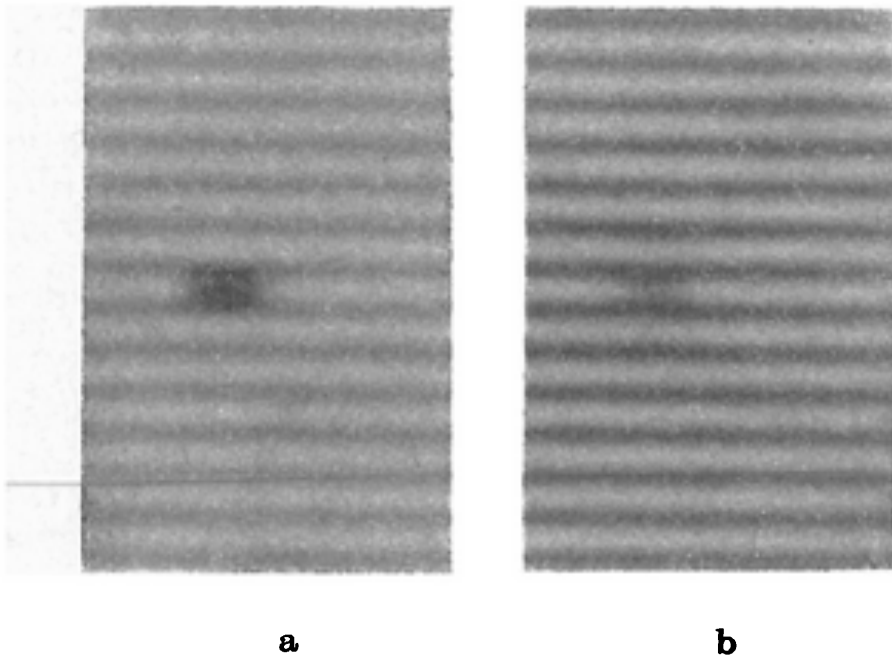
¹⁾ Je-li mezi předmětem a objektivem jiné prostředí než vzduch, je třeba násobit $\sin \alpha$ indexem lomu tohoto prostředí.

ných osách pruhů i mezer, není obraz rozlišen. Vzájemná vzdálenost podélných os pruhů předmětu na rozhraní těchto dvou skupin případů je mezí rozlišení přístroje.

Při tomto způsobu určování meze rozlišení přístroje se setkáváme s další okolností, důležitou pro hodnocení zobrazovacího přístroje. Je to vztah mezi osvětlením různých částí obrazu, popřípadě mezi jasem různých částí předmětu. Úvahy o něm si upřesníme zavedením pojmu *kontrastu*. Jsou-li E_1, E_2 ($E_1 > E_2$) osvětlení (jasy) dvou různých plošek, je jejich kontrast dán výrazem

$$k = \frac{E_1 - E_2}{E_1}$$

Nejvyšší možný kontrast je dán číslem 1. Je to kontrast dvou plošek, z nichž jedna je černá. Nejnižší kontrast je nulový. Je to kontrast dvou stejně osvětlených plošek.



Obr. 2. Přerušovaný pruh. Snímek při středovém zaclonění 50% (a) a při plném otvoru (b).

Optický obraz má vždycky nižší kontrast než předmět. Je to způsobeno jednak rozptylem světla, jednak ohybem. Vliv ohybu se zvětšuje se zmenšující se vzdáleností mezi podrobnostmi. Zmenšujeme-li vzdálenost pruhů periodického čárového testu, zmenšuje se i kontrast jeho obrazu. Mez rozlišení je charakterizována nulovým kontrastem obrazu testu.

Kontrast obrazu je jedním z měřítek kvality zobrazení a tím i výkonnosti přístroje. Tento poznatek lze však uplatňovat velmi opatrně. V nedávné době se ukvapeným hodnocením kontrastu obrazu docházelo k omylům. Uvedu jeden z nich. Od čtyřicátých let tohoto století se šířilo

používání mikroskopových objektivů, složených ze dvou zrcadel (Rozhledy m. f. roč. 49, 364) a současně s tím vznikla otázka, zdali částečné zaclonění jednoho ze zrcadel druhým neškodí kvalitě obrazu. Teorie i pokusy ukázaly, že obraz periodického testu blízko meze rozlišení je u středově zacloněných optických soustav kontrastnější než u soustav s úplně využitým otvorem. Z toho se usuzovalo, že středové zaclonění je příznivé jakosti obrazu. Pozorování různých přemětů však ukázalo, že středové zaclonění nad 30% patrně snižuje jakost obrazu. V čem spočívá tato nesrovnalost, můžeme objasnit jednoduchým pokusem. Vyfotografujeme periodický čárový test s přerušeným pruhem blízky mezi rozlišení, jednou při středovém zaclonění 50%, podruhé při plném otvoru (viz obr. 2). Na snímku získaném při středovém zaclonění 50% jsou pruhy kontrastní, ale přerušení je sotva znatelné, kdežto na snímku při plném otvoru je kontrast menší, ale přerušení zřetelné. Zdánlivá jakost snímku při středovém zaclonění je klamná a jde na účet ohybových jevů.

Tento poznatek neumenšil oblibu periodických čárových testů, ale nebyly dále používány jen testy blízké mezi rozlišení. Studovala se a studuje se závislost kontrastu obrazu na hustotě čar a teprve znalost této závislosti („funkce přenosu kontrastu“) se považuje přinejmenším za povšechnou informaci o kvalitě zobrazení.

Doufám, že těchto několik průhledů do problémů optického zobrazení a ohybu světla poslouží budoucím badatelům a technikům při používání dalekohledů, mikroskopů a fotografických komor, přístrojů, bez nichž se neobejde práce v žádném oboru lidské činnosti.

Problémy s časomírou

ALOIS HALOUZKA, prom. pedagog, Karviná

I. Úvod

Touhou každého mladého člověka je cestovat a prožívat dobrodružství. S cestováním úzce souvisí pojem času a problémy s jeho měřením. Protože studenti nenajdou na řadu otázek týkajících se času odpověď ve středoškolských učebnicích fyziky, pokusím se tímto článkem odpovědět na některé z nich.

Co je to čas?

Čas je míra trvání dějů. Je jednou ze základních fyzikálních veličin soustavy SI, která se trvale a spojitě mění a nelze ji zpětně reprodukovat (proenzivní veličina).

pravý
sluneční <
střední

Druhy času: a) Rotační čas <

pravý
hvězdný <
střední

b) Efemeridový čas
c) Kvantový čas

II. Rotační čas.

1. Sluneční (solární) čas

Základem pro měření času je rotace Země kolem své osy a její oběh kolem Slunce.

Na určitém místě zeměkoule nastává tzv. pravé poledne, když Slunce vrcholí (kulminuje) a svislá tyč osvětlená Sluncem vrhá nejkratší stín. Doba mezi dvěma po sobě následujícími kulminacemi Slunce určuje pravý sluneční den. Jeho délka však není stejná, protože rychlost Země kolem Slunce se během roku mění podle 2. Keplerova zákona. Proto byl zaveden střední sluneční den, který je dán pohybem tzv. středního Slunce (myšleného), které se pohybuje po světovém rovníku. Střední sluneční čas je základní fyzikální veličinou a jeho základní jednotkou je sekunda, která je 86 400. dílem středního slunečního dne.

Rozdíl mezi středním (T_M) a pravým slunečním časem (T_V) udává tzv. časová rovnice: $\tau = T_M - T_V$

Pravý sluneční čas nám ukazují sluneční hodiny. Tento čas se shoduje se středním slunečním časem jen čtyřikrát v roce: 15. 4., 14. 6., 1. 9., 25. 12. Během jednoho roku korekce vykazuje 2 maxima a 2 minima.

2. Hvězdný (siderický) čas

Protože střední sluneční čas se shoduje s pravým slunečním časem jen 4krát v roce, mohli bychom během roku kontrolovat správný chod hodin pouze v tuto dobu. A to by nestačilo. Proto byl zaveden tzv. hvězdný čas, který je roven hodinovému úhlu jarního bodu. Hodinovým úhlem rozumíme okamžitou odchylku určitého tělesa (bodu) mimo Zemi od poledníku. Jarní bod je průsečík ekliptiky s nebeským rovníkem, kde Slunce 21. března vystupuje nad rovník a v okamžiku průchodu nastává jarní rovnodennost.

Pravý hvězdný čas udává hodinový úhel skutečného jarního bodu.

Střední hvězdný čas určuje hodinový úhel středního jarního bodu. Rozdíl mezi pravým a středním hvězdným časem udává tzv. rovnice ekvinokcií.

Základem středního hvězdného času je hvězdný den — doba za kterou se Země otočí kolem své osy o 360° . Je roven $23^{\text{h}}56^{\text{min}}0,409^{\text{s}}$ středního slunečního času.

Určené astronomické observatoře využívají každé jasné noci k měření hvězdného času podle průchodu hvězd. Tato měření potom slouží ke kontrole přesných kyvadlových, křemenných a molekulových hodin.

3. Pásmový čas

I když pravý sluneční čas neplyne rovnoměrně, používalo se ho pro časomíru až do 19. století. Teprve kolem r. 1820 byl zaveden místní sluneční čas, který ukazují sluneční hodiny na určitém místě zeměkoule. Protože se Země otáčí od západu k východu, jsou místa na východě časově napřed. Proto mají 2 místa vzdálená od sebe ve směru západ—východ v určitém okamžiku různé místní časy (rozdíl mezi Brnem a Prahou činí asi 9 minut). Tento stav trval až do zavedení železnic. Tehdy se ukázalo, že se v praxi nedá používat místního času, protože by při cestování bylo nutno stále seřizovat hodiny. Proto byl od 1. 4. 1893 zaveden tzv. pásmový čas. Celá zeměkoule byla tehdy rozdělena na 24 pásem po 15° a v každém pásmu platí čas středního poledníku. Střed základního pásma tvoří greenwichský poledník. Rozdíl času jednoho pásma činí 1 hodinu.

Světový čas SČ (GMT — Greenwich Main Time) se řídí na celé Zemi podle greenwichského poledníku.

Středoevropský čas: SEČ = SČ + 1 h

Východoevropský čas: VEČ = SEČ + 1 h

Moskevský čas — MČ je dekretový čas, který je 2 hodiny před SEČ. Používá se ho v dopravě po celém území SSSR. Čas v jednotlivých místech SSSR určíme tak, že příslušné časové pásmo zvětšíme o 1 hodinu. Určení času v jednotlivých pásmech si ukážeme na příkladě.

Příklad.

V Olomouci ukazují hodiny na orloji 6 hodin. Kolik hodin je v tutéž dobu v Moskvě, Paříži, Washingtonu ?

Řešení: Moskva $6^h + 1^h + 1^h = 8^h$

Paříž $6^h - 1^h = 5^h$

Washington $6^h + (-7^h) = -1^h$, tj. 23^h předcházejícího dne.

Přehled časových pásem ukazuje následující tabulka.

III. Efemeridový čas

Pro astronomická pozorování byl od 1. 1. 1960 korekcí na světový čas zaveden rovnoměrně plynoucí efemeridový čas. Je určován podle efemerid, tj. periodik, které obsahují časové údaje o poloze nebeských těles (Měsíce a planet). Prozatímní korekce na SČ činila k 1. 7. 1960 +35 sekund. Tyto korekce se definitivně určují až dodatečně z astronomických pozorování. Okamžik, pro který je sekunda definována v soustavě SI, byl prakticky 31. 12. 1899 ve 24 hodiny SČ. Astronomická definice sekundy má své nevýhody, protože zrychlování a zpomalování Země se nemění tak, jak se původně předpokládalo.

Číslo pásma	Název pásma	Oprava pro čas		
		světový	středo-evropský	moskevský
0	západoevropský, světový (SČ)	0	-1	-3
1	středoevropský (SEČ)	+1	0	-2
2	východoevropský, moskevský	+2	+1	0
3	volžský dekretový	+3	+2	+1
4	uralský dekretový	+4	+3	+2
5	západosibiřský dekretový	+5	+4	+3
6	jenisejský dekretový	+6	+5	+4
7	irkutský dekretový, jihočínský pobřežní	+7	+6	+5
8	východočínský pobřežní, amurský dekretový	+8	+7	+6
9	přímořský (chabarovský) dekretový	+9	+8	+7
10	východoaustralský	+10	+9	+8
11	kamčatský dekretový	+11	+10	+9
12	čukotský dekretový	+12	+11	+10
13	165° z. d.	-11	-12	-14
14	fairbankský	-10	-11	-13
15	yukonský	-9	-10	-12
16	Pacific St. Time (PT - USA)	-8	-9	-11
17	Mountains St. Time (MT - USA)	-7	-8	-10
18	Central St. Time (CT - USA)	-6	-7	-9
19	Eastern St. Time (ET - USA)	-5	-6	-8
20	Atlantic St. Time (AT - Kanada)	-4	-5	-7
21	45° z. d.	-3	-4	-6
22	30° z. d.	-2	-3	-5
23	islandský	-1	-2	-4

IV. Kvantový čas

Přesnost astronomických metod již nepostačuje při měření krátkých časových intervalů. Proto byl zaveden tzv. kvantový čas, který se uchovává elektronickými hodinami (křemennými, molekulovými, atomovými). Uvažuje se o tom přijmout mezinárodně novou definici sekundy za použití atomových hodin, které pracují s cesiem.

V. „Přírodní hodiny“

Od pradávna nás zajímá stáří Země a vývoj života na Zemi. Lze měřit tak velké časové intervaly, v nichž nastávaly pronikavé geologické přeměny? Ano.

Slouží nám k tomu „přírodní hodiny“, které využívají k měření času přirozené radioaktivity. Bylo zjištěno, že lze stanovit stáří hornin pomocí radioaktivních prvků, které jsou v nich obsaženy. Ty se samovolně rozpadají, každý jinou rychlostí, a vznikají atomy jiného prvku. Z přirozeně radioaktivních prvků se nejrychleji rozpadá izotop draslíku K^{40} (asi 10^{-9}

za 1 rok) na izotop argonu Ar^{40} a izotop vápníku Ca^{40} . Ze vzájemného poměru draslíku, argonu a ze známé doby rozpadu K^{40} lze stanovit stáří hornin a tím i stáří Země.

Tato metoda kalium - argonová odhaduje stáří Země na 5 až 6 miliard let.

VI. Problémy s kalendářem

Sluneční rok má 365 dní, 5 hodin, 48 minut, 46 sekund. Při sestavování kalendáře je třeba však počítat s celými dny. Kdybychom zavedli rok s 365 dny, potom po 800. letech by byl střed léta v prosinci a zima v červnu. Aby se odstranila tato nezvyklost, byly zavedeny přestupné roky. Poprvé je zavedl řecký hvězdář Sosigenes v r. 46 před n. l. za vlády Julia Caesara v juliánském kalendáři. Tento kalendář stanovil každý čtvrtý rok přestupným. Juliánský kalendář však neodstranil všechny těžkosti. Pravý sluneční rok se tak stal o 11 minut a 14 sekund delší než skutečný sluneční rok.

V r. 325 našeho letopočtu to již činilo 69,5 hodiny. Tehdy to vyřešili tak, že vynechali v kalendáři 3 dny.

V r. 1582 papež Řehoř XIII. zavedl gregoriánský kalendář, který používáme dodnes. Tento kalendář odstranil chyby juliánského tak, že stanovil z každých 400 roků 97 přestupných. Dosáhne se toho tak, že celé stovky nejsou přestupné roky, kromě případů, kdy je letopočet dělitelný 400. Tak se chyba zredukovala na 25,9 sekundy ročně. Tento rozdíl se může zvětšit na 1 celý den asi za 3000 roků.

VII. Závěr

Moderní didaktika dává přednost problémovému vyučování před překonáním „předáváním“ hotových vědomostí. Žák se naučí myslet tím, že řeší problémy a úlohy, se kterými se setkává v přírodě a praktickém životě. Předcházejících poznatků o čase lze využít k formulaci celé řady problémových úloh. Namátkou uvádím jen některé.

1. Dovedl bys zhotovit jednoduché sluneční hodiny? Urči jejich přesnost podle svých hodinek!

2. Znáš ve svém okolí hvězdárnu, která se zabývá měřením času? Jaký čas měří?

3. Kdo vysílá v ČSSR přesný čas? Budeš si kontrolovat přesnost svých hodinek na začátku či konci rozhlasového signálu?

4. Dopisuješ si se zahraničním studentem? Víš, v kterém časovém pásmu žije?

5. Čím se liší po stránce časoměry železniční řády jízdní v SSSR od našich?

6. Proč může Horymír oslavovat svůj svátek pouze jednou za 4 roky?

Literatura:

1. Široký, J., Široká, M.: Základy astronomie v příkladech. SPN 1966
2. Široký, J.: Efemeridový čas. FvŠ, 2, 1963

3. Hons, J., Šimák, B.: Pojdte s námi měřit zeměkouli. Orbis 1959
4. Šindelář, V., Smrž, L.: Nová měrová soustava. SPN 1968
5. Wesley a kol.: Matematika pro každého. SVTL 1967
6. Kolektiv autorů: Letecká příručka. Naše vojsko 1967
7. Weisskopf, V.: Poznání a údiv. Orbis 1967

Trochu fyziky v jedoucím vlaku I

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK, Olomouc

Při cestování vlakem, který je dnes nejobyčejnějším dopravním prostředkem, přepravujícím denně milióny cestujících na celém světě, se lidé zaměstnávají nejrůznějšími užitečnými i méně užitečnými činnostmi. Mnozí se zahlubávají do čtení časopisu nebo zajímavé knížky, někteří pozorují ubíhající krajinu, jiní živě diskutují se spolucestujícími nebo si krátí dlouhou chvíli společenskými hrami, další ukolébání monotónním rytmem jedoucího vlaku odpočívají v rohu vagónu, kde upadají do krátkodobého spánku. Jsou však i tací, kteří ač zdánlivě nečinně sedící, jsou ponořeni do vlastních úvah a hlubokého zamyšlení. Obvykle mlčky, s mírně staženým obočím a s pohledem upřeným do prázdna nebo na kousek papíru, do něhož stále něco načrtávají, se oddávají intenzívnímu přemítání. Jsou to hloubaví jedinci, kterým není zatěžko klást si nejrůznější otázky a současně na ně hledat — třeba i s jistou duševní námahou — správné odpovědi. Příležitost k této činnosti, kterou obvykle označujeme pojmem *řešení problémů*, si také vyhledávají nejčastěji sami. Buď řeší problémy související s jejich prací či studiem, nebo si vymýšlejí problémy na různé situace, v nichž se momentálně ocitají.

Staňme se nyní alespoň na chvíli právě takovým typem přemýšlivého cestujícího. Podnětem k řešení problému nechť je pro nás *mechanický pohyb vlaku*, v němž cestujeme. Položme si několik jednoduchých otázek, jež se týkají tohoto pohybu, a snažme se na ně nalézt fyzikálně správné odpovědi.

Prvá otázka: Může cestující určit nějakým jednoduchým způsobem rychlost vagónu, který se pohybuje rovnoměrně po přímé a rovné trati? Přitom vylučujeme možnost zjistit rychlost vlaku pomocí rychloměru, umístěném na přístrojové desce lokomotivy.

Předpokládejme, že takový způsob určení rychlosti existuje. Chceme-li ho nalézt, musíme si hned na počátku našich úvah uvědomit jednu důležitou skutečnost: Cestující je součástí pohybující se soustavy, která vykonává přímočarý rovnoměrný pohyb vzhledem k Zemi, neboli je součástí tzv. *inerciální (setrvačné) soustavy*, pro niž platí velmi důležitý fyzikální zákon. Je to *Galileův princip relativity*, podle něhož není možno

žádným mechanickým pokusem nebo měřením provedeným uvnitř inerciální soustavy rozhodnout, zda je tato soustava v klidu nebo v přímočarém rovnoměrném pohybu. Tím méně je pak možné stanovit rychlost této soustavy. Podle toho tedy nemůžeme určit ani rychlost vagónu jedoucího přímočaře rovnoměrně, pokud jsme odkázáni pouze na děje probíhající *uvnitř* vagónu. Je např. známo, že volně padající předmět nebo míček vržený svisle vzhůru se pohybují naprosto stejným způsobem, tj. podle týchž fyzikálních zákonů, jak ve stojícím vlaku, tak ve vlaku jedoucím po přímé a rovné trati stálou rychlostí. Ze zkušenosti také víme, že v nových rychlíkových vozech často ani nepoznáme, zda vlak stojí nebo jede (případně zda jede pomalu nebo rychle), dokud např. nevyhlédneme z okna na nejbližší okolí vagónu. Ještě lépe se mohou o této skutečnosti přesvědčit účastníci letecké nebo námořní dopravy, samozřejmě jen při klidném letu nebo při klidné plavbě.

Kdybychom měli již nyní odpovědět na naši prvou otázku, museli bychom zatím konstatovat, že rychlost vagónu konajícího přímočarý rovnoměrný pohyb nelze stanovit sledováním těles uvnitř vagónu. Proto je nutné obrátit pozornost na *tělesa umístěná mimo pohybující se vagón*, nejlépe pak — s ohledem na to, že nás především zajímá rychlost vagónu vzhledem k Zemi — na *tělesa pevně spojená s povrchem Země*.

Jak známo, nejjednodušší metoda určování rychlosti rovnoměrného pohybu je založena na definici rychlosti. Urazí-li těleso za dobu t dráhu s , je jeho rychlost $v = s/t$. Pro cestujícího ve vlaku z toho vyplývá: zaměřit pomocí hodinek s vteřinovou ručičkou nebo pomocí stopek čas t , za nějž ujede vagón určitou předem známou vzdálenost s , a vypočítat rychlost v . Tedy problém by byl vyřešen, ovšem až na onu „předem známou vzdálenost s “. Pro tuto vzdálenost je vhodné uvažovat úseky, jejichž velikost zůstává podél celé trati konstantní. Např. je možné využít tzv. kilometrovníků, umístěných po jedné straně trati ve vzdálenostech 1 km. Kromě toho bývají některé trati opatřeny dalšími milníky, které vymezují vzdálenosti po 100 m. Mineme-li např. šest takových milníků za dobu půl minuty (přičemž první milník, od něhož začínáme měřit čas, do tohoto počtu nepočítáme), je rychlost vlaku

$$v = \frac{600 \text{ m}}{30 \text{ s}} = 20 \text{ m s}^{-1} = 72 \text{ km h}^{-1}.$$

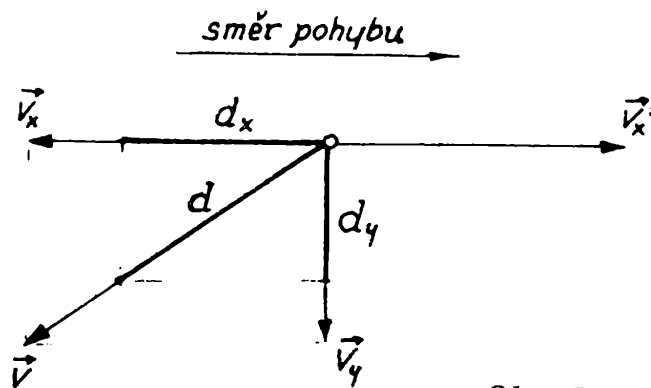
Jiný a rovněž velmi snadný způsob měření rychlosti vlaku spočívá na známém zvukovém efektu, který vzniká opakovanými nárazy kol vagónu při přejíždění dilatačních mezer mezi kolejnicemi. Víme-li, že jednotlivé kolejnice mají na rovných úsecích trati (mimo nádraží a výhybky) délku 25 m, pak právě tuto vzdálenost ujede vagón v čase, který uplyne mezi dvěma po sobě jdoucími nárazy. Napočítáme-li tedy n nárazů za minutu (opět prvý náraz v čase $t = 0$ s do tohoto počtu neza-

hrnujeme), znamená to, že vagón ujel vzdálenost $25 n$ m průměrnou rychlostí

$$v = \frac{25 n \text{ m}}{60} \text{ s}^{-1} = 1,5 n \text{ km h}^{-1}.$$

Např. pro $n = 60$ je $v = 25 \text{ m s}^{-1} = 90 \text{ km h}^{-1}$.

Jak vidíme, je měření rychlosti vlaku pomocí této metody tak jednoduché, že výpočet lze provést z paměti: násobíme počet nárazů za 1 minutu číslem 1,5 a dostaneme přímo rychlost v km h^{-1} . Kromě toho je možno tohoto způsobu použít i tehdy, nemůžeme-li přímo pozorovat předměty v okolí železniční trati (např. v noci). Přesto však není universální. V poslední době se totiž na některých hlavních tratích zavádí technika svařovaných kolejnic, takže úseky trati bez dilatační spáry jsou pak až 500 m dlouhé.¹⁾



Obr. 1

Druhá otázka: Na okenní tabuli vagónu se vytvářejí při dešti šikmé stopy padajících dešťových kapek. Víte, jak bychom mohli z těchto stop vyčíst rychlost vlaku, je-li známo, že dešťová kapka průměrné velikosti dopadá na zemský povrch za úplného bezvětrí přibližně rychlostí 6 m s^{-1} ?

Řešení této zdánlivě složitější otázky je rovněž velmi snadné. Délka d libovolné stopy, kterou zanechává na okenní tabuli dešťová kapka, je úměrná rychlosti v , s níž dopadá kapka na okno vagónu (obr. 1). Přitom její svislá složka v_y představuje rychlost padající kapky vzhledem ke stojícímu vagónu (tedy také vzhledem k Zemi), vodorovná složka v_x rychlost kapky vzhledem k jedoucímu vagónu. Velikost této vodorovné složky je současně rovna velikosti opačně orientovaného vektoru rychlosti v'_x , který představuje rychlost jedoucího vagónu vzhledem ke „stojící“ kapce, tedy i rychlost vagónu vzhledem k Zemi.

Rychlost jedoucího vagónu pak určíme tím způsobem, že změříme strany d_x , d_y rovnoběžníka, jehož úhlopříčka je délka d uvažované stopy

¹⁾ Pokud jde o mechanická pnutí materiálu, vznikající teplotními změnami, jsou kompenzována betonovými pražci a zpevněným podkladem trati.

dešťové kapky. Poněvadž délkám d_x , d_y jsou úměrné složky rychlosti v_x , v_y , platí

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{d_x}{d_y}$$

a vzhledem k tomu, že $v_x = v'_x$, je hledaná rychlost vlaku

$$v'_x = \frac{d_x}{d_y} v_y .$$

Je-li např. $d_x = 20$ cm, $d_y = 8$ cm a víme-li, že $v_y = 6$ m s⁻¹, je rychlost $v'_x = 15$ m s⁻¹ = 54 km h⁻¹. Je nutné připomenout, že vzhledem k odhadu rychlosti padající kapky jde o výsledek pouze velmi orientační.

Třetí otázka: Předpokládejme, že vlak, v němž právě cestujeme, se pohybuje stálou rychlostí, jejíž hodnotu již známe. Jakým způsobem se dá určit rychlost vlaků, které potkáváme nebo které předjíždíme, případně které předjíždějí nás?

K tomu, abychom určili rychlost jiného vlaku, musíme opět vycházet z nějaké předem známé vzdálenosti s . Nejjednodušší je, zvolíme-li za tuto vzdálenost délku míjeného vlaku, kterou snadno stanovíme jako součin z počtu vagonů n a délky vagonu d . Mají-li všechny vagony míjeného vlaku stejnou délku, např. $d = 24$ m, což je délka nejběžnějšího typu dnešních rychlíkových vozů, je délka vlaku bez lokomotivy nd . Projede-li těchto n vagonů kolem našeho okna za dobu t , pohybuje se sledovaný vlak vzhledem k našemu vlaku relativní rychlostí

$$v' = \frac{nd}{t} \tag{1}$$

Označíme-li rychlost našeho vlaku v_1 a rychlost sledovaného vlaku v_2 , pak relativní rychlost v případě, že se oba vlaky potkávají, je

$$v' = v_1 + v_2 ,$$

v případě, že se navzájem předjíždějí,

$$v' = |v_1 - v_2| ;$$

je-li přitom $v_1 > v_2$, tj. jestliže předjíždíme sledovaný vlak, je $v' = v_1 - v_2$, je-li $v_1 < v_2$, tj. jestliže jsme sledovaným vlakem předjížděni, je $v' = v_2 - v_1$.

Dosadíme-li uvedené vztahy do rovnice (1), dostáváme po úpravě pro jednotlivé případy

$$v_2 = \frac{nd}{t} - v_1 , \tag{2}$$

$$v_2 = v_1 - \frac{nd}{t}, \quad (3)$$

$$v_2 = v_1 + \frac{nd}{t} \quad (4)$$

Jsou to vztahy pro rychlost sledovaného vlaku, přičemž (2) platí pro případ protijedoucího vlaku, (3) pro případ předjížděného vlaku a (4) pro případ vlaku předjíždějícího. Předpokladem platnosti těchto vztahů je přímočarý rovnoměrný pohyb obou vlaků.

Příklad: Necht vlak, kterým cestujeme, jede stálou rychlostí $v_1 = 72 \text{ km h}^{-1} = 20 \text{ m s}^{-1}$.

a) Jak velkou rychlostí jel protijedoucí vlak, jestliže kolem okna našeho vagónu projelo za dobu $t = 5 \text{ s}$ celkem $n = 10$ vozů, každý o délce $d = 24 \text{ m}$? [Podle vztahu (2) snadno vypočítáte, že rychlost míjeného vlaku je $v_2 = 28 \text{ m s}^{-1} \doteq 100 \text{ km h}^{-1}$]

b) Jak velkou rychlostí jel nákladní vlak, jehož $n = 25$ vagónů jsme předjeli za dobu $t = 30 \text{ s}$? Délka jednoho vagónu $d = 12 \text{ m}$. [Po dosazení do vztahu (3) dostáváme $v_2 = 10 \text{ m s}^{-1} = 36 \text{ km h}^{-1}$]

c) Jak velkou rychlostí nás předjel expresní vlak, jehož $n = 9$ vozů projelo kolem našeho okna za dobu $t = 12 \text{ s}$? Délka vozu $d = 24 \text{ m}$ [Po dosazení do vztahu (4) obdržíme $v_2 = 30 \text{ m s}^{-1} = 108 \text{ km h}^{-1}$]

Odvozených vztahů (2) až (4) můžeme použít i tehdy, jestliže jeden z navzájem se míjejících vlaků stojí. Je-li např. v klidu sledovaný vlak, tj. $v_2 = 0$, pak ze vztahu (2) nebo (3) dostáváme přímo rychlost našeho vlaku $v_1 = \frac{nd}{t}$ (vztah (4) použít nelze, neboť pro něj není splněna podmínka $v_1 < v_2$). Zde se nám tedy nabízí další způsob pro stanovení rychlosti vlaku, jehož pohybu se sami účastníme.

Je-li naopak v klidu vlak, v němž cestujeme, tj. $v_1 = 0$, pak rychlost vlaku, který nás míjí, je podle (2) nebo (4) $v_2 = \frac{nd}{t}$ (tentokrát nelze použít vztah (3), který platí jen pro $v_1 > v_2$). Jak vidíme, obdrželi jsme v obou případech stejný výsledek $\frac{nd}{t}$, z čehož vyplývá: Je-li jedna soustava vzhledem k Zemi v klidu a druhá se vzhledem k povrchu Země pohybuje přímočaře rovnoměrně, je vždy rychlost druhé soustavy vzhledem k první stejná jako rychlost první soustavy vzhledem ke druhé. Je proto lhostejné, kterou ze dvou inerciálních soustav považujeme za nehybnou a kterou za pohyblivou, což je opět důsledek Galileova klasického principu relativity.

Závěrem upozorníme ještě na jeden zvláštní případ vzájemného míjení vlaků. Tento případ nastane, pohybují-li se oba vlaky vedle sebe stejným směrem a stejnou rychlostí, tj. jestliže $v_1 = v_2$. Uvedenou rovnost dosta-

neme ze vztahu (3) nebo (4) pro $\frac{nd}{t} \rightarrow 0$, tj. pro $t \rightarrow \infty$, což znamená, že u vlaků jedoucích vedle sebe stále stejnou rychlostí není možné určit dobu vzájemného předjíždění.

Jak jsme si mohli všimnout, při řešení všech tří problémů jsme vystačili jen s několika zcela jednoduchými vztahy a s minimem znalostí z matematiky a fyziky. Přitom i při praktickém provádění jednotlivých měření jsme nepotřebovali nic jiného než hodinky se sekundovou ručičkou a při řešení druhé otázky jedno obyčejné měřítko.

V příštím čísle Rozhledů uvedeme několik dalších a poněkud složitějších problémů, u nichž budeme opět uvažovat mechanický pohyb vlaku, jenže půjde o pohyb s proměnnou rychlostí.

0 vol'nej a viazanej energii

Prof. MUDr. JOZEF SKOŤNICKÝ, UPJŠ Košice

(pokračování)

II. Riešenie „Termodynamickej hádanky“

V časti I. bolo ukázané, že symboly rovnice (1) môžu predstavovať nejaké energie systému, lebo by sme sa dostali do rozporu so zákonom o zachovaní energie. Pre tento postoj sú ešte ďalšie dôvody:

Výraz TS rozhodne nepredstavuje energiu systému samého, lebo je daný teplom Q , ktoré je systém schopný resorbovať zo svojho okolia. Nemôžeme však ztotožniť TS ani s týmto teplom, lebo teplo Q je vlastnosťou okolia a TS musí byť vlastnosťou systému samého, podobne ako aj U a F .

V rovnici (1) je preto účelnejšie nahradiť symbol F (voľná energia) symbolom A (pracovná schopnosť) a písať

$$A = U - TS, \quad (4)$$

pri čom A znamená celkovú pracovnú schopnosť systému, ktorá sa skladá z pracovnej schopnosti vnútornej U a pracovnej schopnosti entropickej TS , ktoré sú a priori na sebe celkom nezávislé.

V rovnici (4) sú teda energie nahradené pracovnými schopnosťami. Definícia pracovnej schopnosti vyplýva z definície práce (viď [1] str. 11): Z energetického hľadiska definujeme prácu — v najširšom slova zmysle — ako premiestnenie energie a užitočnú alebo vlastnú prácu ako premiestnenie energie na ľubovoľný systém.

Pracovná schopnosť je teda schopnosť systému premiestniť určité množstvo energie na iný ľubovoľný systém. Takúto pracovnú schopnosť má systém dvojakú:

1. vnútornú U , ktorá má energetický podklad, tj. zakladá sa na obsahu vlastnej vnútornej energie systému U , ktorú systém môže premiestniť na ľubovoľný iný systém, a

2. entropickú pracovnú schopnosť TS bez energetického podkladu v systéme, ktorá udáva množstvo tepla Q , ktoré systém je schopný nábrať zo svojho okolia a premiestniť buď do svojho vnútra alebo na iný systém. — Z tejto definície entropickej pracovnej schopnosti vyplýva aj definícia entropie samotnej, lebo entropia spolu s Kelvinovou (absolútnou) teplotou spoluurčuje túto pracovnú schopnosť.

Vnútorná pracovná schopnosť U pudí chemické systémy vždy v mere exotermického priebehu chemických reakcií, kým entropická pracovná schopnosť TS pudí systém v tom smere, v ktorom vzrastá entropia systému, a týmto smerom môže byť, podľa veľkosti entropií reagujúcich látok, aj smer exotermický aj endotermický. Tak možno potom vysvetliť aj endotermický priebeh chemických reakcií a ich energetický mechanizmus, ako je to vysvetlené v práci [1].

V rovnici (4) sú teda homogenné veličiny; všetky sa vzťahujú na systém samotný a predstavujú jeho jednaké vlastnosti: pracovné schopnosti.

Rovnica (1) však nemôže byť správna už aj preto, že jej veličiny nie sú homogenné. Ak priznávame veličinám U a F charakter energií systému, potom TS rozhodne nepredstavuje energiu systému, ale energiu okolia systému, jeho teplo Q . Veľkosť tohoto tepla, systémom resorbovateľného z okolia, ovšem nezávisí od okolia ale zase od systému samého. — Aby teda rovnica (1) resp. (4) bola správna po rozmerovej stránke, musia všetky jej veličiny predstavovať rovnaké vlastnosti a musia se všetky vzťahovať na systém samotný.

Rovnicu (4) môžeme síce čítať aj vo forme energií v tvare

$$A = U + Q, \quad (5)$$

kde U znamená vnútornú energiu systému, Q teplo okolia a A súčet týchto energií, ktorý sa premiestni na nejaký iný systém. Ale rov. (5) je prakticky bezcenná, lebo veľkosť tepla Q resorbovateľného z okolia systémom, nezávisí od okolia systému, ale od systému samotného, a musí tedy byť vyjadrená pomocou nejakej vlastnosti tohoto systému samotného, ako to činí rovnica (4).

Závažie na vyššej potenciálovej hladine má teda nie len vyššiu potenciálnu a tým aj vnútornú energiu ΔU ale aj vyššiu pracovnú schopnosť $\Delta A = \Delta U - T\Delta S = \Delta U$. Pri kompresii plynu závažím premiestňuje sa vnútorná energia závažia vo forme tepla do okolia plynu $Q = \Delta U_z$. Zároveň sa premiestňuje pracovná schopnosť závažia ΔA_z do plynu, u ktorého sa zvyšuje pracovná schopnosť entropická, takže

$$A_z = \Delta A_p = \Delta U - T\Delta S = -T\Delta S = RT \ln (V_2/V_1). \quad (6)$$

Zatiaľ čo vnútorná energia aj pracovná schopnosť závažia sú lokalizované v tomže telese (závaží), pri kompresii plynu sa dislokujú: pracovná

schopnosť prechádza do plynu a energia do jeho okolia, z čoho jasno vidno, že energia a pracovná schopnosť sú veličiny rozdielne. — Ostatne pojem pracovnej schopnosti nie je pojem prebytočný, lebo je potrebný k formulácii druhej vety termodynamiky a zákona monokauzality (viď [1]). V tomto časopise [2] bolo už ukázané, že pracovná schopnosť je stavová vlastnosť systémov, takže je užitočná nie len pri izotermických dejoch, ale má všeobecne-termodynamický význam. Pojem pracovnej schopnosti je tiež rečovo značne starší než pojem energie, a teraz aj termodynamicky dôležitejší, lebo energia predstavuje len pasívnu vlastnosť systémov a aktívny faktor, ktorý s ňou disponuje a manipuluje, tj. presúva ju medzi systémami, je pracovná schopnosť systémov.

Literatúra:

- [1] Skotnický J.: Die Energetik oder neue Konzeption der Thermodynamik. Zborník Lekárskej fakulty Košice XIV, 28, 1971 s. 3—49.
[2] Skotnický J.: Význam Carnotovho cyklu pre termodynamiku. Rozhledy mat.-přírodovědecké 43 (1964/65) č. 8, s. 358—367.

astronomie

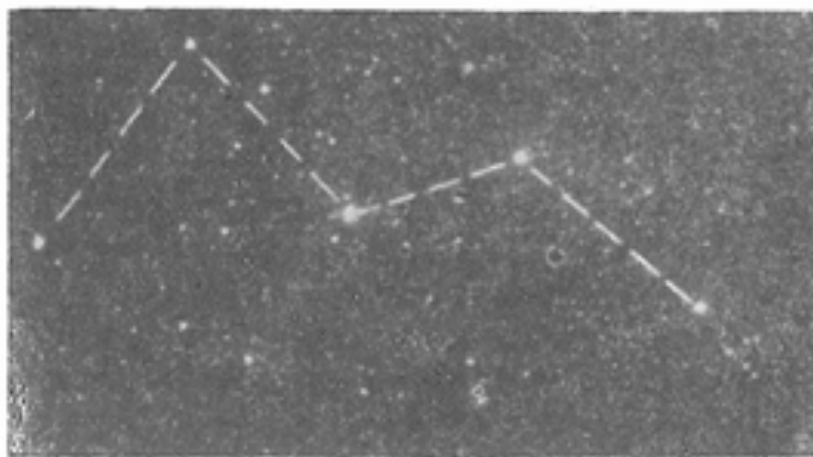
„Nové“ hvězdy ■ JOSEF KOTYK, Pardubice

Před 400 lety došlo v říši hvězd k světodějně události. Ačkoliv nezasáhla do osudů Země ani lidstva, stala se památkou. Podle zpráv historiků změnila běh života jednoho mladého právníka, jenž odmítl pak předurčenou dráhu diplomatickou a stal se — hvězdářem...

Dne 11. listopadu 1572 upoutalo dánského šlechtice Tychona¹⁾ Brahe de Knudstrup, vracejícího se večer z alchymické laboratoře zámku Herritzwaldu, hvězdné nebe novinkou nevídané krásy. Hned při prvním letném pohledu na oblohu spatřil poblíže zenitu (nadhlavníku) u hvězdy *K* souhvězdí Kassiopeje²⁾ — jaké překvapení! — novou hvězdu mimořádně zářivou. Nevěře svým očím, zastavoval rolníky, kteří se vraceli z polí, ze zámku zavolal sluhy a všem kladl otázku, zda

¹⁾ Dánská forma jeho křestního jména zní Tyge, Brahe užíval však ve svých vědeckých pracích latinského tvaru Tycho, pod nímž proto je všeobecně znám.

²⁾ Souhvězdí Kassiopeia je u nás stále nad obzorem. Je charakteristiké tím, že jeho pět jasných hvězd je rozloženo do tvaru písmene W (nebo obráceného M). Viz obr. 1 a 2.



Obr. 1



Obr. 2a

Obr. 2b

také novou hvězdou vidí. Mladý (tehdy 26letý) alchymista se probudil rázem z vidin zlatodějství, nechal zlato zlatem a začal se zabývat novou hvězdou soustavně, zaznamenávat její jas, měřit její polohu aj. Jen z výsledků jeho pozorování víme, že nová hvězda (stručně říkáme zpravidla nova³⁾ měnila svou barvu od bílé postupně přes žlutou do červené např. v květnu následujícího roku svítila bělomodře jako Saturn), svůj jas však později ztrácela, až po 15 měsících zmizela úplně...

Náhly výskyt nových hvězd, ač událost mimořádná, byl ovšem v dějinách astronomie zaznamenán již dříve vícekrát. Zprávy o nich podávají staré kroniky poměrně často. Např. nova, která se objevila roku 172, zářila prý v pěti barvách, nova z roku 389 byla prý jasnější než Venuše apod. Arabští hvězdáři Halý a Giafar ben Mohamed tvrdili, že nova z roku 829 měla dokonce jasnost Měsíce v první čtvrti. V květnu roku 1006 zazářila v souhvězdí Skopce obrovská nova „planoucí jako pochodně“ — tak bychom mohli pokračovat.⁴⁾ Nova z 2. století př. n. l., objevená se tehdy v souhvězdí Štíra, byla nejslavnějším uhvězdáři starověku Hipparchovi Nicejskému podnětem k sestavení prvního katalogu stálic; vyhledávání nových hvězd mělo tak být v budoucnosti

³⁾ Lat. novus = nový; lat. stella nova, stručně nova (čti nóva) = nová hvězda.

⁴⁾ Mnohé doklady tohoto druhu přináší kniha dr. Ludvíka Součka „Nebeské detektivky, senzace a záhady“ (vyd. nakl. Albatros 1971, edice PLUS).

usnadněno. Nova z listopadu roku 1572 stala se pak památnou tím, že zasáhla do životních osudů dánského právníka Tycho Brahe, jenž změnil své povolání a stal se hvězdářem, podle slov Keplerových dokonce „fénixem hvězdářství“, vedoucím nové astronomické observatoře Uranienborg na ostrově Hvenu a podle výroku francouzského astronoma Lalandea největším pozorovatelem v dějinách astronomie ⁵⁾

Objevení nové hvězdy v listopadu roku 1572 bylo událostí, která vzbuzovala všude veliký zájem. Kuriosní problémy tehdejší oficiální tzv. aristotelské fyziky, např. „zda se andělé neunaví, když po tolik let bez ustání nebesy otáčejí“ aj. „ustoupily studiu nové hvězdy v Kassiopei. Zejména Tycho Brahe ji pozoroval velmi pečlivě a již roku 1573 o ní vydal spis „De stella nova etc.“ (O nové, dosud nikdy neviděné hvězdě atd.) Nova vyvolala po celé Evropě ovšem také lavinu předpovědí astrologických.⁶⁾ K astrologickému výkladu je zaměřen např. spisek „De stella nova sive cometa mense Novembri ac Decembri a. 1572“ (vyd. roku 1573) našeho Cypriána Lvovického ze Lvovic, spisek „O některých předešlých znameních nebeských...“ (1580) českého hvězdáře Tadeáše Hájka z Hájku aj. Astrologických příměšků není zcela prost ani Hájkův spis „Dialexis de novae et prius incognitae ... stellae ... apparitione“ (1574), v němž autor kriticky shrnul výsledky svého bádání o nové hvězdě. Soustavným sledováním jejích souřadnic dospěl k závěru, že nemění své polohy vůči stálicím, nemůže proto býti kometou. Pokoušel se také určit její paralaxu, shledal však, že neexistuje v měřitelné hodnotě. Dokázal tak, že nová hvězda náleží oblasti stálic. Hájkův závěr, že je od Země vzdálena více než Měsíc, znamenal zásadní průlom do představ aristotelské fyziky o absolutní neproměnnosti oblasti vesmíru za drahou Měsíce.

Stejných výsledků jako Hájek se dopracoval také Tycho Brahe. Staly se proto podkladem jejich vzájemného vědeckého vztahu. Hájkovu vlivu u císařského dvora (byl osobním lékařem císaře Rudolfa II. a protomedicus království Českého) vděčíme pak za to, že Tycho Brahe byl roku 1599 povolán za císařova astronoma do Prahy. Za přímé osobní účasti hvězdáře, proslaveného tehdy již v celém světě, dochází tak ke vzniku věhlasného rudolfinského astronomického střediska v Praze.

„Astronomickým příručím“ Tycho Brahe v letech 1600 a 1601 a po jeho náhlé smrti dne 24. října 1601 i nástupcem v jeho hodnosti u dvora

⁵⁾ V podrobnostech viz autorův článek „Tycho Brahe“, otištěný u příležitosti 400. výročí badatelova narození v Rozhledech roč. 27, čísl. 1, str. 1 až 4.

⁶⁾ Astrologií (hvězdopravectvím), „královským“ uměním předpovídati budoucnost z hvězd, zabývali se v té době také astronomové, u nás na př. slovnutný císařský dvorní mathematicus Johannes Kepler a j. Viz autorův článek „Z dějin astrologie“ v Rozhledech roč. 50, č. 5, str. 234—237 a č. 6 str. 277—281.

se stal Johannes Kepler. Za jeho pobytu v Praze v letech 1600 až 1612 dosáhla astronomie u nás nejvyšší úrovně. Čtenářům je známo,⁷⁾ že Kepler se tehdy zabýval řadou astronomických problémů. Na tomto místě budeme se zajímat zejména o jeho spisek „De stella nova in pede Serpentarii“ (1606), v němž pojednává o nové hvězdě z roku 1604 a jímž se vědomě hlásí k práci a názorům svých předchůdců Tadeáše Hájka a Tycho Brahe.

Objevení novy roku 1604 bylo velmi dramatické. Zprávu o ní přináší mj. čínská kronika She-ke, napsaná v době panování dynastie Ming (1368 až 1644); píše, že nová hvězda se podobala ohnivě kouli barvy žlutočervené. Objevila se prý v nebeské krajině Wei (v jižní části souhvězdí Hadonoše), a to v 32. roce epochy 9. měsíce Yih Cho, podle našeho kalendáře dne 10. října 1604. Tohoto památného dne byla spatřena také u nás v Praze. První ji pozoroval Jan Brunovský, počtářský pomocník Keplerův, a to zcela náhodně, když se ubíral za Keplerem na Hradčany. Nespěchal, ač večer byl chladný, sychravý; obloha, zatažená mračky, znemožňovala však pozorovat předpověděnou a proto očekávanou konjunkci Jupitera s Marsem. Náhle nastala změna: Mraky se trhaly, západní obloha se čistila — a Burnovský spatřil nad Strahovem obě planety, k velikému překvapení v jejich blízkosti pak ještě třetí hvězdu, jež zářila jako Jupiter! Se senzační zprávou běžel na Hradčany, obloha se však zatím opět zatáhla mračky. Kepler mohl pozorovat novou hvězdu v souhvězdí Hadonoše proto až po týdnů dne 17. října 1604.

Nedívejme se však už do minulosti a zeptejme se astronomie přítomnosti, jaký je názor dnešní vědy na tzv. nové hvězdy! Ve skutečnosti nejde ovšem o hvězdu opravdu novou. Ukázalo se, že „nová“ hvězda existovala již dříve, než byla spatřena, a to jako trpasličí žhavá hvězda, prostým okem neviditelná slabá hvězdička. Náhlými změnami v povrchových vrstvách dochází někdy k tomu, že vrstvy se explodují od hvězdy odloučí a bývají vymrštěny na vzdálenost několika set až tisíců kilometrů do okolního prostoru. Hvězda při tom z naznačených vnitřních příčin uvolní energii, vzplane její a jasnost prudce stoupne; zazáří jako nova. Zbytek hvězdy se po explozi smrští a jasnost hvězdy opět zvolna klesá na původní velikost.

Ve vzdálených hvězdných soustavách dochází k zjevům ještě mohutnějším (tzv. supernovy). „Nová“ hvězda, jež vzplanula před 400 lety roku 1572 v Kassiopei, byla rovněž supernova; v maximu dosáhla jasnosti planety Venuše, kdyby tato byla v dolní konjunkci se Sluncem. Na jejím místě je nyní mocné zřídlo rádiového záření. Také „nová“ hvězda z roku 1604 byla supernova.

„Nové“ hvězdy, novy a supernovy, lze společně charakterizovat jako eruptivní proměnné hvězdy. Supernovy znamenají explozi celé

⁷⁾ V podrobnostech viz autorův článek „Johannes Kepler“, otištěný v Rozhledech roč. 27, čís. 4, str. 97 až 103.

hvězdy. Pozůstatky supernov, jsou pravděpodobně neutronové hvězdy zv. pulsary. Nejmladší v naší galaxii se nalézají v Krabí mlhovině, jež podle zpráv starých kronik čínských vznikla při výbuchu supernovy dne 2. května 1054.

Nemáte, milí čtenáři, nad těmito řádky obavu, že i naše Slunce, stálice Zemi nejbližší, by snad mohlo explodovat jako nova? Pracujte jen klidně dál! Výsledky bádání sovětských astronomů Kukarkina, Voroncov-Veljaminova aj. ukázaly, že k podobným výbuchům může dojít jen u některých typů hvězd vysoké teploty. Mezi ně naše Slunce na štěstí nepatří.

Poznámka

Obě památná výročí, 370 let od úmrtí Tychona Brahe a 400 let od narození Keplerova, byla v roce 1971 důstojně oslavena. Hlavní město Praha vzpomnělo záslužné činnosti a vzácného díla obou badatelů položením základního kamene k jejich sousoší na rozhraní Pohořelce a Keplerovy ulice na Hradčanech. V rámci světových oslav UNESCO byla v zámku v Benátkách nad Jizerou otevřena pamětní síň Tychona Brahe. V letohrádku královny Anny Belvederu v Praze se konala výstava „Kepler a Praha“. Národní technické museum propůjčilo mimo to Zemskému museu Horních Rakous k uspořádání Keplerovy výstavy v Linci některé unikátní exponáty (sextant a jiné astronomické přístroje), kterých oba badatelé v Praze používali.

Nechť proto i naše řádky jsou na ně vděčnou vzpomínkou. Význam Keplerova díla je tak veliký, že se UNESCO rozhodlo zařadit Keplerovo jubileum do světového kalendáře kulturních výročí.

konstruktivní geometrie

O jednej vlastnosti pravouhého premietania

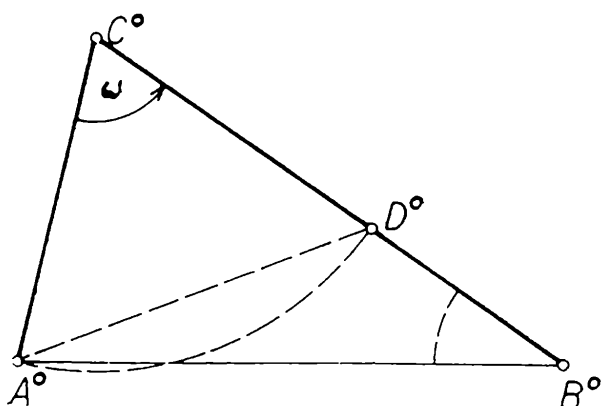
JOZEF FILIP, Bratislava

Táto vlastnosť sa vyjadruje vetou: Každé dve úsečky na priemetni môžeme pokladať za pravouhlý priemet dvoch úsečiek, ktorých dĺžky majú daný pomer a ktoré zvierajú daný uhol. (Čo rozumieme uhlom dvoch úsečiek, vysvetlíme nižšie).

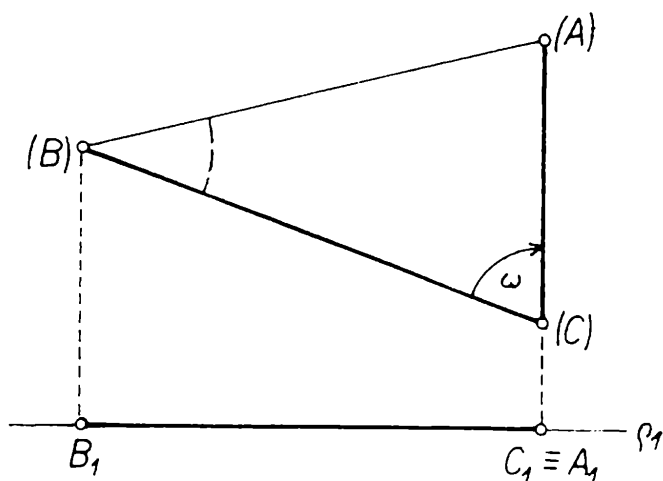
Účelom tohto článku je ukázať, ako zostrojíme, resp. vymodelujeme také úsečky z ich pravouhého priemetu.

Bez újmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že úsečky, ktoré máme z ich priemetu zostrojiť, neležia na tej istej priamke, ale že majú jeden krajný bod spoločný a že teda obe ležia v tej istej rovine.

Pomenujme také úsečky AC , BC , pomer ich dĺžok $\overline{AC} : \overline{BC} = m : n$ ($m, n \neq 0$) a uhol nimi zovretý ω . Rovinu ABC označíme ρ a priemetňu π . Z dôvodov, ktoré vysvitnú z ďalšieho, budeme hovoriť nielen o úsečkách AC a BC , ale aj o trojuholníku ABC a uhol ω úsečiek AC a BC bude totožný s vnútorným uhlom ACB trojuholníka ABC .



Obr. 1



Obr. 2

V tomto zmysle môžeme našu úlohu sformulovať takto: Máme ukázať, ako zostrojíme trojuholník ABC podobný trojuholníku $A^0 B^0 C^0$ na obr. 1, keď sú dané pravouhlé priemety $A_1 C_1$ a $B_1 C_1$ jeho dvoch strán AC a BC .

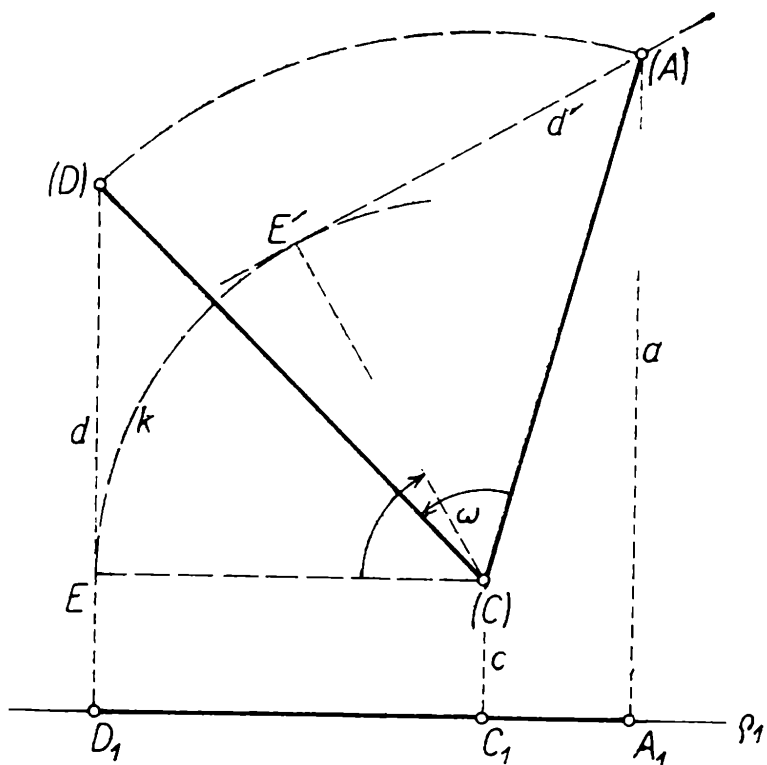
1. Začneme s najjednoduchším prípadom, keď jedna z úsečiek má priemet nulový, čiže keď jej priemetom je bod. Nech je to úsečka AC . Vtedy $AC \perp \pi$ a teda aj $\rho \perp \pi$ a ρ_1 je priamka. Na obr. 2 je trojuholník ABC zostrojený v sklopení do π a označený $(A)(B)(C)$. Jeho konštrukcia je taká jednoduchá, že nepotrebuje nijaké vysvetlenie.

Poznámka 1. Je evidentné, že kótu jedného vrcholu $\triangle ABC$ môžeme ľubovoľne voľiť a že daným podmienkam vyhovuje aj trojuholník symetrický s trojuholníkom ABC podľa π . Teda trojuholníkov ABC požadovaných vlastností je s ohľadom na ich umiestnenie v priestore nekonečne mnoho. Z jedného dostaneme ostatné posunutím v smere kolmom na π a symetriou podľa π .

Vo všetkých ďalších príkladoch sú obe úsečky $A_1 C_1$ a $B_1 C_1$ nenulové.

2. Prv ako prikrôčime k zostrojeniu rôznostranného trojuholníka ABC , zostrojíme trojuholník rovnoramenný ($m : n = 1 : 1$). Na obr. 3 sme zostrojili trojuholník ADC podobný s trojuholníkom $A^0 D^0 C^0$ ($\overline{A^0 C^0} = \overline{D^0 C^0}$) na obr. 1, keď $\rho \perp \pi$ a teda oba priemety $A_1 C_1$ a $D_1 C_1$ ležia na tej istej priamke ρ_1 .

Trojuholník ADC sme zostrojili zase v sklopení do π a označili



Obr. 3

$(A)(D)(C)$. Vrcholy (A) , (C) , (D) ležia na priamkach v poradí a , c , d vedených bodmi A_1 , C_1 , D_1 kolmo na priamku q_1 .

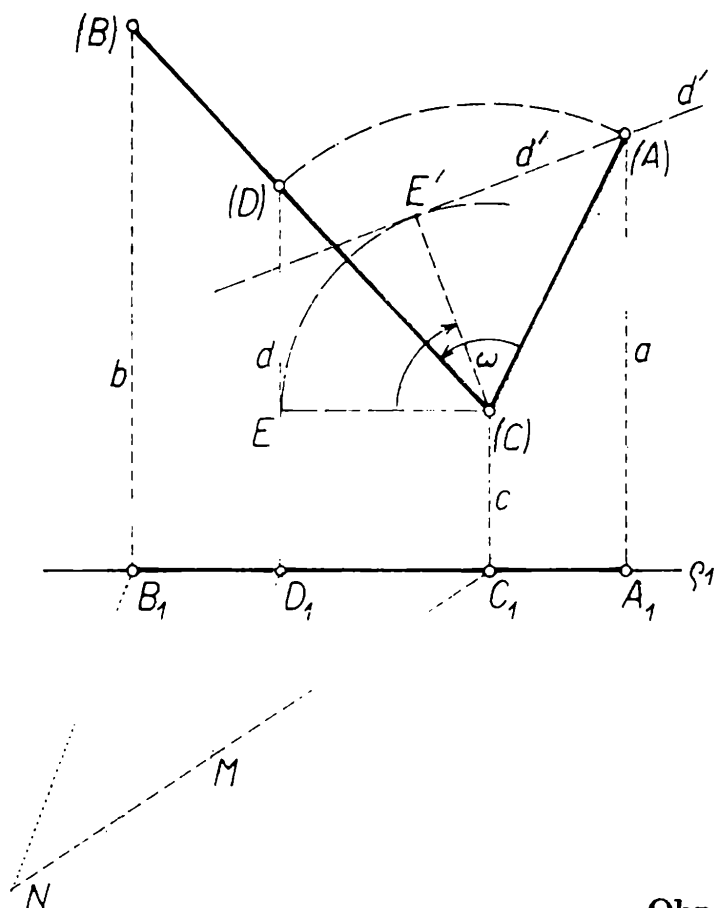
V zmysle poznámky 1 môžeme kótu jedného vrcholu voliť. Na obr. 3 sme zvolili kótu bodu C , resp. vrchol (C) . Vrcholy (A) a (D) sú na kolmiaciach a a d tak položené, že $\overline{(A)(C)} = \overline{(D)(C)}$. Otočíme teda kolmicu d okolo bodu (C) a uhol ω (orientovaný kladne alebo záporne) do polohy d' a vtedy $(A) \equiv a \cdot d'$. Otočenie vykonáme pomocou bodu E [$(C)E \perp d$], ktorý prejde otočením po kružnici k stredu (C) a polomeru $(C)E$ do polohy E' a priamka d' je dotyčnicou kružnice k v bode E' . Spätným otočením bodu (A) o uhol ω dostaneme na priamke d tretí vrchol (D) .

Zase platí poznámka 1 ako aj v ďalších príkladoch.

Poznámka 2. Namiesto priamky d sme mohli práve tak dobre otočiť priamku a o uhol ω do polohy a' a vtedy $(D) \equiv d \cdot a'$.

Od rovnoramenného trojuholníka ADC prejdeme už ľahko k rôznostrannému trojuholníku ABC , keď zase $\rho \perp \pi$.

3. Nech sú dané úsečky A_1C_1 , B_1C_1 , ktoré ležia na tej istej priamke q_1 (obr. 4) a máme zostrojiť $\triangle ABC \sim \triangle A^0B^0C^0$ na obr. 1, keď jeho pravouhlým priemetom je úsečka $A_1C_1B_1$. Trojuholník ABC nakreslíme zase v sklopení do π a označíme $(A)(B)(C)$. Najprv zostrojíme pomocný rovnoramenný trojuholník $(A)(D)(C)$ podľa obr. 3. Na to potrebujeme priamku $d \equiv D_1(D) \perp q_1$. Pretože premietanie zachováva podielový pomer, je $(D_1B_1C_1) = (D^0B^0C^0) = m : n$. Bod D_1 teda zostrojíme napr. tak, že bodom C_1 na obr. 4 vedieme ľubovoľnú polpriamku a na ňu nanesieme



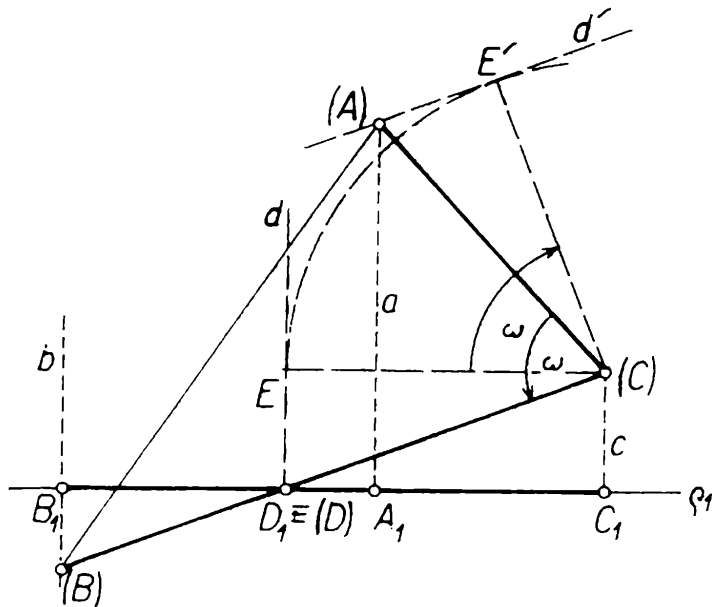
Obr. 4

úsečky $\overline{C_1M} = \overline{C^0A^0} = \overline{C^0D^0}$ a $\overline{C_1N} = \overline{C^0B^0}$ a urobíme $NB_1 \parallel MD_1$. Vtedy $C_1D_1 : C_1B_1 = m : b$ a bodom D_1 ide priamka $d \perp p_1$. Keď sme zostrojili $\triangle (A)(B)(C)$, máme na predĺžení strany $(C)(D)$ a priamke b vrchol (B) .

Na obr. 5 sme vyriešili ešte raz tú istú úhlu, keď sa dané úsečky prekrývajú. Konštrukcia sa líši od konštrukcie na obr. 4 v podstate len poradím priamok a , c a d .

4. Ostáva vyriešiť úlohu ešte vo všeobecnom prípade, keď priemety A_1C_1 a B_1C_1 sú úsečky neležiace na priamke, čiže keď rovina ρ nie je kolmá na π (obr. 6). Vtedy budeme predpokladať, že obvod trojuholníka $A_1B_1C_1$ je priemetom trojbokej hranolovej plochy, ktorej tvoriace priamky sú kolmé na π a našu úlohu sformulujeme takto: Daný je $\triangle A_1B_1C_1$ na π , ktorý je určujúcim trojuholníkom hranolovej plochy kolmej na π a na tejto ploche máme zostrojiť rez podobný s trojuholníkom na obr. 1. V tomto poňatí je to tzv. Guglerova úloha¹⁾ a pri riešení postupujeme takto: V rovine ρ zostrojíme hlavnú priamku p a spádovú priamku m idúcu vrcholom C . Tieto priamky a ich priemety majú známe vlastnosti: $p \perp m$, $p_1 \perp m_1$ a pretínajú priamku $c \equiv AB$ v bodoch $P \equiv p \cdot c$ a $M \equiv$

¹⁾ Kadeřávek Klíma - Kounovský: Deskriptivní geometrie I (str. 165, 1. vyd.).



Obr. 5

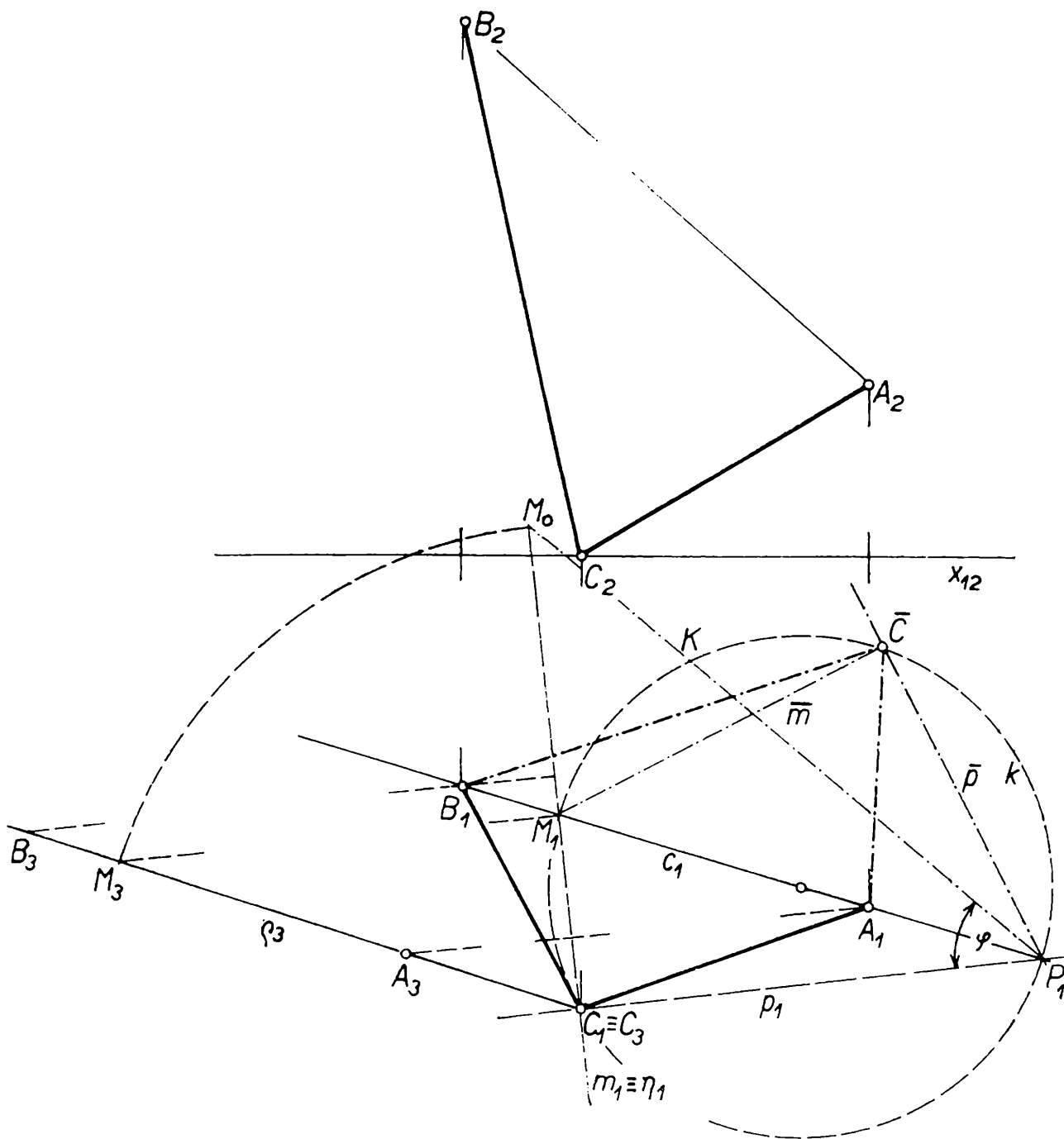
$\equiv m \cdot c$, resp. priamku $c_1 \equiv A_1B_1$ v bodoch P_1 a M_1 . Keď pripojíme k trojuholníku $ABC \triangle A_1B_1\bar{C} \sim \triangle A^0B^0C^0$ z obr. 1, budú priamkam $p \perp m$ v tejto podobnosti pridružené priamky $\bar{p} \perp \bar{m}$, ktoré prechádzajú bodmi \bar{C} a P_1, M_1 . Bodmi P_1 a M_1 prechádzajú aj priamky $p_1 \perp m_1$, ktoré spolu s priamkami $\bar{p} \perp \bar{m}$ omeďujú tetivový štvorholník a pretože $p_1 \perp m_1$ a $\bar{p} \perp \bar{m}$, má kružnica k tomuto štvorholníku opísaná stred na priamke c_1 a na symetrále bodov $C_1 \cdot \bar{C}$. Body P_1 a M_1 sú teda v priesečníkoch kružnice k s priamkou c_1 . O tom ktorý z nich je P_1 a ktorý M_1 , rozhodneme, keď si uvedomíme, že ostrý uhol ľubovoľnej priamky roviny ρ s hlavnou priamkou p tejto roviny je v priemete vždy zmenšený²⁾. Na obr. 6 sme priesečník P_1 označili správne, lebo $\sphericalangle A_1P_1C_1 < \sphericalangle A_1P_1\bar{C}$ a $\sphericalangle A_1\bar{P}_1C = \sphericalangle APC = \varphi$. Tým sme zároveň rozhodli, ktorá z priamok P_1C_1 a M_1C_1 je priemetom hlavnej priamky p a ktorá priemetom spádovej priamky m roviny ρ .

Poznámka 3. Kótu jedného vrcholu $\triangle ABC$ môžeme voliť. Ak zvolíme vrchol C na π (ako na obr. 6), je priamka p prvou stopou roviny ρ .

Ostáva ešte určiť odchýlku priamky m , tj. veľkosť uhla $\alpha = \sphericalangle m\pi$. Za tým účelom otočíme priamku c okolo priamky p do π . Otočenú priamku c_0 zostrojíme tak, aby $\sphericalangle c_0p_1 = \varphi$. Keď teda na kružnici k zostrojíme bod K tak, aby $\widehat{KC_1} = \widehat{CM_1}$, je $P_1K \equiv c_0$. Na priamke c_0 je otočený bod M_0 a $CM = C_1M_0$. Potom odchýlka $\alpha = \sphericalangle MC_1M_1$.

Aby sme jednoducho zostrojili kóty bodov A a B (kóta bodu C je 0), zvolíme premietáciu roviny ε priamky m za pomocnú priemietňu (tretiu)

²⁾ Vid' autorov článok Pravouhlý priemiet uhla v č. 3 a 4, roč. 1958 tohto časopisu.



a na nej zostrojíme priemet roviny ρ . Je to priamka $\rho_3 \equiv C_3M_3$, pričom $C_3 \equiv C_1$, $M_3M_1 \perp \varepsilon_1$ a $M_3C_3 = C_1M_0$. Na priamke ρ_3 máme priemety A_3 a B_3 a v ich vzdialenostiach od priamky ε_1 príslušné kóty. Pomocou nich zostrojíme nárysy A_2 a B_2 .

Poznámka 4. Uvedené konštrukcie sa podstatne zjednodušia, keď $m : n = 1 : 1$ a $\omega = R$.

NAŠE SOUTĚŽ

Loňská soutěž Rozhledů

Loňské soutěže se zúčastnilo 11 řešitelů, počet velmi malý. Nejlepších výsledků dosáhli následující řešitelé.

Matematika

1. Václav Tomášek, IV.B G Klatovy 59 bodů

Fyzika

1. Pavel Drábek, IV.A G Pardubice . 28 bodů

Konstruktivní geometrie

1. Pavel Drábek, IV.A G Pardubice 22 body
2. Jan Teska, II.B G Milevsko 21 bod

Závěrem této stručné informace uvádíme seznam všech soutěžících. Za jménem řešitele je uveden ústav, na němž řešitel studuje, pak jsou čísla správně řešených příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie. Čísla uvedená v závorkách jsou čísla příkladů rozřešených s menšími nedostatky. Příklady nesprávně řešené neuvádíme.

Pavel Drábek, G Pardubice, F 3, 4, 6, (2, 5) G 2-4, (1); *Václav Janiš*, G Rožnov p. R., M 1, 3-5, 7, 9, 10, (11); *Miloslav Jonkl*, G Kutná Hora, G 3, 4, (1); *Pavel Kindlmann* G Č. Budějovice, M 3 5, 9, 10; *Ivo Mrázek*, SPŠCh Ústí n. L., M 4, 5, 7, 9, 10, 12 (3, 11), F 3, 4 (1, 2), G 3, 4, (1); *Vladislav Pařízek*, G Praha, M 9, 10; *Jan Rajlich* G Milevsko, M (4, 9, 12), G (2, 4); *Václav Salač*, G Praha, M 5, 9, 11, 12, F 3, 4, (2); *František Šindler*, G Zlaté Moravce, M 5, 9, (3), F 3; *Jan Teska* G Milevsko, M 3, 9, G 1, 2, 4 (3); *Václav Tomášek*, G Klatovy M 1-5, 7, 9, 10, 12 F (1, 3-6), G 2, 4, (3).

recenze

Základy přírodních věd v pokusech

Dr. MILAN BEDNAŘÍK, Olomouc

Je známo, že fyzika je v podstatě věda experimentální, to znamená, že většina nových fyzikálních poznatků je objevována nebo alespoň potvrzována prostřednictvím experimentu. To platí ovšem nejen pro fyziku, ale také pro chemii, biologii a vůbec všechny ostatní přírodní vědy.

Také ve vyučování fyzice se často stáváte svědky pokusů, pomocí nichž sledujete průběh fyzikálních dějů, poznáváte základní fyzikální zákony nebo se dovídáte o využití poznatků fyziky v různých oborech lidské činnosti a technické praxe. Přitom většinu pokusů provádí obyčejně váš profesor či učitel fyziky. Je to celkem pochopitelné, poněvadž mnohé experimenty jsou při provádění náročné a složité a přístroje, kterých se pro experimentování používá, mnohdy velmi choulostivé a drahé. A vědychtivým studentům jsou svěřovány, nejčastěji při laboratorních pracích, pouze pokusy s pomůckami, kterých má škola dostatek a které snesou i méně odborné zacházení. Zatouží-li pak student pro rozsáhlejší experimentální činnosti přihlásí se do fyzikálního praktika nebo není-li to možné, uchýlí se k provádění pokusů „po domácku“.

A právě všem těmto mladým experimentátorům bychom chtěli doporučit knihu *Základy přírodních věd v pokusech*, kterou vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze roku 1971. Tato zdařilá knižní publikace je překladem z anglického originálu *Source Book For Science Teaching*, který se v angličtině dočkal již 11. vydání, což bezpochyby svědčí o jeho značné popularitě.

Základy přírodních věd v pokusech je kniha poměrně rozsáhlá a přitom velmi přehledně zpracovaná. Na 230 stranách textu asi s 360 obrázky obsahuje návody k provedení celkem 730 různých pokusů a pozorování, z toho 615 pokusů z fyziky a astronomie, 35 z chemie a 80 z biologie. Abyste si mohli učinit přibližnou představu, ze kterých oblastí fyziky, chemie a biologie jsou pokusy a pozorování vybrány, uvedeme alespoň názvy jednotlivých kapitol. Přitom vynecháváme úvod a kapitoly č. 1 a 18, které jsou psány pro učitele fyziky a které můžete při studiu knihy vynechat. Tedy: 2. Jak si zhotovíme jednoduché pomůcky, 3. Rostliny, 4. Živočichové, 5. Nerosty, horniny, půdy a zkameněliny, 6. Astronomie, 7. Vzduch a tlak vzduchu, 8. Počasí, 9. Voda, 10. Jednoduché stroje, 11. Síla a setrvačnost, 12. Zvuk, 13. Teplo, 14. Magnetismus, 15. Elektřina, 16. Světlo, 17. Lidské tělo.

Všechny pokusy a pozorování jsou popsány srozumitelně a výstižně (většina pokusů je znázorněna obrázkem), takže je můžete snadno uskutečnit i sami. Nejdůležitější je však skutečnost, že k provedení téměř všech pokusů nepotřebujete žádná zvláštní a složitá zařízení, ale vystačíte s docela jednoduchými pomůckami, které lze buď najít v každé domácnosti nebo se dají velmi snadno vlastnoručně vyrobit. Např. v kapitole 15. Elektrina, do níž je zařazeno celkem 78 pokusů, jsou uvedeny mj. tyto pokusy: Jak si uděláte elektroskop z novin, Jak si uděláte jednoduchý akumulátor, Jak můžete ovládat zvonek dvěma vypínači, Jak si sestavíte jednoduchou telefonní linku, Jak si pomocí elektrolýzy okopírujete odznak a řada dalších. Ale snad bude lépe, když si knihu vypůjčíte ve školní knihovně a přesvědčíte se sami.

Závěrem je třeba ještě dodat, že kniha *Základy přírodních věd v pokusech* je psána natolik zajímavě a přístupně, že ačkoliv je původně určena především učitelům fyziky, může ji číst (kromě prvé a poslední kapitoly) každý student, jehož fyzika aspoň trochu zajímá, dokonce i každý žák vyšších ročníků základní devítileté školy, který si možná zásluhou této knížky fyziku oblíbí.

Úvod do finitní matematiky.

Možná, že si leckterý čtenář Rozhledů povšiml za výlohami prodejen technické literatury této knihy, která vyšla koncem r. 1971 jakožto překlad vysokoškolské učebnice matematiky pro potřebu studujících biologických a společenských věd. Sepsali ji tři profesori americké university Dartmouth College: J. G. Kemeny, J. L. Snell a G. L. Thompson.

Co se skrývá pod názvem „finitní matematika“? Jde vesměs o ty partie matematiky, kde se vychází z množin o konečném počtu prvků. Je to tedy ta část matematiky, kde se obejdeme bez pojmů „limita“, „spojitost“ apod.

Kniha je rozdělena do sedmi kapitol, z nichž první se zabývá výrokovou logikou, druhá je věnována množinám a množinovým operacím. V třetí kapitole najdeme srozumitelný výklad o rozkladech množin, o základních pojmech z kombinatoriky — permutacích a kombinacích a jejich užití. Kapitola čtvrtá uvádí čtenáře do základů počtu pravděpodobnosti, v kapitole páté se probírají vektory, matice, operace s maticemi, řešení soustav lineárních rovnic a další užití maticového počtu. V šesté kapitole se čtenář setká s úlohami lineárního programování, kterým předchází studium konvexních množin v rovině. Druhá část této kapitoly patří teorii her. Poslední, sedmá kapitola je věnována aplikacím na problémy společenských a biologických věd.

Ačkoliv jde o knihu, určenou především vysokoškolákům, inženýrům a pracovníkům ve společenských vědách, domnívám se, že řada odstavců z kapitol I.—VI. může i středoškoláky nejen zaujmout, nýbrž jim být i prakticky užitečných při studiu, zejména žákům matematicko-fyzikálních a přírodovědných tříd gymnasií. Nesmírnou předností knihy je totiž spousta příkladů, a to nejen řešených v textu, nýbrž i cvičných, připojených za každým paragrafem. Studenti jistě uvítají zejména cvičení k článkům první a druhé kapitoly, kde jde o úlohy z oboru výrokové logiky a množinových operací, které v dosavadních středoškolských sbírkách příkladů jsou úzkým profilem.

Kniha se dobře čte, což je zásluhou jak autorů, tak stejnou měrou zdařilého překladu kolektivu doc. RNDr. J. Růžičky, K. Prokopa, prom. ped., Št. Chochola a J. Chlumského, prom. ped. Publikace vydalo SNTL a je brožovaná za 50 Kčs, vázaná za 58 Kčs.

Dr. Marie Valešová

Připomínka jednoho jubilea

V březnu 1872 dostali členové tehdejší Jednoty českých matematiků do rukou první číslo nového časopisu, které mělo trochu složitý název: Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, kterýž se zvláštním zřetelem k studujícím rediguje Dr. F. J. Studnička, profesor matematiky na c. k. universitě pražské, a vydává Jednota českých matematiků. Tento časopis, který tedy nedávno oslavil své sté narozeniny, brzy kolem sebe soustředil významné matematiky a fyziky, kteří jej vyzvedli na světovou úroveň. Náplň časopisu se postupem doby různě měnila. Vedle článků vědeckých se v něm tiskly i příspěvky didaktické, které měly svou vyhrazenou rubriku. Ta trochu připomínala dnešní časopis Matematika a fyzika ve škole. Také Rozhledy se vlastně před více než 50 lety odštěpily od Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky. Za druhé světové války byl Časopis zastaven a proto číslování ročníků dnes ještě nedosahuje stovky. Po válce se ukázalo nutným, aby se matematika a fyzika od sebe oddělily a vytvořily své speciální časopisy. Matematika např. vytvořila časopisy dva Czechoslovak Mathematical Journal a Časopis pro pěstování matematiky, jež se oba hlásí k tradicím svého matematicko-fyzikálního předchůdce. První ze jmenovaných časopisů uveřejňuje jen vědecké matematické práce ve světových řečech a je ve světě velmi oblíben. Časopis pro pěstování matematiky přináší vědecké práce z matematiky tištěné česky a slovensky. Kromě toho uveřejňuje vědecké práce v cizích jazycích a dále recenze matematických knih, úlohy a zprávy z matematického života. Jistě se s těmito časopisy setkají ti z našich čtenářů, kteří se rozhodnou studovat matematiku nebo fyziku hlouběji.

J. S.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

pětina
pětistěn
pětiúhelník
písmeno
planimetr
planimetrie
plášť kuželo

platit
platnost
plocha
ekviskalární plocha
kuželová plocha
kvadratická plocha
nerozvinutelná plocha
přímková plocha
rotační plocha

rozvinutelná plocha
válcová plocha
zborcená plocha

plochý
plošný
plošný obsah
plus (znamení +)
počáteční
počátek
počet
počet permutací
počet pravděpodobnosti
výrokový počet

počítač
počítat
podgrupa
podíl
podmínka
splňovat podmínky

cinquième *m*
pentaèdre *m*
pentagone *m*
lettre *ž*
planimètre *m*
planimétrie *ž*
nappe *ž* d'un cône; surface *ž* latérale
d'un cône

être en vigueur *ž*
validité *ž*
surface *ž*
surface de niveau *m*
surface conique
surface quadratique
surface gauche
surface réglée
surface de rotation *ž*; surface de
révolution *ž*
surface développable
surface cylindrique
surface gauche

plat, e
de surface *ž*
superficie *ž*
plus *m*
initial, e, aux
origine *ž*
nombre *m*; calcul *m*
nombre des arrangements *m*
calcul des probabilités *ž*
calcul des propositions *ž*; calcul
propositionnel
calculateur *m*; calculatrice *ž*
calculer
sous-groupe *m*
quotient *m*
condition *ž*
remplir des conditions

podmnožina	sous-ensemble <i>m</i> ; partie <i>ž</i> d'un ensemble
podobnost	similitude <i>ž</i>
podobný	semblable
podprostor	sous-espace <i>m</i>
podstatný	essentiel, elle
podstava	base <i>ž</i>
pohyb	mouvement <i>m</i>
pohyblivý	mobile
pojem	notion <i>ž</i>
pokračování	continuation <i>ž</i> ; prolongement <i>m</i>
pokrytí	recouvrement <i>m</i>
pokryvat	recouvrir
pokus	essai <i>m</i>
pól	pôle <i>m</i>
polára	polaire <i>ž</i>
polární	polaire
pole	champ <i>m</i>
silové pole	champ de forces <i>ž</i>
vektorové pole	champ de vecteurs <i>m</i> ; champ vectoriel
poledník	méridien <i>m</i> ; méridienne <i>ž</i>
poledníkový	méridien, enne
poloha	position <i>ž</i>
polokoule	demi-sphère <i>ž</i>
polokruh	demi-cercle <i>m</i>
poloměr	rayon <i>m</i>
poloosa	demi-axe <i>m</i>
polopřímka	demi-droite <i>ž</i>
polorovina	demi-plan <i>m</i>
polovina	moitié <i>ž</i>
položít	poser
polygon	polygone <i>m</i>
polynom	polynôme <i>m</i>
polynomický	polynomial, e, aux
poměr	rapport <i>m</i> ; raison <i>ž</i>
pomocný	auxiliaire
porovnání	comparaison <i>ž</i>
porovnávat	comparer
pořádek	ordre <i>m</i>
pořadnice	ordonnée <i>ž</i>
posloupnost	suite <i>ž</i> ; succession <i>ž</i>
postačující	suffisant, e
postulát	postulat <i>m</i>
postulovat	postuler
postup	procédé <i>m</i>
postupně	successivement
postupný	successif, ive
posunutí	translation <i>ž</i>
potenciál	potentiel <i>m</i>
potenciální	potentiel, elle
poučka	théorème <i>m</i>

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

4

ROČNÍK 51, 1972-1973, PROSINEC



ROČNÍK 51
PROSINEC 1972

4

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ Praha, prof. dr. Ján Vanovič, UK Bratislava, František Vencálek, SPŠ Praha.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

OBSAH

Š. Il'aš: O pojmech náročných, ale zaujímavých	145
P. Vihan: Didoniny úlohy	152
S. Horák: Řezy na hranolech a válkách	156
M. Marčok: Potenciálna tiažova energia	159
Dr. E. Scholtz: Fyzikálne princípy čier-nobielej televízie	166
Dr. M. Bednařík: Trochu fyziky v jedou-cím vlaku II	171
Dr. M. Šíroká - Dr. J. Šíroký: Komety	179
Dr. J. Šíroký - Dr. M. Šíroká: Krabí mlhovina	183
Dr. J. Horský: Niels Bohr	185
J. Kotyk: Beseda s čtenáři	197
Recenze	190
Olympiády	191
Redakce hovoří se čtenáři	192
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouz-ský	3. a 4. str. obálky

matematika

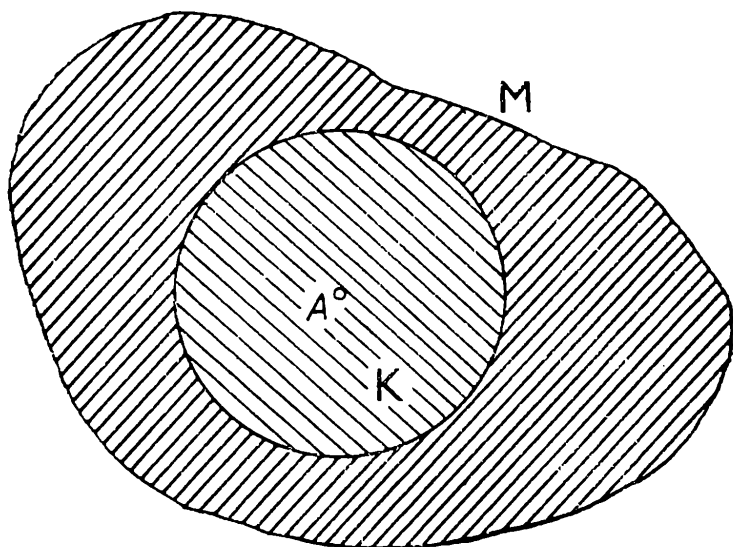
O pojmoch náročných, ale zaujímavých

ŠTEFAN IL'AŠ, odb. asistent, PF Prešov

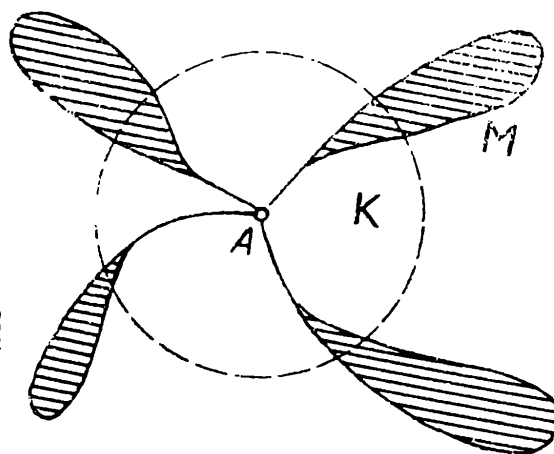
Existujú v matematike pojmy, ktoré majú také široké uplatnenie, že sa s nimi stretávame takmer vo všetkých oboroch matematiky. Medzi ne v súčasnosti bezosporu patrí „množina“, ktorá v poslednom čase našla svoje udomácnenie i v stredoškolskej matematike. Tak ako každý matematický pojem a vôbec celá matematika v dnešnom stave vznikla a vyvíjala sa na zemi, tak isto dnes existujúca teória množín a jej množinový jazyk (ktorého s výhodou použijeme i v tomto článku) popisujú síce vysoko abstraktné poznatky, ktoré ovšem sú úzko späté s ľudskou praxou a sú iba postupnou abstrakciou javov reálneho života na našej planéte. Iste si spomeniete, že i pri zoznamovaní sa s pojmom „množina“ ste vychádzali na hodinách matematiky z konkrétnych reálnych situácií. Oboznámili ste sa s množinami utvorenými z reálnych predmetov, vecí, objektov a na nich ste si osvojovali operácie s množinami. Avšak všeobecne možno povedať, že predmetom matematických výskumov — objavov nie sú konkrétne fyzické objekty, ale isté abstraktné objekty, ktoré môžu mať praktické, fyzické interpretácie. Teda pri všetkých matematických objavoch, alebo dokonca i vzniku nových matematických teórií, nie je ešte možné povedať (rozhodnúť), či a kedy ich bude možné využiť prakticky. Avšak tieto objavy, či teórie vznikajú na základe zákonov logiky, ktoré sú odvodené z praktických potrieb praxe.

Ak *G. Cantor* (1845—1918) vystúpil v druhej polovici 19. storočia so svojou teóriou množín, iste sám vzedy ešte netúšil, aké široké uplatnenie bude mať táto teória nielen v samotnej matematike, ale i mimo jej rámec.

Medzi základné množiny v geometrii možno považovať priamku, rovinu a obyčajný priestor, v ktorom žijeme (pretože napr. v planimetrii každá množina je podmnožinou roviny). Tieto množiny nazývame jednorozmerným, resp. trojrozmerným euklidovským priestorom a označujeme ich symbolicky E_1 , E_2 , resp. E_3 . V týchto priestoroch žiadna množina, ako iste vieme, nemôže mať (z geometrického hľadiska) rozmer (dimenziu) väčšiu než 3. Avšak v súčasnej matematike „priestor“ je veľmi abstraktný pojem a používa sa vo veľmi širokom význame (hoci vznikol abstrakciou, zovšeobecnením práve uvedených základných množín E_1 , E_2 , resp. E_3 .)



Obr. 1a



Obr. 1b

V priestoroch E_1 , E_2 , resp. E_3 vieme napr. čo treba rozumieť pod vzdialenosťou bodov (je to dĺžka úsečky, ktorej konce sú práve tieto body). Abstraktnejší pojem je n -rozmerný euklidovský priestor E_n , kde n je ľubovoľné prirodzené číslo. Jeho zovšeobecnením vznikol metrický priestor (pozri napr. [3]), kde je tiež medzi prvkami zavedená relácia „vzdialenosť“, ktorou už nemusí byť úsečka. Zovšeobecnením metrického priestoru vznikol najabstraktnejší priestor, a síce „topologický“, kde je napr. potrebné vedieť, čo to znamená, že dva body sú „blízke“, resp., že bod je „blízky“ množine. Hovoríme tomu, že do množiny bola zavedená topológia.

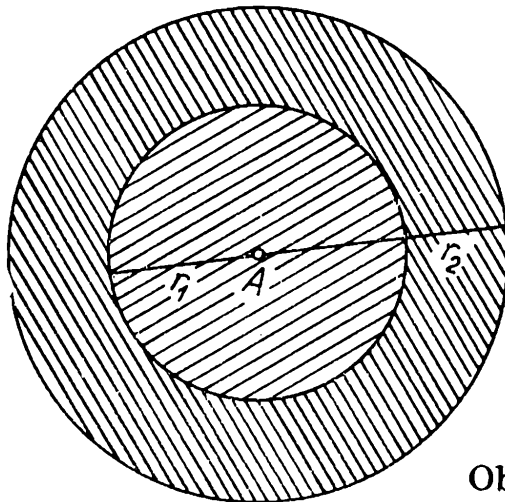
Množina akýchkoľvek prvkov sa teda stáva „priestorom“, ak sú v nej medzi jej prvkami nejakým spôsobom zavedené relácie. Tieto relácie môžu byť rôznorodé. V metrických priestoroch takouto reláciou bola metrika d (niektorí autori miesto označenia d užívajú ρ alebo μ), v topologických je to „blízkosť“. Pokúsme sa teraz o zavedenie dôležitého pojmu pre ďalšie naše úvahy, ktorým je „okolie bodu“ (v metrickom priestore, o ktorom je pojednané napr. v [1], [2] a [3]). Naše úvahy budú síce podopreté názornosťou v rovine, avšak vytvorené definície, ako výsledok týchto úvah, budú môcť byť zovšeobecnené pre ľubovoľný metrický priestor, pretože vieme čo treba rozumieť v ňom pod vzdialenosťou bodov.

Uvažujme preto ľubovoľný bod A a množinu M v rovine, ktorej bod A je prvkom. Môže sa stať, že existuje kruh o strede A , ktorý sa nachádza v množine M (obr. 1a), avšak takýto kruh nemusí existovať (obr. 1b). V prvom prípade, názorne povedané, množina M obkľučuje (obkolesuje) bod A (tak, ako ovocný sad — záhrada obkolesuje dom); v druhom prípade množina M neobkľučuje bod A . Takú množinu, ktorá obsahuje nejaký kruh so stredom A , nazveme okolím bodu A . Špeciálnym okolím bodu je tzv. sférické okolie, tj. okolie, ktoré samo je kruh.

Definícia 1.

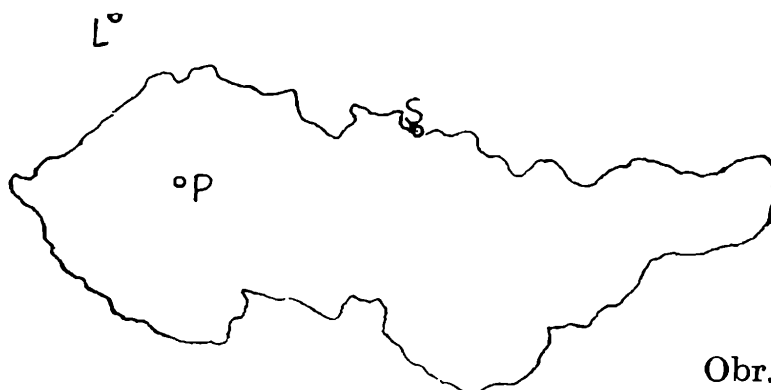
Sférickým r -okolím bodu A v metrickom priestore (P, d) budeme nazývať množinu všetkých bodov X , pre ktoré platí $d(A, X) < r$.

Obr. 2 predstavuje dve sférické okolia bodu A v rovine. Jedno menšie, tj. s menším polomerom r_1 a druhé väčšie s väčším polomerom $r_2 > r_1$.



Obr. 2

Na obr. 3 množinu M predstavuje mapa ČSSR, kde bod P označuje hlavné mesto Prahu, bod S znázorňuje miesto na československo-poľskej hranici a bod L označuje miesto Lindenau v NDR. Všimnime si bližšie bod S ; prečo hovoríme, že leží na hranici? Ak S predstavuje miesto, kde je osadený nejaký pohraničný stĺp, potom v ľubovoľnom okolí tohto



Obr. 3

stĺpu sa nachádza kúsok československej zeme a kúsok poľskej (tj. zahraničnej) zeme. Ak to vyjadríme množinovým jazykom, potom možno povedať, že v ľubovoľnom okolí bodu S sa nachádzajú tak body patriace množine M , ako aj body nepatriace tejto množine. Avšak túto vlastnosť nemá bod P . Môžeme sa pohybovať všetkými smermi v istom okolí Prahy, nikdy neopustíme ČSSR. Čo množinovým jazykom možno vyjadriť tak, že existuje také okolie bodu P , ktoré sa celé nachádza v množine M . Kvôli úplnosti, v blízkom okolí Lindenau niet ani kúsok čl. zeme, tj. pre bod L existuje okolie, ktoré neobsahuje žiaden bod množiny M . Hovoríme, že bod S je hraničný, P — vnútorný a L — vonkajší bod množiny M .

Definícia 2.

a) *Hraničným bodom množiny M* sa nazýva taký bod, v ktorého ľubovoľnom okolí sa nachádzajú tak body množiny M , ako aj body nepatriace množine M . Množina všetkých hraničných bodov množiny M sa nazýva jej hranicou.

b) *Vnútorným bodom množiny M* sa nazýva taký bod, ktorý má okolie nachádzajúce sa v tejto množine. Množina všetkých vnútorných bodov množiny M sa nazýva jej vnútrom.

c) *Vonkajším bodom množiny M* sa nazýva taký bod, ktorý má okolie neobsahujúce žiaden bod tejto množiny. Množina všetkých vonkajších bodov množiny M sa nazýva jej vonkajškom.

Poznámka. Hranica môže (avšak nemusí) patriť množine, vnútro vždy patrí množine a vonkajšok nikdy nepatrí množine.

Definícia 3.

a) Množina sa nazýva *uzavretou* v priestore P , ak jej patrí celá hranica.

b) Množina sa nazýva *otvorenou* v priestore P , ak jej nepatrí žiaden hraničný bod.

Dôsledok. Ak množina M je uzavretá v priestore P , potom množina $P-M$ je otvorená v P (pretože množine M patrí hranica, tj. všetky jej hraničné body a preto jej doplnku $P-M$ nepatrí žiaden hraničný bod).

Napr. štvorec Q so svojim obvodom je uzavretou množinou v rovine E_2 ; avšak rovina bez tohto štvorca, tj. množina E_2-Q je otvorená v rovine.

Definícia 4.

Vzdialenosťou bodu A od neprázdnej množiny M nazývame polomer r najväčšieho sférického okolia bodu A , vnútri ktorého niet body množiny M . Ak každé sférické okolie bodu A obsahuje body množiny M , potom vzdialenosť tohto bodu od množiny M je nulová, tj. $d(A, M) = 0$ a hovoríme, že bod A je blízky množine M .

Teraz už môžeme presne zaviesť pojem „topologický priestor“.

Definícia 5.

Nech P je množina ľubovoľných prvkov, zvaných body a pre každú jej podmnožinu A sú vymedzené body blízke množine A tak, že sú splnené požiadavky:

a) Bod X je blízky bodu Y (tj. jednobodovej množine, obsahujúcej len bod Y) práve vtedy, ak $X \equiv Y$.

b) Bod X je blízky zjednoteniu $A \cup B$ dvoch množín A, B práve vtedy, ak je blízky aspoň jednej z nich.

c) Ak je bod X blízky množine všetkých bodov blízkych množine A , je X tiež blízky množine A .

Potom množina P spolu s reláciou „blížkosť“ sa nazýva *topologický priestor*.

Každý euklidovský priestor je súčasne metrickým i topologickým priestorom a každý metrický priestor je súčasne topologickým priestorom. Opak neplatí. Z toho dá sa usúdiť, že každá matematická poučka pravdivá pre topologický priestor je pravdivá i pre metrický a euklidovský priestor.

Z uvedeného ďalej tiež vyplýva, že s niektorými topologickými priestormi bežne pracujeme na hodinách matematiky bez toho, aby sme si to uvedomili (euklidovská priamka, rovina, priestor).

Definícia 6.

Množina všetkých bodov blízkyh množine M sa nazýva *uzáverom množiny* M a označuje sa \overline{M} . Takže \overline{M} je množina všetkých bodov X spĺňujúcich podmienku $\mu/X, M/ = 0$.

Dôsledok. Ak množina M je uzavretá, potom $M = \overline{M}$ (prečo?). Napr. ak M je otvorený kruh, potom každý bod jeho hranice (kružnice k) je bodom blízkyh množine M . Množina M je otvorená, ale $M \cup k = K$ je uzavretá v rovine, preto $K = \overline{K}$.

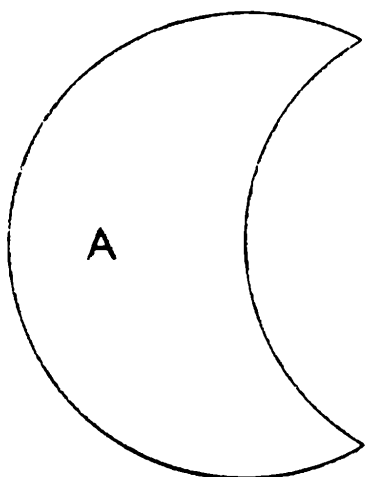
Poznámka. Body uzáveru sú dvojaké: hromadný, ak v každom (i v tom najmenšom) okolí bodu A sa vždy ešte nachádzajú body danej množiny; alebo izolovaný, ak existuje okolie bodu A , v ktorom niet žiaden bod danej množiny rôzny od A . (Množina, ktorej každý bod je izolovaný sa nazýva diskretná.)

Ak na obr. 3 je $N = M \cup \{B\}$, potom každý bod z množiny M je hromadným bodom množiny N a bod B je izolovaným bodom množiny N .

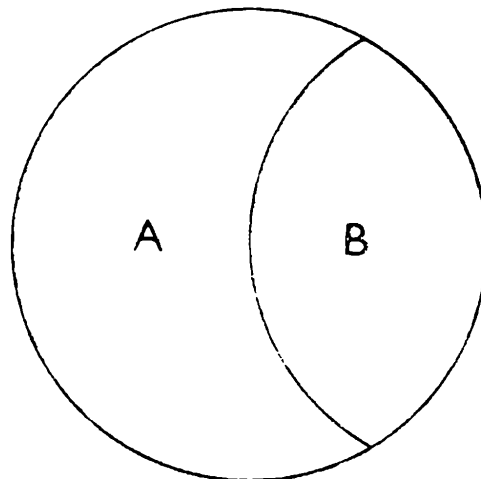
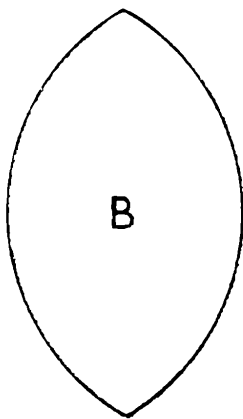
Ak množina M (obrazne povedané) sa neskladá „z jedného kusa“, ale z viacerých „ďaleko“ od seba sa nachádzajúcich častí (kusov), potom hovoríme, že množina M nie je súvislá a tieto „ďaleko“ od seba položené časti (kusy) sú oddelené množiny. Avšak iba takéto nepresné, názorné konštatovanie v matematike nestačí; nestačí to ani doplniť tým, že oddelené množiny sú disjunktné. Napr. množinu reálnych čísel možno vyjadriť v tvare zjednotenia dvoch disjunktných množín, a to množiny racionálnych a iracionálnych čísel, avšak nemožno povedať, že by tieto jej podmnožiny sa nachádzali „ďaleko“ od seba, pretože každá z nich obsahuje bod blízky (tj. patriaci uzáveru) druhej. Naše uvahy uzavrie nasledujúca presná definícia:

Definícia 7.

a) Dve množiny A, B v priestore P sú *oddelené*, ak žiadna z nich neobsahuje body blízke druhej množine. Tj. ak platí $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ (obr. 4a).



Obr. 4a



Obr. 4b

b) Množina M sa nazýva *súvislou*, ak ju nemožno rozdeliť na dve neprázdne oddelené množiny. Tj. ak z relácie $M = A \cup B$ ($A \neq \emptyset \neq B$) vyplýva, že A, B nie sú oddelené, takže platí $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \neq \emptyset$ (obr. 4b).

Dôsledok. Množina $N \in P$ oddeluje dve množiny A, B súvislého priestoru P , ak $P - N$ nie je súvislá množina. $N = E_2 - (A \cup B)$, potom $P - N = E_2 - [E_2 - (A \cup B)] = A \cup B$, čo nie je súvislá množina.

Napr. otvorené intervaly $(0, 1), (1, 2)$ sú oddelené množiny v E_1 , hoci existuje bod (so súradnicou 1), ktorý patrí uzáverom oboch množín. Naproti tomu množina $(0, 1)$ nie je oddelená od uzavretého intervalu $\langle 1, 2 \rangle$, pretože bod so súradnicou 1 patriaci množine $\langle 1, 2 \rangle$ je bodom blízkym množine $(0, 1)$, tj. patrí jej uzáveru.

V rovine elipsa je súvislou množinou, hyperbola nie je súvislou množinou. Z predošlého vyplýva, že jednoprvkové množiny sú súvislé (prečo?); prázdnu množinu považujeme tiež za súvislú.

Francúzsky matematik *Poincaré* zaoberajúc sa myšlienkou presne definovať rozmer (dimenziu) množiny (topologického priestoru) si všimol (r. 1912), že dimenzia množiny (priestoru) je v istom zmysle mierou jej (jeho) súvislosti. Priamka (krivka) totiž má dimenziu 1, pretože ľubovoľné dva jej body možno oddeliť vyňatím jedného bodu (tj. množinou dimenzie 0). Rovina má dimenziu 2, pretože ľubovoľné dve množiny v rovine možno oddeliť krivkou (napr. kružnicou), tj. množinou dimenzie 1. Podobne guľová plocha oddeluje ľubovoľné dve množiny v priestore E_3 . To viedlo Poincarého k záveru, že dimenziu je možno definovať induktívne: množine (priestoru) prisúdime dimenziu n , ak ľubovoľné dve jej (jeho) podmnožiny možno oddeliť vyňatím z nej (neho) podmnožiny dimenzie $n-1$ [avšak vyňatie podmnožiny dimenzie menšej

než $n-1$ už nestačí na to, aby sa táto množina-priestor stala (stal) nesúvislou (nesúvislým)].

Aj keď priestory s dimenziou väčšou než 3 sa prakticky nedajú názorne modelovať, majú však dôležité uplatnenie predovšetkým v súčasnej fyzike. Napr. ak fyzika má charakterizovať nejaký jav, udáva miesto javu (zrejme v E_3) a čas, v ktorom jav nastal; takže ide tu o štvorrozmerný priestor.

Veľkú zásluhu na rozvinutí teórie dimenzie má predovšetkým sovietsky matematik *P. S. Uryson* (žiaľ, zomrel už vo veku 26 rokov), ku ktorého teórii pre nedostatok miesta v tomto článku, sa už nedostaneme.

Cvičenia

I. Dokážte, že diskrétna množina má dimenziu nula.

Návod: Uvážte, že každé jej dva body možno oddeliť prázdnu množinou.

II. Dokážte, že každá podmnožina priemky E_1 , ktorá neobsahuje žiaden interval, je dimenzie 0.

III. Dokážte, že množina reálnych čísel, ktorá neobsahuje žiaden hromadný bod (limitu), je dimenzie 0.

IV. Dokážte, že každá podmnožina roviny, ktorá nemá žiaden vnútorný bod, nemá dimenziu väčšiu než 1.

V. Dimenzia ľubovoľnej viacbodovej otvorenej množiny v rovine je 2. Dokážte.

VI. Nuladimenzionálna množina M v E_2 má súvislý doplnok E_2-M . Dokážte.

VII. Množina bodov roviny, ktorých obe súradnice sú racionálne čísla, je dimenzie 0.

[Návod: Množina racionálnych čísel je nesúvislá; stačí označiť napr.

$A = \{x : x \in \text{Rac.}, x < \sqrt{2}\}, B = \{x : x \in \text{Rac.}, x > \sqrt{2}\}$ potom $\overline{A} = \overline{A} \cup \{\sqrt{2}\}$
 $\overline{B} = \overline{B} \cup \{\sqrt{2}\}$, takže $A \cap \overline{B} = \emptyset = B \cap \overline{A}$].

Doporučená literatúra (na doplnenie, prípadne i objasnenie niektorých problémov z tohto článku):

- [1] *Kuřina, F.*: Metrické prostory. Rozhledy, roč. 46 (1967–68), č. 2 a 3.
- [2] *Šisler, M.*: Metrické prostory. Matematika ve škole, roč. XIV., č. 1 a 2.
- [3] *Ilaš, Š.*: O pojme vzdialenosť. Rozhledy, roč. 50 (1971–72), č. 3.
- [4] *Ilaš, Š.*: Použitie jedného topologického invariantu v rekreačných úlohach. Matematika a fyzika ve škole, roč. I. (1970–71), č. 6.
- [5] *Krygowska, Z.*: Geometrija. Moskva: Prosveščeniye, 1971 (v ruštine).

Didoniny úlohy

PŘEMYSL VIHAN, ČVUT Praha

Dido byla podle pověsti královskou dcerou z Tyru, bohatého starofénického přístavního města na syrském pobřeží. Podle vůle svého otce měla po jeho smrti vládnout společně se svým bratrem. Ten však dal úkladně zavraždit jejího manžela z touhy po jeho bohatství. Švagrova pokladu se však nezmocnil, neboť Dido s ním a s nespokojenými Tyřany uprchla do Afriky. Tam od numidského krále koupila takový kus země, co obsáhne volská kůže. Lstivá Dido dala kůži rozřezat na tenké řemínky, svázala je a ohraničila jimi tak velký kus země, že na něm později mohla vybudovat hrad. Řekové jej nazývali Byrsa, tj. stažená kůže; tím položila základ Karthaga.

Nehledě na výklad slova „obsáhnout“, stála Dido před úkolem najít takovou křivku, která ohraničí území co největšího obsahu. To je ovšem matematizovaná verze. Její řešení známe: takovou křivkou je kružnice. My se ovšem budeme zabývat jednoduššími úlohami:

- a) Mezi všemi trojúhelníky, které mají stejný obvod, najít ten, který má největší obsah;
- a') mezi všemi trojúhelníky, majícími stejný obsah, najít takový, který má nejkratší obvod;
- b) ze všech kvádrů, které mají tentýž povrch, vybrat kvádr s největším objemem;
- b') ze všech kvádrů, které mají týž objem, vybrat kvádr, mající nejmenší povrch;
- c) mezi všemi n -ticemi reálných nezáporných čísel takových, že jejich součet je týž, najít n -tici takových čísel, že jejich součin je největší;
- c') mezi všemi n -ticemi reálných nezáporných čísel takových, že jejich součin je tentýž, najít n -tici takových čísel, že jejich součet je nejmenší.

Řadění těchto úloh do dvojic (a, a') není náhodné, jak uvidíte. Vlastně se obě úlohy této dvojice řeší najednou.

K řešení úloh z našeho seznamu použijeme této věty:

Jestliže x_1, \dots, x_n jsou nezáporná reálná čísla, platí

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \quad (1)$$

a rovnost v (1) nastane, právě když $x_1 = \dots = x_n$.

Důkaz provedeme matematickou indukcí:

1. nejdříve dokážeme tvrzení (1) pro $n = 2$.

Jestliže a, b jsou reálná čísla, je jistě $(a - b)^2 \geq 0$ a rovnost platí, právě když $a = b$. Úpravou dostaneme $a^2 + b^2 \geq 2ab$, tedy

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab.$$

Zopakujme si tedy: pro všechna reálná čísla a, b platí $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$

a rovnost platí, právě když $a = b$.

Dosadme $a = \sqrt{x_1}$, $b = \sqrt{x_2}$, aby to však bylo možné (a, b jsou reálná), musíme předpokládat, že $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Tím je dokázáno (1) pro $n = 2$.

2. Nyní dokážeme: jestliže tvrzení (1) platí pro $n = 2^k$, platí pro $n = 2^{k+1}$.

Pro jednoduchost zápisu ukáži tento krok pro $k = 1$.

Tedy jestliže (1) platí pro $n = 2$, platí pro $n = 4$:

$$\text{Položme v nerovnosti } \frac{y_1 + y_2}{2} \geq \sqrt{y_1 \cdot y_2} \quad y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y_2 = \frac{x_3 + x_4}{2}. \text{ Dostaneme}$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \frac{x_3 + x_4}{2}} \geq \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} \quad (2)$$

(neboť jsme předpokládali, že tvrzení platí pro $n = 2$, odtud poslední nerovnost).

Rovnost v (2) nastane, právě když $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ a současně $x_1 = x_2$ a $x_3 = x_4$, tedy právě když $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

To byla indukce „vpřed“ a tvrzení (1) je dokázáno pro libovolné n , které lze psát jako mocninu dvou.

Abychom dokázali (1) pro libovolné n , musíme užít ještě indukce „vzad“.

3. Dokážeme: jestliže (1) platí pro $n = k$, platí i pro $n = k - 1$.

$$\text{Položme v (1) } n = k \text{ a } x_1 = y_1, \dots, x_{k-1} = y_{k-1}, x_k = \frac{y_1 + \dots + y_{k-1}}{k-1}$$

a dostaneme

$$\frac{y_1 + \dots + y_{k-1} + \frac{y_1 + \dots + y_{k-1}}{k-1}}{k} \geq$$

$$\geq \sqrt[k]{y_1 \cdot \dots \cdot y_{k-1}} \cdot \sqrt[k]{\frac{y_1 + \dots + y_{k-1}}{k-1}}$$

neboli

$$\frac{y_1 + \dots + y_{k-1}}{k-1} \geq \sqrt[k]{y_1 \cdot \dots \cdot y_{k-1}} \cdot \sqrt[k]{\frac{y_1 + \dots + y_{k-1}}{k-1}}$$

tedy nakonec

$$\frac{y_1 + \dots + y_{k-1}}{k-1} \geq \sqrt[k-1]{y_1 \cdot \dots \cdot y_{k-1}}$$

a rovnost v (3) platí, právě když $y_1 = y_2 = \dots = y_{k-1}$.

Indukce vpřed spolu s indukcí vzad dokazuje tvrzení (1) pro libovolné n .

V úlohách označených na začátku článku a, a' uijeme pro obsah trojúhelníka o Heronova vzorce $o(a, b, c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $2s = a + b + c$. Položme $s - a = x_1$, $s - b = x_2$, $s - c = x_3$ a dosazením do (1) pro $n = 3$ dostaneme $\frac{s}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Umocněním na $\frac{3}{2}$ a násobením \sqrt{s}

$$\frac{s^2}{3 \cdot \sqrt{3}} \geq \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = o(a, b, c) \quad (4)$$

a další úpravou

$$2s \geq 2 \cdot \sqrt[4]{27} \cdot \sqrt{o} \quad (5)$$

a rovnost ve (4) a (5) nastane, právě když $s - a = s - b = s - c$, tj. právě když $a = b = c$.

K řešení úlohy a) použijeme (4). Při úloze a) je s konstantní. Kdy je tedy při daném s největší o ? Právě když ve (4) platí rovnost, a ta platí, právě když $a = b = c$. Ze všech trojúhelníků, které mají týž obvod, má největší obsah trojúhelník rovnostranný. Pro něj platí $2s = 3a$, tedy rovnostranný trojúhelník, jehož strana $a = \frac{2}{3}s$.

K řešení úlohy a' použijeme (5). Při úloze a' je o konstantní. Kdy je tedy při daném o nejmenší obvod $2s$? Právě když v (5) platí rovnost, a ta platí, právě když $a = b = c$. Ze všech trojúhelníků, které mají stejný obsah, má nejmenší obvod trojúhelník rovnostranný. Pro ten platí podle (5) $3a = 2 \sqrt[4]{27} \sqrt{o}$, tedy $a = \frac{2 \cdot \sqrt{o}}{\sqrt[4]{3}}$.

Obraťme se nyní k úlohám b), b'). Označme hrany kvádrů a, b, c a položme $x_1 = a \cdot b$, $x_2 = a \cdot c$, $x_3 = b \cdot c$. Dosadíme-li do (1) (opět pro $n = 3$), dostaneme

$$\frac{P}{6} = \frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = V^{\frac{2}{3}}$$

a rovnost nastane, právě když $a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c$, tj. $a = b = c$. Dostáváme pro povrch P a objem V kváдру tyto nerovnosti

$$P \geq 6V^{\frac{2}{3}} \quad \text{a} \quad V \leq \left(\frac{P}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Snadno již spočtete sami, že řešením v obou příkladech je krychle, v prvním o hraně $a = \sqrt{\frac{P}{6}}$ a v druhém $a = \sqrt[3]{V}$.

c) Představme si, že x_1, \dots, x_n jsou nezáporná reálná čísla a $x_1 + \dots + x_n = c$, potom podle (1) je

$$c/n \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}, \text{ tj. } x_1 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left(\frac{c}{n}\right)^n \quad (6)$$

Kdy je tedy součin $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ největší? Právě když v (6) platí rovnost, a ta platí podle věty, kterou jsme dokázali, právě když $x_1 = \dots = x_n$. Dosazením do $x_1 + \dots + x_n = c$ vypočteme $x_1 = \dots = x_n = c/n$.

c') Nechť x_1, \dots, x_n jsou nezáporná reálná čísla a $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = c$, potom podle (1) je

$$x_1 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{c}. \quad (7)$$

Kdy je součet $x_1 + \dots + x_n$ nejmenší? Právě když v (7) platí rovnost, a ta, jak víme, platí, právě když $x_1 = \dots = x_n$. Dosazením do $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = c$ dostaneme $x_1 = \dots = x_n = \sqrt[n]{c}$.

Těmito úlohami jsme zdaleka nevyčerpali všechny možnosti, které dává věta dokázaná na začátku článku. V dalším článku si všimneme těchto úloh:

d) Elipsoidu vepsat kvádr, který má největší objem;

d') kváдру opsat elipsoid, jehož objem je nejmenší.

Vy si však můžete sami rozřešit tyto úlohy:

e) Mezi všemi pravoúhelníky, které mají stejný obvod, nalézt pravoúhelník největšího obsahu;

e') mezi všemi pravoúhelníky, které mají stejný obsah, najděte pravoúhelník s nejmenším obvodem;

f) do elipsy vepište pravoúhelník tak, aby jeho strany byly rovnoběžné s osami elipsy a jeho obsah byl největší;

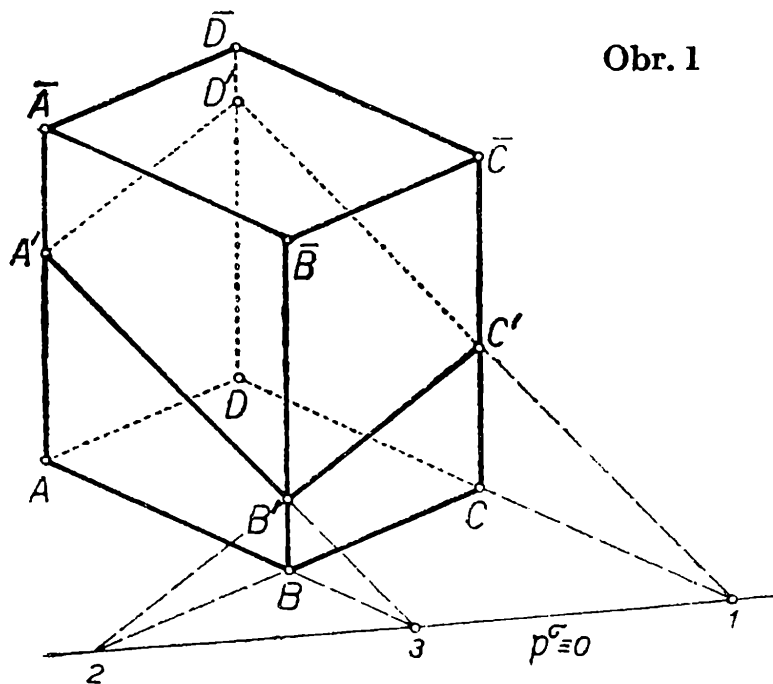
f') pravoúhelníku opište elipsu, která má osy rovnoběžné se stranami pravoúhelníka a jejíž obsah je nejmenší. (Obsah elipsy o poloosách a, b je $\pi a \cdot b$.)

konstruktivní geometrie

Řezy na hranolech a válcích

STANISLAV HORÁK, Praha

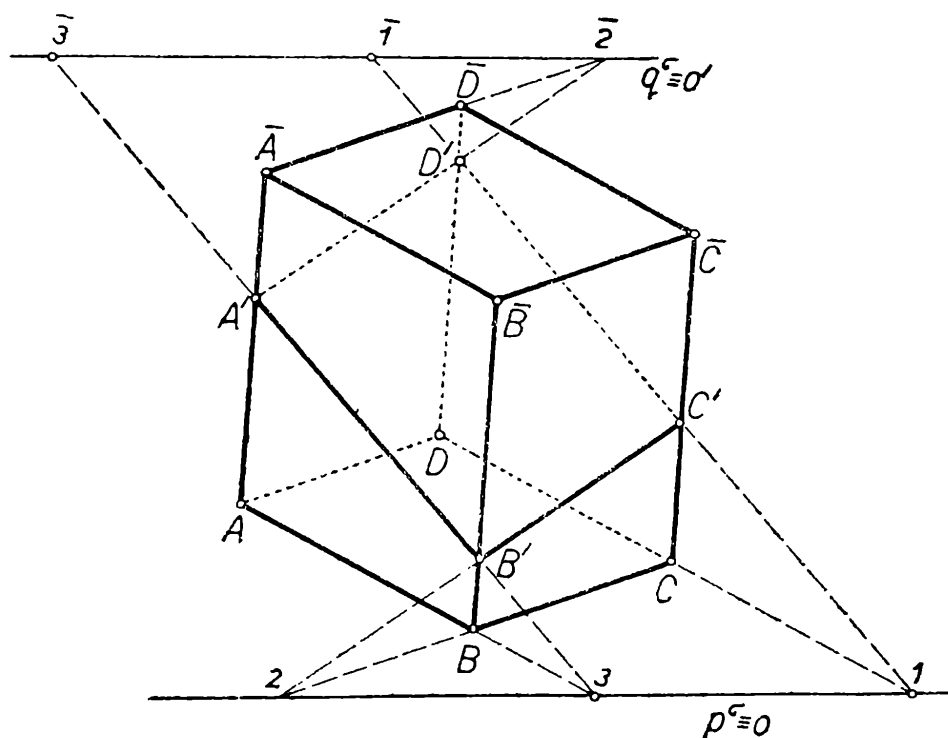
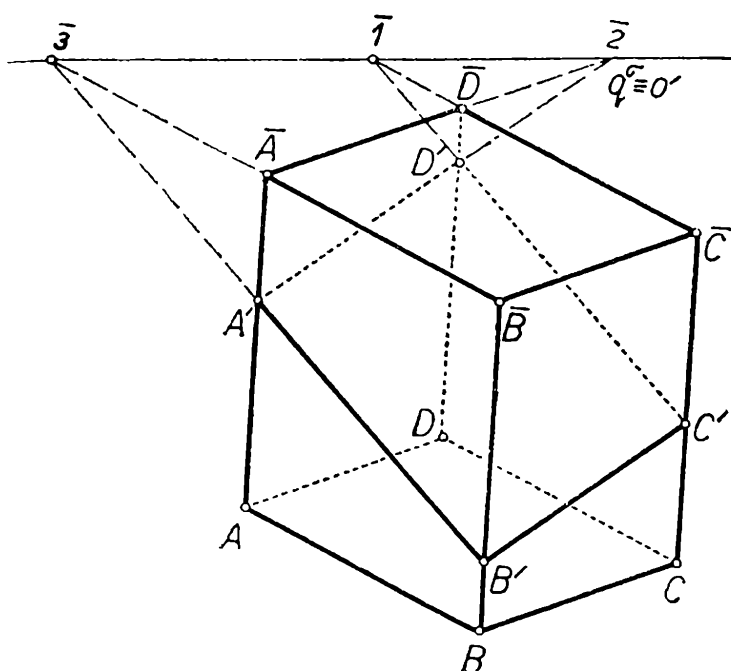
Řezy na hranolech a válcích rovinou obecně položenou vzhledem k průmětnám sestrojíme buď užitím pomocné třetí průmětny, nebo pomocí osové afinity. Osou afinity je při tom vždy průsečnice roviny podstavy a roviny řezu. Potom potřebujeme znát ještě pár bodů, které si v afinitě vzájemně odpovídají. To určujeme tak, že (na hranolu) zvolíme určitou pobočnou hranu a zjistíme její průsečík s rovinou řezu. Tento bod a vrchol podstavy na téže pobočné hraně (na válci bod podstavy na téže povrchu) tvoří dvojici bodů, které si v afinitě odpovídají.



V obr. 1 je znázorněn čtyřboký hranol $ABCD\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, o němž předpokládáme, že jeho dolní podstava $ABCD$ leží v půdorysně. Průsečnice roviny řezu σ a roviny podstavy je půdorysná stopa p_σ , a to je osa o afinity.

Předpokládejme, že jsme nějakým způsobem sestrojili bod D' řezu. Potom body D, D' jsou pár bodů, které si v naší afinitě odpovídají. Tím je afinita určena a z výchozí dvojice D, D' můžeme určit další vrcholy řezu. Snad nebude na škodu, jestliže konstrukci jednotlivých vrcholů si zopakujeme.

Obr. 2

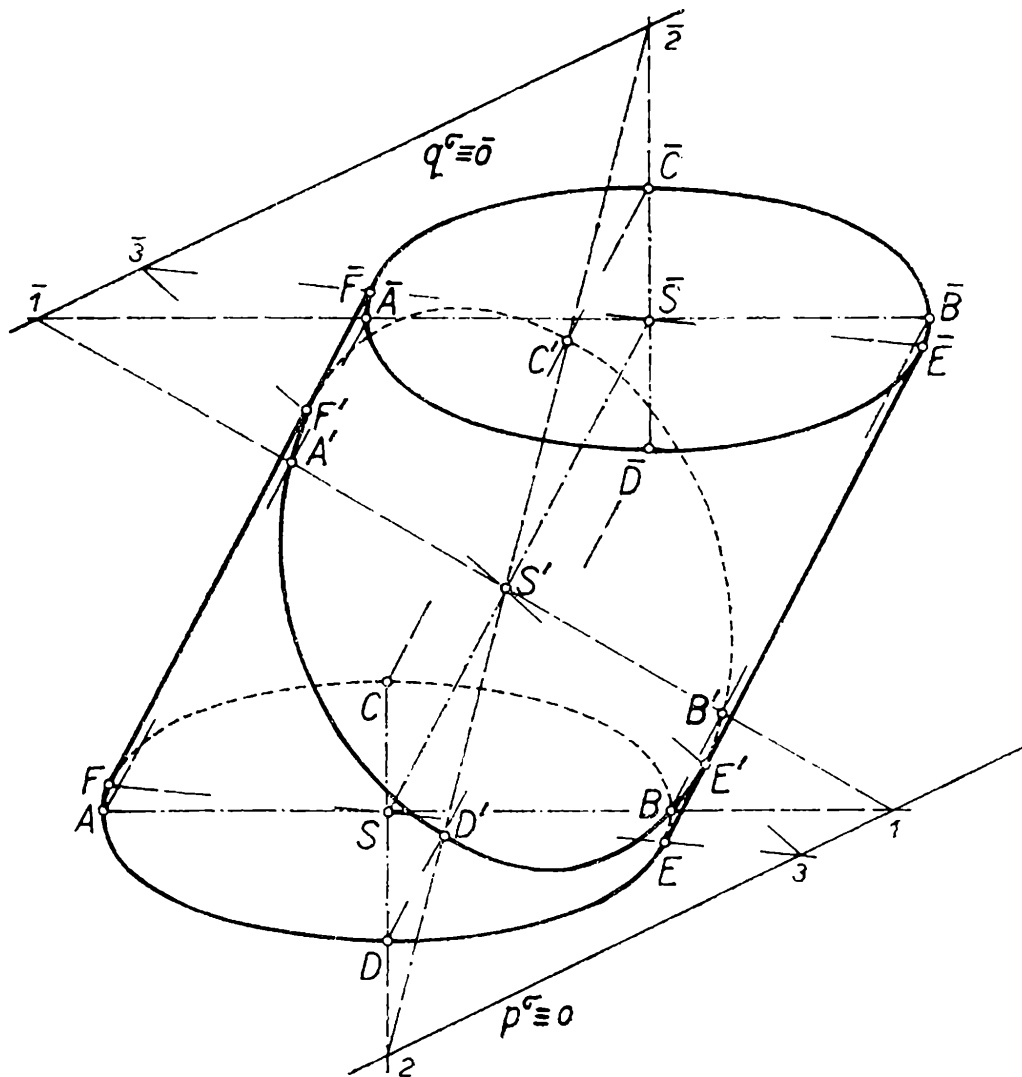


Obr. 3

Přímka CD protne osu afinity v samodružném bodě 1 . Přímka, spojující bod 1 s bodem D' , vytne na hraně $\overline{CC'}$ bod C' , což je další vrchol řezu. Přímka BC protne osu afinity v bodě 2 . Jeho spojnice s bodem C' protne hranu $\overline{BB'}$ v bodě B' , a to je další bod řezu.

Řezem je rovnoběžník $A'B'C'D'$ a poněvadž známe vrcholy B' , C' , D' , dovedeme určit i vrchol A' .

Řez $A'B'C'D'$ je však ve vztahu osově afinity i s horní podstavou, osou afinity je však průsečnice q^σ roviny řezu a roviny horní podstavy. Použijeme-li této afinity a předpokládáme-li, že je znám vrchol D' , řeší se náš příklad takto:



Obr. 4

Přímka \overline{CD} (obr. 2) protne osu afinity v bodě \bar{I} . Spojnice $D'\bar{I}$ vytne na hraně \overline{CC} vrchol řezu C' . Další už je zřejmé z obr. 2.

Tu je nasnadě otázka, zda by se nedalo použít současně obou afinit. Odpověď je kladná, ovšem za předpokladu, že známe osy obou afinit, tj. že známe průsečnice p^σ, q^σ roviny řezu s rovinami obou podstav. Konstrukce řezu je v tomto případě velmi jednoduchá. Hlubavý čtenář vyčte jistě postup z obr. 3.

Užití dvojí afinity můžeme aplikovat i na rovinné řezy válce (obr. 4). Víme, že řezem je elipsa. Tu určíme sdruženými průměry $A'B', C'D'$, které v afinitách odpovídají sdruženým průměrům AB, CD dolní podstavy a sdruženým průměrům $\overline{A\bar{B}}, \overline{C\bar{D}}$ horní podstavy.

Průměr AB dolní podstavy protne stopu p^σ (osu afinity první) v bodě I .

Průměr $\overline{A\bar{B}}$ horní podstavy protne q^σ (osu druhé afinity) v bodě \bar{I} .

Přímka \bar{l} je již jeden průměr řezu. Jeho krajní body jsou A', B' leží na površkách (ve směru afinity) $\overline{A\bar{A}}$, resp. $\overline{B\bar{B}}$. Stejným způsobem získáme průměr $C'D'$ (je to průměr sdružený k průměru $A'B'$) z průměru CD dolní podstavy a z průměru $\overline{C\bar{D}}$ horní podstavy.

Body, v nichž se průmět řezu dotýká obrysu válcové plochy, označíme E', F' . V našich afinitách odpovídají bodům E, F dolní podstavy a bodům \bar{E}, \bar{F} na horní podstavě. Ostatní je patrně z obr. 4.

Cvičení

1. Kosý hranol $ABCD\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ s čtvercovou podstavou v první průmětně protne rovinou σ .

Hranol: $[A(3; 9,5; 0), C(10; ?; 0)$, hrana AB je rovnoběžná s osou y , $\bar{A}(0; 9,5; 9)]$. Rovina $\sigma(-8; 9; 5)$.

Provedte v kosoúhlém promítání, $\omega = 135^\circ$, $q = 3 : 5$.

2. Daný kosý válec protne rovinou σ .

Válec má podstavu v průmětně $[S(-4; 4,5; 0), \bar{S}(4; 4,5; 8), r = 3,5]$. Rovina $\sigma(9; 9; 8)$.

Zobrazení provedte v kótovaném promítání.

3. Daný kosý kruhový válec protne rovinou σ .

Válec má podstavu v rovině xy . $[S(5; 0; 0), \bar{S}(-5; 0; 10), r = 4]$. Rovina $\sigma(-15; 5; 6)$.

Provedte v pravoúhlé axonometrii ($\sphericalangle xz = 105^\circ$, $\sphericalangle yz = 120^\circ$).

fyzika

Potencionálna tiažová energia

MILAN MARČOK, VŠLD Zvolen

Pojem energie

Učebnica fyziky na strednej škole a výklad na hodinách fyziky na tejto škole nám môže poskytnúť len ohraničené možnosti pre štúdium mnohých fyzikálnych veličín, javov a ich vlastností. Ak chceme niektorú vec preštudovať podrobnejšie, musíme často siahnuť po viacerých učebniciach, monotematických prácach, časopisoch apod., ktoré nám úkažu rozmanitosť študovanej problematiky. Tento článok má byť ukážkou toho, že napr. o potenciálnej tiažovej energii si možno povedať omnoho viacej, ako som počul pri odpovediach od mnohých žiakov: „... je schopnosť zodvihnutých telies konať prácu a vypočíta sa ako súčin mgh “. Vela podobných príkladov by sa dalo uviesť nielen vo fyzike, ale aj v ostatných vedných oboroch (tak prírodovedných, ako aj spoločenských).

V úvode článku zhrnieme a na niektorých miestach rozšírime obzor poznatkov o energii oproti tým, ktoré nám poskytuje fyzika na strednej škole. Vieme, že energiou nazývame schopnosť telesa konať prácu, alebo

ak v súvislosti s telesom možno konať prácu prisúdime mu energiu. Pojem energie vo fyzike má však širší význam.

Vo fyzike v mnohých prípadoch zanedbávame rozmery telesa vzhľadom na jeho vzdialenosť od iných telies. V tomto prípade hovoríme na miesto o telese len o hmotnom bode. Sústavou hmotných bodov nazývame množinu hmotných bodov, medzi ktorými sú definované určité geometrické a fyzikálne vzťahy (napr. tuhé teleso je špeciálna sústava hmotných bodov).

Podobne možno zaviesť aj sústavu telies. Na každý bod sústavy môžu pôsobiť rozličné sily. Ak sily pochádzajú od ostatných bodov sústavy, nazývame ich *vnútornými silami*, ak pochádzajú od bodov, ktoré nepatria do uvažovanej sústavy, nazývame ich *vonkajšími silami*.

Majme k dispozícii nejakú sústavu hmotných bodov (alebo telies) a predpokladajme, že sa nachádza v celkom určitom stave (uvedený postup je vybratý z [1]). Stav sústavy môžeme charakterizovať fyzikálnymi veličinami, ktoré nazývame *parametrami sústavy* (napr. stav sústavy hmotných bodov v mechanike je určený, ak je známa poloha všetkých bodov a ich rýchlostí; stav plynu je určený jeho objemom, tlakom a teplotou apod.). Pri pôsobení vnútorných a vonkajších síl prechádza sústava z jedného do druhého stavu, pričom dochádza k zmenám parametrov.

