

# rozhledy

MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ

---

1

ROČNÍK 48, 1969-70, SEPTEMBER

**1**

ROČNÍK 48  
SEPTEMBER 1969-70

# MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositeľ vyznamenania  
Za zásluhy o výstavbu

## VEDÚCI REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositeľ vyznamenania Za vynikajúcu prácu

## VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

## REDAKČNÁ RADA:

zast. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed-  
inšp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ Praha; zast.  
učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef  
Díbelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B.  
Bystrica; Miloš Franek, SVŠ, Prievidza; doc.  
Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef  
Korous, DrSc., ČVUT, Praha; dr. Oldřich Le-  
píl, PU, Olomouc; Milan Marčok, VŠLD, Zvo-  
len; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava;  
prof. dr. Cyril Palaj, PF-UPJŠ, Košice; Evžen  
Říman, CSc., ČVUT, Praha, nositeľ vyzname-  
nania Za vynikajúcu prácu; dr. Jiří Sedláček,  
ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV,  
Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; ing.  
dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ UNM, Praha;  
doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof.  
dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František  
Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarík, inšp. MŠ  
SSR.

## REDAKCIA:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29

## OBSAH

|                                                                                |                     |
|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Doc. O. Setzer: Do nového ročníku                                              | 1                   |
| O. Odvárko: Zopakujme si látku o mno-<br>žinách . . . . .                      | 2                   |
| J. Šedivý: Znovu o množinách .                                                 | 5                   |
| J. Dítě: Konstrukce grafu složené funkce                                       | 8                   |
| Dr. S. Trávníček, dr. J. Voráček: O perio-<br>dických posloupnostech . . . . . | 11                  |
| S. Horák: Poznámka k průmětu kružnice .                                        | 20                  |
| Ing. B. Vybíral: SCs.: Grafická statika                                        | 22                  |
| Dr. J. Šíroky: Astronomické efemeridy .                                        | 30                  |
| Naše soutěž                                                                    | 31                  |
| MO: XIX. ročník matematické olympiády .                                        | 34                  |
| FO: Další příklady pro první kolo soutěže                                      | 38                  |
| Recenze                                                                        | 50                  |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-čes-<br>ký . . . . .                    | 3. a 4. str. obálky |

Vydáva ministerstvo školstva v štátnom pedagogickom nakladateľstve v Prahe, za odbornej starostlivosti Jednoty čs. matematikov a fyzikov.

Vychádza desať razy do roka. Ročné predplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tlačí Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozširuje Poštová novinová služba. Informácie o predplatnom podá a objednávky prijímá každá pošta i doručovateľ. Objednávky do zahraničia vybaruje PNS, ústredný sklad expedície tlače, odd. vývoz tlače, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zast. učitel dr. O. Hömig. Titulné obrázky: B. Šmejdivá, študujúca FS.

Štátne pedagogické nakladateľstvo, n. p. v Prahe, 1969.

# Do nového ročníku

DOC. OTASETZER, ČVUT, Praha

Na počátku nového školního roku je třeba, abyste se — alespoň v hrubých rysech — seznámili nejen s programem a cílem, nýbrž i s dosavadním vývojem časopisu, jehož první číslo se právě dostává do Vašich rukou.

Rozhledy matematicko-fyzikální jsou nejstarším odborným československým časopisem pro středoškolskou mládež. Když před padesáti lety do Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky byla ponejprv vkládána příloha Rozhledy matematicko-přírodovědecké pro studující středních škol, jistě nikdo netušil, že se časem stane tato příloha samostatným časopisem, který přežije členský časopis v jeho původní podobě a že bude pro svou čtivost vyhledáván středoškolskými studenty, jejich učiteli i zájemci z technických kruhů.

Po celou dobu svého trvání plnil časopis velmi dobře své poslání. Z řad jeho čtenářů vzešlo mnoho vynikajících matematiků, fyziků a astronomů, akademiků, profesorů universit i technik. Jejich jména naleznete mezi úspěšnými řešiteli naší tradiční soutěže o ceny. V Rozhledech začínali svými prvotinami budoucí věhlasní vědci. Páli bychom si, abyste i Vy rozšířili jejich řady.

Nadále chceme urychlovat Váš odborný růst otiskováním zajímavých článků z moderních oborů matematiky a fyziky, i když se nezříkáme ani klasických metod a disciplín.

Podle možnosti, tj. dostatečné zásoby vhodných rukopisů, zařadíme slovenské články slovenských autorů. Formálně se projeví federalizace i vnější úpravou časopisu; obálky lichých čísel budou slovenské, sudá čísla budou mít obálku českou. Redakční radu jsme rozšířili o dalších pět slovenských odborníků.

Doufám, že pochopíte těžkosti, které máme s výrobou i distribucí časopisu. My plníme své povinnosti vždy včas.

Prosím, abyste Rozhledy po přečtení ukázali svým známým a tak pomáhali šířit vědecké obory, které měly a budou mít stále větší uplatnění v celém našem životě společenském i hospodářském.



## MATEMATIKA

# Zopakujme si látku o množinách

OLDŘICH ODVÁRKO, MFF, KU, Praha

V několika člancích minulého ročníku tohoto časopisu jsme se zabývali množinami. Vysvětlili jsme si, co je to základní množina a prázdná množina (pro tu jsme zavedli označení  $\emptyset$ ). Víme už také, kdy nazýváme množinu  $A$  podmnožinou množiny  $B$  a kdy říkáme, že dvě množiny  $C$ ,  $D$  jsou si rovny. Naučili jsme se řešit pomocí Vennových diagramů úlohy, v nichž bylo třeba rozhodnout, zda jsou si dvě množiny rovny, či nikoliv. Zjistili jsme, že touto metodou lze řešit pouze takové úlohy, v nichž se vyskytují nejvýše čtyři množiny.

Dále jsme se zabývali množinovou algebrou. Definovali jsme nejprve doplněk množiny  $A$  vzhledem k základní množině  $Z$  (označení  $\bar{A}_Z$ , kratčeji  $A'$ ), sjednocení množin  $A$ ,  $B$  ( $A \cup B$ ) a průnik množin  $A$ ,  $B$  ( $A \cap B$ ). Seznámili jsme se s některými vzorci, které platí pro tyto operace s libovolnými podmnožinami dané základní množiny  $Z$ . Nejdůležitější z nich si znovu přehledně napíšme, abychom si lépe uvědomili jejich vzájemné souvislosti. Na tento přehled vzorců budeme se často odvolávat v dalších článcích v tomto ročníku Rozhledů

$$A \cup B = B \cup A, \quad (1)$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad (2)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (3)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (4)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (5)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (6)$$



$$A \cup A = A, \quad (7)$$

$$A \cap A = A, \quad (8)$$

$$A \cup \emptyset = A, \quad (9)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (10)$$

$$A \cup Z = Z, \quad (11)$$

$$A \cap Z = A, \quad (12)$$

$$A \cup A' = Z, \quad (13)$$

$$A \cap A' = \emptyset \quad (14)$$

$$(A')' = A, \quad (15)$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (16)$$

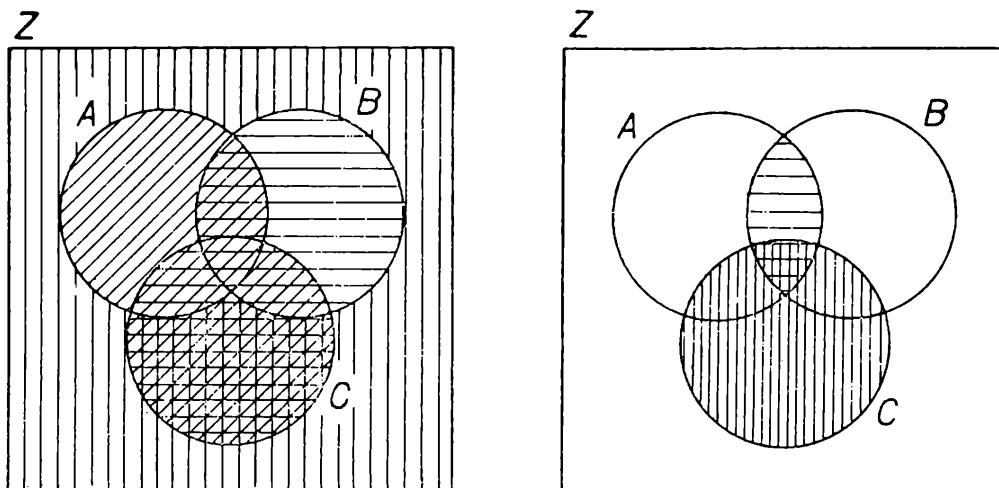
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (17)$$

Pomocí těchto vzorců jsme se naučili zjednodušovat a upravovat zápisy množin, rozhodovat, zda dvě dané množiny jsou si rovny.

**Příklad 1.** Rozhodněte, zda pro tři libovolné podmnožiny  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dané základní množiny  $Z$  platí

$$[(A \cup B)' \cup (C \cup B)] \cap (A \cup C) = C \cup (A \cap B)$$

Řešení pomocí diagramu.



Obr. 1a, b

Řešme příklad nejprve pomocí Vennova diagramu pro tři množiny (obr. 1a, 1b). Na obr. 1a je grafickým obrazem množiny  $(A \cup B)'$  políčko vyšrafované svisle, množině  $C \cup B$  odpovídá oblast, složená ze všech políček Vennova diagramu, která jsou vyšrafována vodorovně. Obrazem množiny  $(A \cup B)' \cup (C \cup B)$  jsou všechna políčka aspoň jednou šrafovaná (vodorovně nebo svisle). Množině  $A \cup C$  odpovídají všechna ta políčka, jež jsou vyšrafována šikmo. Grafickým obrazem množiny

$$[(A \cup B)' \cup (C \cup B)] \cap (A \cup C)$$

je potom oblast složená ze všech těch políček, která jsou vyšrafována šikmo a ještě navíc vodorovně nebo svisle. Obrazem množiny  $C$  jsou na obr. 1b všechna políčka šrafovaná svisle, množině  $A \cap B$  odpovídá

oblast složená ze všech políček vyšrafovaných vodorovně. Grafickým obrazem množiny  $C \cup (A \cap B)$  jsou všechna políčka aspoň jednou šrafovaná. Porovnáme-li oba obrázky, dospíváme k závěru, že množiny  $C \cup (A \cap B)$  a  $[(A \cup B)' \cup (C \cup B)] \cap (A \cup C)$  jsou si rovny.

Řešení pomocí množinové algebry.

Zkusme upravit zápis množiny

$$[(A \cup B)' \cup (C \cup B)] \cap (A \cup C)$$

na základě vzorců (1) až (17)

$$\begin{aligned} & [(A \cup B)' \cup (C \cup B)] \cap (A \cup C) = \\ & = [(A' \cap B') \cup B \cup C] \cap (A \cup C) = \\ & = [(A' \cap B') \cup B] \cap A \cup C = \\ & = [(A' \cap B' \cap A) \cup (B \cap A)] \cup C = \\ & = (B \cap A) \cup C = C \cup (A \cap B) \end{aligned}$$

Při úpravě zápisu množiny jsme postupně použili vzorce (16), (1), (6), (5), (14), (9), (1) a dospěli jsme ke stejnému závěru jako při řešení příkladu první metodou.

**Příklad 2.** Právě probíhá jeden z pořadů televizního seriálu „Pokus pro dva“. Před obecenstvem, oddělení neprůhlednou zástěnou, sedí na jedné straně mladý muž, na druhé straně tři dívky, Anna, Hana a Jana. Mladý muž po deset minut kladl dívkám různé otázky a podle jejich odpovědí si nyní má zvolit k bližšímu seznámení tu z nich, jejíž odpovědi se mu nejvíce líbí. V krátké přestávce, během níž se mladý muž rozhoduje o nejspřávnější volbě, sdělují si dívky vzájemně své představy o tom, jak jejich protějšek za zástěnou vypadá.

Anna: Domnívám se, že je vysoký nebo štíhlý a určitě je také hnědooký.

Hana: Myslím, že je brýlatý a černovlasý nebo je vysoký a štíhlý.

Jana: Představuji si, že je brýlatý. Není hnědooký, nebo není černovlasý.

Mladý muž odpovídal představě Anny i Jany, Hana však neuhodla. Jak vlastně vypadal?

Řešení. Za základní množinu zvolme množinu všech mužů a označme ji  $Z$ . Písmeny  $V$ ,  $S$ ,  $H$ ,  $C$ ,  $B$  označme postupně tyto podmnožiny množiny  $Z$ : množinu všech vysokých mužů, všech štíhlých mužů, všech hnědookých mužů, všech černovlasých mužů, všech brýlatých mužů. Podle Anny patří mladý muž do té podmnožiny množiny  $Z$ , která se dá pomocí písmen  $V$ ,  $S$ ,  $H$ ,  $C$ ,  $B$  zapsat  $(V \cup S) \cap H$ , podle Hany do množiny  $(B \cap C) \cup (V \cap S)$  a podle Jany do množiny  $B \cap (H' \cup C')$ . Hana neuhodla, mladý muž tedy nepatří do množiny  $(B \cap C) \cup (V \cap S)$ , patří do jejího doplňku vzhledem k množině  $Z$ , tj. do množiny

$$[(B \cap C) \cup (V \cap S)]'$$

Vzhledem k tomu, že odpovídá představě Anny i Jany, patří do průniku množin  $(V \cup S) \cap H$  a  $B \cap (H' \cup C')$ . Patří tedy do množiny

$$[(B \cap C) \cup (V \cap S)]' \cap (V \cup S) \cap H \cap B \cap (H' \cup C')$$

V zápisu této množiny se vyskytuje pět různých písmen, označujících podmnožiny množiny  $Z$ . Nemůžeme tedy tento příklad řešit pomocí Vennova diagramu. Zkusme upravit zápis množiny pomocí vzorců (1) až (17)

$$\begin{aligned} & [(B \cap C) \cup (V \cap S)]' \cap (V \cup S) \cap H \cap B \cap (H' \cup C') = \\ &= (B \cap C)' \cap (V \cap S)' \cap (V \cup S) \cap H \cap B \cap (H' \cup C') = \\ &= (B' \cup C') \cap B \cap (V' \cup S') \cap (V \cup S) \cap H \cap (H' \cup C') = \\ &= [(B' \cap B) \cup (C' \cap B)] \cap [(H \cap H') \cup (H \cap C')] \cap \\ &\quad \cap [(V' \cap V) \cup (V' \cap S) \cup (S' \cap V) \cup (S' \cap S)] = \\ &= C' \cap B \cap H \cap C' \cap [(V' \cap S) \cup (S' \cap V)] = \\ &= (C' \cap B \cap H \cap V' \cap S) \cup (C' \cap B \cap H \cap V \cap S') \end{aligned}$$

Užili jsme postupně vzorce (16), (17), (2), (5), (14), (9), (5), (8).

Mladý muž byl tedy brýlatý, hnědooký, štíhlý a nebyl černovlasý, ani vysoký, nebo byl brýlatý, hnědooký, vysoký a nebyl ani černovlasý, ani štíhlý.

### Cvičení.

V druhé části našeho pořadu „Pokus pro dva“ si vybírá dívka, stejným způsobem jako v první části, ze tří chlapců. Chlapci o přestávce tipují, jak dívka vypadá.

Jan: Myslím, že je vysoká a určitě je také světlovlasá nebo modrooká.

Petr: Domnívám se, že je modrooká a není světlovlasá; nebo je vysoká, ale není štíhlá.

Jiří: Tipuji, že tajemná dívka za zástěnou je taková, jak říkáš ty, Jene, nebo taková, jak si myslíš ty, Petře. Navíc je zcela jistě štíhlá a není modrooká.

Dívka si vybrala Jiřího. Byla štíhlá a vysoká, nebyla modrooká ani světlovlasá. Tipoval Jiří správně?

Řešte úlohu jednak užitím Vennova diagramu pro čtyři množiny, jednak pomocí vzorců (1) až (17).

Odpověď k cvičení. Jiří netipoval správně. Podle jeho tipu by měla být dívka vysoká, štíhlá, světlovlasá a nemá být modrooká.

## Znovu o množinách

JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Čtenáři, kteří odebírali minulý ročník Rozhledů, měli možnost získat některé poznatky o množinách.<sup>1)</sup> Připomeňme si, že šlo o Vennovy diagramy a jejich použití k řešení rozmanitých úloh početních i důkazových, k ověřování správnosti úsudků, rovnosti množin. Vedle této názorné pomůcky jsme poznali i základy množinové algebry, tj. zá-

<sup>1)</sup> Noví odběratelé Rozhledů najdou v nynějším ročníku stručné zopakování důležitých pojmů a postupů teorie množin, které již byly probrány. Mají-li však čtenáři možnost seznámit se s články o množinách uveřejněnými v minulém ročníku, získají jejich prostudováním pevnější základ.

kladní množinové operace a jejich vlastnosti, úpravy výrazů se symboly těchto operací a jejich použití při řešení úloh. V letošním ročníku Rozhledů budeme dále rozvíjet představy čtenářů o množinách a o jejich uplatnění v matematice.

## Nekonečné množiny

V minulém ročníku jsme pracovali převážně s množinami konečnými, např. skupinami lidí nebo věcí. Považovali jsme je za konečné, protože jsme vždy mohli udat přirozené číslo, které buď přímo vyjadřovalo počet prvků množiny, nebo bylo zaručeně větší než počet jejích prvků. Zcela samozřejmě jsme každou část konečné množiny považovali opět za konečnou množinu, která má menší počet prvků než původní množina.

V matematice je však třeba uvažovat i o množinách, které nejsou konečné, např. o množině všech přirozených čísel, o množině všech bodů v rovině, na přímce, kružnici apod. Množiny, které nejsou konečné, nazýváme nekonečné množiny. I při jejich studiu používáme pojmů, které jsme již poznali (operace průnik, sjednocení, doplněk, vztah rovnosti, různosti a inkluze množin, Vennovy diagramy, zákony množinové algebry). Pokud jde o tyto pojmy, nepocítíme žádný rozdíl v jejich aplikaci na konečné či nekonečné množiny.

Jeden výrazný rozdíl mezi konečnými a nekonečnými množinami je však matematikům znám již po staletí. Ze zkušeností s konečnými množinami lidí nebo věcí víme, že část množiny má menší počet prvků než celá množina. U nekonečných množin není tato věc tak samozřejmá, protože o počtech jejích prvků nemůžeme hovořit a opíráme se jen o neurčité představy. Vezměme například množinu  $N$  všech přirozených čísel a množinu  $L$  všech lichých čísel

$N$ : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

$L$ : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,

Je jisté, že množina  $L$  obsahuje jen některé prvky množiny  $N$ . Protože množiny  $L$ ,  $N$  jsou nekonečné, nemůžeme mluvit o počtech jejích prvků, přesto však jsme ochotni říci, že množina  $L$  má „méně prvků“ než množina  $N$ . Obdobně bychom mohli podle citu pro část a celek říkat, že úsečka  $AB$  obsahuje „méně bodů“ než polopřímka  $AB$ . Slova „méně prvků, méně bodů“ dáváme do uvozovek, protože vyjadřují jen naše představy a nejsou přesně definovány. Navíc za chvíli ukážeme, že stejně tak můžeme o uvedených množinách říci, že mají „stejně mnoho prvků, stejně mnoho bodů“ Nevěříte?

Jak se bez počítání prvků přesvědčujeme o tom, že dvě množiny mají stejně mnoho prvků? Představme si chlapce a dívky v sále při tanečních hodinách. Jak zjistí mistr tance, zda je chlapců právě tolik jako dívek? Jistě je nezačne počítat, ale vyzve všechny, aby se při-

pravili k tanci, tj. utvořili dvojice. Nastane-li situace, že každá dívka má tanečníka a žádný chlapec nezůstává, je jistě v sále stejně mnoho dívek jako chlapců. Obdobnou „metodu tančících dvojic“ uplatňujeme i v matematice. Z prvků dvou porovnávaných množin  $A$ ,  $B$  tvoříme uspořádané dvojice  $(x, y)$ , kde  $x \in A$  a  $y \in B$ . Je-li každý prvek množiny  $A$  právě v jedné dvojici s prvkem množiny  $B$  a zároveň je každý prvek množiny  $B$ , právě v jedné dvojici s prvkem množiny  $A$ , pak mají obě množiny „stejně mnoho prvků“, říkáme, že *mají stejnou mohutnost* (jsou stejně mohutné neboli ekvivalentní).

Zkoumejme, zda množiny  $N$ ,  $L$  mají stejnou mohutnost. Uspořádané dvojice můžeme tvořit z čísel zapsaných ve výčtu prvků obou množin pod sebou

$(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9), \dots, (n, 2n - 1),$

Je jistě zřejmé, že se takto prokáže, že obě množiny jsou stejně mohutné, a to je výsledek, který se zdá na první pohled neuvěřitelný:

*část nekonečné množiny může být stejně mohutná jako celá tato množina.*

Přesvědčte se sami konstrukcí, že vnitřek úsečky je stejně mohutnou množinou bodů jako vnitřek polopřímky. Narýsujte si čtverec  $ABCD$  a vyznačte si úhlopříčku  $AC$  a polopřímku  $AB$ . Promítejte body vnitřku úsečky  $AC$  z bodu  $D$  na polopřímku  $AB$ . Uspořádané dvojice bodů  $(X, X')$  — bodu  $X$  a jeho průmětu  $X'$  — vám pomohou k důkazu, že jde o stejně mohutné množiny bodů. Budete-li promítat úsečku  $AC$  kolmo na přímku  $AB$ , přesvědčíte se, že i různě dlouhé úsečky jsou stejně mohutné množiny bodů.

Vidíte, že při úvahách o nekonečných množinách dostáváme někdy výsledky, které odporují běžnému nazírání, při němž nerozlišujeme dost jemně různé pojmy. Tak je tomu v případě geometrických útvarů, kdy spojujeme délky bodových množin s představou o jejich stejné mohutnosti. Podrobnější analýza pojmu nás pak neúprosně vede k závěrům, které se zdají v prvním okamžiku nepřijatelné. V jistém období vývoje matematiky byly výsledky, které jsme si zde připomenuli, odmítány jako protismyslné. Vývoj a potřeby rozvoje matematiky však přispěly k tomu, že matematici uznali jejich logickou nevyhnutelnost.

V některém z dalších článků tohoto ročníku si všimneme jiných překvapujících poznatků teorie nekonečných množin. Pozornost zaměříme též na množiny uspořádaných dvojic utvořených z prvků dvou množin a na množiny množin. Takto rozšíříme své dosavadní představy o množinách. Algebraický aparát teorie množin — množinovou algebru — zobecníme na Booleovu algebru a ukážeme si její zajímavé aplikace.

# Konstrukce grafu složené funkce

JOSEF DÍTĚ, SVVŠ, Sušice

V prvním a druhém ročníku střední školy jste se naučili sestavovat graf lineární funkce, kvadratické funkce, nepřímé úměrnosti, exponenciální funkce, logaritmické funkce a goniometrické funkce. Pomocí grafů těchto funkcí můžeme sestavovat grafy složených funkcí.

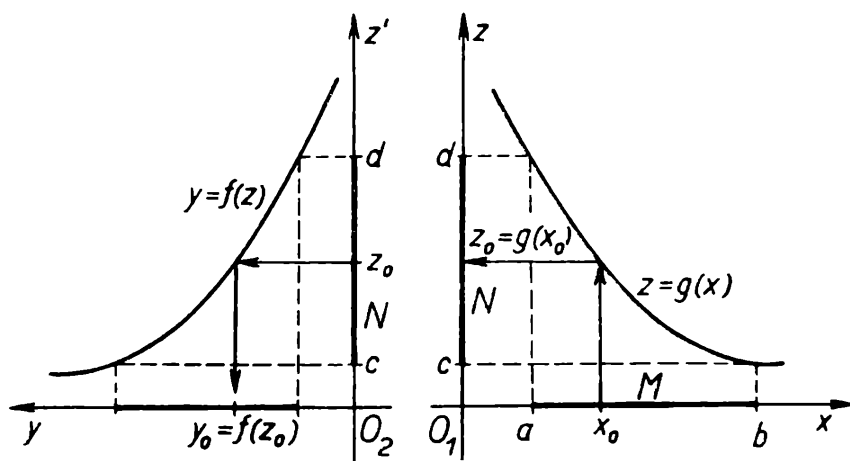
**Definice.** Je-li dána funkce  $y = f(z)$ , jejíž definiční obor je množina reálných čísel  $\mathbf{N}$  — na obr. 1 je to interval  $(c, c')$  — a funkce  $z = g(x)$ , jejíž definiční obor je množina reálných čísel  $\mathbf{M}$  — na obr. 1 je to interval  $(a, b)$  — a jestliže ke každému  $x_0 \in \mathbf{M}$  přísluší hodnota  $g(x_0) \in \mathbf{N}$ , je tím každé hodnotě  $x_0 \in \mathbf{M}$  přiřazena právě jedna hodnota  $y_0 = f(z_0)$ . Takto definovanou funkci  $F$  proměnné  $x$  nazýváme složená funkce a píšeme

$$F(x) = f[g(x)]$$

Funkce  $f$  se nazývá vnější funkce a funkce  $g$  vnitřní funkce složené funkce  $F$ .

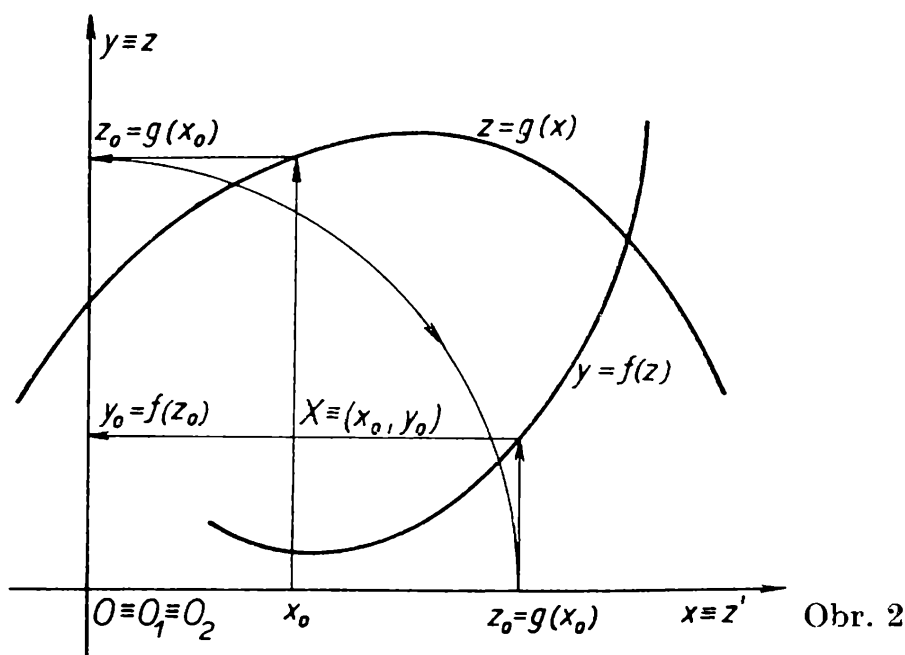
Složená funkce je například funkce  $y = 2 \sin x$ ,  $x \in (-\infty; \infty)$ . V této funkci je vnitřní funkce  $z = g(x) = \sin x$  a vnější funkce  $y = f(z) = 2z$ . Hodnotu této funkce v bodě  $x_0$  určíme tak, že nejprve v tabulkách hodnot goniometrických funkcí najdeme číslo  $z_0 = \sin x_0$ , a pak vypočteme  $y_0 = 2z_0$ . Výpočet čísla  $y_0$  je však pracný.

Graf složené funkce můžeme sestavit tak, že nejprve určíme definiční obor funkce, pak sestavíme tabulku a pomocí ní sestavíme graf funkce. Tento postup konstrukce grafu je vždy možný, ale v některých případech (jako např. u funkce  $y = 2 \sin x$ ) je sestavení tabulky poměrně pracné. Ukážeme si proto, jak můžeme graf složené funkce  $y = f[g(x)]$  sestavit pomocí grafů funkcí  $z = g(x)$  a  $y = f(z)$ . V obr. 1 je vidět, jak k libo-



Obr. 1

volnému číslu  $x_0 \in \mathbf{M}$  graficky určíme hodnotu  $y_0 = F(x_0)$ . Stačí proto zvolit novou pravoúhlou soustavu souřadnic  $(Oxy)$  a v ní narýsovat množinu bodů  $X = [x_0, F(x_0)]$ , která je grafem složené funkce  $y = F(x)$ . Uvedenou konstrukci grafu složené funkce je možné dále zjednodušit. Zvolíme opět jako v obr. 1 dvě pravoúhlé soustavy souřadnic  $(O_1xz)$  a  $(O_2z'y)$ . Nebudeme je však volit zcela libovolně, ale tak, aby  $O_1 \equiv O_2$ , osa  $z'$ , aby splynula s osou  $x$  a osa  $y$ , aby splynula s osou  $z$  (obr. 2). Osy  $x, z'$  a  $z, y$  volíme souhlasně orientované. V takto zvolených soustavách souřadnic sestrojíme grafy funkcí  $z = g(x)$  a  $y = f(z)$ . Pomocí grafu funkce  $g(x)$  můžeme graficky najít k libovolné hodnotě  $x_0 \in \mathbf{M}$  číslo  $z_0 = g(x_0)$ . Pomocí kružítka pak najdeme obraz čísla  $z_0$  na ose  $x \equiv z'$ . Hodnotu  $y_0 = f(z_0) = F(x_0)$  najdeme graficky pomocí grafu funkce  $f(z)$ . Naneseme-li hodnotu  $y_0$  na pořadnici vedenou bodem  $x_0$ , dostaneme bod  $X = (x_0, y_0)$ , což je jeden bod grafu složené funkce  $y = F(x)$ . Konstrukce bodu  $X$  ukazuje obr. 2. Sestrojíme-li si dostatečný počet bodů grafu, můžeme pak narýsovat graf složené funkce.



**P ř í k l a d.** Sestrojte graf funkce  $y = \log_2(x^2 + 2x + 3)$ .

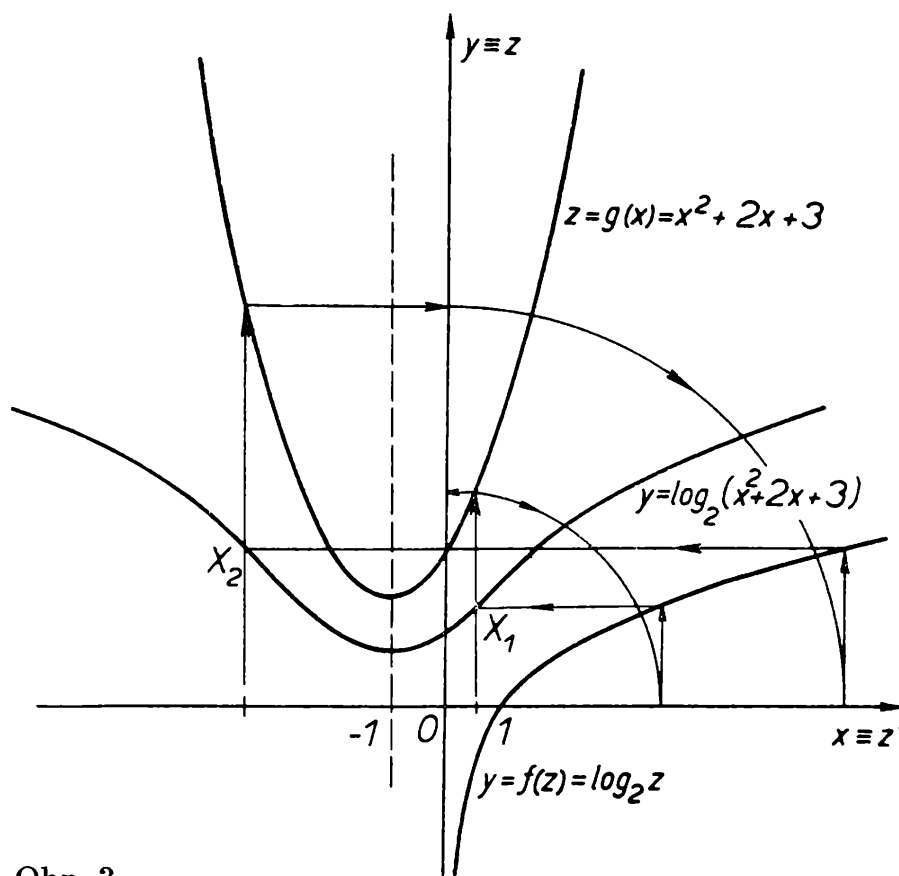
Jde o složenou funkci, jejíž vnitřní funkce  $g(x)$  je dána rovnicí

$$z = g(x) = x^2 + 2x + 3$$

a jejíž vnější funkce je určena rovnicí  $y = f(z) = \log_2 z$ . V tomto příkladě je množinou  $\mathbf{N}$  množina všech reálných čísel, pro něž je logaritmus definován, tj.  $\mathbf{N} = (0, \infty)$ . Množinou  $\mathbf{M}$  je množina všech takových  $x$ , že  $(x^2 + 2x + 3) \in \mathbf{N}$ ; tj.  $x$ , pro která platí nerovnost  $x^2 + 2x + 3 > 0$ . Poněvadž platí, že

$$x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$$

pro všechna reálná čísla  $x$ , je proto  $\mathbf{M} = (-\infty; \infty)$ .



Obr. 3

Zvolíme si pravoúhlé soustavy souřadnic  $(Oxz)$ ,  $(Oz'y)$  jako v obr. 2 a v nich sestrojíme grafy funkcí

$$z = g(x) = x^2 + 2x + 3,$$

$$y = f(z) = \log_2 z.$$

Pomocí těchto grafů sestrojíme body grafu složené funkce. Při sestrovování jednotlivých bodů grafu používáme konstrukce známé z obr. 2.

Na obr. 3 je celá konstrukce dané složené funkce. Poněvadž graf funkce  $g(x)$  je souměrný podle přímky, která má rovnici  $x + 1 = 0$ , je proto i graf složené funkce souměrný podle téže přímky.

Příklady k procvičení.

Sestrojte graf funkce:

a)  $y = \log_2 \cos x$ ;

b)  $y = \sin \log_2 x$ ;

c)  $y = 2 \cos x$ .

Ano, matematika je kouzelná věda — pohybuje se bez nesnází i tam, kde se náš rozum zastavuje.

Ing. V. Patrovský, CSc., Práce 26. 7. 69



# 0 periodických posloupnostech

Dr. STANISLAV TRÁVNÍČEK a dr. JÁN VORÁČEK, UP, Olomouc

Pojem *periodické funkce* znáte jistě ze školy. Připomeňme si, že funkci  $f(x)$  nazýváme periodickou, jestliže existuje kladné číslo  $p$  (zvané *perioda*) takové, že platí

$$f(x + p) = f(x)$$

pro všechna  $x$  z jejího definičního oboru. Např. funkce  $\sin x$ ,  $\cos x$  jsou periodické s periodami  $2\pi$ ,  $4\pi$ , ..., funkce  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{cotg} x$ , jsou periodické s periodami  $\pi$ ,  $2\pi$ , funkce  $\sin \frac{\pi x}{3}$  je periodická s periodami 6, 12, atd.

Pojem periodičnosti lze zavést i u posloupností. V dalším se omezíme na posloupnosti nezáporných celých čísel. Nechť dále  $n$  značí přirozené číslo. Řekneme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je periodická, jestliže existuje přirozené číslo  $p$  takové, že pro všechna  $n$  platí

$$a_{n+p} = a_n \text{ (tj. } a_{n+p} - a_n = 0) \quad (1)$$

Číslo  $p$  se pak nazývá *perioda posloupnosti*  $\{a_n\}$ .

*Příklad 1.* Posloupnost cifer za desetinnou čárkou v desetinném rozvoji čísla  $\frac{2}{7}$  je periodická s periodou  $p = 6$

$$\frac{2}{7} = 0,285\,714\,285\,714\,28$$

Jestliže  $a_n$  značí cifru na  $n$ -tém místě desetinného rozvoje, pak skutečně platí pro všechna  $n$

$$a_{n+6} - a_n = 0$$

V tomto případě, jak známo, používáme zápisu

$$\frac{2}{7} = 0,\overline{285\,714}$$

Podobně desetinné rozvoje všech racionálních čísel jsou od určitého místa počínaje periodické posloupnosti.

*Věta 1.* Má-li posloupnost  $\{a_n\}$  periodu  $p$ , má rovněž periodu  $q = rp$ , kde  $r$  je libovolně dané přirozené číslo.

D ů k a z (matematickou indukcí vzhledem k  $r$ ):

a) Podle předpokladu má posloupnost  $\{a_n\}$  periodu  $p$ , tedy věta platí pro  $r = 1$ .

b) Nechť tedy posloupnost  $\{a_n\}$  má periodu  $rp$  (indukční předpoklad) a  $p$  (předpoklad věty). Pak pro všechna  $n$  platí

$$a_{n+rp} - a_n = 0,$$

$$a_{n+rp+p} - a_{n+rp} = 0$$

Jestliže nyní obě rovnosti sečteme a uvědomíme si, že  $rp + p = (r + 1)p$ , dostáváme, že pro všechna  $n$  platí

$$a_{n+(r+1)p} - a_n = 0,$$

tedy  $\{a_n\}$  má rovněž periodu  $(r + 1)p$ .

Podle principu matematické indukce je tím věta dokázána.

Podle věty 1 má každá periodická posloupnost nekonečně mnoho period. V množině všech jejích period zřejmě vždy existuje nejmenší prvek, který nazveme *nejmenší perioda* dané posloupnosti.

*Věta 2.* Je-li posloupnost  $\{a_n\}$  periodická a  $p$  je její nejmenší perioda, pak každá perioda  $q$  této posloupnosti je tvaru  $q = rp$ , kde  $r$  je vhodné přirozené číslo.

*D ů k a z.* Uvažujme libovolnou periodu  $q$  posloupnosti  $\{a_n\}$ . Zvolme k ní přirozené číslo  $r$  tak, že platí  $rp \leq q < (r + 1)p$ , tedy

$$0 \leq q - rp < p \quad (2)$$

Podle věty 1 platí pro všechna  $n'$

$$a'_{n+rp} - a'_n = 0,$$

tedy pro  $n' = n + q - rp$  máme pro všechna  $n$

$$a_{n+q} - a_{n+q-rp} = 0 \quad (3)$$

Kromě toho, ježto  $q$  je perioda, platí pro všechna  $n$

$$a_{n+q} - a_n = 0 \quad (4)$$

Jestliže nyní od rovnosti (4) odečteme (3), dostáváme, že pro všechna  $n$  platí

$$a_{n+q-rp} - a_n = 0 \quad (5)$$

Kdyby ve vztahu (2) platilo  $q - rp < 0$ , pak by podle (5) měla posloupnost  $\{a_n\}$  periodu  $q - rp$ , která je podle (2) menší než  $p$ , což je ve sporu s předpokladem, že  $p$  je nejmenší perioda. Podle (2) tedy nutně pak platí  $q - rp = 0$ , což jsme měli dokázat.

Uvedme si nyní pro ilustraci několik příkladů.

*Příklad 2.* Nejmenší perioda stacionární posloupnosti

$$\{a\} = a, a, a,$$

je  $p = 1$ . Podle věty 1 je každé přirozené číslo  $q$  periodou této posloupnosti.

*Příklad 3.* Posloupnost

$$\{a_n\} = 2, 3, 2, 3, 2, 3,$$

má nejmenší periodu  $p = 2$ ; zapíšeme ji  $\{a_n\} = \{2, 3\}$ . Podobně

$$\{a'_n\} = 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots = \{1, 0, 0\}; p = 3;$$

$$\{a''_n\} = 1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, \dots = \{1, 0, 2, 0\}; p = 4$$

#### Příklad 4. Posloupnost

$\{a_n\} = 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8,$

která je pro přirozená čísla  $s$  dána vzorcí

$$a_{3s-2} = 2s - 1, a_{3s-1} = a_{3s} = 2s,$$

zřejmě není periodická. Děleme nyní každý člen této posloupnosti číslem  $m = 2$  a vytvořme posloupnost zbytků těchto dělení

$$\{a_{n,2}\} = 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0,$$

Tato posloupnost už je periodická (viz příklad 3) s nejmenší periodou  $p = 3$ . Tvzení vyslovená v tomto příkladě dokažte podrobně.

Nechť  $m \geq 2$  je dané přirozené číslo. Říkáme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je *periodická podle modulu  $m$* , existuje-li přirozené číslo  $p$  tak, že pro všechna  $n$  je rozdíl  $a_{n+p} - a_n$  dělitelný číslem  $m$ , tedy

$$a_{n+p} - a_n = lm, \quad (6)$$

kde  $l, m$  jsou vhodná celá čísla. Číslo  $p$  se pak nazývá *perioda* posloupnosti  $\{a_n\}$  podle modulu  $m$ .

*Poznámka 1.* Vidíme, že posloupnost  $\{a_n\}$  je periodická podle modulu  $m$  s periodou  $p$  (podle modulu  $m$ ) právě tehdy, je-li posloupnost zbytků při dělení číslem  $m$  periodická s periodou  $p$ . Tak v příkladě 4 je posloupnost  $\{a_n\}$  periodická podle modulu 2 a má podle tohoto modulu periodu  $p = 3$ .

*Příklad 5.* Posloupnost  $\{a_n\}$  z příkladu 4 je periodická podle modulu  $m = 3$  a (nejmenší) periodou podle tohoto modulu je číslo  $p = 9$ . Příslušná posloupnost zbytků je

$$\{a_{n,3}\} = 1, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 1,$$

tedy

$$\{a_{n,3}\} = \{1, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 0\}$$

Podobně táž posloupnost  $\{a_n\}$  je periodická i podle modulu  $m = 4$  a má podle tohoto modulu (nejmenší) periodu  $p = 6$ . Máme

$$\{a_{n,4}\} = \{1, 2, 2, 3, 0, 0\}$$

Dokažte opět podrobně všechna tvrzení vyslovená v tomto příkladě.

*Cvičení 1.* Dokažte, že posloupnost všech přirozených čísel

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, 4,$$

je periodická podle libovolného modulu  $m$  a že má podle tohoto modulu  $m$  nejmenší periodu  $p = m$ .

Ze cvičení 1 vidíme, že mohou existovat posloupnosti periodické podle libovolného přirozeného modulu, resp. posloupnosti, které mají podle vhodného modulu libovolnou přirozenou periodu. Naproti tomu však existují posloupnosti, které nejsou periodické podle žádného modulu, např. posloupnost  $\{a_n\}$ , kde  $a_s = 1$  pro  $s = 1, 2,$   $a_n = 0$

pro všechna ostatní  $n$ . Posloupnost zbytků podle modulu  $m$  je totiž opět  $\{a_n\}$ , to ovšem není periodická (viz poznámku 1).

Existují rovněž posloupnosti, které jsou periodické podle jediného modulu.

*Příklad 6.* Posloupnost  $\{a_n\}$  definujeme takto: pro libovolné přirozené číslo  $s$  platí  $a_{3s-2} = a_{3s-1} = 1$ ,  $a_{3s} = 2$ , ostatní členy typu  $a_{3s}$  jsou rovny nule, tedy

$$\{a_n\} = 1, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1$$

Příslušná posloupnost zbytků podle modulu 2 je

$$\{a_{n,2}\} = \{1, 1, 0\}$$

tedy posloupnost  $\{a_n\}$  má podle modulu 2 periodu  $p = 3$ . Vidíme, že podle modulu  $m = 3$  už posloupnost  $\{a_n\}$  nemůže být vzhledem ke své definici periodická. Provedte si opět podrobné důkazy.

*Věta 1'* Je-li posloupnost  $\{a_n\}$  periodická podle modulu  $m$  a má podle tohoto modulu periodu  $p$ , má podle modulu  $m$  rovněž periodu  $q = rp$ , kde  $r$  je libovolné přirozené číslo.

*Věta 2'* Je-li posloupnost  $\{a_n\}$  periodická podle modulu  $m$  a její nejmenší perioda podle tohoto modulu je  $p$ , pak každá její perioda  $q$  podle modulu  $m$  je tvaru  $q = rp$ , kde  $r$  je vhodné přirozené číslo.

D ů k a z y vět 1', 2' plynou z vět 1, 2 a poznámky 1.

*Věta 3.* Je-li posloupnost  $\{a_n\}$  periodická podle modulu  $m$  s periodou  $p$  a je-li přirozené číslo  $d > 1$  dělitelem modulu  $m$ , pak je  $\{a_n\}$  periodická podle modulu  $d$  s periodou  $p$  podle tohoto modulu.

D ů k a z. Podle předpokladu platí pro všechna  $n$  vzorec (6). Ježto  $m = dl'$ , kde  $l$  jsou vhodná celá čísla a  $l'$  vhodné přirozené číslo, máme pro všechna  $n$

$$a_{n+p} - a_n = d (ll'), \quad (7)$$

odkud plyne tvrzení věty.

Ve druhé části tohoto článku si ukážeme aplikaci uvedených pojmů na posloupnosti kombinačních čísel.

*Kombinační čísla* jsou pro přirozená  $n, k, n \geq k$ , definována vzorcem

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \quad (8)$$

(tedy i  $\binom{n}{1} = n$ ).

Pro úplnost lze definici rozšířit i na případ  $n < k$ , kdy ovšem dává vzorec (8)

$$\binom{n}{k} = 0,$$

dále klademe

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1 \quad \binom{0}{k} = 0$$

pro všechna přirozená  $n, k$ .

V posloupnosti

$$\left\{ \binom{n}{k} \right\} = \binom{0}{k} \quad \binom{1}{k} \quad \binom{2}{k} \quad \dots \quad \binom{n}{k}, \quad (9)$$

je tedy  $k$  prvních členů rovno nule.

Uvedme si nyní nejprve některé vlastnosti kombinačních čísel.

*Vlastnost 1.* Pro všechna nezáporná celá čísla  $n, k$  platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Tuto vlastnost znáte jistě ze školy a víte, že ji lze dokázat přímo podle definice (8) kombinačních čísel. Tato vlastnost je základem pro vytvoření tzv. Pascalova trojúhelníka, který jistě také znáte ze školy.

*Vlastnost 2.* Binomická věta: je-li  $n \geq 0$  celé číslo, pak pro libovolná čísla  $a, b$  platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} b^n.$$

Tuto větu opět znáte ze střední školy.

*Vlastnost 3.* Jsou-li  $k, n, q$  nezáporná celá čísla, pak platí

$$\begin{aligned} \binom{n+q}{k} &= \binom{q}{0} \binom{n}{k} + \binom{q}{1} \binom{n}{k-1} + \dots + \\ &+ \binom{q}{s} \binom{n}{k-s} + \dots + \binom{q}{k} \binom{n}{0} \end{aligned} \quad (10)$$

**D ů k a z.** Na výrazy  $(1+x)^q, (1+x)^n, (1+x)^{n+q}$  užijeme binomické věty.

Dostáváme

$$\begin{aligned} (1+x)^q &= \binom{q}{0} + \binom{q}{1} x + \dots + \binom{q}{s} x^s + \dots + \binom{q}{q} x^q, \\ (1+x)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \dots + \binom{n}{r} x^r + \dots + \binom{n}{n} x^n \\ (1+x)^{n+q} &= \binom{n+q}{0} + \binom{n+q}{1} x + \dots + \binom{n+q}{k} x^k + \dots + \\ &+ \binom{n+q}{n+q} x^{n+q} \end{aligned}$$

Tyto výrazy dosadíme do vzorce

$$(1+x)^{n+q} = (1+x)^n (1+x)^q \quad (11)$$

V algebře ([2]) se dokazuje, že z rovnosti dvou mnohočlenů plyne rovnost koeficientů u týchž mocnin  $x$ . Porovnejme tedy koeficienty

u  $x^k$  na levé i na pravé straně rovnosti (11). Na levé straně je koeficientem u  $x^k$  zřejmě číslo

$$\binom{n+q}{k} \quad (12)$$

Na pravé straně dostaneme  $k$ -tou mocninu  $x$  při každém násobení  $x^s \cdot x^r$ , kde  $s+r=k$ , tedy pro  $s=0$  a  $p=k$ , pro  $s=1$  a  $r=k-1$ , ..., pro  $s=k$ ,  $r=0$ , takže koeficient u  $x^k$  na pravé straně (11) je

$$\binom{q}{0} \binom{n}{k} + \binom{q}{1} \binom{n}{k-1} + \dots + \binom{q}{s} \binom{n}{k-s} + \dots + \binom{q}{k} \binom{n}{0} \quad (13)$$

Porovnáním obou výrazů (12), (13) dostáváme (10).

*Vlastnost 4.* Pro libovolná nezáporná celá čísla  $n, k$  je  $\binom{n}{k}$  celé číslo.

*Cvičení 2.* Matematickou indukcí dokažte vlastnost 4.

Budeme se nyní zabývat posloupnostmi kombinačních čísel ve tvaru (9).

*Věta 4.* Je-li  $m \geq 2$  libovolně dané přirozené číslo, pak posloupnost (9), kde  $k$  je libovolně dané celé nezáporné číslo, je periodická podle modulu  $m$ .

**D ů k a z.** Je-li  $P(x)$  mnohočlen definovaný vztahem

$$P(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1), \quad (14)$$

pak lze psát

$$\binom{n}{k} = \frac{P(n)}{k!} \quad (15)$$

Jestliže na pravé straně (14) provedeme naznačené násobení, dostaneme mnohočlen  $P(x)$  v obvyklém tvaru

$$P(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_{k-1} x + a_k, \quad (16)$$

přičemž koeficienty  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , jsou zřejmě celá čísla.

Do rovnosti (16) nyní dosadíme za  $x$  číslo  $n + mk!$

$$P(n + mk!) = (n + mk!)^k + a_1 (n + mk!)^{k-1} + \dots + a_{k-1} (n + mk!) + a_k$$

Užitím binomické věty dostaneme

$$P(n + mk!) = \left[ n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} mk! + \dots \right] + a_1 \left[ n^{k-1} + \binom{k-1}{1} n^{k-2} mk! + \dots \right] + a_{k-1} [n + mk!] + a_k, \quad (17)$$

kde všechny členy, jež jsou v hranatých závorkách nahrazeny tečkami, jsou celými násobky čísla  $(mk!)^2$ . Rovnost (17) upravíme

$$\begin{aligned}
P(n + mk!) &= n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k + \\
&+ \left[ \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} mk! + \dots + \binom{k-1}{1} n^{k-2} + \right. \\
&\quad \left. + \binom{k-1}{2} n^{k-3} mk! + \dots + a_{k-1} \right] mk!, \quad (18)
\end{aligned}$$

tedy

$$P(n + mk!) = P(n) + lmk!, \quad (19)$$

kde  $l$  je označeno celé číslo, jež je v (18) v hranaté závorce. Z (19) po úpravě máme

$$\frac{P(n + mk!)}{k!} - \frac{P(n)}{k!} = lm,$$

tedy pro všechna  $n$  je splněno

$$\binom{n + mk!}{k} - \binom{n}{k} = lm. \quad (20)$$

Tím je dokázáno, že rozdíl na levé straně (20) je dělitelný číslem  $m$  a že je tedy posloupnost (9) periodická podle modulu  $m$ .

*Poznámka 2.* Z důkazu věty 4 plyne, že číslo  $q = mk!$  je periodou podle modulu  $m$  posloupnosti (9).

Jestliže sledujeme konkrétní případy, vidíme, že číslo  $mk!$  nemusí být nejmenší periodou podle modulu  $m$ . Např. pro posloupnost

$$\left\{ \binom{n}{2} \right\} = \binom{0}{2} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots$$

dostáváme podle modulu  $m = 3$  posloupnost zbytků  $\{0, 0, 1\}$ , tedy nejmenší perioda podle modulu  $m = 3$  je rovna  $p = 3$ , zatímco  $q = mk! = 3 \cdot 2! = 6$ .

*Cvičení 3.* Najděte vhodnou posloupnost a stanovte vhodný modul  $m$  tak, aby perioda  $q = mk!$  z poznámky 2 byla pro tuto posloupnost nejmenší periodou podle modulu  $m$ .

Na závěr našeho článku si dokážeme větu, která zkoumá hlouběji vlastnosti posloupností kombinačních čísel a jež uvádí do souvislosti posloupnosti

$$\left\{ \binom{n}{k-1} \right\} \quad \left\{ \binom{n}{k} \right\}$$

*Věta 5.* Nechť pro přirozené číslo  $q$  platí:

a) je periodou podle modulu  $m$  posloupnosti

$$\left\{ \binom{n}{k-1} \right\} = \binom{0}{k-1} \quad \binom{1}{k-1} \quad \binom{2}{k-1} \quad \dots, \quad \binom{n}{k-1}, \quad (21)$$

kde  $k$  je libovolné dané přirozené číslo;

b) číslo  $\binom{q}{k}$  je dělitelné modulem  $m$ .

Pak je  $q$  periodou podle modulu  $m$  posloupnosti (9).

D ů k a z. Podle předpokladu a platí pro všechna  $n$

$$\binom{n+q}{k-1} - \binom{n}{k-1} = l_1 m, \quad (22)$$

$$\binom{n+q+1}{k-1} - \binom{n+1}{k-1} = l_2 m, \quad (23)$$

kde  $l_1, l_2$  jsou vhodná celá čísla. Podle 1. vlastnosti kombinačních čísel máme

$$\binom{n+q+1}{k-1} = \binom{n+q}{k-1} + \binom{n+q}{k-2} \quad \binom{n+1}{k-1} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$$

Dosadíme-li tyto výrazy do (23), dostaneme

$$\binom{n+q}{k-1} + \binom{n+q}{k-2} - \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k-2} = l_2 m$$

a dosadíme-li sem ještě ze vztahu (22), máme

$$\binom{n+q}{k-2} - \binom{n}{k-2} = (l_2 - l_1) m \quad (24)$$

Z rovnosti (24) tedy plyne, že  $q$  je periodou podle modulu  $m$  posloupnosti

$$\left\{ \binom{n}{k-2} \right\} = \binom{0}{k-2} \quad \binom{1}{k-2} \quad \binom{2}{k-2}, \dots, \binom{n}{k-2},$$

Opakováním této úvahy dostáváme, že  $q$  je periodou podle modulu  $m$  všech posloupností

$$\left\{ \binom{n}{s} \right\} = \binom{0}{s} \quad \binom{1}{s} \quad \binom{2}{s}, \dots, \binom{n}{s},$$

kde  $s$  je kterékoliv z čísel  $0, 1, 2, \dots, k-1$ . Stejně jako ve (24) tedy platí, že každý rozdíl

$$\binom{n+q}{s} - \binom{n}{s}$$

je dělitelný číslem  $m$ , zvláště tedy i rozdíl (pro  $n = 0, 0 < s \leq k-1$ )

$$\binom{q}{s} - \binom{0}{s} = \binom{q}{s}$$

Přihlédneme-li ještě k předpokladu b) vidíme, že všechna čísla

$$\binom{q}{1} \quad \binom{q}{2}, \dots, \binom{q}{k} \quad (25)$$

jsou dělitelná číslem  $m$ .



Podle 3. vlastnosti kombinačních čísel, ježto  $\binom{q}{0} = 1$ , dostaneme ze vztahu (10)

$$\binom{n+q}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \binom{q}{1} + \binom{n}{k-2} \binom{q}{2} + \dots + \binom{n}{0} \binom{q}{k} \quad (26).$$

Podle 4. vlastnosti jsou čísla  $\binom{n}{s}$  celá a podle předchozí části důkazu jsou čísla (25) dělitelná modulem  $m$ . Pravá strana, tedy i levá strana (26), je proto dělitelná číslem  $m$ , z čehož plyne, že číslo  $q$  je periodou podle modulu  $m$  posloupnosti (9).

*Poznámka 3.* Číslo  $q$  ve větě 5 nemá být pro posloupnost (21) nejmenší periodou podle modulu  $m$ , ale takovým jejím vhodným násobkem, který splňuje předpoklad b).

*Příklad 7.* Pro posloupnost  $\left\{ \binom{n}{2} \right\}$  jsme v poznámce 2 našli nejmenší periodu podle modulu  $m = 3$  rovnu  $p = 3$ , ale nejmenší násobek  $q$  čísla  $p$ , pro nějž je splněn předpoklad b), je  $q = 9$ ;  $\binom{3}{3} = 1$ ,  $\binom{6}{3} = 20$ ,  $\binom{9}{3} = 84$ . Lehce se můžeme přesvědčit, že  $k$  posloupnosti  $\left\{ \binom{n}{3} \right\}$  je příslušná posloupnost zbytků podle modulu  $m = 3$  tvaru  $\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2\}$  a že tedy 9 je periodou (dokonce nejmenší) podle modulu 3 posloupnosti  $\left\{ \binom{n}{3} \right\}$ .

Nakonec poznamenejme, že posloupnostmi celých čísel periodickými podle modulu  $m$  se podrobně zabýval významný polský matematik *W. Sierpinski* [1].

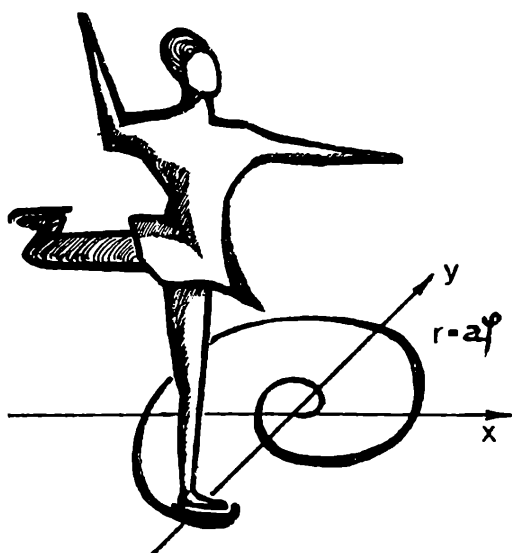
#### Literatura

- [1] *W. Sierpinski*: Sur la périodicité modulo  $m$  de certaines suites infinies d'entiers, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), str. 252—258.
- [2] *V. Kořínek*: Základy algebry, ČSAV, Praha 1956.

## KORUNOVANÉ HLAVY A STUDIUM PŘÍRODNÍCH VĚD

Egyptský král Ptolemaios chtěl, aby mu Euklides poradil, jak se nejsnáze naučit matematice. Euklides prý odpověděl: „Ke geometrii nevede cesta královská!“

To chemik l'Alexandrin se choval dvorněji, když vyučoval kteréhosi prince. Při předvádění pokusů se vyjadřoval takto: „Pane, tyto plyny považují za čest, že se slučují před Vámi!“

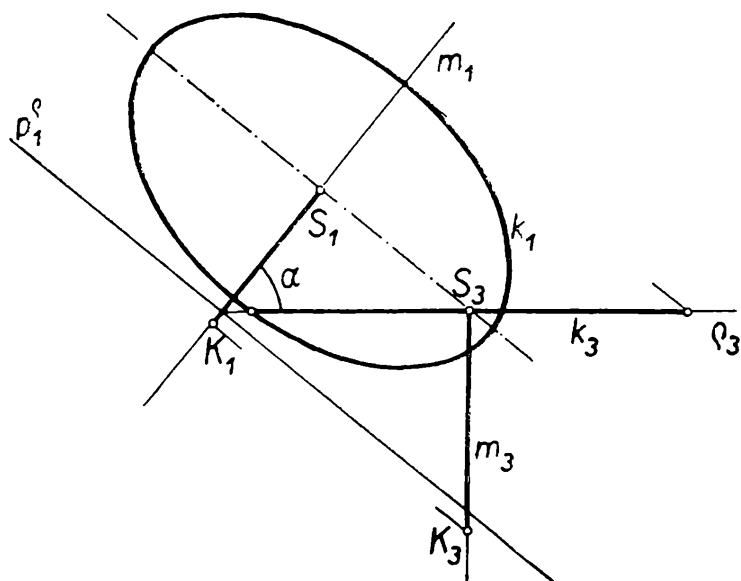


## DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

### Poznámka k průmětu kružnice

STANISLAV HORÁK, st., ČVUT

V obr. 1 je znázorněn první průmět kružnice  $k$ , která leží v rovině  $\varrho$  má střed  $S$  a poloměr  $r$ . Zvolme třetí průmětnu kolmou k první stopě roviny  $\varrho$ . Pak třetím průmětem dané kružnice je úsečka  $k_3$ , která má délku  $2r$ .



Obr. 1

Prvním průmětem kružnice  $k$  je elipsa  $k_1$ . Její vedlejší poloosa má délku  $b$  a délka její excentricity je  $e$ . První odchylku dané roviny  $\varrho$  označíme  $\alpha$ . Z třetího průmětu dostáváme

$$b = r \cos \alpha .$$

Počítejme nyní délku excentricity  $e$

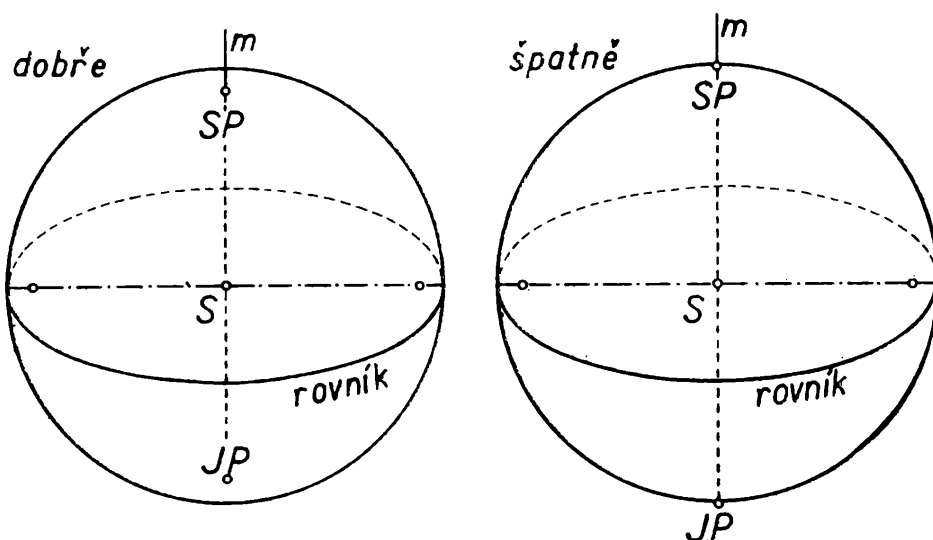
$$e^2 = r^2 - r^2 \cos^2 \alpha = r^2 \sin^2 \alpha ,$$

$$e = r \sin \alpha .$$

Ve středu  $S$  kružnice  $k$  vztyčíme k rovině  $\varrho$  kolmici  $m$  a nanesme na ni poloměr  $r$ . Dostaneme tak bod  $K$ , jeho průměty jsou  $K_3, K_1$ . Platí tu

$$S_3 K_3 = SK = r ,$$

$$S_1 K_1 = r \sin \alpha = e .$$

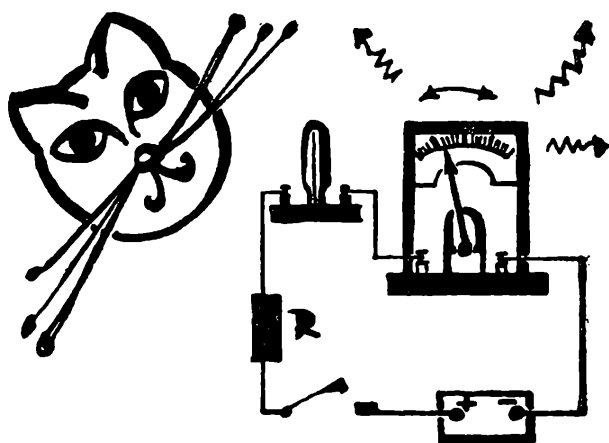


Obr. 2

To vyjádříme větou:

*Je dána rovina  $\varrho$ , která není ani kolmá, ani rovnoběžná s první průmětnou. V rovině  $\varrho$  je dána kružnice  $k$  a v jejím středu je sestrojena úsečka délky  $r$  kolmá k rovině  $\varrho$ . Prvním průmětem kružnice je elipsa o excentricitě  $e$  a prvním průmětem dané úsečky je úsečka délky  $e$ .*

Tohoto výsledku se používá při názorném zobrazení zeměkoule, na níž má být zakreslen rovník a oba póly. V obr. 2a je vše správně zakresleno. V obr. 2b jsou póly špatně zakresleny a obrázek uvádím zde proto, že se zeměkoule s rovníkem a póly velmi často takto zobrazuje, i v cizojazyčných knihách.



F Y Z I K A

# Grafická statika

Ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., VAAZ Vyškov

## Ú v o d

Ve fyzikální a zejména v technické praxi se setkáme s úlohami skládání a rozkladu sil, které prostředky probíranými v 1. roč. gymnasia nevyřešíme. Úkolem tohoto článku, který byl zařazen jako studijní text pro kategorii C v XI. ročníku fyzikální olympiády, je podat přehledně metody *grafické statiky*, tj. grafického řešení skládání a rozkladu sil a řešení rovnováhy těles. K dokonalému pochopení článku se předpokládá znalost těch partií o silách, které se probírají v 1. roč. gymnasia.

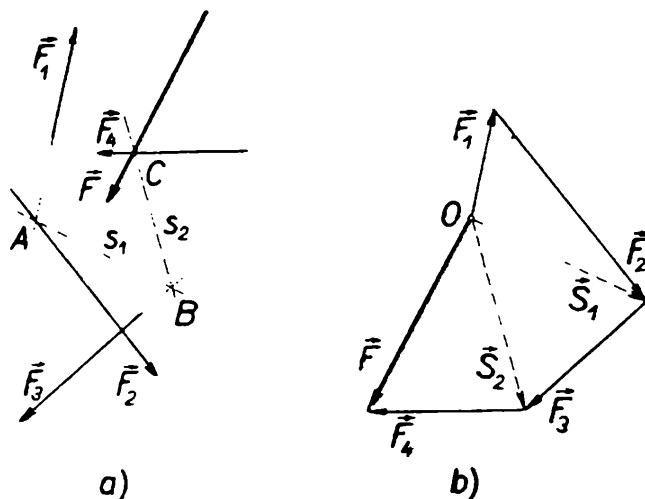
## 1. Grafické skládání systému sil v téže rovině

### 1,1. Skládání různoběžných sil

Nechť působí na dokonale tuhé těleso soustava různoběžných sil. ležících v téže rovině. Výslednici sil dostaneme tak, že složíme nejprve dvě síly v částečnou výslednici, tuto výslednici pak složíme s třetí silou v druhou částečnou výslednici. Tak postupujeme dále, až dostaneme celkovou výslednici všech sil. Jak si ukážeme na příkladě, stane se řešení přehlednější, užijeme-li dvou obrazců. V tzv. *vláknovém* neboli *výslednicovém obrazci* (obr. 1a) budeme určovat polohu výslednice, ve druhém tzv. *složkovém* neboli *silovém obrazci* (obr. 1b) budeme skládat

jednotlivé síly (složky) ve výslednici a určíme tak její směr, orientaci a velikost.

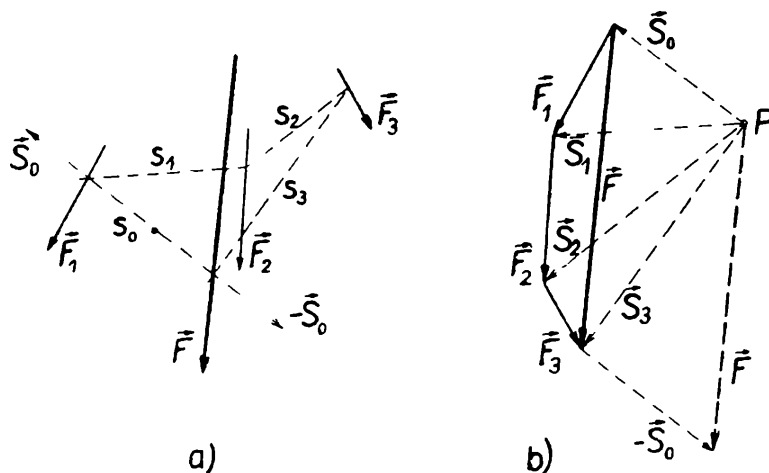
Na obr. 1a jsou dány síly  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  a  $\vec{F}_4$ , jejichž výslednici máme nalézt. V obr. 1b nejprve sečteme síly  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$  v částečnou výslednici  $\vec{S}_1$ .<sup>1)</sup> Poněvadž vektorová přímka této výslednice musí procházet prů-



Obr. 1a, b

sečíkem  $A$  vektorových přímek sil  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_2$  v obr. 1a, vedeme bodem  $A$  rovnoběžku  $s_1$  se silou  $\vec{S}_1$ . V obr. 1b složíme sílu  $\vec{S}_1$  se silou  $\vec{F}_3$  ve výslednici  $\vec{S}_2$ . Tato síla musí procházet průsečíkem  $B$  přímky  $s_1$  s vektorovou přímkou síly  $\vec{F}_3$  v obr. 1a. Dále složíme v obr. 1b sílu  $\vec{S}_2$  se silou  $\vec{F}_4$  ve výslednici  $\vec{F}$ , která je celkovou výslednicí. Tato síla musí procházet průsečíkem  $C$  přímky  $s_2$  s vektorovou přímkou síly  $\vec{F}_4$  v obr. 1a. Tím je úloha vyřešena.

Nebude-li průsečík alespoň dvou vektorových přímek dostatečně blízko, zvolíme pomocnou sílu  $\vec{S}_0$  směru dostatečně odlišného od daných



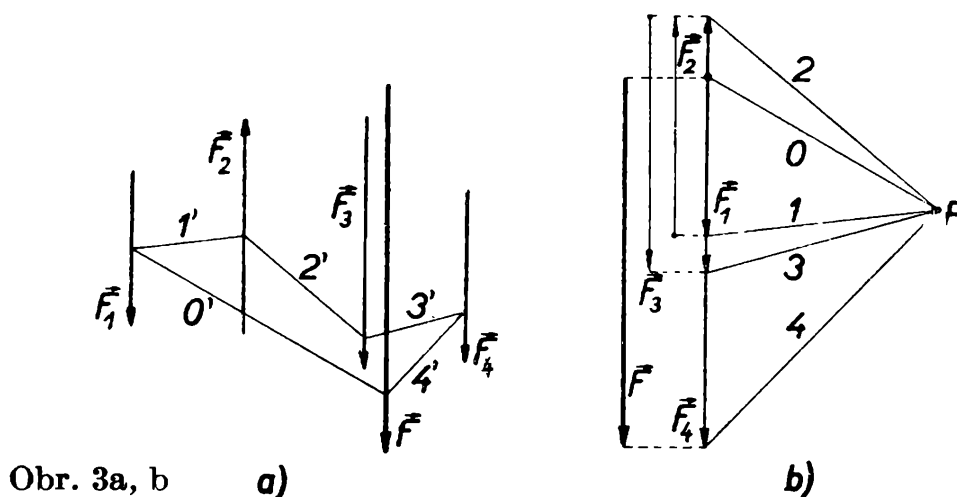
Obr. 2a, b

<sup>1)</sup> Pro větší přehlednost budeme v tomto článku užívat pro síly vedle normalizovaného označení písmenem  $\vec{F}$  i jiných písmen.

sil. Při řešení pak postupujeme stejně jako v předchozím případě. Na obr. 2a, 2b je příklad řešení takové úlohy. Na rozdíl od příkladu v obr. 1 zde však začneme silami  $\mathbf{S}_0$  a  $\mathbf{F}_1$  a nakonec přičteme k částečné výslednici  $\mathbf{S}_3$  sílu  $-\mathbf{S}_0$  a dostaneme celkovou výslednici  $\mathbf{F}$ . Na vektorové přímce  $s_0$  v obr. 2a tedy působí síly  $\mathbf{S}_0$ ,  $-\mathbf{S}_0$ , jejichž účinek se ruší. Výslednici  $\mathbf{F}$  dostaneme také přímo spojením koncových bodů sil  $\mathbf{S}_0$  a  $\mathbf{S}_3$ , takže v praxi není třeba provádět sčítání se silou  $-\mathbf{S}_0$ .

## 1.2. Skládání rovnoběžných sil

Skládání rovnoběžných sil ležících v téže rovině provádíme stejným způsobem jako skládání různoběžných sil málo odlišného směru, jak bylo vyloženo v předešlém odstavci. Nebudeme zde opakovat fyzikální výklad tohoto řešení, nýbrž popíšeme praktický postup řešení, a to na případě systému čtyř sil z obr. 3a. Místo pomocné síly  $\mathbf{S}_0$  volíme přímo bod  $P$ , kterému říkáme *pól* složkového obrazce. S pólem spojíme počáteční a koncové body vektorů jednotlivých sil a dostaneme *pólové paprsky* 0 až 4 (viz obr. 3b). Těmto paprskům odpovídá pomocná síla a částečné výslednice z obr. 2b. Rovnoběžkami 0' až 4' s pólovými paprsky vytvoříme v obr. 3a vláknový obrazec. Uvědomíme si přitom, že ve vláknovém obrazci se na vektorové přímce protínají ty pólové paprsky, které ve složkovém obrazci procházejí počátečním a koncovým bodem příslušné síly. Výslednice bude tedy procházet průsečíkem paprsků 0', 4'. Jinak řečeno, tři úsečky, které tvoří ve složkovém obrazci trojúhelník, se ve vláknovém obrazci protínají v jednom bodě.

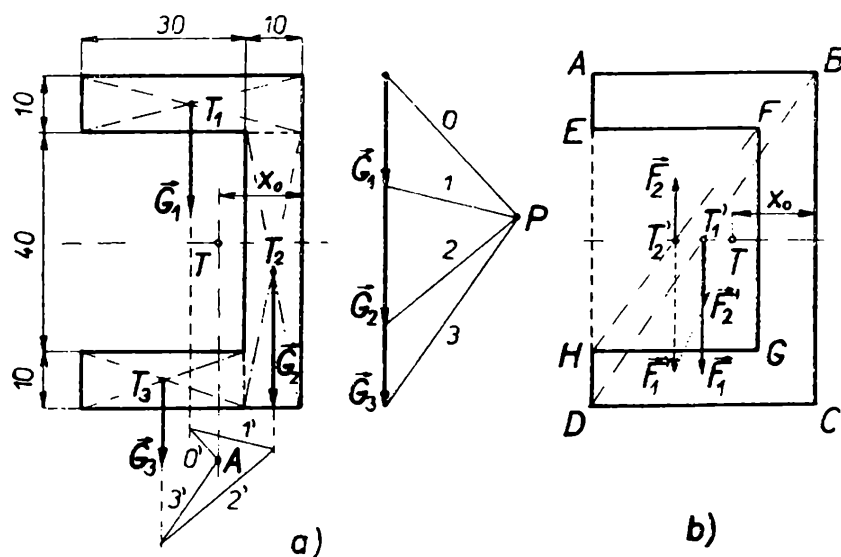


## 1.3. Grafické vyšetřování polohy těžiště

Těžiště tělesa je působiště tíhové síly tělesa, tedy síly, kterou dostaneme složením tíhových sil jednotlivých hmotných bodů, popřípadě částí tělesa. Protože tíhové síly jsou rovnoběžné, půjde při vyšetřování

polohy těžiště o úlohu najít výslednici rovnoběžných sil. Úloha bude jednoduchá, půjde-li o vyšetření těžiště homogenního tělesa s osou nebo rovinou souměrnosti, které můžeme rozložit na části, polohu jejichž těžišť známe.

Jako příklad vyřešíme graficky polohu těžiště tenké homogenní desky na obr. 4a. Desku si rozdělíme na obdélníky, jejichž těžiště  $T_1$  až  $T_3$  určíme snadno. V těchto těžištích budou působit tíhové síly  $\mathbf{G}_1$  až  $\mathbf{G}_3$ , jejichž velikosti jsou přímo úměrné velikostem příslušných ploch. Tyto síly složíme užitím složkového a výslednicového obrazce. Těžnice prochází bodem  $A$ . Druhá těžnice splývá s osou souměrnosti. Řešení můžeme provést rychleji tak, že od tíhy  $\mathbf{F}_1$  plné desky  $ABCD$  odečteme tíhu  $\mathbf{F}_2$  vyříznuté části  $EFGH$  (viz obr. 4b). Nyní půjde o to najít výslednici dvou rovnoběžných sil nesouhlasně orientovaných. Řešení je zde provedeno graficky metodou vyloženou v učebnici pro 1. roč. SVVŠ. Oběma způsoby řešení vychází  $x_0 = 15,0$  mm.



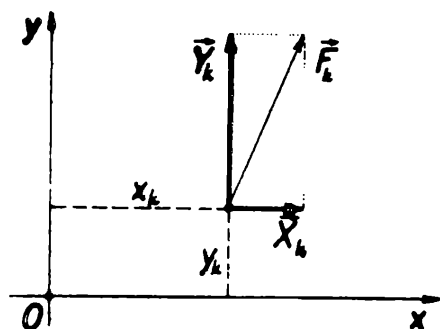
Obr. 4a, b

## 2. Rovnováha a rozklad sil v téže rovině

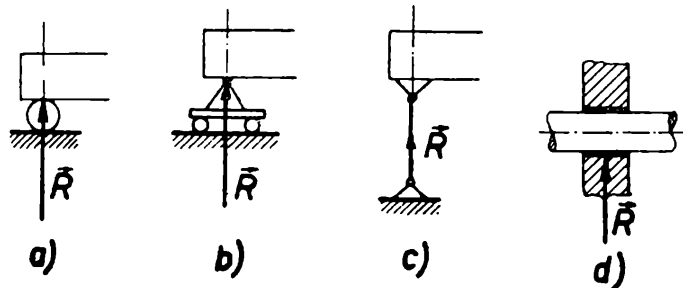
### 2.1. Podmínky rovnováhy dokonale tuhého tělesa

Aby těleso, které je v klidu, nezměnilo svůj pohybový stav, musí být výslednice všech sil působících na těleso rovna nule, tím je zamezeno posouvání tělesa, a musí být roven nule i výsledný moment sil působících na těleso; tím je zamezeno otáčení tělesa. Říkáme, že těleso je ve statické rovnováze. K zamezení pohybu se tělesa ukládají na podpory, v nichž vznikají síly, budeme jim říkat reakce, které udržují těleso v klidu. Úkolem statiky je vyšetřit velikost těchto reakcí.

Budeme se zabývat případem, kdy na těleso působí obecně  $n$  sil ležících v téže rovině, např.  $(x, y)$ . Pak si libovolnou sílu  $\mathbf{F}_k$  rozložíme na složky  $\mathbf{X}_k$  a  $\mathbf{Y}_k$  ve směru souřadnicových os (viz obr. 5). Silovou



Obr. 5



Obr. 6a, b, c, d

podmínku rovnováhy nyní můžeme vyslovit tak, že součet všech složkových sil o velikosti  $X_k$  pro  $k$  od 1 do  $n$  musí být roven nule; totéž musí platit pro složky o velikosti  $Y_k$ . V matematickém zápisu

$$\sum_{k=1}^n X_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n Y_k = 0,$$

kde  $\Sigma$  je sumační znaménko. Síla  $\mathbf{F}_k$  působí vzhledem k bodu  $O$  momentem o velikosti (psáno ve složkách):  $x_k Y_k - y_k X_k$ . Momentová podmínka požaduje, aby součet všech momentů sil k libovolnému bodu byl roven nule, tj. aby platilo

$$\sum_{k=1}^n (x_k Y_k - y_k X_k) = 0$$

Dlužno ještě připomenout, že mezi složky vnějších sil počítáme i složky neznámých reakcí. Protože k řešení těchto složek máme jen tři uvedené rovnice, je nutné zvolit takové uložení tělesa, aby se počet neznámých složek reakcí rovnal právě třem. Pak říkáme, že úloha je *staticky určitá*.

Budou-li v nejjednodušším případě působit na těleso dvě síly, tak nutnou podmínkou rovnováhy je, že musí působit v téže vektorové přímce. Nutnou podmínkou pro rovnováhu tří sil působících na těleso je, že musí procházet jedním bodem. Jinak by totiž tyto síly dávaly nenulový moment, který by způsobil rotaci tělesa.

## 2.2. Druhy uložení

Všimněme si nyní nejčastěji se vyskytujících uložení nosníků v rovině. Můžeme je rozdělit do tří skupin:

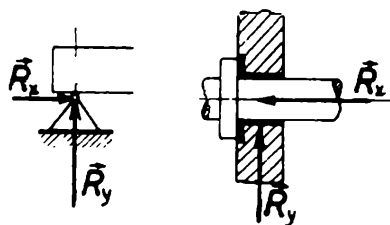
1. Reakce uložení představuje jednu neznámou (viz obr. 6a, b, c, d). Obr. 6d znázorňuje radiální ložisko.



2. Reakce uložení představuje dvě neznámé (viz obr. 7a, b). Obr. 7b znázorňuje axiální a radiální ložisko.

3. Reakce uložení představují tři neznámé (viz obr. 8). Jde o tzv. vetknutý nosník.

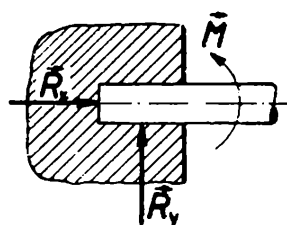
O tření v uložení neuvažujeme.



Obr. 7

a)

b)



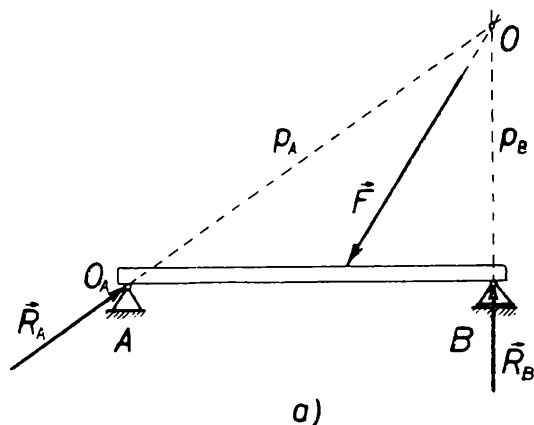
Obr. 8

### 2.3. Vyšetřování reakcí — rozklad sil

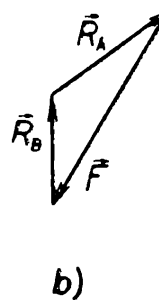
Rozdělení reakcí do podpor závisí na druhu uložení tělesa (nosníku) a na způsobu jeho zatížení. Jde o tři skupiny úloh statiky. Rovnováha výsledné síly působící na těleso může být zajištěna:

1. dvěma silami v podporách, z nichž jedna prochází daným bodem a druhá působí v dané přímce,
2. třemi silami působícími v daných různoběžných přímkách,
3. dvěma rovnoběžnými silami, z nichž jedna působí v dané přímce rovnoběžné s vyrovnávanou silou.

Jednotlivé skupiny úloh probereme na příkladech.



a)



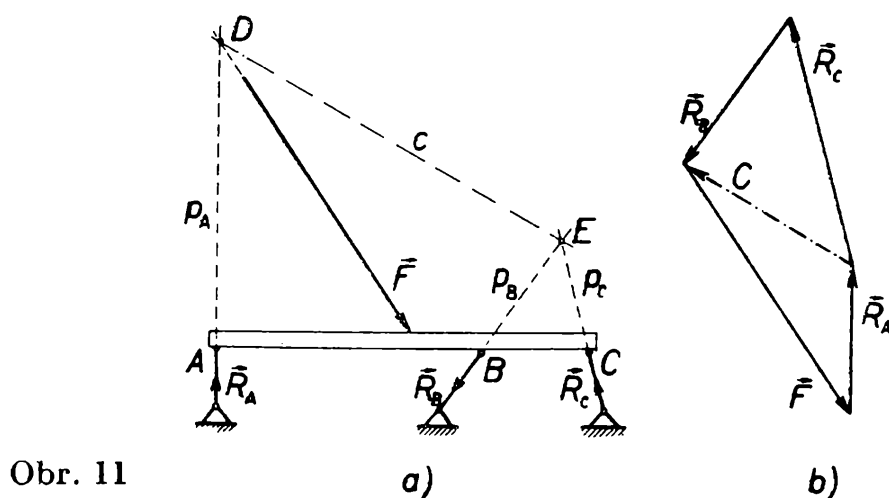
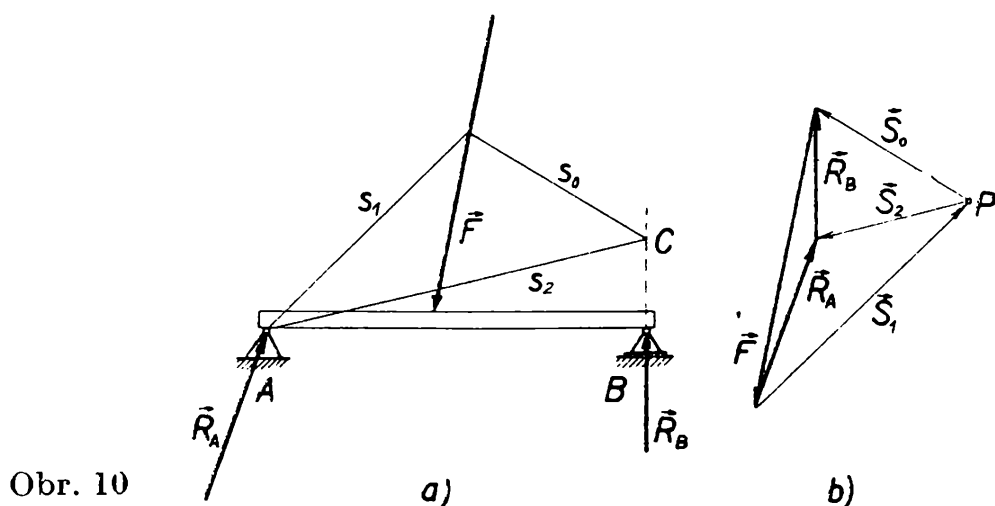
b)

Obr. 9

Jako představitele první úlohy vezměme si nosník z obr. 9a zatížený silou  $\mathbf{F}$ . Máme najít reakce v podporách  $A$ ,  $B$ . Úloha má tři neznámé složky (velikost a směr síly  $\mathbf{R}_A$  a velikost síly  $\mathbf{R}_B$ ) a je tedy staticky určitá. Z minulého odstavce víme, že reakce  $\mathbf{R}_A$  musí procházet bodem  $O_A$  a reakce  $\mathbf{R}$  musí ležet na přímce  $p_B$ . Aby tři síly byly v rovnováze,

musí procházet jedním bodem. V našem případě je to průsečík vektorové přímky síly  $\mathbf{F}$  s přímkou  $p_B$ , tedy bod  $O$ . Tímto bodem musí procházet vektorová přímka  $p_A$  reakce  $\mathbf{R}_A$ . Sílu  $\mathbf{F}$  pak rozložíme užitím silového trojúhelníka do směrů  $p_A$  a  $p_B$  na reakce  $\mathbf{R}_A$ ,  $\mathbf{R}_B$  (obr. 9b). Všimněme si, že silový trojúhelník je uzavřen; jde o síly v rovnováze.

Vychází-li průsečík  $O$  vektorových přímek daleko, postupujeme obdobně jako v případě skládání sil na obr. 2. Sílu  $\mathbf{F}$  (obr. 10) uvedeme do rovnováhy dvěma pomocnými silami  $\mathbf{S}_0$  a  $\mathbf{S}_1$  tak, že zvolíme pól  $P$

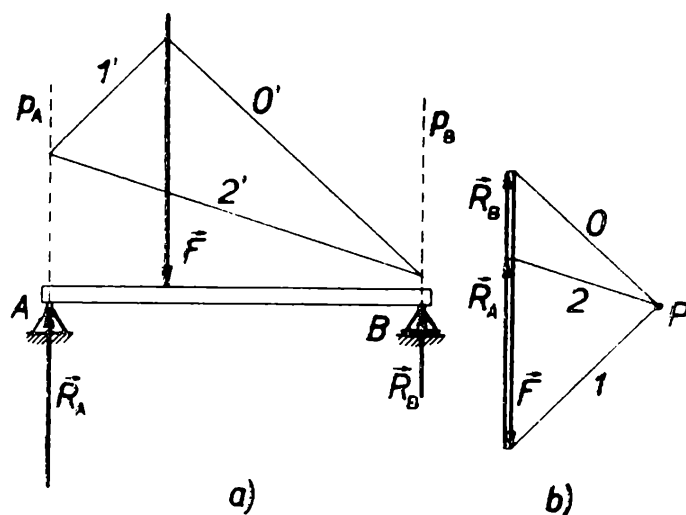


(obr. 10b), ve kterém se protínají vektorové přímky těchto sil. Ve vláknovém obrazci nakreslíme vektorové přímky  $s_0$ ,  $s_1$ , z nichž přímka  $s_1$  musí procházet podporou  $A$ , tedy podporou, jejíž reakce má dvě neznámé složky. Vláknový obrazec uzavřeme vektorovou přímkou  $s_2$  procházející podporou  $A$  a bodem  $C$ . Nyní ve složkovém obrazci rozložíme sílu  $\mathbf{S}_0$  na sílu  $\mathbf{S}_2$  a na reakci  $\mathbf{R}_B$ . Výslednice pomocných sil  $\mathbf{S}_1$  a  $\mathbf{S}_2$  dává velikost a směr reakce  $\mathbf{R}_A$ . Tím je úloha vyřešena.

Jako představitele druhé úlohy statiky si vezmeme nosník na obr. 11 uložený na třech prutových podporách, jejichž osy  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p_C$  se ne-

protínají v jednom bodě. Průsečíkem  $D$  přímky  $p_A$  s vektorovou přímkou síly  $\mathbf{F}$  a průsečíkem  $E$  přímek  $p_B$  a  $p_C$  vedeme přímkou  $c$ , zvanou *Culmannova přímka*. Sílu  $\mathbf{F}$  nyní uvedeme do rovnováhy silami ve směrech přímek  $p_A$ ,  $c$ . Tím dostaneme reakci  $\mathbf{R}_A$  a sílu  $\mathbf{C}$ , kterou dále rozložíme ve směrech  $p_C$ ,  $p_B$  na reakce  $\mathbf{R}_C$  a  $\mathbf{R}_B$ .

Příklad na třetí úlohu statiky je na obr. 12. Jde o vyšetření reakcí na sílu  $\mathbf{F}$  kolmou na spojnici podpor. V tomto případě je složka reakce ve směru této spojnice nulová a jde tedy o vyšetření jen dvou složek reakcí, působících ve směrech daných přímk  $p_A$ ,  $p_B$ . Úlohu vyřešíme opět užitím vláknového a složkového obrazce, jak je znázorněno na obr. 12. Fyzikální výklad řešení této úlohy, která je podobná úloze z obr. 10, přenecháme čtenáři. Podobně jako v obr. 3, jsou v obr. 12 místo pomocných sil zjednodušeně vyznačeny pólové paprsky.



Obr. 12

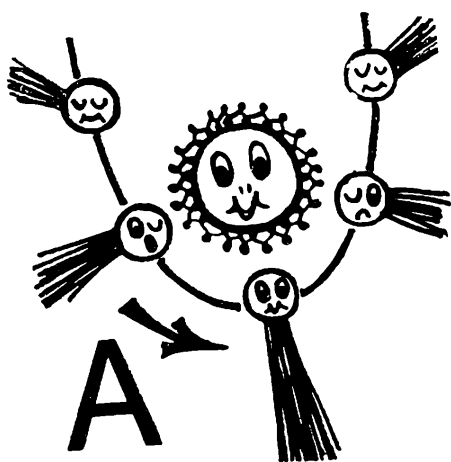
Bude-li nosník uložen na dvou, popřípadě více pevných podporách, nebo má-li být zatížení vyrovnáno třemi, popřípadě více rovnoběžnými reakcemi, jde o úlohy *staticky neurčité*, které je možno řešit jedině užitím teorie pružnosti.

Tři úlohy statiky, které jsme řešili, představují rovněž tři případy *rozkladu sil*. Složkové síly při rozkladu mají však opačnou orientaci než příslušné reakce.

## TA PROFESORSKÁ ZAPOMNĚTLIVOST

Na přednášce psal profesor M. Lefébure de Fourcy na tabuli ze svých poznámek velmi složitý vzorec. Pojednou se začal omlouvat:

„Pánové, promiňte prosím, zapomněl jsem doma jmenovatele.“



## Astronomické efemeridy

RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, UP, Olomouc

Termín *efemerida* má dva významy: v prvním jde o předpověď pohybu kosmického tělesa (např. planety, komety, umělé družice) na obloze, která je založena na výpočtu podle známé dráhy. Ve druhém významu jde o astronomickou ročenku, tj. soubor astronomických údajů pro jednotlivé dny v roce. V tomto článku se budeme zabývat druhým významem.

V roce 1968 vyjde již 45. ročník naší Hvězdářské ročenky (HR), která je stručným výtahem z mnohem obsáhlejších efemerid, jako jsou *The American Ephemeris* (Washington, USA), *Astronomičeskij žežegodník* (SSSR), *Connaissance des Temps* (Francie) a další. Po několik roků se obsah HR ustálil na tomto základním rozdělení: první část obsahuje nejdůležitější kalendářní data pro daný rok. Druhá část je obsáhlejší a najdeme v ní efemeridy Slunce, Měsíce, planet a jejich měsíců, zatmění Slunce a Měsíce a zákryty hvězd Měsícem. Zvláště zajímavý je kalendář úkazů, v němž jsou chronologicky sestaveny údaje o viditelnosti planet, fáze Měsíce a planetární úkazy, jako jsou konjunkce a opozice planet. Dále následují údaje o planetkách, kometách, meteorických rojích, hvězdách a proměnných hvězdách. Třetí část je věnována vědeckým časovým signálům. Konečně poslední, nikoliv však nevýznamnou částí, je oddíl nazvaný *Přehled pokroků v astronomii*. Jeho zpracování se zúčastňuje početná skupina našich odborníků, takže každý zájemce o astronomii zde najde velmi seriózní a přitom stručný výtah ze všech nejdůležitějších vědeckých prací, které byly uveřejněny v uplynulém období.

I v českých zemích mají astronomické efemeridy svou tradici. Od založení Karlovy university bylo jedním z hlavních úkolů astronomie sestavovat církevní kalendáře. Proto bylo třeba dbát astronomických poznatků. Ve spisu mistra Jana z Březnice *Computus clericorum* z roku 1393 je podán návod, jak se určují pohyblivé církevní svátky. Na pražské universitě byla zřízena funkce *astronomus publicus* (tj. veřejný astronom), s úkolem sestavovat kalendář s předpověďmi astronomickými (a současně i astrologickými). Později se efemeridami zabývali Petr Knížek z Tulechova, Mikuláš Šud ze Semanína a Tadeáš Hájek z Hájku. Vlivem postupující germanizace se však vydávání efemerid přenáší z Prahy do Vídně, a tak teprve při národním obrození se začínají v 19. století objevovat v českých časopisech přehledy astronomických úkazů. První Hvězdářská ročenka byla vydána v roce 1921 zásluhou prof. B. Maška. Od té doby vychází, až na přerušení v letech druhé světové války, ročenka již pravidelně.

Hvězdářskou ročenku vydává nyní *Academia*, nakladatelství Československé akademie věd v Praze. Je určena všem astronomům-amatérům a spolehlivě informuje každého, kdo se zajímá o astronomické úkazy.

---

# NAŠE SOUTĚŽ

---

## Soutěž pro školní rok 1969-70

Jako každoročně vypisujeme i letos soutěž o ceny v řešení příkladů z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie.

*Pokyny řešitelům:*

Řešení každého příkladu pište čitelně, vždy na zvláštní list formátu A4 (nečitelná řešení vyřazujeme), po jedné straně, dole vpravo uveďte své celé jméno, třídu, školu a své bydliště.

