



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 49, 1970-71

Vydává

ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. OTA SETZER
nositel vyznamenání Za vynikající práci
VÝKONNÝ REDAKTOR STANISLAV HORÁK

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29.

OBSAH

Úvodník

Setzer Ota: K lepším zítřkům

1

Matematika

Danešová Jana: Hellyova věta a její důsledky.	244, 295
Drábek Jaroslav: O jednom problému místní dopravy	337
Drábek Jaroslav: O sítích tří pravidelných mnohoúhelníků v rovině	153
Drábek Jaroslav: Regulární obarvení rovinných map	289
Drábek Jaroslav: Rovinné mapy	97
Drábek Karel: Duální čísla	13
Dytko Milan: Cévova věta	438
Ferjenčík Ludovít: Vyjádření hodnot goniometrických funkcí druhými odmocninami	444
Frelich Petr: O jednom zobecnění Menelaovy věty	358
Horák Stanislav st.: Isoperimetrická nerovnost	359
Hroník J.: Celočíslné řešení jedné rovnice	397
Karpe Robert: Vztahy mezi logaritmy dvou základů	203
Koktán František: Menelaova věta	354
Kotyk Josef: Počítání s reálnými čísly	291
Kuřina František: Množiny v geometrii	49
Lacina Otakar: Zásady provádění numerických výpočtů	197
Malík Marek: Křivočaré souřadnice v rovině	54
Malík Marek: Spory v Cantorově teorii množin	400
Moravusová Eliška - Říha Ota: Násobení matic	58
Moravusová Eliška - Říha Ota: O jednom způsobu kódování	6
Myslík Jiří: Booleovské dvouhodnotové funkce	394
Odvárko Oldřich: Booleovské výpočty v množinové algebře	441
Peřina Alois: Z geometrie trojúhelníka	10
Pospíšil Jiří: Konstrukce trojúhelníka	398
Říha Ota: Další síťové problémy vedoucí k maticím	241
Říha Ota: Dělitelé nulové matice	345
Říha Ota: Síťové problémy	193
Říha Ota: Tabulky informací	149
Šedivý Jaroslav: Dvoupřvková Booleova algebra	390
Šedivý Jaroslav: Tři podoby jedné detektivní úlohy	349
Trávníček Stanislav: O jednom problému místní dopravy	337
Trávníček Stanislav: Na koho to slovo padne	433
Zapletal Ivo: Užiti pravdivostního ohodnocení formulí	402

Fyzika

Bartuška Pavel: Nerovnovážné stavy v kovových slitinách	252
Bartuška Pavel: Rovnovážné diagramy kovových systémů	215
Bednařík Milan - Šíroková Miroslava: Jak je to s průměrnou rychlostí	309
Houdek Oldřich: Určení periody kmitů harmonického oscilátoru	17
Jankura Ján Kročan Jozef: Kompenzačná metóda experimentálneho určovania Youngovho modulu pružnosti v ťahu	228
Janout Zdeněk: Síly setrvačnosti	370
Jurek Bohumil: Dalekohledy pro měkké paprsky X	108
Jurek Bohumil: Zrcadlové mikroskopy	363
Koliha Jaromír - Leitl Rudolf: Použití transfigurace odporového trojúhelníku na hvězdu v praxi	64
Lepil Oldřich: Millikanův pokus	414
Šindelář Václav: Způsob psaní výsledků měření	158
Tulak Rudolf: Jevy atmosférické optiky	419
Volf Ivo: Jak řešit fyzikální úlohy	163
Volf Ivo: Postup při řešení jednoho příkladu z mechaniky	318
Zhejbal Stanislav: Šikmý vrh vzhůru z nakloněné roviny	456

Deskriptivní geometrie

Drábek Karel: Použití Skuherského axonometrie v praxi	101
Drábek Karel: Základy cyklografie	405, 450
Drs Ladislav: Modely geometrických útvarů	68
Havlíček Karel - Setzer Ota: O významu a budoucnosti deskriptivní geometrie	212, 303
Horák Stanislav st.: Inflexní body	300
Karpe Robert: Zahradnická konstrukce vejcovitých křivek	305
Lanta Oldřich: Příčka mimoběžek	206

Astronomie

Svoboda Antonín: Překvapení z vesmíru	166
Široký Jaromír Široká Miroslava: Barnardova hvězda	259
Široký Jaromír Široká Miroslava: Metody používané v astrofyzice	260
Široký Jaromír Široká Miroslava: Někteří slavní astronomové a jejich původní povolání	374
Široký Jaromír Široká Miroslava: Planétární mlhoviny	233
Široký Jaromír Široká Miroslava: Sedmá planeta Uran	460
Široký Jaromír Široká Miroslava: Souhvězdí jarní oblohy	323
Široký Jaromír Široká Miroslava: Souhvězdí podzimní oblohy	21
Široký Jaromír Široká Miroslava: Souhvězdí zimní oblohy	125
Široký Jaromír Široká Miroslava: Spektrální klasifikace hvězd	72
Široký Jaromír Široká Miroslava: Velká opozice Marsu v r. 1971	424

Matematická olympiáda

XX. ročník matematické olympiády	28
XII. mezinárodní matematická olympiáda	177
Přípravné úlohy XXI. ročníku MO	462

Fyzikální olympiáda

XII. ročník fyzikální olympiády	33
Košťál Rostislav: XI. ročník fyzikální olympiády	132
Košťál Rostislav: IV. mezinárodní fyzikální olympiáda v Moskvě	133
Košťál Rostislav: Hodnota a chyba měřené veličiny	85
Pivnička Oldřich: Elektrické pole	112
Zhejbal Stanislav: Hydrodynamika	42, 78

Naše soutěž

Soutěžní příklady a řešení úloh loňské soutěže	23, 75, 128, 168, 272, 235, 272, 327
--	--------------------------------------

Různé

Drábek Karel: 125. výročí narozenin Karla Pelze	92
Glivický Josef: Vrchlický, matematika a hovory H	94
Glivický Josef: Sto let od založení české reálky v Prostějově	427
Harant František: Vzpomínka na Vincence Jarolímka	464
Horák Stanislav st.: Michael Stifel	139
Jozífek Vítězslav: A. L. Cauchy v závodě s Henri Mondeuxem	430
Kotyk Josef: Hrst vzpomínek	267
Kotyk Josef: Definice matematiky	328
Kotyk Josef: Robert Wilhelm Bunsen	466
Kotyk Josef: Ernest Rutherford	377

Matematické zábavy

Horák Stanislav: Zájem o velká čísla v Indii	336
Horák Stanislav: Demokritos z Abdéry	470
Kotyk Josef: Zmatlíkův výklad stupnice známek	135
Kotyk Josef: Kolik je vám let?	472
Zelínková Alena: Dvě úlohy na dekodování	335

Jubilea

Chudý Jaroslav: 50 let KSČ	385
Jozífek Vítězslav: V. I. Lenin a matematika	2
Kotyk Josef: Komenský a přírodní vědy	145

Recenze

Dubský Jaromír: 17. ročník MO	47
Dubský Jaromír: 18. ročník MO	381
Setzer Ota: B. Budínský B. Kepr, Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi	239
Špačková Miloslava: R. Reisenauer, Metody matematické statistiky	143
Wohlmutová Anežka: Karjakin, Bystrov, Kirajev, Přehled fyziky.	96
Nejmladším čtenářům	142, 189, 236, 287, 331, 383, 473
Ze zahraničních časopisů	142, 271, 432
Redakce hovoří se čtenáři	48
Anketa	384

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

1

ROČNÍK 49, 1970-1971, ZÁŘÍ



ROČNÍK 49
ZÁŘÍ 1970-71

1

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT, - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku. Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: Mil. Hellerová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1970.

OBSAH

Doc. O. Setzer: K lepším zítřkům	1
Doc. V. Jozífek: V. I. Lenin a matematika	2
E. Moravusová, O. Říha: O jednom způsobu kódování	6
A. Peřina: Z geometrie trojúhelníka	10
Doc. K. Drábek: Duální čísla	13
Dr. O. Houdek: Určení periody kmitů harmonického oscilátoru	17
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Souhvězdí podzimní oblohy	21
Naše soutěž	23
Matematická olympiáda	28
Fyzikální olympiáda	33
Sedmnáctý ročník MO	47
Redakce hovoří se čtenáři	48
Slovníček francouzsko-český	3. a 4. str. obálky

K lepším zítřkům

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Každý dobrý hospodář se před vstupem do nového období své činnosti vždy ohlédne zpět, zamyslí se nad svou předchozí prací a podle jejích výsledků upravuje své další plány.

Také náš žákovský časopis začíná nový ročník a chce se v něm dobře vyrovnat s úkoly, které jsou mu kladeny. Přitom nezapomínáme, že drtivou většinu našich čtenářů tvoří žáci středních škol, tedy mladí lidé ve věku mezi 14 a 19 lety. Tito studenti a studentky jsou ochotni přijímat všechny moderní, pokrokové myšlenky a metody, pokud jim jsou předkládány přiměřenou a nenásilnou formou. Proto napříště zařadíme oblíbené články z novějších oborů matematiky, pro něž jsme získali řadu autorů a které budou podnětné i pro mnohé učitele. Co bylo řečeno o matematice, platí v plné míře i o fyzice a astronomii, kde dosažené výsledky bude nutno žákům stále připomínat a vysvětlovat.

Matematika je věda, o kterou se dnes opírají všechny ostatní vědní obory, někdy méně, jindy podstatněji. Z tohoto důvodu se snažíme rozšířit u svých čtenářů její znalosti, dát jim pevný základ a hlavně vést je k poctivé, náročné a neúnavné práci, která nás jedině může dovést od planých řečí ke konkrétním cílům. Je ovšem nutné, aby námi dosažených výsledků bylo vždy poctivě využito správným směrem.

Závodivost mládeže budeme opět podporovat vypsáním soutěže v řešení úloh z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky, čímž nechceme oslabit obdobné celostátní i mezinárodní soutěže matematických a fyzikálních olympiád. Na tomto poli očekáváme proti loňsku větší účast řešitelů i řešitelek ze všech druhů škol.

Oblíbené kratší historické články ze života slavných fyziků i matematiků doplní náš program. Pro oživení jsme přichystali pro nejmladší čtenáře rekreační drobnůstky.

Zamysleme se nad tím, jak jsme plnili své poslání v právě uplynulých třech letech. Probíráme-li se stránkami těchto ročníků, vidíme, že jsme vždy psali tak, jak to odpovídá časopisu, který je nositelem státního vyznamenání „Za zásluhy o výstavbu“. Bylo nám to usnad-

něno jednak odborným zaměřením časopisu, v němž nelze vědecké zákony měnit ze dne na den podle vnějších vlivů, jednak rozvážným postupem celé redakční rady, která byla jen paritně rozšířena o další slovenské spolupracovníky.

V uplynulých letech neutuchl ani náš styk s obdobnými zahraničními časopisy, jež chceme dále pěstovat v neztenčené míře. Pravidelná výměna se zahraničními časopisy svědčí o této spolupráci. O Rozhledy je zájem i v SSSR, odkud nás požádala jedna škola o ta naše čísla, v nichž píšeme o V. I. Leninovi.

Z uvedeného plyne, že všemožně usilujeme o podstatné zlepšení vědomostí svých čtenářů i o zvyšování pracovní morálky studentstva, čímž je pomáháme připravovat pro náročné úkoly, které jim v budoucnu přidělí společnost v průmyslu, obchodě nebo kdekoli jinde. Tím posílíme zdárný vývoj naší socialistické vlasti.

V. I. LENIN a matematika



Doc. Vítězslav Jozífek, ČVUT, Praha

(Dokončení)

Denně slyšíme ve škole, že se v matematice učíme logicky myslet, tj. myslet podle určitých přesných pravidel. Někdy říkáme, že vyvozujeme nové poznatky deduktivně. Odkud se vzaly tyto logické zákony?

Historie nás učí, že matematické poznatky, pokud je známe z památek, se vyskytovaly původně v aplikovaném rouše, v návodech, jak prakticky měřit a počítat. Byly tedy ve svých počátcích smíšeny k nerozeznání s přírodovědeckými i technickými poznatky, v nichž byly objeveny. Teprve později, při osamostatnění matematiky jako vědy v rozkvětu kultury ve starém Řecku jsou geometrické poznatky systematicky a přísně logicky odvozovány z pouček, zva-

ných axiomy a postuláty. Tak dokazuje historie, že první matematické poznatky byly získány přímo ze skutečnosti, a to abstrakcí.

Název logika pochází z řeckého „logos“, které znamená slovo, myšlenka. Týž kořen má i sloveso „lego“ – mluvit, objasňovat, myslet. Slovo „logiké“ znamenalo původně dovednost vyjadřovat své myšlenky, později také učení o správném myšlení.

Athénský filosof Aristoteles (384–322 p. n. l.) bádá o základních zákonech a metodách myšlení a vytvořil mimo jiné rukověť, jak správně myslet a tak vítězit v řečnických, tehdy velmi oblíbených disputacích. Zde dochází k základům tzv. formální logiky. Ta se zabývá představami, pojmy, soudy a úsudky, kdy vycházíme ze zřejmých fakt a usuzujeme o faktech nezřejmých. Úkolem logiky je stanovit pravidla, jež umožňují rozlišit správné jednání od nesprávného.

Podmínka, že správné myšlení musí být v souladu s formálními pravidly logiky, je nutná, ale nikoli postačující. Tou je podmínka, že myšlení musí být v souladu s praxí, tj. to, čemu říkáme kritérium pravdivosti. Formální logika, která dnes jako symbolická, nebo také matematická logika, je pokračováním, rozšířením a prohloubením původní Aristotelovy logiky, se dívá na věci jako na stálé, které se podrobují neměnným zákonitostem. Matematická logika je – můžeme říci – pokud jde o předmět, logikou formální a pokud jde o metodu, matematikou. Její způsob myšlení je nejenom přípustný, ale i nutný, a to pro každodenní život a ovšem i pro vědu.

Podle materialistického názoru prodělává vše na světě změny, vývoj. Brát tyto změny v úvahu při každé příležitosti by znamenalo učinit proces myšlení tak složitým, a tak zpomaleným, že by se prakticky život stal nemožným. Způsob myšlení o věcech jako neměnných objektech je přípustný a správný pouze pod podmínkou, že si uvědomujeme jeho omezenost. Jinak bychom se dostali na stanovisko, kterému filosofie říká metafyzické. Opakem metafyzického názoru na svět je názor dialektický.

Dialektika, což původně znamenalo dovednost vést spor odhalováním rozporů v tvrzení protivníka, vychází z toho, že věci a jevy v přírodě i ve společnosti jsou ve vzájemné nerozlučitelné spojitosti, že se neustále vyvíjejí, vznikají a zanikají. Vychází z toho, že vývoj se děje přechody skokem od nepozorovatelných kvantitativních změn k základním kvalitativním změnám, že vývoj je přechodem od nižšího k vyššímu, způsobovaným zápasem vnitřních protikladů vlastních všem předmětům a jevům. Na ukázkách z matematiky v předešlém článku bylo to v podstatě naznačeno.

Podle materialistického hlediska představuje formální logika první elementární stupeň logické vědy. Je jakousi aritmetikou myš-

lení. Tak jako matematika není vyčerpána pouze aritmetikou, ale jako není bez ní možná ani algebra, ani vyšší matematika, tak je to i s logikou. Zákony správného myšlení v nejjednodušších jeho formách nevyčerpávají celou logiku. Ale bez zachování těchto zákonů není možné ani dialektické myšlení.

Logika je, v širším slova smyslu, vědou o zákonech správného myšlení ve všech jeho formách, a to i nejsložitějších. Marxismus definuje logiku jako vědu o dějinném vývoji lidského myšlení.

Charakteristické rysy formální logiky jsou tyto:

1. Nezabývá se obsahem myšlenek, nýbrž pouze jejím tvarem, tj., zda je myšlenka obecná nebo částečná, kladná nebo záporná, atd.

2. Nestuduje věci všestranně v jejich spojitostech a proměnách, ale jako izolované a neproměnné.

K otázce, zda logické zákony jsou apriorní se vyslovil Lenin slovy: „Lidská praxe, milionkrát se opakující, se upevňuje ve vědomí člověka logickými figurami. Tyto figury mají pevnost předsudku, axiomatický charakter právě (a jen) proto, že se milionkrát opakuje“. (Spisy 38).

Nelze to vysvětlovat ovšem tím, že se lidé dohodli a uzavřeli jakousi konvenci o zákonech a o pravidlech myšlení. Zákony odrážejí přírodu, souvislosti a vztahy reálných věcí a jevů.

Pro správné myšlení není podle Hegela nutné znát logiku. Také Leibniz zesměšňoval lidi, kteří si myslí, že člověk před tím, než začal studovat logiku nebyl schopen logicky myslet. Člověk se učí myslet logicky působením přírody. Kdyby nebyla příroda myšlením lidí správně odrážena, nemohli by lidé jako myslící tvorové existovat.

Logika užívaná dnes v matematice, užívající symbolické metody, je ještě abstraktnější než formální logika v tradičním podání. Tato okolnost, přechod k vyššímu stupni abstrakce, svědčí ve prospěch symbolické metody. Lenin píše o tom slovy reprodukoványými v prvním článku: „Myšlení – při vzestupu od konkrétního k abstraktnímu – se nevzdaluje, je-li správné... od pravdy, nýbrž se k ní přibližuje... všechny vědecké správné, vážné, ne nesmyslné abstrakce odrážejí přírodu hlouběji, věrněji a úplněji.“...

Dialektická logika je, můžeme říci, aplikací materialistické dialektiky na učení o zákonech a formách myšlení naukou o dialektice procesu myšlení. Filosofie naší společnosti ji chápe jako obecný základ lidského poznání, jako obecnou logickou teorii, z níž můžeme vysvětlit konkrétní logické teorie. Dnes se často považuje dialektická logika za vyšší stupeň logiky, i když dosud vlastně jako disciplína defacto neexistovala. Jde spíše o speciální

témata z dialektiky. Její koncepce vznikla u Hegela a byla ve změněné formě přijata klasiky Marxem, Engelsem a Leninem.

Nazveme-li matematickou logiku vědou o správném myšlení, je dialektická logika teorií pravdy, cestou k pravdě a zároveň metodou zmocňující se skutečnosti v jejím pohybu a jejích souvislostech. Pro jmenované klasiky je dialektická logika dialektickou teorií poznání, dialektickou metodou, nikoli zvláštní disciplínou, ale jenom jedním hlediskem (aspektem) dialektiky jako teorie a metody poznání.

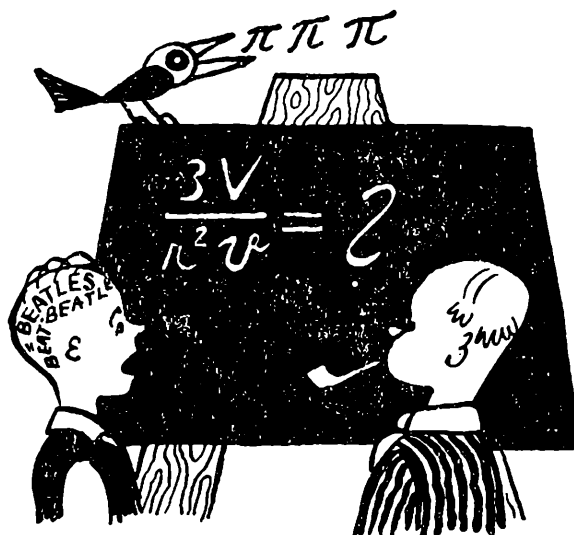
Je přirozené, že tyto základní otázky, definování a určování obsahu i formy vědy, promýšlel Lenin, i když obecněji. Citujeme z něho jen toto:

„Logika je nauka ne o vnějších formách myšlení, nýbrž o zákonech vývoje všech materiálních, přírodních a duchovních věcí, tj. vývoje veškerého konkrétního světa a jeho poznání, tj. výsledek, souhrn, závěr z dějin poznání světa.“ Lenin měl na mysli dialektickou logiku.

Materialisté tvrdí, že poznání je odraz objektivního světa, existujícího nezávisle na člověku. Dialektická povaha logiky je dána dialektickou podstatou samé přírody. Lenin to stručně vyjádřil takto: „....jestliže se vše vyvíjí, vztahuje se to i na samy pojmy a kategorie myšlení? Ne-li, pak myšlení nesouvisí s bytím. Jestliže ano, tedy existuje dialektika pojmů a dialektika poznání, která má objektivní význam“ (Spisy 38).

Na jiném místě Lenin zavádí do definice dialektické logiky tvrzení, že pro dialektickou logiku je proces poznání zobecněnou historií poznání a ukazuje, že logika je „výsledek, souhrn, závěr z dějin poznání světa“

Postihnout a vyložit názory a příspěvek Lenina k teorii dialektické logiky není v krátkém článku možné i proto, že jeho úvahy jsou reakcí na názory Hegela, Trockého, Bucharina, Plechanova a dalších. To by znamenalo seznámit se s názory jmenovaných autorů, což by mohlo být opět nebezpečným zkreslením jejich filosofie. Musíme se na této úrovni spokojit jen s vybranými ukázkami a s tvrzením, že Lenin zasahoval svými názory i do matematiky, i když jen okrajově, a to do její filosofie a do logiky. Přitom si uvědomujeme, jak souvisí matematika s filosofií světového názoru, ovšem nikoli po odborné stránce.



0 jednom způsobu kódování

ELIŠKA MORAVUSOVÁ, OTA ŘÍHA, PeF UJEP Brno

Jistě víte, co je kódování neboli šifrování. Předpokládáme, že jste o něm informováni z četby, filmů, popřípadě z branných her. Jedná se o předávání zpráv pomocí smluvených tajných znaků, čitelných jen s pomocí klíče k dekódování.

Velmi často se při kódování zpráv postupuje tak, že se jednotlivá písmena ve zprávě nahradí čísla podle předem smluvené tabulky.

Tabulka 1

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
10	26	12	1	17	21	6	14	22	2	15	3	7

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	25	23	5	4	9	19	8	18	24	20	11	16

Slovo OLOMOUC bude pomocí tabulky 1 zakódováno takto

25 3 25 7 25 8 12.

Na tomto příkladě je vidět nevýhoda jednoduchého způsobu kódování, kdy se pro písmeno stále používá téhož čísla. Proto by byl tento způsob kódování jistě velmi brzy odhalen, neboť by bylo možno předpokládat, že čísla, která se nejčastěji opakují, jsou přiřazena samohláskám. Aby byla tato nevýhoda odstraněna, používá se složitějších způsobů kódování. V tomto článku vás seznámíme se způsobem, kterého bylo užito již za druhé světové války a který nebyl po dlouhou dobu odhalen.

Máme-li zakódovat např. slovo VLAK, určíme odpovídající čísla pro jednotlivá písmena podle tabulky 1 a dostaneme 18 3 10 15. Tato čísla uspořádáme do *schématu*

$$\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Pak zvolíme

kódovací klíč $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

a sestavíme novou skupinu čtyř čísel takto

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 18 + 1 \cdot 10 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 15 \\ 3 \cdot 18 + 2 \cdot 10 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 21 \\ 74 & 39 \end{pmatrix}.$$

Např. číslo 46 v 1. řádku 1. sloupce dostaneme tak, že 1. řádek „klíče“ zapíšeme před 1. sloupec „zprávy“, dvojice 2, 18 a 1, 10 vynásobíme a součiny sečteme

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} \\ \boxed{3} & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 18 & 3 \\ \boxed{1} & 10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & . \\ . & . \end{pmatrix}.$$

$$2 \cdot 18 + 1 \cdot 10 = 46$$

Která čísla máme násobit a součiny sečíst, ukazuje následující schéma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Zpráva je tedy zakódována a odeslána jako 46 21 74 39. Aby příjemce mohl tuto zprávu dekódovat, musí mít

dekódovací klíč $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,

a tabulku 1.

Příjemce zprávu 46 21 74 39 zapíše do schématu

$$\begin{pmatrix} 46 & 21 \\ 74 & 39 \end{pmatrix},$$

a užije dekódovacího klíče stejným způsobem, jako bylo užito klíče kódovacího, tj. „násobí“ dekódovacím klíčem zakódovanou zprávu v pořadí dekódovací klíč „krát“ zakódovaná zpráva. Tak dostane

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 & 21 \\ 74 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 3 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

Číselnou zprávu 18 3 10 15 příjemce převede pomocí tabulky 1 na VLAK.

Máme-li zakódovat slovo nebo zprávu, obsahující více (nebo méně) než 4 písmena, doplníme počet písmen na násobek čtyř nějakým písmenem, které ve zprávě nedává žádný smysl; např. slovo OLOMOUC doplníme písmenem X, čísla rozdělíme do skupin po čtyřech číslech, každou čtveřici zapíšeme do schématu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

a užijeme kódu, jak bylo vysvětleno

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 3 \\ 25 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 13 \\ 125 & 23 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 8 \\ 12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 & 36 \\ 99 & 64 \end{pmatrix}$$

Slovo OLOMOUC bude tímto způsobem zakódováno a vysláno jako 75 13 125 23 62 36 99 64. Je vidět, že písmeno O je nyní zakódováno různými čísly.

Při kódování jsme čtveřice čísel zapisovali do schématu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

kterému říkáme *matice*; čísla a, b, c, d jsou *prvky matice*. Operaci, kterou jsme dostávali zakódované zprávy, říkáme *násobení matic*. S maticemi, které jsou důležitým matematickým pojmem, a některými vlastnostmi jejich násobení se seznámíte v dalších číslech Rozhledů.

Při řešení následujících úloh si můžete ověřit, zda jste správně pochopili, jak postupovat při kódování a dekódování zpráv popsáním způsobem. Výsledky úloh jsou uvedeny na konci článku.

Úloha 1. Užitím tabulky 1 zašifrujte pomocí klíče

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) AUTO, b) VODA, c) MAPA, d) HRAD, e) MOTOCYKL, f) DNES RÁNO, g) TOVÁRNA, h) STROJ.

Úloha 2. Pro dekódování zpráv je výhodné si tabulku 1 seřadit podle čísel. Pomocí dekódovacího klíče

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

dekódujte:

- a) 22 29 35 51,
 b) 33 75 51 125,
 c) 41 51 63 85 52 61 86 100,
 d) 28 50 47 77 58 40 97 70,
 e) 24 64 44 103 7 45 11 73 33 37 59 64 33 42 59 74
 49 51 86 87 44 47 77 78 33 28 56 53.

Úloha 3. Pro zakódování slov z úlohy 1 užíjte tabulku 1,

klíč $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a dekódovací klíč $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Úloha 4. Domluvte si s kamarádem tabulku pro převod písmen na čísla. Vyberte si kódovací a jemu odpovídající dekódovací klíč z následující tabulky,

Kódo- vací klíč	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
Dekó- dovací klíč	$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

zakódujte nějakou zprávu a předejte ji kamarádovi. Ten může zprávu dekódovat, protože má dekódovací klíč a potřebnou tabulku pro převod čísel na písmena.

Výsledky úloh:

1. a) 39 41 68 74, b) 37 60 56 95, c) 37 30 67 50, d) 38 9
 62 14, e) 33 75 59 125 39 25 66 39, f) 19 35 37 57 21 45
 38 80, g) 56 60 93 95 18 46 32 79, h) 22 63 35 107 24 60
 46 100.

2. a) SMRK, b) KOLO, c) TELEVIZE, d) SPARTA, e) ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ.

Literatura

- [1] G. Matthews: Matrices 1, Edward Arnold, London 1964 (v angličtině).
 [2] J. Schmidtmayer: Maticový počet a jeho použití v technice, SNTL, Praha 1967.

Z geometrie trojúhelníku

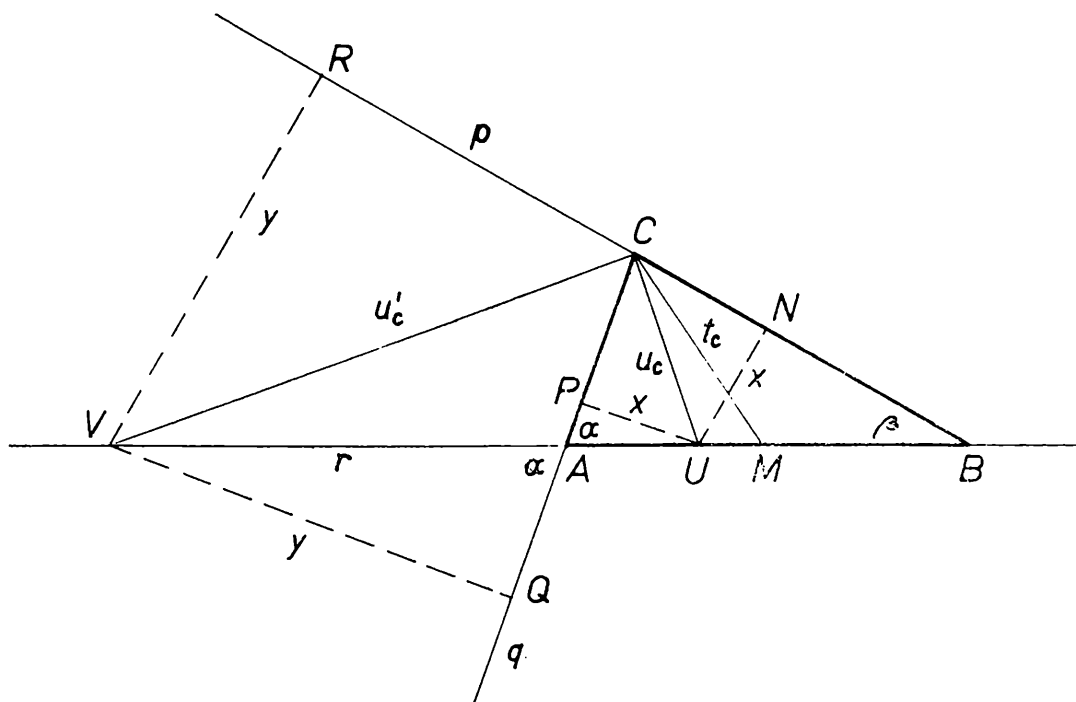
ALOIS PEŘINA, Brno

Klademe si tento úkol: Sestrojit trojúhelník ABC , jestliže je dáno v_c, t_c, u_c , kde v_c je výška, t_c těžnice a u_c úsek osy úhlu γ mezi vrcholem C a jejím průsečíkem U se stranou $c = AB$, takže všechny tři dané úsečky vycházejí z vrcholu C .

K tomu účelu doplníme, resp. odvodíme nejprve větu vyjadřující vztahy mezi průsečíky os vnitřního a vnějšího úhlu trojúhelníku při vrcholu C s přímkou r , na níž leží strana c obecného trojúhelníku ABC , přičemž pro jednoduchost volíme takové označení vrcholů, úhlů, stran a příček, že platí

$$\alpha > \beta, \text{ tj. } a > b \quad (1)$$

Vyšetřujeme tedy trojúhelník znázorněný na obr. 1, kde M značí střed strany AB , U průsečík osy u_c vnitřního úhlu $\gamma = \sphericalangle ACB$. Přímka u'_c vedená vrcholem C kolmo na u_c je osou vnějšího úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C . Její průsečík s přímkou r je označen V . Přímka BC je označena p , přímka AC písmenem q . Shodné vzdálenosti bodu U od stran AC a BC jsou označeny x a paty příslušných kolmic N na BC a P na AC . Obdobně shodné vzdálenosti bodu V od přímek p a q jsou označeny y a paty příslušných kolmic R na přímce p a Q na přímce q .



Obr. 1

Z obr. 1 je zřejmé, že platí

$$AU = \frac{x}{\sin \alpha}, \quad BU = \frac{x}{\sin \beta}$$

$$\frac{AU}{BU} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} \quad (\text{podle sinové věty}),$$

$$AV = \frac{y}{\sin \alpha}, \quad BV = \frac{y}{\sin \beta}$$

a tedy

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AV}{BV} \quad (2)$$

K tomu poznamenáváme, že pro kterékoli čtyři body A, B, U, V ležící na téže přímce, které splňují vztah (2), se užívá označení *harmonická čtveřina bodů*.

Označíme-li v našem případě poměr

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a} = \lambda,$$

dostáváme

$$\frac{AU}{BU} = \frac{AV}{BV} = \lambda, \quad (3)$$

přičemž podle předpokladu (1) o označení trojúhelníku ABC platí

$$\lambda < 1. \quad (4)$$

Ze vztahu (4) je zřejmo, že při užitém označení (1) platí

$$AU < AM$$

a tedy v obecném trojúhelníku platí

$$t_c > u_c > v_c, \quad (5)$$

což je předpoklad řešitelnosti úlohy vyslovené v úvodu, přičemž bod U je vnitřním bodem úsečky AM .

Kdyby kterékoli dvě z veličin t_c, u_c, v_c si byly rovny, měla by i zbývající třetí tutéž hodnotu, neboť uvažovaný trojúhelník by byl rovno-ramenný se základnou c , s rameny $a = b$ a úhly $\alpha = \beta$, takže by byl dán jediným prvkem a úloha by byla neurčitá, tj. připouštěla nekonečný počet řešení.

Vztah (3) můžeme vyjádřit dvěma úměrami

$$AU : BU = \lambda : 1 \text{ a } AV : BV = \lambda : 1. \quad (6)$$

Z první z těchto úměr dostáváme se zřetelem na vztah $AU + BU = c$

$$(AU + BU) : AU = (1 + \lambda) : \lambda ,$$

$$c : AU = (1 + \lambda) : \lambda ,$$

$$AU = c \frac{\lambda}{1 + \lambda} ,$$

z druhé vzhledem ke vztahu $BV - AV = c$

$$(BV - AV) : AV = (1 - \lambda) : \lambda ,$$

$$c : AV = (1 - \lambda) : \lambda ,$$

$$AV = c \frac{\lambda}{1 - \lambda}$$

Určíme hodnotu součinu $MV \cdot MU$.

Vyjádříme nejprve

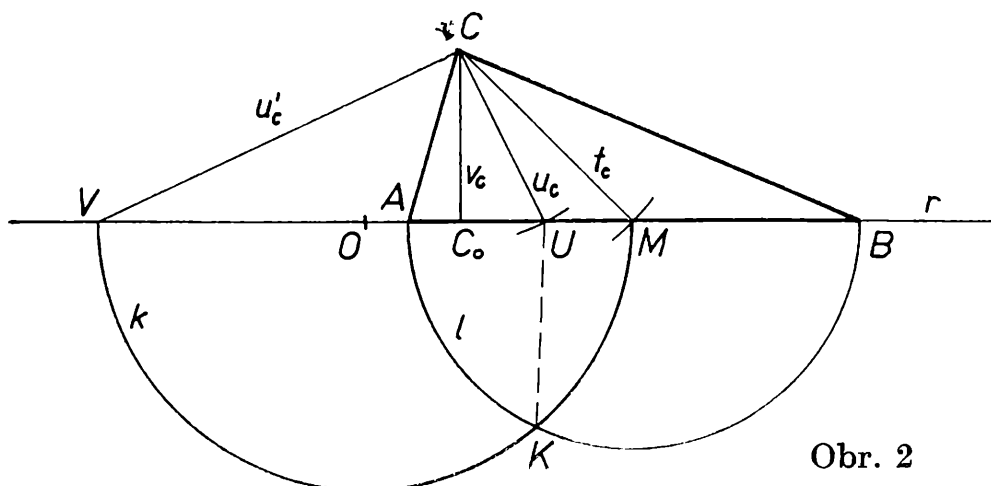
$$MV = AM + AV = \frac{c}{2} + c \frac{\lambda}{1 - \lambda} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} , \quad (7)$$

$$MU = AM - AU = \frac{c}{2} - c \frac{\lambda}{1 + \lambda} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \quad (8)$$

takže vychází

$$MV \cdot MU = \frac{c^2}{4} \quad (9)$$

Odtud plyne řešení úlohy vyslovené v úvodu za předpokladu (5) a označení (1). Viz obr. 2.



Sestrojíme výšku $v_c = CC_0$, kde C je jeden z vrcholů trojúhelníku ABC a C_0 pata této výšky na c . Bodem C_0 vedeme přímku r kolmo k v_c , na níž bude ležet strana c . Kruhový oblouky o poloměrech u_c a t_c určíme na r body U a M na téže straně výšky v_c a tím u_c a t_c

co do polohy. Kolmice u'_c k u_c vedená vrcholem C protne přímku r v bodě V . Podle Euklidovy věty o odvěsně pravoúhlého trojúhelníku sestrojíme nad MV jako průměrem o středu O kruhový oblouk k . Kolmice vztyčená v bodě U na přímku r dá na oblouku k bod K , čímž dostáváme $\frac{c}{2} = KM$. Kruhový oblouk l o poloměru MK kolem M jako středu protne přímku r ve zbývajících vrcholech A a B ; tím je trojúhelník ABC sestrojen. Úloha má jediné řešení. Důkaz správnosti konstrukce je dán odvozením vztahu (9).

Duální čísla

Doc. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

Při řešení kvadratických rovnic byl zaveden nový druh čísel proto, aby bylo možno bez výjimek vyslovit větu o kořenech této rovnice. Tato čísla byla nazvána komplexními čísly a byla vypracována jejich algebra, dále teorie komplexní funkce (reálné nebo komplexní proměnné) atd.

Položme si otázku, zda by nebylo možné zavést nějaký další druh čísel s obdobným zápisem jako u komplexních čísel, najít jejich některé vlastnosti a zvláště pak geometrickou interpretaci.

Za tím účelem uvažujme dvojici reálných čísel a, b , která spojíme v jediné číslo z předpisem

$$z = a + b\varepsilon,$$

kde $\varepsilon^2 = 0$.

Takto definované číslo z nazveme *duálním číslem*.

Pro dvě daná duální čísla $z_1 = a_1 + b_1\varepsilon$, $z_2 = a_2 + b_2\varepsilon$ definujeme jejich součet, popříp. rozdíl vztahem

$$z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)\varepsilon.$$

Vzhledem k pravé straně vyjadřující součet $z_1 + z_2$ platí komutativní zákon. Snadno se ověří, že platí také asociativní zákon pro sčítání.

Násobení dvou duálních čísel z_1, z_2 definujeme výrazem

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\varepsilon$$

a opět je patrné, že i násobení duálních čísel je komutativní a asociativní. Odtud vyplývá, že $b\varepsilon = \varepsilon b$, což v dalším také používáme.

Platí také distributivní zákon, neboť

$$\begin{aligned} z_1 (z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1 \varepsilon) [a_2 + a_3 + (b_2 + b_3) \varepsilon] = \\ &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + [a_1 (b_2 + b_3) + (a_2 + a_3) b_1] \varepsilon = \\ &= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \varepsilon + a_1 a_3 + (a_1 b_3 + a_3 b_1) \varepsilon = \\ &= z_1 z_2 + z_1 z_3 . \end{aligned}$$

Zavedme také zde pojem duálně sdruženého čísla $\bar{z}$ k danému číslu $z = a + b\varepsilon$ vztahem

$$\bar{z} = a - b\varepsilon .$$

Pro dvě takto sdružená duální čísla platí

$$z + \bar{z} = 2a , z\bar{z} = a^2 , z - \bar{z} = 2b\varepsilon .$$

Součet dvou sdružených čísel¹⁾ $z, \bar{z}$ je reálné číslo, jejich rozdíl pak ryze duální číslo.

Z podmínky $z = a + b\varepsilon = 0$ plyne $a = b = 0$.

Utvořme podíl dvou čísel z_1, z_2 : Za předpokladu $a_2 \neq 0$ je

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 \varepsilon}{a_2 + b_2 \varepsilon} = \frac{(a_1 + b_1 \varepsilon) (a_2 - b_2 \varepsilon)}{a_2^2} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2} \varepsilon = \\ &= c + d\varepsilon . \end{aligned}$$

Je patrné, že pro dvě čísla $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ sdružená k číslům z_1, z_2 platí

$$\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \overline{z_1 \pm z_2} ; \bar{z}_1 \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2} ; \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)}$$

Ukažme, že lze najít *tvar duálního čísla, který je obdobou trigonometrického tvaru komplexního čísla*. Předpokládejme, že $a \neq 0$ a potom

$$z = a + b\varepsilon = a \left(1 + \frac{b}{a} \varepsilon \right) = r (1 + \varepsilon \varphi)$$

Nazveme $r = a = |z|$ *modulem*, $\varphi = \frac{b}{a} = \text{Arg } z$ *argumentem duálního čísla*.

Pro trigonometrický tvar čísla pak z násobení, popříp. dělení vyplývá

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [1 + \varepsilon (\varphi_1 + \varphi_2)] , \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [1 + \varepsilon (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

¹⁾ Pokud by nedošlo k nedorozumění, budeme v dalším psát pouze „číslo“, ale budeme mít na mysli „duální číslo“.

Potom pro $n > 0$ (zpočátku celé) máme

$$z^n = r^n (1 + \varepsilon n \varphi), \quad z^{-n} = r^{-n} (1 - \varepsilon n \varphi),$$

což je obdobou k *Moiivreově poučce* pro komplexní čísla.

Tuto vlastnost podobným způsobem jako při komplexních číslech rozšíříme na jakékoliv reálné číslo.

Pro další úvahy se ukazuje vhodné, zavedeme-li definitoricky

$$\frac{1}{\varepsilon} = \omega, \quad \frac{1}{0} = \infty$$

a potom

$$(a + b\varepsilon) \pm c\omega = a + b\varepsilon \pm \frac{c}{\varepsilon} = \frac{a\varepsilon + c}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (a\varepsilon^2 \pm c\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} = \pm c\omega,$$

$$(a + b\varepsilon) c\omega = \frac{1}{\varepsilon} (a\varepsilon + b\varepsilon^2) \frac{c}{\varepsilon} = ac\omega,$$

$$\frac{c\omega}{a + b\varepsilon} = \frac{c}{a\varepsilon + b\varepsilon^2} = \frac{c}{a} \omega,$$

$$\frac{a + b\varepsilon}{c\omega} = \frac{a\varepsilon + b\varepsilon^2}{c} = \frac{a}{c} \varepsilon,$$

$$c\omega \pm d\omega = (c \pm d) \omega, \quad (c\omega) (d\omega) = \infty.^2)$$

Jestliže ještě klademe $\overline{\omega} = -\omega$, $\overline{\infty} = \infty$, pak pro každé číslo z platí $\overline{\overline{z}} = z$.

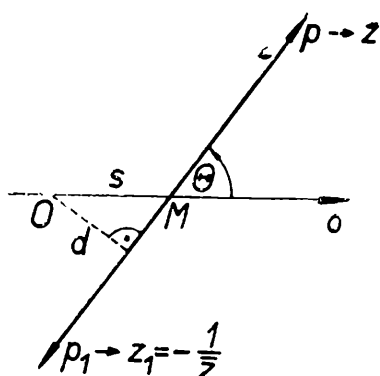
Pro duální čísla nemají žádný smysl výrazy $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, rovněž nezavádíme čísla tvaru $0 \cdot \omega$, $\varepsilon \cdot \infty$.

Komplexní čísla jsme geometricky interpretovali jako body (Gaussovy) roviny³⁾. Ukážeme velmi jednoduchou *interpretaci duálního čísla jako orientované přímky* v euklidovské rovině.

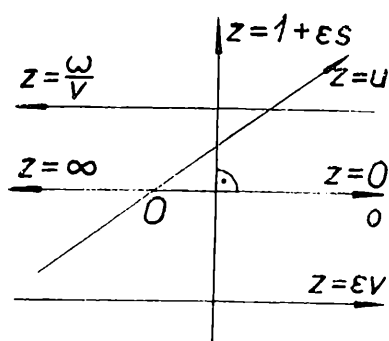
Zvolme v rovině (obr. 1) orientovanou osu o (tzv. *polární osu*) a na ní počátek O (tzv. *pól*). Dále budiž dána orientovaná přímka p (v tzv.

²⁾ Vzhledem k tomu, že $(c\varepsilon) (d\varepsilon) = (cd) \varepsilon^2 = 0$, nazývají se čísla tvaru $c\varepsilon$ *děliteli nuly*.

³⁾ Viz např. článek: F. Hradecký, Užití komplexních čísel v geometrii. *Rozhledy* 1969–70, (48), str. 153–159, 207–211.



Obr. 1



Obr. 2

obecné poloze). Označme $\angle op = \Theta$, $M = o.p$, $OM = s$. Číslo $z = u + \varepsilon v$ přiřadíme orientovanou přímku p , jestliže položíme

$$u = \operatorname{tg} \vartheta, v = s \operatorname{tg} \vartheta, \vartheta = \Theta : 2 \text{ (nebo } \Theta = 2\vartheta),$$

takže

$$z = \operatorname{tg} \vartheta (1 + \varepsilon s)$$

Jaké číslo dostaneme, změníme-li orientaci u dané přímky p ? V tomto případě $\angle op_1 = \Theta + \pi$, takže této přímce odpovídá číslo

$$\begin{aligned} z_1 &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \vartheta \right) (1 + \varepsilon s) = -\operatorname{cotg} \vartheta (1 + \varepsilon s) = -(1 + \varepsilon s) : \operatorname{tg} \vartheta = \\ &= -1 : [\operatorname{tg} \vartheta (1 - \varepsilon s)] = -1 : \bar{z}. \end{aligned}$$

Vyjádřeme teď vzdálenost d pólu O od přímky p . Dostaneme

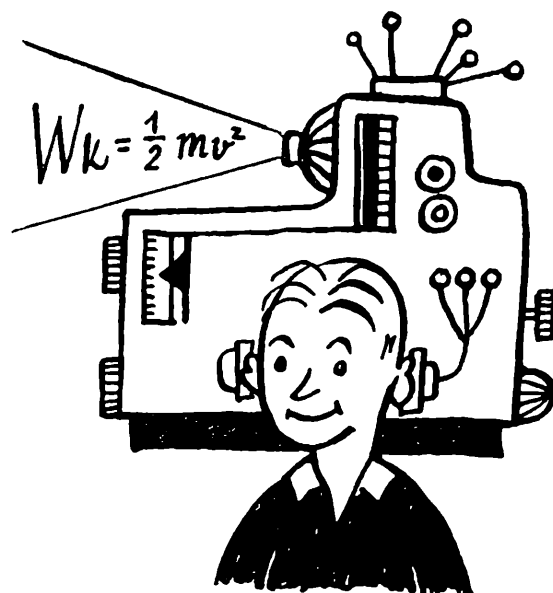
$$\begin{aligned} d &= s \sin \Theta = 2s \sin \vartheta \cos \vartheta = 2s \operatorname{tg} \vartheta \cos^2 \vartheta = \\ &= 2s \operatorname{tg} \vartheta : (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta) = 2v : (1 + |z|^2) \end{aligned}$$

Najdeme čísla odpovídající přímek ve zvláštních polohách (obr. 2). Tak pro přímky jdoucí pólem O je $s = 0$ a tedy $v = 0$: takové přímky jsou dány reálným číslem $z = u$. Jestliže $\Theta = 0$, potom dostáváme přímky paralelní k ose o , které jsou přiřazeny k číslům $z = v\varepsilon$, pro $\Theta = \pi$ máme pak antiparalelní přímky k ose o , které jsou přiřazeny k číslům $z = \omega : v$. Polární ose o je tak přiřazeno číslo $z = 0$, přímce k ní opačně orientované potom číslo $z = \infty$. Přímky kolmé k ose o jsou přiřazeny číslům $z = 1 + \varepsilon s$. S předchozí interpretací čísla máme tedy celkem výsledek:

Každé orientované přímce euklidovské roviny je přiřazeno jediné duální číslo, obráceně každému duálnímu číslu je tímto postupem přiřazena jediná orientovaná přímka euklidovské roviny.⁴⁾

Použití duálních čísel v geometrii euklidovské roviny, ve které místo bodu je základním elementem přímka, uvedeme v některém příštím článku.

⁴⁾ Při rozšíření euklidovské roviny o nevlastní přímku, odpovídají čísla $0, \omega, \varepsilon, \infty$ oběma orientacím na této přímce.



FYZIKA

Určení periody kmitů harmonického oscilátoru

Dr. OLDŘICH HOUDEK, SPŠ Jičín

Při odvození vztahů pro výpočet periody a frekvence kmitů tělesa zavěšeného na pružině (harmonického oscilátoru) se vychází z analogie mezi pohybem tělesa po kružnici a pohybem jeho průmětu. Přitom se užívá popisu silového, z něhož vyplývá, že zrychlení pohybu tělesa po kružnici splňuje podmínku pro zrychlení harmonického pohybu. Výklad se však stane jednodušší a z hlediska obecnosti fyzikálně reálnější, jestliže použijeme k porovnání obou pohybů popisu energetického.

Z experimentu plyne, že při netlumeném pohybu dochází k periodické změně kinetické energie kmitajícího tělesa v potenciální energii a naopak. V krajní poloze, tj. v krajním bodě výchylky, se těleso zastaví. Má tedy pouze energii potenciální, která je rovna celkové energii tělesa. Naopak při průchodu rovnovážnou polohou je celková energie tělesa rovna jeho energii kinetické.

Podle zákona o zachování energie musí platit

$$W_p = W_k. \quad (1)$$

K určení kinetické energie kmitajícího tělesa dané hmotnosti musíme znát ještě jeho rychlost. Z příslušného pokusu vyplývá, že pohyb na pružině můžeme modelovat jako pohyb průmětu tělesa pohybujícího se rovnoměrně po kružnici, jejíž poloměr je roven amplitudě x_m , s periodou rovnou periodě kmitu.

Při průchodu rovnovážnou polohou bude maximální rychlost tělesa

$$v_m = \frac{2\pi x_m}{T} = 2\pi x_m f$$

Maximální (amplitudová) hodnota kinetické energie bude pak rovna

$$W_{k_m} = m \frac{v_m^2}{2} = \frac{4\pi^2 m x_m^2}{2T^2} = 2\pi^2 m f^2 x_m^2.$$

Při dalším pohybu kmitajícího tělesa rovnovážnou polohou, např. směrem dolů, se bude pružina prodlužovat (deformovat). Proto počne na těleso působit síla pružnosti, jejíž velikost roste úměrně s prodloužením pružiny. Lze ji určit, jak známo, ze vztahu

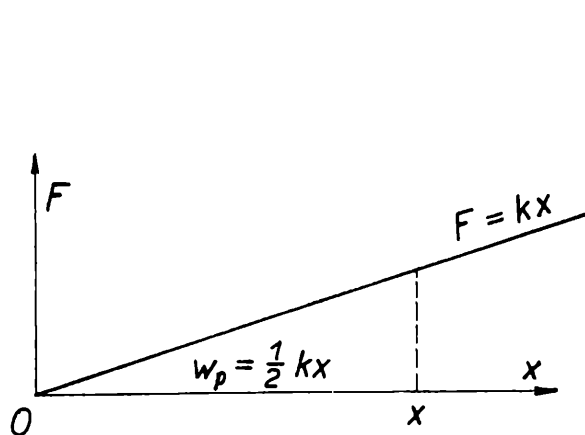
$$F = -K \cdot x$$

Jeho graf je na obr. 1.

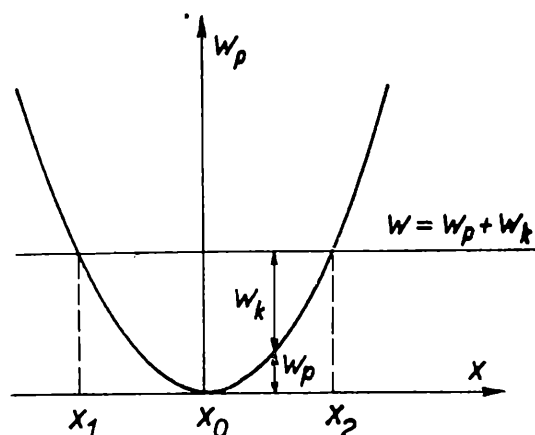
Těleso samo tak získává potenciální energii, jejíž velikost je určena rovnicí

$$W_p = \overline{F}x, \quad (2)$$

kde x je prodloužení pružiny a $\overline{F}$ střední hodnota síly pružnosti.



Obr. 1



Obr. 2

Z diagramu na obr. 1 plyne, $\overline{F} = Kx/2$ a po dosazení

$$W_p = Kx^2/2 \quad (3)$$

V případě, kdy se těleso zastaví, tj., kdy se bude nacházet v krajním bodě výchylky, bude

$$x = x_m \quad \text{a} \quad W_p = W_{p_m} = Kx_m^2/2.$$

Z podmínky (1) po dosazení obdržíme

$$\frac{2\pi^2 mx_m^2}{T^2} = K \frac{x_m^2}{2}$$

a odtud

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Obecně má ovšem kmitající těleso v libovolné poloze nejen energii potenciální, ale i kinetickou a podle zákona o zachování bude platit

$$W = W_p + W_k. \quad (4)$$

Kinetická energie však nemůže mít záporné hodnoty, a proto musí platit

$$W_p(x) < W \quad (5)$$

Zápis $W_p(x)$ vyjadřuje, že potenciální energie je zde funkcí jedné souřadnice, tj. vzdálenosti tělesa vzhledem k rovnovážné poloze. Z nerovnosti (5) plyne, že se kmitající těleso při svém pohybu může nacházet pouze v těch vzdálenostech, kde potenciální energie tělesa nepřevyšuje jeho energii celkovou, tj. pro vymezení krajních poloh kmitajícího tělesa musí být splněna podmínka vyjádřená touto nerovností.

Zákon zachování energie nám umožňuje snadno určit hodnotu kinetické energie tělesa v jeho libovolné poloze z potenciální křivky, tj. z grafického zobrazení funkce $W_p(x)$. Příslušný diagram dovoluje vytvoření názorného modelu mechanismu kmitavého děje. V našem případě vzhledem k rovnici (3) má potenciální křivka tvar paraboly (obr. 2).

Vedme nyní rovnoběžku s osou výchylek, která je zde grafickým zobrazením stálosti celkové energie a která protíná potenciální křivku ve dvou bodech o souřadnicích x_1 a x_2 . Z podmínky o zachování (1) plyne, že pohyb tělesa s celkovou energií W může probíhat pouze mezi body o souřadnicích x_1 a x_2 (obr. 2). Z tohoto obr. je zřejmé, jak je možno určit kinetickou energii tělesa v jeho libovolné poloze. Posuzujeme-li pohyb z hlediska rovnováhy sil, potom bude v bodě O (o souřadnici x_0) potenciální energie tělesa minimální a v této poloze budou také síly působící na těleso v rovnováze, tj. jejich výslednice bude rovna nule. Tato poloha bude odpovídat stavu stabilní rovnováhy tělesa. Jestliže se vychýlí z této polohy, začne na ně působit síla směřující do rovnovážné polohy. Těleso, které kmitá v intervalu, jehož krajní body jsou určeny souřadnicemi x_1 a x_2 , nemůže tedy samo o sobě opustit tuto oblast, kterou vzhledem k jejímu tvaru (obr. 2) často nazýváme potenciální jámou.

Zcela obdobně bychom mohli postupovat i při studiu jiných mechanických oscilátorů. Řešení každého jednotlivého případu spočívá v určení tuhosti K .

Tak v případě malých kmitů u matematického kyvadla

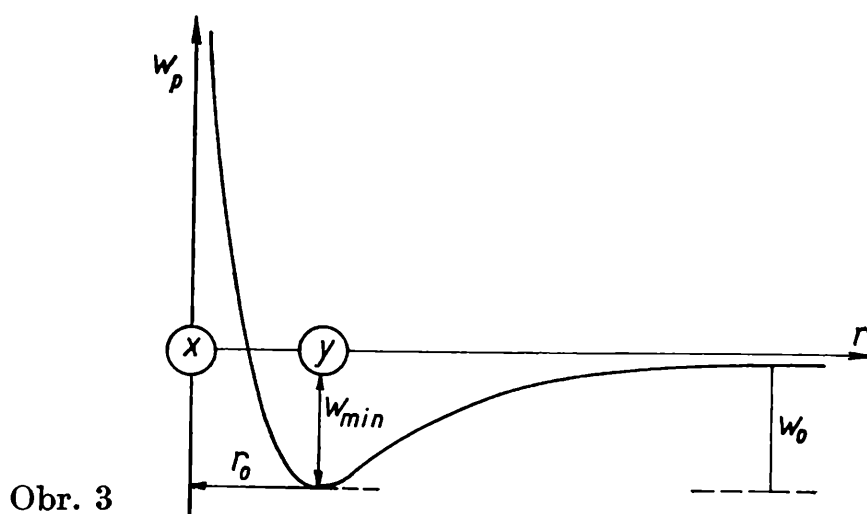
$$K = mg/l \quad \text{a} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Obdobně bychom postupovali i při sestrojení příslušné potenciální křivky, která i v tomto případě by byla určena rovnicí

$$W_p = \frac{mg}{2l} x^2 = K \frac{x^2}{2},$$

kde x je okamžitá výchylka kyvadla z rovnovážné polohy.

Užitečnost energetického popisu kmitavého pohybu se projeví především při studiu tuhého stavu z hlediska jeho struktury. Jestliže nyní zaměníme těleso (hmotný bod) částicí (atomem, molekulou, iontem) a síly mechanické silami elektrickými (přitažlivými a odpuzivými), můžeme si vytvořit názorný model chování těchto částic použitelný v mnoha oborech fyziky.



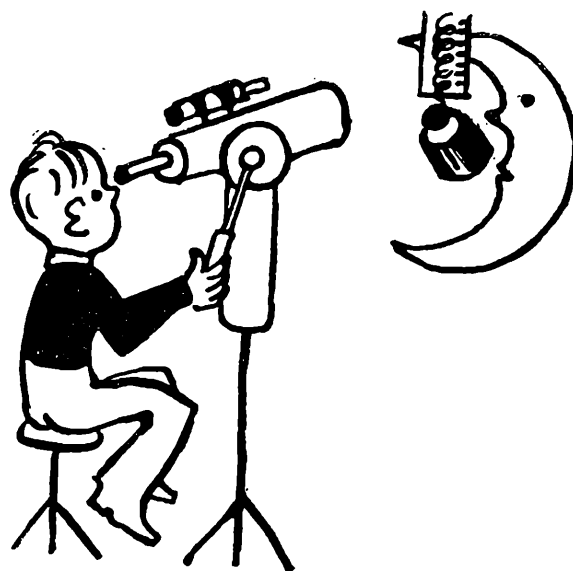
Obr. 3

Na obr. 3 je potenciální křivka nejjednoduššího, tj. dvojčásticového systému. Všimněme si, že má poměrně velké minimum (velkou hloubku) odpovídající určité hodnotě $r = r_0$. Prudké stoupání křivky při menších vzdálenostech odpovídá působení odpuzivých sil mezi částicemi, na větších vzdálenostech však převládají síly přitažlivé.

Vzdálenost r_0 přísluší rovnovážné poloze, kdy síly působící na částici jsou v rovnováze a potenciální energie soustavy je minimální. Opakováním tohoto dvojčásticového systému ve směru os souřadných získáme tzv. prostorovou mřížku tuhé látky, která je modelem pravidelného prostorového uspořádání jejich částic, konajících pouze malé kmity kolem rovnovážných poloh.

Tohoto modelu pak možno výhodně použít při výkladu, např. tepelných, elektrických, magnetických vlastností látek, ale i mechanických, Hookova zákona, dislokací apod.

☞ Způsob odvození periody kmitů harmonického oscilátoru na základě energetického popisu má tedy mnohem širší aspekt a význam než dosavadní odvození silové.



ASTRONOMIE

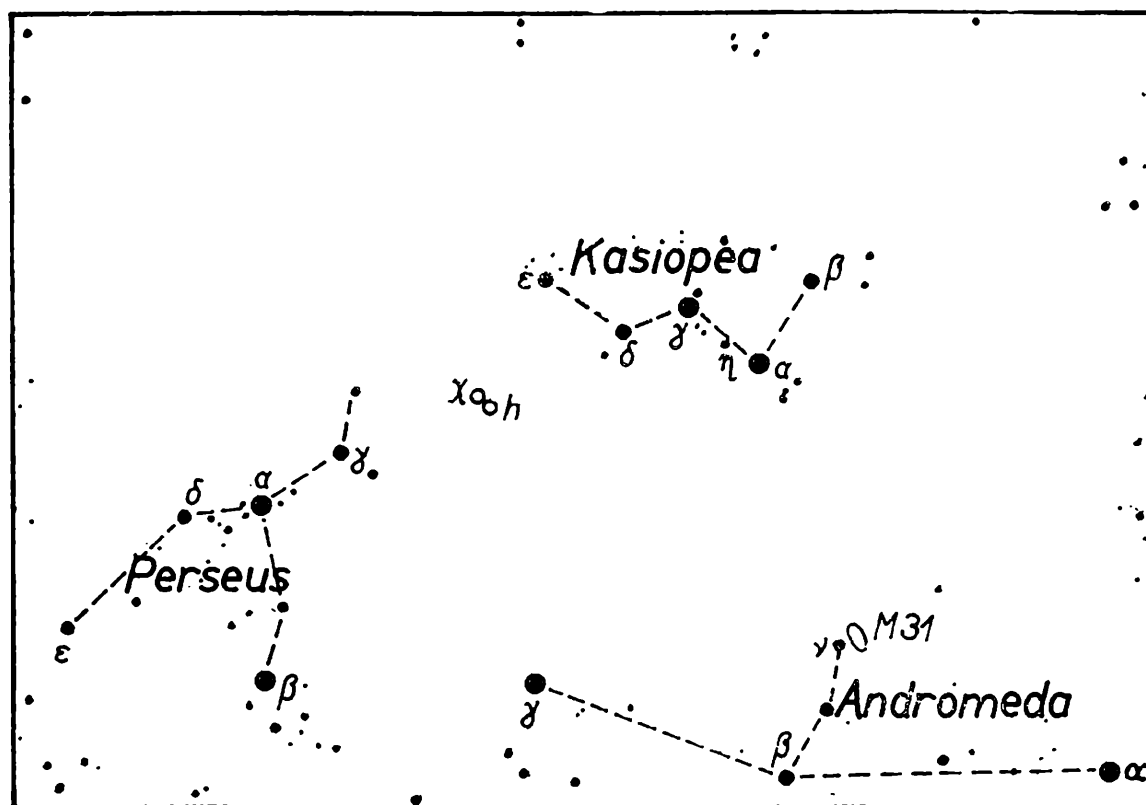
Souhvězdí podzimní oblohy

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V podzimních měsících můžeme ve večerních hodinách pozorovat nad západním obzorem souhvězdí Orla, Labutě, Lyry, Herkula a Hadonoše. Na východě již vychází souhvězdí Vozky s jasnou hvězdou Capellou, nad jižním obzorem je souhvězdí Pegasa, s nímž sousedí poměrně známé souhvězdí Andromedy. Nízko nad jižním obzorem je jasná hvězda Fomalhaut v souhvězdí Jižní ryby.

Na obr. 1 jsou nakreslena tři souhvězdí: Kasiopea (Cassiopeia), Perseus a Andromeda. Kasiopeu poznáme velmi snadno podle jejího charakteristického tvaru, připomínajícího písmeno *W*; na podzim ji večer najdeme v blízkosti nadhlavníku (zenitu). V tomto souhvězdí vzplanula v roce 1572 supernova, kterou pozoroval *Tycho Brahe* a také český hvězdář *Tadeáš Hájek z Hájku*. V maximu jasnosti dosáhla tato supernova -4^m , takže by se jí mohla vyrovnat pouze planeta Venuše, kdyby byla v dolní konjunkci se Sluncem. Na místě supernovy je nyní

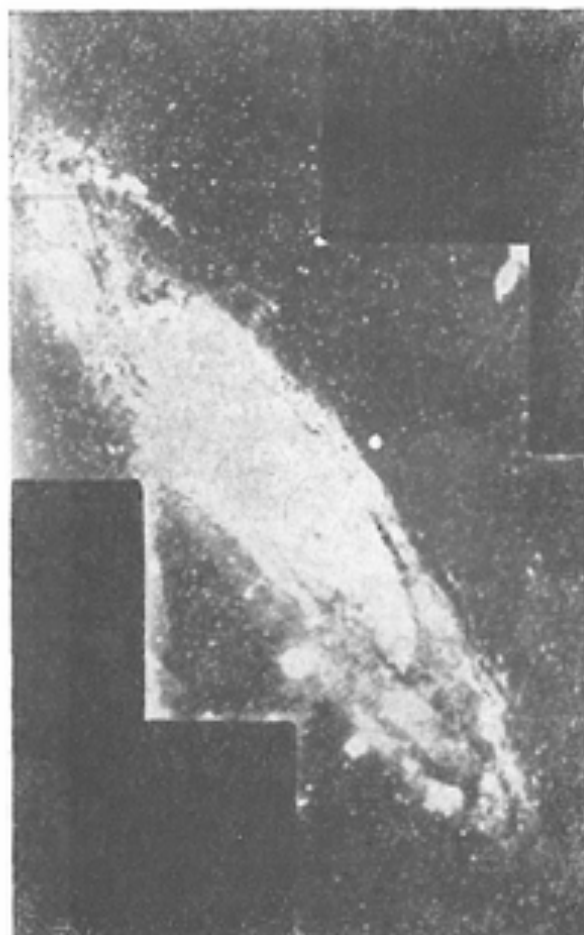
mohutný zdroj rádiového záření. Mezi Kasiopéou a Perseem můžeme pouhým okem vidět dvojitou hvězdokupu χ a h Persei (NGC 884 a 869); průměr každé hvězdokupy je $35'$, hvězdné velikosti jsou $4,4^m$ a $4,7^m$.

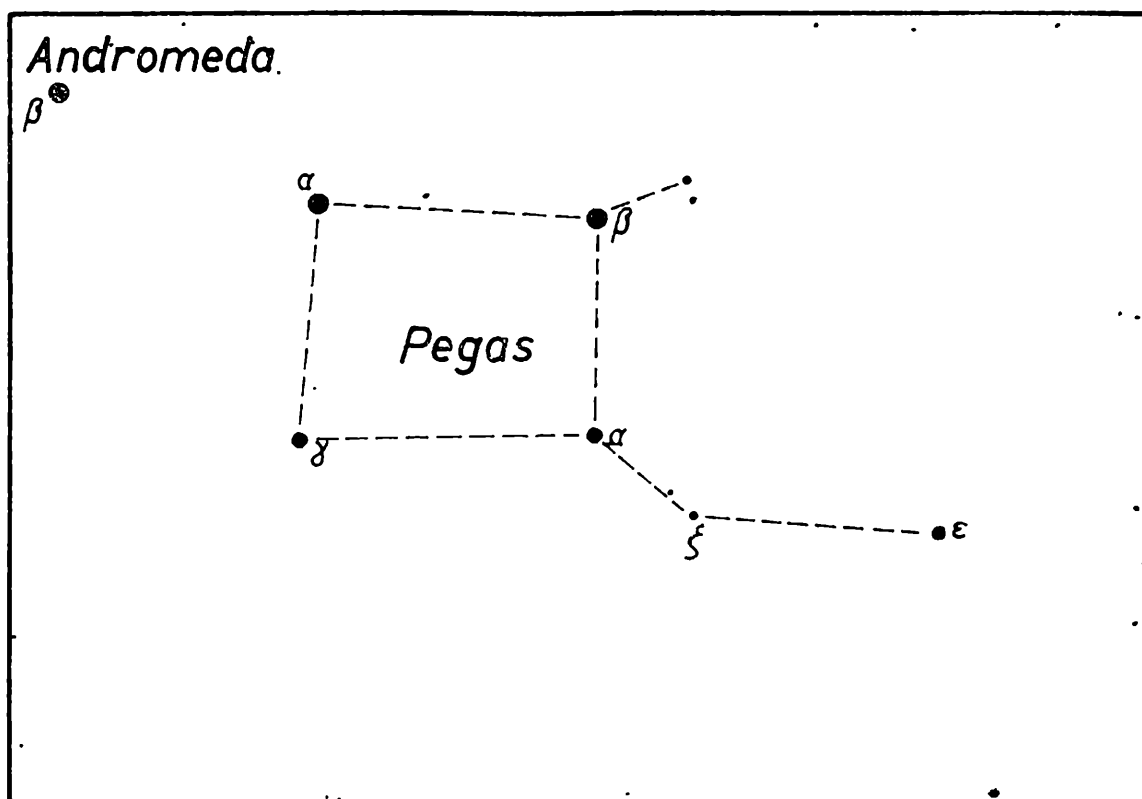


Obr.
1
Obr.
2

Nejzajímavější hvězdou v souhvězdí Persea je Algol (β Persei), která je typickou představitelkou zákrytových proměnných hvězd. Hvězdná velikost Algola se mění v rozmezí od $2,2^m$ do $3,5^m$ v periodě 2,867 dnů.

V souhvězdí Andromedy je nejvýznačnějším objektem spirální galaxie M 31 (obr. 2), kterou za bezměsíční noci můžeme uvidět i pouhým okem jako mlhavou skvrnu v blízkosti hvězdy ν . Zdánlivá hvězdná velikost této galaxie je $5,0^m$ a její vzdálenost je asi 2,7 miliónu světelných roků. Hvězda α Andromedae (Sirrah) spoluvytváří základní obrazec sousedního souhvězdí Pegasa (obr. 3), jehož třemi nejjasnějšími hvězdami (Markab α , Scheat β a Algenib γ) tvoří výrazný čtyřúhelník.





Obr.
3

Poměrně rozsáhlé je souhvězdí Velryby (Cetus); velmi známou hvězdou je α (omikron, zvaná též Mira), která je představitelkou dlouho-periodických proměnných hvězd. Její hvězdná velikost se mění od $2,0^m$ do $10,1^m$ v periodě 331,6 dní.

Mezi další, poměrně málo výrazná souhvězdí podzimní oblohy, můžeme zařadit ještě Kozoroha (Capricornus), Delfína (Delphinus), Šíp (Sagitta) a Ještěrku (Lacerta).

==NAŠE SOUTĚŽ==

Jako každoročně vypisujeme i letos soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie.

Pokyny řešitelům:

Řešení každého příkladu pište čitelně, vždy na zvláštní list formátu A4 (nečitelná řešení vyřazujeme), po jedné straně, dole vpravo uveďte své celé jméno, třídu, školu a své bydliště.

Příklady řešte samostatně, věcně, přitom odborně správně, ekonomicky s užitím platné symboliky. Jako loni mohou se soutěže zúčastnit i kolektivy — maximálně trojčlenné — z téže třídy. Jména členů ko-

lektivu a jejich adresy napište na nepopsanou druhou stránku papíru. Při případném umístění má kolektiv ovšem nárok jen na jedinou cenu.

Řešení první části soutěžních příkladů otištěných v tomto čísle zašlete nejpozději do 15. ledna 1971 na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13.

Úlohy k řešení

Matematika

1. Na strane BC (AC) trojúhelníka ABC leží bod M (N) tak, že

$$BM = \frac{a}{m} \left(AN = \frac{b}{n} \right),$$

přičemž m, n sú prirodzené čísla. Úsečka MN delí trojúhelník ABC na dva útvary rovnakého obsahu. Určite veľkosť úsečky MN , ak sú dané strany a, b, c trojúhelníka ABC .

Pavel Bartoš

2. Nechť k je kružnice, opsaná danému trojúhelníku o vrcholech A_i ($i = 1, 2, 3$), k_i kružnice, která kružnici k protíná kolmo ve vrcholech A_i, A_k daného trojúhelníka (i, j, k libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3). Budiž dále $P \neq A_i \neq A_k$ libovolný bod kružnice k_i ,
 $\sphericalangle A_i A_j P = \varphi_j$, $\sphericalangle A_i A_k P = \varphi_k$.

Pak platí

$$\operatorname{tg} \varphi_j \operatorname{tg} \varphi_k = 1$$

Dokažte.

Josef Brejcha

3. Pro kterou hodnotu parametru k tvoří kořeny rovnice

$$x^4 - (3k + 4) \cdot x^2 + (k + 1)^2 = 0$$

aritmetickou posloupnost. Provedte zkoušku.

Jan Fráňa

4. Je dán trojúhelník ABC . Označme D patu výšky z vrcholu C , E střed strany BC , F patu kolmice spuštěné z bodu E na stranu AB a G střed úsečky EF . Dokažte následující tvrzení: K tomu, aby přímky DG, CF byly navzájem kolmé, je nutné a také stačí, aby trojúhelník DEF byl rovnoramenný.

Stanislav Horák

5. Najděte aritmetickou posloupnost té vlastnosti, že součet prvních n členů je vždy roven $3n^2$ pro každé $n \geq 1$.

Stanislav Horák

6. Určete nejmenší číslo končící cifrou 3, které se vynásobí třemi tak, že se ta „koncová“ trojka přesmykne na jeho počátek (pořadí ostatních číslic je beze změny).

František Kejla

Fyzika

1. Stanovte práci potřebnou k vyfouknutí mydlinové bubliny průměru $d = 20$ cm. Povrchové napětí vody $\sigma = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$.

Jiří Machalický

2. Stanovte zvýšení teploty kapky rtuti, která vznikla spojením dvou stejných kapek o poloměru $r = 1$ mm. Ztráty tepla zanedbejte.

Jiří Machalický

3. Motocyklista, jenž se rozjíždí z klidu s konstantním zrychlením, projel mezi místy, jejichž vzdálenost $AB = s_0$, v době t_0 , přičemž v místě B nabyl rychlosti n -krát větší než měl v místě A . Dokažte, že jeho zrychlení je dáno vztahem

$$a = \frac{2s_0(n-1)}{t_0^2(n+1)}.$$

Určete rychlosti (v_1, v_2) a okamžiky (t_1, t_2) průjezdu oběma místy a vzdálenost (s_1) místa A od místa startu. Řešte nejprve obecně a vyjádřete hledané veličiny ($a, v_1, v_2, t_1, t_2, s_1$) pomocí veličin daných (tj. s_0, t_0, n) a teprve potom vyčíslete pro dané zvláštní hodnoty $s_0 = AB = 125$ m, $t_0 = 5$ s, $n = 3$.

Evžen Říman

4. Těžké dělo vrhá střely o hmotnosti $m = 636$ kg, které opouštějí hlaveň rychlostí $v = 950 \text{ m s}^{-1}$. K tomuto urychlování je třeba pracovního výkonu $P = 10\,830$ miliónů wattů. (Tření a odpor prostředí neuvážujeme.) Dokažte, že hlaveň má délku (s), pro niž platí — předpokládáme-li pohyb rovnoměrně zrychlený — vzorec

$$s = \frac{mv^3}{4P}$$

Určete zrychlení (a) v hlavni, dobu (t) průletu hlavní a délku (s) hlavně. Počítejte nejprve obecně tak, že všechny hledané veličiny (tj. a, s, t)

vyjádříte pomocí daných (tj. m, v, P) a teprve potom vyčísíte dosazením daných zvláštních hodnot!

Evžen Říman

5. Letadlo s rozpětím křídel l metrů stoupá pod úhlem α (α je úhel, který svírá osa letadla s vodorovnou rovinou) přímočaře rovnoměrně ve svislé rovině, odkloněné od roviny místního magnetického poledníku o úhel β k východu. Za t sekund dosáhne letadlo výšky h metrů. V místě startu známe magnetickou deklinaci δ , magnetickou inklinaci i a magnetickou indukci B zemského magnetického pole. Jaké bude napětí mezi konci křídel letadla? Jaké bude napětí, pohybuje-li se letadlo vodorovně? Úlohu řešte obecně a do výsledku dosadte $l = 50$ m, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $t = 10$ s, $h = 3$ km, $\delta = 1^\circ 40'$, $i = 63^\circ$ a $B = 4 \cdot 10^{-5}$ T.

František Vencálek

6. Kružnice leží ve svislé rovině a je rozdělena vodorovným a svislým průměrem AC , resp. BD na 4 kvadranty. Z bodu P ležícího na kružnici v I. kvadrantě (oblouk AB) padá bez počáteční rychlosti hmotný bod po tětivě do bodu Q ve III. nebo IV. kvadrantě (oblouk CDA) tak, že dobu pádu pólí okamžik, kdy bod projde vodorovným průměrem. Jak souvisí délka tětivy s polohou výchozího bodu P ?

Václav Vilímek

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

1. Jsou-li e, f úhlopříčky dvojstředového čtyřúhelníka, s jeho poloviční obvod, P jeho obsah, platí nerovnosti

$$\text{a) } \frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} \leq \left(\frac{s}{2P} \right)^2$$

$$\text{b) } ef > \frac{1}{2} \frac{2P}{s}.$$

Dokažte.

(Došlo 13 řešení)

Josef Brejcha

Řešil Martin Kvašík, III.D SVVŠ Praha 7

Body A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) v přirozeném pořadí indexů jsou vrcholy obecného tečnového čtyřúhelníka. Dále budtež $\overline{A_1A_2} = a$, $\overline{A_2A_3} = b$, $\overline{A_3A_4} = c$, $\overline{A_4A_1} = d$ délky stran, $\overline{A_1A_3} = e$, $\overline{A_2A_4} = f$ délky úhlopříček tohoto čtyřúhelníka.

Sestrojíme $\overline{A_4A'} \parallel \overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A'} \parallel \overline{A_3A_4}$, $\overline{A_1B'} \parallel \overline{A_2A_4}$, $\overline{A_2B'} \parallel \overline{A_1A_4}$. Pak je $\overline{A_4A'} = e$, $\overline{A_1A'} = c$, $\overline{A_1B'} = f$, $\overline{A_2B'} = d$. Označme ještě $\overline{A_2A'} = x$, $\overline{A_3B'} = y$. Všechna čísla $a, b, \dots, f, x, y$ jsou kladná.

Pro úhel úhlopříček e, f zvolme symbol φ , poloviční obvod daného tečnového čtyřúhelníka o vrcholech A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) označme s . Zřejmě bude

$$a + c = b + d = s$$

Pak platí

$$\begin{aligned} x &\leq a + c = s, \quad x^2 \leq s^2, \\ y &\leq b + d = s, \quad y^2 \leq s^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Z trojúhelníků $A'A_2A_4$, $B'A_1A_3$ podle kosinové věty získáme

$$\begin{aligned} x^2 &= e^2 + f^2 - 2ef \cos \varphi, \\ y^2 &= e^2 + f^2 - 2ef \cos (2R - \varphi) \end{aligned} \quad (2)$$

Vzhledem k (1) plyne okamžitě

$$\begin{aligned} e^2 + f^2 - 2ef \cos \varphi &\leq s^2, \\ e^2 + f^2 + 2ef \cos \varphi &\leq s^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Nerovnosti (3) sečteme, pravou stranu výsledné nerovnosti vynásobíme

číslem $\frac{1}{\sin^2 \varphi} \geq 1$. Bude

$$\begin{aligned} e^2 + f^2 &\leq s^2 \frac{1}{\sin^2 \varphi} \Big| : e^2 f^2, \\ \frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} &\leq \frac{1}{e^2 f^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned} \quad (4)$$

Je známo, že pro plošný obsah P konvexního čtyřúhelníka platí relace

$$P = \frac{1}{2} ef \sin \varphi,$$

(e, f úhlopříčky tohoto čtyřúhelníka).

Užitím této relace a po dosazení do (4) vychází po úpravě

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} \leq \left(\frac{s}{2P} \right), \text{ c. b. d. }$$

Budiž ϱ poloměr kružnice, čtyřúhelníku $ABCD$ vepsané. Pro každý takový čtyřúhelník platí evidentní nerovnosti

$$\begin{aligned} e &> 2\varrho, \\ f &> 2\varrho \end{aligned} \quad (5)$$

Vzájemným znásobením vychází

$$ef > 4\rho^2. \quad (6)$$

Poněvadž platí dále $P = \rho s$, plyne po dosazení do (6)

$$ef > \left(\frac{2P}{s}\right)^2 > \frac{1}{2} \left(\frac{2P}{s}\right)^2, \text{ c. b. d. }$$

Z důkazu plyne, že obě relace platí pro libovolný čtyřúhelník tečnový; poněvadž každý čtyřúhelník dvojstředový je tečnový, platí uvedené dvě relace i pro každý čtyřúhelník dvojstředový.



XX. ročník matematické olympiády

Organizace XX. ročníku MO se neliší od organizace předchozího ročníku. Připomeneme si jen některé hlavní zásady.

Přípravné úlohy I. kola, které jsou pro každou kategorii 4, jsou obtížnější než běžné úlohy školské matematiky. Úkolem žáka není jen úlohy rozřešit, nýbrž se také něco při jejich řešení naučit a prohloubit a rozšířit své znalosti z matematiky. Odevzdávají se do 30. listopadu 1970.

Podmínkou postupu do I. kola není řešení všech přípravných úloh a správné vyřešení většiny z nich. Tím je zdůrazněn studijní ráz přípravných úloh. Předpokládá se však, že *každý, kdo chce dále řešit sou-*

těžní úlohy s úspěchem, bude řešit ve vlastním zájmu pokud možno samostatně všechny přípravné úlohy.

Dále v I. kole MO vyřeší soutěžící v kategoriích A a B aspoň čtyři ze šesti soutěžních úloh, které si sami zvolí z předložených dvou trojic úloh (trojice tvoří úlohy č. 1, 2, 3 a 4, 5, 6). Úspěšným řešitelem I. kola bude ten žák, který vyřeší správně anebo v podstatě správně (viz klasifikace 1 a 2) aspoň tři úlohy tohoto kola; přitom mezi těmito úlohami bude každá z daných trojic zastoupena aspoň jednou úlohou.

Lhůta pro odevzdání řešení úloh I. kola je v kategorii A dne 15. ledna 1971 a v kategoriích B a Z dne 28. února 1971.

V kategorii Z, jejíž úlohy jsme otiskli v 10. čísle minulého ročníku, stačí ze 4 soutěžních úloh pro postup do II. kola vyřešit aspoň 3 úlohy na známku aspoň „dobrou“.

Nyní uvedeme přípravné i soutěžní úlohy jen kategorií A (pro III. a IV. ročníky škol II. cyklu) a B (pro I. a II. ročníky těchto škol).

Přípravné úlohy

Kategorie A

1. V obore reálných čísel riešte rovnicu

$$\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(x+i)(x+i+1)} = x(x+1)(x+2) \quad (x+n) + \frac{n-1}{x(x+n-1)},$$

kde $n \geq 2$ je dané prirodzené číslo a x je neznáma.

2. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y , které splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= \cos(x+y), \\ \sin x + \sin y &= \sin(x+y) \end{aligned}$$

3. Označme T těžiště ostroúhlého trojúhelníka ABC , r poloměr kružnice jemu opřané. Pak platí

$$AT^2 + BT^2 + CT^2 > \frac{8}{3} r^2$$

Dokažte.

4. Nech M je vnútorný bod trojuholníka ABC a p_A, p_B, p_C sú po rade obsahy trojuholníkov BCM, CAM, ABM . Dokážte, že platí

$$p_A \cdot \mathbf{MA} + p_B \cdot \mathbf{MB} + p_C \cdot \mathbf{MC} = \mathbf{O}$$

($\mathbf{MA}, \mathbf{MB}, \mathbf{MC}$ sú vektory, $\mathbf{O}$ je nulový vektor.)

•
Kategorie B

1. Kolik neprázdných podmnožin má množina skládající se z deseti prvků?

2. Najděte všechny trojčlenné aritmetické posloupnosti prvočísel s diferencí 1970.

3. Najděte množinu všech bodů, kterých pravouhlé souřadnice x, y splňují soustavu nerovnic

$$|x| \leq 2\pi, |y| \leq 2\pi, \\ \operatorname{tg} x \geq 0, \operatorname{tg} \left(y - \frac{x^2}{4} \right) \geq 0$$

4. Uhlopříčky AC, BD konvexního štvoruholníka $ABCD$ sú navzájom kolmé práve vtedy, ak platí $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$; dokážte.

Súťažné úlohy I. kola

Kategória A

1. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \left(\frac{x_i}{i} \right)^2 = 2 \left[x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{x_i \cdot x_{i+1}}{i(i+1)} \right],$$

kde n je dané prirodzené číslo a $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú neznáme.

2. Zistite všetky prirodzené čísla, ktoré nemožno vyjadriť ako súčet aspoň dvoch, ale menej než 1970 za sebou nasledujúcich prirodzených čísel.

3. Najděte množinu všech bodů, jejichž pravoúhlé souřadnice x, y splňují soustavu nerovnic

$$|x| + |y| < 3, \\ \sin \pi \left(x + y + \frac{1}{2} \right) \geq 0, \quad \sin \pi \left(x - y + \frac{1}{2} \right) \geq 0$$

4. Dané sú kladné čísla a, b, c, d . Zostrojte štvoruholník $ABCD$: $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ tak, aby jeho obsah bol čo najväčší. Zistite podmienku riešiteľnosti.

5. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a jeho vnitřní bod M ; objemy čtyřstěnů $MBCD, MACD, MABD, MABC$ označme po řadě V_A, V_B, V_C, V_D .

Dokažte, že platí

$$V_A \cdot \mathbf{MA} + V_B \cdot \mathbf{MB} + V_C \cdot \mathbf{MC} + V_D \cdot \mathbf{MD} = \mathbf{O}$$

($\mathbf{MA}$, $\mathbf{MB}$, $\mathbf{MC}$, $\mathbf{MD}$ jsou vektory, $\mathbf{O}$ je nulový vektor.)

6. Je dána jednotková krychle $ABCD A'B'C'D'$. Z vrcholů A , C vyvezou současně dva brouci. Jeden leze po hraně AD a za časovou jednotku dospěje do bodu D ; druhý je rychlejší a za tutéž časovou jednotku se dostane po tělesové úhlopříčce CA' do bodu A' . Zjistěte, kdy si budou oba brouci nejbližší a jaká bude přitom jejich vzdálenost (předpokládáme, že se pohybují rovnoměrně).

Kategória B

1. Ak a , b sú kladné čísla menšie než 1, platí nerovnosť

$$|a - b| \leq \frac{|\sqrt{a(1-b)} - \sqrt{b(1-a)}|}{|\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)}|}$$

dokažte. Zistite, kedy nastane rovnosť.

2. Nechť n je přirozené číslo a $f(x)$ polynom jedné proměnné x s celočíselnými koeficienty. Písmenem M označme množinu všech celých čísel x takových, že n dělí $f(x)$. Rozhodněte, zda se počet prvků množiny M může rovnat číslu 1970 nebo 1971.

3. Najděte největší přirozené číslo n s touto vlastností: množinu čísel 1, 2, 3, ..., n lze rozdělit na dvě části tak, že žádná z nich neobsahuje trojčlennou aritmetickou posloupnost s kladnou diferencí.

4. Zo všetkých štvoruholníkov, ktoré majú daný obvod, najväčší obsah má štvorec; dokažte.

5. Stěny čtyřstěnu jsou čtyři navzájem podobné rovnoramenné trojúhelníky; nejkratší hrana má délku l . Určete všechny takové čtyřstěny.

6. V rovine sú dané dve navzájom kolmé priamky p , q a bod S , ktorý neleží na žiadnej z nich. K ľubovoľnému trojuholníku ABC zostrojíme trojuholník $A_1B_1C_1$ s ním súmerne združený podľa priamky p , k trojuholníku $A_1B_1C_1$ zostrojíme trojuholník $A_2B_2C_2$ s ním súmerne združený podľa stredu S a k trojuholníku $A_2B_2C_2$ trojuholník $A_3B_3C_3$ s ním súmerne združený podľa priamky q . Dokažte, že trojuholník $A_3B_3C_3$ môžeme dostať rovnobežným posunutím trojuholníka ABC .

1. Je dán zlomek

$$V = \frac{a^2 - ab - ac + bc}{a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + abc + abd + acd - bcd}.$$

Určete, pro která čísla a, b, c, d :

- a) ztrácí tento zlomek smysl a pak jej zkratíte;
- b) je daný zlomek rovní nule;
- c) je daný zlomek kladný, popřípadě záporný.

2. Hrací kostka má tvar krychle; její stěny jsou označeny oky v počtu 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet počtu ok na dvou protějších stěnách je vždy týž.

K hrací kostce přilepíme další dvě stejné hrací kostky z téhož materiálu vždy celými stěnami. Jak kostky slepit a pak slepenec položit na stůl aspoň jednou stěnou tak, aby počet viditelných ok byl: a) maximální; b) minimální?

(Za viditelné považujeme všechny stěny slepence, které nepřiléhají ke stolu.)

3. Je dán trojúhelník ABC o stranách $AB = 9$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 8$ cm. Vepište mu kružnici k a na kružnici k sestrojte všechny body X této vlastnosti: přímka p rovnoběžná s AC vedená bodem X protíná strany AB, BC po řadě v takových bodech Y a Z , že X je středem úsečky YZ .

4. Jsou dány dva různé pravidelné šestiúhelníky $ABCDEF$ a $KLMNOP$, které mají společnou stranu ($A \equiv K, B \equiv L$).

a) Určete dráhu, kterou opíše vrchol K šestiúhelníka $KLMNOP$, který se kotálí vně po obvodu šestiúhelníka $ABCDEF$.

b) Vypočtěte délku této dráhy.

FO



XII. ročník fyzikální olympiády

Kategorie A

4. Dva rovnako veľké vodivé kruhové kotúče K_1 , K_2 o polomeroch R majú spoločnú os o . Sú navzájom rovnobežné a ich vzdialenosť je d . Kotúč K_1 je nehybný, kotúč K_2 sa okolo osi o rovnomerne otáča. V oboch kotúčach sú v rovnakej vzdialenosti od osi o veľmi malé kruhové otvory. Na kotúči K_1 je kladný náboj $+Q$, na kotúči K_2 záporný náboj $-Q$. Kotúče sú vo vákuu o permitivite ϵ_0 . Elektrické pole medzi nimi možno považovať za homogénne. V určitom okamihu preletí stredom otvoru v kotúči K_1 , v smere rovnobežnom s osou o , elektrón urýchlený napätím U_0 . V tomto okamihu je stred otvoru v druhom, otáčajúcom sa kotúči K_2 pootočený proti stredu otvoru v kotúči K_1 o uhol φ uvažovaný v zmysle proti otáčaniu tohoto kotúča, takže tento otvor „dobieha“ otvor v kotúči K_1 .

a) Určte najmenšiu frekvenciu otáčania kotúča K_2 , aby elektrón preletel stredom jeho otvoru. Vplyv tiažového poľa na letiaci elektrón je zanedbateľný.

b) Určte podmienku pre veličiny U_0 , Q , d , R , aby úloha bola riešiteľná.

5. Uzavřený čtvercový závit na straně a má hmotnost m a elektrický odpor R . Je upevněn nad póly magnetu, jejichž rozměry jsou stejné jako rozměry závitu (obr. 4). V určitém okamžiku je závit

uvolněn a padá. Magnetické pole má takovou indukci, že závit tímto polem proletuje s konstantní rychlostí.

a) Jaké napětí U se indukuje v závitě při jeho průletu magnetickým polem?

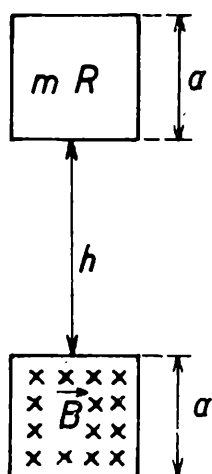
b) Jaký proud I protéká závitem při jeho průletu magnetickým polem?

c) Jakým výkonem P je závit ohříván při průletu magnetickým polem?

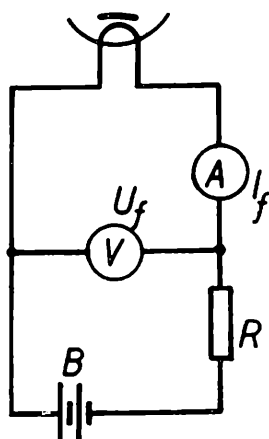
d) Jak velká je magnetická indukce B mezi póly magnetu?

Magnetické pole mezi póly magnetu považujte za homogenní. Odpor prostředí při pohybu závitu zanedbejte.

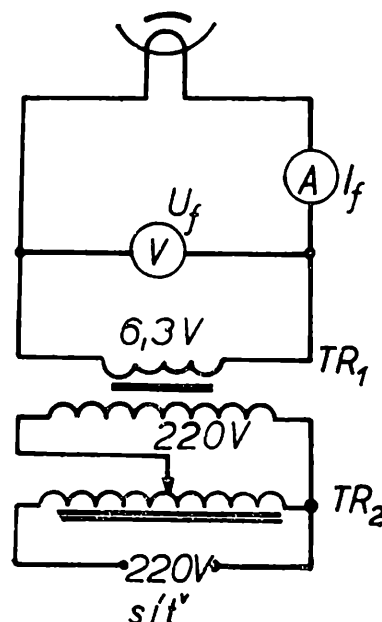
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $a = 2,0$ cm; $m = 0,20$ g; $R = 0,30$ Ω ; $h = 20$ cm; tíhové zrychlení $g = 9,8$ m s⁻².



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

6. *Měření žhavicího příkonu a odporu žhavicího vlákna elektronky.* Žhavicí příkon a odpor žhavicího vlákna elektronky se měří stejnosměrným nebo střídavým proudem v zapojení podle obr. 5 nebo podle obr. 6.

V obr. 5 je B akumulátorová baterie vhodného svorkového napětí, R regulační reostat. V obr. 6 je TR_1 síťový transformátor 220 V/6,3 V, TR_2 regulační autotransformátor.

Žhavicí příkon P_f se určí ze vztahu $P_f = U_f \cdot I_f$, odpor R_f žhavicího vlákna ze vztahu $R_f = U_f / I_f$.

Úlohy: Měřte žhavicí příkon P_f a odpor žhavicího vlákna R_f u některé elektronky řady E (jmenovité žhavicí napětí 6,3 V). Při měření nastavujte:

a) různé hodnoty žhavicího napětí, a to od nuly do 7,0 V, po 0,5 V;
b) různé hodnoty žhavicího proudu od nuly do hodnoty asi o 10 % větší než jmenovitý žhavicí proud podle Příručního katalogu TESLA; postupujte tak, abyste dostali nejméně 10 hodnot;

c) výsledky znázorněte graficky, tj. nakreslete celkem čtyři grafy: $P_f = f_1(U_f)$; $R_f = f_2(U_f)$; $P_f = f_3(I_f)$; $R_f = f_4(I_f)$. Postačí dva obrázky, do jednoho zakreslete závislosti P_f a R_f na U_f , do druhého závislosti P_f a R_f na I_f ;

d) pokuste se o výklad nalezených závislostí.

Poznámky:

1) Budete-li měřit v zapojení podle obr. 5, nevyjímejte po celou dobu měření elektronku z objímky, abyste popř. nepřetížili voltmetr, na němž by po vyjmutí elektronky bylo plné napětí zdroje B .

2) Po každém nastavení počkejte, až se ustálí tepelné poměry žhavicího tělíska, tj. až ručky měřidel se ustálí v konečných polohách.

3) Budete-li měřit v zapojení podle obr. 6, musíte stále kontrolovat nastavené hodnoty, poněvadž napětí sítě kolísá. Máte-li střídavý stabilizátor, zapojte jej mezi síť a vstupní svorky transformátoru TR_2 .

7. Dva bodové náboje $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$ ve vakuu jsou od sebe vzdáleny o délku a . Na přímé spojnici těchto nábojů určete bod X -té vlastnosti, že práce vnějších sil při přenesení libovolného náboje z nekonečna do tohoto bodu je nulová. Provedte diskusi vzhledem k velikostem nábojů Q_1 a Q_2 .

8. Dvě stejné, dokonale pružné kovové kuličky, z nichž každá má hmotnost m a poloměr r , jsou nabity stejně velkými nesouhlasnými náboji $\pm Q$ a upevněny tak, že vzdálenost jejich středů je $2R$. Kuličky jsou ve vakuu a v beztláčeném stavu. Po uvolnění se počnou vlivem elektrických sil pohybovat a dojde mezi nimi k pružné srážce. Za jakou dobu po rázu se kuličky opět dostanou do původní vzájemné polohy, v níž jejich středy mají vzdálenost $2R$?

Úlohy řešte pro případ, že:

a) jsou uvolněny obě kuličky;

b) je uvolněna jen jedna kulička.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $Q = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$; $R = 50 \text{ cm}$; $r = 5,0 \text{ mm}$; permitivita vakua $\epsilon_0 = \frac{1}{3,6} \cdot 10^{-10} \text{ F m}^{-1}$.

9. V zapojení podle obr. 7, v němž je dáno svorkové napětí zdroje U a všechny odpory, vypočítejte:

a) proudy ve všech větvích obvodu;

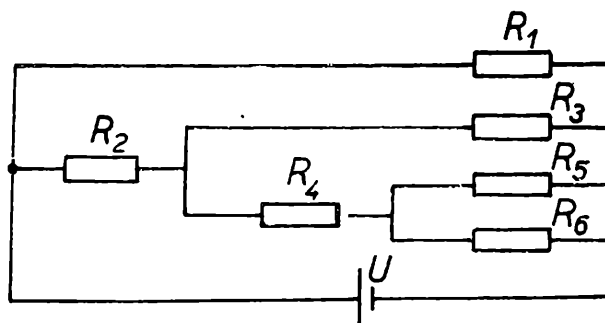
b) napětí na všech odporech;

c) příkony všech odporů;

d) velikost jediného odporu, jímž lze (z hlediska zdroje) nahradit všechny odpory znázorněné sítě;

e) celkový příkon, který zdroj dodává do obvodu.

Řešte pro hodnoty $U = 6,3 \text{ V}$; $R_1 = 12,6 \text{ } \Omega$; $R_2 = 5,0 \text{ } \Omega$; $R_3 = 7,0 \text{ } \Omega$; $R_4 = 7,0 \text{ } \Omega$; $R_5 = 3,5 \text{ } \Omega$.



Obr. 7

Kategorie B

4. Určete oběžnou dobu T umělé družice Země jako funkci její výšky h nad povrchem Země pro kruhovou dráhu družice.

Podle výsledku řešte úlohy:

a) Je-li ve výšce h nad povrchem Země oběžná doba umělé družice T , ve které výšce nad povrchem Země je oběžná doba umělé družice dvojnásobná?

b) Určete oběžnou dobu družice v těsné blízkosti povrchu Země a výšku nad povrchem Země, ve které je oběžná doba družice dvojnásobná jako při povrchu Země.

c) Určete oběžnou dobu umělé družice Měsíce v těsné blízkosti jeho povrchu, je-li gravitační zrychlení na povrchu Měsíce $g_M = \frac{g}{6}$, polo-

měr Měsíce $R_M = \frac{R}{3,7}$. Ve které vzdálenosti od povrchu Měsíce je oběžná doba jeho družice dvojnásobná jako při povrchu Měsíce?

Ve všech úlohách předpokládáte, že umělá družice opisuje kruhovou dráhu. Poloměr Země $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$; tíhové zrychlení na povrchu Země $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

5. Kovovým délkovým měřítkem z homogenního materiálu o součiniteli délkové teplotní roztažnosti α se správně měří při teplotě t , při níž má dílek měřítka délku d . Měřítkem byla měřena délka tyče z homogenního materiálu: při teplotě t_1 bylo naměřeno n_1 dílků měřítka, při teplotě t_2 bylo naměřeno n_2 dílků měřítka. Určete:

a) součinitel délkové teplotní roztažnosti α' materiálu tyče;

b) délku l_0 tyče při teplotě $0 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Předpokládáme, že délka měřítka i délka tyče se mění s teplotou lineárně.

Pozn.: Délku l_0 vyjádřete výrazem, obsahujícím kromě daných veličin také α' .

6. Z valivého pohybu po nakloněné rovině stanovte tíhové zrychlení.

Návod:

a) Zrychlení valivého pohybu tenkostěnného válce po nakloněné rovině je $a = \frac{g \sin \alpha}{2}$

1. Určení $\sin \alpha$. Zvolte dosti dlouhou a dokonale hladkou nakloněnou rovinu tak, aby tření bylo zanedbatelné. Změřte délku d a výšku h nakloněné roviny. $\sin \alpha = \frac{h}{d}$.

2. Určení zrychlení posuvného pohybu na nakloněné rovině. Použitím stopek změřte dobu t , za kterou urazí válec dráhu d po nakloněné rovině. Opakujte měření času desetkrát při stálé výšce h . Z naměřených hodnot vypočítejte aritmetický průměr $\bar{t}$. Pro tuto hodnotu vypočítejte zrychlení posuvného pohybu válce. Ze vzorce pro zrychlení valivého pohybu vypočítejte tíhové zrychlení g .

Měření opakujte pro dvě jiné hodnoty výšky h . Vypočítejte aritmetický průměr ze zjištěných hodnot g .

b) Provedte měření s plným válcem. Zrychlení valivého pohybu plného válce po nakloněné rovině je $a = \frac{2g \sin \alpha}{3}$.

c) Provedte měření s plnou kuličkou. Zrychlení valivého pohybu plné kuličky po nakloněné rovině je $a = \frac{5g \sin \alpha}{7}$.

7. Ideální plyn má při teplotě $T_1 = 300^\circ\text{K}$ a tlaku $p_1 = 10^3 \text{ N m}^{-2}$, objem $V_1 = 0,25 \text{ m}^3$.

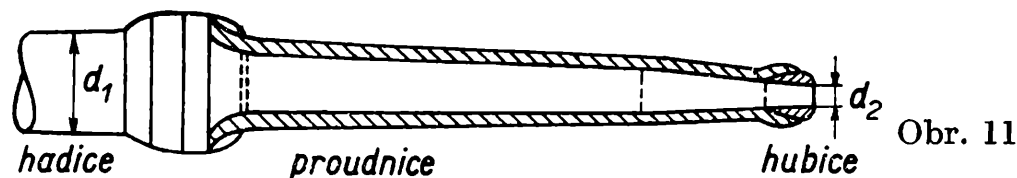
a) Sestrojte graf izotermického děje tohoto plynu v soustavách souřadnic: $p - V$, $V - T$, $p - T$. Provedte úlohu také pro děj izobariický a izochorický. Vysvětlete s použitím stavové rovnice.

b) Ke každému grafu z úlohy a) sestrojte příslušný graf pro dokonalejší plyn dvojnásobné hmotnosti. Vysvětlete, v čem se příslušné grafy úlohy a) a b) od sebe liší.

c) Za předpokladu, že grafy z úlohy a) platí pro vodík dané hmotnosti, sestrojte příslušné grafy pro helium téže hmotnosti. Vysvětlete, v čem se příslušné grafy pro vodík a helium od sebe liší.

Ke každému grafu sestavte tabulku hodnot a grafy ve všech případech narýsujte na milimetrový papír.

8. Při likvidaci požáru vesnického domku požárníci použili přenosnou motorovou stříkačku PS 4. Sací koš této stříkačky byl spuštěn na dno studny, která má kruhovou podstavu o poloměru R . K dopravě vody na požářiště byla použita útočná hadice C 52 o vnitřním průměru d_1 zakončená proudnicí (obr. 11). Hubice, která zmenšuje otvor proud-



nice a slouží tak k dosažení požadovaného dostřiku, má průměr d_2 . Podle výchylky na manometru na výtlačné straně čerpadla vyvinula stříkačka tlak p_1 .

Určete:

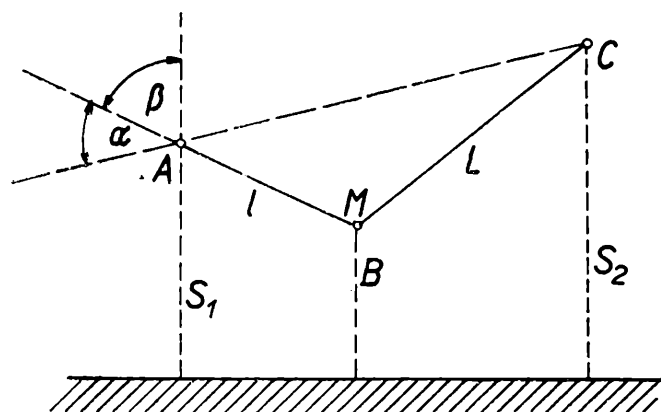
- rychlost, kterou voda proudí z proudnice;
- skutečný dostřik vodního paprsku, jestliže proudnice svírá s vodorovným směrem úhel α a jestliže vlivem odporu prostředí se velikost dostřiku zmenší o A %;
- velikost průřezu vodního paprsku v nejvyšším bodě dráhy určené podle bodu b);
- dobu t , za kterou se vyčerpá voda ze studny, jestliže výška hladiny vody před zahájením likvidace požáru měřená do dna studny byla h .

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $R = 0,750$ m, $d_1 = 5,20$ cm, $d_2 = 1,25$ cm, $p_1 = 4,05 \cdot 10^5$ N m⁻², $\alpha = 30^\circ$, $A = 30$, $h = 5,50$ m, $b = 1,01 \cdot 10^5$ N m⁻².

Ztráty kinetické energie při výtoku vody hadicí zanedbejte!

9. Měření doby kyvu bifilárního kyvadla.

Pomůcky: Dva stojany (ze stavebnice mechaniky), úhloměr, délkové měřítko, stopky, dvě nitě o délkách l a L ($l \neq L$), kuličku s očkem, bodec ve stojánku.



Obr. 12

Návod: Sestavíme pokus podle náčrtku na obrázku 12. Změříme úhly α , β a délku l . Rovnovážnou polohu si fixujeme bodcem B ve stojánku. Pak vychýlíme kuličku M tak, že rovina AMC svírá se svislou rovinou úhel $\varepsilon \leq 5^\circ$ a měříme dobu kyvu bifilárního kyvadla; čas začneme měřit vždy při průchodu kuličky rovnovážnou polohou.

Postup: Kyvadlo bifilární na dvou nestejně dlouhých nitích l a L , upevněných v nestejných výškách, má dobu kyvu

$$t = \pi \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{g \sin (\alpha + \beta)}} \quad (1)$$

Úkoly:

- Dokažte vztah (1).
- Změřte desetkrát dobu kyvu pro předem zvolené úhly α , β a délku l .
- Vypočtěte dobu kyvu ze vztahu (1).
- Určete pravděpodobnou chybu výsledku.

Kategorie C

4. Vlak se rozjíždí na vodorovné rovině po přímé dráze působením stálé tažné síly lokomotivy a urazí za dobu t_1 dráhu s_1 . Na konci dráhy s_1 přechází vodorovná rovina v nakloněnou rovinu s úhlem sklonu α . Potom vlak stoupá rovnoměrným pohybem za působení tažné síly jako při rozjíždění po vodorovné rovině.

Jaké stoupání ($\sin \alpha$) má vlak?

Tření a ostatní překážky pohybu zanedbejte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_1 = 60$ s, $s_1 = 360$ m, tíhové zrychlení $g \doteq 10$ m s⁻².

5. Dokonale pružná ocelová kulička padá z dolního okraje střechy domu. Počáteční rychlost kuličky je nulová. Pozorovatel v pokoji u okna výšky d v tomto domě změřil, že kulička proletěla vzdálenost od horního k dolnímu okraji okna za dobu t_1 .

Kulička dopadne na vodorovný chodník u paty domu, kde dojde k dokonalému odrazu. Pozorovatel uvidí kuličku u dolního okraje okna za dobu t_2 poté, co kulička volným pádem minula dolní okraj okna.

Určete výšku dolního okraje střechy domu nad chodníkem. Uvažte, že při svislém vrhu vzhůru je doba výstupu stejná jako doba pádu.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $d = 1,5$ m, $t_1 = 0,12$ s, $t_2 = 2,0$ s.

6. Měření součinitele μ smykového tření.

Pomůcky: Nakloněná rovina s měnitelným úhlem sklonu, špalíček tvaru kvádrů, délkové měřítko s milimetrovým dělením.

Návod: Pohybuje-li se špalíček po nakloněné rovině ϱ úhlu sklonu α , jejíž výška je h a základna z , rovnoměrným pohybem, pak se třecí síla F_t , kterou působí nakloněná rovina na špalíček, ruší složkou G_1 tíhy G špalíčku, rovnoběžnou s délkou nakloněné roviny. Druhá složka G_2 je k nakloněné rovině kolmá. V tomto případě platí vztah

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{z}. \quad (1)$$

Úkoly:

a) Dokažte vztah (1).

b) Položte špalíček na nakloněnou rovinu a měňte její úhel sklonu α tak dlouho, až špalíček, podle vašeho odhadu, po mírném nárazu proběhne po spádové přímce celou délkou nakloněné roviny rovnoměrným pohybem. Pak změřte výšku h nakloněné roviny a její základnu z .

Proveďte deset měření s tímž špalíčkem, ležícím na téže nakloněné rovině stále stejnou stěnou. Naměřené hodnoty запиšte do tabulky.

c) Stanovte pravděpodobné hodnoty $\bar{h}$, $\bar{z}$ jako aritmetické průměry naměřených hodnot a vypočítejte jejich absolutní a relativní chyby.

d) Hodnotu součinitele smykového tření vypočítejte z pravděpodobných hodnot $\bar{h}$ a $\bar{z}$ užitím vztahu (1).

e) Určete relativní a absolutní chybu veličiny μ vypočítané v části d) úlohy.

7. Z téhož bodu na ochozu věže byly vrženy současně čtyři míče A , B , C , D stejnou počáteční rychlostí v_0 . Míč A byl vržen svisle vzhůru, míč C svisle dolů, míče B a D vodorovně směry navzájem opačně orientovanými.

Jaký geometrický obrazec tvoří polohy všech čtyř míčů v témž okamžiku?

a) Dokažte jeho tvar početně při vhodně zvolené souřadnicové soustavě.

b) Nakreslete ve vhodném měřítku dráhy letu všech čtyř míčů s vyznačením poloh za dobu t , $2t$, $3t$, a pojením odpovídajících poloh.

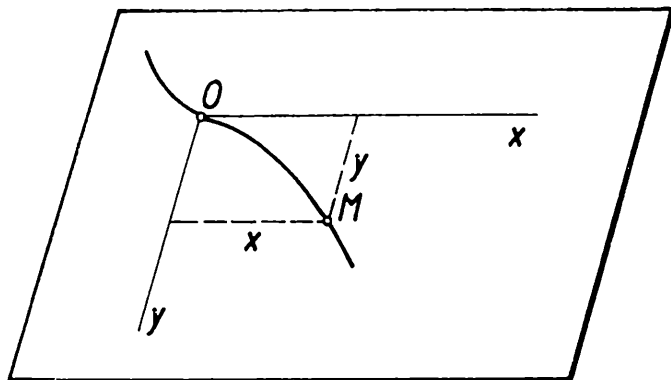
8. Obrázek 13 znázorňuje dva kvádry, první má hmotnost m_1 , druhý m_2 . Kvádry leží na vodorovné rovině v přímém vodícím žlábků a dotýkají se konců pružiny P stažené nití n . Přepálí-li se nit n , pružina roztlačí kvádry na opačné strany. Součinitel tření, stejný pro oba kvádry, označme μ . První kvádr se zastaví za dobu t_1 ve vzdálenosti d_1 , druhý za dobu t_2 ve vzdálenosti d_2 od svých původních klidových

poloh. Poměr hmotností obou kvádrů je $\frac{m_2}{m_1} = k$.

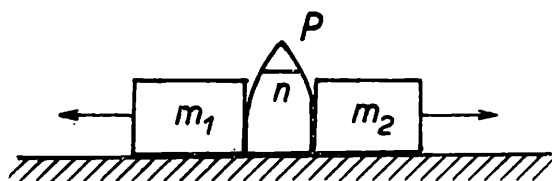
a) Jaký je poměr dob $\frac{t_1}{t_2}$ a poměr vzdáleností $\frac{d_1}{d_2}$?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnotu $k = 3$.

b) Jakou hodnotu musí mít poměr k , aby se oba kvádry zastavily ve stejných vzdálenostech od svých původních klidových poloh ?



Obr. 14



Obr. 13

9. Vrh kuličky po nakloněné rovině.

Pomůcky: Velké rýsovací prkno, stojany na podložení prkna, těžká hladká kulička, žlábek ohnutý do oblouku, plavuň (nebo jiný vhodný prášek), milimetrový papír.

Návod: Na prkno napněte milimetrový papír (viz obr. 14) a upravte je jako nakloněnou rovinu, která svírá s vodorovnou rovinou malý úhel α . Potom změřte délku l a výšku h nakloněné roviny. V levém horním rohu prkna upevníte žlábek tak, aby tečna k spodnímu konci žlábků byla vodorovná. Od konce žlábků naznačíte na milimetrovém papíře souřadné osy x a y s počátkem O v místě, kde opouští spuštěná kulička žlábek. Osa x je vodorovná, kladná osa y je spádnicí nakloněné roviny.

Úkoly:

a) Poloha bodu M na dráze kuličky je určena souřadnicemi x , y . Vyjádřete rovnicemi velikosti těchto souřadnic v čase t , opouští-li kulička žlábek v místě O rychlostí v_0 v čase $t_0 = 0$ s.

b) Vyloučíte-li z těchto dvou rovnic čas t , získáte rovnici, ze které se vypočítá

$$v_0 = x \sqrt{\frac{gh}{2yl}}, \quad (1)$$

kde g značí tíhové zrychlení. Odvoďte tento vztah.

Postup měření:

Aby se poznala celá dráha kuličky pustí se kulička nejprve jen na zkoušku, aby se poznal přibližný průběh její dráhy. Potom se v těch

místech, kde se kulička pohybovala, posype milimetrový papír jemnou rovnoměrnou vrstvou plavuňového prášku, na které kulička při dalším vypuštění ze žlábků vyznačí svou dráhu.

Zvolte vhodně deset bodů na dráze vyznačené kuličkou a запиšte do tabulky příslušné hodnoty souřadnic těchto bodů.

Z naměřených hodnot vypočítejte podle vztahu (1) velikost v_0 počáteční rychlosti kuličky v bodě O .

Vysvětlete, co je příčinou, že všechny tyto hodnoty rychlosti v_0 nejsou stejné.

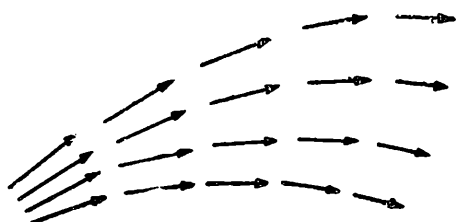
Hydrodynamika

STANISLAV ZHEJBAL, katedra fyziky VAAZ Vyškov

1. Úvod

Zákony pohybu kapalin vyjádříme v nejjednodušším tvaru pro dokonalou kapalinu. Dokonalá kapalina je nestlačitelná a nemá vnitřní tření. Skutečné kapaliny se svými vlastnostmi více či méně blíží vlastnostem ideální kapaliny.

Pohyb částic kapaliny popisujeme vzhledem k určité souřadnicové soustavě, kterou si myslíme např. pevně spojenou s potrubím, jímž kapalina protéká. Vzhledem k této souřadnicové soustavě má každá částice kapaliny v každém místě určitou rychlost. Sestrojíme-li v každém bodě pohybující se kapaliny vektor rychlosti částice, dostaneme tzv. vektorové pole rychlosti. (Obr. 1.) Křivku, jejíž tečny mají v daném okamžiku ve všech jejích bodech směr vektoru rychlosti, nazýváme



Obr. 1



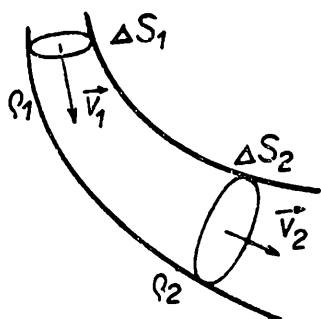
Obr. 2

proudovou čarou nebo krátce jen proudnicí. V obecném případě proudnice tvoří obálku drah jednotlivých částic. (Obr. 2.) Sledujeme-li proudnici v určitém časovém intervalu, vidíme, že tvar proudnice se mění, i když daným bodem prochází vždy jen jediná proudnice. Kromě

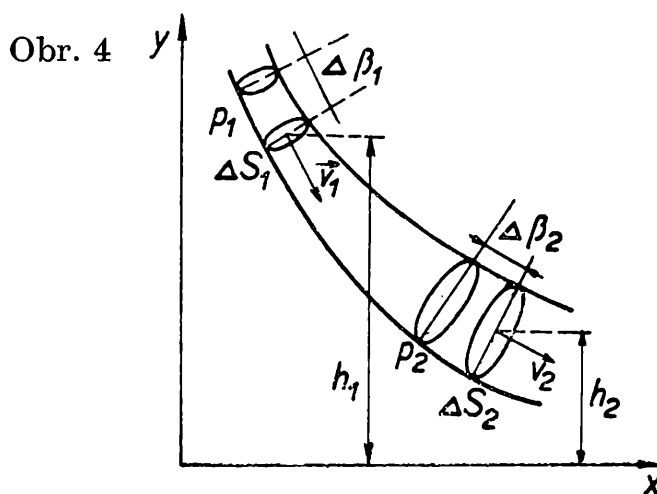
proudnic můžeme pohybující se kapalinu charakterizovat i tzv. trajektoriemi. Trajektorií nazýváme křivku, kterou opisuje určitá částice pohybující se kapalinou. V obecném případě jsou trajektorie i proudnice různé křivky. Jen za ustáleného stavu, kdy se obraz proudnic s časem nemění, splývají proudnice s trajektoriemi. Tedy v tomto případě jsou v daném místě toku rychlost a tlak stálé na čase nezávislé veličiny. Takové proudění se nazývá ustáleným (stacionárním). Jestliže však rychlost a tlak jsou funkcemi času, jde o proudění neustálené (nestacionární).

2. Rovnice kontinuity

Představme si v proudící kapalině malou plošku ΔS tak, aby byla kolmá k určité proudnici. Proudnice, které procházejí uzavřenou křivkou ohraňující plošku ΔS , vytvářejí proudovou trubici. Hmotným vnitřkem proudové trubice je proudové vlákno. Při pohybu kapaliny se pohybují všechny vnitřní částice tak, že se nalézají v určitém průřezu proudové trubice a nevycházejí z ní. Také zvenčí nepřicházejí žádné částice dovnitř proudové trubice.



Obr. 3



Zvolme dva libovolné průřezy ΔS_1 a ΔS_2 k proudové trubici kolmé. (Obr. 3.) Předpokládejme, že tok kapaliny je ustálený. Pak podle zákona zachování hmotnosti látek plochou ΔS_2 za stejnou dobu proteče stejná hmotnost kapaliny jako plochou ΔS_1 . Tedy

$$\Delta S_1 v_1 \rho_1 = \Delta S_2 v_2 \rho_2,$$

kde v_1 , v_2 jsou rychlosti kapaliny v průřezích ΔS_1 a ΔS_2 ,

ρ_1 , ρ_2 jsou hustoty kapaliny v průřezích ΔS_1 a ΔS_2 .

Uvedený vztah nazýváme rovnice kontinuity (spojitosti) ustáleného toku kapalin. Zavedeme-li hmotnostní tok Q_m ustáleného proudění kapaliny vztahem

$$Q_m = \Delta S \rho v,$$

tedy jako hmotnost kapaliny, která projde daným průřezem trubice za jednotku času, můžeme rovnici kontinuity formulovat také takto: Za ustáleného proudění je hmotnostní tok kapaliny libovolným průřezem proudové trubice konstantní.

Předpokládejme, že proudící kapalina je kapalinou nestlačitelnou, tj. že hustota proudící kapaliny na čase nezávisí. Pak plochou ΔS_2 za stejnou dobu proteče stejný objem kapaliny jako plochou ΔS_1 . Tedy

$$\Delta S_1 v_1 = \Delta S_2 v_2 .$$

Uvedený vztah nazýváme rovnice kontinuity toku nestlačitelné kapaliny. Avšak součin $\Delta S v$ udává objem kapaliny, která proteče daným průřezem trubice za jednotku času. Nazýváme jej objemovým tokem Q_v . Tedy

$$Q_v = \Delta S v .$$

Proto lze rovnici kontinuity formulovat také takto: Pro nestlačitelnou kapalinu je objemový průtok v v každém průřezu trubice konstantní.

Rovnice kontinuity odvozené pro proudovou trubici můžeme však použít i pro případy proudění kapalin skutečnými trubicemi, neboť vnitřní stěna vlastně vymezuje proudovou trubici. Jde-li o proudění skutečných kapalin, u nichž není rychlost ve všech bodech průřezu stejná, musíme do rovnice kontinuity dosadit střední hodnoty průtočných rychlostí v v příslušných průřezích.

3. Bernoulliho rovnice

Sledujme pohyb určité části dokonalé kapaliny o hmotnosti Δm , která protéká dvěma průřezy ΔS_1 a ΔS_2 dostatečně úzké proudové trubice. (Obr. 4.) Předpokládejme, že tato proudová trubice není vodorovná, nýbrž skloněná. Rychlost kapaliny v průřezu ΔS_1 označme v_1 , tlak p_1 ; rychlost a tlak v průřezu ΔS_2 analogicky v_2 a p_2 . Označme ještě výšky, v nichž se nalézají středy obou průřezů h_1 , resp. h_2 . V průřezu ΔS_1 má kapalina o hmotnosti Δm celkovou energii W_1 , která je rovna součtu energie kinetické a potenciální. Tedy

$$W_1 = \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 + \Delta m g h_1$$

Analogicky je pro průřez S_2

$$W_2 = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 + \Delta m g h_2 .$$

Protože však kapalina v místě průřezu ΔS_1 se posunula o délku $\Delta s_1 = v_1 \Delta t$, v průřezu ΔS_2 o délku $\Delta s_2 = v_2 \Delta t$, musí se vykonat práce, která bude rovna změně celkové energie. Tedy

$$W_2 - W_1 = A \tag{1}$$

Pro tuto práci platí

$$A = F_1 \Delta s_1 + F_2 \Delta s_2 ,$$

kde $\mathbf{F}_1$ je tlaková síla kolmá k rovinné plošce ΔS_1 , $\mathbf{F}_2$ je tlaková síla kolmá k plošce ΔS_2 . Tlakové síly mají svůj původ v působení kapaliny na kapalinu uvnitř proudové trubice mezi oběma průřezy. Zřejmě $F_1 = p_1 \Delta S_1$. Protože kapalina za průřezem ΔS_2 působí na kapalinu před tímto průřezem tlakovou silou nesouhlasně orientovanou s vektorem rychlosti proudící kapaliny, vyjádříme velikost síly F_2 se znaménkem minus, tedy $F_2 = -p_2 \Delta S_2$. Dosadíme-li nyní za W_1 , W_2 , F_1 , F_2 , Δs_1 a Δs_2 do rovnice (1), dostaneme po úpravě

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 + \Delta m g h_1 + p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t &= \\ &= \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 + \Delta m g h_2 + p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t \end{aligned} \quad (2)$$

Označíme-li ρ hustotu dokonalé kapaliny, dostaneme

$$\frac{\Delta m}{\rho} = \Delta S_1 v_1 \Delta t = \Delta S_2 v_2 \Delta t .$$

Po dosazení tohoto vztahu do rovnice (2), vykrácení Δm a vynásobení hustotou ρ dostaneme

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 , \quad (3)$$

což lze zapsat obecně pro libovolný průřez proudové trubice ve tvaru

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p = \text{konst.}$$

Odvozená rovnice se nazývá rovnice Bernoulliova. Jednotlivé členy této rovnice, jak se můžeme přesvědčit dosazením jednotek, mají rozměr

energie jednotkového objemu kapaliny. Proto $\frac{1}{2} \rho v^2$ je kinetická energie jednotkového objemu kapaliny a $\rho g h$ potenciální energie tíhová jednotkového objemu kapaliny. Fyzikální význam dalšího členu Bernoulliovy rovnice objasníme následující úvahou. Protože tlak je definován

vztahem $p = \frac{F}{S}$, po vynásobení jmenovatele i čitatele posunutím Δs (předpokládejme, že vektor posunutí Δs je souhlasně orientován s vektorem síly $\mathbf{F}$)

$$p = \frac{F \Delta s}{S \Delta s} = \frac{A}{V} = \frac{W}{V} .$$

Tedy tlak má fyzikální význam energie jednotkového objemu kapaliny. Tlak p je tedy potenciální energie tlaková jednotkového objemu kapaliny, jinak také dynamický tlak. Proto podle Bernoulliovy rovnice v dokonalé kapalině je součet kinetické energie jednotkového objemu kapaliny, potenciální energie tíhové jednotkového objemu kapaliny a potenciální energie tlakové jednotkového objemu kapaliny v libovolném průřezu proudové trubice konstantní. Bernoulliova rovnice je tedy vyjádřením zákona zachování mechanické energie pro proudící ideální kapalinu.

Pro vodorovnou trubici se Bernoulliova rovnice redukuje na tvar

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{konst.}$$

V případě vodorovné zúžující se trubice zvětšuje se rychlost toku kapaliny a zmenšuje se dynamický tlak. Velikost tohoto tlaku může být i menší než je velikost tlaku atmosférického a tak vzniká podtlak nebo záporný tlak. Na záporném tlaku jsou založeny rozprašovače, inhalační přístroje, zplynovače a vodní vývěva.

Dnes otiskujeme část 1. článku k prostudování. Zbytek a další dva články (R. Košťál, Hodnota a chyba měřené veličiny a O. Pivnička, Elektrické pole) budou otištěny příště.

ÚV FO nás požádal o otištění oprav, které se mu vloudily do dodaného rukopisu.

V obr. 4 k úloze kat. A, upravte popis v horním čtverci následovně: m , R resp. ma ; R .

Na str. 12, úloha 9 kat. A, doplňte $R_6 = \Omega$.

Na str. 21, úloha 7, kateg. C, upravte část b) na toto znění:

b) Nakreslete ve vhodném měřítku dráhy letu všech čtyř míčů s vyznačením poloh za dobu t , $2t$, $3t$,... Pak spojte polohy všech čtyř míčů v uvedených časových okamžicích.



RECENZE

Sedmnáctý ročník matematické olympiády

(Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, PRAHA 1969, 158 stran.)

Tento ročník podává zprávu a řešení úloh ze soutěže, která probíhala ve školním roce 1967—1968, jak je to také uvedeno v podtitulku publikace.

Publikace je rozčleněna do šesti kapitol, z nichž prvních pět se věnuje rozboru naší národní a šestá mezinárodní olympijské soutěži.

I. kapitola popisuje celkový průběh olympiády, zabývá se její organizací, vedením a pomocnými akcemi. Předkládá pořadí úspěšných řešitelů II. kola soutěže v kategoriích B a C i konečné pořadí vítězů závěrečného III. kola v kategorii A.

II. kapitola podává přípravné úlohy s řešením všech čtyř kategorií I. kola.

III. a IV. kapitola jsou těžištěm celé knížky. Obsahují soutěžní úlohy I. a II. kola v kategoriích A až D. Každá z úloh je doplněna podrobným a zcela vyčerpávajícím řešením, které zpravidla sestavili autoři jednotlivých úloh. Většina soutěžních témat se totiž od šestnáctého ročníku soutěže získává konkursem. Tento systém zvýšil značně možnosti výběru i kvalitu vybraných úloh.

V. kapitola uvádí úlohy III. kola kategorie A, tj. úlohy dovršující celou soutěž. Tyto příklady jsou oproti dřívějším zpravidla zakončeny řešením, jehož autory jsou vítězští olympionici XVII. kola soutěže.

Poslední VI. kapitola se věnuje jubilejnímu desátému ročníku mezinárodní MO, soutěžním úlohám a jejich řešení, naší účasti na ní a konečnému umístění. Soutěžilo se v červenci 1968 v Moskvě za účasti 12 národních družstev, z nichž čtvrtina byla ze zemí kapitalistických. Naše sedmé místo v celkovém pořadí (za Švédskem a před Rumunskem) odpovídá současnému stavu a vývoji naší školské matematiky. Absolutním vítězem mezinárodní soutěže se stala NDR, další je hostitelská země SSSR a třetí Maďarsko.

Brožurka je opatřena vkusnou a výraznou trojbarevnou obálkou podle návrhu výtvarníka Jaromíra Jarkovského. Je k dostání ve všech prodejnách KNIHY za Kčs 8,50.

Jaromír Dubský

- **Redakce**
- **hovoří**
- **se čtenáři**



Omlouváme se svým čtenářům za pozdní vydání tohoto 1. čísla Rozhledů. Rukopisy byly do tiskárny odevzdány ještě před stanoveným termínem, tj. před 8. červencem. Renovace strojového zařízení naší tiskárny způsobila však značné zpoždění.

Redakce nepřijímá ani přihlášky ani odhlášky předplatného, nezasílá jednotlivá čísla.

Upozorňujeme na změnu redakčního telefonu: 29 45 29.

SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

M

manière <i>ž</i>	způsob
de manière que	tak, že
manteau <i>m</i>	plášť
manteau d'un cône	plášť kužele
mantisse <i>ž</i>	mantisa
mathématicien <i>m</i>	matematik
mathématicienne <i>ž</i>	matematička
mathématique	matematický
mathématiques <i>ž</i> , vždy množ.!	matematika
matrice <i>ž</i>	matice
maximal, e, aux	maximální
maximum <i>m</i>	maximum
médiane <i>ž</i>	těžnice v trojúhelníku
médiatrice <i>ž</i>	osa úsečky
membre <i>m</i>	člen, strana rovnice
le premier (second) membre d'une équation	levá (pravá) strana rovnice
membre d'une série	člen řady
mener	vést
mener une droite par un point	vést bodem přímku
méridien, enne	polední
méridienne <i>ž</i>	meridián, poledník
mesurable	měřitelný
mesure <i>ž</i>	míra
mesurer	měřit
méthode <i>ž</i>	metoda
mètre <i>m</i>	metr
métrique	metrický
métrique <i>ž</i>	metrika
milieu <i>m</i>	střed
mille	tisíc
millième	tisící
millième <i>m</i>	tisícina
million <i>m</i>	milión
millionième	miliónový
millionième <i>m</i>	miliónovina

mineur *m*
 minimal, e, aux
 minimum *m*
 minute *ž*
 mixte
 produit *m* mixte
 mobile
 modèle *m*
 module *m*
 moindre
 moindre commun multiple
 méthode *ž* des moindres carrés
 moins
 au moins
 moins *m*
 moitié *ž*
 moment *m*
 moment d'inertie
 moment d'un vecteur
 momentané, e
 monôme *m*
 monotone
 mouvement *m*
 mouvement uniforme
 mouvement uniformément varié

 moyen, enne
 vitesse *ž* moyenne
 moyenne *ž*
 moyenne arithmétique
 moyenne et extrême raison
 multiple
 racine *ž* multiple
 multiple *m*
 plus petit commun multiple
 multiplicande *m*
 multiplicateur *m*
 multiplicatif, ive
 multiplication *ž*
 multiplier
 a multiplié par *b*
 mutuel, elle
 mutuellement
 nyriogone *m*

minor
 minimální
 minimum
 minuta
 smíšený
 smíšený součin
 pohyblivý
 model
 modul
 menší, nejmenší
 nejmenší společný násobek
 metoda nejmenších čtverců
 méně
 alespoň
 znaménko minus (—)
 polovina
 moment
 moment setrvačnosti
 moment vektoru
 okamžitý
 člen (polynomu)
 monotónní
 pohyb
 rovnoměrný pohyb
 pohyb rovnoměrně zrychlený či
 zpomalený
 střední, průměrný
 průměrná rychlost
 střední hodnota
 aritmetický průměr
 zlatý řez
 násobný, vícenásobný
 vícenásobný kořen
 násobek
 nejmenší společný násobek
 násobenec
 násobitel
 multiplikativní
 násobení
 násobit
 a násobeno *b*
 vzájemný
 vzájemně, navzájem
 tisíciúhelník

Dubec - Pindroch, MATEMATICKÉ VZORCE A SPÓSÔB ICH POUŽITIA

Autori spracovali knižku tak, že okrem vzorcov uvádzajú v nej aj vety a poučky, a na
 príkladoch ukazujú, ako vzorce použiť.
 Edícia KVV, strán 416, 16,50 Kčs

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

2

ROČNÍK 49. 1970-1971. ŘÍJEN



ROČNÍK 49
ŘÍJEN 1970-71

2

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

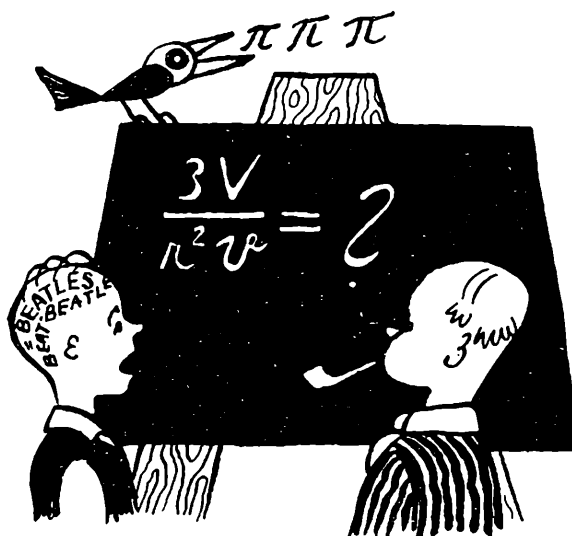
Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku. Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: Mil. Hellerová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1970.

OBSAH

F. Kuřina: Množiny v geometrii	49
M. Malík: Křivočaré souřadnice	54
E. Moravusová, O. Říha: Vlastnosti a principy kódování	58
J. Koliha, ing. R. Leitl: Použití transfigurace odporového trojúhelníka na hvězdu v praxi	64
Doc. ing. L. Drs, CSc.: Modely geometrických útvarů	68
Dr. M. Šíroká, dr. J. Šíroky: Spektrální klasifikace hvězd	72
Naše soutěž .	75
Fo, Články ke studiu (autoři: Zhejbal, Košťál)	78
Doc. K. Drábek, CSc.: 125. výročí narození Karla Pelze	92
J. Glivický: Vrchlický, matematika a Hořov H	94
A. Wohlmuthová: Recenze knihy Přehled fyziky	96
Pavlíček: Slovníček francouzsko-český	3. a 4. str. obálky



Množiny v geometrii

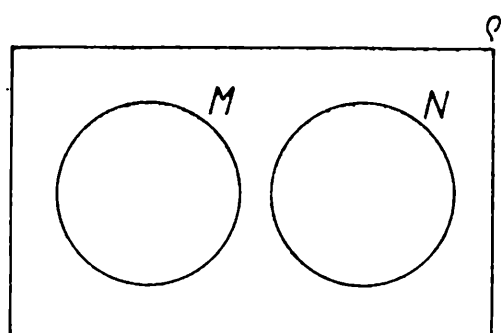
FRANTIŠEK KUŘINA, PF, Hradec Králové

Když pozorný čtenář Rozhledů četl v několika minulých číslech články o množinách, mohl si položit otázku, jak souvisí znázorňování množin Vennovými diagramy se znázorňováním množin bodů v geometrii. Odpověď na tuto otázku je námětem našeho článku.

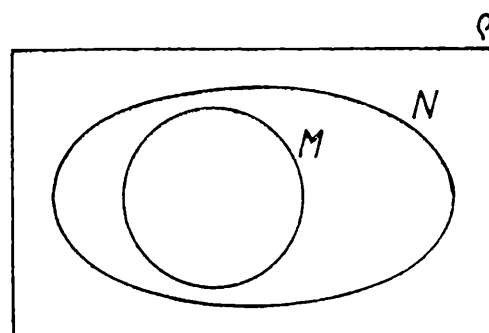
Ve školské geometrii vycházíme z představy, že geometrické útvary (úsečky, úhly, kružnice, elipsy, polopřímky, poloroviny, roviny, prostor, ...) jsou množinami bodů. Od prvních školních let jsme vychováni v představě roviny jako rovné plochy, kterou můžeme „na všechny strany neomezeně prodloužit“. Představa přímky se opírá o rýsování přímek (úseček) podle pravítka, představa kružnice o rýsování pomocí kružítka atd.

V tomto pojetí je geometrie jakási fyzika prostorových útvarů, v níž je bod „malá kulička“, přímka „rovný drát“ a těžko lze přitom někoho přesvědčit, že je nutno vše dokazovat — když je přece „všechno vidět“. Toto pojetí odvádí pozornost od skutečnosti, že geometrie je teoretická disciplína, která se zabývá vlastnostmi útvarů nepřímo definovaných systémem axiomů. Je samozřejmé, že takto abstraktně nemůžeme studium geometrie začínat. Jeden ze způsobů pozvolného přechodu od názorné geometrie k jejímu abstraktnějšímu chápání skýtá znázorňování množin studovaných v geometrii množinovými diagramy. Jimi vystihujeme ovšem jen polohové vlastnosti geometrických útvarů.

V dalším uvažujme o rovině ϱ jako o základní množině, jejímiž prvky jsou body. Přímky, úsečky, polopřímky, úhly a geometrické obrazce známé ze školy jsou podmnožiny množiny ϱ . Předpokládám, že čtenář je seznámen se základními poznatky o množinách aspoň v rozsahu článků: J. Šedivý, Vstupme do množinového ráje (Rozhledy č. 2, ročník 47); O. Odvárko, Nebojme se množinové algebry (Rozhledy č. 7, ročník 47). Místo Vennových diagramů zavedených v těchto člancích budeme někdy užívat množinových diagramů, které se od Vennových diagramů liší v těchto třech bodech: Víme-li o dvou množinách $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$, že jsou disjunktní (tj. $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \emptyset$), budeme jejich množinové diagramy kreslit podle obr. 1. Víme-li, že množina $\mathbf{M}$ je vlastní podmnožinou množiny $\mathbf{N}$ (tj. $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ a $\mathbf{M} \neq \mathbf{N}$), budeme kreslit diagramy podle obr. 2. Množinu prázdnou budeme znázorňovat šrafováním.

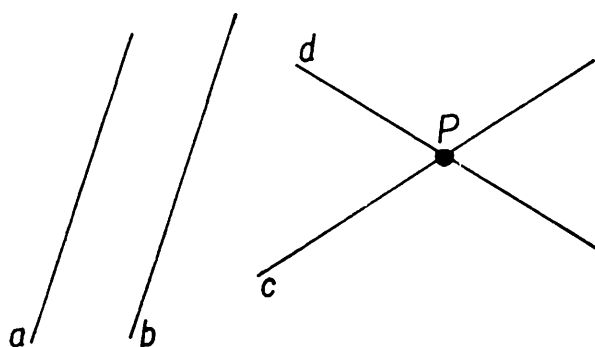


Obr. 1



Obr. 2

Příklad 1. Na obr. 3a jsou narýsovány různé rovnoběžné přímky a , b a různoběžné přímky c , d s průsečíkem P . Množinové diagramy této geometrické situace vidíme na obr. 3b.



Obr. 3a

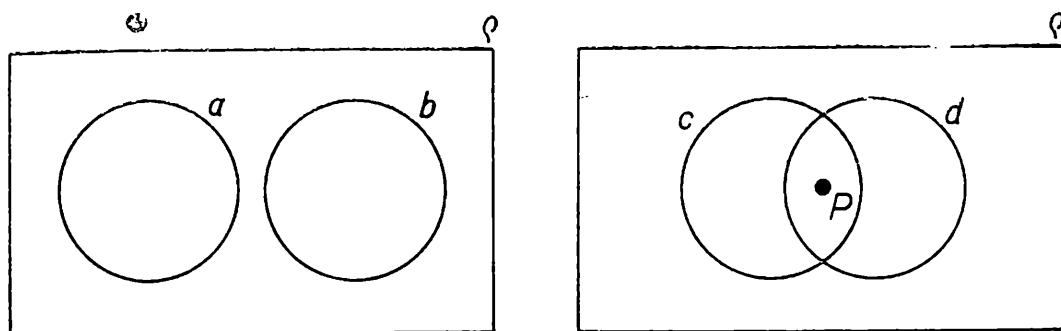
Příklad 2. Na obr. 4 jsou sestaveny soustředné kružnice $k_1 = (S; r_1)$ a $k_2 = (S; r_2)$. Načrtněte množinový diagram množin $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$:

- a) je-li $\mathbf{M} = k_1$ a $\mathbf{N} = k_2$;
- b) je-li $\mathbf{M}$ kruh s hranicí k_1 a $\mathbf{N}$ kruh s hranicí k_2 .

Výsledky jsou patrné z obr. 1 a 2.

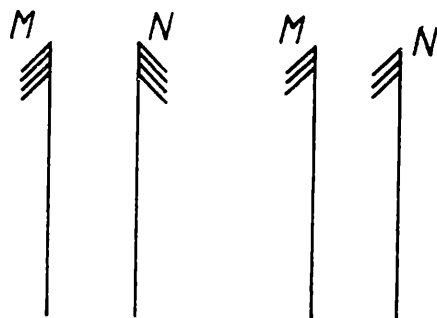
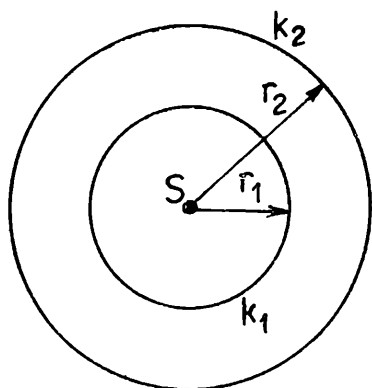
Množinové diagramy na obr. 1 a 2 považujte za znázornění polorovin **M** a **N**. Načrtněte tyto poloroviny. Podle obr. 5a, b si snadno ověříte výsledek.

Obr. 3b



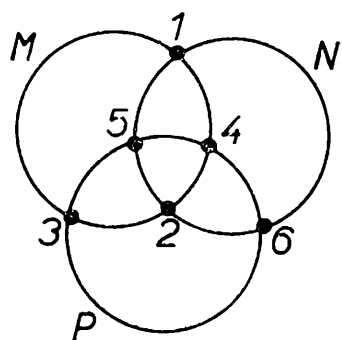
Příklad 3. Každé dvě z kružnic **M**, **N**, **P** se protínají (obr. 6a). Znázorněte je na množinovém diagramu (obr. 6b).

Obr. 4

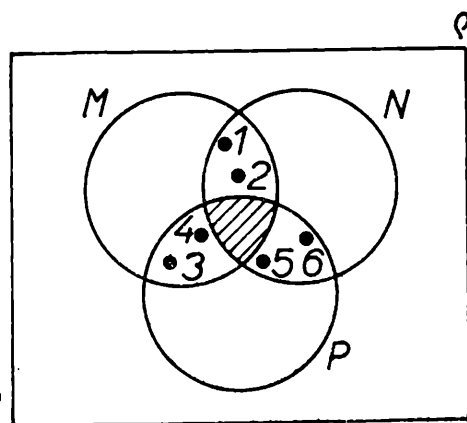


Obr. 5a

Obr. 5b



Obr. 6a

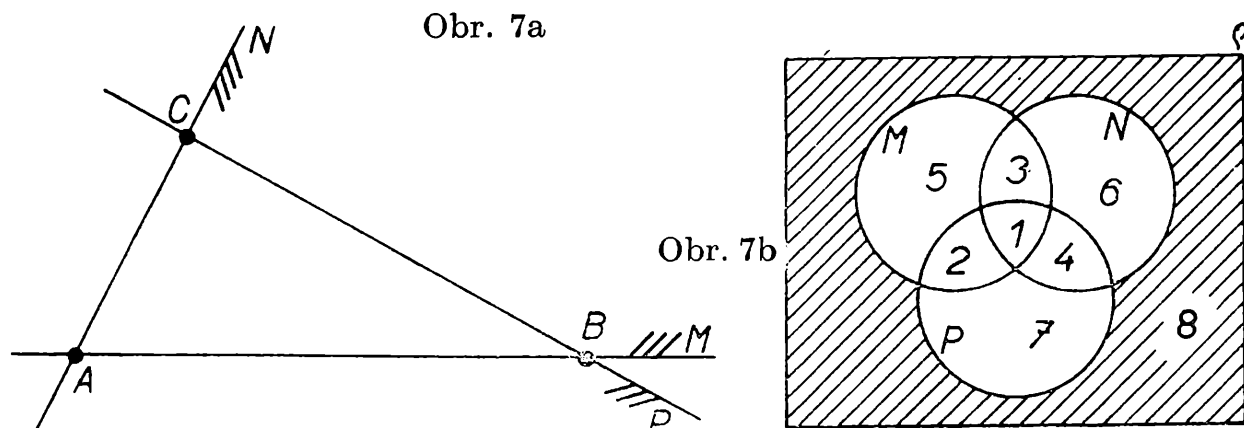


Obr. 6b

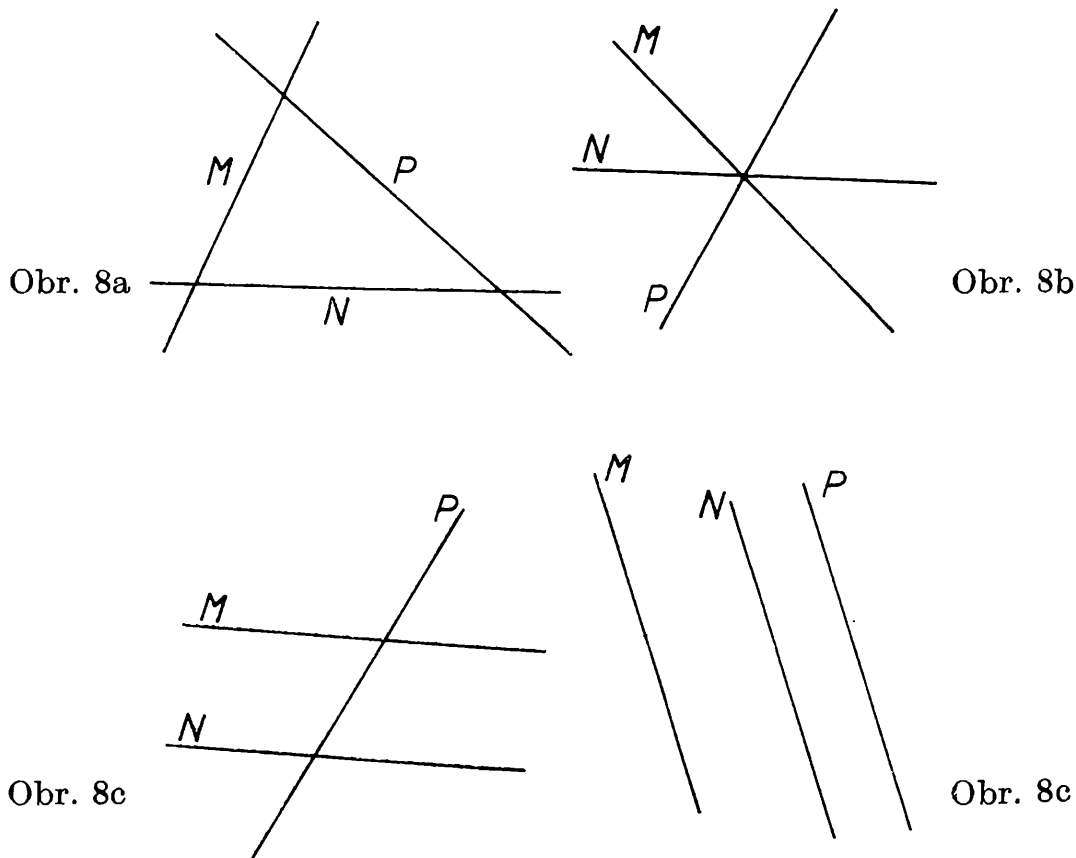
Příklad 4. A, B, C jsou nekolineární body. Označte **M**, **N**, **P** po řadě poloroviny ABC , CAB , CBA a zapište trojúhelník ABC jako průnik polorovin **M**, **N**, **P**. Nakreslete obrázek geometrické situace (obr. 7a) a znázorněte ji množinovým diagramem (obr. 7b).

Kružnice, které na obr. 7b ohraničují diagramy množin **M**, **N**, **P**, dělí obdélník základní množiny Q na 8 částí, 1, 2, ..., 8. Každou

z těchto částí můžeme snadno geometricky charakterizovat. Podmnožina **1** znázorňuje $\Delta ABC = \mathbf{M} \cap \mathbf{N} \cap \mathbf{P}$. Oblast **2** je ta část úhlu



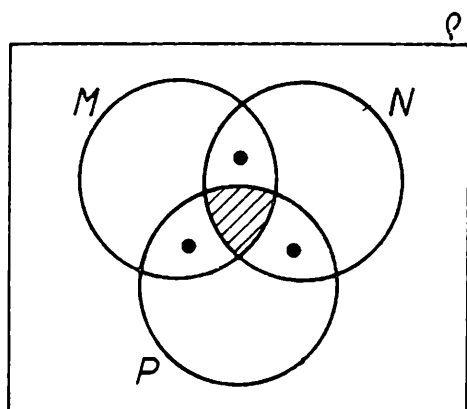
ABC , která neleží v ΔABC (analogický výsledek dostáváme pro části **3, 4**). Množina **5** je vnitřkem úhlu vrcholového k úhlu $\sphericalangle ABC$ (podobný výsledek platí pro části **6, 7**). Množina **8** je prázdná.



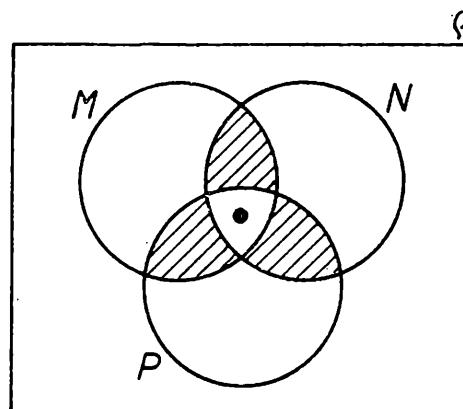
Příklad 5. Znázorněte na množinovém diagramu výsledek diskuse o vzájemné poloze tří různých přímek $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$ v rovině (obr. 8a, b, c, d). Pro kontrolu uvádíme jen výsledky na obr. 9a, b, c, d.

Zdůvodnění přenechávám čtenáři.

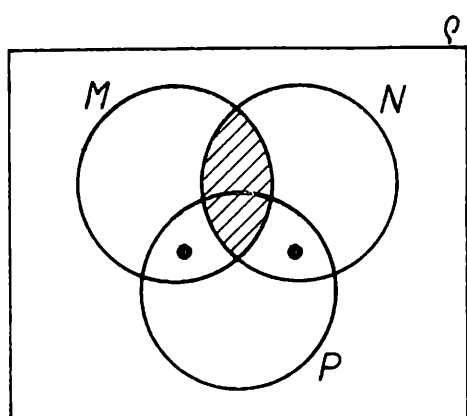
Snad uvedených 5 příkladů postačí k tomu, abyste si uvědomili množinovou podstatu některých geometrických pojmů. Možná, že příklady budou pro vás i podnětem k zamyšlení nad některými dalšími



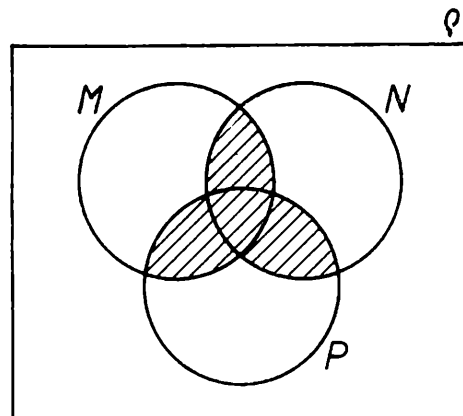
Obr. 9a



Obr. 9b



Obr. 9c



Obr. 9d

otázkami. Připomínám jen, že mnohem zajímavější pohled se nám otevře, budeme-li geometrické útvary samotné považovat za prvky nových množin. O tom však někdy příště.

Dva významné paradoxy

„*To, co nyní tvrdím, je lež.*“ Je-li tato výpověď pravdivá, je nepravdivá, avšak je-li nepravdivá, pak je pravdivá. Tento paradox, nazývaný paradoxem lháře, byl zformulován již ve starověku a od té doby o něm byly napsány desítky knih. Souvisí úzce s problémem, které výpovědi mají smysl a které jej nemají, tím slouží paradox k objasnění činnosti mozku a tedy i k vymezení možností kybernetických strojů.

Podobně jako možnost kvalifikovat výpovědi jako pravdivé či nepravdivé selhává v případě paradoxu lháře, selhává možnost důkazu, že něco je takové a ne jiné, v případě vět tohoto typu: „*To, co říká tato věta, nelze dokázat.*“ Lze-li toto tvrzení dokázat, pak je nelze dokázat, a jestliže je lze vyvrátit, znamená to, že je lze dokázat.

Volný citát z knihy S. Beera
Cybernetics and Management

Křivočaré souřadnice v rovině

MAREK MALÍK

O algebře se obyčejně říká, že je to zcela abstraktní matematická disciplína. Toto tvrzení se týká zejména algebry matematických struktur. Je pravda, že při studiu matematiky, zvláště algebry, je často zcela nemožno srovnat studovanou látku s reálnou představou. Je tomu tak například, zabýváme-li se vícedimenzionálními algebraickými prostory a podobně.

Základní poznatky algebry lze však velmi snadno, bez složitých příprav, aplikovat na řešení úloh praktických matematických disciplín. Dokladem toho je (mimo jiné) analytická geometrie.

Se základy analytické geometrie se setkáváme již na základní škole, kde se učí, jak je možno (pomocí určitého pravidla) přiřadit bodu v rovině dvojici čísel. Na střední škole se dovídáme, že tato dvojice čísel, označovaná jako dvojice souřadnic, určuje polohu daného bodu. Z prosté polohy bodu vycházejí dále všechny další otázky, které se daného bodu týkají.

Docházíme tedy k základům analytické geometrie. Analytická geometrie řeší problémy na přímce, v rovině, v prostoru,¹⁾ pomocí prostých algebraických výpočtů. Výše zmiňované pravidlo, pomocí něhož se danému bodu přiřazuje dvojice čísel, souřadnic tohoto bodu, je určeno souřadnou soustavou.

Zabývejme se dále jen otázkami geometrie rovinné, protože té se obvykle věnuje při studiu analytické geometrie nejvíce času a je také podstatně názornější než geometrie prostorová. V prostoru platí úvahy obdobné, ale poněkud myšlenkově náročnější a výpočty podle nich prováděné jsou složitější.

Definujme tedy souřadnou soustavu v rovině:

Mějme v rovině ρ dvě soustavy S_1 a S_2 čar takové, že platí:

1. Každá čára z S_1 protíná každou čáru z S_2 .
2. Každým bodem roviny ρ prochází právě jedna čára z S_1 a právě jedna čára z S_2 .
3. Každé čáře z S_1 (resp. z S_2) lze jednoznačně přiřadit právě jedno reálné číslo.

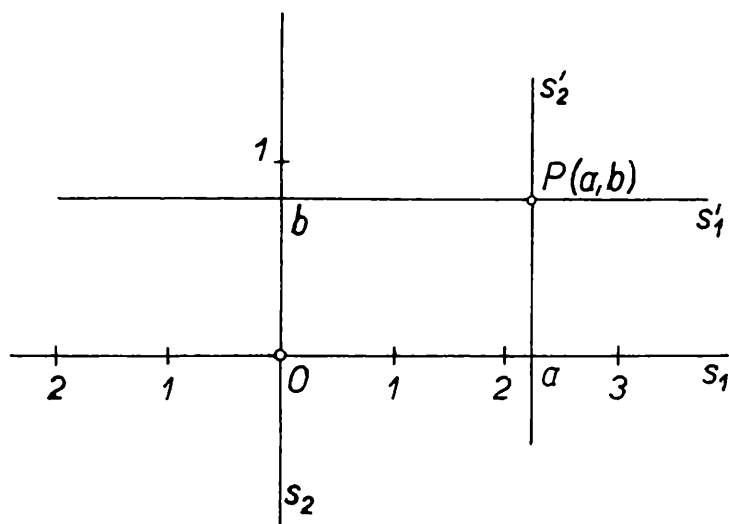
Říkáme potom, že systém soustav čar S_1 a S_2 určuje v rovině souřadnou soustavu.²⁾

Z definice je patrné, že každý bod roviny ρ je vyjádřen dvojicí čísel, totiž dvojicí čísel přiřazených po řadě čarám soustavy S_1 a S_2 , které tímto bodem procházejí. Pro praktické použití souřadné soustavy určitého druhu nutno podotknout, že na volbě soustavy závisí složitost výpočtu dané úlohy. To znamená, že volba soustavy je odvislá od typu

úlohy, která se má pomocí této soustavy řešit. Protože však pomocí každé souřadné soustavy lze dojít k cíli s použitím více či méně složitého výpočtu, existuje několik základních typů souřadných soustav, kterých se používá nejčastěji. Křivočarých souřadnic (tj. souřadných systémů, jejichž soustavy čar jsou soustavami složitějších křivek) se používá obvykle jen při speciálních úlohách, kde použití takového systému přináší podstatné usnadnění výpočtu.

Jestliže v souřadném systému Y vzniká každá čára soustavy S_1 (resp. S_2) rovnoběžným posunutím základní čáry s_1 (resp. s_2) nazýváme souřadný systém Y rovnoběžkovou souřadnou soustavou.

K rovnoběžkovým soustavám patří i nejznámější pravoúhlá souřadná soustava, jejíž základní čáry s_1 a s_2 jsou navzájem kolmé přímky. Číselné přiřazení je provedeno pomocí projekce reálné číselné osy na obě přímky s_1, s_2 . Každé přímce s'_1 patřící do S_1 je přiřazeno reálné číslo odpovídající průsečíku s_2 a s'_1 . Obdobně pro s'_2 z S_2 (obr. 1).



Obr. 1

Máme-li počítat se vzdálenostmi bodů dané roviny, což je potřeba skoro ve všech úlohách, je výhodné zvolit na obou základních osách s_1 a s_2 pravoúhlých souřadnic stejný číselný vektor (tj. stejné jednotky). Tím dostáváme souřadnice kartézské (Cartesiovy), kterých se používá nejčastěji.³⁾

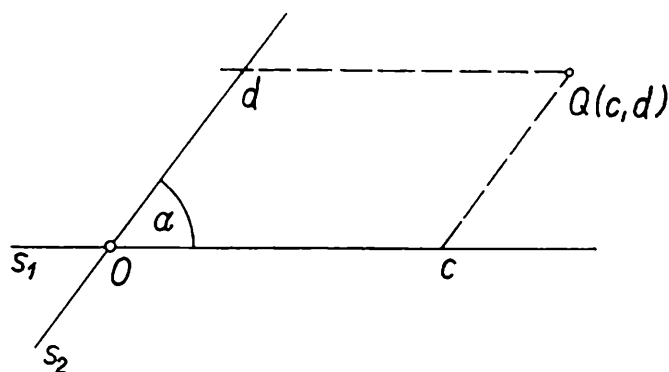
¹⁾ Obecně i v prostorech se čtyřmi a více dimenzemi. Vychází se z analogie mezi jevy v prostoru s jednou dimenzí (přímce), dvěma dimenzemi (rovině) a třemi dimenzemi (normálním prostorem). Tyto analogie se dále abstraktně převádějí na vícerozměrné útvary. Případné zájemce o tuto látku odkazuji na 12. svazek edice ŠMM: Karel Havlíček: „Prostory o čtyřech a více rozměrech“. Vydal ÚV MO a ÚV ČSM v nakladatelství MĚ, Praha 1965. Kniha obsahuje základy analytické geometrie v obecném n -rozměrném prostoru.

²⁾ Pozor! Souřadné soustavy S_1 a S_2 a soustava S_2 a S_1 nejsou totožné!

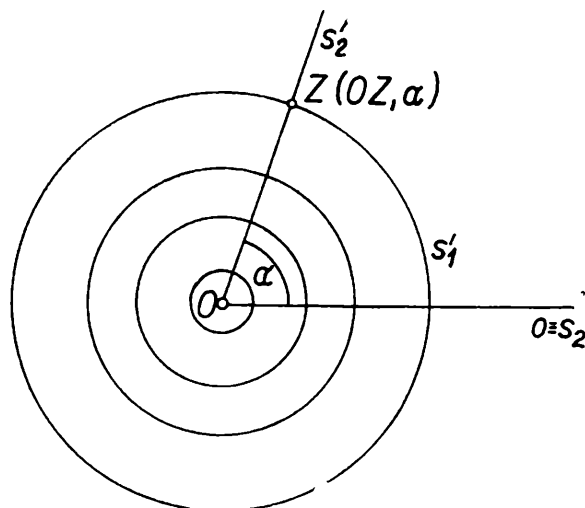
³⁾ Pozor! Orientace os kartézských souřadnic, zleva doprava a zdola nahoru, je věcí konvence, osy této soustavy lze orientovat i zcela jinak.

Někdy je výhodné volit pro výpočet kosoúhlé souřadnice, tj. souřadnice přímkové, jejichž osy svírají ostrý úhel (obr. 2). Výpočet úloh je proti kartézským souřadnicím komplikován goniometrickou funkcí úhlu, který svírají osy.

Podstatně méně se na střední škole mluví o polárních souřadnicích. Polární souřadnice jsou určeny takto: Na pevné orientované přímce o roviny α , polární ose, zvolme pevný bod O — pól — a zvolme v rovině α kladný smysl otáčení. Bod Z roviny α je určen v tomto souřadném systému číselnou velikostí úsečky OZ a číselnou velikostí orientovaného úhlu, který svírá orientovaná přímka OZ (orientovaná od O k Z) s o (počáteční rameno úhlu je polopaprsek o , koncové OZ). Obě souřadnice jsou tedy nezáporné. Prvá se nazývá *p r ů v o d i ě*, druhá *a n o m á l i e*. Je zvykem brát anomálii z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$. Jedinou výjimkou je pól. Jeho průvodič je roven nule, ale jeho anomálie je neurčitá.



Obr. 2



Obr. 3

Podle naší definice je u polárních souřadnic S_1 soustava všech kružnic se středem v bodě O , z nichž každé je přiřazena číselná velikost délky jejich poloměru. S_2 je soustava polopaprsků, které vycházejí z bodu O . Každé této polopřímce je přiřazena základní číselná velikost úhlu, který svírá se základním polopaprskem o (obr. 3).

Uvedme příklad složitější křivočaré soustavy, které lze při řešení speciální úlohy výhodně použít. Jsou to tak zvané eliptické souřadnice. Mějme v rovině soustavu regulárních středových konfokálních kuželoseček.⁴⁾ Budiž e jejich ohnisková vzdálenost; a, b poloosy některé elipsy soustavy, takže $a^2 - b^2 = e^2$; a', b' poloosy jiné elipsy a a'', b'' poloosy některé hyperboly soustavy. Tedy $a'^2 - b'^2 = e^2$; $a''^2 + b''^2 = e^2$. Z toho je patrné, že $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$. Položme $a'^2 = a^2 - k$. Pak je i $b'^2 =$

⁴⁾ Tj. soustava elips a hyperbol, které mají společná ohniska.

$= b^2 - k$. Rovnici každé elipsy soustavy lze tedy v kartézských souřadnicích psát ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1, \quad (1)$$

kde $a^2 - k \neq 0$, $b^2 - k \neq 0$. Ohniska jsou $F_1(-e; 0)$, $F_2(e; 0)$.

Rovnicí (1) jsou však vyjádřeny i všechny hyperboly, s týmiž ohnisky F_1, F_2 . Můžeme totiž říci, jestliže

$$a^2 - k > 0, b^2 - k > 0,$$

pak rovnice (1) vyjadřuje elipsu. Jestliže

$$a^2 - k > 0, b^2 - k < 0,$$

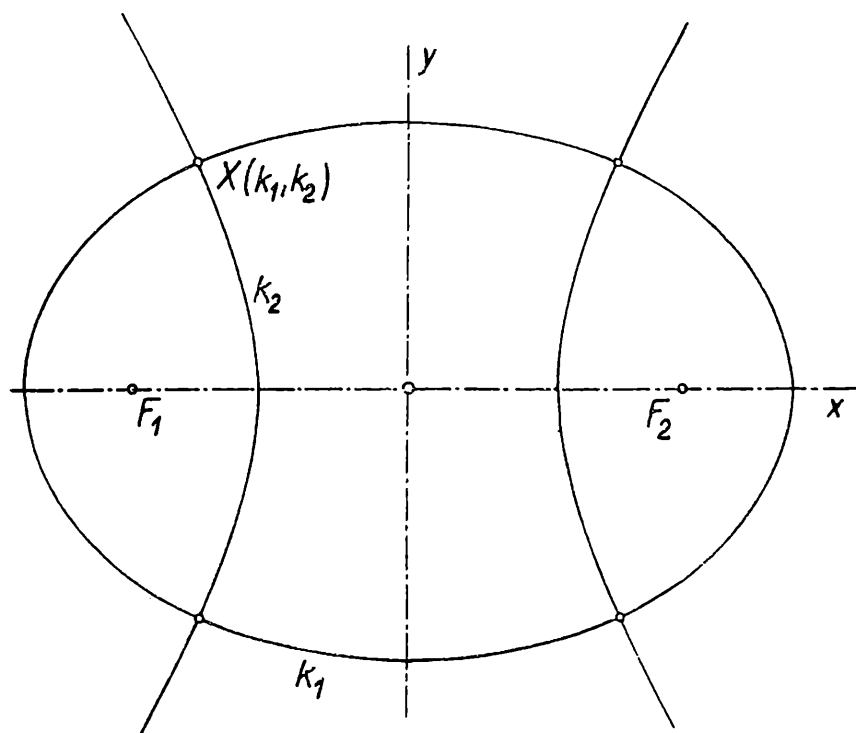
tj.

$$b^2 < k < a^2,$$

pak rovnice (1) vyjadřuje hyperbolu.

Dokázali jsme tím důležitou větu.

Všechny kuželosečky soustavy středových konfokálních kuželoseček mají rovnice tvaru (1), kde k je reálný parametr.



Obr. 4

Přiřadíme-li každému bodu $X(x_0, y_0)$ roviny (s výjimkou bodů na osách kuželoseček) dvě hodnoty parametru k : k_1, k_2 ; kde k_1 přísluší elipse, procházející tímto bodem a k_2 hyperbole té samé vlastnosti⁵), dostáváme tak zvaný eliptický souřadný systém⁶) (obr. 4).

Transformace kartézských souřadnic na eliptické se provádí řešením kvadratické rovnice pro k

$$\frac{x_0^2}{a^2 - k} + \frac{y_0^2}{b^2 - k} = 1,$$

která má vždy dvě různá řešení. (S výjimkou bodů na osách kartézských souřadnic.)

Pomocí těchto souřadnic se řeší např. úloha najít rovnici regulární středové kuželosečky, známe-li její ohniska a jeden její vlastní bod.

Násobení matic

ELIŠKA MORAVUSOVÁ, OTA ŘÍHA, PeF UJEP Brno

V článku O jednom způsobu kódování, který byl uveřejněn v předcházejícím čísle, jsme se seznámili s jedním způsobem kódování. Prostřednictvím kódování jsme se seznámili s důležitým matematickým pojmem *matice* a s *násobením matic*. V tomto článku se seznámíme s vlastnostmi kódování a tím i s vlastnostmi násobení matic.

Postup kódování zopakujeme pro slovo ZIMA. Každé písmeno ve zprávě nahradíme číslem podle předem smluvené tabulky:

Tabulka 1

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
9	11	6	18	13	10	2	21	4	17	23	8	5

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
25	16	19	3	7	20	1	26	22	12	24	14	15

⁵⁾ Stejně hodnoty parametru k jsou přiřazeny čtyřem různým bodům, které jsou souměrné podle os, což však není — díky jejich souměrnosti — na závadu.

⁶⁾ Zajímavý je fakt, že degenerují-li kuželosečky soustavy na kružnice a přímky (tedy splývají-li ohniska v jeden bod), dostáváme obdobu souřadnic polárních.

Čísla uspořádáme do schématu

$$\begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pak zvolíme kódovací klíč, např.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a utvoříme novou skupinu čtyř čísel takto

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 21 \\ 35 & 17 \end{pmatrix}$$

Zpráva ZIMA tedy bude předána v zakódovaném tvaru

$$50 \quad 21 \quad 35 \quad 17$$

Násobení

$$(\text{kódovací klíč}) (\text{zpráva}) = (\text{zakódovaná zpráva}),$$

jsme provedli podle předpisu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Při dekódování použijeme dekódovacího klíče

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

a dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 21 \\ 35 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Zprávě 15 4 5 9 odpovídá ZIMA.

Jestliže příjemce zprávy udělá při dekódování chybu a místo

$$(\text{dekódovací klíč}) (\text{zakódovaná zpráva})$$

bude násobit v obráceném pořadí, tj.

$$(\text{zakódovaná zpráva}) (\text{dekódovací klíč}),$$

dostane

$$\begin{pmatrix} 50 & 21 \\ 35 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 1 & 16 \end{pmatrix}$$

Zprávě 8 13 1 16 však odpovídá LÉTO.

Z uvedeného příkladu vidíme, že záměna matic při dekódování měla za následek, že jsme dostali úplně jinou zprávu. Musíme si tedy pamatovat, že násobení matic *není komutativní*, neboť, jak jsme se přesvědčili, existují matice **A**, **B**, pro které

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Tím se násobení matic *liši* od násobení čísel, které je komutativní, neboť pro *všechna* čísla a, b platí $ab = ba$.

Příklad ZIMA $\neq$ LÉTO byl zvolen tak, abyste si pomocí těchto slov mohli kdykoliv připomenout, že násobení matic není komutativní.

V následujícím příkladě se opět pomocí kódování seznámíme s další vlastností násobení matic.

Na štábu mají v zapečetěné obálce zakódovanou zprávu $\mathbf{Z}_2$, která je přísně tajná a smí být použita jen v případě mobilizace. Aby zpráva nemohla být prozrazena, je zakódována dvojnásobně.

Zpráva $\mathbf{Z}$ je nejprve převedena pomocí kódovacího klíče

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

na zakódovanou zprávu $\mathbf{Z}_1$ násobením v pořadí

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1.$$

Zakódovaná zpráva $\mathbf{Z}_1$ je ještě jednou zakódována pomocí kódovacího klíče

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

násobením v pořadí

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2.$$

Tím je dosaženo toho, že zakódovaná zpráva $\mathbf{Z}_2$ může být dekovávána jedině při znalosti dvou dekovávacích klíčů

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

z nichž jeden má velitel a druhý náčelník štábu, takže žádný z nich sám zprávu nemůže dekovávat. Jde o podobnou situaci, jako když k trezoru existují dva klíče, každý z nich má jiná osoba a k otevření trezoru musí být k dispozici oba klíče. Postup, kterého užijeme při dekovávání, ukážeme pro případ, že by dvojnásobně zakódovaná zpráva $\mathbf{Z}_2$ zněla: 219 140 280 179.

Nejprve užitím dekovávacího klíče $\mathbf{D}_2$ dostaneme

$$\mathbf{D}_2 \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 219 & 140 \\ 280 & 179 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97 & 62 \\ 61 & 39 \end{pmatrix}.$$

Potom užitím dekovávacího klíče $\mathbf{D}_1$ dostaneme

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 97 & 62 \\ 61 & 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 25 & 17 \end{pmatrix}.$$

Zprávě $\mathbf{Z}$: 11 7 25 17 odpovídá BRNO.

Dosadíme-li do rovnosti (2) za $\mathbf{Z}_1$ z rovnosti (1), dostaneme

$$\mathbf{D}_1 (\mathbf{D}_2 \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z} . \quad (3)$$

Analogie s násobením reálných čísel nás přivádí na myšlenku zapsat rovnost (3) ve tvaru

$$(\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2) \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z} . \quad (4)$$

Kdyby totiž bylo možno při dekódování postupovat podle rovnosti (4), mohli bychom nahradit dekódovací klíče $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ jediným dekódovacím klíčem

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 ,$$

čímž by se dekódování zrychlilo, neboť bychom dekódování místo na dvakrát provedli najednou.

Vynásobením $\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} .$$

Dekódujeme-li zprávu $\mathbf{Z}_2$ pomocí dekódovacího klíče $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2$, obdržíme

$$\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 219 & 140 \\ 280 & 179 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 25 & 17 \end{pmatrix} .$$

Zprávě 11 7 25 17 odpovídá BRNO.

Protože jsme při obou způsobech dekódování dostali tutéž zprávu, můžeme říci, že v uvažovaném případě platí

$$(\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2) \mathbf{Z}_2 = \mathbf{D}_1 (\mathbf{D}_2 \mathbf{Z}_2) .$$

Uvedený příklad vede k domněnce, že násobení matic je *asociativní*. Správnost této domněnky dokážeme tak, že matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix},$$

vynásobíme v pořadí $(\mathbf{AB}) \mathbf{C}$ i v pořadí $\mathbf{A} (\mathbf{BC})$. Porovnáním obou součinů zjistíme, že

$$(\mathbf{AB}) \mathbf{C} = \mathbf{A} (\mathbf{BC}) .$$

Princip kódování

Zopakujeme si kódování a dekódování některého slova, například slova ZIMA. Zprávu vyjádřenou maticí

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix},$$

jsme násobili kódovacím klíčem

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a dostali jsme matici

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} 50 & 21 \\ 35 & 17 \end{pmatrix},$$

vyjadřující zakódovanou zprávu.

Tento postup můžeme přehledně zapsat takto

$$(\text{klíč}) (\text{zpráva}) = (\text{zakódovaná zpráva}),$$

$$\mathbf{KZ}_1 = \mathbf{Z}_2. \quad (5)$$

Při dekódování jsme násobili matici $\mathbf{Z}_2$ dekódovacím klíčem

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

a dostali jsme původní matici $\mathbf{Z}_1$

$$\mathbf{DZ}_2 = \mathbf{Z}_1 \quad (6)$$

Dosadíme-li na levou stranu rovnosti (6) za $\mathbf{Z}_2$ z rovnosti (5), dostaneme

$$\mathbf{D} (\mathbf{KZ}_1) = \mathbf{Z}_1$$

Protože násobení matic je asociativní, je

$$\mathbf{D} (\mathbf{KZ}_1) = (\mathbf{DK}) \mathbf{Z}_1 \quad (7)$$

Násobíme-li matici $\mathbf{D}$ maticí $\mathbf{K}$, dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

takže pravou stranu rovnosti (7) můžeme upravit takto

$$(\mathbf{DK}) \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

má při násobení matic stejnou vlastnost jako číslo 1 při násobení čísel (srovnejte s násobením $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$), proto jí říkáme *matice jednotková*. Pro každou matici $\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A},$$

neboť

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dekódovací matice $\mathbf{D}$ má při dekódování stejnou funkci jako číslo převrácené v množině čísel vzhledem k násobení, neboť pro matice $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$ platí

$$\mathbf{DK} = \mathbf{E} \quad (8)$$

Obdobná rovnost k rovnosti (8) za předpokladu, že by D a K byla reálná čísla, má tvar

$$DK = 1$$

Z této rovnosti vyplývá, že je $K \neq 0$ a dále, že $D = \frac{1}{K}$

Číslo $\frac{1}{K}$ můžeme zapsat ve tvaru K^{-1} a stejného zápisu budeme užívat i pro matice, takže dekódovací klíč $\mathbf{D}$ budeme označovat $\mathbf{K}^{-1}$.