Predpokladajme, že nejaká sústava sa nachádza v stave, ktorý označíme stavom I a nech je dobre tepelne izolovaná; to znamená, že nedôjde k výmene tepla a okolím. Nech na túto sústavu pôsobia len vonkajšie sily, ktoré vykonajú prácu A . V jej dôsledku prebehnú v sústave zmeny (ktoré môžu byť nielen mechanické, ale aj chemické, elektrické apod.), čím prejde sústava do nového stavu, ktorý označíme stavom II.

Veličinu, ktorá charakterizuje stav sústavy a ktorej zmena určuje prácu dodanú sústave vonkajšími silami, nazývame energiou W .

Z predchádzajúcej úvahy vyplýva, že zmena stavu sústavy je spojená aj so zmenou energie. Nech má sústava v stave I energiu W_I a v stave II energiu W_{II} . Prírastok energie $\Delta W = W_{II} - W_I$ je úmerný práci A vykonanej vonkajšími silami

$$\Delta W = kA, \quad (1)$$

kde k je konštanta úmernosti. Ak položíme $k = 1$, dostávame vzťah

$$\Delta W = A, \quad (2)$$

z ktorého vyplýva, že energiu a prácu možno merať rovnakými jednotkami a že prírastok energie sa rovná práci vonkajších síl. (Na tomto mieste upozorníme na často nesprávny názor, podľa ktorého sa stotožňuje práca s energiou. Práca a energia sú veličinami rôzneho druhu a nemožno ich v žiadnom prípade stotožňovať.)

Ak budeme predpokladať, že nejaká sústava bude pôsobiť silami na hmotné body (telesá), ktoré do sústavy nepatria a v súvislosti s nimi konať prácu A , tiež platí vzťah (1), resp. (2). Ovšem v tomto prípade sa energia sústavy zmenší, hovoríme o úbytku energie sústavy.

Ak prebehne v sústave zmena mechanická (elektrická, chemická atď.), hovoríme o zmene mechanickej (elektrickej, chemickej atď.) energie sústavy. Ak je zmena energie spôsobená zmenou rýchlosti hmotných bodov (telies), hovoríme o zmene kinetickej energie, ak zmenou polohy, hovoríme o zmene potenciálnej energie.

O potenciálnej energii možno hovoriť napr. v prípade zodvihnutého kladiva, vody v nádrži, stlačenej pružiny, stlačeného plynu, častíc v atóme atď.

Potenciálna tiažová energia

Potenciálna tiažová energia súvisí s význačnou polohou hmotných bodov v gravitačnom poli Zeme (v našich úvahách sa obmedzíme len na gravitačné pole Zeme, avšak uzávery, ktoré urobíme, platia rovnako aj pre gravitačné polia iných telies).

Tiažovú silu G , ktorou pôsobí Zeme na hmotný bod hmotnosti m možno vyjadriť podľa zákona sily vzťahom

$$G = mg, \quad (3)$$

pričom g je tiažové zrýchlenie v mieste, v ktorom sa hmotný bod nachádza.

Jeho hodnota na povrchu Zeme je

$$g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}, \quad (4)$$

kde M_Z a R_Z je hmotnosť, resp. polomer Zeme a $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ je tzv. *všeobecná gravitačná konštanta*. Vo vzdialenosti x od povrchu Zeme má hodnotu

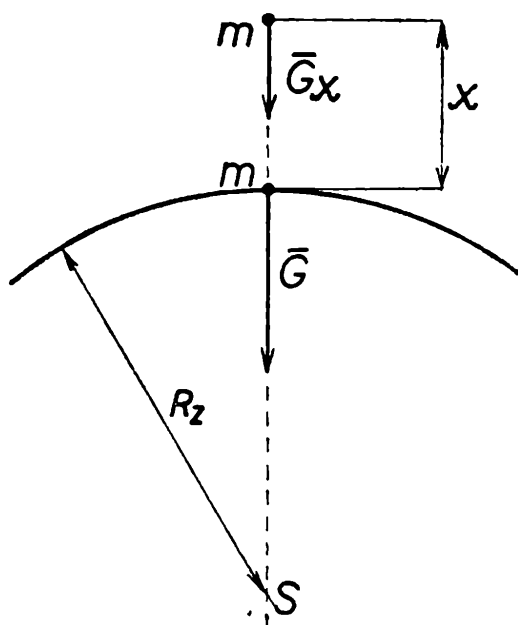
$$g_x = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z + x)^2}. \quad (5)$$

Z (5) vyplýva, že hodnota tiažového zrýchlenia sa znižuje so vzdialenosťou od povrchu Zeme.

Rovnaká vlastnosť platí aj o tiažovej sile. Ak označíme tiažovú silu telesa hmotnosti m na povrchu Zeme G a tiažovú silu toho istého telesa v ľubovolnej vzdialenosti x nad povrchom Zeme G_x , potom je $G > G_x$ (obr. 1).

Ďalej sa budeme miesto hmotného bodu zmieňovať o telese, pričom si uvedomíme nepresnosti, ktorej sa v tejto súvislosti dopustíme.

Pri zodvihnutí telesa hmotnosti m do výšky h nad povrchom Zeme rovnomerným pohybom, vykonávajú vonkajšie sily prácu. Dokážeme,

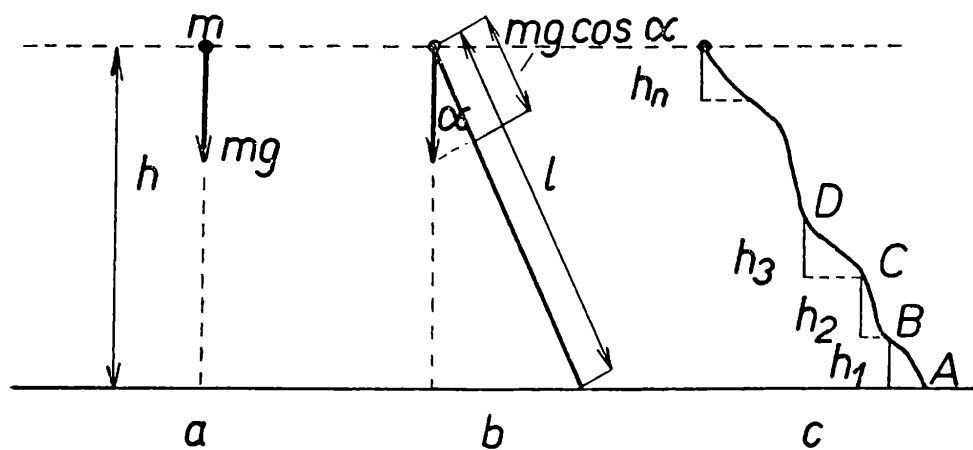


Obr.1

že táto práca nezávisí od cesty, po ktorej sa dostane do danej výšky h [3].

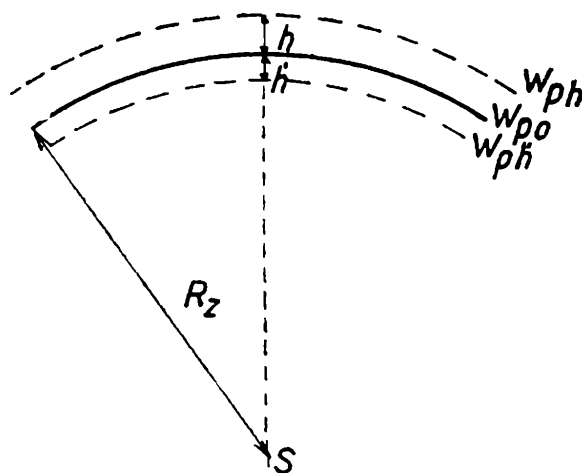
Ak sa teleso pohybuje po priamočiarej dráhe veľkosti h (obr. 2a), vykoná sa práca mgh .

Pri pohybe po naklonenej rovine dĺžky l (obr. 2b) má vykonána práca veľkosť $mgl \cos \alpha = mgh$; $\left(\cos \alpha = \frac{h}{l} \right)$.



Obr.2

Pri pohybe po ľubovoľnej krivke (obr. 2c) možno celú dráhu rozdeliť na veľmi krátke oblúky, ktoré môžeme považovať za elementárne naklonené roviny. Potom podľa predchádzajúceho odseku bude práca pri pohybe z A do B rovná mgh_1 , z B do C rovná mgh_2 atď. Celková práca pri pohybe po krivke je súčtom prác $mgh_1 + mgh_2 + \dots + mgh_n$.



Obr. 3

Nakoľko $h_1 + h_2 + \dots + h_n = h$, dostaneme pre prácu opäť výsledok mgh , ako je to v predchádzajúcich dvoch prípadoch.

Práca $A = mgh$ sa spotrebuje na zvýšenie potenciálnej tiažovej energie sústavy *teleso—Zem*. Jej veľkosť odpovedá zmene potenciálnej tiažovej energie ΔW_p rovnej rozdielu potenciálnej tiažovej energie W_{ph} vo výške h a W_{po} na povrchu Zeme (obr. 3)

$$W_{ph} - W_{po} = \Delta W_p = mgh. \quad (6)$$

Vzťah (6) platí za predpokladu, že po celej výške h zostáva tiažové zrýchlenie g stále (možno ho použiť pre $h \ll R_Z$).

Potenciálna tiažová energia je veličina relatívna. Určujeme ju zpravidla vzhľadom na povrch Zeme. Ak položíme $W_{po} = 0$, potom pre potenciálnu tiažovú energiu vo výške h platí

$$W_{ph} = mgh. \quad [(7)]$$

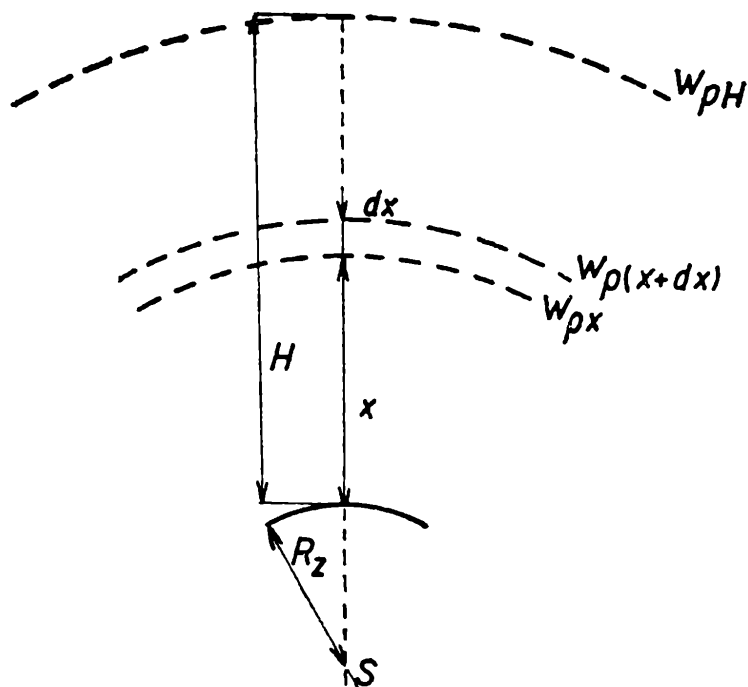
Môžeme ju však určiť vzhľadom k ľubovoľnej horizontálnej rovine vedenej napr. vo výške h_0 nad povrchom Zeme. Ak je teleso nad touto rovinou vo výške h , jeho potenciálna tiažová energia je vzhľadom na túto rovinu mgh , ale vzhľadom na povrch Zeme je $mg(h + h_0)$.

Potenciálna tiažová energia u telesa zodvihnutého nad povrch Zeme, určená vzhľadom na tento povrch je kladná. Ak ju určujeme vzhľadom na inú horizontálnu rovinu je kladná vtedy, ak je teleso nad touto rovinou a záporná, ak je pod ňou.

Ak je teleso pod povrchom Zeme v hĺbke h' (obr. 3), vzhľadom k voľbe $W_{po} = 0$, je jeho potenciálna tiažová energia $W_{ph'} < 0$ a možno ju určiť vzťahom

$$W_{ph'} = -mgh'. \quad (8)$$

Pokúsme sa ďalej riešiť úlohu, ako určiť potenciálnu tiažovú energiu telesa v ľubovoľnej výške H nad povrchom Zeme v prípade, že tiažové zrýchlenie budeme považovať za premennú veličinu, závislú od výšky



Obr. 4

podľa funkcie uvedenej vo vzťahu (5). Výpočet budeme robiť za zjednodušených predpokladov, že Zem resp. teleso, u ktorého chceme určiť potenciálnu tiažovú energiu, budeme považovať za hmotné body hmotnosti M_Z , resp. m a že ich vzájomná vzdialenosť je veľká v porovnaní s ich rozmermi.

Predpokladajme, že sa takéto teleso nachádza vo veľkej výške x nad povrchom Zeme (obr. 4) a že má v tejto výške energiu W_{p_x} . Pri zdvihnutí telesa o (1) mentárnu výšku dx , vykonajú vonkajšie sily prácu dA . Keďže ide o malú zmenu výšky, môžeme g_x považovať za konštantné po celej výške dx a prácu dA vypočítať nasledovným spôsobom

$$dA = mg_x dx = \kappa \frac{mM_Z}{(R_Z + x)^2} dx, \quad (9)$$

kde sme za g_x dosadili hodnotu danú vzťahom (5).

Zodvihnutím telesa o výšku dx vzrastie jeho potenciálna tiažová energia o hodnotu $dW_p = W_{p(x+dx)} - W_{p_x}$, pričom $W_{p(x+dx)}$ je hodnota jeho energie vo výške $x + dx$ nad povrchom Zeme.

S ohľadom na platnosť vzťahov (2) a (9) môžeme písať

$$dW_p = \kappa \frac{mM_Z}{(R_Z + x)^2} dx. \quad (10)$$

Označme W_{pH} potenciálnu tiažovú energiu telesa vo výške H . Prírastok energie $\Delta W_p = W_{pH} - W_{p_0}$ môžeme vypočítať pomocou určitého integrálu vzťahu (10), v ktorom pravá strana je funkciou argumentu x . Integrovaním (10) dostávame

$$\Delta W_p = \int_0^H \kappa \frac{mM_Z}{(R_Z + x)^2} dx. \quad (11)$$

Vzhľadom k tomu, že κ , m , M_Z a R_Z sú konštanty, možno pri výpočte integrálu (11) použiť integračný vzorec $\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a} + C$ známy z integrálneho počtu (ak čitateľ chce, môže si výpočet integrálu urobiť sám pomocou substitučnej metódy), ktorý vedie k výsledku

$$\Delta W_p = \kappa m M_Z \left[-\frac{1}{R_Z + x} \right]_0^H = \kappa m M_Z \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_Z + H} \right). \quad (12)$$

Ak znovu položíme $W_{p0} = 0$, môžeme potenciálnu tiažovú energiu vo veľkej výške H vypočítať podľa vzťahu

$$W_{pH} = \kappa m M_Z \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_Z + H} \right). \quad (13)$$

Záver

Ukázali sme, že pre malé výšky nad povrchom Zeme nám pre praktické výpočty potenciálnej tiažovej energie postačí vzťah (7). Pri výpočte potenciálnej tiažovej energie telies vo veľkých výškach H (ktoré sú porovnateľné s rozmermi Zeme), možno pre výpočet použiť odvodený vzťah (13), ktorí sme odvodili s použitím základných poznatkov infinitezimálneho počtu. Jeho platnosť je len približná vzhľadom k podmienkam, za ktorých bol odvodený, v pomere ku podmienkam, ktoré sú reálne. To však nemôže brániť jeho praktickému použitiu.

V závere niekoľko príkladov, u ktorých ponechávam riešenie pre čitateľa:

1. Porovnajzte zmeny potenciálnej tiažovej energie a vykonanú užitočnú prácu u troch rovnakých nákladov potravín, ktoré boli zo skladišťa do horskej chaty dopravené: a) nosičom, b) lanovkou, c) helikoptérou!

2. Vypočítajte kinetickú energiu W_K telesa hmotnosti m voľne padajúceho z veľkej výšky H , pri jeho dopade na povrch zemský, keď polomer Zeme je R_Z . Aká by bola táto energia keby $H = R_Z$? Odpor vzduchu zanedbajte!

3. Na akej veľkej zvislej dráhe h_1 musí na raketu pôsobiť tiažová sila motora, ktorá udeľuje rakete konštantné zrýchlenie $6g$, aby druhú časť dráhy h_2 stúpala raketa bez použitia motora do celkovej výšky 30 km? Tiažové zrýchlenie považujte za konštantné po celú dobu letu. Odpor vzduchu zanedbajte!

Poznámka: O správnosti vlastného riešenia sa možno presvedčiť v prácach [4] a [5], v ktorých sú príklady vyriešené. V týchto publikáciách možno najstť k danej problematike ďalšie vhodné príklady.

K podrobnejšiemu štúdiu doporučujeme túto literatúru:

- [1] *Friš—Timoreva*: Kurs fyziky I., Nakladatelství ČSAV, 1953.
- [2] *D. Ilkovič*: Fyzika, SVTL Bratislava, 1957.
- [3] *L. Thern*: Základy fyziky, SPN Bratislava, 1961.
- [4] *V. Hajko a kolektív*: Fyzika v príkladoch, SVTL Bratislava, 1966.
- [5] *M. Kružík*: Sbíрка úloh z fyziky pro žáky středních škol, SPN Praha, 1969.

Fyzikálne princípy čiernobielej televízie

RNDr. ELEMÍR SCHOLTZ, Gymnázium Košice

1. Úvod

S postupným vývojom ľudskej spoločnosti sa súčasne rozvíjali aj spôsoby oznamovania správ, medzi iným aj televízia. Pod televíziou rozumíme prenos pohyblivých obrazov na diaľku za pomoci elektromagnetických vln. Dlhé roky sa celý rad bádateľov a vynálezcov zamestnával možnosťou snímania obrazu, jeho pretvárania na elektrické signály obsahujúce pokiaľ možno čo najviac informácii o snímanej scéne, ich prenosu, príjmu a premeny v čo najvernejší optický obraz.

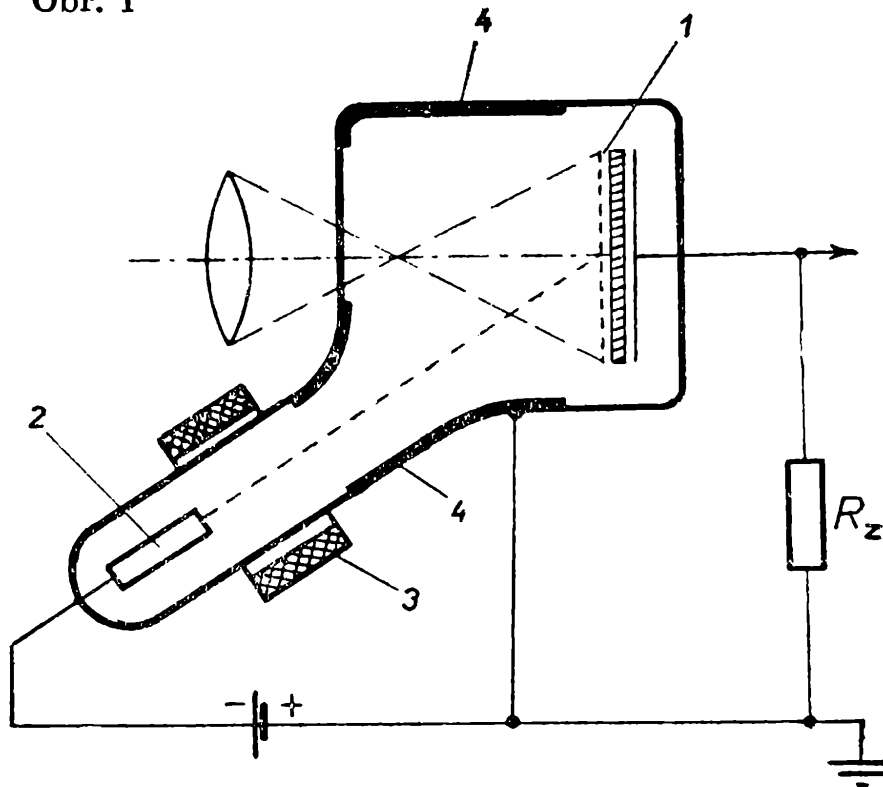
Základná myšlienka pôvodného mechanického princípu televízie spočívala v tom, že sa optický obraz postupne mechanicky rozkladal za pomoci rotujúceho dierkovaného kotúča alebo zrkadiel, na veľmi malé obrazové prvky. Tieto obrazové prvky boli po premene na elektrické signály fotónkou prenesené vodičmi k prijímaciemu zariadeniu, kde obráteným pochodom došlo k rekonštrukcii vysielaného obrazu. Historický vývoj však podal dôkaz o tom, že prenos dokonalého obrazu mechanickými prostriedkami je úloha nesplniteľná a môže byť úspešne vyriešená len elektronickými sústavami.

Základné problémy, ktoré bolo treba v elektronickej televízii vyriešiť, je možné zhrnúť takto:

- a) rozloženie optického obrazu na drobné svetelné prvky,
- b) premena svetelných prvkov na zodpovedajúce elektrické signály,
- c) prenos získaných elektrických signálov na svetelné a rekonštrukcia obrazu.

O tom, že praktické realizovanie uvedených úloh nie je jednoduché, svedčí zložitosť televíznych zariadení. Ďalšie časti tohoto článku sú preto zamerané iba na stručné vysvetlenie fyzikálnych princíпов čiernobielej televízie. Vystačíme pritom s poznatkami získanými v stredoškolskom kurze fyziky.

Obr. 1

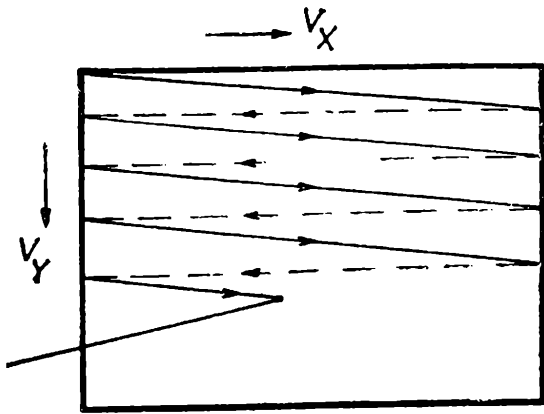


2. Snímanie pohyblivého obrazu.

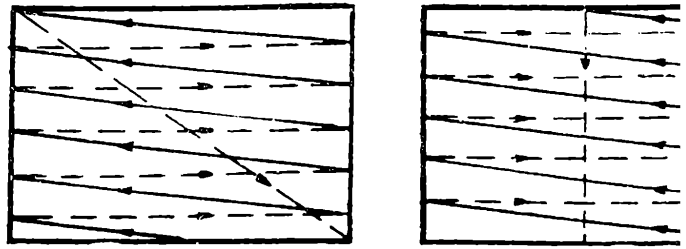
Televízny obraz nie je možné prenášať naraz celý, preto je potrebné rozložiť ho postupne na jednotlivé svetelné časti, tzv. obrazové prvky. V tomto smere nešla televízia úplne novými a neznámymi cestami. Spôsob rozkladu obrazu na obrazové prvky tak, ako sa používal už dlhú dobu v iných odvetviach techniky, napr. v tlačiarstve, bol prevzatý bez veľkých zmien i elektronickou televíziou. Môžeme si všimnúť, že u tlačených fotografií, tzv. autotypií, je obraz zostavený z veľkého množstva drobných obrazových prvkov, ktoré vytvárajú cez celý obraz pravidelný raster. Obdĺžnikový tvar televízneho obrazu bol normalizovaný s pomerom strán 4 : 3.

Rozloženie obrazu na prvky a jeho snímanie i premena na zodpovedajúce elektrické signály sa uskutočňuje v televíznej snímacej elektrónke, ktorá je hlavnou súčasťou televíznej kamery. Jej funkciu veľmi dobre pochopíme preštudovaním činnosti prvej s prakticky používaných snímacích elektrónok — ikonoskopu. Jej principiálna schéma je na obr. 1.

Snímaný obraz sa premietne optickou sústavou na tzv. mozaiku ikonoskopu, pozostávajúcu s navzájom od seba izolovaných zrníčok striebra, aktivovaných na povrchu vrstvičkou cézia. Osvetlené zrníčka mozaiky sa v dôsledku elektrónovej emisie nabijú kladne (fotoefekt). Náboj každého zrníčka je úmerný osvetleniu. Na mozaike sú teda rozložené elektrické náboje rôznej veľkosti a vytvárajú presný elektrický obraz (kópiu) snímaného obrazu (predmetu, scény). Každé zrniečko mozaiky pritom vytvára spolu s kovovou, tzv. signálnou elektródou malý kondenzátor.



Obr. 2



Obr. 3

Snímanie obrazu z mozaiky sa prevádza tenkým zväzkom elektrónov, vznikajúcim v elektrónovej dýze (katódovej trubici s elektromagnetickým vychyľovaním [1]) — súčasti ikonoskopu. Zväzok urýchlených elektrónov dopadá na mozaiku pohybujúc sa po nej veľkou rýchlosťou tak, že postupne kompenzuje kladný náboj jednotlivých zrníčok. To má za následok postupné vybíjanie malých kondenzátorov a vznik radu posebe nasledujúcich vybíjacích prúdov. V elektrickom okruhu, kde vybíjacie prúdy prechádzajú, je zapojený pracovný odpor R_z , na ktorom vzniká premenné napätie. Amplitúda a frekvencia takto získaných napätových impulzov je závislá na svetelnom obsahu snímaného obrazu.

Elektrónový zväzok (lúč) sa pohybuje po mozaike ikonoskopu vytvárajúc vodorovné riadky. Požiadavka na dobrú kvalitu obrazu viedla k jeho rozloženiu na 625 riadkov. Požiadavka prenášať pohyblivý obraz si vyžaduje tak ako v kinematografii prenášať rýchle zasebou rad obrázkov (snímiek), ktoré obsahujú jednotlivé fázy pohybu. Ak má byť pohyb plynulý, musia sa jednotlivé snímky striedať s frekvenciou aspoň 17 Hz. V televízii bola frekvencia výmeny snímok zvolená na 25 Hz.

Uvedené hodnoty počtu riadkov a snímok sú v súhlase s televíznou normou OIRT, používanou u nás. Týmito požiadavkami je teda určený aj spôsob vychyľovania elektrónového lúče po mozaike ikonoskopu. Jeho pohyb je zložený z vodorovného pohybu rýchlosťou v_x a zvislého pohybu rýchlosťou v_y , čím sa na mozaike vytvorí raster (obr. 2). Pohyb elektrónového lúča s pravého okraja mozaiky sa nazýva činný beh, pohyb z ľavého k pravému okraju spätný beh. Počas spätného behu sa dopadu elektrónov na mozaiku zabraňuje (spätný beh je zatemnený).

Z údajov o počte riadkov na jednu snímku a snímkovej frekvencie vyplýva, že v každej sekunde prejde elektrónový lúč po mozaike 25krát zhora nadol (činný beh) a späť (spätný beh), vytvoriac 25 snímok, s ktorých sa každá skladá zo 625 riadkov. Takýto spôsob snímania obrazu vytvára jednoduchý obrazový raster.

Počas príjmu televízneho obrazu sa ukázalo, že striedanie 25 snímok za sekundu vyvoláva nepríjemné kolísanie jasu (blikanie), ktoré unavuje zrak. Tento nedostatok bolo možné odstrániť len zvýšením snímkovej

frekvencie. Problém je vyriešený tak, že každá snímka vysielala dvakrát. V prvej 50-tine sekundy vytvorí elektrónový lúč 312,5 párnych riadkov danej snímky, medzi ktoré sa v ďalšej sekunde prekladá 312,5 nepárnych riadkov. Kmitočet zvislého pohybu sa tým zvýši na 50 Hz, počet riadkov na jednu snímku však ostáva 625. Každá snímka tak pozostáva z dvoch tzv. polsnímok o 312,5 riadkoch. Hovoríme potom o prekladanom riadkovaní. Kolísanie jasů s frekvenciou 50 Hz oko nevníma (obr. 3).

Pri podmienke rovnakej rozlišovacej schopnosti vo vodorovnom aj zvislom smere, tj. pri bodovom rastri obrazu normalizovaného tvaru, tj.

obdĺžnika s pomerom strán 4 : 3, pripadá na jeden riadok $\frac{4}{3} \times 625 =$

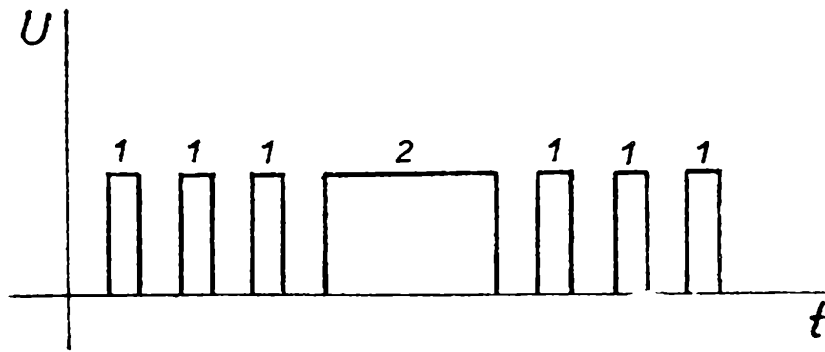
$= 833$ obrazových bodov. Pri počte riadkov 625 na snímku a 25 snímkach za sekundu je treba uvažovať prenos 13,015.625 obrazových bodov. Akú frekvenciu by tedy mali mať elektrické impulzy na výstupe snímačej elektrónky?

Ak uvažujeme jednu z krajných možností, tj. že prenášaný obraz predstavuje šachovnicové pole pozostávajúce z tmavých a svetlých políčok o veľkosti jedného obrazového prvku, získali by sme na výstupe snímačej elektrónky premenný elektrický signál obdĺžnikového priebehu, približne s 13 miliónmi zmien z maxima do minima. Amplitúda by sa teda menila s polovičným kmitočtom. V druhom krajnom prípade, ak by mal celý snímaný obraz rovnakú svietivosť, bol by kmitočet výstupného signálu rovný počtu polsnímok, tj. 50 Hz. Kmitočet tzv. obrazového signálu leží teda v uvedenom rozmedzí a určuje kmitočtové pásmo 50 Hz až 6,5 MHz, ktoré sa pri televíznom vysielaní podľa normy OIRT prenáša.

3. Rekonštrukcia televízneho obrazu

Zariadenie, ktoré prijíma signály vysielané televíznym vysielateľom, sa nazýva televízny prijímač, ktorý má za úlohu premeniť elektrické signály na optické a vytvoríť obraz shodný s obrazom snímaným vo vysieláči. Tento proces prebieha v súčinnosti s niektorými pomocnými zariadeniami a elektronickými obvodmi v televíznej obrazovke prijímača.

Televízna obrazovka je v podstate katódová trubica s elektromagnetickým vychyľovaním [1] elektrónového lúča, dopadajúceho na tienidlo pomerne veľkých rozmerov. V mieste dopadu zaostreného elektrónového zväzku vzniká na tienidle svetelná stopa. Lúč je pritom vychyľovaný tak, aby sa na tienidle vytvoril obrazový raster rovnaký, ako raster vytváraný na obrazovke snímačej elektrónky. Počas vytvárania obrazového rastra je intenzita elektrónového zväzku modulovaná (riadená) obrazovým signálom, čím sa mení jas svetelnej stopy na tienidle. Množina postupne veľkou rýchlosťou vznikajúcich svetelných bodov s rôznym jasom umožňuje pri využití zotrvačnosti ľudského oka vnímanie celistvého pohyblivého obrazu.



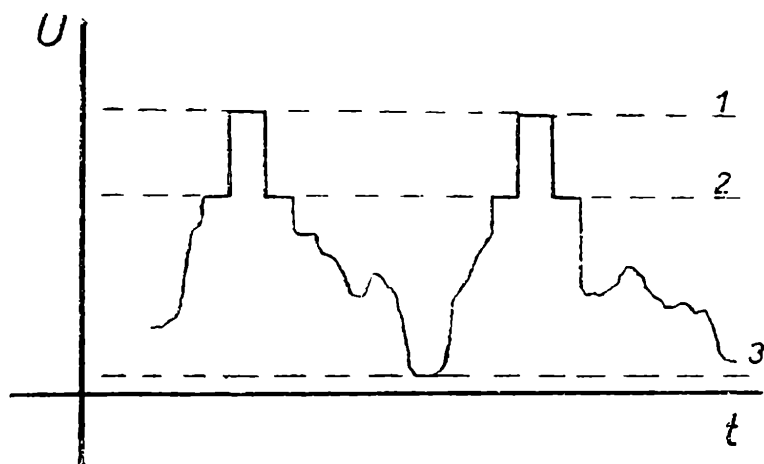
Obr. 4

Vychyľovanie zväzku elektrónov po mozaike snímacej elektrónky na strane vysieläča a po tienidle obrazovky v televíznom prijímači zabezpečujú tzv. rozkladové generátory. Sú to elektronické zariadenia, ktoré vytvárajú prúdové impulzy vhodného priebehu. Tieto prúdy prechádzajú vychyľovacími cievkami, ktoré sú nasunuté na zúženom hrdle obrazovky. Pre vodorovné vychyľovanie (riadkové) slúži riadkový rozkladový generátor, vyrábajúci impulzy s kmitočtom 15.625 Hz a pre zvislé vychyľovanie (snímkové), snímkový rozkladový generátor, v ktorom vznikajú prúdové impulzy s kmitočtom 50 Hz. K vychyľovaniu elektrónového lúča vytvárajúceho obrazový raster sú potom potrebné dva páry vychyľovacích cievok — riadkové a snímkové.

4. Synchronizácia televízneho prijímača s vysieläčom

Ak má vzniknúť na tienidle televíznej obrazovky obraz zhodný s obrazom vysielaným, musí sa zväzok elektrónov pohybujúci sa po mozaike snímacej elektrónky pohybovať absolútne synchronne (súbežne) so zväzkom vytvárajúcim obrazový raster na tienidle obrazovky. Synchronizácia sa dosahuje riadením činnosti rozkladových generátorov elektrickými signálmi príslušnej frekvencie a vhodnej amplitúdy, ktoré nazývame synchronizačné impulzy. Tieto napäťové impulzy majú obdĺžnikový priebeh. Vytvára ich synchronizátor — elektronické zariadenie, ktoré je súčasťou vysielacieho zariadenia. Synchronizačné impulzy sa privádzajú do rozkladových obvodov pre televíznu snímáciu elektrónku a súčasne sa primiešavajú ku elektrickému obrazovému signálu, s ktorým sa spoločne vysielajú. V televíznom prijímači sa synchronizačné impulzy od obrazového signálu oddelia a privádzajú sa do rozkladových obvodov pre obrazovku, pričom riadia ich kmitočty. Synchronizačná zmes vyrábaná synchronizátorom je zložitá. Obsahuje synchronizačné impulzy s kmitočtom 15 625 Hz pre riadenie riadkového vychyľovania, impulzy s kmitočtom 50 Hz pre riadenie kmitočtu snímkových generátorov a tzv. zatemňovacie impulzy na zhášanie spätných behov [2].

Synchronizácia kmitočtu rozkladových generátorov sa odohráva práve počas spätného behu elektrónového lúča, ktorý nemá byť na tienidle obrazovky viditeľný, lebo by pôsobil rušivo. Zatemňovacie impulzy vo vhodnom okamihu (počas spätného behu) zabránia dopadu elektróno-



Obr. 5

vého lúča na tienidlo, preto je spätný beh neviditeľný. Jednoduchá synchronizačná zmes je znázornená na obr. 4.

Primiešaním synchronizačných a zatemňovacích impulzov k obrazovému signálu vzniká tzv. úplný televízny signál, ktorého časový priebeh asi pre dva riadky je znázornený na obr. 5. Najnižšej hodnote napätia U zodpovedá tzv. úroveň bielej. Takémuto napätiu zodpovedá na tienidle obrazovky stopa elektrónového lúča s najväčším jasom. Najtmavším miestam obrazu zodpovedá úroveň čiernej, tj. napätie predstavujúce hornú hranicu úrovne obrazového signálu. Túto úroveň dosahujú aj riadkové a snímkové zatemňovacie impulzy. Napätová úroveň synchronizačných impulzov je ešte vyššia (zodpovedajú tmavšiemu miestu na tienidle, ako sú najtmavšie možné miesta obrazu), preto nie sú na obrazovke viditeľné a obraz nie je nimi rušený. (Pokračovanie)

Trochu fyziky v jedoucím vlaku II

RNDr. MILAN BEDNAŘÍK, Olomouc

O tom, že se hloubavý student může zabývat fyzikálními úvahami také při cestování vlakem, je možno se dočíst v článku Trochu fyziky v jedoucím vlaku I (viz minulé číslo Rozhledů). Řešili jsme v něm nejjednodušší případ mechanického pohybu, pohyb přímočarý rovnoměrný. Přitom jsme na základě Galileova principu relativity ukázali, že rychlost vagónu jedoucího rovnoměrně po přímé a rovné trati nelze určit sledováním těles umístěných uvnitř vagónu, ale jen pozorováním těles ležících mimo něj, nejlépe pak pozorováním těles pevně spojených s povrchem Země. S ohledem na tuto skutečnost jsme také vypočítávali rychlost pohybujícího se vlaku.

V tomto článku pojednáme o dalším, poněkud složitějším druhu mechanického pohybu, o pohybu *přímocharém rovnoměrně zrychleném*, případně *rovnoměrně zpomaleném*. Opět si položíme několik konkrétních otázek v souvislosti se zkušenostmi vlakového pasažéra a pokusíme se je pomocí našich, doufáme že ještě nezapomínaných vědomostí z fyziky, postupně řešit.

Prvá otázka: Představme si, že sedíme ve vlaku, který se právě rozjíždí z nádraží rovnoměrně zrychleným pohybem. Jakým, pokud možno jednoduchým způsobem bychom mohli určit zrychlení vlaku?

Jistě vás napadne, že zrychlení vlaku se dá určit způsobem, který velmi připomíná běžné příklady z učebnice fyziky. Uvedeme nejdříve alespoň dva typické příklady.

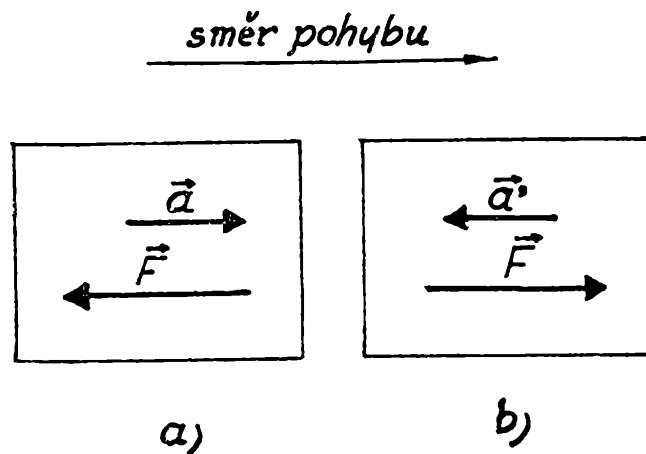
A) S jak velkým zrychlením se rozjížděl vlak, který za dobu 30 s dosáhl rychlosti 15 m s^{-1} za předpokladu, že se pohyboval rovnoměrně zrychleně? Zrychlení vypočítáme velmi snadno ze známého vztahu $v = a t$, kde v je okamžitá rychlost, které vlak dosáhl za dobu t , a je zrychlení. Přesvědčte se, že po dosažení daných číselných hodnot obdržíme pro zrychlení hodnotu $0,5 \text{ m s}^{-2}$.

B) S jak velkým zrychlením se rozjížděl (za téhož předpokladu jako v příkladě A) vlak, který za dobu 30 s ujel dráhu 225 m? V tomto případě vypočítáme zrychlení ze vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu $s = \frac{1}{2} a t^2$, pomocí něhož dostaneme opět hodnotu $0,5 \text{ m s}^{-2}$. Zrychlení vlaku tedy v obou případech činí $0,5 \text{ m s}^{-2}$.

Takovýmto postupem však zrychlení vlaku v roli cestujícího určit nemůžeme. To bychom museli znát kromě doby t , která se sice dá určit velmi snadno, také rychlost v (viz příklad A) nebo dráhu s (viz příklad B). Z těchto dvou veličin však ani jednu změřit v jedoucím vlaku nedovedeme. Snad bychom mohli určit rychlost v , ovšem jen za předpokladu, že by se vlak po dosažení této rychlosti pohyboval dále rovnoměrně (v tom případě bychom použili některou z metod popsanych v předchozím článku), ale přitom bychom zase nebyli schopni spolehlivě rozhodnout, ve kterém okamžiku se změnil pohyb rovnoměrně zrychlený na pohyb rovnoměrný.

Je tedy zřejmé, že pro praktické stanovení zrychlení nevystačíme s dosavadními metodami kinematiky, tj. s měřením času, dráhy a rychlosti, nýbrž musíme obrátit pozornost na jevy, které souvisejí s *příčinou* tohoto zrychlení, tj. se silovým působením mezi tělesy, což je již předmětem učiva dynamiky.

Znova se vžijme do role cestujícího. Pokud se vlak pohyboval přímočaře rovnoměrně, představoval pro něj inerciální vztažnou soustavu, v níž cestující nemohl žádným mechanickým pokusem provedeným uvnitř této soustavy určit, zda je soustava v klidu či v pohybu nebo jakou má rychlost. Zcela jiná situace nastane, jestliže tažná síla loko-



Obr. 1

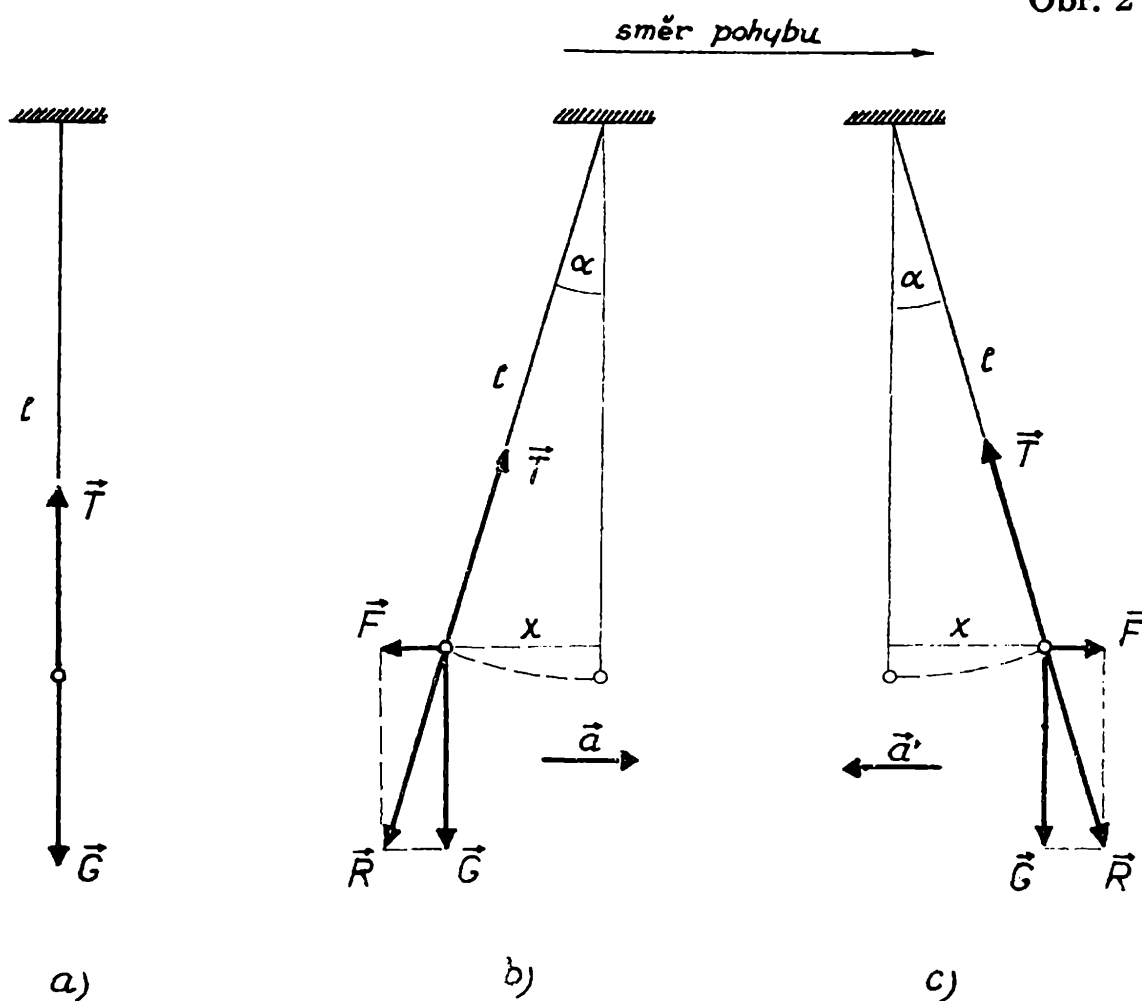
motivů uvádí vlak do pohybu rovnoměrně zrychleného. V tom případě představuje vlak pro cestujícího tzv. *neinerciální vztažnou soustavu*, v níž působí na všechna tělesa (tedy i na cestujícího) *setrvačná síla*, která je orientována vždy *proti* vektoru zrychlení soustavy. Při rozjíždění, kdy je vektor zrychlení \vec{a} orientován ve směru pohybu vlaku, má setrvačná síla \vec{F} orientaci proti směru pohybu (viz obr. 1a), při zastavování je naopak vektor zrychlení \vec{a} orientován proti směru pohybu vlaku, ale setrvačná síla \vec{F} ve směru pohybu (viz obr. 1b); ze zkušenosti víme, že např. při prudkém brzdění jsou tělesa uvnitř vagónu „vrhána“ ve směru jízdy.

Využijme nyní oně setrvačné síly ke stanovení zrychlení vlaku. Připravíme si jednoduchý pokus. Nad okenní rám vagónu zavěšíme 1 m dlouhou nit, na jejíž spodní konec upevníme kuličku nebo jiný těžší předmět malých rozměrů. Ve stejné úrovni se zavěšenou kuličkou připevníme na okenní tabuli (např. lepicí páskou) ve vodorovném směru milimetrové měřítko. Pokud bude vagón v klidu nebo v přímočarém rovnoměrném pohybu, je kulička v rovnovážné poloze, tj. působí na ni pouze tíhová síla \vec{G} svisle dolů, která je kompenzována stejně velkou tahovou silou \vec{T} napjaté niti svisle vzhůru (viz obr. 2a). Jakmile se vlak začne pohybovat rovnoměrně zrychleně se zrychlením \vec{a} , bude na kuličku působit kromě tíhové síly \vec{G} ještě setrvačná síla \vec{F} vodorovného směru a opačné orientace než zrychlení \vec{a} (viz obr. 2b). Výslednice \vec{R} obou sil má pak směr napjaté niti, která se odchyluje od svislého směru o úhel α ; síla \vec{R} je opět kompenzována stejně velkou a nesouhlasně orientovanou silou \vec{T} napjaté niti. Pro úhel platí jednak

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}},$$

kde x je výchylka kuličky z rovnovážné polohy, jejíž velikost změříme milimetrovým měřítkem a l je délka napjaté niti, jednak

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G},$$



kde F je velikost setrvačné síly a G velikost tíhové síly. Dosadíme-li dále $F = m a$ a $G = m g$, přičemž m je hmotnost kuličky, a je zrychlení, které uděluje kuličce setrvačná síla a které má stejnou velikost jako zrychlení vlaku, a g je tíhové zrychlení, dostaneme porovnáním obou výrazů pro $\operatorname{tg} \alpha$ vztah pro zrychlení

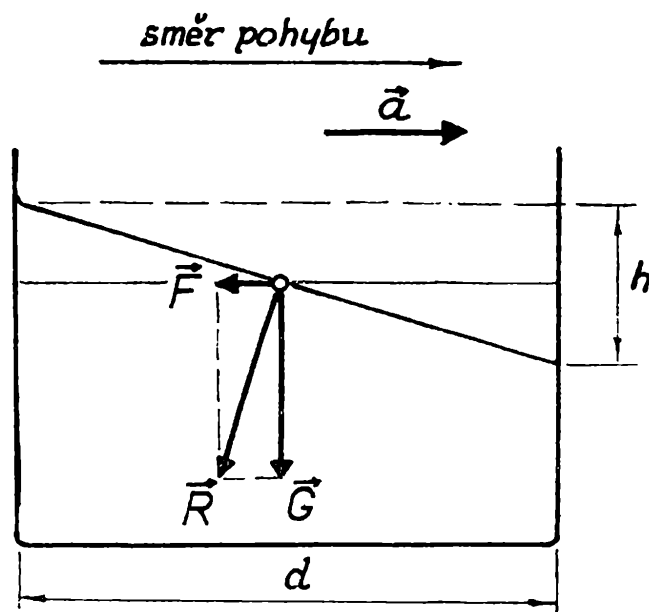
$$a = \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} \cdot g, \quad (1)$$

který lze pro malé úhly α , tj. pro výchylky $x \ll l$ upravit na tvar

$$a = \frac{x}{l} g \quad (2)$$

Naměříme-li např. výchylku $x = 4$ cm a je-li délka niti $l = 1$ m a tíhové zrychlení $g \doteq 10$ m s⁻², obdržíme pro zrychlení vlaku $a = 0,4$ m s⁻².

Stejným způsobem určíme zrychlení vlaku, který koná pohyb přímočarý rovnoměrně zpomalený. V tom případě se kulička na závěsu vychýlí působením setrvačné síly od svislého směru na opačnou stranu (viz obr. 2c) a zrychlení počítáme v záporných hodnotách (místo záporného zrychlení zavádíme někdy veličinu zpomalení, jejíž číselná hodnota



Obr. 3

je pak kladná). Je-li např. při zastavování vlaku výchylky kuličky $d = -10$ cm, je zrychlení $a = -1 \text{ m s}^{-2}$ (nebo zpomalení $a = 1 \text{ m s}^{-2}$).

Druhá otázka: Cestující, před nímž stojí na stolku pohárek s limonádou, si všiml, že při výjezdu vlaku ze stanice se hladina kapaliny v pohárku poněkud odchytila od původně vodorovného směru. Uvažujte, jak se dá tohoto jevu využít ke stanovení zrychlení vlaku.

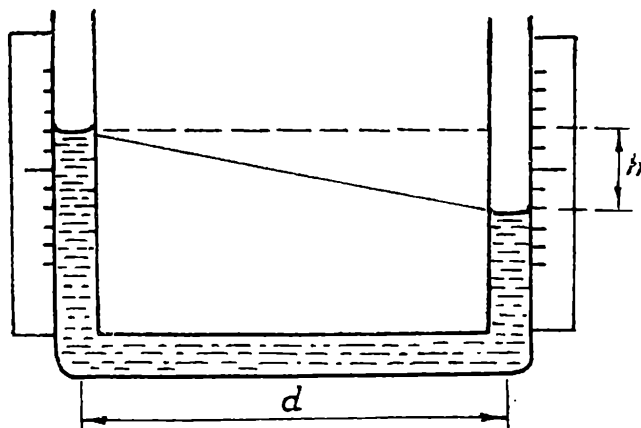
Je známo, že povrch kapaliny v nádobě je vždy kolmý k výslednici působících vnějších sil. Je-li kapalina v klidu nebo v přímočarém rovnoměrném pohybu, podléhá pouze tíhové síle a její hladina je vodorovná (až na nepatrné odchylky v blízkosti stěn nádoby, jež jsou způsobeny silami povrchového napětí). Pohybuje-li se však nádoba s kapalinou přímočaře rovnoměrně zrychleně, působí na každou částici kapaliny kromě tíhové síly G také setrvačná síla F , která je opět nesouhlasně orientovaná s vektorem zrychlení a , a povrch kapaliny se ustálí kolmo na směr výslednice R obou těchto sil (viz obr. 3). Povrch kapaliny se pak odklání od vodorovného směru o stejný úhel α , jaký svírá výslednice sil R se svislým směrem.

Pro úhel α můžeme z obrázku 3 odvodit vztahy obdobné vztahům z předchozího problému. Je to především vztah

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{d},$$

kde h je rozdíl nejvýše a nejnižší položeného bodu na hladině kapaliny a d je šířka nádoby ve výšce původní vodorovné hladiny, a dále vztah

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{G} = \frac{m a}{m g},$$



Obr. 4

kde m je hmotnost libovolné částice povrchu kapaliny, a je zrychlení, jež uděluje částici setrvačná síla a které má stejnou velikost jako zrychlení vlaku, g je tíhové zrychlení. Porovnáním obou uvedených vztahů dostáváme rovnici pro zrychlení

$$a = \frac{h}{d} \cdot g \quad (3)$$

Pomocí této rovnice bychom tedy mohli vypočítat zrychlení vlaku, kdybychom změřili šířku nádoby d a kdyby se nám podařilo změřit výškový rozdíl h , což ovšem není úkol prakticky snadno proveditelný. K měření výškového rozdílu však poslouží jiné velmi jednoduché zařízení, které si můžeme bez velkých obtíží předem připravit. Z tenké skleněné trubice (asi o průměru 5 až 10 mm) si zhotovíme spojené nádoby, pokud možno s větší vzdáleností d ramen (viz obr. 4). Obě svislá ramena opatříme milimetrovým měřítkem. Takto upravené spojené nádoby přiložíme na okenní tabuli vagónu a na jejich ramenech sledujeme výškový rozdíl h , který se zřetelně objeví při každém zrychlení nebo zpomalení vlaku.

Přednost této metody spočívá v tom, že se jí dá určit zrychlení vlaku mnohem spolehlivěji než pomocí zařízení popsáno v řešení první otázky. Daleko přesněji totiž změříme u spojených nádob výškový rozdíl h nežli u zavěšené kuličky, u níž dochází během jízdy k nežádoucímu a rušivému kývání, její odchylku x od svislého směru.

Příklad: Pomocí spojených nádob o vzdálenosti ramen $d = 20$ cm byl naměřen při náhlém brzdění vlaku výškový rozdíl hladin v obou ramenech $h = 3$ cm. S jakým zpomalením se vlak přitom pohyboval? Tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Jak se sami můžeme přesvědčit dosazením do rovnice (3), je zpomalení vlaku $a = 1,5 \text{ m s}^{-2}$.

Třetí otázka: Zatím dovedeme experimentálně určit zrychlení vlaku, i když získané hodnoty jsou vzhledem k použitým metodám pouze přibližné. Zrychlení vlaku však ještě k úplnému popisu pohybu nestačí. Vždyť každého cestujícího spíše zajímá, jakou rychlostí vlak právě jede, než jaké je jeho zrychlení. Znat velikost zrychlení vlaku není totiž cílem

našich úvah, ale pouze prostředkem k provádění dalších výpočtů. A nyní vlastní otázka: Jak postupovat, abychom alespoň přibližně zaznamenali rychlost vlaku v libovolném okamžiku jeho jízdy mezi dvěma zastávkami?

Po tom, co jsme se dověděli v předchozích odstavcích, je řešení této otázky celkem jednoduché. Rychlost vlaku určíme kombinací měření zrychlení s měřením času. V okamžiku odjezdu vlaku ze stanice začneme měřit pomocí hodinek s vteřinovou ručičkou (přesněji pomocí stopek) čas t a metodou spojených nádob zrychlení a . Pokud zrychlení vlaku zůstává stálé, je jeho okamžitá rychlost přímo úměrná času, tj. platí známý vztah $v = at$.

Nechť se vlak pohybuje od okamžiku odjezdu rovnoměrně zrychleně se zrychlením a_1 po dobu t_1 . Jeho rychlost v_1 na konci této doby je

$$v_1 = a_1 t_1. \quad (4)$$

Nyní uvažujme dvě možnosti:

— buď se po uplynutí doby t_1 pohybuje vlak rovnoměrně a jeho rychlost, vypočítaná ze vztahu (4), se již nemění, tj. $v_1 = \text{konst}$,

— nebo se po uplynutí doby t_1 změní zrychlení vlaku z hodnoty a_1 na jinou hodnotu $a_2 = 0$ a rychlost v roste dále v závislosti na čase t podle vztahu

$$v = v_1 + a_2(t - t_1);$$

okamžitá rychlost v je v tomto případě lineární funkcí doby $t - t_1$, tj. doby, která uplyne od okamžiku t_1 , kdy došlo ke změně zrychlení.

Nechť se dále vlak pohybuje se zrychlením a_2 až do okamžiku, kdy naměříme na hodinkách čas t_2 . Vzhledem k předchozímu vztahu dosáhne vlak konečné rychlosti

$$v_2 = v_1 + a_2(t_2 - t_1). \quad (5)$$

Podobně jako po odvození vztahu (4) můžeme opět uvažovat dvě možnosti: buď se již rychlost vlaku nemění, tj. $v_2 = \text{konst}$, nebo při jiné hodnotě zrychlení $a_3 = 0$ roste dále podle vztahu

$$v = v_2 + a_3(t - t_2).$$

Zobecníme-li úvahy pro nějaké k -té zrychlení a_k , kterého nabude vlak v okamžiku t_{k-1} , máme pro okamžitou rychlost vztah

$$v = v_{k-1} + a_k(t - t_{k-1})$$

a pro konečnou rychlost po uplynutí doby t_k vztah

$$v_k = v_{k-1} + a_k(t_k - t_{k-1}). \quad (6)$$

Použitelnost tohoto vztahu předpokládá, že se nám podaří určit všechna zrychlení a_k a všechny časové okamžiky t_k , v nichž se zrychlení vlaku právě změnilo. Je samozřejmé, že při častých změnách zrychlení je takové měření prakticky těžko proveditelné. Kromě toho ke změnám

zrychlení nemusí docházet vždy skokem, jak jsme stále předpokládali, ale spojitě, což znamená, že celkový pohyb vlaku pak nelze rozložit na posloupnost rovnoměrně zrychlených pohybů s různými hodnotami zrychlení; vlak koná v tom případě pohyb nerovnoměrně zrychlený, pro který odvozené rovnice neplatí. Proto celého postupu můžeme použít jen za uvedených zjednodušujících podmínek.

Až dosud jsme určovali rychlost vlaku v první a druhé fázi jeho pohybu, tj. pro pohyb rovnoměrně zrychlený při jeho rozjíždění a pro pohyb rovnoměrný při stálé rychlosti. Třetí fáze pohybu je zastavování vlaku. I když bychom mohli také tuto fázi rozložit na posloupnost několika rovnoměrně zpomalených pohybů s různými hodnotami zpomalení, omezíme se zde jen na nejjednodušší případ. Budeme předpokládat, že se vlak pohybuje po celou dobu zastavování se stálým zpomalením a' , které určíme stejnou metodou, jako jsme určovali zrychlení vlaku.

Nechť jede vlak po přímé vodorovné trati nejprve stálou rychlostí v_k , které původně nabyl při postupném rozjíždění. Jakmile se nyní přiblíží k další železniční zastávce, začne brzdit a pohybuje se dále se stálým zpomalením a' . Okamžitá rychlost vlaku při brzdění je dána vztahem

$$v' = v_k - a't', \quad (7)$$

kde t' je čas měřený od okamžiku, kdy se změnil rovnoměrný pohyb na pohyb rovnoměrně zpomalený. Jak je ze vztahu (7) patrné, je rychlost rovnoměrně brzděného vlaku rovněž lineární funkcí času, jenže její velikost se s rostoucím časem zmenšuje.

Pohybuje-li se vlak se stálým zpomalením a' až do úplného zastavení, klesne jeho rychlost na nulu. Dosadíme-li tedy do rovnice (7) rychlost $v' = 0$, dostaneme vztah

$$v_k = a't', \quad (8)$$

pomocí něhož můžeme překontrolovat velikost rychlosti v_k , kterou jsme původně vypočetli ze vztahu (6). Na závěr ilustrujme uvedený postup na příkladě.

Příklad: Vlak se rozjíždí po dobu $t_1 = 10$ s se stálým zrychlením a_1 , jež změříme pomocí spojených nádob: $d = 20$ cm, $h = 2$ cm. Pak jeho zrychlení klesne na hodnotu a_2 , při níž $h = 1$ cm a na které se udrží až do okamžiku, kdy naměříme čas $t_2 = 30$ s. Dále se pohybuje rovnoměrně až do okamžiku $t_3 = 5$ minut, kdy jeden z cestujících zatáhne za záchrannou brzdu (to však raději sami nezkoušejte!). Vlak začne prudce brzdit a zastaví se za dobu $t' = 10$ s. Postupně vypočítáme:

- ze vztahu (3) zrychlení vlaku $a_1 = 1 \text{ m s}^{-2}$, $a_2 = 0,5 \text{ m s}^{-2}$;
- ze vztahu (4) rychlost $v_1 = 10 \text{ m s}^{-1} = 36 \text{ km h}^{-1}$, tj. okamžitou rychlost vlaku po uplynutí doby $t_1 = 10$ s;
- ze vztahu (5) rychlost $v_2 = 20 \text{ m s}^{-1} = 72 \text{ km h}^{-1}$, kterou se vlak pohybuje v časovém intervalu $t_2 = 30$ s až $t_3 = 5$ minut;

- ze vztahu (8) zpomalení vlaku při brzdění $a' = 2 \text{ m s}^{-1}$;
- ze vztahu (3) výškový rozdíl hladin ve spojených nádobách při brzdění vlaku $h = 4 \text{ cm}$, případně ze vztahu (1) odchylku kuličky od svislého směru $x = 24 \text{ cm}$.

Pro zájemce uvádíme, že z daných veličin lze vypočítat řadu dalších údajů o pohybu vlaku, např. velikost dráhy, kterou vlak urazil za dobu t_1 [$s_1 = 50 \text{ m}$], velikost dráhy za dobu t_2 [$s_2 = 175 \text{ m}$], velikost brzděné dráhy [$s' = 100 \text{ m}$] apod. Ponecháváme fantazii čtenáře, které další možnosti ještě objeví.

astronomie

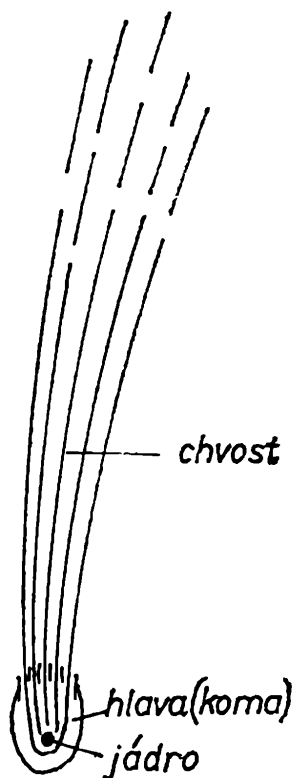
Komety

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

V minulosti byly komety považovány za „zlověstná znamení“ a budily v lidech strach, neboť prý znamenaly předzvěst zlých událostí, jako jsou války, epidemie, živelní pohromy, ale i úmrtí významných osob apod. Tyto pověry o kometách souvisely s jejich neobvyklým vzhledem: kometa se náhle objevila na obloze, její jasnost rychle rostla, objevil se a rychle se zvětšoval charakteristický chvost komety a na určitou dobu se kometa stala nejnápadnějším a nejvýraznějším úkazem na noční obloze.

Dnes víme, že obavy z komet jsou naprosto bezpředmětné. Komety jsou poměrně malá tělesa, obíhající kolem Slunce po eliptických drahách s velkou výstředností a mají poměrně velké oběžné doby. Teprve když se kometa přiblíží ke Slunci na vzdálenost jedné až dvou astronomických jednotek (UA), začíná se vytvářet chvost komety, který je sice velmi nápadný, ale současně velmi řídký a je nejméně stabilní částí komety. Jsou známy případy komet, jejichž plynný chvost dosáhl v oblasti kolem perihelia dráhy délky až 10^8 km , avšak po průchodu periheliem se chvost rychle rozplyne v meziplanetárním prostoru.

Je zajímavé, že i v dobách, kdy již byla známa podstata komet a pověrám o „zlých znameních“ již téměř nikdo nevěřil, obávali se lidé jasných komet, i když ze zcela jiného důvodu: domnívali se, že kdyby naše Země na své dráze prošla chvostem komety, mohly by plyny, které jej tvoří (kyan), otrávit zemskou atmosféru, nebo by žhavý chvost mohl způsobit na Zemi požáry. Tyto obavy astronomové brzy vyvrátili, když zjistili, že chvost je nesmírně řídký, mnohonásobně řidší než zemská



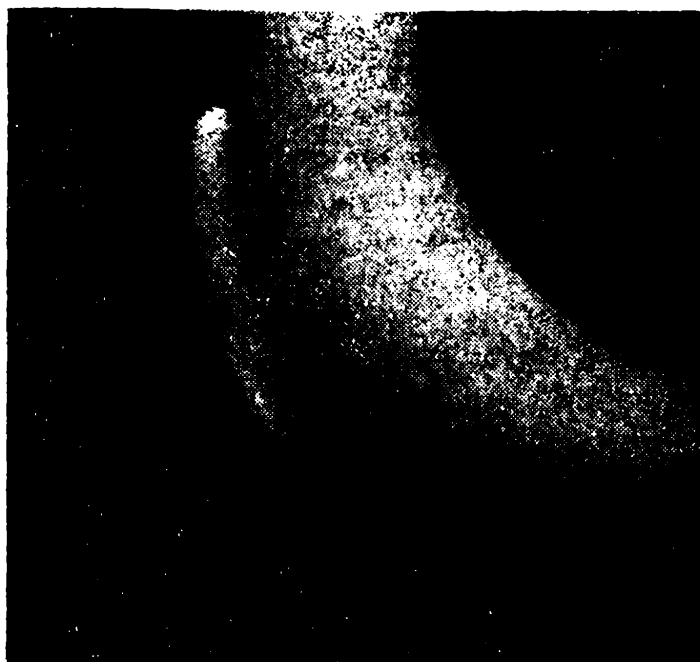
Obr. 1. Schéma komety.



Obr. 2. Morehouseova kometa (1908 III).

atmosféra, takže by nejen nemohl způsobit žádné škody, ale ani bychom průchod Země chvostem komety nezaznamenali. Výpočty astronomů byly zcela potvrzeny v roce 1910, kdy Země prošla chvostem Halleyovy komety bez jakýchkoli následků. Dokonce i přímá srážka Země s jádrem komety by byla pravděpodobně nebezpečná jen v té oblasti Země, na kterou by narazila. Působením zemské atmosféry by se kometa rozpadla, částečně by se vypařila a její zbytky by dopadly na zemský povrch jako velké meteority. Srážka komety se Zemí je ovšem krajně nepravděpodobná.

Jasně komety, pozorovatelné pouhým okem, jsou poměrně vzácným úkazem, ale slabší komety, pozorovatelné jen dalekohledy, jsou dosti časté. První historicky zaznamenané pozorování komety pochází z Číny, a to z r. 466 před naším letopočtem. Bylo zjištěno, že jde o záznam pozorování Halleyovy komety — jedné z nejznámějších periodických komet. Oběžná doba této komety je 76 roků a její nejbližší návrat je očekáván v r. 1986. Významný sovětský badatel v oboru komet, prof. S. K. Vsechsvjatskij, uvádí v díle Fyzikální charakteristiki komet (Moskva, 1958), že do konce padesátých let našeho století bylo zazna-



Obr. 3. Kometa Ikeya-Seki (1965) při průchodu periheliem.

menáno více než 1700 komet. Do r. 1955 byly vypočteny dráhy 794 komet, včetně těch, které byly pozorovány vícekrát.

Kometu můžeme charakterizovat jako těleso, které se skládá ze tří částí (obr. 1). Především je to *jádro*, jehož průměr je několik set metrů až několik desítek kilometrů. Z jádra se uvolňují plyny, které vytvářejí kolem jádra obal, nazývaný *hlava* neboli *koma*. Vlivem tlaku slunečního záření je část plynu z komy vypuzována a vytváří *chvost* komety, který zpravidla míří směrem od Slunce (proti směru gravitačního působení Slunce), neboť u částic tvořících chvost převládá tlak slunečního záření nad gravitací. Jen výjimečně se u některých komet v okolí perihelia dráhy objeví ještě další menší chvost, směřující ke Slunci.

Kometa září jednak odraženým slunečním světlem podobně jako ostatní tělesa ve sluneční soustavě, jednak plynné části komety září v důsledku ionizace molekul plynu, kterou působí korpuskulární záření Slunce. Ve značné míře se rovněž projevuje fluorescence molekul plynu: molekuly pohlcují elektromagnetické záření Slunce a vzápětí je opět vyzařují. Má-li toto záření stejnou vlnovou délku jako záření pohlcené, pak mluvíme o světelné rezonanci, je-li vlnová délka záření větší než u záření pohlceného, jde o fluorescenci.

Podle oběžné doby dělíme komety na krátkoperiodické, jejichž oběžná doba je kratší než 100 roků, a na komety dlouhoperiodické s oběžnou dobou větší než 100 roků. Dráhy krátkoperiodických komet jsou elipsy s velkou výstředností, dráhy dlouhoperiodických komet jsou buď elipsy s výstředností blízkou jedné, paraboly nebo hyperboly (s výstředností rovněž blízkou jedné). U komet s hyperbolickými nebo parabolickými drahami je jejich zařazení mezi dlouhoperiodické komety ovšem jen symbolické, protože taková kometa projde periheliem pouze jednou

a pak se vzdaluje z oblasti přitažlivosti Slunce. Tvar dráhy komety může být ovlivněn přitažlivostí velké planety, v jejíž blízkosti kometa projde. U některých komet se původní parabolická nebo hyperbolická dráha změnila tak, že afelium dráhy leží v blízkosti dráhy velké planety a z dlouhoperiodické komety se stala kometa krátkoperiodická. Dnes známe asi 60 komet, jejichž afelium leží v blízkosti nejhmotnější planety sluneční soustavy — Jupitera. Tyto komety tvoří tzv. Jupiterovu rodinu komet. Podobné, i když méně početné rodiny komet mají i další tři velké planety Saturn, Uran a Neptun.

Na obr. 2 je fotografie Morehouseovy komety (1908, III), která patří mezi nejvýznamnější objekty ze začátku dvacátého století. Na fotografické desce ji objevil 1. září 1908 student Morehouse na hvězdárně ve státě Iowa jako objekt 9. hvězdné velikosti. Jasnost komety pak postupně rostla, v době kolem průchodu periheliem byla viditelná prostým okem a chvost dosáhl na obloze délky až 11° . Kometa byla pozorovatelná až do poloviny května 1909. Na obr. 3 je zajímavý snímek komety 1965f v těsné blízkosti Slunce. Kometu objevili dva japonští astronomové-amatéri Kaoru Ikeya a Tsutomu Seki (podle objevitelů byla kometa pojmenována Ikeya-Seki) a snímek byl získán pomocí koronografu (přístroj k pozorování korony Slunce) dne 21. října 1965; průměr clony, která zakryla jasnou fotosféru Slunce, byl $0,57^\circ$. První z objevitelů Ikeya byl v době objevu starý jen 22 let a byl zaměstnán v továrně na pianu, druhý objevitel Seki měl 35 let a byl učitelem hry na kytaru. Oba již objevili po pěti kometách, které jsou zcela nebo částečně po nich pojmenovány. Kometa Ikeya-Seki byla v nejmenší vzdálenosti od Slunce 21. října 1965, tedy v době, kdy byl pořízen snímek komety koronografem. Vzdálenost komety od Slunce byla v periheliu jen 0,008 UA, tj. $1,2 \cdot 10^6$ km. Vzhledem k malé vzdálenosti od Slunce dosáhla teplota v jádru komety po dobu dvou hodin téměř 3000 K. Řada pozorovatelů potvrdila, že došlo k rozpadu jádra komety na dvě části. Komety se skutečně postupně rozpadají. Klasický případ rozpadu komety je Bielova kometa, která byla objevena v r. 1772 a jejíž oběžná doba byla necelých 7 let. Návraty této komety byly v 19. století často pozorovány. Při návratu komety v r. 1846 uviděli pozorovatelé ke svému překvapení místo jedné komety dvě velmi blízké komety, z nichž každá měla vlastní jádro i chvost. Při dalším návratu v r. 1852 byla jedna složka mnohem slabší než druhá a pak se již kometa neobjevila, ale několikrát byl pozorován meteorický roj, jehož dráha je totožná s drahou původní Bielovy komety. Z tohoto případu soudíme na úzkou souvislost mezi kometami a meteorickými roji: meteorické roje jsou pokládány za rozpadlé komety, jejichž části obíhají po původní dráze.

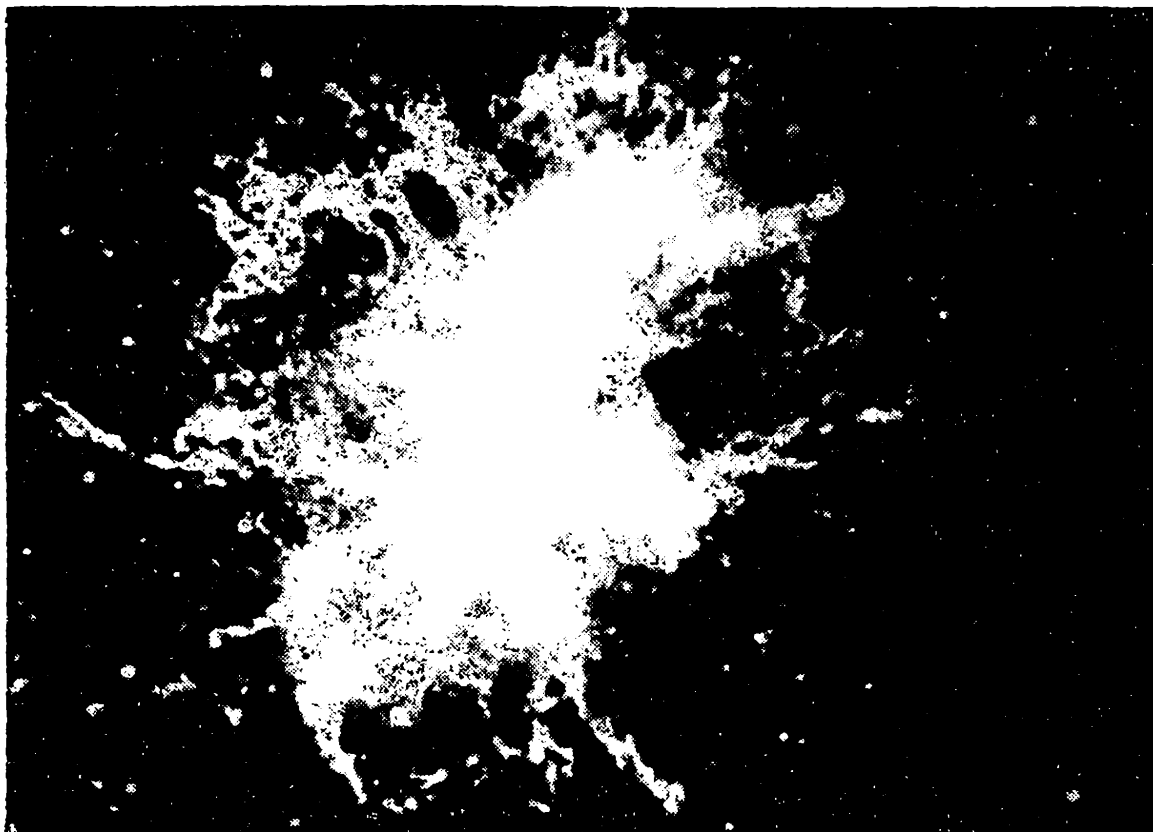
Krabí mlhovina

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Krabí mlhovinu můžeme pozorovat již malým hvězdářským dalekohledem jako plynný obláček v blízkosti hvězdy ξ v souhvězdí Býka (Taurus). Zvláštní tvar této mlhoviny, pro který obdržela svůj název, je však patrný jen na fotografiích, pořízených velkými dalekohledy (obr. 1). Krabí mlhovinu pozoroval poprvé v r. 1731 John Bevis a nezávisle na něm v r. 1758 známý francouzský astronom Charles Messier (1730 až 1817), který v r. 1787 vydal první katalog mlhovin a hvězdokup pod názvem „Catalogue des nebuleuses et les amas d'étoiles“. Do tohoto katalogu, označovaného podle jména autora značkou M, zařadil Krabí mlhovinu pod pořadovým číslem 1. V modernějším katalogu, sestaveném J. Dreyerem, je označena NGC 1952 (NGC = New General Catalogue of Nebulae and Clusters, vydaný v r. 1888 a obsahuje 7840 objektů).

Krabí mlhovina je jedním z nejzajímavějších objektů v naší Galaxii. Již ve dvacátých létech našeho století zjistil J. C. Duncan, že se mlhovina rozšiřuje. Samo o sobě by toto rozšiřování nebylo nic zvláštního, neboť bylo pozorováno u všech planetárních mlhovin, ale moderní měření ukázala, že se Krabí mlhovina rozšiřuje neobyčejně velkou rychlostí, jaká u jiných objektů nebyla pozorována: vnější části mlhoviny se rozpínají rychlostí 1450 km s^{-1} . V současné době jsou rozměry Krabí mlhoviny na obloze přibližně $6' \times 4'$, vzdálenost mlhoviny od Slunce se odhaduje na 2000 parseků. Z těchto údajů bylo vypočteno, že za předpokladu, že se Krabí mlhovina rozpíná současnou rychlostí již od svého vzniku, je její stáří velmi malé — asi tisíc roků. Stáří Krabí mlhoviny i její poloha nasvědčují tomu, že vznikla při výbuchu supernovy v roce 1054. Záznamy o pozorování této supernovy se našly v čínských a japonských kronikách.

Zájem o Krabí mlhovinu byl znovu podnícen zjištěním, že tento útvar je intenzivním zdrojem rádiového záření. Bylo to v roce 1951, kdy J. H. Piddington a N. C. Minnet zjistili, že zdroj rádiového záření, pozorovaný na kmitočtu 1210 MHz a předběžně označený Taurus A, leží v Krabí mlhovině. Během padesátých let byl tento zdroj pečlivě studován a řada badatelů, mezi nimiž byli V. A. Dombrovskij na Bjurakanské observatoři v SSSR, dále C. H. Mayer, T. P. McCullough aj. prokázala, že rádiové záření Krabí mlhoviny je silně polarizováno. Tato měření přivedla sovětského astrofyzika J. S. Šklovského na myšlenku, že záření Krabí mlhoviny (optické i rádiové) je působeno relativistickými elektrony, které krouží ve spirálách kolem siločar magnetického pole (za relativistické označujeme ty částice, jejichž rychlost se blíží rychlosti šíření světla).



Obr. 1. Krabí mlhovina v souhvězdí Býka.

V roce 1956 objevili vědečtí pracovníci Námořní výzkumné laboratoře v USA, že v oblasti Krabí mlhoviny leží také intenzivní zdroj rentgenového záření. Během zákrytu mlhoviny Měsícem v červenci 1964 bylo prokázáno, že rentgenové záření přichází z oblasti o průměru 1' až 2', ležící poblíž viditelného středu mlhoviny.

Měření z konce šedesátých let potvrdila, že v Krabí mlhovině existuje pulsující zdroj rádiového záření, tzv. pulsar. (O pulsarech jsme psali v našem časopise v článku „Jsou pulsary neutronové hvězdy?“, roč. 50, 1970/71, č. 2, str. 76—79). Pulsar zřejmě vznikl současně s Krabí mlhovinou při výbuchu supernovy; o malém stáří pulsaru svědčí také to, že má ze všech dosud zjištěných pulsarů nejkratší periodu, pouze 0,033 sekundy. Pokus, uskutečněný 7. března 1969, při němž byl raketou Aerobee vynesena přijímač rentgenového záření do výšky 150 km a po dobu čtyř minut byl zaměřen na pulsar v Krabí mlhovině, potvrdil, že zdroj vysílá rovněž v oboru rentgenového záření v oboru vlnových délek od 0,06 nm do 0,25 nm, přičemž rentgenové záření je proměnné s periodou 0,033 s. Téhož roku se podařilo ztotožnit pulsující rádiový zdroj v Krabí mlhovině se slabou hvězdou asi 16. zdánlivé hvězdné velikosti, vydávající optické záblesky ve shodném rytmu s rádiovými pulsy. V roce 1970 a začátkem roku 1971 byla pomocí balónů konána měření, jimiž byly objeveny pulsy i v oboru záření gama.

Astrofyzika má tedy v Krabí mlhovině unikátní případ kosmického objektu, který září ve všech dosažitelných oblastech elektromagnetického spektra, od rádiových vln přes optické záření až po záření gama. Všechny druhy záření jsou přitom proměnné s touže periodou 0,033 s. Je zřejmé, že Krabí mlhovina obsahuje objekt (anebo objekty) velmi zajímavých vlastností, které budou i nadále předmětem intenzivního pozorování a studia.

různé

Niels Bohr

Dr. JAN HORSKÝ, Brno

K desátému výročí Bohrova úmrtí — 18. XI. 1962

Když jsem před nedávnem byl na konferenci teoretických fyziků-relativistů v Kodani, rozhodl jsem se jít po ulici Blegdamsvej. Prošel jsem kolem Bohrova ústavu a sousedícího ústavu Nordita (Nordisk Institut for Teoretisk Atomfyzik) a uvědomil si, že v roce 1972 uplyne deset let od smrti Nielse Henrika Davida Bohra, čelného budovatele atomové fyziky.

Niels Bohr se narodil 7. října 1885 v Kodani jako syn universitního profesora fyziologie. Jeho rodiče poskytli svým dětem vzdělání a výchovu, která nejen vede k opravdovému chápání lidských hodnot a kulturních pokladů lidstva, nýbrž přispívá i rozvoji vrozeného nadání dětí. Po ukončení střední školy (v r. 1903) začal Bohr studovat fyziku na kodaňské universitě a již v roce 1906 předložil svou prvou vědeckou práci, za kterou jej Dánská královská společnost věd a umění odměnila zlatou medailí; práci později publikoval a z obsahu je patrné, že tehdy Bohr ještě žil v klidné době fyziky 19. století.

Avšak již v třetí své práci, věnované teorii elektronů v kovech, kterou v roce 1911 obhajoval jako práci doktorskou, vstupuje mladý Bohr na horkou půdu neprobádaných problémů fyziky dvacátého století. Tehdy pobýval u J. J. Thomsona, jednoho z klasiků elektronové teorie. Lze těžko říci, zda nesouhlas mladého Dána s názory tohoto fyzika vedly i k jejich roztržce; faktem zůstává, že již v r. 1912 odjíždí Bohr z Cambridge do Manchesteru k profesoru Rutherfordovi (viz Rozhledy č. 5, roč. 1971/1972) a mění své dosavadní (thomsonovské) představy o atomu ve zcela nové představy planetárního modelu Rutherfordova.

Další tři Bohrovy práce (z let 1913 až 1916) prozrazují již jeho nové nazírání na strukturu atomu, které dnes tvoří základ tzv. staré kvantové

teorie. Je zde vyložena teorie vodíku podobných atomů pomocí dvou základních Bohrových postulátů, objasněn rozměr atomu i Balmerův vzorec. Řeší se nejasnosti kolem Rydbergovy konstanty a v souvislosti s tím se předpovídá další spektrální série. Je samozřejmé, že Bohr netrpělivě očekával reakci na svoji teorii. Přišla z mnoha stran a byla jednak příznivá (O. Lodge, A. Sommerfeld, H. A. Lorentz, A. Einstein, E. Rutherford), avšak též chladně neurčitá (J. Rayleigh).

Bohrova práce při vytváření moderní kvantové teorie souvisí s objevy Planckovými a Einsteinovými (viz Rozhledy č. 8, roč. 1964/65) a s rozvojem jeho představ jsou nerozlučně spjaty práce mnichovského profesora teoretické fyziky A. Sommerfelda a profesora v Leydenu P. Ehrenfesta.

V letech 1914 až 16 Bohr dlel v Manchesteru, kde se zabýval studiem průchodu rychlých částic hmotou. Poté se vrátil do Kodaně, tentokrát již natrvalo. V roce 1916 byl jmenován profesorem teoretické fyziky na kodaňské universitě a v roce 1922 mu byla udělena Nobelova cena za kvantovou teorii planetárního modelu atomu.

Bylo by však mylné domnívat se, že tím byla jeho vědecká práce dovršena. Další bouřlivý rozvoj atomové fyziky a vznik „nové“ kvantové teorie je charakterizován ideovým vedením Bohrovým. Vzpomeňme aspoň na jeho princip korespondence, princip komplementarity a velmi poučnou dlouhotrvající diskusi s Einsteinem. Později Bohr soustředil svou pozornost na atomové jádro samotné a objevil mechanismus dělení jádra v tzv. kapkovém modelu. V posledních letech života se Bohr zabýval aplikací kvantové teorie na biologické procesy a zajímal se stále více o problém mírového využití atomové energie a o mírové soužití národů.

Bohrův věhlas, mezinárodní úspěch a uznání přiměly již v roce 1921 dánskou vládu, kodaňský magistrát i soukromé obdivovatele k vybudování Ústavu teoretické fyziky pro N. Bohra, v němž se kolem svého učitele shromažďovali fyzikové všech národů, ras a ideologií. Pobývali zde znamenití fyzikové W. Heisenberg, P. Dirac, W. Pauli, J. Wheeler, V. Fok, C. Moller, L. Rosenfeld a řada jiných. V tiché pohodě rodily se zde myšlenky, na kterých stojí moderní kvantová fyzika. Ústav postupně získával i perfektní přístrojové vybavení; jako první v Evropě byl zde uveden do chodu cyklotron. Na základě Bohrovy teoretické předpovědi byl zde objeven prvek Hafnium, nazvaný tak na počest Kodaně (jejíž latinské jméno je „Hafnia“).

Zatím se Evropou začal šířit fašismus, jehož diktátoři uznávali jen svoje nelidské učení a krutě trestali ty, kdož — byť i potichu — nesouhlasili s tímto učením. A tu postiženým snažil se pomoci Bohrův ústav: Četní atomoví vědci byli zváni do Kodaně a tak se podařilo dostat z fašistického Německa a Itálie i dva přední atomové fyziky — profesorku L. Meitnerovou a profesora E. Fermiho.

Ač samotnému Bohrovi i jeho rodině hrozilo nebezpečí zatčení, vytrval ve svém Ústavě až do roku 1943, kdy již hrozilo nebezpečí obsazení Ústavu. Tehdy odcestoval do Švédska, odtud do Anglie a posléze do Ameriky, kde pracoval v komisi pro Atomový projekt. Po válce vrací se zpět do Kodaně a znovu se stává ředitelem Ústavu, jehož rozvoji se věnuje s nezmenšeným úsilím. Pro CERN vychovává první odborníky a jeho zásluhou došlo r. 1957 k založení NORDITY — ústavu, který je analogický CERNU pro severské země.

Je samozřejmé, že Bohr byl členem mnohých zahraničních akademií a čestným doktorem mnoha universit (nikoliv však československých). Charakteristickým rysem jeho povahy byla skromnost a vytrvalost a jeho obdivuhodný názor na smysl lidského života: Tvrdil, že jedinou zcela jistou povinností člověka je přispět svým vlastním — třebaš malým — vkladem do oboru, v němž pracuje.

Je jasné, že Niels Bohr „zažehl maják, který dlouhou dobu svítil na cestu teoretickým fyzikům celého světa. Tento maják nezhasl Bohrovým úmrtím, ale proměnil se v památník, v němž hoří věčný oheň, který je zdrojem světla nejen dnešním, ale i budoucím pokolením fyziků.“

Beseda s čtenáři

JOSEF KOTYK, Pardubice

Prověrkou dobrého vztahu k našemu časopisu může být beseda s jeho čtenáři. Ze zkušeností tohoto druhu vylíčím nyní jednu podrobněji. Týká se mého článku „Hrst vzpomínek“, otištěného v úvodníku 9. čísla jubilejního 50. ročníku Rozhledů, zvláště pak Nobelových cen. Na dotazy čtenářů odpovídá autor.

* * *

*

Dotaz: „Žije ještě pan prof. dr. Jaroslav Heyrovský?“

Odpověď: „Nikoli. Pan prof. dr. Jaroslav Heyrovský DrSc., náš první a dosud jediný nositel Nobelovy ceny, zemřel před pěti lety dne 27. března 1967 ve věku 76 let.“

Dotaz: „Kdo byl Nobel?“

Odpověď: „Alfred Bernhard Nobel (1833 až 1896) patřil k nejvýznamnějším vynálezům 19. století. Přihlásil celkem na 350 patentů; zejména výrobu dynamitu podle jeho patentu převzaly všechny státy.

Svým neobyčejným testamentem zřídil fond, z jehož úroků se měly každoročně udělovat ceny osobám, jejichž činnost přinesla lidstvu zvláštní užitek. Tak vytvořil nadaci, která se stala trvalou podporou rozvoje světové vědy a kultury.“

Dotaz: „Které státy mají podobně jako naše republika toliko jednoho laureáta Nobelovy ceny?“

Odpověď: „Jediného laureáta Nobelovy ceny má kromě ČSSR osm států: Jugoslávie, Řecko, Izrael, Island, Chile a Guatemala (vesměs za literaturu), Maďarsko a Portugalsko (oba za fyziologii a medicínu).“

Dotaz: „Které státy mají dva laureáty Nobelovy ceny?“

Odpověď: „Dva laureáty Nobelovy ceny má sedm států: Polsko, Finsko, Čína, Argentina, Jihoafrická republika (vesměs za fyziku), Indie a Irsko (oba po jednom za fyziku).“

Dotaz: „Které státy mají nejvyšší počet laureátů Nobelovy ceny?“

Odpověď: „Podle statistického výkazu za léta 1901 až 1969¹⁾ zní pořadí takto: Spojené státy severoamerické 102, Anglie 60, Německo 54, Francie 43, Švédsko 19, Švýcarsko 13, Sovětský svaz 12 atd.“

Dotaz: „Jaký je celkový počet laureátů Nobelovy ceny za fyziku?“

Odpověď: „V letech 1901 až 1969 bylo uděleno celkem 90 Nobelových cen za fyziku.“

Dotaz: „Jak zní pořadí států pro fyziku?“

Odpověď: „Podle cit. výkazu zní pořadí takto: USA 28, Anglie 14, Německo 14, Francie 8, SSSR 6 atd.“

Dotaz: „Jak lze vysvětlit poměrně malý počet sovětských laureátů Nobelovy ceny?“

Odpověď: „Nobelovy ceny se udělují od roku 1901, Svaz sovětských socialistických republik byl však utvořen a vyhlášen teprve před 50 lety dne 30. prosince 1922. V neposlední řadě třeba však připustit, že se při výběru laureátů významní vědci, spisovatelé a veřejní činitelé ze socialistických zemí záměrně opomíjejí, a doznati pak i třídní zaujatost výboru Nobelovy nadace.“

Dotaz: „A jak tomu je s matematikou?“

Odpověď: „Za vědeckou činnost v matematice se Nobelova cena neuděluje.“

Žák Štoural: „Jaká škoda! Nobel, zakladatel nadace, nemohl nad svým neobyčejným testamentem roku 1895 tušit, že v dalším století se zrodí talenty, které již ve školních lavicích pohnou matematikou v samých základech. Příkladně náš spolužák Zmatlík²⁾ — tak vzácný exemplář! Ještě do maturity doroste světového formátu.“

¹⁾ Viz např. knihu Ing. Juraje Bobera „Laureáti Nobelovy ceny“ (Obzor, Bratislava 1971), str. 364 a 367; v ní mohou čtenáři na str. 13 a 14 nalézt i vyobrazení obou stran medaile, kterou dne 10. prosince 1959 dostal Dr. Jaroslav Heyrovský, diplom Heyrovského (str. 15), portrét, životopis a charakteristiku jeho osobnosti (str. 156) aj.

Žák Zmatlík: „Nevěříš? Pokrok vědy ani ve školních lavicích nezastavíš!“

Autor: „D'Alembert, slavný matematik francouzský,³⁾ říkal:⁴⁾ „En avant! Allez en avant, et la foi vous viendra.“ Vpřed! Jen vpřed! Víra se už dostaví...“

* *
*

Doslov autorův:

Na začátku Nobelovy nadace byl dynamit...

Nobel nenáviděl válku. Považoval ji za největší zločin proti lidstvu. Chtěl proto vynalézt takový odstrašující prostředek hromadného ničení, který by válčení znemožnil a války úplně zlikvidoval. Vynalezl dynamit.

Bertě Suttnerové, zasloužilé průkopnici mírového hnutí, Nobel napsal: „Továrny na výrobu dynamitu snad zabrání válkám. Okamžik, v němž se dvě armády budou moci během jediné minuty vzájemně zničit, odradí jistě všechny civilizované státy od válčení a přinutí je armády rozpustit...“

Nobelova památná slova mohou i dnes v souvislosti s jaderným zbrojením velmocí znít lidem atomového věku jako věštba. Jsou naplněna neochvějnou vírou člověka, že se podaří zabrániti hrůzám válek a zkáze, jsou naplněna nadějí lidstva v trvalý mír.

²⁾ Z jeho „objevů“ viz např. Zmatlíkovu poučku v 50. roč. Rozhledů.

³⁾ Jean Le Rond d'Alembert (1717 až 1783), nemanželský šlechtický syn, odložený a nalezený poblíže kostela St. Jean Le Rond v Paříži, jest jedním z pěti matematiků, kteří si podle Aragových slov „rozdělili mezi sebou svět, jehož existenci odhalil Newton“.

⁴⁾ Viz Dirk J. Struik: „Dějiny matematiky“ (Orbis, Malá moderní encyklopedie, sv. 43, Praha 1963). Cit. str. 155.

Novoroční hádanka

Určete poslední dvojčíslí čísla

$$1^{1973} + 9^{1973} + 7^{1973} + 3^{1973}$$

O. S.

recenze

Už třicet svazků ŠMM

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

Škola mladých matematiků, edice, kterou vydává Ústřední výbor matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, existuje už od r. 1961 a za tu dobu vyšlo třicet svazečků. Třetí desítku dovršila ŠMM knížkou Milana Komana a Jana Vyšína s názvem „Malý výlet do moderní matematiky“, kterou dostali čtenáři do rukou v dubnu 1972. Název svazku symbolizuje vlastně celou tuto studentskou edici, neboť každá zatím vydaná brožura chce o kousek posunout znalosti středoškolských čtenářů ve směru k matematice současné. Není proto divu, že většinu knížek si spolu se studenty rádi čtou i jejich profesori a učitelé matematiky a vůbec všichni, kdo se chtějí dovědět víc, než přinášejí školské učebnice.

Až budete listovat Komanovým a Vyšínovým svazkem, hned uvidíte, že je to knížka jiného typu, než na jaký jste zvyklí. Snad vás trochu překvapí a možná vyvedou z míry obrázky hracích kostek, šachovnic, klávesnice piana, číslicových hodin a různých diagramů a tabulek a věřím, že vás i povzbudí a podnítlí k další četbě. Oba autoři vybrali do knížky nejzajímavější úlohy z pokusných učebních textů pro experimentální ZDŠ a je to opravdu netradiční matematika. Dovolte, abychom zde citovali aspoň názvy kapitol: Seznamujeme se s množinami — Co je pravděpodobnost? — První poznatky z kombinatoriky aneb další poznatky o množinách — Učíme se počítat s množinami.

Hned na prvních stránkách se začíná s množinovou symbolikou a terminologií, jak je matematik zná z vysokoškolských učebnic. Výklad je ovšem dalek vysokoškolské stručnosti. Každý pojem a nový zápis je doprovázen příkladem nebo několika příklady a paragraf vždy končí souborem zajímavých cvičení. Modernost této matematiky ovšem nejde až do současnosti a není to ani možné. Vždyť ani v ostatních školských předmětech se nevyučuje látka, jež je předmětem současného bádání ve vědeckých ústavech a na universitách. Moderní matematikou se v teorii vyučování zpravidla rozumí matematika 19. století a tento pojem se staví jako protiklad k matematice klasické, v níž se vzdělávaly starší generace.

Nový svazek nám dává spoustu materiálu pro soukromé studium a podle mého názoru se výborně hodí i pro kroužky MO, kde nám stále

ještě chybí studijní literatura. Bude se jistě líbit učitelům a žákům experimentálních ZDŠ i studentům gymnasií a rodičům, kteří se chtějí dovědět, co se ve škole rozumí pod názvem „moderní matematika“. Jsem však přesvědčen, že v knížce najdou zalíbení i ti, kdo dávají přednost středoškolské matematice klasické. „Prosíme žáky gymnasií, zvláště nižších ročníků,“ praví autoři v úvodu, „aby se nad tímto svazečkem ŠMM neošklíbili pohrdlivě jen proto, že je sestaven z textů pro ZDŠ. I oni se totiž mohou nad mnoha úlohami pěkně zapotit.“

Škoda, že nejsou připojeny odpovědi či stručné návody ke cvičením — aspoň k těm složitějším. To by jistě usnadnilo studium zvláště samoukovi. Seznam nejdůležitějších symbolů a přehled pokusných učebních textů z matematiky pro ZDŠ a pro gymnasia je zde uveden. Knížka má 190 stran, 130 obrázků a stojí 12 Kčs. Budete s ní jistě spokojeni.

olympiády

Jak probíhal XXI. ročník MO

Leták s úlohami se dostal do škol na počátku školního roku 1971—72 a matematická olympiáda probíhala i tento rok celkem podle programu. Scházely se studijní kroužky, mnozí řešili úlohy jen na svou pěst, vyšly nové svazky edice Škola mladých matematiků a v březnu 1972 se konalo na zámku ve Štíříně soustředění vybraných olympioniků. Dvě desítky studentů tam strávily týden pod vedením lektorů z vysokých škol a z Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Vyvrcholením každého ročníku je třetí kolo kategorie A, v jehož pořádání se střídají různé kraje republiky. Ve XXI. ročníku připadl tento úkol Kladnu a můžeme říci, že organizace klapala velmi pěkně. Ve dnech 14. a 15. dubna 1972 se sjeli do Kladna olympionikové z celé republiky a bylo jich tentokrát téměř osmdesát. Soutěž se konala v pěkné moderní budově odborného učiliště n. p. Průmstav v Kladně-Kročehlavech v pátek i v sobotu. Každý z těchto dní řešili žáci vždy celé dopoledne tři úlohy a zbývající čas věnovali malému výletu a navštívili filmové představení. Matematika tak zase svedla dohromady mladé lidi z různých

ných koutů republiky a studenti budou jistě v navázaném přátelství pokračovat i při dalším studiu na vysoké škole.

Souběžně s třetím kolem zasedal též na Kladně ústřední výbor matematické olympiády a pak též jeho užší předsednictvo. Připravovaly se už další úlohy pro XXII. ročník soutěže a jednání mělo ještě další pracovní náplň. Třetí kolo MO vzbudilo i pozornost novinářů a denní tisk přinesl v té době řadu článků o soutěži a o matematice vůbec. Když v sobotu třetí kolo skončilo, žáci odevzdali své práce a všichni jsme se zvědavostí čekali na výsledek. Snad i vás bude zajímat seznam vítězů třetího kola, který Rozhledy přináší na jiném místě.

J. S.

redakce hovoří se čtenáři

Redakce prosí čtenáře, aby si v článku Dr. A. Vrby „O chytrém předsedovi“ ve 2. čísle opravili tyto tiskové chyby:

na str. 72₁₀ místo chybného $a_{i,k}$ správně $(a_{i,k})$

str. 73¹⁰ místo $b \rightarrow \mathbf{b}$,

str. 73₁ místo $\mathbf{AZ} = \mathbf{I}_r \rightarrow \mathbf{ZA} = \mathbf{I}_r$,

str. 74 uprostřed: místo $\binom{q}{p} \sum_{s=1}^{x-p}$ správně $\binom{q}{p} \sum_{s=0}^{q-p}$

str. 75₆ místo $\underline{\mathfrak{C}} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}$.

* *

*

Na konci kalendářního roku přeje redakce všem svým čtenářům mnoho štěstí a úspěchů v novém roce 1973, maturantům plný zdar při zkouškách dospělosti a přijetí na vhodně zvolenou vysokou školu, řešitelům našich úloh správnost všech řešení a celé čtenářské obci osobní spokojenost.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

pravděpodobnost
pravdivý
pravidelně
pravidelný
pravidlo
pravítko
logaritmické pravítko
pravoúhlý

prázdný
predikát
predikátový
primární
primitivní
princip
probíhat
problém
procento
proces
prodloužení
program
programátor(ka)
programování
programovaný
programovat
procházet
projekce
projektivita
projektivní
proměnná

probabilité *ž*
vrai, *o*
régulièrement
régulier, ère
règle *ž*
règle *ž*
règle à calcul *m*
rectangle; rectangulaire; orthogonal, *e*,
aux
vide
prédictat *m*
prédictatif, *ive*
primordial, *e*, *aux*
primitif, *ive*
principe *m*
parcourir
problème *m*
pour-cent *m*
processus *m*
prolongement *m*
programme *m*
programmeur(euse) *m* (*ž*)
programmation *ž*
programmé, *o*
programmer
parcourir
projection *ž*
homographie *ž*
projectif, *ive*; homographique
variable *ž*

náhodná proměnná	variable aléatoire
nezávisle proměnná	variable indépendante
závisle proměnná	variable dépendante
promile	pour-mille <i>m</i>
promítání	projection <i>ž</i>
axonometrické promítání	projection axonométrique
kolmé promítání	projection orthogonale
kosoúhlé promítání	projection oblique
kótované promítání	projection cotée
středové promítání	projection centrale
prosté zobrazení	application <i>ž</i> injective; injection <i>ž</i>
prostor	espace <i>m</i>
afinní prostor	espace affine
euklidovský prostor	espace euclidien
<i>n</i> -rozměrný prostor	espace à <i>n</i> dimensions
projektivní prostor	espace projectif
vektorový prostor	espace vectoriel
prostorová křivka	courbe <i>ž</i> gauche; courbe <i>ž</i> à deux courbures
protější	opposé, e
protínat (se)	concourir; (se) couper
protínající (se)	concourant, e
protipříklad	contre-exemple <i>m</i>
proto	par suite
protože	car
provést	exécuter
prstenec	anneau <i>m</i> ; tore <i>m</i>
průběh funkce	comportement <i>m</i> d'une fonction
pruh nad písmenem	barre <i>m</i>
průměr	diamètre <i>m</i> ; moyenne <i>ž</i>
aritmetický průměr	moyenne arithmétique
sdružené průměry	diamètres conjugués
průměrný	moyen, enne
průměrná rychlost	vitesse <i>ž</i> moyenne
průmět	projection <i>ž</i>
kótovaný průmět	plan <i>m</i> coté
průmětna	plan <i>m</i> de projection
průnik	intersection <i>ž</i>

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

5



ROČNÍK 51
LEDEN 1973

5

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Sedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ Praha, prof. dr. Ján Vanovič, UK Bratislava, František Vencálek, SPŠ Praha.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

OBSAH

RNDr. S. Staněk: O jedné třídě posloupností definované rekurentně . . .	193
J. Drábek: Ostrá alternativa .	199
Dr. J. Sedláček: O Ramseyových číslech	201
RNDr. J. Šedivý: Jak zkontrolovat správnost úsudků výpočtem . . .	204
B. Otta: Přímé výpočty některých limit typu $\frac{0}{0}$	208
RNDr. E. Scholtz: Fyzikálne princípy čiernobielej televízie (dokončení) . .	212
RNDr. R. Tulak: Proč vznikla a co řeší kvantová mechanika .	216
Ing. B. Vybíral, CSc.: Šíření vln v jednorozměrném kontinuu .	219
RNDr. J. Široký RNDr. M. Široká: Kopernikovy astronomické přístroje .	226
Naše soutěž	228
M F O	233
J. Kotyk: O vývoji heliocentrické soustavy	235
S Horák: Ze zahraničních časopisů .	238
Recenze	239
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

0 jedné třídě posloupností definované rekurentně

RNDr. SVATOPLUK STANĚK, Brno

V tomto článku se budeme zabývat jistou třídou číselných posloupností, o které dokážeme, že každá posloupnost, která je prvkem této třídy, je definována rekurentně. Tato skutečnost umožňuje rozšířit některé vlastnosti, které platí pro vhodný počet prvních členů těchto posloupností, na každý jejich člen.

Nejprve dokážeme dvě pomocné věty.

1. *Pomocná věta.* Buď n libovolné přirozené číslo. Pak pro každé $s = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ platí identita (klademe $0^0 = 1$, $0^i = 0$ pro každé přirozené číslo i):

$$\binom{n}{n} n^s - \binom{n}{n-1} (n-1)^s + \binom{n}{n-2} (n-2)^s - \dots + (-1)^n \binom{n}{0} 0^s = 0. \quad (1)$$

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k n a s . Buď nejprve $n = 1$. Pak $s = 0$ a máme

$$\binom{1}{1} 1^0 - \binom{1}{0} 0^0 = 1^0 - 0^0 = 1 - 1 = 0.$$

Nechť (1) platí pro každé $n = 1, 2, \dots, j$ a $s = 0, 1, \dots, n - 1$. Dokážeme, že pak (1) platí i pro $n = j + 1$ a $s = 0, 1, \dots, j$. Pro $n = j + 1$ a $s = 0$ platí podle binomické věty

$$\begin{aligned} & \binom{j+1}{j+1} (j+1)^0 - \binom{j+1}{j} j^0 + \binom{j+1}{j-1} (j-1)^0 - \dots + \\ & + (-1)^{j+1} \binom{j+1}{0} 0^0 = \binom{j+1}{j+1} - \binom{j+1}{j} + \binom{j+1}{j-1} - \dots + \\ & + (-1)^{j+1} \binom{j+1}{0} = (1-1)^{j+1} = 0. \end{aligned}$$

Nechť nyní (1) platí pro $n = j + 1$ a $s = 0, 1, \dots, k$ ($k > 0$, $k < j$).

Podle předpokladu tedy platí rovnost ($0^k = 0$)

$$\binom{j+1}{j+1}(j+1)^k - \binom{j+1}{j}j^k + \binom{j+1}{j-1}(j-1)^k - \dots + (-1)^j \binom{j+1}{1}1^k = 0$$

Z této rovnosti dostáváme ihned vhodným rozepsáním členů následující systém $j+1$ rovností

$$\binom{j+1}{j+1}(j+1)^k = \binom{j+1}{j}j^k - \binom{j+1}{j-1}(j-1)^k + \dots - (-1)^j \binom{j+1}{1}1^k,$$

$$\binom{j+1}{j+1}(j+1)^k - \binom{j+1}{j}j^k = -\binom{j+1}{j-1}(j-1)^k + \dots - (-1)^j \binom{j+1}{1}1^k,$$

$$\binom{j+1}{j+1}(j+1)^k - \binom{j+1}{j}j^k + \dots + (-1)^j \binom{j+1}{1}1^k = 0.$$

Sečtením levých a pravých stran výše zapsaného systému rovností dostaneme

$$\begin{aligned} & \binom{j+1}{j+1}(j+1)^{k+1} - \binom{j+1}{j}j^{k+1} + \dots + (-1)^j \binom{j+1}{1}1^{k+1} = \\ & = \binom{j+1}{j}j^k - 2\binom{j+1}{j-1}(j-1)^k + 3\binom{j+1}{j-2}(j-2)^k - \dots - (-1)^j j \binom{j+1}{1}1^k \end{aligned}$$

Nyní již zbývá dokázat, že pravá strana poslední rovnosti je rovna nule. Po vhodných úpravách $\binom{j+1}{l}(j-l+1) = \binom{j}{l}(j+1)$, $l = 1, 2, \dots, j$ a užitím indukčního předpokladu ($n = j, 0 < s = k < j$) však máme

$$\binom{j+1}{j}j^k - 2\binom{j+1}{j-1}(j-1)^k + 3\binom{j+1}{j-2}(j-2)^k - \dots -$$

$$\begin{aligned}
& - (-1)^j j \binom{j+1}{1} 1^k = (j+1) \left[\binom{j}{j} j^k - \binom{j}{j-1} (j-1)^k + \right. \\
& \quad \left. + \binom{j}{j-2} (j-2)^k - \dots + (-1)^{j-1} \binom{j}{1} 1^k \right] = 0.
\end{aligned}$$

2. *Pomocná věta.* Bud' x libovolné číslo, n přirozené číslo. Pak pro každé $s = 0, 1, \dots, n-1$ platí identita

$$\begin{aligned}
\binom{n}{n} (n+x)^s - \binom{n}{n-1} (n+x-1)^s + \binom{n}{n-2} (n+x-2)^s - \dots + \\
+ (-1)^n \binom{n}{0} x^s = 0.
\end{aligned}$$

Důkaz. Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned}
(x+n)^s &= \binom{s}{0} x^s + \binom{s}{1} x^{s-1} n + \binom{s}{2} x^{s-2} n^2 + \dots + \binom{s}{s} n^s, \\
(x+n-1)^s &= \binom{s}{0} x^s + \binom{s}{1} x^{s-1} (n-1) + \binom{s}{2} x^{s-2} (n-1)^2 + \dots + \\
&\quad + \binom{s}{s} (n-1)^s, \\
x^s &= x^s.
\end{aligned}$$

Vynásobme uvedené rovnosti postupně čísly $\binom{n}{n}, -\binom{n}{n-1}, \dots, (-1)^n \binom{n}{0}$

a sečtěme. Jestliže v takto získané rovnosti vhodným způsobem uspořádáme členy její pravé strany, dostaneme

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{n} (x+n)^s - \binom{n}{n-1} (x+n-1)^s + \dots + (-1)^n \binom{n}{0} x^s = \\
&= \binom{s}{0} x^s \left[\binom{n}{n} - \binom{n}{n-1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{0} \right] + \binom{s}{1} x^{s-1} \left[\binom{n}{n} n - \right. \\
&\quad \left. - \binom{n}{n-1} (n-1) + \dots + (-1)^n \binom{n}{0} 0^1 \right] + \dots + \binom{s}{s} \left[\binom{n}{n} n^s - \right. \\
&\quad \left. - \binom{n}{n-1} (n-1)^s + \dots + (-1)^n \binom{n}{0} 0^s \right]. \tag{2}
\end{aligned}$$

Podle 1. pomocné věty je každý výraz, který je v hranaté závorce na pravé straně rovnosti (2), roven nule. Tím je vše dokázáno.

Dále uvedeme definici celočíselné posloupnosti a definici rekurentní posloupnosti k -tého řádu.

Definice 1. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je celočíselná, když každý člen této posloupnosti je roven nějakému celému číslu.

Příklad 1. Posloupnosti $\{n\}$, $\{2n^2 - 3\}$, $\{n!\}$ jsou celočíselné.

Definice 2. Jestliže existuje přirozené číslo k a čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, taková, že pro každé přirozené číslo n platí

$$a_{n+k} = \alpha_1 a_{n+k-1} + \alpha_2 a_{n+k-2} + \dots + \alpha_k a_n, \quad (3)$$

řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je rekurentní posloupnost k -tého řádu. Řekneme pak také, že posloupnost $\{a_n\}$ je předpisem (3) definovaná rekurentně.

Příklad 2. Platí-li o členech posloupnosti $\{a_n\}$: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, pak podle definice 2 je $\{a_n\}$ rekurentní posloupnost 2. řádu. Platí: $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$, $a_7 = 13$, ... Tato posloupnost se nazývá Fibonacciova posloupnost a její členy pak Fibonacciova čísla.

Poznámka 1. Z definice 2 rekurentní posloupnosti k -tého řádu ihned plyne, že každá rekurentní posloupnost k -tého řádu $\{a_n\}$ je jednoznačně určena předpisem (3) a prvními k členy a_1, a_2, \dots, a_k .

V následující větě z množiny všech číselných posloupností vyjmemme jistou třídu posloupností (totiž právě tu třídu, kterou máme na mysli v nadpisu článku), která je definována rekurentně. Platí totiž následující věta.

Věta 1. Buď k libovolné přirozené číslo. Položme pro každé přirozené číslo n

$$a_n = c_0 n^k + c_1 n^{k-1} + \dots + c_k$$

kde c_0, c_1, \dots, c_k jsou libovolná čísla. Pak posloupnost $\{a_n\}$ je rekurentní posloupnost $k + 1$ -ního řádu a platí

$$a_{n+k+1} = \binom{k+1}{k} a_{n+k} - \binom{k+1}{k-1} a_{n+k-1} + \dots + (-1)^k \binom{k+1}{0} a_n \quad (4)$$

Důkaz. Lehce se nahlédne, že platí následující řetězec nerovností

$$\begin{aligned} & a_{n+k+1} - \binom{k+1}{k} a_{n+k} + \binom{k+1}{k-1} a_{n+k-1} - \dots - (-1)^k \binom{k+1}{0} a_n = \\ & = c_0(n+k+1)^k + c_1(n+k+1)^{k-1} + \dots + c_k - \binom{k+1}{k} [c_0(n+k)^k + c_1(n+k)^{k-1} + \dots + c_k] + \\ & + \binom{k+1}{k-1} [c_0(n+k-1)^k + c_1(n+k-1)^{k-1} + \dots + c_k] - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{0} (c_0 n^k + c_1 n^{k-1} + \dots + c_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_k] = c_0 \left[\binom{k+1}{k+1} (n+k+1)^k - \binom{k+1}{k} (n+k)^k + \right. \\
& + \left. \binom{k+1}{k-1} (n+k-1)^k - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{0} n^k \right] + \\
& + c_1 \left[\binom{k+1}{k+1} (n+k+1)^{k-1} - \binom{k+1}{k} (n+k)^{k-1} + \right. \\
& + \left. \binom{k+1}{k-1} (n+k-1)^{k-1} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{0} n^{k-1} \right] + \dots + \\
& + c_k \left[\binom{k+1}{k+1} - \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k-1} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{0} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Poslední rovnost platí proto, neboť podle 2. pomocné věty jsou výrazy ve všech hranatých závorkách rovny nule. Z krajních rovností plyne ihned tvrzení věty.

Příklad 3. Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{8}{5}n^2 - 3$.

Podle věty 1 je $\{a_n\}$ rekurentní posloupnost 4. řádu a platí

$$\begin{aligned}
a_{n+4} = \binom{4}{3} a_{n+3} - \binom{4}{2} a_{n+2} + \binom{4}{1} a_{n+1} - \binom{4}{0} a_n = 4a_{n+3} - 6a_{n+2} + \\
+ 4a_{n+1} - a_n.
\end{aligned}$$

Věta 2. Bud' $\{a_n\}$ rekurentní posloupnost k -tého řádu, která je definována předpisem (3), kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jsou celá čísla. Pak $\{a_n\}$ je celočíselná posloupnost právě tehdy, když prvních k členů posloupnosti $\{a_n\}$ (tzn. čísla a_1, a_2, \dots, a_k) jsou celá čísla.

Důkaz. Je-li $\{a_n\}$ celočíselná posloupnost, pak musí být každý člen $\{a_n\}$ roven nějakému celému číslu, a proto tím spíše musí být a_1, a_2, \dots, a_k celá čísla.

Předpokládejme nyní, že a_1, a_2, \dots, a_k jsou celá čísla. Podle (3) pro $\{a_n\}$ platí (v (3) klademe $n = 1$)

$$a_{k+1} = \alpha_1 a_k + \alpha_2 a_{k-1} + \dots + \alpha_k a_1.$$

Součet $\alpha_1 a_k + \alpha_2 a_{k-1} + \dots + \alpha_k a_1$ je však roven nějakému celému číslu, neboť podle předpokladu věty jsou $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ celá čísla. Proto je také a_{k+1} celé číslo. Předpokládejme, že je již dokázáno, že a_1, a_2, \dots, a_p ($p > k$) jsou celá čísla. Klademe-li v (3) $n = p - k + 1$, je

$$a_{p+1} = \alpha_1 a_p + \alpha_2 a_{p-1} + \dots + \alpha_k a_{p-k+1}.$$

Součet $\alpha_1 a_p + \alpha_2 a_{p-1} + \dots + \alpha_k a_{p-k+1}$ je však roven nějakému celému číslu (podle předpokladu jsou všechna čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k, a_{p-k+1}, \dots, a_p$

čísla celá) a odtud je také a_{p+1} celé číslo. Tím je matematickou indukcí dokázáno, že pak $\{a_n\}$ je celočíselná posloupnost.

Důsledek 1. Buďte c_0, c_1, \dots, c_k libovolná čísla. Pro každé přirozené číslo n položme

$$a_n = c_0 n^k + c_1 n^{k-1} + \dots + c_k.$$

Pak $\{a_n\}$ je celočíselná posloupnost právě tehdy, když čísla a_1, a_2, \dots, a_{k+1} jsou celá.

Důkaz. Podle věty 1 je $\{a_n\}$ rekurentní posloupnost $k + 1$ -ního řádu a platí po ni formule (4). Protože $\binom{k+1}{0}, \binom{k+1}{1}, \dots, \binom{k+1}{k}$ jsou celá čísla, jsou splněny všechny předpoklady věty 2, z které tvrzení důsledku 1 již plyne bezprostředně.

Příklad 4. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{12} n^4 - \frac{1}{6} n^3 - \frac{31}{12} n^2 - \frac{17}{3} n - 10 \right\}$ je celočíselná. Podle věty 1 je $\{a_n\}$ rekurentní posloupnost 5. řádu, a proto podle důsledku 1 stačí dokázat, že a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 jsou celá čísla. Výpočtem dostaneme: $a_1 = -7, a_2 = -9, a_3 = -14, a_4 = -18, a_5 = -15$.

Věta 3. Buď $\{a_n\}$ celočíselná rekurentní posloupnost k -tého řádu, která je definovaná předpisem (3), kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jsou celá čísla. Buď $q \neq 0$ celé číslo. Každý člen posloupnosti $\{a_n\}$ je dělitelný číslem q právě tehdy, když číslem q je dělitelno prvních k členů posloupnosti $\{a_n\}$, tzn. čísla a_1, a_2, \dots, a_k .

Důkaz. Abychom dokázali větu 3, stačí dokázat, že posloupnost $\left\{ \frac{a_n}{q} \right\}$ je celočíselná. Podle věty 2 je k tomu nutné a stačí, aby prvních k členů této posloupnosti (tzn. čísla $\frac{a_1}{q}, \frac{a_2}{q}, \dots, \frac{a_k}{q}$) byla celá čísla. Čísla $\frac{a_1}{q}, \frac{a_2}{q}, \dots, \frac{a_k}{q}$ jsou celá právě tehdy, když číslo q dělí všechna čísla a_1, a_2, \dots, a_k , což je v předpokladech věty. Tím je věta dokázána zcela.

Důsledek 2. Buďte c_0, c_1, \dots, c_k libovolná čísla. Pro každé přirozené číslo n položme

$$a_n = c_0 n^k + c_1 n^{k-1} + \dots + c_k.$$

Buď $q \neq 0$ celé číslo. Pak každý člen posloupnosti $\{a_n\}$ je dělitelný číslem q , právě když je číslem q dělitelno prvních $k + 1$ členů $\{a_n\}$, tzn. čísla a_1, a_2, \dots, a_{k+1} .

Důkaz. Důkaz je zcela stejný s důkazem důsledku 1 až na to, že místo věty 2 se nyní užije věty 3.

Příklad 5. Dokažte, že každý člen posloupnosti $\{a_n\} = \{n(n^2 - 49)(n^2 + 49)\}$ je dělitelný číslem 30. Z věty 1 plyne, že $\{a_n\}$ je rekurentní posloupnost 6. řádu, a proto stačí podle důsledku 2 dokázat, že všechna čísla a_1, a_2, \dots, a_6 jsou dělitelna číslem 30. To je však splněno, neboť $a_1 = -30 \cdot 80$, $a_2 = -30 \cdot 159$, $a_3 = -30 \cdot 232$, $a_4 = -30 \cdot 286$, $a_5 = -30 \cdot 296$, $a_6 = -30 \cdot 221$.

Ostrá alternativa ■ JAROSLAV DRÁBEK, PF Plzeň

Čtenáři Rozhledů matematicko-fyzikálních se již v řadě příspěvků seznámili s tvořením konjunkce dvou výroků pomocí spojky *a*, dále s tvořením alternativy dvou výroků pomocí spojky *nebo*. Nyní se zaměříme na operaci s výroky, která je blízká tvoření alternativy a dokonce se s ní někdy nesprávně zaměňuje. Půjde o tzv. ostrou alternativu dvou výroků **a**, **b**, kterou slovy vyjadřujeme ve tvaru

„*bud' a nebo b*“,

tímto způsobem dáváme najevo, že vylučujeme současnou platnost uvažovaných výroků. Začneme slovní úlohou:

Příklad. *Kterí žáci ze čtveřice A, B, C, D pojedou na výlet, mají-li být dodrženy tyto zásady: Pojede buď A, nebo B, buď C nebo D, aspoň jeden z dvojice A, C. Dále je jisté, že D nepojede, nepojede-li B a že není pravda, že C pojede, pojede-li D.*

První dvě podmínky můžeme formulovat tak, že pojede *právě jeden* z *A, B* a že pojede *právě jeden* z *C, D*.

Označme **a**, **b**, **c**, **d** po řadě výroky „žák *A* (*B, C, D*) pojede na výlet“. „Pojede buď *A* nebo *B*“ je složený výrok utvořený ze dvou výroků **a**, **b**, který označujeme v matematické logice jako ostrou alternativu těchto výroků **a**, **b**. Symbolicky ji zapisujeme **a** ∨ **b**.

Pravdivostní tabulka pro ostrou alternativu má tvar

a	b	a <u>∨</u> b
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

¹⁾ Viz článek J. Šedivého: *Učme se jazyku non-et-vel*, Rozhledy č. 7, roč. 1969/70.

Čtenář na první pohled jistě vidí rozdíl mezi alternativou dvou výroků a nově definovanou ostrou alternativou. Ostrá alternativa dvou výroků a, b je pravdivá právě tehdy, když je pravdivý *právě jeden* z výroků a, b , kdežto alternativa těchto výroků je pravdivá právě tehdy, když je pravdivý *aspoň jeden* z těchto výroků. Poznamenejme ještě, že spojku *nebo* chápeme v matematické logice v nevylučovacím smyslu, kdežto spojení *buď — nebo* má jasně vylučovací význam.

Vyřešme danou úlohu pomocí PH-algebry.²⁾ Jednotlivá sdělení z textu úlohy můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (1) pojede buď A nebo B . | $a \underline{\vee} b$ |
| (2) pojede buď C nebo D . | $c \underline{\vee} d$ |
| (3) pojede aspoň jeden z A, C . | $a \vee c$ |
| (4) D nepojede, nepojede-li B | $b' \Rightarrow d', (b' \wedge d)'$ |
| (5) není pravda, že C pojede, pojede-li D . | $d \wedge c'$ |

Vzhledem k tomu, že výroky (1)–(5) jsou pravdivé, je pravdivý i složený výrok

$$(a \underline{\vee} b) \wedge (c \underline{\vee} d) \wedge (a \vee c) \wedge (b' \wedge d)' \wedge (d \wedge c').$$

Vyjádříme úlohu v PH-algebře:

$$(I) \quad (a \oplus b) \cdot (c \oplus d) \cdot (a + c) \cdot (b' \cdot d)' \cdot (d \cdot c') = 1,$$

kde algebraická operace \oplus na množině $\{0, 1\}$ má tabulku

\oplus	0	1
0	0	1
1	1	0

tab. 2.

Tabulka 2 je odvozena z pravdivostní tabulky pro ostrou alternativu. Operace $'$; \cdot ; $+$ jsou určeny tabulkami popsány v citovaném článku:

$'$	
0	1
1	0

tab. 3.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

tab. 4.

	0	1
0	0	0
1	0	1

tab. 5.

A) Řešme rovnici (I) tím, že dosadíme $a = 1$. Dostáváme

$$(II) \quad (1 \oplus b) \cdot (c \oplus d) \cdot (1 + c) \cdot (b' \cdot d)' \cdot (d \cdot c') = 1.$$

Věta 1 citovaného článku a tabulka 2 dávají dílčí výsledek, že $b = 0$.

²⁾ Viz článek J. Šedivého: *Tři podoby jedné detektivní úlohy*, Rozhledy č. 8, roč. 1970/71.

Rovnice (II) po dosazení $\mathbf{b} = 0$ má tvar

$$(III) \quad (\mathbf{c} \oplus \mathbf{d}) \quad (\mathbf{1} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{1} \cdot \mathbf{d})' \cdot (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}') = 1.$$

Věta 1 a tabulka 5 dávají výsledek, že $\mathbf{d} = 0$.

Rovnice (III) po dosazení $\mathbf{d} = 0$ má tvar

$$(IV) \quad (\mathbf{c} \oplus 0) \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{c}) \quad (0 \cdot \mathbf{c}') = 1$$

Podle tabulky 5 platí $0 \cdot \mathbf{c}' = 0$ pro jakékoliv \mathbf{c}' , rovnici (IV) nevyhovuje žádné \mathbf{c} .

V případě $\mathbf{a} = 1$ rovnice (I) nemá řešení.

B) Řešme rovnici (I) tím, že dosadíme $\mathbf{a} = 0$. Dostáváme

$$(II') \quad (0 \oplus \mathbf{b}) \quad (\mathbf{c} + \mathbf{d}) \quad (0 + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b}' \cdot \mathbf{d})' \cdot (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c}') = 1$$

Věta 1, tabulka 2 a tabulka 4 umožňují odvodit, že $\mathbf{b} = 1$ a $\mathbf{c} = 1$.

Rovnice (II') po dosazení $\mathbf{b} = 1$ a $\mathbf{c} = 1$ má tvar

$$(0 \oplus 1) \cdot (1 \oplus \mathbf{d}) \cdot (0 + 1) \cdot (0 \cdot \mathbf{d})' \cdot (\mathbf{d} \cdot 0) = 1.$$

Po úpravě

$$(1 \oplus \mathbf{d}) \quad (\mathbf{d} \cdot 0) = 1$$

Podle tabulky 5 je $\mathbf{d} \cdot 0 = 0$ a tedy rovnice (I) ani pro $\mathbf{a} = 0$ nemá řešení.

Celkově můžeme konstatovat, že uvedená úloha nemá řešení.

Cvičení

1. Ve výrobním závodě byly dány následující pokyny pro pracovní sepětí tří výrobních linek L_1, L_2, L_3 : Nesmí nastat případ, aby linka L_2 byla v chodu, když je v chodu linka L_1 . Chod linky L_1 vylučuje chod linky L_3 . Dále musí být v provozu právě jedna z linek L_1, L_3 . Jaké linky mohou být v provozu, aby splňovaly uvedené podmínky?

2. Kdo ze tří osob X, Y, Z byl v místnosti, jsou-li známy následující údaje: Když Y nebyl v místnosti, nebyl tam ani X ; Z byl v místnosti právě tehdy, když tam nebyl X . Dále byla v místnosti právě jedna z osob Y, Z .

O Ramseyových číslech

Dr. JIŘÍ SEDLÁČEK, CSc., MÚ ČSAV Praha

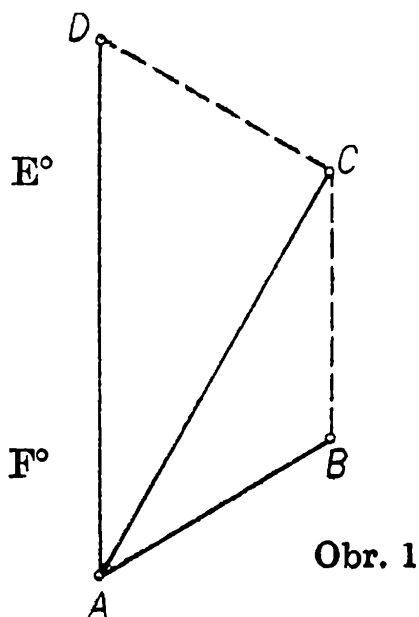
Redakční poznámka. Německý časopis Alpha, který vychází v Lipsku pod redakcí J. Lehmana, věnoval nedávno jedno celé číslo XIII. mezinárodní matematické olympiádě, jež se konala v Československu v červenci 1971. Při té příležitosti přinesl články o naší matematice, o čs. knihách přeložených do němčiny, o naší matematické olympiádě atd. Alpha otiskla

také článek člena naší redakce věnovaný jednomu kombinatorickému problému. Domníváme se, že by tento příspěvek o Ramseyových číslech mohl zajímat i čtenáře Rozhledů a proto jej dnes otiskujeme v českém originále.

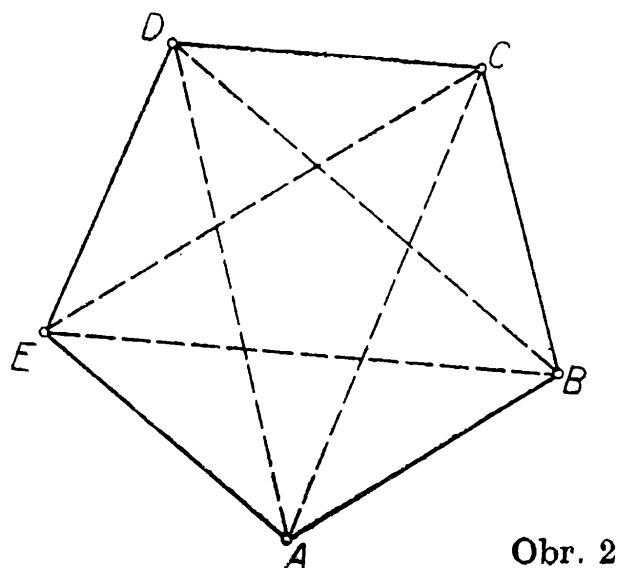
Začneme jednou jednoduchou úlohou: *Šest žáků se domluvilo, že si o prázdninách budou dopisovat na dvě témata. Každý žák bude psát všem pěti zbývajícím přátelům a každá dvojice si smluvila právě jedno téma. Máme dokázat, že je možno najít alespoň tři z nich, kteří si dopisují o stejném tématu.*

Řešení si usnadníme, když si je znázorníme geometricky. Ke každému ze šesti žáků můžeme přiřadit jeden bod v rovině. Je lhostejné, jak body v rovině vybereme, ale bude jistě výhodné, když žádné tři z těchto šesti bodů nebudou ležet v jedné přímce. I když je umístění bodů celkem libovolné, představíme si je třeba tak, že jsou to vrcholy pravidelného šestiúhelníka. Když si dva přátelé dopisují o prvním tématu, znázorní se to v obrázku tak, že příslušné dva body spojíme červenou úsečkou. Když si dvojice píše o tématu druhém, bude ty dva body spojuvat úsečka modrá. Nyní je třeba dokázat, že v tomto červenomodrém obrázku *vždycky existuje aspoň jeden trojúhelník, jehož všechny strany jsou vybarveny stejnou barvou.* Protože zde v časopise nemáme možnost tisknout červeně a modře, nahradíme v obrázcích červenou úsečku vždycky čarou plně vytaženou a čárkovaná čára bude značit barvu modrou.

Teď jsme už připraveni k řešení úlohy. *Předpokládejme, že není pravda to, co se říká v textu.* Je tedy možné sestavit červenomodrý obrázek, ve kterém nelze najít ani červený trojúhelník ani trojúhelník vytažený celý modře. Co z toho plyne? V obrázku je celkem 15 úseček, neboť je to šestiúhelník se všemi úhlopříčkami. Je proto nutné, aby aspoň 8 úseček bylo obarveno stejnou barvou (a ostatní úsečky pak mají barvu zbývajících). Aniž bychom omezili obecnost úvahy, můžeme předpokládat, že ta první barva je červená. Dá se nyní ukázat, že existuje aspoň jeden bod A , z něhož vycházejí aspoň tři červené úsečky. Kdyby to nebyla pravda, pak by z každého z našich šesti bodů vycházely nejvýše dvě červené úsečky a obrázek by měl nejvýše $(6 \cdot 2) : 2 = 6$ červených úseček. To však je ve sporu s tím, že tu má být alespoň 8 červených úseček. Narýsujme si tedy tři červené úsečky vycházející z bodu A zmíněného šestiúhelníka a označme po řadě B , C a D zbývajících krajních bodů těchto úseček (viz obr. 1). Úsečka BC nemůže být červená, neboť by tu vznikl červený trojúhelník ABC . Je to tedy úsečka modrá. Podobně je též CD vytažena modře. Jakou barvu přisoudíme úsečce BD ? Červenou? Pak by tu byl červený trojúhelník ABD . Modrou? Pak by trojúhelník BCD byl modrý. *Úvaha se tak dostala ke sporu a je nutno proto zamítnout výchozí předpoklad.* Vyšli jsme z toho, že při některém obarvení úseček není možno najít ani červený ani modrý trojúhelník. Tím jsme celou úlohu rozřešili.



Obr. 1



Obr. 2

Ještě však zůstaňme chvíli u šesti přátel. Kdyby se tu mluvilo o sedmi, osmi nebo ještě o větším počtu žáků, pak bychom z nich jednoduše vybrali libovolnou šestici a úvahou, kterou už známe, bychom dokázali, že lze najít aspoň jednu trojici, která si dopisuje o stejném tématu. Naproti tomu by se nám důkaz nepodařil, kdyby šlo jen o *pět* žáků. Ukazuje nám to obr. 2, kde vidíme pětiúhelník $ABCDE$ a jeho úhlopříčky. Kdyby si přátelé smluvili dopisování tak, jak ukazují plně a čárkovaně vytažené úsečky, vidíme, že si žádná trojice nedopisuje o témže tématu. Geometricky řečeno — v obr. 2 nelze najít žádný trojúhelník s vrcholy v bodech A, B, C, D nebo E tak, aby všechny tři jeho strany měly stejnou barvu.

Kdo sleduje mezinárodní matematické olympiády, ten si možná vzpomene, že se v této soutěži před několika lety vyskytla úloha trochu složitější. Tam si dopisovalo 17 přátel o třech tématech a mělo se dokázat, že lze najít aspoň jednu trojici, která má společné téma.

Na obrázcích, které jsme zde používali, nebylo podstatné, jak jsou body v rovině umístěny a místo úseček bychom se též mohli spokojit s křivými čarami. Útvar, který jsme tak do svých úvah zavedli, se v matematice nazývá graf. Nebudeme podávat přesnou definici a spokojíme se jen tím, že graf se skládá z prvků dvojího druhu: z *uzlů*, které znázorňujeme body v rovině a z *hran*, jež se zobrazí úsečkami nebo křivými čarami. Hrana vždy spojuje dva různé uzly. Řekneme-li, že graf je úplný, znamená to, že každá dvojice uzlů je spojena hranou.

Výchozí úlohu můžeme nyní vidět z vyššího hlediska takto: Jsou-li a, b dvě daná přirozená čísla, označme $R(a, b)$ nejmenší přirozené číslo n takové, že každý úplný graf na n uzlech, jehož hrany jsou obarveny buď červeně nebo modře, obsahuje buď a uzlů vesměs propojených červenými hranami nebo b uzlů vesměs propojených modrými hranami.

Nebudeme zde dokazovat, že takovéto číslo $R(a, b)$ vždy existuje. Důkaz je trochu složitější a najde se v odborné literatuře. Čísla $R(a, b)$ se někdy nazývají Ramseyova podle známého anglického matematika F. P. Ramseye, který se již roku 1929 zabýval úvahami mnohem obecnějšími. Na začátku článku jsme se dověděli, že $R(3, 3) = 6$. Můžete si rozmyslit, že $R(a, b) = R(b, a)$ pro každou dvojici a, b . Studium Ramseyových čísel je značně obtížné a dosud není znám žádný vzorec, kterým by se toto číslo dalo jednoduše vyjádřit v obecném případě. Našly se jen nerovnosti, kterým Ramseyova čísla vyhovují a podle nichž můžeme odhadnout jejich velikost. Tak třeba maďarští matematikové P. Erdős a G. Szekeres uvádějí roku 1935 nerovnost

$$R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1).$$

Kdo zná počítání s kombinačními čísly, může si z tohoto vztahu odvodit, že platí

$$R(a, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}$$

Ani omezení $a = b$ nezjednoduší příliš studium Ramseyových čísel. Pouhým dosazením do předcházejícího vzorečku se přesvědčíme, že platí

$$R(a, a) \leq \binom{2a-2}{a-1}$$

a tento odhad zlepšil r. 1963 C. Frasnay. Jeho nerovnost zní

$$R(a, a) \leq \frac{8}{9} \binom{2a-2}{a-1}.$$

Je samozřejmé, že Ramseyova čísla můžeme definovat i pro tři, čtyři nebo větší počet barev. Studium čísel $R(a, b, c)$, $R(a, b, c, d)$ atd. je pak ovšem ještě složitější.

Jak zkontrolovat správnost úsudků výpočtem

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK, Praha

V předcházejících ročnících Rozhledů byly otištěny články, které se zabývaly algebraizací logiky; úvodní výklad je obsažen zejména v příspěvcích *Algebra pravdy a lži* (Rozhledy č. 9, roč. 1969–70) a *Tři podoby jedné detektivní úlohy* (Rozhledy č. 8, roč. 1970–71), kde byla tato algebra pravdivostních hodnot nazvána stručně PH-algebrou. V ročníku 1971–1972 přinesly Rozhledy řadu článků dr. Odvárka o Booleově algebře, která zahrnuje

PH-algebru jako svůj dvouprvkový model. Dlouholetí odběratelé našeho časopisu získali tedy již řadu poznatků o teorii, která poskytuje určitý nadhled na množinovou i výrokovou algebru a má velmi důležité aplikace v automatizační a výpočetní technice. V tomto ročníku bude opět otištěno několik příspěvků týkajících se modelů Booleovy algebry a jejich aplikací.