Příklady řešte samostatně, věcně, přitom odborně správně, ekonomicky s užitím platné symboliky. Jako loni mohou se soutěže zúčastnit i kolektivy — maximálně trojčlenné — z téže třídy. Jména členů kolektivu a jejich adresy napište na nepopsanou druhou stránku papíru. Při případném umístění má kolektiv ovšem nárok jen na jedinou cenu.

Řešení první části soutěžních příkladů otištěných v tomto čísle zašlete nejpozději do 15. ledna 1970 na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13.

## Matematika

1. Jsou-li  $e$ ,  $f$  úhlopříčky dvojstředového čtyřúhelníka,  $s$  jeho poloviční obvod,  $P$  jeho obsah, platí nerovnosti

$$\text{a) } \frac{1}{e^2} + \frac{1}{f^2} \leq \left( \frac{s}{2P} \right)^2$$

$$\text{b) } ef > \frac{1}{2} \left( \frac{2P}{s} \right)^2$$

Dokažte.

*Josef Brejcha*

2. Řešte rovnici

$$x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 94x^2 - 159x + 36 = 0,$$

víte-li, že má dvojnásobný kořen.

*Jan Fráňa*

3. Dokažte, že obsah trojúhelníka, jehož vrcholy jsou středy kružnic vně vepsaných danému trojúhelníku, je  $2rs$ , kde  $r$  je poloměr kružnice opsané původnímu trojúhelníku.

*Josef Glivický*

4. Najděte komplexní číslo  $z \neq 0$ , jehož druhá a třetí mocnina dávají sdružená komplexní čísla.

*Stanislav Horák*

5. Symbol  $(305)x$  představuje trojciferné číslo napsané v číselné soustavě o základu  $x$ . Jestliže k tomuto číslu přičteme číslo, v němž první a poslední cifra jsou vyměněny, zatímco nula zůstává na svém místě, je součet roven dvojmoci přirozeného čísla. Určete nejmenší takové číslo a k němu příslušné číslo  $x$ .

*Stanislav Horák*

6. Vyšetřte, pro která  $x$  má význam logaritmus výrazu

$$V = \frac{z+1}{z-1},$$

v němž

$$z = \frac{x^4 - 25x^2 + 72}{72}$$

*Josef Kotyk*

## Fyzika

1. Experimentálně bylo zjištěno, že všechny částice mají vedle korpuskulárních vlastností i vlastnosti vlnové. Francouzský fyzik

de Broglie pak našel vztah, podle kterého můžeme každé částici přiřadit určitou vlnovou délku  $\lambda$

a) Vypočítejte, jaká vlnová délka v Å přísluší elektronům urychleným potenciálem 100 V.

b) Foton a elektron mají stejnou kinetickou energii rovnou 1 eV. Který z nich má větší délku vlny?

*Zdeněk Janout*

2. Pod jakým výškovým úhlem  $\alpha$  musíme zpočátku vrhnout hmotný bod danou rychlostí  $v_0$ , abychom zasáhli bodový cíl  $(x, y)$ ?

*Josef Kotyk*

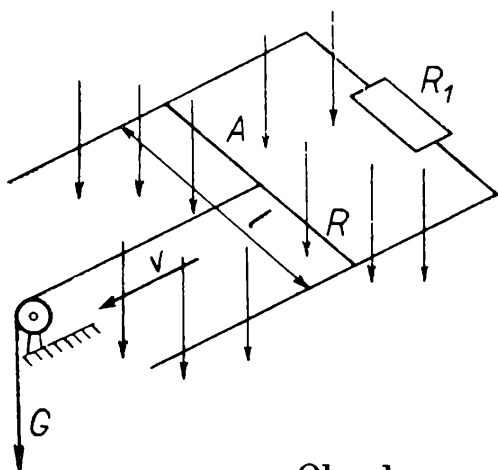
3. V jak veliké vzdálenosti ( $h$ ) od povrchu Země, jejíž rovníkový poloměr je  $R = 6378$  km, by musel obíhat po kruhové dráze Sputnik, aby trvale nehnutě se vznášel nad týmž bodem zemského rovníku, tj. aby měl oběžnou dobu  $T_2 = 24$  hodin. Řešte pomocí třetího zákona Keplerova, víte-li, že oběžná doba Luny (našeho měsíce) je  $T_1 = 27 \frac{1}{3}$  dne  $\doteq 2,36 \cdot 10^6$  s a jeho střední vzdálenost od středu Země je  $r_1 = 3,84 \cdot 10^5$  km. Dokažte, že rychlost tohoto (tzv. stacionárního čili „stojícího“) Sputnika lze určit vzorcem

$$v_2 = \frac{2\pi r_1}{\sqrt[3]{T_1^2 T_2}}$$

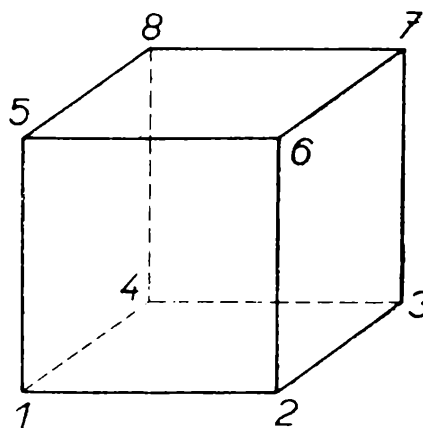
Řešte nejprve obecně a potom vyčíslete dosazením daných hodnot. Počítejte výsledky jen na 3 desetinná místa.

*Evžen Říman*

4. V homogenním magnetickém poli o indukci  $B$ , jehož siločáry směřují svisle dolů, je vodič  $A$  odporu  $R$  na dvou rovnoběžných tlustých měděných tyčích, které leží v téže vodorovné rovině. Tyče mají vzdá-



Obr. 1



Obr. 2

lenost  $l$  metrů a jejich odpor lze zanedbat. Působením tíhy  $G$  závaží, které je zavěšeno na konci lana, vedeného od středu vodiče přes kladku, se vodič posunuje po tyčích rovnoměrně stálou rychlostí  $v$  (obr. 1). Máme vypočítat napětí  $U$  ve vodiči, proud  $I$  a hmotnost  $m$  závaží:

a) jsou-li konce obou tyčí spojeny odporem  $R_1$ ;

b) jsou-li konce obou tyčí spojeny na krátko.

Úlohu řešte nejdříve obecně a do výsledku dosadte  $v = 2 \text{ m s}^{-1}$ ,  $B = 1 \text{ T}$ ,  $l = 0,4 \text{ m}$ ,  $R_1 = 0,15 \Omega$  a  $R = 0,01 \Omega$ .

*František Vencálek*

5. Uvnitř ostroúhlého trojúhelníka  $ABC$  je nalézt působiště  $M$  tří sil  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , které jsou v rovnováze a jejichž směry jsou udány po řadě orientovanými úsečkami  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  a jejichž velikosti jsou:

a) rovny délkám těchto úseček;

b) úměrny délkám stran, tj.  $F_1 = ka$ ,  $F_2 = kb$ ,  $F_3 = kc$ .

*Václav Vilímek*

6. Jak velký je celkový ohmický odpor mezi vrcholy 1 a 7 (krychle — obr. 2), je-li odpor  $1 \Omega$  zapojen:

a) v každé hraně krychle;

b) jako v a) a kromě toho v obou úhlopříčkách každé stěny krychle (přitom se předpokládá, že dva vodiče se mohou dotýkat jen ve vrcholu krychle);

c) jako v a), b) a kromě toho v každé tělesné úhlopříčce.

*Zdeněk Vorel*

# MO

---

## XIX. ročník matematické olympiády

V čísle 10 minulého ročníku tohoto časopisu jsme čtenáře informovali o některých změnách v organizaci *MO* v *XIX. ročníku*; o dalších změnách se dočtete v tomto článku.



## Kategorie Z

Rovněž v I. kole se řeší jen 4 úlohy. Úspěšným řešitelem I. kola je ten žák, který vyřeší správně nebo v podstatě správně (klasifikace 1 nebo 2) *aspoň 3 úlohy* tohoto kola. Lhůta pro odevzdání řešení úloh I. kola žáky učitelům (referentům pro MO na škole) je 28. února 1970.

Uvedený termín je nutno bezpodmínečně dodržet, aby mohli být žáci včas pozváni do II. kola soutěže.

## Kategorie A a B

V I. kole řeší soutěžící *aspoň 4 úlohy*, které si sám zvolí z *předložených dvou trojic úloh* (trojice tvoří úlohy č. 1, 2, 3 a 4, 5, 6). Úspěšným řešitelem I. kola bude ten žák, který vyřeší správně nebo v podstatě správně (klasifikace 1 a 2) *aspoň 3 úlohy* tohoto kola; přitom mezi těmito úlohami *bude zřejmě každá z daných trojic zastoupena aspoň jednou úlohou*.

Lhůta pro odevzdání řešení úloh I. kola je v kategorii A dne 15. ledna 1970, v kategorii B dne 14. března 1970.

Uvedené termíny je nutno bezpodmínečně dodržet, aby nebyl narušen další průběh soutěže. Bližší podrobnosti a důvody změn termínů a možnosti volby trojic úloh jsou uvedeny v letáku, který během září bude dodán na školy.

Nyní ještě uvedeme texty soutěžních úloh I. kola:

### Soutěžní úlohy kategorie Z

1. Je dána soustava dvou rovnic o dvou neznámých  $x, y$

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 0, \\ 2x - y &= -3. \end{aligned} \tag{1}$$

Ke každému koeficientu u neznámé přičteme totéž číslo  $p$ ; nová soustava bude mít za řešení dvě čísla  $x, y$ , jejichž rozdíl je 1. Určete všechna čísla  $p$  této vlastnosti.

2. Udejte všechny pravoúhelníky, jejichž strany mají délky vyjádřené celými čísly (v centimetrech), které mají tu vlastnost, že jejich obvod (v cm) je roven jejich obsahu (v cm<sup>2</sup>).

3. Je dán obdélník  $ABCD$ , v němž  $AB = 2a$ ,  $BC = a$ . Nad stranami  $AB$ ,  $AD$  jako nad průměry jsou sestaveny kružnice, které kromě bodu  $A$  mají společný ještě bod  $K$ .

- a) Dokažte, že bod  $K$  leží na úhlopříčce  $BD$ .  
 b) Vypočtete vzdálenosti bodu  $K$  od vrcholů  $A, B, D$ .

4. Do ostroúhlého trojúhelníka  $ABC$  je vepsán obdélník  $MNPQ$  tak, že vrcholy  $M, N$  leží na straně  $AB$ , vrchol  $P$  na straně  $BC$  a vrchol  $Q$  na straně  $CA$ .

Vyšetřte geometrické místo středů všech obdélníků  $MNPQ$ .

**U p o z o r n ě n í.** V 1. přípravné úloze kat.  $Z$  má být provedeno krácení zlomků tak, že v prvním zlomku se škrtnou cifry 6, v druhém zlomku také cifry 6 a v třetím zlomku obě devítky.

### *Kategorie A*

1. V sáčku je 100 hracích známek označených čísly 1, 2, 3, ... 100. Kolika způsoby můžeme ze sáčku vytáhnout tři známky tak, aby součet čísel na nich uvedených nepřesáhl 100? Kolik je to procent ze všech možných tahů po třech známkách?

2. Je-li  $n$  liché číslo, je číslo

$$N = n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11$$

dělitelné číslem 256. Dokažte.

3. Je dána nerovnost

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{2a}{y\sqrt{x}} < \frac{a\sqrt{y}}{y} + \frac{2\sqrt{y}}{y}$$

kde  $x, y$  jsou proměnné a  $a$  reálný parametr.

a) Určete množinu všech bodů, jejichž pravoúhlé souřadnice  $x, y$  splňují danou nerovnost.

b) Pro  $a = 3$  určete souřadnice všech bodů s celočíselnými souřadnicemi, které této množině náležejí.

4. V rovině  $\varrho$  jsou dány dva různé body  $A, S$  a úhel velikosti  $\varphi$ ,  $0^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ . Určete množinu všech bodů  $X$  roviny  $\varrho$  takových, že bod  $X'$ , který z  $X$  dostaneme otočením okolo středu  $S$  o úhel  $\varphi$  (v kladném smyslu) leží na přímce  $AX$ .

5. V rovině je dána kružnice  $m$  se středem  $S$  a poloměrem  $r$  a přímka  $p$ , která má od středu  $S$  vzdálenost  $d > 0$ . Na přímce  $p$  zvolme libovolný bod  $M$  tak, že  $SM \geq r$ ; z bodu  $M$  vedme tečny ke kružnici  $m$ , a jejich dotykové body označme  $H, K$ ; patu kolmice vedené bodem  $S$  na přímku  $p$  označme  $C$ .

Pak pro všechny takové body  $M$  je součin

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \sphericalangle CMK \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \sphericalangle CMH$$

roven témuž číslu  $k$ .

Dokažte a vyjádřete  $k$  pomocí  $r, d$ .

6. Je daná kružnice  $k \equiv (S, r)$  a na nej čtyři různé body  $A, B, C, D$  také, že  $\sphericalangle BSA = \sphericalangle CSB = \sphericalangle DSC = \alpha < 60^\circ$ . Zostrojte tetívu  $AD$  a jej přesečníky s přímkami  $SB, SC$  označte po řadě  $B_1, C_1$ . Dokažte, že ak rastie  $\alpha$ , rastie i pomer  $\lambda = AB_1 : B_1C_1$ .

### Kategorie B

1. Jsou dána přirozená čísla  $1, 2, 3, \dots, n$  (kde  $n \geq 19$ ) vyjádřená v desítkové soustavě. Rozdělíme-li tato čísla libovolným způsobem na dvě neprázdné skupiny, pak je vždy možno vybrat z každé skupiny po jednom čísle tak, že obě vybraná čísla mají aspoň jednu společnou číslici. Dokažte. Platí takové tvrzení i pro  $n = 18$ ?

2. Najděte všechny dvojice celých čísel  $x, y$ , pro které platí, že obě čísla  $\frac{1+x}{y}, \frac{1+y}{x}$  jsou celá.

Výsledek znázorněte náčrtkem v rovině pravoúhlých souřadnic  $x, y$ .

3. Přirozené číslo  $N > 2$  je součtem několika (aspoň dvou) po sobě následujících přirozených čísel, právě když není mocninou čísla 2. Dokažte a uveďte příklad ( $N = 100$ ).

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  a na kružnici  $k$  jemu opsané bod  $M$ , který nesplývá s žádným z vrcholů  $A, B, C$ .

Označme  $M_1, M_2, M_3$  body souměrně sdružené s bodem  $M$  po řadě podle přímk  $BC, AC$  a  $AB$ . Pak body  $M_1, M_2, M_3$  leží na přímce procházející průsečíkem výšek trojúhelníka  $ABC$ . Dokažte.

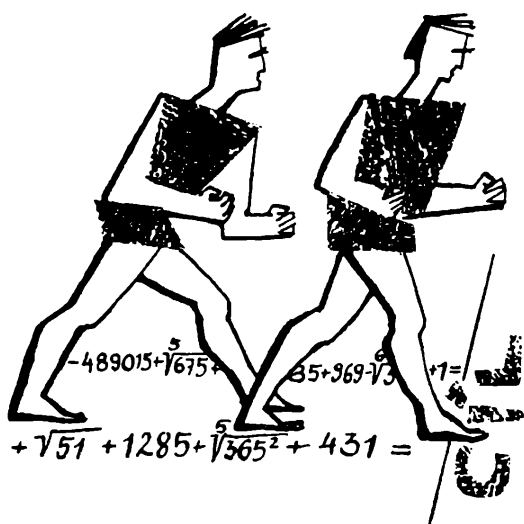
5. Je dán čtverec  $ABCD$ . Úhlopříčka čtverce  $KLMN$  je shodná se stranou čtverce  $ABCD$  a vrcholy  $K$  i  $M$  leží na obvodu čtverce  $ABCD$ .

Určete množinu všech vrcholů  $L$  všech takových čtverců  $KLMN$ .

6. Je dán trojúhelník  $ABC$ , jehož strany mají délky  $AB = c, BC = a, CA = b$ .

a) Sestrojte bod  $D$  strany  $BC$  a bod  $E$  strany  $CA$  tak, aby čtyřúhelníku  $ABDE$  bylo možné opsat i vepsat kružnici.

b) Vyjádřete vzdálenosti  $CD, CE$  i obvod čtyřúhelníka  $ABDE$  pomocí délek  $a, b, c$ .



FO

## Další příklady pro první kolo soutěže

(první trojice byla uveřejněna v 10. čísle minulého ročníku tohoto časopisu)

### Kategorie A

4. Vrháč min vymrštil dvě miny stejnou počáteční rychlostí  $v_0$ . Prvá byla vystřelena v čase  $t_1$ , pod elevačním úhlem  $\alpha_1$ , druhá v čase  $t_2$ , pod elevačním úhlem  $\alpha_2$  ( $\alpha_2 < \alpha_1$ ). Obě miny se ve vzduchu srazily.

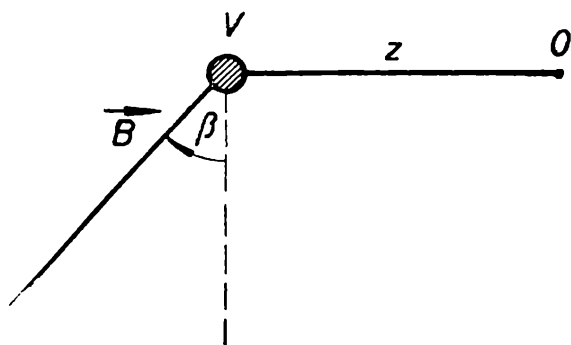
Určete počáteční rychlost  $v_0$ , jsou-li dány časy  $t_1$ ,  $t_2$  a elevační úhly  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , přičemž předpokládáme, že pohyb se děje v homogenním tíhovém poli a nepříhlížíme k odporu vzduchu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $t_1 = 0$  s,  $t_2 = 4,8$  s. Pro elevační úhly platí  $\cos \alpha_1 = \frac{16}{65}$ ,  $\cos \alpha_2 = \frac{5}{15}$ ;  $g \doteq 10$  m s<sup>-2</sup>.

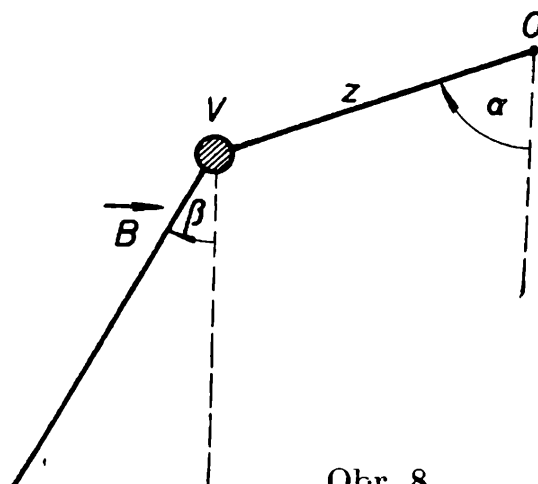
5. V bodě  $O$  jsou upevněny konce závěsných vláken ( $l'_1 = l'_2 = l'$ ) dvou stejných kovových kuliček o hmotnostech  $m$ . Držíme-li první kuličku nabitou nábojem  $Q_1$  v takové poloze, že její napjaté závěsné vlákno je odchýleno od svislého směru o úhel  $\alpha_1$ , ustálí se druhá kulička s nábojem  $Q_2$  v takové poloze, že její napjaté závěsné vlákno je odchýleno od svislého směru o úhel  $\alpha_2$  (obr. 7).

a) Určete hmotnost  $m$  každé kuličky.

b) Určete polohu závěsných vláken, ve kterých se vlákna ustálí po uvolnění první kuličky.



Obr. 7



Obr. 8

Vzájemné gravitační působení kuliček je zanedbatelné.

Řešte nejprve obecně za předpokladu, že  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 < 0$ , pak pro hodnoty  $Q_1 = 0,12 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = -0,20 \mu\text{C}$ ,  $l = 0,4 \text{ m}$ ,  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{V m}}{\text{A s}}$  Hmotnost vláken zanedbejte.

Pokyn: V úloze b) označte odklon vlákna od svislice  $\alpha_3$  a kladte  $\text{tg } \alpha_3 \doteq \sin \alpha_3$ .

#### 6. Měření účinnosti elektrických vaříčů.

*Potřeby:* Ponorný elektrický vaříč, obyčejný vaříč, nádoba na ohřívání vody, odměrný válec, stopky, voltmetr, ampérmetr, popříp. wattmetr nebo elektroměr.

*Návod:* Účinnost vaříče určete tak, že změříte čas, potřebný k ohřátí vody objemu  $V$  z teploty  $t_1$  na teplotu  $t_2$  vaříčem o příkonu  $P$ . Příkon  $P$  vaříče stanovte pomocí elektroměru, popř. přímým měřením napětí a proudu.

Protože budete pracovat s napětím 220 V, musíte měřit za dozoru učitele!

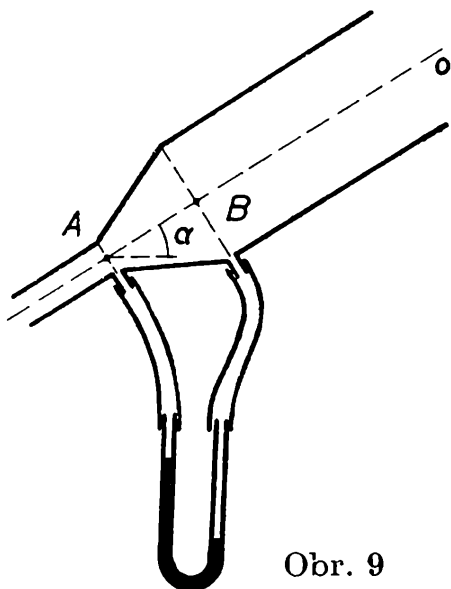
*Úkol:* Změřte účinnost některého typu běžného elektrického vaříče a vaříče ponorného. Porovnejte výsledky.

7. Na dvou tuhých stejně dlouhých volně pohyblivých závěsech o zanedbatelné tíze je zavěšen přímý měděný vodič ve vodorovné poloze, umístěný v homogenním magnetickém poli, jehož vektor magnetické indukce  $B$  je kolmý k měděnému vodiči a svírá se svislým směrem úhel  $\beta$ . Měděný vodič má průřez  $S$ , délku  $l$  a měrnou hmotnost  $\rho$ .

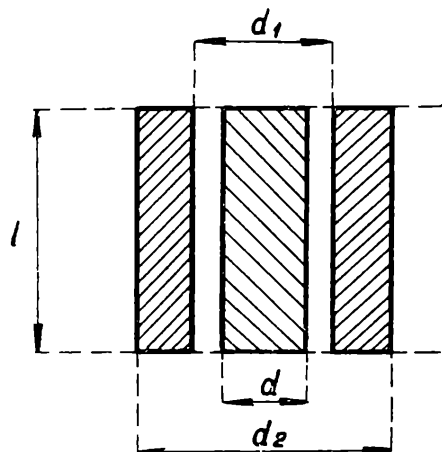
a) Jak veliký by musel být proud  $I_1$  v měděném vodiči, aby vodič i závěsy zaujaly polohu vodorovnou? (Viz obr. 8.) Jak velikou silou by byly oba závěsy v této poloze napínány?

b) Jak veliký by musel být proud  $I_2$  v měděném vodiči, mají-li veličiny  $B$ ,  $\beta$ ,  $S$ ,  $\rho$ ,  $l$  tytéž hodnoty jako v a) a vodič zůstane vodorovný, ale závěsy zaujmou šikmou polohu (obr. 9), takže svírají se svislým směrem úhel  $\alpha$  ( $\alpha \leq 90^\circ$ ).

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty  $B = 1,5 \text{ T}$ ,  $\beta = 40^\circ$ ,  $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $S = 60 \text{ mm}^2$ ,  $l = 0,80 \text{ m}$ ,  $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $\alpha = 70^\circ$



Obr. 9



Obr. 10

8. Člověk hmotnosti  $M$  stojící zpříma na otočném stolečku se zanedbatelným třením v ložisku je roztočen kolem své svislé osy s upaženými pažemi. Doba jedné jeho otáčky je  $T_1$ . Připáží-li, klesne doba otáčky na hodnotu  $T_2 = \frac{T_1}{n}$ . Poté mu dáme do každé ruky závaží hmotnosti  $m$  a roztočíme jej znovu s upaženými pažemi tak, že doba jedné otáčky je  $T'_1$ . Připáží-li klesne doba otáčky na hodnotu  $T'_2 = \frac{T'_1}{n'}$ . Vzájemná vzdálenost závaží při upažených pažích je  $d_1$ , při připažených pažích je  $d_2$  a rozložení závaží v obou případech je symetrické vzhledem k ose rotace.

a) Jaký je moment setrvačnosti člověka s pažemi upaženými a s pažemi připaženými?

b) Jaký by musel mít poloměr válec hmotnosti  $M$ , aby měl stejný moment setrvačnosti jako člověk s připaženými pažemi?

Při výpočtu zanedbejte moment setrvačnosti stolečku.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $M = 68,0 \text{ kg}$ ,  $n = 2,00$ ,  $m = 1,00 \text{ kg}$ ,  $n' = 3,30$ ,  $d_1 = 1,62 \text{ m}$ ,  $d_2 = 0,42 \text{ m}$ .

9. Ve výšce  $d$  přeletí nad pozorovatelem letadlo vodorovným směrem rychlostí  $v$ .

a) Jaký tvar mají vlnoplochy, pohybuje-li se zdroj vlnění rychlostí  $v > c$ , kde  $c$  je rychlost zvuku ve vzduchu?

b) Jaká je vzdálenost letadla od pozorovatele v okamžiku, kdy pozorovatel zaslechne jeho zvuk?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $d = 1000$  m,  $v = 510$  m s<sup>-1</sup>,  $c = 340$  m s<sup>-1</sup>.

### *Kategorie B*

4. Trubica s prierezmí rozličných plošných obsahov sa môže otáčať okolo vodorovnej osi, ktorá prechádza bodom  $B$  a je kolmá na pozdĺžnu os trubice  $o$  (obr. 10). V každej polohe trubice prúdi ňou voda ustáleným prúdením. Na ortuťovom manometri pripojenom k trubici sa určí rozdiel tlakov prúdiacej vody v bode  $B$  a v bode  $A$ . Body  $A$  a  $B$  sú na pozdĺžnej osi trubice. Ich vzdialenosť je  $a$ . Prierez trubice vedený kolmo na os v bode  $A$  je veľmi malý vzhľadom na prierez vedený bodom  $B$ . Vodu prúdiacu trubicou považujte za dokonalú kvapalinu.

Určte rýchlosť prúdenia vody v trubici v bode  $A$  ako funkciu uhla odklonu osi  $o$  od vodorovnej roviny vedenej bodom  $A$ . Prevedte diskusiu riešenia, určte obor nájdennej funkcie.

5. Elektrický ohřívač vzduchu má příkon  $P_1$  a účinnost  $\eta$ . Za dobu  $\tau$  jím projde vzduch o objemu  $V_0$ , který se ohřeje za stálého tlaku  $p_0$  z teploty  $t_0$  na teplotu  $t$ . Hustota vzduchu za tlaku  $p_0$  je  $\rho_0$ , jeho měrné teplo  $c_p$ .

Určete výslednou teplotu  $t$ .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $P = 2,5$  kW,  $\eta = 90$  %,  $\tau = 60$  min,  $V_0 = 200$  m<sup>3</sup>,  $p_0 = 10^5$  m<sup>-2</sup>,  $c_p = 1,005 \cdot 10^3$  J kg<sup>-1</sup> deg<sup>-1</sup>,  $\rho_0 = 1,29$  kg m<sup>-3</sup>,  $t_0 = 0$  °C.

6. *Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou.*

*Potřeby:* Ocelový drát délky asi 0,5 m, těleso, jehož moment setrvačnosti snadno určíme (koule, kruhový kotouč), délkové měřítko dělené na mm, posuvné měřítko s noniem, mikrometr, váhy, závaží, stopky.

a) Vypracujte návrh měření a nakreslete náčrtek pokusu.

b) Vypracujte postup měření.

c) Provedte měření; pro každou naměřenou veličinu určte absolutní a relativní chybu.

d) Provedte hodnocení úlohy.

Moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru  $r$  a hmotnosti  $m$  vzhledem k ose, která prochází jejím středem, je  $J = \frac{2}{5} m r^2$ , moment setrvačnosti homogenního kruhového kotouče o poloměru  $r$  a hmotnosti  $m$  vzhledem k rotační ose kotouče je  $J = \frac{1}{2} m r^2$ .

7. Dutý ocelový válec má vnější průměr  $d_2$  a vnitřní průměr  $d_1$ . Do jeho dutiny vložíme měděný válec o průměru  $d < d_1$  (obr. 11). Obě tělesa mají stejnou délku  $l$ . Působí na ně tlaková síla  $F$  ve směru osy obou válců.

a) Určete tlak na podstavy obou těles.

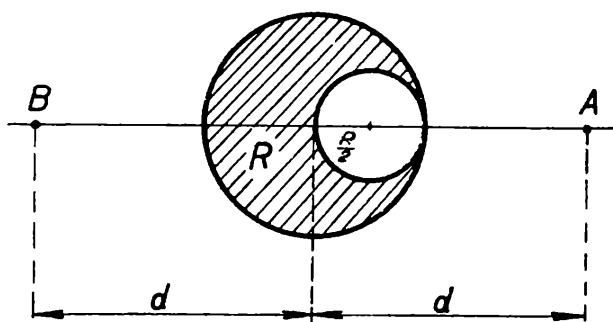
b) Určete změnu mezery  $\delta = d_1 - d_2$ , znáte-li Poissonovy konstanty  $\mu_1$  a  $\mu_2$  a Youngův modul pružnosti mědi a oceli  $E_1$  a  $E_2$ .

Předpokládejte, že tělesa jsou dokonale pružná, zanedbejte stlačitelnost vzduchu.

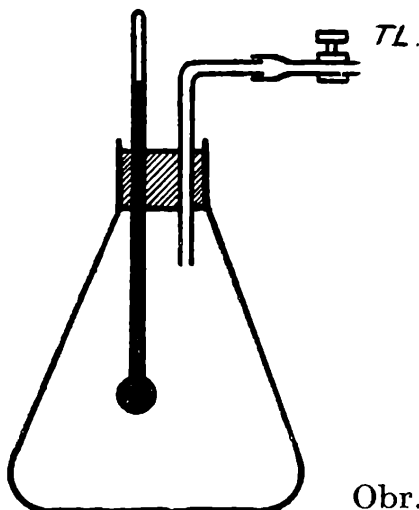
8. Homogenní koule o poloměru  $R$  a o hmotnosti  $M$  působí gravitační silou na hmotný bod o hmotnosti  $m$  ve vzdálenosti  $d > R$  od středu koule.

a) Určete velikost, směr a orientaci gravitační síly, kterou působí koule na hmotný bod.

b) V kouli je dutina o poloměru  $\frac{R}{2}$  podle obr. 11. Jak se změní velikosti, směr a orientace gravitační síly, kterou působí nyní těleso na hmotný bod v poloze  $A$  a  $B$  ve srovnání s výsledkem úlohy a)?



Obr. 11



Obr. 12

9. *Měření součinitele teplotní objemové roztažnosti vzduchu.*

*Potřeby:* Skleněná baňka (objem 250 ml), gumová zátka do baňky s otvory pro teploměr a skleněnou trubici, gumová hadička a tlačka



k hadici, váhy, závaží, nádoba s horkou vodou, větší nádoba se studenou vodou.

*Návod k měření:*

Při stálé hmotnosti a tlaku vzduchu v baňce určete objem vzduchu  $V_1$  při teplotě  $t_1$  a objemu vzduchu  $V_2$  při teplotě  $t_2$ .

Označme poměr objemů

$$\frac{V_1}{V_2} = k$$

Podle Gay-Lussacova zákona platí

$$V_1 = V_0 (1 + \gamma t_1), \quad V_2 = V_0 (1 + \gamma t_2),$$

odtud

$$k = \frac{1 + \gamma t_1}{1 + \gamma t_2}. \quad (1)$$

Objem  $V_1$  a  $V_2$  vzduchu v baňce určete nepřímou z těchto měření:

a) Určete hmotnost  $m_1$  suché baňky s příslušenstvím podle obr. 12 (tlačka je otevřena).

b) Uzavřete tlačku a ponořte baňku dnem dolů do horké vodní lázně až po zátku. Po ustálení teploty vzduchu v baňce změřte tuto teplotu  $t_1$ . Objem vzduchu v baňce je  $V_1$ .

c) Baňku ponořte do studené vodní lázně dnem vzhůru a pod povrchem vody otevřete tlačku. Proč vniká voda do baňky? Kdy vnikání vody do baňky ustane?

Uvedte baňku stále ponořenou hrdlem ve vodě do takové polohy, aby klidné povrchy vody v baňce a v nádobě byly ve stejné vodorovné rovině. Po ustálení teploty vzduchu v baňce změřte jeho teplotu  $t_2$ . Potom uzavřete tlačku. Vzduch v baňce má objem  $V_2$ . Proč můžeme předpokládat, že vzduch v baňce změnil objem z  $V_1$  na  $V_2$  a teplotu z  $t_1$  na  $t_2$  izobarických dějem?

Baňku se vzduchem, vodou a příslušenstvím vyzvedněte z lázně, osušte a určete její hmotnost  $m_2$ .

d) Baňku zcela naplňte vodou o teplotě  $t_2$  z nádoby a osušte. Určete hmotnost  $m_3$ , baňky s vodou a příslušenstvím.

Z měření a) a d) určete nepřímou objem vzduchu v baňce při teplotě  $t_1$

$$V_1 = \frac{m_3 - m_1}{\rho} \quad (2)$$

za předpokladu, že hmotnost vzduchu v baňce je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti baňky.  $\rho$  je hustota vody při teplotě  $t_2$ .

Z měření c) a d) určete nepřímou objem vzduchu v baňce při teplotě  $t_2$

$$V_2 = \frac{m_3 - m_2}{\rho}$$

za stejných předpokladů. Podle (2) a (3) platí

$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} \quad (4)$$

Ze vztahů (1) a (4) určete  $\gamma$ .

Které zjednodušující předpoklady děláte pro hmotnost vzduchu v baňce, pro teplotu  $t_2$ , pro objem baňky?

Opakujte pokus a měření třikrát. Vypočítejte aritmetický průměr hodnot  $\gamma$  určených z každého pokusu. Podle dosažené přesnosti naměřených veličin hodnotu  $\gamma$  správně zaokrouhlete.

### Kategorie C

4. Na stavbě se zvedají pomocí jeřábu tělesa, která se upevňují na hák jeřábu pomocí lana. Lano unese těleso nejvýše o tíze  $G$ , jestliže toto těleso je v klidu. Pohybuje-li se těleso rovnoměrně zrychleně svisle vzhůru se zrychlením  $a_1$ , unese lano těleso o největší tíze  $G_1$ .

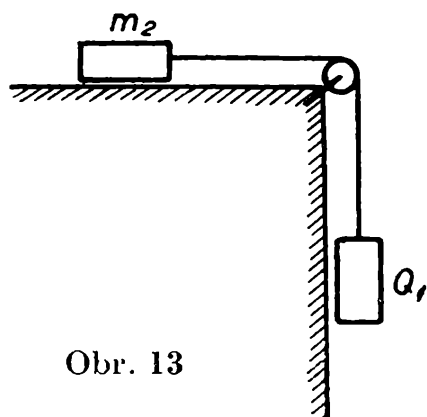
a) Jakou největší tíhu mohou mít tělesa, která lze tímto lanem zvedat ( $G_2$ ) nebo spouštět ( $G'_2$ ) rovnoměrným pohybem?

b) Určete velikost  $a_1$  zrychlení tělesa o tíze  $G_1$ , zvedá-li je jeřáb rovnoměrně zrychleným pohybem svisle vzhůru.

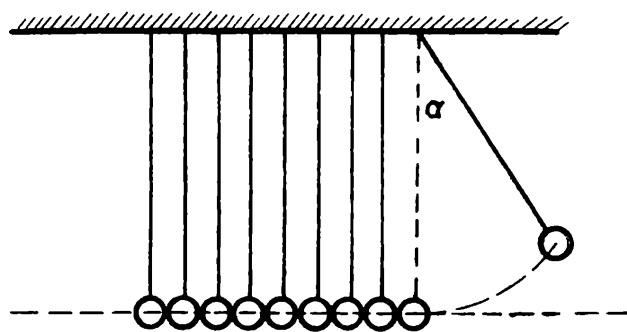
c) Jakou největší tíhu může mít těleso, které lze na tomto lanu spouštět svisle dolů rovnoměrně zrychleným pohybem se stejným zrychlením  $a_1$ ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $G = 1980 \text{ N}$ ,  $G_1 = 1800 \text{ N}$ , tíhové zrychlení  $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$ .

Tření a ostatní překážky pohybu zanedbejte.



Obr. 13



Obr. 14

5. Kvádr o hmotnosti  $m_2$  (obr. 13) uvedeme do pohybu po vodorovné rovině:

a) nejprve tíhovou silou  $G_1$  závaží o hmotnosti  $m_1$ ,

b) potom tíhovou silou  $G'_1$  závaží o hmotnosti  $m'_1 = n m_1$ .

1) Vypočítejte zrychlení kvádrů, jestliže zanedbáváme tření.

- 2) Vypočítejte zrychlení kvádrů, je-li součinitel tření  $\mu_1$ .
- c) Je správné tvrzení, že v případě, když zanedbáme tření, je zrychlení kvádrů tolikrát větší, kolikrát je větší tíha  $G_1$  závaží, které působí pohyb kvádrů?
- d) Jak velikou hodnotu  $\mu_2$  musí mít součinitel tření, aby tvrzení c) bylo správné, jestliže tření zanedbáváme?
- Otáčivý pohyb kladky zanedbejte ve všech případech.
- Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $m_1 = 0,03 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,20 \text{ kg}$ ,  $n = 2$ ,  $\mu_1 = 0,10$ ,  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

6. Dvě dokonale pružné koule si při centrálním rázu vyměnily své rychlosti. (Centrální ráz koulí nastane, jestliže se koule k sobě přibližují po přímce procházející jejich těžišti a srazí se.)

- a) Jaký je poměr hmotností těchto koulí?
- b) Jaká je rychlost druhé koule vzhledem k první při ukončení rázu v těchto případech:

1) rychlost  $v_1$ , první koule a rychlost  $v_2$  druhé koule před rázem měly stejnou orientaci,

2) první koule měla rychlost  $v_1 = 0$ , druhá  $v_2 \neq 0$ ,

3) koule se před rázem pohybovaly proti sobě rychlostmi  $v_1$ ,  $v_2$ .

c) Několik ( $n$ ) dokonale pružných koulí stejných hmotností visí na vláknech tak, že koule se dotýkají a jejich těžiště jsou na téže vodorovné přímce (obr. 14).

Co nastane, jestliže

1) jednu krajní kouli vychýlíme z klidové polohy ve svislé rovině  $\sigma$  proložené přímkou  $p$  o úhel  $\alpha$  a necháme ji dopadnout na řadu ( $n - 1$ ) zbývajících koulí,

2) vychýlíme ve svislé rovině  $\sigma$  dvě sousední krajní koule a necháme je současně dopadnout na řadu ( $n - 2$ ) zbývajících koulí?

7. Z téhož místa byly vystřeleny tři rakety stejnou počáteční rychlostí  $v_0$  pod elevačními úhly  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ . Raketa vystřelená pod elevačním úhlem  $\alpha_1$  dopadla na zem za čas  $t_1$ .

a) Vypočítejte počáteční rychlost raket.

b) Dokažte, že při stejné počáteční rychlosti

1) dosáhne největší výšky raketa, vystřelená pod největším možným úhlem, tedy při svislém vrhu vzhůru,

2) rakety vystřelené pod úhly  $\alpha$  a  $(90^\circ - \alpha)$  mají stejné délky vrhu,

3) největší délku vrhu má raketa vystřelená pod úhlem  $45^\circ$

c) Vypočítejte doby letu, největší výšky a délky vrhů raket vystřelených pod elevačními úhly  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $\alpha_1 = 20^\circ$ ,  $\alpha_2 = 45^\circ$ ,  $\alpha_3 = 60^\circ$ ,  $t_1 = 6 \text{ s}$ .

Odpor vzduchu zanedbejte, gravitační pole považujte za stejnorodé. Ve vhodném měřítku zakreslete dráhy všech tří raket.

8. Automobil se pohybuje do mírného kopce stálou rychlostí  $v_1$ . Tu část skutečného výkonu  $P$  motoru automobilu, která se využije na udržování vozidla v pohybu, označme  $P_1$ . Jede-li automobil při stejné hodnotě  $P_1$  s kopce dolů, nabude rychlostí  $v_2$ . Jaké rychlosti  $v_0$  nabude při stejném  $P_1$ , pohybuje-li se po vodorovné rovině?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $v_1 = 5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $v_2 = 20 \text{ m s}^{-1}$ , tíhové zrychlení  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .

### 9. Rovnováha sil.

*Pomůcky:* Stožan na upevnění pevných kladek, tři pevné kladky, vlákna, závažíčka s háčky k pokusům z mechaniky, dva siloměry, jejichž hmotnost je zanedbatelná vůči hmotnostem použitých závaží, kreslicí papír, rýsovací potřeby, nůžky.

*Návod:* Výslednici dvou nebo více sil, jež mají společné působiště, najdeme nejsnadněji pomocí vektorového mnohoúhelníka sil. Obrazem výslednice všech daných sil je spojnice společného působiště všech sil a koncového bodu vektoru, zobrazujícího sílu, kterou jsme přičítali naposled. Tato úsečka určuje vektorovou přímku výslednice a velikost, směr i orientaci výslednice. Síla  $F$ , která je stejně velká, ale opačně orientovaná než výslednice a která má s výslednicí společnou vektorovou přímku, je silou, která je se skládanými silami v rovnováze. Podmínkou rovnováhy sil je tedy, aby vektorový mnohoúhelník byl uzavřen.

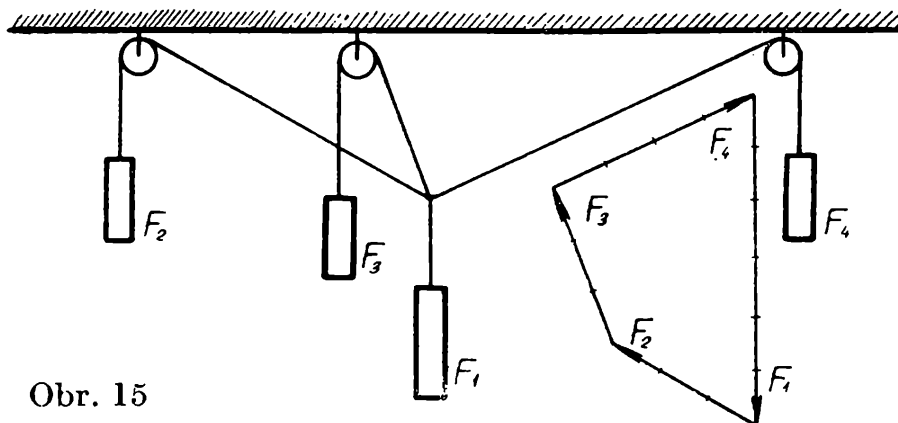
Má-li se např. nalézt, kdy nastane rovnováha čtyř sil  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  a  $F_4$ , sestrojíme uzavřený vektorový čtyřúhelník těchto sil. Čtyřúhelník je však jednoznačně určen pěti prvky. Známe-li velikosti všech čtyř sil, je potřebí znát ještě jednu podmínku, např. úhel, který svírají vektorové přímky sil  $F_1$  a  $F_2$ .

Postup řešení si vysvětlíme na úloze:

Vyšetřete, kdy nastane rovnováha sil  $F_1 = 6$  jednotek síly (v dalším označení js),  $F_2 = F_3 = 3$  js,  $F_4 = 4$  js. Vektorové přímky sil  $F_1$  a  $F_2$  svírají spolu úhel  $120^\circ$

Experimentální ověření správnosti tvrzení, že síly jsou v rovnováze, je-li jejich vektorový mnohoúhelník uzavřen, ověříme pokusem naznačeným na obr. 15. Na kreslicí papír narýsujeme dostatečně velký uzavřený vektorový mnohoúhelník, jehož strany  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  zobrazují velikosti, směry i orientace sil  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  a vystříhneme ho. Na stožan na upevnění kladek nasadíme tři kladky a na vlákna přes ně vedená zavěsíme závaží daná úlohou. Protože závaží, které realizuje sílu  $F_1$  působí směrem svisle dolů, přiložíme vystřižený vektorový mnohoúhelník k napjatým vláknům tak, že úsečka  $AB$  přilehne

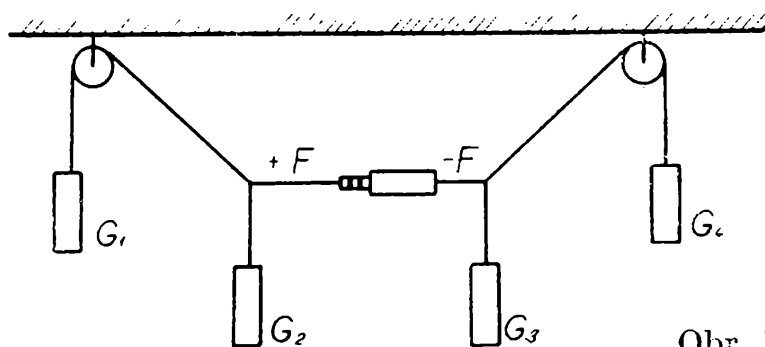
k vláknu, napínanému silou  $F_1$ . Potom přemísťujeme jednu nebo dvě kladky tak, aby ještě jedna z úseček, např.  $DA$  přiléhala k vláknu, na němž působí příslušná síla, v našem případě  $F_4$ . Přesvědčíme se, že také ostatní vlákna nesoucí závaží  $F_2$  a  $F_3$  budou napjata ve směru úseček  $BC$  a  $CD$  a dané čtyři síly budou v rovnováze.



Obr. 15

*Úkoly:*

- Provedte úlohu uvažovanou v návodu graficky i pokusně.
- Najděte, kdy nastane rovnováha sil  $G_1 = 6,5$  js,  $G_2 = 2,5$  js,  $G_3 = 4,5$  js,  $G_4 = 7,5$  js, umístěných podle obr. 16. Síly  $G_2$  a  $G_3$  jsou svislé. Určete graficky i pokusně (vloženým siloměrem) velikost síly  $F$



Obr. 16

(Návod: Síla  $F$  udržuje v rovnováze síly  $G_1$  a  $G_2$  a také síly  $G_3$  a  $G_4$ .)

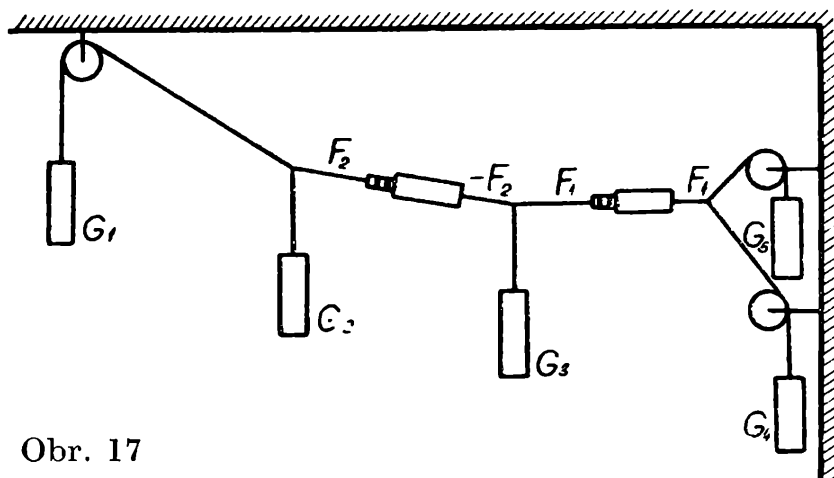
- Najděte, kdy nastane rovnováha sil  $G_1 = 7$  js,  $G_2 = 3$  js,  $G_3 = 2$  js,  $G_4 = 3$  js a  $G_5 = 4$  js, napínající vlákna vedoucí přes kladky podle obr. 17. Síly  $G_2$  a  $G_3$  jsou svislé, síla  $F_1$  je vodorovná.

Určete velikosti sil  $F_1$  i  $F_2$  graficky i pokusně (vloženými siloměry).

### Kategorie D

- V nádobě s vodou plave kus ledu. Teplota vody i ledu je  $0^\circ\text{C}$ . K ledu mohou být přimrzlé nebo v ledu zamrzlé kousky různých látek

teploty  $0^\circ\text{C}$ . Nechť všechnen led roztaje tak, že výsledná teplota vody v nádobě je opět  $0^\circ\text{C}$ . Teplo potřebné k roztání ledu je přivedeno zvenčí.



Obr. 17

Rozhodněte, zda po roztání ledu se výška povrchu vody nade dnem nádoby zmenší, zvětší nebo nezmění v těchto případech:

- a) led je čistý
  - 1) bez dutin,
  - 2) v ledu je uzavřena dutina;
- b) k ledu je přimrzlý kousek korku tak, že
  - 1) korek je na ledě nad vodou,
  - 2) korek je zamrzlý uvnitř ledu,
  - 3) korek je pod vodou na ponořené části ledu;
- c) k ledu je přimrzlý kousek železa tak, že
  - 1) železo je na ledě nad vodou,
  - 2) železo je zamrzlé uvnitř ledu,
  - 3) železo je pod vodou přimrzlé na ponořené části ledu.

Úlohu řešte:

- a) úvahou (úsudkem) bez použití matematiky,
- b) obecným matematickým výpočtem tak, že např. tíhu ledu označíte  $G_1$ , měrnou tíhu ledu  $\gamma_1$ , tíhu kusu korku  $G_2$ , jeho měrnou tíhu  $\gamma_2$ , tíhu kusu železa  $G_3$ , jeho měrnou tíhu  $\gamma_3$ , tíhu vody vytlačené ledem  $G_0$ , měrnou tíhu vody  $\gamma_0$ , objem vody vytlačené ponořenou částí ledu  $V_0$ , objem vody, která vznikne roztáním ledu  $V_1$ .

5. Těleso o měrné tíze  $\gamma_1$  je ve vzduchu, jehož měrná tíha je  $\gamma_0$ . na správných vahách vyváženo závažím tíhy  $G$  a měrné tíhy  $\gamma_2$ . Určete tíhu tohoto tělesa ve vakuu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $\gamma_1 = 240 \text{ kp/m}^3$ ,  $\gamma_2 = 8500 \text{ kp/m}^3$ ,  $\gamma_0 = 1,2 \text{ kp/m}^3$ ,  $G = 1,0 \text{ kp}$ .

6. Chod elektromotoru (o příkonu  $P_0$  při napětí  $U_0$ ) je bezpečný jen pro napětí, které se od udávaného napětí  $U_0$  liší nejvýše o  $p$  %.

Vypočtete rozdíl mezi maximálním a minimálním proudem a rozdíl mezi maximálním a minimálním příkonem motoru, mění-li se v síti napětí mezi povolenými krajními hodnotami.

Předpokládejte, že vnitřní odpor motoru se při změně napětí v síti nemění.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $U_0 = 220$  V,  $P_0 = 4400$  W  
 $p = 15$ .

7. Primární cívka transformátoru má  $Z_1$  závitů, sekundární  $Z_2$  závitů. Napětí na primární cívce je  $U_1$ . Předpokládáme, že účinnost transformátoru je 100 %.

a) Jaký je transformační poměr a jaké je napětí  $U_2$  na sekundární cívce?

b) Jaké proudy procházejí primární a sekundární cívkou, má-li transformátor příkon  $P$ ?

c) Tento výkon se má přenášet při napětí v sekundární cívce  $U_3$  nebo  $U_4$  do stejné vzdálenosti vedením ze stejného materiálu. Určete poměr průřezů drátů, mají-li být ztráty v obou případech stejné.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $Z_1 = 2500$ ,  $Z_2 = 125$ ,  
 $U_1 = 2400$  V,  $U_3 = 120$  V,  $U_4 = 240$  V.

8. Motocykl Pionýr Jawa 50 má pro jízdu v noci světlomet se žárovkou pro napětí  $U = 6$  V a příkon  $P_1 = 15$  W, koncové světlo se žárovkou pro stejné napětí  $U$  a pro příkon  $P_2 = 5$  W. Obě žárovky jsou spojeny paralelně. Svorkové napětí dynamka vzroste z  $U_1 = 4$  V při malém počtu obrátek motoru za minutu na napětí  $U_2 = 9$  V při velkém počtu obrátek za minutu. Vypočítejte, oč se zvětší proud v hlavním vedení a oč se zvětší příkony žárovek při vzrůstu svorkového napětí z  $U_1$  na  $U_2$ .

Předpokládáme, že se odpor žárovek při vzrůstu napětí nemění. Odpor spojovacích drátů zanedbáváme.

Řešte nejprve obecně, pak pro uvedené hodnoty.

9. Stupnice měřidla DU 10 má pro měření stejnosměrného napětí 60 dílků. Napětí rozsahy měřidla jsou: 3 V, 6 V, 12 V, 30 V, 60 V, 120 V, 300 V, 600 V

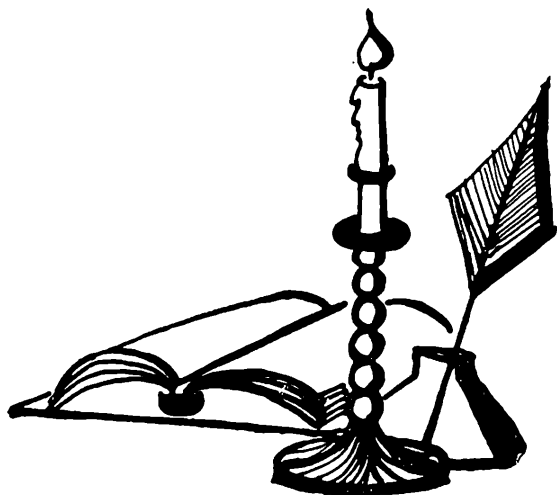
a) Na kterém dílku stupnice bude ručka měřidla při jednotlivých rozsazích, měříme-li napětí 5,80 V za předpokladu, že odhadneme ještě desetiny dílků?

b) Určete maximální chybu údaje měřidla (v dílcích stupnice i ve voltech) při jednotlivých rozsazích, měří-li měřidlo DU 10 na stejnosměrných rozsazích každou hodnotou s přesností  $\pm 1,5$  % z plného rozsahu stupnice.

c) Usudte a odůvodněte, na kterém rozsahu měřidla je možné nepřesnější měření uvedeného napětí 5,80 V.

Řešení a) a b) запиšte do tabulky s těmito sloupci: napěťový rozsah, poloha ručky, maximální chyba v dílcích a ve voltech.

ÚVFO



RECENZE

## Úlohy o maximech a minimech funkcí

ING. JAROMÍR HRONÍK

Ve sbírce Škola mladých matematiků vydal Matematický ústav ČSAV pro účastníky MO v nakladatelství Mladá fronta jako 17. svazek Hroníkovy Úlohy za 3 Kčs.

Autor předkládá čtenáři brožurku, ve které se snaží za vydatné spolupráce odb. as. Jiřího Rohlíčka řešit úlohy o extrémech funkcí b e z užití diferenciálního počtu.

Po obecném výkladu pojmu maxima a minima funkce v 1. kapitole odvozuje ve 2. kapitole větu: Ze všech dvojic kladných reálných čísel  $x, y$  o konstantním součtu  $a$  má největší součin dvojice  $\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$

Této větě užívá dále na 10 příkla-

dech z geometrie a mechaniky. Ve 3. kapitole řeší na příkladech z geometrie, hydrauliky a balistiky extrémy goniometrických funkcí. Obsahem 4. kapitoly jsou extrémy některých lomených funkcí, jež demonstruje na příkladech z geometrie, optiky, elektřiny. V poslední kapitole jsou odvozovány extrémy funkcí kubických a bikvadratických. Jednotlivé kapitoly jsou doplněny vhodnými příklady na procvičení.

Právě tak jako v moderní atletice nejsou již registrovány špičkové výkony v disciplínách s omezujícími podmínkami (např. skok daleký bez rozběhu), bude i dnešní dospělý matematik užívat k nalezení maxim



a minim funkcí vždy jenom nejeekonomičtější cesty, tj. diferenciálního počtu.

Proto se musíme dívat na Hroníkovu knížku jako na dobrý pokus řešit úlohy o maximech a minimech jen na základě znalostí mladých matematiků, jimž je knížka určena. Nekonvenční postup bez vyšlapané

cesty diferenciálního počtu přinutí čtenáře k logickému myšlení.

Pestrá paleta příkladů, jasný výklad a vzorné obrázky dobře splňují poslání knížky. Doufejme, že se čtenáři ještě podaří tuto zajímavou brožuru v obchodě sehnat.

O. S.

## 0 modernizaci školské matematiky

JAROSLAV ŠEDIVÝ

(Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1969, 256 stran)

Čtenáři Rozhledů znají řadu autorových článků, ve kterých vysvětluje základní pojmy z teorie množin a logiky a ukazuje, jak jich lze využít při řešení úloh. Citovaná knížka obsahuje s o u s t a v n ý v ý k l a d z á k l a d ů m o d e r n í m a t e m a t i k y a naznačuje možnosti pro její uplatnění ve vyučování. Je určena především učitelům, ale neobsahuje žádná tajemství, jež byste nesměli znát vy, kteří se zajímáte o matematiku. Právě naopak!

Co prospěšného vám může přinést studium knížky? Snad bude nejlépe, když vás stručně seznámím s jejím obsahem:

V první kapitole letmo nahlédnete do historie matematiky, dozvíte se, s jakými obtížemi se zrodil pojem množiny, jak se měnil názor na podstatu matematiky. Seznámíte se také předběžně s jazykem moderní matematiky, zejména s pojmem proměnné a s pojmy názvová a výroková forma.

Ve druhé kapitole prohloubíte a rozšíříte své představy o množinách. Naučíte se pracovat s množinovou symbolikou, poznáte souvislosti mezi vlastnostmi a množinami. Uvidíte, jak důležité jsou Vennovy diagramy při řešení různých typů úloh. Množinový pohled na pravděpodobnostní a kombinatorické úvahy vám osvětlí učivo, které budete probírat.

Třetí kapitola se zabývá množinově logickým jazykem matematiky a jeho uplatněním při řešení rovnic, nerovnic a některých geometrických úloh. V tomto ohledu můžete získat velmi cenné poznatky užitečné pro vypracování úplných a logicky správných řešení soutěžních úloh. Kapitola obsahuje též úvodní výklad o výrokové logice, osvětluje význam logických spojek a uvádí symbolické zápisy užívané v matematických textech.

Čtvrtá kapitola je věnována binárním relacím. Seznámíte se např. s pojmy kartézský součin, binární relace, dále s grafickým znázorňováním binárních relací, s jejich vlastnostmi a skládáním. Dozvíte

se, jak lze chápat analytickou geometrii z hlediska binárních relací, jak lze využít grafů relací k řešení úloh atd.

Pátá kapitola pojednává o pojmu zobrazení a funkce. Uvědomíte si, jak mnoho rozmanitých pojmů v matematice a logice je v podstatě zobrazením; poznáte, jak lze stručně charakterizovat různé druhy zobrazení. Naučíte se též určovat definiční obory složených funkcí, řešit logické úlohy.

Šestá kapitola stručně informuje o důležitých algebraických strukturách. Dozvíte se, co je grupa a pologrupa, seznámíte se s množinovou algebrou, se základy Booleovy algebry a některými jejími modely. Přesvědčíte se, že pravdivostní hodnotu výroku lze vypočítat; naučíte se navrhovat kontaktní sítě, které mohou signalizovat poruchy v práci kybernetických zařízení apod.

Knížka je psána velmi srozumitelně; náročnost textu pozvolna vzrůstá, a tím vám umožní přivyknout stručnému matematickému vyjadřování a pocítit výhodnost a přehlednost symbolického zápisu definic a axiomů. Úvahy jsou doprovázeny mnoha obrázky, pojmy jsou objasňovány na mnoha příkladech. Navíc je v knížce řešena řada velmi zajímavých problémů, další takové problémy jsou uvedeny ve cvičeních, na nichž si můžete ověřit, jak jste látku pochopili (výsledky cvičení jsou uvedeny v závěru knížky). Pro samostatné studium poslouží i sto odkazů na knížky a články zabývající se podrobněji některými tématy.

Přesvědčte se sami, že při pozorném studiu knížky porozumíte dobře celému jejímu obsahu.

*Oldřich Odvárko*

## Súťaž mladých pracovníkov v matematike

Jednota slovenských matematikov a fyzikov vypisuje súťaž mladých pracovníkov v matematike na rok 1970.

Súťaže sa môžu zúčastniť členovia JSMF, ktorí v r. 1970 dovŕšia najviac 30 rokov veku. Do súťaže sa prijímajú vedecké práce z matematiky, jednotlivé alebo súbor prác, ktoré boli publikované, alebo prijaté redakčnou radou niektorého odborného časopisu.

Hlavný výbor JSMF, na návrh komisie, ustanovenej ním po porade s Vedeckým kolégiom matematiky SAV, udelí ceny, ktorých úhrnná hodnota je do výšky 8000,— Kčs. Ceny môžu byť vyčerpané (podľa voľby odmeneného) aj vo forme študijných pobytov, v rámci možností JSMF.

Prihlášky s obvyklými osobnými údajmi a dvomi exemplármi prihlásovaných prác treba poslať na adresu: JSMF, Bratislava, Štefanikova 41, najneskôr do 15. januára 1970.

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ

### A

abaisser une perpendiculaire

abrégé, e

abscisse *ž*

absurde

absurde *m*

absence *ž*

absolu, e

valeur *ž* absolue

abstrait, e

accolade *ž*

accroissement *m*

acutangle

triangle *m* acutangle

addition *ž*

additionner

adjacent, e

admettre

affecté, e

affecté d'un signe

affine

affinité *ž*

agrandissement *m*

aigu, e

aiguille *ž*

aire *ž*

aire latérale du cône

ajouter

algèbre *ž*

algébrique

algorithme *m*

allonger

alors

alphabet *m*

alphabétique

ordre *m* alphabétique

alterne

alterné, e

spustit kolmici

zkrácený

souřadnice *x*

absurdní

absurdum, spor

nepřítomnost

absolutní

absolutní hodnota

abstraktní

svorka

přírůstek

ostroúhlý

trojúhelník ostroúhlý

sčítání

sčítat

přilehlý

připustit

opatřený

opatřený znaménkem

afinní

afinita

zvětšení

ostrý

jehla

obsah, povrch

obsah pláště kužele

připojit

algebra

algebraický

algoritmus

prodloužit

pak, potom

abeceda

abecední

abecední pořadí

střídavý

alternující

|                                             |                                                                                    |
|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| altitude <i>ž</i>                           | výška                                                                              |
| ambigu                                      | dvojznačný                                                                         |
| amplitude <i>ž</i>                          | amplituda                                                                          |
| analogie <i>ž</i>                           | analogie                                                                           |
| analogique, analogue                        | analogický, obdobný                                                                |
| analyse <i>ž</i>                            | analýza, rozbor                                                                    |
| analytique                                  | analytický                                                                         |
| angle <i>m</i>                              | úhel                                                                               |
| angle aigu                                  | úhel ostrý                                                                         |
| angle adjacent                              | úhel přilehlý                                                                      |
| angle au centre                             | úhel středový                                                                      |
| angle complémentaire                        | úhel doplňkový                                                                     |
| angle concave                               | úhel dutý                                                                          |
| angle convexe                               | úhel vypuklý                                                                       |
| angle droit                                 | úhel pravý                                                                         |
| angle externe                               | úhel vnější                                                                        |
| angle inscrit (dans une circon-<br>férence) | úhel obvodový                                                                      |
| angle interne                               | úhel vnitřní                                                                       |
| angle obtus                                 | úhel tupý                                                                          |
| angle supplémentaire                        | úhel výplňkový                                                                     |
| angle voisin                                | úhel vedlejší                                                                      |
| angles alternes                             | úhly střídavé                                                                      |
| angles opposés par le sommet                | úhly vrcholové                                                                     |
| anneau <i>m</i>                             | prstenec, okruh                                                                    |
| annuler                                     | anulovat                                                                           |
| anse de panier <i>m</i>                     | ovál                                                                               |
| apothème <i>m</i>                           | pobočná výška jehlanu, poloměr ve-<br>psané kružnice pravidelnému<br>mnohoúhelníku |
| anharmonique                                | anharmonický                                                                       |
| rapport <i>m</i> anharmonique               | dvojpoměr                                                                          |
| appareil <i>m</i>                           | aparát, přístroj                                                                   |
| apparent, e                                 | zdánlivý                                                                           |
| appartenir                                  | náležet, patřit                                                                    |
| <i>a</i> appartient à <i>A</i>              | <i>a</i> patří do (je prvkem) <i>A</i>                                             |
| appendice <i>m</i>                          | dodatek                                                                            |
| application <i>ž</i>                        | použití, aplikace, zobrazení (množin)                                              |
| application linéaire                        | zobrazení lineární (kolineární)                                                    |
| application affine                          | zobrazení afinní                                                                   |
| approximatif, ive                           | přibližný                                                                          |
| approximation <i>ž</i>                      | aproximace                                                                         |
| appuyé, e                                   | opřený                                                                             |
| droite <i>ž</i> appuyée sur une<br>courbe   | přímka protínající křivku                                                          |
| arbitraire                                  | libovolný                                                                          |
| arc <i>m</i>                                | oblouk (křivky)                                                                    |
| arc de cercle                               | kruhový oblouk                                                                     |
| arête <i>ž</i>                              | hrana                                                                              |
| argument <i>m</i>                           | argument                                                                           |
| arithmétique                                | aritmetický                                                                        |
| moyenne <i>ž</i> arithmétique               | aritmetický průměr                                                                 |
| arithmétique <i>ž</i>                       | aritmetika                                                                         |

# rozhledy

MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ

---

2

ROČNÍK 48, 1969-70, ŘÍJEN



ROČNÍK 48  
ŘÍJEN 1969-70

2

# MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání  
Za zásluhy o výstavbu

## VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci

## VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

## REDAKČNÍ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; zasl. učitel Petr Benda, VUT, Prno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B. Bystrica; Miloš Franek, PF UK, Bratislava; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, DrSc., PF-UPJŠ, Košice; dr. Oldřich Lepil, PU, Olomouc; Milan Marčok, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava; prof. dr. Cyril Palaj, PF-UPJŠ, Košice; Evžen Říman, CSc., ČVUT, Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci; dr. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; ing. dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ ÚNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarik, insp. MŠ SSR, Bratislava.

## REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29.

## OBSAH

|                                                                             |                     |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| F. Janeček: Maximum a minimum reálných čísel . . . . .                      | 53                  |
| J. Stejskal: Ptolemaiova věta . . . . .                                     | 56                  |
| O. Setzer: Z geometrie rovnosé hyperboly . . . . .                          | 58                  |
| S. Horák st.: Sítě pravidelných mnohoúhelníků v rovině . . . . .            | 65                  |
| Š. Jánoš: Fyzika a nízké teploty . . . . .                                  | 67                  |
| Z. Ungermann: Pružná deformace tuhého tělesa . . . . .                      | 74                  |
| T. Páv: Signály z vesmíru . . . . .                                         | 78                  |
| Naše soutěž . . . . .                                                       | 81                  |
| S. Horák st.: XI. mezinárodní matematická olympiáda . . . . .               | 86                  |
| J. Ketyk: Za prof. dr. Františkem Záviškou . . . . .                        | 90                  |
| V. Jozífek: První učebnice geometrie s úplnou českou terminologií . . . . . | 93                  |
| J. Mikulčák: Živé počítací stroje . . . . .                                 | 98                  |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český . . . . .                      | 3. a 4. str. obálky |

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: B. Šmejdivá, studující FS.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1969.



## Maximum a minimum reálných čísel

FRANTIŠEK JANEČEK, SVVŠ Broumov

V tomto článku zavedeme dva důležité pojmy týkající se množin reálných čísel: maximum a minimum.

**Definice 1.** Maximum čísel  $a$  a  $b$  [značíme  $\max(a, b)$ ] je číslo definované takto

$$\max(a, b) = a, \text{ když } a \geq b,$$

$$\max(a, b) = b, \text{ když } a \leq b,$$

tj. maximum dvou čísel  $a$  a  $b$  je to z nich, které je větší, jestliže se obě čísla sobě nerovnají; jestliže se obě čísla sobě rovnají, je maximum těchto čísel libovolné z nich.

Podobně  $\max(a_1, a_2, \dots, a_n)$  je největší z čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$  nebo je rovno  $a_1$ , když  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ , tj.

$$\max(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_k$$

(kde  $k$  je jedno z čísel  $1, 2, \dots, n$ ), jestliže  $a_k \geq a_1, a_k \geq a_2, \dots, a_k \geq a_n$ .

Píšeme také stručně

$$\max(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max a_k$$

$$1 \leq k \leq n$$

Např.

$$\max(2, 5) = 5, \max(2, -3) = 2, \max\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{5}$$

$$\max(-4, -4) = -4, \max(1, -2, 3, -5, 6) = 6.$$

Obdobně zavedeme nyní pojem minimum dvou čísel označujeme  $\min(a, b)$ .

**Definice 2.** Minimum čísel  $a$  a  $b$  je číslo definované takto

$\min(a, b) = a$ , když  $a \leq b$ ,

$\min(a, b) = b$ , když  $a \geq b$ .

Podobně

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_k$$

(kde  $k$  je jedno z čísel  $1, 2, \dots, n$ ), jestliže  $a_k \leq a_1, a_k \leq a_2, \dots, a_k \leq a_n$ .

Například

$$\min(3, 5) = 3, \min(2, -3) = -3, \min(-4, -4) = -4,$$

$$\min(1, -2, 3, -5, 6) = -5.$$

**Poznámky.** 1. Z definice čísel  $\max(a, b)$  a  $\min(a, b)$  vyplývá, že

$$\min(a, b) \leq \max(a, b);$$

přitom rovnost nastává tehdy a jen tehdy, jestliže  $a = b$ .

2. Jestliže

$$\max(a, b) = a$$

je

$$\min(a, b) = b$$

a naopak, takže

$$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$$

3. Zřejmě platí

$$\max(a, b) = \max(b, a)$$

a obdobně

$$\min(a, b) = \min(b, a)$$

4. Budiž  $\mathbf{M}$  množina reálných čísel. Potom  $\max \mathbf{M}$  (čteme *maximum množiny*  $\mathbf{M}$ ) je číslo  $a \in \mathbf{M}$  definované takto

$$x \in \mathbf{M} \Rightarrow x \leq a,$$

tj.  $\max \mathbf{M}$  je největší z čísel obsažených v množině  $\mathbf{M}$ .

Podobně  $\min \mathbf{M}$  (čteme *minimum množiny*  $\mathbf{M}$ ) je nejmenší číslo obsažené v množině  $\mathbf{M}$ , tj.

$$x \in \mathbf{M} \Rightarrow x \geq \min \mathbf{M}.$$

Užitím pojmu maximum dvou čísel lze definovat absolutní hodnotu reálného čísla.

**Definice 3.** Absolutní hodnotou čísla  $a$  - označení  $|a|$  - rozumíme číslo definované vztahem

$$|a| = \max(-a, a).$$

$$\text{Např. } |5| = \max(-5, 5) = 5, |-5| = \max(5, -5) = 5,$$

$$|-3| = \max(3, -3) = 3, |0| = \max(0, 0) = 0.$$



Pomocí této definice absolutní hodnoty reálného čísla dokážeme několik vět o absolutní hodnotě.

*Věta 1.* Absolutní hodnota čísla se rovná absolutní hodnotě k němu opačného čísla, tj.

$$|a| = |-a|$$

*D ů k a z.* Vyplývá bezprostředně ze zavedené definice absolutní hodnoty čísla. Je totiž

$$|a| = \max(-a, a),$$

$$|-a| = \max(a, -a).$$

Podle uvedené poznámky platí

$$\max(-a, a) = \max(a, -a),$$

čímž je věta dokázána.

*Věta 2.* Jestliže  $a > 0$ , je  $|a| = a$ ,

jestliže  $a < 0$ , je  $|a| = -a$ ,

jestliže  $a = 0$ , je  $|a| = 0$

*D ů k a z.* Jestliže je  $a > 0$ , je  $-a < 0$ , takže  $-a < a$ . To znamená, že  $|a| = \max(-a, a) = a$ .

Jestliže je  $a < 0$ , je  $-a > 0$ , takže  $a < -a$ . Proto  $|a| = \max(-a, a) = -a$ .

Jestliže je  $a = 0$ , je  $-a = 0$ ,  $\max(0, 0) = 0 = |a|$ .

*Věta 3.* Platí

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2},$$

$$\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

*D ů k a z.* 1. Nechť  $a \geq b$ . Pak  $\max(a, b) = a$ ,  $a - b \geq 0$ , a tedy  $|a - b| = a - b$ , takže

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + a - b}{2} = \frac{2a}{2} = a = \max(a, b)$$

Jestliže  $a \leq b$ , je  $\max(a, b) = b$ . Zaměníme-li  $a$  za  $b$  a  $b$  za  $a$ , plyne z toho, co již bylo dokázáno (viz poznámku 3)

$$\max(a, b) = \max(b, a) = \frac{b + a + |b - a|}{2} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

2. Podle poznámky 2 je

$$\begin{aligned} \min(a, b) &= a + b - \max(a, b) = \\ &= a + b - \frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b - |a - b|}{2} \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána.

**P o z n á m k a.** Množina reálných čísel nemusí mít maximum ani minimum.

## Ptolemaiova věta

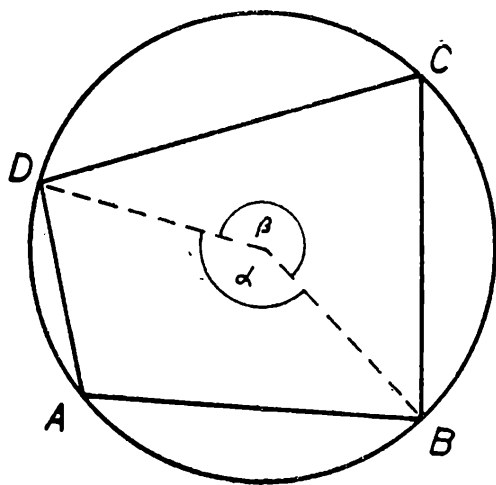
JIŘÍ STEJSKAL, Praha

Vyslovíme nejprve definici tětiového čtyřúhelníka a dokážeme několik vět.

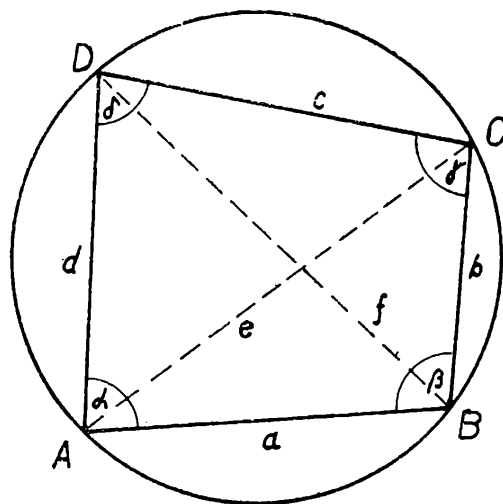
**Definice 1.** Tětiovým čtyřúhelníkem nazýváme konvexní čtyřúhelník, kterému je možno opsat kružnici.

**V ě t a 1.** V konvexním tětiovém čtyřúhelníku je součet protějších úhlů roven  $2R$ .

**D ů k a z.** Vzhledem k tomu, že součet všech čtyř úhlů konvexního čtyřúhelníka je roven  $4R$  stačí dokázat, že například  $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 2R$ . Úhly  $\sphericalangle A$  a  $\sphericalangle C$  jsou úhly obvodové, proto  $\sphericalangle A$  je roven polovině středového úhlu příslušného k oblouku  $BCD$  a  $\sphericalangle C$  je roven polovině středového úhlu příslušného k oblouku  $DAB$ . Tedy součet  $\sphericalangle A + \sphericalangle C$  je roven součtu  $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$  (obr. 1), a proto  $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 2R$ .



Obr. 1



Obr. 2

**V ě t a 2.** ( O b r á c e n á v ě t a k v ě t ě 1 .) Je-li v konvexním čtyřúhelníku součet protějších úhlů roven  $2R$ , je tomuto čtyřúhelníku možno opsat kružnici, to znamená, že je to čtyřúhelník tětiový.

**D ů k a z.** Předpokládáme, že čtyřúhelník  $ABCD$  (obr. 1) je konvexní tětiový čtyřúhelník, ve kterém  $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 2R$ , a tedy  $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 2R$ . Dokážeme, že je možno tomuto čtyřúhelníku opsat kružnici. Vedeme kružnici třemi libovolnými vrcholy tohoto čtyřúhelníka, například  $BAD$ . Tuto kružnici můžeme vést vždy. Zbývajících čtvrtý vrchol  $C$ , musí ležet na této kružnici, protože kdyby tomu tak nebylo, musel by vrchol  $\sphericalangle C$  ležet uvnitř nebo vně kružnice, proložené body  $B, A, D$  a neplatilo by, že je polovinou příslušného středového úhlu.

Tedy neplatilo by  $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ , tedy by i neplatilo, že  $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 2R$ , a to je spor s předpokladem.

Nyní vyslovíme tzv. v ě t u P t o l e m a i o v u.

**V ě t a 3.** V tětiovém čtyřúhelníku platí vztah

$$ef = ac + bd,$$

kde  $e, f$  jsou úhlopříčky a  $a, b, c, d$  jsou délky stran tohoto čtyřúhelníka.

**D ů k a z.** V daném tětiovém čtyřúhelníku, jehož označení je na obr. 2, platí pro  $\triangle ABD$  a  $\triangle BCD$  z kosinové věty tyto vztahy

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha \quad (1)$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma \quad (2)$$

Protože platí, že  $\gamma = 180^\circ - \alpha$  upravíme rovnici (2) na

$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha. \quad (3)$$

Po vyloučení  $\cos \alpha$  z rovnic (1) (3) dostáváme

$$f^2(ad + bc) = (ab + cd)(ac + bd) \quad (4)$$

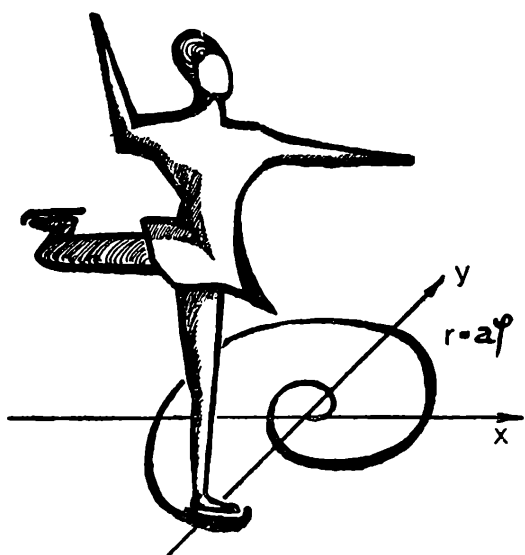
Podobně z  $\triangle ABC$  a  $\triangle ACD$  dostáváme

$$e^2(ab + cd) = (ad + bc)(ac + bd) \quad (5)$$

Vynásobením rovnic (4) a (5) dojdeme ke vztahu

$$ef = ac + bd,$$

jehož platnost jsme měli dokázat.



## DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

# Z geometrie rovnoosé hyperboly

Doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Úkolem tohoto článku je odvodit elementárními prostředky některé vlastnosti rovnoosé hyperboly a pak jich použít k různým konstrukcím.

V pravoúhlé souřadné soustavě jsou dány pevné body  $F_1(-a; -a)$  a  $F_2(a; a)$ . Hledáme množinu všech bodů, jejichž vzdálenosti od bodů  $F_1$  a  $F_2$  mají konstantní rozdíl rovný  $2a$  (obr. 1). Pro libovolný bod  $L(x; y)$  této množiny platí

$$|F_1 L - F_2 L| = 2a$$

Použijeme-li pro výpočet úseček  $F_1 L$  a  $F_2 L$  známého vzorce pro vzdálenost dvou bodů, dostaneme po kratší úpravě rovnici hledané křivky ve tvaru

$$2xy = a^2,$$

což při označení  $\frac{a^2}{2} = c$  lze psát

$$y = \frac{c}{x} \quad (1)$$

Podle původní definice je naše křivka hyperbolou; protože však  $F_1 F_2 = 2a \sqrt{2} = 2e$ , je tato hyperbola rovnoosá s ohnisky v bodech  $F_1, F_2$  a asymptotami v osách  $x$  a  $y$ .

Z rovnice (1) plyne, že je grafem nepřímé úměrnosti; kolikrát se zvětší  $x$ , tolikrát se zmenší  $y$  při konstantním  $c$ . Setkáme se s ní všude, kde

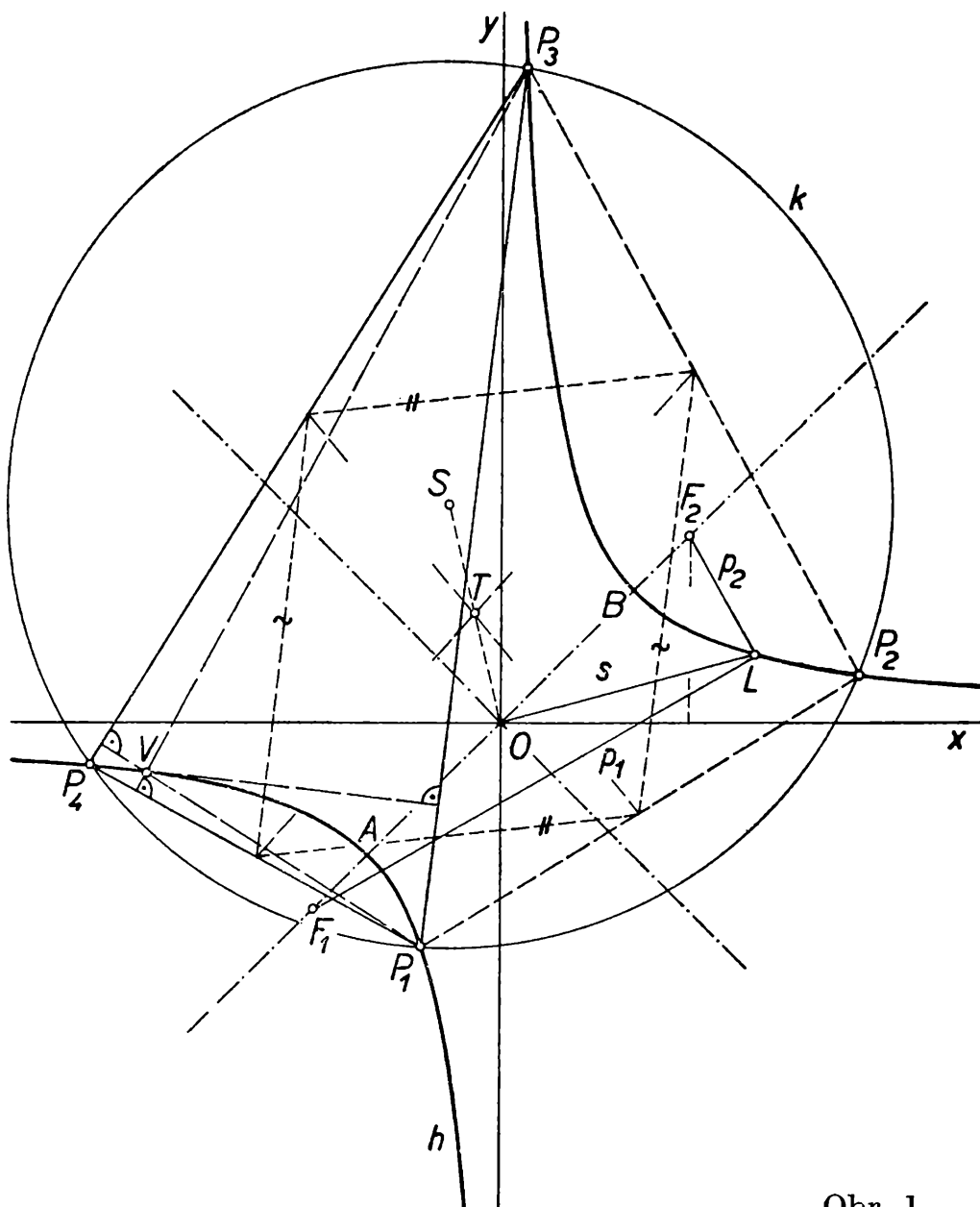
součin dvou proměnných veličin je konstantní (ve fyzice např. zákon Boyleův-Mariottův).

Jsou-li  $p_1 = F_1 L$  a  $p_2 = F_2 L$  ohniskové průvodiče a  $s = OL$  středový průvodič bodu  $L$  (obr. 1), pak platí

$$\begin{aligned} p_1^2 \cdot p_2^2 &= [(x+a)^2 + (y+a)^2] [(x-a)^2 + (y-a)^2] = \\ &= [x^2 + y^2 + 2a^2 + 2a(x+y)] [x^2 + y^2 + 2a^2 - 2a(x+y)] = \\ &= (x^2 + y^2 + 2a^2)^2 - 4a^2(x+y)^2 = (x^2 + y^2)^2 = s^4, \\ p_1 p_2 &= s^2 \end{aligned}$$

Tím jsme dospěli k větě

V1: Středový průvodič bodu rovnosé hyperboly je geometrickým průměrem obou ohniskových průvodičů.



Obr. 1

Hledejme průsečík výšek  $V(x_0; y_0)$  trojúhelníka, jehož vrcholy  $A_1(x_1; y_1)$ ,  $A_2(x_2; y_2)$ ,  $A_3(x_3; y_3)$  leží na rovnosé hyperbole  $xy = c$ . Směrnice strany  $A_1 A_2$  jest

$$k_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{c}{x_2} - \frac{c}{x_1}}{\frac{c}{x_2} - \frac{c}{x_1}} = -\frac{c}{x_1 x_2}$$

rovnice výšky  $v_3$ , procházející vrcholem  $A_3$

$$v_3 \equiv y - y_3 = \frac{x_1 x_2}{c} (x - x_3)$$

$$v_3 \equiv y = \frac{x_1 x_2}{c} \cdot x - \frac{x_1 x_2 x_3}{c} + y_3$$

Podobně rovnice výšky  $v_2$  procházející vrcholem  $A_2$

$$v_2 \equiv y = \frac{x_1 x_3}{c} x - \frac{x_1 x_2 x_3}{x} + y_2.$$

Řešením rovnic obou výšek vychází

$$\frac{x_1}{c} x (x_2 - x_3) = y_2 - y_3,$$

z toho

$$x_0 = -\frac{c^2}{x_1 x_2 x_3}$$

$$y_0 = -\frac{x_1 x_2 x_3}{c} = -\frac{c^2}{y_1 y_2 y_3}$$

Znásobením posledních dvou rovnic odvodíme, že  $x_0 y_0 = c$ . Odvodili jsme tak větu

V 2: Ortocentrum trojúhelníka vepsaného do rovnosé hyperboly leží na této hyperbole.

V další části budu předpokládat znalost vlastností kořenů  $x_1, x_2, x_3, x_4$  normované bikvadratické rovnice

$$x^4 + A x^3 + B x^2 + C x + D = 0 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -A \quad (2a)$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = B \quad (2b)$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -C \quad (2c)$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = D \quad (2d)$$

O těchto vlastnostech se čtenář může přesvědčit roznásobením kořenových činitelů

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

Hledejme nyní průsečíky rovnosé hyperboly (1) s kružnicí  $k$  o středu  $S(m; n)$  a poloměru  $r$ :

$$k \equiv x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0 \quad (3)$$

Vyloučíme-li z rovnic (1) a (3)  $y$ , resp.  $x$ , dostaneme pro souřadnice průsečíku  $P_1, P_2, P_3, P_4$  hyperboly  $h$  s kružnicí  $k$  tyto bikvadratické rovnice:

$$x^4 - 2mx^3 + (m^2 + n^2 - r^2)x^2 - 2ncx + c^2 = 0 \quad (4a)$$

$$y^4 - 2ny^3 + (m^2 + n^2 - r^2)y^2 - 2mcy + c^2 = 0 \quad (4b)$$

V obecném čtyřúhelníku  $P_1P_2P_3P_4$  vytvoří spojnice středů jeho stran rovnoběžník, jehož těžiště  $T$  má souřadnice

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

Nahradíme-li podle (2a), (4a) a (4b) za čitatele zlomků příslušné hodnoty, dostaneme

$$x_T = \frac{m}{2} \quad y_T = \frac{n}{2}$$

Těžiště nezávisí na velikosti poloměru kružnice  $k$ , je proto všem soustředným kružnicím společné, leží ve středu úsečky  $OS$ . Aplikujme větu  $V_2$  na trojúhelník  $P_1P_3P_3$ . Pak podle odvozených vzorců má průsečík  $V$  jeho výšek souřadnice

$$x_o = -\frac{c^2}{x_1 x_3 x_4} \quad y = -\frac{c^2}{y_1 y_3 y_4}$$

a leží též na hyperbole  $h$ .

Přihlédneme-li však k rovnicím (2d) a (4ab), vychází

$$x_2 = \frac{D}{x_1 x_3 x_4} = \frac{c^2}{x_1 x_3 x_4} = -x_o$$

$$y_2 = \frac{D}{y_1 y_3 y_4} = \frac{c^2}{y_1 y_3 y_4} = -y_o$$

Získali jsme tak velmi zajímavou větu

**V 3:** Ortocentrum trojúhelníka  $P_1P_3P_4$  leží v bodě, který je souměrně sdružený se čtvrtým vrcholem  $P_2$  čtyřúhelníka  $P_1P_2P_3P_4$  podle středu hyperboly.

Volme nyní kružnici  $k$  tak, aby se dotýkala hyperboly  $h$  v bodě  $(x_1; y_1)$ . V tom případě splynou body  $P_1$  a  $P_2$ , takže  $x_2 = x_1, y_2 = y_1$ .

Rovnice (2a), (2d) nabudou vzhledem k (4a) tvaru

$$2x_1 + x_3 + x_4 = 2m, \quad x_1^2 x_3 x_4 = c^2,$$

neboli

$$x_3 + x_4 = 2(m - x_1), \quad x_3 x_4 = \frac{c^2}{x_1^2} = y_1^2 \quad (5)$$

Rovnice (2c) se změnění na:

$$x_1^2 (x_3 + x_4) + 2x_1 x_3 x_4 = 2nc,$$

což vzhledem k (5) a k podmínice  $c = x_1 y_1$  dává

$$x_1^2 \cdot 2(m - y_1) + 2x_1 y_1^2 = 2n x_1 y_1;$$

po menší úpravě ( $x_1 \neq 0$ )

$$m x_1 - n y_1 = x_1^2 - y_1^2$$

Uvedená rovnice vyjadřuje podmínku, kterou musí splňovat souřadnice  $m, n$  středů kružnic, jež se dotýkají hyperboly  $h$  v bodě  $(x_1; y_1)$ . Tyto středy leží proto na přímce

$$x x_1 - y y_1 = x_1^2 - y_1^2 \quad (6)$$

jež podle konstrukce je normálou hyperboly  $h$  v bodě  $(x_1; y_1)$ . Její směrnice je  $k_n = \frac{x_1}{y_1}$ , směrnice tečny pak  $k_t = -\frac{y_1}{x_1} = -\frac{c}{x_1^2}$ , o čemž se může čtenář - znalý derivování - přesvědčit přímo z rovnice (1). Průsečík  $^1P(^1x; ^1y)$  normály s hlavní osou hyperboly  $y = x$  a průsečík  $^2P(^2x; ^2y)$  s vedlejší osou  $y = -x$  se vyšetří řešením rovnic příslušných přímek

$$^1x = ^1y = x_1 + y_1,$$

$$^2x = -^2y = x_1 - y_1$$

Střed úsečky  $^1P^2P$  má souřadnice

$$\frac{^1x + ^2x}{2} = x_1; \quad \frac{^1y + ^2y}{2} = y_1.$$

Tím jsme provedli důkaz věty

V 4: Úsek normály rovnomoosé hyperboly mezi jejími osami je hyperbolou půlen.

Uvažujme nyní případ, že body  $P_1, P_2$  a  $P_3$  splynou a kružnice  $k$  se tak stane oskulační kružnicí (obr. 2)

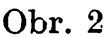
$$x_1 = x_2 = x_3, \quad y_1 = y_2 = y_3$$

V tomto případě podle (2a), (2d) (4ab) platí:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_4 &= 2m, & 3y_1 + y_4 &= 2n \\ x_1^3 x_4 &= c^2 & y_1^3 y_4 &= c^2 \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} x_4 &= \frac{c^2}{x_1^3} = \frac{x_1^2 y_1^2}{x_2^3} = \frac{y_1^2}{x_1} \\ y_4 &= \frac{c^2}{y_1^3} = \frac{x_1^2 y_2^1}{y_1^3} = \frac{x_1^2}{y_1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$



Bod  $(x_4; y_4)$  je zbývající průsečík oskulační kružnice s hyperbolou.

$$\begin{aligned} 2m &= 3x_1 + \frac{y_1^2}{x_1}; & 2n &= 3y_1 + \frac{x_1^2}{y_1} \\ m &= x_1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2x_1}; & n &= y_1 + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2y_1} \end{aligned} \quad (8)$$

Veličiny  $m, n$  v rovnici (8) jsou souřadnice středu  $S$  oskulační kružnice v bodě  $P_1(x_1; y_1)$ ; její poloměr

$$r = S P_1 = \sqrt{(m - x_1)^2 + (n - y_1)^2};$$

po menší úpravě vyjde

$$r^2 = \frac{(x_1^2 + y_1^2)^3}{4c^2} \quad (9)$$

Souřadnice  $\bar{x}_1; \bar{y}_1$  druhého průsečíku  $\bar{P}_1$  normály  $n$  s hyperbolou  $h$  získáme řešením rovnic (1) a (6)

$$\bar{x}_1 = -\frac{y_1^2}{x_1} \quad \bar{y}_1 = -\frac{x_1^2}{y_1} \quad (10)$$

Srovnáním rovnic (7) a (10) zjistíme, že

$$\bar{x}_1 = -x_1; \quad \bar{y}_1 = -y_1,$$

což vyslovíme větou:

V 5. Oskulační kružnice v libovolném bodě  $P$  rovnosé hyperboly protne hyperbolu ještě v bodě, který je souměrně sdružený podle středu hyperboly s druhým průsečíkem normály bodu  $P$

Délku tětiny  $u$ , kterou vytíná normála hyperboly mezi jejími větvemi, určíme jako vzdálenost bodů  $P_1(x_1; y_1)$  a  $\bar{P}_1(\bar{x}_1; \bar{y}_1)$ :

$$u^2 = \left(x_1 + \frac{y_1^2}{x_1}\right)^2 + \left(y_1 + \frac{x_1^2}{y_1}\right)^2$$

což po úpravě vede - vzhledem k (9) - ke vztahu

$$u = 2r \quad (11)$$

V 6. Normála sestrojená v libovolném bodě  $P$  rovnosé hyperboly protne hyperbolu ještě v bodě  $\bar{P}$ ; délka úsečky  $P\bar{P}$  je rovna průměru oskulační kružnice, sestrojené v bodě  $P$ .

Mocnost středu  $O(0; 0)$  rovnosé hyperboly k oskulační kružnici  $k$  jest

$$M = m^2 + n^2 - r^2;$$

dosadíme-li sem z (8) a (9), dostaneme výsledek

$$M = 3(x_1^2 + y_1^2), \quad (12)$$

ježž můžeme vyslovit větou

V 7. Mocnost středu rovnosé hyperboly k její oskulační kružnici, sestrojené v libovolném bodě  $P$ , je rovna trojnásobnému čtverci středového průvodiče bodu  $P$ .