Další dvojice matic, pro které platí $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{E}$, takže jich můžeme užít při kódování jako kódovacího a dekódovacího klíče, jsou například:

Tabulka 2

$\mathbf{K}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
$\mathbf{K}^{-1}$	$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

Přesvědčte se, že ve všech uvedených příkladech platí

$$\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{E}$$

Jestliže k matici $\mathbf{A}$ existuje taková matice $\mathbf{X}$, pro kterou platí

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{E},$$

pak matici $\mathbf{X}$ nazýváme *matice inverzní k matici $\mathbf{A}$* a označujeme ji $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$.

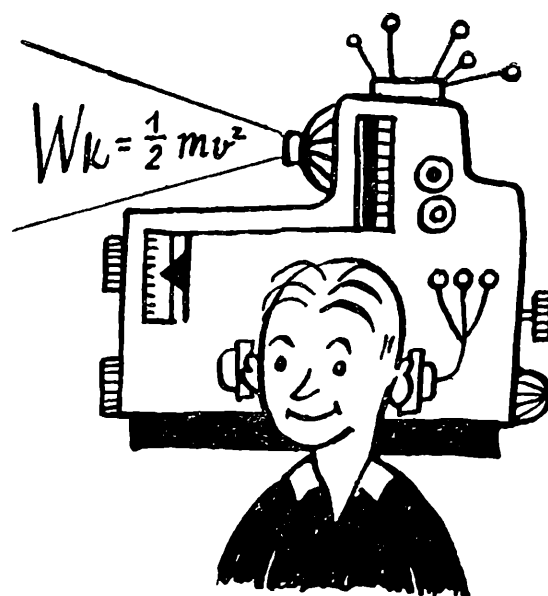
Na základě uvedených příkladů se vám bude zdát, že je jednoduché k dané matici utvořit matici inverzní tím, že mezi sebou zaměníme 1. prvek 1. řádku s 2. prvkem 2. řádku a místo zbývajících dvou prvků napíšeme čísla opačná. Toto pravidlo, jak se můžete přesvědčit, selhává např. pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 20 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Úlohou určit k dané matici $\mathbf{A}$ inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ (pokud existuje) se budeme zabývat v článku „Determinanty čtvercové matice typu (2; 2)“, který bude otištěn v některém z příštích čísel. Prozatím stačí, když si zapamatujete, že ne ke každé matici existuje matice inverzní, obdobně, jako k číslu nula neexistuje číslo převrácené (inverzní) a že ke každé matici existuje nejvýše jedna matice inverzní.

Literatura

- [1] G. Matthews: Matrices 1, Edward Arnold, London 1964.
- [2] E. Moravusová, O. Říha: O jednom způsobu kódování, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 00, číslo 00.



F Y Z I K A

Použití transfigurace odporového trojúhelníku na hvězdu v praxi

JAROMÍR KOLIHA, Ing. RUDOLF LEITL, výzkumný ústav
o. p. Škoda Plzeň

V tomto článku chceme ukázat na jednom příkladu z elektrotechnické praxe, jak fyzikální problém, původně matematicky řešitelný jen velmi obtížně, můžeme převést do značně jednoduššího tvaru přímými fyzikálními úvahami.

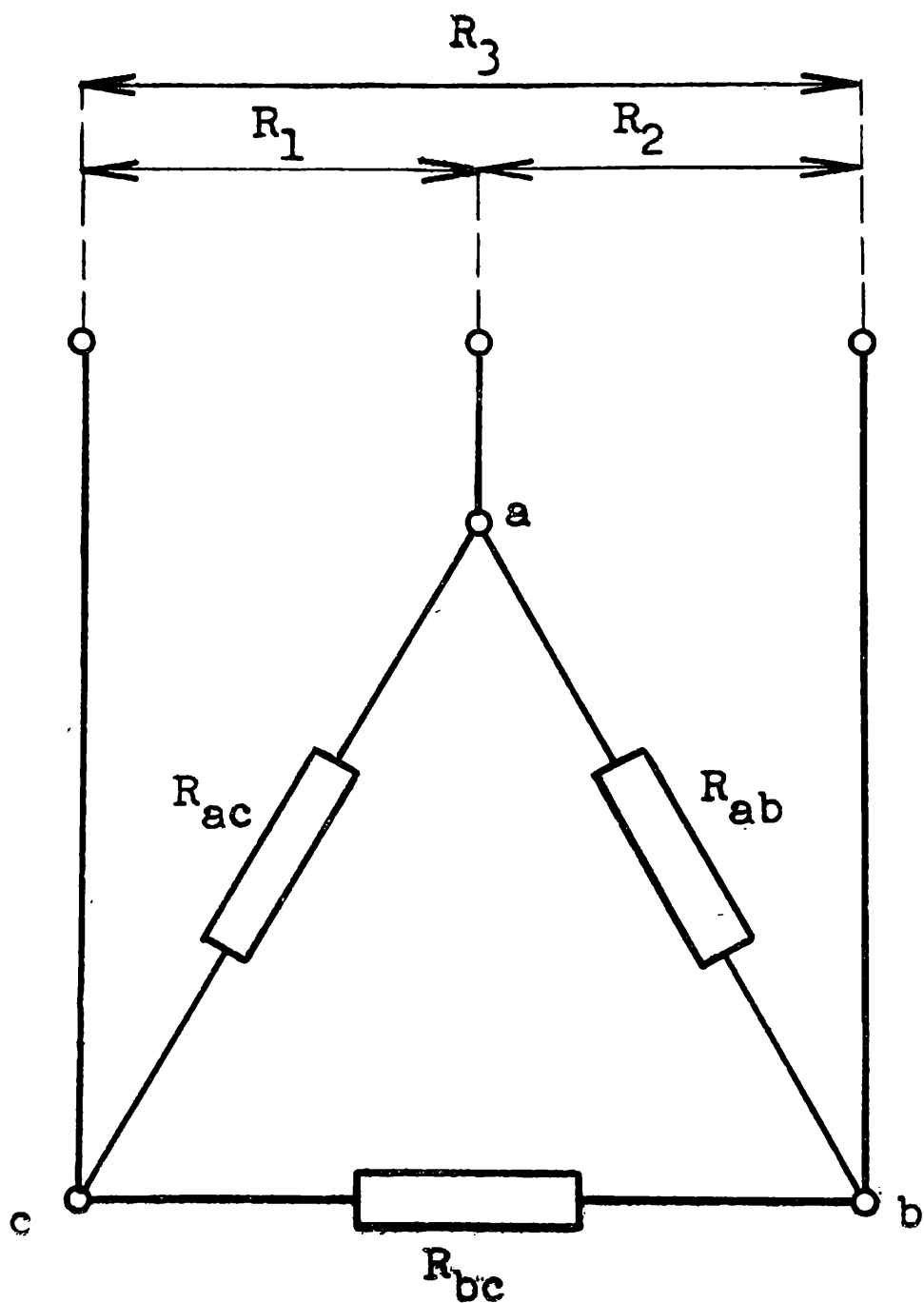
V technické praxi se často vyskytuje třífázový spotřebič zapojený do trojúhelníku, přičemž jednotlivé odpory mohou být různé. Může se jednat například o stator indukčního motoru, transformátor zapojený do trojúhelníku, topné odpory apod. Schéma zapojení je znázorněno na obr. 1. Konstrukce spotřebiče nám většinou umožňuje přímo změřit pouze odpory R_1 , R_2 , R_3 na svorkách spotřebiče, kdežto nás zajímají hodnoty odporů R_{ab} , R_{ac} , R_{bc} , které nelze přímo měřit. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze ohmické odpory, ale všechny úvahy tohoto článku jsou platné i pro indukčnost a kapacitu, použijeme-li komplexního vyjádření.

Odpor R_1 se skládá z paralelně zapojeného odporu R_{ac} se sériovým řetězcem R_{ab} , R_{bc} . Odpor sériového řetězce je roven $R_{ab} + R_{bc}$, takže

analogicky

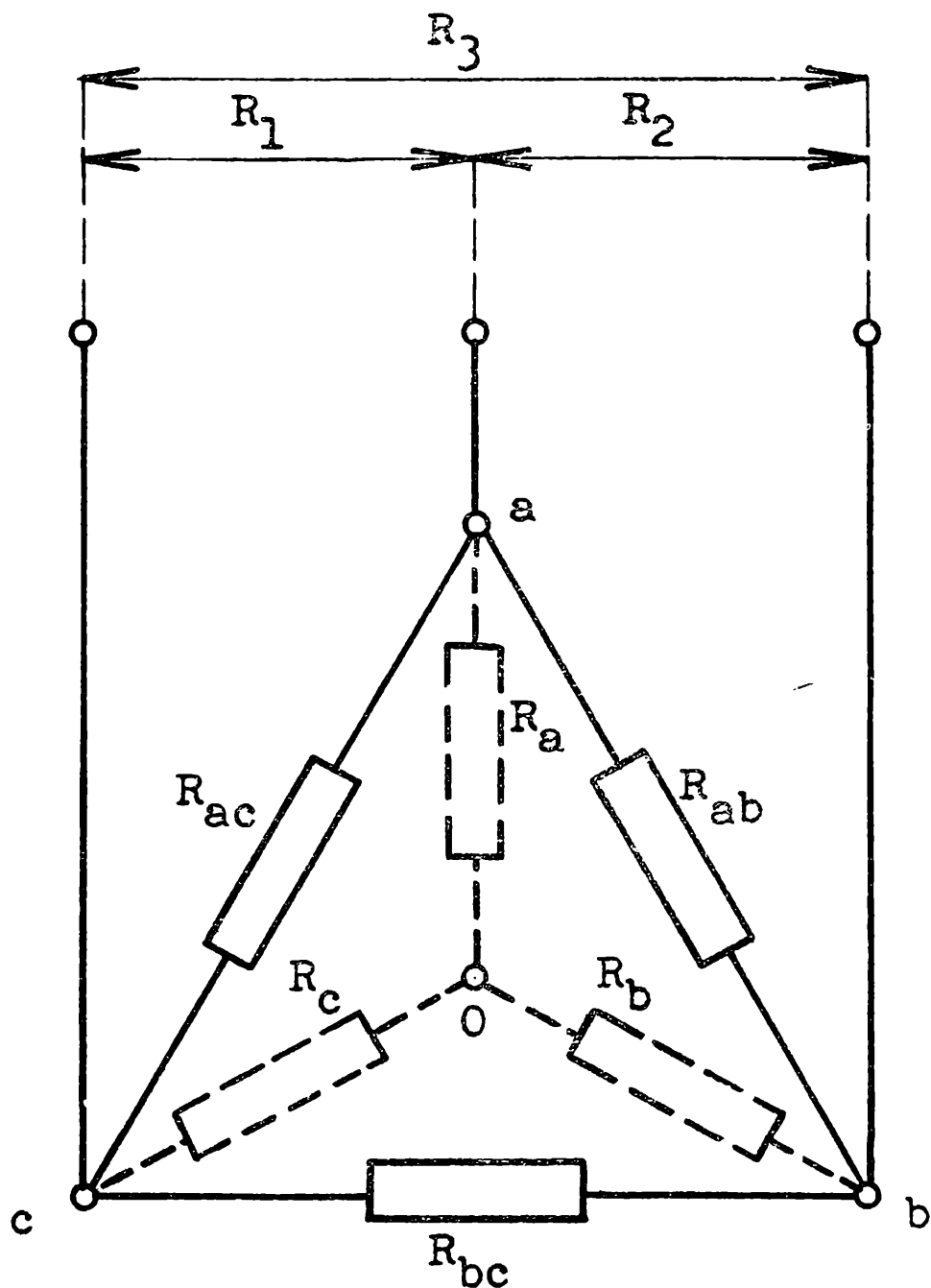
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{R_{ac}} + \frac{1}{R_{ab} + R_{bc}} , \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_{ab}} + \frac{1}{R_{ac} + R_{bc}} \\ \frac{1}{R_3} &= \frac{1}{R_{bc}} + \frac{1}{R_{ab} + R_{ac}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Vzniklá soustava (1) není jednoduše řešitelná. (Pokuste se sami o její řešení.) Tuto nesnáz obejdeme fyzikálně tím, že odporový trojúhelník



Obr. 1

nahradíme pomyslnou odporovou hvězdou (obr. 2), která bude s trojúhelníkem odporově shodná, což znamená, že výsledný odpor mezi odpovídajícími svorkami musí být stejný jak pro trojúhelník, tak pro



Obr. 2

hvězdu. Této záměně říkáme *transfigurace trojúhelníku na hvězdu*. Transfigurace značně zjednodušuje výpočet obvodů. Jsou pro ni dobře známy v praxi často používané vzorce

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}}, & R_b &= \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \\ R_c &= \frac{R_{ac}R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Jejich odvození se najde v článku *Milan Rádl, Použití transfigurace odporového trojúhelníka*. , Rozhledy, roč. 44 (1965–66), 38–44.

Mezi fiktivními odpory R_a , R_b , R_c a změřenými odpory R_1 , R_2 , R_3 platí v důsledku sériového řazení jednoduché vztahy

$$R_1 = R_a + R_c, \quad R_2 = R_a + R_b, \quad R_3 = R_b + R_c,$$

odkud se snadno vypočtou fiktivní odpory

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{1}{2} (R_1 + R_2 - R_3), \quad R_b = \frac{1}{2} (R_2 + R_3 - R_1), \\ R_c &= \frac{1}{2} (R_1 + R_3 - R_2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Známe nyní hodnoty R_a , R_b , R_c a pomocí vzorců (2) vypočítáme skutečné odpory R_{ab} , R_{ac} , R_{bc} . Označme

$$R = R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}$$

Ze vzorců (2) plyne

$$RR_a = R_{ab}R_{ac}, \quad RR_b = R_{ab}R_{bc}, \quad RR_c = R_{ac}R_{bc} \quad (4)$$

Vynásobme první rovnici v (4) číslem R_b , druhou číslem R_a a odečtěme. Dostaneme po úpravě

$$R_{ab}(R_bR_{ac} - R_aR_{bc}) = 0 \quad (5)$$

Analogickou úpravou první a třetí rovnice obdržíme

$$R_{ac}(R_cR_{ab} - R_aR_{bc}) = 0. \quad (6)$$

Protože odpory R_{ab} , R_{ac} , R_{bc} jsou nenulové (nulový odpor představuje zkrat), plyne z (5) a (6)

$$R_bR_{ac} = R_aR_{bc},$$

$$R_cR_{ab} = R_aR_{bc}.$$

Tato soustava neurčuje hodnoty R_{ab} , R_{ac} , R_{bc} jednoznačně. Pišme R_{bc} ve tvaru součinu $R_bR_c\lambda$, kde λ je zatím neurčený parametr. Platí

$$R_{ab} = R_aR_b\lambda, \quad R_{ac} = R_aR_c\lambda, \quad R_{bc} = R_bR_c\lambda. \quad (7)$$

Parametr λ určíme tak, že z rovnic (7) dosadíme například do první rovnice (4). Vypočteme

$$\lambda = \frac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_aR_bR_c}$$

Dosazením této hodnoty λ do vzorců (7) dostaneme závěrem

$$\left. \begin{aligned} R_{ab} &= \frac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_c}, \quad R_{ac} = \frac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_b}, \\ R_{bc} &= \frac{R_aR_b + R_aR_c + R_bR_c}{R_a} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Příklád. Na svorkovnicích spotřebiče zapojeného podle schématu na obr. 1 byly změřeny odpory

$$R_1 = 180 \, \Omega, \quad R_2 = 95 \, \Omega, \quad R_3 = 125 \, \Omega$$

Určete odpory R_{ab} , R_{ac} , R_{bc} .

Řešení. Nejprve určíme odpory ve fiktivní hvězdě podle vzorců (3)

$$R_a = 75 \, \Omega, \quad R_b = 20 \, \Omega, \quad R_c = 105 \, \Omega$$

Dále užijeme vzorců (8), přičemž nejprve spočteme výraz

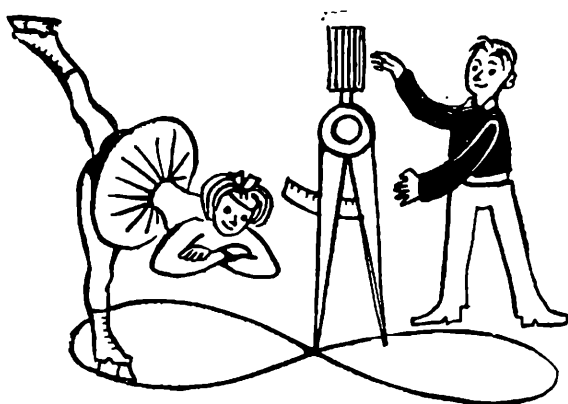
$$S = R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c = 1500 + 7875 + 2100 = 11\,475.$$

Nyní snadno vypočteme

$$R_{ac} = \frac{S}{R_c} = \frac{11\,475}{105} \doteq 109,285 \, \Omega,$$

$$R_{ac} = \frac{S}{R_b} = \frac{11\,475}{20} = 573,75 \, \Omega,$$

$$R_{bc} = \frac{S}{R_a} = \frac{11\,475}{75} = 153 \, \Omega$$



DESKRIPTIVNÍ
GEOMETRIE

Modely geometrických útvarů

Doc. ing. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT Praha

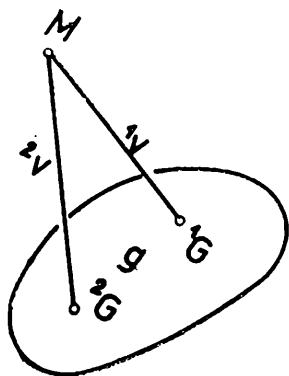
Chceme-li znázornit geometrické útvary (například bod, přímku, trojúhelník atd.), používáme jejich modely. Tak je kulička modelem bodu, tyčinka modelem úsečky, deska modelem obdélníka. Pokusíme se i tyto praktické realizace geometrických útvarů jednoduše definovat.

Definice. Model geometrického útvaru je množina bodů, které mají od tohoto útvaru stálou vzdálenost.

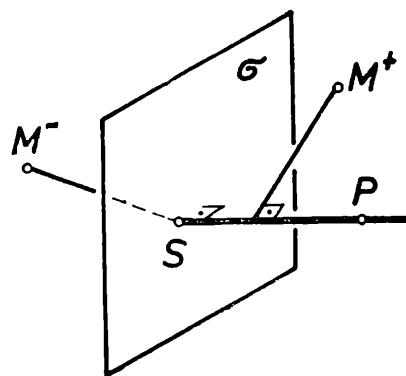
V definici se vyskytuje pojem „vzdálenost bodu od útvaru“ (nebo obecněji řečeno „vzdálenost bodu od bodové množiny“). Co tento pojem znamená?

Budiž M zvolený bod a g geometrický útvar (množina), skládající se z bodů $^1G, ^2G, \dots$ (obr. 1). Je-li $^1v, ^2v, \dots$ vzdálenost bodu M od bodů $^1G, ^2G, \dots$ je vzdálenost bodu M od množiny g nejmenší z délek $^1v, ^2v, \dots$. Vzdálenost bodu od přímky, bodu od roviny určena podle této definice souhlasí se vzdáleností, určenou obvyklým způsobem. Avšak tato nová definice umožňuje uvažovat i vzdálenost bodu od složitějších geometrických útvarů.

Hledejme například vzdálenost bodu od polopřímky SP (S počáteční bod polopřímky, P další bod polopřímky). Rovina σ vedená bodem S kolmo k přímce SP určí dva poloprostory (obr. 2). Označme znamén-



Obr. 1



Obr. 2

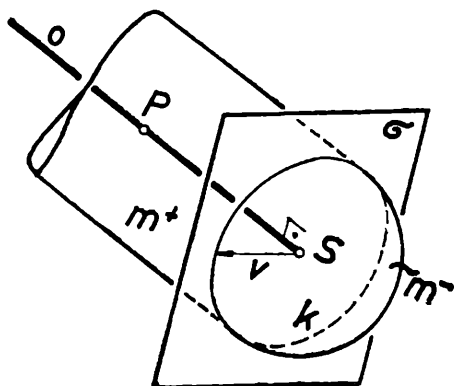
kem $+$ ten, v němž leží bod P , znaménkem $-$ poloprostor opačný. Vzdálenost bodu M^+ z poloprostoru $+$ od polopřímky SP , je rovna vzdálenosti bodu M^+ od přímky SP . Vzdálenost bodu M^- z poloprostoru $-$ od polopřímky SP , je rovna vzdálenosti bodu M^- od bodu S .

Po tomto objasnění pojmu „vzdálenost bodu od množiny“ můžeme přistoupit k řešení problému, tj. k určování modelů různých geometrických útvarů.

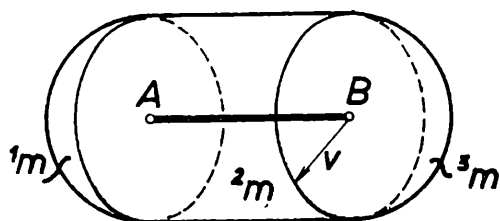
Co je tedy například modelem polopřímky SP ? Zvolme délku v . V poloprostoru $+$ leží body modelu polopřímky SP na rotační válcové ploše, určené osou $o \equiv SP$ a poloměrem rotace v a tvoří množinu $\mathbf{m}^+$ (obr. 3). V poloprostoru $-$ jsou body modelu polopřímky SP na kulové ploše o středu S a poloměru v a tvoří množinu $\mathbf{m}^-$. Model $\mathbf{m}$ polopřímky SP tvoří obě množiny $\mathbf{m}^+$ a $\mathbf{m}^-$ dohromady. Říkáme, že $\mathbf{m}$ je sjednocení množin $\mathbf{m}^+$ a $\mathbf{m}^-$ a píšeme $\mathbf{m} = \mathbf{m}^+ \cup \mathbf{m}^-$. Obě množiny $\mathbf{m}^+$ a $\mathbf{m}^-$ mají společnou kružnici k v rovině σ .

Model úsečky AB se skládá ze tří množin $^1\mathbf{m}, ^2\mathbf{m}, ^3\mathbf{m}$; $\mathbf{m} = ^1\mathbf{m} \cup ^2\mathbf{m} \cup ^3\mathbf{m}$. Popište je sami podle názorného obr. 4.

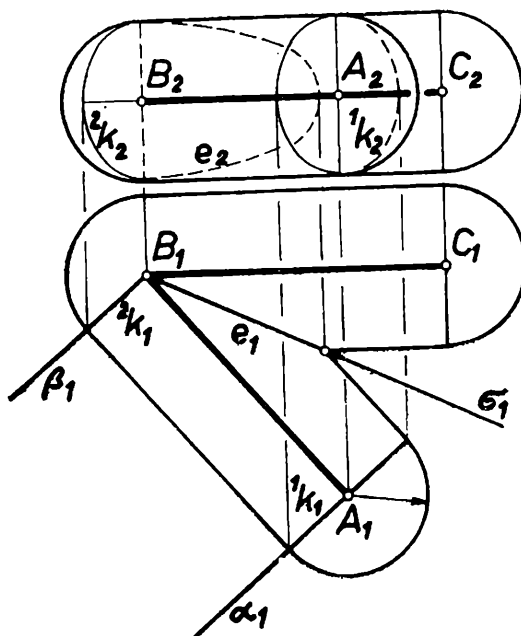
Model písmene *V*, určeného úsečkami *AB*, *BC* (obr. 5), je složen z pěti množin: z částí dvou rotačních válcových ploch 1m , 2m , ze dvou polokulových ploch 3m , 4m a z části kulové plochy 5m . Množina 1m



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

je omezena kružnicí 1k (A , v) v rovině α , jdoucí bodem A kolmo k přímce AB , půlkružnicí 2k (B , v) v rovině β , jdoucí bodem B kolmo k přímce AB a půlelipsou e v rovině souměrnosti σ přímek AB , BC . Další množiny popište sami podle obr. 5, na němž je model zobrazen v Mongeově promítání, $ABC \parallel \pi$, $BC \parallel \nu$!

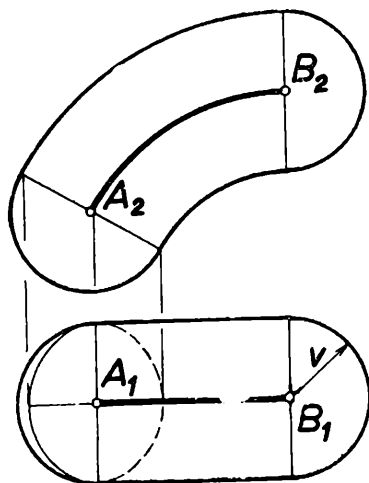
Model oblouku kružnice **AB** (obr. 6 Mongeovo promítání, **AB** $\parallel \nu$ je tvořen třemi množinami. 1m a 2m jsou polokulové plochy (středů A , B poloměry v), 3m je částí plochy, která se nazývá anuloid (česky prstenec) a která je modelem kružnice.

Model trojúhelníku (obr. 7) se skládá z osmi množin. Popište je podle obr. 7, na němž je model zobrazen opět v Mongeově promítání, $ABC \parallel \pi$, $AC \parallel \nu$.

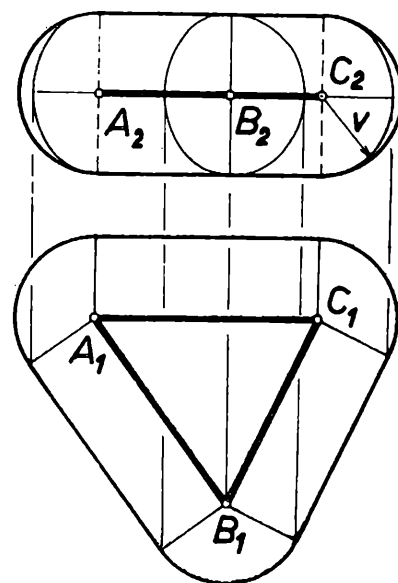
Definicí jsou určeny modely jako plošné útvary. Chceme-li je uvažovat jako tělesa, změníme definici tímto způsobem.

Model geometrického útvaru je množina bodů, které mají od tohoto útvaru vzdálenost menší nebo rovnou zvolené vzdálenosti v .

Podle takto upravené definice je například modelem úsečky AB (obr. 4) množina, složená z polokoulí o středech A , B a poloměrech v a z rotačního válce, jehož osa je úsečka AB a poloměr rotace je v .



Obr. 6



Obr. 7

Matematická definice modelu je snad na první pohled neobvyklá. Ale naše představy, které si ve vědomí o geometrických pojmech (například „bod“, „úsečka“, „oblouk“, „trojúhelník“) vytváříme i realizace těchto pojmů jako těles mají skutečně k definici hodně blízko. Bod si představujeme jako kouli a tak jej také modelujeme, tedy přesně podle definice. Úsečku znázorníme tyčinkou, špejlí. Model tedy opět, až snad na konce, které nebývají přesně okrouhlé, souhlasí s definicí atd.

V definici se nepředpisuje velikost úsečky v . Není to snad nedostatek definice? Nikoli. V matematické definici skutečně na velikosti v nezáleží. Modelem bodu může být právě tak malá kulička, jako velká koule. Jinak je tomu při praktickém zhotovování modelu. Tam volíme v úměrně malé vzhledem k velikosti modelovaného geometrického útvaru. Nebylo by například vhodné volit $v \geq r$ pro model kružnice o poloměru r .

A ještě na jednu možnou námitku odpovíme. Nevytvářejí snad definice příliš složité modely? Nebyly by například rotační válec a kvádr (o malé výšce) „přirozenější“ a jednodušší modely úsečky a obdélníka? Snad ano, ale měly by velkou nevýhodu z matematického hlediska. Model každého geometrického útvaru by bylo nutno definovat zvlášť. Těžko by se našla společná jednoduchá definice už pro tyto dva modely:

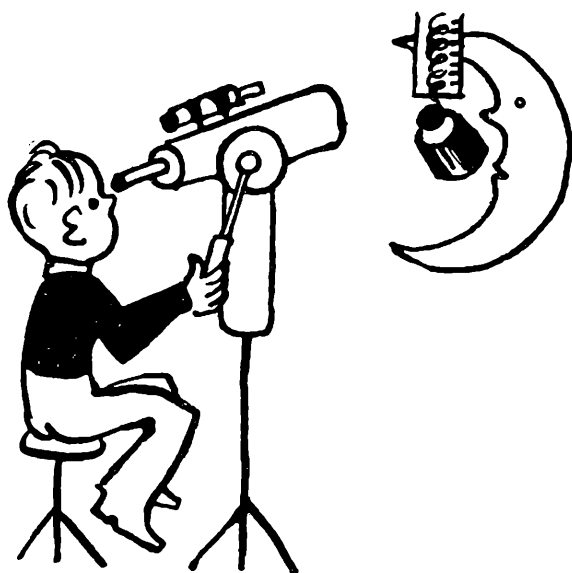
koule (model bodu), rotační válec (model úsečky). Smyslem článku je ukázat možnost společné, jednotné definice modelů geometrických útvarů a zejména přiblížit čtenáři na příkladu „modelu“ důležité pojmy z teorie množin (sjednocení množin, vzdálenost bodu od množiny).

Cvičení.

1. Určete modely některých tiskacích písmen (např. *L*, *T*, *D*, *J*, *U*) za předpokladu, že písmena jsou složena z úseček a oblouků kružnice. Popište množiny, z nichž jsou modely složeny a křivky, jimiž jsou množiny omezeny!

2. Určete modely čtverce, kruhu, kruhové výseče, kruhové úseče!

3. Zobrazte modely ze cvič. 1 a 2 metodami deskriptivní geometrie (v Mongeově promítání, v kosoúhlém promítání a v kolmé axonometrii)!



ASTRONOMIE

Spektrální klasifikace hvězd

Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Spektra hvězd poprvé pozoroval v roce 1815 německý fyzik *Josef Fraunhofer* (1789—1826) hranolovým spektroskopem. Od té doby se vizuálním a později fotografickým studiem hvězdných spekter zabývala řada badatelů, kteří získali početný pozorovací materiál. Při stále rostoucím počtu údajů bylo třeba přistoupit k jejich třídění.

Pozorování ukázala, že spektra hvězd jsou vesměs absorpční čárová na spojitém podkladě. Chemické složení hvězd je až na vzácné výjimky prakticky totéž (75 % vodíku, 24 % hélia a 1 % ostatních prvků), ale různá povrchová teplota způsobuje, že se ve spektru hvězd pozorují různé čáry prvků s různou intenzitou. Tím je dána možnost roztrždit hvězdy na skupiny tak, že určité skupině přísluší spektra v hlavních rysech podobná. Jako nejvhodnější se ukázala tzv. harvardská klasifikace spekter, kterou vypracovali *E. C. Pickering* a *A. Cannonová*. Jejich práce obsáhla 225 300 hvězd a byla uveřejněna v devíti svazcích análů Harvard College Observatory (1918—1924) pod názvem *The Henry Draper Catalogue*. V odborné literatuře se tento katalog označuje zkratkou HD, takže např. údaj HD 193 597 označuje hvězdu číslo 193 597 z tohoto katalogu. V současné době známe téměř 400 000 hvězd, klasifikovaných podle harvardského způsobu.

V učebnici Fyziky pro 3. ročník SVVŠ¹⁾ jsou uvedeny nejdůležitější spektrální třídy hvězd, označené písmeny O, B, A, F, G, K a M, tj. v pořadí od nejteplejších k nejchladnějším hvězdám. Původně měly být spektrální třídy seřazeny abecedně, avšak podrobné výzkumy ukázaly, že je nutno některá písmena přehodit, popřípadě i vynechat, aby byla zachována posloupnost podle klesající povrchové teploty hvězd. Kromě těchto hlavních spektrálních tříd se v astrofyzice používají ještě další třídy: třída W, která se klade na začátek řady a označuje Wolfovy-Rayetovy hvězdy (pojmenované podle dvou pařížských astronomů, kteří je objevili v r. 1876). U třídy G se z hlavní klasifikační řady odštěpují ještě dvě podružnější třídy R, N a u třídy K málo početná třída S. V poslední době se třídy R a N spojují do jediné třídy, označené písmenem C.

Další třída P je rezervována pro plynné mlhoviny a třída Q je charakteristická pro novy. Ani jedna z nich není přímo spojena s druhými spektrálními třídami, takže o nich nebudeme dále pojednávat.

Hvězdy z hlavní klasifikační řady se dále dělí na deset podtříd, označených číslicemi 0, 1, 2, ..., 9 (u hvězd třídy O začíná toto dělení od číslice 5). Např. G0 značí čistou třídu G, G5 přechodnou třídu mezi G a K, G9 třídu jen málo se lišící od čisté třídy K. Naše Slunce je hvězdou třídy G2. K bližšímu popisu spektrálních tříd užíváme buď předpon (praefix), nebo přípon (sufix):

Předpony vyjadřují odlišné druhy hvězd stejné spektrální třídy: c - veleobr, g - obr (giant), sg - podobr (subgiant), d - trpaslík (dwarf), sd - podtrpaslík (subdwarf), wd - bílý trpaslík (white dwarf).

Přípony blíže popisují vzhled spektra pomocí symbolů: e - emisní čáry ve třídě, kde se pravidelně nevyskytují, ev - emisní proměnné čáry, s - ostré čáry (sharp), n - neostré a difúzní čáry (nebulous),

¹⁾ SPN, Praha 1965, s. 212.

k mezihvězdné absorpční čáry vápníku, v proměnné spektrum a pec - spektrum obsahuje jiné zvláštnosti (pekuliaritu).

Je-li některá hvězda označena sdM5, pak to znamená podtrpaslíka spektrální třídy M5, označení B3e se týká hvězdy třídy B3 s emisními čarami ve spektru. V tab. 1 shrnujeme průměrné povrchové teploty hvězd tříd W až S a s nimi související barvy hvězd. U častěji se vyskytujících tříd také typickou hvězdu. Astrofyzikální výzkumy ukázaly, že 99 % všech studovaných hvězd patří k třídám B až M.

Tabulka 1

Spektrální třída	Povrchová teplota [K]	Barva	Typická hvězda
W	50 000	modrá	—
O	35 000	modrobílá	λ Cephei
B	21 000	bílá s modrým odstínem	ϵ Orionis
A	10 000	bílá	α Canis Majoris (Sirius)
F	7 500	žlutobílá	γ Virginis
G	6 000	žlutá	α Aurigae (Capella)
K	4 500	oranžová	α Bootis (Arcturus)
M	3 000	červená	α Orionis (Beteigeuze)
R, N (= C)	3 000 až 2 000	červená	—
S	2 000	červená	—

Jako zajímavost ocitujme mnemotechnické pomůcky, které si vymysleli studenti v různých zemích pro zapamatování sledu písmen harvardské spektrální klasifikace, která se též nazývá „astrofyzikální abeceda“. Američtí studenti používají říkanku *O Be A Fine Girl, Kiss Me* — k níž pro vedlejší třídy R, N a S přidávají *Right Now, Sweet* (což volně přeloženo je O, buď milé děvče, dej mi hubičku, hned teď, miláčku). České znění se např. používá *Ó, Buď Alespoň Frajere Galantní Ke Mně, Rámě Nabídni Svě*. V literatuře jsme našli německou verzi (pro hlavní třídy) *Bei Allen Fixsternen Gibt's Kennzeichnende Merkmale* (u všech hvězd jsou charakteristické znaky) a dvě verze v ruštině: *Odin Brityj Angličanin Finiki Ževal, Kak Morkov* (jeden oholený Angličan datle žvýkal jako mrkev) a *Ó, Bože AFganistan, Kuda My NeSemsja*. Snad si některou z těchto více či méně zdařilých vět zapamatují i naši čtenáři.

NAŠE SOUTĚŽ

Úlohy k řešení

Matematika

7. Mějme danu uspořádanou n -tici čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, v níž pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$ platí, že $a_i = 1$ nebo $a_i = -1$; přitom je $n \geq 1$. Písmeny A, C označme tato čísla

$$\begin{aligned} A &= a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n + \\ &+ a_1 a_2 \dots a_{n-3} a_{n-1} a_n + \dots + a_2 a_3 \dots a_n, \\ C &= a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n. \end{aligned}$$

Dokažte:

- Jestliže $A = 0$, pak číslo n je sudé.
- Jestliže $C = 0$, pak číslo n je mocninou některého přirozeného čísla.

Břetislav Novák

8. Čtyři po sobě jdoucí lichá prvočísla

$$p_k < p_{k+1} < p_{k+2} < p_{k+3}$$

nazveme prvočíselná čtyřčata, když $p_{k+3} - p_k = 8$.

Dokažte, že pro $p_k > 6$ platí:

- součet prvočíselných čtyřcat je dělitelný šedesáti;
- součin prostředních dvou je o 12 větší než součin krajních dvou;
- součet čtverců krajních je o 24 větší než součet čtverců prostředních dvou;
- součet trojmocí prvočíselných čtyřcat je dělitelný číslem 900;
- součet pátých mocnin krajních dvou zmenšený o součet pátých mocnin prostředních dvou je dělitelný číslem 18 000;
- součin druhých dvou zmenšený o součin prvních dvou čtyřcat je dělitelný číslem 180.

Ota Setzer

9. Dokažte správnost identity

$$\operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 35^\circ \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} 5^\circ$$

Ota Setzer

10. Symbol (abc) představuje trojciferné číslo napsané v desítkové soustavě, přičemž $a \cdot b \cdot c \neq 0$. Určete všechna taková čísla, aby o nich platilo

$$(abc) = \frac{1}{2} [(bca) + (cab)] .$$

Podle rumunského časopisu Gazeta matematica

11. Body v rovině, které mají ve zvoleném kartézském systému souřadnic obě souřadnice celočíselné, nazveme mřížové body. Řešte postupně tyto dva úkoly:

a) Sestrojujte různé trojúhelníky s vrcholy v mřížových bodech tak, aby žádný další mřížový bod neležel na jejich obvodech ani v jejich vnitřcích. Zformulujte a dokažte vzorec pro obsah všech takových trojúhelníků.

b) Na základě řešení prvního úkolu zformulujte a dokažte vzorec pro obsah trojúhelníků, které mají vrcholy v mřížových bodech, na obvodech mají celkem h mřížových bodů a ve vnitřcích v mřížových bodů.

Jaroslav Šedivý

12. Dvě posloupnosti celých čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou dány rekurentně

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_k = 2a_{k-2} + a_{k-1},$$

$$b_1 = 1, b_2 = 0, b_k = 2b_{k-2} + b_{k-1},$$

kde $k = 3, 4, 5, \dots$. Najděte vztahy mezi členy obou posloupností a mezi součty příslušných řad.

Václav Vilímek

Konstruktivní geometrie

1. Jsou dány tři polopřímky x, y, z o společném počátku O , a to tak, že každé dvě polopřímky svírají dutý úhel. V úhlu polopřímek y, z ($z, x; x, y$) je dán vnitřní bod A ($B; C$).

Užitím deskriptivní geometrie sestrojte trojúhelník XYZ tak, aby vrcholy X, Y, Z ležely po řadě na polopřímkách x, y, z a aby strana XY (YZ, ZX) procházela bodem C (A, B).

Ladislav Drs

2. Jsou dány tři různé body A, B, V , úhel velikosti α a číslo r . Sestrojte kulovou plochu, která má poloměr r , prochází body A, B a z bodu V je vidět pod úhlem α .

Stanislav Horák

3. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že osa mimoběžek BH, CF : a) prochází vrcholem A ; b) středem stěny $BCGF$; c) úhlopříčku BH protíná ve vnitřním bodě U tak, že platí $2 \cdot BU = HU$.

Stanislav Horák ml.

4. Jsou dány dvě navzájem kolmé mimoběžky a , b . Sestrojte krychli, jejíž tělesová úhlopříčka leží na přímce a a její stěnová úhlopříčka leží na přímce b .

František Hradecký

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

2. Řešte rovnici

$$x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 94x^2 - 159x + 36 = 0 ,$$

víte-li, že má dvojnásobný kořen.

(Došlo 21 řešení)

Jan Fráňa

Řešil Jaroslav Daniel, 3.a SVVŠ v Mor. Budějovicích

Uvedeme nejprve známou větu: Číslo α je r -násobným kořenem rovnice $g(x) = 0$, platí-li

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = \dots = g^{(r-1)}(\alpha) = 0, g^{(r)}(\alpha) \neq 0 .$$

Označme

$$f(x) = x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 94x^2 - 159x + 36 ,$$

pak

$$f'(x) = 5x^4 - 24x^3 - 18x^2 + 188x - 159$$

Podle Eukleidova algoritmu postupného dělení najdeme společného dělitele D polynomů $f(x)$, $f'(x)$, který je společným kořenem obou rovnic

$$D[f(x); f'(x)] = x - 3 .$$

Podle uvedené věty $g(x) = (x - 3)^2$; $g(3) = 0$, $g'(3) = 2 \cdot (3 - 3) = 0$, ale $g''(3) = 2 \neq 0$.

Je tedy $x = 3$ dvojnásobným kořenem dané rovnice.

Nyní dělíme danou rovnici činitelem $(x - 3)^2$ a pro zbývající tři kořeny máme rovnici

$$x^3 - 15x + 4 = 0 .$$

Tato rovnice se dá psát ve tvaru

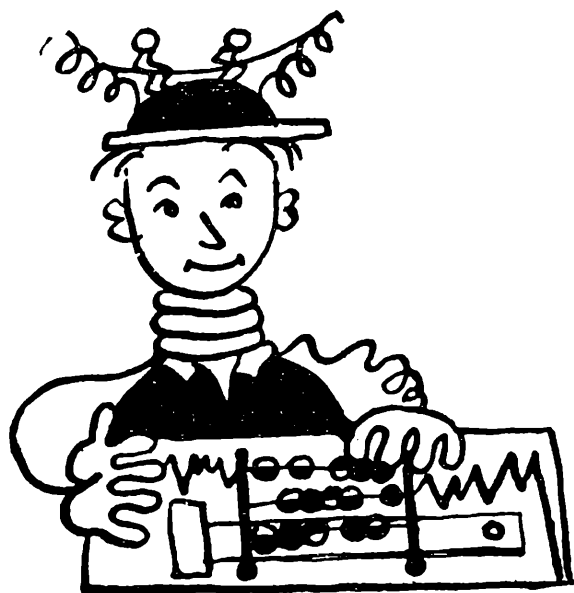
$$(x^3 + 64) - (15x + 60) = 0 ,$$

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - 15(x + 4) = 0 ,$$

$$(x + 4)(x^2 - 4x + 1) = 0$$

Daná rovnice má tedy kořeny

$$x_{4,5} = 3, x_3 = -4, x_{1,2} = 2 \pm \sqrt[3]{3}$$



FO

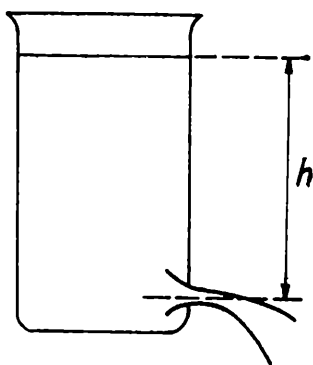
Hydrodynamika

STANISLAV ZHEJBÁL, katedra fyziky VAAZ Vyškov

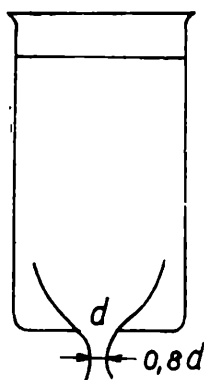
(Pokračování)

4. Výtok kapaliny otvorem při stálé výšce hladiny

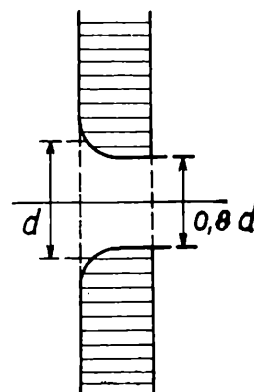
Předpokládejme, že v nádobě, z níž kapalina vytéká otvorem, udržujeme hladinu ve stálé výšce. Působí-li na hladinu kapaliny vnější tlak p' , bude v hloubce h pod hladinou, v níž se nachází otvor (obr. 5), tlak $p' + h\rho g$. Kapalina vytéká do volného prostoru, v němž na povrch kapaliny působí tlak p . Výtok kapaliny otvorem popíšeme Bernoulliiovou rovnicí, kterou napíšeme pro první průřez vlevo před otvorem a pro druhý průřez vpravo za otvorem ve volném prostoru. Dosadíme tedy



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

do rovnice (3) $h_1 = h_2 = 0$, $p_2 = p$, $p_1 = p' + h\rho g$, $v_1 = 0$, $v_2 = v$. Proto po úpravě

$$v = \sqrt{\frac{2(p' - p)}{\rho} + 2hg} \quad (4)$$

Působí-li na hladinu kapaliny velký přetlak ($p' - p \gg h\rho g$), nemusíme přihlížet k hydrostatickému tlaku, a proto

$$v = \sqrt{\frac{2(p' - p)}{\rho}}.$$

Nepůsobí-li však na hladinu kapaliny přetlak ($p' = p$), dostaneme pro rychlost vytékající kapaliny tzv. Torricelliův vztah

$$v = \sqrt{2hg},$$

podle něhož kapalina vytéká z otvoru stejnou rychlostí jako kdyby spadla z výšky h .

Objem kapaliny, která vyteče otvorem o průřezu S za jednu sekundu, tedy objemový tok Q_V , je dán vztahem

$$Q_V = Sv = S \sqrt{\frac{2(p' - p)}{\rho} + 2hg}$$

Ve skutečnosti je však objemový tok menší než udávají předchozí výsledky. Zmenšení objemového toku má dvě příčiny:

a) U otvorů s ostrými hranami nastává zúžení (kontrakce) průřezu proudu, neboť proudnice se nemohou přizpůsobit ostrým hranám. Kapalina tedy nevytéká otvorem S , ale otvorem αS , kde α je součinitel zúžení. Platí pro něj $0 < \alpha \leq 1$. Pro kruhový otvor s ostrou hranou umístěný ve dně nádoby bylo experimentálně ověřeno, že pro průměr d' zúženého proudu platí

$$d' = 0,8d,$$

kde d je průměr kruhového otvoru. (Obr. 6.) Proto také

$$\alpha S = \frac{(0,8d)^2}{4} = 0,64S,$$

tedy

$$\alpha = 0,64.$$

Je-li otvor zaoblen tak, že se postupně zúžuje až na průměr $0,8d$, nedochází ke kontrakci, a proto $\alpha = 1$. (Obr. 7.)

b) Při výtoku reálných kapalin se projevuje vnitřní tření, a proto část energie kapaliny se mění v teplo. Rychlost vytékající kapaliny je tedy menší než bylo odvozeno. Platí

$$v = \beta \sqrt{\frac{2(p' - p)}{\rho} + 2hg} \quad (5)$$

kde β je součinitel výtokové rychlosti. Zřejmě opět $0 < \beta < 1$. Součinitel výtokové rychlosti β závisí na ostrosti hran výtokového otvoru, na velikosti vnějšího tlaku p' , na výšce kapaliny h i na viskozitě kapaliny. Podle Weisbachových měření kolísá β u vody od 0,960 do 0,995 v závislosti na výšce h , jestliže se tato výška mění v mezích od několika cm do několika desítek metrů. Pro objemový průtok dostaneme

$$Q_v = \alpha\beta Sv = \eta Sv,$$

kde $\eta = \alpha\beta$ nazýváme výtokový součinitel. Uvedme některé hodnoty výtokového součinitele pro vodu. Při velmi ostré hraně je $\eta \doteq 0,63$. U obdélníkových otvorů, nastane-li zúžení na všech hranách, je $\eta \doteq 0,62$. U zaokrouhlených nátrubků je $\eta = 0,95$ až $0,98$.

5. Výtok kapaliny otvorem při proměnné výšce hladiny

Předpokládejme nyní, že výška hladiny kapaliny v nádobě při výtoku kapaliny otvorem v podstavě se snižuje. Dochází tím ke zmenšování výtokové rychlosti i průtočného objemu. Chceme-li určit okamžitou rychlost výtoku kapaliny otvorem, můžeme použít vztahu (5), v němž za h musíme dosadit okamžitou výšku hladiny kapaliny.

Vypočteme nejprve rychlost snižování hladiny při výtoku kapaliny. Označme plochu podstavy nádoby S_1 a rychlost snižování hladiny v_1 . Předpokládejme dále, že nádoba má takový tvar, že plocha průřezu vedeného v libovolné výšce rovnoběžně s podstavou je konstantní a je rovna ploše podstavy S_1 . Označme ještě plochu otvoru S_2 ($S_2 = \text{konst.}$) a rychlost výtoku kapaliny v_2 . Působí-li na hladinu kapaliny tlak p' a na vytékající kapalinu p , má Bernoulliova rovnice tvar

$$p' + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p + \frac{1}{2} \rho v_2^2, \quad (6)$$

kde y je okamžitá výška hladiny. Protože podle rovnice kontinuity

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1,$$

dostaneme po dosazení do (6)

$$\frac{2(p' - p)}{\rho} + 2gy + v_1^2 = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 v_1^2$$

a tedy

$$v_1 = \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{2(p' - p)}{\rho} + 2gy} \quad (7)$$

Určeme nyní čas, který potřebuje kapalina k tomu, aby vytekla z daného objemu. Předpokládejme, že na hladinu kapaliny nepůsobí přetlak ($p' = p$). Potom ze vztahu (7) dostaneme

$$v_1 = A \sqrt{y},$$

kde

$$A = \frac{\sqrt{2g} S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}},$$

je konstanta. Protože rychlost snižování hladiny se mění, musíme uvážit, jak určit průměrnou rychlost pohybu hladiny. Ve výšce h má pokles hladiny největší rychlost $v_1 = A \sqrt{h}$, se zmenšující se výškou hladiny, a tedy s rostoucím časem, se tato rychlost přímo úměrně času zmenšuje až pro $h = 0$, kdy bude nulová. Je to analogická situace jako při stanovení průměrné rychlosti pohybu rovnoměrně zpožděného. Můžeme tedy určit průměrnou rychlost jako aritmetický průměr největší a nejmenší hodnoty rychlosti. Tedy

$$v = \frac{v_1 + 0}{2} = \frac{1}{2} A \sqrt{h}$$

Pak hladina „proběhne“ původní výšku h za čas t , pro který platí

$$t = \frac{h}{v} = \frac{2 \sqrt{h}}{A}$$

Po dosazení a úpravě

$$t = \sqrt{\frac{2h \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right]}{g}}.$$

Při výtoku skutečné kapaliny bychom museli psát místo rychlosti v_1 rychlost $v'_1 = \beta v_1$ a místo S_2 průřez αS_2 . Protože součinitel výtokové rychlosti závisí na výšce kapaliny, musíme za β dosadit průměrnou hodnotu, tedy pro vodu $\beta = 0,97$. Pak pro čas potřebný k výtoku celého objemu dostaneme

$$t = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{2h \left[\left(\frac{S_1}{\alpha S_2} \right)^2 - 1 \right]}{g}}.$$

Připomeňme ještě, že získané výsledky platí za předpokladu, že všechny průřezy nádoby vedené rovnoběžně s podstavou jsou stejné. Proto uvedené výsledky neplatí pro nádoby tvaru koule, jehlanu, kužele, a pro tělesa soudkovitého i obecnějšího tvaru.

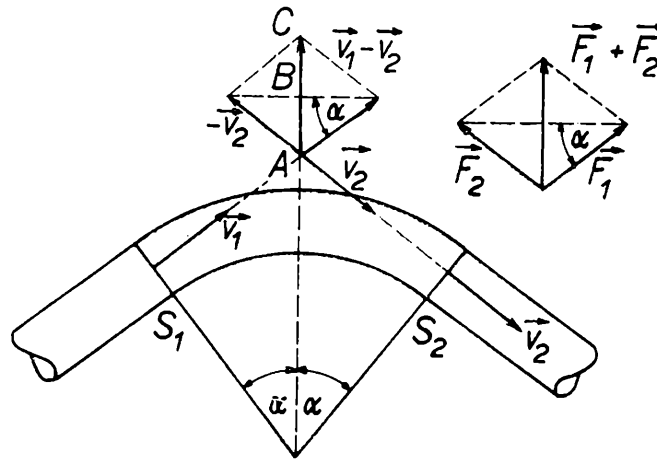
6. Použití zákona zachování hybnosti pro proudící kapalinu

Na libovolný objem proudící kapaliny můžeme použít zákon zachování hybnosti odvozený v mechanice. Změní-li se hybnost určitého

objemu kapaliny o $\Delta \mathbf{p} = m \Delta \mathbf{v}$, změní se současně hybnost jiné části kapaliny nebo zbytku kapaliny s nádobou o stejně velké hodnotu $\Delta \mathbf{p}'$ tak, že platí $\Delta \mathbf{p}' = -\Delta \mathbf{p}$.

Protože hybnost je vektorovou fyzikální veličinou, mění se hybnost kapaliny nejen když se mění velikost její rychlosti, ale také i v případě, že se mění pouze směr rychlosti. Předpokládejme, že kapalina protéká ohnutou vodorovnou trubicí o konstantním průřezu (obr. 8) rychlostí, jejíž velikost je také konstantní. Označíme-li ρ hustotu kapaliny, v_1 rychlost kapaliny protékající průřezem S_1 , projde za čas Δt kapalina o hmotnosti $m = \rho S_1 v_1 \Delta t$. Hybnost kapaliny o hmotnosti m je $\mathbf{p}_1 = S_1 \rho v_1 \Delta t \mathbf{v}_1$, kde $\mathbf{v}_1$ je vektor rychlosti v_1 . V druhém průřezu S_2 je hybnost kapaliny téže hmotnosti $\mathbf{p}_2 = S_2 \rho v_2 \Delta t \mathbf{v}_2$. Protože jsme předpokládali $v_1 = v_2 = v$, dochází u kapaliny ke změně hybnosti o

$$\Delta \mathbf{p} = \rho S v (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \Delta t$$



Obr. 8

Tento přírůstek hybnosti se musí rovnat impulsu sil, které na pohybující se kapalinu působí. Celková síla působící na kapalinu v ohnuté části trubice je rovna vektorovému součtu síly $\mathbf{F}$ pocházející od stěn ohnuté trubice a tlakových sil $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ v průřezech S_1 a S_2 , v nichž změna směru začíná a končí. V průřezu S_1 má tlaková síla velikost $F_1 = p_1 S_1$ a je souhlasně orientována s vektorem rychlosti pohybu kapaliny, v průřezu S_2 má velikost $F_2 = p_2 S_2$ a je orientována nesouhlasně s vektorem rychlosti. Tedy

$$(\mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \Delta t = \Delta \mathbf{p}.$$

Podle třetího pohybového zákona působí kapalina na ohnutou trubici silou $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$. Proto

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \rho S v (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad (8)$$

Ukažme, jak z tohoto vektorového vztahu dostaneme velikost síly, kterou působí kapalina na trubici ohnutou tak, že středový úhel ohnutí

je 2α . Abychom určili vektorový rozdíl $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, musíme k vektoru $\mathbf{v}_1$ přičíst vektor $-\mathbf{v}_2$. Pak pro velikost $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = AC$ platí

$$AC = 2AB = 2v \sin \alpha.$$

Podle předchozích předpokladů $F_1 = F_2 = pS$, pak analogicky dostaneme

$$F_1 + F_2 = 2pS \sin \alpha.$$

Po dosazení do (8)

$$F' = 2S(p + v^2\rho) \sin \alpha.$$

V předchozím jsme předpokládali vodorovnou trubici, u níž nebylo nutno uvažovat vliv tíhové síly kapaliny, neboť tíhová síla působí kolmo k ostatním silám. V obecném případě bychom však museli i k této síle přihlížet.

7. Působení proudící kapaliny na stěnu

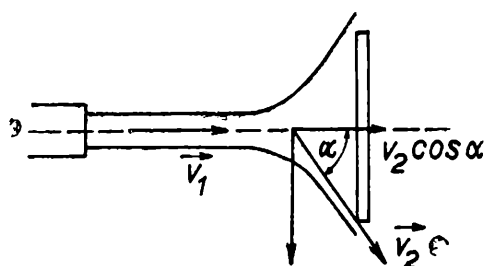
Chceme nalézt tlakovou sílu, kterou působí proudící kapalina při dopadu na pevnou, nekonečně velkou a rovinnou stěnu. Předpokládejme, že dokonalá kapalina dopadá kolmo na tuto plochu. Tlak na kapalinu, která mění svůj směr při dopadu na desku, bude roven atmosférickému tlaku. Tentýž tlak působí i na rovinnou desku, a proto výsledná síla $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ bude rovna nule. Vztah (8) se tedy redukuje na tvar

$$\mathbf{F} = Sv(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad (9)$$

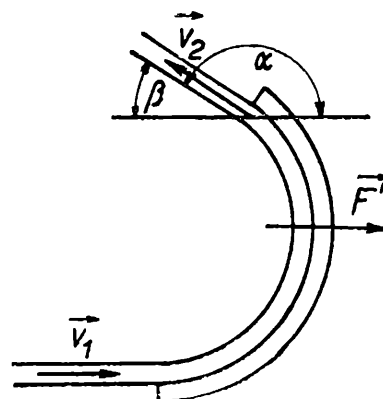
v němž musíme rozhodnout o hybnosti $\rho Sv\mathbf{v}_2$ odtékající kapaliny. Zanedbáme-li působení tíhové síly na kapalinu při dopadu, můžeme předpokládat, že proud kapaliny se rovnoměrně rozptýlí na všechny strany. Pak v každé části kapaliny rozptýleného proudu přísluší souměrně položená stejně velká část kapaliny s rychlostí stejně velkou, ale nesouhlasně orientovanou. Protože obě části budou mít stejně velkou, ale opačně orientovanou hybnost, bude součet hybností obou částí nulový. Proto také celková hybnost odtékající kapaliny bude rovna nule. Na stěnu působí tedy síla

$$\mathbf{F}' = \rho Sv\mathbf{v}_1$$

o velikosti $F' = \rho Sv^2$.



Obr. 9



Obr. 10

Jestliže však rovinná stěna má konečné rozměry srovnatelné s průřezem trysky (obr. 9), musíme rychlost a tedy i hybnost části odtékající kapaliny rozložit jednak do směru proudu, jednak do směru kolmého k proudu. Dopadá-li proudící kapalina kolmo do středu desky, budou se složky kolmé k proudu u souměrně položených částí kapaliny tak jako v předchozím případě rušit, a proto výsledná hybnost odtékající kapaliny bude rovna součtu složek ve směru toku, tedy $\rho S v_1 v_2 \cos \alpha$. Proto

$$F' = \rho S v_1 (v_1 - v_2 \cos \alpha) . \quad (10)$$

Vyšetřme ještě dopad proudící kapaliny na miskovitě zakřivenou plochu (obr. 10). Pro úhel platí $\alpha = \pi - \beta$ a podle (10)

$$F' = \rho S v_1 [v_1 - v_2 \cos (\pi - \beta)] = \rho S v_1 (v_1 + v_2 \cos \beta)$$

Když $\beta = 0$, dostaneme $F' = \rho S v_1 (v_1 + v_2)$. Při změně směru i při dopadu proudící dokonalé kapaliny na stěnu nedochází ke ztrátě energie vnitřním třením, a proto $v_1 = v_2 = v$. Dopadající kapalina působí tedy na uvedenou miskovitě zakřivenou plochu silou $F' = 2\rho S v^2$. Pro skutečnou kapalinu bude rychlost v_2 vždy menší než rychlost v_1 , tedy $v_2 = k v_1$, kde $0 \leq k < 1$. Např. pro dutou miskovitě zakřivenou plochu s úhlem $\beta = 0$ bude $k \doteq 0,75$.

Dopadá-li proudící kapalina na stěnu, která se pohybuje rychlostí u ve směru proudící vody, musíme rozeznávat dva případy podle toho, zda se uplatní celý objemový tok nezávisle na rychlosti pohybující se desky či nikoliv. Celý objemový tok se uplatňuje např. u desky lopatkového kola, kde lopatka, na níž voda dopadá, je v malém časovém intervalu nahrazena lopatkou postupně jinou v tomtéž místě. Protože proudící kapalina dopadá na desky lopatkového kola rychlostí $v_1 = v$ a pro odtékající kapalinu v určitém časovém intervalu má vektor rychlosti pohybující se desky stejný směr i stejnou orientaci jako vektor rychlosti v ($v_2 = u$), lze vektorový rozdíl $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ve vztahu (9) nahradit rozdílem velikostí $v - u$, a proto

$$F' = \rho S v (v - u) .$$

Jestliže se však uplatňuje jen část objemového toku, který dostihne pohybující se desku, tedy objemový tok $\rho S (v - u)$, dostaneme analogicky jako v předchozím vztah

$$F' = \rho S (v - u)^2 .$$

* * *

Hodnota a chyba měřené veličiny

Prof. RNDr. ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno

1. Úvod

Velikost fyzikální veličiny určujeme buď přímo měřením nebo výpočtem z jiných naměřených veličin. Každou fyzikální veličinu můžeme určit jen s určitou přesností. Tato přesnost záleží na měřicí metodě, na užitém měřicím přístroji a na pozorovateli. Podle požadované přesnosti je třeba volit vhodnou metodu a vhodný měřicí přístroj.

Na stupnici přístroje, který není opatřen noniem, odhadujeme vždy desetiny nejmenšího dílku stupnice. Pak se můžeme při čtení dopustit chyby nejvýš 0,2 dílku stupnice. Větší chyba souvisí s jinými příčinami. Když je přístroj opatřen noniem, čteme počet desetin nejmenšího dílku stupnice na stupnici nonia.

Jestliže chceme určit např. velikost průměru drátu, musíme k tomu použít vhodného měřítka. Obyčejným měřítkem s dělením na milimetry určíme průměr drátu jen přibližně na mm, dotykovým měřítkem na desetiny milimetru, mikrometrickým měřidlem na tisícinu milimetru. Měříme-li v různých průměrech drátu, můžeme dostat také různé hodnoty; záleží na tom, jak přesně je drát vyroben.

Musíme pamatovat na to, že čísla, kterými měřenou délku vyjadřujeme, jsou čísla neúplná; a proto je třeba jako s takovými počítat.

Naměřená *hodnota veličiny* se vždy o něco liší od správné hodnoty. Rozdíl obou hodnot nazýváme *chybou měřené veličiny*. Kdybychom tuto chybu přesně znali, mohli bychom určit správnou hodnotu měřené veličiny. Tuto chybu neznáme a určit nedovedeme. Proto je naším úkolem, určit aspoň *pravděpodobnou hodnotu* měřené veličiny a její *pravděpodobnou chybu*.

Chyby rozdělujeme na soustavné a náhodné.

2. Chyby soustavné

Chyby soustavné vznikají buď z nedokonalosti měřicí metody nebo z chyby užitého přístroje nebo z nedokonalosti práce pozorovatelovy.

Když určujeme např. rychlost zvuku ve vzduchu měřením v trubici, dopouštíme se chyby, poněvadž předpokládáme, že rychlost uvnitř trubice je táž jako na volném prostranství; to však nesouhlasí zcela se skutečností. V tom tkví chyba metody. Na chybu metody usuzujeme porovnáním výsledků měření téže veličiny různými metodami.

Chyby přístroje jsou způsobeny jeho technickou nedokonalostí. Tak např., když je teploměrná stupnice nanesena na sklo brzy po zhotovení,

smrští se a teploměr udává hodnoty vyšší. Chyby přístrojů odstraňujeme jejich kontrolou, popříp. srovnáním jejich údajů s údaji na přístrojích dokonalejších; z tohoto srovnání si pořizujeme pro přístroj korekční tabulku, popřípadě graf.

Osobní chyba pozorovatele se projevuje např. tím, že od sluchového nebo zrakového vjemu uplyne určitá doba do vykonání příslušného úkonu. Tato chyba je u různých pozorovatelů různá. Zpravidla se však vyskytuje určování určitého intervalu, takže se udělá přibližně stejná chyba na počátku a na konci a tím se chyba z velké části ruší. Osobní chybu pozorovatele vyloučíme, použijeme-li objektivní metody nezávislé na pozorovateli. Pak se ovšem uplatní zase soustavná chyba přístroje.

3. Chyby náhodné

Chyby náhodné se projevují tím, že se opakovaná měření skoro vždy poněkud liší; příčiny toho jsou různé. Při čtení na měřítku mohou náhodné chyby souviset např. s tím, že se nedíváme přesně kolmo na stupnici, nebo že se během měření změnila nějaká veličina, např. teplota, na níž je měřená veličina závislá, nebo např. při měření mikrometrickým měřidlem, že předmět různě stiskneme mezi čelisti přístroje. Abychom odstranili tyto chyby, měříme veličinu několikrát a z dosažených výsledků určujeme pravděpodobnou hodnotu měřené veličiny.

Měříme-li rozměry těles (např. průměr nebo výšku rotačního kolmého válce), pak různost naměřených hodnot nemusí souviset jen s pozorovatelem, nýbrž může být způsobena nepřesností výroby. Měření proto opakujeme v různých místech tělesa systematicky zvolených. V tomto případě zahrnuje chyba měření veličiny i nepřesnosti výroby.

4. Pravděpodobná hodnota a chyba měřené veličiny

4.1. *Určení pravděpodobné hodnoty měřené veličiny a její chyby metodou nejmenších čtverců*

Určení pravděpodobné hodnoty měřené veličiny a její chyby vyložíme na měření mikrometrickým měřidlem.

Při měření délky mikrometrickým měřidlem sevřeme měřený předmět čelistmi měřidla a přečteme hodnotu (na tisícinu milimetru). Toto sevření předmětu se neprovede vždy stejně, a proto opakujeme-li nastavení mikrometrického měřidla, dostaneme obecně různé hodnoty. Označme n hodnot získaných při opakovaném naměření písmeny $x_1, x_2, \dots, x_n$. Nejmenší z těchto hodnot označme symbolem $x_{\min}$ a největší z těchto hodnot symbolem $x_{\max}$, což zapisujeme formou $x_{\min} = \text{Min} (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $x_{\max} = \text{Max} (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Pak by měla správná hodnota x při velkém počtu měření splňovat nerovnost $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. Správnou hodnotu x neznáme a z provedených měření určíme jen hodnotu pravděpodobnou $\bar{x}$. Rozdíl $\bar{x} - x_k$ se nazývá *odchylka měření*. Předpokládáme, že kladné odchylky určité velikosti jsou stejně pravděpodobné jako odchylky záporné téže velikosti. Proto součet kladných odchylek musí být až na znaménko roven součtu záporných odchylek. Tedy součet všech odchylek musí být roven nule

$$(\bar{x} - x_1) + (\bar{x} - x_2) + \dots + (\bar{x} - x_n) = 0 \quad (1)$$

Z toho plyne pro pravděpodobnou hodnotu $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}, \quad (2)$$

kde symbol

$$\sum_{k=1}^n x_k$$

znamená součet všech naměřených hodnot

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

tedy

$$\sum_k x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Tato hodnota je tedy aritmetickým průměrem naměřených hodnot; nemusí být přesně rovna správné hodnotě. Tyto úvahy platí však jen tehdy, když n je velké číslo. Každý sčítanec v (1) udává odchylku od aritmetického průměru. Označme sčítance v rovnici (1) obecně

$$\bar{x} - x_k = \Delta_k.$$

Představu o přesnosti provedeného měření nám udává střední chyba aritmetického průměru. Abychom ji určili, nemůžeme odchylky sečíst a součet dělit počtem odchylek, poněvadž jejich součet je nulový. Proto vypočteme součet druhých mocnin odchylek

$$\sum_{k=1}^n \Delta_k^2 = (\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2, \quad (3)$$

který budeme značit prostě $\sum \Delta^2$. Kdybychom za $\bar{x}$ dosazovali zcela libovolné hodnoty, nabýval by výraz (3) různých hodnot. Dá se dokázat, že nejmenší hodnoty nabude, když za $\bar{x}$ dosadíme hodnotu určenou výrazem (2). Proto se tato metoda výpočtu střední chyby nazývá *metodou nejmenších čtverců*.

Každé měření má nějakou chybu. Pro nás je důležité, jakou chybu má aritmetický průměr naměřených hodnot. Užitím počtu pravděpo-

dobnosti se dá odvodit, že tato chyba — říkáme jí *střední chyba aritmetického průměru* — je dána vztahem

$$\bar{\delta x} = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n(n-1)}}.$$

Odvození $\bar{\delta x}$ zde pro obtížnost neprovádíme. Tato střední chyba $\bar{\delta x}$ nám slouží k tomu, abychom posoudili, jak je v daném případě zaručena hodnota, kterou udává aritmetický průměr.

Aby byla vyznačena přesnost měření, připojuje se k aritmetickému průměru hodnota příslušné střední chyby, a to s oběma znaménky. To však neznamená, že správná hodnota x musí ležet v mezích

$$\bar{x} - \bar{\delta x} \leq x \leq \bar{x} + \bar{\delta x}.$$

Je jen pravděpodobné, že správná hodnota je v tomto intervalu. Při velkém počtu měření je tato pravděpodobnost 68 %. Je-li počet měření menší, pak pravděpodobnost, že do uvedeného intervalu padne správná hodnota, je menší (při 20 měřeních je 67 %, při 10 měřeních 65 %, při 5 měřeních 62 % a při 3 měřeních jen 57 %).

Je zřejmé, že při větším počtu vykonaných měření bude menší střední chyba aritmetického průměru. Se vzrůstajícím počtem měření klesá chyba aritmetického průměru zpočátku prudce, pak mírně. Proto při větším počtu měření nepřináší další zvyšování počtu měření podstatné zmenšení chyby aritmetického průměru.

Postupujeme proto při zpracování naměřených hodnot metodou nejmenších čtverců takto:

1. Určíme aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

2. Určíme všechny odchylky $\Delta x_k = \bar{x} - x_k$.

3. Pro kontrolu výpočtů uvedených v bodě 1 a 2 sečteme odchylky (při správném výpočtu musí platit

$$\sum_{k=1}^n \Delta x = 0).$$

4. Určíme příslušná $(\Delta x_k)^2$.

5. Určíme $\sum \Delta^2$.

6. Vypočteme střední chybu aritmetického průměru podle vzorce

$$\bar{\delta x} = \sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n(n-1)}} \quad (4)$$

7. Výsledek napíšeme ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm \bar{\delta x}.$$

Pro naše účely zcela postačí počítat a též udávat střední chybu aritmetického průměru $\bar{\delta}x$ jen na jednu platnou číslici. Proto stačí její hodnotu určenou odmocninou (4) počítat jen na jednu platnou číslici. Aritmetický průměr, k němuž tato chyba přísluší, zaokrouhlíme tak, že řád poslední platné číslice se shoduje s řádem číslice určující chybu $\bar{\delta}$. Když např. vypočteme $\bar{x} = 38,5367$ mm a $\bar{\delta}x = \pm 0,02$ mm, píšeme $x = 38,54$ mm $\pm 0,02$ mm. Naopak vypočteme-li $\bar{\delta}x = \pm 0,1$ mm a máme aritmetický průměr $\bar{x}$ měřené délky hodnotu přesně 200 mm, musíme psát $x = 200,0$ mm $\pm 0,1$ mm.

4.2. Určení chyby měřené veličiny z kladných odchylek

Užitím počtu pravděpodobnosti lze odvodit, že uvedený způsob výpočtu chyb lze nahradit jednodušším způsobem, u něhož použijeme jen součet kladných odchylek. Označíme-li součet kladných odchylek $\Sigma \Delta_+$, dostáváme pak (uvádíme bez odvození) pro střední chybu aritmetického průměru

$$\bar{\delta}x = \frac{5 \Sigma \Delta_+}{2n\sqrt{n-1}}. \quad (5)$$

Výsledek získaný touto metodou se liší jen nepatrně od výsledku, který udává metoda nejmenších čtverců při nepříliš velkém počtu měření.

Postupujeme proto při tomto způsobu zpracování naměřených hodnot takto:

1. Určíme aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}.$$

2. Určíme všechny kladné odchylky $\Delta_{k+} = \bar{x} - x_k$.
3. Určíme jejich součet $\Sigma \Delta_{k+}$.
4. Vypočteme střední chybu aritmetického průměru podle uvedeného vzorce.
5. Výsledek napíšeme ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm \bar{\delta}x.$$

4.3. Příklady na výpočet střední chyby měřené veličiny

a) Dotykovým měřítkem byla měřena délka válečku d desetkrát. Měření a výpočet výsledku zapíšeme takto:

Tabulka 1

d_k [mm]	Δ_k [mm]	Δ_k^2 [mm ²]
53,9	− 0,03	0,0009
7	+ 17	289
4,1	− 23	529
0	− 13	169
3,9	− 3	9
8	+ 7	49
9	− 3	9
8	+ 7	49
7	+ 17	289
9	− 3	9
$\bar{d} = 53,87$	$\begin{array}{r} + 48 \\ - 48 \\ \hline \Sigma \Delta_k = 0 \end{array}$	$\Sigma \Delta_k^2 = 0,1410$

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{0,1410}{90}} \text{ mm} = \sqrt{0,0016} \text{ mm} = 0,04 \text{ mm} ,$$

$$d = 53,87 \text{ mm} \pm 0,04 \text{ mm}$$

Použijeme-li pro výpočet jen kladných odchylek, dostáváme

$$\bar{\delta} = \frac{1}{12} 0,48 \text{ mm} = 0,04 \text{ mm} ;$$

vychází tedy

$$d = 53,87 \text{ mm} \pm 0,04 \text{ mm}$$

Výsledky obou metod se mohou od sebe lišit, ale nepatrně; v tomto případě se shodují.

Je tedy d s pravděpodobností 65 % v mezích

$$53,83 \text{ mm} \leq d \leq 53,91 \text{ mm}$$

Jsou-li hodnoty měřené veličiny d malé (nebo velké), zapisujeme do tabulky místo hodnot d_k hodnoty $d_k \cdot 10^p$, kde p je vhodně volený exponent, a v záhlaví měřené veličiny nadepíšeme $d_k \cdot 10^p$.

Jestliže použijeme přibližného způsobu výpočtu podle vztahu (6), dostaneme

$$\bar{\delta} = \frac{0,96}{10} \text{ mm} = 0,1 \text{ mm} .$$

b) Určujeme-li průměr válce mikrometrickým měřidlem, pak jej měříme v různých rovinách rovnoběžných s podstavou a v různých povrchových přímkách. Naměřené hodnoty jsou označeny v tabulce d_k .

Když se jednotlivé hodnoty velmi značně od sebe liší (nepřesnost výroby), nemá význam pro výpočet střední hodnoty a její chyby brát všechna naměřená místa. Proto zaokrouhlíme naměřené hodnoty na d_k a postupujeme stejně jako v případě a).

Tabulka 2

$[d_k \text{ mm}]$	$d'_k [\text{mm}]$	$\Delta_k [\text{mm}]$	$\Delta_k^2 [\text{mm}]$
12,024	12,02	0,054	0,002 916
098	10	— 26	676
112	11	— 36	1 296
122	12	— 46	2 116
107	11	— 36	1 296
098	10	— 26	676
044	04	34	1 156
014	01	64	4 096
040	04	34	1 156
094	09	— 16	256
	$\bar{d} = 12,074$	186	$\Sigma \Delta_k^2 = 0,015 640$
		— 186	
		$\Sigma \Delta_k = 0$	

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{0,015 640}{90}} \text{ mm} = \sqrt{0,000 185} \text{ mm} = 0,014 \text{ mm} ,$$

$$d = 12,07 \text{ mm} \pm 0,01 \text{ mm} .$$

Bylo tedy postačující měřit v tomto případě jen na setiny mm.

5. Chyba absolutní a relativní

Střední chybu aritmetického průměru určenou podle odst. 4 nazýváme *chybou absolutní*. K posouzení měření má větší význam chyba *relativní*, tj. poměr absolutní chyby $\bar{\delta}x$ k hodnotě aritmetického průměru měřené veličiny $\bar{x}$; vyjadřujeme ji obvykle v procentech

$$\frac{\bar{\delta} \cdot 100}{x}$$

Měření s menší relativní chybou je přesnější.

Je-li např. $a = 58,2 \text{ m} \pm 0,4 \text{ m}$, je relativní chyba menší než 1 %, je-li $b = 0,019 \text{ mm} \pm 0,002 \text{ mm}$, je relativní chyba větší než 10 %. Prvé měření bylo přesnější, ačkoli v prvním případě je absolutní chyba 40 cm a v druhém jen 0,002 mm. Snažíme se vždy měřit aspoň tak,

aby relativní chyba byla menší než 1 %. U přesných měření žádáme, aby klesla pod 0,1 %, popříp. ještě na hodnotu menší, a to podle užitého měřicího přístroje a podle měřicí hodnoty.

6. Chyba při určování hmotnosti

V mechanice je nejpřesnějším měřením vážení. U technických vah s rozsahem do 500 g, můžeme určit hmotnost na setiny gramu, tedy číslem až s 5 platnými místy, tj. na 0,01 %, u analytických vah s rozsahem do 100 g můžeme určit hmotnost až na desetitisícinu gramu, tedy číslem až se 6 platnými místy, tj. na 0,001 %. Vážení proto neopakujeme. Přesnost s jakou vážíme záleží na tom, jak je stálá nulová, resp. rovnovážná poloha vah. Při určování hmotnosti stanovíme na začátku a na konci měření nulovou polohu. Výsledek vážení je zatížen chybou určenou hmotností, která způsobí tutéž změnu nulových poloh. Příslušná hodnota hmotnosti je absolutní hodnotou chyby vážení.

Nechť je např. počáteční nulová poloha vah 11,3 dílků, výsledná nulová poloha vah 9,4 dílků, naměřená hmotnost 196,843 g a závaží o hmotnosti 0,01 g způsobí při tomto zatížení změnu rovnovážné polohy o 0,7 dílku. Pak uvedená změna nulové polohy o 1,9 dílku je způsobena závažím o hmotnosti 0,027 g. Proto určení hmotnosti m je provedeno s chybou 0,03 g, tedy

$$m = 196,84 \text{ g} \pm 0,03 \text{ g}.$$

Z nejméně přesných měření je např. určování objemu těles užitím kalibrovaných nádob. I když je průřez nádoby dostatečně veliký, vzniká u stěn zakřivení povrchu kapaliny. Proto určujeme objem — pokud je to možné — nepřímo vážením.

RŮZNÉ • RŮZNÉ • RŮZNÉ

125. výročí narozenin Karla Pelze

Doc. KAREL Drábek, CSc., ČVUT, Praha

Třetím profesorem deskriptivní geometrie na pražské Vysoké technické škole po odchodu prof. Františka Tilšera do výslužby se stal Karel Pelz, který se narodil 2. října 1845 v Bělči (u Křivokláta). Jeho otec byl ve službách tehdejšího fürstenberského panství, a to nejdříve výrobcem potaše v Bělči, pak hajným v Olešné u Rakovníka.



Proto v letech 1858—64 navštěvoval (tehdy) šestiletou rakovnickou reálku, po maturitě studoval od školního roku 1864—65 do 1869 na pražské polytechnice. Deskriptivní geometrii poslouchal u prof. Tilšera na české části a v následujícím roce (přes jejich velkou pracnost) znovu u prof. Fiedlera na německé části vysoké školy. Je třeba upozornit na to, že studijní plán pro deskriptivní geometrii počítal s deseti hodinami cvičení týdně. Měl vzorný grafický projev, a proto se nelze divit tomu, že (podle vyprávění prof. Kadeřávka) vyžadoval totéž později od svých žáků. Důkazem pro jeho pěkné rýsování je, že prof. Fiedler si vyžádal jeho ryšy jako ukázkové na památku.

Po ukončení studií působil jeden rok ve Vídni jako kreslič v ústavu pro meteorologii a v letech 1870—75 jako asistent deskriptivní geometrie na pražské německé technice u prof. Küppera, pak učil na reálce v Těšíně a od r. 1876 ve Štyrském Hradci (Rakousko). Po úspěšné habilitaci na tamější technice byl již v roce 1878 na ní jmenován mimo-

řádným a v roce 1881 pak řádným profesorem deskriptivní geometrie. Toužil po profesuře na pražské technice, a proto také odmítl v r. 1891 nabídku vídeňské školy. V konkursním řízení v r. 1896 se jeho přání konečně splnilo. Byl však v té době již vážně nemocen, jeho zdravotní stav se stále zhoršoval a dne 16. června 1908 umírá. Je pohřben na vyšehradském hřbitově, hrob má číslo 112.

Prof. Pelz uveřejnil celkem 34 vědeckých prací, které však všechny napsal německy. Tyto práce, které se týkají konstrukcí na kuželo-sečkách, plochách druhého stupně a základní věty o axonometrickém promítání (tzv. věty Pohlkeovy), byly již za jeho života velmi ceněny a uváděny v učebnicích deskriptivní geometrie. Jeho práce jsou psány s vynikající jasností a přitom s jednoduchostí. Konstruktivní hledisko s provedením a uvedením problémů uplatňoval také při svých přednáškách, které se proto vyznačovaly propracovaností a přesností rýsovaných obrazců. Velikou zásluhou prof. Pelze je také to, že se mu podařilo najít (zejména v axonometrii) spojení teorie a praxe.

Vrchlický, matematika a Hovory H

Oblíbený televizní seriál Hovory H má velmi početnou obec diváků a posluchačů včetně školních dětí a studentů gymnasií. Mládež si mnohá fakta, které tam slyší, zapamatuje lépe než povinné školní lekce. V šestnáctých Hovorech prozradil spolužák Miroslava Horníčka z plzeňské reálky na populárního umělce, že prý v tercii propadl. Utěšoval jej pak tím, že Vrchlický propadl na gymnasiu též, a to z matematiky. Tím byla z televizní obrazovky oživena stará nepravdivá legenda, kterou uvedl na pravou míru už před léty Vítězslav Tichý, autor biografie slavného básníka „Jaroslav Vrchlický — Život“.

Jak to tedy ve skutečnosti bylo: Vrchlický studoval na soukromém gymnasiu v Praze a když se v roce 1869 jeho rodiče přestěhovali z Prahy do Klatov, musel se tam podrobit přijímací zkoušce ze všech předmětů, ačkoliv se vykázal dobrým vysvědčením ze sexty. Ve všech předmětech včetně matematiky při zkoušce obstál, avšak zkoušející matematik poznal, že student měl slabší základy v matematice, a tak mu poradil, aby třídu dobrovolně opakoval, poněvadž by se mu mohlo stát, že by popřípadě v septimě z matematiky propadl. Vrchlický jeho rady poslechl; ve třídě našel obětavého spolužáka a dobrého přítele Josefa Thomayera, výtečného matematika a pozdějšího slavného lékaře, který s ním obětavě pravidelně učebnou látku procvičoval a dosáhl toho, že Vrchlický nejen dohnal, co byl dříve zameškal, ale oblíbil si matematiku do té míry, že mu nikdy během dalšího studia nečinila obtíže. Thomayer byl též spisovatelem, psal pod jménem R. E. Jamot a svému

polužáku, jehož jméno bylo Emil Frída, poradil pseudonym Jaroslav Vrchlický. V oktávě přišel na klatovské gymnasium z Hradce Králové nový matematik dr. Emanuel Taftl,¹⁾ který přednesem látky, způsobem zkoušení a vlídností získal u Vrchlického takový zájem o matematiku i fyziku, že se mu staly ze všech předmětů nejmilejší, ačkoliv dr. Taftl ničeho svým žákům neslevoval. V jednom dopise svému bratrovi Vrchlický o něm napsal: „Dr. Taftl je samý oheň, přednáší rukama, očima, čelem, ba i vlasy s takovým zápalem, že jsem to ještě nikdy neviděl a neslyšel. Byli jsme plni strachu před ním, doktor a k tomu ještě z Hradce Králové. A jak zkouší! Jen s kuráží, říkává. U nás nebylo slýcháno, aby každý i ten nejslabší tak dobře uměl, jako nyní.“

U většiny lidí však stále ještě existuje názor, že slovesní umělci jsou nepřístupni matematickému myšlení a že byli na školách špatnými matematiky. Byli a jsou spisovatelé, kteří měli k matematice kladný vztah. Tak například Karel Čapek byl za svých studií dobrým počtářem; v jubilejním sborníku brněnského gymnasia, na němž po dva roky studoval, věnoval krásnou vzpomínku svému učiteli matematiky mladému suplentu Josefu Oharkovi z Vyškova. Čapek se zajímal i o vyšší matematiku, stejně jako o jiné přírodní vědy (jeho přítelem a spolužákem byl nositel Nobelovy ceny Jaroslav Heyrovský). Do jednoho čísla Lidových novin (v r. 1924) napsal podrobnou historii pokusů o řešení Velké věty Fermatovy; vztahu matematiky a umění dotýká se jeho Povídka z jedné kapsy „Básník“. K dobrým matematikům na studiích patřil K. H. Mácha, Otokar Březina, Jakub Arbes, Jiří Mahen, Pavel Eisner.

S úctou a nadšením vzpomíná na školskou matematiku např. Lev Blatný, jemuž výklady prof. Zavřela „odhalily kouzlo hlubokého soustředění, v němž se rodí kázeň myšlení a rozkoš logické konstrukce“ a Vítězslav Nezval, který nepatřil na gymnasiu k nejlepším matematikům se ve svých memoárech přiznává, že matematika v něm vzbuzuje bezmezný obdiv, poněvadž svou myšlenku rozvádí až na pomezí zkušenosti.

Naproti tomu Petr Bezruč se několikrát přiznal, že nebyl schopen samostatně rozřešit žádný problém matematický, ani geometrickou konstrukci. Svěřil se s tím jednou i svému příteli pedagogu Josefu Úlehlovi, který mu prohlásil, že asi neměl z matematiky dobrého učitele. Nevalnými matematiky byli podle svého doznání F. X. Šalda, Viktor Dyk, Josef Hora, Jaroslav Seifert, Vladimír Holan.

Na své dobré učitele matematiky vzpomínají Alois Jirásek, Svatopluk Čech a J. S. Machar.

Josef Glivický

¹⁾ Em. Taftl, nar. 10. 12. 1842 v Jindř. Hradci, zemřel v Klatovech 12. 12. 1920.



RECENZE

Přehled fyziky

KARJAKIN, BYSTROV, KIRAJEV

Vydalo SNTL. Z ruského originálu *Kratkij spravocnik po fyzike* přeložil dr. Sobotka, CSc. Publikace u nás vychází v I. vydání. Má 630 stran, 332 obrázků a vázaná stojí 67,— Kčs.

Kniha je rozdělena do deseti částí. Prvních pět podává stručný, přehledný průřez klasickou fyzikou počínaje mechanikou, přes molekulární fyziku, termodynamiku, statistickou fyziku, elektřinu, magnetismus a optiku. V dalších čtyřech částech se autoři podrobněji zabývají partii moderní fyziky, a to speciální teorií relativity, atomovou fyzikou, kvantovou mechanikou, jadernou fyzikou a fyzikou pevných látek. Poslední, velmi hezky a přehledně uspořádaná část, kterou technici i studenti jistě velmi ocení, je věnována jednotkám a soustavám jednotek.

Autory je tato publikace určena jako příručka především inženýrům, technikům, žákům průmyslových a vysokých škol a učitelům škol II. cyklu. Bude však velmi dobrým pomocníkem i studentům vyšších ročníků přírodovědné větve SVVŠ (k jejímu úspěšnému studiu je nutný jistý matematický aparát), jak při soustavném studiu, tak při přípravě k maturitě a přijímacím zkouškám na vysokou školu.

Přehled fyziky je velmi pěkná kniha, která bude jistě mít na našem knižním trhu úspěch jak pro výběr a zpracování látky, tak pro svou přehlednost. Tím spíš je nutno litovat, že jako většina překladů se ani ona nevyhnula některým překladatelským a tiskovým chybám.

Anežka Wohlmuthová

SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

N

nappe *ž*
nappe d'un cône
hyperboloïde *m* à une nappe
hyperboloïde à deux nappes
nécessaire
il est nécessaire et suffisant
nécessairement
négatif, ive
négation *ž*
négligeable
négliger
népérien
logarithmes népériens
nuf
nuevième
nuevième *m*
niveau *m*
courbe *ž* de niveau
surface *ž* de niveau
nombre *m*
nombre entier
nombre imaginaire
nombre naturel
nombre pair
nombre impair
nombre premier
nombres premiers entre eux
nomogramme *ž*
nante

souvislá a neomezená část plochy
plášť kužele
hyperboloid jednodílný
hyperboloid dvoudílný
nutný
je nutné a postačující
nutně
záporný
negace
zanedbatelný
zanedbat
Neperův
Neperovy logaritmy
devět
devátý
devítina
hladina, úroveň, libola
vrstevnice
ekviskalární plocha
číslo
celé číslo
imaginární číslo
přirozené číslo
sudé číslo
liché číslo
prvočíslo
číslo nesoudělná
nomogram
devadesát

non euclidien, enne
 normal, e, aux
 normale *ž*
 norme *ž*
 notation *ž*
 note *ž*
 notion *ž*
 nul, nullo
 numérateur *m*
 numérique
 calculateur *m* numérique
 numéro *m*
 numéroter

neeuclidovský
 normální
 normála
 norma
 označení
 poznámka
 pojem
 nulový
 čítel
 numerický
 číslicový počítač
 číslo (pořadové)
 očíslovat

O

oblique
 cylindre *m* oblique
 projection *ž* oblique
 oblique *ž*
 obtus, e
 angle *m* obtus
 octaèdre *m*
 octant *m*
 octogone *m*
 ombilic *m*
 ombre *ž*
 ombre propre
 ombre portée
 onglet *m*

 onze
 onzième
 onzième *m*
 opérateur *m*
 opération *ž*
 opposé, e
 angles *m* opposés par le sommet
 nombres *m* opposés
 orbite *ž*
 ordonné, e
 couple *m* ordonné
 polynôme *m* ordonné
 ordonnée *ž*
 ordonner
 ordre *m*
 racine *ž* multiple d'ordre *k*

šikmý, kosouhlý
 šikmý válec
 šikmý průmět
 šikmá přímka
 tupý
 tupý úhel
 osmistěn
 oktant
 osmiúhelník
 kruhový bod
 stín
 vlastní stín
 vržený stín
 část rotačního tělesa, ohraničená
 polovinami dvou meridiánů
 jedenáct
 jedenáctý
 jedenáctina
 operátor
 operace
 protilehlý, opačný
 úhly vrcholové
 opačná čísla
 dráha
 uspořádaný
 uspořádaná dvojice
 uspořádaný mnohočlen
 souřadnice *y*
 uspořádat
 uspořádání, řád
 k-násobný kořen

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

3

ROČNÍK 49, 1970-1971, LISTOPAD



ROČNÍK 49
LISTOPAD 1970-71

3

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání
Za zásluhu o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VYKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

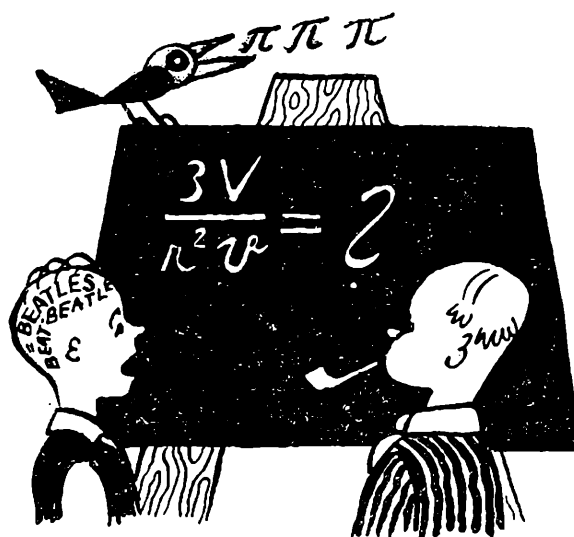
Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku. Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: Mil. Hellerová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1970.

OBSAH

J. Drábek: Rovinné mapy	97
Doc. K. Drábek, CSc.: Použití Škuherského axonometrie v praxi	101
RNDr. B. Jurek, DrSc.: Dálkohledy pro měkké paprsky X	106
Dr. O. Pivnička: Elektrické pole	112
Dr. J. Široký, Dr. M. Široká: Souhvězdí zimní oblohy	125
Naše soutěž	128
Fyzikální olympiáda	132
Mezinárodní fyzikální olympiáda	133
Matematické zábavy	135
S. Horák: Michael Stifel	139
Najmladším čtenářům	142
Recenze	143
Redakce hovoří se čtenáři	144
Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český	3. a 4. str. obálky



Rovinné mapy

JAROSLAV DRÁBEK, PF, Plzeň

Cílem článku je seznámit čtenáře s problematikou rovinných map. Tematicky tato problematika patří do kombinatorické (algebraické) topologie roviny, což je jedna z nejmodernějších matematických disciplín, přestože příslušná problematika je značně starší.

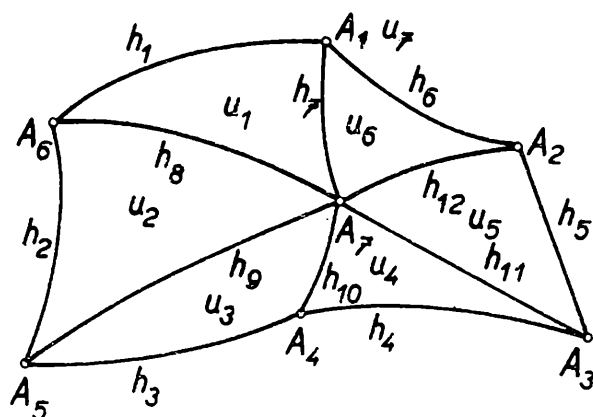
Definujme však nejprve pojem rovinné mapy. V rovině je dáno n různých bodů $A_1, A_2, \dots, A_n$, přičemž některé různé dvojice těchto bodů jsou spojeny neprotínajícími se křivkami nebo úsečkami. Jedinou podmínkou je, aby z každého bodu vycházely aspoň tři takové spojnice. Vzniklý rovinný útvar nazýváme rovinnou mapou s vrcholy $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Na obrázku 1 je znázorněna mapa se sedmi vrcholy.

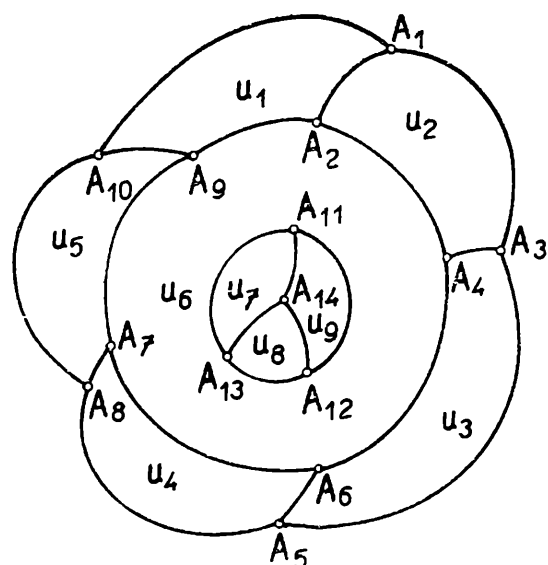
Definujme několik dalších základních pojmů, kterých se užívá v teorii rovinných map.

Definice 1. Spojnice bodů $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazýváme hranami mapy. Otevřené části roviny, které jsou omezené hranami nazýváme územími mapy.

Na obrázku 1 křivky $h_1, h_2, \dots, h_{12}$ jsou hranami a otevřené části $u_1, u_2, \dots, u_7$ roviny jsou územími mapy znázorněné na obrázku 1.



Obr. 1



Obr. 2

Poznámka. Jestliže M je rovinnou mapou v rovině E_2 , potom doplněk $E_2 - M$, který je neomezený, považujeme též za území mapy M . Toto území nazýváme výstižně mořem. U rovinné mapy na obrázku 1 je mořem neomezená část roviny označená u_7 .

Definice 2. Nechť A_i je vrcholem mapy M . Stupněm tohoto vrcholu, budeme značit h_i , je počet hran mapy M , které vycházejí z bodu A_i . Je zřejmé, že $h_i \geq 3$.

Věta 1. Jestliže rovinná mapa M má vrcholy $A_1, A_2, \dots, A_n$, které mají po řadě stupně $h_1, h_2, \dots, h_n$, potom platí vzorec

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n = 2h, \quad (1)$$

kde h je počet hran mapy M .

Důkaz. Každá hrana rovinné mapy M má právě dva krajní vrcholy, a tedy v součtu $h_1 + h_2 + \dots + h_n$ je každá hrana mapy M započtena dvakrát.

Cvičení 1.

Jestliže rovinná mapa M má území $u_1, u_2, \dots, u_m$, která mají postupně $k_1, k_2, \dots, k_m$ hran, potom platí vzorec

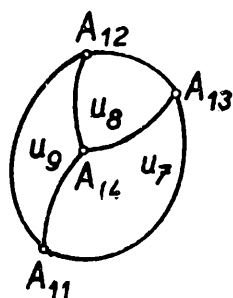
$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = 2h, \quad (2)$$

kde h je počet hran mapy M . Dokažte!

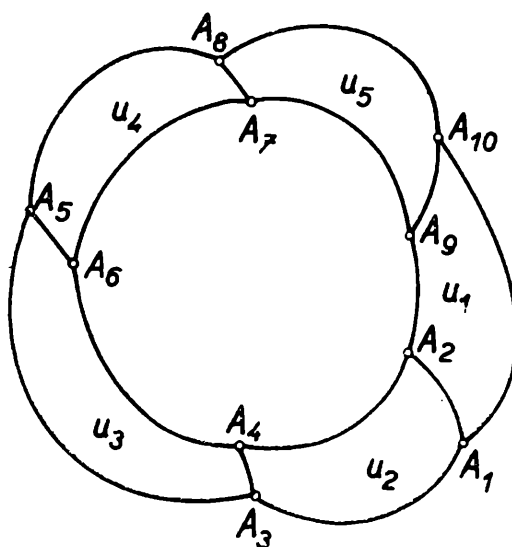
Vzorce (1) a (2) jsou základními algebraickými vzorci v teorii rovinných map a budeme je často potřebovat v dalších úvahách. Všimněme si blíže mapy M , která je zakreslena na obrázku 2.

Území u_6 mapy M rozděluje soubor zbývajících území na dvě od sebe oddělené skupiny. Jinými slovy, jestliže rozřízneme nůžkami mapu M podél hran území u_6 , rozpadne se tato mapa na dva kusy, které jsou znázorněné na obrázcích 3 a 4.

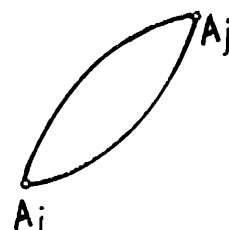
Mapu M , ve které existuje území s uvedenou vlastností, nazýváme *nesouvislou mapou* a takové mapy vyloučíme z našich úvah. V dalším textu pod pojmem *mapa* budeme vždy rozumět mapu souvislou, tj. mapu, ve které neexistuje území výše uvedené vlastnosti.



Obr. 3



Obr. 4



Obr.

Vedle základních algebraických vzorců (1) a (2) platí ještě jeden základní vzorec pro souvislé mapy, který byl odvozen známým matematikem Eulerem.

Věta 2. Jestliže souvislá rovinná mapa M má u území, h hran a v vrcholů, potom platí vzorec

$$v + u = h + 2. \quad (3)$$

Vzorec (3) uvádíme bez důkazu. Chybějící důkaz čtenář nalezne v knize J. B. Dynkin, V. A. Uspenskij: *Matematické besedy* na str. 30.

Cvičení 2.

Sestrojte nesouvislou rovinnou mapu, pro kterou neplatí vzorec (3)!

Příklad 1. V rovině je dáno n různých bodů $A_1, A_2, \dots, A_n$, kde $n \geq 4$. Máme nalézt nutnou a postačující podmínku pro to, aby každé dva různé body z těchto bodů byly spojeny právě jednou křivkou, přičemž se tyto křivky vzájemně neprotínají.

Předpokládejme tedy, že těchto n bodů se dá spojit neprotínajícími se křivkami. Dostaneme tedy rovinnou mapu o n vrcholech, přičemž stupeň každého vrcholu je právě $n - 1$. Užitím základního vzorce (1) vyčíslíme počet hran této mapy, který je roven

$$h = \frac{n(n-1)}{2} \quad (4)$$

Z Eulerova vzorce (3) vyčíslíme počet území vzniklé mapy, který je roven

$$u = \frac{n(n-1)}{2} + 2 - n. \quad (5)$$

V této mapě nevzniknou dvojúhelníková území, poněvadž dva různé body jsou spojeny právě jedinou křivkou. Dvojúhelníkové území je znázorněné na obrázku 5.

Každé území této mapy je tedy aspoň trojúhelníkové.

Užitím základního vzorce (2) a zřejmé nerovnosti

$$3u \leq k_1 + k_2 + \dots + k_u \quad (6)$$

dostaneme

$$3u \leq 2h. \quad (7)$$

Dosazením do (7) ze (4) a (5) dostaneme nerovnost

$$\frac{3n(n-1)}{2} + 6 - 3n \leq n(n-1). \quad (8)$$

Po jednoduché úpravě

$$n^2 - 7n + 12 \leq 0. \quad (9)$$

Nerovnosti (9) vyhovují přirozená čísla 4 a 3.

Jestliže lze n různých bodů v rovině, kde $n \geq 4$, vzájemně spojit neprotínajícími se křivkami, pak nutně $n = 4$.

Ukažte, že každé dva různé body ze čtyř bodů v rovině lze spojit právě jedinou křivkou, při čemž se tyto křivky vzájemně neprotínají!

Cvičení 3.

Dokažte, že nutnou podmínkou pro to, aby každý z n bodů v rovině bylo možné spojit neprotínajícími se křivkami vždy s k body z těchto bodů, kde $k \geq 3$, je splnění nerovnosti

$$k \leq \frac{6n-12}{n}.$$

Příklad 2. Dokažte, že v každé rovinné mapě M existuje území, které má méně než 6 hranic.

Předpokládejme, že každé území mapy M má aspoň 6 hranic.

Použitím základního vzorce (2) dostaneme nerovnost

$$6u \leq k_1 + k_2 + \dots + k_u = 2h. \quad (10)$$

Pomocí základního vzorce (1) a nerovnosti $h_i = 3$, $i = 1, \dots, v$ dostaneme druhou nerovnost

$$3v \leq 2h. \quad (11)$$

Sečtením nerovností (10) a (11) vynásobené dvěma, dostáváme

$$u + v \leq h, \quad (12)$$

která je ve sporu se základním vzorcem (3).

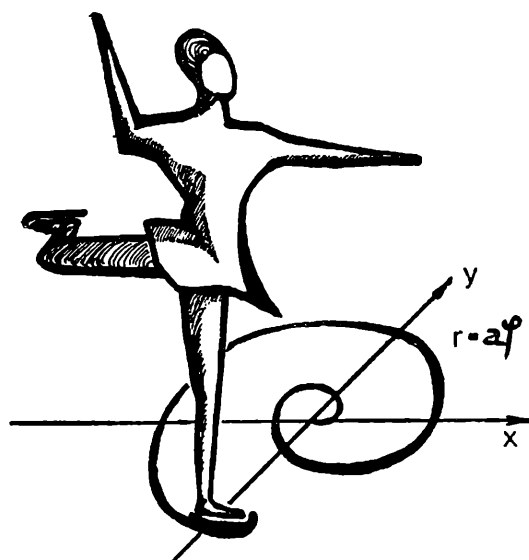
Cvičení.

4. V rovině je dáno šest bodů. Každý bod je spojen křivou čarou se čtyřmi zbývajících body tak, že tyto čáry se neprotínají. Dokažte, že na takto vzniklé mapě je každé území trojúhelníkové! Nakreslete jednu takovou mapu!

5. Dokažte nerovnost $h \leq 3u - 6$!

6. Užitím nerovnosti ze cvičení 5 dokažte, že na mapě s počtem území menším než 12, existuje území, které má méně než pět hran!

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE



Použití Skuherského axonometrie v praxi

Doc. KAREL DRÁBEK, CSc., Praha

Jestliže chceme získat názorný obrázek nějakého objektu, pak jej buď umístíme do tzv. obecné polohy v prostoru vzhledem k průmětnám (tj. tak, aby pokud možno žádná hrana, příp. stěna se nepromítala do bodu, příp. přímky), nebo použijeme některého názorného promítání.

Při obvyklém kosoúhlém promítání promítáme na svislou průmětnu a při konstrukcích používáme pomocné vodorovné roviny. V axonometrii používáme jako průmětnu rovinu protínající všechny osy souřadnic a jednu z rovin souřadnic (zpravidla vodorovnou) vezmeme za pomocnou rovinu.¹⁾ Na průmětnu pak promítáme pravoúhle (nebo kosoúhle, můžeme však promítat také středově). Při tom se osy x , y promítají do přímek, které s průmětem osy z tvoří tzv. osový kříž.

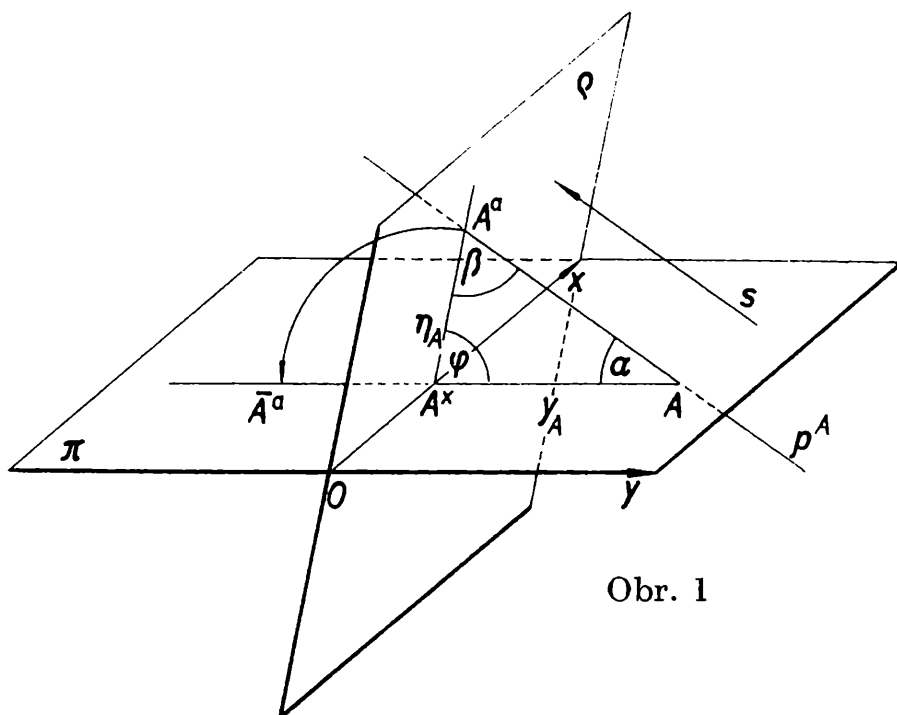
¹⁾ Viz učebnici Deskriptivní geometrie pro II. a III. tř. SVVŠ, str. 258—283.

Upravme tento promítací způsob tak, že budeme promítat na libovolnou rovinu ϱ (obr. 1), o které předpokládejme, že není vodorovná. Zobrazovaný objekt nechť je postaven na vodorovné rovině π , která bude pro nás pomocnou průmětnou. Promítáme pak směrem s , který je kolmý k průsečnici x rovin ϱ a π . Tuto přímku zvolíme za osu x souřadnic. Úhel rovin ϱ a π označme φ a budiž $\varphi \neq 90^\circ$.

Stanovme nejdříve průmět bodu A roviny π do roviny ϱ . Je-li $p^A \parallel s$ promítací přímka bodu A , pak $A^a \equiv p^A$. ϱ je hledaný průmět bodu A . Podle známých vlastností vzniká mezi rovinou π a s ní různoběžnou rovinou ϱ (tj. mezi obrazcem roviny π a jeho průmětem do roviny ϱ) osová (nebo perspektivní) afinita v prostoru.²⁾

Vedme bodem A v rovině π přímku kolmou k ose x a označme A^x její průsečík s touto osou. Potom také $A^a A^x \perp x$ a úhel $\varphi = \sphericalangle AA^x A^a$. Pro další úvahy a konstrukce položme

$$y_A = A^x A, \quad \eta_A = A^a A^x$$



Obr. 1

Úsečku η_A nazveme *afinní souřadnicí* bodu A , a proto o tomto způsobu promítání mluvíme krátce také jako o *afinním promítání*.

Vzhledem k volbě směru s promítání je $\sphericalangle A^x A A^a$ pro každý bod roviny π týž a označme jej α . Potom je

$$\sphericalangle A A^a A^x = 180^\circ - (\alpha + \varphi) = \beta.$$

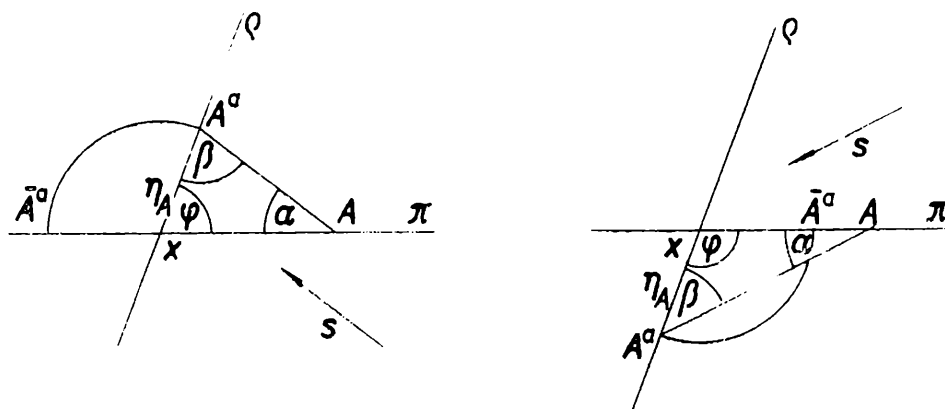
²⁾ Viz článek J. Klimčík—F. Machata: Osová afinita, Rozhledy (41) 1962—63, str. 396—399.

Ze sinové věty plyne

$$\eta_A \quad y_A = \sin \alpha \quad \sin (\alpha + \varphi) = q = \text{konst.},$$

tj. poměr afinní souřadnice η_A bodu A roviny π a jeho vzdálenosti y_A od osy x je konstantní.

Podle úhlu β , který svírá přímka s s průmětnou ρ mluvíme o kosoúhlém ($\angle s\rho \neq 90^\circ$) nebo pravoúhlém ($\angle s\rho = 90^\circ$) afinním promítání.



Obr. 2

Je-li promítání pravoúhlé,³⁾ pak $\alpha + \varphi = 90^\circ$ a pro afinní souřadnici bodu roviny π dostáváme

$$\eta = y \sin \alpha.$$

Provedeme nyní sdružení průmětů otočením roviny ρ kolem osy x do roviny π , obdobně jako v Mongeově promítání, tedy tak, aby bod A s kladnou souřadnicí y byl osou x oddělen od otočení $\bar{A}^a$ s kladnou souřadnicí η . Podle volby promítací přímky je průmět A^a bodu A buď nad rovinou π , nebo pod touto rovinou. V prvním případě je otočená poloha A^a v opačné polorovině vyřazené v π osou x než je bod A , v druhém případě je v téže polorovině jako bod A . Vzhledem k pohledu na objekt dostáváme v prvním případě podhled, v druhém nadhled. (V obr. 2 je rovina bodem A kolmá k ose x vzata za rovinu nákresny.)

Poznámka 1. Jako výhodné se ukazuje zvolit pro pravoúhlé afinní promítání $\varphi = 60^\circ$, neboť pak je $\eta = \pm y \cdot 2$.

Určíme teď afinní průmět bodu B , který neleží v rovině π (obr. 3). Stanovíme nejdříve jeho pravoúhlý průmět B_1 do roviny π a označme $z_B = BB_1$. Afinní průmět B_1^a dostaneme výše vyloženým postupem. Bod B leží v rovině $B_1B^xB_1^a$, neboť $BB_1 \perp x$, $B_1B^x \perp x$, $B_1^aB^x \perp x$. Sestrojíme

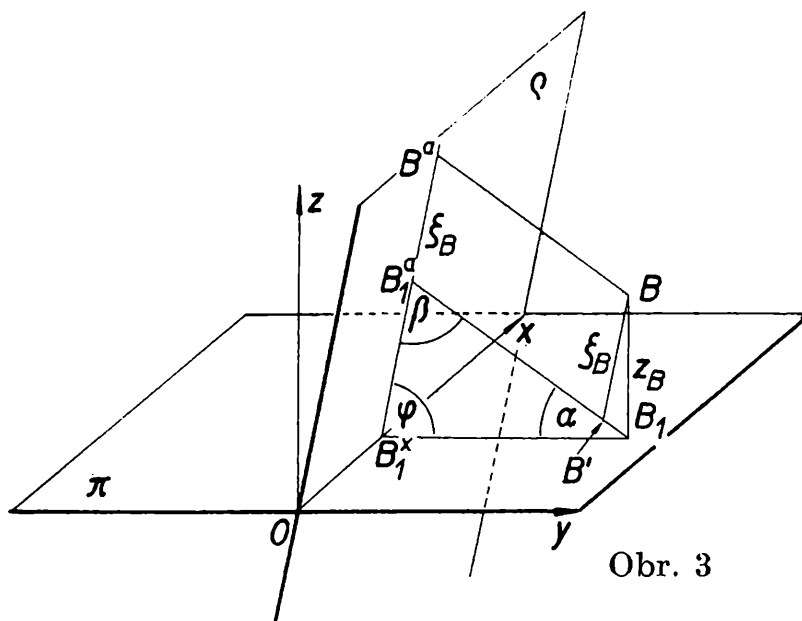
³⁾ Viz též článek Filip J.: Pravoúhlé premietanie na dve priemetne, ktoré zvierajú kosý uhol. Matematika ve škole (XV), 1964—65, str. 157—165.

proto bodem B rovnoběžku s přímkou B_1B^a a označme B' její průsečík s přímkou $B_1B_1^a$.

Protože $\sphericalangle B_1B'B = 180^\circ - \beta = \alpha + \varphi$, $\sphericalangle B'B_1B = 90^\circ - \alpha$, je podle sinové věty

$$BB' : BB_1 = \zeta_B \quad z_B = \cos \alpha \quad \sin (\alpha + \varphi).$$

Tedy také souřadnice z (výšky) bodů a jejich afinní průměty ζ jsou v konstantním poměru.



Obr. 3

Dále je zřejmo, že afinní průmět B^a bodu B s afinním průmětem B_1^a jeho pravouhlého průmětu B_1 do roviny π leží na kolmici k ose x .

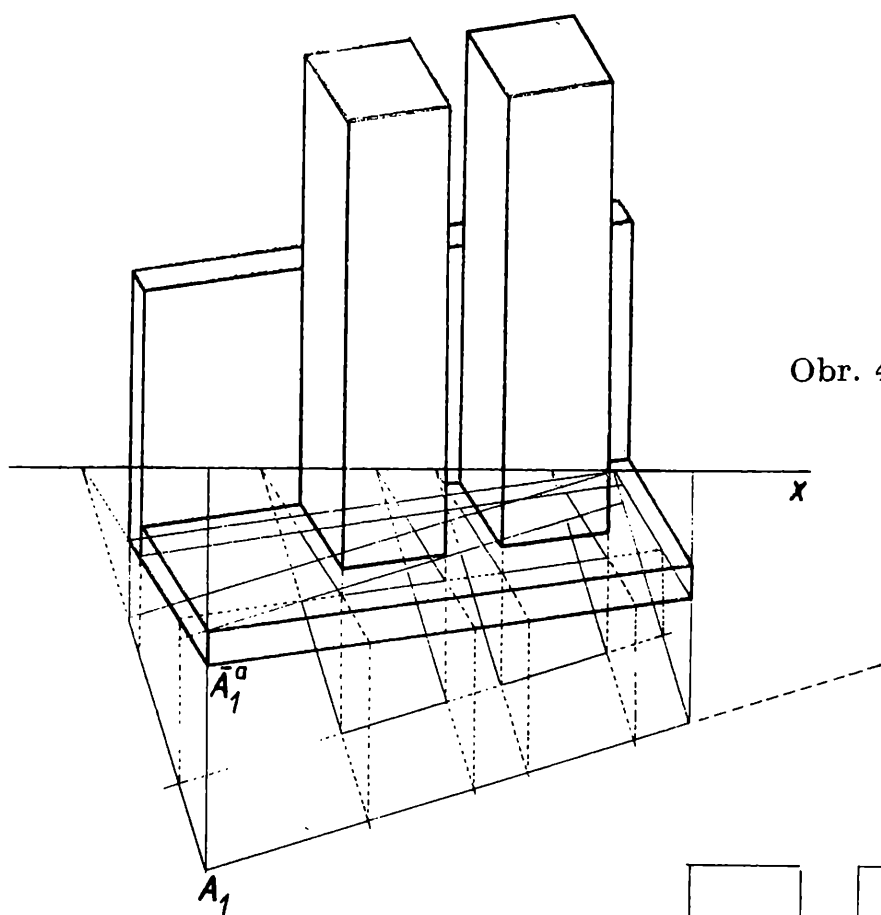
Tato vlastnost zůstane zachována i po provedeném sdružení průmětů. Souřadnice η , ζ můžeme nazývat *afinními souřadnicemi bodu*.

Poznamenejme, že pro pravoúhlé promítání je $\zeta = z \cos \alpha$.

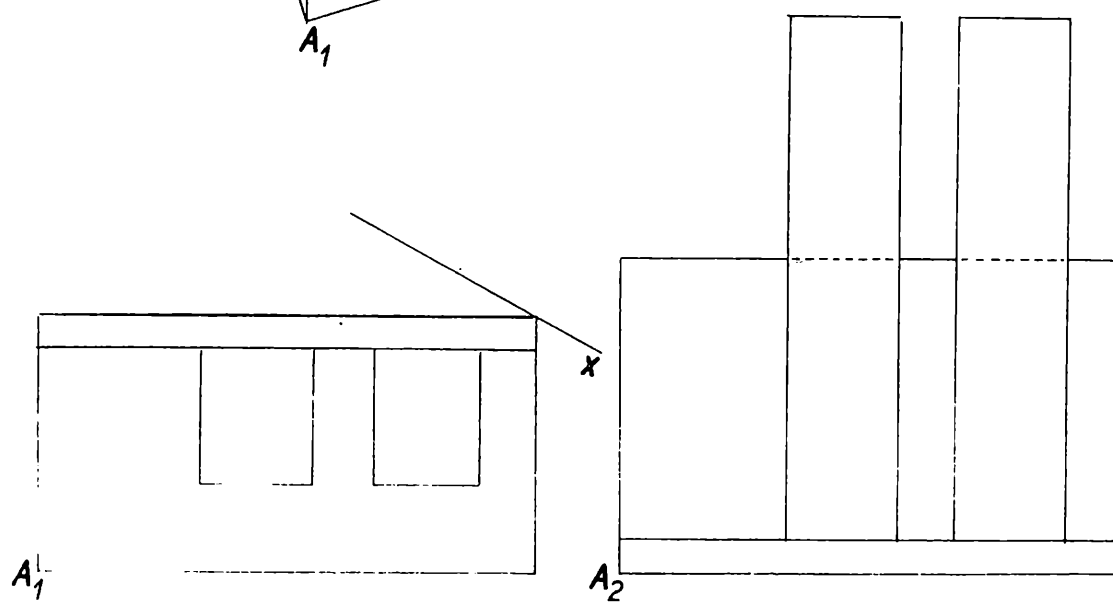
Na obr. 4 je zakreslen pro pravouhlé promítání pohled na objekt, daný prvním a druhým průmětem, (které nemusí být dány v témže měřítku).

Pro snazší orientaci aspoň stručně popíšeme postup při konstrukci v obr. 4. V pomocném prvním průmětu stanovíme polohu osy x , např. tak, aby procházela jedním bodem objektu. Potom přeneseme umístění (pomocného) prvního průmětu do nákresny (příp. v jiném měřítku) a pro určení afinního průmětu využijeme pravoúhlé afinity (s osou) v ose x a odpovídající dvojice bodů A_1 a $\bar{A}_1^a$, přičemž v našem případě při zvoleném $\varphi = 60^\circ$, je vzdálenost bodu $\bar{A}_1^a$ od osy x rovna polovině vzdálenosti bodu A_1 od této osy. Potom v jednotlivých bodech afinního průmětu obrazce roviny π vyneseme redukované výšky.

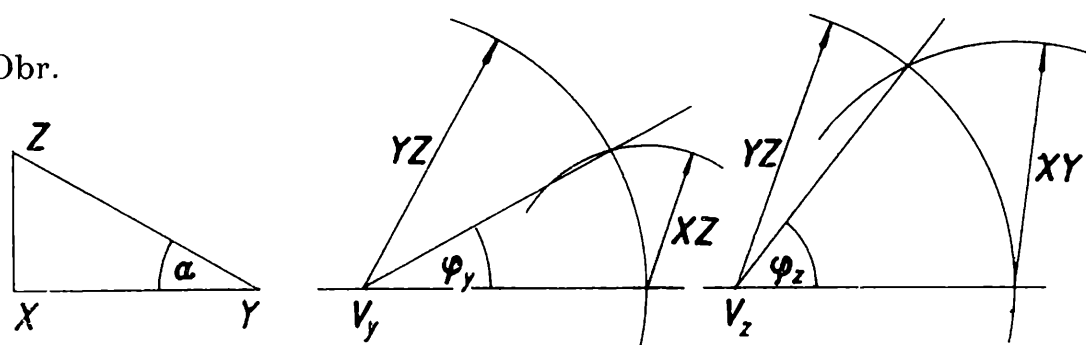
Pro vynášení zkrácených souřadnic používáme často s výhodou tzv. *redukčního úhlu*, který sestrojíme takto (obr. 5):



Obr. 4

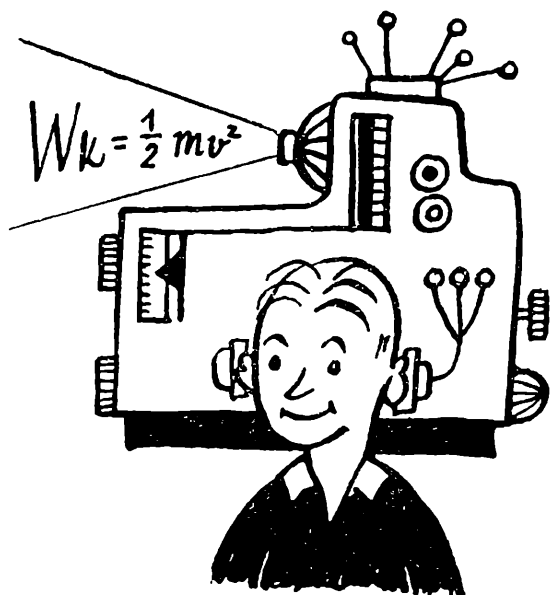


Obr.



Narýsujeme nejdříve pravoúhlý trojúhelník s daným úhlem $\alpha = 90^\circ - \varphi$. Redukční úhel φ_y pro souřadnice y nechť má vrchol V_y a jedno rameno vodorovné. Kolem bodu V_y opíšeme kruhový oblouk poloměrem rovným přeponě YZ zvoleného pravoúhlého trojúhelníka a určíme v něm tětivu rovnou odvěsně XZ protilehlé k úhlu α . Obdobně pro redukční úhel φ_z , kde určíme tětivu rovnou odvěsně XY přilehlé k úhlu α .

Poznámka 2. Pro průmět kružnice $k(S; r)$ roviny π dostaneme v ϱ elipsu s hlavní osou rovnoběžnou s osou x a délky $2r$ se středem v S^a . Vedlejší poloosu můžeme omezit např. buď ze vztahu $\eta_C \eta_S = y_C y_S$, kde C je bod průměru kružnice kolmého k ose x , nebo užitím afinního vztahu mezi oběma obrazci. Uvedená vlastnost se přenese do otočeného obrazce.



F Y Z I K A

Dalekohledy pro měkké paprsky X

RNDr. BOHUMIL JUREK, Dr.Sc., Praha

I. Záření — nositel informací

Nejdůležitějším prostředníkem poznání světa je světlo. Vztah mezi získáváním informací a světlem byl v minulosti cítěn tak intenzívně, že to zanechalo trvalé stopy v našem myšlení a představivosti, i ve slovníku. Pojem světla byl u mnohých škol starověku i středověku a ještě u Komenského pevně spjat s procesem poznávání. Používáme-li dnes

slov „osvěta“ a „osvícenství“, přejímáme tím poslední zlomky této tradice. A světlo si skutečně zaslouhuje výjimečného postavení v našem poznávání. Svět, zprostředkovaný světlem a zrakem, dělá dojem úplnosti. Zdá se nám, že skutečný svět se nemůže mnoho lišit od světa viděného. I prosté oko získává informace z dálky několika miliónů světelných let. Tyto schopnosti se násobí použitím optických přístrojů a různých indikátorů, např. fotografické desky. Projevilo se to již 17. října 1610, když Galileo Galilei zamířil svým čočkovým dalekohledem k planetě Jupiter a objevil tři z Jupiterových souputníků. Čočkovému dalekohledu brzy vyvstal soupeř v zrcadlových soustavách. Byla jich navržena řada, ale nejvýznamnější byly dva typy; Newtonův a Cassegrainův. Prvý je v podstatě jednoduché duté zrcadlo ve tvaru paraboloidu, vytvářející obraz velmi vzdálených předmětů v ohniskové rovině. Obraz se dá v této rovině zachytit fotografickou deskou, nebo se paprskové svazky odchýlí rovinným zrcátkem k boční stěně dalekohledu, kde se umístí okulár. Druhý z obou typů se skládá ze dvou zrcadel, z nichž duté má tvar paraboloidu, kdežto vypuklé je hyperboloidické. Obě zrcadla jsou na společné ose a ohnisko paraboloidu splývá s jedním ohniskem hyperboloidu. Paprsky z nekonečna se odrážejí od paraboloidického zrcadla směrem k jednomu z ohnisek hyperboloidu, narážejí na jednu z jeho ploch a odrážejí se do zbývajícího ohniska F_2 . Vzniklý obraz se zachycuje fotograficky, nebo se pozoruje okulem (obr. 1a).

U obou typů dalekohledů je část paprskových svazků blízko optické osy zacloněna zrcadlem nebo jiným předmětem, ale pokud zaclonění nepřesahuje 20 nebo 30 procent otvoru dalekohledu, neškodí to kvalitě obrazu.

V 19. století fyzikové poznali, že světlo je pouze jedním z případů elektromagnetického vlnění. Odlišuje se od jiných druhů tohoto vlnění vlnovou délkou, která u světla zabírá oblast přibližně mezi 4000 Å a 7600 Å. Oblasti nejbližší větších vlnových délek říkáme oblast infračerveného záření, kdežto nejbližší nižší vlnové délky tvoří oblast ultrafialového záření. Nositeli informací o pozemských předmětech se kromě toho staly jiné druhy elektromagnetického záření: krátkovlnné paprsky γ a paprsky X (Röntgenovy) dlouhovlnné a Hertzovy vlny, používané zejména v radiotelegrafii. Poznávání astronomických předmětů zůstalo však omezeno na oblast od 2900 Å do 40 000 Å a mlčky se předpokládalo, že záření stálé včetně Slunce tento obor příliš nepřekračuje.

Nový obor byl astronomii otevřen, když K. Jansky r. 1931 zachytil v New-Jersey elektromagnetickým přijímačem vlny, které nemohly pocházet z pozemských zdrojů. Přijímač, naladěný na vlnovou délku 14,7 m, měl směrovou anténu, takže bylo možné zjistit, že zdroj vlnění sleduje pohyb světové koule. Objektivně se ovšem zdroj vzhledem k naší galaxii nepohyboval a zaujímal místo, které se z naší sluneční soustavy promítalo, do souhvězdí Střelce. Janského objev byl podnětem k rozvoji

nového hvězdářského odvětví, radioastronomie. V areálech hvězdáren byla budována rozměrná detekční zařízení, z nichž kovová parabolická zrcadla o průměrech dosahujících několika desítek metrů, připomínají Newtonův zrcadlový dalekohled.

Obor elektromagnetického vlnění, používaný v astronomii, se rozšířil směrem ke krátkým vlnám. Podnětem k tomu bylo studium ionizace plynů ve vrstvě zemské atmosféry, ve výšce okolo 70 km, která byla pojmenována ionosférou. Poměrně vysoký stupeň ionizace nebylo možno vysvětlit vlivem záření ze sluneční fotosféry. V roce 1938 vyslovili Hulburt a Vegard nezávisle na sobě domněnku, že se na ionizaci zemské atmosféry podílí paprsky X ze Slunce. Přímé potvrzení této domněnky ze zemského povrchu nebylo možné. Po prvé byl tento předpoklad potvrzen teprve po druhé světové válce použitím rakety typu V-2, který byl předtím nasazen při bombardování Anglie. Pokus uskutečnila americká Námořní výzkumná laboratoř (Naval Research Laboratory). Raketa, vyslaná do horních vrstev atmosféry, nesla Schumannovy fotografické desky, jejichž emulze obsahuje jen malé množství želatiny, absorbující paprsky X a tenké filtry z aluminia a berylu, zadržující paprsky o delší vlnové délce. Zčernání desek po expozici ve vysokých vrstvách atmosféry bylo možno připsat jen působení slunečních paprsků X.

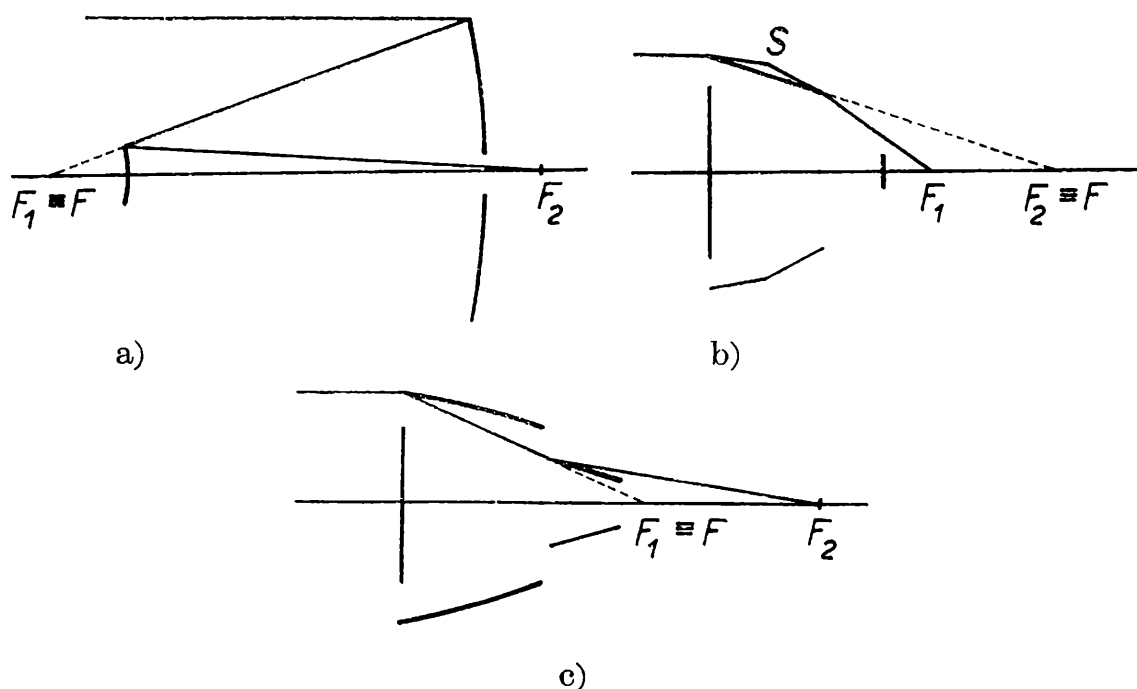
Zjištění, že Slunce vysílá paprsky X, bylo podnětem k dalšímu výzkumu. Vznikla otázka, které části Slunce a za jakých podmínek vysílají tyto paprsky. Bylo třeba vytvořit zobrazovací optiku paprsků X.

2. Zobrazení měkkými paprsky A.

Optické zobrazení při použití paprsků X je založeno na faktu, zjištěném r. 1923 A. H. Comptonem, že paprsky X se úplně odrážejí od hladkých povrchů, dopadají-li na ně pod značnými úhly. Úhly dopadu jsou v tomto případě tak blízké 90° , že je výhodné v úvahách používat místo nich jejich doplňkových úhlů, které budeme nazývat úhly sklonu. Mezní úhel sklonu, totiž největší úhel sklonu, při kterém nastává ještě úplný odraz, závisí na hustotě látky, ale daleko více na vlnové délce paprsků X. Poněvadž používané látky se příliš neliší hustotami, postačí sledovat závislost tohoto úhlu na vlnové délce. Zjišťuje se, že mezní úhel sklonu je velmi nepatrný pro vlnovou délku $1 \text{ \AA}$, ale při vlnové délce $10 \text{ \AA}$ dosahuje řádově 1° a přejdeme-li k vlnovým délkám okolo $100 \text{ \AA}$, dostaneme úplný odraz ještě při úhlech sklonu, rovných několika stupňům. Je zřejmé, že podmínky pro zobrazení jsou příznivější pro větší vlnové délky a že vlastnosti velmi měkkých paprsků X poskytují optickému konstruktérovi poměrně dobré možnosti pro jeho práci.

Ovšem, i optika velmi měkkých paprsků X značně se liší od zrcadlové optiky pro světlo. Nejnapadnější rozdíl spočívá v tom, že v optických

soustavách pro světlo se paprsky při každém odrazu obracejí proti dosavadnímu směru (obr. 1a), což neplatí o chodu paprsků v soustavách pro záření X. V těchto soustavách záření postupuje stále od vstupního otvoru k obrazovému bodu (obr. 1b, 1c). To je možné jen tehdy, jsou-li kolmé průměty bodů dopadu na optickou osu mimo úsečku ohnisko—vrchol zrcadla.



Obr. 1. Cassegrainův dalekohled pro světlo (a) a pro měkké paprsky X (b, c) V případech b, c jsou rozměry ve směru kolmém k optické ose zveličeny. F ohnisko paraboloidu, F_1 , F_2 ohniska hyperboloidu, S jeden z průsečíků spáry s rovinou nákresny.

V optice paprsků X jsou možné jak Newtonův, tak i Cassegrainův typ dalekohledu. Prakticky se však používá Cassegrainův typ. Důvod je v tom, že Newtonův dalekohled sice vytváří bezvadný obraz nekonečně vzdáleného bodu na optické ose, ale vadné obrazy jiných nekonečně vzdálených bodů. Zářící body mimo optickou osu se nejeví v ohniskové rovině jako body, ale jako čárky, směřující od optické osy. Taková vada se nazývá koma. V obrazech Cassegrainova dalekohledu se sice také jeví koma, ale složitější sestava tohoto dalekohledu dává konstruktérovi přece jen jakési možnosti tuto vadu zmenšit. Mohli bychom se ptát, je-li koma Newtonova dalekohledu opravdu tak závažný nedostatek, aby bylo třeba se tomuto typu vyhýbat. Můžeme poukázat na to, že se Newtonova typu běžně používá ve světelné zobrazovací optice. Proti tomu se dá namítnout, že úspěšnost typu dalekohledu ve světelné optice nám mnoho neříká o jeho použitelnosti v optice paprsků X, a to proto, že se v prvním případě využívají oblasti zrcadla blízké optické ose, kdežto ve druhém se paprsky odrážejí od zrcadel v poměrně vzdálených zónách.

Ponecháme nyní stranou tuto otázku, kterou zatím rozhodla praxe a všimneme si některých zvláštností Cassegrainova dalekohledu pro měkké paprsky X. Především zjišťujeme, že tato optická soustava má dvě varianty, podle toho, se kterým ohniskem hyperboloidu ztotožníme ohnisko paraboloidu. Je-li to vzdálenější ohnisko, potom se paprsek z nekonečně vzdáleného bodu na optické ose po odraze na duté straně paraboloidu odrazí na duté straně bližší plochy dvojplachého hyperboloidu a protíná optickou osu v jeho bližším ohnisku (obr. 1b). Obě odrazné plochy spolu souvisí kružnicí, jejíž jeden průsečík s nákresem jsme označili *S*. Tuto společnou čáru můžeme nazvat spárou mezi odraznými plochami. Nyní přejdeme ke druhé variantě (obr. 1c). Paprsek z nekonečně vzdáleného bodu na optické ose se po odraze na duté straně paraboloidu odrazí od vypuklé strany bližší z ploch hyperboloidu a protíná optickou osu ve vzdálenějším ohnisku hyperboloidu. Využité odrazné plochy obou zrcadel se vzájemně nestýkají.

U obou variant jsou využité odrazné plochy poměrně vzdálené od optické osy. Nevyužitý prostor okolo optické osy je třeba zaclonit, aby záření od předmětu nedopadalo bez předepsaných odrazů na fotografickou desku. Děje se to dvěma středovými clonami. Středové zaclonění je značné. Dosahuje hodnot okolo 70 % průměru vstupního otvoru. Při takovém středovém zaclonění je již obraz patrně znehodnocen. Rozlišovací schopnost dalekohledu je sice stejná jako u dalekohledů s plným otvorem, ale dobře se zobrazují jen některé struktury. Tak např. osnova kontrastních rovnoběžných čar, jejichž vzájemná vzdálenost se blíží mezi rozlišení, je na obraze snadno rozlišitelná, ale útvary málo kontrastní a nepravidelné jsou málo zřetelné. Tento nedostatek souvisí s konstrukčními požadavky na zobrazovací přístroje pro paprsky X, zejména s požadavkem rasantního dopadu (malého úhlu sklonu) a nedá se úplně odstranit.

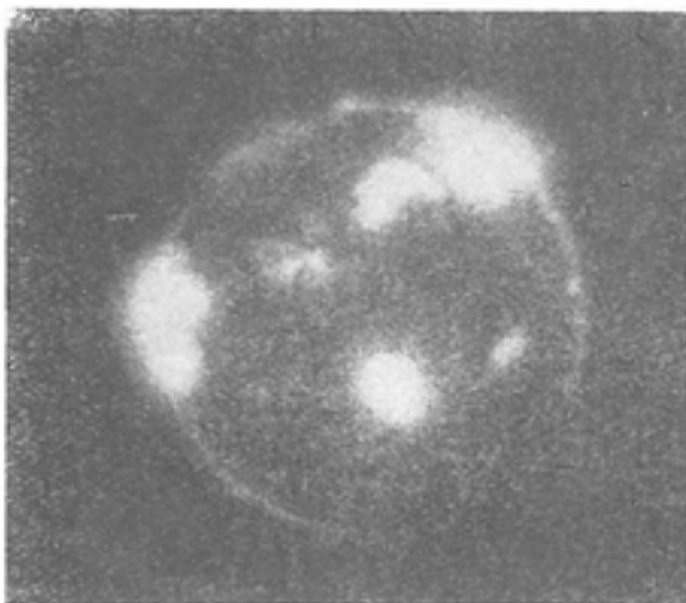
Je pochopitelné, že popsané optické konstrukce mají technické obtíže. Jedna z nich spočívá v tom, že se v nich používá nekulových (asférických ploch), které nelze aproximovat plochami kulovými. Běžná optika používá kulových lámavých a odrazných ploch a optická výroba je zařízena téměř výlučně na obrábění kulových ploch. Není sice příliš snadné zhotovit asférickou plochu s přesností na setinu milimetru, ale taková přesnost stačí jen pro osvětlovací zařízení. Zrcadla pro zobrazovací optiku je třeba obrobit přesně na malé zlomky mikronu. U soustav pro viditelné světlo je to 0,03 mikronu, soustavy pro paprsky X vyžadují ještě větší přesnosti. Přitom při práci na zrcadlech pro paprsky X není možné vyjít od kulových ploch, poněvadž využité zrcadlící plochy mají zcela odlišnou povahu. Zde mohou být výchozími plochami spíše kužele. Byly dokonce uskutečněny dosti úspěšné pokusy o nahrazení zrcadlících ploch úseky kuželů. V obrábění zrcadlových ploch pro paprsky X ovšem nebylo dosud řečeno poslední slovo.

Je patrné, že dalekohledy pro paprsky X mají zásadní, těžko redukovatelné vady a přinášejí vážné technické problémy. Zůstávají však důležitými prostředky výzkumu Vesmíru, zejména Slunce.

Poznámka. Jednotka délky mikron se správněji nazývá mikrometr (μm).

3. Užití dalekohledů pro měkké paprsky A.

Aplikace soustav, které jsou předmětem našeho článku, na výzkum Slunce, postupovaly velmi pomalu. V roce 1952 se objevily ve vědecké i patentové literatuře první podněty ke konstrukci soustav s rasantním dopadem. Nejzávažnější byly práce H. Woltera, který zdůvodnil potřebu konstrukcí Cassegrainova typu a sám podal některé prakticky použitelné příklady. Vývody a návrhy Wolterovy vzbudily pozornost pracovníků v kosmickém výzkumu a v roce 1960 se v literatuře objevily články, ve kterých se už konkrétně pojednávalo o možnosti využití dalekohledů pro rasantní dopad k výzkumu slunečního záření X. Brzy nato skupina amerických vědců a techniků, zejména R. Giacconi, N. F. Harmon, R. F. Lacey a Z. Szilagyí přikročila k realizaci takové soustavy. V roce 1963 byl dalekohled zhotoven a byl vyzkoušen ve spolupráci s Ústředím pro kosmické lety (Goddard Space Flight Center). Už tento první pokus ukázal schůdnost podniknuté cesty, ale zařízení mělo ještě nedostatky, které částečně znehodnocovaly výsledky. Další pokus je třeba hodnotit jako plně úspěšný. Optiku připravili J. H. Underwood a W. S. Muney. Raketa byla vypuštěna v květnu 1966 ve White Sands v Novém Mexiku a dosáhla nejvyšší výšky 164 km. Byla vybavena zařízením ke kontrole výšky a optika byla orientována speciálním pointovacím zařízením. Bylo zhotoveno 16 snímků Slunce při použití 5 různých filtrů. Naše ukázka (obr. 2) byla pořízena ve výšce 140 km nad zemí. Snímky v paprscích X byly po návratu rakety srovnány se snímky v různých oborech viditelného záření, aby bylo možno sledovat souvislost emise paprsků X s projevy sluneční aktivity. Získané poznatky ukazují, že byla úspěšně otevřena nová cesta k poznání Slunce.



Obr. 2. Snímek Slunce v měkkých paprscích X.

Elektrické pole*)

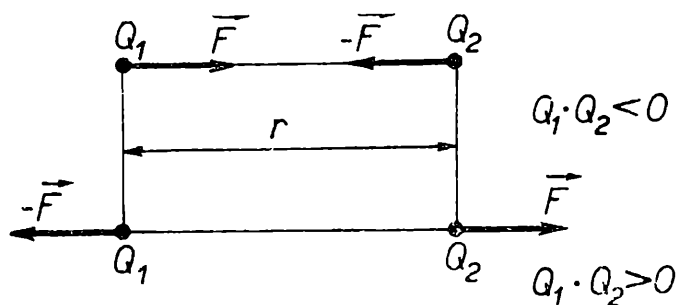
Dr. OLDŘICH PIVNIČKA, gymnásium Znojmo

Úvod

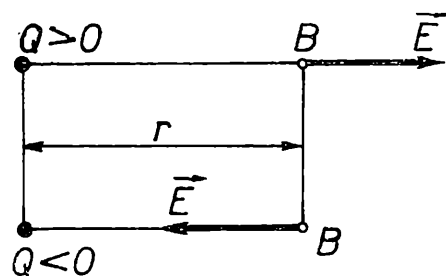
Kolem elektricky nabitých těles, např. kolem malých nabitých kuliček, působí na jiná elektricky nabitá tělesa síly zvané elektrické. Prostor, v němž se tyto síly projevují, označujeme jako elektrické pole. Vlastnosti elektrických polí nabitých těles vyvozují se ze zákona objeveného r. 1785 francouzským inženýrem a fyzikem Ch. Coulombem. Při volbě soustavy jednotek SI má tento Coulombův zákon tvar

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1)$$

kde F je síla působící na jeden i druhý náboj Q_1 , Q_2 , které si před-



Obr. 1



Obr. 2

stavujeme umístěné na tělesech zanedbatelných rozměrů (tzv. bodové náboje), r je jejich vzdálenost, ϵ_0 konstanta zvaná permitivita vakua, ϵ_r relativní permitivita prostředí. Pro ϵ_0 platí vztah

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{A^2s^2}.$$

Permitivita vakua má tedy rozměr

$$[\epsilon_0] = \frac{A^2s^2}{Nm^2} = m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2,$$

ϵ_r je pouhé číslo. Pokud jde o směr a orientaci působících sil, platí, že směr je dán spojnici bodových nábojů Q_1 , Q_2 , orientace je pak taková, že náboje se navzájem přitahují pro $Q_1 Q_2 < 0$ (náboje nesouhlasné), a odpuzují pro $Q_1 Q_2 > 0$ (náboje souhlasné). (Obr. 1.)

*) Článek k prostudování pro FO.

V dalších úvahách budeme vždy předpokládat, že kolem elektrických nábojů je vakuum, pro něž $\varepsilon_r = 1$.

Závěry, ke kterým dospějeme, budou téměř beze změny platit i pro plynné prostředí, pro něž se ε_r liší od 1 zcela nepatrně.

Intenzita elektrického pole a elektrický potenciál

Elektrické pole v daném místě můžeme charakterizovat dvěma veličinami: intenzitou elektrického pole $\mathbf{E}$, což je veličina vektorová, a elektrickým potenciálem φ , který je veličinou skalární. Intenzitou elektrického pole $\mathbf{E}$ rozumíme poměr mezi elektrickou silou $\mathbf{F}$ a velikostí náboje Q , na nějž síla $\mathbf{F}$ působí

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q}.$$

Z definičního vztahu vychází pro rozměr intenzity

$$\frac{\text{N}}{\text{As}} = \text{m kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}$$

V dalším zavedeme jednotku volt V s rozměrem

$$\text{V} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}$$

Tento vztah k základním jednotkám lze zjednodušit na V m^{-1} ; proto norma stanoví pro intenzitu elektrického pole jednotku s názvem „volt na metr“.

Uvažujeme-li o silovém působení dvou bodových nábojů, pak z Coulombova zákona vyplývá, že v místě, kde se nachází náboj Q_2 , má intenzita velikost

$$E_1 = \frac{F}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2}$$

Je to intenzita pole vytvořeného nábojem Q_1 . Podobně v místě, kde se nachází náboj Q_1 , je intenzita elektrického pole, které přísluší náboji Q_2 , dána vztahem

$$E_2 = \frac{F}{Q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{r^2}$$

Obecně tedy platí, že velikost intenzity elektrického pole bodového náboje Q je v bodě B určena vztahem

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (2)$$

kde r je vzdálenost bodu B od náboje Q . Pokud jde o směr a orientaci vektoru intenzity $\mathbf{E}$, je pro $Q > 0$ dána orientovanou přímkou QB ,

pro $Q < 0$ orientovanou přímkou BQ . (Obr. 2.) Vyplývá to z orientace sil působících mezi bodovými elektrickými náboji. (Písmenem Q označujeme jednak náboj, jednak bod, v němž je náboj umístěn.) Ze vztahu (2) vidíme, že velikost intenzity E je funkcí vzdálenosti r od náboje Q a že rychle klesá s rostoucí vzdáleností. (Obr. 3.)

Pokud jde o elektrický potenciál φ v bodě B elektrického pole, souvisí s prací A , kterou konají vnější síly při přemístění kladného náboje Q' z místa, kde jeho potenciální energii prohlásíme za nulovou, do místa B . Tato práce je kladná, jestliže při přemístění náboje Q' vnější síly přemáhají síly elektrického pole, nebo záporná, jestliže práci konají síly pole. Jelikož elektrická síla působící v poli na náboj Q' je podle předcházejícího úměrná velikosti tohoto náboje, bude totéž platit i o práci A

$$A = \varphi Q' \quad (3)$$

Činitel φ je právě potenciál uvažovaného pole v bodě B . Může být kladný, záporný nebo i nulový v případě, že přemístění náboje Q' do bodu B nebylo spojeno s konáním práce.

Potenciál φ má podle (3) rozměr

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[Q']} = \frac{\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}}{\text{As}} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}.$$

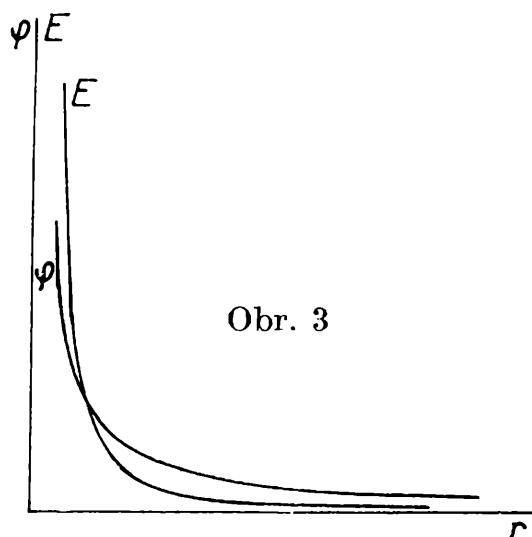
Hlavní jednotka má název volt a označení V, jak jsme již uvedli.

Jestliže ve vztahu (3) je $Q' = +1 \text{ C}$, pak potenciál φ (ve voltech) v bodě B je číselně roven práci A (v joulech), kterou musejí vykonat vnější síly při přemístění náboje $+1 \text{ C}$ z místa nulové potenciální energie do bodu B . Potenciál φ v uvažovaném bodě je rovný 1 V , jestliže práce vnějších sil při přemístění náboje $+1 \text{ C}$ z místa nulové potenciální energie je 1 J .

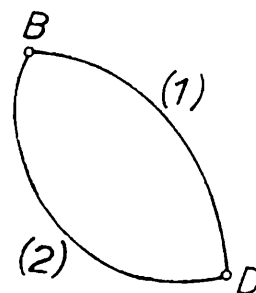
Práce A spojená s přemísťováním náboje Q' z bodu D do bodu B záleží na poloze těchto dvou bodů v elektrickém poli, ale nikoliv na dráze, po níž se náboj přemísťuje. Dokážeme si to jednoduchou úvahou. Představme si, že při přemístění náboje Q' z D do B po dráze (1) vykonají vnější síly práci A_1 a po dráze (2) práci $A_2 > A_1$. (Obr. 4.) Jestliže naopak přejde náboj Q' z B do D , vykonají práci A_1 [při dráze (1)], resp. A_2 [při dráze (2)] síly elektrického pole. Přenesme nyní náboj Q' z D do B po dráze (1). Pak tento náboj necháme silami elektrického pole přemístit zpět do D po dráze (2). Tím získáme práci $A_2 - A_1$. Opakováním tohoto cyklického děje mohli bychom získat libovolně velkou práci „z ničeho“, což není možné. Proto musí být $A_1 = A_2$.

Z této úvahy plyne podle (3), že i potenciál φ v místě B je určen jednoznačně, je-li dáno místo nulové potenciální energie.

Zabývejme se nyní elektrickým polem bodového náboje Q . Za místo nulové potenciální energie volíme zde obvykle množinu bodů od náboje Q velmi vzdálených, tzv. „nekonečno“. Je-li náboj Q kladný, pak při přiblížení jiného kladného náboje Q' z nekonečna do nějakého bodu B pracují vnější síly proti odpudivým elektrickým silám pole, takže v libovolném bodě B je potenciál kladný. V poli buzeném záporným nábojem je tomu naopak, tj. v takovém poli je potenciál všude záporný.



Obr. 3



Obr. 4

Při určování potenciálu v určitém místě B pole buzeného bodovým nábojem Q použijeme toho, že práce spojená s přemístěním elektrického náboje Q' nezáleží na dráze. Můžeme proto volit dráhu nejjednodušší, tj. úsečku DB na polopřímce QB , přičemž bod D vzdálíme „do nekonečna“ (Obr. 5.) V bodě D , který má od náboje Q vzdálenost r_n , působí na náboj Q' síla o velikosti

$$F_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r_n^2}$$

Síla působící v bodě B , jehož vzdálenost od Q je r , má velikost

$$F_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2}$$

Směr obou sil je určen přímkou QB . Stejnou velikost, ale opačnou orientaci mají vnější síly, které přemísťují náboj Q' po úsečce DB . Je zřejmé, že elektrická síla i vnější síla přemísťující náboj Q' má v každém bodě úsečky DB jinou velikost. Tuto proměnnou sílu nahradíme jakousi střední silou, jejíž velikost $\bar{F}$ je geometrickým průměrem¹⁾ obou krajních hodnot

$$\bar{F} = \sqrt{F_D F_B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r r_n} QQ'$$

Tato průměrná síla působí po dráze délky $r_n - r$, takže práce při přemístění náboje Q' z D do B je

$$A' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r r_n} Q Q' (r_n - r) = \frac{Q Q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n} \right)$$

Jelikož — podle předpokladu — je r_n velmi veliké („roste do nekonečna“), blíží se druhý zlomek v závorce nule, takže pro bod D v nekonečnu dostáváme

$$A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} Q' \quad (3')$$

Porovnáním s (3) vyplývá pro potenciál φ v poli bodového náboje Q vztah

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (4)$$

Potenciální energie náboje Q' v bodě B je pak rovna práci A potřebné k přemístění tohoto náboje z nekonečna do bodu B , tedy podle (3')

$$W = \frac{Q Q'}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (4')$$

a vzhledem k (5)

$$W = \varphi \cdot Q' \quad (5)$$

Jsou-li oba náboje Q , Q' kladné, je práce vykonaná vnějšími silami, a tedy i potenciální energie, kladná. Totéž platí, jsou-li oba náboje Q , Q' záporné. Je-li jeden z nábojů kladný a druhý záporný, vnější síly práci spotřebují a potenciální energie je záporná.

Podle vztahů (4), (5) je potenciál i potenciální energie funkcí vzdálenosti r daného místa od bodového náboje. S rostoucí vzdáleností obě veličiny klesají, ovšem nikoliv tak rychle jako intenzita elektrického pole. (Obr. 3.) V místě velmi vzdáleném, „v nekonečnu“, jsou obě veličiny rovny nule. Geometrická místa bodů stejného potenciálu, tzv. hladiny čili ekvipotenciální plochy, jsou soustředné kulové plochy se středem v Q .

Rozdíl potenciálů mezi dvěma místy elektrického pole nazývá se napětí U

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (6)$$

Měří se ve stejných jednotkách jako potenciál, tj. ve voltech.

Příklad: V elektrickém poli náboje $Q = 1 \mu\text{C}$ je v místě D ve vzdálenosti $r_1 = 1 \text{ m}$ náboj $Q' = 0,1 \mu\text{C}$. Tento náboj přemístíme do bodu B ve vzdálenosti $r_2 = 2 \text{ m}$ od náboje Q ; přitom náboj Q leží na úsečce BD . Jakou práci vykonají vnější síly?

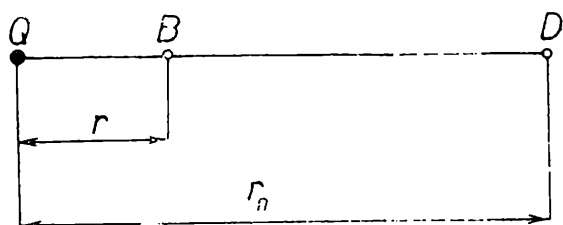
Řešení: Vykonaná práce je nezávislá na dráze, po níž se náboj Q' přemísťuje. Volme proto dráhu podle obr. 6. Na oblouku půlkružnice DD' se práce nekoná, neboť směr pohybu je stále kolmý na vektor síly, $F \cdot s \cdot \cos 90^\circ = 0$. Na úsečce $D'B$ je práce

$$A = Q' (\varphi_B - \varphi_{D'}) = \frac{Q'Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

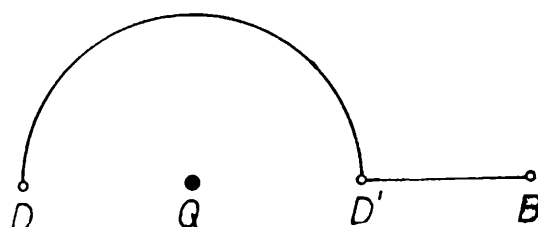
Numericky

$$A = -4,5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Práce vnějších sil je záporná, což značí, že vnější síly práci spotřebují, práci konají síly elektrického pole.



Obr. 5



Obr. 6

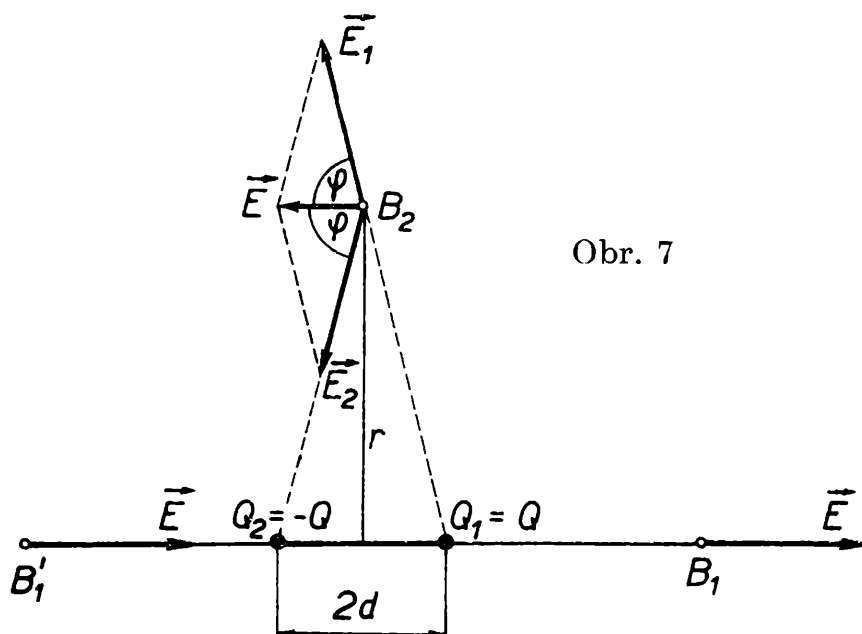
Elektrické pole soustavy nábojů

Pro další úvahy je důležitý zákon superpozice, podle něhož při současném působení několika nábojů působí každý náboj stejně, jako kdyby působil sám. Platnost tohoto zákona je ověřena zkušeností. Je-li tedy elektrické pole buzeno větším počtem nábojů $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, pak intenzitu $\mathbf{E}$ a potenciál φ určíme složením jednotlivých intenzit, resp. potenciálů

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (7)$$

Tohoto vztahu užijeme při zkoumání pole elektrického dipólu, což je soustava dvou stejně velkých, ale opačných bodových nábojů $Q_1 = +Q > 0, Q_2 = -Q$ v konstantní vzdálenosti $l = 2d$.

Vypočteme intenzitu elektrického pole a potenciál v místech B_1, B'_1 na podélné ose a v místě B_2 na ose příčné. Všechny tři body mají od středu dipólu tutéž vzdálenost r . (Obr. 7.)



Obr. 7

V bodě B_1 má výsledná intenzita velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{(r-d)^2} - \frac{Q}{(r+d)^2} \right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2 + 2rd + d^2 - (r^2 - 2rd + d^2)}{(r-d)^2 (r+d)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4rd}{(r^2 - d^2)^2}$$

Je-li d malé ve srovnání s r , můžeme je ve jmenovateli zanedbat

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4d}{r^3}$$

Zavedeme-li ještě tzv. moment dipólu $P = Q \cdot l$ dostáváme

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2P}{r^3} \quad (8)$$

Snadno bychom se přesvědčili, že intenzita elektrického pole v bodě B'_1 má stejnou velikost i orientaci jako v bodě B_1 .

V bodě B_2 má výsledná intenzita velikost

$$E = E_1 \cos \varphi + E_2 \cos \varphi = 2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)} \cos \varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{r^2 + d^2} \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

Jestliže můžeme zanedbat d vůči r a zavedeme-li opět moment dipólu, dostáváme

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^3} \quad (9)$$

Vidíme, že v poloze B_2 má intenzita elektrického pole poloviční velikost ve srovnání s polohami B'_1 , B' . Elektrický moment dipólu je definován jako veličina vektorová. Je orientována od náboje záporného ke kladnému. Na podélné ose mají vektory intenzity a elektrického momentu orientaci souhlasnou, na příčné ose opačnou.

Potenciál v bodě B_1 je

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r-d} - \frac{Q}{r+d} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2-d^2} \cdot 2d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^2} \quad (10)$$

Při výpočtu potenciálu φ'_1 v bodě B'_1 změní se pořadí členů v závorce, takže je

$$\varphi'_1 = -\varphi_1$$

V bodě B_2 je

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\sqrt{r^2-d^2}} - \frac{Q}{\sqrt{r^2-d^2}} \right) = 0 \quad (11)$$

Je tedy rovina souměrnosti dipólu hladinou nulového potenciálu.

Příklad: Ve vzdálenosti $l = 0,3$ m od kladného náboje $Q_1 = 0,2 \mu\text{C}$ je náboj Q_2 . Jaký musí být tento náboj, aby v bodě B byl potenciál nulový. Přitom vzdálenost $d = BQ_1 = 0,4$ m, směry BQ_1 , Q_1Q_2 jsou navzájem kolmé. (Obr. 8.)

Řešení: Podle zadání platí

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{d} + \frac{Q_2}{\sqrt{l^2+d^2}} \right) = 0$$

Umocněním a úpravou dostáváme

$$Q_2^2 = Q_1^2 \frac{l^2+d^2}{d^2}$$

$$Q_2 = \pm Q_1 \frac{\sqrt{l^2+d^2}}{d}$$

Protože jsme při řešení rovnici umocnili, musíme provést zkoušku dosazením do původního vztahu. Vyhovuje zřejmě jen kořen záporný. Numericky

$$Q_2 = -0,25 \mu\text{C}$$

Energie soustavy elektrických nábojů

Mějme soustavu elektrických bodových nábojů Q_1 , Q_2 ve vzdálenosti r . Pak potenciální energie W_{21} náboje Q_2 v poli náboje Q_1 je

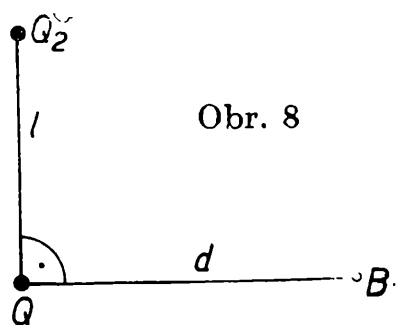
$$W_{21} = Q_2 \varphi_1 = Q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Uvažujeme-li o potenciální energii W_{12} náboje Q_1 v poli náboje Q_2 , dostaneme podobně

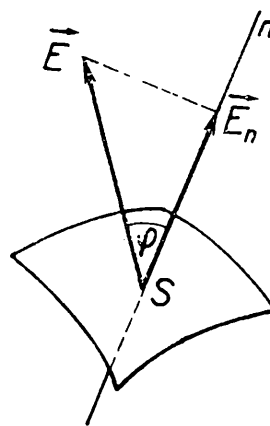
$$W_{12} = Q_1 \cdot \varphi_2 = Q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

tedy stejný výsledek jako v prvním případě. Bylo by však mylné považovat za energii soustavy obou nábojů součet $W_{21} + W_{12}$. Soustava může totiž vzniknout například tak, že k nepohyblivému náboji Q_1 přiblížíme z nekonečna až do vzdálenosti r náboj Q_2 , nebo obráceně. V obou případech je práce vnějších sil

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r},$$



Obr. 8



Obr. 9

což je i energie soustavy. Pohlížíme-li tedy na náboje Q_1 , Q_2 jako na členy soustavy, musíme každému z nich přisoudit energii

$$\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r} = \frac{1}{2} W_{12} = \frac{1}{2} W_{21}$$

Tento výsledek se dá zobecnit: máme-li soustavu n bodových nábojů $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$, pak energie této soustavy je

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n W_{ik}, \quad (12)$$

kde

$$W_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_k}{r_{ik}},$$

přičemž $r_{ik} = r_{ki}$ je vzájemná vzdálenost nábojů Q_i, Q_k . Zřejmě je $W_{ki} = W_{ik}$.

Důkaz provedeme úplnou indukcí. Především je podle předcházejícího zřejmé, že vztah platí pro $n = 2$. Předpokládejme nyní platnost vztahu (12) a připojme k soustavě n nábojů další bodový náboj Q_{n+1} . Přitom se práce vnějších sil vyjádří užitím zákona superpozice takto

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_{n+1}}{r_{1,n+1}} + \frac{Q_2 Q_{n+1}}{r_{2,n+1}} + \dots + \frac{Q_n Q_{n+1}}{r_{n,n+1}} = \\ &= W_{1,n+1} + W_{2,n+1} + \dots + W_{n,n+1} = \\ &= \frac{1}{2} [(W_{1,n+1} + W_{n+1,1}) + (W_{2,n+1} + W_{n+1,2}) + \\ &\quad + \dots + (W_{n,n+1} + W_{n+1,n})] . \end{aligned}$$

O tuto hodnotu stoupne pak energie soustavy všech $n + 1$ nábojů. Celková energie rozšířené soustavy je pak

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + A = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{ik=1 \\ i \neq k}}^n W_{ik} + \frac{1}{2} (W_{1,n+1} + W_{n+1,1} + W_{2,n+1} + W_{n+1,2} + \\ &\quad + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n W_{ik} \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

Příklad: Tři stejné náboje $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$ jsou ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně a . Jaký náboj Q_4 musíme umístit do středu trojúhelníka, aby se energie soustavy těchto 4 nábojů rovnala k -násobku energie soustavy původních 3 nábojů.

Řešení: Soustava 3 nábojů má energii

$$W_3 = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32})$$

Jelikož všechny sčítance v závorce jsou stejné, lze psát

$$W_3 = 3W_{12} .$$

Energie soustavy 4 nábojů je

$$W_4 = W_3 + \frac{1}{2} (W_{14} + W_{41} + W_{24} + W_{42} + W_{34} + W_{43})$$

Také zde jsou si všechny členy v závorce rovny, takže

$$W_4 = 3W_{12} + 3W_{14} .$$

Podle zadání je

$$W_4 = k W_3 ,$$

čili

$$3W_{12} + 3W_{14} = k \cdot 3W_{12} .$$

Dosadíme-li

dostáváme po úpravě

$$Q_4 = (k - 1) \frac{\sqrt{3}}{3} Q$$

Elektrické pole nabité koule

Pro další úvahy bude velmi důležitý pojem elektrického silového toku N . Elektrickým silovým tokem N_S plochou S rozumíme součin

$$N_S = E_n \cdot S = ES \cos \varphi,$$

kde E_n je velikost složky intenzity ve směru normály n plochy S (obr. 9). Silový tok je veličina skalární; jednotkou je

$$\frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \text{m}^2 = \text{Vm}.$$

Vypočteme silový tok kulovou plochou, jejíž střed je v místě bodového náboje Q . Jelikož vektor intenzity $\mathbf{E}$ je na kulovou plochu kolmý, platí

$$N_k = E \cdot S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Tento výsledek je zvláštním případem důležité věty Gaussovy: Elektrický silový tok libovolnou uzavřenou plochou je dán podílem celkového náboje Q uvnitř plochy a permitivity vakua ϵ_0

$$N = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Této Gaussovy věty užijeme k vyšetření elektrického pole nabitě duté koule. Označme poloměr koule R , náboj rovnoměrně na kouli rozložený Q . Z důvodů souměrnosti musí mít intenzita elektrického pole v každém místě B směr SB , kde S je střed koule, v místech stejně vzdálených od středu musí mít intenzita stejnou velikost. Opíšeme-li kolem středu S kulovou plochu poloměru $r > R$, pak podle definice silového toku je

$$N = E 4\pi r^2$$

a podle Gaussovy věty

$$N = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Srovnáním obou vztahů dostáváme

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

To znamená, že vně nabitě koule je intenzita elektrického pole stejná, jako kdyby náboj byl nikoliv na povrchu, nýbrž ve středu koule. Protože z intenzity elektrického pole bodového náboje jsme odvodili i elektrický potenciál φ , je i potenciál vně nabitě koule stejný, jako kdyby elektrický náboj byl umístěn ve středu koule

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Pro intenzitu a potenciál těsně nad povrchem koule ($r \rightarrow R$), čili, jak se říká, na kouli, platí

$$E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2},$$

$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Uvažujme nyní podobně o kulové ploše se středem S , poloměru $r < R$. Z definice silového toku plyne

$$N = E \cdot 4\pi r^2$$

z Gaussovy věty

$$N = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0,$$

neboť uvnitř této kulové plochy nejsou podle předpokladu elektrické náboje. Srovnáním obou výrazů dostáváme důležitý výsledek: uvnitř duté nabitě koule je intenzita elektrického pole nulová. Totéž platí i pro dutá tělesa jiných tvarů. Pokusně se to ukazuje tzv. Faradayovou klecí.

Elektrický potenciál uvnitř duté koule určíme takto: představme si na kulové ploše velmi malý otvor, kterým se vlastnosti elektrického pole nabitě koule znatelně nezmění. Přemístí-li vnější síly kladný jednotkový náboj z nekonečna až na povrch koule k onomu malému otvoru, je práce těchto sil *číselně* rovna potenciálu na povrchu koule.

Projde-li jednotkový náboj otvorem a dostane se dovnitř koule, pak přestanou působit elektrické síly, takže při tomto přemísťování uvnitř koule se již nekoná práce. To tedy znamená, že potenciál uvnitř koule je stejný jako na jejím povrchu.

Tento výsledek platí i pro vnitřek plné koule a rovněž pro jiná vodivá tělesa.

Příklad: Vodivé těleso nabité na potenciál 100 V je opatřeno hrotem, jehož poloměr křivosti je 0,1 mm. Elektrická pevnost vzduchu kolem hrotu je $30\,000 \frac{\text{V}}{\text{cm}}$ (Elektrickou pevností rozumíme největší intenzitu elektrického pole, kterou izolant snese bez probití.) Nastane sršení elektřiny z hrotu?

Řešení: Pro vyjádření intenzity a potenciálu elektrického pole na hrotu uijeme vztahy platné pro kulovou plochu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \cdot \frac{1}{r} = \varphi \cdot \frac{1}{r}.$$

V našem případě je

$$E = 100 \text{ V} \cdot \frac{1}{0,01 \text{ cm}} = 10\,000 \frac{\text{V}}{\text{cm}} < 30\,000 \frac{\text{V}}{\text{cm}},$$

takže sršení nenastane.

OPRAVY

Do oprav úloh FO kat. A, resp. C, otištěných na str. 46 se vloudily další chyby. Správné znění těchto oprav je:

6. řádek zdola místo resp. ma ; R má být m ; R ,

5. ř. zd. místo $R_6 = \Omega$ má být $R_6 = 7,0 \Omega$

5. ř. zd. místo na str. 12 má být na str. 36,

4. ř. zd. místo na str. 21 má být na str. 40.

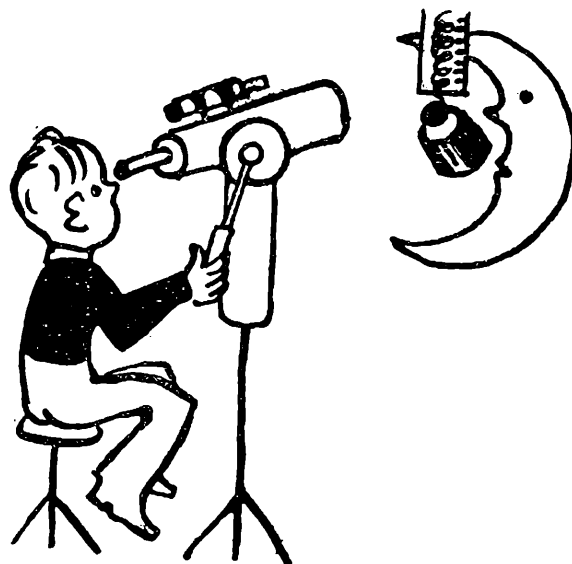
~

V čísle 2 si doplňte v článku prof. Dr. R. Košťála „Hodnota a chyba měřené veličiny“ konec odst. 4,2 touto poznámkou:

Chyba měřené veličiny se počítá také někdy zjednodušeně a přibližně tak, že se sečtou $|\Delta_k|$ a střední chyba aritmetického průměru se stanoví jako aritmetický průměr $|\Delta_k|$, tedy

$$\bar{\delta x} = \frac{\sum_{k=1}^n |\Delta_k|}{n}. \quad (6)$$

Užitím výsledků pro výpočet střední chyby aritmetického průměru z kladných odchylek je vidět, že tato přibližná metoda udává chybu při 5 měřeních o 60 % větší, při 10 měřeních o 150 % větší a při 50 měřeních o 400 % větší. Je tedy méně výhodná při větším počtu měření než metody uvedené dříve.