Pro nové čtenáře Rozhledů stručně zrekapituluji vytvoření PH-algebry zejména však ukáži způsob jejího uplatnění, o kterém náš časopis dosud neinformoval. Jako první krok k algebraizaci výrokové logiky učiníme úmluvu, že symbolem 0 označíme nepravdu a symbolem 1 pravdu. Tabulku pravdivostního ohodnocení konjunkce a alternativy dvou výroků pak můžeme rozepsat tímto způsobem:

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

$$\begin{array}{ll}
 0 \wedge 0 = 0, & 0 \wedge 1 = 0, \\
 0 \vee 0 = 0, & 0 \vee 1 = 1, \\
 1 \wedge 0 = 0, & 1 \wedge 1 = 1 \\
 1 \vee 0 = 1, & 1 \vee 1 = 1
 \end{array}$$

Na tuto tabulku můžeme pohlížet jako na záznam operací \wedge , \vee prováděných přímo s prvky 0, 1 množiny $\{0, 1\}$, vpravo vedle tabulky jsou zapsány výsledky takových operací.

Nahradíme-li symbol „ \wedge “ tečkou (obvyklým symbolem pro součin čísel), dostaneme zápisy $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, které vyjadřují pravdivé výroky o součinech čísel 0 a 1; proto se někdy konjunkce nazývá logickým součinem. Zaměníme-li symbol „ \vee “ znakem „+“, získáme zápisy $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 1$; až na poslední souhlasí tyto výsledky z běžným sčítáním čísel 0 a 1; proto se alternativa nazývá též logickým součtem. Výsledek $1 + 1 = 1$ je zcela dobře přijatelný v situaci, když máme k dispozici jen dva objekty 0 a 1, a tedy „nic většího“ než 1.

Pravdivostní ohodnocování výroku a jeho negace je velmi snadné, jak je zřejmé z tabulky i zápisů vedle ní, jde vlastně o záměnu prvků množiny $\{0, 1\}$.

$$\begin{array}{c|c}
 X & X' \\
 \hline
 0 & 1 \\
 1 & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 0' = 1 \\
 1' = 0
 \end{array}$$

Základ PH-algebry lze charakterizovat takto: odehrává se na množině $\{0, 1\}$, kde definujeme pomocí tabulek tyto tři operace:

záměna	X'	$\begin{array}{c c} X & X' \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c} + & 0 \ 1 \\ \hline 0 & 0 \ 1 \\ 1 & 1 \ 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c} \cdot & 0 \ 1 \\ \hline 0 & 0 \ 0 \ 0 \\ 1 & 1 \ 0 \ 1 \end{array}$
sčítání	$X + Y$			
násobení	$X \cdot Y$			

Pro počítání v PH-algebře snadno odvodíme tyto věty:

Pro každý prvek $X \in \{0, 1\}$ platí :

$$\begin{array}{l} 1 + X = 1, \quad 0 + X = X, \quad X + X = X, \quad X + X' = 1, \quad (X')' = X \\ 0 \cdot X = 0, \quad 1 \cdot X = X, \quad X \cdot X = X, \quad X \cdot X' = 0 \end{array}$$

Pro každé dva prvky $X, Y \in \{0, 1\}$ platí :

$$\begin{array}{l} X + Y = Y + X, \quad (X + Y)' = X' \cdot Y', \quad X + XY = X, \\ X + X'Y = X + Y \\ X \cdot Y = Y \cdot X, \quad (X \cdot Y)' = X' + Y', \quad X \cdot (X + Y) = X, \\ X \cdot (X' + Y) = XY \end{array}$$

Pro každé tři prvky $X, Y, Z \in \{0, 1\}$ platí :

$$\begin{array}{l} (X + Y) + Z = X(Y + Z), \quad (X + Y)Z = XZ + YZ \\ (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z), \quad X \cdot Y + Z = (X + Z)(Y + Z) \end{array}$$

Pravdivost uvedených vět prokážeme diskusí všech možností pro dosazování hodnot 0, 1 na místa proměnných.

Pro cíl, kterého chceme dosáhnout, je nutno vyjádřit v PH-algebře i zbývající dvě operace s výroky, tj. implikaci a ekvivalenci:

$X \Rightarrow Y$ lze vyjádřit alternativou $X' \vee Y$... v PH-algebře $X' + Y$,
 $X \Leftrightarrow Y$ lze vyjádřit alternativou $(X \wedge Y) \vee (X' \wedge Y')$. v PH-algebře $XY + X'Y'$.

Příklad. a) Výrokovou formuli $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow Z$ můžeme vyjádřit ve tvaru $(X' \vee Y)' \vee Z$ a v PH-algebře $(X' + Y)' + Z = XY' + Z$.

b) Výrokovou formuli $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)$ lze vyjádřit ve tvaru $X' \vee (Y' \vee Z)$ a v PH-algebře $X' + Y' + Z$.

Pro $X = Y = Z = 0$ dává první výraz výsledek $0 \cdot 0' + 0 = 0 \cdot 1 + 0 = 0$, zatímco druhý dává výsledek $0' + 0' + 0 = 1 + 1 + 0 = 1$; vidíme tedy, že tvoření implikace není asociativní operací.

Pro rozhodování o správnosti úsudků budeme potřebovat základní věty o řešení rovnic v PH-algebře:

- I Rovnice $XY = 1$ má jediné řešení $X = 1, Y = 1$.
- II Rovnice $X + Y = 0$ má jediné řešení $X = 0, Y = 0$.
- III Rovnice $X + Y = 1$ má tři možná řešení:

a) $X = 0, Y = 1$, b) $X = 1, Y = 0$, c) $X = 1, Y = 1$.

Pravdivost vět I–III lze bezprostředně ověřit v tabulkách, kterými je definováno sčítání a násobení v množině $\{0, 1\}$. Čtenář si snadno doplní větu IV o třech možných řešeních rovnice $XY = 0$.

Algebraickou kontrolu úsudků ilustrujme na příkladě 4a z kapitoly II sbírky Úlohy o výrociích a množinách užívané v 1. ročnících gymnasia. Podstata problému je v tom, zda z předpokladů, že platí $A' \vee C' \Rightarrow B$ a $(A \wedge B) = C'$ a neplatí A , vyplývá závěr, že platí B .

Vyjádřeme v PH-algebře jednotlivé předpoklady úsudku:

Vyjádřeme v PH-algebře jednotlivé předpoklady úsudku:

platí $A' \vee C' = B$ $(A' + C')' + B = AC + B = 1$
 platí $A \wedge B = C'$ $(A \cdot B)' + C' = A' + B' + C' = 1$
 neplatí A $A = 0$, jinak vyjádřeno $A' = 1$;

a dále též závěr úsudku:

platí B' $B = 1$.

Celkový předpoklad úsudku je konjunkcí dílčích předpokladů, v algebraickém přepisu jde o součin výrazů rovnající se jedné:

$$(AC + B)(A' + B' + C') \cdot A' = 1$$

Problém je v tom, zda z této rovnice získáme řešení $B = 1$. Řešme uvedenou rovnici úpravou levé strany po dosazení $A' = 1$, $A = 0$:

$$(0 \cdot C + B)(1 + B' + C') \cdot 1 = 1$$

$$B \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$B = 1$$

Tento výsledek potvrzuje správnost úsudku, že ze tří dílčích předpokladů vyplývá pravdivost výroku B. Na druhé straně však nepotvrzuje např. pravdivost výroku C; je hned vidět, že jak $C = 0$, tak $C = 1$, splňuje výchozí rovnici, proto nelze učinit jednoznačný závěr o pravdivosti výroku C.

Jako další ukázkou vezměme opět úlohu ze zmíněné sbírky, tentokrát nejobtížnější (úloha 20 v kap. II). Máme rozhodnout, zda z platnosti výroků $A \Rightarrow (B' \wedge D')$, $B \Rightarrow (C' \wedge E')$, $C \Rightarrow E'$, $(A \wedge C) \Rightarrow D'$, $A' = B$ a z platnosti B vyplývá, že platí D.

Platnost předpokladů vyjádříme rovnicí v PH-algebře:

$$(A' + B'D')(B' + C'E')(C' + E')(A' + C' + D')(A + B) \cdot B = 1$$

a pokusíme se řešením rovnice zjistit, zda je nutně $D = 1$.

Dosaďme $B = 1$, $B' = 0$ do jednotlivých výrazů v závorkách a každý výraz v závorce pak zjednodušíme:

$$A' \cdot C'E' \cdot (C' + E')(A' + C' + D') \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Je zřejmé, že $A' = C' = E' = 1$, tj. $A = C = E = 0$, dosaďme znovu

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1 + D') \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Protože $1 + D' = 1$ jak při $D = 0$, tak $D = 1$, nevyplývá z výše uvedených předpokladů nic o pravdivosti výroku D. (Všimněte si, že výrok D je jediný z výroků A, C, D, E, jehož pravdivostní hodnotu nelze jednoznačně stanovit jako důsledek platnosti předpokladů.)

Princip kontroly úsudků algebraickým výpočtem, který jsme zde uplatnili, spočívá v tom, že

- a) všechny výroky, jejichž pravdivost předpokládáme, vyjádříme výrazy PH-algebry, tj. pomocí proměnných,
- b) zapíšeme, že součin těchto výrazů se rovná jedné, tak získáme rovnici PH-algebry,
- c) řešením této rovnice podle vět PH-algebry získáme poznatky o tom, která z proměnných nutně nabývá hodnoty 1; tyto proměnné označují výroky, jejichž pravdivost vyplývá z předpokladů (nabývá-li některá proměnná nutně hodnoty 0, označuje výrok, jehož nepravdivost vyplývá z předpokladů).

Není snad ani třeba zdůrazňovat, že existují další varianty algebraické kontroly správnosti úsudků vhodné zejména pro složitější formulované závěry úsudků. Popsaným způsobem lze však měřit všechny úlohy obsažené ve zmíněné sbírce pro 1. ročník gymnasia.

Cvičení

1. Rozhodněte, zda jsou správné tyto úsudky:
 - a) Z předpokladu, že platí $A \Rightarrow B$ a platí B, vyplývá, že platí A,
 - b) z předpokladu, že platí $A \Rightarrow B$ a neplatí B, vyplývá, že neplatí A,
 - c) z předpokladu, že platí $A \Rightarrow B$ a neplatí A, vyplývá, že neplatí B.
2. Vyplývá z platnosti $(A \vee B) \wedge (B' \Rightarrow A')$, že B platí?

Přímé výpočty některých limit typu $\frac{0}{0}$

BOHUSLAV OTTA, Frýdek - Místek

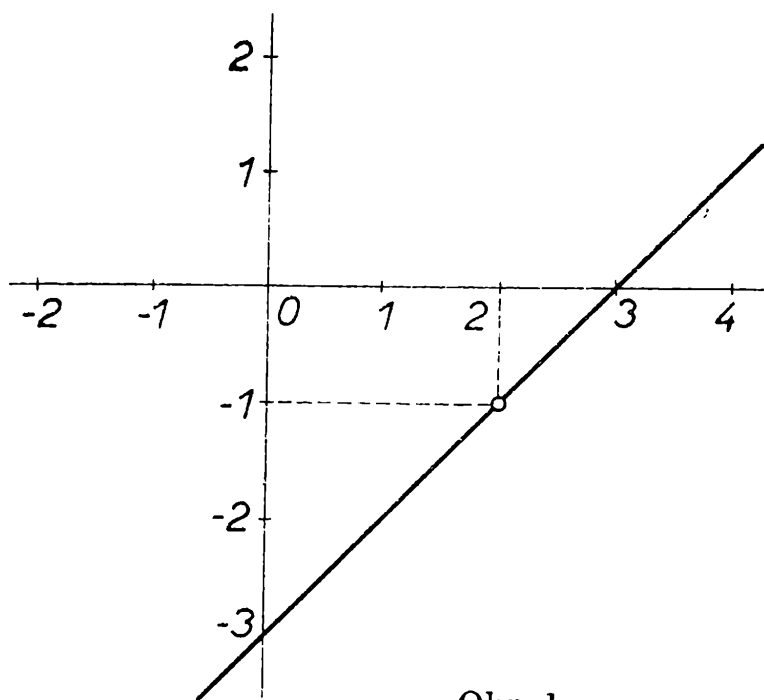
Způsob výpočtu limit, který bude dále popsán, se týká racionálních lomených funkcí, t. j. funkcí daných výrokovými formami typu

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

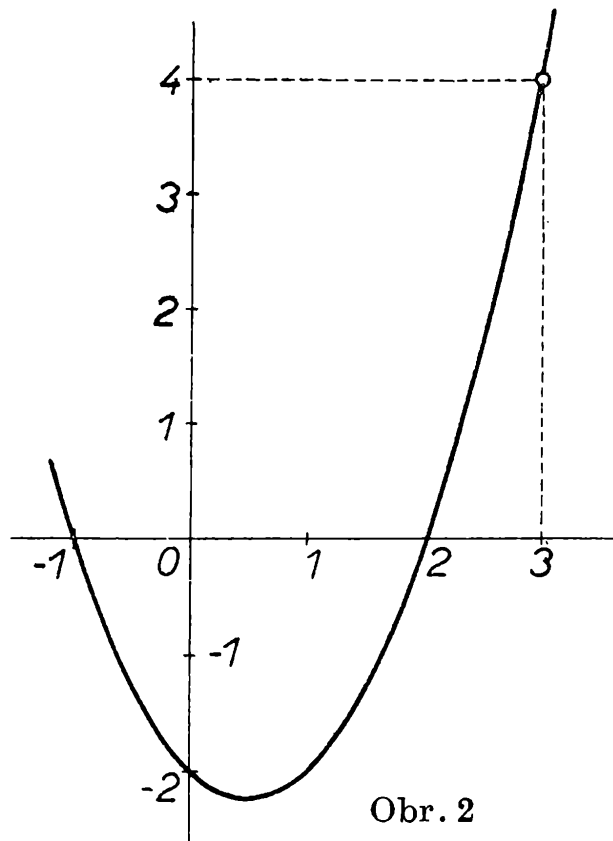
kde P, Q jsou polynomy s proměnnou $x \in \mathbf{R}$. Budeme se zabývat výpočty limity v bodě a , pro který platí $P(a) = Q(a) = 0$, proto hovoříme o limitě typu $0:0$.

Vyjděme ze dvou konkrétních příkladů funkcí, výraz pro hodnotu funkce zapíšeme též jako součin kořenových činitelů. Mějme dány funkce

$$f_1 \quad y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2},$$



Obr. 1



Obr. 2

$$g_1 \quad y = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3} = \frac{(x + 1)(x - 2)(x - 3)}{x - 3}$$

Grafem první z nich je část přímky (obr. 1), znázorněním funkce g_1 získáme část paraboly druhého stupně (obr. 2); přitom se graf f_1 liší od grafu funkce

$$f_2: y = x - 3$$

jedině tím, že postrádá bod $[2, -1]$, ježto funkce f_1 není pro $x = 2$ definována. Naproti tomu funkce f_2 je v bodě 2 dokonce spojitá, proto platí $\lim_{x \rightarrow 2} f_1(x) = f_2(2) = -1$. Parabola představující graf funkce

$$g_2: y = x^2 - x - 2$$

je spojitá křivka, zatímco graf funkce g_1 neobsahuje bod $[3, 4]$; zřejmě platí, že $\lim_{x \rightarrow 3} g_1(x) = g_2(3) = 4$. Při těchto výpočtech využíváme věty:

Jestliže v jistém okolí bodu a pro všechna $x \neq a$ platí $f_1(x) = f_2(x)$ a je-li funkce f_2 v bodě a spojitá, pak

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = f_2(a)$$

Tento způsob výpočtu limity funkce v bodě lze považovat za *nepřímý* v tom smyslu, že se využívá jiné funkce než dané a koeficienty polynomů určujících danou funkci se neuplatní bezprostředně při výpočtu její limity v bodě. Obdobný nepřímý charakter má i výpočet limity dané funkce pomocí limity podílu derivací (tzv. l'Hospitalovo pravidlo):

Je-li $P(a) = Q(a) = 0$ a existuje-li $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P'(x)}{Q'(x)}$, pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

V našem případě bychom počítali

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{1} = 2 \cdot 2 - 5 = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 8x + 1}{1} = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 1 = 4.$$

I zde dosazujeme hodnoty $x = 2$ resp. $x = 3$ do jiných polynomů než byly původně dány.

Výpočty, jež provádíme při aplikaci l'Hospitalova pravidla na limity zkoumaného typu funkcí, lze nahradit postupem, který dále popíšeme. Považují jej za *přímý výpočet*, protože při něm uplatníme jen koeficienty polynomů, číslo, ve kterém limitu počítáme, a základní početní výkony.

Omezme se pro jednoduchost na limity typu $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{x - a}$, kde $P(x)$ je polynom, hodnota $P(a) = 0$. Je-li uvedená limita rovna číslu L a polynom $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, pak získáme L postupem, který si ukážeme nejdříve na několika příkladech. Teprve pak vyslovíme obecnou hypotézu a naznačíme její důkaz.

Příklad 1. Počítáme $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, zapíšeme na řádek hodnoty členů polynomu $x^2 - 5x + 6$ pro $x = 2$, t. j. 2^2 , $(-5) \cdot 2$, 6 . Pod čísla prvního řádku píšeme další, celý výpočet je zachycen v tomto sloupci:

$$\begin{array}{r} 4, \quad -10, \quad 6 \\ 4, \quad \quad -6, \quad 0 \\ 4, \quad \swarrow \quad -2, \quad \swarrow \quad \boxed{-2} \end{array}$$

První číslo na nižším řádku opíšeme, další získáme sečtením čísla vlevo a nad místem, kam je chceme zapsat. Poslední číslo ve třetím řádku je dvojnásobkem hledané limity.

Příklad 2. Počítáme $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3}$ zapíšeme tedy:

$$\begin{array}{r} 27, \quad -36, \quad 3, \quad 6 \\ 27, \quad -9, \quad -6, \quad 0 \\ 27, \quad 18, \quad 12, \quad \boxed{12} \end{array}$$

Poslední číslo na třetím řádku je trojnásobkem hledané limity.

Příklad 3. Počítáme $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 - 16x}{x + 2}$ zapíšeme chybějící členy polynomu s nulovými koeficienty.

$$\begin{array}{r} -32 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 32 \\ -32 \quad -32 \quad -32 \quad -32 \quad 0 \\ -32 \quad -64 \quad -96 \quad -128 \quad \boxed{-128} \end{array}$$

Poslední číslo na třetím řádku je (-2) -násobkem hledané limity, neboť

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 - 16x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^4 - 16}{1} = 64.$$

Můžeme tedy vyslovit hypotézu, že poslední číslo na třetím řádku je

a -násobkem hledané limity $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{x - a}$

Důkaz této hypotézy lze provést, zapíšeme-li postup popsany v příkladech pro libovolný polynom $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0$. Vypočet pak nabude této podoby:

$$\begin{array}{llll} c_n a^n, & c_{n-1} a^{n-1}, & c_2 a^2, & c_1 a, \quad c_0 \\ c_n a^n, & c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1}, & c_n a^n + \dots & c_n a^n + \dots \quad 0 \\ & & \dots + c_2 a^2, & \dots + c_1 a, \\ c_n a^n, & 2c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1}, & (n-1) c_n a^n + \dots & n c_n a^n + \dots \quad M \\ & & + c_2 a^2, & \dots + c_1 a_1, \end{array}$$

Čtenář si snadno zdůvodní, že jako poslední číslo na druhém řádku dostaneme $P(a) = 0$, zatímco poslední číslo na třetím řádku

$$\begin{aligned} M &= n c_n a^n + (n - 1) c_{n-1} a^{n-1} + \dots + 3 c_3 a^3 + 2 c_2 a^2 + c_1 a = \\ &= a P'(a). \end{aligned}$$

Protože $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P'(x)}{1} = P'(a)$, je skutečně číslo $M = a \cdot L$, t. j. a -násobkem hledané limity.

Limity lomených racionálních funkcí $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ v bodě $a \neq 0$, kde $P(a) = Q(a) = 0$ můžeme často vypočítat na základě rovnosti

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{P(x)}{x - a}}{\frac{Q(x)}{x - a}} = \frac{aL_1}{aL_2}$$

pokud $L_2 \neq 0$. Číslo aL_1 , aL_2 lze v tom případě vypočítat popsáním postupem (každé zvlášť).

Příklad 4. Výpočet

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 27x^2 + 50x + 12}{2x^3 - 9x^2 + 27x - 54}$$

zapíšeme

$3^4,$	$0,$	$-27 \cdot 3^2,$	$50 \cdot 3,$	12	$54,$	$-81,$	$81,$	-54
$3^4,$	$3^4,$	$-18 \cdot 3^2,$	$-12,$	0	$54,$	$-27,$	$54,$	0
$3^4,$	$2 \cdot 3^4,$	$0,$	$-12,$	-12	$54,$	$27,$	$81,$	81

Hledaná limita

$$L = \frac{-12}{81} = -\frac{4}{27}.$$

Popsanou metodu přímého výpočtu limit lomených racionálních funkcí lze zobecnit pro další případy limit (nevlastních limit, limit počítaných pomocí vyšších derivací apod.). Tyto problémy však příliš překračují rámec středoškolské matematiky, proto jsme se omezili na jednodušší ukázky metody dovolující přímý algebraický výpočet jednoho speciálního typu limit bez zjevného použití limit či derivací.

fyzika

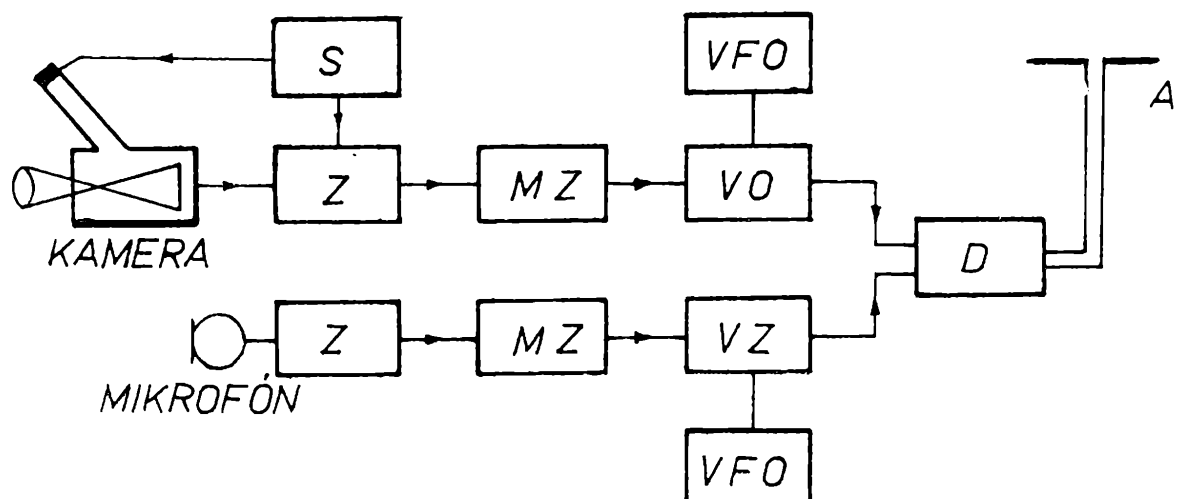
Fyzikálne princípy čiernobielej televízie

RNDr. ELEMÍR SCHOLTZ, G KOŠICE

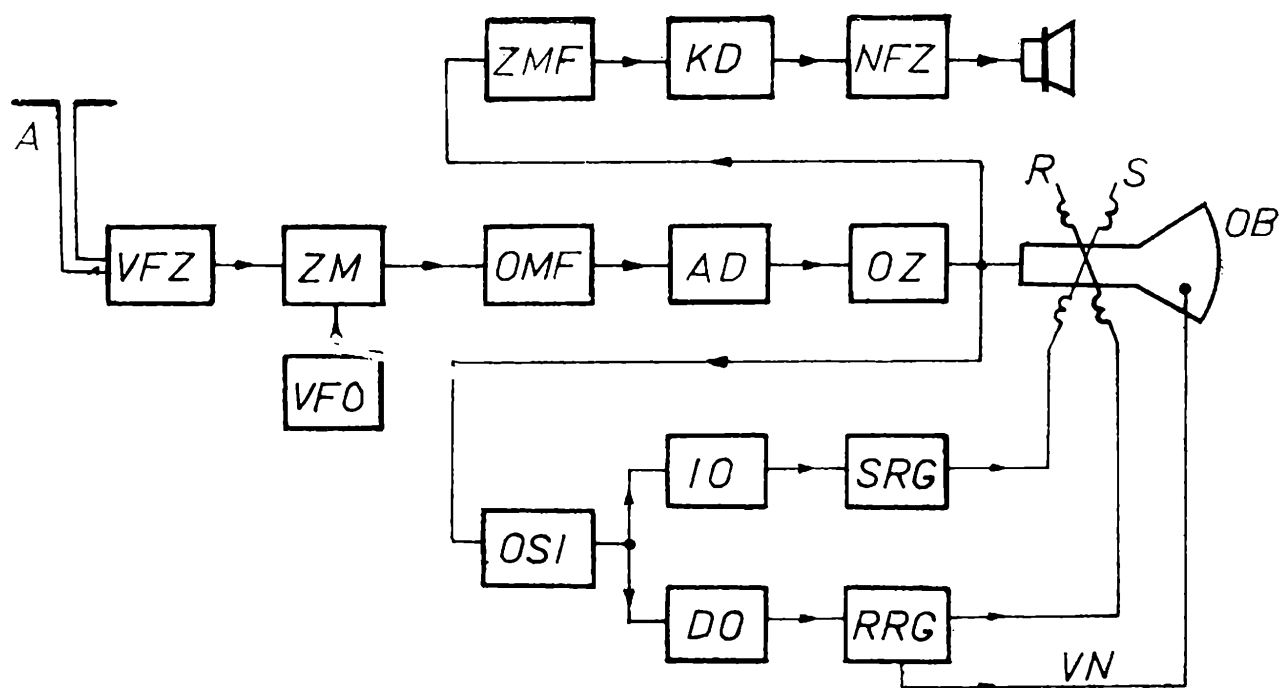
(Dokončení)

5. Televízne vysielanie a príjem

Spôsob televízneho vysielania a príjmu je v podstate analogický s prenosom informácií v obore rádiových vln. Vo vysielачi sú nosné kmity modulované úplným televíznym signálom a po príslušnom spracovaní vyžiarené anténou do priestoru vo forme elektromagnetických vln. Vzhľadom na šírku prenášaného pásma je kmitočet nosnej vlny značne



Obr. 6. Zjednodušená bloková schéma televízneho vysieläča.
 S - synchronizátor, Z - zosilňovač, MZ - modulačný zosilňovač, VO - výkonový zosilňovač obrazového signálu, VFO - vysokofrekvenčný zosilňovač, VZ - výkonový zosilňovač zvukového signálu, D - diplexer (zlučovač), A - anténa.



Obr. 7. Bloková schéma televízneho prijímača.
 A - anténa (dipól), VFO - vysokofrekvenčný zosilňovač, ZM - zmiešavač, OMF - obrazový medzifrekvenčný zosilňovač, AD - amplitúdový demodulátor (obrazový detektor), OZ - obrazový zosilňovač, OSI - oddelovač synchronizačných impulzov, IO - integračný obvod, DO - derivačný obvod, SRG - snímkový rozkladový generátor, RRG - riadkový rozkladový generátor, VN - vysoké napätie, ZMF - zvukový medzifrekvenčný zosilňovač, KD - kmitočtový detektor (diskriminátor), NFZ - nízkofrekvenčný zosilňovač, R - riadkové vychylovacie cievky, S - snímkové vychylovacie cievky, OB - obrazovka, RE - reproduktor.

väčší ako v rádiotechnike. Zjednodušená bloková schéma televízneho vysielača je na obr. 6.

Zo synchronizátora sa privádzajú synchronizačné a zatemňovacie impulzy na výstup snímačej elektrónky, kde sa primiešavajú k obrazovému signálu a zároveň do rozkladových obvodov. Úplný televízny signál sa po zosilnení privádza do vlastného vysielača, kde prebieha amplitúdová modulácia nosných kmitov z oscilátora a výkonové zosilnenie.

Zvukový doprovod sa sníma a spracováva nezávisle na obraze v samostatnom vysielači, kde sú nosné kmity pre zvuk modulované zvukovou informáciou kmitočtovo. Kmitočet nosnej vlny zvuku je o 6,5 MHz vyšší ako kmitočet nosnej vlny prenášajúcej úplný televízny signál. Rozdielový kmitočet 6,5 MHz sa nazýva medzinosný kmitočet. Aby bolo možné vysielať signály z oboch vysielačov jedinou anténou, privádzajú sa pred vyžiareníím do priestoru anténovým systémom do anténového zlučovača — diplexera.

Na obr. č. 7 je nakreslená bloková schéma televízneho prijímača, pracujúceho na princípe superheterodynu [1] s t. zv. medzinosným spracovaním zvuku. V súčasnosti se zásadne používajú televízne prijímače pracujúce na tomto princípe.

Vysokofrekvenčný signál z antény sa privádza na vstup vysokofrekvenčného zosilňovača a odtiaľ do zmiešavača, kde jeho skladaním s netlmenými kmitmi z miestneho oscilátora vzniká medzifrekvenčný signál. Zosilňovač, oscilátor a zmiešovač tvoria preladiateľný, uzavretý a mechanický pevný celok — kanálový volič. Po zosilnení medzifrekvenčného signálu v medzifrekvenčnom obrazovom zosilňovači a po jeho amplitúdovej demodulácii v demodulátore (obvykle polovodičová dióda), získame úplný televízny signál. V procese demodulácie mimo to vzniká tiež medzinosný kmitočet 6,5 MHz, ktorý je frekvenčne modulovaný zvukom. Tieto signály sú ďalej spoločne zosilnené v obrazovom zosilňovači, za ktorým sa rozdelia. Úplný televízny signál sa vedie na riadiacu elektródu obrazovky (na katódu, alebo prvú mriežku), kde svojimi napätovými zmenami ovláda intenzitu elektrónového zväzku a tým jas jeho stopy na tienidle, vzniká obraz.

Medzinosný kmitočet nesúci zvukovú informáciu sa na princípe rezonancie prenesie indukčnou väzbou na vstup zvukového medzifrekvenčného zosilňovača. Frekvenčná demodulácia signálu sa po jeho obojstrannom obmedzení prevádza v t. zv. diskriminátore (frekvenčný demodulátor). Získaný nízkofrekvenčný signál sa po zosilnení v nízkofrekvenčnom zosilňovači reprodukuje reproduktorom.

Úplný televízny signál obsahuje mimo obrazovej informácie aj synchronizačnú smes, ktoré je treba oddeliť. Tento proces sa odehráva v oddeľovači synchronizačných impulzov. Princíp oddelenia je pomerne jednoduchý. Ako oddeľovač môže pracovať napr. trióda s tak veľkým záporným predpätím na mriežke, že anódový prúd ňou neprechádza (je

uzavretá). Otvorenie elektrónky môže spôsobiť len dostatočne veľký kladný impulz privedený na mriežku. Veľkosť predpätia je volená tak, aby sa elektrónka oddeľovača stala vodivou len vtedy, ak na riadiacu mriežku prichádza synchronizačný impulz. Obrazový signál, ktorý má nižšiu napäťovú úroveň, necháva elektrónku oddeľovača nevodivou. Na výstupe oddeľovača potom získame obdĺžnikové impulzy zodpovedajúce synchronizačnej zmesi tak, ako sú nakreslené na obr. 4.

Rozdelenie na riadkové a snímkové synchronizačné impulzy umožňuje zaradenie integračného obvodu, na výstupe ktorého sa objavia len impulzy pre riadkovú synchronizáciu a derivačného obvodu, na výstupe ktorého získame impulzy pre snímkovú synchronizáciu. Takto rozdelené synchronizačné impulzy sa privádzajú do príslušných rozkladových obvodov, kde synchronizujú kmitočet nimi vyrábaných vychyľovacích prúdových impulzov. K výstupu rozkladových generátorov sú pripojené riadkové a snímkové vychyľovacie cievky.

Nedielnou súčasťou riadkového rozkladového generátora sú obvody pre výrobu vysokého napätia, ktoré sa po usmernení privádza na urýchľovaciu elektródu obrazovky.

6. Záver

Šírka pásma 6,5 MHz prenášaného pri televíznom vysielaní je veľmi veľká. V porovnaní s rozsahom kmitočtov potrebných pre rozhlasové vysielanie s amplitúdovou moduláciou (4,5 kHz), alebo s kmitočtovou moduláciou (15 kHz) zistíme, že v televízii je viac ako 1000krát väčšia. Jeden televízny vysielateľ zaberie približne také široké kmitočtové pásmo, ako 1000 rozhlasových vysielateľov, teda celé dlhovlnné, stredovlnné a časť krátkovlnného pásma. Do úvahy musíme brať tiež to, že proces modulácie a demodulácie nosného kmitočtu bez väčšieho skreslenia možno previesť len vtedy, ak je nosný kmitočet aspoň 8krát väčší, ako najvyšší prenášaný kmitočet modulačného (prenášaného) signálu.

Z uvedených príčin sa televízne vysielanie pri bezdrôtovom prenose uskutočňuje za použitia metrových a decimetrových elektromagnetických vln v týchto vyhradených pásmach:

1. pásmo 48,5 ÷ 66 MHz
2. pásmo 76 ÷ 100 MHz
3. pásmo 174 ÷ 230 MHz
4. pásmo 470 ÷ 582 MHz
5. pásmo 582 ÷ 790 MHz

Využitie televízie pre vysielanie televíznych programov je len malou časťou toho, čím televízna technika prispela k technickému pokroku. Z možností jej využitia spomeňme aspoň tie najzaujímavejšie — televízny mikroskop, televízne navigačné pomôcky, televízny dial'nopis. Pomerne známe je využitie tzv. priemyselnej televízie napr. v hutiach a železiar-

ňach (pozorovanie žeravého kovu), pohybu materiálu na valcovacích tratiach, v chemickom priemysle (sledovanie chemických reakcií, pri ktorých sa vyvíjajú jedovaté plyny, diaľkové odčítavanie údajov meracích prístrojov), v jadrovej technike (kontrola spracovania a manipulácie s rádioaktívnymi materiálmi), v doprave, energetike, stavebníctve, lekárstve i vo výskume.

Rozvoj televízie pritom nie je v súčasnosti ukončený. Naopak, dokonalosť televíznych zariadení, dosah vysieláčov a možnosti využitia televízie sa neustále zvyšujú. Známe je využitie televízie pri výskume kozmického priestoru, v zásade je vyriešená tzv. stereoskopická televízia umožňujúca sledovať televízne vysielanie priestorove. Podobne ako vo fotografii a vo filme viedol rozvoj televízie k vysielaniu vo farbe, ktoré umožňuje prenášať väčšie množstvo informácií ako čiernobiela televízia, prípadne zvýšiť umelecký zážitok z vysielaného programu.

Televízia teda predstavuje v každom prípade priekopnícky odbor, ktorý je predurčený k neustále širšiemu použitiu a k ďalšiemu rozvoju a zdokonaľovaniu.

Literatúra:

- [1] Fyzika pre 3. ročník stredných všeobecno-vzdelávacích škôl a pre 3. a 4. ročník gymnázií. SPN Bratislava, 1970.
- [2] Vít, V.: Synchronizace a rozklady televizních přijímačů. SNTL Praha, 1968.
- [3] Lavante, A., Smolík, F.: Amatérská televizní příručka. Naše vojsko Praha, 1969.
- [4] Frk, M.: Malá televize. SNTL Praha, 1958.

Proč vznikla a co řeší kvantová mechanika

RNDr. RUDOLF TULAK, Martin

Podmínky rozvoje kvantové mechaniky

Klasická fyzika, vybudovaná na Newtonových pohybových zákonech, popisovala až do konce 19. stoločí pohyb makroskopických těles v naprostém souladu s výsledky tehdejších experimentů. Koncem 19. století však pokročila experimentální technika tak daleko, že se počaly objevovat rozpory mezi teorií a pokusy. Tak zákon rozdělení energie ve spektru černého tělesa, odvozený na podkladě vlnové teorie, nejen že nesouhlasil s pokusem, ale obsahoval i vnitřní rozpory. V roce 1901 řeší úspěšně uvedený problém M. Planck a jeho zákon se stal východiskem pro rozvoj kvantové teorie. Jeho základem byl předpoklad, že vysílání a pohlcování světla látkou má nespojitý charakter a děje se po konečných dávkách —

světelných kvantech. Energie takového světelného kvanta W je úměrná frekvenci kmitů světla a je vyjádřena rovnicí:

$$W = h \cdot \nu,$$

kde h je tzv. Planckova konstanta a má hodnotu $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ J s. Tato představa o světelných kvantech — fotonech — nabyla konečné formy poté, co A. Einstein dokázal nutnost připisovat světelnému kvantu kromě energie W též impuls $p = W/c$, jehož směr je totožný se směrem šíření světla.

Hluboký smysl kvantové teorie světla nespočívá v tom, že si představujeme světlo jako plyn, skládající se z částic o energii W a impulsu p , nýbrž v tom, že výměna energie a impulsu mezi mikrosystémy a světlem se děje za vzniku jedněch a zániku jiných světelných kvant. Plancka a Einsteina nelze však považovat za jedině zakladatele kvantové mechaniky. K jejímu vývoji, do dnešní podoby, přispěla řada čelných fyziků, kteří tak realizovali své významné myšlenky a ideje. Počítáme mezi ně L. de Broglieho, E. Schrödingera, W. Heisenberga, W. Pauliho, M. Bornu, P. Diraca, V. Foka a další. Tak se kvantová mechanika formovala z několika proudů především ve dvacátých letech a dovršena byla v podstatě v první polovině let třicátých.

Obsah současné kvantové mechaniky

Obsahem současné kvantové mechaniky je popis a výklad chování některých elementárních částic a mikroskopických a makroskopických systémů z nich vytvořených. Hlavní specifickou vlastností kvantové mechaniky je její statistický charakter. Ten dovoluje vypočítat jenom pravděpodobnost té nebo oné hodnoty určité fyzikální veličiny. Příčina toho je skryta v korpuskulárně vlnovém dualismu mikrosvěta, tj. v tom, že mikročástice má současně jak korpuskulární, tak vlnové vlastnosti. Propouštíme-li např. svazek elektronů krystalem, rozdělí se částice na stínítku právě tak, jako se rozdělí intenzita vlny o vhodné vlnové délce. Dostáváme difrakci mikročástic, neznámou v klasické mechanice. Později byla tato difrakce dokázána nejen pro elektrony, nýbrž pro mikročástice vůbec. Tak byla objevena nová zcela obecná zákonitost. Ukázalo se, že pohyb mikročástic má v mnohém ohledu vlastnosti bližší šíření vln než pohybu hmotného bodu po trajektorii. Ohybový jev je neslučitelný s představou pohybu částic po trajektoriích. Proto principy klasické mechaniky, v níž pojem trajektorie je jedním ze základních, nejsou vhodné k analýze pohybu mikročástic.

Druhou zvláštností mikrosvěta, a tedy i kvantové mechaniky, je atomismus, který je podmíněn dvěma okolnostmi. Za prvé, každý druh složitých částic je tvořen zcela určitými elementárními částicemi. Za druhé, vnitřní stavy složitých částic jsou nespojitě. Vzhledem k tomu

nemůže každé působení převést složitou soustavu např. ze stavu s nejnižší energií, tak zvaného normálního stavu, do sousedního — „excitovaného“. Atomové soustavy, jsou-li podrobeny nějakému vnějšímu působení, zůstávají proto v širokých mezích takovými, jakými byly před působením nebo přecházejí do nových, zcela určitých stavů. Právě tato diskretnost ve změnách stavu složitých atomových soustav byla onou příčinou, která přivedla chemiky k představě mechanické nedělitelnosti atomů. Vzhledem k tomu, že vlastnosti elementárních částic jsou totožné a stavy složitých částic jsou diskretní, postrádají částice mikrosvětla individuální „tvářnost“. Na charakteristických vlastnostech elektronu nebo vodíkového atomu se neprojevují události, jež se s nimi sběhly.

Atomismus mikrosvětla se též projevuje v existenci jisté absolutní míry pro mechanický pohyb. Takovou mírou je Planckova konstanta h , tzv. účinkové kvantum. Objev Planckovy konstanty byl prvním vážným upozorněním na neoprávněnost mechanického přenášení zákonitostí z makrosvětla do mikrosvětla.

Oblasti, které řeší kvantová mechanika

Kvantová mechanika se stala nesmírně užitečnou a nepostradatelnou disciplínou nejen pro fyziky, ale pro mnoho dalších oborů. K prvním jejím úspěchům patřilo bezesporu objasnění „vlnového rázu pohybu“ a výklad spekter záření vysílaného jednotlivými atomy, molekulami, pevnými i kapalnými látkami. Dnes řeší kvantová mechanika zcela exaktně pohyb volné částice, průchod částic potenciálovými vlny, harmonický oscilátor a vodíkový atom. Pomocí poruchové teorie lze prakticky řešit libovolné úlohy z atomové fyziky s předem danou přesností. Teorie grup umožňuje získat značné množství informací o systémech částic pouhou analýzou symetrie daného problému.

Dalším důležitým souborem jevů, které tato disciplína dovoluje pochopit, jsou chemické vlastnosti prvků a jejich sloučenin. Z vlastností elektronů a faktu, že elektrony mají i určitý spin, vyplývají zcela přirozeně Mendělejevovy zákony o periodických vlastnostech prvků. Navíc kvantová mechanika úspěšně vyložila i podstatu obou druhů chemických vazeb — vazby homeopolární a heteropolární.

Nejnovější oblastí, v níž sehrála kvantová mechanika neméně průkopnickou roli, je oblast pevných látek. Tu nejprve podala jasný výklad jejich dielektrických a vodivých vlastností. Ukázala na rozdíl mezi chováním elektronů v krystalických formách dielektrik, polovodičů a vodičů a vypracovala metody, s jejichž pomocí lze předem vypočítat příslušné charakteristiky těchto materiálů. Potom vyložila, a to opět poprvé zcela konkrétně, podstatu magnetických vlastností látek jak diamagnetických, tak paramagnetických a co je nejdůležitější, i feromagnetických. Všechny tyto mikroskopické projevy pevných látek jsou

určovány strukturou elektronových obalů jednotlivých atomů nebo iontů v krystalické mříži a chováním elektronů v této mříži.

Meze použitelnosti kvantové mechaniky

V současné době neexistuje teorie mikrojevů, která by byla obecnější než kvantová mechanika. Meze použitelnosti kvantové mechaniky můžeme tedy stanovit jen velmi přibližně. Podle [2] nelze kvantové mechaniky úspěšně použít k popisu procesů, které probíhají v oblastech o charakteristickém rozměru řádově 10^{-15} m a menším.

Kvantová mechanika je však mechanika systémů s ohraničeným, konečným počtem stupňů volnosti. Použití metod kvantové mechaniky na systémy o nekonečném počtu stupňů volnosti je tedy možné pouze zčásti a neobejde se bez zavedení speciálních, někdy umělých předpokladů, které jsou cizí samotné kvantové mechanice.

Z hlediska dialektického materialismu je nutno kvantovou mechaniku považovat za nejdůležitější etapu v rozvoji atomistiky 20. století. Tato etapa svědčí o neobyčejné síle lidského rozumu, který dovede nalézt v zdánlivém chaosu mikrojevů zákonitosti překvapující svou obecností a přesností.

Použitá literatura:

- [1] *D. I. Blochincev*: Základy kvantové mechaniky, ČSAV, Praha 1956.
- [2] *Kariakin, Bystrov, Kirejev*: Přehled fyziky, SNTL, Praha 1970.
- [3] *I. Úlehla*: Kvantová mechanika, Fyzika ve škole, čís. 7, březen 1970.

Šíření vln v jednorozměrném kontinuu

Ing. BOHUMIL VYBÍRAL CSc, VAAZ Vyškov

1. Úvod

Vlnové děje se ve středoškolských učebnicích fyziky probírají většinou jen popisným způsobem, protože hlubší studium by vyžadovalo odvození vlnové rovnice. To vede k tomu, že se výraz pro rychlost příčných vln ve struně, resp. výraz pro frekvenci tónu vydávaného strunou, uvádí bez odvození. Stejná situace je u výrazu pro rychlost podélných vln v tyči.

V tomto článku je provedeno studium šíření vln v *jednorozměrném kontinuu* neboli ve *spojité bodové řadě*. Za jednorozměrné kontinuum můžeme považovat např. struny a tenké tyče, tj. ta spojitá tělesa,

u nichž jeden rozměr — délka — značně převládá nad rozměry příčného průřezu, který zpravidla bereme konstantní. Šíření vln, které se probírá v tomto článku, má nejen důležitost pro akustiku a technické aplikace, ale je i fyzikálně zajímavé a tvoří úvod pro studium elektromagnetických vln a vlnové mechaniky.

Nejprve odvodíme dostupnými středoškolskými prostředky vlnovou rovnici pro jednorozměrné kontinuum.

2. Vlnová rovnice

Ve středoškolských učebnicích se odvozuje, že výchylka u příčného nebo podélného harmonického vlnění na bodové řadě ve vzdálenosti x od počátku je popsána rovnicí

$$u = A \sin \omega \left(t \mp \frac{x}{c} \right) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right), \quad (1)$$

kde A je amplituda vlnění, ω úhlová frekvence, c rychlost šíření a $\lambda = cT$ vlnová délka. Záporné znaménko \mp (1) platí pro šíření vlnění v kladné orientaci osy x a kladné znaménko \mp její záporné orientaci. Pro jiný (neharmonický) tvar vln bychom ve výrazu (1) museli změnit tvar funkce. Argument funkce $(t \mp x/c)$ však zůstane stejný, neboť vyjadřuje, že všechny ostatní body řady kmitají stejně jako bod v počátku, jen s určitým fázovým zpožděním (pro znaménko $-$) $\Delta t = x/c$. Pro úplnou obecnost můžeme tedy nahradit sinusovku libovolnou spojitou funkcí, kterou ani nemusíme rozepisovat. Výchylku obecného vlnění můžeme tedy psát ve tvaru

$$u = u \left(t \mp \frac{x}{c} \right) \quad (2)$$

nebo ve tvaru

$$u = u(x, t). \quad (3)$$

Výraz (3) jen vyjadřuje, že výchylka vlnění bodové řady je funkcí dvou nezávisle proměnných: vzdálenosti x a času t .

Hledejme nejprve rychlost v změny výchylky pro určité x jako podíl elementárního přírůstku výchylky Δu a příslušného času Δt a vyjádřeme tuto rychlost užitím rychlosti šíření $c = \Delta x / \Delta t$. Dostáváme

$$v = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (4)$$

Je tedy rychlost určitého bodu (pro $x = \text{konst}$) rovna rychlosti šíření vynásobené přírůstkem výchylky na jednotkové délce v okolí uvažovaného bodu a v daném okamžiku ($t = \text{konst.}$). Pro zrychlení výchylky podobně dostáváme

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta v}{\Delta x} = c \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Rychlost v tomto výrazu můžeme vyjádřit užitím výrazu (4). Tedy

$$a = c \frac{\Delta}{\Delta x} \left(c \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = c^2 \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right).$$

Tento výraz můžeme stručněji zapsat ve tvaru

$$a = c^2 \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}. \quad (5)$$

Zrychlení můžeme rovněž vyjádřit užitím jeho definice ve tvaru

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2} \quad (6)$$

Srovnáním výrazů (5) a (6) dostáváme důležitou rovnici

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2} = c^2 \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}, \quad (7)$$

která se nazývá *vlnová rovnice* pro jednorozměrné kontinuum.

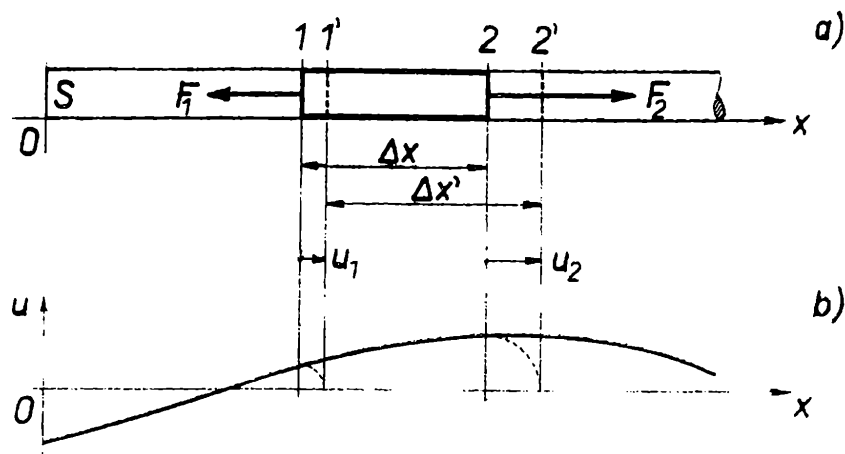
Při odvozování rovnice (7) jsme užili elementů Δ . Správnější je prostřednictvím limity výrazu (7) pro $\Delta t \rightarrow 0$ přejít k derivacím výchylky u podle času t a vzdálenosti x . Vzhledem k tomu, že výchylka u je funkcí dvou nezávisle proměnných, budeme hovořit o tzv. *parciálních* neboli *částecných* derivacích a pro zápis derivací uijeme místo znaku „ d “ znaku „ ∂ “. Správnější je tedy rovnici (7) psát ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8)$$

Ten, kdo je obeznámen s derivováním, může si správnost rovnice (8) ověřit, když za u vezme konkrétní funkci (1) nebo obecnou funkci (2). Říkáme, že funkce (2) je řešením rovnice (8). Při parciálním derivování funkce u podle t bereme x jako konstantu a při derivování podle x opět t jako konstantu; jinak jsou metody derivování stejné jako při derivaci funkce jedné nezávisle proměnné.

Vlnová rovnice (8) platí pro jakoukoli netlumenou vlnu v jednorozměrném kontinuu. Může jít o vlnu podélnou nebo příčnou lineárně polarizovanou, jednoduchou nebo složenou, tedy i o vlnu stojatou. Rovnice (8) platí i pro prostorovou *rovinnou* vlnu, u které je výchylka funkcí rovněž jen x a t .

Rovnice (8) je pohybovou rovnicí pro vlnění. Jelikož na její levé straně vystupuje okamžité zrychlení určitého bodu řady nebo objemového ele-



Obr. 1

mentu rozvlněného prostředí, musí mít pravá strana význam podílu síly, působící na bod nebo objemový element, a jejich hmotnosti.

Vlnová rovnice má velký význam jak pro studium šíření vlnění v mechanice, tak v teorii elektromagnetického pole. Vyjde-li nám při řešení nějakého fyzikálního jevu pohybová rovnice ve tvaru (8), jde vždy o šíření vlnění. Kromě toho přímo z vlnové rovnice vyplývá, jakou rychlostí se vlnění šíří. Rychlost určíme porovnáním konstanty, která vyšla v pohybové rovnici, s konstantou c^2 z rovnice (8). Tohoto postupu použijeme v následujících dvou kapitolách.

3. Šíření podélných vln v tyči

Uvažujme o šíření *podélných* postupných vln v tenké tyči konstantního příčného průřezu S a neomezené délky. Při takto volené délce se nebudeme muset zajímat o odražené vlny. Vychýlíme-li okrajový průřez tyče z rovnovážné polohy v podélném směru, např. úderem, přeneše se pružností tyče tato výchylka postupně na další průřezy podle rovnice (2). Položíme-li okraj tyče do počátku (obr. 1a), bude mít v rovnici (2) význam jen záporné znaménko. V tyči se začne šířit podélná vlna. Toto šíření vlnění se projeví tím, že jednotlivé průřezy tyče začnou kmitat v podélném směru kolem svých rovnovážných poloh. Vlivem konečné rychlosti šíření bude kmitání jednotlivých průřezů fázově posunuto (obr. 1b). Uvažujme o průřezech 1 a 2, které vymezují element tyče délky Δx (obr. 1). V důsledku výchylek u_1 a u_2 při šíření vlny se původní délka Δx změní na $\Delta x'$, přičemž

$$\Delta x' - \Delta x = u_2 - u_1 = \Delta u,$$

je deformace elementu v určitém okamžiku t . Relativní deformace elementu bude

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (9)$$

Sestavme nyní pohybovou rovnici elementu. Uvažujme, že vznikají jen pružné deformace tyče a že tedy platí Hookův zákon $F = ES\varepsilon$. Vytkneme-li element tyče, musíme působení ostatních částí tyče na průřezy 1 a 2 nahradit silami F_1 a F_2 (obr. 1a). Na element působí tedy výsledná síla

$$\Delta F = F_2 - F_1 = ES\Delta\varepsilon.$$

Tato síla uděluje elementu o hmotnosti

$$\Delta m = \rho S\Delta x,$$

kde ρ je hustota, zrychlení

$$a = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \frac{E}{\rho} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta x}. \quad (10)$$

Délkovou změnu relativní deformace $\Delta\varepsilon/\Delta x$ můžeme užitím vztahu (9) vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta x} = \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}$$

a zrychlení a můžeme psát ve tvaru (6). Pak bude mít rovnice (10) tvar

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}. \quad (11)$$

Při odvozování pohybové rovnice by bylo přesnější vyjadřovat časové a délkové změny výchylky u užitím parciálních derivací, pak by zápis rovnice (11) byl

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (12)$$

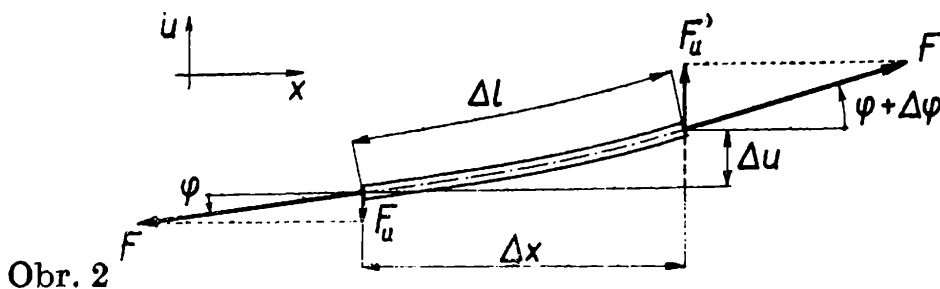
Srovnáme-li rovnici (11) s rovnicí (7) nebo rovnicí (12) s rovnicí (8) vidíme, že pro rychlost c_0 podélných vln v tyči vychází

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (13)$$

Tak pro ocelovou tyč ($E = 2,10 \cdot 10^6 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2} = 2,14 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$, $\rho = 7,86 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$) vychází $c_0 = 5210 \text{ m s}^{-1}$.

V *kapalinách a plynech*, kde se může šířit jen podélné vlnění, vychází pro rychlost (prostorových) vln výraz analogický výrazu (13), jen Youngův modul pružnosti E je nahrazen tzv. *modulem objemové pružnosti* K , tedy

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$



Obr. 2

Pro kapaliny je $K = 1/\gamma$, kde γ je stlačitelnost. Pro plyny, kde při šíření probíhají adiabatické změny plynu, je $K = \kappa p$, přičemž κ je Poissonova konstanta a p tlak plynu. Tak pro vodu ($K = 2,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^{-2}$) vychází $c = 1410 \text{ m s}^{-1}$ a pro vzduch při tlaku 760 torr a teplotě 0° C je $c = 331,8 \text{ m s}^{-1}$.

4. Šíření příčných vln ve struně

Uvažujme nyní o šíření *příčných* vln v homogenní struně napnuté silou F . Ze struny si vytkneme element délky Δl (obr. 2). Budeme uvažovat jen o malých příčných výchylkách u a proto můžeme psát

$$\Delta l = \Delta x, \quad (14)$$

$$\varphi \approx \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad (15)$$

$$\sin \varphi \approx \varphi. \quad (16)$$

Vzhledem ke vztahu (14) můžeme pro hmotnost elementu psát

$$\Delta m = \rho S \Delta x = \mu \Delta x, \quad (17)$$

kde $\mu = \rho S$ je délková hustota struny (hmotnost struny jednotkové délky). Ve směru příčných výchylek u působí na element struny výsledná síla $\Delta F_u = F_{u'} - F_u$ (obr. 2), kterou můžeme vzhledem ke vztahu (16) vyjádřit ve tvaru

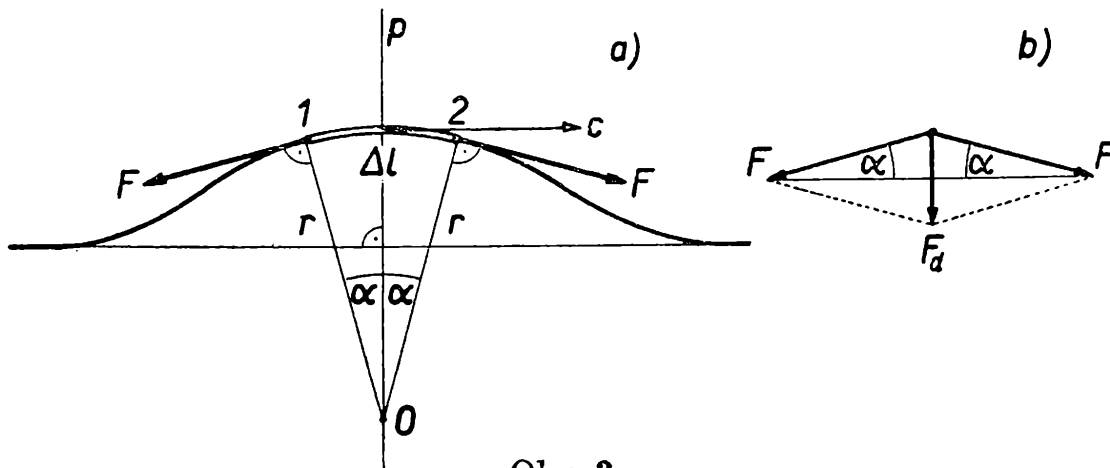
$$\Delta F_u = F(\varphi + \Delta\varphi) - F\varphi = F\Delta\varphi.$$

Tato síla uděluje elementu hmotnosti (17) zrychlení

$$a = \frac{\Delta F_u}{\Delta m} = \frac{F}{\mu} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}. \quad (18)$$

Délkovou změnu úhlu $\Delta\varphi/\Delta x$ můžeme vzhledem ke vztahu (15) psát ve tvaru

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}$$



Obr. 3

a zrychlení a vyjádřit užitím vztahu (6). Pak bude mít rovnice (18) tvar

$$\frac{\Delta^2 u}{\Delta t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2}. \quad (19)$$

V limitním případě $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ přejdou podíly diferencí na parciální derivace a rovnice (19) bude mít tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (20)$$

Srovnáním pohybové rovnice (20) s vlnovou rovnicí (8) pro rychlost příčných vln ve struně dostáváme

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (21)$$

Sílu F napínající strunu lze užitím Hookova zákona vyjádřit ve tvaru $F = \varepsilon ES$, kde ε je relativní prodloužení struny. Jelikož dále pro délkovou hustotu platí $\mu = \rho S$, můžeme výraz (21) psát ve tvaru

$$c = \sqrt{\varepsilon \frac{E}{\rho}} = c_0 \sqrt{\varepsilon}, \quad (22)$$

kde c_0 je rychlost (13) podélných vln ve struně. Vzhledem k tomu, že ε bývá řádově 10^{-3} (10^{-2}), je rychlost příčných vln podstatně menší než rychlost podélných vln.

Rychlost šíření příčných vln ve struně lze odvodit ještě zajímavým způsobem bez užití vlnové rovnice. Představme si, že se strunou šíří rychlostí c příčný impuls a že v určitém okamžiku vrchol tohoto impulsu míjí přímkou p (obr. 3a), která je pevná vzhledem k nedeformované struně. Všimněme si blíže elementu mezi body 1 a 2, který můžeme nahradit kruhovým obloukem o poloměru r se středem křivosti O na

přímce p . Částice tohoto elementu hmotnosti $\Delta m = \mu \Delta l = 2\mu\alpha r$ mají vzhledem k přímce p rychlost c a tudíž na ně působí dostředivá síla

$$F_d = \Delta m \frac{c^2}{r} = 2\mu\alpha c^2.$$

Tato dostředivá síla je výslednicí síl F působících na okrajové body 1, 2 elementu a má pro malé úhly α ($\sin \alpha \approx \alpha$) velikost (obr. 3b)

$$F_d = 2F\alpha.$$

Porovnáním posledních dvou výrazů pro F_d dostáváme výraz (21).
(Dokončení)

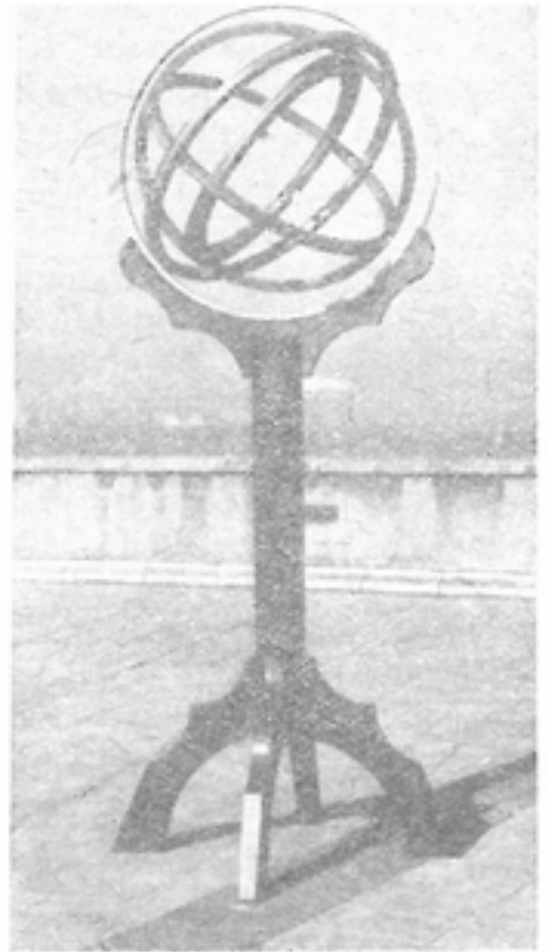
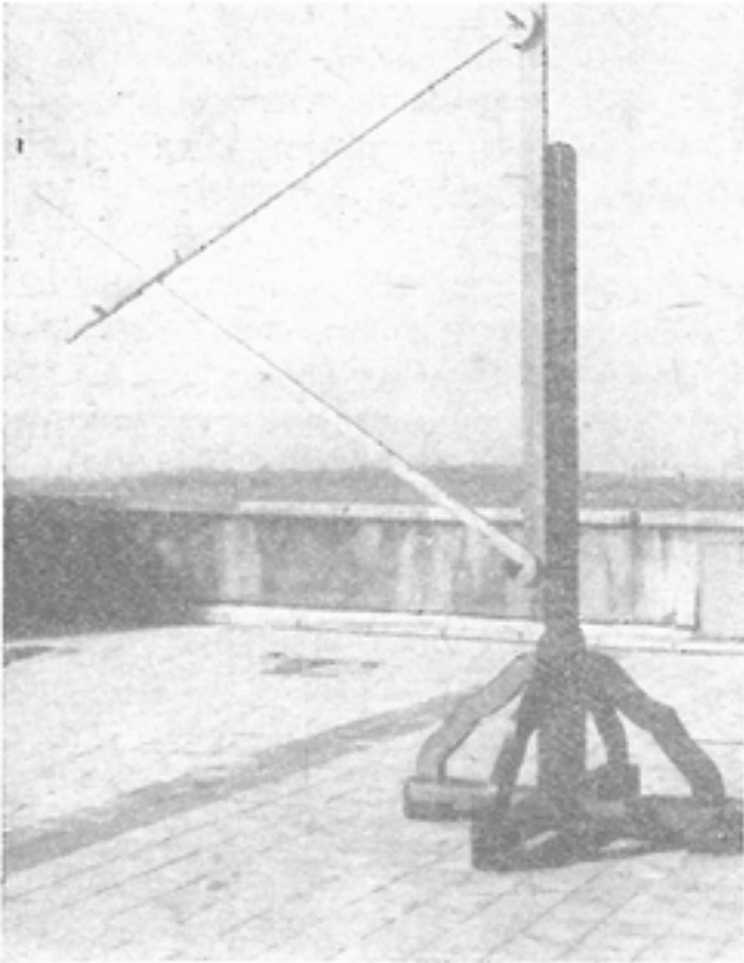
astronomie

Koperníkovy astronomické přístroje

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Celý kulturní svět oslavuje letos 500. výročí narození slavného polského astronoma — Mikuláše Koperníka, který se narodil 17. února 1473 v Toruni jako čtvrté dítě v zámožné kupecké rodině. Po smrti jeho otce v roce 1483 začal o výchovu mladého Mikuláše pečovat jeho strýc Lukáš Waczenrode. V osmnácti letech začal Koperník studovat na krakovské Akademii (tj. universitě). Stal se žákem Vojtěcha Brudzewského, vynikajícího profesora matematiky a astronomie. V roce 1496 odešel Koperník studovat na university v Bologni, Padově a ve Ferrare. V Itálii pobyl celkem osm roků; v roce 1503 byl promován na doktora práv. Koperník byl i vynikajícím lékařem, zabýval se též ekonomickými studiemi (otázky peněžnictví) a je známo, že při střetnutí s řádem německých rytířů byl velitelem vojsk na hradě Olštýně, jehož obranu úspěšně řídil. Byl i vysokým církevním hodnostářem (kanovník varmijské kapituly) v severním Polsku.

Koperníkovo dílo „De revolutionibus orbium coelestium“ (O oběžích těles nebeských) vyšlo v roce Koperníkova úmrtí (1543). Autor na něm pracoval 36 roků a teprve na naléhání svého žáka, Jiřího Jáchyma Retika (Rhaeticus) se odhodlal své celoživotní dílo vydat tiskem. Autor si byl zřejmě vědom toho, že nová světová soustava (později nazvaná



Obr. 1. Trikvetr (model).

Obr. 2. Armilární sféra (model). Oba snímky laskavě zapůjčil doc. dr. J. Salabun, ředitel Koperníkova planetária v Polsku.

heliocentrická, tj. sluncestředná) se stane předmětem nevraživosti církevní moci, což by mohlo mít neblahé následky i pro jejího autora. A skutečně, vývoj v následujících sto letech tyto obavy plně potvrdil. Připomeňme, že Koperníkovo dílo bylo až do roku 1835 (!) v seznamu zakázaných knih (tzv. Index librorum prohibitorum), který vydal papež Benedikt XIV.

Koperníkovy myšlenky byly podloženy pečlivým a vytrvalým pozorováním hvězdné oblohy. Jako všichni astronomové té doby měl k dispozici velmi jednoduchý měřicí přístroj, zvaný trikvetr (triquetrum), neboli paralaktické pravítko. Tento přístroj znali již staří Řekové a sloužil k určování zenitové vzdálenosti (anebo výšky hvězd nad obzorem). Fotografie modelu trikvetru, zhotoveného pracovníky Koperníkova planetária v Chorzówě (čti: chořuvě) máme na obr. 1. K svislé tyči upevněné na podstavci jsou připojena dvě pohyblivá ramena. Horní

otáčivé rameno, zvané alhidada, je opatřeno dvěma průzory, jimiž se zaměřovalo kosmické těleso a na druhém rameni, opatřeném stupnicí, se odečítala zenitová vzdálenost. Podobným přístrojem měřil Koperník výšky Slunce, Měsíce, planet i nejjasnějších hvězd a svá pozorování pečlivě zaznamenával. Z literatury je známo, že si byl vědom malé přesnosti těchto měření a své žáky na to neustále upozorňoval. Původní přístroj byl čtyřicet let po Koperníkově smrti předán významnému dánskému hvězdáři Tycho Braheovi, poslednímu astronomovi, který pozoroval oblohu bez dalekohledu.

Na obr. 2 je fotografie modelu tzv. armilární sféry, skládající se z několika kovových kruhů. Tyto kruhy znázorňují např. světový rovník, ekliptiku, horizont a meridián (poledník). Také pomocí tohoto jednoduchého přístroje se v minulosti určovaly polohy hvězd.

Mikuláše Koperníka považujeme plným právem za zakladatele moderní astronomie. V učení, že se Země otáčí kolem osy a obíhá kolem Slunce měl již své předchůdce v Aristarchovi ze Samu a v Nicetovi ze Syrakus. Jako první však správně vysvětlil pohyb jarního bodu po ekliptice, a to precesním pohybem zemské osy. Jedinou chybou Koperníkovou bylo, že si představoval dráhy planet kolem Slunce jako kružnice a pohyb planet považoval za dokonale rovnoměrný. Rovněž se nezbavil představy, že vesmír je uzavřen pevnou a nehybnou koulí, na níž jsou zevnitř připevněny „stálice“. Ale toto v žádném případě nesnižuje jeho význam pro vědu a lidské poznání vesmíru.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení příkladů loňské soutěže Rozhledů

Matematika

1. Body A_i ($i = 1, 2, 3$), neležící v přímce, jsou středy kružnic k_i , protínajících se ve společném bodě P . Dále budtež B_i další průsečíky kružnic k_j, k_l (i, j, l libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3). Pak kružnice k'_i , opsané trojúhelníkům o vrcholech $A_i B_j B_l$, protnou se rovněž ve společném bodě Q . Dokažte.

(Došla 3 řešení)

Josef Brejcha

Řešil: Václav Tomášek, IV B G Klatovy:

V kartézské soustavě souřadnic budtež dány body $A_i(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, 3$ tak, že platí

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

a bod $P(0; 0)$, $A_i \neq P$.

Kružnice k_i jsou pak určeny rovnicemi

$$k_i \equiv (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = x_i^2 + y_i^2.$$

Označme dále $B_i(x'_i; y'_i) \equiv k_j \cdot k_l$ (i, j, l libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3).

Pro souřadnice bodu B_i pak platí:

$$\left. \begin{aligned} x'_i(x'_i - 2x_j) + y'_i(y'_i - 2y_j) &= 0 \\ x'_i(x'_i - 2x_l) + y'_i(y'_i - 2y_l) &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Ze soustavy (1) určíme jednak $x'_i = y'_i = 0$ (bod P), jednak

$$x'_i = -2 \cdot \frac{(y_l - y_j) \cdot [y_j(x_l - x_j) - x_j(y_l - y_j)]}{(x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2},$$

$$y'_i = +2 \cdot \frac{(x_l - x_j) [y_j(x_l - x_j) - x_j(y_l - y_j)]}{(x_l - x_j)^2 + (y_l - y_j)^2}$$

Pro souřadnice x''_i, y''_i středu S_i kružnice x'_i opsané trojúhelníku $A_1B_jB_l$ najdeme

$$x''_i = \frac{(y'_j - y_l)(x_l'^2 - x_l^2 + y_l'^2 - y_l^2) - (y'_l - y_j)(x_j'^2 - x_j^2 + y_j'^2 - y_j^2)}{2(x'_j - x_l)(y'_j - y_l) - (x'_l - x_l)(y'_j - y_l)}$$

$$y''_i = x''_i \frac{x'_l - x_l}{y'_l - y_l} + \frac{x_l'^2 - x_l^2 + y_l'^2 - y_l^2}{2(y'_l - y_l)}.$$

Za předpokladu, že

$$D' = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x'_j & y'_j & 1 \\ x'_l & y'_l & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

mají kružnice c_i rovnice

$$c_i \equiv (x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 = (x''_i - x_l)^2 + (y'_l - y_l)^2; \quad i = 1, 2, 3.$$

Řešením lze určit souřadnice společného průsečíku Q ; ostatní tři průsečíky jsou identické s body B_i , tj. s průsečíky dvojic kružnic c_j, c_l (i, j, l je libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3).

2. Dokažte tuto obdobu Thaletovy věty v prostoru: Geometrické místo vrcholů pravoúhlých trojhranů dotýkajících se pevné kružnice $k \equiv (S; r)$ ležící v rovině ρ je kulová plocha $\kappa \equiv (S; r\sqrt{2})$ s vyjmutou hlavní kružnicí v rovině ρ .

Miroslav Fiedler

Autorské řešení: Nechť se všechny tři stěny pravoúhlého trojhranu dotýkají dané kružnice k . Zvolme soustavu pravoúhlých souřadnic tak, aby osy souřadnic byly v hranách trojhranu. Nechť

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

je pak rovnice roviny ρ kružnice k , $S \equiv (x_0, y_0, z_0)$ její střed. Je pak jednak

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta = 0,$$

jednak $\delta \neq 0$, a přitom z čísel α, β, γ je nejvýše jedno rovno nule.

To, že stěny trojhranu se dotýkají kružnice k , znamená, že bod S má od všech tří průsečných přímek roviny ρ se stěnami trojhranu vzdálenost r . Průsečná přímka v rovině $z = 0$ má v souřadnicích x, y rovnici

$$\alpha x + \beta y + \delta = 0.$$

Ukážeme, že vzdálenost bodu S od této přímky je

$$\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2}} |z_0|$$

Toto je zřejmě pravda pro $\gamma = 0$. Nechť tedy $\gamma \neq 0$. Vzdálenost bodu S od této přímky je též jako vzdálenost bodu S od roviny procházející uvedenou přímkou kolmo k rovině ρ . Tato rovina má rovnici tvaru

$$\alpha x + \beta y + \gamma' z + \delta = 0,$$

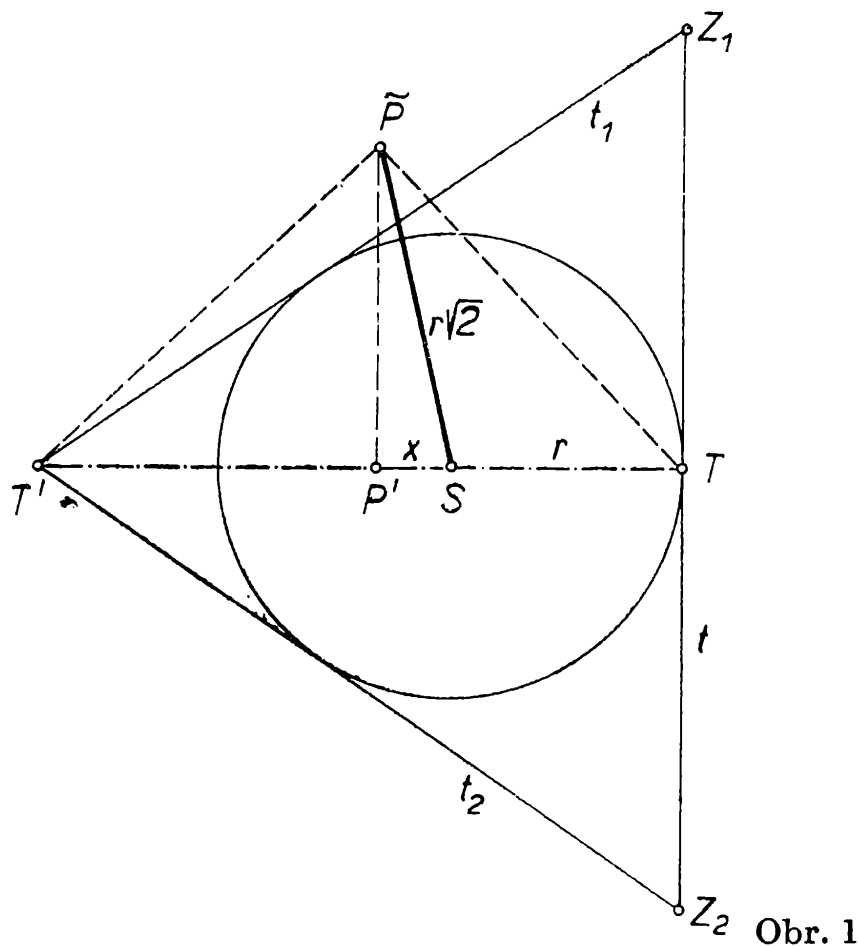
kde γ' se určí z podmínky kolmosti

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma \gamma' = 0:$$

$$\gamma' = -\frac{1}{\gamma}(\alpha^2 + \beta^2), \text{ anebo také } \gamma' = \gamma - \frac{1}{\gamma}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Vzdálenost bodu S od roviny $\alpha x + \beta y + \gamma' z + \delta = 0$ je však

$$\begin{aligned} & \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma' z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma'^2}} = \\ & = \frac{\left| \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta - \frac{1}{\gamma}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) z_0 \right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{\gamma^2}}} = \end{aligned}$$



Obr. 1

$$= \left| \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) z_0}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \right| = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2}} |z_0|$$

(jmenovatel je různý od nuly).

Tedy

$$r^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot z_0^2,$$

$$z_0^2 = \frac{r^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} (\alpha^2 + \beta^2).$$

Obdobně

$$x_0^2 = \frac{r^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} (\beta^2 + \gamma^2),$$

$$y_0^2 = \frac{r^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} (\alpha^2 + \gamma^2),$$

takže po sečtení

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2r^2.$$

To znamená, že vzdálenost bodu S od vrcholu trojhranu je rovna $r\sqrt{2}$ neboli, že vrcholy takových trojhranů leží na kulové ploše κ o středu S a poloměru $r\sqrt{2}$, ale nikoliv na její hlavní kružnici v rovině ρ .

Je-li obráceně P bodem kulové plochy κ , neležícím v rovině ρ , označme P' pravoúhlý průmět bodu P do roviny ρ . Je-li $P' \neq S$, budiž T (obr. 1) průsečík polopřímky opačné k SP' s kružnicí k ; je-li $P' = S$, budiž T libovolný bod kružnice k . Označme t tečnu ke kružnici k v bodě T , ω rovinu určenou bodem P a přímkou t , s kolmicí k ω v bodě P . Protože ω není kolmá k ρ , s protíná ρ v bodě, který označíme T' . Tečny t_1 a t_2 vedené z bodu T' (který je vnějším bodem kružnice k , neboť je-li $P'S = x$, je $x \geq 0$ a $T'S = x + \frac{2r^2 - x^2}{r + x} = \frac{(2r + x)r}{r + x} > r$) pak mají vlastnost, že roviny t_1P , t_2P , tP jsou stěny pravoúhlého trojhranu dotýkajícího se kružnice k .

Že tento trojhran je pravoúhlý, plyne z toho, že $PT' \perp tP$ a že $TP = TZ_1 = TZ_2$, kde Z_1, Z_2 jsou po řadě průsečíky t_1 a t_2 s přímkou t . Je totiž $TP = TZ_1 = TZ_2 = r \sqrt{\frac{3r + 2x}{r + x}}$, kde $x = P'S$, takže PZ_1Z_2 je pravoúhlý.

Redakční poznámka. Jediné správné řešení úlohy prof. dr. M. Fiedlera zaslal Václav Tomášek, gymnasium Klatovy.

3. V rovnici $x^5 - 9x^4 + kx^3 - 3x^2 - \frac{92x}{3} + 20 = 0$, jejíž dva

kořeny jsou stejné až na znaménko, určete oba tyto kořeny, koeficient k , případně najděte zbývající tři racionální kořeny.

(Došlo 7 řešení)

Jan Fráňa

Řešil Václav Tomášek, IV B gymn. Klatovy (upraveno).

Danou rovnici s kořeny x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 můžeme napsat ve tvaru:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) \cdot (x - x_5) = 0.$$

Po roznásobení srovnáme sobě odpovídající koeficienty obou rovnic a užitím vztahu $x_1 = -x_2$ dostáváme rovnice:

$$x_3 + x_4 + x_5 = 9 \quad (1)$$

$$-x_2^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = k \quad (2)$$

$$x_2^2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5) + x_3x_4x_5 = -3 \quad (3)$$

$$x_2^2 \cdot (x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5) = \frac{92}{3} \quad (4)$$

$$x_2^2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 = 20 \quad (5)$$

Rovnice (1), (3), (5) dávají rovnici pro x_2^2 :

$$-9x_2^2 + \frac{20}{x_2^2} = 3$$

$$9x_2^4 + 3x_2^2 - 20 = 0; \text{ odtud } x_2^2 = \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}.$$

Hledané kořeny x_1, x_2 jsou: $x_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}; x_{1,2} = \pm \frac{i \cdot \sqrt{15}}{3}$.

Koeficient k určíme z rovnic (2), (4): $k = \frac{65}{3}$ nebo $k = -\frac{251}{15}$.

Pak daná rovnice má tvar:

$$x^5 + 9x^4 + \frac{65x^3}{3} - 3x^2 - \frac{92x}{3} + 20 = 0 \quad (\text{a})$$

$$x^5 - 9x^4 - \frac{251x^3}{15} - 3x^2 - \frac{92x}{3} + 20 = 0 \quad (\text{b})$$

Po vydělení dvojklenem $(x^2 - x_3^2)$ vyjdou kubické rovnice:

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0, \quad (\text{a}')$$

$$x^3 - 9x^2 - \frac{92x}{5} + 12 = 0, \quad (\text{b}')$$

Zavedeme-li známou substituci $x = y + 3$, dostaneme rovnice:

$$y^3 - 4y = 0; \text{ pak } y = 0; y = \pm 2 \quad (\text{a}'')$$

a kořeny $x_3 = 3; x_4 = 1; x_5 = 5$.

$$y^3 - \frac{227y}{5} - \frac{486}{5} = 0. \quad (\text{b}'')$$

Tato rovnice dává iracionální kořeny: $y \doteq 7,625; y \doteq -5,15; y \doteq -2,475$, takže $x_3 \doteq 10,625; x_4 \doteq 2,15; x_5 \doteq 0,525$.

Daná úloha má tedy řešení: $k = \frac{65}{3}; x_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}; x_3 = 3;$

$x_4 = 1; x_5 = 5$.

olympiády

6. mezinárodní fyzikální olympiáda v Bukurešti

Organizátorem 6. mezinárodní fyzikální olympiády (6. MFO) ve stud. roce 1971/72 byla Rumunská socialistická republika. 6. MFO probíhala ve dnech 8.—18. července 1972. Zúčastnilo se jí 9 států; z dřívějších účastníků to bylo Bulharsko, Československo, Maďarsko, NDR, Polsko,

Pořadí	Jméno	Úloha					Celkem	+ 20 %	Konečný počet bodů
		1.	2.	3.	4.	5.			
17.	Binder Jiří	5,5	0	7,5	4	16	33	6,6	39,6
24.	Drábek Pavel	3,5	3	3	4	17	30,5	6,1	36,6
27.–30.	Dolejší Jiří	5	1	5,5	4,5	13	29	5,8	34,8
31.–32.	Lehotský Milan	2,5	3	8	2	12	27,5	5,5	33
34.	Slezák Libor	4,5	1	5,5	4,5	10	25,5	5,1	30,6

Pořadí	Stát	Počet bodů	Počet cen			Pochv. uznání	Neúsp.
			1.	2.	3.		
1.	RSR	223,8		2	2	1	
2.	MLR	218,4	1		3	1	
3.	SSSR	216,6	1		2	2	
4.	NDR	192,0			2	3	
5.	Fr	185,4		1	1	1	2
6.	PLR	184,8			2	3	
7.	ČSSR	174,6			1	4	
8.	BLR	139,2			1		4
9.	K	38,4					4

RSR a SSSR a letos nově Francie a Kuba. Švédsko vyslalo jen pozorovatele. Jugoslavie se letos opět nedostavila. Z každého státu bylo pozváno 5 soutěžících. Naše družstvo tvořili:

1. Binder Jiří, 4. r. G. Moravské Budějovice,
2. Lehotský Milan, 3. r. G Bratislava, Novohradská,
3. Dolejší Jiří, 4. r. G Praha 7, Nad školou,
4. Slezák Libor, 4. r. G Pardubice,
5. Drábek Pavel, 4. r. G Pardubice.

Družstvo vedl místopředseda ÚVFO doc. dr. Ivan Náter a pedagogickým instruktorem byl člen užšího ÚVFO doc. dr. Bohumil Vlach.

Členové původně stanoveného družstva i s náhradníky, v celkovém počtu 11 účastníků, prošli soustředěním, které se konalo od 15. 6. do 25. 6. ve Vyškově.

Předsedou mezinárodní komise byl jmenován prof. dr. Ion Ursu, předseda národní komise RSR pro atomovou fyziku. Protože byl v době soutěže na služební cestě mimo RSR, zastupoval jej na zasedáních komise Nicolae Martalovu, místopředseda národní komise RSR pro atomovou fyziku.

Slavnostní zahájení soutěže se konalo až 10. července odpoledne po proběhnutí soutěže v teoretických úlohách. Prvá úloha byla z mechaniky, druhá z molekulové fyziky, třetí z elektřiny a čtvrtá z optiky. Laboratorní úloha byla z mechaniky a prováděla se 11. července. Na

vypracování teoretických úloh byla dána doba 5 hodin, na vypracování laboratorní úlohy doba 4 hodin. Řešení teoretické úlohy bylo hodnoceno maximálně 10 body, laboratorní úlohy maximálně 20 body. Mohl tedy každý soutěžící dosáhnout maximálně 60 bodů.

Vzhledem k tomu, že zadané úlohy byly svým obsahem na hranicích školské fyziky, a proto obtížné pro všechny soutěžící, bylo všem soutěžícím připočteno vždy 20 % k dosaženým bodům a podle tohoto výsledku byly stanoveny ceny.

Naši soutěžící se umístili takto:

Binder získal 3. cenu, ostatní pochvalná uznání.

Podle získaných bodů je u každého státu uveden též počet získaných cen a pochvalných uznání:

Naše družstvo se letos poprvé špatně umístilo.

Slavnostní zakončení soutěže bylo 17. července, při němž byly vyhlášeny výsledky a odevzdány diplomy a věcné ceny.

Hostitelé uspořádali rekreační pobyt na černomořském pobřeží a prohlídku některých míst.

Prof. Dr. Rostislav Košťál

různé

0 vývoji heliocentrické soustavy

JOSEF KOTYK, Pardubice

(Napsáno k 500. výročí narození Mikuláše Koperníka)

I. Předchůdci Koperníkovi

Již staří Řekové...

Opravdu? K vývoji heliocentrické soustavy, spojované od 16. století zpravidla se jménem slavného polského astronoma Mikuláše Koperníka (1473 až 1543), přispěli také již staří Řekové?

Ano. Málo je známo, že k heliocentrickému názoru dospěl také již starověk.

V 5. století před n. l. učili filosofové školy Pythagorovy (zejména Filolaos), že Země je plna nedokonalostí a béd, nemůže proto být středem světa. Ve středu světa se podle nich nachází centrální oheň, zdroj tepla a světla, pramen života. Tam prý stojí krb světa. Nejblíže kolem něho obíhá ve 24 hodinách Země. Na ní je obydlena jen polovina

povrchu, ta je však stále odvrácena od ústředního ohně. Se Země tedy krb světa nevidíme. Ústřední oheň vrhá však světlo na Slunce, jež je odráží k Zemi. Když se Země dostane na opačnou stranu ústředního ohně, než právě je Slunce, nastává noc.

Syrakusan Hiketas (též Hicetas, někdy i Nicetas psaný) učil již ve 4. století před n. l., že Země se otáčí. Aristarchos ze Samu (žil asi v letech 320 až 250 před n. l.), významný astronom a nevšední matematik,¹⁾ první vyslovil domněnku, že Země koná dvojí pohyb: Otáčí se kolem vlastní osy a zároveň obíhá kolem ústředního ohně. Byl však filosofem Kleanthem²⁾ obviněn z bezbožnosti a musel opustit Athény. Ruší prý klid Země...

Myšlenka, že Země je koule a není středem vesmíru, patří k původním a nejgeniálnějším, jež vzešly ze školy Pythagorovy. Učení o oběžných pohybech nebeských těles kolem jakéhosi ústředního ohně (soustava zv. pyrocentrická) sice v starověkém myšlení o kosmu nepřevládlo, avšak také nezaniklo. Je blízké hledisku Mikuláše Koperníka, jenž po staletích, jako přímý pokračovatel úvah Filolaa a jiných Pythagorovců se k němu vědomě přihlásil.

Avšak také Klaudios Ptolemaios, jenž žil asi v letech 90 až 160 n. l. v Alexandrii a proslul jako matematik, zeměpisec a hvězdář, byl si již vědom toho, že denní pohyb oblohy by bylo možno vysvětliti, předpokládáme-li, že Země se jednou za den otočí kolem světové osy od západu k východu, tj. opačným směrem než obloha. Domněle mocné námitky, vyplývající z tehdejší neznalosti zákonů mechaniky (zejména principu setrvačnosti) — např. že tělesa volně puštěná by nepadala svisle (podél olovnice), tělesa, volně ve vzduchu se vznášející, by se za Zemí zpožďovala, pohybem Země by prý povstal obrovský víchř, všechny budovy by se zřítily aj. — jej přinutily, aby se rozhodl pro stanovisko geocentrické,³⁾ kterému smysly přímo svědčily.

Heliocentrický názor, k němuž starověk dospěl, pro jehož uznání a rozšíření nebyly však ve starověku historické podmínky, upadl tak až na několik zmínek v zapomenutí a podlehl úplně názoru geocentrickému.

Teprve v období renesance došlo k velkému rozmachu svobodnějšího myšlení a kultury. „Byl to největší pokrokový převrat, který lidstvo

¹⁾ Aristarchos ze Samu první pokusil se stanovit poměr vzdáleností Země od Měsíce a Slunce; učinil tak způsobem neobyčejně zajímavým v době t.zv. dichotomie, kdy Měsíc je osvětlen právě z poloviny.

²⁾ Kleanthos z města Assu v Troadě žil v letech 331 až 232 př. n. l. Vedl školu zv. Stoa, školu stoickou.

³⁾ Geocentrickou soustavu světovou vyložil Klaudios Ptolemaios ve spise „Megalé syntaxis“ (Veliké sestavení). Do Evropy dostalo se Ptolemaiovo dílo pod arabským názvem „Almagest“. Po staletí bylo doplňováno a až do nepřehlednosti zdokonalováno.

dotud prožilo,“ napsal Engels,⁴⁾ „doba, jež potřebovala a zrodila obry, obry silou mysli, vášnivostí a charakterem, všestranností a učeností. Od té doby rozvíjela se věda již mílovými kroky.“ Z myslitelů, kteří připravovali revoluci v nazírání, uvádím zvláště Mikuláše z Cusy (Cusanus = Kusánský, 1401 až 1464), jenž ještě před Koperníkem prohlásil v podstatě z pozic kritiky geocentrický názor za chybný; také tvrzením, že vesmír je nekonečný, maje „střed všude a obvod nikde“, a kosmologickými úvahami značně předstihl svou dobu a významně přispěl k vypracování soustavy heliocentrické.

Na předělu mezi filosofií 15. a 16. století vyvstává na scéně dějin postava vědce-revolucionáře, o němž nápis na jeho pomníku v rodné Toruni hlásá:

„MOTOR TERRAE — STATOR SOLIS“
„POHNUL ZEMÍ — ZASTAVIL SLUNCE“.

Byl to

MIKULÁŠ KOPERNÍK



⁴⁾ Viz Bedřich Engels: „Dialektika přírody“, Praha 1952. Cit. str. 20 aj.

Ze zahraničních časopisů

1. Z ruského časopisu *Kvant* je tato úloha:
Řešte soustavu rovnic

$$2u + v + w = 6,$$

$$3u + 2v + w = 9,$$

$$3u^3 + 2v^3 + w^3 = 27.$$

2. Následující tři příklady jsou z bulharského časopisu *Matematika*.
a) Z rovnice

$$\log(x - 3)^2 + \log x^2 = 2$$

vypočítejte neznámou x .

b) Nechť x_1, x_2 jsou kořeny rovnice

$$x^2 - 3x + m = 0$$

a y_1, y_2 kořeny rovnice

$$y^2 - 12y + p = 0.$$

Najděte čísla m, p tak, aby kořeny x_1, x_2, y_1, y_2 v tomto pořadí tvořila rostoucí geometrickou posloupnost.

c) Dokažte, že

$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} - \cotg^2 \alpha \cotg^2 \beta = -1,$$

kde $\alpha \neq k\pi, \beta \neq k\pi$ (k je celé číslo).

3. Další dva příklady jsou z holandského časopisu *Pythagoras*.

a) Dokažte, že neurčité rovnici

$$x^2 + x + 1 = y^2$$

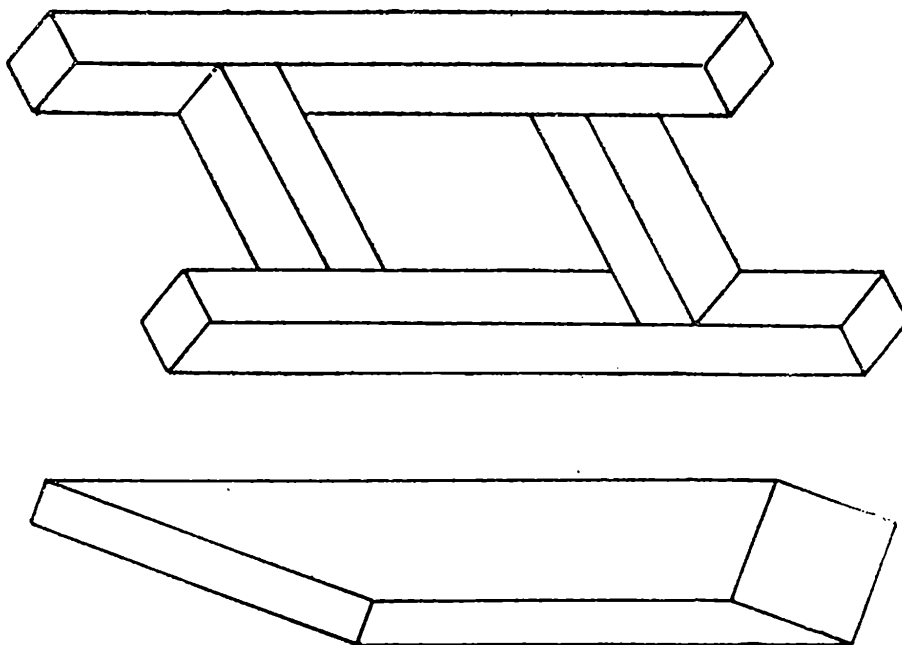
vyhovují jedině tyto dvojice celých čísel: $(0; 1), (0; -1), (-1; 1), (-1; -1)$.

b) Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž $AB \parallel DC$. Na rameni AD je zvolen libovolný vnitřní bod P a na rameni BC bod Q , a to tak, že $AQ \parallel PC$. Dokažte, že platí též $PB \parallel DQ$.

S. H.

V německém časopisu *Alpha* (roč. 1972, 4. č., str. 91) uveřejnil Dipl.-Ing. M. Skalicky z Vídně dva obrázky s nadpisem: Tělesa, která neexistují. Čtenářům *Rozhledů* přinášíme jejich reprodukci.

S. H.



recenze

Josef Polák:

Přehled středoškolské matematiky

Vydalo SPN v edici Kostka, v 1. vydání. Kniha má 617 stran, 411 obrázků a 29 tabulek. Vázaná je za 41 Kčs.

Publikace „Přehled středoškolské matematiky“ je rozdělena do sedmi kapitol. V první kapitole nás autor seznámí se základními pojmy matematické logiky a teorie množin. Druhá, nejobsažnější kapitola nese název Aritmetika, algebra a elementární funkce. Zabývá se pojmem čísla, jeho vlastnostmi, dělením čísel, mocninou a odmocninou. Velmi detailně a přitom přehledně jsou zpracovány paragrafy, týkající se reálné funkce jedné reálné proměnné. Další paragrafy pojednávají o komplexních číslech, základních pojmech z vektorové algebry, rovnicích, nerovnicích a posloupnostech. Třetí kapitola je věnována kombinatorice, počtu pravděpodobnosti a statistice. Ve čtvrté kapitole se seznámíme se základními pojmy matematické ana-

lyzy jako je limita a derivace reálné funkce jedné reálné proměnné, neurčitý a určitý integrál.

Další tři kapitoly jsou věnovány geometrii. Pátá kapitola rovinné geometrie čili planimetrii. V prvních paragrafech si v ní zopakujeme základní geometrické pojmy, základní vlastnosti geometrických útvarů. Další paragrafy se týkají geometrických míst bodů, geometrických zobrazení v rovině, algebraických metod řešení konstrukčních úloh, obsahu rovinných obrazců a užití trigonometrie při řešení planimetrických úloh. Šestá kapitola pojednává o prostorové geometrii — stereometrii. Látka je zde řazena obdobně jako v předešlé kapitole. V poslední, sedmé kapitole, je metodou souřadnic rozpracována analytická geometrie v rovině. Názvy paragrafů plně vystihují obsah kapitoly: metoda souřadnic v geometrii, lineární útvary, parabola, kružnice, elipsa, hyperbola, analytické vyšetřování geometrických míst bodů v rovině a geo-

metrických zobrazení v rovině. V dodatku se autor krátce zabývá aproximací čísel a logaritmickým pravítkem.

Přehled středoškolské matematiky zaplňuje poněkud mezeru na našem knižním trhu v oblasti literatury, týkající se středoškolské matematiky. Jeho přínos spočívá v několika věcech: Vychází ze současných učebnic pro SVVŠ (gymnasia), ale na rozdíl od učebnic v ní najdeme ucelený přehled jednotlivých oborů středoškolské matematiky. Přitom kniha podává nejen přehled definic a vět, ale především přehled metod a postupů středoškolské matematiky. Dalším jejím velkým kladem je, že každý paragraf je doplněn mnoha řešenými i neřešenými příklady, tak-

že kniha v celku obsahuje několik set podrobně řešených příkladů a na tisíc dalších úloh, vhodných k procvičení látky. Jistě jen ohled na rozsah knihy vedl autora až k příliš hutnému zpracování látky některých paragrafů.

Autorem je kniha určena studentům středních škol a posluchačům prvních semestrů vysokých škol technického směru. Její pomoc jistě velmi uvítají zvláště maturující ročníky a studenti připravující se k přijímacím pohovorům na vysokou školu. Věřím, že po ní rádi sáhnou i někteří učitelé právě pro její přehlednost, úplnost a v neposlední řadě i velké množství příkladů, k dané látce vhodně volených.

Anežka Wohlmuthová

Opravy:

V článku dr. Antonína Vrby „Jak se předseda nudil“ v č. 3 nahradte na stránce

110₇ chybné q_u správným q_n ,

111₁₀ chybné $(n-1)!q_{u,j}$ správným $(n-j)!q_{n,j}$,

112₉ správným $2 \cdot n! \sum_{j=0}^n (-1)^j (n-j)! \frac{2n}{2n-j} \binom{2n-j}{j}$.

V článku Dr. Bohumila Jurka „Ohyb a optický obraz“ byly v č. 3 na str. 118 v obr. 2 vzájemně zaměněny reprodukce a a b .

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

průsečík	point <i>m</i> de rencontre; point <i>m</i> d'intersection
průsečnice	droite <i>ž</i> (ligne <i>ž</i>) d'intersection
průsek	intersection
průvodič	rayon vecteur <i>m</i>
prvek	élément <i>m</i>
prvočinitel	facteur <i>m</i> premier
prvočíslo	nombre <i>m</i> premier
přechod	transition <i>ž</i>
předpoklad	supposition <i>ž</i> ; prémisse <i>ž</i>
předpokládat	supposer
představovat	représenter
přemístění	déplacement <i>m</i>
přepona	hypothénuse <i>ž</i>
přerovnání	transposition <i>ž</i>
přesnost	précision <i>ž</i>
přesný	précis, <i>e</i>
převést	ramener, réduire
převrácený	inverse
převrácená hodnota čísla	inverse <i>m</i> d'un nombre
přibližně	à peu près; environ
přibližný	approximatif, ive
příbuznost	correspondance <i>ž</i>
přičíst	ajouter
příčka	transversale <i>ž</i>
příčný	transversal, <i>e</i>
přidružený	associé, <i>e</i>
příklad	exemple <i>m</i>
přilehlý	adjacent, <i>e</i>
přímka	droite <i>ž</i> ; ligne <i>ž</i> droite
hlavní přímka (vzhl. k nárysně)	droite de front; droite frontale
hlavní přímka (vzhl. k půdorysně)	droite horizontale

spádová přímka (vzhl. k nárysně)	droite d'inclinaison
spádová přímka (vzhl. k půdorysně)	droite de pente
přímkový	réglé, e
přímková plocha	surface <i>ž</i> réglée
přímky	droites <i>ž mn</i>
kolmé přímky	droites orthogonales
mimoběžné přímky	droites non coplanaires
rovnoběžné přímky	droites parallèles
různoběžné přímky	droites concourantes
přímočarý	rectiligne
přímou úměrný	directement proportionnel, elle
přímý	droit, e
přímý úhel	angle <i>m</i> plat
případ	cas <i>m</i>
zvláštní případ	cas particulier; cas spécial
obecný případ	cas général
připojit	ajouter
připsaný	exinscrit
kružnice připsaná trojúhelníku	cercle <i>m</i> exinscrit au triangle
připustný	admissible
připustíme, že...	admettons que...
přirozený	naturel, elle
přirozené číslo	nombre <i>m</i> naturel; naturel <i>m</i>
přirozený logaritmus	logarithme <i>m</i> naturel
přírůstek	accroissement <i>m</i>
přiřadit	coordonner
příznak	critère <i>m</i>
příznivý	favorable
pseudosféra	pseudo-sphère <i>ž</i>
púdorys	plan <i>m</i> géométral
půlkružnice	demi-cercle <i>m</i>

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

6

ROČNÍK 51. 1972-1979, ÚNOR



ROČNÍK 51
ÚNOR 1973

6

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

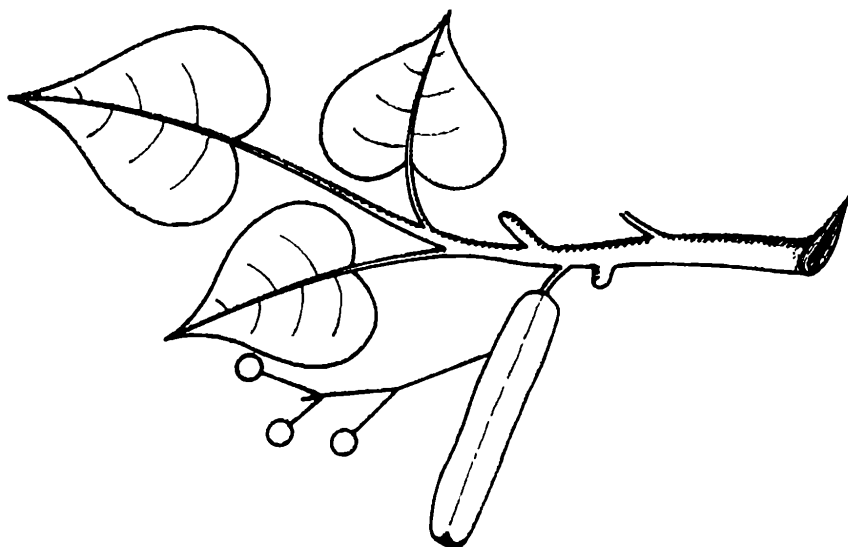
Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, prof. dr. Ján Vanovič, UK Bratislava, František Vencálek, SPŠ Praha.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

OBSAH

Dr. J. Maňák, CSc.: Únor 1948	241
Dr. J. Šedivý: O grafech bez grafů .	243
J. Drábek: Symetrický rozdíl dvou množin	246
M. Malik: Větší a menší	249
Dr. R. Bek: Modelování výrokových formulí reléovými sítěmi	251
N. V. Karpov, A. M. Prochorov: Lasery (překlad)	255
Doc. ing. L. Franc, CSc.: Elektrety	263
Ing. B. Vybíral, CSc.: Šíření vln v jedno-rozměrném kontinuu (dokončení)	268
Dr. M. Široká, dr. J. Široký: Kráter Mikuláše Kopernika	271
Naše soutěž .	274
Nejmladším čtenářům	279 a 285
J. Mída: O jedné úloze ze XVI. ročníku MO	279
J. Kotyk: O vývoji heliocentrické soustavy (pokračování)	286
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. str. obálky



ÚNOR 1948

PhDr. JIŘÍ MAŇÁK, CSc., ČVUT Praha

Ačkoli od únorových událostí v Československu v roce 1948 uplynulo již čtvrt století, rozhodně nepatří k těm, které upadly v zapomenutí. Připomínají si je nejen ti, kdo únorové vítězství sami probojovali, ale celá naše společnost a spolu s ní i veřejnost ostatních socialistických zemí. Ani v kapitalistickém světě na náš Únor nezapomínají. Jeho průběh, příčiny a důsledky jsou tam stále předmětem bádání i sporů, úsilí o vysvětlení i pokusů o zatemnění jeho smyslu, neboť o poučení z únorových událostí se nezajímají jen síly pokrokové a revoluční, ale i živly reakční. Nebude proto na škodu, když i my si stručně připomeneme, o co vlastně v únoru 1948 v Československu šlo.

Formálně šlo o vládní krizi, vyvolanou demisí ministrů nekomunistických stran. Protože však většina ministrů setrvala na svých místech, prosazoval předseda vlády Klement Gottwald, aby demise odstoupivších ministrů byla přijata a aby na jejich místa přišli noví lidé, ochotní pracovat pro splnění vládního programu. Na podporu tohoto stanoviska rozvinuli komunisté mohutné masové akce, pod jejichž vlivem prezident Beneš — ač nerad — nakonec demisi reakčních ministrů přijal a jmenoval nové členy vlády podle Gottwaldových návrhů.

Ve skutečnosti šlo v Československu o víc než o běžnou vládní krizi, jaké jsou v nesocialistických zemích dosti časté. Vládní krize v Československu v únoru 1948 byla zároveň výrazem a vyvrcholením hluboké krize politické, která se neomezila jen na vrcholné státní orgány, ale zasáhla i nižší články a negativně ovlivňovala všechny stránky veřejného dění. Jak k této hluboké politické krizi došlo, co bylo její příčinou?

V průběhu národní a demokratické revoluce se revoluční síly sjednotily a v Košicích vyhlásily svůj společný program, který vycházel z ini-

ciativního návrhu komunistů. Strany Národní fronty se ještě po volbách v roce 1946 dohodly na společném programu, i když některé jen pod tlakem politické nutnosti. Předúnorový politický systém mohl však úspěšně fungovat jen potud, pokud byla společná vůle zúčastněných stran k dohodě a k plnění dohod. A té bylo na straně nekomunistických sil stále méně. Nebylo to náhodou. Vyplývalo to zákonitě z třídních zájmů demokratické části čs. buržoasie, která z počátku šla s revolučním proudem, avšak když společný nepřítel — fašismus — byl poražen a nepředstavoval ani hrozbu do budoucna, nemohla již dále pokračovat v nastoupené cestě. Pokračující revolucí nemohla nic získat, ale mohla mnoho ztratit. Byly to tedy rozdílné třídní zájmy, které způsobily, že stanoviska politických stran se stále více rozcházela a na přelomu let 1947—48 se vyhroutil v otevřený protiklad mezi buržoasií na jedné straně a proletariátem a jeho spojenci na druhé straně. Z důvodů třídní podmíněnosti politiky nekomunistických stran, jež byly politickými mluvčími čs. buržoasie, dříve nebo později musely tyto strany otevřeně vystoupit proti silám socialistickým, rozbít dosavadní jednotu Národní fronty a pokusit se zastavit další revoluční vývoj. Takovým vystoupením reakčních sil bylo vyvolání vládní krize v únoru 1948, která jim měla dopomoci k postupnému vytlačení komunistů z vlády.

Avšak kontrarevoluční pokus o zastavení revolučního vývoje v Československu se rozbil o politickou zralost čs. dělnické třídy a všeho pracujícího lidu, v jejichž čele byla KSČ s osvědčeným Gottwaldovým vedením. Komunistická strana využila vládní krize k rozhodnému střetnutí s buržoasií o směr budoucího vývoje československé společnosti. Ústavní vyřešení vládní krize bylo proto zároveň vyřešením hluboké krize politické, bylo vyvrcholením poválečného revolučního procesu. V únoru 1948 byla čs. buržoasie zbavena pokojnou, nekrvavou, ale revoluční cestou mocenskopolitických pozic.

Komunistická strana Československa dovedla naši dělnickou třídu a její spojence ke svržení buržoasní moci a k nastolení diktatury proletariátu. S oprávněnou hrdostí si proto připomínáme únor 1948 jako významný mezník v dějinách KSČ i našich národů. Představuje vyvrcholení etapy revolučního boje o moc a východisko k etapě budování socialismu. První vítězství socialistických sil v průmyslově vyspělé zemi s hlubokými demokratickými tradicemi znovu a zvláště výrazně potvrdilo mezinárodní platnost marxismu-leninismu.

Únorové vítězství v roce 1948 prohloubilo a upevnilo mezinárodně politickou orientaci Československa, která byla opřena o přátelství a spojenectví se Sovětským svazem nejen ve sféře politické, ale i v oblasti hospodářské. Správnost těsného přimknutí k Sovětskému svazu z hlediska ideově politických, ekonomických i obranných potřeb Československa se v uplynulých 25 letech mnohokrát potvrdila.

Svým dosahem únorové události z r. 1948 ovlivnily všechny oblasti společenské činnosti. Významně se projevily jejich důsledky i ve školství a ve vědě. Únor definitivně odstranil poslední překážky na cestě k uskutečnění dávného cíle pokrokového učitelstva — vytvoření jednotné školy. Uvolnil cestu pro socialistickou přestavbu vnitřního obsahu školy a pro nebývalý kvantitativní i kvalitativní rozvoj čs. školství. Jeho epochální význam pro oblast naší vědy vynikne, jestliže porovnáme třeba jen kádrové a materiální vybavení vědeckovýzkumné základny v Československu v letech 1945—1948 s vybavením nynějším a když si uvědomíme, že rozhodný obrat v jejím budování spadá až do púnorového období.

Jestliže si tedy připomínáme historický význam února 1948 i v našem časopise, neplníme tím jen jakousi „povinnou daň“ k významnému výročí, ale činíme tak s plným vědomím toho, co únor 1948 pro nás všechny znamená a k čemu nás i do budoucnosti zavazuje.

matematika

0 grafech bez grafů

Dr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

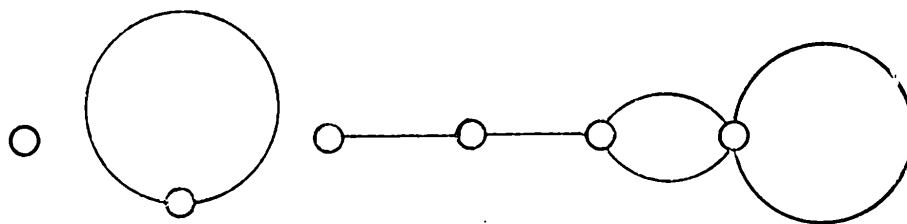
Pustme se do malého experimentu s abstraktními úvahami o grafech, při kterých nebudeme nic kreslit, ale přesto získáme závěry platné pro určité třídy neorientovaných grafů s uzly a hranami. Jen pro osvěžení představy o těchto grafech je připojen úvodní obrázek, na kterém vidíme neorientovaný graf se šesti uzly a šesti hranami, uzly jsou znázorněny pomocí kroužků, dvě hrany jsou zakresleny jako úsečky a čtyři jako oblouky kružnic. Připomeňme si, že hrana, která vstupuje do téhož uzlu, ze kterého vychází, znázorňuje uspořádanou dvojici typu $[a, a]$ a nazývá se *smýčka* grafu a zapisuje se aa .

Je zřejmé, že každé hraně lze přiřadit právě dva uzly, které spojuje; tuto situaci vyjadřujeme též obraty „hrana inciduje s uzly x, y “, „uzly x, y incidují s hranou“, „hrana xy “ apod. Ptáme-li se, kolik případů

incidence uzlů a hran se celkem v daném grafu vyskytuje, je nasnadě odpověď, že je jich právě dvakrát tolik než hran; tento poznatek vyjádříme pomocí pojmu stupeň uzlu v neorientovaném grafu.

Stupněm uzlu v neorientovaném grafu bez smyček rozumíme počet hran grafu, které s uzlem incidují. Obsahuje-li graf smyčky, počítáme stupeň uzlu tak, že k počtu hran, které smyčkami nejsou, připočítáme dvojnásobek počtu smyček u tohoto uzlu. Je zřejmé, že tímto způsobem vyjadřujeme právě výše zmíněný počet „případů incidence“ uzlů s hranami.

V grafu na připojeném obrázku má první uzel vlevo stupeň rovný nule, druhý uzel zleva má stupeň 2 díky smyčce, se kterou inciduje. Zbývající



Obr. 1

podgraf je souvislý a obsahuje uzly, které mají po řadě stupně 1, 2, 3 a 4. Součet stupňů všech uzlů daného grafu je tedy $0 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 = 12$, a to je právě dvojnásobek počtu jeho hran. Potvrzuje se tedy již dříve zformulovaný poznatek, vyslovme jej však v přesnějším znění:

Věta 1. *V každém neorientovaném grafu je součet stupňů všech uzlů grafu roven dvojnásobku počtu jeho hran.*

Důkaz věty lze provést různými způsoby včetně důkazů matematickou indukcí. Postačí však i úvaha vycházející ze zápisu množiny všech hran grafu, ve kterém zapíšeme každou hranu symbolem typu xy . Stupeň každého uzlu je pak roven počtu výskytů jeho symbolu v tomto seznamu všech hran; součet stupňů všech uzlů je tedy roven celkovému počtu písmen vystupujících v zápisu všech hran, a ten je roven dvojnásobku počtu hran.

A nyní přejdeme k ohlášené fázi úvah o grafech bez obrázků. Jak poznáme, nejde o žádný výstřelek, ale o nutnost, protože budeme uvažovat o grafech, které nebudeme moci nakreslit. Začneme úlohou z fotbalového hřiště, zamířme však do ochozů.

Na utkání Sparta—Slavia přišlo 26 719 diváků, z nichž mnozí si při setkání podávali ruce. Nevíme, kdo komu ruku podal, ale jeden z přítomných matematiků (zatížený svou vědou i na zápase) prohlásil, že on si do daného okamžiku potřásl pravicí právě s 57 diváky. Navíc prohlásil, že si dovoluje tvrdit, že aspoň jeden divák podal ruku sudému počtu diváků. Je takové tvrzení možno zdůvodnit?

Pokusíme se samozřejmě o formulaci takového grafového problému, který pomocí termínů teorie grafů vystihne podstatu dané úlohy o potřásání rukou. Podání ruky považujeme za vzájemné, můžeme tedy na množině U všech přítomných diváků definovat symetrickou binární relaci „divák x podal ruku divákovi y “. Tuto relaci bychom mohli znázornit neorientovaným grafem, jehož uzly by představovaly jednotlivé diváky a ve kterém by byla každá dvojice diváků, kteří si podali ruce, znázorněna hranou. Jiné hrany bychom pochopitelně nezakreslovali. Co však můžeme nakreslit? Graf s 26 719 uzly, z nichž jeden (znázorňující našeho matematika) má stupeň 57, ale o stupních ostatních uzlů nic nevíme. Přesto *matematik tvrdí, že aspoň jeden uzel grafu má sudý stupeň*. Jak by své tvrzení zdůvodnil?

Nejspíše by nám předvedl *důkaz sporem*: předpokládejme, že v uvažovaném grafu neexistuje žádný uzel sudého stupně. To znamená, že každý uzel grafu má lichý stupeň a že součet stupňů všech uzlů grafu je součtem 26 719 lichých čísel, tedy též liché číslo. Podle věty 1 je však toto číslo rovno dvojnásobku počtu hran, tj. sudému číslu. Tím dostáváme spor, výchozí předpoklad je tedy nutno odmítnout, platí jeho negace — v uvažovaném grafu existuje aspoň jeden uzel sudého stupně.

Vidíte, že jsme úlohu vyřešili pomocí znalostí o grafech, ale žádný graf jsme přitom nenakreslili a ani nemohli nakreslit. Jistě sami snadno obdobným způsobem dokážete tuto větu:

Věta 2. *V každém neorientovaném grafu má sudý počet uzlů lichý stupeň.*

Obě věty vyslovené v tomto článku jsou obvykle prvními poznatky z teorie neorientovaných grafů, které se odvozují a aplikují. Pokuste se vyřešit dále uvedené úlohy.

1. Patnáct členů sportovního družstva se rozjelo na individuální dovolenou. Každý z nich slíbil, že pošle pohlednici polovině spoluhráčů. Rozhodněte, zda se mohlo stát, že si pohlednice navzájem vyměnili, tj. každý napsal právě těm, od nichž mu pohlednice přišly.

2. V přehledném hlášení o vzájemné spolupráci 11 dílčích organizací byla uvedena čísla 3, 2, 4, 0, 5, 3, 4, 1, 2, 1, 6 udávající po řadě, s kolika organizacemi jednotlivé z nich spolupracovaly. Rozčílil se předseda právem, že v tomto hlášení je chyba?

3. Pokuste se odvodit nutnou podmínku pro číslo n , které udává počet uzlů existujících grafů, jejichž uzly mají stupně 1, 2, ..., n . Nakreslete si několik takových grafů (v úvodním obrázku najdete jeden z nich).

* *

*

Symetrický rozdíl dvou množin

JAROSLAV DRÁBEK, PF Plzeň

Čtenáři Rozhledů se již po několik let seznamují s průniky a sjednoceními dvou množin. Tvoření průniku a sjednocení dvou množin A , B je, jak známo, velmi úzce spjato s konjunkcí a alternativou dvou výrokových forem.

Pro lepší přehlednost definujme znovu průnik a sjednocení dvou množin A , B , které jsou podmnožinami jisté množiny Z :

$$\begin{aligned}A \cap B &= \{x \in Z; (x \in A) \wedge (x \in B)\}, \\A \cup B &= \{x \in Z; (x \in A) \vee (x \in B)\}.\end{aligned}$$

V pátém čísle Rozhledů bylo pojednáno o ostré alternativě dvou výroků, která se tvořila pomocí schématu:

Bud' nebo (na místa tří teček zapisujeme příslušné výroky). Použijeme-li ostré alternativy utvořené z výrokových forem $x \in A$, $x \in B$, můžeme definovat novou množinovou operaci s dvěma množinami A , B , zvanou *symetrický rozdíl* těchto množin. Vyslovme definici (symbol Δ čteme „délta“):

$$A \Delta B = \{x \in Z; (x \in A) \underline{\vee} (x \in B)\}_1.$$

Slovně vyjádřeno: Symetrický rozdíl $A \Delta B$ množin A , B je tvořen všemi prvky základní množiny Z , které jsou prvky právě jedné z množin A , B .

Kromě symetrického rozdílu dvou množin A , B se ještě definují rozdíly $A - B$, $B - A$ dvou množin A , B :

$$\begin{aligned}A - B &= \{x \in Z; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}, \\B - A &= \{x \in Z; (x \in B) \wedge (x \notin A)\},\end{aligned}$$

jak je čtenáři jistě známo.

Na Vennových diagramech na obr. 1, 2 a 3 jsou šrafováním vyznačena všechna pole, ve kterých jsou znázorněny prvky množin $A \Delta B$, $A - B$, $B - A$.

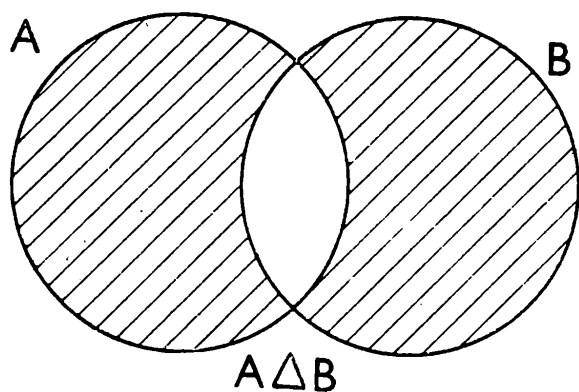
Je zřejmé, že platí $A \Delta B = B \Delta A$, $A - B$ se nemusí rovnat $B - A$, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Promyslete, ve kterých situacích je $A - B = B - A$, prodiskutujte případy $A \subset B$, $A = B$, $A = \emptyset$, $B = \emptyset$, $A = B = \emptyset$ apod.

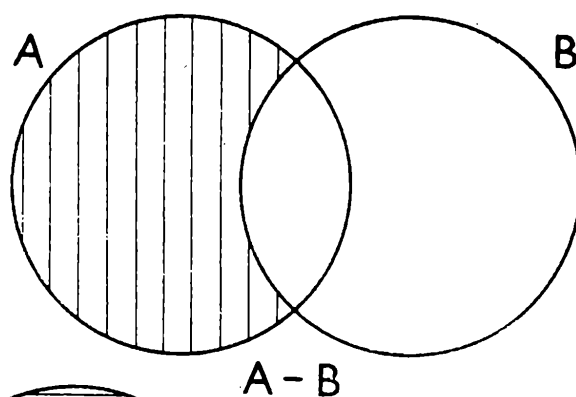
Zápis $A \Delta B = B \Delta A$, který vyjadřuje komutativnost tvoření symetrického rozdílu, naznačuje, proč je termín „symetrický rozdíl dvou množin“ výstižným názvem pro výsledek definované operace.

Z definice rozdílu dvou množin A , B bezprostředně plyne, že

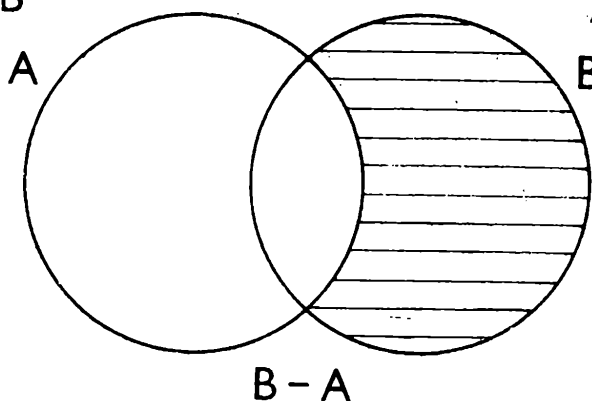
$$A - B = A \cap B' \quad \text{a} \quad B - A = B \cap A'.$$



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

Pro symetrický rozdíl množin A , B tak dostáváme

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (A' \cap B).$$

Dovedeme-li upravovat výrazy množinové algebry zapsané pomocí symbolů \cup , \cap , $'$, snadno dokážeme celou řadu dalších vlastností symetrického rozdílu. Pozoruhodné jsou zejména tyto věty:

Pro každou množinu A , která je částí základní množiny Z , platí

$$\begin{aligned} A \Delta A &= \emptyset & A \Delta \emptyset &= A \\ A \Delta A' &= Z & A \Delta Z &= A'. \end{aligned}$$

Důkaz. Množina $A \Delta A = (A \cap A') \cup (A' \cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$,

obdobně $A \Delta \emptyset = (A \cap \emptyset') \cup (\emptyset' \cap A) = (A \cap Z) \cup \emptyset = A$

$$A \Delta A' = (A \cap A) \cup (A' \cap A') = A \cup A' = Z$$

$$A \Delta Z = (A \cap Z') \cup (Z' \cap A) = (A \cap \emptyset) \cup A' = A'.$$

Stejným způsobem lze zkoumat asociativnost tvoření symetrického rozdílu (stručněji budeme mluvit o asociativnosti operace Δ). Platí totiž

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

Upravujeme

$$\begin{aligned} A \Delta (B \Delta C) &= [A \cap (B \Delta C)'] \cup [A' \cap (B \Delta C)] = [A \cap (B' \Delta C)] \cup \\ &\cup [A' \cap (B \Delta C)] = \{A \cap [(B \cap C) \cup (B' \cap C')]\} \cup \{A' \cap [(B \cap C) \cup \\ &\cup (B \cap C')]\} = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C) \cup \\ &\cup (A' \cap B \cap C'). \end{aligned}$$

Dále upravujeme

$$\begin{aligned}
(A \Delta B) \Delta C &= [(A \Delta B) \cap C'] \cup [(A \Delta B)' \cap C] = [(A \Delta B) \cap C'] \cup \\
&\cup [(A' \Delta B) \cap C] = \\
&= \{[(A' \cap B) \cup (A \cap B')]\} \cap C' \cup \{[(A \cap B) \cup (A' \cap B')]\} \cap C = \\
&= (A' \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C).
\end{aligned}$$

Vzhledem ke komutativnosti sjednocení množin platí zřejmě rovnost $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$, vyjadřující asociativnost operace Δ . Čtenář si snadno zdůvodní platnost formule $(A \Delta B)' = A' \Delta B$, kterou jsme v důkaze použili.

Pro čtenáře, kteří se seznámili se základy Booleovy algebry, bude příjemnější provést důkaz asociativnosti operace Δ booleovským výpočtem. Operace s množinami A, B interpretujeme v Booleově algebře takto:

$$\begin{array}{lll}
A' & \dots & A' & & A \cup B & \dots & A + B & & A \Delta B & \dots & AB' + A'B \\
A \cap B & \dots & AB & & A - B & \dots & AB' & & (A \Delta B)' & \dots & AB + A'B'.
\end{array}$$

Sledujme výpočet

$$\begin{aligned}
A \Delta (B \Delta C) &= [A' \cap (B \Delta C)] \cup [A \cap (B \Delta C)'] \dots A' (BC' + B'C) + \\
&+ A (BC + B'C') = ABC + AB'C' + A'BC' + A'B'C, \\
(A \Delta B) \Delta C &= [(A \Delta B) \cap C'] \cup [(A \Delta B)' \cap C] \dots (AB' + A'B)C' + \\
&+ (AB + A'B')C = ABC + AB'C' + A'BC' + A'B'C.
\end{aligned}$$

Obě množiny jsou vyjádřeny týmž booleovským výrazem, proto jsou si rovny.

Cvičení

1. Dokažte, že pro každé dvě množiny A, B platí: $A \Delta B = A' \Delta B'$.
2. Dokažte, že pro každé tři množiny A, B, C platí: $(A \Delta B) \cap C = (A \Delta C) \cap (C \Delta B)$, tj. věta o distributivnosti symetrického rozdílu vzhledem k průniku.
3. Rozhodněte, zda symetrický rozdíl je distributivní vzhledem ke sjednocení.

* *

*

Větší a menší

MAREK MALÍK, studující MFF UK

Při studiu množin přirozených, racionálních i reálných čísel se často setkáváme s jejich uspořádáním podle velikosti; říkáme, že reálné číslo a je *větší* než reálné číslo b , resp. že reálné číslo c je *menší* než reálné číslo d . Uspořádání prvků není výsadou číselných množin, mnohdy se přece setkáváme i se seřazeními předmětů jiného druhu podle velikosti. Ukážeme si, že můžeme definovat uspořádání prvků libovolné množiny.

Mějme například desetiprvkovou množinu X ,

$$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

a její podmnožiny

$$A = \{a, b, c, d, e, i, j\},$$

$$B = \{e, f, g, h\},$$

$$C = \{g\},$$

$$D = \{a, b, c, j\},$$

$$E = \{a, j\},$$

$$F = \{b, j\}.$$

Mezi množinami A, B, C, D, E, F, X nacházíme několik skupin, které mohou být uspořádány „podle velikosti“, přesněji řečeno vztahem inkluze:

$$E \subset D \subset A \subset X, \quad F \subset D \subset A \subset X, \quad C \subset B \subset X.$$

Toto uspořádání prvků množiny $M = \{A, B, C, D, E, F, X\}$ má jistě dost společného s uspořádáním množiny všech reálných čísel, ale v něčem se od něho také liší. Například množiny A a B , C a F nejsou mezi sebou „srovnatelné“, neplatí $A \subset C$ ani $B \subset A$, neplatí $C \subset F$ ani $F \subset C$, zatímco každou dvojici reálných čísel a a b , c a f můžeme srovnat podle velikosti.

Chceme-li, aby vztah inkluze mezi množinami byl též uspořádáním v matematickém smyslu slova, musíme v obecné definici uspořádání požadovat podstatně méně, než splňuje obvyklé uspořádání přirozených, racionálních a reálných čísel podle velikosti. Vyslovme nyní definici uspořádání na libovolné neprázdné množině; předpokládáme znalost základních vlastností binárních relací v množině.

Budiž X libovolná neprázdná množina a R binární relace v množině X ; výrok $[a, b] \in R$ zapisujeme přehledněji ve tvaru $a R b$, který zřetelněji připomíná známé zápisy $a \geq b$. Relaci R nazveme uspořádáním množiny X právě tehdy, když platí:

1. Relace R je v množině X reflexivní, tj. $\forall a \in X \quad a R a$.
2. Relace R je v množině X tranzitivní, tj.

$$\forall a, b, c \in X \quad [(a R b) \wedge (b R c)] \Rightarrow a R c$$

3. Relace R je v množině X antisymetrická, tj.

$$\forall a, b \in X \quad [(a R b) \wedge (b R a)] \Rightarrow a = b.$$

Existují-li dva prvky, které nejsou vůbec srovnatelné, tj. existují-li v množině X dva prvky a, b tak, že neplatí $a R b$ ani $b R a$, mluvíme o *částečném uspořádání* v X a o částečně uspořádané množině X . V opačném případě, kdy jsou každé dva prvky množiny X srovnatelné, nazýváme ji *úplně uspořádanou* množinou nebo též řetězcem. Příkladem úplně uspořádané množiny je množina všech přirozených čísel s relací „větší nebo rovno“, příklad částečně uspořádané množiny poskytuje množina M s relací inkluze popsaná v úvodu článku.

Hovoříme-li o uspořádání konečných množin, stojí jistě za zmínku tato věta:

Konečnou neprázdnou množinu lze uspořádat konečně mnoha způsoby.
Důkaz. Označme počet prvků konečné neprázdné množiny X písmenem m , potom má kartézský součin $X \times X$ zjevně m^2 prvků. Označme písmenem Y množinu všech částí množiny $X \times X$, počet prvků množiny Y je, jak víme, roven 2^{m^2} , což je konečné číslo. Protože každé uspořádání množiny X je binární relací v množině X a tedy jedním prvkem množiny Y , nemůže být počet uspořádání množiny X větší než počet prvků množiny Y a je tedy konečný.

Při studiu uspořádaných konečných množin lze s výhodou uplatnit uzlové grafy, s jejich konstrukcí se seznámíme v dalším článku. Zde si ještě připomeňme jednu vlastnost uspořádání zřejmou ve známých číselných množinách.

Nechť je množina X uspořádána relací \geq . Uspořádání \geq nazveme *hustým uspořádáním* v množině X právě tehdy, když ke každé dvojici prvků $a, b \in X$, kde $a < b$, existuje aspoň jeden prvek $c \in X$ takový, že platí $b > c > a$.

Je jistě zřejmé, že množina všech přirozených čísel není hustě uspořádána, protože třeba mezi čísly 1 a 2 neexistuje další přirozené číslo. Naproti tomu je množina všech racionálních čísel hustě uspořádána relací \geq ; platí-li totiž

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2}, \quad \text{pak} \quad \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2q_1 q_2} > \frac{p_2}{q_2} \quad (\text{dokažte!}).$$

Také množina všech reálných čísel je hustě uspořádána, lze to dokonce dokázat i o množině všech iracionálních čísel. Zřejmá je platnost této věty: *Každá úplně a hustě uspořádaná množina X je nekonečná.*

Požadavek úplného uspořádání množiny X lze v této větě podstatně oslabit, zamyslete se, jak!

Modelování výrokových formulí reléovými sítěmi

Doc. Dr. ROMAN BEK CSc, ČVUT, Praha

V několika člancích, jež byly uveřejněny v minulém ročníku Rozhledů se čtenáři seznámili se základními pojmy a zákony Booleovy algebry a s modelováním booleovských funkcí kontaktními obvody. V následující úvaze ukážeme, jak lze pomocí reléových sítí modelovat výrokové formule.

Logické postupy matematiky i jiných přesných věd bývají často formulovány v jazyce výrokové logiky. Výrazy jazyka výrokové logiky, v nichž kromě písmen malé latinské abecedy označujících výrokové proměnné užíváme symbolů negace ($'$), konjunkce (\wedge), alternativy čili disjunkce (\vee), implikace (\Rightarrow), ekvivalence (\Leftrightarrow) a závorek, nazýváme stručně výrokové formule. Tyto formule lze snadno přeložit do jazyka Booleovy algebry, v němž se kromě písmen latinské abecedy a závorek užívá symbolů negace ($'$), logického součtu ($+$), logického součinu (\cdot), logické rovnosti ($=$) a dvou symbolů pravdivostních hodnot (1, 0).

Při překladu stačí jednoznačně zaměnit ve formuli výrokové logiky symbol konjunkce znakem logického součinu, symbol disjunkce znakem součtu, ponechat závorky a symboly negace. Při překladu implikace si pomůžeme tautologií výrokové logiky:

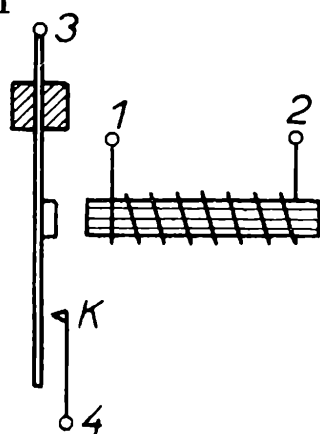
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$$

(snadno ji ověříme pravdivostní tabulkou), která umožňuje ve výrokově-logickém kontextu náhradu implikace disjunkcí. Tuto disjunkci již umíme přeložit do jazyka booleovské algebry. Uvedené překladové vztahy jsou vzájemně jednoznačné a dovedeme proto také analogicky překládat výrazy z jazyka Booleovy algebry do jazyka výrokové logiky.

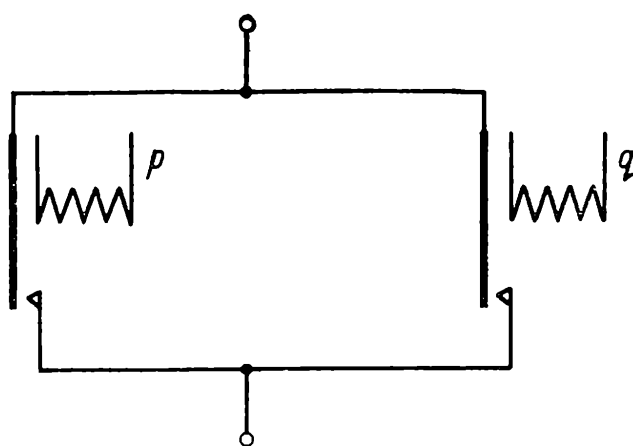
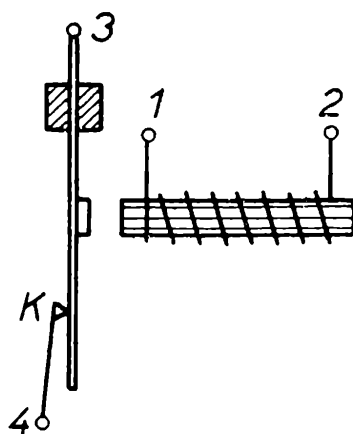
Nyní si uvedeme několik důležitých tautologií výrokové logiky, jichž budeme užívat při úpravách výrokových formulí, jež máme modelovat sítěmi. Pro informaci uvedeme v pravém sloupci překlad těch formulí, které jsou zapsány pouze pomocí symbolů $'$, \wedge , \vee . Tautologie vyjádřené pomocí ekvivalence zapíšeme jako rovnosti výrazů Booleovy algebry.

1. $(p')' \Leftrightarrow p$	$(p')' = p$
2. $(p \wedge q)' \Leftrightarrow (p' \vee q')$	$(p \cdot q)' = (p' + q')$
3. $(p \vee q)' \Leftrightarrow (p' \wedge q')$	$(p + q)' = p' \cdot q'$
4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$	$p' + q$
5. $(p \Rightarrow q)' \Leftrightarrow (p \wedge q')$	$p \cdot q'$
6. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p' \wedge q')]$	$p \cdot q + p' \cdot q'$
7. $(p \Leftrightarrow q)' \Leftrightarrow [(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)]$	$p \cdot q' + p' \cdot q$

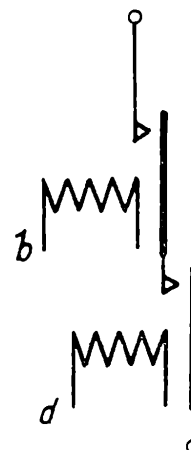
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Formule výrokové logiky můžeme modelovat technickými sítěmi složenými z různých prvků. Nyní ukážeme na možnost modelování těchto formulí reléovými sítěmi. Mějme dán reléový spínač (obr. 1).

tabulka k obr. 1

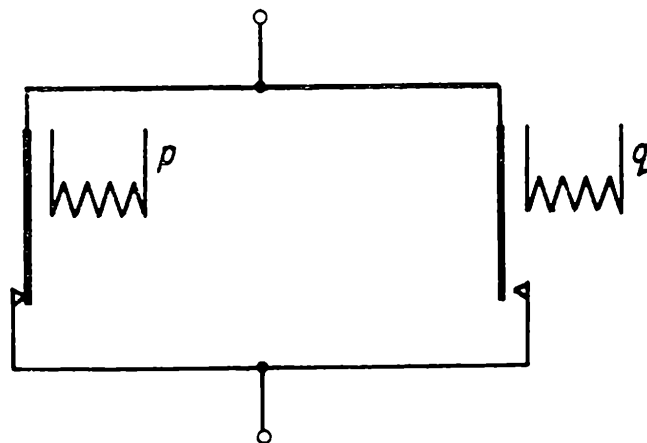
P	S
1	1
0	0

Zajímá nás vztah mezi průchodem proudu elektromagnetem (svorky 1, 2) — v této souvislosti budeme také hovořit o *primárním* okruhu — a možnosti průchodu proudu přes svorku 3, kotvu relé, dále přes kontakt *K* a svorku 4 — v této souvislosti budeme také hovořit o *sekundárním* okruhu. Vztah mezi průchodem proudu primárním a sekundárním okruhem (*P*, *S*) můžeme popsat u naznačeného relé pomocí tabulky, v níž průchod proudu příslušným okruhem budeme zapisovat symbolem 1, neprocházení proudu symbolem 0 (viz tabulku k obr. 1).