V obr. 2 je podle V 7

$$OP_1 \quad OK = 1 : 3$$

a podle V 6

$$\bar{P}_1P_1 = P_1N$$

V tomtéž obrázku byla tečna  $t$  sestrojena jako spojnice bodů  $R$  a  $P_1$ , kde  $OQ = QR = x_1$ ,  $P_1Q = UR = y_1$ . Střed  $S$  leží na symetrále přepony  $QV$  pravoúhlého trojúhelníka  $QUV$

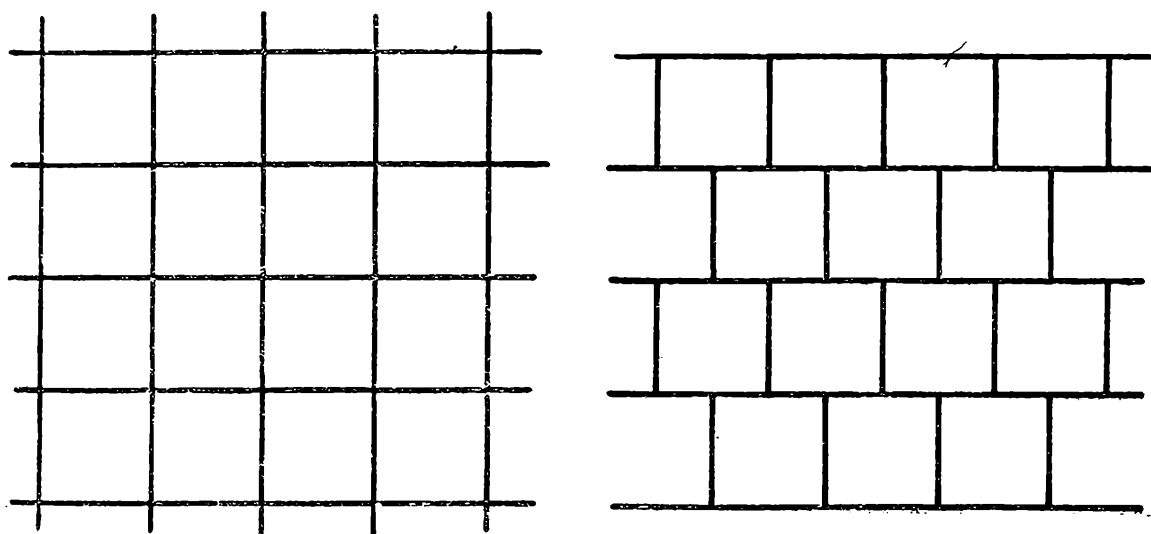
Užitím vět uvedených v článku může čtenář řešit konstruktivně úlohy:

1. Sestrojte rovnoosou hyperbolu, je-li dáno:
  - a) normála  $n$  a obě asymptoty;
  - b) poloha jedné osy a tečna s dotykovým bodem;
  - c) oskulační kružnice s bodem oskulace a poloha jednoho průměru;
  - d) oskulační kružnice s bodem oskulace a další bod hyperboly;
  - e) střed hyperboly a oskulační kružnice (bod oskulace neznámý);
  - f) bod vedlejší osy a hyperoskulační kružnice v neznámém vrcholu.
2. Sestrojte vrcholy rovnoosé hyperboly, znáte-li polohu vedlejší osy a dva body hyperboly.
3. Sestrojte střed rovnoosé hyperboly, jsou-li dány její čtyři průsečíky  $P_1, P_2, P_3, P_4$  s obecnou kružnicí.

## Sítě pravidelných mnohoúhelníků v rovině

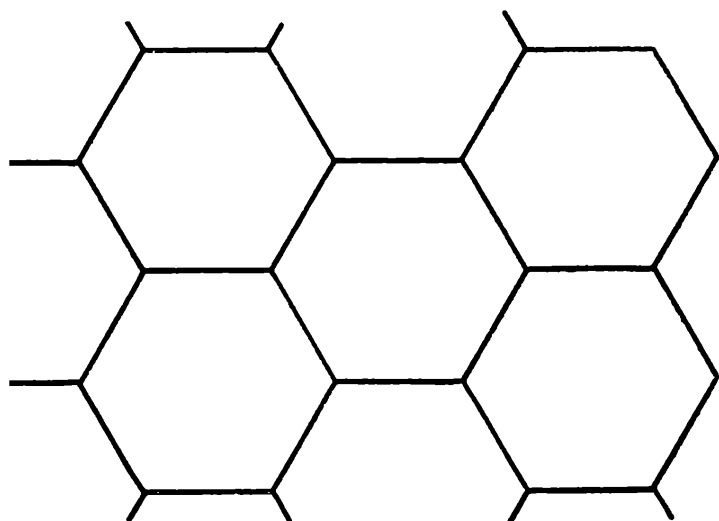
STANISLAV HORÁK st., ČVUT

Rovinu lze dokonale pokrýt čtverci, a to tak, že žádné dva čtverce se nepřekrývají a mezi žádnými dvěma sousedními není mezera. V obr. 1 a la je znázorněna síť čtverců v rovině. Obojí se v praxi používá (dlaždice

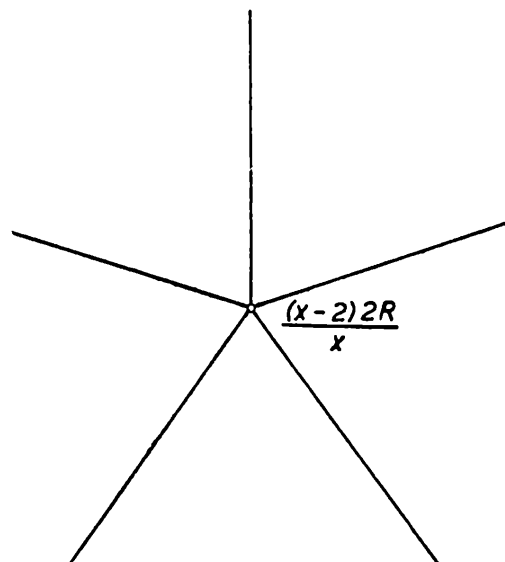


Obr. 1

nebo kachlíky v koupelnách). V dalším se budeme zabývat jen případem z obr. 1, v němž každá strana čtverce je společná dvěma čtvercům. Podobně lze rovinu pokrýt pravidelnými šestiúhelníky (obr. 2). A tu vzniká otázka, *kterými pravidelnými mnohoúhelníky lze pokrýt rovinu*. Na to odpovíme v tomto článku.



Obr. 2



Obr. 3

Uvažujme, že síť je složena z pravidelných  $x$ -úhelníků. Součet vnitřních úhlů každého  $x$ -úhelníka je  $(x - 2) 2R$ , potom velikost vnitřního úhlu pravidelného  $x$ -úhelníka je  $\frac{x - 2}{x} 2R$ . Každý vrchol sítě (tj. každý vrchol pravidelného  $x$ -úhelníka) je společný několika pravidelným  $x$ -úhelníkům; jejich počet nazveme  $y$ . Také můžeme říci, že každý vrchol sítě je společným vrcholem shodných úhlů v počtu  $y$ . Poněvadž se tyto úhly nepřekrývají ani není mezi nimi žádná mezera, je jejich součet roven plnému úhlu, Zápis tohoto tvrzení je

$$\frac{(x - 2) y}{x} 2R = 4R, \quad (1)$$

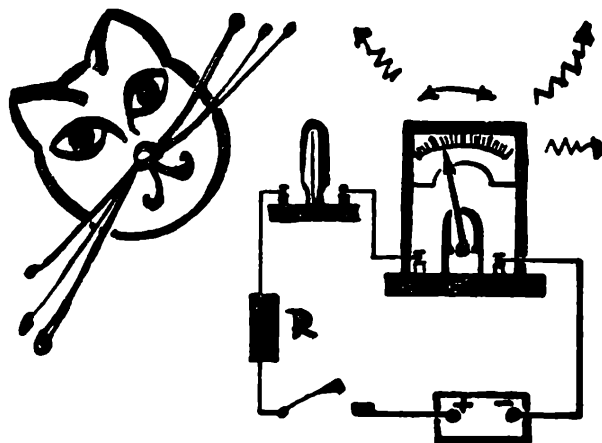
kde  $x, y$  jsou přirozená čísla větší než 2. Z rovnice (1) dostaneme po úpravě

$$y = 2 + \frac{4}{x - 2}$$

Nyní půjde o řešení této neurčité rovnice přirozenými čísly. Poněvadž  $y$  je přirozené číslo, musí být přirozené číslo i zlomek  $\frac{4}{x - 2}$ . To nastane jen v těchto případech:

1.  $x = 3, y = 6$ ; jde tu o síť rovnostranných trojúhelníků.
2.  $x = 4, y = 4$ ; jde o síť čtverců.
3.  $x = 6, y = 3$ ; jde o síť pravidelných šestiúhelníků.

Jiná přirozená čísla rovnici (1) nevyhovují a máme tak odpověď na položenou otázku: *Rovinu lze pokrýt sítí rovnostranných trojúhelníků, čtverců a pravidelných šestiúhelníků.*



F Y Z I K A

## Fyzika a nízké teploty

Ing. ŠTEFAN JÁNOŠ, UPJŠ Košice

### I. Úvod

Fyzika sa zaoberá skúmaním najobecnejších vlastností a prejavov hmoty. Hlavným zdrojom fyzikálneho poznania je pozorovanie. Pozorovať môžeme deje, ktoré v prírode prebiehajú samovoľne bez ľudského zásahu a prípravy, alebo deje umele vyvolané pri celkom určitých vhodných podmienkach. Jediným možným overením správnosti každej fyzikálnej teórie je kritérium praxe, teda vedecký experiment. Fyzikálny zákon je poznaná súvislosť medzi podmienkami, v ktorých sa telesá nachádzajú a procesmi, ktoré za týchto podmienok na telesách prebiehajú. Z toho vyplýva, že postup nášho poznania môže sa uberať viacerými cestami. Za prvé, študujeme rôzne fyzikálne vlastnosti a deje pri daných nemenných podmienkach, vytvorených buď prírodou alebo samotným fyzikom. Za druhé, skúmame fyzikálne vlastnosti a deje pri meniacich sa podmienkach (umelých či prírodných). Samotná príroda poskytuje fyzikovi len veľmi ohraničený výber vonkajších podmienok. Fyzika by bola veľmi chodubná, ak by bola odkázaná len na „laboratórium“ prírody. Preto experimentálni fyzici skúmajú vlastnosti a formy existen-

cie hmoty za podmienok, ktoré v súčasnej dobe na našej planéte v „prírodnom“ stave neexistujú. Vytváranie takýchto extrémnych podmienok je vo väčšine prípadov experimentálne veľmi náročné a vyžaduje od fyzika značnú mieru energie a trpezlivosti. Za každý nový poznatok v tejto práci platíme ďaleko väčšiu hodnotu, ako v oblasti výskumu pri bežných podmienkach. Taký však už je vývoj ľudského poznania. Cieľom tohto článku je podať prístupnou formou základné informácie o fyzike nízkych teplôt, ktorá je dnes bezosporu jednou z najzaujímavejších oblastí modernej doby. Jej metódy stále viac prenikajú do jadrovej fyziky, fyziky polovodičov a náuky o magnetizme. Fyzika nízkych teplôt má však svoje špecifické problémy a vlastnú problematiku, napr. kvantovú hydrodynamiku a supravodivosť. Je bohatá na svoje zvláštnosti, ktoré sa radikálne líšia od našej každodennej skúsenosti. A práve o týchto zvláštnostiach, na prvý pohľad neuveriteľných a záhadných, pojednáva náš článok.

## II. Získanie nízkych teplôt.

Pod bodom topenia ľadu môžeme vyčleniť tri veľké teplotné oblasti:

- a) o b l a s ť m i e r n e h o o c h l a d e n i a, ľahko dosiahnuteľná bežnými priemyselnými metódami;
- b) o b l a s ť h l b o k é h o o c h l a d e n i a, s dolnou hranicou  $60\text{ }^{\circ}\text{K}$ , dosiahnuteľná pomocou intenzívneho odčerpávania pár skvapalneného vzduchu a tým znížením teploty bodu varu;
- c) o b l a s ť n í z k y c h t e p l ô t, od  $20\text{ }^{\circ}\text{K}$  po absolútnu nulu.

Poslednú tretiu oblasť často ešte rozdeľujú na vodíkové teploty ( $14^{\circ}$ — $20\text{ }^{\circ}\text{K}$ ), héliové teploty ( $1^{\circ}$ — $4,2\text{ }^{\circ}\text{K}$ ) a veľmi nízke teploty ( $< 1\text{ }^{\circ}\text{K}$ ). Teplotná stupnica, ktorú zaviedol Kelvin a používa sa pod označením T (t. j. vlastne Celsiova stupnica, posunutá o  $273,16^{\circ}$  nižšie), nie je pre nízke teploty najvhodnejšia. Zle totiž vyjadruje fakt, že pomery krajných teplôt oboch intervalov ( $300\text{ }^{\circ}\text{K}$ ,  $1\text{ }^{\circ}\text{K}$ ) a ( $1\text{ }^{\circ}\text{K}$ ,  $0,003\text{ }^{\circ}\text{K}$ ) sú približne rovnaké. Preto sa pre lepšiu charakteristiku teplotných intervalov zavádza stupnica  $\ln T$  alebo  $1/T$ . Metódy dosiahnutia nízkych teplôt sú pomerne zložité a materiálne nákladné. Vzniká teda oprávnená námietka, načo nám vlastne budú. Z kinetickej teórie vieme, že  $kT$  je mierou energie chaotického tepelného pohybu. ( $k$  je Boltzmanova konštanta). To však znamená, že pri izbových teplotách ( $300\text{ }^{\circ}\text{K}$ ) je vylúčená možnosť štúdia niektorých procesov, charakterizovaných energiou  $kT$ , pretože sú zatienené tepelným pohybom a neprístupné experimentálnemu pozorovaniu. V tomto smere nám teda nízke teploty umožňujú študovať kvalitatívne nové procesy a interakcie, vďaka zníženiu energie tepelného pohybu  $kT$ . Ďalej sa pri nízkych teplotách uplatňuje tzv. n u l o v á e n e r g i a. Klasická teória predpokladá, že celková vnútorná energia ľubovoľnej sústavy je pri  $0\text{ }^{\circ}\text{K}$  rovná nule. Kvantová mechanika však dokázala, že celková vnútorná energia sa

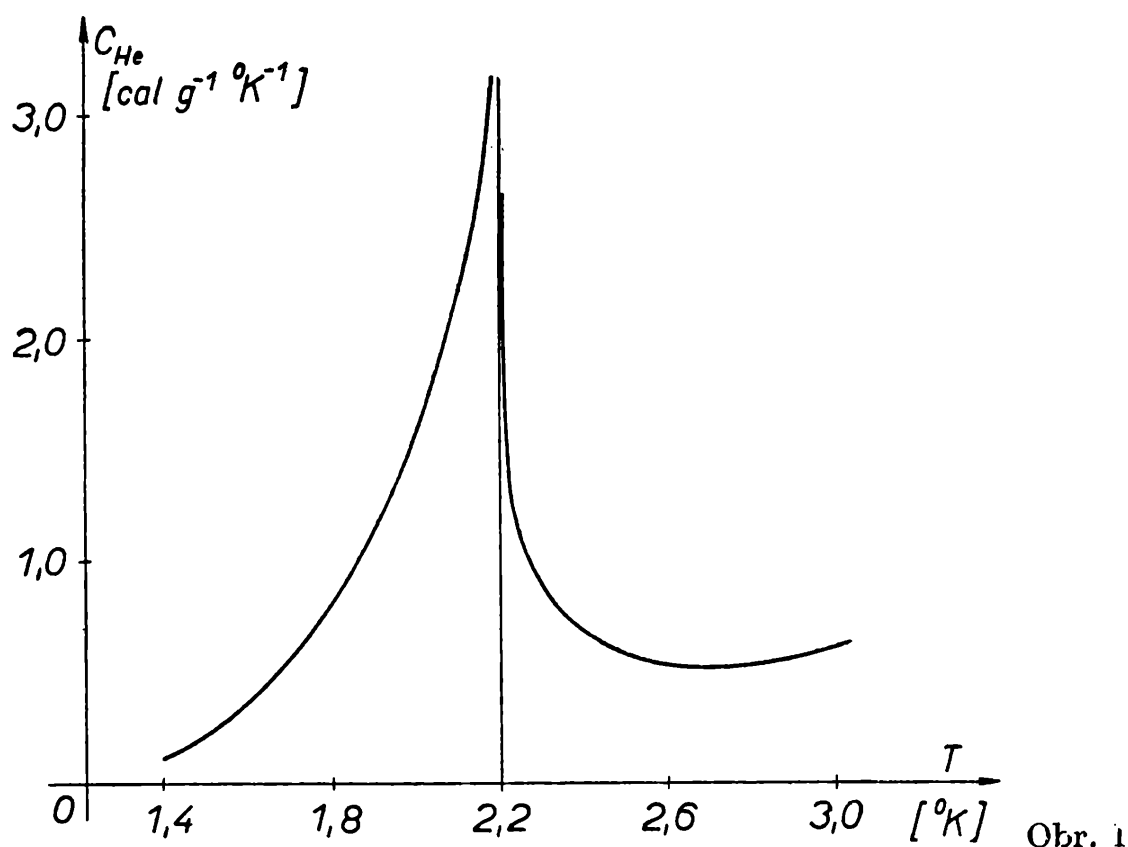
skladá nielen z tepelnej energie (tá je skutočne pri  $0^\circ \text{K}$  nulová), ale navyše z konštantnej časti, nulovej energie  $E_0$ , ktorá sa nestráca ani pri  $0^\circ \text{K}$ . Pretože pri obyčajných teplotách je  $E_0 \ll kT$ , môžeme v tomto prípade nulovú energiu zanedbať. Avšak pri nízkych teplotách tvorí značnú časť celkovej energie, čo sa prejaví kvalitatívne novými efektami. Skvapalnením hélia (Kamerlingh Onnes, 1908) bola zakončená tá etapa, ktorá začala v roku 1877 skvapalnením vzduchu a pokračovala skvapalnením neóna a vodíka. Táto etapa je charakterizovaná použitím skvapalnených plynov pre dosiahnutie nízkych teplôt. V ČSSR sú zatiaľ v prevádzke 3 skvapalňovače hélia a v blízkej dobe budú uvedené do chodu ďalšie dva, ktoré budú pracovať na univerzitách v Prahe a v Košiciach.

### *III. Meranie nízkych teplôt.*

Pre meranie nízkych teplôt sa obecné používa sekundárnych teplomerov, t. j. takých meracích prístrojov, ktorých údaje nie sú priamo spojené s termodynamickou stupnicou a ktoré sú výhodné nielen pre pohodlné ovládanie, ale aj z dôvodov vyššej presnosti a väčšieho rozsahu merania. Pre kalibráciu týchto teplomerov sa používa plynový teplomer s konštantným objemom, naplnený héliom. K meraniu v teplotnej oblasti  $25^\circ - 11^\circ \text{K}$ , poprípade  $4,5^\circ - 0,7^\circ \text{K}$ , môže byť využitý s veľkou presnosťou tlak héliových a vodíkových pár ako miera teploty. V laboratóriách sú veľmi rozšírené sekundárne elektrické teplomery, ktorých činnosť je založená na zmene elektrického odporu pri rôznych teplotách. Napríklad platinový teplomer môžeme použiť až do  $15^\circ \text{K}$ . Pod  $20^\circ \text{K}$  sa používajú odporové teplomery zo zlata, olova a fosforového bronzu. V poslednej dobe sa používajú v héliovej oblasti ( $4,2^\circ$  až  $0,7^\circ \text{K}$ ) uhlíkové odpory, ktorých odpor s klesajúcou teplotou rastie na rozdiel od kovov. Veľmi nízke teploty meriame na základe Curieho zákona  $T = \text{konšt} (\chi; \chi \text{ je susceptibilita})$ . Nedávno boli uskutočnené pokusy s meraním teploty pomocou asymetrie žiarenia orientovaných jadier. Stupeň asymetrie je jednoznačne určený stupňom orientácie jadier a je teda funkciou teploty.

### *IV Kvapalné hélium.*

Kvapalné hélium je bezfarebná, veľmi pohyblivá kvapalina. Musí byť uchovávaná vo zvláštnych Dewarových nádobách s vákuovou izoláciou, pretože má nepatrné výparné teplo a hustotu. Merania špecifického tepla a hustoty kvapalného hélia ukázali, že pri teplote  $T = 2,19^\circ \text{K}$  nastáva kvalitatívna zmena vlastností (nespojitosť špecifického tepla) a že normálna kvapalina sa mení v tomto bode na kvapalinu novú, označenú ako He II. Podobné prechody nazývame vo fyzike fázovými prechodmi druhého druhu a podľa tvaru kriviek špecifického tepla dostali názov  $\lambda$  - prechody ( $\lambda$  - body) - obr. č. 1.

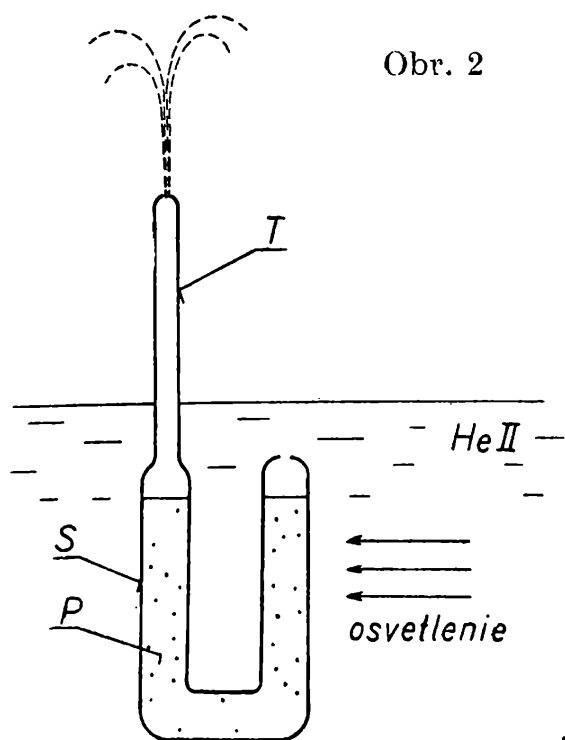


#### *IVa. Prenosové vlastnosti kvapalného hélia.*

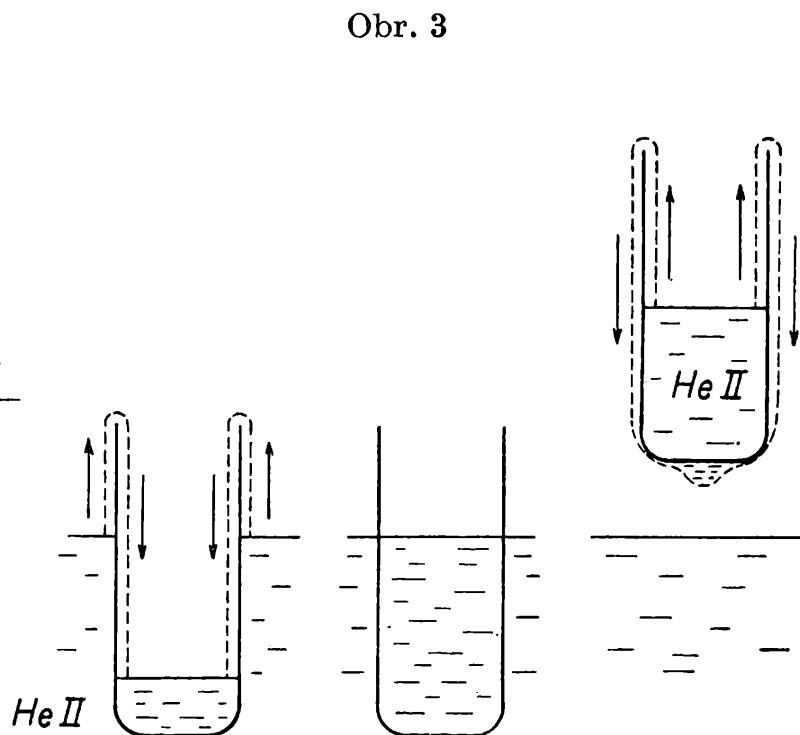
Ak odčerpávame nádobu s kvapalným héliom, hélium silne vrie a vyvíjajú sa oblaky pary. Keď prekročíme  $\lambda$  - bod, vrenie náhle ustane, kvapalina znehybnie a para kludne vystupuje z povrchu kvapaliny. Tento jav bol pozorovaný roku 1929 a zostával záhadný, pokiaľ Keesom (1935) nepreskúmal tepelnú vodivosť hélia. Zistil, že hélium I vykazuje normálnu tepelnú vodivosť ( $\approx 10^{-5} \text{ Wcm}^{-1} \text{ °K}^{-1}$ ), kdežto He II vedie  $10^6$  krát lepšie. Teda z jedného z najhorších vodičov tepla stáva sa v niekoľkých stotinách stupňa najlepší známy vodič. Pre túto anomálne vysokú tepelnú vodivosť nemôže sa vo vriacom héliu udržať žiadny teplotný rozdiel a para je z povrchu kvapaliny odčerpávaná bez tvorenia bubliniek. Ďalším zaujímavým javom je tzv. fontánový efekt. - obr. č. 2. Sklenú trubičku S, ohnutú tvaru U, ktorá je naplnená jemným smirkovým práškom P a na jednom konci pretiahnutá do trubičky T, ponoríme do kvapalného hélia s teplotou pod  $\lambda$  - bodom. Ak osvetlíme pravé rameno, z otvoreného konca trubičky T prúdi papršlek kvapalného hélia do výšky až 30 cm. Tento jav je zvláštnym prípadom obecného tvrdenia, že teplotný spád v kvapalnom He II vyvoláva tlakový rozdiel. Javy prenosu tepla a fontánový efekt naznačujú, že viskozita He II bude mimoriadne malá. Bolo podniknutých mnoho pokusov zmerať viskozitu, He II obvyklými metódami. Napríklad: 1. meralo se tlmenie oscilujúcich



kotúčov alebo valčekov zavesených v kvapaline; 2. merali sa rýchlosti prúdenia v kapilárach; 3. merali sa rýchlosti prúdenia vo zvlášť jemných kanálikoch. Pretože nie možné zhotoviť sklené kapiláry s priemerom menším ako 0,1 mm, boli zvláštnou technikou zhotovené kapiláry kovové. Hoci takto vzniknuté jemné kapiláry mali šírku  $10^{-5}$  až  $10^{-3}$  cm, He II cez ne pretieklo. Tieto experimenty viedli k záveru, že kvapalné He II môže v dostatočne úzkych kanálikoch pretekať bez pozorovateľného trenia, t. zn. že je *supratekuté*.



Obr. 2



Obr. 3

#### IVb. Héliový film.

V He II zrejme existujú úzke vzťahy medzi prenosom tepla a hmoty. Bolo stanovené, že kvapalina tiekla tým rýchlejšie, čím užšie boli kapiláry. Podivné vlastnosti sa teda prejavujú ani nie tak v stacionárnom stave, ako pri prúde. Javom nového druhu je prenos hmoty tzv. *héliovým filmom*. Už Kamerlingh Onnes pri svojich pokusoch roku 1915 zistil, že všetky nádoby čiastočne ponorené do hélia pri teplote okolo 1 °K sa samovoľne plnili, pokiaľ sa hladiny kvapaliny vnútri a vonku nevyrovnali. Tento proces prenosu je zakreslený na obr. č. 3. Prázdna sklená nádoba sa čiastočne ponorí do vane s He II tak, aby jej okraj bol nad hladinou kvapaliny. Zistíme, že na dne sklenej nádoby sa hromadí kvapalina a vnútorná hladina kvapaliny sa postupne dvíha, až dosiahne výšku vonkajšej hladiny. Ak sklenú nádobku povytiahneme pozorujeme opačný efekt, pri ktorom sa obidve hladiny po istom čase opäť vyrovnajú. Zvlášť zrejmy je tento proces vtedy, ak sklenú nádobku

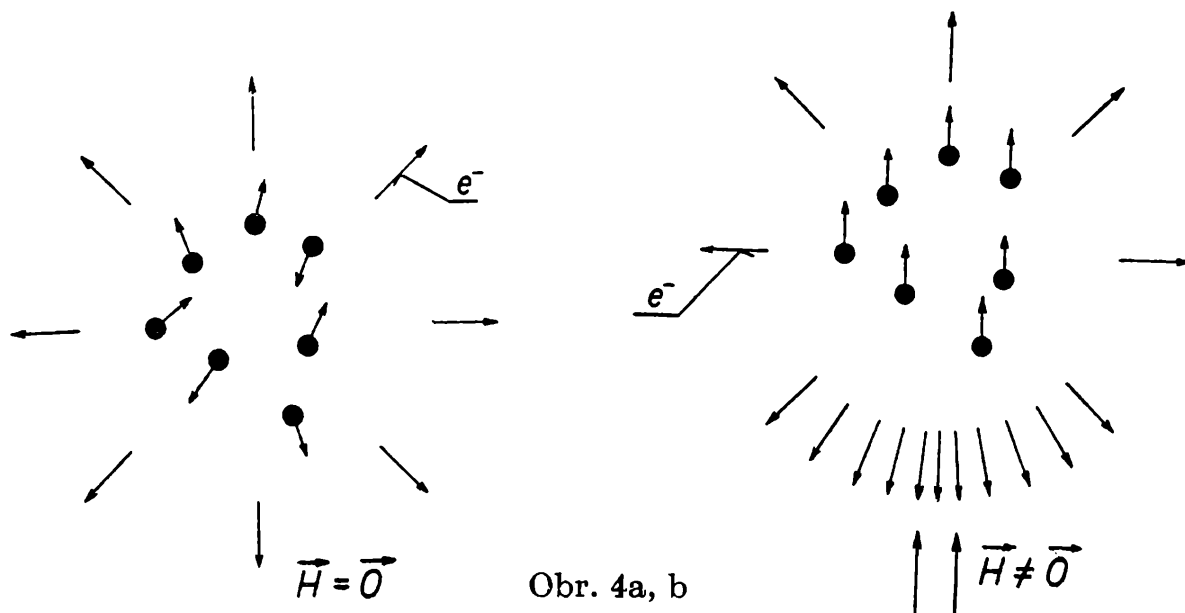
vytiahneme úplne. Pozorujeme, že hladina v nádobke klesá a súčasne sa tvoria na vonkajšej strane dna drobné kvapôčky, ktoré v pravidelných časových intervaloch odkvapávajú do vane. V týchto experimentoch nastáva prenos He II z nádobky a do nej pozdĺž sklenej steny. Ukazuje sa že všetky pevné plochy sú pri dotaku s He II potiahnuté kvapalným filmom, ktorého hrúbka sa odhaduje na 50—100 atómových vrstiev. O podstate tohto pozoruhodného javu vieme dosiaľ veľmi málo a považuje sa za kvantový efekt. Film slúži ako transportný prostriedok pre atómy hélia a odpovedá jemnej kapiláre s priemerom asi  $10^6$  cm. V posledných desiatych rokoch bolo experimentálne preskúmaných mnoho vlastností kvapalného hélia. Napriek tomu povaha He II zatiaľ ešte nie je úplne objasnená.

### V. Supravodivosť.

Supravodivosť objavil Kamerlingh Onnes roku 1911 pri skúmaní teplotnej závislosti elektrického odporu ortuti. Detailné výskumy ukázali, že pri 4,15 °K elektrický odpor ortuti klesá na zanedbateľne malú hodnotu. Dokonca ani po roku nebol zistený žiadny útlm indukovaných elektrických prúdov v olovených prstencoch, ponorených do kvapalného hélia. Takéto vymiznutie elektrického odporu nazývame *supravodivosťou*. Supravodivosť pozorujeme pri celom rade kovov. Zatiaľ sa prejavuje v teplotnom intervale od 18 °K ( $\text{Nb}_3\text{Sn}$ ) do 0,47 °K (Ru). Škoda, že doposiaľ nebola objavená žiadna látka, ktorá by prechádzala do supravodivého stavu pri vyšších teplotách experimentálne menej náročných, tým by sa otvorili nesmierne možnosti pre praktické využitie. Veľmi efektívne použitie nachádzajú supravodiče pri konštrukcii magnetov. Prakticky celá energia, ktorá je dodávaná do vinutia cievky, spotrebuje sa na vytvorenie magnetického poľa. Je veľmi pravdepodobné, že pomocou supravodivých magnetov budú dosiahnuté magnetické polia vyššie než  $(10^8/4\pi) \text{ A m}^{-1} \doteq 7,96 \cdot 10^6 \text{ Am}^{-1}$  ( $1 \text{ Oe} = (10^3/4\pi) \text{ A m}^{-1}$ ).

### VI. Záver.

Pre zaujímavosť je vhodné spomenúť použitie skvapalnených plynov v raketovej technike, rádioastronómii a v chémii. V jadrovej fyzike sa používajú nízke teploty pre niekoľko účelov. Jednak pre použitie na orientáciu jadier atómov pri súčasnom použití silných magnetických polí. Pri nízkych teplotách ustáva tepelný pohyb jadier natoľko, že jadra sú zoradené pôsobením magnetického poľa v jednom vybranom smere. Výsledok je taký, že výskum sústavy orientovaných jadier je rovnocenný štúdiu jednotlivých jadier. Napríklad roku 1957 boli uverejnené práce o rozpade na orientovaných jadrách, ktoré vyvrátili jeden zo základných zákonov jadrovej fyziky, tzv. zákon zachovania *p a r i t y*. Ak popisujeme fyzikálne javy v určitej súradnicovej sústave ( $x, y, z$ ), potom tvar



Obr. 4a, b

fyzikálneho zákona by mal zostať rovnaký pri zámene  $(x, y, z)$  na  $(-x, -y, -z)$ ; (priestorová inverzia). Predpoklad, že priestorová inverzia nemá vplyv na teoretický popis fyzikálnych javov, vedie k zákonu zachovania parity. V kvantovej mechanike popisujeme mikročasticu tzv. vlnovou funkciou  $\psi(x, y, z)$ , takže zákon zachovania parity možno formulovať nasledovným spôsobom: vlnová funkcia  $\psi(x, y, z)$  je buď párna alebo nepárna a táto vlastnosť sa v čase nemení (pre izolovanú sústavu). Napríklad ak pre  $t = t^0$  je  $\psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, -z)$ , potom  $\psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, -z)$  pre všetky  $t \geq t^0$ .

Prvé pochybnosti o platnosti zákona o zachovaní parity vyslovili Lee a Yang (1956) a upozornili na možnosť nezachovania parity v slabých interakciách s účasťou neutrína. Prvý experimentálny dôkaz o nezachovaní parity pri rozpade  $\beta$  previedla Wuová so spolupracovníkmi (1957). Merali uhlové rozdelenie častíc  $\beta$  (elektrónov  $e^-$ ) pri rozpade polarizovaných jadier. Vonkajším magnetickým poľom sa pôsobí na magnetické momenty jednotlivých jadier, ktoré sa natočia do smeru magnetického poľa. Žiarenie, ktoré emitujú takto orientované rádioaktívne jadrá, by malo byť podľa zákona zachovania parity izotropné (rovnaké pre všetky smery). Experimentálne bola však nameraná značná asymetria: v smere opačnom k vektoru intenzity magnetického poľa  $\mathbf{H}$  vyletuje viac elektrónov (viď obr. č. 4).

Ďalej pri štúdiu reakcií s jednoduchými jadrami je výhodné použiť kvapalný vodík alebo hélium. Takéto terčiky poskytujú značne kondenzovanejšie sústavy jadier, než pri použití týchto látok v plynnom stave. Kvapalné hélium a látky, ktoré sa stávajú supravodivými pri nízkych teplotách, sa v poslednej dobe používajú pri štúdiu pozitronov. Pre štúdium elementárnych častíc pri vysokých energiách sa používajú tzv. bublinkové komory, naplnené kvapalným vodíkom alebo héliom. Vplyv žiarenia na látky, používané pre konštrukciu jadrových reaktorov sa najlepšie študuje pri nízkych teplotách.

# Pružná deformace tuhého tělesa

ZDENĚK UNGERMANN, PF Hradec Králové

Ve studijním textu se zaměříme hlavně na pružnou deformaci v tahu, v tlaku, ve smyku a v torzi. Než začnete studovat tento text, je nutné si nejdříve zopakovati příslušnou látku z druhého ročníku SVVŠ (F II, str. 81–88).

## 1. Pružnost v tahu a v tlaku

Vnější sílu  $F$ , která působí na rovinnou plochu tuhého tělesa, můžeme rozložit na dvě složky, z nichž jedna  $F_n$  je kolmá k uvažované ploše a druhá  $F_t$  je s ní rovnoběžná (obr. 1). Jestliže  $S$  je obsah uvažované plochy, pak  $\sigma = \frac{F_n}{S}$  je normálové napětí (tah, tlak) a  $\tau = \frac{F_t}{S}$  je tečné (tangenciální) napětí (smyk, torze). Místo  $\sigma$  v dalším používáme také  $p$ . Jednotkou napětí v soustavě SI je  $\text{N m}^{-2}$ .

Pro deformaci v tahu a v tlaku zavádíme relativní podélné prodloužení

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

které značí prodloužení drátu jednotkové délky.

Pro pružnou deformaci v tahu nebo v tlaku platí zákon Hookův: Relativní podélné prodloužení je přímo úměrné normálovému napětí. To znamená, že pro deformaci v tahu a v tlaku je

$$\varepsilon = \frac{1}{E} p_1, \quad (1)$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu.

Při tahu je síla  $F_n$  orientovaná od tělesa a při tlaku má orientaci opačnou, dáváme ji záporné znaménko. Při deformaci v tahu je  $\varepsilon > 0$  a také  $\Delta l > 0$ , při deformaci v tlaku je podle (1)  $\varepsilon < 0$  a také  $\Delta l < 0$ ,  $l_0 > l$  a jde o zkracování.

Při deformaci v tahu i v tlaku se mění nejen délka, ale též příčné rozměry. Mírou této příčné deformace je relativní příčné zkrácení (prodloužení), jež je definováno vztahem

$$\eta = \frac{\Delta d}{d}$$

kde  $d$  je některý příčný rozměr (např. průměr drátu) a  $\Delta d$  jeho zkrácení (prodloužení).

Podle Hookova zákona platí

$$\eta = k \cdot p ; \quad (2)$$

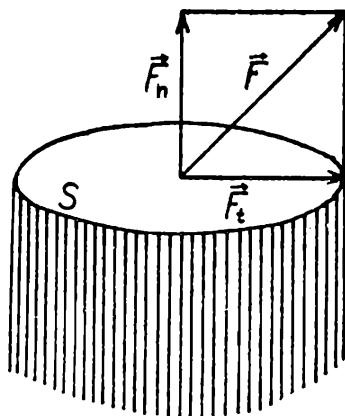
$k$  je součinitel příčné deformace.

Podle (1) je  $p = \varepsilon E$ , a tedy vztah (2) můžeme upravit:

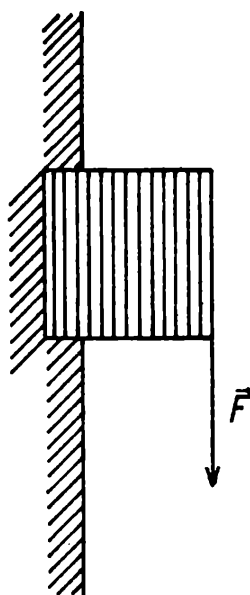
$$\eta = k \varepsilon E = \mu \varepsilon .$$

$\mu = k E = \eta/\varepsilon$  je Poissonovo číslo a znamená např. poměr relativního příčného zkrácení (prodloužení) k relativnímu podélnému prodloužení (zkrácení). Poissonovo číslo má u většiny látek hodnotu přibližně 0,3.

**Příklad.** Vypočítejte relativní změnu objemu tyče čtvercového průřezu o hraně průřezu  $a$ , je-li Youngův modul materiálu tyče v tahu  $E$  a Poissonova konstanta  $\mu$ . Normálové napětí je  $p$ . Deformující síla působí ve směru délky  $l$ .



Obr. 1



Obr. 2

**Řešení.**

Označení veličin:  $V, V_k$  počáteční a konečný objem tyče,  $l$  .. počáteční délka tyče před deformací,  $\Delta a$  .. lineární příčná deformace (zkrácení),  $\Delta l$  lineární podélná deformace (prodloužení).

Pro změnu objemu při deformaci v tahu dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta V = V_k - V &= (a - \Delta a)^2 (l + \Delta l) - a^2 l = -2al \Delta a + (\Delta a)^2 l + \\ &+ a^2 \Delta l - 2a \Delta a \cdot \Delta l + (\Delta a)^2 \Delta l = \Delta l [a^2 + (\Delta a)^2] + \\ &+ \Delta a (l \Delta a - 2a \Delta l - 2al) \doteq a (a \Delta l - 2l \Delta a) . \end{aligned} \quad (3)$$

Při úpravě vztahu (3) považujeme  $(\Delta a)^2$  jako zanedbatelné vzhledem k  $a^2$ ,  $l \Delta a$ ,  $a \Delta l$  považujeme jako zanedbatelné vzhledem k  $(a \cdot l)$ . Hledaná relativní změna se určí užitím vztahu (3)

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{a (a \Delta l - 2l \Delta a)}{a^2 l} = \frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta a}{a} = \varepsilon - 2 \eta .$$

Další úpravou a užitím Hookova zákona dostaneme výsledek

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon (1 - 2\mu) = \frac{1 - 2\mu}{E} p \quad (4)$$

Jelikož  $\mu < 1/2$ , plyne z (3), že se objem při deformaci v tahu zvětšuje. V případě deformace v tlaku se výsledek liší znaménkem, tj.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{2\mu - 1}{E} p$$

a jedná se tedy o zmenšování objemu.

Součinitel  $\gamma = - \frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{1}{p}$  se nazývá objemová stlačitelnost.  $K = \frac{1}{\gamma}$  je modul objemové pružnosti.

**P r u ž n o s t v e s m y k u.**

Na rozdíl od deformace v ohybu, kde uvažujeme nosník, který má rozměry průřezu proti délce zanedbatelné, předpokládejme nyní nosník, který má řádově stejné rozměry průřezu a délky.

Na volném konci nosníku (obr. 2) v jeho čelní ploše působí síla  $F$ . Druhým koncem je nosník vetknut do zdi. Tak jako ohyb je doprovázen nepatrným smykem, tak i smyk v tomto případě, je doprovázen ohybem. Ohyb je však zpravidla tak malý, že jej můžeme proti smyku zanedbat.

Je-li příčný průřez, ve kterém působí síla  $F$ , roven  $S$ , pak

$$\tau = \frac{F}{S}$$

nazýváme tečným napětím a sílu  $F$  tečnou silou. Tečná síla způsobí posunutí jednotlivých vrstev nosníku čili smyk (obr. 3). Označme písmenem  $u$  celkové posunutí. Jelikož  $u$  je závislé na délce  $h$  nosníku, zavádíme další veličinu charakterizující tuto deformaci, tj. relativní posunutí  $\gamma$  (zkos)

$$\gamma = \frac{u}{h} \quad (5)$$

I pro tuto pružnou deformaci platí Hookův zákon, tedy

$$\gamma = k \cdot \tau \quad (6)$$

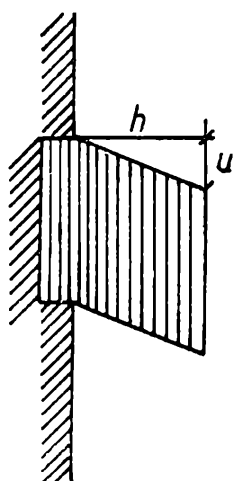
Zavedeme-li místo konstanty  $k$  její převrácenou hodnotu, kterou nazveme modulem pružnosti ve smyku  $G \left( G = \frac{1}{k} \right)$ , dostaneme z (6) základní rovnici pro smyk

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \text{ nebo } \tau = G \gamma \quad (7)$$

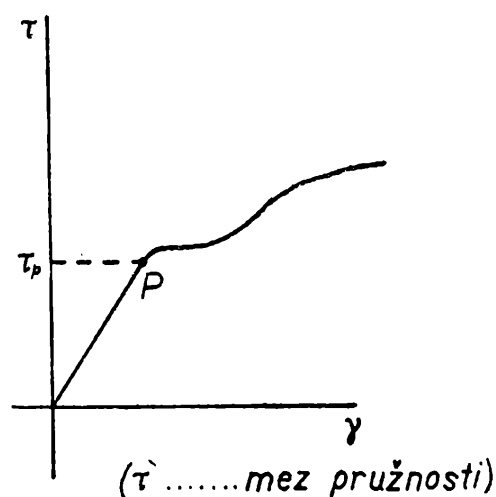
Rovnice (7) nám umožňuje definovat modul pružnosti) Modul pružnosti ve smyku je číselně roven myšlenému tečnému napětí, které by způsobilo posunutí  $u$  rovné délce  $h$ , tj. způsobilo by zkos  $\gamma = -\frac{\pi}{4}$ . Tato definice nemůže sloužit k měření modulu pružnosti, jelikož není možné dosáhnout tak velkého zkosu. Již daleko dříve dochází k přerušení materiálu a dále je třeba připomenout, že deformace pro velké  $\gamma$  je nepružná a tedy vztah (7) neplatí. Následující tabulka udává hodnoty deformačních konstant některých látek.

| Materiál | E (N m <sup>-2</sup> ) | G (N m <sup>-2</sup> ) | $\mu$ |
|----------|------------------------|------------------------|-------|
| Ocel     | $21,5 \cdot 10^{10}$   | $8,3 \cdot 10^{10}$    | 0,30  |
| Stříbro  | $8,0 \cdot 10^{10}$    | $2,9 \cdot 10^{10}$    | 0,39  |
| Mosaz    | $10,5 \cdot 10^{10}$   | $4,3 \cdot 10^{10}$    | 0,37  |
| Měď      | $12,0 \cdot 10^{10}$   | $4,6 \cdot 10^{10}$    | 0,32  |
| Hliník   | $7,4 \cdot 10^{10}$    | $2,7 \cdot 10^{10}$    | 0,34  |

Relativní posunutí je podle Hookova zákona (7) při pružné deformaci přímo úměrné tečnému napětí. Závislost tečného napětí na  $\gamma$  i mimo platnost můžeme Hookova zákona zjišťovat experimentálně. Diagram



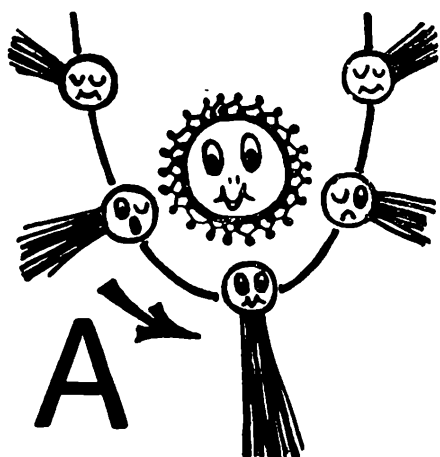
Obr. 3



Obr. 4

na obr. 4 znázorňuje tuto závislost pro měkkou ocel. Křivka deformace nemá pro všechny látky stejný průběh. Má však podobný průběh jako při tahu (FII, str. 86), takže i zde mluvíme o mezi kluzu ve smyku, mezi pevnosti ve smyku.

(Pokračování)



## Signály z vesmíru

TOMÁŠ PÁV, ÚFPL, ČSAV, Praha

Zdalo by se, že v dnešní době již nelze ve fyzice očekávat žádné překvapivé objevy, že ty tam jsou doby, kdy fyzikové doslova zakopávali o nejneočekávanější jevy, které se vzpíraly každému pokusu o vysvětlení. Mohli bychom se domnívat, a také se často domníváme, že základní zákony přírody jsou natolik dobře známy, že po každém provedeném pokusu či pozorování jen zalistujeme ve výpočtech a s uspokojením prohlásíme: „Ano, ano, tak jsem to očekával.“ Tím více však nás udivují netušené objevy se kterými každou chvíli přicházejí astronomové. Ještě ani neutíchl poprask, který byl způsoben objevem quasarů objektů, které se od nás pravděpodobně vzdalují obrovskými rychlostmi blízkými rychlosti světla a již čteme o dalších podivuhodných hvězdách - pulsarech, nepatrných hvězdičkách, které vysílají naprosto pravidelné elektromagnetické signály s přesností nejdokonalejších pozemských hodin.

Samotná historie objevu pulsarů je téměř čítankový příklad náhody kombinované s vědeckou důsledností. V Cambridgi postavili pro hledání nových quasarů radiový dalekohled skládající se ze 2048 antenních dipólů rozložených na ploše přes 18 ha pracující na vlně 3,7 m (81,5 MHz). Quasary jsou obrovské zdroje elektromagnetického záření v oboru rozhlasových vln, které jsou od nás tak vzdáleny, že jejich úhlové rozměry jsou nesmírně nepatrné. Stejně jako pouhým okem rozeznáte klidný svit planet od míhotavého světla hvězd, je možno z obdobného „míhotání“ v oboru radiových vln odlišit od sebe běžné zdroje od velmi vzdálených quasarů.

Pozorování začala koncem června 1967 a na zpracování naměřených dat pracovala mladá astronomka Jacqueline Bellová. Týden po týdnu



opakovala vcelku nudnou a mechanickou práci. Záznamy přístrojů byly v podstatě shodné s očekávanými. Až někdy v srpnu si sl. Belová povšimla jednoho dosti podivného zápisu. Byl podobný velmi rychlému „mihotání“ velmi slabého zdroje. Podivné na něm bylo zejména to, že signály se neobjevovaly po celou dobu po kterou se zdroj nacházel v zorném poli dalekohledu, ale pouze po krátký časový okamžik. Zprvu tomu nikdo nepřikládal velký význam, neboť podobných „signálů“ se během pozorování objeví desítky a v 999 z tisíce se ukáže, že byly způsobeny náhodnou elektromagnetickou poruchou, např. špatně seřízeným zapalováním kdesi v dálce jedoucího automobilu. Tento podivný zdroj se však objevil zcela pravidelně ještě v několika po sobě následujících dnech. Pak byl od něho na nějaký čas pokoj až už pomalu upadal do zapomnutí. Koncem října však sl. Bellová s uspokojením oznámila, že podivný host se vrátil.

To už bylo nutné věnovat se jeho studiu podrobněji. Nejprve bylo nutno dokázat, že jde skutečně o astronomické těleso, ale po několika provedených pokusech nemohlo být o jeho mimozemském původu pochyb. Dostal tedy číslo CP 1919 a zkoumání mohlo pokračovat. Jedním z prvních překvapení bylo, že signály jsou vysílány v obrovském pásmu frekvencí, zhruba od 40 MHz do 3000 MHz. To však znamená, že hvězda vysílající takové záření musí být nesmírně malá, že nemůže mít více než několik tisíc km v průměru. Velké těleso nemůže totiž vyslat impuls záření, jehož trvání je kratší než doba, kterou potřebuje světlo, aby proběhlo od jednoho konce tělesa ke druhému.

Další překvapení přineslo zkoumání vzdálenosti zdroje. Ukázalo se, že vzdálenost tohoto tělesa je asi 130 pc (1 parsec = 3,26 světelného roku). Uvážíme-li, že rozměry naší galaxie jsou průměrně 30 000 pc, pak poznáme, že tento podivný zdroj patří mezi naše nejbližší sousedy.

A to největší překvapení, ba téměř nervový otřes, přineslo objevitelům zkoumání časového rozdělení impulsů. Již první pohled na křivku registrující změny amplitudy v závislosti na čase ukazoval, že pulsy se objevují v podzřele pravidelných intervalech. Pozdější přesná měření ukázala, že pulsy se opakují s naprosto fantastickou přesností. Doba jednoho kmitu je rovna 1,33730113 s.

Amplituda jednotlivých pulsů konstantní není a mění se v dosti širokých mezích. Je pochopitelné, že v této situaci nebyla vyloučena ani ta domněnka, že zachycené signály jsou umělé, že jsou vysílány jakousi mimozemskou civilizací a že na nich, tak jako při amplitudové modulaci rozhlasových vln, je k nám přenášena nějaká zpráva, sdělení, pokus o navázání kontaktu. Poměrná blízkost zdroje a jeho nepatrné rozměry (rozměry malé planety) tuto domněnku jen posilovaly. Bohužel, další výzkum podobnou možnost zavrhl. Ukázalo se, že těleso ze kterého jsou signály vysílány nemůže být planetou, neboť v jeho signálech nebyly nalezeny charakteristické změny odpovídající planetárnímu pohybu.

Definitivní konec myšlenky kosmických přátel pak přinesly objevy celé řady takových zdrojů. Koncem února letošního roku bylo známo již 28 objektů vysílajících do vesmíru pravidelné signály. Nejdelší dobu kmitu má pulsar NP 0527 rovnou 3,74 s a nejkratší 0,033 s pulsar NP 0532.

Pečlivým proměřováním doby kmitu bylo zjištěno, že tato doba se mírně prodlužuje. U pulsaru NP 0532 o  $1,4 \cdot 10^{-5}$  s za rok, u pulsaru PSR 0833-45 o  $3,6 \cdot 10^{-6}$  s za rok. Dále byla objevena jemná struktura každého pulsu, polarisace vysílaného záření a mnoho dalších zajímavých jevů.

Co však může vysílat podobné pravidelné elektromagnetické signály nejsou-li vysílány umělou stanicí. Abychom byli upřímní musíme říci, že nevíme, ale dohadujeme se. Nejpravděpodobnější se zdá být to, že elektromagnetické záření vzniká na některém místě hvězdy neustále a že pravidelné změny jeho amplitudy jsou způsobeny velmi rychlou rotací hvězdy.

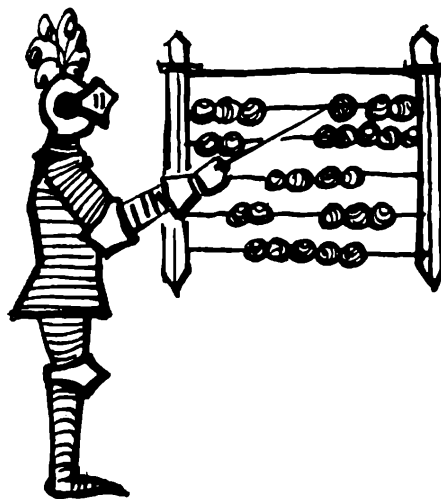
Pokuste se však vypočítat, jak velká musí být minimální hustota takové hvězdy nemá-li se rozletět působením odstředivé síly. Vyšla vám jistě hodnota velmi vysoká (řádově  $10^{11}$  kg/m<sup>3</sup>). Proto a z mnoha dalších dobrých důvodů soudíme, že taková hvězda nemůže být složena z látek nám běžně známých, ale že se převážně skládá z neutronů hustě natlačených na sebe. Zde si můžete udělat celou řadu zajímavých výpočtů, které vám přiblíží podivuhodné vlastnosti pulsarů.

Předpokládáme-li, že poloměr hvězdy je asi 5000 km, vypočtete obvodovou rychlost a srovnajte ji s rychlostí světla. Určete celkovou hmotnost hvězdy a srovnajte ji s hmotností Slunce a Země. Předpokládáme-li, že hvězda je složena ze samých neutronů, určete jaká je jejich střední vzdálenost a srovnajte ji se vzdálenostmi atomů v molekule v pozemských podmínkách ( $10^{-10}$  m).

Je pochopitelné, že od počátku se astronomové snažili ztotožnit zdroj těchto signálů s nějakou hvězdičkou zářící v optickém oboru. aby získali další informace o její stavbě a složení. Tato námaha byla až do nedávna neúspěšná. Teprve v lednu r. 1969 se podařilo ztotožnit pulsar NP 0532 se slabou hvězdou zářící uvnitř Krabí mlhoviny. Zajímavé je, že tato hvězdička je již dávno považována za pozůstatek hvězdy jejímž výbuchem r. 1054 n. l. Krabí mlhovina vznikla, a zejména to, že i v optickém oboru můžeme pozorovat změny jasnosti této hvězdy a to s přesně stejnou frekvencí jako mají pulsy registrované v oboru radiových vln.

Výzkum pulsarů dále pokračuje a další překvapivé objevy nejsou vyloučeny. Již dnes však víme, že objev pulsarů má, i přes to, že nejde o žádnou mimozemskou civilizaci, zcela mimořádný význam.

# NAŠE SOUTĚŽ



## Úlohy pro školní rok 1969-70

### Matematika

7. Vyjádřete číslo 16 všemi možnými způsoby ve tvaru  $x - p(x)$ , kde  $x$  je vhodné přirozené číslo a  $p(x)$  značí součin jeho číslic v desítkové soustavě.

*Jiří Sedláček*

8. Vypočtete

$$\sqrt{\underbrace{1\ 777}_{2k+1} \ 76 - \underbrace{3\ 555}_{k} \ 52}$$

*Ota Setzer*

9. Jak je třeba volit čísla  $a, b, c$ , aby řešením soustavy rovnic

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = c ,$$

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = a ,$$

$$\frac{z}{x} + \frac{x}{z} = b ,$$

byla libovolná trojice kladných čísel  $x, y, z$ .

*Václav Vilímek*

10. Přemístíme-li první číslici trojčíferného čísla  $N_1$  na poslední místo, dostaneme číslo  $N_2$ . Obdobným způsobem získáme z čísla  $N_2$  číslo  $N_3$ . Stanovte číslo  $N_1$  tak, aby čísla  $N_1, N_2, N_3$  tvořila a) aritmetickou, b) geometrickou posloupnost.

Václav Vilímek

11. V jednom týdnu zameškalo 32 žáků jisté třídy dohromady 32 hodin. Přitom mělo právě osm žáků pouze jednodenní absenci, každý žák třídy byl v týdnu aspoň po dva dny ve škole a žádný žák nechyběl tři dny za sebou. Ve středu chybělo právě osm žáků; ve čtvrtek a v pátek chyběli jen čtyři žáci, každý z nich po oba dny a každý už v týdnu aspoň jednou chyběl. Kolik žáků nechybělo v onom týdnu ani jednou? Kolik žáků chybělo jen v pondělí nebo v úterý? Návod: Sestavte si přehled všech možností, můžete použít Vennova diagramu pro čtyři množiny.

Jaroslav Šedivý

12. Rozšířme pojem zorného úhlu úsečky  $MN$  i na vnitřní body úsečky; o nich budeme říkat, že je z nich vidět úsečku  $MN$  pod úhlem  $180^\circ$ . Sestrojte si průsečík výšek  $V$  libovolného trojúhelníka  $ABC$ ; není-li bod  $V$  vrcholem trojúhelníka, můžete určit zorné úhly každé strany při pohledu u bodu  $V$ . Určete množinu všech bodů roviny, z nichž je každou stranu vidět pod větším nebo stejně velkým úhlem jako z bodu  $V$ .

Jaroslav Šedivý

### *Konstruktivní geometrie*

1. Je dána rovina  $\rho$ , v ní bod  $A$  a mimo rovinu  $\rho$  je dán bod  $G$ . Sestrojte krychli  $ABCDEFGH$  tak, aby vrchol  $C$  ležel v rovině  $\rho$ .

Stanislav Horák

2. Jsou dány dva různé body  $A, A'$  a rovina  $\beta$ , která není incidentní se žádným z daných bodů. Sestrojte pravidelný čtyřboký hranol  $ABCA'B'C'D'$  s čtvercovou podstavou  $ABCD$ , víte-li, že vrchol  $B$  leží v rovině  $\beta$ .

Stanislav Horák

3. Sestrojte kružnici, která na ose  $x$  vytíná tětivu délky  $a$ , na ose  $y$  tětivu délky  $b$  ( $b < a$ ) a má střed na dané přímce  $p$ .

Ota Setzer

4. Sestrojte rotační paraboloid, jsou-li dány body  $A, B$  jedné a body  $C, D$  druhé rovnoběžkové kružnice paraboloidu; přímky  $AB, CD$  jsou přitom mimoběžné.

Ota Setzer

# Řešení úloh loňské soutěže

## Matematika

4. Závod na výrobu konfekcie mal vyrobiť 1000 oblekov troch rôznych druhov v úhrnnej cene 570 000 Kčs. Obleky 1. druhu boli po 520 Kčs a závod na každom zarobil 70 Kčs, oblek 2. druhu bol za 580 Kčs a zisk závodu bol 80 Kčs, oblek 3. druhu bol za 620 Kčs a závod na ňom zarobil 100 Kčs. Z každého druhu malo byť ušitých aspoň 300 oblekov. Koľko oblekov jednotlivých druhov závod vyrobil, ak mal byť zisk maximálny? Aký bol tento zisk?

(Došlo 27 riešení)

Stanislav Horák

Riešil Ladislav Csontos, 2.A SVŠ, N. Mesto nad Váhom:

Počet oblekov 1., 2. a 3. druhu označme po rade  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Potom platí

$$x + y + z = 1000, \quad (1)$$

$$520x + 580y + 620z = 570\,000 \quad (2)$$

Ďalej platí

$$x \geq 300, y \geq 300, z \geq 300 \quad (3)$$

Vylúčime  $x$  a dostaneme diofantickú rovnicu

$$3y + 5z = 2500,$$

z ktorej

$$y = 833 - 2z + \frac{1+z}{3}$$

Riešenie je

$$z = 3t - 1,$$

$$y = 835 - 5t,$$

$$x = 166 + 2t$$

Tieto hodnoty dosadíme do vzťahov (3)

$$t \geq 67, t \leq 107, t \geq 101,$$

tj.

$$101 \leq t \leq 107$$

Teraz počítajme zisk  $Z$

$$Z = 70x + 80y + 100z = 78\,320 + 40t$$

Aby mal závod maximálny zisk, musí byť tiež  $t$  maximálne, tj.

$$t = 107$$

a  $Z = 82\,600$  Kčs.

O d p o v e d' Aby mal závod maximálny zisk, musí vyrobiť 380 oblekov 1. druhu, 300 oblekov 2. druhu a 320 oblekov 3. druhu. Zisk bude činiť 82 600 Kčs.

5. Nájdite ostré uhly vyhovujúce rovniciam

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + \frac{\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) \operatorname{cotg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) + \operatorname{cotg}(\alpha - \beta)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(Došlo 28 riešení)

Stanislav Horák

Riešil Karel Šafařík, I.B SVŠ, Bratislava:

Položme

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = x, \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = y$$

a potom

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{x} \quad \operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{y}$$

Daná sústava rovníc má potom tvar

$$\frac{xy + 1}{x + y} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{x - y}{x + y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

Je zrejmé, že musí byť

$$x + y \neq 0.$$

Z rovnice (2) dostaneme

$$x = \frac{y(2 + \sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}}$$

Po dosadení do rovnice (1) dostaneme kvadratickú rovnicu

$$y^2(2 + \sqrt{3}) - 2y + (2 - \sqrt{3}) = 0,$$

ktorá má jediný dvojnásobný koreň

$$y = 2 - \sqrt{3}$$

a tomu odpovedá

$$x = 2 + \sqrt{3}$$

Teda

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= 2\sqrt{3} \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 75^\circ \\ \alpha - \beta &= 15^\circ\end{aligned}$$

Danej sústave vyhovujú uhly  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , ak sa tiež môžeme presvedčiť zkuškou.

### *Konstruktivní geometrie*

2. Jsou dány dvě různé rovnoběžky  $a$ ,  $b$  a mimo jejich rovinu je dán bod  $M$ . Sestrojte roviny  $\alpha$ ,  $\beta$  tak, aby byly k sobě kolmé, aby rovina  $\alpha$  procházela přímkou  $a$ , rovina  $\beta$  přímkou  $b$  a aby poměr vzdáleností bodu  $M$  od rovin  $\alpha$ ,  $\beta$  byl roven 3 : 2.

(Došlo 9 řešení)

*Stanislav Horák*

*Řešil Tomáš Mašek, 3.F SVVŠ, Praha 2:*

Dané útvary promítneme do roviny  $\pi \perp a$ . Průmětem přímek  $a$ ,  $b$  a bodu  $M$  jsou po řadě body  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $M_1$ . Průmětem rovin  $\alpha$ ,  $\beta$  budou přímky  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ , přičemž  $\alpha_1$  ( $\beta_1$ ) prochází bodem  $a_1$  ( $b_1$ ).

**R o z b o r.** V podobném zobrazení  $\mathbf{Z}$ , složeném ze stejnolehlosti  $\mathbf{H}(M_1; \frac{2}{3})$  a z rotace  $\mathbf{R}(M_1; \pm \frac{\pi}{2})$  je přímka  $\beta_1$  obrazem přímky  $\alpha_1$ . Obrazem bodu  $a_1$  v  $\mathbf{Z}$  je bod  $a'_1$  a přitom body  $a'_1$ ,  $b_1$  leží v přímce  $\beta_1$ .

**K o n s t r u k c e** se skládá z těchto kroků:

K1. Sestrojíme obraz  $a'_1$  bodu  $a_1$  v zobrazení  $\mathbf{Z}$ .

K2. Body  $a'_1$ ,  $b_1$  určují přímku  $\beta_1$ .

K3. Obrazem přímky  $\beta_1$  v zobrazení  $\mathbf{Z}^{-1}$  je přímka  $\alpha_1$ .

K4. Rovina  $\alpha$  ( $\beta$ ) prochází přímkou  $\alpha_1$  ( $\beta_1$ ) kolmo k rovině  $\pi$ .

**D ů k a z** plyne z rozboru.

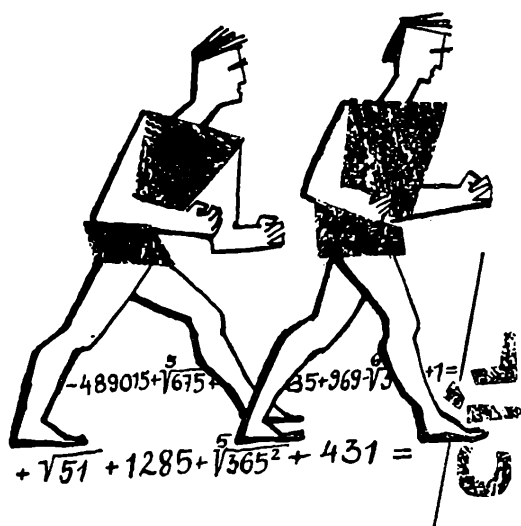
**D i s k u s e.**

a) Jestliže  $\sphericalangle a_1 M_1 b_1 \neq \frac{\pi}{2}$ , existují dvě různá řešení, neboť v kroku K1 jsou dvě rotace, čímž se dojde k dvěma různým přímkám  $\beta_1$ .

b)  $\sphericalangle a_1 M_1 b_1 = \frac{\pi}{2}$ . Je nutné rozlišovat dva případy.

1°  $b_1 M_1 = \frac{2}{3} a_1 M_1$  a pak existuje nesčíslně mnoho řešení.

2°  $b_1 M_1 \neq \frac{2}{3} a_1 M_1$  a existuje jediné řešení.



MMO

## XI. Mezinárodní matematická olympiáda

STANISLAV HORÁK, ČVUT Praha

Naše delegace přijela do Bukurešti již v pondělí 7. července. Poněvadž se soutěž konala až ve dnech 10. a 11. července, použili rumunští hostitelé dvou volných dnů k tomu, aby všem zahraničním hostům ukázali pamětihodnosti Bukurešti a jeho okolí. Pak přišly na naše chlapce dva těžké dny práce a po nich týden okružní cesty po Rumunsku. Jely nás tři plně obsazené autobusy, každý zřetelně označený jménem státu, jehož zástupce vezl. Náš autobus byl třetí a seděli v něm reprezentanti Anglie, Belgie, Bulharska, Československa a Francie. O dobrou náladu se během celé cesty starali hluční a veselí Francouzi, s nimiž naši studenti konverzovali buď německy nebo anglicky.

Trať byla velmi dlouhá (asi 1600 km) a z Bukurešti jsme projeli kromě jiných těmito městy: Buzau Focșani Marașești (zde jsme navštívili památník věnovaný památce 20 000 rumunských hrdinů, kteří zde padli v bitvě r. 1917) Bacau (nocleh). Druhý den: Bicz (přehrada, jezero Roșu) - Piatra Neamt - monastýr Agapia a v něm nocleh. Třetí den jsme dojeli do Suceavy, v jejímž okolí jsme navštívili překrásné monastýry (Gura Humorului, Voronec). Jsou krásně malované i zvenčí. To jsme byli již v severní Moldavii a v Bukovině. V Suceavě jsme dvakrát nocovali. Další den nás cesta vedla do Bistricy (návštěva pionýrského tábora) a do Tirgu Mureș (nocleh). To jsme již z Moldavska přešli do



Sedmihradská. Dále už Siglișoara a Brašov (nocleh). Poslední den okružní cesty nás vedl přes Predeal do Poiany Tapului (zastávka 2 hodiny) do Sinaie, kde výprava byla uvítána hudbou. Po obědě byla prohlídka bývalého královského paláce, pak tanec a pozdě večer návrat do Bukurešti.

Na závěr snad několik poznámek k dojmům, které na nás cesta učinila. Lid ve městech i na vesnicích je k cizincům a zvláště k nám Čechům a Slovákům velmi přívětivý. Nikdy neopomněli zdůraznit, že jsme přátelé.

Silnice, po kterých jsme projížděli, byly bezprašné, dobře udržované, orientační tabule v bezvadném pořádku. Cestou jsme viděli mnoho nových továren, které dokazují, že se Rumunsko přetváří v průmyslový stát. Přimyslíme-li si k tomu přírodní bohatství země a pracovitost lidu, musíme připustit, že není daleko doba, kdy se Rumunsko stane vyvinutou průmyslovou zemí. My, Češi a Slováci, přejeme ze srdce rumunskému lidu, který byl vždy naším upřímným přítelem, aby se tak stalo co nejdříve.

A nyní o vlastní soutěži. XI. MMO se zúčastnilo 14 států: Anglie, Belgie, Bulharsko, Československo, Francie, Holandsko, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, Něm. dem. republika, Polsko, Rumunsko, Sov. svaz, Švédsko. Studenti každé národnosti dostali pořadová čísla od 1 do 8 a pracovali v osmi učebnách. První den 4 hodiny na prvních třech příkladech, druhý den opět 4 hodiny na druhých třech příkladech. V tabulce I věnované československým olympionikům, jsou po řadě uvedeny tyto údaje: jméno žáka, třída, kterou právě absolvoval a ústav, na němž studoval, po kolikáté se zúčastnil MMO a posléze počet bodů získaných řešením 1., 2., ..., 6. příkladu.

Tabulka I.

|                 |                   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----------------|-------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| Černek Pavel    | 2. SVŠ Bratislava | 1 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 0 |
| Hadrava Petr    | 3. SVVŠ Praha     | 1 | 5 | 2 | 4 | 6 | 7 | 1 |
| Mašek Tomáš     | 3. SVVŠ Praha     | 3 | 5 | 7 | 7 | 1 | 7 | 1 |
| Sakáloš Štefan  | 1. SVŠ Prievidza  | 1 | 0 | 7 | 6 | 1 | 0 | 0 |
| Šivák Bohuš     | 3. SVŠ Zvolen     | 5 | 5 | 7 | 7 | 0 | 0 | 1 |
| Švarc Rudolf    | 2. SVVŠ Plzeň     | 1 | 5 | 5 | 4 | 2 | 0 | 4 |
| Vinárek Jiří    | 3. SVVŠ Praha     | 2 | 5 | 2 | 1 | 6 | 6 | 8 |
| Zahradník Miloš | 3. SVVŠ Tanvald   | 1 | 0 | 5 | 4 | 4 | 6 | 3 |

Tabulka II ukazuje, kolik bodů za jednotlivé příklady získali zástupci jednotlivých států. V posledním sloupci je součet všech získaných bodů.

Tabulka II.

|                |    |    |    |    |    |    |     |
|----------------|----|----|----|----|----|----|-----|
| Anglie         | 20 | 43 | 50 | 16 | 41 | 23 | 193 |
| Belgie         | 9  | 18 | 13 | 9  | 8  | 0  | 57  |
| Bulharsko      | 34 | 33 | 20 | 25 | 47 | 30 | 189 |
| Československo | 27 | 39 | 35 | 23 | 28 | 18 | 170 |
| Francie        | 16 | 38 | 23 | 9  | 19 | 14 | 119 |
| Holandsko      | 4  | 9  | 21 | 5  | 9  | 3  | 51  |
| Jugoslávie     | 25 | 41 | 24 | 25 | 41 | 25 | 181 |
| Maďarsko       | 28 | 53 | 54 | 34 | 48 | 30 | 247 |
| Mongolsko      | 11 | 25 | 22 | 9  | 39 | 14 | 120 |
| NDR            | 38 | 45 | 44 | 35 | 49 | 29 | 240 |
| Polsko         | 11 | 22 | 40 | 8  | 24 | 14 | 119 |
| Rumunsko       | 33 | 36 | 42 | 28 | 47 | 33 | 219 |
| SSSR           | 30 | 52 | 42 | 30 | 48 | 29 | 231 |
| Švédsko        | 3  | 32 | 40 | 2  | 18 | 9  | 106 |

A na konec soutěžní příklady XI. MMO.

1. Existuje nekonečně mnoho přirozených čísel  $a$ , která mají tu vlastnost, že číslo  $a + n^4$  není prvočíslem pro žádné přirozené číslo  $n$ . Dokažte.

2. Budte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 1$ ) reálné konstanty a budiž

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2} \cos(a_2 + x) + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n + x)$$

funkce reálné proměnné  $x$ . Je-li  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , pak je  $x_2 - x_1 = m \cdot \pi$ , kde  $m$  je celé číslo. Dokažte.

3. Pro každé z čísel  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  řešte úlohu: Určete nutné a postačující podmínky pro kladné číslo  $a$ , aby existoval čtyřstěn, jehož  $k$  hran má délku  $a$  a zbývajících  $6-k$  hran má délku 1.

4. Je dán pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s přeponou  $AB$  a jemu opsaná kružnice  $k$ . Označme  $D$  patu výšky spuštěné z vrcholu  $C$  na přeponu  $AB$ ,  $k_1$  kružnici vepsanou trojúhelníku  $ABC$ ,  $k_2, k_3$  dvě navzájem různé kružnice, z nichž každá se dotýká přímk  $AB, CD$ , leží v polorovině  $ABC$  a dotýká se zevnitř kružnice  $k$ . Dokažte, že kružnice  $k_1, k_2, k_3$  mají mimo přímku  $AB$  ještě další společnou tečnu.

5. V rovině je dáno  $n$  bodů ( $n > 4$ ), z nichž žádné tři neleží v přímce. Pak existuje aspoň  $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$  různých konvexních čtyřúhelníků, jejichž všechny vrcholy jsou některé z daných bodů. Dokažte.

6. Jsou-li  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  reálná čísla, pro která platí

$$x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 y_1 - z_1^2 > 0, x_2 y_2 - z_2^2 > 0,$$

pak platí

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2} \quad (1)$$

Dokažte. Najděte nutné a postačující podmínky pro to, aby v rovnici (1) platila rovnost.



Na obrázku jsou členové naší delegace. Od prava to jsou: B. Sivák, Š. Sakáloš, P. Černek, P. Hadrava, R. Švarc, M. Zahradník, T. Mašek, J. Vinárek. Úplně vlevo je Lydie Stoica, tlumočnice a průvodkyně naší delegace. Studuje češtinu, Československo již jednou navštívila a právě se chystá na novou návštěvu k nám. (Každá delegace měla svého průvodce, který dokonale ovládal příslušný cizí jazyk. Tito průvodci s námi byli na cestě po Rumunsku. Při X. MMO v Moskvě jsme jeli po skončení soutěže do Leningradu, ale průvodci-tlumočníci zůstali v Moskvě.) V pozadí vidíte budovu lycea, v němž se konala soutěž, zahajovací i závěrečný ceremoniál.

## Za prof. dr. Františkem Záviškou

PROF. JOSEF KOTYK, Pardubice

*(Napsáno k 90. výročí jeho narození)*



Je krásným rysem vzdělaného člověka, že dovede ctít vědecké pracovníky, kteří reprezentují kulturní výši jeho národa. V dějinách našeho národa a české vědy zůstane zachována trvalá památka a nehynoucí čest profesoru Karlovy university v Praze dr. Františku Záviškoví. Ze ztrát, které za okupace utrpěla také Jednota československých matematiků a fyziků, patří umučení jejího předsedy profesora dr. Františka Závišky k nejbolestnějším.

František Záviška se narodil před 90 lety dne 18. listopadu 1879 ve Velkém

Meziříčí na Moravě. Po studiích na středních školách v Třebíči, kde byl spolužákem Šmeralovým, a v Brně se věnoval studiu matematiky a fyziky na filosofické fakultě české university v Praze a na universitě v Cambridge v Anglii, kam byl doporučen svým universitním učitelem profesorem dr. Františkem Kolářkem slovy: „Skládám své naděje do žadatele (roz. o propůjčení cestovního stipendia), poněvadž neznám nikoho, jehož kvalifikace by se vyrovnala kvalifikaci Záviškově.“ V Cambridge pracoval Záviška

v letech 1906 a 1907 u sira J. J. Thomsona<sup>1</sup>). Dne 11. dubna 1906 byla na základě práce „O polarizaci hraničných čar totální reflexe“ potvrzena Záviškova habilitace z teoretické fyziky na universitě v Praze. Tam se již dne 26. dubna 1914 Záviška stal po Kolářkově smrti nástupcem svého vynikajícího učitele.

Četné vědecké práce Záviškovy se týkají obtížných problémů fyziky experimentální i teoretické (šíření elektromagnetických vln, studia éteru, záření Röntgenova, tepelného záření aj.) a reprezentují vysokou úroveň naší fyziky i na mezinárodním fóru; také krystalová optika a hydrodynamika náležely k oborům vědeckého zájmu Záviškova.

Ve své osobnosti spojoval Záviška s vzácnou harmonií vědecké bádání s dokonalým uměním pedagoga; i nejabstraktnější partie dovedl podat způsobem přímo elegantním, velmi přístupným. Nejlepším osobním příkladem, svědomitostí, radou i pomocí usiloval o to, aby hojně vědomosti i matematický způsob myšlení, přesnost a logická kázeň pronikly co nejvíce do srdcí posluchačů a jimi, budoucími učiteli a vychovateli, do naší národní vzdělanosti.

Svým žákům i zájemcům ze širší veřejnosti napsal Záviška

také vynikající knižní díla. Jsou to „Einsteinův princip relativnosti a teorie gravitační“ (1925), „Mechanika“ (1933) a „Termodynamika“ (1942). Mistrovstvím slohu a pečlivostí výkladu došla veliké obliby u čtenářů a stala se trvalou ozdobou jejich knihoven.

Do této bohaté tvůrčí činnosti a krásného života profesora Závišky zasáhla náhle a nelítostně druhá světová válka. Ve večerních hodinách dne 21. ledna 1944 byl Záviška ve svém bytě zatčen a odvezen nejprve do pověstného Pečkova paláce, potom na Pankrác, do Brna, posléze do koncentračního tábora v Mauthausenu. Na podzim téhož roku hledala správa tábora učence z oboru technických věd k zjištění, co dovedou; na tuto otázku nedal Záviška odpověď. Když byl později předvolán ke zkoušce z fyziky, přiznal se po ní spoluvězněm, že — asi propadl. Důsledky nedaly na sebe dlouho čekat. Za několik dnů stál Záviška jednou k večeru u brány s malým ranečkem v ruce připraven k odchodu do jiného tábora. Spoluvěznové přišli se s ním až k bráně rozloučit. „Však to není nadlouho,“ utěšoval je statečný Záviška. „Uvidíme se zase v Praze. Už bude brzy konec...“<sup>2</sup>)

Stejně naděje živil Záviška u svých spoluvěznů v koncentračním

---

<sup>1</sup>) Sir Joseph John Thomson (1856—1940) se zabýval výbojem v plynech; zasloužil se zejména také o rozšíření našich poznatků o iontech a elektronech.

---

<sup>2</sup>) Viz podčárník Záviškova spoluvězně soudr. Václava Pelce „Jak nám vraždili vědce“ v Právu lidu ze dne 25. dubna 1946, čís. 97, str. 5.

táboře Osterode (Harz), v němž toužebně očekával v roce 1945 své vysvobození. „Do dvou měsíců bude konec války,“ ujišťoval je v únoru, „a tím i našeho utrpení.“<sup>3)</sup> Netušil, jakou měrou se tato proročká slova splní právě u něho...

Dne 6. dubna 1945 byl tábor evakuován. Po čtyři dny byli vězňové hnáni pěšky a o hladu 160 km. Trpěli podvýživou, únavou a úplavicí tak, že nemohli na konec již ani kousek chleba sníst, a slábli tím více. Jestliže se však někdo na pochodu opozdil, byl na místě zastřelen. Za čtyři dny pochodu hladu a smrti se řady ubohých vězňů ztenčily z původního počtu více než 1000 na pouhých asi 150 lidí. Aby se i těch konečně zbavili a mohli prchnout (americká armáda se rychle blížila), spustili SS-mani do jejich řad palbu z lehkých kulometů. Každý, kdo ještě aspoň trochu mohl, prchal v šíleném strachu k lesu. Na okraji silnice, kam se někteří doplížili, sešlo se jich na konec —

---

<sup>3)</sup> Viz zprávu soudr. J a n a K r i n e s e ze dne 24. července 1945, uveřejněnou v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky, roč. 71, seš. 1—4, str. D6 až D8.

osm! Mezi nimi byl i profesor Závíška.

Stav profesora Závíšky byl však hrozný. Stížen úplavicí, jakéhokoli pohybu neschopen a k smrti vyčerpán dostal se Závíška teprve dne 15. dubna 1945 do rukou Američanů a do nemocnice v Gifhornu, kde v krátké době dotrpěl. Dne 17. dubna 1945 skonal. Je tragické, že badatel tak schopný zemřel v posledních dnech války, po jejímž ukončení a konečném vítězství pravdy a spravedlnosti, v něž vždy pevně věřil, chtěl svému milovanému národu prokazovat další neocenitelné služby, jak se na to až do své smrti těšil.

Daleko od domova, v nevlídné cizí zemi, na hřbitově v Gifhornu (asi 45 km od Brunšviku směrem k Hamburku) došel po nelidských a nevylicitelných útrapách věčného klidu vzácný člověk, který přinesl oběť tak velikou. Jeho zlatého srdce budou dlouho vzpomínat oddaní přátelé a zástupy vděčných žáků. J m é n o p r o f e s o r a F r a n t i š k a Z á v í š k y zůstane zapsáno trvale v dějinách českého národa, jenž zachová svému významnému vědci a mučedníku za osvobození českého lidu světlou památku.

# První učebnice geometrie s úplnou českou terminologií

Doc. VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, ČVUT Praha

Nejprve zdůvodním poněkud neobvyklý nadpis článku. První česká učebnice geometrie byla učebnice z r. 1734 od Wáclava Josefa Weseľého, která byla psána velmi špatnou češtinou s terminologií poločeskou, pololatinskou a byla by dnešní mládeži naprosto nesrozumitelná. To byl jeden z hlavních důvodů, proč vyšla r. 1822 učebnice „Základové měřičství“ (psáno dnešním pravopisem) od Vojtěcha Sedláčka, řádu premonstrátského, starobylého kanovníckého kláštera Tepelánského kněze, na vysokých školách pražských filozofie doktora, na vstavu filosofickém plzeňském čisté matematiky, pak řeči a literatury řecké i české veřejného řádného profesora.

Učebnice obsahovala 407 stran, 326 obrázků, 7 tabulek a byla věnována Jeho Exelenci vysoce urozenému Pánu, panu Františku Antoniovi hraběti z Kolowratů Libštejnských.

V článku nebudu hodnotit knihu z odborného hlediska – hodnocení by bylo velmi kladné a všimněme si podstatnější pro nás stránky, terminologie a úsloví. Byl to nádherný pokus o zčeštění všech odborných názvů. I když historie nedala Sedláčkovi zapravdu, a i když matematika ponechala si hodně latinských názvů, je tento pokus pozoruhodný

a vykonal svůj úkol. Terminologie, které se dnes užívá, je kompromisem, vcelku šťastným, terminologie ryze české a latinské. Tak se přibližují odborné termíny našich učebnic termínům většiny cizojazyčných učebnic. Poláci naproti tomu překládají i mezinárodní odborné termíny do svého rodného jazyka. Také Němci tak činili v letech 1934 až 1945. Čtení jejich odborných pojednání je dnes pro naše čtenáře mnohem náročnější než studium např. francouzských děl.

Z dlouhého úvodu učebnice vychází najevo, že autor píše knihu jen proto, aby posloužil vlasti a nikoli snad proto, že by byl veden ctižádostí, neboť ví, že na přízeň času nelze valně se spoléhat. Píše doslovně:

„Dokud větší, a to vzdělanou část národa tato Božská jiskra, láska k řeči vlastenecké a k českému čítání nepronikne, není naděje, aby náš národ svou literaturou také brzy nějakého jména sobě vydobyl a získal tak čestného místa mezi jinými vzdělanými národy svou řečí.“

Knihu píše pro čtenáře v Čechách, na Moravě a v Uhřích a určuje ji Slovanům v českých zemích, a to čekancům k učitelství, dospělejší mládeži v triviálních českých školách, mládencům, kteří se oddávají

umění mysliveckému a lesnímu a jinochům, kteří vstupují do kteréhokoli stavu, kde plochoměřičství a tělesoměřičství je zapotřebí. Je hrdý na to, že se obejde v této disciplíně bez cizích jazyků. Při zčeštění hleděl užívat takových termínů, jimiž se obsah nejlépe vyjádří.

V knize užívá vedle českého názvu i latinského nebo řeckého (v závorce) aby odborník zvyklý na cizí terminologii, mohl knihu snadno číst. Na konci knihy je uveden rejstřík termínů českých a německých.

O knize Weselého píše dále: „Kniha obsahuje vlastně jenom některá řemeslnická rozhodnutí úloh náležejících k dálkoměřičství, plochoměřičství, tělesoměřičství a trojhranoměřičství (naše trigonometrie) beze všeho uměleckého spojení, bez důkazů, takže ani obsahem nemůže se nazývat čistým měřičstvím,“ a končí „než bych tak psal, raději bych navždy pero odhodil a na věky umlk!“

Na počátku v předmluvě uvádí i pozoruhodné rady, jak knihu studovat, které platí i dnes. Ve zkratce a v dnešní češtině jsou to tyto návody:

1. Číst knihu od počátku do konce po pořádku a nic z toho nevynechat. Měřičství se nedá číst tak lehce jako noviny.

2. Knihu číst s takovou vážností a pozorností, aby nikomu to nejmenší neušlo.

3. Rozeznávat předpoklady a závěry.

4. Přemýšlet o čteném, sledovat důkazy, sled kroků v důkazech.

5. Zavřít knihu, z paměti sestavit obrazec nebo provést důkaz. V pří-

padě, že nemůžeme pokračovat, opakovat důkaz nebo konstrukci znovu podle učebnice.

6. Užít symboliky ve stručném a výstižném zápisu prováděného důkazu.

7. Ve vypracování dalších úloh změnit prvky, které byly v předchozích úlohách.

A nyní k obsahu knihy s rozvedením textu podle autora, abychom přitom poznali jeho termíny, jeho slovosled. Kniha má pět oddělení.

Oddělení I. Uvedení o měřičství vesměs.

Čisté Matematyctwj je umění, jehož předmět je pouhá velikost odtaženě od všech jiných vlastností k předmětu náležejících.

Měřictwj (prostomerstwj) je umění jehož předmětem je weličina spogitá.

Weličina je věc, jež má vlastnost welikost.

Welikost - vlastnost, kterouž něco větším nebo menším buď skutečně učiněno nebo v obrazotvornosti představeno býti může.

Spogitá weličina jest, při které musí být pozorováno nejenom množství dílů, ale také jejich „spogenj a položenj“, neboli která záleží z částek tak spojených, že kde jedna přestává, druhá počíná a není mezi nimi prázdného místečka.

Počitářstwj (arytmetyka), dílem také písemné počitářství, jehož předmětem je weličina rozpojité.

Rozpojité weličina, při níž se bere zřetel jen na množství dílů bez ohledu na jejich spogenj a položenj (uspořádání). Totéž se nazývá počet.

Tělesomerstwj je rod měřictví, jehož předmět jsou tělesa měřická.

Těleso měřické je pouhá prostora



ze všech stran omezená, beze všech ohledů na vlastnosti, ke hmotě, jenž onu prostorou vyplňuje, např. prázdné místo, jež ryba ve vodě vyplňuje.

Plochoměrstwí (planimetrie) je rod měřictví, jehož předmětem jsou plochy.

Plocha je povrchnost vlastnosti, že mezi dvěma kdekoli v ní určenými body může být tažená přímka. Je složena z nesčíslně mnohých, neskončeně malých ploch.

Povrchnost jsou meze, kde těleso končí, kde těleso přestalo být tělesem.

Dýlkoměrstwí je rod měřictví, jehož předmětem jsou čáry neboli dýlky.

Čára je složena z nesčíslně mnohých, neskončeně malých čar, ne snad z bodů, an bod jest přestávka čáry. Čára je mezi povrchnostmi. Řekne-li se čára, pozůstává z bodů, nelze tak rozumět jakoby čára byla složena z bodů, ale že zde, onde, všude může čára skončiti, body omezena býti, body míti.

Bod jsou meze nebo také končiny čáry. Bod nemá ani výšiny, ani šířky, jelikož ty v samé čáře scházejí, ani dýlky, sice by nebyl přestávkou čáry, nýbrž sám by čáru působil.

Přímka, přímá čára je čára, která mezi dvěma body jenom jediným způsobem může být tažena, tj. všechny její části mají tentýž směr. Dva body stanoví položení přímky. Stanovením dvou bodů stanoví se též dýlka přímky. Přímka může za míru vzdálenosti dvou bodů od sebe vzata býti.

Body pospolné - totožné body.

Průřez, tj. průsečík, bod ve kterém se dvě přímky „řezagj“.

Kolmá přímka, závažnj je přímka a) která způsobuje „přjmy“ úhel, b) jež ona na jiné tak stojí, že ani k jedné, ani ke druhé ni žádného naklonění nemá.

Stegné dvě přímky (v našem slova smyslu shodné úsečky), když ke dvěma přímkám položením dvou mezných (krajních) bodů neboli konců na sebe, i také celé přímky se „shodugj“, na sebe „přilehagj, připadagj, se krygj“.

Úhel je položení k sobě dvou přímek v rozličném zaměření v téže ploše se zbíhajících nebo rozbíhajících, tedy v jednom bodě se řezajících. Pravému úhlu se říká „přjmy“, jestliže dva sousední úhly mají tu vlastnost do sebe, že jsou ouplně stejné (shodné). Pravý úhel se označuje P. Velikost úhlu pozůstává jenom v nakloněnosti ramen k sobě. Úhly styčné se nazývají stýkavé, úhly obvodové, úhlové v obvodu. Troguhelnjk, trojgranjk přjmoúhlý (pravoúhlý), kosoúhljnjk.

V oddělení jsou uvedeny (jistě pod vlivem Eukleida) požádání (postuláty) obdobné jako v řecké geometrii. Zajímavé jsou míry uváděné v učebnici, a to v soustavě dvanáctkové. Ukažme si je tak, jak jsou zapsány v učebnici:

Bod, 12 bodů je čárka, 12 čárek je palec (čtyři ječná zrna vedle sebe na šířku položená), 12 palců střewjc, 6 střewjců sáh, 5 kroků jsou 2 sáhy, 4000 sáhů je 1 míle. Označení např.:  $5^{\circ}6'7''8'''9''''$  značí 5 sáhů 6 střewjců 7 palců, 8 čárek, 9 bodů.

Dále jsou uváděny také míry v soustavě desítkové: 1 sáh = 10 střewjců, 1 střewjc = 10 palců, 1 palec = 10 čárek, 1 čárka = 10 bodů.

K mírám délkovým jsou příslušné míry plošné (čtverečné). Označují se v exponentu malým čtverečkem a k nim znak sáhu ( $^{\circ}$ ) střewjce ( $'$ ) atd.

Míry kostečné (tělesové, prostorové, kubické) jsou značeny obdobně, jen místo čtverce exponentu je zakreslena krychle v rovnoběžném kosoúhlém promítání.

Míry stupňové jsou tyto: čtwernejk (kvadrant), stupeň, menssina (minuta), vteřina, třetina, uváděné od stupně k soustavě šedesátkové.

Rovnice se nazývá stejnina, odmocnina kořen, odmocnítko kořenýtko, kořen je čtverečný, kostečný, odmocňování wydobywanj kořene, umocňování wyzdwjhnout namocnost, mocniteli říká se udavatel. Znak  $+$  wětssisko, číslo kladné twrdivé, odčítání odgjmaj, znak  $-$  menssisko, záporná velikost zapjrawa, násobení se nazývá množenj, dělení dělenj.

Oddělení I jsme věnovali mimořádnou pozornost, abychom uvedli základní termíny, téměř stejné jako dnešní a také těžkosti definování. Představa přímky je v řeckém smyslu, v němž jsou křivky chápány jako celky, nikoli jako bodová kontinua, k nimž se došlo až v analytické geometrii. Úsečka byla dělitelna v libovolném množství malých úseček, ale toto dělení nebylo nekonečné, úsečky se neredukovaly až na body.

Oddělení II se dělí na 4 částky: Dýlkoměrstwaj a plochoměrstwaj, mnohoúhelnjk (mnohohrany) a jejich ploskosti, přjmky poměrné (úměrné úsečky), o srovnalostních trojhranech a o jejich proměnách, neboli o metrické planimetrii a

o rozličném položení a zběhu ploch (planin) mezi sebou, pak o některých aukonech v zeměměřičství. Souběžně s tím probíhá algebra, úprava mnohočlenů, algorytmus odmocňování.

Zajímavé je oddělení III trojhranoměrstwaj (naše trigonometrie). Je poněkud v jiném pojetí, které předcházelo dnešnímu našemu pojetí upravenému Eulerem. Také terminologie je naprosto jiná. Omezíme se na uvedení základů. Vychází se ze „zástawatelkyň“, tj. přímek, které jsou „ve srovnání se stranami úhlům na protilehlým“, zastávajících zde místa úhlů.

Přijatelně řečeno, rovina je rozdělena dvěma k sobě kolmými přímkami na 4 kvadranty. Sestrojí se kružnice o středu  $C$  v průsečíku oněch k sobě kolmých přímek (viz obr.). Jedno rameno uvažovaného úhlu je v polopřímce  $CT$  s vrcholem v  $C$ . Další je jasné z obrázku.

Přístava přímá ostrého úhlu  $\alpha$  je úsečka  $BF$  (její velikost) - také přístava přímá oblouku  $AB$ , a tedy  $BF = \sin \alpha \cdot r$ , kde  $r$  je poloměr kružnice.

Přístava obrácená ostrého úhlu  $\alpha$  (velikost úsečky  $AF$ ) se obdrží, když se od poloměru odtáhne ten odřezek mezi přístavou přímkou a středem (quersinus  $\alpha$ ) a tedy  $r - r \cdot \cos \alpha = r(1 - \cos \alpha)$ .

Stýčná ostrého úhlu  $\alpha$  (velikost úsečky  $AP$ ) je přímka kolmo vzdvižená v mezním bodu oblouku na konci jednoho průměru k tomuto mezníku jdoucího a protažená tak daleko až do průměru skrze druhý mezný bod oblouku jdoucího a prodlouženého kdekoli se řeže, neboli seče.  $AP = r \operatorname{tg} \alpha$ .