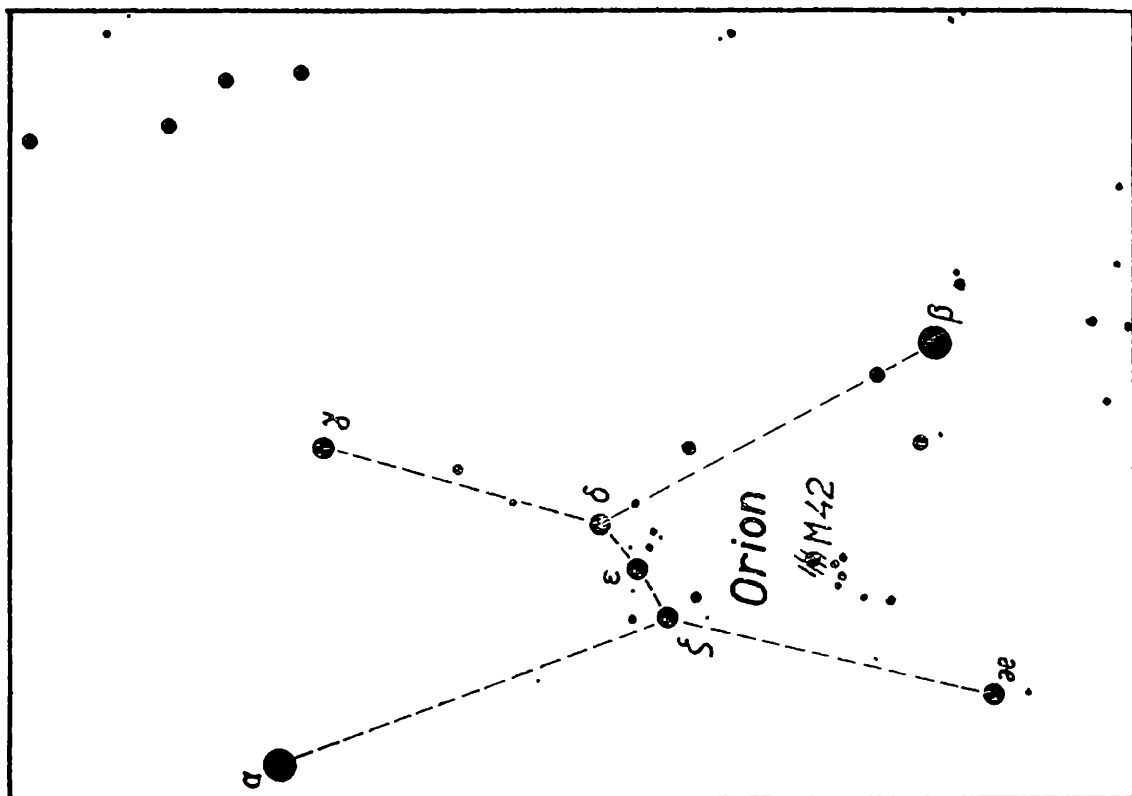


Souhvězdí zimní oblohy

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

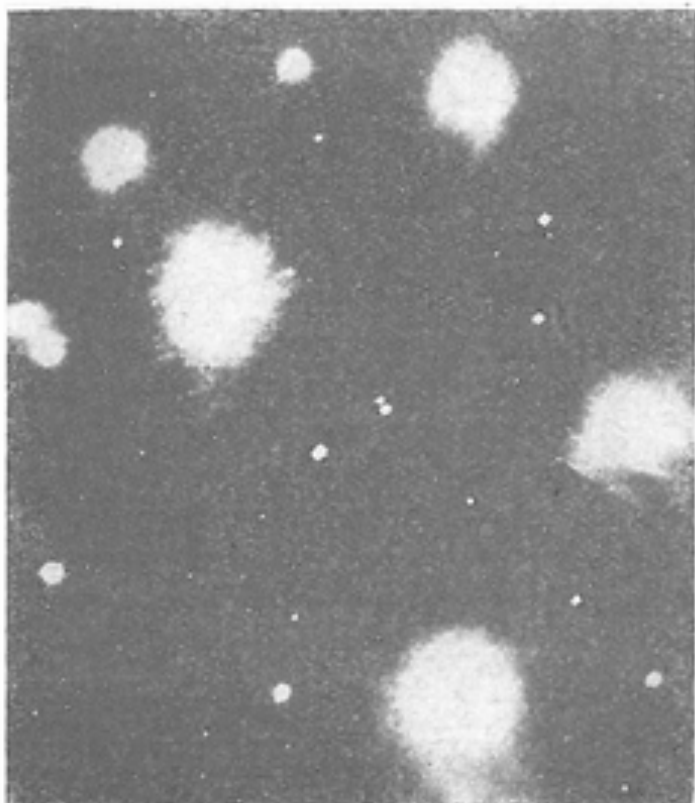
V zimních měsících dominuje nad jižním obzorem překrásné souhvězdí Orióna, na jihovýchodě můžeme pozorovat nejjasnější hvězdu — Síría v souhvězdí Velkého psa. Směrem na jihozápad od Orióna je málo výrazné souhvězdí Řeka Eridan, nad západním obzorem je souhvězdí Ryb a souhvězdí Pegasa. V blízkosti nadhlavníku najdeme souhvězdí Vozky s jasnou hvězdou Capellou. Mezi Vozkou a Oriónem je zodiakální souhvězdí Býka s jasnou červenou hvězdou Aldebaranem. Nad východním obzorem vychází souhvězdí Raka a Lva.

Na obr. 1 je mapka souhvězdí Orióna. Nejjasnější hvězdou v tomto souhvězdí je modrá hvězda Rigel (β Orionis), jejíž zdánlivá hvězdná velikost je $0,1^m$. Hvězda α , nazývaná Betelzeuge, je červená obří hvězda a patří mezi polopravidelné proměnné; její hvězdná velikost se mění od $0,4^m$ do $1,3^m$ v periodě 2070 dnů. Tři jasné hvězdy, tvořící pás Orióna, se nazývají Mintaka, Alnilam a Alnitak. Na jih od těchto hvězd najdeme i pouhým okem viditelnou plynnou mlhovinu M 42 s vícenásobnou hvězdou θ , která se nazývá Trapez (Lichoběžník). Na obr. 2 je fotografie temných i svítících mlhovin, v okolí hvězdy ξ Orionis. Tyto mlhoviny úzce souvisejí s mladými hvězdami, které objevil v roce 1947 akademik V. A. Ambarcumjan se svými spolupracovníky na Bjurakanské hvězdárně u Jerevanu a nazval je hvězdné asociace.

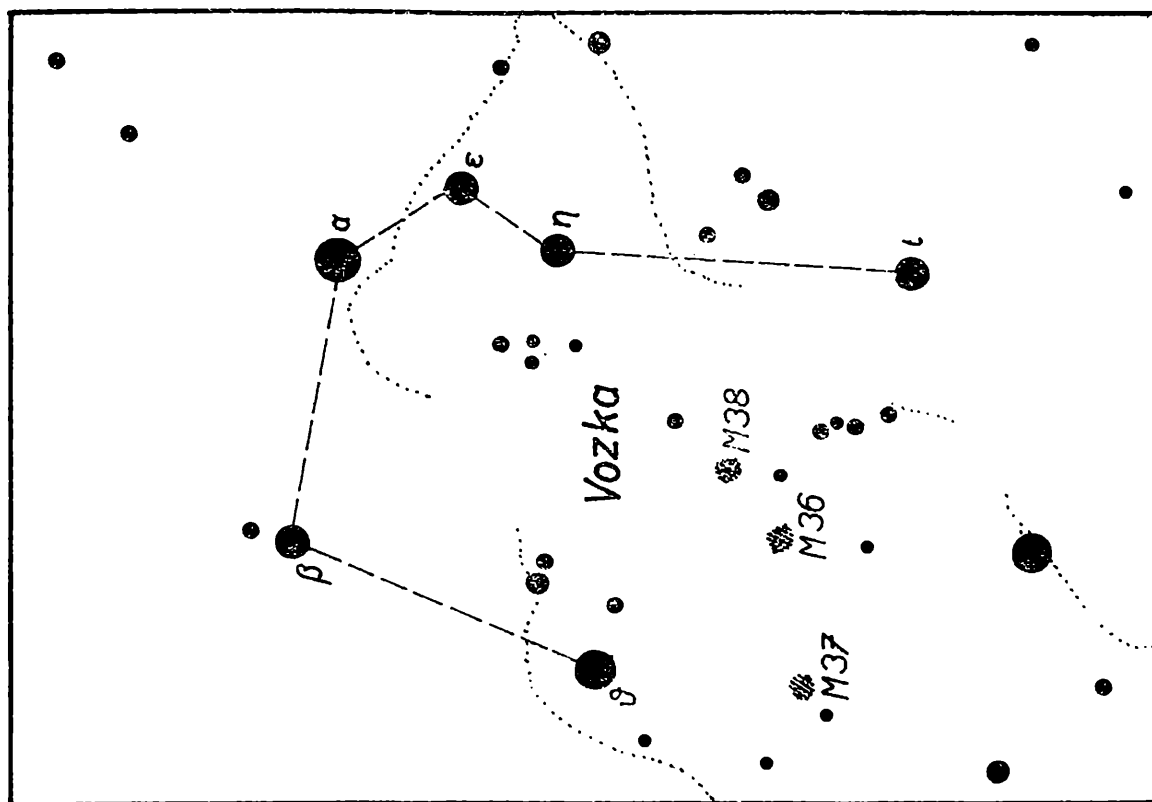


Obr. 2. Svítící a temné mlhoviny v souhvězdí Orióna.

Obr. 1. Mapka souhvězdí Orióna.



Obr. 3. Hvězdokupa Plejády v souhvězdí Býka.



Obr. 4. Mapka souhvězdí Vozky.

V souhvězdí Býka (Taurus) jsou dvě otevřené hvězdokupy — Hyády a Plejády. V Plejádách (obr. 3), které jsou dobře viditelné pouhým okem, napočítáme pomocí triedru asi 30 hvězd. Celkem je jich kolem 120. Plejády jsou ve vzdálenosti 430 světelných roků, Hyády jsou ve vzdálenosti 130 světelných roků. Stáří Plejád se odhaduje na 50 miliónů let.

Souhvězdí Vozky (Auriga) leží v Mléčné dráze (obr. 4). Nejjasnější hvězda, jejíž hvězdná velikost je $0,1^m$, se nazývá Capella. V jižní části souhvězdí je několik otevřených hvězdokup, z nichž nejjasnější jsou M 36 ($6,3^m$), M 37 ($6,2^m$) a M 38 ($7,4^m$). Tyto hvězdokupy můžeme vyhledat pomocí triedru.

Souhvězdí Blíženců (Gemini) je nápadné dvěma jasnými hvězdami, β (Pollux, $1,2^m$) a α (Castor). Castor je vizuální dvojhvězda se složkami o hvězdných velikostech $2,0^m$ a $2,9^m$. Obě složky této dvojhvězdy jsou navíc spektroskopickými dvojhvězdami. Jde tedy o vícenásobnou soustavu. V souhvězdí Blíženců je také několik otevřených hvězdokup, z nichž nejjasnější je M 35 ($5,8^m$) o průměru $40'$

NAŠE SOUTĚŽ

Závěrečné poznámky k loňské soutěži Rozhledů

Loňské soutěže se zúčastnilo 37 řešitelů (35 jednotlivců a 2 kolektivy), dost málo proti dřívějším dobám. Celkem došlo 352 řešených příkladů. Řešení všech příkladů z matematiky zaslalo 8 studentů, z fyziky 10 studentů a z konstruktivní geometrie 3 studenti. Řešení všech 22 příkladů jsme dostali od 3 studentů. Za pozornost stojí, že se do naší soutěže zapojili mladí studenti z maďarských škol. Jsou to: Goghová S. (9. tř. ZDŠ Kolárovo), Jaros P. (1.C SVŠ Komárno) a Ráczová K. a Varádyová M., které utvořily kolektiv (1. B G Dunajská Streda). Vítejme je a v letošní soutěži jim přejeme hodně úspěchů. Z průmyslových škol se opět nikdo nezúčastnil. Mrzí nás to. Snad to letos bude lepší.

Úroveň soutěže poklesla. Projevuje se to v počtu účastníků, v počtu zaslaných řešení i v jakosti řešení.

Výsledky v matematice:

1.—2. Šafařík Jiří III.B, SVŠ Bratislava.	.68 bodů
1.—2. Šafařík Karel II.B SVŠ, Bratislava	.68 bodů
3. Švarc Rudolf III.F SVVŠ, Plzeň	.67 bodů
4. Matouš Ondřej III.F SVVŠ Praha.	.65 bodů
5. Pudlák Pavel III. D SVVŠ Praha	.58 bodů
6.—7. Kašík Martin III.D SVVŠ Praha	.57 bodů
6.—7. Mattieligh Andrej III.A SVVŠ Michalovce	.57 bodů
Výsledky v konstruktivní geometrii:	
1.—2. Šafařík Jiří III.B, SVŠ Bratislava.	.24 bodů
1.—2. Šafařík Karel III.B, SVŠ Bratislava.	.24 bodů
3.. Pudlák Pavel, III.D SVVŠ Praha	.23 bodů

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

3. Dokažte, že obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou středy kružnic vně vepsaných danému trojúhelníku, je $2rs$, kde r je poloměr kružnice opsané původnímu trojúhelníku.

(Došlo 14 řešení)

Josef Glivický

Řešil Karel Šafařík, 2.b SVVŠ Juraja Hronca, Bratislava

Uvažujme o trojúhelníku ABC o stranách a, b, c , středy kružnic vně vepsaných označme po řadě S_1, S_2, S_3 (proti stranám a, b, c), poloměry kružnic vně vepsaných $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Obsah trojúhelníka $S_1S_2S_3$ (označme 1P) se rovná součtu obsahů trojúhelníků ABC (označme P), S_1CB (označme P_1), S_2AC (P_2), S_3BA (P_3) — žádné z nich se nepřekrývají.

Označme

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

obsah trojúhelníka ze tří stran

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

a předpokládejme znalost několika rovností z geometrie trojúhelníka, které budeme k výpočtu 1P potřebovat

$$r = \frac{abc}{4P} \quad \varrho_1 = \frac{P}{s-a} \quad \varrho_2 = \frac{P}{s-b} \quad \varrho_3 = \frac{P}{s-c}$$

Obsahy trojúhelníků P_1 , P_2 , P_3 vyjádříme jako poloviční součin základů a , b , c a výšek — v tomto případě poloměrů kružnic vně vepsaných ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 . Bude pak

$$^1P = P + \frac{aP}{s-a} + \frac{bP}{s-b} + \frac{cP}{s-c}$$

násobíme pravou stranu zlomkem $\frac{P}{P} = 1$ a upravíme

$$^1P = \frac{s}{P} \left[\frac{P^2}{s} + \frac{P^2}{s} \frac{a(s-b)(s-c) + b(s-a)(s-c) + c(s-a)(s-b)}{2(s-a)(s-b)(s-c)} \right].$$

Poněvadž $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, pak bude

$$\begin{aligned} ^1P &= \frac{s}{P} \left\{ \frac{P^2}{s} + \right. \\ &+ \left. \frac{P^2}{2P^2} \left[a(s-b)(s-c) + b(s-a)(s-c) + c(s-a)(s-b) \right] \right\} \\ ^1P &= \frac{s}{P} \left\{ \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left[a(s-b)(s-c) + b(s-a)(s-c) + c(s-a)(s-b) \right] \right\} \end{aligned}$$

Po vynásobení a úpravě obdržíme

$$^1P = \frac{s}{2P} \left[2s^3 - s^2(a+b+c) + abc \right]$$

poněvadž $a+b+c=2s$, potom

$$\begin{aligned} ^1P &= \frac{s}{2P} \left(2s^3 - 2s^3 + abc \right) \\ ^1P &= \frac{abc}{2P} \cdot s = 2 \cdot \frac{abc}{4P} \cdot s, \end{aligned}$$

tj.

$$^1P = 2rs, \quad c \quad b \quad d$$

4. Najděte komplexní číslo $z \neq 0$, jehož druhá a třetí mocnina dávají sdružená komplexní čísla.

(Došlo 26 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Ondřej Matouš, 3.F SVVŠ, Praha 2

Položme

$$z = x + iy$$

a potom

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \quad z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

Čísla z^2 a z^3 jsou komplexně sdružená, a proto

$$x^2 - y^2 = x(x^2 - 3y^2), \quad (1)$$

$$2xy = y(y^2 - 3x^2) \quad (2)$$

Rovnice (2) poskytuje dvě možnosti.

I. Buď $y = 0$ a po dosazení do (1):

a) $x = 0$ a potom i $z = 0$. Ale to odporuje podmínkám úlohy.

b) $x_1 = 1$ a tudíž $z_1 = 1$.

II. Nebo $y^2 = 3x^2 + 2x$ a po dosazení do (1) dostaneme

$$4x^3 + 2x^2 - x = 0$$

Odtud:

a) $x = 0, y = 0$, a to nevyhovuje.

b) $4x^2 + 2x - 1 = 0$ a dále

$$x_{2,3} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5}), \quad y_{2,3}^2 = \frac{1}{16}(10 \pm 2\sqrt{5}),$$

$$z_2 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}),$$

$$z'_2 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}),$$

$$z_3 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}),$$

$$z'_3 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})$$

Vyhovuje tedy pět různých komplexních čísel: $1, z_2, z'_2, z_3, z'_3$.



FO

Třetí kolo kat. A XI. roč. FO

Frcf. dr. ROSTISLAV KOŠTÁL, Brno

Třetí kolo kat. A XI. ročníku FO se konalo letos 28. 4.—30. 4. 1970 na pedagogické fakultě v Hradci Králové. Slavnostní zahájení 3. kola bylo 28. dubna v budově divadla, kde promluvil předseda KVFO Zdeněk Ungerman, zástupce ministerstva školství, ústřední školní inspektor Josef Bartůněk a za ÚVFO doc. dr. Bohumil Vlach. Teoretické úlohy se řešily 29. dubna a laboratorní úloha 30. dubna.

Účastníci byli vybráni z úspěšných řešitelů kat. A v jednotlivých krajích, a to od nejlepších až po klasifikaci 2, 2, 2, 3. Aby byl každý kraj zastoupen aspoň dvěma účastníky, byli přibráni s nižší klasifikací 2 řešitelé ze ZČK, 1 ze SSK a 2 z VSK. Z nich byl v 3. kole jen jeden úspěšný. K soutěži se dostavilo 79 řešitelů (jeden ze SMK se nedostavil), z nichž 51 bylo úspěšných. Prvých 20 je označeno jako vítězi XI. roč. FO. Tato tabulka podává přehled o jednotlivých krajích.

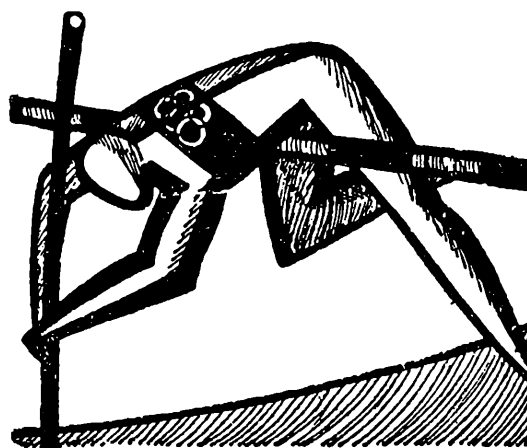
Vítězové dostali odměnu ve výši od 1200 Kčs do 300 Kčs. Vítězové byli tito:

1.	Černý Vladimír	SVŠ Bratislava, Novohradská
2.— 4.	Hanzal Vojtěch	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
2.— 4.	Kučera Jaroslav	SVVŠ Brno, Křenová
2.— 4.	Novotný Václav,	SPŠ Jad. tech. Praha 4, Svatoslavova
5.	Handl Miloslav	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
6.	Slavík Jan	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
7.	Kugler Andrej	SVVŠ Praha 2, W. Piecka

8.— 9.	Juza Karel	SVVŠ Praha 2, W. Piecka
8.— 9.	Pudlák Pavel	SVVŠ Praha 7, Nad Štolou
10.—12.	Dvořák Leoš	SVVŠ Roudnice n. L.
10.—12.	Sisr Oldřich	SVVŠ Hradec Králové
10.—12.	Stacho Milan	SVŠ Vrútky
13.	Šafařík Karol	SVŠ Bratislava, Novohradská
14.	Rákosník Jiří	SPŠ Zeměměřičská, Praha 9
15.—18.	Pantůček Milan	SVVŠ Brno, Křenová
15.—18.	Svačina Karel	SPŠ Stroj., Gottwaldov
15.—18.	Šafařík Juraj	SVŠ Bratislava, Novohradská
15.—18.	Vyhnánek Jan	SVVŠ České Budějovice
19.—20.	Dobeš Jan	SVVŠ Brno, Křenová
19.—20.	Hradil Miroslav	SVVŠ Praha 2, W. Piecka

Kromě A. Kuglera a K. Šafaříka byli všichni vítězové z nejvyšší třídy uvedené školy.

MFO



Čtvrtá mezinárodní fyzikální olympiáda v Moskvě

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno

Letošního roku převzal organizování čtvrté mezinárodní fyzikální olympiády (MFO) Sovětský svaz. Konala se v době od 5. do 15. července 1970 v Moskvě. Zúčastnily se jí tytéž státy jako druhé a třetí MFO, a to: Bulharsko, Československo, Jugoslávie, Maďarsko, NDR, Polsko, Rumunsko a SSSR. Z každého státu soutěžilo 6 účastníků. Naše družstvo tvořilo 6 nejlepších řešitelů 3. kola kat. A.

1. Černý Vladimír, 3. r. SVŠ Bratislava, Novohradská,
2. Hanzal Vojtěch, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka
3. Kučera Jaroslav, 3. r. SVVŠ Brno, Křenová.
4. Novotný Václav, 4. r. SPŠ JT Praha 4, Svatoslavova.
5. Handl Miloslav, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka.
6. Slavík Jan, 3. r. SVVŠ Praha 2, W. Piecka.

Vedoucím družstva byl předseda ÚVFO prof. dr. Rostislav Košťál a pedagogickým instruktorem místopředseda ÚVFO doc. dr. Ivan Náter. Kromě toho se zúčastnil MFO druhý místopředseda ÚVFO doc. dr. Jiří Beránek.

Účastníci prošli týdenním soustředěním, pořádaným v době od 15. 6. do 22. 6. 1970 ve Vyškově.

Soutěž se řídila schváleným statutem a směrnicemi s menšími změnami. Předsedou mezinárodní komise byl akademik V. Zubov, viceprezident Akademie pedagogických věd SSSR. Zahájení bylo 7. 7. 1970. Dne 8. 7. řešili soutěžící 4 teoretické úlohy. Doba k tomu vymezená byla 5 hodin. Dne 9. 7. pracovala se laboratorní úloha a doba k tomu vymezená byla rovněž 5 hodin. Každá teoretická úloha se hodnotila 0 až 10 body, teoretická část laboratorní úlohy rovněž 0 až 10 body a experimentální provedení laboratorní úlohy rovněž 0 až 10 body. Každý účastník mohl tedy získat maximálně 60 bodů.

Prvý příklad byl z mechaniky, druhý z molekulové fyziky, třetí z elektřiny, čtvrtý z optiky a pátý rovněž z optiky.

Bodové hodnocení jednotlivých příkladů našich účastníků bylo toto

Hranice cen byly poněkud posunuty (výhodněji pro soutěžící) místo původního stanovení směrnicemi. Ceny byly uděleny takto:

1. cena: 4 řešitelé, a to 3 z SSSR a 1 z PLR,
2. cena: 7 řešitelů, a to 1 z NDR, 1 z SFRJ, 2 z SSSR, 2 z MLR, 1 z PLR,
3. cena: 10 řešitelů, a to 5 z ČSSR, 1 z MLR, 1 ze SSSR, 3 z RSR, pochvalné uznání: 13 řešitelů, a to 4 z PLR, 1 z MLR, 1 z RSR, 3 z SFRJ, 2 z BLR, 2 z DNR.

Ostatní soutěžící nebyli úspěšní.

Pořadí družstev podle získaných bodů bylo toto

1. SSSR 301 bodů, 2. ČSSR 238 bodů, 3. PLR 236 bodů, 4. MLR 224 bodů, 5. RSR 193 bodů, 6. SFRJ 182 bodů, 7. BLR 158 bodů, 8. NDR 157 bodů.

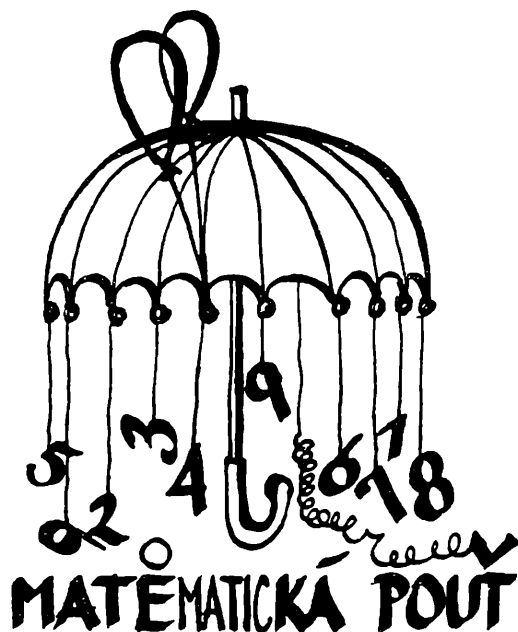
Naše družstvo bylo úplně vyrovnané. Šestý soutěžící onemocněl během soutěže, získal však ještě 25 důležitých bodů. Třetí úloha nebyla vhodná pro soutěž. Dvě družstva nezískala na této úloze ani bod (ČSSR a NDR), tři družstva (MLR, BLR a SFRJ) získala 5 až 8 bodů; družstvo PLR získalo 20 bodů, družstvo RSR 24 bodů a družstvo SSSR 47 bodů.

Zakončení soutěže bylo 14. července. Při zakončení byly rozdány diplomy, ceny a dary.

Ve volné době byla uspořádána prohlídka Moskvy, prohlídka Lomonosovovy university, prohlídka televizní věže v Ostankinu, návštěva Leninova mauzolea, prohlídka Kremlu, zájezd do Suzdalů a Vladimira, prohlídka Čajkovského muzea, prohlídka Leninova muzea, prohlídka Treťjakovské galerie, návštěva cirkusového představení, plavba raketou po řece Moskvě, prohlídka zábavního parku a prohlídka výstavy úspěchů sovětského hospodářství.

Studenti byli ubytováni ve škole — internátu Akademie pedagogických věd, vedoucí v hotelu Leningrad. Stravování bylo zajištěno ve škole — internátu.

MATEMATICKÉ ZÁBAVY



Zmatlíkův výklad stupnice známek

JOSEF KOTYK, Pardubice:

Žák Zmatlík¹⁾ právě poslouchá ostré připomínky otcovy k svému vysvědčení; prospěch z matematiky si zhoršil z chvalitebné na známku dobrou. „Jsem tedy dobrý matematik; vysvědčení to tvrdí doslovně,“ ohradil se pohotově syn proti výtkám otcovým. „Ostatně: Dokážu ti matematicky bezvadnými výpočty, že $3 = 2$, že 3 a 2 jedno jsou, a bude ti to pak s těmi známkami jedno jako mně.“

¹⁾ Se Zmatlíkovým zápisníkem a jeho záhadami setkali se čtenáři našeho časopisu v roč. 47, čís. 6 na str. 303 a 304 a čís. 8, str. 398 a 399, v roč. 48, čís. 4, str. 149 až 153, čís. 5, str. 240 až 242.

Před zděšenými zraky otcovými odehrávala se pak tato scéna:

Syn prohlásil, že rovnost $2 = 3$ předpokládá jako správnou. Je tedy pak správnou také rovnost $-2 = -3$ a po přičtení téhož čísla $\frac{5}{2}$ k oběma stranám i rovnost

$$\frac{5}{2} - 2 = \frac{5}{2} - 3,$$

a rovnost

$$(\frac{5}{2} - 2)^2 = (\frac{5}{2} - 3)^2$$

Žák vykonal potom naznačené mocnění; podle osvědčeného vzorce

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

dostal

$$\frac{25}{4} - 10 + 4 = \frac{25}{4} - 15 + 9$$

a z toho po sloučení celých čísel

$$\frac{25}{4} - 6 = \frac{25}{4} - 6$$

Prohlásil pak: „Poněvadž poslední rovnost je samozřejmá a zcela správná, je dokázána i správnost původní rovnosti $2 = 3$. Postupné úpravy, které jsem prováděl, jsou všechny přípustné a odůvodněny známými pravidly, jež nejen dobře ovládám, ale i dobře používám. Chybu nenajdeš; neudělal jsem žádnou,“ dodal sebevědomě.

Otec nevycházel z úžasu. Snad opravdu z respektu k vývodům učeného syna, dobrého matematika, hodného toho jména.

Na neštěstí se objevil ve dveřích i Zmatlíkův spolužák. „Tak co, Emile, jak ti vyšlo opakování z fyziky?“ otázkou uvítal ho Zmatlíkův otec. „Na jedničku!“ odpovídá Emil. „Jednička — to nic není!“ ihned přehodnotil situaci Zmatlík. „Důkaz je snadný. Užiju tentokrát jen těžšího kalibru — vyšší matematiky:

Uvažujme funkci definovanou rovnicí $x = c$; c je veličina konstantní (stálá). Jestliže derivujeme obě strany dané rovnice podle proměnné x , vychází $1 = 0$.“

„Už je to tady!“ s hrůzou vydechl otec.

„Není možné!“ odporoval.

„Nuže, podám bližší vysvětlení,“ řekl Zmatlík a pokračoval:

„Derivace funkce $f(x)$ je stanovena limitou výrazu

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

jenž má význam pro $h \neq 0$, v případě, že h se blíží nule.

Na levé straně rovnice $x = c$ je $f(x) = x$; pak je

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h) - x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

a proto i limita tohoto výrazu pro $h \rightarrow 0$ je rovna 1. Na pravé straně je

$$f(x) = c,$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0,$$

a tedy i limita tohoto výrazu pro $h \rightarrow 0$ je rovna nule.

Vidíte, že opravdu $1 = 0$. Řekl jsem, že jednička a nula jedno je,“ prohlásil sebevědomě a vítězoslavně zařičel.

„Výborná tedy nestojí za — nic!“ místo dalších námitek zabručel otec.

„Ani chvalitebná nestojí za nic!“ s odvahou hodnou své dobré známky pokračoval neúnavný Zmatlík. „Důkaz je zcela jednoduchý. Dospějete k němu řešením rovnice

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 1$$

Rozložíte-li výrazy na obou stranách rovnice, vychází podle známých a osvědčených vzorců

$$(x+1)(x+1) = (x+1)(x-1)$$

Platnost rovnice se neporuší, dělíme-li její strany týmž číslem $x+1$, které je na pohled v obou obsaženo. Dostáváme $x+1 = x-1$ neboli $2 = 0$.“

„Úplná revoluce v nazírání na stupnici známek, snad také jeden z problémů naší mládeže!“ smutně povzdechl otec. Nevycházel z úžasu. Asi opravdu z respektu k vývodům učeného syna, dobrého matematika, hodného toho jména.

A vy, milí čtenáři?

Napište nám, co si vy myslíte o problematice Zmatlíkova výkladu stupnice známek a o stupni jeho matematické vyspělosti!

Napište všechna navzájem různá přirozená čísla, která splňují rovnici

$$x + y + z = 12$$

Přitom řešení

$$x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 9;$$

$$x_2 = 2, y_2 = 9, z_2 = 1;$$

$$x_3 = 9, y_3 = 2, z_3 = 1 \text{ atd.}$$

budeme považovat za jediné řešení.

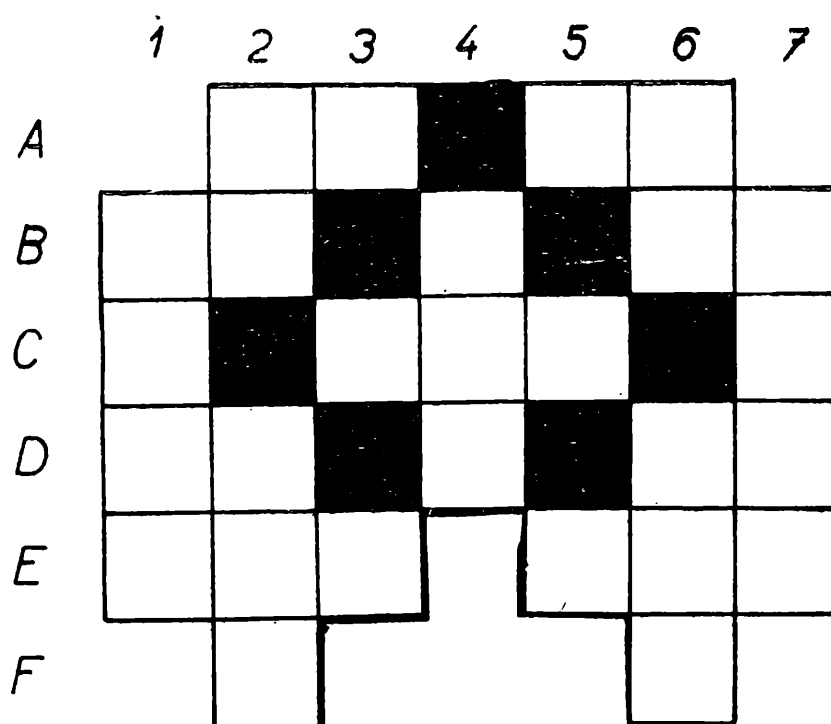
V 5. čísle minulého ročníku jsme uveřejnili křížovku, která byla určena pro mírně pokročilé. Aby nevyšli naprázdno naši nejmladší čtenáři, připravili jsme pro ně lehčí křížovku. Zde je její legenda.

A: $\sqrt[3]{1936}$; největší spol. míra čísel 36, 72, 126.

B: kořen rovnice $x : 3 = 9 : 10$; největší jednociferné prvočíslo;
 $2 - \{1 - [2 - (1 - 2) - 1] - 2\} + 8$.

C: aritmetický průměr čísel 1, 1, 3, 7; $\sqrt{152^2 + 714^2}$; kořen rovnice
 $\frac{x}{3} - 1 = \frac{x}{2} - 2$.

D: součet vnitřních úhlů v desetiúhelníku, vyjádřený v pravých
 úhlech; $\frac{24 + \frac{1}{2}}{3 + \frac{1}{2}}$; základ naší číselné soustavy.



E: nejmenší spol. násobek čísel 2, 3, 6, 12, 16, 36; nejmenší troj-
 ciferné prvočíslo končící na 17.

F: ?; ?.

1: prvočíslo.

2: $2^5 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$; $28 \cdot 23$.

3: ?; nejmenší spol. dělitel čísel 21, 56, 63, 84; ?.

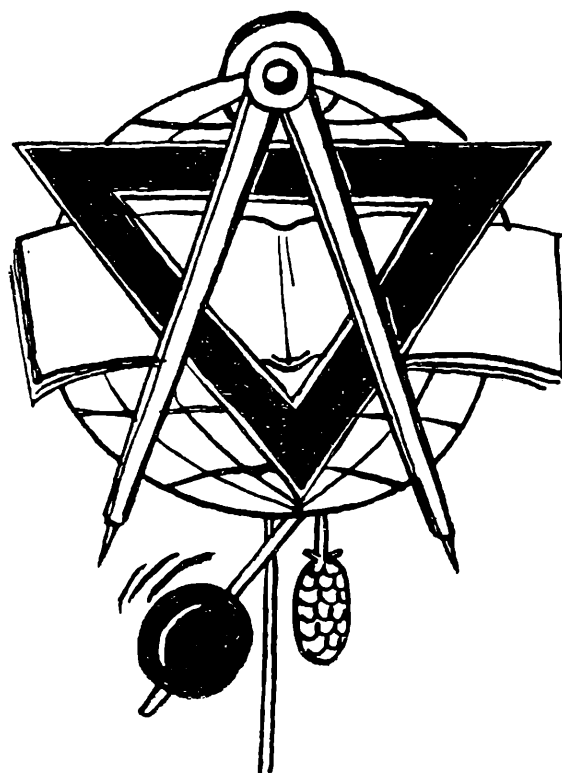
4: násobek čísla 67.

5: $4 - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$; číslo, které není ani kladné ani záporné; ?.

6: 3^4 ; tři stejné cifry.

7: prvočíslo.

- R Ů Z N Ě
- R Ů Z N Ě
- R Ů Z N Ě



Michael Stifel

STANISLAV HORÁK, ČVUT Praha

V pozdním létě r. 1533 prolétla středním Německem zvláštní zvěst: Farář Stifel z Lochau (Lochov?) u Wittenbergu vydal jakousi knihu a v ní dokázal, že konec světa přijde v pondělí 19. října r. 1533 ráno o 8. hodině. Mnozí se tomu smáli, ale jiní tomu věřili. Věřili tomu zvláště obyvatelé Lochau. Na konec světa se připravovali různými způsoby. Někteří trávili dny hořekováním a na modlitbách, zatímco jiní se opíjeli v hospodách. Pole nebyla obdělávána. Mnozí prodali svá hospodářství a utržené peníze prohýřili, jen aby před zánikem světa ještě něco užili.

V kritický den svolal Stifel své ovečky do kostela a z kazatelny zahřímal: „Poslední hodina se blíží.“ Mezi věřícími, zvláště mezi ženami, se ozval nárek a kvílení. Nešťastná osmá hodina se přiblížila, přešla a nic se nedělo, jen se přiblížila bouře. Zneklidněný farář Stifel ji vysvětlil jako předzvěst posledního soudu. Ale i hromy a blesky přešly, déšť ustal a stále se čekalo. Když konečně v sousedních vesnicích zazněly zvony, oznamující poledne, bylo všem jasné, že se konce světa nedočkají. Podle toho se pak utvářela situace. Vesničané, kteří až dosud

byli tiší, mírní a zbožní, rázem se změnili. Faráře strhli z kazatelny, svázali jej provazy a za stálých nadávek jej vlekli do Wittenbergu před soud. Vrchnost vesničany sice uklidnila, ale Stifel byl zbaven místa faráře v Lochau.

Michael Stifel se nám tu jeví jako náboženský fanatik ze 13. a 14. století. Ale všimněme si jiné stránky jeho života. Stifel byl již za svého života znám jako vynikající matematik. Napsal několik matematických knih. Byl prvním Evropanem, který se zabýval zápornými čísly. Ve svých pracích se zabýval řadami, trojúhelníkovými čísly, magickými čtverci atd. Poslední léta svého života byl profesorem matematiky na universitě v Jeně. Nešťastná příhoda v Lochau zanechala v jeho životě trvalé stopy. Jeho okolí, zejména jeho posluchači, v něm stále viděli spíš bláznivého proroka než universitního profesora. A Stifel to cítil. Byl proto plachý, zatrpklý a lidem se vyhýbal. Jistě na to měl vliv i jeho nepatrný plat (60 zlatých ročně).

Nynější doba shovívavě přimhouří obě oči nad jeho nešťastnou předpověď a cení si ho jako matematika, který ve své době vynikl hodně nad průměr. Byl to samouk.

Jak řešil Stifel slovní úlohy, ukážeme si na příkladě:

Najděte číslo, které zmenšeno o 2 dá 3.

Stifel uvažoval takto. Kdybychom za neznámé číslo dosadili 4, dostali bychom po odečtení čísla 2 zbytek 2, tedy o 1 méně než žádá úloha. Kdybychom místo neznámé zvolili číslo 6, dostali bychom zbytek 4, tentokrát o 1 více než žádá úloha. Hledané neznámé číslo je pak

$$x = (4 + 6) : 2 = 5$$

Výpočet doprovází tabulkou (tab. 1). K tomu je však potřebí kratší vysvětlení. Číslo 4 bylo zvolené poprvé a pod ním je číslo 1, před nímž

I.			II.			III.		
	10			30			465	
4		6	3	9		7	100	
<i>m</i> 1		1 <i>p</i>	<i>m</i> 2	4 <i>p</i>		<i>p</i> 2	95 <i>p</i>	
	2			6			93	

je *m* (minus). To představuje číslo, které chybí do správného výsledku. Na pravé straně je zvolené číslo 6, pod ním 1 *p* (plus). To je zase číslo, o něž je správný výsledek menší. Číslo 10 nahoře je součet zvolených čísel a číslo 2 je součet 1 + 1. Hledané číslo je

$$10 : 2 = 5$$

Tabulka 2 ukazuje, že byla zvolena čísla 3 a 9. Při prvním čísle (provedou-li se výkony, které předepisuje úloha) se do správného výsledku nedostávají 2 (proto m) a při čísle 9 přebývají 4 (proto p). Číslo 30 nahoře je součet $3 \cdot 4 + 9 \cdot 2$. (To jsme násobili čísla, spojená šipkou.) Číslo $6 = 2 + 4$. Hledané číslo je

$$30 : 6 = 5 .$$

Tabulka 3 se týká opět naší úlohy. Význam jednotlivých čísel si už vysvětlíte sami.

Ještě naznačíme jeden příklad.

Najděte číslo, jehož polovina zmenšená o jeho třetinu a o jeho čtvrtinu dá 300.

Stifel tuto úlohu řeší opět tou složitou tabulkou. Zvolíme-li za neznámé čísla 24 a 48, je v prvním řádku 7200, v druhém 24, 48, v třetím řádku je m 302, 304 m a v posledním je 2. Hledané číslo je

$$7200 : 2 = 3600$$

Jsem přesvědčen, že každý z čtenářů bude takovéto příklady řešit raději způsobem, kterému se naučil na ZDŠ.

Článek zakončíme dvěma příklady z jeho knih.

1. Najděte čísla x , y , z , která splňují soustavu rovnic

$$x + 73 = 2 (y + z) ,$$

$$y + 73 = 3 (x + z) ,$$

$$z + 73 = 4 (x + y)$$

2. Najděte dvě čísla, jejichž poměr je 1,5 a součin je roven 864.

(Upraveno podle něm. časopisu Alpha)



NEJMLADŠÍM
ČTENÁŘŮM

Ze zahraničních časopisů

1. Zjednoduší výraz

$$x = \frac{6 \cdot 27^{12} + 2 \cdot 81^9}{8\,000\,000^2} \cdot \frac{80 \cdot 32^3 \cdot 125^4}{9^{19} - 729^6}$$

vypadá na první pohled velmi odpudivě. Ale ten, kdo se vyzná v počítání s mocninami, snadno zjistí, že $x = 10$.

2. Jestliže dvojčlen

$$2x + 3y$$

(x, y jsou celá čísla) je dělitelný číslem 17, pak je číslem 17 dělitelný i součet

$$9x + 5y$$

Dokažte.

Řešení. Číslem 17 jsou dělitelné též dvojčleny.

$$13(2x + 3y), \quad 17x + 34y$$

Jejich rozdíl je $9x + 5y$ a je nutně také dělitelný číslem 17.

Pěkný příklad na použití poučky: Jestliže výrazy A, B jsou dělitelné číslem d , pak tímto číslem jsou dělitelné i výrazy $A + B$.

3. V 70 budapeštských kinech bylo jeden večer předváděno přesně 15 různých filmů. Dokažte, že nejméně jeden z těchto 15 filmů musel být promítán nejméně v pěti kinech.

4. V obchodě prodali nejprve 3 m, potom 5 m a posléze 9 m téže látky. Druhý zákazník zaplatil o 120 forintů víc než první. Kolik který utratil?

Řešení. 180 forintů, 300 forintů, 540 forintů.

5. Je dána kružnice k a v jejím vnitřku dva různé body P, Q . Do kružnice k vepište pravoúhlý trojúhelník tak, aby jedna jeho odvěsna procházela bodem P a druhá bodem Q .

Řešení. Kružnice nad průměrem PQ protne kružnici k ve vrcholu pravého úhlu.

6. Najděte všechny přirozené dělitele čísel 220 a 284 (dělitelé musí být menší než dané číslo) a sečtěte dělitele první a dělitele druhého čísla (včetně 1). Co dostanete? — Taková čísla se nazývají spřízněná.

Řešení. 220: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110;

284: 1, 2, 4, 61, 142.

Dnešní příklady jsou převzaty z východoněmeckého časopisu Alpha. Jistě jste poznali, že tento časopis zase některé příklady přejal z maďarských publikací.

S. H.



RECENZE

V polytechnické knihnici SNTL vyšla kniha ing. Romana Reisenauera „Metody matematické statistiky“. Knížka je věnována praktickým aplikacím a svým výkladem je přístupna každému čtenáři bez znalosti vysokoškolské matematiky.

Obsah je rozdělen do osmi kapitol, z nichž první dvě jsou věnovány základním pojmům a operacím, konstrukci grafů a tabulek a výpočtu nejužívanějších statistických charakteristik. Čtenář se dozví, co znamenají ve statistické terminologii výrazy jako „znak, náhodná veličina, třídy, četnosti, charakteristiky“ apod. Dále, jak se správně zaokrouhlují čísla podle normy ČSN 1295-1940 a jakým způsobem správně popisovat grafy. Po přečtení těchto osmatřiceti stránek má možnost přezkoušet si své poznatky na připojených vyřešených příkladech.

Další dvě kapitoly jsou věnovány nejběžněji užívaným statistickým rozdělením, jaká jsou např. normální, binomické, Poissonovo, Studen-

tovo a Snedecorovo. Tabulky všech těchto rozdělení uvedené vzadu v knize umožňují přitom čtenáři seznámit se s jejich používáním na připojených příkladech.

Kapitola o odhadech osvětlí, jaká je pravděpodobnost různých statistických tvrzení a jak vypočítat pro předem určenou spolehlivost závěru potřebný počet zkoušek nebo měření.

V další kapitole se čtenář naučí porovnávat dvě skupiny dat, ať jde o zjištění významnosti nějaké reakce (např. účinku léčiva nebo hnojiva), nebo zjištění nevýznamného rozdílu v reakci obou skupin (např. při provádění nových laboratorních metod, nebo možnosti sloučení výsledků měření od dvou pracovníků, nebo měření po určité době). Dále má možnost zjistit pomocí uvedených metod shodu experimentálních křivek s teoretickými rozděleními apod. Testy extrémních odchylek umožní vyloučit z měření takové hodnoty, u nichž je podezření, že jsou zatíženy hrubou chybou. Testy náhodnosti ověřují, zda naměřené hodnoty kolísají (klesají nebo stoupají) vlivem náhodných odchylek, nebo zda jde o nějaký zákonitý proces.

Kapitola o závislosti (korelaci) dvou náhodných veličin seznamuje čtenáře s koeficientem korelace jako mírou této závislosti, s korelační i kontingenci tabulkou a konečně v závěrečné kapitole najde čtenář výklad některých pojmů z kombinatoriky, počtu pravděpodobnosti a z lineární interpolace.

Bohatý seznam literatury dává každému zájemci o tuto moderní matematickou disciplínu možnost dalšího hlubšího studia. A že se technik a výzkumník 20. století bez znalostí základů matematické statistiky dnes už neobejde, není ani třeba připomínat.

Ing. Miloslava Špačková

- **Redakce**
- **hovoří**
- **se čtenáři**



SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

orientation *ž*
orienté, *e*
orienter
origine *ž*
orthocentre *m*
orthogonal, *e*, *aux*
orthonormé, *e*
oscillation *ž*
osculateur, *trice*
osculation *ž*
ouvert, *e*
ovale
ovale *m*

orientace
orientovaný
orientovat
počátek
ortocentrum, průsečík výšek
ortogonální, pravoúhlý
ortonormální
oscilace
oskulační
oskulace
otevřený
oválný
oválný

P

paire
parabole *ž*
parabolique
paraboloïde *m*
parallèle
parallèle *ž*
parallélépipède *m*
parallélogramme *m*
paramètre *m*
paramétrique
parenthèse *ž*
 mettre entre parenthèses
parité *ž*

sudý
parabola
parabolický
paraboloid
rovnoběžný
rovnoběžka
rovnoběžnostěn
rovnoběžník
parametr
parametrický
závorka
 dát do závorek
parita

part <i>ž</i>	část
de part et d'autre de la droite <i>q</i>	po obou stranách přímky <i>q</i>
particulier, ère	zvláštní
cas <i>m</i> particulier	zvláštní případ
partie <i>ž</i>	část
partie d'un ensemble	podmnožina
partiel, elle	částečný, parciální
dérivée <i>ž</i> partielle	parciální derivace
pentadécagone <i>m</i>	patnáctiúhelník
pentaèdre <i>m</i>	pětistěn
pentagone <i>m</i>	pětiúhelník
pentédécagone <i>m</i>	patnáctiúhelník
périmètre <i>m</i>	obvod
période <i>ž</i>	perioda
périodique	periodický
permutation <i>ž</i>	permutace
perpendiculaire	kolmý
perpendiculaire <i>ž</i>	kolmice
perpendiculaire abaissée du point sur le plan	kolmice spuštěná z bodu na rovinu
perspective <i>ž</i>	perspektiva
petit	malý
le plus petit commun multiple <i>m</i>	nejmenší společný násobek
photogrammétrie <i>ž</i>	fotogrammetrie
pied <i>m</i>	noha
pied d'une perpendiculaire	pata kolmice
pinceau <i>m</i>	štětec, svazek (přímek, rovin)
pistolet <i>m</i>	křivítko
plan, e	rovinný
plan <i>m</i>	rovina, plán
plan coté	kótovaný průmět
plan de projection <i>ž</i>	průmětna
plan géométral	půdorys
plan tangent en un point d'une surface	tečná rovina v bodě plochy
planimètre <i>m</i>	planimetr
planimétrie <i>ž</i>	planimetrie
plat, e	plochý
angle <i>m</i> plat	přímý úhel
plus	více
tout au plus	nanejvýš
plus <i>m</i>	znamení plus (+)
poids <i>m</i>	váha
point <i>m</i>	bod
point de contact <i>m</i>	dotykový bod
point d'intersection <i>ž</i>	průsečík
point de rencontre <i>ž</i>	průsečík
point de trace <i>ž</i>	stopník
point double	samodružný bod
polaire	polární
polaire <i>ž</i>	polára
pôle <i>m</i>	pól
polyèdre <i>m</i>	mnohostěn

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

4

ROČNÍK 49, 1970-1971, PROSINE

**1154
m.j.f.**

**ROČNÍK 49
PROSINEC 1970-71**

4

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

**nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku. Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: Mil. Hellerová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1970.

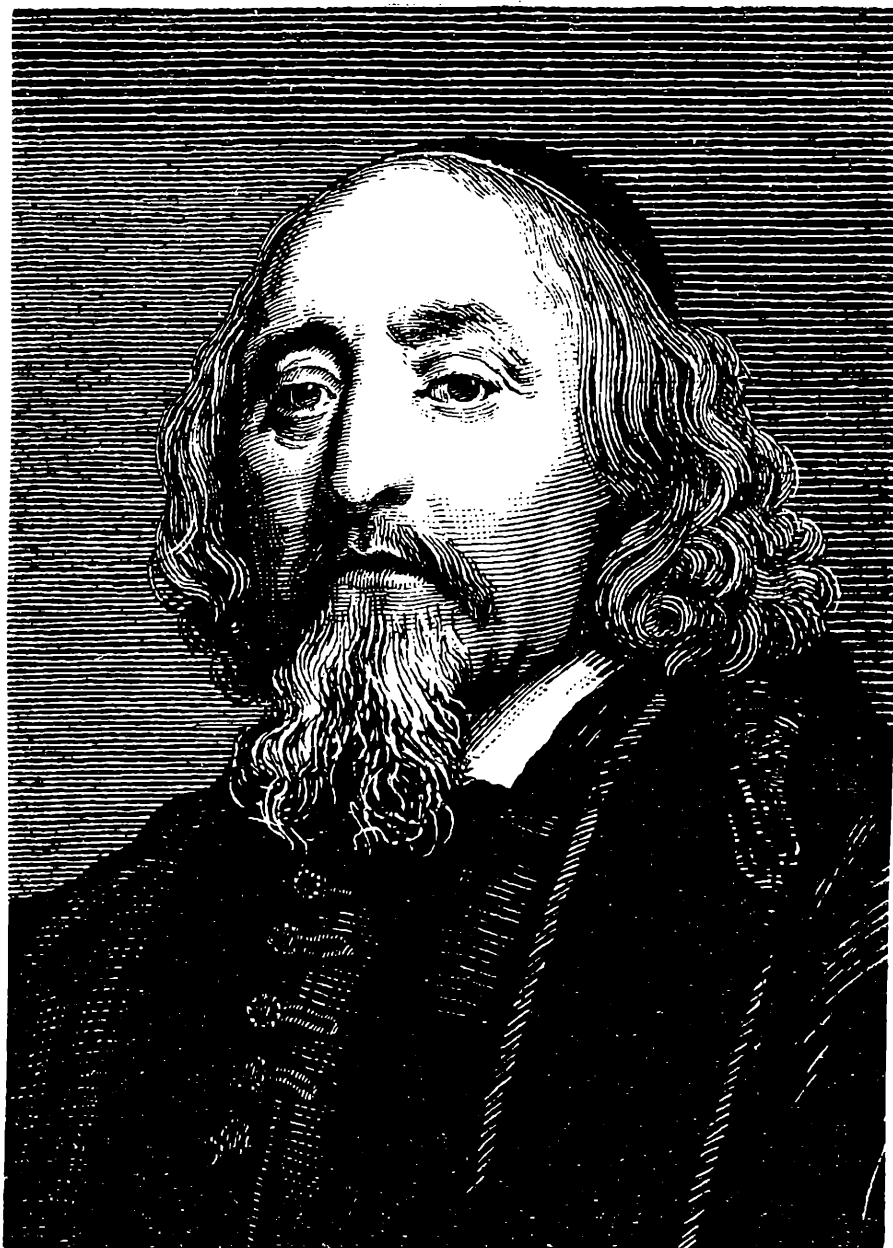
OBSAH

J. Kotyk: Komenský a přírodní vědy .	145
O. Řiha: Tabulky informací	149
J. Drábek: O sítích tří pravidelných mnohoúhelníků v rovině	153
Ing. dr. V. Šindelář: Způsob psaní výsledků měření	156
Ivo Volf: Jak řešit fyzikální úlohy	163
A. Svoboda: Překvapení z vesmíru	166
Naše soutěž .	168
XII. mezinárodní matematická olympiáda .	177
Nejmladším čtenářům	189
Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český . 3. a 4. str. obálky	

Komenský a přírodní vědy

JOSEF KOTYK, Pardubice

Vzpomínáme-li letos s celým vzdělaným světem 300. výročí úmrtí Jana Amose Komenského¹⁾, „Galileiho výchovy“, jak ho pojmenoval francouzský historik Jules Michelet, tážeme se s našimi čtenáři, jaký byl vztah učitele národů zejména k přírodním vědám.



¹⁾ Zemřel v Amsterdamu dne 15. listopadu 1670. Jeho hrob upadl v zapomnutí. Trvalo 267 let, než byl ve valonské kapli v Naardenu objeven a odevzdán ve správu našemu národu.

jeho názor na úlohu a postavení těchto věd v systému jeho pansofie (vševědy), jeho přínos lidstvu i národu. „Češi nemají takřka nic o historii, o zeměpise, o vědách přírodních. Ale jestli jsou hodni, aby stali rovnocenně v řadě evropských národů, musí se jim dostat stupňů, po kterých vystoupí.“²⁾

Komenský se bádáním přírodních jevů přímo nezabýval, jako velký pedagog se však znovu a znovu zamýšlel nad úlohou přírodních věd ve výchovném procesu. V roce 1633 vydal encyklopedický spis „*Physicae ad lumen divinum reformatae synopsis*“ (v dalším zkráceně „*Fyziku*“), kde vychází z názorů Campanelly³⁾, Bacona⁴⁾ a jiných kritiků scholasticismu a jeho nevědeckého přístupu k přírodnímu dění. Jako člověk hluboce nábožensky založený chtěl ovšem uvést smyslové a rozumové poznání v soulad s biblí, základem křesťanského názoru na svět. Tím omezen, nemohl přijmout kritiku středověkého scholasticismu do důsledků. Představy Komenského v oblasti přírodních věd jsou proto pestrá směsicí názorů překonaných dobou a vývojem s názory vědecky progresivními.

Je zajímavé, že v době vítězství matematického hlediska v přírodních vědách se Komenský přikláněl spíše k hledisku chemickému. Byl si sice vědom, že číslům, mírám a vahám přísluší větší průkaznost než kvalitám, jak svědčí úvod k jeho „*Fyzice*“, kvalita byla mu však fundamentem všech forem (podob) v tělesech. Učení o kvalitách a kvalitativních, tj. chemických změnách je podle něho základem celé přírodovědy. Protože o nich bylo podle jeho slov do té doby „bídne jednáno, bylo světlo přírodovědy slabé a temné“.⁵⁾

Jako Aristoteles uznával také Komenský základní čtyři živly, zemi, vodu, vzduch, oheň však nahradil éterem, a předpokládal jejich složení z atomů. Tím ovlivnil do jisté míry Boylea⁶⁾, jenž Komenského označil

²⁾ Viz Fr. Kožík: „*Světlo v temnotách*“. (Bolestný a hrdinský život Jana Ámose Komenského.) Stát. pedagog. nakl. Praha 1970. Posláním této knihy není však výklad stejnojmenné latinské knihy Komenského „*Lux in tenebris*“ Cit. str. 20.

³⁾ Tommaso Campanella (1568–1639), autor díla „*Sluneční stát*“, v němž podává obraz ideálního společenského zřízení.

⁴⁾ Francis Bacon z Verulam (1561–1626), filosof a státník, lord kancléř anglického dvora v období naší Bílé hory, usiloval o „obnovení věd“ vespisech „*Instauratio magna*“ a „*Novum organum scientiarum*“.

⁵⁾ Viz „*Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století*“, autor. kolektiv pod vedením dr. Luboše Nového, ČSAV, Praha 1961. Cit. str. 83.

⁶⁾ Robert Boyle (1627–1691) uveřejnil roku 1660 ve spise „*Nové pokusy o pružnosti vzduchu*“ zákon po něm nazvaný o závislosti napětí uzavřeného množství plynu na jeho objemu.

„bystrým autorem výťahu z Campanelly“.⁷⁾ Boyle na základě četby Komenského začal pochybovat o oprávněnosti aristotelismu v chemii.

Druhý přírodovědný spis Komenského „Disquisitiones de caloris et frigoris natura etc.“ z roku 1659 popírá tézi, že „teplo není ničím než různý pohyb nejmenších nepostřehnutelných částic, zima naproti tomu jejich klid“, jež byla hájena v disputaci na universitě v Amsterdamu.

Obě Komenského díla s přírodovědnou tematikou chápeme jako pokus Komenského o kompromis mezi jeho vírou a vývojem přírodních věd.

Komenský byl po řadu let také majitelem rukopisu Koperníkova díla „De revolutionibus orbium coelestium“ (O pohybech těles nebeských, 1543), který koupil dne 17. ledna 1614 na studiích v Heidelbergu z rukou vdovy po děkanu Christmannovi. Za tuto vzácnou památku neváhal tehdy zaplatit vším, co měl, i když s revolučním dosahem Koperníkových teorií vnitřně nesouhlasil. Koperníkovy závěry ho však tím více zajímaly, poněvadž se říkalo, že Koperníkův rod pochází z Mladoboleslava⁸⁾. Koperníkův heliocentrický názor Komenský přesto neuznal, následuje tak stanovisko církve i Martina Luthera, jeho mínění je však kritické jako posudek astronoma Tychona Brahe, Pascala nebo Descarta. O vývoji názorů Komenského svědčí pak nejlépe citace hesla „Planeta“ z jeho vševědného slovníku „Lexicon reale pansophicum“, kde Komenský v podstatě Koperníkovo učení již přijímá slovy:

„Planeta — sluneční hvězda, která má Slunce za svůj střed... Různé fáze planet, které ubývají a přibývají jako Měsíc, ukazují, že planety nejsou samy o sobě ohnivé, ale odrážejí slunce.“⁹⁾

Pod vlivem současného stavu vědy revidoval Komenský i svou „Fyziku“, v níž přihlíží později např. také k Harveyovu¹⁰⁾ objevu krevního oběhu z roku 1628 aj. To vše svědčí o soustavném studiu a příkladné svědomitosti, s kterou přistupoval jako učitel k svému úkolu. Touhu po vědění a vysvětlení přírodních záhad Komenský v sobě nosil již od mládí. Sám se zval mužem touhy, touhy po zdokonalení lidstva...

Komenský cítil vždy velkou úctu i k matematice a všem, kdož se jí zabývají. To bylo obecně známo. Svědčí o tom zejména také obdiv Poutníka (tj. Komenského) v jeho „Labyrintu světa“ (XI, 8),

⁷⁾ Viz „Dějiny exaktních věd“, cit. v pozn. 5, str. 83.

⁸⁾ Viz Fr. Kožík: „Světlo v temnotách“, str. 22.

⁹⁾ Viz Fr. Kožík: „Světlo v temnotách“, str. 156.

¹⁰⁾ William Harvey (1578–1657), autor díla „De motu cordis et sanguinis in animalibus“ (O pohybu srdce a krve u živočichů).

výroky v díle „*Triertium catholicum*“ (kap. VIII. a X.) aj.¹¹⁾ výklady základních pojmů elementární matematiky v díle „*Orbis sensualium pictus*“ (Svět v obrazích, 1658) i jeho dvoudílná náčrty doprovázená učebnice geometrie I. *Geometria theoretica*, II. *Secunda pars Geometriae Geodesia dicta*; pochází z doby pobytu Komenského v polském Lešně, kam Komenský přišel roku 1628. Její rukopis byl nalezen prof. dr. St. Součkem¹²⁾ v Leningradě. Vědecky nepřinesla tato učebnice sice nic nového, zůstává však zajímavým dokladem Komenského zájmu o „metody matematické“. Svědčí také, že Komenský měl ke geometrii zřejmě větší náklonnost než k algebře, v níž neučinil značnějšího pokroku; zejména praktická geometrie (geodezie) se mu velmi líbila.

Shledáváme tak, že přírodní vědy byly nedílnou součástí Komenského pansofie. Vědomosti z těchto oborů lidské činnosti ho velmi zajímaly a obohacovaly rovněž jeho všestranného ducha.

Komenskému se zjevovala jeho představa světa a lidského podílu na jeho budování — i ve snách. Zdálo se mu např.¹³⁾, že „vidí před sebou svět jako pláň ponořenou do tmy. Na té pláni však byl život. . . Ale občas jako by zazářilo do tmy světlo. To povstal muž, obrátil tvář, na niž padl paprsek shůry, k nebi, promluvil a ukazoval lidem na cesty skryté dosud v temnu. Jiní muži ozbrojovali v šeru světa oči dalekohlednými skly, aby se pokusili vyrvat nebi tajemství hvězd, jiní mísili tekutiny v křivulích. . . , jiní konečně kladli čelo do dlaní a zamýšleli se a trýznili mozek úvahami. Ale všichni, kteří tak vcházeli do souboje s rozličnými tajemstvími přírody a světa, ukazovali lidstvu, že svět sahá dál, než se domnívalo. A čím jich bylo víc, tím bylo na temném světě jasněji“.

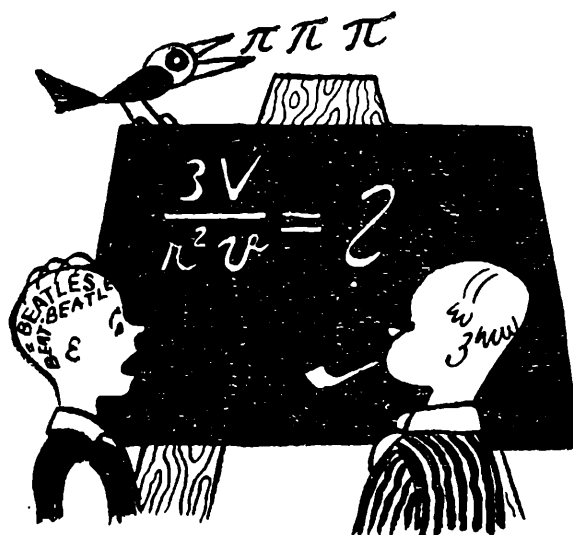
Jan Amos Komenský patřil rovněž k mužům tohoto typu, k nositelům pochodní pokroku, „zbožných přání, jež trvají na zemi, až přijde jejich doba a stanou se viditelnými činy“.¹⁴⁾ Příchod této velké doby očekával také slavný Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 až 1716) pamětihodnými věšteckými slovy: „Nadejde, Komenský, čas, kdy zástupy blažených budou ctít, co's vykonal sám, ctít i Tvých nadějí sen!“

¹¹⁾ Mnohé uvádím v článku, který jsem uveřejnil v *Rozhledech*, ročník 35, čís. 9, str. 419 až 423 u příležitosti 365. výročí narozenin Jana Ámose Komenského (* 28. března 1592) a zároveň 300. výročí jeho amsterodamského souboru „*Opera didactica omnia*“ (vyd. r. 1657).

¹²⁾ Obšírnou zprávu o tom přináší „*Naše věda*“, roč. 1931.

¹³⁾ Viz Fr. Kožík: „*Světlo v temnotách*“, str. 16.

¹⁴⁾ Viz Fr. Kožík: „*Světlo v temnotách*“, str. 170.



Tabulky informací

OTA ŘÍHA, PeF UJEP, Brno

V tomto článku se seznámíte s několika úlohami, které vedou k maticovým zápisům a k násobení matic. Před dalším čtením článku doporučujeme opakovat násobení matic, s kterým jsme se již seznámili.

Příklad: Ve třídě 8.a je 14 chlapců a 17 dívek, ve třídě 8.b je 15 chlapců a 16 dívek. Tyto informace jsou přehledně zapsány v tabulce 1.

Tabulka 1		
	Chlapci	Dívky
8. a	14	17
8. b	15	16

Tabulka 2		
	Sport	Ostatní zájmová činnost
chlapci	4	2
dívky	2	6

Druhá tabulka nás seznamuje s tím, že každý z chlapců věnuje za týden průměrně 4 hodiny sportu a 2 hodiny ostatní zájmové činnosti. Obdobné údaje u dívek jsou zapsány v druhém řádku této tabulky.

Určete:

- Kolik hodin týdně věnuje třída 8.a sportu.
- Kolik hodin týdně věnuje třída 8.b ostatní zájmové činnosti.

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} \text{a) chlapci: } 14 \cdot 4 & = & 56 \\ \text{dívky: } 17 \cdot 2 & = & 34 \\ \hline \text{8.a celkem} & & 90 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \text{b) chlapci: } 15 \cdot 2 & = & 30 \\ \text{dívky: } 16 \cdot 6 & = & 96 \\ \hline \text{8.b celkem} & & 126 \end{array}$$

Povšimneme-li si podrobně výpočtu (a) vidíme, že výsledek můžeme dostat tak, že 1. řádek tabulky 1 napíšeme jako sloupec před 1. sloupec tabulky 2; čísla, která jsou potom ve stejném řádku, vynásobíme a součiny sečteme; postup výpočtu vám jistě připomíná *násobení matic*.

Považujeme-li řádky a sloupce v tabulkách 1 a 2 za řádky a sloupce matic, můžeme tabulky 1, 2 napsat jako matice

$$\begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Přesvědčte se, že platí

$$\begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 130 \\ 102 & 126 \end{pmatrix}.$$

Na základě předchozí úvahy umíme říci, co vyjadřují čísla 90 a 126, která jsou prvky výsledné matice — vyjadřují po řadě odpověď na otázky a) a b). Obdobně vysvětlíte, co udávají čísla 130 a 102.

Úloha 1. Taxislužba měla v pátek v provozu 10 vozů značky Škoda a 8 vozů značky Tatra, v sobotu 7 vozů Škoda a 4 vozy Tatra. Vůz Škoda ujede denně průměrně 120 km a přepraví přitom průměrně 15 cestujících. Vůz Tatra ujede denně průměrně 150 km a přepraví přitom průměrně 20 cestujících. Sestavte tyto informace do tabulek obdobně jako v příkladě, který byl uveden. (Povšimněte si, že řádky druhé tabulky musí být označeny stejně jako sloupce první tabulky.) Pomocí těchto tabulek napište dvě matice obdobně jako v úloze 1. Matice vynásobte a určete, co udávají jednotlivá čísla, která jsou prvky výsledné matice.

Vraťme se nyní k původnímu znění úlohy o zájmové činnosti žáků 8.a a 8.b. Kromě těchto tříd bychom mohli uvažovat ještě třídu 8.c, ve které je 16 chlapců a 14 dívek. Informace je v tomto případě možno zaznamenat takto

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \text{ostatní} \\ & & & & \text{zájmová} \\ & & & & \text{činnost} \\ \text{8.a} & \text{chlapci} & \text{dívky} & & \\ \text{8.b} & \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} & \text{chlapci} & \text{sport} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ \text{8.c} & \begin{pmatrix} 16 & 14 \end{pmatrix} & \text{dívky} & & \end{array}$$

První z těchto dvou matic je typu (3; 2), neboť má 3 řádky a 2 sloupce. Jejich součin utvoříme obvyklým způsobem

$$\begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 15 & 16 \\ 16 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 130 \\ 102 & 126 \\ 92 & 116 \end{pmatrix}$$

Například číslo 92 v *posledním řádku prvního sloupce* výsledné matice jsme dostali opět tak, že jsme čísla 16, 14 z *posledního řádku první matice* po řadě napsali před čísla 4, 2 *prvního sloupce druhé matice*, čísla jsme vynásobili a sečetli

$$16 \cdot 4 + 14 \cdot 2 = 92.$$

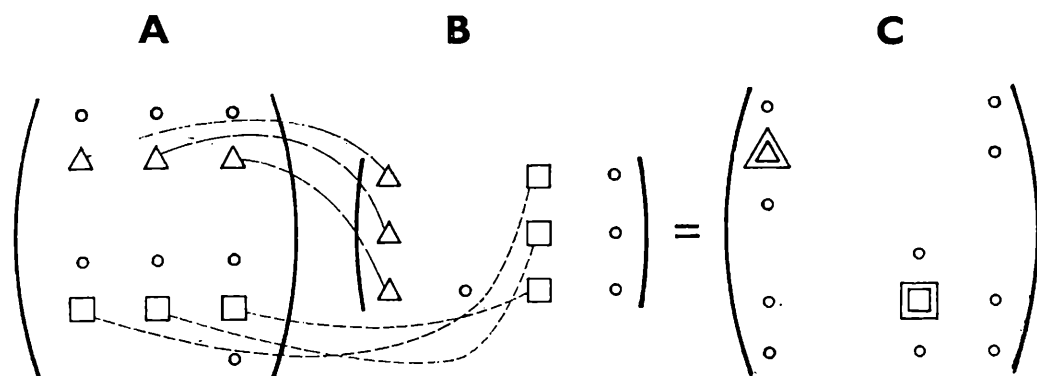
Výsledná matice je typu (3; 2). Určete, co udávají čísla 92 a 116.

Matice mohou mít libovolný počet řádků i sloupců. O matici, která má m řádků a n sloupců říkáme, že je *typu* $(m; n)$. Musíme si zapamatovat, že matici typu $(m; n)$ můžeme násobit pouze maticí typu $(n; p)$.

Je to vidět z příkladů, které byly uvedeny, a plyne to z *definice násobení matic*, kterou můžeme formulovat takto:

Součinem matice **A** typu $(m; n)$ s maticí **B** typu $(n; p)$ v tomto pořadí je matice **C** typu $(m; p)$. Prvek v i -tém řádku j -tého sloupce matice **C** dostaneme tak, že i -tý řádek matice **A** napíšeme jako sloupec před j -tý sloupec matice **B; čísla, která jsou potom na stejném řádku v těchto dvou sloupcích, mezi sebou vynásobíme a součiny sečteme.**

Schematicky můžeme násobení matic znázornit takto:



V obrázku je vyznačeno vytvoření jen dvou prvků matice **C**. Číslo zapsané na místě dvojitého trojúhelníka (čtverce) získáme jako součet součinů těch dvojic čísel, která jsou v maticích **A**, **B** zapsána na místech trojúhelníků (čtverců) spojených obloukem.

Úloha 2. Násobte.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 10 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Úloha 3. V domovním bloku se třemi vchody, který se staví v sídlišti, bude v části, do které se vchází 1. vchodem, 8 dvoupokojových a 4 třípokojové byty. V části, do které se vchází 2. vchodem, bude 12 dvoupokojových

bytů a v části, do které se vchází 3. vchodem, budou 4 jednopokojové, 4 dvoupokojové a 4 čtyřpokojové byty. Předpokládá se, že v každém jednopokojovém bytě bude bydlet pouze 1 dospělá osoba, v každém dvoupokojovém bytě 2 dospělí a 2 děti, ve třípokojovém 2 dospělí a 3 děti a ve čtyřpokojovém bytě 3 dospělí a 3 děti. Seřadte z těchto údajů dvě matice, vynásobte je a určete, co udávají prvky výsledné matice.

Úloha 4. V závodě Tesla Orava mají podle měsíčního plánu vyrobit v 1. týdnu 120 televizorů typu Oliver, 200 televizorů typu Dajana a 100 televizorů typu Karolína. Počet jednotlivých typů, které mají vyrobit ve 2. týdnu, je dán čísly 150, 160, 120, ve 3. týdnu 140, 180, 110, a ve 4. týdnu 210, 100 a 80. (Vždy v pořadí Oliver, Dajana, Karolína.) V každém televizoru typu Oliver jsou dvě elektronky EF 80, 1 elektronka PCL 85 a 2 elektronky PCF 82. Počet stejných elektronek (ve stejném pořadí) pro typ Dajana je vyjádřen čísly 2, 1, 2 a pro typ Karolína čísly 2, 1, 1. Určete, kolik elektronek jednotlivých typů bude v každém týdnu Tesla Orava potřebovat na výrobu televizorů.

Výsledky úloh

$$a) \begin{pmatrix} 9 & 17 & 3 \\ 13 & 50 & -9 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 31 & 4 & -17 \\ 28 & 4 & -7 \\ 8 & 8 & 55 \\ -5 & 14 & -16 \\ 10 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1.	km	cest.		dospělí	děti
pátek	(2400	310)	1. vchod	(24	28)
sobota	1440	185)	2. vchod	(24	24)
			3. vchod	(24	20)

4.	EF 80	PCL 85	PCF 82
1. týden	(840	420	740)
2. týden	860	430	740)
3. týden	860	430	750)
4. týden	780	390	700)

$$19 \quad 71 + (1 + 9) \quad 71 - 1 \quad 9 \quad (7 + 1) - (1 + 9 + 7 - 1) = ?$$

0 sítích tří pravidelných mnohoúhelníků v rovině

JAROSLAV DRÁBEK, PF, Plzeň

V druhém čísle Rozhledů, ročník 48., řešil Stanislav Horák st. problém sítě pravidelných x -úhelníků v rovině. V tomto článku chci podat jisté zobecnění tohoto problému v tom, že vyšetřuji mnohoúhelníkové sítě v rovině vytvořené pravidelnými x -úhelníky, y -úhelníky a z -úhelníky. Každý vrchol sítě je tedy vrcholem tří vnitřních úhlů těchto tří pravidelných mnohoúhelníků, které mají postupně velikosti

$$\frac{(x-2)2R}{x}, \frac{(y-2)2R}{y} \text{ a } \frac{(z-2)2R}{z}$$

Podle definice sítě, jak ji formuluje S. Horák v citovaném článku, musí být splněna rovnice

$$\frac{(x-2)2R}{x} + \frac{(y-2)2R}{y} + \frac{(z-2)2R}{z} = 4R \quad (1)$$

Po snadné úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

kterou máme řešit v oboru přirozených čísel.

Předpokládejme, že přirozená čísla x , y a z , která jsou řešeními rovnice (2), splňují nerovnosti

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} \quad (3)$$

Pomocí vztahů (2) a (3) dostaneme nerovnost

$$\frac{3}{x} \geq \frac{1}{2} \quad (4)$$

tedy

$$3 \leq x \leq 6$$

Pro $x = 3, 4, 5, 6$ bude rovnice (2) ve tvarech

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10} \quad (7)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \quad (8)$$

pro neznámé y, z .

Z nerovností (3) odvodíme nerovnosti pro y

$$6 < y \leq 12, \quad (5')$$

$$4 < y \leq 8, \quad (6')$$

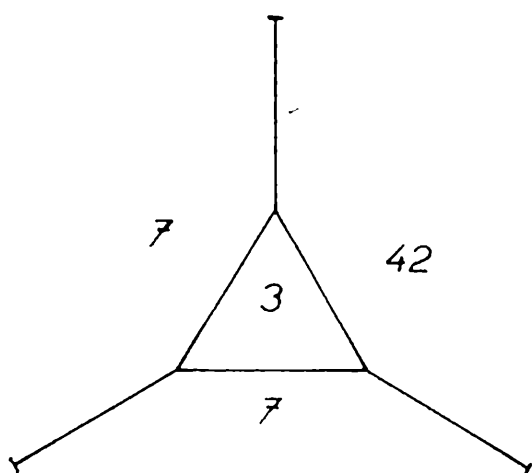
$$4 \leq y \leq 6, \quad (7')$$

$$4 \leq y \leq 6. \quad (8')$$

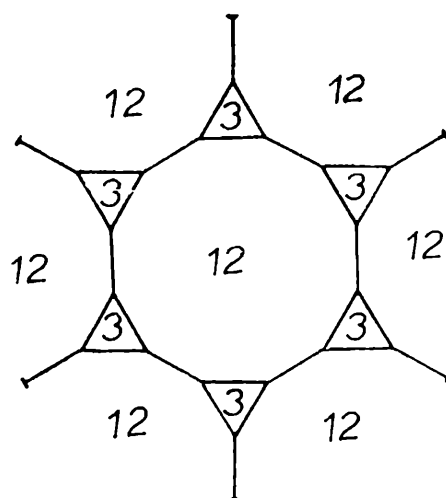
Při postupném dosazování do rovnic (5), (6), (7) a (8) za y z nerovností (5'), (6'), (7') a (8') a vyčíslování příslušného z v oboru přirozených čísel, dostaneme řešení rovnice (2)

(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12), (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10) a (6, 6, 6).

Některá z těchto řešení rovnice (2) geometricky nerepresentují mnohoúhelníky, které by vytvářely síť tří pravidelných mnohoúhelníků v rovině. Tak například trojice přirozených čísel (3, 7, 42) geometricky reprezentuje rovnostranný trojúhelník, pravidelný sedmiúhelník a 42-úhelník. Tyto tři mnohoúhelníky nevytvářejí síť tří pravidelných mnohoúhelníků v rovině, poněvadž u jednotlivých vrcholů rovnostranného trojúhelníka se musí vždy vyskytovat pravidelný sedmiúhelník a 42-úhelník, což není možné podle obrázku 1.

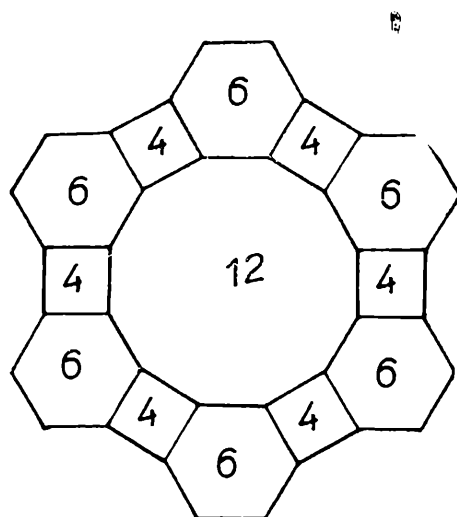


Obr. 1

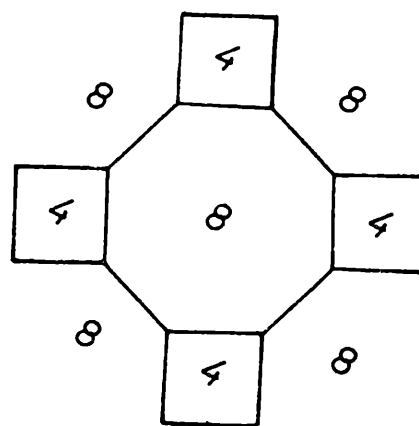


Obr. 2

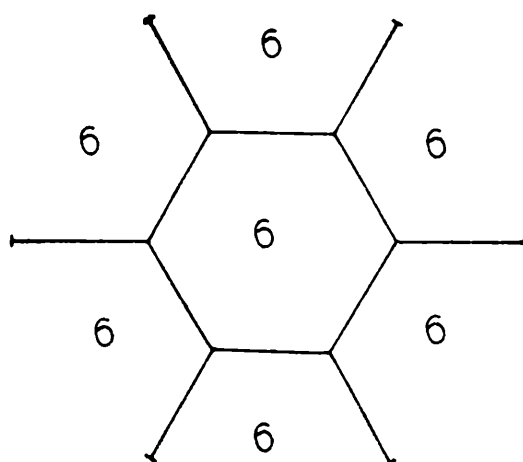
Obdobně zjistíme, že trojice přirozených čísel $(3, 8, 24)$, $(3, 9, 18)$, $(3, 10, 15)$, $(4, 5, 20)$ a $(5, 5, 10)$ nedávají řešení geometrického problému. Zbývají tedy tyto trojice přirozených čísel $(3, 12, 12)$, $(4, 6, 12)$, $(4, 8, 8)$ a $(6, 6, 6)$. Odpovídající sítě k těmto trojicím jsou naryšovány na obrázcích 2, 3, 4 a 5.



Obr. 3

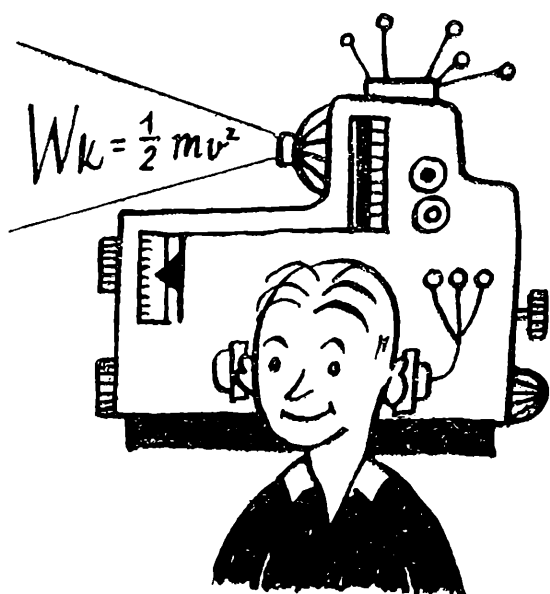


Obr. 4



Obr. 5

Tím je problém sítě tří pravidelných mnohoúhelníků v rovině vyřešen. Úloha o sítích pravidelných mnohoúhelníků v rovině se dá dále zobecnit na sítě čtyř, pěti, pravidelných mnohoúhelníků v rovině.



F Y Z I K A

Způsob psaní výsledků měření

Ing. dr. V. ŠINDELÁŘ, CSc., Praha

1 Úvod

Hodnotu veličiny, kterou získáme měřením, nazýváme *naměřenou hodnotou* této veličiny (krátce také *naměřenou veličinou*) nebo častěji *výsledkem měření*. Přitom rozlišujeme, zda veličina byla měřena jednou nebo vícekrát, opakovaně, *výsledek jednoho měření* a *výsledek řady měření*. *Hrubým výsledkem měření* nazýváme výsledek měření před provedením korekcí a před určením nejistoty měření. Korekcemi se mají v podstatě odstranit systematické chyby, které se vyskytly při měření a nejistota měření má charakterizovat příslušný vliv nahodilých chyb.

Opravený (korigovaný) výsledek měření vzniká opravením hrubého výsledku měření. Bývá v něm zpravidla také již uváděna příslušná nejistota.

Výsledek řady měření vyplývá zpracováním výsledků všech jednotlivých měření, které řadu tvoří. *Konečný*, tedy opravený *výsledek měření* získá se zpracováním *dílčích výsledků*, které samy mohou být buď hrubé (neopravené), jsou-li to výsledky jednotlivých měření, nebo již opravené, jde-li např. o konečný výsledek z několika řad měření.

2. Psaní čísel a číselných hodnot

Přesná čísla

Je-li žádoucí vyznačit, že nějaké uváděné číslo je konečným desetinným zlomkem (a jsou uváděny všechny jeho platné číslice), nebo že jde o číselnou hodnotu přijatou nějakou konvencí, tedy v případech, kdy poslední číslice je přesná, lze použít tyto způsoby:

připojením *slovní poznámky* „přesně“, umístěné do kulaté závorky za číselnou nebo celkovou hodnotu příslušné veličiny [např. $g_n = 9,806\ 65\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (přesně), $g_n = 9,806\ 65$ (přesně) $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $1\ \text{kcal IT} = 4,1868 \cdot 10^3\ \text{J}$ (přesně) apod.].

— v *tištěné dokumentaci* tučnější sazbou (např. $3/8 = 0,375$, $1\ \text{kp} = 9,806\ 65\ \text{N}$, $1\ \text{h} = 3,6 \cdot 10^3$ apod.).

— *podtržením* poslední číslice *dvojitou čarou* (např. $g_n = 9,806\ 65\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $5/8 = 0,625$ apod.).

Vyznačování přesných čísel nebo číselných hodnot se často neprovádí tehdy, jsou-li tato dekadicky celá, nebo je-li jejich přesnost jasně zřejmá (např. $1\ \text{kW} = 1000\ \text{W}$, $1^\circ = 60'$, $10\ \text{kp} : 2 = 5\ \text{kp}$ apod.). U tabulek, jde-li vesměs o přesná čísla lze tuto skutečnost uvést do poznámky k tabulce. Uvedený způsob se rovněž zpravidla nepoužívá při běžných numerických operacích a výpočtech, kdy se používá vesměs přesných čísel a není zaokrouhlováno (např. $5 \cdot 8 = 40$, $18^2 = 324$ apod.).

Neúplná čísla

Některé číslo nebo číselná hodnota jsou sice „přesně poznatelné“, jsou však vyjádřeny velmi dlouhou posloupností číslic, popřípadě rostoucí nade všechny meze (jsou vyjádřeny nekonečným desetinným zlomkem). Chceme-li je uvést na zmenšený, resp. konečný počet míst (aniž je přitom zaokrouhlujeme), činíme tak podle uvážení a za poslední číslici uděláme tři tečky (např. $g_n = 9,806 \dots \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, obvod kruhu o poloměru $r = 1\ \text{m}$ činí $L = 3,141\ 592 \dots\ \text{m}$, nebo $L = 3,1415 \dots\ \text{m}$, nebo $L = 3,14 \dots\ \text{m}$ apod.).

Nepřesná čísla

Neuvádíme-li u nějaké číselné hodnoty výsledku měření nejistotu (charakterizovanou některou z chyb), píšeme ji na potřebný počet míst, nikdy však, jak bude v dalším odstavci zvláště řečeno, na více nežli takové místo, které odpovídá druhé platné číslici nejistoty.

Nečiní-li v takovém případě nejistota více nežli $\frac{1}{2}$ poslední platné

číslíce uváděného čísla (resp. číselné hodnoty), píše se (resp. sází se) vesměs číslicemi stejné velikosti v jedné řadě.

Je-li však nejistota větší nežli $\frac{1}{2}$, pak se poslední číslice uváděné hodnoty (včetně nuly) připojuje za řadu předcházejících číslic podobně jako index (ponížený, menší velikosti nežli u předchozích číslic). Např. 1000₄, 2,81₁, 321,4₅ 10^{-2} apod.

Tohoto způsobu lze použít také tehdy, chceme-li z nějakého důvodu poznamenat u číselné hodnoty, např. pro pozdější analýzu určité řady měření (nebo jejich výsledku) ještě jednu nebo dvě číslice z původní čtené nebo početními operacemi získané hodnoty. Např. 2,85₃₆₁, 58,2₂₃ apod. Tento způsob „indexování“ nejistých hodnot (tj. na místech za platnými číslicemi nejistoty) nemá být používán na prvním desetinném místě, aby nedošlo k případnému omylu s desetinnou čárkou. V takovém případě je vhodné posunout desetinnou čárku změnou řádů číselné hodnoty a připojit potřebný faktor s mocninou deseti. Např. chybně 28,23 mm, správně 2,823 cm, resp. 2,823 · 10 mm apod.

Psaní zaokrouhlených čísel a zásady, které se jich týkají, jsou uvedeny v odstavci 4.

3. Psaní výsledků měření

Hrubý výsledek zaznamenáváme číselnou hodnotou veličiny, k níž připojujeme příslušnou jednotku. Přitom je žádoucí, aby se přednostně používaly hlavní jednotky SI, případně jejich násobky nebo díly, tvořené předepsaným způsobem. Číselná hodnota hrubého výsledku se uvádí na takový počet číslic, který je dán čtením na stupnici (včetně odhadování nejmenšího dílku stupnice) nebo početním zpracováním několika záznamů prováděných při jediném měření podle určitého postupu (např. při vážení z více kyvů apod.). U jediného měření lze provést korekci na systematické chyby, jsou-li tyto známé (např. u měřicí metody, měřidla nebo též u pozorovatele, který měření provádí), nelze však určit *nejistotu měření*, způsobenou výskytem nahodilých chyb. Nejistotou měření se charakterizuje variace jednotlivých výsledků měření. Vyjadřuje se např. střední kvadratickou chybou, pravděpodobnou chybou, výhodně také krajní chybou apod. Nejistotu měření lze stanovit náležitým postupem (podle teorie chyb, opírající se o teorii pravděpodobnosti) jen z několika dílčích jednotlivých měření. U jednotlivého měření nelze, jak již bylo řečeno, nejistotu měření stanovit, v nutném případě pouze odhadnout podle výsledků podobných, dříve provedených řad měření.

U řady měření lze číselnou hodnotu výsledku vypočítat z jednotlivých dílčích výsledků již opravených, nebo z výsledků hrubých a ko-

rekeci provést až u hrubého výsledku celé řady. První způsob měl by své oprávnění tehdy, kdyby u jednotlivých dílčích měření z řady měření přicházely v úvahu nestejně systematické chyby, což je případ řídký a vyžadující zpravidla zvláštní rozvahy, protože v takovém případě mohou mít jednotlivá dílčí měření také nestejnou váhu. Uvažujme dále opravený výsledek řady měření, u níž ještě nebyla stanovena nejistota. Počet číslic číselné hodnoty takového výsledku je závislý jednak na počtu číslic jednotlivých dílčích výsledků, jednak na počtu členů řady a jejím matematickém zpracování. Volíme-li za nejpravděpodobnější hodnotu výsledku měření aritmetický střed (opíráme-li se o teorém nejmenších čtverců) — což je nejběžnější, zvětšuje se nám počet číslic. Např. u 10 měření o jednu číslici, u 100 měření o 2 číslice atd. Při jiných počtech měření nežli rovných 10^x (kde $x = 1, 2, 3, \dots$) může vzrůst počet číslic vlastní matematickou operací (dělením) i velmi značně, popřípadě i nade všechny meze.

Příklad 1 (jsou uváděny pouze číselné hodnoty)

- a) dílčí výsledky 5,1, 5,2, 5,1, 5,0, 5,2, 5,2, 5,1, 4,9, 5,1, 5,0 (počet měření $n = 10$, počet platných číslic u jediného výsledku 2)
výsledek desetičlenné řady měření je roven

$$\frac{5,1 + 5,2 + \dots + 5,0}{10} = \frac{50,9}{10} = 5,09$$

(počet číslic u výsledku řady 3).

- b) dílčí výsledky 5,1, 4,9, 5,1, 5,0 (počet měření $n = 4$, počet číslic u jediného výsledku 2),
výsledek čtyřčlenné řady měření je roven

$$\frac{5,1 + 4,9 + 5,1 + 5,0}{4} = \frac{20,1}{4} = 5,025$$

(počet číslic u výsledku řady 4).

- c) dílčí výsledky 5,1, 5,2, 5,1 (počet měření $n = 3$, počet číslic u jediného výsledku 2),
výsledek tříčlenné řady měření je roven

$$\frac{5,1 + 5,2 + 5,1}{3} = \frac{15,4}{3} = 5,1\bar{3}$$

(počet číslic u výsledku řady roste teoreticky nade všechny meze; poslední číslice je periodická).

Konečné rozhodnutí o tom, kolik číslic ve výsledku řady měření ponecháme, vyplývá už z vypočtené nejistoty, přesto však není účelné zaznamenávat číselnou hodnotu výsledku předběžně na příliš velký

počet číslic. Obvykle postačí o tolik zvětšený počet číslic proti jednomu dílčímu výsledku, kolik činí nahoru zaokrouhlený dekadický řád (např. při $n = 2$ až 10 o 1 číslici, při $n = 11$ až 100 o 2 číslice apod.). Ve srovnání s trváním celé matematické operace je ovšem zmíněná záležitost z ekonomického hlediska zanedbatelná. Protože však každou číselnou hodnotu před jejím konečným záznamem zaokrouhlujeme, nejsou jedna nebo dvě případně nadbytečné číslice před zaokrouhlováním na závadu.

Bylo již řečeno, že o konečném znění číselné hodnoty výsledku řady měření rozhoduje nejistota měření, kterou charakterizujeme některou z chyb. To, co je dále uvedeno, se zpravidla aplikuje na stejné chyby různých typů a na relativně největší z nich, chybu krajní. Chybu výsledku uvádíme nejčastěji na 2 platné číslice. První platnou číslicí je první nenulová číslice zleva v číselné hodnotě chyby, druhá platná číslice po ní následuje, je o jeden dekadický řád nižší. Druhou platnou číslicí může být i nula (např. $0,12\ \mu\text{m}$, $0,073\ \text{mA}$, $5,3\ \text{mm}$, $0,50\ \text{Pa}$ aj.).

Vzhledem k tomu, že chyby výsledku měření nejsou jisté, nýbrž jen více či méně pravděpodobné, nemá psaní číselné hodnoty chyby výsledku na více platných číslic nežli dvě, význam. Neliší-li se tato pravděpodobnost příliš od 100 %, hovoří se někdy o „praktické jistotě“. Pravděpodobnost, že chyba výsledku je menší nežli vypočtená a udávaná hodnota, činí u pravděpodobné chyby (ϑ) $P = 50\ \%$, u střední kvadratické chyby (δ) $P = 68,27\ \%$ a u krajní chyby (κ) definované resp. $\kappa = 3\ \delta$ je $P = 99,73\ \%$, $\kappa = 2,58\ \delta$ je $P = 99\ \%$ a $\kappa = 1,96\ \delta$ je $P = 95\ \%$.

Hrubý výsledek měření i korekci (vše ve stejných jednotkách jako u nejistoty) píšeme v dalším postupu matematického zpracování na tolik číslic, aby poslední byla na stejném místě (vzhledem k desetinné čárce; na stejném řádu vzhledem k použité jednotce) jako je druhá platná číslice u nejistoty.

Příklad 2

Výpočtem jsme pro vícekrátě měřený elektrický proud obdrželi hodnotu (hrubého) výsledku $I' = 2,735\ 123\ \text{A}$, korekce (rovněž vypočtená z dílčích hodnot) činí $\Delta I = 0,2352\ \text{A}$.

Pro nejistotu měření, kterou charakterizujeme krajní chybou, vyšla nám hodnota $\kappa = 0,018\ \text{A}$. Druhá platná číslice u krajní chyby je na 3. místě za desetinnou čárkou (je to řád miliampérů). Číselnou hodnotu hrubého výsledku zkrátíme nyní (zaokrouhlením) na stejné místo poslední číslice: $I = 2,735\ \text{A}$, podobně i korekci $\Delta I = 0,235\ \text{A}$. Opravený výsledek měření bude činit $I' - \Delta I = 2,735 - 0,235 = 2,500\ \text{A}$. Spolu s dříve uvedenou nejistotou můžeme psát konečný opravený výsledek např. takto: $I = (2,500 \pm 0,018)\ \text{A}$.

Při zkracování číselných hodnot (zmenšování počtu číslic) je nutné čísla zaokrouhlovat. Hlavní zásady jednotného postupu uvedu ve 4. části tohoto pojednání.

Jak bylo z právě uvedeného příkladu patrné, píšeme nejistotu výsledku měření za číselnou hodnotu výsledku a klademe před ni znaménka $\pm$, která vyjadřují jeden ze základních zákonů teorie chyb: Kladné chyby jsou stejně četné jako záporné.

Příklad 3

Odpor měřené cívky činí

$$R = \underbrace{(3,032 \pm 0,011)}_{\text{platné číslice výsledku měření}} \Omega$$

platné číslice nejistoty (např. krajní chyby)

Výsledek má 4 platné číslice, nejistota 2 platné číslice. Obě číselné hodnoty končí číslicí na stejném řádovém místě při stejných jednotkách.

Číselné hodnoty výsledku a nejistoty umísťujeme do společné okrouhlé závorky, za níž vyznačíme příslušnou jednotku. Kdybychom nepoužívali závorky, musíme jednotku (u obou číselných hodnot stejnou) připojit k oběma číselným hodnotám. Výsledek a příslušnou nejistotu lze vyznačit při použití okrouhlých závorek také relativně, jak je patrné z příkladu 4c. V příkladech jsou zásady aplikovány také na bezrozměrové veličiny.

Příklad 4

a) $x = (4,785 \pm 0,016) \text{ mm}$,

$y = (200,18 \pm 0,32) \text{ cd}$,

$c_o = (2,997\,90 \pm 0,000\,06) \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$\varepsilon_r = (12,3 \pm 0,1) \% = 0,123 \pm 0,001$

b) $x = 4,785 \text{ mm} \pm 0,016 \text{ mm}$

$y = 200,18 \text{ cd} \pm 0,32 \text{ cd}$

$\varepsilon_r = 12,3 \% \pm 0,1 \% = 0,123 \pm 0,001$

c) $X = 3,726 \text{ mm} (1 \pm 0,005) = 3,726 (1 \pm 0,005) \text{ mm}$

$x = 2,18 (1 \pm 0,03) \%$

Ve zvláštních případech lze hodnotu veličiny psát také pomocí krajních hodnot rozptylu v úhlových závorkách. Např.:

$$c_o = \langle 2,997\,84 \cdot 10^8; 2,997\,96 \cdot 10^8 \rangle \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Aby byl způsob psaní číselných hodnot ekonomický a jasný, doporučuje se:

- uvádět u fyzikálních veličin číselné hodnoty v hlavních jednotkách SI. V nutných případech, kdy je nutné používat vedlejší jednotku, tedy se raději vyhnout násobkům a dílům.
- Číselné hodnoty přednostně uvádět tak, aby první (nenulová) číslice (zleva) byla na nultém dekadickém řádu, tj. na prvním místě před desetinnou tečkou. Desítkový řád číselné hodnoty se přitom vyjadřuje součinem příslušné mocniny deseti.

Např. $l = 2,35 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, $i = 3,21 \cdot 10^{-9} \text{ A}$, $U = 2 \cdot 10^5 \text{ V}$, $\Delta m = 2 \cdot 10^3 \text{ ‰}$ aj.).

Jde-li o to, číselnou hodnotu příslušející nějaké běžné známé jednotce uvést názorně, pak lze druhou z právě uvedených zásad pominout. (Např. $V = 120 \text{ V}$, $p = 150 \text{ at}$, $l = 20 \text{ μm}$ aj.).

Totéž platí i u bezrozměrových veličin ($\mu_r = 1221,5$, $\epsilon_r = 13,6$ aj.).

4. Zaokrouhlování

Pro tento důležitý úkon je připravována ČSN 01 1010, jejíž návrh jsem zpracoval za pomoci odborníků a z níž cituji hlavní zásady. *Zaokrouhlováním* rozumíme nahrazení daného čísla (provedené určitým způsobem) jiným číslem, jemu blízkým (tzv. *číslem zaokrouhleným*). Zaokrouhlené číslo je u nejběžnějšího zaokrouhlování — *desítkového* (*dekadického*) — vždy alespoň o jednu číslici kratší, nežli číslo původní. Desítkovým se zaokrouhlování nazývá proto, že se číslo zkracuje nejmeně o jeden *desítkový řád*. Číslici, kterou zaokrouhlené (okrouhlé) číslo končí, nazýváme *zaokrouhlenou* (*okrouhlou*) *číslicí*.

O provedení desítkového zaokrouhlení rozhoduje číslice, která u dosud nezaokrouhleného čísla následuje bezprostředně za číslicí, která má být zaokrouhlena.

a) Je-li touto číslicí 0, 1, 2, 3 nebo 4, pak číslice, která tuto předchází, *zůstane beze změny*. To je tzv. *zaokrouhlování dolů* (např. 3,14, se zaokrouhlí na 3,1, 7,342 na 7,34 aj.).

b) Je-li touto číslicí 6, 7, 8 nebo 9, pak číslice, která ji předchází, se *zvětší o jednu*. To je tzv. *zaokrouhlování nahoru* (např. 3,28 se zaokrouhlí na 3,3, 5,369 na 5,4 aj.).

c) Je-li touto číslicí tzv. *přesná pětka*, tj. víme-li, že za ní u zaokrouhleného čísla následují jen samé nuly (např. $50 : 2 = 25$), používá se při zaokrouhlování *pravidla sudé číslice*. Podle tohoto pravidla číslice, jež přesné 5 předchází a jejímž místem má zaokrouhlené číslo končit, *ponechá se beze změny, je-li sudá; je-li tato číslice lichá, pak se zaokrouhlením zvýší o jedničku* (např. 9,806 65 se přesně zaokrouhlí na 9,8066, $1/16 = 0,0625$ na 0,62, $15/4 = 3,75$ na 3,8 aj.).

Končí-li zaokrouhlované číslo pětkou, u níž nevíme, zda je přesná, používáme pro ni stejného pravidla jako u přesné pětky (např. $3,85 \approx 3,8$, $7,235 \approx 7,24$ aj.).

d) Je-li za místem pro okrouhlou číslici číslice 5 následovaná ještě (alespoň) jednou další nenulovou číslicí, pak se zaokrouhluje vždy nahoru (např. $4,251 \approx 4,3$, $1,250\,001 \approx 1,3$ aj.).

Každé číslo má se *zaokrouhlovat jednou*. Vícenásobné postupné zaokrouhlování téhož čísla není přípustné, protože by mohlo vést k omylu.

Číslo, u kterého není nic bližšího uvedeno, se *považuje za zaokrouhlené*.

Zaokrouhlovacím intervalem rozumíme interval číselné hodnoty mezi nejmenším a největším číslem, jehož zaokrouhlením by vzniklo ještě dané číslo.

Příklad 5

Je-li v nějaké dokumentaci uvedena zaokrouhlená číselná hodnota 41, vyhovují jí všechna (nezaokrouhlená) čísla v intervalu od 40,5 do 41,5.

Je-li uvedena číselná hodnota 41,0, vyhovují jí všechna čísla v intervalu od 40,95 do 41,05.

Bylo již řečeno, že každé číslo, u něhož není nic bližšího udáno, pokládáme za zaokrouhlené. Chceme-li u čísla vyznačit, jak bylo zaokrouhlení provedeno (zda nahoru nebo dolů), postupujeme takto:

zaokrouhlování nahoru se vyznačí u poslední číslice zaokrouhleného čísla jejím *podtržením* (např. $4,28 \approx 4,3$, $5,369 \approx 5,4$ aj.).

Zaokrouhlování dolů se vyznačí u poslední číslice tečkou nad ní (např. $3,14 \approx 3,1$, $9,272 \approx 9,27$ apod.).

Jak řešit fyzikální úlohy

I V O V O L F, PF, Hradec Králové

Studující středních škol mají veliké potíže s řešením fyzikálních úloh, zejména na počátku svého studia. Proto se jim středoškolská fyzika zdá značně obtížnější, než tomu bylo na základní škole.

Fyzikální úlohy jsou však nejčastější formou školské aplikace fyzikálních poznatků, budou vás provázet v celém dalším studiu, event. i na vysoké škole, a proto bude rozumné vyrovnat se s tímto nedostatkem.

Na základní devítileté škole se sice ve fyzice stále více vyskytují početní úlohy, ale tam je situace jednodušší, neboť stačí znát několik potřebných vzorců a dosazovat do nich.

Je jasné, že prospěchově slabí žáci jsou bezradní při řešení úloh, avšak podivné je, že stejně postižení bývají i žáci nadaní. Při rozboru a klasifikaci řešení úloh, zadaných v Rozhledech anebo v soutěži FO

(i v nejvyšším, celostátním kole) zjišťují klasifikátoři, že mnozí řešitelé mají poměrně dobré znalosti, takže by, v ideálním případě, měli úlohu rozřešit, přesto však se nedostali ke správným výsledkům. Potřebné vzorce by znali, ale není jim jasné, jak jich použít, jak začít a jak postupovat.

Jednou z příčin nezdaru je neznalost metodiky řešení fyzikálních úloh a jejich vhodného zápisu. Mnozí žáci ani nevědí, že existuje nějaká strategie v procesu řešení. Spoléhají se spíš na náhodu a řeší úlohu metodou pokusů a omylů, tedy zcela nevědecky.

Pro zamezení těchto nezdarů doporučuji čtenářům dobře promyslet tento návod. *)

Schéma řešení fyzikální úlohy.

1. Text úlohy několikrát pozorně přečteme, abychom porozuměli všem pojmům v úloze uvedeným a současně pochopili podstatu problému úlohy.

2. Všechny fyzikální veličiny, uvedené v zadání úlohy, označme písmeny podle smluveného kódu a společně s hodnotami, převedenými do jediné jednotkové soustavy (zpravidla do soustavy mezinárodní, SI) zapíšeme ve svislém pořadí. **)

Podobně zapíšeme, z paměti anebo z tabulek, hodnoty potřebných fyzikálních konstant. Pak oddělíme vodorovnou čarou veličiny známé od hledaných a pod čáru zapíšeme veličiny hledané (zapsané rovněž ve svislém pořadí a s otázkou, např. $s = ?$ atd.) a celý zápis oddělíme svislou čarou od dalšího řešení.

3. Vpravo od zápisu veličin umístíme náčrt situace, nebo nakreslíme schéma. V něm vyznačíme dané údaje (obecně anebo i s hodnotami), a ty které budeme potřebovat pro řešení.

Někdy je řešiteli vůbec obtížné orientovat se v textu úlohy a nedovede si vyličenou situaci představit. Potom náčrtek nebo schéma pomůže v rychlejší orientaci, i při označování fyzikálních veličin. V tomto případě se doporučuje vyměnit pořadí bodů 2. a 3. tohoto schématu.

4. Provedeme fyzikální analýzu problému, tj. rozhodneme, které fyzikální zákony budeme při řešení potřebovat a zapíšeme je. Přitom si rozmyslíme, jakou metodou budeme úlohu řešit a konečně stanovíme plán postupu.

5. Úlohu řešíme (zpravidla!) nejprve obecně. Vyjdeme ze základních vztahů a algebraicky je upravujeme, abychom se od veličin daných dostali k veličinám hledaným a našli vzorec, jehož levá strana obsahuje veličinu hledanou, kdežto pravá strana pouze veličiny známé (tj. zadané a potřebné známé konstanty).

*) O svých úspěších i potížích při řešení úloh napište autorovi do redakce Rozhledů, aby vám mohl případně poradit!

**) Kvůli přehlednosti a event. snadnějšímu slučování,

Obecné řešení je velmi důležité, neboť je vlastně řešením celé množiny úloh, které se liší pouze číselnými údaji.

Jestliže však úpravy při obecném řešení vytvářejí stále složitější vztahy, nebo vyžadují provést nám známé matematické úkony (např. řešení rovnic stupně vyššího než 2., pak dosazujeme ihned.

6. Provedeme tzv. dimenzioální (rozměrovou) zkoušku. Do obou stran získaného výsledného vzorce dosadíme jen fyzikální jednotky***) veličin, které se ve vzorci vyskytují (takže píšeme místo síly F její jednotku, tj. $N = \text{kg m s}^{-2}$, místo práce A anebo energie W její jednotku $\text{joule} = J = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ apod.). Po úpravách, tj. po vynásobení mocnin o stejných základech, musí na obou stranách vzorce vyjít táž fyz. jednotka, čili obě strany musejí mít stejný fyzikální rozměr, čili stejnou dimenzi. Nesouhlas v dimenzích obou stran je postačujícím důkazem, že řešení není správné.

7. Provedeme numerický výpočet. K výsledné číselné hodnotě připišeme fyz. jednotku zjištěnou v bodě 6.

Je-li numerický výpočet složitější, použijeme vhodných pomůcek. ulehčujících počítání (log. tabulky, log. pravítka, popř. kalkulačky). Numerické počítání se totiž nemá stát převažující a zatěžující složkou při řešení fyzikálních úloh.

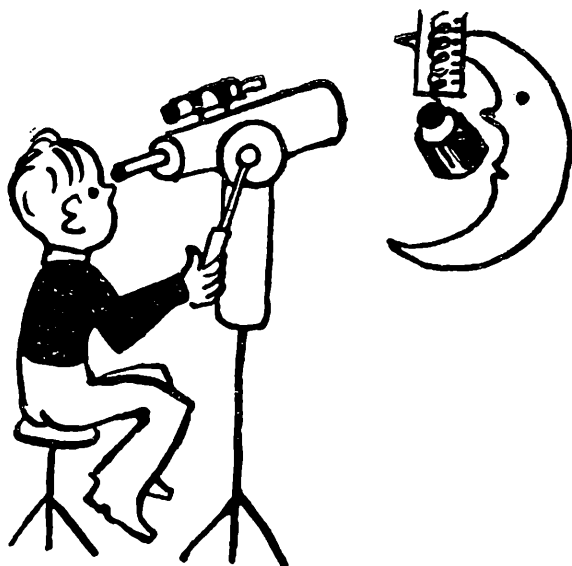
8. Vyžaduje-li to text úlohy, provedeme graf, diagram, popř. nakreslíme správné schéma, nebo úlohu zkontrolujeme některou grafickou metodou.

9. Provedeme diskusi řešení. Získaný výsledek porovnáme se skutečností, kterou může zastupovat buď naše osobní zkušenost, nebo hodnoty ve fyzikálních tabulkách. Je-li výsledek našich výpočtů nepravděpodobný (např. vypočtená hustota látky se značně odlišuje od hodnoty v tabulkách), snažíme se objevit, čím tato nepravděpodobnost byla způsobena. Mohla totiž vzniknout buď naším nesprávným počítáním, nebo chybou v zadání úlohy. V takovém případě připojíme stručný komentář.

10. Sestavíme slovní odpověď, zejména tehdy, je-li vypočtená veličina pouze pomocníkem při zodpovězení otázky v textu úlohy.

V některém z dalších čísel Rozhledů uveřejníme podrobné řešení příkladu z matematiky, jak by je měl provést student I. ročníku střední školy.

***). Přesněji vzato, musíme fyzikální rozměry veličin vyjadřovat rozměrovými symboly a nikoliv hlavními jednotkami, jak je to u nás doposud zvykem. (Poznámka red.)



ASTRONOMIE

Překvapení z vesmíru

ANTONÍN SVOBODA, Praha

Od počátku vývoje astronomie bylo jedním z hlavních prostředků poznání optické pozorování, nejdříve pouhým okem, později pomocí dalekohledů. Touto cestou bylo dosaženo pozoruhodných výsledků, které nejen přispěly k postupnému poznání vesmíru, ale také k formování světového názoru. Dalekohledy (optické, čočkové) nabývají se zdokonalující se technikou stále větších rozměrů. Největší dalekohled má dnes k dispozici hvězdárna na Mt Palomaru v USA s průměrem 5 metrů. Proto má tento dalekohled největší „dosah“.

Světlo pozorovaných hvězd lze rozložit, a tak vzniká spektrum příslušné hvězdy s určitými absorpčními čarami, tmavými na barevném podkladě. Příkladem je spektrum Slunce, které je jednou z hvězd naší galaxie, a to hvězdou poměrně malou co do rozměrů. Jeho spektrum tvoří soustava známých duhových barev. Na jejich podkladě jsou ve zcela určité poloze tmavé čáry, odpovídající zcela určitým vlnovým délkám, tzv. čáry Fraunhoferovy. Vznikají absorpcí slunečního světla při průchodu parami různých chemických prvků. Poloha a tedy vlnová délka těchto čar je charakteristická pro každý prvek. Vznikají při určité teplotě a tvoří stálé konfigurace, zvané série.

V poslední době bylo optické pozorování vesmíru doplněno zcela novým druhem pozorování — zachycováním rádiových vln, vysílaných zdroji dosud často neznámými ve vesmíru — tzv. radiohvězdami. Při pozorování radiohvězd převzaly úlohu dalekohledů směrové antény

tvaru mohutných dešťníků v obrácené poloze, tzv. radioteleskopy, jejichž průměry dosahují několika desítek metrů (v australském Parkasu např. 64 m). Jimi lze zjistit polohu zdroje rádiového záření, třebaže není ve většině případů opticky viditelný. Byly konány pokusy zjistit nejsilnějšími dalekohledy totožnost zdrojů rádiového záření s viditelnými hvězdami, tzv. optickými hvězdami. Při prvním pokusu byla na místě zaměřeném radioteleskopicky skutečně optická hvězda zjištěna. Takto byla úloha zdánlivě vyřešena, ale objevila se okolnost, která toto řešení činila problematickým. Ve spektru dotyčné hvězdy byly zjištěny čáry, které svou polohou neodpovídaly žádnému známému prvku.

Holandan Schmidt však postřehl, že čáry mají stejnou konfiguraci jako Balmerova série vodíku, jen poloha je odlišná — jsou jako celek posunuty směrem k červené části spektra, neboli vykazují tzv. rudý posuv, tj. odpovídají větším vlnovým délkám. Obdobná změna je známa u všech druhů vlnění, kde zdroj vlnění se od pozorovatele vzdaluje. Její vysvětlení podává známý Dopplerův princip: Vzdaluje-li se zdroj od pozorovatele, zmenšuje se frekvence přijímaného vlnění a tím se vlnová délka zvětšuje. Pozorovatel např. slyší nižší tón, než zdroj skutečně vydává. V případě světelného vlnění se vlnové délky, odpovídající jednotlivým spektrálním liniím, prodlužují a příslušné čáry se posunují k červenému konci spektra. Dopplerův princip byl tedy jedním z možných vysvětlení rudého posuvu. Jiným způsobem lze podat vysvětlení rudého posuvu pomocí gravitace příslušné hvězdy: Podle kvantové teorie světla je světlo proud částic, tzv. fotonů o energii $h\nu$, kde h je Planckova konstanta a ν frekvence. Tato energie se při výstupu z hvězdy zmenšuje asi tak, jako se zmenšuje kinetická energie kamene při svislém vrhu vzhůru. Zmenšuje se tedy frekvence a zvětšuje se vlnová délka. Leč vysvětlení pomocí gravitace se ukázalo v tomto případě nemožné, neboť se objevily úkazy, svědčící o slabé gravitaci tělesa. Bylo-li přijato vysvětlení posuvu pohybem zdroje, bylo možno z Dopplerova principu určit rychlost, která by dosahovala hodnoty až 100 000 km/s, což ukazovalo, že se jedná o těleso, které nepatří do naší galaxie. Z velikosti posuvu bylo možno dále vypočíst jeho vzdálenost, což přineslo další překvapení: Vzdálenost tohoto tělesa je dána miliardou světelných let. Během času bylo objeveno několik dalších „hvězd“ této vlastnosti a dostalo se jim souhrnného názvu quasar.

Další překvapující vlastností quasarů je neobyčejná intenzita rádiového záření. Pro porovnání uveďme, že naše galaxie by byla ze vzdálenosti quasarů při optickém pozorování na hranicích viditelnosti. Její rádiové záření by nebylo již možno zjistit. Quasary však za stejných okolností projevují zářivý výkon až 10 000krát větší, třebaže, jak se později ukázalo, jej v krátkých časových intervalech značně mění. Z této skutečnosti vyplynulo další překvapení: Rozměry quasarů jsou poměrně malé. Zatímco vzdálenost quasarů, jak bylo uvedeno, byla určena v mi-

liardách světelných let, byly odhadnuty jejich rozměry ve světelných týdnech. V tomto případě jejich hmotnost musí být více než milionkrát větší hmotnosti našeho Slunce, a to je v rozporu se stávajícími zákony astrofyziky.

Vysvětlení rozporů mezi fakty zjištěnými o quasarech není dosud jednoznačné a je předmětem řady hypotéz, ale jedno je jisté: Quasary přispěly k rozšíření oblasti našeho poznání na několik miliard světelných let (podle zprávy Scientific American quasar 3C-9) a ke zjištění těles o hmotnosti milionkrát větší než je hmotnost našeho Slunce.

NAŠE SOUTĚŽ

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Ve 3. čísle letošních Rozhledů jsme uveřejnili jména těch našich řešitelů, kteří se umístili na prvních místech v matematice. Nyní k tomu připojujeme obdobné seznamy z fyziky a konstruktivní geometrie.

Fyzika

1.—2. Šafařík Jiří, 3. b SVŠ Bratislava	36 bodů
1.—2. Šafařík Karel, 2. b SVŠ Bratislava	36 bodů
3.—5. Kohout Jan, 3. s SVVŠ Brno	34 bodů
3.—5. Pospíšil Luboš, 2. s SVVŠ Brno	34 bodů
3.—5. Ramík Jaroslav, 3. a SVVŠ Ostrava	34 bodů
6. Ravas Rudolf, 3. c SVŠ Holíč	33 bodů
7.—8. Kirschner Alexander, 3. a SVŠ Bratislava	32 bodů
7.—8. Pudlák Pavel, 3. d SVVŠ Praha	32 bodů

Konstruktivní geometrie

1.—2. Šafařík Jiří, 3. b SVŠ Bratislava	24 body
1.—2. Šafařík Karel, 2. b SVŠ Bratislava	24 body
3. Pudlák Pavel, 3. d SVVŠ Praha	23 body
4. Mattieligh Andrej, 3. a SVŠ Michalovce	18 bodů

Vítězové

V celkové soutěži je pořadí toto:

1.—2. Šafařík Jiří, 3. b SVŠ Bratislava	128 bodů
1.—2. Šafařík Karel, 2. b SVŠ Bratislava	128 bodů
3. Pudlák Pavel, 3. d SVVŠ Praha	113 bodů
4. Mattieligh Andrej, 3. a SVŠ Michalovce	96 bodů
5. Kašík Martin, 3. d SVVŠ Praha	82 bodů
6. Firbas Petr, 2. s SVVŠ Brno	73 bodů

Redakce Rozhledů děkuje všem řešitelům za projevený zájem a zároveň blahopřeje všem vítězům. Všem našim členům pak přeje hodně úspěchů ve studiu.

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

5. Symbol $(305)_x$ predstavuje trojciferné číslo napísané v číselnej sústave o základu x . Ak k tomuto číslu pripočítame číslo, v ktorom prvá a posledná číslica sú vymenené, zatiaľ čo nula zostáva na svojom mieste, je súčet rovný druhej mocnine prirodzeného čísla. Určte najmenšie takéto číslo a k nemu príslušné číslo x .

(Došlo 30 řešení)

Stanislav Horák

Riešil Július Cibula, 3.a SVŠ, Spišská Nová Ves

Vieme, že

$$(305)_x = 3x^2 + 0 \cdot x + 5$$

Po zámene dostávame

$$(503)_x = 5x^2 + 0 \cdot x + 3$$

Ich súčet je

$$8x^2 + 8 = n^2,$$

kde x, n sú prirodzená čísla. Je zrejmé, že n^2 musí byť deliteľné číslom 8.

Teda

$$n = 4k ,$$

kde k je prirodzené číslo. Potom platí

$$x^2 = 2k^2 - 1 \quad (P)$$

V zápise nášho čísla vystupuje najväčšia číslica 5, a preto

$$x \geq 6 .$$

Platí

$$x^2 \geq 36$$

a potom

$$2k^2 - 1 \geq 36 \Rightarrow k \geq 5 .$$

Keďže $k = 5$, je $n = 20$ a

$$x = 7$$

Záver. Najmenším takýmto číslom je 20 a k nemu príslušné číslo $x = 7$.

Poznámka. Některí řešitelé si všimli toho, že rovnice (P) je Pellova a uvedli její řešení.

6. Vyšetřte, pro která x má význam logaritmus výrazu $V = \frac{z+1}{z-1}$ v němž $z = \frac{x^4 - 25x^2 + 72}{72}$.

(Došla 32 řešení).

Josef Kotyk

Řešil Luboš Pospíšil, 2. roč. SVVŠ Brno, Křenová 36.

$$\text{Jestliže } z = \frac{x^4 - 25x^2 + 72}{72}, \text{ jest } V = \frac{z+1}{z-1} = \frac{x^4 - 25x^2 + 144}{x^4 - 25x^2};$$

tento výraz lze uvést v tvar schopný logaritmování v těchto čtyřech případech:

$$\text{I. } V = \frac{(x+3)(x-3)(x+4)(x-4)}{x^2 \cdot (x+5)(x-5)} > 0 \quad \text{pro } x > 5;$$

$$\text{II. } V = \frac{(x+3)(x-3)(x+4)(-x+4)}{x^2 \cdot (x+5)(-x+5)} > 0 \quad \text{pro } 3 < x < 4;$$

$$\text{III. } V = \frac{(-x+3)(-x-3)(-x+4)(-x-4)}{(-x)^2 \cdot (-x+5)(-x-5)} > 0 \quad \text{pro } x < -5;$$

$$\text{IV. } V = \frac{(-x+3)(-x-3)(x+4)(-x+4)}{(-x)^2 \cdot (x+5)(-x+5)} > 0 \quad \text{pro } -4 < x < 3.$$

Pro x takto zjištěná má logaritmus předloženého výrazu význam a lze jej z naznačené úpravy ihned vyjádřit. Např. pro $x < -5$ (případ III.) jest $\log V = \log(-x+3) + \log(-x-3) + \log(-x+4) + \log(-x-4) - 2\log(-x) - \log(-x+5) - \log(-x-5)$.

O základu (basi) b uvažovaných logaritmů předpokládáme, že $b > 0$, $b \neq 1$.

7. Vyjádřete číslo 16 všemi možnými způsoby ve tvaru $x - p(x)$, kde x je vhodné přirozené číslo a $p(x)$ značí součin jeho číslic v desítkové soustavě.

Jiří Sedláček.

(Došlo 18 řešení.)

Řešil Pavel Pudlák, SVVŠ Nad štolou, Praha 7. (Řešení upraveno.)
Řešení: Jestliže hledané číslo x má n číslic, lze je psát ve tvaru

$$x = A_n \cdot 10^{n-1} + A_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + 10 \cdot A_2 + A_1,$$

kde A_k jsou celá čísla, $0 \leq A_k \leq 9$, $A_n \neq 0$.

Požadavek úlohy pak zní

$$A_n \cdot 10^{n-1} + A_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + 10A_2 + A_1 - A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_2 \cdot A_1 = 16$$

Pro $n = 1$ je $x - p(x) = 0 \neq 16$, takže hledané číslo je alespoň dvojčíferné.

Dokážeme ještě, že x nemůže mít více než dvě číslice. Předpokládejme, že $n \geq 3$ (důkaz sporem). Potom

$$\begin{aligned} A_n \cdot 10^{n-1} + A_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + A_1 - A_n \cdot A_{n-1} \cdot \dots \cdot A_1 &\geq A_n \cdot 10^{n-1} \\ - A_n \cdot 9^{n-1} &\geq A_n \cdot 9^{n-3} \cdot 10^2 - A_n \cdot 9^{n-1} = A_n \cdot (10^2 - 9^2) \cdot 9^{n-3} = \\ &= A_n \cdot 9^{n-3} \cdot 19 > 16. \end{aligned}$$

Hledané číslo x je tedy právě dvojčíferné, tj.

$$x = 10A_2 + A_1, \quad A_2 \neq 0$$

Požadavek úlohy pak zní

$$10A_2 + A_1 - A_2 \cdot A_1 = 16$$

Odtud plyne

$$A_2 = \frac{16 - A_1}{10 - A_1} = \frac{(10 - A_1) + 6}{10 - A_1} = 1 + \frac{6}{10 - A_1}$$

Protože A_2 je celé číslo, musí být číslo $(10 - A_1)$ dělitelem čísla 6, takže mohou nastat celkem 4 případy:

$$10 - A_1 = 1; \quad 10 - A_1 = 2; \quad 10 - A_1 = 3; \quad 10 - A_1 = 6$$

Odtud pak

$$\begin{array}{llll} A_1 = 9; & A_1 = 8; & A_1 = 7; & A_1 = 4 \\ A_2 = 7; & A_2 = 4; & A_2 = 3; & A_2 = 2 \end{array}$$

Úloze vyhovují tudíž čísla 79, 48, 37 a 24. Skutečně platí

$$79 - 7 \cdot 9 = 48 - 4 \cdot 8 = 37 - 3 \cdot 7 = 24 - 2 \cdot 4 = 16$$

8. Vypočtete

$$\sqrt{\underbrace{1777}_{2k+1} \underbrace{76 - 3555}_{k} 52}$$

(Došlo 16 řešení)

Ota Setzer

Řešil Karel Horák, 1.b gymn. Strakonice:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\underbrace{1777}_{2k+1} \underbrace{76 - 3555}_{k} 52} = \sqrt{\underbrace{1777}_{k} \underbrace{74 \ 222}_{k} \cdot \overline{24}} = \\ &= 4 \sqrt{\underbrace{111}_{k} \underbrace{10 \ 888}_{k} 8 \ 9} = 4\sqrt{V} \end{aligned}$$

Pro výraz pod odmocnítkem platí

$$\begin{aligned} V &= (10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1) 10^{k+2} + 80(10^{k-1} + 10^{k-2} + \\ &+ \dots + 10 + 1) + 9 = 10^{k+2} \frac{10^k - 1}{10 - 1} + 80 \frac{10^k - 1}{10 - 1} + \\ &+ 9 = \frac{(10^{k+2} + 80)(10^k - 1) + 81}{9} = \\ &= \frac{(10^{k+1})^2 + 80 \ 10^k - 80 - 10^{k+2} + 81}{9} = \frac{(10^{k+1})^2 - 2 \ 10^{k+1} + 1}{9} = \\ &= \frac{(10^{k+1} - 1)^2}{9} \end{aligned}$$

Proto daný výraz jest

$$x = 4 \sqrt{\frac{(10^{k+1} - 1)^2}{3^2}} = 4 \underbrace{333}_{k+1} 3 = 1 \underbrace{333}_{k} 32$$

9. Jak je třeba volit čísla a, b, c , aby řešením soustavy

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = c,$$

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = a,$$

$$\frac{z}{x} + \frac{x}{z} = b,$$

byla libovolná trojice kladných čísel x, y, z .

(Došlo 9 řešení)

Václav Vilímek

Řešil Jiří Šafařík, 3.b SVŠ Bratislava.

$$\text{Položme } \frac{x}{y} = k_1, \frac{y}{z} = k_2, \frac{z}{x} = k_3 \quad (1)$$

$$\text{potom } k_1 \cdot \frac{1}{k_1} = c, \quad k_2 + \frac{1}{k_2} = a, \quad k_3 + \frac{1}{k_3} = b, \quad (2)$$

Pritom a, b, c sú zrejme kladné, k_1, k_2, k_3 sú tiež kladné a diskriminanty rovníc (2) musia byť nezáporné, teda $c \geq 2, a \geq 2, b \geq 2$.

$$\text{Zo vzťahov (1) máme } k_1 k_2 = k_3 \quad (3)$$

$$\text{Pretože } k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0, \text{ je aj } \frac{1}{k_1 k_2} = \frac{1}{k_3} \quad (4)$$

$$\text{Sčítaním (3) a (4) je } k_1 k_2 + \frac{1}{k_1 k_2} = k_3 + \frac{1}{k_3}.$$

$$\text{Pričítaním výrazu } \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \text{ je}$$

$$\left(k_1 + \frac{1}{k_1}\right) \left(k_2 + \frac{1}{k_2}\right) = k_3 + \frac{1}{k_3} + \frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}$$

$$\text{Vynásobíme dvojčlenom } \left(k_3 + \frac{1}{k_3}\right) \neq 0 \text{ a máme}$$

$$\left(k_1 + \frac{1}{k_1}\right) \left(k_2 + \frac{1}{k_2}\right) \left(k_3 + \frac{1}{k_3}\right) = \left(k_3 + \frac{1}{k_3}\right)^2 + \left(k_3 + \frac{1}{k_3}\right) + \frac{k_1^2 k_2^2}{k_1 k_2}$$

Použitím (3) je

$$\left(k_1 + \frac{1}{k_1}\right) \left(k_2 + \frac{1}{k_2}\right) \left(k_3 + \frac{1}{k_3}\right) = \left(k_3 + \frac{1}{k_3}\right)^2 + k_1^2 + k_2^2 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1^2 k_2^2}$$

a podľa (2) je

$$abc = a^2 + b^2 + c^2 - 4 \quad (5)$$

Z platnosti (3) vyplýva, že voľbou a, b, c podľa vzťahu (5), ak $a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$, bude riešením danej sústavy rovníc ľubovoľné trojica kladných x, y, z .

10. Premístíme-li první číslici trojčíferného čísla N_1 na poslední místo, dostaneme číslo N_2 . Obdobným způsobem získáme z čísla N_2 číslo N_3 . Stanovte číslo N_1 tak, aby čísla N_1, N_2, N_3 tvořila a) aritmetickou, b) geometrickou posloupnost.

(Došlo 13 řešení)

Václav Vilímek

Řešil Petr Firbas, 2.S SVVŠ Brno.

Označme $N_1 = 100a + 10b + c$, $N_2 = 100b + 10c + a$, $N_3 = 100c + 10a + b$, kde $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 9$. (1)

a) Z rovnosti $N_2 - N_1 = N_3 - N_2$ dostaneme po dosazení a úpravě $4a - 7b + 3c = 0$. Této rovnici lze vyhovět, položíme-li $b = a + 3t$, $c = a + 7t$, kde t je číslo celé takové, že jsou splněny podmínky (1). Ze vztahu $t = \frac{1}{7}(c - a)$ stanovíme pomocí (1) nerovnosti $-\frac{9}{7} < t < \frac{8}{7}$;

Je tedy buď $t = -1$, nebo $t = 0$, nebo $t = 1$.

Je-li $t = -1$, je $b = a - 3$, $c = a - 7$, kde $7 \leq a \leq 9$, tudíž $N_1 = 740$ resp. $N_1 = 851$, resp. $N_1 = 962$.

Je-li $t = 0$, je $a = b = c$, kde $1 \leq a \leq 9$. Je tedy $N_1 = 111a$, kde $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Je-li $t = 1$, je $b = a + 3$, $c = a + 7$, kde $1 \leq a \leq 2$, tudíž $N_1 = 148$ resp. $N_1 = 259$.

b) Z rovnosti $N_2^2 = N_1 N_3$ po dosazení a úpravě máme $a^2 + 10ac - 10b^2 - bc = 0$, odtud $c = \frac{10b^2 - a^2}{10a - b}$. Položíme-li $10a - b = k$, kde

podle (1) je $1 \leq k \leq 90$, je $b = 10a - k$, $c = 999\frac{a^2}{k} - 200a + 10k$.

Aby c bylo číslo celé, musí být číslo k dělitelem čísla $999a^2 = 3^3 \cdot 37a^2$. Podmínkám (1) vyhovují pouze dosazení 1) $k = 9a$, potom $a = b = c$,

$N_1 = 111a$, kde $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ a 2) $37\frac{a}{d}$, kde d je dělitelem

čísla a ; potom $b = 10a - 37\frac{a}{d}(10d - 37)$; výraz v závorce je číslem celým pro $d = 4$ — je tedy buď $a = 4$, $b = 3$ nebo $a = 8$, $b = 6$ v prvním případě $c = 2$, v druhém $c = 4$ a $N_1 = 432$ resp. $N_1 = 864$.

11. V jednom týdnu zameškalo 32 žáků jisté třídy dohromady 32 dní. Přitom mělo právě osm žáků pouze jednodenní absenci, každý žák třídy byl v týdnu aspoň dva dny ve škole a žádný žák nechyběl tři dny za sebou. Ve středu chybělo právě osm žáků, ve čtvrtek a v pátek chyběli jen čtyři žáci, každý z nich po oba dny a každý už v týdnu aspoň jednou chyběl. Kolik žáků nechybělo v onom týdnu ani jednou? Kolik žáků chybělo jen v pondělí nebo v úterý?

(Poznámka: V textu úlohy byla tisková chyba — údaj 32 hodin místo 32 dní, všichni řešitelé si však podle smyslu textu údaj opravili.)

(Došlo 14 řešení)

Jaroslav Šedivý

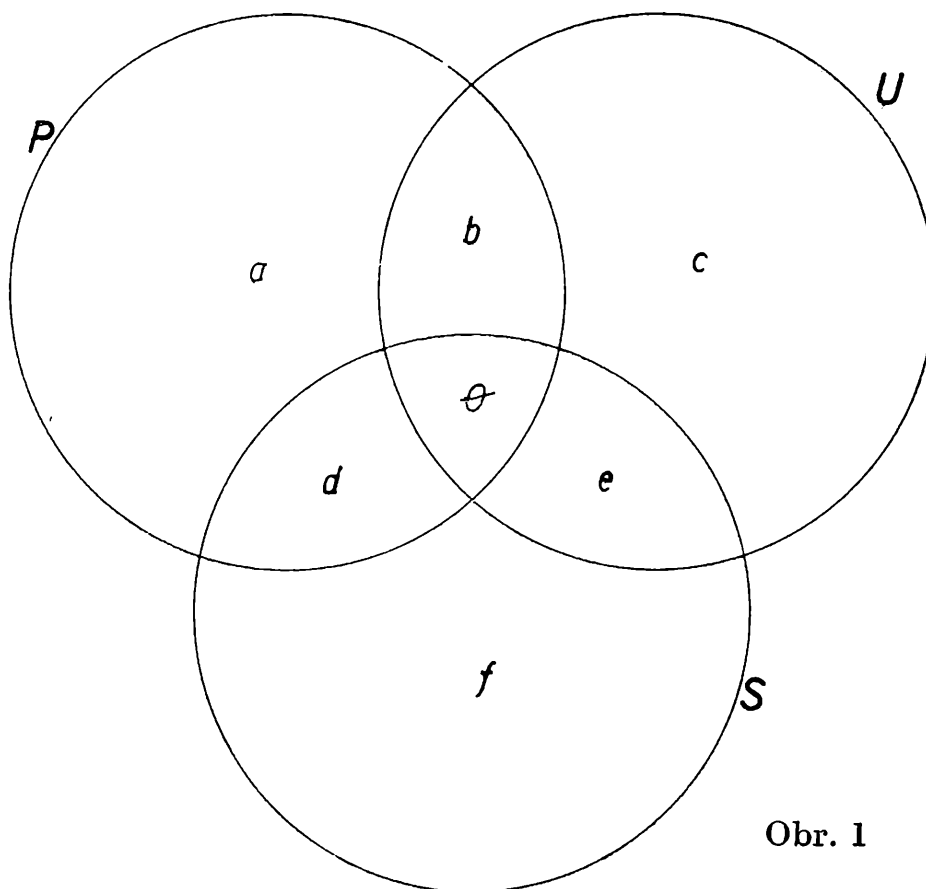
Řešil Petr Firbas, 2.S, SVVŠ Křenová, Brno.

Nejprve vyšetříme, kolik bylo žáků, kteří zameškali stejné počty dní. Ve středu nemůže chybět nikdo, kdo má třídní absenci, protože by chyběl tři dny po sobě. Čtyři žáci s třídní absencí musí tedy kromě pátku a čtvrtku chybět ještě v úterý nebo v pondělí, ale ne po oba dny. Další žáci s třídní absencí nemohou být, jsou tedy právě čtyři.

Celkový počet 32 zameškaných dní vznikl osmi jednodenními, čtyřmi třídními a zatím neznámým počtem x dvoudenních absencí:

$$8 \cdot 1 + x \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 32, \text{ tedy } x = 6.$$

Celkem chybělo $8 + 6 + 4 = 18$ žáků, v daném týdnu tedy nechybělo 14 žáků ani jednou.



Obr. 1

Dvoudenní absence se týkají jen těchto dvojic dní: pondělí—úterý, pondělí—středa, úterý—středa. Nakresleme množinový diagram pro množiny P , U , S , všech žáků chybějících v pondělí, resp. v úterý, resp. ve středu. (Obr.1)

Platí:

$$\begin{array}{ll} a + c + f = 8 & \text{jednodenní absence} \\ b + d + e = 6 & \text{dvoudenní absence} \\ d + e + f = 8 & \text{absence ve středu} \end{array}$$

Máme vypočítat číslo $a + b + c$, počet všech žáků, kteří chyběli jen v pondělí nebo v úterý.

Odečteme-li třetí rovnici od součtu prvních dvou, získáme výsledek $a + b + c = 6$. *Právě šest žáků tedy chybělo jen v pondělí nebo v úterý.* (Originální řešení bylo v závěru upraveno.)

12. Rozšířme pojem zorného úhlu úsečky MN i na vnitřní body úsečky, o nich budeme říkat, že je z nich vidět úsečku MN pod úhlem 180° . Sestrojte si průsečík výšek V trojúhelníka ABC ; není-li bod V vrcholem trojúhelníka, můžeme určit zorné úhly každé strany při pohledu z bodu V . Určete množinu všech bodů roviny, z nichž každou stranu je vidět pod větším nebo stejně velkým úhlem jako z bodu V .

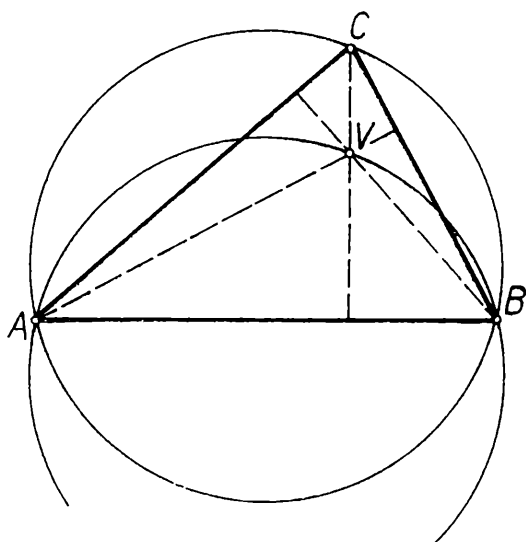
(Došlo 14 řešení.)

Jaroslav Šedivý

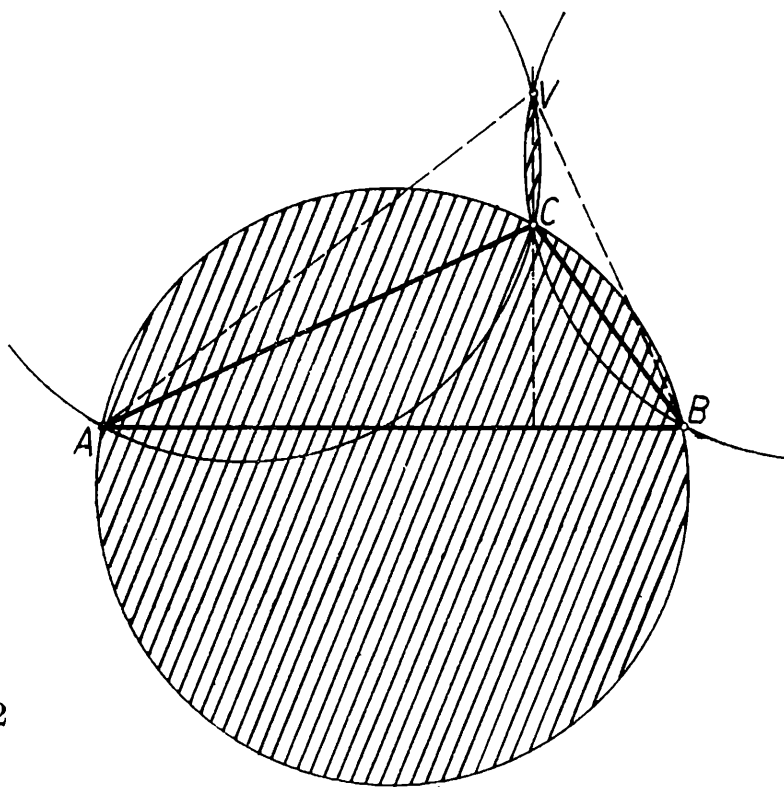
Řešil Ondřej Matouš, 3.F, SVVŠ W. Piecka 2, Praha 2:

Ze svých úvah můžeme vyloučit pravoúhlý trojúhelník, neboť v něm je bod V totožný s vrcholem trojúhelníka. Ukážeme, že v ostatních případech není žádný z úhlů $\sphericalangle AVB, BVC, CVA$ pravý:

1. Je-li $\triangle ABC$ ostroúhlý, leží bod V jeho vnitřku a platí (viz obr. 1):
 $\sphericalangle VCB = 90^\circ - \beta$, $\sphericalangle VBC = 90^\circ - \gamma$, tj. $\sphericalangle BVC = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - \alpha > 90^\circ$. Obdobně je $\sphericalangle AVB = 180^\circ - \gamma > 90^\circ$, $\sphericalangle CVA < 90^\circ$.



Obr. 1



Obr. 2

2. Je-li $\triangle ABC$ tupoúhlý s úhlem $\gamma > 90^\circ$, leží bod V vně trojúhelníka (obráz. 2).

$\sphericalangle ABV = 90^\circ - \alpha$, proto $\sphericalangle BVC = 90^\circ - \sphericalangle ABV = \alpha < 90^\circ$
 $\sphericalangle BAV = 90^\circ - \beta$, proto $\sphericalangle AVC = 90^\circ - \sphericalangle BAV = \beta < 90^\circ$
 $\sphericalangle AVB = 180^\circ - (\sphericalangle ABV + \sphericalangle BAV) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma < 90^\circ$

Dále využijeme *pomocné věty*

Nechť je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V ; označme symbolem M_{AB} množinu všech bodů X roviny, pro něž $\sphericalangle AXB \geq \sphericalangle AVB$. Pak platí:

a) V ostroúhlém trojúhelníku je M_{AB} průnikem kruhů opsaných trojúhelníkům ABV , ABC , z něhož vyloučíme body A , B .

b) V tupoúhlém trojúhelníku je M_{AB} sjednocením kruhů opsaných trojúhelníkům ABV , ABC , z něhož vyloučíme body A , B .

Důkaz pomocné věty je snadný, využijeme známé věty o vnějším úhlu trojúhelníka a poznatku, že bod souměrný s V podle AB leží na kružnici trojúhelníku opsané. Uplatníme též poznatky získané výše v odst. 1 a 2.
Závěry: Hledáme množinu M všech bodů X roviny, pro které platí

$$\sphericalangle AXB \geq \sphericalangle AVB \text{ a } \sphericalangle BXC \geq \sphericalangle BVC \text{ a } \sphericalangle CXA \geq \sphericalangle CVA.$$

$$\text{Je tedy } M = M_{AB} \cap M_{BC} \cap M_{CA}$$

a) V ostroúhlém trojúhelníku ABC je zřejmě $M = \{V\}$, tj. jednobodová množina.

b) V tupoúhlém trojúhelníku ABC je M nekonečnou množinou, která zahrnuje kruh opsaný $\triangle ABC$ a ještě průnik kruhů opsaných trojúhelníkům ABV , BCV , CVA ; body A , B , C však do množiny M nepatří (obr. 2).

MMO



XII. mezinárodní MO

Ma + Vy

Dvanáctá MMO pro žáky středních škol se konala letos ve dnech 9. až 21. července 1970 v městě Keszthely u Balatonu v MLR. Zúčastnilo se 14 států. Vedoucí delegací, kteří s pracovníky pořadatelské země tvoří mezinárodní jury, se sjeli dne 8. 7. 1970 v Budapešti, odkud příští

den ráno odjeli autobusem do lázeňského městečka Hévizu; zde se po čtyři dni věnovali vybírání soutěžních úloh a přípravě soutěže.

Témata úloh byla z tradiční středoškolské matematiky, což nevyhovovalo zejména západním státům. Když byl konečně stanoven definitivní text ve čtyřech jazycích (angličtina, frančtina, němčina a ruština), přeložili jej delegáti — členové jury — do národních jazyků a připravili jako obvykle obálky s texty úloh pro oba dny soutěže.

Úlohy pro 1. den byly tyto:

1. Uvnitř strany AB trojúhelníka ABC je dán bod M . Označme r_1, r_2, r poloměry kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům ACM, BCM, ABC . Označme dále $\varrho_1, \varrho_2, \varrho$ poloměry kružnic, které jsou po řadě vepsány týmž trojúhelníkům a které leží v úhlu $\sphericalangle ACB$. Dokažte, že platí

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = \frac{r_2}{\varrho_2} = \frac{r}{\varrho}$$

2. Budte a, b, n přirozená čísla větší než 1. Čísla a, b jsou základy dvou číselných soustav. Čísla A_n, B_n mají totéž vyjádření

$$x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$$

v obou číselných soustavách o základech a, b ; přitom $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ jsou cifry a platí $x_{n-1} \neq 0, x_n \neq 0$. Čísla, která dostaneme z A_n, B_n vynecháním cifry x_n , označíme po řadě A_{n-1}, B_{n-1} . Dokažte, že je $a < b$ právě tehdy, když platí

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$$

3. Posloupnost reálných čísel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ splňuje podmínky

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \quad (1)$$

Posloupnost $\{b_n\}$ je definována vzorcem

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt[n]{a_k}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

I. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$0 \leq b_n < 2$$

II. Je-li c libovolné číslo z intervalu $0 \leq c < 2$, pak lze najít takovou posloupnost $\{a_n\}$, splňující podmínky (1), že v odpovídající posloupnosti $\{b_n\}$ platí $b_n > c$ pro nekonečně mnoho indexů n .

Autorské státy a počty bodů: 1. Polsko (5), 2. Rumunsko (7), 3. Švédsko (8).

Úlohy pro druhý den :

4. Určete všechna přirozená čísla n , která mají tuto vlastnost: Množinu $\{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}$ lze rozložit ve dvě podmnožiny bez společného prvku tak, že součin všech prvků jedné z těchto podmnožin je roven součinu všech prvků druhé podmnožiny.

5. Pata E výšky DE čtyřstěnu $ABCD$ je průsečík výšek trojúhelníka ABC ; dále je $BD \perp CD$. Dokažte, že platí

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

Určete všechny čtyřstěny, pro které nastane v předchozím vztahu rovnost.

6. V rovině je dáno 100 bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Vyšetřujeme všechny trojúhelníky, jejichž všechny tři vrcholy jsou některé z daných bodů. Dokažte, že nejvýše 70 % všech těchto trojúhelníků jsou trojúhelníky ostroúhlé.

Autorské státy a počty bodů: 4. ČSSR (6), 5. Bulharsko (6), 6. SSSR (8).

Na vypracování každé práce byly stanoveny jako obvykle 4 hodiny čistého času. Žáci také neznali bodové hodnocení úloh.

Družstva jednotlivých států se sjížděla se zástupci vedoucích v Budapešti během 10. července. Po přenocování v internátu-hotelu Universitas odcestovali 11. 7. do Keszthely, kde byli ubytováni v internátě-hotelu Juventus a měli téměř dva dni volné na rekreaci a koupání v Balatoně; počasí bylo překrásné.

Vlastní soutěž probíhala v Keszthely dne 13. a 14. července. Slavnostní zahájení se konalo v aule Vysoké školy zemědělské (nejstarší v Evropě, založené r. 1779).

Po úpravě žákovských řešení vedoucími delegací probíhala tzv. koordinace výsledků jednotlivých družstev.

Koordinace byla značně ostrá; nejvíce se ohrazovali delegáti proti tomu, že žákům byly ubírány až dva body za to, že výslovně neuvedli triviální úsudky a věty. Na závěr pobytu za chladného, větrného a deštivého počasí podnikli všichni účastníci XII. MMO dvěma motorovými lodmi po rozbouřeném Balatonu výlet do Badacsony, který se přesto celkem vydařil. V těchto dnech si vyměnily delegace tradiční upomínkové (předměty) dárky.

Bouřlivá a dlouhá byla obě poslední zasedání jury dne 18. 7. 1970. Obtížné bylo zejména stanovit hranice pro I., II. a III. cenu (nakonec se určily hranice 37, 30 a 19 z dosažitelných 40 bodů pro žáka). Dále byla obtížná úloha rozhodnout o udělení zvláštních cen za vynikající

řešení. Výsledek dlouhého jednání byl tento: byla udělena jedna zvláštní cena za 3. úlohu, 4 zvláštní ceny za 4. úlohu (mezi nimi jedna čs. účastníku Černému) a 2 zvláštní ceny za 6. úlohu. V závěru zasedání přednesl čs. delegát na základě písemného příslibu obou ministerstev školství ČSSR pozvání na XIII. MMO do ČSSR na rok 1971. Zároveň rozdál všem přítomným delegátům návrh nového statutu, podle kterého má být XIII. MMO organizována. Je třeba podotknout, že mezinárodní jury jednohlasně přijala pozvání ČSSR.

Tabulka 1

Stát Cena	A	BG	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	S	SU	YU
I.	—	—	—	1	—	1	3	—	—	—	—	—	2	—
II.	—	—	—	2	1	—	1	—	—	—	3	—	1	3
III.	1	3	4	4	4	6	3	1	1	1	4	2	3	3

Dne 19. 7. se přemístili všichni účastníci vlakem (Balaton expresem) do Budapešti. 20. 7. ráno byla prohlídka města pro delegáty, jejich zástupce i žáky, večer byla velmi působivá projížďka osvětlenou Budapeští (zejména Margitin ostrov s vodotryskem, Buda, královský zámek a citadela se sochou vítězství). Jinak bylo dne 20. 7. i 21. 7. (až do 16 hod.) volno pro procházku a nákupy.

V 16 hod. uspořádal v technické universitě náměstek ministra školství Lugossy Jenő malou recepci pro delegáty a pak následovala závěrečná slavnost za přítomnosti všech účastníků XII. MMO a dalších hostí. Zahájil ji prof. Surányi, který pak osobně rozdál diplomy (ceny) vítězům; každý účastník dostal upomínkovou obrazovou publikaci. Za delegáty pak poděkoval vedoucí čs. družstva.

Ráno dne 22. 7. se počaly delegace rozjíždět. Jako jedna z prvních odjela v 7.50 hod. rychlíkem Hungaria čs. delegace.

Pokud jde o výsledky družstev, dává neoficiální „žebříček“ toto pořadí zemí (v závorce jsou počty dosažených bodů):

1. Maďarsko (233), 2. a 3. SSSR a NDR (221), 4. Jugoslávie (209), 5. Rumunsko (208), 6. Velká Británie (180), 7. a 8. Bulharsko a ČSSR (145), 9. Francie (141), 10. Švédsko (110), 11. Polsko (105), 12. Rakousko (104), 13. Holandsko (87), 14. Mongolsko (58).

Celkem bylo uděleno 65 cen, a to 7 prvních, 11 druhých, 40 třetích a 7 zvláštních. Rozdělení cen mezi jednotlivé státy ukazuje tabulka 1 (státy jsou označeny mezinárodními zkratkami a uvedeny abecedně)

Tabulka 2

Číslo	Žák	Ročník Místo	Počet bodů dosaž. v úloze						Součet počtu bodů	Cena
			1	2	3	4	5	6		
1	Anton Černý	2 Bratislava	5	7	0	6	0	0	18	zvláštní
2	Miroslav Hradil	3 Praha	0	7	0	5	6	0	18	—
3	Helena Husová	2 Praha	1	7	0	4	4	5	21	III.
4	Pavel Pudlák	3 Praha	0	3	0	1	5	1	10	—
5	Štefan Sakaloš	2 Prievdza	5	7	0	4	6	0	22	III.
6	Rudolf Švarc	3 Plzeň	5	7	0	6	2	0	20	III.
7	Jiří Tůma	3 Písek	5	7	0	5	6	0	23	III.
8	Belo Zorkovský	Košice	5	3	0	5	0	0	13	—
Součet počtu bodů	—	—	26	48	0	36	29	6	145	

Tabulka 2 výsledků našeho družstva ukazuje jasně, že máme nadějné talenty mezi našimi mladšími žáky.

Řešení úloh naší soutěže zašlete redakci nejpozději do 27. února 1971.

Řešení úloh XII. MM0

Řešení 1. úlohy

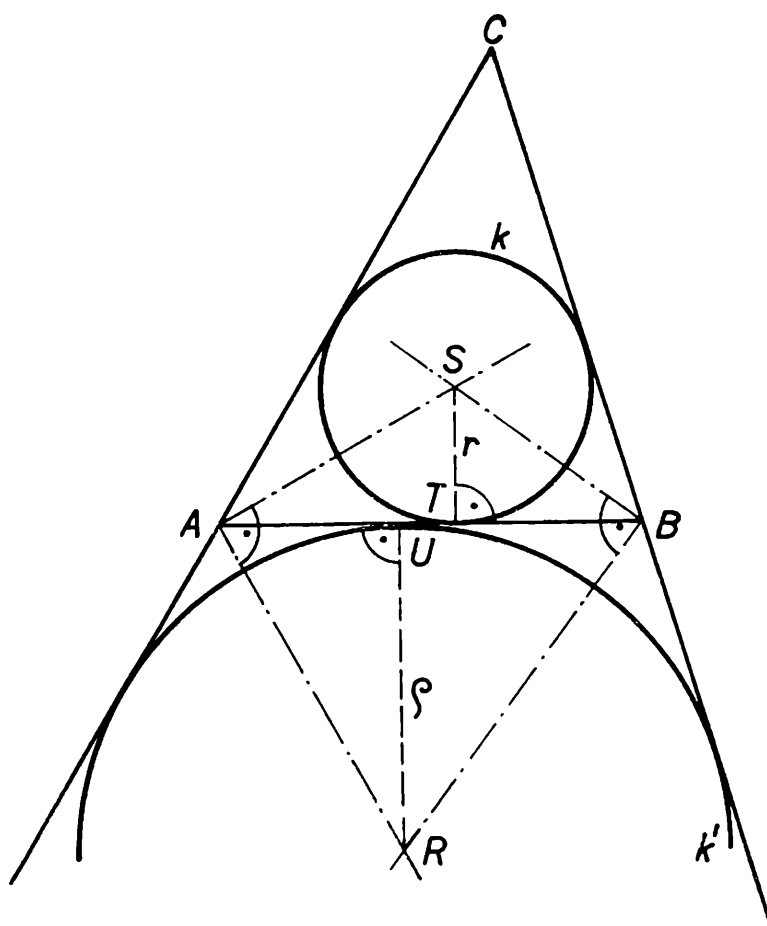
Situace je znázorněna na obr. 1a, 1b. Při označení z obr. 1a dostaneme

$$AT = r \cotg \frac{\alpha}{2}, BT = r \cotg \frac{\beta}{2}$$

$$AU = \varrho \cotg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \varrho \tg \frac{\alpha}{2},$$

$$BU = \varrho \cotg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = \varrho \tg \frac{\beta}{2}$$

Obr. 1a

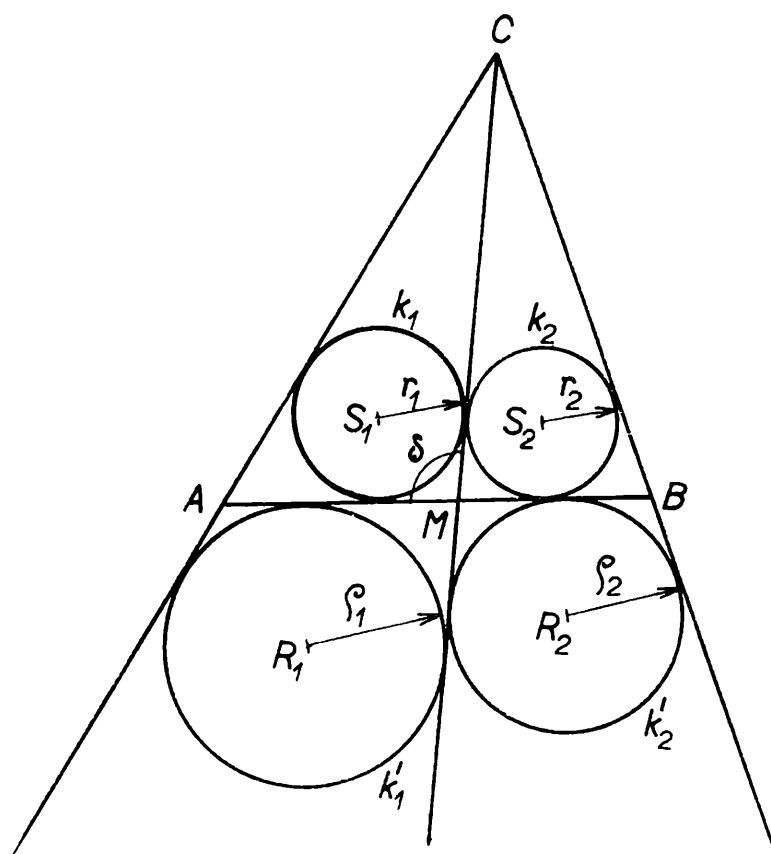


Protože $AB = AT + BT = AU + BU$, je

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}} \quad (1)$$

Vzorec (1) upravíme podle součtových vzorců pro sinus

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \quad (2)$$



Obr. 1b

Označíme-li $\sphericalangle AMC = \delta$, je $\sphericalangle BMC = \pi - \delta$ a podle (2) vyjde

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \quad \frac{r_2}{\varrho_2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi - \delta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\delta}{2} \quad (3)$$

Vynásobíme-li podle (3) a přihlídneme k (2), dostaneme výslednou formuli.

Řešení 2. úlohy

K zapsání čísel $A_n, B_n, A_{n-1}, B_{n-1}$ užijeme polynomických funkcí. Označme

$$\begin{aligned} f(t) &= x_n t^n + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_1 t + x_0, \\ g(t) &= x_{n-1} t^{n-1} + x_{n-2} t^{n-2} + \dots + x_1 t + x_0 \end{aligned}$$

Je tedy

$$A_n = f(a), B_n = f(b), A_{n-1} = g(a), B_{n-1} = g(b) \quad (1)$$

Máme dokázat oboustrannou implikaci

$$a > b \Leftrightarrow \frac{g(a)}{f(a)} < \frac{g(b)}{f(b)} \quad (2)$$

Protože pro $t > 0$ je $f(t) > 0$ a $g(t) > 0$, je i $f(a) > 0, g(a) > 0$.

Důkaz implikace (2) je tedy ekvivalentní s důkazem implikace

$$a > b \Leftrightarrow g(a)f(b) - f(a)g(b) < 0 \quad (3)$$

Důkaz může pokračovat takto:

Protože je $f(t) = g(t) + x_n t^n$, je

$$g(a)f(b) - f(a)g(b) = x_n [g(a)b^n - g(b)a^n] \quad (4)$$

Dokážeme snadno, že pro každé $k < n$ platí pro $a > b > 0$

$$a^k b^n - b^k a^n < 0$$

Skutečně

$$a^k b^n - b^k a^n = a^k b^k (b^{n-k} - a^{n-k}) < 0$$

Z toho plyne, že $g(a)b^n - g(b)a^n < 0$ a podle (4) je věta dokázána.

Řešení 3. úlohy

I. Protože

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} \leq 1,$$

je $b_n \geq 0$ pro všechna n . Označme $\sqrt[n]{a_k} = \alpha_k$ a provedme tuto úpravu

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2}\right) \frac{1}{\alpha_k} &= \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k} \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}^2} - \frac{1}{\alpha_k^2}\right) = \\ &= \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k} \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} + \frac{1}{\alpha_k}\right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) = \\ &= \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} + \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2}\right) \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) \leq 2 \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k}\right) \end{aligned}$$

tedy pro každé přirozené číslo k platí

$$1 - \left(\frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2} \right) \frac{1}{\alpha_k} \leq 2 \left(\frac{1}{\alpha_{k-1}} - \frac{1}{\alpha_k} \right)$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro $k = 1, 2, \dots, n$, dostaneme

$$b_n \leq 2 \left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_n} \right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right) \leq 2$$

Zkusme zvolit za a_n rostoucí geometrickou posloupnost.

II. Zvolme číslo d , pro které platí $0 < d < 1$ a položíme $\alpha_k = d^{-k}$ neboli $a_k = d^{-2k}$. Pak

$$\left(1 - \frac{\alpha_{k-1}^2}{\alpha_k^2} \right) \frac{1}{\alpha_k} = \left(1 - \frac{d^{2-2k}}{d^{-2k}} \right) \frac{1}{d^{-k}} = (1 - d^2) d^k$$

a tedy

$$b_n = \sum_{k=1}^n (1 - d^2) d^k = (1 - d^2) \sum_{k=1}^n d^k = (1 - d^2) \cdot d \cdot \frac{1 - d^n}{1 - d}$$

neboli

$$b_n = d(1 + d)(1 - d^n) \quad (1)$$

Je-li $0 \leq c < 2$ a má-li platit $b_n > c$, musí být

$$d(1 + d)(1 - d^n) > c,$$

tj.

$$1 - d^n > \frac{c}{d(1 + d)}$$

tj.

$$d^n < 1 - \frac{c}{d(1 + d)} \quad (2)$$

Je ještě třeba dokázat, že ke každému c z intervalu $0 \leq c < 2$ lze zvolit takové d z intervalu $0 < d < 1$, že číslo

$$1 - \frac{c}{d(1 + d)}$$

je kladné.

Podmínka

$$1 - \frac{c}{d(1 + d)} > 0$$

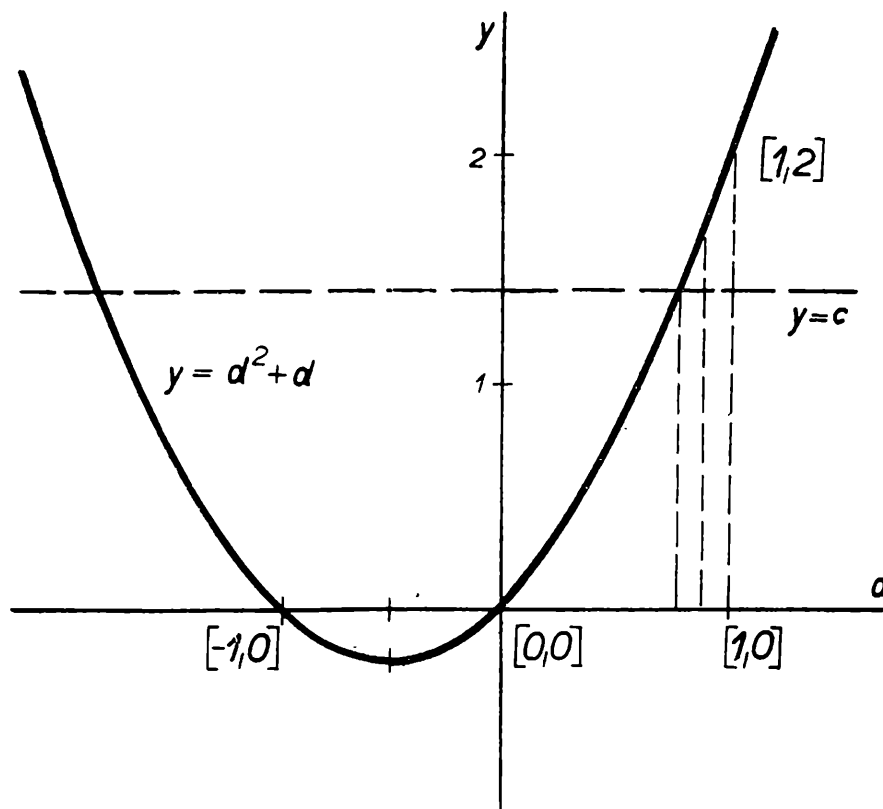
je ekvivalentní s podmínkou

$$\frac{c}{d(1 + d)} < 1$$

neboli s podmínkou

$$d^2 + d > c. \quad (3)$$

Funkce $y = d^2 + d$ je znázorněna grafem na obr. 2. Tento graf je parabola, která protíná osu d v bodech $[-1; 0]$, $[0; 0]$ a prochází bodem $[1; 2]$.



Obr. 2

Z grafu je patrné, že pro každé $c < 2$ protíná přímka $y = c$ parabolu v bodě, jehož souřadnice d_1 je z intervalu $0 < d < 1$. Je to číslo

$$d_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 4c} - 1) < \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 4 \cdot 2} - 1) = 1$$

Zvolíme-li d tak, že $d_1 < d < 1$, je nerovnice (3) splněna, a protože $\{d^n\}$ je nulová posloupnost, splňují všechny její členy od určitého počítaje nerovnost (2), tj. pro všechna příslušná n platí $b_n > c$.

Řešení 4. úlohy

Označme

$$\mathbf{E} = \{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$$

obě hledané podmnožiny. Zřejmě je $\mathbf{E}_1 = \emptyset$, $\mathbf{E}_2 = \emptyset$, $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{E}_2 = \emptyset$, $\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$. Žádná z podmnožin $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ není jednoprvková, neboť pro největší číslo z $\mathbf{E}$, tj. pro $n + 5$ platí

$$(n + 2)(n + 3) - (n + 5) = n^2 + 4n + 1 > 0.$$

Lze tedy hovořit o součinu všech prvků $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{E}_2$.

Budiž p prvočinitel čísla $a \in \mathbf{E}$; pak existuje aspoň jedno číslo $b \in \mathbf{E}$ ($b \neq a$), jehož prvočinitelem je p . Protože $5 \geq |a - b| = p \cdot k$, je $p \leq 5$, tj. p je 2 nebo 3 nebo 5.

Je zřejmé, že 5 může být prvočinitelem jediné čísel $n, n + 5$ (jinak by $\mathbf{E}$ neobsahovala dva násobky pěti). Množina

$$\mathbf{F} = \{n + 1, n + 2, n + 3, n + 4\}$$

obsahuje tedy jediné čísla tvaru $2^\gamma 3^\delta$. Množina $\mathbf{F}$ však obsahuje zřejmě dvě čísla sudá a dvě lichá. Obě lichá čísla z $\mathbf{F}$ můžeme tedy napsat ve tvaru

$$3^\gamma, 3^\delta$$

Avšak $|3^\gamma - 3^\delta| < 4$; protože $3^\gamma - 3^\delta$ je číslo sudé, je $|3^\gamma - 3^\delta| = 2$. Zvolíme-li označení tak, aby bylo $\gamma > \delta$, je

$$3^\gamma - 3^\delta = 3 \cdot N = 2;$$

přitom N je přirozené číslo; to je však nemožné.

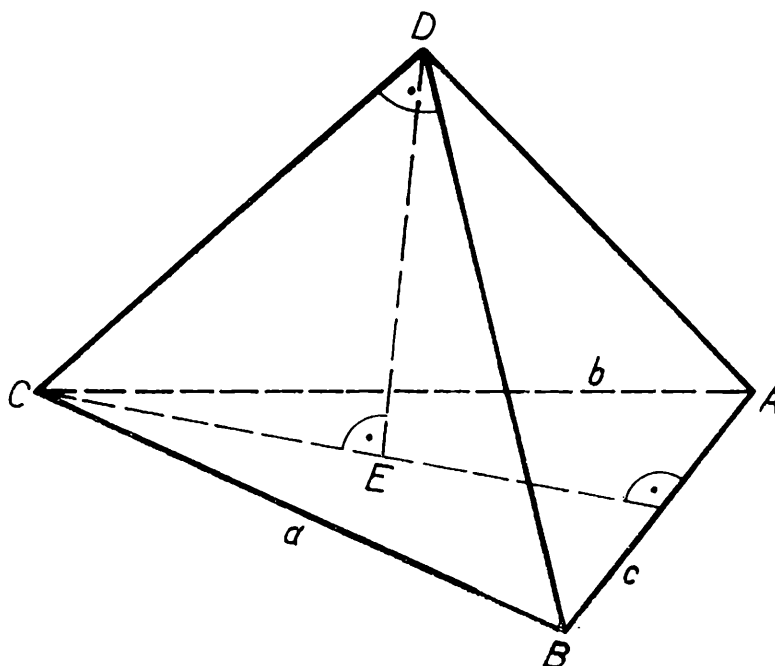
Úloha je tedy neřešitelná.

Řešení 5. úlohy (obr. 3)

Platí $(DE \perp AB) \wedge (CE \perp AB)$; proto $(CDE) \perp AB$ a odtud dále

$$CD \perp AB. \quad (1)$$

Vztah (1) platí i v případě, že $E = C$, tj. že body C, D, E neurčují rovinu, neboť pak je $CD = DE$.



Obr. 3

Protože $AB \perp CD$ podle (1) a $BD \perp CD$ podle předpokladu, je $(ABD) \perp CD$. Odtud plyne

$$CD \perp AD \quad (2)$$

Protože v (1) i v předpokladu lze vyměnit body B, C , platí to i v (2), tj.

$$BD \perp AD$$

Čtyřstěn $ABCD$ má tedy všechny tři stěnové úhly při vrcholu D pravé. Podle Pythagorovy věty (pro $\Delta ABD, BCD, CAD$) dostaneme

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2),$$

nebo při obvyklém označení stran ΔABC

$$6(AD^2 + BD^2 + CD^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad (3)$$

Dále

$$\begin{aligned} 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - (a+b+c)^2 &= \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2, \end{aligned}$$

tj. podle (3)

$$\begin{aligned} 6(AD^2 + BD^2 + CD^2) &= \\ &= (a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \end{aligned}$$

Odtud plyne tvrzení obsažené v textu úlohy. Rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

Řešení 6. úlohy

Označme T_n počet všech trojúhelníků, daných systémem n nekolineárních bodů, O_n počet všech ostroúhlých trojúhelníků daných tímž systémem.

Dokážeme lemma

$$O_n \leq a T_n \Rightarrow O_{n+1} \leq a T_{n+1}$$

Ze systému $n+1$ bodů vynecháme po řadě 1., 2. až $(n+1)$ -tý bod; příslušné počty všech trojúhelníků (ostroúhlých trojúhelníků) v těchto $n+1$ systémech o n bodech označíme T_{nk}, O_{nk} ($k = 1, 2, \dots, n+1$). Pak platí

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{T_{n1} + T_{n2} + \dots + T_{n,n+1}}{n-2} \\ O_{n+1} &= \frac{O_{n1} + O_{n2} + \dots + O_{n,n+1}}{n-2} \end{aligned} \quad (1)$$

neboť každý trojúhelník (ostroúhlý trojúhelník) je zahrnut do

$$(n+1) - 3 = n - 2$$

systémů. Podle předpokladu platí $O_n \leq a T_n$; speciálně

$$O_{nk} \leq a T_{nk}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1 \quad (2)$$

Dosadíme z (2) do druhého vzorce (1) a dostaneme

$$O_{n+1} \leq a \frac{T_{n1} + T_{n2} + \dots + T_{n,n+1}}{n-2} = a T_{n+1}$$

Tím je lemma dokázáno.

Protože je

$$T_4 = 4, \quad O_4 \leq 3, \quad \frac{O_4}{T_4} \leq 0,75,$$

tj. $a = 0,75$. Dále je $T_5 = 10$, a tedy podle lemmatu $O_5 \leq 0,75 \cdot 10 = 7,5$, neboli

$$O_5 = 7, \quad \frac{O_5}{T_5} \leq 0,7 = 70\%, \quad \text{tj. } a \leq 70\%.$$

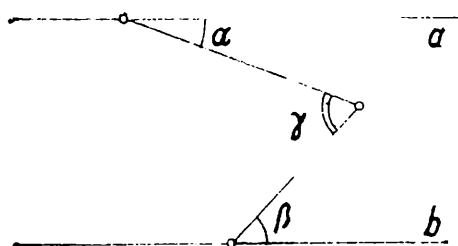
Indukcí se dokáže pro libovolné n (tedy také $n = 100$).

NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM



7. V obr. 1 jsou přímky a, b rovnoběžné a velikosti úhlů α, β jsou známy. Vypočítejte velikost úhlu γ .

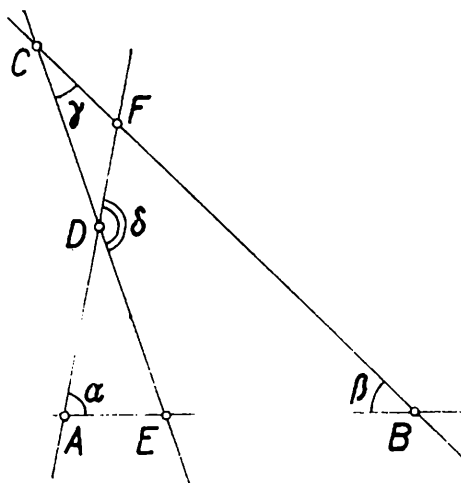
Řešení. $\gamma = \alpha + \beta$.



Obr. 1

8. V obr. 2 jsou dány 4 různé přímky a, b, c, d , jež se vzájemně protínají v bodech, které jsou označeny A, E, B (na přímce a), B, F, C na přímce b a F, D, A na přímce c . Vypočtete velikost úhlu δ , jsou-li dány velikosti úhlů α, β, γ .

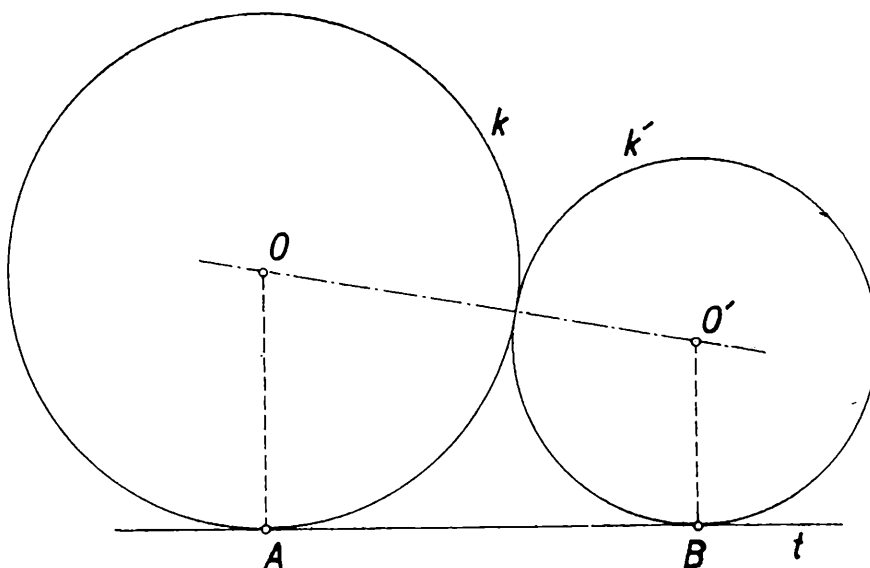
Řešení. $\delta = \alpha + \beta + \gamma$.



Obr. 2

9. V obr. 3 jsou dány kružnice $k_1 = (O; r)$, $k' = (O'; r')$, které mají vnější dotyk. Přímka t je jejich společná vnější tečna, která se daných kružnic dotýká po řadě v bodech A, B . Vypočtete obvod a obsah lichoběžníka $ABO'O$. (Předpokládejte $r > r'$)

Řešení. $2(r + r' + \sqrt{rr'})$; $(r + r') \sqrt{rr'}$



Obr. 3

10. Z 36 shodných čtverců se má složit pravoúhelník. Kolik tvarem různých pravoúhelníků lze tak sestavit? Který z nich má nejmenší

obvod? — Při sestavování každého pravoúhelníka použijeme všech 36 čtverců. 1

Řešení. 5 různých pravoúhelníků. Nejmenší obvod má čtverec.

11. Čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla označme po řadě a, b, c, d . Dokažte, že součet

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

je vždy liché číslo.

Řešení. Právě jeden ze sčítanců je liché číslo.

12. *Zvláštní rozklad v prvočinitele.* Ve škole se učíte rozkládat algebraické výrazy buď podle vzorců nebo vytýkáním před závorku. Seznámíme se nyní s rozkladem na „vyšší úrovni“.