Sledujme nyní podobný vztah u relé s kontaktem na levé straně kotvy (obr. 2).

tabulka k obr. 2

P	S
1	0
0	1



Obr. 5

Průchod proudu primárním okruhem zde způsobí pohyb kotvy doprava a tím také rozpojení okruhu sekundárního. Přerušeni primárního proudu má za následek zpětný pohyb kotvy a zapojení sekundárního okruhu. Tabulka patřící k obr. 2 připomíná pravdivostní tabulku negace, říkáme, že relé zapojené podle obr. 2 modeluje negaci.

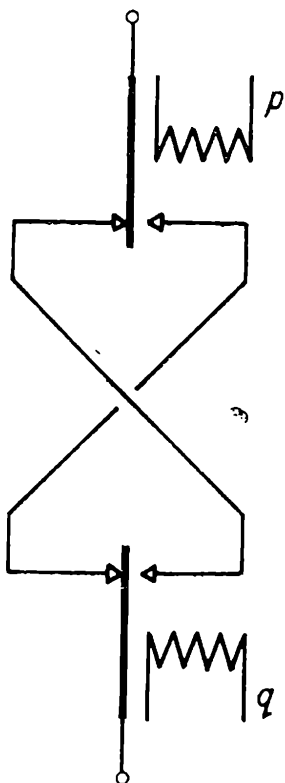
Na obr. 3 jsou znázorněna dvě sériově zapojená relé s kontakty vpravo, jejichž primární okruhy (na sobě nezávislé) označíme p , q . Průchod proudu okruhy p , q a celou sítí S popisuje tabulka pojící se obr. 3. Tabulka souhlasí s tabulkou konjunkce ($p \wedge q$), proto říkáme, že naznačená reléová síť modeluje konjunktci.

tabulka k obr. 3	p	q	S
	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	0

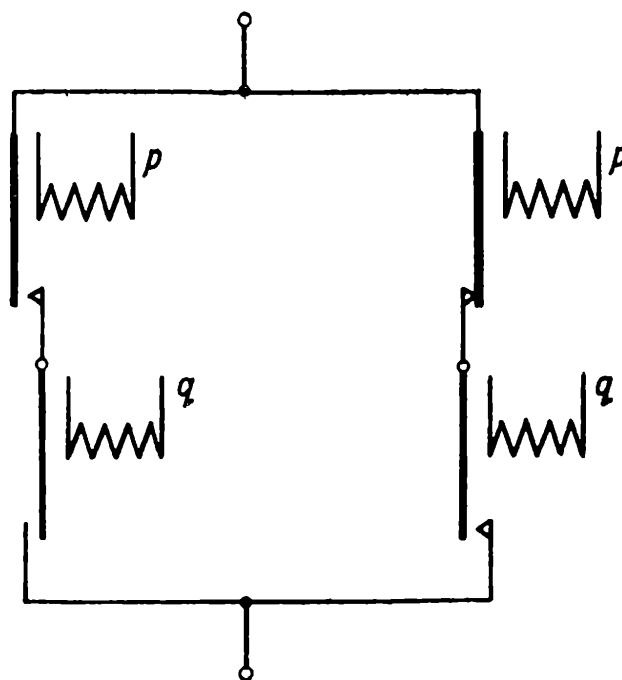
Naopak reléová síť znázorněná na obr. 4 je popsána tabulkou otištěnou vedle obrázku; porovnáme-li ji s pravdivostní tabulkou disjunkce, můžeme říci, že síť modeluje disjunktci $p \vee q$.

tabulka k obr. 4	p	q	S
	1	1	1
	1	0	1
	0	1	1
	0	0	0

Díky logickým tautologiím dovedeme nahrazovat formule: (p') , $(p \wedge q)'$, $(p \vee q)'$, $(p \Rightarrow q)$, $(p \Rightarrow q)'$, $(p \Leftrightarrow q)$, $(p \Leftrightarrow q)'$ formulemi obsahujícími pouze spojky negace, konjunkce s jednou nebo dvěma negovanými složkami, disjunkce s jednou nebo dvěma negovanými složkami. Levé strany tautologií 1.–7. lze nahradit v jakémkoli výrokově-logickém jazykovém kontextu odpovídajícími (ekvivalentními) stranami pravými, a to bez záměny pravdivostní hodnoty.



Obr. 6



Obr. 7

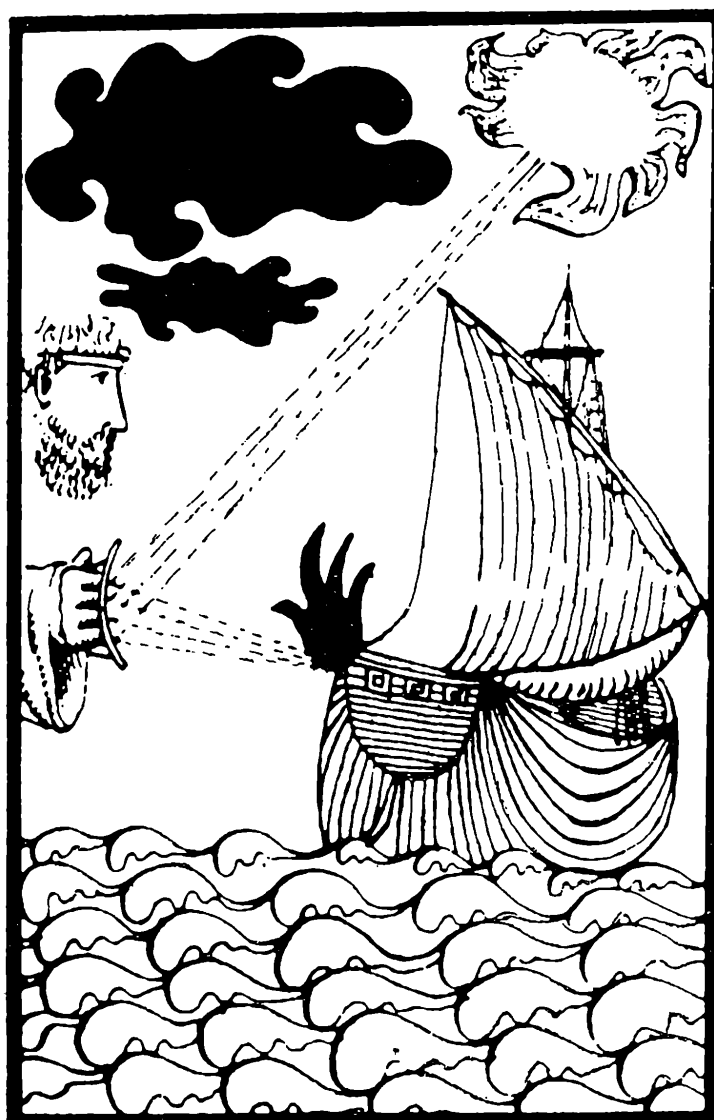
Tak lze na příklad formuli $(p \Rightarrow q)$ nahradit formulí $(p' \vee q)$ a tu modelovat sítí znázorněnou na obr. 5. Podobně lze formuli $(p \Leftrightarrow q)'$ nahradit formulí $(p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$ a modelovat ji sítí na obr. 6, kde všechny elektromagnety nesoucí stejné označení (p nebo q) jsou složkami téhož primárního okruhu. Uvedenou síť lze ovšem podstatně zjednodušit použitím dvojčinných reléových spínačů; tato jednodušší síť je znázorněna na obr. 7. Takto lze sestavovat i velmi rozsáhlé reléové sítě, modelující libovolně složité konečné formule výrokové logiky. Díky tomu můžeme řešit logické úkoly v rámci jazyka výrokové logiky pomocí příslušných reléových sítí.

Tak můžeme pomocí modelující reléové sítě ověřit, je-li udaná formule tautologií. Probíhá-li totiž sekundárním okruhem sítě proud při jakékoli distribuci proudů v primárních sítích, byla modelovaná formule tautologií.

Lasery

N. V. KARPOV

A. M. PROCHOROV



Přeloženo z časopisu
Kvant 1970, č. 2.

Asi před 2200 lety obsadila římská vojska řecké město Syrakusy. Tato událost by zřejmě zůstala známá jen znalcům historie vzniku římského impéria, kdyby při útoku na Syrakusy ne zahynul jeden z největších fyziků — *Archimedes*.

S osobností Archimeda je spjata mnoho legend, které se vztahují buď k okolnostem vzniku jeho objevů nebo k jejich využití. Většina těchto legend má reálný základ, avšak nejkrásnější z nich — legenda o zničení římského loďstva soustředěným slunečním světlem — je, bohužel, čistou fantazií.

Je tomu tak proto, že zákony geometrické optiky nedávají možnost zkoncentrovat světelnou energii běžných zdrojů světla do úzkého svazku

paprsků a soustředit ji na větší vzdálenost, než jsou rozměry příslušného optického zařízení.

Jinak je tomu s *lasery* (čti lezry), jejichž název je odvozen z anglického označení *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*. To v překladu znamená: zesilování světla pomocí indukovaného vzniku záření. Pokusíme se objasnit obsah těchto slov.

Víme, že světlo je elektromagnetické záření, které se šíří jako vlnění rychlostí $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ a nese energii. Vlnění charakterizuje vlnová délka λ a kmitočet ν , mezi nimiž platí vztah $\lambda\nu = c$. Viditelné oblasti světla odpovídají vlny délky od $0,4 \mu\text{m}$ do $0,8 \mu\text{m}$ (mikrometr = $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) a kmitočty od $0,75 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ do $0,375 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$.

Ve světelné vlně probíhají v prostoru a čase periodické změny elektrického a magnetického pole podobně, jako je tomu v rozhlasových vlnách. Avšak obyčejná světelná vlna se od vlny rozhlasové liší tím, že není monochromatická. Monochromatická by vlna byla tehdy, kdyby periodické změny elektrického a magnetického pole vlny probíhaly s jediným, naprosto stálým kmitočtem. V tom případě by byla veškerá energie vlnění přenášena s tímto kmitočtem. Taková elektromagnetická vlna se podobá zvukové vlně buzené dobrou ladičkou.

Kmitočet (vlnová délka) světelného záření určuje barvu viditelného světla. Slovo „monochromatický“ znamená jednobarevný. Jestliže monochromatická zvuková vlna odpovídá čistému hudebnímu tónu, pak monochromatická světelná vlna odpovídá čisté barvě.

Vlnové délky záření z různých zdrojů mohou být obecně shodné, a když vrcholy jedné vlny trvale splývají s vrcholy druhé vlny, amplituda výsledné vlny se zdvojnásobí; vlny se skládají se stejnou fází. Fázové vztahy mezi vlnami charakterizuje poloha vrcholů jedné vlny ve vztahu k vrcholům druhé vlny. Jestliže tato vzájemná poloha zůstává po celou dobu stálá, nazýváme *vlny koherentní*. Slovo „koherence“ znamená doslova spojitost, souvislost. Pojem koherence má ve fyzice velký význam a široce se využívá.

Obyčejné světelné vlnění není monochromatické. To je způsobeno tím, že zdroje světla — slunce, zářivky, žárovky — jsou tvořeny velkým množstvím jednotlivých, navzájem nezávislých zářičů — atomů. Chaoticky vyzařované světelné vlny jsou nekoherentní a výsledné světelné vlnění není monochromatické. Především nekoherentnost a nemonochromaticnost obyčejného světla brání koncentraci světelné energie do úzkého svazku paprsků.

Víme, že světlo je vyzařováno atomy. Právě atomy jsou těmi jednotlivými, navzájem nezávislými zářiči, o nichž jsme již mluvili. Na úrovni atomů je však představa spojitě světelné vlny neoprávněná. Atom může světlo pohlcovat nebo vyzařovat jen v určitých dávkách světelné energie — *světelných kvantech*; jejich energie $\epsilon = h\nu$ (Planckova konstanta $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$).

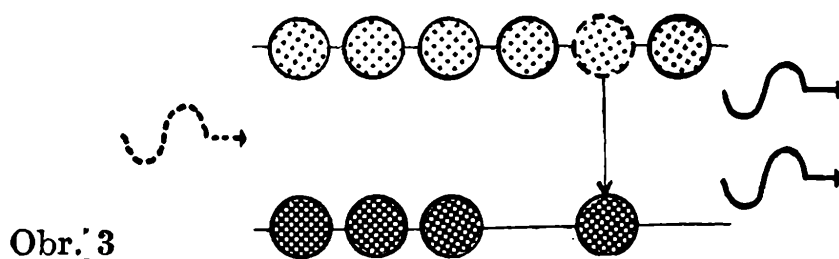
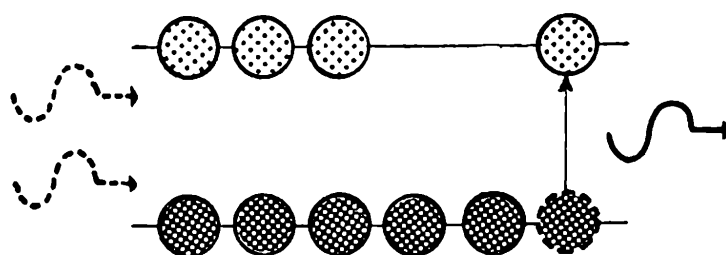
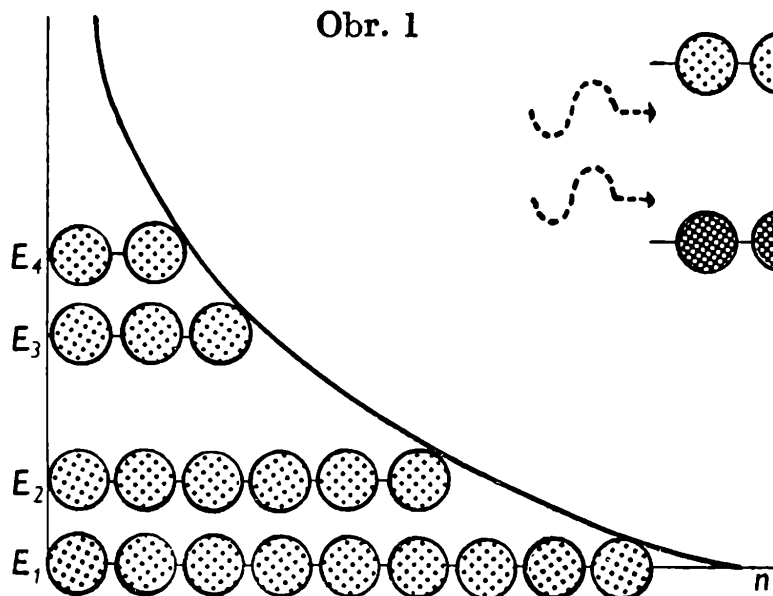
Energie kvant viditelného světla leží mezi hodnotami od $2,5 \cdot 10^{-19}$ J do $5 \cdot 10^{-19}$ J. Třebaže tato energie je velmi malá, projevuje se kvantová podstata především při vzájemném působení světla a látky. Současně světlo neztrácí svoji vlnovou podstatu, která se projevuje v těch případech, v nichž jsou důležité fázové vztahy (skládání vln, vytváření světelných paprsků atd.). To znamená, že světlo má vlastnosti vlnové i korpuskulární (tzn. příslušející částicím).

Tedy mikrozářiči světla jsou atomy, které v obvyklých podmínkách vysílají nekoherentní záření. Je zřejmé, že světlo vyzařují atomy, jež mají jistý nadbytek energie, čili tzv. *vzbuzené atomy*. Takový atom je nestabilní a samovolně, bez vnějších příčin může vyzářit kvantum záření. Samovolné vyzařování má nepravidelný, chaotický ráz — je nekoherentní. Avšak možnosti vyzařování světelné energie nejsou omezeny jen na samovolné procesy. Musíme si uvědomit, že vnitřní energie atomů může nabývat jen určitých hodnot. Říkáme, že atom se nachází na takové či jiné hladině energie. Přechody atomů z jedné hladiny na druhou jsou provázeny změnami jeho vnitřní energie. Při přechodu z nižší hladiny energie na vyšší atom energii pohlcuje, při přechodu z vyšší hladiny na nižší atom energii vydává. Tyto přechody jsou pochopitelně provázeny buď pohlcováním nebo vyzařováním světla. Kmitočet světelného záření pohlcovaného nebo vyzařovaného při přechodu z hladiny energie E_1 na hladinu E_2 je určen vztahem

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} .$$

Kromě samovolných přechodů atomů z vyšší hladiny energie na nižší existuje překvapivý jev indukovaného záření, na který přišel *A. Einstein*. Děj indukovaného záření se liší od samovolného vyzařování především tím, že neprobíhá sám od sebe, ale působením vnějšího záření. Přitom druhotná kvanta záření jsou neodlišitelná od prvotních. Mají přesně stejný kmitočet a směr šíření jako prvotní kvanta. Indukované záření se označuje tímto termínem proto, že akty vzniku jsou indukovány (vzbuzeny) vnějším zářením. Indukované záření je na rozdíl od záření samovolného koherentní.

To znamená, že v optice existuje jev vhodný k buzení koherentního záření. Avšak pro jediný atom je pravděpodobnost indukovaného záření při přechodech z vyšší hladiny energie na nižší rovna pravděpodobnosti pohlcení energie při přechodech z nižší hladiny na vyšší. Aby indukované záření převažovalo nad pohlcováním, musí být na vyšších hladinách více atomů, než na nižších. Ale v podmínkách tepelné rovnováhy je tomu právě naopak: na nižších hladinách energie je atomů více než na vyšších (obr. 1).



Vzájemné působení záření s takovou soustavou atomů má následující průběh: Část záření se pohltí a část atomů přejde na vyšší hladinu energie (obr. 2). Jestliže je soustava atomů předem upravena tak, že na vyšší hladině energie je atomů více než na nižší, pak při vzájemném působení záření a soustavy atomů dojde vlivem indukovaného záření k zesílení vystupujícího záření, jak je to schematicky ukázáno na obr. 3. Indukovaným zářením je způsobeno, že druhotné záření zesiluje prvotní a je jeho přesnou kopií. Společně vytvářejí jedinou vlnu, jejíž amplituda vzrůstá úměrně počtu aktů indukovaného záření. Soustavy atomů, u nichž byt jen pro dvě energetické hladiny je taková situace, že vyšší hladina energie je obsazena více než nižší, se nazývají *soustavy s inverzním obsazením hladin*. Slovo „inverze“ znamená převrácení, změnu normálního stavu věcí v opačný.

A tak základ *kvantové elektroniky*¹⁾, která řeší teorii laserů, tvoří jev indukovaného záření a jeho využití v soustavách s inverzním obsazením energetických hladin ke koherentnímu zesilování a generaci světelného vlnění.

¹⁾ Kvantová elektronika vznikla v roce 1954, kdy byly současně v SSSR a USA položeny její základy. První lasery se objevily v roce 1961. Nobelova cena za fyziku v roce 1964 byla udělena za vytvoření kvantové elektroniky sovětským fyzikům *N. G. Basovovi* a *A. M. Prochorovovi* (spoluautorovi tohoto článku) a americkému fyzikovi *C. H. Townesovi*.

Zde je třeba podtrhnout rozdíl mezi zesilováním a generací. Optický zesilovač slouží k tomu, aby zvětšoval intenzitu elektrického pole světelné vlny, která do něho vstupuje. Vlna na výstupu zesilovače musí mít větší intenzitu, ale musí být přesnou kopií vstupního záření. V tomto smyslu je optický zesilovač zcela podoben svému předchůdci — elektronickému zesilovači. Optický generátor musí být zdrojem optického záření, které vzniká přímo v generátoru a vystupuje z něj do vnějšího prostoru.

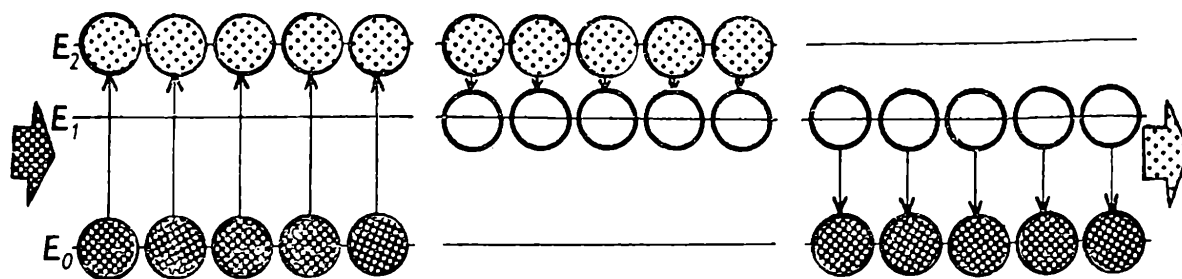
Pro činnost optického generátoru je nutná zpětná vazba, která se realizuje následujícím způsobem. Soustava atomů s inverzním obsazením hladin je umístěna mezi dvě přesně navzájem rovnoběžná zrcadla. V určitém bodě mezi zrcadly samovolně vzniká záření, které se šíří směrem k zrcadlům a postupně se zesiluje. Na zrcadlech se vlnění odráží a šíří se zpět. Jestliže se hřebeny odražených vln kryjí s hřebeny dopadajících vln, pak se vlny navzájem zesilují. Proto musí být vzdálenost mezi zrcadly rovna celistvému násobku půlvln. Obvykle mezi zrcadly leží stovky tisíc půlvln. Vyzářená energie se hromadí v prostoru mezi zrcadly, působí na soustavu atomů a vzbuzuje indukované záření. Jestliže výkon indukovaného záření převyšuje výkon ztracený ohřevem zrcadel, rozptylem a rovněž účinným vyzařováním do vnějšího prostoru, pak vzniká netlumené světelné vlnění. Vzhledem k vlastnostem indukovaného záření je u tohoto vlnění dosaženo nejvyššího stupně koherence; všechny atomy pracují synchronně. K tomu jsou nuceny zpětnou vazbou vytvořenou zářením nahromaděným mezi zrcadly.

Pro využití laserů je důležité, že při indukovaném záření druhotná kvanta mají shodný nejen kmitočet, ale i směr šíření prvotních kvant. To znamená, že záření laserů je nejen vysoce monochromatické, ale má také ideální směrové vlastnosti, takže vytváření světelného vlákna probíhá automaticky.

Než přistoupíme k popisu vlastností laserů, ukončíme výklad základů kvantové elektroniky následující hrubou analogií. Představte si tribuny velkého stadiónu zaplněné tisíci fanoušků. Před začátkem zápasu se diváci baví, pokřikují, avšak každý nezávisle na ostatních. Vzniká silný a vyrovnaný šum. Začala hra a všichni zmlkli. A pak naráz kdesi vznikl a postupně dosahuje ohlušující síly jednotky pokřik „do to-ho, do to-ho“. Všichni křičí jednohlasně, synchronně a vzniká efekt podobný jako v laseru.

V prvním laseru byl použit rubín — monokrystal kysličníku hlinitého (Al_2O_3). Příměs chromu dává rubínu při koncentraci okolo 0,05 % charakteristickou narůžověle červenou barvu.

Inverze obsazení energetických hladin se u rubínu dosahuje využitím tří hladin energie a pomocného budícího zařízení. Pro zvětšení počtu atomů na horní energetické hladině, nebo (což je ekvivalentní) pro zmenšení jejich počtu na dolní hladině se u metody tří hladin využívá mohut-



Obr. 4

ného pomocného záření, které spojuje jednu z pracovních hladin s třetí pomocnou hladinou a přečerpává atomy zdola nahoru.

V současné době se dosahuje rekordních energií a výkonů impulsně pomocí laserů s rubínem a se sklem s příměsí neodymu. Proto je na ně soustředěn největší zájem.

Základním prvkem rubínového laseru je vysoce homogenní krystal syntetického rubínu. Krystal má obvykle tvar válce průměru (0,4 až 2) cm a délky (3 až 20) cm. Budícím zdrojem je výbojka a buzení atomů probíhá následujícím způsobem. Atomy chromu, které jsou do záblesku výbojky na dolní, nevzbuzené hladině, pohlcují zelené nebo modré světlo výboje a přecházejí do vzbuzeného stavu (obr. 4). Doba života atomů na horní vzbuzené hladině je malá (menší než 10^{-7} s). Rychle přecházejí na nižší vzbuzenou hladinu a předávají přebytečnou energii krystalové mřížce rubínu, čili zahřívají jej. Na nové vzbuzené hladině je doba života relativně značná — průměrně 10^{-3} s. Proto se tato hladina nazývá metastabilní a atomy z ní přecházejí do základního, nevzbuzeného stavu. Přitom vyzařují světelná kvanta v červené oblasti spektra.

Při dostatečném výkonu výboje lze převést na metastabilní hladinu takové množství částic, jež postačuje k vytvoření silné inverze.

Jako budící zdroje světla se používají výkonné výbojky. Z počátku se vyráběly ve tvaru spirály obklopující krystal. Nyní se používají zpravidla podlouhlé výkonné výbojky umístěné podél krystalu. Výbojky pracují impulsně; impuls výboje trvá průměrně tisícinu sekundy (1 ms). Výboj se získává pomocí baterie kondenzátorů o kapacitě až 10 000 μF nabitých na několik tisíc voltů. Při výboji kondenzátory vydají energii desítek i stovek joulů. Výkon buzení může při impulsu přesáhnout desítky milionů wattů.

Jen část energie záření výbojky připadající na zelenou a modrou část spektra se spotřebuje na buzení iontů chromu. Zbývající část se mění v teplo.

Využití impulsního režimu je podmíněno dvěma okolnostmi. Jednak je obtížné vytvořit nepřetržitě pracující zdroj světla potřebného výkonu, jednak se krystal při déletrvajícím buzení silně zahřívá a ztrácí optickou stejnorodost. Je přirozené, že při impulsním buzení má i generace světla

impulsní ráz. Přitom potřebná inverze může být v krystalu vytvořena dvojím způsobem. Všimneme si obou možností.

Nechť jsou odrazná zrcadla nastavena do rezonance a upevněna. Jakmile se v metastabilním stavu nahromadí dostatečné množství částic, začne generace, která bude pokračovat dotud, dokud bude buzení efektivní. Obyčejně tato tzv. samovolná generace začíná (100 až 300) ms po začátku výboje a trvá 1 ms.

V podmínkách samovolné generace velké krystaly poskytují při výkonném buzení impulsy s energií 1000 joulů. Tomu odpovídá výkon impulsu až milión wattů.

Druhého režimu se dosahuje zapojením zrcadel rezonátoru v okamžiku, kdy inverze dosáhla maximální hodnoty. Pak všechny částice nahromaděné v metastabilním stavu vyzařují prakticky současně a generátor vytvoří gigantický impuls záření velmi krátkého trvání (10^{-8} až 10^{-9}) s o relativně malé energii (kolem tří joulů). Avšak poněvadž se energie vyzáří ve velmi krátké době, dosahuje výkon impulsu hodnoty 300 miliónů až 3 miliardy wattů.

Zde vyvstává otázka koeficientů účinnosti laseru. Z toho, co bylo uvedeno, je zřejmé, že se v laserové záření přetváří jen malá část budící energie. V podmínkách samovolné generace je účinnost rubínového laseru menší než 1 % a při buzení gigantických impulsů ještě menší.

V čem tedy spočívá zisk, který přináší laser?

V podstatě lze říci, že to, co ztrácíme na množství energie záření, nesrovnatelně získáváme na jeho kvalitě. Tato nová kvalita — *monochromaticnost a směrovost* — je podmíněna vlastnostmi jevu indukovaného záření.

Délka vlny záření rubínového laseru je $694,3 \text{ nm} = 6,943 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. A v okolí této vlnové délky, ve velmi úzkém intervalu šířky řádově 0,01 nm je uzavřen veškerý výkon laseru. Přitom šířka spektra záření vyzařovaného tepelnými zdroji světla je průměrně 300 nm, což je 30 000krát více.

Jeden z nejvýkonnějších tepelných zdrojů světla — naše Slunce — vyzařuje z jednoho čtverečního centimetru ve viditelné části spektra výkon $8 \cdot 10^3 \text{ W cm}^{-2}$. Přitom na interval vlnových délek 0,01 nm přísluší $0,2 \text{ W cm}^{-2}$. Ale rubínové lasery dávají v tomto intervalu (10^6 až 10^9) W cm^{-2} !

Odpovídající elektrické pole má intenzitu ($3 \cdot 10^6$ až 10^8) V m^{-1} . Slunce vytváří ve stejném intervalu vlnových délek pole o intenzitě $1,2 \cdot 10^3 \text{ V m}^{-1}$.

Nové vlastnosti laserového záření můžeme ilustrovat následující představou. Záření Slunce může v podstatě zahřát libovolné těleso nejvýše na teplotu $6000 \text{ }^\circ\text{C}$. Světelné záření plynových výbojek, jejichž světlo je jasnější než světlo sluneční, nemůže těleso zahřát na vyšší teplotu než $10\,000 \text{ }^\circ\text{C}$. Avšak když je toto záření výbojek, býť s velikými ztrátami

energie, převedeno na laserové monochromatické záření, jehož spektrální hustota energie je miliardkrát větší u záření výchozího, pak může zahřát těleso na teplotu několika milionů stupňů.

Krystalové lasery mohou pracovat i s nepřetržitým režimem. Velkých výkonů však dosahují lasery impulsní.

Poněkud stranou stojí *lasery plynové*. V současné době tyto lasery buzené elektrickým výbojem pracují ve velmi širokém pásmu kmitočtů — od ultrafialového záření po vzdálené záření infračervené. Základním konstrukčním prvkem plynového laseru je výbojka naplněná zředěným plynem o tlaku 100 až 1000krát menším než je tlak atmosférický. Trubice výbojek jsou skleněné nebo křemenné a jejich délka je podle určení od 5 cm do 50 m. Výbojky plynových laserů se značně podobají trubicím neonových reklam. Zrcadla laserů jsou buď přímo na čelech výbojek, nebo jsou vně, avšak v každém případě přesně kolmo k ose trubice.

Dnes jsou nejrozšířenější *neon-heliové lasery* s nepřetržitým chodem, které vyzařují červené světlo vlnové délky 632,8 nm. Pomocí těchto přístrojů lze získat světelné kmity velmi vysoké stability a monochromatickosti. I když je účinnost tohoto laseru velmi malá ($\approx 0,01\%$), vysoký stupeň monochromatickosti a směrovosti jeho záření, podmíněný především stejnorodostí plynového prostředí v trubici, způsobuje, že je tento laser nenahraditelný při různých seřizovacích a nivelačních pracích: při stavbě metra, při vyrovnávání přistávacích ploch velkých letišť apod.

Velkým úspěchem je vytvoření výkonného laseru s nepřetržitým chodem, jehož pracovní látkou je směs kysličníku uhličitého, dusíku a hélia. Dává infračervené záření s vlnovou délkou $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$. Tento laser je zajímavý především tím, že jeho účinnost dosahuje již 30 % a přesahuje účinnost všech existujících laserů pracujících při pokojových teplotách. Již nyní lze pomocí tohoto laseru získat v nepřetržitém režimu výkon řádově 10 kW.

Nyní se průmyslově vyrábějí lasery různých typů. Používají se ve vědeckých výzkumech, v lékařství (nekrvavý skalpel) a v technice (přesné obrábění těžkovitých materiálů, řezání textilních materiálů).

Laserový paprsek změřil vzdálenost Měsíce s větší přesností než to bylo provedeno radiolokátory. Když byla na Měsíci umístěna speciální odrazná plocha, byla vzdálenost k ní změřena s přesností na 4 m.

Nejširší využití našly lasery ve fyzice. Umožňují provádět unikátní fyzikální experimenty. Například pomocí laserů vyzařujících impulsy obrovských výkonů byl uskutečněn průraz vzduchu elektrickým polem světelné vlny. Tento průraz nastává v ohnisku čočky, která koncentruje laserový paprsek do bodu. Monochromatickosti a vysoké směrovosti laserového záření umožňuje koncentrovat světlo laseru do velmi malého objemu (v podstatě může rozměr plošky v ohnisku dosáhnout délky vlny). Do laserové „jiskry“ se okamžitě „vpálí“ téměř celá energie impulsu.

Plasma „jiskry“ se silně zahřeje až na teplotu několika milionů stupňů. Bylo zjištěno, že přitom vzniká rentgenové záření a byly získány první neutrony, které mají původ v termojaderné reakci vyvolané vysokou teplotou.

S lasery se pracuje v laboratořích na celém světě. Mnoho již bylo vykonáno, ale mnoho problémů je ještě nevyřešených. Není pochyb, že rozvoj kvantové elektroniky bude dále pokračovat velkým tempem.

O. L.

Elektrety

Doc. Ing. LADISLAV FRANČ, CSc.

a) Historie jejich vzniku

Dávno je známa analogie mezi četnými magnetickými a elektrickými jevy, jejichž zákonitost je vyjádřena formálně stejnými matematickými vztahy, dále je známa podobnost mezi mechanickým působením zelektrovaných a zmagnetovaných těles, i podobnost mezi charakteristickými vlastnostmi magnetických látek a dielektrik. Proto logicky vznikla i myšlenka o možnosti existence *permanentně polarizovaných dielektrik* jako protějšek *permanentně polarizovaných feromagnetik*.

První stopy bádání v tomto oboru spadají do druhé poloviny 18. století, kdy bylo zjištěno, že silně ochlazený krystal turmalínu získává velmi trvalou elektrickou polaritu. Myšlenku o možnosti existence permanentně polarisovaných dielektrik vyslovil r. 1839 *Faraday*. Jeho krajan *O. Heaviside* navrhl koncem devatenáctého století pro označení tohoto stavu název *elektret*. Po velmi dlouhou dobu zůstalo však jen při myšlence.

Teprve Japonec *Eguči* zhotovil první elektret v letech 1921 až 1922 a to více méně náhodou, když zkoumal vodivost voskových a pryskyřičných dielektrik za tepla. Vyrobit směs ze stejných dílů karnaubského vosku (který se vylučuje na listech a plodech jihoamerické palmy voskové) a kalafuny s příměsí včelího vosku. Na tuto směs, zahřátou na 130 °C a roztavenou, působil silným elektrickým polem, pokud se směs neochlátila na pokojovou teplotu. Toto dielektrikum uchovalo v sobě trvale elektrické pole, které bylo možno obvyklým způsobem identifikovat.

Po tomto objevu pracovalo se na tomto poli v laboratořích až do druhé světové války experimentálně. K rozšíření elektretů do technické praxe však nedošlo, hlavně pro nevhodné mechanické vlastnosti látek, z nichž byly vzorky vyráběny.

Za druhé světové války ukořistili Američané jednu z japonských válečných lodí. Při zkoumání zařízení této lodi zjistili, že její vnitřní telefonní spojení pracuje bez napájecích zdrojů. Přitom nenašli v japonských sluchátkách a mikrofonech žádné cívky, ani žádné stálé magnety. Američané byli zmateni a nemohli přijít na to, jaký je vlastně v těchto zařízeních zdroj energie. Teprve později se vyjasnilo, že to byly elektretové mikrofony a sluchátka.

Přesto i dnes je praktické použití elektretů velmi omezené, i když výzkumné ústavy na jejich zdokonalení stále pracují.

b) Fyzikální vlastnosti elektretů

Je nutno si uvědomit, že elektrety jsou zdrojem pole, nikoliv však energie a nelze jich tedy užívat ve formě jakékoliv baterie nebo jiného zařízení, od něhož je požadováno dodávání energie. Je však možno použít jejich elektrostatického pole jako energetického převodníku, pomocí něhož lze měnit elektrickou energii na mechanickou, popřípadě na akustickou nebo opačně.

Zdrojem pole kolem elektretu je objemově rozložený náboj uvnitř permanentně polarizované dielektrika a proto jej nelze žádným způsobem odvést, aniž by se porušila jeho strukturní stavba. Pro zjednodušení úvah se nahrazuje objemově rozložený náboj náhradním nábojem povrchovým o stejných vnějších účincích — tj. o stejném rozložení produkovaného pole nad povrchem elektretu. Tento náhradní náboj nazýváme *účinným nábojem* elektretu.

Je-li tento účinný náboj na obou plochách elektretového válečku vždy opačného znaménka, jako příslušné polarizační elektrody, která jej vyvolala, nazývá se *heteronábojem* (heterocharge). Jsou-li náboje na ploše elektretu a příslušné polarizační elektrody totožné, mluvíme o *homonáboji* (homocharge). Heteronáboj se často mění na homonáboj, který se potom nemění v průběhu i několika let. Vznik homonáboje nebo heteronáboje souvisí jak s vlastnostmi použitého dielektrika, tak i s podmínkami jeho polarizace.

Aby mohly být studovány vlastnosti různých elektretů, byla zavedena jako jedna z určujících fyzikálních veličin *hustota účinného náboje* na povrchu elektretu, která je vyjadřována v $C\ cm^{-2}$. Řádově bývá u běžných elektretů $3 \cdot 10^{-10}$ až $3 \cdot 10^{-8}\ C\ cm^{-2}$.

Pro většinu aplikací úplně postačuje, je-li elektret charakterizován dále těmito závislostmi:

- a) časovou změnou hustoty účinného náboje (životnost elektretu),
- b) prostorovou změnou pole elektretem vytvořeného (v závislosti na vzdálenosti od elektretu).

c) Způsob výroby a použitelná dielektrika

V současné době je známo několik způsobů, jak elektrety vyrobit. Většinou je nutnou podmínkou pro výrobu dostatečně silné elektrické pole.

Podle prvního způsobu je třeba dielektrikum zahřát do příslušné teploty a potom ochlazovat v elektrickém poli. Úplné roztavení dielektrika není nutné, postačí, aby bylo zahřáto na teplotu blízkou bodu tání. Tímto — ostatně nejstarším — způsobem vyrobené elektrety se nazývají *termoelektrety*.

Při druhém způsobu se místo zahřívání používá osvětlení. Metoda se dá použít jen u látek s fotovodivostí, jíž se vyznačuje např. síra a některé sirníky (zinečnatý, kademný). Takto získané elektrety se nazývají *fotoelektrety*. Mají krátkou životnost ve tmě a osvětlením náboj ztrácejí.

Při třetím způsobu hraje podstatnou úlohu elektrické pole a nepoužívá se ani ohřevu, ani osvětlení. Získané *elektroelektrety* jsou např. z titaničitanu vápenatého (CaTiO_3) nebo i z jiných látek. V šedesátých letech byl objeven další způsob — působením radioaktivního záření (záření α , β nebo γ) na některé látky. Např. ozáříme-li některé druhy skla zářením β , získává dielektrikum na jedné straně elektrický náboj $+$, na druhé $-$. Takové „umělé elektrety“ čili *pseudoelektrety* se navenek neliší od ostatních elektretů.

Nejpoužívanější způsob je však stále výroba termoelektretů. Děje se v polarizační bombě, ve které je možno libovolně regulovat gradient elektrického pole i teplotu.

Seznam použitelných látek by byl neobyčejně dlouhý. Experimentálně se zjistilo, že termoelektrety mohou být získány z látek organických i neorganických, z látek lišících se navzájem svou vnitřní strukturou a mající různé mechanismy polarizace i elektrické vodivosti, z velmi dobrých i velmi špatných dielektrik. Z neorganických látek jsou to zejména různé titaničitany, slída i jiné, z organických jsou to vosky, polymethylmetakrylát, ale také ebonit, cukr a asfalt.

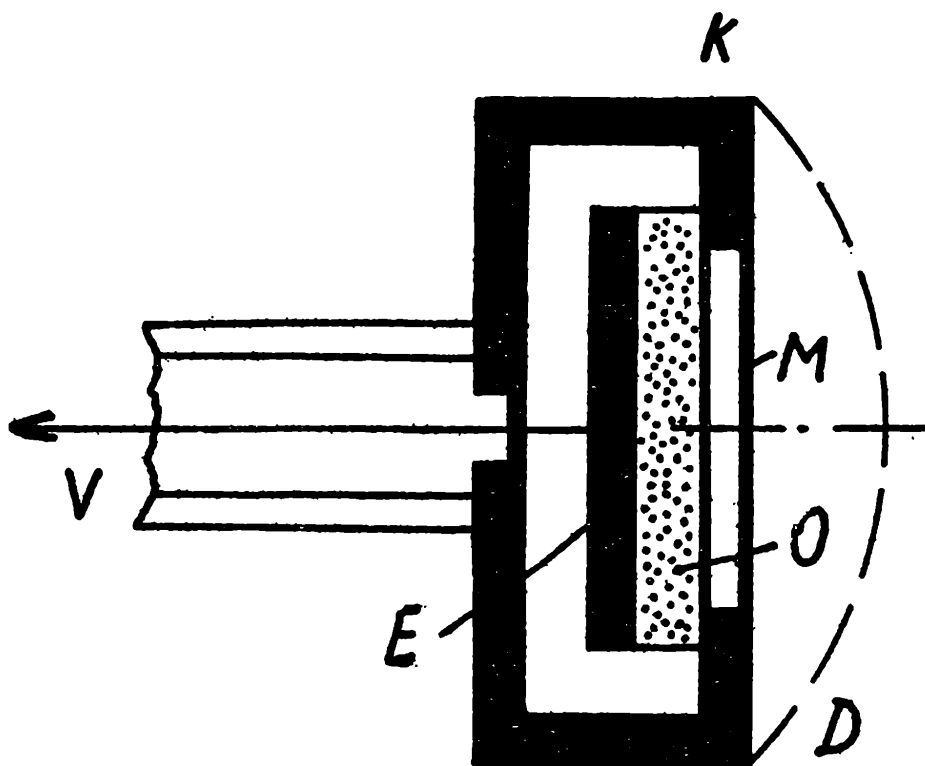
Polárnost dielektrika není podmínkou vytvoření stálého elektretu, možno použít i nepolární dielektrika jako parafin, některé druhy silonu aj.

Při gradientu polarizujícího pole, který je menší než 10 kV/cm, dostáváme termoelektrety jen s heteronáboji.

Přes značné experimentální zkušenosti je teorie elektretového jevu stále značně neurčitá a názory jsou nejednotné. Stávající hypotézy můžeme rozdělit do dvou skupin:

a) *teorie modelové* — vychází z představ o molekulární stavbě dielektrik,

b) *teorie fenomenologické* — studují jevy v termoelektretech bez vztahu k molekulární stavbě dielektrik.



Obr. 1. Elektretový mikrofón. K - kostra mikrofónu, M - membrána, E zadní elektroda, D drátěný kryt, V výstupní vedení k zesilovači, O elektret.

Tyto teorie nelze v krátké stati vyložit. Uvedeme jen, že termoelektrický efekt se většinou objasňuje jako výsledek několika polarizačních dějů (mechanismů), zejména na základě iontové polarizace, dipólové polarizace a přechodu iontů z mezery dielektrikum—elektroda na dielektrikum.

Teorie fenomenologická předpokládá, že elektret má značně velkou zbytkovou polarizaci, která se časem zmenšuje a doba jejího zániku podmiňuje životnost elektretu.

d) Technické aplikace termoelektretů

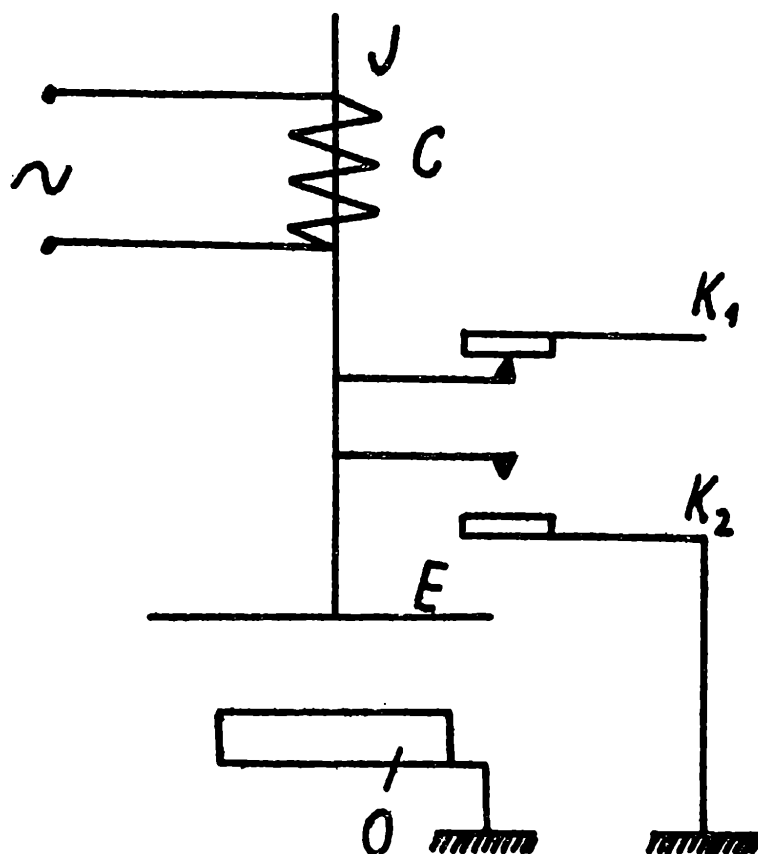
Od doby získání prvního elektretu až do dneška probíhá výzkum o možnostech jejich využití. Největší nesnáze, které brzdí jejich použití v širší technické praxi, spočívají v nízkých hodnotách efektivních nábojů, v jejich malé stabilitě časové (životnost nejvýše několik roků) a také ve velmi vysokém vnitřním odporu elektretových zařízení.

Životnost se zvyšuje jejich zkratováním při uskladnění. Elektrety mají většinou tvar malých kotoučků o průměru několika cm a o výšce asi 2 až 4 mm. Polarizační napětí pro tyto vzorky je asi 2000 až 4000 V.

K dalším výzkumům jejich aplikací přispívá nyní výrazně snaha o miniaturizaci.

Termoelektrety lze používat hlavně v těchto případech:

a) při konstrukci zařízení vyžadujících ke své funkci permanentní elektrické pole;



Obr. 2. Elektretový generátor napěťových pulsů. C - pohyblivá cívka, J - jádro, K₁ - vysokonapěťový kontakt, K₂ - zemnicí kontakt, E - elektroda, O - elektret.

b) při konstrukci zařízení využívajících změn pole vlivem různých činitelů.

Do první skupiny náleží různá zařízení měřicí techniky, generátory stejnosměrného, střídavého i pulsuujícího proudu, mikrofony, sluchátka a reproduktory apod.

Do druhé skupiny patří různé indikátory změn fyzikálních veličin, jako např. změn vlhkosti, intenzity radioaktivního záření atd.

V měřicí technice bylo elektretů použito při konstrukci např. elektrometrů a voltmetrů strunového typu se zrcátkovým čtením. V těchto přístrojích elektret nahrazuje v podstatě otáčivou nebo i stabilní cívečku.

Při použití elektretů pro výrobu vysokého napětí i v jiných případech se používá kapacitních změn podle vztahu $V = Q/C$, kde Q je náboj elektretu. V je napětí a C je proměnná kapacita.

Elektretový mikrofon je jedno z prvních zařízení, kde bylo prakticky využito elektretového jevu. Je velmi jednoduché konstrukce a v podstatě má dvě hlavní součástky: termoelektret s kovovým podkladem (elektrodou) a membránu upevněnou v plášti. Elektretový mikrofon pracuje jako mikrofon kapacitní. Jeho výstupní napětí je závislé na kapacitě, která jej zatěžuje (obr. 1).

Nejnověji se konstruují velice lehké mikrofony, kde membrána je nahrazena tenkým elektretovým vláknem. V těchto zařízeních nejsou žádná vinutí, která jsou jinak nutnou součástí sluchátek nebo např. elektrodynamických mikrofonů. V tělísku elektretu bývají otvory, aby vzduch nekladl odpor při kmitání membrány.

Na obr. 2 je schéma elektretového generátoru napěťových pulsů. Pohyblivá elektroda se cívkou přibližuje a oddaluje od elektretu a náboj se předává kontaktu K_1 .

V praxi se zatím elektrety vyskytují velmi málo vzhledem k tomu, že stále není plně objasněna podstata elektretového stavu a jeho vlastností a proto i možnosti jejich ovlivňování ve směrech pro praxi příznivějších jsou omezené.

Šíření vln v jednorozměrném kontinuu

Ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., Vyškov

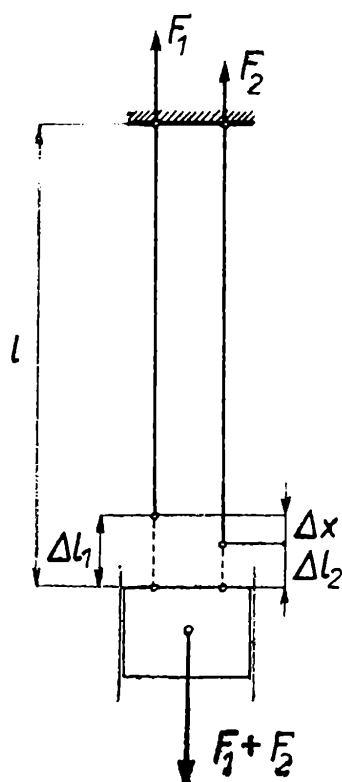
(Dokončení)

Úloha:

V hlubinných dolech se v poslední době užívá tzv. několika lanových těžních strojů, u nichž z pevnostních důvodů není těžní klec tažena jedním lanem, nýbrž několika paralelními lany. Napětí v těžních lanech (resp. napínající síly) u těchto strojů musí být z bezpečnostních důvodů vyrovnána, tj. musí být ve všech lanech stejná. Jedna z metod pro vyrovnání napětí využívá závislosti rychlosti šíření příčných vln v laně na napětí lana. Nechť jde v konkrétním případě o dvoulanový těžní stroj, jehož lana mají délku l , nosný průřez S , modul pružnosti E a délkovou hustotu μ . Na spodním konci lan je zavěšena těžní klec tak, že po zavěšení klece jsou obě lana přesně stejně dlouhá. Jestliže k n -násobnému proběhnutí příčné vlny (impulsu) prvním lanem byla naměřena doba T_1 a druhým lanem doba T_2 , určete

- o kolik je nutno zkrátit jedno lano vzhledem ke druhému, aby nastalo vyrovnání napětí v lanech,
- napětí v lanech před vyrovnáním napětí a po jejich vyrovnání,
- hmotnost těžní klece.

Při řešení zanedbejte vliv vlastní tíhy lan vzhledem k tíze zavěšené klece a lana předpokládejte dokonale ohebná. Řešte nejprve obecně



Obr. 4

a pak pro hodnoty $l = 500$ m, $S = 324$ mm², $E = 0,90 \cdot 10^6$ kp cm⁻², $\mu = 3,08$ kg m⁻¹, $T_1 = 37,80$ s, $T_2 = 41,75$ s, $n = 10$.

Řešení:

a) Pro rychlost šíření příčných vln v dokonale ohebném laně platí stejný výraz jako pro strunu (21). Jelikož zanedbáváme vliv vlastní tíhy lana, bude $F = \text{konst.}$ Příčný impuls se tedy bude šířit stálou rychlostí a k n -násobnému proběhnutí lanem bude potřebovat čas

$$T = \frac{nl}{c}. \quad (22)$$

Dosazením do tohoto výrazu z výrazu (21) pro sílu F napínající lano dostáváme

$$F = \mu \left(\frac{nl}{T} \right)^2$$

V prvním laně bude tedy působit síla

$$F_1 = \mu \left(\frac{nl}{T_1} \right)^2 \quad (23)$$

v druhém laně síla

$$F_2 = \mu \left(\frac{nl}{T_1} \right)^2 \quad (24)$$

Tyto síly jsou nestejně proto, že původně nestejně dlouhá lana se zavěšením klece protáhla na stejnou délku a to první lano o Δl_1 a druhé lano o Δl_2 (viz obr. 4). Pro síly F_1 a F_2 z Hookova zákona dostáváme

$$F_1 = \frac{\Delta l_1}{l} ES, \quad (25)$$

$$F_2 = \frac{\Delta l_2}{l} ES. \quad (26)$$

Pak pro rozdíly sil ze vztahu (23), (24) a (25), (26) dostáváme

$$F_1 - F_2 = \mu n^2 l^2 \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right), \quad (27)$$

$$F_1 - F_2 = \frac{ES}{l} \Delta x, \quad (28)$$

kde $\Delta x = \Delta l_1 - \Delta l_2$ je délka, o kterou je volně visící (klecí nezatížené) druhé lano delší než první lano. Je to tedy délka, o kterou musíme druhé lano zkrátit, aby nastalo vyrovnání napětí v obou lanech. Z rovnic (27), (28) pro tuto délku dostáváme

$$\Delta x = \frac{\mu n^2 l^3}{ES} \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} \right).$$

Číselně vychází $\Delta x = 0,171$ m.

b) Před vyrovnáním byla v lanech napětí

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S}, \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{S}.$$

Dosazením z (23) a (24) dostáváme

$$\sigma_1 = \frac{\mu}{S} \left(\frac{nl}{T_1} \right)^2$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu}{S} \left(\frac{nl}{T_2} \right)^2$$

Po vyrovnání byla v lanech napětí

$$\sigma_1' = \sigma_2' = \frac{F_1 + F_2}{2S} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Číselně vychází $\sigma_1 = 1,667 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$, $\sigma_2 = 1,366 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$ a $\sigma_1' = \sigma_2' = 1,516 \cdot 10^8 \text{ N m}^{-2}$.

c) Celková síla v lanech musí být rovna tíhové síle klece G , tedy

$$G = F_1 + F_2 = S (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Odtud pro hmotnost klece vychází

$$m = \frac{G}{g} = \frac{S}{g} (\sigma_1 + \sigma_2) ;$$

číselně $m = 1,00 \cdot 10^4$ kg.

Zadaná úloha vznikla z konkrétního výzkumného úkolu zjednodušením podmínek řešení. Při přesnějším řešení je nutno počítat s tíhou lana, která spojitě zvětšuje sílu v laně (měřeno od závěsu klece), a s nedokonalou ohebností lana. Oba tyto vlivy zvětšují rychlost šíření. Vážný zájemce o tuto problematiku najde informace v článku [1]. Šíření vln v laně také ovlivňuje tlumení v laně.

Literatura:

- [1] Vybíral, B.: Vyrovňávání napětí v těžních lanech u několikanových těžních strojů metodou příčné vlny, *Strojírnoství* 19 (1969), č. 4, str. 222–226.

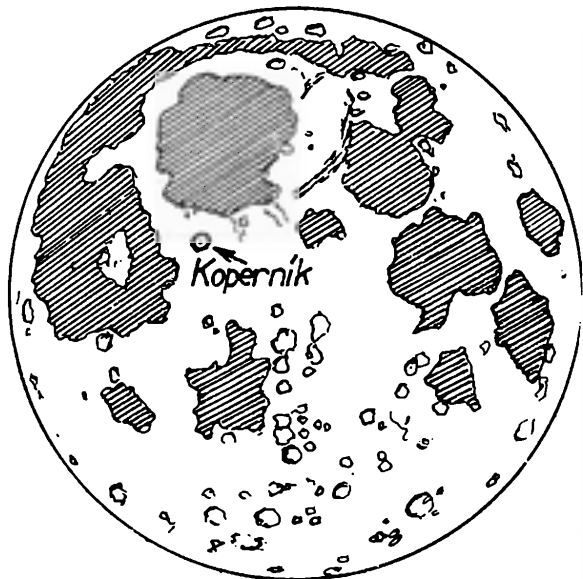
astronomie

Kráter Mikuláše Koperníka

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

První názvosloví měsíčních útvarů vzniklo v polovině 17. století. Gdaňský astronom Jan Hevelius (1611 až 1687; jeho latinizované příjmení vzniklo zřejmě ze jména Havel nebo Havelka) sestavil a po šestiletém pozorování Měsíce v r. 1647 vydal mapu Měsíce, na níž pojmenoval některá „moře“ a pohoří. Jména měsíčních pohoří, pro něž použil pozemská pojmenování (Alpy, Apeniny, Karpaty) se vžila a měsíční pohoří je mají dodnes. Hevelius uvažoval o tom, že pojmenuje některé krátery na Měsíci po učencích, kteří svou prací přispěli k rozvoji astronomie, ale upustil od toho z obavy, aby se někteří z tehdy žijících vědců necítili dotčeni.

Tyto obavy nesdílel Hevelius vrstevník italský astronom Giovanni B. Riccioli (1598 až 1671), který na mapě nakreslené F. M. Grimaldim a vydané v roce 1651 pojmenoval krátery jmény Aristarcha, Koperníka,



Obr. 1. Mapka povrchu Měsíce s kráterem Koperník.

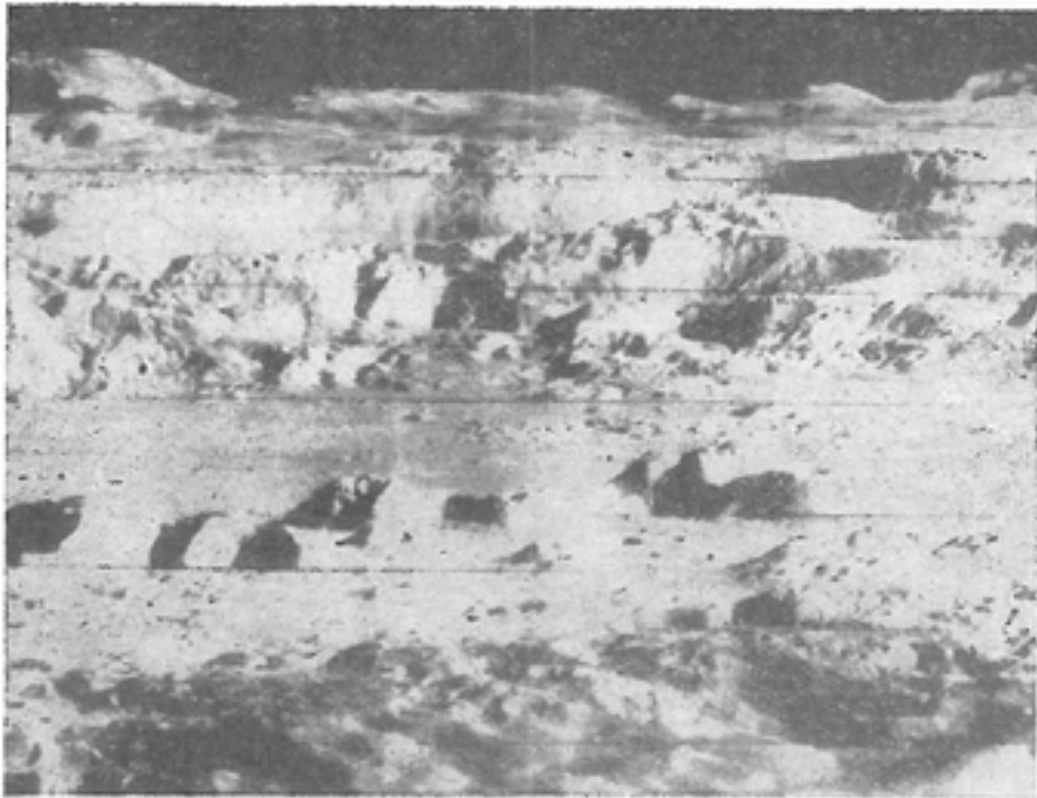


Obr. 2. Fotografie kráteru Koperník z hvězdárny Pic-du-Midi.

Keplera, Tycho Brahea a dalších astronomů, přičemž neváhal použít i své vlastní jméno a jméno autora mapy Grimaldiho.

O významu, jaký autor mapy přikládal Mikuláši Koperníkovi (na mapách se jméno slavného polského astronoma obvykle uvádí jako Copernicus) svědčí to, že po něm pojmenoval jeden z velkých a nápadných kráterů. Poloha kráteru Koperník při pohledu na Měsíc triedrem nebo jiným nepřevracajícím dalekohledem je zřejmá ze schematické mapky Měsíce (obr. 1). Kráter je vlastně velké kruhové pohoří v severovýchodní části Měsíce na rozhraní Oceánu bouří (Oceanus Procellarum) a Moře dešťů (Mare Imbrium). Průměr kráteru je 90 km, hory na jeho okraji dosahují výšky až 3700 m. Za úplňku můžeme vidět intenzívně jasné pruhy, vybíhající radiálně z tohoto kráteru (podobné pruhy jsou i u jiných velkých kráterů). Na obr. 2 je fotografie kráteru Koperník, zhotovená na francouzské hvězdárně na hoře Pic-du-Midi. Na fotografii je zřetelně vidět hory, tyčící se uprostřed kráteru. Výška těchto centrálních hor je až 730 metrů. Pod kráterem je na snímku (pořízeném převracajícím dalekohledem) zachycena část měsíčního pohoří Karpat a část okrajového valu obrovského měsíčního moře — Moře dešťů (Mare Imbrium).

Dno kráteru je velmi členité a kromě hor jsou v něm četné menší krátery. Podrobný snímek části kráteru Koperník je na obr. 3. Tento snímek nebyl pořízen dalekohledem, ale byl získán umělou družicí Měsíce Lunar Orbiter-2, která byla vypuštěna 11. října 1966. Snímek byl zho-



Obr. 3. Panoramatický snímek dna a okrajových hor kráteru Koperník.

toven 23. listopadu z výšky 45 km, přičemž kamera byla namířena k severu pod úhlem 17° . Na obzoru za okrajovým pohořím kráteru jsou na snímku zachyceny hory Gay-Lussacova horstva, které je předhůřím měsíčních Karpat.

Podrobné snímky pořízené umělými družicemi Měsíce umožnily přesné mapování jeho povrchu. Pokud se týká teorií o vzniku kráterů, předpokládá jedna část vědců, že kráter Koperník vznikl při dopadu obrovského meteoritu, zatímco jiní uvažují, že Koperník a také většina ostatních kráterů na Měsíci vznikla v dávných dobách při vulkanické činnosti na Měsíci. Definitivní odpověď na tuto dosud nerozřešenou otázku přinese další průzkum Měsíce.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení loňské soutěže Rozhledů

Matematika

4. Jestliže prvočíslo p_1 zvětšíme o jeho ciferný součet, dostaneme prvočíslo p_2 . Přitom ciferný součet čísla p_2 je dvakrát větší než ciferný součet čísla p_1 . Najděte všechny dvojice dvojciferných prvočísel p_1, p_2 . (Došla 4 řešení) Stanislav Horák

Řešil Ivo Mrázek, 1. B SPŠ chem., Ústí n. L.

Položme

$$p_1 = 10x + y, \quad p_2 = 10u + v,$$

kde

$$0 < x \leq 9, \quad 0 < y \leq 9, \quad 0 < u < 9, \quad 0 < v \leq 9 \quad (\text{a})$$

Ciferné součty prvočísel p_1, p_2 jsou po řadě

$$x + y, \quad u + v.$$

Podle textu úlohy platí

$$10x + y + x + y = 10u + v \quad (\text{b})$$

$$2(x + y) = u + v \quad (\text{c})$$

Z této soustavy rovnic dostaneme:

$$x = u \quad (\text{d})$$

a dosazením z této rovnice do některé z rovnic (b), (c) obdržíme

$$v = x + 2y \quad (\text{e})$$

Poněvadž jde o prvočísla větší než 2, musí být čísla y a v lichá. Z rovnice (e) z toho pak následuje, že číslo $x = u$ musí být také liché. A posléze, důsledek vztahu (e) a třetího vztahu (a) je

$$y = 1, 3.$$

Pro lepší přehled sestavíme tabulku. Poslední řádek každého sloupce představuje výsledná čísla.

y	1	1	1	1	3	3
x	1	3	5	7	1	3
u	1	3	5	7	1	3
v	3	5	7	9	7	9
	11,13	31,35	51,57	71,79	13,17	33,39

Z toho vyhovují jedině tyto dvojice: 11, 13; 13, 17; 71, 79.

5. Je dána krychle $ABCDEFGH$ a uvnitř čtyřstěnu $BGEF$ je dán bod X , jehož poměr vzdáleností od stěn BFG , EFG , BEF a BEG je $m : n : p : q$. Vypočtěte vzdálenost bodu X od vrcholu H .

(Došlo 6 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Václav Janiš, G Rožnov p. Radhoštěm

Z daného vyplývá, že vzdálenosti bodu X od stěn BFG , EFG , BEF a BEG jsou po řadě

$$mx, nx, px, qx, \quad (1)$$

kde x je nějaké kladné číslo, které teď vypočítáme. Obsah čtyřstěnu $BGEF$ označíme V a obsahy čtyřstěnu $BFGX$, $EFGX$, $BEFX$, $BEGX$ označíme po řadě V_1 , V_2 , V_3 , V_4 . Je přirozené, že

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4. \quad (2)$$

Ale

$$V = \frac{a^3}{6}, \quad V_1 = \frac{a^2 mx}{6}, \quad V_2 = \frac{a^2 nx}{6}, \quad V_3 = \frac{a^2 px}{6}, \quad V_4 = \frac{a^2 qx \sqrt{3}}{6}$$

Tyto hodnoty dosadíme do (2) a po kratší úpravě obdržíme

$$x = \frac{a}{m + n + p + q \sqrt{3}} \quad (3)$$

Dosadíme-li za x do výrazů (1), vypočteme vzdálenosti bodů X od stěn čtyřstěnu. První z těchto vzdáleností jsou zároveň vzdálenosti bodu X od stěn krychle.

Bodem X vedme nyní roviny rovnoběžné se stěnami $ABCD$, $BCGF$, $ABFE$. Tyto roviny oddělí od krychle kvádr, jehož rozměry jsou

$$a - mx = \frac{a(n + p + q \sqrt{3})}{m + n + p + q \sqrt{3}}$$

$$a - nx = \frac{a(m + p + q \sqrt{3})}{m + n + p + q \sqrt{3}}$$

$$a - px = \frac{a(m + n + q \sqrt{3})}{m + n + p + q \sqrt{3}}$$

Úsečka HX je tělesovou úhlopříčkou tohoto kváдру. A máme:

$$\begin{aligned} d^2 = HX^2 &= (a - mx)^2 + (a - nx)^2 + (a - px)^2 = \\ &= 3a^2 - 2ax(m + n + p) + x^2(m^2 + n^2 + p^2), \end{aligned}$$

což po dosazení z rovnice (3) a po kratší úpravě dá

$$d = \frac{a \sqrt{9q^2 + 2(mn + mp + np) + 4q \sqrt{3}(m + n + p)}}{m + n + p + q \sqrt{3}}$$

a to je žádaná vzdálenost.

6. Nechť je každému reálnému číslu x přiřazeno nezáporné číslo $f(x)$ (tj. f je nezáporná funkce definovaná na množině všech reálných čísel) a nechť je splněna tato podmínka: Existuje kladné číslo C tak, že pro každou konečnou množinu

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

reálných čísel platí

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k) \leq C. \quad (*)$$

Dokažte, že existuje reálné číslo α , pro které $f(\alpha) = 0$.

(Došla 4 řešení)

Jaroslav Morávek

Řešení autorovo: Položíme-li v podmínce (*) $k = 1$, dostaneme z ní tento jednoduchý důsledek: Platí $f(x) \leq C$ pro libovolné reálné číslo x .

K důkazu tvrzení naší úlohy budeme potřebovat následující pomocnou větu:

Lemma 1. Nechť d je libovolné kladné číslo a položme $R_d = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > d\}$, tj. R_d je množina všech reálných čísel x , pro něž platí $f(x) > d$. Množina R_d je konečná.

Důkaz: Zvolme přirozené číslo k_0 tak, aby platilo $k_0 \geq \frac{C}{d}$. Ukážeme, že R_d obsahuje méně než k_0 prvků (eventuelně žádný prvek). Skutečně, kdyby R_d obsahovala k_0 různých prvků y_1, y_2, \dots, y_{k_0} , platilo by pro ně

$$f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_{k_0}) > k_0 \cdot d \geq C,$$

což je ve sporu s podmínkou (*). Důkaz lemmatu je dokončen.

Dále budeme při důkazu podstatně využívat známého vyjádření reálných čísel v desetinném (dekadickém) zápisu. Omezíme se pouze na čísla z otevřeného intervalu $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Každé takové číslo lze zapsat ve tvaru nekonečného desetinného rozvoje

$$x = 0, c_1 c_2 c_3 \dots c_n \dots \quad (1)$$

kde $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \dots$ je posloupnost dekadických cifer. Všimněme si však, že vyjádření (1) není obecně jednoznačné, např. různé dekadické zápisy

$$0,15\ 000 \dots$$

a

$$0,14\ 999 \dots$$

znamenaají stejné číslo $\frac{15}{100}$. Abychom tuto „nepříjemnost“ odstranili,

omezíme se v našich úvahách pouze na ta reálná čísla x intervalu $(0, 1)$, v jejichž dekadickém zápisu se nevyskytuje cifra 0. Příslušnou množinu označíme A , tj.

$A = \{x = 0, c_1 c_2 \dots \in (0, 1) \mid \text{v zápisu (1) je } c_j \neq 0 \text{ pro } j = 1, 2, \dots\}$. Každé číslo x množiny A tedy připouští právě jedno vyjádření ve tvaru (1). O množině A platí následující pomocné tvrzení.

Lemma 2. Prvky množiny \mathbf{A} nelze uspořádat do nekonečné prosté posloupnosti.

Důkaz: Tvzení lemmatu je zřejmě ekvivalentní s následujícím tvrzením. Ke každé nekonečné prosté posloupnosti prvků z \mathbf{A} existuje nový prvek z \mathbf{A} , který do této posloupnosti nepatří. Předpokládejme tedy, že je dána nekonečná posloupnost

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \quad (2)$$

různých prvků z \mathbf{A} ; ukážeme, že v \mathbf{A} existuje prvek, který není členem posloupnosti (2). K důkazu použijeme existenci jednoznačného vyjádření čísel množiny \mathbf{A} ve tvaru (1). Dostáváme

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, c_1^{(1)} c_2^{(1)} c_3^{(1)} \dots c_n^{(1)} \\ x_2 &= 0, c_1^{(2)} c_2^{(2)} c_3^{(2)} \dots c_n^{(2)} \\ x_3 &= 0, c_1^{(3)} c_2^{(3)} c_3^{(3)} \dots c_n^{(3)} \\ &\vdots \\ x_n &= 0, c_1^{(n)} c_2^{(n)} c_3^{(n)} \dots c_n^{(n)} \end{aligned}$$

Nyní zvolíme posloupnost cifer

$$\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \dots, \hat{c}_n,$$

tak, aby platilo

$$\hat{c}_1 \in \{1, 2, \dots, 9\} - \{c_1^{(1)}\}, \hat{c}_2 \in \{1, 2, \dots, 9\} - \{c_2^{(2)}\},$$

$$\hat{c}_3 \in \{1, 2, \dots, 9\} - \{c_3^{(3)}\},$$

obecně

$$\hat{c}_n \in \{1, 2, \dots, 9\} - \{c_n^{(n)}\}$$

a položíme

$$\hat{x} = 0, \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{c}_3 \dots \hat{c}_n.$$

Zřejmě platí $\hat{x} \in \mathbf{A}$, přičemž \hat{x} není členem posloupnosti (2). Důkaz lemmatu je dokončen.

Po těchto přípravných úvahách můžeme přistoupit k důkazu věty z úlohy.

Důkaz: Ukážeme, že číslo α s požadovanou vlastností existuje dokonce v množině \mathbf{A} . Důkaz posledního tvrzení provedeme nepřímou. Předpokládejme, že pro každé a ($a \in \mathbf{A}$) platí $f(a) > 0$ a tedy

$$0 < f(a) \leq C.$$

Nechť n je libovolné přirozené číslo ($n = 1, 2, \dots$) a položme

$$\mathbf{A}_n = \left\{ a \in \mathbf{A} \mid \frac{C}{n+1} < f(a) \leq \frac{C}{n} \right\},$$

tj. A_n je množina všech těch čísel a z A , pro něž platí $\frac{C}{n+1} < f(a) \leq \leq \frac{C}{n}$. Z lemmatu 1 vyplývá, že množina A_n je konečná pro $n = 1, 2, \dots$. Dále lze bez obtíží ukázat, že platí

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \quad (3)$$

a

$$A_{n'} \cap A_{n''} = \emptyset \quad \text{jestliže} \quad n' \neq n'', \quad (4)$$

(tj. systém $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tvoří disjunkttní rozklad množiny A). Dále učiníme doplňující předpoklad, že všechny množiny A_j jsou neprázdné (v případě, že některé z množin $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ jsou prázdné, lze postupovat zcela analogicky) a píšeme

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_1^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}\} \\ A_2 &= \{a_1^{(2)}, \dots, a_{r_2}^{(2)}\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_1^{(n)}, \dots, a_{r_n}^{(n)}\} \end{aligned}$$

Nyní platí zřejmě na základě (3), (4)

$$A = \{a_1^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_{r_2}^{(2)}, \dots, a_1^{(n)}, \dots, a_{r_n}^{(n)}, \dots\}$$

takže nekonečná prostá posloupnost

$$a_1^{(1)}, \dots, a_{r_1}^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_{r_2}^{(2)}, \dots, a_1^{(n)}, \dots, a_{r_n}^{(n)}, \dots$$

obsahuje všechny prvky množiny A . Závěr, ke kterému jsme došli, je však ve sporu s tvrzením lemmatu 2, což dokončuje důkaz.

Oprava:

V čísle 4 doplňte na str. 167 až 171 obrázky č. 1 až 4 těmito texty:

Obr. 1. Televízna snímacia elektrónka — ikonoskop.

1 - mozaika, 2 - elektrónová dýza, 3 - vychylovacie cievky, 4 - urýchľovacia elektróda.

Obr. 2. Jednoduchý obrazový raster.

Obr. 3. Obrazový raster pri prekladanom riadkovaní.

a) párna polsnímka, b) nepárna polsnímka.

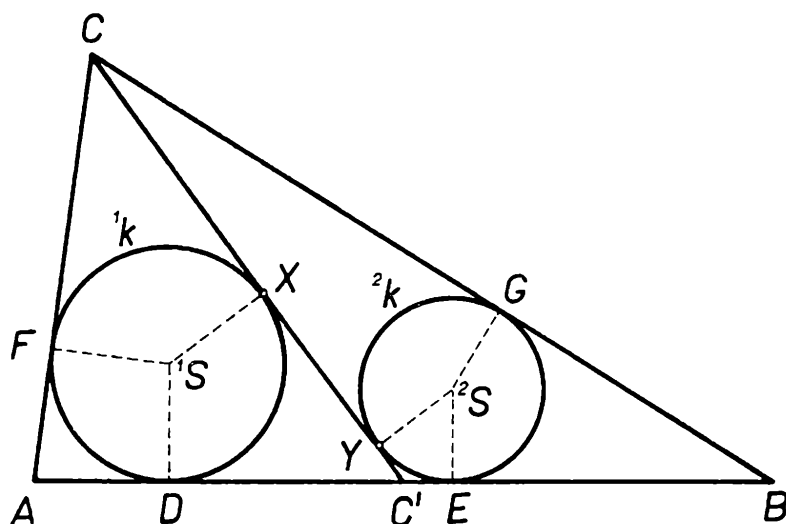
Obr. 4. Jednoduchá synchronizačná zmes.

1 - riadkové synchronizačné impulzy, 2 - snímkové synchronizačné impulzy.

nejmladším čtenářům

1. V obecném trojúhelníku ABC (obr. 1) je vedena těžnice $t_c = CC'$ a do vzniklých trojúhelníků ACC' , BCC' jsou vepsány kružnice 1k a 2k . Určete vzdálenost XY dotykových bodů X , Y těchto kružnic na těžnici t_c .

Řešte nejprve samostatně a pak si výsledek překontrolujte na str. 285.



Obr. 1

O. S.

2. Máme dvě soustředné plochy kulové a dvě různoběžné roviny. Průsečnice těchto rovin je tečnou k té kulové ploše, která má menší poloměr.

a) Kolik je možných poloh těchto dvou rovin, vzhledem ke kulovým plochám (při splnění daných podmínek)?

b) Na kolik oblastí bude prostor těmito plochami rozdělen? (Pod slovem plocha budeme rozumět jak plochu kulovou, tak i rovinu.)

S. H

olympiády

0 jedné úloze ze XVI. ročníku M0

JIŘÍ MÍDA, Brandýs n. L.

Každoročně je v Matematické olympiádě zadáváno celkem přes 60 úloh. Mnohé z těchto úloh by si zasloužily, aby byly nejen řešeny, ale aby byly řešiteli považovány za základ pro formulování dalších a to

obecnějších úloh. Na Mezinárodních matematických olympiádách vznikla dokonce tradice zvlášť hodnotit žákovská zobecnění předložených úloh.

Někdy se zobecnění úlohy přímo nabízí. Tak tomu je např. u následující úlohy ze XVI. ročníku MO kategorie D:¹⁾

Je dána tabulka přirozených čísel, která připomíná tabulku na tiketu Sportky:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Jestliže vybereme z tabulky sedm čísel tak, abychom z každého řádku i z každého sloupce vybrali jediné číslo, potom je součet vybraných čísel stále týž. Dokažte. (Jeden možný výběr je vyznačený v tabulce.)

Tato úloha nepředpokládá vlastně žádné matematické znalosti. K jejímu řešení stačí pouze dobrý nápad.

Čísla lze z tabulky vybírat následujícím postupem. Zvolíme si jednu řádku a na každé číslo v ní napsané položíme jednu minci. Potom jednu minci v tomto řádku ponecháme a ostatní posuneme ve směru sloupců tak, aby v každém řádku ležela právě jedna. Čísla, která jsou zakryta mincemi, pak splňují požadavky výběru. Obráceně si lze snadno představit o každé skupině sedmi čísel, které splňují podmínky výběru, že byla vybrána popsáním způsobem.

Výše uvedený postup je samozřejmě možno obměnit tak, že v některém sloupci každé číslo zakryjeme jednou mincí. Tyto mince pak posuneme ve směru řádků tak, aby v každém sloupci byla právě jedna.

Nejjednodušší se zdá vyjít od prvního řádku. Tak je úloha řešena v brožurách [1] a [2]. Vyjděme však třeba od řádku čtvrtého. Když všechny mince leží ve čtvrtém řádku, je součet jimi zakrytých čísel

$$22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 = 175.$$

Jestliže jednu minci posuneme do třetího řádku, zmenší se součet čísel zakrytých mincemi o 7, podobně posunem další mince do druhého řádku se součet zmenší o $2 \cdot 7$ a posunutím další jiné mince do prvního řádku se součet zmenší o $3 \cdot 7$. Posuny mincí do pátého, šestého a sedmého řádku se součet zvětšuje o 7 , $2 \cdot 7$ a $3 \cdot 7$. Z toho vyplývá, že součet čísel vybraných tak, jak žádá úloha, je vždy

$$175 + (-3 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3) \cdot 7 = 175.$$

Každého asi napadne, že nejspíše v obdobných tabulkách přirozených čísel od 1 do k^2 , kde $k > 1$ je dané přirozené číslo, z nichž se bude ob-

¹⁾ Dnes je tato kategorie označena Z.

dobným způsobem vybírat k čísel, bude asi součet vybraných čísel také vždy týž. Přímo se tedy nabízí úloha, která byla zadána v roce 1955 v XVIII. Moskevské matematické olympiádě v kategorii žáků IX. tříd (viz [3]). Její text zní:

Čísla $1, 2, \dots, k^2$ jsou napsána ve čtvercové tabulce

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \dots k \\ k+1 & k+2 & \dots 2k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (k-1)k+1 & (k-1)k+2 & \dots k^2 \end{array}$$

Z tabulky vybereme libovolné číslo a škrtneme v tabulce sloupec i řádku, v nichž toto číslo leželo. Totéž provedeme se zbývajícím tabulkou $(k-1)^2$ čísel. Tak pokračujeme celkem k -krát. Určete součet vybraných čísel.

Analogickým způsobem jako při řešení úlohy z čs. MO se snadno spočte, že hledaný součet je

$$\frac{1}{2} k (k^2 + 1).$$

Je třeba ovšem znát vzorec

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1),$$

který platí pro každé přirozené číslo n .

Jedno možné zobecnění máme za sebou a téměř samo se nabízí další. Zdalipak je možné k danému přirozenému číslu $k > 1$ sestavit čtvercovou tabulku z k^2 přirozených čísel nejdoucích bezprostředně za sebou, přičemž by zase byl konstantní součet každých k čísel vybraných tak, že z každého řádku i z každého sloupce je vybráno právě jedno. Položenou otázku lze ještě dále rozšířit: Nelze takové tabulky sestavovat i z čísel celých, racionálních či reálných? Pripusťme též možnost, že všechna čísla v tabulce nemusí být různá. Tím se ovšem připouští také velmi „fádní“ řešení, kdy všechna čísla v tabulce jsou táž.

Na tyto otázky poměrně snadno kladně odpovíme, uvědomíme-li si znovu výše uvedený postup vybírání čísel z tabulky. Chtějme sestavit takovou tabulku z k^2 reálných čísel. Do některé řádky, třeba první, napíšeme libovolnou k -tici reálných čísel. Každou další řádku pak získáme přičítáním téhož reálného čísla k číslům v řádce, kterou jsme zvolili. Šlo by jistě také takto tabulku sestavovat po sloupcích. Příkladem hledané tabulky pro $k = 4$ je tabulka:

$$\begin{array}{cccc} -5 & 2,5 & -12 & \sqrt{2} \\ -2 & 5,5 & -9 & 3 + \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 7,5 - \sqrt{2} & -7 - \sqrt{2} & 5 \\ -6 & 1,5 & -13 & -1 + \sqrt{2} \end{array}$$

Lze samozřejmě žádat sestavení tabulky nejen pro dané k , ale též tak, aby součet vybraných čísel bylo dané číslo. Zkuste např. sestavit tabulku pro $k = 5$ a součet vybraných čísel rovný 38.

K úplnému vyřešení posledních problémů je třeba zjistit, zda neexistují tabulky, které mají požadované vlastnosti a které přitom nelze sestavit způsobem, jenž je popsán v předchozím odstavci. Takové tabulky neexistují, neboť platí následující věta V:

Budiž

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{1i} & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{2i} & a_{2n} \\
 & & & \\
 a_{k1} & a_{k2} & a_{ki} & a_{kn} \\
 & & & \\
 a_{n1} & a_{n2} & a_{ni} & a_{nn}
 \end{array} \tag{1}$$

tabulka čísel ($n > 1$), v níž platí: Vybereme-li z ní n čísel tak, aby z každého řádku a z každého sloupce bylo vybráno právě jedno, pak součet vybraných čísel je vždy týž.

Potom existují čísla m_2, m_3, \dots, m_n taková, že platí

$$\begin{array}{lll}
 a_{21} = a_{11} + m_2, & a_{22} = a_{12} + m_2, & a_{2n} = a_{1n} + m_2, \\
 a_{31} = a_{11} + m_3, & a_{32} = a_{12} + m_3, & a_{3n} = a_{1n} + m_3, \\
 & & \\
 a_{n1} = a_{11} + m_n, & a_{n2} = a_{12} + m_n, & a_{nn} = a_{1n} + m_n.
 \end{array}$$

Dokažme větu V. Uvažujme v tabulce (1) k -tou řádku ($1 < k \leq n$) Označme m_k takové číslo, pro něž platí

$$a_{k1} = a_{11} + m_k. \tag{2}$$

Zvolme libovolné přirozené číslo i takové, že $1 < i \leq n$. Vyberme nyní z tabulky (1) dvě skupiny n čísel tak, aby v každé z těchto skupin byla vždy jedním číslem zastoupena každá řádka a každý sloupec, přičemž necht' první skupina obsahuje čísla a_{11}, a_{ki} a druhá skupina čísla a_{k1}, a_{1i} . V dalších číslech necht' se obě skupiny neliší a necht' součet těchto $n - 2$ čísel je s . Pak z toho, že součet čísel v každé z obou skupin je podle předpokladu týž, plyne

$$(a_{11} + a_{ki}) + s = (a_{k1} + a_{1i}) + s.$$

Podle (2) odtud dostáváme

$$a_{ki} + (a_{11} + s) = (a_{1i} + m_k) + (a_{11} + s), \tag{3}$$

tj.

$$a_{ki} = a_{1i} + m_k. \tag{4}$$

Věta V je dokázána.

Vybraná čísla z tabulek jsme dosud sčítali. Proč by však místo součtu vybraných čísel nebylo možno uvažovat součin vybraných čísel? I pro

tento případ lze sestavovat tabulky s obdobnými vlastnostmi, jako tomu bylo v předchozích; odstavcích. Např.

9	6	15
3	2	5
12	8	20

je tabulka, pro niž součin každých tří čísel vybraných tak, že z každého sloupce i řádku je vybráno právě jedno číslo, je 360. Takovou tabulku dostaneme, budeme-li při jejím sestavování postupovat zcela analogicky, jako když šlo o sčítání. Jedna řádka se zvolí a každá další řádka se dostane znásobením všech čísel ve zvolené řádce týmž číslem. Šlo by jistě také užívat při sestavování tabulky sloupců. Analogie však není úplná. Věta V' analogická větě V totiž neplatí, což je např. vidět na tabulce:

7	13	-4
0	0	0
5	2	0

Budeme-li však uvažovat jen tabulky obsahující vesměs čísla různá od nuly, pak věta V' bude platit. Dokažte větu V' pro tento případ. Zřejmě stačí v důkaze věty V všude nahradit znaménko $+$ znaménkem $-$. Platnost věty V' závisí na tom, zda po této záměně znamének plyne z rovnosti (3) rovnost (4).

Se zobecňováním úlohy nejsme však stále u konce. Nahrazení požadavku, aby součet vybraných čísel byl konstantní, požadavkem, aby byl konstantní součin vybraných čísel, naznačuje přechod k abstraktnějšímu stanovisku. Sčítání a násobení jsou komutativní a asociativní operace, a proto se nabízí možnost formulovat následující úlohu:

Je dána neprázdná množina M a v ní je definována komutativní a asociativní operace $*$. Sestavte z prvků množiny M takovou čtvercovou tabulku o k řádkách a k sloupcích, kde $k > 1$ je přirozené číslo, aby pro každých k prvků x_1, x_2, \dots, x_k vybraných z tabulky tak, že z každé řádky i z každého sloupce je vybrán jediný prvek, byl $x_1 * x_2 * \dots * x_k$ též prvek množiny M .

Čtenářům, kteří jsou překvapeni řadou neznámých pojmů, lze doporučit knížku [4]. Úloha se řeší zcela obdobně, jako když M byla množina všech reálných čísel a operace $*$ byla sčítání nebo násobení. Ukažme si to na příkladě.

V množině $M = \{a, b, c, d\}$ je definována operace $*$ tabulkou:

xy	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Lze dokázat, že tato operace je komutativní a asociativní. Vynecháme-li v této tabulce, která definuje v M operaci $*$, záhlaví sloupců i řádek, dostáváme tabulku, která pro $k = 4$ splňuje podmínky výše uvedené úlohy. Přesvědčte se o tom! Tato tabulka je totiž pro operaci $*$ sestavena tak, jako jsme obdobné tabulky konstruovali pro operace sčítání a násobení. V případě operace $*$ dokonce platí i věta analogická k větě V. Plyne z toho, že pro každé tři prvky $x, y, z \in M$

$$\text{z rovnosti } x * z = y * z \text{ vyplývá } x = y.$$

Toho je třeba užít v důkaze věty analogické k větě V, abychom z rovnosti (3) dostali rovnost (4), když je v obou těchto rovnostech znaménko $+$ všude nahrazeno znaménkem $*$.

Vraťme se nazpátek k původní úloze o tabulce připomínající tiket Sportky. Z této tabulky vybírejme opět skupiny sedmi čísel tak, abychom z každého řádku i sloupce vybrali jediné číslo. Víme, že součet čísel patřících do téže skupiny je pro každou takovou skupinu týž. Co když budeme místo součtu uvažovat součin? Stačí již malý krůček a dospíváme k úloze zadané ve XXII. ročníku polské MO (šk. rok 1970/71):

Dána je tabulka o n řádcích a n sloupcích. Číslo nalézající se v m -tém sloupci a v k -té řádce je rovno

$$n(k - 1) + m.$$

Vyberte n čísel — po jednom z každého řádku a z každého sloupce — tak, aby součin těchto čísel byl maximální.

Při řešení této úlohy začněte případy $n = 2$ a $n = 3$. Na základě těchto případů zformulujte domněnku pro libovolné přirozené číslo n a dokažte ji.

Úloha z polské MO je impulsem pro formulaci a řešení jí podobných úloh i pro další tabulky, s nimiž jsme se v tomto článku setkali. Doporučuji čtenáři, aby se o to pokusil.

[1] XVI. ročník matematické olympiády. SPN, Praha 1968.

[2] Vyšín J.—Macháček, V.: Vybrané úlohy z matematické olympiády kategorie Z. SPN, Praha 1971.

[3] Leman A. A.: Sbornik zadač moskovskich matematičeskich olimpiad. Prosveščenie, Moskva 1965.

[4] Hruša K.: Polynomy v moderní algebře. Mladá fronta, 26. svazek Školy mladých matematiků, Praha 1970.

Řešení příkladu 1. ze str. 279:

Protože tečny vedené ke kružnici z bodu mimo ni jsou stejně dlouhé, platí:

$$CX = CF, CY = CG, C'X = C'D, C'Y = C'E, AD = AF, BE = BG$$

$$XY = CY - CX = CG - CF \quad (1)$$

$$XY = C'X - C'Y = C'D - C'E \quad (2)$$

Sečtením (1) a (2) dostaneme

$$2XY = CG + C'D - CF - C'E \quad (3)$$

$$AC' = AD + C'D = AF + C'D \quad (4)$$

$$BC' = BE + C'E = BG + C'E \quad (5)$$

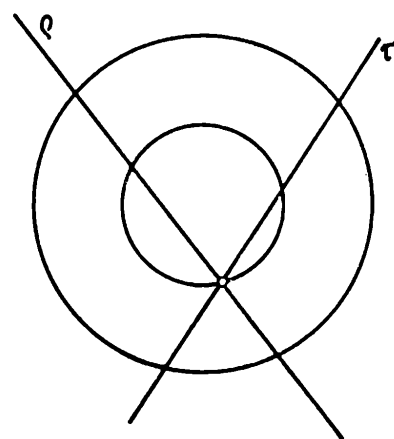
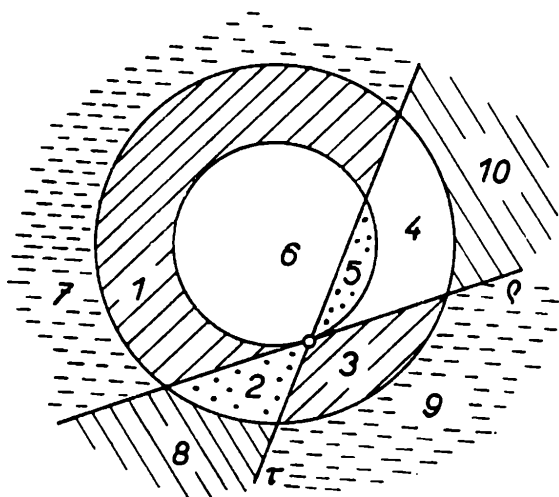
Protože $AC' = BC'$, plyne odečtením (5) - (4)

$$0 = BG + C'E - AF - C'D \quad (6)$$

Sečtením (3) a (6):

$$2XY = BG + CG - (AF + CF) = BC - AC = a - b$$

$$XY = \frac{a - b}{2}$$



Řešení příkladu 2:

a) Jsou možnosti dvě. Jedna z rovin je tečnou rovinou ke kulové ploše. Druhá možnost, když žádná z obou rovin se kulové plochy nedotýká — viz obrázek.

b) V prvním případě dostaneme 10 oblastí a ve druhém 11 oblastí (viz obrázek).

různé

O vývoji heliocentrické soustavy

JOSEF KOTYK, Pardubice

(Pokračování)

II. Mikuláš Koperník

V předsíni rodného domku Koperníkova v Toruni čteme s pohnutím slova nápisu o události, jejíž letošní pětisté výročí připomenou celosvětové oslavy konané pod patronátem UNESCO:

„Tu urodził sie Mikołaj Kopernik

19 lutego 1473

Vstrzymał Słońce — Ruszył Ziemię

Polskie wydało go Plemię.“

Zde se tedy před 500 lety narodil jeden z nejslavnějších mužů všech věků, jenž pohnul Zemí, avšak i dějinami lidstva. Do nich vstoupil svým nesmrtelným a celoživotním dílem „De revolutionibus orbium coelestium libri VI.“ (O oběžných pohybech nebeských těles knih šestero), jež vyšlo v Norimberku v úmrtním roce autorově 1543 několik dní před jeho smrtí. Byl nejvyšší čas. Na smrtelném loži dostal Koperník do rukou první výtisk své slavné knihy...

Ač věnována papeži Pavlovi III., byla uvítána dlouhým tichem. Tichem před bouří, jež rozmetala starý svět geocentrismu.

Příštipky a záplaty, jimiž se odborníci snažili zvelebit a na konec aspoň při životě zachovat Ptolemaiovu prastarou „Megalé syntaxis“, byly marné. Vzdělávaje se na universitách v Itálii, Koperník byl již v mládí podnícen zprávami starověkých spisovatelů (Cicerona, Plutarcha aj.) o představách blízkých některým předpokladům heliocentrického pojetí světa k přemýšlení o uspořádání nebeských těles. Dlouholetou usilovnou prací dospěl k odůvodněnému přesvědčení, že pohyby nebeských těles lze mnohem jednodušeji než dosud vyložit, přijmeme-li za správné tyto výroky:

1. Světová koule neexistuje; je to pouhý zrakový klam.

2. Ve světovém prostoru trvají v převelikých, avšak různých vzdálenostech nepohnutě stálice podobné Slunci.

3. Slunce je stálice Zemi nejbližší, nikoli planeta obíhající kolem Země. Slunce, nikoli Země, je pevným středem soustavy planet.

4. Planety neboli oběžnice (tehdy známé: Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter, Saturn) konají rovnoměrný pohyb kolem Slunce po výstředných kružnicích.

5. Země, jedna z šesti planet, má tvar koule a koná dvojitý pohyb: otáčivý kolem osy jednou za hvězdný den (jím lze vysvětlit zdánlivý denní pohyb nebeské sféry) a oběžný kolem Slunce, jehož obrazem je zdánlivý roční pohyb Slunce po ekliptice.

6. Měsíc není planeta; obíhá kolem Země a teprve se Zemí kolem Slunce. Je družicí Země.

Koperníkovy závěry znamenaly revoluci v nazírání na svět, revoluci v poznávání přírody a v metodách tohoto poznávání. Koperníkovo dílo stalo se podle Engelse⁵⁾ revolučním aktem přírodovědy. Úder proti ptolemaiovskému geocentrismu byl mimo to také úderem proti jednomu z teoretických pilířů feudální ideologie.

V popředí zájmu bylo zvláště postavení a pohyby Země. Hrdosti člověka přičila se zejména myšlenka, že Země, považovaná dosud za střed vesmíru, je pouhá — a to nikoliv největší — oběžnice Slunce. Koperník považoval však za nepravděpodobné, že by kolem nepatrné Země obíhaly ohromnou rychlostí jednou za den obrovské (jak dnes víme) stálice a Slunce. Koperníkovi bylo přijatelnější připustiti, že obráceně kolem velikého Slunce obíhají poměrně pomalu malé planety. To přinášelo ovšem jako nutný důsledek, že i člověk, bytost z pozemského tvorstva nejvyšší, musel dříve nebo později dospět k rozhodnutí vřaditi Zemi — a pokorně i sebe — do vesmíru. Lidstvo se k tomu konečně také odhodlalo; ukázalo, že je schopno dívat se bez obav, s nestrannou pravdivostí a vyrovnaným klidem na putování své planety vesmírem. Koperníkovy názory měly proto filosoficky mocný vliv na myšlenkový vývoj lidstva.

Uvedené okolnosti svádějí často k tomu spatřovati v Koperníkovi jednostranně filosofa. Málo je již známo, že mladý Koperník přednášel v Římě s velikým úspěchem také vědy přírodní, astronomii a matematiku.⁶⁾ Jestliže v geocentrické soustavě Ptolemaiově bylo pořadí planet stanoveno v podstatě náhodně a nemělo smyslu klást otázku jejich vzdáleností, Koperník zabýval se první také již určením poměrných vzdáleností planet od Slunce. Zvolíme-li velikost střední vzdálenosti Země od Slunce za 1,000, dospěl Koperník v podstatě správně k těmto hodnotám (v závorce uvádím pro srovnání výsledky udávané dnešní astronomií⁷⁾): Merkur 0,395 (0,387); Venuše 0,719 (0,723); Mars 1,512

⁵⁾ Viz Bedřich Engels l. c.

⁶⁾ Také gregoriánská reforma kalendáře, provedená roku 1582 papežem Řehořem XIII., je slavným památkem neobyčejných schopností Koperníkových; za její základ byly vzaty časoměrné práce Koperníkovy.

⁷⁾ Údaje čerpám z tabulky otištěné v článku Zdeňka Horského „Johannes Kepler“ v časopise Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník XVI., číslo 6. Cit. str. 283.

(1,524); Jupiter 5,219 (5,203) — možno si snad přáti více? Přesnějšího přiblížení skutečným hodnotám nedosáhl ani Kepler!⁸⁾

Koperníkův heliocentrický názor vyvolal proto v tehdejšímu kulturním světě veliký ohlas. Otázka jeho správnosti či nesprávnosti zasahovala přímo do problematiky fyzikální a astronomické. Slunce, které v Koperníkově soustavě stálo mimo společný střed planetárních drah, nebylo totiž v žádném fyzikálním vztahu k planetám. Soustava v této podobě nemohla proto vyhovovat žádoucí přesnosti; nedosahovala také ani po převzetí Ptolemaiových epicyklů v podstatě zásadně lepších početních výsledků, než jak vycházely z geocentrických představ pohybu planet. Domnění, jak bývá někde tradováno, že Koperníkův výklad, ve vývoji světového názoru fyzikálního zcela revoluční, snad rázem odstranil a vyřešil všechny obtíže tehdejší astronomie, je proto mylné. Např. úkol řešiti rozpory výše naznačené, čekal na Keplera (1571 až 1630); teprve v něm vyrostl vědě muž, jenž caeli abdita pandit, jenž odhalil tajemství nebes. Koperník mimo to neznal hlubší příčiny pohybů planetárních. Úkol, vyšetřiti vlastní (t. j. dynamickou) příčinu pohybů nebeských těles, připadl později Newtonovi, géniu dalšího století, narozenému právě sto let po smrti Koperníkově roku 1643; v něm vyrostl vědě muž, jenž podle slov Lagrangeových „n'avait qu'un monde a découvrir“, jenž objevil svět...

Dodnes přesto platí slova uznání, jež o Koperníkovi pronesl tvůrce moderní nebeské mechaniky Laplace, „Newton Francie“:⁹⁾ „Jeho památka bude trvati tak dlouho jako velkolepé jím objevené pravdy.“

⁸⁾ Odkazují opět k prameni cit. v pozn. 7, kde jsou rovněž uvedeny.

⁹⁾ Pamětihodné jest, že Laplace, v němž dosáhl svého vrcholu vývoj zahájený Newtonem, zemřel právě za sto let po Newtonovi roku 1827 v témž měsíci březnu, v němž zemřel i veliký tvůrce „Principií“.

Viz můj článek „Laplace, «Newton Francie»“ v Rozhledech, ročník 20, čís. 2 a 3.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

R

racionální	rationnel, elle
racionální číslo	rationnel <i>m</i>
radián	radian <i>m</i>
radikál	radical <i>m</i>
radiusvektor	rayon vecteur <i>m</i>
reálný	réel, elle
reciproký	réiproque
redukce	réduction <i>ž</i>
redukovany	réduit, e
redukovatelný	réductible
reflexivita	réflexivité <i>ž</i>
reflexivní	réflexif, ive
regulární	régulier, ère
rektifikace	rectification <i>ž</i>
rekurentní	récurrent, e
rekurzivní	récurcif, ive
relace	relation <i>ž</i>
relativita	relativité
relativní	relatif, ve
reper	repère <i>m</i>
reprezentace	représentation <i>ž</i>
rezolventa	résolvante <i>ž</i>
rostoucí	ascendant, e; croissant, e
rotace	rotation <i>ž</i> ; révolution <i>ž</i>
rotační	de rotation; de révolution
rotační plocha	surface <i>ž</i> de rotation, de révolution
rovina	plan <i>m</i>
rovinný	plan, e
rovnati se	égaler
<i>A</i> rovná se <i>B</i>	<i>A</i> est égal à <i>B</i>
rovnice	équation <i>ž</i>
kvadratická rovnice	équation du second degré
rovnice o více neznámých	équation à plusieurs inconnues
řešit rovnici	résoudre une équation

SPN Bratislava, Sasinkova 5, vydalo:

N. V i l e n k i n

ROZHOVORY O MNOŽINÁCH

Žiaľ, stále je málo matematikov a ich prác, ktorí dokážu „tajomstvá“ svojej vedy priblížiť obyčajným smrteľníkom. Dôkazom toho, že sa to dá, je aj táto kniha. Jej autor, uznávaný matematik, prístupnou formou ukazuje súvis reality a základov modernej, množinovo ponímanej matematiky. Spôsob, akým to robí nás utvrďuje, že kniha objasní mnohé základné pojmy modernej matematiky, ale získa matematike aj mnoho prívržencov.

Prvé vydanie, strán 220, cena Kčs 8,50 (Edícia KVV)

J. G a t i a l, M. H e j n ý

OD PRAVOUHLÝCH SÚRADNÍC K VEKTOROM

Autori tejto príručky veľmi pomáhajú svojou publikáciou pri štúdiu lineárnej algebry a analytickej geometrie nenásilným prechodom od klasického štúdia k vektorovému štúdiu geometrie. Kniha je určená študentom, ktorí sa pripravujú na vysokú školu technického a prírodovedeckého smeru, ako i študentom I. ročníka týchto škôl.

Prvé vydanie, strán 200, cena Kčs 13,—.

Oprava:

V 5 zařadte na str. 235⁹ tabulku první a na str. 235¹² tabulku druhou ze strany 234.

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

7

ROČNÍK 51, 1972-1973, BŘEZEN



ROČNÍK 51
BŘEZEN 7

7

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, prof. dr. Ján Vanovič, UK Bratislava, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

120 00 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1972.

OBSAH

OBSAH

Dr. J. Šedivý: Sjezd Jednoty československých matematiků a fyziků	289
J. Drábek: Tabulková metoda důkazů vět o rovnosti množin	292
Doc. dr. R. Bek: Modelování výrokových formulí pneumatickými a diodotranzistorovými sítěmi	296
Doc. dr. K. Drábek, CSc.: Kuželosečky v Gaussově rovině	301
Prof. ing. C. Höschl: O některých optimálních konstrukcích	310
J. Kotyk: Horror vacui	316
M. A. K., Z. L. P.: Proč Měsíce hlubiny nemohou být z litiny?	319
Naše soutěž	321
Doc. O. Setzer: Ze zahraničních časopisů	331
J. Kotyk: O vývoji heliocentrické soustavy (dokončení).	333
Redakce hovoří	336
Slovníček česko-francouzský 3. a 4. str. obálky	

Sjezd Jednoty československých matematiků a fyziků

Dr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF, Praha

Otevřeme-li kterékoliv číslo Rozhledů, najdeme na vnitřní stránce obálky znak Jednoty a v tiráži dole se můžeme dočíst, že Rozhledy vydává ministerstvo školství za odborné péče Jednoty. Je možné, že toto nevtíravé svědectví o existenci Jednoty uniká pozornosti a že mladí čtenáři o ní vědí málo. Použijme tedy příležitosti, že se v říjnu 1972 konal sjezd Jednoty, a seznámme se krátce s její 111-letou historií¹⁾ a s těmi oblastmi její současné činnosti, které se týkají Rozhledů a jejich mladých čtenářů.

Po r. 1860 došlo v českých zemích k rozmachu společenského života a byly zakládány četné spolky pečující o rozvoj kultury a vědy. Dne 28. března 1862 se konala ustavující schůze *Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky*, v němž se sdružili posluchači pražské filosofické fakulty, kteří se chtěli vzdělávat i tím způsobem, že budou pro sebe přednášet o odborných tématech a vzájemně si budou své přednášky hodnotit. Po sedmi letech přijali členové Spolku nové stanovy a název *Jednota českých matematiků*, jejímiž členy mohli být vysokoškolští studenti a učitelé, a též středoškolští učitelé z jiných míst. Kromě přednáškové činnosti pro své členy začala Jednota vyvíjet i bohatou publikační činnost, vydávala vědecké spisy původní i přeložené, učebnice pro školy, časopisy, sborníky atd., od r. 1872 vydávala pak *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* jako svůj členský časopis.²⁾ Pro žáky středních škol

¹⁾ Historické údaje uvedené v tomto článku jsou převzaty z knížky *F. Veselého 100 let Jednoty československých matematiků a fyziků*, vydané v r. 1962 ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze.

²⁾ Výročí Časopisu připomněl J. S. ve 3. čísle tohoto ročníku Rozhledů krátkým článkem *Připomínka jednoho jubilea*. V současné době vydává Jednota členský časopis *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*.

vycházela od r. 1892 *Příloha k Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky*, která obsahovala přístupné odborné články a úlohy o ceny; tyto soutěže v řešení úloh z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie byly velmi oblíbeny.

V roce 1912 přijala Jednota širší název *Jednota českých matematiků a fyziků*, od r. 1921 (ovšem s výjimkou válečných let) má svůj současný název, který vyjadřuje její celostátní charakter. V samostatném československém státě Jednota ještě dále rozšířila a prohloubila svou činnost v těch směrech, o kterých jsme se již zmínili, vedle toho iniciativně vystoupila s návrhy na reformu středních škol, vydávala překlady učebnic do slovenštiny, zahájila výrobu vědeckých a učebních pomůcek atd. Od počátku školního roku 1921/22 vydávala Jednota též *Rozhledy matematicko-přírodovědecké* jako časopis pro středoškolské studenty.

V době druhé světové války byla činnost Jednoty omezena jen na tzv. protektorátní území a velmi znesnadněna v důsledku uzavření vysokých škol, perzekuce studentů a učitelů, omezení publikační činnosti a tvrdé cenzury; zastaven byl *Časopis pro pěstování matematiky*, uzavřeno bylo knihkupectví Jednoty atd. Jediným pojátkem mezi členy Jednoty byly právě *Rozhledy*, podařilo se uskutečnit i několik přednáškových cyklů, které byly hojně navštíveny. I za války trvaly však styky českých a slovenských matematiků a fyziků a publikace vydávané Jednotou se dařilo dopravovat na Slovensko. Jednota ztratila v době války mnoho svých členů, zahynul i předseda prof. Závíška.

Po osvobození věnovala Jednota úsilí obnovení činnosti všech vysokých škol a zajištění výuky na ostatních školách; členové Jednoty připravovali rukopisy řady učebnic již v době války. Výbor JČMF se přihlásil ke Košickému vládnímu programu již na své schůzi v *dubnu* 1945, a to těmito slovy: „Hlásíme se radostně ke spolupráci na znovuvybudování našeho národního života ve smyslu politického a kulturního programu naší vlády a jsme přesvědčeni, že v rámci úkolů, které nás sdružují, budeme moci účinně přispět k jeho provádění. K této spolupráci v novém duchu a hlavně v duchu přátelství k bratrskému národu ruskému a ostatním národům slovanským vyzýváme též všechny své členy a přátele.“ Tomuto svému závazku zůstala Jednota věrna v dalších letech své činnosti; vždyť mnoho idejí prosazovaných Jednotou se podařilo uskutečnit teprve po vítězství pracujícího lidu v r. 1948, např. demokratizaci vzdělání, zajištění rozvoje vědy a rozšíření sítě vysokých škol.

Společenské proměny spojené s budováním socialistického státu zajistily, že řadu úkolů, které dosud iniciativně plnila Jednota, převzaly státní instituce — nakladatelství a zejména v r. 1952 zřízená Československá akademie věd a Slovenská akademie věd. Po organizačních změnách se od r. 1956 rozvíjí činnost Jednoty jako vědecké společnosti při

ČSAV, na Slovensku začal pracovat Slovenský výbor JČMF, později vznikla Jednota slovenských matematiků a fyziků.

Jednota československých matematiků a fyziků sdružuje v současnosti vědecké, odborné a pedagogické pracovníky v oboru matematiky a fyziky; členové Jednoty pracují tedy nejen ve školství, resp. studují, ale jsou zaměstnáni ve výzkumných ústavech, v průmyslových podnicích i jiných institucích. Jednota navazuje na pokrokovou tradici své předcházející činnosti a podílí se na „*vytváření předpokladů pro rozvoj vědeckotechnického pokroku jak na úseku školském, tak při aplikacích matematiky a fyziky, a rovněž na úseku vědecké práce*“ (citováno z rezoluce sjezdu).

Sjezdy se konají jednou za tři roky, hodnotí činnost Jednoty, projednávají a schvalují zásadní směrnice pro její další práci. V obdobích mezi sjezdy řídí činnost Jednoty ústřední výbor zvolený sjezdem. Poslední sjezd konaný v říjnu r. 1972 podtrhl zájem Jednoty podílet se na závažných úkolech celostátního významu v oborech, v nichž Jednota působí. Ve sjezdové rezoluci se např. zdůrazňuje, že *Jednota bude usilovat, aby se dobrá znalost matematiky a fyziky stala trvalou a organickou součástí všeobecného vzdělání celé příští generace*. Toto úsilí bude zaměřeno ku pomoci vyučujícím a studentům různých typů škol; jde např. o rozvoj matematické a fyzikální olympiády, o vydávání přístupné studijní literatury, o zajišťování vhodných přednášek a kursů, v neposlední řadě pak stojí i odborná péče Jednoty o *Rozhledy*.

V čem spočívá odborná péče Jednoty o *Rozhledy*? Vedoucí orgány Jednoty se vyjadřují ke složení redakční rady časopisu, sledují úroveň a zaměření článků, pomáhají při získávání autorů příspěvků atd. Hlavní podíl práce vykonávají ovšem členové Jednoty pracující v redakční radě a zapojení v okruhu autorů a recenzentů příspěvků, soutěžních úloh apod. Členská základna Jednoty zahrnuje též mnoho odběratelů *Rozhledů*, kteří mohou svými kritickými hlasy a vlastními příspěvky významně přispět k tématické pestrosti našeho časopisu.

Sjezd JČSMF vytýčil samozřejmě mnoho dalších úkolů, o nichž jsme se zde nezmínili. Stěžejní úkol Jednoty pro další období je formulován takto:

„JČSMF jako celek i její orgány soustředí své úsilí na spolupráci při vytváření předpokladů pro takový rozvoj vědeckotechnické revoluce, jaký odpovídá současným i perspektivním, kulturním, vědeckým i technickým potřebám našeho socialistického státu a našich národů.“

Část čtenářské obce *Rozhledů* tvoří členové Jednoty, kteří budou na svých úsecích napomáhat k plnění jejích úkolů; redakce bude však informovat i všechny ostatní čtenáře o závažných akcích Jednoty tak, aby zejména mladí získali správnou představu o významu členství v Jednotě a časem posílili její řady.

Tabulková metoda důkazů vět o rovnosti množin

JAROSLAV DRÁBEK, PF Plzeň

Čtenáři Rozhledů již znají pojem rovnosti množin a základní operace s množinami; v článku *Symetrický rozdíl dvou množin*, uveřejněném v 6. č. tohoto ročníku našeho časopisu byla zavedena další operace s množinami. Asociativnost tvoření symetrického rozdílu, tj. platnost výroku $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ pro libovolné tři množiny A, B, C , byla dokázána jednak výpočtem v množinové algebře, jednak booleovským výpočtem. Nyní se seznámíme s důkazy výroků o rovnosti množin pomocí tabulek. Jde o postup obdobný tomu, kterého se používá při důkazech tautologií v matematické logice. Začneme příkladem.

Příklad 1. Uvažujme o množině Z všech žáků jisté školy a o jejích dvou podmnožinách S, D , které jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} S &= \{x \in Z; x \text{ sportuje} \} \\ D &= \{x \in Z; x \text{ je děvče} \}. \end{aligned}$$

Definované množiny S a D umožňují roztrždit žáky této školy do čtyř navzájem disjunktních množin, které jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} K_I &= \{x \in Z; x \text{ je sportující děvče}\} \\ K_{II} &= \{x \in Z; x \text{ je nesportující děvče}\} \\ K_{III} &= \{x \in Z; x \text{ je sportující chlapec}\} \\ K_{IV} &= \{x \in Z; x \text{ je nesportující chlapec}\}. \end{aligned}$$

Je patrné, že pro množiny K_I, K_{II}, K_{III} a K_{IV} platí:

$$(1) \quad K_I \cup K_{II} \cup K_{III} \cup K_{IV} = Z.$$

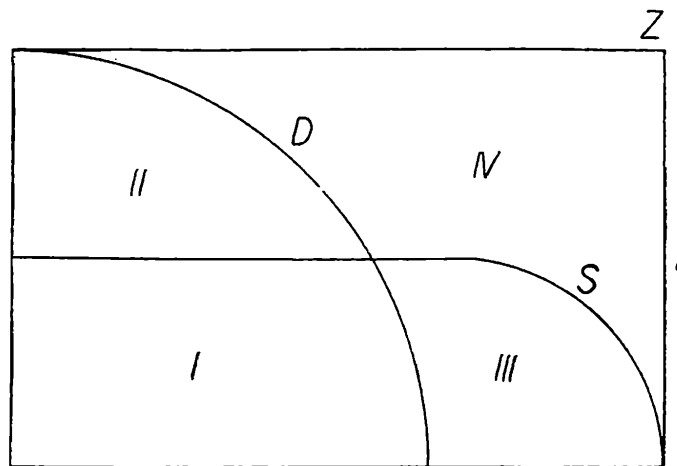
Dále je patrné, že každé dvě různé množiny z uvedených množin jsou disjunktní.

Říkáme, že množiny K_I, K_{II}, K_{III} a K_{IV} vytvářejí rozklad základní množiny Z ; množiny K_I, \dots, K_{IV} nazýváme komponentami tohoto rozkladu. Na obrázku 1 je příslušný Vennův diagram.

Z Vennova diagramu snadno nahlédneme, že platí:

$$\begin{aligned} K_I &= D \cap S, & K_{III} &= S \cap D', \\ K_{II} &= D \cap S', & K_{IV} &= S' \cap D', \end{aligned}$$

kde S' a D' jsou doplňky množin S a D .



Obr. 1

Provedme zobecnění předchozího příkladu. Každé dvě podmnožiny A, B základní množiny Z vytvoří na této základní množině Z rozklad na čtyři navzájem disjunktí komponenty K_I, K_{II}, K_{III} a K_{IV} , které mají tvar:

$$\begin{aligned} K_I &= A \cap B \\ K_{II} &= A \cap B' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{III} &= A' \cap B \\ K_{IV} &= A' \cap B'. \end{aligned}$$

Každé z komponent K_I, \dots, K_{IV} můžeme přiřadit právě jednu z uspořádaných dvojic $[1,1], [1,0], [0,1], [0,0]$. Přiřazení provedeme tímto předpisem:

Jestliže příslušná komponenta je částí množiny A , potom na prvním místě v uspořádané dvojici je 1. Jestliže příslušná komponenta není částí množiny A , potom na prvním místě v uspořádané dvojici je 0. Stejným způsobem provedeme obsazení druhého místa v přiřazené uspořádané dvojici, přičemž se řídíme vztahem množinové inkluze uvažované komponenty vzhledem k množině B .

Je tedy možné zapsat příslušné přiřazení uspořádaných dvojic jednotlivým komponentám takto:

$$\begin{aligned} K_I &\rightarrow [1,1] \\ K_{II} &\rightarrow [1,0] \\ K_{III} &\rightarrow [0,1] \\ K_{IV} &\rightarrow [0,0] \end{aligned}$$

	A	B
K_I	1	1
K_{II}	1	0
K_{III}	0	1
K_{IV}	0	0

Zkoumejme, které komponenty budou částí sjednocení $A \cup B$ množin A, B . Podle definice sjednocení dvou množin to budou právě ty komponenty, které v přiřazené uspořádané dvojici mají aspoň jednu jedničku. Komponentám, které jsou částí sjednocení $A \cup B$ přiřadíme jedničku (jsou to komponenty K_I, K_{II} a K_{III}); komponentě, která není částí sjednocení $A \cup B$ přiřadíme nulu (je to právě komponenta K_{IV}). Tak získáme sloupec nul a jedniček v tabulce 2 pod symbolem $A \cup B$; obdobným způsobem vyplníme i ostatní sloupce. Čtenář si jistě uvědo-

Tab. 2.

	A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$A \Delta B$	A'	B'
K_I	1	1	1	1	0	0	0	0
K_{II}	1	0	0	1	1	1	0	1
K_{III}	0	1	0	1	0	1	1	0
K_{IV}	0	0	0	0	0	0	1	1

muje shodu sloupců tabulky 2 s tabulkou pravdivostního ohodnocení výroků A , B , $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \wedge B'$, $(A \Leftrightarrow B)'$, A' , B' .

Z tabulek 2 a 3 bezprostředně vyplývají množinové rovnosti

$$(2) \quad A \cup B = K_I \cup K_{II} \cup K_{III}$$

$$(5) \quad A \Delta B = K_{II} \cup K_{III}$$

$$(3) \quad A \cap B = K_I$$

$$(6) \quad A' = K_{III} \cup K_{IV}$$

$$(4) \quad A - B = K_{II}$$

$$(7) \quad B' = K_{II} \cup K_{IV}$$

Příklad 2.

Tabulkovou metodou dokažte množinovou rovnost

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Nejprve zjistíme, které komponenty vytvářejí množinu $(A \cup B)'$. Postupíme tabulkovou metodou, vyplňme tabulku 3. Platí: $(A \cup B)' = K_{IV} = A' \cap B'$.

Tab. 3.

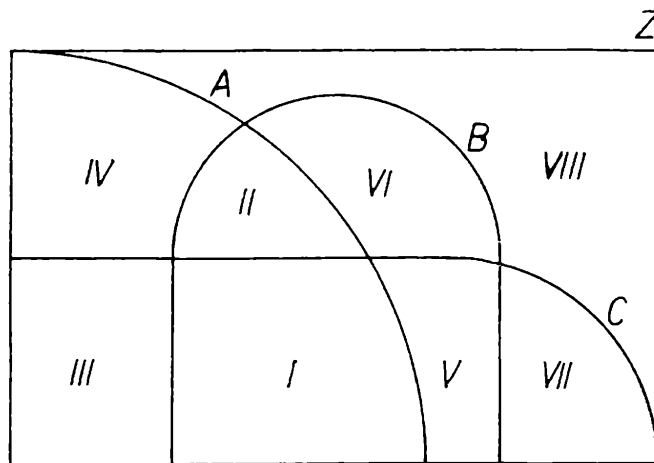
	A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	A'	B'	$A' \cap B'$
K_I	1	1	1	0	0	0	0
K_{II}	1	0	1	0	0	1	0
K_{III}	0	1	1	0	1	0	0
K_{IV}	0	0	0	1	1	1	1

Cvičení

$$a) (A \cap B)' = A' \cup B' \quad b) (A \Delta B)' = A' \Delta B \quad c) (A - B)' = A' \cup B.$$

Uvažujme v základní množině Z tři podmnožiny A , B , C . Z Vennova diagramu pro tři množiny zjistíme, že základní množina Z se rozloží na osm navzájem disjunktních komponent K_I, \dots, K_{VIII} (viz obr. 2).

Uvedené komponenty rozkladu můžeme vyjádřit průniky množin A , B , C , resp. jejich doplňků A' , B' , C' :



Obr. 2

$$\begin{aligned} K_I &= A \cap B \cap C \\ K_{II} &= A \cap B \cap C' \\ K_{III} &= A \cap B' \cap C \\ K_{IV} &= A \cap B' \cap C' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_V &= A' \cap B \cap C \\ K_{VI} &= A' \cap B \cap C' \\ K_{VII} &= A' \cap B' \cap C \\ K_{VIII} &= A' \cap B' \cap C'. \end{aligned}$$

Obdobně jako v předchozím případě pro dvě množiny, můžeme komponentám K_I, \dots, K_{VIII} přiřadit uspořádané trojice, které jsou vytvořeny nulou a jedničkou. Čtenář si prověří, že přiřazení těchto uspořádaných trojic jednotlivým komponentám lze zapsat v osmiřádkové tabulce (viz levou část tabulky 4).

Tab. 4.

	A	B	C	$A \Delta B$	$(A \Delta B) \Delta C$
K_I	1	1	1	0	1
K_{II}	1	1	0	0	0
K_{III}	1	0	1	1	0
K_{IV}	1	0	0	1	1
K_V	0	1	1	1	0
K_{VI}	0	1	0	1	1
K_{VII}	0	0	1	0	1
K_{VIII}	0	0	0	0	0

Příklad 3. *Tabulkovou metodou ověřte asociativnost operace Δ .*

Nejprve zjistíme, které z komponent K_I, \dots, K_{VIII} vytvářejí množinu $(A \Delta B) \Delta C$. Opět postupujeme tabulkovou metodou, přičemž používáme tab. 2 pro operaci Δ .

Z tabulky 4 vyčteme platnost množinové rovnosti

$$(A \Delta B) \Delta C = K_I \cup K_{IV} \cup K_{VI} \cup K_{VII}.$$

Čtenář analogicky prověří tabulkovou metodou platnost množinové rovnosti

$$A \Delta (B \Delta C) = K_I \cup K_{IV} \cup K_{VI} \cup K_{VII}.$$

Tím bude asociativnost operace Δ dokázána.

Cvičení

2. Dokažte tabulkovou metodou množinové rovnosti:

- a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
- d) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
- e) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

3. Rozhodněte, zda platí $A - (B - C) = (A - B) - C$.

4. Rozhodněte, zda platí $(A \cup B) \Delta C = (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$.

Modelování výrokových formulí pneumatickými a diodotranzistorovými sítěmi

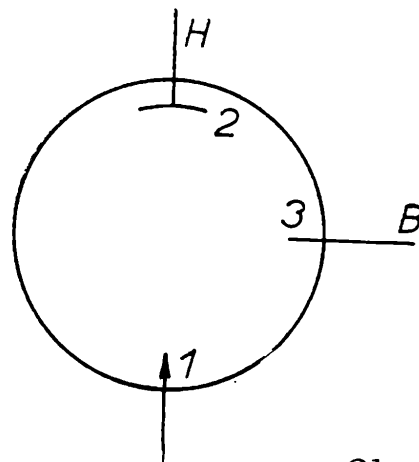
Doc. Dr. ROMAN BEK, ČVUT, Praha

V předchozím článku jsme poznali principy umožňující modelovat formule jazyka výrokové logiky reléovými sítěmi. V tomto článku ukážeme na principy jejich modelování pomocí sítí s pneumatickými prvky a sítí s diodami a tranzistory.

Popišme si nejprve tzv. *pneumatický prvek* schematicky naznačený na obr. 1. Hlavní tryskou 1 přichází do prvku proud vzduchu z hlavního potrubí a sběračem 2 je tento proud zachycován a dále odváděn. Boční tryska 3 může přivádět zvláštní vedlejší proud vzduchu. Prvek pracuje tak, že vedlejší (boční) proud vzduchu odchýlí hlavní proud a ten pak již neprochází sběračem 2 a dále potrubím H . Neprochází-li naopak boční tryskou 3 žádný vedlejší proud, pak hlavní proud prochází nerušeně sběračem 2 do potrubí H . Symbolizujeme průchod vzduchu cifrou 1, neprocházení cifrou 0. Pak můžeme vztah proudů vzduchu okruhy B

a H popsat tabulkou zapsanou vedle obr. 1. Tabulka ukazuje, že naznačený pneumatický prvek modeluje negaci.

B	\parallel	H
1	\parallel	0
0	\parallel	1

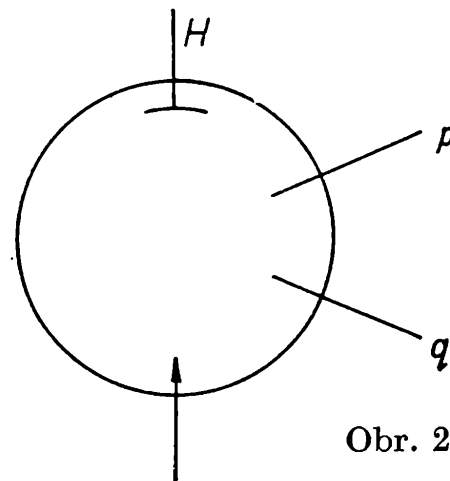


Obr. 1

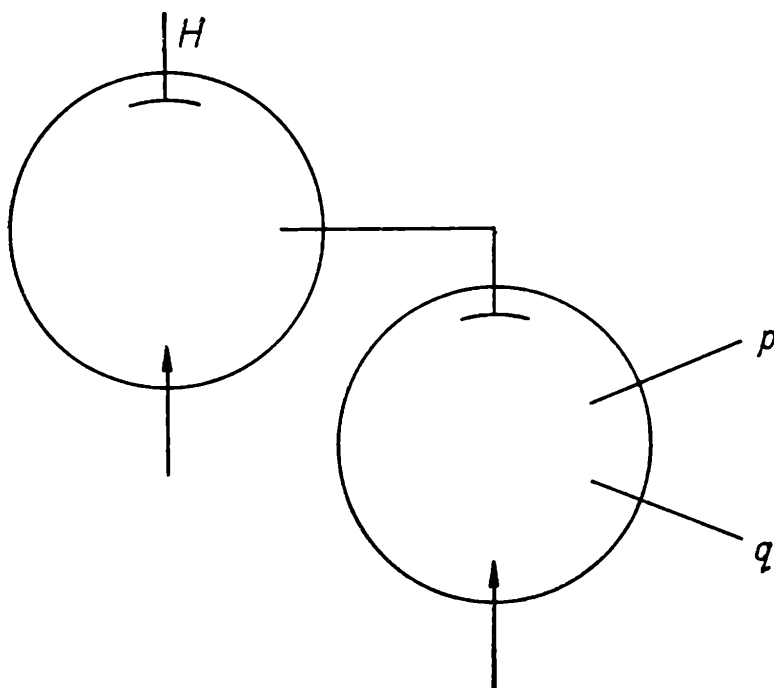
Činnost složitějšího pneumatického prvku se dvěma na sobě nezávislými vedlejšími potrubími s bočními tryskami p , q je patrna z obr. 2 a je popsána tabulkou umístěnou vedle obrázku. Tabulka se svou formou podobá tabulce formule $(p \vee q)'$, prvek modeluje tuto formuli.

Díky tautologii 1) pak můžeme síť ze dvou prvků znázorněnou na obr. 3 modelovat disjunkci $p \vee q$.

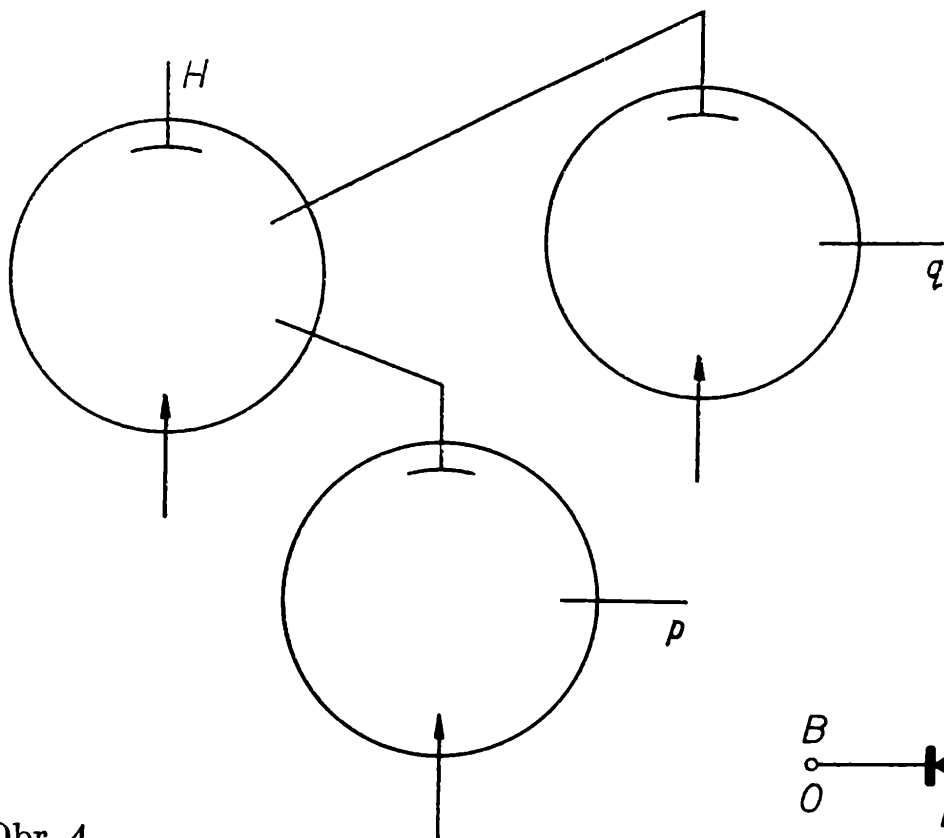
p	q	\parallel	H
1	1	\parallel	0
1	0	\parallel	0
0	1	\parallel	0
0	0	\parallel	1



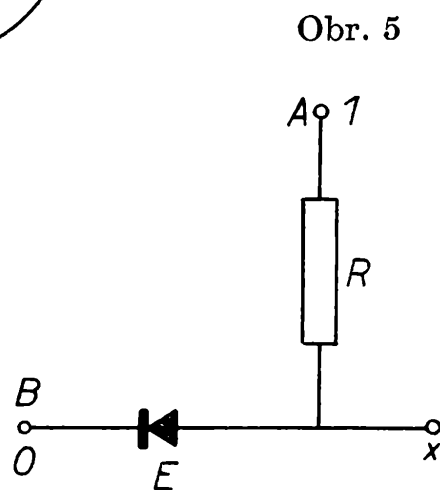
Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Konjunkci $p \wedge q$ můžeme díky tautologii $(p' \vee q')' \Leftrightarrow (p \wedge q)$ modelovat sítí znázorněnou na obr. 4. Analogickým postupem jako při modelování reléovými sítěmi pak můžeme modelovat rozsáhlými pneumatickými sítěmi libovolně složité konečné formule výrokové logiky a řešit jimi již zmíněné logické úlohy. Pneumatických sítí se dnes v praxi velmi často užívá v automatizační technice pro jejich spolehlivost, láci a poměrně bezpečný provoz, zatímco reléových sítí s jiskřícími kontakty se například nedá použít v prašném a výbušném prostředí.

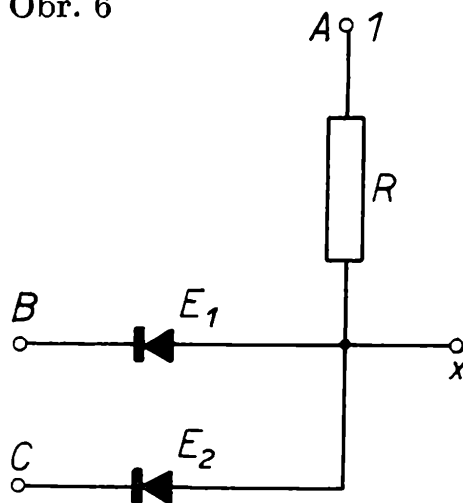
Reléové sítě mají také nevýhodu v relativně nízké možné frekvenci změny proudových impulsů a odpovídajících pohybů mechanických kotev. Proto se dnes stále častěji užívá ve výpočetní a automatizační technice sítí složených z elektronek a tranzistorů. Elektronka — dioda působí, jak je známo, jako „ventil“; elektrický proud jí může procházet pouze jedním směrem, od kladně nabitě anody k záporně nabitému vláknu. Můžeme také říci, že dioda, již právě prochází proud, má vysokou vodivost, v opačném případě má vodivost zanedbatelnou. Mějme nyní jednoduchý obvod (obr. 5), kde R je ohmický odpor, E je dioda, jejíž anoda je schématicky označena šipkou, vlákno je označeno kolmou čarou. Kladné napětí svorky obvodu A označíme „1“, záporné napětí svorky B označíme „0“, výstup obvodu označíme „ x “. V obvodu získává výstup záporné napětí, protože dioda je v důsledku průtoku proudu vysoce vodivá a x získává záporný potenciál od svorky B .

Zabývejme se nyní vlastnostmi obvodu složeného ze dvou diod (obr. 6), kde svorka A je trvale kladně nabitá, svorky B, C jsou napojeny

na vlákna dvou diod E_1 , E_2 a mohou být nezávisle na sobě nabity záporně nebo kladně (kladný náboj značíme „1“, záporný náboj značíme „0“). Je-li aspoň jedna ze svorek B , C nabitá záporně, získává také výstup x v důsledku vysoké vodivosti příslušné diody záporný náboj („0“). Jsou-li obě svorky nabity kladně, získá kladný náboj také výstup x („1“). Tuto vlastnost obvodu lze charakterizovat tabulkou otištěnou vedle obr. 6.

B	C	x
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Obr. 6

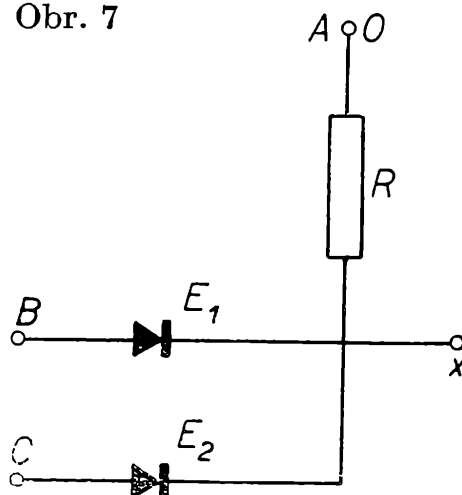


Tabulka se svou formou podobá matici konjunkce. Říkáme, že uvedený obvod je diodovou sítí, která modeluje konjunkci.

Obvod, který se skládá ze dvou diod způsobem znázorněným na obr. 7, kde svorka A je trvale záporně nabitá a svorky B , C mohou být nezávisle na sobě nabity kladně, nebo záporně, lze charakterizovat tabulkou napsanou vedle obr. 7, která se podobá matici disjunkce. Říkáme, že takový obvod je diodovou sítí modelující disjunkci.