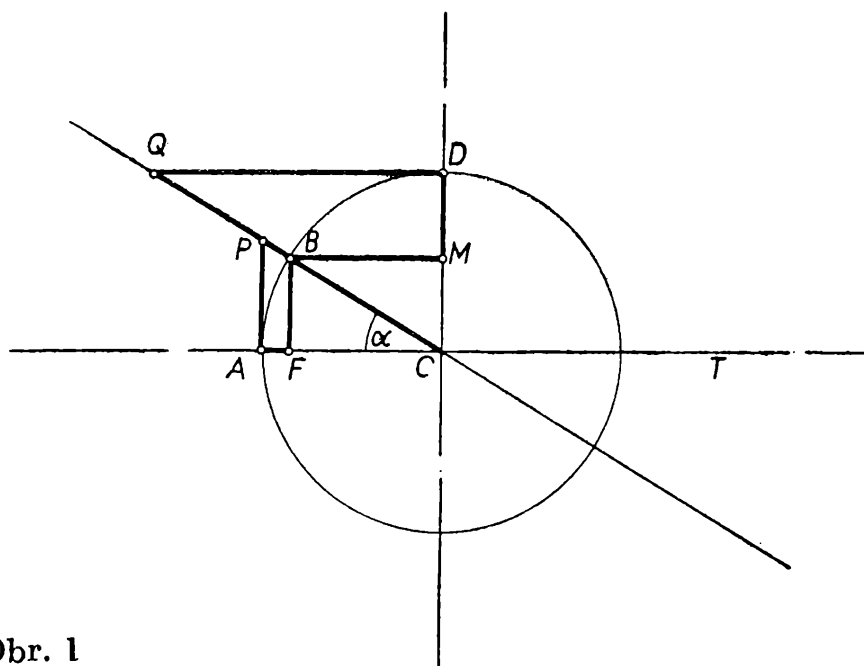
Průsečná ostrého úhlu  $\alpha$  (velikost úsečky  $PC$ ) je poloměr prodloužený až ke styčné na druhém mezníku oblouku vyzdvižené a prodloužené.  $PC = r \cdot \sec \alpha$ .

Dostava přímá úhlu  $\alpha$  je velikost úsečky  $BM = FC = r \cos \alpha$ .

objemů, spolu s algebrou, v níž se vypočítávají odmocniny.

Poslední oddělení je opět zajímavé z hlediska terminologie. Jde o kuželořezy definované jako rovinné řezy rotační kuželové plochy.

Stejnica je naše parabola, schod-



Obr. 1

Dostava obrácená úhlu  $\alpha$  je velikost úsečky  $MD$  (quercosinus  $\alpha$ ),  $MD = r - BF = r - r \cdot \sin \alpha = r(1 - \sin \alpha)$ .

Dotyčná úhlu:  $DQ = r \cotg \alpha$ .

Dosečná úhlu:  $CQ = r \operatorname{cosec} \alpha$ .

V oddělení se odvozují součtové vzorce. K tomu je připojena stať o logaritmech. Dnešní název logaritmus zčeštil Sedláček slovem poměročetem, a charakteristickou známku, mantisu začátečnicí.

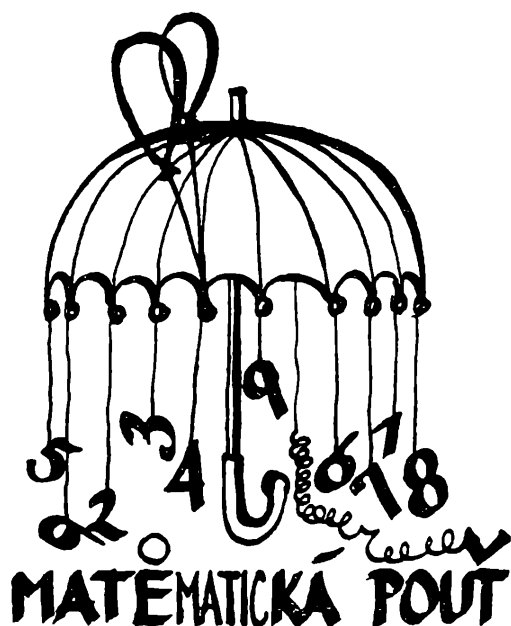
V další části oddělení III mluví o „výpočtech trojúhelníků“, o úlohách stereometrických.

Oddělení IV je nadepsáno: tělesoměrství, tj. početní stereometrie, definice objemu a povrchu těles, podobnost těles, jejich povrchů a

nice - elipsa a zbytnice - hyperbola. Direktrix praboly se nazývá ředitelka, ohnisko páleníště, asymptoty blížanky, tj. přímky neskončitě tažené, nestyčné, parametr polomíra, subtangenta podstyčná.

Na rovinu navazují rotační kvadriky.

Nehodnotil jsem odborné zpracování, neboť v článku jde hlavně o text, o novou terminologii, o motivaci zpracování učebnice. Ta je na tehdejší dobu velmi pěkně odborně zpracovaná. Udělala jistě svou službu a ukázala, že v 19. století byla geometrie našich geometrů na výši díky svému vzoru, kterým byly nejen pro naši vlast, ale i pro celý tehdejší svět Eukleidovy Základy.



## MATEMATICKÉ ZÁBAVY

### Živé počítací stroje

JIŘÍ MIKULČÁK, MFF UK Praha

Moderní výpočetní technika osvobozuje mnoho lidí od namáhavé a jednotvárné práce spojené s dlouhými výpočty. Dnes si již pomalu nedovedeme představit řadu pracovišť bez počítacích strojů — od kontrolních pokladen v obchodech, přes kalkulační stroje v účtárnách až k samočinným počítačům, které ohromnou rychlostí provedou i velmi složité výpočty.

Tím více nás však udivuje, že v minulosti žili počtáři, kteří dovedli provádět rozsáhlé výpočty z paměti. Někteří z nich pracovali pomalu, jiní by však mohli v rychlostech výpočtů soutěžit i s moderními stroji. Tito lidé jako by z paměti znali nějaké rozsáhlé tabulky, které nikdy nebyly vydány. V tomto článku se zmíníme o některých zajímavých jedincích.

Tak v Anglii žil v letech 1707—1772 J e d e d i a h B u x t o n, zemědělský čeledín, který nedovedl ani číst, ani psát, ani počítat se zapsanými čísly. Neznal dokonce ani názvy tisíc, milión, bilión atd., místo nich si vymyslel vlastní názvy velkých čísel (např. skoba, čeled), ale dovedl z paměti vynásobit sebou samým i číslo, které mělo 39 číslic při běžném zápisu. Trvalo mu to sice dva a půl měsíce, ale počítal prý jen občas, když k tomu měl právě chuť.

Američan Z e r a h C o l b u r n (1804—1840) už jako šestiletý podnikal turné po USA a předváděl své umění. Součiny čtyřmístných čísel

znal tak jako dnešní školáci malou násobilku, říkal je okamžitě po vyslechnutí úlohy. Dovedl však také okamžitě z paměti rozložit každé číslo menší než milion na součin prvočinitelů. (Jen si zkuste rozložit 247 483 v prvočinitele!) Zajímavé je, že v dospělosti Z. Colburn své schopnosti ztratil.

Současník Colburnův, Angličan George Bidder (1806—1878) si své schopnosti udržel po celý život, využíval jich ve svém zaměstnání železničního inženýra a dokonce je zdědili i jeho potomci. Jako desetiletý za 50 vteřin z paměti spočítal, kolikrát se na dráze

800 000 000 mil

otočí kolo, které má obvod 5 stop 10 palců. Za 30 vteřin našel

$\sqrt{119\,550\,669\,121}$

Jako inženýr běžně z paměti počítal náklady na postavení tunelu. Zajímavé je, že čísla musel slyšet. Lépe si pamatoval číslo jednou slyšené než číslo třeba desetkrát přečtené.

Němec Johann Dase (1824—1861) počítal sice dosti pomalu, ale prohlašoval, že si není vědom hranic svých schopností. Před komisí berlínské akademie věd násobil z paměti dvě stociferná čísla a za  $8\frac{3}{4}$  hodiny nepřetržitého počítání uvedl správný výsledek. Druhou odmocninu ze stociferného čísla našel za 52 minut. Jeho specialitou bylo bleskurychlé spočítání předmětů, stáda ovcí, písmen na stránce knihy apod. Necelá vteřina mu např. stačila na to, aby spočítal, že na rozházených kostkách domina je 117 bodů.

Ital Jacques Inaudi dovedl počítat v šesti letech, dříve než uměl číst a psát. Jeho specialitou bylo vyjádření každého přirozeného čísla do 100 000 jako součtu čtyř druhých mocnin z paměti za necelou minutu. Měl zřejmě vynikající paměť na čísla. Po produkci dovedl postupně opakovat i s výsledky všechny úlohy, které mu dali posluchači během produkce. Jako Bidder tak i Inaudi musel však čísla slyšet.

Všichni uvedení počtáři začali počítat již v útlém mládí. Naproti tomu Francouz Paul Lidoreau, dělník kožedělného podniku, objevil až ve svých 66 letech, že se může v dlouhé chvíli bavit počítáním. Umí okamžitě vypočítat druhou nebo třetí odmocninu devítimístného čísla, patnáctimístné číslo odmocní dvěma za 15—20 vteřin. Z paměti sčítá deset třicetíšestimístných čísel, šestimístná čísla rozkládá na součet pěti třetích mocnin nebo pěti druhých mocnin alespoň dvouciferných čísel.

Je zajímavé, že tak vynikající počtáři nebyli vlastně vůbec matematiky. Řešili obvykle jen úlohy určitých typů a nedovedli ani popsat, jakými metodami dospívají k výsledkům. Je možné, že při svých výpočtech neuvědoměle užívali vlastností čísel, které jsou matematikům

známé, je možné, že jejich výkony byly jen výsledkem fenomenální paměti pro čísla. Ať tak či onak, jejich výkony jsou projevem svérázné geniality, které se vždycky obdivujeme.

---

## POCHVÁLENO BUĎ JMÉNO MATEMATIKA

Kterýsi anglický profesor matematiky navykl své žáky, aby povstali, kdykoliv padlo jméno některého slavného matematika a aby provolávali hurá, byla-li řeč o Archimedovi nebo Newtonovi.

## ŽE BY RÁNY OSUDU?

Není pravda, že je možno sčítat jen veličiny téhož rozměru. Dokázal to slepý vysloužilý voják, který chodil po světě s tabulí

$$\begin{array}{r} 8 \text{ bitev} \\ 10 \text{ zranění} \\ 6 \text{ dětí} \\ \hline 24 \text{ celkem} \end{array}$$

Co to vlastně sčítal?

## TA ROZTRŽITOST!

Roztržitý jako matematik, to je okřídlená fráze, pro niž dodali příklady mnozí matematikové.

Vypráví se, že si Newton chtěl uvařit na měkko vajíčko bez přerušení práce. Pojednou zjistil, že vajíčko drží v hrsti a ve vodě vaří své drahocenné hodinky.

Jeden známý geometr jel na svou vlastní svatbu. Aby nezapomněl účel své cesty, napsal si velkými písmeny na svůj zápisník: „Jedu se do Toursu oženit.“

Ale roztržitosti se nevyhnuli ani mnozí fyzikové:

Ampère zpozoroval na procházce zajímavý oblázek. Jako pravý vědec jej zvedl a zkoumal. Vtom se podíval na hodinky a zjistil, že má nejvyšší čas dojít na přednášku. Zastrčil oblázek do kapsy a hodinky hodil přes zábradlí mostu do řeky.

Pokaždé, když Ampère skončil přednášku, smazal tabuli kapesníkem a do kapsy si dal hadr na tabuli.

Jindy začal Ampère psát výpočty křídou na černé stěně fiakru. Když se dal fiakr do pohybu, Ampère běžel za ním a v běhu dokončoval své výpočty.

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

ascendant, e  
assertion *ž*  
astérisque *m*  
associatif, ive  
associé, e  
asymptote *ž*  
augmenter  
autour  
auxiliaire  
axe *m*  
    axe de rotation  
    axe de révolution  
    axe des coordonnées  
axial, e  
axiomatique  
axiomatique *ž*  
axiome *m*  
axonométrie *ž*  
azimut *m*

### B

barre *ž*  
barrer  
base *ž*  
    base supérieure  
    base inférieure  
bilinéaire  
birapport *m*  
bissectrice *ž*

rostoucí, vzestupný  
tvrzení  
hvězdička  
asociativní  
sdružený, přidružený  
asymptota  
zvětšovat  
kolem  
pomocný  
osa  
    osa rotace  
    osa rotace  
    osa souřadnic  
osový  
axiomatický  
axiomatický systém  
axiom  
axonomie  
azimut

pruh (nad písmenem)  
škrtnout  
základna, podstava, báze  
    horní podstava  
    dolní podstava  
bilineární  
dvojpoměr  
osa úhlu

binôme, binomial, e  
 binôme *m*  
     binôme de Newton  
 biunivoque  
 borne *ž*  
     borne inférieure  
     borne supérieure  
 branche *ž*

binomický  
 dvojčlen  
     formule pro binomickou větu  
 jedno - jednoznačný  
 mez  
     dolní mez  
     horní mez  
 větev

## C

calcul *m*  
     calcul différentiel  
 calculateur *m*  
 calculer  
 calotte *ž* sphérique  
 cononique  
 capable  
     arc capable d'un angle donné

car  
 cardinal, e  
 carré, e  
     racine carrée  
 carré *m*  
 cartésien, enne  
 cas *m*  
     cas général, spécial  
 cathète *ž*  
 cent

*n* pour cent

central, e

centre *m*

centuple *m*

cercle *m*

    cercle circonscrit

    cercle exinscrit

    cercle inscrit

    cercle osculateur

chaîne *ž*

champ *m*

    champ de vecteurs

changement *m*

    changement cyclique

changer

chaque

chiffre *m*

    chiffre arabe, romain

circonférence *ž*

cinématique *ž*

circonscrire

    circonscrire un cercle à un polygone

počet, počítání  
     diferenciální počet  
 počítací stroj  
 počítat  
 kulový vrchlík  
 kanonický  
 schopný  
     oblouk, jemuž přísluší daný obvodový úhel

neboť

kardinální, hlavní

čtvercový, čtvereční

    druhá odmocnina

čtverec, dvojmoc

kartézský

případ

    případ obecný, zvláštní

odvěsna

sto

*n* ‰ (procent)

středový

střed

stonásobek

kruh, kružnice

    kružnice opsaná

    kružnice připsaná

    kružnice vepsaná

    oskulační kružnice

řetěz, osnova

pole

    vektorové pole

změna, záměna

    cyklická záměna

měnit

každý

cifra, číslice

    číslíce arabská, římská

kružnice, obvod

kinematika

opsat

    mnohoúhelníku opsat kružnici



# **rozhledy**

**MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ**

---

**3**

**ROČNÍK 48, 1969-70, NOVEMBER**



ROČNÍK 48  
NOVEMBER 1969-70

3

# MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositeľ vyznamenania  
Za zásluhy o výstavbu

## VEDÚCI REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositeľ vyznamenania Za vynikajúcu prácu

## VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

## REDAKČNÁ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed-  
inšp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ Praha; zasl.  
učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef  
Dibelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B.  
Bystrica; Miloš Franek, SVŠ, Prievidza; doc.  
Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef  
Korouš, DrSc., ČVUT, Praha; dr. Oldřich Le-  
píl, PU, Olomouc; Milan Marčok, VSLD, Zvo-  
len; prof. dr. Václav Medek, VST, Bratislava;  
prof. dr. Cyril Palaj PF-UPJŠ, Košice; Evžen  
Říman, CSc., ČVUT, Praha, nositeľ vyzname-  
nania Za vynikajúcu prácu; dr. Jiří Sedláček,  
ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV,  
Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; ing.  
dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ ÚNM, Praha;  
doc. dr. Ladislav Thern, VSLD, Zvolen; prof.  
dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František  
Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarík, inšp. MŠ  
SSR, Bratislava

## REDAKCIA:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29

## OBSAH

|                                                                       |                     |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------|
| J. Šedivý: Jak formulovat dementi pomocí diagramů . . . . .           | 101                 |
| J. Troják: Několik poznámek ke grafickému řešení nerovnosti . . . . . | 104                 |
| F. Janeček: Asymptoty hyperboly . . . . .                             | 109                 |
| Z. Ungermann: Pružná deformace tuhého tělesa (Dokončení) . . . . .    | 116                 |
| Dr. J. Šíroky - dr. M. Šíroká: Astronomické symboly . . . . .         | 123                 |
| Naše soutěž . . . . .                                                 | 126                 |
| Prof. dr. R. Košťál: Třetí MFO v Brně . . . . .                       | 135                 |
| J. Kotyk: Max Laue . . . . .                                          | 140                 |
| J. Kotyk: Einstein a jeho princip stálé světelné rychlosti . . . . .  | 143                 |
| Matematické zábavy, řešení z minulého ročníku . . . . .               | 146                 |
| Redakce hovoří se čtenáři . . . . .                                   | 148                 |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český . . . . .                | 3. a 4. str. obálky |

Vydává ministerstvo školstva v štátnom pedagogickom nakladateľstve v Prahe, za odbornej starostlivosti Jednoty čs. matematikov a fyzikov.

Vychádza desať razy do roka. Ročné predplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tlačí Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozširuje Poštová novinová služba. Informácie o predplatnom podá a objednávky prijíma každá pošta i doručovateľ. Objednávky do zahraničia vybavuje PNS, ústredný sklad expedície tlače, odd. vývoz tlače, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učiteľ dr. O. Hönig. Titulné obrázky: B. Šmejdivá, študujúca FS.

Štátne pedagogické nakladateľstvo, n. p. v Prahe, 1969.



## MATEMATIKA

---

# Jak formulovat dementi pomocí diagramů

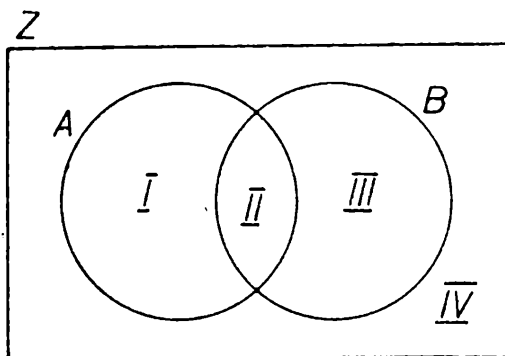
JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Slovo *dementi* znamená úřední prohlášení o nepravdivosti veřejně publikovaného tvrzení. Zpravidla se v něm říká: „*Není pravda, že . . . , ale naopak je pravdou, že . . .*“ Jak patrně, dementi vyjadřuje negaci původního výroku, a to dokonce ve dvou podobách — pomocí nápadného obrátu „není pravda, že“ a ve formě výroku, který sděluje, co je tedy pravda. O obou způsobech negování výroků jste informováni z článku A. Šarounové *O umění negovat*, který byl uveřejněn v 8. čísle minulého ročníku Rozhledů.

Seznámíme se s negováním kvantifikovaných výroků pomocí Vennových diagramů a pomocí číselné poloosy. Naučíme se též negovat výroky, které obsahují větší počet kvantifikátorů. Takové výroky potřebujeme v matematice při nepřímých důkazech matematických pouček a při vyvrácení hypotéz. Co budete např. dokazovat, když budete chtít vyvrátit domněnku, že v každém čtyřstěnu má každá dvojice výšek aspoň jeden společný bod? Zkuste si předběžně zformulovat negaci této domněnky, vrátíme se k ní v závěru článku.

**1** Negace výroků s jedním kvantifikátorem každý, žádný, aspoň jeden

V citovaném článku A. Šarounové jsou tyto negace již probrány, podložme je zde navíc množinovými představami a Vennovými diagrama-



Obr. 1

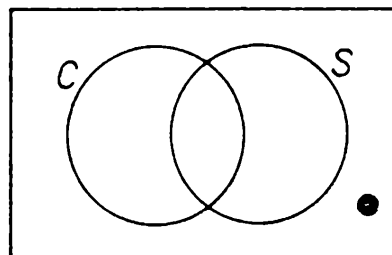
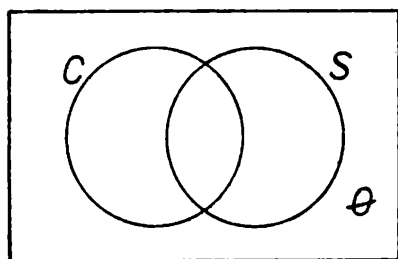
my pro dvě množiny. Připomeňme si vzhled tohoto diagramu (obr. 1) a význam jednotlivých políček; ta znázorňují tyto množiny prvků  $x$  základní množiny:

- |     |                                       |
|-----|---------------------------------------|
| I   | $x \in A$ , ale $x \notin B$ ,        |
| II  | $x \in A$ a zároveň $x \in B$ ,       |
| III | $x \notin A$ , ale $x \in B$ ,        |
| IV  | $x \notin A$ a zároveň $x \notin B$ . |

Do těchto políček můžeme zakreslit právě jeden ze znaků  $\emptyset$ ,  $\bullet$ ; první vyjadřuje prázdnotu příslušné množiny, druhý její neprázdnotu. Výrok „množina je prázdná“ má jistě negaci „množina je neprázdná“, a toho lze využít při znázornění negace. Je-li daný výrok znázorněn diagramem s jedním políčkem prázdným, pak jeho negace je znázorněna diagramem, v němž je toto políčko neprázdné (a obráceně).

### Příklady:

a) Výrok „V ubytovně *každý* četl nebo spal“ znázorníme diagramem pro množinu C všech čtoucích a množinu S všech spících lidí na ubytovně. Znak  $\emptyset$  vyjadřuje to, co se dozvídáme z výroku, že totiž neexistuje nikdo, kdo by ani nečetl ani nespál. Negací daného výroku bude výrok znázorněný na obr. 2b, tj. výrok „*Aspoň jeden* člověk ani nečetl ani nespál“

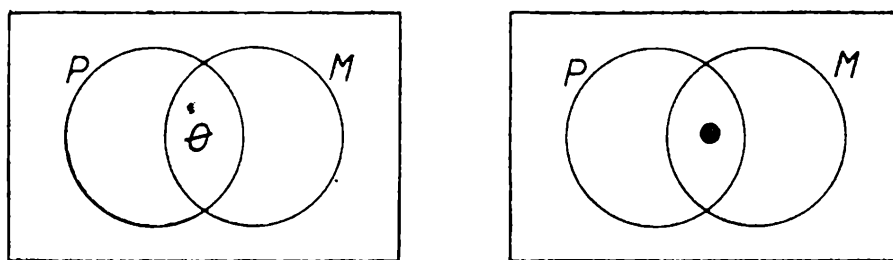


Obr. 2a, b

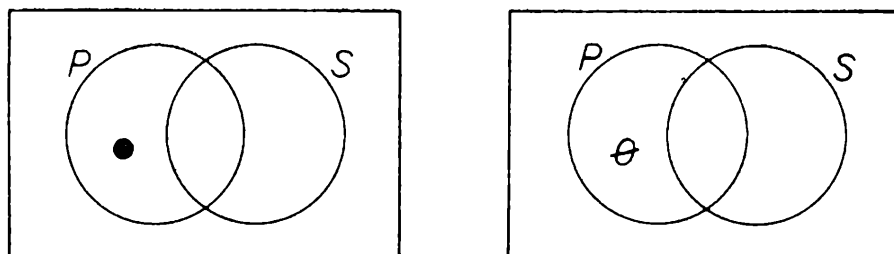
b) Výrok „*Nikdo* z přítomných nemluvil“ znázorníme diagramem pro množinu P všech přítomných a množinu M všech mluvících lidí (obr. 3a). Jeho negací znázorňuje obr. 3b, jde zřejmě o výrok „*Aspoň jeden* z přítomných lidí promluvil“.

c) Výrok „*Někdo* z přítomných nesouhlasil“ je znázorněn na obr. 4a; jeho negací „*Každý* přítomný souhlasil“ si snadno přečteme na obr. 4b, z něhož je patrné, že všechny prvky množiny P jsou prvky množiny S.

Obr. 3a, b



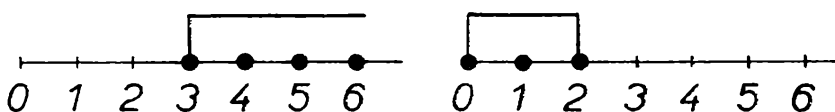
Obr. 4a, b



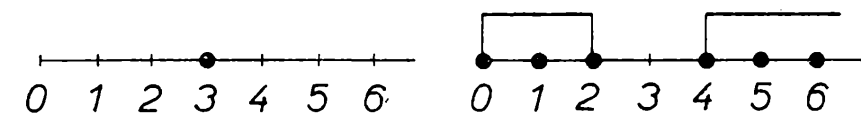
## 2 Negace výroků s jedním z kvantifikátorů aspoň $n$ , nejvýše $n$ , právě $n$

Při grafickém znázornění těchto výroků využijeme číselné poloosy s obrazy přirozených čísel a nuly (obr. 5a, b, 6a, b). Většími tečkami znázorníme ta přirozená čísla, která udávají počty uvažované v daném výroku.

Obr. 5a, b



Obr. 6a, b



d) Výrok „*Aspoň tři lidé přišli*“ bude znázorněn na číselné ose způsobem patrným z obr. 5a. Vyznačíme-li na obr. 5b právě ta přirozená čísla, která tak nejsou vyznačena na obr. 5a, znázorníme negaci daného výroku, tj. výrok „*Přišli nejvýše dva lidé*“.

e) Výrok „*Mám právě tři stokoruny*“ znázorňuje obr. 6a, jeho negaci zachycuje obr. 6b; zřejmě ji musíme vyjádřit takto: *Mám buď nejvýše dvě stokoruny nebo mám aspoň čtyři stokoruny*.

## 3 Shrnutí zkušeností s negováním výroků

Předcházející zkušenosti můžeme shrnout tak, že do dvou sloupců napíšeme výroky vyjadřující touž skutečnost:

Není pravda, že

aspoň  $n$

nejvýše  $n$

právě  $n$

každý je . .

žádný není

aspoň jeden je

aspoň jeden není

Je pravda, že

nejvýše  $(n - 1)$  • ( $n > 1$ )

aspoň  $(n + 1)$

buď nejvýše  $(n - 1)$  nebo aspoň  $(n + 1)$

aspoň jeden není

aspoň jeden je

žádný není

každý je

Tabulce se nemusíte učit nazpaměť, protože každý její řádek si můžete vždy znovu podložit úvahou na vhodném grafu. Zručnosti v negování výroků dosáhnete spíše jeho praktickým prováděním než memorováním vzorečků. Užívejte tedy tabulky jen pro kontrolu správnosti své formulace negací výroků. Např. dementi zprávy o jednomyslném usnesení může znít: Není pravda, že každý poslanec hlasoval pro přijetí návrhu, ale je pravda, že aspoň jeden poslanec nehlasoval pro jeho přijetí. (Pozor na to, že nemusel hlasovat proti!)

### *Cvičení*

Zformulujte pomocí Vennova diagramu dementi těchto zpráv: Všichni oprávnění voliči odevzdali platné hlasy. Někteří řidiči spáchali dopravní přestupky. Nikdo nepřijel ani vlakem ani autobusem. Každý kvalitní výrobek je drahý. Žádný vystavený výrobek není prodejný. Někdo z přítomných odešel.

Řešení cvičení k článku J. Šedivého Jak formulovat dementi pomocí diagramů.

Aspoň jeden z oprávněných voličů neodevzdal platný hlas. Žádný řidič nespáchal dopravní přestupek. Aspoň jeden člověk přijel vlakem nebo autobusem. Aspoň jeden kvalitní výrobek není drahý. Aspoň jeden vystavený výrobek je prodejný. Nikdo z přítomných neodešel.

## **Několik poznámek ke grafickému řešení nerovností**

JAN TROJÁK, MFF KU Praha

Grafickým řešením nerovností o jedné neznámé se obvykle míní pouze grafické stanovení průniku, nebo sjednocení několika intervalů na ose reálných čísel, k nimž se došlo většinou zcela algebraickou cestou. Méně často se používá způsob grafického řešení, který vychází důsledněji

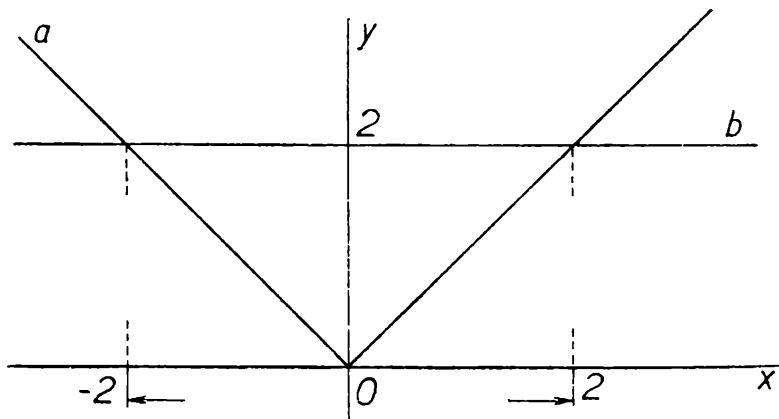
z geometrického významu algebraických výrazů, jimiž je daná nerovnost vyjádřena. Jde v podstatě o způsob, kterého se běžně užívá při grafickém řešení kvadratických rovnic. I když jeho užití při řešení prostých lineárních nerovností by pro jednoduchost obvyklého algebraického řešení nepřineslo žádné zjednodušení, jeho užití při řešení nerovností s jednou, nebo dvěma absolutními hodnotami by snad bylo dobré připomenout.

Užijme nejprve jednoduchého příkladu řešení nerovnosti

$$|x| < 2$$

Hodnoty funkce, jež tvoří levou stranu nerovnosti, můžeme graficky znázornit jako souřadnice  $y$  bodů čáry  $a$  o rovnici  $y = |x|$ , hodnoty funkce, jež tvoří pravou stranu nerovnosti, jsou pak znázorněny souřadnicí  $y$  bodů přímky  $b$  o rovnici  $y = 2$ .

Z grafického provedení (obr. 1) vidíme velmi názorně, že hodnota funkce na levé straně naší nerovnosti je menší, než hodnota funkce na pravé straně právě tam, kde  $y$ -ové souřadnice bodů čáry  $a$  jsou menší, než  $y$ -ové souřadnice bodů přímky  $b$ . Uvažovaná nerovnost je tedy splněna pro všechna  $x$ , jež tvoří  $x$ -ové souřadnice bodů čáry  $a$  „ležících pod“ přímkou  $b$ . (Pod slovy „bod  $A$  leží pod [nebo nad] přímkou  $p$ “ přitom rozumějme, že  $y$ -ová souřadnice bodu  $A$  je menší [větší] než  $y$ -ová souřadnice toho bodu přímky  $p$ , který má stejnou  $x$ -ovou souřadnici jako bod  $A$ .)



Obr. 1

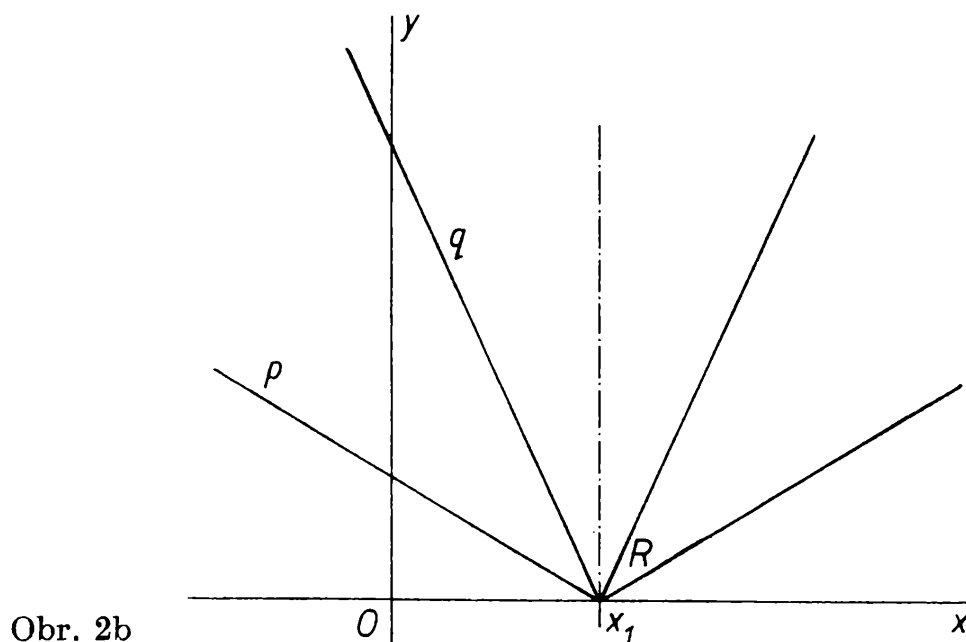
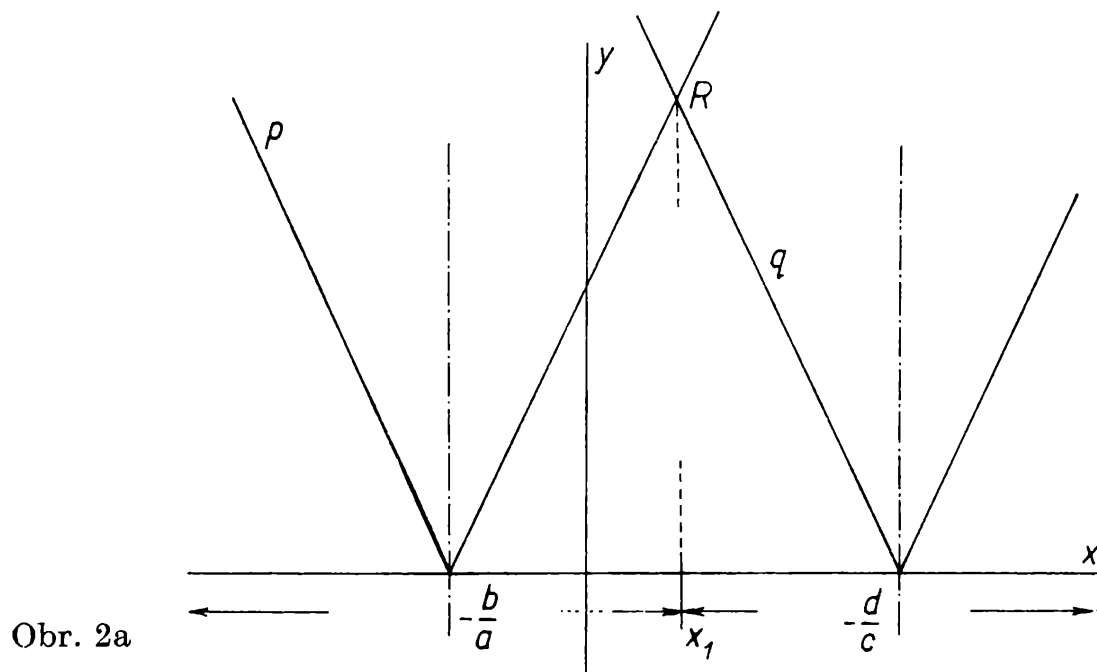
Z obrázku 1 vidíme, že řešením naší nerovnosti je otevřený interval  $(-2; 2)$ , jehož krajní hodnoty jsou  $x$ -ové souřadnice průsečíků lomené čáry  $a$  s přímkou  $b$ .

Pokusme se nyní o řešení nerovnosti, jejíž levou i pravou stranu tvoří absolutní hodnoty z lineárních funkcí

$$|ax + b| \leq |cx + d|, \quad a \neq 0, \quad c \neq 0$$

Grafy funkcí  $y = |ax + b|$  a  $y = |cx + d|$  jsou po řadě lomené čáry  $p$  a  $q$ . Všimněme si vzájemné polohy těchto čar.

Mají-li lomené čáry  $p$  a  $q$  jediný společný bod  $R \equiv (x_1; y_1)$ , který neleží na ose  $x$  ( $y_1 \neq 0$ ), je řešením dané nerovnosti buď interval  $(x_1; \infty)$ , nebo interval  $(-\infty; x_1)$ . Který z obou intervalů vyhovuje, rozhodneme opět shora uvedenou úvahou. Řešením budou všechna taková  $x$ , která jsou prvními souřadnicemi bodů čáry  $p$  ležících pod, nebo na čáře  $q$ .

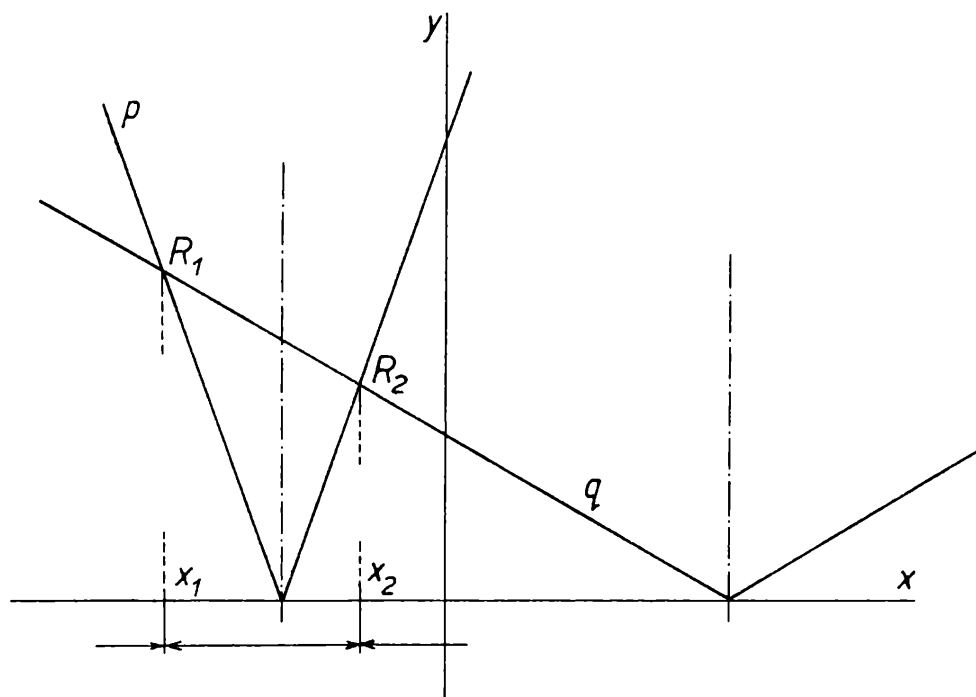


(Obr. 2a.) Je-li společný bod  $R \equiv (x_1; 0)$ ,  $\left(\text{pak } x_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}\right)$  mohou nastat tři různé případy. Buď všechny ostatní body čáry  $p$  leží pod čarou  $q$  (tj.  $|a| < |c|$  (obr. 2b), nebo leží na čáře  $q$  ( $|a| = |c|$ ), nebo všechny ostatní body čáry  $q$  leží pod čarou  $p$  ( $|a| > |c|$ ). V prvních dvou



případech je řešením sjednocení obou shora uvedených intervalů, v posledním případě je řešením jejich průnik.

Protínají-li se čáry  $p$  a  $q$  ve dvou bodech  $R_1 \equiv (x_1; y_1)$ ,  $R_2 \equiv (x_2; y_2)$ , kde můžeme předpokládat, že třeba  $x_1 < x_2$ , pak řešením je buď interval  $(x_1; x_2)$ , nebo sjednocení intervalů  $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$ . Přitom uzavřené



Obr. 2c

(polouzavřené) intervaly uvažujeme právě v případě neostré nerovnosti. Na našem obrázku 2c je řešením uzavřený interval  $(x_1; x_2)$ .

Jestliže si při řešení příkladu tohoto typu uvědomíme, že jedna část grafu funkce  $y = |ax + b|$  ( $y = |cx + d|$ ) je část přímky o rovnici  $y = ax + b$  ( $y = cx + d$ ) a druhá část grafu je s první částí souměrná podle osy o rovnici  $x = -\frac{b}{a}$  ( $x = -\frac{d}{c}$ ), kde  $-\frac{b}{a}$  je souřadnice  $x$  průsečíku přímky  $y = ax + b$  ( $y = cx + d$ ) s osou  $x$ , je toto řešení poměrně snadnou grafickou záležitostí.

Uvedeným způsobem je možno řešit všechny nerovnosti typu

$$|f(x)| < |g(x)| \text{ ev. } |f(x)| > |g(x)|,$$

kde  $f(x)$  a  $g(x)$  jsou libovolné funkce argumentu  $x$ , jejichž graf dovedeme s požadovanou přesností sestavit. Při tom je zřejmé, že metoda řešení je stejná, jestliže jedna, nebo obě absolutní hodnoty chybí, nebo vyskytnou-li se v úloze místo ostré nerovnosti nerovnost neostrá.

Vyřešme si dva jednoduché příklady tohoto typu

$$1. |x^2 - 5| \leq 3x - 5.$$

Grafem funkce  $y = (x^2 - 5)$  je čára složená z oblouků paraboly o rovnici  $y = x^2 - 5$  ležících nad osou  $x$  a z oblouku osově souměrného

se zbývající částí téže paraboly podle osy  $x$ . Grafem funkce  $y = 3x -$  je přímka  $s$ . Nerovnost je splněna právě pro ta  $x$ , jež jsou prvními souřadnicemi bodů čáry  $r$  ležících pod přímkou  $s$ . (Obr. 3.)

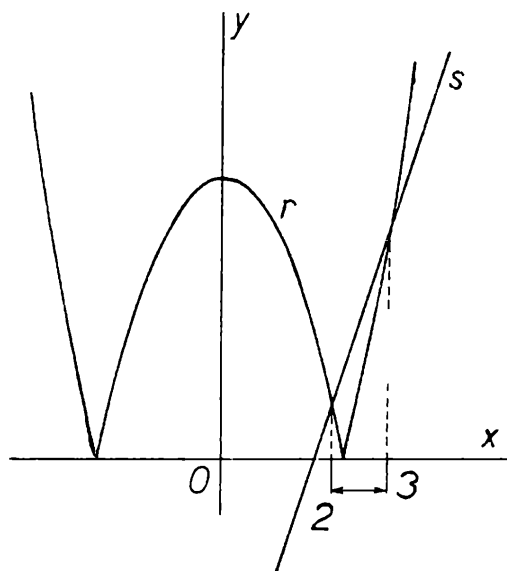
Řešením je tedy uzavřený interval  $(2; 3)$ .

$$2. |\sin x| > \sqrt[3]{4 - x^2}$$

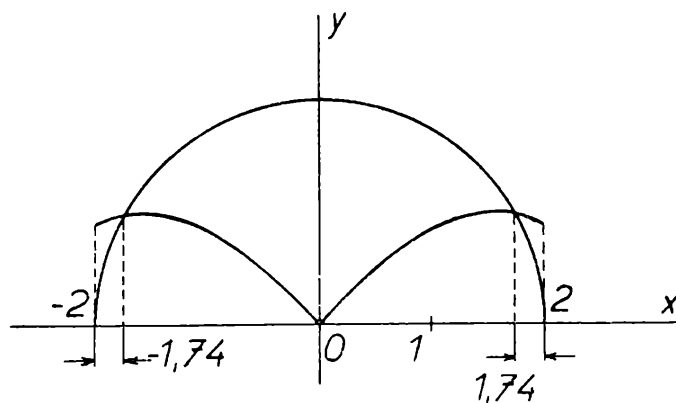
Sestrojením grafů funkcí  $y = |\sin x|$  a  $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$  získáme, jak ukazuje obr. 4, dva průsečíky, jejichž souřadnice  $x$  jsou přibližně  $-1,74$  a  $1,74$ . Z provedené konstrukce je patrné, že nerovnost je tedy splněna pro všechna

$$x \in <-2; -1,74) \cup (1,74; 2>$$

neboť všechny body oblouku půlkružnice o rovnici  $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$  mající souřadnice  $x$  z uvedeného sjednocení intervalů mají souřadnice  $y$  menší než je mají body oblouku funkce  $y = |\sin x|$  o těchže souřadnicích  $x$  a žádné jiné body tuto vlastnost nemají. (Předpokládám, že čtenář ví, že množina řešení úlohy tohoto typu musí být částí průniku definičních oborů obou uvažovaných funkcí.)



Obr. 3

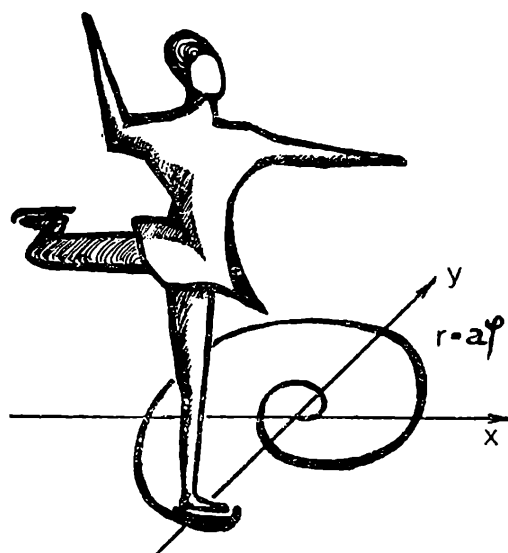


Obr. 4

I když tato metoda řešení některých druhů nerovností není ničím novým, připomínám ji proto, že jde o metodu skutečně grafickou a pro příklady podobného druhu jako je úloha 2 dokonce jedinou metodou použitelnou na střední škole.

Závěrem několik jednoduchých příkladů k procvičení

1.  $|x + 2| > |x|$   $x \in (-1; \infty)$
2.  $|3x + 4| \leq |x - 4|$   $x \in <-4; 0>$
3.  $|x + 1| < |2x - 3|$   $x \in (-\infty; \frac{2}{3}) \cup (4; \infty)$
4.  $|x^2 - 2| \geq 3x - 2$   $x \in (-\infty; 1> \cup <3; \infty)$



## Asymptoty hyperboly

FRANTIŠEK JANEČEK, gymnásium Broumov

V deskriptivní geometrii, analytické geometrii, projektivní geometrii, při zkoumání řezů na kvadratických plochách i jinde zkoumáme vlastnosti kuželoseček a seznamujeme se tak různými metodami s jejich zajímavými vlastnostmi. V následujícím článku budeme studovat vlastnosti asymptot hyperboly. Příslušné důkazy budou prováděny většinou metodou analytické geometrie. Dokázaných poznatků můžeme vhodně použít při řešení některých konstrukčních úloh o hyperbole.

Předpokládám, že čtenář je seznámen s kuželosečkami v rozsahu probíraném na střední škole v analytické a deskriptivní geometrii, to znamená, že ovládá jejich ohniskové definice, další základní pojmy a konstrukce, fokální vlastnosti a početní vyjádření jednotlivých kuželoseček.

Pro naše účely si přesto zopakujeme některé základní pojmy z analytické geometrie hyperboly.

I. Je-li soustava souřadnic zvolena tak, že její osa  $x$  splývá s hlavní osou hyperboly a počátek s jejím středem, pak má hyperbola rovnici

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2; \quad (1)$$

přitom  $a$  je hlavní,  $b$  vedlejší poloosa hyperboly.

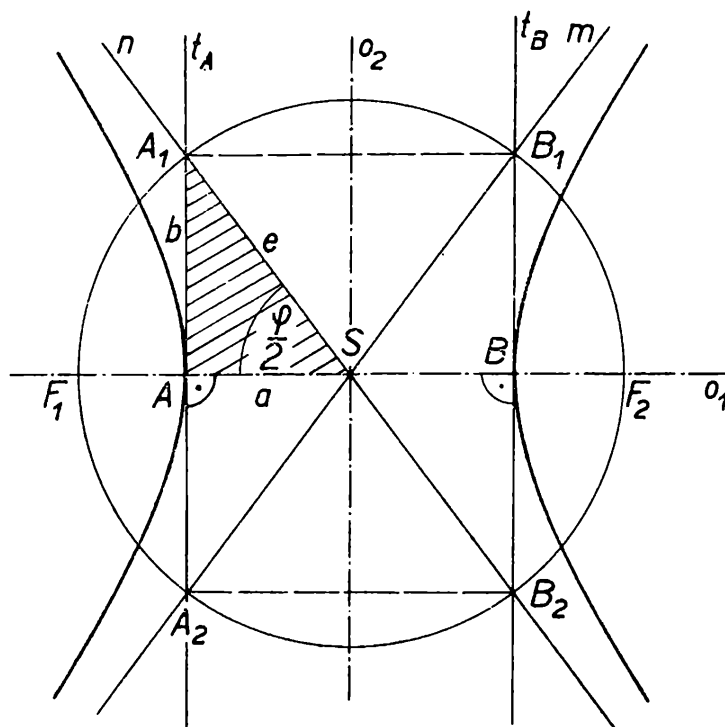
II. Hyperbola má ve svém libovolném bodě  $T$  jedinou tečnu. Má-li hyperbola rovnici (1) a je-li  $T \equiv (x_1, y_1)$ , pak má tato tečna rovnici

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2 \quad (2)$$

Pro naše účely zavedeme nyní tuto definici:

*Asymptotami hyperboly nazýváme úhlopříčky charakteristického obdélníka hyperboly.*

Jsou tedy asymptoty úhlopříčkami v obdélníku o středu  $S$  a rozměrech  $2a$ ,  $2b$ , jeho vrcholy leží na kružnici opsané kolem středu  $S$  poloměrem rovným výstřednosti  $e$  dané hyperboly. (Viz obr. 1.)



Obr. 1

Asymptoty hyperboly jsou vlastně tečny vedené k hyperbole z jejího středu; dotykové body těchto tečen jsou nevlastní.

Z konstrukce asymptot plyne věta:

*Úhly asymptot hyperboly jsou půleny osami.*

Vrcholové úhly určené asymptotami  $m$ ,  $n$  obsahující hlavní osu  $o_1$  nazveme hlavními úhly asymptot, úhly k nim vedlejší vedlejšími úhly asymptot.

Pro velikost  $\varphi$  hlavních úhlů asymptot zřejmě platí (viz charakteristický trojúhelník)

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$$

Metodami analytické geometrie se lehce určí rovnice asymptot

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

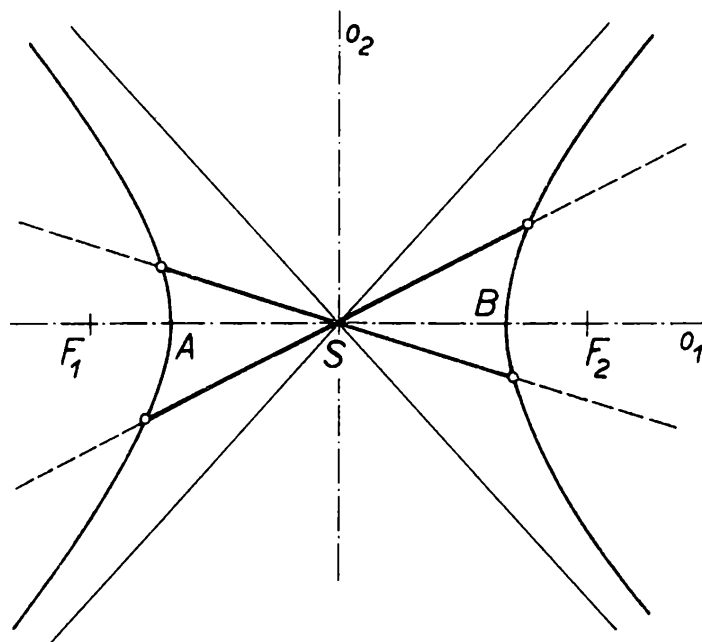
tj.

$$bx + ay = 0, \quad bx - ay = 0 \quad (3)$$

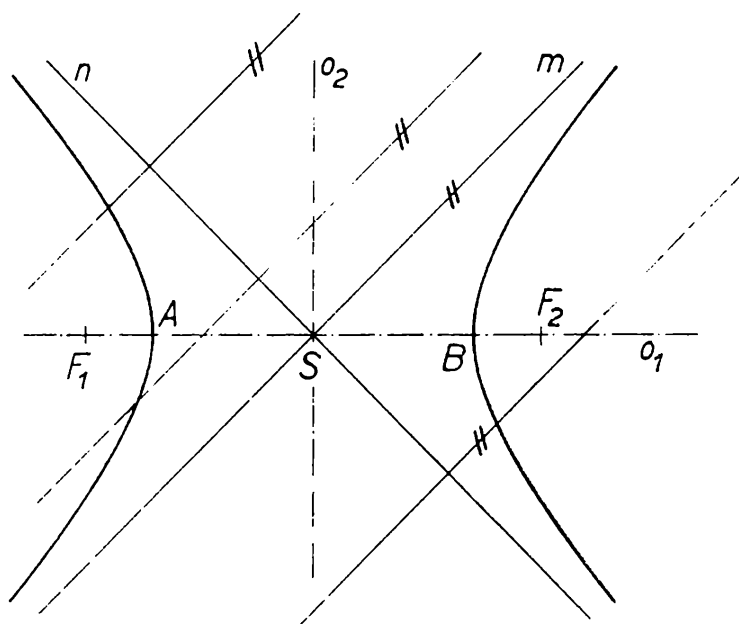
Patří-li přímka (různá od osy  $y$ ) vnitřku hlavních, resp. vedlejších úhlů asymptot (3), pak má zřejmě rovnici

$$y = kx ,$$

$$\text{kde } |k| < \frac{b}{a}, \text{ resp. } |k| > \frac{b}{a}$$



Obr. 2



Obr. 3

Na základě této poznámky lze snadno analyticky dokázat větu:

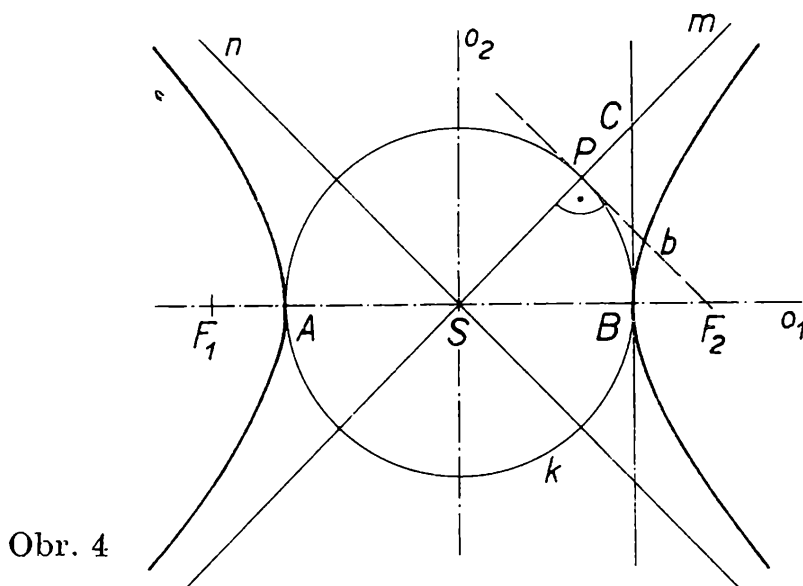
**V ě t a 1.** *Hyperbola má právě dvě asymptoty  $m, n$ , pro které platí:*

a) *Obě větve hyperboly leží uvnitř hlavních úhlů asymptot. Tzn. mimo jiné také to, že asymptoty nemají s hyperbolou žádný společný bod (viz obr. 2).*

b) Každá přímka patřící s výjimkou jediného bodu (středu hyperboly) vnitřku hlavních úhlů asymptot protne každou větev hyperboly v jediném bodě. Každá přímka patřící s výjimkou jediného bodu (středu hyperboly) vnitřku vedlejších úhlů asymptot leží celá vně hyperboly. (Viz obr. 2.)

c) Každá přímka rovnoběžná s asymptotou, ale nesplývající s asymptotou, protne hyperbolu právě v jednom bodě, který rozdělí danou přímku na dvě polopřímky, z nichž vždy jedna leží celá uvnitř a druhá celá vně hyperboly (viz obr. 3).

**V ě t a 2.** Vzdálenost ohniska hyperboly od její asymptoty je rovna  $b$ , kde  $b$  je vedlejší poloosa této hyperboly.



Obr. 4

**D ů k a z.** (Viz obr. 4.) Označme  $C$  průsečík tečny hyperboly ve vrcholu  $B$  s asymptotou  $m$ . Podle konstrukce je kolmice  $F_2P$  z ohniska  $F_2$  na asymptotu  $m$  tečnou kružnice  $k \equiv (S; a)$ . Potom

$$\triangle SBC \cong \triangle SPF_2 \text{ (usu)}$$

Odtud plyne, že je  $PF_2 = BC = b$ .

**P o z n á m k a.** Větu lze dokázat také analyticky:

Asymptota  $SC$  má rovnici  $bx - ay = 0$ , ohnisko  $F_2 = (e, 0)$ . Vzdálenost  $v$  asymptoty od ohniska je tedy

$$v = \frac{be}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$$

neboť

$$a^2 + b^2 = e^2$$

**V ě t a 3.** Součin vzdáleností každého bodu hyperboly od obou jejích asymptot je konstantní a rovná se číslu

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

kde  $a, b$  jsou poloosy hyperboly.

D ů k a z. Zvolme soustavu souřadnic tak, aby měla osu  $x$  v hlavní ose hyperboly a počátek v jejím středu. Potom má hyperbola rovnici (1) a její asymptoty mají rovnice (3).

Je-li  $L \equiv (x_0, y_0)$  libovolný bod hyperboly, pak má od asymptot tyto vzdálenosti

$$v_1 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad v_2 = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Je tedy

$$v_1 v_2 = \frac{|(bx_0 + ay_0)(bx_0 - ay_0)|}{a^2 + b^2} = \frac{|b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2|}{a^2 + b^2}$$

Protože bod  $L \equiv (x_0, y_0)$  leží na dané hyperbole, je podle (1)

$$b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2,$$

takže je

$$v_1 v_2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

jak bylo dokázat.

P o z n á m k a. Užitím věty 3 můžeme odvodit početní vyjádření rovnoosé hyperboly, která má asymptoty v souřadnicových osách.

V ě t a 4. *Součin vzdáleností libovolného bodu  $M$  hyperboly od průsečíků  $U_1, U_2$  asymptot s přímkou  $u \in M$  rovnoběžnou s hlavní osou je roven  $a^2$ .*

D ů k a z (viz obr. 5). Budiž dána hyperbola o rovnici (1), její asymptoty mají pak rovnice (3). Nechť  $M \equiv (x, y)$  je libovolný bod této hyperboly. Průsečíky  $U_1, U_2$  asymptot s přímkou  $u$  mají souřadnice

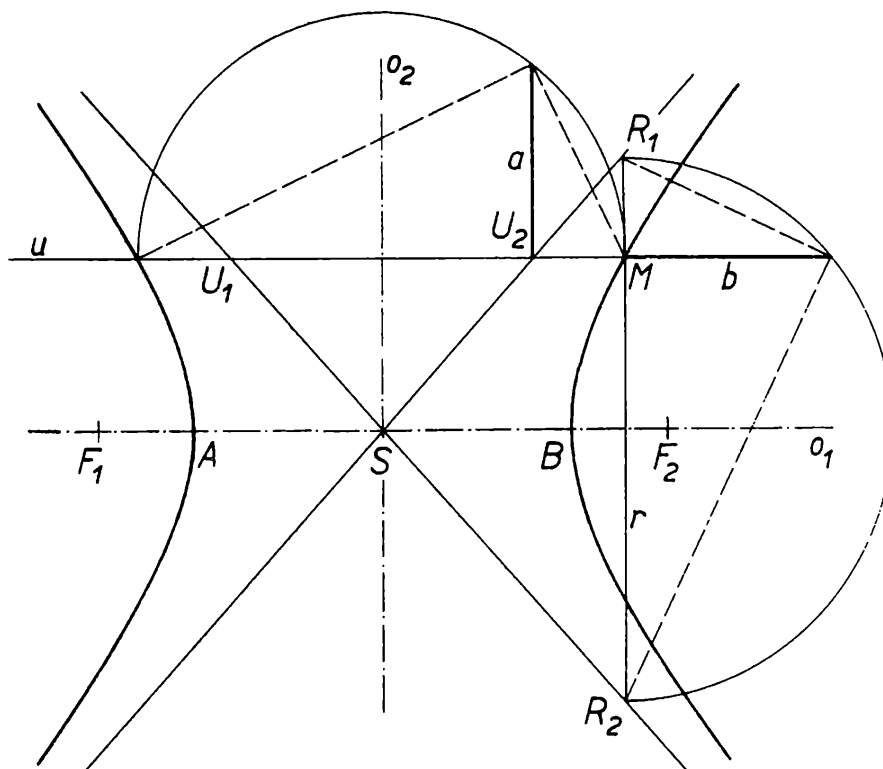
$$U_1 \equiv \left(-\frac{a}{b}y, y\right), \quad U_2 \equiv \left(\frac{a}{b}y, y\right)$$

Součin vzdáleností  $MU_1, MU_2$  je pak roven

$$\begin{aligned} MU_1 \cdot MU_2 &= \left|x + \frac{a}{b}y\right| \left|x - \frac{a}{b}y\right| = \left|x^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right| = \\ &= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{b^2} = \frac{a^2b^2}{b^2} = a^2 \end{aligned}$$

Zcela obdobně se provede důkaz následující věty.

**V ě t a 5.** *Součin vzdáleností libovolného bodu  $M$  hyperboly od průsečíků  $R_1, R_2$  asymptot s přímkou  $r \in M$  rovnoběžnou s vedlejší osou je roven  $b^2$ . (Viz obr. 5.)*



Obr. 5

**P o z n á m k y.** 1. Vlastností obsažených ve větách 4 a 5 užíváme, máme-li omezit osy hyperboly určené asymptotami a jedním bodem.

2. Lze dokázat: Jestliže pro body  $M, R_1, R_2$  ležící na kolmici k hlavní ose, přičemž  $M$  je vnitřní bod úsečky  $R_1R_2$ , platí

$$MR_1 \cdot MR_2 > b^2 \text{ (resp. } MR_1 \cdot MR_2 < b^2 \text{),}$$

pak bod  $M$  leží uvnitř (resp. vně) dané hyperboly.

3. Vztahy uvedené ve větách 4 a 5 se dají zobecnit. Platí totiž tato věta: Součin úseků na sečnách hyperboly libovolného směru různého od směru asymptot a měřených od bodů hyperboly k asymptotám je konstantní.

**V ě t a 6.** *Rovnoběžník, jehož dvě strany leží na asymptotách hyperboly a dalším vrcholem je libovolný bod  $M$  této hyperboly, má konstantní obsah rovný  $\frac{ab}{2}$*

**D ů k a z** (viz obr. 6). Budiž dána hyperbola a její libovolný bod  $M$ . Budtež  $N_1, N_2$  průsečíky asymptotických sečen procházejících bodem  $M$  s asymptotami  $m, n$ . Obsah rovnoběžníka  $MN_1SN_2$  vypočteme užitím trigonometrie. Platí

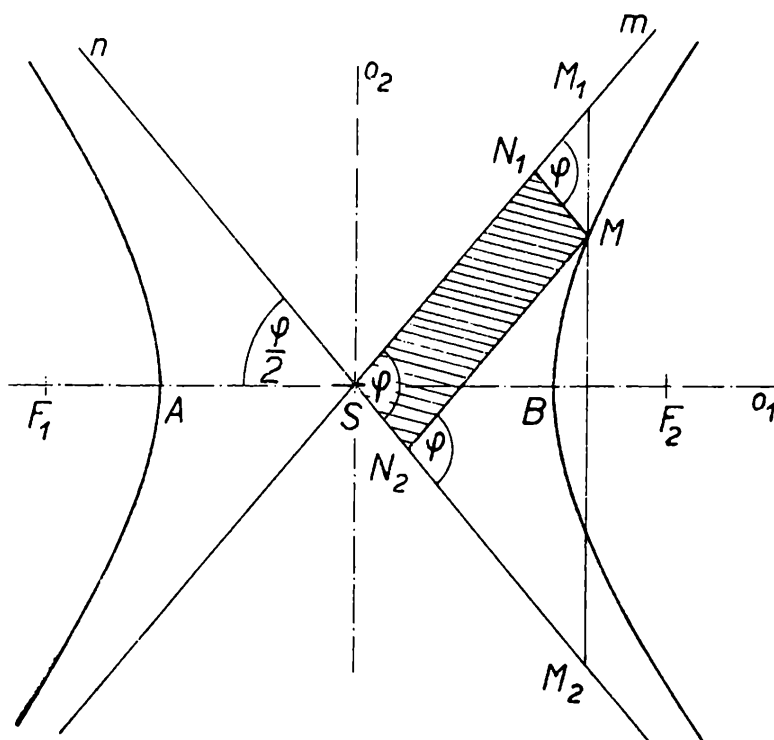
$$P = MN_1 \cdot MN_2 \cdot \sin \varphi, \quad (*)$$

kde  $\varphi$  je velikost hlavního úhlu asymptot.



Vedme bodem  $M$  kolmici k hlavní ose, jež protne asymptoty v bodech  $M_1, M_2$ . Vzniknou rovnoramenné trojúhelníky  $MM_1N_1, MM_2N_2$ . Z těchto trojúhelníků dostaneme

$$MN_1 = \frac{MM_1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \quad MN_2 = \frac{MM_2}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$$



Obr. 6

Je-li bod  $M$  bodem hyperboly, pak po dosazení za  $MN_1, MN_2$  do vztahu (\*) dostaneme podle věty 5

$$P = \frac{MM_1}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{MM_2}{\sin \varphi} = \frac{b^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{b^2}{2} \cotg \frac{\varphi}{2}$$

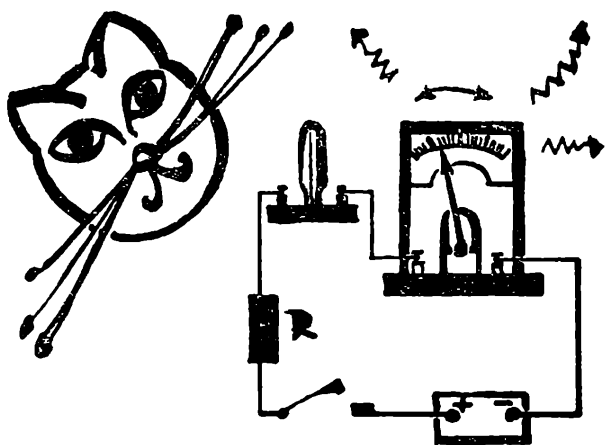
Z charakteristického trojúhelníka plyne

$$\cotg \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{b}$$

čili po dosazení opravdu dostáváme

$$P = \frac{1}{2} ab$$

(Pokračování)

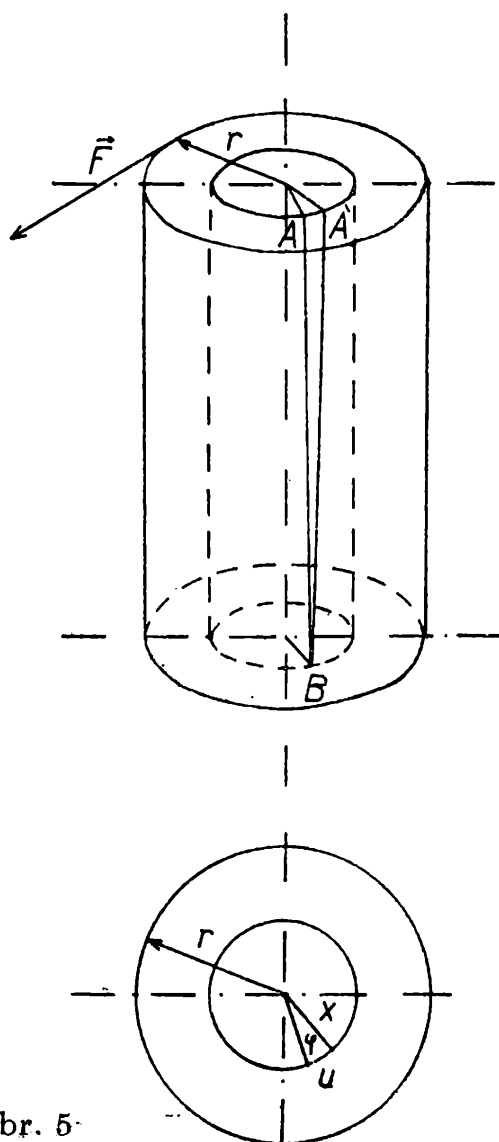


F Y Z I K A

## Pružná deformace tuhého tělesa

ZDENĚK UNGERMANN, PF Hradec Králové

(Dokončení)



Obr. 5

### Pružnost v torzi.

Deformace v torzi vznikne tehdy, budeme-li působit na tyč, drát, provaz, válec silou, která bude ležet v rovině průřezu a bude kolmá k podélné ose tělesa (obr. 5). Druhý konec je pevný, tj. vzniká reakční moment. Budeme uvažovat jen průřez kruhový, jelikož při nekruhovém průřezu je problém složitější a v praxi se nepoužívá. Uvedený moment síly způsobí pootočení horní podstavy, např. válce. Tím se ovšem pootočí i další průřezy pod horní podstavou a tady vlastně dochází mezi těmito vrstvami ke skluzu. Je tedy zřejmé, že deformace torzí úzce souvisí s deformací smykem. O tom nás také přesvědčí následující úvaha. Dejme si za úkol stanovit závislost mezi momentem síly  $F$  a úhlem stočení  $\varphi$ .

Uvažujme válec délky  $l$  a poloměru  $r$ , na který působí na obvodě podstavy síla  $F$  (obr. 5). Horní průřez je deformačním momentem

$M = F r$  pootočen o úhel  $\varphi$  (v radiánech), je to tzv. celkové stočení. Vrstva AB se vlastně smykem posunula do polohy A'B. Relativní posunutí  $\gamma$  není v celém válci konstantní, mění se se vzdáleností od osy válce. Např. pro vzdálenost  $x$  od osy dostáváme podle obr. 5

$$\gamma = \frac{u}{l}$$

kde  $u = x\varphi$ , a tedy

$$\gamma = \frac{\varphi}{l} x \quad (8)$$

Relativní posunutí  $\gamma$  je velmi malé i při velkém stočení, pokud je poloměr válce malý proti jeho délce.

Podle Hookova zákona je podle (7) tečné napětí přímo úměrné relativnímu posunutí, tj.

$$\tau = \gamma G$$

a podle (8) je

$$\tau = \frac{\varphi}{l} G x \quad (9)$$

Ze vztahu (9) je patrné, že tečné napětí roste přímo úměrně se vzdáleností od osy válce. Průměrné tečné napětí určíme tedy jako aritmetický průměr tečného napětí pro  $x = 0$  a pro  $x = r$ . Pro průměrné tečné napětí dostáváme tak podle (9)

$$\bar{\tau} = \frac{\varphi}{2l} G r \quad (10)$$

Jelikož síla  $F$  působí na plochu  $S = \pi r^2$ , je

$$\bar{\tau} = \frac{F}{\pi r^2} \quad (11)$$

Použitím (10) a (11) dostáváme

$$F = \pi \frac{\varphi}{2l} G r^3$$

a moment síly

$$M = F r = \frac{\pi G r^4}{2l} \varphi \quad (12)$$

Z (12) můžeme určit celkové stočení  $\varphi$

$$\varphi = \frac{2l}{\pi G r^4} M \quad (13)$$

Vidíme, že celkové stočení  $\varphi$  je jednak závislé na délce válce  $l$  (drátu, tyče .), na momentu působící síly  $M$ , na materiálu válce ( $G$ ) a na

poloměru válce  $r$ . Tato závislost je velmi důležitá. Zmenšuje-li se poloměr deformovaného válce stálé výšky, stočení způsobené týmž momentem  $M$  roste se čtvrtou mocninou poloměru. To znamená, že tenký drát, tenké vlákno se i působením velmi malé síly poznatelně stočí; je-li toto vlákno spojeno se zrcátkem, na které dopadá úzký svazek světelných paprsků, můžeme toto stočení měřit. Podle vztahu (13) pak můžeme určit velikost  $M$  a tedy i velikost působící síly  $F$ . Toho používáme např. u torzních vah k měření velmi malých sil. Tak byly změřeny gravitační, elektrické síly a síly povrchového napětí kapalin. Dále se např. tohoto poznatku používá u velmi citlivých zrcátkových galvanometrů.

Ve vztahu (13) pro celkové stočení se objevil modul pružnosti ve smyku, kterému proto také někdy říkáme modul torze. Změříme-li všechny ostatní veličiny ve vztahu  $\varphi = \frac{2lM}{\pi Gr^4}$  můžeme z rovnice vypočítat modul pružnosti ve smyku  $G$ . Tato metoda se nazývá statická. Kromě této metody měření  $G$  existuje ještě metoda dynamická, metoda torzních kmitů.

### Torzní kmity.

Deformujeme-li torzní drát, na kterém je zavěšena např. koule, o úhel  $\varphi_0$  a pustíme, pak koule i drát konají torzní kmity, které při malém  $\varphi_0$  patří mezi kmity harmonické. K otočení drátu o úhel  $\varphi$  potřebujeme podle (12) moment síly

$$M = \frac{\pi Gr^4}{2l} \varphi$$

Podle principu akce a reakce působí drát reakčním momentem

$$M' = - \frac{\pi Gr^4}{2l} \varphi = - D \varphi \quad (14)$$

kde  $D = \frac{\pi Gr^4}{2l}$  je tzv. direkční moment, který má analogický význam jako tuhost pružiny. Direkční moment  $D$  závisí na fyzikálních vlastnostech deformovaného drátu. Bude-li moment setrvačnosti koule  $J$ , bude při zkroucení o úhel  $\varphi$  působit na kouli moment  $M'$ , který působí kmitavý pohyb koule kolem osy drátu. Pro moment síly při rotačním pohybu tělesa platí

$$M' = J \alpha^1, \quad (15)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti tělesa a  $\alpha$  je úhlové zrychlení tělesa.

---

<sup>1)</sup> Viz např.: 7. ročník fyzikální olympiády, SPN Praha 1967, str. 48  
Fyzika pro II. ročník SVVŠ, SPN Praha 1965, str. 118, 119

Použijeme-li vztahu (15), pak z rovnice (14) obdržíme

$$\alpha = -\frac{D}{J} \varphi \quad (16)$$

Podle definice harmonického pohybu je zrychlení přímo úměrné okamžité výchylce, ale je opačně orientované (F II, str. 108). Konstanta úměrnosti je  $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$ . Srovnáme-li vztah (16) s touto definicí, pak pro torzní kmity platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

a dosadíme-li za  $D$ , potom

$$T = \sqrt{\frac{8\pi J l}{G r^4}} \quad (17)$$

Změříme-li poloměr drátu  $r$ , délku drátu  $l$ , dobu kmitu  $T$  a známe-li moment setrvačnosti zavěšeného tělesa vzhledem k ose totožné s podélnou osou drátu, pro kouli  $J = \frac{2}{5} m R^2$ ,  $m$  je hmotnost koule,  $R$  její poloměr, pak můžeme ze vztahu (17) určit modul pružnosti ve smyku  $G$ . Platí

$$G = \frac{8\pi J l}{T^2 r^4}$$

Vztahu (17) se dá použít k měření momentu setrvačnosti těles vzhledem k ose zavěšeného vlákna, známe-li modul pružnosti ve smyku.

Shrneme-li uvedené poznatky, pak vidíme, že chování materiálu při pružných deformacích je charakterisováno modulem pružnosti v tahu ( $E$ ) a ve smyku ( $G$ ) a Poissonovým číslem  $\mu$ . Mezi těmito veličinami platí vztah

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (18)$$

Ú l o h y.

1. Gumová hadice má délku  $l$  a vnitřní průměr  $d$ . Tahem prodloužíme hadici o  $\Delta l$ . Určete vnitřní průměr natažené hadice, jestliže je Poissonovo číslo  $\mu$ . Předpokládejte, že jde o pružnou deformaci.

Řešte nejdříve obecně a pak pro hodnoty  $l = 50$  cm,  $d = 1$  cm,  $\Delta l = 10$  cm a  $\mu = 0,4$ .

Ř e š e n í.

Pro příčnou deformaci v tahu platí zákon Hookův ve formě (2), tj.

$$\eta = \mu \varepsilon, \quad (19)$$

kde  $\eta = \Delta d/d$  je relativní příčné zkrácení a  $\varepsilon = \Delta l/l$  relativní podélné prodloužení. Dosadíme-li do vztahu (19), dostaneme

$$\Delta d = \mu \frac{\Delta l}{l} d$$

a průměr po natažení

$$d_k = d - \Delta d = d \frac{l - \mu \Delta l}{l} \quad (20)$$

Číselně:  $d_k = \frac{23}{25} \text{ cm} = 0,9 \text{ cm}$ .

2. Ocelový drát hustoty  $\rho$ , délky  $l$  a průřezu  $S$  je napínán silou  $F$ . Jak se změní hustota oceli, je-li pro ocel Youngův modul  $E$  a modul pružnosti ve smyku  $G$ . Uvažujte elastickou deformaci.

**Ř e š e n í**

Označíme-li  $m$  hmotnost drátu,  $V$  původní objem drátu a  $\Delta V$  změnu objemu, pak změna hustoty je dána

$$\Delta \rho = \rho - \frac{m}{V + \Delta V} \quad (21)$$

Jelikož  $m = V\rho$ , pak z (21) po úpravě dostáváme

$$\Delta \rho = \rho - \frac{\rho}{1 + \frac{\Delta V}{V}} = \frac{\frac{\Delta V}{V}}{1 + \frac{\Delta V}{V}} \rho \quad (22)$$

Podle vztahu (4) je

$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu) \frac{p}{E}$$

a jelikož modul pružnosti v tahu a ve smyku souvisejí s Poissonovým číslem [viz (18)], dostaneme tak výsledek ve tvaru

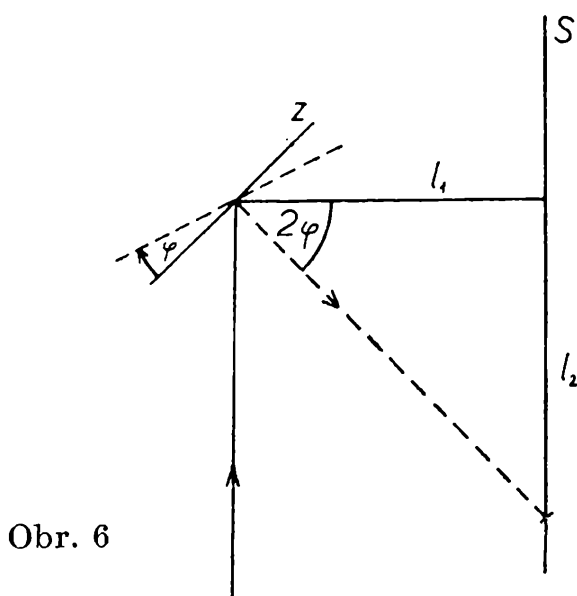
$$\Delta \rho = \rho \frac{1 - \frac{E - 2G}{G}}{1 + \left(1 - \frac{E - 2G}{G}\right) \frac{F}{ES}} \frac{F}{SE} = \rho F \frac{3G - E}{3GF + ESG - EF} \quad (23)$$

Mohli bychom počítat též přibližně. Ve vztahu (22) můžeme  $\frac{\Delta V}{V}$  proti 1 zanedbat a pak dostaneme

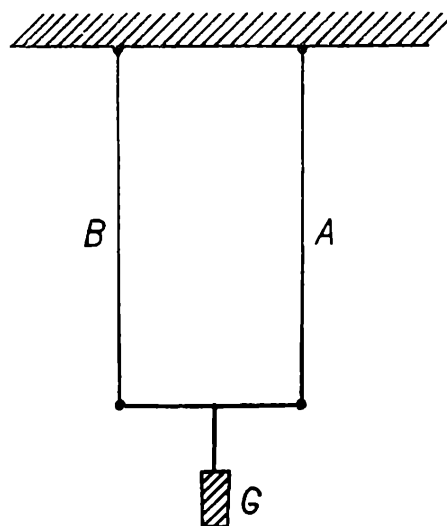
$$\Delta \rho = \rho \frac{\Delta V}{V} = \rho \frac{F}{ES} \frac{3G - E}{G} \quad (24)$$

Změna hustoty je určena vztahem (23) nebo (24). Pro ocel je  $E = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ ,  $G = 8 \cdot 10^{11} \text{ N m}^{-2}$ . Je-li  $F = 10^3 \text{ N}$ ,  $l = 4 \text{ m}$ ,  $S = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$  a  $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , pak  $\Delta \rho = 7 \text{ kg m}^{-3}$ .

3. Zrcátko galvanometru visí na tenkém drátě délky  $l$  a průměru  $d$ . Světelný paprsek odražený od zrcátka dopadá kolmo na stupnici ve vzdálenosti  $l_1$  od zrcátka. Prochází-li cívkou galvanometru elektrický proud, posune se světelná stopa na stupnici o délku  $l_2$ . Určete krouticí moment, je-li modul pružnosti ve smyku  $G$ .



Obr. 6



Obr. 7

**Ř e š e n í.**

Při řešení použijeme známého poznatku, že při otočení zrcadla o úhel  $\varphi$  se odražený paprsek odchýlí o úhel  $2\varphi$  (obr. 6).  $S$  na obrázku znamená stupnici galvanometru a  $Z$  je zrcátko galvanometru. Krouticí moment určíme podle vztahu (12)

$$M = \frac{\pi d^4 G}{2 l 16} \varphi ,$$

$$M = \frac{\pi d^4 G}{32 l} \varphi \quad (25)$$

Pro malé  $\varphi$  je  $\text{tg } 2\varphi = 2\varphi = l_2/l_1$  a odtud podle (25)

$$M = \frac{\pi d^4 G}{64 l} \frac{l_2}{l_1}$$

## Cvičení.

4. Ocelový drát o průměru  $d$  má délku  $l$ , visí-li na něm závaží o tíze  $F_1$ . O kolik se drát prodlouží, jestliže se tíha závaží zvětší o  $\Delta F$ . Modul pružnosti oceli v tahu je  $E$ .

Řešte obecně a pak pro hodnoty  $d = 10^{-3}$  m,  $l = 50$  m,  $F_1 = 200$  N,  $\Delta F = 100$  N,  $E = 2,0 \cdot 10^{11}$  N m<sup>-2</sup>. [Výsledek:  $\Delta l = l \Delta F / \left( \frac{\pi d^2}{4} E + F_1 \right)$ ,  
 $\Delta l = 0,0032$  m.]

5. Dvě tyče  $A$ ,  $B$  délky  $l$ , jedna železná ( $A$ ) a druhá měděná, jsou zavěšeny tak, že jejich vzdálenost je  $d = 0,8$  m (obr. 7). Konce tyčí jsou spojeny další pevnou horizontální tyčí. Jak daleko od tyče  $A$  musíme zavěsit závaží, aby spojovací tyč zůstala horizontální. Pro měď je

$E_1 = 1,2 \cdot 10^{11}$  N m<sup>-2</sup> a pro železo  $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$  N m<sup>-2</sup>. [Výsledek:  
 $x = \frac{E_1 d}{E_1 + E}$ ,  $x = 0,3$  m]

6. Předpokládejme pružnou deformaci tyče ( $E$ ) v tahu. Působíme-li na tyč silou  $F_1$ , má průměr  $d_1$ . Při působení silou  $F_2$  má průměr  $d_2$ . Určete průměr  $d_0$  nezatížené tyče a Poissonovo číslo  $\mu$ .

[Výsledek:  $d_0 = \frac{F_2 d_1^3 - F_1 d_2^3}{F_2 d_1^2 - F_1 d_2^2}$   $\mu = \frac{1}{4} \pi E \frac{d_1^2 d_2^2 (d_1 - d_2)}{F_2 d_1^3 - F_1 d_2^3}$ ]

## Povinná literatura.

Fyzika pro II. ročník SVVŠ, SPN Praha 1965, str. 81—88.

## Doporučená literatura.

Ant. Bělař a kol., Fyzika pro učitele, I. díl, SPN Praha 1967, str. 86—91.

Říman, Slavík, Šoler, Fyzika, SNTL Praha 1964.

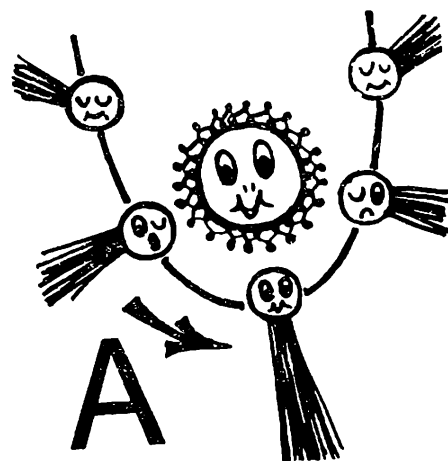
Slavík a kol.: Základy fyziky I, NČSAV Praha 1962, str. 232—261.



## VZOR POSLANCE

Povídá se, že Newton se jako člen sněmovny choval tiše a roztržitě. Promluvil v ní prý jen jednou: požádal sluhu, aby zavřel okno, které způsobovalo průvan.





## Astronomické symboly

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc:

Při četbě astronomické literatury se často setkáme s řadou symbolů, které vznikly již ve starověku. Dosud používané znaky jsou nakresleny na obr. 1. Některé z nich najdeme ve středoškolských učebnicích fyziky.

Centrálním tělesem sluneční soustavy je *Slunce* (1). Této značky se užívalo v kalendářích také pro neděli. Fáze *Měsíce* (2) se vyznačují v kalendářích buď prázdným kolečkem, je-li Měsíc v úplňku, nebo plným kroužkem, je-li v novu. Má-li srpek tvar písmene D, pak je Měsíc v první čtvrti („dorůstá“); má-li tvar obráceného písmene D

|    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |
|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|
| 1  |  | 2  |  | 3  |  | 4  |  | 5  |  | 6  |  |
| 7  |  | 8  |  | 9  |  | 10 |  | 11 |  | 12 |  |
| 13 |  | 14 |  | 15 |  | 16 |  | 17 |  | 18 |  |
| 19 |  | 20 |  | 21 |  | 22 |  | 23 |  | 24 |  |
| 25 |  | 26 |  | 27 |  | 28 |  | 29 |  | 30 |  |
| 31 |  | 32 |  | 33 |  | 34 |  | 35 |  | 36 |  |

Obr. 1

(nebo C), pak je Měsíc v poslední čtvrti („couvá“). Další symboly se týkají velkých planet: *Merkur* (3), *Venuše* (4), *Země* (5), *Mars* (6), *Jupiter* (7), *Saturn* (8), *Uran* (9), *Neptun* (10) a *Pluto* (11). Poslední planeta Pluto, objevená v roce 1930, má svůj symbol odvozen od písmen *P* a *L*, která jsou jednak počátečními písmeny názvu planety, jednak iniciálami astronoma Percivala Lowella, který již v r. 1915 vypočítal dráhu této planety. Pluto má ze všech planet nejvíce výstřednou dráhu, takže se v přísluní dostává ke Slunci blíže než Neptun. Symbol (12) označuje *kometu*.

Autorem dalších deseti symbolů je francouzský astronom a fyzik Dominik F. Arago (1786—1853), který v díle „*Astronomie populaire*“ uveřejnil značky pro tehdy známé planetky. Dnes se planetky kromě jména označují pořadovým číslem a jejich počet přesáhl 1600.

*Ceres* (13), planetka č. 1 byla objevena italským hvězdářem G. Piazzim v Palermu 1. ledna 1801. Zpočátku ji považoval za kometu a sledoval ji až do 11. února, kdy pro onemocnění svá pozorování přerušil. O svém objevu napsal několika astronomům, mezi jinými i Bodemu, který se domníval, že jde o dlouho hledanou planetu, která by vyplnila velkou mezeru mezi drahami Marsu a Jupitera. Úkolu vypočítat dráhu nově objeveného tělesa se ujal mladý matematik Carl Friedrich Gauss, který dokázal, že nově objevené těleso se pohybuje po eliptické dráze v očekávané vzdálenosti od Slunce. Přesně za rok planetu znovu objevil astronom Olbers v Brémách. V římské mytologii je Ceres bohyní země (úrody) a její symbol je odvozen od srpu. Průměr planetky je 740 km.

*Pallas* (14), planetka č. 2 byla objevena 28. března 1802 Olbersem v Brémách. Její průměr je 480 km. V řecké mytologii je Pallas dcerou boha Dia (zrozená z jeho hlavy), bohyně řemesel. Symbolem planetky je štít.

*Juno* (15), planetka č. 3 byla objevena 1. září 1804 Hardingem. Má průměr 200 km. V římské mytologii byla Juno manželkou Jupiterovou, ochránkyní manželství.

*Vesta* (16), planetka č. 4 byla objevena Olbersem 29. března 1807. Průměr planetky je 380 km. Studium Vesty se v minulých letech zabýval astronom Gehrels, který zjistil, že se planetka otáčí kolem osy za 5 hodin 20 minut 31,655 sekund; planetka má tvar koule, ale její povrch je nehomogenní co do barvy i co do odrazivosti. Vesta je římská bohyně domácího krbu.

*Astraea* (17), planetka č. 5 byla objevena 8. prosince 1845 poštovním úředníkem Henckem v Drážďanech. Astraea je postava z řecké mytologie, zastupující hvězdy.

*Hebe* (18), planetka č. 6 byla objevena 1. července 1847. V řecké mytologii je Hebe bohyní mládí, jejím symbolem je číše.

*Iris* (19), planetka č. 7 byla objevena v roce 1847. V řecké mytologii představuje duhu, odtud její symbolická značka.

*Flora* (20), planetka č. 8 byla objevena v r. 1847. Kolem Slunce obíhá za 3 roky a 98 dní. Římská bohyně rostlin, zvláště pak květin.

*Metis* (21), planetka č. 9 byla objevena v roce 1848. Oběžná doba kolem Slunce je 3 roky 251 den. Podle řecké mytologie je Metis dcerou Okeanovou, matka Pallas Athény. Představuje rozvážnost a moudrost.

*Hygiea* (22), planetka č. 10, obíhá kolem Slunce za 5 roků a 217 dní. Hygiea, dcera Asklépia, je postava z řecké mytologie. Představuje zdraví a bývá zobrazována jako panna s miskou v ruce, z níž napájí hada, posvátného tvora svého otce.

Další znaky se týkají aspektů a vyznačují polohy planet a Měsíce k Zemi a ke Slunci. Jsou to (23) *konjunkce* (vlevo) a *opozice* (vpravo). U Merkura a Venuše může nastat buď dolní konjunkce, je-li planeta mezi Zemí a Sluncem, nebo horní konjunkce, je-li Slunce mezi Zemí a planetou. U vnějších planet, které obíhají kolem Slunce za drahou Země, nastává pouze horní konjunkce. Opozice nastává jen u vnějších planet. Při opozici je planeta na spojnici Slunce a Země v bodě protilehlém Slunci. V době opozice planeta vychází při západu Slunce, kulminuje (vrcholí nad obzorem) o půlnoci a zapadá při východu Slunce, takže je na obloze pozorovatelná po celou noc.

*Kvadratura* (24) nastává u vnějších planet tehdy, je-li úhel planeta — Země — Slunce  $90^\circ$ . Při západní kvadratuře vychází planeta kolem půlnoci, kulminuje kolem 6 hodin a zapadá v poledne. Při východní kvadratuře vychází planeta kolem poledne, kulminuje kolem 18 hodin a zapadá o půlnoci — nad obzorem je pozorovatelná ve večerních hodinách. U Měsíce nastává konjunkce se Sluncem v novu, opozice při úplňku. Kvadratury jsou první a poslední čtvrt.

Posledních dvanáct symbolů na obr. 1 se týká zvířetníkových znamení. Původně byla znamení a souhvězdí totožná, avšak následkem precesního pohybu zemské osy se již zvířetníková souhvězdí a znamení neshodují.

*Beran* (25), latinsky Aries. Vstoupí-li Slunce v březnu do znamení Berana (astronomická délka Slunce je  $0^\circ$ ), pak nastává jarní rovnodennost, čili začátek astronomického jara. Téhož symbolu se v astronomii používá pro jarní bod, který je průsečíkem ekliptiky s rovinou světového rovníku. — *Býk* (26), lat. Taurus. Do znamení Býka vstupuje Slunce v dubnu (astronomická délka Slunce je  $30^\circ$ ). — *Blíženci* (27), lat. Gemini. Slunce vstupuje do znamení Blíženců v květnu ( $60^\circ$ ). — *Rak* (28), lat. Cancer. Do znamení Raka vstupuje Slunce v červnu ( $90^\circ$ ) a je to současně začátek astronomického léta čili letní slunovrat. — *Lev* (29), lat. Leo. Slunce vstupuje do znamení Lva v červenci (astr. délka je  $120^\circ$ ). — *Panna* (30), lat. Virgo. Do znamení

Panny vstupuje Slunce v srpnu (astronomická délka Slunce je  $150^\circ$ ). — *Váhy* (31), lat. Libra. Vstoupí-li Slunce do znamení Vah ( $180^\circ$ ), nastává podzimní rovnodennost, čili začátek astronomického podzimu. Tento symbol je totožný se symbolem pro podzimní bod. — *Štír* (32), lat. Scorpius. Slunce vstupuje do znamení Štíra v říjnu (astronomická délka je  $210^\circ$ ). — *Střelec* (33), lat. Sagittarius. Slunce vstupuje do znamení Střelce v listopadu ( $240^\circ$ ). — *Kozoroh* (34), lat. Capricornus. Dosáhne-li astronomická délka Slunce  $270^\circ$ , pak je to současně začátek astronomické zimy, čili zimní slunovrat. — *Vodnář* (35), lat. Aquarius. Slunce vstupuje do znamení Vodnáře v lednu (astr. délka je  $300^\circ$ ). — *Ryby* (36), lat. Pisces. Do tohoto znamení vstupuje Slunce v únoru a jeho astronomická délka je  $330^\circ$

Ještě připomeňme, že jarní bod (tj. znamení Berana) je nyní v souhvězdí Ryb a bod podzimní v souhvězdí Panny. Za 26 tisíc roků projdou znamení celou ekliptiku a vrátí se na čas k původním souhvězdím.

## NAŠE SOUTĚŽ

### Řešení úloh loňské soutěže

#### Matematika

1. Budiž  $\varrho$  poloměr kružnice vepsané do rovnoramenného trojúhelníka  $P_1$ ,  $\varrho_1$  poloměr kružnice připsané jeho základně,  $\varrho_2$  poloměr kružnice připsané jeho rameni. Při konstantním  $\varrho$  sestrojujeme další rovnoramenné trojúhelníky  $P_2, P_3, \dots, P_n$ , podle schématu

| Trojúhelník | Poloměr vepsané kružnice | Poloměr kružnice připsané základně | Poloměr kružnice připsané rameni |
|-------------|--------------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| $P_1$       | $\varrho$                | $\varrho_1$                        | $\varrho_2$                      |
| $P_2$       | $\varrho$                | $\varrho_2$                        | $\varrho_3$                      |
| $P_3$       | $\varrho$                | $\varrho_3$                        | $\varrho_4$                      |
| $\vdots$    |                          |                                    |                                  |
| $P_{n-1}$   | $\varrho$                | $\varrho_{n-1}$                    | $\varrho_n$                      |

Dokažte, že pro  $n \rightarrow \infty$  blíží se trojúhelníky  $P_n$  tvarem trojúhelníku rovnostrannému, který je opsán kružnici poloměru  $\varrho$ .

(Došlo 22 řešení)

Josef Brejcha

1

Řešil *Mojmír Šob, 3.B, SVVŠ Velké Meziříčí*:

Konstrukci, popsanou v úloze, můžeme vždy provést, neboť pro každé přirozené  $n$  platí.

D ů k a z. Pro obsah libovolného trojúhelníka platí

$$P = \varrho s = \varrho_i (s - a_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$s = \frac{1}{2} (a + b + c),$$

$\varrho_i$  je poloměr kružnice připsané straně  $a_i$ .