Naším úkolem bude rozložit v prvočinitele výraz

$$V = a^2c + ab^2 + bc^2 - a^2b - ac^2 - b^2c$$

Způsoby vám známé ze školy by tu asi selhaly. Dá se však postupovat takto. Položme $a = b$. Daný výraz nabude tvaru

$$V = a^2c + a^3 + ac^2 - a^3 - ac^2 - a^2c = 0$$

Z toho usuzujeme, že daný výraz V je dělitelný dvojčlenem $(a - b)$. (Vysvětlení je podáno na konci tohoto článku.)

Položme dále $b = c$. Dostaneme

$$V = a^2b + ab^2 + b^3 - a^2b - ab^2 - b^3 = 0$$

Výraz V je dělitelný dvojčlenem $(b - c)$. Položíme-li posléze $a = c$, zjistíme, že výraz V je dělitelný dvojčlenem $(c - a)$. Proto

$$V = (a - b)(b - c)(c - a)$$

Víc činitelů než tři nemůže v rozkladu být, neboť V je třetího stupně vzhledem k a, b, c .

Vynásobením se přesvědčíme o správnosti výsledku.

Při psaní výsledku se můžeme dopustit chyby. Mohli bychom totiž napsat rozklad

$$V' = (a - b)(b - c)(a - c).$$

Vynásobením však dostaneme

$$V' = a^2b + ac^2 + b^2c - a^2c - ab^2 - bc^2.$$

Porovnáním se správným výsledkem vidíme, že

$$V' = -V$$

a pak stačí změnit znaménko v jednom činiteli. Podle toho správné rozklady jsou ještě tyto

$$V = (a - b)(c - b)(a - c),$$

$$V = (b - a)(c - b)(c - a),$$

$$V = (b - a)(b - c)(a - c)$$

Uvedený způsob rozkladu se dá snadno zdůvodnit. Ukážeme to na příkladě. Mějme výraz V , jehož rozklad je

$$V = (2a - 7)(a - 3b)(a - 2b)(4a + 5)$$

Jestliže sem dosadíme za a a b nějaká čísla, bude výsledek s největší pravděpodobností různý od nuly. Např. $a = 5$, $b = 1$. Potom $V = 450$. Zvolíme-li však $a = 3b$, bude druhý činitel v rozkladu rovný nule a $V = 0$. Tentýž výsledek dostaneme, jestliže

$$2a = 7 \text{ nebo } a = 2b \text{ nebo } 4a = -5$$

Tímto způsobem se dá vysvětlit podstata rozkladu v prvočinitele způsobem použitým.

Cvičení.

Rozložte v prvočinitele:

a) $V = abc - 3ab + 2ac - bc - 6a + 3b - 2c + 6$.

Návod: Daný výraz je vzhledem k a , b , c třetího stupně. Je-li rozklad možný, budou 3 činitelé. Zkuste za a , b , c dosazovat různá celá čísla

b) $V = x^3(y - z)^3 + y^3(z - x)^3 + z^3(x - y)^3$.

Výsledky. 1. $(a - 1)(b + 2)(c - 3)$. 2. $3xyz(x - y)(y - z)(z - x)$.

13. Který zlomek, jehož čítec je o jednu menší než jmenovatel, má tyto vlastnosti:

a) Zvětšíme-li čitatele o jednu, nabude hodnoty větší než $\frac{11}{13}$;

b) zmenšíme-li naopak jeho čitatele i jmenovatele o dvě, nabude hodnoty menší než $\frac{7}{9}$.

Řešení: Hledaný zlomek je $\frac{5}{6}$

SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

polygone <i>m</i>	mnohoúhelník
polynôme <i>m</i>	mnohočlen
ponctuel, elle	bodový
porter	nésti, nositi
porter un segment <i>m</i>	nanést úsečku
positif, ive	kladný
postulat <i>m</i>	postulát
postuler	požadovat, postulovat
potentiel <i>m</i>	potenciál
pour-cent <i>m</i>	procento, úrok
pourcentage <i>m</i>	percentuální sazba
premier, ère	první
nombre <i>m</i> (facteur <i>m</i>) premier	prvočíslo (prvočinitel)
nombres premiers entre eux	čísla nesoudělná
proposition <i>ž</i> première	axiom
prémisse <i>ž</i>	předpoklad, premisa
près	blízko
à peu près	skoro, přibližně
à un facteur près	až na faktor
preuve <i>ž</i>	zkouška správnosti
prisme <i>m</i>	hraňol
probabilité <i>ž</i>	pravděpodobnost
calcul <i>m</i> des probabilités	počet pravděpodobnosti
problème <i>m</i>	úloha, problém
produit <i>m</i>	součin, průnik
produit scalaire	skalární součin
produit vectoriel	vektorový součin
produit mixte	smíšený součin
progression <i>ž</i>	řada
progression arithmétique	aritmetická řada
progression géométrique	geometrická řada
projectif, ive	projektivní
projection <i>ž</i>	promítání, průmět
plan <i>m</i> de projection	průmětna
proportion <i>ž</i>	úměra
proportionnel, elle	úměrný
directement proportionnel	přímo úměrný
inversement proportionnel	nepřímo úměrný

proposition $ž$
 proposition première
 calcul m des propositions
 propositionnel, elle
 forme $ž$ (fonction $ž$) proposition-
 nelle.
 propre
 puissance $ž$
 pyramide $ž$
 tronc m de pyramide

výrok
 axiom
 výrokový počet
 výrokový
 výroková funkce

 vlastní
 mocnina
 jehlan
 komolý jehlan

Q

quadrangulaire
 quadrant m
 quadratique
 quadrature $ž$
 quadrilatère m
 quadrilatère gauche
 quadrique $ž$
 quadruple
 quadruplet m
 quantificateur m
 quantité $ž$
 quarante
 quarantième
 quarantième m
 quart m
 quatorze
 quatre-vingt
 quinze
 quotient m

čtyřúhelníkový, čtyřhranný
 čtvrtkruh, kvadrant
 kvadratický
 kvadratura, určení plošného obsahu
 čtyřúhelník, čtyřstran
 zborcený čtyřúhelník
 kvadrika, plocha druhého stupně
 čtyřnásobný
 čtveřina, čtveřice
 kvantifikátor
 veličina, kvantita
 čtyřicet
 čtyřicátý
 čtyřicetina
 čtvrtina
 čtrnáct
 osmdesát
 patnáct
 podíl, kvocient

PUBLIKACE SPN

Horák: Sbírka řešených úloh z deskriptivní geometrie. Vyd. 2., 1970, str. 168, brož. Kčs 12,50. Edice: Pomocné knihy pro žáky.

Kochman, Macháň, Schmidt: Učíme se rýsovat. Vyd. 1., 1970, str. 162, váz. Kčs 15,50. Edice: Knihnice všeobecného vzdělání — HORIZONT.

Kružík: Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol. Vyd. 1., 1970, str. 316, váz. Kčs 26,—. Edice: Pomocné knihy pro žáky.

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

5

ROČNÍK 49, 1970-1971, LEDEN



**nositel vyznamenání
Za zásluhu o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nář. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku. Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönl. Titulní obrázky: Mil. Hellerová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

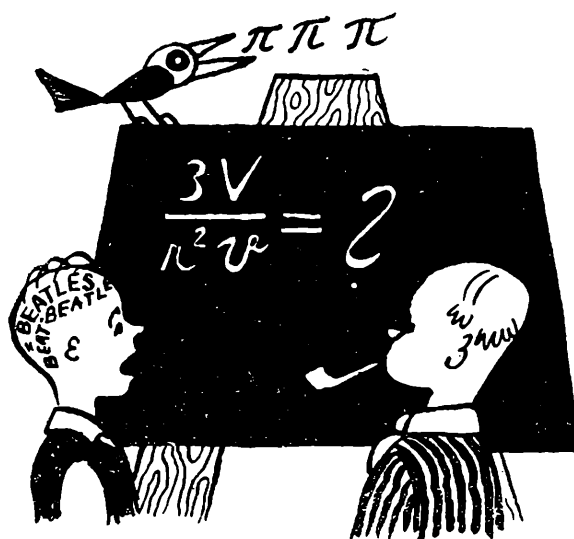
**ROČNÍK 49
LEDEN 1971**

5

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

O. Říha: Síťové problémy .	193
Ing. O. Lacina: Zásady provádění numerických výpočtů	197
Dr. R. Karpe: Vztahy mezi logaritmy dvou základů	203
O. Lanta: Přička mimoběžek .	206
Prof. dr. K. Havlíček, doc. O. Setzer: O významu a budoucnosti deskriptivní geometrie	212
P. Bartuška: Rovnovážné diagramy kovových systémů	215
J. Jankura, J. Kročan: Kompenzační metoda experimentálního určování Youngova modulu pružnosti v tahu . .	228
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Planétární mlhoviny	233
Naše soutěž	235
Nejmladším čtenářům	236
Recenze	239
Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český	3. a 4. str. obálky



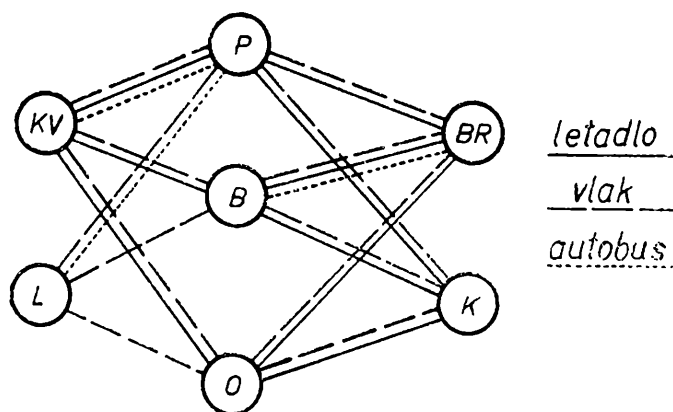
Síťové problémy

OTA ŘÍHA PeF UJEP, Brno

V tomto článku se seznámíte s dalším typem úloh, které vedou k maticovému zápisu a k násobení matic, s kterým jste se mohli seznámit v článcích „O jednom způsobu kódování“ a „Tabulky informací“, které byly otištěny v předcházejících číslech.

Příklad :

První diagram udává, jaké druhy spojení existují mezi některými městy naší republiky (KV — Karlovy Vary, P — Praha, B — Brno, O — Ostrava, BR — Bratislava, K — Košice, L — Liberec). Číslo v druhém



obr 1

diagramu, v němž jednotlivé druhy spojení (vlak, autobus a letadlo) již nejsou rozlišeny, udávají, kolik druhů spojení je mezi některými z těchto měst. Tato čísla můžeme přehledně zapsat do schémat:

$$\begin{array}{c} KV \\ L \end{array} \begin{array}{ccc} P & B & O \\ \left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Schéma 1

$$\begin{array}{c} P \\ B \\ O \end{array} \begin{array}{cc} BR & K \\ \left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} \right) \end{array}$$

Schéma 2

Doplňte schéma

$$\begin{array}{c} KV \\ L \end{array} \begin{array}{cc} BR & K \\ \left(\begin{array}{cc} . & . \\ . & . \end{array} \right) \end{array}$$

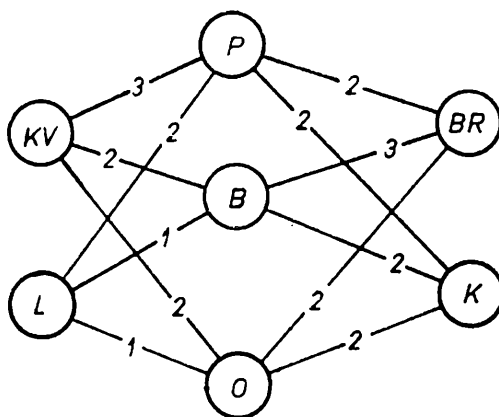
Schéma 3

které udává, kolika různými způsoby je možno cestovat z Karlových Varů a Liberce přes Prahu, Brno nebo Ostravu do Bratislavy a do Košic. Za různé způsoby cestování považujeme takové, které se liší použitými úseky cesty, nebo které na témž úseku cesty používají různých dopravních prostředků. Např. možnosti:

- a) z Karlových Varů do Prahy letadlem, z Prahy do Bratislavy opět letadlem,
- b) z Karlových Varů do Prahy letadlem a z Prahy do Bratislavy vlakem

považujeme za různé.

Řešení : Z Karlových Varů do Bratislavy můžeme cestovat přes Prahu, Brno nebo přes Ostravu. Jedeme-li přes Prahu, můžeme z Prahy do Bratislavy pokračovat 2 způsoby (vlakem nebo letadlem). Protože do Prahy



obr. 2

se můžeme z Karlových Varů dostat 3 způsoby (vlakem, autobusem a letadlem) a protože v každém z nich můžeme pokračovat 2 způsoby do Bratislavy, máme při cestě přes Prahu celkem $3 \cdot 2 = 6$ možností. Obdobně zjistíme, že při cestě přes Brno máme $2 \cdot 3 = 6$ možností a při cestě přes Ostravu $2 \cdot 2 = 4$ možností.

Výpočet můžeme přehledně zapsat takto:

přes	Prahu	$3 \cdot 2 = 6$	možností
	Brno	$2 \cdot 3 = 6$	
	Ostravu	$2 \cdot 2 = 4$	
	celkem	16 možností.	

Přehledný zápis možností pro cestování z Karlových Varů do Košic dostaneme obdobně:

přes	Prahu	$3 \cdot 2 = 6$	možností
	Brno	$2 \cdot 2 = 4$	
	Ostravu	$2 \cdot 2 = 4$	
	celkem	14 možností.	

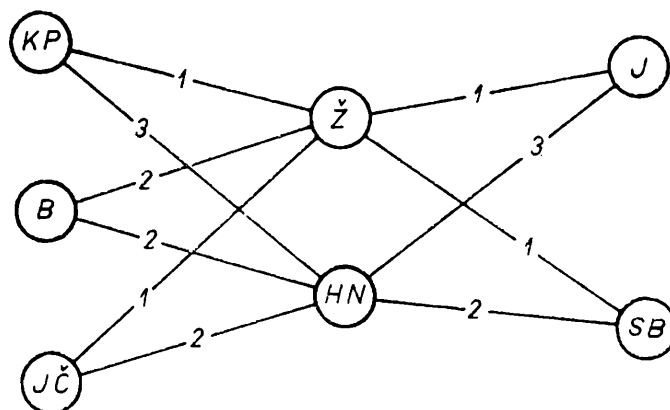
Obdobně zjistíme počty možností pro cestování z Liberce do Bratislavy a do Košic a doplníme schéma 3:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} BR \\ KV \\ L \end{array} & \begin{array}{c} K \\ 16 \\ 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} KV \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pokud jste četli citované články, jistě jste si již uvědomili, že schémům 1, 2, 3 říkáme *matice* a že matici 3 jsme dostali *násobením*¹⁾ *m. tic* 1 a 2 v tomto pořadí

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Obdobným způsobem řešte úlohy:



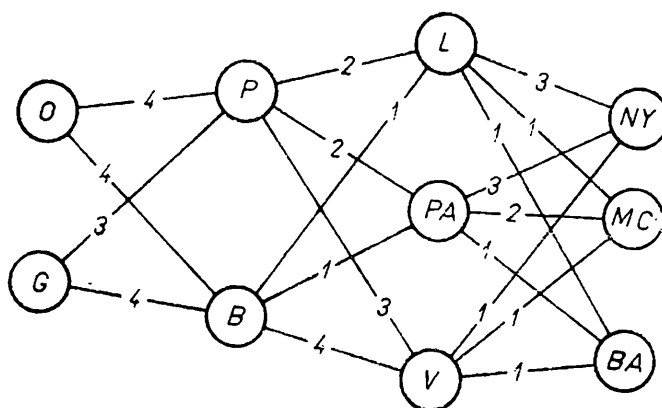
obr. 3

Úloha 1. Obyvatelé Brna mají k dispozici tři druhy veřejné městské dopravy: autobus, tramvaj a trolejbus.

¹⁾ Definici násobení matic viz v článku O. Říha: Tabulky informací, Rozhledy matematicko-fyzikální, č. 4, roč. 49.

V diagramu jsou zakresleny některé čtvrtě a zastávky městské dopravy a je v něm znázorněno, jakého prostředku městské dopravy je možno mezi těmito místy použít. Určete, kolika různými způsoby je možno jet na sídliště Juliánov (*J*) a na Staré Brno (*SB*) přes Žerotínovo náměstí (*Ž*) nebo Hlavní nádraží (*HN*) z a) Králova Pole (*KP*), b) Bystřice (*B*), c) Jiráskovy čtvrti (*JČ*). Za různé považujeme takové způsoby, které se liší použitými tratěmi nebo které na téže trati používají různých dopravních prostředků.

Úloha 2. Předpokládejme, že čísla uvedená v následujícím diagramu udávají, kolik druhů spojení (telefon, telegraf, dálnopolis, krátkovlnné rádiové spojení) existuje mezi některými městy.



obr. 4

Určete, kolika různými způsoby může být nějaká zpráva předána do New Yorku (*NY*), México City (*MC*) a Buenos Aires (*BA*) přes Prahu (*P*) nebo Brno (*B*) a dále přes Londýn (*L*), Paříž (*PA*) nebo Vídeň (*V*) z a) Ostravy (*O*), b) Gottwaldova (*G*). Za různá považujeme spojení uskutečněná přes různá města i spojení, která mezi týmiž městy užívají různých druhů spojení.

Výsledky úloh :

1.	<i>J</i>	<i>SB</i>	2.	<i>NY</i>	<i>MC</i>	<i>BA</i>
	<i>KP</i>	$\begin{pmatrix} 10 & 7 \end{pmatrix}$		<i>O</i>	$\begin{pmatrix} 100 & 64 & 52 \end{pmatrix}$	
	<i>B</i>	$\begin{pmatrix} 8 & 6 \end{pmatrix}$		<i>G</i>	$\begin{pmatrix} 85 & 55 & 45 \end{pmatrix}$	
	<i>JČ</i>	$\begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix}$				

Zásady provádění numerických výpočtů

Ing. OTAKAR LACINA ČKD - Praha

Řešení fyzikálního či technického problému můžeme zhruba rozdělit na tři základní části

1. Formulace problému.
2. Obecné řešení.
3. Numerický výpočet.

V první části řešení volíme označení proměnných a konstant, soustavu jednotek, soustavu souřadnic atd. a napíšeme rovnice, které řešený jev popisují. V druhé části zpracujeme matematicky rovnice tak, abychom dospěli k obecným, výsledným vztahům, provedeme rozbor obecných výsledků. Konečně ve třetí části vyčíslíme výsledné vztahy, vyřešíme numericky výsledné rovnice, zkontrolujeme číselné výsledky a uděláme rozbor numerického řešení. Je samozřejmé, že jednotlivé části řešení jsou na sebe vázány a vzájemně se ovlivňují. Stává se velmi často, že jsme nuceni přijmout zjednodušující předpoklady ve formulaci dané úlohy, abychom byli vůbec schopni problém řešit. Někdy neumíme nalézt obecné řešení a úlohu řešíme pouze numericky. Jindy upravujeme obecné řešení tak, aby výsledné vztahy byly snáze numericky zpracovatelné a při numerickém řešení nevznikaly chyby. Stává se, že se číselné výsledky neshodují s předpokládanými, získanými odhadem na základě fyzikálního názoru, nebo s naměřenými výsledky. Pak je třeba provést rozbor formulace problému, zvláště plnění zjednodušujících předpokladů.

Dnes bych se chtěl krátce zmínit o některých obecných zásadách provádění numerických výpočtů zvláště proto, že řada studentů i mladších pracovníků právě tuto část řešení problému podceňuje, přesto že právě ona bývá nejčastějším zdrojem chyb, které znehodnocují celou předchozí práci a mohou vést k falešným závěrům při obecných úvahách, nebo k vážným potížím při výpočtech projekčních či konstrukčních.

Způsoby numerických výpočtů se samozřejmě od sebe liší jednak podle druhu počítané úlohy, jednak podle použitých pomůcek. Přes to si však můžeme ukázat některé společné zásady, které je nutno dodržovat u všech výpočtů.

Předně je nutno každý příklad řešit obecně až do konce, abychom omezili numerické výpočty, vždy náchylnější k chybám než obecné, na nejmenší možnou míru. Uvedme sice trochu násilný, ale zato názorný příklad.

Představme si zeměkouli jako kouli. Kolem rovníku je obruč délky l_1 . Tuto obruč rozřízneme a vložíme do ní kus obruče o délce l_2 . Jaká me-

zera l_3 vznikne mezi koulí a obručí, předpokládáme-li, že obruč zachová kruhový tvar a dotýká se koule v jednom bodě? Délka rovníku je $l_1 = 40\,000$ km, délka vloženého kusu $l_2 = 1$ m.

Mohli bychom počítat:

Průměr koule

$$d_1 = \frac{l_1}{\pi} \quad 1.$$

Průměr zvětšené obruče

$$d_2 = \frac{l_1 + l_2}{\pi} \quad 2.$$

Vzdálenost mezi koulí a obručí

$$l_3 = d_2 - d_1. \quad 3.$$

Dosadíme-li čísla

$$d_1 = \frac{40\,000\,000 \text{ m}}{\pi}$$

$$d_2 = \frac{40\,000\,001 \text{ m}}{\pi}$$

Z dosazení plyne, že bychom museli provést dělení alespoň na deset míst, abychom dostali vůbec nějaký výsledek. Dořešíme-li příklad obecně, dostáváme

$$l_3 = d_2 - d_1 = \frac{l_1 + l_2 - l_1}{\pi} = \frac{l_2}{\pi}$$

Po dosazení

$$l_3 = \frac{1}{\pi}$$

Výsledek tedy nalezneme v tabulkách a příklad je vyřešen. Zároveň docházíme k poznatku, že mezera nezávisí na původním obvodu.

Dále je výhodné před započítáním výpočtu sestavit podrobné výpočtové schéma, kde uvedeme pořadí operací, které umožňuje nalézt hledaný výsledek co nejjednodušeji a nejrychleji. Podrobnost výpočtového schématu je dána složitostí úlohy a použitými pomůckami pro výpočet. Například sestavujeme-li výpočtové schéma pro výpočet na samočinném počítačím stroji, musí být toto schéma podstatně podrobnější, než schéma téže úlohy, počítané výpočtářem. Počítač stroj dává řešení rychlost a spolehlivost. Stroj není ovlivňován únavou a postupnou ztrátou pozornosti, ale vyžaduje vypracování naprosto spolehlivých výpočetních postupů. Jinak může dojít k chybným výsledkům nebo ke zby-

tečným zastavením výpočtu. Uvedme příklad. Máme vypočítat hodnoty funkce

$$y = \frac{f_1(x) - f_2(x)}{f_3(x) - f_4(x)}$$

kde pro jisté $x = a$ je $f_1(a) - f_2(a) = 0$ a také $f_3(a) - f_4(a) = 0$, takže v tomto bodě jde o tzv. neurčitý výraz typu „ $\frac{0}{0}$ “. Protože stroj

pracuje s určitým počtem míst, může dojít k tomu, že pro x blízké a vzniknou v čitateli i ve jmenovateli malá čísla, která po zaokrouhlení mohou dát nulu. Dělení se provede, výsledek je chybný. Vznikne-li v čitateli nula a ve jmenovateli malé číslo, dá stroj výsledek nulu, i když $\lim y \neq 0$ pro $x \rightarrow a$. Pokud vznikne v čitateli malé číslo a ve jmenovateli nula, dojde k přeplnění a tudíž k zastavení výpočtu. Je tedy nutno ve výpočtovém schématu případ dosazení $x \approx a$ uvažovat a určit výpočetní postup v případě, že x nabude hodnoty z okolí a . Při kreslení výpočtového schématu je třeba věnovat pozornost vhodnosti obecně odvozených vztahů pro numerický výpočet. Jako příklad uvedme pátý příklad fyzikální olympiády r. 69–70, kategorie D.

Těleso o měrné tíze γ_1 je ve vzduchu, jehož měrná tíha je γ_0 , vyváženo na správných vahách závažím G měrné tíhy γ_2 . Určete tíhu tohoto tělesa ve vakuu. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\gamma_1 = 240 \text{ kp/m}^3$, $\gamma_2 = 8500 \text{ kp/m}^3$ a $\gamma_0 = 1,2 \text{ kp/m}^3$ a $G = 1,0 \text{ kp}$.

Naznačme velmi stručně obecné řešení. Označíme-li M tíhu váženého tělesa a V_M jeho objem a V_G objem závaží, pak při použití Archimédova zákona pro rovnováhu na rovnoramenné váze platí

$$M - V_M \gamma_0 = G - V_G \gamma_0. \quad (1)$$

Objem váženého tělesa i objem závaží vyjádříme pomocí měrné tíhy

$$V_M = \frac{M}{\gamma_1}, \quad (2)$$

$$V_G = \frac{G}{\gamma_2}. \quad (3)$$

Vztahy (2) a (3) dosadíme do vztahu (1).

$$M - M \frac{\gamma_0}{\gamma_1} = G - G \frac{\gamma_0}{\gamma_2}. \quad (4)$$

Provedeme úpravu

$$M \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}\right) = G \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_2}\right), \quad (5)$$

odkud

$$M = G \frac{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}} \quad (6)$$

Výsledný vztah vyčíslíme podle výpočtového schématu

$$\begin{array}{ll} A1 = \frac{\gamma_0}{\gamma_2} & A1 = \frac{1,2}{8500} = 0,0001412, \\ A2 = 1 - A1, & A2 = 1 - 0,0001412 = 0,999\,858\,8, \\ A3 = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, & A3 = \frac{1,2}{240} = 0,005, \\ A4 = 1 - A3, & A4 = 1 - 0,005 = 0,995, \\ A5 = \frac{A2}{A4}, & A5 = \frac{0,999\,858\,8}{0,995} = 1,004\,88, \\ M = G \cdot A5, & M = 1 \cdot 1,004\,88 = 1,004\,88 \text{ kp.} \end{array}$$

Podívejme se na výsledný vztah z hlediska numerického řešení. Jak hodnota $\frac{\gamma_0}{\gamma_2}$, tak i $\frac{\gamma_0}{\gamma_1}$, budou malé proti jednotce, protože $\gamma_0 \ll \gamma_2$ a $\gamma_0 \ll \gamma_1$. Tudíž čitatel se bude velmi málo lišit od jmenovatele a výsledek dělení bude velmi blízký jedné. Abycho dostali přijatelný výsledek, budeme musit dělení provést na značný počet míst. Tím ovšem zvětšujeme možnost chybného výpočtu. Tuto potíž lze odstranit poměrně jednoduchou úpravou.

Obecně lze psát zlomek, ve kterém se čitatel liší málo od jmenovatele, ve tvaru $\frac{A \pm \varepsilon}{A}$ a ten upravíme na

$$\frac{A \pm \varepsilon}{A} = 1 \pm \frac{\varepsilon}{A}.$$

je-li $\varepsilon \ll A$, pak je také $\frac{\varepsilon}{A} \ll 1$. Můžeme tedy zlomek $\frac{\varepsilon}{A}$ počítat při zachování počtu platných míst výsledku na malý počet míst. Tohoto poznatku využijeme k úpravě výsledného vztahu (6), kde v čitateli odečteme a přičteme člen $\frac{\gamma_0}{\gamma_1}$.

$$M = G \frac{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}} = G \frac{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{\gamma_0}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}} = G \left(1 + \frac{\frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{\gamma_0}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}} \right) =$$

$$M = G (1 + \alpha) \quad (7)$$

kde

$$\alpha = \frac{\frac{\gamma_0}{\gamma_1} - \frac{\gamma_0}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1}} \quad (8)$$

Je jasné, že $\alpha \ll 1$, protože v čitateli odečítáme od sebe dvě malá čísla a ve jmenovateli je přibližně jednotka. Po dosazení dostaneme $\alpha = 0,004\,88$. Z tohoto příkladu plyne výhodnost vztahu (7) proti vztahu (6), neboť při výsledku počítaném na tři platná místa v případě vztahu (7), dostáváme tentýž výsledek jako při výpočtu na šest míst v případě vztahu (6).

Podobných úprav existuje celá řada a jejich vhodné použití je dáno zkušenostmi výpočtáře.

Kromě shora uvedeného je třeba, jak při obecném řešení, tak i při volbě výpočetních metod a volbě početního postupu řešit otázku přesnosti výpočtu a chyb, a to chyb vznikajících zaokrouhlováním, chyb způsobených přibližností vstupních dat, nebo fyzikálních konstant a konečně chyb souvisejících s tím, že nekonečné procesy v matematické analýze nahrazujeme konečnými. (Např. součet nekonečné řady nahrazujeme součtem několika prvních členů, např.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots).$$

Řešení otázek chyb a přesnosti je dosti náročné a vymyká se rámci tohoto článku.

Dále je vhodné vyznačit ve výpočtovém schématu místa a způsob kontroly správnosti výpočtu. Kontrolu provádíme jednak průběžnou, tj. kontrolu částečných výsledků, jednak konečnou, kdy kontrolujeme konečný výsledek. Rozhodně je nerozumné provádět jen konečnou kontrolu, protože riskujeme nutnost opakování celého výpočtu. Naopak vhodně volená průběžná kontrola přispěje k rychlému nalezení případné chyby a k celkové spolehlivosti výpočtu.

Při složitějších úlohách se stává výpočetní schéma velmi rozsáhlým a ztratilo by svou přehlednost. V takovém případě členíme výpočtové schéma tak, že celý výpočet rozdělíme na řadu pokud možno uzavřených částí, tzv. bloků. Pak vypracujeme jednak výpočtová schémata obsahů každého jednotlivého bloku, jednak schéma vzájemné vazby těchto bloků. U složitých výpočtů používáme ještě hlubšího členění. Nezbytně nutné je však zachovat jednoznačnost a přehlednost. V současné době jsou již ustálené značky pro kreslení výpočtových schémat pro samostatné, číslicové, počítačové stroje a je možno doporučit jejich použití i pro jiné způsoby výpočtu.

Závěrem se zmíním o nejnepopulárnějším požadavku na numerický výpočet. Jeho splnění je sice nepostačující, ale nutnou podmínkou pro správný výsledek. Tímto požadavkem je vzorná grafická úprava celého výpočtu. Grafickou úpravou by měly být vyznačeny hlavní, pomocné a kontrolní výpočty, zavedené substituce pro výpočet, dílčí výsledky potřebné v dalším výpočtu. Nejvýhodnější je, je-li možné uspořádat celý výpočet do výpočtové tabulky, jako např. řešení soustav lineárních rovnic Gaussovou metodou, řešení nelineárních rovnic iterací, řešení algebraických rovnic metodou Linovou atd. Použitím výpočtové tabulky se výpočet do značné míry mechanizuje, zvýší se rychlost a spolehlivost a konečně je v řadě případů možné, aby výpočet prováděl i méně kvalifikovaný pracovník.

Uvedme příklad. Máme určit hodnoty

$$y = f(x)$$

pro dané hodnoty argumentu $x = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Je-li těchto hodnot víc, není vhodné počítat $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$. Výhodnější je rozdělit danou funkci f na elementární operace, které provedeme současně pro všechny hodnoty argumentu x , přičemž považujeme za elementární operace i seskupení operací. Např. při počítání na logaritmickém pravítku je elementární operací i výraz $\frac{a \cdot b}{c \cdot d}$, protože je možné jej vy počítat bez čtení mezivýsledků. Nebo lze na logaritmickém pravítku považovat za elementární operaci i Pythagorovu větu. Můžeme totiž psát

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = A \sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2}$$

tj. na základní stupnici nastavíme $\frac{B}{A}$, na kvadratické stupnici máme $\frac{B}{A^2}$. Tuto hodnotu přečteme, připočteme k ní jednotku a na tuto hodnotu nastavíme na kvadratické stupnici vlásek. Na základní stupnici máme pod vláskem hodnotu

$$\sqrt{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2}$$

Tuto hodnotu vynásobíme A a máme hledané C . Z popisu postupu plyne, že výpočet Pythagorovy věty je elementární operací.

Závěr

V článku jsem se bez nároku na úplnost zmínil o některých zásadách provádění numerických výpočtů. Dobrým výpočtářem se však člověk

stává usilovným studiem metod numerické matematiky, která zvláště v posledních letech doznala pozoruhodného rozmachu, zvládnutím výpočetních pomůcek počínaje, spolehlivým počítáním na logaritmickém pravítku a programováním pro samočinné počítače konče, a konečně i několika lety praxe.

Vztahy mezi logaritmy dvou základů

Dr. ROBERT KARPE, Brno

Odvození dvou základních vztahů, které uvádím, nepřesahuje rozsah středoškolských znalostí. Nicméně hraniční poloha této kapitoly má neblahý důsledek pro studenty: látka není zpravidla uváděna v učebnicích ani škol středních, ani vysokých, a pokud se tak děje (např. Vojtěch I, str. 33), je to podání jen velmi kusé.

Domnívám se proto, že je na místě, aby zde bylo dáno středoškolákům přístupné odvození.

Při odvozování použijeme tato dvě pravidla

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad (1)$$

kde $a > 0$, m , n , jsou reálná čísla.

Slovy: jestliže mocninu umocňujeme, exponenty se znásobí.

$$a^m = a^n \langle = \rangle m = n; \quad (2)$$

čísla a , m , n , jako ad (1)

Slovy: rovnají-li se sobě dvě mocniny i jejich základy, pak se musí sobě rovnat též jejich exponenty (a naopak).

Uvažujme nyní o funkci

$$y = c^x. \quad (3)$$

Z toho, co víme ze střední školy o průběhu exponenciální funkce, můžeme usoudit, že zde by nebyl každý základ c vhodným:

1. c nemůže být jedničkou, neboť $1^x = 1$ pro všechna x , takže pro $y \neq 1$ neměli bychom odpovídající x ;

2. c nemůže být záporným číslem, neboť např.: $(-3)^{\frac{1}{2}} = i \sqrt{3}$; tj. při základu $c = -3$ obdrželi bychom pro $x = \frac{1}{2}$ odpovídající hodnotu $y = i \sqrt{3}$, tedy imaginární hodnotu y , což nechceme.

Úhrnem. Má-li ve funkci (3) proměnná y probíhat všechny a jen všechny hodnoty reálné, musí být základ c číslem jednak kladným a jednak různým od jednotky.

Logaritmy, pokud jde o jejich princip a účel, byly studentům vysvětlovány v 10. ročníku střední školy. Pro účely tohoto článku se omezíme proto na konstatování, že logaritmus je v podstatě název pro exponent v rovnici (3):

Nechť pro libovolná reálná čísla $k > 0$, $1 \neq c > 0$, platí $k = c^m$. Pak číslo m obdrží název „Logaritmus čísla k při základu c “, což symbolicky vyjádříme $\log_c k$. Odtud základní pravidlo

$$k = c^{\log_c k}; \quad k > 0, \quad 1 \neq c > 0. \quad (4)$$

Například: $81 = 3^4$; název pro exponent 4 je zde $\log_3 81$ tedy $81 = 3^{\log_3 81}$.

Relace (4) má zřejmě platnost i tehdy, jestliže $k = c$. Pak platí $c = c^{\log_c c}$. Protože však $c = c^1$, platí podle (2)

$$\log_c c = 1, \quad 1 \neq c > 0. \quad (5)$$

Uvažujme dále o libovolných reálných číslech $1 \neq a > 0$, $1 \neq b > 0$, $k > 0$. Pro tato čísla podle (4) platí

$$k = a^{\log_a k} \quad (6)$$

$$k = b^{\log_b k} \quad (7)$$

$$b = a^{\log_a b} \quad (8)$$

Odtud dosazením (8) do (7) obdržíme

$$k = (a^{\log_a b})^{\log_b k}$$

dosadíme-li za levou stranu této rovnice podle (6), obdržíme

$$a^{\log_a k} = (a^{\log_a b})^{\log_b k},$$

takže vzhledem k (1) a (2) platí

$$\log_a k = \log_a b \cdot \log_b k, \quad k > 0, \quad 1 \neq a > 0, \quad 1 \neq b > 0. \quad (I)$$

Jestliže do (I) dosadíme $k = a$, obdržíme $\log_a a \equiv \log_a b \cdot \log_b a$, takže vzhledem ke vzorci (5) platí

$$1 = \log_a b \cdot \log_b a. \quad (II)$$

Poznámka 1. Důležitý vztah (I) lze snadno „transformovat“ na jednoduchou algebraickou rovnici, tím že zkratku „log“ všude nahradíme zlomkovou čarou

$$\log_a k = \log_a b \cdot \log_b k \longleftrightarrow \frac{k}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{k}{b}.$$

Naopak tedy, jednoduchá rovnice pro krácení zlomků je nám zde ví-

tanou pomůckou pro zapamatování základního vztahu mezi logaritmy dvou různých základů.

Poznámka 2. V praxi užíváme hlavně dekadické logaritmy (základem je 10) a tzv. přirozené logaritmy (základem je Eulerovo číslo $e = 2,71828 \dots$).

Základ 10 se nejlépe hodí pro početní výkony nižší matematiky, tj. pro operace násobení, dělení, umocňování a odmocňování. (Výhodou je snadné stanovení charakteristiky).

Základ e je přirozeným důsledkem nalezení derivace pro exponenciální funkci. Je tedy jakýmsi přirozeným základem z hlediska výkonů vyšší matematiky (derivování a integrování). Odtud též název příslušných logaritmů.

Obvykle místo $\log_{10} k$ píšeme $\log k$, místo $\log_e k$ píšeme $\ln k$ (logaritmu naturalis = přirozený logaritmus).

Příklad 1.

Máme k dispozici dekadické logaritmy (tabulky ze střední školy). Máme stanovit přirozený logaritmus daného reálného čísla $k > 0$.

Řešení. Dosadíme do odvozených vztahů $a = e$, $b = 10$. Obdržíme

$$\ln 10 \cdot \log e = 1, \quad (\text{I}^+)$$

$$\ln k = \ln 10 \cdot \log k, \quad (\text{II}^+)$$

odtud

$$\ln k = \frac{\log k}{\log e}. \quad (7)$$

Oba logaritmy z pravé strany (7) lze pak vyčíslit z našich tabulek. Všimněme si také, že jmenovatel v (7) je nezávislý na volbě k . Je tedy $\frac{1}{\log e} = \ln 10$ převodovým koeficientem z logaritmů dekadických na přirozené.

Příklad 2.

Při kterém základu c je $\log 100$ větší o 1,5 než $\log_c 12,5$?

Řešení.

Platí zřejmě

$$\log_c 100 = 1,5 + \log_c 12,5,$$

takže vzhledem ke (2) platí též $c^{\log_c 100} = c^{1,5 + \log_c 12,5}$. Pravou stranu této rovnice můžeme upravit podle pravidla $c^{m+n} = c^m \cdot c^n$; obdržíme: $c^{\log_c 100} = c^{1,5} \cdot c^{\log_c 12,5}$, takže vzhledem ke (4) bude pak: $100 = c^{1,5} \cdot 12,5$; odtud: $c = 4$.

Příklad 3

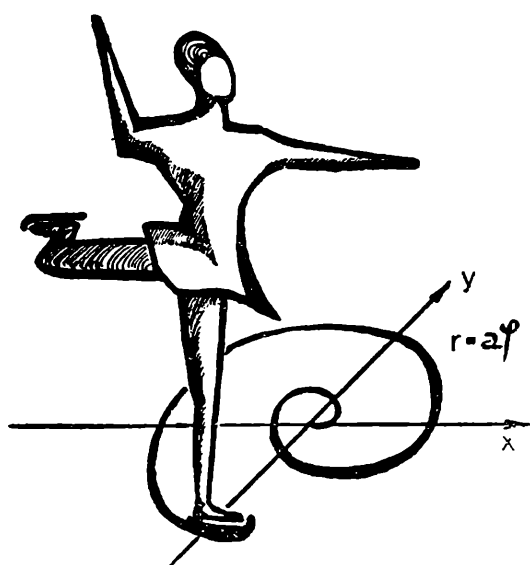
Stanovte a, b z těchto rovnic

$$\log_b a - \log_a b = \frac{8}{3}, \quad a \cdot b = 16.$$

Řešení. Položíme-li $\log_b a = x$, pak vzhledem k (I) musíme položit $\log_a b = \frac{1}{x}$. Bude tedy $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$. Odtud: $x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{3}$. Řešení je tedy dvojznačné

1. $\log_b a = 3$, odtud $b^{\log_b a} = b^3$, čili $a = b^3$, dosazeno do druhé rovnice $b^3 \cdot b = 16$, odtud $a = 8, b = 2$.

2. Obdobným postupem obdržíme $a = \frac{1}{4}, b = 64$.



DESKRIPTIVNÍ
GEOMETRIE

Příčka mimoběžek

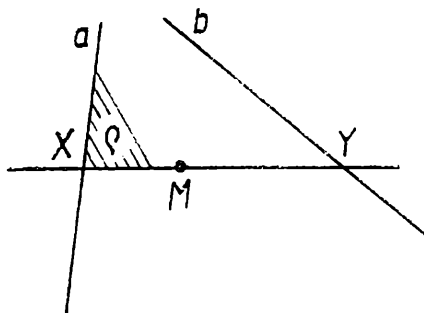
OLDŘICH LANTA, Ostrava

Příčkou mimoběžek rozumíme přímku, která protíná dané mimoběžky. Takových příček je zřejmě nekonečně mnoho, a proto nutno stanovit pro jejich určení další podmínky. Níže provedeme rozbor a prostorové řešení několika případů. Jejich důkazy a příslušné diskuse ponecháme laskavému čtenáři.

1. Daným bodem M sestrojte příčku mimoběžek a, b . Bod M neleží na žádné z daných mimoběžek.

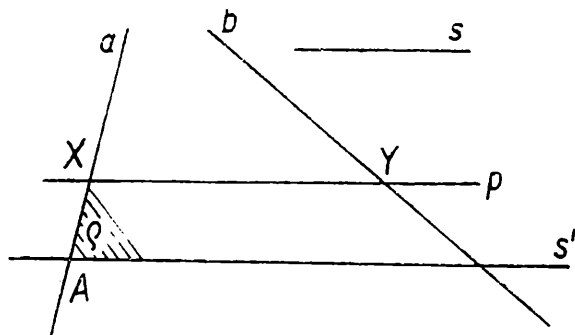
Řešení. (Obr. 1.) Existuje-li taková příčka p , určuje např. s přímkou a rovinu ϱ , která protne přímku b v bodě Y příčky p . Tím je dána konstrukce: 1. $\varrho \equiv Ma$, 2. $Y \equiv b \cap \varrho$, 3. $p \equiv MY$

2. Sestrojte příčku p mimoběžek a , b rovnoběžnou s danou přímkou s , která je různoběžná s přímkami a , b .



Obr. 1

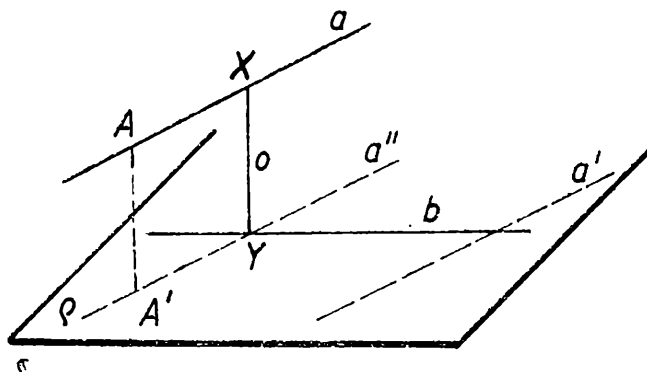
Řešení. (Obr. 2.) Všechny přímky daného směru s , které protínají přímkou a , tvoří rovinu ϱ , ve které leží hledaná příčka p . Zvolíme tedy na přímce a libovolný bod A a přímku $s' \parallel s$, procházející bodem A , tvoří s přímkou a rovinu ϱ . Průsečíkem Y přímky b s rovinou ϱ prochází hledaná příčka $p \parallel s$.



Obr. 2

3. Sestrojte osu o mimoběžek a , b .

Řešení. (Obr. 3.) Osa dvou mimoběžek je příčka kolmá na obě mimoběžky. Je tedy osa o také kolmá na rovinu ϱ rovnoběžnou s oběma přímkami. Tím je úloha převedena na řešení v 2. příkladě. Přímka a' vedená libovolným bodem B přímky b určuje s přímkou b rovinu

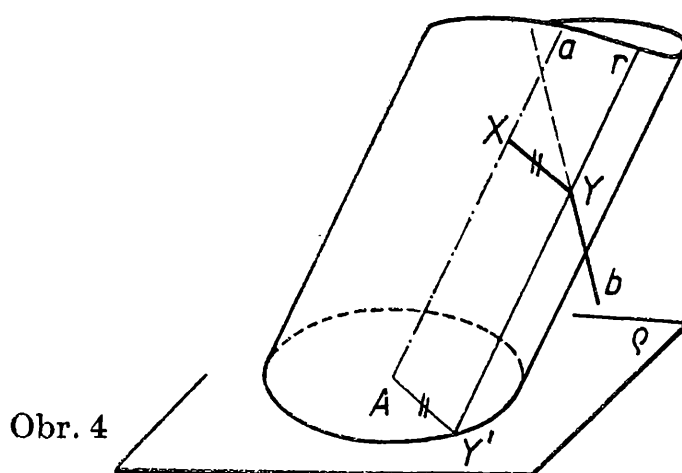


Obr. 3

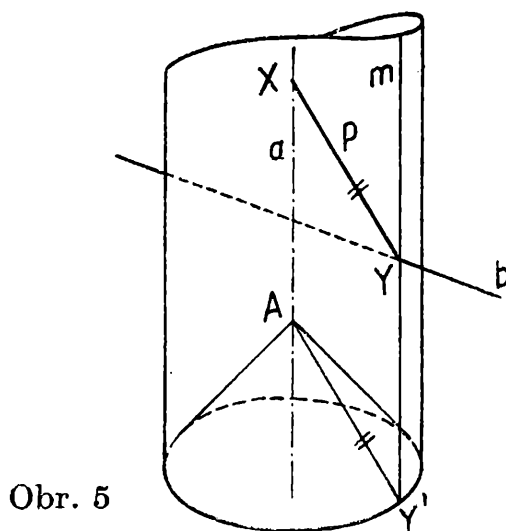
$\varrho \equiv a'b$. Pravoúhlým průmětem A' libovolného bodu A přímky a v rovině ϱ prochází kolmý průmět a'' přímky a do roviny ϱ . Průsečíkem $Y \equiv ba''$ jde hledaná osa $o \equiv XY \parallel AA'$, kde X je bodem přímky a .

4. Jsou dány mimoběžky a , b , rovina ρ různoběžná s přímkami a , b a kladné číslo d , které je větší nebo rovno vzdálenosti přímek a , b . Sestrojte úsečku tak, aby byla rovnoběžná s rovinou ρ a aby její krajní body byly na daných přímkách.

Řešení. (Obr. 4.) Úsečky velikosti d , jejichž jeden krajní bod A je např. na mimoběžce a a jsou rovnoběžné s rovinou ρ , tvoří kruh $k \equiv \equiv (A, d)$. Tento kruh je řídícím útvarem kruhového válcového prostoru



o středné v přímce a . Přímka b protne plášť tohoto prostoru v bodě Y , jímž prochází hledaná úsečka p . Pro snadnější řešení vedeme bodem Y povrchovou přímkou r , která protne obvod kruhu k v bodě Y' a úsečka $p \equiv XY \parallel AY'$; bod X je na přímce a . Řešení jsou dvě nebo jedno.

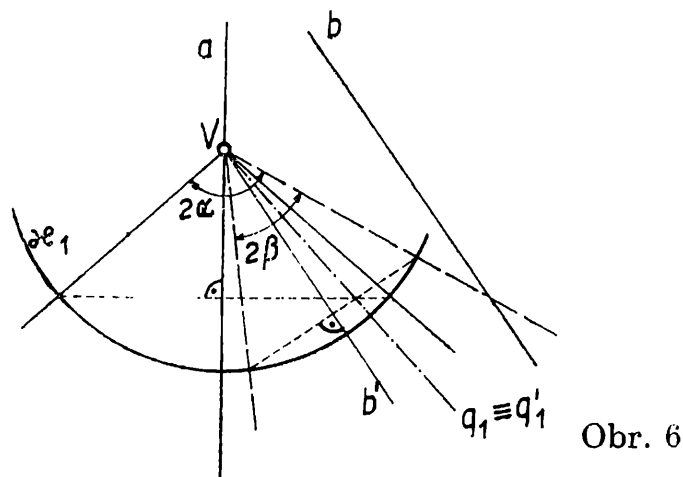


5. Sestrojte úsečku velikosti d tak, aby její krajní body byly na mimoběžkách a , b a aby svírala s přímkou a daný úhel α .

Řešení. (Obr. 5.) Všechny úsečky velikosti d , které svírají s mimoběžkou a úhel α a mají jeden krajní bod v libovolném bodě A přím-

ky a , vytvoří plášť rotačního kužele o podstavné kružnici k . Posouvá-li se vrchol A po přímce a , vytvoří kružnice k rotační plochu válcovou. Přímka b protne tuto plochu v bodě Y , který je jedním krajním bodem hledané úsečky p . Z praktických důvodů vedeme bodem Y povrchovou přímku m plochy válcové a její průsečík Y' s narysovanou kružnicí k spojíme s bodem A . Hledaná úsečka $p \equiv XY \parallel AY'$; bod X je na přímce a . Řešení jsou dvě, jedno nebo žádné.

6. Sestrojte takovou příčku p mimoběžek a, b , aby svírala s přímkou a úhel α a s přímkou b úhel β . Přitom součet $\alpha + \beta$ je menší, nebo roven úhlu mimoběžek a, b .



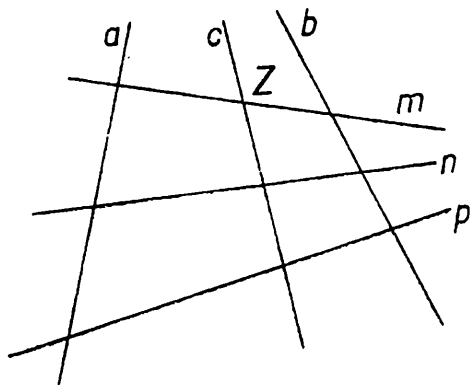
Řešení. (Obr. 6.) Potřebujeme směr hledané příčky. Zvolíme proto např. na přímce a bod V . Všechny přímky, které procházejí bodem V a svírají s přímkou a úhel α , tvoří rotační plochu kuželovou o ose a a osovém úhlu 2α . Bodem V vedeme přímku $b' \parallel b$ a sestrojíme rotační plochu kuželovou o ose b' a vrcholovém úhlu 2β . Společná přímka q obou ploch kuželových určuje směr příčky p . Jde nyní o to, jak sestrojit průnik q těchto ploch kuželových. Libovolná plocha kulová κ o středu v bodě V , protne sestavené plochy kuželové v kružnicích k, l (v obr. zobrazeno na rovinu různoběžek a, b'), které se protnou v bodech X, Y , jimiž prochází průnik q , resp. q' obou ploch kuželových. Tím je úloha převedena na konstrukci příčky $p \parallel q$ přímek a, b .

7. Sestrojte příčky tří mimoběžek a, b, c .

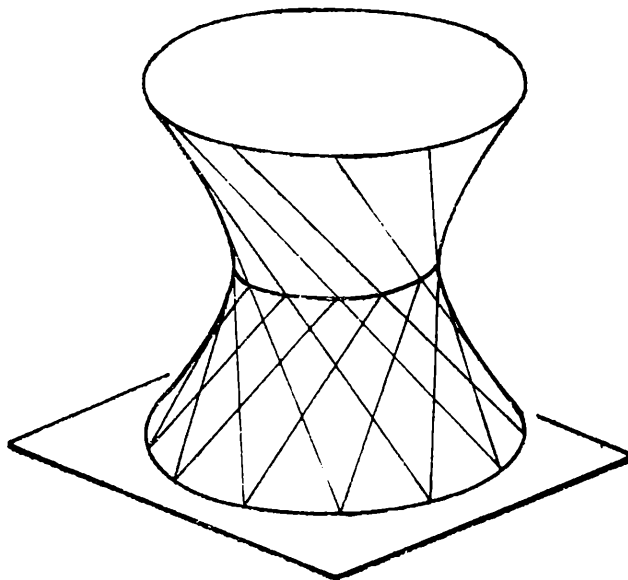
Řešení. (Obr. 7.) Zvolíme na jedné mimoběžce, např. c , libovolný bod Z a jím sestrojíme příčku m mimoběžek a, b . Mění-li se bod Z na c , dostáváme příčky, z nichž každé dvě jsou mimoběžné. V obr. jsou vyznačeny tři příčky m, n, p . Všechny příčky takto sestavené tvoří tzv. regulus. Uvažujeme-li tři přímky tohoto regulu (v obr. m, n, p), tvoří jejich příčky nový regulus, ke kterému patří i dané mimoběžky a, b, c . Dostáváme tak dva reguly mimoběžek. Každá přímka jednoho

regulu protíná všechny přímky druhého regulu. Oba tyto reguly tvoří plochu, a to buď hyperboloid, nebo hyperbolický paraboloid.

Obě plochy uvedené v 7. příkladě mají praktické upotřebení v technice stavební a strojní. V obr. 8 je celkový pohled na rotační hyperbo-

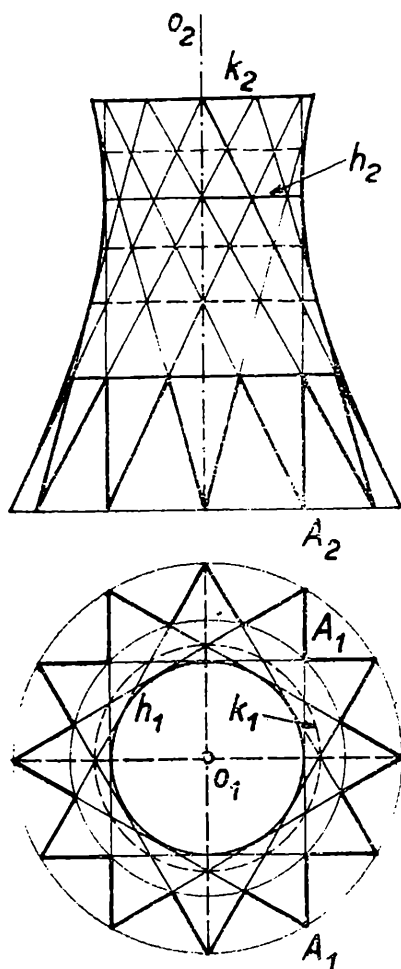


Obr. 7

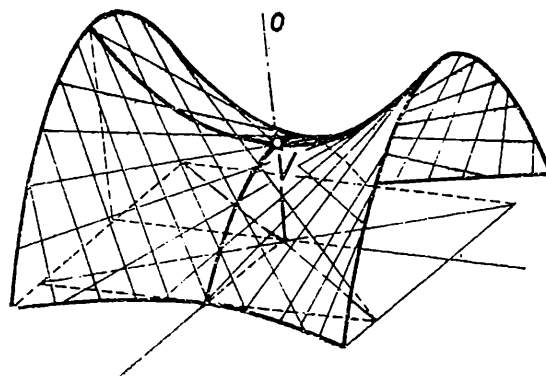


Obr. 8

Obr. 9



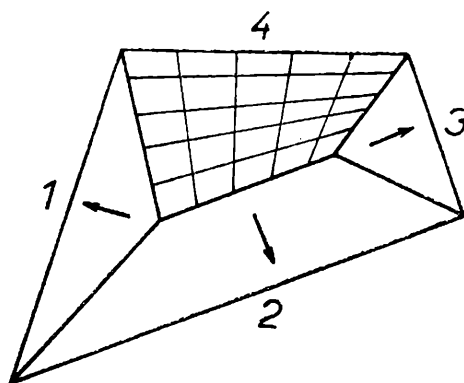
loid i s přímkami obou regulů. V obr. 9 je např. užití hyperboloidu při konstrukci chladicí věže. Ve strojní technice se doužívá hyperboloidu jako hyperboloidického soukolí, ve valivých ložiskách apod. V obr. 10 je celkový pohled na hyperbolický paraboloid. Tohoto se



Obr. 10

užívá při řešení střech nad leteckými halami a továrními prostorami (obr. 11 a 12). Použití je i při zemních pracích v stavitelství silničním, železničním a při vodních stavbách.

Uvedeme několik příkladů, aby si studující tohoto pojednání mohli ověřit příslušnou teorii na praktických příkladech, které vycházejí v mezích nákresny

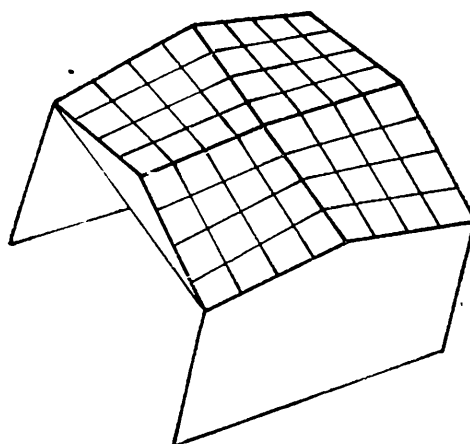


Obr. 11

1. K mimoběžkám $a \equiv AB$ [$A(-2; 4; 4,5)$, $B(4; -1; -2)$] a $b \equiv CD$ [$C(-4; 5; 3,5)$, $D(2; 3,5; 8)$] sestrojte příčku p procházející bodem $M(-2; 1,5; 2)$.

2. Sestrojte příčku p mimoběžek a , b patřící do směru s ; $a \equiv AB$ [$A(-4; 1,5; 1)$, $B(0; 5; 4,5)$], $b \equiv CD$ [$C(-2; 2; 4)$, $D(3; 4; 1)$], $s \equiv EF$ [$E(-3; 4,5; 3,5)$, $F(2; 5; 4,5)$].

3. Sestrojte osu o mimoběžek a , b ; $a \equiv AB$ [$A(-5; 5; 0)$, $B(0; 0; 3)$], $b \equiv CD$ [$C(-3; 4; 5)$, $D(3; 3; 2; 5)$].



Obr. 12

4. Sestrojte osu o mimoběžek $a \perp \pi$, $b \equiv PM$. Přímka a prochází bodem $A(0; 2; 0)$, $P(1,5; 5,5; 0)$, $M(-3; 1,5; 4)$.

5. Mimoběžky $a \equiv AB$, $b \equiv CD$ protněte přímkou $c \parallel \pi$ tak, aby její úsek mezi mimoběžkami měl velikost d . [$A(-3; 7; -1)$, $B(5; 1; 7)$, $C(-3; 2; 4)$, $D(5; 5; -3)$], $d = 3$.

6. K mimoběžkám a , $b \equiv BC$ sestrojte příčku svírající s přímkou a úhel α a jejíž úsek mezi mimoběžkami a , b má délku d . [$a \perp \pi$ prochází bodem $A(0; 4; 0)$, $B(-5; 5; 4)$, $C(4; 5; 9)$, $\alpha = 30^\circ$, $d = 5$].

7. Mimoběžky $a \equiv AB$ a $b \equiv CD$ protněte příčkou, jež svírá s oběma úhel 60° . [$A(-3; 9,5; 2)$, $B(0; 0,8; 2)$, $C(5; 3,8; 4)$, $D(-1,3; 0; 4)$].

0 významu a budoucnosti deskriptivní geometrie

Prof. Dr. KAREL HAVLÍČEK, KU, Praha, Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Blíží se doba, kdy se středoškoláci a s nimi i jejich rodiče rozhodují o dalším vysokoškolském studiu. Při této volbě hraje často rozhodující úlohu deskriptivní geometrie, jíž se v četných třídách středních škol buď vůbec nevyučuje, nebo v omezené míře. Přesto však její znalost je vyžadována na vysokých školách technického směru.

U rodičů se může projevit živý zájem o deskriptivní geometrii někdy teprve v tom neblahém případě, když se jejich dítě dostane do nemocnice; stačí k tomu spolknutý špendlík. Nenajde-li lékař při prohlídce rentgenem žádnou závadu, nemusí to ještě znamenat správnou diagnózu; špendlík může totiž zaujímat polohu promítacího paprsku a zobrazit se tak do nezřetelného bodu. Lékař si měl prostě pořídit nejméně dva pacientovy snímky v různých polohách. Je znám i loňský případ, kdy rentgenový snímek neukázal ani vykloubení ruky z ramene; kdyby si byl lékař opatřil aspoň dva snímky (púdorys a nárys nebo nárys a bokorys), bylo by léčení zkráceno o několik měsíců.

Naproti tomu známe dvacet let starý případ, kdy profesor Jirásek operoval nám dobře známého akademika B. Bydžovského. Šlo o vyjmutí krátkého a tenkého drátku z pacientovy paty, do níž se drát dostal náhodou. Po důkladném prostudování několika snímků postiženého místa vyjmul tehdy chirurg cizí těleso jedním řezem. Profesor Jirásek ovšem deskriptivní geometrii znal a dobře věděl, že k prostorové lokalizaci cizího tělesa nestačí jeden snímek. Kdyby se nebylo podařilo toto rychlé vyjmutí, bylo by bývalo nutné užít během operace narkózy, což lékaři u starších pacientů neradi dělají. A našemu pacientovi bylo tehdy přes sedmdesát let.

*) Podle referátu prof. Havlíčka na konferenci o vyučování matematice a deskriptivní geometrii na vysokých školách, konané v září 1970 v Novém Smokovci

Na lékařských fakultách se deskriptivní geometrie nikdy nepřednášela. Proto konstruktéři lékařských přístrojů (elektrotechničtí nebo strojní inženýři) by měli ke každému takovému aparátu připojit podrobný návod k použití. Bez elektrotechniků to stejně nepůjde v době, kdy se rentgen kombinuje s televizí, která přenáší obraz do izolované místnosti k ochraně rentgenologova zdraví.

Všeobecně vzdělávací význam deskriptivní geometrie nelze podceňovat. Narážíme na ni všude tam, kde se setkáváme s promítáním (např. v biografu) nebo s prostorovou geometrií. Trapně působí, když vysokoškolák hravě zvládne rovnici kvadratické plochy dané třemi mimoběžkami, avšak plochu si nedovede představit ani nakreslit, i když po ní někdy chodí (hyperbolický paraboloid v dlažbě).

Jako pomocný prostředek nevymizí deskriptivní geometrie ještě velmi dlouho ani v řadě jiných oborů. Zasluhou profesora Kadeřávka víme, že kosoúhlé axonometrie užívají kameníci. Méně už je známo, že ji potřebují i instalatéři; rozvod vody nebo plynu ve velkých nebo složitých objektech si zakreslují v axonometrických průmětech, protože prostorová představivost tu má prvořadý význam.

Nelze zde vyčerpat všechny obory, v nichž se až dosud uplatnily metody deskriptivní geometrie. Vedle uvedených již užití při rentgenu uveďme i bezbolestné vyšetřování tělesných vad nebo otevřených ran pomocí osvětlení pacienta speciálními rastry; téže metody užívali sochaři při portrétování osob a lze jí užít i v antropologii. Jde tu vlastně o zobecnění konstrukce vrstevnic v obrazech topografických ploch. Obdobné stanovení profilů reliéfů vedlo francouzské inženýry k sestrojení důmyslných strojů, používaných v mincovnách i k podtisku bankovek (tzv. guillochage); příslušné obrazy působí velmi plasticky a nedají se padělat.

Není třeba připomínat další samozřejmá uplatnění deskriptivní geometrie při práci inženýra, architekta, výtvarníka, astronoma i středně technických kádrů.

Jaká je budoucí úloha deskriptivní geometrie? I když některé její klasické partie ztrácejí dnes význam, klade na ni dnešní život stále velké úkoly.

Moderní strojně početní technika se začíná uplatňovat i v deskriptivní geometrii. Architekt bude ještě dlouho vynášet své perspektivy do výkresů přesto, že programátor se znalostmi deskriptivní geometrie dovede vytvářet příslušné instrukce pro rýsování samočinnými počítači. V Americe se již touto cestou navrhuje karoserie automobilů. Na jarní výstavě Incomex 1966 v Praze kreslil švédský stroj DATASAAB D 21 každou hodinu synoptické mapy na základě průběžných informací z celé Evropy; podle těchto map předpovídala naše meteorologická služba po dobu výstavy počasí mnohem kvalitněji než obvykle. Význam pro leteckou dopravu a její bezpečnost je evidentní.

Grafický projev nestačí dnes držet krok s nároky kladenými na přesnost výsledků. Strojně početní technika i analytické metody tu začínají převažovat, i když k uvedení začátečníka do některých partií, např. kinematické geometrie, se vždy užije s výhodou názorných náčrtů. Svou rychlostí a přesností vytlačuje strojně početní technika z praxe řadu grafických metod, v deskriptivní geometrii např. fotogrammetrii. Avšak automatizace této práce předpokládá znalost fotogrammetrie u konstruktérů potřebných přístrojů (speciálních teodolitů aj.).

Zcela jinak je tomu u nomografie, již může deskriptivní geometrie pomáhat při konstrukci nomogramů z prostorových útvarů. Přes možné využití strojové techniky bude nomogram konstruovaný graficky vždy ekonomičtější než konstrukce samočinného počítače sloužícího témuž účelu.

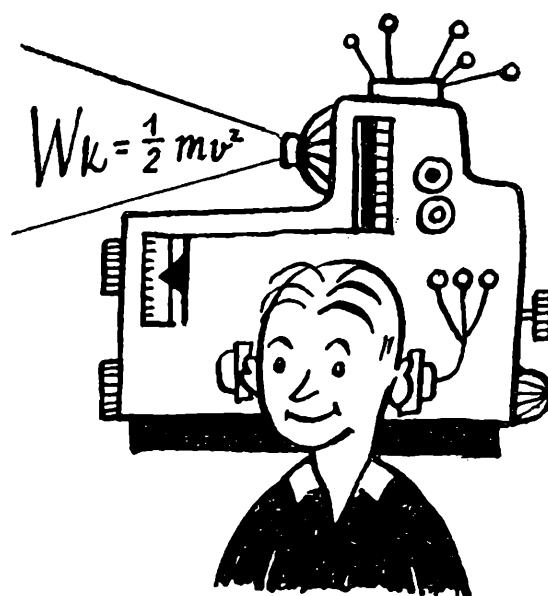
Do deskriptivní geometrie zavádíme v přednáškách na vysokých školách analytické metody. Využíváme diferenciální geometrie při zobrazování speciálních technických křivek a ploch. Mnohé plochy mají řadu společných vlastností, jež dovedeme analyticky solidně a hlavně rychle odvodit. Zobrazení těchto ploch se tím pak značně ulehčí.

Při případné redukci látky deskriptivní geometrie na různých vysokých školách se bude postupovat různě, na některých by byla dokonce škodlivá. Proti dřívějšímu nebude např. někde probíráno osvětlování vůbec, jinde se z něho vynechají jen složitější partie (např. konstrukce izofót), zatímco základy technického osvětlení ploch má své opodstatnění. Vždyť mnohý výtvarník hrubě porušuje nejjednodušší zákony osvětlení.

(Pokračování)

Matematikové z několika univerzit se spojili s odborníky z řízení dopravy a pracovníky laboratoří velkých automobilových koncernů. Došli k závěru, že pohyb vozidel na dálnicích podléhá matematickým zákonitostem, jejichž zvládnutí by zvýšilo propustnost amerických dálnic, zejména jejich kritických míst, a to při větší bezpečnosti provozu. Odvodili dokonce již první formule, které ověřují experimentálně pomocí nejmodernější početní techniky. (Tím skupina amerických teoretiků položila základ nové disciplíně — vědě o automobilové dopravě.)

Scientific American, sv. 209, č. 6, prosinec 1963.



F Y Z I K A

Rovnovážné diagramy kovových systémů

PAVEL BARTUŠKA, Ústav fyziky pevných látek ČSAV, Praha

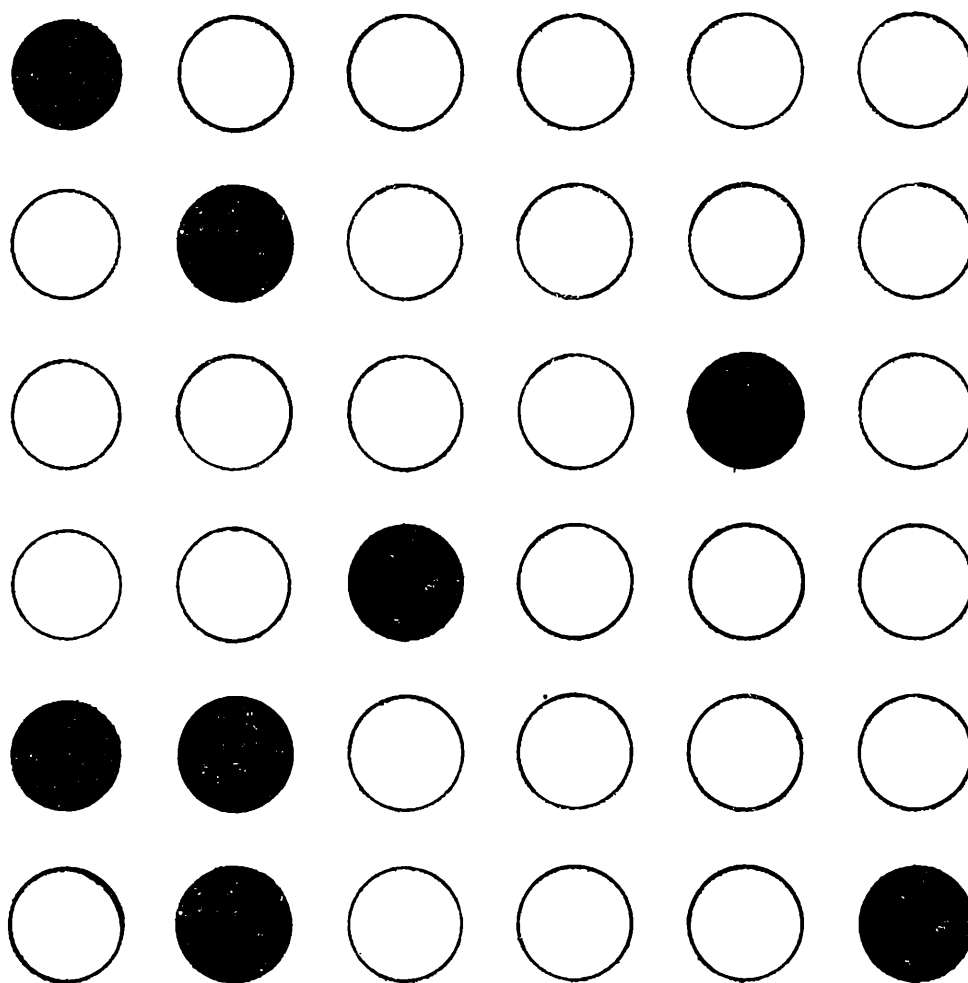
Jestliže zahřejeme dva kovy na teplotu vyšší, než je bod tání kteréhokoliv z nich, získáme homogenní kapalnou fázi — taveninu. Po ochlazení vznikne tuhá slitina, jejíž strukturní charakter závisí na složení systému. Strukturním složením rozumíme druh, množství a charakter vyloučení jednotlivých fází. Závislost mezi strukturou slitiny, jejím složením a teplotou udává takzvaný *rovnovážný diagram*.

Slitina kovů v kapalně i tuhé fázi představuje *uzavřený systém*; tím rozumíme část prostoru, která může se svým okolím vyměňovat energii, ale ne hmotnost. *Fázi* nazýváme homogenní oblast systému, na jejímž rozhraní se vlastnosti systému mění skokem. Pod pojmem *složka* pak rozumíme chemická individua, z nichž můžeme celou soustavu složit. Těmi mohou být buď čisté kovy, nebo sloučeniny s přesně definovaným složením, kdy obsahu jednoho prvku je přiřazeno přesné množství prvku druhého. Je zřejmé, že fáze může být tvořena několika složkami. U binárních soustav existují buď fáze tvořené jedním kovem a tudíž i jednou složkou (krystalizace čistého kovu) anebo fáze tvořená dvěma kovy (krystaly tuhého roztoku), nebo kovem a sloučeninou (např. eutektikum)¹⁾. V posledních dvou případech jde tedy o fáze tvořené dvěma složkami.

¹⁾ Eutektikum je jemnozrnná směs, jež se vytváří z jednotlivých druhů krystalů, které se již nemohou v tuhém stavu navzájem rozpustit.

Mezi počtem fází f , složek s a stupni volnosti v platí Gibbsův zákon fází: $f + v = s + 2$. Počet *stupňů volnosti* udává počet veličin, které jsou nezávislé proměnné, když je soustava v rovnováze (složení, teplota, tlak). V případě, že neuvažujeme plynnou fázi (u kovových soustav ji můžeme zanedbat), má Gibbsův zákon tvar: $f + v = s + 1$.

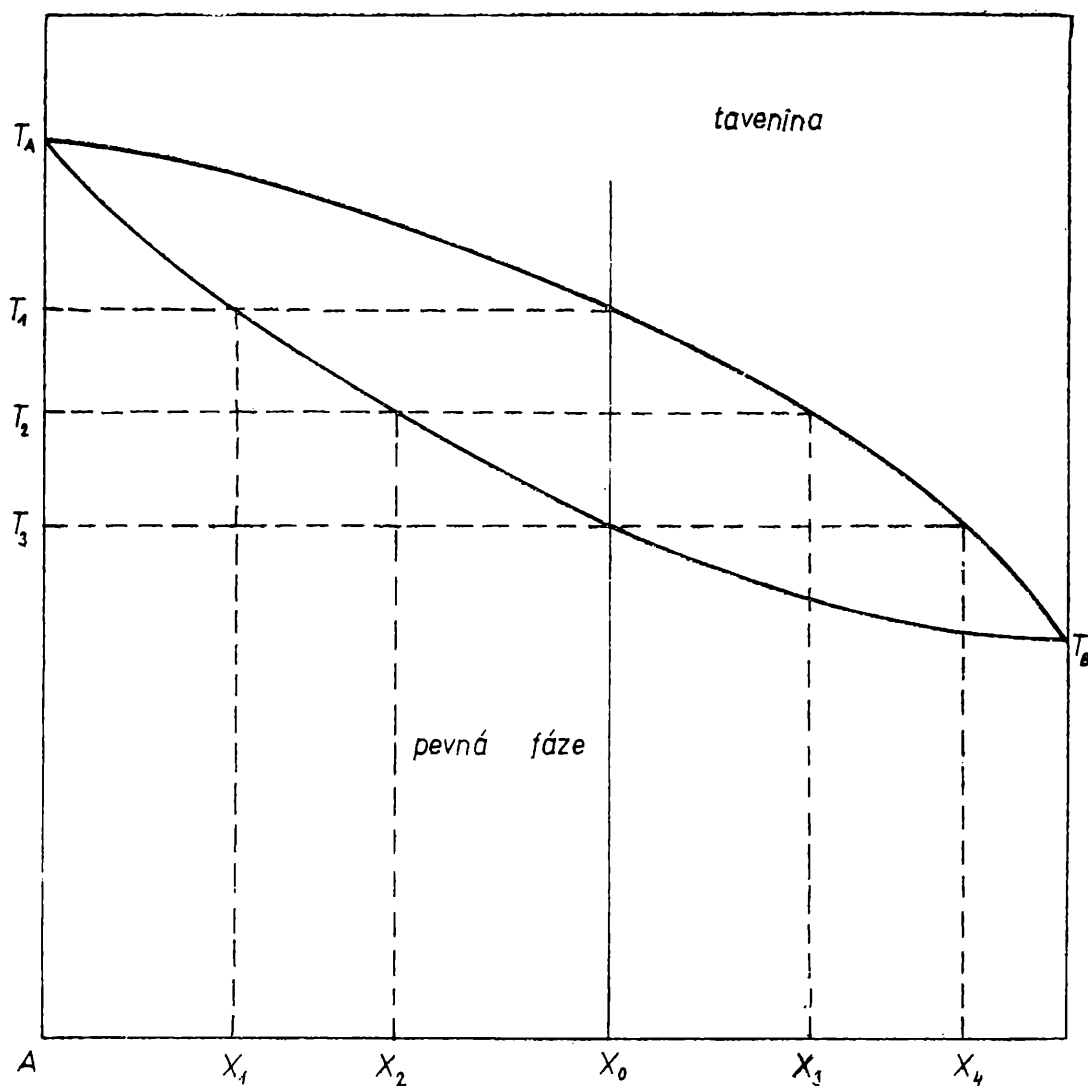
Např. při teplotě T_2 jsou na obr. 4 v rovnováze kapalná a tuhá fáze o složení x_2 a x_1 . Jsou zde tudíž 2 složky a dvě fáze a soustava má jeden



Obr. 1. Mřížka tuhého roztoku. Plnými kroužky jsou znázorněny atomy legujícího kovu.

stupeň volnosti. Při dané teplotě můžeme tedy měnit složení (zde v rozmezí x_1 až x_2) a v rovnováze budou stále tytéž fáze. Naopak při daném složení x_0 můžeme měnit teplotu v rozmezí T_1 až T_E a budou v rovnováze opět dvě fáze. Avšak teplotě T_2 a složení x_0 odpovídá zcela určité složení fází (x_1 a x_2) a soustava nemá žádný stupeň volnosti.

Jestliže zvyšujeme koncentraci legujícího kovu v kovu základním, přičemž jde o dva kovy s podobnými atomy, vzniká tak zvaný *tuhý*

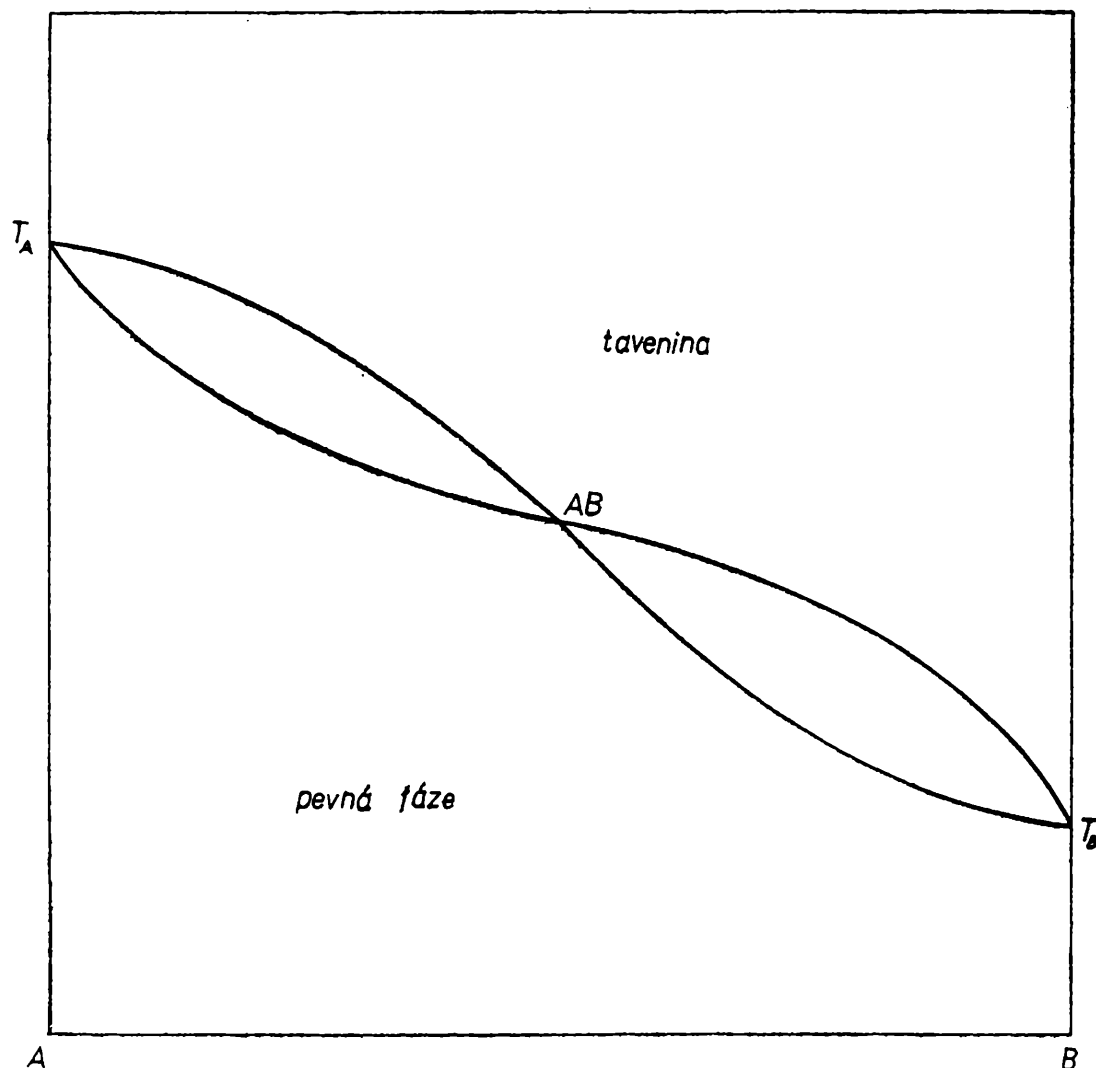


Obr. Kovy *A* a *B* jsou neomezeně mísitelné v tuhé fázi.

roztok²⁾), který existuje v celém rozsahu koncentrací. Rovnovážný diagram takovéto soustavy je na obr. 2. Daleko častější je však případ, kdy velikost i charakter atomů jsou natolik odlišné, že tento tuhý roztok existuje pouze v omezeném rozsahu koncentrací, přičemž si zachovává krystalovou strukturu základního kovu. Při dalším legování vznikají takzvané intermediární fáze; ty mohou mít krystalovou strukturu úplně odlišnou od obou základních kovů. Jestliže obor koncentrací, ve kterém existují, je široký, pak mluvíme o sekundárních tuhých roztocích, jestliže je tento obor úzký (nebo je to pouze jedno určité složení), mluvíme o intermetalických sloučeninách.

²⁾ Tuhým roztokem rozumíme takovou slitinu dvou kovů, kdy atomy jednoho kovu jsou náhodně rozptýleny v krystalografické mřížce kovu základního. Schématicky je to uvedeno na obr. 1, kde plnými kroužky jsou naznačeny atomy legujícího kovu.

Maximální rozpustnost v oblasti primárního tuhého roztoku (např. oblast α na obr. 2) závisí na rozdílu poloměrů atomů a rozdílu chemické afinity obou kovů, jakož i na jejich poměru mocností. Je-li rozdíl poloměrů atomů větší než 15 %, je obor existence tuhého roztoku velmi malý. Rovněž čím větší je rozdíl v elektropozitivitě a elektro-negativitě, tím snadněji tvoří sloučeniny a tím užší je obor existence tuhého roztoku.



Obr. 3. Kovy A a B jsou neomezeně mísitelné v tuhé fázi a tvoří tuhý sloučeninu.

Mísitelnost kovů v tuhé i kapalně fázi je tedy různá, a to ve velmi širokém rozsahu — od úplné mísitelnosti až k úplné nemísitelnosti. V tab. 1 jsou schematicky roztrženy typy rovnovážných diagramů, jak se vyskytují v binárních kovových soustavách.

Nejjednodušším typem rovnovážného diagramu je případ dvou kovů, které jsou v tuhé fázi neomezeně mísitelné (viz obr. 2). Vidíme, že v diagramu jsou dvě křivky udávající složení fází, které jsou spolu v rovnováze; horní — likvidus — udává složení taveniny, spodní — solidus —

Tabulka 1

Typ rovnovážného diagramu	Příklad slitin	Obrázek č.
Složky jsou nemísitelné v tuhé fázi Složky jsou úplně mísitelné v kapalně fázi	Si-Al Sb-Pb	7
Složky jsou omezeně mísitelné v kapalně fázi	Zn-Bi	8
Složky tvoří tuhý sloučeninu stálou při svém bodu tání	Au-Sn Al-Ag	9
Složky tvoří tuhý sloučeninu, nestálou při svém bodu tání	Au-Sb Na-Bi	10
Složky jsou omezeně mísitelné v tuhé fázi Složky tvoří eutektikum	Au-Ni	4
Složky tvoří peutektikum	Cd-Hg	6
Složky jsou neomezeně mísitelné v tuhé fázi Složky netvoří tuhý sloučeninu	Co-Ni Ag-Au Mg-Cd	2 3

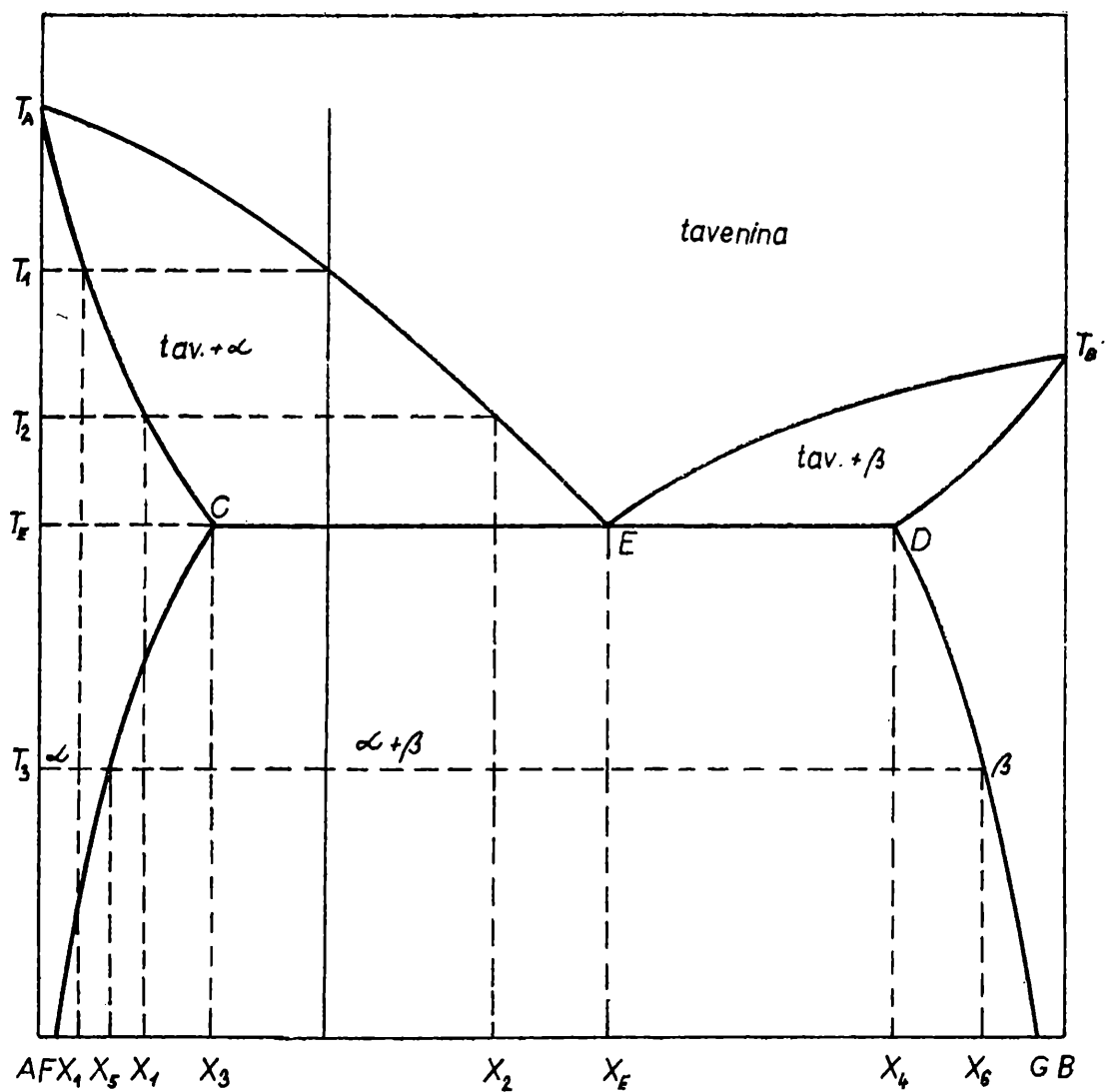
složení pevné fáze. Jestliže snižujeme teplotu u slitiny o složení x_0 , pak při dosažení teploty T_1 dojde k vyloučení prvních krystalů o složení x_1 . Při poklesu teploty na hodnotu T_2 jsou v rovnováze kapalná fáze, jejíž složení udává průsečík teploty s čarou likvidu (x_3) a pevná fáze, jejíž složení udává průsečík s čarou solidu (x_2). Rovnovážný fázový diagram nám dovoluje pomocí *pákového pravidla* vypočítat i kvantitativní poměr těchto fází. Poměr fáze kapalně k fázi tuhé udává poměr úseček $\frac{x_0 - x_2}{x_3 - x_0}$. Konečně při teplotě T_3 jsou v rovnováze kapalina

o složení x_4 a tuhá fáze o složení x_0 . Vidíme, že jako poslední vzniká tuhý roztok, jehož složení je shodné se složením původní taveniny.

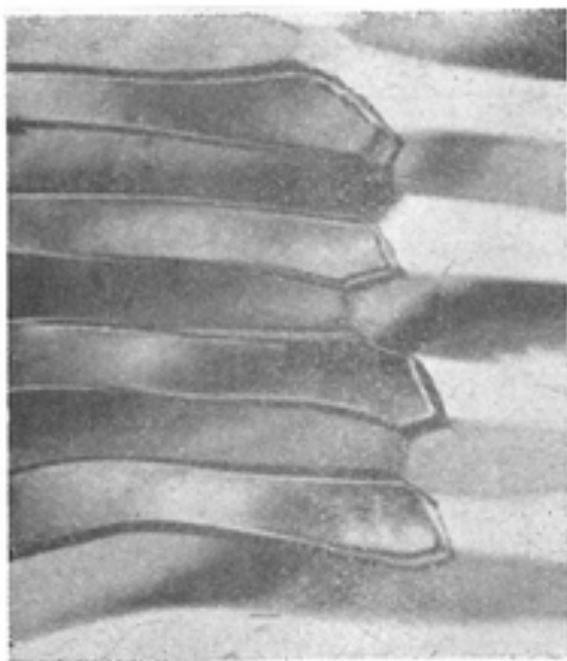
Důležité je, že jsou zde vždy v rovnováze dvě fáze a dvě složky, čili soustava má jeden stupeň volnosti a teplota může plynule klesat.

Zvláštním případem tohoto typu jsou soustavy, obsahující sloučeninu AB , která je se složkami A a B neomezeně mísitelná v tuhé fázi (obr. 3). Jsou to vlastně spojené dva předcházející diagramy.

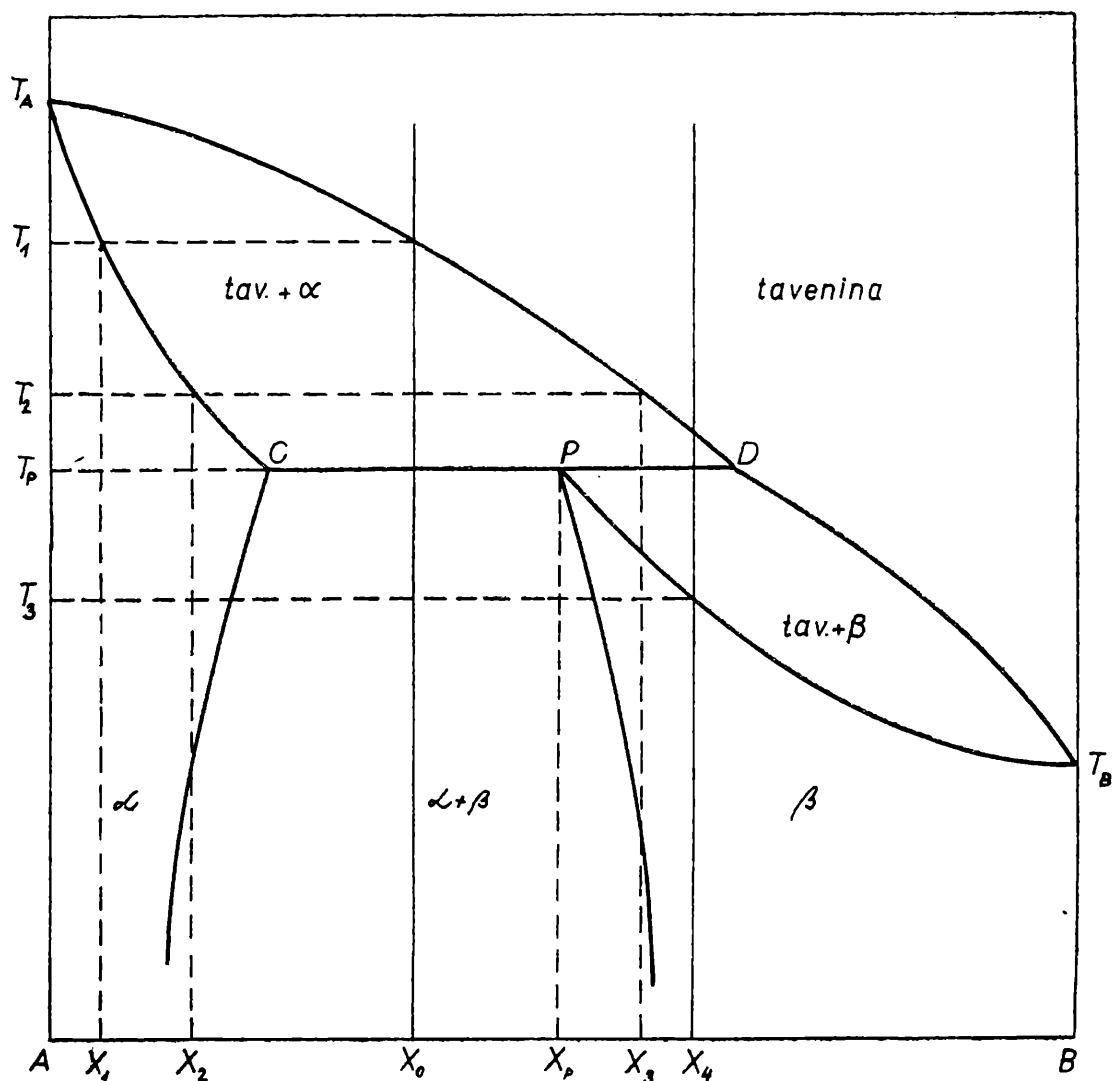
Systémy kovů neomezeně mísitelných v tuhé fázi jsou však v praxi velmi vzácné; daleko častější je případ dvou kovů v tuhé fázi omezeně mísitelných. V takovýchto diagramech navazuje na čisté kovy oblast primárních tuhých roztoků α a β , které mají krystalografickou mřížku obdobnou jako příslušný základní kov a jejichž rozpustnost se mění s teplotou (viz obr. 4). Vyjdeme-li od slitiny o složení x_0 , pak opět



Obr. 4. Kovy A a B tvoří eutektikum při omezené mísitelnosti v tuhé fázi.



Obr. 5. Fotografie eutektika Al-CuAl₂, pořizena transmisní elektronovou mikroskopií. Zvětšení 100 000 $\times$.



Obr. 6. Kovy A a B tvoří peritektikum při omezené mísitelnosti v tuhé fázi.

prvé krystaly se počnou vylučovat při dosazení likvidu, to jest teplotě T_1 . Při teplotě T_2 existuje rovnováha mezi taveninou o složení x_2 a tuhou fází o složení x_1 , jejichž kvantitativní poměr opět určuje pákové pravidlo. Krystaly tuhého roztoku, vylučující se podle solidů $T_A C$ a $T_B D$, se nazývají *primární*. Teplota tuhnutí dále klesá až k T_E , což je takzvaná *eutektická teplota*, udávající nejnižší teplotu, při níž slitina může být v kapalném stavu. Příslušné složení je eutektické a struktura, která přitom vzniká, je *eutektikum*.

Při eutektické teplotě jsou v rovnováze krystaly α o složení x_3 a krystaly β o složení x_4 s taveninou o složení x_E . Jsou zde tudíž tři fáze a soustava nemá žádný stupeň volnosti; teplota musí proto zůstat konstantní tak dlouho, než vymizí kapalná fáze. Tím se získá opět jeden stupeň volnosti a pokles teploty může pokračovat. Toto eutektikum má obvykle lamelární (páskovitý) charakter; vyloučením lamely o složení x_3

se okolní tavenina obohatí kovem B , a proto se vyloučí v sousedství lamela o složení x_4 . Vzniká zde tedy důležitá strukturní fáze, tvořená střídavě lamelami tuhých roztoků α a β s maximální rozpustností. Obdobné poměry jsou v oblasti diagramu $x_B B$. Na obr. 5 je uveden příklad eutektika Al-CuAl₂, jak se jeví při zvětšení 100 000 $\times$ v elektronovém mikroskopu³⁾.

Pod eutektickou teplotou se opět mění rozpustnost tuhého roztoku α i β . Např. při teplotě T_3 budou v rovnováze krystaly o složení x_5 a x_6 . Krystaly β , které vznikají z krystalů α podél čáry CF , se nazývají *sekundární*.

V rozmezí koncentrací do x_3 a nad x_4 eutektikum nevzniká, pouze při protnutí čar CF a DG se rozpadají příslušné primárně vyloučené tuhé roztoky.

Jestliže body tuhnutí dvou kovů jsou příliš od sebe vzdálené, dochází při tuhnutí k takzvané *peritektické reakci*, která je stejně jako reakce eutektická charakterizována peritektickou teplotou a peritektickým složením (viz obr. 6).

Vyjdeme-li z taveniny x_0 , počne se opět při dosazení T_1 vylučovat tuhá fáze x_1 . Při T_2 jsou v rovnováze tavenina o složení x_3 a tuhá fáze o složení x_2 . Při dosazení peritektické teploty bude poměr kapalně a tuhé fáze, které jsou v rovnováze, dán poměrem úseček $\frac{x_0 C}{D x_0}$. Reakcí

krystalů α s taveninou vzniknou krystaly β o složení x_P . Název peritektikum pochází z řeckého peri — okolo (krystaly α jsou obklopeny taveninou a reagují spolu). Při dalším snižování teplota se pak mění složení fází α i β podle čar udávajících změnu rozpustnosti s teplotou.

Opět vidíme, že při T_P jsou v rovnováze 3 fáze: kapalná o složení, které odpovídá bodu D a dvě tuhé, z nichž jedna je fáze β o složení x_P a druhá fáze α o složení odpovídajícímu bodu C . Podle fázového zákona nemá soustava žádný stupeň volnosti, teplota tudíž neklesá, dokud nevymizí přebytečně tuhá, nebo kapalná fáze podle toho, jestli složení původní taveniny bylo pod, nebo nad x_P .

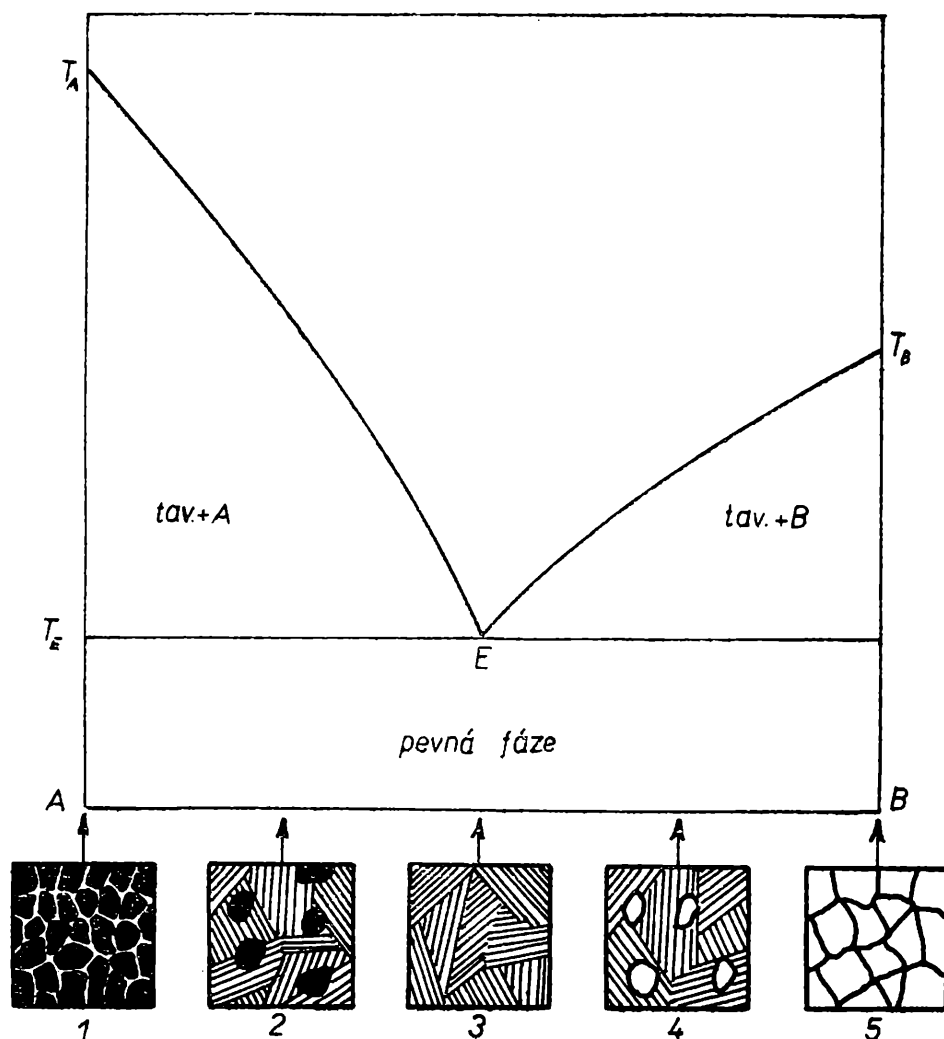
Jiný případ nastane při tuhnutí taveniny o složení x_4 . Při dosazení T_P vzniknou opět krystaly β o složení x_P , ale poněvadž soustava po proběhnutí peritektické reakce obsahuje ještě nadbytek kapalně fáze, bude se její složení při dalším poklesu teploty měnit podle čar solidu PT_B a likvidu DT_B . Při dosazení teploty T_3 se celá kapalná fáze přemění na krystaly β složení x_4 , které se dalším ochlazením nemění.

Konečně třetí skupinu rovnovážných soustav tvoří kovy, nemísitelné v tuhé fázi. Prvým typem jsou zde kovy, úplně mísitelné v kapalně fázi. Příkladem takového diagramu je obr. 7. Z taveniny se vylučují nejdříve primární krystaly kovů A , nebo B . Zbývá tavenina ztuhne

³⁾ Livingston J. D. a spol.: Acta Metallurgica 18 (1970), 399.

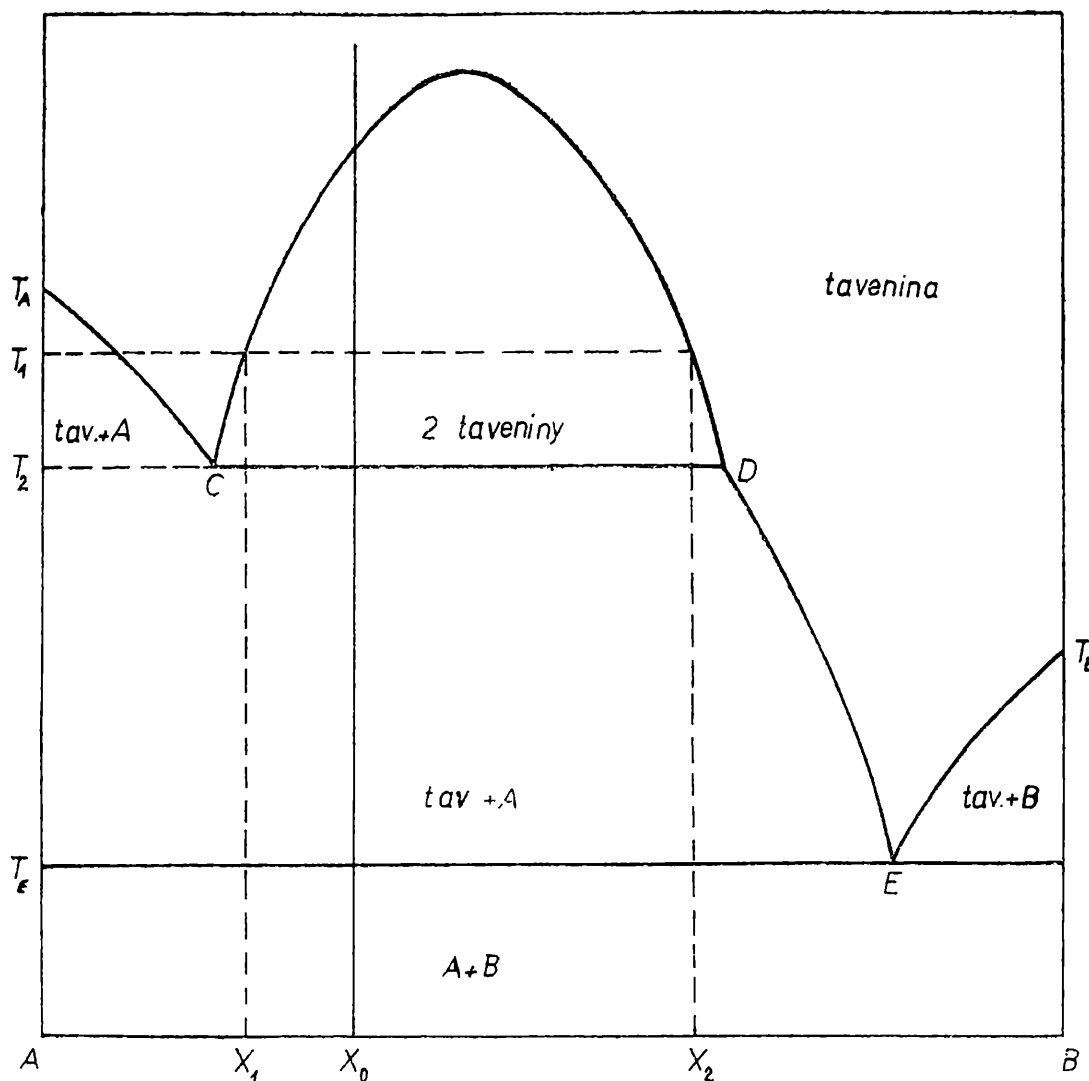
při eutektické teplotě za vzniku eutektika, tvořeného krystaly A a B . Při dalším snižování teploty již nedochází ke strukturním změnám.

Pod obr. 7 je schematicky uvedeno, jak se jeví struktura slitin různého složení na metalografických výbrusech (to jest vyleštěném kovu, kde jednotlivé fáze jsou zviditelněny chemickým leptáním). Kov A je značen černě, kov B bíle. U čistých kovů můžeme naleptat pouze hranice zrn. U slitiny 2 se primárně vyloučí krystaly A , u slitiny 4 krystaly B . Slitina 3 má eutektické složení a nacházíme v ní pouze lamely eutektika.



Obr. 7. Kovy A a B jsou úplně mísitelné v kapalně fázi a nemísitelné v tuhé fázi.

Na obr. 8 je uveden příklad diagramu, kde obě složky mají omezenou rozpustnost v kapalně fázi. Např. slitina o složení x_0 se při teplotě T_1 rozpadne na dvě kapalně fáze o složení x_1 a x_2 . Při dosažení teploty T_2 budou v soustavě tři složky (taveniny o složení odpovídajícím bodům C a D a tuhé fáze A), počet stupňů volnosti je nulový, a proto teplota zůstává konstantní, dokud nevymizí kapalná fáze C . Dalším snižová-

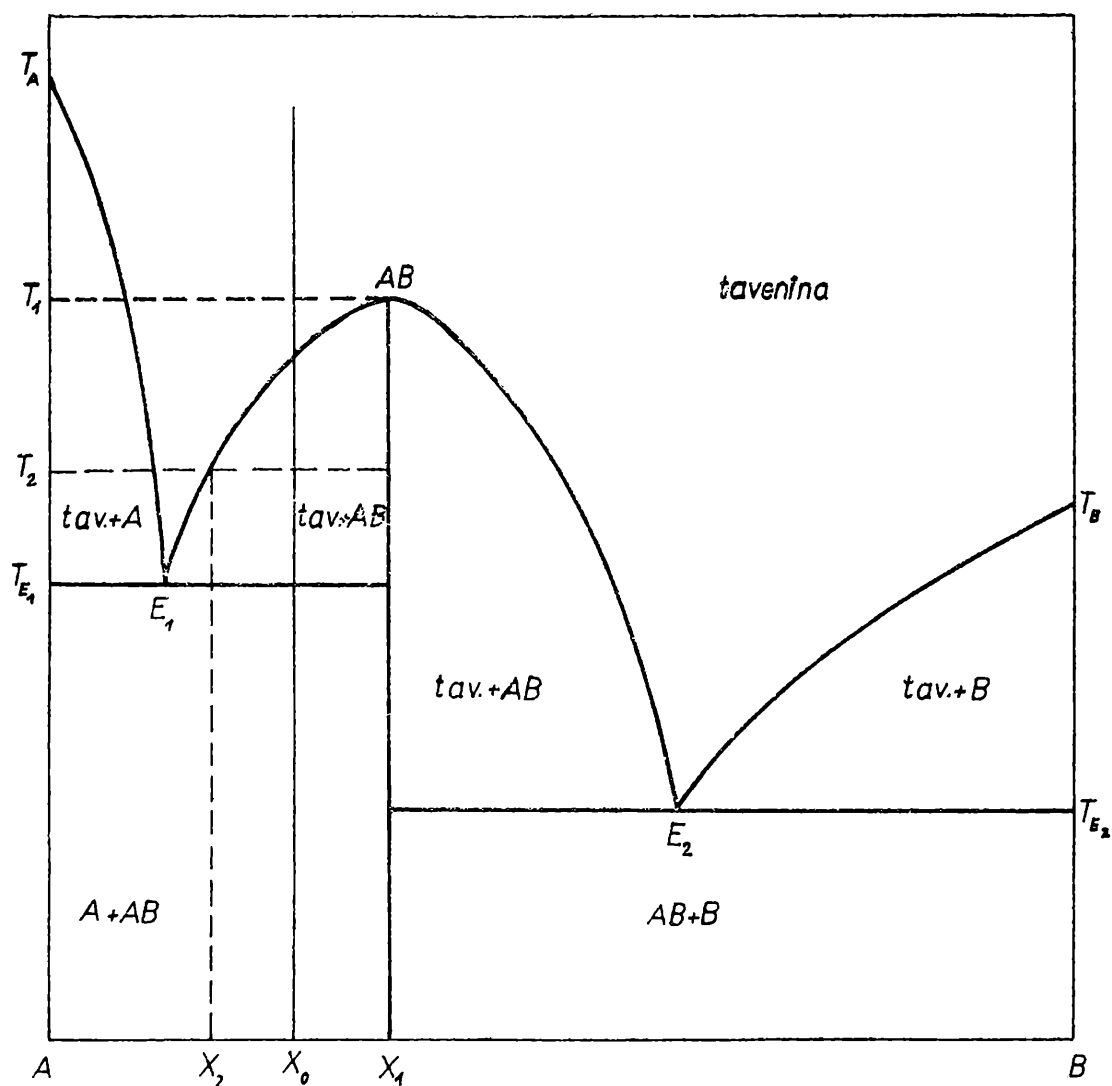


Obr. 8. Kovy A a B jsou omezeně mísitelné v kapalně fázi a nemísitelné v tuhé fázi.

ním teploty se mění složení kapalně fáze podél DE , až při eutektické teplotě jsou v rovnováze dvě fáze tuhé (A a B) a kapalná E . Po proběhnutí eutektické reakce již nedochází k dalším strukturním změnám.

Jestliže složky tvoří sloučeninu, stálou při svém bodu tání, dostáváme diagram uvedený na obr. 9. V soustavě se vyskytuje sloučenina kovů AB o složení x_1 , která je stálá až do svého bodu tání T_1 (*kongruentní bod tání*). Např. ze slitiny o složení x_0 se začne primárně vylučovat sloučenina AB , která je při teplotě T_2 v rovnováze s taveninou x_2 . Při dosažení teploty T_{E1} nemá soustava žádný stupeň volnosti a proběhne eutektická reakce. Obdobné poměry jsou při obsazích kovu B vyšších než x_1 ; eutektická reakce zde proběhne při teplotě T_{E2} a rovnovážné složení taveniny udávají likvidy ABE_2 a E_2T_B .

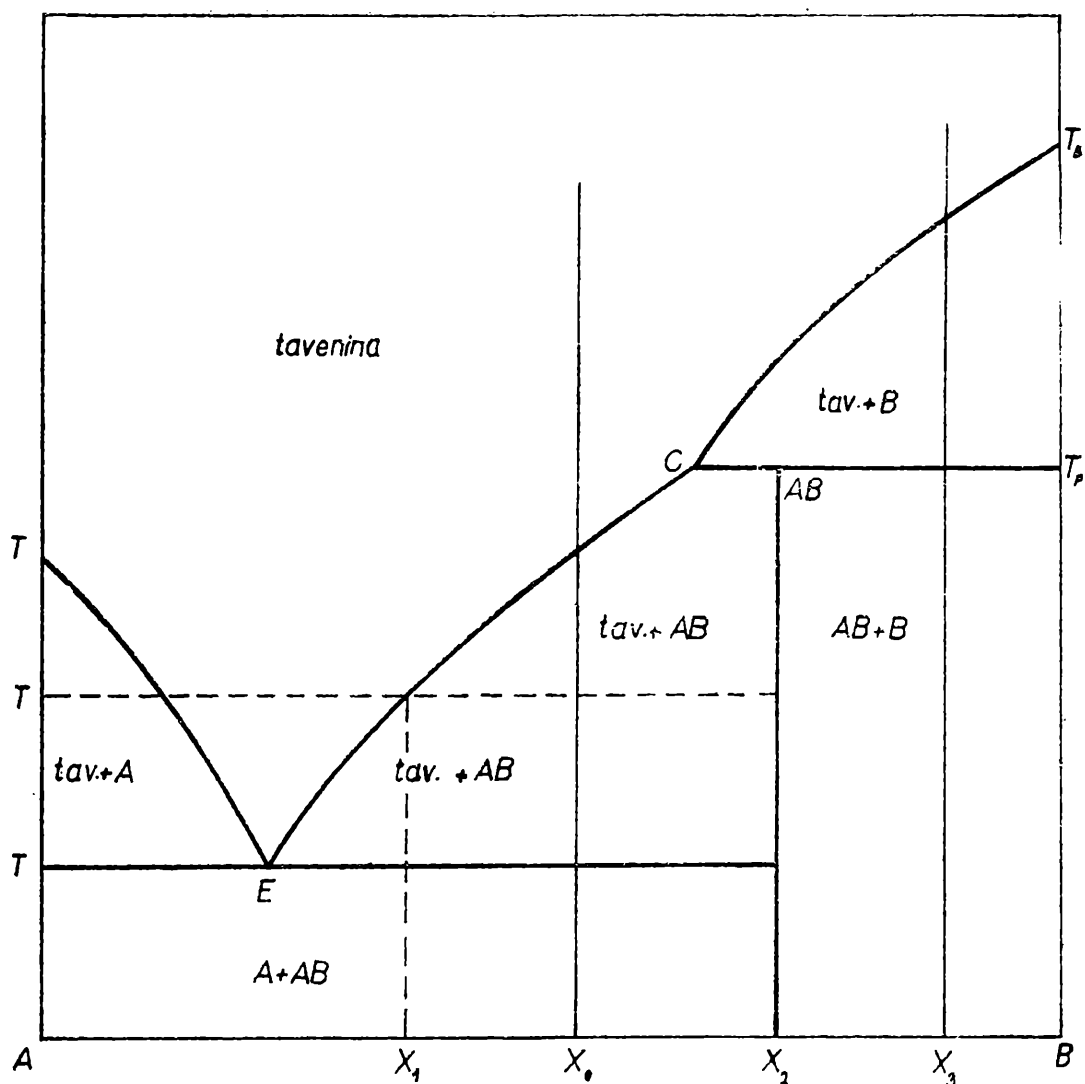
Konečně na obr. 10 je uveden příklad dvou kovů, které tvoří sloučeninu, nestálou při svém bodu tání (*inkongruentní bod tání*). Při ochlazení taveniny o složení x_0 začne se při dosažení likvidu EC vylučovat



Obr. 9. Kovy A a B tvoří tuhou sloučeninu, stálou při svém bodu tání a jsou úplně nemísitelné v tuhé fázi.

tuhá sloučenina AB o složení x_2 . Při teplotě T_1 jsou v rovnováze tavenina x_1 a sloučenina AB . Při dosažení eutektické teploty jsou v rovnováze dvě fáze tuhé (A a B) a jedna kapalná o složení odpovídajícím bodu E . Proběhne eutektická reakce a dále se již složení fází nemění. Při ochlazování taveniny o složení x_3 se vylučuje tuhá fáze B a složení kapalné fáze se mění podle likvidu $T_B C$. Při dosažení teploty T_P jsou v rovnováze dvě fáze tuhé (B a AB) a kapalná o složení odpovídajícím bodu C . Proběhne peritektická reakce, při které vymizí kapalná fáze. V rozmezí koncentračních bodů C a AB dojde rovněž k peritektické reakci; složení zbylé kapalné fáze se ale mění podle likvidu CE a při teplotě T_E dojde ke vzniku eutektika, tvořeného složkami A a AB .

Ve fázových diagramech se vyskytuje ještě jeden důležitý druh přeměny — *eutektidní*. Je to vlastně eutektická reakce, která proběhla v té části diagramu, kde jsou již všechny složky v tuhém stavu. Důležitá je např. v soustavě železo-uhlík kde podle ní vzniká významná struk-

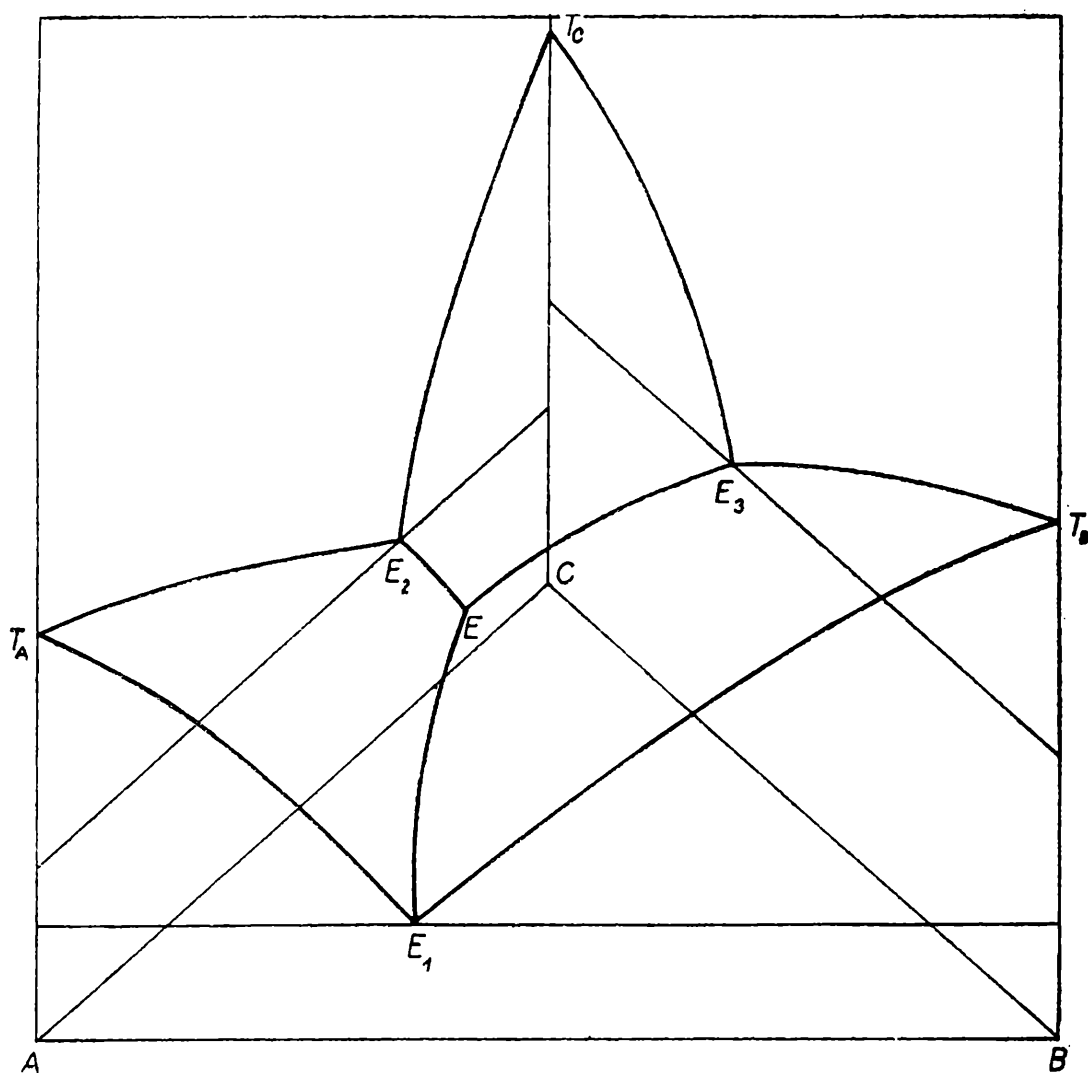


Obr. 10. Kovy A a B tvoří tuhou sloučeninu, nestálou při svém bodu tání a jsou úplně nemísitelné v tuhé fázi.

turní fáze oceli — lamelární perlit, tvořený destičkami prakticky čistého železa a karbidu železa Fe_3C .

Rovnovážné diagramy, jak jsme o nich doposud mluvili, tvoří základní typy, vyskytující se v kovových soustavách. U řady kovů je však diagram značně složitější, poněvadž obsahuje několik eutektik, peritektik nebo tuhých roztoků. To je třeba případ technicky velmi významných slitin měď-zinek (mosazi), nebo železo-uhlík (oceli, litiny).

V praxi se však velmi často vyskytují systémy, tvořené více komponentami (někdy to může být i větší obsah určité nečistoty, např. síra v litině). Mluvíme pak o ternárních, nebo kvartérních slitinách a k jejich zobrazení musíme použít prostorového diagramu. Nebudeme se zabývat popisem těchto diagramů, na obr. 11 je uveden pouze příklad jednoduchého ternárního diagramu, jehož složky jsou nemísitelné v tuhé



Obr. 11. Ternární diagram kovů A , B a C , které jsou úplně mísitelné v kapalně fázi a nemísitelné v tuhé fázi.

fázi a úplně mísitelné v kapalně fázi. Soustava tedy obsahuje tři primární eutektika E_1 , E_2 a E_3 a jedno ternární E . Čáry solidu a likvidu jsou zde nahrazeny plochami — např. čistá složka A se vylučuje podle plochy likvidu $T_A E_1 E E_2$. Eutektikum E představuje složení taveniny, která tuhne při nejnížší teplotě. V praxi se pro jednoduchost používá i řezů těmito diagramy, buď pro určitou teplotu, nebo složení.

Kompenzačná metóda experimentálneho určovania Youngovho modulu pružnosti v ťahu

JÁN JANKURA, JOZEF KROČAN, Katedra fyziky EF VŠT Košice

V článku je popísané laboratórne zariadenie pre kompenzačnú metódu na určovanie Youngovho modulu pružnosti v ťahu priamou metódou. V úvode je podaný rozbor presnosti určenia modulu E a z toho plynúce nároky na presnosť použitých meracích zariadení. V ďalšej časti je opísané nami navrhnuté prevedenie meracieho zariadenia a výsledky získané na tomto zariadení. V závere je poukázané na odlišnosť tohto zariadenia od doteraz bežných typov a uvádzajú sa hlavné prednosti tohto zariadenia. Malou úpravou možno zariadenie použiť na demonštráciu v posluchárni.

Teoretická časť

Youngov modul pružnosti v ťahu E (ďalej už len modul E) pri použití priamej metódy vyčíslujeme zo vzťahu

$$E = \frac{l_0 \cdot F}{\Delta l \cdot S}, \quad (1)$$

v ktorom l_0 je počiatočná dĺžka, S plošný obsah kolmého rezu vzorky a Δl jej predĺženie spôsobené deformujúcou silou F . Ak použijeme skúmaný materiál v tvare drôtu kruhového prierezu o priemere d je modul E určený vzťahom

$$E = \frac{4 \cdot l_0 \cdot F}{\pi \cdot \Delta l \cdot d^2}. \quad (2)$$

Odhadnime teraz chybu určenia modulu E za predpokladu, že deformujúcu silu poznáme, tj. chyba určenia F je $\delta F = 0$. Relatívna chyba modulu E , vyjadrená v percentách je potom daná vzťahom

$$(\delta E)\% = (\delta l_0)\% + (\delta \Delta l)\% + 2 \cdot (\delta d)\% \quad (3)$$

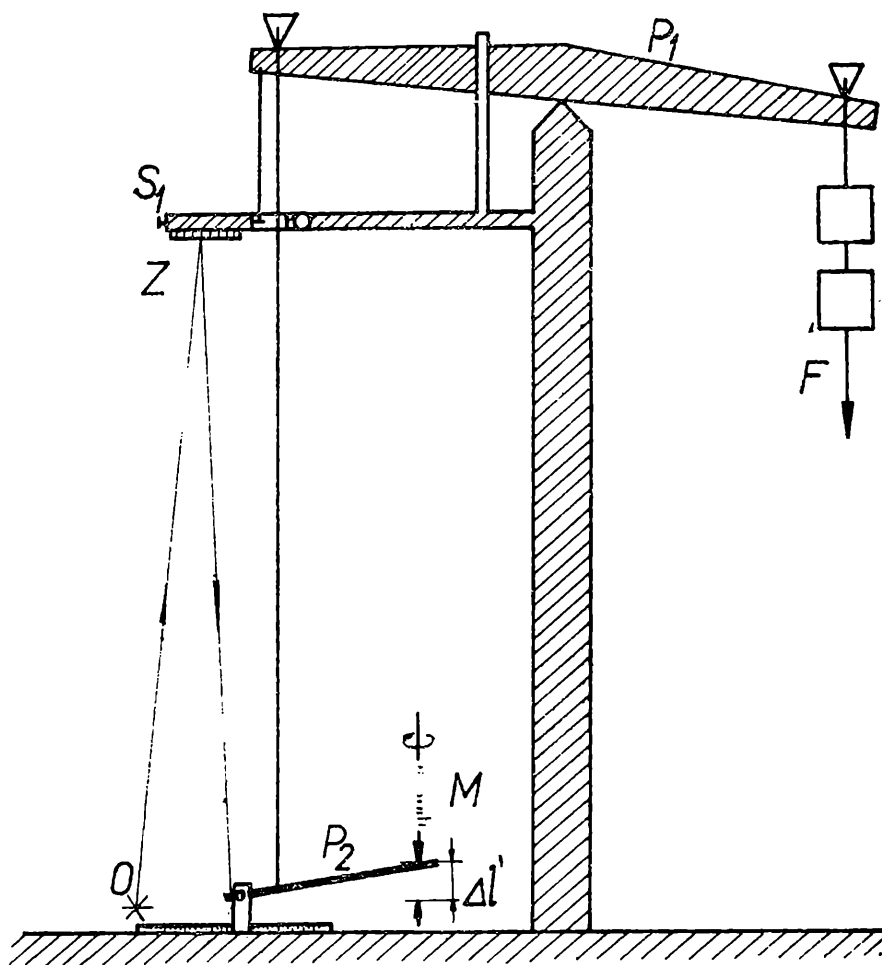
kde $(\delta l_0)\%$, $(\delta \Delta l)\%$, $(\delta d)\%$ sú percentuálne chyby meraných veličín l_0 , Δl , d . Zo vzťahu (3) vyplýva, že chyba určenia priemeru drôtu sa podieľa na chybe výsledku dvojnásobnou mierou.

Ak meriame priemer drôtu veľkosti napr. 0,35 mm komparátorom s delením 0,001 mm/diel možno odhadnúť maximálny percentuálny príspevok chyby priemeru d k percentuálnej chybe modulu E hodnotou $2(\delta d)\% = 2 \cdot (0,001/0,350) \cdot 100\% = 0,57\%$. Ak má drôt dĺžku l_0 napr. 700 mm, stačí ju merať dĺžkovým meradlom s delením na milimetre, $(\delta l_0)\%$ je potom 0,14 %. Predĺženie Δl , ktoré je pre oceľový drôt uvedených parametrov pri zaťažení silou 0,5 kp približne 0,2 mm, musíme merať s presnosťou asi $\pm 5 \cdot 10^{-4}$ mm. V takom prípade je $(\delta \Delta l)\%$ asi 0,25 %. Za týchto predpokladov nie je $(\delta E)\%$ väčšie ako 1 %.

Z uvedeného vyplýva, že ak priemer drôtu meriame napr. mikrometrickou skrutkou s delením 0,01 mm/diel. je $2 \cdot (\delta d)\%$ asi 6 % a v tom prípade nemá význam zvyšovať presnosť určenia ostatných meraných veličín.

Popis experimentálneho zariadenia a namerané výsledky

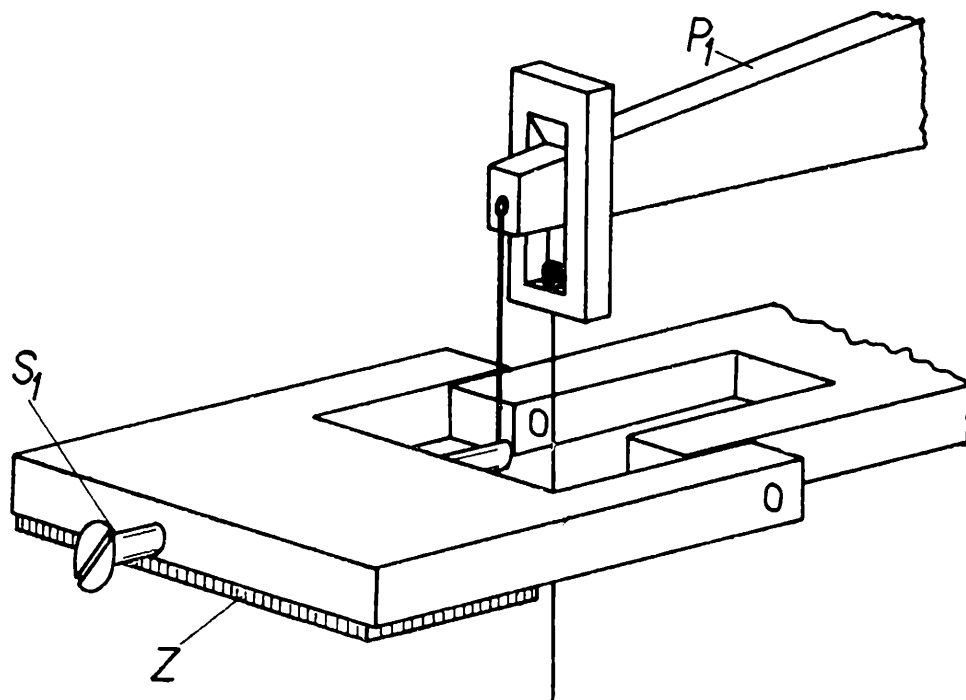
Celkové riešenie nami navrhnutého meracieho zariadenia je schématicky znázornené na obr. 1. Upevnenie drôtu na jednom konci a pákový



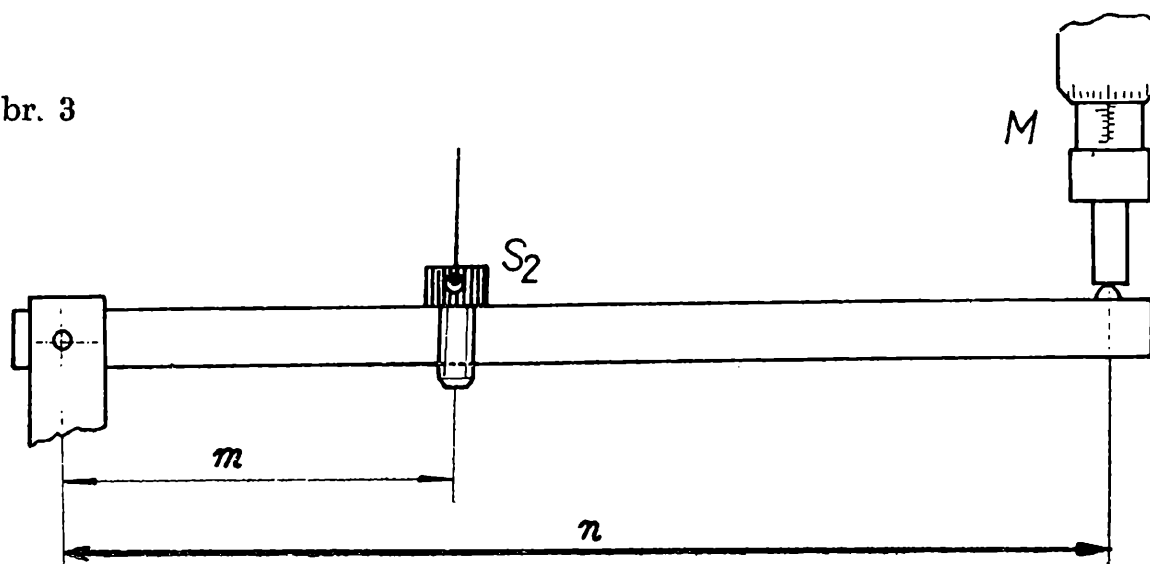
Obr. 1

mechanizmus zrkadielka v detaile je na obr. 2. Spojenie rovnoramennej páky P_1 a zrkadielka Z je pre odstránenie nežiadúceho trenia realizované niťou. Bod upevnenia nite na zrkadielku je posúvateľný skrutkou S_1 v smere horizontálnom, čím možno meniť citlivosť zariadenia. Čím bližšie je tento bod k osi otáčania zrkadielka, tým väčšia je citlivosť zariadenia. Ak necháme prostredníctvom páky P_1 pôsobiť deformujúcu

Obr. 2



Obr. 3

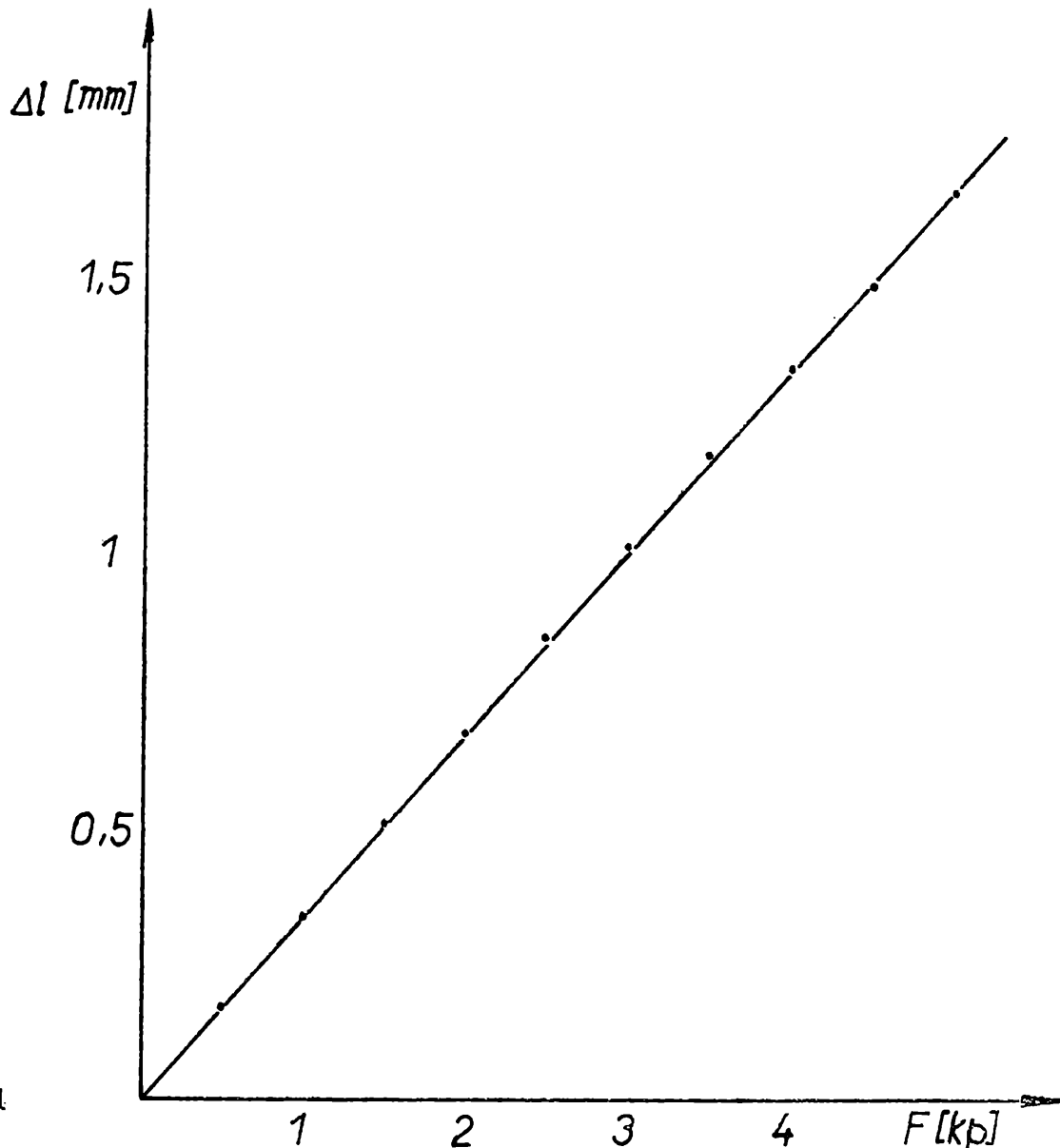


silu (realizovanú závažiami 0,5 kp), páka P_1 sa v dôsledku predĺženia drôtu o Δl pootočí, tým sa pootočí aj zrkadielko Z a svetelná stopa vytvorená osvetľovačom O zmení na stupnici polohu. Tento účinok deformujúcej sily kompenzujeme zmenou polohy páky P_2 otáčaním mikrometrickej skrutky M . Svetelná stopa se tak vráti do pôvodnej

polohy. Na mikrometrickej skrutke odčítame posunutie $\Delta l'$. Ako je z obrázku 3 zrejmé, je skutočné predĺženie drôtu

$$\Delta l = \frac{m}{n} \Delta l' \quad (4)$$

Svetelnú stopu sme získali pomocou osvetľovača ku zrkadlovému galvanometru. Dotyk mikrometrickej skrutky M s pákou P_2 je realizovaný prostredníctvom ocelevej guľôčky. Počiatočná poloha pák P_1 a P_2 je regulovateľná skrutkou S_2 (obr. 3). Zariadenie je istené pre prípad pretrhnutia drôtu (obr. 1) a opatrené aretáciou na páke P_2 .



Obr. 4

Meranie modulu E sme previedli na gitarovej strune E_1 dĺžky $l_0 = (725 \pm 1)$ mm, určenej dĺžkovým meradlom s milimetrovým delením. Priemer $d = (0,345 \pm 0,002)$ mm bol meraný komparátorom a posunutie $\Delta l'$ sme určovali pomocou mikrometrickej skrutky s delením 0,01 mm/diel. Pomer $n/m = 5$. Odhad pre maximálnu percentuálnu

chybu E je v tomto prípade asi 2 %. Namerané hodnoty predĺženia Δl v závislosti od zaťaženia F sú vynesené v grafe obr. 4. Z grafu je vidieť, že táto závislosť je lineárna, čo svedčí o tom, že deformácia prebiehala v oblasti pružnej deformácie. Namerané hodnoty vykazujú pomerne malý rozptyl. Výsledná hodnota modulu E bola určená zo vzťahu (2) dosadením stredných hodnôt veličín l_0 , Δl a d pre $F = 0,5$ kp. Výsledok je ohodnotený strednou chybou. Pre modul E sme meraním získali túto hodnotu

$$E = (22,9 \pm 0,5) \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2}$$

Záver

Výhody a predností tohto zariadenia možno zhrnúť záverom takto:

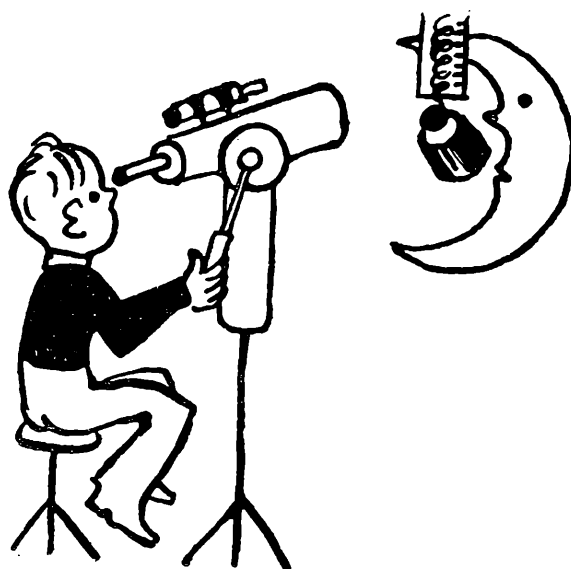
- Zariadenie je nenáročné na priestor.
- Použitie kompenzačnej metódy na určenie predĺženia odstraňuje chyby spôsobené nelineárnosťou závislosti výchylky od predĺženia a iné systematické chyby.
- Možnosť zvyšovania citlivosti zariadenia skrutkou S_1 .
- Presnosť určenia predĺženia Δl možno zvýšiť zmenou pomeru m/n .
- Použitím mikrokátora miesto mikrometrickej skrutky sa presnosť určenia Δl zdesaťnásobí, pričom kompenzáciu prevádzame obyčajnou skrutkou.
- Zariadenie po nenáročnej úprave (miesto stupnice použijeme zrkadlo a svetelnú stopu premietame na stenu) možno použiť na demonštráciu pri prednáške.

Doporučujeme :

Novotný, Pilát a kol.: ZBIERKA ÚLOH Z FYZIKY ZDŠ

Publikácia, ktorú vydalo SPN v prvom vydaní má tri časti: 1. Elektrina a stavba atomu, 2. Optika, 3. Mechanika, molekulová fyzika, termika. Zbierka je vítaným pomocníkom nielen pre žiakov 9. tried, ktorí sú pred pohovormi na odborné školy alebo gymnáziá, ale aj pre ostatných.

Prvé vydanie, strán 316, Kčs 27,50.



Planetární mlhoviny

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Podobně jako v jiných oborech studia naší Galaxie došlo v posledních letech k rychlému rozvoji ve zkoumání planetárních mlhovin. Zatímco v katalogu planetárních mlhovin, uveřejněném v roce 1948 v knize *B. A. Voroncova-Veljaminova* „Gazovyje tumannosti i novyje zvezdy“ jsou údaje o 288 objektech, obsahuje nejnovější katalog planetárních mlhovin, který sestavili *doc. dr. L. Perek* a *dr. L. Kohoutek*, celkem 1036 objektů, které lze zařadit do této skupiny mlhovin. Katalog¹⁾ vydalo v r. 1967 Nakladatelství Čs. akademie věd u příležitosti 13. kongresu Mezinárodní astronomické unie v Praze.

Koncem 18. století nazval *W. Herschel* tyto objekty „planetární mlhoviny“, protože v dalekohledu poněkud připomínají kotoučky planet. Se sluneční soustavou nemají nic společného. Výzkumy ukázaly, že jsou to rozsáhlé plynné obaly, obklopující některé žhavé hvězdy třídy W (tj. hvězdy Wolfovy-Rayetovy) a třídy O, jejichž povrchová teplota je vyšší než 30 000 °K. Planetární mlhoviny se kolem těchto hvězd zřejmě vytvářejí v určitém stadiu jejich vývoje a rozšiřují se rychlostí průměrně 10 km s⁻¹. Průměry planetárních mlhovin jsou několik tisíc až set tisíc astronomických jednotek a hustota plynu je velmi malá — od (100 až do 10 000) atomů v krychlovém centimetru. Následkem rozšiřování planetární mlhoviny se hustota plynu neustále

¹⁾ Název díla je: *Catalogue of Galactic Planetary Nebulae*. Academia, Praha 1967. Stran 276 a 115 str. obrazových tabulí. Cena váz. výtisku Kčs 125,—.

zmenšuje, takže v průměru za 10 000 roků se zmenší na hustotu plynu v mezihvězdném prostředí, čili planetární mlhovina zanikne. Z tohoto hlediska jsou planetární mlhoviny útvary velmi rychle pomíjivé.

Planetární mlhoviny vysílají čárové spektrum, ve kterém jsou nápadné čáry dvakrát ionizovaného kyslíku, které byly v minulosti připisovány domnělému prvku „nebuliu“ a dále čáry Balmerovy série vodíku (série L), čáry jednou ionizovaného dusíku, dvakrát ionizovaného neónu aj. Roku 1926 bylo dokázáno, že příčinou záření planetárních mlhovin je fluorescence, tj. přetváření neviditelného ultrafialového záření centrální hvězdy na záření vodíku a jiných prvků ve viditelné oblasti spektra.

Nejjasnější je planetární mlhovina NGC 7293²⁾ v souhvězdí Vodnáře. Její zdánlivá hvězdná velikost je 6,5^m, takže ji lze pozorovat malým astronomickým dalekohledem. Zdánlivý průměr této mlhoviny, nazývané Helix, je 15 obloukových minut (tj. polovina průměru Měsíce). V učebnici fyziky pro 3. ročník SVVŠ (SPN, Praha 1965) je na str. 219 otištěna fotografie planetární mlhoviny NGC 6853, nazývané Dumbbell (tj. Činka), která je v souhvězdí Lišky. Její průměr je 8' a hvězdná velikost 7,6^m. V souhvězdí Velké medvědice je mlhovina NGC 3587, zvaná Soví mlhovina (12^m) a v souhvězdí Lyry prstencová mlhovina NGC 6720 (9,3^m). Obě mají průměr přes 80". Zajímavým objektem je Krabí mlhovina v souhvězdí Býka (8,4^m), která vznikla na místě výbuchu supernovy v roce 1054. Tato mlhovina je intenzivním zdrojem rádiového záření, označovaným Taurus A. Krabí mlhovina je zajímavá také tím, že se rozšiřuje neobyčejně velkou rychlostí (1300 km s⁻¹).

V roce 1961 objevil americký astronom *K. Henize*, že proměnnou hvězdu V 377 v souhvězdí Střely obklopuje slabá mlhovina. Pozorování od r. 1890 do r. 1967 ukazují, že se jasnost centrální hvězdy za 70 let zvětšila o 5 hvězdných velikostí. Mění se také její spektrální třída (v r. 1955 B4, v r. 1967 již A7). Někteří astronomové z toho usuzují, že jde o právě vznikající planetární mlhovinu.

Naším řešitelům

V příkl. 2 z matematiky (str. 24) opravte si text:

která kružnici k protíná kolmo ve vrcholech A_j , A_k daného ..

²⁾ NGC je zkratka pro New General Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars (Nový generální katalog mlhovin a hvězdokup), který vydal *Dreyer* v roce 1888.

NAŠE SOUTĚŽ

Soutěž Rozhledů z minulého ročníku doplňujeme seznamem všech soutěžících. Za jménem řešitele je uveden ústav, na němž řešitel studuje, pak čísla správně řešených příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie. Čísla uvedená v závorkách jsou čísla příkladů rozřešených s menšími nedostatky. Příklady nesprávně rozřešené neuvádíme.

a) Jednotlivci:

Jiří Binder, G Moravské Budějovice, M 5—8, F 1—6; *Július Cibula*, SVŠ Spišská Nová Ves, M 4—6, (3); *Ladislav Csontos*, SVŠ Nové Mesto n. Váhom, M 6, (5), F 3, (4—6); *Jaroslav Daniel*, SVVŠ Moravské Budějovice, M 1, 2, 5, 6, (3, 4); *Petr Firbas*, SVVŠ Brno, M 1, 5—8, 10, (2, 3, 11, 12), F 1, 2, (3, 5); *Sándor Fuksz*, maď. SVŠ Velké Kapušany, M (4, 6), F 1, 3, 6, (2); *Serena Göghová*, maď. ZDŠ Kolárovy, M 5, (7); *Zdeněk Hejmalíček*, SVVŠ Třebíč, M 5, 6; *Karel Horák*, G Strakonice, M 8, 11, (4—7, 9, 10); *Andrej Hrebovčík*, SVŠ Michalovce, M 5, 6, (4, 8); *Helena Husová*, SVVŠ Praha, M 1, 2, 4—6, F 1—3, 5; *Pavel Jaros*, maď. SVŠ Komárno, M 6; *Martin Kašík*, SVVŠ Praha, M 1, 4—8, 11, (2, 9, 10, 12), F 1, 3—5; *Alexander Kirschner*, SVŠ Bratislava, F 2, 3, 5, 6, (1, 4); *Jan Kohout*, SVVŠ Brno, M 4—6, F 1, 3—6, (2); *Slavomír Kolčava*, SVVŠ Brno, M 6, 7, 11, (2, 5); *Zdeněk Kratochvíl*, SVVŠ Brno, F 1, 3, 6; *Ladislav Krejčí*, SVVŠ Semily, M (2, 5, 7), F 3, 6, (1, 2, 5); *Andrej Mattielligh*, SVŠ Michalovce, M 1, 2, 4—7, 10, 12, (3, 8), F 3, 5, (1, 2), G 1, 2, 4; *Ondřej Matouš*, SVVŠ Praha, M 1, 4—8, 10—12, (2, 3, 9); *Vladimír Pech*, SVVŠ Pelhřimov, M 1, 5, 6, 10, 12, (2—4, 7, 8, 11), F 3, 4, (2, 5); *Luboš Pospíšil*, SVVŠ Brno, M 5, 6, 2, 7, 8, 11, 12, F 1—4, 6, (5); *Pavel Pudlák*, SVVŠ Praha, M 1, 4—7, 12, (2, 3, 8—11), F 2, 4—6, (1, 3), G 1—4; *Jaroslav Ramík*, SVVŠ Ostrava, M 1, 3—6, F 1—3, 5, 6, (4); *Rudolf Ravas*, SVŠ Holíč, M 2, 4—6, F 2—6, (1); *František Sudzina*, SVŠ Michalovce, M 4—6, 10, (7, 8, 11); *Jiří Šafařík*, SVŠ Bratislava, M 1, 2, 4—9, 11, 12, (3, 10), F 1—6, G 1—4; *Karel Šafařík*, SVŠ Bratislava, M 1—3, 5—7, 9—12, (4, 8), F 1—6, G 1—4; *Pavel Šandera*, G Brno, M 4, 6, 8, 10, (7), F 3; *Rudolf Švarc*, SVVŠ Plzeň, M 1, 2, 4—8, 10—12, (3, 9); *Jaroslav Švrček*, G Přerov, F 1, 3, 4, (2, 6); *Ján Trgiňa*, SVVŠ Ostrava, F 1—3; *Karol Varešinský*, SVŠ Michalovce, M 4, 6, (5, 7, 8), G 1, (2); *Peter Varša*, SVŠ Spišská Nová Ves, M 4—6, (3), F 1, 3, 4, 6; *P. Vrabček*, SVŠ Malacky, M 4, 6, 7, 10, 11, (5, 12), F 1, 2, 4, (3, 5, 6), G 1, 2, 4.

b) Kolektivy:

1.b maď. G Dunajská Streda (*Kornélia Rácz, Mária Várady*), 6, (4, 5); 4. ročník SEŠ Teplice v Č. (*Marie Plešmídová, Stanislav Fork*), M 6, (2, 4, 5, 8, 10), F (3).

Redakce vždy s radostí vítá v naší soutěži žáky ZDŠ. Tentokrát to je Serena Göghová z maďarské ZDŠ v Kolárově. Věříme, že nám zůstane věrná a nezapomene na nás s řešeními příkladů tohoto ročníku.



NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM

13. JZD nasázelo na dvě pole brambory. Z prvního pole se sklídilo 810 t brambor, tj. průměrně 180 t z jednoho hektaru. Z druhého pole se sklídilo 640 t při průměrném hektarovém výnosu 200 t. Jaké byly rozlohy obou polí?

Řešení: 4,5 ha, 3,5 ha.

13a. Soustava

$$a + b + c = 16 ,$$

$$d + e + f = 14 ,$$

$$g + h = 10 ,$$

kde a, b, c, d, e, f, g, h jsou vesměs různá jednociferná přirozená čísla, má několik řešení, v nichž se nevyskytuje právě jedno, vždy totéž, jednociferné přirozené číslo. Které to je? Napište aspoň jedno řešení dané soustavy.

Řešení. Nevyskytuje se cifra 5. — (8, 6, 2), (4, 3, 7), (9, 1).

14. Dokažte větu: Jsou dána 4 přirozená čísla, jejichž součet je liché číslo. Potom jejich součin je sudé číslo.

Řešení: Aby byl součet liché číslo, musí být: a) buď jedno z čísel liché; b) nebo tři čísla lichá. V obou případech je aspoň jedno z čísel sudé a součin je sudé číslo.

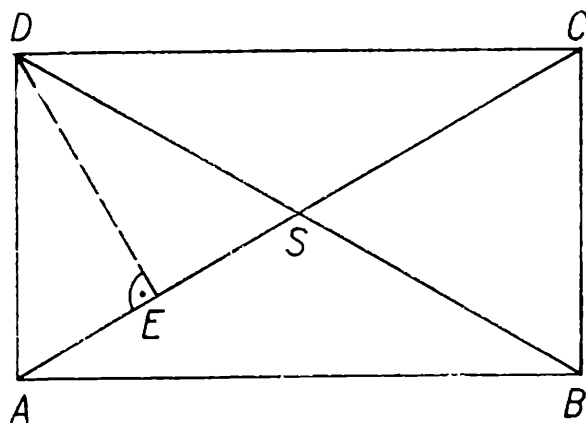
15. Pana X se kdosi ptal, jak je stár. Jeho odpověď byla poněkud nezvyklá: Součet cifer čísla, které vyjadřuje mé stáří, je přesně třetina mého věku. Dvojmoc součtu cifer je právě trojnásobek mého stáří. Tazateli to stačilo. Stačí to i vám?

Řešení: $x + y = \frac{1}{3}(10x + y)$, $(x + y)^2 = 3(10x + y)$. — 27 let.

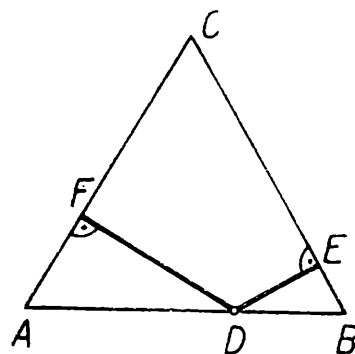
16. Zjistěte počet šesticiferných čísel, v nichž se vyskytuje skupina 1970 vždy pohromadě v tomto pořádku.

Řešení: 280 čísel.

17. V obr. 1 je dán obdélník $ABCD$. DE je kolmice na úhlopříčku AC . V kterém obdélníku svírá kolmice DE se stranou DA a s úhlo-



Obr. 1



Obr. 2

příčkou DB shodné úhly? (Stačí zjistit poměr stran obdélníka nebo tangens zatrženého úhlu.)

Řešení: $AD : AB = 1 : \sqrt{3}$; $\text{tg} \sphericalangle ADE = \sqrt{3} : 3$.

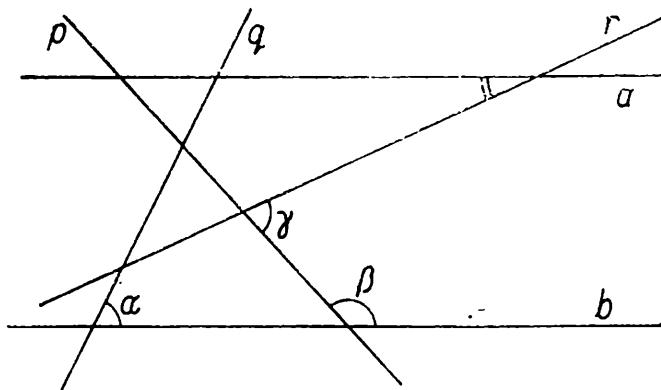
18. Obr. 2 znázorňuje rovnostranný trojúhelník ABC . Na straně AB je zvolen libovolný bod D a z něho je spuštěna kolmice DE (DF) na stranu BC (AC). Ukažte, že součet $DE + DF$ má stálou hodnotu, nezávislou na poloze bodu D .

Řešení: Součet $DE + DF$ je roven výšce daného rovnostranného trojúhelníka.

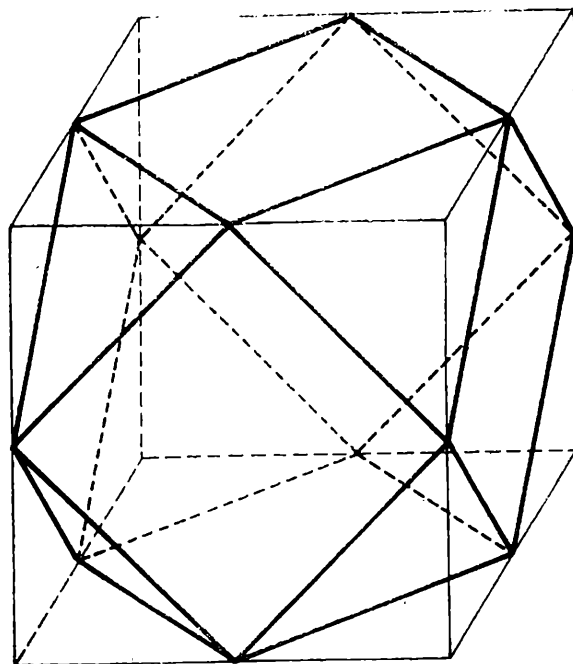
Poznámka. Tuto vlastnost má každý rovnoramenný trojúhelník, jestliže bod D zvolíme na jeho základně.

19. Rovnoběžky a, b (obr. 3) jsou prořaty přímkami p, q, r . Velikosti úhlů α, β, γ jsou známy. Vypočítejte velikost úhlu dvakrát zatrženého.

Řešení: $\beta + \gamma - 2R$.



Obr. 3



Obr. 4

20. Těleso, které je znázorněno na obr. 4, vzniklo z krychle. Jakým způsobem, to vidíte jistě sami. Vypočítejte objem tohoto tělesa, jestliže hrana krychle má délku a .

Řešení: $\frac{5}{6} a^3$.

21. Mezi Pythagorejci byl matematik jménem Thymaridas, kterému se připisuje řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} &= s, \\ x + x_1 &= a_1, \\ x + x_2 &= a_2, \end{aligned}$$

$$x + x_{n-1} = a_{n-1}$$

Přitom $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ jsou neznámé, $s, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ jsou konstanty. Thymaridas udává toto řešení

$$x = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) - s}{n - 2}$$

Neznámé $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ se už určí snadno. Dokázali byste danou soustavu rozřešit? Nejmladším čtenářům doporučuji, aby před řešením se omezili na soustavu dvou, potom na soustavu tří rovnic a teprve pak přistoupili k obecnému případu.

S. H.



RECENZE

Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi

B. BUDÍNSKÝ – B. KEPR

Ve Státním nakladatelství technické literatury vyšla koncem roku 1970 v řadě technické literatury dlouho očekávaná knížka o diferenciální geometrii. Má 342 stran, 118 obrázků, je vázaná a prodává se po 41 Kčs. Tím se vyplňuje dlouhodobá mezera od vydání poslední české knihy z uvedené disciplíny.

Autoři knihy si rozvrhli látku do tří kapitol. Po úvodu, který seznamuje čtenáře se základy vektorového počtu, probírá 1. kapitola základy teorie křivek; 2. kapitola je věnována základům teorie ploch; 3. kapitola se zabývá technickými aplikacemi diferenciální geometrie.

Nadaní studenti posledních ročníků gymnasií i průmyslových škol zde najdou zajímavou látku, rozšiřující jejich dosavadní vědomosti z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie. Při studiu knihy vystačí čtenáři se základními znalostmi algebry, analytické geometrie a většinou i s Havlíčkovým Diferenciálním a Integrálním počtem pro začátečníky. Pro posluchače nižších ročníků vysokých škol technického směru je kniha vhodným doplňkem přednášek z matematiky a deskriptivní geometrie, studentům učitelského směru oboru DG na universitách bude vítaným pomocníkem při jejich studiu. Učitelé středních škol si v ní mohou rozšířit své poznatky o moderní zpracování teorie křivek a ploch a konečně vědečtí pracovníci výzkumných ústavů naleznou v knize mnohé podněty pro svou další činnost.

A nyní několik poznámek k obsahu knihy:

Aby se čtenář nezdržoval předběžným studiem podrobných učebnic vektorového počtu, jehož se v knize důsledně užívá, pojednávají autoři v úvodu o jeho základech. Tím si připravují možnost, aby pomocí jeho symboliky jednoduše, stručně a přehledně mohli zapisovat vztahy, které se obvykle vyjadřují složitými a nepřehlednými vzorci. Po vysvětlení pojmu vektoru a jeho znázornění vykládají autoři základy vektorové algebry, vysvětlují vektorové funkce a upozorňují na použití vektorů v analytické geometrii.

V první kapitole nás seznamuje doc. Kepr s teorií křivek, jejich vyjádřením, délkou oblouku, tečnou a oskulační rovinou křivek, jejich stykem a Frenetovými vzorci. Poznáme tu vedle řady důležitých druhů křivek i vlastnosti rovinných křivek.

V druhé — poměrně náročnější — kapitole podává doc. Budinský vyjádření plochy a její tečné vlastnosti, zavádí vektory a tenzory na ploše, vysvětluje první a druhou základní formu plochy a vyšetřuje soustavy křivek na ploše.

Závěrečná třetí kapitola obou autorů je věnována mechanice hmotného bodu, plochám stavebně technické praxe a kartografickým sítím. Zejména výklad ploch stavební praxe je krásnou ukázkou toho, jak diferenciální geometrie lehce a přesně zvládá věty, které se synteticky odvozují poměrně svízelněji.

Cenným doplňkem textu jsou cvičení, která jsou zařazována za jednotlivými partiemi. Na nich si čtenář ověří, jak dalece zvládl přečtenou část. Na konci knihy jsou uvedeny jejich výsledky a u náročnějších příkladů je naznačen i postup řešení.

Stručné historické poznámky o vývoji diferenciální geometrie uzavírají knihu, která je vybavena pěknými a názornými Keprovými obrázky. Sazečský šotek zasáhl jen nepatrně ve slovech Erenet (čti Frenet), Caliraut (Clairaut), agregium (egregium).

Pestrý výběr a důležitost látky, její moderní zpracování a v neposlední řadě i pěkné technické vybavení knihy jsou dobrou vizitkou díla, které lze vřele doporučit.

Bude ozdobou soukromých, ústavních i školních knihoven, jejichž správci si musí pospíšet s nákupem knihy, která má poměrně nízký náklad.

O. S.

SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

R

attement *m*
 attre
 ne *ž*
 caine carrée
 caine *n*ème du nombre *a*
 an *m*
 cal *m*
 on *ž*
 ison d'une progression arithmé-
 tique
 onnement *m*
 ener
m
 ort *m*
 pport d'homothétie *ž*
 rapport à
 orteur *m*
 rocher
 rapprocher d'un nombre
 nnel, elle
 n *m*
 roque
 oposition réciproque d'une autre
 angle
 angle *m* rectanglè
 angle *m*

sklopení
 sklopit
 kořen, odmocnina
 druhá odmocnina
 n-tá odmocnina čísla *a*
 radián
 odmocnítko ($\sqrt{}$)
 poměr
 diference aritmetické řady
 řetězec tvrzení, postupně logicky na
 sebe navazujících, též úvaha
 převést, uvést
 řád, stupeň
 poměr
 koeficient či charakteristika stej-
 nolehlosti
 vzhledem k
 úhloměr
 blížit
 blížit se k číslu
 racionální
 poloměr, průvodič
 vzájemný, reciproký
 výrok (ve tvaru implikace), jenž
 vznikne obrácením (konverzí)
 daného výroku (např. z výroku
 $p \implies q$ vznikne výrok $q \implies p$)
 pravoúhlý
 pravoúhlý trojúhelník
 obdélník

rectangulaire
coordonnées *ž* rectangulaires
rectifiable
rectification *ž*
rectiligne
rectiligne *m* d'un dièdre

récurrent, e
réductible
fraction *ž* réductible
réduction *ž*

réduction au même dénomina-
teur *m*
réduire

réduire deux fractions *ž* au même
dénominateur

réduit
réel, elle
réflexif, ive
réflexion *ž*
angle *m* de réflexion

réflexivité *ž*
règle *ž*
règle à calcul *m*
règle de trois
les quatre règles

réglé, e
surface *ž* réglée

régulier, ère
relatif, ive

relatif à
relation *ž*
relèvement *m*

remplir
remplir des conditions *ž*

rencontrer
point *m* de rencontre

repère *m*
répétition *ž*
représenter

réseau *m*
résoluble
résolution *ž*
résolvante *ž*
résoudre

reste *m*
résultante *ž*
résultat *m*

rétrograde
réunion *ž*
réunion de deux ensembles

pravoúhlý
pravoúhlé souřadnice
rektifikace schopný
rektifikace
přímočarý
úhel vzniklý řezem klínu rovinou
kolmou na jeho hranu

rekurentní
redukovatelný
zkratitelný zlomek
redukce, zjednodušení algebraického
výrazu

uvedení na společného jmenova-
tele

převést, uvést, zjednodušit alge-
braický výraz
uvést dva zlomky na společného
jmenovatele

redukováný

reálný

reflexivní

odraz

úhel odrazu

reflexivita

pravidlo, pravítko

logaritmické pravítko

trojčlenka

čtyři základní početní úkony

přímkový

přímková plocha

pravidelný, regulární

relativní

vztahující se k

vztah, relace

opačný úkon ke sklopení

splňovat

splňovat podmínky

protnout

průsečík

reper, vztažná či souřadná soustava

opakování

představovat, znázorňovat

síť

řešitelný

řešení

rezolventa

řešit

zbytek

výslednice

výsledek

zpětný

sjednocení

sjednocení dvou množin

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

6
i

ROČNÍK 49, 1970-1971, UNOR



ROČNÍK 49
ÚNOR 1971

6

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku. Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: Mil. Hellerová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

OBSAH

O. Říha: Další síťové problémy vedoucí k maticím 241

J. Danešová: Hellyova věta a její důsledky 244

P. Bartuška: Nerovnovážné stavy v kovových slitinách 252

Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Barnardova hvězda 259

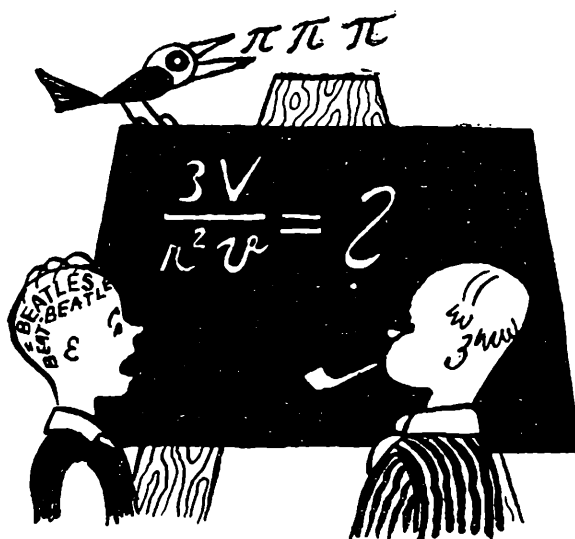
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Metody používané v astrofyzice 260

J. Kotyk: Hrst vzpomínek 267

Ze zahraničních časopisů . 271

Naše soutěž 272

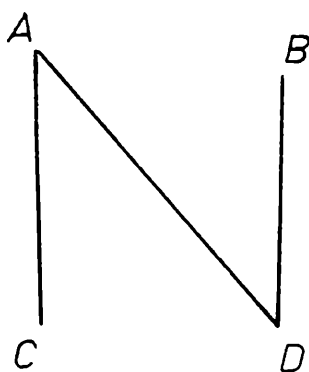
Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český (pokračování 3. a 4. str. obálky)



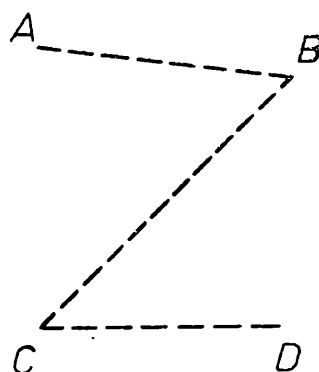
Další síťové problémy vedoucí k maticím

OTA ŘÍHA, Pedagogická fakulta, Brno

V tomto článku, který je volným pokračováním článku „Síťové problémy a matice“ z předchozího čísla Rozhledů, uvádím několik dalších úloh, které ukazují souvislost tzv. síťových problémů s maticemi.



Obr. 1



Obr. 2

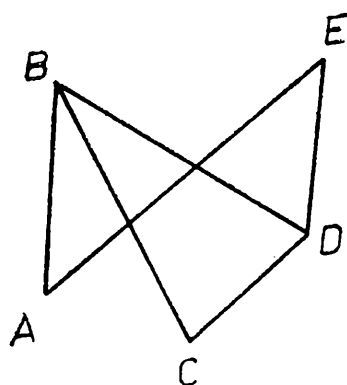
Obrázky 1 a 2 nás informují o tom, zda existuje vlakové nebo autobusové spojení mezi městy A , B , C , D .

Také tyto informace můžeme vyjádřit pomocí matic:

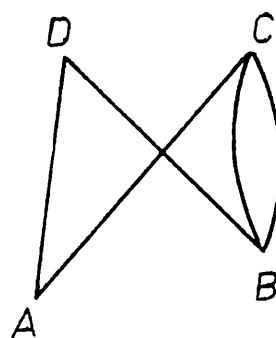
$$\mathbf{V} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Např. číslo 0 v 1. řádku 2. sloupce matice pro vlak vyjadřuje, že není zřízena železniční trať z A do B , číslo 1 v 1. řádku 3. sloupce této matice vyjadřuje, že mezi městy A a C je zřízena železniční trať. Obdobný význam mají i další čísla v obou maticích.

Až dosud jsme k zápisům matic v závorkách připojovali záhlaví tabulek; z nichž jsme matici získali (viz článek Tabulky informací v 00. čísle Rozhledů). V dalším textu budeme tato záhlaví vynechávat všude, kde nehrozí nedorozumění.



Obr. 3



Obr. 4

Úloha 1. Sestavte matice odpovídající sítím na obrázcích 3 a 4.

Úloha 2. Nakreslete sítě odpovídající maticím:

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Úloha 3. a) Matice $\mathbf{V}$ a $\mathbf{A}$ odpovídající sítím železničních a autobusových tratí z obrázků 1 a 2 vynásobte v pořadí $\mathbf{VA}$ a určete, jakou informaci vyjadřuje matice $\mathbf{VA}$. b) Obě matice vynásobte v pořadí $\mathbf{AV}$ a opět určete, jaká informace je vyjádřena maticí $\mathbf{AV}$. c) Porovnejte závěry, ke kterým jste dospěli pro $\mathbf{VA}$ a $\mathbf{AV}$ a uvědomte si, co se touto úlohou znovu potvrzuje.

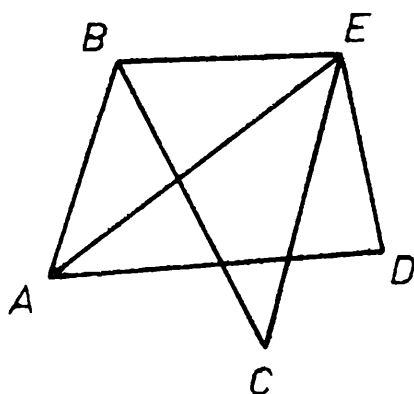
Řešení :

$$\mathbf{VA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{AV} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

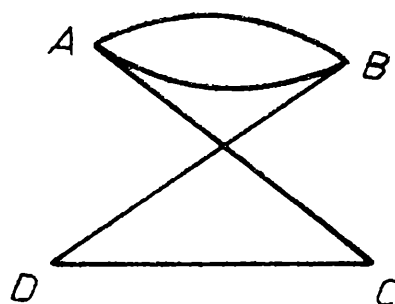
a) Například druhý prvek prvního řádku matice $\mathbf{VA}$ jsme dostali takto:

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

První činitel v každém ze čtyř součinů na levé straně vyjadřuje, zda existuje železniční trať z A do Z ($Z = A, B, C, D$), druhý činitel vyjadřuje, jestli existuje autobusová trať ze Z ($Z = A, B, C, D$) do B . Vzhledem k tomu, že tyto činitele mohou být pouze 0 nebo 1, je každý ze čtyř uvažovaných součinů roven 1 právě tehdy, jsou-li oba činitele rovni 1. Jestliže je tato podmínka pro některé Z splněna, pak pro toto Z existuje železniční trať z A do Z a zároveň existuje autobusová trať



Obr. 5



Obr. 6

ze Z do B (v uvažovaném případě je tato podmínka splněna pouze pro $Z = C$), takže je možno cestovat z města A do města B přes město Z ($Z = C$) tak, že z A do Z jedeme vlakem a ze Z do B autobusem.

Z uvedené úvahy plyne, že prvky matice $\mathbf{VA}$ se rovnají počtu různých způsobů, kterými je možno cestovat z města X ($X = A, B, C, D$) do města Y ($Y = A, B, C, D$) přes město Z ($Z = A, B, C, D, Z \neq X, Z \neq Y$) tak, že z X do Z jedeme vlakem a ze Z do Y autobusem.

b) Význam prvků matice $\mathbf{AV}$ je obdobný, tentokrát se jedná o jízdu přes jiné město s přestupem z autobusu na vlak.

c) Matice $\mathbf{VA}$ a $\mathbf{AV}$ vyjadřují různé informace. Násobení matic není komutativní, $\mathbf{VA} \neq \mathbf{AV}$.

Úloha 4. Určete, jakou informaci vyjadřují matice $\mathbf{A}^2$ a $\mathbf{V}^2$.

Výsledky úloh :

1. a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. a)

b)

4.

$$\mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Číslo 2 v 1. řádku 1. sloupce vyjadřuje, že z A zpět do A se můžeme dostat dvojnásobným způsobem tak, že jedeme z A do jiného města (C nebo D) vlakem a vrátíme se opět vlakem. Číslo 1 v 1. řádku 2. sloupce vyjadřuje, že z A do B se můžeme dostat jedním způsobem tak, že jedeme vlakem do některého zbývajících měst (D) a odtud pokračujeme do B opět vlakem. Číslo 0 v 1. řádku 3. sloupce vyjadřuje, že z A do C se není možno dostat přes jiné město (tj. B nebo D) pouze vlakem, atd.