Obr. 7

B	C	x
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

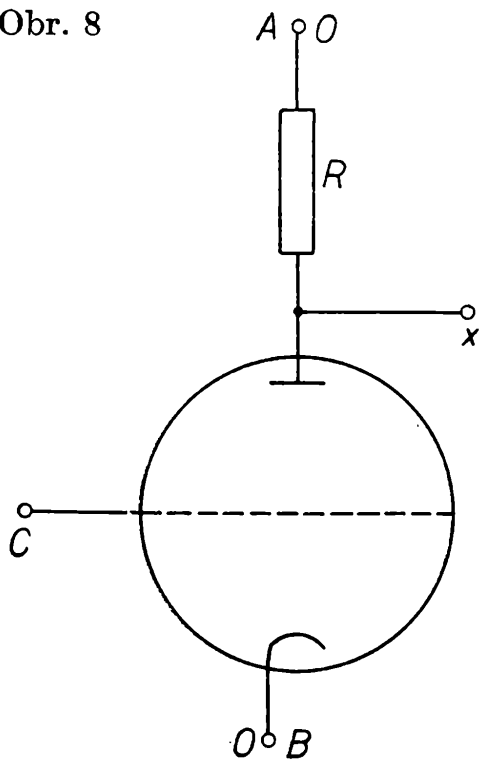


Mějme dále triodu zapojenou podle obr. 8,*) kde R je opět ohmický odpor, svorka A je trvale kladně nabitá, B je trvale záporně nabitá, svorka mřížky C může být nabitá buď kladně nebo záporně. Záporný

*) V obr. 8 nahraďte nulu zapsanou u svorky A jedničkou.

náboj mřížky způsobí, že triodou neprochází anodový proud a trioda tudíž klade průchodu veliký odpor, v důsledku čehož se svorka x nabíjí přes odpor R kladně. Je-li mřížka nabitá kladně, pak průchod anodového proudu způsobí velký pokles vnitřního odporu triody a svorka x se přes triodu nabíjí záporně. Vztah nábojů v místech C , x lze charakterizovat tabulkou:

Obr. 8

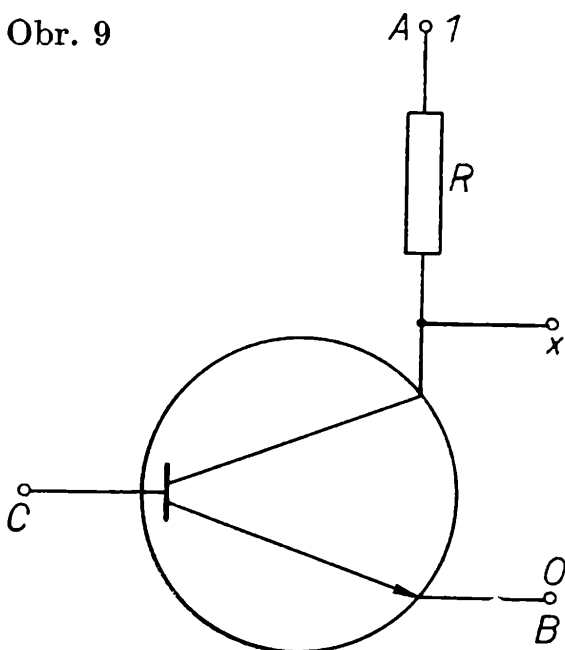


C	x
1	0
0	1

Tabulka se podobá tabulce negace; uvedený obvod je triodovou sítí modelující negaci.

Negaci lze také modelovat tranzistorovou sítí znázorněnou na obr. 9, kde svorka A je opět nabita trvale kladně, svorka kolektoru B je trvale nabita záporně, svorka báze C může být nabita kladně nebo záporně a na tom závisí záporný nebo kladný náboj svorky x .

Obr. 9



Díky popsaným diodovým, triodovým resp. tranzistorovým sítím dovedeme modelovat konjunci, disjunci a negaci, což opět postačí k tomu, abychom mohli díky tautologiím výrokové logiky uvedeným v předchozím článku modelovat jakkoli složité konečné formule jazyka výrokové logiky. Technické sítě, jež jsme uvedli, jsou základem pro konstrukci konečných automatů schopných řešit v konečné době rozsáhlé série logických (matematických) úloh.

Kuželosečky v Gaussově rovině

Doc. RNDr. KAREL DRÁBEK, ČVUT, Praha

K určení rovnic kuželoseček použijeme komplexních čísel znázorněných body v Gaussově rovině.¹⁾

1. Nejdříve odvodíme rovnici elipsy o středu S v počátku O systému souřadnic, jsou-li její ohniska $F_1 [-e, 0]$, $F_2 [e, 0]$ a má-li hlavní poloosa délku a . K tomu použijeme ohniskové definice elipsy, podle které pro každý bod $M(z)$ elipsy platí

$$MF_1 + MF_2 = 2a,$$

tedy

$$|z + e| + |z - e| = 2a, \quad (1)$$

tj.

$$\sqrt{(z + e)(\bar{z} + e)} + \sqrt{(z - e)(\bar{z} - e)} = 2a.$$

Úpravou tohoto výrazu dostaneme

$$e^2(z + \bar{z})^2 - 4a^2(z\bar{z} + e^2) + 4a^4 = 0.$$

Pro elipsu platí mezi poloosami vztah

$$e^2 = a^2 - b^2,$$

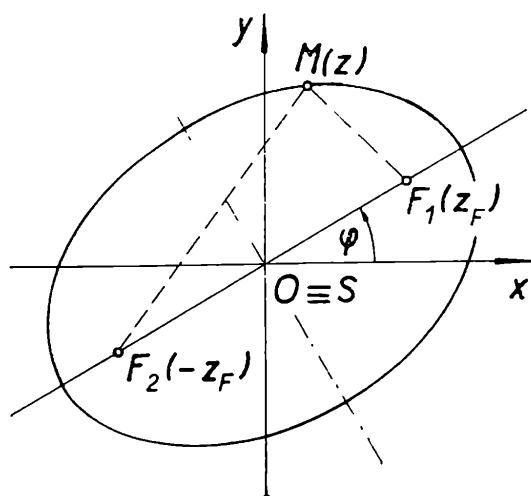
tedy po dosazení za e^2 do předešlé rovnice a úpravou dostaneme rovnici elipsy v osovém tvaru

$$a^2(z - \bar{z})^2 - b^2(z + \bar{z})^2 + 4a^2b^2 = 0, \quad (2a)$$

nebo

$$(a^2 - b^2)(z^2 + \bar{z}^2) - 2(a^2 + b^2)z\bar{z} + 4a^2b^2 = 0. \quad (2b)$$

Při výpočtech často potřebujeme rovnici elipsy, která má sice svůj střed S v počátku O zvoleného systému souřadnic, její osy jsou však



Obr. 1

¹⁾ Viz K. Drábek: Použití komplexních čísel v geometrii. Rozhledy (44), 1965—66, str. 289—293, 348—352.

otočeny o úhel φ vzhledem k osám x, y (obr. 1). V tomto případě jsou ohniska v bodech $F_1(z_F), F_2(-z_F)$ a tedy

$$z_F \bar{z}_F = |z_F|^2 = e^2, \quad \arg z_F = \varphi.$$

K odvození rovnice elipsy použijeme definice

$$|z + z_F| + |z - z_F| = 2a$$

a stejným postupem jako pro osový tvar, jestliže využijeme ještě vztahu

$$b^2 = a^2 - z_F \bar{z}_F,$$

dostaneme rovnici elipsy ve středovém tvaru

$$\bar{z}_F^2 z^2 + z_F^2 \bar{z}^2 - 2(a^2 + b^2)z\bar{z} + 4a^2 b^2 = 0. \quad (3)$$

Ptejme se, kdy rovnice

$$\bar{\alpha} z^2 + \alpha \bar{z}^2 + 2A z\bar{z} + B = 0, \quad (4)$$

kde α je komplexní číslo, A a B pak reálná čísla, je rovnicí reálné elipsy.

K tomu musí být především splněna podmínka pro úměrnost koeficientů v rovnicích (4) a (3), tedy pro reálné číslo k platí

$$k\alpha = z_F^2, \quad k\bar{\alpha} = \bar{z}_F^2, \quad (5)$$

$$k|A| = a^2 + b^2, \quad (6)$$

$$k|B| = 4a^2 b^2. \quad (7)$$

Jestliže požadujeme ještě, aby $k > 0$, plyne z rovnice (4) také podmínka

$$AB < 0. \quad (8)$$

Znásobením obou rovnic (5) dostaneme

$$k^2 \alpha \bar{\alpha} = z_F^2 \bar{z}_F^2 = (z_F \bar{z}_F)^2 = e^4.$$

a tedy

$$k|\alpha| = z_F \bar{z}_F = e^2 = a^2 - b^2. \quad (9)$$

Řešení rovnic (6) a (9) dává

$$a^2 = \frac{k}{2} (|A| + |\alpha|). \quad (10a)$$

$$b^2 = \frac{k}{2} (|A| - |\alpha|). \quad (10b)$$

Ze vztahu (10b) pro čtverec vedlejší poloosy plyne ihned další podmínka pro koeficienty

$$|\alpha| < |A|. \quad (11)$$

Čtyřnásobek součinu rovnic (10a, b) dává při porovnání s rovnicí (7)

$$4a^2 b^2 = k^2 (|A|^2 - |\alpha|^2) = k|B|,$$

odkud

$$k = \frac{|B|}{|A|^2 - |\alpha|^2}.$$

Proto pro čtverce poloos máme vztahy

$$a^2 = \frac{1}{2} \frac{|B|}{|A| - |\alpha|}, \quad b^2 = \frac{1}{2} \frac{|B|}{|A| + |\alpha|}. \quad (12a)$$

Pro souřadnici z_F ohniska platí podle první z rovnic (5)

$$z_F^2 = k\alpha = \frac{|B|\alpha}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}}$$

a tedy

$$(z_F)_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{B\alpha}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}}}, \quad (12b)$$

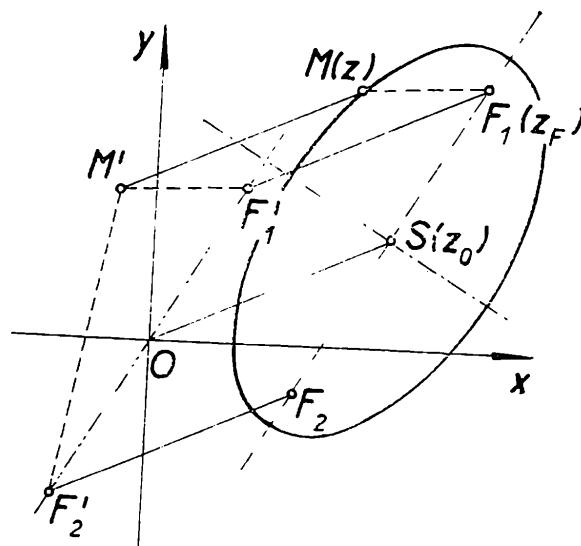
kde jsme absolutní hodnotu pod odmocninou vynechali, protože jsme nepotřebovali předem rozlišit obě ohniska, neboť $(z_F)_1, (z_F)_2$ se vzájemně vyměňují.

Dosazením hodnot (12a, b) do rovnice (3) dostaneme pak rovnici (4), která je tedy za podmínek (8) a (11) rovnicí elipsy ve středovém tvaru.

Je-li $a^2 = b^2$, plyne z (10a, b) $|\alpha| = 0$ a dostáváme kružnici $z\bar{z} + \frac{B}{2A} = 0$ o poloměru $R = \sqrt{-\frac{B}{2A}}$. Kružnice je reálná, je-li (jako u elipsy) $AB < 0$.

Poznámka. Můžeme ovšem také určit rovnici elipsy o středu v bodě $S(z_0)$ a ohnisku $F_1(z_F)$. Abychom mohli použít ohniskové definice elipsy, je třeba znát souřadnici (z_F^*) druhého ohniska F_2 . K tomu uijeme stejné velikosti vektorů \vec{SF}_1 a \vec{F}_2^*S , tedy (obr. 2)

$$z_F^* - z_0 = z_0 - z_F$$



Obr. 2

a proto

$$z_F^* = 2z_O - z_F.$$

Potom užitím definice elipsy ze vztahu

$$\sqrt{(z - z_F)(\bar{z} - \bar{z}_F)} + \sqrt{(z + z_F - 2z_O)(\bar{z} + \bar{z}_F - 2\bar{z}_O)} = 2a$$

dostaneme dvojitým umocněním a úpravami rovnici

$$(\bar{z}_F - \bar{z}_O)^2 z^2 + (z_F - z_O)^2 \bar{z}^2 - 2(a^2 + b^2)z\bar{z} - 2\bar{\beta}z - 2\beta\bar{z} + B^* = 0,$$

kde

$$\beta = [\bar{z}_O(z_F - z_O)^2 + 2z_O(a^2 + b^2)]$$

je komplexní číslo a

$$B^* = (\bar{z}_F - \bar{z}_O)^2 z_O^2 + (z_F - z_O)^2 \bar{z}_O^2 - 2(a^2 + b^2)z_O\bar{z}_O + 4a^2b^2$$

je reálné číslo.

Ke stejnému výsledku dojdeme posunutím elipsy (3) o vektor \vec{OS} .

2. Podobným způsobem odvodíme rovnici hyperboly a to opět nejdříve v osovém tvaru z její ohniskové definice

$$|MF_1 - MF_2| = 2a.$$

Platí tedy buď

$$|z - e| - |z + e| = 2a,$$

nebo

$$|z + e| - |z - e| = 2a.$$

Po dosazení za vzdálenosti dostaneme úpravou obou vztahů touž rovnici hyperboly v osovém tvaru (jestliže ještě použijeme vztahu $e^2 = a^2 + b^2$)

$$a^2(z - \bar{z})^2 + b^2(z + \bar{z})^2 - 4a^2b^2 = 0, \quad (13a)$$

nebo

$$(a^2 + b^2)(z^2 + \bar{z}^2) - 2(a^2 - b^2)z\bar{z} - 4a^2b^2 = 0. \quad (13b)$$

Je-li střed hyperboly v počátku O zvoleného systému souřadnic (obr. 3), ohniska pak v bodech $F_1(z_F)$, $F_2(-z_F)$, odvodíme rovnici hyperboly ve středovém tvaru z její definice rozepsáním vztahu

$$|z + z_F| - |z - z_F| = 2a,$$

nebo

$$|z - z_F| - |z + z_F| = 2a$$

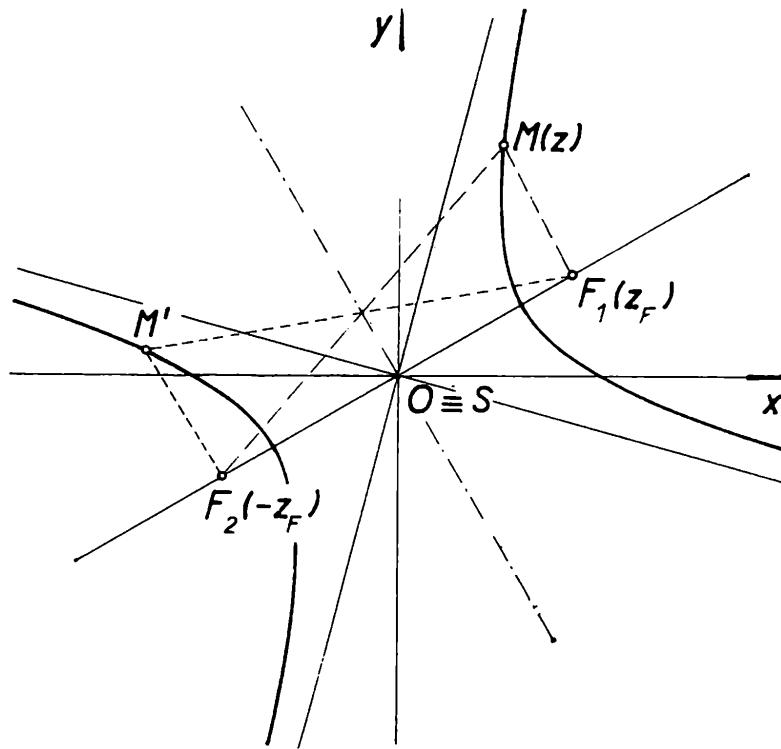
dostaneme

$$\bar{z}_F^2 z^2 + z_F^2 \bar{z}^2 - 2(a^2 - b^2)z\bar{z} - 4a^2b^2 = 0. \quad (14)$$

Ptejme se nyní, kdy rovnice

$$\bar{\alpha}z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z} + B = 0, \quad (15)$$

kde α je komplexní číslo, A , B jsou reálná čísla, je rovnicí reálné hyperboly ve středovém tvaru, jaké jsou její poloosy a kde má tato hyperbola svá ohniska.



Obr. 3

Rovnice (14) a (15), které mají být rovnicí téže hyperboly, musí mít úměrné koeficienty. Proto především

$$B \neq 0.$$

Aby v rovnici (15) bylo při absolutním členu B záporné znaménko [jako je tomu v rovnici (14)], vynásobme tuto rovnici -1 . Potom pro $k > 0$ je

$$k|B| = 4a^2b^2, \quad (16)$$

$$-k\alpha = z_F^2, \quad -k\bar{\alpha} = \bar{z}_F^2, \quad (17)$$

$$\varepsilon kA = a^2 - b^2, \quad \varepsilon = \text{sign } B. \quad (18)$$

Vyznačení různých možností znamének při A , B v rovnici (18) vede k užití $\varepsilon = \text{sign } B$.²⁾

Z rovnic (17) jejich násobením plyne

$$k^2\alpha\bar{\alpha} = z_F^2\bar{z}_F^2 = e^4 = (a^2 + b^2)^2$$

a tedy

$$k|\alpha| = a^2 + b^2. \quad (19)$$

Ve spojení s rovnicí (18) získáme pro čtverce poloos

$$a^2 = \frac{1}{2}k(|\alpha| + \varepsilon A), \quad b^2 = \frac{1}{2}k(|\alpha| - \varepsilon A)$$

²⁾ $\varepsilon = \text{sign } B$ znamená, že $\varepsilon = 1$ je-li $B > 0$, $\varepsilon = -1$ je-li $B < 0$.

a dosazením do (16) pak

$$4a^2b^2 = k^2(\alpha\bar{\alpha} - A^2) = k|B|,$$

tj.

$$k = \frac{|B|}{\alpha\bar{\alpha} - A^2}.$$

Protože podle předpokladu je $k > 0$, musí být

$$\alpha\bar{\alpha} > A^2,$$

tedy

$$|\alpha| > A.$$

Potom čtverce poloos jsou dány vzorci

$$a^2 = \frac{1}{2} \frac{|B|}{|\alpha| - \varepsilon A}, \quad b^2 = \frac{1}{2} \frac{|B|}{|\alpha| + \varepsilon A} \quad (20a)$$

Podle (17) dostaneme pro ohniska

$$z_F^2 = - \frac{|B|\alpha}{\alpha\bar{\alpha} - A^2} = \frac{\alpha|B|}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}}$$

a tedy

$$(z_F)_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha B}{A^2 - \alpha\bar{\alpha}}}, \quad (20b)$$

(absolutní hodnotu při B lze opět vynechat z téhož důvodu jako při elipse — viz (12b).

Dosazením hodnot (20a, b) do rovnice (14) hyperboly ve středovém tvaru dostaneme rovnici (15), která je proto za podmínek $|\alpha| > A$ a $B \neq 0$ rovnicí (reálné) hyperboly ve středovém tvaru.

Je-li $a^2 = b^2$ a tedy hyperbola je rovnoosá, plyne z (20a) $A = 0$ a tudíž středová rovnice rovnoosé hyperboly je dána výrazem

$$\bar{\alpha}z^2 + \alpha\bar{z}^2 + B = 0.$$

3. Pro parabolu o vrcholu A v počátku O a ohnisku v bodě $F \left[\frac{p}{2}, 0 \right]$

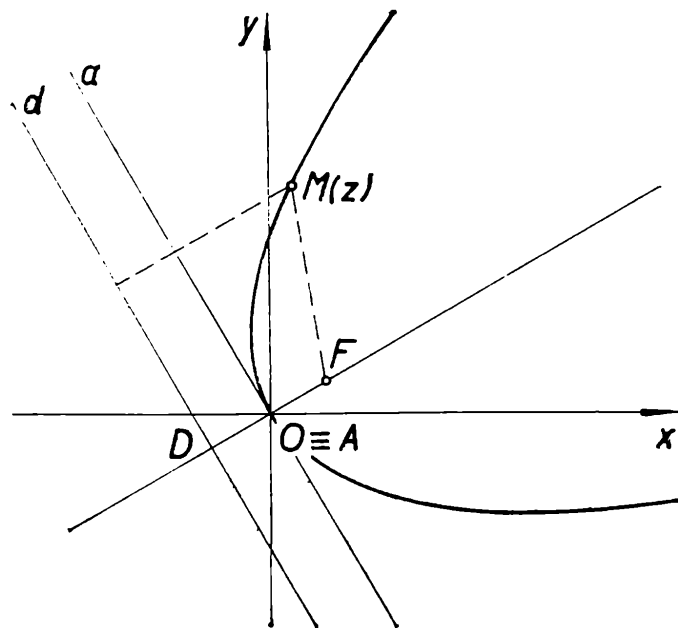
(a tedy s osou v ose x) je přímka

$$z + \bar{z} + p = 0 \quad (21a)$$

její řídicí přímkou d a pro každý bod $M(z)$ paraboly podle její ohniskové definice platí

$$\left| z - \frac{p}{2} \right| = \frac{|z + \bar{z} + p|}{2}, \quad ^3)$$

³⁾ Levá strana rovnice je vzdálenost bodů M a F , pravá strana rovnice je vzdálenost bodu M od přímky d .



Obr. 4

odkud po úpravě dostaneme rovnici

$$(z - \bar{z})^2 + 4p(z + \bar{z}) = 0. \quad (22a)$$

Má-li parabola osu v ose y , vrchol A v počátku O a ohnisko $F \left[0, \frac{p}{2} \right]$,

Pro vzdálenost d bodu (z_0) od přímky

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + A = 0 \quad (a)$$

totiž platí vzorec

$$d = \frac{|\bar{\alpha}z_0 + \alpha\bar{z}_0 + A|}{2|\alpha|}. \quad (b)$$

Důkaz. Je-li (z_1) průsečík přímky (a) s kolmicí bodem (z_0) na tuto přímku, je

$$d = |z_0 - z_1|.$$

Daná přímka (a) je (jak se snadno přesvědčíme) kolmá např. na přímku

$$\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = 0,$$

a protože úsečka $(z_0)(z_1)$ je rovnoběžná se směrem určené kolmice, platí (k je reálné)

$$z_0 - z_1 = k\alpha, \text{ tedy } d = |k\alpha|. \quad (c)$$

Bod (z_1) je bodem přímky (a) a proto

$$\bar{\alpha}(z_0 - k\alpha) + \alpha(\bar{z}_0 - k\bar{\alpha}) + A = -2k\bar{\alpha}\alpha + \bar{\alpha}z_0 + \alpha\bar{z}_0 + A = 0.$$

Odtud

$$k = \frac{1}{2} \frac{\bar{\alpha}z_0 + \alpha\bar{z}_0 + A}{\alpha\bar{\alpha}}$$

a po dosazení za konstantu úměrnosti k do výrazu (c) dostaneme uvedený vzorec (b) pro vzdálenost bodu od přímky.

má řídicí přímka d rovnici

$$z - \bar{z} + pi = 0 \quad (21b)$$

a parabola má rovnici

$$(z + \bar{z})^2 + 4pi(z - \bar{z}) = 0. \quad (22b)$$

Určeme nyní rovnici paraboly s ohniskem $F(z_F)$, kde $z_F \neq 0$, je-li její vrchol A v počátku O (obr. 4). Řídicí přímka d prochází potom bodem $D(-z_F)$ kolmo k ose paraboly, která je v přímce OF . Pro řídicí přímku platí

$$\frac{z + z_F}{\bar{z} + \bar{z}_F} = \frac{kiz_F}{-ki\bar{z}_F}$$

a tedy její rovnice je

$$\bar{z}_F z + z_F \bar{z} + 2z_F \bar{z}_F = 0. \quad (23)$$

Pro rovnici paraboly z definice plyne

$$|z - z_F| = \frac{|\bar{z}_F z + z_F \bar{z} + 2z_F \bar{z}_F|}{2|z_F|}$$

a po úpravě

$$(\bar{z}_F z - z_F \bar{z})^2 + 8z_F \bar{z}_F (\bar{z}_F z + z_F \bar{z}) = 0. \quad (24)$$

Osa této paraboly je přímka OF s rovnicí

$$\bar{z}_F z - z_F \bar{z} = 0, \quad (25)$$

tečna ve vrcholu A je

$$\bar{z}_F z + z_F \bar{z} = 0. \quad (26)$$

Výrazy (25) a (26), jak vidíme, se vyskytují v rovnici (24) určené paraboly.

Je-li ohnisko v počátku a řídicí přímka d má rovnici

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + A = 0, \quad (27)$$

je rovnice této paraboly

$$(\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z})^2 + 2A\left(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \frac{A}{2}\right) = 0. \quad (28)$$

Osa této paraboly je přímka jdoucí počátkem O kolmo k řídicí přímce (27), tedy přímka s rovnicí

$$\bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} = 0 \quad (29a)$$

a tečna vrcholová má rovnici

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \frac{A}{2} = 0. \quad (29b)$$

Oba výrazy (29a, b) se opět vyskytují v rovnici (28) naší paraboly. Vrchol A paraboly (28) je určen souřadnicí

$$z = -\frac{A}{4\bar{\alpha}}$$

a bod D na řídicí přímce souměrný k ohnisku paraboly podle jejího vrcholu pak souřadnicí

$$z_D = -\frac{A}{2\bar{\alpha}}$$

Z rovnice (28) je zřejmo, že kvadratická rovnice mezi z, \bar{z}

$$\bar{\beta}^2 z^2 + \beta^2 \bar{z}^2 + 2Bz\bar{z} + \gamma z + \gamma\bar{z} + C = 0, \quad (30)$$

kde β^2, γ jsou komplexní čísla, B, C pak reálná, vyjadřuje parabolu, jestliže koeficienty B, C, β^2, γ splňují podmínky, které určíme.

Především trojčlen

$$\bar{\beta}^2 z^2 + 2Bz\bar{z} + \beta^2 \bar{z}^2$$

musí být druhou mocninou dvojčlenu

$$\bar{\beta}z - \beta\bar{z},$$

odkud vyplývá

$$-B = \beta\bar{\beta}, \quad B < 0. \quad (30a)$$

Z úměrnosti rovnic (28) a (30) pro koeficient úměrnosti $k > 0$ plyne, že

$$kA^2 = C,$$

tedy

$$C > 0.^4) \quad (30b)$$

Aby rovnice (30) byla rovnicí paraboly, musí být možno psát ji ve tvaru

$$(\bar{\beta}z - \beta\bar{z})^2 + 2\sqrt{C} \left(\frac{\bar{\gamma}}{2\sqrt{C}} z + \frac{\gamma}{2\sqrt{C}} \bar{z} + \frac{\sqrt{C}}{2} \right) = 0$$

a tudíž

$$\frac{\gamma}{2\sqrt{C}} = \beta, \quad \text{odkud } \gamma = 2\beta\sqrt{C}. \quad (30c)$$

Obdobně bychom postupovali v případě, kdy kvadratická rovnice typu (30) by neměla absolutní člen. Porovnání bychom učinili s rovnicí (24) a dostali bychom

$$-B = \beta\bar{\beta}, \quad B < 0, \quad \gamma = -8\beta^2\bar{\beta} = -8\beta B.$$

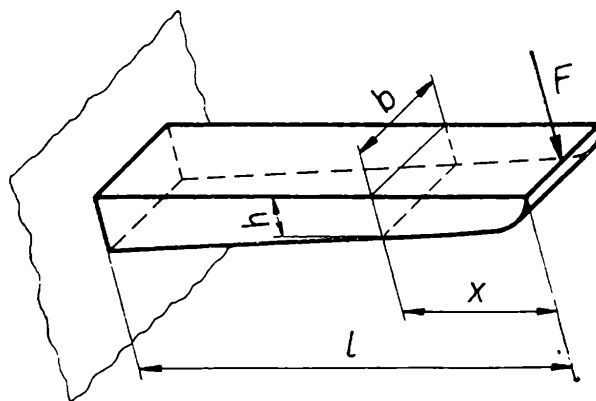
⁴⁾ Stačí proto, aby v rovnici (30) byl součin $BC < 0$, neboť případným násobením -1 lze vždy docílit toho, že $B < 0, C > 0$. Jak vidíme, požadavek $BC < 0$ je též podmínka jako v případě elipsy.

0 některých optimálních konstrukcích

Prof. Ing. C. HÖSCHL, Liberec

Stavební nebo strojní konstrukce se navrhují tak, aby jednotlivé části a jejich celkové uspořádání splňovaly některé požadavky, např. aby části byly dostatečně tuhé a pevné, aby je bylo možno umístit do prostoru, který je k dispozici, aby měly některé předepsané rozměry a mohly plnit požadovanou funkci. Tyto požadavky však neurčují tvar ani materiál a způsob výroby jednoznačně, takže navrhovatel se může rozhodnout pro některé z mnoha možných řešení. Často se rozhoduje subjektivně; volí tvar a způsob výroby, o němž si myslí, že nejlépe splňuje požadavky účelnosti, vzhlednosti a nízké ceny. Chceme-li se oprostít od takového způsobu rozhodování, zavedeme kvantitativní — a tedy matematickému zpracování přístupná — kritéria, která umožní objektivní volbu nejvhodnější (optimální) konstrukce. Nejčastěji bývá takovým kritériem nejmenší cena nebo nejmenší hmotnost výrobku. Kritéria však mohou být složitější a mohou se případ od případu lišit. S takovými úlohami se setkáváme i mimo technické obory, jak ještě ukážeme.

První takovou úlohu řešil Galileo Galilei (1564—1642). Zajímalo ho, jaký tvar by měl mít nejlehčí nosník obdélníkového průřezu o dané šířce b a délce l , schopný přenést danou sílu F (obr. 1). Podmínku minimální



Obr. 1

hmotnosti máme splnit vhodnou volbou funkce $h = f(x)$, kde h je výška nosníku. Galilei předpokládal, že nejlehčí bude nosník, u něhož je stejná pravděpodobnost poruchy ve všech průřezích. Je-li síla R potřebná k přetržení tyče z daného materiálu úměrná velikosti průřezu $S = bh$, platí rovnice

$$R = k \cdot b \cdot h = kbf(x), \quad (1)$$

kde k značí konstantu úměrnosti. Ulomená část nosníku se po odtržení otáčí jako páka kolem spodní hrany A (obr. 2). K jejímu odtržení bylo

zapotřebí na konci nosníku síly P , zatímco v průřezu AB působila v okamžiku odtržení síla R . Z momentové podmínky rovnováhy k bodu A

$$R \frac{h}{2} = Px \quad (2)$$

vyjde dosazením z rovnice (1)

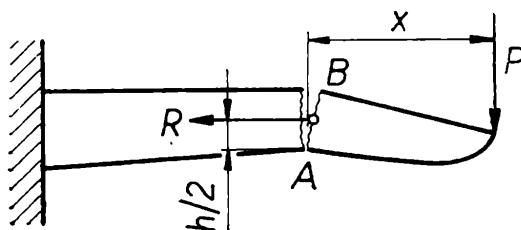
$$\frac{1}{2} kb[f(x)]^2 = Px,$$

a tedy

$$f(x) = \sqrt{\frac{2P}{kb} x} \quad (3)$$

Konstantu k by bylo možno určit experimentálně změřením síly potřebné k přetržení tyče daného průřezu. Sílu P , která způsobí ulomení tyče, volíme větší než tíhu F přenášeného břemene. Poměr $s = P/F$ je *mírou bezpečnosti*. Rovnice (3) vyjadřuje poznatek, že nárysem hledaného nosníku je parabolická úseč.

Galilei se však dopustil chyby; neuvědomil si, že materiál nosníku je při ohybu ve spodní části průřezu v podélném směru stlačován a v horní části protahován, takže výslednice R vnitřních sil přenášených mezi hmotnými částicemi v průřezu AB nebude mít polohu zakreslenou na obr. 2. Příklad je složitější, a to i tehdy, platí-li až do mezního zatížení



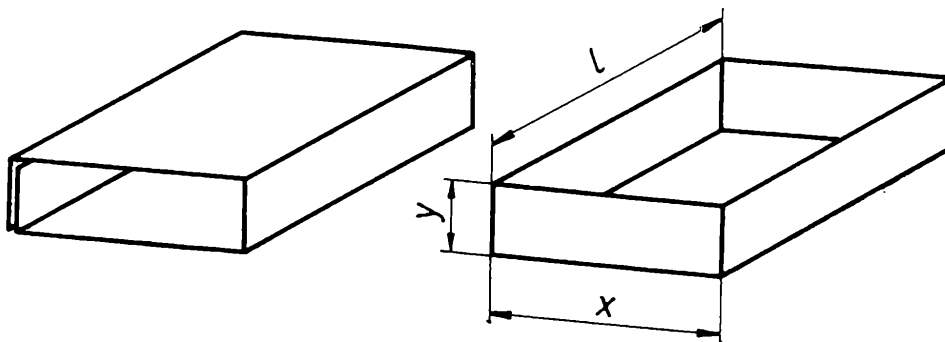
Obr. 2

jednoduchý Hookův zákon. V teorii pružnosti se dokazuje, že místo chybného vzorce (3) má správně být

$$f(x) = \sqrt{\frac{6P}{kb} x}. \quad (4)$$

Přes tuto chybu dospěl Galilei ke správnému závěru, plynoucímu z rovnic (3) i (4), že totiž nárysem optimálního nosníku je parabolická úseč.

Zabývejme se nyní jiným problémem optimální konstrukce. *Navrh-
něme krabičku od zápalek tak, aby spotřeba dřeva byla co nejmenší.* Délka zápalek l je dána zkušeností. Rovněž velikost balení, tj. objem $V = xy l$ je dán. Šířku x a výšku y krabičky volíme nyní tak, aby tyto rozměry



Obr. 3

vyhověly podmínkám úlohy. Přihlédneme-li ke konstrukci krabičky podle obr. 3, dojdeme k závěru, že spotřeba dřeva bude nejmenší, bude-li nejmenší povrch

$$S = 2xy + 3lx + 5ly. \quad (5)$$

Z obr. 5 je patrné, že v krabičce je pět stěn o rozměrech y a l . Poněvadž $y = V/xl$, vyjde (pro $x > 0$)

$$S = f(x) = \frac{2V}{l} + 3lx + \frac{5V}{x}. \quad (6)$$

Má-li být x voleno tak, aby S bylo minimální, musí platit pro jakékoli $k \neq 0$, $x + k > 0$, že

$$f(x + k) > f(x). \quad (7)$$

Dosazením z (6) dostaneme po snadné úpravě

$$3lk + 5V \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x} \right) > 0 \quad (8)$$

a odtud

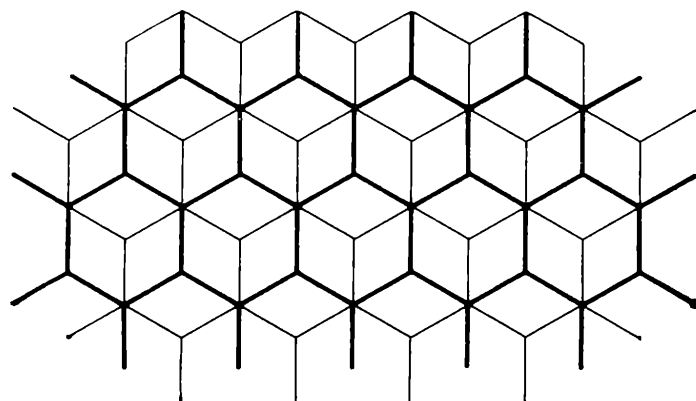
$$k^2x + k \left[x^2 - \frac{5V}{3l} \right] > 0. \quad (9)$$

První člen na levé straně (9) je vždy kladný; má-li být tato nerovnost splněna pro jakékoli kladné i záporné k , pokud $x + k > 0$, musí být výraz v lomené závorce roven nule. Musí proto být

$$x = \sqrt{\frac{5V}{3l}}, \quad y = \frac{V}{xl} = \sqrt{\frac{3V}{5l}}. \quad (10)$$

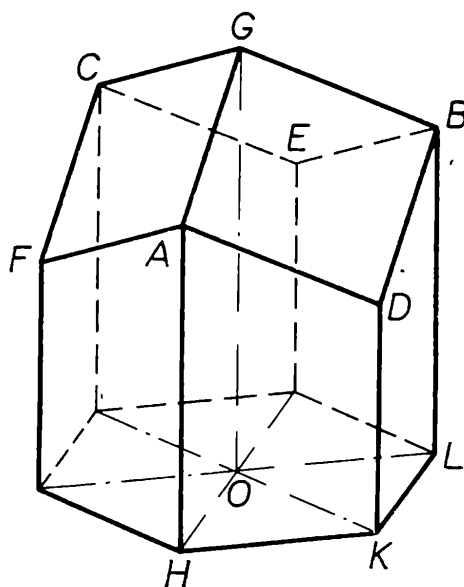
Optimální rozměry krabičky od zápalek tedy splňují podmínku $x : y = 5 : 3$. Přesvědčte se, zda vyráběné krabičky skutečně tuto podmínku splňují.

Nakonec pojednáme o stavbě buněk včelí plástve. Včely počínají plástev stavět tak, že nejprve vytvoří střední jehlanovitě prolamovanou vrstvu, jejíž průměr je zakreslen na obr. 4. Tlustě zakreslené pravidelné šestiúhelníky ohraničují průměty jednotlivých buněk, které na vrstvu z jedné strany navazují. Stěny buněk tvoří plástě šestibokých hranolů, jež včely



Obr. 4

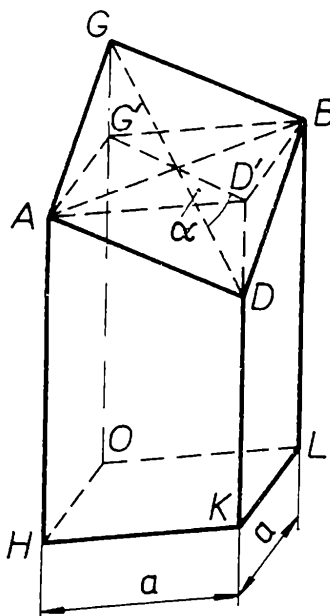
vytvářejí po obou stranách prolamované vrstvy. Hranoly vyplňují beze zbytku prostor mezi dvěma rovnoběžnými rovinami, v nichž jsou vstupní otvory. Prolamovaná vrstva přitom vytváří dna jednotlivých buněk. Jedna buňka je zakreslena na obr. 5. Je nahoře zakončena třemi kosočtverci, jež tvoří dno buňky. Vstupní otvor je dole. Snadno pochopíme, proč vstupní otvory mají tvar pravidelného šestiúhelníku. Rovinu lze totiž beze zbytku (a bez překrytí) pokrýt jen některými stejnými pravidelnými mnohoúhelníky: rovnostrannými trojúhelníky, čtverci nebo pravidelnými šestiúhelníky. (Kruhový tvar buněk tedy nevyhovuje.) Z těchto mnohoúhelníků má pravidelný šestiúhelník — při stejné ploše S — nejmenší obvod, a to $o_6 = 6a \doteq 3,73 \sqrt{S}$, zatímco čtverec má obvod $o_4 = 4\sqrt{S}$ a rovnostranný trojúhelník $o_3 \doteq 4,54\sqrt{S}$. O tom se snadno přesvědčíme výpočtem.



Obr. 5

Položme si nyní tuto otázku: *jaký sklon mají mít kosočtverce tvořící dno buňky podle obr. 5, aby spotřeba vosku byla co nejmenší?* Touto úlohou se prvý zabýval R. A. Réaumur (1683—1757). Předpokládáme, že průřez buňky ani její objem se nezmění. Těmto podmínkám vyhovíme,

zvolíme-li roviny kosočtverců tak, aby zůstala zachována poloha a délka vodorovných úhlopříček AB , BC , CA (obr. 5). Úhel mezi rovinou kosočtverce $ADBG$ a základnou hranolu označme α (obr. 6). Kdybychom zvolili úhel $\alpha = 0$, byla by buňka zakončena rovinou ABC (obr. 5), tj. šestiúhelníkem složeným ze tří kosočtverců, z nichž jeden ($AD'BG'$) je vyznačen na obr. 6 čárkovaně. Úhlopříčka AB kosočtverce je stejně



Obr. 6

dlouhá jako úhlopříčka HL šestiúhelníku. Z trojúhelníku OHL vypočteme

$$u_1 = \overline{AB} = \overline{HL} = a\sqrt{3}.$$

Úhlopříčka $D'G'$ je

$$u_2 = a.$$

Bude-li úhel α různý od nuly ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), vyjde úhlopříčka DG

$$u_3 = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Plocha kosočtverce by se zvětšila oproti předchozímu případu ($\alpha = 0$) o

$$\frac{u_1 u_3}{2} - \frac{u_1 u_2}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$$

o plocha bočních stěn hranolu vyznačených na obr. 6 by se zmenšila o trojúhelníky ADD' a DBD' ($\triangle AGG'$ a $\triangle BDD'$ nejsou na povrchu hranolu), tj. o

$$2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Povrch celé buňky by se tedy zmenšil o

$$\Delta S = \frac{3}{2} a^2 \operatorname{tg} \alpha - \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right).$$

Můžeme tedy psát, že

$$\Delta S = \frac{3}{2} a^2 f(\alpha), \quad (11)$$

kde

$$f(\alpha) = \operatorname{tg} \alpha - \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \sqrt{3} \quad (12)$$

Úhel α zvolíme takový, aby povrch buňky byl co nejmenší, tj. aby úbytek ΔS byl maximální. Pak pro $\varepsilon \neq 0$, $0 < \alpha + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ musí platit nerovnost

$$f(\alpha + \varepsilon) < f(\alpha). \quad (13)$$

Dosazením z rovnice (12) do (13) dostaneme po úpravě

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varepsilon) - \operatorname{tg} \alpha < \left(\frac{1}{\cos(\alpha + \varepsilon)} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \sqrt{3} \quad (14)$$

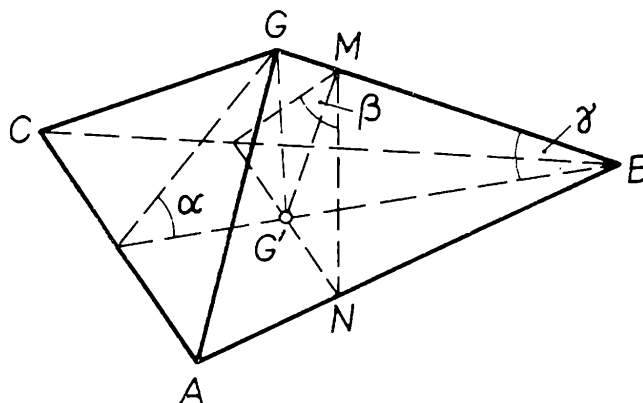
Tuto nerovnost násobíme součinem $\cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \varepsilon) > 0$ a upravíme s použitím známých součtových vět; nakonec dostaneme

$$(\sqrt{3} \sin \alpha - 1) \sin \varepsilon + \sqrt{3} \cos \alpha (1 - \cos \varepsilon) > 0. \quad (15)$$

Vzhledem k definičnímu oboru α je druhý člen na levé straně (15) pro nenulové ε vždy kladný. Má-li být nerovnost splněna nezávisle na volbě ε , musí být oblá závorka v prvním členu rovna nule; pak

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{3} \quad (16)$$

Nyní ještě určíme úhel β , který spolu svírají roviny kosočtverců tvořících dno buňky. Všimneme-li si, že na obr. 7 je $BG' = a$, vypočteme postupně



Obr. 7

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{3}, \quad \beta = 120^\circ.$$

Optimální úhel β , který spolu svírají roviny kosočtverců tvořících dno buňky, je tedy 120° . Vyhovuje-li tvar buňky této podmínce, tvoří její dno část pravidelného dvanáctistěnu. Budete-li mít příležitost, přesvědčte se, že včely skutečně staví plátve ve shodě s tímto výpočtem.

fyzika

Horror vacui

JOSEF KOTYK, Pardubice

Bylo. Nebylo... Jako v pohádce.

Pohádka o ničem? O horror vacui!

Bude strašidelná!

Co je to však, ó hrůzo, horror vacui? Slyšeli jste již tato slova?

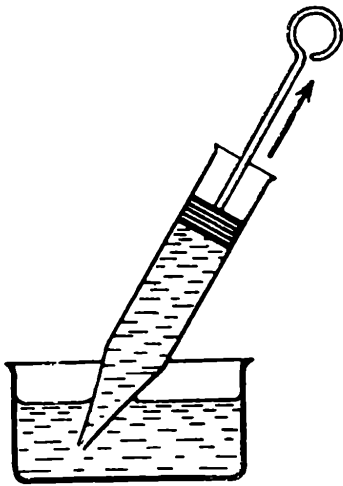
V doslovném překladu znamenají děs z ničeho, hrůza z prázdnoty, strach z prázdna.¹⁾ Kdo může však mít strach z prázdna? Žáků a školního prázdna, dies caniculares seu vacationes, vakací, se to zřejmě netýká.

Naše téma nás naopak nutí nebáti se ponoru do hlubin minulosti, vydati se statečně na exkurzi dějinami za dobrodružstvím poznání vývoje přírodních věd.

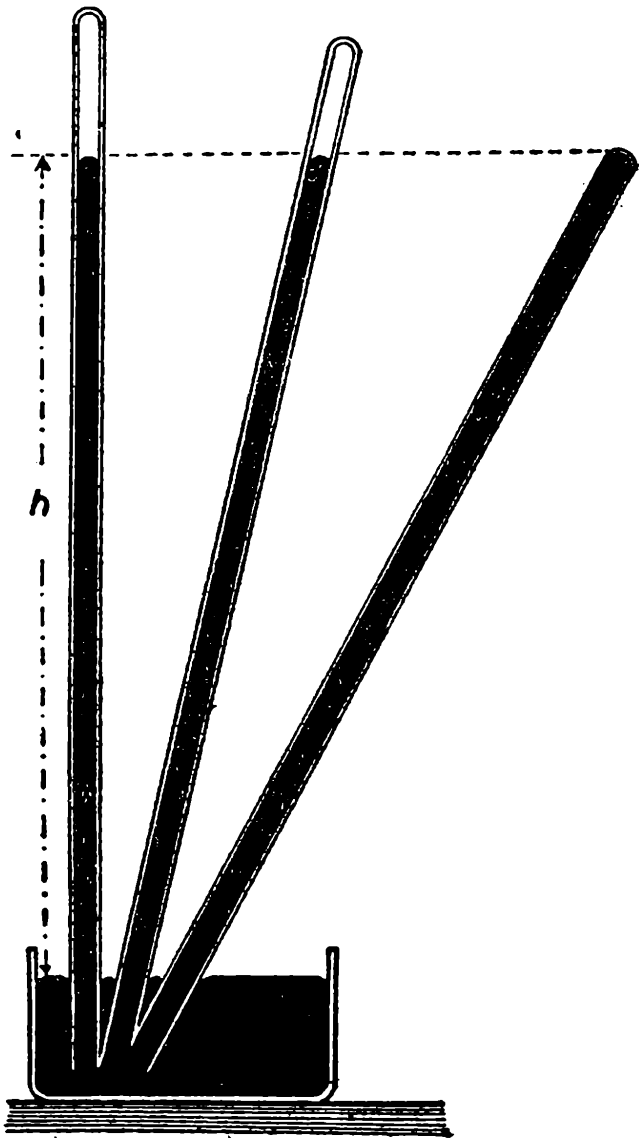
* *
*

Již v starších dobách bylo známo, že voda se dá v trubicích nasáti jen do určité výše, na otázku, proč stoupá voda v trubici, v níž vytahujeme vzduchotěsný píst vzhůru (viz obr. 1), nebylo však po mnohá staletí ani ve středověku odpovědi. Tehdy se vykládalo, že v přírodě nemůže vzniknout prostor prázdňý; voda stoupá pod píst prý proto, že příroda má strach z prázdna, jež by vznikalo za ustupujícím pístem, nutí tedy vodu, aby tento prostor vyplnila. Ve větších rozměrech lze podobné stoupání vody provést sacími pumpami. Že se tak

¹⁾ Lat. horror = děs, hrůza; vacuus = prázdňý; vacuum = prázdno, prázdnota.



Obr. 1



Obr. 2

nemůže dít stále, nýbrž jen do výše asi 10 m, poznalo se poprvé roku 1640 ve Florencii, když si tehdejší velkovévoda toskánský přál, aby voda byla čerpána ssacími pumpami z blízké nádržky na terasu jeho paláce. O vysvětlení byl požádán vynikající italský fyzik Galileo Galilei, o němž bylo známo,²⁾ že se nespokojoval spekulativními závěry sterilního scholasticismu, nýbrž odvozoval nové poznatky a své názory potvrzoval pokusy. Galilei byl přesvědčen, že dosavadní učení o hrůze přírody ze vzduchoprázdna je mylné; domníval se, že příroda pouze klade vzniku vakua odpor, který lze však změřiti. Navrhl, aby ve válci byl umístěn neprodyšně píst a k němu miska se závažím. Bude-li se miska zatěžovat, uvede píst do pohybu, jestliže tíhová síla závaží bude tak veliká jako odpor proti prázdnotě. Zdali Galilei tento pokus opravdu provedl, však nevíme. Byl již stár a slepý. Záhy nato, dne 8. ledna 1642 — tj. před 331 lety — ve Florencii zemřel.

²⁾ Viz autorův článek Galileo Galilei, uveřejněný u příležitosti 400. výročí badatelova narození v Rozhledech roč. 42, čís. 6, str. 284 až 288.

Roku 1641 přišel do Florencie Giovanni Torricelli.³⁾ Záhy se stal spolupracovníkem velikého Galileiho. Torricelli navrhl, aby při pokusech bylo místo vody použito kapaliny těžší (např. rtuti) a aby neprůhledná pumpa se zároveň nahradila průhlednou skleněnou trubicí asi 1 m dlouhou a na jednom konci zatavenou. Klasický, všem našim čtenářům zajisté známý a vtipný pokus zv. Torricelliův⁴⁾ (viz obr. 2) znamená definitivní konec hypotézy, že příroda nepřipouští prostoru prázdného, majíc proti němu odpor. Domněnka, vyplývající z metafyzického pojetí přírody a brzdící po staletí rozvoj fyziky, padla. Torricelliův pokus otevřel cestu pokroku vědeckého poznání, jež vychází z materialistického pojetí přírody. Ač zcela jednoduchý, dokázal objektivně, že existuje atmosférický tlak i možnost jeho měření. Dokázal však zároveň, že v přírodě existuje — prostor téměř prázdný. Vzniká také při Torricelliově pokusu, a to v trubici nad rtutí (tzv. Torricelliovo vakuum). O tom se můžeme snadno přesvědčiti; nakláme-li trubici, rtuť ji může postupně vyplnit — celou (viz opět obr. 2).

A horror vacui?

Strach z prázdna ustoupil pocitu právě opačnému, touze po poznání. Zkušenosti, získané při pokusech, vzbuzovaly veliký zájem. Jistý učený mnich přišel za Torricellim až z Paříže, aby tuto neslýchanou věc, vzduchoprázdný prostor získaný experimentem, také spatřil...

Příroda nezná horrory ani hrůzy jim podobné. Kde lidé dřívějších věků pociťovali jen neurčitý děs z neznáma, z netečných a domněle nepřátelských prostorů, člověk nové doby, vyzbrojen vědeckými poznatky, dále a dále proniká a dobývá. Horror vacui, strach z prázdna, byl primitivní hrůzou člověka, o němž platí slova, jež tak často zdůrazňoval veliký LENIN: Otázka našeho vědění nebo nevědění je otázka praxe. S poznáním ustupuje a mizí primitivní hrůza. Člověk nové doby se nebojí např. již burácení hromu, úkazů zatmění, ani nespátřuje v kometě meč nebo pochodeň války, a hrozbu nebes. Poznáním se člověk osvobozuje.

(Pokračování)

³⁾ Giovanni Torricelli (čti Džovany Toričeli, 1608 až 1647), matematik a fyzik italský. Jeho vědeckou činnost jsem čtenářům Rozhledů přehledně shrnul u příležitosti 360. výročí badatelova narození v 47. ročníku našeho časopisu, čís. 3, str. 149 až 151.

⁴⁾ Pokus zvaný Torricelliův vykonal po první roku 1643 Torricelliův přítel Vincenzo Viviani (1622 až 1703), jenž vynikl také v geometrii pracemi o kuželosečkách.

Proč Měsíce hlubiny nemohou být z litiny?*)

Jak známo, liliputánští vědci pověděli Guliverovi, že Mars má dva měsíce. Navíc mu prozradili, v jakých vzdálenostech od Marsu se tyto měsíce pohybují. Pozemští astronomové je objevili o sto let později, přičemž se mnohé údaje liliputánů potvrdily. Odkud ale Swift věděl o družicích Marsu ?

Dlouho to bylo považováno za náhodu, dokud nepřišla móda přisuzovat všechny tyto „zázraky“ návštěvníkům z cizích planet. Podle mínění některých osobností tito návštěvníci lidem sdělili pomocí zvláštních šifrovaných zpráv určité astronomické údaje. Tyto poznatky se zachovaly v různé formě — v povídkách, písních, mýtech.

Je zřejmé, že i dětská říkanka z názvu článku (viz poznámku) může být takovou zprávou o povrchu Měsíce, kterou nám zanechaly mimozemské bytosti. A tak věda musí dříve nebo později potvrdit ideu této říkanky.

Opravdu, výzkumy bylo prokázáno, že Měsíc obsahuje 15 % železa (Země 35 %). Kromě toho Měsíc nemá magnetické pole, což lze objasnit tím, že jeho nitro nemá buď vůbec nebo jen v malém objemu tekuté jádro obohacené železem. Právě proudy v takovém jádře se nyní objasňuje vznik magnetického pole Země. A konečně hustota Země je $5,5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, kdežto hustota Měsíce je $3,34 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, což odpovídá hustotě látky složené v podstatě ze silikátů zemské kůry. Podle mínění prof. Runcorna z Anglie lze předpokládat, že už před 4,5 miliardami let, při vzniku Země a její družice získal Měsíc podstatně méně železa. Proč? Na tuto otázku neexistuje odpověď. Možná, že to mimozemšťané věděli, ale pokračování dětské říkanky se asi ztratilo jejím nekonečným opakováním.

Z čeho je tedy Měsíc, když už na něj nezbylo železo? Pro odpověď na tuto otázku si musíme zajít k dalším znalcům. Jak známo, baron Prášil objevil na Zemi ostrov ze syra. Podle jeho vyprávění byl tento skvělý a věrohodný objev zveřejněn G. A. Bergerem už v roce 1786. Od té doby byl nejednou vysloven předpoklad, že Měsíc je také z tohoto materiálu. Avšak otázka, z jakého druhu syra je Měsíc, vyvolala prudké diskuse.

Známému americkému geologovi, profesoru O. Anderssonovi z Kolumbijské university bylo uloženo, aby změřil rychlost šíření zvuku v měsíč-

*) Přibližně tak lze přeložit název článku M. A. Korce a Z. L. Ponizovského ve 4. čísle časopisu *Kvant* (roč. 1972). Název článku je vlastně prvním veršem říkanky ruských dětí: „*Počemu Luna ně iz čuguna? — Potomu čto na Lunu ně chvatilo b'čugunu.*“ — což volně přeloženo je: „*Proč Měsíce hlubiny nemohou být z litiny? — Protože by do Měsíce bylo jít třeba převelice.*“

ních horninách a našel analogie mezi horninami pozemskými. Výsledky byly pochopitelně očekávány velmi netrpělivě.

Na Nový rok rozeslal O. Andersson svým známým pohlednici s textem:

*It brightens the spirits
in times like these,
To know the Moon
is made of cheese.*

Ve volném překladu pohlednice oznamuje:

*To duchové mi sdělili
a uvěřil jsem ve chvíli.
Mějte i vy moji víru,
že je Měsíc koule sýru.*

Uvedeme si rychlosti zvuku v_z naměřené prof. Anderssonem ve zkoumaných vzorcích:

Měsíční horniny a sýry	v_z [km s ⁻¹]
Vzorek měsíční horniny 10 017	1,84
Norský sýr	1,83
Italský sýr	1,75
Ementálský sýr	1,65
Visconsinský sýr	1,57
Vzorek měsíční horniny 10 046	1,25

Jak je zřejmé z tabulky, hodnoty tohoto fyzikálního parametru sýrů a měsíčních hornin se v podstatě shodují. A tak lze sýr považovat za pozemskou analogii podstaty Měsíce. Z uvedené tabulky, bohužel, není jasné, který druh sýra hraje tuto roli. Avšak podařilo se rozřešit i tuto záhadu.

Seismické kmity měsíční půdy, které vznikají dopadem startovacích stupňů raket při měsíčních expedicích, nezanikaly za několik sekund, jak se podle všech pravidel očekávalo, ale utlumily se až za desítky minut. Byl vysloven předpoklad, že to může být způsobeno existencí nějakých tajemných dutin, jejichž původ je neznámý. Ale přece v sýru (a především v některých jeho druzích) jsou docela jistě díry! Přepočtem na odpovídající rozměr lze nepochopitelný jev zcela vysvětlit. A navíc, poněvadž největší díry jsou v sýru ementálském, je rozřešena i otázka druhu sýra.

Tedy už víme „proč Měsíce hlubiny nemohou být z litiny“: jsou z ementálského sýra. To je poučení pro vědce — je třeba pozorně prozkoumat všechn folklor a všechny dětské říkanky.

O. L.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení příkladů loňské soutěže Rozhledů

Matematika

7. Buďte a a b reálná čísla a položme

$$f(x) = ax + b.$$

Vyšetřete všechny případy, kdy posloupnost

$$f(x), f[f(x)], f[f(f(x))],$$

obsahuje jen konečný počet různých členů.

(Došla 4 řešení)

Břetislav Novák

Řešení autorovo: Označíme-li n -tý člen dané posloupnosti $f_n(x)$ snadno zjistíme, že

$$f_n(x) = a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

Je-li $a = 1$, je $f_n(x) = x + nb$ a je tedy nutně $b = 0$. Je-li $a \neq 1$, máme po zřejmé úpravě

$$f_n(x) + a^n \left(x + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}$$

Odtud ihned dostaneme, že podmínka úlohy je splněna pouze pro $a = 0$, -1 nebo je-li $x = -\frac{b}{a-1}$

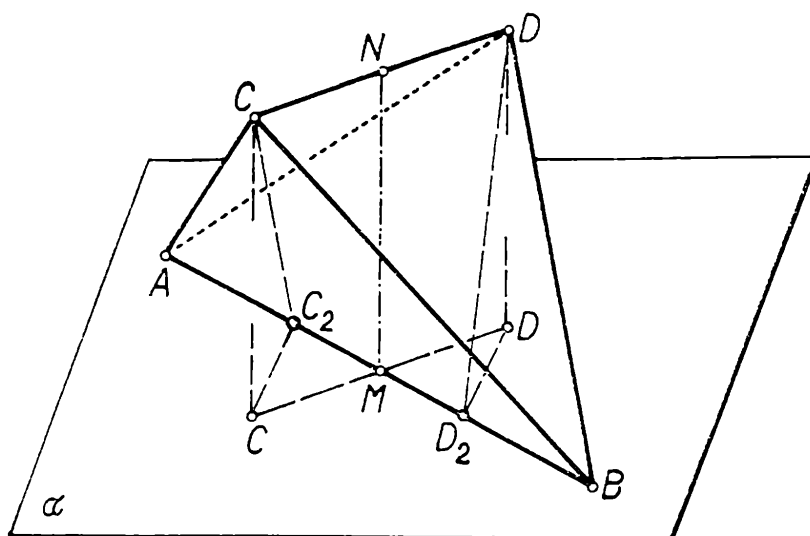
Celkem tedy máme jen tyto možnosti: $a = 1$, $b = 0$; $a = 0$; $a = -1$ (v těchto případech posloupnost polynomů $f_n(x)$ obsahuje jen konečný počet různých členů); $a \neq 1$, $x = -\frac{b}{a-1}$.

8. Čtyři body čtyřstěnu, které neleží v jedné rovině, mají stejný součet vzdáleností od rovin jeho stěn. Dokažte, že stěny tohoto čtyřstěnu jsou navzájem shodné trojúhelníky.

(Došla 3 řešení)

Jiří Sedláček, Jaroslav Zemánek

Autorské řešení. Zabýváme se nejprve zvláštním případem, kdy uvažované čtyři body jsou vrcholy daného čtyřstěnu $ABCD$. Předpoklad úlohy v tomto případě znamená, že všechny čtyři výšky čtyřstěnu jsou stejně dlouhé. Ze vzorce pro objem potom vyplývá, že vše-



Obr. 1

chny stěny čtyřstěnu $ABCD$ mají týž obsah. Pokusme se tedy dokázat toto tvrzení:

Mají-li stěny čtyřstěnu $ABCD$ týž obsah, pak jsou to shodné trojúhelníky.

Důkaz (obr. 1). Proložme přímkou AB rovinu α rovnoběžnou s přímkou CD . Jsou-li C_1, D_1 pravoúhlé průměty bodů C, D na rovinu α , platí

$$CC_1 = DD_1. \quad (1)$$

V obr. 1 doplňte u dolních bodů C a D index 1.

Označme dále C_2, D_2 pravoúhlé průměty bodů C, D na přímkou AB . Poněvadž trojúhelníky ABC, ABD mají týž obsah a společnou stranu AB , platí

$$CC_2 = DD_2. \quad (2)$$

Z (1) a (2) vyplývá (obr. 1), že také

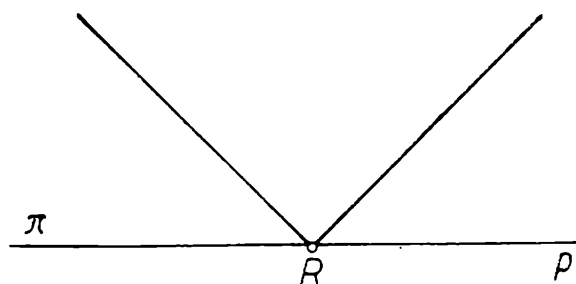
$$C_1C_2 = D_1D_2. \quad (3)$$

To znamená, že body C_1, D_1 mají stejnou vzdálenost od přímky AB a leží tedy uvnitř dvou navzájem opačných polorovin vyřatých v rovině α přímkou AB (jinak by totiž bylo $AB \parallel C_1D_1 \parallel CD$, což není možné), načež střed M úsečky C_1D_1 leží na přímce AB .

Představme si nyní rovinu γ proloženou přímkou CD rovnoběžně s přímkou AB . Označme N střed úsečky CD a A_1, B_1 pravoúhlé průměty bodů A, B na rovinu γ . Úsečka MN je střední příčka v pravoúhelníku CC_1D_1D (obr. 1) a je proto kolmá k oběma rovnoběžným rovinám α, γ . Pravoúhlým průmětem bodu M na rovinu γ je tedy bod N . Obdobně jako v předchozím odstavci lze dokázat, že přímky A_1B_1 a CD mají jediný společný bod — střed úsečky A_1B_1 . Avšak jediný bod přímky AB , jehož průmět padne na přímkou CD , ke zřejmé bod M . Proto je bod N středem úsečky A_1B_1 a z pravoúhelníka AA_1B_1B plyne, že M je střed úsečky AB .



Obr. 2a



Obr. 2b

Poněvadž tedy bod M je středem úsečky AB , platí

$$AC_2 = BD_2; \quad (4)$$

není-li totiž přímo $C_2 \equiv D_2 \equiv M$, je bod M středem úsečky C_2D_2 , jak je vidět z rovnoběžníka $C_1C_2D_1D_2$ (obr. 1).

Vzhledem k (2) a (4) dostáváme rovnost $AC = BD$ (obr. 1). Obdobně lze dokázat rovnosti $AB = CD$, $AD = BC$ a tím i naše tvrzení.

Budte nyní A_1, B_1, C_1, D_1 čtyři body daného čtyřstěnu $ABCD$, které neleží v jedné rovině a které mají stejný součet vzdáleností od rovin

$$ABC, BCD, CDA, DAB. \quad (5)$$

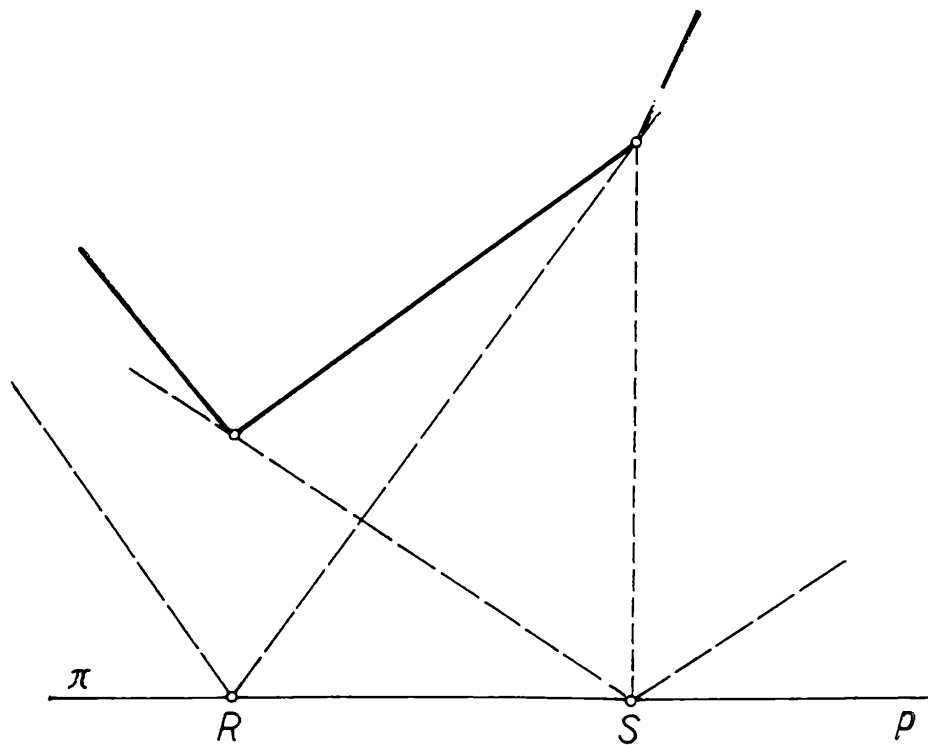
Má-li být tvrzení úlohy pravdivé, musí mít všechny čtyři výšky čtyřstěnu $ABCD$ tutéž délku, jak vyplývá ze vzorečku pro objem. Naopak, kdyby se nám podařilo ukázat, že z předpokladů úlohy plyne rovnost výšek daného čtyřstěnu, byla by naše věta vzhledem k první části řešení dokázána. K tomu je však třeba si uvědomit, jak se mění vzdálenost bodu od daných rovin, pohybuje-li se tento bod po nějaké přímce.

Nechť tedy p je daná přímka. Představme si polorovinu π s hraniční přímkou p . V této polorovině budeme znázorňovat vzdálenosti resp. součty vzdáleností bodů přímky p od daných rovin.

Vezměme nejprve jednu rovinu ϱ . Je-li $p \parallel \varrho$, mají všechny body přímky p stejnou vzdálenost od roviny ϱ ; příslušným grafem v polorovině π je rovnoběžka s přímkou p (obr. 2a). Je-li však přímka p různoběžná s rovinou ϱ , bude naším grafem v polorovině π zřejmě lomená čára, jak ukazuje obr. 2b, kde R je průsečík přímky p s rovinou ϱ ; přitom obě polopřímky této lomené čáry svírají s přímkou p týž ostrý úhel.

Přidejme nyní další rovinu σ a sestrojme v polorovině π opět graf vzdáleností bodů přímky p od roviny σ . Dostaneme zase buď rovnoběžku s přímkou p nebo lomenou čáru složenou ze dvou polopřímek a s vrcholem v bodě S -průsečíku přímky p s rovinou σ .

Co bude grafem součtu vzdáleností bodů přímky p od rovin ϱ, σ ?



Obr. 3

Z posledních dvou odstavců vyplývají čtyři možnosti:

- je-li $p \parallel \varrho \parallel \sigma$, bude grafem rovnoběžka s přímkou p ;
- je-li $p \parallel \varrho$, ale $p \cdot \sigma \equiv S$, bude grafem lomená čára složená ze dvou polopřímek a s vrcholem „nad“ bodem S ;
- případ $p \cdot \varrho \equiv R$, $p \parallel \sigma$ je podobný případu b);
- konečně v případě $p \cdot \varrho \equiv R$, $p \cdot \sigma \equiv S$ bude grafem opět lomená čára složená ze dvou polopřímek a jedné (je-li $R \equiv S$) resp. žádné (je-li $R \equiv S$) úsečky a vrcholy této lomené čáry zase odpovídají bodům R, S viz např. obr. 3.

Obdobně, přidáme-li další roviny, bude grafem součtu vzdáleností bodů přímky p od všech těchto rovin buď rovnoběžka s přímkou p anebo lomená čára složená ze dvou polopřímek a konečného počtu úseček. Vrcholy této lomené čáry odpovídají průsečíkům přímky p s danými rovinami. Z toho zejména vyplývá toto tvrzení: Jestliže krajní body některé úsečky přímky p nejsou odděleny žádnou z daných rovin (takže „mezi nimi“ není žádný vrchol lomené čáry), pak grafem součtu vzdáleností bodů této úsečky od daných rovin je jistá úsečka. Důsledek: Mají-li dva různé body takové úsečky přímky p stejný součet vzdáleností od uvažovaných rovin, pak všechny body této úsečky mají též součet vzdáleností od těchto rovin.

Všechny body ležící na hranách čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ mají tedy stejný součet vzdáleností od rovin (5), neboť žádná z těchto rovin neodděluje žádné dva ze čtyř bodů A_1, B_1, C_1, D_1 . Dále všechny body ležící na povrchu čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ mají též součet vzdáleností od rovin (5), neboť každý takový bod náleží nějaké úsečce, jejíž krajní body leží na

hranách čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ a nejsou tudíž odděleny žádnou z rovin (5). Nakonec se podobně dokáže, že vůbec všechny body čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$ mají též součet vzdáleností od rovin (5).

Nyní již snadno zjistíme součet vzdáleností vrcholu A od rovin (5). Tento vrchol můžeme totiž spojit přímkou p s nějakým vnitřním bodem čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$, takže přímka p protíná čtyřstěn $A_1B_1C_1D_1$ v jisté úsečce KL ($K \neq L$). Druhý průsečík přímky p s povrchem čtyřstěnu $ABCD$ označme M . Body A , M nejsou odděleny žádnou z rovin (5) a přitom dva různé body K , L úsečky AM mají stejný součet vzdáleností od rovin (5). Proto všechny body úsečky AM , speciálně i bod A , mají též součet vzdáleností od rovin (5). Téže myšlenky lze užít i pro vrcholy B , C , D .

Dokázali jsme, že všechny výšky čtyřstěnu $ABCD$ mají stejnou délku a vzhledem k první části řešení je všechno hotovo.

9. V aritmetické posloupnosti je součet prvních p členů roven číslu q a součet prvních q členů roven číslu p ($p \neq q$). Určete součet prvních $(p + q)$ členů.

(Došlo 8 řešení)

Ota Setzer

Autorovo řešení :

Užijeme známých vzorců pro aritmetickou posloupnost:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$s_n = (a_1 + a_n) \frac{n}{2} = [2a_1 + (n - 1) d] \frac{n}{2}.$$

Podle zadání je:

$$s_p = [2a_1 + (p - 1) d] \frac{p}{2} = q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 \cdot p + p^2 \cdot d - pd - 2q = 0 \quad (1)$$

$$s_q = [2a_1 + (q - 1) d] \cdot \frac{q}{2} = p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 \cdot q + q^2 \cdot d - qd - 2p = 0 \quad (2)$$

$$s_{p+q} = [2a_1 + (p + q - 1) d] \cdot \frac{p + q}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 (p + q) + (p + q)^2 d - (p + q) d - 2 \cdot s_{p+q} = 0 \quad (3)$$

Sečteme-li q násobnou rovnicí (1) s $(-p)$ násobnou rovnicí (2), dostaneme $p \cdot q (p - q) d + 2(p^2 - q^2) = 0$; protože $p \neq q$, $p \cdot q \neq 0$

$$d = -\frac{2(p+q)}{pq} \quad (4)$$

Odečtením rovnice (3) od součtu (1) a (2) plyne

$$-2pqd - 2(p+q) + 2s_{p+q} = 0$$

a vzhledem k (4)

$$s_{p+q} = pqd + p + q = -(p+q).$$

10. V každém rohu čtvercového náměstí je vchod do jednoho z kin K_1, K_2, K_3, K_4 . Občan Váhavec stál u vchodu do kina K_1 , ale nevešel dovnitř a vydal se podél jedné strany náměstí ke kinu K_2 , v polovině své cesty se však zastavil a vydal se z tohoto místa ke kinu K_3 , v polovině této cesty se opět zastavil a vyrazil přímo ke kinu K_4 , v polovině cesty opět zaváhal a změnil směr ke kinu K_1 . Zformulujte geometrickou úlohu, která by zahrnovala i neomezené pokračování této pouti a vyřešte tyto úkoly:

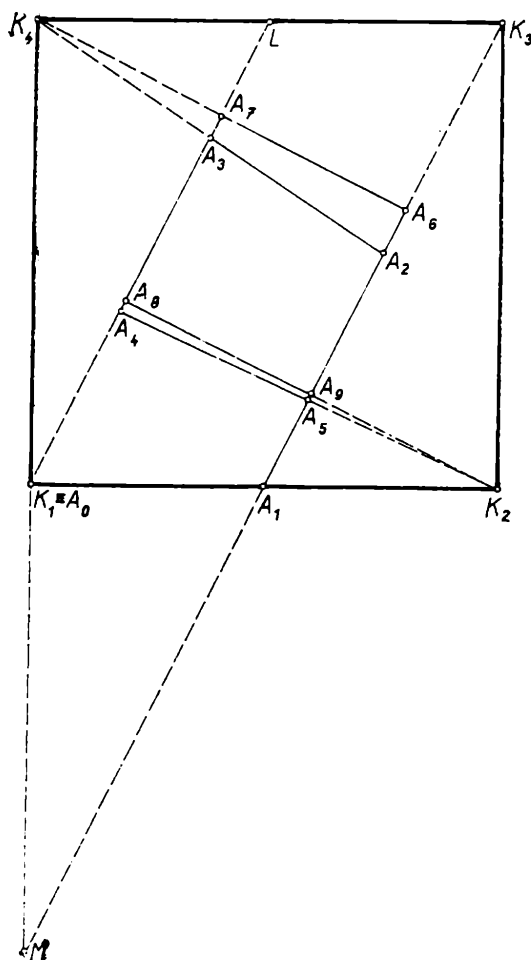
- Charakterizujte polohu všech bodů, v nichž chodec mění směr.
- Popište hranici oblasti zahrnující střed náměstí, do které by nevkročil ani při nekonečně mnoha okruzích své obchůzky.

(Došlo 5 řešení)

Jaroslav Šedivý

Řešil Ivo Mrázek, Ib., SPŠ chemická, Ústí n. Labem-Střekov

a) Úloha se týká nekonečné lomené čáry $A_0A_1A_2 \dots A_i \dots$, jejíž vrcholy sestrojujeme tak, že $A_0 = K_1$ a A_{i+1} je obrazem A_i ve stejnolehlosti se středem K_2 a koeficientem $k = \frac{1}{2}$ (číslo z je zbytkem při dělení čísla $i + 2$ čtyřmi). Body A_1, A_2 leží na úsečce MK_3 (viz obrázek), jejímž obrazem ve zmíněné stejnolehlosti se středem K_4 je úsečka K_1L obsahující bod A_3 i bod A_4 . Protože se ve stejnolehlosti se středem K_2 zobrazuje úsečka K_1L do úsečky A_1K_3 , leží body A_5, A_6 opět na úsečce A_1K_3 , body A_7, A_8 na úsečce K_1L atd. Všechny body A_{4n+1}, A_{4n+2} leží na úsečce A_1K_3 , všechny body A_{4n+3}, A_{4n+4} leží na úsečce K_1L . Snadno lze dokázat, že žádné dvě úsečky typu $A_{4n+2}A_{4n+3}$ se pro $n = 1, 2, \dots$ neprotínají a s rostoucím n se „vzdalují“ od středu čtverce; nejbližší středu je tedy úsečka A_2A_3 . Rovněž tak se neprotínají žádné dvě úsečky typu $A_{4n}A_{4n+1}$ pro $n = 1, 2, \dots$ ale s rostoucím n se „přibližují“ ke středu čtverce.



Obr. 1

b) Hranice vyšetřované oblasti bude tvořena částmi úseček A_1K_3 , K_1L , úsečkou A_2A_3 a limitní polohou úseček typu $A_{4n} A_{4n+1}$ při $n \rightarrow \infty$. Úloha se tedy zužuje na určení limitních poloh bodů A_{4n} na polopřímce K_1L a bodů A_{4n+1} na polopřímce A_1K_3 při $n \rightarrow \infty$. Vyjádříme délky úseček $A_{4n} A_{4n+4}$ jako násobky délky úsečky A_0A_4 ; z vlastností stejno-
lehlosti s koeficientem $\frac{1}{2}$ plyne, že $A_1A_5 = \frac{1}{2} \cdot A_0A_4$, $A_2A_6 = \frac{1}{2} \cdot A_1A_5$,
 $A_3A_7 = \frac{1}{2} \cdot A_2A_6$, $A_4A_8 = \frac{1}{2} \cdot A_3A_7$, tj. $A_4A_8 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 A_0A_4$, zřejmě
 $A_{4n} A_{4n+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \cdot A_0A_4$, jde tedy o geometrickou posloupnost. Součet

$$A_0A_4 + A_4A_8 + A_8A_{12} + \dots + A_{4n} A_{4n+4} +$$

určíme podle vzorce pro součet geometrické řady s koeficientem $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

a s prvním členem A_0A_4 , vyjde číslo $\frac{16}{15} A_0A_4$; označme písmenem P ten bod polopřímky A_0L , pro který platí $A_0P = \frac{16}{15} A_0A_4$. Zcela ob-

dobným postupem sestrojíme bod Q polopřímky A_1K_3 , pro který platí $A_1Q = \frac{16}{15} A_1A_2$ a který je limitní polohou bodů A_{4n+1} při $n \rightarrow \infty$. Úsečka PQ je součástí hranice vyšetřované oblasti (navíc lze o ní dokázat, že leží na kolmici vedené bodem K_2 k přímce K_1L).

Poznámka. Řešitelé úlohy prováděli zdlouhavé výpočty délek úseček nebo souřadnic bodů A_i ; bez takových výpočtů se lze obejít.

11. Která celá nezáporná čísla vyhovují rovnici

$$x^3 + y^3 = (x - y)^4?$$

(Došla 4 řešení)

Václav Vilímek

Upravené řešení Václava Salače, IIa G, Praha 4, Michle:

Lehko se lze přesvědčit, že neznámé x a y můžeme zaměnit. Budeme předpokládat, že $x > y$ (tím vylučujeme triviální řešení $x = y = 0$).

Položme $y + x = u$, $x - y = v$, tudíž $xy = \frac{1}{4}(u^2 - v^2)$.

Po dosazení a úpravě máme $4v^4 - 3uv^2 - u^3 = 0$ a odtud

$$v^2 = \frac{1}{8}u(3 \pm \sqrt{16u + 9}).$$

Vzhledem k tomu, že $x > y \geq 0$, je $u > 0$ a $\sqrt{16u + 9} > 3$; v je reálné jen pro $v^2 = \frac{1}{8}u(3 + \sqrt{16u + 9})$.

Zavedme celé kladné číslo t vztahem $16u + 9 = (8t \pm 3)^2$ a tedy $u = t(4t \pm 3)$. Potom pro $u = t(4t + 3)$ máme $v^2 = \frac{1}{4}t(4t + 3)^2$ a pro $u = t(4t - 3)$ jest $v^2 = t^2(4t - 3)$.

V 1. případě položíme $t = 16k^2$, v druhém $4t - 3 = (2m - 1)^2$, tj. $t = m^2 - m + 1$, kde k, m jsou celá kladná čísla. Potom je $v = 2k(64k^2 + 3)$, $u = 16k^2(64k^2 + 3)$, resp. $v = (2m - 1)(m^2 - m + 1)$, $u = (2m - 1)^2(m^2 - m + 1)$. Odtud $x = k(8k + 1)(64k^2 + 3)$, $y = k(8k - 1)(64k^2 + 3)$, resp. $x = m(2m - 1)(m^2 - m + 1)$, $y = (m - 1)(2m - 1)(m^2 - m + 1)$. Prvý výsledek dává x, y současně sudá nebo lichá, ve druhém je jedno z čísel x, y liché a druhé sudé.

Pro $k = 1, 2$ je $x = 603, 8806$, $y = 469, 7770$.

Pro $m = 1, 2, 3, 4, 5$ je pořadě $x = 1, 18, 105, 364, 945$, $y = 0, 9, 70, 273, 756$.

12. Zjistěte, kolik různých sítí dané krychle lze sestavit. Přitom dvě sítě (tj. rovinné obrazce) pokládáme za totožné, jsou-li příslušné obrazce shodné.

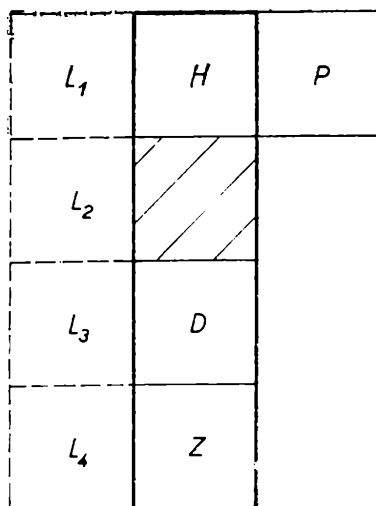
(Došla 4 řešení)

Jan Vyšín

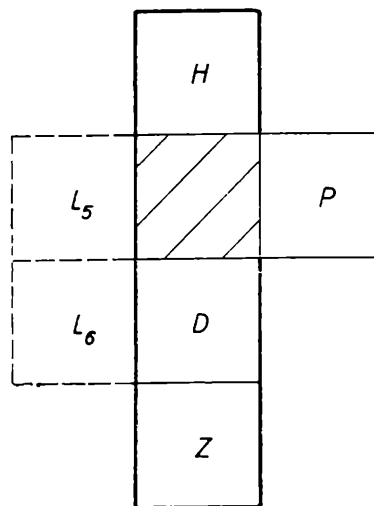
Řešil: Václav Salač, I Ia gymnasium, Praha 4-Michle

Sít' jednotkové krychle se skládá ze šesti shodných čtverců, přitom má každý z nich stranu společnou s aspoň jedním dalším čtvercem, proto existují v každé síti obdélníky s rozměry 1 a n , kde $n \geq 2$; na druhé straně však je $n \leq 4$. Proberme postupně případy, kdy maximální n v síti je rovno 4, 3 a 2, stěny krychle označme písmeny H, D, P, Z, L (horní, dolní, pravá, zadní, levá), přední stěnu vyznačíme šrafováním.

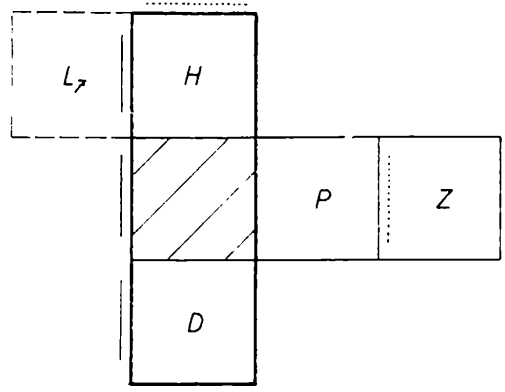
a) V síti existuje obdélník s rozměry 4 a 1, zařadíme do něho čtyři stěny H, D, Z a šrafovanou stěnu; čtverec P pravé stěny lze umístit dvěma způsoby (obr. 1a, b), další dvě polohy dávají shodné obrazce. Čtverec L



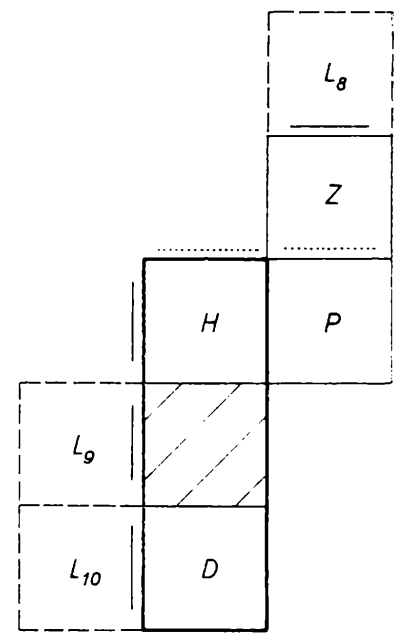
Obr. 1a



Obr. 1b



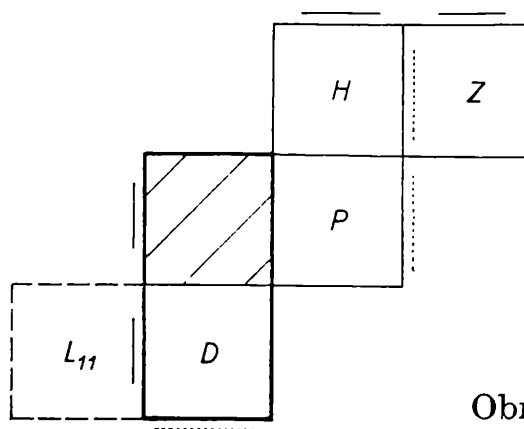
Obr. 2a



Obr. 2b

levé stěny lze umístit v situaci na obr. 1a čtyřmi způsoby, v situaci na obr. 1b jen dvěma způsoby (vylučujeme sítě shodné s již uvedenými). Získáváme celkem šest sítí tohoto typu.

b) V síti existuje obdélník s rozměry 3 a 1, ale ne s rozměry 4 a 1; zařadme do něho čtverce horní, přední a dolní stěny. Čtverec P pravé stěny lze umístit ve dvou polohách, vyhneme-li se shodným obrazcům (obr. 2a, b). Čtverec Z zadní stěny lze umístit jen ke stranám vyznačeným tečkovanou čarou; nechceme-li vytvořit obdélník s rozměry 4 a 1, máme jak na obr. 2a, tak na obr. 2b, jedinou možnost tam znázorněnou. Čtverec L levé stěny lze pak připojit jen ke stranám označeným plnou čárkou, obdobnými úvahami dospějeme k závěrům, že lze vytvořit čtyři další typy sítí (poloha L_7 až L_{10}).



Obr. 3

c) V síti existují pouze obdélníky s rozměry 2 a 1, ne delší. Umístění čtverců přední, dolní, horní a pravé stěny je pak možné jediným způsobem znázorněným na obr. 3. Ze tří možností pro umístění čtverce Z můžeme přijmout jen jednu, protože jinak by vznikl obdélník s rozměry 3 a 1. Obdobně uvažujeme o umístění čtverce L (viz plné čárky podél stran čtverců), dvě možné polohy dávají shodné obrazce, proto je přijatelná jen jedna.

Celkem existuje 11 různých typů sítí krychle.

Ze zahraničních časopisů

Doc. OTA SETZER, ČVUT Praha

Z rumunského časopisu *Gazeta Matematică*, Seria B, ročník XVIII (1967) otiskujeme po menších úpravách několik příkladů různé obtížnosti.

1. V které číselné soustavě je číslo 4497 napsáno znakem 16 053?

2. Určete koeficient při x^{15} v součinu

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) (1 - x)^{25}.$$

3. Pro která přirozená n lze krátit zlomek $\frac{4n + 3}{5n + 2}$?

4. Dokažte, že pro celá čísla $n \geq 1$ má součet

$$S_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n + 1}{n^2 (n + 1)^2} + \frac{n^2}{4(1^3 + 2^3 + \dots + n^3)}$$

konstantní hodnotu. Kterou?

5. Vypočtěte hodnotu výrazu

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}}$$

6. Řešte soustavu rovnic

$$\frac{1}{x + \frac{2}{y - \frac{3}{x}}} = \frac{1}{x - \frac{2}{y - \frac{5}{x}}}$$

$$\frac{1}{y} \left(4 - \frac{7}{x} \right) = 5.$$

7. Určete hodnotu výrazu

$$V = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{7}}$$

8. Zjednodušte:

$$\frac{\sin x - 2 \sin 2x + \sin 3x}{\cos x - \cos 3x}.$$

9. Řešte nerovnici: $|x^2 - x - 2| \geq \left| \frac{1}{x+1} \right| + x^2 + 1$.

10. Dosadíme-li do výrazu $F = \log \frac{1+x}{1-x}$ místo x hodnotu $\frac{3x+x^3}{1+3x^2}$, dostaneme po zjednodušení a) $-F$, b) F , c) $3F$, e) $F^3 - F$. Které řešení je správné?

11. Dokažte, že

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}}}}}}} = 2 \cos \frac{43\pi}{192}.$$

12. Jestliže

$$A = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}}}},$$
$$B = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}}}},$$

vypočtete $(A + Bi)^{192}$.

13. Pro funkci $f(x)$ platí $f(n+1) = \frac{2f(n)+1}{2}$ a $f(1) = 2$. Určete $f(101)$.

Výsledky viz str. 335

Matematika v soudních protokolech

„Léč nebyla vlastně kruh, spíše čtverec, ale se zaoblenými rohy a na jednu stranu protažený jako do elipsy, takže střelci kráčeli spíše v trojúhelníku směrem na jeho úhlopříčku, když tu vyšla rána.“

(Citováno z magazínu Dikobraz)

Jde zřejmě o nepříjemnou, ne-li tragickou příhodu postřelení účastníka honu, ale matematika dostala také pěknou „ránu“, nemyslíte?

0 vývoji heliocentrické soustavy

JOSEF KOTYK, Pardubice

III. Šíření Koperníkových názorů

Dokončení

Koperník tušil, že jeho učení narazí na nepřítel autorit církevních, jelikož se nesrovnávalo s tehdejší názorem náboženským a filosofickým (scholastickým), založeným na bibli a spisech Aristotelových. Církev si skutečně brzy povšimla jeho nebezpečného učení a odsoudila je.¹⁰⁾ Martin Luther¹¹⁾ nazval Koperníka, „jakéhosi hvězdipravce“, dokonce bláznem...

Avšak i ve vědeckých kruzích mělo Koperníkovu stanovisko zpočátku jen málo stoupenců. Pro stručnost omezíme další výklad toliko na šíření heliocentrického názoru u nás.

Problematikou pohybu planet zabýval se v době bezprostředně po vydání slavného díla Koperníkova Cyprián Lvovický ze Lvovic, rodák z Hradce Králové (1514 až 1574). Jeho podrobné efemeridy planet patřily k základní astronomické literatuře té doby; byly velmi rozšířeny a hojně užívány. Při výpočtu efemerid některých zatmění Slunce a Měsíce Lvovický sice vycházel z Koperníkovy teorie pohybu Měsíce, částečně použil i Koperníkových předpokladů o dráze Měsíce, jeho geocentrické stanovisko zůstalo však neotřesené.

Rovněž Tadeáš Hájek z Hájku (Nemicus; 1525 až 1600), osobní lékař císaře Rudolfa II. a protomedicus království Českého, znal Koperníkovu dílo, byl po nějaký čas dokonce vlastníkem Koperníkova rukopisu t. zv. Malého komentáře, v němž Koperník načrtl základy nového planetárního systému, často podle Koperníkových matematických tabulek mimo to také počítal (Tycho Brahe nám zachoval zprávu, že ně-

¹⁰⁾ V podrobnostech, týkajících se zejména také zápasů a obětí italských učenců Giordana Bruna a Galileia Galileiho, odkazují k učebnici prof. B. A. Voroncova; Veljaminova „Astronomie“ (Praha 1954), čl. 66 „Boj církve proti vědě“. (Tiskový omyl „proti vládě“ zároveň opravuji.) Dodávám také, že Koperníkův spis, znovu vydaný roku 1566 v Basileji, byl se spisy Galileiho až po staletích za papeže Pia VII. (1800 až 1823) vzat s církevního indexu knih zakázaných.

¹¹⁾ Mimochodem, spíše snad pro zajímavost, uvádím: Martin Luther zemřel téhož roku 1546, v němž se narodil Tycho Brahe.

kteřé výpočty prováděl i za předpokladu denního pohybu Země), v publikovaných spisech setrvával však na starém geocentrickém pojetí.

Na Hájkovo doporučení byl roku 1599 do Prahy na Rudolfův dvůr povolán slavný dánský hvězdář Tycho (Tyge) Brahe (1546 až 1601), astronom proslavený tehdy již v celém světě. Ani on nemohl se však odhodlati k tomu, aby uznal, že Země obíhá kolem Slunce; pokoušel se objevit u stálic obdobný roční pohyb, jaký se jeví v kličkách drah planet, avšak marně. Tento t. zv. paralaktický pohyb stálic byl teprve později zjištěn. Brahe netušil, že příčinou nezdaru jeho pozorování je převeliká vzdálenost stálic od Země. Zavrhl proto Koperníkovo „theatrum mundi“ a vytvořil kompromisní soustavu vlastní: Země je podle ní nehybným středem vesmíru; kolem ní obíhá Slunce, planety obíhají však kolem Slunce — skutečný řetězkový kolotoč v plném provozu!

Z prvních a zároveň nejvýznamnějších stoupců heliocentrického názoru u nás byl Braheův pomocník „quoad calculum“ (pro výpočty) a potomní nástupce, císařský dvorní mathematicus a království Českého protomathematicus Johannes Kepler (1571 až 1630). Do Prahy přišel roku 1600 již jako přesvědčený a důsledný stoupenec Koperníkovy soustavy. Svědčí o tom již jeho práce „Mysterium cosmographicum“, jež vycházela z Koperníkova názoru a byla vydána ještě před jeho příchodem do Prahy. V Praze stala se východiskem jeho zkoumání kritika Koperníkových názorů o umístění Slunce v planetární soustavě. Kepler hledal, jaký vztah mají dráhy planet k Slunci, nikoli tedy ke středu zemské dráhy, jak tomu bylo u Koperníka. Jeho spis „Astronomia nova“, vydaný v Praze roku 1609, je svou důležitostí ve vývoji astronomie při nejmenším na stejné úrovni jako spis Koperníkův.

Praha té doby stává se sídlem významného rudolfinského střediska, světovým střediskem vědecké práce, zejména astronomie. Po Keplerově odchodu neměl však Koperníkův názor u nás již stoupců. Po bitvě na Bílé hoře získává pak v našich zemích tím rychleji půdu ortodoxní přijímání tradičního názoru geocentrického.

Neobyčejně vřelý zájem o Koperníkův heliocentrický názor projevil učitel národů Jan Amos Komenský (1592 až 1670). Koperníkovy závěry ho tím více přitahovaly, poněvadž se říkalo,¹²⁾ že Koperníkův rod pochází z kořene českého, prý z Mladoboleslavska. Přes to zaujal k nim Komenský podobné stanovisko přísné a kritické jako Tycho Brahe, René Descartes, Blaise Pascal a jiní badatelé; ve velkém zápolení obou světových názorů nalézáme proto Komenského po jejich boku. O vývoji názorů Komenského, o jeho soustavném studiu a příkladné svědomitosti, touze po vědění a vysvětlení přírodních záhad svědčí pak nejlépe citace hesla „Planeta“ z jeho vševědného slovníku „Lexicon reale pansophicum“, kde Komenský Koperníkovo učení v podstatě již

¹²⁾ Viz Fr. Kožík: „Světlo v temnotách“. (Bolestný a hrdinský život Jana Amose Komenského.) Stát. pedagog. nakl. Praha 1970. Cit. str. 22.

přijímá slovy: „Planeta — sluneční hvězda, která má Slunce za svůj střed... Různé fáze planet, který ubývají a přibývají jako Měsíc, ukazují, že planety nejsou samy o sobě ohnivé, ale odrážejí slunce.“¹³⁾

Komenský byl po řadu let také majitelem rukopisu slavného díla Koperníkova. Svědčí o tom poznámka, kterou nalézáme na zadní straně rukopisu. V češtině zní: „Tuto knihu od vdovy zesnulého M. Jakuba Christmanna za náležitou cenu vykoupenou ve svou přenesl knihovnu Jan Amos Nivnický (Nivanus) roku 1614, 17. ledna v Heidelbergu.“ Za vzácnou památku neváhal Komenský zaplatit vším, co měl, i když s revolučním dosahem Koperníkových závěrů tehdy vnitřně nesouhlasil. Do domova, vzdáleného 700 km, musel se pak vydat zcela bez prostředků pěšky. Do vlasti přinesl však drahocenný poklad, který po roce 1628 koupil ve Slezsku pan Otto z Nosticů; byl pak jako převzácná památka chován ve sbírkách Nosticova paláce v Praze a teprve v naší době vrácen polskému národu.

Pražská Universitní knihovna uchovává však dosud jiné vzácné exempláře z pohnuté doby, o níž píše: Výtisk Koperníkova díla, jehož užíval Tycho Brahe, plný jeho vlastnoručních poznámek, připomínek i výhrad, Keplerův spis „Astronomia nova“ (1609), zpracovaný v Praze a j. Dne 28. dubna 1961 stanul před příslušnou vitrinou v Památníku písemnictví na Strahově — první kosmonaut, první svědek Koperníkův a Keplerův! Oči majora Gagarina, jež viděly kulatou Zemi, rotující a sunoucí se po vlastní dráze vesmírem, spočinuly na starých knihách. „Můžete být hrdi,“ poznamenal Gagarin v hlubokém zamyšlení, „kolik máte těch vzácných věcí, které nás inspirovaly k dnešnímu ovládnutí vesmíru.“

¹³⁾ Viz Fr. Kožík: „Světlo v temnotách“, str. 156.

Výsledky příkladů ze str. 331 a 332.

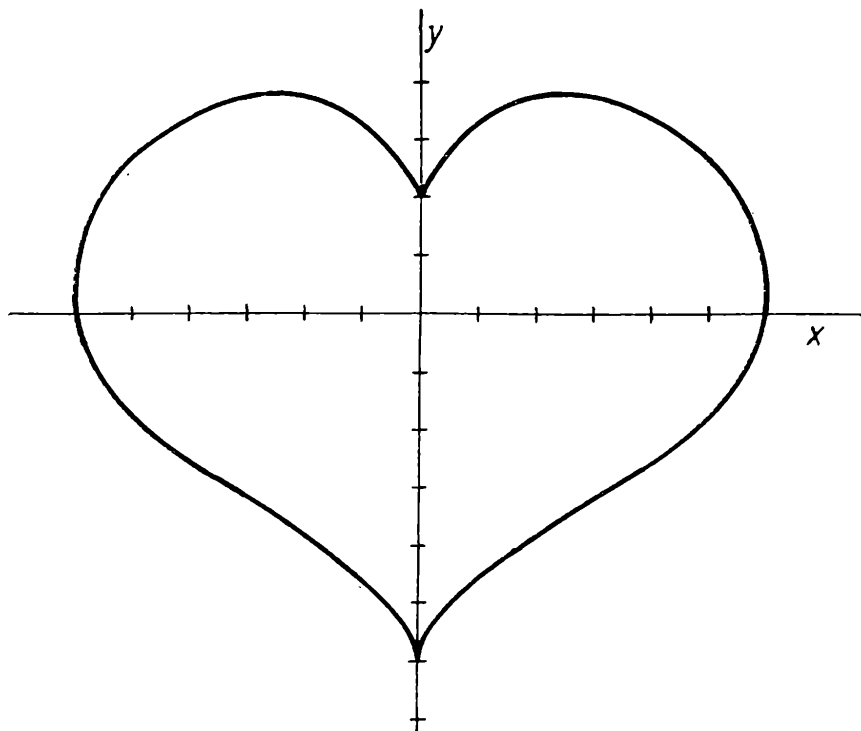
1. V sedmičkové. 2. $-\binom{25}{10}$. 3. $n = 7k + 1$ (k přirozené). 4. $S_n = 1$,
5. $x = -\frac{3}{5}$. 6. $x = \frac{27}{4}$, $y = \frac{16}{27}$. 7. $V = 1$. 8. $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 9. $x \in (-\infty,$
 $-2 - \sqrt{2}] \cup \left[0, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right]$, 10. c). 11. Užijte vztahu $1 + \cos 2\alpha =$
 $= 2 \cos^2 \alpha$. 12. -2^{192} . 13. $f(101) = 52$.

redakce hovoří

V 1. čísle Rozhledů jsme v této rubrice vyzvali čtenáře, aby se pokusili sestrojil graf funkce

$$y = \frac{2}{3} \left\{ \frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2} \right\}$$

Naší výzvě vyhověli: Lenka Baldová (1B. G, Praha 7, Nad štolou), Rudolf Gaško (3A. SVŠ Trebišov), Libuše Chloupková (2A. G Nové Město na Moravě), Blanka Odehnalová (Hlučín), Jan Nouza (1B. G, Ústí nad Labem), Alena Šlízková (3B. G, Pacov).



Všechna řešení byla správná. Blanka Odehnalová doprovodila správně vyrýsovaný graf pěkným dopisem, za který redakce pěkně děkuje. Uveřejňujeme graf Lenky Baldové.

S. H.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

R

rovník	équateur
rovnoběžka	parallèle
rovnoběžník	parallélogramme
rovnoběžnost	parallélisme <i>m</i>
rovnoběžnostěn	parallélépipède
rovnoměrný	uniforme
rovnoměrně	uniformément
rovnomě zrychlený	uniformément zélé
rovnoměrný	uniforme
rovnosý	équilatéral,
rovnosá hyperbola	hyperbole équilatérale
rovnoramenný	isocèle, téz isoscèle
rovnost	égalité <i>ž</i>
rovnostranný	équilatéral, e
rovnováha	équilibre <i>m</i>
rozbor	discussion <i>ž</i>
rozdělit	diviser, partager
rozdíl	différence <i>ž</i>
rozdílný	différent, e; distinct, e
rozhodnout	décider
rozhodnutelný	décidable
rozklad	partition <i>ž</i> ; décomposition <i>ž</i>
rozklad množiny	partition d'un ensemble
rozložit	décomposer
rozložitelný	décomposable
rozměr	dimension <i>ž</i>
rozpadnout	dégé érer
rozptýl	dispersion
rozvinout	développer
rozvinutelný	développable
rozvoj	développement <i>m</i>
rub	revers <i>m</i>

růst
různoběžky
různostranný
rychlost
 počáteční rychlost
 průměrná rychlost
 úhlová rychlost
rys
rýsovat

croître
droite concourante
scalène
vitesse
 vitesse initiale
 vitesse moyenne
 vitesse angulaire
tracé *m*
tracer

Ř

řád
řada
řádek
řešení
řešený
řešit
řešitelnost
řešitelný
řetěz
řetězovka
řetězový
 řetě zlomek
řez
 podélný řez
 příčný řez
 rovinný řez
 šikmý řez

ordre *m*; rang *m*
progression *ž*; série *ž*
ligne *ž*
résolution *ž*; solution *ž*
résolu, e
résoudre
résolubilité *ž*
résoluble
chaîne *ž*
chaînette *ž*
chainé, e
 fraction continue
coupure *ž*; section *ž*
 section longitudinale
 section transversale
 section plane
 section oblique

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

8

ROČNÍK 51, 1972-1973, DUBEN



rozhledy

ROČNÍK 51
DUBEN 1973

8

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUCÍ REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Polaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, prof. dr. Ján Vanovič, UK Bratislava, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

120 00 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoje tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Höhnig. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1973.

OBSAH

OBSAH

Doc. dr. K. Drábek: Analytická geometrie kuželoseček Gaussovy roviny	337
Dr. A. Vrba: Kombinatorika v teorii čísel	342
Dr. O. Odvárko: Kontrola správnosti úsudků výpočtem	344
Dr. J. Šedivý: Jak najít partnera	347
Dr. R. Bek: Dvojková soustava	351
Dr. B. Jurek, DrSc.: Počátky kvantové fyziky	353
O. L.: Znají na Nových Hebridách Hookův zákon? (překlad)	358
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Fobos a Deimos	361
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Lichoběžník v Orionu	364
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Molekuly v mezihvězdném plynu	367
Naše soutěž	370
J. Kotyk: Horror vacui II.	372
S. H.: Matematické zábavy	378
Recenze	380
Nejmladším čtenářům	381
Dr. J. Pavlíček: Slovník česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

matematika

Analytická geometrie kuželoseček Gaussovy roviny

Doc. Dr. KAREL DRÁBEK, ČVUT, Praha

V tomto článku odvodíme rovnice tečen kuželoseček a obě věty o ohniskových vlastnostech, tj. větu o patách kolmic a větu o bodech souměrně sdružených s ohniskem podle tečen kuželosečky.

1. *Tečna v bodě* (z_0) *kuželosečky* (se středem v počátku O)

$$f(z, \bar{z}) = \bar{\alpha}z^2 + \alpha\bar{z}^2 + 2Az\bar{z} + B = 0, \quad (1)$$

kde α je komplexní číslo, A a B reálná čísla¹⁾ má rovnici

$$\bar{\alpha}zz_0 + \alpha\bar{z}\bar{z}_0 + A(z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + B = 0, \quad (2a)$$

$$\text{nebo v jiném tvaru } (\bar{\alpha}z_0 + A\bar{z}_0)z + (\alpha\bar{z}_0 + Az_0)\bar{z} + B = 0. \quad (2b)$$

Důkaz provedeme stanovením tzv. *komplexní směrnice* σ tečny v bodě (z_0), přičemž komplexní směrnici, která je vždy různá od nuly, přímky rovnoběžné s vektorem určujícím bod (α) rozumíme podíl $\alpha/\bar{\alpha}$.

Přímka s komplexní směrnici σ , která prochází bodem (z_0) má rovnici

$$\frac{z - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \sigma, \quad (3)$$

takže

$$\bar{z} = \frac{z - z_0 + \sigma\bar{z}_0}{\sigma}$$

a po dosazení do rovnice (1) a úpravě dostaneme pro σ kvadratickou rovnici

$$(z - z_0)\{\sigma^2[\alpha(z + z_0) - 2A\bar{z}_0] + 2\sigma(\alpha\bar{z}_0 + Az) + \alpha(z - z_0)\} = 0. \quad (4)$$

Má-li být přímka (3) tečnou v bodě (z_0) ke kuželosečce (1), musí mít rovnice (4) pro průsečíky s kuželosečkou dvojnásobný kořen $z = z_0$, to znamená, že rovnice

$$\sigma^2[\alpha(z + z_0) - 2A\bar{z}_0] + 2\sigma(\alpha\bar{z}_0 + Az) + \alpha(z - z_0) = 0$$

je splněna pro $z = z_0$. Poněvadž však $\sigma \neq 0$, plyne odtud pro komplexní směrnici σ vyjádření

$$\sigma = -\frac{\alpha\bar{z}_0 + Az_0}{\bar{\alpha}z_0 + A\bar{z}_0} \quad (5)$$

Po dosazení do rovnice tečny (3) dostaneme pro ni vyjádření (2a) nebo (2b).

Je-li dána elipsa ve středovém tvaru

¹⁾ Odvození podmínek mezi α , A , B pro elipsu nebo hyperbolu je v článku K. Drábka: Kuželosečky v Gaussově rovině, *Rozhledy* (51), 1972–73, str. 301–309, jehož výsledků nyní používáme.

$$\bar{z}_F^2 z^2 + z_F^2 \bar{z}^2 - 2(a^2 + b^2)z\bar{z} + 4a^2b^2 = 0, \quad (6)$$

dostaneme pro komplexní směrnicí tečny v bodě (z_0) uvedeným postupem

$$\sigma = - \frac{z_F^2 \bar{z}_0 - (a^2 + b^2)z_0}{\bar{z}_F^2 z_0 - (a^2 + b^2)\bar{z}_0},$$

takže tečna v daném bodě (z_0) elipsy (6) má rovnici

$$\bar{z}_F^2 z z_0 + z_F^2 \bar{z} \bar{z}_0 - (a^2 + b^2)(z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + 4a^2b^2 = 0,$$

příp. v jiném tvaru

$$[\bar{z}_F^2 z_0 - (a^2 + b^2)\bar{z}_0]z + [z_F^2 \bar{z}_0 - (a^2 + b^2)z_0]\bar{z} + 4a^2b^2 = 0.$$

Je-li dána hyperbola ve středovém tvaru

$$\bar{z}_F^2 z^2 + z_F^2 \bar{z}^2 + 2(a^2 - b^2)z\bar{z} - 4a^2b^2 = 0, \quad (7)$$

má komplexní směrnicí tečny v bodě (z_0) této hyperboly tvar

$$\sigma = - \frac{z_F^2 \bar{z}_0 + (a^2 - b^2)z_0}{\bar{z}_F^2 z_0 + (a^2 - b^2)\bar{z}_0},$$

takže pro tečnu v uvažovaném bodě (z_0) hyperboly (7) dostaneme rovnici

$$\bar{z}_F^2 z z_0 + z_F^2 \bar{z} \bar{z}_0 - (a^2 - b^2)(z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) - 4a^2b^2 = 0,$$

nebo jiné vyjádření

$$[\bar{z}_F^2 z_0 + (a^2 - b^2)\bar{z}_0]z + [z_F^2 \bar{z}_0 + (a^2 - b^2)z_0]\bar{z} - 4a^2b^2 = 0.$$

Poznámka 1. Pro kružnici se středem v počátku O (tj. pro elipsu, kde $a^2 = b^2$ a tedy $z_F = 0$) dostaneme komplexní směrnicí

$$\sigma = - \frac{z_0}{\bar{z}_0},$$

pro rovnosou hyperbolu se středem v počátku

$$\sigma = - \frac{\alpha \bar{z}_0}{\bar{\alpha} z_0}, \quad \text{příp.} \quad \sigma = - \frac{z_F^2 \bar{z}_0}{\bar{z}_F^2 z_0}.$$

Pro parabolu

$$(\bar{z}_F z - z_F \bar{z})^2 + 8z_F \bar{z}_F (\bar{z}_F z + z_F \bar{z}) = 0 \quad (8)$$

dostaneme pro komplexní směrnicí tečny v jejím bodě (z_0) postupem uvedeným pro středovou kuželosečku (1) vyjádření

$$\sigma = - \frac{z_F(z_F \bar{z}_0 - \bar{z}_F z_0 + 4z_F \bar{z}_F)}{\bar{z}_F(\bar{z}_F z_0 - z_F \bar{z}_0 + 4z_F \bar{z}_F)},$$

takže rovnice této tečny je

$$z[\bar{z}_F(\bar{z}_F z_0 - z_F \bar{z}_0 + 4z_F \bar{z}_F)] + \bar{z}[z_F(z_F \bar{z}_0 - \bar{z}_F z_0 + 4z_F \bar{z}_F)] - 8z_F^2 \bar{z}_F^2 = 0,$$

nebo

$$\bar{z}_F^2 z z_0 + z_F^2 \bar{z} \bar{z}_0 - z_F \bar{z}_F (z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0) + 4z_F \bar{z}_F [\bar{z}_F (z + z_0) + z_F (\bar{z} + \bar{z}_0)] = 0.$$

2. Dvojice tečen z bodu (z_0) ke kuželosečce (1) je dána rovnicí

$$f(z, \bar{z}) \cdot f(z_0, \bar{z}_0) - [z_0 f_1(z, \bar{z}) + \bar{z}_0 f_2(z, \bar{z}) + B]^2 = 0, \quad (9)$$

kde

$$f_1(z, \bar{z}) = \bar{\alpha}z + A\bar{z}, f_2(z, \bar{z}) = \alpha\bar{z} + Az.^2)$$

Důkaz. Pro body (z) přímky, která má být tečnou dané kuželosečky (1), prochází při tom bodem (z_0) neležícím na kuželosečce a dalším libovolným bodem (z_1) platí

$$\frac{z - z_0}{z - z_1} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{\bar{z} - \bar{z}_1} = k, \quad k \neq 0, 1, \text{ reálné.}^3)$$

Pro bod (z) tedy platí

$$z = \frac{z_0 - kz_1}{1 - k}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{z}_0 - k\bar{z}_1}{1 - k}, \quad (10)$$

jsou proto rovnice (10) parametrickými rovnicemi přímky Gaussovy roviny, která prochází danými dvěma body (z_0) , (z_1) .

Uurčíme nyní k tak, aby bod (z) určený rovnicemi (10) byl bodem kuželosečky (1). Po dosazení za z , \bar{z} do její rovnice dostaneme po úpravě pro parametr k kvadratickou rovnici

$$k^2 f(z_1, \bar{z}_1) - 2k [z_0 f_1(z_1, \bar{z}_1) + \bar{z}_0 f_2(z_1, \bar{z}_1) + B] + f(z_0, \bar{z}_0) = 0. \quad (11)$$

Protože přímka (10) má být tečnou kuželosečky (1), musí mít rovnice (11) dvojnásobný kořen a tudíž její diskriminant

$$D = [z_0 f_1(z_1, \bar{z}_1) + \bar{z}_0 f_2(z_1, \bar{z}_1) + B]^2 - f(z_1, \bar{z}_1) \cdot f(z_0, \bar{z}_0) = 0.$$

Protože bod (z_1) je libovolným bodem přímky (10), je rovnice (9) hledanou rovnicí dvojice tečen z bodu (z_0) ke kuželosečce (1).

Je-li dána elipsa, příp. hyperbola ve svém středovém tvaru (6), příp. (7), dostaneme dvojici tečen opět ve tvaru rovnice (9), kde v případě elipsy je

$f_1(z, \bar{z}) = \bar{z}_F^2 z - (a^2 + b^2)\bar{z}$, $f_2(z, \bar{z}) = z_F^2 \bar{z} - (a^2 + b^2)z$, $B = 4a^2 b^2$,
v případě hyperboly je

$$f_1(z, \bar{z}) = \bar{z}_F^2 z + (a^2 - b^2)\bar{z}, f_2(z, \bar{z}) = z_F^2 \bar{z} + (a^2 - b^2)z, B = -4a^2 b^2.$$

Poznámka 2. Tečny k hyperbole dané rovnicí (7) z bodu O , který je jejím středem, tj. její asymptoty, mají rovnici

$$\bar{z}_F^2 z^2 + z_F^2 \bar{z}^2 - 2(a^2 - b^2)z\bar{z} = 0.$$

Pro rovnosou hyperbolu se středem v počátku O ($a = b$) jsou rovnice asymptot

$$\bar{z}_F^2 z^2 + z_F^2 \bar{z}^2 = 0,$$

tj. dvě k sobě kolmé přímky s rovnicemi

$$\bar{z}_F z + iz_F \bar{z} = 0, \quad \bar{z}_F z - iz_F \bar{z} = 0.$$

²⁾ Kdo se seznámil se základy diferenciálního počtu, přesvědčí se snadno, že $f_1(z, \bar{z})$ je polovina derivace funkce $f(z, \bar{z})$ podle proměnné z a podobně $f_2(z, \bar{z})$ je polovina derivace funkce $f(z, \bar{z})$ podle proměnné \bar{z} . Zároveň vidíme, že $f_2(z, \bar{z}) = \bar{f}_1(z, \bar{z})$.

³⁾ Použili jsme vlastnosti, že hodnota komplexního dělicího poměru pro tři body (z) , (z_0) , (z_1) ležící na přímce, je reálná: viz článek K. Drábka: Užití komplexních čísel v geometrii, Rozhledy (44), 1965–66, str. 289–293, 348–352.

Poznámka 3. Dvojice tečen z bodu (z_0) k parabole (8) je dána rovnicí (9), kde

$$f_1(z, \bar{z}) = \bar{z}_F z - z_F \bar{z} + 4z_F \bar{z}_F, f_2(z, \bar{z}) = z_F \bar{z} - \bar{z}_F z + 4z_F \bar{z}_F, B = 0.$$

3. Tečny ke kuželosečce (1) rovnoběžné s přímkou směru β mají rovnici

$$\bar{\beta}z - \beta\bar{z} + iC = 0, \quad (12a)$$

kde pro reálné číslo C platí vztah

$$C = \pm \sqrt{\frac{B\bar{\alpha}(\beta^2 + \alpha\bar{\beta}^2 + 2A\beta\bar{\beta})}{\alpha\bar{\alpha} - A^2}}. \quad (12b)$$

Důkaz. Pro určení průsečíku přímky (12a) a kuželosečky (1) vypočteme z rovnice (12a)

$$\bar{z} = \frac{\bar{\beta}z + iC}{\beta},$$

dosadíme do rovnice kuželosečky a dostaneme rovnici pro z

$$z^2(\bar{\alpha}\beta^2 + \alpha\bar{\beta}^2 + 2A\beta\bar{\beta}) + 2iCz(\alpha\bar{\beta} + A\beta) + \beta^2B - \alpha C^2 = 0. \quad (13)$$

Protože však přímka (12a) má být tečnou naší kuželosečky (1), musí mít rovnice (13) pro průsečíky dvojnásobný kořen a tedy její diskriminant $D = 0$, tj.

$$C^2\beta^2(\alpha\bar{\alpha} - A^2) - \beta^2B(\bar{\alpha}\beta^2 + \alpha\bar{\beta}^2 + 2A\beta\bar{\beta}) = 0.$$

Odtud vypočtené číslo C , které je reálné v případě elipsy vždy, v případě hyperboly za určitých dalších podmínek, určuje tečny kuželosečky (1) rovnoběžné s daným směrem.

Pro elipsu danou rovnicí (6) dostaneme

$$C = \pm \sqrt{2(a^2 + b^2)\beta\bar{\beta} - (\bar{z}_F^2\beta^2 + z_F^2\bar{\beta}^2)},$$

pro hyperbolu danou rovnicí (7) je

$$C = \pm \sqrt{-2(a^2 - b^2)\beta\bar{\beta} - (\bar{z}_F^2\beta^2 + z_F^2\bar{\beta}^2)}.$$

Pro parabolu určenou rovnicí (8) dostaneme stejným postupem

$$C = -\frac{i(\beta\bar{z}_F + \bar{\beta}z_F)^2}{\beta\bar{z}_F - \bar{\beta}z_F},$$

tedy protože $\beta\bar{z}_F - \bar{\beta}z_F \neq 0$ vyplývá, že neexistuje tečna paraboly rovnoběžná s její osou.

4. Paty kolmic sestrojených z ohniska kuželosečky (1) na její tečny jsou na kružnici

$$z\bar{z} = a^2.$$

Důkaz provedeme pro elipsu danou rovnicí (6). Tečna v jejím bodě (z_0) je dána rovnicí

$$z[\bar{z}_F^2 z_0 - (a^2 + b^2)\bar{z}_0] + \bar{z}[z_F^2 \bar{z}_0 - (a^2 + b^2)z_0] + 4a^2 b^2 = 0,$$

kolmice ohniskem (εz_F) , kde $\varepsilon = \pm 1$, má po úpravě rovnici

$$z[\bar{z}_F^2 z_0 - (a^2 + b^2)\bar{z}_0] - \bar{z}[z_F^2 \bar{z}_0 - (a^2 + b^2)z_0] +$$

$$+ 2\epsilon a^2(z_F \bar{z}_0 - \bar{z}_F z_0) = 0.$$

Odtud pro jejich průsečík plyne

$$z = - \frac{\epsilon a^2(z_F \bar{z}_0 - \bar{z}_F z_0) + 2a^2 b^2}{\bar{z}_F^2 z_0 - (a^2 + b^2) \bar{z}_0}. \quad (14)$$

Znásobením rovnice (14) se sdruženou rovnicí s využitím toho, že bod (z_0) je bodem elipsy, plyne náš vztah.

Zcela stejně probíhá důkaz pro hyperbolu danou rovnicí (7).

Z důkazu je zřejmo, že kružnice pat kolmic je táž pro obě ohniska.

Paty kolmic sestrojonych z ohniska na tečny paraboly (8) jsou na její vrcholové tečně

$$\bar{z}_F z - z_F \bar{z} = 0. \quad (15)$$

Důkaz. Tečna paraboly (8) v jejím bodě (z_0) má rovnici $z[\bar{z}_F(\bar{z}_F z_0 - z_F \bar{z}_0 + 4z_F \bar{z}_F)] + \bar{z}(z_F(z_F \bar{z}_0 - \bar{z}_F z_0 + 4z_F \bar{z}_F)] + 8z_F^2 \bar{z}_F^2 = 0$, kolmice z ohniska (z_F) na tuto tečnu má pak rovnici

$$z[\bar{z}_F(\bar{z}_F z_0 - z_F \bar{z}_0 + 4z_F \bar{z}_F)] - \bar{z}[z_F(z_F \bar{z}_0 - \bar{z}_F z_0 + 4z_F \bar{z}_F)] + 2z_F \bar{z}_F(z_F \bar{z}_0 - \bar{z}_F z_0) = 0.$$

Průsečík těchto přímek je bodem přímky svazku určeného těmito přímkami, která prochází počátkem O , tedy přímky (15), která nezávisí na volbě bodu (z_0) , v němž jsme sestrojili tečnu k parabole a tedy obsahuje tato přímka, která je vrcholovou tečnou paraboly (8), všechny paty kolmic sestrojonych z ohniska paraboly (8) na její tečny.

5. *Body souměrně sdružené k jednomu ohnisku podle tečen kuželosečky (6) nebo (7) jsou na kružnici opsané z druhého ohniska poloměrem $2a$.*

Důkaz provedeme opět pro případ elipsy dané rovnicí (6).

Bod souměrně sdružený k tečně v bodě (z_0) elipsy (6) k ohnisku (ϵz_F) označme (z) , patu kolmice pak (w) se souřadnicí danou vztahem (14).

Protože platí

$$z - w = w - \epsilon z_F, \text{ tj. } z + \epsilon z_F = 2w,$$

plyne

$$(z + \epsilon z_F)(\bar{z} + \epsilon \bar{z}_F) = 4w\bar{w} = 4a^2,$$

čímž je důkaz proveden.

Pro hyperbolu s rovnicí (7) probíhá důkaz úplně stejně.

Body souměrně sdružené k ohnisku podle tečen paraboly (8) jsou na přímce řídicí.

Důkaz. K rovnici

$$z + z_F = 2w$$

připojme sdruženou rovnici

$$\bar{z} + \bar{z}_F = 2\bar{w}.$$

Násobme první z nich \bar{z}_F , druhou z_F a sečtěme. Dostaneme

$$\bar{z}_F z + z_F \bar{z} + 2z_F \bar{z}_F = 2(\bar{z}_F w + z_F \bar{w}) = 0,$$

čímž je důkaz proveden, neboť vlevo je rovnice přímky řídicí paraboly s rovnicí (8).

Kombinatorika v teorii čísel

Dr. ANTONÍN VRBA, MÚ ČSAV, Praha

V článku *O chytrém předsedovi* v 2. čísle Rozhledů jsme se seznámili s tzv. *principem inkluze a exkluze*:

Bud'te dány konečné množiny M_1, M_2, \dots, M_k . Symbolem $|R|$ budeme značit počet prvků množiny R . Pro $i = 1, 2, \dots, k$ označme

$$s_j = \sum |M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}|$$

(sčítáme přes všechny j -členné kombinace $\{r_1, r_2, \dots, r_j\}$ indexů $1, 2, \dots, k$). Potom platí

$$|M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| = s_1 - s_2 + \dots + (-1)^{k+1} s_k.$$

V dalším článku *Jak se předseda nudil* v 3. čísle jsme pomocí této věty vyřešili několik kombinatorických úloh. Snad se vám zmíněný princip nezprotiví, když si na závěr ještě přečtete o jeho využití v teorii čísel. Připravte se ale na to, že své úvahy tentokrát nebudeme moci halit do zábavného roucha.

1. Každého, kdo ví, co to je prvočíslo, napadne ptát se, jak jsou prvočísla rozložena mezi přirozenými čísly. Tento problém byl studován z různých hledisek a je velmi obtížný, mnoho otázek zůstalo zatím nezodpovězeno (viz brožuru W. Sierpiňského, *Co víme a co nevíme o přirozených číslech*, 1966). Přiřadme každému přirozenému číslu n počet $\pi(n)$ všech prvočísel nejvýše rovných číslu n . Vidíme, že hledání zákonitostí v rozmístění prvočísel je ekvivalentní s vyšetřováním chování funkce $\pi(n)$.

Bud' dáno přirozené číslo $n > 1$ a určíme, kolik je mezi čísly $2, 3, \dots, n$ složených čísel. Každé z nich je zřejmě dělitelno nějakým prvočíslem ne větším než \sqrt{n} a obráceně každé prvočíslo, které není větší než \sqrt{n} , dělí nějaké z uvedených složených čísel. Označme $[x]$ celou část reálného čísla x ($[x]$ vznikne z x zaokrouhlením na celé číslo směrem dolů) a M_i množinu všech přirozených čísel, jež nejsou větší než n a přitom jsou dělitelna i -tým (v přirozeném pořadí) prvočíslem p_i , pro $i = 1, 2, \dots, k = \pi([\sqrt{n}])$. Množina $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ tedy obsahuje všechna složená čísla, jejichž počet hledáme, a navíc ještě k prvočísel p_1, p_2, \dots, p_k . K určení počtu jejich prvků se nabízí princip inkluze a exkluze.

Bud' $1 \leq j \leq k$ a určíme číslo s_j . Sčítanec $|M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}|$ je roven počtu všech přirozených čísel, která nejsou větší než n a jsou současně dělitelna každým z prvočísel $p_{r_1}, p_{r_2}, \dots, p_{r_j}$, tedy i jejich součinem $p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_j}$. Zřejmě

$$|M_{r_1} \cap M_{r_2} \cap \dots \cap M_{r_j}| = \left[\frac{n}{p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_j}} \right]$$

a tedy

$$s_j = \sum \left[\frac{n}{p_{r_1} p_{r_2} \dots p_{r_j}} \right], \quad (1)$$

kde se sčítá přes všechny j -členné kombinace $\{r_1, r_2, \dots, r_j\}$ indexů $1, 2, \dots, k$.

Mezi čísly $2, 3, \dots, n$ je tedy právě

$$s_1 - s_2 + \dots + (-1)^{k-1} s_k - k$$

složených čísel a

$$\pi(n) = n + k - s_1 + s_2 - \dots + (-1)^k s_k - 1 \quad (2)$$

prvočísel. Vyjádřili jsme tak $\pi(n)$ pomocí prvočísel p_1, p_2, \dots, p_k a jejich počtu $k = \pi(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)$.

V teorii čísel se často pracuje s tzv. Möbiovou*) funkcí $\mu(i)$, která se definuje pro všechna přirozená čísla i takto: Pokud se v rozkladu čísla $i > 1$ v součin prvočinitelů nevyskytuje žádné prvočíslo ve druhé nebo ještě vyšší mocnině, klade se $\mu(i) = (-1)^v$, kde v je počet prvočinitelů. Pro ostatní i se klade $\mu(i) = 0$ s jedinou výjimkou $\mu(1) = 1$. Vraťme se k vyjádření (1) čísla s_j . Hned je vidět, že

$$(-1)^j s_j = \sum_z \mu(z) \left[\frac{n}{z} \right],$$

kde se sčítá přes všechny součiny vzniklé vynásobením j navzájem různých prvočísel p_1, p_2, \dots, p_k . Je tedy

$$\pi(n) = k - 1 + \sum_d \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right],$$

kde se sčítá přes všechny kladné dělitele d čísla $p_1 p_2 \dots p_k$ (triviálnímu děliteli 1 odpovídá sčítanec n).

2. Další z funkcí, se kterou se v teorii čísel hojně setkáváme, je tzv. Eulerova**) funkce $\varphi(n)$, která přiřazuje každému přirozenému číslu $n > 1$ počet všech přirozených čísel, která nejsou větší než n a jsou s ním nesoudělná. Prvočísla vyskytující se v rozkladu čísla n v součin prvočinitelů označme q_1, q_2, \dots, q_h . Číslo $\varphi(n)$ je tedy rovno počtu všech přirozených čísel, která nejsou větší než n a přitom nejsou dělitelna žádným z uvedených prvočísel. Opět se nabízí k jeho určení princip inkluze a exkluze.

Množinu všech přirozených čísel, která nejsou dělitelna prvočíslem q_i a přitom nejsou větší než n , označme M_i ($i = 1, 2, \dots, h$). Podobně jako předtím dostaneme

$$s_j = \sum \frac{n}{q_{r_1} q_{r_2} \dots q_{r_j}},$$

*) *A. F. Möbius* (1790–1868), německý astronom a matematik. Vynikl hlavně v geometrii.

**) *L. Euler* (1707–1783), legendární matematik švýcarského původu. Svými více než osmi sty pracemi ovlivnil téměř všechny oblasti matematiky, teoretické fyziky a astronomie.

kde se sčítá přes všechny j -členné kombinace $\{r_1, r_2, \dots, r_j\}$ indexů $1, 2, \dots, h$.

$$\text{Bude tedy } \varphi(n) = n - s_1 + s_2 - \dots + (-1)^h s_h. \quad (3)$$

Není těžké si uvědomit, že tento výraz vznikne roznásobením závorek v součinu

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q_h}\right).$$

Vztah (3) můžeme také přepsat pomocí Möbiovy funkce; zřejmě bude

$$\varphi(n) = n \sum_d \frac{\mu(d)}{d},$$

kde se bude sčítat přes všechny kladné dělitele čísla n .

Cvičení

Dokažte, že $\sum_d \mu(d) \left[\frac{n}{d}\right] = 1$, sčítá-li se přes všechny kladné dělitele součinu všech prvočísel nejvýše rovných číslu n .

Kontrola správnosti úsudků výpočtem

RNDr. OLDŘICH ODVÁRKO, MFF UK, PRAHA

Tento článek navazuje na článek J. Šedivého „Jak zkontrolovat správnost úsudku výpočtem“, který byl otištěn v Rozhledech v čísle 5 tohoto ročníku. V něm jste se seznámili s tím, jak provádět algebraickou kontrolu správnosti úsudků užitím PH-algebry.

Snad bude vhodné, když si nejdříve na jednom příkladě ukážeme podstatu této metody.

Víme, že jsou pravdivé výroky $E \vee F$ a $G' \Rightarrow E'$ a $E' \Rightarrow F'$. Ptáme se, zda odtud vyplývá závěr, že platí E (resp. F , resp. G).

Nejprve vyjádříme v PH-algebře postupně všechny dílčí předpoklady úsudku:

$$\begin{array}{ll} \text{platí } E \vee F & E + F = 1 \\ \text{platí } G' \Rightarrow E' & (G')' + E' = G + E' = 1 \\ \text{platí } E' \Rightarrow F' & E + F' = 1 \end{array}$$

Celkový předpoklad je konjunkcí jednotlivých dílčích předpokladů; v algebraickém prepisu to znamená

$$(E + F) \cdot (G + E') \cdot (E + F') = 1 \quad (1)$$

Chceme nyní zjistit, zda pro každou trojici $[E, F, G]$, jež je řešením rovnice (1), platí $E = 1$, resp. $F = 1$, resp. $G = 1$ (neboli v řeči výrokové logiky — jsou-li pravdivé všechny výroky, jež jsou dílčími předpoklady úsudku, pak je závěr úsudku E , resp. F , resp. G , pravdivý výrok).

Řešme tedy rovnici (1).*) Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} [(E + F) \cdot (E + F')] (G + E') &= 1 \\ (E + F \cdot F') \cdot (G + E') &= 1 \\ E \cdot (G + E') &= 1 \\ EG + EE' &= 1 \\ EG &= 1 \\ EG (F + F') &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Závěr: $E = 1$, $G = 1$, $F = 0$ nebo $F = 1$.

Odtud už vidíme, že z pravdivosti předpokladu plyne pravdivost výroků E , G . V těchto dvou případech je úsudek správný. Na druhé straně však z pravdivosti předpokladu neplyne pravdivost výroku F — příslušný úsudek je nesprávný.

Zůstaňme ještě chvíli u našeho příkladu. Výrok

$$(E \vee F) \wedge (G' \Rightarrow E') \wedge (E' \Rightarrow F') \quad (3)$$

tj. předpoklad úsudku, je pravdivý. Z pravdivosti předpokladu vyplývá pravdivost výroku E . To znamená, že konjunkce předpokladu a výroku E' (negace výroku E)

$$(E \vee F) \wedge (G' \Rightarrow E') \wedge (E' \Rightarrow F') \wedge E'$$

je výrok nepravdivý pro jakékoliv pravdivostní hodnoty výroků E , F , G (řádně si toto tvrzení promyslete **). V řeči PH-algebry to znamená, že výraz

$$(E + F) (G + E') (E + F') \cdot E' \quad (4)$$

je identicky roven 0 (tj. je roven 0 pro všechny trojice prvků z množiny $\{0, 1\}$ dosazované za E , F , G). O správnosti této úvahy se můžeme snadno přesvědčit. Využijeme-li (2), dostaneme ihned, že (4) se rovná $(EG) \cdot E'$, což je skutečně rovno 0.

V našem příkladu jsme také zjistili, že z pravdivosti předpokladu (3) neplyne závěr, že platí F . Jinak řečeno, výrok

$$[(E \vee F) \wedge (G' \Rightarrow E') (E' \Rightarrow F')] \Rightarrow F$$

není pravdivý pro všechny pravdivostní hodnoty výroků E , F , G , neboli existuje trojice pravdivostních hodnot výroků E , F , G , pro niž je pravdivý výrok

$$[(E \vee F) \wedge (G' \Rightarrow E') \wedge (E' \Rightarrow F')] \wedge F'$$

V jazyce PH-algebry to znamená, že existuje trojice prvků z množiny $\{0, 1\}$, pro niž je výraz

$$(E + F) (G + E') (E + F') \cdot F' \quad (5)$$

*) V citovaném článku J. Šedivého najdete všechny věty o prvcích PH-algebry, které budeme v našich úvahách potřebovat.

**) Uvědomte si, že výrok $A \Rightarrow B$ je pravdivý ve všech případech vyjma toho, kdy A je pravdivý výrok a přitom B je výrok nepravdivý. Dále je výrok $A \Rightarrow B$ ekvivalentní s výrokem $A' \vee B$ a výrok $(A \Rightarrow B)'$ je ekvivalentní s výrokem $A \wedge B'$.

různý od 0 (čili roven 1). Můžete si sami výraz (5) upravit a takovou trojici najít.

Tyto úvahy o konkrétním příkladě nám vlastně odhalily podstatu nové metody, kterou budeme moci užívat při kontrole správnosti úsudků. Stručně si ji popíšme:

Nechť jsou dílčí předpoklady T_1, \dots, T_n , závěr úsudku U .

1. *Zapišme výrok $T_1 \wedge \dots \wedge T_n \wedge U'$, kde U' je negace výroku U .*
2. *Tento výrok přepišme do PH-algebry.*
3. *Zjistěme, zda takto získaný výraz (v PH-algebře) je identicky roven 0 či nikoliv.*

Úsudek je správný právě v tom případě, kdy příslušný výraz je identicky roven 0.

Tuto metodu oceníme zvláště v těch případech, kdy závěr úsudku tvoří složený výrok s několika funktory „ \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow “.

Aplikujeme ji na jednom příkladu ze sbírky úloh pro 1. ročník gymnasií.

Příklad. Dovoz zboží do venkovské prodejny není pravidelný. Určité omezující podmínky pro budoucí týden jsou vedoucímu známy. Může je vyjádřit takto:

$$A \Rightarrow (B' \wedge D'), B \Rightarrow (C' \wedge E'), C \Rightarrow E', (A \wedge C) \Rightarrow D', A' \Rightarrow B$$

Rozhodněte, zda usuzuje správně, když říká:

$$\text{a) } B \Rightarrow D \quad \text{b) } (A' \wedge B') \Rightarrow (C \vee E)$$

Řešení provedeme stručně, na základě popisu naší nové metody — detailní objasnění jednotlivých kroků bude už vaším úkolem. Začneme částí a).

1. $[A \Rightarrow (B' \wedge D')] \wedge [B \Rightarrow (C' \wedge E')] \wedge (C \Rightarrow E') \wedge [(A \wedge C) \Rightarrow D'] \wedge (A' \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow D)'$
2. $(A' + B'D') \cdot (B' + C'E') \cdot (C' + E') \cdot (A' + C' + D') \cdot (A + B) \cdot (B' + D)'$
3. Výraz v PH-algebře se pokusíme upravit na co nejjednodušší tvar; lze postupně provádět tyto úpravy:

$$\begin{aligned} & [(A' + B'D') \cdot (A + B)] \cdot BD' \cdot [(B' + C'E') \cdot (C' + E')] \cdot \\ & \cdot (A' + C' + D') = (AB'D' + A'B) \cdot BD' \cdot (B'C' + C'E' + B'E' + \\ & + C'E') \cdot (A' + C' + D') = A'BD' \cdot (B'C' + C'E' + B'E') \cdot \\ & \cdot (A' + C' + D') = A'BD'C'E'. \end{aligned}$$

Pro $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 0$ a $E = 0$ je zřejmě uvažovaný výraz roven 1 (tedy různý od 0).

Výraz, který jsme zkoumali, není identicky roven 0 — úsudek vedoucího není v tomto případě správný.

Podívejme se nyní na část b):

1. $[A \Rightarrow (B' \wedge D')] \wedge [B \Rightarrow (C' \wedge E')] \wedge (C \Rightarrow E') \wedge [(A \wedge C) \Rightarrow D'] \wedge (A \vee B) \wedge [(A' \wedge B') \Rightarrow (C \vee E)]'$

$$2. (A' + B'D') \cdot (B' + C'E') \cdot (C' + E') \cdot (A' + C' + D') \cdot (A + B) \cdot [(A'B')' + C + E]'$$

3. Provedme postupně úpravy výrazu:

$$\begin{aligned} & [(A' + B'D') \cdot (A + B)] \cdot [(B' + C'E') \cdot (C' + E')] \cdot [(A' + C' + D') \cdot A'B'C'E'] = (AB'D' + A'B) \cdot (B'C' + C'E' + B'E') \cdot \\ & \cdot (A'B'C'E' + A'B'C'D'E') = (AB'D' + A'B) \cdot A'B'C'E' \cdot (B'C' + B'E' + C'E') = \\ & = [(AA') \cdot B'C'D'E' + A' \cdot (BB') \cdot C'E'] \cdot (B'C' + B'E' + C'E') = \\ & = (0 + 0) \cdot (B'C' + B'E' + C'E') = 0 \end{aligned}$$

Zkoumaný výraz je identicky roven 0.