Odtud pak plyne

$$\varrho_i = \frac{s}{s - a_i} \varrho > \varrho, \quad c > b > a$$

Pro trojúhelník rovnostranný zřejmě platí

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 3\varrho$$

Obráceně, pro

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$$

platí

$$a_1 = a_2 = a_3 \tag{1}$$

Mezi poloměry kružnice vepsané a kružnic připsaných ke stranám rovnostranného trojúhelníka platí relace

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{2}{\varrho_2}$$

Podle konstrukce popsané v úloze je dále

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{2}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho_2} + \frac{2}{\varrho_3} = \dots = \frac{1}{\varrho_{n-1}} + \frac{2}{\varrho_n} \tag{2}$$

Po snadné úpravě obdržíme

$$\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right)$$

$$\frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{\varrho_4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{\varrho_2} \right)$$

$$\frac{1}{\varrho_{n-1}} - \frac{1}{\varrho_n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_{n-1}} - \frac{1}{\varrho_{n-2}} \right)$$

Dále

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_3} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \\ \frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{\varrho_4} &= - \frac{1}{2^2} \left( \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \\ - \frac{1}{\varrho_{n-1}} - \frac{1}{\varrho_n} &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} \left( \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right)\end{aligned}$$

odtud pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\varrho_{n-1}} - \frac{1}{\varrho_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-2}} \left( \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) = 0$$

což znamená, že lze klást

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = \varrho_0 > \varrho$$

Podle relace (2) bude

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\varrho_{n-1}} + \frac{2}{\varrho_n} \right) = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{2}{\varrho_0} \\ \varrho_0 &= 3\varrho.\end{aligned}$$

Vzhledem ke vztahu (1) je důkaz ukončen.

2. Body  $A_1, A_2, A_3$  tvoří rovnoramenný trojúhelník o hlavním vrcholu  $A_3$ ;  $\varrho$  budiž poloměr kružnice jemu vepsané. Při konstantním  $\varrho$  určete polohu  $A_3$  tak, aby délka ramen  $A_1A_3 = A_2A_3$  byla minimální.  
(Došlo 18 řešení) *Josef Břejcha*

*Řešil Josef Jirásko, 3.A, SVVŠ Semily:*

Nechť body  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jsou vrcholy rovnoramenného trojúhelníka o základně  $A_1A_2 = 2z$ ; dále budiž  $S$  střed,  $\varrho$  poloměr kružnice vepsané tomuto trojúhelníku,  $T_1$  její dotykový bod na základně  $A_1A_2$ ,  $T_2$  dotykový bod na rameni  $A_1A_3$ . Položme ještě  $SA_3 = x$ . Pak platí

$$\begin{aligned}A_1T_1 &= A_1T_2 = z, \\ A_3T_2 &= \sqrt{x^2 - \varrho^2} \\ A_1A_3 &= A_1T_2 + T_2A_3 = z + \sqrt{x^2 - \varrho^2}\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\triangle A_1T_1A_3 \sim \triangle ST_2A_3 \text{ (podle věty } uu),$$

lze psát

$$A_1T_1 \quad ST_2 = A_1A_3 : SA_3 ,$$

jinak

$$\begin{aligned} \varrho &= (z + \sqrt{x^2 - \varrho^2}) - x \\ &= \varrho \sqrt{\frac{x + \varrho}{x - \varrho}} \end{aligned}$$

Délka ramene  $A_1A_3$  je pak

$$y = A_1A_3 = z + \sqrt{x^2 - \varrho^2} = x \sqrt{\frac{x + \varrho}{x - \varrho}}$$

V úloze jde o stanovení lokálního extrému funkce

$$y = x \sqrt{\frac{x + \varrho}{x - \varrho}} = \sqrt{\frac{x^3 + x^2\varrho}{x - \varrho}}$$

Podle běžného postupu bude

$$y' = \frac{\frac{(3x^2 + 2x\varrho)(x - \varrho) - (x^3 + x^2\varrho)}{(x - \varrho)^2}}{2 \sqrt{\frac{x^3 + x^2\varrho}{x - \varrho}}}$$

Anulováním první derivace a po úpravě obdržíme pro stacionární body rovnici

$$x(x^2 - x\varrho - \varrho^2) = 0 ,$$

odkud určíme

$$x_1 = 0 , \quad x_2 = \varrho \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad x_3 = \varrho \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Geometrický význam ve smyslu dané úlohy může mít jedině kořen  $x_2$ , pro nějž daná funkce nabývá lokálního minima, jak se snadno zjistí pomocí druhé derivace. Označme  $Y$  průsečík výšky  $A_3T_1$  s kružnicí vepsanou trojúhelníku  $A_1A_2A_3$ . Pro  $x = x_2$  je pak

$$A_3Y = A_3S - \varrho = x_2 - \varrho = \varrho \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \varrho = \varrho \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

tj. délka úsečky  $A_3Y$  je rovna většímu dílu poloměru  $\varrho$  kružnice vepsané rozdělenému zlatým řezem, čímž je dána i konstrukce vrcholu  $A_3$  trojúhelníka vyhovujícího podmínkám úlohy.

### 3. Rovnice

$$x^4 + kx^3 + lx^2 + 60x + m = 0 ,$$

kde  $k, l, m$  jsou reálná čísla, má dva reálné různé dvojnásobné kořeny.

a) Napište vztah mezi koeficienty  $k, l, m$ .

b) Volte  $l = -11$ , určete dvojnásobné kořeny a koeficienty  $k, m$ .

c) Proveďte zkoušku.

(Došlo 22 řešení)

*Jan Fráňa*

*Řešil Josef Jirásko, III.A, SVVŠ Semily:*

a) Označme tyto dva reálné různé dvojnásobné kořeny  $u, v$ ; pak pro kořeny a koeficienty dané rovnice platí vztahy

$$\begin{aligned}2u + 2v &= -k, \\u^2 + 4uv + v^2 &= l, \\2uv^2 + 2uv^2 &= -60, \\u^2 \quad v^2 &= m \quad \text{tedy } m > 0\end{aligned}$$

Po úpravě máme rovnice

$$u + v = -\frac{1}{2}k, \quad (1)$$

$$(u + v)^2 + 2uv = l, \quad (2)$$

$$uv \quad (u + v) = -30, \quad (3)$$

$$|uv| = \sqrt[3]{m} \quad (4)$$

Jestliže  $uv > 0$ , pak

$$|uv| = uv = \sqrt[3]{m}$$

Dosazením

$$u + v = -\frac{1}{2}k, \quad uv = \sqrt[3]{m}$$

do (2) dostáváme hledaný vztah

$$k^2 + 8\sqrt[3]{m} = 4l \quad (5)$$

Mimoto platí podle (3) užitím (1), (4)

$$k\sqrt[3]{m} = 60 \quad (6)$$

Jestliže  $uv < 0$ , pak

$$|uv| = -uv = \sqrt[3]{m}$$

a hledaný vztah je

$$k^2 - 8\sqrt[3]{m} = 4l \quad (5')$$

a mimoto také

$$-k\sqrt[3]{m} = 60 \quad (6')$$

b) Pro  $l = -11$  je podle (2)

$$(u + v)^2 + 2uv = -11,$$



z čehož plyne  $uv < 0$ , neboť  $(u + v)^2 \geq 0$ . Proto použijeme pro další výpočet jen vztahy (5'), (6'). Vyloučením  $\sqrt{m}$  vyjde po úpravách rovnice

$$\begin{aligned} k^3 + 44k + 480 &= 0, \\ k^3 + 6k^2 - 6k^2 - 36k + 80k + 480 &= 0, \\ k^2 (k + 6) - 6k (k + 6) + 80 (k + 6) &= 0, \\ (k + 6) (k^2 - 6k + 80) &= 0 \end{aligned}$$

Tato rovnice má jediný reálný kořen  $k = -6$ ; pak  $m = 100$ .

Známe-li koeficienty  $k = -6$ ,  $l = -11$ ,  $m = 100$ , můžeme určit oba dvojnásobné kořeny  $u$ ,  $v$ , neboť

$$\begin{aligned} u + v &= -\frac{1}{2}k = 3 \\ uv &= -\sqrt{m} = -10 \end{aligned}$$

Tyto kořeny pak dá rovnice

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 10 &= 0, \\ (x - 5) (x + 2) &= 0 \quad u = 5, v = -2 \end{aligned} \tag{7}$$

c) Zkouška.

Pomocí Hornerova schématu zjistíme, že rovnici

$$x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 60x + 100 = 0$$

vyhovují kořeny  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -2$ .

Podíl

$$(x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 60x + 100) : (x - 5) (x + 2) = x^2 - 3x - 10,$$

což je po anulování rovnice (7), která má kořeny  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -2$ . Jsou tedy tyto kořeny dvojnásobné.

## Fyzika

1. Po nakloněné rovině, svírající s vodorovnou rovinou úhel  $30^\circ$ , klouzájí působením tíže dva kvádry  $A$  a  $B$  o hmotnostech  $m_1 = 100g$  a  $m_2 = 50g$ . Koeficient tření mezi kvádrem  $A$  a nakloněnou rovinou je  $f_1 = 0,30$ ; pro kvádr  $B$  je  $f_2 = 0,15$ . Určete:

a) zrychlení, jakým se soustava složená z kvádrů  $A$  a  $B$  pohybuje po nakloněné rovině,

b) sílu působící mezi oběma kvádry za pohybu.

(Došlo 22 řešení)

Zdeněk Janout

Řešil Mojmír Šob, III.B, SVVŠ Vel. Meziříčí, okr. Žďár n. Sáz.:

Za pohybu po nakloněné rovině působí na první kvádr ve směru pohybu tři síly

$$G'_1 = G_1 \sin \alpha = m_1 g \sin \alpha ,$$

třecí síla

$$T_1 = G_1 f_1 \cos \alpha = m_1 g f_1 \cos \alpha , \quad (1)$$

a síla  $F_1$ , kterou tlačí druhý kvádr na první.

Podobně na druhý kvádr působí ve směru jeho pohybu síly (viz obr.)

$$G'_2 = G_2 \sin \alpha = m_2 g \sin \alpha ,$$

$$T_2 = G_2 f_2 \cos \alpha = m_2 g f_2 \cos \alpha , \quad (2)$$

a síla  $F_2$ , kterou tlačí první kvádr na druhý (podle zákona akce a reakce platí  $F_1 = -F_2$ ).

Podle zadání úlohy  $f_1 > f_2$ , a proto se oba kvádry pohybují se stejným zrychlením, které označme písmenem  $a$ . Pak pohybové rovnice kvádrů mají tvar

$$m_1 a = G'_1 + F_1 - T_1 ,$$

$$m_2 a = G'_2 - F_2 - T_2 \quad (3)$$

Dosadíme-li z (1) a (2) do rovnic (3) a zavedeme-li označení  $F_0 = F_1 = -F_2$  dostaneme

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha + F_0 - m_1 g f_1 \cos \alpha ,$$

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha - F_0 - m_2 g f_2 \cos \alpha . \quad (4)$$

Rovnice (4) tvoří soustavu dvou rovnic pro neznámou sílu  $F_0$ , a zrychlení  $a$ . Jejich řešením dostáváme pro zrychlení  $a$  výraz

$$a = g \sin \alpha - \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha \quad (5)$$

a pro sílu  $F_0$  působící mezi oběma kvádry vztah

$$F_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (f_1 - f_2) \cos \alpha . \quad (6)$$

Po dosazení číselných hodnot do (5) a (6) obdržíme

$$a = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \frac{g}{2} = 2,8 \text{ ms}^{-2}$$

$$F_0 = 0,043 \text{ N}$$

**Závěr.**

- Soustava složená z kvádrů  $A$  a  $B$  se pohybuje po nakloněné rovině se zrychlením  $a$ , obecně určeným vztahem (5), které pro dané hodnoty je číselně rovno  $2,8 \text{ ms}^{-2}$ .
- Síla, působící mezi oběma kvádry za pohybu má velikost  $F_0$  obecně určenou vztahem (6) a pro dané hodnoty je číselně rovna  $0,043 \text{ N}$ .

# Výsledky loňské soutěže Rozhledů

*Loňské soutěže Rozhledů se zúčastnilo poměrně málo soutěžících — 36 jednotlivců a 5 kolektivů — zatímco předloni bylo 63 jednotlivců a 6 kolektivů. I jakost řešení nedosahovala úrovně soutěže předcházející. Je patrné, že k práci, a zejména k duševní práci, je potřebí klidu, kterého v minulém školním roce bylo velmi málo. Musíme proto všichni drobnou a solidní práci připravovat doby klidnější a lepší.*

## Výsledky v m a t e m a t i c e :

|                                                                                                                                                                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.—4. Ondřej M a t o u š, 2.f SVVŠ Praha<br>Jiří Š a f a ř í k, 2.b SVŠ Bratislava<br>Karel Š a f a ř í k, 1.b SVŠ Bratislava<br>Kolektiv 3.a SVVŠ Tanvald (Miloš M a z á n e k,<br>Miloš Z a h r a d n í k) | } 68 bodů |
| 5.—6. Pavol Č e r n e k, 2.b SVŠ Bratislava<br>Pavel P u d l á k, 2.d SVVŠ Praha                                                                                                                             | } 66 bodů |

## Výsledky ve f y z i c e :

|                                                                                                                            |                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| 1.—2. Hana D r a h o ň o v s k á, 1.a SVVŠ Brno<br>Mojmír Š o b, 3.b SVVŠ Velké Meziříčí                                   | } 36 bodů           |
| 3.—4. Jiří Š a f a ř í k, 2.b SVŠ Bratislava<br>Karel Š a f a ř í k, 1.b SVŠ Bratislava<br>Tomáš M a š e k, 3.f SVVŠ Praha | } 32 body<br>31 bod |

## Výsledky v k o n s t r u k t i v n í g e o m e t r i i :

|                                                                                                                                                |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.—2. Kolektiv 3.a SVVŠ Tanvald (Miloš M a z á n e k,<br>Miloš Z a h r a d n í k)<br>Kolektiv SVŠ Holič (Alojz C a l e t k a, Jozef Č u l e n) | } 24 body |
| 3. Tomáš M a š e k, 3.f SVVŠ Praha . . .                                                                                                       | 23 body   |
| 4. Mojmír Š o b, 3.b SVVŠ Velké Meziříčí                                                                                                       | 22 body   |

## V celkové soutěži se umístili řešitelé takto:

|                                                                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1.—2. Hana D r a h o ň o v s k á, 1.a SVVŠ Brno<br>Kolektiv 3.a SVVŠ Tanvald (M a z á n e k,<br>Z a h r a d n í k) | } 122 bodů |
| 3.—4. Karel Š a f a ř í k, 1.b SVŠ Bratislava<br>Mojmír Š o b, 3.b SVVŠ Velké Meziříčí                             | } 121 bod  |
| 5. Jiří Š a f a ř í k, 2.b SVŠ Bratislava                                                                          | 120 bodů   |
| 6. Tomáš M a š e k, 3.f SVVŠ Praha . . .                                                                           | 118 bodů   |
| 7. Kolektiv SVŠ Holič (C a l e t k a, Č u l e n)                                                                   | 106 bodů   |
| 8. Josef J i r á s k o, 3.a SVVŠ Semily                                                                            | 104 body   |

Redakce Rozhledů všem vítězům upřímně blahopřeje (z dotace MŠ a SPN budou odměněni) a s těmi, kteří budou dále studovat na SVVŠ, se těší na shledanou v příští soutěži.

Na konec připojujeme abecední seznam všech úspěšných řešitelů. Za jménem řešitele je uveden ústav, na němž řešitel studuje, pak čísla správně řešených příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie. Číslo

uvedená v závorkách jsou čísla příkladů rozřešených s menšími nedostatky. Příklady nesprávně řešené neuvádíme.

a) Jednotlivci:

*Magdaléna Bajáková*, maď. SVŠ Komárno, M 5, 7, 10, (1, 9, 11, 12), F 1, 4, (6); *Jan Bajnar*, SVVŠ Nový Bohumín, M 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, (6); *Peter Baluska*, maď. SVŠ Komárno, F 1, 2, 4, 6; *Pavel Brunclík*, SVVŠ Znojmo, F (1, 4); *Ladislav Csontos*, SVŠ Nové Mesto nad Váhom, M 4, 6, 7, (11), F 1, 4, (2); *Imrich Czeglédi*, maď. SVŠ Šamorín, M 5, F 1, 6; *Pavol Černek*, SVŠ Bratislava, M 1, 3, 4, 5, 7, 9–12, (2, 6, 8); *Jaroslav Daniel*, SVVŠ Moravské Budějovice, M 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, (3, 7, 8, 11), F 4, 6, (1, 2, 3); *Hana Drahoňovská*, SVVŠ Brno, M 1–7, 9, 10, 12, (11), F 1–6, G 1, 3, 4, (2); *Petr Firbas*, SVVŠ Brno, F 4, (6); *Jozef Gögh*, maď. SVŠ Komárno, M 4, 5, 7, 9, 10, (1, 3, 6, 12); *Bohumil Havel*, SVVŠ Brno, M 5, 7, 9, (12), G 1; *Mikuláš Huba*, SVŠ Dolný Kubín, F 1, 3, 5, 6, (2); *Zdeněk Janků*, SVVŠ Zábřeh, M 10, (7, 12), F 1, 4, G 1, 3, 4; *Josef Jedlička*, SVVŠ Moravské Budějovice, M 1, 4, 5, 7, 9, 10, 12, (2, 3, 6, 8, 11); *Josef Jirásko*, SVVŠ Semily, M 1–5, 7–10, (6, 12), F 4, 5, (2, 6), G 1, 4, (2, 3); *Alexander Kirschner*, SVŠ Bratislava, M 4–7, 10, 12 (9); *Tomáš Mašek*, M 1, 4, 5, 7, 9–12, (2, 3, 6, 8), F 1, 2, 4–6, G 1–4; *Ondřej Matouš*, SVVŠ Praha, M 2–7, 9–12, (1, 8); *Ladislav Németh*, maď. SVŠ Komárno, M 1, 4–6, 9, 10, (2, 3, 7, 12); *Veronika Oravecová*, maď. SVŠ Komárno, G (3); *Vladimír Pech*, SVVŠ Pelhřimov, F 1, 4, 6; *Emília Polašková*, SVŠ Michalovce, M 7, (5); *Jiří Pospíšil*, SVVŠ Praha, M 1, 3, 4, 9; *Pavel Pudlák*, SVVŠ Praha, M 4–12, (1–3); *Miroslav Rajdl*, SVVŠ Kutná Hora, M 6, 7, 9, (12), F 4; *Jaroslav Ramík*, M 1, 3–11; *Josef Schübl*, SVVŠ Plzeň, M 4, 5, 7, 9, 10, 12, (2, 3, 6); *Bohumil Strakoš*, SVVŠ Ostrava, M 1, 3–7, 9, 10, (2, 8); *Zdeněk Stuchlík*, SPŠE Ostrava, F 4–6, (1, 2); *Jiří Šafařík*, SVŠ Bratislava, M 1–5, 7, 9–12, (6, 8), F 1–3, 6, (4, 5), G 1, 3, 4, (2); *Karel Šafařík*, SVŠ Bratislava, M 1, 2, 4, 5, 7–12, (3, 6), F 1, 3, 4, 6, (2, 5), G 1, 3, 4, (2); *Mojmír Šob*, SVVŠ Velké Meziříčí, M 1, 2, 4–7, 9, 10, 12, (3, 11), F 1–6, G 1–3, (4); *Marián Vajtersíc*, SVŠ Nitra, 1, 2, 4, 5, 8–10, 12, (3, 6, 7, 11); *Stanislav Vokál*, SVŠ Prešov, M 3–5; *Anna Zelená*, SVVŠ Broumov, M 4, 5, 7, (9, 12), F 4, 5, (6).

b) Kolektivy:

SVŠ Holíč (*Alojz Caletka*, *Jozef Čulen*), M 1, 2, 4–6, 9, 10, 12, (3, 11), F 3–5, (6), G 1–4; SVVŠ Karviná (*Jindřich Olšanský*, 3.c, *Marie Němčíková*, 2.c, *Jiří Žilka*, 3.c), F 1, 4, 6; 3.a maď. SVŠ Komárno (*Ladislav Bakó*, *Viola Štefan*), F 1, 4, 6, (2); 1.c SVŠ Michalovce (*Karol Varešinský*, *František Sudzina*, *Andrej Hrebovčík*), M 7, (9), G 3, (1); 3.a Tanvald (*Miloš Mazánek*, *Miloš Zahradník*), M 1, 3–11, (2, 12), F 3, 5, 6, (1, 2, 4), G 1–4.



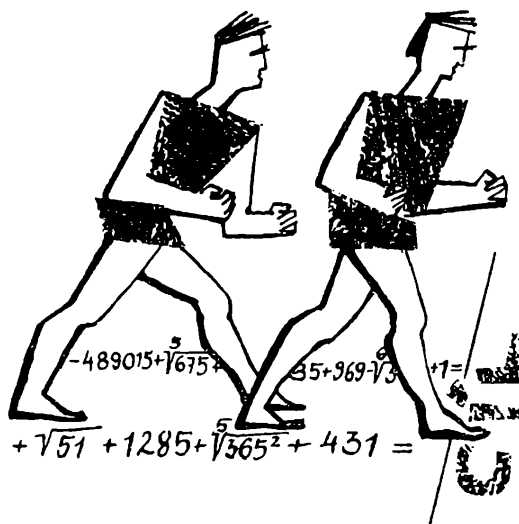
S. H.



## MATEMATIKÉM AŽ DO HROBU

Matematik Lagny byl již v agónii a přítomní se domnívali, že je již mrtev, když se jej jeden z přítomných zeptal: „Dvanáct krát dvanáct?“ „Sto čtyřicet čtyři,“ zašeptal umírající slábnoucím hlasem.

# MFO



## Třetí mezinárodní fyzikální olympiáda v Brně

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL

Ve shodě s usnesením na 2. mezinárodní fyzikální olympiádě v Budapešti převzalo letos ministerstvo školství ČSR za svůj úkol organizování 3. mezinárodní olympiády (3. MFO). Bylo rozhodnuto, že se 3. MFO bude konat v Brně v době od 22. června do 2. července 1969. Vlastní soutěž probíhala v době od 23. června do 27. června v Brně. Ministerstvo školství ČSR pozvalo na tuto soutěž všechny státy, které se zúčastnily první a druhé mezinárodní fyzikální olympiády a kromě toho Anglii, Francii, Itálii a Švédsko. Pozvánka pro tyto státy se zdržela a tak se stalo, že doba příprav na FO u těchto států byla asi krátká; tím si vysvětlujeme jejich neúčast na této soutěži. Zúčastnili se tedy soutěžící jen z osmi států: Bulharska, Československa, Jugoslávie, Maďarska, NDR, Polska, Rumunska a SSSR.

Z každého z uvedených států bylo pozváno po pěti soutěžících, jeden vedoucí delegace a jeden pedagogický instruktor. Vedoucím delegace ČSSR byl předseda ÚVFO prof. dr. Rostislav Košťál. Na schůzi ÚVFO bylo stanoveno, že účastníky 3. MFO bude prvních pět vítězů 3. kola FO. Proto bylo od nás jmenováno pro 3. MFO toto družstvo:

1. Vladimír Č e r n ý, roč. 2S, SVŠ Bratislava, Novohradská;
2. Mojmir Š o b, roč. 3P, SVVŠ Velké Meziříčí;
3. František K o m í n, 3. roč., SPŠ Kutná Hora;

4. Juraj Š a f a ř í k, roč. 2S, SVŠ Bratislava, Novohradská;
  5. Karol Š a f a ř í k, roč. 1S, SVŠ Bratislava, Novohradská
- a jako náhradníci:
6. Václav N o v o t n ý, 3. roč., SPŠJT Praha 4, Svatoslavova;
  7. Antonín R o z s y p a l, 3. roč., SPŠE Olomouc.

Všichni splňovali podmínky stanovené statutem a směrnicemi. Soutěže v Brně se zúčastnilo pět jmenovaných členů družstva.

Po příjezdu delegací jednotlivých států 22. 6. bylo druhý den, tj. 23. června odpoledne v 17 hodin v aule VAAZ slavnostní zahájení za přítomnosti předsedy KNV Jihomoravského kraje Zdeňka V á v r y, zástupce velitele prorektora VAAZ pověřeného velením a funkcí rektora VAAZ generálporučíka inž. Jaroslava D o ě k a l a, zástupce ministerstva školství ČSR ústředního školního inspektora Josefa B a r t ů ň k a, zástupce ministerstva školství SSR ústředního školního inspektora K o š t i a l a a prorektora UJEP prof. dr. Miroslava N o v o t n é h o, DrSc. Na zahájení zazpívalo Brněnské pěvecké sdružení Foerster Nešverův sbor Moravě. Pak předseda ÚVFO promluvil k 3. MFO a k 10. výročí založení FO v ČSSR. Dále promluvil předseda KNV Zdeněk Vávra, ústřední školní inspektor Josef Bartůněk a za delegace vedoucí polské delegace prof. dr. Czesław Scisłowski. Poté předseda ÚVFO odevzdal 53 pracovníkům FO děkovný dopis ministerstva školství ČSR, resp. SSR, děkovný dopis JČSMF a pochvalné uznání ÚVFO. Pak odevzdal dalším 60 pracovníkům pochvalné uznání ÚVFO za práci ve FO.

Vlastní soutěž sestávala ze čtyř teoretických úloh a jedné úlohy laboratorní. Na vypracování teoretických úloh byla dána doba 5 hodin a na vypracování laboratorní úlohy byla dána rovněž doba 5 hodin. Klasifikace příkladů byla prováděna bodováním, a to u každého příkladu s maximálním počtem 8 bodů. U laboratorní úlohy bylo hodnoceno jednak teoretické zpracování (max. 8 body), jednak experimentální provedení (rovněž max. 8 body). Nejvyšší počet dosažitelných bodů byl tedy 48.

Podle směrnic pak byla přiznána řešiteli, který dosáhl

48—44 bodů první cena,

43—38 bodů druhá cena,

37—32 bodů třetí cena a

31—25 bodů pochvalné uznání.

Řešitelé, kteří dosáhli menšího počtu bodů byli neúspěšní.

Texty příkladů byly dány členům mezinárodní komise 1 hodinu před zahájením k přeložení do příslušných jazyků.

Na opravu každého příkladu byla určena vždy skupina korektorů s jedním zodpovědným vedoucím a s jedním členem mezinárodní komise, který měl jen funkci kontrolní. Na pomoc k opravě byli přizváni tlumočníci.

V úterý 24. 6. se pracovaly teoretické úlohy v aule VAAZ a ve středu 25. 6. experimentální úloha na katedře fyziky VAAZ. Pracovny byly upraveny tak, aby soutěžící na práci sousedů neviděli. Během úterý odpoledne, středy a čtvrtka úlohy byly opraveny a ve čtvrtek večer byly výsledky předloženy mezinárodní komisi ke schválení. Komise jednomyslně schválila tyto výsledky, takže pořadí jednotlivců bylo toto:

|                             | <i>Jméno</i>                              | <i>Stát</i> |
|-----------------------------|-------------------------------------------|-------------|
| <i>I. cena</i> — 48 bodů:   | 1. Mojmír Š o b                           | ČSSR        |
|                             | 2. Péter M a r ó t i                      | MLR         |
|                             | 3. Wolfgang P i l z                       | NDR         |
| 47 bodů:                    | 4. Vladimír Č e r n ý                     | ČSSR        |
| 46 bodů:                    | 5. Andrej K l i m o v                     | SSSR        |
| 45 bodů:                    | 6. František K o m í n                    | ČSSR        |
|                             | 7. Antonije D j o r d e v i c             | SFRJ        |
|                             | 8. József S p i t z e r                   | MLR         |
| 44 bodů:                    | 9. Marin Dimitrov M i t o v               | BLR         |
|                             | 10. Péter K á l m á n                     | MLR         |
|                             | 11. Petre D a n                           | RSR         |
|                             | 12. Vladimír G a v r i l e n k o          | SSSR        |
|                             | 13. Alexej Č e r n o u c a n              | SSSR        |
| <i>II. cena</i> — 43 bodů:  | 14. Karel Š a f a ř í k                   | ČSSR        |
|                             | 15. Klemens M ü l l e r                   | NDR         |
| 42 bodů:                    | 16. Emeri Simeonov S o k a č e v          | BLR         |
| 41 bodů:                    | 17. Prezemysław P r u s i n k i e w i c z | PLR         |
|                             | 18. Vladimír M e r k u l e v              | SSSR        |
| 39 bodů:                    | 19. Jiří Š a f a ř í k                    | ČSSR        |
|                             | 20. Ante J e v i c k i                    | SFRJ        |
|                             | 21. Laszló A u d o r                      | MLR         |
| 38 bodů:                    | 22. Péter H o r v á t h y                 | MLR         |
|                             | 23. Jan O f i c j a l s k i               | PLR         |
| <i>III. cena</i> — 37 bodů: | 24. Zdravko P r i b e g                   | SFRJ        |
|                             | 25. Krešo T i s a j                       | SFRJ        |
|                             | 26. Joachim L o o s e                     | NDR         |
|                             | 27. Juliusz P o l t z                     | PLR         |
| 36 bodů:                    | 28. Joachim B e r g m a n n               | NDR         |
| 35 bodů:                    | 29. Miroslav D o r e š i c                | SFRJ        |
| 34 bodů:                    | 30. Izak M a i r B i v a s                | BLR         |
|                             | 31. Sorin M a n c a s                     | RSR         |
| 32 bodů:                    | 32. Nikolaj K o n d r a t ě v             | SSSR        |

## *Pochvalné uznání*

|                         |                             |     |
|-------------------------|-----------------------------|-----|
| 30 bodů: 33.            | Michael J o s c h           | NDR |
| 29 bodů: 34.            | Dimitr Lubenov D a n o v    | BLR |
| 28 bodů: 35.            | Svilen Ivanov B i d i k o v | BLR |
| 26 bodů: 36.            | Feliks P r z y t y c k i    | PLR |
| 25 bodů: 37.            | Victor B i r s a n          | RSR |
| <i>Méně než 25 bodů</i> |                             |     |
| 38.                     | Laurentiu T i n c u         | RSR |
| 39.                     | Jaroslav K o s i ň s k i    | PLR |
| 40.                     | Aurelia C h i t i c         | RSR |

Příklady byly náročné. Výsledky přitom ukázaly, že úroveň účastníků byla vysoká a že se tato soutěž již v mnoha státech dobře ujala, i když letos byli též neúspěšní řešitelé (loňského roku byli všichni řešitelé úspěšní). Objevilo se více špičkových řešitelů a s radostí jsme konstatovali, že mezi ně patřili i naši. Z pěti našich účastníků a dvou jejich náhradníků byl přitom jen jediný maturant.

Pro organizování příští mezinárodní fyzikální olympiády bylo navrženo SSSR, popříp. NDR.

V pátek dopoledne byly připraveny diplomy a věcné dary a odpoledne v 16,30 bylo v aule VAAZ slavnostní vyhlášení výsledků za přítomnosti zástupce velitele — prorektora pověřeného velením a funkcí rektora VAAZ generálporučíka inž. Jaroslava D o č k a l a, zástupce velitele — prorektora VAAZ gen. doc. inž. Jaroslava M a š k a, CSc., zástupce města Brna a předsedy školské komise Václava P a z o u r k a a krajského školního inspektora Zábaje T a u v i n k l a. Po slavnostních fanfárách, uvítání a zahajovacím proslovu vyhlásil předseda mezinárodní komise a ÚVFO výsledky. Všem úspěšným řešitelům, kteří získali ceny, byly uděleny věcné dary. Rovněž byly věnovány upomínkové dary vedoucím delegací a pedagogickým instruktorům.

Aplikujeme-li směrnice platné pro jednotlivce na celá družstva, je pořadí družstev a získané ceny:

### *I cena:*

- |                   |          |
|-------------------|----------|
| 1. Československo | 222 bodů |
|-------------------|----------|

### *II cena:*

- |                  |          |
|------------------|----------|
| 2. Maďarsko      | 214 bodů |
| 3. Sovětský svaz | 207 bodů |
| 4. NDR           | 194 bodů |
| 5. Jugoslávie    | 193 bodů |



### *III. cena:*

|              |          |
|--------------|----------|
| 6. Bulharsko | 177 bodů |
| 7. Polsko    | 162 bodů |

### *Pochvalné uznání:*

|             |          |
|-------------|----------|
| 8. Rumunsko | 128 bodů |
|-------------|----------|

To znamená, že všechny státy byly úspěšné.

Třetí mezinárodní fyzikální olympiáda byla spojena s řadou kulturních akcí. V pondělí 23. června dopoledne byla prohlídka města Brna a okolí, v úterý 24. června zúčastnily se delegace představení Smetanovy Prodané nevěsty v Janáčkově opeře, ve středu odpoledne byl zájezd na Slavkovské bojiště, ve čtvrtek zájezd do Bratislavy a v pátek dopoledne prohlídka jeskyň v Moravském krasu. Po ukončení slavnostní závěrečné schůze bylo uspořádáno pohoštění v hotelu Continental.

V sobotu navštívili účastníci Předklášteří, hrad Pernštýn a Vírskou přehradu a v neděli odjížděli do Prahy. Cestou prohlédli si zámek Náměšť n. Osl. a chrám sv. Barbory v Kutné Hoře. Následující den byla uspořádána prohlídka hradu Karlštejna, další den pak prohlídka Prahy. Vedoucí delegace, pedagogičtí instruktoři a zástupci soutěžících byli přijati náměstkem primátora města Prahy. Slavnostní oběd byl uspořádán v restauraci U kalicha. Večer navštívili všichni představení v Laterně magice.

Účastníci byli ubytováni v Brně v kolejích VUT a VAAZ, stravování v menze VUT. V Praze bylo zajištěno ubytování ministerstvem školství v kolejích UK na Větrníku (účastníci ze SSSR byli ubytováni v hotelu Merkur) a stravování bylo zajištěno v koleji Arnošta z Pardubic na Voršilské ulici.



## **ŽIVOTU NEBEZPEČNÉ VĚDOMOSTI**

Car Ivan IV se zeptal svého geometra a stavitele, kolik cihel bude potřeba na běžnou stavbu daných rozměrů. Zkušený stavitel rychle odpověděl a po stavbě se ukázalo, že měl pravdu. Rychlost a správnost výpočtu byla však caru Ivanu Hroznému natolik podezřelá, že pro jistotu dal toho čaroděje popravít.

## Max Laue

(1879—1960)

J O S E F K O T Y K, Pardubice

Slyšeli jste, milí čtenáři, někdy o tom, že vědecký problém se podařilo vyřešit — na procházce? Nebo jste něco podobného s úlohou z matematiky nebo z fyziky snad také přímo prožili? Vzpomínejte, zdali jste někdy cestou do školy nebo ze školy náhle nevyřešili dobrým nápadem úlohu, o kterou jste se doma marně pokoušeli!

Mocný zážitek tohoto druhu učinil v roce 1912 německý vědec *Laue*, jeden z nejvýznačnějších fyziků první poloviny našeho století, nositel Nobelovy ceny z roku 1914. Od jeho narození uplyne letos 90 let.

*Max Felix von Laue* se narodil dne 9. října 1879 v Pfaffendorfu u Koblenze. Sám líčí, jak jej již za studií na střední škole mocně upoutávala experimentální fyzika; četné pokusy, které vídal při vyučování, prováděl se spolužáky i doma. Teprve za vysokoškolských studií na universitách v Göttingenu, ve Štrasburku, v Mnichově a v Berlíně, vyzbrojen již dobrými vědomostmi z matematiky, začal poznávat také krásy fyziky teoretické; v berlínském Ústavě teoretické fyziky u *Maxe Plancka*, zakladatele teorie kvant<sup>1)</sup>, se jí věnoval již plně. Planck soustředil v Berlíně kolem své osobnosti celou plejádu hvězd první velikosti, jakými byli např. *Einstein*, autor principu relativnosti a moderní teorie gravitační, *Schrödinger*, zakladatel kvantové teorie atomu, aj. Nepřekvapuje proto, že pod přímým a mocným osobním vlivem Planckovým a ve společnosti tak vzácné začala i vědecká činnost Laueho. Tehdy se objevuje také již vážný zájem Laueho o filosofii, jež se tím stala trvalou složkou jeho činnosti badatelské<sup>2)</sup> a dnes již nezbytnou složkou moderní fyziky vůbec. Laue byl jedním z prvních fyziků, jenž správně a plně pochopil novou Einsteinovu teorii relativity a knihami „*Das Relativitätätsprinzip*“ (Princip relativity) z roku 1911 a „*Die Relativitätstheorie*“ (Teorie relativity, 2 sv.) z let 1919 až 1921 přispěl významnou měrou také k jejímu rychlému rozšíření. Slovnitým a v celém učeném světě známým stalo se však Laueho jméno roku 1912,

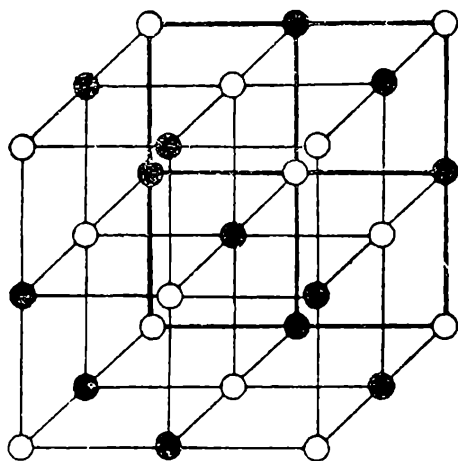
---

<sup>1)</sup> O jeho zásluhách jsem pojednal podrobněji v článku *Max Planck* v Rozhledech roč. 36, čís. 5, str. 230 až 234, a čís. 6, str. 284 až 287.

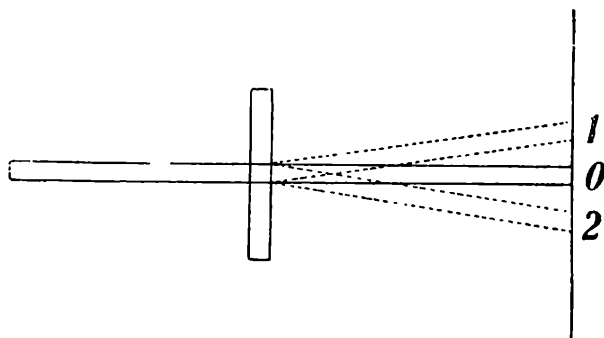
<sup>2)</sup> Dokladem toho může být mj. také Laueho kniha „*Das physikalische Weltbild*“ (Fyzikální obraz světa) z roku 1921.

kdy zásluhou Laueho došlo k prolnutí vlnové teorie Röntgenových paprsků a atomové teorie krystalů.<sup>3)</sup>

Jedním z nejlepších prostředků k měření vlnové délky záření je, jak známo, ohyb (difrakce) mřížkou, tj. soustavou velikého počtu velmi blízkých a stejně vzdálených štěrbin. Pro ohyb Röntgenova záření však obyčejné mřížky nestačí; šířka štěrbin je vzhledem k vlnové délce záření příliš velká. Výpočty vykonané v roce 1911 ukázaly, že nejzručnější mechanik by nedovedl sestavit jemnou mřížku vhodnou pro Röntgenovy paprsky; její konstanta (vzdálenost středů dvou sousedních štěrbin) by musela být řádu  $10^{-8}$  cm, což je právě průměr atomu. Takové mřížky, a to v dokonalosti převyšující všechno pomýšlení, zde však již byly, vyrobeny — nepřekonatelnou dílnou samé přírody! Stačilo po nich jen sáhnout. Šťastným člověkem, jenž si to uvědomil, byl 33letý M a x L a u e.



Obr. 1



Obr. 2

V krystalech jsou hmotné částice uspořádány v rovnoběžných a stejně od sebe vzdálených rovinách tak, že tvoří prostorovou mřížku. Např. krystal kuchyňské soli NaCl je vytvořen z elementárních krychlíček, jejichž vrcholy jsou střídavě obsazeny ionty  $\text{Na}^+$  a  $\text{Cl}^-$  (viz obr. 1); mřížková konstanta činí přibližně  $2,8 \cdot 10^{-8}$  cm. Podobné přirozené mřížky velmi jemné struktury, kubické i jiné, existovaly ve fantazii mineralogů již dlouho a sloužily výkladu krystalické struktury. Laue uvažoval takto: Jestliže do takové prostorové sítě vnikne úzký svazek Röntgenových paprsků, rozdělí se ohybem v několik slabších paprsků 1, 2, ... souměrně rozložených kolem původního směru 0 (viz obr. 2). Při pokusech se očekávaný ohybový zjev skutečně dostavil. Obrázek příslušného laueogramu (tak jsou ohybové obrazce popsáním způsobem získané nazývány) však nepřipojuji; jeden

<sup>3)</sup> Cituji z Laueových „Dějiny fyziky“ (Malá moderní encyklopedie, sv. 11 — Orbis, Praha 1963), str. 118.

přináší např. učebnice fyziky pro III. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol (1965) na str. 157, kam zároveň odkazují. Dodám jen, že seskupení bodů závisí na struktuře krystalu (vzdálenosti iontů, souměrnosti aj.) a na vlnové délce záření.

Čtenáři mohou namítnout, že studium krystalické struktury i studium Röntgenova záření sahá však daleko do doby před objevem Laueho. Ovšem! Laue má však tu velikou zásluhu, že intuitivně (stalo se tak, jak sám líčí, na cestě ze školy domů) našel vysvětlení a<sup>4)</sup> pochopil dalekosáhlý význam toho, co spojovalo dosavadní hypotetické mřížky krystalografů s Röntgenovým zářením: Ř á d o v á b l í z k o s t v e l i k o s t i k o n s t a n t y p r o s t o r o v é m ř í ž k y a v l n o v é d é l k y R ö n t g e n o v a z á ř e n í v e d l a h o k p o s t u l o v á n í j e h o o h y b u k r y s t a l e m. Tento postulát, podroben experimentální zkoušce, obstál znamenitě. Pokusy, jimiž byl ověřen, patří k nejslavnějším v dějinách fyziky.

#### *Poznámka.*

Čtenáře bude ještě zajímat politický postoj Laueho v období nacismu. Již od roku 1933 byl Laue veřejně znám jako odpůrce nacismu, v němž spatřoval směr nepřátelský všemu, co mu bylo jako člověku vysoce vzdělanému drahé. Nalézáme-li pak po porážce nacismu Plancka — před denacifikačním soudem<sup>5)</sup>, je třeba tím více vyzdvihnout, že Laue statečně pomáhal obětem nacismu s nadějí, že brzy nastane jeho konec, v který pevně věřil. Po skončení války byl také jedním z vědců, kteří varovali svět před nebezpečím a hrůzami atomové války, zkázou kultury a záhubou lidstva.

---

<sup>4)</sup> V dalším cituji slova, která o Laueovi napsal univ. prof. dr. V á c l a v P o s e j p a l ve své knize „R ö n t g e n o v y X p a p r s k y“ (JČMF v Praze, 1925), str. 37.

<sup>5)</sup> Zprávu o tom přinesly Rozhledy v roč. 27, čís. 1 na str. 30; Planck byl podle ní odsouzen do vězení na čtyři roky a k nuceným pracím v táboře.



## **DĚLAJÍ-LI DVA TOTÉŽ, NENÍ TO TOTÉŽ**

Pythagoras vyučoval ze zájmu jednoho dělníka matematice a platil mu za každou vyslechnutou větu tři oboly; to bylo přitom tolik, kolik činila celodenní mzda dělníka. Jednou, aby svého žáka vyzkoušel, předstíral, že upadl do nouze. Mladý dělník se ukázal hoden svého učitele: nabídl Pythagorovi tři oboly za každou novou větu.

# Einstein a jeho princip stálé světelné rychlosti

JOSEF KOTYK, Pardubice

*(Napsáno k 90. výročí Einsteinova narození)*

„Bez solidního filosofického základu není žádná přírodověda“, napsal Lenin. Jako přirozený důsledek velkolepých objevů, které byly učiněny v posledních 70 až 80 letech (připomenu zejména objev radioaktivity a uvolňování atomové energie), nahromadily se ve fyzice skutečně i četné problémy filosofické. Filosofické nesnáze moderní fyziky řešil velmi originálním a duchaplným způsobem Albert Einstein<sup>1</sup>).

## Einsteinova osobnost

Einstein, jeden z největších myslitelů všech dob, byl již v mládí velmi zvědavý a hloubavý. Všechny zážitky z dětství si dobře pamatoval. K nejsilnějším patřilo překvapení, které mu přinesl — kompas. Bylo mu pět let, když mu jej otec poprvé ukázal. Chlapec nevycházel z úžasu, když pozoroval, že magnetka kompasu se ustálí vždy ve stejném směru. „Tato příhoda měla na mne dlouhý a hluboký vliv,“ doznává ve svých vzpomínkách 67letý Einstein. „Hluboko pod vnějšími projevy musí být ještě něco skryto.“ Einstein cítil tedy po celý život povinnost odhalovat tajemství přírody. Nejkrásnější, co můžeme prožívat, je — podle jeho slov — tajemno; to je pro Einsteina základní pocit, který stojí u kolébky pravé vědy.

„Jako šestnáctiletý si Einstein kladl otázku“, píše americký fyzik Banesh Hoffmann, „zda se světelná vlna zdánlivě zastaví, běžíš-li vedle ní.“ Zdánlivě naivní otázka ukazuje způsob, jakým Einstein útočil na jádro problému. O deset let později se z této otázky zrodila teorie relativity. Od té doby náleží Einstein k největším vědcům naší doby. Lenin jej nazval velkým přetvořitelem přírodních věd. Po četných sporech o správnost jeho teorií a někdy až

---

<sup>1</sup>) Albert Einstein (narozen 14. března 1879 v něm. městě Ulmu, zemř. 18. dubna 1955 v Princetonu, USA) přednášel na nejslavnějších univerzitách Německa a Švýcarska, v letech 1911 a 1912 také na německé univerzitě v Praze. V roce 1921 byl vyznamenán Nobelovou cenou. Po příchodu Hitlerově k moci se usídlil v USA.

neuvěřitelných závěrů vyjádřili mu za jeho obrovský vklad do vývoje věd snad už všichni badatelé vděčnost naší generace. „Mám plnou důvěru, že jdeme po dobré cestě,“ tvrdil Einstein svým odpůrcům<sup>2)</sup>; svým géniem, svými inspirujícími idejemi, razil novou cestu pokroku.

### Einsteinův princip stálé rychlosti světelné

U příležitosti letošního 90. výročí Einsteinova narození seznámíme čtenáře našeho časopisu s teorií, kterou Einstein vytvořil, aby vyložil některé zvláštnosti zjištěné při studiu šíření světla.

Jestliže Země letí na své dráze kolem Slunce rychlostí  $30 \text{ kms}^{-1}$  vstříc nějaké stálici a světlu, které stálice vysílá, očekávali bychom, že světlo stálice se bude střetávat se Zemí rychlostí o  $30 \text{ kms}^{-1}$  větší, než kdyby Země stála; když pak Země letí směrem opačným, očekávali bychom, že světlo stálice bude obráceně Zemi dohánět rychlostí o  $30 \text{ kms}^{-1}$  menší, než kdyby stála. Měření, provedená na konci minulého století, však rozdílů vznikající pohybem Země nezjistila. Světlo kteréhokoli zdroje dopadá na jiné těleso jakkoli se pohybující rychlostí stálou.

Když se uvedené nesrovnalosti v šíření světla projeví, snažili se fyzikové nejdříve vyložit je v rámci klasické mechaniky. Všechny pokusy, jež vycházely z podobných představ, však selhaly. Na tomto základě se Einstein odhodlal k odvážné indukci. Setrvává pevně na půdě materialistického světového názoru a uznává hmotný svět jako objektivně existující realitu, vydal se za pravdivým poznáním obecných zákonitostí fyzikálních cestou správného, tj. dialekticko-materialistického nazírání na svět. Byl přesvědčen, že vědec, který by vědomě popíral objektivní význam zjištěných experimentálních výsledků, by zbavoval sám sebe základny, na níž stojí jeho práce. Realitě hmotného světa nelze nic předepisovat; ji nemůžeme do strnulých schémat obvyklých představ. Do ní se tedy Einstein zahleděl bystrozrakým pohledem vědce zaníceného pro pravdu, ji přijímal jako něco mnohotvárného a nevyčerpatelného v mnohosti jejích rysů. Prohlásil: Rychlost světla ve vakuu (přibližně i ve vzduchu<sup>3)</sup>) má velikost nezávislou na pohybu světelného zdroje i na směru, v němž se světlo šíří.

Einsteinův princip stálé světelné rychlosti obsahuje dvě tvrzení:

---

<sup>2)</sup> Viz např. Albert Einstein, *Physikalische Zeitschrift*, sv. 18, 121 (1917).

<sup>3)</sup> Čtenářům je ze středoškolské fyziky známo, že vzduch (a plyny vůbec) se elektromagneticky a opticky od málo vakua liší.

a) Rychlost světla nezávisí na pohybu zdroje.

Na tom, zdali se světelný zdroj pozorovateli, který rychlost měří, přibližuje nebo od něho vzdaluje nebo je vzhledem k němu v klidu, nezáleží. Tento předpoklad převzal Einstein, jak sám říká, z dřívější hypotézy, podle níž je světlo vlněním éteru<sup>4)</sup>, rychlost světla je pak úplně stanovena vlastnostmi éteru a na pohybu zdroje vzhledem k pozorovateli nezávisí. Světelný zdroj vzbudí v éteru vlnění, jehož šíření obstarává éter; okolnost, zdali zdroj byl v okamžiku, když světelný rozruch vyslal, v pohybu nebo v klidu, je docela vedlejší a bez významu.

b) Rychlost světla nezávisí na směru jeho šíření.

V dřívější teorii, která považovala světlo za projev periodického děje v nehybném éteru, byla rychlost světla nezávislá na směru jeho šíření pouze v základní soustavě souřadné, která byla vzhledem k éteru v klidu. Toto nyní Einstein svým principem postuluje pro množinu soustav, které vzhledem k soustavě základní (a tedy také navzájem) konají rovnoměrnou translaci. Takové soustavy se nazývají zpravidla inerciální. Jestliže připustíme, že existuje jediná z nich, ve které rychlost světla nezávisí na směru, vychází nezávislost její na směru a též její hodnota ve všech inerciálních soustavách ostatních z principu relativnosti.<sup>5)</sup>

Důsledky, které plynou z principu stálé světelné rychlosti a z principu relativnosti, si vyžádaly mnohé podstatné změny i v názorech, o jejichž správnosti nebylo do Einsteinova vystoupení pochybností<sup>6)</sup>; tvoří obsah Einsteinovy speciální teorie relativnosti.

### Einsteinova cesta poznání

Výzvou k následování nechť zůstanou naší mládeži slova, jimiž Einstein líčí půvaby své cesty poznání „Ve světle konečného výsledku se dedukce zdají vždy samozřejmé a mohou být pochopeny každým inteligentním studentem, avšak předcházející tápání

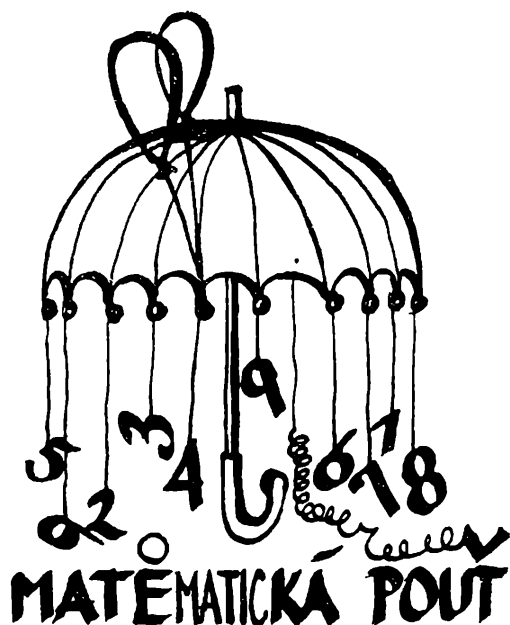
---

<sup>4)</sup> O vlastnostech této hypotetické substance viz můj článek Huygensova teorie světla v Rozhledech roč. 38, čís. 7, str. 327 až 331.

<sup>5)</sup> Viz mé články Galilei — otec principu relativnosti klasické mechaniky (Rozhledy roč. 43, čís. 5, str. 237 až 240) a Fresnel a princip relativnosti v optice (Rozhledy roč. 46, čís. 5, str. 245 až 248).

<sup>6)</sup> Einstein odvodil např., že měřítka se pohybem vůči pozorovateli zkracují (kontrakce délek), časový průběh fyzikálních dějů se stává pomalejším (dilatace času) aj.

v temnotě, rok po roce, kolísání od víry k pochybám a nakonec vrcholný zlom do konečné čistoty — to může být pochopeno jen někým, kdo něco podobného zakusil sám.“



## MATEMATICKÉ ZÁBAVY

### Řešení matematických zábav

1. Tři Tichošlápkové to nemohou být, poněvadž by to řekli. Tři Nicnepovímové také to nemohou být, jak lze poznat z otázky prvního svatebčana. — První svatebčan nutně náleží do rodiny Nicnepovímů, poněvadž zalhal. Druhá a třetí odpověď se popírají a tak mezi těmito třemi svatebčany je jenom jeden Tichošlápek a dva Nicnepovímové. Druhá odpověď byla tedy pravdivá, a to byl Tichošlápek; zbývající dva jsou Nicnepovímové.

2. Délku vrhu každého chlapce označíme písmenem, kterým začíná jeho jméno. I platí

$$S M, M Z, P Z, Z J,$$

$$S P, M J.$$

Odtud plyne, že jediné  $M = P$ .

Srovnání výkonů:  $S M = P Z J$ .

Jednotlivé výkony:  $S = 1161$  cm,  $M = P = 1118$  cm,  $Z = 949$  cm,  $J = 855$  cm.

3. Kapesní hotovost  $M$  je v mezích  $\langle 130, 145 \rangle$ .

4. Vyhovují následující čísla:

a) 488; 490; 492; 494; 496; 498; 500.

b) 489; 492; 495; 498; 501.

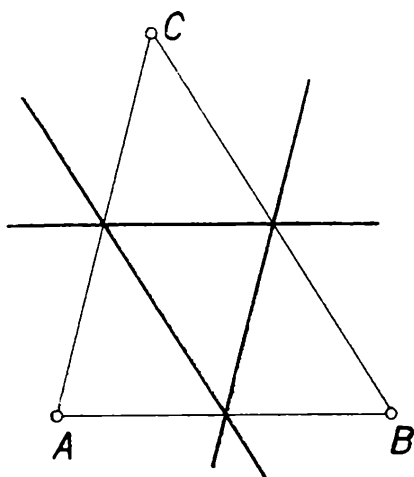


- c) 488; 489; 490; 492; 494; 495; 496; 498; 500; 501.  
d) 488; 496; 500.  
e) 487; 490; 491; 493; 494; 497; 499.  
f) 489; 495; 501.  
g) 488; 495; 496.  
h) 492.  
i) 495.

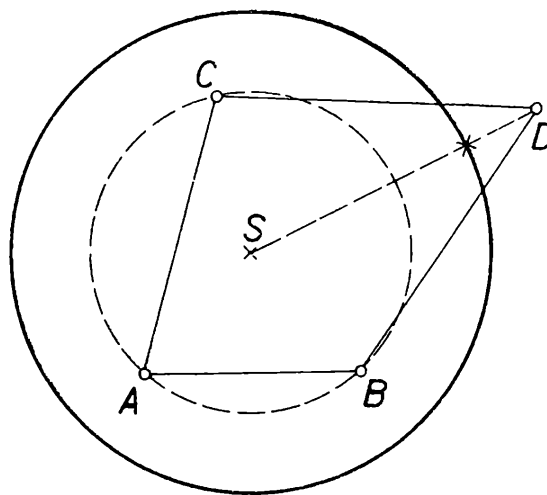
a) 25 průsečíků. b) 23 průsečíky. c) 20 + bod  $K$ .

6. Řešením jsou tři přímky; každá z nich půlí vždy dvě strany daného trojúhelníka (obr. 1).

7. Trojúhelníku  $ABC$  ( $ABD$ ,  $ACD$ ,  $BCD$ ) opišme kružnici  $k_4$  ( $k_3$ ,  $k_2$ ,  $k_1$ ). Kružnice s ní soustředná, která půlí vzdálenost vrcholu  $D$  od  $k_4$  ( $C$  od  $k_3$ ,  $B$  od  $k_2$ ,  $A$  od  $k_1$ ) je hledaná kružnice. — Pokud daný čtyřúhelník není speciální (čtverec, obdélník, tětivový čtyřúhelník) má úloha čtyři různá řešení (obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

8. Hledané číslo je  $x = 69$ , neboť  $x^2 = 4761$ ,  $x^3 = 328\,509$ .

9. Jména osob (první je křestní, druhé příjmení) jsou: Antonín Cyril, Bedřich Antonín, Cyril David, David Bedřich.

10. Vzdálenost (v km) každého studenta od domova označíme počátečním písmenem jeho jména. Pak platí

$$\begin{aligned} 6J &= P, \\ I &= M + Z, \\ 4I &= P + 20, \\ P &= B + I + J + M, \\ B &= \frac{1}{3}P + 10, \\ J &= 2Z. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme  $J = 40$  km,  $B = 90$  km,  $I = 65$  km,  $M = 45$  km,  $P = 240$  km,  $Z = 20$  km.

- **Redakce**
- **hovoří**
- **se čtenáři**

Na jiném místě jsme se již zmínili o tom, že ke každé práci, zejména duševní, je potřebí hodně klidu a životní pohody. Bohužel, ani jeden z těchto požadavků pro úspěšnou práci nebyl v minulém školním roce splněn, a to se pak zobrazilo v naprostém nezájmu o zábavné úlohy. V polovině června jsme však přesto byli velmi mile překvapeni dopisem ze ZDŠ v Radotíně. Dopis stojí za to, abychom jej celý uveřejnili.

---

*Vážená redakce,*  
učím matematice v 7. ročníku ZDŠ v Radotíně. V matematickém kroužku jsem seznámila děti s Rozhledy. Dětem se zalíbily matematické zábavy a samy některé z nich vypočítaly.

Slíbila jsem, že řešení žáků Vám pošlu, abyste nemuseli v Rozhledech psát, že přišly jen tři nebo žádné řešení, jako loňského roku.

Děti byly hrdé na to, že stačily i na ty příklady, které nebyly označeny hvězdičkou.

Těšíme se na další čísla vašich Rozhledů a doufám, že naše spolupráce bude pokračovat.

*Valerie Dvořáková*

---

I redakce věří, že spolupráce s radotínskou ZDŠ bude pokračovat a že užší spolupráci s námi navážou i další ZDŠ a SVVŠ (na Slovensku SVŠ). A na to se těšíme.

Na konec připojujeme seznam radotínských mladých matematiků, kteří nám způsobili radost. (V závorce jsou čísla úloh, jejichž řešení zaslali.)

D e m j a n e n k o (2); R. M ü l l e r (2, 3, 4); H. N e b e s k á (2, 3, 4, 6, 10, 15, 16, 17, 23); O. N o v o t n ý (2, 3, 4, 10, 15, 17); D. P l o t t o v á (2, 3, 4, 6, 10, 15, 16, 17, 23); J. P r i m a s o v á (2, 3, 4, 6, 10, 15, 16, 17, 23); J. Ř e h o ř (2, 3, 4, 10, 13, 23).

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

### circulaire

fonction *ž* circulaire

fonction circulaire inverse

classe *ž*

coefficient *m*

coefficient angulaire

cofacteur *m*

coïncidence *ž*

coïncider

collinéation *ž*

colonne *ž*

combinaison *ž*

combinaison de *m* objets pris *n* à *n*

combinatoire

commun, *e*

en commun

comparer

comparaison *ž*

faire une comparaison

compas *m*

compatible

complet, ète

complément *m*

complexe

nombre *m* complexe

compliqué, *e*

composante *ž*

composé

application *ž* composée

compte *m*

tenir compte de

compter

concave

concentrique

### kruhový

goniometrická funkce

cyklometrická funkce

třída

koefficient

směrnice

doplňek prvku v determinantu

splynutí

splynouti, splývati

kolineace

sloupec

kombinace

kombinace *n*-té třídy z *m* prvků

kombinatorický

společný

společně

srovnávat, porovnávat

srovnání

porovnat

kružítka

slučitelný, srovnatelný

úplný

doplňek, komplement

komplexní

komplexní číslo

komplikovaný, složitý

složka, komponenta

složený

zobrazení složené

čítání, počítání, výpočet

brát co v úvahu

čítat, počítat

konkávní

soustředný

|                                       |                                    |
|---------------------------------------|------------------------------------|
| conclusion <i>ž</i>                   | důsledek, závěr                    |
| concourant, e                         | protínající se                     |
| droites <i>ž</i> concourantes         | různoběžky                         |
| concret, ète                          | konkrétní                          |
| condition <i>ž</i>                    | podmínka                           |
| satisfaire à la condition             | vyhovovat podmínce                 |
| condition nécessaire et suffisante    | nutná a postačující podmínka       |
| condition de compatibilité            | podmínka bezespornosti, řešitel-   |
|                                       | nosti                              |
| cône <i>m</i>                         | kužel, kuželová plocha             |
| cône de révolution                    | rotační kužel                      |
| cône oblique                          | šikmý kužel                        |
| tronc <i>m</i> de cône                | komolý kužel                       |
| confondre                             | splývati                           |
| confondu, e                           | splývající                         |
| congru, e                             | kongruentní                        |
| congruence <i>ž</i>                   | kongruence, shodnost               |
| correspondance <i>ž</i>               | příbuznost                         |
| correspondre                          | odpovídat si                       |
| cosécante <i>ž</i>                    | kosekans                           |
| cosinus <i>m</i>                      | kosinus                            |
| cotangente <i>ž</i>                   | kotagens                           |
| cote <i>ž</i>                         | kota                               |
| coté, e                               | kotovaný                           |
| plan <i>m</i> coté                    | kotovaný průmět                    |
| côté <i>m</i>                         | strana (trojúhelníka, lomené čáry) |
| couche <i>ž</i>                       | vrstva                             |
| couper                                | přetnouti, řezati                  |
| couple <i>m</i>                       | dvojice, pár                       |
| coupure <i>ž</i>                      | řez                                |
| courbe                                | křivý                              |
| ligne <i>ž</i> courbe                 | křivá čára, křivka                 |
| courbe <i>ž</i>                       | křivka                             |
| courbe à double courbure              | prostorová křivka                  |
| courbe fermée                         | uzavřená křivka                    |
| courbe gauche                         | prostorová křivka                  |
| courbe de niveau                      | vrstevnice                         |
| courbure <i>ž</i>                     | křivost                            |
| couronne <i>ž</i> circulaire          | mezikruží                          |
| C.Q.F.D. (ce qu'il fallait démontrer) | což se mělo dokázat                |
| cribel <i>m</i>                       | síto                               |
| cribel d'Eratostène                   | Eratostenovo síto                  |
| critère <i>m</i>                      | kriterium                          |
| crochet <i>m</i>                      | hranatá lomená závorka             |
| croissant <i>m</i>                    | měsíček                            |
| croissant, e                          | rostoucí                           |
| croquis <i>m</i>                      | náčrt, skica                       |
| conique                               | kuželový                           |
| section <i>ž</i> conique              | kuželosečka                        |
| conique <i>ž</i>                      | kuželosečka                        |
| conjugué, e                           | sdružený                           |
| connexe                               | souvislý                           |
| consécutif, ive                       | po sobě jdoucí                     |
| conséquence <i>ž</i>                  | důsledek                           |
| par conséquent                        | v důsledku toho                    |

# **rozhledy**

**MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ**

---

**4**

**ROČNÍK 48, 1969-70, PROSINEC**



# 4

ROČNÍK 48  
PROSINEC 1969-70

## MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání  
Za zásluhy o výstavbu

### VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci

### VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

### REDAKČNÍ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; zasl. učitel Petr Benda, VUT, Prno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B. Bystrica; Miloš Franek, PF UK, Bratislava; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, DrSc., ČVUT, Praha; dr. Oldřich Lepil, PU, Olomouc; Milan Marčok, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava; prof. dr. Cyril Palaj, PF-UPJŠ, Košice; Evžen Říman, CSc., ČVUT, Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci; dr. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; ing. dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ UNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarik, insp. MŠ SSR, Bratislava.

### REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29.

### OBSAH

|                                                                                |                     |
|--------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| A. Šarounová: Nespolehlivé analogie . . .                                      | 149                 |
| F. Hradecký: Užití komplexních čísel v geometrii . . . . .                     | 153                 |
| F. Janeček: Asymptoty hyperboly (dokončení) . . . . .                          | 159                 |
| Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Zdánlivé a absolutní hvězdné velikosti . . . . . | 166                 |
| Mezinárodní matematická olympiáda . . .                                        | 169                 |
| Prof. dr. R. Košťál: Úlohy z 3. mezinárodní olympiády . . . . .                | 171                 |
| Prof. dr. R. Košťál: K výročí založení Fyzikální olympiády v ČSSR . . . . .    | 175                 |
| Naše soutěž . . . . .                                                          | 177                 |
| J. Kotyk: Vědecké předpovědi . . . . .                                         | 188                 |
| Doc. V. Jozífek: Co je matematika? . . .                                       | 191                 |
| Hádanky . . . . .                                                              | 195                 |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český . . . . .                         | 3. a 4. str. obálky |

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřižská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönl. Titulní obrázky: B. Šmejdivá, studující FS.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1969.



## MATEMATIKA

---

# Nespolehlivé analogie

ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF UK Praha

O potížích s analogiemi jste se přesvědčili v osmém čísle minulého ročníku Rozhledů (Záhada Zmatlíkova zápisníku, str. 398). Všimněme si podrobněji problematiky analogií v geometrii.

Lidé většinou objevují zákonitosti pozorováním jednotlivých jevů a zobecněním výsledků takových pozorování. Často se na základě jisté podobnosti různých situací předpokládají určité vztahy i tam, kde nebyly ověřovány.

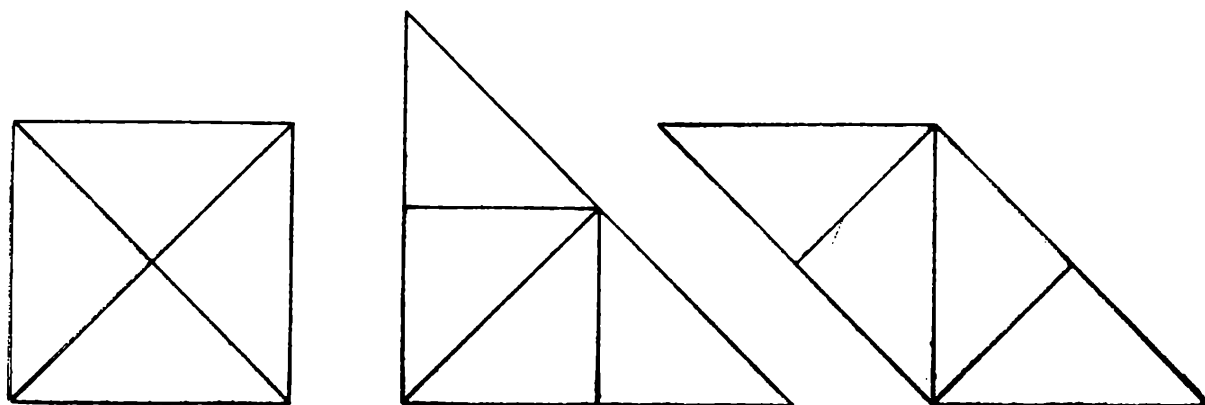
Takový postup je užitečný i v matematice. Víme-li např., že platí asociativní zákon pro sčítání reálných čísel, budeme jeho platnost zkoumat i při zavádění čísel komplexních, protože pozorujeme řadu obdobných vlastností obou číselných oborů. Bylo by však chybou přijmout platnost asociativního zákona pro sčítání komplexních čísel jen na základě takové analogie a nepřesvědčit se o jeho platnosti. Nespolehlivost analogií si ukážeme na několika příkladech z geometrie, budeme se zabývat tzv. *elementárními útvary* na přímce, v rovině a v prostoru, a jejich mírami (délkami, obsahy a objemy).

Na přímce je elementárním útvarem sjednocení konečného počtu úseček, které se nepřekrývají. Mírou takového útvaru je jeho délka, která je rovna součtu délek úseček, z nichž je útvar složen.

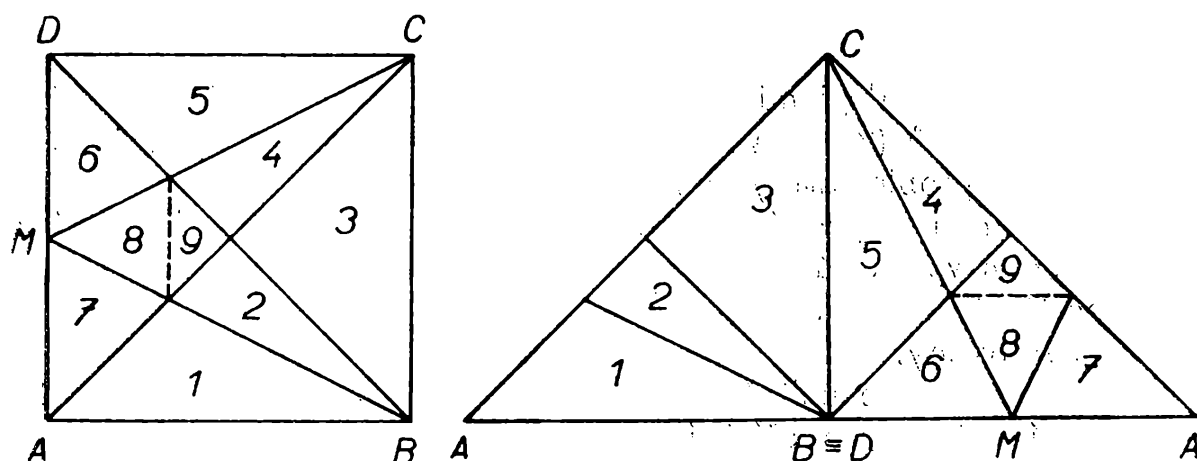
V rovině je elementárním útvarem každý útvar složený z konečného počtu nepřekrývajících se trojúhelníků, a jeho mírou je součet obsahů těchto trojúhelníků. Na obr. 1 je zakresleno několik navzájem různých elementárních útvarů, které jsou složeny ze čtyř rovnoramenných trojúhelníků. Všimněme si blíže čtverce, který je složen ze čtyř navzájem

shodných trojúhelníků. Můžeme jej ovšem rozdělit i na jiné navzájem se nepřekrývající trojúhelníky, třeba tak jako na obr. 2. Lze však z těchto tří trojúhelníků  $ABM$ ,  $BMC$ ,  $MCD$  složit trojúhelník z obr. 1, jehož obsah je roven součtu obsahů těchto trojúhelníků?

Zřejmě to není možné, ale nevzdávejme se, pokusme se rozstříhat trojúhelníky  $ABM$ ,  $BMC$ ,  $MCD$  na „menší“ trojúhelníky a z nich



Obr. 1



Obr. 2

složit trojúhelník na obr. 1. Zakresleme do obr. 2 úhlopříčky  $AC$ ,  $BD$  čtverce  $ABCD$  a rozstříhejme jej podle všech plně vytažených čar. Získáme tak trojúhelníky a jeden čtyřúhelník; rozstříhneme-li i tento čtyřúhelník podle čárkovaně vyznačené úhlopříčky (obr. 2), získáme celkem devět trojúhelníků.

Z těchto trojúhelníků lze zřejmě sestavit každý elementární útvar zobrazený na obr. 1. Obdobným postupem lze dokázat, že každé dva elementární útvary  $U$ ,  $U'$  v rovině, které mají týž obsah, můžeme sestavit ze stejné trojúhelníkové stavebnice. Říkáme, že útvary  $U$  a  $U'$  jsou shodně rozložitelné.

V prostoru sestavujeme elementární útvary ze čtyřstěnů. Krychli můžeme sestavit např. ze dvanácti čtyřstěnů, jejichž jedním vrcholem



je vždy střed krychle, a zbývající tři vrcholy leží v některé stěně krychle. Mírou elementárních útvarů v prostoru je jejich objem, který je vždy roven součtu objemů nepřekrývajících se čtyřstěnů, z nichž je takový útvar složen. Pojem shodné rozložitelnosti elementárních útvarů v prostoru není jistě třeba podrobněji vysvětlovat.

A teď se vydejme hledat analogie. Jisté oprávnění k tomu máme, protože na přímce, v rovině i v prostoru jsme tvořili elementární útvary stejným způsobem — sjednocováním základních útvarů (úseček, trojúhelníků, čtyřstěnů).

Všichni víme, že platí věta:

*A: Mají-li dvě úsečky stejnou míru, jsou shodné.*

Podívejme se, jak by zněla analogická věta pro rovinu: Mají-li dva trojúhelníky stejnou míru (tj. obsah), jsou shodné. Neplatnost této věty je zřejmá i žákům základní školy, snadno si nakreslí dva trojúhelníky se společnou základnou, které mají stejnou výšku; takové trojúhelníky mají stejné obsahy, ale nemusí být shodné. *V ě t a a n a l o g i c k á k v ě t ě A n e p l a t í*, a neplatila by zřejmě ani analogická věta vyslovená o čtyřstěnech.

Zabývali jsme se krátce vztahem shodné rozložitelnosti elementárních útvarů v rovině. Své poznatky můžeme formulovat ve větě:

*B: Mají-li dva elementární útvary v rovině stejný obsah, jsou shodně rozložitelné.*

Vyslovme nyní analogickou větu pro prostorové útvary: Mají-li dva elementární útvary v prostoru týž objem, jsou shodně rozložitelné. I v tomto případě nás analogie zklame, i když nemůžeme neplatnost této věty dokázat tak snadno. Je však dokázáno, že např. krychle a pravidelný čtyřstěn se stejnými objemy (tedy dva elementární útvary v prostoru) nejsou shodně rozložitelné. Toto tvrzení obsahuje tzv. Dehnova věta, která tak dosvědčuje, že *v ě t a a n a l o g i c k á k v ě t ě B n e p l a t í*.

Vraťme se ještě ke Zmatlíkově záhadě, o které jsme se zmínili na začátku článku. Při odvozování vzorce pro obsah trojúhelníka pomocí obdélníka, který má základnu shodnou se střední příčkou trojúhelníka a výšku stejnou jako trojúhelník, si Zmatlík řekl, že obdobným způsobem se dá vypočítat objem jehlanu. Pro objem pravidelného čtyřbokého jehlanu tak odvodil vzorec

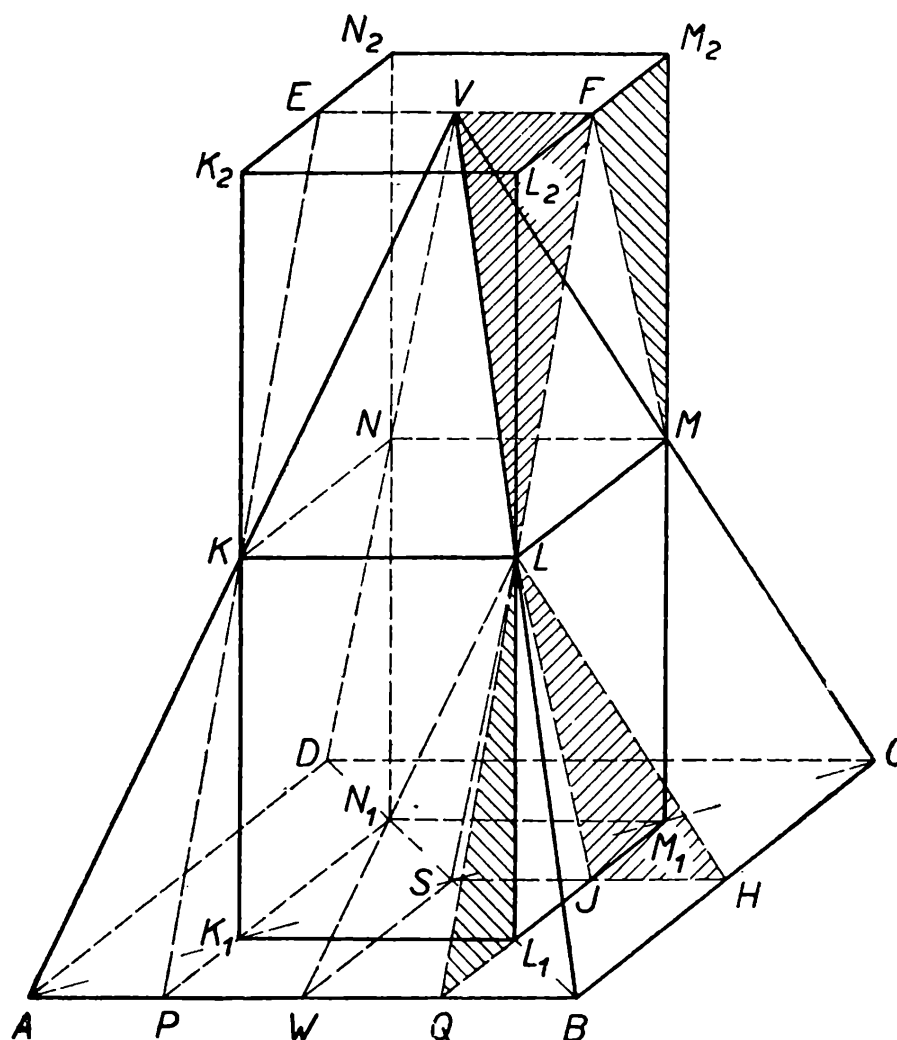
$$V = \frac{1}{4} a^2 v,$$

kde  $a$  je délka podstavné hrany a  $v$  výška jehlanu.

Zakresleme si pravidelný jehlan  $ABCDV$  i kvádr, pomocí něhož Zmatlík objem počítal (na obr. 3). Zkusme „rozřezat“ kvádr  $K_1L_1M_1N_1K_2L_2M_2N_2$  na tělesa, z nichž by bylo možné sestavit daný jehlan. Budeme odřezávat části hranolu přesahující jehlan. Vedme první řez

hranou  $KL$  po stěně jehlanu. Odríznutou část  $KLFEK_2L_2$  vhodně umístíme k přední stěně kvádru do polohy  $KLPQL_1K_1$ . Stejnou operaci provedeme na protější stěně jehlanu  $CDV$ .

Nyní přesahují jehlan  $ABCDV$  jen dva čtyřstěny — čtyřstěn  $LMFV$  a  $KNEV$ . Na obr. 3 je zakresleno přemístění čtyřstěnu  $LMFV$  do polohy  $LMJH$ .



Obr. 3

Použili jsme již všech částí rozřezaného hranolu, ale celý jehlan jsme ještě nesestavili. Kdyby Zmatlík uvažoval společně s námi, mohl by si v této chvíli poznamenat do svého zápisníku:

Je-li  $V$  objem pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$  a  $V'$  objem uvažovaného kvádru  $K_1L_1M_1N_1K_2L_2M_2N_2$ , pak

$$V > V'$$

K doplnění jehlanu chybí ještě čtyři části shodné s jehlanem  $QBHJL$ . Můžeme je sestavit ve dva jehlany podobné jehlanu  $ABCDV$  (na obr. 3 je zakreslen jehlan  $BHSWL$ ). Jejich rozměry vzhledem k rozměrům

jehlanu  $ABCDV$  jsou v poměru  $1:2$ . Poměr objemů je tedy  $1:2^3$ , tj.  $1:8$ . Je tedy objem jehlanu  $BHSQL$  roven číslu

$$\left(V^+ = \frac{1}{8} V\right)$$

Pro objem  $V$  jehlanu  $ABCDV$  tedy platí

$$V = V' + 2V^+,$$

tj.

$$V = \frac{1}{4} a^2 v + \frac{1}{4} V$$

odkud plyne známý vzorec pro výpočet jehlanu

$$V = \frac{1}{3} a^2 v,$$

který našel Zmatlík v učebnici.

## Užití komplexních čísel v geometrii

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

Zobrazení komplexních čísel na rovinu komplexních čísel (Gaussovu rovinu) umožňuje v mnohých případech jednoduché řešení úloh a provádění geometrických pouček užitím komplexních čísel. Výhoda spočívá v tom, že každý bod geometrického útvaru je vyjádřen jediným číslem a velmi jednoduše lze vyjádřit geometrické operace, jako jsou posunutí, otáčení, stejnoolehlost aj.

O základech analytické geometrie v komplexních souřadnicích pojednal v článku „*Použití komplexních čísel v geometrii*“ doc. K. Drábek ve 44. ročníku (str. 289 a 348) tohoto časopisu. Tento článek bude na něj v jistém smyslu navazovat.

Než přikročíme k vlastnímu tématu, uvedeme si nejprve ve stručnosti některé poznatky o komplexních číslech, které budeme v dalším výkladu potřebovat:

Komplexní čísla  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  nazýváme čísla komplexně sdružená,  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$  je absolutní hodnota čísla  $z$ , je-li  $|z| = 1$ , nazýváme číslo  $z$  komplexní jednotkou. V tomto článku budeme komplexní jednotky označovat písmenem  $i$ . Komplexní číslo  $z$  vyjádřeno v goniometrickém tvaru zní

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde  $\varphi$  je orientovaný úhel, nazývaný *argumentem komplexního čísla*  $z$ . Pro komplexní jednotky platí

$$t_k = \cos \varphi_k + i \cdot \sin \varphi_k.$$

Body v rovině komplexních čísel budeme označovat písmeny velké abecedy a příslušná k nim komplexní čísla zpravidla týmiž písmeny malé abecedy.

Připomeňme si, že *souměrnost podle reálné osy*  $x$ , která přiřazuje každému bodu  $Z$  jako obraz bod  $\bar{z}$ , je vyjádřena relací  $z' = \bar{z}$ , *souměrnost podle osy*  $y$   $z' = -\bar{z}$ , *souměrnost podle počátku* relací  $z' = -z$ .

*Posunutí roviny o vektor*  $OP$  je dáno relací

$$z' = z - p,$$

kde  $p$  je komplexní číslo příslušné bodu  $P$ .

*Vzdálenost bodů*  $Z_1, Z_2$  je  $d = |z_2 - z_1|$ .

*Stejnolehlost se středem v počátku* a koeficientem stejnoolehlosti  $k$  ( $k$  je reálné číslo), je dána relací  $z' = k \cdot z$ . Je-li středem stejnoolehlosti bod  $Z_0$  a koef. stejnoolehlosti je reál. číslo  $k$ , je stejnoolehlost dána relací

$$z' = k(z - z_0)$$

Můžeme tedy každé komplexní číslo vyjádřit

$$z = k \cdot t,$$

kde  $t$  je příslušná komplexní jednotka.

*Otáčení kolem počátku*  $O$  o úhel  $\varphi$  je vyjádřeno relací

$$z' = t \cdot z,$$

*otáčení kolem bodu*  $Z_0$  o úhel  $\varphi$  je vyjádřeno relací

$$z' = t(z - z_0),$$

kde  $t$  je komplexní jednotka příslušná úhlu  $\varphi$ .

*Rovnici reálné přímky* lze vždy vyjádřit ve tvaru

$$\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \quad (1)$$

kde  $z$  je proměnná a čísla  $a, \bar{a}$  jsou čísla komplexně sdružená a  $b$  je reálné číslo. *Směrnice této přímky* je

$$\frac{a + \bar{a}}{a - \bar{a}} i$$

*Rovnice přímky kolmé k přímce o rovnici (1)* zní

$$\bar{a}z - a\bar{z} + c = 0,$$

kde  $a, \bar{a}$  jsou komplexně sdružená čísla a  $c$  je reálné číslo.

*Rovnice reálné osy* je  $z - \bar{z} = 0$ , *rovnice imaginární osy* je  $z + \bar{z} = 0$ .

*Přímka procházející body  $Z_1, Z_2$  je dána rovnicí*

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

tj.

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - \bar{z}(z_1 - z_2) + z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 = 0$$

*Rovnice kružnice o středu v počátku 0 a poloměru  $r$  zní*

$$z = r \cdot t$$

nebo

$$|z| = r$$

nebo

$$z\bar{z} - r^2 = 0$$

*Rovnice kružnice o středu  $Z_0$  a poloměru  $r$  zní*

$$z = z_0 + r t$$

nebo

$$|z - z_0| = r,$$

tj.

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2,$$

tj.

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + m$$

kde

$$m = z_0\bar{z}_0 - r^2$$

Dále budeme užívat *komplexního dělicího poměru* bodů  $Z_1, Z_2, Z_3$ , který budeme značit

$$P_{123} = P(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Argument tohoto čísla značí velikost úhlu  $\omega$ , o který musíme otočit polopřímku  $Z_1Z_3$  v kladném smyslu, aby splynula s polopřímkou  $Z_2Z_3$ .

Poměr dvou komplexních dělicích poměrů určuje *komplexní dvojpoměr*

$$D_{1234} = D(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

*Je-li dělicí poměr  $P(z_1, z_2, z_3)$  reálné číslo, je argumentem číslo  $k\pi$ , kde  $k$  je celé číslo, pak body  $Z_1, Z_2, Z_3$  leží v přímce.*

*Je-li dvojpoměr  $D(z_1, z_2, z_3, z_4)$  reálné číslo, je*

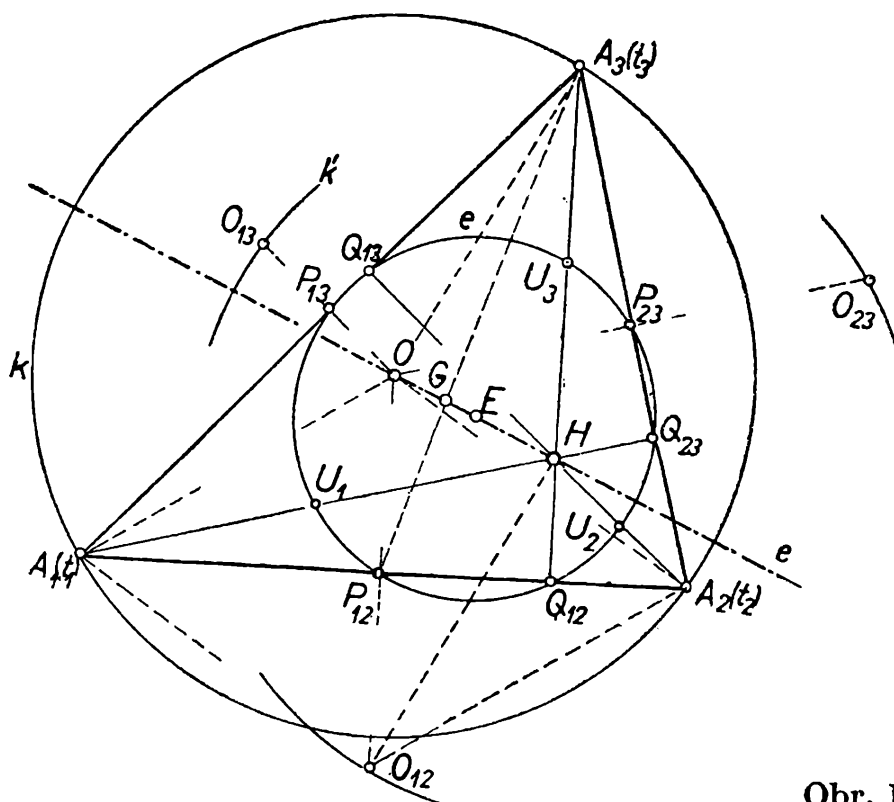
$$\sphericalangle Z_1Z_3Z_2 = \sphericalangle Z_1Z_4Z_2$$

nebo

$$\sphericalangle Z_1Z_3Z_2 + \sphericalangle Z_1Z_4Z_2 = \pi,$$

*pak body  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  leží na kružnici (jsou koncyklické) nebo ve zvláštním případě leží v přímce. Bližší poučení o tom najde čtenář ve zmíněném článku.*

1. Zvolíme-li počátek soustavy souřadnic ve středu  $O$  kružnice opsané trojúhelníku  $A_1A_2A_3$  a poloměr této kružnice zvolíme za jednotku, přísluší těmto vrcholům komplexní jednotky  $t_1, t_2, t_3$ . Sestrojíme-li k bodu  $O$  (obr. 1) body  $O_{12}, O_{23}, O_{13}$  souměrně položené podle



stran  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_1A_3$ , pak těmto bodům náležejí komplexní čísla  $t_1 + t_2$ ,  $t_2 + t_3$ ,  $t_3 + t_1$ . Sestrojíme-li bod  $H$  tak, aby  $OO_{12} \parallel A_3H$ ,  $OA_3 \parallel O_{12}H$  (přitom je  $A_3H \perp A_1A_2$ ), je bod  $H$  průsečíkem výšek v trojúhelníku  $A_1A_2A_3$ ; k tomuto bodu dojdeme sečtením vektorů  $OO_{23}$  a  $OA_1$  nebo sečtením vektorů  $OO_{12}$  a  $OA_3$ . Komplexní číslo, které přísluší bodu  $H$ , označme  $h$ ; zřejmě platí

## Poněvadž

kde čísla  $i, j, k$  znamenají cyklickou permutací pořadí 1, 2, 3, tak platí: *Kružnice opsaná kolem bodu  $H$  poloměrem rovným poloměru kružnice opsané trojúhelníku  $A_1A_2A_3$  prochází body souměrně položenými ke středu  $O$  kružnice opsané podle stran tohoto trojúhelníku.*

Středy stran  $P_{12}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{31}$  jsou vyjádřeny komplexními čísly

$$\frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{t_2 + t_3}{2}, \frac{t_3 + t_1}{2}$$

a leží na kružnici o rovnici

$$|z - e| = \frac{1}{2}, \quad (1)$$

kde

$$e = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{2}$$

je to známá *kružnice devíti bodů*, která se nazývá též *kružnicí Eulerovou* (resp. *Feuerbachovou*). Její střed je  $E(e)$ . Tato kružnice prochází patami výšek a středy úseček  $HA_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), jak plyne z následujícího.

Určíme komplexní číslo náležející patě  $Q_{12}$  výšky  $HA_3$ . Přímka  $A_1A_2$  má rovnici

$$z + t_1 t_2 \bar{z} - t_1 - t_2 = 0,$$

kolmice k ní vedená bodem  $A_3$  má rovnici

$$z - t_1 t_2 \bar{z} - t_3 + \frac{t_1 t_2}{t_3} = 0.$$

Společný bod těchto přímek je dán číslem, které dostaneme z předcházejících rovnic vyloučením  $\bar{z}$

$$z = q_{12} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{2} - \frac{t_1 t_2}{2t_3} = e - \frac{t_1 t_2}{2t_3} \quad (2)$$

Dosazením čísla (2) do (1) dostaneme

$$\left| \frac{t_1 t_2}{2t_3} = \frac{1}{2} \right|$$

týž výsledek dostaneme pro zbývající čísla  $q_{jk}$ .

Také středy  $U_i$  úseček  $HA_i$ , jimž přísluší komplexní čísla

$$u_i = \frac{h + t_i}{2} = e + \frac{t_i}{2},$$

rovnici (1) vyhovují.

Těžiště  $G$  trojúhelníka  $A_1A_2A_3$  (označení  $G$  volíme z důvodu, že  $t$  značí komplexní jednotku!) určíme ze vztahu

$$P_{12}G = \frac{1}{3}P_{12}A_3,$$

tj.

$$g - \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{3} \left( t_3 - \frac{t_1 + t_2}{2} \right)$$

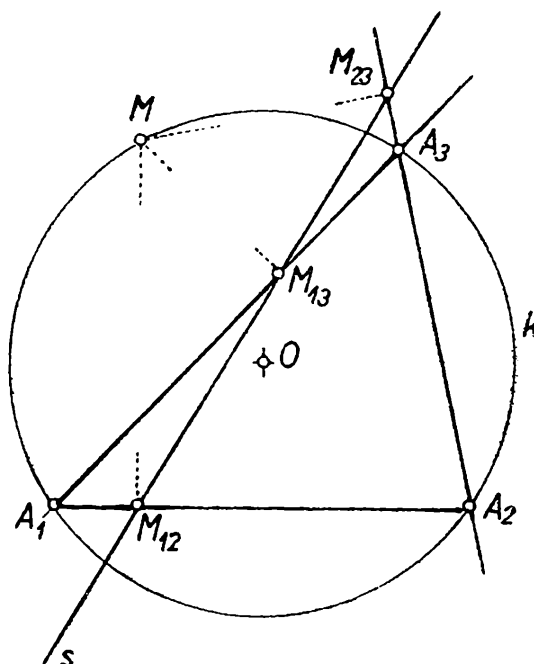
odkud určíme

$$g = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3} \quad (3)$$

Porovnáním čísel  $h$ ,  $e$ ,  $g$  dostáváme

$$g = \frac{h}{3}, \quad e = \frac{h}{2},$$

což znamená, že body  $H$ ,  $E$ ,  $G$  jsou stejnohlé podle počátku. Platí pak: *Průsečík výšek (ortocentrum)  $H$ , střed Eulerovy kružnice  $E$ , tě-*



Obr. 2

žiště  $G$  a střed opsané kružnice trojúhelníka  $A_1A_2A_3$  leží na téže přímce  $e$  a přitom vzdálenosti jednotlivých bodů od bodu  $O$  jsou v poměru  $OG : OE : OH = 2 : 3 : 6$ . Přímka  $e$  se nazývá Eulerovou přímkou trojúhelníka  $A_1A_2A_3$ .

2. Je-li bod  $M$  libovolným bodem kružnice opsané trojúhelníku  $A_1A_2A_3$  ( $M \neq A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), pak paty kolmic z bodu  $M$  na jednotlivé strany trojúhelníka leží na téže přímce. (Obr. 2.)

Podmínka, že bod  $M$  leží s vrcholy trojúhelníka  $A_1A_2A_3$  na téže kružnici, zní  $D(t_1, t_2, t_3, m) = \text{reálné číslo}$ . Pro paty kolmic  $M_{12}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{13}$  platí

$$m_{12} = \frac{m + t_1 + t_2}{2} - \frac{t_1 t_2}{2m},$$

$$m_{23} = \frac{m + t_2 + t_3}{2} - \frac{t_2 t_3}{2m}$$

$$m_{13} = \frac{m + t_1 + t_3}{2} - \frac{t_1 t_3}{2m}$$



Leží-li body  $M_{12}$ ,  $M_{13}$ ,  $M_{23}$  v přímce, pak musí být  $P$  ( $m_{12}$ ,  $m_{23}$ ,  $m_{13}$ ) reálné číslo. Určíme tedy

$$\frac{m_{13} - m_{12}}{m_{13} - m_{23}} = \frac{\frac{t_3 - t_2}{2} - \frac{t_1(t_3 - t_2)}{2m}}{\frac{t_1 - t_2}{2} - \frac{t_3(t_1 - t_2)}{2m}} = \frac{(m - t_1)(t_2 - t_3)}{(m - t_3)(t_2 - t_1)} =$$

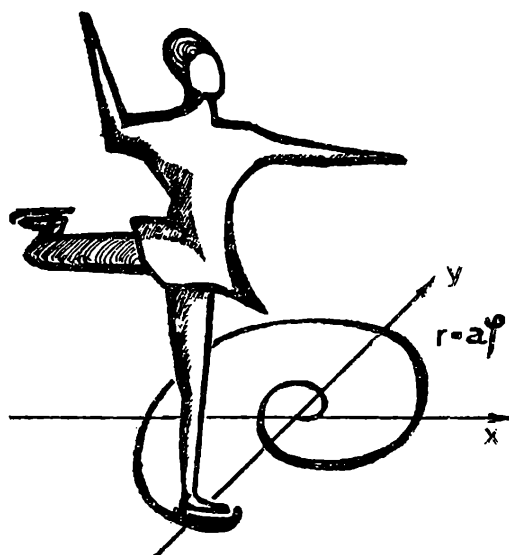
$$= D(t_1, t_3, m, t_2),$$

což je také číslo reálné.