Význam prvků matice $\mathbf{A}^2$ je obdobný, tentokrát se jedná o jízdu přes jiné město s přestupem z autobusu na autobus.

Hellyova věta a její důsledky

JANA DANEŠOVÁ, ČVUT Praha

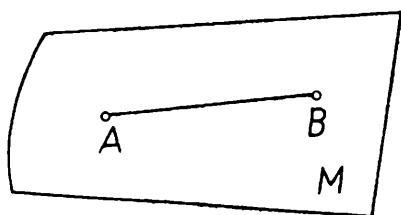
V tomto článku věnujeme pozornost některým vlastnostem konvexních mnohoúhelníků, které nejsou na první pohled zřejmé a které patří do oblasti kombinatorické geometrie. Nejprve několik úmluv a označení.

Množinou budeme vždy rozumět množinu bodů na přímce, v rovině nebo v prostoru. Sjednocením množin $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazýváme množinu všech bodů, které leží v $\mathbf{A}$ nebo v $\mathbf{B}$, a značíme ji $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Průnikem množin $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazýváme množinu všech bodů, které leží zároveň v $\mathbf{A}$ i v $\mathbf{B}$, a značíme ji $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$. Rozdílem množin $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazýváme množinu bodů, které leží v $\mathbf{A}$ a zároveň neleží v $\mathbf{B}$, a značíme ji $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$. Je-li V nějaká vlastnost a $\mathbf{A}$ množina, pak množinu všech bodů X množiny $\mathbf{A}$, které mají vlastnost V , označíme takto: $\{X \in \mathbf{A} : X \text{ má vlastnost } V\}$.

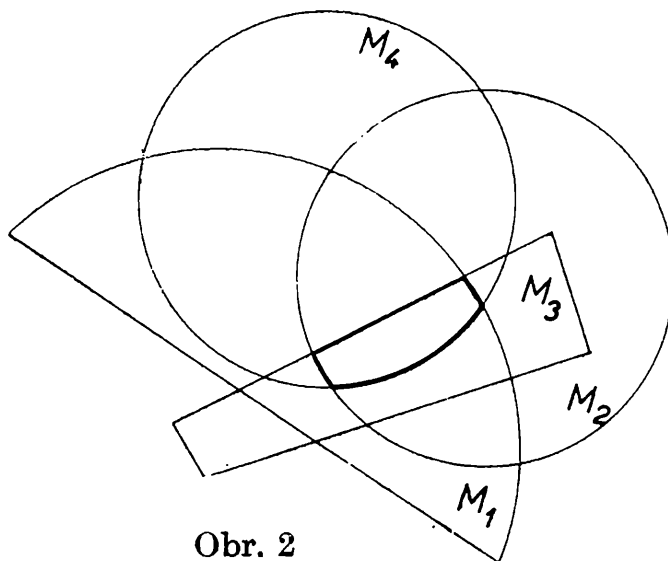
Definice 1. Množinu $\mathbf{M}$ ležící na přímce p , v rovině ρ nebo v prostoru nazveme konvexní (vypuklou), jestliže množina $\mathbf{M}$ obsahuje

s každými dvěma různými body A a B i úsečku AB (viz obr. 1). Konvexní množinu M nazveme uzavřenou, jestliže její průnik s každou přímkou je buď množina prázdná nebo jednobodová, úsečka, polopřímka nebo přímka.

V tomto článku dokážeme některé speciální tvary následující věty, kterou objevil v roce 1913 rakouský matematik E. Helly (časopisecky ji však uveřejnil až v roce 1923). Rozumíme-li jednorozměrným prostorem přímkou, dvourozměrným prostorem rovinu a třírozměrným prostorem prostor, potom platí



Obr. 1



Obr. 2

VĚTA Hellyova. Buď $M_1, \dots, M_n$ ($n \geq d + 1$, kde $d = 1, 2, 3$) n konvexních uzavřených množin v d -rozměrném prostoru. Jestliže každých $d + 1$ těchto množin má společný aspoň jeden bod, pak existuje aspoň jeden bod společný všem množinám $M_1, \dots, M_n$. (Obr. 2.)

Cvičení 1. Následující množiny jsou konvexní: 1. prázdná množina, 2. jednobodová množina, 3. úsečka, 4. polootevřená úsečka (úsečka bez jednoho koncového bodu), 5. otevřená úsečka (úsečka bez obou koncových bodů), 6. polopřímka, 7. otevřená polopřímka (polopřímka bez svého počátku), 8. přímka, 9. polorovina, 10. otevřená polorovina (polorovina bez hraniční přímky), 11. rovina, 12. vypuklý úhel, 13. pás mezi dvěma rovnoběžkami, 14. trojúhelník, 15. rovnoběžník, 16. lichoběžník, 17. kruh, 18. kruhová výseč, 19. poloprostor, 20. otevřený poloprostor (poloprostor bez hraniční přímky), 21. koule, 22. rovnoběžnostěn, 23. kužel, 24. hranol, 25. celý prostor. Množiny 1, 2, 3, 6, 8, 9, 11 až 19, 21 až 25 jsou uzavřené, ostatní (4, 5, 7, 10, 20) nejsou. Dokažte! Sestrojte další příklady konvexních množin!

Cvičení 2. Průnik libovolného počtu konvexních množin je opět konvexní. Průnik konečného počtu uzavřených konvexních množin je opět uzavřená konvexní množina. Dokažte! Užijte tohoto cvičení ve cvičení 1. (Např. trojúhelník je průnikem tří polorovin.)

Cvičení 3. Je-li každá z množin $u_1, \dots, u_n$ jednou z množin 1, 2, 3, 6, 8 z cvičení 1, pak jejich průnik je opět jedna z množin 1, 2, 3, 6, 8 z cvičení. Podobné tvrzení platí, zaměníme-li „1, 2, 3, 6, 8“ za „1, 5, 7, 8“ a leží-li $u_1, \dots, u_n$ na stejné přímce. Dokažte!

Cvičení 4. Budte u_1 a u_2 dvě neprotínající se množiny v prostoru, z nichž každá je jednou z množin 2, 3, 6 a 8 z cvičení 1. Pak mezi všemi úsečkami XY , kde $X \in u_1$ a $Y \in u_2$, existuje úsečka nejkratší. Dokažte! Leží-li u_1 a u_2 na jedné přímce, pak existuje právě jedna nejkratší úsečka. Jsou-li u_1 a u_2 úsečky v rovině, pak nejkratší úsečku lze zvolit tak, že aspoň jeden z jejích koncových bodů je zároveň koncovým bodem aspoň jedné z úseček u_1 a u_2 . Dokažte! Vyslovte podobné tvrzení, jsou-li u_1 úsečka a u_2 polopřímka ležící v jedné rovině!

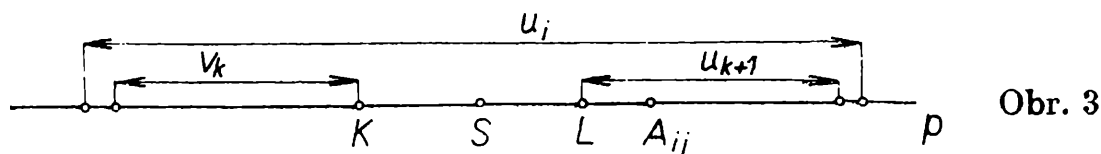
Definice 2. Budte u_1 a u_2 dvě množiny v prostoru, z nichž každá je jednou z následujících množin: jednobodová množina, úsečka, polopřímka, nebo přímka. Vzdálenost $d(u_1, u_2)$ množin u_1 a u_2 definujeme takto:

1. jestliže u_1 a u_2 se protínají, položme $d(u_1, u_2) = 0$,
2. jestliže u_1 a u_2 jsou neprázdné a neprotínají se, položme $d(u_1, u_2)$ rovno délce nejkratší úsečky ze všech úseček XY , kde $X \in u_1$ a $Y \in u_2$ (cvičení 4 zaručuje existenci aspoň jedné nejkratší úsečky).

Cvičení 5. Jsou-li A bod a p přímka v prostoru, pak $d(A, p) = 0$, jestliže A leží na p , a $d(A, p)$ je vzdálenost A od paty kolmice spuštěné z bodu A na p , jestliže A neleží na p . Jsou-li A bod a p polopřímka v prostoru, P její počátek a K pata kolmice vedené bodem A na přímku obsahující p , pak: 1. $d(A, p) = 0$ jestliže $A \in p$, 2. $d(A, p) = \overline{AK}$, jestliže $A \notin p$ a $K \in p$, 3. $d(A, p) = \overline{AP}$, jestliže $A \notin p$ a $K \notin p$. Dokažte! Podobně vyjádřete vzdálenost dvou rovnoběžek, vzdálenost bodu od úsečky a vzdálenost dvou rovnoběžných úseček!

Nyní dokážeme Hellyho větu pro přímku.

Věta 1. Buď $n \geq 2$ přirozené číslo a $u_1, \dots, u_n$ množiny na přímce p , z nichž každá je jedna z následujících množin: jednobodová množina, úsečka, polopřímka nebo přímka. Mají-li každé dvě množiny u_i a u_j ($1 \leq i, j \leq n$) společný aspoň jeden bod, pak existuje bod společný všem množinám $u_1, \dots, u_n$. (Obr. 3.)



Obr. 3

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že průnik $u_1 \cap u_2 \cap \dots \cap u_n$ je prázdný. Označme v_k průnik množin $u_1, u_2, \dots, u_k$ ($1 \leq k \leq n$). Podle předpokladu věty je $v_2 = u_1 \cap u_2 \neq \emptyset$. Můžeme tedy psát $\emptyset \neq v_2 \supset v_3 \supset \dots \supset v_n = \emptyset$. Jistě existuje číslo k tak, že $v_k \neq \emptyset$ a

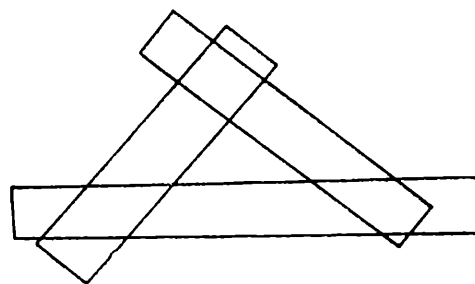
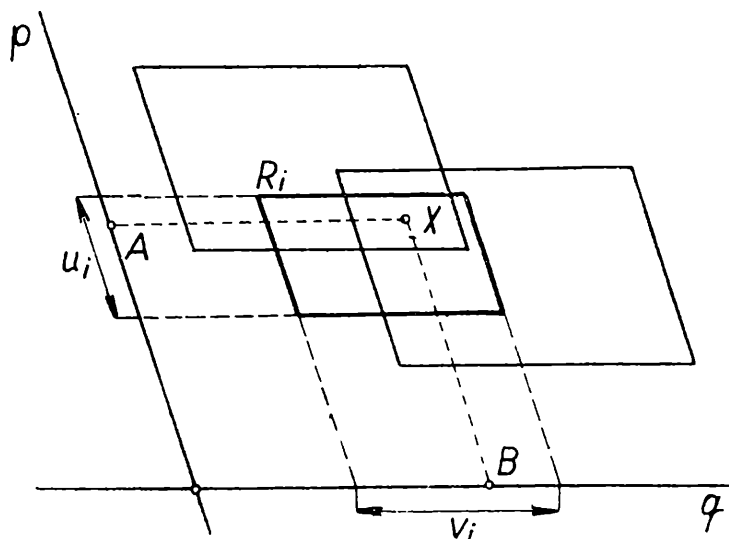
$\mathbf{v}_{k+1} = \emptyset$ (k je poslední index i , pro který ještě $\mathbf{v}_i \neq \emptyset$). Protože $\mathbf{v}_k \cap \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} = \emptyset$, existuje podle cvičení 3 a 4 mezi všemi úsečkami XY , kde $X \in \mathbf{v}_k$ a $Y \in \mathbf{u}_{k+1}$, právě jedna úsečka nejkratší. Její koncové body označme K a L , a to tak, aby $K \in \mathbf{v}_k$ a $L \in \mathbf{u}_{k+1}$. Podle předpokladu věty protíná $\mathbf{u}_{k+1}$ každou z množin $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. Proto můžeme zvolit body $A_1, \dots, A_k$ tak, že $A_i \in \mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_{k+1}$ ($1 \leq i \leq k$). Z konvexity množin $\mathbf{v}_k$ a $\mathbf{u}_{k+1}$ snadno plyne, že $\mathbf{v}_k$ a $\mathbf{u}_{k+1}$ leží na opačných otevřených polopřímkách vyřatých na p středem S úsečky KL . Podle předchozího body K a A_i leží tedy na opačných otevřených polopřímkách vyřatých na p bodem S , takže úsečka KA_i obsahuje bod S . Z konvexity množiny $\mathbf{u}_i$ a z $K \in \mathbf{v}_k \subset \mathbf{u}_i$, $A_i \in \mathbf{u}_i$, vyplývá, $S \in \mathbf{u}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Odtud ihned dostaneme, že $S \in \mathbf{v}_k = \mathbf{u}_1 \cap \dots \cap \mathbf{u}_k$, což je spor s tím, že $\mathbf{v}_k$ leží v jedné z otevřených polopřímek vyřatých na p bodem S . Tento spor ukazuje, že předpoklad na začátku důkazu byl nesprávný, tj. musí být $\mathbf{u}_1 \cap \dots \cap \mathbf{u}_n \neq \emptyset$. Tím je věta dokázána.

Definice 3. Průnik konečně mnoha polorovin ležících v jedné rovině nazveme konvexním mnohoúhelníkem.

Cvičení 6. Každý konvexní mnohoúhelník je konvexní uzavřená množina. Průnik konečného počtu konvexních mnohoúhelníků je konvexní mnohoúhelník. Dokažte!

Cvičení 7. Množiny 1, 2, 3, 6, 8, 9, 12 až 16 z cvičení 1 jsou konvexní mnohoúhelníky. Dokažte!

Z věty 1 nyní odvodíme tuto větu.



Obr. 4b

Obr. 4a

Věta 2. Buďte p a q dvě různoběžky v rovině ρ . Buďte $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ ($n \geq 2$) rovnoběžníky se stranami rovnoběžnými buď s p nebo s q . Mají-li každé dva z těchto rovnoběžníků společný aspoň jeden bod, potom existuje bod společný všem těmto rovnoběžníkům. (Obr. 4a.)

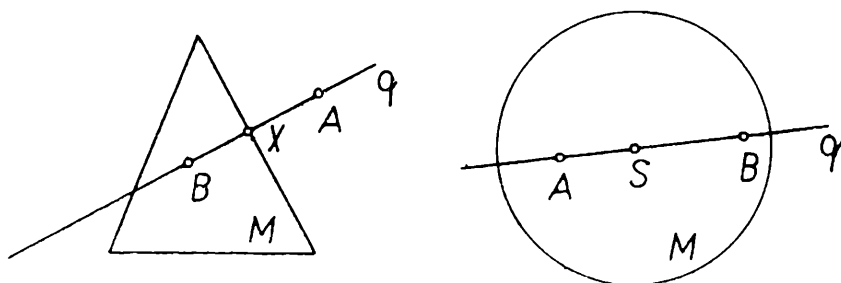
Důkaz. Budte $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ průměty rovnoběžníků $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ na přímku p ve směru přímky q a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ průměty rovnoběžníků $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ na přímku q ve směru přímky p . Je jasné, že množiny $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou úsečky. Přitom každé dvě úsečky $\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{u}_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) mají neprázdný průnik, neboť jejich průnik je průmětem neprázdného (viz předpoklad věty) průniku rovnoběžníků $\mathbf{R}_i$ a $\mathbf{R}_j$ na přímku p ve směru přímky q . Nyní můžeme na úsečky $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ užít věty 1. Existuje tedy aspoň jeden bod společný všem úsečkám $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$. Zvolme jeden z takových bodů a označme ho A . Stejnou úvahou dostaneme bod B náležející všem úsečkám $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Buď X průsečík přímky vedené bodem A rovnoběžně s q a přímky vedené bodem B rovnoběžně s p . Z $A \in \mathbf{u}_i$ a $B \in \mathbf{v}_i$ plyne $X \in \mathbf{R}_i$ ($1 \leq i \leq n$), takže X je bod společný všem rovnoběžníkům $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$.

Předchozí věta obecně neplatí pro rovnoběžníky, které nemají strany rovnoběžné se dvěma předem danými různoběžkami. Na obrázku 4b každé dva obdélníky mají společný bod, avšak průnik všech tří obdélníků je prázdný. Je-li dán konečný systém rovnoběžníků v rovině ϱ , který obsahuje aspoň tři rovnoběžníky, a jestliže každé tři rovnoběžníky tohoto systému mají společný aspoň jeden bod, pak všechny rovnoběžníky tohoto systému mají společný aspoň jeden bod. Toto tvrzení je obsaženo v následující větě 3, která je speciálním případem Hellyho věty pro rovinu ($d = 2$).

Věta 3. Buď $n \geq 3$ přirozené číslo a $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ konvexní mnohoúhelníky v rovině ϱ . Jestliže každé tři z těchto mnohoúhelníků mají společný aspoň jeden bod, potom existuje aspoň jeden bod společný všem těmto mnohoúhelníkům.

Než přistoupíme k důkazu této věty, zavedeme několik nových pojmů a dokážeme několik tvrzení.

Definice 4. Buď $\mathbf{M}$ konvexní množina v $\mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je přímka, rovina nebo prostor. Bod $X \in \mathbf{M}$ nazveme hraničním bodem množiny $\mathbf{M}$ vzhledem k $\mathbf{P}$, jestliže bodem X lze vést přímku q v $\mathbf{P}$ takovou, že každá úsečka AB , která leží na q a obsahuje bod X uvnitř, má aspoň jeden ze



Obr. 5 a b

svých koncových bodů vně množiny $\mathbf{M}$, tj. $A \notin \mathbf{M}$ nebo $B \notin \mathbf{M}$ (mohou nastat oba případy) (obr. 5a). Hranicí množiny $\mathbf{M}$ vzhledem k $\mathbf{P}$ budeme rozumět množinu všech hraničních bodů množiny $\mathbf{M}$ a budeme ji značit $hr_{\mathbf{P}}\mathbf{M}$.

Cvičení 8. Nalezněte hranice množin z cvičení 1! (Např. hranicí kruhu vzhledem k rovině, ve které leží, je kružnice, avšak hranicí kruhu vzhledem k prostoru, ve kterém leží, je celý tento kruh! Obr. 5b.)

Lemma 1. Buď $\mathbf{M}$ konvexní mnohoúhelník v prostoru. Nechť $\mathbf{u}$ je jedna z následujících množin:

(*) prázdná nebo jednobodová množina, úsečka, polopřímka, nebo přímka.

Pak průnik $\mathbf{u} \cap \mathbf{M}$ je opět jedna z množin (*).

Důkaz. Buď $\mathbf{M}$ průnikem n polorovin $\pi_1, \dots, \pi_n$ roviny ρ . Důkaz provedeme matematickou indukcí podle n . Je-li $n = 1$, pak $\mathbf{M}$ je polorovina v rovině ρ a lemma jistě platí. Předpokládejme, že lemma platí pro konvexní mnohoúhelníky, pro které $n = k$. Buď $\mathbf{M}$ konvexní mnohoúhelník, který je průnikem $n = k + 1$ polorovin $\pi_1, \dots, \pi_{k+1}$ roviny ρ . Konvexní mnohoúhelník $\mathbf{M}$ je průnikem poloroviny π_{k+1} a konvexního mnohoúhelníku $\mathbf{N} = \pi_1 \cap \dots \cap \pi_k$. Protože podle indukčního předpokladu lemma platí pro $\mathbf{N}$, je $\mathbf{u} \cap \mathbf{N}$ jedna z množin (*). Avšak $\mathbf{u} \cap \mathbf{M} = (\mathbf{u} \cap \mathbf{N}) \cap \pi_{k+1}$ je průnikem poloroviny s jednou z množin (*), takže i množina $\mathbf{u} \cap \mathbf{M}$ je jednou z množin (*).

Lemma 2. Buď $\mathbf{M}$ konvexní mnohoúhelník a p přímka v rovině ρ . Je-li $p \cap \mathbf{M}$ polopřímka, pak její počátek leží v $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$. Je-li $p \cap \mathbf{M}$ úsečka, pak oba její koncové body leží v $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$. Je-li $p \cap \mathbf{M}$ jednobodová množina, pak její bod leží v $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$.

Poznámka. Tvrzení lemmatu 2 můžeme stručně vyjádřit takto:

$$\text{hr}_p(p \cap \mathbf{M}) \subset \text{hr}_\rho \mathbf{M}.$$

Důkaz lemmatu 2 plyne z konvexity množiny $\mathbf{M}$ a definice hranice konvexní množiny a přenecháme jej jako cvičení čtenáři.

Lemma 3. Buď $\mathbf{M}$ konvexní mnohoúhelník, který je průnikem n polorovin $\pi_1, \dots, \pi_n$ roviny ρ . Potom $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$, hranici množiny $\mathbf{M}$ vzhledem k ρ , lze napsat jako sjednocení nejvýše n množin, z nichž každá je jednou z následujících množin:

(*) jednobodová množina, úsečka, polopřímka nebo přímka.

Takové sjednocení dostaneme, jestliže ve sjednocení

$$(\mathbf{M} \cap \text{hr}_\rho \pi_1) \cup \dots \cup (\mathbf{M} \cap \text{hr}_\rho \pi_n)$$

vynecháme ty množiny $\mathbf{M} \cap \text{hr}_\rho \pi_i$, které jsou prázdné.

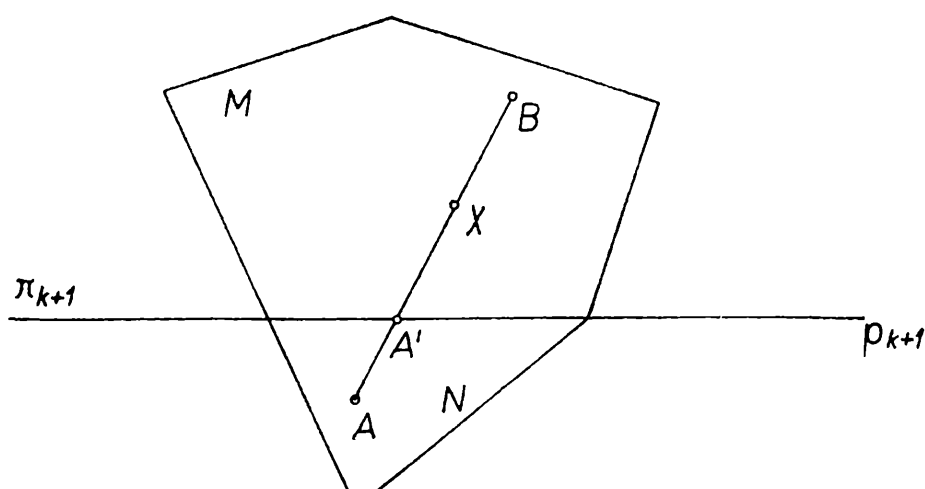
Poznámka. Můžeme tedy psát

$$\text{hr}_\rho \mathbf{M} = \mathbf{M} \cap (\text{hr}_\rho \pi_1 \cup \dots \cup \text{hr}_\rho \pi_n).$$

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle n . Je-li $n = 1$, pak $\mathbf{M}$ je polorovina v rovině ρ a lemma jistě platí. Předpokládejme, že lemma platí pro konvexní mnohoúhelníky, které jsou průnikem $n = k$ polorovin roviny ρ . Buď $\mathbf{M}$ konvexní mnohoúhelník, který je průnikem $n = k + 1$ polorovin $\pi_1, \dots, \pi_{k+1}$ roviny ρ . Buď dále $\mathbf{N} = \pi_1 \cap \dots \cap \pi_k$ a $p_{k+1} = \text{hr}_\rho \pi_{k+1}$ hraniční přímka poloroviny π_{k+1} . Dokážeme, že platí vztah

$$(**) \quad \text{hr}_\rho \mathbf{M} = (\pi_{k+1} \cap \text{hr}_\rho \mathbf{N}) \cup (p_{k+1} \cap \mathbf{N})$$

Především je jasné, že $\pi_{k+1} \cap \text{hr}_\varrho \mathbf{N} \subset \text{hr}_\varrho \mathbf{M}$ (za přímku q z definice 4 pro množinu $\mathbf{M}$ lze vzít přímku, která splňuje podmínku definice 4 pro množinu $\mathbf{N}$). Je-li $X \in p_{k+1} \cap \mathbf{N}$, pak za přímku q z definice 4 pro množinu $\mathbf{M}$ lze vzít kolmici na přímku p_{k+1} procházející bodem X . Tím je dokázáno, že množina na pravé straně (**) je obsažena v množině na levé straně (**). Bud' nyní X bod ležící v $\mathbf{M}$ avšak neležící v $(\pi_{k+1} \cap \text{hr}_\varrho \mathbf{N}) \cup (p_{k+1} \cap \mathbf{N})$. Předpokládejme, že $X \in \text{hr}_\varrho \mathbf{M}$. Pak podle definice 4 existuje přímka q v rovině ϱ , která prochází bodem X , a každá úsečka, která leží na q a obsahuje bod X uvnitř, má aspoň jeden ze svých koncových bodů vně množiny $\mathbf{M}$. Protože X leží v $\mathbf{N}$ a neleží v $\text{hr}_\varrho \mathbf{N}$ (neboť $X \in \pi_{k+1}$ a $X \notin \pi_{k+1} \cap \text{hr}_\varrho \mathbf{N}$), existuje úsečka AB ležící na q , která obsahuje bod X uvnitř a přitom $A \in \mathbf{N}$, $B \in \mathbf{N}$ (obr. 6).



Obr. 6

Protože $X \in \text{hr}_\varrho \mathbf{M}$, aspoň jeden z bodů A a B neleží v $\mathbf{M}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \notin \mathbf{M}$. Máme tedy $A \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{M} = \mathbf{N} \setminus (\mathbf{N} \cap \pi_{k+1}) = \mathbf{N} \cap (\varrho \setminus \pi_{k+1})$, takže A leží uvnitř poloroviny opačné k polorovině π_{k+1} . Proto úsečka AB protíná p_{k+1} a tento průsečík označíme A' . Z konvexity množiny $\mathbf{N}$ plyne, že $A' \in \mathbf{N}$, tedy $A' \in \mathbf{N} \cap p_{k+1}$. Protože $X \notin \mathbf{N} \cap p_{k+1}$, je $X \neq A'$. Protože X leží uvnitř úsečky AB , je $X \neq B$. Dále $X \in \mathbf{M} \cap AB = A'B$ (dokažte). Celkem tedy máme: úsečka $A'B$ leží na přímce q , bod X leží uvnitř úsečky $A'B$, neboť na ní leží a je různý od jejích koncových bodů A' a B . Přitom ale $A' \in \mathbf{M}$ a $B \in \mathbf{M}$. Tak jsme dostali spor s tím, že $X \in \text{hr}_\varrho \mathbf{M}$. Důkaz rovnosti (**) je tedy hotov.

Podle indukčního předpokladu lemma platí pro konvexní mnohoúhelník $\mathbf{N}$, takže můžeme psát

$$\text{hr}_\varrho \mathbf{N} = \mathbf{N} \cap (\text{hr}_\varrho \pi_1 \cup \dots \cup \text{hr}_\varrho \pi_k)$$

Odtud a z (**) ihned dostaneme, že

$$\begin{aligned} \text{hr}_\varrho \mathbf{M} &= [\pi_{k+1} \cap \mathbf{N} \cap (\text{hr}_\varrho \pi_1 \cup \dots \cup \text{hr}_\varrho \pi_k)] \cup [(\text{hr}_\varrho \pi_{k+1}) \cap \mathbf{N}] = \\ &= [\mathbf{M} \cap (\text{hr}_\varrho \pi_1 \cup \dots \cup \text{hr}_\varrho \pi_k)] \cup [(\text{hr}_\varrho \pi_{k+1}) \cap \pi_{k+1} \cap \mathbf{N}] = \\ &= \mathbf{M} \cap (\text{hr}_\varrho \pi_1 \cup \dots \cup \text{hr}_\varrho \pi_{k+1}). \end{aligned}$$

Přitom každá z množin $(\text{hr}_\rho \pi_i) \cap \mathbf{M}$ je jednou z následujících množin: prázdná nebo jednobodová množina, úsečka, polopřímka nebo přímka. Tím je indukční krok proveden a lemma je dokázáno.

Cvičení 9. Buď $\mathbf{M}$ konvexní mnohoúhelník v rovině ρ . Potom:

1. obsahuje-li $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$ přímku, pak $\mathbf{M}$ je buď přímka, polorovina nebo pás mezi dvěma rovnoběžkami,

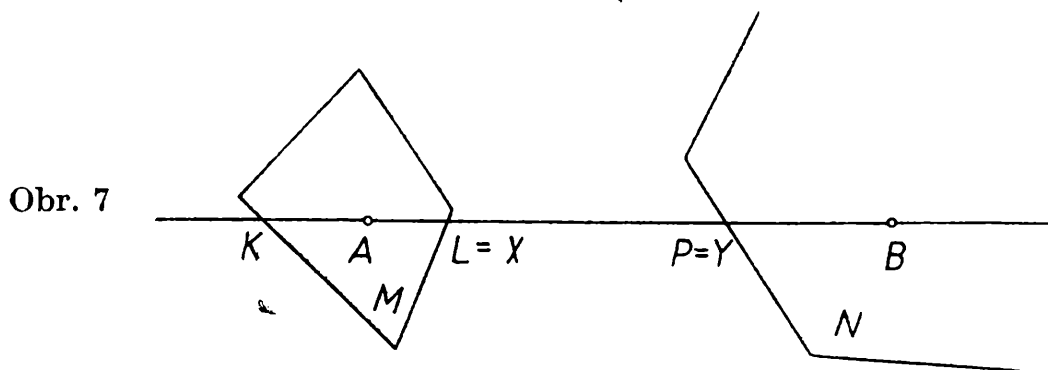
2. obsahuje-li $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$ polopřímku p a neobsahuje žádnou přímku, pak $\mathbf{M}$ je buď polopřímka nebo $\mathbf{M}$ obsahuje ještě jednu polopřímku, která neleží na přímce obsahující p ,

3. obsahuje-li $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$ bod, který neleží na žádné úsečce ležící v $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$, pak $\mathbf{M}$ je jednobodová množina,

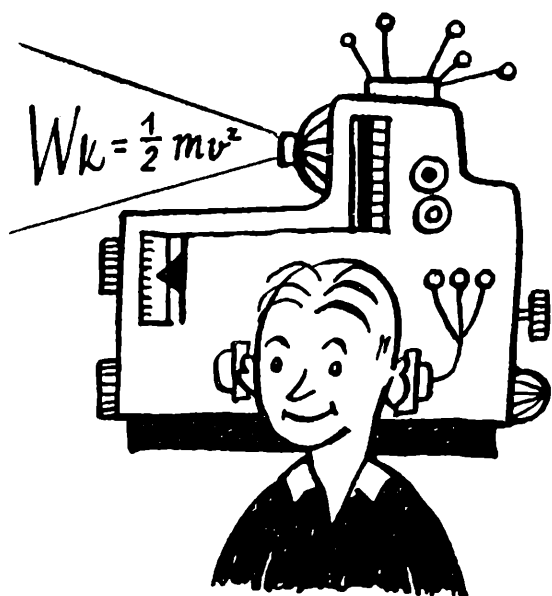
4. jestliže $\mathbf{M}$ není jednobodová množina ani pás, pak libovolné dva různé body v $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$ se dají spojit lomenou čarou, která celá leží v $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$ (říkáme, že $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$ je souvislá),

5. jestliže $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$ leží na jedné přímce, pak buď $\mathbf{M}$ leží na této přímce a je jednou z množin 1, 2, 3, 6, 8 nebo 9, anebo $\mathbf{M}$ je polorovina.

Lemma 4. Buďte $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ neprotínající se konvexní mnohoúhelníky v rovině ρ . Je-li $A \in \mathbf{M}$ a $B \in \mathbf{N}$, pak existují body $X \in \text{hr}_\rho \mathbf{M}$ a $Y \in \text{hr}_\rho \mathbf{N}$ takové, že úsečka XY leží na úsečce AB (obr. 7).



Důkaz. Označíme-li p přímku procházející body A a B , pak podle lemmatu 1 každá z množin $p \cap \mathbf{M}$ a $p \cap \mathbf{N}$ je jednou z následujících množin: jednobodová množina, úsečka nebo polopřímka (žádná z množin $p \cap \mathbf{M}$ a $p \cap \mathbf{N}$ nemůže být ani prázdná ani celá přímka p , neboť $A \in p \cap \mathbf{M}$, $A \notin p \cap \mathbf{N}$, $B \notin p \cap \mathbf{M}$ a $B \in p \cap \mathbf{N}$). Zde se omezíme na případ, kdy $p \cap \mathbf{M}$ je úsečka a $p \cap \mathbf{N}$ je polopřímka. Ostatní případy nechť vyšetří čtenář sám. Buď P počátek polopřímky $p \cap \mathbf{N}$ a KL úsečka $p \cap \mathbf{M}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\overline{PL} < \overline{PK}$. Podle lemmatu 2 víme, že body K a L leží v $\text{hr}_\rho \mathbf{M}$ a P v $\text{hr}_\rho \mathbf{N}$. Bod P leží na polopřímce BA , neboť B leží na polopřímce $p \cap \mathbf{N}$ a bod A na ní neleží. Body A a B leží na různých polopřímkách vyřatých na přímce p bodem P , takže úsečka AB obsahuje bod P . Protože bod L leží na polopřímce opačné k polopřímce $p \cap \mathbf{N}$, leží tím spíše na polopřímce BA , a protože L leží zároveň na polopřímce AB (dokažte), leží L na úsečce AB . Oba body P a L leží na úsečce AB a položíme-li $X = P$ a $Y = L$, bude lemma jistě splněno. (Pokračování)



F Y Z I K A

Nerovnovážné stavy v kovových slitinách

PAVEL BARTUŠKA, Ústav fyziky pevných látek ČSAV, Praha

V předchozím článku „Rovnovážné diagramy kovových systémů“ jsme se seznámili s rovnovážnými fázovými diagramy kovů, udávajícími vztah mezi strukturním složením a teplotou. V těchto diagramech však neuvažujeme velmi důležité faktory, jakými jsou čas a rychlost difuze. Rovnovážné strukturní složení však obdržíme pouze v případě, že mohly proběhnout všechny strukturní změny, nutné k získání rovnovážného stavu. Rychlost reakcí, při nichž vznikají nové fáze v kapalném, nebo i tuhém stavu, je však různá ve velmi širokém rozsahu; v některých případech je tak malá, že ani po velmi pomalém ochlazování nedosáhneme rovnovážného stavu.

V tab. 1 jsou schematicky roztrženy nerovnovážné struktury, jak je můžeme nalézt v kovových slitinách. Do první skupiny patří ty odchylky, kdy v materiálu stále nacházíme strukturní části, které jsou obsaženy v rovnovážném stavovém diagramu (i když se mění jejich chemická homogenita, vzhled, velikost i rozložení).

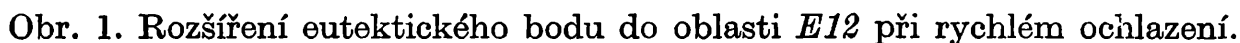
Druhý typ představují ty odchylky, kdy se při vysoké ochlazovací rychlosti počnou ve struktuře objevovat nové fáze, které v rovnovážném diagramu nejsou vůbec obsaženy.

Tab. 1. Nerovnovážné struktury ve slitinách

ve struktuře nacházíme fáze, obsažené v rovnovážném diagramu	
chemická nehomogenita	dendritická segregace
	přítomnost eutektika i v oblasti tuhého roztoku
	rozšíření eutektického bodu
	vytvoření chemicky nehomogenních krystalů při peritektické reakci
způsob vyloučení fází	fáze může být vyloučena v částicích různé velikosti, a to buď na hranicích zrn (segregace), nebo v jejich objemu (precipitace), nebo na určitých krystalografických směrech (Widmannstättenova struktura)
	vznik troostitu, bainitu
ve struktuře nacházíme fáze, neobsažené v rovnovážném diagramu	
	martensitická transformace
	vznik přechodových struktur při precipitaci

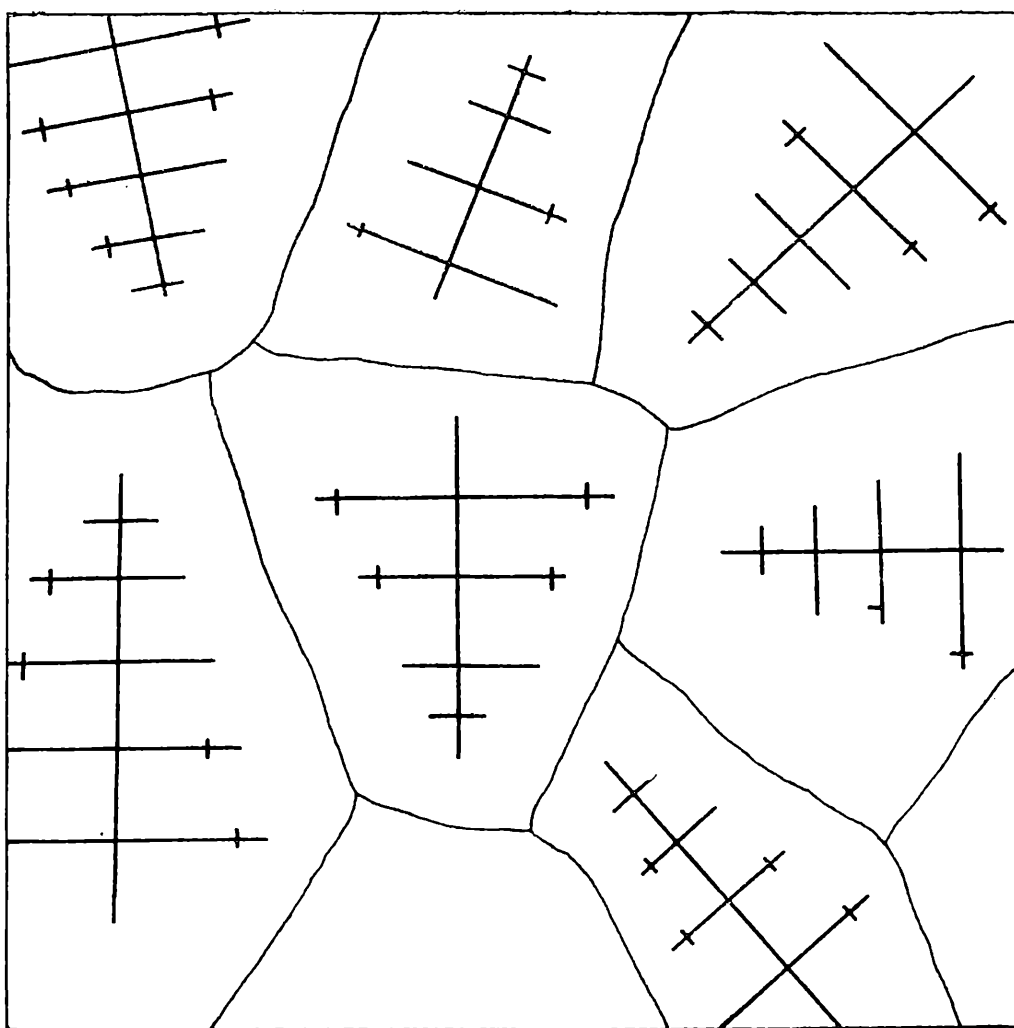
Nyní se podrobněji zmíníme o prvé skupině nerovnovážných struktur. Tak zvané *dendritické odměšování* (dendritická segregace) vyplývá již z podstaty tuhnutí slitin. Jestliže ochlazujeme slitinu, jejíž složení je na obr. 1 označeno x_0 , pak prvé vyloučené krystaly mají složení x_1 , ale poslední x_0 . Na obr. 2 je schematicky naznačeno, jak se jeví dendritická segregace na metalografickém výbrusu. Leptáním se odhalí různé chemické složení; stromečkovitá část (s nejmenším obsahem kovu B) vzniká na počátku tuhnutí v důsledku odlišné krystalizační rychlosti v různých krystalografických směrech. Zbytek krystalu je tvořen slitinou s postupně rostoucím obsahem kovu B. Dendritická segregace se dá částečně odstranit dlouhodobým žháním, kdy v důsledku zvýšené rychlosti difuze dojde k vyrovnání složení.

Jiný případ nastane, jestliže rychle ochlazujeme taveninu o složení x_3 (viz obr. 1), která by měla být tvořena pouze krystaly α . Vylučující se krystaly α by měly mít stále vyšší obsah kovu B, jak udává čára solidu T_4C . Jestliže ale pro nedostatek času nemůžeme tuhý roz-



V případě rychlého ochlazování slitiny eutektického složení x_E mohou se ve struktuře objevit primární krystaly α uložené v eutektiku, ačkoli by struktura měla být tvořena pouze eutektikem. V tomto případě se eutektická teplota sníží na T_{E_2} a eutektikum, kterému normálně odpovídá bod E , se rozšíří do oblasti $E12$, ve které jsou v rovnováze 3 fáze a soustava nemá tudíž žádný stupeň volnosti. Při E_{E_1} počnou vypadávat primární krystaly α a při T_{E_2} ztuhne tavenina o složení 2 eutekticky. Vytvoření rovnovážné struktury je možno provést pouze novým roztavením a pomalým ochlazováním slitiny.

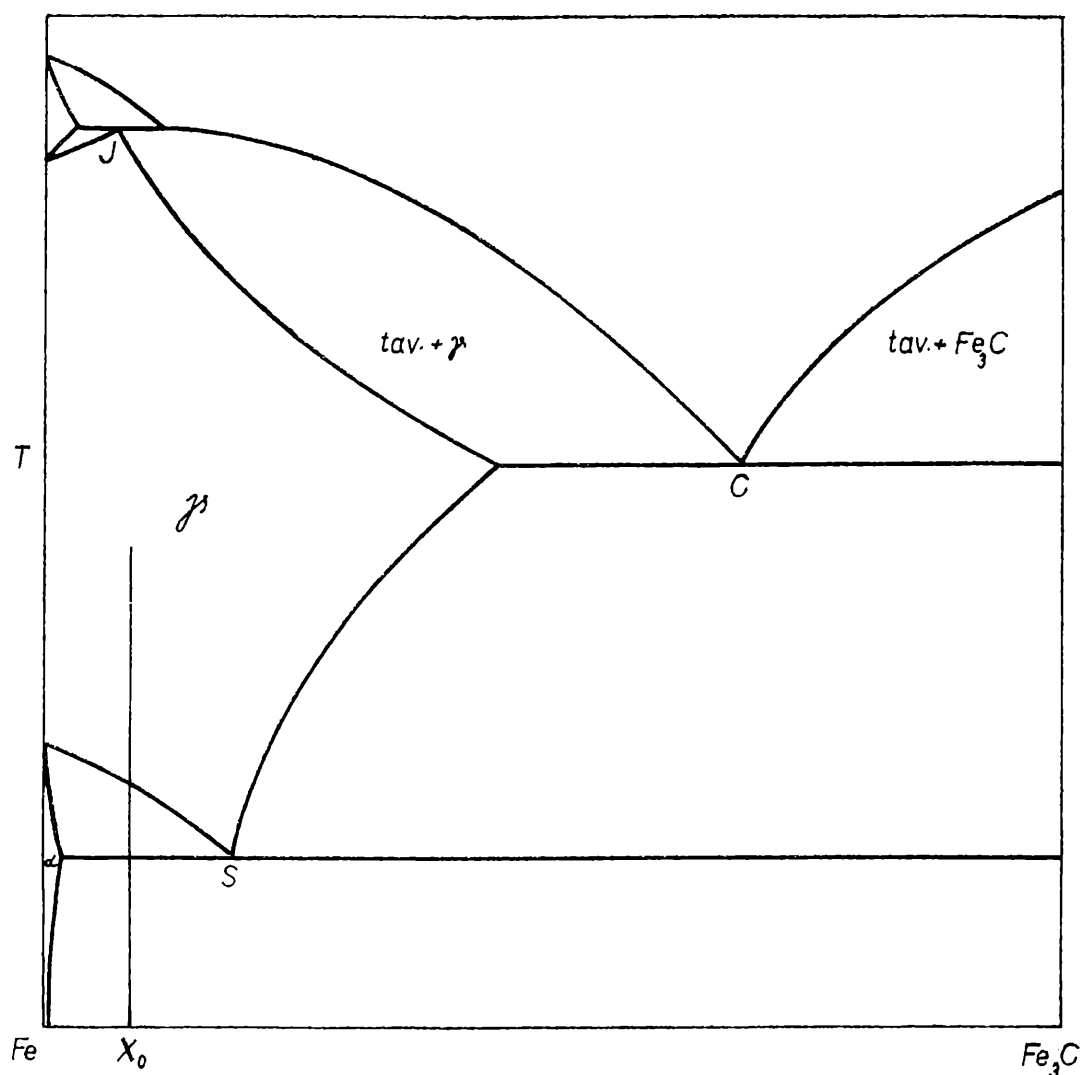
254



Obr. 2. Schematické znázornění dendritické segregace, jak se jeví na metalografickém výbrusu.

tektickým bodem. Jde opět o difusní děj, který v praxi nikdy neproběhne ideálně podle rovnovážného diagramu. Krystaly peritektického složení nebudou mít homogenní složení; jejich vnitřní části budou méně nasyceny složkou B, než by odpovídalo rovnováze.

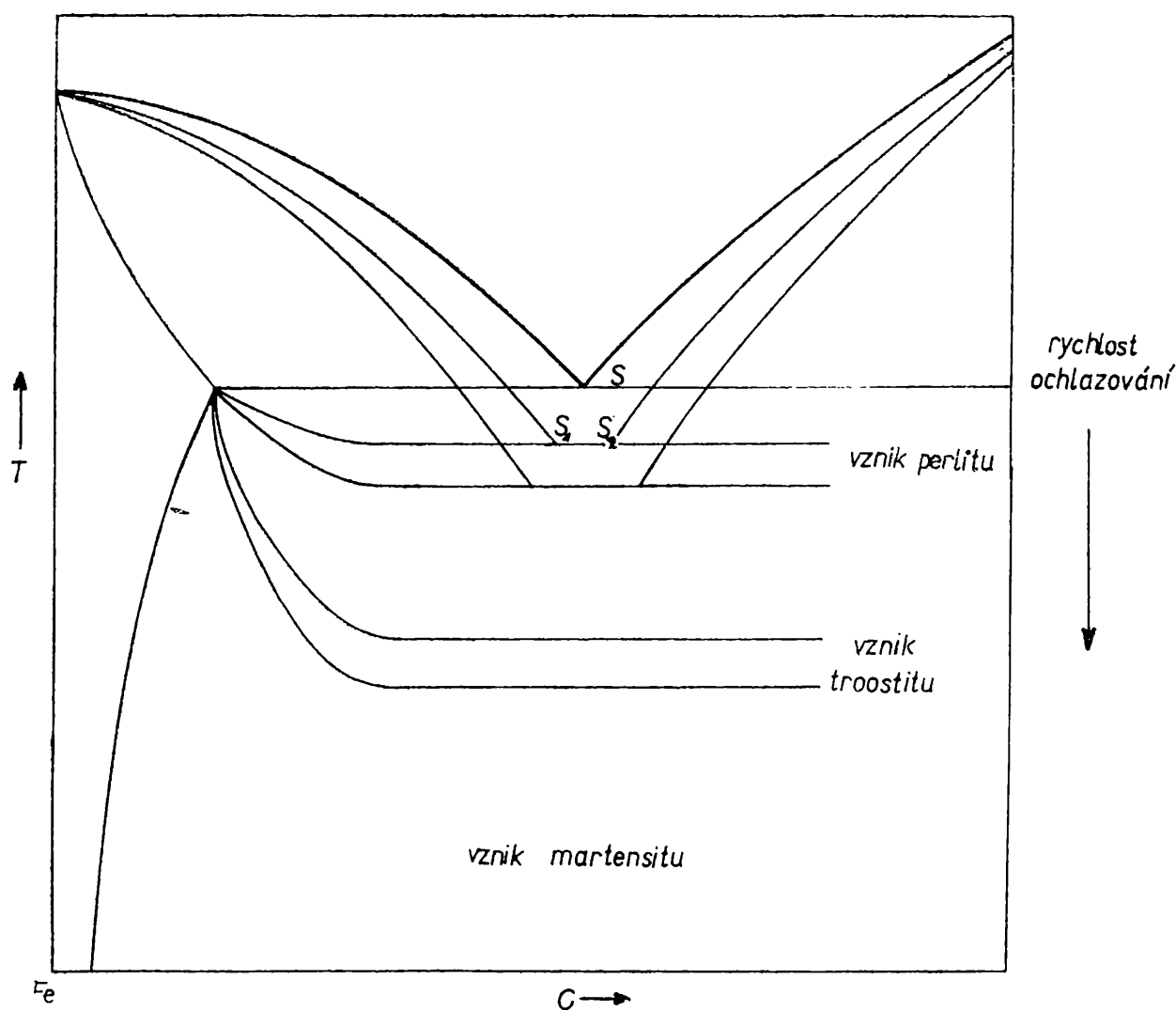
Pro mechanické vlastnosti slitin je důležité nejen jaké strukturní části obsahuje, ale i jaký je způsob jejich vyloučení. Uvažujme slitinu, která bude vedle fáze α obsahovat i malé množství fáze β . Jestliže jsou teplota i čas dostatečně velké pro to, aby došlo k difusi, vyloučí se fáze β na hranicích zrn a např. pevnost je určena převážně povahou vylučující se fáze (mluvíme o segregaci). Jestliže nízká teplota nedovolovala účinnou difusi, pak dojde k vyloučení buď rovnoměrně v celém objemu (precipitace, mechanické vlastnosti jsou určeny převážně povahou fáze α), nebo na určitých krystalografických plochách, nebo směrech (velmi nepříznivá Widmannstättenova struktura). Vidíme, že o způsobu vyloučení nás rovnovážný fázový diagram rovněž neinformuje, poně-



Obr. 3. Zjednodušený diagram železo-uhlík.

vadž vylučování je difusní děj, určený vedle chemického složení (velikosti difusního koeficientu) i teplotou a dobou, při níž probíhá.

Druhou důležitou skupinou odchylek od rovnovážného stavu tvoří případy, kdy se ve struktuře objevují fáze, které v rovnovážném diagramu nejsou vůbec obsaženy. Je to zvláště případ *martensitické transformace*, ke které dochází u řady kovových systémů při rychlém ochlazení — kalení. Její podstatu si ukážeme na vzniku martensitu u slitiny železo-uhlík, kde má největší praktický význam a odkud také pochází její označení. Na obr. 3 je uveden zjednodušený diagram systému Fe-C, kde obsah 6,67 % C odpovídá čistému cementitu Fe₃C, který se v praxi v tomto systému vylučuje (za určitých podmínek se však může vylučovat i čistý uhlík jako grafit). Diagram obsahuje peritektikum J, eutektikum C, oblast tuhého roztoku γ a α a eutektoidní bod S. Důležité je, že krystaly γ mají mřížku krychlovou, plošně centrovanou, kdežto krystaly α krychlovou, prostorově centrovanou.



Obr. 4. Snížení a rozšíření eutektoidního bodu a vznik nerovnovážných struktur v soustavě železo-uhlík.

Slitina složení x_0 je v rovnovážném stavu tvořena primárně vyloučenými krystaly α a eutektoidem, v němž se střídají lamely železa α s lamelami Fe_3C (perlit). Slitina o složení odpovídajícím bodu S je tvořena pouze perlitem. Jestliže zvyšujeme rychlost ochlazování, snižuje se eutektoidní teplota a eutektoidní složení, kterému původně odpovídal jediný bod S, se rozšiřuje na rozmezí S_1S_2 , jak je vidět na obr. 4. Je to analogie rozšíření eutektika, jak je naznačeno na obr. 1. Je tedy zřejmé, že i slitiny o složení v rozmezí bodů S_1S_2 obsahují pouze eutektoid. Dalším zvýšením ochlazovací rychlosti vzniká strukturní fáze, která také obsahuje železo α a karbid železa, ale daleko jemnější. Mluvíme zde proto o nové strukturní části — *troostitu*. Ten je sice nestabilní (zahřátím se mění na normální perlit), ale je stále tvořen složkami, které nalézáme v rovnovážném diagramu (železo α a Fe_3C).

Jiná situace nastane při dalším zvýšení ochlazovací rychlosti. Ve slitině se objeví nová fáze — *martensit*, který se krystalovou mřížkou,

fyzikálními vlastnostmi i vzhledem výrazně liší od perlitu i troostitu. A co je důležité, není v rovnovážném diagramu vůbec obsažen. Zahřátím na eutektoidní teplotu se však opět mění na strukturu méně nerovnovážnou — troosit a nakonec až na strukturu rovnovážnou — perlit. Martensit je vlastně přesyceným tuhým roztokem uhlíku v železe α . Jak vidíme z obr. 3, rozpustnost uhlíku v α železe je velmi malá (maximálně 0,04 % při 721 °C). Rychlým ochlazením se sice přemění plošně centrovaná mřížka na prostorově centrovanou, ale uhlík se nestačí vyloučit ve formě cementitu a vzniká silně přesycený tuhý roztok s velkým pnutím v mřížce a tudíž s velikou tvrdostí. Zahřátím se však zvýší rychlost difuze uhlíku a martensit se rozpadá.

Obrovský technický význam má martensitická přeměna u slitin železo-uhlík. Vyskytuje se však i v jiných binárních systémech, např. Fe-Ni, Fe-Mn, Cu-Al, Cu-Zn, Ti-Cr atd.

Konkrétní diagramy kovových systémů je možno nalézt v následujících publikacích:

Smithells C. J.: Metals Reference Book, Vol. II. Butterworths, London 1967.

Hausen M.: Constitution of Binary Alloys. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1958.

Pro čtenáře, mající zájem o hlubší poznání otázek souvisejících s tuhnutím slitin, uvádíme soupis některých souhrnných prací:

Chalmers B.: Principles of Solidification. John Wiley and Sons, New York 1964.

Mullin J. W.: Crystallization, Butterworths, London 1961.

Sborník Krystallizacija metallov, Izdatelstvo Akademii Nauk SSSR, Moskva 1960.

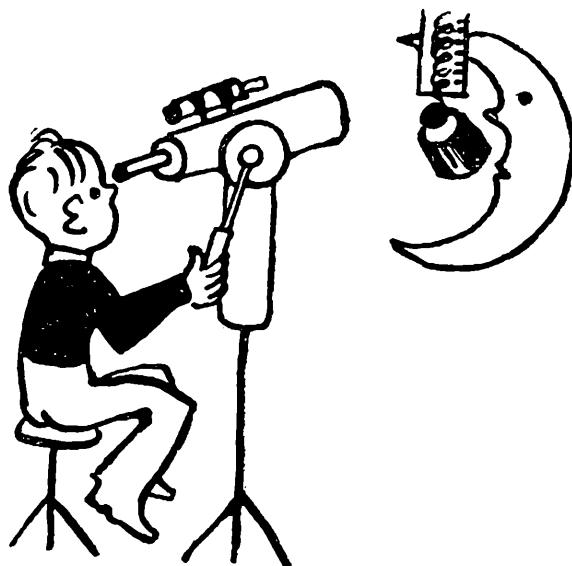
Wilke K. T.: Methoden der Kristallzüchtung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963.

Píšek F., Jeníček J.: Nauka o materiálu, díl I. Nakladatelství ČSAV, Praha 1962.

OPRAVA

Na konci poslední řádky na str. 170 byla nerovnost nezřetelně vytištěna. Má znít

$$\text{pro } -4 < x < -3$$



Barnardova hvězda

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V roce 1916 objevil americký astronom *Eduard Emerson Barnard* (1857—1925), že hvězda 9,54 zdánlivé hvězdné velikosti v souhvězdí Hadonoše, označená v Bonnském katalogu BD $+4^{\circ}3561$, jejíž souřadnice, platné pro začátek roku 1900,0 jsou $\alpha = 17^{\text{h}} 52,9^{\text{m}}$, $\delta = +4^{\circ} 25'$, má největší dosud známý vlastní pohyb: $10,3''$ za rok¹⁾ v pozičním úhlu 356° . Protože její roční paralaxa $\pi = 0,545''$, je Barnardova hvězda třetí nejbližší hvězdou (po hvězdách Proxima a alfa Centauri), čili její vzdálenost je 5,9 světelných roků (1,83 parseku). Dále bylo změřeno, že je to červená trpasličí hvězda spektrální třídy dM5 (absolutní hvězdná velikost je $+13,3^{\text{M}}$), jejíž radiální rychlost je -108 km s^{-1} a tangenciální rychlost 89 km s^{-1} .

Odchytky na dráze Barnardovy hvězdy svědčí o tom, že tato hvězda má tzv. *neviditelného průvodce*. Velmi podrobně se studiem hvězdy zabýval astronom *Peter van de Kamp*, který v letech 1938 až 1962 získal během 609 nocí 8260 fotografií Barnardovy hvězdy. Výsledky měření, uveřejněné v roce 1963, svědčí o tom, že Barnardova hvězda, jejíž hmotnost se odhaduje na 0,15 hmotnosti Slunce, má neviditelného průvodce, jehož hmotnost je srovnatelná s hmotností planety Jupitera.

¹⁾ Viz např. Fyzika pro 3. roč. SVVŠ. SPN, Praha 1965, s. 210. Za 350 roků se Barnardova hvězda posune na obloze o 1 stupeň.

Podle 3. zákona Keplerova²⁾ můžeme z doby oběžné (24 roků) vypočítat, že poloměr a dráhy průvodce

$$a = \sqrt[3]{0,15 \cdot 24^2}$$
$$a = 4,42 \text{ astronomických jednotek UA.}$$

Při paralaxe $0,545''$ odpovídá vzdálenost 4,42 UA na obloze úhlové vzdálenosti $2,41''$. Je-li excentricita dráhy průvodce 0,6, jeho vzdálenost pak může být až $3,8''$ od hlavní hvězdy. Podle výpočtů *P. van de Kampa* je hmotnost neviditelného průvodce pouze 0,0015 hmotnosti Slunce, což je 1,6 hmotnosti největší planety sluneční soustavy, Jupitera. Zatímco povrchová teplota na Jupiteru je 125 K, může být povrchová teplota na neviditelném průvodci Barnardovy hvězdy nejvýše 60 K, protože Barnardova hvězda má jen poloviční povrchovou teplotu (2900 K) než naše Slunce.

Nejnovější úvahy *P. van de Kampa* z roku 1969 vedou k závěru, že pozorované odchylky v pohybu Barnardovy hvězdy můžeme rovněž vysvětlit existencí dvou těles, která se pohybují po kruhových drahách s oběžnou dobou 26 a 12 roků. Tato tělesa označil B1 a B2. Za předpokladu, že hmotnost Barnardovy hvězdy je 0,15 hmotnosti Slunce, je poloměr dráhy průvodce B1 4,7 UA a průvodce B2 jen 2,8 UA. Hmotnosti průvodců jsou 1,1 a 0,8 hmotnosti Jupitera, čili jde o tělesa podobná planetám.

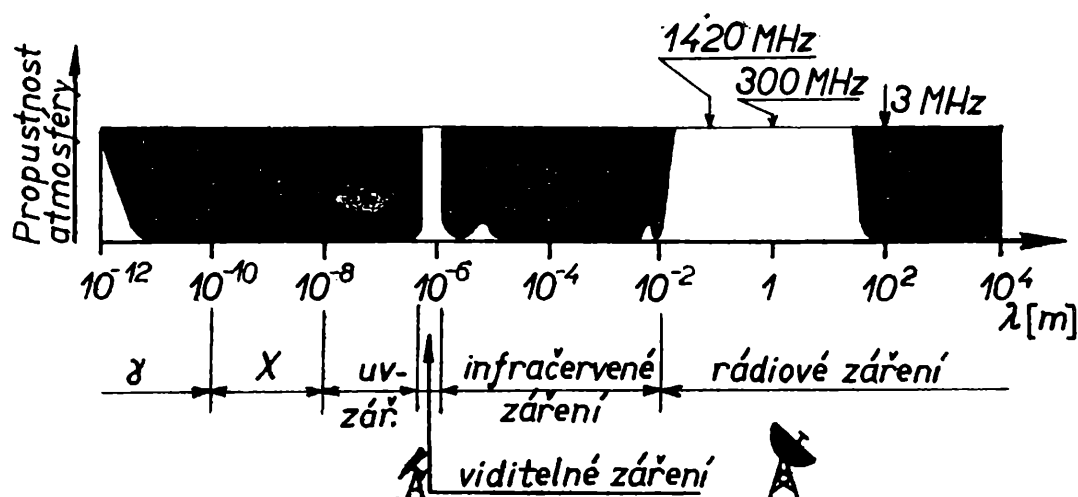
Metody používané v astrofyzice

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Téměř všechny poznatky o vesmíru získáváme studiem elektromagnetického záření, které dopadá na zemský povrch. Až do konce 2. světové války využívala astronomie pouze úzkého oboru vlnových délek od 400 nm do 760 nm, tj. viditelného záření neboli světla. Rozvoj techniky umožnil fyzice studovat také záření o kratších vlnových délkách (ultrafialové záření, rentgenové záření a záření γ), avšak astrofyzika toto záření využít nemohla, neboť je prakticky zcela pohlcováno zemskou atmosférou (ozón, kyslík a dusík). Zemská atmosféra pohlcuje také záření o větších vlnových délkách než jsou vlny světelné (infračervené záření pohlcují vodní páry); proto se někdy říká, že viditelné záření pro-

²⁾ Viz článek Hmotnosti dvojhvězd — „Rozhledy mat.-fyz.“, 47, 1968/69, č. 10, s. 476—478.

chází „optickým oknem“ v atmosféře. Druhé takové okno existuje v oboru rádiových vln: zemská atmosféra propouští elektromagnetické záření vlnových délek od několika milimetrů až do 15 metrů. Záření větších vlnových délek se odráží od ionosféry. Propustnost zemské atmosféry v závislosti na vlnové délce je schematicky znázorněna na obr. 1. Záření, které na zemský povrch dopadá „rádiovým oknem“ studuje radiová astronomie. Záření v oboru vlnových délek, které zemská atmosféra nepropouští, se od r. 1957 zkoumá pomocí přístrojů, umístěných na umělých družicích Země a na kosmických sondách.



Obr. 1. Propustnost zemské atmosféry pro různé druhy záření.
Pro nezačerněné oblasti je atmosféra průhledná.

Kromě elektromagnetického vlnění dopadá na Zemi také záření korpuskulární, což jsou proudy rychlých elektricky nabitých částic. K přímému studiu látky mimozemského původu měla věda až do r. 1969 k dispozici pouze meteority. K nim přibýly nyní vzorky měsíční horniny. získané americkými kosmonauty a sovětskou automatickou sondou.

V tomto článku se budeme zabývat pouze těmi metodami astrofyziky, které jsou založeny na studiu elektromagnetického záření. Z tohoto záření můžeme získat tři základní typy informací: směr, odkud záření přichází, intenzitu záření a jeho spektrální složení. Ze směru paprsku určujeme polohu (souřadnice) zkoumaného objektu na sféře; tyto informace zpracovává astronomie. Astrofyzika, která studuje fyzikální vlastnosti těles ve vesmíru a jejich chemické složení, získává potřebné údaje jednak z celkové intenzity záření, jednak z polohy a z intenzity čar ve spektru. Měřením množství záření se zabývá fotometrie, spektrální složení zkoumá spektroskopie.

Významnou pomůckou astrofyziky je fotografie, která má mnoho předností před vizuálním pozorováním. Především je to objektivnost

a trvanlivost fotografických snímků, dále skutečnost, že můžeme použít fotografické materiály citlivé na různé vlnové délky a konečně ta vlastnost fotografických materiálů, že se účinky osvětlení sčítají, takže při dostatečně dlouhé expoziční době zaznamenáváme i takové podrobnosti, které bychom při vizuálním pozorování dalekohledem nikdy nespatriili. V učebnici fyziky pro 3. ročník SVVŠ (gymnasií), SPN, Praha 1970, je na obr. 245 fotografie otevřené hvězdokupy Plejády v souhvězdí Byka¹⁾. Tato hvězdokupa je prostoupena mračny mezihvězdné látky, která v dalekohledu nejsou viditelná; teprve na fotografii vidíme tuto látku jako mlhoviny, ozářené světlem jasných hvězd.

První fotografický snímek v astronomii zhotovil *Whipple*. V roce 1850 vyfotografoval hvězdu *Vegu* (α Lyrae), v r. 1857 spolu s *Bondem* dvojhvězdu *Mizar* a *Alkor* (ζ UMa), přičemž použili kolodiové desky. Rozsáhlejší použití fotografie v astronomii bylo možné teprve po vynálezu suché emulze v roce 1871.

Astronomický dalekohled, upravený na fotografování hvězd, se nazývá astrograf. Bývá to obvykle čočkový dalekohled s velkou světelností, v jehož ohnisku je umístěna fotografická deska. Protože expoziční doba u astronomických snímků bývá velmi dlouhá (až několik hodin), jsou všechny astronomické dalekohledy opatřeny tzv. hodinovým strojem, který otáčí dalekohledem stejnou úhlovou rychlostí, jakou se zdánlivě otáčí obloha, takže dalekohled neustále sleduje fotografovaný objekt. K astrografu je rovnoběžně připevněn vizuální dalekohled, nazývaný pointační dalekohled. V okuláru pointačního dalekohledu je nainstalován vláknový kříž (zhotovený z pavučinových vláken) a pozorovatel při exponování snímku sleduje pravidelnost chodu hodinového stroje a případné odchylky vyrovnává jemnými pohyby (mechanicky, nebo u větších dalekohledů elektricky).

Je-li α úhlová vzdálenost dvou bodů S_1 , S_2 na sféře, pak tyto body se na fotografii zobrazí ve vzájemné vzdálenosti d , která je dána vzorcem

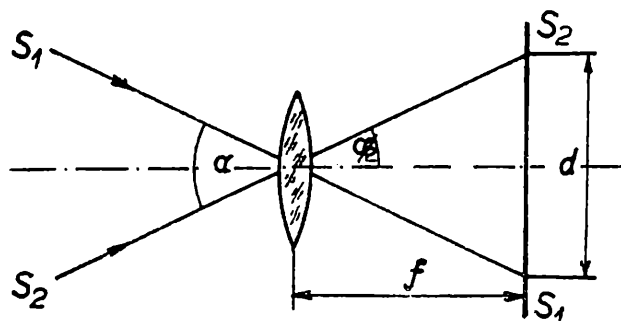
$$d = 2f \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

kde f je ohnisková vzdálenost objektivu (obr. 2). Z uvedeného vzorce můžeme snadno vypočítat, že Slunce, jehož úhlový průměr $\alpha \doteq 30'$, se v dalekohledu s ohniskovou vzdáleností objektivu $f = 1$ m zobrazí jako kotouček o průměru téměř 1 cm. Při fotografování Slunce, Měsíce a planet se používají dalekohledy s velkou ohniskovou vzdáleností, aby průměr obrazu v ohnisku byl co největší; naproti tomu při fotografování hvězd, mlhovin a galaxií je důležitější světelnost objektivu.

¹⁾ V českém vydání na str. 215, ve slovenském vydání na str. 242.

Fotometrie

Fotometrie se zabývá měřením celkové intenzity záření, které k nám přichází z kosmických objektů. Podle druhu receptoru (přijímače) záření dělíme fotometrii na vizuální, fotografickou a fotoelektrickou.



Obr. 2. K velikosti obrazů na fotografické desce.

a) Vizuální fotometrie je založena na vizuálním srovnávání jasnosti měřeného objektu s jasností srovnávacího zdroje; receptorem je tedy lidské oko. Používá se nejčastěji ke studiu proměnných hvězd: jasnost proměnné hvězdy srovnáváme s hvězdami, jejichž jasnost je konstantní. Popis jednoduchého měření, založeného na tomto principu, najde čtenář v příručce Živný, F. - Lepil, O.: Praktická cvičení z fyziky (SNP, Praha 1966, str. 237). Přesnější je však metoda, která jako srovnávacího zdroje používá bodového zdroje světla, zvaného „umělá hvězda“. Jasnost tohoto srovnávacího zdroje můžeme přesně nastavit pomocí fotometrického klínu z neutrálního (šedého) skla. Vizuální fotometrie se v současné době používá již jen zřídka, neboť je postupně nahrazována objektivnějšími metodami.

b) Fotografická fotometrie určuje množství záření proměřováním fotografických snímků. Intenzita záření se stanoví buď z velikosti zčernání fotografické emulze, nebo jednodušeji pomocí průměrů kotoučků, které vytvořily hvězdy na fotografické desce. V prvním případě je třeba určit tzv. gradační křivku, vyjadřující závislost hustoty zčernání fotografické emulze na logaritmu osvětlení. Ve druhém případě se využívá skutečnosti, že se účinky osvětlení na fotografické desce sčítají, takže jsou zasahovány další a další zrna emulze. Důsledkem toho je, že se hvězda, která se při vizuálním pozorování jeví jako bod, zobrazí jako kotouček, jehož průměr je tím větší, čím je hvězda jasnější. Velikost kotoučku ovšem nijak nesouvisí se skutečným průměrem hvězdy.

c) Fotoelektrická fotometrie je založena na fotoelektrickém jevu, který objevili v roce 1888 *Stoletov* a *Hallwachs*. Podstata fotoelektrického jevu spočívá v tom, že kov nebo plyn, ozářený světlem vhodné vlnové délky, vysílá elektrony. Při fotoelektrické fotometrii jde tedy o přeměnu dopadajícího záření pomocí fotonásobičů na elektrický proud.

Fotonásobič je v podstatě zdokonalená fotonka; pomocnými elektrodami je kaskádovitě (sekundární emisí) násoben počet elektronů uvolněných dopadajícím světlem z katody. Pomocí fotoelektrických fotometrů lze měřit hvězdné velikosti s přesností na setinu magnitudy.

Vizuální, fotografická i fotoelektrická fotometrie mají jednu společnou vlastnost: receptory nejsou stejně citlivé pro všechny vlnové délky dopadajícího záření. Proto se někdy používá v astrofyzice absolutní fotometrie, která využívá receptorů, v nichž se záření všech vlnových délek mění v teplo. Příkladem takového receptoru je termočlánek. Konstantanový drát je spájen s měděným drátem, zapojeným ke galvanometru. Jedno ze spájených míst je roztepáno v malou plošku, začerněnou sazemi a osvětlenou zářením v ohnisku dalekohledu. Záření pohlcované ploškou se mění v teplo, spájené místo se zahřívá a vzniká termoelektrický proud, z jehož velikosti můžeme určit celkové množství dopadajícího záření. Jiným receptorem je Crooksov radiometr. Je to zařízení, skládající se ze slídových nebo i muších křídélek, zavěšených na velmi tenkém křemenném vlákně a umístěných v baňce se zředěným vzduchem. Přední plocha křídélek je začerněna a pohlcováním dopadajícího záření se zahřívá. Teplo přechází na molekuly vzduchu, které jsou v blízkosti začerněných plošek. Tyto molekuly se tedy pohybují rychleji než molekuly na zadní straně křídélka a narážejí na ně větší rychlostí, což má za následek, že se křídélko pootočí. Z velikosti úhlu, o který se křídélko otočí, můžeme určit intenzitu dopadajícího záření.

Interference vlnění

V optické astronomii se interference vlnění využívá k měření úhlové vzdálenosti složek dvojhvězd, případně i k měření úhlových průměrů jasných hvězd. Příslušné přístroje se nazývají interferometry. Michelsonovým interferometrem na hvězdárně Mt. Wilsonu byly ve spojení s 250 cm zrcadlovým dalekohledem změřeny úhlové průměry několika desítek hvězd. U hvězdy Betelgeuze (α Orionis) se podařilo změřit dokonce i změny v průměru hvězdy — jde o pulsující červenou veleobří hvězdu, jejíž úhlový průměr je asi $0,047''$ a skutečný průměr je větší než průměr dráhy Země kolem Slunce.

V rádiové astronomii se interferometry používají k určení polohy a velikosti rádiových zdrojů. Rádiový interferometr (obr. 3) se skládá ze dvou (nebo i více) od sebe vzdálených radarových antén, spojených přes detektory záření s přijímacím zařízením, v němž se zaznamenává intenzita rádiového záření. Rozlišovací schopnost rádiového interferometru závisí především na vzájemné vzdálenosti antén, která proto bývá co největší a dosahuje až několika kilometrů.

Spektrální analýza

Rozborem spektra kosmických objektů lze získat mnoho cenných informací — proto je spektrální analýza nejvýznamnější metodou sou-

časné astrofyziky. Podle přítomnosti čar ve spektru a jejich intenzity určíme chemické složení zdroje záření a relativní zastoupení jednotlivých prvků. Z celkového průběhu intenzity ve spektru lze usoudit na povrchovou teplotu hvězdy. Tato teplota úzce souvisí s barvou hvězdy a její spektrální třídou²⁾.

Při studiu spekter kosmických objektů je třeba ze spektra eliminovat čáry, které se studovaným objektem nemají nic společného a vznikají buď v mezihvězdném prostředí (interstelární čáry, nazývané též stacionární čáry) nebo při průchodu záření zemskou atmosférou (telurické čáry, tvořené především čarami kyslíku a vodních par).

Rozbor jednotlivých spektrálních čar poskytuje další zprávy o fyzikálních a kinematických vlastnostech tělesa. Z efektů, které se mohou ve spektru vyskytovat, jsou pro astrofyziku nejdůležitější tyto:

1. Dopplerův jev. Pohybuje-li se zdroj záření ve směru zorného paprsku, zaznamenaná pozorovatel změnu vlnové délky spektrální čáry. Jestliže se zdroj přibližuje, vlnová délka se zmenší a čára se posune k fialovému konci spektra; vzdaluje-li se zdroj světla, vlnová délka se zvětší a čára se posune k červenému konci spektra. Změna $\Delta\lambda$ vlnové délky je přímo úměrná radiální rychlosti V_r zdroje a vlnové délce λ

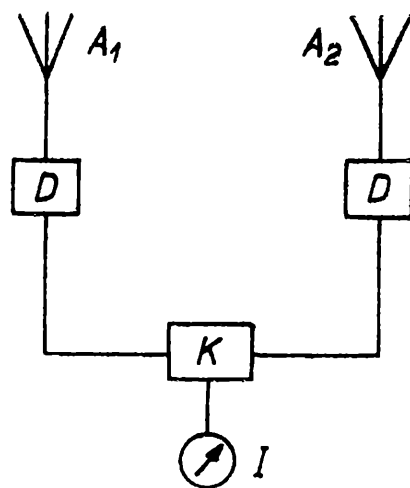
$$\Delta\lambda = \frac{V_r}{c} \lambda,$$

přičemž c je rychlost šíření světla.

Pomocí Dopplerova jevu lze měřit radiální rychlosti s velkou přesností; snadno se přesvědčíme, že při rychlosti zdroje 100 km s^{-1} dosahuje posuv spektrální čáry u vlnové délky 500 nm asi $0,17 \text{ nm}$, což je pro moderní přístroje hodnota snadno měřitelná.

Na základě Dopplerova jevu byly objeveny a proměřeny spektroskopické dvojhvězdy³⁾ a objevena rotace hvězd (rozšíření spektrální čáry).

2. Einsteinův jev. Vzniká-li záření v gravitačním poli, ztratí foton část své energie při výstupu z gravitačního pole a tím se prodlouží jeho



Obr.3. Schéma rádiového interferometru (A_1 , A_2 jsou antény, D detektory, K korelátor a I indikátor záření).

²⁾ Viz článek Spektrální klasifikace hvězd. Rozhledy MF 49, 1970/71, č. 2, str. 72.

³⁾ Viz článek Spektroskopické dvojhvězdy. Rozhledy MF 48, 1969/70, č. 9, str. 427.

vlnová délka. Pro změnu vlnové délky odvodil Einstein vztah

$$\Delta\lambda = 2,1 \cdot 10^{-6} \frac{M_*}{R_*} \lambda,$$

v němž M_* je hmotnost hvězdy vyjádřená v jednotkách hmotnosti Slunce, R_* poloměr hvězdy, vyjádřený rovněž v jednotkách poloměru Slunce. Na Slunci je Einsteinův gravitační posuv řádově 0,0012 nm. U bílých trpaslíků, jejichž hmotnosti jsou řádově rovny hmotnosti Slunce, ale poloměry mnohokrát menší, dosahuje tento posuv až několika desetin nm; např. u van Maanenovy hvězdy je $\Delta\lambda = 0,4$ nm.

3. Humphreysův-Mohlerův jev. Při zvýšení tlaku plynu se spektrální čáry posouvají k červenému konci spektra. Toto posunutí je úměrné tlaku plynu a v jedné sérii čar přímo úměrné vlnové délce záření. Tento jev se také nazývá tlakový efekt.

4. Zeemanův jev. Je-li zdroj čárového spektra v magnetickém poli, rozštěpují se původně jednoduché čáry na několik složek, které jsou navíc polarizovány. Pomocí Zeemanova jevu dokázal již v r. 1908 Američan *Hale* magnetické pole na Slunci, od r. 1947 měřil *Babcock* magnetická pole hvězd.

V rádiové astronomii byla zatím studována jediná spektrální čára, a to čára mezihvězdného neutrálního vodíku, jejíž vlnová délka je 21 cm (kmitočet 1420 MHz).

Po vypuštění prvních umělých družic Země (a částečně i předtím pomocí výškových balónů a raket) bylo možno studovat rentgenové záření, které neustále dopadá na Zemi. Zdrojem tohoto záření je např. sluneční koróna; k zesílení rentgenového záření dochází při chromosférických erupcích. Podobně i záření γ , které tvoří podstatnou část kosmického záření, bylo možné studovat pomocí družic. Kosmické záření se registruje např. pomocí Geigerových-Müllerových počítačů.

Popsané metody astrofyziky se používají nejen ke studiu zdrojů záření, ale také ke studiu těles, která září odraženým světlem, jako jsou Měsíc, planety a jejich družice. Byly změřeny teploty na povrchu Měsíce a planet, složení horních vrstev planetárních atmosfér, některé vlastnosti povrchu planet apod. Aktivní rádiová astronomie umožnila radiolokovat Měsíc, Slunce a některé planety a tím znovu určit jejich vzdálenosti; studuje meteory a meteorické roje, z nichž některé jsou v činnosti v denní době. Největším úspěchem pasivní rádiové astronomie bylo dokázání spirální struktury Galaxie a v poslední době objevy kvazarů a pulzarů.

Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

V roce 1971 uplyne *410 let* od narození Francise Bacona z Verulam, kterého Marx a Engels prohlásili za praotce anglického materialismu a experimentálních věd novověku, a *375 let* od narození René Descartese, zakladatele analytické geometrie a učenice všestranného, vedle Leibnize a Spinozy největšího filosofa 17. století. Málo je známo, že oba tito vědci se nepřímo zapsali i do českých dějin v osudové chvíli *katastrofy bělohorské*, od níž uplyne letos dne 8. listopadu *350 let*.

V „Hrsti vzpomínek“ uvádí autor tuto událost a výročí v historickou a pro naše čtenáře místy dramatickou souvislost. Bacon byl v letech 1617 až 1621 lordem kancléřem anglického dvora, za něho se tedy rozhodovalo, zdali král Jakub má poslat po Čech vojsko na pomoc svému zeti Fridrichu Falckému. Silná anglická intervence mohla tehdy porážce Čechů na Bílé hoře zabránit. Mladý Descartes účastnil se dokonce tažení do Čech i bitvy na Bílé hoře a vstoupil do obsazené Prahy pod prapory bělohorských vítězů.

Názorům Descartovým dává autor podle Zikmunda Wintra proniknout v rozhovoru s M. Janem Kampanem Vodňanským, posledním prorektorem vysokého učení Karlova po Bílé hoře, a v osobním styku s Janem Ámosem Komenským, vyhnancem, který tak trpce prožíval pobělohorskou elegii svého národa. V životě Komenského zrcadlí se úděl českého lidu, zdeptaného Bílou horou, zotročeného surovými vítězi, zbědovaného dlouholetými válkami. I na něho, muže touhy po zdokonalení lidstva a po světovém míru, nechť jsou tyto řádky u příležitosti *300. výročí* jeho úmrtí vděčnou vzpomínkou.

Dne 8. listopadu 1970 uplynulo *350 let* od nešťastné bitvy na Bílé hoře. Bojem trvajícím nemnoho přes hodinu bylo tehdy rychle rozhodnuto nejen o osudu českého povstání proti Habsburkům, ale i o osudu národa, který ztratil svou samostatnost a byl na staletí vydán nejnesmiřitelnějšímu despotismu politickému a náboženskému. Historikové považují tedy právem tuto událost za bělohorskou katastrofu.

Málo je známo, že v této pro náš národ i pro Evropu tak významné době se do českých dějin nepřímo zapsali filosofové a vědci, kteří si

dosahu svého jednání v této osudové chvíli snad nebyli ani plně vědomi: Angličan Francis Bacon z Verulamů (lat. Verulamius) a Francouz René Descartes (lat. Cartesius).

* * *

Francis Bacon¹⁾ z Verulamů, narozený *před 410 lety* roku 1561, byl prorokem, který burcoval lidi ze sterilního scholasticismu. Objektivním významem svého filosofického systému patří již novověku. Od něho pochází heslo: *Scientia est potentia*. Vědění je moc. Bacon žádá však novou vědu; hlásá návrat od Aristotela, od učenosti knižní a rozumování k přírodě a jejímu zkoumání indukci a pokusy. Věda a filosofie mají sloužit životu a pomáhat člověku v jeho snažení ovládnout přírodu. Příroda je jediným zdrojem všeho vědění; toto vědění získáváme zkušeností. Pravou vědou je pro Bacona proto věda empirická, neboť se opírá o zkušenost. *Contemplatio rerum*, pozorování a radost z pozorování jako ve fyzice jsou mu zdrojem všech poznatků. Účelem přírodní vědy jest skutečným poznáním přírody nabýt moci nad ní, obohatit lidský život výzkumy a vynálezy a tak dát lidstvu štěstí. Bacon, podle vlastních slov „*buccinator novi temporis*“ (herold nového věku), věřil, že jen pomocí přírodních věd, jež byly starověkem a středověkem tak zanedbávány, stane se člověk nové doby pánem přírodních sil. „Znalost přírody je totéž jako moc nad přírodou“. Toto heslo, vyřčené rovněž Baconem, je vyjádřením filosofie, jež překračuje hranice spekulace a stává se v rukou svobodného člověka nástrojem činu.

Bacon byl skutečným praotcem anglického materialismu a experimentálních věd novověku²⁾. Sám vykonal také mnoho zdařilých pokusů, jejichž průběh vždy velmi pečlivě zaznamenával. Chtěje zkoušet konzervační účinky sněhu, plnil jím jednou v zimě roku 1626 vykuchanou slepici. Skončil však jako oběť těchto výzkumů: Zemřel záhy nato na následky nachlazení...

Bacon, renesanční filosof a vědec, náležel také k předním státníkům své doby. V letech 1617 až 1621 byl lordem kancléřem anglického dvora. Za jeho kancléřství se rozhodovalo, zdali má král Jakub poslat do Čech vojsko na pomoc svému zeti Fridrichu Falckému. Silná anglická intervence s přispěním protestantské Unie mohla tehdy porážce na

¹⁾ Jiným anglickým badatelem téhož jména je Roger Bacon (1214 až 1294), slovník „*doctor mirabilis*“, matematik a přírodovědec. Obviněn z „magie“, měl stálé spory s církví.

²⁾ Viz Dějiny filosofie II., Praha 1952, str. 118 a 134, v podrobnostech pak dílo Karla Marxe a Bedřicha Engelse „*O historickém materialismu*“, Praha 1950, str. 72.

O „obnovení věd“ usiloval Bacon ve svých spisech „*Instauratio magna*“ a „*Novum organon scientiarum*“. (Do češtiny přel. Č. Stehlík a A. Stejskal, Praha 1922).

Bílé hoře dost snadno zabránit. Anglie neměla však nikdy na osudech malého národa ve střední Evropě zájem...³⁾

* * *

René Descartes, narozený *před 375 lety* roku 1596, je našim čtenářům znám jako zakladatel analytické geometrie a učenec všestranný⁴⁾, vedle Leibnize a Spinozy největší filosof 17. století. Proti mrtvé scholastice středověku usiloval o čistě rozumové (racionalistické) poznávání zákonitostí přírodních jevů; prohlašoval za pochybné vše, co nebylo možno přesně dokázat. Klasický v tom směru je zejména Descartesův výrok: Cogito, ergo sum. Přemýšlím, proto jsem. Myslíci bytosti je podle něho jedinou věcí zcela zajištěnou pouze — její vlastní jsoucnost.

Ve fyzice vytvořil Descartes mechanicko-materialistický obraz světa. Příroda se podle něho skládá z hmotných částic; hmota je věčná a v stálém pohybu, který se uskutečňuje podle zákonů mechaniky. Také Descartesova matematika obsahuje dialektické prvky. Descartese zavedená veličina proměnná je vědecky přesně definovatelný pojem, který vnáší do úvah matematiky pohyb a stává se tak východiskem všech operací zejména počtu infinitesimálního. Ve své slavné „Geometrii“, jež vyšla roku 1637 jako dodatek proslulého Descartesova spisu „Discours de la méthode“, ukázal Descartes, jak lze k řešení geometrických úloh důsledně užít algebry; dosahu této nové vědecké metody si Descartes byl také plně vědom.

Mladý Descartes vstoupil roku 1619 do služeb katolické Ligy a s vojsky bavorského vévody Maxmiliána se účastnil tažení ku Praze i bitvy na Bílé hoře, kde stanul v řadách vítězů...

Po obsazení Prahy byl ubytován v kolleji Karlově. Mistr Campanus⁵⁾ rád s mladým důstojníkem hovořil, máje potěšení z hlubokosti jeho myšlenek. „Jsem přesvědčen, že všechno kolem, co nám smysly podávají, jest jen zdání,“ pravil Descartes. „Jak věci jsou samy o sobě a v podstatě, toho neví nikdo. Smysly nás klamou: Slunce má podle nich formu okrouhlé desky — a deska to není! Rozum shledal, že je to koule,

³⁾ Král Jakub I. Stuart (1603—1625) se sám prohlašoval za „tvůrce míru“. Podobně byl v září 1938 — a opět za cenu našeho utrpení — v Anglii oslavován ministerský předseda Chamberlain, spolutvůrce potupného míru sjednaného na konferenci v Mnichově.

⁴⁾ V podrobnostech viz autorův článek uveřejněný u příležitosti 350. výročí Descartesova narození v „Rozhledech“, roč. 26, čís. 2, str. 33 a 34.

⁵⁾ Mistr Jan Campanus z Vodňan, profesor a poslední prorektor vysokého učení Karlova po Bílé hoře, předal dne 10. listopadu 1622 z rozkazu císařova kolej jesuitům. Dojemnou tragikou působí poslední dny jeho života: Universitu přežil jen o měsíc. Zemřel „u velikém zoufalství“ již dne 13. prosince 1622.

ohromná koule. Ani smyslům nesmíme proto důvěřovati. Všecko klame...

Pochybuji-li však o všem všudy, o své existenci nepochybuji, o té vím, neboť já jsem to, jenž pochybuje a přemýšlí. Moje existence jest první a mně nejbližší pravdou a skutečností. Ostatní pravdy budu pak hledati vždy jen řádem matematickým. Čeho nebude lze dokázati rozumem a matematicky, toho nebudu držeti za pravdu“.⁶⁾

* * *

Roku 1642 navštívil Descarta v Endegeestu v Holandsku Komenský,⁷⁾ známý tehdy již svými myšlenkami pansofie i jako autor učebnic jazyků. Toužil poznat filosofa, jemuž bylo základní jistotou jen vlastní myšlení a jenž nevěřil ničemu, co sám nepoznal. Počáteční nedůvěra záhy roztála ve vzpomínkách. Komenský, představitel národa zbědovaného dlouholetými válkami, vyhnanec, vzpomínal s netajeným žalem na trpící domovinu, Descartes na svůj pobyt v Praze, kam vstoupil pod prapory bělohorských vítězů. V těch vzpomínkách se, oba v daleké cizině, lidsky sešli...

Nemohli se však sejít v názorech filosofických. Renesanční všestranost Komenského, Čecha, který tak trpce prožíval pobělohorskou elegii svého národa, byla prolnta tendencemi etickými a humanistickými, Descartes se naproti tomu ve své přírodní filosofii pokoušel o koncepci mechanicko-materialistickou. „Já nejdu za hranice filosofie,“ řekl smířlivě Komenskému při loučení, „bude tedy asi u mne jen část toho, co u tebe tvoří celek.“⁸⁾

Toto setkání zanechalo v obou hluboký dojem.

Descartes zemřel v 30. roce po bitvě na Bílé hoře roku 1650 ve Švédsku. Drsné podnebí vzdálené severské země podrylo jeho zdraví. Dvacet let nato, v 50. roce po bitvě na Bílé hoře, zemřel dne 15. listopadu 1670 v Amsterdamu, rovněž daleko od své vlasti Komenský.⁹⁾ V jeho životě zrcadlí se úděl českého národa, zdeptaného Bílou horou a surovými vítězi. „Můj celý život byl putováním a neměl jsem vlasti...“ napsal pln bolesti a stesku ve svém posledním díle

⁶⁾ Viz Zikmund Winter: „Mistr Kampanus“, část druhá, kapitola V., „Dráti budou zemi všickni, kteří tudy půjdou“. (Vyd. nakl. J. Otto v Praze 1927, cit. str. 95.)

⁷⁾ K stanovení přesného jména a rodiště Komenského může přispět zápis v dedikaci, připojené k dílu „Clamores Eliae“ (Volání Eliášovo). Vlastnoruční podpis Komenského, který tam nalézáme, zní: Jan Amos Ko- (škrtnuto) Šegeš Nivnický, po otci zvaný Komenský.

⁸⁾ Viz Fr. Kožík: Světlo v temnotách. (Bolestný a hrdinský život Jana Amose Komenského), Praha 1970. Cit. str. 89.

⁹⁾ K 300. výročí této události vyšel v tomto ročníku našeho časopisu autorův článek „Komenský a přírodní vědy“.

„Unum necessarium“ (Jednoho je třeba). Učitel národů, vášnivě toužící po lepší tváři lidstva, muž věčného hledání, muž touhy po zdokonalení lidstva a po světovém míru, skončil svůj život jako vyhnanec v nerovném boji s násilnickým světem. Jeho hrob v Naardenu upadl v zapomenutí. Trvalo 267 let, než byl tamější valonský kostelík péčí našeho národa upraven v důstojné mausoleum Jana Amose Komenského.

Ze zahraničních časopisů

Neuškodí, jestliže se podíváme k sousedům do NDR, jaké příklady dávají svým olympionikům. Pokuste se je rozřešit a považujte to za část přípravy na naši MO, případně na MMO. Uvádíme 6 příkladů z 10. olympiádní třídy (Olympiadeklasse 10). Řešení nám však nezasílejte.

1. Máme najít všechny páry přirozených čísel takových, aby každý z párů spolu s číslem 41 tvořil trojici té vlastnosti, že součet všech čísel trojice je čtverec přirozeného čísla a také součet každých dvou čísel této trojice je čtverec přirozeného čísla.

2. Jsou dána kladná reálná čísla a, b , o nichž platí $a \neq 1, b \neq 1$. Najděte všechna reálná čísla x , pro něž platí

$$(\log_a x)(\log_b x) = \log_a b.$$

3. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Střed stěny $ADHE$ (stěny $CDHG$) označme K (L). X je libovolný bod hrany EH , Y je bod hrany CD , pro nějž platí $EX = DY$. Dokažte, že střed úsečky XY leží na úsečce KL .

4. Dokažte tuto větu: Nechť $s \neq 0, t \neq 0$ jsou různá reálná čísla a nechť a, b, c jsou tři různé kořeny rovnice

$$sx^2(x-1) + t(x+1) = 0.$$

Potom platí

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = -1$$

5. Je dán trojúhelník ABC , jehož opsanou kružnici označme k . Se-strojme kružnice k', k'' , které jsou navzájem různé, procházejí vrcholy A, B a mají své středy na k . Potom střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží buď na k' nebo na k'' .

6. Dokažte tuto větu: Jestliže a, b, c jsou vesměs lichá čísla, potom rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

nemá žádný racionální kořen.

S. H.

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

Konstruktivní geometrie

3. Sestrojte kružnici, která na ose x vytíná tětivu délky a , na ose y tětivu délky b ($b < a$) a má střed na dané přímce p .
(Došlo 5 řešení)

Ota Setzer

Riešil Jiří Šafařík, 3.b SVŠ J. Hronca, Bratislava :

Rozbor: Hľadanú kružnicu označme $k \equiv (S; r)$. Vzdialenosť bodu S od osi y je x , od osi x je y . Na osi x nech vytína tětivu $AB = a$, na osi y tětivu $CD = b$. Potom zrejme je (obr. 1)

$$y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2; \quad x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2,$$

teda

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Stredy S ležia na rovnoosej hyperbole so stredom v počiatku, s osami v x, y , pričom jej osi

$$a' = b' = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Hľadaný stred S leží v priesečníku rovnoosej hyperboly h a priamky p . Ohniska hyperboly h označme F_1, F_2 , jej priesečníky s priamkou p sú S_1, S_2 . Body S_1, S_2 sú stredy kružníc k_1, k_2 , ktoré sa dotýkajú riadicej kružnice $k' \equiv (F_1; 2a')$ a prechádzajú bodom F_2 . Pretože $S_1, S_2 \in p$, kružnice k_1, k_2 prechádzajú bodom F_2' sumerne združeným s F_2 podľa p .

Zvolme si kružnicu $k'_1 = (S'_1; r_1)$, $S'_1 \in p$, $F_2, F'_1 \in k'_1$, ktorá pretína aj kružnicu k' . Potom $k'_1 \cap k_1$ je zrejme F_2, F'_2 ; nech $k'_1 \cap k'$ su M, N , potom priamky $F_2F'_2$ a MN sú chordály kružníc k'_1k_1 a k'_1k' . Prienik

The diagram illustrates a complex geometric construction in a Cartesian coordinate system with x and y axes. It features several circles and points:

- Circles:** A solid circle k_1 centered at F_1 on the x-axis. A larger solid circle k_2 is centered at F_2 on the x-axis. A dashed circle k' is centered at F'_1 on the y-axis. Another dashed circle k'_1 is centered at S'_1 . A line p is tangent to k'_1 at point N . A line h is tangent to k_1 at point N .
- Focal Points:** F_1 and F_2 are on the x-axis. F'_1 and F'_2 are on the y-axis.
- Other Points:** S_1 and S'_1 are on the x-axis between F_1 and the origin. S_2 is on the x-axis to the right of F_2 . T_1 and T_2 are on circles k_1 and k_2 respectively. M is on circle k_1 . P is a point above the x-axis. N is the point of tangency for lines p and h .
- Lines and Tangents:** Dashed lines connect F_1 to T_1 , F_2 to T_2 , F'_1 to T_1 , and F'_2 to T_2 . Lines t_1 and t_2 are also shown. A line p is tangent to k'_1 at N . A line h is tangent to k_1 at N .
- Dimensions:** In the top left, a right triangle is shown with legs a' and $b/2$, and hypotenuse $\sqrt{2}a$. To its left, vertical dimension lines indicate distances a and b .

Konstrukcia:

1. $a' = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2};$
2. vrcholy A, B hyperboly h a jej ohniská F_1, F_2 ;
3. kružnice $k' \equiv (F_1; 2a')$;
4. bod F'_2 a kružnicu $k'_1 = (S'_1; r_1)$, $S'_1 \in p$, $F_2, F'_2 \in k'_1$ tak, aby $k' \cap k'_1 = M, N$;
5. priesečník $P \equiv F_2F'_2 \cap MN$;
6. z bodu P dotýčnice t_1 a t_2 ke k' ;
7. $F_1T_1 \cap p \equiv S_1$; $F_1T_2 \cap p = S_2$;

Dôkaz:

Prevedieme obrátením postupu v rozpore.

Diskusia:

1. Priamka p obsahuje bod F_2 , potom priamka $PF_2 \perp p$ a konštrukcia je analogická.

2. Bod F'_2 leží von z kružnice $k' \equiv (F_1; 2a')$. V týchto prípadoch má úloha práve dve riešenia.

3. Bod F'_2 leží na kružnici $k' \equiv (F_1; 2a')$. Priamka p je dotyčnicou hyperboly a úloha má práve jedno riešenie.

4. Bod F'_2 leží vnútri kružnice $k' \equiv (F_1; 2a')$, úloha nemá riešenie.

4. Sestrojte rotační paraboloid, jsou-li dány body A, B jedné a body C, D druhé rovnoběžkové kružnice paraboloidu; přímky AB, CD jsou přitom mimoběžné.

(Došlo 5 řešení.)

Ota Setzer

Riešil: Jiří Šafařík 3 b SVŠ J. Hronca, Bratislava (obr. 2)

Rozbor: Kružnice paraboloidu k (k') prochádzajúca bodmi A, B (C, D), leží v rovine ϱ (ϱ'); potom $\varrho \parallel \varrho'$, $AB \parallel \varrho'$, $CD \parallel \varrho$. Stred S (S') kružnice k (k') leží na osi o (o') úsečky AB (CD) v rovine ϱ (ϱ'). Os p rotácie paraboloidu je kolmá na ϱ (ϱ'), pričom $p = SS'$. Os p určíme ako priesečnicu rovín súmernosti σ (σ') úsečiek AB, CD . Otočením bodov A, C kolem priamky p do roviny $\tau \in p$ dostaneme body A', A'' a C', C'' meridianovej paraboly, pričom A', A'' aj C', C'' sú súmerne združené podľa osy p . Na osi p dostaneme pár združených pólov: $P \equiv A'C'' \cap p$, $P' \equiv A'C' \cap p$. Pretože jeden bod harmonickej štvorice $(PP'VV')$ je úbežným bodom V'_∞ , rozpoluje vrchol V paraboly vzdialenosť PP' . Vrcholová dotyčnica $v \perp p$, $V \in v$. Dotyčnica t paraboly pretnie os v bode T ($SV = VT$).

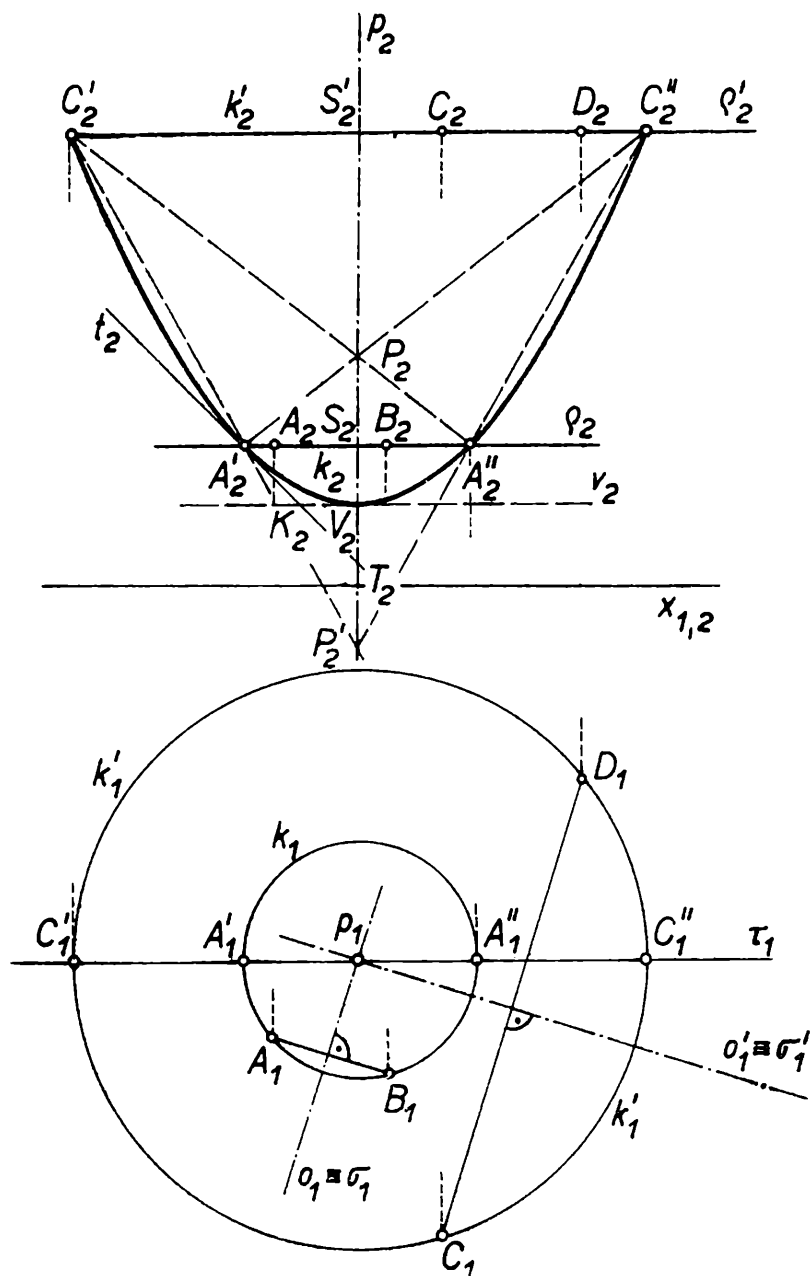
Konstrukcia ohniska F o direktrix je zrejmá ($t \cap v = K$, $KF \perp t$).

Konstrukcia: Rovinu π volíme rovnobežne s rovinou ϱ .

1. Zostrojíme priemety σ_1, σ'_1 rovín súmernosti σ, σ'

2. Zostrojíme prienik $\sigma \cap \sigma' \equiv p$ (p_1 bod, $p_2 \perp x_1, x_2$).

3. Body A, C do roviny $\tau \parallel \nu$ do poloh A', A'' a C', C'' .
 4. Zostrojíme kružnice k, k' a parabolu v skutočnej veľikosti.
- Dôkaz: Prevedieme obrátením rozboru.



Obr. 2

Diskusia: Z jednoznačností konštrukcií 1—4 a ich možnosti vyplýva práve jedno riešenie danej úlohy, ak priemery $A'A''$ a $C'C''$ sú rôzne. Ak $A'A'' = C'C''$, vznikne valec.

1. Experimentálně bylo zjištěno, že všechny částice mají vedle korpuskulárních vlastností i vlastnosti vlnové. Francouzský fyzik de Broglie pak našel vztah, podle kterého můžeme každé částici přiřadit určitou vlnovou délku λ .

a) Vypočítejte, jaká vlnová délka v Å přísluší elektronům urychleným potenciálem 100 V.

b) Foton a elektron mají stejnou kinetickou energii rovnou 1 eV. Který z nich má větší délku vlny?

(Došlo 22 řešení)

Zdeněk Janout

Řešil Jan Kohout, 3s, SVVŠ Brno:

a) Rychlost elektronů v urychlených potenciálem 100 V je řádově menší než rychlost světla. Proto můžeme pro kinetickou energii elektronů W_k použít vztahu

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad (1)$$

kde m je klidová hmotnost elektronu. Z rovnice (1) dostaneme pro rychlost v vztah

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}}. \quad (2)$$

Časticím pohybujícím se rychlostí v přiřadil de Broglie vlnovou délku λ , která je dána vztahem

$$\lambda = \frac{h}{m v}, \quad (3)$$

kde m je hmotnost částice a h je Plankova konstanta.

Použitím vztahů (2) a (3) dostaneme

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 W_k m}}. \quad (4)$$

Elektrické pole vyvolané potenciálem U vykoná urychlením elektronu práci A , pro níž platí

$$A = e U, \quad (5)$$

kde e je náboj elektronu. Tato práce A se rovná kinetické energii elektronu, tedy

$$A = W_k \quad (6)$$

Ze vztahů (4) až (6) plyne

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 e U m}}, \quad (7)$$

což je hledaný vztah.

Pro číselné řešení vyhledáme v tabulkách hodnoty Plankovy konstanty, hmotnosti elektronu a náboje elektronu

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}, \quad m = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, \quad e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Po dosazení číselných hodnot do vztahu (7) dostaneme

$$\lambda = 1,226 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 1,226 \text{ Å}.$$

Odpověď: Vlnová délka příslušející elektronům urychleným daným potenciálem je určena vztahem (7) a číselně se rovná 1,226 Å.

b) Délku vlny elektronu určíme podle vztahu (4). Výpočtem zjistíme, že $\lambda_e = 1,226 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

Energie fotonu je určena vztahem

$$W_f = h \nu, \quad (8)$$

kde h je Plankova konstanta a ν je frekvence fotonu pro níž platí

$$\nu = \frac{c}{\lambda_f}, \quad (9)$$

(c - rychlost světla, $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Ze vztahů (8) a (9) dostáváme vztah

$$\lambda = \frac{hc}{W_f}. \quad (10)$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme $\lambda_f = 1,240 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

Porovnáme-li vlnovou délku fotonu a elektronu, obdržíme $\lambda_f \gg \lambda_e$.

Odpověď: V daném příkladě je vlnová délka fotonu mnohem větší než vlnová délka elektronu.

2. Pod jakým výškovým úhlem α musíme z počátku vrhnout hmotný bod danou rychlostí v_0 , abychom zasáhli bodový cíl (x, y) ?

(Došlo 19 řešení)

Josef Kotyk

Řešil Petr Fírbas, 2 s roč. SVVŠ, Brno:

Po čase t , počítaném od počátku pohybu, jsou souřadnice hmotného bodu

$$x = v_0 t \cdot \cos \alpha, \quad y = v_0 t \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Vyloučíme-li z obou rovnic proměnnou t , vychází rovnice parabolické dráhy ve vakuu

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2.$$

Při dané počáteční rychlosti v_0 a známých souřadnicích bodového cíle (x, y) řešíme odvozenou rovnici jako goniometrickou pro neznámý

výškový úhel α v upraveném tvaru rovnice kvadratické

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x \operatorname{tg} \alpha + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right) = 0$$

a nalézáme kořeny

$$(\operatorname{tg} \alpha)_{1,2} = \frac{v_0^2}{gx} \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} \cdot \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right)} \right]$$

Podle znaménka diskriminantu

$$D = 1 - \frac{2g}{v_0^2} \cdot \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right)$$

mohou nastat tři případy:

I. Je-li $D < 0$, cíl nelze zasáhnout.

II. Je-li $D > 0$, lze cíl zasáhnout dvěma vrhy vykonanými pod výškovými úhly α_1, α_2 ($\alpha_1 \neq \alpha_2$).

III. Je-li $D = 0$, lze cíl zasáhnout jedním vrhem vykonaným pod výškovým úhlem α , o němž platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Podmínka $D = 0$ je rovnicí tzv. ochranné paraboly

$$y - \frac{v_0^2}{2g} = - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Každý cíl vně této paraboly (např. na ose X body, jejichž $x > \frac{v_0^2}{2g}$, na ose Y body, jejichž $y > \frac{v_0^2}{2g}$) je nedosažitelný.

3. V akej vzdialenosti (h) od povrchu Zeme, ktorej rovníkový polomer je $R = 6378$ km, by musel obiehať po kruhovej dráhe Sputnik, aby sa trvale nehnute vznášal nad tým istým bodom zemského rovníka, tj. aby mal obežnú dobu $T_2 = 24$ hodín? Riešte pomocou tretieho zákona Keplerovho, ak viete, že obežná doba Luny je $T_1 \doteq \doteq 27 \frac{1}{3}$ dňa $= 2,36 \cdot 10^6$ s a jeho stredná vzdialenosť od stredu Zeme je $r_1 = 3,84 \cdot 10^5$ km. Dokážte, že rýchlosť tohto (stacionárneho čiže „staceho“) Sputnika možno určiť vzorcom

$$v_2 = \frac{2\pi r_1}{\sqrt[3]{T_1^2 T_2}}.$$

Riešte najprv obecné a potom vyčísľte dosadením daných hodnôt. Výsledky stanovte len na 3 platné miesta!
(Došlo 24 riešení)

Evžen Říman

Riešil Rudolf Rabas, III c SVŠ, Holič:

Označíme si potrebné veličiny: hmotnosť m , stredná vzdialenosť družice od stredu Zeme r , obežná doba (kruhovú) T , rýchlosť družice na obežnej dráhe v . Index 0 nech značí Zem, 1 značí Lunu, index 2 sa vzťahuje na Sputnika. Rovníkový polomer Zeme je R , gravitačná konštanta κ , tiažové zrýchlenie na povrchu zemskom je $g \doteq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Hľadaná vzdialenosť Sputnika od stredu Zeme je h .

Našu Zem možno považovať za stred „Zemskej sústavy“ a Lunu so Sputnikom za planéty, ktoré ju obieľajú. Pre výšku Sputnika h nad zemským povrchom platí vzťah

$$h = r_2 - R, \quad (1)$$

z čoho

$$r_2 = h + R. \quad (1a)$$

Tretí Keplerov zákon znie: „Druhé mocniny obežných dôb (periód) dvoch planiet sú v tomže pomere ako tretie mocniny veľkých polosí ich dráh.“ Pre kružové dráhy platí potom

$$T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3, \quad (2)$$

z čoho

$$r_2 = h + R = r_1 \sqrt[3]{T_2^2/T_1^2} \quad (3)$$

teda

$$h = r_1 \sqrt[3]{(T_2/T_1)^2} - R. \quad (3a)$$

Dimenzionálna správnosť je zrejmá (pomer T_2/T_1 je bezrozmerný). Pre dané hodnoty najdeme (logaritmickým výpočtom)

$$\begin{aligned} \log r_2 &= \log (h + R) \doteq \\ &\doteq 7,626\,54 \Rightarrow r_2 \doteq 4,232 \cdot 10^7 \text{ m} \doteq h \doteq 3,594 \cdot 10^7 \text{ m}, \end{aligned}$$

čo zaokrúhlené na 3 platné miesta dá

$$h \doteq 35\,900 \text{ km}. \quad (3b)$$

Obežnú rýchlosť Sputnika určíme ako podiel dĺžky obvodu obežnej kružnice a času obehu, takže po malej úprave vyjde

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2} = \frac{2\pi}{T_2} \cdot r_1 \sqrt[3]{(T_2/T_1)^2} = \frac{2\pi r_1}{\sqrt[3]{T_1^2 \cdot T_2}} \quad (4)$$

čo sme mali dokázať.

Tento výpočet podľa tretieho Keplerovho zákona kontrolovali niektorí riešitelia inou metódou:

Ján Trgiňa, III b SVVŠ Ostrava, Hladnov pridal druhé riešenie užívajúc gravitačný zákon a známy vzťah

$$gR^2 = \kappa m_0, \quad (5)$$

ktorý udáva súvislosť tiažového zrýchlenia g (na povrchu Zeme) a hmotnosti Zeme m_0 (κ značí gravitačnú konštantu).

Rýchlosť v_2 kruhového pohybu Sputnika sa najde vzťahom

$$v_2 = 2\pi r_2 / T_2. \quad (4a)$$

Pre odstredivé zrýchlenie platí dôležitý vzorec

$$a = v^2 / r, \quad (6)$$

teda odstredivé zrýchlenie Sputnika bude

$$a_2 = v_2^2 / r_2 = 4\pi^2 r_2 / T_2^2 \quad (6a)$$

a odstredivá sila na Sputnik je

$$F_2 = m_2 a_2 = 4\pi^2 r_2 m_2 / T_2^2. \quad (7)$$

Podľa Newtonovho gravitačného zákona pôsobí Zem na Sputnika príťažlivou silou (m_0 je hmotnosť Zeme)

$$F_1 = \kappa m_0 m_2 / r_2^2. \quad (8)$$

Z rovnosti síl $F_1 = F_2$ dostaneme po úprave

$$r_2^3 = \kappa m_0 \frac{T_2^2}{4\pi^2} \quad (9a)$$

a dosadením (5) do (9a)

$$r_2^3 = gR^2 T_2^2 / (4\pi^2), \quad (9b)$$

čo pre dané hodnoty ($T_2 = 8,64 \cdot 10^4$ s; $g = 9,81$ m . s⁻²) dá výsledok $\log r_2 = 7,625\ 90$, $r_2 \doteq 4,226 \cdot 10^7$ m, resp. $h = 3,588 \cdot 10^7$ m. Ak zaokrúhlime na 3 platné miesta dostaneme — to isté ako prv — tj.

$$h \doteq 35\ 900 \text{ km}.$$

Vzorec (9b) už neobsahuje dáta Luny.

Analogické druhé riešenie (kontrolné) poslal *Luboš Pospíšil*, III b SVVŠ Brno, ktoré sa odlišuje od predošlého len tým, že neužíva pre hmotnosť Zeme vzťahu (5), ale určuje ju z dát Luny:

„Gravitačná sila, ktorou Zem pôsobí na Lunu je

$$F_{ZL} = \kappa m_0 m_1 / r_1^2; \quad (10)$$

je rovnaká ako odstredivá sila pôsobiaca na Lunu, tj.

$$F_L = m_1 v_1^2 / r_1, \quad (11)$$

kde obežná rýchlosť Luny je

$$v_1 = 2\pi r_1 / T_1. \quad (11a)$$

Z rovnosti $F_{ZL} = F_L$ a po dosazení vztahu (11a) dostaneme pro hmotnost Zeme vztah

$$m_0 = \frac{4\pi^2 r_1^3}{\kappa T_1^2}, \quad (11b)$$

ktorý dosadený do (9a) dá

$$r_2 = h + R = r_1 \sqrt[3]{(T_2/T_1)^2},$$

čiže zasa už najdený vztah (3).

Výhodou tohto kontrolného riešenia, kde vlastne je gravitačný zákon užitý dvakrát — raz pre účinok Zeme na Sputnika a druhý raz na Lunu — je, že netreba robiť numerický výpočet, ale dostaneme ten istý vzorec ako pri metóde 3. Keplerovho zákona.

Vidíme teda, že správny vztah (3) možno odvodiť alebo z tretieho Keplerovho, alebo z gravitačného zákona. Tým sme poučení, že musí byť možné z 3. Keplerovho zákona odvodiť zákon gravitačný, čo spravil až I. Newton. Ináč povedané, už Kepler sám mal možnosť objaviť gravitačný zákon!

4. V homogenním magnetickém poli o indukci B , jehož siločáry směřují svisle dolů, je vodič odporu R na dvou rovnoběžných tlustých měděných tyčích, které leží v téže vodorovné rovině. Tyče mají vzdálenost l metrů a jejich odpor lze zanedbat. Působením tíhy G závaží, které je zavěšeno na konci lana vedeného od středu vodiče přes kladku, se vodič posunuje rovnoměrně po tyčích stálou rychlostí v . Máme vypočítat napětí U ve vodiči, proud I a hmotnost m závaží

- a) jsou-li konce obou tyčí spojeny odporem R_1 ;
- b) jsou-li konce obou tyčí spojeny na krátko.

Úlohu řešte nejprve obecně a do výsledku dosadte $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $B = 1 \text{ T}$, $l = 0,4 \text{ m}$, $R_1 = 0,15 \Omega$ a $R = 0,01 \Omega$.
(Došlo 17 řešení)

František Vencálek

Řešil Jiří Binder, II B G, Moravské Budějovice :

a) Jestliže se vodič délky l , kolmý k siločarám magnetického pole o indukci B , pohybuje kolmo k siločarám rychlostí v , vzniká na jeho koncích indukované napětí

$$U_e = Blv$$

Poněvadž je celkový odpor obvodu $R + R_1$, má Ohmův zákon pro celý obvod tvar

$$U_e = (R + R_1) \cdot I,$$

kde I je proud tekoucí obvodem.

Dosazením za U_e dostáváme

$$Blv = (R + R_1) \cdot I$$

a tedy

$$I = \frac{Blv}{R + R_1}.$$

Na vodiči naměříme svorkové napětí

$$U_s = U_e \frac{R_1}{R + R_1} = \frac{Blv R_1}{R + R_1}$$

Na proudovodič A působí pak závaží tíhou mg a magnetické pole silou

$$F = BlI,$$

tj. silou

$$F = \frac{B^2 l^2 v}{R + R_1}.$$

Poněvadž se vodič A pohybuje rovnoměrně, jsou obě síly opačné, takže platí vztah

$$mg = \frac{B^2 l^2 v}{R + R_1}$$

a

$$m = \frac{B^2 l^2 v}{g (R + R_1)}.$$

b) V tomto případě je $R_1 = 0$, takže

$$U_e = Blv, I = \frac{Blv}{R}, U_s = 0$$

a

$$m = \frac{B^2 l^2 v}{gR}.$$

Pro hodnoty udané v textu dostáváme:

$$a) U_e = 1 \text{ T} \cdot 0,4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,8 \text{ Vsm}^{-2}\text{m}^2\text{s}^{-1} = 0,8 \text{ V},$$

$$I = \frac{0,8 \text{ V}}{0,16 \Omega} = 5 \text{ A}, U = 0,8 \text{ V} \frac{0,15}{0,16} = 0,75 \text{ V},$$

$$m = \frac{1 \text{ V s m}^{-2} \cdot 0,4 \text{ m} \cdot 5 \text{ A}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 0,2 \text{ Jm}^{-2}\text{s}^2 = 0,2 \text{ kg m}^2\text{s}^{-2}\text{m}^{-2}\text{s}^2 = \\ = 0,2 \text{ kg, je-li } g \doteq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$b) U_e = 0,8 \text{ V}, I = \frac{0,8 \text{ V}}{0,01\Omega} = 80 \text{ A}, U_s = 0,$$

$$m = \frac{1 \text{ Vsm}^{-2} \cdot 0,4 \text{ m} \cdot 80 \text{ A}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}} = 3,2 \text{ kg}$$

5. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníka ABC je nalézt působiště M tří sil F_1, F_2, F_3 , které jsou v rovnováze a jejichž směry jsou udány po řadě orientovanými úsečkami MA, MB, MC a jejichž velikosti jsou a) rovny délkám těchto úseček, b) úměrny délkám stran, tj. $F_1 = ka, F_2 = kb, F_3 = kc$.

(Došlo 17 řešení)

Dr. Václav Vilímek

Řešila Helena Husová, 2. g S VVŠ, Praha 2:

a) Koncové body vektorů F_1, F_2, F_3 umístěných počátkem do bodu M jsou po řadě A, B, C . Koncový bod vektoru $-F_1$ s počátkem v M označme A' . Podle podmínek úlohy je $MBA'C$ rovnoběžník, takže úsečky MA', BC se půlí. Poněvadž A leží v přímce MA' , je M nutně těžištěm trojúhelníka ABC . Obráceným postupem dokážeme, že bod $M \neq T$, kde T je těžiště trojúhelníka ABC , skutečně splňuje podmínky úlohy.

b) Koncové body vektorů F_1, F_2, F_3 s počátkem v bodě M označme po řadě A_1, B_1, C_1 . Vektor $-F_1$ budiž MA'_1 . Platí

$$\triangle A'_1MC_1 \sim \triangle ABC, \triangle A'_1B_1M \sim \triangle ABC$$

Proto

$$\sphericalangle B_1MC_1 = \beta + \gamma,$$

kde β, γ jsou vnitřní úhly trojúhelníka ABC při vrcholech B , resp. C . Poněvadž B, C leží po řadě v polopřímkách MB_1, MC_1 , je také

$$\sphericalangle BMC = \beta + \gamma, \quad \sphericalangle AMC = \alpha + \gamma, \quad \sphericalangle AMB = \alpha + \beta.$$

Dokážeme, že tyto tři vztahy splňuje jediný bod, a to ortocentrum V trojúhelníka ABC .

Označme B_0 patu výšky spuštěné z vrcholu B a C_0 patu výšky z vrcholu C . Potom je

$$\begin{aligned} \sphericalangle AB_0B &= \sphericalangle BC_0V = \frac{1}{2}\pi, \\ \sphericalangle B_0BA &= \sphericalangle VBC_0, \end{aligned}$$

takže

$$\sphericalangle BVC_0 = \sphericalangle B_0AB = \alpha.$$

Obdobně

$$\sphericalangle AVC_0 = \beta$$

a tedy

$$\sphericalangle AVB = \alpha + \beta.$$

Stejně dokážeme

$$\sphericalangle BVC = \beta + \gamma, \quad \sphericalangle AVC = \alpha + \gamma$$

Oblouky nad tětivami AB , BC s příslušnými obvodovými úhly $(\alpha + \beta)$, $(\beta + \gamma)$ mají uvnitř trojúhelníka ABC jediný společný bod V (dalším společným bodem je B).

Obráceným postupem dokážeme, že bod $M \equiv V$, kde V je průsečík výšek (ortocentrum) trojúhelníka ABC , vyhovuje podmínkám úlohy.

Závěr. Hledané působíště je a) těžiště trojúhelníka ABC , b) ortocentrum trojúhelníka ABC .

6. Jak velký je celkový ohmický odpor mezi vrcholy 1 a 7 (krychle obr. 1), je-li odpor 1Ω zapojen:

a) v každé hraně krychle;

b) jako v a) a kromě toho v obou úhlopříčkách každé stěny krychle (přitom se předpokládá, že dva vodiče se mohou dotýkat jen ve vrcholu krychle);

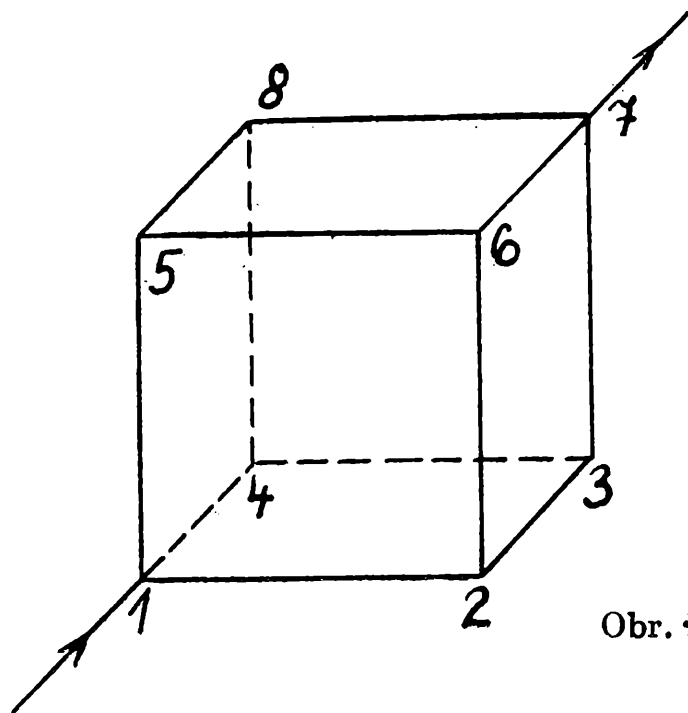
c) jako v a), b) a kromě toho v každé tělesné úhlopříčce.

(Došlo 18 řešení)

Zdeněk Vorel

Riešil Peter Varša, III.A SVŠ, Spišská Nová Ves :

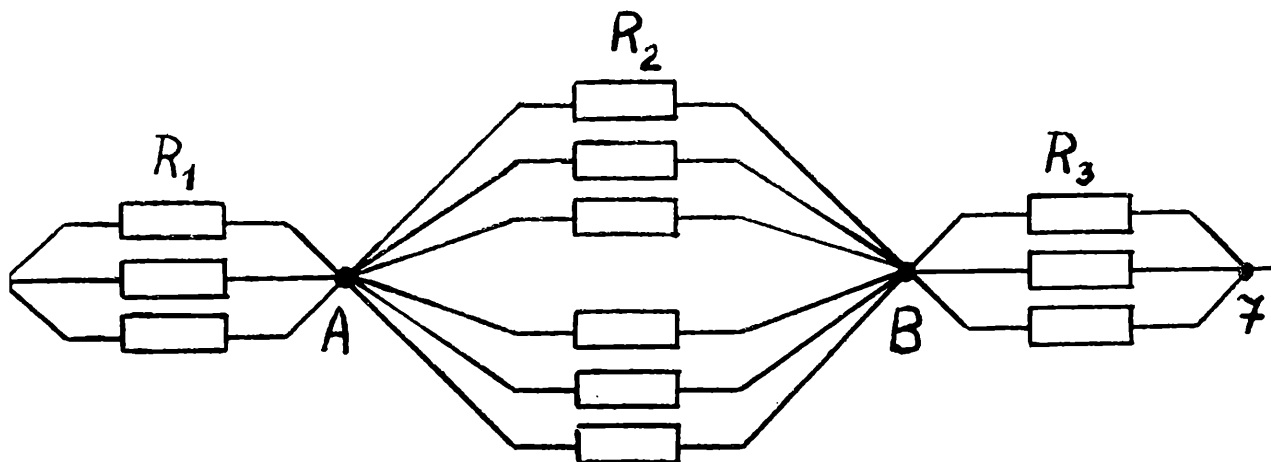
a) Prúd vstupuje do kocky (obr. 1) vrcholom 1 a vystupuje vrcholom 7. Keďže vo všetkých hranách je zapojený rovnaký odpor 1Ω ,



Obr. 1

body 2, 4, 5 majú rovnaký potenciál φ_1 , body 3, 6, 8 rovnaký potenciál φ_2 . Preto vrcholy 2, 4, 5 môžeme nahradiť jedným vrcholom A , vrcholy 3, 6, 8 druhým vrcholom B . Potom dostávame seriové zapo-

jenie 1, A, B, 7 podľa obr. 2. V ňom medzi uzlami 1, A a B, 7 sú zapojené 3 paralelné vodiče, medzi A, B 6 paralelných vodičov, každý s odporom $1\ \Omega$.



Platí

Obr. 2

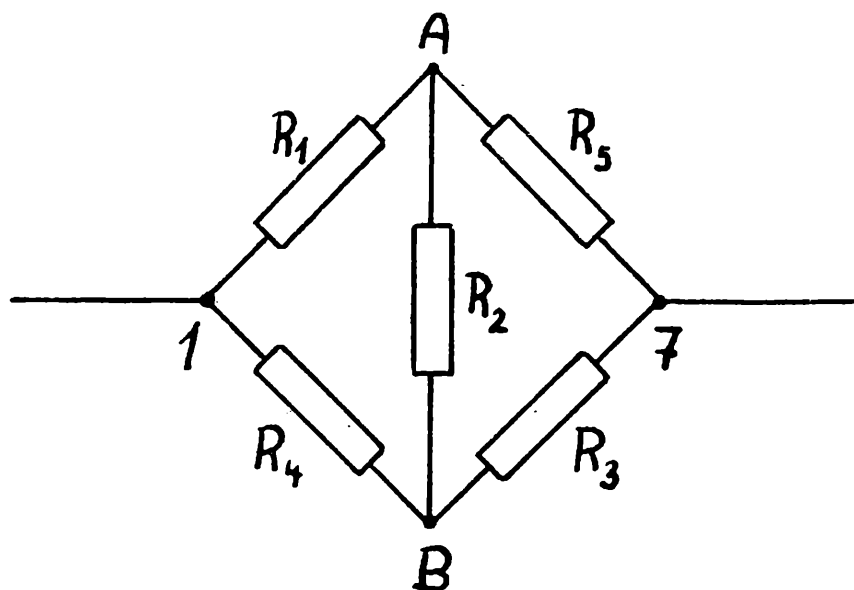
$$R_a = R_{1a} + R_{AB} + R_{B7},$$

$$\frac{1}{R_{1A}} = 3\ \Omega; \quad \frac{1}{R_{AB}} = 6\ \Omega; \quad R_{B7} = 3\ \Omega = R_{1A} = \frac{1}{3}\ \Omega;$$

$$R_{AB} = \frac{1}{6}\ \Omega; \quad R_{B7} = \frac{1}{3}\ \Omega,$$

$$R_a = \frac{5}{6}\ \Omega.$$

b) Uvažujme podobne ako v a), okrem predešlých odporov máme však ešte aj odpory uhlopriečne v stenách. Z úvahy v a) priamo vyplýva, že uhlopriečkami (2, 4), (2, 5), (4, 5) a (3, 6), (3, 8), (6, 8) nepretéka prúd (sú na rovnakom potenciále). Zo zvyšných uhlopriečok



Obr. 3

dostávame novú vetvu 3 paralelných odporov medzi uzlami 1, B a novú vetvu troch paralelných odporov medzi A , 7; dostávame tak zapojenie podľa obr. 3

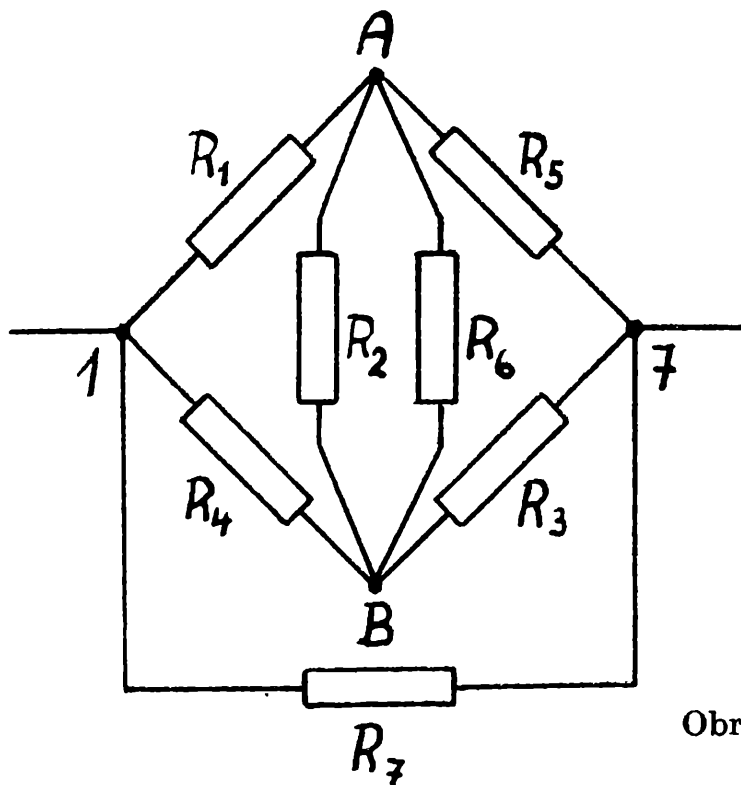
$$R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = \frac{1}{3} \Omega$$

Body A , B ležia na rovnakom potenciálu, preto odporom R_2 neprechádza prúd

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{R_1 + R_4} + \frac{1}{R_5 + R_3} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

$$R_b = \frac{1}{3} \Omega.$$

c) Úvaha ako v a) i b), okrem predošlých odporov máme 3 odpory, ktoré spájajú uzol A s uzlom B a jeden spájajúci uzol 1 s uzlom 7 podľa



Obr. 4

schémy 4. V b) sme dokázali, že medzi body A a B nepretéka prúd, čo platí pre prípad c), čiže odpory R_2 a R_b neuvažujeme.

Tedy

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_7} = 4,$$

čiže

$$R_c = \frac{1}{4} \Omega.$$

NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM



22. Jaká je délka hodinové ručičky, jestliže její konec za 1 minutu opíše oblouk délky 1 cm.

23. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a . E je střed strany AB , F je střed strany BC a G je střed strany AD . Úsudkem (bez počítání) určete obsah trojúhelníka EFG .

24. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$, jejíž hrana má délku a . Označme U střed stěny $ABCD$, V střed stěny $BCC'B'$.

a) Ukažte, že trojúhelník BUV je rovnostranný. Vypočtete jeho obsah.

b) Vypočtete objem čtyřstěnu $ABUV$.

25. Která přirozená čísla musíme dosadit do výrazů

a) $\frac{6}{x-1}$, b) $\frac{x}{x-1}$, c) $\frac{x}{x-4}$,

aby výsledek dosazení byl opět přirozené číslo?

26. Na jedné tabulce ze staré Babylónie, asi tak z roku 1700 př. n. l., je klínovým písmem zaznamenána tato úloha:

V obdélníku vypočtu obsah, znásobím-li délku šířkou. Rozdíl délky a šířky přičtu k obsahu a dostanu 183. Dále sečtu délku a šířku a dostanu 27. Vypočtete délku, šířku a obsah obdélníku.

Řešení. 22. 9,6 cm. 23. $\frac{1}{4}a^2$. 24. $UB = BU = BV = \frac{1}{2}a \sqrt{2}$. Obsah je $\frac{1}{8}a^2\sqrt{3}$. Objem je $\frac{1}{24}a^3$. 25. a) $x = 2, 3, 4, 7$; b) $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, $x = 2$; c) $\frac{x}{x-4} = \frac{x-4+4}{x-4} =$

$= 1 + \frac{4}{x-4}$, $x = 5, 6, 8$. 26. Existují dvě řešení: 14, 13, 182; 15, 12, 182.

27. A ještě jednu úlohu ze staré Babylónie z téže doby. Tato úloha nám dokazuje, že již tenkrát znali vzorec $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Profil hráze má tvar rovnoramenného lichoběžníku. Jeho základny jsou a, b , výška je v a sklon $s = \frac{a-b}{2v}$, obsah je P . Máme určit zbývající prvky, známe-li a, s, P (obr. 1).

Tentokrát uvedeme podrobnější řešení.

$$2s = \frac{a-b}{v}$$

$$2P = (a+b)v$$

Znásobíme obě rovnice a po kratší úpravě dostaneme

$$b^2 = a^2 - 4sP.$$

Je zajímavé, že této poslední rovnice tenkrát použili.

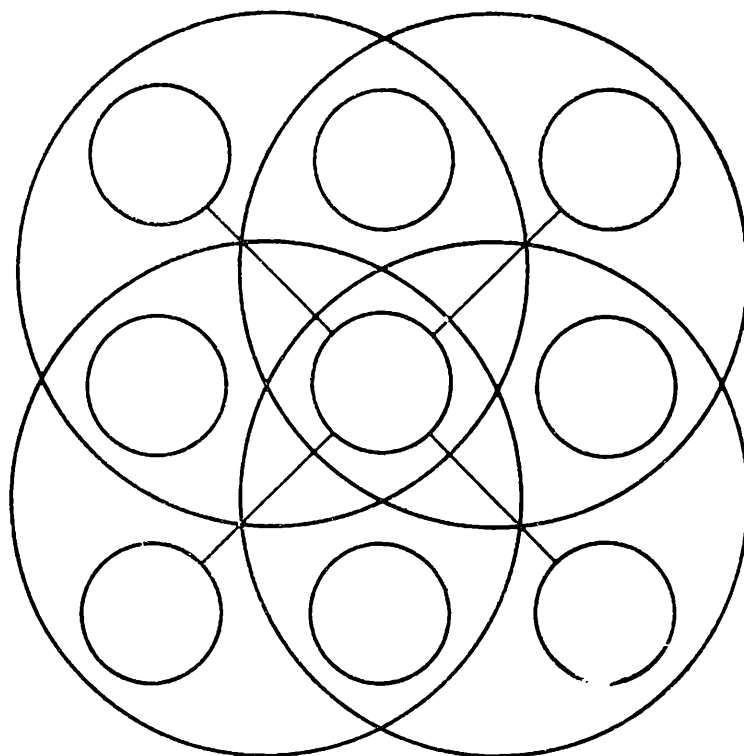
Ostatní dopočítejte již sami.

28. Do malých kroužků (obr. 2) vepište osm po sobě jdoucích přirozených čísel tak, aby:

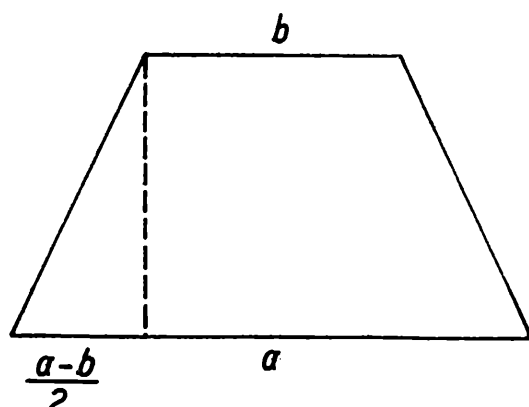
- součty čísel na obou úhlopříčkách byly stejné;
- součty čísel uvnitř jednotlivých velkých kruhů byly stejné;
- dvojnásobný součet čísel uvnitř jednoho kruhu se rovnal trojnásobnému součtu čísel na jedné úhlopříčce.

O. S.

Obr. 2



Obr. 1



SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

revers *m*
révolution *ž*
 surface *ž* de révolution
rhombe *m* (zastaralé)
rhomboèdre *m*

rhomboïdal, *e*, aux
rhomboïde *m* (zastaralé)
rond, *e*
 nombre *m* rond
rotation *ž*
 surface *ž* de rotation

satisfaire
 satisfaire à l'équation *ž*
scalaire
 produit scalaire
scalène
 triangle *m* scalène
 élipsoïde *m* scalène

sécant, *e*
 droite *ž* sécante
 plan *m* sécant
sécante *ž*

second
 second membre *m* d'une équation
seconde *ž*

rub
rotace
 rotační plocha
kosočtverec
rovnoběžnostěn, jehož stěny jsou
 shodné kosočtverce
mající tvar kosočtverce
rovnoběžník
oblý, kulatý
 kulaté číslo
rotace
 rotační plocha

S

vyhovovat
 vyhovovat rovnici
skalární
 skalární součin
různostranný
 různostranný trojúhelník
 elipsoid, jehož poloosy jsou vzá-
 jemně různé
sečný
 sečna
 sečná rovina
sečna, sekans (goniometrická funk-
 ce)
druhý
 pravá strana rovnice
sekunda, vteřina

secteur *m*
 secteur circulaire
 secteur sphérique
 section *ž*
 section conique
 segment *m*
 segment circulaire
 segment de droite *ž*
 segment sphérique
 seize
 seizième
 seizème *m*
 semblable
 figures *ž* semblables entre elles
 triangles *m* semblables
 sens *m*
 sens direct
 sens de parcours *m*
 sens rétrograde
 séparable
 séparation *ž*
 séparer
 sept
 septième
 septième *m*
 série *ž*
 série géométrique
 si
 si et seulement si
 signature *ž*
 signe *m*
 signe d'égalité
 similitude *ž*
 simple
 racine *ž* simple
 simplification *ž*
 simplifier
 singularité *ž*
 sinus *m*
 sinusoïdal, *e*, aux
 sinusoïde *ž*
 six
 sixième
 sixième *m*
 soixante
 soixantième
 soixantième *m*
 solide
 solide *m*
 solution *ž*
 somme *ž*
 sommer

sektor, výseč
 výseč kruhová
 výseč kulová
 řez
 kuželosečka
 segment, část, úsečka
 kruhová úseč
 úsečka
 kulová úseč
 šestnáct
 šestnáctý
 šestnáctina
 podobný
 útvary vzájemně podobné
 podobné trojúhelníky
 smysl
 kladný smysl
 smysl probíhání
 záporný smysl
 separabilní
 separace
 oddělit, separovat
 sedm
 sedmý
 sedmina
 řada
 geometrická řada
 jestliže
 když a jen když, právě když
 signatura
 symbol, znaménko
 rovnítko
 podobnost
 jednoduchý
 kořen násobnosti jedna
 zjednodušení
 zjednodušit, krátit
 singularita
 sinus
 sinusoidální
 sinusoida
 šest
 šestý
 šestina
 šedesát
 šedesátý
 šedesátina
 pevný, tělesový
 těleso (v geometrii)
 řešení
 součet, sjednocení množin
 sečíst

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

7

ROČNÍK 49, 1970-1971, BŘEZEN



ROČNÍK 49
BŘEZEN 1971

7

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

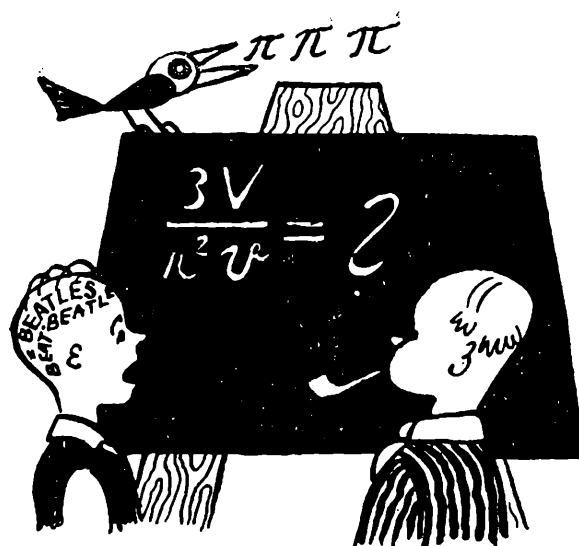
Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku. Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönl. Titulní obrázky: Mil. Hellerová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

OBSAH

J. Drábek: Regulérní obarvení rovinných map	289
J. Kotyk: Počítání s reálnými čísly	291
J. Danešová: Hellyova věta a její důsledky (dokončení)	295
S. Horák: Inflexní body	300
Prof. dr. K. Havlíček, doc. O. Setzer: O významu a budoucnosti deskriptivní geometrie (dokončení)	303
R. Karpe: Zahradnická konstrukce vejcovitých křivek	305
Dr. M. Bednařík, dr. M. Šíroká: Jak je to s průměrnou rychlostí	309
I. Volf: Postup při řešení jednoho příkladu z mechaniky	316
Dr. J. Šíroký, dr. M. Šíroká: Souhvězdí jarní oblohy	323
Naše soutěž	327
J. Kotyk: Definice matematiky	328
Nejmladším čtenářům	331
A. Zelinková: Dvě úlohy na dekódování	335
S. Horák: Zájem o velká čísla v Indii	336
Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český 3. a 4. str. obálky	



Regulérní obarvení rovinných map

JAROSLAV DRÁBEK, PF, Plzeň

V článku „Rovinné mapy“¹⁾ byl zaveden pojem rovinné mapy. Budeme nyní území rovinné mapy M obarvovat tak, aby každá dvě sousední území byla obarvena různými barvami. Taková obarvení rovinné mapy budeme nazývat *regulérní*.

Věta 1. Každá rovinná souvislá mapa M se dá regulérně obarvit pomocí šesti různých barev.

Důkaz. Důkaz provedeme metodou matematické indukce podle počtu území mapy M . Je zřejmé, že každá rovinná mapa s počtem území menším nebo rovným šesti, dá se regulérně obarvit pomocí šesti barev. Předpokládejme tedy, že každá rovinná mapa s počtem území rovným n se dá regulérně obarvit pomocí šesti barev a mějme mapu M s počtem území rovným $n + 1$. Podle příkladu 2. článku „Rovinné mapy“ existuje v této mapě území u , které má méně než šest hran. Předpokládejme, že nastane maximální případ, to znamená, že má právě pět hran. Vzniklá situace je znázorněna na obrázku 1.

Území u nyní stáhneme do jeho vnitřního bodu X , což je metoda, které se často používá v algebraické topologii roviny. Celý postup je znázorněn na obrázku 1 čárkovaně. Po popsání stáhnutí území u do bodu X vznikne rovinná mapa M' , která má již n území a lze ji regulérně obarvit pomocí šesti barev. Území u_1, u_2, u_3, u_4 a u_5 mapy M' , která vznikla rozšířením území u_1, u_2, u_3, u_4 a u_5 mapy M , popsáním

¹⁾ Rozhledy matem.-fyzikální, roč. 49, str. 93.

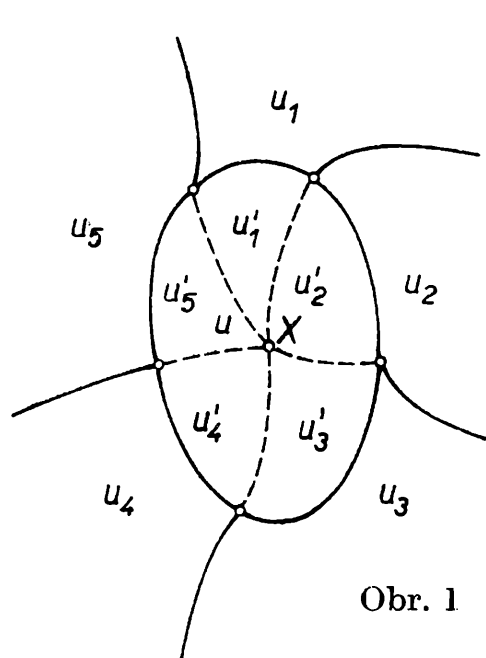
stáhnutím území u , jsou obarvena pomocí pěti barev a pro bod X zbývá poslední šestá barva, která bude barvou odstraněného území u , přičemž vzniklé obarvení mapy M bude zřejmě regulérní.

V případě, že území u má méně než pět hran, důkaz se provede analogicky. Pro území u máme potom větší možnost při výběru barvy. Tak například v případě dvojúhelníkového území u je možné volit při obarvení tohoto území mezi čtyřmi barvami.

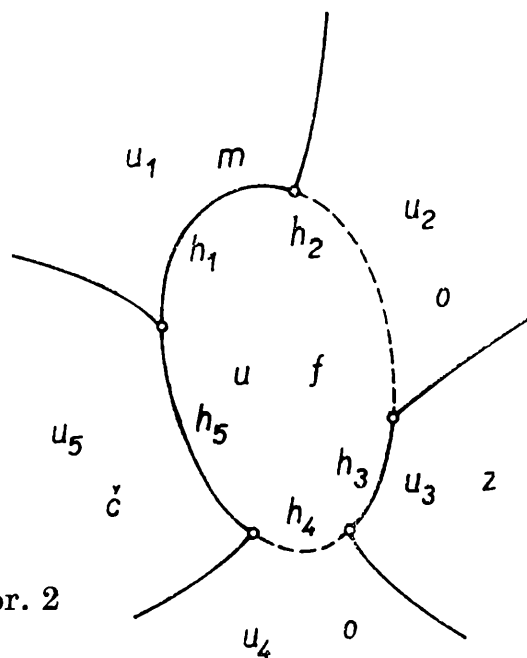
Příklad 1. Dokažte, že neexistuje mapa M o pěti územích tak, že každá dvě území jsou sousední.

Předpokládejme existenci takové mapy. Užitím základních vzorců (1), (2) a (3) snadno zjistíme, že počet hran h je roven 10 a počet vrcholů v je roven 7. Tyto nalezené počty jsou ovšem ve sporu s nerovností (11) v článku „Rovinné mapy“.

Věta 2. Každá rovinná souvislá mapa M se dá regulérně obarvit pomocí pěti barev.



Obr. 1



Obr. 2

Důkaz. Důkaz provedeme opět metodou matematické indukce podle počtu území mapy M . Pro mapu M s počtem území menším nebo rovným pěti věta platí. Nechť tedy mapa M je rovinnou mapou s počtem území $n + 1$. Podle příkladu 2 v článku „Rovinné mapy“ existuje území, které má méně než šest hran. Předpokládejme, že má právě pět hran. Situace je znázorněna na obrázku 2.

Provedme tak jako v důkazu věty 1, stáhnutí území u do jeho vnitřního bodu X . Tím vznikne rovinná mapa M' . Je zřejmé, že dvě sousední území na mapě M jsou sousedními i na mapě M' . Jinými slovy, dvě území, která nejsou sousední na mapě M' , nejsou sousední ani na mapě M . Podle příkladu 1 tohoto článku existují dvě území z území u_1, u_2, u_3, u_4 a u_5 mapy M , sousedních s územím u , která nejsou

sousední. Na obrázku 2 jsou to území u_2 a u_4 . Odstraníme-li z mapy M hrany h_2 a h_4 , vznikne mapa M'' , která obsahuje území $u_0 = u \cup u_2 \cup u_4$ a má tedy $n - 1$ území. Na mapu M'' je možné tedy použít indukčního předpokladu. Nechť území u_0 je obarveno oranžovou barvou, u_1 modrou barvou, u_3 zelenou barvou a u_5 červenou barvou. Přejdeme-li k původní mapě M , ponecháme obarvení území u_1 , u_3 a u_5 z mapy M'' , území u_2 a u_4 obarvíme oranžovou barvou a pro území u zbývá poslední pátá barva, fialová. Obarvení mapy M je zřejmě regulérním.

Jestliže počet hran území u mapy M je menší než pět, potom použijeme metody stáhnutí území u do vnitřního bodu.

Je zcela pochopitelné, že matematici se začali zabývat otázkou, zda rovinná mapa se dá regulérně obarvit pomocí čtyř barev, což je proslulý problém čtyř barev. Tento problém není dosud rozřešen pro mapy s počtem území větším než 38.

Cvičení.

1. Užitím cvičení 6 z článku „Rovinné mapy“ dokažte, že mapa s počtem území menším než 12 se dá regulérně obarvit pomocí čtyř barev!
2. Pokuste se zobecnit věty 1 a 2 tohoto článku i na nesouvislé rovinné mapy!

Počítání s reálnými čísly

JOSEF KOTYK, Pardubice

Definice a příklady konstruktivního předpisu reálného čísla¹⁾ nás vedou k poznání, že při praktických výpočtech je nutné nahradit neukončené desetinné rozvoje iracionálních čísel

(např. čísel $\sqrt{3} = 1,732\ 05\ .\ .\ .$; $\pi = 3,141\ 592\ 65\ .\ .\ .$)

hodnotami přibližnými

$$(\text{např. } \sqrt{3} \doteq 1,732 ; \pi \doteq 3,14 \text{ nebo } \pi \doteq 3 \frac{1}{7}),$$

které jsou ovšem racionální. Aproximované číslo bývá při počítání zpravidla určeno aproximací jedinou. V teoretických úvahách udáváme však často interval s racionálními hranicemi, v němž aproximované číslo leží; např. hodnotu čísla $\sqrt{3}$ lze sledovat v hranicích postupně se zúžujících

¹⁾ Uvedl jsem je v článku Reálná čísla, otištěném v Rozhledech, roč. 47, čís. 5, str. 217 až 221.

$$\begin{aligned}
1 &< \sqrt[3]{3} < 2, \\
1,7 &< \sqrt[3]{3} < 1,8, \\
1,73 &< \sqrt[3]{3} < 1,74, \\
1,732 &< \sqrt[3]{3} < 1,733, \\
1,7320 &< \sqrt[3]{3} < 1,7321 \\
1,732\ 05 &< \sqrt[3]{3} < 1,732\ 06, \\
1,732\ 050 &< \sqrt[3]{3} < 1,732\ 051, \\
1,732\ 0508 &< \sqrt[3]{3} < 1,732\ 0509
\end{aligned}$$

Tak můžeme bez omezení pokračovat. Všimněme si, že rozdíl čísel mezi nimiž $\sqrt[3]{3}$ leží, se postupně zmenšuje z 1 na 0,1; 0,01; 0,001;

Jeho hodnota klesne při každém následujícím kroku na $\frac{1}{10}$ hodnoty rozdílu předcházejícího. A bylo by možno jej učinit libovolně malým. Po n krocích dospíváme k dvojici aproximací a_n , A_n čísla a , takže je

$$a_n < a < A_n.$$

Aproximace a_n , A_n jsou desetinné zlomky, jež mají právě n desetinných míst, a to takových, že

$$A_n - a_n = \frac{1}{10^n}.$$

Následující dvojice aproximací a_{n+1} , A_{n+1} stanoví interval, jenž leží v intervalu předcházejícím. Souhrn aproximací dává tak souhrn intervalů do sebe zařazených, jejichž velikost zároveň konverguje k nule. Lze dokázat, že ve všech těchto intervalech leží právě jedno číslo.

Přemýšlejme takto:

Poněvadž v každém z intervalů, o něž jde, leží neomezený počet čísel, musí číslo, ležící ve všech zároveň, existovat aspoň jedno. Snadno se pak přesvědčíme, že nemohou být dvě $a \neq A$, kde např. $a < A$. Kdybychom je, provádějíce důkaz nepřímý, na okamžik předpokládali a označili rozdíl $A - a = \varepsilon > 0$, pak od určitého indexu N , počínaje (tj. pro všechny další indexy $N + 1$, $N + 2$, ...) by platilo

$$A - a_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

v těchto intervalech však obě čísla a , A , jejichž rozdíl je ε , nemohou ležet. Předpoklad, že $a \neq A$, je tedy nemožný a důkaz učiněného tvrzení je proveden.

Vraťme se však k uvažovanému příkladu. Shledáváme, že dolní aproximace čísla $\sqrt[3]{3}$, tvoří posloupnost hodnot určitým způsobem seřazených

$$1 < 1,7 < 1,73 < 1,732 = 1,7320 < 1,732\,05 = \\ = 1,732\,050 < 1,732\,0508 \text{ atd.}$$

Je pak buď $a_n < a_{n+1}$, nebo $a_n = a_{n+1}$, neboť některé z aproximací po sobě jdoucích jsou si rovny. Posloupnost $\{a_n\}$, v níž $a_n \leq a_{n+1}$ nazýváme neklesající. Zároveň je však $a_n \leq a$ pro všechna n . Říkáme proto, že souhrn dolních aproximací je posloupností shora ohraničenou.

Podobné vlastnosti mají i horní aproximace A_n , o nichž platí jednak $A_n \geq A_{n+1}$, jednak $A_n \geq a$ pro všechna n . Souhrn horních aproximací je proto nerostoucí a zdola ohraničenou posloupností $\{A_n\}$.

Obě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ mají vzhledem k vlastnostem právě vytčeným limitu. Snadno se přesvědčíme, že jejich limita je společná a rovna reálnému číslu $\sqrt[3]{3}$. Uvažujme takto:

Poněvadž

$$A_n - a_n = \frac{1}{10^n}$$

a zároveň $a_n < \sqrt[3]{3}$, je

$$A_n - \frac{1}{10^n} < \sqrt[3]{3}$$

neboli

$$A_n - \sqrt[3]{3} < \frac{1}{10^n}$$

také

$$|A - \sqrt[3]{3}| < \frac{1}{10^n}.$$

Obdobně je $A_n < \sqrt[3]{3}$, takže i

$$a_n + \frac{1}{10^n} < \sqrt[3]{3}$$

neboli

$$\sqrt[3]{3} - a_n < \frac{1}{10^n};$$

také

$$|a_n - \sqrt[3]{3}| < \frac{1}{10^n}.$$

Číslo n lze však určit tak, aby pro všechny další indexy bylo číslo $\frac{1}{10^n}$ menší než kladné číslo libovolně zvolené, posloupnosti $\{A_n - \sqrt[3]{3}\}$, $\{a_n - \sqrt[3]{3}\}$ jsou tedy nulové, posloupnosti $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ pak konvergentní a mají obě limitu $\sqrt[3]{3}$.

Podobným postupem lze i v jiných případech ukázat, že reálné číslo je společnou limitou posloupností svých dolních a horních aproximací.

*

Popsané pojetí reálného čísla máme ovšem na mysli také při provádění početních výkonů s reálnými čísly. Že přitom nevystačíme s pravidly, jež známe z aritmetiky pro desetinné zlomky, je vidět z toho, že např. při počítání součtu $\sqrt[3]{3} + \pi$, nebo součinu $\pi \sqrt[3]{3}$, nelze napsat čísla, jež mají nekonečný počet číslic, pod sebe a potom je sčítat nebo násobit. Přibližné počítání, při němž nahrazujeme daná čísla racionálními hodnotami $\pi \doteq 3,14$; $\sqrt[3]{3} \doteq 1,732$ apod., neuspokojuje z hlediska teorie, jež žádá, aby pro počítání s reálnými čísly byla stanovena pravidla tak přesná, jak jsou známa pro racionální čísla. Početní výkony s reálnými čísly se ovšem dají přesně definovat, a to tak, že neobsahují sporu a že celá aritmetika racionálních čísel zůstává v platnosti. Podrobný výklad se vymyká již rozměrům tohoto článku, omezím jej proto na některé základní definice:

Určí-li dvojice $[a_n, A_n]$, $[b_n, B_n]$ souhrn aproximací čísla a , resp. b , definujeme souhrnem aproximací $[a_n + b_n, A_n + B_n]$ součet $a + b$.

Součin ab kladných čísel a , b definujeme souhrnem aproximací $[a_n b_n, A_n B_n]$. Jestliže aspoň jeden z činitelů je roven nule, definujeme, že i součin se rovná nule. Definujeme také, že $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

Souhrnem aproximací $[-A_n, -a_n]$ definujeme číslo $a' = -a$, číslo opačné k číslu a . Odečtení čísla a definujeme pak jako přičtení čísla opačného a' .

Souhrnem aproximací

$$\left[\frac{1}{A_n}, \frac{1}{a_n} \right]$$

definujeme číslo $\frac{1}{a}$, číslo reciproké (převrácené) k číslu $a < 0$.

Klademe mimo to

$$\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}.$$

Dělení číslem a definujeme pak jako násobení reciprokým číslem $\frac{1}{a}$

Tak se ukazuje, že s reálnými čísly můžeme počítat právě tak jako s čísly racionálními. O správnosti výsledku se přesvědčíme tím, že potvrdíme jeho souhlas s početními pravidly, jež jsme přijali jako základ. Cvičení.

1. Úvahy, které jsme provedli s číslem $\sqrt[3]{3}$, vykonejte s číslem $\sqrt[3]{2} = 1,414\ 21\dots$

8. Jestliže každá dolní aproximace čísla a je zároveň dolní aproximací čísla b a každá horní aproximace čísla a , je také horní aproximací čísla b , je $a = b$. Vyložte!

3. Jestliže existuje dolní aproximace čísla b , která je větší než některá horní aproximace čísla a , je $a < b$. Vyložte!

4. Jestliže od určitého indexu počínaje se reálné číslo všem svým dolním aproximacím rovná (např. $a = a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \dots$), je racionální. Vyložte!

Obráceně můžeme však udat takovou posloupnost dolních aproximací racionálního čísla, že se žádný její člen danému číslu nerovná, např. pro číslo $\frac{2}{3}$ posloupnost 0,6; 0,66; 0,666; Uvedte jiné příklady!

Podobnou úvahu proveďte také s aproximacemi horními!

Hellyova věta a její důsledky

(Dokončení)

JANA DANEŠOVÁ, ČVUT Praha

Lemma 5. Budte $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ dva neprázdné neprotínající se konvexní mnohoúhelníky v rovině ϱ . Pak existují body $A \in \mathbf{M}$ a $B \in \mathbf{N}$ takové, že $\overline{AB} \subseteq \overline{XY}$ pro všechny body $X \in \mathbf{M}$ a $Y \in \mathbf{N}$. Jinými slovy, mezi všemi úsečkami XY s jedním koncovým bodem $X \in \mathbf{M}$ a s jedním koncovým bodem $Y \in \mathbf{N}$, existuje úsečka nejkratší.

Důkaz. Podle lemmatu 3 můžeme psát $\text{hr}_\varrho \mathbf{M} = \mathbf{u}_1 \cup \dots \cup \mathbf{u}_m$ a $\text{hr}_\varrho \mathbf{N} = \mathbf{v}_1 \cup \dots \cup \mathbf{v}_n$, kde m a n jsou přirozená čísla a každá z množin $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ je jednou z následujících množin: jednobodová množina, úsečka, polopřímka nebo přímka. Buď d nejmenší z konečného počtu čísel $d(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$). Můžeme předpokládat bez újmy na obecnosti, že $d = d(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$. Podle cvičení 4 a definice 2 existují body $A \in \mathbf{u}_1$ a $B \in \mathbf{v}_1$ takové, že $\overline{AB} = d(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$. Budte X a Y libovolné body takové, že $X \in \mathbf{M}$ a $Y \in \mathbf{N}$. Pak úsečka

XY (uvědomte si, že X a Y vůbec úsečku určují!) podle lemmatu 4 obsahuje úsečku KL takovou, že $K \in \text{hr}_\varrho \mathbf{M}$ a $L \in \text{hr}_\varrho \mathbf{N}$. Existují tedy čísla i a j tak, že $K \in \mathbf{u}_i$ a $L \in \mathbf{v}_j$. Potom platí $\overline{AB} = d(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) \leq \leq d(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) \leq \overline{KL} \leq \overline{XY}$ a lemma je dokázáno.

Definice 5. Budte $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ dva neprázdné konvexní mnohoúhelníky v rovině ϱ . Vzdálenost $d(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ mnohoúhelníků $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ definujeme takto:

1. jestliže $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ se protínají, položíme $d(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 0$,

2. jestliže $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ se neprotínají, položíme $d(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \overline{AB}$, kde AB je úsečka z lemmatu 5.

Definice 6. Budte $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ dvě množiny a p přímka v rovině ϱ . Řekneme, že přímka p odděluje množiny $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$, jestliže $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ leží v navzájem opačných otevřených polorovinách vyřazených v rovině ϱ přímkou p .

Lemma 6. Budte $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ dvě neprotínající se konvexní množiny v rovině ϱ . Předpokládejme, že existují body $A \in \mathbf{M}$ a $B \in \mathbf{N}$ takové, že $\overline{AB} \leq \overline{XY}$ pro všechny body $X \in \mathbf{M}$ a $Y \in \mathbf{N}$. Pak existuje přímka p v rovině, která odděluje $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$. (Obr. 8. na str. 334).

Důkaz. Buď p kolmice na úsečku AB procházející jejím středem S . Předpokládejme, že p neodděluje množiny $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$. Pak p protíná aspoň jednu z množin $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$. Jistě se můžeme omezit na případ, kdy $p \cap \mathbf{M} \neq \emptyset$. Zvolme nějaký bod $K \in p \cap \mathbf{M}$. Buď P pata kolmice spuštěné z vrcholu S pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ASK$ na jeho přeponu AK . Z konvexity množiny $\mathbf{M}$ plyne, že P leží v $\mathbf{M}$. Nyní můžeme psát:

$$\overline{PB} < \overline{PS} + \overline{SB} < \overline{AS} + \overline{SB} = \overline{AB},$$

což je spor s předpokladem o úsečce AB .

Cvičení 10. Jsou-li $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, A a B jako v lemmatu 6, pak A leží v $\text{hr}_\varrho \mathbf{M}$ a B leží v $\text{hr}_\varrho \mathbf{N}$. Dokažte!

Lemma 7. Budte $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ dva neprotínající se neprázdné konvexní mnohoúhelníky v rovině ϱ . Potom v rovině ϱ existuje přímka p , která odděluje množiny $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$.

Cvičení 11. Dokažte Lemma 7!

Nyní se již můžeme vrátit k důkazu věty 3. (Obr. 9 na str. 334).

Důkaz věty 3. Předpokládejme, že $\mathbf{M}_1 \cap \dots \cap \mathbf{M}_n = \emptyset$. Množiny $\mathbf{N}_k = \mathbf{M}_1 \cap \dots \cap \mathbf{M}_k$ ($1 \leq k \leq n$) jsou konvexní mnohoúhelníky (dokažte). Protože podle předpokladu věty $\mathbf{N}_3 = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \cup \mathbf{M}_3 \neq \emptyset$, můžeme psát:

$$\emptyset \neq \mathbf{N}_3 \supset \mathbf{N}_4 \supset \dots \supset \mathbf{N}_k \supset \mathbf{N}_{k+1} \supset \dots \supset \mathbf{N}_n = \mathbf{M}_1 \cap \dots \cap \mathbf{M}_n = \emptyset$$

Existuje tedy číslo k takové, že $\mathbf{N}_k \neq \emptyset$ a $\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{N}_k \cap \mathbf{M}_{k+1} = \emptyset$. Konvexní mnohoúhelníky $\mathbf{N}_k$ a $\mathbf{M}_{k+1}$ jsou neprázdné a neprotínají se, takže podle lemmatu 7 existuje přímka p oddělující množiny $\mathbf{N}_k$

a $\mathbf{M}_{k+1}$. Označme $\mathbf{u}_i = p \cap \mathbf{M}_i$ ($1 \leq i \leq k$). Dokážeme, že množiny $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ splňují předpoklady věty 1. Lemma 1 nám říká, že každá z množin je jednou z následujících množin: prázdná nebo jednobodová množina, úsečka, polopřímka nebo přímka. Protože $\mathbf{N}_3 \neq \emptyset$, je jisté $k \geq 3$, tedy tím spíše $k \geq 2$. Budte nyní i a j libovolná dvě přirozená čísla taková, že $1 \leq i, j \leq k$. Podle předpokladu věty je

$$\mathbf{M}_i \cap \mathbf{M}_j \cap \mathbf{M}_{k+1} \neq \emptyset$$

Zvolme

$$A_{ij} \in \mathbf{M}_i \cap \mathbf{M}_j \cap \mathbf{M}_{k+1} \subset \mathbf{M}_{k+1} \text{ a } X \in \mathbf{N}_k \subset \mathbf{M}_i \cap \mathbf{M}_j.$$

Potom body A_{ij} a X leží v různých otevřených polorovinách vyřatých v rovině ρ přímkou p . Úsečka XA_{ij} tedy protíná p v nějakém bodě B_{ij} . Avšak $B_{ij} = p \cap XA_{ij} \subset p \cap \mathbf{M}_i \cap \mathbf{M}_j = \mathbf{u}_i \cap \mathbf{u}_j$, neboť B_{ij} leží na XA_{ij} a $\mathbf{M}_i \cap \mathbf{M}_j$ je konvexní a body X a A_{ij} leží oba v průniku $\mathbf{M}_i \cap \mathbf{M}_j$. Tedy libovolné dvě z množin $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ se protínají a předpoklady věty 1 jsou ověřeny. Existuje tedy bod A ležící ve všech množinách $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. Odtud dostaneme, že

$$\begin{aligned} A \in \mathbf{u}_1 \cap \dots \cap \mathbf{u}_k &= (p \cap \mathbf{M}_1) \cap \dots \cap (p \cap \mathbf{M}_k) = \\ &= p \cap (\mathbf{M}_1 \cap \dots \cap \mathbf{M}_k) = p \cap \mathbf{N}_k. \end{aligned}$$

Toto však znamená, že přímka p protíná množinu $\mathbf{N}_k$, což je spor s tím, že přímka p odděluje množiny $\mathbf{N}_k$ a $\mathbf{M}_{k+1}$. Předpoklad na začátku důkazu byl tedy nesprávný a věta je tím dokázána.

Cvičení 12. Věta 3 se dá trochu zesílit. Dokažte, že za předpokladů věty 3 průnik $\mathbf{M}_1 \cap \dots \cap \mathbf{M}_n$ je neprázdný konvexní mnohoúhelník!

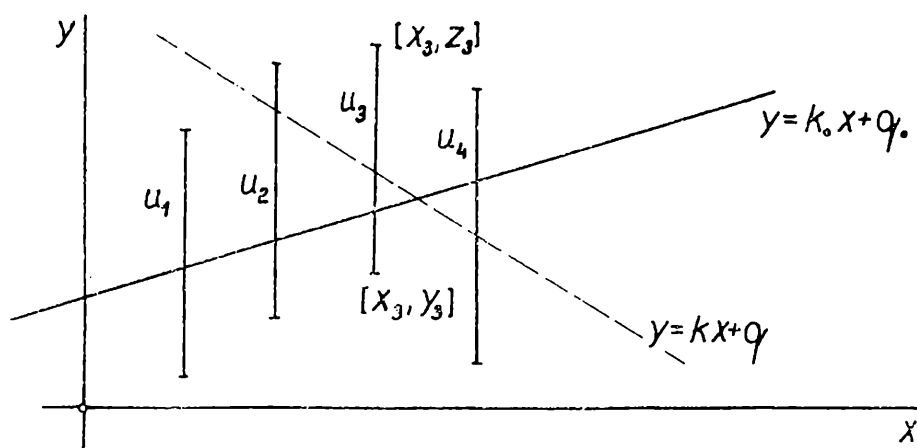
Cvičení 13. Buď φ konečný systém lineárních rovnic a lineárních nerovností o dvou neznámých, sestávající aspoň ze tří rovnic a neostrých nerovností. Jestliže každé tři rovnice a nerovnosti této soustavy mají aspoň jedno společné řešení, pak systém φ má aspoň jedno řešení, tj. existuje aspoň jedno společné řešení všech rovnic a nerovností systému φ . Dokažte! (Návod: V rovině zaveďte kartézskou soustavu souřadnic a přiřaďte každé rovnici přímku a každé nerovnosti polorovinu.)

Věta 4. Zavedme v rovině ρ kartézskou soustavu souřadnic x, y . Budte $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ($n \geq 3$) úsečky rovnoběžné s osou y . Jestliže každé tři z těchto úseček protíná nějaká přímka, která není rovnoběžná s osou y , pak existuje přímka, která protíná všechny úsečky $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ (obr. 10).

Důkaz. V rovině ρ' zavedme kartézskou soustavu souřadnic k, q . Každé úsečce $\mathbf{u}_i$ přiřaďme množinu $\mathbf{N}_i = \{[k, q] : \text{přímka } kx + q \text{ protíná } \mathbf{u}_i\}$ roviny ρ' . Budte $[x_i, y_i]$ a $[x_i, z_i]$ koncové body úsečky $\mathbf{u}_i$. Můžeme jistě předpokládat, že $y_i < z_i$. Potom

$$\mathbf{N}_i = \{[k, q] \mid y_i \leq kx_i + q \leq z_i\} = \\ = \{[k, q] : y_i \leq kx_i + q\} \cap \{[k, q] : kx_i + q \leq z_i\}$$

a tedy $\mathbf{N}_i$, jakožto průnik dvou polorovin, je konvexní mnohoúhelník v rovině ρ' (Dokažte, že $\mathbf{N}_i$ je pás mezi dvěma rovnoběžkami!) Předpoklad věty říká, že každé tři z množin $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n$ mají společný aspoň jeden bod. Použijeme-li věty 3, vidíme, že množiny $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n$ mají společný aspoň jeden bod $[k_0, q_0]$. To však, znamená, že přímka $y = k_0x + q_0$ v rovině protíná všechny úsečky $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.



Obr. 10

Cvičení 14. Dokažte, že věta 4 platí, jestliže $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou úsečky, polopřímky a přímky rovnoběžné s osou y .

Věta 5. Buďte $\pi_1, \dots, \pi_n$ poloroviny ($n \geq 3$) a $\mathbf{M}$ konvexní mnohoúhelník v rovině ρ . Zavedme v rovině ρ kartézskou soustavu souřadnic s počátkem P . Nechtě ke každým třem polorovinám π_i, π_j, π_k ($1 \leq i, j, k \leq n$) existuje aspoň jeden bod X v rovině ρ takový, že posunutí každé z polorovin π_i, π_j, π_k o vektor $\mathbf{P}X$ protíná množinu $\mathbf{M}$. Pak existuje bod X_0 v rovině ρ takový, že posunutí každé z polorovin $\pi_1, \dots, \pi_n$ o vektor $\mathbf{P}X_0$ protíná množinu $\mathbf{M}$.

Důkaz. Označme $\mathbf{P}X + \pi_i$ posunutí poloroviny π_i o vektor $\mathbf{P}X$. Čtenář si pomocí pojmu vzdálenosti dvou konvexních mnohoúhelníků (definice 5) snadno dokáže, že množiny $\mathbf{N}_i = \{X \in \rho \mid (\mathbf{P}X + \pi_i) \cap \mathbf{M} \neq \emptyset\}$ ($1 \leq i \leq n$) jsou konvexní mnohoúhelníky (totiž poloroviny) nebo rovina ρ . Podle předpokladu věty každé tři z množin $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n$ mají společný aspoň jeden bod. Proto můžeme použít věty 3 na systém těch množin $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n$, které nejsou rovny celé rovině ρ . Tyto množiny pak mají společný aspoň jeden bod, který je ovšem bodem společným všem množinám $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n$, což je právě jen jiné vyjádření tvrzení naší věty.

Cvičení 15. Důkaz předchozí věty nás přivádí na myšlenku vyslovit toto tvrzení: Buďte $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ ($n \geq 3$) množiny v rovině, z nichž každá je konvexní mnohoúhelník v rovině ρ . Jestliže každé tři tyto

množiny mají společný aspoň jeden bod, pak existuje bod společný všem těmto množinám. Dokažte!

Následující větu uvedeme bez důkazu.

Věta 6. Budte $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ ($n \geq 3$) a $\mathbf{M}$ konvexní mnohoúhelníky v rovině ρ , ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic s počátkem P . Nechtě ke každým třem množinám $\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j, \mathbf{M}_k$ ($1 \leq i, j, k \leq n$) existuje bod X v rovině ρ takový, že posunutí množiny $\mathbf{M}$ o vektor $\mathbf{PX}$ protíná každou z množin $\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j, \mathbf{M}_k$. Pak existuje bod X_0 v rovině ρ takový, že posunutí množiny $\mathbf{M}$ o vektor $\mathbf{PX}_0$ protíná každou z množin $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$.

Tuto větu lze získat užitím věty 3 na množiny $\mathbf{N}_i = \{X \in \rho : \mathbf{PX} + \mathbf{M} \text{ protíná } \mathbf{M}_i\}$ ($1 \leq i \leq n$). Lze dokázat, že $\mathbf{N}_i$ jsou konvexní mnohoúhelníky nebo celá rovina ρ . Ostatní předpoklady věty 3 (resp. cvičení 14) se již ověří snadno.

Cvičení 16. Dokažte větu 6 pro případ, kdy $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ a $\mathbf{M}$ jsou trojúhelníky nebo rovnoběžníky!

Cvičení 17. Dokažte větu 6 pro případ, kdy $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ jsou konvexní mnohoúhelníky a $\mathbf{M}$ je jednobodová množina, úsečka, polopřímka, polorovina nebo vypouklý úhel! Uvědomte si, je-li $\mathbf{M}$ jednobodová množina, pak věta 6 je vlastně totožná s větou 3!

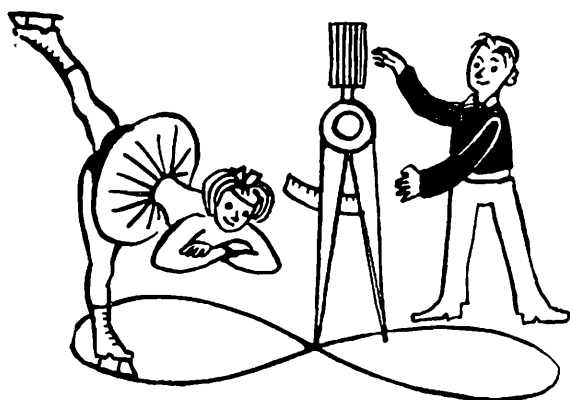
Věta 7. Budte $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ ($n \geq 3$) a $\mathbf{M}$ konvexní mnohoúhelníky v rovině ρ , ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic s počátkem P . Jestliže ke každým třem množinám $\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j, \mathbf{M}_k$ ($1 \leq i, j, k \leq n$) existuje bod X v rovině ρ takový, že posunutí množiny $\mathbf{M}$ o vektor $\mathbf{PX}$ obsahuje každou množinu $\mathbf{M}_i, \mathbf{M}_j, \mathbf{M}_k$, pak existuje bod X_0 v rovině ρ takový, že posunutí množiny $\mathbf{M}$ o vektor $\mathbf{PX}_0$ obsahuje všechny množiny $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$.