Tedy z dílčích předpokladů plyne závěr úsudku — vedoucí uvažoval správně.

Cvičení

1. Zákazník si objednává u architekta návrh na projekt rodinného domku. Jeho požadavky lze vyjádřit takto:

$$(A \wedge B) \Rightarrow C', \quad (C' \vee A') \Rightarrow B, \quad C' \Rightarrow (A' \vee B')$$

Máme rozhodnout, zda architekt uvažuje správně, domnívá-li se, že z těchto požadavků plyne:

$$a) B \vee C \quad b) A \Rightarrow B$$

2. Rozhodněte, zda z předpokladu, že platí $(A' \wedge B') \Rightarrow D'$ a $(A \vee C) \Rightarrow B'$ a $(A' \vee D') \Rightarrow (B \wedge C)'$ a $(A \vee B \vee C \vee D)$, vyplývá závěr úsudku:

$$a) A \vee C \quad b) B' \Rightarrow C \quad c) C \Rightarrow D' \quad d) A \Leftrightarrow D \quad e) B' \Rightarrow (A \vee C)$$

Jak si najít partnera

RNDr. JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK PRAHA

Článek nepojednává o praxi sňatkových kanceláří, ale poskytuje informace o vytváření dvojic s požadovanými vlastnostmi. Začneme dvěma úlohami, od nichž dojdeme k formulaci matematického problému.

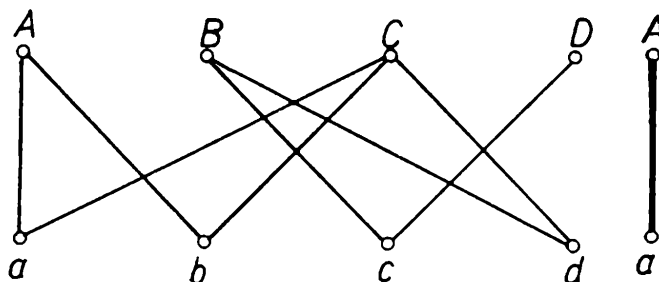
Úloha 1. Podnik uveřejnil inzerát o čtyřech volných místech s různými profesemi a, b, c, d . Přihlásili se čtyři uchazeči A, B, C, D ; první z nich má kvalifikaci pro místa a, b , druhý pro c, d , třetí pro a, b i d , zatímco poslední jen pro c . Může podnik přijmout tuto čtveřici zájemců a obsadit přitom každé místo kvalifikovaným pracovníkem?

Úloha 2. V okresním městě se konala svazácká schůze zástupců středních škol, po jejímž ukončení zbyl čas i na chvíli společenské zábavy s tancem. V sálku je deset dívek a deset chlapců, každá dívka zná právě dva z těchto chlapců a každý chlapec zná právě dvě přítomné dívky. Mohou tito mladí lidé vytvořit deset tanečních párů tak, aby se každý z nich skládal z dívky a chlapce, kteří se znají?

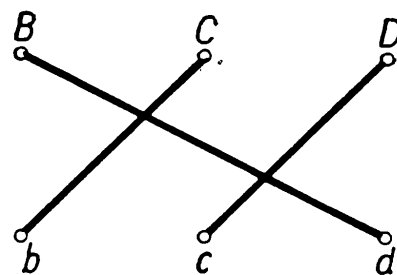
Co je společné oběma úlohám? Požadavek vybrat z většího počtu možných dvojic (tj. dvojic, jejichž složky jsou v požadovaném vztahu),

tolik dvojic, aby každý z uvažovaných lidí byl v právě jedné takové dvojici. Jinak můžeme říci, že máme v dané binární relaci určit její podmnožinu, která je prostým zobrazením.

Užitečnou roli při řešení těchto úloh mohou sehrát grafy, pomocí nichž znázorníme studované dvojice. Na obr. 1a jsou zakresleny uzly A, B, C, D, a, b, c, d a existencí hrany Xy je vyjádřeno, že platí výrok typu „učažeč X má kvalifikaci pro místo y “. Získáváme zvláštní typ neorientova-

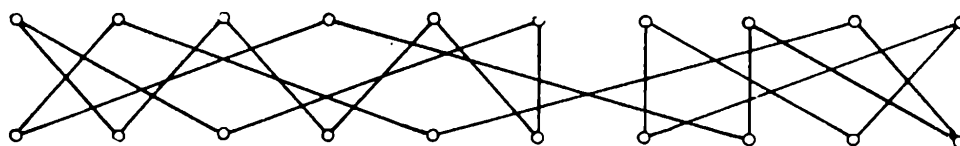


Obr. 1a



Obr. 1b

ného grafu, který se nazývá sudý graf (v cizojazyčné literatuře bipartitní graf); množinu všech uzlů takového grafu lze rozdělit na dvě disjunktní části $U_1 = \{A, B, C, D\}$, $U_2 = \{a, b, c, d\}$ tak, že hrany grafu spojují jen uzly z různých částí. Máme vybrat čtyři ze zakreslených hran tak, aby s každým uzlem incidovala právě jedna. Stručně říkáme, že máme určit lineární faktor sestrojeného grafu, na obr. 1b je jeden z nich zakreslen. Čtenář si snadno zakreslí i druhý existující lineární faktor daného grafu.



Obr. 2

Na obr. 2 je obdobným způsobem sestrojen příklad grafu, který by mohl vyjadřovat situaci na tanečním parketu popsanou v úloze 2. Množina deseti dívek je označena písmenem F , množina všech přítomných chlapců je označena M , zakreslením hrany vyjadřujeme, že jde o dvojice dívky a chlapce, kteří se znají. V textu úlohy není řečeno, kdo koho zná, proto jsou hrany grafu sestrojeny zcela náhodně, dodržena je však zásada, aby každý uzel byl právě druhého stupně. Není těžké se-

strojit lineární faktor tohoto grafu zkusmo, čtenář by si však mohl v sestrojeném grafu určit také *kružnice*, tj. souvislé pravidelné grafy 2. stupně. Začne-li například zapisovat sled, který má první uzel v krajním uzlu horní vrstvy, „přejde“ postupně až na druhý krajní uzel této vrstvy a pak se vrátí zpět jinou cestou, tak vytvoří jednu kružnici v daném grafu. Tato kružnice obsahuje osm hran; říkáme, že její délka je rovna osmi.

Položme si však obecnou otázku: *existuje v každém pravidelném sudém grafu 2. stupně lineární faktor?* Odpověď je kladná!! Klíčem k zdůvodnění této odpovědi je úvaha o kružnicích v takových grafech; zapíšeme ji v několika krocích:

1. *Daný sudý graf je buď jedinou kružnicí nebo je sjednocením aspoň dvou disjunktích kružnic* (tj. kružnic, které nemají společné uzly ani hrany). Zvolíme-li totiž libovolný uzel u_1 daného grafu, můžeme začít zapisovat posloupnost jeho uzlů a hran (sled v grafu):

$$u_1, u_1u_2, u_2, u_2u_3, \quad u_{k-1}u_k, u_k.$$

Zapíšeme-li uzel u_i proto, že nás do něho „přivedla“ některá hrana, je buď $u_i = u_1$ nebo $u_i \neq u_1$. V prvním případě jsme vytvořili kružnici grafu a začneme zapisovat další; ve druhém případě lze posloupnost prodloužit o další hranu u_iu_{i+1} , protože u_i je uzlem 2. stupně. Graf má však jen konečný počet hran a uzlů, proto se nutně objeví jako člen posloupnosti uzel $u_k = u_1$ a sled se uzavře v kružnici.

2. *Každá kružnice, kterou jsme získali popsanou konstrukcí, má sudou délku*, protože se uzavře v uzlu horní nebo dolní „vrstvy“ uzlů a zahrnuje tedy několik přechodů do protilehlé vrstvy a zpět; ke každému přechodu jsou třeba dvě hrany, celkem tedy sudý počet hran.

3. *V každé kružnici, která má sudou délku, existuje lineární faktor*. Toto tvrzení lze snadno potvrdit konstrukcí — vyznačíme každou druhou hranu kružnice jako hranu lineárního faktoru.

4. *Sjednocením lineárních faktorů všech kružnic pravidelného sudého grafu druhého stupně získáme zřejmě jeho lineární faktor*.

Úvahou popsanou v bodech 1—4 jsme dokázali větu: *V každém pravidelném sudém grafu druhého stupně existuje aspoň jeden lineární faktor*. Existenci lineárního faktoru lze též dokázat v každém pravidelném sudém grafu stupně $n \geq 3$. Platí však dokonce i silnější věta, která nepožaduje pravidelnost grafu s dvěma stejně početnými množinami uzlů U_1, U_2 a s hranami opět jen mezi uzly patřícími do různých množin. Takovým grafem je sudý graf na obr. 1, všimněme si ho blíže; ve dvou sloupcích zapíšeme všechny možné podmnožiny $X \subset U_1$, resp. $X \subset U_2$, a každé z nich přiřadíme „protějščí“ množinu X_p všech koncových uzlů hran vycházejících z uzlů množiny X .

$\mathbf{X} \subset \mathbf{U}_1$	$\mathbf{X}_p \subset \mathbf{U}_2$	$\mathbf{X} \subset \mathbf{U}_2$	$\mathbf{X}_p \subset \mathbf{U}_1$
$\{A, B\}$	$\{a, b, c, d\}$	$\{a, b\}$	$\{A, C\}$
$\{A, C\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, c\}$	$\{A, B, C, D\}$
$\{A, D\}$	$\{a, b, c\}$	$\{a, d\}$	$\{A, B, C\}$
$\{B, C\}$	$\{a, b, c, d\}$	$\{b, c\}$	$\{A, B, C, D\}$
$\{B, D\}$	$\{c, d\}$	$\{b, d\}$	$\{A, B, C\}$
$\{C, D\}$	$\{a, b, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{B, C, D\}$
$\{A, B, C\}$	$\{a, b, c, d\}$	$\{a, b, c\}$	$\{A, B, C, D\}$

Je jistě nápadné, že ve všech uvedených případech je počet prvků množiny \mathbf{X}_p větší nebo roven počtu prvků množiny \mathbf{X} ; tento výsledek se dá ověřit pro všechny zbývající množiny \mathbf{X} . Platí tato věta:

V sudém grafu s množinami uzlů $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$, které mají stejný počet uzlů, existuje lineární faktor právě tehdy, když pro každou podmnožinu $\mathbf{X} \subset \mathbf{U}_1$, resp. $\mathbf{X} \subset \mathbf{U}_2$, platí, že má nejvýše tolik uzlů jako příslušná množina \mathbf{X}_p .

Důkaz věty vyžaduje dvě úvahy:

a) Existuje-li v grafu lineární faktor, vychází z každého uzlu aspoň jedna hrana (totiž hrana faktoru) a ze dvou různých uzlů vycházejí různé hrany, proto má každá množina \mathbf{X} nejvýše tolik uzlů jako množina \mathbf{X}_p .

b) Má-li každá množina $\mathbf{X} \subset \mathbf{U}_1$, resp. $\mathbf{X} \subset \mathbf{U}_2$, nejvýše tolik uzlů jako \mathbf{X}_p , je každý uzel grafu aspoň prvního stupně. Vybereme libovolný uzel u_1 nejnižšího stupně a hranu u_1v_1 , která z něho vychází do uzlu v_1 nejnižšího stupně, zahrneme do lineárního faktoru; pak z grafu odstraníme všechny hrany incidující s u_1 nebo s v_1 . Tím se žádný uzel u různý od u_1, v_1 nestane izolovaným a v získaném grafu můžeme bez nesnází opakovat dosavadní postup; čtenář si zdůvodní možnost pokračování a to, že nakonec sestrojíme lineární faktor grafu.

Typ úloh, kterým jsme se zde zabývali, má značný význam v praxi, a to nejen při obsazování míst vhodnými kandidáty. Nejčastěji se však uplatňuje jejich složitější varianta — jde o lineární faktory v ohodnocených grafech. O tom však pojednají další články.

Cvičení

1. Nakreslete si libovolný souvislý graf obsahující sice kružnice, ale jen takové, které mají sudou délku. Existuje v tomto grafu nutně lineární faktor? Lze překreslit graf s lineárním faktorem obdobně jako na obr. 2?

2. Zvyšte počet tanečnic a tanečníků v úloze 2, nakreslete si příslušný graf a vyřešte úlohu.

3. Je možné rozdělit pět služeb pěti zaměstnancům v případě, že první může přijmout jen druhou nebo čtvrtou, druhý jen první či pátou, třetí pouze pátou, čtvrtý druhou, třetí, pátou a poslední jen první službu?

Dvojková soustava

Dr. ROMAN BEK, ČVUT PRAHA

Ve dvou článcích uveřejněných v Rozhledech jsme se seznámili s technickými modely základních operací dvouprvkové Booleovy algebry. Ze stejných technických elementů se skládají konečné automaty i číslicové počítačí stroje. Dříve než vyložíme princip sčítacích sítí, musíme znát způsob zápisu celých čísel pomocí dvou číslic 0, 1, tj. dvojkovou soustavu, a výpočet součtu dvou takto zapsaných čísel.

Zabývejme se nejprve *převodem zápisu čísel z desítkové soustavy do dvojkové a naopak*. Pro jednoduchost předpokládejme, že jde o nezáporná celá čísla; zápis a_1, a_2, \dots, a_n takového čísla v desítkové soustavě budeme „pro jistotu“ doplňovat indexem 10, např. 369_{10} . Zápis $(a_1, a_2, \dots, a_n)_{10}$ lze rozepsat ve tvaru polynomu

$$a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot 10^1 + a_n \cdot 10^0,$$

kde koeficienty a_1, a_2, \dots, a_n jsou z čísel 0, 1, \dots , 9; užíváme tedy deseti znaků (číslíc, cifer).

Zápis $(b_1, b_2, \dots, b_n)_2$ celého nezáporného čísla ve dvojkové soustavě lze obdobně rozepsat ve tvaru polynomu

$$b_1 \cdot 2^{n-1} + b_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + b_{n-1} \cdot 2^1 + b_n \cdot 2^0,$$

kde koeficienty b_1, \dots, b_n jsou pouze čísla 0 a 1; užíváme tedy pouze dvou číslic.

Přechod od dvojkového k desítkovému zápisu lze snadno uskutečnit tak, že provedeme operace naznačené ve zmíněném polynomu a výsledky píšeme v obvyklém desítkovém zápisu. Například dvojkový zápis 1011010_2 je zkratkou zápisu čísla ve tvaru polynomu

$$\begin{array}{cccccccc} 1 \cdot 2^6 & + & 0 \cdot 2^5 & + & 1 \cdot 2^4 & + & 1 \cdot 2^3 & + & 0 \cdot 2^2 & + & 1 \cdot 2^1 & + & 0 \cdot 2^0, & \text{tj. součtu} \\ 64 & & & & + 16 & & + 8 & & + 2 & & & & = 90. \end{array}$$

Dvojkový zápis 1011010_2 představuje tedy číslo 90_{10} (zapsané v desítkové soustavě).

Přechod od desítkového k dvojkovému zápisu čísla lze provést tak, že postupně hledáme vhodné mocniny čísla 2; tj. hledáme, které nejvyšší mocniny dvou se „vejdou“ do daného čísla, resp. zbytku, jedenkrát a které nulkrát. Máme-li například nalézt dvojkový zápis čísla 137_{10} , postupujeme takto: vyhledáme nejvyšší mocninu čísla 2, která je menší nebo rovna číslu 137, platí $2^7 < 137 < 2^8$. Číslo $2^7 = 128$, proto $137 = 1 \cdot 2^7 + 9$; do devíti se „nevejde“ žádná z mocnin $2^6, 2^5, 2^4$, každá z nich je tedy obsažena nulkrát. Číslo $2^3 = 8$ se „vejde“ do devíti jedenkrát, zbude $9 - 8 = 1$, sem se „nevejde“ 2^2 ani 2^1 , ale 2^0 ano. Můžeme tedy napsat

$137_{10} = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
 a zkráceně $137_{10} = 10001001_2$.

Převody mezi desítkovými a dvojkovými zápisy čísel můžeme provádět pomocí přehledu všech uspořádaných n -tic složených z jedniček a nul, které seřadíme *lexikografickým* způsobem. Tento pojem si snad nejlépe objasníme příkladem abecedního uspořádání jmen ve slovnících (odtud pochází název „lexikografický“). Zvolme si abecedu skládající se jen ze dvou písmen 0, 1 v tomto pořadí a zabývejme se všemi jmény složenými ze čtyř písmen. První v pořadí bude jistě jméno 0000, druhé 0001, třetí 0010 atd. Tak sestavíme seznam jmen odpovídající lexikografickému uspořádání všech uspořádaných čtveřic prvků množiny 0,1: 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111.

Tyto čtveřice mohou po řadě představovat dvojkové zápisy čísel 0, 1, 2, ..., 15, dostaneme tak výsledek $0000_2 = 0_{10}$, $0001_2 = 1_{10}$, ..., $1111_2 = 15_{10}$. Obecně platí, že pro převod čísla n z desítkového do dvojkového zápisu potřebujeme m dvojkových řádových míst, přičemž platí

$$2^m \geq n > 2^{m-1},$$

lexikograficky musíme tedy uspořádat všechny uspořádané m -tice nul a jedniček.

Sčítání dvou čísel zapsaných ve dvojkové soustavě provádíme analogicky jako sčítání čísel zapsaných v desítkové soustavě. Zapišeme oba sčítance pod sebe, aby v jednotlivých sloupcích byly číslice nalézající se na stejném řádovém místě. Postupujeme pak odprava doleva, tj. od nižších řádů k vyšším. Početní spoje $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 2$ musíme ve dvojkové soustavě psát $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$.

$$\begin{array}{r|l} +_2 & 0 \ 1 \\ \hline 0 & 0 \ 1 \\ 1 & 1 \ 10 \end{array}$$

Tab. 1.

$$\begin{array}{r|l} +_B & 0 \ 1 \\ \hline 0 & 0 \ 1 \\ 1 & 1 \ 1 \end{array}$$

Tab. 2.

$$\begin{array}{r|l} +_2 & 0 \ 1 \\ \hline 0 & 00 \ 01 \\ 1 & 0\bar{1} \ 1\bar{0} \end{array}$$

Tab. 3.

V tabulce jsou 1 přehledně zapsány sčítance a součty v operaci $+_2$, tj. sčítání čísel zapsaných jednou cifrou ve dvojkové soustavě. Booleovské sčítání je zachyceno v tabulce 2; je zřejmá shoda výsledků na třech místech a rozdílnost výsledků v pravém dolním rohu tabulek. Tato „drobnost“ svědčí o tom, že *dvojková aritmetika* (počítání s čísly zapsanými ve dvojkové soustavě) *se liší od dvouprvkové booleovské algebry*. Přesto však lze najít východisko ze situace, které je naznačeno v tabulce 3 — výsledky sčítání budeme vyjadřovat uspořádanou dvojicí

cifer, poslední (v tabulce podtrženou) zapíšeme v témž řádu součtu a první si zapamatujeme a přičteme ji k cifrám nejbliže vyššího řádu.

Ukaž me si konkrétní příklad sčítání dvou čísel zapsaných ve dvojkové soustavě (indexy vynecháme):

110	1. krok $0 + 1 = 01$, zapíšeme 1, přeneseme 0,
111	2. krok $1 + 1 + 0 = 10$, zapíšeme 0, přeneseme 1,
<u>1101</u>	3. krok $1 + 1 + 1 = 11$, zapíšeme 1, přeneseme 1,
	4. krok $0 + 0 + 1 = 01$, zapíšeme 1.

Poslední krok celé operace spočívá v sečtení přenášeného čísla a dvou nul, které si obdobně jako v desítkové soustavě vždy můžeme doplnit před první nenulovou cifrou sčítanců. Procvičte si „dvojkové sčítání“ na příkladech, v dalším článku poznáme sčítací sítě počítačů pracujících na principu booleovských operací.

Cvičení

1. Pořídte si dvojkový zápis čísel 257, 127, 97, 512, 100, 1000, 10 000 zapsaných v desítkové soustavě.

2. Napište desítkový zápis čísel daných zápisy 1111_2 , 10001_2 , 101010101_2 , 11011011_2 , 10011001_2 , 1010010001_2 .

3. Sečtěte některé dvojice čísel uvedených ve cvičení 2, a to v jejich dvojkovém zápisu. Pro kontrolu sečtěte stejná čísla při jejich desítkovém zápisu.

fyzika

Počátky kvantové fyziky

RNDr. BOHUMIL JUREK, Dr. Sc., PRAHA

Kvantová fyzika je vedle teorie relativnosti nejdůležitějším přínosem fyziky našeho století. Její vznik je snad největším převratem ve fyzikálním myšlení. Po všechny věky, ve kterých se přemýšlelo o přírodním dění, se předpokládalo, že toto dění má vždycky spojitý průběh. „Příroda nedělá skoky,“ říkalo se. Teprve ve 20. století se ukázalo, že výklad přírody není možný, nepřipustíme-li existenci skoků.

Celý myšlenkový převrat, spojený se zavedením přetržitosti, proběhl v podstatě v první čtvrtině století. Prvý podnět ke kvantovým představám dala teorie tepelného záření. Je známo, že rozžhavená tělesa vydávají záření všech vlnových délek jistého oboru. Intenzita záření zprvu roste s vlnovou délkou, dosahuje maxima a pozvolna klesá. Dlouho nedo-

vedli teoretikové vyložit celý průběh závislosti. Teprve r. 1900 ukázal Max Planck, že výklad je možný za předpokladu, že výměna energie mezi tělesem a prostředím se děje v celistvých násobcích součinu $h\nu$, kde ν je kmitočet a h univerzální konstanta, zvaná elementární účinkové kvantum.

Další krok ke kvantovým představám vykonala teorie fotoelektrického jevu. Roku 1887 pozoroval Heinrich Hertz, že ultrafialové záření, dopadající na *jiskřiště*, *usnadňuje vznik elektrické jiskry*. V tom případě jiskra přeskočí již při nižším napětí. Postupně bylo zjištěno, že elektromagnetické záření za jistých podmínek uvolňuje z tělesa proud elektronů, jejichž energie závisí na kmitočtu, ale ne na intenzitě záření. Albert Einstein vysvětlil r. 1905 tuto zákonitost předpokladem, že každý elektron je uvolňován jedním kvantem zářivé energie. Energie uvolněného elektronu se rovná $h\nu$, zmenšenému o práci, potřebnou k jeho uvolnění z tělesa.

Použití Planckova předpokladu o přetržitosti zářivé energie se množila. Mezitím byly získány poznatky o zákonitostech spekter, které vyžadovaly teoretického zdůvodnění. Pozornost badatelů upoutal fakt, že plyny vydávaly záření o zcela určitých, diskrétních vlnových délkách. Známá je série vodíkových čar, označovaných H_α , H_β , H_γ , H_δ atd. Johnston Stoney zjistil r. 1871, že kmitočty první, druhé a čtvrté čáry jsou v poměru 20 : 27 : 32. Johann Jakob Balmer našel r. 1885 pro kmitočty čar vodíku vztah, kterému je možné dát tvar

$$\nu = 10^{-8} c N \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (1)$$

kde c je rychlost světla, m celé číslo > 2 a N důležitá konstanta, zvaná Rydbergova. V jiných částech spektra vodíku byly nalezeny řady s jinými počátky, ale stejnou Rydbergovou konstantou. Příslušné kmitočty dostaneme, nahradíme-li ve vzorci (1) číslo 2^2 číslem 1, 3^2 apod.

Podklad pro tyto zákonitosti bylo třeba hledat ve struktuře atomů. Ke konci 19. století už bylo zřejmé, že atomy nejsou nedělitelné. Bylo zjištěno, že při výboji v plynech vznikají při jistém zředění jednak proudy částic záporně nabitých s nepatrnou hmotností, jednak proudy kladně nabitých částic o hmotnosti blízké hmotnosti atomu. Záporně a kladně nabitě částice byly pozorovány i při radioaktivním rozpadu. Z těchto faktů se dalo soudit, že atom se skládá z různě nabitých částic, jejichž elektrický účinek navenek se vzájemně ruší. Toho použili autoři různých modelů atomu. William Thomson (lord Kelvin) si představoval atom jako sféru kladné elektřiny, uvnitř které jsou záporně nabitě částice, elektrony (1904). Ernest Rutherford, poučený jevy radioaktivního rozpadu, zdůrazňoval od r. 1906, že hmotnost kladných částic je soustředěna na velmi malém prostoru. Roku 1911 podal model, ve kterém je malé, kladně nabitě a téměř celou hmotnost atomu nesoucí jádro ob-

klopeno soustavou elektronů, analogickou planetární soustavě. Niels Bohr přizpůsobil r. 1913 tento model kvantovým představám. Předpokládal, že v atomu jsou stabilní pouze některé dráhy elektronů. Pohyb elektronů po dráze kolem jádra nevyvolává elektromagnetické vlnění. Záření tohoto druhu vzniká, když elektron přejde z jedné stabilní dráhy, kde má energii E_1 , na jinou o menší energii E_2 . Rozdíl energií se vyzáří jedním kvantem. Platí tedy

$$E_1 - E_2 = h\nu.$$

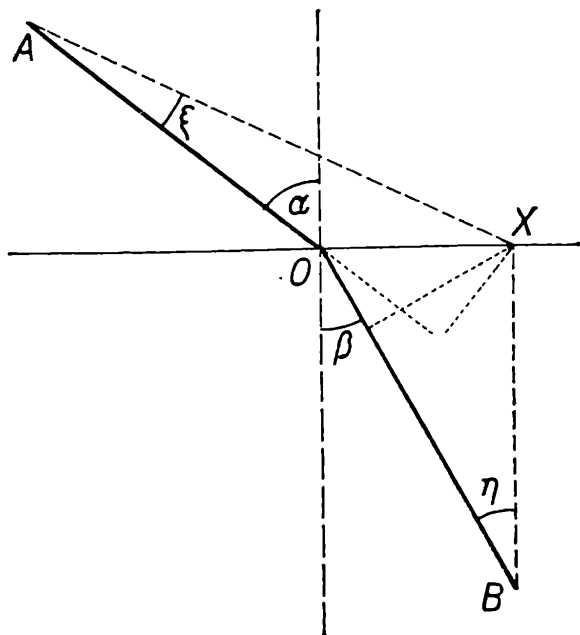
Tím je určen kmitočet záření. Vybereme-li vhodně poloměry drah elektronů v modelu vodíku, vysvětlíme snadno vznik Balmerovy série. Výraz na pravé straně rovnice (1) má potom význam rozdílu energií, lomeného veličinou h . Týmž způsobem je možné vyložit jiné spektrální série vodíku, spektrum helia, které ztratilo elektron a po některých změnách i spektrum jiných plynů. Další vývoj přinesl doplňky a korektury. Např. Arnold Sommerfeld zavedl roku 1915 místo kruhových drah elektronů elipsy. Okolo r. 1920 se na základě různých úvah a pokusů ukázalo nutným přisoudit elektronu magnetické vlastnosti. Magnetismus elektronů se vykládal jejich otáčením, které má stejné účinky jako elektrický proud u elektromagnetu. S tím souvisí pojmenování jevu „spin“ (otáčení, vír). Spin je dvojí, podle smyslu otáčení.

Na základě těchto teoretických předpokladů bylo možno vyložit velké množství jevů. Jejich nedostatkem byla okolnost, že nedovedly odůvodnit, proč jsou jen některé dráhy elektronů okolo jádra stabilní. O tom přemýšlel na začátku dvacátých let Louis de Broglie. Hledal děje s podobnými případy stability a našel je u vlnivých pohybů. Jde o známé jevy. Například rozkmitáme-li konec provazu s druhým koncem pevným, dostaneme stojaté vlnění jen tehdy, vytvoří-li se po délce provazu lichý počet polovln. De Broglie sledoval dále vztahy mezi pohybem částic a vlněním. Našel opěrný bod ve formální podobnosti základních principů optiky a mechaniky. V čem tato podobnost spočívá, ukážeme si na případu lomu paprsku na rovinném rozhraní mezi vzduchem a hustším prostředím o indexu lomu n (obr. 1).

Podle zákona lomu platí

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad (2)$$

kde α je úhel dopadu a β úhel lomu. Označme O bod dopadu a zvolme na paprsku dopadajícím bod A a na paprsku lomeném bod B . Výraz $AO + nOB$ se v geometrické optice nazývá optická dráha. Týmž výraz lze vytvořit také pro jiné lomené čary mezi A , B , např. pro AXB . Dráha paprsku se vyznačuje proti jiným čarám tím, že příslušná optická dráha je nejmenší. K důkazu si zavedeme další označení. Označme



Obr. 1

$$AO + nOB = L$$

$$\sphericalangle OAX = \xi$$

$$AX + nXB = L_x$$

$$\sphericalangle OBX = \eta \quad (\xi > 0, \eta > 0)$$

Vzhledem ke (2) platí vztah

$$L_x - L = AX - AO + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} (XB - OB). \quad (3)$$

Rovnici (3) upravíme na tvar

$$\frac{L_x - L}{\sin \alpha} = \frac{AX \cos \xi - AO}{\sin \alpha} + \frac{AX (1 - \cos \xi)}{\sin \alpha} +$$

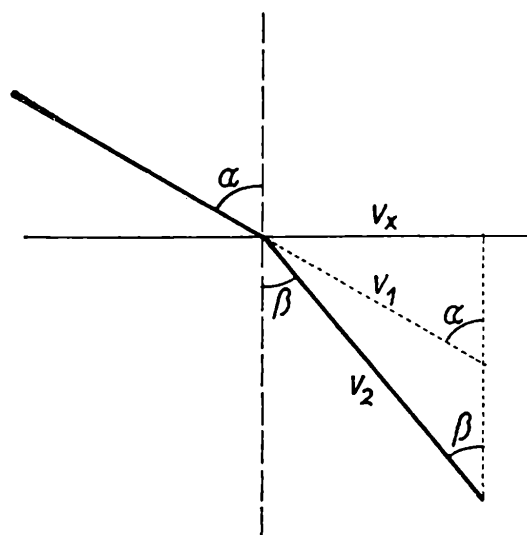
$$+ \frac{XB \cos \eta - OB}{\sin \beta} + \frac{XB (1 - \cos \eta)}{\sin \beta} \quad (4)$$

Úhly a délky jsou kladné. Liché členy na pravé straně rovnice (4) jsou až na znaménko rovny OX , tedy se vzájemně ruší (obr. 1) a zbývající členy jsou kladné. Je tedy optická dráha L_x větší než optická dráha L a naše tvrzení je dokázáno. Je to zvláštní případ *Fermatova principu*.

Fermatův princip je možné interpretovat jak na undulačním, tak na emisním základě. Podle undulační teorie se v prvním prostředí šíří vlnění rychlostí c , ve druhém jinou rychlostí c_2 . Ze známé Huygensovy konstrukce plyne

$$\frac{c}{c_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Podle emisní teorie si představujeme, že nositelem světla je světelná částice o hmotnosti m , pohybující se v prvním prostředí rychlostí v_1 . Pohyb částice v prvním prostředí je volný (bezsilový), ale na rozhraní



Obr. 2

prostředí je vrstvička, ve které působí na světelnou částici síla kolmo na rozhraní, v našem případě směrem ke druhému prostředí. Průchodem vrstvičkou se podle zákona zachování energie zvětší kinetická energie částice o veličinu, nezávislou na bodu a úhlu dopadu. Světelná částice nabude rychlosti v_2 , přičemž složka rychlosti ve směru rozhraní v_x se průchodem vrstvičkou nemění. Z toho plyne (obr. 2)

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Tento výsledek dosadíme do rovnice (3), násobíme obě její strany a dostaneme na základě Fermatova principu nerovnost

$$mv_1AX + mv_2XB - (mv_1AO + mv_2OB) > 0. \quad (5)$$

Všechny čtyři členy v nerovnosti jsou součiny z hmotnosti, rychlosti a dráhy. Tato veličina se od dob Leibnizových (1707) nazývá akce a vztah (5) je vyjádřením zvláštního případu *principu nejmenší akce*. Výklad lomu na základě emisní teorie pochází od Descarta, který jej uveřejnil r. 1637 v jednom z dodatků ke známé „Rozpravě o metodě“. Už při vzniku výkladu budila nedůvěru okolnost, že rychlost světla má být v hustším prostředí větší. Poukazoval na to Fermat, Leibniz se neobratně pokoušel to vysvětlit. Obrat nastal, když Léon Jean Bernard Foucault a Armand Fizeau dokázali pokusem (1850), že rychlost světla je ve vodě menší než ve vzduchu. Spor obou teorií světla byl rozhodnut ve prospěch teorie undulanční. Geometrickou optiku je ovšem možné vybudovat také na základě principu nejmenší akce, ale v tom případě ztrácejí rychlosti bezprostřední fyzikální význam. Plný význam podržuje princip nejmenší akce v případě mechanických dějů.

Shoda mezi oběma principy ukázala Louisu de Broglie cestu ke dvojímu pojetí pohybu částice. Uplatnění dvou hledisek mu umožnilo uvažovat kromě běžné mechanické rychlosti částice ještě další rychlost V , jejíž hodnotu mohl volit podle potřeb teorie. Považoval mechanický pohyb o rychlosti v za výsledek vlnění s rychlostí

$$V = \frac{c^2}{v}, \quad (6)$$

kterou nazval fázovou, poněvadž se touto rychlostí nepřenáší energie, ale pouze fáze vlnění. Další charakteristiky vlnění dostal použitím Einsteinovy rovnice, podle které se energie částice rovná mc^2 . De Broglie spojil tento poznatek s kvantovou podmínkou a dostal rovnici

$$mc^2 = h\nu. \quad (7)$$

Z rovnic (6) a (7) je možné vypočíst vlnovou délku.

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (8)$$

Takto založená teorie pohybu částice umožnila L. de Broglie pokládat pohyb elektronu okolo jádra za stojaté vlnění a tím zdůvodnit okolnost, že stabilní jsou jen některé dráhy elektronů v atomu. Když de Broglie předložil tyto výsledky v disertaci (obhajoba 25. 11. 1924), byla jeho teorie některými fyziky pokládána za formálně matematickou zajímavost. Avšak autor disertace upozorňoval již v září 1923 na možnost přezkoumání vlnové povahy pohybu elektronu difrakčními pokusy. Takové pokusy byly později uskutečněny. Snad nejzajímavější je pokus G. P. Thompsona z r. 1927, při kterém vznikly při průchodu proudy elektronů tenkou kovovou folií koncentrické kruhy, analogické ohybovým jevům u světla (viz např. Rozhledy m.-f., roč. 51, č. 3, str. 114).

Tyto výsledky mají značný praktický význam. Vlnivá povaha elektronového proudu se totiž uplatňuje při zobrazování pomocí elektronů. Je jasné, že proud elektronů je možné elektrickým nebo magnetickým polem ovlivnit tak, jako se světelné svazky ovlivňují průchodem různými prostředími. Tím vzniká možnost konstruovat elektronové zobrazovací přístroje. Důležitý je zejména elektronový mikroskop. Vlnová fyzika nás poučuje, že tento přístroj má mez rozlišení, rovnou jistému zlomku vlnové délky, podobně jako je to u světla (viz cit. článek v Rozhledech). Rovnice (8) však ukazuje, že tuto mez je možné snižovat urychlováním pohybu elektronů. Při tom roste nejenom veličina v ve jmenovateli, ale podle teorie relativnosti také hmotnost m . Při urychlovacích napětích, běžných v elektronových mikroskopech, je vlnová délka elektronového proudu 100 000krát kratší než vlnová délka světla. Teoretická rozlišovací schopnost elektronového mikroskopu není však využita pro poměrně velké vady zobrazení. Dosahuje se běžně stokrát lepšího rozlišení než poskytuje optický mikroskop.

V době téměř poloviny století, která nás dělí od zakladatelských prací kvantové fyziky, se její teorie neobyčejně rozvinula a zasáhla do mnohých odvětví přírodních věd a techniky.

Znají na Nových Hebridách Hookeův zákon?

Nové Hebridy jsou souostroví v Melanézii v Tichém oceáně a mezi domorodci se zde dodnes pořádají zvláštní slavnosti, jejichž vyvrcholením je vzrušující zkouška odvahy mladých mužů. Zvuky bubnů a rituální tance provázejí výstup mladého Melanézana na vrchol věže postavené jen pro tento účel. Zde si mladík přiváže k nohám liany, jejich konce připevní k věži a za napjaté pozornosti přihlížejících domorodců se vrhne střemhlav s věže dolů. Liany utlumí pád, tělo muže se kmitne těsně nad zemí a odvážlivec za jásotu všech přítomných šťastně přistane.

Když uvážíte, že skokan padá z výšky 15 až 30 m, jistě vás napadne otázka, jak je vlastně možné, že člověk bez zranění přežije prudké zabrzdění volného pádu a bude vás zajímat jaká je největší výška, ze které se může k takovému výkonu odhodlat. Vždyť lidský organismus, jak potvrzují lékařské výzkumy kosmonautů, snáší bez úhony jen omezené přetížení, i když ovšem významnou roli hraje také doba, po kterou přetížení působí.

Ale vraťme se k rituálnímu obřadu Melanézánů a posuďme jej z hlediska Hookeova zákona, který určuje vztah mezi silou a deformací tělesa. V našem případě je to síla, která ztlumí pád domorodce, a deformací je prodloužení lian přivázaných k nohám. Jestliže označíme l délku lian a Δl jejich prodloužení v kritickém okamžiku pádu, pak podle Hookeova zákona¹⁾ bude pád zabrzděn silou

$$F = -K\Delta l, \quad (1)$$

kde K je tuhost vlákna (liany).

Za předpokladu, že deformace lian nepřekročí mez pružnosti, uplatníme i druhou formulaci Hookeova zákona²⁾

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (2)$$

v níž $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ je relativní prodloužení, E je Youngův modul pružnosti

a $\sigma = \frac{F}{S}$ je napětí vlákna (S je plocha průřezu vlákna).

Ze vztahu (2) dostaneme pro sílu napínající liany

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l \quad (3)$$

a srovnáním vztahů (1) a (3) najdeme výraz pro tuhost

$$K = \frac{ES}{l} \quad (4)$$

Youngův modul pružnosti E je materiálová konstanta a jeho velikost závisí jen na kvalitě materiálu, avšak tuhost K je závislá i na rozměrech deformovaného tělesa, na velikosti průřezu vlákna a na jeho délce.

Nyní musíme posoudit případ z Nových Hebrid ještě z hlediska energie, neboť kinetická energie padajícího odvážlivce se působením lian mění v potenciální energii jejich pružnosti, pro niž platí vztah³⁾

¹⁾ Viz učebnici Fyzika pro 2. roč. SVVŠ, čl. 64, s. 111.

²⁾ Viz učebnici Fyzika pro 2. ročník SVVŠ, čl. 51, s. 84.

³⁾ Viz učebnici Fyzika pro 2. ročník SVVŠ, čl. 65, s. 113.

$$W = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{1}{2} K (\Delta l)^2.$$

Poněvadž skokan získal svoji kinetickou energii přeměnou energie potenciální, pro kterou vzhledem k prodloužení délky lian platí $W_p = mg(l + \Delta l)$, můžeme psát

$$mg(l + \Delta l) = \frac{1}{2} K (\Delta l)^2.$$

Odtud vyplývá, že $\Delta l = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2Kmg l}}{K}$

a pro maximální sílu, kterou je utlumen pád, vychází s přihlédnutím k výrazu (4) vztah

$$F = -K\Delta l = -(mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mgES})$$

Nyní už snadno vypočítáme, že tělo dapajícího domorodce se zastaví s maximálním zpomalením (záporně vzatým zrychlením).

$$a = -g \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2ES}{mg}} \right)$$

Je zřejmé, že této hodnoty zpomalení dosáhne při největším prodloužení lian, čili v nejnižším bodě dráhy.

Teď také můžeme uvažovat o fyzikálních vlivech, které mohu u ohrozit zdraví domorodce. Především vidíme, že přetížení organismu nezávisí na délce lian, čili na výšce, ze které skokan padá. To znamená, že vlastně neexistuje kritická výška skoku, při níž by přetížení dosáhlo nebezpečných hodnot.

Poněvadž hmotností skokanova těla nebude možné příliš ovlivňovat průběh tlumení pádu, musíme si všimnout hlavně Youngova modulu pružnosti E , který může nabývat značných hodnot. Kdyby vlákno (liana) bylo absolutně tuhé, byl by $E = \infty$ a skok s věže by se podobal volnému pádu na betonovou podlahu. Avšak čím bude vlákno pružnější a čím menší bude mít průřez, tím menší a pro organismus přijatelnější bude zpomalení pádu. Je ovšem samozřejmé, že současně se bude zvětšovat prodloužení vlákna (omezené prodloužení lian tedy vlastně určuje výšku, z níž lze skok provést) a dráha, na které bude padající tělo zpomalováno, čili pád, bude probíhat obdobně jako skok artisty na pružnou plochu trampoliny.

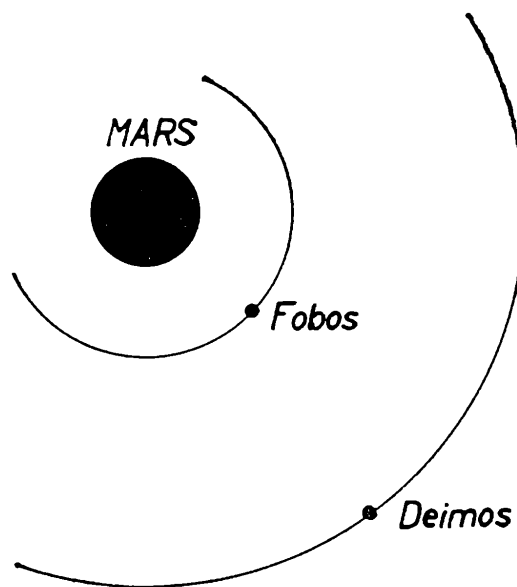
Kdyby se liany blížily svými vlastnostmi gumovým vláknům, jejichž modul pružnosti $E = 10^7 \text{ N m}^{-2}$, plocha průřezu lian byla $S = 9 \text{ cm}^2$ a hmotnost těla domorodce $m = 72 \text{ kg}$, dosáhlo by zpomalení maximální hodnoty $a = -5 g$. Takové přetížení je pro organismus dobře snesitelné.

Podle časopisu *Kvant* 1972, č. 12 volně zpracoval *dr. Oldřich Lepil, CSc.*

Fobos a Deimos

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, OLOMOUC

Marsovy měsíce — Fobos a Deimos — byly objeveny téměř před sto lety, v roce 1877. V té době nastala jedna z velkých opozic planety Marsu a Mars byl předmětem intenzivního pozorování. Dne 11. srpna 1877 objevil Američan Asaph Hall na námořní hvězdárně ve Washingtonu při pozorování Marsu refraktorem o průměru 65 cm v blízkosti planety svítící bod, který upoutal jeho pozornost. Po šesti dnech, 17. srpna 1877, objevil tento astronom druhý takový svítící bod; z pohybu bodů usoudil, že jde o měsíce planety Marsu. Původně se domníval, že měsíců je větší počet, neboť svítící bod, který byl v těsné blízkosti Marsu, pozoroval během jedné noci střídavě na západ a na východ od Marsu a zdálo se mu velmi nepravděpodobné, aby se poloha jediného měsíce tak rychle měnila. Později se však tento úkaz vysvětlil. Oběžná doba bližšího měsíce je totiž jen 7 h 39 min, polovinu oběhu vykoná za necelé čtyři hodiny a za tuto dobu se pro pozorovatele na Zemi přesune z krajní polohy na východ od Marsu do krajní polohy na západ od Marsu.



Obr. 1. Dráhy Marsových měsíců ve srovnání s velikostí planety

Marsovy měsíce dostaly názvy Fobos a Deimos (v překladu „Strach“ a „Hrůza“) podle dvou průvodců boha války Area (Marsu) v Homérově Iliadě. Oba měsíce obíhají kolem Marsu po téměř kruhových drahách; poloměr dráhy bližšího Fobose je 9360 km, oběžná doba 7 h 39 min,

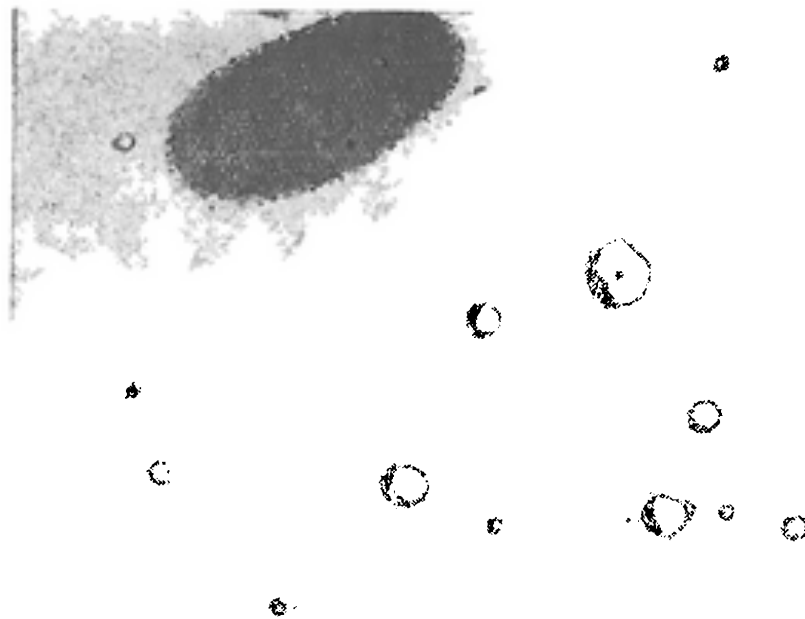
vzdálenější Deimos obíhá po dráze o poloměru 23 470 km s oběžnou dobou 30 h 21 min. Poloměr Marsu je 3400 km, Fobos tedy obíhá ve vzdálenosti necelých 6000 km od povrchu Marsu. Dráhy obou měsíců ve srovnání s rozměry Marsu jsou nakresleny na obr. 1.

Je třeba připomenout, že oba měsíce jsou viditelné jen ve velkých dalekohledech, neboť jejich zdánlivé hvězdné velikosti jsou při opozici $11,5^m$ a $12,5^m$ a navíc obíhají v blízkosti poměrně jasné planety, jejíž světlo znesnadňuje pozorování měsíců. Fobos i Deimos jsou poměrně malá tělesa. V astronomické literatuře se do nedávné doby uváděl průměr Fobose asi 16 km, Deimose kolem 8 km. Při stanovení velikosti se vycházelo ze změřených hvězdných velikostí a z předpokládaného albeda, tj. veličiny, která udává poměr mezi množstvím dopadajícího a odraženého záření.

Nové poznatky o Marsu a jeho měsících byly získány teprve pomocí kosmických sond, které začaly vysílat SSSR a USA. První sonda, Mars 1, byla vypuštěna v Sovětském svazu 1. listopadu 1962 a proletěla kolem planety ve vzdálenosti 193 000 km. Další dvě sondy, Zond 2 a Mariner 3, vyslané v roce 1964, měly technické závady; úspěšná byla sonda Mariner 4, která v červenci 1965 vyslala 21 fotografií povrchu Marsu, pořizovanou z výšky 9846 km. Z těchto fotografií bylo zřejmé, že povrch Marsu je pokryt krátery podobně jako povrch Měsíce. Sondy z roku 1969 (Marinery 6 a 7) poskytly další fotografie, zvláště Mariner 7 získal v srpnu 1969 snímky vynikající kvality. Sovětské sondy Mars 2 a Mars 3 z roku 1971 vytvořily umělé družice Marsu. U sondy Mars 2 dopadlo pouzdro na povrch planety, v případě sondy Mars 3 došlo k měkkému přistání pouzdra na planetě. Z téhož roku pocházejí i snímky Marineru 9, který kromě snímků povrchu planety vyslal i snímky obou Marsových měsíců.

Ukázalo se, že Marsovy měsíce nemají kulový tvar, jak se dříve předpokládalo, ale tvar nepravidelný. Jsou také o něco větší, než se dříve soudilo; rozměry Fobose jsou asi 25×21 km, Deimose $13,5 \times 12$ km. Oba měsíce mají velmi tmavý povrch, podle albeda je můžeme srovnat s nejtmavšími oblastmi měsíčních moří. Fotografie navíc ukázaly (obr. 2), že oba měsíce jsou pokryty četnými krátery. Jeden z největších kráterů na Fobosu má průměr asi 5,3 km. Protože jde o tělesa velmi malá, jejichž nitro nebylo zřejmě nikdy žhavé a nemohlo tedy docházet k vulkanickým jevům, lze vznik kráterů vysvětlit jen dopadem jiných těles na povrch měsíců. Počet kráterů přepočtený na jednotku plochy povrchu je u měsíců stokrát větší než u Marsu, což souvisí zřejmě s tím, že ovzduší Marsu způsobuje erozi a krátery se postupně vyplňují prachem.

Na fotografii povrchu Marsu, získané 4. února 1972, která je překreslena na obr. 2, je zřetelně vidět polostín, vytvořený Fobosem. Rozměry polostínu jsou (50×110) km. Pozorovatel, který by byl ve středu polostínu, by pozoroval přechod Fobose přes kotouč Slunce, neboli obdobu



Obr. 2. Polostín Fobose na povrchu Marsu (kresba podle fotografie)

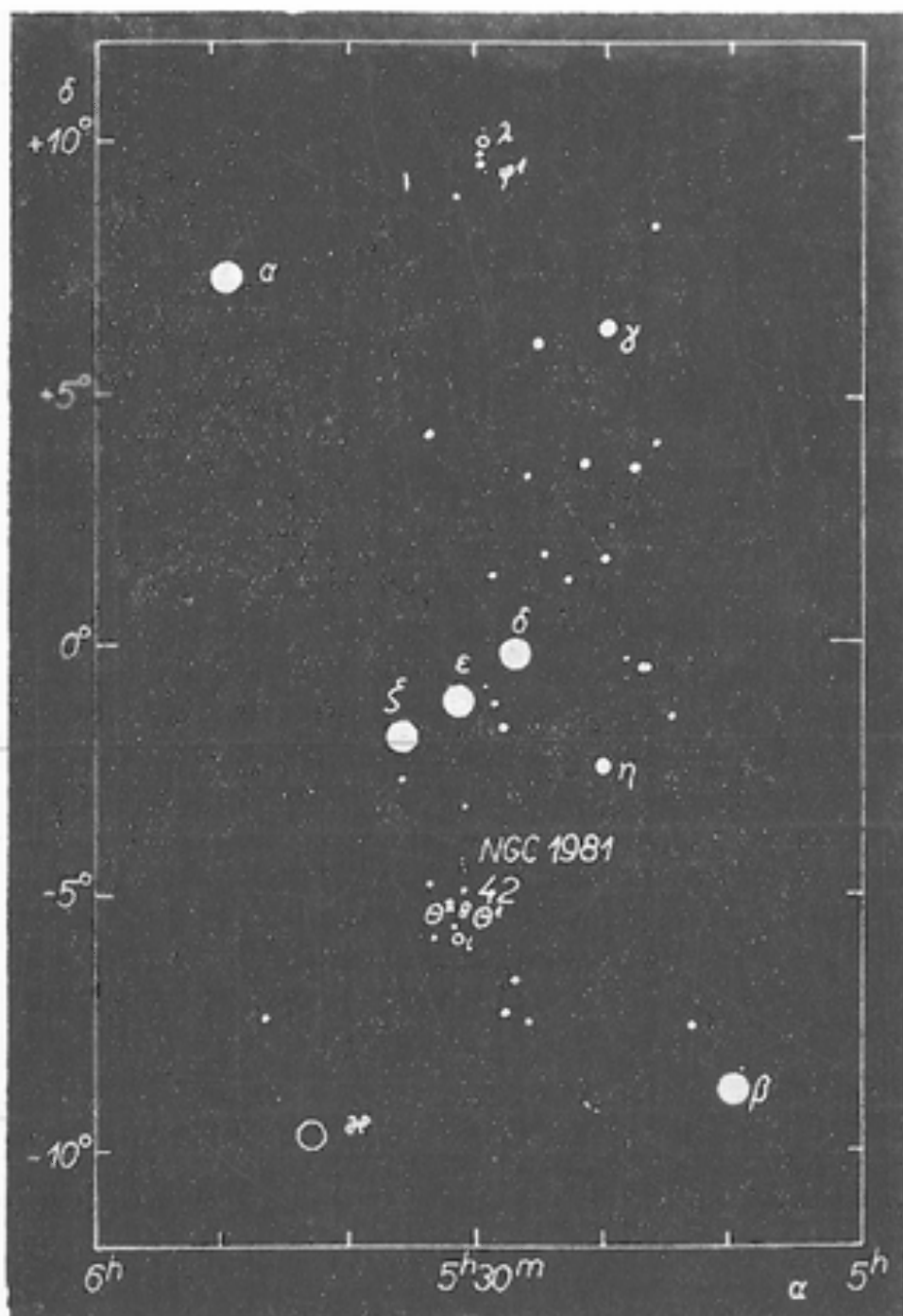
prstěncového zatmění Slunce; doba trvání tohoto zatmění by byla asi 1 minuta.

Fobos je jediným známým měsícem ve sluneční soustavě, jehož oběžná doba je kratší než doba rotace planety. Mars se otočí kolem své osy za 24 h 37 min 23 s, oběžná doba Fobose je jen 7 h 37 min. Fobos tedy „přebíhá“ body na povrchu planety a v důsledku toho by pro pozorovatele na povrchu Marsu vycházel na západě a zapadal na východě. Pozorovatel na Marsu by zjistil, že mezi dvěma kulminacemi Fobose uplyne doba asi 11 hodin (synodická oběžná doba); za jeden den tedy Fobos dvakrát vychází, vrcholí i zapadá. Oběžná doba Deimose je o necelých šest hodin delší než doba otočky Marsu. Pro pozorovatele na Marsu vychází Deimos na východě a zvolna se přesouvá k západu, přičemž mezi dvěma kulminacemi uplyne doba asi 130 hodin, tj. něco přes 5 „marsovských dní“. Nad obzorem je více než 60 hodin a za tuto dobu ve skutečnosti dvakrát oběhne planetu. Pozorovatel na Marsu by tedy mohl v době mezi východem a západem Deimose pozorovat dvakrát postupnou změnu jeho fází od novu přes první čtvrt, úplňk, poslední čtvrt zpět k novu. Velmi často by mohl pozorovat také zatmění obou měsíců. Za jeden Marsův rok (687 pozemských dnů, tj. 670 marsovských dnů) se zatmívá Deimos 130krát, Fobos dokonce 1330krát, přičemž jedno zatmění může trvat až 50 minut.

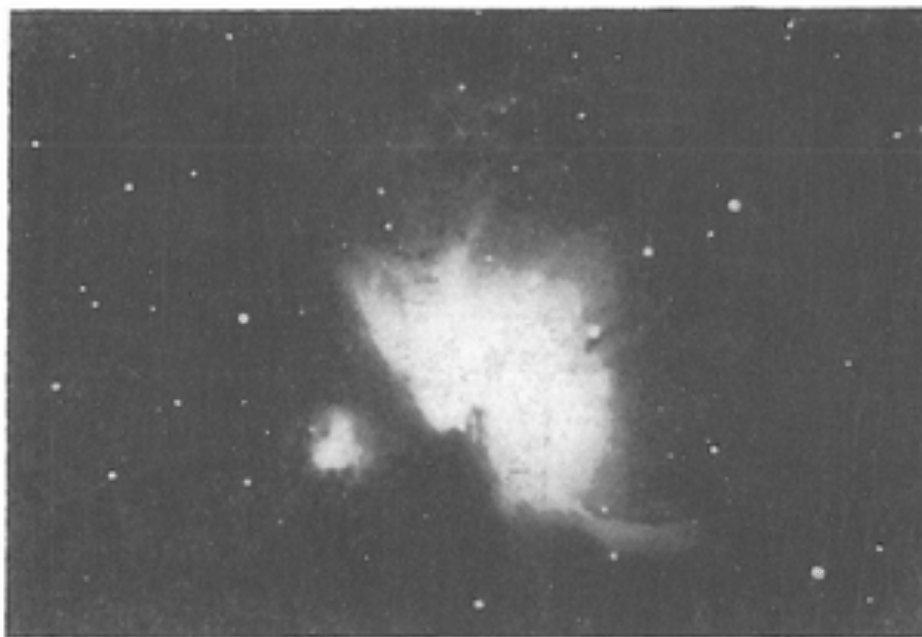
Lichoběžník v Oriónu

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, OLOMOUC

Nejkrásnější souhvězdí zimní oblohy, pojmenované po bájném lovcí Oriónovi, zná jistě většina našich čtenářů. Nejjasnější hvězdy tohoto souhvězdí jsou nakresleny na obr. 1. Červená hvězda α , zvaná Betelgeuze, je veleobr spektrální třídy M2, jehož průměr převyšuje 300krát až



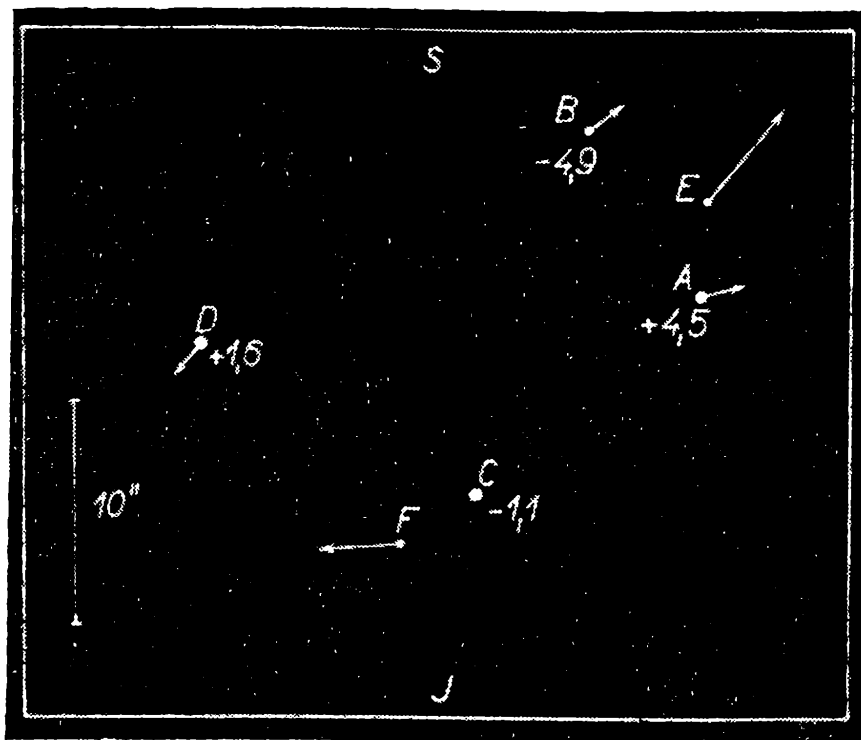
Obr. 1. Mapa souhvězdí Orióna. Poloha plynné mlhoviny M 42 je vyznačena číslicí 42, Lichoběžník písmenem θ



Obr. 2. Fotografie mlhoviny M 42 (NGC 1976), v níž jsou rozloženy hvězdy, tvořící hvězdnou asociaci v Oriónu

400krát průměr Slunce. Je to polopravidelná proměnná hvězda, jejíž hvězdná velikost se mění v intervalu od $0,4^m$ do $1,3^m$ s periodou 5 až 6 roků. Nejjasnější hvězdou v Oriónu je β Orionis, která dostala název Rigel. Je to veleobr, zářící namodralým světlem; má zdánlivou hvězdnou velikost $0,1^m$ a je spektrální třídy B8. Oriónův pás tvoří tři jasné hvězdy δ , ϵ , ξ , jejichž názvy jsou Mintaka, Alnilam a Alnitak a které leží prakticky na světovém rovníku. Asi pět stupňů na jih od Oriónova pásu najdeme i prostým okem viditelnou plynnou mlhovinu M 42 (NGC 1976), jejíž fotografie je na obr. 2. Její úhlové rozměry jsou $66' \times 60'$ a zdánlivá hvězdná velikost je $2,9^m$. Mlhovina je od nás vzdálena asi 300 parseků a v jejím okolí jsou rozloženy hvězdy, které tvoří nestabilní vícenásobnou soustavu, nazývanou Lichoběžník (nebo též Trapez) v souhvězdí Orióna.

Lichoběžník dostal svůj název podle čtyř nejjasnějších hvězd soustavy, které jsou rozloženy tak, že tvoří vrcholy lichoběžníka. Celá soustava je vnořena do plynné mlhoviny M 42. Podle výzkumů sovětského astrofyzika V. A. Ambarcumjana tvoří tato soustava (na obr. 1 označena \odot) jádro hvězdné asociace v souhvězdí Orióna. Hvězdné asociace jsou soustavy mladých, nedávno vzniklých hvězd; podrobněji jsme o nich psali v článku otištěném v tomto časopise, roč. 51, 1972/73, č. 1, str. 28 až 31. Podle akademika Ambarcumjana tvoří nestabilní soustavy jádra hvězdných asociací. Protože soustava v souhvězdí Orióna byla mezi prvními a nejlépe prozkoumanými soustavami, začaly se podle ní nazývat i jiné podobné soustavy; těmto nestabilním soustavám se říká soustavy typu Lichoběžníka v Oriónu.



Obr. 3. Vlastní pohyby hvězd Lichoběžníka v Oriónu

Nestabilní soustavy se postupně rozpadají, hvězdy se vzdalují z původního místa, v němž vznikly. Na obr. 3 jsou nakresleny pohyby šesti hvězd ze soustavy Lichoběžníka, a to podle výzkumů jiného sovětského astronoma, prof. P. P. Parenaga. Šipky znázorňují směr a velikost vlastních pohybů těchto hvězd, u hvězd *A* až *D* (podle těchto hvězd byl Lichoběžník pojmenován) jsou připsány také jejich radiální rychlosti v km s^{-1} . Z pohybů hvězd je zřejmé, že se jejich vzájemné vzdálenosti zvětšují. Studium vícenásobných soustav typu Lichoběžníka přivedlo akad. Ambarcumjana k závěru, že stáří těchto útvarů nemůže být větší než 1 milion roků. Připomeňme, že ne každá vícenásobná soustava hvězd je soustavou typu Lichoběžníka. Některé soustavy jsou velmi stabilní; pro nestabilní soustavy je typické to, že vzájemné vzdálenosti hvězd soustavy jsou řádově stejně velké. Největší procento soustav typu Lichoběžníka je mezi hvězdami raných spektrálních tříd (tj. tříd 0 až B). Tvar lichoběžníka přitom nemusí být na obloze vždy tak nápadný, jako je tomu u soustavy v Oriónu, neboť rozložení hvězd v prostoru není shodné s jejich projekcí na sféru.

Výzkumy vícenásobných soustav typu Lichoběžníka a hvězdných asociací, jejichž jádra tyto soustavy tvoří, vedly k významnému objevu, že proces vzniku hvězd není ukončen, ale trvá i v současném stádiu vývoje naší Galaxie. Dále bylo potvrzeno, že hvězdy vznikají ve skupinách, které se postupně rozpadají.

Molekuly v mezihvězdném plynu

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, OLMOUC

Ve třicátých letech 20. století bylo s konečnou platností prokázáno, že mezihvězdný prostor není zcela prázdný, ale že je vyplněn látkou, složenou z plynu a prachu. Tato mezihvězdná látka se v Galaxii soustřeďuje do mračen, jejichž průměr je kolem 10 parseků, a která jsou výrazně



Obr. 1. Mračna mezihvězdné látky ve směru souhvězdí Střelce

koncentrována k rovině symetrie naší Galaxie, tj. ke galaktické rovině. Hustota látky v mezihvězdných mračnech je z pozemského hlediska velmi malá — průměrně 10 atomů v jednom krychlovém centimetru, výjimečně kolem 100 atomů v 1 cm^3 , avšak při obrovských rozměrech mračen a jejich velkém počtu způsobuje tato látka značnou absorpci světla vzdálených hvězd, hvězdokup i jiných útvarů. Právě absorpce světla v mezihvězdné látce je příčinou toho, že střed Galaxie, ležící ve směru

Tabulka I. *Molekuly v mezihvězdném plynu, objevené do konce roku 1971*

Rok	Symbol	Molekula	Vlnová délka	Hvězdárna (dalekohled)
1937	CH	methin	430 nm	Mt. Wilson (250 cm)
1940	CN	kyan	387,5 nm	Mt. Wilson (250 cm)
1941	CH ⁺	methinový kationt	(374,5 až 423,3) nm	M. Wilson (250 cm)
1963	OH	hydroxyl	(2,2; 5,0; 6,3; 18 cm)	rádiové daleko- hl. na různých observatořích
1968	NH ₃	čpavek	1,3 cm	rád. dal. 6 m
1968	H ₂ O	voda	1,3 cm	rád. dal. 6 m
1969	H ₂ CO	formaldehyd	(1,0; 2,1; 6,2 cm)	NRAO, NRL (rád. dal. 43 m)
1970	CO	kysličník uhelnatý	2,6 mm	NRAO (rd 11 m)
1970	CN	kyan	2,6 mm	NRAO (rd 11 m)
1970	H ₂	vodík	110 nm	NRL (raketa)
1970	HCN	kyanovodík	3,31 mm	NRAO (rd 11 m)
1970	CH ₃ OH	methanol	36 cm	NRAO (rd 43 m)
1970	CHOOH	kyselina mravenčí	18,3 cm	NRAO (rd 43 m)
1971	OCS	karbonylsulfid	2,74 mm	NRAO (rd 11 m)
1971	CS	monosulfid uhlíku	2,04 mm	NRAO (rd 43 m)
1971	CH ₃ CN	methylkyanid	2,71 mm	NRAO (rd 43 m)
1971	CH ₃ C ₂ H	methylacetylen	3,51 mm	NRAO (rd 43 m)
1971	HNCO	kyselina izokyanatá	3,42 mm	NRAO (rd 43 m)
1971	HCONH ₂	formamid	6 cm	Univ. Illinois (rd 43 m)

k souhvězdí Střelce, není přístupný optickému pozorování. Na obr. 1 je fotografie části oblohy v souhvězdí Střelce. Nápadně tmavá místa (bez hvězd) jsou způsobena právě mračky mezihvězdné látky; kromě toho je na fotografii vidět také jasně zářící plyn v blízkosti žhavých hvězd. Ani prostor mezi mračky není prázdný, i když hustota látky je tam mnohem menší — asi jeden atom v deseti krychlových centimetrech. Mezihvězdná látka způsobuje kromě absorpce také polarizaci světla vzdálených hvězd.

Jak jsme již uvedli, skládá se mezihvězdná látka ze dvou složek: prachové a plynové. Prachovou složku tvoří tuhé částice o průměru řádově 10^{-7} m, složené převážně z atomů vápníku, železa, kalia a titanu. Plynovou složku tvoří především vodík. Výzkumy bylo zjištěno, že 90 % vodíku v mezihvězdné látce je v neutrálním stavu (označujeme jej H I), jen asi 10 % vodíku je ionizováno zářením žhavých hvězd (ionizovaný vodík označujeme H II).

Pátrání po molekulách v mezihvězdném plynu bylo po dlouhou dobu málo úspěšné. Až do poloviny 20. století se podařilo metodami optické astronomie objevit v mezihvězdném prostoru jen tři druhy molekul:

methin, kyan a methinový kationt. Jsou to dvouatomové molekuly a jejich existence byla objevena při studiu spektra mezihvězdného plynu, ozařovaného hvězdami raných spektrálních tříd s vysokou povrchovou teplotou.

Teprve rozsáhlejší použití metod rádiové astronomie přineslo v roce 1963 objev molekuly ^{16}OH , tj. hydroxylu, obsahujícího nejběžnější izotop kyslíku ^{16}O . Hydroxyl byl objeven pomocí rádiového dalekohledu o průměru 25 metrů na vlnové délce 18 cm (později byl sledován i na jiných vlnových délkách). Největší rozmach studia molekul v mezihvězdném plynu začíná rokem 1968, kdy vědečtí pracovníci Národní radioastronomické observatoře (NRAO) na Kitt Peaku objevili na vlnové délce 1,3 cm spektrální čáry, patřící čpavku a vodě. Pak již rychle za sebou následovaly objevy dalších molekul: v roce 1969 byl v mezihvězdné látce zjištěn formaldehyd, o jehož objev se zasloužili pracovníci Námořní výzkumné laboratoře (NRL) ve Spojených státech amerických, v letech 1970 a 1971 byl pomocí rádiových dalekohledů na universitě v Illinois a na Columbijské universitě objeven methylylkyanid, monosulfid uhlíku, karbonylsulfid atd. Většina molekul byla objevena ve zdrojích rádiového záření v souhvězdí Střelce (zdroje jsou označeny Sagittarius A a B2) a v jádru naší Galaxie. Přehled molekul, objevených do konce roku 1971, je uveden v tabulce I. Poslední roky představují do té doby netušený rozmach poznatků o složení mezihvězdného plynu; lze říci, že stojíme na prahu rychle se rozvíjejícího vědního odvětví, které můžeme označit jako astrochemie.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení loňské soutěže Rozhledů

Konstruktivní geometrie

1. Jsou dány dvě mimoběžky a , b , rovina ρ a kladné číslo r . Sestrojte přímku p , která je rovnoběžná s rovinou ρ , kolmo protíná přímku a a od přímky b je vzdálena o délku r .

(Došlo 6 řešení)

Stanislav Horák

Upravené řešení Jana Tesky, IIB G, Milevsko.

Sestrojme libovolnou rovinu $\sigma \perp a$. Ta protne rovinu ρ v přímce s . Hledaná přímka p musí být s přímku s rovnoběžná. Sestrojme dále rotační válcovou plochu α o ose v přímce b a poloměru r . Hledaná přímka p musí být tečnou této válcové plochy. Sestrojme posléze rovinu β , která prochází přímku a a je rovnoběžná s přímku s . Hledaná přímka musí v této rovině ležet.

Konstrukce je pak takováto. Sestrojíme přímku s , rotační válcovou plochu α a rovinu β . Rovina β protne válcovou plochu v elipse. Tečny této elipsy, jež jsou rovnoběžné s přímku s , jsou hledané přímky.

Jestliže rovina ρ je rovnoběžná s mimoběžkami a , b a dotýká se plochy α , úloha má nesčíslně mnoho řešení. Jinak žádné řešení neexistuje.

Jestliže $a \perp b$ a současně $s \parallel b$, má úloha dvě různá řešení, jediné řešení nebo nemá žádné řešení podle toho, zda rovina β má s plochou α společně dvě různé přímky, jedinou přímku nebo zda nemá s plochou žádnou společnou přímku.

Při obecné poloze daných prvků existují právě dvě řešení.

2. Je dána přímka a a na ní čtyři různé body A , B , C , D (v tomto pořadí). Kromě toho je dána rovina ρ . Sestrojte přímku p rovnoběžnou s rovinou ρ tak, aby roviny pA , pB , pC , pD byly k sobě kolmé.

(Došlo 6 řešení)

Stanislav Horák

Řešení Jana Tesky, IIB, G Milevsko

1. Konstrukce. V rovině ρ' , která obsahuje přímku a a je kolmá k rovině ρ , sestrojíme nad průměry AC , BD Thaletovy kružnice. Přímka, kolmá k rovině ρ a procházející průsečíkem T Thaletových kružnic, je hledaná přímka p .

2. Důkaz. Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ , neboť je kolmá k rovině ρ' , která je kolmá k rovině ρ .

Roviny pA a pC jsou navzájem kolmé, protože přímky AT a CT jsou k sobě kolmé a zároveň jsou obě kolmé k průsečnici rovin pA a pC . — Totéž platí o rovinách pB , pD .

3. Diskuse. Poněvadž dvojice bodů A, C a B, D se vzájemně oddělují, mají kružnice sestrojené nad průměry AC, BD vždy společné dva různé body. Podle toho má vždy úloha dvě různá řešení až na případ, kdy rovina ρ obsahuje přímku a a v tomto případě neexistuje žádné řešení.

3. Je dána přímka p a mimo ni bod M . Sestrojte krychli, je-li M středem její hrany a její tělesová úhlopříčka leží na přímce p .

(Došlo 6 řešení)

František Hradecký

Řešení upraveno podle řešení, jež zaslali *I. Mrázek*, 1b SPŠ chem., Ústí nad Labem a *P. Drábek*, 4 G, Pardubice.

Mohou nastat dvě možnosti: a) bod M je středem hrany, která je s přímkou p různoběžná, b) bod M je středem hrany, která je s přímkou p mimoběžná.

a) Bodem M a přímkou p proložíme rovinu ρ a v ní sestrojíme obdélník $ABGH$, který je úhlopříčným řezem krychle $ABCDEFGH$; bod M je středem hrany AB . V rovině ρ vedeme bodem M přímku svírající s přímkou p úhel α , pro který platí: $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Je-li X pata kolmice

z bodu M na přímku p , sestrojíme úsečku délky $XA = \frac{MX}{\sqrt{2}}$ a nanese ji od bodu X na přímku p (2 možnosti), čímž dostaneme vrchol A .

Zřejmě platí $\cos \alpha = \frac{XA}{MA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vrchol B odpovídá bodu M ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem $2 - 1$; $AG = 6 \cdot AX$ a také je $BG \perp AB$. Jsou-li ${}^1S, {}^2S$ středy stran AH a BG obdélníka $ABGH$, sestrojíme v těchto bodech kolmice k rovině ρ a nanese na ně od bodů 1S resp. 2S úsečky délky $\frac{AD}{2}$. Tím dostaneme zbývající vrcholy krychle.

b) Rovina σ proložená bodem M a přímkou p protíná krychli v kosočtverci $AMGM'$; $MA = MG$, M' je střed hrany DH , bod M je středem hrany BF . Pata kolmice z bodu M na přímku p určuje střed S kosočtverce, který je zároveň středem krychle a $SA = SG = SM$

$\sqrt{\frac{3}{2}}$. V rovině σ procházející přímkou p a kolmou k přímce MS sestrojíme obdélník $ACGH$ s přeponou AG a odvěsnou $AE = CG = \frac{AG}{\sqrt{3}}$,

$AE \parallel CG$ (užitím Eukleidovy věty pro odvěsnu). Dostaneme tak vrcholy E a C (2 možnosti). Hrany $BF \parallel DH$ procházejí body M resp. M'

a jsou rovnoběžné s hranou AE . Vrcholy krychle na nich mají pak od bodu M (M') vzdálenosti rovné polovině délky úsečky AE .

V obou případech má úloha vždy dvě řešení.

4. Sestrojte rotační válec, jsou-li dány různoběžné tečny t , u jedné podstavné hrany a bod A na obvodě druhé podstavny.

(Došlo 6 řešení)

Vítězslav Littman

Řešení autorovo :

Tečny t a u určují rovinu ρ jedné podstavny. Kolmý průmět bodu A do roviny ρ je bod B na obvodě této podstavny. Podstavná kruhová hrana k v rovině ρ je pak dána tečnami t a u a bodem B . Určíme ji stejnolehlostí se středem v průsečíku tečen t a u (2 řešení). Kružnicí k a výškou $v = AB$ je hledaný kužel dostatečně určen.

Úloha je dvojnásobná.

různé

HORROR VACUI

JOSEF KOTYK, PARDUBICE

Část II. *Otto von Guericke*

Během 17. století zrál obecné přesvědčení, že dosavadní filosofování o vakuu a jeho popírané existenci musí ustoupiti skutečnému poznání přírody. Pokusy Torricelliiovými přicházela k slovu znenáhla fyzika experimentální. Horror vacui, děs z prázdna, ustoupil přirozené touze člověka konati po Torricelliiovi další pokusy o realizaci vakua, studovati a poznávati jeho vlastnosti.

Ještě v první polovině 17. století přemýšlel francouzský filosof René Descartes¹⁾ o tom, co by se asi stalo, kdyby nějaké božstvo — člověk

¹⁾ René Descartes (Renatus Cartesius) žil v letech 1596 až 1650. Proslul jako zakladatel analytické geometrie a učenec všestranný, vedle Leibnitze a Spinozy největší filosof 17. století, jemuž jedinou jistotou bylo toliko vlastní myšlení, vlastní jsoucnost. Klasický je jeho výrok: Cogito, ergo sum. Přemýšlím, proto jsem.

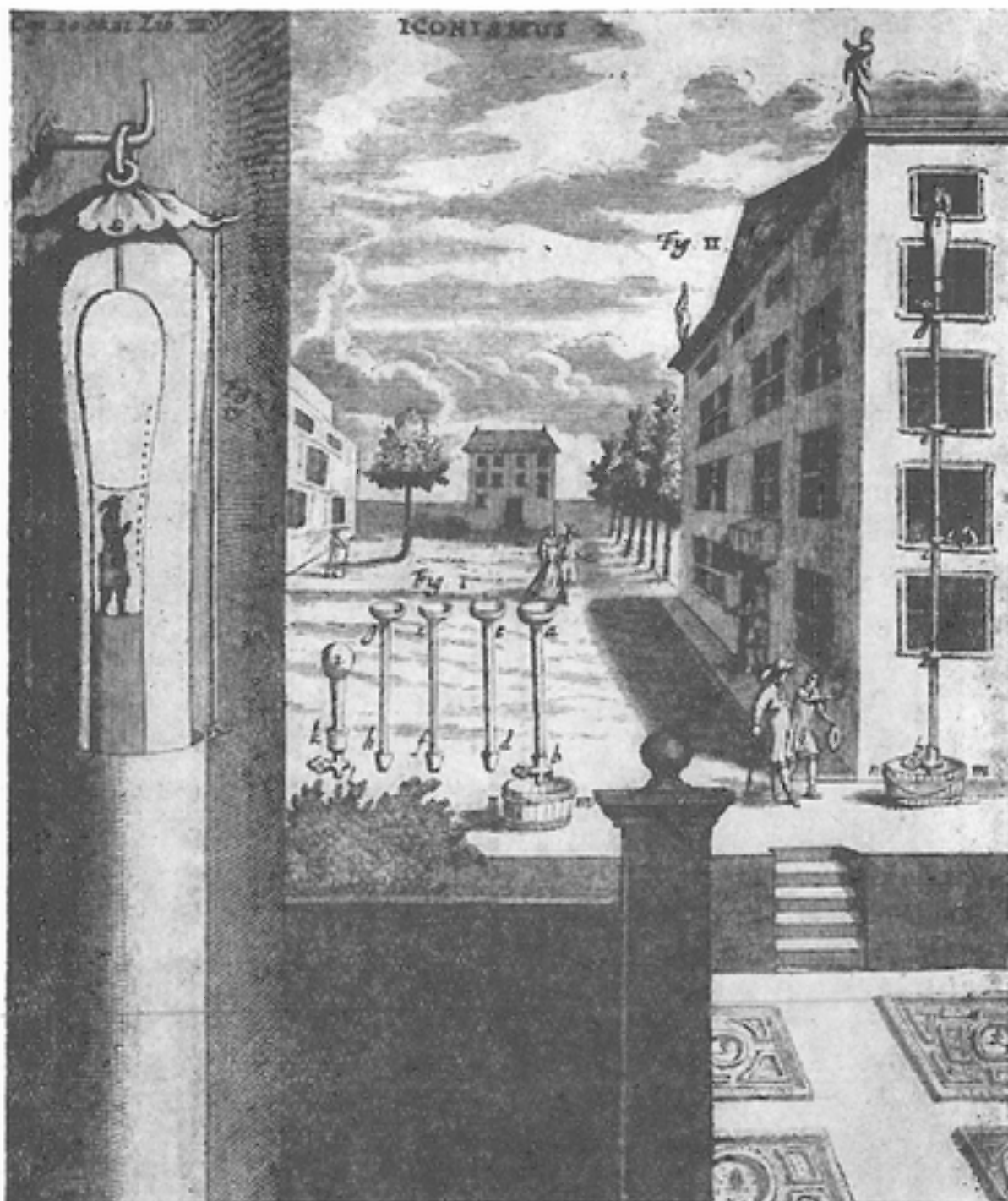
Ve službách katolické Ligy účastnil se i bitvy na Bílé hoře a do obsazené Prahy vstoupil pod prapory vítězů. Na pozvání švédské královny Christiny (viz také pozn. 7) přesídlil později do Stockholmu, kde i zemřel.



Obr. 1

by to podle jeho mínění zřejmě nesvedl! — odstranilo z uzavřené nádoby vše, co ji naplňuje. Dospěl k závěru, že stěny nádoby by se rázem dotkly — a srostly! Neuplynulo však ještě čtvrtstoletí od jeho smrti a Otto von Guericke, zručný purkmistr magdeburský, mohl v obšírném díle užaslému světu vylíčit, že jeho pokusy vyčerpání vzduch z uzavřeného prostoru se zdařily, popsatí jejich průběh a shrnouti zkušenosti a poznání o vakuu takto získané.

Otto von Guericke (viz obr. 1) je významnou postavou dějin. Narodil se dne 20. listopadu 1602, zhruba před 370 lety, v Magdeburku. Na



Obr. 1

vysokých školách v Lipsku, Helmstädtu a Jeně nabytí vzdělání ve vědách právních i státních a zasahoval záhy činně do rušných událostí své doby. Třicetiletá válka přinesla také jeho rodišti mnoho útrap. Armáda císařských, vedená generálem Tillym, obléhala město přes měsíc, až je dne 20. května 1631 dobyla, vyplenila a zapálila. Pád Magdeburku, zničení města a masakr jeho obyvatelstva byl v politickém dění pohnuté doby otřesem, jenž přiměl severoněmecká knížata i saského kurfiřta Jana Jiřího ke spojení se švédským králem Gustavem II. Adolfem; armády spojenců porazily záhy nato vojska katolické Ligy dne 17. září

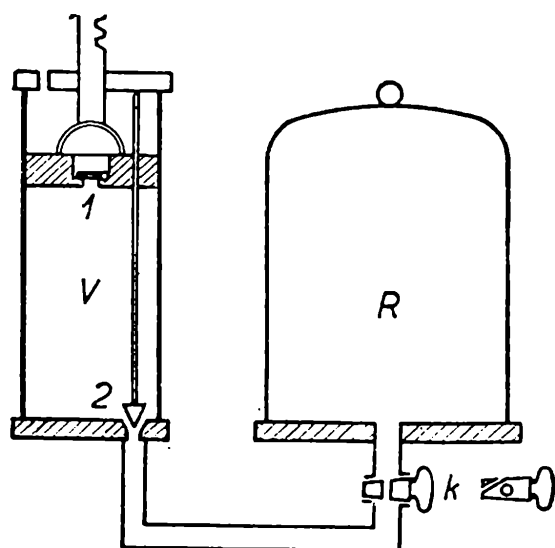
1631 u Breitenfeldu a zatlačily Tillyho na jih až k Dunaji. Guericke, obratný diplomat, přispěl tehdy Magdeburským svou politickou rozvahou a státnickou moudrostí tou měrou, že mohli své město pod švédskou záštitou znovu vybudovati. Z vděčnosti zvolili jej roku 1646 purkmistrem a dva roky poté i delegátem, jenž zastupoval Magdeburk a hájil jeho zájmy při mírovém jednání ve vestfálských městech Münsteru a Osnabrücku; starobylá práva svobodného města nepodařilo se mu však již na Habsburcích vydobýti. Roku 1666 byl císařem Leopoldem I. povýšen do stavu šlechtického. Od roku 1681 žil v rodině svého syna v Hamburku, kde dne 11. listopadu 1686 také zemřel.

K výchově zkušeného státníka patřily v době, o níž píší, také cesty do zahraničí. Na nich projevil mladý Guericke poprvé i hluboké zájmy fyzikální a technické. Velmi účinně a příznivě na něho zapůsobil zvláště pobyt v Holandsku. Na universitě v Leydenu přednášel tehdy Willibrord Snell van Royen (Snellius), jenž objevil přesný zákon lomu světla.²⁾ Prací Holanďana Simona Stevina v mechanice a hydrostatice použil Guericke později při vodních a opevňovacích stavbách v Magdeburku. Také fyzikou se rád zabýval. Pozoroval mj., že železné piliny se zmagnetují pouhým magnetickým polem zemským, že souhlasně elektrická tělíska se odpuzují apod. Sestrojil také první třecí elektriku (sirnou kouli, jež se otáčela kolem osy a byla třena suchou dlaní), dasymetr, teploměr³⁾ a jiné přístroje. Bylo rovněž známo, že Guericke s oblibou koná pokusy veřejně a ve velkých rozměrech.⁴⁾ Jeho vodní tlakoměr byl téměř 11 m vysoký. Byl sestaven z kovových trubic, jak ukazuje připojený obrázek (obr. 2); uprostřed obrázku jsou jednotlivé součásti. Nálevkovité nástavky na trubicích se při sestavení naplnily vodou, aby se získalo dobré utěsnění. Vlevo je nakreslena horní trubice, jež byla ze skla (proč?). Na povrchu vodního sloupce, vysokého téměř 10 m, plovál korkový kotouček s dřevěnou figurkou. Změny tlaku se jeví asi třináctkrát větší než u našich tlakoměrů rtuťových, které jsou jen zdokonalenou obměnou klasického pokusu Torricelliova. Guericke nazýval svůj přístroj „prorokem počasí“. Z náhlého poklesu tlaku předpověděl bouři, která se tehdy opravdu dostavila.

²⁾ Málo se připomíná, že v téže době také Kepler usilovně hledal přesný zákon lomu, avšak marně. Objev zákona lomu se dlouho neprávem přičítal Descartesovi, jenž jej později (1637) ve spise „Dioptrice“ rovněž vyslovil.

³⁾ Na sestavení teploměru pracovali také jeho vrstevníci Galileo Galilei (zemřel před 330 lety roku 1642) a Giovanni Torricelli (zemřel před 325 lety roku 1647). Zakladatelem termometrie se však stal teprve Gabriel Daniel Fahrenheit; narodil se v témž roce 1686, v němž zemřel Guericke.

⁴⁾ Karel Reger píše ve své knize „Meister der Physik“ (Stuttgart 1944), že konal „Monstreexperimente in übernormalen barocken Ausmaßen“.



Obr. 3

Největších zásluh a neobyčejného věhlasu nabyl však Guericke četnými pokusy, jež dokazovaly možnost získati experimentem vakuum. Dověděl se o úspěšném provedení podobných pokusů v Itálii, Guericke chtěl získati velký vzduchoprázdný prostor tak, že čerpal obyčejnou mosaznou pumpou vodu ze sudu. Domníval se, že po odčerpání vody bude v sudě vakuum. Avšak do sudu vnikal štěrbinami se sykotem vzduch. Guericke ponořil tedy sud do kádě s vodou a čerpal opět; shledal, že místo vzduchu drala se dovnitř voda. Ani tímto nezdarem nedal se však od dalších pokusů odraditi. Usoudil, že v pórovitém dřevě vakuum nevytvoří, i čerpal pumpou vzduch z duté koule měděné. Pokus se dařil, jen vytahování pístu vyžadovalo stále větší síly, až tlak vnějšího vzduchu pojednou kouli s velkou ranou — promáčkl! Teprve z nové pevnější koule podařilo se téměř všechnen vzduch vyčerpati.

V letech 1641 až 1650 dospěl Guericke k sestrojení dokonalejší pumpy na vyčerpání vzduchu z uzavřeného prostoru, první jednopístové záklopkové vývěvy. Byla upravena v podstatě jako pumpa na zdvih (obr. 3). Vzduch čerpal pouze při zdvihu pístu; pohyb dolů byl nezužitkován. Teoreticky lze odvoditi, že při stálé teplotě ubývá tlaku zákonitostí geometrické posloupnosti; mezní hodnota napětí plynu v recipientu se rovná nule.⁵⁾ Guerickeova vývěva nedovedla však takové vakuum, jaké bylo známo při jednoduchém pokuse Torricelliho, realizovat. Vady těsnění a tzv. škodlivý prostor mezi pístem a dnem válce V , odkud nebylo možno vzduch dorazem pístu vypuditi, nedovolovaly napětí v recipientu R snížit více než asi na 20 Torrů. Vyčerpání vzduch z recipientu úplně se proto nepodařilo. Guericke byl si této okolnosti vědom. Pojednává „de

⁵⁾ Dokažte, že po n -tém zdvihu pístu činí hodnota tlaku $p_n = \left(\frac{R}{R + V}\right)^n \cdot p_0$; $\frac{R}{R + V} < 1$. (Pokyn: Užijte zákona Boyleova!)



Obr. 4

vacuo spatio“;⁶⁾ badatelské celoživotní úsilí věnuje „dem leeren Raum“, z opatrnosti činí však rozdíl mezi „vakuem“, k němuž dospěl, a prostorem, v němž nic není. Také v úvahách o světových soustavách Ptolemaiově a Koperníkově⁷⁾ a o světovém prostoru, zdali je naplněn hmotou ve zvlášť jemném stavu či je zcela prázdný, veškeré hmoty prost, doznává: „Ich in meinem geringen Verstand mache einen Unterschied zwischen Vakuum und Nichts...“ Po staletích i my rozeznáváme různé stupně „vakua“; např. u Röntgenových lamp regulujeme změnami stupně „vakua“ tzv. tvrdost záření apod.

Guericke konal přesto četné a zajímavé pokusy, mnohé podle svého zvyku opět v tak značných rozměrech, že vzbuzovaly velikou pozornost diváků. Uzavřel např. veliký válec pístem, k němuž přivázal provaz vedený přes kladku; provaz drželo na druhém konci 20 i 30, dokonce až 50 mužů. Když Guericke spojil válec s vyčerpaným recipientem, byl píst náhle vtažen dovnitř takovou silou, že všichni muži, držící provaz, byli rázem vyzdviženi. Velkolepé pokusy předvedl Guericke císaři Ferdinandu III. a jeho dvoru na říšském sněmu v Řezně roku 1654 s tzv.

⁶⁾ Viz také obšírný název jeho latinského díla, jak uvádím v dalším.

⁷⁾ S uznáním se o nich vyjádřila švédská královna Christina, dcera Gustava II. Adolfa, zákyně Descartesova, oceňujíc u nich zejména „Freiheit und Großzügigkeit der Gedanken“. Guerickeovy názory filosofické zaujaly ji dokonce prý víc než jeho proslulé pokusy.

magdeburskými polokoulemi (viz obr. 4). Byly to dvě duté kovové polokoule, jež přitlačil k sobě a pak z vnitřního prostoru vyčerpал vzduch. Tlakem vnějšího vzduchu držely u sebe tak pevně, že bylo k velikému úžasu diváků třeba 16 koní, aby je odtrhli.⁸⁾ Z jiných pokusů poznal Guericke, že k hoření je třeba vzduchu, že zvuk se prostorem vzduchoprázdným nešíří aj.

Své zkušenosti shrnul Guericke v obsáhlém (sedm knih čítajícím) díle „*Ottonis de Guericke Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica de vacuo spatio*“ (Nové pokusy zv. magdeburské o vzduchoprázdném prostoru), vydaném před 300 lety v Amsterdamu roku 1672. Uplynulo právě 25 let od smrti Torricelliovy — a lidstvo bylo definitivně zbaveno strašidla zv. horror vacui, děsu z vakua, strachu z prázdna. Guericke se netají tím, že ve fyzice jen zkušenost je řešitelkou všech pochyb, rádcem ve všech obtížích a jedinou učitelkou pravdy.

matematické zábavy

Rovina je určena třemi body, které neleží v přímce. Jestliže zjistíme, že čtyři různé body leží v rovině, pak tyto body nutně splňují nějakou podmínku. O tom nás může přesvědčit následující příklad.

Nad čtvercem $ABCD$ je vztyčen přímý hranol. Rovina σ jej protne v rovnoběžníku $A'B'C'D'$. Jaký vztah platí o délkách $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$, $d = DD'$?

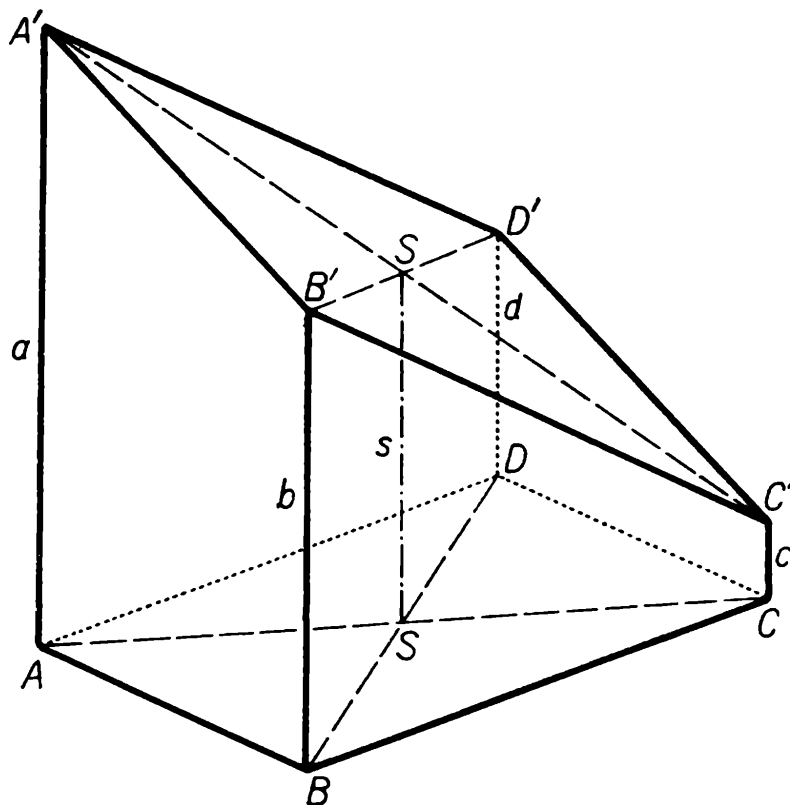
Řešení (obr. 1). Čtyřúhelník $ACC'A'$ je lichoběžník. Jeho střední příčka prochází středem S podstavy a středem S' řezu $A'B'C'D'$. Ze známé vlastnosti střední příčky lichoběžníku máme

$$s = \frac{a + c}{2}$$

Podobně $BDD'B'$ je lichoběžník, který má s lichoběžníkem $ACC'A'$ společnou střední příčku. Ta totiž prochází středem S a středem S' . Proto platí

$$s = \frac{b + d}{2}$$

⁸⁾ Při jiném pokusu užil Guericke polokoulí většího průměru a 24 koní. Nemáte, však milí čtenáři, dojem, že mohl polovinu počtu koní ušetřiti a nahraditi hákem ve zdi? Vyložte podrobně!



Obr. 1

Porovnáme-li obě získané rovnice, dostaneme

$$a + c = b + d,$$

což je žádaný vztah.

Dá se však dokázat mnohem víc. Platí-li totiž nalezený vztah, potom body A' , B' , C' , D' leží v jedné rovině.

S. H.

Tři hostince

Cizinec přišel do jednoho královského města, kde zemřel král. Všechny budovy byly potaženy černým sukem a tudíž i všechny hostince. Náš cizinec ovšem věděl, že v tomto městě jsou tři hostince. V jednom hostinci je pravdomluvný hostinský pan Šašek, v druhém pan Kašpar, který ještě nikdy nepromluvil pravdivě. Třetí hostinec vede pan Nicnevím a ten je znám tím, že na první otázku odpoví třeba pravdivě, ale již na druhou zalže nebo obráceně.

Pan Šašek má ve svém hostinci desky stolů ve tvaru obdélníka, pan Kašpar má desky stolů ve tvaru kruhu a ve třetím hostinci jsou ve tvaru čtverce.

Toto cizinec věděl, ale neznal majitele hostinců a ani nevěděl, kde se nachází. Naštěstí poznal ve třech mužích (podle typických čepiček)

stojících na náměstí všechny tři hostinské. Jednoho z nich si vzal stranou a dal mu tři otázky:

„Pane hostinský, budu Vám říkat například pane Nicnevím, jakého tvaru máte desky stolů?“

Odpověď zněla: „Ve tvaru čtverce.“

„Jakého tvaru jsou desky stolů vedle stojícího hostinského, kterého pojmenuju na pana Kašpara?“

„Kruhového tvaru.“ Byla strohá odpověď.

„Tudíž třetí hostinský, dejme tomu pan Šásek, má desky ve tvaru obdélníka?“

„Jistě.“

Mohl cizinec z náměstí odejít s pravým panem hostinským Nicnevím?

Žádáme čtenáře, aby se sami pokusili správně zodpovědět danou otázku.

recenze

Booleova algebra

OLDŘICH ODVÁRKO

Čtvrtou desítku svazků edice Škola mladých matematiků zahajuje publikace dr. O. Odvárka věnovaná tématice Booleovy algebry. Dlouholetým odběratelům Rozhledů je autor dobře znám svými příspěvky z příbuzné tematiky, v brožurě najdou souvislý výklad látky rozšířený o řadu dalších poznatků. Noví čtenáři Rozhledů si mohou studiem publikace pohodlně osvojit základy Booleovy algebry a s porozuměním pak číst další články o jejích aplikacích, které bude náš časopis přinášet.

Prolistujme krátce 120stránkovou publikaci. Kapitoly nazvané „Množiny a Vennovy diagramy, Výroky a pravdivostní hodnoty výroků, Operace a jejich vlastnosti“ jsou jakousi přehrou k vlastnímu tématu. Čtenář se v nich seznámí s řadou pojmů, symbolů a naučí se s nimi manipulovat; vodítkem mu budou řešené příklady opírající se o užití diagramů a tabulek, kontrolou pak cvičení zařazená za každou kapitolou.

Čtvrtá kapitola začíná velmi poučným porovnáním vlastností operací množinových a výrokových, zdůrazněním společných rysů množinové algebry a algebry pravdivostních hodnot výroků. Na tomto základě se vytváří „nadstavba“ shrnující společné vlastnosti obou algeber — Boo-

leova algebra; objasňuje se též zpětný pohled na zmíněné algebry, který je vystižen pojmem modelu Booleovy algebry. Další tři kapitoly se zabývají nejvýznamnějšími modely — Dvouprvková Booleova algebra, Několik úloh z množinové algebry a algebry pravdivostních hodnot, Booleova algebra v elektrotechnice. Čtenář pozná konstrukci obvodů, které mohou fungovat jako trojice vypínačů jedné lampy, hlasovací stroj, zkoušecí stroj, naučí se též zjednodušovat kontaktní sítě. Závěrečná kapitola obsahuje výklad o obvodech počítačích strojů, stručně se zmiňuje o dvojkové soustavě a postupným řešením příkladů vede čtenáře k samostatné konstrukci elektrických obvodů několika typů operačních jednotek strojů.

Jak je patrné ze stručné charakteristiky obsahu, představuje 31. svazek Školy mladých matematiků čtenářům ten úsek moderní matematiky a logiky, jehož základy se již uplatňují v gymnasiálním učivu a byly v Rozhledech též postupně vykládány. Knížka však vede čtenáře dál a zejména k zajímavým aplikacím získaných obecných poznatků, bude proto vhodným textem pro práci v matematických seminářích (k tématu Dvojhodnotové funkce). Čtivý a přiměřeně náročný text jistě upoutá zájem mladých čtenářů, jimž je určen.

Nenechte si ujít příležitost k poznání zajímavé partie matematiky, brožuru dostanete za 8 Kčs v prodejnách, nakladatelství Mladá fronta ji vydalo v nákladu 6000 kusů, dlouho tedy na pultech nezůstane.

J. Š.

nejmladším čtenářům

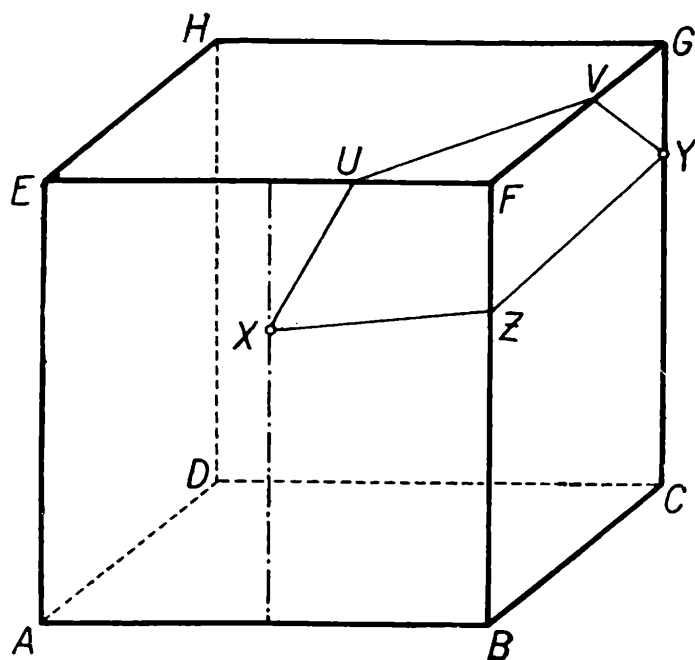
V tomto článku si uvedeme řešení jedné zajímavé úlohy, v níž řešení bude úsečka jako nejkratší spojnice dvou bodů.

V obr. 1 je znázorněna krychle $ABCDEFGH$. Na přední stěně $ABFE$ je dán bod X a na boční stěně $BCGF$ je dán bod Y . Úloha je:

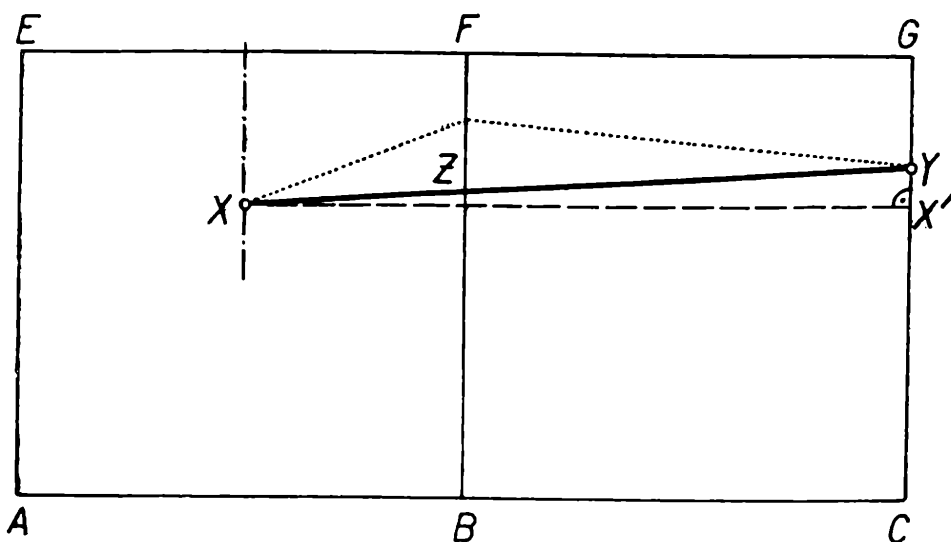
Najděte nejkratší cestu, která vede po povrchu krychle z bodu X do bodu Y

V obr. 1 jsou vyznačené dvě možné cesty: první vede přes hranu BF a druhá přes stěnu $EFGH$. Jsou jistě ještě jiné cesty, ale ty jistě budou delší než naše dvě. Nyní se nám naskýtá několik otázek:

- Jak najdeme bod Z na první cestě?
- Jak najdeme body U, V na druhé cestě?
- Jak zjistíme, která z obou cest je skutečně nejkratší?



Obr. 1

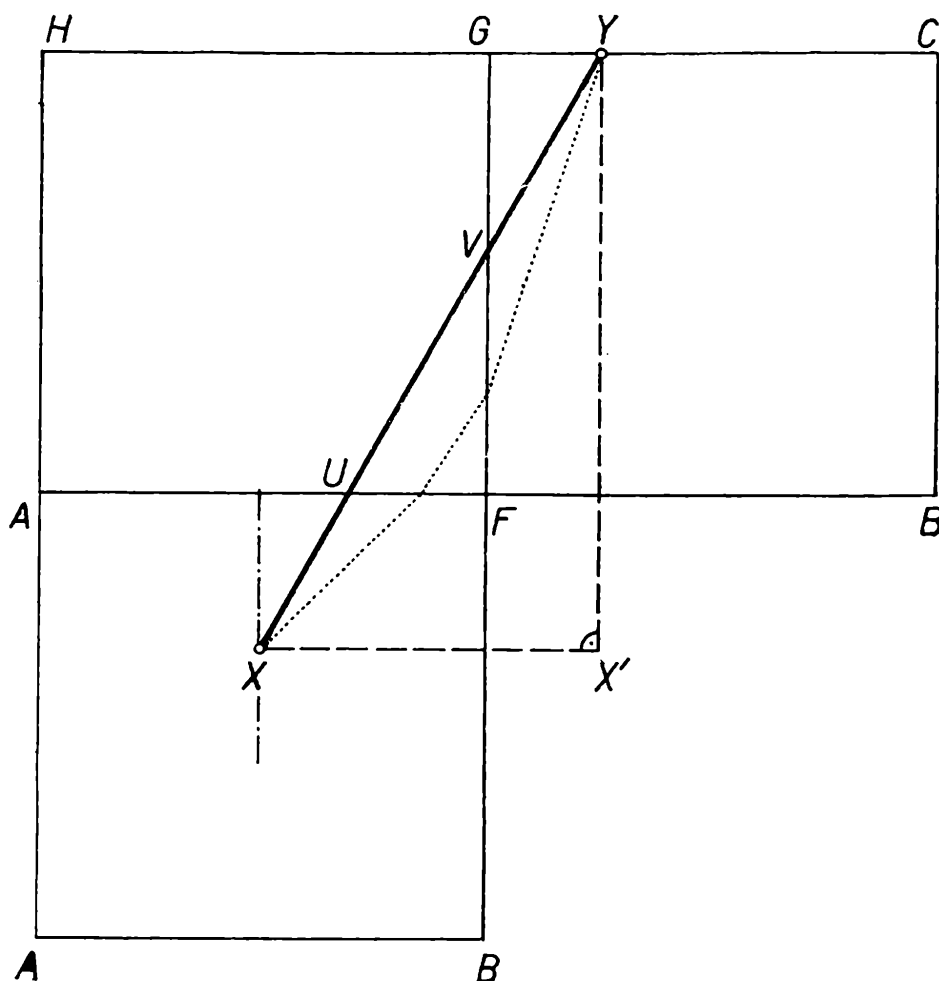


Obr. 2a

Odpověď na všechny otázky dostaneme tak, že sestrojíme síť krychle. Celou síť ani nemusíme sestrojovat, stačí nám jen ty stěny sítě, jimiž prochází cesta.

Pro první cestu sestrojíme čtverce $ABFE$, $BCGF$. Bod X položíme na střední příčku čtverce v jedné třetině od hrany EF , bod Y položíme na hranu CG aby přitom platilo $GY = \frac{1}{4} GC$. Nejkratší cesta v rozvinutí je úsečka XY (obr. 2a).

Pro druhou cestu sestrojíme čtverce $ABFE$, $EFGH$, $FBCG$ tak, jak je znázorňuje obr. 2b. Nejkratší cesta z X do Y v rozvinutí je opět úsečka XY . Všimněte si, že jsme již dostali odpovědi na první dvě otázky. Známe bod Z z první cesty a body U , V z druhé cesty. Odpověď na třetí otázku dostaneme prostě tak, že v obou případech změříme úsečky XY . Vyjde nám, že první cesta je o něco kratší. Skutečně nejkratší cesta je přes bod Z na hraně BF . (V obrázcích je délka hrany zvolena 77 mm.)



Obr. 2b

Uvědomíme si, že v obou případech každá jiná cesta — tj. jiná cesta přes hranu BF nebo jiná cesta přes stěnu $EFGH$ — je delší. V obou případech jsou takové dvě cesty zakresleny tečkovaně. Jsou delší, neboť nesplňují základní větu rovinné geometrie: „Úsečka je nejkratší spojnice dvou bodů.“

II. Někdy ovšem nestačí délku úsečky XY v prvním případě a v druhém případě změřit. Rozdíly jsou nepatrné a potom je nutné délku první a druhé cesty vypočítat. Stačí k tomu obvykle Pythagorova věta. My zde také výpočet provedeme.

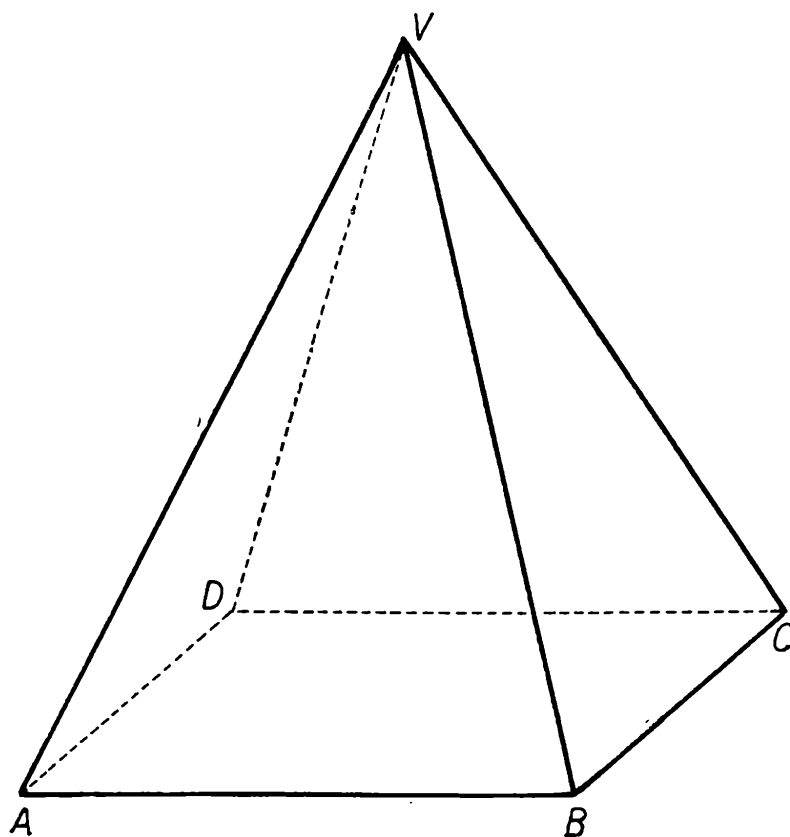
Délka první cesty. V pravoúhlém trojúhelníku $XX'Y$ je

odvěsna XX' má délku: $\frac{a}{2} + a = \frac{3a}{2}$

odvěsna YX' má délku: $\frac{a}{3} - \frac{a}{4} = \frac{a}{12}$

délka přepony XY : $XY^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{a^2}{144} = \frac{325a^2}{144}$

$$XY = \frac{325a^2}{144} \doteq 1,5025a$$



Obr. 3

Délka druhé cesty. V pravoúhlém trojúhelníku XYX' je

$$\text{délka odvěsny } XX': \quad \frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$$

$$\text{délka odvěsny } YX': \quad a + \frac{a}{3} = \frac{4a}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{délka přepony } XY: \quad XY^2 &= \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{16a^2}{9} = \\ &= \frac{337a^2}{144} \end{aligned}$$

$$XY = \frac{a}{12} \sqrt{337} \doteq 18,358 \cdot \cdot a \quad 12 = 1,53a$$

Je vidět, že první cesta je o něco málo kratší. Toto tvrzení neplatí však obecně. Bylo by dobré, kdybyste na procvičení předloženého tématu rozřešili tento příklad:

Bod X ponechte, ale bod Y zvolte blíže bodu C a pak zjistěte nejkratší vzdálenost bodů XY na povrchu krychle.

Pro trvalejší užitek ze čtení tohoto článku rozřešte ještě následující příklad.

V obr. 3 je znázorněn pravidelný čtyřboký jehlan ($AB = 5$ cm, $AV = 8$ cm). Na povrchu jehlanu najděte nejkratší cestu a) z vrcholu A do vrcholu C , b) z vrcholu A do středu hrany CV , c) z těžiště stěny ABV do vrcholu D . — Nezapomeňte na cestu přes podstavu. S. H.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

S

samodružný	double; invariant, e
sbíhavý	convergent, e
sčítanec	terme <i>m</i>
sčítání	addition <i>ž</i>
sčítat	additionner
sdružený	associé, e; conjugué, o
harmonicky sdružené body	points <i>m</i> conjugués harmoniques
komplexně sdružená čísla	nombres <i>m</i> complexes conjugués
sdružené průměry	diamètres <i>m</i> conjugués
sečíst	sommer
sečna	droite <i>ž</i> sécante
sečný	sécant, e
sedm	sept
sedmina	septième <i>m</i>
sedmiúhelník	heptagone <i>m</i>
sedmý	septième
segment	segment <i>m</i>
sekans	sécante <i>ž</i>
sekunda	seconde <i>ž</i>
separabilní	séparable
separace	séparation <i>ž</i>
separovat	séparer
sestrojit	construire
setina	centième <i>m</i>
setrvačnost	inertie <i>ž</i>
sférický	sphérique
sférický dvojúhelník	fuseau <i>m</i> sphérique
sférický trojúhelník	triangle <i>m</i> sphérique

shodnost	égalité <i>ž</i> ; congruence <i>ž</i>
shodný	égal, e; congru, e; congruent, e
schéma	schéma <i>m</i> ; schème <i>m</i>
schématický	schématique
schodovitý	en escalier
signál	signal <i>m</i>
signatura	signature <i>ž</i>
síla	force <i>ž</i>
silnější	plus fort, e
simultanní	simultané, e
singularita	singularité <i>ž</i>
singulární	singulier, ère
sinus	sinus <i>m</i>
sinusoida	sinusoïde <i>ž</i>
sinusoidální	sinusoïdal, e, aux
sít	réseau <i>m</i>
síto	crible <i>m</i>
Eratostenovo síto	crible d'Eratosthène
sjednocení	réunion <i>ž</i>
sjednocení dvou množin	réunion de deux ensembles
skalár	scalaire <i>m</i>
skalární	scalaire
skládati	composer
sklopení	rabattement <i>m</i>
sklopiti	rabattre
skok	saut <i>m</i>
skoro	à peu près; presque
skupina	classe <i>ž</i>
skutečný	vrai, e
skutečná velikost	grandeur <i>ž</i> vraie
sloupec	colonne <i>ž</i>
složený	composé, e
složené zobrazení	application <i>ž</i> composée
složiti	composer
složka	composante <i>ž</i>
slučitelný	compatible
směr	direction <i>ž</i>
směrnice	coefficient <i>m</i> angulaire
smíšený	mixte
mysl	sens <i>m</i>
kladný smysl	sens direct
mysl probíhání	sens de parcours <i>m</i>
záporný smysl	sens rétrograde
snadný	facile
snížení	abaissement <i>m</i>
současně	en même temps; simultanément
součet	somme <i>ž</i>
součin	produit <i>m</i>
součinitel	coefficient <i>m</i>
soujemný	complexe

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

9

ROČNÍK 51, 1972-1973, KVĚTEN



ROČNÍK 51
KVĚTEN 1973

9

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

rozhle

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., ČSAV Praha, dr. Jaroslav Sedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Höhnig. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1973.

OBSAH

OBSAH

Dr. Z. Blajer, CSc.: K jubilejnímu roku Julia Fučíka	385
Dr. R. Bek: Sčítací sítě	387
J. Nečas: Na stanici tramvaje	391
J. Zahradník: Řízení pohybu zdviže	397
J. Filip: K priemerom kužeľosečky	400
Dr. L. Granát: Aproximace křivek lomenými čarami	404
Prof. dr. J. Skotnický: Energia a pracovná schopnosť	410
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Existují „černé jámy“?	415
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Ženy a astronomie	418
Naše soutěž	420
FO	424
Dr. V. Flajšinger: Život oslnivý jako kometa	429
Redakce hovoří	432
Dr. J. Pavlíček: Slovník česko-francouzský	

3. a 4. str. obálky

K jubilejnímu roku Julia Fučíka

PhDr. ZDENĚK BLAJER, CSc., UK Praha

„Ty víš, jak jsem miloval prostranství, slunce a vítr a jak jsem chtěl být vším, co v nich žije: ptákem nebo keřem, oblakem nebo tulákem. A přece léta, dlouhá léta žiju pod zemí osudem kořenů. Nevzhledných, zažloutlých kořenů, obklopených tmou a tlením — a držících strom života nad zemí. Žádná vichřice nevyvrátí strom, jehož kořeny jsou pevné. V tom je jejich pýcha. I má. Nelituji toho, nelituji ničeho. Co bylo v mých silách, plnil jsem a plnil jsem rád. Ale světlo, světlo jsem miloval a byl bych chtěl růst rovně do výše a byl bych chtěl kvést a zrát jako jedlý plod.

Nu.

Na stromě, který jsme drželi a udrželi, vyrostou a uzrají generace nových lidí, socialistické generace dělníků, básníků a také literárních kritiků a dějepisců, kteří snad později, ale zato lépe povědí to, co já už jsem povědět nemohl. A tak snad mé ovoce alespoň trochu zesládne a nabude plných tvarů, i když na mé hory sníh už nikdy nenapadne.“

Tuto básnickou metaforu svého života vyslovil Julius Fučík necelého půl roku před popravou v dopisu své ženě psaném v pankrácké věznici. Naděje, kterou v něm vyjádřil, se splnila. Přišla další generace navazující na jeho práci a obracející se k němu jako ke svému učiteli a vzoru. Letošní rok připomíná Fučíkův odkaz zvláště výrazně, neboť je rokem jeho dvojího výročí (narozen 23. února 1903, popraven 8. září 1943).

Fučík je znám dnešní mladé generaci především prostřednictvím svého literárního díla, jež vypovídá o jeho všestranném nadání. Působil jako politický publicista, literární kritik, spisovatel. Jeho práce literárně kritické souvisí úzce s jeho činností žurnalistickou. R. 1928 převzal vedení časopisu Tvorba, v němž důsledně prosazoval koncepci socialistické literatury a hájil zásady socialistického realismu. Programově spojoval úsilí pokrokových intelektuálů s bojem dělnické třídy a ve svých statích

obhajoval soudobá díla realistických spisovatelů zachycující tento boj. Literární historii nechápal jako uzavřenou minulost, ale hledal a nalézal živé aktualizující vztahy literární minulosti k současnému životu, a tím podněcoval čtenáře ke snaze nalézt vlastní postoj k autorovi, ke snaze vyrovnat se s ním názornou konfrontací. Snad nejlepším dokladem této oblasti jeho tvorby je známá studie Božena Němcová bojující, jež se svým názvem stala dnes již určitým symbolem. Psal ji v době okupace v Chotiměři u Domažlic, kam se uchýlil před gestapem. Fučík dokázal zcela netradičně osvětlit postavu Boženy Němcové, její vztah k revolučním lidovým tradicím.

Nikdy se však nedomníval, že bude na újmu jeho činnosti literárně historické a literárně kritické, když napíše burcující výzvu do novin, aktuální článek vyzývající ke správnému politickému postoji. Navazoval tak na nejlepší tradice české literatury, kdy od dob národního obrození bylo často zapotřebí spojit snahy literární s přímým kulturním a politickým zápasem. Tato stránka jeho činnosti souvisí s jeho politickými reportážemi. Reportáže ze Sovětského svazu V zemi, kde zítra již znamená včera a po jeho smrti vydaný soubor V zemi milované zachycují poznatky z jeho dvou pobytů v Sovětském svazu.

Fučík se proslavil po celém světě svou dnes již legendární Reportáží psanou na oprátce, vzniklou ve vězení gestapa na Pankráci na jaře 1943. Reportáž představuje umělecké i lidské vyvrcholení celého jeho díla. Tisíce a milióny jejích čtenářů se neustále obdivují osobní statečnosti, cti a hrdinství člověka, který si dokázal zachovat svou lidskost a sebevěru i v těch nejhroznějších životních podmínkách. Víra ve vítězství spravedlivé ideje komunismu mu byla posilou v nejtěžších chvílích a dokázala, že se uměl bez hrůzy vyrovnat s myšlenkou na vlastní smrt. Nepokládal ji za zbytečnou. „Počítali jsme vždycky se smrtí. Věděli jsme: dostaneme-li se do rukou gestapa, znamená to konec. Podle toho jsme také jednali i zde.“

Fučíkův příklad působil vždy a působí neustále na mladou generaci. Sám psal často o mladých lidech, o sovětských komsomolcích, o jejich socialistické solidaritě, psal i o solidaritě dětské. Vzpomeňme jeho článku O šesti chlapcích, jenž hovoří o pomoci dětí z pražské periferie dětem ve Španělsku v období občanské války. Fučík se stal hrdinou, vzorem. Je třeba vidět Fučíkovu osobnost jako osobnost revolucionáře, jehož lásku k lidem ho vedla ke statečnému boji proti násilí. Sílu k tomuto boji mu poskytovalo jeho sepětí s lidem a s komunistickou stranou.

matematika

Sčítací síť

Dr. ROMAN BEK, ČVUT Praha

V minulém čísle Rozhledů jsme se seznámili se sčítáním dvou čísel zapsaných ve dvojkové soustavě. Poznali jsme, že při sčítání v každém řádu použijeme cifru n udávající přenos z nižšího řádu (v nejnižším přitom bereme $n = 0$), cifru d dolního sčítance a cifru h horního sčítance. Dvojciferně zapsané výsledky 00, 01, 10, 11 lze chápat jako zápisy hodnot dvou funkcí f_1, f_2 na prvním, resp. druhém, místě zprava. Hodnotou funkce f_1 je cifra s součtu, která se zapisuje do příslušného sloupce, hodnotou funkce f_2 je cifra v , která se má v příštím kroku přenést do vyššího řádu. Ukažme si jednoduchý numerický příklad:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 10\ 001 \\ \hline 10\ 100 \end{array}$$

V nejnižším řádu bereme $n = 0, d = 1, h = 1, 0 + 1 + 1 = 10$, je tam tedy $s = 0$ a tuto cifru zapíšeme, $v = 1$ přeneseme do dalšího řádu jako $n = 1$, dále je tam $d = 0, h = 1$, součet $1 + 0 + 1 = 10$, znovu tedy $s = 0, v = 1$; v dalším řádu sčítáme $n = 1, d = 0$ a $h = 0$ (tuto cifru doplníme), $1 + 0 + 0 = 01$, zapíšeme $s = 1$, do dalšího řádu přeneseme $v = 0$ atd.

Protože čísla jsou zapsána pomocí jedniček a nul, můžeme funkce f_1, f_2 považovat za dvouhodnotové funkce proměnných n, d, h . Všechny uspořádané trojice hodnot (n, d, h) seřadíme lexikograficky pod sebe do levé části tabulky, ve dvou sloupcích vpravo budou funkční hodnoty s, v funkcí f_1, f_2 . Tabulku vyplňujeme na základě svých znalostí sčítání ve dvojkové soustavě:

$n + d + h$
$0 + 0 + 0 = 00$
$0 + 0 + 1 = 01$
$0 + 1 + 0 = 01$
$0 + 1 + 1 = 10$
$1 + 0 + 0 = 01$
$1 + 0 + 1 = 10$
$1 + 1 + 0 = 10$
$1 + 1 + 1 = 11$

n	d	h	v	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$v = f_2(n, d, h)$$

$$s = f_1(n, d, h)$$

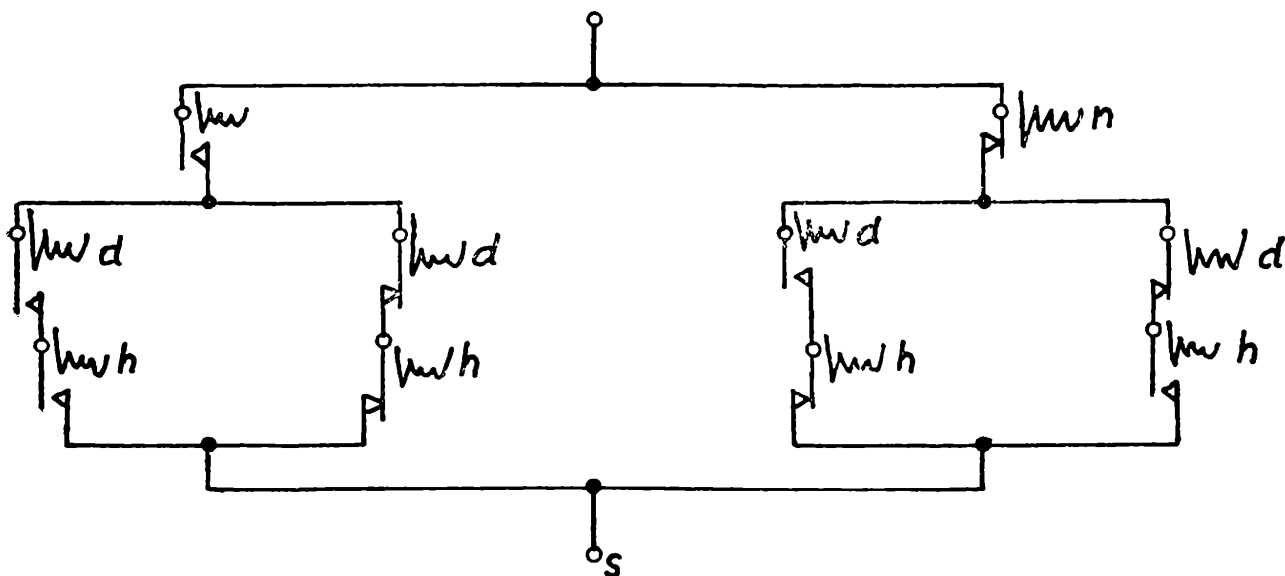
Nalezneme-li vhodné vyjádření funkcí f_1 , f_2 , budeme moci sestavit technické sítě, které je modelují a tak realizují příslušné sčítací operace. Pro funkci f_1 zřejmě platí:

$$s = 1 \Leftrightarrow (n'd'h = 1) \vee (n'dh' = 1) \vee (nd'h' = 1) \vee (ndh = 1),$$

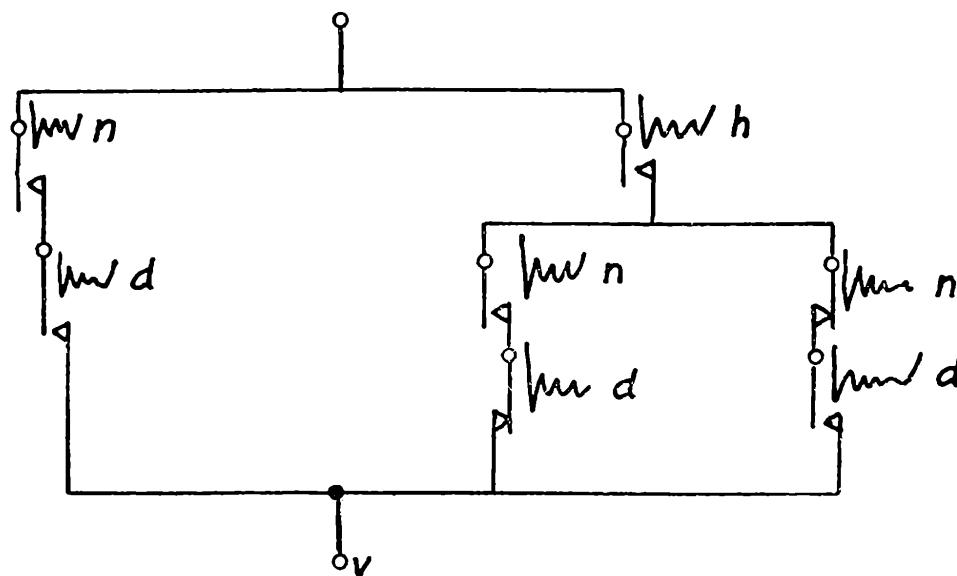
$$s = n'd'h + n'dh' + nd'h' + ndh = n'(d'h + dh') + n(d'h' + dh).$$

Obdobným způsobem vyjádříme f_1 :

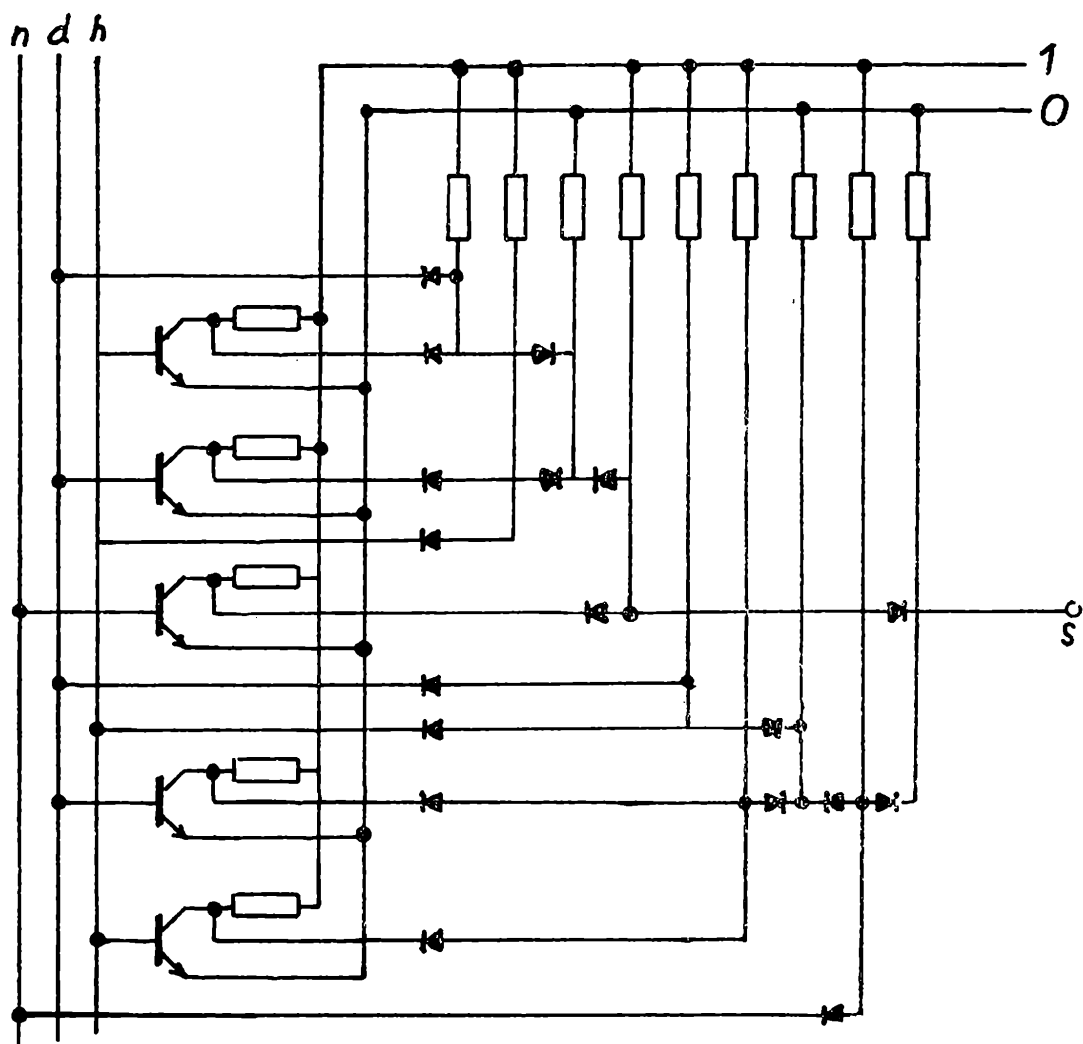
$$v = nd + h(nd' + n'd).$$



Obr. 1



Obr. 2

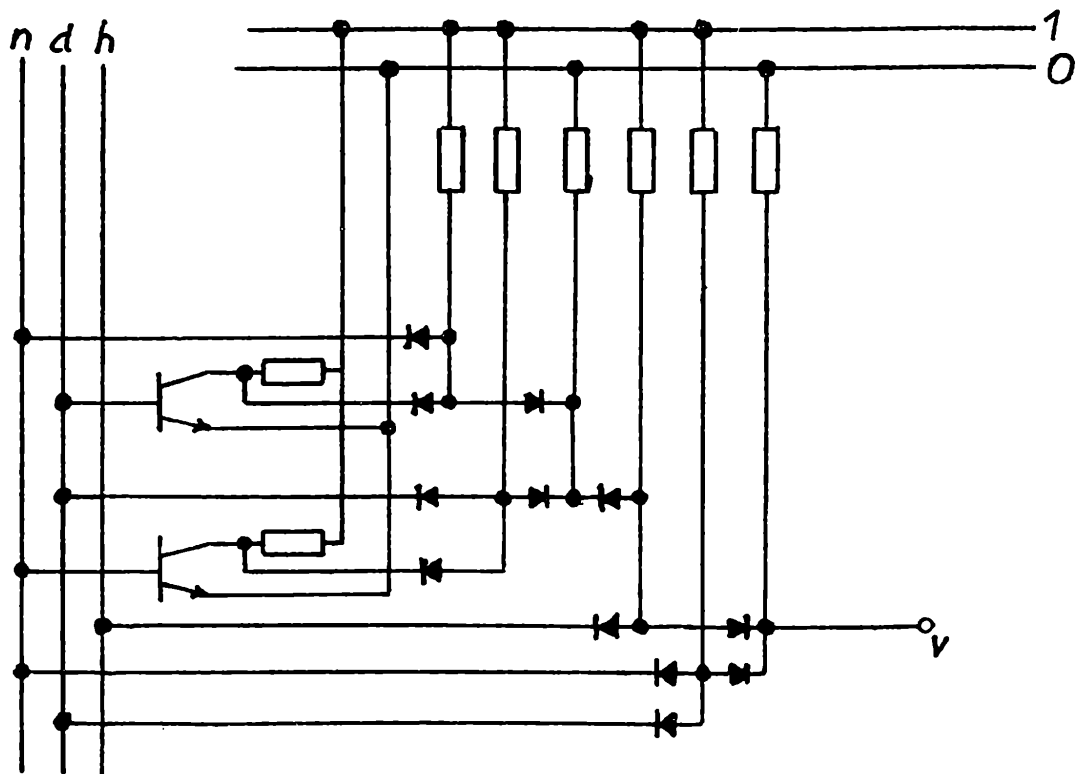


Obr. 3

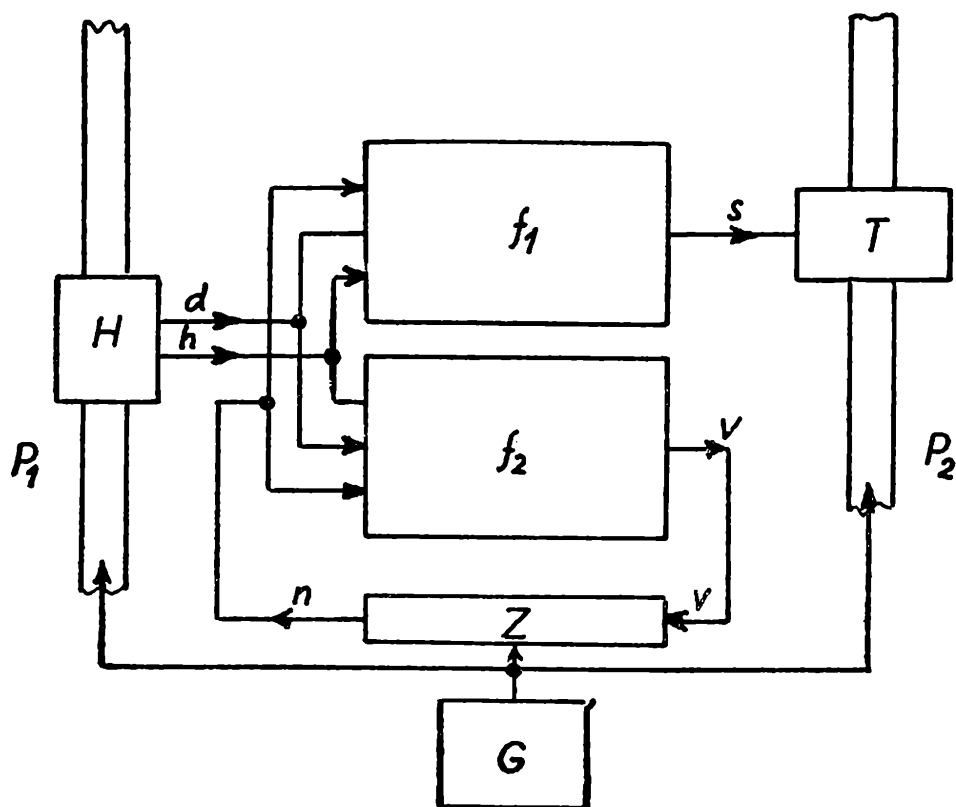
Na obrázcích 1—4 vidíme náčrtky reléových a diodotranzistorových sítí modelujících funkce f_1, f_2 ¹⁾. Při každém sčítacím kroku se vyjadřuje zápis cifry 1 udělením proudových impulsů příslušným primárním okruhům relé nebo kladného napětí svorkám příslušných diod a tranzistorů, zápis cifry nula se vyjadřuje neudělením proudových impulsů okruhům nebo udělením záporných napětí svorkám. Zápisy sčítanců musí číst *čtecí hlava*, která takto transformuje jedničky na impulsy nebo kladná napětí, nuly na ne-impulsy nebo záporná napětí.