Tím je uvedená poučka dokázána. Přímka  $s$ , na níž uvedené body leží, se nazývá *Simsonovou přímkou* bodu  $M$  vzhledem k trojúhelníku  $A_1A_2A_3$ .

(Pokračování)

## DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE



## Asymptoty hyperboly

FRANTIŠEK JANEČEK, gymnasium Broumov

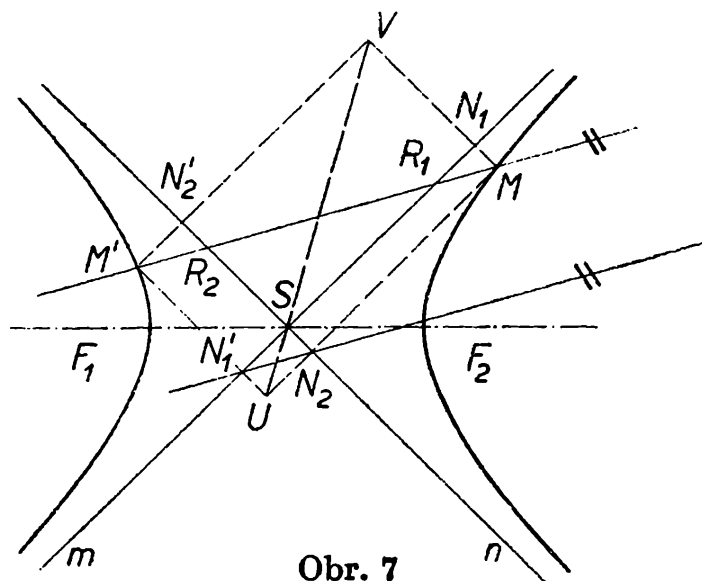
(Dokončení)

**Věta 7.** *Hyperbola a její asymptoty vytínají na libovolné sečně různoběžné s oběma asymptotami stejně dlouhé úsečky.*

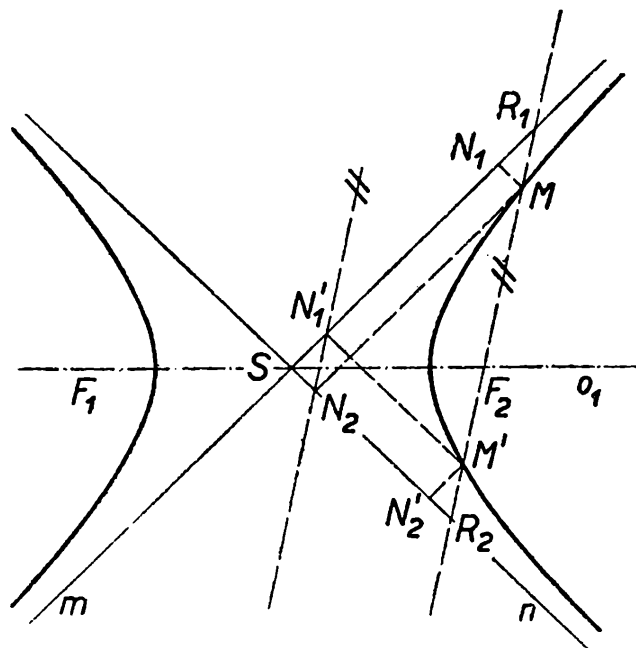
Jinými slovy: Jeden z průsečíků hyperboly se sečnou je od průsečíku sečny s jednou asymptotou hyperboly stejně vzdálen jako druhý průsečík hyperboly se sečnou od průsečíku sečny s druhou asymptotou hyperboly.

**Důkaz** (viz obr. 7, 8). Budiž dána hyperbola a na ní bod  $M$ . Budtež  $R_1$ ,  $R_2$  průsečíky sečny (různoběžné s oběma asymptotami)

procházející bodem  $M$  s asymptotami  $m, n$ . Přímka  $R_1M$  protne hyperbolu ještě v dalším bodě  $M'$ . Podle již dokázané věty 6 mají rovnoběžníky  $SN_1MN_2$ ,  $SN'_1M'N'_2$  stejné obsahy.



Obr. 7



Obr. 8

Označme  $U \equiv MN_2 \cdot M'N'_1$ ,  $V \equiv MN_1 \cdot M'N'_2$ . Snadno zjistíme, že uvedené rovnoběžníky mají stejné obsahy, právě když body  $S, U, V$  leží v přímce.

Ze stejnohlých rovnoběžníků  $SN_2UN'_1$ ,  $UM'VM$  plyne rovnoběžnost přímek  $MM'$ ,  $N'_1N_2$ . Jsou tedy útvary  $R_2M'N'_1N_2$  a  $N'_1N_2MR_1$  opět rovnoběžníky. Odtud ihned dostáváme  $MR_1 = N'_1N_2 = M'R_2$ . Tím je důkaz proveden.

**P o z n á m k y.** 1. Větu možno dokázat rovněž analyticky. Tento důkaz pouze naznačíme. Dokážeme, že dvojice bodů  $M, M'$  a  $R_1, R_2$  mají společný střed souměrnosti. Protíná-li sečna  $y = kx + q$  hyperbolu  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$  v bodech  $M \equiv (x_1, y_1), M' \equiv (x_2, y_2)$ , platí pro souřadnice  $x_1, x_2$  těchto průsečíků rovnice

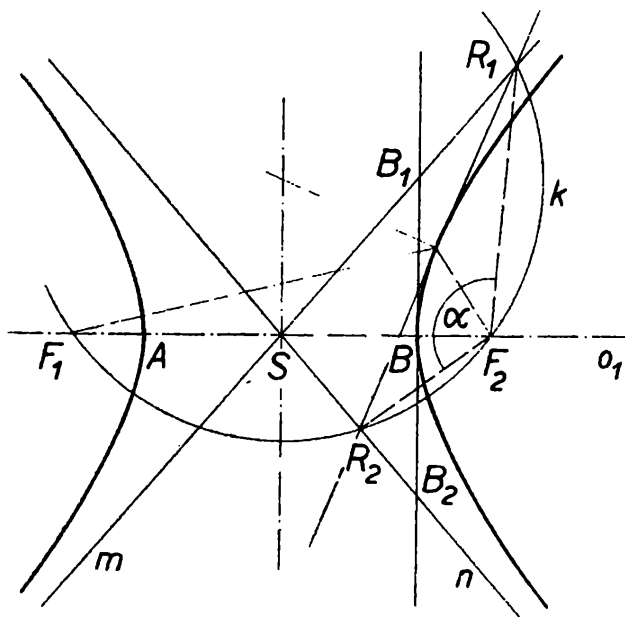
$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kqx - a^2q^2 - a^2b^2 = 0$$

Souřadnice středu tětiny  $MM'$  jsou proto

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2kq}{b^2 - a^2k^2} \quad \eta = k\xi + q = \frac{b^2q}{b^2 - a^2k^2}$$

Obdobně najdeme souřadnice průsečíků  $R_1, R_2$  sečny  $y = kx + q$  s asymptotami  $bx \pm ay = 0$  a souřadnice středu úsečky  $R_1R_2$ . Zjistíme, že střed úsečky  $MM'$  má stejné souřadnice jako střed úsečky  $R_1R_2$ . Oba středy jsou tedy totožné.

2. Věta 7 nám umožňuje sestavit libovolný další počet bodů hyperboly, jsou-li dány asymptoty a jeden bod hyperboly. Je to tak zvaná **příčková konstrukce hyperboly**.



Obr. 9

Snadným důsledkem věty 7 je další věta:

**V ě t a 8.** *Bod dotyku libovolné tečny hyperboly je středem úsečky, kterou na tečně omezuji asymptoty.*

**D ů k a z** (viz obr. 9). Určíme nejprve souřadnice průsečíků  $R_1, R_2$  s asymptotami  $m, n$ . Souřadnice průsečíku  $R_1$  dostaneme řešením soustavy těchto rovnic

$$\begin{aligned} b^2x_1x - a^2y_1y &= a^2b^2 \\ bx - ay &= 0 \end{aligned}$$

Obdržíme postupně

$$y = \frac{b^2 x_1 x - a^2 b^2}{a^2 y_1} = \frac{b}{a} x \quad \left( : \frac{b}{a} \right)$$

$$\frac{bx_1 x - a^2 b}{ay_1} = x ,$$

$$x (bx_1 - ay_1) = a^2 b ,$$

$$x = \frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1}$$

$$y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1} = \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}$$

takže průsečík je bod o souřadnicích

$$\left( \frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1} , \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} \right)$$

Obdobně zjistíme, že tečna se protíná s asymptotou

$$y = -\frac{b}{a} x$$

v bodě

$$R_2 \equiv \left( \frac{a^2 b}{bx_1 + ay_1} , \frac{-ab^2}{bx_1 + ay_1} \right)$$

Vypočteme souřadnice  $x_0, y_0$  středu úsečky  $R_1 R_2$ , kterou na tečně omezují asymptoty

$$x_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1} + \frac{a^2 b}{bx_1 + ay_1} \right) = \frac{a^2 b}{2} \cdot \frac{2bx_1}{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2} = x_1 ,$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} - \frac{ab^2}{bx_1 + ay_1} \right) = \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{2ay_1}{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2} = y_1$$

Souřadnice úseku tečny mezi asymptotami má stejné souřadnice jako dotykový bod. Oba body jsou tedy totožné.

**V ě t a 9.** *Součin úseků na asymptotách hyperboly od jejího středu k průsečíkům s libovolnou tečnou je konstantní, roven  $e^2$ .*

**D ů k a z.** Pudiž dána hyperbola a její libovolná tečna. Průsečíky  $R_1, R_2$  této tečny s asymptotami  $m, n$  mají souřadnice (viz důkaz věty 8)

$$R_1 \equiv \left( \frac{a^2 b}{bx_1 - ay_1} , \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} \right) , \quad R_2 \equiv \left( \frac{a^2 b}{bx_1 + ay_1} , \frac{-ab^2}{bx_1 + ay_1} \right)$$

Velikost úseků  $SR_1 = d_1$ ,  $SR_2 = d_2$ , které tečna hyperboly v bodě  $(x_1, y_1)$  omezuje na asymptotách  $m$ ,  $n$  vypočteme jako vzdálenosti průsečíků  $R_1, R_2$  od počátku.

Na asymptotě  $y = \frac{b}{a}x$  tvoří tečna úsek

$$d_1 = \sqrt{\left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1}\right)^2 + \left(\frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{(bx_1 - ay_1)^2}} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{|bx_1 - ay_1|}$$

Délka úseku  $SR_2$  asymptoty  $y = -\frac{b}{a}x$  je rovna

$$d_2 = \sqrt{\left(\frac{a^2b}{bx_1 + ay_1}\right)^2 + \left(-\frac{ab^2}{bx_1 + ay_1}\right)^2} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{|bx_1 + ay_1|}$$

Součin obou těchto úseků pak je

$$\begin{aligned} d_1d_2 &= \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{|bx_1 - ay_1|} \cdot \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{|bx_1 + ay_1|} = \frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{b^2x_1^2 - a^2y_1^2} = \\ &= \frac{a^2b^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2} = a^2 + b^2 = e^2 \end{aligned}$$

tedy je týž pro všechny tečny hyperboly.

**V ě t a 10.** *Trojúhelník omezený asymptotami hyperboly a její libovolnou tečnou má konstantní obsah rovný součinu hlavní a vedlejší poloosy, tj.  $ab$ .*

**D ů k a z.** Tečna s bodem dotyku  $T \equiv (x_1, y_1)$  vymezuje na asymptotách podle věty 9 úseky  $d_1, d_2$ , pro jejichž velikosti platí

$$d_1 = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{|bx_1 - ay_1|} \quad d_2 = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{|bx_1 + ay_1|}$$

Je-li  $\varphi$  velikost hlavního úhlu asymptot, pak obsah trojúhelníka určeného tečnou a asymptotami hyperboly je určen vzorcem

$$P = \frac{1}{2} d_1d_2 \sin \varphi = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \sin \varphi$$

My ale známe  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ , a proto vyjádříme  $\sin \varphi$  pomocí  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ . Platí

$$\sin \varphi = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Protože však

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a}$$

je

$$\sin \varphi = \frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2 \frac{ab}{a^2 + b^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

takže

$$P = \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{2 \frac{ab}{a^2 + b^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = ab$$

Tím je důkaz věty proveden.

**V ě t a 11.** *O asymptotách rovnosé hyperboly platí:*

1. *Asymptoty rovnosé hyperboly jsou vzájemně kolmé.*
2. *Tečna rovnosé hyperboly omezuje s jejími asymptotami pravoúhlý trojúhelník, pro který platí:*

a) *střed přepony tohoto trojúhelníku je v bodě dotyku dané tečny s hyperbolou;*

b) *obsah tohoto trojúhelníka je vždy týž (konstantní).*

**D ů k a z.** 1. Pro rovnosou hyperbolu je  $b = a$ ,

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{a} = 1$$

takže

$$\frac{\varphi}{2} = 45^\circ$$

Úhel asymptot je proto pravý.

2. Tato tvrzení plynou jednak z kolmosti asymptot rovnosé hyperboly, jednak z věty 8 (tvrzení a) a z věty 10 (tvrzení b).

**D ů k a z** této části věty lze provést též takto: Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby její osy  $x$ ,  $y$  splývaly s asymptotami hyperboly a aby hyperbola ležela v prvním a třetím kvadrantu. Tato hyperbola má pak rovnici  $xy = c$ , kde

$$c = \frac{1}{2} a^2 > 0$$

( $a$  je poloosa hyperboly). Tečna v jejím libovolném bodě  $T \equiv (x_1, y_1)$  má rovnici  $y_1 x + x_1 y = 2c$ . Průsečíky této tečny s asymptotami jsou body

$$X \equiv \left( \frac{2c}{y_1}, 0 \right)$$

$$Y \equiv \left( 0, \frac{2c}{x_1} \right)$$

Potom platí:

a) Střed úsečky  $XY$  je bod

$$S \equiv \left( \frac{c}{y_1} \quad \frac{c}{x_1} \right)$$

protože však  $c = x_1 y_1$ , je  $S \equiv (x_1, y_1) \equiv T$ .

b) Obsah trojúhelníku  $PXY$  je

$$\frac{1}{2} PX \cdot PY = \frac{1}{2} \cdot \frac{2c}{y_1} \cdot \frac{2c}{x_1} = 2c = a^2$$

**P o z n á m k a.** Z tvrzení 2a) odvodíme konstrukci tečny v jejím bodě dotyku s danou hyperbolou: Tečna hyperboly v jejím bodě  $T$  je rovnoběžná s tou střední příčkou trojúhelníku  $PXY$ , která spojuje středy jeho odvěsen  $PX, PY$ . Avšak  $TS_1 \parallel PY, TS_2 \parallel PX$ . Sestrojíme tedy body  $S_1, S_2$  a pak tečnu jako rovnoběžku s přímkou  $S_1S_2$ .

**V ě t a 12.** *Kružnice procházející průsečíky libovolné tečny hyperboly s jejími asymptotami a mající střed na její vedlejší ose prochází ohnisky této hyperboly.*

**D ů k a z** (viz obr. 9). Podle věty 9 je  $SR_1 \cdot SR_2 = e^2$ . Sestrojíme-li tedy kružnici  $k$ , jež má střed na vedlejší ose hyperboly a prochází body  $R_1, R_2$ , prochází kružnice  $k$  také ohnisky  $F_1, F_2$  dané hyperboly, jak se snadno zjistí z mocnosti středu  $S$  hyperboly ke kružnici  $k$  a ze souměrnosti hyperboly podle vedlejší osy.

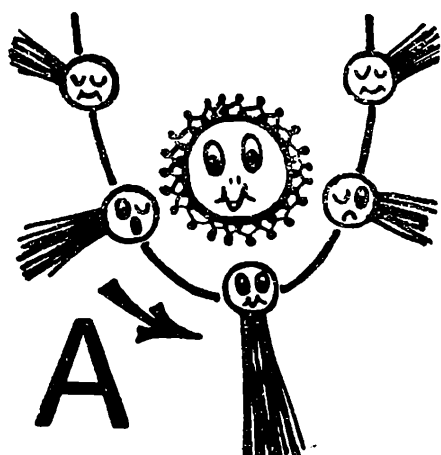
**V ě t a 13.** *Úsek omezený na tečně hyperboly jejími asymptotami jeví se z jejího ohniska v úhlu stálé velikosti.*

**D ů k a z** věty se provede užitím vzorce pro výpočet velikosti úhlu dvou přímek. Podrobné provedení důkazu přenechávám čtenáři. Pro velikost úhlu dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{b}{a}$$

### Cvičení

1. Sestrojte hyperbolu, jsou-li dány její asymptoty  $m, n$  a její bod  $M$ . Řešte užitím věty 4 nebo 5.
2. Sestrojte pomocí příčkové konstrukce hyperbolu danou asymptotami a jedním bodem hyperboly.
3. Sestrojte hyperbolu, jsou-li dány její asymptoty  $m, n$  a tečna  $t$ .
4. Sestrojte hyperbolu, je-li dána její asymptota  $m$ , bod  $M$  a tečna  $t$  s bodem dotyku  $T$ . (Návod: Užijte nejprve vět 7 a 8, potom ještě větu 4 nebo 5.)
5. Sestrojte další body rovnoosé hyperboly, jsou-li dány její asymptoty a bod  $M$ . (Návod: Použijte větu 6.)



## Zdánlivé a absolutní hvězdné velikosti

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc:

Mezi nejdůležitější astrofyzikální pojmy patří hvězdná velikost, která charakterizuje jasnost hvězdy. Vztah mezi hvězdnými velikostmi dvou hvězd a jejich jasnostmi definuje Pogsonova rovnice, která je vysvětlena v učebnici fyziky pro 3. ročník SVVŠ (odst. 130). Podle metody měření rozeznáváme hvězdné velikosti vizuální, fotografické, fotovizuální, fotoelektrické, radiometrické a bolometrické. Tyto hvězdné velikosti jsou zdánlivé, protože jasnost hvězdy závisí jednak na její vzdálenosti, jednak na tom, zda je záření hvězdy pohlcováno mezi hvězdnou látkou.

Skutečné množství záření vysílaného hvězdou vyjadřují absolutní hvězdné velikosti, které dostaneme, jestliže zdánlivé hvězdné velikosti přepočteme na vzdálenost 10 parseků (= 32,6 svět. roků), jež odpovídá paralaxe  $\pi = 0,1''$ . Pro výpočet absolutní hvězdné velikosti  $M$  ze zdánlivé hvězdné velikosti  $m$  je v citované učebnici uveden vzorec

$$M = m + 5 - 5 \log r,$$

kde  $r$  je vzdálenost hvězdy v parsekách. Tento vzorec platí za předpokladu, že mezihvězdný prostor je zcela prázdný. Ve skutečnosti je však prostor mezi hvězdami vyplněn mezihvězdnou látkou (složenou z plynu a prachu), která způsobuje absorpci světla. Jasnosti hvězd se zmenšují (čili jejich hvězdné velikosti se zvětšují). Proto přesný vzorec pro výpočet absolutní hvězdné velikosti má tvar

$$M = m + 5 - 5 \log r - A(r),$$

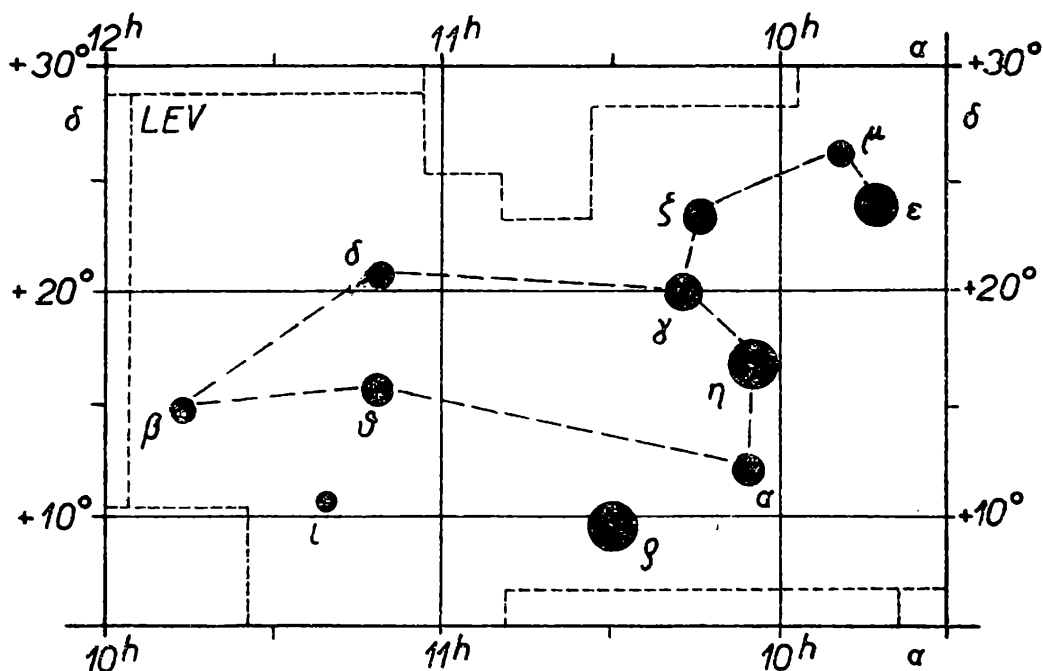
kde  $A(r)$  je absorpce světla. V prvním přiblížení roste absorpce světla,



vyjadřovaná ve hvězdných velikostech, úměrně se vzdáleností  $r$  hvězdy, čili

$$A(r) = a \cdot r,$$

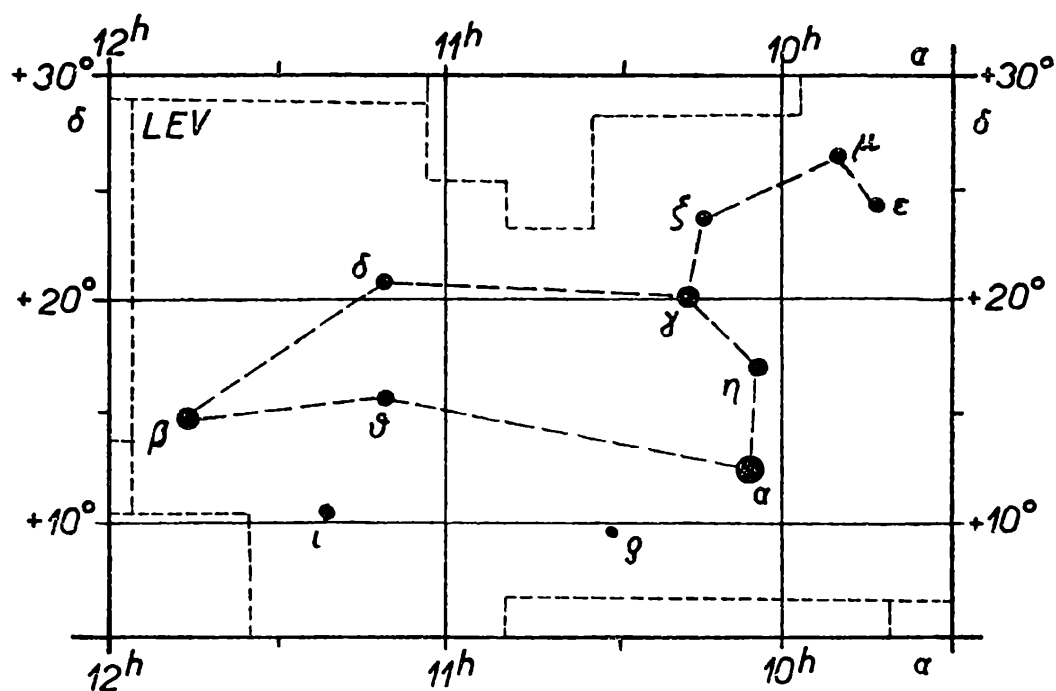
kde  $a$  je koeficient absorpce na délkovou jednotku (např. na 1 kiloparsek). Střední hodnota koeficientu absorpce  $\bar{a} = 0,3$  m na jeden kiloparsek; v některých oblastech Mléčné dráhy, zejména ve směru galaktické roviny, dosahuje hodnot  $3^m$  až  $5^m$  na jeden kiloparsek.



Obr. 1. Souhvězdí Lva — zdánlivé hvězdné velikosti

Na obr. 1 jsou nakresleny jasné hvězdy ze souhvězdí Lva, které spojujeme myšlenými čarami pro snazší zapamatování tvaru souhvězdí. Polohy hvězd jsou zakresleny v rovníkových souřadnicích (rektascenze  $\alpha$ , deklinace  $\delta$ ) pro ekvinokcium 1950,0. Graficky vyjadřujeme hvězdné velikosti různými průměry kotoučků; ve skutečnosti se však hvězdy jeví i ve velkých dalekohledech jako body. Číselné údaje jsou v tab. 1, která obsahuje rovníkové souřadnice ( $\alpha$ ,  $\delta$ ), zdánlivou hvězdnou velikost  $m$ , spektrální třídu  $Sp$ , radiální rychlost  $V_r$  (znaménko plus vyjadřuje, že se hvězda vzdaluje), roční paralaxu  $\pi$ , vzdálenost  $D$  ve světelných rocích a absolutní hvězdnou velikost  $M$ .

Nejjasnějšími hvězdami na obr. 1 jsou  $\alpha$  (Regulus),  $\beta$  (Denebola),  $\gamma$  (Alceiba) a  $\delta$  (Zosca). Regulus je hvězda hlavní posloupnosti, která má dva slabší průvodce; jasnější ( $8^m$ ) je od hlavní hvězdy vzdálen  $3'$ , slabší ( $13^m$ ) je ve vzdálenosti  $2,7''$ . Zajímavou dvojhvězdou je Alceiba, kterou tvoří žlutý a oranžový obr ( $2,6^m$  a  $3,8^m$ ). Obě hvězdy jsou ve vzájemné vzdálenosti  $4,3''$  a kolem společného těžiště obíhají za 619 let.



Obr. 2. Souhvězdí Lva — absolutní hvězdné velikosti

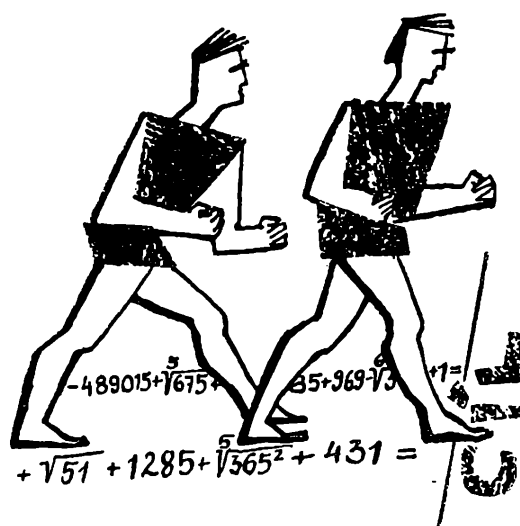
Zobrazíme-li však toto souhvězdí tak, jak by se nám jevílo, kdyby byly všechny hvězdy ve vzdálenosti 10 parseků (obr. 2), pak bychom dostali zcela jiný obraz: nejjasnější hvězdou by se stala hvězda  $\eta$ , jejíž absolutní hvězdná velikost je  $-3,4^M$ . Druhou hvězdou co do jasnosti by byla hvězda  $\varrho$  ( $-3,2^M$ ) a třetí hvězda  $\varepsilon$  ( $-1,9^M$ ). Ostatní (pro nás jasné hvězdy) by na této obloze nijak nevynikaly.

*Poznámka.* Číselné údaje v tab. 1 jsou převzaty ze seznamu hvězd do 4,50<sup>m</sup>, který sestavil dr. P. Ahnert (Kalender für Sternfreunde, 1958, str. 176—194).

Tabulka 1. Jasně hvězdy v souhvězdí Lva

| Hvěz-<br>da   | $\alpha$<br>1950,0 | $\delta$ | $m$  | $Sp$ | $V_r$<br>[kms <sup>-1</sup> ] | $\pi$<br>[''] | $D$<br>[sv. r.] | $M$  |
|---------------|--------------------|----------|------|------|-------------------------------|---------------|-----------------|------|
| $\alpha$      | 10h 5,7min         | +12° 13' | 1,36 | B8   | + 2                           | 0,042         | 80              | -0,5 |
| $\beta$       | 11 46,5            | +14 51   | 2,23 | A2   | - 1                           | 0,077         | 42              | +1,6 |
| $\gamma$      | 10 17,2            | +20 06   | 2,06 | K0   | -36                           | 0,020         | 160             | -1,2 |
| $\delta$      | 11 11,5            | +20 48   | 2,58 | A3   | -22                           | 0,051         | 65              | +1,1 |
| $\varepsilon$ | 9 43,0             | +24 00   | 3,12 | G0p  | + 5                           | 0,010         | 330             | -1,9 |
| $\xi$         | 10 13,9            | +23 40   | 3,65 | F0   | -19                           | 0,018         | 180             | 0,0  |
| $\eta$        | 10 04,6            | +17 00   | 3,58 | A0p  | + 2                           | 0,004         | 800             | -3,4 |
| $\vartheta$   | 11 11,6            | +15 42   | 3,41 | A0   | + 8                           | 0,023         | 140             | +0,2 |
| $\iota$       | 11 21,3            | +10 48   | 4,03 | F5   | -10                           | 0,047         | 70              | +2,4 |
| $\mu$         | 9 49,9             | +26 15   | 4,10 | K0   | +14                           | 0,021         | 160             | +0,7 |
| $\varrho$     | 10 30,2            | + 9 34   | 3,85 | B0p  | +42                           | 0,004         | 800             | -3,2 |

# MMO



Ve 2. čísle Rozhledů jsme uvedli texty soutěžních úloh XI. MMO v Bukurešti. Abychom vás příliš dlouho nenapínali, uvádíme zde řešení členů naší delegace. Texty si zájemci vyhledají v 2. čísle.

## 1. Příklad. Řešení Bohuša Siváka.

Nech je  $k$  prirodzené číslo väčšie ako 1. Potom

$$4k^4 + n^4 = (n^2 - 2kn + 2k^2)(n^2 + 2kn + 2k^2) = pq,$$

kde

$$p = n^2 - 2kn + 2k^2,$$

$$q = n^2 + 2kn + 2k^2$$

sú celé čísla. Číslo  $q$  je zrejme prirodzené, číslo  $p$  je tiež prirodzené, lebo

$$p = (n - k)^2 + k^2 > k^2 > 1.$$

To znamená, že pre ľubovoľné prirodzené číslo  $k > 1$  je číslo  $4k^4 + n^4$  zložené pre všetky prirodzené čísla  $n$ . Čísel  $a$  danej vlastnosti preto existuje nekonečne mnoho a patria k nim všetky čísla tvaru

$$a = 4k^4 \ (k > 1 \text{ prirodzené}).$$

## 2. Příklad. Řešení Bohuša Siváka.

Funkčná hodnota pre  $x = -a_1$  je

$$f(-a_1) = 1 + \frac{1}{2} \cos(a_2 - a_1) +$$

$$+ \frac{1}{4} \cos(a_3 - a_1) + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n - a_1),$$

$$|f(-a_1) - 1| = \left| \frac{1}{2} \cos(a_2 - a_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \cos(a_3 - a_1) + \quad + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n - a_1) \right|$$

Pre ľubovoľný konečný počet čísel  $p_1, p_2, \dots, p_n$  platí nerovnosť

$$|p_1 + p_2 + \quad + p_n| \leq |p_1| + |p_2| + \quad + |p_n|,$$

preto

$$|f(-a_1) - 1| \leq \frac{1}{2} |\cos(a_2 - a_1)| + \\ + \frac{1}{4} |\cos(a_3 - a_1)| + \quad + \frac{1}{2^{n-1}} |\cos(a_n - a_1)| \leq \\ \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \quad + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

Nerovnosť  $|z| < 1$  je pre reálne číslo  $z$  ekvivalentná s nerovnosťou  $-1 < z < 1$ , v našom prípade

$$-1 < f(-a_1) - 1 < 1,$$

$$0 < f(-a_1) < 2.$$

V bode  $x = -a_1$  je preto funkčná hodnota kladná. Pomocou známeho súčtového vzorca môžeme upraviť  $f(x)$  na jednoduchší tvar

$$f(x) = \cos x \left[ \cos a_1 + \frac{1}{2} \cos a_2 + \quad + \frac{1}{2^{n-1}} \cos a_n \right] - \\ - \sin x \left[ \sin a_1 + \frac{1}{2} \sin a_2 + \quad + \frac{1}{2^{n-1}} \sin a_n \right] = \\ = A \cos x - B \sin x.$$

Pretože  $f(-a_1) > 0$ , je aspoň jedno z čísel  $A, B$  rôzne od nuly. Nech

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} > 0$$

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

a potom

$$f(x) = r \cos(x + \varphi), \quad r \neq 0$$

Ak pre dve reálne čísla  $x_1, x_2$  platí

$$f(x_1) = f(x_2) = 0,$$

platí tiež

$$\cos(x_1 + \varphi) = \cos(x_2 + \varphi) = 0$$

Napísané rovnice majú riešenie

$$x_1 = \frac{2k_1 + 1}{2} \pi - \varphi ,$$

$$x_2 = \frac{2k_2 - 1}{2} \pi - \varphi$$

Označme

$$m = k_2 - k_1$$

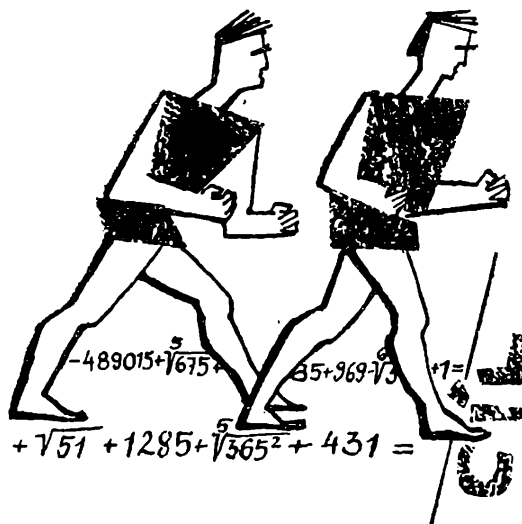
a potom

$$x_2 - x_1 = m \cdot \pi ,$$

$$\text{kde } m = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$$

To bolo treba dokázať.

# MFO



## Úlohy z 3. mezinárodní olympiády

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠTÁL

V době od 22. června do 2. července 1969 probíhala v Brně 3. mezinárodní fyzikální olympiáda. Na ní byly dány soutěžícím k řešení čtyři teoretické úlohy a jedna úloha laboratorní. Byly to tyto úlohy,

### 1. ÚLOHA

**Text:**

Soustava těles znázorněná na obr. 1 je tvořena třemi vozíčky  $A$ ,  $B$ ,  $C$  o hmotnostech  $m_1 = 300$  g,  $m_2 = 200$  g a  $m_3 = 1500$  g.

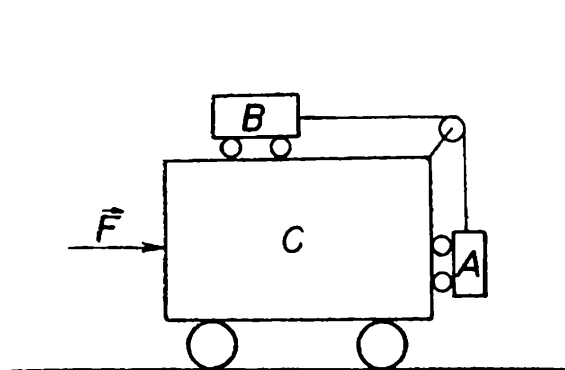
1. Na vozíček  $C$  působí horizontální síla takové velikosti, že vozíčky  $A$ ,  $B$  jsou v klidu vzhledem k vozíčku  $C$ .

- a) Vypočtete tah v lanku spojujícím vozičky  $A$  a  $B$ .
- b) Určete velikost síly  $F$ .

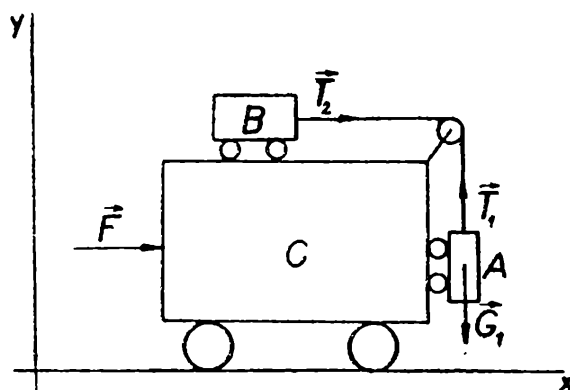
2. Předpokládejte, že voziček  $C$  je nepohyblivý.

- a) Vypočtete zrychlení voziček  $A$  a  $B$ .
- b) Vypočtete tah v lanku.

Při řešení zanedbejte síly odporu a tření. Momenty setrvačnosti kladky i koleček voziček považujte za zanedbatelné. Hmotnost lanka rovněž zanedbejte.



Obr. 1



Obr. 2

**Řešení:**

**Případ 1.**

Síla  $F$  je takové velikosti že, vozičky  $A$ ,  $B$  zůstávají v klidu vzhledem k vozičku  $C$ , tzn., že se pohybují se stejným zrychlením jako vozeček  $C$ . Označme síly  $G_1$ ,  $T_1$  a  $T_2$  působící na jednotlivá tělesa tak, jak je vyznačeno na obr. 2, a uijme pohybových rovnic jednak pro vozičky  $A$  a  $B$ , jednak pro celý systém.

Voziček  $B$  se pohybuje v souřadné soustavě  $Oxy$  se zrychlením  $a_x$  a působí na něj za podmínek v zadání 1 výsledná síla  $T_2$ . Platí

$$T_2 = m_2 a_x. \quad (1)$$

Poněvadž  $T_1$  a  $T_2$  značí tahy v témž lanku, platí pro jejich velikosti

$$T_1 = T_2$$

Na voziček  $A$  působí ve směru  $Oy$  dvě síly  $T_1$  a  $G_1$ . Protože podle podmínky 1 jsou vozičky  $A$  a  $B$  v klidu vzhledem k vozičku  $C$ , je zrychlení  $a_y = 0$  a pak platí

$$T_1 - m_1 g = 0$$

Je tedy také

$$T_2 = m_1 g \quad (2)$$

Pro pohyb celé soustavy lze napsat pohybovou rovnici

$$F = (m_1 + m_2 + m_3) a_x \quad (3)$$

vzhledem k tomu, že síly mezi vozičky  $A$  a  $C$ , a též mezi vozičky  $B$  a  $C$ , jsou vnitřní síly vzhledem k soustavě všech tří těles. Poznamenejme, že též tah  $T_2$  je vzhledem k soustavě všech těles vnitřní silou, jak je zřejmé z rozboru sil působících na kladku. Z rovnic (1) a (2) obdržíme

$$a_x = \frac{m_1}{m_2} g$$

po dosazení do (3)

$$F = (m_1 + m_2 + m_3) \frac{m_1}{m_2} g$$

Numerické řešení

$$T_2 = T_1 = 0,300 \cdot 9,81 \text{ N} = 2,94 \text{ N}$$

$$F = 2,00 \cdot \frac{300}{200} \cdot 9,81 \text{ N} = 29,4 \text{ N}$$

**Případ 2.**

Je-li voziček  $C$  nepohyblivý, pak voziček  $A$  se pohybuje se zrychlením  $a_y$ , a voziček  $B$  se zrychlením  $a_x$ . Vzhledem k pevnosti lanka (neprotahuje se) platí

$$a_x = -a_y = a.$$

Pak lze psát pohybové rovnice pro vozičky  $A$ , resp.  $B$

$$T_1 = G_1 - m_1 a, \quad (4)$$

$$T_2 = m_2 a \quad (5)$$

Pro velikosti tahů v lanku platí opět

$$T_1 = T_2 \quad (6)$$

Z relací (4), (5) a (6) bezprostředně plyne

$$(m_1 + m_2) a = m_1 g$$

a odtud vypočteme výsledné vztahy

$$a = a_x = -a_y = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$T_2 = T_1 = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} g$$

**Číselné výsledky**

$$a = a_x = \frac{300}{500} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} = 5,89 \text{ m s}^{-2}$$

$$T_2 = T_1 = 1,18 \text{ N}$$

## 2. ÚLOHA

### Text:

V měděném kalorimetru o hmotnosti  $m_1$  je voda o hmotnosti  $m_2$ ; jejich teplota je  $t_2$ . Do vody v kalorimetru dáme led o hmotnosti  $m_3$  a teplotě  $t_3 < 0^\circ\text{C}$ .

a) Určete teplotu a hmotnosti vody a ledu v rovnovážném stavu, jestliže veličiny  $m_1, m_2, m_3, t_2, t_3$  mají zcela obecné hodnoty. Napište kalorimetrické rovnice pro všechny možné děje které je nutno při řešení úlohy uvažovat.

b) Určete teplotu a hmotnosti vody a ledu, je-li  $m_1 = 1,00\text{ kg}$ ,  $m_2 = 1,00\text{ kg}$ ,  $m_3 = 2,00\text{ kg}$ ,  $t_2 = 10^\circ\text{C}$ ,  $t_3 = -20^\circ\text{C}$ .

### Poznámka:

Energetické ztráty zanedbejte. Barometrický tlak předpokládejte normální. Měrné teplo mědi je  $c_1 = 0,094\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$ , měrné teplo ledu  $c_3 = 0,492\text{ kcal kg}^{-1}\text{ deg}^{-1}$ , měrné skupenské teplo tání ledu  $l = 79,7\text{ kcal kg}^{-1}$ .

### Řešení:

V řešení úlohy je nutno uvažovat o veličinách, které jsou uvedeny a označeny v textu zadání, a dále o těchto veličinách:

$t$  = teplota výsledného rovnovážného stavu směsi,

$t_0 = 0^\circ\text{C}$  teplota tání ledu při normálním tlaku,

$M_2$  - výsledná hmotnost vody,

$M_3$  - výsledná hmotnost ledu,

$m'_2 \leq m_2$  - hmotnost vody, která se změní v led,

$m'_3 \leq m_3$  - hmotnost ledu, který se změní na vodu.

a) Obecně mohou nastat čtyři možné děje a jim odpovídající výsledné rovnovážné stavy:

1.  $t_0 < t < t_2$ ,  $m'_2 = 0$ ,  $m'_3 = m_3$ ,  $M_2 = m_2 + m_3$ ,  $M_3 = 0$ .

Neznámou výslednou teplotu  $t$  vypočítáme z kalorimetrické rovnice

$$\begin{aligned} (m_1 c_1 + m_2 c_2) (t_2 - t) = \\ = m_3 c_3 (t_0 - t_3) + m_3 l + m_3 c_2 (t - t_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Fyzikální smysl má jen takové řešení, pro něž je splněna podmínka  $t_0 < t < t_2$ .

2.  $t_3 < t < t_0$ ,  $m'_2 = m_2$ ,  $m'_3 = 0$ ,  $M_2 = 0$ ,  $M_3 = m_2 + m_3$ .

Neznámou výslednou teplotu  $t$  vypočítáme z kalorimetrické rovnice

$$\begin{aligned} m_1 c_1 (t_2 - t) + m_2 c_2 (t_2 - t_0) + \\ + m_2 l + m_2 c_3 (t_0 - t) = m_3 c_3 (t - t_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Fyzikální smysl má jen takové řešení, pro něž je splněna podmínka  $t_3 < t < t_0$ .



3.  $t = t_0$ ,  $m'_2 = 0$ ,  $0 < m'_3 \leq m_3$ ,  $M_2 = m_2 + m'_3$ ,  $M_3 = m_3 - m'_3$ .

Neznámou hmotnost  $m'_3$  vypočítáme z kalorimetrické rovnice

$$(m_1c_1 + m_2c_2)(t_2 - t_0) = m_3c_3(t_0 - t_3) + m'_3l \quad (3)$$

Fyzikální smysl má jen takové řešení, které vyhovuje podmínce  $0 < m'_3 \leq m_3$

4.  $t = t_0$ ,  $0 < m'_2 \leq m_2$ ,  $m'_3 = 0$ ,  $M_2 = m_2 - m'_2$ ,  $M_3 = m_3 + m'_2$

Neznámou hmotnost  $m'_2$  vypočítáme z kalorimetrické rovnice

$$(m_1c_1 + m_2c_2)(t_2 - t_0) + m'_2l = m_3c_3(t_0 - t_3). \quad (4)$$

Fyzikální smysl má jen takové řešení, které vyhovuje podmínce  $0 < m'_2 \leq m_2$ .

b) Kromě číselných hodnot veličin uvedených v textu zadání použijme ještě

$$c_2 = 1,00 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}, t_0 = 0^\circ \text{C}$$

Dosazením těchto hodnot do rovnic (1), (2), (3) dostaneme řešení, která nemají fyzikální smysl (nevyhovují uvedeným podmínkám pro  $t$ , resp.  $m'_3$ ). Skutečný fyzikální děj je při daných číselných hodnotách veličin  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $t_0$ ,  $l$  vyjádřen rovnicí (4), z níž plyne

$$m'_2 = \frac{m_3c_3(t_0 - t_3) - (m_1c_1 + m_2c_2)(t_2 - t_0)}{l}$$

Dosazením daných číselných hodnot dostaneme  $m'_2 = 0,11 \text{ kg}$ . Je tedy

$$t = 0^\circ \text{C}, M_2 = m_2 - m'_2 = 0,89 \text{ kg}, M_3 = m_3 + m'_2 = 2,11 \text{ kg}$$

(Pokračování)

## K výročí založení Fyzikální olympiády v ČSSR

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL

Letos proběhl již desátý ročník Fyzikální olympiády. V některých krajích probíhá FO však již déle. V Olomouckém kraji začali s Fyzikální olympiádou již v r. 1957, a to pro nejvyšší třídu středních škol. V r. 1958 probíhala FO již ve třech krajích: v Olomouckém v kat. A a B, Pražském v kat. A a Brněnském v kat. A, B, C, tedy ve všech třídách středních škol. Teprve v r. 1959 začalo se s FO celostátně. Po zkušenostech z Brněnského kraje jsou ukládány účastníkům všech

kategorií A, B a C k prostudování témata přesahující rozsah látky střední školy. Kontrola prostudování těchto témat se provádí uložením vhodné úlohy v 2. kole.

V Jihomoravském kraji vznikl v r. 1961 první pokus o rozšíření soutěže o kat. D pro nejvyšší třídu osmileté střední školy. Následujícího roku přidal se kraj Východočeský a v pátém ročníku FO byla soutěž v kat. D zavedena již celostátně. V r. 1965 udělal Jihomoravský kraj pokus se zavedením 3. kola — krajského — pro kat. D, které je obdobou 3. kola (celostátního) kat. A. Toto 3. kolo financoval KNV Jihomoravského kraje. Po dvouleté praxi přidal se k organizování 3. kola i Východočeský kraj a dnes již toto kolo probíhá skoro ve všech krajích ČSSR.

Na jednotlivých školách včetně ZDŠ jsou referenti pro Fyzikální olympiádu. Kategorie D je řízena okresním výborem Fyzikální olympiády. Fyzikální olympiádu v kraji na školách 2. cyklu i řízení okresních výborů Fyzikální olympiády má na starosti krajský výbor Fyzikální olympiády. Celostátně je FO řízena ústředním výborem Fyzikální olympiády složeným z pracovníků ČSR a SSR. K dosažení vyšší úrovně na školách starají se o FO na školách 2. cyklu především učitelé vysokoškolští, na ZDŠ učitelé středoškolští.

Počet účastníků kat. A, B, C v 1. kole bývá ročně asi 3000—4000 počet úspěšných řešitelů v 1. kole, a tedy i počet účastníků v 2. kole asi 1200—1900, počet úspěšných řešitelů v 2. kole 400—800. Z 80 vybraných nejlepších řešitelů 2. kola kat. A ze všech krajů bývá 40—60 úspěšných řešitelů. Letos tento počet klesl výjimečně na 19.

V kategorii D je počet řešitelů v 1. kole v mezích 12 000—13 000, úspěšných řešitelů 1. kola bývá 5000—6000 a úspěšných řešitelů 2. kola 2500—3200. Největší počet účastníků úspěšných řešitelů i vítězů má na prvním místě Praha a na druhém místě Jihomoravský kraj. Největší počet prvních míst v pořadí vítězů ročníku FO a nejmenší procentový počet neúspěšných řešitelů z účastníků 3. kola má na prvním místě Jihomoravský kraj s vysokým náskokem před Prahou, která je na druhém místě.

Na podporu Fyzikální olympiády kat. A, B a C konají se během roku kursy v různých místech podle zájmu studentů. Na pomoc kat. D se konají tyto kursy pro učitele fyziky ZDŠ, kteří mají přenášet způsob myšlení na žáky svých škol.

Vedle toho se konají koncem školního roku v kraji týdenní nebo čtrnáctidenní soustředění nejúspěšnějších řešitelů kat. B a kat. C a tří-týdenní celostátní soustředění 90 nejlepších řešitelů kat. B z MO a FO. Na těchto soustředěních se probírají témata s vyššími požadavky.

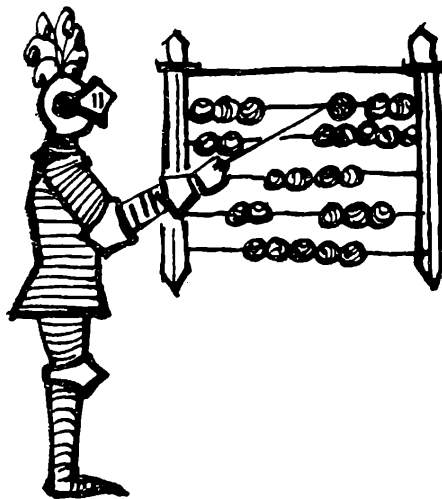
Pro zvýšení úrovně vzdělání v matematice a fyzice jsou zavedeny skoro v každém kraji specializované třídy, do nichž se mohou hlásit studenti mající větší zájem o tyto předměty. Velmi pěkně se uplatňují

po této stránce specializované třídy SVVŠ v Bratislavě, Novohradské ul. a SVVŠ v Praze, W. Piecka.

Práce ve FO je náročná na pracovníky z řad učitelů, profesorů a zvláště funkcionářů FO. Je třeba však zde též uvést, že akce FO krajské i celostátní jsou velmi podporovány Vojenskou akademií Antónína Zápotockého. Je třeba si přát, aby práce, kterou věnují profesori a učitelé FO, byla od studentů středních škol i od žáků ZDŠ náležitě využívána.

Naši reprezentanti na všech třech mezinárodních fyzikálních olympiádách nás dobře reprezentovali. Na 1. MFO byli jsme na třetím místě (z 5 účastníků), na 2. MFO na druhém místě (z 8 účastníků) a na 3. MFO na prvním místě (z 8 účastníků). Přáli bychom si, aby dosažené úspěchy naší FO byly následovány úspěchy dalšími.

# NAŠE SOUTĚŽ



## Řešení úloh loňské soutěže

### *Konstruktivní geometrie*

3. Je daná rovina  $\rho$ , v nej dva různé body  $A$ ,  $B$  a přímka  $p$  neležící v rovině  $\rho$ . Na přímce  $p$  najděte bod  $X$  tak, aby  $\sphericalangle AX_1B = 90^\circ$ , ak  $X_1$  je pravouhlý průmět bodu  $X$  do roviny  $\rho$ .

(Došlo 11 řešení)

Stanislav Horák

Riešil kolektív I.C, SVŠ Michalovce (Karol Varešinský, František Sudzina, Andrej Hrebovčík):

R o z b o r. Ak je  $X \in p$ , je  $X_1 \in p_1$  ( $p_1$  je pravouhlý průmět přímky  $p$  do roviny  $\rho$ ). Ak je  $\sphericalangle AX_1B = 90^\circ$ , leží  $X_1$  na Talesovej kružnici  $k$ , ktorá je zostrojená nad priemerom  $AB$ . Bod  $X_1$  je spoločný bod priamky  $p_1$  a kružnice  $k$ .

K o n š t r u k c i a.

a) Zostrojíme  $p_1$ .

b) Zostrojíme kružnicu  $k$ .

c) Spoločný bod priamky  $p_1$  a kružnice  $k$  je bod  $X_1$ .

d) V bode  $X_1$  vedieme k rovine  $\varrho$  kolmicu a jej priesečník s priamkou  $p$  je hľadaný bod  $X$ .

D ô k a z. Správnosť konštrukcie plyní z rozboru.

D i s k u z i a. A) Priamka  $p$  nie je kolmá na rovinu  $\varrho$ .

I. Priamka  $p_1$  má s kružnicou  $k$  spoločné dva rôzne body.

a)  $p_1$  pretína kružnicu  $k$  v bodoch  $A, B$ . Žiadne riešenie.

b)  $p_1$  pretína kružnicu  $k$  v bode  $A$  ( $B$ ) a v bode  $K \neq B$  ( $K \neq A$ ).

Práve jedno riešenie.

c)  $p_1$  pretína kružnicu  $k$  v bodoch  $K, L$ , ktoré sú rôzne od bodov  $A, B$ . Dve rôzne riešenia.

II. Priamka  $p_1$  sa dotýka kružnice  $k$ .

a) Priamka  $p_1$  sa dotýka v bode  $A$  ( $B$ ). Žiadne riešenie.

b) Priamka  $p_1$  sa dotýka v bode  $T \neq A$ ,  $T \neq B$ . Práve jedno riešenie.

III. Priamka  $p_1$  nemá s kružnicou  $k$  žiadny spoločný bod. Žiadne riešenie.

B) Priamka  $p \perp \varrho$ .

a)  $p_1$  je bod incidentný s kružnicou  $k$ . Úloha má nekonečne veľa riešení, lebo  $X$  môže byť akýkoľvek bod priamky  $p$ .

b)  $p_1$  je bod neležiaci na kružnici  $k$ . Žiadne riešenie.

4. Sestrojte rovnoosou hyperbolu, jsou-li dány polohou obě její osy  $a, b$  a normála  $n$ , přičemž pravoúhlý trojúhelník vytvořený přímkami  $a, b, n$  není rovnoramenný.

(Došlo 9 řešení)

Ota Setzer

Řešila Hana Drahoňovská, I.A, SVVŠ Brno, Koněvova:

Rozbor: Pro rovnoosou hyperbolu platí věta: Úsek normály mezi osami rovnoosé hyperboly je hyperbolou půlen<sup>1)</sup>.

Dále víme (viz Piska-Medek, Deskr. geometrie I, str. 140): Protíná-li tečna hyperboly její asymptoty v bodech  $C, D$ , pak kružnice o středu na vedlejší ose hyperboly a jdoucí body  $C, D$ , prochází ohnisky hyperboly.

Konstrukce: Sestrojíme střed  $T$  úseku, který vytíná daná normála  $n$  mezi osami hyperboly. Kolmice  $t \perp n$  vedená bodem  $T$  je tečnou hyperboly, její průsečíky s asymptotami <sup>1</sup> $m, ^2m$  jsou body  $C, D$ . Sestrojíme kružnici  $k$  o středu na vedlejší ose a jdoucí body  $C, D$ . V prů-

---

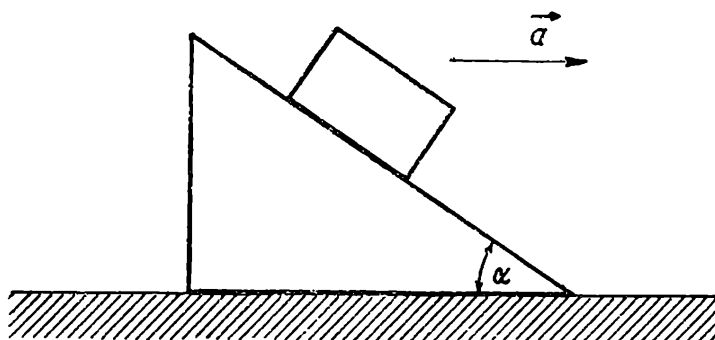
<sup>1)</sup> Řešitelka tuto známou větu dokázala.

sečících kružnice  $k$  s hlavní osou jsou ohniska  $^1F$ ,  $^2F$ , čímž je hyperbola dostatečně určena.

*Diskuse:* Úloha má za daných podmínek vždy jediné řešení, je třeba jenom správně rozhodnout, která z odvěsen daného pravoúhlého trojúhelníka je hlavní a která vedlejší osou. (Proti menšímu úhlu vedlejší osa.)

*Fyzika:*

2. Pravoúhlý klín, na jehož zkosené straně leží kvádr hmotnosti  $m$ , se pohybuje vpravo s konstantním zrychlením  $a$  (viz obr.). Vypočítejte:



Obr. 1

- s jakým zrychlením klouže kvádr po klínu,
- jaké musí být zrychlení  $a$ , aby kvádr nesjel po klínu.

Koeficient tření mezi klínem a kvádrem je  $f = 0,2$ . Úhel  $\alpha = 45^\circ$ .

(Došlo 21 řešení)

*Zdeněk Janout*

*Řešila Hana Drahoňovská, 1.A, SVVŠ Koněvova 47, Brno:*

Na kvádr působí svislá síla tíže  $mg$  a vodorovná síla setrvačnosti (proti směru pohybu klínu)  $ma$ . Složka výslednice těchto sil

$$F = mg \sin \alpha - ma \cos \alpha$$

působí ve směru možného pohybu po klínu (směrem dolů); složka kolmá k styčné ploše

$$mg \cos \alpha + ma \sin \alpha$$

vyvodí třecí sílu

$$T = m (g \cos \alpha + a \sin \alpha) f,$$

která však působí vždy proti pohybu.

Je-li tedy  $F > T$ , to jest

$$g \sin \alpha - a \cos \alpha > (g \cos \alpha + a \sin \alpha) \cdot f, \quad (1)$$

pak kvádr klouže dolů se zrychlením

$$a_1 = \frac{F - T}{m} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) - a (\cos \alpha + f \sin \alpha) \quad (2)$$

Je-li  $F > T$ , potom

$$a \cos \alpha - g \sin \alpha > g (\cos \alpha + a \sin \alpha) f, \quad (3)$$

a pak se kvádr pohybuje nahoru se zrychlením

$$a_2 = \frac{-F - T}{m} = a (\cos \alpha - f \sin \alpha) - g (\sin \alpha + f \cos \alpha) \quad (4)$$

Podmínka (1) dává po úpravě

$$a < \frac{g (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = g \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + f \operatorname{tg} \alpha}$$

Obdobně podmínku (3) je možné za předpokladu, že je  $f \operatorname{tg} \alpha < 1$  upravit na tvar

$$a > \frac{g (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = g \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}$$

Je-li tedy  $f \operatorname{tg} \alpha < 1$  a je-li současně  $a$  v mezích

$$g \frac{\operatorname{tg} \alpha - f}{1 + f \operatorname{tg} \alpha} \leq a \leq g \frac{\operatorname{tg} \alpha + f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha}$$

pak kvádr zůstává vzhledem ke klínu v relativním klidu. Je-li

$$f \operatorname{tg} \alpha \geq 1,$$

platí pro zrychlení  $a$  jen dolní mez a v tomto případě se hranol neposouvá vzhůru ani při sebevětším zrychlení  $a$ .

Pro dané číselné hodnoty je  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ,  $f \operatorname{tg} \alpha = 0,2$ ; platí proto pro relativní klid obě meze

$$g \frac{1 - 0,2}{1 + 1 \cdot 0,2} \leq a \leq g \frac{1 + 0,2}{1 - 1 \cdot 0,2}$$
$$\frac{2}{3} g \leq a \leq \frac{3}{2} g$$

Závěr.

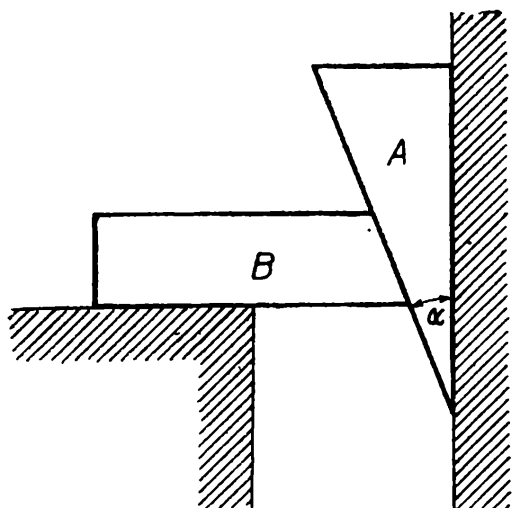
a) Zrychlení s jakým kvádr klouže po klínu je určeno rovnicemi (2) a (4).

b) Aby kvádr nesjel z klínu musí zrychlení klínu  $a$  ležet v intervalu  $< \frac{2}{3} g, \frac{3}{2} g >$

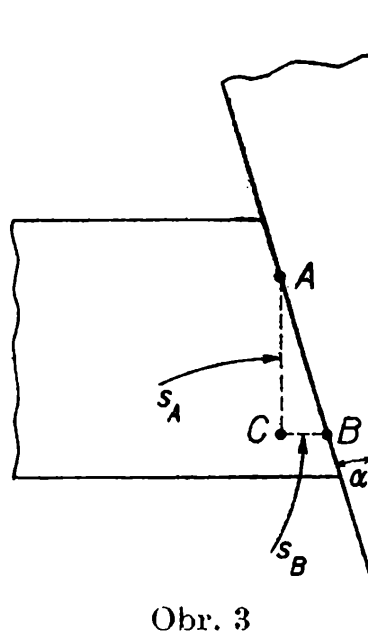
3. Pravoúhlý klín  $A$  tíže  $A$  se opírá jednou stěnou o hladkou svislou stěnu a částí druhé stěny o hladkou desku  $B$  tíže  $P$ , která může klouzat bez tření po pevné vodorovné rovině (viz obr. 1). Určete zrychlení hranolu a desky a tlak hranolu na desku. Úhel  $\alpha$  je známý.

(Došlo 21 řešení)

*Zdeněk Janout*



Obr. 2



Obr. 3

Řešila Hana Drahoňovská, 1.A, SVVŠ Koněvova 47, Brno:

Za podmínek úlohy budou obě tělesa vykonávat rovnoměrně zrychlený pohyb. Označme  $s_A$  svislou dráhu klínu, jeho zrychlení  $a_A$  a jeho hmotnost

$$m_A = \frac{Q}{g}$$

vodorovná dráha desky nechť je  $s_B$ , její zrychlení  $a_B$  a její hmotnost

$$m_B = \frac{P}{g}$$

Vykoná-li v určité době  $t$  klín  $A$  dráhu  $s_A = \overline{AC}$ , musí deska  $B$  v téže době vykonat dráhu (viz obr. 2)

$$s_B = \overline{BC} = \overline{AC} \operatorname{tg} \alpha = s_A \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Protože

$$s_A = \frac{1}{2} a_A t^2, \quad s_B = \frac{1}{2} a_B t^2$$

je po dosazení do (1) určen vztah mezi zrychleními klínu a desky. Platí

$$a_B = a_A \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Označíme-li  $N$  neznámý tlak klínu na desku, bude na klín působit síla o svislé složce  $gm_A - N \sin \alpha$ . Zrychlení klínu  $A$  je tedy

$$a_A = g - \frac{N \sin \alpha}{m_A} \quad (3)$$

Na desku  $B$  působí síla o vodorovné složce  $N \cos \alpha$  a její zrychlení je tedy

$$a_B = \frac{N \cos \alpha}{m_B} \quad (4)$$

Rovnice (2), (3) a (4) tvoří soustavu tří rovnic pro tři neznámé  $a_A$ ,  $a_B$  a  $N$ . Dosadíme-li za  $a_A$  a  $a_B$  do rovnice (2) obdržíme

$$\frac{N \cos \alpha}{m_B} = g \operatorname{tg} \alpha - \frac{N \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}{m_A}$$

odkud vypočítáme tlak klínu na desku

$$N = \frac{m_A m_B \sin \alpha}{m_A \cos^2 \alpha + m_B \sin^2 \alpha} g = \frac{PQ \operatorname{tg} \alpha}{Q + P \operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{1}{\cos \alpha} \quad (5)$$

Dosadíme-li za  $N$  do rovnic (3) a (4) dostaneme

$$a_A = \frac{m_A \cos^2 \alpha}{m_A \cos^2 \alpha + m_B \sin^2 \alpha} g = \frac{Q}{Q + P \operatorname{tg}^2 \alpha} g \quad (6)$$

$$a_B = \frac{m_A \sin \alpha \cos \alpha}{m_A \cos^2 \alpha + m_B \sin^2 \alpha} g = \frac{Q \operatorname{tg} \alpha}{Q + P \operatorname{tg}^2 \alpha} g \quad (7)$$

*Závěr.*

Zrychlení hranolu je určeno vzorcem (6), zrychlení desky vzorcem (7). Tlak klínu na desku je dán vztahem (5).

4. Vypočítejte měrné teplo vzorku  $c$  z homogenního materiálu, použijeme-li k měření vodní směšovací kalorimetr. Jeho vodní hodnota je  $110 \text{ J deg}^{-1}$ , hmotnost vodní náplně je  $900g$ , vzorku  $195g$ , teplo kalorimetru s vodou před vložením vzorku  $\vartheta_0 = 25^\circ \text{C}$ , po vložení  $\vartheta_2 = 28^\circ \text{C}$ , teplota vzorku před vložením  $\vartheta_1 = 66^\circ \text{C}$ . Měrné teplo vody bereme  $c_2 = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ .

(Došlo 23 řešení)

*Václav Šindelář*

*Řešil Petr Firbas, 1.S, SVVŠ Brno:*

Aplikujme kalorimetrickou rovnici na náš případ

$$m_x c_x (v_1 - v_2) = (m_2 c_v + m_k c_k) (v_2 - v_0) \quad (\text{J}) \quad (1)$$

Vodní hodnota kalorimetru

$$v_k = m_k c_k \quad (\text{J deg}^{-1}) \quad (2)$$

a potom bude vztah (1) vypadat takto

$$m_x c_x (v_1 - v_2) = (m_2 c_v + v_k) (v_2 - v_0) \quad (\text{J}) \quad (1')$$



Z tohoto vztahu vyjádříme měrné teplo  $c_x$

$$c_x = \frac{(v_2 - v_0) (m_2 c_v + v_k)}{m_x (v_1 - v_2)} \quad (\text{J kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}) \quad (3)$$

Rozměrová zkouška pomocí hlavních jednotek

$$[c_x] = \text{J kg}^{-1} \text{ deg}^{-1} = \text{m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ deg}^{-1},$$

$$\left[ \frac{(v_2 - v_0) (m_2 c_v + v_k)}{m_x (v_1 - v_2)} \right] = \text{deg J deg}^{-1} \text{ kg}^{-1} \text{ deg}^{-1} = \\ = \text{deg deg}^{-1} \text{ deg}^{-1} \text{ kg}^{-1} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = \text{m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ deg}^{-1}.$$

Dosadíme do (3) hodnoty z daného  
 $m_x$  je hmotnost vzorku,  $m_2$  je hmotnost vodního obsahu

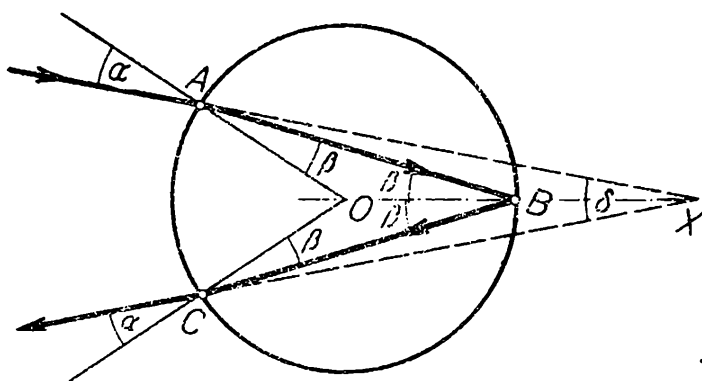
$$c_x = \frac{(28 - 25) (0,900 \cdot 4180 + 110)}{0,195 (66 - 28)} \doteq 1568 \text{ J kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$$

Měrné teplo  $c_x^s$  vzorku je obecně vyjádřeno vztahem (3) a číselně je  $1568 \text{ J kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ .

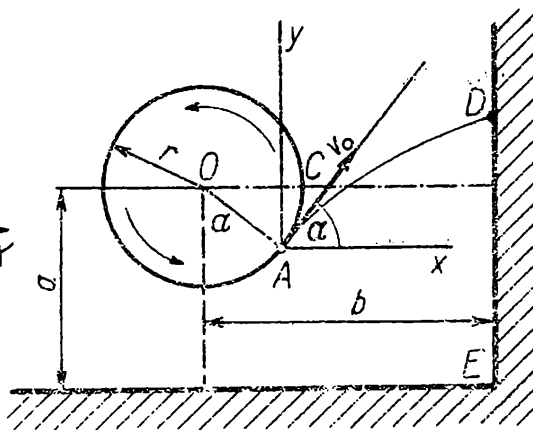
5. Světelný paprsek vstupuje v bodě  $A$  (obr. 0) do vodní kapky (index lomu vody  $n = \frac{4}{3}$ ) pod úhlem velikosti  $\alpha$ , odráží se v bodě  $B$  a v bodě  $C$  vystupuje opět ven. Jak velký musí být úhel dopadu  $\alpha$ , aby odchylka  $\delta$  paprsku vstupujícího od paprsku vystupujícího byla co největší?

(Došlo 13 řešení)

František Vencálek



Obr. 4



Obr. 5

Řešil Alojz Caletka a Jozef Čulen, SVŠ, M. Nešpora v Holíči:

Dopadající paprsek se láme pod úhlem  $\beta$ . Jak vyplývá z rovnoramenných trojúhelníků  $\triangle OAB$  a  $\triangle OBC$  dopadá paprsek v bodě  $B$  pod úhlem  $\beta$ , odráží se pod tímž úhlem  $\beta$  (zákon odrazu), v bodě  $C$  dopadá rovněž pod úhlem  $\beta$  a vystupuje pod úhlem  $\alpha$  (zákon recipro-

city paprsku). Chod paprsku je tedy souměrný podle spojnice  $OB$ , takže se prodloužený vstupující paprsek protíná se zpětně prodlouženým paprskem vystupujícím v bodě  $X$  na polopřímce  $OB$  (obr. 0). V trojúhelníku  $ABX$  je vnitřní úhel při vrcholu  $A$   $\alpha - \beta$ , při vrcholu  $X$   $\frac{\delta}{2}$  a vnější úhel při vrcholu  $B$  je  $\beta$ , takže platí vztah

$$\beta = \frac{\delta}{2} \neq \alpha - \beta$$

$$\delta = 4\beta - 2\alpha$$

Aby byla odchylka  $\delta$  maximální, musí  $\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$ , tj.

$$4 \frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = 0 \quad (1)$$

Ze zákona lomu  $\sin \alpha = n \sin \beta$  dostáváme

$$\frac{d \sin \alpha}{d\alpha} = n \cdot \frac{d (\sin \beta)}{d\alpha}$$

$$\cos \alpha = n \cos \beta \frac{d\beta}{d\alpha}$$

a konečně

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta}$$

Dosazením do (1) dostáváme

$$4 \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta} - 2 = 0$$

a po úpravě

$$2 \cos \alpha = n \cos \beta$$

Poněvadž je

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}$$

dostaneme

$$2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = n \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}$$

a konečně

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \quad (2)$$

(Poněvadž je  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  a  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ , píšeme v těchto vztazích  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  a  $\sin \alpha$  místo  $|\cos \alpha|$ ,  $|\cos \beta|$  a  $|\sin \alpha|$ .)

Vztah (2) má smysl pokud je  $1 \leq n \leq 2$ . Pro  $n = \frac{4}{3}$  dostáváme

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{20}{27}} \quad \alpha = 59^\circ 23' 26''$$

$$\sin \beta = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{20}{27}}, \quad \beta = 40^\circ 12' 07''$$

a

$$\delta = 4\alpha - \beta = 42^\circ 01' 36''$$

Zbývá ukázat, že vypočtené  $\delta$  je maximální. Vypočteme

$$\frac{d^2\delta}{d\alpha^2}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta}{d\alpha^2} &= 4 \cdot \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{d\beta}{d\alpha} \right) = 4 \cdot \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\cos \alpha}{n \cos \beta} \right) = \\ &= 4 \cdot \frac{(-\sin \alpha) n \cos \beta + n \cos \alpha \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha}}{n^2 \cos^2 \beta} \end{aligned}$$

Poněvadž pro  $\alpha = 59^\circ 23' 26''$  je

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{2}, \quad 2 \cos \alpha = n \cos \beta$$

a konečně  $n \sin \beta = \sin \alpha$ , je

$$\frac{d^2\delta}{d\alpha^2} = 4 \cdot \frac{-2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha}{n^2 \cos^2 \beta} = - \frac{6 \sin \alpha \cos \alpha}{n^2 \cos^2 \beta} < 0$$

a vypočtené  $\delta$  je maximální.

6. Brusný kotouč poloměru  $r$  se roztrhl v okamžiku, kdy konal  $n$  otáček za minutu. Vypočtete, s jakou rychlostí udeřil na zed' úlomek kotouče, který byl vržen do výšky pod úhlem velikosti  $\alpha$  (obr. 0). Osa kotouče má od podlahy vzdálenost  $a$ , od stěny vzdálenost  $b$ . Úlohu řešte obecně a do výsledku dosadte  $n = 600$  otáček za min.,  $r = 0,2$  m,  $a = 1,5$  m,  $b = 4$  m a  $\alpha = 45^\circ$ . (Nedbejte odporu vzduchu.)  
(Došlo 21 řešení)

*František Vencálek*

*Řešil Mojmir Šob, III.B, SVVŠ Velké Meziříčí:*

(Menší úpravy provedl autor.)

Budeme předpokládat, že se úlomek odtrhl na obvodu kotouče a že je dostatečně malý, takže ho můžeme pokládat za hmotný bod. Pak odlétne úlomek rychlostí, rovnou obvodové rychlosti kotouče

$$v_0 = \frac{\pi r n}{30}$$

Aby mohl být úlomek vržen do výšky  $a$  udeřit do stěny, musí se odtrhnout na oblouku  $BC$  (obr. 0) v bodě  $A$ , který má od podlahy vzdálenost  $a' = a - r \cos \alpha$  a od stěny vzdálenost  $b' = b - r \sin \alpha$ .

Zvolme soustavu souřadnic s počátkem v bodě  $A$  (obr. 0) a vyšetřujme pohyb úlomku. Jde o svislý vrh, jehož počáteční rychlost  $v_0$  má složky  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  v ose  $x$  a  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$  v ose  $y$ . Okamžitá rychlost v úlomku za dobu  $t$  má složky

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (2)$$

příslušný bod dráhy pak má souřadnice

$$x = v_{0x}t = v_0 t \cos \alpha, \quad (3)$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

Jsou možné dva případy:

1. úlomek narazí na podlahu,
2. úlomek narazí na stěnu.

Aby narazil na stěnu v bodě  $D \equiv [x_D; y_D]$ , musí být

$$y_D \geq r \cos \alpha - a,$$

kde  $r \cos \alpha - a$  je souřadnice  $y_E$  bodu  $E$  (obr. 0).

Předpokládejme, že úlomek skutečně narazil na stěnu. Poněvadž je

$$x_D = b - r \sin \alpha,$$

dostaneme z rovnice (1), že k nárazu dojde za dobu

$$t_0 = \frac{x_D}{v_0 \cos \alpha} = \frac{b - r \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha}$$

Dosazením  $t = t_0$  do (4) dostaneme

$$y_D = \frac{b - r \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \cdot v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}g \left( \frac{b - r \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

a z rovnice (1) a (2) složky rychlosti v bodě  $D$

$$v_x = v_0 \cos \alpha,$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g \frac{b - r \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha}$$

Velikost  $v$  rychlosti v bodě  $D$  dostaneme z pravoúhlého trojúhelníka rychlostí

$$v^2 = v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2 = v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha - 2v_0 g t_0 \sin \alpha + g^2 t_0^2 = v_0^2 - 2g y_D.$$

Tento vztah dostaneme jednodušeji ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + 2y g$$

Je tedy

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g \frac{b - r \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \left( v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g \frac{b - r \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \right)}$$

Abychom rozhodli, zda k nárazu dojde v době, kdy úlomek stoupá nebo v době, kdy úlomek už klesá, vypočteme dobu

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

za kterou s dostane úlomek do vrcholu dráhy (pak je  $v_y = 0$ ) a porovnáme ji s dobou  $t_0$ .

Pro hodnoty udané v textu dostáváme

$$[v_0 = 12,56 \text{ m s}^{-1}, \quad x_D = 3,86 \text{ m}, \quad t_0 = 0,46 \text{ s}, \quad y_D = 3,4 \text{ m}.$$

Poněvadž je  $y_E < 0$ , dojde k nárazu na stěnu ( $y_D > y_E$ ) s rychlostí  $v = 9,6 \text{ m s}^{-1}$ . Dále je  $t_1 = 0,9 \text{ s}$ . Poněvadž  $t_1 > t_0$ , dojde k nárazu na stěnu v době, kdy úlomek stoupá.



## ÚMĚRA NA PRAVÉM MÍSTĚ

Dáma uvažovala o svém věku: „Vdávala jsem se v 18 letech a můj manžel byl tehdy třicetiletý. Dnes je dvakrát starší, a proto mně je 36 let.“

Pravý kavalír na takový výpočet ovšem odpoví: „Jistě se mýlíte, madame, vypadáte mnohem mladší než uvádíte.“

## Vědecké předpovědi

JOSEF KOTYK, Pardubice

Mocnou vzpruhou lidského poznání je dávná tužba člověka seznat běh budoucích věcí. Již v starém Řecku sdělovali bohové budoucí osudy lidské ústy kněží v některých chrámech, jež prosluly jako *oracula* (věštírny). Až do daleké Asie pronikla např. sláva věstkyně Pythie z památné svatyně boha Apollona v Delfech na úpatí Parnassu ve středním Řecku. V starém Římě hádali vůli bohů *augurové* z letu ptáků, *haruspikové* věstili podle vnitřností obětovaných zvířat apod. Do pozdního středověku obraceli se panovníci a vojevůdcové o radu k *astrologům* (hvězdopravcům), kteří jim vykládali konstelace hvězd a nebeská znamení; z pohybu hvězd předpovídali budoucí události. „To je ve hvězdách“, říkáme dodnes. „Hvězdnatá obloha byla v očích národů dávného starověku velikou knihou, jejímž písmem byly hvězdy a z níž jejich učenci mohli vyčíst osudy jak celé Země, tak i každého jednotlivce“, napsal Bedřich Hrozný. „Království České žádnou silou ani moudrostí lidskou, jedinými jen tělesy nebeskými jest spravováno“, tvrdil např. náš učený Mistr Křišťan z Prachatic<sup>1)</sup>, zesnulý *před 530 lety*, roku 1439. Tím mohutněji působila na český lid v těžkých dobách slova věštby „Nezahyne národ slovanský v Čechách.“, jimiž se v dalším století o osudech naší vlasti vyjádřil slovutný astrolog M. Petr Codicillus z Tulechova<sup>2)</sup>, zesnulý *před 380 lety*, roku 1589. Na dvorech šlechticů a panovníků zasahovali však astrologové do osudů národů často také neblaze, např. Vlach Seni, démon Valdštejnův aj.

Váznějším úspěchů než astrologie dopracovala se *astronomie*. Objektem jejich předpovědí nejsou osudy lidí a národů, nýbrž polohy a pohyby nebeských těles. Astronomie tyto jevy pozoruje, popisuje

---

<sup>1)</sup> Bohuslav Balbín, „Miscellanea“.

<sup>2)</sup> Balbín, l. c.

a vykládá, snaží se porozumět jim tak, aby jejich průběh mohl být vyjádřen mluvou matematiky a dal se i p ř e d p o v í d a t.<sup>3)</sup>

Již v dávném starověku byly polohy nebeských těles pečlivě pozorovány a zaznamenávány. Historie začíná v Sumeru. Už tam byly vedlejším produktem astrologie poznatky astronomické. Velkolepým pomníkem této sběratelské činnosti jsou klínové tabulky Sumerů a Semišů. Jejich astronomové věděli, že novy (i úplňky) Měsíce sledují po sobě v době 29 dní 12 hodin 44 minut = 29,531 dní (tzv. synodický měsíc); týmž uzlem (společným bodem ekliptiky a dráhy Měsíce) projde Měsíc za dobu 27,212 dní (tzv. dračí měsíc). Jestliže Měsíc je v okamžiku úplňku ve výstupném uzlu své dráhy, tj. přechází na polokouli, kde je severní pól ekliptiky, nastane tento případ znovu velmi přibližně po 223 synodických měsících neboli 242 měsících dračích, neboť je

$$29,531 \text{ dní} \times 223 = 6585,4 \text{ dní} ,$$

$$27,212 \text{ dní} \times 242 = 6585,3 \text{ dní}$$

Po uplynutí 6585,3 dní = 18 let 10 až 12 dní (podle počtu přestupných roků) připadne, až na nepatrnou úchylku, úplněk zase do výstupního uzlu dráhy Měsíce. V této periodě zvané *s a r o s*, která byla známa už chaldejským hvězdářům<sup>4)</sup>, opakují se proto po řadě zatmění Měsíce a Slunce, lze je tedy p ř e d p o v í d a t. Přebytek asi  $\frac{1}{3}$  dne způsobuje toliko, že zatmění připadají na táž místa zemského povrchu až po uplynutí tří period *saros*.

Po staletích dospěl k vědeckému předpovídání vývoj teoretické *a s t r o n o m i e* na základě *z á k o n ů N e w t o n o v ý c h* a *n e b e s k é m e c h a n i k y L a p l a c e o v y*. Když roku 1781 objevil potomek českých exulantů William Herschel novou planetu, Uran, byly na její dráze záhy pozorovány změny zv. *perturbace* (poruchy), jež nebylo možno vysvětlit přitažlivým účinkem známých planet. Soudilo se, že jsou způsobovány planetou dosud neznámou, vzdálenější než Uran. Z perturbací předpověděli roku 1845 anglický student *J o h n C. A d a m s* (narozený *před 150 lety*, roku 1819) a roku 1846 Francouz *Urbain J. J. Leverrier* nezávisle na sobě polohu této planety. Dne 23. září 1846 dostal Leverrierovu zprávu berlínský astronom *J o h a n n G o t t f r i e d G a l l e* a ještě téhož památného dne objevil novou planetu Neptun, ve vzdá-

---

<sup>3)</sup> Z přednášek univ. prof. dr. Václava Lásky „Úvod do kosmické fyziky a matematické geografie“, Praha 1926, str. 3.

<sup>4)</sup> Semitští *C h a l d e o v é* se usazovali v jižní Mezopotámii asi od 2. pol. 2. tisíciletí před n. l. a strhli okolo roku 625 před n. l. vládu na sebe (tzv. říše novobabylónská).

lenosti pouhého 1° od vypočteného místa. To byl triumf, jemuž není rovno v dějinách astronomie<sup>5)</sup>.

Roku 1869, právě *před sto lety*, vystoupila s nemenším triumfem chemie. Dimitrij Ivanovič Mendělejev dospěl tehdy svým slavným zákonem, že vlastnosti prvků i jejich slučovací typy se řídí jejich atomovou hmotou a periodicky se v řadě prvků opakují, k velkolepé přírodní generalizaci zvané *periodická soustava prvků*. Tím byly dalšímu bádání rovněž poskytnuty ideální možnosti vědecké předpovědi. Sám Mendělejev předpověděl již roku 1871 existenci tří nových prvků gallia, skandia a germania, jež byly později (v letech 1875, 1879 a 1886) skutečně objeveny.

V těchto letech prožila i fyzika jeden z mála případů, kdy teorie předstihla experiment a ukázala mu cestu k nečekanému objevu. James Clark Maxwell<sup>6)</sup> dospěl ze své teorie elektřiny a magnetismu roku 1865 k představě, že střídavý proud vysoké frekvence působí v okolním dielektriku rychlé změny magnetického a elektrického pole, a prohlásil, že elektromagnetické rozruchy se šíří od vodiče prostorem v podobě elektromagnetického vlnění, jež prý má všechny vlastnosti vlnění světelného. To bylo proroctví velmi odvážné a dlouho trvalo, než Maxwelllova teorie elektromagnetického pole dosáhla obecného uznání. Existenci elektromagnetického vlnění potvrdil až v letech 1886 a 1887 Heinrich Hertz<sup>7)</sup> a s překvapením zjistil, že se šíří přímočaře, odráží i láme, jeví úkazy interference a polarizace jako světlo. Ukázalo se, že mezi vlněním elektromagnetickým a světelným není vskutku podstatného rozdílu. Okolnost, že rychlost elektromagnetických vln ve vakuu souhlasí s rychlostí světla, poukazuje jen na rozdíly v délce vlny, rozdíly toliko kvantitativní. Tak byla založena Maxwelllova elektromagnetická teorie světla.

Z ní předpověděl Maxwell také, že existuje světelný tlak. Dopadá-li záření na tělesa, působí na ně proud elektromagnetické energie tlakem asi tak jako proud vody nebo vzduchu. Tlak

---

<sup>5)</sup> Viz V. Láska, l. c., str. 26.

K tvrzení učebnice fyziky pro I. roč. SVVŠ (1964), str. 159, že podobně byla nalezena i planeta Pluto, dodávám, že souvislost mezi výpočty Percivala Lowella z roku 1915 a objevením planety Pluta Clydem Tombaughem na flagstaffské hvězdárně v Arizoně dne 21. ledna 1930 považují historikové za náhodnou. (Viz Laue: Dějiny fyziky, Praha 1963, str. 34.)

<sup>6)</sup> James Clerk Maxwell (1831–1879), profesor fyziky na universitě v Aberdeenu, později na „Kings College“ v Londýně a na universitě v Cambridge; v podrobnostech viz můj článek v Rozhledech, roč. 28, čís. 4, str. 65–67.

<sup>7)</sup> Heinrich Hertz (1857–1894) ověřil experimentálně správnost Maxwellovy teorie a její závěry. V podrobnostech viz můj článek v Rozhledech, roč. 42, čís. 8, str. 373–376.



záření je ovšem mnohem menší. Maxwell vypočítal také jeho velikost. Je právě taková, jako kdyby záření energie  $W$  mělo hmotnost  $\frac{W}{c^2}$ <sup>8)</sup>, kde  $c = 300\,000\text{ km s}^{-1}$ . Např. sluneční záření působí při kolmém dopadu na povrch zemský na  $1\text{ m}^2$  silou rovnou asi čtvrtině miligramu. Velmi citlivým zařízením podařilo se ruskému fyziku Petru N. Lebeděvovi nicméně tento tlak na přelomu XIX. a XX. století také skvělým experimentem dokázat.

Maxwell se však velkolepého potvrzení svých předpovědí a úspěchů své teorie již nedožil; zemřel *před 90 lety*, roku 1879.

## Co je matematika?

Doc. VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, ČVUT, Praha

O tom, co je matematika a v čem spočívá tajemství jistoty jejích závěrů, se napsalo mnoho knih, a to spíše filosofických než odborných. Ve starověku byly psány formou rozhovorů mezi filosofem a laikem, nebo filosofem druhého názoru. Tehdy to bývaly hluboké úvahy, plné překvapení a také rozporů. O obsahu našeho článku hovoří v níže uvedené knize filosof Sokrates a matematik Hippokrates.

Sokrates žil (469—399 p. n. l.) v Aténách. Jeho názory známe jen ze spisů jeho žáků, zvláště Platona. Způsob rozborů pojmů, kterému říkáme sokratovská metoda, spočívá v soustavném kladení otázek, které přivádějí druhého účastníka diskuse nejdříve do rozporů s jeho počátečními výroky (ironie), ale nakonec mu pomáhá tyto rozpory překonat a dospět k porozumění pojmů. Sokratova metoda měla význam pro tzv. dialektiku. Dnes je metodou naší filosofie materialistická dialektika. Hippokrates z Chin byl řecký matematik a žil kolem r. 440 p. n. l. V této době byla ve starém Řecku skupina kritických filosofů, zvaných sofistů, kteří studovali problémy matematické povahy spíše proto, aby jimi porozuměli, než aby hledali jejich užitečnost. Šlo tedy o samotné základy přesného myšlení. Bohužel známe o tomto „hádání“ jediný neúplný spis (fragment), který napsal právě Hippokrates. Čtenářům je znám obsah fragmentu, týká se obsahu tzv. Hippokratových měsíčků, probíraných na střední škole. Hippokrates napsal snad po-

---

<sup>8)</sup> Vztah  $W = mc^2$ , označovaný zpravidla jako Einsteinův (viz učebnice fyziky pro III. roč. SVVŠ, 1965, str. 232), ukazuje ekvivalenci mezi hmotností  $m$  a její energií  $W$ .

čátek axiomatiky nazvaný Základy (Stoichea). Pojednání bylo psáno v duchu, kterému říkáme euklidovská tradice. Je psáno před více než 100 lety před Euklidem.

Přístupný rozhovor o matematice mezi uvedenými řeckými filosofi, tedy smyšlený, ale odpovídající tehdejší úrovni, napsal maďarský matematik Alfréd Rényi v knize, která vyšla v němčině v roce 1967 pod názvem *Dialoge über Mathematik*. Připomeňme si některé její myšlenky.

Na otázku, co je lékařství a jaký je jeho cíl, snadno odpovíme. Je to věda o lidském zdraví, o nemocech a o jejich léčení. Cílem jejím je udržet lidské zdraví. Rozpoznat nemoce a léčit je mohou zpravidla jen lékaři, a ani ti mnohdy ne. Nemoci existují ovšem i bez lékaře. Bez obtíží bychom mohli také odpovědět na otázku, co je to astronomie, biologie. I zde hvězdy a příroda existují i bez astronomů a biologů, nezávisle na nich.

Matematika by se dala také definovat jako věda, která se zabývá čísly, tvary geometrických útvarů, jejich relacemi. Snaha definovat, co je matematika, se datuje již od 5. století p. n. l.

Naskýtá se otázka, zda existují skutečně čísla, tvar geometrického tělesa a co vlastně jsou.

Vezměme např. prvočísla. Ta existují jen potud, pokud o nich matematici uvažují.

Zdá se tedy, že říkáme pravdu, tvrdíme-li, že matematika se zabývá něčím, co ve skutečnosti neexistuje.

Napišeme-li např. číslo 37, potom přece takové číslo existuje. Dá se namítnout, že můžeme také nakreslit např. draka a drak přece není nikdy skutečný. Řekneme-li pět lvů, existují i lvi, a tedy i číslo pět.

A jak je to s tvarem geometrického útvaru, např. tělesa? Vidíme-li vázu, pak ji vidíme jistě i proto, že má určitý tvar, který se dá zjistit, ohmatat. Co tedy vidíme vázu nebo její tvar? Co je to její tvar? Vezměme jiný příklad, ovci a její srst, vlnu. Můžeme si představit ovci bez vlny a také vlnu bez ovce, ale nemůžeme oddělit vázu od jejího tvaru.

Dá se tedy říci, že matematici se zabývají tvary skutečných předmětů, že se zabývají jen tvary, aniž by se starali o předměty, které uvažované tvary mají. Jde tedy o něco, co existuje pouze v představě.

Jak vysvětlit, že matematika je jistější a méně klamnou vědou než kterákoli jiná věda? Tak např. nemůžeme přesně zjistit, kolik obyvatel v daném okamžiku určité město má, neboť během sčítání lidé umírají, rodí se, přestěhovávají a odstěhovávají se. Naproti tomu matematika dovede přesně zjistit, kolik vrcholů musí mít mnohostěn, má-li být pravidelný. Nebo např. sloupy chrámu Poseidonova jsou sice velmi podobné, ale nikdy přesně stejné. Naproti tomu je známo, že jsou přesně stejné, lépe řečeno, shodné vnitřní úhly všech rovno-

stranných trojúhelníků, nebo že stejně velké jsou úhlopříčky čtverců o stejně velkých stranách.

Tak se matematika zabývá věcmi, které sice neexistují ve skutečnosti, ale naproti tomu získává o nich nepopíratelnou jistotu a pravdu. Je tato jistota výsledkem našeho přemýšlení, nebo je tento výsledek nezávislý na našem uvažování?

Není podivné, že můžeme získat spolehlivé a přesné znalosti o věcech, které neexistují?

Vzpomeňme na řecké bájesloví. Nedá se říci, že by bohové řečtí existovali, a přece se na ně díváme jako na skutečné osoby z řeckých tragédií. Můžeme vzít i např. naše české pověsti a jejich postavy. V dramatickém zpracování jsou to přece skuteční lidé, kteří na jevišti žijí. Něco podobného můžeme nalézt i v matematice. Tak můžeme mluvit o shodnosti úhlopříček shodných čtverců, neboť ta plyne z pojmů shodnost a z definice útvarů, o které jde. Tak mají matematici více přesných znalostí o věcech, které ve skutečnosti neexistují, než přírodovědci o existující přírodě.

Předměty matematiky nejsou skutečné, ale existují v té míře, v jaké je matematici promýšlejí, takže můžeme o nich zjistit plnou pravdu. Podstatné je to, že jsou přesně tím, co si o nich myslíme. Říkáme, že matematici si sami tvoří pojmy, které potom studují.

Chytrý čtenář se snad zeptá, k čemu je vlastně ta matematika, jestliže jedná o věcech, které jsou jen v mysli matematiků. Vždyť potom bude existovat tolik matematik, kolik matematiků je bude promýšlet. Všichni víme, že matematici na celém světě mluví-li o číslech, např. reálných, mají na mysli tatáž čísla. A jak to, že mohou dva matematici, každý na jiném konci světa dojít k témuž výsledku, k téže pravdě? Víme, že je to proto a potud, pokud se shodnou na definicích uvažovaných objektů a na pravidlech uvažování, asi jako na pravidlech hry.

Vidíme tedy, že svět matematiků, který si oni vytvořili, je jiný než ten, v kterém žijeme, ale není ve skutečnosti závislý jen na matematikovi. Pravidla hry mají své zákony, kterým říkáme logické. Vysloví-li matematik určitou pravdu, může ji jednou odhalit, jindy objevit a jindy zase tvořit.

Dá se říci, že matematik někdy sám tvoří pojmy, s kterými potom dále pracuje. Jindy pracuje s pojmy, které již někdo jiný vytvořil, formuluje relace mezi nimi, a tak vyslovuje správné věty, které potom dokazuje. Je vlastně v úloze objevitele.

V době řecké matematiky ve staletích p. n. l. bylo vyvození a dokazování vět závažnější než tvoření pojmů. To proto, že i nejjednodušší pojmy, např. pojmy čísla, dělitelnosti vedou k dalším, hlubším a náročnějším problémům, které někdy zaměstnávaly matematiky po několik století.

Ještě jsme neodpověděli na otázku, proč matematici svůj svět vytvářejí, nebo, je-li tento svět k něčemu dobrý.

I nejjednodušší poznatek, že číslo 17 je prvočíslo, vede k praktickému závěru. Například k tomu, že 17 ovcí se nedá rozdělit na stejný počet mezi lidi jinak než 17 lidem, z nichž každý dostane po jedné ovci.

Již v pátém století p. n. l. dovedli geometři k vytyčení pravého úhlu využít známé věty, že jsou-li délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku rovny 3 a 4 jednotkám délky, je délka přepony rovna 5 jednotkám.

Matematik netvoří svůj svět jen pro zábavu a pro přítomnost, neboť neví, zda a kdy se určitého poznatku dá v životě využít. Historie to dokazuje i na případech zdánlivě nemožných, např. užití teorie čísel u počítačích strojů, komplexních čísel a jinak.

Proč mají pravdy vyvozené v neskutečném světě plné uplatnění v reálném světě na zemi?