Důkaz. Nechtě $\mathbf{M}$ je průnikem m polorovin $\pi_1, \dots, \pi_m$ roviny ρ . Každá množina $\{X \in \rho : \mathbf{PX} + \pi_j \supset \mathbf{M}_i\}$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$) je konvexním mnohoúhelníkem (dokažte). Každá množina $\mathbf{N}_i = \{X \in \rho : \mathbf{PX} + \mathbf{M} \supset \mathbf{M}_i\} = \{X \in \rho : \mathbf{PX} + \pi_1 \supset \mathbf{M}_i\} \cap \dots \cap \{X \in \rho : \mathbf{PX} + \pi_m \supset \mathbf{M}_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) je tedy také konvexním mnohoúhelníkem. Ostatní předpoklady věty 3 pro množiny $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n$ se již snadno ověří. Za bod X_0 pak můžeme zvolit libovolný bod, který leží ve všech množinách $\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_n$.

Cvičení 18. Dokažte, že věta 7 platí, jestliže v ní slovo „obsahuje“ nahradíme slovy „je obsaženo v“.

V tomto článku jsme dokázali Hellyovu větu pro některé konvexní množiny ležící na přímce nebo v rovině (tj. pro $d = 1$ a $d = 2$). Nyní podáme návod jak dokázat Hellyovu větu pro konvexní mnohostěny v prostoru. Konvexním mnohostěnem rozumíme průnik konečně mnoha poloprostorů. Snadno je vidět, že každý konvexní mnohoúhelník a množiny 19, 22, jsou konvexními mnohostěny. Každý konvexní mnohostěn je konvexní a uzavřenou množinou. Čtenář si jistě všiml, že lemmata

1 až 5 jsme potřebovali k tomu, abychom mohli definovat vzdálenost dvou neprázdných konvexních mnohoúhelníků a odvodit některé její vlastnosti. Pojem vzdálenosti dvou neprotínajících se neprázdných konvexních mnohoúhelníků spolu s lemmaty 6 a 7 umožnil sestrojit oddělující přímku těchto mnohoúhelníků. Přitom Hellyovu větu pro $d = 2$ jsme dokázali z téže věty pro $d = 1$ užitím oddělující přímky. Podobně lze odvodit Hellyovu větu pro $d = 3$ pro konvexní mnohostěny z Hellyovy věty pro $d = 2$ užitím existence oddělující roviny dvou neprázdných neprotínajících se konvexních mnohostěnů. K tomu je nutno dokázat tvrzení analogická lemmatům 1 až 7. Důkazy těchto tvrzení probíhají v podstatě stejně jako důkazy lemmat 1 až 7. Doporučujeme čtenáři, aby si tato tvrzení sám vyslovil a dokázal a ověřil si tak pochopení zde probrané látky. Z Hellyovy věty pro $d = 3$ se dají opět odvodit další tvrzení podobně tomu jak to bylo učiněno v tomto článku. Pokuste se o to!



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Inflexní body

STANISLAV HORÁK st., Praha

I. Na obr. 1 je znázorněna křivka k s inflexním bodem J a inflexní tečnou t_J . Kdysi byla snaha zavést místo názvu inflexní bod český název bod obratu. Abychom si vysvětlili tento český termín, znázorníme si přiložením tužky tečnu křivky v bodě A a pak tužkou pohybujeme tak, aby se stále dotýkala křivky k . Tak dojdeme k bodu J . Znázorníme-li si pohyblivou tužkou ještě tečny v bodech mezi J a B ,

vidíme, že zde je otáčení tečny „obrácené“. Změna smyslu otáčení nastala právě v bodě J , a proto se bod J nazýval bodem obratu. My se však přidržíme obvyklejšího názvu inflexní bod.

II. Z počátků diferenciální geometrie, které se probírají na gymnasiu, víme, že inflexní bod křivky $y = f(x)$ je v bodě, pro nějž platí

$$y'' = 0, \text{ ale } y''' \neq 0$$

nebo

$$y^{IV} = 0, \text{ ale } y^V \neq 0 \text{ atd.}$$

Tohoto poznatku použijeme k určení inflexních bodů křivky vám dobře známé.

III. *Příklad.* Daný rotační válec ($r = 3,5$ cm, $v = 8,5$ cm) protne rovinou $\sigma \perp v$. Rozviňte pak plášť i s řezem do roviny a zjistěte inflexní body křivky, do níž přejde křivka řezu.

Řešení (obr. 2 a 3). Řezem je elipsa e , neboť rovina řezu není ani rovnoběžná ani kolmá k ose rotačního válce. Plášť válce rozřízneme podél površky, která prochází vrcholem A elipsy. (A, B jsou hlavní a C, D vedlejší vrcholy elipsy e .) Další konstrukce je dostatek známá, a proto ji nebudeme popisovat. Víme, že elipsa e přejde do křivky e^r (obr. 3). Odvodíme si rovnici křivky e^r .

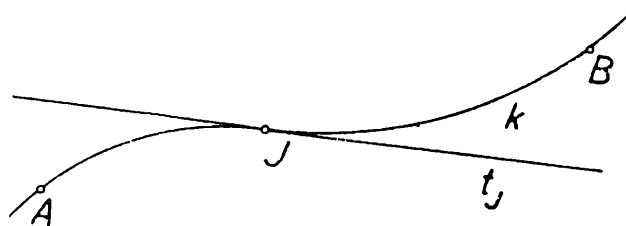
Přímku, na níž leží rektifikovaný obvod podstavy (tj. úsečka $A_1^r A_1^r$), zvolíme za osu x a přímku, na níž leží úsečka $A_1^r A_1^r$, zvolíme za osu y . Podle toho A_1^r splývá s počátkem O souřadnicové soustavy. Libovolný bod M na elipse e přejde při rozvinutí do bodu M^r . Tu platí

$$OM_1^r = \widehat{A_1 M_1} = rt = x, \quad (1)$$

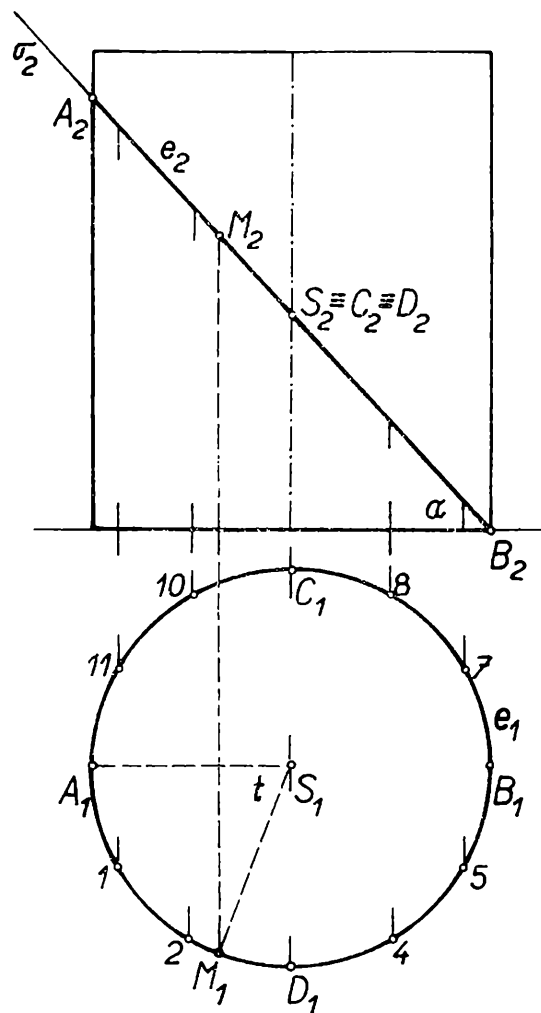
kde $t = \sphericalangle A_1 S_1 M_1$ (obr. 2).

Dále

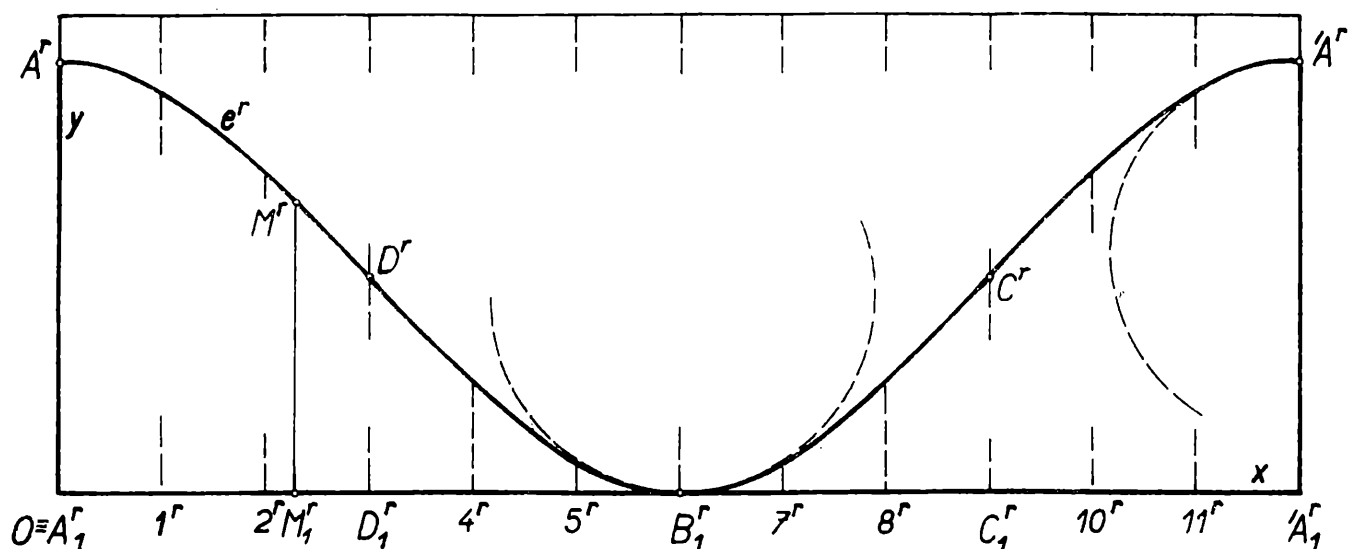
$$M_1^r M^r = z_M = (r + r \cos t) \operatorname{tg} \alpha = y, \quad (2)$$



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

kde α je první odchylka roviny σ . Z rovnic (1), (2) vyloučíme t a dostaneme

$$y = r \operatorname{tg} \alpha + r \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{x}{r}$$

Přitom $0 \leq x \leq 2\pi r$. Vidíme, že křivka e^r je obecná cosinusoida. Kdybychom místo $\cos \frac{x}{r}$ psali

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{r} \right),$$

mohli bychom říci, že křivka e^r je obecná sinusoida.

Teď již snadno určíme inflexní body křivky e^r

$$y' = r \operatorname{tg} \alpha \left(-\sin \frac{x}{r} \right) \frac{1}{r} = -\operatorname{tg} \alpha \sin \frac{x}{r}$$

$$y'' = -\frac{1}{r} \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{x}{r},$$

$$y''' = \frac{1}{r^2} \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{x}{r}$$

Jestliže $y'' = 0$ dostaneme

$$x = \frac{1}{2} \pi r (1 + 2k),$$

kde k je libovolné celé číslo. Pro vypočtené hodnoty x je $y''' \neq 0$. Vzhledem k definičnímu oboru mají pro nás význam pouze dvě hodnoty

$$k = 0 \text{ a potom } x_1 = \frac{1}{2} \pi r,$$

což odpovídá bodu D^r a

$$k = +1 \text{ a potom } x_2 = \frac{3}{2} \pi r ,$$

a to odpovídá bodu C^r .

Dodatek. Víte, že elipsu lze v okolí vrcholů nahradit oblouky oskulačních kružnic. I křivka e^r se dá v okolí vrcholů B^r , A^r , A^r nahradit oblouky oskulačních kružnic. Pro poloměr ϱ oskulační kružnice platí totiž jednoduchý vzorec

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

Tento vzorec uvádíme bez odůvodnění. Poněvadž souřadnice x bodu A^r je rovna nule, máme pro délku poloměru oskulační kružnice

$$\varrho_1 = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha}$$

což snadno sestojíme.

Pro body A^r ($x = 2\pi r$) a B^r ($x = \pi r$) dostaneme tytéž hodnoty poloměru oskulačních kružnic.

0 významu a budoucnosti deskriptivní geometrie

(Dokončení)

Prof. Dr. KAREL HAVLÍČEK, KU Praha, Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

V první části svého článku jsme hovořili o deskriptivní geometrii jako o vědě pomocné, která slouží jiným oborům lidské činnosti. Přitom jsme se nedotkli její vnitřní problematiky a jejího vývoje.

V matematice je dnes běžný proces zobecňování pojmů a metod. Deskriptivní geometrie, která jako celá geometrie je součástí matematiky, může snadno převzít tento generalizující postup, např. při svém uplatnění ve vícerozměrových prostorech.

Aplikabilita vícerozměrné deskriptivní geometrie v praxi nesmí tu však hrát rozhodující úlohu. Zkušenost nás učí, že i základní výzkum

v matematice se mnohdy vyvíjel bez ohledu na potřeby současné praxe a že teprve později se ukázala užitečnost těchto teorií v aplikacích. Víme, že budoucí výtvarní umělci nikdy nebudou vytvářet architekturu čtyřrozměrného prostoru, přesto však nesmíme proto hned odmítat promítání v tomto prostoru. Na paměti však musíme mít jinou věc. Nelze se proti společnosti prohřešit tím, že odtrhneme deskriptivní geometrii od života, nesmíme být samoučelní, nesmíme promítat jen proto, aby se promítalo. Proto zavedení dalších rozměrů do deskriptivní geometrie bude užitečné jen v těch případech, přinese-li tato metoda nový vědecký poznatek nebo metodu.

Jiným směrem vývoje deskriptivní geometrie se nese program formulovaný E. Müllerem před více než 40 lety*): „Do oblasti deskriptivní geometrie patří každé zobrazení, které lze sledovat konstruktivně, tj. kreslířsky, i když užitím libovolného kreslicího nářadí.“ Pojem zobrazení chápal Müller velmi abstraktně jako zákonité přiřazení prvků jakékoli množiny prvkům jiné množiny. Klasickým příkladem toho je právě cyklografie, která přiřazuje kružnicím v rovině body v prostoru. Cyklografie přinesla mnoho plodných výsledků ve svých zobecněních.

Müllerův program zařazuje výzkumnou práci v deskriptivní geometrii zcela přirozeně do současného vývoje celé matematiky a může ještě dlouho poskytovat široké možnosti. Nesmíme se ovšem omezovat jen na konstruktivní zvládnutí geometrických útvarů, můžeme přejít k zobrazení množin transformací, studovat konstruovatelné konfigurace, řešit různé kombinatorické otázky v geometrii.

Viděli jsme, že v deskriptivní geometrii nejde jen o obrázky a nelze ji proto zaměňovat s tzv. technickým kreslením. Normování výkresů je v technice nutné a užitečné, např. normalizované kreslení šroubů nám umožňuje zakreslit šroub bez předchozího rýsování šroubovice. Inženýr-architekt se však při návrhu točitého schodiště kreslení šroubovice nevyhne. Prostě normy nejsou konstrukce. Toto odlišení si musí uvědomit každý začátečník. Prostorovou představivost je nutno pěstovat již od mládí, její osvojování v dospělosti způsobuje pak četné nesnáze. Absolventům středních průmyslových škol, vychovaným jen v technickém kreslení, činí prostorová řešení většinou značné potíže, vidí na rysech jen změť čar bez vnitřních souvislostí. Proto je v zájmu celého školství, aby v rámci vědeckotechnické revoluce měla deskriptivní geometrie dostatečný počet hodin nejen na vysokých školách technického směru, nýbrž i na školách středních.

Stavební fakulta zařadila do podmínek přijetí též úspěšnou přijímací zkoušku z deskriptivní geometrie na všech svých oborech, a pro-

*) E. Müller: Vorlesungen über darstellende Geometrie, II. Band: Die Zyklographie (herausgegeben von J. L. Krames), Lipsko - Vídeň 1929, str. 1 úvodu.

to je nutné, aby se studenti průmyslových škol a středních všeobecně vzdělávacích škol včas na tuto zkoušku připravovali. Okolnost, že na deskriptivní geometrii nechodili, nesmí být pro ně omluvou.

Prosíme, aby se všichni čtenáři našeho časopisu, studenti i učitelé, zamyslili nad užitečností a významem deskriptivní geometrie v životě moderního člověka a věnovali jí pozornost, kterou si plným právem zasluhuje.

Zahradnická konstrukce vejcovitých křivek

ROBERT KARPE, Brno

Představme si ideálně tenkou skořápku ptačího vejce. Je to zřejmě rotační plocha, jejíž osa rotace je zároveň jedinou osou souměrnosti.

Nuže, rovina procházející touto osou protíná skořápku v křivce, kterou nazveme „vejcovitá křivka“, nebo stručněji „vejcovka“.

Uvedené vysvětlení není ovšem nijak přesné; nicméně postačí k tomu, aby čtenář nabyl zhruba představu o křivkách, jejichž zahradnickou konstrukci chceme v tomto článku ukázat.

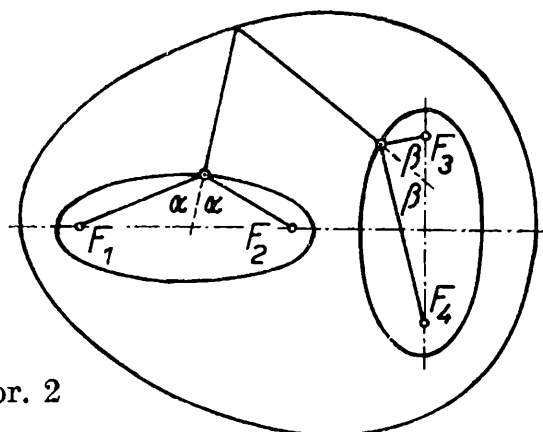
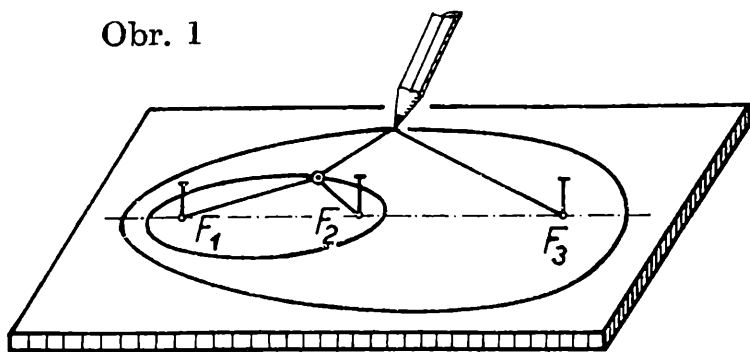
O zahradnické konstrukci elipsy se v starší literatuře psalo asi takto: „Na rovném prostranství zarazíme do země, v jisté vzdálenosti od sebe, dva kolíky; ke každému z nich přivážeme jeden konec pevného motouzu, jehož délka od uzlu k uzlu je větší než přímá vzdálenost obou kolíků. Pak třetím kolíkem napneme tento motouz a hrotem kolíku opisujeme po zemi křivku tak, aby motouz byl neustále napnutý.“

Nuže, k obdobné zahradnické konstrukci vejcovitých křivek si připravíme kromě kolíků a motouzu též alespoň jeden hladký kovový kroužek.

Nemáme-li ostatně k dispozici zahradu, můžeme si tuto konstrukci snadno provést na rýsovacím prkně, používající hřebíčky nebo špendlíky, nitě a dosti malé, hladké kroužky.

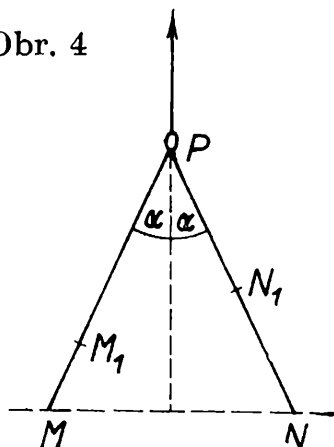
Na obr. 1 je znázorněná konstrukce nejjednodušší vejcovky: zde použijeme jen jeden kroužek.

Obr. 1

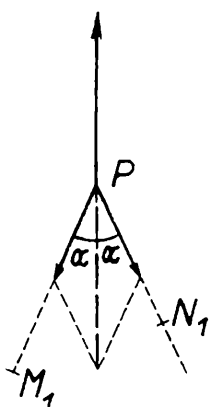


Obr. 2

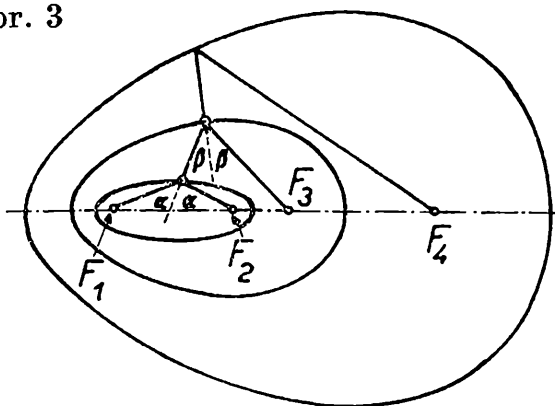
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 3



Složitější konstrukce vejcovitých křivek znázorňují obrázky 2 a 3.

Jak čtenář zajisté z obrázků uhodl, kroužek vždy po jedné niti klouže, zatímco druhá niť je k němu pevně přivázaná. Tuto další niť pak napíná hrot tužky, opisující křivku (viz obr. 1, 2), anebo ji napíná další kroužek, k němuž je opět připevněna další niť (viz obr. 3), a tak podobně.

Jak patrně, lze vejcovky nakreslit uvedeným způsobem velmi snadno.

Naproti tomu však odvození rovnic těchto křivek je úlohou velmi složitou, kterou zde můžeme jen naznačit.

Za tímto účelem uvedeme nejdříve jistou vlastnost, společnou všem zahradnickým sestrojitelným křivkám:

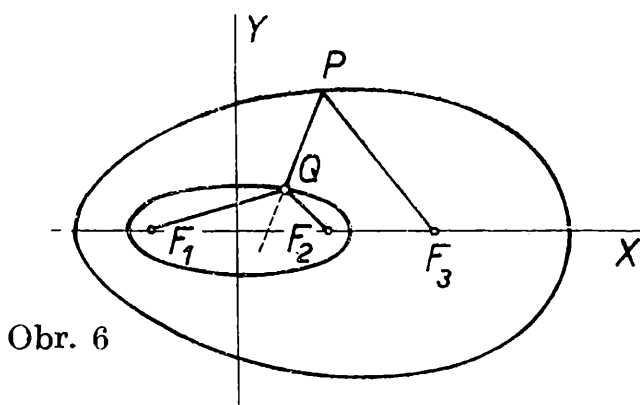
Věta. Při zahradnické konstrukci vejcovité křivky je (každý) kroužek tažen silou, jejíž směr neustále půlí vnitřní úhel průvodičů, příslušných tomuto kroužku.

Důkaz provedeme úvahou z oblasti fyzikální mechaniky:

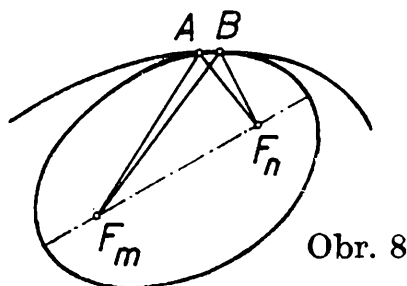
Nechť lomená čára MPN , viz obr. 4, představuje neroztažitelnou niť, která je provlečena kroužkem a upevněna v bodech M , N . Nechť ke kroužku, který se (teoreticky) dotýká této niti v bodě P , je připevněna další niť, tažená kolmo od základny $\overline{MN}$. Pak kroužek zaujme stabilní polohu, označenou na obr. 4. Trojúhelník MNP je zřejmě rovnoramenný ($\overline{MP} = \overline{NP}$); v prodlouženém směru druhé niti leží výška trojúhelníka, která půlí úhel při vrcholu P .

Z hlediska rovnováhy sil to znamená, že v obou částech první nitě, tj. v obou průvodičích kroužku, působí dvě, co do absolutní velikosti sobě rovné, zpětné síly (viz obr. 5).

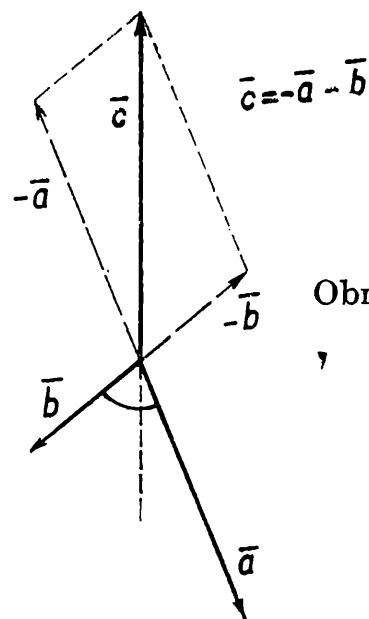
Tento silový obrazec se však zřejmě nezmění ani tehdy, když dodatečně upevníme prvou niť v bodě M_1 , resp. N_1 , kde M_1 , resp. N_1 , je libovolně zvoleným vnitřním bodem úsečky MP , resp. NP (viz obr. 5). Pro silový obrazec, vyjadřující rovnováhu sil, čili stabilní polohu kroužku, není tedy podstatné to, aby trojúhelník M_1PN_1 byl rovnoramenný, nýbrž to, aby v jeho ramenech $\overline{M_1P}$, $\overline{N_1P}$, působily co do



Obr. 6



Obr. 8



Obr. 7

absolutní velikosti sobě rovné, zpětné síly, tj. aby v obou jeho průvodičích bylo stejné napětí. Tato podmínka je však splněna, neboť oba průvodiče kroužku nepřestávají být jedinou, neroztažitelnou a na koncích upevněnou nití, jejíž spojitost si vynucuje vyrovnání napětí v obou její částech, tj. v obou průvodičích kroužku. Toto se pak projevuje geometricky tím, že směr síly, která táhne kroužek, pólí úhel průvodičů, v nichž působí síly zpětné.

Poznámka: Kdyby bylo v každém průvodiči jiné napětí, vypadala by rovnováha sil při stabilní poloze kroužku podle obr. 7, tj. směr síly $\vec{c}$, která táhne kroužek, by pak nemohl pólí úhel průvodičů.

Stejná rovnováha sil ovšem nastane, když místo kroužku napíná niť hrot tužky. To znamená, že když při zahradnické konstrukci libovolné křivky zastavíme hrot tužky, působí síla, napínající niť, ve směru osy vnitřního úhlu průvodičů.

Poznámka: Ze středoškolské látky víme, že u elipsy je tato osa vnitřního úhlu průvodičů totožná s normálou — v každém bodě.

Uvažujme nyní o dvou soumězných bodech A, B , u libovolné zahradnický konstruovatelné křivky (viz obr. 8). (Na obrázku jsou ovšem tyto body nakresleny dosti daleko od sebe — z důvodu názornosti.) Nechť přímky, v nichž leží pravé (levé) průvodiče, příslušné bodům A, B , se protínají v bodě F_m (F_n). Pak spojnice těchto dvou soumězných bodů bude společnou tečnou konstruované křivky a elipsy, mající v bodech F_m, F_n , svá ohniska a délku hlavní osy $d = \overline{F_m A} + \overline{A F_n}$.

Odtud vyplývá, že nejen u elipsy, ale též u libovolné zahradnický konstruovatelné křivky platí, že v libovolném bodě je osa vnitřního úhlu průvodičů totožná s normálou. Což bylo dokázat.

Z uvedeného vyplývá platnost naší věty.

Nyní přistoupíme k úloze: Stanovit základní analytické vztahy, z nichž by bylo možno odvodit obecnou rovnici nejjednodušší vejcovky. (Konstrukce této křivky je znázorněna v axonometrii na obr. 1.)

Uvedme proto ještě i půdorys se zvolenou polohou souřadných os (viz obr. 6).

Zde stanovíme a označíme:

a) Pevné body: $F_1 (-e, 0)$, $F_2 (e, 0)$, $F_3 (d, 0)$.

b) Konstantré délky a jejich vzájemný vztah:

$$\overline{F_1 Q} + \overline{Q F_2} = 2a, \quad \overline{Q P} + \overline{P F_3} = c, \quad a^2 = b^2 + e^2, \quad c > a + d, \quad d > a.$$

c) Souřadnice pohyblivých bodů: $Q (u, v)$, $P (x, y)$.

Pak platí tyto tři vztahy:

$$1. \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

$$2. \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} + \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = c,$$

$$3. \frac{y-v}{x-u} = \frac{v \cdot a^2}{u \cdot b^2}.$$

První z těchto rovnic vyjadřuje, že kroužek (představovaný bodem Q) se pohybuje po elipse.

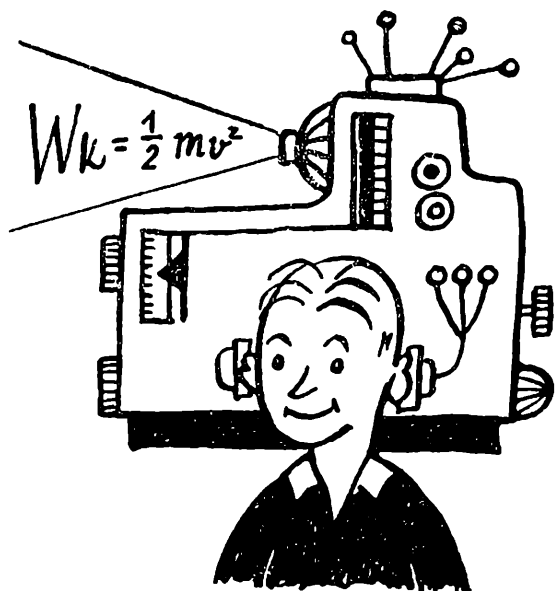
Druhá rovnice vyjadřuje, že obě části (neroztažitelné) niti, přivázané ke kroužku, dávají svým součtem stále tutéž délku c .

Třetí rovnice vyplývá z výše uvedené věty, uvážíme-li, že u elipsy pól normála vnitřní úhel průvodičů. (Výraz na pravé straně této rovnice je směrnice normály elipsy.)

Z těchto tří rovnic nutno vyloučit pomocné proměnné u, v , tj. vytvořit relaci, obsahující z proměnných pouze x a y

$$\Phi (x, y) = 0.$$

Takový vztah bude pak rovnicí uvažované vejcovky.



Jak je to s průměrnou rychlostí

Dr. MILAN BEDNAŘÍK — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, UP Olomouc

Jestliže se vás někdo otáže na průměrnou rychlost vlaku, který jede po trati půl hodiny rychlostí 60 km h^{-1} a další půlhodinu rychlostí 30 km h^{-1} , jistě bez dlouhého uvažování odpovíte, že jeho průměrná rychlost je $(60 \text{ km h}^{-1} + 30 \text{ km h}^{-1}) / 2 = 45 \text{ km h}^{-1}$. A budete mít v tomto případě pravdu.

Kdybyste však stejným způsobem odpověděli na otázku po průměrné rychlosti vlaku, který ujede prvních 10 km rychlostí 60 km h^{-1} a dalších 10 km rychlostí 30 km h^{-1} , dopustili byste se chyby. Průměrná rychlost totiž v tomto případě není 45 km h^{-1} , ale jen 40 km h^{-1} , o čemž se můžeme snadno přesvědčit. Prvních 10 km ujede vlak za dobu

$$t_1 = \frac{10 \text{ km}}{60 \text{ km h}^{-1}} = \frac{1}{6} \text{ hodiny},$$

dalších 10 km za dobu

$$t_2 = \frac{10 \text{ km}}{30 \text{ km h}^{-1}} = \frac{1}{3} \text{ hodiny}$$

a celou dráhu $s = 20 \text{ km}$ za dobu

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{6} \text{ h} + \frac{1}{3} \text{ h} = \frac{1}{2} \text{ h}.$$

Průměrná rychlost vlaku na celé této dráze je pak

$$v = \frac{s}{t} = \frac{20 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 40 \text{ km h}^{-1}$$

Zajímavější výsledek obdržíme v následujícím příkladě: Jaká je průměrná rychlost turisty-autostopaře, který 10 km cesty prošel pěšky rychlostí 5 km h⁻¹ a 30 km se svezl nákladním autem, které jelo rychlostí 60 km h⁻¹?

Podobně jako v předchozím případě určíme nejdříve dobu potřebnou k překonání obou úseků dráhy

$$t_1 = \frac{10 \text{ km}}{5 \text{ km h}^{-1}} = 2 \text{ h}, t_2 = \frac{30 \text{ km}}{60 \text{ km h}^{-1}} = 0,5 \text{ h}$$

Průměrná rychlost na celé dráze $s = 40 \text{ km}$ je pak

$$v = \frac{40 \text{ km}}{2,5 \text{ h}} = 16 \text{ km h}^{-1}.$$

Tedy, přestože turista projel tři čtvrtiny své cesty rychlostí 60 km h⁻¹, je jeho průměrná rychlost pouze 16 km h⁻¹. Tato poměrně nízká hodnota výsledku nás však nemusí překvapovat, všimneme-li si vypočítané hodnoty doby $t_1 = 2 \text{ h}$. Jestliže totiž turista zdolal prvních 10 km cesty za 2 hodiny, pak celou dráhu 40 km urazí za dobu vždy větší než 2 hodiny (a to i tehdy, kdyby se pohyboval ve druhé části dráhy sebevětší rychlostí) a jeho průměrná rychlost na celé dráze bude pak vždy menší než

$$v' = \frac{40 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 20 \text{ km h}^{-1}.$$

Snadno se můžete přesvědčit, že i v případě, kdyby se turista na druhém úseku dráhy svezl závodním autem rychlostí 200 km h⁻¹, byla by jeho průměrná rychlost přibližně 18,6 km h⁻¹.

Jak vidíme, průměrná rychlost není vždy aritmetickým průměrem daných rychlostí, ale může se někdy od tohoto průměru značně lišit. Jak dále ukážeme, případ, kdy průměrná rychlost se právě rovná aritmetickému průměru rychlostí, je pouze případem zvláštním.

Pokusíme se proto raději řešit celý problém průměrné rychlosti nejdříve obecně. Předpokládejme, že se nějaké těleso (automobil, vlak, chodec) pohybuje po určité dráze s nejprve stálou rychlostí v_1 , pak stálou rychlostí $v_2 \neq v_1$. Ke zrychlení nebo zpomalení, k němuž dochází při změně rychlosti z hodnoty v_1 na hodnotu v_2 , přihlížet nebudeme.

Chceme-li stanovit hodnotu průměrné rychlosti, musíme znát kromě obou rychlostí v_1, v_2 ještě

- buď doby t_1, t_2 , kde t_1 je doba, po kterou se pohybuje těleso rychlostí v_1 , a t_2 doba, po kterou se pohybuje rychlostí v_2 ,
- nebo dráhy s_1, s_2 , kde s_1 je dráha ujetá rychlostí v_1 a s_2 dráha ujetá rychlostí v_2 .

Provedme nyní výpočet průměrné rychlosti pro oba uvedené případy.

A. Nechť se těleso pohybuje po dobu t_1 rychlostí v_1 a po dobu t_2

rychlostí v_2 , přičemž urazí dráhy $s_1 = v_1 t_1$ a $s_2 = v_2 t_2$. Za celou dobu $t = t_1 + t_2$ urazí dráhu $s = s_1 + s_2$. Průměrná rychlost tělesa je pak

$$v = \frac{s}{t} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Je-li přitom

$$t_1 = t_2 = \frac{t}{2},$$

tj. pohybuje-li se těleso každou z daných rychlostí po stejnou dobu, dostáváme pro průměrnou rychlost

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Tedy pouze v tomto případě je průměrná rychlost rovna aritmetickému průměru obou daných rychlostí v_1, v_2 (viz první odstavec článku, v němž byla průměrná rychlost $v = 45 \text{ km h}^{-1}$).

B. Nechť se těleso pohybuje po dráze s a urazí určitou část dráhy s_1 rychlostí v_1 a zbývající část dráhy s_2 rychlostí v_2 . V tomto případě urazí první část dráhy za dobu

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1},$$

druhou část dráhy za dobu

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2}$$

a celou dráhu s za dobu

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}.$$

Průměrná rychlost pak je

$$v = \frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}$$

a po úpravě

$$v = \frac{v_1 v_2 s}{v_2 s_1 + v_1 s_2}. \quad (1)$$

Je-li přitom

$$s_1 = s_2 = \frac{s}{2},$$

tj. pohybuje-li se těleso každou z daných rychlostí právě na polovině celkové dráhy, je průměrná rychlost

$$v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}. \quad (2)$$

Také s tímto případem jsme se již setkali v úvodních odstavcích tohoto článku. Připomeňme si příklad s vlakem, který překonal první polovinu dráhy rychlostí $v_1 = 60 \text{ km h}^{-1}$, druhou polovinu rychlostí $v_2 = 30 \text{ km h}^{-1}$ dosadíme-li uvedené hodnoty do vztahu (2), obdržíme ihned průměrnou rychlost $v = 40 \text{ km h}^{-1}$.

Nyní si ještě blíže všimneme, jak se ve vztahu (1) mění hodnota průměrné rychlosti v v závislosti na velikosti úseků dráhy s_1, s_2 .

Vraťme se k našemu příkladu s turistou, kde bylo

$$s_1 = \frac{1}{4} s, \quad s_2 = \frac{3}{4} s$$

kde s je celková dráha. Dosadíme-li uvedené hodnoty do vztahu (1), dostaneme výraz

$$v = \frac{4v_1v_2}{3v_1 + v_2},$$

který pro číselné hodnoty $v_1 = 5 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 60 \text{ km h}^{-1}$ dává přímo výsledek $v = 16 \text{ km h}^{-1}$. Kdyby naopak šel turista pěšky tři čtvrtiny cesty a pouze jednu čtvrtinu se svezl autem, tj.

$$s_1 = \frac{3}{4} s, \quad s_2 = \frac{1}{4} s,$$

byla by průměrná rychlost

$$v = \frac{4v_1v_2}{v_1 + 3v_2},$$

číselně $v \doteq 6,5 \text{ km h}^{-1}$.

V případě, že by šel turista pěšky $\frac{1}{6}$ cesty (a ostatních $\frac{5}{6}$ se vezl autem), dostali bychom pro průměrnou rychlost

$$v = \frac{6v_1v_2}{5v_1 + v_2} \doteq 21,2 \text{ km h}^{-1},$$

a kdyby šel pěšky $\frac{5}{6}$ cesty (a zbývajících $\frac{1}{6}$ cesty jel autem), byla by jeho průměrná rychlost

$$v = \frac{6v_1v_2}{v_1 + 5v_2} \doteq 5,9 \text{ km h}^{-1},$$

tj. rychlost velmi blízká jeho rychlosti v prvním úseku dráhy.

Jak je zřejmé, hodnota průměrné rychlosti je i při nezměněných rychlostech v_1 , v_2 výrazně ovlivněna právě velikostí úseků s_1 , s_2 .

Obecně pro dráhy

$$s_1 = \frac{k}{n} s, \quad s_2 = \frac{n-k}{n} s,$$

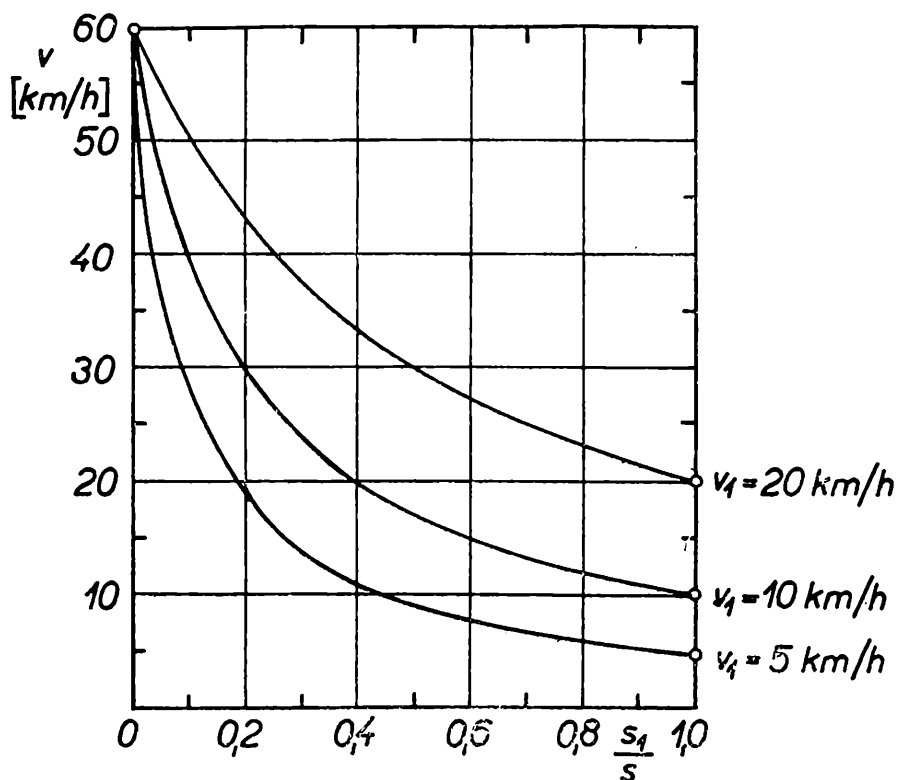
kde k , n jsou čísla přirozená a $k < n$, máme pro průměrnou rychlost vztah

$$v = \frac{nv_1v_2}{kv_2 + (n-k)v_1}.$$

Jestliže bychom jeden z úseků dráhy položili rovný nule, dostáváme pro $s_1 = 0$, tj. pro $k = 0$ průměrnou rychlost $v = v_2$, pro $s_2 = 0$, tj. pro $n - k = 0$ průměrnou rychlost $v = v_1$. Obdrželi jsme krajní meze průměrné rychlosti v ; tzn., že pro průměrnou rychlost platí za předpokladu $v_1 < v_2$ a $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$ nerovnost

$$v_1 < v < v_2.$$

Názorněji můžeme sledovat změny průměrné rychlosti na obr. 1, kde



Obr. 1. Grafické znázornění závislosti průměrné rychlosti v na velikosti úseku dráhy s_1 při třech rychlostech v_1 a rychlosti $v_2 = 60 \text{ km h}^{-1}$.

je graficky znázorněna závislost průměrné rychlosti v na velikosti úseku dráhy s_1 pro tři různé rychlosti v_1 (např. rychlost turisty $v_1 = 5 \text{ km h}^{-1}$ při chůzi, rychlost běžce $v_1 = 10 \text{ km h}^{-1}$, rychlost cyklisty $v_1 = 20 \text{ km h}^{-1}$ a pro rychlost automobilu $v_2 = 60 \text{ km h}^{-1}$. Hodnoty jednotlivých úseků jsou vyneseny na vodorovné ose jako podíl tohoto úseku s_1 a celkové dráhy s .

Z grafu snadno vyčteme, že průměrná rychlost v urychleně roste se zmenšujícími se úseky s_1 až pro $s_1 = 0$ nabývá maximální hodnoty $v = v_2$ (v případě turisty to znamená, že by jel po celou cestu autem rychlostí 60 km h^{-1}), kdežto pro rostoucí hodnoty s_1 pozvolna klesá až k hodnotě $v = v_1$ (nepoužije-li turista auta, bude se pohybovat celou cestu rychlostí 5 km h^{-1}).

Pro řidiče motorových vozidel je významná ještě jiná otázka: Jakou rychlostí v_2 musíme jet na volném úseku silnice s_2 , abychom při určité omezené rychlosti v_1 na úseku s_1 dosáhli na celé dráze s předem stanovené průměrné rychlosti v ? K řešení této otázky použijeme raději příkladu.

Řidič osobního auta má projet vzdálenost 150 km za 2 hodiny, tzn., že má dosáhnout průměrné rychlosti 75 km h^{-1} . Z dané vzdálenosti 150 km projíždí celkem 30 km uzavřenými osadami (města, vesnice), kde jede rychlostí 45 km h^{-1} . Vypočítejte: a) Rychlost, kterou musí jet ve zbývajících 120 km , aby požadované průměrné rychlosti skutečně dosáhl. b) Rychlost, kterou by musel jet na zbývajících 120 km , aby dosáhl požadované rychlosti i tehdy, kdyby na úseku 30 km musel pro opravu silnice snížit rychlost jízdy na 15 km h^{-1} .

Řešení: a) Ze zadání příkladu je patrné, že na úseku $s_1 = 30 \text{ km}$ jede auto rychlostí $v_1 = 45 \text{ km h}^{-1}$. Má-li dosáhnout průměrné rychlosti $v = 75 \text{ km h}^{-1}$, musí projet další úsek dráhy $s_2 = 120 \text{ km}$ rychlostí v_2 , kterou určíme ze vztahu (1). Jednoduchou úpravou obdržíme výraz

$$v_2 = \frac{vv_1s_2}{v_1s - vs_1}, \quad (3)$$

a po dosazení daných hodnot rychlost $v_2 = 90 \text{ km h}^{-1}$.

b) V případě, že by se vozidlo pohybovalo po dráze $s_1 = 30 \text{ km}$ pouze rychlostí $v_1 = 15 \text{ km h}^{-1}$, již rychlost v_2 určit nelze. Dosadíme-li příslušné hodnoty do jmenovatele zlomku ve vztahu (3), zjistíme, že $v_1s - vs_1 = 15 \cdot 150 - 75 \cdot 30 = 2250 - 2250 = 0$ a zlomek pozbývá reálného významu. Při rychlosti $v_1 = 15 \text{ km h}^{-1}$ urazí totiž automobil dráhu $s_1 = 30 \text{ km}$ za 2 hodiny, což znamená, že již neexistuje žádná ani sebevětší rychlost v_2 , kterou by mohl v mezích těchto 2 hodin překonat ještě vzdálenost 120 km .

Z výsledku posledního příkladu je zřejmé, že ne ke každé rychlosti v_1 , kterou jede vozidlo na úseku dráhy s_1 , existuje pro zbývající úsek s_2 rychlost v_2 taková, aby vozidlo dosáhlo na celé dráze určité předem

stanovené průměrné rychlosti v . Podmínka pro existenci rychlosti v_2 je pak nerovnost

$$v_1 s - v s_1 < 0,$$

neboli

$$v_1 > \frac{s_1}{s} v \quad (4)$$

K dokreslení posledního problému uvádíme ještě tabulku 1. Jsou v ní uvedeny číselné hodnoty rychlosti v_2 , kterou muselo projet vozidlo určitou část dráhy $s_2 = s - s_1$, aby při dané rychlosti v_1 na úseku s_1 do-

Tabulka 1

$\frac{s_1}{s}$ v_1 [km h ⁻¹]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
10	135	—	—	—	—	—	—	—	—
20	77	120	420	—	—	—	—	—	—
30	68	80	105	180	—	—	—	—	—
40	64	68	76	90	120	240	—	—	—
50	61	63	66	69	75	86	112	300	—

sáhlo vždy průměrné rychlosti $v = 60$ km h⁻¹.

Jede-li např. vozidlo na úseku dráhy $\frac{s_1}{s} = 0,4$ rychlostí $v_1 = 40$ km h⁻¹, pak zbývajíc úsek dráhy musí projet rychlostí $v_2 = 90$ km h⁻¹, má-li být jeho průměrná rychlost $v = 60$ km h⁻¹. Jede-li však vozidlo na daném úseku rychlostí $v_1 = 30$ km h⁻¹, pak činí rychlost $v_2 = 180$ km h⁻¹, a v případě, že rychlost $v_1 = 20$ km h⁻¹, pak již požadovaného průměru nedosáhneme při žádné reálné rychlosti v_2 ; i v tomto případě již také není splněna podmínka (4), neboť $20 \text{ km h}^{-1} < 0,4 \cdot 60 \text{ km h}^{-1}$.

Na závěr uvádíme několik dalších příkladů, na nichž si může čtenář ověřit, zda problému průměrné rychlosti správně porozuměl.

Příklady:

1. Určete průměrnou rychlost automobilu, který ujede čtvrtinu celkové doby jízdy rychlostí 120 km h⁻¹, tři čtvrtiny doby rychlostí 40 km h⁻¹. Vypočítejte také, jaké dráhy urazí každou rychlostí, je-li celková doba jízdy 2 hodiny. [Řešení: 60 km h⁻¹, oba úseky 60 km]

2. Řidič osobního vozu plánuje jízdu do vzdálenosti 30 km na dobu půl hodiny. Na silnici však dojede kolonu pomalých vozidel, za nimiž je nucen jet 20 minut rychlostí 30 km h⁻¹. Jakou rychlostí by musel jet ve zbývajícím čase, aby dorazil do cíle za plánovanou dobu? [Řešení: 120 km h⁻¹]

3. Dálkový vůz, který má překonat vzdálenost $s = 400$ km, jede v uzavřených osadách průměrnou rychlostí $v_1 = 40$ km h⁻¹, na volných úsecích silnice rychlostí $v_2 = 100$ km h⁻¹. Jakou průměrnou rychlostí v vůz jede a za jakou dobu t dosáhne cíle, jestliže $\frac{2}{3}$ celkové dráhy vedou uzavřenými osadami? [Řešení: $v = 50$ km h⁻¹, $t = 8$ hodin]

4. Automobil jel $\frac{9}{10}$ celkové dráhy rychlostí 80 km h⁻¹. Jakou rychlostí projel zbývajících $\frac{1}{10}$ dráhy, dosáhl-li průměrné rychlosti 70 km h⁻¹? [Řešení: 33 km h⁻¹]

5. Nákladní automobil jede 18 km rychlostí 30 km h⁻¹ a 9 km rychlostí 60 km h⁻¹. a) Jaká je jeho průměrná rychlost? b) Jakou rychlostí by musel jet na kratším úseku, aby dosáhl téže průměrné rychlosti v případě, že by delším úsekem projížděl rychlostí 27 km h⁻¹? [Řešení: a) 36 km h⁻¹; b) 108 km h⁻¹]

Postup při řešení jednoho příkladu z mechaniky

I V O V O L F, PF Hradec Králové

(Určeno zejména pro řešitele FO nebo soutěže v Rozhledech)

Při kontrole řešení fyzikálních úloh v soutěžích zjišťujeme, že mnozí řešitelé se snaží získat co nejdříve číselný výsledek. Neuvědomují si, že právě obecné řešení a diskuse je proto mnohem cennější, že se takto vlastně řeší celá množina obdobných úloh.

V čísle 4. letošního ročníku Rozhledů byl uveřejněn článek: „Jak řešit fyzikální úlohy“. Jeho pokračováním je tento článek obsahující podrobné řešení příkladu z dynamiky, jaké by asi měli provést žáci, např. v I. kole FO nebo v soutěži Rozhledů.

Text: Řidič zastavil auto jedoucí s kopce, klesajícího v úhlu α , a odešel k blízkému telefonu, aby podal nutnou zprávu. Za chvíli z nějaké příčiny se auto odbrzdilo a začalo sjíždět dolů s kopce.

Je-li koeficient odporu proti pohybu auta f a řidič se vrátil na místo za dobu τ určete:

- Jak daleko bude auto v okamžiku řidičova návratu?
- Podaří se řidiči dostihnout ujíždějící auto, poběží-li stálou rychlostí v_0 za ním? Jak velkou rychlost má auto v okamžiku setkání?
- Zkoumejte, jaký vliv na existenci fyzikálního řešení by měla změna hodnoty rychlosti v_0 .

d) Určete minimální rychlost ($v_{0, \min}$) řidiče, aby (při zadaných hodnotách pro τ , α , f) ještě mohl dostihnout ujíždějící auto, čas (T_0), kdy ho dostihne, a rychlost jakou v tomto okamžiku má auto.

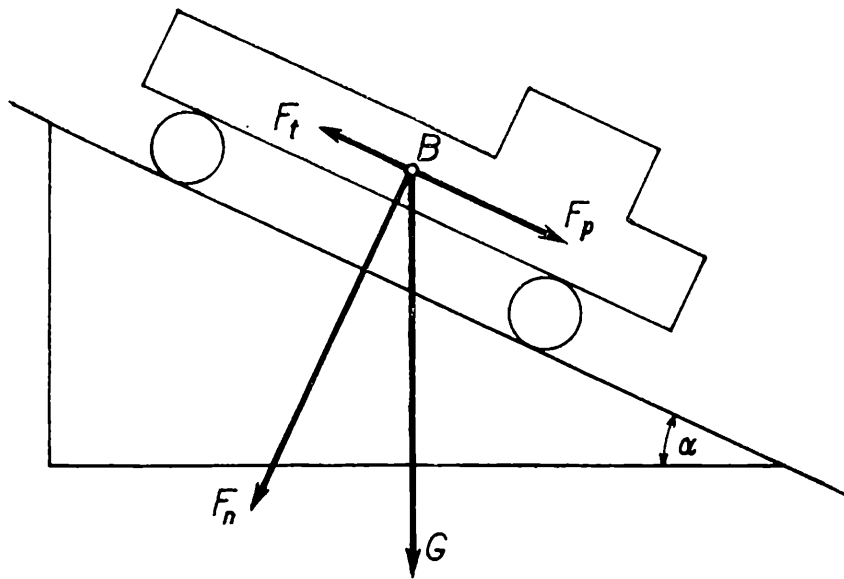
e) Nakreslete přibližně graf závislosti dráhy na čase, jak pro ujíždějící auto, tak pro běžícího řidiče.

Počítejte číselně na 3 platné číslice a výsledek zaokrouhlete na 2.

Řešte nejprve obecně a potom dosadte hodnoty: $\operatorname{tg} \alpha = 0,0741$, $f = 0,0700$, $\tau = 50$ s, $v_0 = 5,00$ m s⁻¹, $g = 9,80$ m s⁻².

Řešení (obr. 1). Auto na nakloněné rovině (viz obr. 1) má tíhu

$$G = mg \quad (1a)$$



Obr. 1

Tíha G se rozkládá na dvě složky: F_p (pohybová složka), F_n (síla kolmého tlaku), kde

$$F_p = G \sin \alpha = mg \sin \alpha, \quad (1b)$$

$$F_n = G \cos \alpha = mg \cos \alpha. \quad (1c)$$

Proti pohybové složce F_p působí síla tření F_t , která je úměrná síle kolmá tlaková, F_n (koeficientem úměrnosti je f), takže

$$F_t = fF_n = fmg \cos \alpha. \quad (1d)$$

Výsledná síla F , působící na auto ve směru možného pohybu, je

$$F = F_p - F_t = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) = mg \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - f). \quad (1e)$$

Zrychlení a určíme podle zákona síly jako podíl síly a hmotnosti, takže

$$a = F/m = g \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - f), \quad (1)$$

kde $a > 0$ pro klesání auta dolů. Uvažujme všechny 3 možnosti:

a₁) Je-li $a > 0$, auto klesá po svahu rovnoměrně zrychleně. Třeba řešit!

a₂) Je-li $a < 0$, auto stojí nehnutě; netřeba řešit.

a₃) Je-li $a = 0$, auto buď stojí nehnutě, anebo (např. účinkem vnějšího nárazu, nebo otřesu půdy anebo závanu větru) klesá stálou rychlostí. Neřešíme, neboť text úlohy neobsahuje zprávu o nějakém vnějším impulsu.

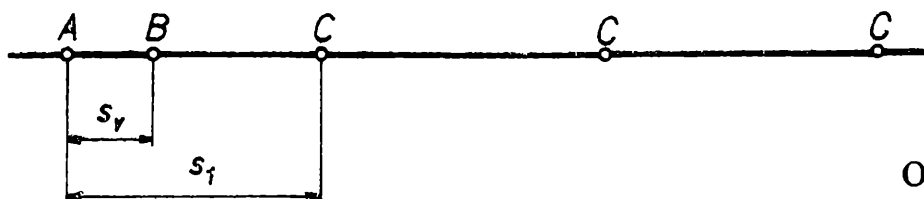
Z toho je patrné, že v dalším nutno řešit jen případ $a > 0$.

Nechť v obr. 2 značí:

A = místo, kde auto zastavilo = počátek dráhy běžícího řidiče;

B = poloha auta v okamžiku, kdy řidič vyběhl;

C_1 , resp. C_2 jsou místa prvního, resp. druhého setkání řidiče s ujíždějícím autem;



Obr. 2

C_0 je místo související s odstavcem d) této úlohy (viz tam).

Za počátek času ($t = 0$) volme okamžik, kdy auto začalo zrychleně klesat (který je totožný s okamžikem odbrzdění).

Za počátek dráhy volíme bod A . Čas, kdy řidič dostihne ujíždějící auto, označme T . (Tím docílíme, že t bude značit vždy proměnlivý čas — jako ve fyzikálních vzorcích — kdežto τ , T mají hodnoty konstantní.)

a) Dráha auta (klesajícího s konstantním zrychlením a) se určí vzorcem

$$s = \frac{1}{2} at^2, \quad (2)$$

kde t značí proměnlivý čas.

Za dobu τ vykoná tedy auto dráhu

$$AB = s_\tau = \frac{1}{2} a\tau^2 \quad (2a)$$

b) Délka dráhy auta do okamžiku T , kdy je běžící řidič dostihl, je

$$s_1 = AC_1 = \frac{1}{2} aT^2. \quad (2b)$$

Řidič vyběhl v čase τ , takže do libovolného okamžiku t , běžel dobu $t - \tau$ stálou rychlostí v_0 , takže má do libovolného okamžiku t uběhnutou dráhu danou vzorcem

$$s_\tau = v_0(t - \tau). \quad (2c)$$

Proto dráha řidičem do okamžiku T proběhnutá, je

$$AC_1 = s_1 = v_0(T - \tau) \quad (2d)$$

Z rovnosti drah (2b) a (2d) plyne kvadratická rovnice (neznámou je T)

$$\frac{1}{2} aT^2 = v_0T - v_0\tau,$$

čili

$$aT^2 - 2v_0T + 2v_0\tau = 0, \quad (3)$$

kteřá má dvě řešení, totiž

$$T_{12} = \frac{1}{a} [v_0 \pm \sqrt{v_0(v_0 - 2a\tau)}] \quad (3a)$$

přičemž zrychlení a se určí ze vztahu (1). Kořeny této kvadratické rovnice jsou v případě $\begin{cases} \text{nezáporného} \\ \text{záporného} \end{cases}$ diskriminantu oba současně $\begin{cases} \text{reálné} \\ \text{komplexní.} \end{cases}$

Diskuse:

b₁) Pro danou fyzikální úlohu má význam jen kořen reálný a kladný. (Záporný kořen by totiž vyjadřoval fakt, že řidič dostihl ujíždějící auto před okamžikem $t = 0$, čili dříve než nastalo zrychlené klesání auta; toto však zde nemůže mít smyslu.)

b₂) Kvadratická rovnice (3) má reálné kořeny právě tehdy, je-li diskriminant $D \geq 0$, což podle vztahu (3a) nastane, je-li

$$v_0 - 2a\tau \geq 0,$$

takže platí

$$0 < 2a\tau \leq v_0 < \infty, \quad (4)$$

což je (nutná a postačující) podmínka reálnosti řešení.

b₃) Avšak: Má-li (3) reálné kořeny, pak jsou tyto kořeny oba kladné, jak snadno dokážeme: Nezáporná hodnota diskriminantu D je totiž vždy menší než v_0^2 , neboť vždy je

$$0 \leq v_0^2 - 2av_0\tau < v_0^2.$$

Jinak řečeno: žádný z kořenů rovnice (3) nemůže být záporný.

b₄) Nutno ještě rozhodnout, zda oba tyto kladné kořeny vyhovují dané úloze též ve fyzikálním smyslu. Předpokládejme, že velikosti obou reálných (kladných ovšem) kořenů T_1, T_2 daných vztahem (3a) splňují nerovnost $0 < T_1 < T_2$ a uvažujme situaci v časech $t = 0, \tau, T_1, T_2$ a časových intervalech (pro $a > 0$) podrobněji:

V čase $t = 0$ řidič je v klidu. Zastavené auto se právě odbrzdilo a dává se do rovnoměrně zrychleného pohybu.

Pro $0 < t < \tau$: Auto se pohybuje zrychleně po svahu dolů. Řidič vzdálen.

V čase $t = \tau$: Auto ujíždí stále rychleji; řidič se vrátil na původní místo a chystá se běžet za ním.

Je-li $\tau < t < T_1$ řidič běží stálou rychlostí v_0 za ujíždějícím autem.

V čase $t = T_1$ auto i řidič vykonali stejnou dráhu od místa zastávky, čili běžící řidič dostihl auto a má možnost skočit k volantů a řídit je.

Pro $T_1 < t < T_2$: Jestliže řidič v čase T_1 nevskočil do auta, pak pohyb obou pokračuje; řidič předběhl auto jedoucí za ním.

V čase $t = T_2$ ujíždějící auto dostihuje řidiče, který má druhou a poslední možnost zasáhnout.

Je-li $t > T_2$ a řidič ani v čase $t = T_2$ se neujal řízení, pohyb pokračuje; auto ujíždí před řidičem (rychlostí větší než v_0) a vzdálenost auta od řidiče, který definitivně ztratil možnost zasáhnout, se stále zvětšuje.

Je patrné: V čase $t = T_1$ řidič dostihuje ujíždějící auto, ale v čase $t = T_2$ ujíždějící auto dostihuje běžícího řidiče. Proto z fyzikálního hlediska a vzhledem ke stylizaci otázky v zadání úlohy („...zda řidič dostihne ujíždějící auto“) nutno považovat za fyzikálně vyhovující pouze kořen T_1 , tj. menší z obou kladných kořenů rovnice.

c) Zjistíme ještě, jaký vliv na řešení by měla změna hodnoty řidičovy rychlosti v_0 . Vztah (3a), resp. (4) ukazuje, že rychlost běžícího řidiče musí být v intervalu

$$v_0 \in \langle 2a\tau, \infty \rangle,$$

čili v_0 má hodnotu rovnou $2a\tau$ anebo větší. Tedy:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Zmenšuje-li} \\ \text{Zvětšuje-li} \end{array} \right\} \text{ se } v_0 \text{ od zadané hodnoty, pak rozdíl hodnot reálných}$$
 kořenů rovnice (3) se $\left\{ \begin{array}{l} \text{zmenšuje} \\ \text{zvětšuje} \end{array} \right.$ rovněž, neboť (3a) dává vztah

$$T_2 - T_1 = \frac{2}{a} \sqrt{v_0(v_0 - 2a\tau)} \quad (3b)$$

$$\begin{array}{l} \text{Minimální hodnota rychlosti } v_0, \text{ aby úloha byla řešitelná je} \\ v_{0 \text{ min}} = 2a\tau \end{array} \quad (4a)$$

Pro ni je diskriminant rovnice (3) roven nule a podle (3b) je rovněž $T_2 - T_1 = 0$, takže oba kořeny T_1, T_2 splynou v jeden dvojnásobný, který označme T_0 , a platí

$$T_0 = v_{0 \text{ min}}/a. \quad (4b)$$

Provedme numerický výpočet ze zadaných hodnot a dostáváme

$$\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \doteq 0,997$$

Vztah (1) dá

$$a = g \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - f) \doteq 0,0401 \text{ m s}^{-2};$$

dimenzionální správnost je zřejmá.

Vztah (3a), tj.

$$T_{12} = \frac{1}{a} [v_0 \pm \sqrt{v_0(v_0 - 2a\tau)}]$$

dává $T_1 \doteq 69 \text{ s}$, $T_2 \doteq 180 \text{ s}$.

Vztah (4a) dá

$$v_{0 \text{ min}} = 2a\tau = 2 \cdot 0,0401 \text{ m s}^{-2} \cdot 50 \text{ s} = 4,01 \text{ m s}^{-1}$$

Vztah (4b) dá

$$T_0 = v_{0 \text{ min}}/a = 100 \text{ s}$$

Pro kontrolu vypočteme dráhy za dobu T_0 :

Dráha auta je

$$s_a(T_0) = \frac{1}{2} a T_0^2 \doteq 200,5 \text{ m}$$

Dráha řidiče je

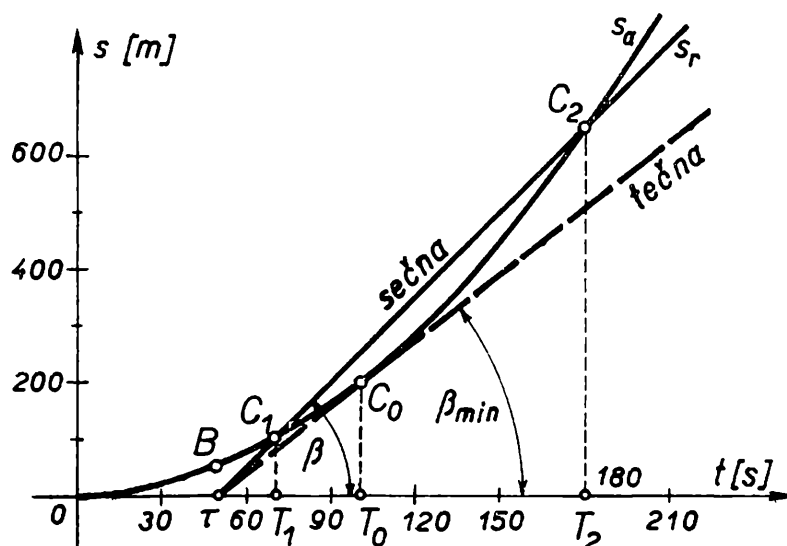
$$s_r(T_0) = v_{0 \min}(T_0 - \tau) = 4,01 \text{ m s}^{-1} \cdot 50 \text{ s} = 200,5 \text{ m}$$

Zjistíme ještě rychlost auta v čase $t = T_0$ pomocí známého vzorce $v = at$; obdržíme

$$v_a(T_0) = aT_0 = 0,0401 \text{ m s}^{-2} \cdot 100 \text{ s} = 4,01 \text{ m s}^{-1} = v_{0 \min},$$

čili rychlost auta v okamžiku T_0 je rovna minimální rychlosti běžícího řidiče $v_{0 \min}$, potřebné, aby auto ještě mohl dostihnout. Tento fakt je samozřejmý a bude vysvětlen v odst. e).

e) Sestrojme (aspoň přibližně grafy — viz obr. 3) závislosti dráhy na čase pro funkce



Obr. 3

(2), tj. dráhu auta $s_a = \frac{1}{2} at^2$, kde t se mění v časovém intervalu $\langle 0, \infty \rangle$,

(2c), tj. dráhu řidiče $s_r = v_0(t - \tau)$, kde t se mění v intervalu $\langle \tau, \infty \rangle$.

Úhel β , sevřený grafem funkce s_r a časovou osou vyjadřuje rychlost v_0 ; platí, že $\tan \beta$ je úměrné rychlosti v_0 (čili $\tan \beta \propto v_0$).¹⁾

Svislé souřadnice bodů na grafu (paraboly) pro s_a určují dráhu vykonanou ujíždějícím autem, kdežto body grafu (polopřímky) pro s_r udá-

¹⁾ Jaké měřítko by musel mít graf, aby bylo možno říci, že číselná hodnota rychlosti v_0 je rovna hodnotě čísla $\tan \beta$? [Odpověď: Měřítko na obou osách musí být stejné, tj. 1 sekunda na vodorovné ose musí být znázorněna stejně dlouhou úsečkou jako 1 metr na ose svislé.]

Kdy lze říci, že $v_0 = \tan \beta$? [Odpověď: Nikdy! Vždyť rychlost v_0 má fyz. jednotku m s^{-1} , kdežto $\tan \beta$ je pouhé číslo bez fyzikální dimenze. Ve fyzikálních rovnicích musí dimenze na obou stranách rovnice být táž!]

vají dráhu vykonanou běžícím řidičem; obojí je měřeno od zastávky auta a pro libovolný čas t .

Je patrné (a bylo již prokázáno výše), že v podstatě existují tři možnosti:

e₁) Polopřímka s_r je sečnou paraboly s_a pro $D < 0$, takže existují 2 reálné průsečíky C_1, C_2 , což lze vyjádřit množinovým symbolem $\cap$ (zv. „průnik“) vztahem

$$s_a \cap s_r = C_1, C_2$$

(slovy: Křivka s_a má s křivkou s_r společné body C_1, C_2).

e₂) s_r je tečnou paraboly s_a , je-li diskriminant $D = 0$; C_0 je dotykový bod. Množinové vyjádření (pomocí průniku) je tedy

$$s_a \cap s_r = C_0,$$

slovy: Průnik množiny bodů paraboly s_a s množinou bodů přímky s_r sestává z (jediného) prvku (tj. bodu), kterým je C_0 . (Viz obr. 3.)

e₃) s_r neprotíná vůbec parabolu s_a , je-li $D < 0$. (Na obr. 3 není kresleno.) Množinové vyjádření

$$s_a \cap s_r = \emptyset,$$

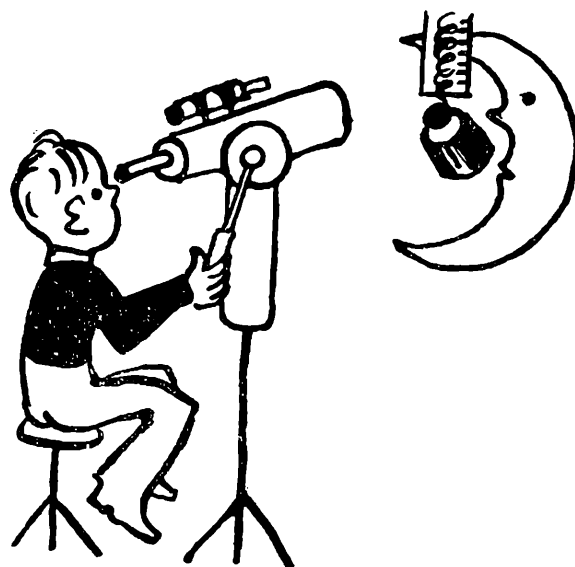
slovy: Průnik množiny bodů s_a a množiny bodů s_r je „množina prázdná“, ($\emptyset$), čili čáry s_a a s_r nemají žádný bod společný anebo: přímka s_r je nesečnou paraboly s_a .

Tečna vedená bodem $A = [\tau, 0]$ ke křivce s_a svírá s vodorovnou osou úhel $\beta_{\min}$, jehož tangenta je úměrná minimální hodnotě ($v_{0 \min}$) rychlosti běžícího řidiče, má-li se setkat s ujíždějícím autem.

Posouvá-li se bod A po vodorovné ose doprava, potom potřebný (ostrý) úhel $\beta_{\min}$ (a tedy též hodnota $v_{0 \min}$ minimální rychlosti) se stále zvětšuje, což vyjadřuje fakt, samozřejmý z názoru, má-li řidič stihnout auto.

Vidíme, že grafické znázornění vysvětluje názorně všechny početně nalezené výsledky, umožní snadnější porozumění a současně může být kontrolou provedených výpočtů.

Závěr: Správné řešení fyzikální úlohy nespočívá tedy pouze v nalezení vyhovujících numerických hodnot, ale též — a to mnohem závažněji — v diskusi řešení a dalších fyzikálních úvahách, které řešení provázejí.

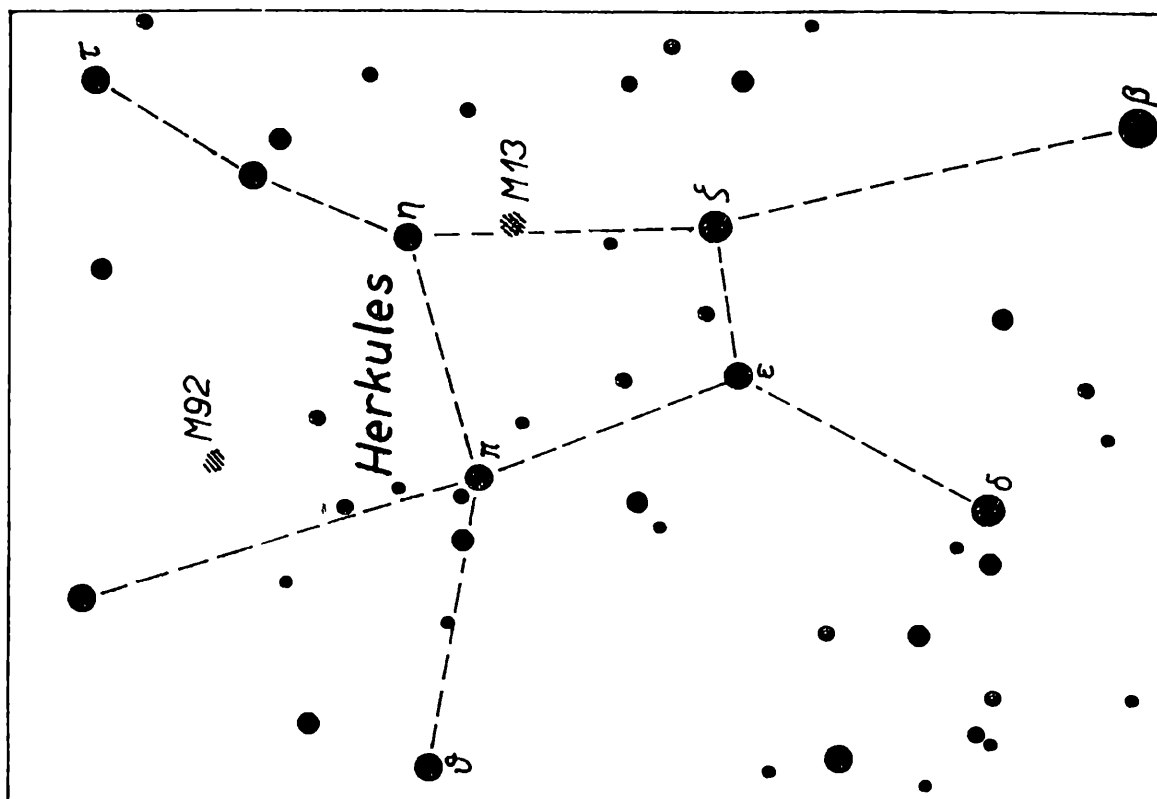


Souhvězdí jarní oblohy

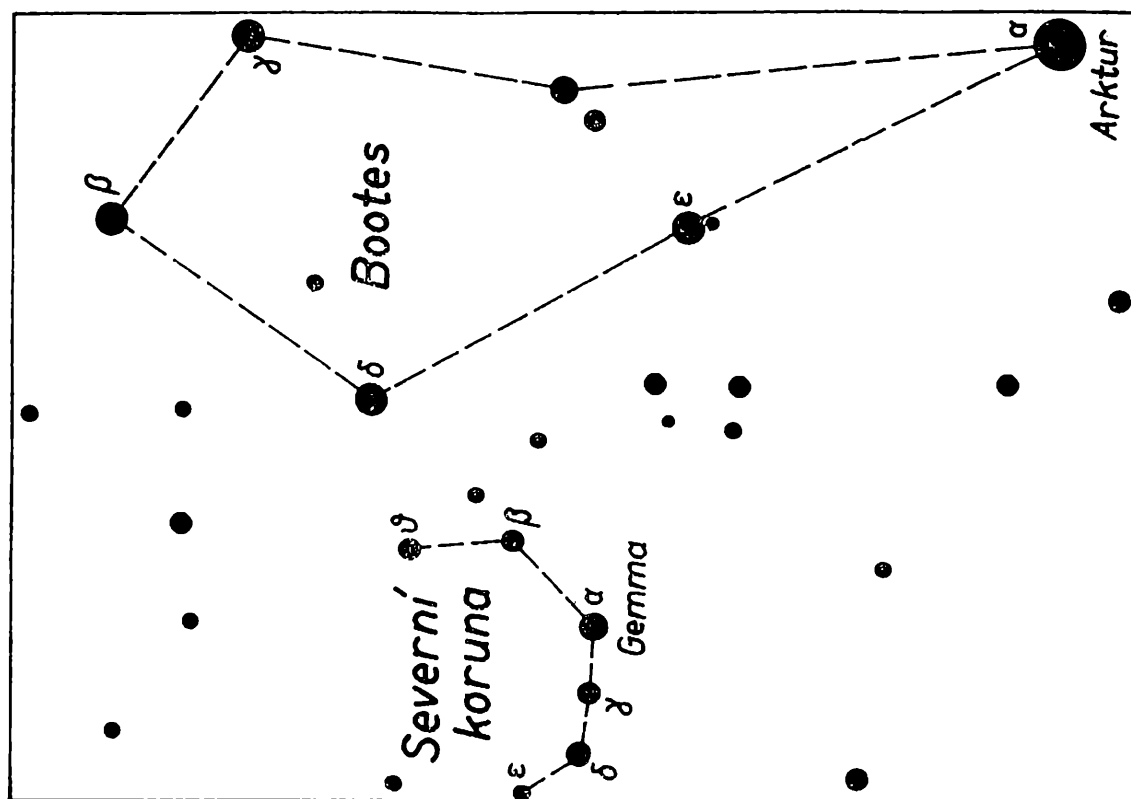
Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, UP Olomouc

Nad východním obzorem vychází ve večerních hodinách souhvězdí Herkula (Hercules, Her), v němž můžeme vyhledat přibližně na spojnici hvězd η a ξ za bezměsíční noci i pouhým okem viditelnou kulovou hvězdokupu M 13 (obr. 1). Její zdánlivá hvězdná velikost je $5,7^m$ a průměr $10'$. Hvězdokupa, obsahující asi půl miliónu hvězd, je od nás vzdálena 7 kiloparseků. U obzoru je souhvězdí Pastýře (Bootes, Boo) s jasnou hvězdou Arkturem (obr. 2), jejíž hvězdná velikost je $0,0^m$. Hvězda ε je dvojhvězda, jejíž dvě složky $2,7^m$ a $5,1^m$ jsou ve vzájemné vzdálenosti $3''$. V blízkosti Pastýře je souhvězdí Severní koruny (Corona Borealis, CrB) s jasnou hvězdou α (Gemma). Tato hvězda je zákrytová proměnná hvězda Algolova typu s periodou 17,4 dne. Hvězdná velikost Gemmy se mění pouze o jednu desetinu hvězdné velikosti, a to od $2,2^m$ do $2,3^m$.

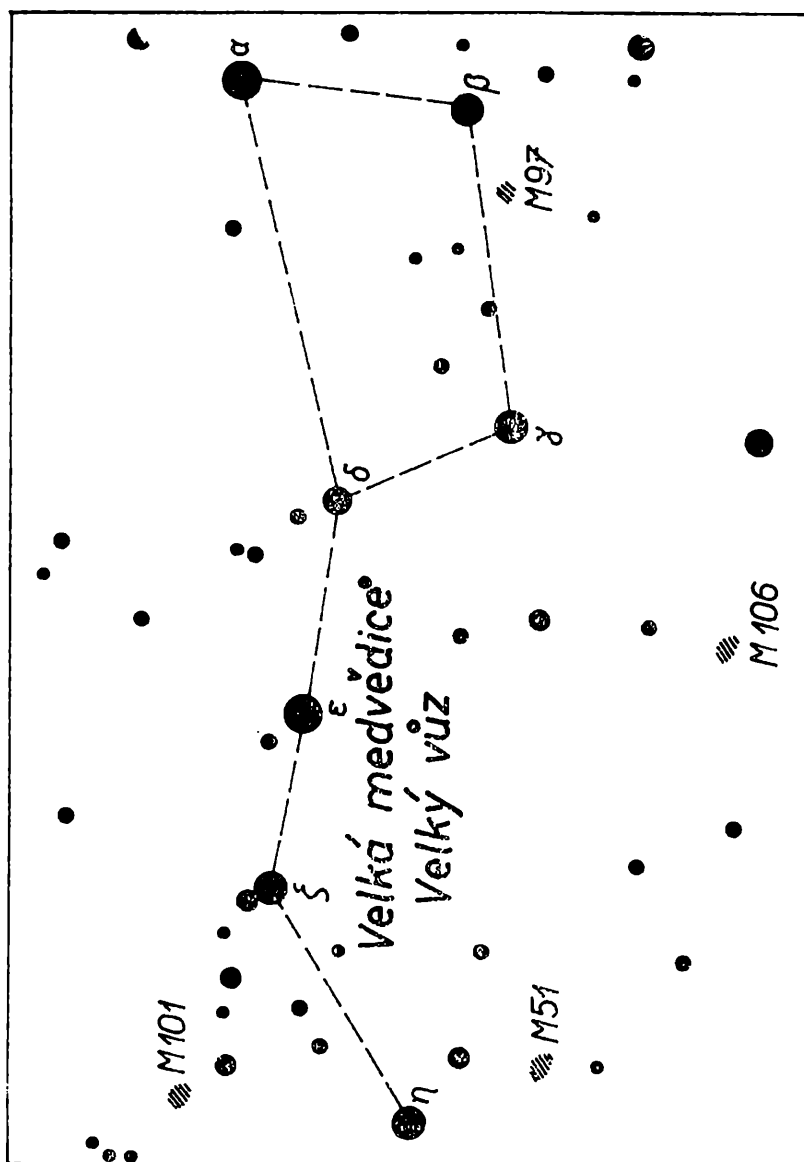
Nad jižním obzorem je souhvězdí Lva (Leo) a pod ním velmi protáhlé souhvězdí Hydry (Hydra, Hya). Nad západním obzorem jsou výrazná souhvězdí zimní oblohy: Blíženci, Malý pes a nízko nad západním obzorem nejjasnější hvězda — Sírius v souhvězdí Velkého psa. Nad severním obzorem můžeme vyhledat Persea, Kasiopeu a Cefeia. V zenitu je nejznámější souhvězdí Velké medvědice (obr. 3), jehož sedm nejjasnějších hvězd se také nazývá Velký vůz. Souhvězdí Velké medvědice (Ursa maior, UMa) patří mezi cirkumpolární souhvězdí, která v našich zeměpisných šířkách nikdy nezapadají pod obzor. Hlavní hvězdy mají tyto názvy arabského původu: α Dubhe, β Merak, γ Phekda,



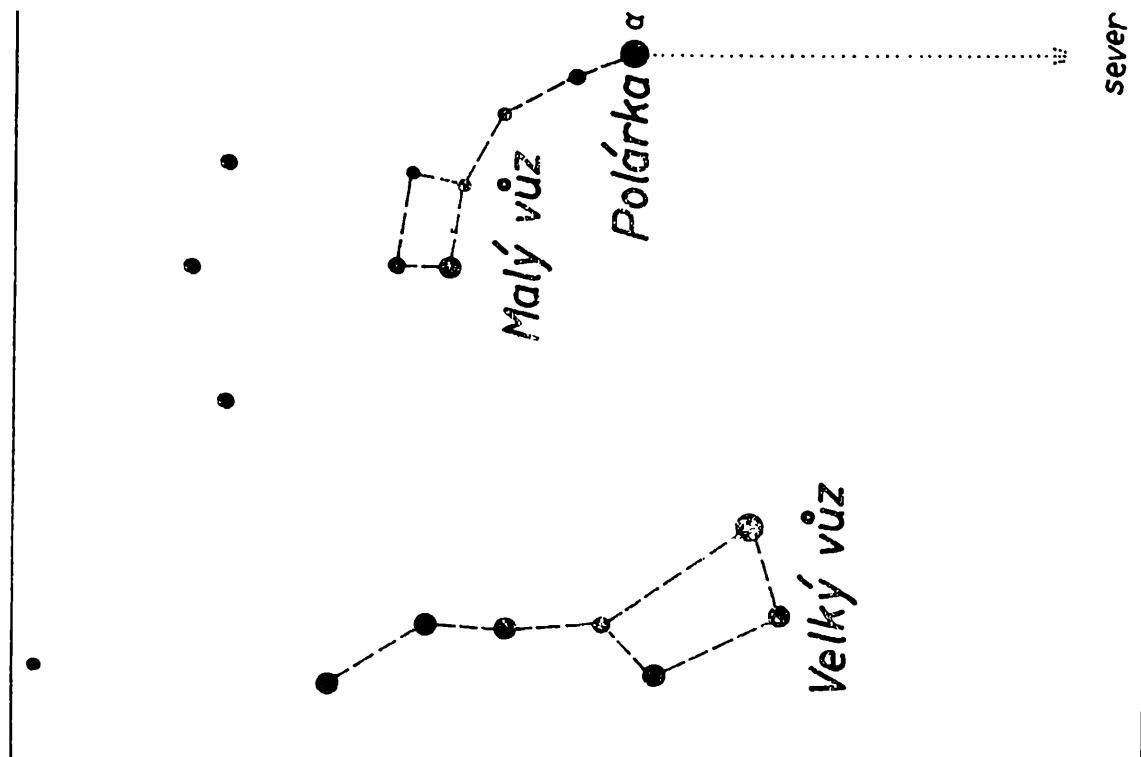
Obr. 1. Mapka souhvězdí Herkula.



Obr. 2. Mapka souhvězdí Severní koruny a Boota.



Obr. 3. Část souhvězdí Velké medvědice — Velký vůz.



Obr. 4. Pomocí hvězd α a β z Velkého vozu vyhledáme Polárku. ▲

δ Megrez, ε Alioth, ξ Mizar a η Benetnaš. Významnou hvězdou je Mizar (prostřední hvězda v „oji“), která spolu s Alkorem tvoří známou dvojici, používanou dříve ke zkoušce dobrého zraku; úhlová vzdálenost obou hvězd je necelých 12'. Mizar má zdánlivou hvězdnou velikost 2,2^m a je ve vzdálenosti 25 parseků od nás (80 světelných roků). V souhvězdí Velké medvědice je velký počet spirálních i nepravidelných galaxií. V blízkosti hvězdy β je známá planetární mlhovina M 97, která se pro svůj charakteristický vzhled nazývá „Soví mlhovina“. Její rozměry jsou 203'' $\times$ 199'', zdánlivá hvězdná velikost mlhoviny je 12,0^m a je ve vzdálenosti 730 parseků. Naneseme-li vzdálenost hvězd α a β ve Velké medvědici pětkrát, pak snadno vyhledáme Polárku (Polaris), nejjasnější hvězdu α v souhvězdí Malé medvědice (Ursa minor, UMi), která je v současné době ve vzdálenosti přibližně 1° (přesně 58') od severního světového pólu. Polárka je důležitým orientačním bodem na severní obloze (obr. 4).

Tímto článkem končíme seriál o souhvězdích viditelných na severní obloze. Zájemce upozorňujeme, že v minulých dvou ročnících našeho časopisu byly uveřejněny tyto články: roč. 47 (1968/69), č. 9 — Cirkumpolární souhvězdí (str. 433), roč. 48 (1969/70), č. 8 — Zodiakální souhvězdí (str. 378), Souhvězdí letní oblohy (str. 381) a v nynějším, 49. ročníku (1970/71) v č. 1 — Souhvězdí podzimní oblohy (str. 21) a v č. 3 — Souhvězdí zimní oblohy (str. 125). Znalost souhvězdí je i v současné době důležitá, např. při vizuálním pozorování meteorů. Znalost souhvězdí poslouží při orientaci na hvězdné obloze. Novy se dodnes označují podle souhvězdí, v němž vzplanuly: Nova Aquilae 1918, Nova Herculis 1934, Nova Delphini 1967 apod. Podle usnesení Mezinárodní astronomické unie je na severní i jižní obloze celkem 88 souhvězdí, jejichž hranice jsou přesně vymezeny.

N. WIENER, zakladatel kybernetiky:

Matematika je sport, který se hodí především pro mladé. Je to atletika intelektu, kladoucí tak vysoké požadavky, že mohou být plně uspokojeny jen mladými a silnými jedinci. Mnozí matematici upadnou v zapomenutí po jedné nebo dvou studiích, i když v mládí vykazují značné schopnosti. Jsou zapomenuti stejně jako včerejší sportovní hrdinové.

(Vyňato z časopisu Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. XVI, č. 1)

NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

Konstruktivní geometrie

1. Je dána rovina ρ , v ní bod A a mimo rovinu ρ je dán bod G . Sestrojte krychli $ABCDEFGH$ tak, aby vrchol C ležel v rovině ρ .
(Došlo 5 řešení) Stanislav Horák

Řešil Pavel Pudlák, 3.D SVVŠ Praha :

Označme délku hrany krychle a . Potom

$$AG = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{2} = AG\sqrt{2}/\sqrt{3}, CG = a = AG/\sqrt{3}.$$

Vrchol C leží na kulových plochách $\kappa_1 = (A; AC)$, $\kappa_2 = (G; CG)$. Tyto plochy jsou rovinou ρ prořezány po řadě v kružnicích

$$k_1 \equiv (A; AC), k_2 \equiv (G; \sqrt{CG^2 - d^2}),$$

kde d je vzdálenost bodu G od roviny ρ a G_1 je pravoúhlý průmět bodu G do roviny ρ . Bod, který je společný kružnicím k_1, k_2 , je vrchol C .

Rovina σ , která prochází vrcholem C kolmo na CG , je rovina čtverce $ABCD$, a ten již snadno sestrojíme.

Existence a počet řešení závisí tedy na počtu společných bodů kružnic k_1, k_2 . Tu mohou nastat tyto případy.

- a) $G \notin \rho = GG_1 > AG/\sqrt{3}$; úloha nemá žádné řešení.
- b) $G \notin \rho = GG_1 = AG/\sqrt{3}$; úloha má právě jedno řešení.
- c) $G \notin \rho = GG_1 < AG/\sqrt{3}$; úloha má dvě řešení.

2. Sú dané dva rôzne body A, A' a rovina β , ktorá nie je incidentná so žiadnym z daných bodov. Zostrojte pravidelný štvorboký hranol $ABCA'B'C'D'$ so štvorcovou podstavou $ABCD$, ak viete, že vrchol B leží v rovine β .

(Došlo 6 riešení)

Stanislav Horák

Riešil Andrej Mattielligh, 3.A SVŠ Michalovce :

Nech podstava $ABCD$ leží v rovine π . Potom $\pi \perp AA'$. Priesečnica rovin π, β je priamka p , na ktorej leží vrchol B . Pretože nie je žiadna ďalšia podmienka, môžeme vrchol B zvoliť ľubovoľne na priamke p .

Ďalšie je už známe.

Konštrukcia pozostáva z týchto krokov:

a) Zostrojíme rovinu $\pi \perp AA'$ tak, že $A \in \pi$.

b) Nájdeme priesečnicu p rovín π, β .

c) Na priamke p zvolíme ľubovoľne vrchol B .

d) V rovine π zostrojíme štvorec $ABCD$.

e) Zostrojíme hranol $ABCD A'B'C'D'$

Správnosť konštrukcie vyplýva z rozboru.

Úloha nemá žiadne riešenie, keď $\beta \perp AA'$. V každom inom prípade má úloha nekonečný počet riešení.

RÚZNÉ • RÚZNÉ • RÚZNÉ

Definice matematiky

JOSEF KOTYK, Pardubice

Snaha definovať, čo je matematika, se datuje již od 5. storočia pred n. l. Na toto téma bolo však napsáno více prací filosofických než odborných. Ve starověku to bývaly zpravidla úvahy, prováděné metodou sokratovskou¹⁾, tj. formou rozhovorů mezi filosofem a laikem, nebo mezi dvěma filozofy různých názorů, úvahy, které přinášely také četná překvapení i rozpory, jež teprve průběh diskuse („hádání“) pomohl překonat. Zdařilý příklad podobného rozhovoru o matematice mezi řeckými filozofy Sokratem a Hippokratem²⁾ zpracoval maďarský ma-

¹⁾ Řecký filosof Sokrates (469 až 399 před n. l.) přiváděl své názory k platnosti nahodilými rozmluvami, konanými při rozmanitých příležitostech. Svou přímostí způsobil si však četné nepřátele. Athénská veřejnost, zaujatá nenávistí proti filosofii vůbec, na něho žalovala, že kazí mládež, a proto byl odsouzen k smrti.

Sokratovská metoda měla význam pro tzv. dialektiku (= logiku) pozdějšího sedmera svobodných umění.

²⁾ Řecký matematik Hippokrates z Chiu, žil kolem roku 440 před n. l. Více než sto let před Euklidem, avšak již v duchu euklidovské tradice, napsal první učebnici geometrie.

Čtenářům jsou z planimetrie známy Hippokratovy měsíčky, vznikající sestrojením polokružnic nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka (vně) a polokružnice nad přeponou tak, že prochází vrcholem pravého úhlu. Hippokrates vypočítal jejich obsah.

tematik Alfréd Rényi v zajímavé knize, která vyšla roku 1967 německy pod názvem „Dialoge über Mathematik“, kam odkazují čtenáře dychtivé hlubšího poučení.³⁾

Jak zní definice matematiky?

Matematika by se mohla definovat jako věda, která se zabývá čísly, tvary geometrických útvarů a jejich relacemi. Předmětem matematiky jsou vztahy číselné a prostorové. Ve všech běží o závislost nějakého útvaru (v nejširším slova smyslu) na jiném útvaru. Hlavní metoda matematiky je dedukce. Shrňme-li, dospíváme k velmi přiléhavé (byť ještě poněkud neurčité) školské definici matematiky, jež bývá ve středoškolských učebnicích⁴⁾ uváděna větou:

Matematika je deduktivní věda o závislostech.

V historii byly ovšem podány velmi četné definice matematiky. Mnohé z nich, idealistické, tvrdí, že předmětem matematiky je prý čisté myšlení. Subjektivisticky, pouze formálně, vyřizují danou záležitost někdy zcela bezobsažnými, prázdnými frázemi.⁵⁾ Posuďte sami!

Anglický filosof lord Bertrand Russell (čti: Rasl; zemřel, 97letý, dne 2. února 1970) a jeho přívrženci, škola tzv. logistická, považují matematiku za část logiky. Podle nich je matematika „věda, v níž se nikdy neví, ani o čem je řeč, ani je-li pravda, co se říká. Je to souhrn závěrů, které mohou být aplikovány na čemkoliv“. Matematika nemá podle nich žádný vztah ke skutečnosti.

Totéž tvrdí také formalisté v čele s německým matematikem Davidem Hilbertem, pokládají jen, právě obráceně, logiku za část matematiky. Hlásají, že „matematika je učení o vztazích mezi vzorci zbavenými jakéhokoliv obsahu“.

Francouzský matematik Henri Poincaré (čti: Poankaré) definoval matematiku jako systém nejjednodušších, nejvhodnějších a nejpohodlnějších dohod, konvencí — jeho přívržencům se proto říká škola konvencionalistů — které si neodporují. Matematika je podle něho „umění dávat různým věcem jedno a totéž jméno“.

Tak bychom mohli pokračovat.

Škola intuicionistů, vedená švýcarským matematikem Hermannem Wylem, chápe matematiku mysticky (intuice = vnuknu-

³⁾ Některé myšlenky těchto dialogů mohou však naši čtenáři nalézt v článku doc. Vítězslava Jozífka „Co je matematika?“ v Rozhledech, roč. 48, čís. 4, str. 191 až 194.

⁴⁾ Viz např. učebnici Bydžovský - Vojtěch: Matematika pro nejvyšší třídu reálků (Praha 1912), Část II. „Myšlení mathematické“, § 11, odst. 88, str. 152.

⁵⁾ Vedle příkladů, jež dále uvádím, dokládá to podrobněji např. stať A. Kolmana „Filosofické problémy současné matematiky“ v sborníku Filosofie a přírodní vědy (Praha, 2. vyd. 1961), str. 309 až 342.

tí). Matematika je podle ní dílem božím a nemůže prý být vůbec definována...

Matematika odráží, jak známo,, souvislosti vnějšího světa, má proto reálný a ovšem materiální původ. Metodou materialistické dialektiky to vědecky ukázal Bedřich Engels, jenž vyjádřil podstatu matematiky výrokem: „Objektem (předmětem) matematiky je látka zcela reálná, prostorové formy a kvantitativní vztahy skutečného světa.“ Jím podal roku 1877 vědeckou definici matematiky.⁶⁾

K připomínkám filosofů, idealistů, že matematika pracuje také s čistými pojmy, s čistě logickými elementy a s abstraktními konstrukcemi, které na pohled nemají s materiálními fakty nic společného, Engels dodává: „Skutečnost, že látka matematiky se jeví někdy ve formě nejvýš abstraktní, může zastřít její původ z vnějšího světa jen povrchně. Abychom mohli uvedené formy a vztahy zkoumat v jejich ryzosti, musíme je úplně oddělit od jejího obsahu a ten jako lhostejný ponechat stranou; tak dostaneme body bez rozměrů, čáry bez tloušťky a šířky, různá „ a “ a „ b “, „ x “ a „ y “, veličiny stálé a proměnné, atd.“-

Engels dospěl k své definici matematiky zobecněním historických fakt. Vycházel z toho, jak matematika skutečně vznikla a jak se vyvíjela. Prohlásil⁷⁾: „Jako všechny ostatní vědy vznikla i matematika z praktických potřeb lidí, z měření pozemků, objemů nádob, z počítání času, z mechaniky.“

Engelsovu definici matematiky proto také plně potvrzuje historie matematiky. V dějinách matematiky se zrcadlí mnohé z nejhlubších myšlenek bezpočtu generací lidstva. Proces poznání, směřující od konkrétního k abstraktnímu, dává podle Lenina⁸⁾ zároveň hlubší a plnější poznání skutečnosti.

Engelsovu formulaci definice matematiky nelze ovšem chápat dogmaticky. Se zřetelem k současné etapě matematického vědění bylo třeba ji rozšířit. Zdařilá Engelsova formulace to i pro další vývoj matematiky připouští.

*

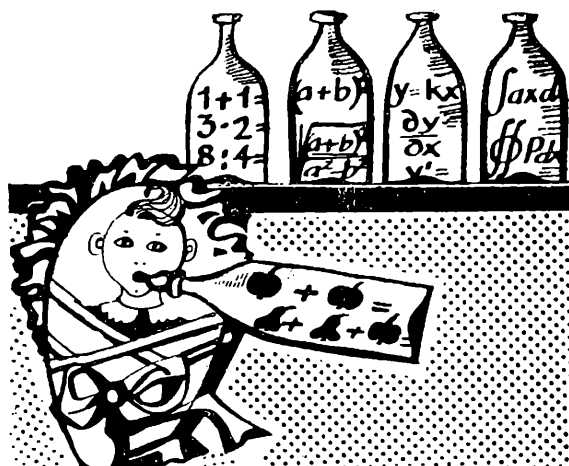
*

⁶⁾ Viz Bedřich Engels: *Anti-Dühring* (Praha 1949). Engelsova definice matematiky je tak obsáhlá, že zaujímá celou stranu cit. díla.

⁷⁾ Bedřich Engels, l. c.

⁸⁾ Vlad. I. Lenin: *Materialismus a empiriokriticismus* (nakl. Svoboda, Praha 1952).

NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM



29. Z racionálních čísel a , b , c je právě jedno kladné, právě jedno záporné a právě jedno rovno nule a platí o nich

$$a = b^2 (b^2 + c^2)$$

Které z nich je kladné, které záporné a které je rovno nule?

(Podle německého časopisu Archimedes.)

Řešení: $a > 0$, $b < 0$, $c = 0$.

30. 4 série československých známek a jedna série německých známek mají tutéž cenu jako 3 série známek polských a 5 sérií jugoslávských. Jedna série československá, 5 sérií jugoslávských a 2 polské mají tutéž cenu jako 4 série německé. Za 1 sérii československou a 2 polské lze dostat 2 série jugoslávské a 1 německou. Kolik sérií jugoslávských a německých lze dostat za 2 série československé a 3 polské?

Řešení: 5 jugoslávských a 1 německou.

Poznámka: Všechny československé série mají stejnou cenu. Totéž platí o sériích jugoslávských, německých a polských.

31. V jedné indické sbírce příkladů čteme: Z roje včel snesla se pětina na květy kadamby, třetina na květy silindha. Trojnásobný rozdíl obou čísel odletěl na květy kutuje a jedna včela zbyla, poletujíc ve vzduchu sem a tam, lákána současně líbeznou vůní jasmínu a pandamu. Pověz mi, kolik bylo včel?

Řešení: 15 včel, žádný roj to tedy nebyl, Bhaskara nemírně přeháněl.

Podle časopisu Zdroj.

32. Před brankou soupeře při fotbalovém zápase bylo velmi rušno, až pojednou byl míč v síti. Kdo dal branku nikdo pořádně nevěděl.

Byl to některý z hráčů číslo 7, 9, 10. Když se jich po zápase ptali, kdo je autorem branky, odpovídali s velmi potouchlým úsměvem takto:

Hráč č. 7: Já dal branku.

Hráč č. 9: Hráč č. 7 branku nedal.

Hráč č. 10: Já dal branku.

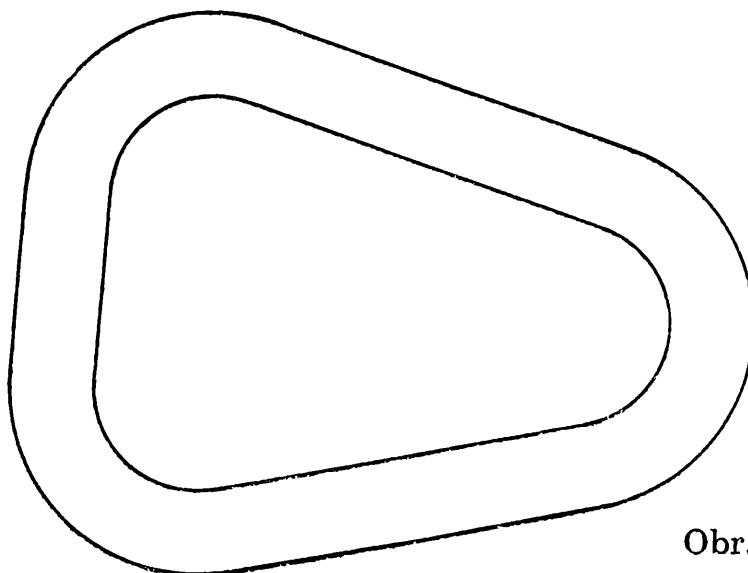
Hráč č. 7: Desítka branku nedala.

Hráč č. 9: Já střelil branku.

Podle odpovědí rozhodněte, kdo dal vlastně branku, jestliže víte, že právě jeden hráč mluvil vždy pravdu, zatímco druzí dva vždy lhali.

Řešení: Hráč č. 7 vstřelil branku.

33. V obr. 1, který je složen ze soustředných kruhových oblouků týchž poloměrů a jejich společných tečen, měří vnější obvod 25 cm a vnitřní 18,7 cm. Určete šířku pásu.



Obr. 1

34. Vezměme si nějaký pravoúhlý trojúhelník, jehož strany mají délky vyjádřené přirozenými čísly, např. trojúhelník o stranách

$$a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = 5$$

Utvořme součty

$$c_2 = a_1 + b_1 + c_1 = 12,$$

$$a_2 = a_1 + c_1 = 8,$$

$$b_2 = b_1 + c_1 = 9$$

Trojúhelník, jehož strany mají délky a_2, b_2, c_2 , není pravoúhlý. O tom se sami přesvědčte použitím Pythagorovy věty. Utvořme však tyto součty

$$c_3 = a_2 + b_2 + c_2 = 29,$$

$$a_3 = a_2 + c_2 = 20,$$

$$b_3 = b_2 + c_2 = 21$$

Trojúhelník, jehož strany mají délky a_3, b_3, c_3 je už pravoúhlý.

Ale to není všechno. Stejným způsobem můžeme určit čísla $a_4, b_4, c_4; a_5, b_5, c_5; \dots$. Zajímavé je, že čísla s lichým indexem jsou délky stran pravoúhlého trojúhelníka.

Přesvědčte se, že to platí i o trojúhelnících, které vzniknou popsáním způsobem z pravoúhlého trojúhelníka:

a) $a_1 = 5, b_1 = 12, c_1 = 13$; b) $a_1 = 7, b_1 = 15, c_1 = 17$.

35. Čtyřúhelník $ABCD$ je úhlopříčkou AE rozdělen na dva různé pravoúhlé trojúhelníky. Víme, že $\sphericalangle ABC = 90^\circ, \sphericalangle CDA = 90^\circ, AB = 140 \text{ mm}, BC = 171 \text{ mm}, AD = 220 \text{ mm}$. Vypočtete délku AC a CD . ($AC = 221 \text{ mm}, CD = 21 \text{ mm}$.)

36. Která různá přirozená čísla x, y, z, u splňují rovnost

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = 1?$$

37. Který zlomek $\frac{x}{y}$, v němž x, y jsou nesoudělná přirozená čísla, vlastnost, že:

a) $90 < x + y < 100$,

$$\text{b) } 0,9 < \frac{x}{y} < 0,91$$

38. Dcera se narodila, když bylo otcí tolik let, kolik bude synovi za 15 let. Za 7 let bude dceři tolik, kolik bylo synovi, když otec byl 46letý. Jak stará je dcera a kolik let bylo otcí, když se narodil syn?

39. Pět veslařů: Bedřich, Dalibor, Karel, Martin a Rudolf si před závodem všichni navzájem vyměnili své loďky, označené začátečními písmeny jejich křestních jmen. Závod vyhrál majitel lodi, která vjela do cíle poslední. Bedřich dojel třetí. Jel na loďce, která náležela závodníkovi, veslujícímu na lodi K . Na loďce B jel majitel lodi, kterou řídil Martin. Loďka M dojela do cíle později, než loď řízená Karlem. Rudolf dojel mezi dvěma jinými. Která loď byla poslední?

Řešení:

33. Šířka pásu je $(25 - 18,7) \text{ cm} \quad 2\pi \doteq 1 \text{ cm}$.

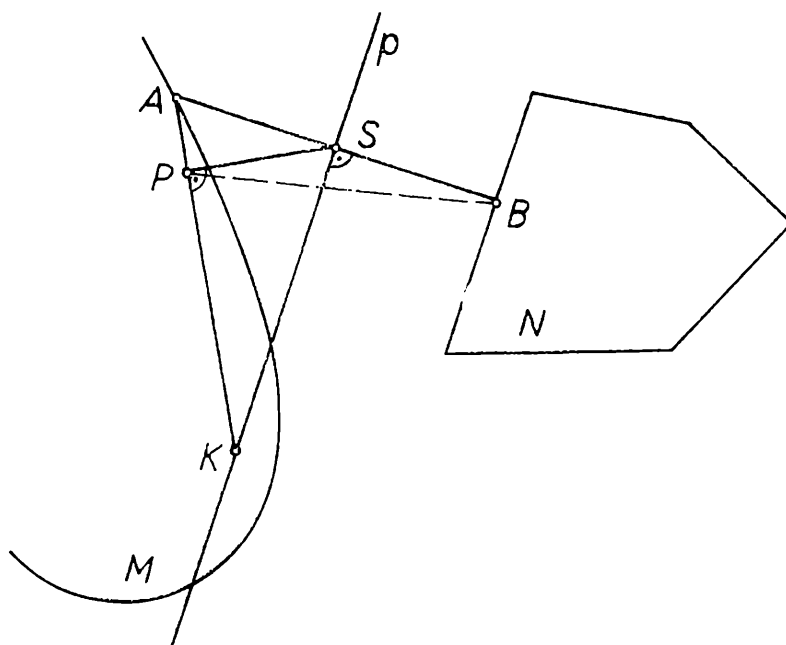
36. Řešení je několik: 2, 3, 7, 42; 2, 3, 8, 24; 2, 3, 9, 18; 2, 3, 10, 15; 2, 4, 5, 20; 2, 4, 6, 12.

37. Hledaný zlomek je buď $\frac{46}{51}$ nebo $\frac{47}{51}$

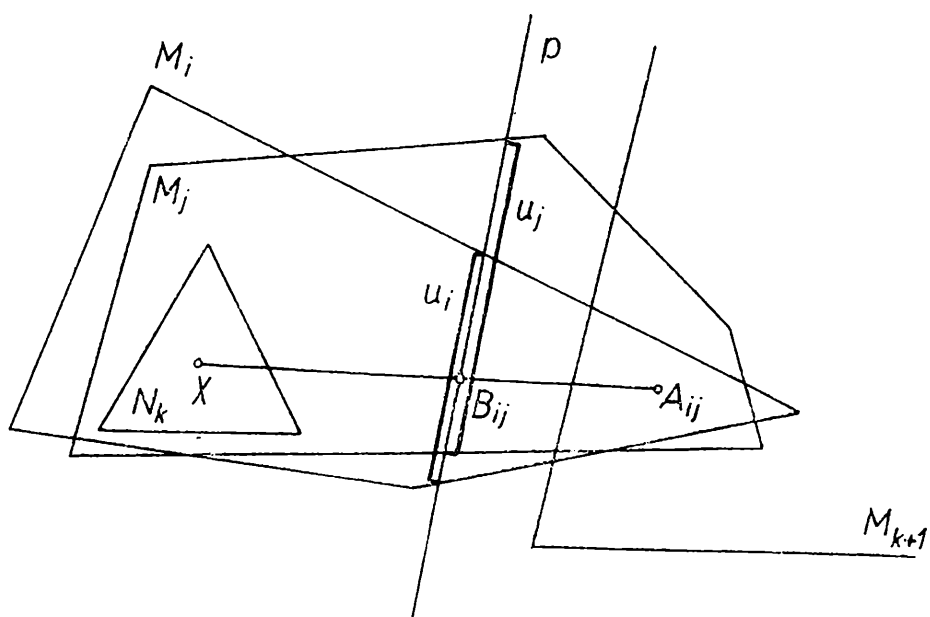
38. Dceři je 12 let, při synově narození bylo otcí 27 let.

39. Pořadí lodí v cíli: B, D, M, R, K . Pořadí závodníků v cíli: K, R, B, D, M .

Obrázky k článku J. Danešové: Hellyova věta a její důsledky.



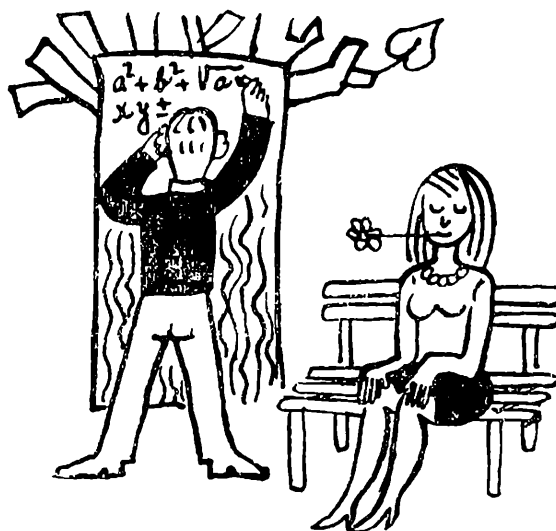
Obr. 8



Obr. 9

(Text na straně 296).

MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY



Dvě úlohy na dekódování

ALENA ZELINKOVÁ, Brno

1. Chytrý jasnovidec

Jednoho dne si dal panovník zavolat jasnovidce, který mu kdysi předpověděl neblahé události, a řekl: „Když dovedeš tak skvěle předpovídat budoucnost, moudrý muži, pověz mi, kdy zemřeš!“ „Chytrě vymyšlená otázka,“ pomyslel si jasnovidec. „Ať odpovím jakkoli, pán mě může dát kdykoli popravit a dokázat tak, že mým předpovědím se nedá věřit.“ Po chvílce přemýšlení jasnovidec přišel na takovou odpověď, která mu zachránila život.

Co odpověděl jasnovidec panovníkovi, se dozvíte dekódováním zprávy: „60 9 101 14 49 26 85 41 52 12 87 23 34 64 61 106“, pomocí tabulky a dekódovací matice (klíče), které jsou uvedeny za druhou úlohou. Dekódování proveďte podle článku: E. Moravusová, O. Říha „O jednom způsobu kódování“, který byl otištěn v 1. čísle letošního ročníku Rozhledů.

2. Darwin a hádanka

Často se stává, že i ta nejjednodušší otázka přivádí i největšího učenice do takových rozpaků, že na ni nedovede odpovědět. Tak se stalo i slavnému Darwinovi. Jeho malá neteř mu dala tuto hádanku: „Co má kráva a žádné jiné zvíře?“ Darwin přemýšlel, ale věci na kloub nepřišel. Děvčátko mělo velikou radost, že to strýček neuhodl, a zvolalo se zvonivým smíchem: „41 44 63 71 58 40 97 70.“ Její odpověď se do-

zvíte dekódováním uvedené zprávy užitím dekódovací matice **D** a následující tabulky.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky úloh: 1. „Tři dny před vámi.“ 2. „Telata.“

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D	J	L	R	Q	G	M	U	S	A	Y	C	N
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
H	K	Z	E	V	T	X	F	I	P	W	O	B

Zájem o velká čísla v Indii

Mezi roky 2000 a 1400 př. n. l. vnikly do Indie arijské kmeny a podmanily si tamnější obyvatelstvo. Jako všichni dobyvatelé tak ani Arijci se příliš nezajímali o vědy a umění, spoléhali více na sílu svých zbraní. Avšak v 6. st. př. n. l., v době Buddhově, nastává obrat. Indové se již zajímají o matematiku a hlavně o velká čísla. Tím se podstatně lišili od praktických Řeků, kteří se i v teorii drželi čísel, vyskytujících se v jejich obchodním životě. Jako doklad pro znalost velkých čísel v Indii uvedeme ve zkratce malou scénku.

Princ Gautama (Buddha) se ucházel o ruku jedné princezny. Nejdříve se musel utkat s pěti jinými nápadníky v psaní, šermu, ve střelbě lukem, v běhu, plavání a počítání. Přirozeně, že všechny uvedené disciplíny mistrně ovládal a zvítězil. To však nestačilo. Velký matematik Arjuna mu pak položil několik dalších otázek, které se týkaly jednotek vyšších než 10^2 . Byly to mocniny čísla 10. Buddha vyjmenoval jich několik. Největší číslo, ke kterému dospěl, bylo 10^{53} . (Někteří historikové matematiky však tvrdí, že dospěl k číslu menšímu. Ponechme to však stranou a všimněme si dalšího.) Buddha totiž dodal: „To je teprve první řada čísel a po ní následuje osm dalších řad.“

Z této malé ukázky je patrné, že v Indii už v 6. st. př. n. l. znali a dovedli pojmenovat hodně velká čísla. Uvažme, i kdyby poslední číslo, k němuž Buddha dospěl, bylo třeba 10^6 , a kdyby každá následující řada z osmi zmíněných obsahovala jen jedno číslo, došli bychom k číslu 10^{14} . Na tehdejší dobu obdivuhodné.

S. H.

SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

sommet *m*

agles *m* au sommet

sous-ensemble *m*

sous-espace *m*

sous-normale *ž*

sous-tangente *ž*

soustraction *ž*

soustraire

spatio-temporel, elle

spécial, e, aux

cas *m* spécial

sphère *ž*

sphérique

calotte *ž* sphérique

fuseau *m* sphérique

secteur *m* sphérique

segment *m* sphérique

triangle *m* sphérique

zone *ž* sphérique

spirale *ž*

statique

statistique

statistique *ž*

stationnaire

stéréographique

projection *ž* stéréographique

stéréométrie *ž*

stéréotomie *ž*

strict, e

inégalité *ž* stricte

strictement

strictement positif

vrchol

vrcholové úhly

podmnožina

podprostor

subnormála

subtangenta

odečítání

odečítat

časoprostorový

zvláštní

zvláštní případ

koule, kulová plocha

kulový, sférický

kulový vrchlík

sférický dvojúhelník

kulová výseč

kulová úseč

sférický trojúhelník

kulový pás

spirála

statický

statistický

statistika

stacionární

stereografický

stereografická projekce

stereometrie

kamenořez

striktní, přísný

ostrá nerovnost

striktně, přísně

kladný (pro zdůraznění, že jde
o ostrou nerovnost)

structure <i>ž</i>	struktura, svaz
subdivision <i>ž</i>	dělení (ve smyslu dělení intervalu)
substituer	dosadit
substitution <i>ž</i>	dosazení, substituce
successif, ive	postupný
dérivées <i>ž</i> successives	vyšší derivace
suffir	stačit
il faut et il suffit	je nutné a stačí
suffisant, e	postačující
condition <i>ž</i> suffisante	postačující podmínka
suite <i>ž</i>	posloupnost
par suite	proto, v důsledku toho
suivre	následovat
il s'en suit, que	z toho plyne, že
superficie <i>ž</i>	povrch, plošný obsah
supérieur, e	horní
borne <i>ž</i> supérieure	horní mez, supremum
supplément <i>m</i>	doplňek
supplément d'un angle <i>m</i>	doplňek úhlu do 180 stupňů
supplémentaire	doplňkový, výplňkový
angle <i>m</i> supplémentaire	výplňkový úhel
supposer	předpokládat
supposition <i>ž</i>	předpoklad
supprimer	vypustit, škrtnout
surface <i>ž</i>	plocha
surface conique	kuželová plocha
surface cylindrique	válcová plocha
surface développable	rozvinutelná plocha
surface gauche	nerozvinutelná plocha
surface de niveau	ekviskalární plocha
surface réglée	přímková plocha
surface de révolution	rotační plocha
surjectif, ive	surjektivní
application <i>ž</i> surjective	surjektivní zobrazení (zobrazení na množinu)
surjection <i>ž</i>	surjekce, surjektivní zobrazení
symbole <i>m</i>	symbol
symbolique	symbolický
symbolique <i>ž</i>	symbolika
symétrie <i>ž</i>	symetrie, souměrnost
axe <i>m</i> de symétrie	osa symetrie
centre <i>m</i> de symétrie	střed symetrie
plan, <i>m</i> de symétrie	rovina symetrie
symétrique	symetrický, souměrný
symétrique gauche	antisymetrický
symétrique par rapport à un axe (à un plan)	symetrický podle osy (podle roviny)
symétrique par rapport à un point (au centre)	symetrický podle bodu (podle středu)
système <i>m</i>	soustava, systém
logarithme <i>m</i> dans un système de base <i>ž</i> <i>a</i>	logaritmus o základu <i>a</i>
système de <i>n</i> équations <i>ž</i> à <i>p</i> in-	soustava <i>n</i> rovnic o <i>p</i> neznámých

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

8

ROČNÍK 49, 1970-1971, DUBEN



nositel vyznamenání
Za zásluhu o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VYKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku. Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Hellerová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

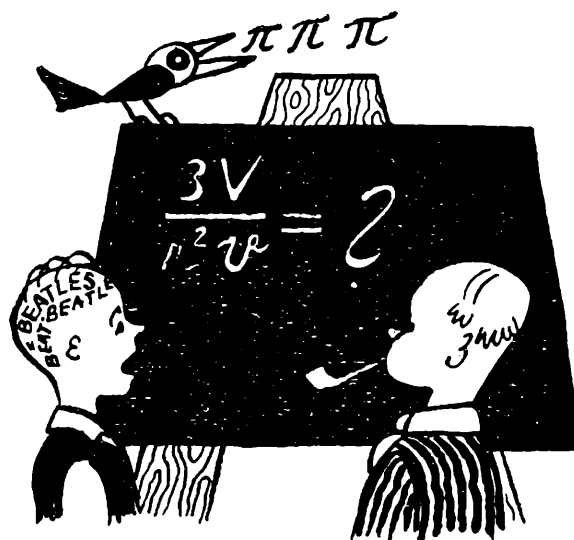
ROČNÍK 49
DUBEN 1971

8

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

Dr. S. Trávníček: O jednom problému místní dopravy .	337
O. Říha: Dělitelé nulové matice	345
J. Šedivý: Tři podoby jedné detektivní úlohy	349
F. Koktán: Menelaova věta	354
J. Frelich: O jednom zobecnění Menelaovy věty	356
S. Horák: Isoperimetrická nerovnost .	359
Dr. B. Jurek: Zrcadlové mikroskopy	363
Ing. Z. Janout: Síly setrvačnosti	370
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Někteří slavní astronomové a jejich původní povolání	374
J. Kotyk: Ernest Rutherford	377
Recenze	381
Nejmlaším čtenářům	383
Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český (pokračování)	3. a 4. str. obálky



0 jednom problému místní dopravy

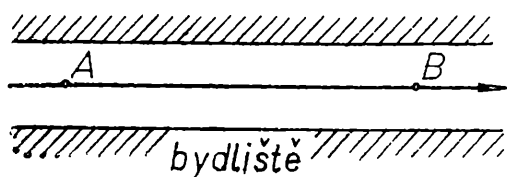
RNDr. STANISLAV TRÁVNÍČEK CSc, Olomouc

Dojíždíte do školy nebo do zaměstnání tramvají, autobusem nebo trolejbusem? Pak asi jen málo z vás bydlí přímo u zastávky, zatímco většina se musí rozhodovat, zda se k jedné zastávce (A na obr. 1) poněkud vrátí proti směru jízdy, nebo zda půjde na další zastávku B ve směru jízdy.

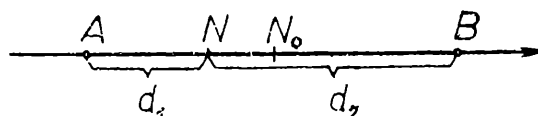
V tomto článku nejprve vyřešíme problém, kdy je pro nás výhodnější nastoupit na zastávce A a kdy na zastávce B . Při tom budeme pro stručnost dále mluvit jen o tramvajích a cestě do školy, i když dosah našich dalších úvah je mnohem širší.

Při řešení předloženého problému dočasně předpokládejme, že bydlíme přímo v té ulici, kudy jezdí tramvaj. Další dva předpoklady však platí pro celý článek.

1. *Chceme ušetřit čas.* Pokud totiž máme času dost, pak se vydáme na nejbližší zastávku, neboť tak vynaložíme nejméně námahy. Tedy z míst mezi A a N_0 (N_0 je střed úsečky AB — viz schematický náčrt na obr. 2) zamíříme k zastávce A a z míst mezi N_0 a B k zastávce B . Bod N_0 je v tomto případě „neutrálním bodem“, neboť je jedno, na



Obr. 1



Obr.

kterou ze zastávek A , B z něho půjdeme. My ovšem budeme dále předpokládat, že do školy spěcháme, což bývá po ránu dost přirozené.

2. *Nevíme, kdy pojede naše číslo tramvaje.* Tato situace nastává např. tehdy, když neznáme jízdní řád, neboť tramvaje jezdí nepravidelně nebo nevidíme na ulici pro tmou, mlhu, stromy apod. (Srovnejte „náhodné cestující“ z článku [1].) Jestliže totiž víme, že naše číslo jezdí pravidelně jednou za půl hodiny a vidíme, jak jedna naše tramvaj jede zrovna kolem nás, pak do odjezdu další máme dost času a opět se vydáme k nejbližší zastávce. Také tento 2. předpoklad je splněn velmi často.

Za těchto dvou předpokladů existuje v naší ulici neutrální bod N (jeho přesnou definici ještě uvedeme) takový, že žáci, kteří bydlí mezi A a N , se dostanou dříve do školy, jdou-li na zastávku A , a žáci, kteří bydlí mezi N a B , jdou-li na zastávku B .

Ptáme se, zda tímto neutrálním bodem není bod N_0 , tj. zda prostě neplatí $N \equiv N_0$. Ukážeme, že ne.

Nechť dva žáci vyjdou současně z bodu N_0 a jdou stejnou rychlostí k různým zastávkám, jeden k A , druhý k B . Dorazí k nim tedy současně. A nyní se může stát, že tomu, který šel k zastávce A , ujede tramvaj „před nosem“, zatímco druhý do téže tramvaje na zastávce B pohodlně nastoupí, neboť má k dobru ještě celou tu dobu t , která uplyne od odjezdu tramvaje ze zastávky A až po její odjezd ze zastávky B . Bod N leží proto vlevo od N_0 , tj. platí $d_1 < d_2$ (obr. 2).

Označme d vzdálenost zastávek A , B , v průměrnou rychlost tramvaje (přitom započítáme i dobu, kdy tramvaj stojí na zastávce), u průměrnou rychlost chodce jdoucího na zastávku a t_1 , resp. t_2 , čas, který potřebuje chodec k cestě z místa N na zastávku A , resp. B .

Neutrální bod N charakterizujeme nyní základním vztahem

$$t_2 = t_1 + t \quad (1)$$

a vypočteme jeho polohu. Dosadíme-li do (1) za čas podíl odpovídající dráhy a rychlosti, máme

$$\frac{d_2}{u} = \frac{d_1}{u} + \frac{d}{v} \quad (2)$$

a postupnými úpravami s přihlédnutím k rovnosti

$$d = d_1 + d_2 \quad (3)$$

dostáváme

$$v(d_2 - d_1) = u(d_1 + d_2) \quad (4)$$

a odsud

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{v - u}{v + u}. \quad (5)$$

Tento vztah se dobře pamatuje a poloha bodu N je jím jednoznačně určena. Jestliže do (2) dosadíme z (3) $d_2 = d - d_1$, pak dostáváme vztah

$$d_1 = \frac{d}{2} \left(1 - \frac{u}{v} \right) \quad (6)$$

vhodný k výpočtům.

Vidíme tedy, že čím větší je naše rychlost vzhledem k rychlosti tramvaje, tím menší je d_1 , tj. tím blíže je neutrální bod N zastávce A . Naopak, čím menší je u vzhledem k v , tím blíže je neutrální bod k bodu N_0 . Podle (6) závisí poloha bodu N na poměru u/v , což zapíšeme $N(u/v)$. Jestliže ovšem předpokládáme, že mezi zastávkami A , B je hodnota $d/t = v$ konstantní, pak poloha neutrálního bodu závisí jen na rychlosti chodce, což zapíšeme $N(u)$.

Zamysleme se ještě nad některými zvláštními případy. Je-li $u = 0$ (a $v > 0$), máme ze (6) $d_1 = d/2$, tj. $N(0) \equiv N_0$, ovšem pro nulovou rychlost chodce nebyl vzorec (6) odvozen. Zajímavější případ nastává pro $u = v$. Zde ze (6) plyne $d_1 = 0$, tj. $N(v) \equiv A$. Jdeme-li tedy stejně rychle jako je průměrná rychlost tramvaje a nejsme-li zrovna na zastávce A , jdeme vždy na další zastávku B . Naše úloha ovšem neztrácí smysl ani pro $u > v$ (např. v období dopravní špičky), kdy $d_1 < 0$, tj. $N(u)$ leží před bodem A . Z kteréhokoli místa od A do B je proto vhodné jít na zastávku B . Po příchodu na tuto zastávku hodnotíme neutrální bod vzhledem k zastávce B a další zastávce C . Je-li opět $u > v$, leží nový neutrální bod před zastávkou B , a proto je vhodné jít pěšky na další zastávku C , atd. (Na zastávce B nenasedneme, i kdyby tam zrovna tramvaj stála, protože máme naději na zastávce C chytit tramvaj předchozí, atd.) Pro $u > v$ je proto lépe jít pěšky, a to tak dlouho, dokud uvedená nerovnost platí.

Ukážeme si nyní použití neutrálního bodu na několika příkladech. Přitom si všimněme, že např. d_1 ve vzorci (6) závisí na podílu u/v , takže rychlosti u , v sice musí být vyjádřeny v týchž jednotkách, např. km/hod, ale tyto jednotky nemusí souhlasit s jednotkami pro d a d_1 , kde můžeme vzít za jednotky metry a nikoli nutně kilometry. Tohoto postupu užijeme v příkladě 3.

Příklad 1. Průměrná rychlost tramvaje mezi zastávkami A , B je $v = 400$ m/min, rychlost chodce je 100 m/min, vzdálenost zastávek je $d = 500$ m a chodec se nachází mezi zastávkami A , B , a to 200 m od zastávky A . Vypočtěte polohu neutrálního bodu a rozhodněte, na kterou zastávku se má chodec vydat.

Řešení: Užijeme vzorce (6)

$$d_1 = \frac{500}{2} \left(1 - \frac{100}{400} \right) = 500 \cdot 3/8 = 187,5 \text{ [m]}.$$

Vzdálenost neutrálního bodu od A je 187,5 m, vzdálenost chodce od téže zastávky je 200 m. Chodec se nachází mezi neutrálním bodem a zastávkou B a měl by se vydat na zastávku B .

Příklad 2. Z domu mezi zastávkami A , B , týmiž jako v příkladě 1, vyšel chlapec s nohou v sádře rychlostí $u_1 = 50$ m/min ke své výhodnější zastávce A a současně z jiného domu vyběhl jeho kamarád rychlostí $u_2 = 150$ m/min ke své výhodnější zastávce B . Po cestě se potkali. Jak daleko od sebe bydlí?

Řešení: Pro oba chlapce vypočteme neutrální body

$$N(u_1): d_1 = \frac{500}{2} \left(1 - \frac{50}{400} \right) = 250 \cdot \frac{7}{8} = 218,75 \text{ [m]}$$

$$N(u_2): d'_1 = \frac{500}{2} \left(1 - \frac{150}{400} \right) = 250 \cdot \frac{5}{8} = 156,25 \text{ [m]}$$

První chlapec měl výhodnější zastávku A , bydlel tedy mezi A a $N(u_1)$, druhý měl výhodnější zastávku B , a proto bydlel mezi $N(u_2)$ a B . Protože se potkali, bydlí oba mezi body $N(u_1)$, $N(u_2)$ (udělejte si náčrtek!). Vzdálenost těchto bodů je $218,75 - 156,25 = 62,5$ [m], tedy chlapci od sebe bydlí v menší vzdálenosti než 62,5 m.

Pokuste se nyní vyřešit samostatně podobný příklad týkající se však jízdy vlakem.

Cvičení. Výprava turistů, matematiků, dorazila ke kolejím mezi stanicemi A a B . Podél kolejí vede cesta. Na kterou zastávku se vydali, jestliže vzdálenost obou stanic je 6 km, přičemž zjistili, že od stanice A jsou $2 \frac{3}{4}$ km. Vlak jezdí průměrnou rychlostí 45 km/hod, turisté byli schopni maximální rychlosti 7,5 km/hod. Řešte v těchto dvou případech

a) neznají jízdní řád,

b) vědí, že nejbližší vlak má za $\frac{1}{4}$ hodiny odjet ze stanice A .

Naše úvahy o neutrálním bodě platí nejen pro nastupování, ale i pro vystupování z tramvaje, jak uvidíme v tomto příkladě.

Příklad 3. Dojíždíme do školy S , která se nachází mezi zastávkami Y a Z , přičemž vzdálenost školy od zastávky Y je 250 m, vzdálenost zastávek Y , Z je 400 m a tramvaj mezi nimi jezdí průměrnou rychlostí 20 km/hod.

a) Určete, pro jakou rychlost u chodce je S neutrálním bodem pro vystupování (tj. vystoupíme-li na zastávce Y , nebo až na zastávce Z , dorazíme do S v též okamžik).

b) Určete, na které zastávce vysedají učitelé jdoucí rychlostí 4 km/hod a na které žáci spěchající rychlostí 6 km/hod.

Řešení: Situace je obrácená než při nastupování. Uvážíme, že S je neutrálním bodem právě tehdy, je-li vzdálenost S od Z rovna d_1 ze vzorce (6).

a) Máme $d = 400$ m, $d_1 = 150$ m, $v = 20$ km/hod. Po dosazení do (6) dostáváme

$$150 = \frac{400}{2} \left(1 - \frac{u}{20} \right),$$

odkud $u = 5$ [km/hod]. Je tedy S neutrálním bodem pro vystupování pro rychlost chodce 5 km/hod.

b) Je-li rychlost u chodce menší než 5 km/hod, pak

$$\left(1 - \frac{u}{v} \right) > \left(1 - \frac{5}{v} \right),$$

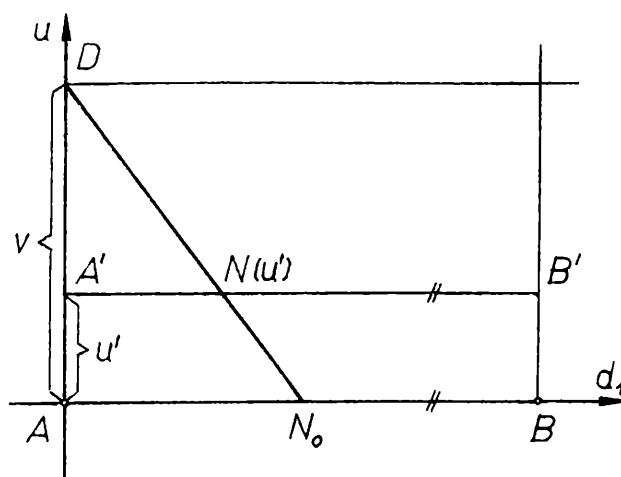
tedy podle (6) je $d_1 > 150$ a neutrální bod leží mezi Y a S . Pro učitele, kteří jdou rychlostí 4 km/hod, je proto výhodnější vystoupit až na zastávce Z . Je-li rychlost chodce větší než 5 km/hod, pak dostaneme podobně $d_1 < 150$, takže neutrální bod leží mezi S a Z . Pro žáky, kteří jdou rychlostí 6 km/hod je tedy výhodnější vystoupit už na zastávce Y .

Pokud se vám trochu plete, kam vlastně jít a kam ne, zapamatujte si stručné: *Nechodte přes neutrální bod!*

Dále už zůstaneme jen při nastupování, ovšem předchozí příklad si dobře promyslete, protože našich poznatků můžete dobře využít i pro výhodné vystupování.

Teď, když jsme poznali význam neutrálního bodu, si ukážeme, jak lze jeho polohu jednoduše určit graficky.

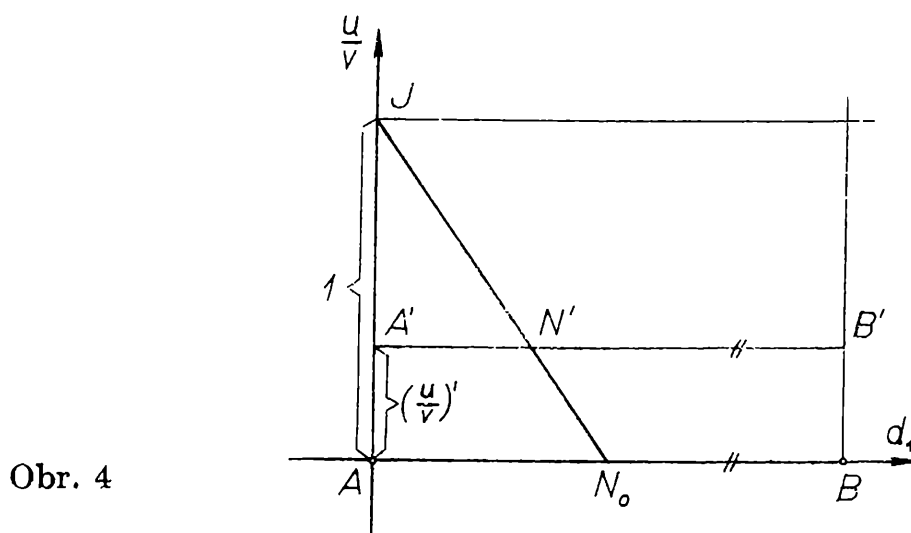
Nechť nejprve $v = \text{konst.}$, $0 < u \leq v$. Rovnice (6) je pak lineární rovnicí s proměnnými d_1 , u a jejím grafem — vzhledem k omezení proměnné u — je úsečka N_0D (obr. 3). Při zobrazení jsme volili bod A



Obr. 3

za počátek, osu proměnné d_1 vodorovně a osu proměnné u svisle. Grafické znázornění rozeberte podrobněji! Na obr. 3 jsme rovněž znázornili, jak pro danou rychlost u' chodce určíme graficky polohu neutrálního bodu $N(u')$.

Jestliže neznáme průměrnou rychlost tramvaje, ale dovedeme odhadnout poměr u/v (tj. poměr v/u udává, kolikrát větší je rychlost tramvaje než rychlost chodce), pak pro $0 < u/v \leq 1$ lze opět sestavit graf rovnice (6), kde jsou nyní proměnné d_1 , u/v , a to úsečku N_0J (obr. 4). Provedte podrobně! Na obr. 4 jsme opět znázornili, jak pro daný poměr $(u/v)'$ rychlostí určíme graficky polohu neutrálního bodu N'



Obr. 4

Nyní opustíme předpoklad, že bydlíme v ulici, kudy jezdí tramvaje. Při stejném označení už neplatí (3), ale

$$d < d_1 + d_2 \quad (7)$$

Dále tedy uvažujme, že platí (7) nebo (3).

Neutrálním bodem nazveme každý bod N v rovině, pro nějž je splněno (1). Odsud pak plyne i rovnost (2), z níž dostáváme

$$d_2 - d_1 = \frac{u}{v} \cdot d \quad (8)$$

Při daných rychlostech u , v (nechť $0 < u < v$) a dané vzdálenosti d jsou tedy neutrální body dány vztahem (8). Vyšetřujme proto geometrické místo bodů N v rovině, pro nějž platí, že rozdíl jejich vzdáleností $d_2 - d_1$ od dvou daných bodů A , B je konstantní, přičemž tato konstanta je menší než d .

Takto formulovaná úloha vám jistě připomíná definici hyperboly. Zopakujme si: Hyperbola je geometrické místo bodů M v rovině, které mají od dvou daných bodů E , F této roviny stálý rozdíl vzdáleností $2a < EF (= 2e)$. Označíme-li průvodiče $EM = d_1$, $FM = d_2$, platí $|d_2 - d_1| = 2a$, přičemž pro $d_1 > d_2$ dostáváme jednu větev a pro $d_1 < d_2$ druhou větev této hyperboly.

Z rovnice (8) tak plyne, že geometrickým místem neutrálních bodů N je jedna větev hyperboly ($d_1 < d_2$), která má ohniska A , B , střed N_0 ,

$2e = d$ a velikost hlavní osy $2a = \frac{u}{v}d$. Pro její konstrukci vypočteme ještě velikost b vedlejší poloosy $b^2 = e^2 - a^2$, odkud

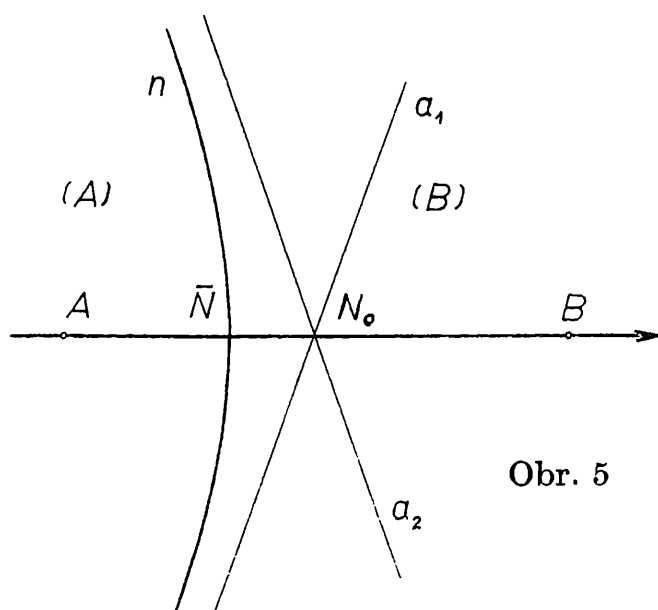
$$b = \frac{d}{2} \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{v}.$$

Víme, že asymptoty svírají s hlavní osou hyperboly úhel φ , pro nějž

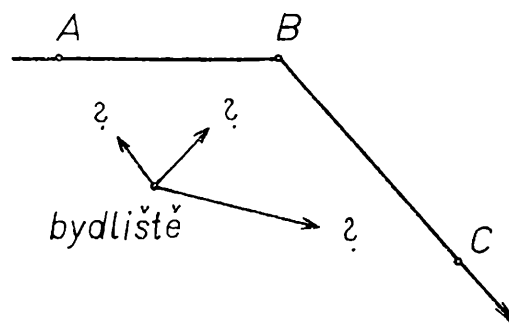
$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u}$$

Vidíme, že pro $u \rightarrow v$ je $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow 0$, tj. $\varphi \rightarrow 0$, pro $u \rightarrow 0$ je $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \pm \infty$, tj. $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Pro dané hodnoty d, u, v nazveme geometrické místo neutrálních bodů N v rovině *neutrální křivka* n . Vidíme, že za daných předpokladů je neutrální křivkou jedna větev hyperboly. Na obr. 5 jsme sestrojili neutrální křivku pro $u = v/3$ (vypočtete a, b).



Obr. 5



Obr. 6

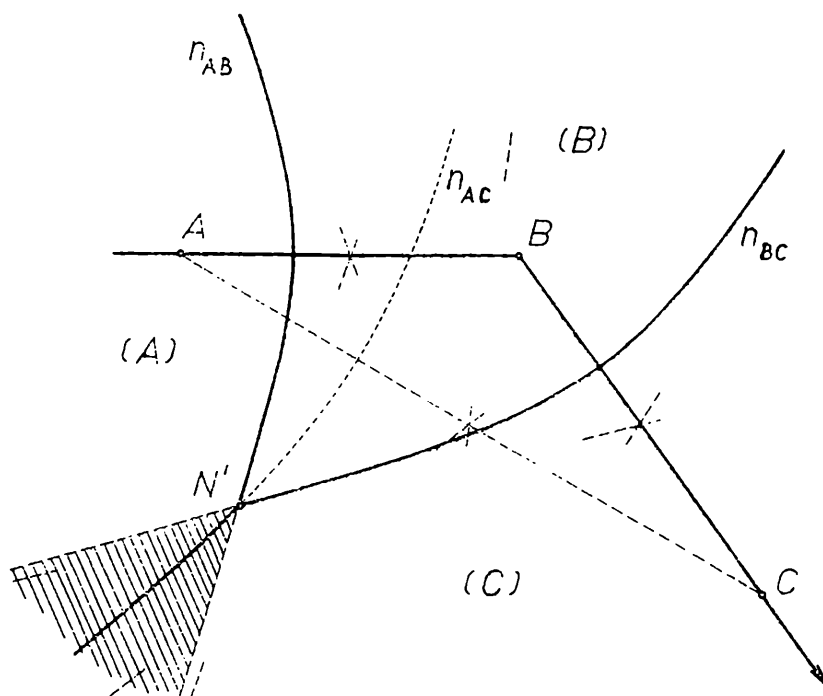
Neutrální křivka rozděluje rovinu na dvě části. Z míst v části (A) je vhodné chodit na zastávku A, z míst v části (B) na zastávku B. Toto je jen rozdělení teoretické, neboť např. v městech nelze chodit po přímkách, ale přesto obr. 5 popisuje v podstatě i situaci skutečnou.

Na závěr tohoto článku proberme ještě případ složitější, kdy nemáme zastávky dvě, ale tři. Při přímé trati by žádné komplikace nevznikly, ale jestliže trať zatáčí, vznikají nové problémy (obr. 6).

Jestliže nyní volíme mezi zastávkami A, B, dostáváme neutrální křivku n_{AB} (obr. 7), volíme-li mezi zastávkami B, C, dostáváme ne-

utrální křivku n_{BC} . Tyto křivky se protínají; jejich průsečík N' nazveme *dvojný neutrální bod*.

Popišme situaci po zakreslení neutrálních křivek n_{AB} , n_{BC} . Rovina je rozdělena na 4 části. Tři z nich udávají místa, odkud je vhodné chodit na zastávku A , B , resp. C , čtvrtá část (na obr. 7 je vyčárkovaná) určuje místa, odkud je vhodné chodit na zastávku A při volbě mezi A



Obr.

a B a na zastávku C při volbě mezi B a C , tj. místa, odkud není výhodné chodit na zastávku B . V této části nám tedy zbývá ještě rozhodnout mezi A a C . Sestrojíme neutrální křivku n_{AC} . Zde ovšem pozor, že v (8) za d nebereme nejkratší vzdálenost zastávek A , C , ale délku cesty, kterou musí z A do C projet tramvaj. Křivka n_{AC} také zřejmě prochází dvojným neutrálním bodem N' a pomocí těchto tří křivek je pak rovina rozdělena na tři oblasti (A), (B), resp. (C) tvořené místy, odkud je výhodné chodit na zastávku A , B , resp. C . Hranice těchto oblastí jsou na obr. 7 vyznačeny silnou čarou. Všechny tři tyto oblasti se stýkají ve dvojném neutrálním bodě.

Ve skutečnosti bývá situace méně přehledná, než jak jsme si ji znázornili. Ti, kdož bydlí v okolí dvojného neutrálního bodu nemají snadné své rozhodování, na kterou zastávku se vydat. Je totiž komplikované ještě tou okolností, že i při celkem malých změnách rychlosti u se může jejich bydliště nacházet postupně v každé z oblastí (A), (B), (C). (Autor tohoto článku bydlí též v okolí dvojného neutrálního bodu, ovšem do zaměstnání chodí pěšky.)

Výsledek cvičení: Neutrální bod je 2,5 km od stanice A , tj. leží mezi turisty a stanicí A , a proto v případě a se vydají ke stanici B . Do stanice B

by dorazili za 26 minut, nejbližší vlak odjíždí z A za 15 minut a vzdálenost AB ujede za 8 minut. Bude tak za 23 minut odjíždět ze stanice B . V případě b si turisté vypočítají, že tento vlak ve stanici B už nestihnou, a proto zamíří ke stanici A , která je blíž a kde počkají na další vlak.

Literatura

- [1] Trávníček, S.: Čekání při místní dopravě. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 43 (1964—65), č. 9, str. 422—425.
 [2] Makoveckij, P. V. Smotri v koreň! „Nauka“, 2. vydání, Moskva 1968.

Dělitelé nulové matice

OTA ŘÍHA, PeF UJEP, Brno

Z řady článků otištěných v tomto ročníku Rozhledů víte, že násobení matic je na rozdíl od násobení čísel nekomutativní. V tomto článku poznáte další vlastnosti násobení matic, které je výrazně odlišují od násobení čísel.

Matice obdélníkové a čtvercové

O matici, která má m řádků a n sloupců říkáme, že je *typu* $(m; n)$. Jestliže $m \neq n$, pak matici typu $(m; n)$ nazýváme *matice obdélníková*, jestliže $m = n$, pak matici typu $(m; m)$ nazýváme *matice čtvercová*. Příkladem čtvercové, matice typu $(4; 4)$ je matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Sestrojíme-li ve čtvercové matici (napsané do tvaru čtverce) obě její úhlopříčky — diagonály, pak tu diagonálu, která spojuje levý horní a pravý dolní vrchol čtverce, nazýváme *hlavní diagonála čtvercové matice* a prvkům, které na ní leží říkáme *prvky hlavní diagonály*. V uvedené matici jsou to prvky 3, -2 , -6 , 1. Druhou diagonálu nazýváme *vedlejší diagonála čtvercové matice* a prvkům, které na ní leží, říkáme *prvky vedlejší diagonály*. V uvedené matici jsou to prvky 0, 1, 5, 2.

Matice jednotkové

Čtvercovou matici, která má tu vlastnost, že všechny prvky její hlavní diagonály jsou rovny jedné, a všechny prvky, které neleží na hlavní diagonále, jsou rovny nule, nazýváme *matice jednotková*.

Příklady jednotkových matic typu (2; 2), (3; 3) a (4; 4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Název jednotková matice byl zvolen proto, že jednotková matice má při násobení matic stejnou vlastnost, jako číslo jedna při násobení čísel. Pro každé reálné číslo a platí

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Obdobně pro každou matici $\mathbf{A}$ a jednotkovou matici $\mathbf{E}$, pokud existují součiny $\mathbf{EA}$, $\mathbf{AE}$, platí

$$\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}.$$

O této vlastnosti jednotkových matic se snadno sami přesvědčíte.

Úloha 1. Určete jednotkovou matici $\mathbf{E}$ téhož typu, jako je daná matice a ověřte, že platí $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$, pro:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 9 \\ -5 & -6 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 30 & 12 & 19 & 69 \\ 13 & 5 & -8 & 11 \\ 3 & -6 & 15 & 81 \\ 7 & -16 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

Matice nulové

Pro číslo 0 a pro každé číslo a platí $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Obdobnou vlastnost při násobení matic má matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule. Říkáme jí *matice nulová*. Příklady nulových matic

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Snadno se přesvědčíte, že pro každou matici $\mathbf{A}$ a pro nulovou matici $\mathbf{O}$, pokud existují součiny $\mathbf{OA}$, $\mathbf{AO}$, platí

$$\mathbf{OA} = \mathbf{AO} = \mathbf{O}.$$

Dělitelé nulové matice

Pro součin dvou čísel platí věta:

Součin dvou čísel je roven nule tehdy a jen tehdy, když aspoň jeden z činitelů je roven nule.

Mohou nastat tyto případy

$$\begin{aligned}0 \cdot a &= 0, \quad a \neq 0, \\a \cdot 0 &= 0, \quad a \neq 0, \\0 \cdot 0 &= 0.\end{aligned}$$

Jsou-li oba činitelé různí od nuly, např. $3 \cdot 5 = 15$,¹⁾ je i součin různý od nuly.

Pro násobení matic obdobná věta neplatí. Např. je-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Vidíme, že součin matic, které jsou obě nenulové, je roven nulové matici $\mathbf{O}$.

Pro součin matic tedy na rozdíl od součinu čísel z rovnosti

$$\mathbf{AB} = \mathbf{O}$$

neplyne, že $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ nebo $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.

Jestliže pro matice $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ platí $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, pak matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ nazýváme *děliteli nulové matice*.

Uvedený rozdíl mezi násobením matic a násobením čísel je znázorněn na následujícím obrázku, v němž jsou uvedeny případy, které mohou nastat pro násobení čísel i pro násobení matic. Prázdné kroužky značí nulu, plné značí čísla různá od nuly. Obdobně prázdné čtverečky značí nulové matice a plné značí nenulové matice.

Úloha 2. Vynásobením ověřte, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou děliteli nulové matice:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Uvědomte si, že čísla 3 a 5 jsou tzv. dělitelé čísla 15.

Z existence dělitelů nulové matice vyplývá ještě *další vlastnost, kterou se násobení matic liší od násobení čísel*. Jestliže pro čísla a, b, c platí

$$ab = ac,$$

$$\bigcirc \cdot \bigcirc = \bigcirc$$

$$\bigcirc \cdot \text{shaded circle} = \bigcirc$$

$$\text{shaded circle} \cdot \bigcirc = \bigcirc$$

$$\text{shaded circle} \cdot \text{shaded circle} = \text{shaded circle}$$

$$\square \cdot \square = \square$$

$$\square \cdot \text{shaded square} = \square$$

$$\text{shaded square} \cdot \square = \square$$

$$\text{shaded square} \cdot \text{shaded square} = \text{shaded square}$$

$$\text{shaded square} \cdot \text{shaded square} = \square$$

pak musí být, buď $a = 0$ nebo $b = c$. Obdobné tvrzení pro matice neplatí. Příkladem takových matic, pro které platí

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{O}, \mathbf{B} \neq \mathbf{C} \text{ a } \mathbf{AB} = \mathbf{AC},$$

jsou například matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro tyto matice je

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

takže $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, ale $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$ a $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$.

Úloha 3. Utvořte součiny $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ a porovnejte matici $\mathbf{AB}$ s maticí $\mathbf{AC}$ a matici $\mathbf{B}$ s maticí $\mathbf{C}$:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 8 \\ -7 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tři podoby jedné detektivní úlohy

JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK

Rozhledy matematicko-fyzikální otiskovaly ve dvou předcházejících ročnících články, věnované základním poznatkům o množinách a výrocích. Noví čtenáři Rozhledů z řad studentů 1. ročníků gymnasií probírali podstatné věci z této látky v hodinách matematiky a mohou proto snadno porozumět článkům, které na zmíněný seriál navazují. Přesto nebude na škodu, připomeneme-li si některé poznatky o operacích s výroky. Hlavním námětem tohoto článku je ukázka řešení jedné složitější detektivní úlohy.

Základní způsoby skládání výroků můžeme popsat těmito schématy (na místa tří teček, resp. čárek, zapisujeme výroky):

Není pravda, že	—	negování výroku
a zároveň — — —	—	tvoření konjunkce ze dvou výroků
nebo — — —	—	tvoření alternativy
Jestliže ., pak — — —	—	tvoření implikace
právě tehdy, když — — —	—	tvoření ekvivalence

K zápisu výroků získaných uvedenými způsoby z výroků q, r používáme symbolů: q', r' (non q , non r), $q \wedge r$ (q et r), $q \vee r$ (q vel r), $q \Rightarrow r$, $q \Leftrightarrow r$. Všechny možné složené výroky lze však vyjádřit pomocí jen tří spojek:

není pravda, že — a — nebo (latinsky non — et — vel).

Vyjadřujeme-li všechny údaje nějaké úlohy pomocí těchto tří spojek, můžeme stručně říci, že je vyjadřujeme v jazyce non—et—vel.¹⁾ Ukažme si nejprve, že se můžeme obejít bez implikací a ekvivalencí:

platí $q \Rightarrow r$ znamená: není pravda, že q platí a r neplatí.

tj. platí $(q \wedge r')'$,

platí $q \Leftrightarrow r$ znamená: platí q a r nebo neplatí q a neplatí r ,

tj. platí $(q \wedge r) \vee (q' \vee r')$.

Ukažme si, jak lze vyjádřit v jazyce non—et—vel podstatu slovně formulované detektivní úlohy. Jednotlivé podoby této úlohy budeme číslovat římskými číslicemi.

I. Slovní úloha

Při vyšetřování krádeže bylo zajištěno pět mužů A, B, C, D, E. Vyšlo najevo, že v době činu mohl být na místě činu muž C nebo D, nejvýš jeden z dvojice A, B a aspoň jeden z dvojice A, C. Muž E tam mohl být jen v pří-

¹⁾ Viz článek *Učme se jazyku non-et-vel*, Rozhledy č. 7, roč. 1969—70.

tomnosti D , ale pokud tam byl E , nechyběl C . Dávni kumpáni B a D se nyní nesnášejí, proto lze vyloučit jejich spolupráci; zato B , C tvoří nerozlučnou dvojici. Jaké jsou možnosti pro složení party? Kterého z mužů A , B , C , D , E lze na základě toho zprostit podezření z účasti na krádeži?

Zvolme symboly a, b, c, d, e po řadě pro výroky „muž A (B , C , D , E) byl na místě činu v okamžiku krádeže“. Pak můžeme jednotlivé poznatky z textu úlohy vyjádřit takto:

c platí nebo d platí	$c \vee d$
není pravda, že a platí a b platí	$(a \wedge b)'$
a platí nebo c platí	$a \vee c$
není pravda, že e platí a d neplatí	$(e \wedge d')'$
není pravda, že e platí a c neplatí	$(e \wedge c')'$
není pravda, že b platí a d platí .	$(b \wedge d)'$
platí b a c nebo b neplatí a c neplatí.	$(b \wedge c) \vee (b' \wedge c')$

Opravdu jsme vystačili s prostředky jazyka non—et—vel, v něm můžeme také zformulovat logickou úlohu, která vystihuje podstatu naší slovní úlohy.

II. Logická úloha

Platí složený výrok

$$(c \vee d) \wedge (a \wedge b)' \wedge (a \vee c) \wedge (e \wedge d')' \wedge (e \wedge c')' \wedge (b \wedge d)' \wedge \\ \wedge [(b \wedge c) \vee (b' \wedge c')].$$

Máme zjistit všechny pětice pravdivostních hodnot výroků a, b, c, d, e , pro které je daný výrok pravdivý. Dále máme na základě toho určit, který z výroků a, b, c, d, e je pravdivý.

V článku *Algebra pravdy a lži* v 9. čísle minulého ročníku Rozhledů byly pravdivostní hodnoty pravda, nepravda označeny číslicemi 1, 0. Ukázalo se to výhodné, protože pravdivostní hodnota konjunkce $x \wedge y$ je na každém řádku definiční tabulky rovna součinu pravdivostních hodnot výroků x, y

$$0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1.$$

Pravdivostní hodnota alternativy $x \vee y$ je na třech prvních řádcích rovna součtu pravdivostních hodnot výroků x, y

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1$$

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Na čtvrtém řádku dostáváme součet $1 + 1$, který musí být roven 1, chceme-li algebraizovat výrokovou logiku. Tak docházíme k tabulkám početních operací s pravdivostními hodnotami 0, 1

$$\begin{array}{c|c} & \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Další podobu detektivní úlohy získáme, nahradíme-li v textu logické úlohy symboly $\wedge$, $\vee$ po řadě znaménky $.$, $+$ a ponecháme-li v něm písmena a, b, c, d, e i symbol $'$. Písmena a, b, c, d, e budou nyní neznámými, které mohou nabývat pouze hodnot 0 nebo 1. Pravdivost daného složeného výroku vyjádříme rovností celého součinu jedné.

III. Algebraická úloha

Je dána rovnice

$$(c + d) \cdot (a \cdot b)' \cdot (a + c) \cdot (e \cdot d'')' \cdot (e \cdot c')' \cdot (b \cdot d)' \cdot (b + c + b' \cdot c') = 1.$$

Máme zjistit všechny pětice hodnot neznámých a, b, c, d, e , pro které je rovnice splněna. Při tom víme, že neznámé nabývají jen hodnot 0, 1 a že operace $', ., +$ jsou plně popsány třemi tabulkami, které jsme výše zapsali. Dále máme určit, která z neznámých a, b, c, d, e je rovna nule ve všech peticích, které jsou řešeními rovnice.

Jako každou rovnici, můžeme i tuto řešit zkusmým dosazováním. Zvolme např. hodnoty $a = b = c = 1$, $d = e = 0$ a dosadíme je do rovnice (tj. zkusme, zda jde o řešení rovnice)

$$(1 + 0) \cdot (1 \cdot 1)' \cdot (1 + 1) \cdot (0 \cdot 0')' \cdot (0 \cdot 1')' \cdot (1 \cdot 0)' \cdot (1 \cdot 1 + 1' \cdot 1')' = 1.$$

Pomocí tabulek budeme postupně upravovat levou stranu rovnice, počítat naznačené součty a součiny

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1' \cdot 1 \cdot (0 \cdot 1)' \cdot (0 \cdot 0)' \cdot 0' \cdot (1 + 0 \cdot 0) &= 1 \\ 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0' \cdot 0' \cdot 1 \cdot (1 + 0) &= 1 \\ 0 &= 1. \end{aligned}$$

Zkouška ukázala, že zvolená pětice $(1, 1, 1, 0, 0)$ není řešením rovnice. Můžeme zkoušet další pětice z 32 možných (zdůvodněte sami tento počet možností), ale to není elegantní metoda. Pohodlněji najdeme řešení, uvědomíme-li si aspoň tyto tři věci z algebry pravdivostních hodnot výroků.

Věta 1. V algebře pravdivostních hodnot výroků (stručně PH-algebře) platí

$a_1 \cdot a_2 \dots \cdot a_n = 1$ právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Jde vlastně o jednoduchý překlad faktu, že konjunkce n výroků je pravdivá právě tehdy, když je pravdivý každý z těchto výroků.

Věta 2. V naší PH-algebře platí pro každé x tyto rovnosti

$$1 + x = 1, \quad 0 \cdot x = 0, \quad (x')' = x.$$

Důkaz věty je neobyčejně snadný, protože x může nabývat jen dvou hodnot, stačí dosadit

$$\begin{array}{lll} 1 + 0 = 1, & 0 \cdot 0 = 0, & (0')' = 1' = 0, \\ 1 + 1 = 1, & 0 \cdot 1 = 0, & (1')' = 0' = 1. \end{array}$$

Jak pro $x = 0$, tak pro $x = 1$, jsme získali výsledky souhlasící s tvrzeními věty.

Věta 3. V PH-algebře platí pro každá dvě x, y tyto rovnosti

$$(x + y)' = x' \cdot y', \quad (x \cdot y)' = x' + y'$$

Důkaz věty lze provést obdobně jako v případě věty 2, musíme však počítat se čtyřmi možnostmi. Naznačme výpočet ve dvou případech

$$\begin{array}{ll} x = 0, y = 0 & \begin{array}{ll} (0 + 0)' = 0' = 1, & (0 \cdot 0)' = 0' = 1, \\ 0' \cdot 0' = 1 \cdot 1 = 1, & 0' + 0' = 1 + 1 = 1, \end{array} \\ x = 0, y = 1 & \begin{array}{ll} (0 + 1)' = 1' = 0, & (0 \cdot 1)' = 0' = 1, \\ 0' \cdot 1' = 1 \cdot 0 = 0, & 0' + 1' = 1 + 0 = 1 \end{array} \end{array}$$

Čtenář snadno dokončí důkaz sám.

Dokázané věty mají pro nás velký význam, umožní algebraické řešení dané detektivní úlohy. Vyjdeme z rovnice obsažené v textu úlohy III a pomocí věty 3 ji upravíme na tento přehlednější tvar

$$\begin{array}{l} (c + d) \cdot (a' + b') \cdot (a + c) \cdot (e' + d) \cdot (e' + c) \cdot (b' + d') \\ (b \cdot c + b' \cdot c') = 1. \end{array}$$

Řešení rovnice v PH-algebře

Protože známe jen nejnútnejší věty PH-algebry, můžeme rovnici řešit diskusí a postupným dosazováním. Zvolíme nejprve $a = 1$, pak $a = 0$, v obou případech dosadíme a budeme vyvozovat důsledky volby.

a) Předpokládejme, že $a = 1$, $a' = 0$ a dosadíme

$$\begin{array}{l} (c + d) \cdot (0 + b') \cdot (1 + c) \cdot (e' + d) \cdot (e' + c) \cdot (b' + d') \\ \cdot (b \cdot c + b' \cdot c') = 1, \\ (c + d) \cdot b' \cdot 1 \cdot (e' + d) \cdot (e' + c) \cdot (b' + d') \cdot (b \cdot c + b' \cdot c') = 1. \end{array}$$

Dva činitele se nám podařilo upravit podle věty 2, věta 1 nám umožňuje odvodit nový poznatek, že $b' = 1$, $b = 0$. Dosadíme znovu tyto konstanty

$$(c + d) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (e' + d) \cdot (e' + c) \cdot (1 + d') \cdot (0 \cdot c + 1 \cdot c') = 1,$$

a zjednodušíme na tvar

$$(c + d) \cdot (e' + d) \cdot (e' + c) \cdot 1 \cdot c' = 1.$$

Opět se dozvídáme, že $c' = 1$, $c = 0$, a postup opakujeme

$$\begin{aligned} (0 + d) \quad (e' + d) \quad (e' + 0) \quad 1 \quad 1 &= 1, \\ d \cdot (e' + d) \cdot e' &= 1. \end{aligned}$$

Nyní již určování hodnot d , e zvládneme najednou: $d = 1$, $e = 0$. Poměrně lehce jsme tedy zjistili jedno řešení rovnice

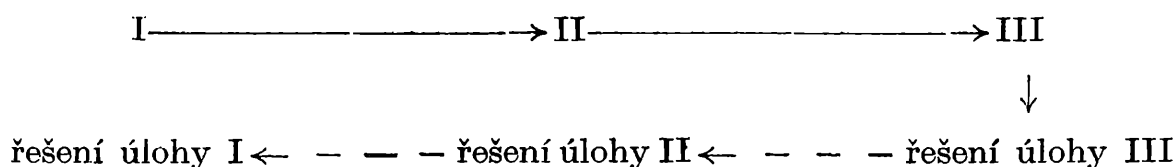
$$a = d = 1, \quad b = c = e = 0.$$

b) Předpokládejme, že $a = 0$, $a' = 1$ a postupujme zcela obdobně. Čtenář si může výpočet provést sám na několika řádcích. Získá tak druhé řešení rovnice

$$a = d = e = 0, \quad b = c = 1.$$

Zkouška dosazením do původně dané rovnice (v úloze III) potvrdí, že úloha III má právě dvě řešení — uspořádané pětice $(1, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0, 0)$. V obou případech je rovna nule jen neznámá e .

Závěr. Náš dosavadní postup lze znázornit schématem



Kroky vyznačené silnou čarou jsme již absolvovali, čekají nás ještě dva kroky naznačené přerušovanou čarou. Ze schématu je dobře patrné, jakou okliku jsme zvolili, abychom obešli neschůdnou překážku na „přímé“ cestě od úlohy I k jejímu řešení. Stejný princip „převlékání“ úlohy do jiného „kabátu“ (lépe řečeno: přenášení úlohy do jiné oblasti poznání) aplikujeme v matematice velmi často, např. v analytické geometrii řešíme geometrický problém tak, že přejdeme k algebraické úloze, vyřešíme ji a výsledek interpretujeme geometricky. Odborně se této strategii řešení problémů říká *transformace problémů*.

Vraťme se k našim úlohám I, II a III a provedme zbývající kroky. Na základě řešení úlohy III zformulujeme řešení úlohy II:

Daný složený výrok je pravdivý právě ve dvou případech:

buď platí výroky a , d a neplatí b , c , e ,

nebo platí výroky b , c a neplatí a , d , e .

Výrok e v žádném případě neplatí.

Řešení úlohy I je nyní nasnadě. Partu zlodějů tvořila buď dvojice A , D , nebo dvojice B , C . Muž E může být zproštěn podezření z krádeže.

V dalším článku se seznámíme s plně algebraickým řešením detektivních úloh, které spočívá v důsledných úpravách rovnic podle zákonů PH-algebry.

Menelaova věta

FRANTIŠEK KOKTÁN, studující ČVUT, Praha

V rovinné geometrii je známa zajímavá věta, která se týká trojúhelníka. Je to tzv. Menelaova věta. Ve většině učebnic je důkaz této věty podán synteticky. Ukážeme si nyní, že je možné větu dokázat snadno pomocí analytické geometrie. Budeme používat vektorového počtu, tak jak jste se s ním seznámili ve III. ročníku SVVŠ (viz Matematika pro III. ročník SVVŠ — větev přírodovědná, SPN — 1967).

Je dán trojúhelník ABC . Zvolme tři čísla k_1, k_2, k_3 tak, aby každé z těchto čísel bylo různé od nuly a současně různé od jedné. Na přímce BC sestrojíme bod A' tak, aby platilo

$$A' - B = k_1 (A' - C) .$$

Dohodneme se, že budeme říkat, že uspořádaná trojice bodů B, C, A' má dělicí poměr rovný číslu k_1 . Tento fakt budeme zapisovat tímto způsobem: $k_1 = (BCA')$. Podobným způsobem sestrojíme pomocí čísel k_2 a k_3 na přímkách CA a AB body B' a C' tak, aby platilo $k_2 = (CAB')$, $k_3 = (ABC')$.

1. Předpokládejme, že body A', B', C' leží na jedné přímce a položíme si otázku, co platí pro čísla k_1, k_2 a k_3 .

Zřejmě

$$(A' - B') = \lambda (A' - C') . \quad (1)$$

Ze zavedení čísla k_1 plyne, že $A' = B + k_1 (A' - C)$. K pravé straně přičteme nulový vektor $(C - C)$ a dostaneme rovnici

$$A' = B + k_1 (A' - C) + (C - C)$$

Odtud pak jednoduchými úpravami zjistíme, že

$$A' = C + \frac{1}{1 - k_1} (B - C) \quad (2)$$

Z cyklické záměny $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A, A' \rightarrow B', B' \rightarrow C', C' \rightarrow A', k_1 \rightarrow k_2, k_2 \rightarrow k_3, k_3 \rightarrow k_1$, kterou postupně provedeme dvakrát na rovnici (2), získáme další dvě rovnice

$$\begin{aligned} B' &= A + \frac{1}{1 - k_2} (C - A) , \\ C' &= B + \frac{1}{1 - k_3} (A - B) . \end{aligned} \quad (3)$$

Z rovnic (2) a (3) pak snadno vypočteme, že

$$\begin{aligned}
A' - B' &= \frac{1}{1 - k_1} (B - C) - \frac{k_2}{1 - k_2} (C - A) , \\
A' - C' &= \frac{k_1}{1 - k_1} (B - C) - \frac{1}{1 - k_3} (A - B)
\end{aligned} \tag{4}$$

Upravíme-li rovnici (1) pomocí (4), přičemž za vektor $A - C$ dosadíme z rovnice $(A - C) = (B - C) + (A - B)$ obdržíme rovnici

$$\begin{aligned}
&\frac{(1 - \lambda k_1)(1 - k_2) + k_2(1 - k_1)}{(1 - k_1)(1 - k_2)} (B - C) + \\
&+ \frac{k_2(1 - k_3) + \lambda(1 - k_2)}{(1 - k_2)(1 - k_3)} (A - B) = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Protože vektory $(B - C)$, $(A - B)$ nejsou rovnoběžné, rovnice (5) je splněna jen v případě, že

$$(1 - \lambda k_1)(1 - k_2) + k_2(1 - k_1) = 0 , \tag{6}$$

$$k_2(1 - k_3) + \lambda(1 - k_2) = 0 . \tag{7}$$

Z obou rovnic vyloučíme λ a obdržíme zajímavý výsledek

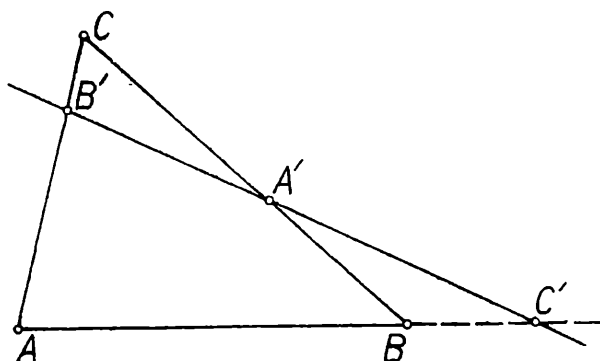
$$k_1 k_2 k_3 = 1 .$$

2. Položme si obrácenou otázku. Jestliže součin čísel $k_1 k_2 k_3 = 1$, co platí pro body A' , B' , C' ? Ukážeme, že body A' , B' , C' leží na přímce. Důkaz tohoto tvrzení provedeme sporem.

Předpokládejme, že body A' , B' , C' neleží na přímce. Potom

$$(A' - B') \neq \lambda (A' - C') .$$

Stejným postupem dostaneme levou stranu rovnice (5). Tento součet je různý od nulového vektoru, tedy alespoň jedna z rovností (6), (7)



Obr. 1

neplatí. Vyloučením λ obdržíme $k_1 k_2 k_3 \neq 1$, což je spor. Tím jsme ukázali, že z předpokladu $k_1 k_2 k_3 = 1$ plyne, že body A' , B' , C' leží na přímce. Svými jednoduchými úvahami jsme dokázali Menelaovu větu, kterou lze formulovat tímto způsobem:

Je dán trojúhelník ABC . Zvolme tři čísla k_1, k_2, k_3 tak, že každé z nich je různé od nuly a od jedné. Na přímkách AB, BC, CA zvolme postupně body C', A', B' (viz obr. 1) tak, aby platilo $(ABC') = k_3, (BCA') = k_1, (CAB') = k_2$. Potom body A', B', C' leží na jedné přímce právě tehdy, když platí

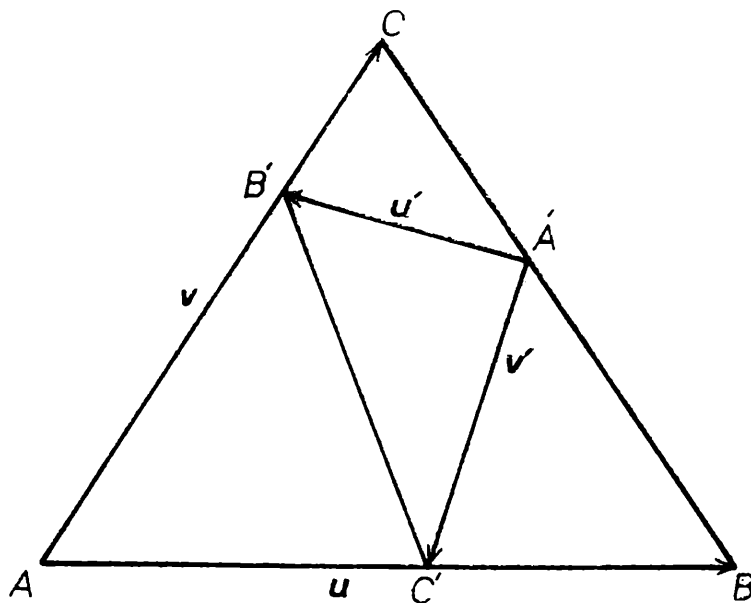
$$k_1 k_2 k_3 = 1$$

0 jednom zobecnění Menelaovy věty

PETR FRELICH, studující ČVUT, Praha

V předešlém článku F. Koltána Menelaova věta jste se s touto větou seznámili. Tato věta existuje také ve zobecněném tvaru.¹⁾ Ukážeme, jak zní a jak se dokazuje.

Mějme dán trojúhelník ABC . Zvolme 3 čísla k_1, k_2, k_3 tak, že každé z nich je různé od nuly a od jedničky. Na přímkách AB, BC, CA zvolme postupně body C', A', B' (viz obr. 1) tak, aby platilo: $k_1 = (ABC')$, $k_2 = (BCA')$, $k_3 = (CAB')$. Obsah trojúhelníka ABC označíme P , obsah trojúhelníka $A'B'C'$ označíme P' . Budeme se zajímat o poměr obsahů P' a P .



Obr. 1

¹⁾ Podrobněji o tom viz článek Tomáše Kleina: O jednom zobecnění Menelaovy a Cevovy věty, který je v tisku v Časopise pro pěstování matematiky.

Nejprve zavedeme následující označení

$$(B - A) = \mathbf{u}, (C - A) = \mathbf{v}, (B' - A') = \mathbf{u}' \quad (C' - A') = \mathbf{v}' \quad (1)$$

Vektory $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ také můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \alpha_{11}\mathbf{u} + \alpha_{12}\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}' &= \alpha_{21}\mathbf{u} + \alpha_{22}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (2)$$

Obsah trojúhelníka ABC je dán vzorcem

$$P = \frac{1}{2} |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \alpha$$

Odtud po umocnění dostáváme

$$4P^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \alpha),$$

čili

$$4P^2 = |\mathbf{u}|^2 \cdot |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \quad (3)$$

Pro obsah trojúhelníka $A'B'C'$ analogicky platí

$$4P'^2 = |\mathbf{u}'|^2 \cdot |\mathbf{v}'|^2 - (\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}')^2.$$

Upravíme-li tuto rovnici pomocí (2), dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} 4P'^2 &= |\alpha_{11}\mathbf{u} + \alpha_{12}\mathbf{v}|^2 |\alpha_{21}\mathbf{u} + \alpha_{22}\mathbf{v}|^2 - \\ &- [(\alpha_{11}\mathbf{u} + \alpha_{12}\mathbf{v}) \cdot (\alpha_{21}\mathbf{u} + \alpha_{22}\mathbf{v})]^2, \end{aligned}$$

kterou můžeme dále upravit na tvar

$$4P'^2 = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})^2 [|\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2]$$

Odtud a z rovnice (3) plyne

$$4P'^2 = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})^2 \cdot 4P^2,$$

čili

$$P' = |\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}| \cdot P \quad (4)$$

Ze vzorce (4) tedy plyne, že naše úloha bude řešena, jestliže najdeme hodnoty koeficientů α_{11} , α_{12} , α_{21} , α_{22} .