Na výstup pro s je zapojeno *tiskací zařízení*, které při průběhu impulsu sekundárním okruhem reléové sítě nebo při kladném potenciálu na výstupu elektronkové sítě tiskne 1; neprobíhá-li impuls nebo při záporném potenciálu tiskne 0. Celý sčítací stroj operuje — obdobně jako člověk — v jednotlivých krocích, přičemž postupuje při čtení cifer sčítanců i při zápisu cifer součtu odprava doleva. Stroj proto obsahuje také *časový generátor* vysílající v pravidelné časové sekvenci impulsy tomu zařízení, které posouvá pásku se zápisem sčítanců i pásku, kde je za-

¹⁾ viz opravu na str. 432



Obr. 4



Legenda k obr. 5:

H = čtecí hlava, P_1 = páska se zápisem sčítanců, T = tiskárna, Z = zpoždovač, G = časový generátor, P_2 = páska se zápisem součtu.

pisován součet. Cifra v přenášená do vyššího řádu se v následujícím kroku stává cifrou n přenosu z nižšího řádu. Proto je třeba zpozdít příslušný výstupní impuls v o časový interval jednoho kroku a převést ho pak do vstupu jako n . Tuto roli hraje *zpomalovací zařízení* synchronizované s časovým generátorem, na obr. 5 je znázorněno schéma celého sčítacího stroje.

Jak jsme řekli, funguje stroj jako konečný automat pracující podle instrukcí algoritmu sčítání ve dvojkové soustavě. Tento algoritmus je vyjádřen jazykem Booleovy algebry dvěma booleovskými funkcemi. Technická síť, která realizuje operaci sčítání, může být základem dalších sítí, například sítě umožňující vyhledat bezprostředního následovníka k danému přirozenému číslu (postačí přičíst jedna k danému číslu). Násobení lze též realizovat pomocí konečného automatu, jehož součástí je sčítací síť; principem automatu je opakování sčítacího kroku, a k tomu musí stroj obsahovat *krátkodobou paměť*. To je zařízení, které vždy zaznamená dílčí výsledek předcházejícího součtu a v následujícím kroku pošle tento výsledek do vstupu sčítací sítě jako jeden sčítanec; přitom je původní násobenec druhým sčítancem (při prvním kroku se sčítá násobenec sám se sebou). Řídící prvek automatu postupně vysílá síti i paměťovému členu takový počet impulsů k dalšímu opakovanému sčítání, aby jím vyjádřil násobitele.

Na závěr dodejme, že uvedený příklad realizace sčítání technickou sítí byl typický pro první stadium automatizační a výpočetní techniky.

Na stanici tramvaje

JIŘÍ NEČAS, SNTL Praha

Tratě elektrických drah i autobusů v Praze i jiných velkých městech se často mění, linek přibývá, intervaly se však mnohdy prodlužují. Celý systém městské hromadné dopravy je velice složitý, abychom alespoň z malé části pronikli do jeho tajů, probereme si nyní z této oblasti několik zjednodušených situací. Přeneseme se ve svých úvahách do nějakého neskutečného města, ve kterém je jízdní řád městských dopravních prostředků přesně dodržován, ovšem cestujícím není znám. V tomto městě zvolíme si dvě stanice, označme je **A** a **B**, a budeme mít na zřeteli cestující, jedoucí z **A** do **B**. Tyto stanice jsou zpočátku spojeny jedinou linkou, říkejme jí l_1 , která má interval S minut. Doba t , po kterou cestující čeká na stanici **A** na spoj do **B**, je náhodnou veličinou. V celém článku budeme předpokládat, že cestující mohou použít prvního spoje, který po jejich příchodu na stanici jede.

a) Jaká je střední hodnota Et doby čekání t cestujícího, jedoucího z **A** do **B**?

Veličina t může nabýt libovolné hodnoty z intervalu $\langle 0, S \rangle$, tzn. nekonečně mnoho hodnot. Abychom mohli pracovat s konečnou množinou hodnot doby čekání, rozdělíme interval $\langle 0, S \rangle$ na n stejně dlouhých dílů $\langle 0, S/n \rangle, \langle S/n, 2S/n \rangle, \dots, \langle (n-1)S/n, S \rangle$.¹⁾ Místo náhodné veličiny t budeme vyšetřovat náhodnou veličinu t_n , kterou zavedeme takto: Jestliže $t \in \langle (i-1)S/n, iS/n \rangle$, pak $t_n = (2i-1)S/(2n)$ (t_n je střed toho dílčího intervalu, v němž t leží). Veličina t_n může nabývat právě těchto n různých hodnot: $S/(2n), 3S/(2n), \dots, (2n-1)S/(2n)$. Protože předpokládáme, že jízdní řád není cestujícím znám (a tedy i vylučujeme dohánění tramvají, které souvisí s určitou informací cestujícího o době odjezdu linky před jeho příchodem na stanici), nabývá všech těchto hodnot s touž pravděpodobností, ta je rovna $1/n$. Střední hodnota Et_n je tedy rovna

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2n} S + \frac{1}{n} \frac{3}{2n} S + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{2n-1}{2n} S = \frac{S}{2n^2} [1 + 3 + \dots + (2n-1)] = \frac{S}{2n^2} \cdot n^2 = \frac{S}{2}.$$

Výsledek nezávisí na počtu dílčích intervalů. Je zřejmé, že při dostatečně velkém n se veličina t_n liší od veličiny t jen nepatrně, poněvadž výsledek, k němuž jsme došli, na n nezávisí, vyjadřuje rovněž střední hodnotu Et náhodné veličiny t .²⁾ Byl patrný i bez zdlouhavého výpočtu, k němuž jsme ovšem použili metody, která bude při řešení dalšího problému velice užitečná.

V našem neskutečném městě došlo později k řadě změn ve vedení linek hromadné městské dopravy. Tehdy byla linka 11 zrušena a stanice **A** a **B** byly spojeny dvěma linkami, nazvěme je 21 a 22. Jejich tratě se liší jen vně úseku **AB**. Obě jezdí v intervalu T minut, jejich jízdní řády však byly dělány nezávisle na sobě.

b) Jaká je střední hodnota Et doby čekání t cestujících na stanici **A** po této změně?

Opět rozdělme časový interval $\langle 0, T \rangle$ na n stejně dlouhých dílčích intervalů $\langle 0, T/n \rangle, \langle T/n, 2T/n \rangle, \dots, \langle (n-1)T/n, T \rangle$ a budeme místo veličiny t zkoumat veličinu t_n , zavedenou analogicky jako v a), tj.

¹⁾ Protože množina hodnot, jichž t může nabýt, je nekonečná, je nulová pravděpodobnost, že by t nabyla hodnoty rovné právě některému z krajních bodů dílčích intervalů, jichž je konečný počet, nevadí proto, že tyto krajní body přiřazujeme k oběma intervalům.

²⁾ Používáme zde intuitivně určitého limitního přechodu. Jeho přesná formulace a důkaz jeho oprávněnosti leží mimo rámec tohoto článku.

$t_n = (2i - 1)T/(2n)$, právě když $t \in \langle (i - 1)T/n, iT/n \rangle$. V dalším textu budeme pracovat ještě také s náhodnými veličinami u_n a v_n . Veličina u_n nabývá hodnoty $(2i - 1)T/2n$, právě když doba mezi příchodem cestujícího a příjezdem spoje linky 21 leží v intervalu $\langle (i - 1)T/n, iT/n \rangle$, obdobně veličina v_n popisuje dobu mezi příchodem cestujícího a nejbližším příjezdem spoje linky 22. Protože cestující použije nejbližšího spoje nezávisle na tom, zda jde o linku 21 či 22, je t_n rovno minimu z u_n a v_n .

Budeme říkat, že nastal jev A_i , právě když veličina u_n nabývá hodnoty $(2i - 1)T/2n$, obdobně zavedeme jevy B_i pro veličinu v_n . Náhodné jevy A_i, B_j pro libovolná $i, j = 1, 2, \dots, n$ jsou podle předpokladu nezávislé. Protože jsou dílčí intervaly stejně dlouhé a cestujícím není jízdní řád znám, platí pro libovolná i, j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) $P(A_i) = P(B_j) = 1/n$. Protože jsou jevy nezávislé, je pravděpodobnost $P(A_i B_j)$, že jevy A_i, B_j nastanou současně, rovna $P(A_i) \cdot P(B_j) = 1/n^2$. Označme dále C_i náhodný jev, který nastane, právě když náhodná veličina t_n nabývá hodnoty $(2i - 1)T/(2n)$. Protože $t_n = \min(u_n, v_n)$, platí

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 B_1 \cup A_1 B_2 \cup \dots \cup A_1 B_n \cup A_2 B_1 \cup \dots \cup A_n B_1; \\ C_2 &= A_2 B_2 \cup A_2 B_3 \cup \dots \cup A_2 B_n \cup A_3 B_2 \cup \dots \cup A_n B_2; \\ &\vdots \\ C_{n-1} &= A_{n-1} B_{n-1} \cup A_{n-1} B_n \cup A_n B_{n-1}; \\ C_n &= A_n B_n. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že jevy A_i, B_j , které se ve sjednoceních vyskytují, jsou neslučitelné, platí

$$\begin{aligned} P(C_1) &= (2n - 1)/n^2, \\ P(C_2) &= (2n - 3)/n^2, \\ &\vdots \\ P(C_{n-1}) &= 3/n^2, \\ P(C_n) &= 1/n^2. \end{aligned}$$

Náhodná veličina t_n nabývá hodnoty $(2i - 1)T/(2n)$ s pravděpodobností $P(C_i)$, pro její střední hodnotu tedy platí

$$\begin{aligned} Et_n &= \frac{2n - 1}{n^2} \cdot \frac{T}{2n} + \frac{2n - 3}{n^2} \cdot \frac{3T}{2n} + \dots + \frac{3}{n^2} \cdot \frac{(2n - 3)T}{2n} + \\ &+ \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(2n - 1)T}{2n} = \frac{T}{2n^3} [(2n - 1) \cdot 1 + (2n - 3) \cdot 3 + \dots + 3 \cdot (2n - \\ &- 3) + 1 \cdot (2n - 1)] = \frac{T}{2n^3} \cdot \frac{2n^3 + n}{3} = \frac{T}{3} \cdot [1 + 1/(2n^2)]. \end{aligned}$$

Při výpočtu bylo použito rovnosti

$$(2n - 1) \cdot 1 + (2n - 3) \cdot 3 + \dots + 3 \cdot (2n - 3) + 1 \cdot (2n - 1) =$$

$= (2n^3 + n)/3$, kterou lze snadno dokázat matematickou indukcí (pro $n = 1$ má levá strana tvar $1 \cdot 1$, pro $n = 2$ pak $3 \cdot 1 + 1 \cdot 3$).

Na rozdíl od výpočtu, provedeného v úloze a), závisí výsledek zde získaný na n . Poněvadž čím je n větší, tím menších nepřesností se dopouštíme, nahrazujeme-li ve svých úvahách náhodnou veličinu t náhodnou veličinou t_n a protože platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E t_n = T/3,$$

je

$$E t = T/3.$$

Pokud by úprava spojů mezi **A** a **B** byla dělána tak, aby celkový počet spojů, jedoucích mezi těmito místy, zůstal nezměněn, pak by platilo $T = 2S$ a střední hodnota doby čekání by tedy vzrostla z $(1/2)S$ na $(2/3)S$ (stále předpokládáme nezávislost jízdnicích řádů).

Otázce nezávislosti jízdnicích řádů věnujme nyní pozornost. Je-li interval obou linek úplně stejný, nemůžeme se na jízdnicí řády dívat jako na nezávislé, jevy A_i a B_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) z předchozí úvahy nejsou nezávislé. Spoj linky 21 přijede vždy za touž dobu T_1 minut po spoji linky 22, podobně spoj linky 22 přijede vždy za T_2 minut po spoji linky 21, $T_2 = T - T_1$. Pokud se ovšem budou intervaly linek nepatrně lišit, zůstanou naše dříve učiněné závěry o střední hodnotě doby čekání v platnosti a hodnoty T_1, T_2 se budou při tom s časem měnit. Jevy A_i, B_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) bude v tomto případě možno považovat za nezávislé. Čtenář, znalý intervalů takových dvojic linek pražské městské dopravy, které mají značnou část trasy společnou (např. 11 a 29, 128 a 137), ví, že v Praze tento určitý rozdíl mezi intervaly bývá.

Z toho, co jsme spočítali, by se zdálo zcela zřejmé, že náhrada jedné linky dvěma se stejnou celkovou přepravní kapacitou a mírně se lišícími intervaly je pro cestující, kteří jedou uvnitř společného úseku trati, zcela jednoznačně nevýhodná. V našem neskutečném městě, kde se přesně dodržuje jízdnicí řád, kde tedy nejsou žádné poruchy, by tomu skutečně tak bylo. Jakmile se připustí existence poruch a různých narušení jízdnicího řádu, lze, ovšem podstatně složitějšími úvahami, ukázat, že takováto změna pro cestující má určité výhody, tím větší, čím je v provozu více nepravidelností.

Nyní se však ještě vraťme k předpokladu, že intervaly obou linek jsou zcela stejné a jejich jízdnicí řády tedy vzájemně závislé.³⁾

c) Jaká je střední hodnota $E t$ doby čekání t cestujícího na stanici **A** směrem na **B**, je-li $T_1 - T_2 = D \geq 0$?

Nechť $T_1/T = p/q$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla (toto vyjádření je možné, neboť T_1/T je racionální číslo; to plyne ze skutečnosti,

³⁾ Tak je tomu např. v Liberci.

že délky intervalů, vyjádřené v minutách, jsou racionální čísla). Použijeme nyní opět dělení intervalu na stejně dlouhé díly, tentokrát na nq dílů (tzn. na celočíselný násobek q): $\langle 0, T/(nq) \rangle, \langle T/(nq), 2T/(nq) \rangle, \dots, \langle (np-1)T/(nq), npT/(nq) \rangle, \langle npT/(nq), (np+1)T/(nq) \rangle, \dots, \langle (nq-1)T/(nq), T \rangle$. Zavedme opět náhodné veličiny t_n, u_n obdobně jako v řešení b: $t_n = (2i-1)T/(2nq)$, právě když $t \in \langle (i-1)T/(nq), iT/(nq) \rangle$; $u_n = (2i-1)T/(2nq)$, právě když doba mezi příchodem cestujícího na stanici a příjezdem spoje linky 21, vyjádřená v minutách, leží v intervalu $\langle (i-1)T/(nq), iT/(nq) \rangle$; $i = 1, 2, \dots, nq$. Označme F_i náhodný jev, který záleží v tom, že veličina t_n nabývá hodnoty $(2i-1)T/(2nq)$, a G_i náhodný jev záležející v tom, že veličina u_n nabývá hodnoty $(2i-1)T/(2nq)$. Je-li $u_n < T_1$, přijede cestujícímu dříve spoj linky 21 a tedy platí $t_n = u_n$; jestliže $u_n > T_1$, přijede cestujícímu dříve spoj linky 22, a to o T_1 minut dříve než spoj linky 21, tzn. $t_n = u_n - T_1 = u_n - (p/q)T$ (dělení intervalu $\langle 0, T \rangle$ jsme provedli tak, že veličina u_n nemůže nabýt hodnoty T_1 . Je okamžitě vidět, že $t_n < T_1$ a tedy jevy F_i pro $i > np$ jsou prázdné. Z úvah, právě provedených, plyne:

$$\begin{aligned} F_1 &= G_1 \cup G_{np+1} \\ F_2 &= G_2 \cup G_{np+2} \\ &\vdots \\ F_{n(q-p)} &= G_{n(q-p)} \cup G_{nq} \\ F_{n(q-p)+1} &= G_{n(q-p)+1} \\ &\vdots \\ F_{np} &= G_{np} \end{aligned}$$

(pokud $T_1 = T/2$, je systém jevů $\{F_{n(q-p)+1}, \dots, F_{np}\}$ prázdný).

Protože jevy, které se vyskytují v sjednoceních, jsou neslučitelné a pravděpodobnost jevů G_1, G_2, \dots, G_{np} je táž, platí

$$P(F_1) = P(F_2) = \dots = P(F_{n(q-p)}) = 2/(nq),$$

$$P(F_{n(q-p)+1}) = \dots = P(F_{np}) = 1/(nq).$$

Náhodná veličina t_n tedy nabývá každé z hodnot $T/(2nq), 3T/(2nq), \dots, [2n(q-p)-1]T/(2nq)$ s pravděpodobností $2/(nq)$, pokud $T_1 > T_2$, nabývá ještě s pravděpodobností $1/(nq)$ každé z hodnot $[2n(q-p)+1]T/(2nq), \dots, (2np-1)/(2nq)$. Pro její střední hodnotu pak platí

$$\begin{aligned} Et &= \frac{2}{nq} \left[\frac{T}{2nq} + \frac{3T}{2nq} + \dots + \frac{[2n(q-p)-1]T}{2nq} \right] + \\ &+ \frac{1}{nq} \left[\frac{[2n(q-p)+1]T}{2nq} + \dots + \frac{(2np-1)T}{2nq} \right] = \\ &= \frac{T}{2n^2q^2} [2(1+3+\dots+(2n(q-p)-1)) + \dots] \end{aligned}$$

$$+ ((2n(q - p) + 1) + \dots + (2np - 1)) = \\ = \frac{T}{2n^2q^2} [2n^2(q - p)^2 + nq(2np - nq)] = \frac{T}{2q^2} [p^2 + (p - q)^2].$$

Při výpočtu jsme užili vzorce pro součet členů aritmetické posloupnosti. Jestliže nyní uvážíme, že $p = (T_1/T)q$, $T - T_1 = T_2$, získáme po dosazení těchto vztahů

$$Et_n = \frac{1}{2T} (T_1^2 + T_2^2).$$

Ze stejných důvodů, jako při řešení úkolu a, můžeme položit $Et_n = Et$. Nyní výsledek vyjádříme pomocí daných hodnot T a D . Protože $T = T_1 + T_2$, $D = T_1 - T_2$, platí $T_1 = (T + D)/2$, $T_2 = (T - D)/2$. Dosadíme-li tyto hodnoty do výrazu pro $Et_n = Et$, dostaneme

$$Et = \frac{T}{4} + \frac{D^2}{4T}$$

Z výsledku je vidět, že při pevném T je střední hodnota doby čekání rostoucí funkcí D (uvažujeme $D \geq 0$). Při $D = 0$ je $Et = T/4$; v tomto případě je $T_1 = T_2 = T/2$ a situace je z hlediska cestujících, jedoucích mezi **A** a **B**, táž, jako kdyby po trati jezdila jediná linka s polovičním intervalem. Druhý extrémní případ nastane při $D = T$, tedy $T_1 = T$, $T_2 = 0$, spoje obou linek jedou těsně za sebou a linka 22 tak jezdí soustavně nevyužita.

Na závěr uveďme problém pro čtenáře k samostatnému řešení.

d) Jak velká je hodnota D , jestliže $T_1 \geq T_2$ a $Et = T/3$ (podmínky uvedené před otázkou c) zůstávají v platnosti)?

Výsledek: $D = T/\sqrt{3}$.

V tomto článku jsme se zabývali několika otázkami z tzv. teorie hromadné obsluhy (teorie front). Tato poměrně mladá oblast aplikované matematiky se opírá především o teorii pravděpodobnosti a matematickou statistiku. I zde jsme řady pojmů z teorie pravděpodobnosti používali, jejich definice a význam použitých symbolů jsou uvedeny v [1].

Literatura:

- [1] Kraemer E.—Hájek J.—Veselý F.—Voříšek J.—Zöldy M.: Matematika pro III. ročník SVVŠ (větev přírodovědná). Praha, SPN 1967 (s. 288 až 342).
- [2] Fletcher A.—Clarke G.: Řízení a matematika. Praha, Svoboda 1968 (s. 145—166).
- [3] Makower M. S.—Williamson E.: Základy operačnej analýzy. Bratislava, Alfa 1970 (s. 102—127).
- [4] Zítek F.: Ztracený čas, Praha, Academia 1969.

Řízení pohybu zdviže

JAN ZAHRADNÍK, gymnasium České Budějovice

V minulých ročnících Rozhledů se čtenáři seznámili se základy Booleovy algebry, s principem jejích aplikací a se základy teorie dvouhodnotových booleovských funkcí. V letošním ročníku byly otištěny články R. Beka zabývající se modelováním booleovských funkcí pomocí reléových sítí a sítí s pneumatickými a diodotranzistorovými prvky. Nyní se budeme zabývat konstrukcí zařízení, které by řídilo pohyb jednoduché zdviže. Poznáme tak příklad praktického využití znalostí o booleovských funkcích.

Řízený objekt se skládá z kabiny, která se pohybuje mezi dvěma patry v šachtě opatřené v každém patře dveřmi. Samočinné řídicí zařízení obsahuje jednak vstupní členy, tzv. snímače a jednak výstupní neboli akční členy. Snímače převádějí změřené vstupní veličiny na signály s dvěma hodnotami. V našem případě máme tyto vstupní členy: snímače polohy tlačítek v patrech a v kabině, které dávají pokyn k jízdě zdviže, snímače polohy dveří, snímače polohy kabiny a snímač přetížení motoru. Výstupními členy jsou stykače, z nichž každý zapíná motor v jednom ze dvou možných směrů (nahoru, dolů).

Snímače polohy tlačítek v patrech nechť dávají signály a_1, a_2 (resp. b_1, b_2) pro jízdu nahoru (resp. dolů). Signál a_3 pro jízdu nahoru (resp. b_3 pro jízdu dolů) přichází z tlačítka umístěného v kabině. Snímač polohy dolních dveří vysílá signál c_1 , obdobně je c_2 signál snímače polohy horních dveří. Signál d_1 vysílá snímač polohy kabiny, když je kabina v dolním patře, d_2 je signál snímače polohy kabiny, je-li kabina v horním patře. Snímač přetížení motoru dává signál p . Výstupní proměnné budou v_1 a v_2 a jejich hodnoty mají tento význam: $v_1 = 1$ právě tehdy, když motor je zapnut v takovém směru, aby se kabina pohybovala nahoru. Obdobně platí, že $v_2 = 1$, právě když se zdviž pohybuje dolů.

K tomu, aby kabina buď začala vyjíždět vzhůru, nebo pokračovala v jízdě směrem vzhůru, musí být současně splněny tyto podmínky:

1. Je stlačeno aspoň jedno z tlačítek a_1, a_2, a_3 , nebo již kabina jede vzhůru, tj. $(a_1 + a_2 + a_3 + v_1) = 1$.

2. Oboje dveře jsou zavřeny, tj. $c_1 = 1$ a zároveň $c_2 = 1$, neboli $c_1 \cdot c_2 = 1$.

3. Kabina není v horním patře, neboli $d'_2 = 1$.

4. Kabina se nepohybuje dolů, neboli $v'_2 = 1$.

5. Motor není přetížen, neboli $p' = 1$.

Musí tedy platit:

$$v_1 = (a_1 + a_2 + a_3 + v_1) \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot d'_2 \cdot v'_2 \cdot p' \quad (1)$$

Je zřejmé, že při narušení podmínek 1.–5. dojde k zastavení kabiny. (Např. vyjede-li zdviž do horního patra, bude $d_2 = 1$, tj. $d'_2 = 0$, tedy i $v_1 = 0$ a motor se zastaví.)

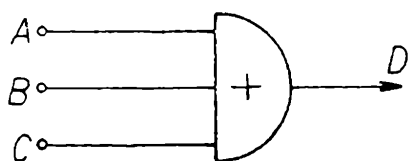
Pro pohyb zdviže dolů musí platit obdobné podmínky, je třeba jen zaměnit a_1, a_2, a_3 za b_1, b_2, b_3 ; v_1 za v_2 a d_2 za d'_1 .

Platí tedy:

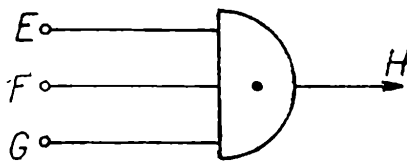
$$v_2 = (b_1 + b_2 + b_3 + v_2) \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot d'_1 \cdot v'_1 \cdot p' \quad (2)$$

Na základě výrazů (1) a (2) můžeme již sestavit řídicí systém. Musíme však nejprve zajistit, aby nedocházelo k nedovoleným stavům, které neodpovídají skutečnosti. Musíme vyloučit, aby mohl být dán pomocí tlačítek pokyn k jízdě nahoru a současně pokyn k jízdě dolů. To by odpovídalo současnému stisknutí jednoho z tlačítek a_1, a_2, a_3 a jednoho z tlačítek b_1, b_2, b_3 . Jeden ze způsobů, jakým je toho možné dosáhnout, je mechanické blokování tlačítek tímto způsobem: je-li jedno z tlačítek a_1, a_2, a_3 stisknuto, musí být mechanicky znemožněno stisknutí kteréhokoliv z tlačítek b_1, b_2, b_3 a naopak.

Schema řídicího systému nyní sestavíme ve tvaru tzv. blokového schematu. Vysvětlíme si nejprve, jak bloková schemata sestavujeme. V člancích R. Beka v tomto ročníku Rozhledů jste poznali, že booleovské funkce je možno modelovat různými technickými prvky. Pro zjednodušení použijeme při realizaci booleovských funkcí obecných, tzv. operačních členů, jejichž detailní konstrukce nás nebude zajímat, půjde nám pouze o znázornění operací s proměnnými. Pro modelování součtu proměnných $D = A + B + C$ použijeme *součtového členu* (obr. 1). Pro modelování součinu $H = E \cdot F \cdot G$ použijeme *součtinového členu* (obr. 2) a pro modelování inverze proměnné K použijeme *invertoru* (obr. 3). Součtový a součtinový člen může mít libovolný konečný počet B vstupů, ale jen jeden výstup. Naproti tomu invertor má pouze jeden vstup a jeden výstup.



Obr. 1

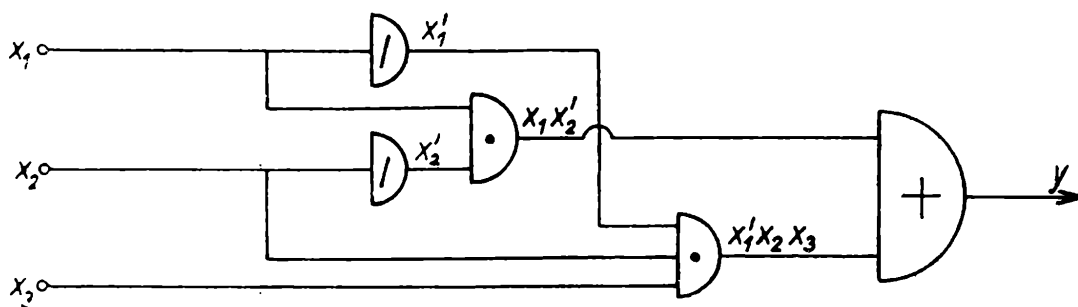


Obr. 2

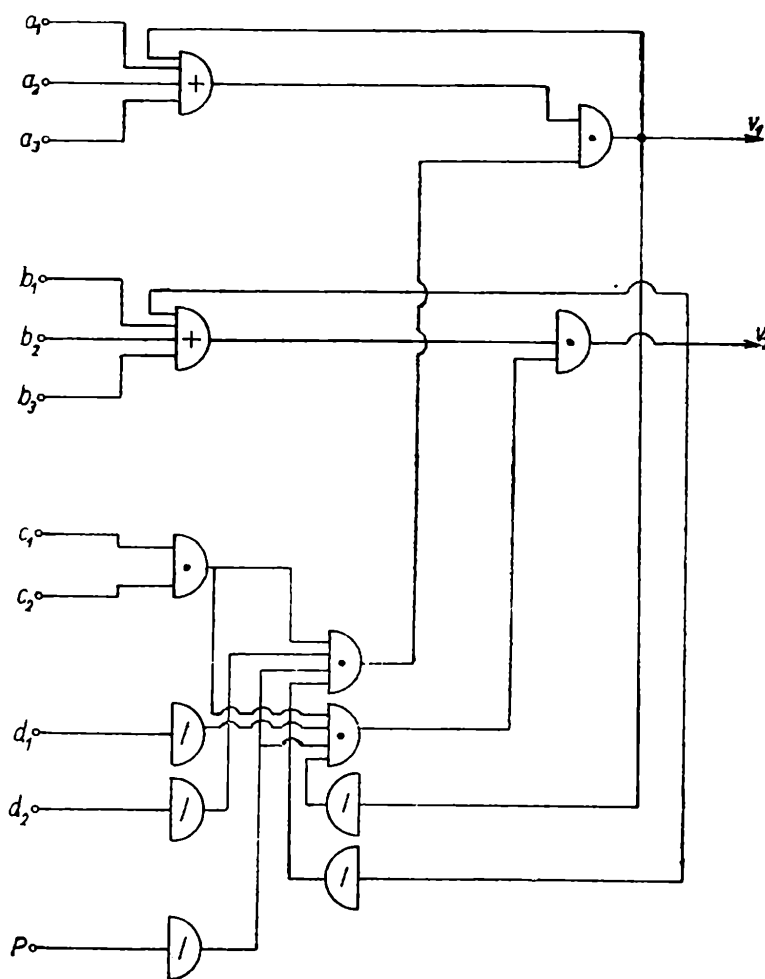


Obr. 3

Při sestavování blokových schemat se budeme řídit také těmito zásadami: k jednomu výstupu lze připojit několik vstupů (čáry znázorňující vstupní proměnné lze rozvést), k jednomu vstupu lze připojit vždy jen jeden výstup. Např. blokové schéma modelující výraz $y = x_1x_2 + x_1'x_2x_3$ sestrojíme podle obr. 4. Blokové schéma řídicího systému zdviže je znázorněno na obr. 5.



Obr. 4



Obr. 5

konstruktivní geometrie

K priemerom kuželosečky

JOSEF FILIP, Bratislava.

Prv ako prejdeme k vlastnému predmetu tohto článku, pripomenieme si niektoré základné pojmy a vzťahy.

Priamka a kuželosečka¹⁾ môžu mať trojakú vzájomnú polohu: priamka má s kuželosečkou spoločné dva body (sečnica), priamka má s kuželosečkou spoločný jeden bod (dotyčnica), priamka nemá s kuželosečkou ani jediný spoločný bod (nesečnica).

Kuželosečka ako rovinná krivka má všetky svoje body v rovine a podľa toho koľko bodov má spoločných s nevlastnou priamkou tejto roviny, rozoznávame tri typy: a) elipsa (kružnica) má všetky body vlastné, b) parabola má jeden nevlastný bod, c) hyperbola má dva nevlastné body.

Elipsa a hyperbola sú stredovými kuželosečkami. Každá má stred súmernosti, ktorým prechádzajú dve osi súmernosti vzájomne kolmé. Parabola nie je stredovou kuželosečkou a má len jednu osu súmernosti, ktorá prechádza jej nevlastným bodom.

Kuželosečka rozdeľuje rovinu, v ktorej leží, na dve časti: vnútornú a vonkajšiu. Body, ktoré obsahuje vnútorná časť, nazývame vnútornými a body vonkajšej časti vonkajšími bodmi kuželosečky.

Pri elipse (kružnici) je prirodzené a logické nazvať vnútorne tou časťou, ktorá obsahuje stred krivky. Elipsa je uzavretá krivka a preto každá priamka, ktorá obsahuje ľubovoľný vnútorný bod, je nevyhnutne sečnicou a pretína elipsu v dvoch bodoch (priesečníkoch). Priamka, ktorá má mať s elipsou iba jediný spoločný bod a má teda byť dotyčnicou, nemôže obsahovať okrem spoločného bodu iné ako samé vonkajšie body.

Podľa toho ľahko rozhodneme aj pri parabole alebo hyperbole, ktorá časť roviny krivkou rozdelená je vnútorná a ktorá vonkajšia. Pri hyperbole, ktorá sa skladá z dvoch oddelených vetví, by sa zdalo, že máme tri časti, ale keď si predstavíme ľubovoľnú dotyčnicu, ihneď zistíme, že vonkajšia časť je tá, ktorá obsahuje stred krivky a ostatné dve ako celok tvoria časť vnútornú.

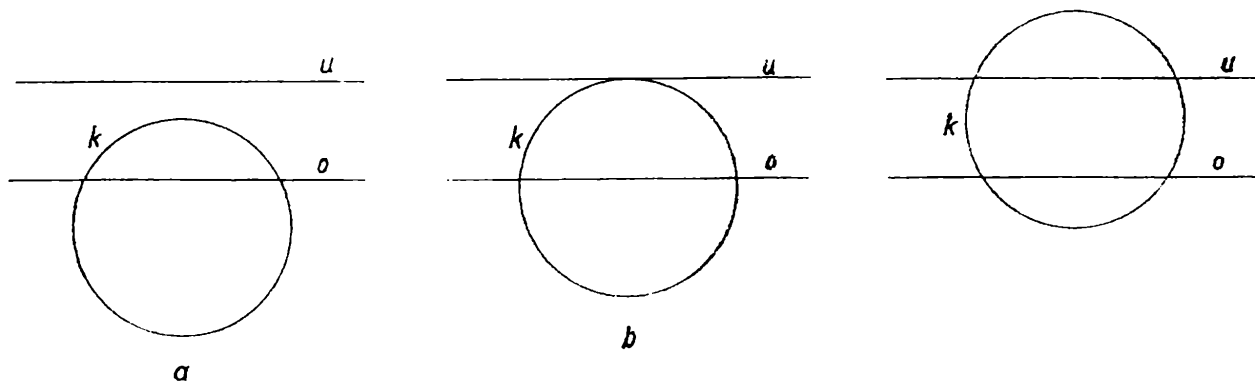
¹⁾ V tomto článku budeme výlučne uvažovať o kuželosečkách jednoduchých, nie zložených (zložených z priamok).

Sečnica, ktorá pretína kuželosečku, obsahuje okrem dvoch priesečníkov body vnútorné i vonkajšie. Tá jej časť, ktorá obsahuje priesečníky a vnútorné body, sa nazýva tetivou kuželosečky. Pri elipse (kružnici) je to vždy úsečka (uzavretá). Pri parabole je to úsečka, ak oba priesečníky sú vlastné, alebo polpriamka, ak jeden priesečník je nevlastný. Tento zvláštny prípad nastane, keď sečnica je rovnobežná s osou paraboly. Pri hyperbole je tetivou úsečka, keď oba priesečníky ležia na tej istej vetvi a sú oba vlastné. Môže to byť aj polpriamka, keď jeden z priesečníkov je nevlastný, resp. keď sečnica je rovnobežná s asymptotou. Keď každý z priesečníkov leží na inej vetvi, tetiva hyperboly pozostáva z dvoch polpriamok.

Sečnice, ktoré prechádzajú pri stredovej kuželosečke jej stredom, sa nazývajú priemerové priamky a tetivy na nich priemery kuželosečky. Pri parabole všetky priemerové priamky a taktiež priemery prechádzajú nevlastným bodom a sú teda rovnobežné s osou paraboly.²⁾

Priemerom elipsy je teda vždy úsečka, priemerom hyperboly dve polpriamky a priemerom paraboly polpriamka.

Na ilustráciu použijeme kolineárne zobrazenie kružnice. Vieme, že obrazom kružnice v kolineácii je kuželosečka. Nech je daná kružnica k a kolineácia stredom S , osou o a úbežnicou u . Vzhľadom na vzájomnú polohu kružnice k a úbežnice u môžu nastať tri prípady (obr. 1abc):

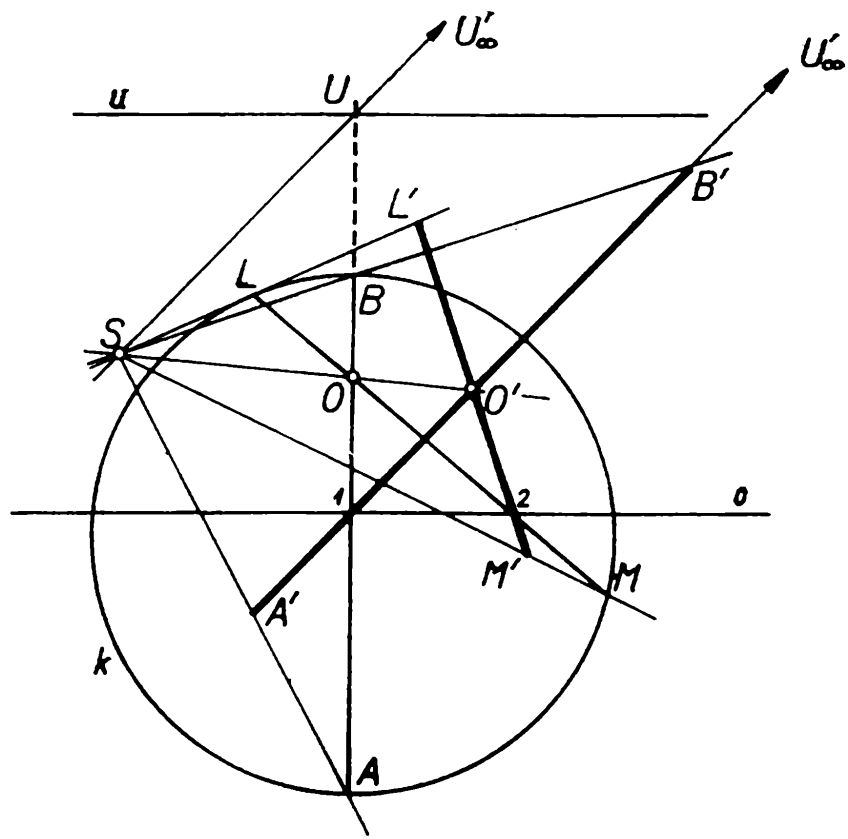


Obr. 1

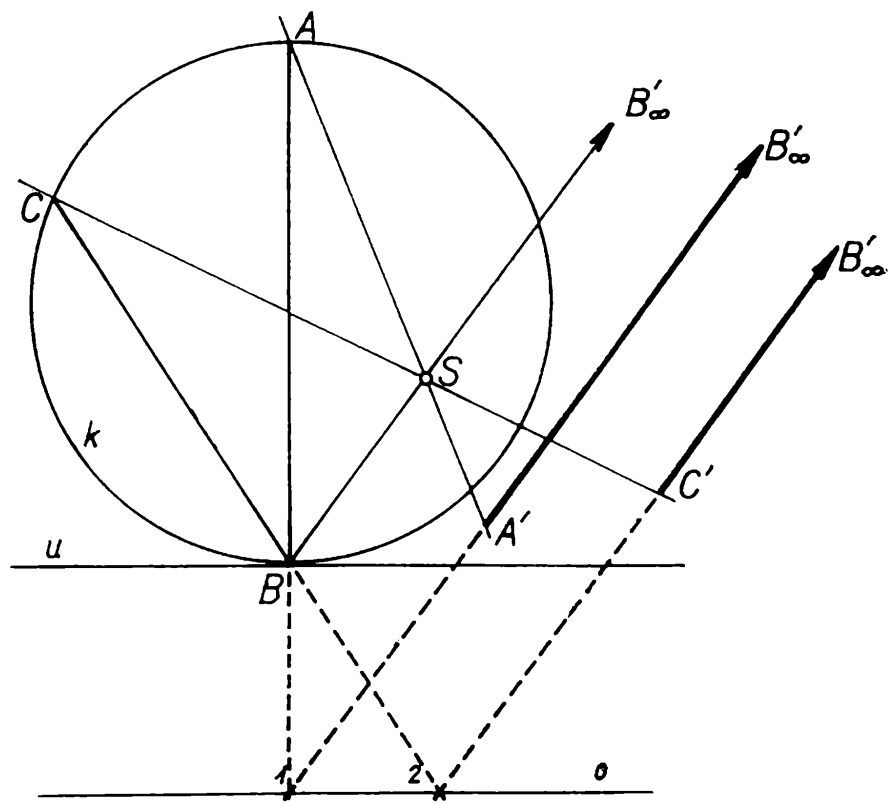
- a) obraz kružnice má všetky body vlastné, je to teda elipsa (kružnica),
- b) obraz kružnice má jeden nevlastný bod, je to teda parabola,
- c) obraz kružnice má dva nevlastné body, je to teda hyperbola.

Na obr. 2 sme zostrojili priemery kuželosečky v uvedených troch prípadoch.

²⁾ Odhliadnúc od symetričnosti má nevlastný bod paraboly v tomto zmysle vlastnosť stredu.



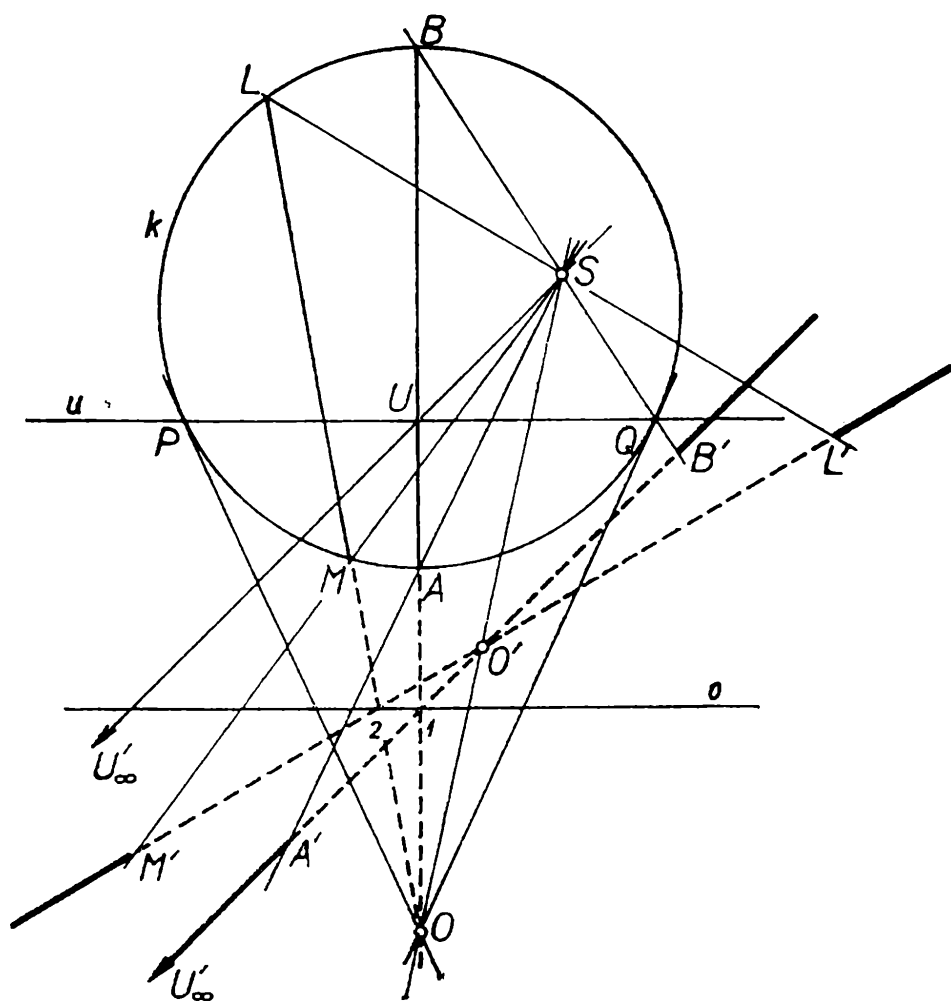
Obr. 2a



Obr. 2b

(Obr. 2a.) Kružnica k nemá s úbežnicou u spoločného bodu, je teda jej obrazom elipsa k' . V kružnici k existuje jediný priemer, ktorý sa zobrazí do priemeru elipsy k' . Je to priemer $AB \perp o$. Odôvodnenie je jednoduché. Dotyčnice kružnice k v bodoch A, B sú rovnobežné s osou o (na obr. 2a nie sú nakreslené). Ich obrazy sú teda tiež rovnobežné s osou o , resp. rovnobežné navzájom a v dôsledku toho spojnice ich dotykových bodov A', B' je priemerom a prechádza stredom O' elipsy k' . Bod O' je obrazom bodu O na priemere AB . Každá tetiva LM kružnice k idúca bodom O sa zobrazí do priemeru $L'M'$ elipsy k' a pretože taká tetiva nemá s úbežnicou u spoločného bodu, zobrazí sa do úsečky. Teda v elipse všetky priemery sú úsečkami.

(Obr. 2b.) Kružnica k sa dotýka úbežnice u a preto jej obrazom je parabola k' . V kružnici k existuje zase jediný priemer, ktorý sa zobrazí do priemeru paraboly k' . Je to priemer $AB \perp o$. Pretože bod B leží na úbežnici u , je jeho obrazom nevlastný bod B_∞ a priemer $A'B'_\infty$ je teda polpriamkou. Každá tetiva CB kružnice k sa zobrazí do priemeru $C'B'_\infty$ paraboly k' . Všetky priemery paraboly sú teda polpriamkami, ktoré majú spoločný bod B_∞ .



Obr. 2c

(Obr. 2c.) Kružnice k pretína úbežnicu u v bodech P, Q a preto jej obrazom je hyperbola k' . Aj v tomto prípade existuje v kružnici k jediný priemer, ktorý sa zobrazí do priemeru hyperboly k' . Je to zase priemer $AB \perp o$. Pretože priesečník $U \equiv AB \cdot u$, je vnútorným bodom priemeru AB , obraz tohto priemeru pozostáva z dvoch polpriamok. Stred O' úsečky $A'B'$ je stredom hyperboly k' a je to obraz bodu O na priamke AB . Bod O je vonkajším bodom kružnice k , tak ako bod O' je vonkajším bodom hyperboly k' . Každá tetiva LM kružnice k na sečnici idúcej bodom O , sa zobrazí do priemeru $L'M'$ hyperboly k' . A pretože každá taká tetiva nevyhnutne pretína úbežnicu u , keďže leží vnútri uhla POQ , sú jej obrazom dve polpriamky. Priamky OP a OQ sú totiž v kolíneácii priradené asymptotám hyperboly k' a preto sa kružnice k dotýkajú v bodech P a Q . Každým priemerom hyperboly sú teda dve polpriamky na priemerovej priamke oddelené bodmi hyperboly.

Tak sa nám javia priemery jednotlivých typov kuželosečky, keď ich posudzujeme z jednotného stanoviska.

Aproximace křivek lomenými čarami

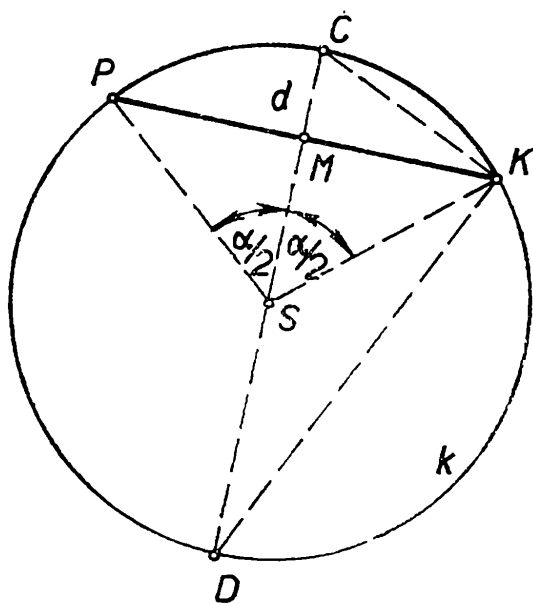
Dr. LUDĚK GRANÁT, Praha

Se stále větším využíváním samočinných počítačů se zvětšuje i zájem o číslicově řízené kreslicí stoly. Tyto stoly si můžeme představit jako zařízení (některá obsahují ve své sestavě i speciální řídicí počítač), která na základě informací vstupujících do nich z děrné či magnetické pásky nebo přímo z nějakého samočinného počítače, umí kreslit určité typy čar.

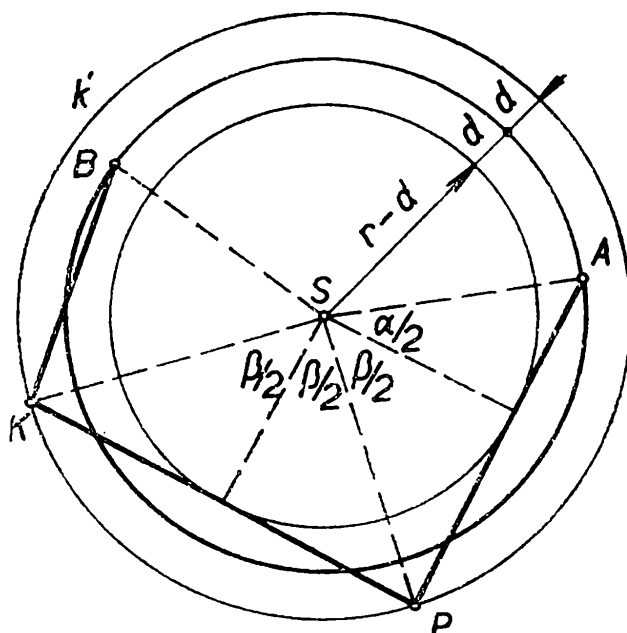
Zde budeme mít na mysli ty kreslicí stoly, které umí na základě jedné vstupní instrukce nakreslit libovolnou úsečku. Chceme-li pak nakreslit na takovém kreslicím stole nějakou křivku, setkáváme se s touto úlohou: Je dána křivka k . Máme ji nahradit co nejjednodušeji lomenou čarou c (tj. posloupností úseček, jež umí uvažovaný kreslicí stůl nakreslit), aby ke každému bodu B křivky k resp. lomené čáry c existoval bod B' lomené čáry c resp. křivky k tak, že vzdálenost BB' bude menší nebo rovna předem dané přípustné odchylce d . Jak lze takové nahrazení provést, ukážeme pro jednoduché případy, kdy křivkou k je kružnice nebo parabola.

A. Nechť je dána kružnice k (obr. 1) o poloměru r ($r > 0$). Nahradme oblouk \widehat{PK} (silněji vytažený) úsečkou PK tak, že platí vztah

$$d = \overline{CM},$$



Obr. 1



Obr. 2

kde M je střed úsečky PK . Předpokládáme vždy $d < r$.

Pro polovinu středového úhlu příslušného k oblouku \widehat{PK} platí

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SK}} = \frac{r-d}{r}$$

Z Eukleidovy věty aplikované na pravoúhlý trojúhelník CKD dostaneme

$$\overline{CM} \cdot \overline{MD} = \overline{MK}^2$$

tj.

$$d(2r-d) = \overline{MK}^2$$

a odtud

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{MK}}{\overline{SK}} = \frac{\sqrt{d(2r-d)}}{r}$$

a dále

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{d(2r-d)}}{r-d}.$$

Úhel α je určen vztahem

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{d(2r-d)}}{r-d}, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Máme-li nahradit oblouk \widehat{AB} kružnice k lomenou čarou c s přípustnou odchylkou d , můžeme za vrcholy lomené čáry vzít body oblouku \widehat{AB} ,

kteře dostaneme vřdy otočením předchozřho vrcholu, počinaje bodem A , po daném kruhovém oblouku o úhel α .

Takto jsme nahradili kruhovř oblouk \widehat{AB} lomenou řarou c , kteřa až na její vrcholy leří celá uvnitř kruřnice k . Chceme-li, aby úseků lomené řary c bylo co nejměně, můžeme postupovat takto: K dané kruřnici k sestrojřme soustřednou kruřnici k' o poloměru $r + d$ (obr. 2). Bude-li aproximovat kruřnici k' lomenou řarou c s přípustnou odchylkou $2d$ podle předešlého způsobu, bude tato lomená řara nahrařovat i kruřnici k s přípustnou odchylkou d . Středovř úhel odpovřdajřící jednotlivým úsekům PK lomené řary bude $\beta = 2 \arctg \frac{2\sqrt{rd}}{r-d}$, $0 < \beta < \pi$.

Jen první a poslední úsek musí být kratří. Odpovřdajřící mu středovř úhel nesmř být větří neř $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, kde α je úhel zmřněnř při nahrařování kruřnice k vepsanou lomenou řarou.

V případeř kruřnice takto celkem snadno provedeme nahraření jejího oblouku, a to nejmenřím mořnřm počtem n úseřek tak, aby nebyla překročena přípustná odchylka d .

U jinřch křřvek je nalezení lomené řary nahrařujřící křřvku k s přípustnou odchylkou d takové, ře lomená řara c se skládá z minimálnřho počtu úseků, větřinou značně obtřžné nebo aspoň velmi náročné na řas při výpořtu. Proto při aplikacřch někdy ustupujeme od pořadavku minimálnřho počtu úseků lomené řary c . Snaříme se najřt postupy, kde je úseků pokud mořná málo, avřak nalezení vrcholů lomené řary c je relativně jednoduché.

B. Nechť je dána parabola k (obr. 3) a na ní oblouk \widehat{PK} . Z lineárnř konstrukce bodů a teřen paraboly víme, ře spojnice u středu M úseřky PK s přuseřřkem T teřen t_P, t_K paraboly sestrogenřch v jejich bodech P, K , je rovnoběžná s osou této paraboly. Dále víme, ře teřna t_C , sestrogená v přuseřřku C paraboly k s přřmkou u je rovnoběžná s přřmkou PK .

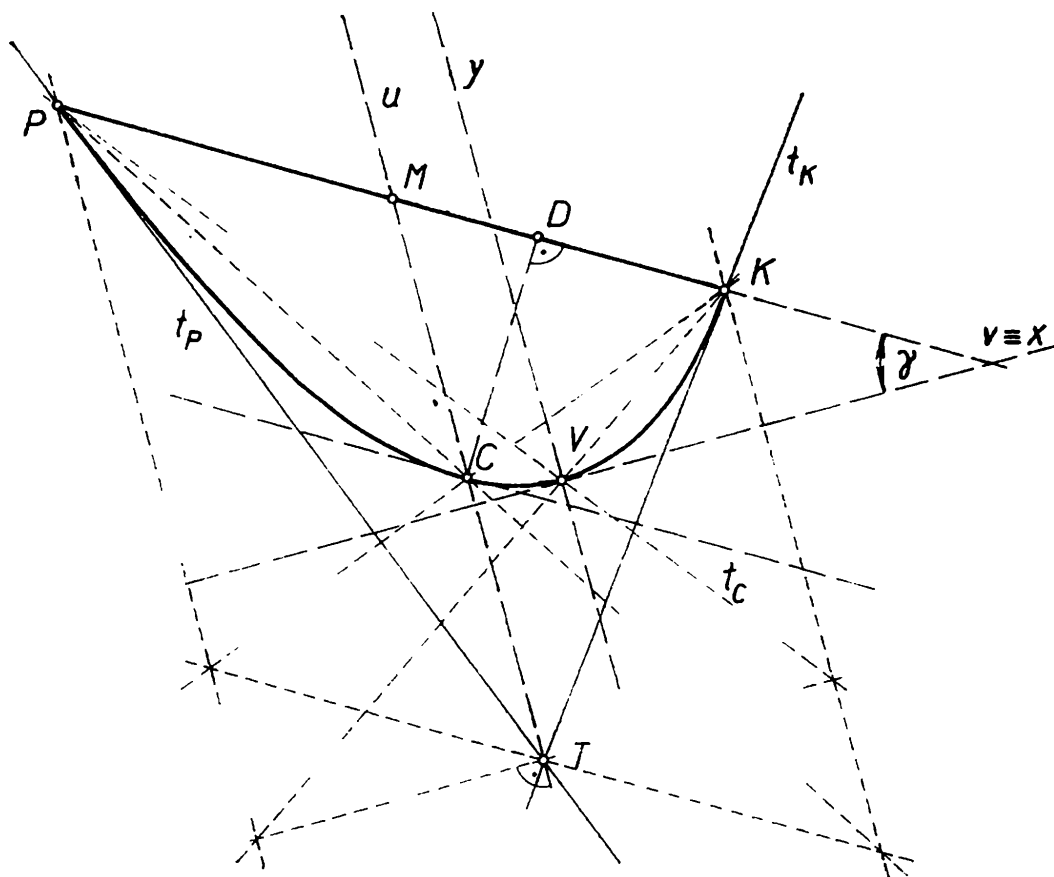
Nahradřme-li oblouk \widehat{PK} paraboly k úseřkou PK , dopustřme se odchylky $d = \overline{CD}$, kde D je pata kolmice spuřtřená z bodu C na přřmku PK . Oznařme-li úhel přřmky PK a vrcholové přřmky v paraboly k přsmenem γ , pak

$$d = \overline{CM} \cdot \cos \gamma, \quad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Zvolřme-li pravoúhlu kartézskou souřadnicovou soustavu tak, ře vrcholová přřmka v paraboly k bude osou x a osa paraboly k osou y , můžeme danou parabolu urřit rovnicř

$$y = ax^2. \quad (1)$$

Při vhodné orientaci osy y bude $a > 0$. Tuto souřadnicovou soustavu nazveme základnř pro danou parabolu.



Obr. 3

Nechť bod P má v této souřadnicové soustavě souřadnice $x_P, y_P = ax_P^2$ a bod K souřadnice $x_K, y_K = ax_K^2$. Pak souřadnice x bodů C a M budou $x_C = x_M = \frac{1}{2}(x_P + x_K)$ a jejich souřadnice y : $y_C = ax_C^2 = \frac{1}{4}a(x_P^2 + 2x_Px_K + x_K^2)$, $y_M = \frac{1}{2}(y_P + y_K) = \frac{1}{2}a(x_P + x_K)$. Odtud $\overline{CM} = |y_C - y_M| = \frac{1}{4}a|x_P^2 - 2x_Px_K + x_K^2| = a[\frac{1}{2}(x_P - x_K)]^2$.

Vzdálenost bodu C od přímky PK je dána vztahem

$$d = a \left(\frac{x_P - x_K}{2} \right)^2 \cos \gamma.$$

Úpravou dostaneme pro souřadnice krajních bodů tětivy, kterou můžeme nahradit oblouk paraboly s odchylkou d , vztah

$$|x_P - x_K| = 2 \sqrt{\frac{d}{a \cos \gamma}}.$$

Kdybychom chtěli nahradit oblouk paraboly k (při respektování přípustné odchylky d) lomenou čarou c , jejíž vrcholy by ležely na parabole, s nejmenším počtem úseček, mohli bychom (případně až na jeden) tyto úseky sestavit tak, aby jejich průměty na vrcholovou přímku měly délku $2\sqrt{d/(a \cdot \cos \gamma)}$. Protože však výpočet odchylky γ , kterou svírá

vždy příslušný úsek hledané lomené čáry s vrcholovou tečnou paraboly se pro každý další úsek mění, zjednodušíme výpočet i za cenu většího počtu úseků lomené čáry c .

Protože $0 \leq \cos \gamma \leq 1$, je

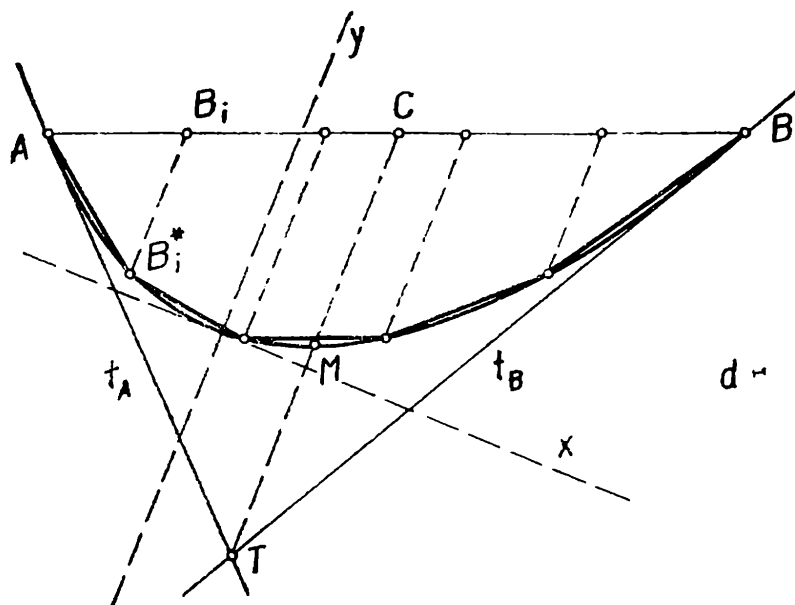
$$2 \sqrt{\frac{d}{a \cos \gamma}} \geq 2 \sqrt{\frac{d}{a}} \quad (2)$$

Za vrcholy lomené čáry lze tedy volit body, pro něž platí

$$|x_P - x_K| = 2 \sqrt{d/a}$$

Z geometrického hlediska nahrazení $\cos \gamma$ jednotkou znamená, že místo vzdálenosti $d = \overline{CD}$ měřené na kolmici k přímce PK bereme délku úsečky \overline{CM} , která je rovnoběžná s osou paraboly.

Oblouk paraboly k , který máme nahradit lomenou čarou c , bývá při aplikacích, k nimž zde hlavně přihlížíme, často dán koncovými body A , B a tečnami t_A , t_B paraboly k v nich (obr. 4).



Obr. 4

Podle předchozího pro délku úsečky \overline{CM} platí

$$\overline{CM} = a \left[\frac{1}{2} (x_A - x_B) \right]^2,$$

kde souřadnice x_A , x_B bodů A , B vztahujeme k základní souřadnicové soustavě uvažované paraboly.

Odtud plyne

$$a = \frac{4 \overline{CM}}{(x_A - x_B)^2}$$

a pro vrcholy jednoho úseku lomené čáry podle (2)

$$|x_P - x_K| = 2 \sqrt{\frac{d \cdot (x_A - x_B)^2}{4 \overline{CM}}} = |x_A - x_B| \sqrt{\frac{d}{\overline{CM}}}$$

Jeden z těchto úseků při nahrazování oblouku AB bude až na spec. případ kratší. Protože $|x_A - x_B| = |x_P - x_K| \cdot \sqrt{(\overline{CM}/d)}$, bude počet těchto úseků a zároveň i úseků lomené čáry c nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno $\sqrt{(\overline{CM}/d)}$.

Abychom dostali vrcholy lomené čáry c aproximující parabolu k , danou body A, B s tečnami t_A, t_B v nich, s odchylkou nejvýše d , stačí postupovat takto: Sestrojíme střed M úsečky AB . Sestrojíme průsečík T tečen t_A, t_B a střed C úsečky MT . Rozdělíme úsečku AB na h stejných dílů, kde h je nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno $\sqrt{(\overline{CM}/d)}$. Tím dostaneme uvnitř úsečky AB $(h - 1)$ bodů, které označíme B_i ($i = 1, 2, \dots, h - 1$). Těmito body vedeme rovnoběžky s osou paraboly. Průsečíky těchto přímek s parabolou k jsou hledané vrcholy B_i^* lomené čáry c mezi body A a B . Pro délky úseček $B_i B_i^*$ platí vztah

$$\overline{B_i B_i^*} = 4 \left(\frac{i}{h} - \frac{i^2}{h^2} \right) \overline{CM}. \quad (3)$$

Abychom se přesvědčili o správnosti tohoto tvrzení, zvolme jako souřadnicovou soustavu opět základní souřadnicovou soustavu uvažované paraboly. Bod B_i má souřadnice

$$x_i = x_A + \frac{i}{h} (x_B - x_A),$$

$$y_i = y_A + \frac{i}{h} (y_B - y_A) = a \left\{ x_A^2 + \frac{i}{h} (x_B^2 - x_A^2) \right\}$$

a bod B_i^*

$$x_i^* = x_i$$

$$y_i^* = y_i - \overline{B_i B_i^*} = y_i - \left(\frac{i}{h} - \frac{i^2}{h^2} \right) 4a \left[\frac{1}{2} (x_A - x_B) \right]^2,$$

čili

$$y_i^* = a \left\{ x_A^2 + 2 \frac{i}{h} (x_A x_B - x_A^2) + \frac{i^2}{h^2} (x_B - x_A) \right\}^2.$$

Dosadíme-li hodnoty x_i^*, y_i^* do rovnice (1), dostaneme identitu, potvrzující správnost vztahu (3).

fyzika

Energia a pracovná schopnosť

Prof. MUDr. JOZEF SKOTNICKÝ, Ústav lekárskej fyziky, Košice

Už v 17. storočí formuloval DESCARTES poučku, že celkové množstvo pohybu vo vesmíre je konštantné. Za mieru pohybu považoval však súčin hmoty a jej rýchlosti, zatiaľ čo LEIBNIZ volil správnejšie súčin hmoty a štvorca rýchlosti. Medzi stúpenkami oboch sa vyvinul dlho trvajúci spor, ktorý skončil až v polovine minulého storočia objavom zákona o zachovaní energie, ktorý formulovali nemeckí lekári MAYER a HELMHOLTZ.

Pripomeňme ovšem, že už pred nimi ruský akademik HESS experimentálne našiel zákon o zachovaní reakčného tepla, teda tepelného pohybu v oblasti chemie. Keď potom JOULE aj kvantitatívne dokázal, že teplo je tiež len jednou formou energie, stal sa *zákon o zachovaní energie* všeobecným prírodným zákonom, uznávaným vo všetkých prírodných vedách.

Názov energia (grécky = činnosť, sila, účin) zaviedol Angličan YOUNG r. 1807 ako náhradu vtedy užívaného pojmu „živá sila“. *Energia* je vlastnosťou nie len hmoty, ale aj elektrického náboja; jasne to vyjadruje terajšia medzinárodná sústava jednotiek SI, v ktorej energia má jednotku nielen $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$, ale aj VAs (volt-ampér-sekunda), kde ampér-sekunda je jednotkou elektrického náboja. Nakoľko energia sa môže meniť len z jedného druhu na iný, možno za energiu považovať všetko, čo sa zmení na kinetickú energiu a tiež, na čo sa táto energia mení. Okrem transformácie energie nastávajú v prírodných javoch tiež presuny energie medzi telesami i látkami a ich systémami; tieto presuny energie nazývame *prácou* v najširšom slova smysle.

Zákon o zachovaní energie predstavuje prírodovedecký základ materialistickej filozofie, nakoľko dokazuje nezničiteľnosť pohybu vo vesmíre. ENGELS zdôraznil, že tento zákon znamená vo fyzikálnej reči jednotnosť materiálneho sveta, lebo spája navzájom rôznorodé prírodné procesy“.

LEWIS A RANDALL v svojej Termodynamike píše: „Prvá hlavná

veta alebo zákon o zachovaní energie získal všeobecné uznanie, akonáhle bol raz vyslovený; nie snáď preto, že by v onej dobe bol potvrdzovaný mnohými experimentálnymi výsledkami, ale prevážne preto, že bol zjavne presvedčivý a bol v súhlase s ľudským spôsobom myslenia. — Preto bolo, pri rozvoji prírodných vied, potom nutné nachádzať stále nové a nové formy energie; nepreazníva kritika mohla skutočne s určitým oprávnením tvrdiť, že zákon o zachovaní energie je správny len preto, že ho správnym sami robíme prijímajúc nové formy energie, pre ktoré niet iného oprávnenia, než naše pranie uchovať energiu ako nezničiteľnú veličinu.“

Časté sú pokusy dokazovať správnosť zákona o zachovaní energie pomocou tzv. „*perpetuum mobile prvého druhu*“. Ale táto snaha nie je dobre volená, lebo je málo účelné chcieť vyrobiť nejaké množstvo energie z ničoho, keď v prírode nachádzame už nazhromaždené jej ohromné zásoby. Vyzerá to, ako by sme chceli na brehu mora stvoriť pár kvapiek vody z ničoho — teda snaženie, keď aj nie logicky chybné, predsa len smiešne a neúčelné. Skôr tu vyvstáva problém, ako užitočne využiť aspoň časť ohromných zásob energie nahromadených v prírode.

Začiatkom 20. storočia PLANCK ukázal, že atomová a molekulárna energia je kvantovaná a že sa z atómov a molekúl uvoľňuje (alebo nimi pohlcuje) len v podobe diskretných (tj. nespojitých a nerozdeliteľných) kvánt. Ku kvantovej teórii hmoty a náboja pribudla teda aj kvantová teória atomovej energie.

V našom storočí bol objavený nový významný druh energie, *energia jaderná*, ktorú sa podarilo tiež prakticky využiť, čo je dôležité hlavne preto, že je viac než miliónkrát väčšia než doteraz známe druhy energie. Uvoľňuje sa štiepením izotopov uranu, ale ďalším ešte desaťnásobne výdatnejším zdrojom jadrovej energie je syntéza vodíka na helium. Už dlho sa pracuje na tom, aby aj táto energia se dala uvoľňovať regulovateľne a nie len náhlo, ničivo ako vo vodíkovej bombe. Ďalšou výhodou tejto „kondenzačnej“ jadrovej energie sú ohromné zásoby paliva vo forme ťažkej vody, ktorú možno vyrobiť z obyčajnej v množstve 0,3 promile.

V biológii preverovali zákon o zachovaní energie na prelome nášho storočia fyziológovia pomocou priamej a nepriamej kalorimetrie. Potvrdili Hessov zákon, že spaľné teplo živín je v organizme pri studenej oxydácii práve tak veľké ako v kalorimetrickej bombe. Vyplýva to ostatne z povahy vnútornej chemickej energie ako stavovej vlastnosti látok, závislej len na ich počiatočnom a konečnom stave a nie na spôsobe a ceste, ako sa do konečného stavu dostanú. Chemická energia živín slúži za zdroj svalovej a nervovej energie a u teplokrvných živočíchov tiež ako zdroj vnútorného tepla; je vlastne uskladnenou žiarivou energiou slnečnou, ktorá sa v organických živinách zelených rastlín deponuje procesom fotosyntézy za katalytického pôsobenia chlorofylu.

Zákon o zachovaní energie platí tedy vo všetkých prírodných vedách

(aj biológii) a je jedným z najdôležitejších prírodných zákonov makro- aj mikrosveta, podobne ako zákon o zachovaní hmoty a elektrického náboja.

Zákon o zachovaní hmoty bol predpovedaný ruským akademikom LOMONOSOVom a prakticky preverený na chemických reakciách francúzskym chemikom LAVOISIERom koncom 18. storočia. Zákon o zachovaní elektrického náboja vyplýva predovšetkým z FARADAYových pokusov, provedených už pred sto rokmi, a slúži aj pri zostavovaní chemických oxydo-redukčných rovníc.

Všetky tieto tri zákony, objavené vlastne v oblasti chemie a len potom rozšírené aj do ostatných prírodných vied, platil v chemických systémoch nielen za pohybu (teda pri chemických reakciách) ale aj v klude. Preto nemôžeme pomocou nich stav pohybových rozlíšiť od kludového, teda ani predpovedať smer chemickej reakcie: či bude exotermická (tj. vydávajúca teplo), endotermická (tj. treba teplo dodať), alebo či bude zotrvať v rovnovážnom stave. K predpovedaniu smeru priebehu prírodného diania potrebujeme ďalší prírodný zákon a ďalší prírodovedný pojem: *pracovnú schopnosť*.

Zatiaľ čo pojem energie bol vytvorený až v minulom storočí, pojmy „práca“ a „pracovná schopnosť“ patria k slovnej zásobe nášho jazyka od najstarších čias. Ale prírodovednú náplň získajú tieto pojmy až vtedy, ak k tomu účelu použijeme zákon o zachovaní energie; len nutno tento zákon vyjadriť v kladnom tvare, lebo bežná negativistická forma — „energiu nemožno ani stvoriť ani zničiť“ — je málo užitočná. Pozitivisticky formulované to však znamená, že *energiu možno medzi systémami presúvať*: koľko energie jeden systém stráca, toľko jej musila druhé systémy získať. Pri týchto presuvoch energie dochádza často aj k jej zmenám — transformáciám, ktoré ale predstavujú len podružný jav, lebo nie sú nutným doprovodom presunov. Presun energie je totiž obecnnejším javom než jej transformácia, lebo s presuvom energie bez jej transformácie sa stretáme často, ale nie naopak s transformáciou energie bez jej presuvu.

Uvažovanie nad presunmi energie medzi systémami nám ľahko ozrejmí, že presuvy sa kryjú s tým, čo nazývame prácou v najširšom slova zmysle. Nás však zaujíma predovšetkým *užitočná práca*, keď totiž môžeme energiu premiestiť nie na systém vopred daný okolnosťami, ale na systém nami samými zvolený, alebo kratšie povedané „ľubovoľný“ alebo tiež v „ľubovoľnej forme, tj. vo forme nami volenej. Užitočnú prácu môžeme teda definovať ako premiestenie energie na ľubovoľný systém a v ľubovoľnom tvare. Ďalej nutno skúmať, za jakých podmienok sa koná užitočná práca (v ďalšom texte len „vlastná“ práca alebo krátko „práca“): či sa snáď koná spontánne, sama od seba, automaticky, alebo či pre jej vykonanie treba splniť určité predpoklady. — Na ľudskej spoločnosti ľahko poznáme, že práca sa nekoná sama od seba, ale že k nej sú vždy potrebné určité individuá — subjekty, ktoré sú nadané určitou pracovnou schopnosťou. Týmto jedincom venuje spoločnosť zvýšenú pozornosť

a musia byť veľmi pečlivo hodnotení a cenení. Veď všetky sociálne revolúcie vznikajú práve tým, že odmenovaní sú iní ľudia, než ktorí pracovali. Nakoľko živá príroda je nedeliteľnou súčasťou prírody celej, vyplýva z toho, že aj v neživej prírode sa práca nikdy nekoná sama od seba, ale že k nej je vždy a nutne potrebný najaký systém telies alebo látok. Týmto musíme teda priznať nielen určitú vnútornú energiu, ale (a nezávisle na nej) aj určitú pracovnú schopnosť, ktorá im umožní konať prácu, tj. premiestňovať energiu z jedných systémov na iné, nami vopred určené; a podľa veľkosti tejto maximálne premiestenej energie meriame veľkosť vykonanej práce aj pracovnej schopnosti systému. Na konanie práce potrebuje pracujúci systém aspoň rovnako veľkú pracovnú schopnosť, ale nepotrebuje k nejnutne vlastnú energiu, lebo túto si podľa našich skúseností môže nabráť z okolia vo forme tepla. Túto schopnosť resorbovať teplo z okolia majú všetky látky a to na základe určitej svojej vlastnosti, ktorú nazývame *entropiou*. Energia aj pracovná schopnosť musia byť stavovými vlastnosťami systémov, lebo hovoriť exaktne o pracujúcom systéme môžeme vtedy, ak vieme a priori určiť veľkosť tejto práce v závislosti od počiatočného a konečného stavu systému.

Druhou podmienkou konania práce je *stroj*, pomocou ktorého systém prácu koná, alebo — presnejšie povedané — zariadenie, ktorým nutíme systém ku konaniu práce a tak využívame jeho pracovnú schopnosť. Ak nejaký systém prechádza spontánne z jedného stavu do druhého, môže pritom konať prácu, ale aj nemusí; záleží na tom, či je k nej nútený alebo nie. Jeho pracovná schopnosť však pritom v oboch prípadoch klesne o tú istú hodnotu: v prvom prípade sa ovšem premiesti na iný systém a tak se zachová, zatiaľ čo v druhom prípade se stratí, ako ukážeme príkladom slnečného žiarenia. Stroje teda nie sú žiadne subjekty konajúce prácu, ale iba pomôcky pre tieto subjekty. Preto zostávajú dlhú dobu nepotrebované a nezmenené, zatiaľ čo u pracujúcich subjektov nastáva energetická degradácia spočívajúca v znížení ich pracovnej schopnosti.

Z týchto úvah zjavne vyplýva aj nemožnosť zostrojiť perpetuum mobile, tj. stroja, ktorý by konal prácu stále sám, bez subjektu nadaného pracovnou schopnosťou. K využitiu pracovnej schopnosti novoobjavených systémov sú obyčajne potrebné aj nové vhodné stroje, čo správne formuloval už pred 150 rokmi SADI CARNOT vo svojej stati: „*Úvahy o pracovnej schopnosti ohňa (tepla) a o strojoch vhodných k využitiu tejto schopnosti.*“

Tieto úvahy a skutočnosti pripúšťajú aj takýto názorný výklad: v priebehu prírodných dejov je energia len pasívnou vlastnosťou systémov; aktívnym činiteľom, ktorý s ňou disponuje a manipuluje, tj. presúva ju medzi systémami, je pracovná schopnosť. Často užívaná populárna definícia „energia je schopnosť konať prácu“ nemôže teda byť správna.

Energetiku možno vhodne definovať ako náuku o presuvoch energie. Svieťace Slnko, zohrievajúc našu Zem, koná prácu, lebo žiarivá energia

slnka sa premiestuje na zemský povrch a vybavuje sa tam vo forme tepla. Keby ľudia chceli podobne zohriať zemský povrch, museli by na to vynaložiť ohromnú prácu. Vítané by bolo, keby sa slnečnou energiou mohli vyhrievať naše príbytky. Dosiahli by sme to umiestnením do ohnísk ohromných zrkadiel alebo pomocou veľkoplochých kremíkových fotočlánkov; elektrický prúd v nich vyrobený by sme mohli užiť v mnohých formách. V tomto druhom prípade by sme teda mohli premiestiť slnečnú energiu nielen na ľubovoľné miesto, ale aj ľubovoľne.

Pracovná schopnosť riek, voľne tečúcich z vrchov do mora, je tedy využitá len k erózii ich brehov a koryta. Úžitočnú prácu môžeme však od nich získať vybudovaním hrádzí a elektrických hydrocentrál, takže potom je možné premiestiť potenciálnu energiu na ľubovoľný systém a v ľubovoľnej forme.

Zákon zachovania energie hovorí, že energia sa v látkach zachováva za každých okolností, tj. v klude aj pri pohybu, keď sa v látkach premiestuje z jednej na druhú. V kludových podmienkach sa v látkach zachováva aj pracovná schopnosť, ale za podmienok pohybových len pri tzv. *reverzibilných* (tj. vratných) dejoch, ktoré však v skutočnosti neexistujú (sú len teoreticky vymyslené ako limitné prípady). V prírode jestvujú len deje nevratné (*ireverzibilné*), pri ktorých sa vždy aspoň časť pracovnej schopnosti stráca, mizne. Preto je možné formulovať druhý hlavný zákon termodynamiky ako *zákon o neustálom poklese pracovnej schopnosti látok v priebehu prírodného diania* a pomocou neho rozlíšiť stavy pohybové od kludových. Kludové stavy v prírodných sústavách nazývame tiež *rovnovážnymi*; sú to práve stavy s nulovou pracovnou schopnosťou.

Od úspešnej formulácie druhého hlavného zákona energetiky je už len krok aj k formulácii všeobecného prírodného *zákona monokauzalizy* (= princíp uznávajúci jedinú príčinu). Keďže druhá hlavná veta rozlišuje stav pohybový od kludového, možno pomocou nej predpovedať smer prírodného diania. A pretože pokles pracovnej schopnosti je jediným všeobecným znakom, ktorý sprevádza každý spontánny prírodný proces, potom nielenže môžeme, ale dokonca musíme tento jediný znak povýšiť na príčinný princíp priebehu prírodného diania. Keby totiž jestvovalo viacero všeobecných znakov, odlišujúcich prírodné procesy od stavov kludových, mohli by sme byť v rozpak, ktorý z nich je znakom príčinným. Keďže však je nám známy len jediný takýto všeobecný znak, môžeme ho celkom určite označiť za príčinný, lebo nás rozum inklinuje k uznaniu kauzality každého diania. Sme teda oprávnení vyhlásiť: príčinu prírodného diania treba hľadať v snahe*) telies a látok aj ich systémov znížiť svoju pracov-

*) Bolo by možné namietajú, že pojem „snaha“ s ktorým sa stretávame u živých jedincov, nie je možné aplikovať aj na neživé systémy. Ale aj Newton použil pojem „sily“, predtým známy len v živej prírode, aj pre neživé telesá a pomocou neho vyjadril svoj gravitačný zákon. A dokonca príťažlivá sila medzi telesami tiež len vyjadruje snahu telies po ich vzájomnom sblížení.

nú schopnosť. Zákon monokauzality znamená podstatný prínos pre mateiralistickú filozofiu, lebo stanoví jednotnú objektívnu príčinu všetkého prírodného diania, ktorú jednotlivé náboženstvá pripisujú svojim bohom (ako personifikovaným príčinám prírodného diania).

V zmysle výskumu kauzality napísal HELMHOLTZ už pred sto rokmi: „Keď chceme hovoriť o pokroku celej prírodovedy, tak prvá otázka, ktorú musíme zodpovedať, bude táto: Podľa jakého merítka máme takýto pokrok posudzovať? Ak sa teda pýtame na pokrok prírodovedy jako celku, musíme ho posudzovať podľa toho, nakoľko pokročilo poznanie a uznanie príčinnej súvislosti zahrňujúcej všetky prírodné javy“.

astronomie

Existujú „černé jámy“ ?

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Ve středu zájmu astrofyziků jsou stále problémy vzniku a vývoje hvězd. Otázka vzniku hvězd je již v podstatě vyřešena; v současné době je známo, že hvězdy vznikají ze zhuštění mezihvězdné látky. Rovněž vývoj hvězd je velmi podrobně zkoumán a neustále jsou počítány nové modely vývoje hvězd v závislosti na počátečních podmínkách jejich vzniku. Ukazuje se, že základní význam ve vývoji hvězdy má její počáteční hmotnost a chemické složení. Jestliže však hvězdy vznikají a vyvíjejí se, musí také jejich vývoj končit — hvězdy zanikají. Poslední fáze vývoje hvězd nejsou dosud dostatečně prozkoumány. Teoretické výzkumy však ukázaly, že i zde hraje významnou roli hmotnost hvězdy.

Víme, že zdrojem energie, kterou hvězdy vyzařují, jsou termonukleární reakce, při nichž se přeměňuje vodík na hélium. Pokud má hvězda dostatečné zásoby vodíku, je tlak, působený gravitací, v rovnováze s tlakem žhavých plynů a s tlakem záření. Zásoby vodíku ve hvězdách jsou nepředstavitelně velké — u hvězd hlavní posloupnosti tvoří vodík většinu látky hvězdy — jednou se však vyčerpají. Pak již tlak plynu a záření nestačí kompenzovat gravitaci a hvězda se začne smršťovat. Kdy se toto smršťování zastaví, to závisí na hmotnosti hvězdy. Je-li hmotnost hvězdy poměrně malá a nepřevyšuje 1,2 hmotnosti Slunce pak bude jednou z posledních fází jejího vývoje stadium bílého trpaslíka

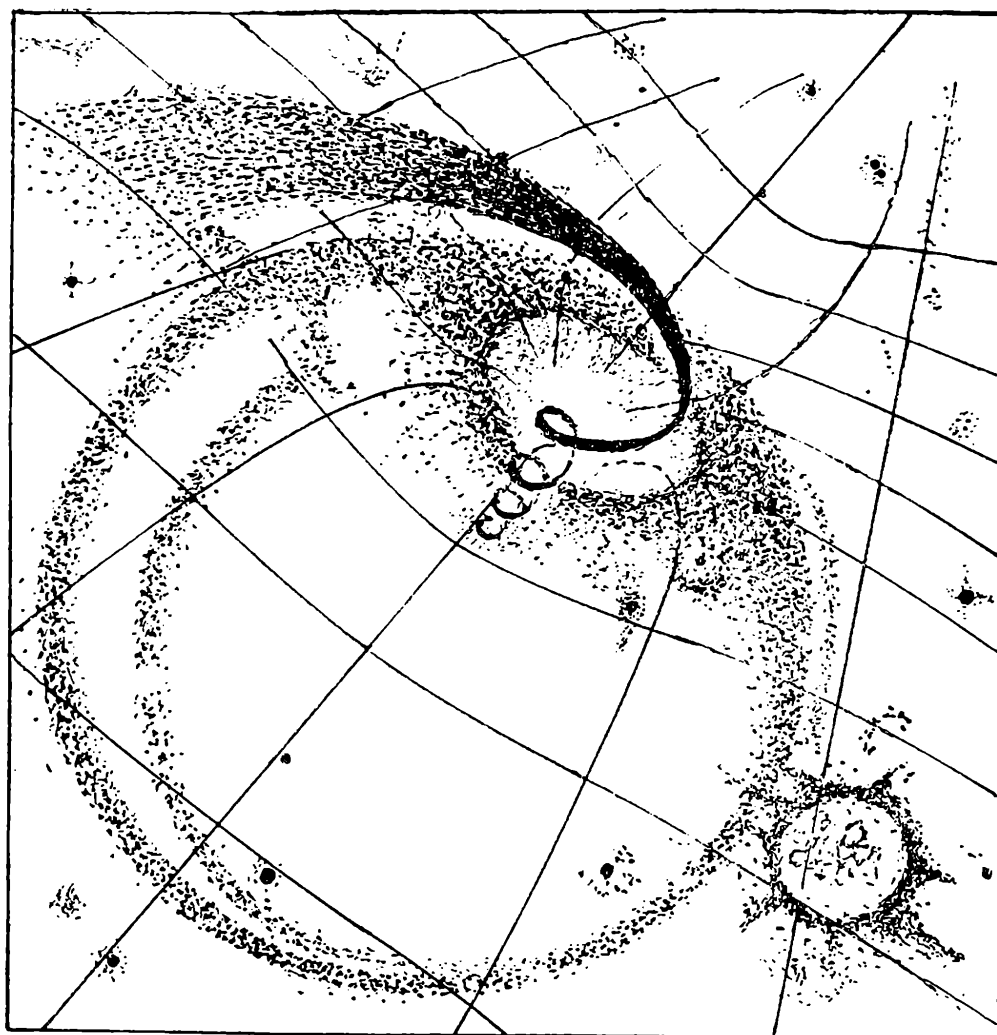
Připomínáme, že bílí trpaslíci jsou hvězdy s malým poloměrem, srovnatelným s poloměry planet sluneční soustavy, a s obrovskou hustotou. U bílých trpaslíků je gravitační tlak, snažící se hvězdu smrštit, v rovnováze s tlakem elektronového plynu. Je-li hmotnost hvězdy větší, pak již elektronový plyn nestačí kompenzovat gravitaci, smršťování probíhá dále a hustota v nitru hvězdy roste až na hodnotu hustoty v jádrech atomů. Elektrony se spojují s protony a vytvářejí neutrony — mluvíme pak o neutronových hvězdách. Tlak neutronového plynu, který vyplňuje téměř celý objem hvězdy, je v rovnováze s gravitací. Poloměry neutronových hvězd jsou jen kolem 10 km a intenzita gravitačního pole v jejich blízkosti dosahuje obrovských hodnot. Tlak neutronového plynu stačí vyrovnat gravitační tlak, jestliže hmotnost hvězdy nepřevyšuje dvojnásobek hmotnosti Slunce.

Není snad nutno připomínat, že bílí trpaslíci skutečně existují a je jich znám poměrně velký počet. Existence neutronových hvězd byla až do nedávné doby jen v oblasti teorie, ale v současné době jsou za neutronové hvězdy pokládány pulsary, objevené v roce 1967. O pulsarech jsme psali v tomto časopise v článku „Jsou pulsary neutronové hvězdy?“ — RMF, 50, 1971/72, č. 2, str. 76 až 79.

Zůstává nyní otázka, jak končí svůj vývoj ty hvězdy, jejichž hmotnost je větší než dvojnásobek hmotnosti Slunce. Teorie vede k závěru, že taková hvězda se při smršťování nezastaví ani ve stadiu bílého trpaslíka a dokonce ani ve stadiu neutronové hvězdy; při smršťování projde rychle těmito stadii a smršťování probíhá dále tak dlouho, až se hvězda smršťí na jediný bod, přičemž ovšem její hustota nabývá nekonečně velké hodnoty. Tomuto procesu smršťování hvězdy říkáme gravitační kolaps hvězdy. Hvězdy, u nichž tento proces probíhá, dostaly název „*zřícené hvězdy*“ nebo „*kolapsary*“, často se pro tyto objekty užívá také názvu „*černé jámy*“. Tento poslední název souvisí se skutečností, že takové hvězdy nemůžeme přímo pozorovat. Podle Einsteinovy obecné teorie relativity se kolem tělesa s tak velkou hmotností a hustotou zakříví prostor tak, že z něj nemohou uniknout žádné hmotné částice, tedy ani fotony. Černá jáma nevysílá žádné záření, a proto je „*neviditelná*“. Jediné, čím se může navenek projevit, jsou její gravitační účinky na jiná tělesa.

O existenci černých jam ve vesmíru nemá dosud astrofyzika přímé důkazy, avšak teoreticky je již celý proces gravitačního kolapsu prozkoumán. Podle obecné teorie relativity by gravitační kolaps probíhal jinak pro pozorovatele, který by byl na povrchu hroutící se hvězdy a jinak pro vnějšího pozorovatele, tj. pro pozorovatele, který pozoruje gravitační kolaps z velké vzdálenosti. V podmínkách hroutící se hvězdy se totiž mění nejen geometrie prostoru (prostor se zakřivuje), ale mění se i délky a také čas plyne jinak.

Pro pozorovatele na povrchu hvězdy, tj. pro pozorovatele, který by



se účastnil kolapsu, by smrštění hvězdy na jediný bod trvalo jen velmi krátkou dobu a není třeba ani připomínat, že od určitého okamžiku by již z povrchu hroučící se hvězdy nemohl uniknout: se zmenšováním poloměru hvězdy roste úniková rychlost, až dosáhne takových hodnot, že již hvězdu nemohou opustit ani fotony, pohybující se rychlostí světla.

Vnější pozorovatel by při hroucení hvězdy zjistil, že se vlnová délka vysílaného záření postupně prodlužuje (fotony spotřebují stále větší část své energie při výstupu z gravitačního pole) a nakonec hvězda přestane zářit vůbec. Pokud by pozorovatel měl možnost sledovat změny poloměru hvězdy, pak by v důsledku relativistických změn prostoru a času zjistil, že smršťování se zpomaluje a zastaví se na sice velmi malé, ale konečné hodnotě poloměru.

Existence černých jam byla teoreticky předpovězena již v roce 1939. Připomeňme, že neutronové hvězdy byly teorii známy 34 let, než byly objeveny v podobě pulsarů; můžeme proto pokládat za pravděpodobné, že také černé jámy budou v dohledné době objeveny. Astronomové, povzbuzeni objevem neutronových hvězd, již po černých jámách pátrají a zkoumají objekty, u nichž je jistá pravděpodobnost, že se jedná

o hvězdy ve stadiu gravitačního kolapsu. Tyto objekty sice nemohou přímo vidět ani fotografovat, neboť, jak již bylo řečeno, nevysílají žádné záření, ale pátrá se po nich na základě jejich gravitačního účinku. O možnostech a metodách tohoto pátrání budeme čtenáře informovat v některém dalším článku.

Ženy a astronomie

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ - RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V dějinách astronomie se prakticky až do konce 19. století setkáváme se jmény jen několika žen, které si svou prací zajistily trvalé místo mezi stovkami mužů. Ve dvacátém století se již situace ve prospěch žen — vědeckých pracovnic — podstatně zlepšila. Mnoho žen je universitními profesorkami astronomie či ředitelkami vědeckých ústavů a autorkami řady vědeckých prací. Avšak praxe v uveřejňování vědeckých prací v časopisech se v posledních letech ustálila na tom, že ze jména se obvykle píše pouze zkratka a příjmení žen, jak známo, se ve většině jazyků (s výjimkou slovanských) žádným způsobem neliší od příjmení mužů. A tak se někdy stávalo, že jsme mohli číst, že „sovětští astronomové Masevič a Gaze objevili...“, nebo že „Američané Bok a Reilly pozorovali...“, nebo že „finský astronom Oterma objevil kometu“, ačkoliv šlo v těchto případech o A. G. Masevičovou, V. F. Gazeovou, Edith F. Reillyovou a L. Otermovou. Totéž se stalo i nám v článku „Co jsou symbiotické hvězdy?“ (RMF 50, 1971/72, č. 8), v němž jsme Rosannu Faraggianovou a Margheritu Hackovou citovali, jako by to byli muži. Vraťme se však o několik století zpět a připomeňme, které ženy-astronomky svými výzkumy přispěly k poznání vesmíru.

Nejznámější ženou v dějinách astronomie je Karolina Lukrecie Herschelová, sestra a spolupracovnice slavného anglického astronoma Williama Herschela. Narodila se 16. března 1750 a zemřela 9. ledna 1848 (ve věku 98 let). Během svého života objevila osm komet a 14 mlhovin. V roce 1819 astronom Encke dokázal, že komety, objevené v r. 1785, 1786 (objevila K. Herschelová) a v r. 1818 jsou jednou a touž kometou, která se pohybuje kolem Slunce po eliptické dráze s dobou oběžnou 3,3 roku. Na počest Enckea byla tato kometa nazvána jeho jménem. Francouzský astronom R. Rigollet objevil v r. 1939 novou kometu, o níž se ukázalo, že je totožná s kometou, kterou objevila K. Herschelová 21. prosince 1788. Tato kometa je v historii astronomie uváděna jako kometa K. Herschel-Rigollet. Kometa se pohybuje po eliptické dráze s dobou oběžnou 156,04 roku.

V Rusku se v 19. století narodily čtyři ženy, které se proslavily v astronomii. Nejstarší z nich byla Lidie Petrovna Ceraskaja (1855 až 1931), která pracovala na astronomické observatoři Moskevské university. Během svého života objevila Ceraskaja 218 nových proměnných hvězd. Druhou v pořadí je Nina Fedorovna Bojeva (1890 až 1956), vědecká pracovníce Astronomického ústavu v Leningradě, která v roce 1930 vypočítala efemeridu osmého měsíce Jupiterova. Tento měsíc byl sice objeven již v roce 1908, ale pro malý počet pozorování nemohla být vypočtena jeho dráha, takže byl po řadu roků „nezvěstný“. Teprve výpočty Bojevové umožnily S. B. Nicholsonovi, aby 22. listopadu 1930 na Lickově observatoři „ztracený“ osmý měsíc Jupiterův znovu objevil. Třetí ženou je Pelageja Fedorovna Šajnová (1894 až 1956), která na Simeizské observatoři (Krym) objevila 15. srpna 1928 planetku, která později obdržela pořadové číslo 1112 a jméno Polonia. Byla to první planetka, kterou objevila žena. Čtvrtou ruskou astronomkou, narozenou v minulém století, je Věra F. Gazeová (1899 až 1954), která spolu s akademikem G. A. Šajnem objevila řady plynných mlhovin pomocí světelných meniskových dalekohledů. V r. 1952 vydala spolu s G. A. Šajnem dílo „Atlas diffuznych gazovych tumannostěj“ a v r. 1955 „Atlas emissionnych tumannostěj“.

V Americe se na sklonku 19. a začátkem 20. století objevují jména tří žen. Jsou to A. Mauryová, A. Cannonová a H. Leavittová. Na Harvardově observatoři pracovala Anna Cannonová, která spolu s E. C. Pickeringem vydala v letech 1918 až 1924 dílo, obsahující klasifikaci spekter 225 330 hvězd. Další žena, A. C. Mauryová na téže observatoři již v r. 1897 zjistila, že původní posloupnost spektrálních tříd A, B, . . . Q (tj. v pořadí od nejteplejších hvězd k nejchladnějším) není správná, dále že některé třídy jsou zbytečné a jiné že je nutno přesunout. Výsledkem je dnešní — poněkud nelogická — posloupnost spektrálních tříd, tak jak ji známe z učebnic, tj. ve sledu O, B, A, F, G, K, M.

Třetí americkou astronomkou je Henrietta S. Leavittová (1868 až 1921), která se v r. 1912 proslavila objevem závislosti mezi absolutní hvězdnou velikostí a délkou periody u proměnných hvězd, nazývaných cefeidy. Studovala cefeidy v Malém mračnu Magellenově a zjistila, že cefeidy s nejdelší periodou světelných změn jsou také nejjasnější. Tento objev přispěl k tomu, že je možno určovat vzdálenosti galaxií, v nichž byly objeveny cefeidy.

V našem století, jak jsme již uvedli, se často setkáváme se jmény mnoha vědeckých pracovníků. Tak např. v r. 1943 objevila finská astronomka L. Otermová na hvězdárně v Turku novou kometu (označenou 1942 VII., tj. sedmá kometa, která roku 1942 prošla periheliem). Je to periodická kometa (v literatuře se označuje P/Oterma) a její oběžná doba je 7,89 roku. Téhož roku vydali v USA W. W. Morgan, P. Keenan

a E. Kellmannová na Yerkesově hvězdárně dílo „An Atlas of Stellar Spectra“ (označuje se jako yerkeská klasifikace nebo též MKK), v němž vypracovali dvojrozměrnou klasifikaci spekter hvězd. O deset roků později navrhli ve Francii C. Dhalonge a L. Divanová další zpřesnění této klasifikace, do níž zavedli ještě třetí parametr, čímž vznikla tzv. tříparametrická klasifikace hvězdných spekter. V r. 1947 američtí astronomové B. J. Bok a Edith F. Reillyová zjistili, že na světlé pozadí mlhoviny M 8 se promítají malé černé skvrny, velmi ostře ohraničené. Některé mají tvar nepravidelný, jiné kruhový nebo oválný. A tyto poslední nazvali Bok a Reillyová globulae (kuličky). Jde zřejmě o kulovité formace tmavé mezihvězdné látky. A připomeňme, že studiu globulí se věnovala sovětská astronomka L. N. Ruskolová, která vypočítala, že hmotnost globulí o průměru 0,1 parseku je asi 10 hmotností Slunce.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení příkladů loňské soutěže Rozhledů

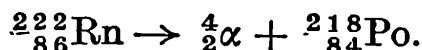
Fyzika

1. Vypočítejte množství tepla v joulech, které se uvolní za jednu sekundu z jednoho gramu alfa radioaktivního izotopu ${}^{222}_{86}\text{Rn}$. Energie vylétujících částic alfa je 5,5 MeV a poločas rozpadu radonu je 3,8 dne. (Při výpočtu neuvažujte produkty dalšího rozpadu.)

(Došlo 5 řešení)

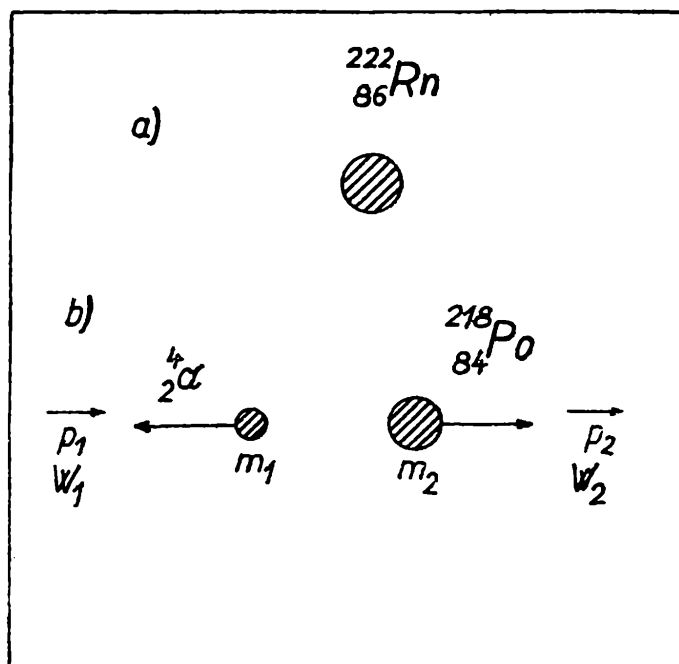
Zdeněk Janout

Řešení autorovo: Pochod, který nastává při rozpadu radonu lze schematicky zapsat ve tvaru



Jádro polonia Po^{218} se dále rozpadá, avšak podle zadání příkladu tento další rozpad neuvažujeme.

Energii E_r , která se uvolní při rozpadu jednoho jádra radonu, vypočteme podle zákonů zachování energie a hybnosti. Za předpokladu, že rozpadající se jádro bylo v klidu, platí (viz obr. 1):



Obr. 1. Jádru radonu
a) před rozpadem, b) po rozpadu

$$E_r = W_1 + W_2, \text{ zákon zach. energie,} \quad (1)$$

$$p_1 = p_2, \text{ zákon zach. hybnosti,} \quad (2)$$

kde

$$W_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} \quad W_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} \quad (3)$$

jsou kinetické energie částice alfa a jádra polonia po rozpadu, p_1 , p_2 , m_1 , m_2 jejich hybnosti a hmotnosti.

Užitím (3) lze upravit vztah (2) na tvar:

$$m_1 W_1 = m_2 W_2, \quad (4)$$

Za pomoci vztahu (4) vyloučíme z rovnice (1) neznámou energii W_2 . Dostaneme:

$$E_r = W_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right). \quad (5)$$

Tato energie se při zabrzdění částice alfa a jádra polonia v okolním prostředí přemění v teplo.

Nyní určíme počet jader radonu, která se rozpadnou během času t . Ubývání radioaktivní látky se řídí podle rozpadového zákona

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}.$$

kde $N(0)$ je počet aktivních jader v čase $t = 0$, $N(t)$ je počet dosud ne-

rozpadlých jader v čase t a λ je rozpadová konstanta související s poločasem rozpadu T vztahem:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Počet rozpadlých jader za čas t je roven

$$n(t) = N(0) - N(t) = N(0) (1 - e^{-\lambda t}).$$

a energie uvolněná při rozpadu těchto jader je rovna

$$E = E_r n(t) = W_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \cdot N(0) (1 - e^{-\lambda t}). \quad (6)$$

Počet $N(0)$ aktivních jader v m gramech látky určíme touto úvahou: Jeden gram atom látky má hmotnost A gramů a obsahuje podle Avogadrova zákona $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ atomů. Hmotnost jednoho atomu je tedy A/N_0 ; kde A je hmotové a N_0 Avogadrovo číslo.

Dělíme-li nyní hmotnost m látky hmotností A/N_0 jednoho atomu, dostaneme počet $N(0)$ aktivních jader. Platí tedy

$$N(0) = \frac{m N_0}{A} \quad (7)$$

Užitím (7) upravíme vztah (6) na hledaný tvar

$$E = W_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right) \frac{m N_0}{A} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t}\right) \quad (8)$$

kde za hmotnosti m_1 , m_2 byla dosazena hmotová čísla A_1 , A_2 , neboť $m_1 = \frac{A_1}{N_0}$, $m_2 = \frac{A_2}{N_0}$, odtud $m_1/m_2 = A_1/A_2$.

Dosadíme-li do rovnice (8) číselné hodnoty: $W_1 = 5,5 \text{ MeV} = 5,5 \cdot 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$, $A_1 = 4$, $A_2 = 218$, $A = 222$, $m = 1 \text{ g}$, $T = 3,8 \text{ d} = 3,8 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}$, $t = 1 \text{ s}$, dostaneme $E = 5000 \text{ J}$.

Z jednoho gramu radioaktivního izotopu radonu se uvolní za jednu sekundu asi 5000 joulů.

2. Máme nabít kondenzátor o kapacitě $C_0 = 750 \text{ pF}$ na napětí alespoň 1000 V. Ale k dispozici máme pouze anodovou baterii o napětí $U_0 = 200 \text{ V}$. Jediné součástky, které při ruce máme jsou vodiče, vypínače a jeden kondenzátor s měnitelnou kapacitou od $C_1 = 500 \text{ pF}$ do $C_2 = 50 \text{ pF}$. (Otočný kondenzátor.)

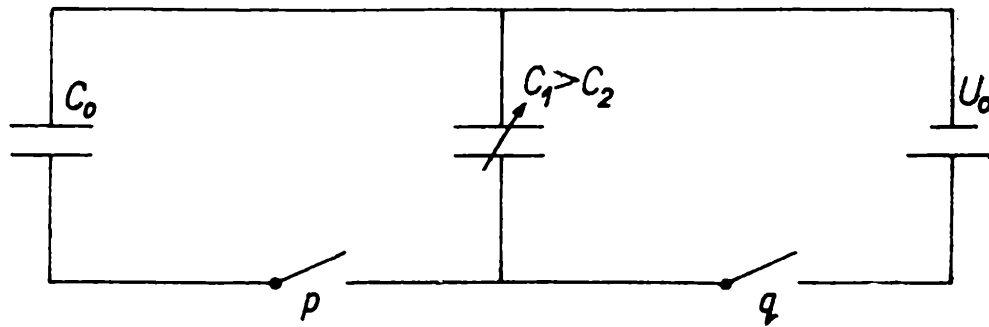
Navrhněte zapojení a postup, jak je možné tento problém vyřešit.

(Došla 4 řešení)

Stanislav Kunc

Podle řešení Václava Salače, II.a gymnasium, Praha 4.

Oba kondenzátory zapojíme paralelně ke zdroji podle vyobrazení ve schématu.



Dané hodnoty:

$U_0 = 200 \text{ V}$; $C_0 = 750 \text{ pF}$; $C_1 = 500 \text{ pF}$; $C_2 = 50 \text{ pF}$; $U = 1000 \text{ V}$.
 Nejprve nabijeme oba kondenzátory na napětí U_0 , otočný kondenzátor je nastaven na C_1 . Pak odpojíme vypínačem q od zdroje a změním kapacitu otočného kondenzátoru na C_2 . Zmenšením kapacity se zvýší napětí a část náboje z otočného kondenzátoru odteče na C_0 . Poté vypneme vypínač p a nabijeme otočný kondenzátor s kapacitou C_1 na napětí U_0 . Vypneme q , zapneme p a zmenšíme kapacitu na C_2 atd. Děj opakujeme tak dlouho, dokud nedosáhneme na kondenzátoru o kapacitě C_0 požadovaného napětí U .

Podle zákona zachování náboje platí pro

$$1. \text{ krok: } U_0(C_1 + C_0) = U_1(C_0 + C_2) \Rightarrow U_1 = U_0 \frac{C_0}{C_0 + C_2} + U_0 \frac{C_1}{C_0 + C_2} \quad (1)$$

$$2. \text{ krok: } U_1 C_0 + U_0 C_1 = U_2(C_0 + C_2) \Rightarrow U_2 = U_1 \frac{C_0}{C_0 + C_2} + U_0 \frac{C_1}{C_0 + C_2} \quad (2)$$

$$3. \text{ krok: } U_2 C_0 + U_0 C_1 = U_3(C_0 + C_2) \Rightarrow U_3 = U_2 \frac{C_0}{C_0 + C_2} + U_0 \frac{C_1}{C_0 + C_2} \quad (3)$$

$$n. \text{ krok: } U_{n-1} C_0 + U_0 C_1 = U_n(C_0 + C_2) \Rightarrow U_n = U_{n-1} \frac{C_0}{C_0 + C_2} + U_0 \frac{C_1}{C_0 + C_2} \quad (n)$$

Postupným dosazením (1) do (2) do (3) atd. do (n) dostáváme

$$U_n = U_0 \left\{ \left(\frac{C_0}{C_0 + C_2} \right)^n + \frac{C_1}{C_0 + C_2} \left[\left(\frac{C_0}{C_0 + C_2} \right)^{n-1} + \left(\frac{C_2}{C_0 + C_2} \right)^{n-2} + \dots + \left(\frac{C_0}{C_0 + C_2} \right) + 1 \right] \right\}.$$

Geometrickou řadu v hranaté závorce sečteme a po úpravě dostáváme

$$U_n = U_0 \left[\frac{C_1}{C_2} - \left(\frac{C_0}{C_0 + C_2} \right)^n \cdot \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1}{C_0} - 1 \right) \right].$$

Rovnici upravíme a zlogaritmuje

$$n = \frac{\log C_0 (U_0 C_1 - U_n C_2) - \log U_0 (C_1 C_0 + C_2 C_1 - C_2 C_0)}{\log C_0 - \log (C_0 + C_2)}$$

Položíme-li $U_n = 1000$ V, dostaneme $n = 10,14$.

Děj musíme opakovat alespoň jedenáctkrát.

olympiády

Úlohy pro první kolo XV. ročníku FO

Kategorie A

1. Z boční stěny nádrže vychází n trubice délky r , jejichž osy svírají s vodorovnou rovinou ostré úhly $\alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha$. Průřechy těchto os se stěnou nádrže leží v téže vodorovné rovině. V nádrži je kapalina o hustotě ρ a v místech připojení trubice ke stěně nádrže je udržován stálý přetlak p vzhledem k atmosférickému tlaku. Průřez trubice svírající s vodorovnou rovinou úhel α je S_1 . a) Určete průřez S_k trubice svírající s vodorovnou rovinou úhel $k\alpha$ ($1 < k \leq n$) tak, aby touto trubicí vytékal za stejnou dobu stejný objem kapaliny jako trubicí první. b) Určete poměr q celkové kinetické a celkové potenciální tíhové energie kapaliny vytékající z trubice. Předpokládáme, že nulová potenciální energie tíhová je ve vodorovné rovině, v níž leží průřechy os trubice s boční stěnou nádrže.

2. Je-li ve výšce h_0 nad povrchem Země atmosférický tlak b_0 a hustota

vzduchu ρ_0 , pak ve výšce h nad povrchem Země je atmosférický tlak

$$b = b_0 \cdot \exp \left[- \frac{\rho_0}{b_0} g (h - h_0) \right],$$

kde g značí tíhové zrychlení a znak „exp“ představuje zápis přirozené exponenciální funkce:

místo e^x píšeme $\exp x$

(e značí základ přirozených logaritmů).

Obdobný vztah

$$b' = b'_0 \exp \left[- \frac{\rho'_0}{b'_0} g (h - h_0) \right]$$

by platil, kdyby plynový obal Země byl tvořen jakýmkoli plynem, který ve výšce h_0 má hustotu ρ'_0 .

Uvedené vztahy platí za předpokladu, že teplota plynu je ve všech výškách konstantní.

a) Stanovte (konstantní) objem V plynové náplně balónu, který má vystoupit z výšky $h_0 = 0$ do výšky h ; balón byl ve výšce $h_0 = 0$ zcela naplněn plynem, který v této výšce má hustotu ρ'_0 ($\rho'_0 < \rho_0$). Konstrukce balónu se zátěží má celkovou hmotnost m_b a objem zanedbatelný proti objemu V . Balón je dole opatřen otvorem, který umožňuje vyrovnávání tlaku plynové náplně s tlakem okolního vzduchu. Tento otvor je tak malý, že lze zanedbat difúzi mezi plynem v balónu a okolním vzduchem.

b) Určete absolutní a relativní úbytek hmotnosti plynové náplně balónu ve výšce h .

c) Určete výšku Δh , o kterou balón ještě vystoupí, když ve výšce h se uvolní část zátěže o hmotnosti Δm_b . Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\rho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$; $\rho'_0 = 0,400 \rho_0$; $h = 5000 \text{ m}$; $m_b = 2500 \text{ kg}$; $\Delta m_b = 50,0 \text{ kg}$; $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $b_0 = 760 \text{ Torr}$.

Poznámka: K řešení úlohy lze doporučit prostudování článku „Barometrická formule a její aplikace“ od Ing. Bohumila Vybírala, CSc.; článek byl uveřejněn v Rozhledech matematicko-fyzikálních, ročník 51, školní rok 1972/73, číslo 1, září 1972.

3. Ďalekohľad je zaostrený tak, že okom, akomodovaným na nekonečno, v ňom vidíme ostrý obraz Mesiaca. Vo vzdialenosti d od okuláru umiestnime tienidlo.

Ako musíme posunúť okulár, ktorý má ohniskovú vzdialenosť f , aby sa ostrý obraz Mesiaca objavil na tienidle?

Úlohu riešte pre ďalekohľad

- hvezdársky (Keplerov)
- terestrický (Galileov)

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $f = 2,00 \text{ cm}$; $d = 16,0 \text{ cm}$.

Kategorie B

1. Nádoby, jejichž objemy jsou V_1 , V_2 , obsahují dva plyny o tlacích p_1 , p_2 a teplotách T_1 , T_2 . Jsou spojeny trubicí, která je opatřena kohoutem. Když kohout otevřeme, plyny se promísí a jejich výsledná teplota a výsledný tlak se ustálí na hodnotách T , p .

Určete tyto hodnoty T , p za předpokladů, že oba plyny jsou dokonalé, že Poissonova konstanta má pro ně stejnou hodnotu a že nádoby, spojovací trubice a kohout jsou z materiálu, který nevede teplo.

2. Ladičku položíme horizontálně tak, že ju možno rozkmitať vo vertikálnej rovine. Plochu horného ramena ladičky posypeme jemným pieskom. Ladičku rozkmitáme, jej kmitočet je f . Predpokladáme, že jednotlivé body ramien ladičky konajú harmonický kmitavý pohyb.

Určete:

a) Pod mienku, ktorú musí splňovať amplitúda A kmitov v určitom mieste ladičky, aby nedošlo k oddeleniu zrníek piesku od jej povrchu.

b) Amplitúdu A' kmitov ladičky v tom mieste jej povrchu, kde zrnká piesku sa oddeľujú od kmitajúcej ladičky tak, že dosiahnú výšku h nad rovnovážnou polohou ramena ladičky. Zrnká piesku považujeme za hmotné body.

Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty $f = 500$ Hz, $h = 3,5$ mm.

3. Do směsi ledu a vody teploty t_0 (za normálního tlaku) je ve svislé poloze částečně ponořena zkumavka, jejíž teplota je rovna teplotě směsi. Zkumavku zčásti naplníme glycerínem o hmotnosti m a teplotě t ($t > t_0$). Teplota glycerínu klesá a po určité době se ustálí na hodnotě t_0 . Objem ledové směsi se při tom zmenší o V . Předpokládáme, že výměna tepla se uskutečnila jen mezi ledovou směsí a glycerínem. Hustota vody ve směsi je ρ_1 , hustota ledu ρ_2 , měrné skupenské teplo tání ledu je l .

Určete měrné teplo c glycerínu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 20,0$ g; $t = 130$ °C; $V = 1,68$ cm³; $\rho_1 = 1000$ kg m⁻³; $\rho_2 = 917$ kg m⁻³; $l = 3,34 \cdot 10^5$ J kg⁻¹.

Kategorie C

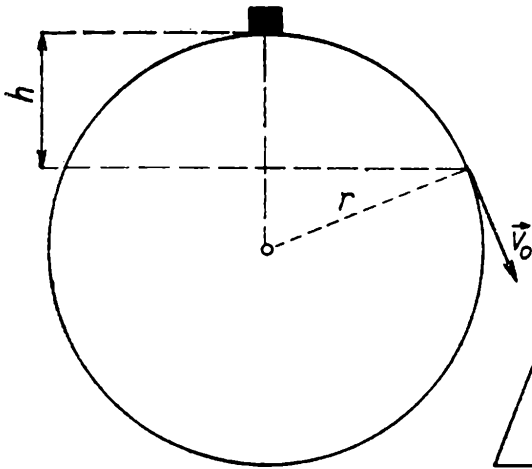
1. Z najvyššieho bodu gule s polomerom r klže malé těleso po povrchu gule dolu.

a) V akej hĺbke h pod najvyšším bodom sa teleso oddelí od povrchu gule? (Obr. 10a.)

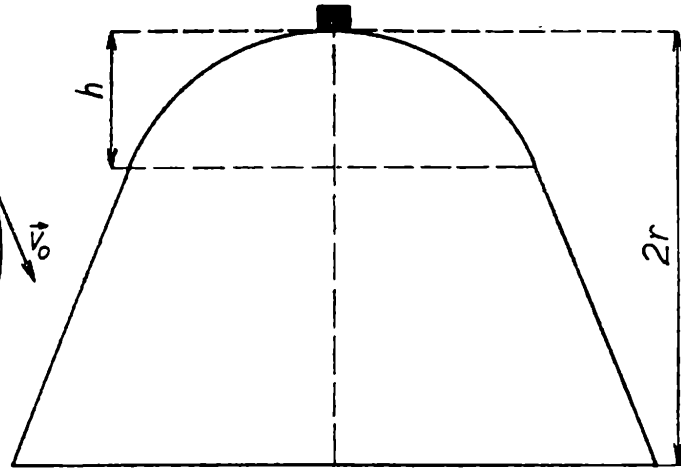
b) Určte rýchlosť v_0 telesa v mieste jeho oddelenia od guľovej plochy, ak v najvyššom bodu gule má nulovú rýchlosť.

c) Od gule odrežeme úseč s výškou h a priložíme ju podstavou na zhodnú hornú podstavu rotačného zrezaného kužela. Povrchová primka zrezaného kužela je rovnobežná so smerom vektora V_0 . Výška takto vzniknutého telesa je $2r$ (obr. 10b). Určte rýchlosť v malého telesa,

ktoré klže z pokojovej polohy v najvyššom bode guľovej plochy, v okamžiku, keda dosiahne dolnú vodorovnú podstavu kužela. Trenie neuvažujeme.



Obr. 10a



Obr. 10b

2. Naklonená rovina AB svírá s vodorovnou rovinou úhel φ . V nejvyšším bodě B je upevněna kladka, přes níž je vedena nit. Hmotnost kladky a niti, tření v čepu a na obvodu kladky neuvažujeme.

a) K jednomu konci niti je připoutáno těleso o hmotnosti m_1 , které se pohybuje bez tření po dráze AB , nit je rovnoběžná s AB . K druhému konci niti je připoutáno těleso o hmotnosti m_2 , které volně visí na vlákně podél výšky nakloněné roviny. Určete hmotnost m_2 tak, aby soustava těles byla v rovnovážné poloze v klidu.

b) Určete zrychlení soustavy, není-li splněna podmínka rovnovážné polohy soustavy těles podle úlohy a). Proveďte diskusi.

c) V bodě B se připojí druhá nakloněná rovina BA' kolmá k rovině AB tak, že spojnice bodů AA' je vodorovná. Těleso o hmotnosti m_2 se pohybuje bez tření po nakloněné rovině BA' . Úseky niti jsou rovnoběžné s příslušnými nakloněnými rovinami. Určete hmotnost m_2 tak, aby soustava těles byla v rovnovážné poloze.

d) Určete zrychlení soustavy, není-li splněna podmínka rovnovážné polohy soustavy těles podle úlohy c) Proveďte diskusi.

e) Řešte úlohy a) až d), je-li k_1 součinitel smykového tření pro těleso o hmotnosti m_1 na rovině AB a k_2 součinitel smykového tření pro těleso o hmotnosti m_2 na rovině BA' . Předpokládáme, že oba součinitelé statického tření mají přesně stejnou velikost jako odpovídající součinitelé k_1, k_2 smykového tření.

Proveďte diskusi.

f) Po obecném vyřešení úlohy řešte úlohy a) až d) pro hodnoty: $\varphi = 30^\circ$, $m_1 = 1,0 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$. Pro stejné hodnoty řešte úlohu e),

je-li $k_1 = 0,20$, $k_2 = 0,30$. Ve všech případech b) až d) sestrojte na milimetrový papír grafy funkce $a = f(m_2)$.

3. Ke svislé tyči s osou OO' je připojeno rameno OA , které svírá s osou OO' úhel α (obr. 11). Na ramenu OA je nasunuta koule o hmotnosti m . Součinitel statického tření koule na ramenu OA je k . Hmotnost ramena OA je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti koule, délka ramena není omezena. Celé zařízení se otáčí kolem osy OO' stálou úhlovou rychlostí ω .

a) Ve které vzdálenosti l od bodu O se ustálí střed koule, je-li $\alpha = 90^\circ$? Proveďte rozbor úlohy ve vztažné soustavě inerciální a ve vztažné soustavě otáčející se kolem osy OO' úhlovou rychlostí ω .

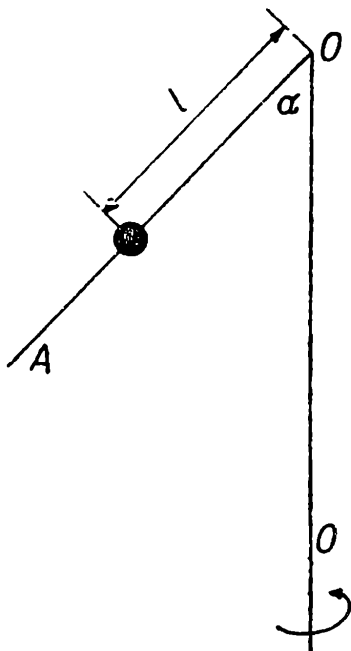
b) Určete vzdálenost l pro $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

c) Určete vzdálenost l pro $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

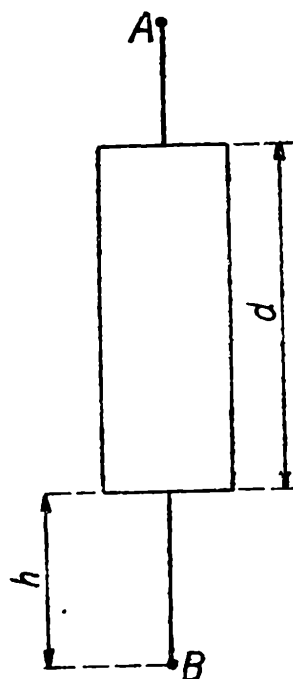
d) Sestrojte graf funkce $l = f(\alpha)$ pro $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, $k = 0,10$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Kategorie D

1. Vzájemná vzdálenost dvou stanic autobusu je $s = 12 \text{ km}$. Autobus projede tuto vzdálenost za dobu $t = 30 \text{ min}$ rovnoměrným pohybem. Autobusy vyjíždějí v intervalech po 5 minutách.



Obr. 11



Obr. 13

a) Kolik protijedoucích autobusů potká člověk, jede-li autobusem z jedné stanice na druhou?

b) Kolik autobusů, jedoucích oběma směry, míjí chodce, jde-li z jedné

stanice na druhou stálou rychlostí $v = 6 \text{ km h}^{-1}$. Úlohu řešte graficky. Úlohu řešte také výpočtem a úvahou.

2. Elektrický vlak jede z místa A do místa B po trati délky s . Během doby t_1 má získat rychlost v , dále jede konstantní rychlostí v a začne brzdit ve vzdálenosti s_3 před místem B . Určete:

- zrychlení a_1 při rozjíždění,
- dráhu s_1 při rozjíždění,
- dobu brzdění t_3 ,
- velikost zrychlení a_2 v posledním úseku trati,
- délky dráhy s_2 rovnoměrné jízdy,
- dobu t_2 rovnoměrné jízdy,
- celkovou dobu t jízdy na trati s .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $s = 9 \text{ km}$; $t_1 = 2 \text{ min}$; $v = 100 \text{ km h}^{-1}$; $s_3 = 1100 \text{ m}$.

- Sestrojte grafy rychlosti a dráhy jako funkce času.

3. Pravítka délky d je zavěšeno na stěně na krátkém vlákně. Pod ním je ve stěně velmi malý otvor B (obr. 13).

- V jaké výšce h nad otvorem B je dolní okraj pravítka, jestliže při pádu pravítka zakrývá otvor B po dobu t .

- Stanovte, po jakou maximální dobu t_m může být otvor B pravítkem zakryt.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 30 \text{ cm}$, $t = 0,10 \text{ s}$, $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

různé

Život oslnivý jako kometa

RNDr. VLASTIMIL FLAJŠINGR, Gottwaldov

Byla to kometa, která přinesla v myslích prostého lidu Halleyovi snad větší slávu, než s jakou byli uctíváni giganti Hooke, Boyle a dokonce i Newton. Málokdo však ví, že Halley byl jedním z vůdců tzv. Zlatého věku britské vědy a že jeho podíl na rozvoji fyziky není možno zanedbat.

Datum jeho narození není přesně známo, sám Halley uváděl, že to bylo 29. října 1656 ve vesnici Haggerston, která je nyní součástí Londýna. Byl nejstarší ze tří dětí dobře prosperujícího londýnského mýdlovarníka.

Z doby jeho školní docházky do St. Paul's School je známo jeho měření magnetické deklinace. Ke studiu geomagnetismu se během svého života často vracel.



Na Queens' College v Oxfordu v roce 1673 přišel již s dobrou znalostí řečtiny, latiny i hebrejštiny, stejně jako matematiky, navigace a teoretické i praktické astronomie. Pro astronomická pozorování ho otec vybavil velkým dalekohledem a kvadrantem. Z Halleyových poznámek z té doby vyplývá, že prováděl nejen četná pozorování hvězd, zatmění, a pokusy s magnety, ale že se zabýval také matematikou a literaturou, biologií i teologií. Jako devatenáctiletý již upozorňoval greenwichského astronoma J. Flamsteeda na chyby v polohách hlavních planet a tyto materiály se o rok později staly podkladem k jeho první práci ve Philosophical Transactions. Pro vědeckou expedici na Ostrov svaté Heleny se vzdal své úspěšné universitní kariéry. Halley zvolil tento ostrov jako základnu pro pozorování jižní oblohy. Není bez zajímavosti, že expedice

byla velmi dobře vybavena, na čemž se mj. významně podílela British East India Company, v jejímž čele byl tehdy R. Boyle.

V létě roku 1678 se Halley vrátil zpět do Anglie. Zanedlouho vydal Katalog hvězd jižní oblohy, královským výnosem mu byl udělen akademický titul a jeho jméno se stále častěji začínalo vyslovovat v čelných vědeckých kruzích. Zvláště významné byly jeho styky s J. Heveliusem a zejména, během pobytu ve Francii, s J. Cassinim. Nesouhlasil s Cassiniho názory o přímočarém pohybu komet a tato problematika silně ovlivnila jeho budoucí vědeckou práci.

V roce 1683 uveřejnil dvě práce. První pojednávala o pohybu Saturnova měsíce a ve druhé Halley nesprávně rozvíjel teorii o čtyřech magnetických pólech země. V této době se Halley začal zabývat gravitační teorií. Po pokusech v Tonkinském zálivu prohlásil, že nepravidelnosti v přílivu a odlivu jsou způsobeny měsícem. Tento důležitý závěr využil později i Newton, když formuloval svůj gravitační zákon. Halley si uvědomoval, že eliptický tvar drah planet může být vysvětlen přitažlivými silami mezi sluncem a planetami, které jsou nepřímo úměrné čtverci jejich vzdáleností. „Jak to dokážete?“ zeptal se přímo Newtona, za nímž se odebral na konzultaci. „Protože jsem to vypočetl“ (Why, I have calculated it) je známá odpověď Newtonova.

V roce 1684 se Halley znovu vrátil do Cambridge, aby přesvědčil Newtona o nutnosti sdělit výsledky zkoumání do Royal Society. Newtonova nechuť publikovat byla příslovečná a zde šlo i o nároky prioritní. Halley Newtona nejenom že přesvědčil, ale konečnému vydání Principií v roce 1687 předcházela i jeho nemalá podpora finanční.

Mezitím Halley začal spolupracovat těsněji s Royal Society, což znamenalo, že byl v neustálém styku se všemi novými vědeckými poznatky a objevy. Jeho pracovní energie byla obdivuhodná. Publikoval práce z astronomie, historie, meteorologie, geometrie, balistiky, geomagnetismu a magnetismu, termiky, botaniky, paleontologie a j. Zajímavé je

jeho přibližné určení velikosti atomu jako, „ $\frac{1}{2433000000}$ -tá část objemu jedné milióntiny krychlového inche“ (1 inch = 2,54 cm).

Kometami se začal Halley zabývat v roce 1695, výsledky své práce publikoval však o 10 let později. Otázkou, kterou se zabýval, byl tvar dráhy komety. V té době např. Newton předpokládal dráhu parabolickou, Hooke zase eliptickou. Halley zpracovával materiály získané asi u dvaceti komet. Vycházel přitom z Newtonova gravitačního zákona a pro výpočty využíval jeho numerické metody. Dokázal eliptický tvar dráhy a např. pro kometu, která byla pojmenována jeho jménem, určil periodu asi 76 let. Pro její návrat předpověděl vánoce 1758, což se skutečně potvrdilo. Byl to velký triumf Newtonovy mechaniky stejně tak jako Halleyovy trpělivosti a schopností.

V letech 1696 až 1697, v době Montagueových finančních reforem, za-

stával Halley důležité místo v mincovnictví, čímž Montague ostatně pověřil i Newtona a Hookea. Přesto jeho vědecká činnost neochabovala. V roce 1698 a 1700 podnikl dvě vědecké výpravy do jižních moří, kde měřil změny magnetické deklinace. Jeho autorita byla už neotřesitelná. Ve svých padesáti letech se naučil arabsky, aby mohl luštit staré rukopisy. Byl jmenován profesorem geometrie v Oxfordu, v roce 1713 se stal sekretářem Royal Society a po úmrtí Flamsteeda 1719 královským astronomem. Ještě v roce 1722 vyhlásil detailní program pozorování měsíce v průběhu celého cyklu Saros, který ukončil v 84 letech. Poslední Halleyova práce o řešení algebraických rovnic byla publikována v roce 1733. I když jeho rodinný život byl vždy poněkud tajemný, po smrti manželky a zejména syna, který byl námořním lékařem, se jeho zdravotní stav rychle zhoršoval. Zemřel v lednu 1742.

Halleyova životní kariéra byla dlouhá a plodná, jeho dílo je podnětné i pro současnou vědu. Snad jenom fakt, že žil a pracoval v údobí vědecké revoluce 17. století, způsobil, že uprostřed velikánů této doby je Halley mnohdy nezaslouženě přezírán.

redakce hovoří

Nedopatřením při reprodukci obr. 3 a 4 došlo k několika nepřesnostem ve schematech na str. 389 a 390. Symbolické označení tranzistorů má být zakresleno v kroužku. Kromě toho chybí ve schematech několik silných bodů, symbolizujících propojení mezi vodiči. Na obr. 3 chybí sedm bodů, na obr. 4 jeden takový bod. Prosíme čtenáře, aby si schémata laskavě opravil.

Omlouváme zdržení tohoto čísla, které vzniklo většími stavebními úpravami v naší tiskárně.

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

S

souměrnost
souměrný
 souměrný vzhledem k rovině
souměřitelnost
souměřitelný
souřadnice
 souřadnice x
 souřadnice y
sousední
soustava
 axiomatická soustava
 soustava rovnic
 soustava souřadnic
soustředný
souvislý
spirála
splňovat
 splňovat podmínky
splýnutí
splývající
splývati
spočetný
spojení
spojený
spojit
spojitě
spojitost
spojitý
spojnice
spojovati
společně
společný
spolu
spor

symétrie $ž$
symétrique
 symétrique par rapport à un plan
commensurabilité $ž$
commensurable
coordonnée $ž$
 abscisse $ž$
 ordonnée $ž$
voisin, e
système m ; famille $ž$
 système d'axiomes
 système d'équations
 système de coordonnées
concentrique
connexe
spirale $ž$
remplir, vérifier
 remplir des conditions $ž$
coïncidence $ž$
coïncident, e; confondu, e
coïncider, confondre
dénombrable
jonction $ž$
joint, e
joindre
continûment
continuité $ž$
continu, e
droite $ž$ de jonction
joindre
en commun
commun, e
ensemble
contradiction $ž$

sporný	contradictoire
správně	exactement
správný	exact, e; juste
spustit kolmici	abaisser une perpendiculaire
srovnání	comparaison <i>ž</i>
srovnávat	comparer
stačit	suffir
stacionární	stationnaire
stálost	constance <i>ž</i> ; stabilité <i>ž</i>
stálý	constant, e; stable
statický	statique
statika	statique <i>ž</i>
statistický	statistique
statistika	statistique <i>ž</i>
stávají se	devenir
stejnolehlost	homothétie <i>ž</i>
stejnolehlý	homothétique
stejnoměrně	uniformément
stejnoměrný	uniforme
stěna	face <i>ž</i>
stereografický	stéréographique
stereometrie	stéréométrie <i>ž</i>
stín	ombre <i>ž</i>
vlastní stín	ombre propre
vržený stín	ombre portée
sto	cent
stonásobný	centuple
stonásobek	centuple <i>m</i>
stopa	trace <i>ž</i>
stopník	point <i>m</i> de trace
strana	côté <i>m</i>
protilehlá strana	côté opposé
přilehlá strana	côté adjacent
strana rovnice (levá, pravá)	membre <i>m</i> d'une équation (premier, second)
strategie	stratégie <i>ž</i>
striktní	strict, e
struktura	structure <i>ž</i>
střed	centre <i>m</i> ; milieu <i>m</i>
střední	moyen, enne
střední hodnota	moyenne <i>ž</i>
středový	central, e
středový úhel	angle <i>m</i> au centre
střídavý	alterne
střídavé úhly	angles <i>m</i> alternes
stupeň	degré <i>m</i>
stupnice	échelle <i>ž</i>
stý	centième
styk	contact <i>m</i>

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

10

ROČNÍK 51, 1972-1973, ČERVEN



ROČNÍK 51
ČERVEN 1973

10

rozhledy

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**Nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

Prof. Emil Kraemer, KU, Praha
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAKČNÍ RADA:

Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nos. vyzn. Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., CSAV Praha, dr. Jaroslav Sedlívý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha.

REDAKCE:

121 34 Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků. Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1973.

OBSAH

OBSAH

M. Malík: Hasseovy diagramy	433
J. Drábek: O různých konstrukcích množinové algebry	436
Dr. J. Morávek, CSc.: O Abelově metodě sčítání	438
P. Vihan: Didoniny úlohy II	445
Dr. L. Granát: Křivky jako obálky kružnic	449
J. Kotyk: Newtonův zákon setrvačnosti	452
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Budou objeveny „černé jámy“?	455
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Proxima Centauri	459
Úlohy pro první kolo soutěže FO	460
J. Hrivňák: Prof. dr. Jacob Philip Kulik	471
Nejmladším čtenářům	474
Recenze	475
Redakce hovoří	476
Dr. J. Pavlíček: Slovníček česko-francouzský	3. a 4. str. obálky

matematika

Hasseovy diagramy

MAREK MALÍK, stud. MFF UK, Praha

V článku „Větší a menší“ (č. 6 tohoto ročníku Rozhledů) byl definován obecný matematický pojem uspořádání. Pro připomenutí: Uspořádáním v neprázdné množině M rozumíme binární relaci na M , která je v této množině reflexivní, tranzitivní a antisymetrická. Poznali jsme, že v takové relaci nemusí být každé dva prvky množiny M srovnatelné.

Například jsme ukázali, že relace inkluze na určité množině množin je uspořádáním a přitom v množině $M = \{A, B, C, D, E, F, X\}$, kde

$$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

$$A = \{a, b, c, d, e, i, j\}$$

$$B = \{e, f, g, h\}$$

$$C = \{g\}$$

$$D = \{a, b, c, j\}$$

$$E = \{a, j\}$$

$$F = \{b, j\}$$

neplatí $A \subset B$ ani $B \subset A$ a stejně neplatí $E \subset F$ ani $F \subset E$ a podobně.

Jak jsme se v minulém článku zmínili, můžeme uspořádání konečné množiny s výhodou znázornit též graficky. Na *obr. 1* je nakreslen diagram uspořádání uvedené množiny M relací inkluze. Prvky množiny M jsou znázorněny jako uzly grafu; ovšem při jejich zakreslování v rovině dbáme na to, aby byly umístěny v určitých „vrstvách“. Hranou jsou spojeny jen ty dvojice uzlů ležící v sousedních vrstvách, které jsou obrazy mezi sebou srovnatelných prvků. Přitom „horní“ (tedy výše položený) uzel hrany znázorňuje prvek, který je v daném uspořádání větší než prvek znázorněný dolním uzlem hrany.

Na *obr. 2* je znázorněno uspořádání množiny všech podmnožin tří-prvkové množiny $X = \{a, b, c\}$ relací inkluze, přičemž

$$A = \{a\}$$

$$B = \{b\}$$

$$C = \{c\}$$

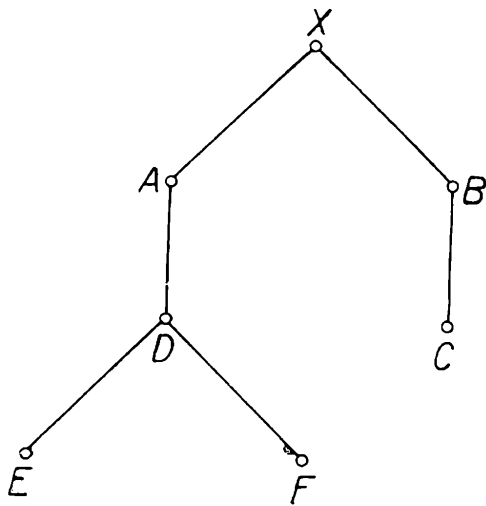
$$A' = \{b, c\}$$

$$B' = \{a, c\}$$

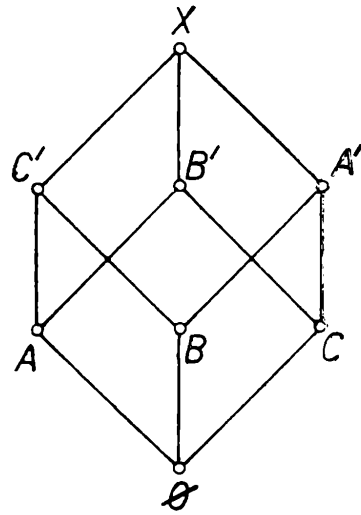
$$C' = \{a, b\}$$

Na obou diagramech jsou tedy hranami spojovány jen obrazy těch prvků, které po sobě „bezprostředně následují“. Např. na *obr. 2* není přímo vyznačen platný vztah $A \subset X$ nebo $\emptyset \subset C'$; $\emptyset \subset X$ a podobně.