Všimněme si, že obraz skutečného objektu na břehu řeky, vzniklý zrcadlením je alespoň v hlavních rysech podobný svému originálu. Svět matematika je také obrazem skutečného světa a pravdy odvozené ve světě matematiky mají své uplatnění ve světě na zemi. Na matematiku se můžeme dívat jako na mapu skutečného světa.

Proč je však potom třeba tvořit ve světě matematika, proč nehledáme raději přímo pravdy v našem světě na zemi?

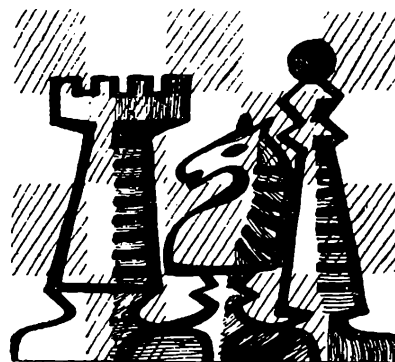
Ve světě matematika jde přece o abstrakci, tj. o oproštění od hmoty, barvy. Potom zastupuje každý matematický pojem mnoho skutečných věcí. Proto jsou úvahy s pojmy úsporné, neboť závěry s malým počtem pojmů se dají uplatnit na velkém počtu originálů našeho světa na zemi. Matematické pojmy obsahují tedy to, co společného má mnoho předmětů. Na druhé straně nemusí matematik brát ohledy na mnohé rozdíly mezi předměty, originály svých obrazů, pojmů. Tak se stává problém v matematice řešený jednodušším.

O pravidlech hry matematiků, tj. o logických pravidlech jsme již mluvili. Zbývá otázka, jak to, že dochází matematik k správným výsledkům. Je to proto, že klade největší požadavek na čistotu svého myšlení, že neuzavírá kompromisy, že se drží daných principů, že myslí v jasných pojmech.

Otázka užití, zvaného aplikace matematiky, není jednoduchá a dává podklady pro hlubší uvažování.



# h á d a n k y



1. O reálných číslech  $p, q, r$  platí vztah

$$p^2 + q^2 + r^2 = 3pqr$$

Odpovězte na tyto otázky:

- a) může být právě jedno z čísel  $p, q, r$  rovno nule?
- b) mohou být dvě čísla rovna nule, zatímco třetí není rovno nule?
- c) předpokládejme, že žádné z čísel  $p, q, r$  není rovno nule. Kolik nejvýše z nich může být záporných?

2. Jedna obec má 257 domků a chat. Tyto objekty budou očíslovány od jedné až do 257. Kolik cifer bude zapotřebí k očíslování všech domků a chat?

3. Dvě školy se mají utkat ve stolním tenise s těmito hracími pravidly:

Hrát se budou jenom čtyřhry, tj.: dva z jedné školy proti dvojici ze školy druhé.

Hraje se na jeden vítězný set (nerozhodný výsledek není možný).

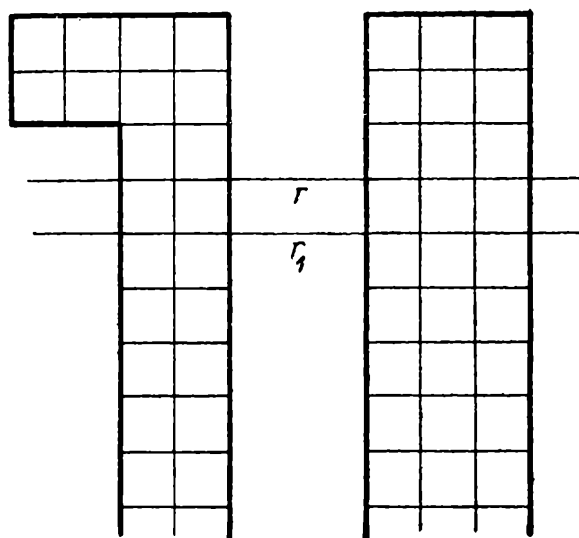
Každá škola postaví pětici svých reprezentantů.

- a) Kolik dvojic je možné sestavit za každou školu?
- b) Každá dvojice jedné školy se utká se všemi dvojicemi školy druhé, a to s každým jen jednou. Kolika her se každý hráč zúčastní?
- c) Vítězná dvojice získá pro svou školu dva body a poražená jeden bod. Kolik bodů získaly tyto školy, víme-li, že ta druhá škola vyhrála o dvě utkání víc než ta první?

4. Jaké cifry musíme doplnit, aby pěticiferné číslo bylo dělitelné 24?

$$5 \ ? \ 3 \ ? \ 8$$

5. Na přiloženém obrázku je vlevo obrazec tvaru obráceného písmene  $L$ , vpravo je část rovinného pásu. Přímka  $r$  (je kolmá ke svislým stranám obrazců) odděluje z pásu 9 čtverečků a z písmene  $L$  10 čtve-



rečků. Přímka  $r_1 \parallel r$  odděluje z obou obrazců stejný počet čtverečků. Vy máte za úkol:

- Najít přímku  $r_2 \parallel r$ , která by z pásu oddělovala část, mající o 20 čtverečků víc než na obrazci vlevo.
- Najít přímku  $r_3 \parallel r$ , která by z pásu oddělovala část, mající 1,5krát více čtverečků než na obrazci vlevo.
- Najít přímku  $r_4 \parallel r$ , která by z pásu oddělovala část dvakrát větší než na obrazci vlevo.

6. Tak jako existují různé magické čtverce, existují též i magické krychle. Sestavte je podle připojeného návodu.

- Čísla 1, 2, 3, ..., 8 přiřipšte k vrcholům krychle tak, aby součet čísel při vrcholech téže stěny byl týž.
- Čísla 1, 2, 3, ..., 11, 12 přiřipšte k hranám krychle tak, aby součet čísel u hran téže stěny byl vždy týž.

*S. H.*



**Vítězní řešitelé MO, kteří dosud nedostali předplacený náš časopis, urgujte dodávku přímo u PNS svého bydliště. Redakce nemá volná čísla.**

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

conserver  
considération *ž*  
considérer  
constante *ž*  
construction *ž*  
contact *m*  
contenir  
contenu, *e*  
continu, *e*  
    fraction *ž* continue  
continûment  
contour *m*  
contradiction *ž*  
contradictoire  
contraire  
convergence *ž*  
converger vers  
convexe  
coordonnée *ž*  
coordonner  
corde *ž*  
corollaire *m*  
corps *m*  
    corps de révolution  
cubique  
    racine *ž* cubique  
curviligne  
cycle *m*  
cyclique  
    substitution *ž* cyclique  
cylindre *m*  
    cylindre de révolution  
cylindrique

zachovávat  
úvaha  
uvažovat  
konstanta  
konstrukce, sestrojení  
styk, dotyk  
obsahovat  
obsažen  
spojitý  
    řetězový zlomek  
spojitě  
obry.  
spor  
sporný  
opačný  
konvergence  
konvergovat k  
konvexní  
souřadnice  
přiřadit  
tětiva  
bezprostřední důsledek věty  
těleso  
    rotační těleso  
krychlový, kubický  
    třetí odmocnina  
křivkový, křivočarý  
cykl, cyklus  
cyklický  
    cyklická záměna  
válec, válcová plocha  
    rotační válec  
válcový, cylindrický

## D

|                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
| dé <i>m</i>                  | hrací kostka                  |
| coup <i>m</i> de dé          | hození hrací kostkou          |
| décaèdre <i>m</i>            | desetistěn                    |
| décagone <i>m</i>            | desetiúhelník                 |
| décamètre <i>m</i>           | deset metrů                   |
| décider                      | rozhodnout                    |
| décimal, o, aux              | desetinný, dekadický          |
| fraction <i>z</i> décimale   | desetinný zlomek              |
| logarithme <i>m</i> décimal  | dekadický logaritmus          |
| nombre <i>m</i> décimal      | desetinné číslo               |
| décimale <i>z</i>            | desetinné místo               |
| déclinaison <i>z</i>         | deklinace                     |
| décomposer                   | rozložit                      |
| décrire                      | opisovat (křivku)             |
| décroissant                  | klesající                     |
| déductif, ive                | deduktivní                    |
| déduction <i>z</i>           | dedukce, odvození             |
| déduire                      | dedukovat, odvodit            |
| défaut <i>m</i>              | nedostatek                    |
| par défaut                   | dolní (např. integrál)        |
| défini, e                    | určený, definovaný, definitní |
| bien défini                  | jednoznačně určený            |
| définir                      | určit, definovat              |
| définition <i>z</i>          | definice                      |
| déformation <i>z</i>         | deformace, zkreslení          |
| dégénérer                    | degenerovat, rozpadnout se    |
| degré <i>m</i>               | stupeň (mocniny i úhlový)     |
| degré centigrade             | grad                          |
| demi <i>m</i>                | polovina                      |
| demi-cercle <i>m</i>         | polokruh, polokružnice        |
| demi-droite <i>z</i>         | polopřímka                    |
| demi-espace <i>m</i>         | poloprostor                   |
| démonstration <i>z</i>       | důkaz                         |
| démonstration apagogique     | nepřímý důkaz                 |
| démonstration par récurrence | důkaz matematickou indukcí    |
| démontrer                    | dokázat                       |
| dénombrable                  | spočetný                      |
| dénominateur <i>m</i>        | jmenovatel                    |
| dénominateur commun          | společný jmenovatel           |
| dépendant, e                 | závislý                       |
| dépendre (de .)              | záviset (na .)                |
| déplacement <i>m</i>         | přemístění, pohyb             |
| dérivation <i>z</i>          | derivování                    |
| dérivée <i>z</i>             | derivace                      |
| dérivée à gauche (à droite)  | derivace zleva (zprava)       |
| dérivée partielle            | parciální derivace            |
| dérivées successives         | vyšší derivace                |
| descendant, e                | klesající                     |
| désigner                     | označovat                     |
| dessiner                     | kreslit, rýsovat              |
| déterminant <i>m</i>         | determinant                   |
| déterminer                   | určit, určovat                |



# rozhledy

MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ

---

5

ROČNÍK 48, 1969-70, JANUÁR



ROČNÍK 48  
JANUÁR 1969-70

5

# MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositeľ vyznamenania  
Za zásluhy o výstavbu

## VEDÚCI REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositeľ vyznamenania Za vynikajúcu prácu

## VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

## REDAKČNÁ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřední inšp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDS Praha; zasl. učiteľ Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B. Bystrica; Miloš Franek, SVŠ, Prievidza; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, DrSc., ČVUT, Praha; dr. Oldřich Lepil, PU, Olomouc; Milan Marčok, VSLD, Zvolen; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava; prof. dr. Cyril Palaj PF - UPJŠ, Košice; Evžen Říman, CSc., ČVUT, Praha, nositeľ vyznamenania Za vynikajúcu prácu; dr. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; ing. dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ ÚNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VSLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarík, inšp. MŠ SSR, Bratislava

## REDAKCIA:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29

## OBSAH

|                                                                 |                     |
|-----------------------------------------------------------------|---------------------|
| J. Šedivý: Kurs negování pro pokročilé                          | 197                 |
| Fr. Kejla: Řetězové zlomky                                      | 200                 |
| Dr. O. Srb: Složená čísla tvaru $n^4 + 4b^4$                    | 205                 |
| Fr. Hradecký: Užití komplexních čísel v geometrii (pokračování) | 207                 |
| S. Horák: Několik konstrukcí elipsy                             | 212                 |
| M. Franek: Ako sa šíri zvuk z nadzvukových lietadiel            | 215                 |
| Prof. dr. P. Bartuška: Dislokace v pevných látkách              | 212                 |
| J. Kotyk: Fizeauova metoda určení rychlosti světla              | 226                 |
| Řešení úloh z MMO v Bukurešti                                   | 228                 |
| Prof. dr. R. Košťál: Úlohy z 3. MFO                             | 233                 |
| J. Šedivý: Záhady ze Zmatlíkova zápisníku                       | 240                 |
| Matematické zábavy                                              | 243                 |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český                    | 3. a 4. str. obálky |

Vydáva ministerstvo školstva v štátnom pedagogickom nakladateľstve v Prahe, za odbornej starostlivosti Jednoty čs. matematikov a fyzikov.

Vychádza desať razy do roka. Ročné predplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 €, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tlačí Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozširuje Poštová novinová služba. Informácie o predplatnom podá a objednávky prijímá každá pošta i doručovateľ. Objednávky do zahraničia vybavuje PNS, ústredný sklad expedície tlače, odd. vývoz tlače, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učiteľ dr. O. Hömig. Titulné obrázky: B. Šmejdivá, študujúca FS.

Štátne pedagogické nakladateľstvo, n. p. v Prahe, 1969.



## Kurs negování pro pokročilé

JAROSLAV ŠEDIVÝ

V článku *Jak formulovat dementi pomocí diagramů* jste poznali, jak lze stručně vyjádřit negace výroků s jedním kvantifikátorem. Ověřte si své dovednosti v tomto směru na několika příkladech, zformulujte co nejstručněji negace těchto výroků:

Má nejvýše dva sourozence. Každý člověk je chybuující. Existuje právě pět typů pravidelných mnohostěnů. Jupiter má aspoň třináct měsíců. Nevidím žádného známého člověka. Buď přišli aspoň dva, nebo nepřišel nikdo.

Obstáli jste úspěšně? Přesvědčte se v textu cvičení 1, zda jste dané výroky negovali správně. Vyhledejte si v textu citovaného článku tabulku se záhlavími *Není pravda, že* a *Je pravda, že*; zakryjte pravý sloupec a pokuste se jej sami vyplnit. Tuto tabulku si ponechte při ruce, budeme se na ni odvolávat. Naučíme se negovat výroky s větším počtem kvantifikátorů, takové výroky se objevují v matematice velmi často.

Vezměme matematickou poučku „V každém trojúhelníku je nejvýše jeden tupý úhel“. Postup při negování tohoto výroku bude zjevnější, použijeme-li jeho jiné „matematictější“ formulace:

$p$ : O každém trojúhelníku platí, že v něm je nejvýše jeden tupý úhel. Zapišeme nyní posloupnost několika výroků, které jsou různými vyjádřeními negace  $p$ :

1. *Není pravda, že o každém trojúhelníku platí, že v něm je nejvýše jeden tupý úhel.*
2. *(Je pravda, že) o aspoň jednom trojúhelníku neplatí, že v něm je nejvýše jeden tupý úhel.*

3. O aspoň jednom trojúhelníku platí, že v něm jsou aspoň dva tupé úhly.
4. V aspoň jednom trojúhelníku jsou aspoň dva tupé úhly.

První výrok je pohodlnou, ale dosti neobratnou formulací negace p' výroku p. Říkáme, co není pravda, rádi bychom však vyjádřili, co je tedy pravda. Abychom toho dosáhli, nahradíme kursívou vytištěná slova v prvním výroku slovy „Je pravda, že o aspoň jednom . . . neplatí“ (viz čtvrtý řádek tabulky). Tím však dostáváme ve druhém výroku opět slovo „neplatí“, což je jen jiné vyjádření vazby „není pravda, že“. Druhý výrok upravíme jednak tím, že vynecháme nadbytečná slova na začátku věty, jednak podle druhého řádku tabulky nahradíme kursívou vytištěná slova jinými. Třetí výrok je již zformulován způsobem v matematice běžným, i ten však lze dále zestručnit, jak je patrné. Tak jsme dosáhli ve čtyřech krocích takové negace původního výroku, která je stejně stručná jako původní výrok.

Vraťme se nyní k domněnce o tělesových výškách čtyřstěnu, kterou jste se pokoušeli negovat v úvodu předcházejícího článku. Promyslete si a zdůvodněte přechody k různým formulacím této domněnky a její negace (tři tečky znamenají, že se opakuje část věty z předcházejícího řádku):

V každém čtyřstěnu má každá dvojice výšek aspoň jeden společný bod.  
(d): O každém čtyřstěnu platí, že každá dvojice jeho výšek má aspoň jeden společný bod.

Negace (d') domněnky (d):

1. *Není pravda, že o každém čtyřstěnu platí, že každá dvojice . . .*
2. *Je pravda, že o aspoň jednom čtyřstěnu neplatí, že každá dvojice . . .*
3. *O aspoň jednom čtyřstěnu platí, že pro aspoň jednu dvojici jeho výšek neplatí, že má aspoň jeden společný bod.*
4. *O aspoň jednom . . . jeho výšek platí, že nemá žádný společný bod.*
5. *V aspoň jednom čtyřstěnu nemá aspoň jedna dvojice výšek žádný společný bod.*

Zformulovali jste takovou negaci domněnky (d) již dříve sami? Pokud jste to dovedli, máte mimořádný smysl pro přesné vyjadřování, pokud jste se „nestrefili“, získáváte zde návod, jak postupovat při negování výroků s větším počtem kvantifikátorů. Není jistě třeba připomínat, že domněnka (d) neplatí, a proto platí její negace (d').

Uvedené příklady ukazují, jak je účelné „prošpikovat“ nejprve text slovními obraty „platí, že“, „neplatí, že“, apod. Negování výroku pak postupuje „od hlavy“ a spočívá v nahrazování vazeb „není pravda, že“ a „neplatí, že“ podle dříve probraných zásad vyjádřených souhrnně v tabulce. V žádném případě se nevyplácí spěchat a zaměňovat vůbec každý kvantifikátor, který se v textu objevuje. Ukážeme si příklad, kdy se i v negaci výroku opakuje stejný kvantifikátor.

Zvolme situaci ze života sázejících:

V každém tahu získali nejvýše dva výherci aspoň 50 000 Kčs.

(v): O každém tahu platí, že nejvýše o dvou jeho výhercích platí, že získali aspoň 50 000 Kčs.

Negace (v') výroku (v):

1. *Není pravda, že o každém tahu platí, že .*
2. *(Je pravda, že) o aspoň jednom tahu neplatí, že o nejvýše dvou jeho výhercích platí, že . .*
3. *O aspoň jednom tahu platí, že aspoň o třech jeho výhercích p l a t í, že získali aspoň 50 000 Kčs.*
4. *V aspoň jednom tahu získali aspoň tři výherci aspoň 50 000 Kčs.*

Proložené vytištěné slovo ve třetím výroku upozorňuje, že není důvodu měnit poslední kvantifikátor „aspoň 50 000“. Tato situace vzniká tím, že negací kursívou vytištěné části druhého výroku je podle druhého řádku tabulky výrok „aspoň o třech . . . platí“. Pohlédnete-li pozorně na tabulku, vidíte, že podobná situace vznikne vždy, když negujeme část výroku podle některého z prvních tří řádků tabulky.

Ve cvičeních si vyzkoušejte negování výroků od nejjednodušších až po složitější.

## C v i č e n í

1. Zformulujte stručné negace těchto výroků:

Má aspoň tři sourozence. Aspoň jeden člověk není chybuje. Existují buď nejvýše čtyři pravidelné mnohostěny nebo existuje aspoň šest pravidelných mnohostěnů. Jupiter má nejvýše dvanáct měsíců. Vidím aspoň jednoho známého člověka. Přišel právě jeden.

2. Uplatněte postup popsany v tomto článku při hledání co nejstručnější formulace negace těchto výroků. Každý závodník dokončil každou etapu. Každý reprezentant získal nejvýše jednu medaili. Každý z aktérů dnešního zápasu sehrál již aspoň sedm utkání v reprezentačním dresu. Aspoň tři členové rodiny zhlédnou každé představení. Aspoň jeden střelec dosáhl aspoň 95 bodů ze sta. Žádný kuželkář neporazil aspoň pětkrát za sebou všechny kuželky.

3. Vyjádřete co nejstručněji negace těchto matematických vět: Každé dvě různé paraboly mají nejvýše čtyři společné body. Ke každé dvojici bodu a přímky lze nalézt nejvýše jednu přímku, která prochází daným bodem a neprotíná danou přímku. Žádná lineární rovnice nemá právě dva různé kořeny. Každou trojicí různých bodů prochází aspoň jedna přímka.

## V ý s l e d k y c v i č e n í k č l á n k u

1. Negacemi výroků uvedených v tomto cvičení jsou výroky zapsané v druhém odstavci textu článku. 2. Aspoň jeden závodník nedokončil aspoň jednu etapu. Aspoň jeden reprezentant získal aspoň dvě medaile. Aspoň jeden z aktérů dnešního zápasu sehrál nejvýše šest utkání v repre-

zentačným dresu. Nejvýše dva členové rodiny zhlédnou každé představení. Žádný střelec nedosáhl aspoň 95 bodů ze sta. Aspoň jeden kuželkář porazil aspoň pětkrát za sebou všechny kuželky. 3. Aspoň jedna dvojice různých parabol má aspoň pět společných bodů. K aspoň jedné dvojici bodu a přímky lze nalézt aspoň dvě přímky, které procházejí daným bodem a neprotínají danou přímku. Aspoň jedna lineární rovnice má právě dva různé kořeny. Aspoň jednou trojicí různých bodů neprochází žádná přímka.

## Řetězové zlomky

FRANTIŠEK KEJLA, ČVUT, Praha

V minulých ročnících Rozhledů bylo uvedeno už několik metod pro numerické řešení rovnic o jedné neznámé. V tomto a v příštím čísle si ukážeme další vhodnou metodu, která pochází od francouzského matematika Lagrange (18. stol.) a opírá se o tzv. řetězové zlomky. V první části se seznámíme s definicí a základními vlastnostmi řetězových zlomků, v druhé části pak ukážeme jejich praktické použití při řešení algebraických rovnic o jedné neznámé. Omezíme se při tom jen na tzv. standardní řetězové zlomky, které k tomu účelu naprosto postačí.

**Definice 1.** Výraz tvaru

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (1)$$

kde  $a_0$  je celé číslo,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jsou přirozená čísla, se nazývá (standardní) řetězový zlomek.

§ Tvoří-li čísla  $a_k$  nekonečnou posloupnost přirozených čísel, nazývá se takový „zlomek“ nekonečný řetězový zlomek. V tomto případě pak zlomek (1) nazýváme  $n$ -tý částěčný zlomek (daného nekonečného řetězového zlomku).

Úmluva. Pro jednodušší způsob zápisu budeme řetězový zlomek (1) psát takto

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Tak např.  $[-2, 1, 3] = -2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$ ;  $[0, 2, 1] = \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}$  apod.

Hodnotu konečného řetězového zlomku můžeme samozřejmě vždycky vypočítat podle běžných pravidel pro počítání se zlomky. Je to však zpravidla velmi zdlouhavý a nepohodlný způsob, zvláště tehdy, má-li daný „řetěz“ větší počet „článků“. Ukážeme si proto, jak se dá tato práce celkem jednoduše zvládnout.

**V ě t a 1.** Pro hodnotu řetězového zlomku  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x]$  platí

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x] = \frac{x \cdot p_n + p_{n-1}}{x \cdot q_n + q_{n-1}} \quad (2)$$

kde  $p_{k+1} = a_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}$ ,  $q_{k+1} = a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  
 $p_{-1} = 1$ ,  $q_{-1} = 0$ ,  $p_0 = a_0$ ,  $q_0 = 1$ .

**D ů k a z** provedeme snadno matematickou indukcí.

a) Pro  $n = 0$  vzorec (2) zřejmě platí, neboť

$$[a_0, x] = a_0 + \frac{1}{x} = \frac{x \cdot a_0 + 1}{x} = \frac{x \cdot p_0 + p_{-1}}{x \cdot q_0 + q_{-1}}$$

b) Předpokládejme platnost vzorce (2) pro určité  $n$ . Pro  $n + 1$  pak dostaneme, dosadíme-li  $x = a_{n+1} + \frac{1}{y}$

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, y] &= \frac{\left(a_{n+1} + \frac{1}{y}\right) \cdot p_n + p_{n-1}}{\left(a_{n+1} + \frac{1}{y}\right) \cdot q_n + q_{n-1}} = \\ &= \frac{(a_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}) + \frac{1}{y} \cdot p_n}{(a_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}) + \frac{1}{y} \cdot q_n} = \\ &= \frac{p_{n+1} + \frac{1}{y} \cdot p_n}{q_{n+1} + \frac{1}{y} \cdot q_n} = \frac{y \cdot p_{n+1} + p_n}{y \cdot q_{n+1} + q_n}, \text{ c. b. d.} \end{aligned}$$

**V ě t a 2.** Hodnota řetězového zlomku (1) je rovna číslu  $\frac{p_n}{q_n}$ , kde čísla  $p_n$ ,  $q_n$  jsou definována vzorci z věty 1.

D ů k a z vyplývá přímo z věty 1., použijeme-li jí pro  $n-1$  a dosadíme  $x = a_n$ .

Při numerickém výpočtu hodnoty daného řetězového zlomku můžeme čísla  $a_k$ ,  $p_k$ ,  $q_k$  uspořádat do vhodného schématu tak, aby se výpočet zmechanizoval:

|   |   |       |       |       |       |       |  |
|---|---|-------|-------|-------|-------|-------|--|
|   |   | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |  |
| 0 | 1 | $a_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ |  |
| 1 | 0 | 1     | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q_4$ |  |

(3)

Jsou-li dána čísla  $a_k$  pro  $k = 0, 1, 2, \dots$ , počítáme  $p_k$  takto: Číslem  $a_k$  násobíme šikmo vlevo stojící  $p_{k-1}$  a k tomuto součinu přičteme číslo  $p_{k-2}$  stojící dále vlevo. Tento součet je podle vzorců z věty 1. roven číslu  $p_k$ . Formálně stejným způsobem vypočteme číslo  $q_k$ , když v uvedeném postupu použijeme místo čísel  $p_{k-1}, p_{k-2}$  čísel  $q_{k-1}, q_{k-2}$ . Podíl  $\frac{p_k}{q_k}$  čísel stojících v tabulce (3) přímo pod sebou udává pak hodnotu  $k$ -tého částečného zlomku.

Příklad. Vypočteme hodnotu řetězového zlomku  $[3, 7, 15, 1]$ .

|   |   |   |    |     |     |
|---|---|---|----|-----|-----|
|   |   | 3 | 7  | 15  | 1   |
| 0 | 1 | 3 | 22 | 333 | 355 |
| 1 | 0 | 1 | 7  | 106 | 113 |

Výpočet probíhá takto: Do schématu zapíšeme především do prvního řádku dané „články řetězu“, tj. čísla 3, 7, 15, 1, do druhého, resp. třetího řádku napíšeme stálá čísla 0, 1, resp. 1, 0. Dále už počítáme podle návodu druhý řádek:  $3 \cdot 1 + 0 = 3$ ,  $7 \cdot 3 + 1 = 22$ ,  $15 \cdot 22 + 3 = 333$ ,  $1 \cdot 333 + 22 = 355$ . Podobně třetí řádek:  $3 \cdot 0 + 1 = 1$ ,  $7 \cdot 1 + 0 = 7$ ,  $15 \cdot 7 + 1 = 106$ ,  $1 \cdot 106 + 7 = 113$ . Daný řetězový zlomek je tedy roven číslu  $\frac{355}{113} \doteq 3,1415929$  (Je to zřejmě velmi přibližné vyjádření

Ludolfova čísla.)

Pro použití řetězových zlomků je podstatné to, že každé reálné číslo lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru standardního řetězového zlomku. Při tom řetězový zlomek, vyjadřující číslo racionální, je konečný, kdežto pro čísla iracionální dostaneme řetězový zlomek nekonečný. Podrobný důkaz tohoto tvrzení přesahuje rámec tohoto článku, zato si však mů-



žeme na příkladu snadno ukázat postup, jímž najdeme vyjádření daného racionálního čísla řetězovým zlomkem.

Příklad. Číslo  $\frac{500}{131}$  vyjádříme řetězovým zlomkem.

$$\frac{500}{131} = 3 + \frac{107}{131} = 3 + \frac{1}{\frac{131}{107}} \quad \frac{131}{107} = 1 + \frac{24}{107} = 1 + \frac{1}{\frac{107}{24}} ;$$

$$\frac{107}{24} = 4 + \frac{11}{24} = 4 + \frac{1}{\frac{24}{11}} \quad \frac{24}{11} = 2 + \frac{2}{11} = 2 + \frac{1}{\frac{11}{2}}$$

$$\frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$$

Dosadíme-li postupně zpět, dostaneme  $\frac{500}{131} = [3, 1, 4, 2, 5, 2]$ .

Stejným postupem lze najít příslušný řetězový zlomek i v tom případě, že dané číslo je vyjádřeno desetinným zlomkem. Tak např. číslo 2,187

napišeme ve tvaru  $2 + \frac{187}{1000}$  a uvedeným postupem dostaneme nakonec

řetězový zlomek  $[2, 5, 2, 1, 7, 8]$ . O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit vyčíslením nalezeného řetězového zlomku podle schématu (3).

Ukážeme si ještě několik jednoduchých vlastností řetězových zlomků, kterých v dalším použijeme.

**V ě t a 3.** Pro čísla  $p_k, q_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) z věty 1. platí, že  $D_k = p_k \cdot q_{k+1} - p_{k+1} \cdot q_k = (-1)^{k+1}$ .

**D ů k a z** opět matematickou indukcí.

a) Pro  $k = 0$  je  $D_0 = p_0 \cdot q_1 - p_1 \cdot q_0 = a_0 \cdot (a_1 \cdot 1 + 0) - (a_1 \cdot a_0 + 1) \cdot 1 = -1 = (-1)^{0+1}$

Pro  $k = 0$  tedy věta platí.

b) Předpokládejme dále, že věta platí pro  $k = n-1$ , tj.  $D_{n-1} = (-1)^n$ .

Pak  $D_n = p_n \cdot q_{n+1} - q_n \cdot p_{n+1} = p_n \cdot (a_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}) - q_n \cdot (a_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}) = p_n \cdot q_{n-1} - q_n \cdot p_{n-1} = -D_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$ , c. b. d.

Jednoduchým důsledkem právě dokázané věty je

**V ě t a 4.** Čísla  $p_k, q_k$  jsou vždy dvojicí čísel nesoudělných. (Tj. každý částečný zlomek je v základním tvaru, nedá se krátit.)

**D ů k a z.** Kdyby čísla  $p_k, q_k$  byla soudělná, dal by se z výrazu  $D_k = p_k \cdot q_{k+1} - q_k \cdot p_{k+1}$  vytknout jejich největší společný dělitel. Pak by ovšem bylo  $D_k \neq \pm 1$ , což je ve sporu s tvrzením věty 3.

Věta 5. Hodnota  $n$ -tého částečného zlomku aproximuje přesnou hodnotu daného řetězového zlomku s chybou  $R_n$ , pro kterou platí

$$|R_n| \leq \frac{1}{q_n \cdot (q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2} \quad (4)$$

Přitom pro  $n$  sudé je přesná hodnota větší, při  $n$  lichém je menší než hodnota  $n$ -tého částečného zlomku.

D ů k a z. Daný řetězový zlomek  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_r]$  můžeme (formálně) nahradit zlomkem  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x]$ , kde  $x \geq a_{n+1} \geq 1$ . (Formálnost tohoto nahrazení spočívá v tom, že  $x$  už není nutně přirozené číslo. To však není podstatné, jak je hned vidět z věty 1. a jejího důkazu.) Pro odhad chyby  $R_n$  pak dostaneme

$$\begin{aligned} R_n &= [a_0, a_1, \dots, a_n, x] - [a_0, a_1, \dots, a_n] = \\ &= \frac{x \cdot p_n + p_{n-1}}{x \cdot q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} \cdot q_n - q_{n-1} \cdot p_n}{q_n \cdot (x \cdot q_n + q_{n-1})} = \\ &= \frac{(-1)^n}{q_n \cdot (x \cdot q_n + q_{n-1})} \end{aligned}$$

Čitatel posledního zlomku podává informaci o znaménku chyby, protože jmenovatel je zřejmě vždycky kladný. Pro  $n$  sudé je tedy skutečná hodnota zlomku větší, pro  $n$  liché je menší než  $n$ -tý částečný zlomek, jak jsme měli dokázat.

Odhad velikosti chyby co do absolutní hodnoty dostaneme, nahradíme-li  $x$  ve jmenovateli pouhou jedničkou. Tím se jmenovatel zmenší (nebo aspoň ne zvětší), hodnota odhadu se tudíž zvětší (resp. nezmenší). Hrubší odhad dostaneme, zanedbáme-li ve jmenovateli ještě  $q_{n-1}$ .

P ř í k l a d. Odhadněme chybu, s jakou zlomek  $\frac{333}{106}$  nahrazuje přesnou hodnotu řetězového zlomku z našeho prvního příkladu.

Uvedený zlomek je druhým částečným zlomkem daného řetězového zlomku, jde tedy o odhad chyby  $R_2$ . Absolutní hodnota této chyby nebude podle vzorce (4) jistě větší než  $\frac{1}{106 \cdot (106 + 7)} = \frac{1}{106 \cdot 113}$ ; tj.  $|R_2| < 10^{-4}$ . Protože konečně je zde  $n = 2$ , tj. sudé, je skutečná hodnota větší než  $\frac{333}{106}$ , avšak o méně než 0,0001.

# Složená čísla tvaru $n^4 + 4b^4$

Dr. OLDŘICH SRB, SPŠŽ, Letohrad

1. Známo jest tvrzení francouzské matematicky Sophie Germain (1776—1831): „Každé číslo tvaru  $n^4 + 4$ , kde  $n > 1$ , je číslo složené.“ Symbol  $n$  znamená v tomto případě přirozené číslo. [1]

2. Toto tvrzení je však pouze speciálním případem obecnější poučky: Součtová čísla  $n^4 + 4b^4$  pro celá  $n, b$  představují vždy složená čísla až na výjimečné případy pro  $n = \pm 1, b = \mp 1$  nebo  $n = \pm 1, b = \pm 1$  nebo  $n = \pm 1, b = 0$ .

3. Důkaz. Symboly  $n, k, a, b$  znamenají nadále libovolná celá čísla.  
a) Vycházíme z identity:

$$\begin{aligned} [(n^2 + k) + an] [(n^2 + k) - an] &= (n^2 + k)^2 - (an)^2 = \\ &= n^4 + 2n^2k + k^2 - a^2n^2 \end{aligned}$$

b) Na pravé straně identity anulujeme součet  $2n^2k - a^2n^2 = 0$  čili  $n^2(2k - a^2) = 0$ . Tato rovnice může být splněna pouze tehdy, když aspoň jeden z činitelů nabude hodnotu nula.

c) Položíme-li  $n = 0$ , pak také první činitel  $n^2 = 0$ . Touto volbou se původní identita redukuje na málo zajímavý případ  $k = k^2$ .

d) Anulujeme-li druhého činitele  $2k - a^2 = 0$ , můžeme volit  $k = \frac{a^2}{2}$

Po dosazení tohoto výrazu pro  $k$  se původní identita přetvoří takto:

$$\left[ \left( n^2 + \frac{a^2}{2} \right) + an \right] \left[ \left( n^2 + \frac{a^2}{2} \right) - an \right] = n^4 + \frac{a^4}{4}$$

Správnost i této identity si ověří čtenář provedením naznačených úkonů.

e) Zlomky v předchozí identitě odstraníme substitucí  $a = 2b$ . Pak  $a^2 = 4b^2$  čili  $\frac{a^2}{2} = 2b^2$  a po umocnění obdržíme  $\frac{a^4}{4} = 4b^4$ . Po dosazení těchto výrazů předchozí identita nabude tvar

$$[(n^2 + 2b^2) + 2bn] [(n^2 + 2b^2) - 2bn] = n^4 + 4b^4.$$

Touto úpravou jsme již získali identitu, která nám říká, že součet bikvadrátů na pravé straně lze obecně rozložit na součin činitelů levé strany. Menší úpravou nabude předchozí identita formu lépe vhodnou pro diskusi:

$$[(n + b)^2 + b^2] [(n - b)^2 + b^2] = n^4 + 4b^4.$$

4. Diskuse. Na pravé straně diskutované identity jest součet bikvadrátů  $n^4 + 4b^4$  obsažený v nadpise tohoto článku. Levá strana téže

identity nám však říká, že tento součet lze o b e c n ě rozložit na s o u č i n  $[(n + b)^2 + b^2] [(n - b)^2 + b^2]$ . V těch případech však, když některý z obecných činitelů nebo současně oba dva se redukuje na číslo jedna, jejich součin nepředstavuje nutně číslo složené. Vyšetříme proto ještě případy, kdy činitelé na levé straně identity nabudou hodnotu jedna. První polynom  $(n + b)^2 + b^2$  je součet dvou kvadrátů. Kvadrát libovolného celého čísla (záporného, nuly nebo kladného) je vždy číslo nezáporné. Součet dvou celých nezáporných čísel nabude hodnotu jedna pouze v tom případě, když jeden ze sčítanců bude roven nule a druhý roven jedné, protože platí  $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ . V našem případě volíme proto b u d ě  $n + b = 0$ , tudíž i  $(n + b)^2 = 0$ , a proto  $n = -b$

(pak  $b^2 = 1$ ; z toho plyne  $b = \pm 1$ ,  $n = \mp 1$ )

n e b o  $b = 0$ , tudíž i  $b^2 = 0$

pak  $(n + b)^2 = (n + 0)^2 = n^2 = 1$ , z toho  $n = \pm 1$ .

I druhý činitel součinu polynom  $(n - b)^2 + b^2$  je součet dvou kvadrátů a platí proto obdobná úvaha jako u prvního polynomu. Volíme opět

b u d ě  $n - b = 0$ , tudíž i  $(n - b)^2 = 0$ , a proto  $n = b$

pak  $b^2 = 1$ ; z toho plyne  $b = \pm 1$ ,  $n = \pm 1$ ,

n e b o  $b = 0$ , tudíž i  $b^2 = 0$

pak  $(n - b)^2 = (n - 0)^2 = n^2 = 1$ , z toho  $n = \pm 1$

Dosadíme nyní tyto zvláštní hodnoty konkrétních čísel do identity a zjistíme j e d n o t l i v ě, zda i pro tyto hodnory o b e c n ý součet  $n^4 + 4b^4$  je či není složené číslo.

Případ  $n = \pm 1$ ,  $b = \mp 1$ , kdy první polynom se rovná jedné.

$$\begin{aligned} & [(\pm 1 \mp 1)^2 + (\mp 1)^2] [(\pm 1 \pm 1)^2 + (\mp 1)^2] = \\ & = 1 \cdot 5 = (\pm 1)^4 + 4(\mp 1)^4 = 5. \end{aligned}$$

Případ  $n = \pm 1$ ,  $b = \pm 1$ , kdy druhý polynom nabývá hodnoty jedna.

$$\begin{aligned} & [(\pm 1 \pm 1)^2 + (\pm 1)^2] [(\pm 1 \mp 1)^2 + (\pm 1)^2] = \\ & = 5 \cdot 1 = (\pm 1)^4 + 4(\pm 1)^4 = 5. \end{aligned}$$

Oba součiny dávají prvočíslo 5 a tudíž uvedené případy volby  $n$  i  $b$  jsou výjimečné, nedávají složené číslo a nutno je proto z obecné poučky vyloučit, jak bylo provedeno shora.

Případ  $n = \pm 1$ ,  $b = 0$  je stejný u obou polynomů, oba současně nabývají hodnotu jedna. Proto i součin

$$[(\pm 1 + 0)^2 + 0^2] [(\pm 1 - 0)^2 + 0^2] = 1 \cdot 1 = 1^4 + 4 \cdot 0^4 = 1$$

nevede k číslu složenému, ale k číslu jedna. I tento případ volby  $n$  i  $b$  je výjimečný a byl z obecné poučky vyloučen. Poněvadž jiné možnosti,

aby uvedené polynomy nabyly hodnotu jedna neexistují, byl důkaz obecné poučky dokončen.

§ 5. Na závěr ještě připomínáme, že tvrzení Sophie Germain je pouze speciálním případem dokázané obecnější poučky volíme-li  $b = 1$ . Pak

$$n^4 + 4b^4 = n^4 + 4 = [(n + 1)^2 + 1] [(n - 1)^2 + 1].$$

**L i t e r a t u r a :**

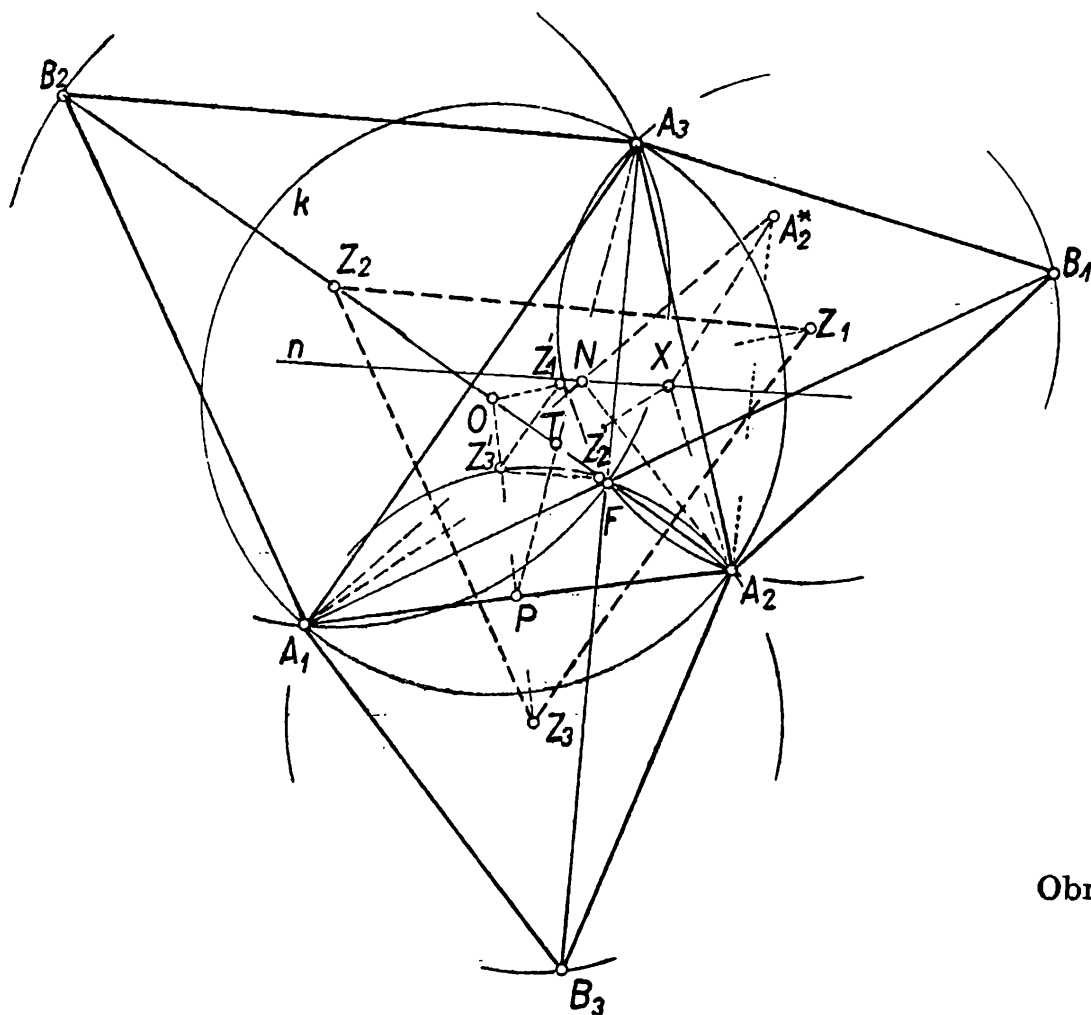
[1] G. N. Berman: Číslo a nauka o něm. Práce. Bratislava 1950, str. 123.

## Užití komplexních čísel v geometrii

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

(Pokračování)

3. Je dán libovolný trojúhelník  $A_1A_2A_3$ . Středů  $Z_1Z_2Z_3$  rovnostranných trojúhelníků  $A_1A_2B_3$ ,  $A_2A_3B_1$ ,  $A_3A_1B_2$  ležících vně trojúhelníka  $A_1A_2A_3$  jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Totéž platí o středech rovno-



Obr. 3

*stranných trojúhelníků, které jsou k předcházejícím souměrně položeny podle stran daného trojúhelníku. (Obr. 3.)*

Zvolíme-li opět kružnici  $k$  opsanou danému trojúhelníku za jednotkovou kružnici, jsou vrcholy  $A_1, A_2, A_3$  určeny komplexními jednotkami  $t_1, t_2, t_3$ . Středů rovnostranných trojúhelníků  $Z_1$ , resp.  $Z''_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jsou určeny komplexními čísly

$$z_1 = \frac{t_3}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{t_2}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$z'_1 = \frac{t_3}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{t_2}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$z_2 = \frac{t_1}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{t_3}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$z'_2 = \frac{t_1}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{t_3}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$z_3 = \frac{t_2}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{t_1}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$z'_3 = \frac{t_2}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{t_1}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

Je totiž

$$z_1 - t_3 = \frac{t_2 - t_3}{\sqrt{3}} (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \frac{t_2 - t_3}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$

a odtud určíme  $z_1$ ; podobně platí pro ostatní.

Utvoříme-li rozdíly

$$z_2 - z_1 = \frac{t_1}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) - \frac{t_2}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + \frac{it_3}{\sqrt{3}}$$

$$z_3 - z_1 = \frac{t_1}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) - \frac{it_2}{\sqrt{3}} - \frac{t_3}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

Poněvadž

$$\frac{t_1}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{t_1}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$- \frac{t_2}{2} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = - \frac{t_2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{it_3}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = - \frac{t_3}{2} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{je } z_3 - z_1 = (z_2 - z_1) \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (z_2 - z_1) (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ), \quad *)$$

což znamená, že otočením úsečky  $Z_1Z_2$  kolem  $Z_1$  v kladném smyslu o úhel  $60^\circ$  dostaneme úsečku  $Z_1Z_3$ . Je proto trojúhelník  $Z_1Z_2Z_3$  rovnostranný. Stejným způsobem dokážeme, že i trojúhelník  $Z'_1Z'_2Z'_3$  je rovnostranný. Určíme-li komplexní čísla příslušná těžištěm těchto trojúhelníků, dostaneme

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{z'_1 + z'_2 + z'_3}{3} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}$$

což znamená, že rovnostranné trojúhelníky  $Z_1Z_2Z_3$ ,  $Z'_1Z'_2Z'_3$  a daný trojúhelník  $A_1A_2A_3$  mají společné těžiště.

4. *Přímky  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$  v předcházející úloze procházejí týmž bodem  $F$ .* V článku „O určitém vztahu u obecného trojúhelníku“ v roč. 42 tohoto časopisu, str. 388, jsem dokázal, že tímto bodem procházejí všechny kružnice opsané rovnostranným trojúhelníkům  $A_iA_jB_k$  ( $i, j, k$  je cyklická permutace z pořadí 1, 2, 3). V obr. 3 je

$$\triangle B_3A_2A_3 \cong \triangle A_1A_2B_1 \text{ a } \sphericalangle FA_3A_2 = \sphericalangle FB_1A_2$$

a čtyřúhelník  $FA_2B_1A_3$  je tětiový. Poněvadž

$$\sphericalangle A_2B_1A_3 = \frac{\pi}{3} \text{ je } \sphericalangle A_2FA_3 = \frac{2}{3} \pi$$

a podobně je  $\sphericalangle A_1FA_2 = \frac{2}{3} \pi$ . Z rovnosti uvedených úhlů plyne

$$\frac{f - t_2}{f - t_1} = k \cdot \tau; \quad \frac{f - t_3}{f - t_2} = k' \cdot \tau,$$

kde  $\tau$  je komplexní jednotka příslušná k úhlu  $\frac{2}{3} \pi$ ,  $k$  a  $k'$  jsou reálná čísla. Z uvedených podmínek plyne

$$f \cdot (1 - k \cdot \tau) = t_2 - k \cdot t_1 \cdot \tau; \quad f \cdot (1 - k' \cdot \tau) = t_3 - k' \cdot t_2 \cdot \tau \quad (1)$$

Vyloučením čísla  $f$  z těchto rovnic dostaneme, nahradíme-li  $\tau^2 = \bar{\tau}$

$$t_3 - t_2 - k \cdot \tau (t_3 - t_1) + k \cdot k' \bar{\tau} (t_2 - t_1) = 0. \quad (2)$$

V této rovnici nahradíme všechna čísla čísly komplexně sdruženými:

$$t_1 (t_2 - t_3) - k \cdot \bar{\tau} \cdot t_2 (t_1 - t_3) + k \cdot k' \tau t_3 (t_1 - t_2) = 0. \quad (2')$$

---

\*) Ve 4. čísle na str. 154 místo rovnic  $z' = k(z - z_0)$ ,  $z' = t(z - z_0)$  má správně být  $z' - z_0 = k(z - z_0)$ ,  $z' - z_0 = t(z - z_0)$ .

Vyloučíme-li z rovnic (2) a (2') člen  $s \cdot k'$ , dostaneme

$$(t_3 - t_2)(t_3\tau - t_1\bar{\tau}) = k \cdot (t_3 - t_1)(t_3\bar{\tau} - t_2\tau),$$

neboť  $\bar{\tau}^2 = \tau$ ,  $\tau^2 = \bar{\tau}$ . Odtud vypočítáme

$$k = \frac{(t_3 - t_2)(t_3\tau - t_1\bar{\tau})}{(t_3 - t_1)(t_3\bar{\tau} - t_2\tau)} \quad (3)$$

Dosadíme-li (3) do první rovnice soustavy (1), dostaneme po úpravě

$$f = \frac{\bar{\tau}t_3^2(t_2 - t_1) + \tau t_2^2(t_1 - t_3) + t_1^2(t_3 - t_2)}{\bar{\tau}t_3(t_2 - t_1) + \tau t_2(t_1 - t_3) + t_1(t_3 - t_2)} \quad (4)$$

Pokud žádný z vnitřních úhlů v trojúhelníku není větší než  $\frac{2}{3}\pi$ , je bod  $F$  vnitřním bodem trojúhelníku  $A_1A_2A_3$ . Je-li bod  $F$  vnějším bodem trojúhelníku, pak je např.

$$\sphericalangle A_1A_2A_3 > \frac{2}{3}\pi \text{ a } \sphericalangle A_1FA_3 = \sphericalangle AFA = \frac{\pi}{3}$$

Také v tomto případě odvodíme stejným způsobem číslo  $f$ . V tomto případě nastane ve výsledku (4) jen změna znaménková ve 3. členu čitatele a jmenovatele.

Polohu bodu  $F$  jsme odvodili za tím účelem, abychom zjistili, neleží-li tento bod na přímce Eulerově trojúhelníku  $A_1A_2A_3$ . Kdyby tomu tak skutečně bylo, musely by být body  $F$  a  $H$  stejnohlé podle středu  $O$  kružnice trojúhelníku  $A_1A_2A_3$  opsané, pak by platil vztah  $f = k \cdot h$ , kde  $h = t_1 + t_2 + t_3$  a  $k$  by muselo být číslo reálné. Z rovnosti (4) však plyne, že tento vztah neplatí.

**Poznámka:** Nalezený bod  $F$  má od vrcholů trojúhelníku  $A_1A_2A_3$  minimální součet vzdáleností. O tom se můžeme přesvědčit např. takto: Zvolme libovolnou přímku  $n$  kolmou na úsečku  $FA_3$  a hledejme na ní bod, který má od bodů  $A_1$  a  $A_2$  minimální součet vzdáleností. Tuto podmínku splňuje jediný bod  $N$ , který je průsečíkem přímky  $n$  a přímky  $A_1A_2^*$ , kde  $A_2^*$  je bod souměrně položený k bodu  $A_2$  podle přímky  $n$ . Pro každý jiný bod  $X$  této přímky platí

$$A_1X + A_2X = A_1X + A_2^*X > A_1N + NA_2^* = A_1N + A_2N$$

Je tudíž nutnou podmínkou pro takový bod, aby přímky  $A_1N$ ,  $A_2N$  svíraly s přímkou  $n$  (resp. s přímkou  $FA_3$ ) stejné úhly. Vedeme-li přímku  $n$  bodem  $F$ , pak bod  $N$  splyne s bodem  $F$ . A totéž platí pro přímky kolmé k  $FA_2$  a k  $FA_1$ . Má tudíž bod  $F$  od vrcholů trojúhelníku  $A_1A_2A_3$  minimální součet vzdáleností, pokud tento bod je vnitřním bodem trojúhelníku, nebo jeho vrcholem. Bod  $F$  se nazývá *Fermatovým bodem trojúhelníku*  $A_1A_2A_3$ .

5. *Přímky spojující body dotyku do trojúhelníku vepsané kružnice s protějšími vrcholy trojúhelníku se protínají v témže bodě.* (Obr. 4.)



Zvolme soustavu souřadnic tak, aby vepsaná kružnice byla kružnicí jednotkovou. Dotykovým bodům  $T_i$  přísluší komplexní jednotky  $t_i$ .

Položíme-li v rovnici sečny, procházející body dané komplexními jednotkami  $t_1$  a  $t_2$ , tj. v rovnici

$$z + t_1 t_2 \bar{z} - t_1 - t_2 = 0,$$

kde  $t_1 = t_2 = t$ , dostaneme rovnici tečny kružnice  $|z| = 1$ .

Rovnice tečny v bodě o parametru  $t_1$  zní

$$z + t_1^2 \bar{z} - 2t_1 = 0$$

a v bodě o parametru  $t_2$

$$z + t_2^2 \bar{z} - 2t_2 = 0. \quad (5)$$

Jejich společný bod  $A_3$  je určen komplexním číslem  $a_3$ , které přísluší vrcholu  $A_3$ , které dostaneme z rovnic (5) vyloučením  $\bar{z}$ . Dostaneme

$$a_3 = \frac{2t_1 t_2}{t_1 + t_2}$$

Stejným způsobem určíme

$$a_2 = \frac{2t_1 t_3}{t_1 + t_3} \quad a_1 = \frac{2t_2 t_3}{t_2 + t_3} \quad (6)$$

Určeme nyní komplexní číslo  $b$ , které odpovídá průsečku  $B$  přímek  $A_3 T_3$  a  $A_2 T_2$ . Poněvadž body  $A_3, B, T_3$  leží v přímce a také body  $A_2, B, T_2$  leží v přímce, platí

$$\begin{aligned} b - t_3 &= k \left( \frac{2t_1 t_2}{t_1 + t_2} - t_3 \right), \\ b - t_2 &= k' \left( \frac{2t_1 t_3}{t_1 + t_3} - t_2 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

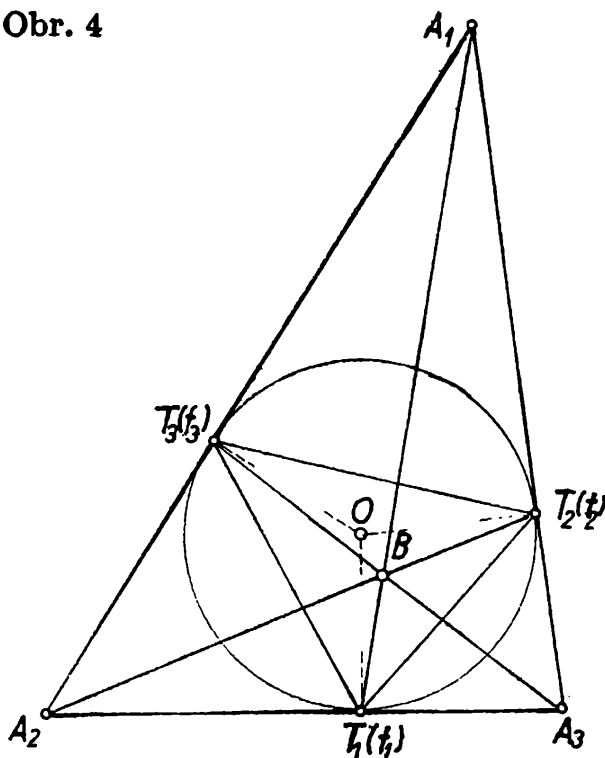
kde  $k$  a  $k'$  jsou reálná čísla.

Vyloučením čísla  $b$  z rovnic soustavy (7), dostaneme

$$t_2 - t_3 = k \left( \frac{2t_1 t_2}{t_1 + t_2} - t_3 \right) - k' \left( \frac{2t_1 t_3}{t_1 + t_3} - t_2 \right) \quad (8a)$$

Nahradíme-li v rovnici (8a) komplexní čísla čísly komplexně sdruženými, dostaneme (vzhledem k tomu, že  $\bar{t} = \frac{1}{t}$ )

Obr. 4



$$\frac{t_3 - t_2}{t_2 t_3} = k \left( \frac{2}{t_1 + t_2} - \frac{1}{t_3} \right) - k' \left( \frac{2}{t_1 - t_3} - \frac{1}{t_2} \right) \quad (8b)$$

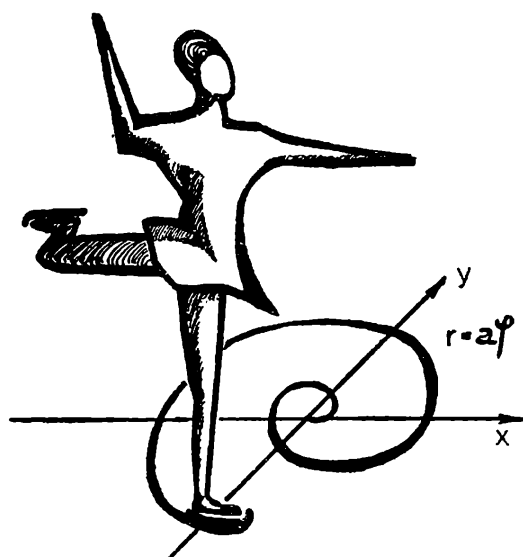
Eliminací  $k$  z rovnic (8a) a (8b) dostaneme po úpravě

$$k = \frac{(t_1 + t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)}{9t_1 t_2 t_3 - (t_1 + t_2 + t_3)(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)}$$

Po dosazení čísla  $k$  do první z rovnic soustavy (7), dostaneme

$$b = \frac{2 \cdot [t_1 t_2 t_3 (t_1 + t_2 + t_3) - (t_1^2 t_2^2 + t_1^2 t_3^2 + t_2^2 t_3^2)]}{9t_1 t_2 t_3 - (t_1 + t_2 + t_3)(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)}$$

V tomto výrazu vystupují všechny parametry  $t_i$  rovnocenně; z toho je zřejmé, že k témuž výsledku dojdeme, hledáme-li komplexní číslo příslušné průsečíku kterýchkoliv dvojic přímek  $A_i T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Číslo  $b$  udává polohu jejich společného průsečíku, jímž je bod *Brianchonův* trojúhelníka  $A_1 A_2 A_3$  a jemu vepsané kružnice. Vyjdeme-li z trojúhelníka  $T_1 T_2 T_3$  vepsaného do kružnice  $k$ , pak přímky, spojující průsečík kterýchkoliv dvou tečen ve vrcholech  $T_1, T_2, T_3$  (ke kružnici  $k$ ) se zbývajícím vrcholem trojúhelníka, se protínají v jednom bodě.



## DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

### Několik konstrukcí elipsy

STANISLAV HORÁK st., ČVUT Praha

1. Jak se sestrojí oskulační kružnice ve vrcholech elipsy, jistě znáte. Na základě této konstrukce můžeme vypočítat jejich poloměry.

V obr. 1 je zavedeno toto označení:  $S, A, B, C, D$  jsou postupně střed, hlavní a vedlejší vrcholy elipsy.  $K_1, K_2$  jsou středy křivosti v hlavním

a vedlejším vrcholu a posléze  $E$  je čtvrtý vrchol obdélníka  $ASCE$ . Poloměry oskulačních kružnic označíme  $\varrho_1, \varrho_2$ .

Je patrné, že

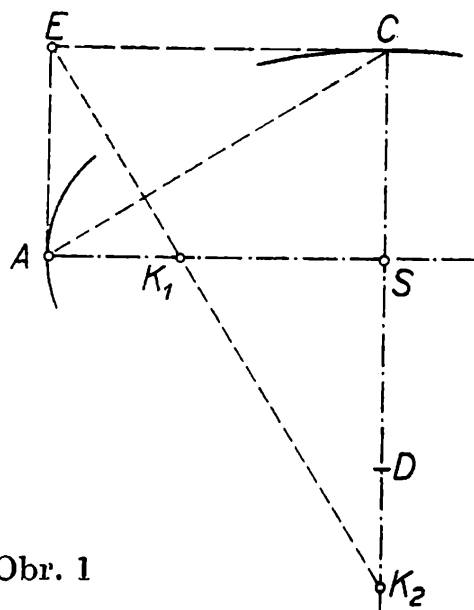
$$\triangle ASC \sim \triangle EAK_1$$

neboť to jsou 2 pravoúhlé trojúhelníky se shodnými úhly. Odtud

$$AS : SC = EA : AK_1, \text{ tj. } a : b = b : \varrho_1$$

a z toho

$$\varrho_1 = \frac{b^2}{a} \quad (1) \quad \text{Obr. 1}$$



*Cvičení.* Sami odvodte vzorec

$$\varrho_2 = \frac{a^2}{b} \quad (2)$$

2. Pokusme se nyní *vypočítat* délky poloos elipsy, jestliže jsou dány poloměry  $\varrho_1, \varrho_2$  oskulačních kružnic.

Z rovnice (2) vypočítáme  $b$

$$b = \frac{a^2}{\varrho_2}$$

a dosadíme do (1). Po kratší úpravě máme

$$a = \sqrt[3]{\varrho_1 \varrho_2^2} \quad (3)$$

Pro délku vedlejší poloosy obdržíme vzorec

$$b = \sqrt[3]{\varrho_1^2 \varrho_2} \quad (4)$$

Ze vzorců (3) a (4) usuzujeme, že úloha *sestrojit* délky poloos  $a, b$  z obou poloměrů křivosti, není řešitelný euklidovsky, tj. není řešitelná kružít-kem a pravítkem v obvyklém smyslu.

3. Přístupme k jiné úloze. Je vypočítat délky obou poloos, jestliže jsou dány délky  $SK_1 = d_1, SK_2 = d_2$ .

Z obr. 1 snadno vypočteme

$$d_1 = a - \varrho_1 = a - \frac{b^2}{a} = \frac{e^2}{a} \quad (5)$$

$$d_2 = \varrho_2 - b = \frac{e^2}{b} \quad (6)$$

**Tyto dva vztahy vedou k dalšímu**

$$d_1 : d_2 = b : a \quad (7)$$

**Z této rovnice vyjádříme  $b$**

$$b = \frac{a d_1}{d_2}$$

a tuto hodnotu dosadíme do rovnice (5)

$$d_1 = a - \frac{b^2}{a} = a - \frac{ad_1^2}{d_2^2} = \frac{a(d_2^2 - d_1^2)}{d_2^2}$$

odtud

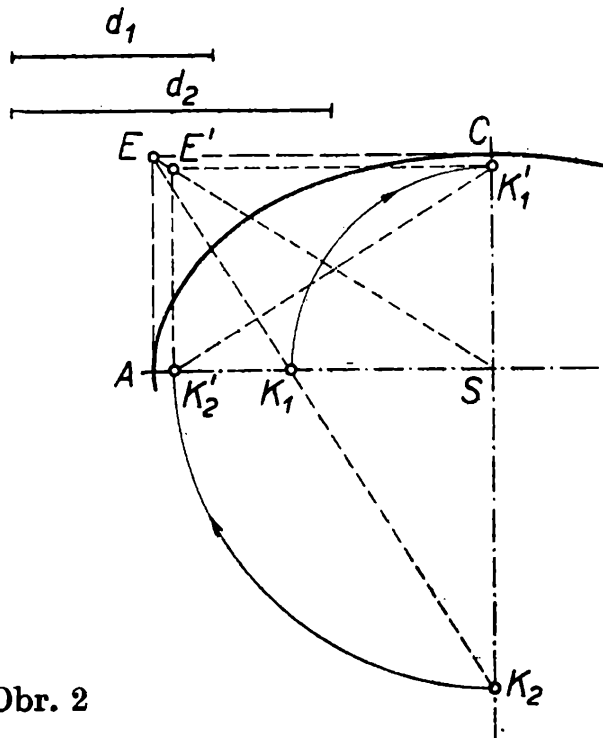
$$a = \frac{d_1 d_2^2}{d_2^3 - d_1^3} \quad (8)$$

Jmenovatel tohoto zlomku je vždy kladný, neboť vždy je  $d_2 > d_1$ , jak plyne z výrazů (5) a (6).

## Podobně

$$b = \frac{d_1^2 d_2}{d_2^2 - d_1^2} \quad (9)$$

Z rovnice (8) a (9) je patrné, že poloosy  $a, b$  se dají sestojit euklidovsky.



**Obr. 2**

**Úloha.** Sestrojte elipsu, jsou-li dány délky  $d_1, d_2$ .

**Řešení** (obr. 2). Je patrné, že se dá ihned sestrojit pravoúhlý trojúhelník  $K_1SK_2$ . Bod  $E$  leží na prodloužení přepony  $K_1K_2$ . Poněvadž podle

(7) je  $d_1 : d_2 = b : a$ , otočíme trojúhelník  $K_1SK_2$  v záporném smyslu o  $90^\circ$  kolem středu  $S$ . Tím dostaneme trojúhelník  $K'_1SK'_2$ , a ten doplníme na obdélník. Na jeho úhlopříčce procházející bodem  $S$  leží také bod  $E$ . Známe-li bod  $E$ , je úloha v podstatě rozřešená.

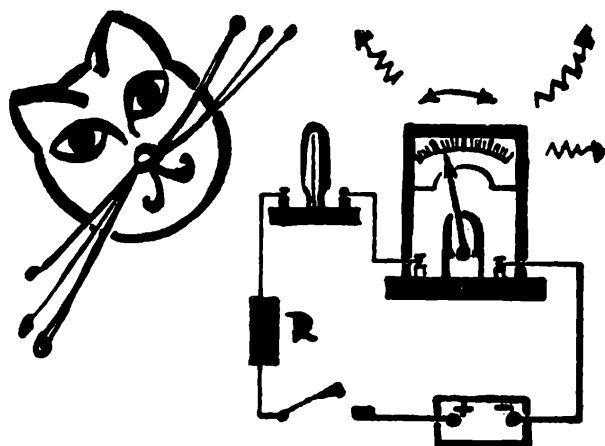
*Cvičení. 1. Odvoďte vzorec*

$$\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2} = \frac{1}{e^2}$$

2. Je dáno a)  $d_1, a$ ; vypočtete excentricitu  $e$ . Na základě výpočtu sestrojte elipsu. (Podobně, je-li dáno  $d_2, b$ ). b)  $e, d_2$ .

3. Je dán hlavní vrchol elipsy  $A$  a jemu příslušný střed  $K_1$  oskulační kružnice. Sestrojte tuto elipsu tak, aby vedlejší poloosa měla danou délku  $b$ .

4. Je dán pravoúhlý trojúhelník  $SK_1K_2$  (viz obr. 1). Sestrojte příslušnou elipsu.



F Y Z I K A

## Ako sa šíri zvuk z nadzvukových lietadiel

MILOŠ FRANEK, Prievidza

Pri šírení zvuku z lietadla letiaceho rýchlosťou väčšou než zvuk je situácia podstatne iná, než keď sa zdroj zvuku pohybuje pomalšie než zvuk. Nadzvukové lietadlo, t. j. lietadlo pohybujúce sa rýchlejšie než zvuk, „predbieha“ zvuk, ktorý spôsobujú jeho motory, resp. trenie

povrchu lietadla o vzduch. Preto ho pozorovateľ počuje až chvíľu po tom, keď preletí nad ním. Okrem toho v tom okamžiku počuť zvuk neporovnateľne silnejšie, čo sa prejavuje zdanlivým výbuchom, tzv. rázovou vlnou.

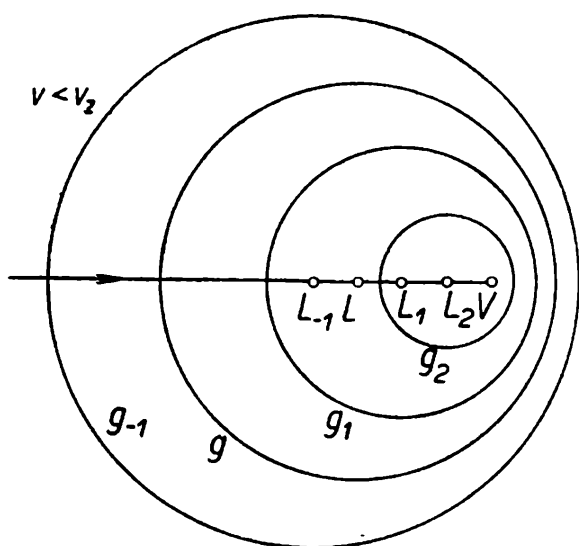
Za predpokladu, že sa lietadlo pohybuje rovnomerne priamočiarno v rovnakej výške, pokúsime sa odpovedať na tieto otázky:

1. Aký tvar má časť priestoru, kde v danom okamihu počuť zvuk lietadla.

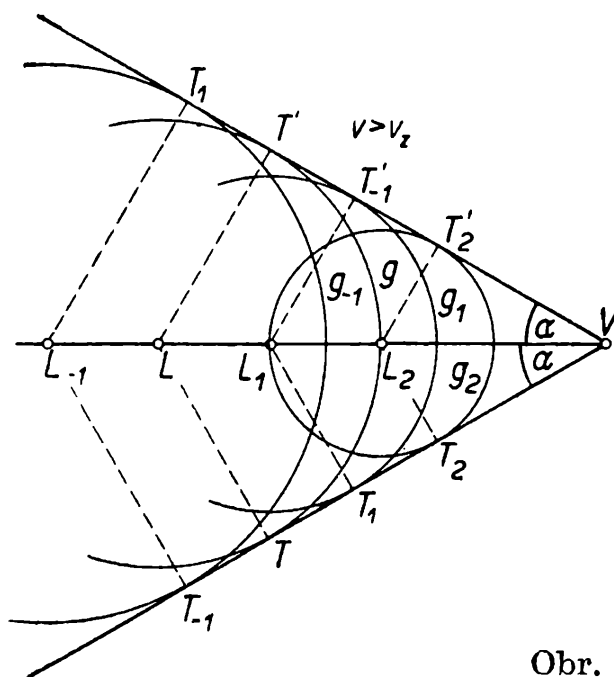
2. Ako sa dá jednoducho vypočítať rýchlosť a výška lietadla z časových a uhlových údajov, ktoré môže odmerať amatérsky pozorovateľ z jedného miesta.

3. Čo je príčinou rázovej vlny.

Rýchlosť lietadla označme  $v$ ; predpokladáme, že je konštantná čo do veľkosti i čo do smeru. Dráha lietadla, ktoré budeme pokladať za hmotný bod, bude označená  $L\bar{V}$ , kde  $V$  je jeho okamžitá poloha a  $L$  poloha pred časom  $t$  (obr. 1 a 2). Rýchlosť zvuku  $v_z$  pokladajme kvôli zjednodušeniu



Obr. 1



Obr. 2

za konštantu — pozdejšie si ukážeme, ako možno čiastočne opraviť nepresné výsledky, vyplývajúce z tohoto predpokladu. Povrch terénu pokladajme za vodorovný a priamka  $L\bar{V}$  nech je s ním rovnobežná.

Zvuk vysielaný lietadlom si predstavme rozložený na zvukové signály, vysielané z jednotlivých miest dráhy. Signál vyslaný z miesta  $L$  dostal sa za čas  $t$  do vzdialenosti  $v_z t$  všetkými smermi, počuť ho teda na guľovej vlnoploche  $g$  o strede  $L$  a polomere  $r = v_z t$ . Lietadlo, nachádzajúce sa v tomto okamžiku v mieste  $V$ , preletelo za ten čas vzdialenosť  $L\bar{V} = vt$ . Situácia je zakreselná v reze na obr. 1 pre lietadlo pomalšie než zvuk

a na obr. 2 pre lietadlo nadzvukové. Sú tu zakreslené aj vlnoplochy  $g_{-1}, g_1, g_2$ , ktorých stredy sú  $L_{-1}, L_1, L_2$  - v nich sa lietadlo nachádzalo pred časom  $t_{-1}, t_1, t_2$ .

V prípade  $v < v_z$  (obr. 1) je  $LV = vt < v_z t = r$ , teda bod  $V$  sa nachádza vnútri priestoru ohraničeného guľovou vlnoplochou  $g$  o strede  $L$  a polomere  $r$ . Keď však  $v > v_z$  (obr. 2), nachádza sa bod  $V$  mimo neho, pretože vtedy  $LV > r$ . Práve tak sa zistí, že bod  $V$  leží zvonka guľových vlnoplôch  $g_{-1}, g_1, g_2, \dots$ . U podzvukového lietadla by sa dalo ľahko usúdiť, že vlnoplôcha, ktorá vznikla zo zvukového signálu vyslaného pozdejšie, nachádza sa vo vnútri vlnoplochy, ktorá vznikla skôr, teda  $g_2$  sa nachádza vo vnútri  $g_1$ , táto v  $g$  a tá v  $g_{-1}$  (obr. 1). Preto aj pozorovateľ prijíma najprv zvuk prichádzajúci z väčšej vzdialenosti, potom zo vzdialenosti menšej - zvuk teda silnie postupne (ak ho pozorovateľ vôbec počuje).

Uvážme, aká je situácia v prípade  $v > v_z$  (obr. 2), teda pri nadzvukovom lietadle. Zostrojme dotyčnice  $VT, VT'$  z bodu  $V$  ku guľovej ploche  $g$ , ktorá sa na obr. 2 javí v reze ako kružnica;  $T, T'$  sú dotykové body. Z pravouhlého trojuholníka  $VTL$ , kde  $\sphericalangle LVA = \alpha$ , zistíme

$$\sin \alpha = \frac{LT}{LV} = \frac{v_z t}{LV}$$

t. j.

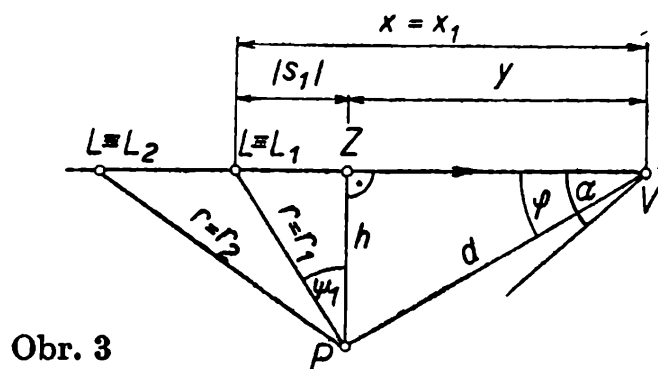
$$\sin \alpha = \frac{v_z}{v} \quad (1)$$

Dotyčnice  $VT_1, VT'_1$  zvierajú s priamkou  $VL$  ten istý uhol  $\alpha$ , pretože ak označíme  $\alpha_1 = \sphericalangle L_1 VT_1$ , potom

$$\sin \alpha_1 = \frac{L_1 T_1}{L_1 V} = \frac{v_z t_1}{vt_1} = \frac{v_z}{v} = \sin \alpha.$$

To isté platí o vlnoplochách  $g_{-1}, g_2, \dots$ , čiže polpriamky  $VT, VT'$  sú spoločné dotyčnice všetkých vlnoplôch  $g_{-1}, g, g_1, g_2, \dots$ . Ak si situáciu predstavíme v priestore, vytvárajú takéto dotyčnice kuželovú plochu s osou  $VL$  a uhlom  $2\alpha$  pri vrchole  $V$ , ktorá vznikne rotáciou polpriamky  $VT$  okolo osi  $VL$ . Časť priestoru ňou ohraničená nazýva sa Machov kužeľ. V okamžiku, keď sa lietadlo nachádza v bode  $V$ , t. j. vo vrchole Machovho kužela, dolieha do každého miesta na jeho povrchu zvuk vyslaný práve z jedného miesta dráhy, napr. do bodu  $T$  sa dostáva zvuk vyslaný z miesta  $L$ , pričom  $TL \perp TV$ . To znamená, že vzhľadom k pozorovateľovi v bode  $T$  je smer, v ktorom sa nachádza lietadlo v okamžiku, keď počul rázovú vlnu, kolmý na smer, odkiaľ k pozorovateľovi doľahol zvuk. Naše výsledky sú správne, pokiaľ lietadlo letí aspoň po dráhe  $LV$  rovnomerne priamočiaro.

Zistíme teraz polohu bodu  $L$ , odkiaľ prichádza zvuk do ľubovoľného miesta  $P$  vo vnútri Machovho kužela. Označme  $\angle PVL = \varphi$ ,  $LV = x$ ,  $LP = r$ ,  $PV = d$  (obr. 3). Keď čas, za ktorý sa lietadlo dostane z bodu  $L$  do  $V$  a zvuk z  $L$  do  $P$  označíme  $t$ , potom



Obr. 3

$$\frac{LP}{LV} = \frac{v_z t}{vt}, \quad LP = \frac{v_z}{v} LV = \frac{v_z x}{v}.$$

Podľa kosínusovej vety platí pre trojuholník  $PLV$

$$r^2 = \left( \frac{v_z x}{v} \right)^2 = x^2 + d^2 - 2 dx \cos \varphi.$$

Po úprave:

$$(v^2 - v_z^2) x^2 - 2 dv^2 x \cos \varphi + v^2 d^2 = 0,$$

z čoho riešením dostaneme

$$x_{1,2} = \frac{2 dv^2 \cos \varphi \pm \sqrt{4 d^2 v^4 \cos^2 \varphi - 4 v^2 d^2 (v^2 - v_z^2)}}{2 (v^2 - v_z^2)}$$

a po úprave (vynímanie, čiastočné odmocnenie, použitie vzťahu medzi sínusom a kosínusom a krátenie):

$$x_{1,2} = \frac{dv}{v^2 - v_z^2} (v \cos \varphi \pm \sqrt{v^2 - v^2 \sin^2 \varphi}), \quad (2)$$

Pretože sa bod  $P$  nachádza vo vnútri Machovho kužela je  $\varphi < \alpha$  (obr. 3), teda zo vzťahu (1) plynie

$$\sin^2 \varphi < \sin^2 \alpha = \frac{v_z^2}{v^2}, \quad v_z^2 - v^2 \sin^2 \varphi > 0.$$

Dále je

$$\sqrt{v_z^2 - v^2 \cos^2 \varphi} < \sqrt{v^2 - v^2 \sin^2 \varphi} = v \cos \varphi,$$



takže

$$x_2 > 0, \quad x_1 + 0.$$

Výraz pod odmocninou vo vzorci (2) je teda kladný, a preto prichádza do bodu  $M$  dvuk vyslaný z dvoch miest  $L \equiv L_1, L \equiv L_2$  daných vzdialenosťami  $x = x_1 = L_1 V, x = x_2 = L_2 V$ . Pre čitateľov, ktorí poznajú Apolloniovu kružnicu poznamenajme, že body  $L_1, L_2$  možno pomocou nej zostrojit, keď sú dané body  $P, V$  a pomer  $\frac{v_z}{v}$ . Platí totiž

$$\frac{L_1 P}{L_1 V} = \frac{L_2 P}{L_2 V} = \frac{v_z}{v}.$$

Na povrchu kužela, tvoriacom výslednú vlnoplochu, ktorá je tzv. obalovou plochou k systému guľových elementárnych vlnoplôch  $g, g_1, g_2, \dots$ , vzniká rázová vlna s intenzitou zvuku podstatne väčšou než vo vnútri kužela. Zatiaľ sa uspokojme s vysvetlením, že jej príčinou je väčšia „hustota“ vlnoplôch v blízkosti povrchu kužela než v jeho vnútri (obr. 2). Pozorovateľ teda najprv nepočuje nič, až v okamžiku, keď ho zasiahne rázová vlna, počuje výbuch - vtedy zvuk prichádza z jediného miesta dráhy lietadla, pozdejšie počuje už len súvislý, podstatne slabší zvuk lietadla. Vtedy už v každom okamžiku prijíma zvuk z dvoch miest dráhy, čo je zdanlivý paradox s tým, že je zvuk slabý. Ak lietadlo letí nad vodorovnou rovinou, vytvára pohybujúci sa Machov kužel, ktorého vrcholom je lietadlo, rovinnú oblasť, ohraničenú jednou vetvou hyperboly - rez kužeľovej plochy rovinou rovnobežnou s jej osou je totiž hyperbola. Do vnútra tejto oblasti dolieha zvuk lietadla, mimo nej zvuk nepočuť a na jej hranici je rázová vlna, t. j. počuť výbuch. Intenzitu týchto „výbuchov“ pozná iste každý čitateľ z vlastnej skúsenosti. Treba však ešte raz upozorniť, že nejde o skutočný výbuch, ale o silnú zvukovú vlnu, ktorá postupuje spolu s lietadlom, a preto pozorovateľa zasiahne len v jedinom okamžiku. Je obdobou rázovej vlny, ktorá vzniká na vodnej hladine za motorovým člnom v tvare ramien uhla, ktorého vrcholom je čln. Aj tu je podmienkou jej vzniku väčšia rýchlosť plavidla než je rýchlosť šírenia vlnenia na vodnej hladine.

Teraz vypočítame rýchlosť a výšku nadzvukového lietadla z údajov, ktoré môže odmerať jediný pozorovateľ. Ak lietadlo preletí zenitom  $Z$  (obr. 4a) nad pozorovateľom  $P$  a tento počuje rázovú vlnu v okamžiku, keď je lietadlo v bode  $V$  a vidno ho pod výškovým uhlom  $\alpha$ , potom aj uhol medzi osou  $VZ$  a povrchovou polpriamkou  $VP$  Machovho kužela má veľkosť  $\alpha$ . Rýchlosť lietadla je potom podľa vzorca (1)

$$v = \frac{v_z}{\sin \alpha} \quad (3)$$

Jeho výška je

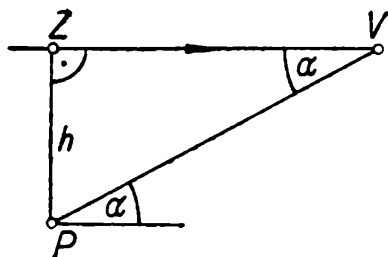
$$PZ = ZV \quad \operatorname{tg} \alpha = vt \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_z}{\sin \alpha} t \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

teda

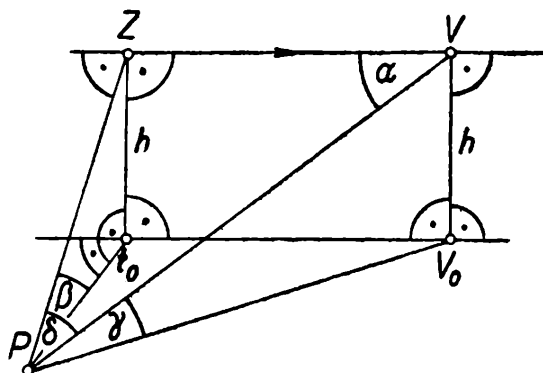
$$h = PZ = \frac{v_z t}{\cos \alpha} \quad (4)$$

kde  $t$  je čas, za ktorý lietadlo prejde dráhu  $ZV$ .

Keď lietadlo, letiace vo výške  $h$ , nepreletí zenitom (obr. 4b), označme jeho najväčšiu uhlovú výšku  $\beta$ , jeho poloha vtedy nech je  $Z$ , jej kolmý priemet na zem  $Z_0$  (vtedy je rovina  $PZZ_0$  kolmá na dráhu  $ZV$ ). Zorný uhol  $ZPV$  označíme  $\delta$ , uhlová výška lietadla v okamžiku, keď pozorovateľ  $P$  počuje rázovú vlnu, bude  $\gamma$ , príslušná poloha lietadla nech je  $V$ , jej



Obr. 4a



Obr. 4b

priemet na zem  $V_0$  a čas, za ktorý lietadlo preletí dráhu  $ZV$ , bude  $t$ . Rýchlosť lietadla možno opäť počúvať priamo zo vzorca (3) a výšku  $h$  s použitím vzorca (4) podľa obr. 4b:

$$h = ZZ_0 = PZ \sin \beta = \frac{v_z t}{\cos \alpha} \sin \beta$$

Vzhľadom na to, že pozorovateľ môže priamo odmerať zorný uhol  $\delta = \sphericalangle ZPV$  (smer  $PZ$  je kolmý na kondenzačnú stopu lietadla), upravíme vzorce pre rýchlosť a výšku pomocou vzťahu  $\delta = 90^\circ - \alpha$ , t. j.  $\sin \alpha = \cos \delta$ ,  $\cos \alpha = \sin \delta$  ( $\alpha = \sphericalangle ZVP$  je uhol medzi osou a povrchovou Machovho kužela):

$$v = \frac{v_z}{\cos \delta}, \quad (3a)$$

$$h = \frac{v_z t \sin \beta}{\sin \delta} \quad (4a)$$

Rýchlosť  $v$  a výšku  $h$  vyjadríme ešte iným spôsobom - rýchlosť pomocou výškových uhlov  $\beta, \gamma$  a výšku pomocou  $\beta, \gamma, t$ . Podľa obr. 4b platí

$$\sin \alpha = \frac{PZ}{PV}, \quad \sin \beta = \frac{h}{PZ} \quad \sin \gamma = \frac{h}{PV}$$

z čoho

$$\sin \alpha = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \quad (5)$$

a podľa vzťahu (3)

$$v = \frac{v_z \sin \beta}{\sin \gamma} \quad (6)$$

Zo vzorcov (4a) a (5) vyplýva

$$\begin{aligned} h &= v_z t \sin \beta \frac{1}{\cos \alpha} = v_z t \sin \beta (1 - \sin^2 \alpha)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= v_z t \sin \beta \left( 1 - \left( \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

po úprave

$$h = \frac{v_z t \sin^2 \beta}{V \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \gamma}} \quad (7)$$

Rýchlosť počítaná zo vzorcov (3), (3a), (6) a výška zo vzorcov (4), (4a), (7) nedávajú samozrejme v skutočnosti presné výsledky, hlavne preto, že rýchlosť zvuku nie je konštantná, ako sme pre zjednodušenie predpokladali, ale lineárne sa mení s teplotou  $T$  (v stupňoch Celzia - rozmer deg) podľa približného vzorca

$$v_z = v_1 + cT, \quad v_1 = 333,6 \text{ m s}^{-1}, \quad c = 0,6 \text{ ms}^{-1} \text{ deg}^{-1} \quad (8)$$

Pritom teplota  $T$  je lineárne závislá od výšky  $h$  (v metroch):

$$T = T_0 - bh, \quad b = 0,0065 \text{ deg m}^{-1} \quad (9)$$

Voľbou teploty pri povrchu zeme  $T_0 = 22 \text{ }^\circ\text{C}$  a dosadením výrazu (9) do vzorca (8) dostaneme

$$v_z = v_0 - ah, \quad v_0 = v_1 + cT_0 = 345 \text{ m s}^{-1}, \quad a = bc = 0,004 \text{ s}^{-1}. \quad (10)$$

Ani tieto údaje nie sú však celkom presné, pretože pokles teploty je lineárny len asi do nadmorskej výšky 11 km. Vzorec (10) dáva pre  $h = 11\,000 \text{ m}$  hodnotu  $v_z = 301 \text{ m s}^{-1}$ . Vo výške (12 až 13) km možno počítať s približnou hodnotou  $v_z = 295 \text{ m s}^{-1}$ . Vzhľadom na hodnotu

$v_0 = 345 \text{ m s}^{-1}$  možno pri šírení zvuku z výšky  $h = (12 \text{ až } 13) \text{ km}$  do výšky  $h = 0$  počítat s približnou priemernou hodnotou

$$v_z = \frac{1}{2} (295 + 345) \text{ m s}^{-1} = 320 \text{ m s}^{-1},$$

pri ktorej sa výsledky dané vzorcami (3), (3a), (4), (4a), (6) a (7) nelíšia veľmi od skutočnosti. Pri šírení zvuku z výšky (15 až 20) km možno približne počítat s priemernou hodnotou  $v_z = 310 \text{ m s}^{-1}$ .

(Pokračovanie)

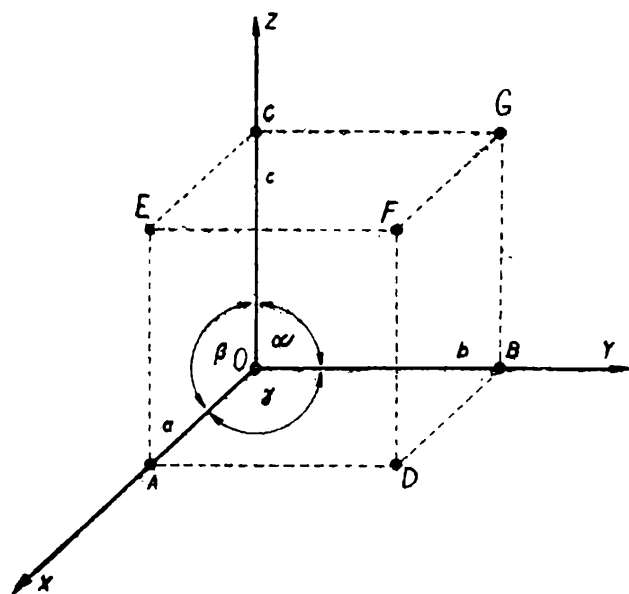
# Dislokace v pevných látkách

PAVEL BARTUŠKA Ústav fyziky pevných látek ČSAV, Praha

Krystalovou mříž tuhých látek si můžeme představit jako pravidelné geometrické uspořádání atomů, které lze v třírozměrném prostoru popsat pomocí délek, které vytíná základní krystalografická buňka na souřadnicových osách a pomocí úhlů, které tyto osy spolu svírají (viz obr. 1). Podle toho rozlišujeme 6 krystalografických soustav, z nichž nejjednodušší je soustava krychlová, u které osy svírají pravý úhel a délky na osách  $x$ ,  $y$  a  $z$  se sobě rovnají. Prakticky se tato soustava vyskytuje buď jako krychlová, plošně centrovaná (ve středu všech ploch krychle je další atom), nebo jako prostorově centrovaná (atom je ve středu buňky).

V této soustavě krystaluje převážná většina kovů a jednoduchých slitin.

Poněvadž při výkladu o dislokacích a plastické deformaci budeme potřebovat kvantitativní popis krystalové struktury, zmíníme se nyní co nejstručněji o systému označování rovin a směrů v krystalu. Při odvozování označení rovin tzv. Millerových indexů postupujeme tak, že stanovíme úseky, které rovina vytíná na osách jako násobky rozměrů  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Pak udáváme jejich převratné hodnoty, které převedeme na nejmenšího společného jmenovatele. Čitatele



Obr. 1. Elementární krystalografická buňka se souřadnicovým systémem.

těchto tří zlomků uzavíráme do kulatých závorek. Tak např. rovina  $ABC$  na obr. 1 má indexy  $(111)$ , rovina  $ADEF$   $(100)$ .<sup>1)</sup>

Při odvozování indexů směrů postupujeme tak, že vedeme s příslušným směrem rovnoběžku procházející počátkem, určíme souřadnice libovolného bodu této rovnoběžky, ty převedeme na nejmenší celá čísla (neděláme převrácené hodnoty!) a ty uzavřeme do hranatých závorek. Např. prostorová úhlopříčka procházející bodem  $F$  na obr. 1 má označení  $[111]$ .

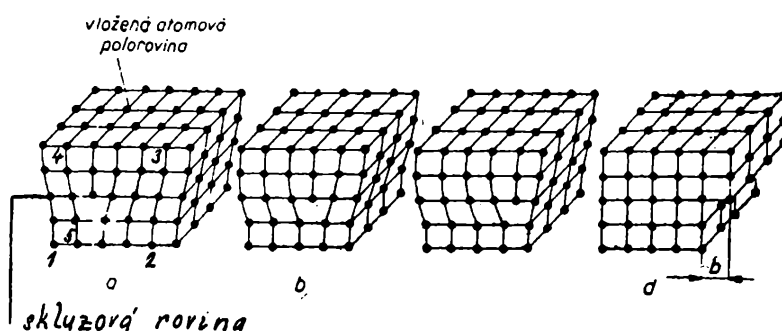
V krystalickém tělese můžeme tedy určitými atomy vést přesně definované krystalografické roviny. Jestliže na těleso působíme vnější silou, pak dochází k plastické deformaci, to jest změně tvaru tohoto tělesa. Jestliže uvažujeme posun dvou částí krystalu po sobě podél určité roviny, zjistíme po aplikaci Hookova zákona,<sup>2)</sup> že hodnota napětí potřebná k tomuto posunu je několik set  $\text{kp/mm}^2$ . Prakticky zjištěná hodnota je však  $(0,01 \text{ až } 0,1) \text{ kp/mm}^2$ . Vysvětlení této neshody umožnilo až vytvoření pojmu dislokace jako elementární poruchy krystalové mřížky, která dovoluje, aby posuv dvou částí krystalu neprobíhal současně, ale aby se deformace mohla postupně šířit danou rovinou.

Pojem dislokace byl zaveden v roce 1932 jako ryze spekulativní a až po 25 letech byl experimentálně dokázán chemickým leptáním, rentgenovou topografií a hlavně transmisí elektronovou mikroskopií. Dnes představuje důležité odvětví fyziky pevných látek, které umožnilo vysvětlit i předpovědět řadu vlastností tuhých krystalických těles.

### Typy dislokací

Na obr. 2 vidíme jeden typ dislokace, nazývaný *dislokace hranová*. Její vznik si můžeme schematicky představit tak, že krystal rozřízneme,

Obr. 2. Pohyb hranové dislokace v krystalu.



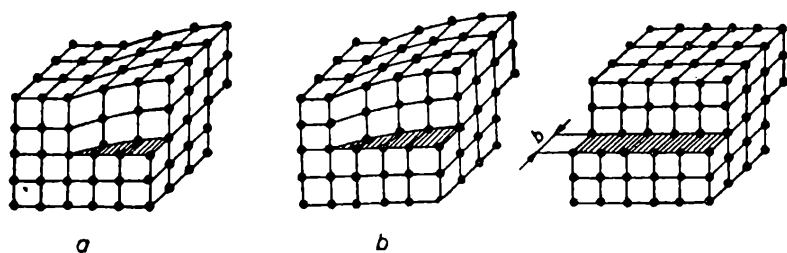
<sup>1)</sup> Roviny  $ABC$ ,  $ABF$ ,  $DOE$ ,  $DOG$  jsou si ekvivalentní a všechny označujeme symbolem  $(111)$ .

<sup>2)</sup> Hookův zákon říká, že relativní prodloužení vzorku  $\epsilon$  je přímo úměrné napětí  $\sigma$  ( $\epsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma$ ). Konstanta  $E$  se nazývá modul pružnosti v tahu a snadno nahlédneme, že je to napětí nutné k myšlenému prodloužení vzorku o 100%.

obě části od sebe oddálíme, vložíme mezi ně atomovou polovinu a opět je přiblížíme. Konec této vložené poloviny se nazývá dislokací (dislokační čarou) a rovina kolmá na vloženou polovinu a procházející dislokací je tzv. *skluzová rovina*. Hranová dislokace má schopnost pohybovat se působením vnějšího napětí tak, že nadbytečná polovina se postupně vyměňuje se sousedními rovinami (obr. 2b a 2c), až při východu z krystalu vznikne na jeho povrchu schod - část nad skluzovou rovinou se posunula oproti části spodní o jednu meziatomovou vzdálenost. A to je podstata elementárního kroku, jehož mnohonásobným opakováním se uskutečňuje makroskopická plastická deformace těles.

Na obr. 2 si můžeme osvětlit důležitý pojem, který kvantitativně popisuje dislokaci. Opíšeme-li okolo dislokační čáry okruh 1, 2, 3, 4, 5 tak, abychom vždy udělali čtyři elementární kroky, vidíme, že se nakonec nedostaneme do výchozího bodu 1, ale do bodu 5. A právě vektor, spojující body 1 a 5 - tzv. vektor Burgersův - kvantitativně popisuje dislokaci, udává její charakter i velikost elementárního kroku plastické deformace.