Použijeme-li vztahů

$$C' = \frac{1}{1 - k_1} A - \frac{k_1}{1 - k_1} B$$

$$A' = \frac{1}{1 - k_2} B - \frac{k_2}{1 - k_2} C$$

$$B' = \frac{1}{1 - k_3} C - \frac{k_3}{1 - k_3} A \quad ^2)$$

k úpravě posledních dvou rovností v (1), můžeme vektory $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ napsat ve tvaru

²⁾ Viz též výše uvedený článek Kocktánův.

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{k_3}{1-k_3} A - \frac{1}{1-k_2} B + \left(\frac{k_2}{1-k_2} + \frac{1}{1-k_3} \right) C, \\ v' &= \frac{1}{1-k_1} A - \left(\frac{k_1}{1-k_1} + \frac{1}{1-k_2} \right) B + \frac{k_2}{1-k_2} C \end{aligned} \quad (5)$$

Upravíme-li (2) pomocí označení zavedených v (1), dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} u' &= \alpha_{11}(B-A) + \alpha_{12}(C-A) = \\ &= -(\alpha_{11} + \alpha_{12})A + \alpha_{11}B + \alpha_{12}C, \\ v' &= \alpha_{21}(B-A) + \alpha_{22}(C-A) = \\ &= -(\alpha_{21} + \alpha_{22})A + \alpha_{21}B + \alpha_{22}C. \end{aligned} \quad (6)$$

Porovnáním koeficientů u A, B, C v (5) a (6), dostáváme

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= -\frac{1}{1-k_2}, \\ \alpha_{12} &= \frac{k_2}{1-k_2} + \frac{1}{1-k_3}, \\ \alpha_{21} &= -\left(\frac{k_1}{1-k_1} + \frac{1}{1-k_2} \right), \\ \alpha_{22} &= \frac{k_2}{1-k_2}. \end{aligned}$$

Dosazením do (4) dostáváme po úpravě

$$P' = \left| \frac{1 - k_1 k_2 k_3}{(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3)} \right| \cdot P$$

Nyní můžeme tedy formulovat větu:

Mějme dán trojúhelník ABC . Zvolme 3 čísla k_1, k_2, k_3 tak, že každé z nich je různé od nuly a od jedničky. Na přímkách AB, BC, CA zvolme postupně body C', A', B' tak, aby platilo

$$k_1 = (ABC'), \quad k_2 = (BCA'), \quad k_3 = (CAB').$$

Obsah trojúhelníka ABC označíme P , obsah trojúhelníka $A'B'C'$ označíme P' .

Potom platí

$$\frac{P'}{P} = \left| \frac{1 - k_1 k_2 k_3}{(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3)} \right|$$

Z věty, kterou jsme dokázali, plyne snadno Menelaova věta. Je totiž vidět, že body A', B', C' leží na přímce právě tehdy, když $P' = 0$, tj. právě tehdy, když platí rovnost

To ovšem znamená, že

$$k_1 k_2 k_3 = 1 ,$$

což není nic jiného než známá rovnost z Menelaovy věty.

Isoperimetrická nerovnost

STANISLAV HORÁK st., ČVUT Praha

V tomto článku uvedeme důkaz jedné věty, která je v geometrii velmi důležitá. Důkaz ovšem provedeme za velmi zúžených podmínek.

I. Článek je svým obsahem velmi elementární a též názorný. Aby jej mohlo s prospěchem číst co nejvíce čtenářů, zmíním se nejprve o měření úhlů. Několik tisíc let se úhly měří na stupně. Pro vyšší matematiku se to však ukazuje jako nevhodné, a tak se zavedla míra oblouková. Vy se ve škole učíte, že

$$\begin{aligned} \text{arc } 19^\circ &= 0,33\,161 , \\ \text{arc } 86^\circ 43' &= 1,61\,349 \text{ atd.} \end{aligned}$$

V matematice pak stručně píšeme

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,33\,161 , \\ \beta &= 1,61\,349 \text{ atd.} \end{aligned}$$

Různé vzorce se tím podstatně zjednoduší, např.

$$\begin{aligned} \text{místo } a &= r \cdot \text{arc } \alpha \text{ píšeme prostě } a = r\alpha, \\ \text{místo } V &= \frac{1}{2} r^2 \text{arc } \alpha \text{ píšeme } V = \frac{1}{2} r^2 \alpha \text{ atd.} \end{aligned}$$

Tolik úvodem.

II. Nyní odvodíme pomocnou větu.

O ostrém úhlu α vždy platí

$$\text{tg } \alpha - \alpha > 0 .$$

Důkaz. V obr. 1 je dán ostrý úhel α , jeho vrchol je O . Jeho ramena jsou kruhovým obloukem se středem O a poloměru r profata v bodech B, C . Z bodu B je spuštěna kolmice na rameno OC a pata je označena A . V bodě C je sestrojena tečna kruhového oblouku, která rameno OB protne v bodě D .

Z obrázku 1 je patrné, že o obsahích obrazců

$$\triangle OAB < \text{výseč } OCB < \triangle OCD$$

Tuto nerovnost napíšeme jinak

$$\frac{1}{2}r^2 \sin \alpha \cos \alpha < \frac{1}{2}r^2 \alpha < \frac{1}{2}r^2 \operatorname{tg} \alpha$$

Po úpravě

$$\sin \alpha \cos \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$$

Odtud již máme

$$\operatorname{tg} \alpha - \alpha > 0$$

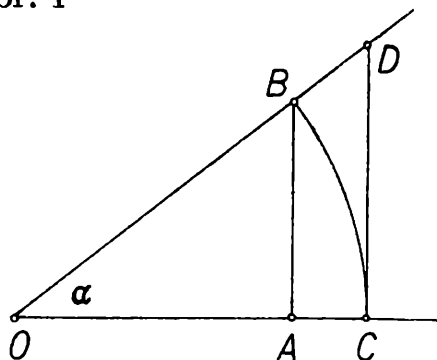
III. Nyní již můžeme přistoupit k větě.

Věta. V každém pravidelném n -úhelníku (konvexním), kde $n \geq 3$, platí

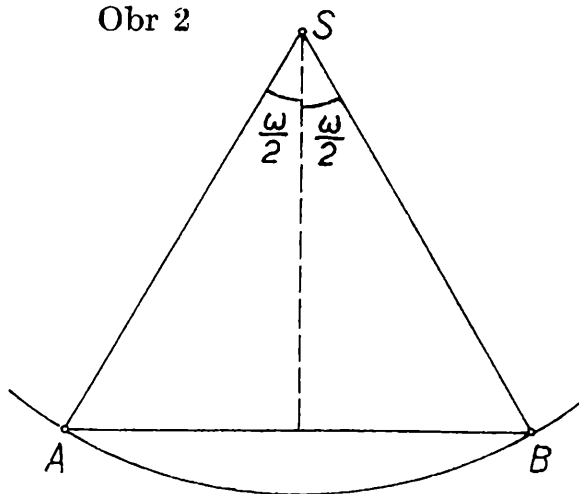
$$(2s)^2 - 4\pi P > 0$$

Přitom $2s$ je obvod a P je obsah pravidelného n -úhelníka.

Obr. 1



Obr 2



Důkaz. V obr. 2 je znázorněn středový trojúhelník pravidelného n -úhelníka. Jeho úhel při vrcholu S je

$$\omega = \frac{2\pi}{n}.$$

Ramena tohoto trojúhelníka jsou $SA = SB = r$, kde r je poloměr kružnice opsané danému n -úhelníku. Potom platí

$$P = \frac{1}{2} nr^2 \sin \omega,$$

$$2s = 2nr \sin \frac{\omega}{2}.$$

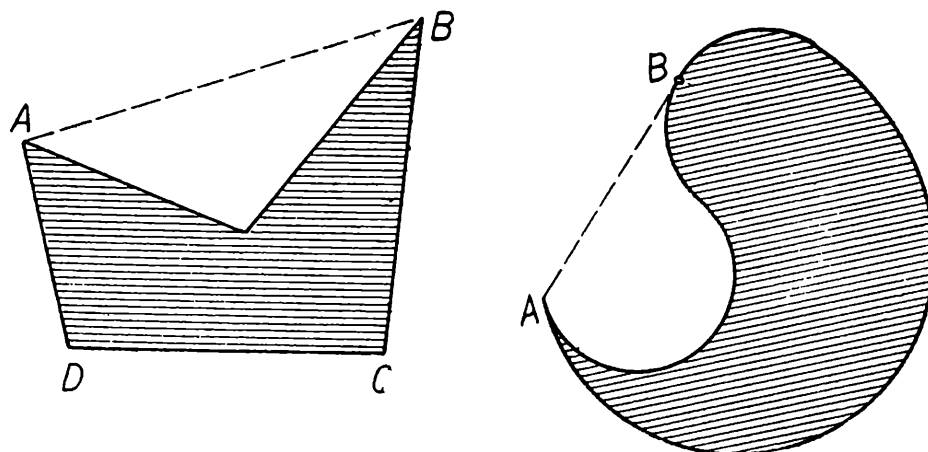
Utvořme výraz $(2s)^2 - 4\pi P$ a hned jej upravujeme

$$(2s)^2 - 4\pi P = 4n^2r^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} - 2\pi nr^2 \sin \omega =$$

$$\begin{aligned}
&= 4nr^2 \left(n \sin^2 \frac{\omega}{2} - \pi \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} \right) = \\
&= 4n^2r^2 \sin \frac{\omega}{2} \left(\sin \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{n} \cos \frac{\omega}{2} \right) = \\
&= 4n^2r^2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{n} \right) = \\
&= 2n^2r^2 \sin \omega \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \right) > 0,
\end{aligned}$$

neboť všichni činitelé jsou kladní. Tím je také důkaz vyslovené věty proveden.

IV. Věta právě dokázaná platí však pro všechny uzavřené rovinné oblasti a nemusí to být ani konvexní oblasti. (Máme ovšem na mysli oblasti, které mají obsah i obvod.) Toto tvrzení si zdůvodníme.



Obr. 3a b

Máme-li dokázat, že věta platí i pro nekonvexní oblasti, které jsou v obr. 3a, b vyšrafované, doplníme je, jak je v obrázku naznačeno na konvexní oblast. Pro konvexní oblast však věta platí (jak předpokládáme). Avšak nekonvexní oblast má větší obvod (úsečka je nejkratší spojnice dvou bodů) a menší obsah. V naší nerovnosti se to projeví tím, že se zvětší menšenec a zmenší menšitel; nerovnost tedy platí tím spíše.

Zkusme ještě, zda platí i pro kruh. Zde je

$$\begin{aligned}
2s &= 2\pi r, \quad P = \pi r^2 \\
(2s)^2 - 4\pi P &= 0
\end{aligned}$$

Zde vyslovená věta neplatí. Aby platila i pro kruh, píšeme ji v poněkud pozměněném tvaru

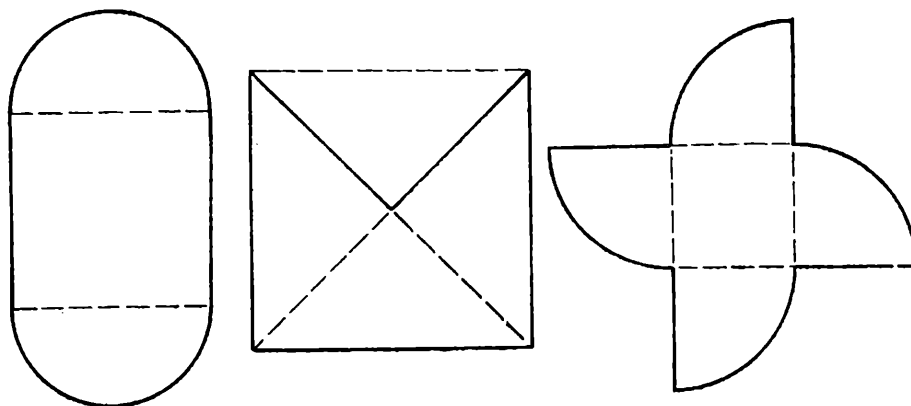
$$(2s)^2 - 4\pi P \geq 0$$

a této nerovnosti říkáme *izoperimetrická nerovnost*. Přitom rovnost platí jen pro kruh.

Shrňme. Izoperimetrická nerovnost

$$(2s)^2 - 4\pi P \geq 0$$

platí pro všechny uzavřené rovinné oblasti. Rovnost platí pouze pro kruh.



Obr. 4a, b, c

Příklad. Dokažte, že izoperimetrická nerovnost platí pro každý trojúhelník.

Řešení. Při obvyklém označení upravujme výraz

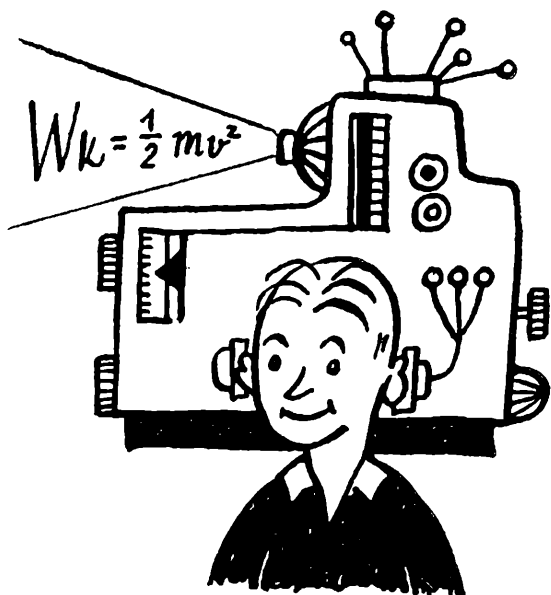
$$\begin{aligned} (2s)^2 - 4\pi P &= \left(\frac{2P}{\varrho} \right)^2 - 4\pi P = \\ &= 4P \left(\frac{P}{\varrho^2} - \pi \right) = 4P (P - \pi\varrho^2) : \varrho^2 > 0, \end{aligned}$$

neboť $P - \pi\varrho^2 > 0$. P je totiž obsah trojúhelníka a $\pi\varrho^2$ je obsah jemu vepsané kružnice.

Poznámka. Při důkazu jsme použili vzorce $P = s\varrho$.

Cvičení.

Přímým výpočtem ukažte, že izoperimetrická nerovnost platí pro obdélník, kosočtverec a oblasti, znázorněné v obr. 4a, b, c.



F Y Z I K A

Zrcadlové mikroskopy

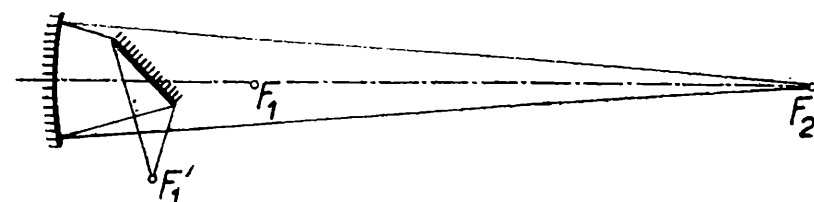
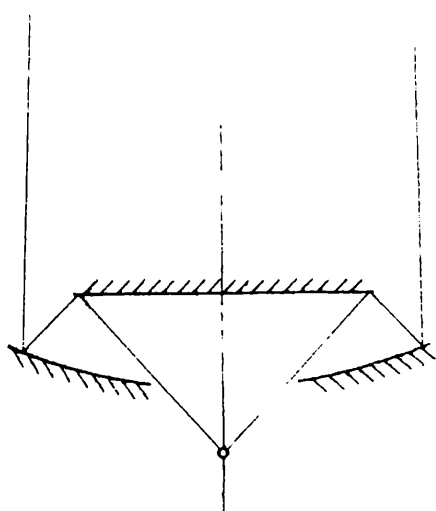
Dr. BOHUMIL JUREK, DrSc., Praha

Mikroskopy jsou zobrazovací optické přístroje. Funkce takových přístrojů spočívá v tom, že se paprsky, vycházející z jednotlivých bodů předmětu, soustřeďují do jiných bodů v konečnu nebo nekonečnu. K tomu je třeba změnit směr paprsků. Optika má k tomu dva prostředky: lom a odraz. Tím jsou dány možnosti konstrukce zobrazovacích optických přístrojů. Rozeznáváme optické soustavy čočkové (dioptrické), zrcadlové (katoptrické) a smíšené (katadioptrické).

Prvým zobrazovacím optickým přístrojem byl čočkový. Byl to holandský dalekohled, sestavený okolo r. 1609. Také hlavním směrem vývoje dalekohledu byly konstrukce čočkové. Ale trvalým průvodcem čočkových soustav dalekohledových byly konstrukce zrcadlové. Již v 17. století byly navrženy a většinou i zhotoveny zrcadlové dalekohledy, založené na rozmanitých principech. Autory byli Zucchi (1616), Merse (1634), Gregory (1663), Newton (1671) a Cassegrain (1672). V 17. a 18. století byly dále zhotovovány dalekohledy na zrcadlovém principu. Velkým pokrokem byly mohutné přístroje, které zhotovil William Herschel ke konci 18. století. Zde můžeme jmenovat dalekohled o průměru 1,22 m a ohniskové vzdálenosti 12 m z roku 1787. Naše století překročilo daleko tento výkon. Pro hvězdárnu na Mount Wilson byl roku 1917 vyroben (nebo spíše dokončen) zrcadlový dalekohled o průměru 2,5 m a Mount Palomar získal v roce 1947 zrcadlový dalekohled o průměru 5 m. Pro vysvětlení je třeba poznamenat, že tyto daleko-

hledy jsou čistě zrcadlové jen tehdy, spokojíme-li se fotografií obrazu, vytvořeného soustavou zrcadel. Pro vizuální pozorování se připojuje čočkový okulár.

Zcela jiný byl vývoj mikroskopů. Zde se konstrukce většinou přidržovala čočkových sestav. Byly sice už v 17. století navrženy zrcadlové mikroskopy, ale návrhy i realizace se vyskytovaly jen v některých údobích a žádné typy nepřešly do trvalého užívání před čtyřicátými lety našeho století. Newton navrhl r. 1679 zrcadlový mikroskopový objektiv, složený z rovinného a dutého zrcadla (obr. 1). Roku 1738



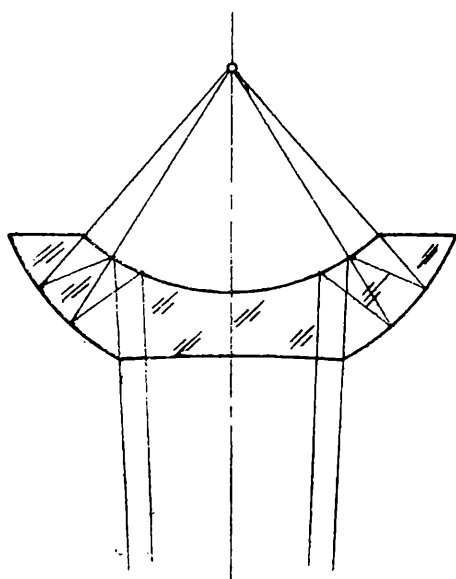
Obr. 2. Zrcadlový mikroskopový objektiv typu Amiciho

Obr. 1. Zrcadlový mikroskopový objektiv Newtonova typu

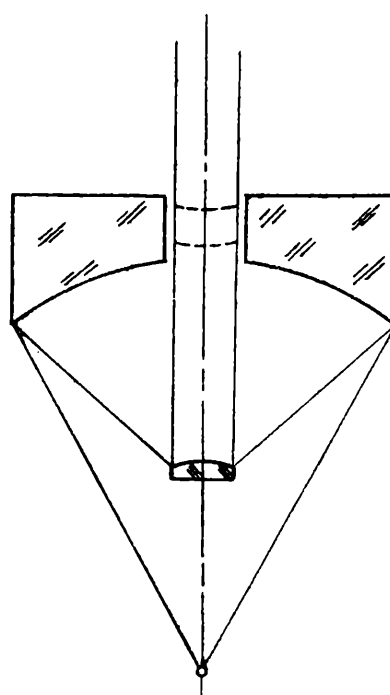
uveřejnil Smith popis soustavy, složené ze dvou sférických zrcadel o stejném poloměru křivosti, která mohla být použita jako mikroskopový objektiv. Další podnět vyšel od Amiciho. Ten uveřejnil r. 1818 zprávu o objektivu, složeném z eliptického (přesněji elipsoidického) zrcadla a rovinného zrcátka. Předmět je v bodě, symetrickém k jednomu ohnisku elipsoidu podle zrcadlicí roviny, takže paprsky po odrazu na zrcadlech vytvoří obraz ve druhém ohnisku elipsoidu (obr. 2). Kristián Doppler odstranil ve svém návrhu rovinné zrcátko jako zbytečné: předmět měl být v jednom ohnisku, obraz ve druhém a odraz se měl uskutečnit v mimoosové části zrcadla (1847). Obměnou Amiciho konstrukce je návrh Fr. W. Barfusse, uveřejněný roku 1840 ve Výmaru. Eliptické zrcadlo je nahrazeno skleněným kulovým zrcadlem, koveným na zadní straně a mezi rovinným zrcadlem (popřípadě polopokovenou deskou) a obrazem je vložena rozptylná čočka. Je to tedy soustava katadioptrická. Popsané soustavy s eliptickým zrcadlem mají závažný nedostatek: obraz je ostrý jen pro jediný bod předmětu. Ostatní body jsou zobrazeny nedokonale.

Trvalejší zájem o zrcadlové mikroskopové objektivy se projevil teprve v našem století. První z návrhů je pravděpodobně Maksutovův objek-

tiv, patentovaný r. 1932. Skládá se z jediného kusu skla, omezeného odraznými a průchodními plochami a čelným mezikružím, které nemá optickou funkci (obr. 3). Není to soustava katadioptrická, poněvadž účelem průchozích ploch není lom. Podobné objektivy se nazývají „solidy“ a byly navrhovány i později. Prvé mikroskopy s odraznými plochami byly zhotoveny v různých zemích okolo r. 1940. Typu ryze zrcadlové soustavy se nejvíce blížil mikroskopový objektiv, o němž podali zprávu Geršgorin, Radčenko a Brumberg roku 1943 (obr. 4). Je to objektiv, složený v podstatě z dutého a vypuklého zrcadla; fluori-



Obr. 3. Maksutovův „solid“



Obr. 4. Typ sovětských badatelů z r. 1943

tová čočka v otvoru dutého zrcadla koriguje barevnou vadu krycího skla pozorovaného preparátu a může odpadnout, je-li mezi vzorkem a objektivem jen vzduch nebo vzduchoprázdný prostor. Od čtyřicátých let bylo zhotoveno mnoho katoptrických a katadioptrických mikroskopových objektivů s nejrozmanitějším speciálním použitím. My se v dalším omezíme na katoptrické objektivy.

Velký zájem o zrcadlové mikroskopové objektivy vznikl z potřeby řešit některé speciální úkoly moderní techniky, ke kterým se čočkové mikroskopové objektivy nehodí. Zrcadlové objektivy mají tři důležité výhody:

1. Nemají barevné vady.
2. Nejde-li o solidy, není absorpce při průchodu objektivem.
3. Je možné dosáhnout velké pracovní vzdálenosti (vzdálenosti mezi předmětem a objektivem) při vysokém výkonu.

Prvá výhoda je důležitá při práci s ultrafialovými a infračervenými paprsky. Justáž a nastavení zrcadlového objektivu je možné provést ve viditelném záření a ponechat beze změny při snímcích se zářením o delší nebo kratší vlnové délce. Druhá výhoda se uplatní zejména při fotografii zářením o krátkých vlnových délkách, které se značně pohlcuje hmotným prostředím. Třetí výhoda se velmi oceňuje, není-li možné se mikroskopem přiblížit ke vzorku, buď proto, že je třeba vzorek ohřívat, nebo proto, že je třeba vložit mezi objektiv a vzorek okénko, průhlednou desku apod. Důvodů k požadavku velké pracovní vzdálenosti ovšem může být i více.

Použití zrcadlových mikroskopových objektivů přineslo s sebou řadu pojmů a problémů. Některé číselné charakteristiky jsou ovšem společné pro čočkové i zrcadlové mikroskopové objektivy. Je to především mez rozlišení (nejmenší vzdálenost rozlišitelných podrobností) a rozlišovací schopnost, kterou obvykle vyjadřujeme počtem rozlišitelných ekvidistantních čar na 1 mm. Společný je i pojem numerické apertury. Docházíme k němu na základě zjištění, že mez rozlišení záleží na kuželi využitých světelných paprsků, vycházejících z předmětového bodu na optické ose. Polovina největšího úhlu takových paprsků se jmenuje aperturní úhel, jeho sinus je numerická apertura a označuje se ve vzorcích obvykle A , v textu NA . U soustav, ve kterých je předmět v jiném prostředí, než je vzduch nebo vzduchoprázdný prostor, je třeba zmíněný sinus násobit ještě indexem lomu prostředí. Není-li však uvedena žádná specifikace, znamená NA přímo sinus. K těmto pojmům je třeba připojit další, plynoucí z vlastností zrcadlových soustav. U těchto soustav je běžné, že některá zrcadla cloní paprskové svazky a tím u optické osy vzniká kužel nevyužitých světelných paprsků. Na tomto kuželi můžeme určit úhel a sinus podobným způsobem jako u využitých paprsků a dojdeme tak k číslu, které bychom mohli nazvat numerickou aperturou středových clon. Podíl numerické apertury clon a numerické apertury soustavy se jmenuje středové zaclonění a udává se v desetinných zlomcích nebo v procentech. Je-li tedy vnější aperturní úhel 45° a vnitřní aperturní úhel, vzniklý středovým cloněním, 30° , je středové zaclonění vyjádřeno číslem

$$\frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2}} = 0,71 = 71 \%$$

Další zvláštností zrcadlových soustav je rozlišování teoretické a praktické pracovní vzdálenosti. Prvá je vzdálenost předmětového bodu od první plochy soustavy, druhá je vzdálenost téhož bodu od nejbližšího bodu mechanické konstrukce. Obě veličiny se od sebe liší o tloušťku některého zrcadla, zvětšenou popřípadě o tloušťku dna misky, ve kterém je zrcadlo uloženo. Prvá se uvádí při výpočtech soustavy, druhá je důležitou komerční charakteristikou přístroje.

Všechny tyto veličiny mají vztah k výkonu přístroje a k jeho praktické použitelnosti. Tak např. mez rozlišení a souvisí s numerickou aperturou vztahem

$$a = \frac{0,61\lambda}{A}, \quad (1)$$

kde λ je vlnová délka použitého světla a A je numerická apertura. Tato mez rozlišení se nemění ani tehdy, když má soustava velké středové zaclonění. Je-li vzájemná vzdálenost čar rovnoběžné ekvidistantní soustavy větší než číslo, které udává vzorec (1) a jsou-li čáry kontrastní, je čárová soustava rozlišitelná. Rozlišitelnost detailů složitých a nepravidelných struktur však záleží na středovém zaclonění. Při středovém zaclonění do 20 % se kvalita obrazu nezhoršuje, při 30 % je obraz ještě vyhovující, ale mikroskopy s větším středovým zacloněním se již hodí jen pro pozorování některých struktur. K tomu se musí přihlížet při optické konstrukci mikroskopových objektivů a můžeme říci, že v tom spočívá velká část její problematiky. C. R. Burch ukázal, že podmínkou bodového (ostrého) zobrazení v celém normálním zorném poli dvojzrcadlového mikroskopu s kulovými plochami je vztah

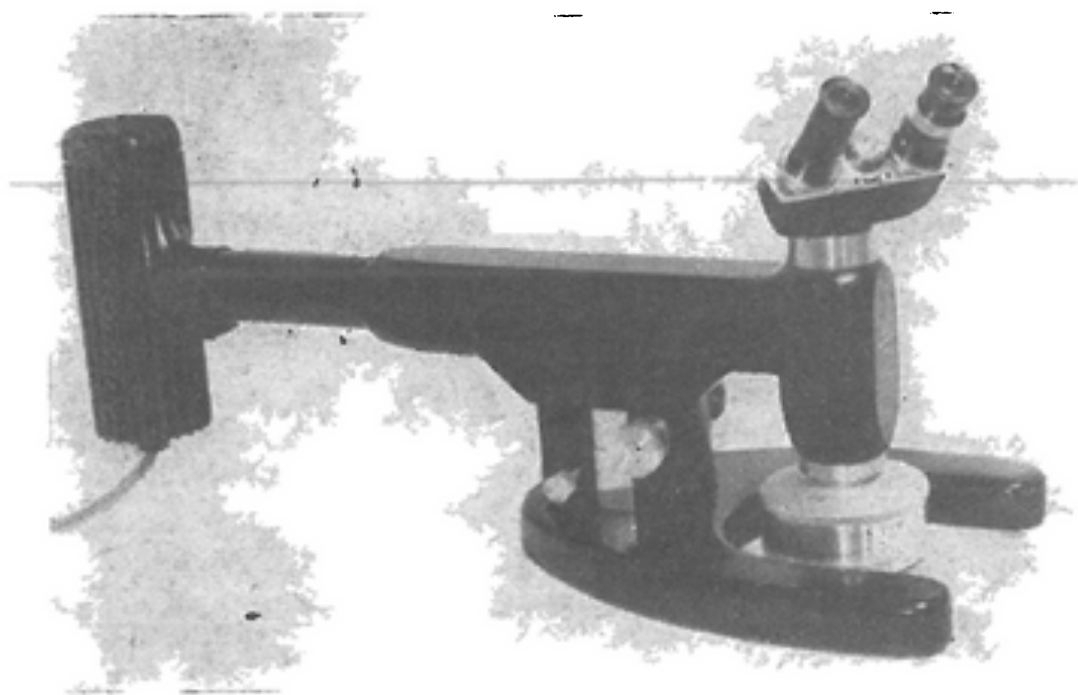
$$r_1 : r_2 : d = (\sqrt{5} + 1) : (\sqrt{5} - 1) : d,$$

kde r_1 , r_2 jsou poloměry křivosti zrcadel a d vzájemná vzdálenost jejich vrcholů. Zrcadla jsou zřejmě koncentrická. Tento objektiv má velmi malé optické vady, ale jeho středové zaclonění je téměř 50 %. Dá se použít pro pozorování některých struktur do numerické apertury rovné 0,5, má také poměrně značnou pracovní vzdálenost, ale jeho použitelnost není všeobecná. Chceme-li ujít těmito nedostatky, můžeme sledovat v podstatě jeden ze dvou směrů. Buď ponecháme kulový tvar zrcadel a změníme poměr elementů, nebo použijeme nekulových (asférických) zrcadel. V prvním případě obětuje jak výhodu velké pracovní vzdálenosti, tak také bodovost zobrazení mimo střed pole. Předmětový bod na optické ose se sice zobrazuje bodově, ale ostrosti zobrazení rychle ubývá do stran a použitelné zorné pole se patrně zužuje. Ve druhém případě můžeme získat dokonalý obraz při velké pracovní vzdálenosti a značné numerické apertuře, ale za cenu překonání technických nesnází při výrobě. Zrcadla je třeba obrábět přesněji než plochy čoček. U čoček stačí dodržení tvaru na 0,1 mikrometru, ale zrcadla je třeba obrobit s přesností na 0,03 mikrometru. Jsou-li zrcadla kulová, je možno této přesnosti dosáhnout v běžném továrním provozu. Předepíšeme-li však podle teorie zrcadlům nekulový tvar, vysoko překročíme požadavky, které lze běžně splnit. Výroba tak přesných asférických ploch je velmi pracná a zhotovené výrobky zůstávají unikáty.

Můžeme ovšem setrvat při kulových zrcadlech, zvětšíme-li jejich počet. Nomarski a Morlat navrhli r. 1953 soustavu čtyř kulových zra-

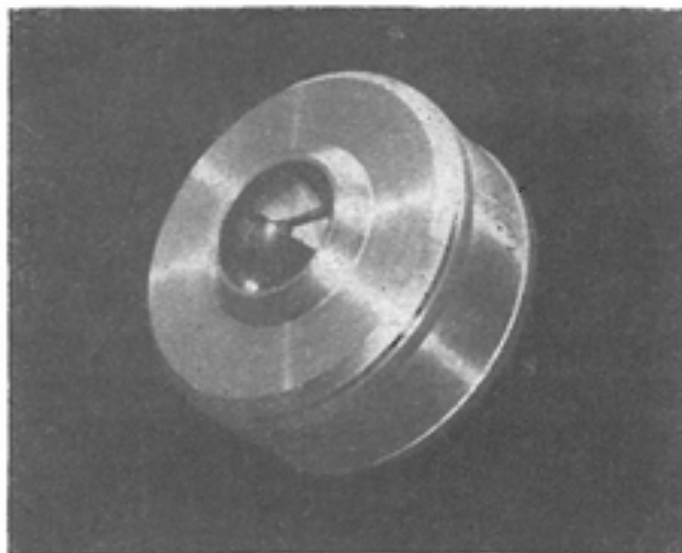
del, v podstatě dva mikroskopové objektivy za sebou. Dosáhli teoretické pracovní vzdálenosti 16,86 mm, NA 0,5 a středového zaclonění 25 %. Soustava byla později ještě zlepšována. Jinou cestou k dosažení potřebných vlastností je zařazení dioptrických členů. Vzniknou katadioptrické mikroskopové objektivy, z nichž některé uspokojivě splňují aspoň některé požadavky, kladené praxí.

Objektivy s kulovými plochami již přešly do sériové výroby. U nás se ještě nevyrábějí, ale některé zahraniční firmy je běžně dodávají. Závody VEB Carl Zeiss Jena vyvinuly katoptrické objektivy NA 0,45 až 0,65 s pracovní vzdáleností [(2,5 až 10,7) mm] a středovým zacloněním okolo 45 %, londýnská firma Beck dodává objektiv NA 0,5, pracovní vzdálenost 8 mm, středové zaclonění 35 % a další typy. Také katadioptrické objektivy s kulovými plochami se běžně vyrábí a dodávají. VEB Carl Zeiss Jena má objektiv NA 0,5, praktickou pracovní vzdálenost 15,7 mm, středové zaclonění 32 %. Firma Reichert ve Vídni dodává ke svému mikroskopu pro pozorování kovů za vysokých teplot katadioptrický objektiv NA 0,52, pracovní vzdálenost 8,5 mm, středové zaclonění okolo 20 %. Katoptrické objektivy s asférickými plochami zatím zůstávají ve stadiu kusové výroby a zhotovují se ve vědeckých ústavech. Ve čtyřicátých letech zhotovil prvé takové kusy C. R. Burch na bristolské universitě v Anglii. Jeden z nich byl objektiv se dvěma asférickými plochami NA 0,58, středové zaclonění 25 %, druhý měl velké duté zrcadlo asférické a malé vypuklé sférické, NA 0,65,



Obr. 5. Zrcadlový mikroskop s asférickými plochami, uzpůsobený k pozorování kovů za vysokých teplot, zhotovený v býv. Laboratoři optiky Čs. akademie věd. Foto J. Plechatý, ZK ČSAV

středové zaclonění 14 %. Oba typy měly pracovní vzdálenost přes 10 mm. Ve zhotovování dvojzrcadlových mikroskopových objektivů s jednou plochou asférickou se pokračovalo a do r. 1961 bylo v Anglii 19 kusů tohoto typu. Mezitím se technickými problémy asférických ploch zabývala také bývalá Laboratoř optiky Čs. akademie věd. V říjnu 1956 byl dokončen objektiv NA 0,65 se dvěma asférickými plochami, vlastní zvětšení $86\times$, středové zaclonění 20 %, pracovní vzdálenost 14 mm. Velké duté zrcadlo mělo průměr 58,4 mm, průměr objímky objektivu



Obr. 6. Zrcadlový mikroskopový objektiv s asférickými plochami, zhotovený v býv. Laboratoři optiky ČSAV. Foto J. Plechatý, ZK ČSAV

byl 100 mm. V Laboratoři optiky byl rozpracován ještě typ s jednou plochou asférickou, druhou (konvexní) sférickou, NA 0,65 vlastní zvětšení $100\times$, středové zaclonění 19 %, pracovní vzdálenost 16,5 mm. Tento objektiv byl dohotoven po zrušení Laboratoře optiky r. 1963 v Ústavu fyziky pevných látek Čs. akademie věd a zůstal majetkem tohoto ústavu. Jeho rozměry přibližně odpovídají prvnímu typu.

Na obr. 5 vidíme přístroj prvního typu, uzpůsobený k pozorování kovů za vysokých teplot. Upoutá nás především masivní stativ, značně mohutnější než běžné stativy mikroskopů. Dále si všimneme horizontálního ramene, na jehož volném konci je lampa s krytem. Světlo vstupuje po průchodu několika čočkami do tubusu mikroskopu, tam se odráží na 45° polopokovené destičce, na malém a velkém zrcadle a po průchodu okénkem komory na studovaném vzorku, po novém průchodu okénkem znovu na velkém a malém zrcadle a prochází 45° destičkou do ohniskové roviny okuláru. Na obr. 6 je fotografie objektivu. Otvorem vidíme tříramenný nosič malého zrcadla, justovatelný ve všech směrech vzhledem k velkému zrcadlu. Justáž musí být velmi

citlivá, poněvadž už posuv 1 mikronu se patrně projevuje v jakosti obrazu.

Dá se očekávat, že ve výzkumu a výrobě zrcadlových a katadioptrických objektivů se bude pokračovat, poněvadž se staly důležitými pomocníky vědy i techniky. Také ve výrobě asférických ploch můžeme očekávat ještě v našem století další pokroky.

Síly setrvačnosti

Ing. ZDENĚK JANOUT

Jeden z fyzikálních příkladů, který byl uveřejněn v 47. ročníku Rozhledů mat.-fyz. č. 3 v rubrice „Naše soutěž“ zněl takto:

Pravouhlý klín, na jehož zkosené straně leží kvádr hmotnosti m , se pohybuje vlevo s konstantním zrychlením $\mathbf{a}$. Vypočítejte: a) S jakým zrychlením klouže kvádr po klínu; b) jaké musí být zrychlení $\mathbf{a}$, aby kvádr nesjel z klínu. Koeficient tření mezi klínem a kvádrem je $f = 0,2$. Úhel $\alpha = 45^\circ$.



Řešení příkladu zaslalo 21 řešitelů.¹⁾ Z tohoto počtu polovina řešitelů dělala tu chybu, že při výpočtu neuvážila správně vliv pohybu klínu na pohyb kvádrů. Cílem článku je proto ukázat, jak postupovat při řešení podobných příkladů.

Začneme příkladem. Každý z vlastní zkušenosti ví, že při prudším brzdění vlaku nebo tramvaje pociťuje, jak působí síla směřující dozadu. V tomto nebo i v jiném případě, je tato síla namířena na opačnou stranu než je zrychlení vlaku a její velikost je rovna $m \cdot \mathbf{a}$, kde m je

¹⁾ Řešení příkladu je uveřejněno v RMF, roč. 48, č. 4, str. 179. Přesněji vzato, vzhledem k tzv. inerciální soustavě, to je takové, která je spojena se stálicemi. Pro naše úvahy můžeme s dostatečnou přesností považovat Zemi za inerciální soustavu.

hmotnost cestujícího a $\mathbf{a}$ zrychlení, se kterým se pohybuje vlak. Obecně, nejen na cestujícího, ale na každé těleso, které je ve vlaku, působí dodatečná síla směřující na opačnou stranu než je směr zrychlení $\mathbf{a}$. Tato síla, která působí v souřadnicové soustavě pevně spojené s vlakem, se nazývá setrvačnou silou. V případě, že vlak stojí nebo se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem (tj. $\mathbf{a} = 0$), je tato setrvačná síla rovna nule. V souřadnicové soustavě pevně spojené s vlakem, který se pohybuje nerovnoměrným pohybem vzhledem k Zemi,¹⁾ se tato síla vždycky projevuje. Označíme ji písmenem $\mathbf{l}$. Vezmeme-li v úvahu, že setrvačná síla $\mathbf{l}$ má opačný směr než vektor zrychlení vlaku $\mathbf{a}$, můžeme napsat rovnici

$$\mathbf{l} = -m \cdot \mathbf{a}.$$

To, co je správné pro vlak, je správné pro libovolnou souřadnou soustavu pohybující se zrychleným pohybem. Lze říci, že v takové soustavě všechny mechanické jevy probíhají tak, jako by na tělesa, jež se v ní nacházejí, působily setrvačné síly, jejichž velikost a směr je určen rovnicí $\mathbf{l} = -m \cdot \mathbf{a}$, ve které $\mathbf{a}$ je zrychlení souřadné soustavy a m hmotnost tělesa.

Představa o setrvačných silách se stane názornější, uvaží-li se, že tvoří silové pole. Skutečně, z rovnice $\mathbf{l} = -m \cdot \mathbf{a}$ je vidět, že síla $\mathbf{l}$ je podobná gravitační síle $\mathbf{G} = m \cdot \mathbf{g}$, kde $\mathbf{g}$ je gravitační zrychlení. Ty jak víme, tvoří gravitační pole s intenzitou²⁾ $\mathbf{g}$. Zaměníme-li $\mathbf{g}$ na $-\mathbf{a}$ v rovnici $\mathbf{G} = m \cdot \mathbf{g}$, dostaneme formálně vzorec pro setrvačné síly $\mathbf{l} = -m \cdot \mathbf{a}$ a je možno proto říci, že i setrvačné síly tvoří silové pole s intenzitou ($-\mathbf{a}$). Jelikož jsou tato pole podobná, lze konstatovat, že zrychlený pohyb souřadné soustavy vzhledem k soustavě pevně spojené se Zemí, dává vznik poli „umělé tíže“.

Na základě toho, co bylo výše uvedeno, plyne tento závěr: Ve zrychleně pohybujících se souřadných soustavách vzhledem k soustavě pevně spojené se Zemí probíhají fyzikální jevy tak, jako by tato soustava byla v klidu a v ní existovalo pole setrvačných sil (pole umělé tíže). Vektor intenzity tohoto pole je roven $-\mathbf{a}$, kde $\mathbf{a}$ je zrychlení souřadné soustavy.

Speciální případ nastane, když se souřadnicová soustava pohybuje přímočaře a rovnoměrně. Potom zrychlení $\mathbf{a}$ je rovno nule a není setrvačných sil. V takové soustavě probíhají všechny jevy tak, jako v nepohybující se souřadné soustavě. Tuto skutečnost již znal Galilei a je v současné fyzice nazývána „principem Galileovým“ nebo „principem relativnosti“.³⁾

²⁾ Intenzitou pole rozumíme sílu působící na hmotnost jednotkové velikosti, např. na hmotnost 1 kg v soustavě SI.

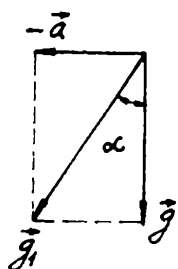
³⁾ Příklad i s řešením k použití tohoto principu byl uveřejněn v Rozhledech mat.-fyz. č. 5 (1968–69), str. 252, v rubrice Fyzikálních zajímavostí.

Pro lepší pochopení uvádím závěrem dva řešené příklady.

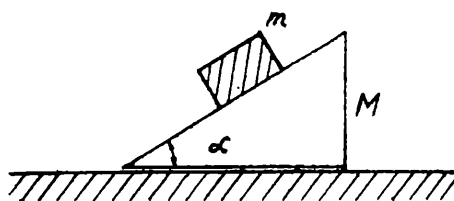
1. Ve vagónu stojícího vlaku visí matematické kyvadlo. Za nějakou dobu se začne vlak přímočaře pohybovat s konstantním zrychlením $\mathbf{a}$. V důsledku toho se začne kyvadlo odklánět od vertikály, a to na opačnou stranu než je pohyb vlaku.

a) Jaký je úhel odklonu kyvadla od vertikály?

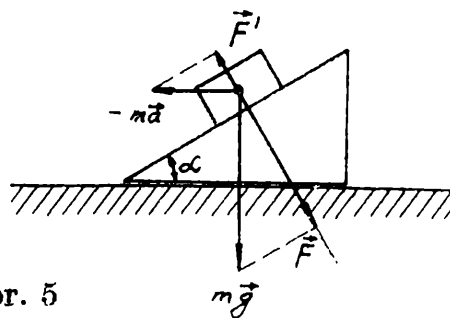
b) Jaká by byla doba kyvu kyvadla, kdyby kývalo v pohybujícím se vlaku?



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

a) Necht se vlak pohybuje vpravo. Na kyvadlo působí jednak síla tíže $m \cdot \mathbf{g}$ a jednak setrvačná síla $-m \cdot \mathbf{a}$. Výsledná síla působící na kyvadlo je dána vektorovým součtem těchto sil. Z obrázku 2 je vidět, že úhel odklonu od vertikály je

$$\alpha = \arctg \frac{a}{g}$$

b) Řešme tuto otázku jiným způsobem než v případě a). Pohybuje-li se vlak se zrychlením $\mathbf{a}$ vpravo, pak vektor intenzity pole „umělé tíže“ musí směřovat vlevo (obr. 3). Toto pole se složí s gravitačním polem ve výsledné silové pole. Intenzitu výsledného pole $\mathbf{g}_1$ určíme, složíme-li vektorově intenzity obou polí. Platí (obr. 3)

$$g_1 = \sqrt{a^2 + g^2}$$

Odtud pro dobu kyvu dostaneme

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}$$

kde l je délka kyvadla.

Kývání se bude dít ne okolo vertikály, ale okolo „umělé“ vertikály, určené směrem vektoru $\mathbf{g}_1$. Pozorovateli ve vagónu se bude zdát, jako by síla tíže měla směr vektoru $\mathbf{g}_1$.

2. Na horizontální rovině leží klín hmotnosti M a na něm kvádr hmotnosti m (obr. 4). S jakým zrychlením se začne pohybovat klín, jestliže po něm začne klouzat kvádr? (Úhel klínu je α , tření zanedbejte.)

Uvedme nejdříve nesprávné řešení. Student, který řešil tuto úlohu, rozložil sílu $m \cdot g$ na dvě složky: rovnoběžnou s nakloněnou rovinou a kolmou k ní. Odtud učinil závěr: tlaková síla kvádru na klín je rovna $m \cdot g \cos \alpha$ a poněvadž tato síla svírá úhel α s vertikálou, bude její horizontální složka rovna $m \cdot g \cos \alpha \sin \alpha$. Tedy zrychlení klínu bude rovno

$$a = \frac{m}{M} g \cos \alpha \sin \alpha$$

V daném případě postup řešení je nesprávný. Nesprávné je tvrzení, že tlaková síla kvádru je rovna $m \cdot g \cos \alpha$. Chyba je způsobena tím, že úvaha správná pro nepohybující se klín není již správná v případě, kdy se klín pohybuje.

Správné řešení této úlohy nejjednodušeji získáme, budeme-li vyšetřovat pohyb kvádru v souřadné soustavě pevně spojené s klínem. V této soustavě na kvádr bude působit nejen síla $m \cdot g$, ale i setrvačná síla $-m \cdot a$, kde a je zrychlení klínu (obr. 5). Stanovíme-li nyní projekce těchto sil na přímku kolmou k rovině klínu, dojdeme k závěru, že tlaková síla kvádru na klín je rovna

$$N = F - F' = m \cdot g \cos \alpha - m \cdot a \sin \alpha.$$

Vezmeme-li v úvahu, že zrychlení klínu je rovno

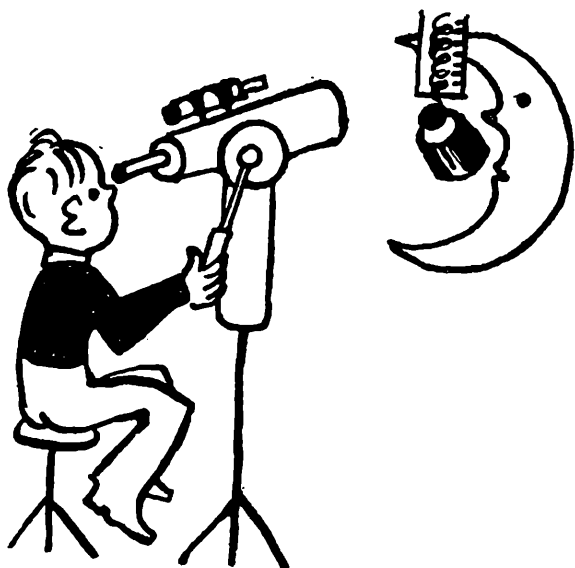
$$a = \frac{N}{M} \sin \alpha,$$

obdržíme

$$a = \frac{1}{M} (m \cdot g \cos \alpha - m \cdot a \sin \alpha) \sin \alpha$$

Rozřešíme-li tuto rovnici vzhledem k a , dostaneme hledaný vztah

$$a = \frac{m \cdot g \cos \alpha \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}.$$



ASTRONOMIE

Někteří slavní astronomové a jejich původní povolání

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ — RNDr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V minulých dobách byl vědecký výzkum převážně záležitostí vynikajících jednotlivců, kteří pracovali nezávisle na sobě a často bez bližšího spojení s badateli ve stejném oboru. Nezřídka učinili významné vědecké objevy náhodou, a nejen to — i k vědnímu oboru, v němž později vynikli, se dostali někteří vědci náhodnou shodou okolností. V dějinách astronomie najdeme celou řadu slavných jmen, jejichž nositelé měli původně rozmanitá povolání, která s astronomií neměla nic společného. Vybereme z nich alespoň nejznámější jména a pro přehlednost je seřadíme podle jejich původního povolání.

Advokáty byli např. *T. Brahe*, *T. Henderson* a *S. Burnham*. Dánský astronom *Tycho Brahe* (1546—1601) byl posledním astronomem, který pozoroval oblohu bez dalekohledu. Poslední léta svého života prožil na dvoře císaře Rudolfa II. v Praze, kam také povolal svého žáka a nástupce *Jana Keplera*; přesná pozorování *T. Brahe*a umožnila pak objevit *J. Keplerovi* známé tři zákony o pohybu planet. *Thomas Henderson* (1798—1844), který byl od r. 1831 ředitelem hvězdárny na mysu Dobré naděje, oznámil 9. ledna 1839 anglické královské společnosti, že v letech 1832 až 1834 měřil paralaxu hvězdy α Centauri. Tím (spolu s *Bessel*em a *Struvem*) vykonal první měření vzdálenosti hvězd. (*Henderson* naměřil $\pi = 0,92''$; dnešní hodnota je $0,751''$ — což odpovídá

vzdálenosti α Centauri 4,3 světelných roků.) Konečně *S. Burnham* (1838—1921) vydal v r. 1906 katalog dvojhvězd, který obsahuje 13 665 objektů.

Z početné skupiny duchovních uvedme na prvním místě *M. Koperníka*, dále *A. Secchiho*, *J. Bradleye*, *Ch. Mayera* a *N. L. Lacaille*. Slavný polský astronom *Mikuláš Koperník* (1473—1543) je zakladatelem helio-centrické sluneční soustavy. *Angelo Secchi* (1818—1878) se zabýval soustavným výzkumem hvězdných spekter a rozdělil spektra hvězd do čtyř kategorií; stal se zakladatelem spektrální klasifikace. *James Bradley* (1692—1762) objevil v r. 1728 aberaci světla. Moravan *Christian Mayer* (1719—1783) pracoval na hvězdárně v Mannheimu a v r. 1776 dokázal, že existují fyzické (skutečné) dvojhvězdy. *Nicholas Louis Lacaille* (1713 až 1762) měřil polohy hvězd (na hvězdárně na mysu Dobré naděje změřil za dva roky polohy více než 10 tisíc hvězd) a pojmenoval řadu souhvězdí na jižní hvězdné obloze.

Důstojníkem rakouské armády byl *Vilém Biela* (1782—1856), který v Josefově objevil v r. 1826 novou kometu a zjistil, že je tato kometa totožná s kometami z let 1772, 1779 a 1806. Při návratu komety v r. 1846 došlo k rozpadu na dvě části, které měly vlastní jádro i chvost. Pak se Bielova kometa rozpadla a od r. 1872 byl pozorován meteorický roj Andromedid, čímž byla dokázána souvislost mezi kometami a meteorickými roji.

Hodináři byli *W. C. Bond*, *P. Hansen* a *Skjellerup*. *William C. Bond* (1789—1859) zhotovil na Harvardské hvězdárně v r. 1850 dalekohledem o průměru 38 cm první fotografii Měsíce. *Peter Hansen* (1795—1874) vypracoval novou teorii pohybu Měsíce a konečně Australan *Skjellerup* objevil v r. 1922 kometu, která je totožná s kometou z roku 1902 II.

Hudebníky byli *S. Mayer* a *W. Herschel*. *Simon Mayer* (zvaný *Marius*, 1570—1624) je spoluobjevitelem prvních čtyř Jupiterových měsíců v r. 1610 a prvním pozorovatelem spirální galaxie v Andromedě. Znamý anglický astronom (původem snad z Moravy), *William Herschel* (1738—1822) objevil sedmou planetu sluneční soustavy — Urana (1781), dva měsíce Saturnovy a proslul vůbec jako zkušený pozorovatel.

Mezi lékaři byla řada slavných astronomů; z nich uvedme *T. Hájku* z *Hájku*, *J. Fabricia*, *H. W. Olberse* a *T. Oppolzera*. Čech *Tadeáš Hájek* z *Hájku* (1525—1600) vykonal hodnotná pozorování několika komet a supernovy v souhvězdí Kasiopje v r. 1572. Jako první dokázal, že komety jsou kosmická tělesa. *Johann Fabricius* (1587, zemřel kolem 1615) byl spoluobjevitelem slunečních skvrn. *Heinrich W. Olbers* (1758 až 1840) vypracoval v r. 1797 novou metodu výpočtu parabolické dráhy ze tří pozorování; v r. 1802 objevil planetku č. 2, nazvanou Pallas. *Theodor Oppolzer* (1841—1886) vydal dílo „*Canon der Finsternisse*“, které obsahuje výpočty 8000 slunečních zatmění (od r. 1208

př. n. l. do roku 2161) a 5200 zatmění Měsíce obdoví 3370 roků, tj. od r. 1207 př. n. l. do roku 2163.

Lékárníkem byl *Heinrich Schwabe* (1789—1875), který v r. 1843 oznámil, že se sluneční skvrny objevují na Slunci v periodě asi 10 roků (původně však hledal planetu uvnitř Merkurovy dráhy).

Litografem byl *Wilhelm Tempel* (1821—1889), který objevil novou kometu 1866 I. Nezávisle na Tempelovi objevil tutéž kometu v r. 1866 *Tuttle*. Kometa je periodická s oběžnou dobou 33,18 roku a byla nazvána kometou Tempelovou-Tuttleovou. Téměř sto roků nebyla tato kometa pozorována a byla proto považována za „ztracenou“. Znovu však byla objevena v roce 1965.

Obchodním příručím byl *Francis Baily* (1774—1844). V r. 1836 popsal úkaz, který se nyní nazývá Bailyho perly. Tento jev nastává těsně před začátkem a po skončení úplného zatmění Slunce, kdy nerovnostmi měsíčního okraje pronikají poslední nebo první paprsky fotosféry, což připomíná šňůru perel. Baily je také objevitelem sluneční korony.

Poštmistrem byl *Karl Ludwig Hencke* (1793—1866), který se od r. 1830 zabýval hledáním planetek. Jeho úsilí bylo korunováno zdarem v r. 1845, kdy objevil pátou planetku (*Astraea*) a v r. 1847 šestou planetku (*Hebe*).

Sedlákem byl *Johann Georg Palitzsch* (1723—1788), žijící v Prohlis u Drážďan, který o vánocích 1758 jako první objevil Halleyovu kometu, a to při jejím pátém, bezpečně zjištěném, předpověděném a sledovaném návratu. Známý „lovec komet“ *Ch. Messier* objevil Halleyovu kometu o čtyři týdny později než Palitzsch. V dějinách astronomie se uvádí, že Palitzsch samostatně objevil periodicitu zákrytové proměnné hvězdy Algola (β Persei) v r. 1783, téměř současně s *Johnem Goodrickem*.

I mezi sládky najdeme několik slavných jmen: *J. Hevelius*, *W. Lassell* a *R. C. Carrington*. Gdaňský purkmistr *Jan Hevelius* (1611—1687, původně snad *Havel* nebo *Havelka*), nakreslil v r. 1647 první mapu Měsíce, pojmenoval řadu pohoří na Měsíci a zabýval se pozorováním komet. *William Lassell* (1799—1880) objevil v r. 1846 první měsíc Neptunu (Triton) a v r. 1851 dva měsíce planety Urana. Pozoroval na ostrově Malta dalekohledem o průměru 120 cm. Konečně *Richard C. Carrington* (1826—1875) objevil, že se Slunce neotáčí jako tuhé těleso — perioda rotace roste směrem k pólům Slunce.

Tesařem byl známý objevitel dvou Marsových měsíců (Fobos a Deimos) Američan *Asaph Hall* (1829—1907). Objev učinil na námořní hvězdárně ve Washingtonu v srpnu 1877 pomocí dalekohledu o průměru 65 cm.

Účetním v lodařské společnosti byl *Friedrich Wilhelm Bessel* (1784 až 1846), později ředitel hvězdárny v Královci (nyní Kaliningrad). V r. 1838 uveřejnil měření paralaxy hvězdy 61 Cygni, která má velký vlastní pohyb (5,2'' za rok). Přispěl tak k určování vzdáleností hvězd.

Besselův výsledek $\pi = 0,314''$ se sice liší od dnešní hodnoty ($0,293'' \pm \pm 0,003''$), ale na svou dobu to bylo měření velmi cenné. Hvězda 61 Cygni je ve vzdálenosti 11 světelných roků.

Úředníkem byl slavný francouzský matematik *Urbain Jean Joseph Leverrier* (1811—1877), pozdější profesor matematiky a ředitel pařížské hvězdárny. V r. 1846 vypočítal existenci další planety ve sluneční soustavě, kterou na základě Leverrierova oznámení objevil 23. září 1846 německý astronom *Johann Gottfried Galle*. Planeta byla nazvána Neptun.

Vrátným hvězdárny v Marseille (a pozdějším ředitelem) byl *Jean Luis Pons* (1761—1831), objevitel mnoha komet, např. komety z roku 1819 (III), kterou v r. 1858 objevil *A. Winnecke*. Tato Ponsova-Winneckova kometa má oběžnou dobu 6,125 roku a její šestnáctý pozorovaný průchod periheliem nastal 24. března 1963.

Z nedávné doby připomeňme českého učitele *Karla Anděla* (1884 až 1948), jehož mapa povrchu Měsíce, nazvaná „*Mappa Selenographica*“ došla mezinárodního uznání. V r. 1928 byla vyznamenána stříbrnou medailí Francouzské astronomické společnosti a v r. 1936 byl na počest Andělova díla z rozhodnutí Mezinárodní astronomické unie pojmenován jeho jménem měsíční kráter o průměru 30 km (včetně 10 sousedních menších kráterů), ležící mezi krátery Dollond a Albategnius.

V nynější době je vědecký výzkum záležitostí celých pracovních kolektivů, často složených z odborníků specializovaných na úzký vědní obor. Samozřejmým předpokladem pro vědeckou práci je vysokoškolské vzdělání v příslušném oboru. Vědecký výzkum se plánuje na několik let dopředu a vyžaduje stále nákladnějších a složitějších aparatur.

R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě

Ernest Rutherford

JOSEF KOTYK, Pardubice

Svým netušeným rozvojem v posledních letech minulého a v první polovině našeho století dala fyzika nový význam dávným snům lidstva, představě starých řeckých filosofů o prahmotě, z níž složen je všechn svět, a představě alchymie o transmutaci (přeměně) prvků.¹⁾

¹⁾ Viz autorův článek „Dvě kapitoly z dějin chemie“ v *Rozhledech matematicko-přírodovědeckých*, roč. 24, čís. 4—5, str. 114 až 117.

K změně pojmu atomu a k novému názoru na jeho strukturu přispěla podstatnou měrou radioaktivita, z proslulých badatelů té doby pak zejména zasloužilý anglický fyzik sir Ernest Rutherford (čti: Radzrford), lord of Nelson (naroz. 30. 8. 1871, zemř. 19. 10. 1937), profesor university v Montrealu (1898—1907), v Manchesteru (1907—1919) a v Cambridge (1919—1937), vyznamenaný již roku 1908 udělením Nobelovy ceny. Syn ze zapomenuté farmy na Novém Zélandě, je pohřben vedle Newtona, Darwina a Faradaye v památném opatství westminsterském.

Pokusy bylo záhy zjištěno, že radioaktivní prvky nejsou stálé. Uzavěřený prostor, v němž je uloženo radium Ra („velký revolucionář“ — říká Poincaré ve své knize „O hodnotě vědy“), obsahuje po delší době nový radioaktivní plynný prvek, nazývaný dříve radiová emanace, později radon Rn. Také z roztoku radiové soli (např. radiumbromidu) lze jej vypuditi varem a od ostatních plynů izolovat. Roku 1900 Rutherford první objevil (a rovněž jako plyn²⁾) emanaci thoria.

Když do trubice s nově připravenou radiovou emanací Rutherford vložil platinový drát, shledal, že na něm ulpívá nepatrné množství nové jemné látky pevného skupenství, zvané aktivní sraženina. Podrobný rozbor ukázal, že je složena ze tří radioaktivních prvků poměrně krátkého života RaA, RaB a RaC. Dokladem toho byla okolnost, že drát, původně neaktivní, vysílal po krátkou dobu radioaktivní záření.

Podiv vzbuzovala vlastnost, že radioaktivní látky vydávají ze sebe energii při každé teplotě úplně samovolně, zdánlivě v rozporu s principem zachování energie. Původ vyzařované energie spatřovali Rutherford a Soddy od roku 1902 ve smělé myšlence, že atomy radioaktivních látek, vydávajících záření, se postupně rozpadají a mění v jiné a jiné atomy s menší (nebo stejnou) atomovou hmotou, např. Ra (226) → Rn (222) → RaA (218) → RaB (214) → RaC (214) atd. (desintegrační teorie). Každý radioaktivní proces je tedy transmutací prvku, přeměnou, při níž se vybavuje energie rovná rozdílu energií atomu nového a původního.

Slavným se stal v dějinách fyziky pokus, při němž Rutherford uzavřel radon vzduchotěsně v trubici z tenkého skla a vložil ji do širší skleněné trubice úplně vyčerpané (evakuované) s elektrodami. Když mezi elektrodami nastal výboj, zjistil jeho spektrálním rozbořem, že v trubici je přítomno — helium He³) s atomovou hmotou 4. Jeho pozornosti

²⁾ Roku 1903 podařilo se Rutherfordovi radioaktivní emanace radia a thoria také zkapalnit.

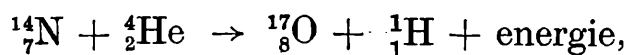
³⁾ Také William Ramsay, profesor na University College v Londýně — zesnulý právě před 55 lety roku 1916 — učinil podobnou zkušenost: S překvapením zjistil, že z kapaliny, získané zkapalněním radonu, uniká — helium.

neušlo, že v uvedené řadě přeměn radiového atomu je atomová hmota následujícího prvku v tom případě, že rozpadávající se atom vysílá tzv. záření alfa, právě o 4 jednotky menší.

Avšak již roku 1897 rozlišoval Rutherford podle stupně pronikavosti dva podstatně různé druhy radioaktivního záření, paprsky alfa, jež se značně pohlcují (doběh ve vzduchu činí jen několik cm) a pronikavější paprsky beta. O paprscích beta se záhy potvrdilo, že jsou tvořeny elektrony letícími téměř rychlostí světla; zjištění podstaty paprsků alfa trvalo však Rutherfordovi delší dobu. Teprve roku 1903 při studiu jejich úchylnosti ve vnějším magnetickém a elektrickém poli Rutherford shledal, že částice alfa jsou jádra atomů helia, nesoucí dva kladné elementární náboje: He^{++} . Roku 1908 spočítali Rutherford a Geiger⁴⁾ částice alfa vyslané za jednotku času a stanovili množství energie při radioaktivní přeměně vyvinuté; u 1 g Ra činí přibližně 140 cal za 1 hodinu. Roku 1909 našel Rutherford u nashromážděných neutralizovaných částic alfa charakteristickou žlutou čáru spektra, dokumentující vznik helia z jiných prvků. Tím definitivně padl názor, že atomy jsou nedělitelné⁵⁾ a neproměnné útvary, jak učila starší chemie.

Roku 1911 přišel Rutherford na myšlenku vysvětlit rozptyl paprsků alfa ve hmotě vzorcem, který se teprve roku 1926 podařilo Maxu Bornovi odvodit na základě mechaniky vlnové. Rutherford je v dějinách fyziky tvůrcem atomového modelu, v němž kladně nabitě, prakticky všechnu hmotnost atomu obsahující jádro je obklopeno planetární soustavou elektronů; pro jejich pohyb kolem atomového jádra připouštěl Rutherfordův model spojitou řadu drah. Atomový model dánského fyzika Nielse Bohra (1913) byl jen obměnou modelu Rutherfordova s tím rozdílem, že do něho byly zavedeny podmínky kvantové. Rutherfordův model atomu se tedy dobře osvědčil a zůstal trvalým základem našich představ o struktuře atomu.

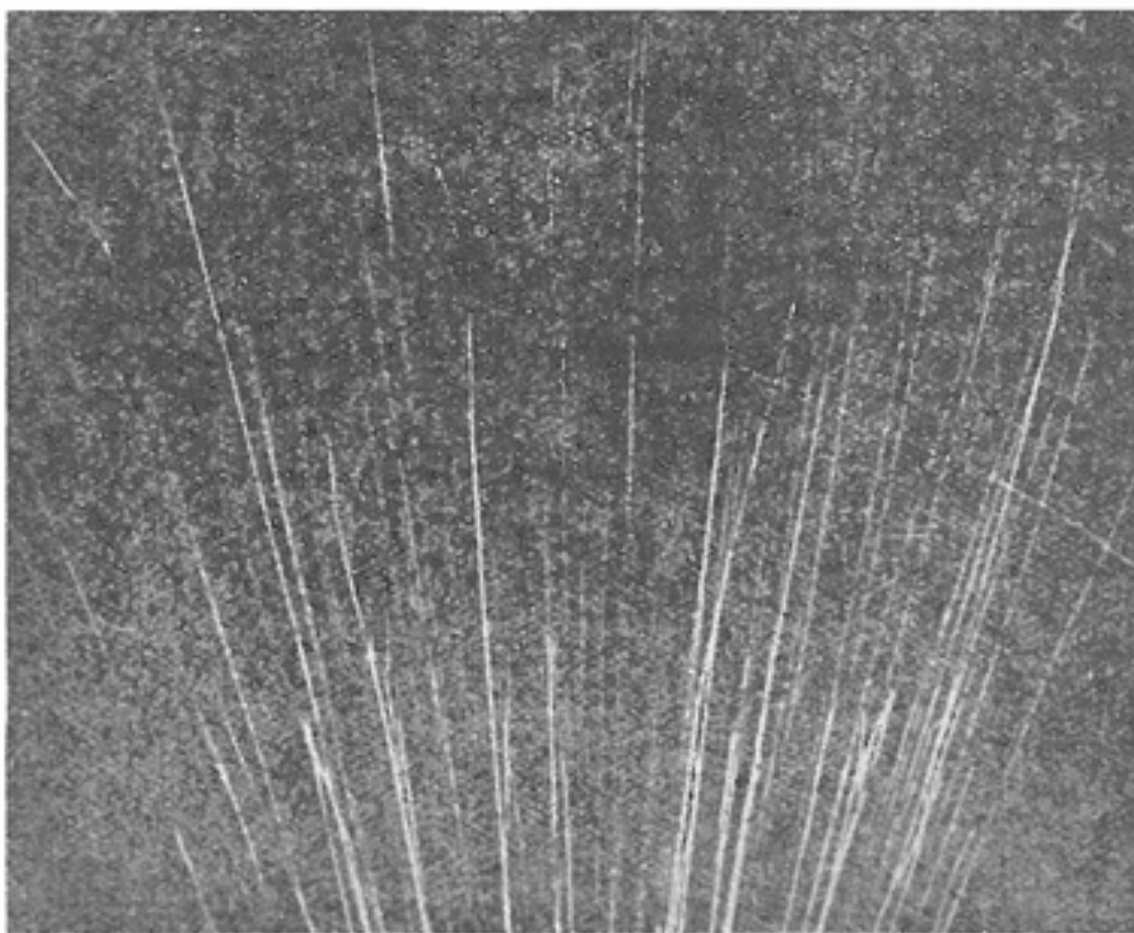
Velký pokroj ve studiu atomového jádra přinesla nová experimentální metoda, zvaná bombardování (ostřelování) jader. Tuto metodu zavedl rovněž Rutherford. Jejím užitím se Rutherfordovi již roku 1919 podařilo uskutečnit také první umělou transmutaci prvků, jež vzrušila všechny vědecký svět. Při průchodu částic alfa dusíkovou atmosférou⁶⁾ došlo k památné reakci



⁴⁾ O Geiger-Müllerově počítači jako důležitém prostředku studia jader-
ných částic přináší poučení učebnice fyziky pro III. roč. SVVŠ (1965), čl. 99,
str. 168, viz též obr. 209.

⁵⁾ Řec. atomos = nedělitelný.

⁶⁾ Příslušné technické zařízení popisuje učebnice fyziky pro III. roč. SVVŠ
(1965), čl. 100, str. 169; viz též obr. 211.



První umělá transmutace prvku. (Přeměna ousíku).

zachycené snímkem pořízeným Wilsonovou komorou (viz obr.): Mezi mlžnými stopami částic, které se vějířovitě rozbíhají ze zářiče alfa, byla pozorována jedna vidlicovitě rozvětvená. Částice alfa narazila (v horní části snímku) na jádro dusíkového atomu — vzácný případ zásahu jedné z 50 000 částic „na plno“ — a přeměnila je v jádro kyslíkového atomu (krátká stopa) a jádro vodíku⁷⁾, které se odrazilo zpět. Všichni alchymisté ze Zlaté uličky v Praze na Hradčanech by mohli Rutherfordovi tento úspěch závidět!

Avšak i to byl jen začátek. Rutherford a jeho žáci provedli časem podobné transmutace dalších prvků. Ostřelováním kladně nabitými částicemi se však podařilo proměnit pouze lehčí atomy; u těžkých atomů nestačí energie kladné částice překonat odpudivou sílu, kterou na ni souhlasně nabitě jádro působí. Zde pomohly elektricky neutrální neutrony, jimž nulový náboj nebrání prolomit brány pevnosti atomového jádra. Existenci takových částic tušil také již geniální Rutherford. Byly však objeveny až roku 1930 Chadwickem. Jimi se posléze

⁷⁾ Rutherford je nazval proton (řec. proton znamená „to první“, tedy prahmotu).

podarilo proměnit i nejtěžší atomy. Vydatný zdroj neutronů objevil Rutherford roku 1934 v reakcích vznikajících zachycením rychlých deuteronů, jader deuteria, těžkého vodíku ^2_1H .

Vyzbrojena vhodnou dělostřelbou, spěla atomistika mílovými kroky k úplnému vítězství. Při štěpení jádra uranu U 235 se ukázalo, že se uvolní dva až tři neutrony; štěpení vyrábí si tak své dělostřelectvo samočinně dále. Nastává řetězová reakce, lavina nedozírných následků. Objev možnosti využít atomové energie „visel ve vzduchu“ Nad branami k silám atomu čteme slova Marxova: „Zde nutno zachovat si pevného ducha, zde nebudiž rádcem strach“. Veliké dobrodružství, cesta do hlubin atomu přivedla obyvatele této planety, „stvořené s touhou, bohům vyrovnat se, a s kletbou, vždy jen sobě podobat se“ (J. W. Goethe: Faust), na křižovatce dějin v druhé světové válce k atomu jako hrozbě. V epoše socialismu a míru umožní atomová energie uskutečnit v historii nebyvalé podržení přírodních sil zájmům svobodného lidstva. Tyto výsledky novodobé fyziky, fyziky atomového věku, patří také zásluhou Rutherfordovou k nejúžasnějším úspěchům přírodních věd.



RECENZE

XVIII. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

(Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1970, 180 stran)

Tento ročník soutěže vyvrcholil ke konci školního roku 1968—69. Řídil ji Ústřední výbor matematické olympiády, jehož předseda Jan Vyšín, CSc., docent matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze, je současně i hlavním autorem brožury. Slovenské části textu přeložil dr. Jozef Moravčík, CSc.

Brožurka je rozdělena do šesti kapitol, z nichž prvních pět se týká domácí soutěže, zatímco poslední — šestá pojednává o průběhu XI. ročníku mezinárodní matematické olympiády.

I. kapitola popisuje rámcově organizaci celé soutěže, složení ÚVMO, jeho schůze během soutěžního roku, průběh tří soutěžních kol, pomocné akce včetně literatury a konečně konkurs na návrhy úloh pro příští soutěž. V přílohách je pořadí řešitelů II. kola v kategoriích B a C a vítězové závěrečného kola soutěže. Kapitola je doplněna čtyřmi přehlednými tabulkami s výčty účastníků soutěže.

II. kapitola uvádí přípravné úlohy pro I. kolo ve všech čtyřech kategoriích. Všechny úlohy jsou — podobně jako i v dalších kapitolách — doplněny vzorovým rozбором a řešením.

III. kapitola probírá soutěžní úlohy I. kola v kategoriích A až D.

IV. kapitola se zabývá soutěžními úlohami II. kola.

V. kapitola je věnována všem úlohám III. kola v kategorii A. Uzavírá část věnovanou naší domácí olympiádě.

VI. kapitola, závěrečná, pojednává o jedenácté mezinárodní matematické olympiádě, která byla uspořádána mezi 5. až 20. červencem 1969 v Bukurešti. Zájem o tuto matematickou soutěž rok od roku roste a přináší stále přibývajícím počet účastnických zemí. Do Bukurešti se dostavilo 14 soutěžících národních delegací, z nich 5 ze zemí kapitalistických. První tři vítězná místa obsadilo Maďarsko, NDR a SSSR, zatímco naši olympionici se umístili až na osmém místě, před Mongolskem a za Jugoslávií.

Brožura je opatřena vkusnou trojbarevnou obálkou s geometrickým motivem a dostanete ji v prodejnách KNIHY za 9,50 Kčs.

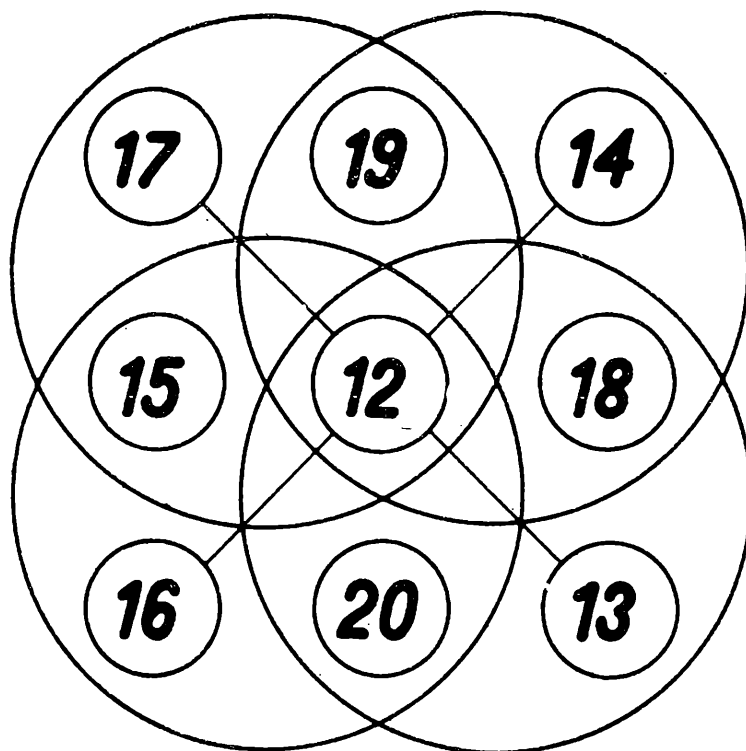
Jaromír Dubský

Oprava:

Na str. 267 (7. ř.) místo „uplyne letos“ patří „uplynulo loni“.

Na str. 277 (6. ř. zdola) místo „ $-\frac{9}{2}t^2$ “ čtete „ $-\frac{g}{2}t^2$ “.

Na str. 278 (11. ř. zdola) místo „ $x > \frac{v_0^2}{2g}$ “ čtete „ $x > \frac{v_0^2}{g}$ “.



Obr. 1

přejde do bodu C' , ostatní body zůstanou beze změny. Body A , C' jsou v různých polorovinách vyřazených přímkou r . Jaké podmínky musí splňovat trojúhelníky ABD , BCD , aby čtyřúhelník $ABC'D$ byl: a) čtverec, b) obdélník, c) kosočtverec, d) rovnoběžník, e) lichoběžník? Kdy se stane, že $ABC'D$ přejde v trojúhelník?

Řešení. 40. a) $AB = BC = CD = DA$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = 90^\circ$; b) $AB = CD$, $AD = BC$, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = 90^\circ$; c) $AB = BC = CD = DA$; d) $AB = CD$, $AD = BC$; e) $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC = 90^\circ$; čtyřúhelník přejde v trojúhelník, jestliže $\sphericalangle ABD + \sphericalangle BDC = 180^\circ$ nebo $\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = 180^\circ$.



Anketa

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních má upřímnou snahu svými články přiblížit co nejvíce přáním a zájmu svých čtenářů.

Proto se na vás obrací s touto anketou. Prosíme vás, abyste nám odpověděli na další tři otázky nejpozději do 31. května 1971

1. Které články v Rozhledech se vám nejvíce líbily a proč?
2. Které články vás nejméně zaujaly a proč?
3. Vaše stáří (své jméno a zaměstnání nemusíte uvádět).

Došlého materiálu bude použito jen pro interní potřebu redakce k zlepšení obsahu a nebude otištěn.

Odpovědi sub 1, 2, 3 zašlete laskavě na korespondenčním lístku na adresu

Rozhledy matematicko-fyzikální
(anketa)
Trojanova 13
Praha 2

SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

T

table *ž*
table des logarithme
tableau *m*
tangence *ž*
point *m* de tangence
tangent, e
plan *m* tangent
tangente *ž*
tangente à une surface *ž*
tangente d'un angle
tangentiél, elle
tautologie *ž*
tautologique
tendre
tend vers la limite
tenseur *m*
tension *ž*
tensoriel, elle
terme *m*
terme d'une série
tétraèdre
théorème *m*
tiers, tierce
principe *m* du tiers exclu
tiers *m*
tilde *m*
tonne *ž*
topologie
topologique
torseur *m*

stůl, tabulka
logaritmické tabulky
tabule, tabulka
dotyk
bod dotyku
tečný
tečná rovina
tečna, tangens
tečna plochy
tangens úhlu
tečnový, tangenciální
tautologie
tautologický
směřovat, konvergovat
konverguje k limitě
tenzor
napětí
tenzorový
výraz, člen
člen řady
čtyřstěn
věta, poučka
třetí
princip vyloučeného třetího
třetina
tilda (vlnovka nad písmenem)
tuna
topologie
topologický
systém klouzavých vektorů

torsion <i>ž</i>	torze
total, e, aux	celkový, totální
total <i>m</i>	celkový součet, úhrn
totalement	úplně, totálně
trace <i>ž</i>	stopa, stopník
trace d'une droite sur un plan	stopník přímky
point <i>m</i> de trace	stopník
tracé <i>m</i>	nárys, výkres
tracer	rýsovat, narýsovat
trajectoire	dráha, trajektorie
transcendant, e	transcendentní
transfini, e	transfinitní
transformation <i>ž</i>	transformace
transformer	transformovat
transitif, ive	tranzitivní
transitivité <i>ž</i>	tranzitivita
translation <i>ž</i>	posunutí, translace
transposer	transponovat
transposée d'une matrice	transponovaná matice
transposition <i>ž</i>	transpozice
transversal, e, aux	příčný
transversale	příčka, transversála
trapèze <i>m</i>	lichoběžník
trapézoïdal, e, aux	lichoběžníkový
treillis <i>m</i>	svaz
treize	třináct
treizième	třináctý
treizième	třináctina
trente	třicet

Dva sviatky československej školskej matematiky

V školnom roku 1970/71 sa dostáva do jubilejného XX. ročníka Matematická olympiáda. Pri tejto príležitosti sa koná v ČSSR aj Medzinárodná matematická olympiáda. Jej XIII. ročník bude v dňoch 8.—22. VII. 1971 v Žiline a v Bratislave. V Žiline, kde bude prebiehať vlastná súťaž, organizátori hodlajú usporiadať výstavu „20 rokov MO v ČSSR“

Organizačný výbor prosí o zaslanie materiálov (hlavne fotografií) z doterajších ročníkov MO na adresu: RNDr. Ladislav Berger, Žilina-Závodie 196.

Za zaslanie, resp. zapožičanie materiálov pre výstavu vopred ďakujeme.

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

9

ROČNÍK 49, 1970-1971, KVĚTEN



ROČNÍK 49
KVĚTEN 1971

9

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 43 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku. Jindřižská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Hellerová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

OBSAH

Doc. J. Chudý: 50 let KSČ	385
J. Šedivý: Dvoupřvková Booleova algebra	390
Ing. J. Myslík: Booleovské dvouhodnotové funkce	394
Ing. J. Hroník: Celočíselná řešení jedné rovnice	397
J. Pospíšil: Konstrukce trojúhelníka	398
M. Malík: Spory v Cantorově teorii množin	400
Dr. I. Zapletal, CSc.: Užití pravdivostního ohodnocení formulí	402
Doc. K. Drábek, CSc.: Základy cyklografie	405
Dr. O. Lepil, CSc.: Milikanův pokus	414
Dr. R. Tulak: Jevy atmosférické optiky	419
Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Velká opozice Marsu v r. 1971	424
J. Glivický: Sto let od založení české reálky v Prostějově	427
Doc. V. Jozífek: A. L. Cauchy v závodě s Henri Mondeuxem	430
S. Horák: Ze zahraničních časopisů	432
Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český	3. a 4. str. obálky

50 let KSČ



Doc. JAROSLAV CHUDÝ, ČVUT Praha

Ve dnech 14.–17. května 1971 oslaví lid Československé socialistické republiky 50leté výročí založení Komunistické strany Československa, strany, která po celých 50 let plnila úlohu předvoje dělnické třídy, řídící se učením Marxe, Engelse a Lenina.

Je samozřejmé, že v tomto krátkém článku nelze ani vyčerpat bohatou historii celých 50 let, historii bojů, porážek i vítězství, ani ji obšírněji zhodnotit zejména z hlediska významu KSČ pro celý náš lid i pro každého jednotlivce. To bude jistě úkol jiných časopisů a povolanějších autorů či kolektivů. V článku se zaměřuji spíše na významnější události v padesátiletém životě strany zejména z těch let, která jste vy, naši mladí čtenáři, sami nezažili.

1. Období 1921–1938.

Pod vlivem VŘSR a osvobození českého a slovenského lidu z 300leté rakousko-uherské nadvlády vzrůstá i u nás v letech 1919 a 1920 silné dělnické hnutí vedené sociálně demokratickou stranou. Toto hnutí je však tehdejší vládou brutálně potlačeno v prosinci 1920 za pomoci části vedení sociálně demokratické strany. Tato první porážka vede k rozkolu uvnitř sociálně demokratické strany, kde se vytváří silná levicová skupina. Rostoucí vliv této skupiny na členstvo vede k tomu, že na sjezdu sociálně demokratické levice v Praze ve dnech 14.–17. května 1921 je založena Komunistická strana Československa, v jejímž čele jsou mj. soudruzi Šmeral, Haken, Zápotocký a z jejíchž spoluzakladatelů připomeňme aspoň jména vám určitě známá z kulturní oblasti: S. K. Neumann, Josef Hora, Jiří Wolker, Marie Majerová, Helena Malířová, Jaroslav Hašek, Zdeněk Nejedlý.

Je pochopitelné, že v prvních letech se projevovaly ve vedení strany pozůstatky sociálně demokratické politiky, zejména oportu-

nismus, projevující se v uhýbání od uplatňování leninských principů v podstatných otázkách (otázka národnostní, poměr strany k republice aj.). To vedlo k první krizi ve straně v letech 1924 až 1925, jež byla vyřešena na III. sjezdu KSČ v říjnu 1925 vítězstvím levice. Ve vedení této levice však, kromě s. Hakena, Gottwalda (tehdy poprvé voleného do ÚV KSČ) a dalších, zůstává i skupina, tvořící zárodek budoucí frakce, reprezentovaná Jílkem a Bolenem; této skupině se podařilo postupně na další tři léta ovládnout vedení strany. Odpor proti tomuto stále více oportunistickému vedení se soustřeďoval zejména kolem Klementa Gottwalda a vrcholí na V. sjezdu v únoru 1929, který patří k nejvýznamnějším sjezdům strany. Sjezd zcela jasně a s manifestační většinou odsoudil celou Jílkovu skupinu a zvolil nový ÚV KSČ v čele s Klementem Gottwaldem. Tento nový ÚV znamená nástup ke skutečné bolševické politice na marx-leninských principech s cílem vybojovat v zemi moc dělnické třídy a pracujícímu lidu. Na tomto sjezdu se poprvé objevuje gottwaldovské heslo „Čelem k masám“, jež zůstává jedním z pilířů politiky strany dnes i v budoucnu.

2. Období 1929–1945.

Ústřední výbor zvolený na V. sjezdu pracuje pak až do vypuknutí II. světové války, během války i po válce, samozřejmě doplňován novými pracovníky, ale vždy v duchu zásad vyhlášených na V. sjezdu.

Tak během hospodářské krize v letech 1929–1934 vede KSČ boje dělnictva proti snahám vládnoucí třídy svalit důsledky krize na pracující, k odporu proti teroristickým metodám tehdejší buržoazní republiky, s jejímž tak často proklamovaným humanismem lze jen těžko srovnat krvavé masakry v Radotíně, Duchcově, Frývaldově, Košútech a jinde.

Současně, zvláště po r. 1933, kdy v sousedním Německu přichází k moci Hitler, osvětluje KSČ všemu našemu lidu nebezpečí narůstajícího fašismu v Německu i u nás. Bez nadsázky lze říci, že především zásluhou KSČ se u nás nedostal k politické moci fašismus, a že naopak volby v r. 1935 vyjádřily, s výjimkou Henleinovy strany, odklon od těch politických stran, jež ať veřejně či potajmu s fašismem koketovaly. Neoddělitelnou součástí politiky KSČ v tomto období bylo i objasňování úlohy Sovětského svazu jako spolehlivého a věrného spojence našeho lidu. Rostoucí víra našich národů v Sovětský svaz vedla, přes protisovětské štvánice inspirované buržoazií, od oficiálního uznání Sovětského svazu v letech 1934–35 naší předválečnou vládou, postupně k přesvěd-

čení, zejména v období mnichovské zrady, že Sovětský svaz je jediný spojenec, ochotný dodržet své závazky vůči naší republice.

Dvacetileté trvání předválečné republiky tak jasně prokázalo, že vládnoucí buržoazie nebyla schopna vyřešit základní problémy našeho státu, tj. ani obhájit samostatnost republiky, ani vyřešit základní sociální problémy pracujících, ani řešit národnostní otázku v zemi.

Po rozpadu naší republiky v r. 1939 a okupaci českých zemí i během celé II. světové války pokračuje KSČ v nepředstavitelně těžkých podmínkách ilegality v boji proti nacistickým okupantům, v boji, v němž ztrácí téměř polovinu svých členů. Tímto neohroženým statečným bojem proti Němcům a jejich zaprodancům jak v českých zemích tak na Slovensku i správnou orientací zahraničního vedení strany na Sovětský svaz získává si strana autoritu a podporu našich národů. Nepopíratelná skutečnost, že na porážce Německa a tím i na osvobození naší vlasti měl prvořadou zásluhu právě Sovětský svaz, přispěla k upevnění skutečného, neformálního a bratrského přátelství všeho našeho lidu s lidem Sovětského svazu.

3. Období 1945–1948

V důsledku celého předcházejícího vývoje dochází po osvobození v květnu 1945 k oslabení pozic buržoazie a ke zvýšení vlivu KSČ pro její důsledné prosazování Košického programu, což se projevilo ve vítězství KSČ ve volbách v r. 1946. Důsledná politika KSČ v otázkách znárodnění klíčového průmyslu a bank, v pozemkové reformě, v nesmiřitelnosti vůči kolaboraci s nacisty a v prosazování zájmů pracujících na úkor buržoazie (např. milionářská dávka), vyvolávala obavy předáků reakčních stran z izolace a ztráty jejich pozic. Proto se pokusili o kontrarevoluční zvrát, který však KSČ za mohutné podpory pracujících v únoru 1948 rozdrtila. Toto únorové vítězství dovršilo proces, v němž národně demokratická revoluce přerostla v revoluci socialistickou a v jehož průběhu byly zlikvidovány zbytky mocenských pozic buržoazie; byla tak otevřena cesta k budování socialismu v naší zemi.

4. Období 1948–1968

V tomto krátkém článku nelze ani vyjmenovat všechny úspěchy, kterých dosáhl náš lid pod vedením KSČ v uvedeném období.

Uvedme proto jen ty nejvýznamnější. Tak objem výroby se zvětšil šestkrát proti maximální předválečné úrovni. Bylo zastaveno zaostávání Slovenska za českými zeměmi a Slovensko bylo přeměněno z agrární země v zemi průmyslovou. Ekonomické svazky se Sovětským svazem a ostatními socialistickými zeměmi osvobodily náš stát ze závislosti na kapitalistických zemích. Byla odstraněna zaostalost zemědělské výroby vytvořením socialistické velkovýroby prostřednictvím družstev a státních statků a vznikla tak nová třída družstevních rolníků. Dělnická třída se stala skutečným nositelem politické moci a spolu s družstevním rolnictvem a socialistickou inteligencí tvoří základ socialistického státu. Výrazně stoupla životní úroveň širokých vrstev pracujících. Rovněž v kulturní oblasti bylo dosaženo značných úspěchů. Vzpomeňme jen např. mnoha nově založených vysokých škol, akademie, výzkumných ústavů, dotace divadel, knihoven atd. Za mnohá slova hovoří snad nejlépe v ústavě zakotvená práva našich občanů na práci, na bezplatnou zdravotní péči, na sociální zabezpečení, na vzdělání. Tato práva se možná vám mladším zdají samozřejmá, uvědomte si však, že je může poskytnout jen socialistické zřízení, v němž si vládne pracující lid.

Je pochopitelné, že tyto grandiózní přeměny v životě naší společnosti byly doprovázeny i některými, a dost značnými chybami. Tak v boji proti snahám třídního nepřítele brzdit rozvoj socialistické revoluce dochází kolem padesátých let k porušování socialistické zákonnosti a k pronásledování a represím vůči řadě čestných občanů i komunistů. Svědčí však o síle a moudrosti strany, že tyto chyby přiznala a vyvodila z nich důsledky a patřičná poučení. Chybou byly i deformace v posuzování národnostní otázky, jež v průběhu padesátých let vedla k omezování právomoci slovenských národních orgánů a k nezákonným postihům funkcionářů Komunistické strany Slovenska. I tyto chyby strana přiznala a jejich náprava byla dovršena uzákoněním federálního uspořádání ČSSR v r. 1968. Další chyby byly v oblasti ekonomické, kde bylo třeba v šedesátých letech řešit otázky vědeckotechnické revoluce, socialistické integrace, přechod od extenzivní výroby k intenzivní atd.

Vedení strany reprezentované A. Novotným v šedesátých letech nedocenilo tyto otázky, přeceňovalo dosažené výsledky, vyhlašovalo nereálné plány a ztratilo schopnost perspektivní koncepce. Toto spolu s oslabením politické práce vedlo k růstu byrokratických metod a vyvolávalo stále rostoucí nespokojenost ve stranické i mimostranické veřejnosti. Tak dochází k lednovému plénu 1968.

5. Období leden 1968 – duben 1969

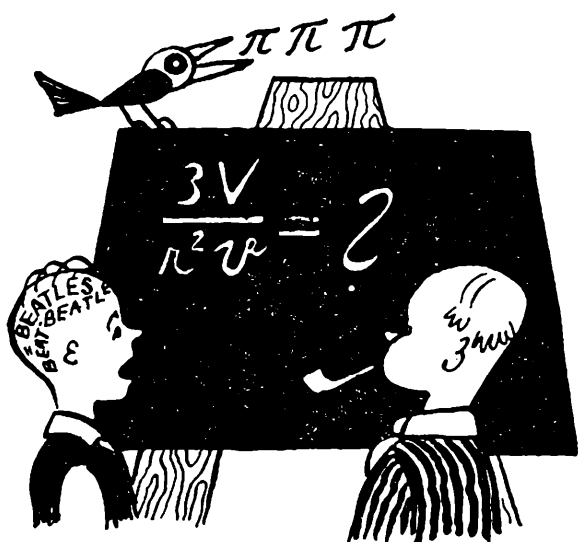
Výsledky lednového pléna přivítal všechen náš lid s nadšením a s nadějemi, že bude odstraněno vše, co bránilo rozvoji socialistické společnosti. Avšak nové vedení strany nevyužilo obrovské podpory všech pracujících a svým nerozhodným postojem uvolňovalo postupně půdu pro oportunistické a revisionistické síly ve straně i pro vysloveně protisocialistické síly k útokům proti straně i proti samotné podstatě socialistického zřízení. Tyto kontrarevoluční síly využitím libivých hesel, ovládnutím sdělovacích prostředků, nadměrným zveličováním skutečných chyb a zlehčováním všech kladů minulého období, rozdmýcháváním nacionalismu, ostouzením čestných komunistů a útoky proti bratrským zemím, desorientovaly myšlení lidí a připravovaly tak rozvrat strany, bezpečnosti, ekonomiky i celého státu a přivedly tak naši zemi na pokraj občanské války. Protože v zemi nebylo již síly, která by mohla tomuto vývoji zabránit, rozhodly se země Varšavské smlouvy vstupem svých ozbrojených sil v srpnu 1968 předejít nevyhnutelné tragédii.

Po srpnových dnech, po doznění vysoko vzedmutých emočních vln, nastupuje KSČ cestu postupné diferenciaci ve straně i společnosti, cestu k obnově marx-leninských norem v politice a k boji s pravicovými a protirevolučními silami za ukončení krizového období. Tento proces vrcholí na dubnovém plánu v r. 1969.

6. Období od dubna 1969

Shrňme již jen stručně vývoj od dubna 1969, kdy bylo zvoleno nové vedení strany v čele se s. Husákem, v jehož programu bylo vyvést zemi z krize a provést konsolidaci politických a hospodářských poměrů. KSČ neváhala rozejít se s těmi, kteří se dostali na protistranickou pozici, i s těmi, kteří byli jen pasivními členy, obnovila vnitrostranický život a navázala znovu na bolševické revoluční tradice. Byly očištěny státní orgány a upevňuje se znovu třídní charakter našeho státu a jeho socialistické zřízení. Obnovily se bratrské vztahy k socialistickým zemím, především k Sovětskému svazu. Zkonsolidovalo se hospodářství a zmizela hrozba hospodářského rozvratu.

Od nastávajícího sjezdu KSČ v květnu 1971 očekáváme, že uzavře tuto etapu, v níž se strana musela zabývat převážně nápravami krizových situací a že současně vytyčí cestu k dalšímu rozvoji výstavby socialismu v naší zemi. To bude také tou nejlepší oslavou padesátého jubilea naší Komunistické strany Československa.



Dvoupřvková Booleova algebra

JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK

V článku Tři podoby jedné detektivní úlohy (v tomto ročníku Rozhledů, číslo 8) jsme dospěli k poznatku, že úlohy výrokové logiky lze též řešit algebraickou metodou. Jde o tzv. algebru pravdivostních hodnot, stručněji PH-algebru, která je pozoruhodná jak tím, že je miniaturní — odehrává se jen na množině $\{0, 1\}$, tak některými svéráznými větami, např. $1 + 1 = 1$. V citovaném článku jsme odvodili jen několik vět PH-algebry, nyní se seznámíme s celým systémem jejích základních vět.

Na množině $\{0, 1\}$ definujeme tři operace

záměna	x'	x	x'	$+$	0	1		0	1
sčítání	$x + y$	0	1	0	0	1	0	0	0
násobení	$x y$	1	0	1	1	1	1	0	1

Tyto operace jsou uvedenými tabulkami plně popsány, vlastnosti operací proto ověřujeme pomocí tabulek. V předcházejícím článku jsme již některé věty tímto způsobem dokázali, nyní uvedeme přehled základních vět PH-algebry:

Pro každý prvek $x \in \{0, 1\}$ platí v PH-algebře tyto věty :

$$(x')' = x, \quad (0)$$

$$1 + x = 1, \quad (1)$$

$$0 \cdot x = 0, \quad (2)$$

$$0 + x = x, \quad (3)$$

$$1 \cdot x = x, \quad (4)$$

$$x + x = x, \quad (5)$$

$$x \cdot x = x, \quad (6)$$

$$x + x' = 1, \quad (7)$$

$$x \cdot x' = 0. \quad (8)$$

Pro každé dva prvky $x, y \in \{0, 1\}$ platí :

$$x + y = y + x, \quad (9)$$

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad (10)$$

$$(x + y)' = x' \cdot y', \quad (11)$$

$$(x \cdot y)' = x' + y' \quad (12)$$

$$x + xy = x, \quad (13)$$

$$x \cdot (x + y) = x, \quad (14)$$

$$x + yx' = x + y, \quad (15)$$

$$x \cdot (y + x') = xy \quad (16)$$

Pro každé tři prvky $x, y, z \in \{0, 1\}$ platí :

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad (17)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad (18)$$

$$(x + y) \cdot z = xz + yz, \quad (19)$$

$$(x \cdot y) + z = (x + z)(y + z) \quad (20)$$

Věty (0) až (8) ověříme velmi snadno; dosadíme-li za x symbol 0, resp. 1, a provedeme operace popsané v tabulkách. Při ověřování vět (9) až (16) musíme dosazovat za uspořádanou dvojici (x, y) postupně čtyři uspořádané dvojice (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). Úsporně lze využít obdobných tabulek, s jakými se pracuje ve výrokové logice, ukažme si důkaz vět (13) až (16).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	y	xy	$x + xy$	$x + y$	$x(x + y)$	x'	$y \cdot x'$	$x + yx'$	$y + x'$	$x(y + x')$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1

Věta (13) je dokázána tím, že jsme ve sloupcích 4 a 1 dostali v každém řádku stejný výsledek; důkaz věty (14) podává dvojice sloupců 6 a 1, u dalších vět využijeme dvojic sloupců 9 a 5, resp. 11 a 3.

Důkazy vět (17) až (20) vyžadují tabulku s osmi řádky, v nichž se zkoumají uspořádané trojice (0, 0, 0), (0, 0, 1), ..., (1, 1, 1). Vhodnou tabulku si čtenář sestaví sám, najde ji také v článku ing. J. Myslíka, který bude v Rozhledech uveřejněn.

Čtenář si jistě uvědomuje, že mnohé z vět (0) až (20) připomínají věty užívané v obvyklé algebře, jmenovitě věty (2), (3), (4), (9), (10), (17), (18) a (19). Zato ostatní věty jsou „nevídané“ v obvyklé algebře, například věta (13) dovoluje vyškrtnout v součtu člen, který obsahuje druhého sčítance. Všechny věty nemusíme dokazovat pomocí tabulky; známe-li např. věty (6), (10), (13) a (19), můžeme dokázat větu (14)

$$x(x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x + xy = x$$

Výčet 21 vět jsme záměrně uvedli v symetrickém tvaru, věta (0) je zapsána na „ose souměrnosti“, ve které odpovídají větám s lichými čísly (1), (3), ..., (19) po řadě věty (2), (4), ..., (20). Přitom je nápadné, že texty vět (2), (4), ..., (20) získáme z textu vět (1), (3), ..., (19) (a obráceně), zaměníme-li navzájem tyto symboly

$$0 \longleftrightarrow 1, + \longleftrightarrow$$

a ponecháme-li písmena x, y, z i symbol $'$.

Čtenář může zkontrolovat, že náš přehled základních vět se takto „zrcadlí sám v sobě“, je duální (dvojný), jak se odborně říká.

Přehled vět, který jsme tu podali, je zvláštním případem soustavy axiomů dvouprvkové Booleovy algebry (čti búlovy). *George Boole* byl anglický matematik a logik, který kolem r. 1850 úspěšně dovršil úsilí nalézt algebraické vyjádření zákonů logiky. S hlubším pohledem na Booleovu algebru a její neobyčejně důležité aplikace se budete seznamovat v dalších číslech Rozhledů.

Zde si ukažme, jak umožňuje důsledný algebraický výpočet řešit úlohy z výrokové logiky. Použijeme stejného postupu jako v článku Tři podoby jedné detektivní úlohy.

Slovní úloha. *Rozhodněte, kteří žáci ze čtveřice A, B, C, D půjdou na výlet, mají-li se dodržet tyto zásady: Půjde aspoň jeden z dvojice B, D , nejvýše jeden z dvojice A, C , aspoň jeden z dvojice A, D a nejvýše jeden z dvojice B, C . Dále je jisté, že B nepůjde bez A a že C půjde, půjde-li D .*

Písmeny a, b, c, d označíme po řadě výroky „ A půjde, B půjde, C půjde, D půjde“; podmínky úlohy vyjádříme prostředky výrokové logiky.

Logická úloha. Platí výrok

$$(b \vee d) \wedge (a' \vee c') \wedge (a \vee d) \wedge (b' \vee c') \wedge (a' \Rightarrow b') \wedge (d \Rightarrow c).$$

Máme určit všechny uspořádané čtveřice pravdivostních hodnot výroků a, b, c, d , pro které je daný výrok pravdivý.

Algebraická úloha. Je dána rovnice v PH-algebře

$$(b + d) \cdot (a' + c') \cdot (a + d) \cdot (b' + c') \cdot (a + b') \cdot (d' + c) = 1,$$

máme určit všechny uspořádané čtveřice hodnot neznámých a, b, c, d , které jsou řešením rovnice.

Danou rovnici můžeme řešit takto

$$\begin{aligned} (b + d) \cdot (a' + c') \cdot (a + d) \cdot (b' + c') \cdot (a + b') \cdot (d' + c) &= 1, \\ (b + d) \cdot (0 + ac' + a'd + c'd) \cdot (ab' + b' + ac' + b'c') \cdot (d' + c) &= 1, \end{aligned}$$

změníme pořadí závorek a ve třetí z nich aplikujeme větu (13)

$$\begin{aligned} (d' + c) \cdot (b + d) \cdot (ac' + a'd + c'd) \cdot (b' + ac') &= 1, \\ (bd' + bc + 0 + cd) \cdot (ab'c' + ac' + a'b'd + b'c'd + 0 + ac'd) &= 1 \\ (bd' + bc + cd) \cdot (ac' + a'b'd + b'c'd) &= 1 \end{aligned}$$

[uplatněna věta (13)]

$$\begin{aligned} abc'd' + 0 + 0 + 0 + 0 + a'b'cd + 0 + 0 + 0 &= 1, \\ abc'd' + a'b'cd &= 1 \end{aligned}$$

Rovnice může mít tři řešení:

- $\alpha)$ $abc'd' = 1 \wedge a'b'cd = 0$, tehdy platí, že $a = b = 1, c = d = 0$,
- $\beta)$ $abc'd' = 1 \wedge a'b'cd = 1$, ale takový případ nemůže nastat,
- $\gamma)$ $abc'd' = 0 \wedge a'b'cd = 1$, tehdy platí, že $a = b = 0, c = d = 1$.

Původní úloha má dvě různá řešení:

1. na výlet pojedou spolu jen A, B ,
2. na výlet pojedou spolu jen C, D .

Vraťte se k úloze o vyšetřování krádeže, kterou jsme řešili v článku *Tři podoby jedné detektivní úlohy* a vyřešte ji důsledným algebraickým výpočtem bez diskusí v průběhu řešení. Ti z vás, kteří mají sbírku úloh o výročí pro 1. ročníky gymnasia, se mohou pokusit o uplatnění booleovského výpočtu místo tabulkové metody. Pro všechny uveďme aspoň jednu úlohu jako cvičení:

Malíř má pět tub s barvami A, B, C, D, E a chce pomocí nich namíchat odstín barvy, který se nevyrábí. Přeje si, aby jeho barva obsahovala A nebo B , ale ne D zároveň s E . Barvy B, C může použít buď obě zároveň nebo žádnou z nich. Použije-li C , musí použít E ; použije-li D , nesmí použít A . Nepoužije-li B , musí použít E , nesmí však smíchat A, C . Kolik barev může smíchat, splní-li všechny uvedené podmínky?

Booleovské dvouhodnotové funkce

Ing. JIŘÍ MYSLÍK, odd. aplikované matematiky, o. p. Škoda, Plzeň

V běžné algebře pracujeme s polynomiickými funkcemi, jejichž funkční hodnoty dovedeme vypočítat pomocí operací sčítání a násobení. V dvouprvkové Booleově algebře můžeme obdobně definovat funkce, jejichž funkční hodnoty počítáme pomocí operací booleovského sčítání, násobení a tvoření doplňků.¹⁾ Příklady takových funkcí lze snadno uvést

$$y = x + 1, z = xy + x'y', t = (x + y)' + (x' + y)(x + y').$$

Protože proměnné nabývají jen hodnoty 0 nebo 1, hovoříme o dvouhodnotových booleovských funkcích. Tyto funkce jsou definovány na konečné množině $\{0, 1\}$ nebo na konečných množinách uspořádaných dvojic, trojic, ..., n -tic, proto je snadno popisujeme tabulkami.

Dvě booleovské funkce považujeme za sobě rovné právě tehdy, když

1. *mají též definiční obor,*
2. *přiřazují stejnou hodnotu každému prvku definičního oboru.*

Příklad 1. Mějme dány funkce $f = (x + y)'$, $g = x' \cdot y'$, které jsou definovány na téže množině $D = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Jak víte, platí pro každou uspořádanou dvojici $(x, y) \in D$, že $(x + y)' = x' \cdot y'$, proto jsou si obě funkce navzájem rovny.

Příklad 2. Ukažme pomocí tabulky platnost distributivního zákona $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$ pro každé tři prvky $x, y, z \in \{0, 1\}$. Tabulka bude mít osm řádků; čtenář snadno zkontroluje, že je správně vyplněna:

x	y	z	yz	$x + y$	$x + z$	$x + yz$	$(x + y)(x + z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Tabulka dokazuje rovnost funkcí $f = x + yz$, $g = (x + y)(x + z)$, tím však je dokázána i věta nazývaná distributivní zákon.

¹⁾ Přehled základních vět dvouprvkové Booleovy algebry je uveden v článku J. Šedivého *Dvouprvková Booleova algebra*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1970/71, č. 9.

Upravujeme-li výraz, pomocí kterého je funkce dána, používáme vět (0) až (20) uvedených v citovaném článku. Funkce $y = x + 1$ je rovna funkci $y = 1$, protože $x + 1 = 1$ pro každé $x \in \{0, 1\}$. Funkce $t = (x + y)' + (x' + y) \cdot (x + y')$ je rovna funkci $t = xy + x'y'$, protože pro každá dvě $x, y \in \{0, 1\}$ platí:

$$(x + y)' + (x' + y)(x + y') = x'y' + 0 + xy + x'y' + 0 = xy + x'y'.$$

Tento tvar součtu součinů vychází po úpravách výrazů roznásobením, velmi často se však hledá zcela záměrně i v případech, kdy je funkce určena tabulkou.

V tabulce, která následuje, máme uvedeny hodnoty funkce g pro všechny uspořádané trojice $(0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots, (1, 1, 1)$, v posledním sloupci jsou zapsány různé součiny tří ze šesti možných součinitelů x, y, z, x', y', z' . V každém řádku je zapsán ten součin, který je roven jedné při hodnotách proměnných x, y, z zapsaných v prvních třech sloupcích; nazvěme tyto výrazy *elementárními součiny*.

x	y	z	g	
0	0	0	0	$x'y'z'$
0	0	1	0	$x'y'z$
0	1	0	0	$x'yz'$
0	1	1	1	$x'yz$
1	0	0	1	$xy'z'$
1	0	1	0	$xy'z$
1	1	0	1	xyz'
1	1	1	1	xyz

Utvořme na každém řádku součin hodnoty funkce g a elementárního součinu, a pak získané součiny sečtěme a zapišme funkci

$$g = 0 \cdot x'y'z' + 0 \cdot x'y'z + 0 \cdot x'yz' + 1 \cdot x'yz + 1 \cdot xy'z' + 0 \cdot xyz' + 1 \cdot xyz' + 1 \cdot xyz.$$

Po jednoduché úpravě, kdy odstraníme nulové členy a vynecháme koeficienty rovné jedné, dostaneme zápis funkce

$$g = x'yz + xy'z' + xyz' + xyz.$$

Dosazováním se velmi snadno přesvědčíme, že tato funkce je rovna dané funkci g . To byla konkrétní ukázka přechodu od tabulkového zadání funkce k jejímu algebraickému vyjádření.

Zápis booleovské funkce ve tvaru součtu elementárních součinů nazýváme *kanonický rozvoj funkce*. Zopakujme si obecný postup, jak získáme kanonický rozvoj funkce dané tabulkou:

Procházíme sloupec hodnot funkce a vybereme pouze ty řádky, kde má funkce hodnotu 1. Každému z těchto řádků odpovídá jeden člen rozvoje, tj. elementární součin; v něm je proměnná ξ zastoupena činitelem ξ , pokud je $\xi = 1$, v opačném případě, kdy $\xi = 0$, zapíšeme činitel ξ' . Z takto vytvořených elementárních součinů utvoříme součet, jeho zápis je kanonickým rozvojem dané funkce. Tento postup lze uplatnit při libovolném počtu proměnných.

Konstantní booleovská funkce $y = 1$ má svůj kanonický rozvoj pro kterýkoli počet proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$1 = x'_1 + x_1,$$

$$1 = (x'_1 + x_1)(x'_2 + x_2) = x'_1x'_2 + x'_1x_2 + x_1x'_2 + x_1x_2,$$

obdobně

$$1 = x'_1x'_2 \dots x'_n + x'_1x'_2 \dots x_n + x_1x'_2 \dots x_n + \dots + x_1x_2 \dots x_n.$$

Někdy se stručně hovoří o kanonickém rozvoji jedničky.

Na závěr dokažme, že postup, kterým jsme získali kanonický rozvoj booleovské funkce g , je správný a aplikovatelný pro funkce s libovolným počtem proměnných.

Mějme danu booleovskou funkci $y = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a její kanonický rozvoj. V tomto rozvoji můžeme vytknout činitele x_1 z některých členů a činitele x'_1 z ostatních členů, pak lze napsat

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = B \cdot x_1 + C \cdot x'_1,$$

kde B, C jsou funkce proměnných $x_2, \dots, x_n$.

Tato rovnost platí pro obě hodnoty proměnné x_1 :
pro $x_1 = 1$ je $x'_1 = 0$, a tedy platí $g(1, x_2, \dots, x_n) = B$,
pro $x_1 = 0$ je $x'_1 = 1$, a tedy platí $g(0, x_2, \dots, x_n) = C$.

Zápis funkce lze tedy upravit na tvar

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_1 + g(0, x_2, \dots, x_n) \cdot x'_1.$$

Analogicky obdržíme po vytknutí proměnné x_2 zápis

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(1, 1, x_3, \dots, x_n) \cdot x_1x_2 + g(1, 0, x_3, \dots, x_n) \cdot x_1x'_2 + \\ + g(0, 1, x_3, \dots, x_n) \cdot x'_1x_2 + g(0, 0, x_3, \dots, x_n) \cdot x'_1x'_2.$$

Rozvoj funkce g v součet součinů má tedy tvar

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(1, 1, \dots, 1) \cdot x_1x_2 \dots x_n + g(0, 1, \dots, 1) \cdot \\ \cdot x'_1x_2 \dots x_n + \dots + g(0, 0, \dots, 0) \cdot x'_1x'_2 \dots x'_n.$$

Funkční hodnoty $g(1, 1, \dots, 1), g(0, 1, \dots, 1), \dots, g(0, 0, \dots, 0)$ jsou zapsány v tabulce určující funkci g . Čtenář jistě vidí, že jsme tento princip uplatňovali v dříve řešeném zvláštním případě.

Booleovské funkce jsou nepostradatelným nástrojem pro navrhování struktur počítačů, automatů a kybernetických zařízení. K takové práci je ovšem třeba hlubšího studia teorie booleovských funkcí i znalost jejich elektrotechnických modelů. Základní informace o těchto problémech získáte v dalších číslech Rozhledů.

Celočíselná řešení jedné rovnice

Ing. JAROMÍR HRONÍK, Brno

Úkolem tohoto článku bude najít kritéria pro stanovení kořenů rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \quad (1)$$

v oboru přirozených čísel. S uvedenou rovnicí se velmi často setkáváme při řešení různých úsudkových, popřípadě fyzikálních úloh. Již v deváté třídě jste se seznámili s touto rovnicí při řešení úloh o společné práci. V nauce o elektřině je známo, že při zapojení dvou odporů vedle sebe (paralelně) platí pro výsledný odpor R vztah

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}.$$

Rovněž v optice se setkáváme s rovnicí (1), psanou ve tvaru

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

kde a je vzdálenost předmětu od osy tenké čočky (spojky), b je vzdálenost čočky od obrazu a f je ohnisková vzdálenost.

Hledejme nyní kladná celočíselná řešení uvažované rovnice (1). Po odstranění zlomků obdržíme vztah

$$z(y + x) = xy \quad (2)$$

Předpokládejme nyní, že číslo d je největší společný dělitel čísel x a y . Pak nutně existují dvě nesoudělná přirozená čísla p a q taková, že

$$x = p \cdot d, \quad y = q \cdot d$$

Po dosazení těchto vztahů do rovnice (2) obdržíme

$$z(qd + pd) = pqd^2,$$

neboli

$$z(q + p) = pqd.$$

Z této poslední relace nutně vyplývá, že číslo d musí být dělitelné součtem $p + q$, poněvadž číslo z má být přirozené. Existuje tudíž přirozený koeficient λ takový, že

$$d = \lambda(p + q).$$

Kořeny rovnice (1) jsou tedy stanoveny vztahy

$$x = \lambda \cdot (p + q) p, \quad y = \lambda \cdot (p + q) q, \quad z = \lambda pq, \quad (3)$$

kde p, q jsou libovolná, ale nesoudělná přirozená čísla. Nalezené vztahy si ověříme dosazením do uvažované rovnice (1)

$$\frac{1}{\lambda(p+q)p} + \frac{1}{\lambda(p+q)q} = \frac{1}{\lambda pq}.$$

Po odstranění zlomků obdržíme identitu

$$q + p = p + q$$

Tato tabulka nám ukazuje některá řešení uvažované rovnice (1), která vyplývají z podmínek (3):

p	q	x	y	z
1	1	2	2	1
2	1	6	3	2
3	1	12	4	3
3	2	15	10	6
4	1	20	5	4
4	3	28	21	12
5	1	30	6	5
5	2	35	14	10

atd.

Konstrukce trojúhelníka

JIŘÍ POSPÍŠIL, posluchač ČVUT, Praha

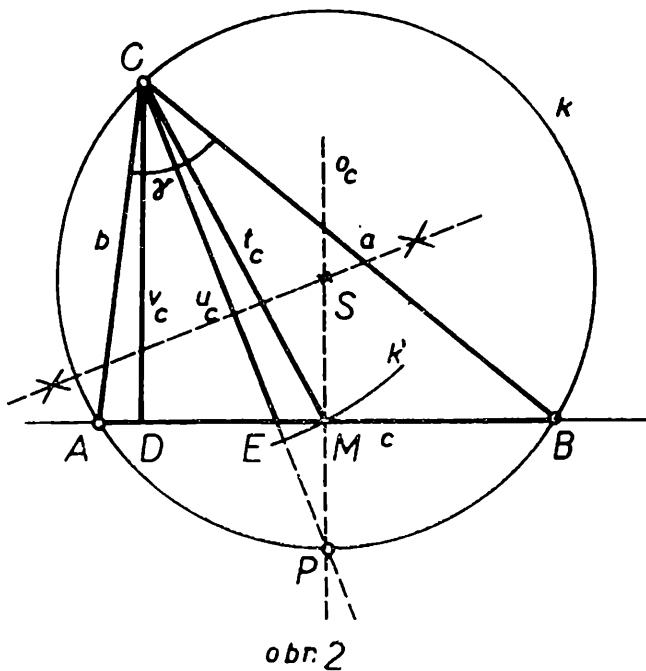
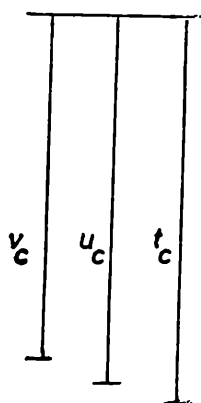
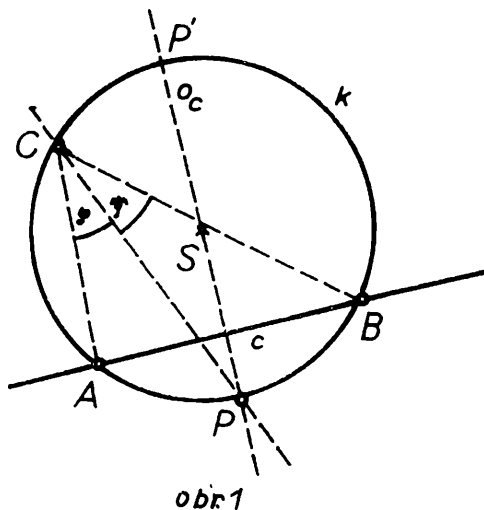
V Rozhledech roč. 41, str. 448 v článku „Některé vlastnosti rovnoosé hyperboly“ řeší Fr. Hradecký úlohu: Sestrojte trojúhelník, je-li dáno t_c , v_c , u_c , kde $v_c < u_c < t_c$. Alois Peřina ve 49. roč. Rozhledů na str. 10 v článku „Z geometrie trojúhelníka“ řeší tutéž úlohu a zároveň odvozuje podmínky řešitelnosti. V tomto článku ukáži elegantní, ale přitom elementární řešení této úlohy, opírající se o větu:

Osa strany a osa protilehlého úhlu daného trojúhelníka se protínají na kružnici danému trojúhelníku opsané. (Viz Dr. Čeněk Kohlmann: Geometrie v kostce, Vesmír, 1938, str. 13.) Vyslovenou větu dokážeme.

Nechť je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a dva různé body A, B , ležící na k (obr. 1). Průsečíky osy o_c úsečky AB s kružnicí k označme P, P' . Platnost relace

$$\widehat{AP} = \widehat{BP} \quad (1)$$

je evidentní. Na kružnici k zvolme ještě libovolný bod C , který je vnitřním bodem poloroviny ABP' . Označme φ úhel při vrcholu C trojúhelníku APC a ψ úhel při vrcholu C trojúhelníku BPC . Úhel φ , resp. ψ je obvodový nad kruhovým obloukem AP , resp. BP . S ohledem na vztah (1), platí též



$$\varphi = \psi.$$

Podle toho přímka CP je osa u_c úhlu ACB . Tím jsme vyslovenou větu dokázali a můžeme přistoupit ke konstrukci předeslané úlohy (obr. 2).

Nejprve sestrojíme pravouhlý trojúhelník CDE , jehož odvěsna $CD = v_c$ a přepona $CE = u_c$. Na polopřímce DE určíme bod M tak, aby $CM = t_c$. Bod M je střed strany AB . Symetrála této strany se s polopřímkou CE protnou v bodě P . Střed S kružnice k , která je opsána hledanému trojúhelníku ABC , leží na ose úsečky CP a na ose strany AB . Další je už jasné.

Spory v Cantorově teorii množin

MAREK MALÍK, stud. MFF UK

V druhé polovině minulého století se mnoho matematiků snažilo vybudovat společné základy matematických disciplín. Podstatnou měrou k tomuto úsilí přispěl význačný německý matematik Georg Cantor (1845—1918), který vytvořil základy teorie množin. Dnes se tato teorie nazývá *intuitivní teorií množin*, nebo též Cantorovou teorií množin. S jejími základy se setkáváte již při studiu matematiky na střední škole.

Intuitivní teorie množin je v podstatě založena na *pojetí množiny jako souboru libovolných objektů*. Požaduje se pouze to, aby o každém objektu bylo možno jednoznačně rozhodnout, zda do tohoto souboru patří, či nepatří. S tímto intuitivním pojetím množiny lze vystačit při jednoduchých úvahách ve většině matematických disciplín, při rozvíjení teorie množin se však již kolem roku 1895 vyskytly nesnáze. Nakonec se zjistilo, že intuitivní teorie množin je sporná teorie, to znamená, že si odporují některé výsledky v ní odvozené.

Spornost Cantorovy teorie množin není jen důsledkem nepřesného pojetí množiny, ale také určitých nekorektností obvykle užívaného logického aparátu. V tomto článku si ukážeme dva příklady sporů, které vyplývají z nepřesného chápání množin. Nejprve však budeme specifikovat pojem výrokové formy, který již většina čtenářů zná.

Výrokovou formou s jednou množinovou proměnnou nazýváme každý výraz, který obsahuje nezávisle proměnnou, na jejíž místo můžeme dosadit symbol libovolné množiny a získáme tak vždy výrok. Například: „**X** je podmnožinou množiny všech přirozených čísel. Všechny hvězdy souhvězdí Orion jsou prvky množiny **Y**.“ V prvním příkladě je proměnnou písmeno **X**, ve druhém **Y**. Dosadte za **X**, **Y** symboly nebo zápisy některých konkrétních množin a přesvědčte se, že získáte výroky.

Ke každé výrokové formě existuje *obor pravdivosti* této formy, tj. množina, která má za své prvky právě ty množiny, pro něž po dosazení do dané výrokové formy získáváme výrok *pravdivý*. Právě zformulované tvrzení je v souladu s intuitivním pojetím množiny, pokud dosazováním symbolů množin do výrokové formy vznikají výroky a o každém takovém výroku lze jednoznačně rozhodnout, je-li pravdivý či nepravdivý. Pak můžeme o každé množině říci, zda do oboru pravdivosti dané výrokové formy patří, či nepatří. Záhy si však ukážeme, že popsáný způsob určování množin vede ke sporům.

Spornost pojmu množina všech množin

Připomeňme si ještě dva pojmy týkající se mohutností množin (viz např. článek J. Šedivého *Znovu o množinách*, Rozhledy, roč. 1969—70, č. 1). Existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{N}$, říkáme, že *množiny $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ mají stejnou mohutnost*. Tuto skutečnost zapíšeme stručně

$$\text{moh } \mathbf{M} = \text{moh } \mathbf{N}$$

Jestliže množiny $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ nemají stejnou mohutnost, ale množina $\mathbf{M}$ má stejnou mohutnost jako některá podmnožina $\mathbf{N}_1$ množiny $\mathbf{N}$, budeme říkat, že *množina $\mathbf{M}$ má menší mohutnost než množina $\mathbf{N}$* . Tuto situaci zapíšeme

$$\text{moh } \mathbf{M} < \text{moh } \mathbf{N}$$

Zápisu $\text{moh } \mathbf{M} \leq \text{moh } \mathbf{N}$ jistě čtenář dobře rozumí i bez poznámky, že znamená $\text{moh } \mathbf{M} = \text{moh } \mathbf{N}$ nebo $\text{moh } \mathbf{M} < \text{moh } \mathbf{N}$.

Nyní můžeme stručně vyjádřit jednoduché, ale důležité věty o mohutnostech množin.

Věta 1. Jestliže platí pro některé dvě množiny zároveň $\text{moh } \mathbf{M} \leq \text{moh } \mathbf{N}$ a $\text{moh } \mathbf{N} \leq \text{moh } \mathbf{M}$, pak platí $\text{moh } \mathbf{M} = \text{moh } \mathbf{N}$.

Věta 2. Jestliže platí $\mathbf{P} \subset \mathbf{R}$, pak $\text{moh } \mathbf{P} \leq \text{moh } \mathbf{R}$.

Vezměme si nyní nějakou množinu $\mathbf{Q}$ a výrokovou formu „ $\mathbf{X}$ je podmnožinou $\mathbf{Q}$ “. Oborem pravdivosti této výrokové formy je množina, jejímiž prvky jsou všechny podmnožiny množiny $\mathbf{Q}$ (včetně prázdné množiny a celé množiny $\mathbf{Q}$). Množinu všech podmnožin množiny $\mathbf{Q}$ budeme označovat symbolem $\exp \mathbf{Q}$.

Věta 3. O každé množině $\mathbf{M}$ platí, že množina $\mathbf{M}$ má menší mohutnost než množina $\exp \mathbf{M}$, tj. $\text{moh } \mathbf{M} < \text{moh } (\exp \mathbf{M})$.

Zvolme nyní výrokovou formu „ $\mathbf{X}$ je množina“. Určíme-li její obor pravdivosti, dostaneme množinu, která má za své prvky všechny množiny. Označme tuto množinu všech množin písmenem $\mathbf{M}$, uvažujme však i o množině $\exp \mathbf{M}$. Každý prvek množiny $\exp \mathbf{M}$ je samozřejmě množinou, tj. je též prvkem množiny $\mathbf{M}$. To znamená, že $\exp \mathbf{M} \subset \mathbf{M}$.

Podle věty 2 platí: $\text{moh } (\exp \mathbf{M}) \leq \text{moh } \mathbf{M}$,

podle věty 3 platí: $\text{moh } \mathbf{M} < \text{moh } (\exp \mathbf{M})$.

Právě získané výsledky si však odporují, nemohou platit oba současně. Došli jsme tedy ke sporu, souhrn všech množin zřejmě nelze považovat za množinu.

Spornost množin v sobě obsažených

Uvažujme o dvou výrokových formách: „ $\mathbf{X}$ je prvkem sama sebe“, „ $\mathbf{X}$ není prvkem sama sebe“. Zapišme obory pravdivosti těchto výrokových forem

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{X}; \mathbf{X} \in \mathbf{X}\}, \mathbf{N} = \{\mathbf{X}; \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}.$$

Pro každou množinu $\mathbf{X}$ musí zřejmě platit

buď $\mathbf{X} \in \mathbf{M}$, nebo $\mathbf{X} \in \mathbf{N}$ (tj. nastane právě jeden z těchto případů). Tedy i pro množinu $\mathbf{N}$ musí platit buď $\mathbf{N} \in \mathbf{M}$, nebo $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$. Prodiskutujeme oba dva případy:

a) Nechť $\mathbf{N} \in \mathbf{M}$, tj. $\mathbf{N} \in \{\mathbf{X}; \mathbf{X} \in \mathbf{X}\}$, pak $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$, ale to není možné, protože žádná množina nemůže patřit současně jak do $\mathbf{M}$, tak do $\mathbf{N}$.

b) Nechť $\mathbf{N} \in \mathbf{N}$, tj. $\mathbf{N} \in \{\mathbf{X}; \mathbf{X} \notin \mathbf{X}\}$, pak $\mathbf{N} \notin \mathbf{N}$, ale to není možné, protože množina $\mathbf{N}$ nemůže být a zároveň nebýt svým prvkem.

Z prvního sporu, který jsme si ukázali, je patrné, že je nutno opravit pojetí množiny jako libovolného souboru objektů — soubor všech množin nelze považovat za množinu. Druhý spor je nutno odstranit stejným způsobem — soubory $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ není možno považovat za množiny.

Spory v Cantorově teorii množin měly závažné důsledky pro rozvoj matematiky, bylo nutno přesněji vymezit, které soubory objektů lze považovat za množiny. Protože neexistuje pouze jedna cesta, jak odstranit spory v teorii množin, vznikla celá řada axiomatických teorií množin. Bezesporné teorie množin kladou jistá omezení na tvoření množin a nepoužívají pojmu množina v tak širokém významu, jaký mu původně dával G. Cantor.

Užití pravdivostního ohodnocení formulí

Dr. IVO ZAPLETAL, CSc., PÚ ČSAV, Praha

Mějme k dispozici tyto výroky:

- (1) Jestliže Quido rozbil okno, pak okno nerozbil Ríša.
- (2) Jestliže Petr rozbil okno, pak Quido rozbil okno také.
- (3) Jestliže Ríša rozbil okno, pak Petr rozbil okno také.
- (4) Ríša rozbil okno nebo Quido rozbil okno.
- (5) Okno rozbil jen někdo z těchto chlapců.

První úkol: Mohou být všechny výroky [(1)–(5)] současně pravdivé?

Jako je tomu běžně u různých úloh, postupů k jejich řešení je jistě několik. Zvolíme však postup, ve kterém použijeme znalostí ze symbolické logiky.

Označme si jednotlivé jednoduché výroky písmeny a výroky (1)–(5) zapišme pomocí nich.

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| q - Quido rozbil okno | (1) $q \Rightarrow r'$ |
| r - Ríša rozbil okno | (2) $p \Rightarrow q$, |
| p - Petr rozbil okno | (3) $r \Rightarrow p$, |
| | (4) $r \vee q$, |
| | (5) $p \vee q \vee r$. |

Mají-li být výroky (1)–(5) současně pravdivé, musí být pravdivý složený výrok (formule)

$$(q \Rightarrow r') \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow p) \wedge (r \vee q) \wedge (p \vee q \vee r). \quad (\text{I})$$

Pravdivostní hodnotu uvedené formule zjistíme pomocí pravdivostního ohodnocení (p. o.).

Ve stručnosti zopakujeme jak se provádí p. o. pomocí tabulky pravdivostních hodnot:

1. Do záhlaví tabulky si vypíšeme všechny různé jednoduché výroky, ze kterých se zkoumaná formule skládá. Pokud formule obsahuje i negovaný výrok, vypisujeme pouze výrok bez negace (zde: p , q , r).

2. Počet „pracovních řádků“ je roven 2^k , kde k je počet výroků vypsanych podle 1 (zde $2^3 = 8$).

3. Do získaných sloupců (zde jde o tři sloupce) vypíšeme všechny možné variace (zde osm).

4. Do záhlaví dále vypisujeme části zkoumané formule; nejdříve obvykle negace vypsanych výroků a další formule podle uzávorkování a „ohodnocujeme je“.

V posledním sloupci obdržíme p. o. zkoumané formule, a to obvykle podtrhneme.

Pravdivostní tabulka výrokové formule (I) vypadá takto:

Odpověď na první úkol: Výroky mohou být všechny současně pravdivé (viz 2. a 6. řádek).

Druhý úkol: Jsou-li pravdivé, kdo rozbil okno?

Formule (I) může tedy nabývat pravdivostní hodnoty 1 (tj. je pravdivá) v případě, že:

$$p = 1, q = 1, r = 0 \text{ (viz 2. řádek tabulka 1),}$$

anebo:

$$p = 0, q = 1, r = 0 \text{ (viz 6. řádek tabulka 1).}$$

Odpověď na druhý úkol: Okno rozbil určitě Quido, a to buď sám anebo s Petrem.

Třetí úkol: Je-li výrok (1) nepravdivý a ostatní výroky pravdivé, kdo rozbil okno?

Tabulka 1

p	q	r	r'	(1) $q \Rightarrow r'$	(2) $p \Rightarrow q$	(3) $r \Rightarrow p$	(4) $r \vee q$	(5) $p \vee q \vee r$	(I)
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

Odpověď vyčteme z tabulky 1: výrok (1) je nepravdivý v 1. řádku a v 5. řádku, podmínka pravdivosti ostatních výroků však je splněna pouze v 1. řádku.

Tedy: $p = 1, q = 1, r = 1$.

Odpověď na třetí úkol: V tomto případě rozbili okno všichni tři společně.

Další úkoly si jistě čtenář vyřeší sám. Například:

Zaměňme v zadání úlohy výrok (4) výrokem (4)': Ríša rozbil okno nebo Quido nerozbil okno.

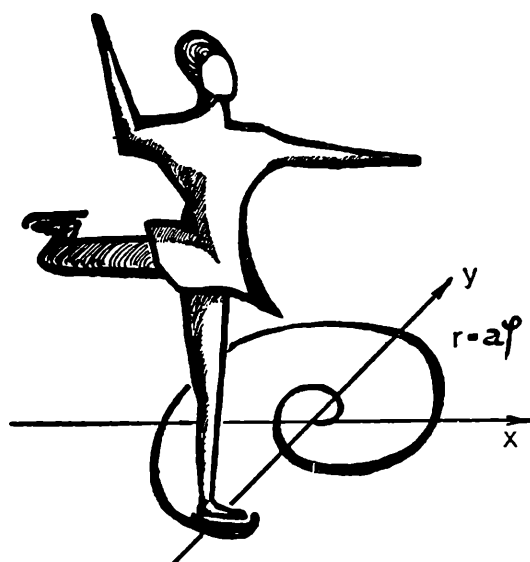
S takto vzniklou úlohou proveďte tyto úkoly:

- Mohou být všechny výroky pravdivé?
- Jestliže (5) je nepravdivý výrok, ostatní výroky jsou pravdivé, kdo rozbil okno?
- Jestliže (4)' je nepravdivý výrok, ostatní výroky jsou pravdivé, kdo rozbil okno?
- Je-li výrok ⁵¹⁾ nepravdivý a ostatní výroky pravdivé, kdo rozbil okno?
- Jestliže dva z výroků jsou nepravdivé a ostatní pravdivé, kdo rozbil okno?

Výhodou uvedené metody je jednak přehlednost a možnost úplného podchycení velkého počtu výroků (informací), v kterých bychom se těžko orientovali.

Na procvičení dále doporučuji příklady z knížky:

O. Zich, A. Kolman: Zajímavá logika, Mladá fronta, Praha 1965 nebo ze sbírky J. Šedivý a kol.: Úlohy o výrozech a množinách pro 1. ročník gymnázia, Bratislava, SPN 1970.



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Základy cyklografie

Doc. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

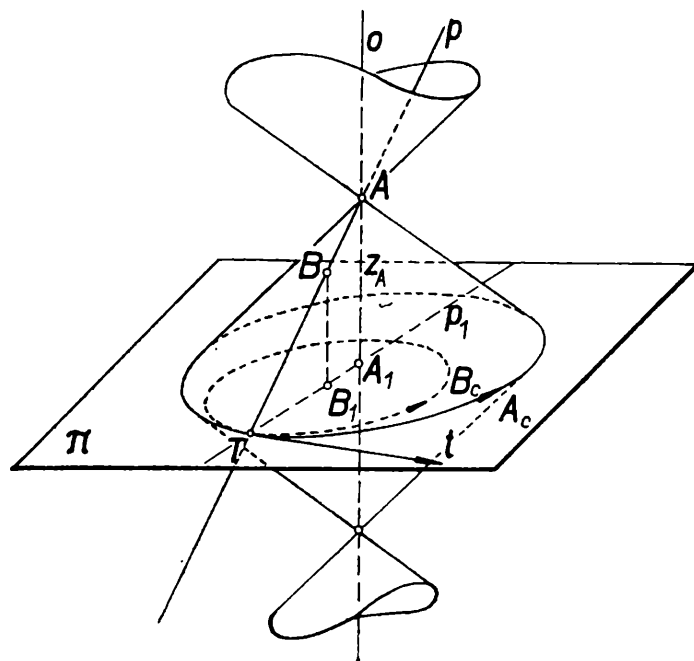
V tomto článku si ukážeme jednu obdobu kótovaného promítání, kdy kóta bodu bude nahrazena kružnicí a každý bod prostoru se zobrazí do kružnice. Pro jednoznačnost postupu od obrazu ke vzoru v prostoru je třeba učinit jako v každém druhu promítání určité úmluvy; dojdeme tak k zobrazovacímu způsobu, kdy obrazem bodu není (obecně) bod.

1. Základní pojmy, průmět bodu. Promítáme reálné body prostoru na vodorovnou rovinu π (obr. 1), a to tak, že považujeme daný bod A za vrchol rotační kuželové plochy s osou rotace o kolmou k π , jejíž přímky svírají s průmětnou (a tedy i s osou) úhel 45° . Řez roviny π a této kuželové plochy je reálná kružnice se středem v průsečíku osy rotace s průmětnou π , tj. v pravoúhlém průmětu A_1 bodu A do roviny π a poloměr je rovný vzdálenosti bodu A od průmětny, tj. absolutní hodnotě souřadnice z_A . Každému bodu v prostoru je tak přiřazena jediná kružnice v π ; obráceně však každé kružnici v π jsou přiřazeny dva body souměrně položené vzhledem k rovině π .

Abychom zajistili jednoznačnost přiřazení také z průmětny π do prostoru, zavedeme pojem *cyklu*, kterým budeme rozumět *orientovanou kružnici*, tj. kružnici, na které je dán smysl obíhání. Tento smysl obíhání budeme vyznačovat šipkou. Potom bodům s kladnou souřadnicí z (nad rovinou π) je přiřazen *kladný smysl otáčení* (toto otáčení je opačné k otáčení hodinových ručiček), bodům se zápornou souřadnicí z (pod rovinou π) pak záporný smysl.

Po provedené orientaci každému cyklu roviny π je v prostoru přiřazen jediný bod.

Tímto postupem jsme zajistili vzájemnou jednoznačnost mezi body prostoru a cykly průmětny π ; mluvíme pak o tzv. *cyklografickém zobrazení (promítání)*. Cykl příslušný k danému bodu A označíme A_c . Na každé kružnici leží potom dva opačné (nebo doplňkové) cykly, kružnice je jejich nositelkou.



Obr. 1

Bodům v průmětně přiřadíme jako obrazy tzv. *nulové cykly* (tj. kružnice s nulovým poloměrem). U nulových cyklů nerozlišujeme žádnou orientaci.

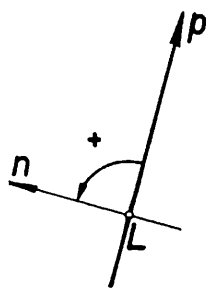
Souhrn všech cyklů v rovině (odpovídající všem bodům prostoru) tvoří tedy *trojrozměrný cyklický prostor*.

V dalších úvahách se vyskytnou také *orientované přímky* v rovině i v prostoru a s nimi spojené některé pojmy, které vysvětlíme dříve než přistoupíme k průmětu přímky, popřípadě roviny.

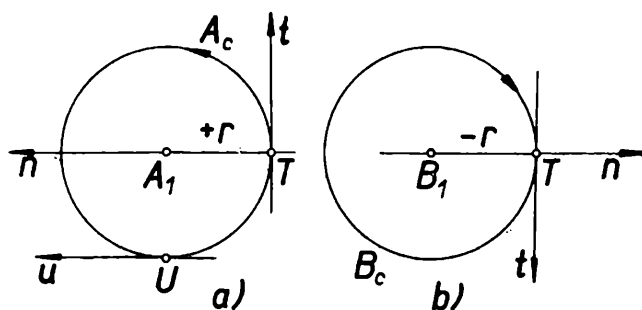
Přímku roviny, kterou opatříme orientací (na níž vyznačíme smysl jejího probíhání), nazveme *orientovanou přímkou*, nebo krátce *paprskem*. Přímce v prostoru přiřadíme vždy orientaci ve smyslu rostoucí souřadnice z jejích bodů; pro přímku rovnoběžnou s π určíme orientaci podle cyklu příslušného k jednomu jejímu bodu. Na přímce roviny π lze orientaci volit libovolně.

Při postupu v rovině po orientované přímce leží body po její levé straně v tzv. *kladné polorovině* vytáté danou orientovanou přímkou; druhou polo-

rovinu nazveme pak *zápornou* (obr. 2). Jinak řečeno, kolmice n sestavená v libovolném bodě L paprsku p a orientovaná tak, že paprsek p otočením o 90° v kladném smyslu kolem L přechází do n , ukazuje potom do kladné poloroviny.



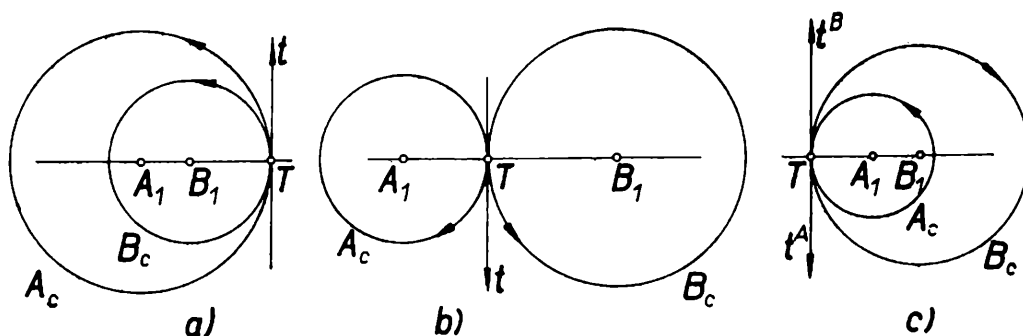
Obr. 2



Obr. 3

Paprsek je *tečným paprskem* cyklu v jeho bodě T , jestliže se dotýká cyklu a má s ním touž orientaci (obr. 3a, b); takový *dotyk* je *vlastní*; v případě, kdy orientace paprsku a cyklu jsou opačné (např. paprsek u v obr. 3a), mluvíme o *nevlastním dotyku*. Rovněž dva cykly se dotýkají (obr. 4a, b), jestliže mají oba ve společném bodě tečný paprsek s vlastním dotykem (tzv. *vlastní dotyk cyklů*); *nevlastní dotyk* dvou cyklů ukazuje obr. 4c.

Pro kladný cykl je střed cyklu vlevo od tečných paprsků a body uvnitř cyklu jsou v kladné části roviny vyřáté v ní cyklem (obr. 3a). Normála má



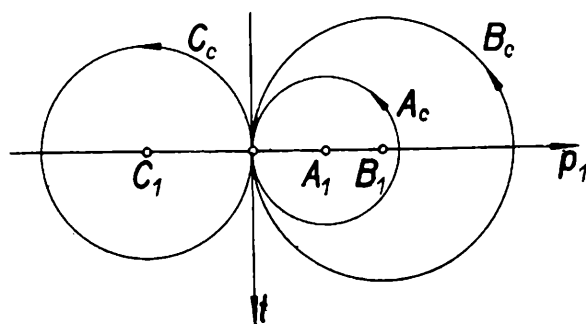
Obr. 4

v tomto případě orientaci od bodu dotyku do středu cyklu a jeho poloměr je kladný (jak to odpovídá souřadnici z zobrazovaného bodu A).

Pro záporný cykl jsou body vně cyklu v kladné části roviny vyřáté v ní cyklem (obr. 3b). Normála má orientaci od středu cyklu k bodu dotyku a poloměr cyklu je záporný.¹⁾

¹⁾ Každou orientovanou přímku lze považovat za limitní případ cyklu, když absolutní hodnota poloměru roste nade všechny meze.

2. Průmět přímky. Uvažujme nejdříve přímku p , která s průmětnou π svírá úhel 45° . Takovou přímku nazveme *c-přímka*. Každá *c-přímka* je společnou přímkou všech rotačních kuželových ploch, které promítají její body do průmětny π . Proto (obr. 5) *průmět c-přímky je vytvořen cykly, které mají vlastní dotyk*. Tečnový paprsek všech cyklů je kolmý na průmět p_1 *c-přímky* p (orientovaný ve smyslu rostoucí souřadnice z bodů *c-přímky*) a je orientovaný do záporné poloroviny vyřazené paprskem p_1 .



Obr. 5

Obráceně, *jestliže se dva cykly dotýkají, pak spojnicí bodů jim v prostoru odpovídajících je c-přímka.*²⁾

Z toho však ihned dále plyne:

Body rotační kuželové plochy, která promítá daný bod V , mají za průměty cykly, které se dotýkají cyklu V_c příslušného k bodu V Speciálně pro kuželovou plochu s vrcholem V v průmětně π , kdy k bodu V přísluší nulový cykl, mají body této plochy za průměty cykly, které procházejí bodem V

Přístupme teď k vlastnostem cyklografického průmětu přímky p různé od *c-přímky*, pro jejíž odchylku φ od π je tedy buď $0^\circ < \varphi < 45^\circ$ nebo $45^\circ < \varphi < 90^\circ$.

Středy $A_1, B_1, \dots$ cyklů $A_c, B_c, \dots$ příslušných bodům A, B , přímky p leží (obr. 6) na jejím pravoúhlém průmětu p_1 , který nazveme *centrálou* vytvořené *lineární cyklické řady*.

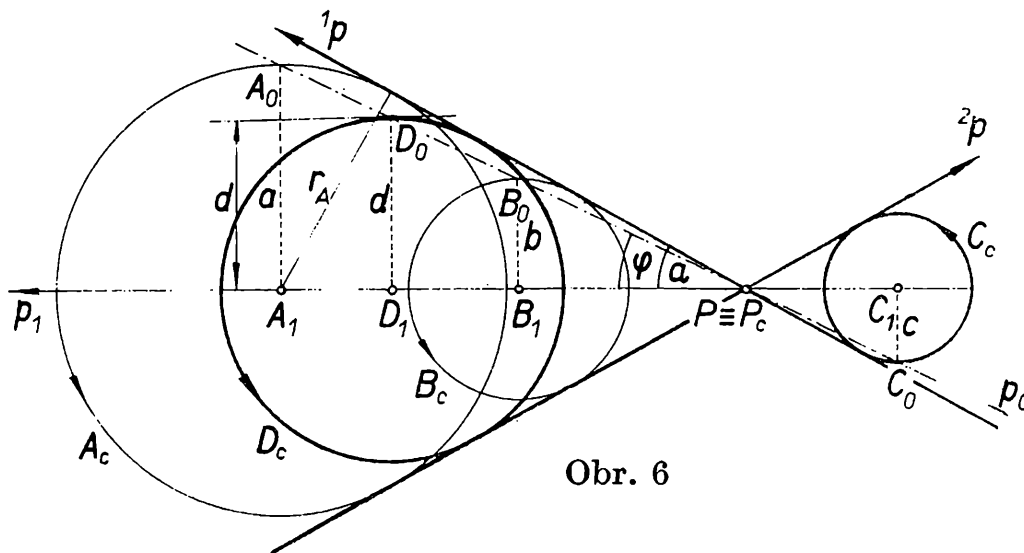
Lineární cyklická řada je určena dvěma svými cykly a obsahuje jednoparametrické množství cyklů (tj. tolik jako bodů na přímce).

Přímka p protíná rovinu π ve stopníku P , kterému přísluší nulový cykl. Při daných dvou cyklech A_c, B_c určíme nejdříve jejich centrálu p_1 a na kolmicích k p_1 v bodech A_1, B_1 (vedených v téže polorovině, jsou-li cykly souhlasně orientované, v opačných polorovinách při opačných orientacích obou cyklů) najdeme na příslušných cyklech body

²⁾ Nevlastnímu bodu *c-přímky* přísluší jako cykl tečnový paprsek. Protože nevlastní bod leží na navzájem rovnoběžných přímkách, pak cykly příslušné k nevlastnímu bodu rovnoběžných *c-přímek* tvoří osnovu rovnoběžných paprsků.

A_0, B_0 . Jejich spojnice $p_0 \equiv A_0B_0$ je v podstatě sklopenou polohou dané přímky p . Potom $P \equiv p_0 \cdot p_1$ dává stopník přímky p a tím i hledaný nulový cykl P_c . Tento stopník leží vně (uvnitř) úsečky A_1B_1 , jsou-li cykly A_c, B_c souhlasně (opačně) orientovány a je *středem stejno-lehlosti* všech cyklů lineární cyklické řady.

Přímka p_0 nám pomůže také při vyhledání cyklu daného poloměru c (znovu upozorňujeme na to, že poloměr cyklu může být kladný i záporný) lineární cyklické řady (obr. 6), a tím i bodu přímky p , je-li



Obr. 6

dán střed cyklu C_1 , popřípadě při určení středu cyklu lineární cyklické řady (a tím i bodu přímky), je-li dán poloměr cyklu (v obr. 6 pro bod D daný poloměrem d).

Danou přímkou p lze proložit v případě, že $0^\circ < \varphi < 45^\circ$ dvě roviny, které s průmětnou π svírají úhel 45° . Nazveme tyto zvláštní roviny krátce *c-rovinami*. Jsou to společné tečné roviny všech promítacích rotačních kuželových ploch bodů uvažované přímky. Tyto *c-roviny*³⁾ protnou průmětnu ve dvou orientovaných přímkách $^1p, ^2p$ (obr. 6), které procházejí stopníkem P dané přímky a jejichž orientace je dána směrem společných tečných paprsků. Nazveme je *základními paprsky* lineární cyklické řady a takovou řadu nazveme *řadou hyperbolického typu*.⁴⁾

V případě, že $45^\circ < \varphi < 90^\circ$, pak neexistují (reálné) *c-roviny* danou přímkou p a neexistují také proto (reálné) společné tečné paprsky.

³⁾ O jejich cyklografickém průmětu si řekneme více v dalším odstavci.

⁴⁾ Oba základní paprsky určují cyklografický průmět nevlastního bodu přímky p . Všechny přímky rovnoběžné s přímkou p dávají dvojici osnov (rovnoběžných) paprsků, které patří cyklografickému průmětu téhož nevlastního bodu.

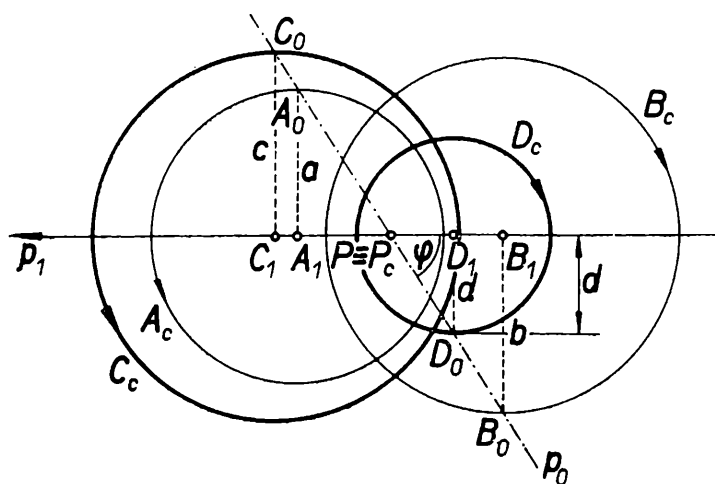
Říkáme, že v tomto případě je přímkou určena lineární cyklická řada eliptického typu (obr. 7).

Konečně lineární řadu příslušnou k c -přímce nazveme cyklickou řadou parabolického typu (obr. 5).

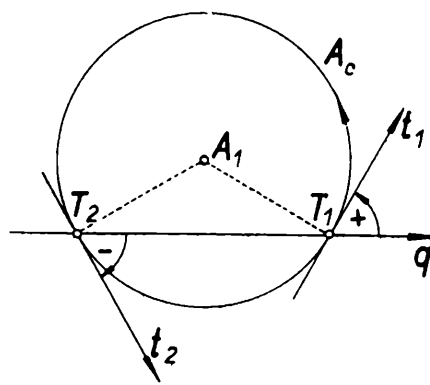
Pro všechny cykly lineární cyklické řady platí

$$PA_1 : A_1A_0 = PB_1 : B_1B_0 = PC_1 : C_1C_0 = \dots = \cotg \varphi$$

a podle předešlého, je-li $\cotg \varphi \gtrless 1$ je $\varphi \gtrless 45^\circ$ a řada je hyperbolického, parabolického nebo eliptického typu.



Obr. 7



Obr. 8

Paprsek vedený nulovým cyklem lineární cyklické řady protíná všechny cykly řady v úhlech se stejným kosinem (obr. 8). Přitom však každý paprsek protíná cykly pod jiným úhlem.

To ukážeme např. takto: Jsou-li t_1, t_2 tečné paprsky v průsečících T_1, T_2 zvoleného paprsku q s cyklem A_c , pak

$$\sphericalangle qt_1 + \sphericalangle qt_2 = 360^\circ, \text{ tj. } \sphericalangle qt_1 = - \sphericalangle qt_2$$

a tedy

$$\cos \sphericalangle qt_1 = \cos \sphericalangle qt_2.$$

Vzhledem ke stejnolehlosti pro střed v nulovém cyklu je tento kosinus stejný pro všechny cykly. Pro centrálu je uvedený kosinus roven nule, neboť všechny cykly jsou jí prořaty pod pravým úhlem.

Pro řadu hyperbolického typu dostaneme (viz obr. 6), označíme-li α úhel základních paprsků s centrálou a r_A poloměr cyklu A_c (a podobně pro další cykly)

$$r_A \quad A_1P = r_B : B_1P = \dots = \sin \alpha$$

a protože

$$A_1A_0 : A_1P = B_1B_0 : B_1P = \dots = \tg \varphi,$$

zjistíme porovnáním (neboť $A_1A_0 = r_A$, .), že platí

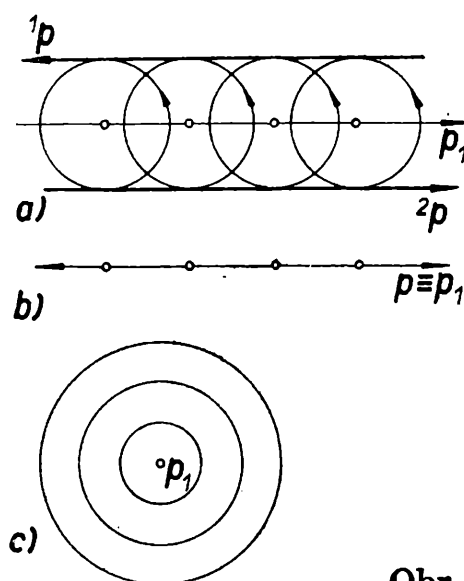
$$\sin \alpha = \tg \varphi.$$

Všimneme si nyní tzv. zvláštních poloh přímky p (obr. 9):

a) Je-li $p \parallel \pi$, pak lineární cyklickou řadu tvoří souhlasně shodné cykly. Společné tečné paprsky, které jsou základními paprsky 1p , 2p , jsou nesouhlasně rovnoběžné.

b) Je-li $p \in \pi$, pak řada je složena vesměs z nulových cyklů, oba základní paprsky leží na téže přímce a jsou opačně orientovány.

c) Je-li $p \perp \pi$, potom lineární cyklickou řadu tvoří soustředné kružnice se středem v p_1 . Každou z kružnic můžeme orientovat oběma směry a dva cykly, které na kružnici leží, reprezentují oba body přímky p souměrné podle roviny π (viz odst. 1).



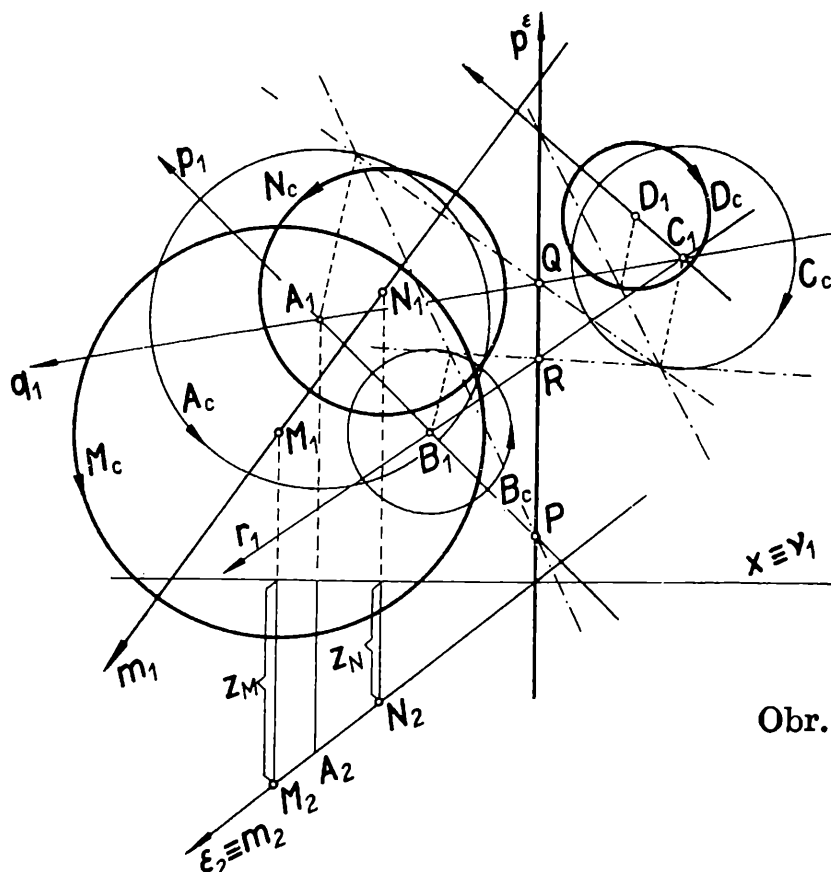
Obr. 9

3. Průmět roviny. Všechny body roviny ε zobrazují se do množiny cyklů, kterou nazýváme *cyklickým polem*. Každé cyklické pole je určeno třemi cykly, které nepatří do téže lineární cyklické řady. Nulové cykly všech takových lineárních cyklických řad leží na stopě p^ε dané roviny ε . Tato stopa obsahuje tedy středy stejnolehlosti všech lineárních cyklických řad, které jsou obrazy všech přímek roviny. Je proto v cyklickém poli dvouparametrické množství cyklů (tj. tolik, jako je bodů v rovině). Stopu p^ε orientujeme potom tak, že body roviny s kladnou souřadnicí z mají své pravoúhlé průměty po její levé straně a nazveme ji pak *osou stejnolehlosti* nebo *osou cyklického pole*.

V cyklickém poli existuje vždy cykl souměrný k danému cyklu podle osy pole, neboť v každé rovině existuje bod k němu souměrný podle její stopy.

Jsou-li tedy dány tři cykly A_c , B_c , C_c (obr. 10), pak sestrojením nulových cyklů ve dvou (ze tří) jimi určených lineárních cyklických řad najdeme osu cyklického pole. Tato osa přísluší ke stopě roviny procházející třemi body A , B , C příslušnými k daným cyklům. Na této ose musí ležet také zbývající třetí nulový cykl.

Z toho vyplývá také konstrukce poloměru cyklu $\bar{D}_c$ daného pole, který je určen svým středem. Spojnice bodu D_1 s některým středem daného cyklu, např. C_1 , protíná totiž osu p^e cyklického pole v nulovém cyklu lineární řady příslušné k přímce CD a pomocí vzniklé stejno-
lehlosti již dostaneme poloměr hledaného cyklu, tím i souřadnici z a konečně i samotný cykl.



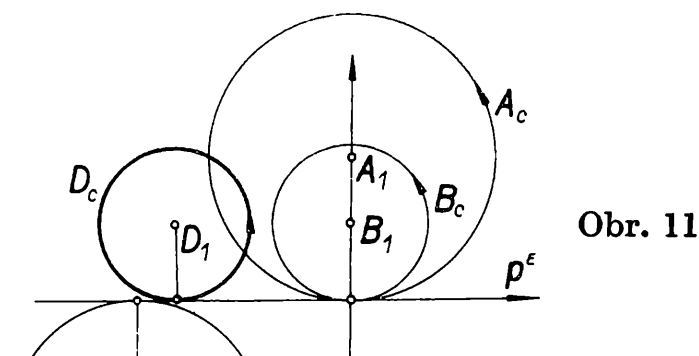
Obr. 10

Podle vlastnosti osy cyklického pole vzhledem ke všem jeho cyklům rozlišujeme tři typy polí:

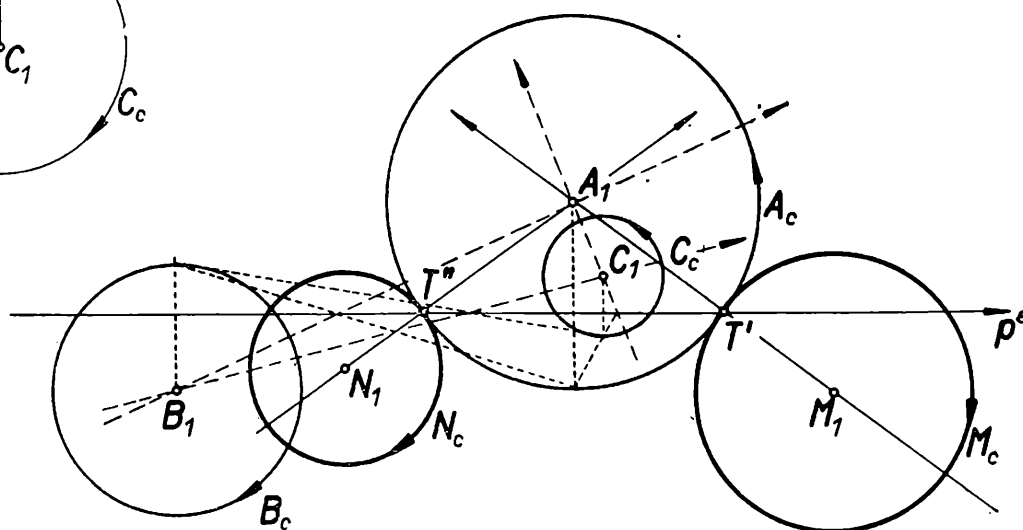
412

b) *Parabolický typ* cyklického pole vznikne při průmětu c -roviny (obr. 11). Protože v tomto případě spádové paprsky jsou c -přímky, vidíme ihned, že všechny *cykly se dotýkají osy p^ε* cyklického pole. Při vytčení jednoho cyklu parabolického pole je patrné, že jím procházející lineární cyklické řady jsou hyperbolického typu, jedna jediná je pak parabolického typu.

c) *Hyperbolický typ* (obr. 12) cyklického pole má osu p^ε , která je *sečnou všech cyklů daného pole*. Odchylka roviny, které je toto pole při-



Obr. 11



Obr. 12

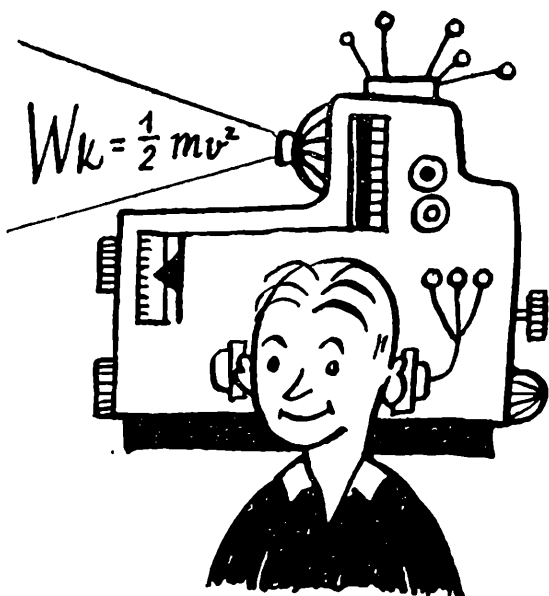
řazeno, od roviny π je větší než 45° . Každým cyklem tohoto pole prochází nekonečně mnoho lineárních cyklických řad jak hyperbolického, tak eliptického typu a dvě lineární řady parabolického typu. Jejich nulové cykly jsou v průsečících zvoleného cyklu s osou pole.

Uvedme ještě zvláštní případy polohy roviny ε vzhledem k průmětně, kdy také příslušné cyklické pole bude specializované:

a) Je-li $\varepsilon \parallel \pi$, skládá se cyklické pole z cyklů téže orientace a téhož poloměru.

b) Je-li $\varepsilon \equiv \pi$, skládá se cyklické pole ze všech nulových cyklů průmětny.

c) Je-li $\varepsilon \perp \pi$, skládá se cyklické pole ze všech kružnic, které protínají přímku $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon \cdot \pi$ pod pravým úhlem. (Pokračování)



Millikanův pokus

RNDr. OLDŘICH LEPIL, CSc., Olomouc

Katodové paprsky, které jsou, jak dnes víme, proudem volných elektronů ve vakuu, byly objeveny v roce 1859. Avšak tímto objevem byla jen zahájena rozsáhlá éra bádání, experimentů a objevů, v níž usilovalo mnoho nejskvělejších fyziků o rozluštění záhady, jakou byl elektron. Bylo prostudováno chování katodového záření v elektrickém a magnetickém poli, byl zjištěn částicový ráz tohoto záření i poměr hmotnosti a náboje částic katodového záření atd.

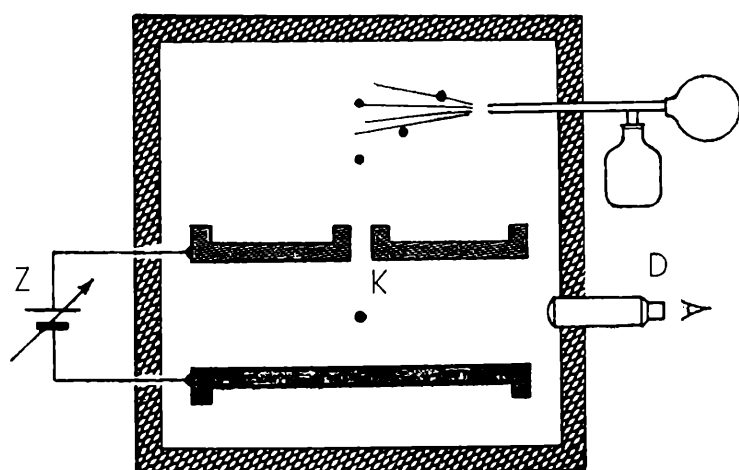
Jedno z největších úsilí si však vyžádalo změření absolutní velikosti náboje elektronu, jehož velikost byla řádově známa již dříve, poněvadž vyplývala z elektrochemických úvah o iontech. Proto také první cílevědomé pokusy o zjištění náboje elektronu jako elementárního kvanta elektrického náboje mají svůj počátek ve studiu jevů, jež probíhají při elektrolýze.

Tak již v roce 1897 Angličan *Townsend*, pracující v laboratoři známého fyzika *J. J. Thomsona* na universitě v Cambridgi, využil skutečnosti, že plyny unikající při elektrolýze z elektrolytu obsahují ionty a ty se nad hladinou stávají kondenzačními centry, kolem nichž se tvoří malé vodní kapky. Poněvadž kapky nesou náboj iontu, pokusil se Townsend dosti složitým způsobem zjistit jeho velikost.

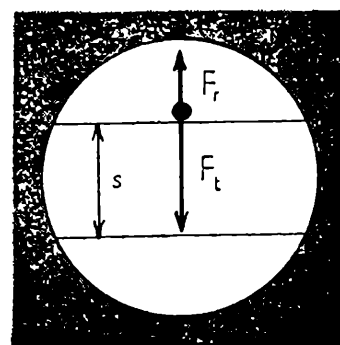
I když výsledky Townsendových pokusů nejsou nijak přesvědčivé, objevuje se zde poprvé kapka jako nosič náboje. Vodní kapku v dalších

pokusech nahradila kapka olejová, která může získat elektrický náboj samovolně, při rozprašování oleje. Když v roce 1907 fyzik *Ehrenhaft* navrhl pozorování olejové kapky nesoucí jen několik elementárních nábojů a vznášející se v homogenním elektrickém poli, byly dány všechny předpoklady pro vypracování metody měření elementárního náboje, která by korunovala mnohaleté úsilí fyziků úspěchem.

Tento čin se podařil americkému fyzikovi pracujícímu na universitě v Chicagu, *R. A. Millikanovi*. Ten začal v roce 1906 provádět pokusy s pozorováním horních vrstev oblak tvořených vodními kapkami v proměnném elektrickém poli. Poněvadž se vodní kapky při pokusech vypařovaly, nahradil je kapkami minerálního oleje a po řadě úprav experimentálního zařízení i metod pozorování sestrojil přístroj, jehož princip je naznačen na obr. 1.



Obr. 1. Schéma přístroje pro měření náboje kapek.



Obr. 2. Kapka v zorném poli dalekohledu.

Do prostoru nad rovnoběžnými deskami byly rozprašovány kapky oleje, z nichž občas některá pronikla jemným otvorem v horní desce mezi desky a zde ji bylo možné pozorovat pomocí dalekohledu s krátkou ohniskovou vzdáleností. Kapky byly osvětlovány z boku, takže se v zorném poli dalekohledu jevíly jako zářící body na temném pozadí. Současně bylo možné pozorovat v zorném poli dvě vodorovná vlákna, umístěná v malé vzdálenosti nad sebou (obr. 2).

Na kapku oleje o hmotnosti m , která vnikla do prostoru mezi deskami a klesá k dolní desce, působí tíhová síla $F_t = mg$, vztlaková síla (tu zanedbáme) a síla odporu prostředí F_r , která je orientována opačně než síla F_t . Velikost síly F_r určuje Stokesův zákon $F_r = 6\pi\eta r v_t$ (η je viskozita prostředí, r je poloměr kapky a v_t je rychlost prakticky rovnoměrného pohybu kapky). Mezi oběma silami nastává rovnováha

vyjádřená rovnicí

$$mg = 6\pi\eta r v_t \quad (1)$$

čili

$$mg = \text{konst. } v_t$$

a kapka se pohybuje stálou rychlostí v_t . Její velikost lze určit měřením doby t , kterou kapka potřebuje, aby urazila dráhu s rovnou vzdálenosti vláken v zorném poli dalekohledu

$$v_t = \frac{s}{t}.$$

Již při rozprašování získává mnoho kapek elektrický náboj třením o stěny rozprašovače a další kapky lze nabít ozářením olejového mračna rentgenovým zářením nebo zářením γ . Jestliže má kapka elektrický náboj Q a mezi deskami je elektrické pole o intenzitě E , působí na kapku vedle uvedených sil ještě elektrická síla $F_e = EQ$.

Opět nastane rovnováha sil a v případě, že síla F_e je orientována opačně než síla F_t , platí rovnice

$$F_t = 6\pi\eta r v_e + F_e$$

nebo

$$mg = \text{konst. } v_e + EQ$$

Kapka klesá mezi vlákny v zorném poli dalekohledu rovnoměrně rychlostí v_e , která je určována měřením doby τ pohybu mezi vlákny

$$v_e = \frac{s}{\tau}.$$

Výsledky měření dob t a τ provedených Millikanem při jednom z jeho prvních měření touto metodou jsou obsaženy v tabulce 1. Již při zběžném pohledu na tabulku vidíme, že v případech, kdy mezi deskami nebylo elektrické pole, se pozorované kapky stejných poloměrů pohybovaly mezi vlákny přibližně stejnou dobu a tedy i stejnou rychlostí. Průměrná doba t pohybu kapek mezi vlákny $t = (13,6 \pm 0,1)$ s, takže při vzdálenosti vláken $s = 5,22$ mm byla průměrná rychlost kapek $v_t = 3,84 \cdot 10^{-4}$ m $\cdot$ s $^{-1}$.

Jestliže bylo mezi deskami elektrické pole konstantní intenzity E , byly zjištěny rozmanité hodnoty doby τ pohybu kapek mezi vlákny, a to odpovídá různým hodnotám rychlostí v_e kapek, které jsou uvedeny ve třetím sloupci tabulky. Tento jev lze vysvětlit jedině různým nábojem kapek a poněvadž byl náboj jednotlivých kapek velmi malý, našel Millikan klíč k rozřešení záhady absolutní velikosti elementárního náboje.

Tabulka 1. Výsledky Millikanových pokusů

t [s]	τ [s]	v_e [cm s ⁻¹]	Δv_e [cm s ⁻¹]	Číslo rozdílu Δv_e [cm s ⁻¹]	Rozdíl nábojů e
13,6	12,5	0,0417	+0,0003	1	—
13,8	12,4	0,0420	—0,0181	2	— $2e$
13,4	21,8	0,0239	—0,0090	3	— e
13,4	34,8	0,0149	—0,0087	4	— e
13,6	84,5	0,0062	—0,0001	5	—
13,6	85,5	0,0061	+0,0090	6	+ e
13,7	34,6	0,0151	—0,0001	7	—
13,5	34,8	0,0150	+0,0176	8	+ $2e$
13,5	16,0	0,0326	—0,0176	9	— $2e$
13,8	34,8	0,0150	+0,0001	10	—
13,7	34,6	0,0151	+0,0187	11	+ $2e$
13,8	21,9	0,0238			

Uvažujme, že se kapky stejného rozměru pohybovaly při dvou měřeních různými rychlostmi v_{e1} a v_{e2} . To znamená, že na ně působily různé elektrické síly, poněvadž kapky měly různé elektrické náboje Q_1 a Q_2 . Pro uvažované případy platí rovnice

$$\begin{aligned} mg &= \text{konst. } v_{e1} + EQ_1, \\ mg &= \text{konst. } v_{e2} + EQ_2 \end{aligned}$$

a z nich dostaneme rovnici

$$E(Q_1 - Q_2) = \text{konst. } (v_{e2} - v_{e1})$$

nebo

$$\Delta Q = \frac{\text{konst.}}{E} (v_{e2} - v_{e1}). \quad (2)$$

Z rovnice (2) vyplývá, že změna náboje kapky je přímo úměrná rozdílu rychlostí kapky. Rozdíly naměřených hodnot rychlosti v_e jsou ve čtvrtém sloupci tabulky 1. Přitom si musíme uvědomit, že některé rozdíly jsou menší než chyby měření (rozdíly označené v pátém sloupci

tabulky čísla 1, 5, 7 a 10), což znamená, že v těchto případech byl náboj kapek stejný.

Podobně měly kapky stejný náboj v případech rozdílů označených čísla 3 a 4 a označíme jej symbolem e . To znamená, že náboj e je číselně roven určité konstantě násobené čísly 0,0089 nebo 0,0088 a o tuto hodnotu se náboj kapky zmenšil. Podobnou úvahou dospějeme i v ostatních případech k závěru, že se náboj kapky neměnil o libovolnou hodnotu, ale vždy jen o celistvý násobek určité hodnoty e , jak je uvedeno v posledním sloupci tabulky. Platí tedy, že

$$Q = ne, \quad (3)$$

kde $n = +2, +1, 0, -1, -2$.

To je první Millikanův výsledek, kterým dokázal, že elektrický náboj nemůže mít libovolnou hodnotu (např. $0,5e$), ale že je vždy násobkem určitého elementárního náboje. Sám napsal, že výsledky jeho pokusů jsou *přímým a nepochybným důkazem, že náboj elektronu není veličinou statistickou, ale že elektrické náboje iontů jsou vždy přesně rovny nebo jsou násobky jedné a téže hodnoty*.