Tyto poznatky však přesto vyčteme z diagramu, protože v něm najdeme „stoupající“ cestu od uzlu A k uzlu X ; od uzlu \emptyset k uzlu C' a po-



Obr. 1



Obr. 2

dobně. (Tuto konvenci a zároveň značnou úsporu při používání diagramů nám umožňuje tranzitivnost relace uspořádání.

Nesrovnatelné jsou v daném uspořádání zřejmě ty dvojice prvků, které jsou v příslušném diagramu znázorněny uzly, z nichž žádný neleží na nějaké cestě stoupající vzhůru a vycházející z jednoho z nich. Snadno tedy například z diagramu zjistíme, že v prvním případě uspořádání množiny M inkluzí jsou nesrovnatelné množiny D, B ; resp. A, C . Analogicky z obr. 2 stanovíme, že množiny A, C' ; resp. B, B' jsou nesrovnatelné, a podobně.

Diagramy uspořádaných množin (sestrojované popsáním způsobem) nazýváme Hasseovy diagramy.

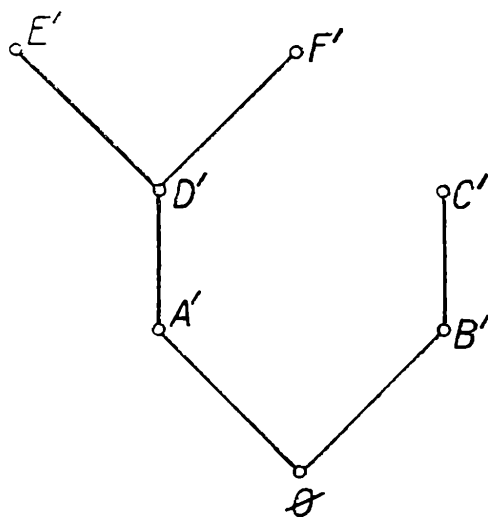
Jde o neorientované grafy, ve kterých však (na rozdíl od teorie grafů) přikládáme podstatný význam poloze uzlů. Jen některé Hasseovy diagramy jsou stromy ve smyslu teorie grafů (viz obr. 1), jiné obsahují kružnice (viz obr. 2) a nejsou to tedy stromy.*)

Diagramy na obr. 1 a 2 obsahují jediný uzel v nejvyšší vrstvě, ke kterému vede od každého jiného uzlu alespoň jedna stoupající cesta. To by nasvědčovalo tomu, že v uspořádané množině existuje vždy jediný „maximální“ prvek. Taková věta však neplatí, jak si ihned ukážeme.

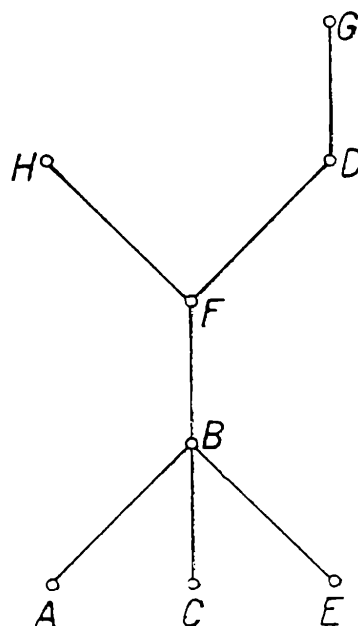
Použijeme stejné množiny $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ jako v prvním případě, utvoříme však doplňky tam uváděných množin:

$$\begin{array}{ll}
 A' = \{f, g, h\} & D' = \{d, e, f, g, h, i\} \\
 B' = \{a, b, c, d, i, j\} & E' = \{b, c, d, e, f, g, h, i\} \\
 C' = \{a, b, c, d, e, f, h, i, j\} & F' = \{a, c, d, e, f, g, h, i\} \\
 X' = \emptyset &
 \end{array}$$

*) Pojem stromu a podobné pojmy teorie grafů viz Rozhledy MF ročník 50, 1971/72: Jan Troják: Stromy a lesy, str. 388 a od téhož autora: Několik vět o stromech, str. 435.



Obr. 3



Obr. 4

Množinu $L = \{\emptyset, A', B', C', D', E', F'\}$ můžeme též uspořádat relací inkluze, platí např. $\emptyset \subset A'$, \dots , $\emptyset \subset F'$, $A' \subset E'$, $D' \subset F'$. Hasseův diagram takto uspořádané množiny L je znázorněn na obr. 3. V nejvyšší vrstvě jsou dva uzly grafu, kromě toho je též uzal C' nejvyšší na své „větvi“.

Je tedy patrné, že v uspořádaných množinách nemusí být vždy jeden „maximální“ prvek. Problematikou existence největších a maximálních prvků v uspořádané množině, zobecňováním těchto pojmů a jejich vztahy se budeme zabývat v některém z příštích čísel časopisu.

Cvičení:

1. Sestrojte si Hasseův diagram této uspořádané množiny:

$$\begin{aligned}
 M &= \{A, B, C, D, E, \emptyset, \} \text{ kde} & D &= \{l, m, n, p\} \\
 A &= \{k, l, m, n, p\} & E &= \{k, m, n\} \\
 B &= \{m, l, p\} \\
 C &= \{k, n\}
 \end{aligned}$$

uspořádáním je relace inkluze.

2. Uvažujte množinu: $M = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 30\}$ a na této relaci R danou předpisem:

$$a R b \Leftrightarrow (a \text{ je dělitelem } b),$$

df

např. tedy $2 R 10$, $6 R 30$, $1 R 5$ a podobně.

a) Rozhodněte, zda R je uspořádáním na množině M .

b) Je-li R uspořádáním, sestrojte Hasseův diagram takto uspořádané množiny M .

3. Navrhněte a výčtem prvků zapište množiny A, B, C, D, E, F, G, H tak, aby graf na obr. 4 byl Hasseovým diagramem uspořádání v množině $M = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.

(Návod: Začněte např. různými jednoprvkovými množinami A, C, E a při přechodu do vyšší vrstvy připojte další prvek.)

O různých konstrukcích množinové algebry

JAROSLAV DRÁBEK, PF Plzeň

V 6. čísle Rozhledů byl uveřejněn článek o symetrickém rozdílu dvou množin; připomeňme si, že symetrickým rozdílem množin A, B rozumíme množinu označenou $A \triangle B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$. Shrňme věty o této operaci „delta“, které tam byly dokázány, a připojme obdobné věty o sjednoceních množin. Základní množinu označme písmenem M a libovolné její podmnožiny A, B, C . Platí:

$$\begin{array}{ll} A \triangle B = B \triangle A & A \cup B = B \cup A \\ (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ A \triangle \emptyset = A & A \cup \emptyset = A \\ A \triangle A = \emptyset & A \cup A = A \end{array}$$

Poslední řádek sloupců ukazuje, že porovnávané operace mají přes řadu shodných vlastností i podstatně rozdílné vlastnosti. Prázdná množina \emptyset je při obou operacích „neutrální“ — neovlivňuje výsledek operace, platí $A \triangle \emptyset = A$, resp. $A \cup \emptyset = A$, avšak jako výsledek operace se chová jinak:

Rovnice $A \triangle X = \emptyset$
má pro každou množinu A
právě jedno řešení $X = A$.

Rovnice $A \cup X = \emptyset$
nemá při každé množině A řešení,
např. při $A \neq \emptyset$.

Zmíněná vlastnost operace \triangle , tj. řešitelnost „základních rovnic“ $A \triangle X = \emptyset$, připomíná vlastnost sčítání v oboru celých čísel, kde má též každá rovnice $a + x = 0$ právě jedno řešení. Použijeme-li stručného označení algebry v oboru celých čísel symbolem $(Z; +, \cdot)$, můžeme za-

psat algebru v systému všech podmnožin množiny M symbolem $(\widehat{M}; \triangle, \cap)$, použijeme-li k její výstavbě jako základních operací symetrického rozdílu a průniku. Obvyklá výstavba množinové algebry je vyjádřena symbolem $(\widehat{M}; ', \cup, \cap)$, protože vychází ze tří základních operací doplněk, sjednocení, průnik.

Je výhodné sblížit množinovou algebru s jinými oblastmi matematiky, proto se někdy buduje množinová algebra jen se dvěma základními operacemi \triangle, \cap místo obvyklé trojice operací $', \cup, \cap$. Algebry $(\widehat{M}; \triangle, \cup)$ a $(Z; +, \cdot)$ jsou si dost podobné; říkává se, že obě mají stejnou strukturu nazývanou okruh. V odborné literatuře najdete termíny *okruh celých čísel*, *okruh polynomů nad oborem reálných čísel*, *okruh podmnožin dané množiny* (nazývaný též booleovský okruh).

Ukažme si jednu možnou soustavu axiomů množinové algebry $(\widehat{M}; \triangle, \cup)$:

Pro každé tři množiny $X, Y, Z \in \widehat{M}$ platí:

- (1) $X \triangle Y = Y \triangle X$ $X \cap Y = Y \cap X$ (6)
- (2) $X \triangle (Y \triangle Z) = (X \triangle Y) \triangle Z$ $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ (7)
- (3) $X \triangle \emptyset = X$ $X \cap M = X$ (8)
- (4) $X \triangle X = \emptyset$ $X \cap X = X$ (9)
- (5) $X \triangle Y = \emptyset \Rightarrow Y = X$ $(X \triangle Y) \cap Z = (X \cap Z) \triangle (Y \cap Z)$ (10)

Z těchto deseti axiomů můžeme odvozovat další věty o operacích symetrický rozdíl a průnik; ukažme si odvození věty $X \cap \emptyset = \emptyset$. Vyjděme ze zadání množiny $(X \triangle \emptyset) \cap X = (X \cap X) \triangle (\emptyset \cap X) = X \triangle (\emptyset \cap X)$, při jiné úpravě $(X \triangle \emptyset) \cap X = X \cap X = X$, proto také

$$\begin{aligned} X \triangle [X \triangle (\emptyset \cap X)] &= X \triangle X \text{ a podle (2) a (4)} \\ (X \triangle X) \triangle (\emptyset \cap X) &= \emptyset \\ \emptyset \triangle (\emptyset \cap X) &= \emptyset \text{ a odtud plyne podle (5)} \\ \emptyset \cap X &= \emptyset. \end{aligned}$$

Zajímavější však bude otázka, jak lze v algebře $(\widehat{M}; \triangle, \cap)$ definovat obvyklé operace doplněk a sjednocení množin. Je to možné takto:

$$X' = M \triangle X, \quad X \cap Y = (X \triangle Y) \triangle (X \cap Y).$$

Místo symbolů ', \cup bychom správně měli používat nějakých jiných do té doby než prokážeme, že definované operace mají stejné charakteristické vlastnosti jako doplněk a sjednocení. Pohodlněji se nám však bude pracovat se symboly, na které jsme zvyklí.

Ověřme platnost několika typických vět a doplňcích o sjednoceních; čtenář se může přesvědčit, že při zdůvodnění se opíráme jen o axiomy (1)–(10) a z nich odvozené věty.

$$\begin{aligned} (X')' &= M \triangle (M \triangle X) = (M \triangle M) \triangle X = \emptyset \triangle X = X, \\ &\text{užito (2), (4), (1), (3),} \\ X' \cap X &= (M \triangle X) \cap X = (M \cap X) \triangle (X \cap X) = X \triangle X = \emptyset, \\ &\text{užito (10), (8), (4),} \\ X' \triangle X &= (M \triangle X) \triangle X = M \triangle (X \triangle X) = M \triangle \emptyset = M, \\ &\text{užito (10), (4), (3),} \\ X' \cup X &= (X' \triangle X) \triangle (X' \cap X) = M \triangle \emptyset = M, \\ &\text{užito již dokázaných vět,} \\ X \cup X &= (X \triangle X) \triangle (X \cap X) = \emptyset \triangle X = X, \\ &\text{užito (3) a dalších vět,} \\ X \cup \emptyset &= (X \triangle \emptyset) \triangle (X \cap \emptyset) = X \triangle \emptyset = X, \\ &\text{užito (4), (9), (3),} \\ X \cup M &= (X \triangle M) \triangle (X \cap M) = X' \triangle X = M. \end{aligned}$$

Dostáváme vesměs výsledky, které souhlasí s našimi znalostmi o operacích doplněk a sjednocení. Čtenář může odvodit v algebře $(\widehat{M}; \triangle, \cap)$

všechny zbývající věty obsažené v soustavě axiomů množinové algebry

\widehat{M} : \cup, \cap) již několikrát v Rozhledech publikované:

$$\begin{aligned} (X \cap Y)' &= X' \cup Y', & (X \cup Y)' &= X' \cap Y', & X \cup Y &= Y \cup X, \\ (X \cup Y) \cup Z &= X \cup (Y \cup Z), & (X \cup Y) \cap Z &= (X \cap Z) \cup (Y \cap Z), \\ X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z). \end{aligned}$$

Tím bude ukončen důkaz, že algebry $(\widehat{M}; \Delta, \cap)$, $(\widehat{M}; \cup, \cap)$ mají ekvivalentní soustavy axiomů.

Možnosti různých konstrukcí množinové algebry tím však nejsou vyčerpány; zmíníme se aspoň stručně o několika dalších:

I. Zvolíme-li jako základní množinové operace symetrický rozdíl $X \Delta Y$ a rozdíl $X - Y$ dvou množin, můžeme definovat

$$X \cap Y = X - (X - Y), \quad X \cup Y = (X - Y \Delta Y), \quad X' = M \Delta X = M - X.$$

II. Zvolíme-li jako základní množinové operace sjednocení a rozdíl dvou množin, můžeme definovat

$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X), \quad X \cap Y = X - (X - Y), \quad X' = M - X.$$

III. Zvolíme-li jako základní množinové operace symetrický rozdíl a sjednocení množin, můžeme definovat

$$X - Y = (X \cup Y) \Delta Y, \quad X \cap Y = X \Delta [(X \cup Y) \Delta Y], \quad X' = M \Delta X.$$

Při vhodných axiomatických základech příslušné množinové algebry lze pak dokázat, že další definované operace mají vlastnosti stejné jako v dříve uvedených algebrách množin. Vidíte tedy, že soustava axiomů množinové algebry nemusí vždy popisovat vlastnosti doplňku, průniku a sjednocení množin. Důvod, proč jsou právě tyto operace jako základní množinové operace ve školské matematice, spočívá především v jejich bezprostřední použitelnosti v geometrii a řešení nerovnic, rovnic apod. Převáží-li však v práci matematiků jiné zřetele, sahají často k jiným množinovým operacím jako základním a formulují jiné soustavy axiomů.

0 Abelově metodě sčítání

RNDr. JAROSLAV MORÁVEK CSc, Praha

V různých matematických úvahách vzniká nutnost určovat, odhadovat nebo obecněji jen zkoumat hodnoty výrazů tvaru $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$, kde n je dané přirozené číslo, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou daná reálná nebo obecněji komplexní čísla.

Přitom lze někdy použít tzv. metody částečného sčítání (parciální sumace), která bývá spojována se jménem význačného norského matematika Abela.*)

Tato metoda se opírá o velmi jednoduchou identitu, obsaženou v následující větě.

Věta : Nechť je dáno přirozené číslo n a reálná (obecněji komplexní) čísla $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$. Platí $a_1b_1 + \dots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n$, kde $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + \dots + a_n$.

Důkaz : Větu dokážeme matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ se levá strana dokazované rovnosti redukuje na a_1b_1 a pravá strana na s_1b_1 , neboť součet $s_1(b_1 - b_2) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n)$ je „prázdný“. Tvrzení je tedy v případě $n = 1$ zřejmé.

Předpokládejme, že je tvrzení dokázáno pro přirozené číslo n a dokažme, že odtud vyplývá jeho platnost pro $n + 1$. Skutečně

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + \dots + a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} = \\ &= (a_1b_1 + \dots + a_nb_n) + a_{n+1}b_{n+1} = \\ &= s_1(b_1 - b_2) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} = \\ &= s_1(b_1 - b_2) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n - s_nb_{n+1} + s_nb_{n+1} + \\ & \quad + a_{n+1}b_{n+1} = \\ &= s_1(b_1 - b_2) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n(b_n - b_{n+1}) + \\ & \quad + (s_n + a_{n+1})b_{n+1} = \\ &= s_1(b_1 - b_2) + \dots + s_n(b_n - b_{n+1}) + s_{n+1}b_{n+1}. \end{aligned}$$

Důkaz indukcí je dokončen.

Poznámka 1 : Rovnost z věty lze odvodit rychlejším ale méně přesným způsobem takto:

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \\ &= s_1b_1 + (s_2 - s_1)b_2 + \dots + (s_n - s_{n-1})b_n = \\ &= s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \dots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n. \end{aligned}$$

Poznámka 2 : Pro čtenáře zvyklého počítat se sumačním symbolem Σ uvádíme jiný zápis dokázané rovnosti:

$$\sum_{j=1}^n a_jb_j = \sum_{j=1}^{n-1} s_j(b_j - b_{j+1}) + s_nb_n.$$

Věta sama o sobě ještě neposkytuje žádný přesný návod, jak jí použít. Chceme-li pomocí ní zkoumat nějaký součet $c_1 + c_2 + \dots + c_n$, snažíme se jej nejprve vhodně vyjádřit ve tvaru levé nebo pravé strany dokázané identity, načet identity použijeme. Postup ukážeme na několika řešených příkladech — úlohách.

*) Niels Henrik Abel (5. 8. 1802—6. 4. 1829).

Příklad 1 Určete hodnotu součtu $0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1}$, kde n je dané přirozené číslo.

Řešení: Položíme $s_j = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{j-1} = 2^j - 1$ pro $j = 1, 2, \dots, n-1$. Dostáváme

$$\begin{aligned} & 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} = \\ &= 0 \cdot s_1 + 1 \cdot (s_2 - s_1) + \dots + (n-1)(s_n - s_{n-1}) = \\ &= s_1(0-1) + s_2(1-2) + \dots + s_{n-1}(n-2-n+1) + (n-1)s_n = \\ &= -(s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}) + (n-1)s_n = \\ &= -(2^1 - 1 + 2^2 - 1 + \dots + 2^{n-1} - 1) + (n-1)(2^n - 1) = \\ &= -(2^n - 2) + (n-1) + (n-1)(2^n - 1) = (n-2)2^n + 2. \end{aligned}$$

Získaný vzorec by bylo možné dokázat též metodou matematické indukce. Použití matematické indukce však vyžaduje předem „uhodnout“ dokazovaný vztah. Naproti tomu metoda částečného sčítání umožňuje vzorec přímo nalézt.

S metodou částečného sčítání je vhodné a často i nutné pracovat pružně. Vždy totiž není účelné doslovně používat rovnost z věty. Ukážeme si to na dalším příkladě.

Příklad 2: Určete hodnotu součtu $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

kde n je dané přirozené číslo.

Řešení:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Podobně lze principu parciální sumace využít např. k určení $\sum_{k=1}^n k^2$,

$\sum_{k=1}^n k^3$, $\sum_{k=1}^n k^2 2^k$ a mnoha jiných součtů. Všimneme si však raději některých teoretičtějších aplikací, zejména při důkazu různých vět.

Příklad 3: Necht a_1, a_2, \dots, a_n jsou reálná čísla. Dokažte ekvivalenci následujících dvou výroků:

(i) Pro každou n -tici reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0 \Rightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \geq 0.$$

(ii) Platí $a_1 \geq 0, a_1 + a_2 \geq 0, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 0$.

Řešení: Nejprve dokážeme implikaci (i) \Rightarrow (ii). Necht je splněno (i). Zvolme libovolné $j = 1, 2, \dots, n$ a čísla x_1, x_2, \dots, x_n tak, že $x_1 = x_2 = \dots = x_j = 1, x_{j+1} = \dots + x_n = 0$. Takto zvolená čísla splňují nerovnosti $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ a tedy musí platit $a_1 + \dots + a_j = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \geq 0$. Protože v provedené úvaze lze zvolit libovolné $j = 1, 2, \dots, n$, je tím implikace (i) \Rightarrow (ii) ověřena.

K důkazu implikace (ii) \Rightarrow (i) použijeme metody parciální sumace. Položíme $s_j = a_1 + \dots + a_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), takže $s_j \geq 0$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$, jak vyplývá z (ii). Nyní dostáváme $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = s_1(x_1 - x_2) + \dots + s_{n-1}(x_{n-1} - x_n) + s_n x_n \geq 0$ jestliže $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$.

Příklad 4: Necht a, b jsou daná reálná čísla, přičemž $a < b$. Označme $\langle a, b \rangle$ uzavřený interval s krajními body a, b . Necht dále x_1, x_2, \dots, x_n jsou daná reálná čísla splňující podmínky $x_1 \in \langle a, b \rangle, x_1 + x_2 \in \langle a, b \rangle, \dots, x_1 + \dots + x_n \in \langle a, b \rangle$. Potom pro libovolná reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ platí $1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in \langle a, b \rangle$.

Dokažte.

Řešení: Položme $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ a $s_j = x_1 + \dots + x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Platí tedy $s_j \in \langle a, b \rangle$ a metodou parciální sumace dostáváme

$$x = (\lambda_1 - \lambda_2)s_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)s_2 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)s_{n-1} + \lambda_n s_n.$$

Z posledního vyjádření již bezprostředně vyplývá

$$\begin{aligned} x &\leq (\lambda_1 - \lambda_2)b + (\lambda_2 - \lambda_3)b + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)b + \lambda_n b = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} - \lambda_n + \lambda_n)b = \lambda_1 b = b. \end{aligned}$$

Zcela analogicky se ukáže, že platí $x \geq a$. Tvrzení je dokázáno.

Dále použijeme metody parciální sumace k důkazu jedné kombinatorické nerovnosti.

Příklad 5: Necht $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou daná reálná čísla, přičemž $a_1 < a_2 < \dots < a_n; b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Necht $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}$ je libovolné pořadí čísel b_1, b_2, \dots, b_n . Dokažte, že platí

$$\begin{aligned} a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 &\leq a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \dots + a_n b_{i_n} \leq \\ &\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \end{aligned}$$

Řešení: Dokážeme pouze levou nerovnost, neboť pravá se dokáže zcela analogicky. Položme

$$s'_1 = b_{i_1}, s'_2 = b_{i_1} + b_{i_2}, \dots, s'_n = b_{i_1} + b_{i_2} + \dots + b_{i_n};$$

$$s_1 = b_n, s_2 = b_n + b_{n-1}, \dots, s_n = b_n + b_{n-1} + \dots + b_1.$$

Na základě předpokladu platí

$$s'_1 \leq s_1, s'_2 \leq s_2, \dots, s'_{n-1} \leq s_{n-1} \quad \text{a} \quad s'_n = s_n.$$

Dvojnásobným použitím parciální sumace nyní dostáváme

$$\begin{aligned} & a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \dots + a_n b_{i_n} = \\ & = a_1 s'_1 + a_2 (s'_2 - s'_1) + \dots + a_n (s'_n - s'_{n-1}) = \\ & = s'_1 (a_1 - a_2) + \dots + s'_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + s'_n a_n = \\ & = s'_1 (a_1 - a_2) + \dots + s'_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + s_n a_n \geq \\ & \geq s_1 (a_1 - a_2) + \dots + s_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + s_n a_n = \\ & = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1, \end{aligned}$$

což dokončuje důkaz.

Příklad 6: Dokažte, že výraz

$$V = x_1(x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3(-x_2 + 2x_3 - x_4) + \dots + x_{n-1}(-x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n) + x_n(-x_{n-1} + x_n)$$

nabývá nezáporných hodnot pro každou n -tici reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n . Nalezněte dále všechny n -tice, pro něž $V = 0$.

Řešení: Nejprve dokážeme použitím parciální sumace, že $V = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2$. Skutečně

$$\begin{aligned} V &= x_1(x_1 - x_2) + x_2(-x_1 + x_2 + x_2 - x_3) + x_3(-x_2 + x_3 + x_3 + \\ & - x_4) + \dots + x_{n-1}(-x_{n-2} + x_{n-1} + x_{n-1} - x_n) + x_n(-x_{n-1} + x_n) = \\ &= [x_1(x_1 - x_2) - x_2(x_1 - x_2)] + [x_2(x_2 - x_3) - x_3(x_2 - x_3)] + \\ & \quad + [x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) - x_n(x_{n-1} - x_n)] = \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \dots + (x_{n-1} - x_n)^2. \end{aligned}$$

Ze získaného vyjádření V je zřejmé, že $V \geq 0$ pro všechny n -tice reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n , a dále, že

$$V = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Další příklad bude hrát pomocnou roli při řešení poslední úlohy; k jeho řešení není použito parciální sumace.

Příklad 7 Nechť s je dané komplexní číslo a r dané kladné číslo a budiž \mathbf{K} uzavřený kruh se středem s a poloměrem r v rovině komplexních čísel. Nechť $w_1 \in \mathbf{K}, w_2 \in \mathbf{K}, \dots, w_n \in \mathbf{K}$. Dokažte, že pro každou n -tici nezáporných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1 \Rightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n \in \mathbf{K}.$$

Řešení: Máme dokázat, že platí

$$|\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n - s| \leq r.$$

Na základě předpokladu však platí $|w_j - s| \leq r$ pro $j = 1, 2, \dots, n$. Odtud získáváme

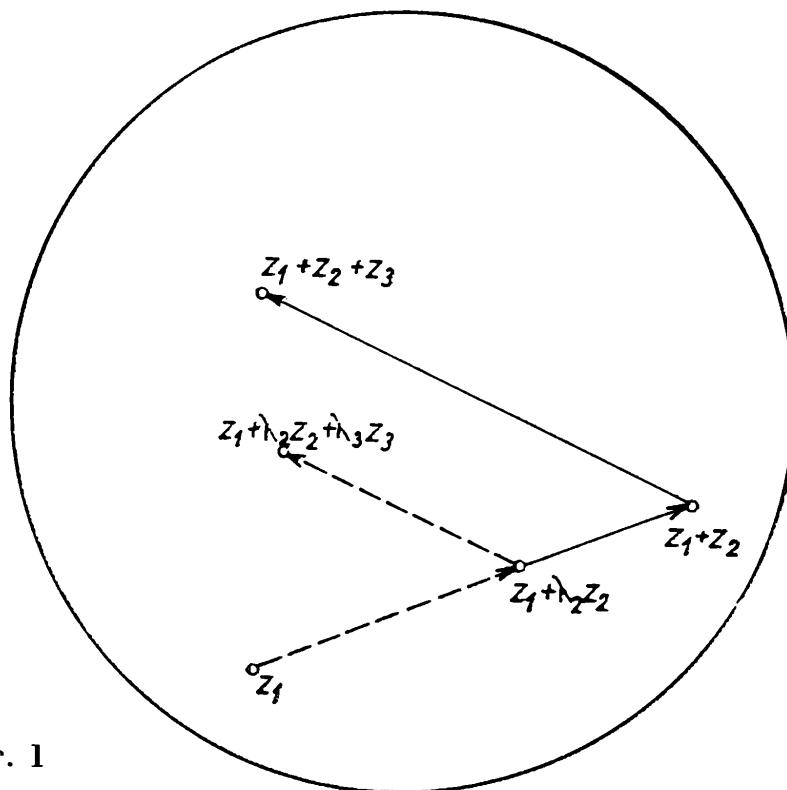
$$\begin{aligned} & |\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n - s| = |\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n - 1 \cdot s| = \\ & = |\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) s| = \\ & = |\alpha_1 (w_1 - s) + \alpha_2 (w_2 - s) + \dots + \alpha_n (w_n - s)| \leq \\ & \leq \alpha_1 r + \alpha_2 r + \dots + \alpha_n r = \\ & = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) r = 1 \cdot r = r, \end{aligned}$$

což dokončuje důkaz.

Příklad 8: Nechť \mathbf{K} označuje kruh z příkladu 7 a nechtě z_1, z_2, \dots, z_n jsou komplexní čísla, pro něž $z_1 \in \mathbf{K}$, $z_1 + z_2 \in \mathbf{K}$, \dots , $z_1 + \dots + z_n \in \mathbf{K}$. Dokažte, že pro každou n -tici reálných čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ platí

$$1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n \in \mathbf{K}.$$

(Tvrzení je ilustrováno na obr. 1.)



Obr. 1

Řešení: Položme $w_j = z_1 + \dots + z_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), takže $w_j \in \mathbf{K}$ pro $j = 1, 2, \dots, n$. Použitím parciální sumace dostáváme $\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n = (\lambda_1 - \lambda_2) w_1 + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) w_{n-1} + \lambda_n w_n = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{n-1} w_{n-1} + \alpha_n w_n$, kde

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n, \alpha_n = \lambda_n.$$

Na základě předpokladů jsou $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nezáporná a $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. K dokončení důkazu nyní stačí použít tvrzení z příkladu 7.

Poznámka: Pozorný čtenář si možná všimnul jisté analogie mezi posledním příkladem a příkladem 4. Tato analogie není náhodná, ale souvisí s hlubším pojmem konvexní množiny. Pro čtenáře, který chce o těchto věcech získat alespoň povrchní představu je připojeno cvičení 3.

Princip částečného sčítání, který jsme ilustrovali na několika příkladech, je jednou z metod, jichž lze použít při vyšetřování různých součtů. Jeho použití je však mnohem bohatší, než bylo možné ukázat v tomto krátkém článku. (Další příklady nalezne čtenář v připojených cvičeních.) Užitečná jsou i jeho různá zobecnění, např. v teorii nekonečných řad, nebo v integrálním počtu (tzv. integrace „per partes“).

Cvičení 1: Určete $0 < q^0 + 1 \cdot q^1 + \dots + (n-1)q^{n-1}$, kde n je dané přirozené číslo a q je reálné číslo, $q \neq 1$.

Cvičení 2: V situaci z příkladu 3 dokažte ekvivalenci těchto výroků:

(α) Pro každou n -tici reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \Rightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \geq 0.$$

(β) Platí $a_1 \geq 0, a_1 + a_2 \geq 0, \dots, a_1 + \dots + a_{n-1} \geq 0, a_1 + \dots + a_n \geq 0$.

Cvičení 3: Množinu \mathbf{M} komplexních čísel nazveme konvexní, jestliže $\mathbf{M} \neq \emptyset$ a pro každá dvě komplexní čísla z_1, z_2 a dvě nezáporná čísla α_1, α_2 platí

$$(z_1 \in \mathbf{M} \text{ a } z_2 \in \mathbf{M} \text{ a } \alpha_1 + \alpha_2 = 1) \Rightarrow (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in \mathbf{M}).$$

a) Nechť \mathbf{M} je konvexní množina komplexních čísel a nechť $z_1 \in \mathbf{M}, z_2 \in \mathbf{M}, \dots, z_n \in \mathbf{M}$. Potom pro každou n -tici nezáporných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1 \Rightarrow \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n \in \mathbf{M}.$$

(Návod: Použijte matematické indukce.)

b) Nechť \mathbf{M} je konvexní množina komplexních čísel a nechť z_1, z_2, \dots, z_n jsou komplexní čísla, pro něž

$$z_1 \in \mathbf{M}, z_1 + z_2 \in \mathbf{M}, \dots, z_1 + \dots + z_n \in \mathbf{M}.$$

Potom pro každou n -tici reálných čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ platí

$$1 = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_n z_n \in \mathbf{M}.$$

(Návod: Použijte parciální sumace a tvrzení a).)

c) Řešte příklad 7 použitím části a) tohoto cvičení. (Návod: Ukažte, že \mathbf{K} je konvexní množina.)

d) Ukažte, že příklady 4 a 8 jsou speciálními příklady části b) tohoto cvičení.

Didoniny úlohy II

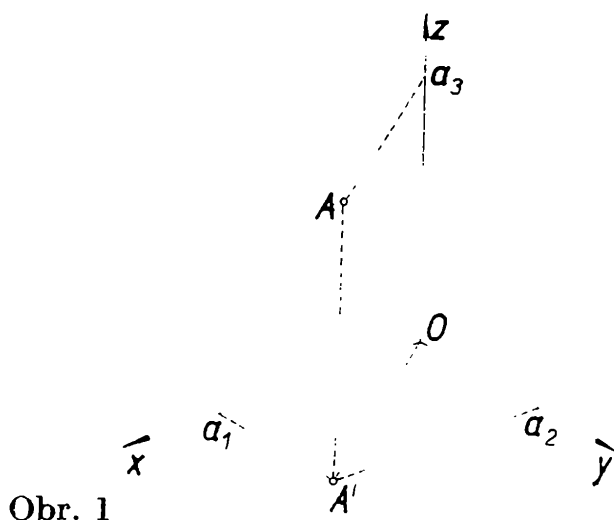
PŘEMYSL VIHAN, ČVUT, Praha

Dodatkem k stejnojmennému článku ve 4. čísle tohoto ročníku (str. 152 až 155) podávám slíbené řešení ještě dvou úloh:

d) V elipsoid vepsat kvádr, který má ze všech vepsaných kvádrů největší objem.

d') Kvádru opsat elipsoid, který má ze všech opsaných elipsoidů nejmenší objem.

K řešení těchto úloh použijeme analytického vyjádření elipsoidu v kartézské soustavě souřadnic v prostoru. Pomocí k. s. s. přiřadíme každému bodu X prostoru uspořádanou trojici reálných čísel $(x; y; z)$ a píšeme $X = (x; y; z)$ (obr. 1).



Pro vzdálenost dvou bodů $A = (a_1; a_2; a_3)$, $B = (b_1; b_2; b_3)$ prostoru platí: $\overline{AB} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.

Zvolme v prostoru k. s. s. a počátek označme O . Potom koule se středem v počátku s poloměrem r je množina (právě těch) bodů X prostoru, pro které platí $XO \leq r$, tedy

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2. \quad (1)$$

Elipsoidem nazveme množinu L (právě těch) bodů X prostoru, pro které platí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad (2)$$

kde a, b, c jsou kladná reálná čísla.

Pokusme si utvořit představu, jak vypadá množina L .

a) Elipsoidu L lze opsat kouli se středem v počátku a s poloměrem $r = \max(a, b, c)$.

Důkaz: Protože je $r \geq a$, $r \geq b$, $r \geq c$, platí

$$1/r^2 \leq 1/a^2, \quad 1/r^2 \leq 1/b^2, \quad 1/r^2 \leq 1/c^2$$

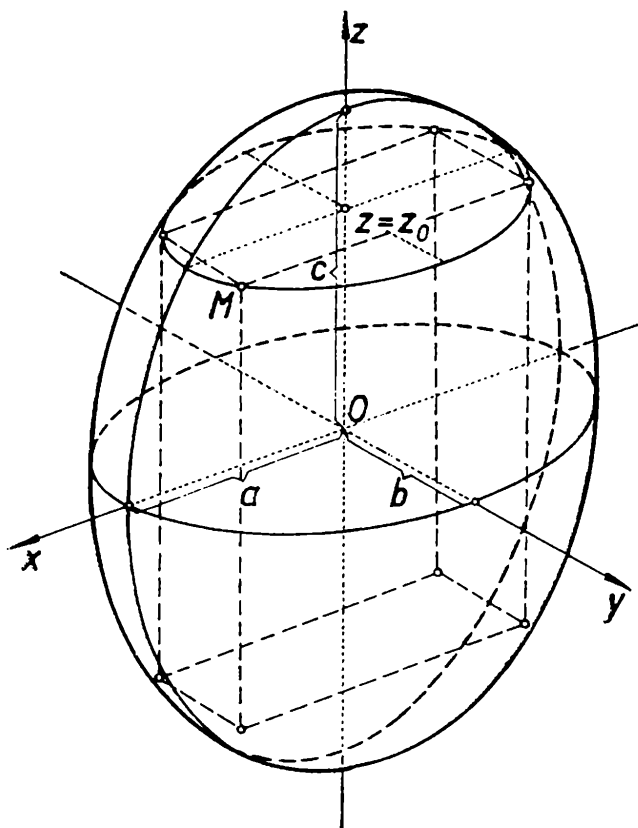
a pro každé reálné x, y, z

$$x^2/r^2 \leq x^2/a^2, \quad y^2/r^2 \leq y^2/b^2, \quad z^2/r^2 \leq z^2/c^2,$$

a tedy

$$x^2/r^2 + y^2/r^2 + z^2/r^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2.$$

Jestliže bod $X = (x; y; z) \in L$, tj. platí-li (2), platí tím spíše $x^2/r^2 + y^2/r^2 + z^2/r^2 \leq 1$, tj. $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$, a tedy X je prvkem koule se středem v O a o poloměru r . Avšak r je rovno alespoň jednomu z čísel



Obr. 2

a, b, c . Řekněme $r = a$, potom bod $(a; 0; 0)$ leží na kulové ploše $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ a současně na „slupce“ elipsoidu $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

b) Elipsoidu L lze opsat kvádr se středem v počátku, jehož hrany jsou rovnoběžné s osami souřadnými a mají délky $2a, 2b, 2c$.

Důkaz: Ukažme, že pro každý bod $X = (x; y; z)$ elipsoidu platí $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$. Body X splňující poslední tři podmínky jsou právě body takového kváдру. Upravme (2) na tvar $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 - z^2/c^2$; jelikož je na levé straně nezáporné číslo, platí $1 - z^2/c^2 \geq 0$, a tedy $z^2 \leq c^2$, $|z| \leq c$. Obdobně dokážeme, že platí $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Osy x, y, z protínají „slupku“ kváдру [tj. množinu (právě těch) bodů $X = (x; y; z)$, pro které platí $|x| = a, |y| = b, |z| = c$] v bodech $(a; 0; 0)$,

$(-a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; -b; 0)$, $(0; 0; c)$, $(0; 0; -c)$, které leží na „slupce“ elipsoidu L , protože splňují podmínku

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

c) Elipsoid L je souměrný podle všech tří rovin, obsahujících vždy po dvou z os souřadných, podle každé z těchto os a podle počátku O .

Důkaz: Je-li $(x; y; z) \in L$, pak bod souměrný s ním podle roviny os x, y má souřadnice $(x; y; -z)$, které splňují také podmínku (2), protože $(-z)^2 = z^2$. Obdobně dokážeme, že v L leží i body $(x; -y; z)$, $(-x; y; z)$, $(-x; -y; z)$, $(-x; y; -z)$, $(x; -y; -z)$, $(-x; -y; -z)$, souměrné s bodem $(x; y; z)$ podle dalších souřadných rovin a os, resp. podle počátku.

e) Průnik elipsoidu L s libovolnou rovinou $z = z_0$, kde $|z_0| < c$, je část roviny ohraničená elipsou v rovině $z = z_0$, která má střed na ose z a jejíž osy symetrie jsou rovnoběžné s osami x a y . Podobně pro roviny $x = x_0$, $|x_0| < a$; $y = y_0$, $|y_0| < b$.

Důkaz: Body průniku splňují podmínku (2) a podmínku $z = z_0$; tedy

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 - z_0^2/c^2 \quad \text{a} \quad z = z_0 \quad (3)$$

Protože při $|z_0| < c$, tj. $z_0^2 < c^2$, je $1 - z_0^2/c^2 > 0$, položíme $1 - z_0^2/c^2 = k^2$. Potom můžeme upravit (3) na tvar

$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1, \quad z = z_0.$$

Tyto podmínky charakterizují elipsu ležící v rovině $z = z_0$ a její vnitřku. Střed této elipsy leží na ose z a její osy symetrie jsou rovnoběžné s osami x, y (obr. 2).

Čtenář jistě poznal, že při $a = b = c$ je podmínkou (2) popsána koule se středem v O a poloměrem $r = a = b = c$.

Když jsme se trochu seznámili s elipsoidem, můžeme se konečně obrátit k řešení úloh označených d), d'). Mějme elipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$. Vepišme do něho kvádr, jehož hrany jsou rovnoběžné s osami souřadnými. Zvolíme vrchol ležící v tzv. 1. oktantu, tedy bod $M = (x_0; y_0; z_0)$ takový, že $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$, $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 + z_0^2/c^2 = 1$. Objem tohoto kváдру je funkcí bodu $M = (x_0; y_0; z_0)$: $V(x_0, y_0, z_0) = 8x_0 \cdot y_0 \cdot z_0$ (obr. 2).

Úloha d: Hledáme maximum funkce $V(x_0, y_0, z_0)$ za podmínky $x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 + z_0^2/c^2 = 1$ a $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$. Položíme v (1) z minulého článku

$$x_1 = x_0^2/a^2, \quad y_1 = y_0^2/b^2, \quad z_1 = z_0^2/c^2;$$

dostaneme

$$\frac{x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 + z_0^2/c^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x_0^2 \cdot y_0^2 \cdot z_0^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}},$$

tj. podle (6)

$$1/3 \geq \sqrt[3]{\frac{x_0^2 \cdot y_0^2 \cdot z_0^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}}$$

neboli

$$V = 8x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \leq \frac{8 a \cdot b \cdot c}{3 \sqrt{3}} \quad (7)$$

Jelikož je dán elipsoid, tj. čísla a, b, c a pravá strana v (7) je reálné číslo, je V největší, platí-li v (7) rovnost. A ta platí, právě když je $x_0^2/a^2 = y_0^2/b^2 = z_0^2/c^2$, tedy $x_0/a = y_0/b = z_0/c$ ($x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$). Dosazením do (6) dostaneme $x_0^2/a^2 = 1/3$, tedy $x_0/a = y_0/b = z_0/c = 1/\sqrt{3}$. Hledaný kvádr má tedy objem $V = 8a \cdot b \cdot c/3\sqrt{3}$ a souřadnice jeho vrcholu v 1. oktantu jsou $x_0 = a/\sqrt{3}, y_0 = b/\sqrt{3}, z_0 = c/\sqrt{3}$ (a hrany kvádrů jsou dvojnásobky těchto čísel).

Úloha d' Hledáme elipsoid nejmenšího objemu, který je opsán danému kvádru. Objem elipsoidu o poloosách a, b, c je $\frac{4}{3} \pi a b c$. Hledám-li elipsoid, znamená to, že hledám čísla a, b, c ; střed kvádrů umístíme do počátku souřadnic a hrany rovnoběžně se souřadnými osami. Souřadnice vrcholu v 1. oktantu označíme x_0, y_0, z_0 , tj. hrany kvádrů budou po pořádku $2x_0, 2y_0, 2z_0$. Dosadíme-li do (1) (opět z prvního článku) jako v úloze d)

$$x_1 = x_0^2/a^2, x_2 = y_0^2/b^2, x_3 = z_0^2/c^2$$

a vztah (7) upravíme na

$$a \cdot b \cdot c \geq 3\sqrt{3} x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 \quad (8)$$

a vynásobením $4/3 \pi$ na

$$\frac{4}{3} \pi a \cdot b \cdot c \geq 4\sqrt{3} \pi x_0 \cdot y_0 \cdot z_0 = \frac{4\sqrt{3} \pi}{8} V(x_0, y_0, z_0), \quad (9)$$

kde $V(x_0, y_0, z_0)$ je objem daného kvádrů, tedy reálné číslo. Objem opsaného elipsoidu, tj. $\frac{4}{3} \pi a \cdot b \cdot c$ je nejmenší, platí-li v (9) rovnost. Ale dříve jsme již vypočítali, že to nastane právě v tom případě, když $a = \sqrt{3} x_0, b = \sqrt{3} y_0, c = \sqrt{3} z_0$. Hledaný elipsoid má pak rovnici

$$\frac{x^2}{3x_0^2} + \frac{y^2}{3y_0^2} + \frac{z^2}{3z_0^2} = 1.$$

Řešení předcházejících úloh byla v podstatě skutečnost, že čtverec $(a - b)^2$ při reálných a, b je nejmenší, právě když $a = b$. Toho lze použít i při řešení úloh, které nelze označit jako Didoniny.

konstruktivní geometrie

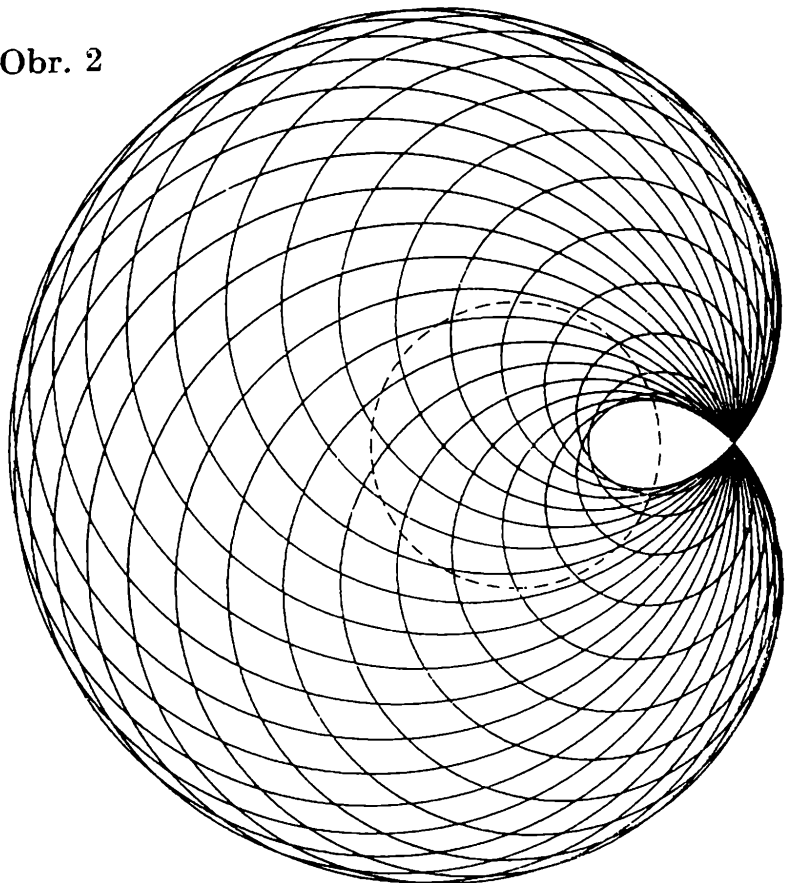
Křivky jako obálky kružnic

RNDr. LUDĚK GRANÁT, Praha

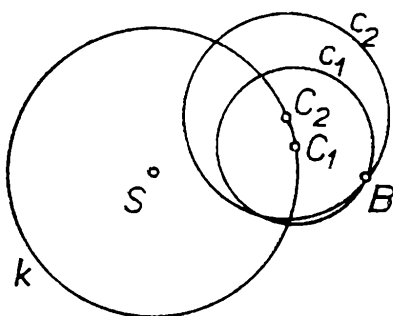
V 2. čísle 25. ročníku Rozhledů — tehdy Rozhledů matematicko-přírodovědeckých — byl uveřejněn článek prof. J. Svobody, v němž bylo doporučeno studentům, kteří si oblíbili matematiku a mají sběratelskou vášeň, aby si pořídili sbírku křivek. Tato sbírka by obsahovala např. název křivky, informace o ní, informace o pramenech, z nichž se můžeme o křivce poučit a její vyrýsování. Toto je jistě dobrá a poučná zábava. Vědomosti získané při ní se mnohým mohou později velmi dobře hodit.

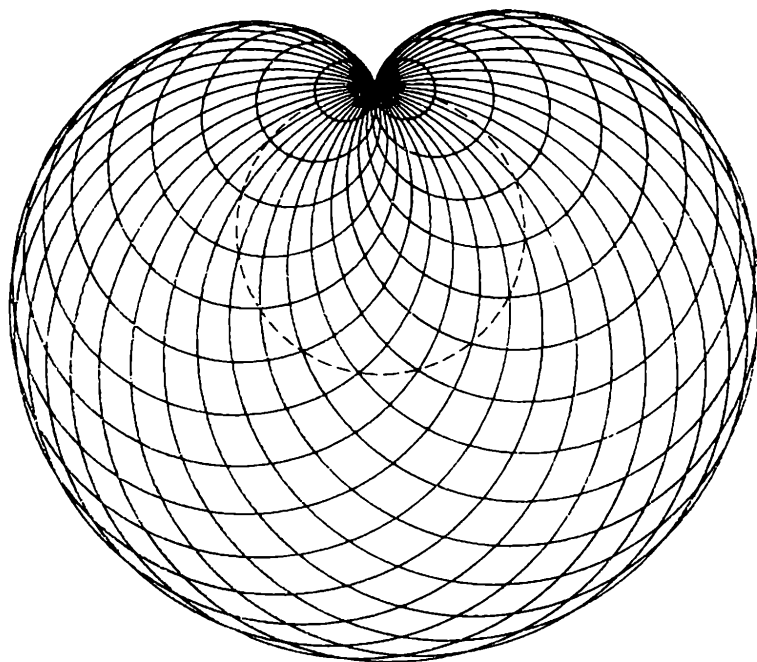
V tomto příspěvku jsem chtěl jednak připomenout uvedené, jednak upozornit mladé sběratele též na to, že u mnohých křivek je zajímavý a důležitý nejen bodový výtvarný zákon, ale též jejich vytvoření jako obálky nějaké soustavy kružnic. Většinou se setkáte v této oblasti s křiv-

Obr. 2



Obr. 1





Obr. 3

kami, které jsou určeny jako obálky přímk, jejich tečen. Zde chci ukázat vytvoření dvou typů křivek a to Pascalovy závitnice a nefroidy jako obálky soustavy kružnic.

Mějme danou kružnici k (nazveme ji řídicí kružnicí) a daný bod B — viz obr. 1. Uvažujme soustavu Σ kružnic, které mají střed na kružnici k a procházejí bodem B . Křivka, která se v každém svém bodě dotýká některé z kružnic soustavy Σ , se nazývá obálkou soustavy. V tomto případě je to Pascalova závitnice. Na obr. 2 je reprezentována soustava Σ určená řídicí kružnicí a bodem B , jak byly zobrazeny na obr. 1, třiceti kružnicemi. Je-li bod B , jak je tomu na předchozích obrázcích, vnějším bodem řídicí kružnice, je bod B uzlovým bodem obálky.

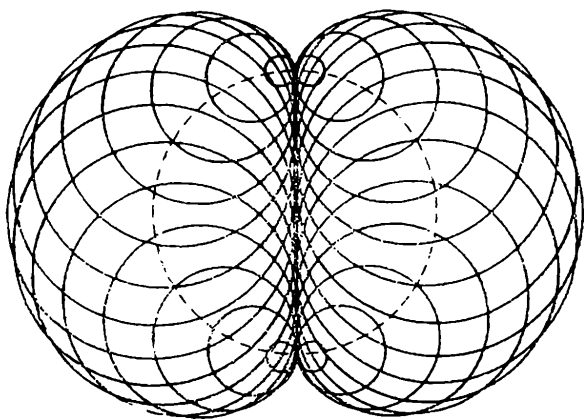
Leží-li bod B na řídicí kružnici k , nazývá se příslušná Pascalova závitnice kardioidou neboli srdcovkou — viz obr. 3.

Na obr. 4 je znázorněna nefroida jako obálka soustavy kružnic, které se dotýkají přímky procházející středem řídicí kružnice a jejichž středy leží na řídicí kružnici. Ve všech obrázcích v článku se vychází ze stejné velké řídicí kružnice.

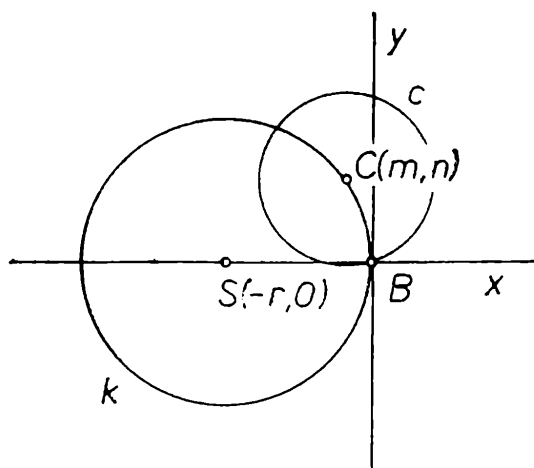
Myslím, že uvedená fakta budou sběratelům křivek užitečná. Mladší čtenáři kromě zapamatování jména, tvaru křivky a příslušného výtvarného zákona se mohou ještě pěkně procvičit v rýsování. Pokročilejší čtenáři mohou provést i důkaz, že zmíněná obálka je Pascalovou závitnicí neb nefroidou, ve smyslu obvyklého jejich bodového určení. Ukážeme zde příslušný postup jen pro případ kardioidy.

Zvolme pravoúhloú kartézskou souřadnicovou soustavu tak, aby bod B byl jejím počátkem a osa x jejím průměrem. Orientace nechť je jako na obr. 5. Pak kružnice soustavy Σ budou mít rovnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = m^2 + n^2 \quad (1)$$



Obr. 4



Obr. 5

a pro jejich středy o souřadnicích m, n bude platit vztah

$$(m + r)^2 + n^2 = r^2 \quad (r > 0). \quad (2)$$

Vyloučením parametru n z rovnic (1) a (2) dostaneme rovnici kružnic soustavy Σ :

$$4(x^2 + y^2)m^2 - 4[x(x^2 + y^2) - 2ry^2]m + (x^2 + y^2)^2 = 0. \quad (3)$$

Parametru m ($-2r < m < 0$) odpovídá vždy dvojice kružnic.

Abychom zjistili obálku, stačí vyloučit z rovnice (3), kterou můžeme stručně zapsat ve tvaru $f(m) = 0$ a z rovnice $\frac{df}{dm} = 0$, tj. z rovnice

$$8(x^2 + y^2)m - 4[x(x^2 + y^2) - 2ry^2] = 0,$$

proměnnou m . Výsledný vztah po vyloučení m lze upravit na tvar

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2),$$

což je již v literatuře běžně uváděná rovnice kardioidy.

Poznámka: Obrázky 2, 3, 4 byly nakresleny na automatickém kreslícím stole DIGIGRAF.

(Vidíte, že nic nevidíte)²

Známý vědec, lord E. Rutherford, předváděl posluchačům rozpad vadia; na filmovém plátně se střídaly záblesky světla s tmou. „Teď vidíte, že nic není vidět. A proč nic není vidět, to teď u vidíte“, komentoval prý Rutherford.

Newtonův zákon setrvačnosti

JOSEF KOTYK, Pardubice

(Napsáno k 330. výročí Newtonova narození.)

Předmětem zvláštního zájmu učiníme v dalších úvahách případ, že *na těleso nepůsobí žádná síla*. Podmínky, jichž vyžaduje, nedají se ovšem přesně uskutečniti; takové těleso by muselo býti ve vesmíru zcela samo. Tato okolnost nám však nijak nebrání uvažovati o jeho fyzikálním stavu. Připustíme-li např., že toto těleso je v klidu, soudíme, že bude v klidu trvale. Souditi z toho však, že *každý* pohyb vyžaduje působení síly, bylo by ovšem ukvapené a chybné. Dějiny fyziky nás učí, že po dlouhé historii plné omylů teprve *Galileo Galilei* (†1642) a *Isaac Newton* (*1643) studiem *setrvačnosti* ukázali, že tomu tak není.

Zákon setrvačnosti (*lex inertiae*), první z pohybových zákonů — Newton jim říká *axiomata sive leges motus* (axiomy neboli zákony pohybu) — v klasické původní formulaci Newtonově zní:

„*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*“

V českém doslovném překladu praví:

„*Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo přímočarého rovnoměrného pohybu, není-li vtištěnými silami nuceno svůj stav změnit.*“

Jindy dáváme zákonu setrvačnosti volnější znění a říkáme:

„*Těleso, jež nepodléhá žádné síle, setrvává v klidu nebo se pohybuje bez přestání přímočaře a rovnoměrně,*“ apod.¹⁾

Tyto výroky je třeba ovšem doplniti, neboť neříkají, k čemu se mají fyzikální stavy stálé rychlosti²⁾ vztahovati. Otázka, zdali těleso, které je ve vesmíru zcela samo, se pohybuje a jaký jest jeho pohyb, pozbývá smyslu, neboť není podle čeho jeho pohybový stav posuzovati. Důraz,

¹⁾ Středoškolské učebnice fyziky nemluví o silách *vtištěných*, nýbrž zpravidla o silách *vnějších*. Tyto pojmy se však nekryjí. Vhodným příkladem vtištěné (neboli hybné) síly vnější může našim čtenářům býti tíže.

²⁾ Klid lze rovněž pokládati za přímočarý rovnoměrný pohyb, jehož rychlost je rovna nule.

který v téže době Otto von Guericke položil na zkušenost, že „jen ona je řešitelkou našich pochyb, rádkyní ve všech obtížích a jedinou učitelkou pravdy,“ padá všude, kde tvrzení vzniklo idealizováním skutečnosti. To platí také o *zákonu setrvačnosti*. Přímým pokusem nalézt odpověď nemůžeme. Školské příklady (ilustrace) zákona setrvačnosti (koule se valí po vodorovné desce aj.) bývají zpravidla toho druhu, že uvažujeme pohyb vzhledem k Zemi. Avšak pohyb, který se pozorovateli, jenž vztahuje svá měření k Zemi, jeví přímočarým, jistě není přímočarý pro pozorovatele vztahujícího svá měření k jinému nebeskému tělesu; naopak byl by mu dosti složitý. Pro Newtona, jenž svým gravitačním zákonem rozšířil platnost zákonů dynamiky na celou soustavu sluneční, z toho plynul jediný důsledek: Mají-li se zákony mechaniky vztahovati k celé sluneční soustavě, nemůže v ní Země míti jiné postavení než kterákoli jiná planeta. Newtonův zákon setrvačnosti neplatí proto ani pro soustavu souřadnic pevně se Zemí spojenou ani pro soustavu, která je spojena s některou jinou planetou.

Podobně tomu je i s měřením času. Mluví-li *zákon setrvačnosti* o stálé rychlosti tělesa, jež nepodléhá žádné síle, nutno ještě udati, jak poznáme, že dva časové intervaly jsou stejné; v nich totiž vykoná ono těleso stejné dráhy. Pohyb o stálé rychlosti prohlásíme zajisté za naprosto nerovnoměrný, jestliže měříme čas hodinkami, jež vystavíme častým a velikým změnám teploty.

Otázka, pro kterou soustavu souřadnic a časovou míru rovnice Newtonovy dynamiky a zákon setrvačnosti platí, má proto zcela reálný smysl. Odpověď na ni mohou dáti měření pohybů těles na Zemi i mimo ni. Dost složitými výpočty a s přesností, jež závisí na pečlivosti mechanických a astronomických měření, vycházejí teoretické konstrukce, které se dají v mezích přesnosti našich měření také realizovati a jejichž oprávněnost se dá i experimentálně zkoumati. Výsledek je přibližně tento: Pohyby, o nichž mluví Newtonův zákon setrvačnosti (a Newtonova dynamika vůbec), nutno vztahovati k soustavě souřadnic, kterou heliocentrický názor světový pokládá za klidnou; její počátek leží v hmotném středu sluneční soustavy (prakticky ve středu Slunce), osy mají pak vůči stálým neproměnné směry. V této tzv. *základní soustavě souřadnic Newtonovy dynamiky* jsou stálice v klidu. Otáčivým pohybem Země vůči stálým je zároveň dána časová míra Newtonovy dynamiky.

Zákony Newtonovy mechaniky neplatí však jen pro jednu soustavu souřadnic, ale pro celou skupinu nekonečně mnoha dalších soustav, jež vzhledem k soustavě základní — a tím i vzhledem k sobě navzájem — konají rovnoměrnou translaci.³⁾ Všechny takové soustavy souřadnic jsou si dynamicky úplně ekvivalentní. Říkáme jim *soustavy inerciální*. New-

³⁾ Těleso koná rovnoměrnou translaci, jestliže se posouvá (bez otáčení) v pevném směru stálou rychlostí.

tonova mechanika nemá pak, jak známo,⁴⁾ prostředku, jímž by rozeznala absolutně klidnou soustavu souřadnic od jiné, která koná vzhledem k ní rovnoměrnou translaci. Pohyb v Newtonově mechanice je tedy *relativní*. Princip relativnosti Newtonovy mechaniky zní:

Pohyb v Newtonově mechanice nemusíme vztahovati vždy k téže soustavě souřadnic. Máme naopak na vybranou nekonečné množství soustav souřadnic. Na druhé straně nesmíme jej však vztahovati k soustavě libovolně zvolené, která by nebyla inerciální.

Cvičení.

1. Starověcí filosofové tvrdili, že by pohybem Země — kdyby jej směli předpokládati — povstal obrovský víchř, všechny budovy by se prý zřítily apod. Vyložte, proč tomu tak není! Země letí kolem Slunce přece rychlostí asi 30 km s^{-1} .

2. Francouzský fyzik Gassendi⁵⁾ spouštěl roku 1649 v Janově se stěžně plující lodi kámen, aby měřil vzdálenosti, v kterých spadne za loď. Vyložte, proč se mu to nemohlo podařit!

3. Vyložte, proč ve Verneově románu „Do Měsíce“ letěl mrtvý pes vedle koule dále!

4. Seskočení z jedoucího vozu proti směru jízdy je velmi nebezpečné. Proč? (Padáme naznak směrem jízdy. Vyložte podrobně!)

⁴⁾ Bezpečně byl si této pravdy vědom také již Galileo Galilei, jak půvabně vylíčil roku 1632 ve svém slavném spise *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo — Tolemaico e Copernicano* (Rozhovor o obou velikých soustavách světových — Ptolemaiově a Koperníkově). V slovenském vydání (SAV Bratislava) — *Galileo Galilei: Dialóg o dvoch systémoch sveta*. Přeložil Dr. Mikuláš Pažitka.

⁵⁾ Pierre Gassendi (1592 až 1655) vyvrátil nesprávné domněnky Aristotelovo, že vyšší tóny se šíří rychleji než nižší. V dále slyšíme však tóny akordů vznikati i zanikati současně, nikoli po sobě. Gassendi dokázal, že rychlost zvuku nezávisí na výšce tónu.

Humor se slovníkem

Profesor William Thomson, lord Kelvin, byl jednou nucen odříci svou přednášku a napsal proto na tabuli v posluchárně ústavu: „Professor Thomson will not meet his classes today.“ (Doslovně přeloženo: Profesor T. se dnes neseťká se svými třídami.) Studenti si zažertovali a smazali písmeno „c“ v profesorově sdělení. Ten se druhý den podíval na upravený nápis na tabuli, nerozčílil se, ale smazal ještě jedno písmeno v témž slově a odešel.

(Nápověda: classes = třídy, lasses = milenky, asses = osli.)

Budou objeveny „černé jámy“?

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

O černých jamách neboli kolapsarech jsme psali v článku „Existují ‚černé jámy‘?“ (č. 9). Nyní se budeme zabývat otázkou možnosti objevu těchto objektů. Gravitační kolaps není v Galaxii příliš častým jevem, a proto nemůžeme očekávat, že náhodou uvidíme celý jeho průběh — pravděpodobnost takového pozorování je prakticky nulová. Naproti tomu můžeme očekávat, že gravitační kolaps v průběhu trvání Galaxie proběhl již u celé řady hvězd, a že tedy v části Galaxie, dostupné našemu pozorování, existuje určitý počet černých jam, kolapsarů.

Kolapsary není možno přímo pozorovat, protože nevysílají žádné záření. Připomeňme, že se kolapsary navenek projevují svým gravitačním polem, tj. působením na jiná tělesa a právě na základě jejich gravitačního působení se po nich pátrá. Astronomové spolu s teoretickými astrofyziky hledají možnosti, jak zjistit existenci černých jam. Je-li černá jáma osamocená, tj. není složkou dvojhvězdy, pak bychom ji mohli zjistit jen v případě, že by se ocitla v oblaku mezihvězdné látky, Částice mezihvězdné látky, zachycené gravitačním polem černé jámy, pohybují se k ní s rostoucím zrychlením a přitom mohou vyzařovat energii. Kromě toho současně se stlačováním plynu v okolí černé jámy roste teplota plynu, což má za následek tepelné záření. Avšak objev takových černých jam není příliš pravděpodobný, neboť hustota mezihvězdného plynu je i v mračnech mezihvězdné látky malá, takže intenzita vznikajícího záření by byla rovněž velmi malá.

Jiná je situace tehdy, je-li černá jáma složkou dvojhvězdy. Její existence se pak může projevit několika způsoby. Především se přítomnost černé jámy projeví na vlastním pohybu viditelné složky dvojhvězdy — viditelná složka se nepohybuje po přímce, ale po vlnité dráze. Proměření této dráhy získáme údaje o neviditelném průvodci hlavní hvězdy; je-li hmotnost průvodce větší než dvě hmotnosti Slunce ($2M_{\odot}$), můžeme uvažovat o otázce, zda nejde o černou jámu. Podobně je tomu u spektroskopických dvojhvězd. Z periodického posuvu spektrálních čar získáme tzv. křivku radiálních rychlostí, na jejímž základě můžeme s jistou pravděpodobností odhadnout hmotnost soustavy. Zjistíme-li nějakým způsobem hmotnost hlavní, viditelné hvězdy, pak odhadneme i hmotnost neviditelného průvodce a je-li tato hmotnost dostatečně velká, může

se jednat o černou jámu. Je-li dvojhvězda velmi těsná, tzn. jsou-li obě její složky velmi blízko sebe, pak může nastat přelévání látky z viditelné hvězdy na černou jámu a tento jev by také bylo možné pozorovat. Konečně je zde ještě jedna možnost: objev černé jámy v zákrytové dvojhvězdě. Uvažujme, že rovina dráhy dvojhvězdy je přibližně kolmá ke sféře. Je-li jednou složkou dvojhvězdy černá jáma, pak sice tato jáma sama o sobě nemůže způsobit zákryty hlavní hvězdy, neboť má malé rozměry, ale může se stát, že je podobně jako jsme o tom uvažovali u osamocené černé jámy, obklopena mračnem mezihvězdného prachu a plynu. Pak toto mračno může způsobit zákryty hlavní hvězdy a tak by bylo možno zjistit existenci černé jámy.

Vidíme, že existují možnosti, jak objevit neviditelné černé jámy. Poprvé se myšlenka objevení černých jam ve dvojhvězdách objevila v článku sovětských vědců J. B. Zeldoviče a O. Ch. Gusejnova v roce 1965. Autoři také upozornili na sedm zákrytových dvojhvězd, u nichž je viditelná jen jedna složka, a které přitom mají velkou celkovou hmotnost. V r. 1969 byla uveřejněna práce amerických astronomů W. L. Trimbleové a K. S. Thorna, v níž autoři analyzovali možnost objevení černých jam ve dvojhvězdách. Tito badatelé předložili seznam dvojhvězd, u nichž je určitá možnost, že by mohly obsahovat černé jámy. Seznam obsahující spektroskopické a zákrytové dvojhvězdy, rozdělili na tři skupiny. V první skupině byly obsaženy dvojhvězdy, u nichž předpokládána hmotnost neviditelné složky nepřevyšovala $1,4 M_{\odot}$. U těchto hvězd je malá pravděpodobnost, že by se mohlo jednat o černé jámy, spíše jde o objevení dosud neznámých bílých trpaslíků. Soustavy ve druhé skupině seznamu mají neviditelnou složku, jejíž hmotnost je sice větší než $1,4 M_{\odot}$, ale přitom menší než je hmotnost viditelné hvězdy. Zde je již určitá pravděpodobnost, že jde o černou jámu; stejně dobře je ale možné, že méně hmotnou složku nepozorujeme prostě proto, že svítí podstatně slaběji než viditelná hvězda a její spektrum se ztrácí na pozadí spektra viditelné hvězdy.

Nejnadějnější pro další studium jsou dvojhvězdy ve třetí skupině seznamu: hmotnost neviditelné složky je nejen větší než $1,4 M_{\odot}$, ale také větší než hmotnost viditelné hvězdy. Vzhledem k tomu, že zářivost hvězdy roste s rostoucí hmotností, je u těchto dvojhvězd velmi obtížné klasickým způsobem vysvětlit skutečnost, že hmotnější hvězdu nepozorujeme a je zde značná pravděpodobnost, že se jedná o černou jámu. V této třetí skupině seznamu je uvedeno deset spektroskopických a pět zákrytových dvojhvězd.

Pátrání po černých jamách se neustále rozvíjí. V r. 1971 upozornil A. Cameron na zvláštní vlastnosti zákrytové dvojhvězdy ϵ Aurigae. Tato dvojhvězda je známa již velmi dlouhou dobu. Již dávno bylo zjištěno, že perioda soustavy je 27 roků a že hlavní hvězda je veleobr spektrální třídy F2. Hmotnost hlavní hvězdy byla odhadnuta na $35 M_{\odot}$,

hmotnost průvodce na $23 M_{\odot}$. Průvodce má neobvyklé vlastnosti. Z doby trvání zákrytu (330 dní) byl jeho poloměr odhadnut na 12 astronomických jednotek (UA), přičemž povrchová teplota je neobyčejně nízká a hustota průvodce je tak malá, že během zákrytu prochází vrstvami průvodce 48 % záření hlavní hvězdy. Barva světla hlavní hvězdy se přitom při průchodu vrstvami průvodce nemění a nebyla rovněž zjištěna polarizace světla hlavní hvězdy. Obecně existují pro vlastnosti soustavy dvě vysvětlení. Buď je průvodce černá jáma, obklopená oblakem mezihvězdného prachu, nebo se jedná o velmi mladou soustavu, v níž hlavní hvězda ještě nedospěla do stadia na hlavní posloupnosti Hertzsprungova—Russellova diagramu a průvodce je zatím jen kondenzujícím se oblakem prachu a plynu, z něhož teprve vznikne hvězda. A. Cameron zamítl tuto druhou hypotézu s odůvodněním, že u hvězdy, která ještě nedospěla do stadia na hlavní posloupnosti, by se musela zvyšovat teplota přibližně o 3 K až 5 K za rok, což by jistě neuniklo pozorovatelům; kromě toho v centrální oblasti mračna, které má hmotnost $23 M_{\odot}$, a které se již smršťilo na poloměr 12 UA, by musela být teplota kolem 10 000 K, což však také nebylo pozorováno.

A. Cameron předpokládá, že správná je první hypotéza — průvodce je černá jáma, obklopená mračnem prachu. Podle této hypotézy se jedná nikoliv o mladou soustavu, ale naopak o soustavu velmi starou. Viditelná složka již opustila stadium na hlavní posloupnosti, druhá složka je ještě starší — ukončila svůj vývoj a proběhl u ní gravitační kolaps. Proti této hypotéze existuje jedna velmi vážná námitka: je známo, že hvězda se vyvíjí tím rychleji, čím větší má hmotnost. Je tedy velmi málo pravděpodobné, že by méně hmotný průvodce ukončil svůj vývoj dříve než hmotnější hlavní hvězda. Cameron vyvrací tuto námitku předpokladem, že na začátku vývoje byla neviditelná složka hmotnější a vyvíjela se rychleji, avšak předtím, než došlo ke gravitačnímu kolapsu nebo na jeho začátku hvězda vybuchla a ztratila část své hmotnosti. Toto tvrzení však není příliš přesvědčivé. Změna hmotnosti průvodce by totiž nutně vedla ke změně tvaru dráhy; původně kruhová dráha by se změnila v eliptickou s tím větší excentricitou, čím větší část hmotnosti hvězda ztratí. Excentricita soustavy ϵ Aurigae však není příliš velká, má hodnotu jen 0,17, z čehož plyne, že hvězda mohla ztratit při výbuchu jen několik procent své hmotnosti. Tyto okolnosti svědčí proti Cameronově hypotéze. Naopak pro jeho hypotézu o černé jámě svědčí objev infračerveného záření, vysílaného průvodcem. Rozborem tohoto záření bylo zjištěno, že toto záření může vysílat oblak prachu odpovídající tvarem, velikostí i vzdáleností od hlavní hvězdy průvodci, až na jednu nerosrovnalost: pro hmotnost mračna vychází podle výpočtů hodnota 500krát menší než je hmotnost Slunce, kdežto průvodce má hmotnost 23krát větší než je hmotnost Slunce. Pro Camerona je to potvrzením jeho hypotézy: oblak prachu má skutečně malou hmotnost, ale uvnitř oblaku

je neviditelná černá jáma s velkou hmotností. Spor o existenci černé jámy ve dvojhvězdě ϵ Aurigae není ještě rozřešen s konečnou platností; soustava je dále studována a údaje o ní jsou stále upřesňovány. Přitom se pátrá po dalších objektech, podezřelých z toho, že obsahují černou jámu. Jedním z nich je dvojhvězda 89 Herculis, která má velmi podobné vlastnosti jako dvojhvězda ϵ Aurigae. Hmotnost prachového mračka, tvořícího průvodce hlavní hvězdy, je podle dosavadních výpočtů ještě větší než u ϵ Aurigae.

Ze sporů kolem zákrytové proměnné hvězdy ϵ Aurigae je zřejmé, že u tohoto typu dvojhvězd lze jen obtížně najít jednoznačné vysvětlení. Problém objevu černé jámy by se značně přiblížil svému vyřešení, kdyby byla k dispozici dvojhvězda, v níž by kromě hlavní hvězdy nebylo pozorováno nic dalšího — ani oblak prachu nebo plynu, ani jiné úkazy, jako je záření nebo přelévání látky. Další podmínkou je pokud možno přesné určení vzdálenosti takové dvojhvězdy, neboť na určení vzdálenosti závisí určení hmotnosti soustavy a tím také hmotnosti neviditelné složky. A právě objev takové hvězdy oznámili nedávno sovětsí astronomové O. Ch. Gusejnov a Ch. I. Novruzovová. Jde o spektroskopickou dvojhvězdu δ Geminorum. Průvodce hlavní hvězdy je zcela neviditelný a přitom má hmotnost čtyřikrát větší než hlavní složka. Hmotnost hlavní složky je podle odhadu 1,8krát větší než hmotnost Slunce, má tedy průvodce hmotnost asi $6,4 M_{\odot}$. Je zcela nepravděpodobné, že by se záření tak hmotné hvězdy ztrácelo na pozadí záření první složky, a to ani tehdy, kdyby průvodce nebyl jedinou hvězdou, ale skládal se ze dvou nebo více málo hmotných hvězd. Hvězda δ Geminorum je poměrně jasná a blízká, takže její vzdálenost známe s dostatečně velkou přesností. Z výpočtů plyne, že pokud chyba v určení hmotnosti není větší než 500 % (tak velká chyba je ovšem u jasné a blízké hvězdy zcela nepravděpodobná), nelze neviditelnost průvodce vysvětlit žádným obvyklým způsobem a je tedy poměrně velká pravděpodobnost, že průvodce hlavní hvězdy je černá jáma. S určitostí ovšem tvrdit, že byla objevena nejpodivuhodnější hvězda, předpovězená teorií hvězdného vývoje — černá jáma — dosud nemůžeme. Dvojhvězdy ϵ Aurigae, 89 Herculis, δ Geminorum a další podobné soustavy se však nyní intenzívně pozorují a studují a je reálná naděje, že v dohledné době bude otázka objevu černé jámy vyřešena.

Proxima Centauri

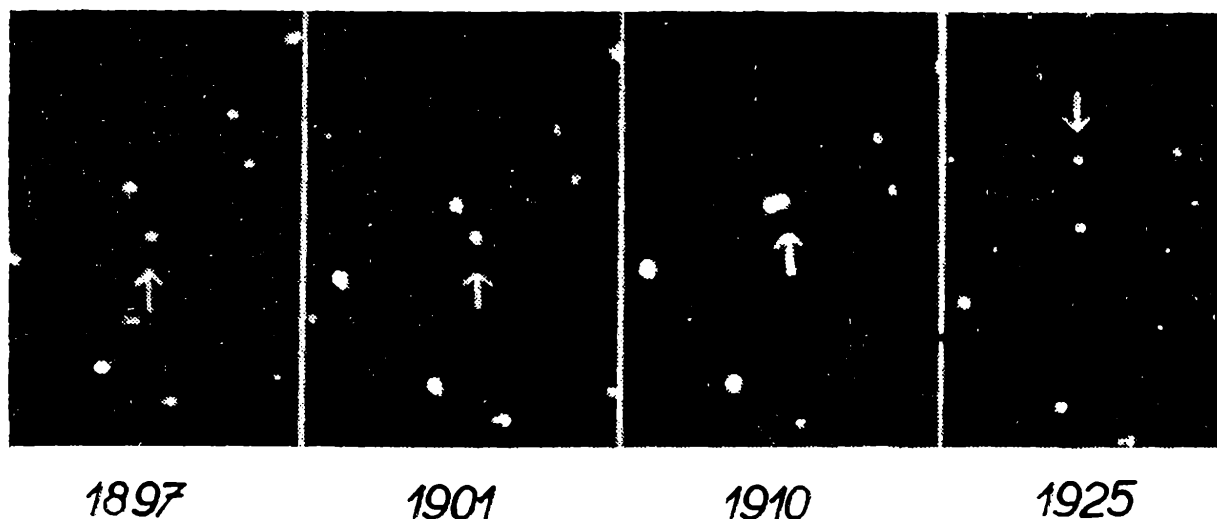
RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Latinské slovo „proxima“ znamená v překladu „nejbližší“, Centaurus je souhvězdí jižní oblohy. Hvězda Proxima Centauri dostala své jméno proto, že je po Slunci naší Zemi nejbližší hvězdou a na obloze se promítá do souhvězdí Centaura. Paralaxa Proximy Centauri je $\pi = 0,762''$, což znamená, že hvězda je ve vzdálenosti 1,3 pc od Slunce. Je zřejmé, že i nejbližší hvězda je z pozemského hlediska v obrovské vzdálenosti: světlo, šířící se rychlostí $3 \cdot 10^8$ m s⁻¹, potřebuje k překonání této vzdálenosti 4,3 roku. V populární astronomické literatuře se často udávají vzdálenosti hvězd vyjádřené pomocí rychlosti šíření světla; Slunce je pak ve vzdálenosti 500 světelných sekund, Proxima Centauri ve vzdálenosti 4,3 světelného roku.

Na obloze jsou rovníkové souřadnice Proximy Centauri $\alpha = 14^h 26,3^m$, $\delta = -62^\circ 28'$ (pro ekvinokcium 1950.0), není tedy v našich zeměpisných šířkách viditelná, neboť v místě se zeměpisnou šířkou $\varphi = +50^\circ$ vystupují nad obzor během roku jen hvězdy s deklinací do -40° . Avšak ani pozorovatel na jižní polokouli by pouhým okem nejbližší hvězdu nespatriil; přes poměrně malou vzdálenost je to hvězda velmi slabá. Zdánlivá hvězdná velikost Proximy je 10,68^m okem můžeme vidět jen hvězdy do 6^m. Proxima Centauri je červený trpaslík spektrální třídy M5 s emisními čarami ve spektru.

Hvězda má neobyčejně malou zářivost, neboť vyzařuje desettisíckrát méně energie než Slunce. Absolutní hvězdná velikost Proximy Centauri, tj. hvězdná velikost přepočtená na vzdálenost 10 pc, je 15,1^M, absolutní, hvězdná velikost našeho Slunce je kolem 5^M. Kdyby na místě Proximy

Obr. 1. Vlastní pohyb Proximy Centauri



Centauri byla hvězda o zářivosti Slunce, pak by měla zdánlivou hvězdnou velikost asi $0,5^M$ a na jižní obloze by patřila mezi nejjasnější hvězdy.

Na obr. 1 jsou čtyři fotografie Proximy Centauri a hvězd v jejím okolí, pořízené na Harvardově observatoři v letech 1897, 1901, 1910 a 1925. Z fofografií je zřejmý vlastní pohyb Proximy. Velikost vlastního pohybu je $\mu = 3,85''$ za rok, což ji řadí na 18. místo v seznamu hvězd s největšími vlastními pohyby (největší vlastní pohyb má Barnardova hvězda, a to $\mu = 10,27''$ za rok). Vlastnímu pohybu Proximy odpovídá tangenciální rychlost $v_t = 24 \text{ km s}^{-1}$.

V souhvězdí Centaura je také druhá nejbližší hvězda; je to nejjasnější hvězda v souhvězdí Centaura, α Centauri. Tato hvězda je jen o dva světelné týdny, tj. asi o 2400 astronomických jednotek dále než Proxima a je to dvojhvězda. Jasnější složka, označovaná α Centauri A, má zdánlivou hvězdnou velikost $0,33^m$, absolutní hvězdnou velikost $4,5^M$ a je podobně jako naše Slunce spektrální třídy G2. Průvodce — α Centauri B — má zdánlivou hvězdnou velikost $1,70^m$, absolutní velikost $5,9^M$ a je spektrální třídy K0. Oběžná doba dvojhvězdy je 80 roků, velká poloosa dráhy $17,68''$, tj. 23,5 astronomických jednotek. Protože jde o vizuální dvojhvězdu, bylo možné poměrně přesně určit i hmotnosti obou hvězd. Jasnější složka má hmotnost 1,05 hmotnosti Slunce, průvodce 0,9 hmotnosti Slunce. Radiální rychlost soustavy je -25 km s^{-1} (soustava se k nám touto rychlostí přibližuje), vlastní pohyb je o něco menší než u Proximy a činí $3,69''$ za rok, což odpovídá tangenciální rychlosti 23 km s^{-1} .

Závěrem připomínáme, že nejbližší hvězda, viditelná pouhým okem i v našich zeměpisných šířkách, je nejjasnější hvězda celé oblohy — Sírius v souhvězdí Velkého psa (α Canis maioris), který je od nás vzdálen 2,7 pc (což odpovídá 9 světelným rokům), tj. je ve dvojnásobné vzdálenosti než Proxima Centauri.

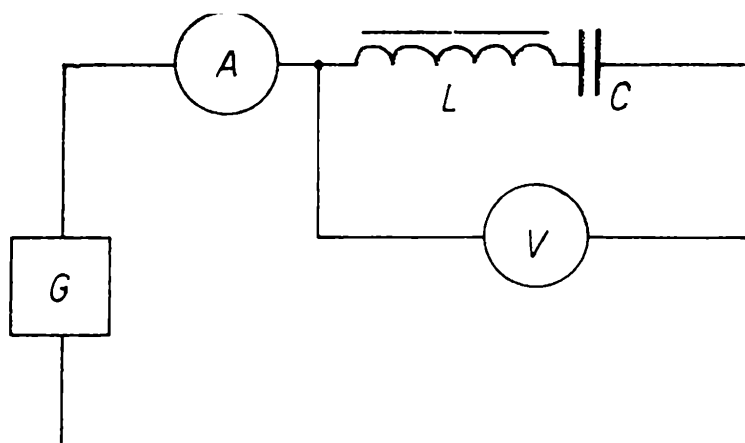
olympiády

Úlohy pro první kolo soutěže F0

4. Určení rezonančních křivek (experimentální úloha)

Definice

Rezonanční křivku elektrického obvodu složeného z cívky a kondenzátoru můžeme definovat jako graf funkce $Z = F(f)$, kde Z značí impedanci obvodu a f kmitočet harmonického střídavého proudu, který obvodem protéká.



Obr. 1

Rezonance sériová (obr. 1) nastává při kmitočtu

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}, \quad (1)$$

kde L značí indukčnost cívky, C kapacitu kondenzátoru. Při tomto kmitočtu má obvod nejmenší impedanci Z_{\min} . Rezonance paralelní (obr. 2) nastává při kmitočtu

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} \quad (2)$$

kde R značí činný odpor cívky. Kondenzátor přitom považujeme za ideální, tj. předpokládáme, že jeho dielektrikum je dokonalým izolantem. Při kmitočtu f_p má obvod maximální impedanci Z_{\max} . Pokud

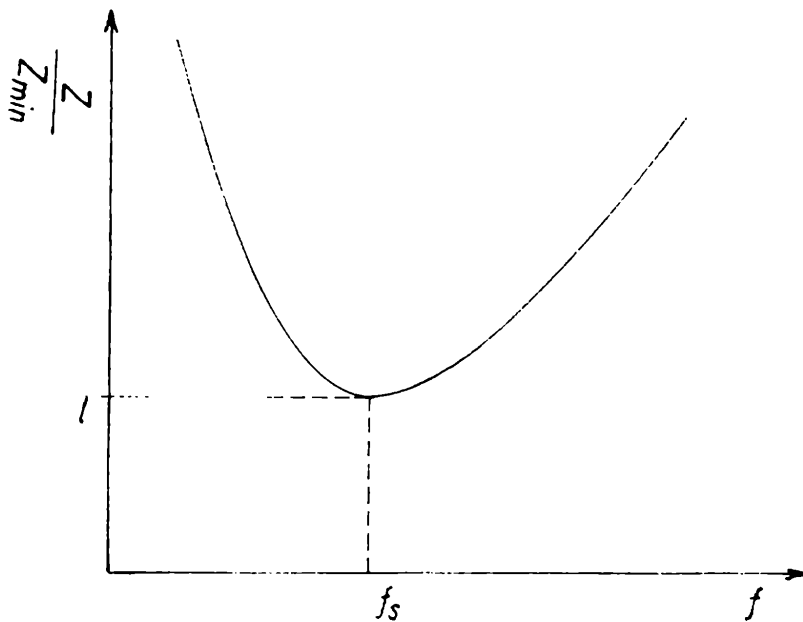
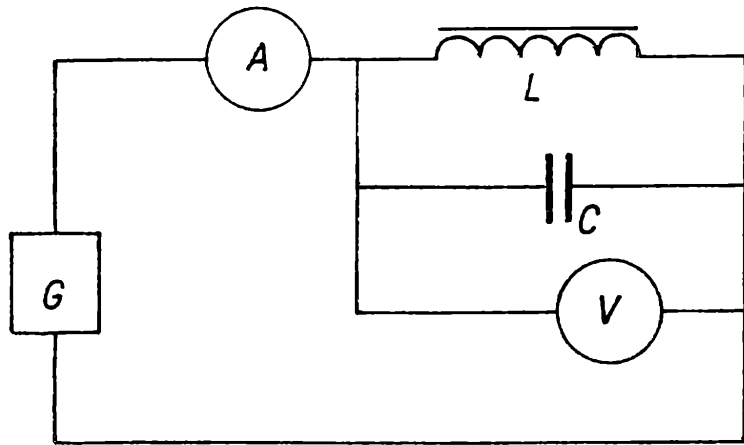
$$\left(\frac{R}{L}\right) \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

platí s dobrou přibližností $f_p \approx f_s$.

Použité přístroje a součástky (obr. 1, obr. 2)

- G . nízkofrekvenční generátor se spojitě proměnným kmitočtem, jehož hodnotu lze přečíst na stupnici,
- L . cívka (s jádrem) o indukčnosti (1 až 5) H (např. tlumivka ze zářivkového osvětlovacího tělesa, vyhlazovací tlumivka pro malý usměrňovač apod.).
- C . kondenzátor (co nejjakostnější, nikoli elektrolytický) takové kapacity, aby spolu s cívkou vytvořil obvod s rezonančním kmitočtem v rozmezí (150 až 500) Hz,
- A . střídavý ampérmetr (vyhoví i avomet I),
- V . střídavý voltmetr s velkým vnitřním odporem, nejlépe nízkofrekvenční elektronkový, vyhoví však i avomet II.

Obr. 2



Obr. 3

Úlohy

a) Vyberte vhodnou cívku a přibližně změřte její indukčnost (libovolnou metodou); podle výsledku měření stanovte potřebnou kapacitu kondenzátoru tak, aby rezonanční kmitočet byl v doporučeném rozmezí.

b) Vyberte vhodný kondenzátor.

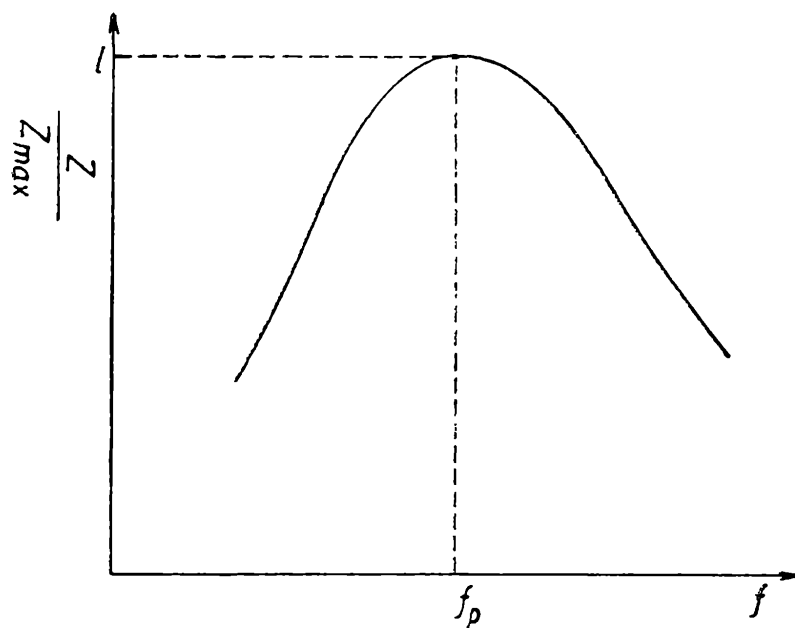
c) Sestavte obvod podle *obr. 1*.

d) Měřte impedanci tohoto obvodu (počítejte ji z naměřených hodnot napětí a proudu) při 20 různých kmitočtech v okolí kmitočtu rezonančního, který předem přibližně určíte podle minima Z_{\min} impedance.

e) Graficky zakreslete funkci $\frac{Z}{Z_{\min}} = F_1(f)$, tzv. normovanou rezonanční křivku sériového obvodu.

f) Obdobné měření proveďte v zapojení podle *obr. 2*, stanovte maximální impedanci Z_{\max} při rezonančním kmitočtu.

g) Graficky znázorněte funkci $\frac{Z}{Z_{\max}} = F_2(f)$, tzv. normovanou rezonanční křivku paralelního obvodu.



Obr. 4

Grafy mají typické průběhy podle *obr. 3* a *obr. 4*.

Poznámky:

1. Neměřte při kmitočtu 50 Hz, protože podle zkušenosti zde často dochází k interferenci s technickým kmitočtem sítě.

2. Při měření se nesmí měnit vnitřní odpor použitého voltmetru. Proto budete-li napětí měřit avometem II, proveďte celé měření na témž měřicím rozsahu.

3. Odvození vztahů (1), (2) a další cenná poučení naleznete v publikaci: K. Hofman: Vektorové znázornění střídavých proudů. Symbolická metoda. Edice „Škola mladých fyziků“, svazek č. 2, Státní pedagogické nakladatelství, 1968.

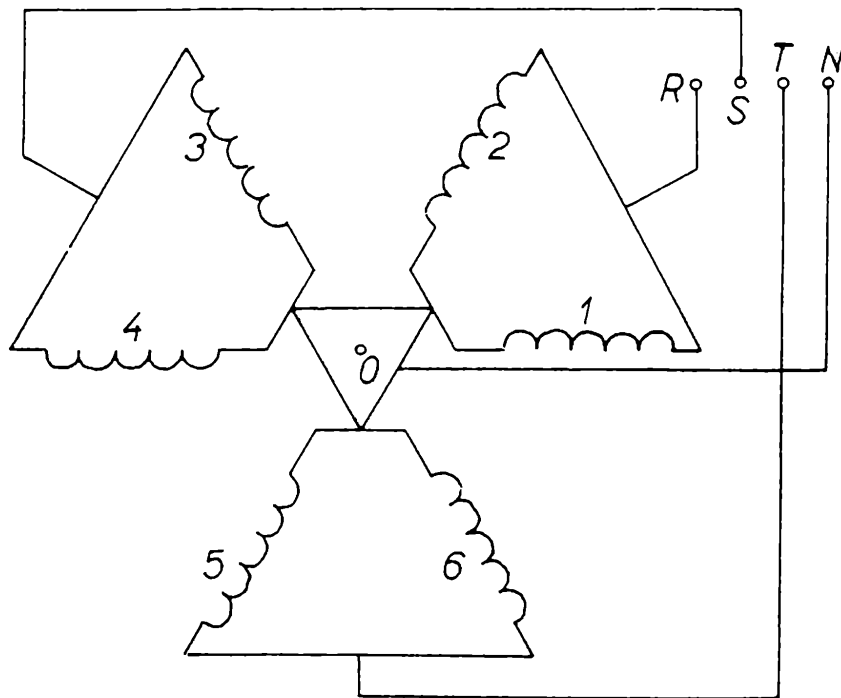
5. Prstenec z litiny, jehož střední délka je l , má vzduchovou mezeru d_1 a magnetomotorické napětí E_m v něm budí magnetickou indukci o velikosti B .

Jakou šířku d_2 musí mít vzduchová mezera prstence z ocelolitině, jenž má stejnou střední délku a stejný průřez, aby při stejně velkém magnetomotorickém napětí v něm byla vzbuzena stejně velká magnetická indukce?

Intenzita magnetického pole v litině má velikost H_1 , v ocelolitině H_2 . Předpokládáme $d_1 \ll l$; $d_2 \ll l$. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $B = 0,6$ T; $d_1 = 1$ mm; $l = 8$ dm.

6. Na *obr. 5* je znázorněno 6 stejných cívek postavených tak, že jejich osy leží v téže rovině a každé dvě sousední spolu svírají úhel 60° . Cívky jsou napájeny trojfázovým proudem, jak je vyznačeno na obrázku (R, S, T zde značí vodiče fázové, N vodič nulový).

Jaká magnetická indukce B vznikne ve středu O soustavy, budí-li každá cívka v bodě O magnetickou indukci s harmonicky proměnnou velikostí o amplitudě B ?



Obr. 5

7. Pro pozorovatele na Zemi má Slunce hvězdnou velikost m_1 , hvězda α Centauri velikost m_2 . Vzdálenost Země od Slunce je d_1 , vzdálenost Země od hvězdy α Centauri je d_2 ; vzdálenost Slunce od této hvězdy lze považovat přibližně za stejnou, tj. d_2 .

Na spojnici Slunce a hvězdy α Centauri nalezněte místo, v němž mají pro pozorovatele obě hvězdy stejnou velikost a stanovte tuto velikost m_0 .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = -26,72^m$; $m_2 = 0,30^m$; $d_1 = 1,0$ A. U.; $d_2 = 1,3$ pc.

KATEGORIE B.

4. Baterie dvou kondenzátorů o kapacitách C_1 , C_2 ($C_1 < C_2$) zapojených sériově byla nabita na napětí U_0 . Potom byly kondenzátory bez vybití spojeny paralelně.

a) Určete napětí U na kondenzátorech spojených paralelně,

b) Určete náboj Q' , který po přepojení přešel z jednoho kondenzátoru na druhý.

c) Určete práci A , která se při tom vykonala.

d) Uvažte, jak se práce A projevila.

Odpor spojovacích vodičů neuvažujte.

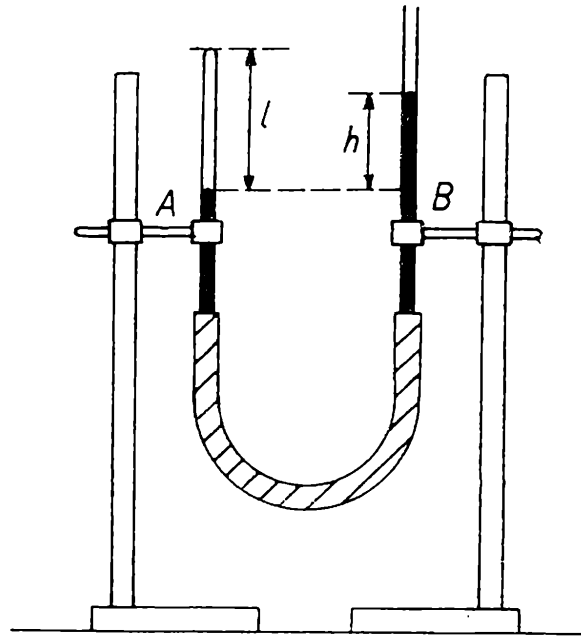
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $C_1 = 1,00 \mu\text{F}$; $C_2 = 3,00 \mu\text{F}$; $U_0 = 200$ V.

5. Overenie Boylovho zákona. Meranie atmosferického tlaku.

Ciel práce:

Overiť Boylov zákon v tvare $p V = k'$, (1)

kde p je tlak a V objem plynu o stálej teplote, k' je konštanta.



Obr. 6

Pomocky: Aparatúra podľa obr. 6, dĺžkové meradlo s milimetrovým delením.

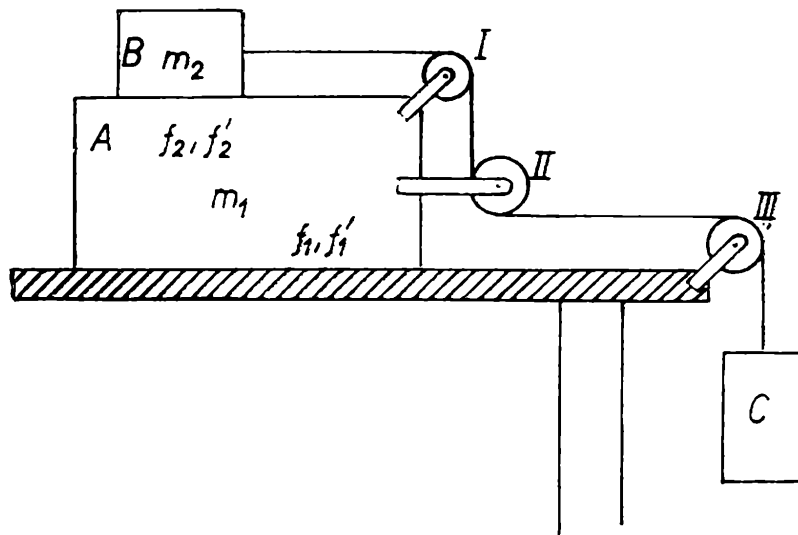
Príprava merania:

Aparatúra pozostáva z dvoch sklenených trubíc, *A*, *B* o dĺžke (20 až 30) cm a o priemere asi 0,5 cm, ktoré sú spojené gumovou hadičkou. Trubica *A* má jeden koniec uzavretý. Sústava trubíc je čiastočne naplnená ortuťou, ktorá v trubici *A* uzatvára stĺpec vzduchu o dĺžke l a objeme $V = Sl$. (S je obsah prierezu trubice.)

Postup merania:

Trubice *A*, *B* posunujeme v zvislom smere tak, aby sa rozdiel výšok ortuťových stĺpcov menil. Meriame dĺžku l vzduchového stĺpca a príslušnú hodnotu h . Vykonáme (8 až 10) meraní. Dvojice l_i , h_i zapisujeme do tabuľky.

i	$\frac{l_i}{[10^{-3} \text{ m}]}$	$\frac{h_i}{[10^{-3} \text{ m}]}$	$\frac{hl_i}{[10^{-4} \text{ m}^2]}$	$\frac{\rho g h_i l_i}{[10^{-1} \text{ N m}^{-1}]}$
1				
2				
3				



Obr. 7

Spracovanie nameraných hodnot :

Vzduch v trubici A má tlak

$$p = \rho g h + b, \quad \text{kde } \rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

je hustota ortuti a $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ je tiažové zrýchlenie. Podľa Boylovho zákona (1) je

$$(\rho g h + b)l = k, \quad (2)$$

kde $k = k'/S$.

a) V súradnicovej sústave (x, y) , kde na os x nanášame hodnoty l_i a na os y hodnoty $\rho g h_i l_i$ zostrojte body $(l_i, \rho g h_i l_i)$ a uvážte, či môžeme získaný graf považovať za graf lineárnej funkcie.

b) Napíšte rovnicu funkcie, ktorá je znázornená grafom podľa úlohy a).

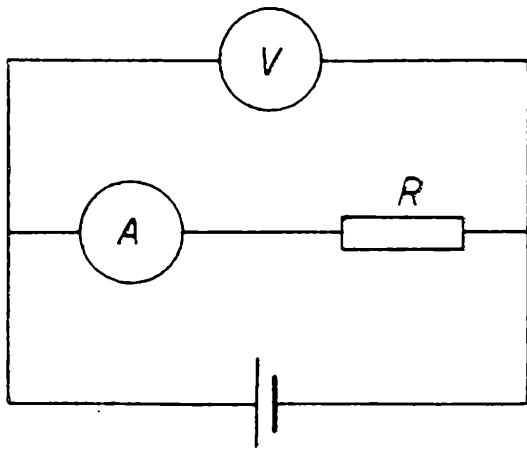
c) Vysvetlite, ktorá geometrická vlastnosť grafu zodpovedá konštante b . Meraním na grafe určte hodnotu b a vyjadrite ju v jednotkách N m^{-2} a torr.

d) Zostrojte body $(l_i, \rho g h_i + b)$ a narysujte spojitú čiaru zobrazujúcu závislosť $p = p(l)$.

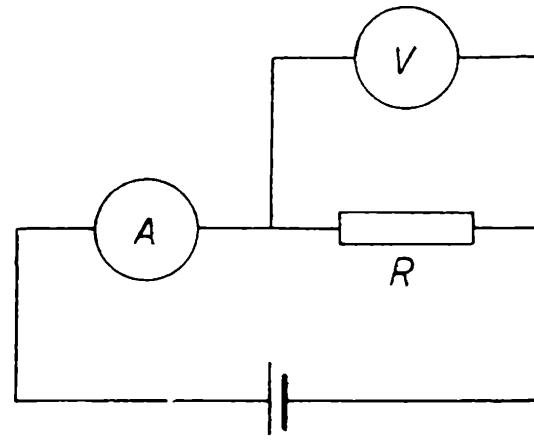
Prípravu úlohy a potrebné merania vykonajte len za dozoru vyučujúciho a za prísneho dodržiavania všetkých bezpečnostných predpisov pre prácu s ortuťou.

6. Na vodorovné rovine leží kvádr A o hmotnosti m_1 , na ňom je těleso B o hmotnosti m_2 (obr. 7). Těleso B je spojené vláknom vedeným přes tři kladky s tělesem C tak, že vlákno z kladky II je na kladku III vedeno vodorovně. Těleso C se může pohybovat ve svislém směru. Součinitel smykového tření tělesa A a vodorovné roviny je f_1 , součinitel smykového tření tělesa A a tělesa B je f_2 . Součinitele statického tření jsou f_1' (těleso A a vodorovná rovina) a f_2' (těleso A a těleso B).

a) Určete podmínku, kterou musí splňovat součinitele tření, aby při zadaných hmotnostech těles se těleso A v dané soustavě těles mohlo pohybovat.



Obr. 8



Obr. 9

b) Určete největší hmotnost m_3 tělesa C tak, aby při zadaných hmotnostech a součinitelích tření se tělesa A a B právě ještě pohybovala jako jediné těleso.

Hmotnosti vlákna a kladek jsou zanedbatelné vzhledem k hmotnostem těles, délka vlákna se nemění, třecí síly při otáčení kladek zanedbáváme vzhledem k ostatním silám.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 1,5$ kg; $m_2 = 1,0$ kg, $f_1 = 0,10$, $f_2 = 0,70$, $f'_1 = 0,20$, $f'_2 = 0,80$.

7. V meraní odporu priamou metódou zapojíme voltmeter a ampér-meter k neznámému odporu R najskôr podľa schémy (1) (obr. 8) a potom podľa schémy (2) (obr. 9). Údaje voltmetra a ampérmetra v zapojení (1) sú U_1 , I_1 , v zapojení (2) U_2 , I_2 .

Z nameraných hodnôt:

a) Určte odpor R a vnútorné odpory R_V voltmetra a R_A ampérmetra.

b) Určte absolútne chyby ΔR_1 , ΔR_2 , ktorých sa dopustíme, keď odpor stanovíme len z nameraných hodnôt U_2 , I_2 .

V meraniach (1), (2) bol použitý ten istý zdroj napätia. Vnútorný odpor zdroja a odpory spojovacích drôtov neuvažujte. Riešte najskôr všeobecne a potom pre hodnoty.

$$U_1 = 83,1 \text{ V}, I_1 = 1,34 \text{ A}, U_2 = 83,4 \text{ V}, I_2 = 1,32 \text{ A}.$$

c) Zdôvodnite rozdiel veľkostí chýb ΔR_1 , ΔR_2 pre zadané hodnoty.

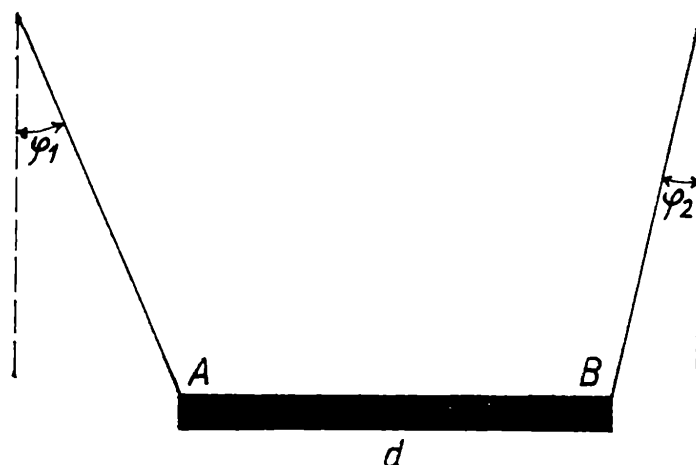
KATEGORIE C.

4. Abychom určili polohu ťžišťa veľmi tenké nehomogénnej tyče dĺžky d , zavěsíme tyč v koncových bodech A , B na dvě vlákna tak, že osa tyče je vodorovná (obr. 12). Vlákna svírají se svislým směrem ostré úhly φ_1 , φ_2 . Hmotnost vláken je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti tyče.

a) Určte polohu ťžišťa tyče, znáte-li hodnoty veličin d , φ_1 , φ_2 .

Provedte diskusi. Ověřte správnost výsledku pro $\varphi_1 = \varphi_2$.

b) Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty: $d = 2,0$ m, $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 45^\circ$



Obr. 12

c) Ověřte správnost výsledku úlohy b) jejím grafickým řešením ve vhodném měřítku.

d) Uvažte, jak je možno využít uvedeného postupu určení polohy těžiště velmi tenké nehomogenní tyče pro těleso nehomogenní, libovolného tvaru.

5. Těleso tvaru rotačního válce se skládá ze dvou homogenních válců o společné podstavě. Hustota prvního válce je ρ_1 a jeho výška je h_1 ; hustota druhého válce je ρ_2 a výška h_2 , platí $\rho_1 > \rho_2$, $h_1 < h_2$.

a) Válec plove ve vodě tak, že jeho rotační osa je svislá. Určete podmínku, za které je jeho rovnovážná poloha stálá.

b) Do které hloubky pod povrchem vody se ponoří spodní podstava válce, který plove v rovnovážné poloze stálé?

c) Určete vzdálenost těžiště tělesa od působíště vztlakové síly v případě b).

d) Určete hustotu kapaliny, do které se právě celý válec ponoří.

e) Po obecném vyřešení úlohy řešte pro hodnoty: $\rho_1 = 7,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_2 = 7,0 \cdot 10^2 \text{ kg m}^{-3}$, $h_1 = 1,0 \text{ cm}$, $h_2 = 29 \text{ cm}$.

6. Určenie súčiniteľa vnútorného trenia kvapaliny Stokesovou metódou.

Pomôcky:

Vysoký sklenený valec (trubica s priemerom aspoň 3 cm, asi 120 cm dlhá, dole dobre uzavretá), transformátorový olej alebo iná vhodná viskózná kvapalina, hustomer (Mohrove váhy), mikrometer, stopky, citlivé váhy so závažím, ocelové guľôčky s priemerom najviac 1 mm, milimetrové meradlo.

Úvod:

Na guľu, ktorá sa pohybuje vo viskóznej kvapaline, pôsobí tiaže, vztlako vá sila podľa Archimedovho zákona a sila odporu prostredia vyjadrená Stokesovým vzťahom

$$F = 6\pi\eta r v,$$

kde η je dynamická viskozita kvapaliny, r polomer pohybujúcej sa guľôčky a v jej rýchlosť. Ak necháme v kvapaline guľôčku padať, dosiahne maximálnu rýchlosť v_{\max} , keď sú všetky tieto tri sily v rovnováhe. Guľôčka sa ďalej pohybuje rovnomerne touto maximálnou rýchlosťou.

Úlohy:

1. Z podmienky rovnováhy síl odvodte vzťah pre výpočet súčiniteľa vnútorného trenia pomocou známej rýchlosti v_{\max} .

2. Provedte merania:

a) Určte hmotnosť jednej guľôčky vážením väčšieho počtu guľôčiek.

b) Odmerajte priemer guľôčky (mikrometrom). Meranie opakujte aspoň päťkrát na rozličných guľôčkach.

c) Určte hustotu kvapaliny. Meranie hustomerom opakujte aspoň päťkrát.

d) Na trubici s olejom si ohraničte značkami dráhy rozličných dĺžek (napr. 70 cm, 80 cm, 90 cm) tak, aby dráhy začínali aspoň 20 cm pod povrchom oleja. Potom vpusťte guľôčku pokojným ponorením do oleja a odmerajte čas, za ktorý guľôčka prejde niektorú vymedzenú dráhu. Pre každý dráhu opakujte meranie aspoň päťkrát. Za predpokladu, že pohyb guľôčky je na celej dráhe rovnomerný, vypočítajte v_{\max} . Namerané hodnoty zapíšte do vhodných tabuliek, vypočítajte aritmetické priemery z hodnôt získaných opakovaným meraním a ich relatívne a absolútne chyby.

3. Vypočítajte dynamickú viskozitu kvapaliny a relatívnu aj absolútnu chybu tohto výsledku. Uvážte, ktorá z meraných hodnôt najviac ovplyvní presnosť vypočítanej hodnoty.

7. V dutém rotačnom váleci se svislou osou se posunuje vzduchotěsně, bez tření píst ve směru osy. Výška válce je $2d$, jeho průřez je S ; hmotnost pístu je m , tloušťka pístu je zanedbatelná vzhledem k délce d . Každá z obou podstav válce je opatřena trubicí s kohoutem. Píst je upevněn uprostřed válce. Oba kohouty jsou otevřeny tak, že v obou polovinách válce je vzduch, jehož tlak se rovná atmosférickému tlaku p_a vnějšího vzduchu.

a) Kohout u dolní podstavy válce se uzavře a píst se uvolní. Určete posunutí x pístu, jestliže píst dosáhne rovnovážné polohy.

b) V počáteční poloze pístu se oba kohouty uzavrou a píst se uvolní. Určete posunutí y pístu, jestliže píst dosáhne rovnovážné polohy. Při uvedených dějích je teplota vzduchu stálá. Vzduch považujeme za dokonalý plyn.

Po obecném řešení řešte úlohu pro hodnoty: $d = 2,0 \cdot 10^{-1}$ m, $S = 1,0 \cdot 10^{-3}$ m², $m = 5,0$ kg, $p_a = 1,0 \cdot 10^5$ N m⁻², hustota vzduchu za daného atmosférického tlaku a teploty $\rho = 1,3$ kg m⁻³.

KATEGORIE D.

4. Vlak hmotnosti m se pohybuje stálou rychlostí v . Chlapec si zavěsil v oddělení jednoho vagónu kyvadlo, vytvořené z kuličky o hmotnosti m_1 a vlákna délky l , jehož hmotnost je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti kuličky. Když vlak začal brzdit s konstantním zrychlením a , vychýlila se kulička kyvadla ze své rovnovážné polohy o délku x ve vodorovném směru. Určete z těchto údajů velikost brzdicí síly a délku dráhy, na níž se vlak zastavil.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m = 5 \cdot 10^5$ kg; $v = 72$ km h⁻¹; $m_1 = 0,10$ kg; $l = 1,5$ m; $x = 0,10$ m; $g = 10$ m s⁻².

5. Stanovte objem broku užitím pyknometru a přímým měřením. Máte k dispozici tyto pomůcky: 50 broků, mikrometr, pyknometr, váhy, závaží, odměrný válec.

- Navrhnete postup měření.
- Provedte měření.
- Stanovte absolutní a relativní chybu měření.

6. Těleso volně padá z vrcholku věže výšky H . Když proběhlo dráhu l , začalo volně padat druhé těleso z okna, umístěného v hloubce h pod vrcholem věže.

- Dokažte, že platí $H = \frac{4l}{(l+h)^2}$, jestliže obě tělesa dosáhnou po-

vrchu Země současně.

- Určete, v jaké výšce nad povrchem Země je okno.
- Stanovte časový interval mezi začátky pohybu obou těles.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $H = 45$ m, $l = 20$ m.

7. Na vozíku, ktorý sa môže pohybovať po vodorovnej trati bez trenia, je človek s hmotnosťou m a tri telesá s hmotnosťami m_1 , $m_2 = 2m_1$ a $m_3 = 3m_1$. Vozík má hmotnosť M a je v pokoji vôči Zemi. Človek postupne vyhodí prvé dve telesá tak, že ich začiatočná rýchlosť v_0 (vôči vozíku) je vodorovná a má smer pozdĺžnej osi vozíka.

- Určte rýchlosť vozíka po vyhodení každého telesa, ak obe boli vyhodené na tú istú stranu vozíka.

- Určte rýchlosť vozíka po vyhodení každého telesa, ak druhé bolo vyhodené na opačnú stranu vozíka ako prvé.

- Akou rýchlosťou a na ktorú stranu vozíka po vyhodení oboch prvých telies v prípadoch a) aj b), musí človek vyhodit tretie teleso, aby sa vozík zastavil?

Preved'te diskusiul'

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $M = 100$ kg, $m = 75$ kg, $m_1 = 5,0$ kg, $v_0 = 3,0$ m s⁻¹.

různé

Prof. Dr. Jacob Philip Kulik

JIŘÍ HRIVŇÁK, Libčice nad Vltavou

Navštívíme-li panteon českých významných osobností v Praze-Vyšehradě, spatříme na zdi vedle krypty velkou fresku s plechovým ornamentem, na které je také vymalováno jméno Dr. Ph. Jacob Philip Kulik. Byl z tvůrců české vědy a vychoval nám řadu vysokoškolských profesorů a vědců; letos vzpomínáme 180. výročí jeho narození a 110. výročí úmrtí.

Narodil se ve Lvově, kde jeho otec Philip Kulik byl pravděpodobně konsistorním radou při řecko-katolickém metropolitánském úřadě a měl všechny předpoklady blahodárně působit na estetický a ideologický vývoj svého synka, který však i bez toho měl vrozené vlohy a touhu po vyšším vzdělání. A nescházela mu k tomu ani píle ani chuť a navíc byl ještě obdařen nevšední pamětí.

Ve Lvově Jacob Kulik s vyznamenáním ukončil klasické gymnasium a pak současně studoval na právnické i filosofické fakultě, jež obě absolvoval v r. 1814 rovněž s vyznamenáním. Ale jeho zájmy se neomezovaly pouze na práva, filosofii, fyziku, matematiku a astronomii, které studoval na Lvovské universitě a z kterých dělal zkoušky. Byl to skutečný odborník s širokým rozhledem a můžeme ho právem nazvat živou, pohybující se encyklopedií.

Když byl v r. 1814 vypsán konkurs na obsazení matematické disciplíny na olomouckém lyceu, přihlásil se i Kulik, který ač mlád, obstál při inauguraci skvěle a byl přijat jako mimořádný profesor. Během akademického roku byl pak jmenován řádným profesorem, což byl v dějinách vysokých škol ojedinělý případ.

Po dvouletém působení v Olomouci byl povolán jako řádný profesor na universitu ve Štýrském Hradci, kde přednášel fyziku. Zde byl také promován v r. 1822 na doktora filosofie a v r. 1823 byl již zvolen rektorem této university.

Sláva o Kulikovi jako odborníkovi se bleskově šířila v Rakouské říši. Měl v té době již uveřejněno mnoho vědeckých prací a nebylo také náhodou, že projevil o něj zájem i senát Karlovy university v Praze. Rektorátu obzvláště imponoval jeho slovanský původ, neboť Kulik se hrdě hlásil ke své ukrajinské národnosti.

Dr. Jacob Kulik s radostí přijal profesuru na Karlově universitě, a to tím spíše, že Praha ho lákala jednak jako město slovanské a také tím, že zde měl působit převážně mezi slovanskými bratry. Z Prahy mohl též



občas zavítat do svého rodného města Lvova. V r. 1826 se Dr. Kulik přestěhoval do Prahy jako profesor vyšší matematiky Karlovy university a tento přechod oslavil tím, že daroval mnoho knih českým ústavům. Jenom Jednotě českých matematiků v Praze daroval celou svou matematickou knihovnu. Když shořela universita ve Lvově a senát se obrátil v r. 1848 s prosbou na Kulika, zaslal Kulik do Lvova mnoho set vědeckých knih, které získal ať už darem od různých vědců, nebo si je pořizoval za vlastní prostředky, nebo byl sám jejich autorem.

Vědecké práce prof. J. Kulika se vztahovaly obzvláště na matematiku, fyziku a astronomii a v uvedených disciplínách také napsal i příručky pro vysoké školy: „Lehrbuch der höheren Analysis“, Prag 1831 (Učebnice vyšší analyzy); „Tafeln hyperb. Sektoren und der Länge elliptischen Quadrants“ (Tabulky hyperbolické výseče a délky eliptického kvadrantu); „Tafeln der Quadrat — und Kubik-Zahlen aller natürlichen Zahlen bis Hundert Tausend nebst ihrer Anwendung auf die Zerlegung grosser Zahlen in ihre Faktoren; nach einer neuen Methode berechnet, Leipzig 1848“ (Tabulky kvadratických a krychlových přirozených čísel až do sto tisíc a jejich použití k rozkladu velkých čísel v jejich činitele. Nová počítací metoda); „Der tausendjährige Kalender“, Prag 1831 (Tisíciletý kalendář); „Anfangsgrunde der höheren Mechanik“, Prag 1846 (Základy vyšší mechaniky); „Beiträge z. Auflösung höh. Gleichungen“, Prag 1860 (Příspěvky k řešení vyšších rovnic); „Biographie d. M. A. David“, Prag 1837 (Biografie M. A. Davida); „Die Jahresformen der christlichen Zeitrechnung“, Prag 1861 (Roční formování křesťanského letopočtu); „Leitmeritzer Allg. Schreib-Haus und Wirtschafts-Kalender“, Prag 1852 (Litoměřický všeobecný domácí hospodářský kalendář); „Neue Multiplikations Tafeln“, Leipzig 1851 (Nové tabulky násobitelů); „Sammlung von Tafeln zur Erleichtung des Studiums der Mathematik“, Prag 1833 (Sbírka tabulek k usnadnění studia matematiky); „Tafeln zur leichten Bestimmung des Inhaltes Zylinder- und Kegel-Gefässe“, Prag 1862 (Tabulky k snadnému určení obsahu válcovitých a kuželovitých nádob) atd. A tak bychom mohli vyjmenovávat do nekonečna jeho práce, které jsou dnes již bibliofilskou vzácností některých starých knihoven. Prof. J. Kulik upoutal však světovou vědeckou veřejnost úplně v r. 1824 svými tabulkami dělitelů celých čísel sahajících do 100 000 000. Toto matematické dílo nabylo v matematice velkého významu a nebylo dosud překonáno.

Na závěr zde ještě uvedme, že prof. dr. Jacob Philip Kulik byl člověkem skromným a pracovitým a ať byl kdekoliv, každou práci vykonával s nadšením. A jeho námaha nezůstala bez povšimnutí. Dostalo se mu zaslouženého ocenění a různých poct: byl jmenován členem mnoha vědeckých spolků, zaujal čestné místo mezi vědci světového jména a byl řádným členem tehdejší České Královské Akademie Věd. Největší odměnou však bylo, že mohl pracovat v oboru, který ho již od mládí lákal. Tato práce byla smyslem jeho života.

V hrobce na Vyšehradě odpočívá také jeho manželka Kateřina (†24. 8. 1883), rovněž rodačka ze Západní Ukrajiny, a jeho dcera Anděla (17. 7. 1841—2. 9. 1925) s manželem JUDr. Antonínem rytířem Randou (8. 7. 1834—6. 10. 1914), který byl profesorem české Karlovy university, tajným radou, ministrem, vicepresidentem říšského soudu a presidentem České Královské Akademie Věd, i jejich syn Ing. Otakar rytíř Kruliš Randa (5. 4. 1860—13. 5. 1900).

nejmladším členům

1. Jaké je nejmenší přirozené číslo x , které dosazeno do dvojčlenů $5x + 4$, $10x - 4$ dá čísla, jejichž největší společný dělitel je 12?

Jestliže nežádáme, aby číslo x bylo nejmenší, vyhovuje naší úloze nekonečně mnoho čísel x . Dovedli byste říci, která čísla to jsou?

2. Součet pěti různých jednociferných čísel různých od nuly je 18. Najděte všechny pětičlenné množiny čísel, které těmto podmínkám vyhovují.

3. Jestliže do výrazu

$$10x + 17y$$

dosadíme $x = 2$, $y = 1$, dostaneme 37, což je prvočíslo. Najděte všechny dvojice přirozených čísel x , y takových, že výsledek jejich dosazení do daného výrazu dá dvojciferné prvočíslo.

4. Kterým nejmenším přirozeným číslem musíme znásobit číslo 720, abychom dostali druhou mocninu nějakého přirozeného čísla?

5. Je dán obdélník $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$), K je střed strany CD . Na straně AB najděte body X , Y tak, aby $KX = KY$ a aby obsahy obrazců $AXKD$, XYK , $YBCK$ si byly rovny.

6. Je dán trojúhelník ABC . Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X tak, aby obsahy trojúhelníků ABX , BCX , ACX v tomto pořadí byly v poměru 1 : 2 : 1.

7. Je dána krychle $ABCDEFGH$ a libovolný bod X uvnitř této krychle. Každá stěna krychle je podstava jehlanu, jehož hlavní vrchol je X . Z objemů těchto těles utvořme součty

$$\begin{aligned} & X(ABCD) + X(EFGH), \\ & X(BCGF) + X(ADHE) \\ & X(ABFE) + X(CDHG). \end{aligned}$$

Který z těchto součtů je největší?

8. Je dán čtverec $A_1A_2A_3A_4$ a mimo něj libovolný bod M . Sestrojme bod M_1 , který je souměrně sdružený s bodem M podle středu A_1 . Podobně sestrojme bod M_2 (M_3 , M_4), který je souměrně sdružený s bodem M podle středu A_2 (A_3 , A_4). Tím dostaneme čtyřúhelník $M_1M_2M_3M_4$. Jaký je to čtyřúhelník a v jakém je vztahu k danému čtverci?

Řešení. 1. $x = 4$; $x = 4 + 12t$, kde t je libovolné přirozené číslo nebo nula. — 2. (1; 2; 3; 4; 8), (1; 2; 3; 5; 7), (1; 2; 4; 5; 6). — 3. Řešení podává tabulka

x	1	2	2	3	5
y	3	1	3	1	1
p	61	37	71	46	67

4. Číslem 5.

5. Obsah trojúhelníku XYK je roven jedné třetině obsahu daného obdélníku. $XY = \frac{2}{3} a$.

6. Se stranou AB vedme v polorovině ABC rovnoběžku ve vzdálenosti $\frac{1}{4} v_c$. Se stranou AC vedme v polorovině ACB rovnoběžku ve vzdálenosti $\frac{1}{4} v_b$. Bod X je průsečík obou rovnoběžek.

7. Jestliže x je vzdálenost bodu X od stěny $ABCD$, pak platí

$$X(ABCD) + X(EFGH) = \frac{1}{3} a^2 x + \frac{1}{3} a^2 (a - x) = \frac{1}{3} a^3$$

Všechny tři součty jsou stejné a rovnají se $\frac{1}{3} a^3$.

8. Čtyřúhelník $M_1M_2M_3M_4$ je čtverec, který je se čtvercem $A_1A_2A_3A_4$ stejnoolehý. Střed stejnoolehlosti je M . S. H.

recenze

Tajemství mysu Wardencliff

JOSEF HONS

Vydalo nakladatelství Profil Ostrava 1972, str. 176, cena 15,— Kčs.

Vážení mladí přátelé, dovolujeme si vás upozornit na tuto rozsahem nevelkou, ale velmi pěknou knížku známého spisovatele z oblasti historie techniky věnovanou tentokrát rozvoji elektrotechniky v 2. polovině 19. stol. a na počátku 20. století a jejím dvěma význačným předsta-

vitelům Thomasi Alvu Edisonovi a Nikolou Teslovi. V poutavém líčení se před námi rozvíjejí životní osudy, vzájemné vztahy i konflikty obou těchto vynikajících vynálezců, kteří svými objevy významně posunuli latku světové techniky dopředu a tím velmi prospěli celému lidstvu. Autor

šnel mnoho faktografického materiálu a to nejen o těchto vynálezcích, ale o celé řadě dalších vědců a techniků — průkopníků elektrotechniky, takže zmíněná knížka je malou historií rozmachu elektrotechniky v jednom ze svých nejpłodnějších období, vylíčenou velmi poutavou beletristickou formou. Seznamuje čtenáře se všemi významnějšími objevy těchto vynálezců a jejich uplatněním v praxi (Edison učinil přes 1000 objevů, z nichž asi 20 bylo světového významu; Tesla přes 200 objevů — ovšem Teslovy patenty představují výhradně jeho osobní objevy, kdežto Edisonovy patenty i výsledky práce velkého kolektivu výzkumníků). Velmi podrobně sleduje boj obou skupin, Edisonovy skupiny — zastánců stejnosměrného proudu — proti Teslově skupině, která dávala přednost střídavému proudu (Tesla vypracoval do všech podrobností dvou a třífázový systém, získal patent na elektromotor s točivým magnetickým polem aj.), která nakonec v tomto boji zvítězila (úvahy elektrotechniků z přelomu století, zda stejnosměrný či střídavý proud se naplňují v současné době kompromisem: stejnosměrný i střídavý proud). Autor se pokusil vystopovat vše, co oba velké vynálezce spojovalo a naopak v čem se oba navzájem lišili. Charakteristické pro oba byla úžasná pracovitost spojená často s mnohými odříkáními a snaha dospět k maximálně realizovatelným výsledkům. A v čem se lišili? V mnoha směrech, především v přístupu k práci a dále v tom, že Edison oproti Teslovi se snažil po finanční

stránce maximálně využít všech svých objevů (ostatně na tyto otázky dává velmi pěknou odpověď obsah knížky). Oba byli zahrnováni všeobecným uznáním — Edison spíše v průmyslových kruzích, Tesla zase ve vědeckých kruzích. Vůbec Tesla měl dalekosáhlé plány, jeho fantazie se přenášela přes celá desetiletí kupředu (vedle prací na bezdrátové telegrafii, o vysokofrekvenčních proudech aj. se věnoval např. i úkolu, který není dosud rozřešen: bezdrátovému přenosu elektrické energie na dálku). Autor v souboji „Edison kontra Tesla“ dává všechny své sympatie „věčnému snílkovi a romantikovi“ Nikolu Teslovi. V závěru knihy uvádí v přehledu důležitá životopisná data, letopočty všech závažnějších objevů, patentů a činností obou vynálezců a literaturu, z níž čerpal. Opravdu velmi pěkná publikace, kterou by si neměl nechat ujít žádný z našich čtenářů. Vhodným způsobem doplňuje školní vědomosti z fyziky a zároveň ukazuje na úsilí a snahy předcházejících generací po vědeckém a technickém pokroku a současně nám přibližuje mnohdy velmi složité a klikaté cesty za vědeckými objevy a jejich technickou realizací. Publikacím z historie velkých objevů a vůbec z dějin přírodních a technických věd by měla naše nakladatelství věnovat podstatně větší pozornost. Jistě by se to potom odrazilo i ve zvýšeném zájmu studentů o studium přírodovědných a technických oborů na našich vysokých školách.

*Prof. Rudolf Kolomý,
Moravská Třebová*

redakce hovoří

V č. 7 opravte na str. 336²:

Sestrojte křivku, jejíž rovnice je $y =$

SLOVNÍČEK

ČESKO - FRANCOUZSKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

S

subdeterminant
subnormála
substituce
substituovat
subtangenta
sudý
supremum
surjekce
surjektivní
svaz
svazek
svislý
svorka
symbol
symbolický
symbolika
symetrála
symetrický
symetrie
systém

mineur *m*
sous-normale *ž*
substitution *ž*
substituer
sous-tangente *ž*
pair, *e*
borne *ž* supérieure; supremum *m*
surjection *ž*
surjectif, ive
treillis *m*
faisceau *m*; pinceau *m*
vertical, *e*, aux
accolade *ž*
signe *m*; symbole *m*
symbolique
symbolique *ž*
axe *m* de symétrie *ž*
symétrique
symétrie *ž*
système *m*

Š

šedesát
šedesátina
šedesátý
šest
šestina
šestistěn
šestiúhelník
šestnáct
šestnáctina
šestnáctý
šestý
šikmý
šipka

soixante
soixantième *m*
soixantième
six
sixième *m*
hexaèdre *m*
hexagone *m*
seize
seizième *m*
seizième
sixième
oblique
flèche *ž*

šířka
zeměpisná šířka
škrtnout
šrafování
šroubovice
levotočivá šroubovice
pravotočivá šroubovice
šroubový
šroubová plocha

largeur *ž*
latitude *ž*
supprimer
hachure *ž*
hélice *ž*
hélice à gauche
hélice à droite
hélicoïde; hélicoïdal, *e*, *aux*
hélicoïde *m*

T

tabelovat
tabulátor
tabulka
logaritmické tabulky
pravdivostní tabulka
tabulkový
tangenciální
tangens
tangens úhlu
tangenta
tautologický
tautologie
tečna
tečna plochy
tečný
tedy
tehdy
právě tehdy
tehdy a jen tehdy
těleso
algebraické těleso
konvexní těleso
pravidelné těleso
rotační těleso
tenzor
tenzorově
tenzorový
teorém
teorie
axiomatická teorie
teorie her
teorie množin
terminologie
test
test dobré shody
test hypotézy
test významnosti
testovat
tětíva
těžiště
těžnice

tabuler
tabulatrice *ž*
table *ž*; tableau *m*
table des logarithmes
table de vérité
tabulaire
tangenciel, elle
tangente *ž*
tangente d'un angle
tangente *ž*
tautologique
tautologie *ž*
tangente *ž*
tangente à une surface
tangenciel, elle
donc
si
si et seulement si
si et seulement si
corps *m*
corps algébrique
corps convexe
corps régulier
corps de révolution
tenseur *m*
tensoriellement
tensoriel, elle
théorème *m*
théorie *ž*
théorie axiomatique
théorie des jeux
théorie des ensembles
terminologie *ž*
test *m*
test d'accord
test d'hypothèse
test de signification
tester
corde *ž*
centre de gravité
médiante *ž*



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

ROČNÍK 51, 1972-73

Vydává

ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: Prof. Emil KRAEMER,
nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

VÝKONNÝ REDAKTOR: Doc. Ota SETZER,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

REDAČNÍ RADA: Dr. Jaroslav Bayer, VUT Brno, doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha, Stanislav Horák, ČVUT Praha, doc. Jaroslav Chudý, ČVUT Praha, dr. Oldřich Lepil, CSc., PU Olomouc, Milan Marčok, VŠLD Zvolen, prof. dr. Cyril Palaj, VŠLD Zvolen, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, Praha, dr. Jiří Sedláček, CSc., MÚ ČSAV Praha, dr. Jaroslav Šedivý, KU Praha, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., ČSMÚ Praha, František Vencálek, SPŠ Praha

OBSAH

Ovodniky

Blajer Zdeněk: K jubilejnímu roku Julia Fučíka	385
Kraemer Emil: Do druhého půlstoletí	1
Maňák Jiří: Únor 1948	241
Pátek Jaroslav: K 55. výročí Velké říjnové socialistické revoluce	97
Šedivý Jaroslav: Sjezd Jednoty československých matematiků a fyziků	289

Matematika

Bek Roman: Dvojková soustava	351
Modelování výrokových formulí reléovými sítěmi	251
Modelování výrokových formulí pneumatickými a diodotranzistorovými sítěmi	296
Sčítací sítě	387
Dítě Josef: Užítí komplexních čísel	59
Drábek Jaroslav: O jedné úloze kombinatorické geometrie	49
Ostrá alternativa	199
C' různých konstrukcích množinové algebry	436
Symetrický rozdíl dvou množin	246
Tabulková metoda důkazů vět o rovnosti množin	292
Drábek Karel: Analytická geometrie kuželoseček Gaussovy roviny	337
Kuželosečky v Gaussově rovině	301
Foltínský Milan, Jokl Evžen: Konstrukce speciálního interpolačního mnohočlenu	54
Höschl Cyril: O některých optimálních konstrukcích	310
Hradecký František: Skládání kruhových zobrazení	65, 103
Ilaš Štefan: O pojmech náročných, ale zaujímavých	145
Koman Milan: Přibližný výpočet délky elipsy	113
Malík Marek: Hasseovy diagramy	433
Větší a menší	249
Morávek Jaroslav: O Abelově metodě sčítání	438
Nečas Jiří: Na stanici tramvaje	391
Odvárko Oldřich: Kontrola správnosti úsudku výpočtem	344
Otta Bohuslav: Přímé výpočty některých limit typu $\frac{0}{0}$	208
Říha Ota: Determinant čtvercové matice typu (2;2)	8
Sedláček Jiří: O Ramseyových číslech	201
Staněk Svatopluk: O jedné třídě posloupností definované rekurentně	193
Straka Josef: O jedné vlastnosti zobrazení	3
Šedivý Jaroslav: Jak najít partnera	347
Jak zkontrolovat správnost úsudku výpočtem	204
O grafech bez grafů	243
Problém s dvěma mapami	7
Vihan Přemysl: Didoniny úlohy	152, 445
Vrba Antonín: Jak se předseda nudil	108
Kombinatorika v teorii čísel	342
O chytrém předsedovi	70
Zahradník Jan: Řízení pohybu zdviže	391
Zelinka Bohdan: Hlavolam s barevnými kostkami	100

Fyzika

Bednařík Milan: Trochu fyziky v jedoucím vlaku	124, 171
Franc Ladislav: Elektrety	263
Halouzka Alois: Problémy s časomírou	119

Jurek Bohumil: Ohyb a optický obraz	114
Počátky kvantové fyziky	353
Karpov N. V., Prochorov A. M.: Lasery	255
Kotyk Josef: Horror vacui	316, 372
Mústkové váhy	23
Lepil Čldřich: Proč Měsíce hlubiny nemohou být z litiny?	319
Znají na Nových Hebridách Hookeův zákon?	358
Mandel Jan: Doba výtoku kapaliny	26
Marčok Milan: Potenciálna tiažova energia	153
Scholtz Elemír: Fyzikálne princípy čiernobielej televízi	166, 212
Skotnický Jozef: O voľnej a viazanej energii	81, 129
Energia a pracovná schopnosť	410
Šindelář Václav: Rozšířené Routhovo pravidlo	13
Tulak Rudolf: Proč vznikla a co řeší kvantová mechanika	216
Vybíral Bohumil: Barometrická formule a její aplikace	16, 77
Šíření vln v jednorozměrném kontinuu	219, 269

Konstruktivní geometrie

Filip Jozef: O jednej vlastnosti pravouhlého premietani	135
K priemerom kužeľosečky	400
Granát Luděk: Aproximace křivek lomenými čarami	404
Křivky jako obálky kružnic	449
Horák Stanislav: Řezy na hranolech a válcích	156
Nedbal Klement: Přibližná konstrukce úhlu 10° pravítkem a kružítkem	79

Astronomie

Kotyk Josef: „Nové hvězdy“	131
Široký Jaromír, Široká Miroslava: Budou objeveny „černé jámy“?	455
Existují „černé jámy“?	415
Fobos a Deimos	361
Hvězdné asociace	28
Komety	179
Koperníkovy astronomické přístroje	226
Krabí mlhovina	183
Kráter Mikuláše Koperníka	271
Lichoběžník v Oriónu	364
Molekuly v mezihvězdném plynu	367
Planetka č. 1 — Ceres	82
Proxima Centauri	459
Ženy a astronomie	418

Naše soutěž

Úlohy k	a řešení úloh loňské soutěže	31, 84, 141, 228, 274, 321 371, 420
		371, 420

Různé

Flajšingr Vlastimil: Život oslnivý jako kometa	429
Horský Jan: Niels Bohr	185
Hrivňák Jiří: Prof. dr. Philip Kulik	471
Jozífek Vítězslav: Město Basilej — kolébka matematiků	43, 90
Kotyk Josef: Beseda se čtenáři	187
Hrst vzpomínek	93
Newtonův zákon setrvačnosti	452
O vývoji heliocentrické soustavy	235, 286, 333
Sedláček Jiří: Připomínka jednoho jubilea	144

Olympiády	33, 88, 89, 191, 233, 279, 424, 460
----------------------------	-------------------------------------

Matematické a fyzikální zábavy	37, 379
Ze zahraničních časopisů	40, 96, 238, 331
Nejmladším čtenářům	39, 279, 381, 474
Recenze	142, 190, 239, 380, 475
Redakce hovoří	48, 192, 336, 432, 478