Dalším a obtížnějším úkolem bylo zjistit absolutní hodnotu náboje e . Millikan vyšel z rovnice (2), kterou upravil pomocí rovnic (1) a (3) do tvaru

$$e = \frac{mg}{E} \left(\frac{v_{e2} - v_{e1}}{v_t} \right) \frac{1}{n},$$

nebo vzhledem k

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

(ρ je hustota oleje) do tvaru

$$e = \frac{4\pi r^3 \rho g}{3E} \left(\frac{v_{e2} - v_{e1}}{v_g} \right) \frac{1}{n}. \quad (4)$$

Na základě podrobnějšího rozboru Stokesova zákona pro velmi malé kapky ($r = 10^{-6}$ m), jejichž pohyb je ovlivňován nárazy molekul vzduchu, Millikan výraz (4) ještě zpřesnil a provedl rozsáhlou sérii přesných pozorování, jejichž výsledkem byla hodnota $e = (1,592 \pm 0,002) \cdot 10^{-19}$ C. Tím byla ukončena druhá část Millikanových měření, kterými bylo odhaleno jedno z největších tajemství elektronu. Později byla měření elementárního náboje Millikanovou metodou opakována a jejich výsledkem bylo zpřesnění této důležité konstanty: $e = (1,602 10 \pm \pm 0,000 07) \cdot 10^{-19}$ C.

Jevy atmosférické optiky

RNDr. RUDOLF TULAK, Martin

Obecně známé optické jevy, jako odraz, lom, disperze a ohyb, vznikají také při průchodu světla zemskou atmosférou a vyvolávají řadu rozmanitých jevů. Zahrnujeme je do zvláštního oboru optiky, nazývané optikou atmosférickou, která má velký význam především v meteorologii a v dávných dobách hrála nemalou úlohu i v lidových pranostikách. Jde vesměs o takové světelné a barevné efekty, které jsou vyvolány mimozemskými světelnými zdroji, tj. Sluncem, Měsícem a ostatními hvězdami. Atmosféra může ovlivňovat světlo těchto zdrojů rozmanitým způsobem. Často jsme svědky krásných jevů, jako jsou červánky, duha, modrá barva oblohy, halové jevy kolem slunce nebo měsíce a podobně. V článku najde čtenář bližší vysvětlení těchto přírodních jevů i jiných úkazů vzácnějších, jako je fata morgána a zelený paprsek.

Soumrak a červánky

Soumrakem nazýváme tu část dne, kdy dochází k přechodu z denního osvětlení do noční temnoty nebo obráceně. Mluvíme tedy o večerním nebo ranním soumraku. Příčina soumraku je osvětlení vysokých vrstev atmosféry sluncem, které je pod horizontem. Jestliže začátek večerního (konec ranního) soumraku je přesně určen okamžikem západu (východu) slunce, pak jeho konec (začátek ranního) se stanoví méně přesně a podmíněčně. Při zapadání slunce pod horizont můžeme zaznamenat okamžik, kdy se soumrakové osvětlení stane tak slabé, že nelze bez umělého světelného zdroje číst nebo psát. Tento v praxi důležitý okamžik určuje konec tzv. občanského soumraku. Při bezoblačné obloze nastává tehdy, když slunce kleslo pod horizont přibližně o 6 až 8°. Konec tzv. hvězdářského soumraku nastává v okamžiku, kdy Slunce klesne pod obzor přibližně o 18° a jas oblohy se stane tak slabý, že je možno provádět astronomická pozorování i nejslabších hvězd. Trvání soumraku je v různých místech zemského povrchu určeno zeměpisnou šířkou, úhlem sklonu slunce a stavem atmosféry. Nejkratší soumrak je na rovníku, kde se jeho trvání po dobu roku prakticky nemění. S rostoucí zeměpisnou šířkou trvání soumraku se prodlužuje. V letní době, kdy se sblíží konec večerního soumraku se začátkem ranního, je od určité zeměpisné šířky, přibližně 60°, možné splnutí večerního a ranního soumraku, jsou to tzv. bílé noci.

Soumrak doprovázejí nádherné, někdy velmi efektní změny zbarvení oblohy na straně slunce. Tyto změny začínají ještě před západem slun-

ce a trvají i po východu slunce. Mají poměrně zákonitý charakter a nazývají se červánky. Charakteristické barvy červánků jsou purpurová a žlutá. Intenzita a pestrost barevných odstínů červánků se mění v širokých mezích v závislosti od obsahů aerosolů ve vzduchu. Když se slunce přibližuje před západem k horizontu, dostává postupně oranžové a často také červené zabarvení. Jeho jas se v tu dobu zmenšuje natolik, že je možno se do něho dívat nechráněným okem. Tehdy se začne obloha okolo slunce, také na opačné straně, zabarvovat. Zabarvují se i oblaky nacházející se na obloze, při čemž se nízké mraky zbarvují červeně, střední oranžově nebo žlutě a oblaky vysoké zůstávají nadále bílými. S přibližováním slunce k obzoru se intenzita zabarvení zvětšuje a když se slunce skrývá pod obzor, zůstane nad místem západu většinou jasná skvrna, zbarvená buď do oranžova nebo do červena. Po obloze se na obě strany od zapadlého slunce začínají šířit barevné pásy, jejichž zabarvení se zesiluje s rostoucím ponorem pod obzor. Souhrn těchto barevných pásů tvoří červánkovou úseč a nazývá se vlastně červánky. Na opačné straně oblohy pozorujeme optické jevy, které se vyznačují změnou barevných tónů. Převládá v nich barva purpurová a purpurofialová. Po západu slunce se v této části oblohy objevuje temná část, která je vlastně stínem země. Čím je slunce hlouběji pod obzorem, tím více se tato část šíří vzhůru, postupně se červánková úseč zužuje, barvy oblohy blednou a na konci občanského soumraku končí i červánky.

V horách, zvláště jsou-li vrcholy pokryty sněhem, pozorujeme za soumraku velmi zajímavé zbarvení hor. Obvykle bývají sněhové vrcholky hor za soumraku a za jasného počasí zbarveny do červena a hasnou v okamžiku západu. Brzy po západu slunce se však vrcholky a svahy hor znovu zbarvují jasně červenou barvou, při čemž toto zbarvení začíná obvykle o několik set metrů pod vrcholy, a potom se postupně šíří zdola nahoru. Toto zbarvení brzy opět mizí, ale během krátké doby se může opět objevit, ale má pak žlutavou nebo prupurovou barvu a značně menší intenzitu. Tento jev se nazývá soumrakové záření hor.

Mezi červánky a počasím byla již dávno pozorována spojitost. Na nutnost jejího studia naléhavě poukazovali četní meteorologové, kteří stanovili řadu místních příznaků nastávajícího počasí. Neobyčejná různotvárnost červánkových jevů a neúplná teorie nadávají zatím ještě možnost přesného řešení této důležité a zajímavé otázky. Pozorování dokazují, že červánkové jevy probíhají tím intenzivněji, čím je více prachu a vodní páry obsaženo v ovzduší. Příčinu jevů nutno hledat ve změnách spektrálního složení přímého a rozptýleného slunečního světla při průchodu velkými vrstvami ovzduší za soumraku. Při tom je nutné uvažovat nejen molekulární rozptyl, ale také rozptyl světla nejmenšími částicemi prachu a produkty kondenzace vodní páry.

Modrá barva oblohy

Je dobře známo, že jasná, bezoblačná obloha má namodralou barvu a bedlivé pozorování ukazuje, že barva oblohy mívá v různých úsecích klenby různé odstíny a časem se velmi silně mění. Svého času bylo předloženo mnoho hypotéz k objasnění barvy oblohy, ale správné objasnění bylo nalezeno teprve po vypracování teorie rozptylu světla v kalném prostředí. Spektrální složení oblohou vysílaného rozptýleného světla je zcela odlišné od spektrálního složení přímého slunečního záření, přičemž intenzita rozptýleného světla je nepřímě úměrná čtvrté mocnině vlnové délky. Částečkami, jež způsobují rozptyl, mohou být jednak vodní páry, zrnka prachu apod. Vnímáme-li očima toto rozptýlené světlo, dostáváme pocit modravé barvy. Pozorování ukázala, že stupeň modravosti oblohy prodělává v různých místech jak denní, tak i roční výkyvy různého charakteru. Na stupeň modravosti mají vliv také zeměpisné podmínky. Největší sytost se pozoruje v čistém vzduchu hor, ve stepích a v kontinentálních oblastech. Menší sytost je uprostřed oceánů a na břehu moře. S výškou a postupným zmenšováním hustoty vzduchu, tj. částic, na kterých nastává rozptyl, se obloha stává tmavší a přechází do sytě modré barvy. V stratosféře do černo-fialové barvy. Od částic s průměrem větším než 1,2 mikrometru odrážejí se paprsky všech vlnových délek již stejně. Proto oblaky, ozářené slunečním světlem, jeví se našemu oku jako bílé.

Duha

Duha se jeví jako barevný oblouk na pozadí oblaků naproti Slunci v případě, že prší za svitu slunce. Rozeznáváme tzv. hlavní duhu, její poloměr je asi 42° , a duhu vedlejší, s poloměrem kolem 52° . Duha nabývá největší rozlohy, je-li slunce v horizontu. Při vzrůstající výšce slunce oblouk duhy se úměrně zmenšuje. Hlavní duhu lze pozorovat, dokud výška Slunce nepřesáhne 42° a vedlejší dokud je výška menší než 52° . U hlavní duhy je červená barva vně a fialová uvnitř, v případě vedlejší duhy je obrácené pořadí barev. Nejnázornější výklad vzniku duhy lze podat pomocí geometrické a vlnové optiky. První vysvětlení vzniku duhy, třeba ne zcela úplné, podal již v roce 1637 Descartes, později je doplnil Newton.

Pozorování potvrzují, že čím větší kapky podmiňují duhu, tím ostřeji jsou v ní vyjádřeny jednotlivé barvy, a tím je duha užší. A naopak, jsou-li kapky malých rozměrů, je duha široká a skoro bílá s lehce zbarveným okrajem.

Zelený paprsek

Zajímavým optickým jevem v atmosféře je tzv. zelený paprsek. V okamžiku úplného západu nebo na počátku východu slunce, objeví

se na krátkou dobu zelené světlo. Je to způsobeno tím, že modré světlo je při průchodu atmosférou silněji zeslabováno než zelené. Modrý okraj je tedy slabý a vzhledem k němu vyniká s ním sousedící okraj zelený. Proto pozoruje v okamžiku, kdy klesá pod obzor poslední úseč slunečního kotouče, zelené zasvícení. Možnost vidět zelený paprsek závisí od složení atmosféry v okamžiku západu nebo východu slunce. Je-li slunce při západu červené, pak možno předem tvrdit, že se zelený paprsek neobjeví. Jestliže naopak při přibližování k obzoru slunce změnilo málo své bíložluté světlo a zapadá velmi jasné, pak je možné s velkou pravděpodobností očekávat objevení zeleného paprsku. Nutné však je, aby obzor byl vymezen ostrou čarou, bez jakýchkoli nerovností. Doba trvání zeleného záblesku je velmi krátká, v našich polohách sotva jednu sekundu.

Halové jevy

Halovými jevy nazýváme optické úkazy v atmosféře, vyvolané lomením nebo odrazem světla slunečního nebo měsíčního na krystalech ledu. Nejčastěji mají tvar prstenců, odkud je odvozen i jejich název (řecky halo). Nejčastěji pozorovaný tvar halových jevů je duhový kruh o poloměru 22° , obklopující Slunce nebo Měsíc a vznikající v řídké vrstvě vysokých oblaků. Ledové krystalky, jak je známo, náležejí k šesterečné soustavě a následkem spojení různých tvarů mohou mít nejrůznější podobu. Bílé halové jevy vysvětlujeme odrazem slunečních paprsků od bočních stěn krystalků. V lidové pranostice bývají halové jevy spojovány se změnou počasí. Věští příchod deště.

Malá kola a jiné jevy ohybu světla

Jsou-li Slunce nebo Měsíc zakryty řídkou pokrývkou oblaků můžeme často kolem nich vidět poměrně světlá duhová kola, která nazýváme malá kola a která nepočítáme k halovým jevům. Vnitřní část malého kola, tzv. aureola, přiléhá přímo k nebeskému tělesu a tvoří kruh, ve kterém přecházejí barvy od světle modré přes žlutou do červené, jež je na vnějším okraji. Rozměry aureoly, jejího červeného okraje, bývají velmi různé a někdy dosahují 5° . Rozložení barev a povaha celého jevu ukazuje, že jde o ohyb světla na vodních kapkách, ledových jehličkách, nebo i částech prachu. Kromě uvažovaného jevu malých kol, pozorujeme v atmosféře ještě celou řadu ohybových jevů, ke kterým patří Bishopův prstenec, představující věnec velkého rozměru, irizující oblaky, tj. oblaky blýskající se jako perleť a gloriola, vznikající na oblačném pozadí kolem stínů předmětů, umístěných mezi oblakem a zdrojem světla.

Zdánlivý tvar oblohy a jevy s tím spojené

Zdálo by se přirozené, že musíme vidět oblohu v podobě polokoule se středem v našem oku. Ve skutečnosti tomu tak není, neboť ji vidíme vždy jakoby ve svislém směru zploštělou. Příčinu toho je třeba vidět v psychologických a zčásti fyziologických vlastnostech zrakového vnímání, což musíme brát v úvahu při pozorování jevů na obloze. Pozorujeme-li například Slunce a Měsíc, přeceňujeme jejich úhlové rozměry, když se nacházejí poblíž horizontu, ale ve výškách větších než 35° je naopak nedoceňujeme. Proto se nám Slunce a Měsíc při východu a západu zdají 4 až 5krát většími než ve výšce kolem 60° . Také předměty zvedající se nad čarou horizontu, např. hory, většinou dosti značně výškově zveličujeme. Uvedené okolnosti nutno mít na zřeteli, máme-li správně odhadovat rozměry úkazů pozorovaných na obloze.

Jevy podmíněné astronomickou a terestrickou refrakcí

Světlo se nešíří atmosférou přímočaře, ale po zakřivené dráze následkem toho, že se index lomu vzduchu mění s výškou. Vlivem astronomické refrakce se prodlužuje trvání dne v našich šířkách o (8 až 12) min a v polárních krajinách může toto prodloužení dosahovat ještě větší velikosti. S refrakcí souvisí také chvění vzdálených předmětů, které možno pozorovat za horkých dnů a třpyt hvězd, nalézajících se poměrně nízko nad horizontem, ne výše než 50° , spočívající v tom, že hvězdy jako by se chvěly a měnily svůj jas a někdy i barvu. Příčina toho spočívá v neobyčejně velkých a nepravidelných změnách indexu lomu v těch vrstvách vzduchu, kterými procházejí paprsky přicházející do našeho oka.

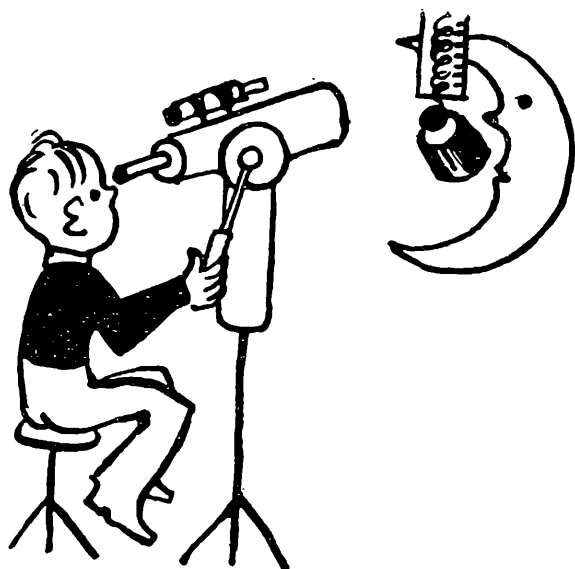
Jevy vyvolané terestrickou refrakcí jsou především úkazy vznikající zrcadlením na vrstvách ovzduší, známá fata morgána. Jsou podmíněny rozdílem hustot ve spodních vrstvách atmosféry, je-li odražený obraz nad předmětem, mluvíme o zrcadlení vzduchu horním, v opačném případě spodním. Do této skupiny jevů patří i všem řidičům dobře známé zrcadlení vzduchu nad zahřátou asfaltovou silnicí, která v dále působí dojmem mokré vozovky.

Ve stručném článku jsem nemohl popsat všechny optické jevy, které můžeme v atmosféře pozorovat. Zmínil jsem se jen o těch nejnápadnějších. Bude na čtenáři, aby pozvedl svůj pohled k obloze a sám se přesvědčil o impozantnosti popsanych jevů. Uvidí, že polovina krásy Země je ukryta v oblacích.

Použitá literatura

P. N. Tverskoj: Optické, elektrické a akustické jevy v atmosféře, NV, Praha 1955.

Fuka, Havelka: Optika, fyzikální kompendium, SPN, Praha 1961.



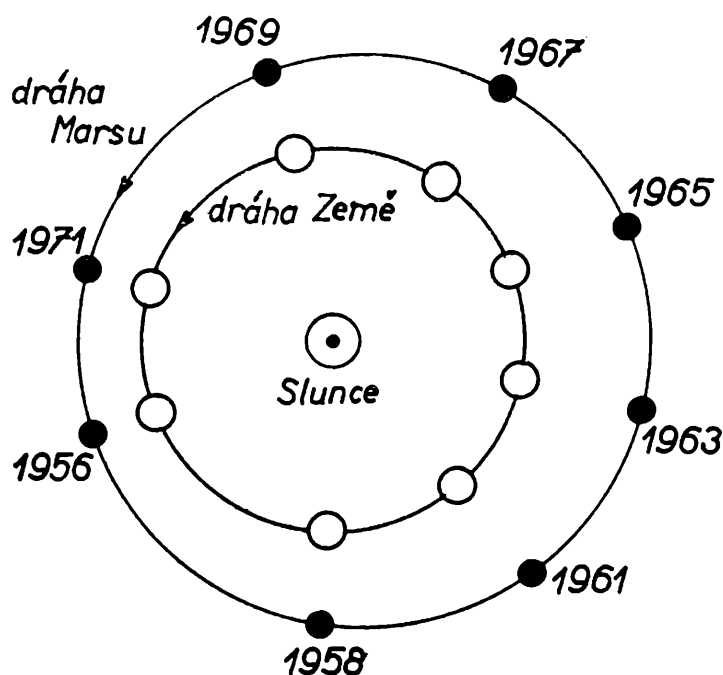
ASTRONOMIE

Velká opozice Marsu v r. 1971

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Planeta Mars obíhá kolem Slunce po eliptické dráze, jejíž velká poloosa je 1,524 astronomických jednotek, excentricita $e = 0,0934$. Siderická oběžná doba Marsu je 1,881 roku, synodická oběžná doba je 779,9 dní, tj. asi 2 roky 49 dní. Po uplynutí synodické oběžné doby se opakují stejné polohy Marsu vzhledem k Zemi a k Slunci. Nejdůležitější z těchto poloh je opozice, kdy je Mars na spojnici Slunce a Země na straně protilehlé Slunci (obr. 1). Při opozici jsou totiž nejlepší podmínky pro pozorování Marsu: Mars se přibližuje k Zemi na malou vzdálenost, vychází při západu Slunce, vrcholí kolem půlnoci a zapadá při východu Slunce. Kdyby byly dráhy Marsu a Země přesně kruhové, byla by vzdálenost Marsu od Země při opozici vždy stejná — 78 miliónů km a opozice by se opakovaly zcela pravidelně v intervalu 779,9 dní. Protože však obě planety mají výstřednou dráhu (Mars má třetí nejvýstřednější dráhu z 9 planet sluneční soustavy), opakují se opozice v intervalech od 2 roků 14 dnů do 2 roků 80 dnů. Následkem excentricity drah obou planet se mění také vzdálenost Marsu od Země při opozici, a to ve značně velkém intervalu od 108 miliónů km, je-li Mars při opozici v blízkosti afelia a Země v blízkosti perihelia (tzv. afeliová opozice Marsu), do 56 miliónů km, když je Mars v periheliu a Země v blízkosti afelia. Při této periheliové neboli velké opozici planety Marsu jsou nejlepší podmínky ke studiu Marsova povrchu. Velké opozice se opakují v intervalu 15 až 17 roků.

Letošní opozice Marsu připadá na 10. srpna. Mars bude ve vzdálenosti $56 \cdot 10^6$ km, průměr jeho kotoučku dosáhne $24,9''$ a jeho zdánlivá hvězdná velikost bude $-2,6^m$. V našich zeměpisných šířkách je však pozorování Marsu ztíženo tím, že bude poměrně nízko na jižním obzoru (kulminační výška pouze 18°), takže vizuálnímu pozorování bude velmi vadit neklid vzduchu a zákal v atmosféře. Na obr. 2 je nakreslena

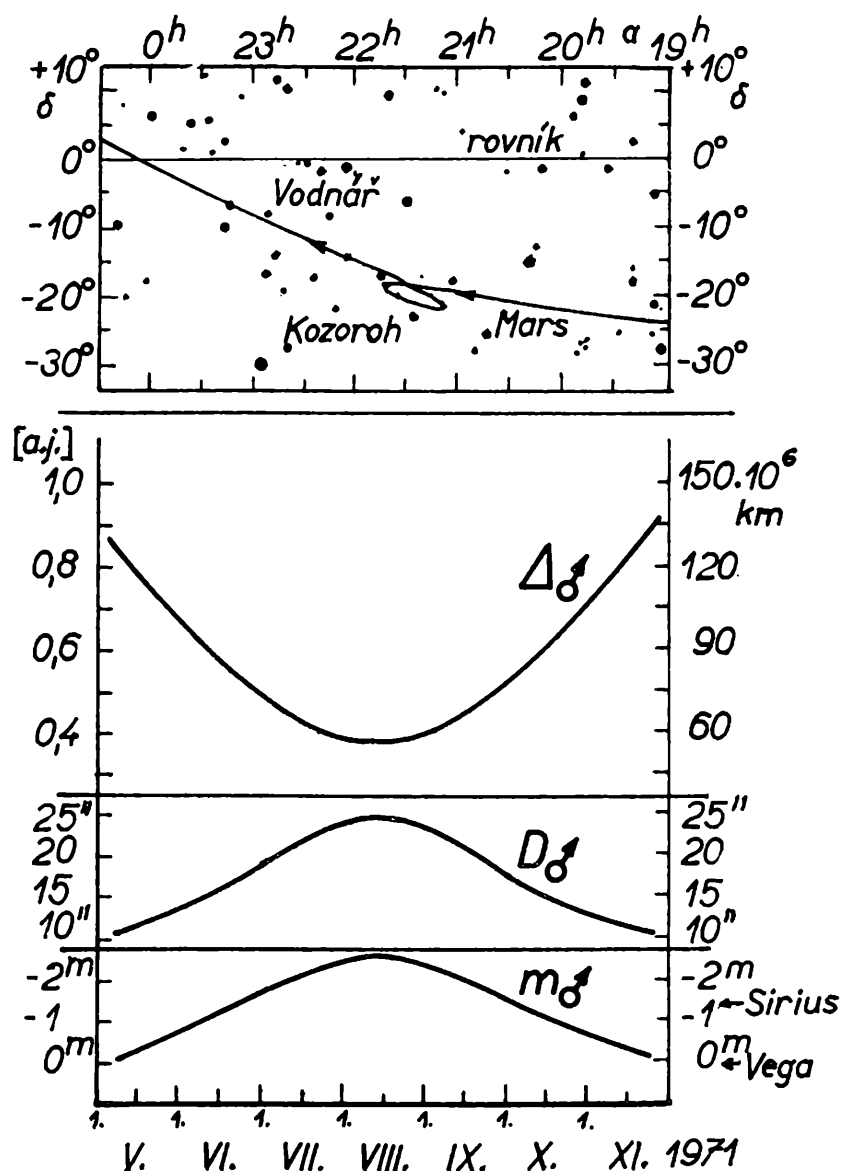


Obr. 1. Dráhy Země a Marsu kolem Slunce s vyznačenými roky opozic.

zdánlivá dráha Marsu mezi hvězdami od dubna do prosince 1971. Z obrázku je patrné, že se Mars promítá do souhvězdí Kozoroha; kličku vykoná v měsících červenci a srpnu. Na obr. 2 je také nakreslen průběh vzdálenosti Δ Marsu od Země jednak v astronomických jednotkách (a. j.), jednak v miliónech km, dále zdánlivý průměr D Marsova kotoučku a konečně zdánlivá hvězdná velikost. Pro srovnání jsou na stupnici hvězdných velikostí vyznačeny hvězdné velikosti Vegy a Síria.

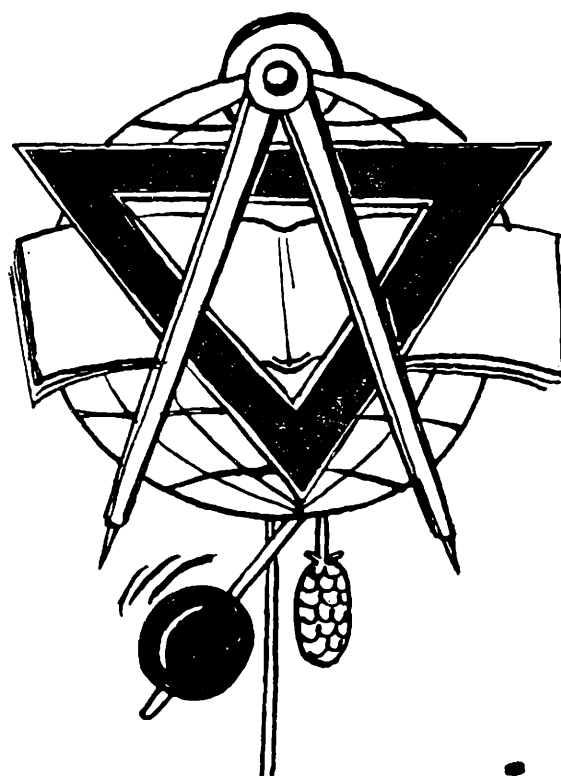
Pomocí hvězdářských dalekohledů můžeme na kotoučku planety uvidět zejména polární čepičku a řadu skvrn načervenalého zabarvení. Tmavé skvrny byly nazvány „moře“, světlé skvrny „pevniny“, kromě toho někteří pozorovatelé nakreslili do svých map mnoho „kanálů“. Dnes již bezpečně víme, že povrch Marsu velmi připomíná povrch Měsíce — je poset množstvím kráterů, jejichž výšky jsou menší než na Měsíci. Proměřením fotografií, které získala kosmická sonda Mariner 4 se ukázalo, že výšky kráterových valů jsou kolem 800 m. Celkový počet kráterů se odhaduje na 10 tisíc. Mars je tedy podobnější

Měsíci než Zemi a jeho atmosféra nebyla zřejmě nikdy hustší než je nyní. Na fotografiích Marinerem 4 v r. 1965 nebyly zjištěny hory, což svědčí proti tektonické a vulkanické činnosti. Mariner 4 měřil rovněž magnetické pole Marsu, avšak s negativním výsledkem. Následkem řídké atmosféry a velmi slabého magnetického pole můžeme očekávat, že na povrchu Marsu je intenzita kosmického záření asi stokrát větší než na povrchu Země. Americký úřad pro kosmické výzkumy (NASA) připravuje na rok 1971 další lety Marinerů směrem k Marsu a počítá se rovněž s vytvořením umělé družice Marsu. Na léta 1973 až 1975 je plánováno měkké přistání sondy Voyager na povrchu této planety.



Obr. 2. Dráha Marsu mezi hvězdami v době kolem opozice v roce 1971; vzdálenost Δ od Země, zdánlivý průměr D a hvězdná velikost m Marsu v období od května do listopadu. (Podle A. Zenkerta v čas. „Astronomie in der Schule“, 1970, č. 6.)

- RŮZNÉ
- RŮZNÉ
- RŮZNÉ



Sto let od založení české reálky v Prostějově

JOSEF GLIVICKÝ, Prostějov

Na Moravě byla otevřena první dvě česká gymnasia v Brně a Olomouci teprve v roce 1867. Po dvou letech následoval Přerov a teprve na podzim roku 1871 začalo vyučování na dvou českých reálkách v Prostějově a v Telči. Prostějovská reálka přešla postupně na vyšší, v Telči se tak stalo teprve později. V politicko i národnostně komplikovaných poměrech bývalého Rakousko-Uherska bylo zřizování českých středních škol provázeno nesmírnými těžkostmi. Německá menšina ovládající v první polovici 19. století celou zemi nemínila ustupovat ze svých mocenských pozic hospodářských ani kulturních.

Začátky prostějovské reálky byly svízelné, byl to úporný zápas o zabezpečení a existenci školy. Historie toho všeho byla vypsána v Památníku sedmdesátého pátého výročí reálky (Prostějov 1946) a pokud



jde o poslední léta školy zrušené v roce 1951 (poslední maturity v roce 1954) je to obsaženo v publikaci vydané k stému výročí založení reálky (Prostějov 1971).

Za prvního ředitele (filologa) Františka Martináka (1839—1878), schopného organizátora, dobrého pedagoga, prozíravého hospodáře a neúnavného pracovníka byla reálka matiční, hospodářské zabezpečení bylo umožňováno také podporou uvědomnělé veřejnosti v místě, nejbližším okolí i na celé Moravě. Ve své „Knize vzpomínek“ píše Jan Herben v kapitole o profesoru brněnského gymnasia Františku Bartošovi: „Když ještě reálka prostějovská byla vydržována ze sbírek, nosíval jsem měsíc co měsíc na poštu poukázku po šedesáti až sedmdesáti zlatých, které na ni Bartoš ušetřil.“ Když se Martinákovi podařilo ústav zkonsolidovat a začal jednat o převzetí ústavu do správy Moravské země, zemřel náhle teprve devětatřicetiletý. Jeho nástupcem se stal profesor olomouckého německého pedagogia Josef Lošťák (1840 až 1909) matematik a fyzik. Lošťák patřil mezi první zakladatele Spolku pro volné přednášky z matematiky a fyziky v Praze, ustaveného 28. března 1862 z něhož vzešla pozdější Jednota českých matematiků a fyziků. Členy založeného spolku byli většinou Češi, prvním předsedou spolku byl Němec Antonín Grunwald a po něm 6. 7. 1863 byl zvolen Josef Lošťák. Fr. Veselý v knize 100 let Jednoty československých matematiků a fyziků (Praha, SPN 1962) o něm napsal, že přednášel na schůzích 5. a 12. června 1862 česky (předtím se přednášelo jen německy). Tématem jeho přednášky bylo: „O kreslení sítí zeměpisných“ a také ve spolkové knize je o tom český zápis.

Lošťák navázal na úsilí svého předchůdce, aby reálka byla převzata do správy země a dosáhl toho v roce 1880. Poněvadž byl nebojácným a obětavým organizátorem velkého politického rozhledu a uvědomělým Čechem, postavil se proti němu Zemský výbor, většinou německý a prosadil i proti návrhu Zemské školní rady svoje rozhodnutí, aby Lošťák nebyl potvrzen ve funkci ředitele pozemštěného ústavu. Josef Lošťák se dobrovolně své funkce vzdal, aby nepoškodil zájmy školy; odešel do Olomouce a brzy na to se stal ředitelem nově zřízeného gymnasia v Uh. Hradišti a později českého učitelského ústavu v Příboře. V letech devadesátých byl jmenován zemským školním inspektorem a mimo jiné prosadil, aby persekvovaný Josef Úlehla se dostal z malé štace na Velkomeziříčsku na měšťanku do Příbora, kde mohl za spolupráce s Lošťákem úspěšně pokračovat ve svých reformních snahách ve výuce v přírodních vědách, zejména pak v počtech. Novým ředitelem Zemské vyšší reálky se stal matematik a fyzik Bartoloměj Navrátil (1848 až 1927), který učil na reálce už od roku 1872. Byl nejen dobrým pedagogem, ale pracoval i vědecky, publikoval nejen ve výročních zprávách reálky¹⁾, ale pravidelně přispíval i do Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky (v letech 1887—1902) a populární stati publikoval ve Vlčkově Osvětě (O spektroskopu 1892, O předvídání počasí 1897), v Kroku (Osmá třída školy reálné 1891, O principu Huygensově 1894), v časopise Paedagogium a také četná hesla v Ottově slovníku naučném. Bartoloměj Navrátil byl ředitelem do roku 1903 a podle svědectví bývalých žáků z jeho funkčního období (především vysokoškolských učitelů), byli profesori působící na reálce zvláště z přírodovědeckých disciplín vynikajících kvalit, takže reálka připravovala znamenitě budoucí inženýry, geometry, kandidáty profesory a jiné. Z učitelů matematiky, fyziky, kteří na ústavě delší dobu působili: R. Auerhan, Jan Bažant, dr. Jan Březina, Lad. Dopita, Josef Dunda, O. Hutterer, R. Janeček, Jan Jonáš, Josef Novotný, Celestin Sommer, Jan Wimmer.

Z matematicko fyzikálních témat ve výročních zprávách uvádím: v roce 1873 (první výr. zpráva) Josef Novotný, Křivky valené se zvláštním zřetelem ke kykloidě obecné, v roce 1879 Celestin Sommer, Theorie křivky určené v soustavě pravoúhlé rovnicí $x^4 - a^2x^2 + a^3y = 0$ (12 str., 1 příloha), 1888 J. Souček, Některé řešení rovnic trinomických provedené na tvaru $x^n - (a + 1)x + a = 0$, 1891 Jan Wimmer, O Gaussově přibližné kvadratuře, 1899 Jan Bažant, Theorie eliptického paraboloidu (10 str. s příl.), 1914 dr. Jan Březina, Ke vzniku a rozvoji fyzikálních cvičení na středních školách.

¹⁾ Ve výroční zprávě 1876 otiskl stať Jak smýšlel Kant o matematice? (10 str., 1881), O theorii map, jichž poledníkové a rovnoběžkové kruhy jsou přímky na sobě kolmé (12 str.) a v r. 1899 O jednoduchém zařízení rozváděcího reostatu pro konstantní vysoké napětí (10 str.).

Počtem žáků patřila prostějovská reálka k nejsilnějším, po první světové válce měla ve školním roce 1923–24, 829 žáků. Vychovala velké množství vynikajících inženýrů, techniků, učitelů všech kategorií: od vesnických kantorů až k vysokoškolským profesorům, správních úředníků i podnikatelů. V dodatku Památníku reálky publikoval maturant z roku 1934 ing. Arnošt Veselý, CSc., stať „Realisté ve službách vědy“, v níž ve stručných medailoncích shrnuje výsledky vědecké práce asi čtyřiceti absolventů „mladších“ (to je těch, kteří maturovali po roce 1910). Podrobné bibliografie knih a pojednání těchto vědců uložil do Okresního archívu v Prostějově k badatelským účelům. Stručné připomínky k vědecké práci vynikajících absolventů z prvních čtyřiceti let reálky jsou pak uvedeny v Památníku z roku 1946.

A. L. Cauchy v závodě s Henri Mondeuxem

Doc. VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, ČVUT Praha

Roku 1840 předváděl čtrnáctiletý „zázračný počtář“ Henri Mondeux na Ecole polytechnique v Paříži své umění. Henri Mondeux nepatřil k těm matematickým „umělcům“, kteří měli vedle báječné početní paměti jen střední nebo jen nepatrné duševní schopnosti. Mondeux měl nadání vynikajícího matematického postřehu a určité matematické vzdělání, i když jen úměrné svému věku.

Na představení byli přítomni také studijní ředitel ústavu, tehdy znamenitý mechanik Coriolis a nescházel ani již tehdy slavný matematik Cauchy. Zastavme se nejprve u něho.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) byl jedním ze tří velmi známých profesorů École polytechnique v prvních jejich letech spolu se Simeonem Poissonem a Josephem Fourierem. Všichni tři byli známí svými objevy v teorii matematiky, o jejichž významu se dozvíte na vysoké škole, ale i aplikacemi matematiky v mechanice a fyzice. Jsou známy Poissonovy metody řešení diferenciálních rovnic, Poissonova konstanta v teorii elasticity, Poissonův integrál v počtu pravděpodobnosti a Poissonova rovnice v teorii potenciálu.

Fourier je znám jako autor díla (česky zvaného) Analytická teorie tepla, metodou matematické fyziky, která se týkala integrace parciálních diferenciálních rovnic při předem daných okrajových podmínkách, dále tzv. Fourierovými řadami, které se staly opět dobře propracovaným prostředkem teorie parciálních diferenciálních rovnic. Fourier uvedl do matematiky otázku, co je třeba rozumět pod pojmem funkce, a tak

přispěl k podrobnějším úvahám, které se zabývaly otázkou přesnosti matematických důkazů.

Cauchy patří k zakladatelům matematické teorie elasticity, ale zasloužil se hlavně o teorii funkcí jedné komplexní proměnné, již před tím studovanou D'Alembertem, a o důslednou snahu o přesnost v analýze, a to s Gaussem a naším Bolzanem. To, co vykonal Eudoxos, spoluautor Eukleidových Základů v době po pádu athénské demokracie, začal Cauchy dovršovat exaktně s mnoha jinými matematiky v etapě rozšiřující se industrializace. Cauchyho Základy infinitesimálního počtu jsou v dnešních vysokoškolských učebnicích matematiky. Cauchy byl přítelem spisovatele Balzaca, byl legitimista a roayalista. Po roce 1830 byl také v Praze a vrátil se v roce 1836 do Paříže.

Představení na École polytechnique začíná. Na výzvu předkládají studenti různé početní úkoly. Mladý Mondeux je rychle a správně řeší. Potom přichází těžší otázka. Mondeux skloní hlavu, přivře oči, má neklidné ruce a chvějící se rty a počítá. Je již blízko výsledku, když se zvedne v sále vysoký muž a předvede triumfálně svůj správný výsledek. V sále si šeptají jeho jméno — Cauchy. Vtom se ujme Coriolis úlohy obhájce čtrnáctiletého Mondeuxe a požádá jeho nebezpečného rivala Cauchyho, aby kladl on sám otázky. Cauchy uloží mladíkovi, aby řekl nejdříve čtvrté mocniny dvaceti prvních přirozených čísel. Když to Mondeux provede, žádá Cauchy, aby sečetl těchto dvacet mocnin.

Mladý virtuos skloní opět hlavu, přivře oči a počítá. Každý jednotlivý krok v úvaze je znát na slabém rozčilení a na gestu počtáře. Ale také Cauchy má přivřené oči, náhle je otevře a křikne 722 666. Opět zvítězily zbraně matematika nad neškolenou silou počtáře přesto, že byla tato nadána schopností paměti a správného myšlení.

Cauchy sám dosud nikdy nekrácel po obtížné cestě, kterou uložil svému protivníkovi. Netrápil se s výpočtem jednotlivých mocnin a s jejich sčítáním, ale užil obecného vzorce

$$S(n^4) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 5},$$

který měl dosud v paměti, zvláště když v čase před tímto vystoupením pracoval v této partii matematiky a odvodil tento obecný vzorec. Proto mohl z paměti bez větší námahy dojít k součinu 574 · 1259, který potom snadno z paměti počítal.

„Cauchy a triché“ (Cauchy podváděl) říkali potom studenti, kteří znali tento vzorec. V jistém smyslu nebyla tehdy celá matematika nic jiného, než dílna, kde se kují zbraně, které propůjčují neomezenou převahu tomu, kdo umí s nimi pracovat, takovou převahu, jakou má vojsko vyzbrojené zbraněmi proti divochům, kteří používají jen šípů a luků, třeba by byli sebe schopnější a dovedli jich užít co nejobratněji.

Ze zahraničních časopisů

V NDR vychází časopis ALPHA, obdoba našich Rozhledů, jen s tím rozdílem, že je věnován jen matematice. Hodně místa je v něm věnováno příkladům (nejen z MO) a tím se čtenáři připravují na MO. Snad se tím dají vysvětlit úspěchy družstva NDR na MMO. S důkladností, která je snad jen Němcům vrozena, mají všechny soutěžící rozděleny do 7 skupin (Olympiadeklasse 5 až Olympiadeklasse 11/12). Zde uvádíme příklady z „Olympiadeklasse 9“, které byly uveřejněny v 1. č. ročníku 1971. Kdyby si někteří čtenáři přáli příklady z jiné skupiny, nechť nám napíší, rádi jim vyhovíme.

1. Jeden ze čtyř přátel — nazveme je A, B, C, D — měl u sebe schovaný dopis (s vědomím ostatních). Na otázku, kdo má dopis, odpověděl každý z nich třemi větami, z nichž vždy nejméně dvě jsou pravdivé.

- A. 1. Jestliže nemám dopis já, má jej C.
2. Nemám dopis.
3. Můj přítel má dopis.
 - B. 1. Dopis mám buď já, nebo C.
2. Všechny výpovědi kamaráda A jsou pravdivé.
3. D nemá dopis.
 - C. 1. Když nemám dopis já, pak jej má B.
2. Já mám dopis.
3. B neučinil žádnou nesprávnou výpověď.
 - D. 1. Já nemám dopis.
2. Kamarád A buď dopis má, nebo jej nemá.
3. B vymyslel tuto hru.
- Určete, kdo má dopis.

2. Jestliže každé z přirozených čísel a , b lze vyjádřit jako součet druhých mocnin dvou přirozených čísel, pak tutéž vlastnost má součin ab .
Příklad: $a = 2^2 + 3^2$, $b = 5^2 + 7^2$; $ab = 962 = 11^2 + 29^2$.

- a) Udejte sami nějaký příklad.
- b) Dokažte vyslovenou větu.

3. Jsou dána dvě reálná čísla $m \neq 0$, n . Budiž $f(x) = mx + n$ funkce definovaná pro všechna reálná x .

- a) Zjistěte pro $m = 1$, $n = 0$ všechna čísla x_0 , pro něž platí $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$.
- b) Zjistěte při libovolně zvolených číslech $m \neq 0$ a n všechna čísla x_0 , pro něž $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$.

4. Pravidelný jehlan trojboký má podstavu ABC a hlavní vrchol D . Vypočítejte objem tohoto jehlanu, jestliže délka podstavné hrany je a a jestliže úhel pobočné stěny s podstavou je 60° . S. H.

SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

trentième

trentième *m*

triadique

triangle *m*

triangle acutangle

triangle équilatéral

triangle isocèle (též isocèle)

triangle rectangle

triangle sphérique

triangulaire

inégalité *ž* triangulaire

triangulation *ž*

trièdre

trièdre *m*

trigonométrie *ž*

trigonométrique

trilinéaire

trillion *m*

trinôme *m*

triple

triplement

triplet *m*

trirectangle

trièdre *m* trirectangle

trisection *ž*

trivial, *e*, aux

trois

règle *m* de trois

troisième

třicátý

třicetina

triadický

trojúhelník

ostroúhlý trojúhelník

rovnostranný trojúhelník

rovnoramenný trojúhelník

pravoúhlý trojúhelník

sférický trojúhelník

trojúhelníkový

trojúhelníková nerovnost

triangulace

trojhranný

trojhran

trigonometrie

trigonometrický

trilineární

trilión

trojčlen

trojnásobný

trojnásobně

trojice

mající tři pravé úhly

trojhran, jehož všechny tři úhly
jsou pravé

trisekce, rozdělení na tři (stejně)
části

triviální

tři

trojčlenka

třetí

troisième *m*
tronc *m*
tronc de cône *m*
tronquer
cône *m* tronqué

třetina
peň, trup
komolý kužel
oklestit, zkomolit
komolý kužel

U

un, une
unicité *ž*
uniforme
convergence uniforme
mouvement *m* uniforme
uniformément
converge uniformément
mouvement *m* uniformément
accéléré
mouvement *m* uniformément
varié
unique
uniquement
uniquement déterminé
unitaire
vecteur *m* unitaire
unité *ž*
universel, *clle*
univoque

jeden
jednoznačnost
stejnoměrný, rovnoměrný
stejnoměrná konvergence
rovnoměrný pohyb
stejněměrně, rovnoměrně
stejněměrně konverguje
pohyb rovnoměrně zrychlený
pohyb rovnoměrně zrychlený či
zpomalený
jediný
jedině, jednoznačně
jednoznačně určený
jednotkový, unitární
jednotkový vektor
jednotka
univerzální
jednoznačný

Anketa

Redakce Rozhledů matematicko fyzikálních má upřímnou snahu se svými články přiblížit co nejvíce přáním a zájmu svých čtenářů.

Proto se na vás obrací s touto anketou. Prosíme vás, abyste nám odpověděli na další tři otázky nejpozději do 31. května 1971.

1. Které články v Rozhledech se vám nejvíce líbily a proč?

2. Které články vás nejméně zaujaly a proč?

3. Vaše stáří (své jméno a zaměstnání nemusíte uvádět).

Došlého materiálu bude použito jen pro interní potřebu redakce k zlepšení obsahu a nebude otištěn.

Odpovědi sub 1, 2, 3 zašlete laskavě na korespondenčním lístku na adresu redakce.

rozhledy

**MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ**

10

ROČNÍK 49, 1970-1971, ČERVEN



**nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu**

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha,
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha
s redakční radou

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 29 45 29

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: vzorná učitelka Mil. Helleroová, Teplice.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1971.

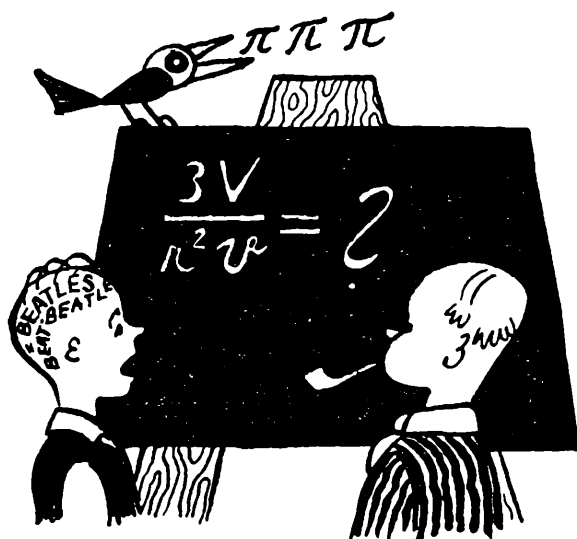
**ROČNÍK 49
ČERVEN 1971**

10

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

OBSAH

RNDr. S. Trávníček, CSc.: Na koho to slovo padne	433
M. Dytko: Cévoval věta	438
O. Odvárko: Booleovské výpočty v množinové algebře	441
L. Ferjenčík: Vyjádření hodnot goniometrických funkcí druhými odmocninami	444
Doc. K. Drábek, CSc.: Základy cyklografie (dokončení)	450
S. Zhejbal: Šikmý vrh vzhůru z nakloněné roviny	456
Dr. J. Široký - Dr. M. Široká: Sedmá planeta Uran	460
XXI. ročník matematické olympiády	462
RNDr. Fr. Harant, CSc.: Vzpomínka na Vincence Jarolímka	464
J. Kotyk: Robert Wilhelm Bunsen	466
S. Horák st.: Demokritos z Abdéry	470
Matematické a fyzikální zábavy	471
Záhady ze Zmatlíkova zápisníku	472
Nejmladším čtenářům	473
Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český	3. a 4. str. obálky.



MATEMATIKA

Na koho to slovo padne...

RNDr. STANISLAV TRÁVNÍČEK CSc., Olomouc

Skupinka dětí si začíná hrát. Kdo z nich má zahájit hru? Děti tuto otázku řeší tak, že si stoupnou do kroužku a např. nejstarší začne rozpočítávat. Třeba:

*U potoka roste kvítí,
říkají mu petrklíč.
Na koho to slovo padne,
ten musí jít z kola pryč.*

Mohou též zvolit rozpočítadlo Josefa Kožíška:

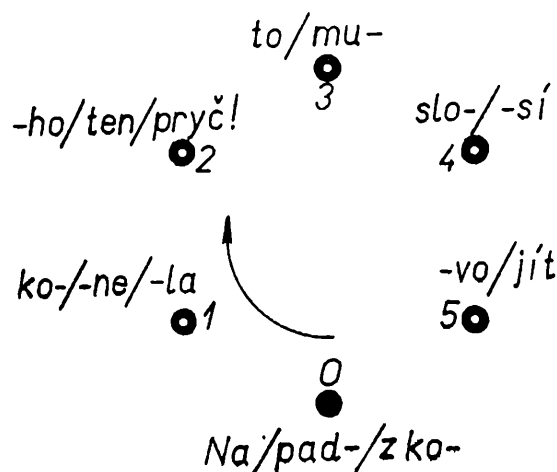
*Šla veverka na jahody,
utíkala kolem vody,
jahody se rozsypaly,
do studánky napadaly.
Běž, panenka, běž,
veverušku těš!*

Sami si jistě vzpomenete i na jiná rozpočítadla.

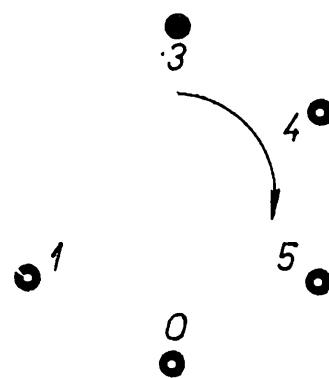
Rozpočítávání dodává zdání nahodilosti výsledku, ovšem ve skutečnosti je to z dětí, které zůstane poslední a zahajuje hru, určeno už v okamžiku, kdy se s rozpočítáváním začalo, neboť pro daný počet n dětí a dané rozpočítadlo o r slabikách je tak výsledek už jednoznačně určen. Obřad rozpočítávání však pokračuje, děti postupně odcházejí „z kola pryč“, a my se zatím podíváme na jejich hru očima matematiky.

Mějme n dětí ($n \geq 2$ je přirozené číslo), které stojí v kroužku. Každému z nich přiřadíme postupně jedno z čísel $0, 1, 2, \dots, n-1$ (např. ve smyslu chodu hodinových ručiček). Každé z dětí máme nyní pojmenováno příslušným číslem; pro stručnost budeme dále zpravidla např. místo „dítě 4“ psát jen „4“.

Příklad 1. Mějme $n = 6$ dětí a rozpočítadlo. „Na koho to slovo padne, ten musí jít z kola pryč“, které má $r = 15$ slabik. Začneme rozpočítávat u „0“. Pak ukazujeme postupně na „1“, „2“, atd. a u každého dítěte řekneme jednu slabiku rozpočítadla (obr. 1). Na koho padne slabika



Obr. 1



Obr. 2

pryč, opustí kroužek. Vidíme, že jako první odchází „2“. Rozpočítávání pokračuje od „3“ v kruhu bez „2“ (obr. 2). Lehce tak zjistíme, že ve 2. kole vypadne „1“, ve třetím kole odejde „5“, pak „4“ a nakonec „0“. Zůstává „3“, které zahajuje hru.

Označme z číslo dítěte, které zůstane po rozpočítání poslední (a zahajuje hru). Dohodněme se, že začneme v 1. kole rozpočítávat vždy u „0“ a ve smyslu rostoucích čísel. Pak rozpočítáváním je definováno jisté pravidlo φ , které ke každému přirozenému číslu $n \geq 2$ (počtu dětí) a ke každému přirozenému číslu r (počtu slabik rozpočítadla) přiřazuje jediné číslo z (z je jedno z čísel $0, 1, 2, \dots, n-1$). Zapišeme $z = \varphi(n, r)$; φ je tedy jistá funkce dvou proměnných. V předchozím příkladě jsme např. zjistili, že $\varphi(6, 15) = 3$.

Cvičení 1: Pomocí rozpočítání určete $\varphi(5, 30)$ (užijte 1. rozpočítadla tohoto článku) a $\varphi(4, 42)$ (užijte 2. rozpočítadla tohoto článku).

Dalším naším cílem bude určení pravidla φ , tj. odvození vzorce, pomocí něhož se dá ke každé dvojici (n, r) vypočítat příslušné z .

Nejprve si uveďme několik pojmů, kterých při odvození vzorce použijeme. Nechť n je dané číslo. V množině $\mathbf{M}$ všech nezáporných čísel definujeme relaci $\mathbf{K}_n : (x, y) \in \mathbf{K}_n \Leftrightarrow x$ a y dávají při dělení číslem n týž zbytek (jinak: číslo $|x - y|$ je dělitelné číslem n). Čtenář se sám lehce přesvědčí, že relace $\mathbf{K}_n$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tj., že je to

ekvivalence. Relaci K_n nazveme *kongruence podle modulu n* . Množina M se ekvivalencí K_n rozloží na n tříd (jsou to tzv. *zbytkové třídy*), přičemž tedy do téže třídy patří všechna čísla z M , která při dělení číslem n dávají týž zbytek. Tak např. pro $n = 2$ dostáváme dvě třídy: čísla sudá a čísla lichá. Čtenář, který nezná kongruence a chtěl by se s nimi seznámit podrobněji, může použít např. knížky Aloise Apfelbecka „Kongruence“ z edice „Škola mladých matematiků“.

V každé zbytkové třídě existuje nejmenší číslo; je to zřejmě jedno z čísel $0, 1, \dots, n-1$. Označme m_n zbytek při dělení čísla m číslem n . Např. $15_2 = 1$, $8_4 = 0$, $12_7 = 5$. Pro všechna m z dané zbytkové třídy je m_n jedno a totéž číslo, je to jedno z čísel $0, 1, \dots, n-1$ a je to nejmenší ze všech čísel dané zbytkové třídy.

Při odvozování vzorce pro pravidlo φ uvažujeme nejprve jednoduchý případ $n = 2$. Pak je zřejmé, že každé rozpočítadlo s lichým počtem slabik vyřazuje „0“, tj. $z = 1$, a každé rozpočítadlo se sudým počtem slabik vyřazuje „1“, tedy $z = 0$. Proto

$$\varphi(2, r) = \begin{cases} 0 & \text{pro } r \text{ sudé} \\ 1 & \text{pro } r \text{ liché,} \end{cases}$$

nebo jinak

$$\varphi(2, r) = r_2. \quad (1)$$

Nyní odvodíme rekurentní vzorec pro $\varphi(n, r)$, tj. vzorec, kterým lze $\varphi(n, r)$ vypočítat pomocí $\varphi(n-1, r)$. Prosím čtenáře, aby tomuto odvození věnoval zvýšenou pozornost.

Označme $z^{(1)}$ číslo, které při rozpočítávání vypadne jako první. Je-li $r \leq n$, pak máme $z^{(1)} = r - 1$ (rozpočítávání začíná u „0“!). Je-li $r > n$, pak existuje přirozené číslo p tak, že $pn < r \leq (p+1)n$. Pak při rozpočítávání obejdeme p -krát dokola celý kruh; např. na „0“ ukážeme při první slabice a dále při $(n+1)$ -ní, $(2n+1)$ ní, $\dots$, $(pn+1)$ -ní. Po p obězích tedy ukážeme:

při $(pn+1)$ -ní slabice na „0“,
 při $(pn+2)$ -hé slabice na „1“,
 $\dots$
 při $(pn+k)$ -té slabice na „ $k-1$ “

Ze vztahu $r = pn + k$ máme $k = r - pn$, tedy $z^{(1)} = r - pn - 1 = r - 1 - pn$. Z nerovnosti $pn < r \leq (p+1)n$ máme postupně

$$\begin{aligned} 0 &< r - pn \leq n, \\ -1 &< r - 1 - pn \leq n - 1, \\ 0 &\leq r - 1 - pn \leq n - 1. \end{aligned} \quad e$$

Vzhledem k této nerovnosti a ježto zřejmě číslo $r - 1 - pn$ patří do

téže zbytkové třídy jako číslo $r - 1$, je $z^{(1)}$ zbytkem při dělení čísla $r - 1$ číslem n , tj.

$$z^{(1)} = (r - 1)_n, \quad (2)$$

přičemž se tento výsledek shoduje i s případem $r \leq n$.

Po odchodu „ $z^{(1)}$ “ se pokračuje v rozpočítávání u následujícího čísla, kterým je $z^{(1)} + 1$ pro $z^{(1)} < n - 1$ a 0 pro $z^{(1)} = n - 1$. V obou těchto případech je tímto následovníkem čísla $z^{(1)}$ zbytek ze zbytkové třídy obsahující číslo o 1 větší než $r - 1$, tj. obsahující číslo r . Proto druhé kolo rozpočítávání začíná u „ r_n “. Situace před druhým kolem je tedy taková, že máme $n - 1$ dětí a rozpočítávání začínáme u „ r_n “. Předpokládejme znalost hodnoty $\varphi(n - 1, r)$. Je-li $\varphi(n - 1, r) = 0$, pak po rozpočítání zůstane nakonec to číslo z , u něhož toto rozpočítání začalo, tj. r_n ; $z = r_n + 0 = r_n$. Je-li $\varphi(n - 1, r) = 1$, zůstane nakonec to číslo z , které následuje po tom, u něhož se s rozpočítáváním začalo, tj. $z = (r_n + 1)_n$. Je-li tedy $\varphi(n - 1, r) = k$ ($0 \leq k \leq n - 2$), pak z je k -té následující číslo po r_n , takže $z = (r_n + k)_n$, přičemž index n je třeba připojit proto, že $r_n + k$ může přejít přes „0“; v tomto případě neplatí přímo $z = r_n + k$, ale je o n menší a patří proto do téže zbytkové třídy jako $r_n + k$. Po dosazení za k tak dostáváme výslednou rekurentní formuli

$$\varphi(n, r) = (r_n + \varphi(n - 1, r))_n. \quad (3)$$

Pomocí (1) a (3) lze nyní obdržet vzorce pro výpočet $\varphi(n, r)$. Postupně tak dostáváme

$$\varphi(3, r) = (r_3 + \varphi(2, r))_3 = (r_3 + r_2)_3$$

a podobně

$$\varphi(4, r) = (r_4 + (r_3 + r_2)_3)_4,$$

atd. Obecně

$$\varphi(n, r) = (r_n + (r_{n-1} + (\dots + (r_4 + (r_3 + r_2)_3)_4 \dots)_{n-1})_n. \quad (4)$$

Příklad 2. Ověřme výpočtem výsledek příkladu 1. Máme $n = 6$, $r = 15$, tedy podle (4)

$$\varphi(6, 15) = (15_6 + (15_5 + (15_4 + (15_3 + 15_2)_3)_4)_5)_6.$$

Platí: $15_6 = 3$, $15_5 = 0$, $15_4 = 3$, $15_3 = 0$, $15_2 = 1$, tedy

$$\begin{aligned} \varphi(6, 15) &= (3 + (0 + (3 + (0 + 1)_3)_4)_5)_6 = (3 + (0 + (3 + 1)_4)_5)_6 = \\ &= (3 + (0 + 0)_5)_6 = (3 + 0)_6 = 3. \end{aligned}$$

Výsledek $\varphi(6, 15) = 3$ souhlasí ovšem s výsledkem 1. příkladu.

Cvičení 2: Provedli jste cvičení 1? Pak si rovněž ověřte výsledek výpočtem podle vzorce (4).

Je zřejmé, že pro získání z pomocí rozpočítání se užije dané rozpočítadlo $(n - 1)$ -krát. Děti si teď mohou rozpočítávání zpestřit tím, že místo $(n - 1)$ -násobného opakování daného rozpočítadla užijí postupně $n - 1$ rozpočítadel s počtem slabik $r^{(1)}$, $r^{(2)}$, ..., $r^{(n-1)}$. Pak přesně stej-

ným postupem, jako při odvozování vzorce (4), dostáváme, že číslo z , které po tomto rozpočítání zbude jako poslední, je určeno vzorcem

$$z = (r_n^{(1)} + (r_{n-1}^{(2)} + (\dots + (r_4^{(n-3)} + (r_3^{(n-2)} + r_2^{(n-1)})_3)_4 \dots)_{n-1})_n. \quad (5)$$

Označme si nyní $z^{(k)}$ to z čísel $0, 1, \dots, n-1$, které odchází „z kola pryč“ jako k -té. Už výše jsme zjistili, že

$$z^{(1)} = (r^{(1)} - 1)_n, \quad (6_1)$$

a opět stejným způsobem jako při odvození vzorce (4) dostáváme postupně

$$z^{(2)} = (r_n^{(1)} + (r^{(2)} - 1)_{n-1})_n, \quad (6_2)$$

$$z^{(3)} = (r_n^{(1)} + (r_{n-1}^{(2)} + (r^{(3)} - 1)_{n-2})_{n-1})_n \quad (6_3)$$

$$z^{(k)} = (r_n^{(1)} + (r_{n-1}^{(2)} + (\dots + (r_{n-k+2}^{(k-1)} + (r^{(k)} - 1)_{n-k+1})_{n-k+2} \dots)_{n-1})_n, \quad (6_k)$$

$k = 1, 2, \dots, n-1$. Označíme-li ještě $z^{(n)} = z$, pak ovšem platí, že všechna čísla $z^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$ jsou navzájem různá.

Ukažme si nyní jedno zajímavé použití vzorců (5), (6_k), a to k přípravě jednoho typu karetních triků. Mějme n karet, pro jednoduchost je označme A, B, C, D, ... Srovnáme je na sebe a nyní bereme shora po jedné kartě a střídavě dáváme jednu kartu dospodu balíčku a jednu na stůl. Při vhodném uspořádání původního balíčku klademe karty na stůl přesně podle abecedy, tedy jako první odkládáme kartu A, příště B, pak C atd. až do vyčerpání celého balíčku. V tomto jednoduchém příkladě jde v podstatě o rozpočítání n objektů rozpočítadlem o $r = 2$ slabikách, neboť karty kladené dospodu balíčku nemění pořadí „v cyklickém smyslu“ a karty kladené na stůl, to jsou objekty, které jdou „z kola pryč“.

Tento karetní trik lze použít ve složitější podobě. Určíme (a ohlásíme) předem přirozená čísla $p_1, p_2, \dots, p_k$ a $q_1, q_2, \dots, q_k$, kde $q_1 + q_2 + \dots + q_k \geq n$ a pak z balíčku karet klademe postupně p_1 karet dospodu balíčku, q_1 karet na stůl, p_2 dospodu balíčku, q_2 na stůl atd. Při vhodném uspořádání karet v balíčku pak klademe karty na stůl přesně podle abecedy.

Přestože je každému zřejmé, že je balíček karet připravený, vzbuzuje tento trik zájem a pozornost zejména tím, že budí u diváků snahu „přijít věci na kloub“ a zjistit, jak lze karty pro tento účel připravit. Je možno postupovat buď experimentálně nebo provést výpočet pořadí užitím vzorců (5), (6_k). Přitom je třeba si uvědomit, že položení p karet dospodu balíčku znamená, že $(p+1)$ -ní položíme na stůl, tj. jde o použití rozpočítadla o $r = p+1$ slabikách, a že položení q po sobě jdoucích karet na stůl znamená použití $q-1$ rozpočítadel o $r = 1$ slabice.

Příklad 3. Mějme balíček o 8 kartách. Chceme jej připravit tak, aby $p_1 = p_3 = p_5 = \dots = 1$, $p_2 = p_4 = p_6 = \dots = 2$, $q_i = 1$. (Popište slovy, jakým způsobem se budou karty z balíčku brát!) Užijeme tedy rozpočítadla, kde $r^{(1)} = r^{(3)} = \dots = 2$, $r^{(2)} = r^{(4)} = \dots = 3$. Užitím vzorců (6_k), (5) vypočteme: $z^{(1)} = 1_8 = 1$, $z^{(2)} = (2_8 + 2_7)_8 = 4$, $z^{(3)} = (2_8 + (3_7 + 1_6)_7)_8 = 2$ a podobně $z^{(4)} = 2$, $z^{(5)} = 5$, $z^{(6)} = 3$, $z^{(7)} = 0$, $z^{(8)} = z = 7$. Karty pak do balíčku položíme tak, aby A bylo na místě $z^{(1)}$, B na místě $z^{(2)}$ atd., takže vzhledem k vypočteným hodnotám máme $A \rightarrow 1$, $B \rightarrow 4$, $C \rightarrow 6$, $D \rightarrow 2$, $E \rightarrow 5$, $F \rightarrow 3$, $G \rightarrow 0$, $H \rightarrow 7$. Přitom ovšem nahoře v balíčku leží „0“, pod ní „1“ atd., takže hledané pořadí karet v balíčku je G, A, D, F, B, E, C, H.

Jsou známy i jiné úlohy tohoto typu. Některé jsou uvedeny např. ve známé knize B. A. Korděmského (*Matematické prostocviky*): *Kocour a myši*, *Zápalky kolem mince*, *Los padl na čížka a sedmihláska*, kde se však řeší experimentálně pomocí „rozpočítání“.

Vraťme se na závěr ještě k původnímu problému rozpočítání dětí. Vzorec (4) platí pro libovolné přirozené číslo r ; můžeme lehce ověřit, že pro větší r se určí z výpočtem dokonce rychleji, než rozpočítáním. Uvedme zvlášť výrazný příklad a považujme na chvíli známou „Polámal se mravenček“ za rozpočítadlo. Je tu $r = 150$ a máme-li např. $n = 5$, pak snadno vypočteme $150_5 = 0$, $150_4 = 2$, $150_3 = 0$, $150_2 = 0$, tj. $\varphi(5, 150) = (0 + (2 + (0 + 0)_3)_4)_5 = 2$, zatímco rozpočítávání by trvalo mnohem déle. U nejdelšího rozpočítadla, které je autorovi známé, je $r = 55$, ale jsou jistě i delší. Podobně u nejkratšího dětského rozpočítadla známého autorovi je $r = 13$. Teoreticky nejmenší r je ovšem $r = 1$ (tohoto případu jsme skutečně využili v předchozím výkladu o karetním triku). Pro jeho slovní ztvárnění navrhuje autor rozpočítadlo:

„Ven!“

Z modelu i ze vzorce (4) lehce zjistíme, že v tomto případě máme $(z) = \varphi(n, 1) = n - 1$.

V dětských rozpočítadlech a hrách se spolu zcela přirozeně setkala matematika a poezie. Hledejme i v jiných jevech kolem sebe obě tyto složky — matematiku i poezii.

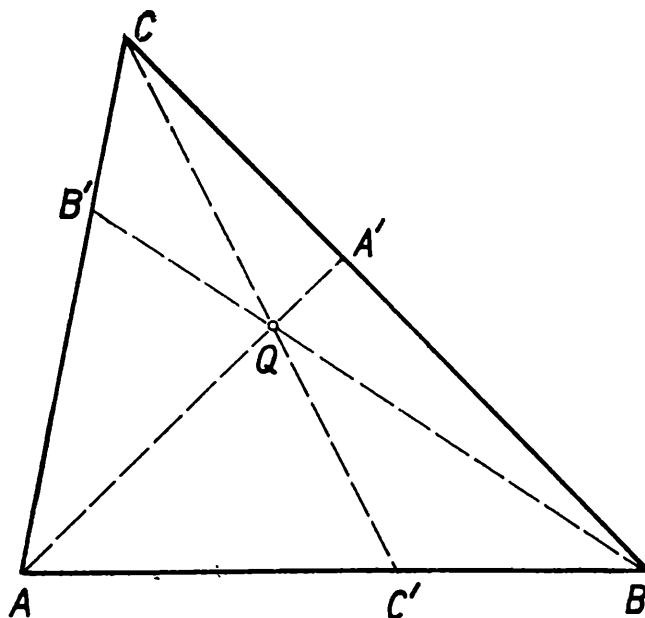
Cévova věta

MILAN DYTČO, studující ČVUT Praha

V matematicko-fyzikálních rozhledech č. 8 jste se seznámili, v článku F. Koktána: Meneláova věta, s analytickým důkazem Meneláovy věty. V rovinné geometrii existuje neméně zajímavá věta, tzv. Cévova věta. Ukážeme, že i tuto větu lze jednoduše odvodit pomocí analytické geo-

metrie. Při důkazu budeme užívat označení z uvedeného článku, ve shodě s učebnicí pro 3. ročník SVVŠ.

Sestrojíme libovolný trojúhelník ABC a zvolme bod Q tak, aby neležel na žádné ze stran trojúhelníka ABC . Sestrojíme postupně body A' , B' , C' , jako průsečíky přímek AQ , BQ , CQ se stranami BC , AC , AB (viz obr. 1).



Obr. 1

Hledejme podmínku, které musí vyhovovat dělicí poměry k_1 , k_2 , k_3 bodů A' , B' , C' definované rovnicemi.

$$k_1 = (BCA'), \quad k_2 = (CAB'), \quad k_3 = (ABC'). \quad (1)$$

Pro bod Q platí rovnice

$$\begin{aligned} Q &= A + \alpha(A' - A), \\ Q &= B + \beta(B' - B), \\ Q &= C + \gamma(C' - C). \end{aligned} \quad (2)$$

Vzájemným odečtením prvních dvou rovnic dostáváme

$$A - B + \alpha(A' - A) - \beta(B' - B) = 0 \quad (3)$$

Dosadíme-li do této rovnice za A' , B' z rovnic

$$A' = \frac{1}{1 - k_1}B - \frac{k_1}{1 - k_1}C, \quad B' = \frac{1}{1 - k_2}C - \frac{k_2}{1 - k_2}A. \quad (4)$$

(viz též zmíněnou práci, kde jsou vzorce (4) uvedeny); snadno uvedeme rovnici (3) na tvar:

$$(B - C) \left[\frac{1}{1 - k_1} \alpha + \beta - 1 \right] + (A - C) \left[\frac{k_2}{1 - k_2} \beta - \alpha + 1 \right] = 0. \quad (5)$$

Protože vektory $(B - C)$ a $(A - C)$ jsou nekolineární (tj. nelze je

umístit na jedné přímce) jsou v rovnici (5) koeficienty těchto vektorů rovny nule. Platí tedy:

$$\frac{1}{1-k_1} \alpha + \beta = 1, \quad -\alpha + \frac{k_2}{1-k_2} \beta = -1. \quad (6)$$

Ze soustavy (6) snadno vypočteme, že

$$\alpha = \frac{1-k_1}{1-k_1+k_1k_2}, \quad \beta = \frac{-k_1+k_1k_2}{1-k_1+k_1k_2}, \quad (7)$$

užijeme-li cyklické záměny $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A$, tj. odečteme-li v (2) od druhé rovnice třetí rovnici, vypočteme postupně zcela analogicky

$$\beta = \frac{1-k_2}{1-k_2+k_2k_3}, \quad \gamma = \frac{-k_2+k_2k_3}{1-k_2+k_2k_3}. \quad (8)$$

Srovnáme-li oba výrazy, kterými je v rovnicích (7) a (8) vyjádřeno β , dostáváme po jednoduché úpravě

$$(-k_1+k_1k_2)(1-k_2+k_2k_3) = (1-k_2)(1-k_1+k_1k_2).$$

Odtud okamžitě plyne rovnost

$$k_1k_2k_3 = -1. \quad (9)$$

Dokázali jsme, že pro dělicí poměry k_1, k_2, k_3 bodů A', B', C' platí rovnost (9).

Předpokládejme nyní obráceně, že jsou daná čísla k_1, k_2, k_3 , která jsou vesměs různá od nuly a od jedničky, a která vyhovují rovnici (9). Pomocí těchto čísel sestrojme body A', B', C' tak, aby platily podmínky (1). Zkoumejme, zda přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem.

Provedme tento důkaz sporem. Předpokládejme, že přímky AA', BB' se protínají v bodě Q . Sestrojme bod $C'' = CQ \cdot AB$, kde $C'' \neq C'$, jehož dělicí poměr k_3 splňuje vztah

$$k_1k_2k'_3 = -1$$

Sestrojíme-li nyní podle předpokladu bod C' odpovídající k_3 , je ihned patrné, že musí být $k_3 = k'_3$, ale to je spor s předpokladem $C'' \neq C'$. Musí tedy platit $C'' = C'$. a tím jsme dokázali že přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem.

Při našich úvahách však musíme stanovit podmínku

$$1 - k_1 + k_1k_2 \neq 0. \quad (10)$$

V opačném případě by bod Q byl nevlastním bodem (přímky AA', BB', CC' by byly rovnoběžné), a to se vymyká rozsahu učebnice matematiky pro 3. ročník SVVŠ. Ukážeme si ještě, že v podmínce (10) jsou zahrnuty podmínky

$$\begin{aligned} 1 - k_2 + k_2k_3 &\neq 0, \\ 1 - k_3 + k_1k_3 &\neq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Násobíme-li však levou stranu podmínky (10) číslem $-k_3$ nebo $-k_2$, dostaneme podmínky (11). K úpravám použijeme nám již známého závěru (9).

Naše poznatky shrneme do věty Cévy:

Předpokládejme, že je dán trojúhelník ABC . Zvolme si tři čísla k_1, k_2, k_3 vesměs různá od nuly a od jedničky a splňující podmínku (10). Na stranách trojúhelníka ABC sestrojíme postupně body A', B', C' tak, aby platilo:

$$(BCA') = k_1; \quad (CAB') = k_2; \quad (ABC') = k_3.$$

Potom přímky AA', BB', CC' procházejí jedním bodem právě tehdy když platí

$$k_1 k_2 k_3 = -1.$$

Jako příklad si můžeme vzít těžiště trojúhelníka ABC , které je průsečíkem těžnic AA', BB', CC' . Dělicí poměry pro paty těžnic A', B', C' můžeme vyjádřit jako poměry orientovaných úseček

$$\frac{BA'}{CA'} = -1, \quad \frac{CB'}{AB'} = -1, \quad \frac{AC'}{BC'} = -1.$$

Podle Cévy věty pak platí

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = -1.$$

Booleovské výpočty v množinové algebře

OLDŘICH ODVÁRKO, MFF UK Praha

V předminulém a minulém ročníku Rozhledů jsme se v několika článcích seznámili se základními množinovými pojmy a naučili jsme se řešit některé typy úloh o množinách (viz č. 4, 7, 8, 10 v roč. 1968–69 a č. 1 v roč. 1969–70). Poznali jsme také základní věty množinové algebry, které charakterizují vlastnosti operací nazývaných doplněk, průnik a sjednocení. Množinová algebra úzce souvisí s Booleovou algebrou, o které byly publikovány články v minulém čísle Rozhledů; ukažme si způsob, jak využít booleovských výpočtů v množinové algebře.

V článku J. Šedivého *Dvouprvková Booleova algebra* je uveden přehled 21 základních vět této algebry. Je jasné, že zdůrazněním slova „dvouprvková“ autor naznačil možnost existence dalších Booleových algeber. Postavme se nyní na stanovisko, že zvolíme nějakou neprázdnou mno-

žinu B , která obsahuje prvky 0 a 1 jako dva význačné prvky, ale jinak neomezujeme počet jejích prvků. Písmen x, y použijme k označení libovolných prvků množiny B ; dále předpokládejme, že v množině B jsou definovány dvě operace — nazývejme je *sčítání* (součet prvků x, y označujeme $x + y$) a *násobení* (součin prvků x, y označujeme $x \cdot y$ nebo xy). Nechť ke každému prvku $x \in B$ existuje právě jeden prvek $x' \in B$, který budeme nazývat *doplňkem* prvku x .

Množinu B , v níž jsou definovány uvedené operace, nazveme *Booleovou algebrou* právě tehdy, když pro všechny její prvky platí věty (0) až (20) v citovaném článku.

Hlavní idea tohoto článku spočívá v tom, že ukážeme množinu $\hat{M}$ všech podmnožin libovolné neprázdné množiny M jako příklad zmíněné množiny B . V množině $\hat{M}$ zřejmě existují dva význačné prvky — množina $\emptyset$ a množina M . Víme již, že každým dvěma prvkům X, Y množiny $\hat{M}$ (tj. každým dvěma podmnožinám množiny M) lze jednoznačně přiřadit jejich průnik $X \cap Y$ a jejich sjednocení $X \cup Y$, což jsou opět prvky množiny $\hat{M}$. Dále můžeme každému prvku X množiny $\hat{M}$ přiřadit právě jeden prvek X' , doplněk množiny X vzhledem k množině M .

Nahradme v zápise vět (0) až (20) malá písmena x, y, z velkými písmeny X, Y, Z označujícími prvky množiny $\hat{M}$. Dále provedme tyto záměny:

$$0 \rightarrow \emptyset, 1 \rightarrow M, + \rightarrow \cup, \cdot \rightarrow \cap,$$

znaky $=, '$ a závorky ponechme beze změny.

Rozhodněme, zda pro všechny prvky X, Y, Z z $\hat{M}$ (tj. pro všechny podmnožiny množiny M) platí všechny takto „přepsané“ věty:

$$(0) (X')' = X$$

$$(1) M \cup X = M$$

$$(2) \emptyset \cap X = \emptyset$$

$$(3) \emptyset \cup X = X$$

$$(4) M \cap X = X$$

$$(5) X \cup X = X$$

$$(6) X \cap X = X$$

$$(7) X \cup X' = M$$

$$(8) X \cap X' = \emptyset$$

$$(9) X \cup Y = Y \cup X$$

$$(10) X \cap Y = Y \cap X$$

$$(11) (X \cup Y)' = X' \cap Y'$$

$$(12) (X \cap Y)' = X' \cup Y'$$

$$(13) X \cup (X \cap Y) = X$$

$$(14) X \cap (X \cup Y) = X$$

$$(15) X \cup (Y \cap X') = X \cup Y$$

$$(16) X \cap (Y \cup X') = X \cap Y$$

$$(17) (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

$$(18) (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

$$(19) (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

$$(20) (X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$$

Tento úkol vyřešte každý samostatně. Platnost celé řady z těchto vět je zřejmá na první pohled (/1/—/10/, /17/, /18/). Ostatní ověřte užitím Vennových diagramů. Zjistíte, že všechny uvedené věty platí. Dospívá-

me tak k závěru: *Množina $\hat{M}$ všech podmnožin libovolné neprázdné množiny M , v níž jsou definovány operace sjednocení a průnik a ve které ke každému prvku existuje doplněk, je příkladem Booleovy algebry. Nazýváme ji množinová algebra.*

Ukažme nyní užitečnost provedených úvah při řešení jedné úlohy.

Úloha: Právě probíhá jeden z pořadů televizního seriálu „Pokus pro dva“. Před obecenstvem, oddělení neprůhlednou zástěnou, sedí na jedné straně mladý muž, na druhé straně tři dívky, Anna, Hana a Jana. Mladý muž po deset minut kladl dívkám různé otázky a podle jejich odpovědí si nyní má zvolit k bližšímu seznámení tu z nich, jejíž odpovědi se mu nejvíce líbily. V krátké přestávce, během níž se mladý muž rozhoduje o nejsprávnější volbě, sdělují si dívky vzájemně své představy o tom, jak jejich protějšek za zástěnou vypadá.

Anna: Domnívám se, že je vysoký nebo štíhlý, určitě je také hnědooký.

Hana: Myslím, že je brýlatý a černovlasý nebo je vysoký a štíhlý.

Jana: Představuji si, že je brýlatý. Není hnědooký nebo není černovlasý.

Mladý muž odpovídal představě Anny i Jany, Hana však neuhodla. Jak vlastně vypadal?

Řešení: Za základní množinu zvolme množinu všech mužů a označme ji Z . Písmeny V , S , H , C , B označme postupně tyto podmnožiny množiny Z : množinu všech vysokých mužů, všech štíhlých mužů, všech hnědookých mužů, všech černovlasých mužů, všech brýlatých mužů. Podle Anny patří mladý muž do množiny $(V \cup S) \cap H$, podle Hany do množiny $(B \cap C) \cup (V \cap S)$, a podle Jany do množiny $B \cap (H' \cup C')$. Vzhledem k tomu, že odpovídá představě Anny a Jany a přitom neodpovídá představě Hany, patří mladý muž do množiny

$$P = [(V \cup S) \cap H] \cap [B \cap (H' \cup C')] \cap [B \cap C) \cup (V \cap S)]'.$$

Při úpravě zápisu této množiny můžeme použít vzorců (0)–(20), tímto způsobem byla úloha řešena v čísle 1, roč. 1969–70. „Práce“ se znaky $\cup$ a $\cap$ však není příliš pohodlná, v zápisech je příliš mnoho závorek, provádění úprav je značně těžkopádné.

Na základě našich předchozích úvah můžeme však postupovat také takto: Zápis množiny P (tj. zápis prvku množiny všech podmnožin množiny Z) přepíšeme do symboliky užívané v Booleově algebře, přitom můžeme bez obav vynechat některé závorky. Pak budeme upravovat zápis takto získaného prvku p Booleovy algebry podle vzorců (0)–(20) z článku v čísle 9. Prosím, abyste si jednotlivé kroky úprav zdůvodnili sami.

$$\begin{aligned} p &= (v + s) \cdot hb \quad (h' + c') \quad (bc + vs)' = (v + s) \quad b \quad (hh' + hc') \quad (bc)' \\ (vs)' &= (v + s) \quad (v' + s') \quad b \quad (b' + c') \quad hc' = (vv' + sv' + vs' + ss') \cdot \\ &\cdot (bb' + bc') \cdot hc' = (v' \cdot s + vs') \cdot bhc' = bhs v' c' + bhv s' c' \end{aligned}$$

Jestliže nyní formálními záměnami přejdeme zpět k symbolice užívané v množinové algebře, dostáváme

$$P = (B \cap H \cap S \cap V' \cap C') \cup (B \cap H \cap V \cap S' \cap C'),$$

Mladý muž byl tedy brýlatý, hnědooký, štíhlý a nebyl vysoký ani černovlasý nebo byl brýlatý, hnědooký, vysoký a přitom nebyl ani štíhlý ani černovlasý.

Vyjádření hodnot goniometrických funkcí druhými odmocninami

LUDEVÍT FERJENČÍK, Pardubice

I. Nejprve objasníme, co je míněno nadpisem tohoto článku.

Mějme reálné číslo, jež je definováno početním výrazem neobsahujícím jiné symboly kromě

- a) zápisů racionálních čísel,
- b) závorek a symbolů početních výkonů sčítání, odčítání, násobení, dělení a druhé odmocniny. Předpokládejme dále, že
- c) počet operandů uvedených pod a) i počet výkonů pod b) je konečný.

Budeme říkat, že takto definované reálné číslo je vyjádřeno druhými odmocninami.

Podle této úmluvy číslo r definované zlomkem

$$r = \frac{p}{q},$$

kde p a $q \neq 0$ jsou celá čísla, budeme považovat za číslo vyjádřené druhými odmocninami. Naproti tomu zápis čísla nekonečnou řadou

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{5})^n}$$

nebo nekonečným řetězovým zlomkem

$$z = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

nesplňuje požadavek c), ačkoli oba uvedené výrazy definují totéž číslo z , které má i vyjádření druhými odmocninami

$$z = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1)$$

V běžně používaných tabulkách goniometrických funkcí, najdeme hodnoty příslušné všem velikostem orientovaného úhlu, které jsou násobky 1 úhlové minuty, tj. reálného čísla $\frac{\pi}{10\,800}$ v míře obloukové.

Tabulkové hodnoty goniometrických funkcí jsou ovšem — až na nepatrné výjimky — neúplná čísla. V tomto článku se popisuje metoda, která umožňuje pro jistou část úhlů pojatých do tabulek, vyjádřit hodnoty goniometrických funkcí druhými odmocninami.

Cvičení.

1. Doplňte hodnoty funkcí vyjádřené druhými odmocninami do tabulky:

φ	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
0°	1	0
15°		
30°		...
90°	0	1

2. Vyjádřete druhými odmocninami hodnoty $\cos 18^\circ$ a $\sin 18^\circ$.

Návod $\cos 3 \cdot 18^\circ = \sin 2 \cdot 18^\circ$.

3. Vyjádřete $\cos 36^\circ$ a $\sin 36^\circ$ druhými odmocninami.

Návod. Užijte výsledku předchozího cvičení anebo rovnosti

$$\sin 3 \cdot 36^\circ = \sin 2 \cdot 36^\circ$$

II. Definujme komplexní funkci $j(\varphi)$ předpisem

$$j(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1)$$

na množině všech reálných čísel — velikostí orientovaného úhlu φ .*) Hodnoty této funkce jsou komplexní jednotky; pro libovolné reálné φ platí

$$|j(\varphi)| = 1.$$

Pro libovolná reálná čísla φ , ψ a celé n platí

$$\begin{aligned} j(\varphi + 2\pi) &= j(\varphi), \\ j(\varphi) \cdot j(\psi) &= j(\varphi + \psi), \end{aligned}$$

*) Mírou velikosti orientovaného úhlu zde i v dalším textu rozumíme tzv. obloukovou míru. Velikosti úhlu 1° tedy odpovídá reálné číslo $\frac{\pi}{180}$ atd.

$$\frac{j(\varphi)}{j(\psi)} = j(\varphi - \psi), \quad (2)$$

$$[j(\varphi)]^n = j(n\varphi).$$

Úhlu velikosti 90° odpovídá imaginární jednotka

$$j(90^\circ) = i$$

Zavedeme označení pro další komplexní jednotky

$$\begin{aligned} j(30^\circ) &= a, & j(45^\circ) &= b, \\ j(15^\circ) &= c, & j(18^\circ) &= d \end{aligned}$$

Složky těchto jednotek již dovedeme vyjádřit druhými odmocninami — (viz cvičení 1 až 3).

Příklad 1. Podle zavedeného označení máme:

$$c = j(45^\circ - 30^\circ) = \frac{b}{a}$$

Upravujeme dále:

$$c = \frac{a^2 b}{a^3} = \frac{a^2 b}{i} = a^2 b i^3$$

Jednotku c jsme uvedli na tvar součinu mocnin jednotek a , b a i s celými nezápornými mocniteli:

$$c = a^2 b i^3$$

Ověříme, že podle vlastností (2) platí

$$a^2 b i^3 = j(2 \cdot 30^\circ + 45^\circ + 3 \cdot 90^\circ) = j(375^\circ) = c.$$

Cvičení.

4. Platí rovnost

$$j(3^\circ) = c^5 d i^3$$

Dokažte!

5. Buď $j(\varphi) = u_1 + i u_2$ komplexní jednotka přiřazená velikosti orientovaného úhlu φ podle definice (1). Potom je $j(90^\circ - \varphi) = u_2 + i u_1$. Dokažte užitím vlastností (2) a početních výkonů s komplexními čísly.

6. Použijte výsledku cvičení 4 k vyjádření hodnot $\cos 3^\circ$ a $\sin 3^\circ$ druhými odmocninami.

III. Vše, co bylo v předcházejícím odstavci zhruba naznačeno, vyslovíme nyní větou.

Věta 1. Nechť velikost orientovaného úhlu φ je celočíselným násobkem velikosti 3° , tj. čísla $\frac{\pi}{60}$ v obloukové míře. Potom existuje trojice celých nezáporných mocnitelů l_1 , l_2 a l_3 ,

$$l_1 \leq 5, \quad l_2 \leq 4, \quad l_3 \leq 3, \quad (3)$$

tak, že platí rovnost

$$j(\varphi) = c^{l_1} d^{l_2} i^{l_3} \quad (4)$$

Důkaz. Pro velikost úhlu 3° tvrzení věty platí (cv. 4).

Nechť je podle předpokladu věty

$$\varphi = k \cdot 3^\circ$$

kde k je celé číslo. Je tudíž

$$j(\varphi) = [j(3^\circ)]^k = (c^5 d i^3)^k = c^{5k} d^k i^{3k}$$

Dělíme-li celé číslo $5k$ šesti, je tímto početním výkonem určena celá část podílu i příslušný nejmenší celý nezáporný zbytek. Jinými slovy: pro libovolné celé k existuje dvojice celých čísel m, l_1 tak, že platí

$$5k = 6m + l_1, \quad 0 \leq l_1 \leq 5.$$

$$\begin{aligned} \text{(Například: } & 5 \cdot 23 = 6 \cdot 19 + 1, \quad 5 \cdot (-17) = 6 \cdot (-15) + 5, \\ & 5 \cdot 72 = 6 \cdot 60 + 0 \quad \text{a podobně.)} \end{aligned}$$

Exponent nad komplexní jednotkou c lze takto redukovat na l_1 po úpravě

$$c^{5k} = c^{6m+l_1} = c^{l_1} i^m$$

Obdobně najdeme dvojici celých čísel n a l_2 , pro něž platí

$$k = 5n + l_2, \quad 0 \leq l_2 \leq 4$$

a tedy

$$d^k = d^{5n+l_2} = d^{l_2} i^n.$$

Po těchto úpravách nabude komplexní jednotka přiřazená velikosti úhlu φ tvaru

$$j(\varphi) = c^{l_1} d^{l_2} i^{3k+m+n}.$$

Konečně, jak víme, mocniny imaginární jednotky i s celým exponentem nabývají pouze čtyř různých hodnot tak, že existuje právě jeden celý nezáporný mocnitel l_3 splňující podmínky

$$i^{3k+m+n} = i^{l_3}, \quad 0 \leq l_3 \leq 3.$$

Tím je tvrzení věty dokázáno.

Význam právě dokázané věty spočívá v tom, že nyní dovedeme pomocí druhých odmocnin vyjádřit hodnoty funkcí sinus a kosinus pro všechny velikosti úhlu φ , jež vyhovují předpokladu věty; přitom vystačíme se složkami vybraných jednotek c, d a jejich mocnin, jak následují.

$$\begin{aligned} c &= c_1 + i c_2, & d &= d_1 + i d_2, \\ c^2 &= a = a_1 + i a_2, & d^2 &= d_3 + i d_4, \\ c^3 &= b = b_1 + i b_2, & d^3 &= d_5 + i d_6, \\ c^4 &= a^2 = a_2 + i a_1, & d^4 &= d_2 + i d_1, \\ c^5 &= c_2 + i c_1, & d^5 &= i, \\ c^6 &= i; \end{aligned}$$

Konstanty, kterých budeme stále používat, jsou nahrazeny písmeny

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}), \quad c_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

$$d_1 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad d_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

$$d_3 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1), \quad d_4 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Příklad 2. Vybudovaný početní aparát použijeme k vyjádření hodnot $\cos 156^\circ$ a $\sin 156^\circ$ druhými odmocninami.

Výpočet.

$$\begin{aligned} j(156^\circ) &= j(30^\circ + 36^\circ + 90^\circ) = ad^2i = \\ &= (a_1 + ia_2)(d_3 + id_4)i = \\ &= (a_1d_4 + a_2d_3) + i(a_1d_3 - a_2d_4) \end{aligned}$$

Výsledek.

$$\cos 156^\circ = -a_1d_4 - a_2d_3 = -\frac{1}{8}(\sqrt{30 - 6\sqrt{6}} + \sqrt{5} + 1),$$

$$\sin 156^\circ = a_1d_3 - a_2d_4 = \frac{1}{8}(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}).$$

Cvičení.

7. Platí rovnosti

$$\begin{aligned} \cotg 3^\circ &= 16d_3^2(a_1 + d_3)(a_2 + d_4), \\ \tg 3^\circ &= 16d_3^2(a_1 - d_3)(-a_2 + d_4). \end{aligned}$$

Dokažte je.

IV. Reálná čísla, pro která dovedeme hodnoty goniometrických funkcí vyjádřit druhými odmocninami, představují stupnici na číselné ose s počátkem v bodě $\varphi = 0^\circ$ a s krokem 3° .

Doplňme náš aparát o další vhodně zvolenou komplexní jednotku tak, abychom obdrželi stupnici s krokem polovičním, tj. $1^\circ 30'$.

Novou vybranou jednotkou bude

$$j(7^\circ 30') = e.$$

Složky této jednotky a jejích lichých mocnin vypočteme pomocí známých vzorců pro funkce polovičního úhlu

$$\left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}, \quad \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}.$$

Pišme přehledně

$$\begin{aligned}
 e &= j \left(\frac{15^\circ}{2} \right) = e_1 + ie_2, & e^2 &= c, \\
 e^3 &= j \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = e_3 + ie_4, & e^4 &= a, \\
 e^5 &= j \left(\frac{75^\circ}{2} \right) = e_5 + ie_6, & e^6 &= b, \\
 e^7 &= e_6 + ie_5, & e^8 &= a^2, \\
 e^9 &= e_4 + ie_3, & e^{10} &= c^5, \\
 e^{11} &= e_2 + ie_1, & e^{12} &= i.
 \end{aligned}$$

Symbody $e_1, e_2, \dots, e_6$ označují reálné konstanty

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{1}{4} \sqrt{8 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}, & e_2 &= \frac{1}{4} \sqrt{8 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}, \\
 e_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, & e_4 &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \\
 e_5 &= \frac{1}{4} \sqrt{8 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}, & e_6 &= \frac{1}{4} \sqrt{8 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Příklad 3. Vyjádříme $\cos 1^\circ 30'$ a $\sin 1^\circ 30'$ druhými odmocninami. Výpočet.

$$\begin{aligned}
 j(1^\circ 30') &= j(37^\circ 30' - 36^\circ) = \frac{e^5}{d^2} = \frac{e^5 d^3}{i} = e^5 d^3 i^3 = \\
 &= (e_5 + ie_6)(d_4 + id_3)(-i) = \\
 &= (d_3 e_5 + d_4 e_6) + i(d_3 e_6 - d_4 e_5).
 \end{aligned}$$

Výsledek.

$$\cos 1^\circ 30' = d_3 e_5 + d_4 e_6, \quad \sin 1^\circ 30' = d_3 e_6 - d_4 e_5.$$

Platí věta obdobného obsahu jako věta 1.

Věta 2. Nechť velikost orientovaného úhlu φ je celočíselným násobkem velikosti $1^\circ 30'$. Potom existuje trojice celých mocnitelů m_1, m_2 a m_3 ,

$$0 \leq m_1 \leq 11, \quad 0 \leq m_2 \leq 4, \quad 0 \leq m_3 \leq 3$$

takových, že platí rovnost

$$j(\varphi) = e^{m_1} d^{m_2} i^{m_3}.$$

Cvičení.

8. Doplňte tabulku

9. Z rovností

$$e^7 = be,$$

$$e^9 = be^3$$

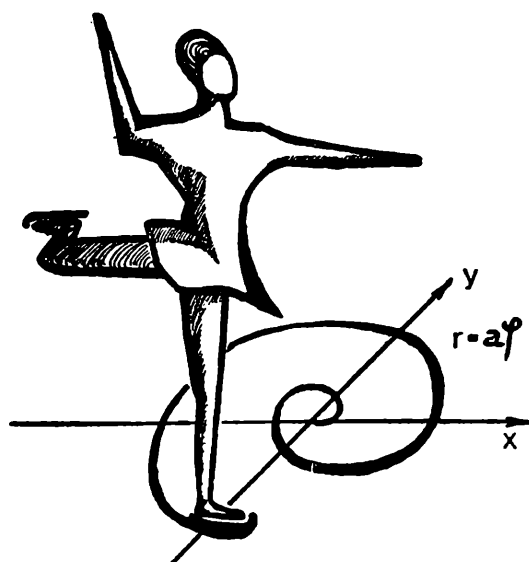
plynou identity výrazů s druhými odmocninami

φ	$j(\varphi)$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$
0°	1	1	0
$1^\circ 30'$	$e^5 d^3 i^3$	$d_3 e_5 + d_4 e_6$	$d_3 e_6 - d_4 e_5$
3°	$c^5 d i^3$		
18°	$\ddot{d}$	$\ddot{d}_1$	$\ddot{d}_2$

$$\begin{aligned} e_5 &= b_1(e_1 + e_2), \\ e_6 &= b_1(e_1 - e_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_3 &= b_1(e_3 + e_4), \\ e_4 &= b_1(e_3 - e_4). \end{aligned}$$

10. Pomocí vzorců (5) je možno vyjádřit složky jednotky $j(3^\circ 45')$ a jejích mocnin. Připojením této jednotky obdržíte stupnici úhlů s krokem $45'$. Použijte tohoto návodu a vyjádřete hodnoty $\cos 45'$ a $\sin 45'$ druhými odmocninami.



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Základy cyklografie

(Dokončení)

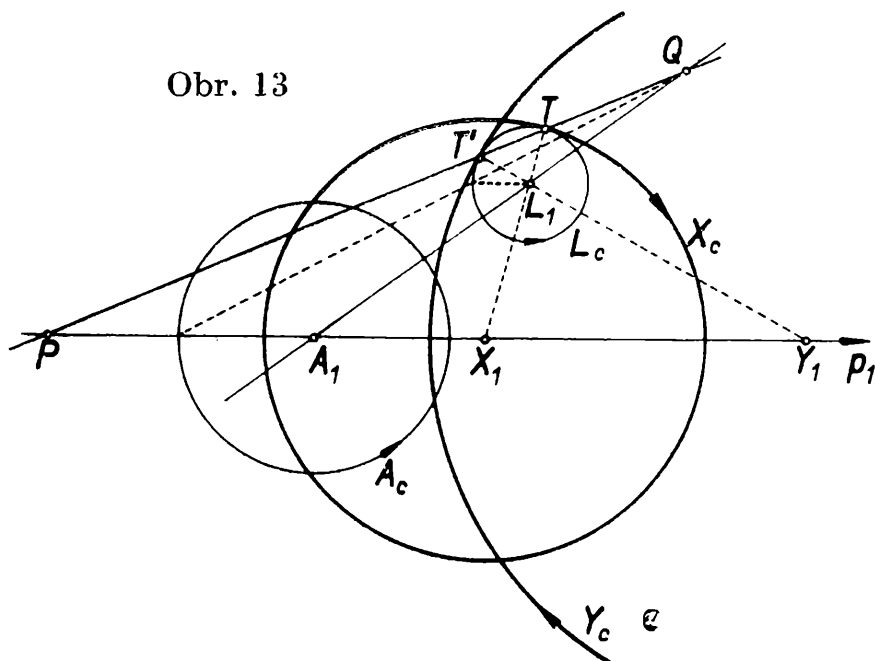
Doc. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT Praha

4. Užití cyklografie při řešení některých úloh.

1. Je dána lineární cyklická řada a další cykl. V této řadě sestrojme cykl, který se daného cyklu dotýká (obr. 13). Cykl L_c přísluší kuželové ploše o vrcholu L s přímkami svírajícími s průmětnou π úhel 45° a lineární cyklické řadě odpovídá přímka p . V úloze jsou tedy hledány průsečíky přímky p a daného (speciálního) kužele.

Lineární cyklická řada, která je určena např. cyklem A_c , nulovým cyklem P a daný cykl L_c určují cyklické pole, jehož osu PQ sestrojíme.

Obr. 13

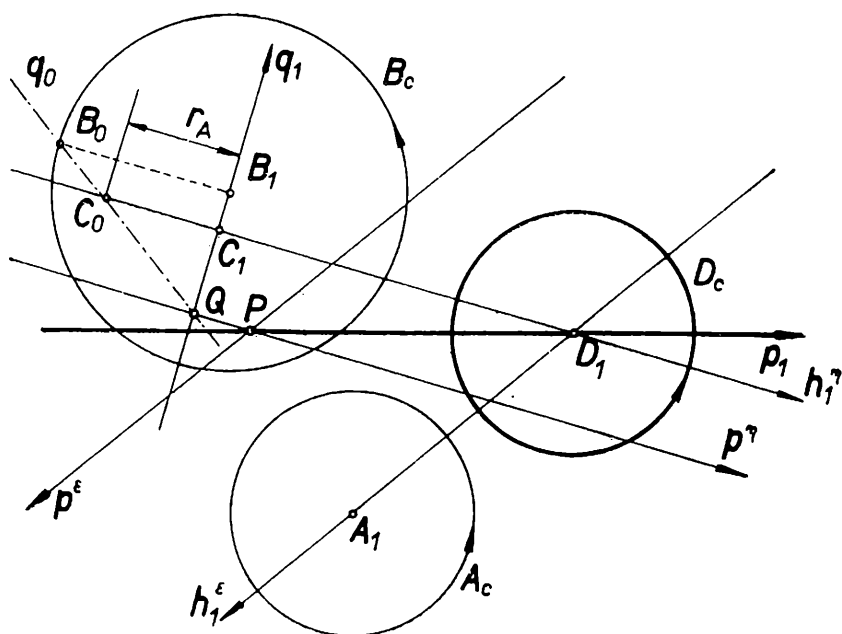
[illegible]

Obr. 14

451

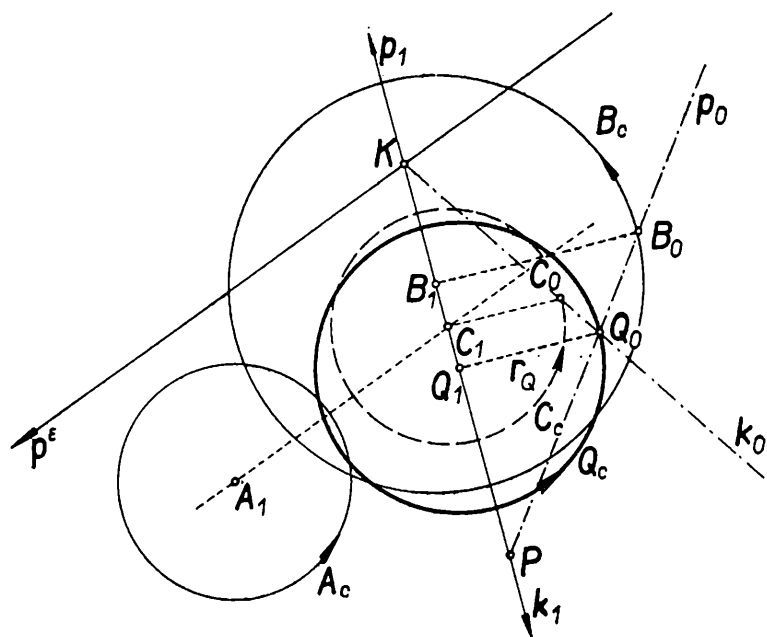
Hledaný cykl X_c bude stejnohlelý s cyklem A_c pro střed stejnohlelosti v nulovém cyklu P lineární cyklické řady. K tečnému paprsku t tohoto dosud blíže neurčeného cyklu stanovíme stejnohlelý tečný paprsek t' k cyklu A_c ($t \parallel t'$). Bodu dotyku T' na t' odpovídá ve stejnohlelosti bod dotyku T na t . Střed cyklu X_c vyhovujícího úloze je na centrále p_1 dané lineární cyklické řady a na kolmici k paprsku t v bodě T .

3. Určeme nyní lineární cyklickou řadu příslušnou ke dvěma cyklickým polím. Tato lineární cyklická řada odpovídá průsečnici rovin ε , η přiřazených daným cyklickým polím (obr. 15).



První pole buď dáno svou osou p^ε a cyklem A_c , druhé osou p^η a cyklem B_c . Průsečík obou os, tj. bod $P \equiv p^\varepsilon \cdot p^\eta$, je nulovým cyklem lineární cyklické řady příslušné k hledané průsečnici. Je tedy třeba najít ještě jeden její cykl. V druhém poli vyhledáme za tím účelem nejdříve pro lineární cyklickou řadu se zvolenou centrálou q_1 (v obr. 15 je $q_1 \perp p^\eta$) cykl C_c s poloměrem rovným r_A (i co do znaménka) cyklu A_c prvního pole. Oběma středy A_1 , příp. C_1 procházejí průměty h_1^ε , příp. h_1^η hlavních přímek roviny ε , příp. η rovnoběžně s osou příslušného pole. Průsečík $D_1 \equiv h_1^\varepsilon \cdot h_1^\eta$ je pak středem cyklu D_c , který je souhlasně shodný s cyklem A_c , příp. C_c (v obr. 15 nezakresleným). Tento cykl společně s nulovým cyklem $P \equiv p^\varepsilon \cdot p^\eta$ určuje lineární cyklickou řadu společnou oběma polím, tedy příslušnou k průsečnici obou rovin.

Cyklické pole buď dáno např. osou p^e a jedním cyklem A_c , lineární cyklická řada nulovým cyklem P a jedním cyklem B_c . K řešení úlohy použijeme tzv. *krycí lineární cyklické řady*, jejíž centrála k_1 leží na centrále p_1 dané lineární cyklické řady. Obě centrály mohou, ale také nemusí mít touž orientaci. Pro tuto krycí lineární cyklickou řadu daného pole známe nulový cykl $K \equiv p^e \cdot k_1$. Pro její určení stanovíme ještě je-

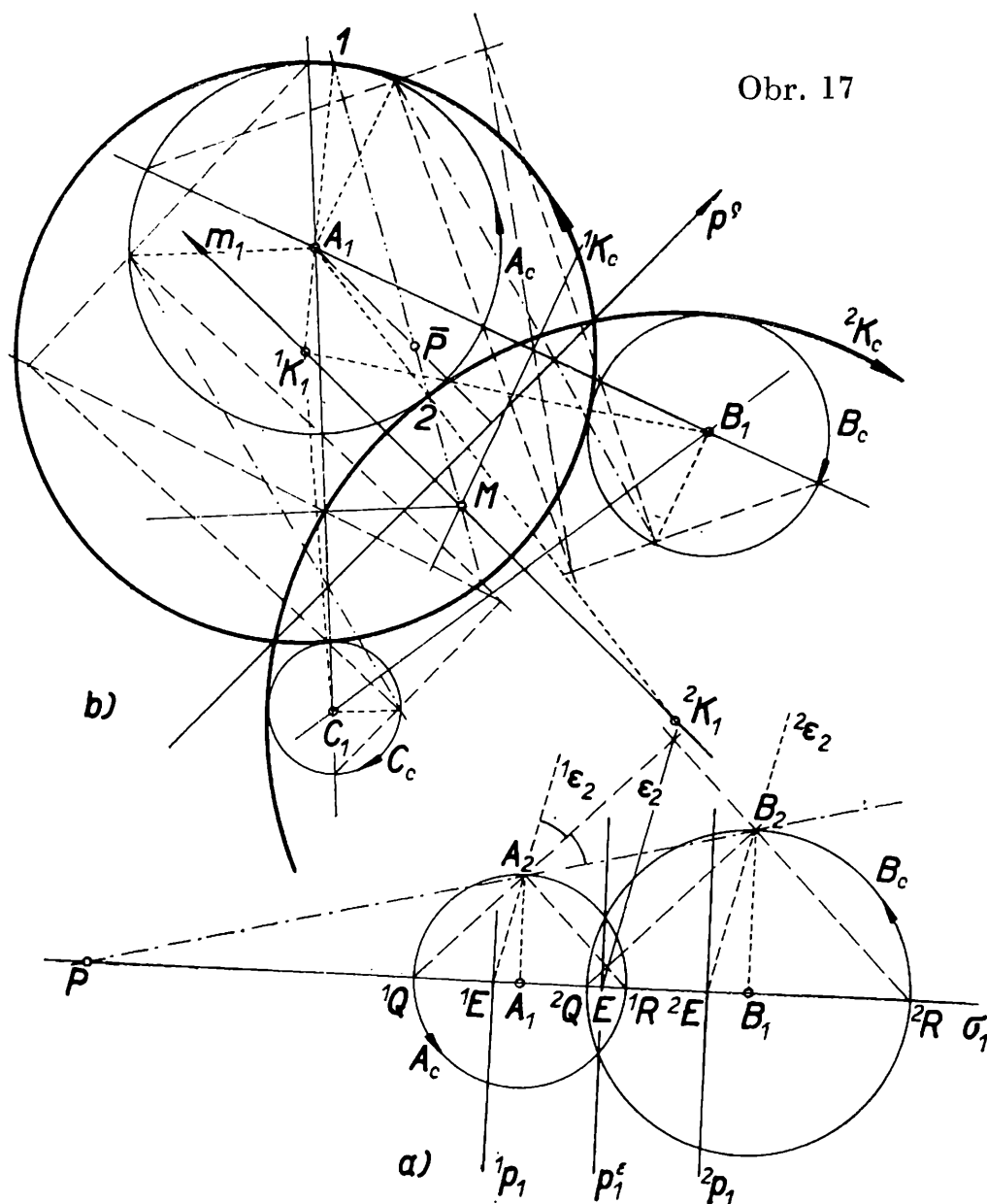


den cykl, např. cykl C_c shodný s cyklem A_c . Střed C_1 takového cyklu leží na rovnoběžce bodem A_1 s osou p^e pole a na k_1 . K určení hledaného společného cyklu použijeme sklopení roviny $\eta \equiv p \cdot k$. V průsečíku $Q_0 \equiv p_0 \cdot k_0$ je sklopená poloha průsečíku $Q \equiv p \cdot \varepsilon$, takže Q_1 je v průsečíku kolmice bodem Q_0 na přímkou p_1 a poloměr hledaného cyklu Q_c je $r_Q = Q_1 Q_0$.

Zabýváme se případem, kdy hledáme kružnice, které se dotýkají tří daných kružnic a předpokládejme, že jejich středy neleží na přímce. Zvolíme-li na kružnicích orientace, pak každému vzniklému cyklu odpovídá bod v prostoru jako vrchol promítací rotační kuželové plochy (odst. 1). Tuto plochu nazýváme krátce c -kuželem. Předložená úloha bude rozřešena, najdeme-li takový c -kužel (obecně jsou dva), který se dotýká tří daných c -kuželů, tj. v podstatě postačí nalezení jeho vrcholu.

453.9

Při konstrukci se využije věty, že dvě rotační kuželové plochy s rovnoběžnými osami se protínají v kuželosečce. Tato kuželosečka leží v rovině ε , která je kolmá na rovinu σ určenou oběma vrcholy A, B obou kuželů a jednou (tedy i druhou) osou. Rovinu $\sigma \perp \pi$ (obr. 17a) považujeme za nárysnu a stanovme druhé průměty obou c -kuželů. Rovina ε se promítá do σ do přímky, která je úhlopříčkou v obdélníku tvořeném obry-



sovými přímkami nárysů daných c -kuželů. Její půdorysná stopa p^e je chordálou obou nositelek cyklů A_c, B_c . Průnikovou kuželosečku je pak možno sestavit, při řešení naší úlohy tuto konstrukci obejdeme.

Vrcholová přímka AB protne A_1B_1 v bodě P , který je středem podobnosti lineární cyklické řady příslušné k přímce AB .

Rovina ${}^1\varepsilon \parallel \varepsilon$ procházející vrcholem A daného c -kužele (vzhledem k tomu, že obrysové přímky ${}^1QA_2, {}^1RA_2$ jsou osami úhlu $PA_2{}^1E$) má na

π stopu 1p_1 , která prochází bodem ${}^1E \equiv {}^1\varepsilon_2 \cdot A_1B_1$ a je polárou bodu P vzhledem k cyklu A_c . Obdobně pro cykl B_c .⁵⁾

Je-li nyní dán další bod C a k němu příslušný cykl C_c (obr. 17b), lze určit rovinu η průnikové kuželosečky c -kuželů s vrcholy A, C . Obě roviny ε a η se protínají v přímce m , na které jsou dva společné body ${}^1K, {}^2K$ obou průnikových kuželoseček. Tyto dva body jsou vrcholy c -kuželů požadované vlastnosti.

Půjde především o určení průsečnice m obou rovin ε, η . Průsečík M obou stop je v důsledku provedených úvah potenčním středem nositelek tří daných cyklů. Přímka m je rovnoběžná k polárám roviny $\varrho \equiv ABC$ vzhledem ke třem uvažovaným c -kuželům. K tomuto účelu vyhledáme osu p^e cyklického pole a např. její pól $\overline{P}$ vzhledem k cyklu A_c . Potom $\overline{AP}$ je směr přímky m , tedy $M \in m_1 \perp p^e$. Oba hledané body ${}^1K, {}^2K$ jsou průsečíky přímky m s přímkami c -kužele o vrcholu A ležící v rovině Am , stopa této roviny je $\overline{MP}$ a přímky c -kužele, které hledáme, mají půdorysy ve spojnicích bodu A_1 a průsečíků 1, 2 přímky $\overline{MP}$ s nositelkou cyklu A_c . V bodě 1 se dotýká první cykl 1K_c se středem 1K_1 , v bodě 2 druhý cykl 2K_c se středem 2K_1 .

Na daných kružnicích lze sice zvolit celkem osm trojic cyklů, ale cykly odpovídající trojicím bodů souměrně položeným podle průmětny vedou k týmž výsledkům. Dostaneme tak obecně čtyři možnosti a tedy existuje osm kružnic, které se daných tří dotýkají. Jednotlivá řešení nemusí však být vždy reálná, popříp. různá.

Ve speciálních případech se postup zjednodušuje a také zpravidla klesá počet možných řešení.

6. Několik poznámek k literatuře o cyklografii. Cyklografické promítání můžeme studovat z řady knih o deskriptivní geometrii, příp. i z některých monografií o cyklografii. Uvedme zde aspoň několik z nich, které jsou u nás dostupné, třeba případně aspoň v knihovnách.

[1] Holubář J.: O metodách rovinných konstrukcí. Praha 1940, str. 19—42.

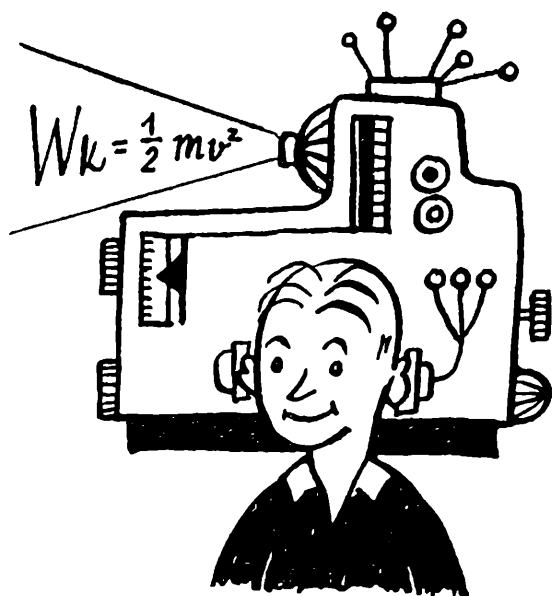
[2] Klíma J.: Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii. Praha 1950, str. 75—79.

[3] Seifert L.: Cyklografie. Praha 1949.

[4] Sobotka J.: Deskriptivní geometrie promítání paralelního. Praha 1906, str. 56—78.

Přitom v učebnici [4] není důsledně uvažován cykl a úvahy jsou prováděny jen syntetickou cestou. Naproti tomu v [3] je použito při výkladu a důkazech také analytické metody, kdy přímka je vyjádřena pomocí tzv. přímkových souřadnic.

⁵⁾ Čtyři body $P, {}^1E, {}^1Q, {}^1R$ v tomto pořadí tvoří tzv. *harmonickou čtveřinu*, tj. pro poměr orientovaných úseček platí $\overrightarrow{P^1Q} : \overrightarrow{{}^1E^1Q} = - \overrightarrow{P^1R} : \overrightarrow{{}^1E^1R}$, tedy tzv. dělicí poměry $(P^1E^1Q), (P^1E^1R)$ se liší znaménkem. Přímka 1p_1 má pak tu vlastnost, že každá přímka vedená bodem P ji protne v bodě, který s oběma průsečíky zvolené přímky s kružnicí tvoří harmonickou čtveřinu. Taková přímka se nazývá *polárou* bodu P , který je zase jejím *pólem*.



F Y Z I K A

Šikmý vrh vzhůru z nakloněné roviny

STANISLAV ZHEJBAL, katedra fyziky VAAZ Vyškov

Mezi důležité úlohy kinematiky hmotného bodu patří vrhy. Obvykle se na střední škole odvozují vztahy pro vrh vodorovný a vrh šikmý vzhůru. Tento článek je věnován řešení složitějšího případu — vrhu šikmého z nakloněné roviny. Obr. 1. Předpokládejme obecný případ, kdy nakloněná rovina svírá s vodorovným směrem úhel β a elevační úhel, pod nímž je hmotný bod vržen, je úhel α . Daný případ pohybu hmotného bodu lze řešit několika způsoby.

1. Především lze využít znalosti analytické geometrie. Hmotný bod se pohybuje po parabole o rovnici

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (1)$$

kde v_0 je počáteční rychlost vrhu šikmého vzhůru a g tíhové zrychlení. Při vrhu šikmém vzhůru na vodorovnou rovinu se ve skutečnosti řeší úloha o nalezení souřadnice x průsečíku uvedené paraboly s osou x , tj. s přímkou $y = 0$. V daném případě lze analogicky hledat souřadnice bodu B jako souřadnice průsečíku paraboly (1) s přímkou

$$y = -x \operatorname{tg} \beta.$$

Řešením soustavy rovnic (1), (2) dostaneme jednak řešení $x = 0$, $y = 0$ odpovídající počátku souřadnic, jednak řešení

$$x = \frac{2 v_0^2}{g} \frac{\cos \alpha \cdot \sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta}, \quad (3)$$

které odpovídá souřadnici x bodu B . Poznamenejme, že v předchozí úpravě bylo použito vztahu

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Dosadíme-li ze vztahu (3) do vztahu (2), dostaneme souřadnici y bodu B

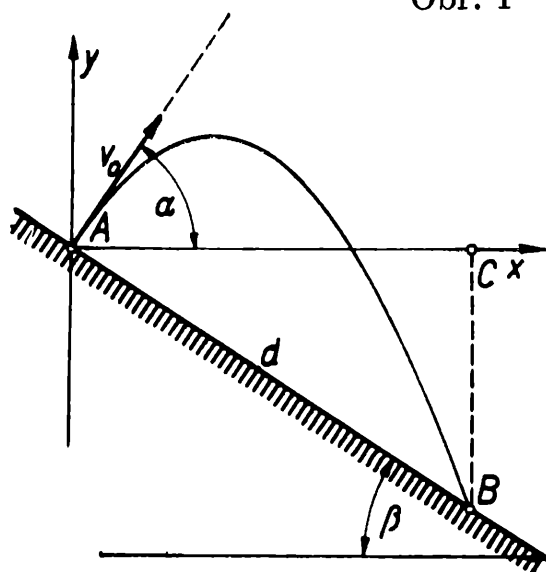
$$y = - \frac{2 v_0^2}{g} \frac{\cos \alpha \cdot \sin (\alpha + \beta) \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \beta}.$$

Dálka d vrhu se určí pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku ABC . Tedy

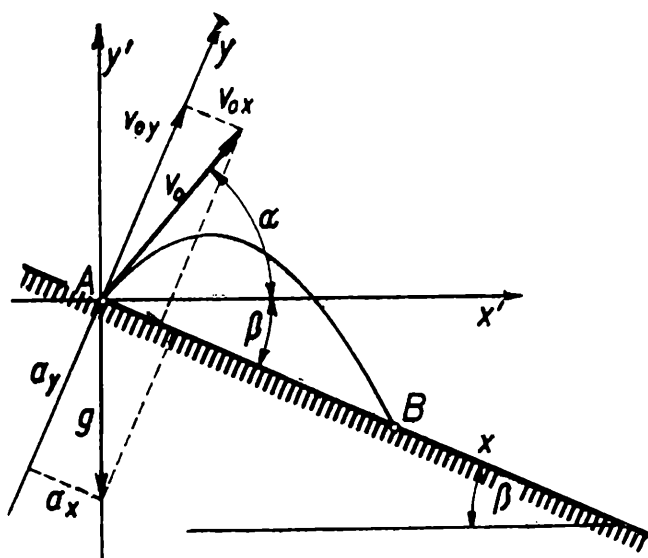
$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2 v_0^2}{g} \frac{\cos \alpha \cdot \sin (\alpha + \beta)}{\cos^2 \beta}. \quad (4)$$

2. Daný případ šikmého vrhu lze řešit i způsobem, v němž je zdůrazněna fyzikální podstata problému. Pohyb hmotného bodu při šikmém

Obr. 1



Obr. 2



vrhu se rozkládá podle principu nezávislosti pohybů do pravoúhlé souřadnicové soustavy, jejíž osa x' je vodorovná a osa y' je svislá. V tomto případě je však výhodný daný pohyb rozložit do souřadnicové soustavy (A, x, y) , jejíž osa x splývá se směrem nakloněné roviny a osa y je k nakloněné rovině kolmá. Obr. 2. Počátek této soustavy je v bodě A ; tedy v bodě, z něhož je těleso vrženo. Rozložíme proto působící zrychlení i počáteční rychlost do směru souřadnicových os x a y . Dostaneme

$$\begin{aligned} a_x &= g \sin \beta, \\ a_y &= -g \cos \beta. \end{aligned} \quad (5)$$

Znaménko minus je zde proto, že a_y má záporný směr osy y . Na základě těchto vztahů je zřejmé, že v ose x i y jde o pohyb rovnoměrně zrychlený. Podobně lze rozložit i počáteční rychlost vrhu v_0

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cos(\alpha + \beta), \\ v_{0y} &= v_0 \sin(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (6)$$

Podle vztahů (5) a (6) dostaneme pro rychlost v jednotlivých osách

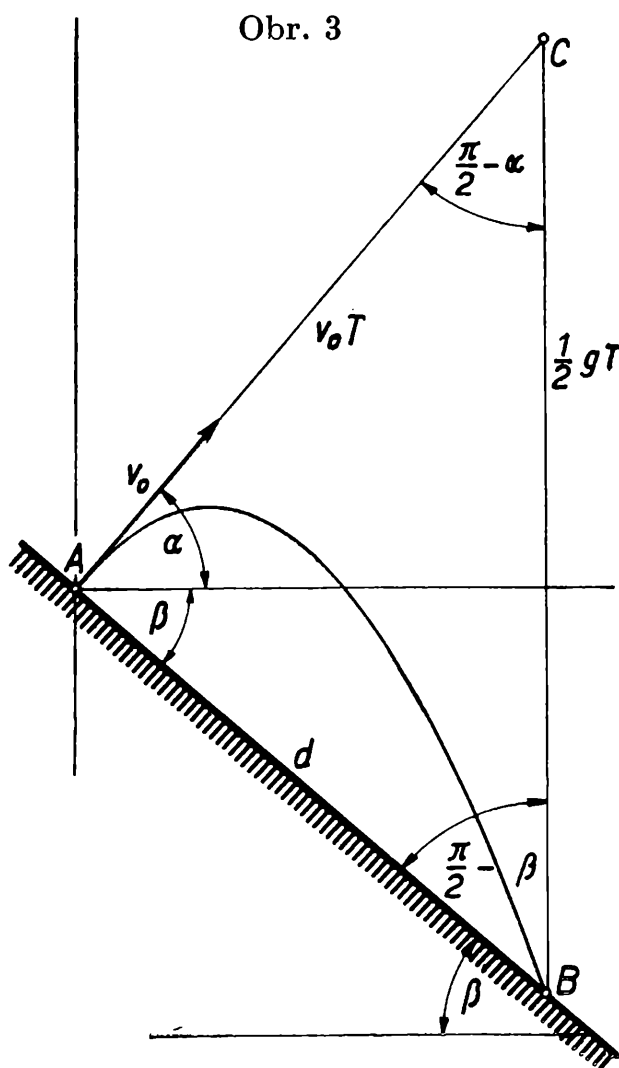
$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos(\alpha + \beta) + g \sin \beta \cdot t, \\ v_y &= v_0 \sin(\alpha + \beta) - g \cos \beta \cdot t \end{aligned}$$

a pro dráhu v ose x i y

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos(\alpha + \beta) \cdot t + \frac{1}{2} g \sin \beta \cdot t^2, \\ y &= v_0 \sin(\alpha + \beta) \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \beta \cdot t^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Vztahy (7) dovolují charakterizovat uvedený pohyb, především pak určit délku vrhu d . Vypočteme nejprve čas $t = T$, který potřebuje hmotný bod k proběhnutí celkové dráhy. Tedy pro $t = T$ a pro souřadnici y bodu B ($y = 0$) dostaneme z druhého vztahu (7) rovnici

$$0 = v_0 \sin(\alpha + \beta) T - \frac{1}{2} g \cos \beta T^2.$$



kterou řešíme vzhledem k neznámé T . Okamžiku, kdy hmotný bod je vržen svisle vzhůru, odpovídá řešení $T = 0$. Druhé řešení

$$T = \frac{2v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \alpha}$$

je časem potřebným k proběhnutí dráhy z bodu A do bodu B . V bodě B musí být $x = d$, a proto dosadíme-li do prvního vztahu (7) za $x = d$ i za odpovídající čas $t = T$, dostaneme po úpravě stejný výsledek, jako v předchozím způsobu řešení. Tedy

$$d = \frac{2 v_0^2 \cos \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{g \cos^2 \beta}.$$

3. Při třetím způsobu řešení využijeme přímé aplikace principu nezávislosti pohybů. Obr. 3. Protože pohyb hmotného bodu po parabole je

pohybem složeným z pohybu rovnoměrného přímočarého a z volného pádu, dostaneme polohu v bodě B i postupným (myšlenkovým) vykonáním dráhy z bodu A do bodu C pohybem rovnoměrným přímočarým rychlostí v_0 a z bodu C volným pádem do bodu B . Označíme-li čas potřebný k vykonání celkové dráhy T , bude

$$AC = v_0 T, \quad CB = \frac{1}{2} g T^2 \quad \text{a} \quad AB = d.$$

Použijme nyní sinové věty pro trojúhelník ABC

$$\frac{g T^2}{2v_0 T} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)},$$

a odtud

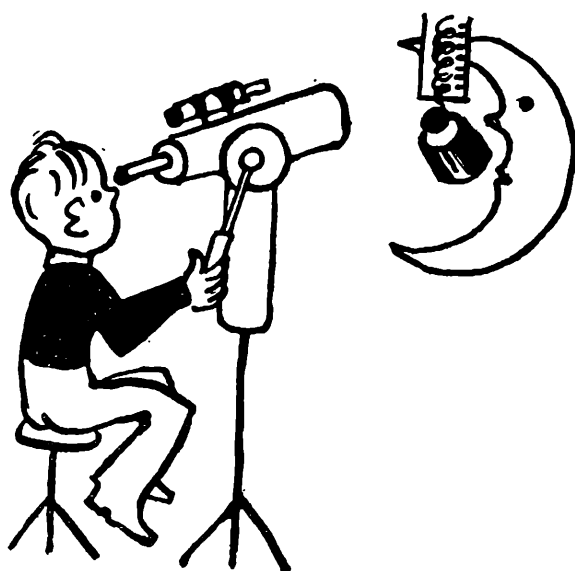
$$T = \frac{2v_0}{g} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}.$$

Použijeme-li sinové věty pro uvedený trojúhelník ještě jednou, dostaneme

$$\frac{d}{v_0 T} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}.$$

Po dosazení vztahu (8) do tohoto vztahu a po úpravě dostáváme stejný výsledek jako v předchozím.

Předložené řešení vrhu šikmého vzhůru z nakloněné roviny ukazuje možný přístup k řešení úloh na skládání a rozklad pohybů v kinematice hmotného bodu. Zatímco první způsob je „matematickým“ řešením, druhý způsob využívá metody vhodné i pro nejsložitější případy. Je to charakteristický fyzikální přístup k řešení dané úlohy. Třetí způsob lze označit za vtipné řešení, neboť vyniká jednoduchostí a fyzikálním důvtipem.



ASTRONOMIE

Sedmá planeta — Uran

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

V roce 1971 uplynulo 190 roků od objevu planety Urana, sedmé planety ve sluneční soustavě. Je to první planeta, která byla objevena pomocí dalekohledu. Uranova zdánlivá hvězdná velikost se podle vzájemné polohy Země a Urana mění v mezích od $5,42^m$ do $5,73^m$, je tedy za příznivých pozorovacích podmínek na hranici viditelnosti pouhým okem. Že nebyla tato planeta objevena již dříve, bylo způsobeno tím, že ji lze jen velmi obtížně odlišit od okolních hvězd; její poloha mezi hvězdami se mění jen velmi pomalu.

Jako den objevu Urana se v učebnicích astronomie uvádí 13. březen 1781. Tehdy si anglický astronom *W. Herschel* při pozorování hvězdné oblohy dalekohledem povšiml, že jedna hvězda v souhvězdí Blíženců se svým vzhledem liší od ostatních hvězd — na rozdíl od bodových obrazů hvězd se tato „hvězda“ jevila jako ploška, jejíž průměr se zvětšil při použití většího zvětšení. Herschel se nejdříve domníval, že jde o kometu. Po dvouměsíčním pozorování a po výpočtech dráhy se však zjistilo, že dráha nově objeveného tělesa je téměř kruhová a že je to tedy nová, dosud neznámá planeta. Z mnoha navrhaných jmen pro tuto planetu zvítězil návrh, který podal německý astronom *Bode* a planeta byla nazvána Uran. Dodatečně se zjistilo, že Urana pozorovalo již dávno před Herschelem několik astronomů, kteří ho však považovali za hvězdu. Nejstarší známé pozorování je z roku 1690, kdy jej zakreslil *J. Flamsteed* do svých map. Týž astronom pozoroval Urana — aniž věděl, že jde o planetu — ještě 2. dubna 1712, 3. prosince 1714 a třikrát v roce 1715

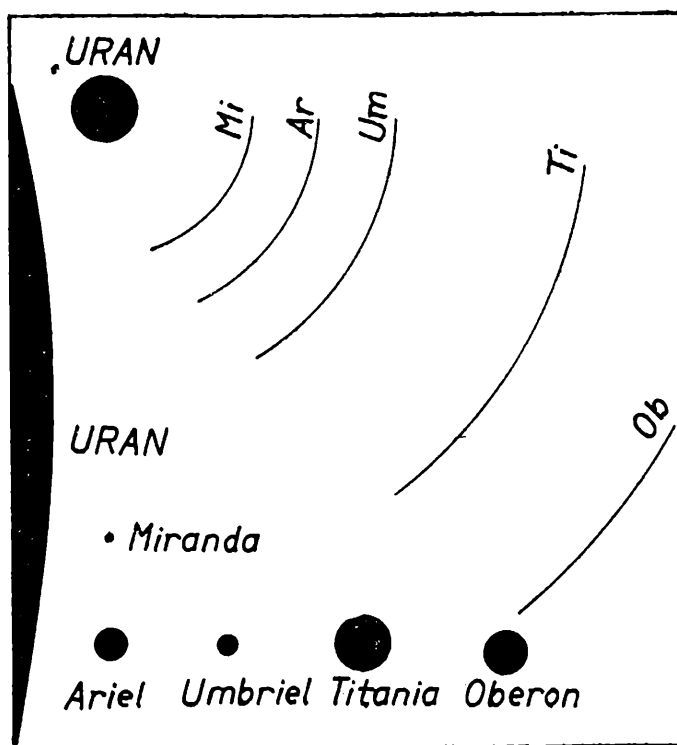
(5., 6. a 11. března). Německý astronom *T. Mayer* jej pozoroval v roce 1756, Angličan *J. Bradley* v r. 1753 a Francouz *Le Monnier* dokonce dvádnáctkrát mezi roky 1760 až 1770. Díky těmto pozorováním bylo možné již v roce objevu (1781) vypočítat poměrně přesně dráhu nové planety.

V současné době jsou elementy dráhy planety známy s poměrně velkou přesností. Uran obíhá kolem Slunce ve střední vzdálenosti $a = 19,247$ astronomických jednotek po eliptické dráze s malou numerickou excentricitou ($e = 0,494$). Oběžná doba je $T = 84,02$ roku, sklon dráhy k ekliptice je nejmenší ze všech planet ($i = 0,77^\circ$).

Hmotnost Urana je 14,55krát větší než hmotnost Země, jeho rovníkový průměr je 53 400 km (asi čtyřikrát větší než průměr Země). Střední hustota planety je ve srovnání s hustotou Země velmi malá, pouze 1560 kg m^{-3} . Kolem své osy se Uran otáčí velmi rychle — za $10^{\text{h}} 50^{\text{min}}$, při čemž rovina rovníku svírá s rovinou dráhy úhel 98° , což je největší sklon ze všech planet. Hodnota sklonu rovníku k rovině dráhy větší než 90° znamená, že se Uran jako jediná planeta sluneční soustavy otáčí kolem své osy ve zpětném, tzv. retrográdním směru.

Uranova atmosféra je složena z vodíku a čpavku; chemické složení tělesa planety je podle *Portera* (1963) toto: 84 % tuhého čpavku, 2 % tuhého vodíku a 14 % těžších látek. Povrchová teplota je v důsledku velké vzdálenosti od Slunce velmi nízká; odhaduje se na -170°C .

Kolem Urana obíhá 5 měsíců, které byly nazvány: Ariel, Umbriel, Titania, Oberon a Miranda. Měsíce Titanii a Oberona objevil v roce 1787 *Herschel*, Ariela a Umbriela v r. 1850 *Lassell* a konečně Mirandu v r. 1948 *Kuiper*. Měsíce jsou viditelné pouze v astronomických dalekohledech a všechny obíhají kolem planety ve zpětném směru. Na obr. 1 jsou znázorněny oběžné dráhy Uranových měsíců ve správném měřítku vzhledem k průměru planety (nejbližší Miranda obíhá ve vzdálenosti 130 000 km, nejvzdálenější Oberon ve vzdálenosti 585 600 km). Na tomto obrázku jsou znázorněny velikosti měsíců vzhledem k velikosti Urana (největší Titania má průměr 1000 km).



Obr. 1. Vzdálenosti Uranových měsíců od planety a velikosti měsíců ve srovnání s velikostí Urana.

V roce 1971 bude Uran v opozici se Sluncem 1. dubna; průměr kotoučku planety bude $3,96''$, zdánlivá hvězdná velikost $5,5^m$ a od Země bude planeta ve vzdálenosti 17,3 astronomických jednotek. Uran bude po celý rok v souhvězdí Panny (Virgo).



MO

XXI. ročník matematické olympiády

Přípravné úlohy

Kategorie A

1. Pre všetky kladné čísla a , b a všetky prirodzené čísla n platí

$$n \cdot a \cdot b^{n-1} \leq a^n + (n-1)b^n.$$

Dokažte!

2. Budte α , β , γ veľikosti vnútorných úhlů trojúhelníka ABC , označme $V = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$. Trojúhelník ABC je ostroúhlý (pravoúhlý, tupouhlý), právě když $V < 1$ ($V = 1$, $V > 1$).

Dokažte!

3. Je dán kosočtverec $ABCD$ o straně délky a s úhlem $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Označme X libovolný bod polopřímky AB a Y průsečík přímky AC s přímkou DX . Vyjádřete délku y úsečky AY pomocí délky x úsečky AX . Řešte aspoň dvěma různými způsoby.

4. V prostoru jsou dány body $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n \neq A_0$. Zvolme bod B_0 , k němu sestrojme další body $B_1, B_2, \dots, B_n$ tak, aby pro každé

$k = 1, 2, \dots, n$ střed dvojice $B_{k-1}B_k$ splynul se středem dvojice $A_{k-1}A_k$. Určete nutné a postačující podmínky pro to, aby $B_n = B_0$.

Kategorie B

1. Je dána kubická rovnice

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \quad (1)$$

Určete vztah mezi koeficienty a_0, a_1, a_2 , který je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby dva kořeny rovnice (1) byla dvě reálná, opačná čísla, obě různá od nuly.

2. Je-li přirozené číslo $m = 2^n - 7$ prvočíslo, kde n je přirozené číslo, je $n > 3$ a n dává při dělení čtyřmi zbytek 3. Obráceně, splňuje-li přirozené číslo n uvedené podmínky, nemusí být $m = 2^n - 7$ prvočíslo. Dokažte obě věty.

3. Do daného obdélníka $ABCD$, kde $AB > BC$ je vpísaný osemuholník $JKLMNO P Q$, ako je to naznačené na obr. 1; osemuholník vznikol z dvoch obdĺžnikov $JKNO$, $JMNQ$ so spoločnou uhlopriečkou JN , pričom bod J je stredom úsečky AD a N je stredom úsečky BC .

Vypočítajte obsah osemuholníka, ak sú dané rozmery $a = AB$, $b = BC$ daného obdĺžníka.*)

4. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1. Na polopřímce opačné k BA je zvolen bod M , pro který platí $0 < BM < \frac{1}{2}$.

a) Na straně BC určete body E, F ($BE < BF$) tak, aby přímky ME, MF rozdělily čtverec $ABCD$ na tři obrazce: trojúhelník, čtyřúhelník a pětiúhelník téhož obsahu. Vyjádřete délky BE, CF jako funkce délky BM .

b) Zjistěte, zda podmínka $BM < \frac{1}{2}$ není zbytečná a zda při jejím splnění je úloha řešitelná.

Kategorie C

1. Z letiště odlétá letadlo na lince I každý třetí den, na lince II každý pátý den a na lince III každou neděli a středu. 4. ledna startovala letadla na všech třech linkách. Kolikrát ještě do konce roku budou letadla na všech třech linkách odlétat v týž den?

2. Jsou-li p, q prvočísla větší než 3, pak $p^2 - q^2$ je dělitelné číslem 24. Dokažte!

3. V rovine je daná úsečka AB . V jednej z polrovín vyřatých priamkou AB uvažujme všetky pravouhlé trojuholníky s preponou AB . Označme X päťu kolmice vedenej bodom B k osi uhla $\sphericalangle BCA$.

Dokažte, že všetky takéto osi uhlov prechádzajú pevným bodom a vyšetrite množinu všetkých bodov X .

*) Obr. 1 nemohl být z technických důvodů otištěn. Bude však v 1. čísle příštího ročníku Rozhledů současně s informacemi o MO a soutěžními úlohami. Redakce.

4. V trojúhelníku ABC označíme D střed strany AC a E ten bod strany AB , pro který platí $AE = 2 \cdot BE$. Průsečík příček BD a CE označíme K .

a) Vypočítejte v jakém poměru dělí bod K úsečky BD , CE .

b) Vypočítejte jaké části obsahu daného trojúhelníku jsou obsahy čtyř obrazců, na něž dělí úsečky BD , CE daný trojúhelník ABC .

Kategorie Z

1. Ciferný součet kladného trojciferného prvočísla p_1 je dvojciferné prvočíslu p_2 . Ciferný součet prvočísla p_2 je jednociferné prvočíslu $p_3 > 2$. Najděte všechny takové trojice prvočísel p_1, p_2, p_3 .

2. Dokažte, že výraz

$$V = a^2 - ab + b^2 - a + b + 1$$

nabývá pro každá dvě čísla a, b kladné hodnoty.

3. Necht A, B, C, D jsou po řadě vrcholy vypuklého čtyřúhelníka a necht X, Y, Z, U jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DA . Necht R je průsečík přímek AZ a UC , T průsečík přímek AY a XC .

Vypočítejte poměr obsahů čtyřúhelníků $ABCD$ a $ATCR$.

4. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Potom pro každý bod X roviny rovnoběžníka platí

$$AX < BX + CX + DX ;$$

dokažte.

R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě

Vzpomínka na Vincence Jarolímka

RNDr. FRANTIŠEK HARANT, CSc., Praha

V letošním roce se naplní dvě výročí, která připomínají významného českého geometra, profesora VINCENCE JAROLÍMKA. Dne 25. června t. r. uplyne 125 let od jeho narození a dne 14. prosince 50 let od jeho tragického skonu.

Život a dílo tohoto učitele má pro českou geometrii, zejména deskriptivní a její výuku na školách středních i vysokých základní význam. Vždyť od svých 25 let až do smrti, tedy plných 50 let, vědecky pracoval a publikoval původní výsledky (celkem 54). Byl autorem resp. spoluautorem učebnic deskriptivní geometrie pro 5.—7. třídu reálků, sbírky

úloh z deskriptivní geometrie, geometrie pro 1.—4. třídu reálků a konečně učebnice deskriptivní geometrie pro vysokou školu technickou (spolu s B. Procházkou — 1909) a čtyřdílného pojednání o Základech geometrie polohy v rovině a prostoru (1908—1915). Mimo odbornou práci velmi přispěl ve funkci inspektora k zlepšení výuky geometrie na středních školách a jako profesor a později ředitel pražské reálky se podstatně zasloužil o dobré jméno této školy. Jeho dílo, které hlavně sledovalo co největší rozšíření geometrických znalostí mezi nadanou mládež, nese především znaky metod výborného a zkušeného pedagoga a znalost některých jeho prací, přes časový odstup více než půlstoletí, může být i pro naše studenty užitečná. Protože však osoba a život Vincence Jarolímků, jakož i hlavní přínos a ukázky jeho díla nejsou příliš známy zejména mladší technické generaci, využijme těchto výročí k tomu, abychom se s nimi v základních rysech obeznámili.

Vincenc JAROLÍMEK se narodil 25. června 1846 v Pardubicích jako třetí syn učitele aritmetiky a kreslení. Již v mládí se u něho, stejně jako u jeho starších bratrů Antonína a Jiljího, projevovalo nadání i záliba pro vědy matematické a technické. Proto navštěvoval nejprve nižší reálku ve svém rodišti a po jejím absolvování se ucházel o studium na vyšší reálce. Pro nedostatek místa v Praze však musel navštěvovat první rok vyšší reálku v Kutné Hoře, druhý rok v Písku a teprve pak byl přijat na pražskou reálku, kde prožil nejdelší část svého života. V roce 1863 začíná studovat na pražské technice a velmi pilně se věnuje zejména matematice a deskriptivní geometrii. I když se pokusil o uplatnění svých praktických schopností ve strojním oboru, když v roce 1897 pracoval jako praktikant v Ringhofferově strojní továrně na Smíchově, přece jen jeho láska a náklonnost ke geometrii a učitelskému povolání ho po roce přivedly zpět do školy. V roce 1868 přijímá místo asistenta deskriptivní geometrie na české reálce v Praze, kde dříve studoval. Zde postupně dosáhl místa suplenta (1869) a profesora (1873). V tomto období sepisuje a publikuje také svoji první vědeckou práci „Konstrukce isofót“ (1871), i výše zmíněnou učebnici deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné (I. vyd. 1875) a sbírku úloh z deskriptivní geometrie (I. vyd. 1873).

V roce 1891 byl Jarolímek jmenován ředitelem reálky v Hradci Králové, kde však působil jen dva roky, když v roce 1893 přešel jako ředitel reálky do Karlína. Odtud pak se vrací v roce 1895 na vyšší českou reálku v Praze a stává se na ní ředitelem. Školu vedl k jejímu prospěchu až do roku 1904, kdy byl jmenován zemským školním inspektorem v Brně, kde současně supluje výuku deskriptivní geometrie na vysokém učení technickém (po J. Sobotkovi, který odešel do Prahy). V tomto roce se Jarolímek také habilitoval jako docent pro obor „Synthetická geometrie v prostoru“. V těchto letech vrcholí vypětí, které i v předchozích letech bylo značné, a V. Jarolímek poprvé vážněji onemocněl neurasthenií.

Přesto, že se po tomto prvním narušení zdraví zotavil, zanechalo onemocnění své stopy a ovlivnilo další jeho život.

Pod dojmem přetížení ve funkci inspektora a na popud prof. Pelze z pražské techniky přechází Vincenc Jarolímek na nově zřízené místo profesora deskriptivní geometrie a geometrie polohy a v roce 1907 se na technice v Praze stává řádným profesorem. Porušené zdraví se však brzy nato znovu hlásí o slovo a tedy ve školním roce 1907—8 setrvává, tehdy již dvorní rada V. Jarolímek, na zdravotní dovolené. Nemohl tak ani přijmout nabízený mu úřad rektora techniky. Po svém návratu do činné služby pak již přednášel jen vybrané stati z geometrie polohy a v roce 1915 odešel do důchodu. Ani pak však nepřestává vědecky pracovat. Sepsal a publikoval ještě devět vědeckých pojednání, která uzavřela jeho padesátiletou publicistickou činnost. To svědčí o jeho velké duševní svěžesti až do posledních let jeho života. 14. prosince 1921 umírá prof. V. Jarolímek na srdeční mrtvici při návratu z vycházky do svého domova.

Povšimneme-li si vědeckých prací V. Jarolímka, které spolu s činností učitelskou a správní patřily k bohaté jeho životní náplni, možno je třídit takto: Nejčastěji se ve svých pojednáních zabýval konstrukcemi kuželoseček a ploch druhého stupně, zejména jejich průniků. Zvláštní zálibu věnoval Jarolímek studiu geometrických imaginárních útvarů a konstrukcím reálných útvarů určených imaginárními prvky. Ostatní práce pak zasahují do matematiky, planimetrie, osvětlení, promítacích metod i jiných úseků.

Řada prací vzpomínaného profesora V. Jarolímka se zabývá látkou, která je dnes v osnově výuky matematiky nebo deskriptivní geometrie na SVVŠ (gymnasiích), a proto abychom osobu velkého geometra ještě více přiblížili našim čtenářům, uvedeme některé výsledky a úlohy z jeho prací.

Robert Wilhelm Bunsen

JOSEF KOTYK, Pardubice

Vynálezy optiky zvítězil člověk nad prostorem a časem. Drobnohledem vidíme věci nesmírně malé, dalekohled nám pak přibližuje světy nesmírně vzdálené. A co nedovedl o vesmíru říci ani dalekohled, prozrazuje spektrální analýza. Paprsky světelné jsou první bezdrátová telegrafie vesmíru; trvá sice i staletí, než k nám dospějí, avšak jejich spektrum nám podává přesné zprávy o složení hvězd i o stavu atomů hmoty, jež tam svítí...

Spektrální analýzu objevil se svým spolupracovníkem Kirchhoffem¹⁾ německý badatel *Robert Wilhelm Bunsen*. Od jeho narození uplynulo letos 160 let. Tato okolnost je příležitostí, abychom stručně připomněli jeho záslužnou vědeckou činnost. Veliké zásluhy, jež si Bunsen zjednal také o chemii, vymykají se ovšem již poslání našeho časopisu.

Robert Wilhelm Bunsen se narodil dne 31. března 1811 v Göttingenu, kde také vystudoval, složil doktorát a roku 1833 (teprve 22letý) se již habilitoval. Roku 1836 se stal profesorem v Kasselu, roku 1838 v Marburgu později ve Vratislavi²⁾ a roku 1852 v Heidelbergu, kde setrval až do své smrti roku 1899. Vyznamenán četnými řády a členstvím mnoha učených společností, byl znám a ctěn jako slavný vědec i skromný a vzácný člověk.

Předmětem rozsáhlého badatelského zájmu Bunsenova byly nejrozmanitější kapitoly fyziky.

Roku 1842 sestavil Bunsen pozoruhodný galvanický článek. Bunsenův článek s elektrodou uhlovou (+) a zinkovou (−) užívá dvou kapalných elektrolytů, kyseliny sírové a kyseliny dusičné, oddělených porézní (průlinčitou) nádobou. Jeho složení lze stručně vyznačit schématem $\text{Zn} - \text{H}_2\text{SO}_4 \mid \text{HNO}_3 - \text{C}$. Elektromotorická síla Bunsenova článku činí 1,9 V. Její hodnota je téměř stálá; o její udržení je postaráno přítomností kapalného, proto velmi účinného depolarizátoru HNO_3 .

Z let 1855 až 1857 pochází Bunsenův fotometr. Jeho podstatu tvoří matnice, list neprůhledného bílého papíru s průsvitnou (např. olejovou či jinou mastnou) skvrnou. Světelné zdroje jsou umístěny na optické lavici, každý z jedné strany matnice. Mastná skvrna světlo více propouští a zároveň méně odráží než papír, jeví se proto z méně osvětlené strany světlejší, z více osvětlené strany tmavší než okolí. Posunováním zdrojů dosáhneme toho, že obě strany papíru jsou osvětleny stejně; skvrna téměř zmizí. Poněvadž při kolmém dopadu paprsků osvětlení E_0 je přímo úměrné svítivosti I zdroje a nepřímo úměrné čtverci jeho vzdálenosti r od stěny, vychází z rovnosti $E_0^{\text{I.}} = E_0^{\text{II.}}$ vztah $\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2}$, tj. možnost srovnávání svítivosti obou zdrojů: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Odměříme-li

¹⁾ Gustav Kirchhoff (1824—1887) uveřejnil několik po něm nazvaných fyzikálních zákonů, zákony o rozvětvení el. proudu, zákon o emisi a absorpci světla a j. Společně s Bunsenem pracoval za svého působení na universitě v Heidelbergu v letech 1854 až 1875; oba badatelé se velmi dobře doplňovali.

²⁾ Něm. Breslau, dnešní pol. Wrocław.

obě vzdálenosti r_1 , r_2 a známe-li svítivost I_1 normálního zdroje, můžeme stanovit svítivost I_2 měřeného zdroje:

$$I_2 = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot I_1.$$

V letech 1868 a 1869 zabýval se Bunsen studiem hydrodynamiky, zejména tlaku v tekoucí kapalině. Shledal, že při značném zúžení trubice, kterou kapalina proudí, může se hydrodynamický tlak stát menším než vnější tlak vzduchu. Když udělal do stěny úzké trubice otvor, kapalina jím nevytékala, nýbrž ssála bublinky vzduchu z okolí. Na základě těchto zkušeností sestrojil Bunsen vodní vývěvu.³⁾

V thermice byla Bunsenovým jménem označena tzv. střední kalorie, definovaná stým dílem tepla, jehož je třeba k zahřátí 1 g vody z teploty 0 °C na 100 °C. Bunsen vystihl také význam skupenského tepla a upozornil na nedostatek ledových kalorimetrů tehdy užívaných, že množství vody, která v nich vzniká táním ledu, nelze přesně určit.⁴⁾ Dal proto ledovému kalorimetru tvar dokonalejší. Vtipným způsobem pozměnil jeho uspořádání tak, že mohl měřiti zmenšení objemu, jež se dostaví, jakmile část ledu, kalorimetrickou nádobu obklopujícího, roztaje; pozoroval je pomocí pošunutí rtuti v kapiláře, kterou byl kalorimetr uzavřen.

Roku 1857 sestrojil Bunsen hořák po něm nazvaný a ukázal, že jím lze konati pokusy, jež se do té doby prováděly dmuchavkou.

V těchto letech pracoval Bunsen také na základech elektrometallurgie.

Roku 1860 stali se Bunsen a Kirchhoff zakladateli velmi důležité vědecké metody, kvalitativní spektrální analýzy. První zpráva o tomto objevu byla uveřejněna před 110 lety ve spise „Chemische Analyse durch Spektralbeobachtungen“ roku 1861. Aby bylo možno polohu čar ve spektru také měřiti, zdokonalili oba badatelé v témž roce spektroskop, připojením třetí trubice⁵⁾ s mikrometrickou škálou, osvětlenou zdrojem vhodné svítivosti. Škálu umístili v ohniskové rovině malé spojné čočky; paprsky od škály vycházející byly tedy za čočkou rovnoběžné, dopadaly na druhou stěnu hranolu a odtud se odrážely do dalekohledu. Pozorovatel viděl pak spektrum i škálu současně; na stupnici mohl zároveň čísti polohu jednotlivých spektrálních čar.

³⁾ Podobnými pracemi zabýval se roku 1865 také H. Sprengel, jenž sestrojil první takovou vývěvu, při níž užíval rtuti.

⁴⁾ V ledovém kalorimetru, který sestavil anglický fyzik Black (1728 až 1799), se tato voda vyssávala z jamky, vyhloubené do většího kusu ledu, suchou a studenou houbou.

⁵⁾ Obrázek spektroskopu v novější učebnici (Fyzika pro III. roč. SVVŠ, 1965, obr. 136) by tedy bylo třeba doplniti. Obrázek v učebnici starší (Fysika pro IV. tř. gymnasií, 1953, obr. 310) byl úplnější.

Podle polohy jasných čar ve spektru emisním mohl Bunsen soudit, které látky jsou ve svítícím plynném zdroji přítomny. Na disociaci sloučenin kovů alkalických stačila teplota Bunsenova plamene. Např. kousek sodíku, vložen na železné lžičce do plamene Bunsenova hořáku, zbarví plamen sytě žlutě; spektrum žhoucích sodíkových par sestává z jediného obrazu skuliny barvy žluté. K tomu, aby nastala tato charakteristická spektrální reakce, stačí zcela nepatrné množství látky; v Bunsenově plameni lze dokázat i jednu čtrnáctimilióntinu miligramu sodíku! Spektrální analýzou mohla chemie proto záhy objevovat nové prvky; sám Bunsen objevil ihned roku 1860 ve vodách dürckheimských caesium Cs a roku 1861 v lepidolitu rubidium Rb.

Pro svou neobyčejnou citlivost a nezávislost na vzdálenosti nabyla spektrální analýza velikého významu při studiu hvězd v astrofyzice. Příkladem jejího užití je také spektrum sluneční, typické spektrum absorpční, kde na spojitém barevném pozadí se vyskytuje mnoho jemných čar tmavých.⁶⁾ Velký dojem vyvolal u současníků objev, na němž se opět podíleli Bunsen a Kirchhoff zároveň, že tmavé čáry slunečního spektra jsou identické s jasnými čarami emisního spektra známých plynů. Z toho učinili tento závěr:

Zaujímá-li tmavá čára v absorpčním spektru místo, které v emisním spektru zaujímá jasná čára známého prvku, je to důkaz, že bílé světlo prošlo prostředím, jež obsahuje též prvek v plynném stavu. Atmosféry, sluneční i zemská, pohlcují tedy ze spojitého spektra právě ty čáry, jež samy vysílají. (Obdoba resonančních úkazů v mechanice a akustice.)

Použití spektroskopie v astronomii slibovalo hned od počátku netušené možnosti rozšíření našich vědomostí o nebeských tělesech. Dosažené výsledky předčily však záhy všechno očekávání. Roku 1868 pozoroval Jules Janssen při zatmění Slunce spektroskopicky památnou skvělou žlutou čáru,⁷⁾ jež nenáležela žádnému tehdy známému prvku. I vzniklo domnění, že příslušný prvek, který byl nazván helium (řec. helios = Slunce), existuje jen na Slunci. Roku 1895 anglický badatel William Ramsay⁸⁾ však zjistil, že též plynný prvek uniká z minerálu klevaitu, vyskytuje se tedy také na Zemi.

⁶⁾ Pozoroval je po první William Hyde Wollaston roku 1802, bývají však nazývány Fraunhoferovými. Josef Fraunhofer, dovedný brusič skla, později přední vědecký pracovník ve výrobě optického skla v Utzschneiderově závodě v Mnichově, je znovu a samostatně objevil roku 1814; zemřel před 145 lety roku 1826.

⁷⁾ Bývá označována písmenem D_3 a délkou vlny $\lambda = 587,6 \mu\text{m}$. Složky žluté čáry natriové jsou naproti tomu charakterizovány údaji $(D_1) = 589,6 \mu\text{m}$ a $\lambda(D_2) = 589,0 \text{ nm}$. Jednotka 1 nm je tzv. nanometr $= 10^{-9} \text{ m} = 10^{-6} \text{ mm}$.

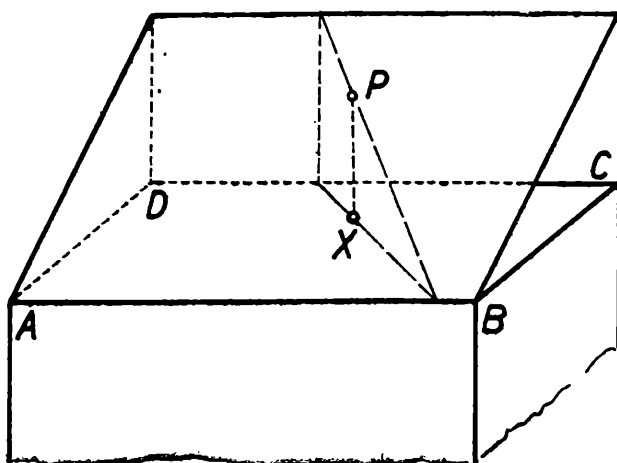
⁸⁾ William Ramsay, profesor na University College v Londýně, studoval také radioaktivitu; roku 1903 zjistil na př., že radiová emanace se mění v helium aj. Zemřel před 55 lety roku 1916.

Staříčský Bunsen prožíval tyto události s velkým pohnutím. Nápis na náhrobku Fraunhoferově říká krásně: „Approximavit sidera“. („Přiblížil hvězdy“.) Bunsen mohl se dožít radosti, že také slavná spektrální analýza, jejímž byl spoluzakladatelem, nám přiblížila hvězdy, ba podala přímý důkaz o hmotné jednotnosti vesmíru.

Demokritos z Abdéry

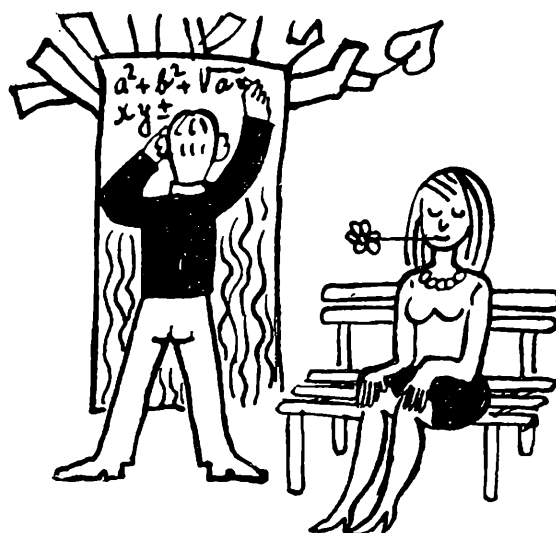
Demokritos z Abdéry žil přibližně v letech 460—370 př. n. l. V naší době je známý tím, že byl tvůrcem prvního filosofického materialistického systému. Nezapomeňme však, že to byl řecký filosof a že tudíž ovládal kromě jiných věd i geometrii. Bohužel, z jeho prací se nám zachovaly ponejvíce jen názvy, neboť Demokritovi odpůrci záměrně jeho spisy ničili. A tak víme, že psal o dotyku kružnice s kulovou plochou (dotyk křivky s plochou je docela moderní téma), o iracionálních úsečkách, o zobrazení kulové plochy do roviny a také o malování kulis v divadle. To už se vlastně dotýkal perspektivy. Archimedes píše, že Demokritos jako první objevil, že objem jehlanu (kužele) je roven jedné třetině objemu hranolu (válce) s toutéž podstavou a toutéž výškou. Nepodal však důkaz tohoto tvrzení, ten pochází od Eudoxa a o něm několik řádek přístě.

S. H.



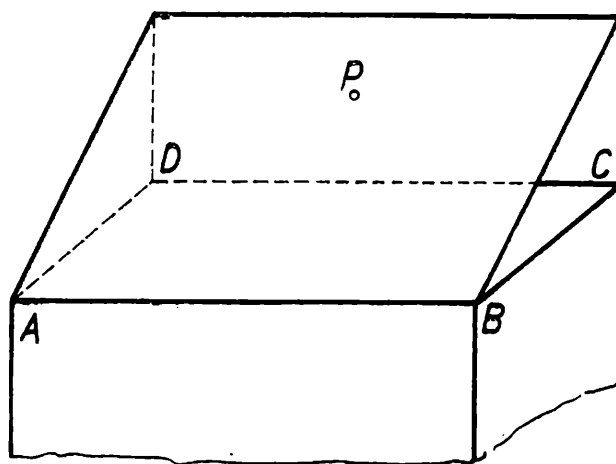
**ŘEŠENÍ ÚLOHY
ZE STR. 471**

MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY



PAVOUK

Pod střechou jedné kůlny byl v místě P usazen pavouček (obr. 1). Nedlel tam však dlouho. Po nějaké chvíli se spustil po pavučince na podlahu půdy. (Podlaha je v obr. 1 vyznačena $ABCD$.) Poněvadž vzduch na půdě byl v klidu, spouštěl se kolmo k podlaze. Dovedete určit místo, kam dopadl?



REFLEKTOR

Ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka ABC jsou umístěny reflektory, jejich světelný kužel má v osovém řezu úhel velikosti 45° . Je možné nařídit reflektory tak, aby celý trojúhelník byl jimi osvětlen?

S. H.

ČTYŘI SESTRY

Každá ze čtyř sester hraje na jiný nástroj a mluví jiným cizím jazykem. Milada hraje na čelo. Ta, jež mluví francouzsky, hraje na housle. Na harmoniku nehraje Věra. Německy nemluví Libuše. Milada umí anglicky. Jiřina nehraje na housle. Věra nemluví francouzsky. Libuše nehraje na harfu. Harmonikářka nemluví italsky. Na jaký nástroj hraje Věra a jaký jazyk zná?

O. S.

Řešení: Věra hraje na harfu a mluví italsky.

Záhady ze Zmatlíkova zápisníku

Kolik je Vám let?

Tato otázka patří ve společenském styku zpravidla mezi nejdělikátnější. Není však třeba, aby byla, zejména dámám, položena s přímou otevřeností. Vhodnější je, dá-li jí tazatel diplomaticky formu matematické zábavy, přitom může obratně vyzvědět i další „tajemství“, např. číslo bot.

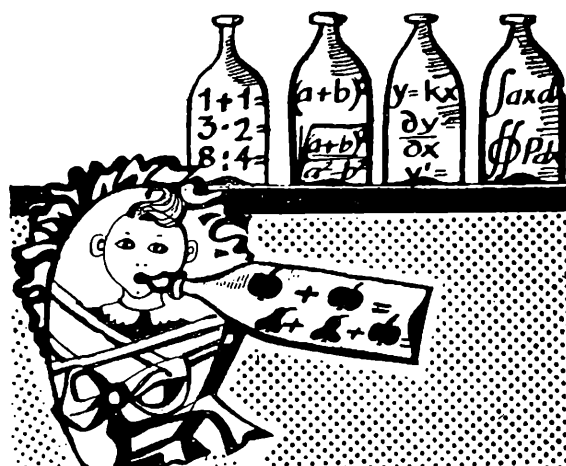
V roce 1962 se jeden matematický zájmový kroužek zabýval průzkumem hříčky, jež byla osobě *B* uložena osobou *A* takto: „Vynásob číslo svých bot dvěma a pak přičti pět, součet znásob číslem 50, od výsledku odečti letopočet svého narození, přičti číslo 1712 a výsledek sděl!“

Osoba *B* provedla žádané početní výkony a oznámila výsledek 4259. Byla velmi překvapena, co všechno na sebe prozradila: prvním dvojčíslím 42 výsledku bylo číslo jejích bot, posledním dvojčíslím 59 pak dokonce její věk! Všechno souhlasilo. Žák Zmatlík zkoušel však stejný výpočet s číslem $41\frac{1}{2}$ svých bot a letopočtem 1945 svého narození, dostal výsledek 4167, ze kterého se dozvěděl, že mu je 67 let. To ho samozřejmě rozladilo, začal proto usilovně hledat, proč v jeho případě pravidlo selhalo.

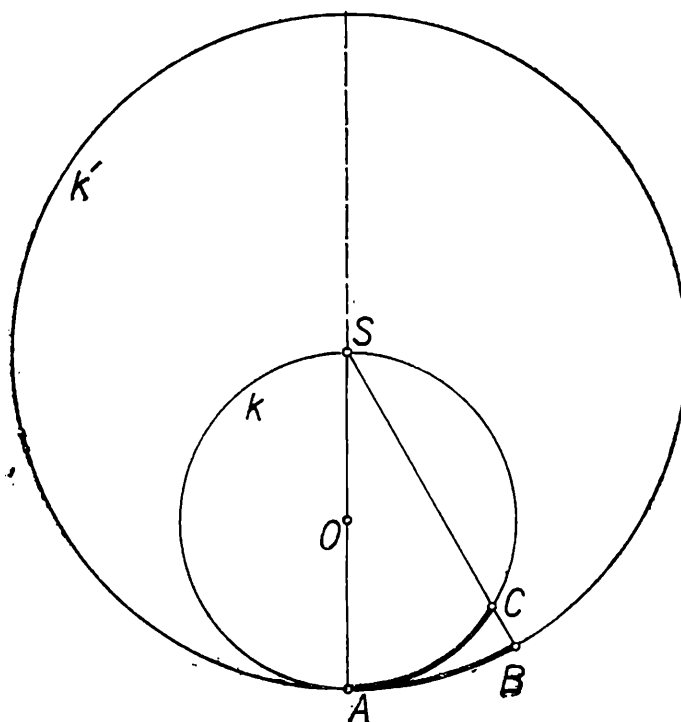
Milí čtenáři! Prozkoumejte, proč je číslo bot nutno zaokrouhlit na celé číslo a zdůvodněte, proč bylo v roce 1962 připočítáváno právě číslo 1712. Přesvědčte se, že pro letošní rok 1971 už číslo 1712 svou tajemnou úlohu dohrálo. Proveďte žádoucí upřesnění textu pro rok 1971, aby výpočet fungoval i v případě Zmatlíka.

Josef Kotyk, Pardubice

NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM



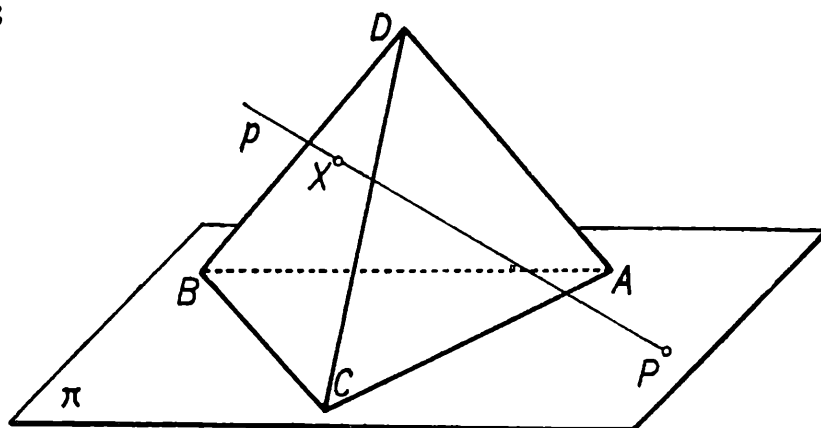
41. Jsou dány dvě kružnice $k \equiv (O; r)$, $k' \equiv (S; 2r)$, které mají vnitřní dotyk v bodě A (obr. 2). Polopřímka vedená bodem S protne kružnici k' v bodě B a kružnici k v bodě C . Ukažte, že kruhový oblouk AB na kružnici k' má tutéž délku jako oblouk AC na kružnici k .



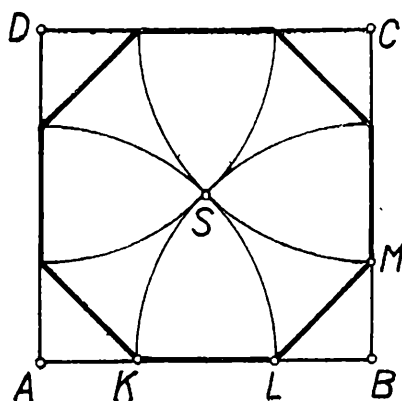
Obr. 2

42. Vedlejší obrázek 3 znázorňuje čtyřstěn $ABCD$ (jinak trojboký jehlan), jehož stěna ABC leží v rovině π . Pak je tam znázorněna přímka p , která daný čtyřstěn protíná v bodě X a rovinu π v bodě P . Najděte v tomto obrázku další průsečík přímky p se čtyřstěnem (správně, s povrchem čtyřstěnu).

Obr. 3



43. Víte, jak se do daného čtverce (na obr. 4 je označen $ABCD$) vepíše pravidelný osmiúhelník? Jestli ne, zahleďte se pozorně na obr. 4 a z něho to vyčtete. Ti, kteří se neleknu nějakého toho počítání, označí si $AK = LB = BM = x$, $KL = y$ a potom snadno dokáží, že



Obr. 4

$KL = LM$. Tím jsme sice dokázali, že všechny strany osmiúhelníku jsou shodné, ale nedokázali jsme, že to je pravidelný osmiúhelník. Je nutné ještě dokázat, že všechny vnitřní úhly osmiúhelníka jsou shodné.

44. Frantík a Josef jsou dohromady staří 24 let. Frantík je dvakrát tak starý, jako byl Josef, když byl Frantík půlkrát tak starý jako bude Josef, až bude Josef třikrát tak starý jako byl Frantík, když byl Frantík třikrát tak starý jako Josef. Kolik let je Frantíkovi a kolik Josefovi?

45. Pro které nejmenší a pro které největší přirozené číslo n platí, že mezi $0,5n$ a $0,6n$ leží právě 100 přirozených čísel?

46. Řešte rovnici

$$x^2 + [x] - 3 = 0,$$

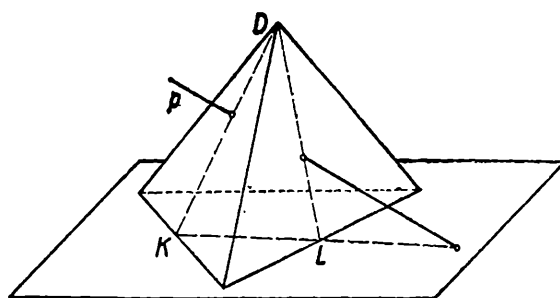
kde symbol $[x]$ je celé číslo nejbližší nižší nebo rovno číslu x , je-li x celé číslo. Např. $[2,3] = 2$, $[7] = 7$, $[-1,7] = -2$ atd.

47. V obchodním domě. Tři ženy Růžena, Milada a Helena a jejich muži František, Karel a Luboš nakupovali. Každý muž utratil o 45 Kčs

více než jeho žena. Karel utratil o 525 Kčs více než Růžena, Luboš o 13 Kčs více než Milada. Každý ze šesti koupil několik věcí a platil za každou z nich tolik Kčs, kolik nakoupil věcí. Určete manželské páry a jejich útraty!

48. *Na závodě.* Před závodem běžců A, B, C se dohadovali tři diváci o jeho výsledku. První tvrdil: „A vyhraje,“ druhý říkal: „C nebude poslední,“ třetí pravil: „B nebude první.“ Po závodě se ukázalo, že právě jeden z nich měl pravdu. V jakém pořadí doběhli závodníci?

Řešení. 41. Označme $\sphericalangle ASB = \alpha$, potom $\sphericalangle AOC = 2\alpha$. Jestliže $OA = r$, potom $SA = 2r$. A tu platí $AC = \frac{2\pi r}{360} \cdot 2\alpha = \frac{r}{90}$
 $AB = \frac{2\pi \cdot 2r}{360} \cdot \alpha = \frac{r}{90}$. 42. Řešení poskytuje obr. 5.



Obr. 5

44. Frantíkovi je 15 let, Josefovi 9 let. 45. $n_1 = 997$, $n_2 = 1010$. 46. $x_1 = \sqrt[3]{2}$, $x_2 = -\sqrt[3]{6}$.

47. *V obchodním domě:* Karel 529 Kčs + Helena 484 Kčs, František 81 Kčs + Milada 36 Kčs, Luboš 49 Kčs + Růžena 4 Kčs.

48. *Na závodě:* Pořadí v cíli: 1. B, 2. C, 3. A, pravdu měl druhý divák. O. S.

49. Úpravou pravé strany identity

$$n^4 = [2(n-1)]^2 + [2(n-1)]^3 + [2(n-1)^2 - n^2]^2$$

se přesvědčte o její správnosti. Jak lze podle toho vyjádřit 5^4 a 7^4 ?

50. Přesvědčte se, že kvádr, jehož hrany mají délku 10, 11, 12 má stejně dlouhou úhlopříčku jako kvádr o hranách 4, 5, 18. — Tutéž vlastnost mají kvádry (9, 10, 11), (2, 3, 17) nebo kvádry (14, 15, 16), (4, 6, 25).

51. Zkuste dosadit do výrazu

$$(x+2)^2 - 2(x+1)^2 + x^2$$

za x libovolná čísla. Vždy, pokud neuděláte chybu, vám vyjde číslo 2.

Jestli nevíte, čím to je, zjednodušte daný výraz a uvidíte, že výsledek zjednodušení není závislý na čísle x .

Podobnou vlastnost má výraz

$$(x + 3)^3 - 3(x + 2)^3 + 3(x + 1)^3 - x^3.$$

Zde je výsledek každého dosazení číslo 6.

SJEZD ABSOLVENTŮ

matematicko-fyzikální fakulty Karlovy university

Děkanát matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy připravuje sjezd absolventů fakulty, kteří dokončili studia do r. 1969.

Sjezd bude uspořádán podle oborů (zaměření, specializací) počátkem roku 1972 a bude zaměřen hlavně na tyto otázky:

- a) připomínky a návrhy k učebním plánům reformovaného studia (učební plány zájemcům zašleme);
- b) zkušenosti z uplatňování absolventů v praxi a možnosti dalšího umísťování absolventů fakulty.

Protože děkanát nemá k dispozici přesné adresy absolventů, obracíme se na všechny absolventy – zájemce o sjezd se žádostí, aby nám co nejdříve sdělili své nynější adresy a obor studia, event. i adresy dalších absolventů na adresu:

Děkanát matematicko-fyzikální fakulty UK, Praha 2, Ke Karlovu 3, s poznámkou „**Sjezd absolventů**“.

PUBLIKACE SPN

Běloun a kol.. Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro 7. a 9. ročník. Vyd. 6., 1971, str. 128, váz. Kčs 10,50. Edice: Pomocné knihy pro žáky.

Matuška, Trefný: Matematika v otázkách a heslech. Vyd. 2., 1971, str. 204, váz. Kčs 12,—. Edice všeobecného vzdělání — MAJÁK.

Ungermann: Mechanika v úlohách I. Vyd. 1., 1971, str. 82, brož. Kčs 4,50. Edice: Pomocné knihy pro žáky.

SLOVNÍČEK

FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

V

valeur *ž*
valeur absolue
valuation *ž*
variable
variable *ž*
variable dépendante
variable indépendante
fonction de *n* variables
variation *ž*
varié, *e*
mouvement *m* varié
varier
variété *ž*
vecteur *m*
vecteur libre
vecteur lié
champ *m* de vecteurs
vectoriel, *elle*
vérifier
a vérifie une équation
vertical, *e*, aux
verticale *ž*
verticalement
vertu *ž*
en vertu de
vicésimal, *e*, aux
vicieux, *euse*
cercle *m* vicieux

hodnota
absolutní hodnota
ohodnocení
proměnný
proměnná
závisle proměnná
nezávisle proměnná
funkce *n* proměnných
variací
měnící se
nerovnoměrný pohyb
měnit (hodnotu)
varieta
vektor
volný vektor
vázaný vektor
vektorové pole
vektorový
splňovat, verifikovat
a splňuje rovnici
svislý
svislá přímka, vertikála
svisle
ctnost
na základě čeho
mající za základ číslo dvacet
chybný
bludný kruh

vide
ensemble *m* vide
vigueur *ž*
être en vigueur
vingt
vingtième
vingtième *m*
virgule *ž*
visible
vitesse *ž*
vitesse angulaire
vitesse initiale
vitesse moyenne
voisin, e
voisinage *m*
voisinage d'un point
volume *m*
vrai, e
grandeur *ž* vraie

prázdný
prázdná množina
platnost
platit
dvacet
dvacátý
dvacetina
čárka (interpunkční i desetinná)
viditelný
rychlost
úhlová rychlost
počáteční rychlost
průměrná rychlost
sousední
okolí
okolí bodu
objem
pravdivý, skutečný
skutečná velikost

W

X

Y

Z

zéro *m*
zone *ž*
zone sphérique

nula
pás, pásmo
kulový pás