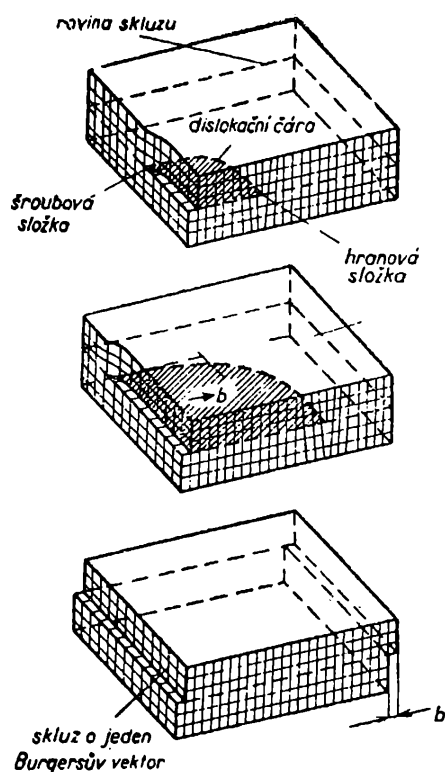
Je účelné si pamatovat, že Burgersův vektor se obvykle rovná nějaké významné vzdálenosti v elementární buňce, např. polovině plošné nebo prostorové uhlopříčky, nebo hraně krychle v závislosti na tom, v jaké krystalografické rovině a jaké krystalografické soustavě se skluz uskutečňuje. Důležité je, že pro hranovou dislokaci je Burgersův vektor vždy kolmý na dislokační čáru.



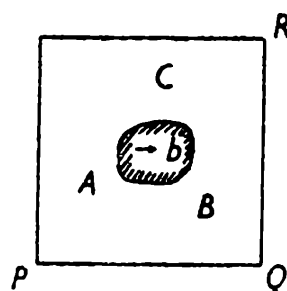
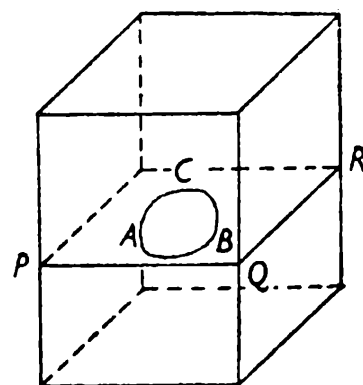
Obr. 3. Pohyb šroubové dislokace v krystalu.

Na obr. 3 je uveden příklad druhého základního typu dislokace, tzv. *dislokace šroubové*. Jejím charakteristickým znakem je, že Burgersův vektor je rovnoběžný s dislokační čarou, avšak konečný efekt po průchodu obou typů dislokací je shodný - jedna část krystalu se posunula oproti druhé o vzdálenost rovnou Burgersovu vektoru (srov. obr. 2d a 3c).

Dislokace v krystalu však mají zřídka charakter čistě šroubový, nebo čistě hranový. Tím se dostáváme k pojmu tzv. *dislokační smyčky*. Na obr. 4 je uvedena její část. Jasně vidíme, že pouze malé úseky mají charakter vysloveně šroubový, nebo naopak vysloveně hranový. Obecně Burgersův vektor svírá s dislokační čarou nějaký úhel. Na levé boční



Obr. 4. Pohyb části dislokační smyčky v krystalu. Výsledný efekt je opět posunutí o meziatomovou vzdálenost.



Obr. 5. Dislokační smyčka. Ve vyšrafované oblasti došlo ke skluzu.

straně na obr. 4 je její šroubová část (vidíme charakteristický stupeň), na čelní ploše je hranová část (vidíme nadbytečnou polovinu).

Na obr. 5 je uveden příklad takovéto smyčky. Skluzová rovina je  $PQR$  a ve vyšrafované oblasti došlo ke skluzu. Křivka  $ABC$  pak vyznačuje hranici mezi oblastmi, kde ve skluzové rovině došlo a nedošlo ke skluzu.

(Pokračování)

---

L. Meitnerová byla jednou z prvních žen, které dosáhly vědecké hodnosti v oboru fyziky. Její disertační práce se nazývala „Problémy kosmické fyziky“. Jednomu novináři se takové téma zdálo neuvěřitelné, proto asi považoval za pravděpodobnější a ženě bližší tuto variantu: „Problémy kosmetické fyziky“. Takový název práce uveřejnil ve svém časopise.

# Fizeauova metoda určení rychlosti světla

Prof. JOSEF KOTYK, Pardubice

Významnou úlohu ve fyzice má rychlost šíření světla, neboť je zároveň společnou rychlostí šíření všech elektromagnetických jevů. Je jednou z nejdůležitějších konstant moderní fyziky.

Římský básník *Lucretius*<sup>1)</sup> napsal: Vždy dříve postřehne naše oko blesk, než hřmění nám k sluchu dojde; to z té příčiny se děje, že zvuk ten později v sluch proniká než v oko to, co je dráždí. - Co dráždí oko, je ovšem světlo. Jeho podstatu starověký básník sice neznal, věděl však, že světlo se šíří rychleji než zvuk. Až do starověku lze tedy stopovat názor, že světlo se šíří prostorem značnou rychlostí. Do 17. století byla rychlost světla považována za nekonečně velikou. *Galileo Galilei* (1564—1642) první tušil, že její hodnota je konečná. Zjišťoval ji i pokusně, výsledek byl však záporný. Teprve dánskému hvězdáři *Ole Rømerovi* se podařilo stanovit rychlost světla z astronomických pozorování, jimiž se zabýval v Paříži roku 1675.<sup>2)</sup> Rychlost světla pozemského zdroje určil však až v polovině minulého století francouzský fyzik *Fizeau*.

*Armand Hippolyte Louis Fizeau* (čti: Fizó), člen pařížské Akademie věd, narodil se před 150 lety roku 1819. Vynikl studiem vlastností tepelného záření a pracemi v optice. Nejvíce proslul však svým měřením rychlosti světla, vykonaným před 120 lety roku 1849.<sup>3)</sup>

Podstata Fizeauovy první pozemské metody měření rychlosti světla je tato:

Světelný paprsek, vyslaný zdrojem A (viz obr.), se odráží na skleněné desce  $Z_1$  a dopadá pak kolmo na rovinné zrcadlo  $Z_2$ , umístěné ve veliké vzdálenosti  $d$ ; po opětovém odrazu vrací se po téže přímce (autokolimace) a po průchodu průhlednou deskou  $Z_1$  přichází do oka O. V cestu paprsku

---

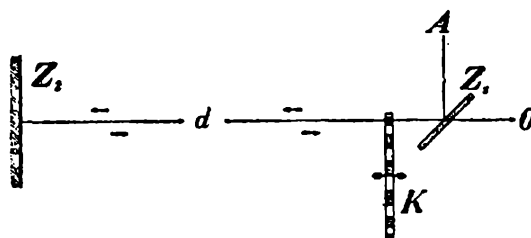
<sup>1)</sup> *Lucretius Titus Carus* (97 až 55 před n. l.) napsal báseň „*De rerum natura*“ (O podstatě věcí), velkolepý didaktický epos, v němž vykládá, jak vše povstává, trvá a zaniká podle přírodních zákonů.

<sup>2)</sup> Podstatu *Rømerovy* metody objasňuje učebnice fyziky pro III. ročník SVVŠ (Praha 1965) v článku 54, str. 92. Jí se týká také obr. 123, str. 93 této učebnice.

<sup>3)</sup> Pámátnými stala se také měření rychlosti světla v pohybujícím se prostředí, jimiž *Fizeau* roku 1851 potvrdil správnost Fresnelových představ o šíření světla hmotou. O jejich významu přináší podrobnější poučení autorův článek „*Fresnel a princip relativnosti v optice*“ v *Rozhledech*, roč. 46, čís. 5, str. 245—248.



je vloženo neprůhledné kolo K, jehož zuby  $z_1, z_2, z_3, z_4, \dots$  jsou odděleny stejně širokými mezerami  $m_{12}, m_{23}, m_{34}, \dots$  tak, že obvod kola je rozdělen na stejné zlomky.



Obr. 1

Uvažujme nyní takto:

Jestliže se kolo K neotáčí a je-li na dráze světelného paprsku stále určitá mezera, propustí tato mezera všechno světlo k zrcadlu  $Z_2$  i zpět; oko O vidí světlo.

Jestliže se kolo K pomalu otáčí, zastihne světlo, jež prošlo začátkem určité mezery, např.  $m_{ij}$ , po svém odrazu na zrcadle  $Z_2$  ještě tuto mezeru  $m_{ij}$  a projde jí; světlo, které však prošlo koncem mezery  $m_{ij}$ , zastihne při svém návratu již sousední neprůhledný zub  $z_j$  a je jím zadrženo. Ze světla, které prošlo mezerou  $m_{ij}$  směrem k zrcadlu  $Z_2$ , projde touto mezerou při návratu už jen část; oko O vidí proto světlo zeslabeno.

Jestliže rychlost otáčivého pohybu kola K zvětšujeme, zachycuje zub  $z_j$  stále větší množství světla, jež prošlo mezerou  $m_{ij}$  k zrcadlu  $Z_2$ ; oko O vidí tedy světlo stále slabší a slabší.

Jestliže se rychlost otáčivého pohybu kola K zvětší tak, že za dobu  $t = \frac{2d}{v}$ , kterou světlo potřebuje k proběhnutí dráhy mezi oběma zrcadly  $Z_1, Z_2$  rychlostí  $v$  tam i zpět, nastoupí na místo mezery  $m_{ij}$  právě zub  $z_j$ , zadrží všechno světlo; oko O nevidí ničeho.

Jestliže kolo mělo  $n$  zubů a tedy také  $n$  stejně širokých mezer, byl jeho obvod rozdělen na  $2n$  stejných zlomků. Zub  $z_j$  nastoupí na místo mezery  $m_{ij}$ , jestliže se kolo otočí o  $\frac{1}{2n}$  otáčky. Označíme-li počet otoček kola

za  $f$  písmenem  $f$ , trvá jedno otočení  $\frac{1}{f}$  sekund,  $\frac{1}{2n}$  otáčky pak dobu  $t = \frac{1}{f \cdot 2n}$  sekund. Za tuto dobu proběhlo světlo dráhu  $2d$ ; je tedy jeho

$$\text{rychlost } v = \frac{2d}{t} = 2d \cdot f \cdot 2n = 4dfn.$$

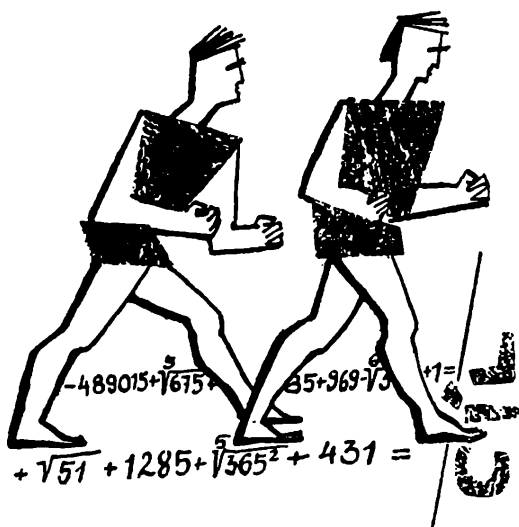
Při pokusu Fizeauově bylo zrcadlo  $Z_2$  ve vzdálenosti  $d = 8,633$  km od kola K, které mělo na obvodě  $n = 720$  zubů. Po prvé zmizelo v oku světlo při počtu otoček  $f = 12,6 \text{ s}^{-1}$ . Odtud vyplynula při pokusu historicky tak významným pro rychlost světla ve vzduchu hodnota  $v = 313\,274 \text{ km s}^{-1}$ .

Měření rychlosti světla bylo později mnohokrát opakováno. Metodu Fizeauovu zdokonalil např. C o r n u, jenž *před 90 lety* roku 1878 určil rychlost světla hodnotou  $(299\,960 \pm 600) \text{ km s}^{-1}$ . Avšak největším zdrojem chyb zůstávala u této metody i nadále nepřesnost v určení rychlosti otáčivého pohybu ozubeného kola v okamžiku světelného minima. Proto byly hledány prostředky, jak nahradit ozubené kolo jiným periodickým přerušovačem světla, jehož kmitočet by bylo možno určit přesněji. To se podařilo teprve v našem století K a r o l u s o v i, jenž roku 1925 nahradil točící se ozubené kolo elektrooptickým přerušováním světla.

Ukázalo se, že rychlost světla je největší ve vakuu, pro něž činí její hodnota velmi přibližně  $300\,000 \text{ km s}^{-1}$ .<sup>4)</sup> Podle teorie relativity znamená rychlost světla ve vakuu m e z n í r y c h l o s t ve vesmíru. Má také univerzální význam pro všechny fyzikální děje.

---

<sup>4)</sup> Je tedy - vraťme se v závěru článku k úvahám Lucretiovým - skoro milionkrát větší než rychlost zvuku ve vzduchu.



MMO

---

Ve 2. čísle Rozhledů jsme uvedli texty soutěžních úloh XI. MMO v Bukurešti. Abychom vás příliš dlouho nenapínali, uvádíme zde řešení členů naší delegace. Texty si zájemci vyhledají v 2. čísle.

### 3. Príklad. Riešenie Bohuša Síváka.

I. prípad  $k = 1$  (obr. 1).

Označenie zvolíme tak, aby platilo

$$AB = a, AC = BC = AD = BD = CD = 1.$$

Nech  $E$  je stred hrany  $CD$ . Trojuholníky  $BCD$ ,  $ACD$  sú rovnostranné a platí

$$AE = BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Trojuholníková nerovnosť pre trojuholník  $ABE$  je

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| < a < \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right|$$

tj.

$$a < \sqrt{3}$$

Ak

$$AB = a < \sqrt{3}$$

zostrojíme trojuholník  $ABE$ ,

$$AE = BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

v bode  $E$  zostrojíme kolmicu na rovinu  $ABE$  a vo vzdialenosti  $\frac{1}{2}$  od bodu  $E$  na nej zostrojíme body  $C$ ,  $D$ . Lahko sa dokáže, že

$$AB = a, AC = BC = AD = BD = CD = 1$$

II. prípad  $k = 2$  (obr. 2a, b).

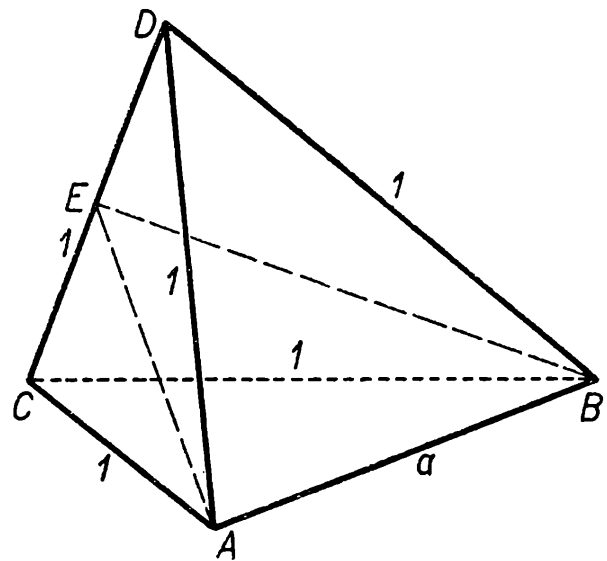
Dve hrany štvorstena majú dĺžku  $a$ , zvyšné štyri dĺžku 1. Sú dve možnosti.

a) Hrany dĺžky  $a$  majú spoločný vrchol (obr. 2a). Označenie zvolíme tak, aby

$$AB = AC = a, BC = BD = CD = AD = 1$$

Nech  $E$  je stred hrany  $BC$ . Pomocou Pythagorovej vety ľahko zistíme, že

$$DE = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad AE = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$$



Obr. 1

Trojuholníková nerovnosť pre trojuholník  $ADE$  je

$$\left| 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| < \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 - \sqrt{3} < \sqrt{4a^2 - 1} < 2 + \sqrt{3}$$

$$7 - 4\sqrt{3} < 4a^2 - 1 < 7 + 4\sqrt{3}$$

$$8 - 4\sqrt{3} < 4a^2 < 8 + 4\sqrt{3}$$

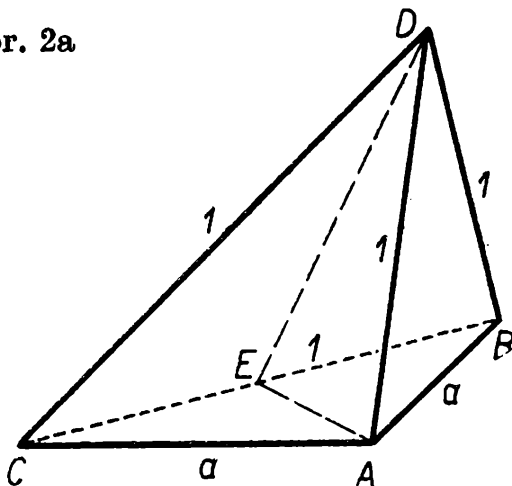
$$2 - \sqrt{3} < a^2 < 2 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

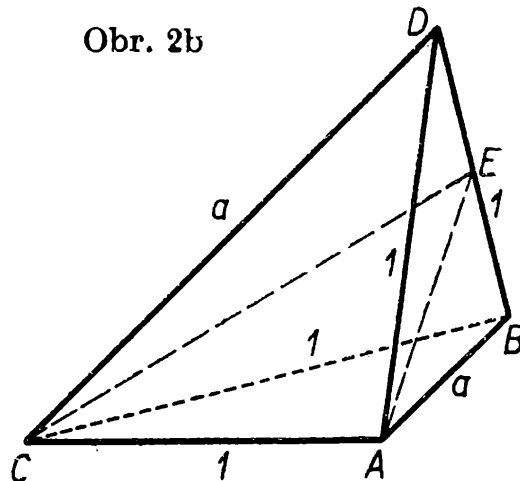
Trojuholníková nerovnosť je zrejmé splnená práve pre všetky čísla  $a$  z intervalu  $(\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \sqrt{2 + \sqrt{3}})$

b) Hrany dĺžky  $a$  sú mimobežné (obr. 2b).

Obr. 2a



Obr. 2b



Označenie zvolíme tak, že

$$AB = CD = a, AC = AD = BC = BD = 1$$

Nech je  $E$  stred hrany  $CD$ . Podľa Pytagorovej vety

$$AE = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} = BE.$$

Trojuholníková nerovnosť pre trojuholník  $ABE$  je

$$\left| \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \right| < a < \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} + \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

$$0 < a < \sqrt{4 - a^2}$$

$$a^2 < 4 - a^2,$$

$$0 < a < \sqrt{2}$$

Dôkaz existencie príslušného štvorstena je podobný ako pre  $k = 1$ .

III. prípad  $k = 3$  (obr. 3).

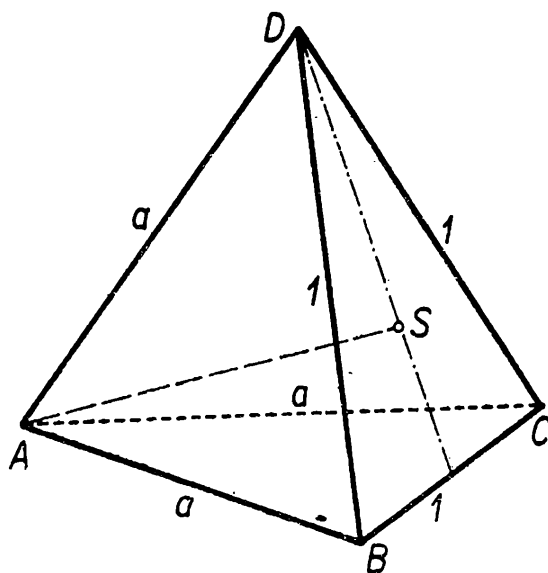
Vyšetříme tri prípady.

a) Hrany dĺžky  $a$  majú spoločný vrchol (obr. 3) označme ho  $A$ . Ak je  $S$  stred kružnice opísané trojuholníku  $BCD$ , platí

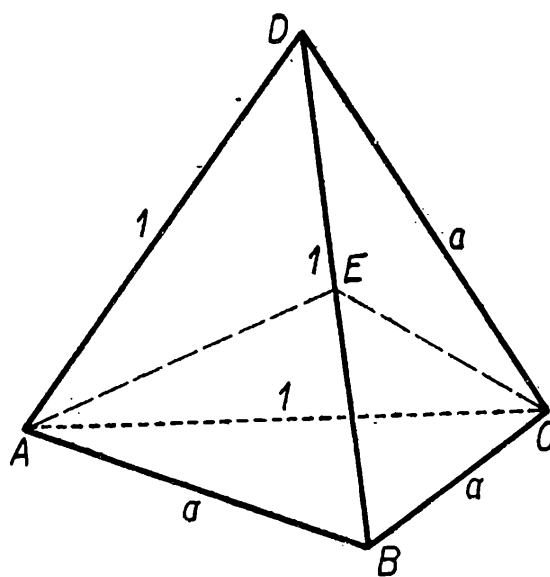
$$AS \perp BCD,$$

$$AD = a, \quad SD = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

To je možné len vtedy, keď  $a > \frac{\sqrt{3}}{3}$



Obr. 3a



Obr. 3b

b) Hrany dĺžky  $a$  sú stranami trojuholníka. Podobným postupom ako v prípade a) by sme dostali podmienku  $a < \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Pre ľubovoľné  $a$  z výslednej množiny možno zostrojiť štvorsten danej vlastnosti.

c) Nech hrany  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  majú dĺžku  $a$ . Z pravouhlého trojuholníka  $CDE$  plyne ( $E$  je stred hrany  $BD$ )

$$CE^2 = a^2 - \frac{1}{4}$$

Úsečka  $AE$  je ťažnica v trojuholníku  $ABD$ . Pre dĺžku ťažnice pri obvyklom označení platí

$$t_c^2 = \frac{1}{4} [2(a^2 + b^2) - c^2].$$

Keď použijeme tohto vzorca pre náš prípad, dostaneme

$$AE = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 1}$$

Potom v trojuholníku  $ACE$  platí

$$AE + CE > AC,$$

čiže

$$\frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 1} + \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} > 1$$

Po kratšej úprave

$$a^4 - 14a^2 + 5 < 0$$

To sa dá napísať vo tvaru

$$[a^2 - (7 - 2\sqrt{11})][a^2 - (7 + 2\sqrt{11})] < 0.$$

Tejto nerovnosti vyhovuje  $a$  splňujúce požiadavky

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{11}} < a < \sqrt{7 + 2\sqrt{11}}$$

IV. prípad  $k = 4$ .

Rovnosť s koeficientom  $\frac{1}{a}$  prevedie tento prípad na prípad II,

kde miesto pre  $a$  dostaneme tú istú podmienku pre  $\frac{1}{a}$

$$\frac{1}{a} < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

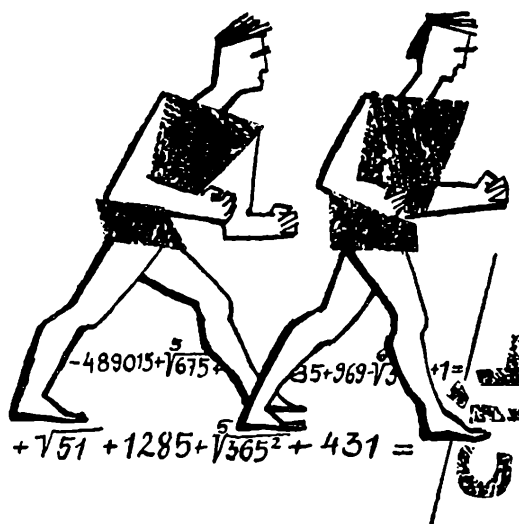
$$a > \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

V. prípad  $k = 5$ .

Rovnosť s koeficientom  $\frac{1}{a}$  prevedie tento prípad na prípad I

$$\frac{1}{a} < \sqrt{3},$$

$$a > \frac{\sqrt{3}}{3}$$



## Úlohy z 3. mezinárodní olympiády

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL

(Dokončení)

### 3. ÚLOHA

#### Text:

Kulička o hmotnosti  $m$  nabitá elektrickým nábojem  $q$  je připevněna k jednomu konci nevodivého vlákna. Druhý konec vlákna je připevněn v nejvyšším bodě kruhového prstence o poloměru  $R$ . Prstenec je z tuhého drátu zanedbatelného průřezu a leží ve svislé rovině. Na prstenci je rovnoměrně rozložen náboj  $Q$  stejného znaménka jako  $q$ . Určete takovou délku  $l$  vlákna aby po vychýlení byla kulička na ose prstence kolmé k jeho rovině.

Řešte nejprve obecně a pak pro číselné hodnoty

$$Q = q = 0,9 \cdot 10^{-8} \text{ C}, R = 5,0 \text{ cm}, m = 1,0 \text{ g}, \epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$$

Hmotnost vlákna zanedbejte.

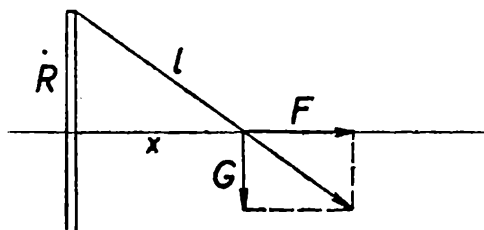
#### Řešení:

Vlákno se napne do směru výslednice sil  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$  a  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , kde  $\mathbf{E}$  je intenzita elektrického pole buzeného prstencem na ose ve vzdálenosti  $x$  od roviny prstence (obr. 3). Z podobnosti trojúhelníků plyne

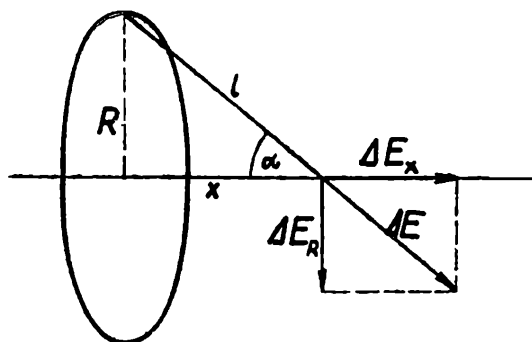
$$\frac{x}{R} = \frac{Eq}{mg} \quad (1)$$

Pro výpočet intenzity elektrického pole rozdělíme prstenec na  $n$  stejných dílků (obr. 4), takže na každém dílku bude náboj  $\frac{Q}{n}$ . Velikost intenzity elektrického pole buzeného jedním dílkem je

$$\Delta E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l^2 n}$$



Obr. 3



Obr. 4

Tuto intenzitu rozložíme na složku do směru osy  $x$  a na složku do směru kolmého k ose  $x$ ; velikosti složek jsou

$$\Delta E_x = \Delta E \cos \alpha = \frac{\Delta E x}{l},$$

$$\Delta E_R = \Delta E \sin \alpha.$$

Ke každému dílku existuje druhý, pro nějž složka intenzity kolmá k ose je stejně velká ale opačně orientovaná. Složky kolmé k ose se tedy ruší a výsledná intenzita má velikost

$$E = E_x = n \Delta E_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 l^3} \quad (2)$$

Dosazením vztahu (2) do vztahu (1) obdržíme pro délku vlákna

$$l = \left( \frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Číselně

$$\begin{aligned} l &= \left( \frac{9,0 \cdot 10^{-8} \cdot 9,0 \cdot 10^{-8} \cdot 5,0 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 8,9 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ m} = \\ &= \left( \frac{0,81 \cdot 0,5}{4\pi \cdot 8,9 \cdot 9,8} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ m} = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$



## 4. ÚLOHA

### Text:

Nad skleněnou broušenou kostkou o hraně 2,00 cm je umístěna broušená destička tak, že mezi ní a kostkou vznikne planparalelní tenká vzduchová interferenční vrstva (obr. 5). Ozáříme-li destičku kolmo shora zářením vlnových délek 400,0 nm až 1150 nm, pro něž je destička propustná, je splněna podmínka maximálního odrazu na interferenční vrstvě právě pro dvě vlnové délky uvedeného oboru, a to pro  $\lambda = 400,0$  nm a ještě pro jednu další vlnovou délku. Určete vlnovou délku této další vlny. Vypočtete, o č by bylo nutno zvýšit teplotu kostky, aby se dotkla destičky. Teplotní součinitel délkové roztažnosti je  $\alpha = 8,0 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$ , index lomu vzduchu  $n = 1$ . Vzdálenost dolní stěny kostky od destičky se při zahřívání nemění.

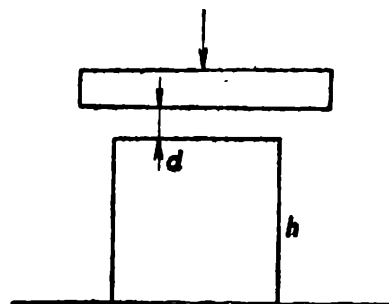
### Řešení:

Podmínka maxima na odraz je

$$2d n = \frac{\lambda_k}{2} = k \lambda_k,$$

kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , tj.

$$2d n = (2k + 1) \frac{\lambda_k}{2}, \quad (1)$$



Obr. 5

kde  $d$  je tloušťka vrstvy,  $n$  index lomu a  $k$  řád maxima. Označíme  $\lambda' = 1150$  nm. Ježto pro  $\lambda = 400,0$  nm je podle předpokladu splněna podmínka maxima, označíme  $\lambda_p = 400,0$  m, kde  $p$  je neznámé celé číslo, udávající řád maxima, pro něž platí

$$o(2p + 1) = 4d n. \quad (2)$$

Z rovnice (1) plyne, že při pevném  $d$  roste  $\lambda_k$  s klesajícím řádem  $k$  a naopak. Podle podmínky v zadání musí tedy platit

$$(\lambda_p) < \lambda_{p-1} < \lambda' < \lambda_{p-2},$$

tj.

$$\frac{4d n}{2(p-1) + 1} < \lambda' < \frac{4d n}{2(p-2) + 1}$$

Dosaďme-li sem za  $4d n$  z rovnice (2), dostaneme

$$\frac{\lambda_p \cdot (2p + 1)}{2(p-1) + 1} < \lambda' < \frac{\lambda_p \cdot (2p + 1)}{2(p-2) + 1}$$

Úpravou první nerovnosti dostaneme postupně

$$\lambda_p (2p + 1) < \lambda' (2p - 1), \quad 2p (\lambda' - \lambda_p) > \lambda' + \lambda_p,$$

$$\text{tj.} \quad p > \frac{1}{2} \frac{\lambda' + \lambda_p}{\lambda' - \lambda_p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1150 + 400,0}{1150 - 400,0} = 1, \quad (3)$$

Podobně z druhé nerovnosti máme

$$\lambda_p (2p + 1) > \lambda' (2p - 3), \quad 2p (\lambda' - \lambda_p) < 3\lambda' + \lambda_p.$$

$$p < \frac{1}{2} \frac{3\lambda' + \lambda_p}{\lambda' - \lambda_p} = \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 1150 + 400,0}{1150 - 400,0} = 2, \quad (4)$$

Z nerovností (3) a (4) plyne

$$p = 2$$

**Výpočet tloušťky vrstvy  $d$**

$$d = \frac{\lambda_p}{4} (2p + 1) = \frac{400,0}{4} (2 \cdot 2 + 1) \text{ nm} = 500,0 \text{ nm}.$$

**Výpočet vlnové délky další vlny**

Dosadíme-li za  $d$  do rovnice (1), vypočteme  $\lambda_{p-1}$ , tj.  $\lambda_1$

$$\lambda_1 = \frac{4d n}{2(p-1) + 1} = \frac{4d n}{2p - 1};$$

po dosazení dostáváme

$$\lambda_1 = \frac{4 \cdot 500,0 \cdot 1}{2 \cdot 2 - 1} \text{ nm} = 666,7 \text{ nm}$$

**Výpočet zvýšení teploty  $\Delta t$**

Obecně platí  $\Delta l = \alpha l \Delta t$ . Označíme-li délku hrany krychle  $h$ , máme

$$d = \alpha h \Delta t$$

$$\text{a odtud} \quad \Delta t = \frac{d}{\alpha h} = \frac{5,000 \cdot 10^{-7}}{8,0 \cdot 10^{-6} \cdot 2,00 \cdot 10^{-2}} = 3,1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

## 5. ÚLOHA

**Text:**

**Použijte těchto pomůcek:**

2 NiFe akumulátory, 1 suchý článek, 1 odporový drát o neznámém odporu  $X$  opatřený milimetrovým měřítkem a jezdcem, 1 odporovou dekádu (nastavená hodnota  $R$ ), 1 galvanometr (nulový indikátor) a 1 ochranný odpor.

**Uvažujte:**

- a) uzavřený proudový obvod sestávající ze dvou sériově zapojených NiFe akumulátorů, odporové dekády a neznámého odporu  $X$ ,
- b) sériové zapojení suchého článku a galvanometru s ochranným odporem.

**Navrhňte a zdůvodněte**

takové připojení větve b) k obvodu a), které umožňuje nalézt tu polohu jezdcе na odporu  $X$ , při které galvanometrem neprochází proud.

**Určete v tomto zapojení:**

- 1. poměr svorkového napětí dvojice sériově zapojených NiFe akumulátorů a elektromotorického napětí suchého článku (svorkové napětí NiFe akumulátorů považujte za konstantní);
- 2. neznámý odpor  $X$ .

**Najděte**

podmínku pro odpor  $R$ , aby úloha měla řešení.

**Řešení:**

Větev b) je nutno připojit k obvodu a) podle obr. 6.  
V něm značí

- $U_a$  - svorkové napětí NiFe akumulátorů,
- $U_c$  elektromotorické napětí suchého článku,
- $R_p$  ochranný odpor,
- $G$  galvanometr,
- $K$  klíč,
- $l$  délku odporového drátu.

Požadavek, aby na odporu  $X$  bylo možno nalézt takovou polohu jezdcе, při které galvanometrem neprochází proud, můžeme splnit jen tehdy, jsou-li u akumulátoru a u suchého článku propojeny svorky souhlasné polarity.

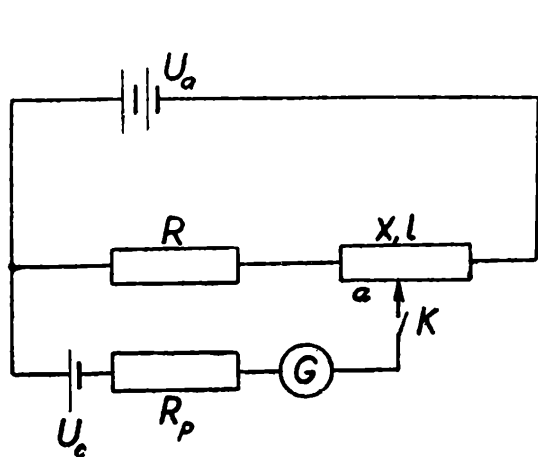
Řešení obsahuje dva kroky. Podle volby těchto kroků existují dva způsoby řešení.

**1. způsob****1. krok:**

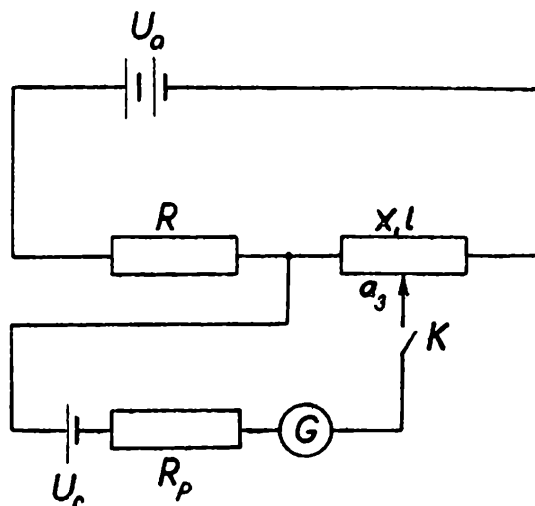
Zvolíme  $R = 0$ . Pak jezdec je ve vzdálenosti  $a$  od konce drátu podle obr. 6. Mezi koncovými body můstkového drátu délky  $l$  je napětí  $U$  (vnitřní odpor akumulátoru je zanedbatelně malý proti  $X$ ). Nejde-li

galvanometrem proud, je na úseku  $a_1$  napětí  $U_1$ . Pro homogenní drát všude stejného průměru je potom poměr

$$\frac{U_a}{U_c} = \frac{l}{a_1} = \frac{l}{m} \quad (1)$$



Obr. 6



Obr. 7

## 2. krok:

Pro určení hodnoty neznámého odporu drátu  $X$  musíme na odporu  $R$  nastavit vhodnou hodnotu  $R \neq 0$ . Galvanometrem nebude procházet proud při určité poloze jezdce; označme příslušnou vzdálenost jezdce

od konce drátu  $a_2$ . Označme dále  $\frac{a_2}{l} = n$ . Potom platí

$$\frac{U_c}{U_a} = \frac{R + nX}{R + X} \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) můžeme určit neznámou hodnotu odporu  $X$

$$\begin{aligned} \frac{mU_a}{U_a} &= \frac{R + nX}{R + X} \\ mR + mX &= R + nX \\ X &= R \frac{l - m}{m - n} \end{aligned} \quad (3)$$

## Podmínka:

Aby se mohla nastavit při druhém kroku poloha jezdce na drátu, musí být

$$U_c > R \frac{U_a}{R + X}$$

z čehož po úpravách plyne

$$R < X \cdot \frac{m}{l-m} \quad (4)$$

Toto je podmínka pro odpor  $R$ , aby úloha měla řešení. Dále musí být  $l > m > n > 0$ .

## 2. způsob

1. krok:

Zvolíme  $R \neq 0$  (tj. 2. krok v 1. způsobu). Pak platí podle dřívějšího

$$\frac{U_c}{U_a} = \frac{R + nX}{R + X} \quad (2)$$

2. krok:

Jeden pól suchého článku připojíme podle obr. 7. Výhoda tohoto zapojení je v tom, že je akumulátor při obou krocích zatížen stejným

proudem. Platí zde při označení  $q = \frac{a_3}{l}$

$$\frac{U_a}{U_c} = \frac{R + X}{qX} \quad (5)$$

Ze vztahů (2) a (5) dostaneme

$$\frac{U_c}{U_a} = \frac{R + nX}{R + X} = \frac{qX}{R + X}$$
$$X = \frac{R}{q - n} \quad (6)$$

přitom musí být  $l > q > n > 0$ , a tedy

$$R < X \quad (7)$$

### Poznámka:

1. Při řešení musí student odhadnout velikost odporu  $X$ , aby mohl splnit podmínku (4), resp. (7).

2. U prvního způsobu lze volit i v prvním kroku odpor  $R \neq 0$ . Pak platí rovnice ( $R_1$  je hodnota odporu v 1. kroku,  $R_2$  v druhém kroku)

$$\frac{U_c}{U_a} = \frac{R_1 + mX}{R_1 + X}$$
$$\frac{U_c}{U_a} = \frac{R_2 + nX}{R_2 + X}$$

Z toho

$$\begin{aligned}(R_1 + mX)(R_2 + X) &= (R_2 + nX)(R_1 + X), \\ mXR_2 + R_1X + mX^2 &= nXR_1 + R_2X + nX^2, \\ (m - n)X^2 + (R_1 - R_2 - nR_1 + mR_2)X &= 0, \\ (X_1 = 0), \quad X_2 &= \frac{(l - n)R_1 - (l - m)R_2}{m - n}\end{aligned}$$

---

# **Záhady**

## **ze Zmatlíkova zápisníku**

(Pokračování)

---

## **Rozluštění záhad Zmatlíkova zápisníku z minulého ročníku Rozhledů**

V 6. čísle byly uveřejněny dvě Zmatlíkovy záhady, které jste si měli sami objasnit; třetí taková záhada byla otištěna v 9. čísle minulého ročníku. Porovnejte svá vysvětlení záhad s autorskými řešeními.

Kam se poděl kořen rovnice? Není pravda, že sobě rovné zlomky se stejnými čitateli musí mít sobě rovné jmenovatele. Příkladem takové dvojice zlomků jsou zlomky s čitateli rovnými nule,

právě na tuto možnost Zmatlík zapomněl. Rovnice má právě jeden kořen  $x = 5$ .

I dosazování do vzorců má svá úskalí. Chyba není ve sčítání, ani v násobení, ale v nesprávném chápání významu tří teček (...) a písmene  $n$  v zápisech matematických vzorců. Zmatlík si neuvědomil, že při různých hodnotách  $n$  zahrnujeme do pravé strany vzorce různé počty členů a že tam smějí být napsány jen členy obsahující mocniny čísel  $a, b$  pouze s přirozenými exponenty, tj. 1, 2, 3, ... . Zdrojem chyby je napsání členů s nulými mocninami.

Záhadné zmizení peněz. Prodavač se zarazil zcela zbytečně, protože na okamžik uvažoval jen o kusech, bez zřetele k druhu zeleniny. Záhy si uvědomil, že všechny ředkvičky vyčerpá již po uvázání 24 svazků a tržbě 168 Kčs, pak již bude prodávat jen mrkev. Vidíte, jak je důležité korigovat matematické úvahy a přihlížet k omezujícím podmínkám, které bývají ve slovních úlohách nenápadně uvedeny, nebo zcela zamlčeny.

*Jaroslav Šedivý*

## **Záhada při placení v restauraci**

V této oblasti aplikací matematiky nebývá o záhady nouze, tentokrát však nemáme na mysli šizení hostů. Zmatlík slyšel vyprávět o jedné situaci, kterou nemohl dlouho vysvětlit. Přečtěte si ji pozorně a snažte se nepodlehnout sugesci.

Čtyři společníci sedící u jednoho stolu platí vrchnímu za vydatné obědy. Každý platí pětadvacetikorunou, podávají tedy vrchnímu dohromady 100 Kčs, ale účet pro celý stůl činí rovných 75 Kčs. Hosté nechávají vrchnímu 5 Kčs spropitného a každý z nich od něj dostává nazpět pětikorunu. Čtveřice hostů zaplatila tedy dohromady 80 Kčs, pan vrchní má 5 Kčs spropitného, ale kam se podělo zbývajících 15 Kčs do původní stovky?

Tentokrát snadno objevíte, kde je chyba. Zmatlík po delší spekulaci objevil prostou pravdu, že největší číslo nemusí být v úloze rovno součtu všech čísel, která nás napadne sčítat. Mnoho zdaru!

# Záhada s nekomutativním sčítáním peněžních částek

Zmatlík a jeho kamarád Štoural si uložili na výherní vkladní knížky z prázdninových výdělků po 1000 Kčs. Do dalšího léta peníze vybrali, každý ve třech částkách, jak je patrné z tabulek

Zmatlík:

| vybráno | zůstatek |
|---------|----------|
| 200     | 800      |
| 600     | 200      |
| 200     | 0        |

Štoural:

| vybráno | zůstatek |
|---------|----------|
| 400     | 600      |
| 200     | 400      |
| 400     | 0        |

Štoural si všiml, že v obou případech je součet vybraných částek roven součtu zůstatků. Zmatlík to komentoval jen poznámkou, že je to samozřejmé, ve finanční matematice musí přece všechno „klapnout na halěr“. Za chvíli však Štoural zase meditoval: „Člověče, to je záhada. Kdybych si byl vyzvedl ze své knížky dříve 200 Kčs než 400 Kčs, nebyl by součet zůstatků už roven tisíci. Že by neplatil pro sčítání peněžních částek komutativní zákon?“ Zmatlík zkoprněl a jal se hledat příčinu té záhady.

Přijďte i vy na kloub této záhadě? Objevíte nutnou a postačující podmínku pro takové rozdělení 1000 Kčs na tři částky tak, aby součet zůstatků po vybrání prvních dvou z nich se rovnal celkovému vkladu? Zmatlík se do problému „zakousl“ a vyřešil jej dokonce pro libovolný počet vybíraných částek.

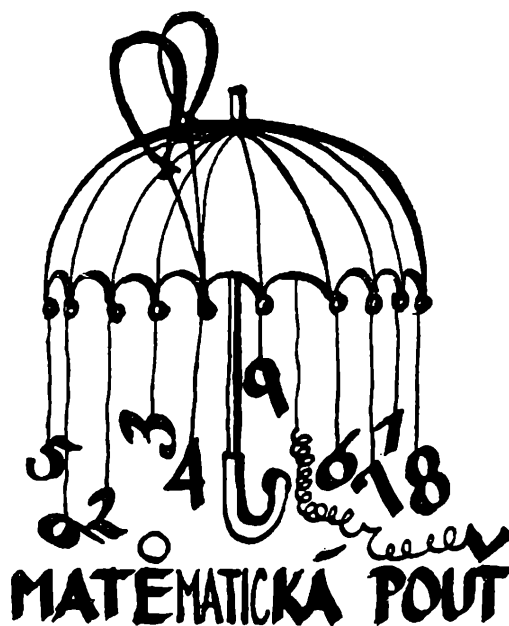
\*

Proroctví o perspektivách vědních oborů bývají ošidná. Zakladatel kvantové teorie *Max Planck* se jako mladík svěřil svému profesoru, že se rozhodl věnovat se teoretické fyzice. „Mladíku, proč si chcete zkazit život, vždyť teoretická fyzika je v podstatě uzavřená. Stojí to za to, zabývat se věcí, která nemá žádnou perspektivu?“

Jedna známá žádala *Alberta Einsteina*, aby ji zatelefonoval, ale upozornila ho, že její číslo 24361 si lze těžko zapamatovat. „A proč by to mělo být obtížné?“, podivil se Einstein, „jsou to dva tucty a devatenáct na druhou.“



## MATEMATICKÉ ZÁBAVY



## Řešení matematických zábav z loňského ročníku

11. Písmeny  $u$ ,  $v$  označme po řadě množství vody a Rodinalu. Pak platí:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{40} = \frac{v}{1320}, \quad v = 35 \text{ ml.}$$

$$\text{b)} \quad \frac{10 - v}{3775 - u} = \frac{1}{40};$$

$$v : u = 240 : 1500.$$

Řešením dostaneme  $u = 625 \text{ ml}$ ,  $v = 100 \text{ ml}$ .

Z první nádoby musíme 725 ml směsi vylít do nádoby druhé.

12. Výšky jednotlivých dívek označíme vždy počátečním písmenem jejich křestních jmen. Platí

$$M = 165 \text{ cm}, L = V = 161 \text{ cm}, J = 160 \text{ cm}, D = Z = 159 \text{ cm}, H = R = 157 \text{ cm}.$$

13. a) 8 oblastí, b), c), d) viz přiložené obrázky.

14.  $A$  = Bulhar (mluví polsky),  $B$  = Němec (mluví maďarsky),  $C$  = Rus,  $D$  = Polák (německy),  $E$  = Maďar (rusky).

15. 273 sloupů.

16. Jednotlivé posloupnosti jsou:

- a) 1; 3; 9; 27; 81; 243; 729; 2187.
- b) 0; 3; 9; 18; 30; 45; 63; 84; 108.
- c) 0; 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; 45.
- d) 2; 4; 1; 3; 4; 6; 3; 5; 6; 8; 5; 7; 8; 10.
- e)  $\frac{24}{81}$ ;  $\frac{32}{27}$ ;  $\frac{12}{9}$ ;  $\frac{8}{3}$ ; 4; 6; 9;  $\frac{27}{8}$ .

$$17. \sqrt{(t-3)t(t+3)} = 1 \cdot 4 \cdot 7, \\ t = 4.$$

18. Silně orámované číslo je 1969.

19. Jména žen jsou: Karla Nováková, Irena Nožičková, Jana Nebeská, Božena Novotná.

20. Pes dostihne lišku po 216 skocích.

21. Můžeme říci, že druhý prodává 1,30 kg zboží za 100 Kčs, kdežto první totéž množství zboží za 97,50 Kčs, tedy levněji.

22. Podle předpokladu platí

$$100x + 10y + x = 7k,$$

jinak psáno

$$7(14x + 7y) + 3(x + y) = 7k,$$

z čehož plyne, že součet  $x + y$  je dělitelný sedmi.

23. a) Čtvrtkruh  $ABE =$  obdélníku  $ACDE \Rightarrow AC = \pi$ .

b) Čtvrtkruh nad  $AB =$  půlkruhu nad  $AB \Rightarrow AX = 2 \sqrt{2}$ .

c) Čtvrtkruh  $ABC = \triangle ADE \Rightarrow AD = AE = 2 \sqrt{2\pi}$ .

d) Čtvrtkruh  $ABC =$  deltoidu  $ADEF \Rightarrow AD = AF = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .

Eukleidovsky lze řešit jen úlohu b).

## 7. ČÍSELNÁ KŘÍŽOVKA

Vodorovně:

A. Vloni bylo Aleně dvakrát tolik let co Pepíkovi, kterému je letos 13 let.

Jak stará je Alena?

Počet úhlopříček sedmiúhelníka

B. Voda hodlá právě vařit (podle Fahrenheitovy stupnice)

C.  $\log x = 3,5977$

D.  $\sqrt[3]{216}$ ; převrácené číslo k číslu 1,1

E.  $\log 2,048$ .

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| A |   |   |   |   |   |
| B |   |   |   |   |   |
| C |   |   |   |   |   |
| D |   |   |   |   |   |
| E |   |   |   |   |   |

Svisle:

1.  $\arccos 115^\circ$ ; neznámá  $y$  ze soustavy  $x + y = 15$ ,  $2y + 3x = 9$ .

2.  $(XC - LXVII)^2$ ; počet úhlopříček pravidelného osmistěnu

3.  $\tan 9^\circ 36'$ ;

4. Vyjádření dekadického čísla 25 ve dvojkové soustavě

5.  $z^2 - 8z + 16 = 0$ ;  $x + 114$  ( $x$  viz v 1.)

Poznámka: Do políček vepisujeme platné číslice nezaokrouhlených čísel

Z anglického časopisu Mathematical Pie  
vybral a upravil (nk)

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

déterminé, e  
  bien déterminé  
  uniquement déterminé  
  univoquement déterminé  
développable  
développante *ž*  
développer  
diagonal, e, aux  
diagonale *ž*  
diagramme *m*  
diamètre *m*  
dièdre *m*  
différence *ž*  
différencier  
différentiel, elle  
  calcul *m* différentiel  
  équation *ž* différentielle  
différentielle *ž*  
dilatation *ž*  
dimension *ž*  
diminuer  
direction *ž*  
directrice *ž*  
discontinu, e  
discours *m*  
discret, ete  
discriminant *m*  
discussion *ž*  
disjoint, e  
disjonction *ž*  
disparaître  
dispersion *ž*  
distance *ž*  
distinct, e

určený  
  jednoznačně určený  
  jednoznačně určený  
  jednoznačně určený  
rozvinutelný  
evolventa  
rozvinout  
diagonální  
úhlopříčka, diagonála  
diagram  
průměr (kružnice apod.)  
klín  
rozdíl, difference  
diferencovat  
diferenciální  
  diferenciální počet  
  diferenciální rovnice  
diferenciál  
dilatace  
dimenze, rozměr  
zmenšovat  
směr  
direktrix, řídící křivka  
nespojité  
přednáška, rozprava  
diskrétní  
diskriminant  
diskuse, rozbor  
nesouvislý, disjunktní  
disjunkce  
zmizet  
disperze, rozptýl  
vzdálenost  
rozdílný

distributif, ive  
 divergence *ž*  
 divergent, e  
 diverger  
 dividende *m*  
 diviser  
 diviseur *m*  
     plus grand commun diviseur  
 divisibilité *ž*  
 divisible  
 division *ž*  
 dix  
 dixième *m*  
 dodécaèdre *m*  
 dodécagone *m*  
 domaine *m*  
 donné  
 données *ž* (množ. č.)  
 double  
     point (droite) double  
 douzaine *ž*  
 douzième *ž*  
 droit, e  
     angle *m* droit  
     ligne *ž* droite  
 droite *ž*  
     droites concourantes  
     droite de front  
     droite d'inclinaison  
  
     droite de pente  
  
 dual, e  
 dualité *ž*

distributivní  
 divergence  
 divergentní  
 divergovat  
 dělenec  
 dělit, rozdělit  
 dělitel  
     největší společný dělitel  
 dělitelnost  
 dělitelný  
 dělení  
 deset  
 desetina  
 dvanáctistěn  
 dvanáctiúhelník  
 oblast  
 daný  
 dané prvky (nějaké úlohy)  
 dvojité, dvojný  
     samodružný bod (přímka)  
 tucet  
 dvanáctina  
 pravý, přímý  
     pravý úhel  
     přímá čára, přímka  
 přímka  
     různoběžky  
     hlavní přímka  
     spádová přímka  
     (vzhledem k nárysně)  
     spádová přímka  
     (vzhledem k půdorysně)  
 duální  
 dualita

## E

échelle *ž*  
 en effet  
 égal, e, aux  
 égalér  
     *A* est égal à *B*  
 égalité *ž*  
 élément *m*  
 élémentaire  
 élévation *ž* latérale  
 élévation *ž* principale  
 élever  
     élever au carré  
     élever à la troisième (quatrième)  
         puissance  
 éliminer  
 ollipse *ž*

stupnice, měřítko (náčrtu, mapy)  
 neboť  
 stejný, shodný  
 rovnati se  
     *A* rovná se *B*  
 rovnost, shodnost  
 prvek  
 elementární  
 bokorys  
 nárys  
 vztyčit  
     umocnit na druhou  
     umocnit na třetí (na čtvrtou)  
  
 eliminovat, vyloučit  
 elipsa

# rozhledy

MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ

---

6

ROČNÍK 48, 1969-70, ÚNOR



ROČNÍK 48  
ÚNOR 1969-70

6

# MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání  
Za zásluhy o výstavbu

## VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci

## VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

## REDAKČNÍ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; zasl. učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B. Bystrica; Miloš Franek, PF UK, Bratislava; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, DrSc., ČVUT, Praha; dr. Oldřich Lepil, PU, Olomouc; Milan Marčok, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava; prof. dr. Cyril Palaj, PF-UPJŠ, Košice; Evžen Říman, CSc., ČVUT, Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci; dr. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Jaroslav Sedivý, KU, Praha; ing. dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ ÚNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarik, insp. MŠ SSR, Bratislava.

## REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29.

## OBSAH

|                                                                                               |                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| O. Odvárko: Pravděpodobnost jevů a číselné Vennovy diagramy . . . . .                         | 245                 |
| F. Hradecký: Užití komplexních čísel v geometrii (Dokončení) . . . . .                        | 249                 |
| Doc. V. Jozífek: Zobecnění znaků dělitelnosti . . . . .                                       | 252                 |
| S. Horák: Odvození goniometrického vzorce . . . . .                                           | 255                 |
| M. Franek: Ako sa šíří zvuk z nadzvukových lietadiel (Dokončenie) . . . . .                   | 256                 |
| P. Bartuška: Dislokace v pevných látkách (Dokončení) . . . . .                                | 262                 |
| Dr. J. Šíroky, dr. M. Šírová: Zákrytové proměnné hvězdy . . . . .                             | 266                 |
| Naše soutěž . . . . .                                                                         | 271                 |
| Mezinárodní matematická olympiáda . . . . .                                                   | 273                 |
| Ing. B. Vybíral: Rotační pohyby a setrvačníky . . . . .                                       | 275                 |
| Prof. dr. V. Santholzer: Ze života průkopnice v oboru atomové a radiologické fyziky . . . . . | 285                 |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český . . . . .                                        | 3. a 4. str. obálky |

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče  
Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: B. Šmejdivá, studující FS.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1969.



## Pravděpodobnost jevů a číselné Vennovy diagramy

OLDŘICH ODVÁRKO, MFF KU Praha

V článku J. Šedivého „Vstupme do množinového ráje“, který byl otištěn v minulém ročníku tohoto časopisu, jste se seznámili s číselnými Vennovými diagramy. Nyní si ukážeme jejich užití při řešení několika úloh, které požadují určení pravděpodobnosti náhodného jevu.

Mnozí z vás jste se už seznámili v hodinách matematiky s tímto pojmem, přesto si jej stručně připomeneme. Uvažujme o množině **Z** všech možných výsledků náhodného pokusu, která má  $n$  prvků. Každému výsledku přiřadíme nezáporné číslo  $\frac{1}{n}$ , jež nazveme pravděpodobnost daného výsledku. Je-li  $A$  náhodný jev a  $a$  počet těch výsledků, jež mu jsou příznivé, nazveme pravděpodobností daného jevu číslo  $\frac{a}{n}$ . *Pravděpodobnost jevu  $A$*  budeme značit symbolem  $P(A)$ .

**P o z n á m k a.** Naše definice pravděpodobnosti náhodného jevu je omezena pouze na tzv. klasické pravděpodobnostní pokusy, u nichž můžeme předpokládat, že pravděpodobnosti všech výsledků jsou si rovny. Ve všech příkladech tohoto článku se budeme zabývat jen takovými pokusy.

Ilustrujme předchozí úvahy na zcela jednoduchém příkladě:

Určete pravděpodobnost jevu, že na hrací kostce padne při prvním hodu číslo menší než 5. Předpokládejte přitom, že kostka je vyrobena z homogenního materiálu.

Množinou všech možných výsledků je množina

$$\mathbf{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

počet jejích prvků je roven 6. Výsledky příznivé náhodnému jevu  $A$  „na kostce padne číslo menší než 5“ jsou čísla 1, 2, 3, 4. Vzhledem k předpokladu v textu úlohy jde o klasický pravděpodobnostní pokus, je tedy  $P(A) = \frac{4}{6}$ .

Každému náhodnému jevu  $A$  můžeme jednoznačně přiřadit tu podmnožinu  $\mathbf{A}$  množiny  $\mathbf{Z}$ , jejímiž prvky jsou právě všechny výsledky množiny  $\mathbf{Z}$ , jež jsou jevu  $A$  příznivé. Potom je pravděpodobnost jevu  $A$  rovna  $\frac{a}{n}$ , kde  $n$  je počet prvků množiny  $\mathbf{Z}$  a  $a$  je počet prvků množiny  $\mathbf{A}$ . Budeme-li se zabývat pravděpodobnostními úvahami z množinového hlediska, bude vždy množina  $\mathbf{Z}$  základní množinou.

Na obrázku 1 je nakreslen číselný Vennův diagram pro dvě množiny  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ . Číslo v každém jeho políčku určuje počet prvků té podmnožiny množiny  $\mathbf{Z}$ , jejímž je obrazem (např. číslo 11 určuje počet prvků množiny  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}'$ ). Předpokládejme, že  $\mathbf{Z}$  označuje množinu všech možných výsledků jistého pravděpodobnostního pokusu, množina  $\mathbf{A}$  obsahuje právě ty výsledky, jež jsou příznivé náhodnému jevu  $A$ , množina  $\mathbf{B}$  obsahuje právě ty výsledky, jež jsou příznivé náhodnému jevu  $B$ .

Na základě našeho obrázku pak můžeme určit pravděpodobnosti náhodných jevů  $A$ ,  $B$ :  $P(A) = \frac{14}{37}$ ,  $P(B) = \frac{21}{37}$ . Můžeme také určit pravděpodobnosti náhodných jevů  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , jimž jsou přiřazeny množiny  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}' \cap \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}' \cap \mathbf{B}'$ :  $P(C) = \frac{11}{37}$ ,  $P(D) = \frac{3}{37}$ ,  $P(E) = \frac{18}{37}$ ,  $P(F) = \frac{5}{37}$ . Určete sami pravděpodobnosti náhodných jevů  $G$ ,  $H$ , jimž jsou přiřazeny množiny  $\mathbf{A}' \cap \mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ .

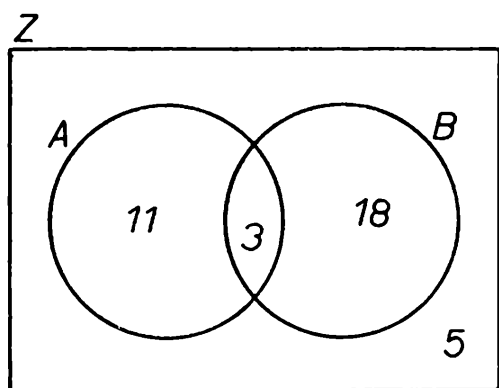
Vyřešme nyní jeden složitější příklad.

*Jistou železniční stanicí jezdí denně pravidelně 42 vlakových souprav, z toho 7 rychlíkových. 28 vlakových souprav v této stanici staví, ostatní projíždějí bez zastávky. Projíždějících rychlíkových souprav je o 4 méně než těch vlakových souprav, které projíždějí a nejsou rychlíkové. Na tuto stanici přijde náhodný návštěvník. Rozhodněte, která z pravděpodobností následujících náhodných jevů je větší (popřípadě zda jsou si rovny):*

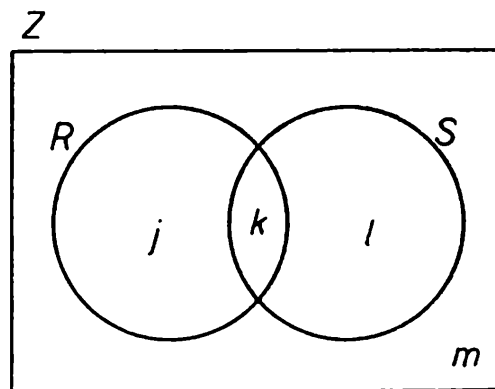


a) návštěvník uvidí jako první vlak přijíždějící do stanice rychlíkovou soupravu, jež zastaví; b) uvidí jako první přijíždět vlakovou soupravu, která není rychlíková a projede stanicí, aniž by zastavila.

**Řešení.** Uvědomme si nejprve, že jde o náhodného návštěvníka, který nezná vlakový jízdní řád této stanice. Jde tedy zřejmě o klasický pravděpodobnostní pokus a můžeme při řešení příkladu užít naší definice pravděpodobnosti náhodného jevu.



Obr. 1



Obr. 2

Množina  $\mathbf{Z}$  všech možných výsledků našeho pokusu je rovna množině všech vlakových souprav, jež denně pravidelně stanicí projíždějí. Počet jejích prvků je roven 42.

Označme písmenem  $A$  náhodný jev „do stanice přijede jako první vlak rychlíková souprava, jež ve stanici zastaví“, písmenem  $B$  náhodný jev „do stanice přijede jako první vlaková souprava, která není rychlíková a stanicí projede bez zastávky“. Naším úkolem bude určit, které z čísel  $P(A)$ ,  $P(B)$  je větší, popřípadě zda jsou si rovny.

Náhodnému jevu  $A$  přiřadíme množinu  $\mathbf{A}$  všech rychlíkových souprav, jež ve stanici zastaví, náhodnému jevu  $B$  množinu všech vlakových souprav, jež nejsou rychlíkové a ve stanici nezastaví. Jestliže se nám podaří určit počty prvků množin  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , bude již náš problém téměř vyřešen. Jak tedy určit počty prvků množin  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ ?

Přečteme-li si ještě jednou pozorně text úlohy, vidíme, že všechny podmnožiny základní množiny  $\mathbf{Z}$ , jež se v textu vyskytují, lze určit například pomocí množiny  $\mathbf{R}$  všech rychlíkových souprav a množiny  $\mathbf{S}$  všech vlakových souprav, jež ve stanici zastaví, a pomocí jejich doplňků a průniků. Potom je množina  $\mathbf{A} = \mathbf{R} \cap \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{R}' \cap \mathbf{S}'$ .

Zkusme nyní využít svých znalostí o číselných Vennových diagramech. Sestrojíme Vennův diagram pro dvě množiny  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  (obrázek 2). Do jeho jednotlivých políček vepíšeme písmena  $j$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $m$ . Tato písmena postupně značí: počet všech rychlíkových souprav, jež projedou stanicí bez zastávky; počet všech rychlíkových souprav, jež ve stanici zastaví;

počet všech vlakových souprav, jež nejsou rychlíkové, a ve stanici zastaví; počet všech vlakových souprav, jež nejsou rychlíkové, a stanicí projedou bez zastávky. Všechny podmínky z textu úlohy zapíšeme pomocí proměnných  $j, k, l, m$ . Dospějeme k soustavě 4 lineárních rovnic o 4 proměnných

$$j + k + l + m = 42,$$

$$j + k = 7,$$

$$k + l = 28,$$

$$j = m - 4$$

Vyřešte samostatně tuto soustavu rovnic. Dospějete k výsledkům:  $l = 5, k = 2, l = 26, m = 9$ . Zkouškou, kterou provedete dosazením do textu příkladu, se můžete sami přesvědčit, že tato čtveřice čísel skutečně vyhovuje všem podmínkám úlohy.

Odsud je potom

$$P(A) = \frac{k}{42} = \frac{1}{21}, P(B) = \frac{m}{42} = \frac{3}{14}.$$

Je tedy větší pravděpodobnost, že návštěvník uvidí jako první přijíždět vlakovou soupravu, jež není rychlíková a projede, aniž by zastavila, než pravděpodobnost, že první vlaková souprava bude rychlíková a ve stanici zastaví.

### Cvičení.

1. Pan Novák je vášnivým čtenářem detektivek a historických románů. V jeho knihovně je celkem 312 knih. Těch, které nejsou ani detektivkami, ani historickými romány, má pouze 60, z toho jsou dvě cizojazyčné. Cizojazyčných knih má celkem 29. Historických románů je v jeho knihovně o 38 více než detektivek; cizojazyčných historických románů má o 5 více než cizojazyčných detektivek. Malý Jirka si chce v otcově nepřítomnosti vypůjčit detektivku, která by nebyla cizojazyčná. Všechny knihy jsou však obaleny neprůhledným balicím papírem a Jirka nemá seznam knih, podle něhož by mohl zjistit, jaká kniha se „skrývá“ pod kterým číslem napsaným na jejím hřbetě. Čemu je rovna pravděpodobnost, že hned poprvé vytáhne detektivku, jež není cizojazyčná? (Předpokládejte, že žádná detektivka není historickým románem a také žádný historický román není detektivkou). (4:13)

2. Z města  $A$  do města  $F$  jezdí denně městy  $B, C, D, E$  18 pravidelných autobusových spojů. Tři z nich nestaví v žádném z těchto měst, 2 spoje staví ve všech čtyřech, 3 autobusy staví ve městě  $B$  a nestaví v  $C$ , 2 staví v  $C$  a projíždějí bez zastávky městem  $B$ . 2 autobusy staví v  $B$  a  $E$ , 6 v  $B$  a  $C$ , 8 v  $C$  a  $D$ , 3 v  $C$  a  $E$ . Ve městě  $C$  nebo ve městě  $D$  jich staví 14. Právě v jednom z těchto čtyř měst staví 4 autobusy. Každý spoj, který staví alespoň v jednom z nich, má zastávku v  $B$  nebo  $D$ . Každý spoj, který staví v  $E$ , staví také v  $D$ . Jeden z těchto autobusových spojů přijíždí právě do města  $B$ . Čemu je rovna pravděpodobnost, že turista, který čeká na autobusovém nádraží ve městě  $B$ , bude moci tohoto autobusu použít k přepravě do města  $D$ ? (4:9).

# Užití komplexních čísel v geometrii

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

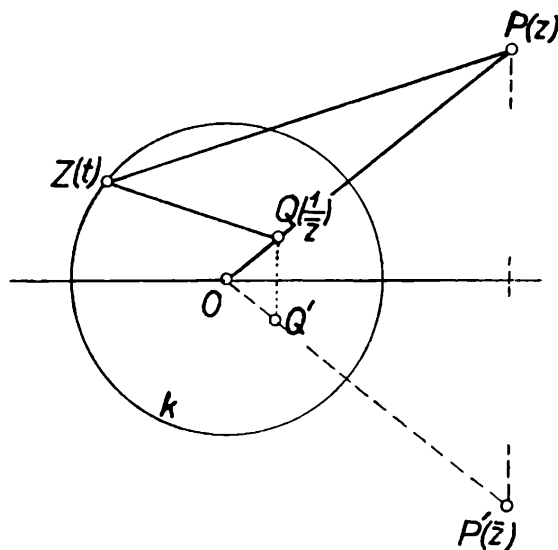
(Dokončení)

6. Nechť  $k$  je jednotková kružnice, její rovnice je  $z\bar{z} = 1$ . (Obr. 5.) Sečna této kružnice, která prochází body o parametrech  $t_1, t_2$ , má rovnici

$$z + \bar{z}t_1t_2 - t_1 - t_2 = 0 \quad (1)$$

Jednoduchou úpravou této rovnice dostaneme

$$\frac{t_1 - z}{t_1 - \frac{1}{\bar{z}}} = t_2\bar{z} \quad (2)$$



Obr. 5.

Předpokládejme, že čísla

$$t_k = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi_k$$

nabývají všech hodnot  $0 \leq \varphi < 2\pi$  a čísla  $z$  a  $\frac{1}{\bar{z}}$  jsou pevné konstanty různé od 1, které odpovídají dvěma pevným bodům  $P, Q$  v rovině. Pak je

$$\frac{|t - z|}{t - \frac{1}{\bar{z}}} = |\bar{z}| = \text{konst.}$$

Odtud plyne, že kružnice  $k$  je množinou všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných (různých) bodů stálý poměr vzdáleností.

Obrácením postupu zjistíme, že uvedené množině vyhovují všechny body kružnice  $z\bar{z} = 1$ .

Zvolíme-li body  $P$  a  $Q$  zcela libovolně, pak množinou všech bodů v rovině, které mají od bodů  $P$  a  $Q$  stálý poměr vzdáleností rovný reálnému kladnému číslu  $\varepsilon \neq 1$ , je Apolloniova kružnice. Její rovnice zní

$$\frac{|z - p|}{|z - q|} = \varepsilon,$$

kde  $p, q$ , jsou komplexní čísla příslušná bodům  $P, Q$ ; střed kružnice je

$$s = \frac{p + \varepsilon^2 q}{1 - \varepsilon^2}$$

a poloměr

$$r = \sqrt{s\bar{s} - \frac{p\bar{p} - \varepsilon^2 q\bar{q}}{1 - \varepsilon^2}}$$

Uvedené ukázky postačí, aby čtenář mohl posoudit prospěšnost užití komplexních čísel při řešení geometrických úloh a provádění důkazů v geometrii. Nelze říci, že v každém případě je užití této metody vhodné, někdy je syntetický geometrický důkaz jednodušší a hezčí. Takové příklady byly také v tomto článku uvedeny, ale v mnohých případech, jde-li např. o důkaz, že čtyři jisté body jsou koncyklické, nebo jde-li o důkaz, že jisté tři body leží na téže přímce, nebo jisté tři přímky procházejí týmž bodem, je tento způsob výhodný. Některé výsledky uvedené v tomto článku je možno zobecnit. Jde především o vlastnosti mnohoúhelníků vepsaných do dané kružnice, vlastnosti čtyřstranu aj. S tímto rozšířením se může čtenář seznámit v knížce *A. M. Jagloma: „Kompleksnyje čísla“*, Moskva 1963, nebo v knize *F. and F. V. Morleye: „Inversive Geometrie“*, London 1933. Tato literatura mně částečně sloužila při psaní tohoto článku. Zvláště výhodně lze komplexních čísel užít při studiu geometrických zobrazení. Tuto tematiku jsem ponechal stranou, neboť by se tím rozsah článku značně zvětšil. Vráťím se k ní v jiném článku. Příklady, které dále uvádím, mohou čtenáři sloužit k prověrce, jak látce v článku uvedené, porozuměl.

### Cvičení

1. Dokažte, že body určené komplexními čísly  $z_1 = -4 + 3i$ ,  $z_2 = 3 - 4i$ ,  $z_3 = 4 - 3i$ ,  $z_4 = 4 + 3i$  leží na kružnici.

2. Dokažte, že čísla

$$\text{a) } \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_1}{t_2} \quad \text{b) } \frac{t_1 t_4 + t_2 t_3}{t_2 t_4 + t_4 t_3}$$

$$c) \frac{\sqrt{t_1}(\sqrt{t_3} - \sqrt{t_2})}{(\sqrt{t_1} + \sqrt{t_3})(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})} \quad d) \frac{(\sqrt{t_4} - \sqrt{t_1})(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_3})}{(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(\sqrt{t_3} - \sqrt{t_4})}$$

kde  $t_i$  značí komplexní jednotku, jsou čísla reálná.

3. Dokažte, že čísla

$$a) \frac{\sqrt{t_1}(\sqrt{t_3} - \sqrt{t_2})}{(\sqrt{t_3} - \sqrt{t_1})(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})} \quad b) \frac{(\sqrt{t_4} + \sqrt{t_1})(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_3})}{(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1})(\sqrt{t_3} - \sqrt{t_4})}$$

kde  $t_i$  jsou komplexní jednotky, jsou čísla ryze imaginární.

4. Je dán libovolný rovnoběžník  $A_1A_2A_3A_4$ . Čtverce o stranách  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_4$ ,  $A_4A_1$  sestrojené a) vně rovnoběžníku, b) obsahující vnitřní body rovnoběžníku, mají středy  $S_i$  (resp.  $S'_i$ ), které jsou vrcholy dvou čtverců, jejichž společný střed je průsečíkem úhlopříček daného rovnoběžníku.

5. Osy vnitřních úhlů v trojúhelníku  $A_1A_2A_3$ , jehož vrcholy jsou dány komplexními jednotkami  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), jsou určeny dvojicemi komplexních jednotek  $(t_1; \sqrt{t_1t_3})$ ;  $(t_2; -\sqrt{t_1t_3})$ ;  $(t_3; \sqrt{t_1t_2})$ . Odůvodněte! Napište rovnice těchto os a určete komplexní číslo, které určuje střed vepsané kružnice.

6. Určete rovnice os vnějších úhlů trojúhelníka z předchozí úlohy a středy kružnic vepsaných vně tomuto trojúhelníku.

7. Dokažte, že v každém trojúhelníku přímky souměrně položené k přímkám, které procházejí vrcholy trojúhelníka a jeho těžištěm, podle os vnitřních úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, který je určen komplexním číslem

$$z = \frac{2}{3} \left( \sqrt{t_1t_2} + \sqrt{t_2t_3} - \sqrt{t_1t_3} - \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3} \right)$$

jsou-li vrcholy trojúhelníka  $A_i$  určeny komplexními jednotkami  $t_i$ .

8. Napište rovnici Simsonovy přímky bodu  $M(m)$ , který leží na kružnici opsané trojúhelníku  $A_1A_2A_3$  vzhledem k tomuto trojúhelníku. (Určete komplexní čísla náležející patám kolmic z bodu  $M$  na strany uvedeného trojúhelníka a pak určete rovnici přímky, která těmito body prochází.) Bod  $M$  nesplývá se žádným vrcholem trojúhelníku.

9. Dvě polopřímky  $RA$ ,  $RM$  o společném počátku  $R$  jsou prořaty dvěma rovnoběžkami  $p \parallel q$  v bodech  $A$ ,  $C$  (na  $RA$ ) a bodech  $D$ ,  $E$ , na  $RM$ . Na úsečce  $AC$  zvolíme libovolně bod  $B$  a bodem  $A$  vedeme

rovnoběžku s  $BD$  a bodem  $C$  rovnoběžku s  $BE$ . Dokažte užitím komplexních čísel, že se tyto rovnoběžky protínají v bodě  $F$ , který leží na polopřímce  $RM$ .

10. Dokažte, že kružnice  $k_1$  procházející body  $B, C, D$ , kružnice  $k_2$  procházející body  $A, B, E$  a kružnice  $k_3$  procházející body  $B, C, D$  z předcházející úlohy, mají společný bod  $Z$ , který leží na polopřímce  $RM$ .

11. Je dán trojúhelník  $A_1A_2A_3$  a bod  $M$ , který leží na kružnici trojúhelníku opsané a nesplývá se žádným jeho vrcholem. Dokažte, že body  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) souměrně sdružené k bodu  $M$  podle stran trojúhelníka, leží na přímce procházející ortocentrem trojúhelníka  $A_1A_2A_3$ .

12. Komplexní jednotky  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) určují vrcholy tětiového čtyřúhelníka  $A_1A_2A_3A_4$ . Určete a) ortocentra, b) středy Eulerových kružnic, c) těžiště trojúhelníků  $A_1A_2A_3$ ,  $A_2A_3A_4$ ,  $A_3A_4A_1$ ,  $A_4A_1A_2$  a dokažte, že tyto body leží na kružnicích o středech  $H(h)$ ;  $E\left(\frac{h}{2}\right)$ ;  $G\left(\frac{h}{3}\right)$ ;

kde  $h = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ . Body  $H, E, G$  laží na přímce procházející bodem  $O$  tj. středem kružnice opsané danému čtyřúhelníku (Eulerově přímce tětiového čtyřúhelníka) a platí pro ně  $OG : OE : OH = 1 : 2 : 4$ .

13. Vedeme-li středy stran a středy úhlopříček tětiového čtyřúhelníku kolmice na protější stranu (resp. kolmici na druhou úhlopříčku), pak těchto šest přímek prochází týmž bodem, který je středem Eulerovy kružnice tohoto čtyřúhelníku. Dokažte.

## Zobecnění znaků dělitelnosti

Doc. VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, ČVUT, Praha

V sedmém postupném ročníku jste poprvé a naposledy mluvili o dělitelnosti v oboru přirozených čísel. Tam jste také vyslovili určitá kritéria pro dělitelnost některými z čísel, např. 2, 3, 4, 5, 9.

Pokusme se rozšířit tato kritéria, přičemž zůstaneme v oboru přirozených čísel.

Definice: Číslo  $d$  je dělitelem přirozeného čísla  $a$  tenkrát, platí-li  $a = xd$ , kde  $x$  je přirozené číslo.

Věta 1.: Číslo  $a = 10n + u$ , kde  $n$  je číslo přirozené a  $0 \leq u \leq 9$ , je dělitelné přirozeným číslem  $d$  tehdy a jen tehdy, existuje-li takové celé číslo  $k$ , že je číslo  $n + ku$  číslem  $d$  dělitelné.

Tak např. číslo  $354 = 10 \cdot 35 + 4$ , tj.  $n = 35$ ,  $u = 4$  a číslo  $n + ku = 35 + 4k$ .

Důkaz. a) Předpokládejme, že číslo  
 $n + ku$ ,  $n$  číslo přirozené,  $u$  přirozené číslo, a  
 $0 \leq u \leq 9$ ,  $k$  číslo celé, je přirozeným číslem  $d$  dělitelné.  
 Platí tedy

$$n + ku = rd, \quad (1)$$

kde  $r$  je číslo přirozené.

Odtud

$$n = rd - ku,$$

$$a = 10n + u = 10rd + u(1 - 10k).$$

Číslo  $a$  bude dělitelné číslem  $d$ , bude-li jím dělitelné číslo  $1 - 10k$ , nebo  $u$ , nebo obě čísla. Abychom zjednodušili úvahy a vyslovili obecnější pravidlo, nebudeme přihlížet k další podmínce, že také číslo  $u$  je dělitelné číslem  $d$ . Číslo  $a$  bude v každém případě dělitelné číslem  $d$ , bude-li jím dělitelné číslo  $1 - 10k$ .

To znamená, že platí

$$1 - 10k = qd, \quad (2)$$

kde  $q$  je celé číslo.

Číslo  $1 - 10k$  končí číslicí 9, je-li  $k$  číslo přirozené, nebo číslicí 1, je-li  $k$  číslo celé záporné. Číslo  $1 - 10k$  je tedy číslo liché. Poněvadž je násobkem čísla  $d$ , musí být  $d$  také číslo liché, které nekončí číslicí 5.

Pro číslo  $d$  máme omezení:  $d$  je číslo liché, nekončící číslicí 5.

Důkaz. b) Předpokládejme, že číslo  $a = 10n + u$  z věty 1 je dělitelné lichým číslem  $d$ , které nekončí číslicí 5.

Platí tedy

$$a = 10n + u = jd, \quad (3)$$

$j$  číslo přirozené,  $qd = 1 - 10k$ , kde  
 $q$  je číslo celé.

Potom z rovnice (3)

$$u = jd - 10n,$$

a po úpravě  $n + ku = d(jk + nq)$  je číslem  $d$  dělitelné.

Dokázali jsme, že číslo  $a = 10n + u$  je dělitelné číslem  $d$  (lichým a nekončícím číslicí 5) tehdy, je-li jím dělitelné číslo  $n + ku$  a obráceně, je-li číslo  $a = 10n + u$  dělitelné uvažovaným číslem  $d$ , potom je jím dělitelné číslo  $n + ku$ , a tedy větu 1 v uvedeném znění.

Ukázka. Odvoďme znak dělitelnosti číslem 7.

Pro číslo  $k$  je podmínka:  $1 - 10k = 7q$ ,

$q$  celé číslo. Odtud

$$k = \frac{1 - 7q}{10}$$

Aby číslo  $k$  bylo celým číslem, musí  $1 - 7q = m \cdot 10$ ,  $m$  celé číslo, čemuž vyhovuje  $q = 3$ ,  $q = -7$ .

Potom  $k = -2$ ,  $k = 5$ .

Číslo  $a = 10n + u$  je dělitelné číslem 7 právě tehdy, je-li jím dělitelno číslo  $n - 2u$ , nebo  $n + 5u$ .

Důkaz provede podle vzoru čtenář laskavě sám.

Podle tohoto je číslo 595 dělitelné číslem 7. Je totiž  $595 = 10 \cdot 59 + 5$ ;  $n = 59$ ,  $u = 5$ , a

$$n - 2u = 59 - 2 \cdot 5 = 49,$$

$$n + 5u = 59 + 5 \cdot 5 = 84.$$

Číslo 473 není dělitelné číslem 7. Je totiž  $n = 47$ ,  $u = 3$ , a

$$n - 2u = 47 - 2 \cdot 3 = 41$$

$$n + 5u = 47 + 5 \cdot 3 = 62.$$

Podobně si čtenář odvodí, že číslo  $a = 10n + u$  je dělitelné číslem 13 právě tehdy, je-li jím dělitelné číslo  $n + 4u$ , nebo číslo  $n - 9u$ .

Poznámka. Čtenář znající teorii číselných kongruencí si připomene, že

$$n - 2u = n + 5u \pmod{7}$$

$$n + 4u = n - 9u \pmod{13}$$

(Viz Apfelbeck, Kongruence, Škola mladých matematiků, č. 21.)

Podobně si takový čtenář připomene, že vztahem

$$1 - 10k = qd, \text{ neboli } qd + 10k = 1$$

je zapsaná podmínka (Hruša, Elementární aritmetika, str. 111, věta 110), že číslo 10 a  $d$  jsou nesoudělná právě tehdy, když existují celá čísla  $q$  a  $k$  tak, že  $qd + 10k = 1$ ; odtud plyne rovněž, že číslo  $d$  musí být číslo liché nekončící číslicí 5.

Uvedenou větu bychom mohli rozšířit i na soustavu  $z$ -adickou, tj. na soustavu o základu  $z$ ,  $z$  přirozené číslo. Toto eventuální zobecnění je jen úprava dosavadního postupu a přenecháno je čtenáři.

## L i t e r a t u r a

Divisibility tests of the noncongruence type. John Q. Jordan, The Mathem. Teacher 1965, str. 709 a další.

---

## Rozdíl mezi géniem, expertem a začátečníkem

Géníus pracuje v souhlase s pravidly, aniž by věděl, že taková pravidla existují. Expert pracuje v souhlase s pravidly, aniž by na ně myslel, ale byl by schopen v případě potřeby citovat pravidla použitelná v dané situaci. Začátečník se pokouší pracovat podle pravidel a na základě úspěchů a neúspěchů teprve poznává jejich skutečný význam.

*George Polya*



# Odvození goniometrického vzorce

STANISLAV HORÁK st., ČVUT, Praha

Kdybych vám řekl, že platí

$$\sin 11^\circ 15' \cos 11^\circ 15' \cos 22^\circ 30' \cos 45^\circ = \frac{1}{2^3}$$

možná, že byste se divili. Ale odvodíme si — a to velmi jednoduše — vzorec, jehož speciálním případem je vzorec právě napsaný.

Vyjdeme z dobře známého vzorce

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

V něm místo  $\sin \frac{x}{4}$  pišme  $2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4}$  a dostaneme

$$\sin x = 2^2 \sin \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2}$$

A nyní můžeme stejným způsobem upravovat vzorec dále. Dojdeme tak postupně k vzorcům

$$\begin{aligned} \sin x &= 2^3 \sin \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2^4 \sin \frac{x}{2^4} \cos \frac{x}{2^4} \cos \frac{x}{2^3} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Položíme-li nyní  $x = 90^\circ$ ,  $n = 3$ , obdržíme prve napsaný vzorec.

Aby i čtenáři Rozhledů ukázali trochu tvůrčí práce, mohli by si odvodit tento vzorec

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2^n} - \sin^2 \frac{x}{2^n} - \sin^2 \frac{x}{2^{n-1}} - \sin^2 \frac{x}{2^2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

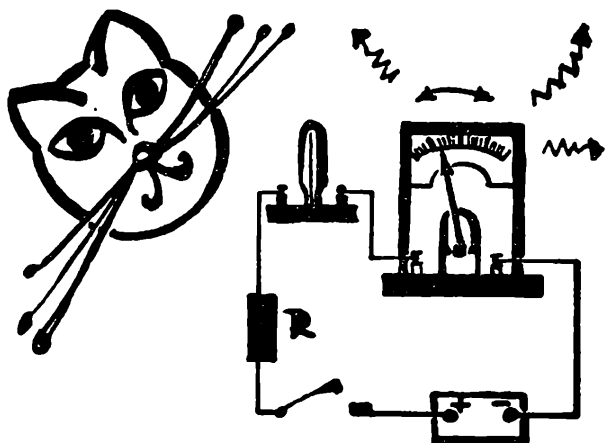
A zkuste znovu položit  $x = 90^\circ$ ,  $n = 3$ .

Možná, že trochu více práce dá vzorec

$$\cos x = 1 - 2^{2n-1} \cdot \cos^2 \frac{x}{2^2} \cos^2 \frac{x}{2^3} \cos^2 \frac{x}{2^4} \dots \cos^2 \frac{x}{2^n} \sin^2 \frac{x}{2^n}$$

Ale abyste se dlouho netrápili, poradíme vám, abyste vyšli ze vzorce

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$



FYZIKA

## Ako sa šíri zvuk z nadzvukových lietadiel

MILOŠ FRANEK. Prievidza

(Dokončenie)

Výšku, v ktorej približne lietadlo letí, možno zistiť týmto obratom: odmerané hodnoty  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $t$  dosadíme do vzorca (7), hodnoty  $v_0$  a  $a$  do vzorca (10), pričom miesto  $h$  píšeme v druhom vzorci  $\frac{h}{2}$  (t. j. použijeme priemernú rýchlosť zvuku medzi výškou 0 a  $h$ ). Z tejto sústavy možno potom vypočítať neznáme  $h$  a  $v_z$ . Napr.  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  $t = 37,7$  s,  $T_0 = 22^\circ\text{C}$ , čiže  $v_0 = 345$  m s<sup>-1</sup>, dáva pri zaokrúhlení

$$h = 40 v_z,$$

$$v_z = 345 - 0,004 \frac{h}{2},$$

(v sústave SI). Z toho  $v_z \doteq 319$  m s<sup>-1</sup>,  $h \doteq 12\,760$  m a podľa vzťahu (6) aj  $v = v_z \sqrt{3} \doteq 553$  m s<sup>-1</sup>  $\doteq 1990$  km h<sup>-1</sup>.

Poznamenajme ešte, že vzhľadom na premennú rýchlosť zvuku nie sú elementárne vlnoplochy v skutočnosti guľové, ale sú to rotačné plochy so zvislou osou rotácie a zdrojom zvukových vln umiestneným nesy-metricky, v hornej polovici tejto osi. Z toho dôvodu ani Machov „kužeľ“ nie je vlastne kužeľom, ale sa mu iba podobá. Odvodenie jeho tvaru presahuje rámec stredoškolskej látky. A konečne je zrejmé aj to, že tento útvar obmedzujú na jednej strane povrch zeme a na druhej hranice atmosféry.

Nakoniec sa pokúsime ešte o odôvodnenie vzniku rázovej vlny. Pretože by však na to vo všeobecnom prípade bolo treba použiť metódy diferenciálneho počtu, zistíme príčinu rázovej vlny len na konkrétnom, číselnom príklade. Vypočítame pomer intenzity zvuku v dvoch krátkych časových intervaloch, z ktorých jeden bude začínať kritickým časom, keď zvuk doľahne prvýkrát k pozorovateľovi, a druhý začne o niečo neskôr.

Nech  $h = 10\,000\text{ m}$ ,  $v_z = 320\text{ ms}^{-1}$ ,  $v = 2v_z = 640\text{ ms}^{-1}$  - údaje, ako aj ďalšie výpočty sú v sústave SI. Na obr. 3 označme  $PZ = h$ ,  $ZV = y$ ,  $\angle ZPL = \psi$  (pre  $L \equiv L_1$  je  $\psi = \psi_1$ , pre  $L \equiv L_2$  je  $\psi = \psi_2$ ). Už pri odvodzovaní vzorca (2) sme vypočítali vzdialenosť  $LP$ , teraz z nej určíme ešte  $\cos \psi$ :

$$r = LP = \frac{v_z x}{v}, \quad \cos \psi = \frac{h}{r} = \frac{hv}{v_z x} \quad (11)$$

Z obr. 3 ďalej vypočítame

$$d = \frac{h}{\sin \varphi} \quad y = h \cotg \varphi \quad (11a)$$

Zvukovú energiu, ktorú lietadlo vyšle počas preletu dráhou  $1\text{ m}$ , označme znakom  $W_0$ . Táto sa vo vzdialenosti  $r$  rozšíri na guľovú plochu o obsahu  $4\pi r^2$  (kde  $r > 1\text{ m}$ ), teda na jednotkovú plochu vo vzdialenosti  $r$  umiestnenú kolmo k smeru šírenia zvuku dopadá z vyslanej energie  $W_0$  časť  $W_0/(4\pi r^2)$ . Keď má uhol dopadu (t. j. uhol medzi smerom šírenia zvukových vln a kolmicou na plochu) veľkosť  $\psi \neq 0$ , je táto energia menšia:

$$W_1 = \frac{W_0 \cos \psi}{4\pi r^2}$$

(Podľa takého istého zákona zoslabuje sa napr. intenzita svetla pri šikmom dopade lúčov.) Keď bola energia vyslaná počas preletu lietadla dráhou  $\Delta s$  a dopadá na uvažovanú plochu po dobu  $\Delta t$ , potom dopadajúca energia  $W$  a intenzita zvuku  $I$  majú veľkosť

$$W = W_1 \cdot \Delta s, \quad I = \frac{W}{\Delta t} = \frac{W_1 \Delta s}{\Delta t} = \frac{W_0 \Delta s \cos \psi}{4\pi r^2 \Delta t}$$

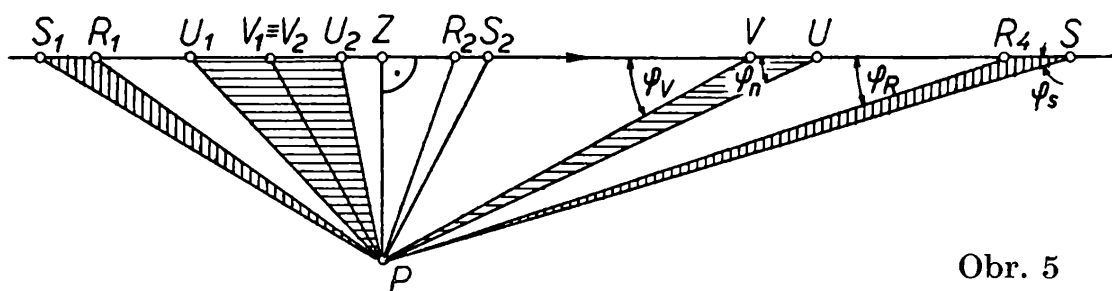
Odtiaľ po dosadení zo vzťahov (11)

$$I = \frac{W_0 h v^3}{4\pi v_z^3} \cdot \frac{\Delta s}{x^3 \Delta t}$$

Pri našich číselne zvolených hodnotách je

$$I = k \cdot \frac{\Delta s}{x^3 \Delta t}, \quad k = \frac{20\,000 W_0}{\pi} \quad (12)$$

Hodnota  $k$  je konštanta; veličiny  $x$ ,  $\Delta s$  sa menia v závislosti od zvoleného časového intervalu o dĺžke  $\Delta t$ . Túto určíme tak, že si zvolíme uhlové výšky  $\varphi_v = \angle ZVP$ ,  $\varphi_u = \angle ZUP$  bodov  $V$ ,  $U$  predstavujúcich dve polohy lietadla. Časový interval  $< 0, \Delta t >$  bude zodpovedať letu lietadla po dráhe  $VU$  (obr. 5). Podobne interval  $< t_0, t_0 + \Delta t_0 >$  bude určený uhlami  $\varphi_R, \varphi_S$  a príslušnými polohami  $R, S$ . Pozdejšie prvý interval ešte skrátime na desatinu - príslušná dráha bude  $VU'$ , resp. na stotinu s príslušnou dráhou  $VU''$  (body  $U', U''$  nie sú na obr. 5 vyznačené). Kvôli prehľadnosti je na obr. 5 použité trochu iné označenie než na obr. 3. Napr.  $R_1, R_2$  sú body, z ktorých súčasne dolahol zvuk k pozorovateľovi  $P$ , keď sa lietadlo nachádzalo v bode  $R$  (a nie  $L_1, L_2$ , ako na obr. 3). V podobnom vzťahu sú body  $V_1, V_2; U_1, U_2; S_1, S_2$  k bodom  $V, U, S$ .



Obr. 5

Teraz zvolíme hodnotu  $\varphi_v = \varphi(v)$  rovnú kritickému uhlu  $\alpha$ ; potom  $VP$  je povrchová polpriamka Machovho kužela. Pri našich číselných údajoch je podľa vzorca (1)

$$\sin \alpha = \frac{v_z}{v} = \frac{1}{2}, \quad \varphi(v) = \alpha = 30^\circ$$

Ďalej voľme napr.  $\varphi(U) = 29^\circ 50'$ ,  $\varphi(R) = 25^\circ 38'$ ,  $\varphi(S) = 25^\circ 30'$ ,  $\varphi(U') = 29^\circ 59'$ ,  $\varphi(U'') = 29^\circ 59' 54''$ . K zvoleným bodom  $V, U, R, S, U', U''$  a k ich výškovým uhlom vypočítame teraz hodnoty  $x_1, x_2, s_1, s_2$ . Napr. pre bod  $S$  (obr. 5) je  $x_1 = x_1(S) = S_1 S$ ,  $x_2 = x_2(S) = S_2 S$ ,  $s_1 = s_1(S) = \pm S_1 Z$ ,  $s_2 = s_2(S) = \pm S_2 Z$ , kde plus platí vtedy, keď bod  $S_1$ , resp.  $S_2$ , leží na dráhe za bodom  $Z$  a mínus v opačnom prípade. (Zápis  $x_1(S)$  znamená hodnotu  $x_1$  príslušnú k bodu  $S$ ). Zo vzorcov (2) a (11a) plynú po dosadení zvolených hodnôt

$$x_{1,2} = \frac{13\,333}{\sin \varphi} (\cos \varphi \pm \sqrt{0,25 - \sin^2 \varphi})$$

Ďalej podľa obr. 3 a vzťahu (11a) platí

$$s_{1,2} = y - x_{1,2} = h \cotg \varphi - x_{1,2}$$

Výsledky, zaokrúhlené na desiatky, udáva táto tabuľka:

|           | $V$        | $U$            | $R$            | $S$            | $U'$           | $U''$               |
|-----------|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------|
| $\varphi$ | $30^\circ$ | $29^\circ 50'$ | $25^\circ 38'$ | $25^\circ 30'$ | $29^\circ 59'$ | $29^\circ 59' 54''$ |
| $x_1$     | 23 090     | 24 600         | 35 500         | 35 820         | 23 470         | 23 230              |
| $x_2$     | 23 090     | 21 900         | 20 060         | 20 080         | 22 740         | 22 960              |
| $s_1$     | -5 770     | -7 160         | -14 660        | -14 860        | -6 140         | -5 910              |
| $s_2$     | -5 770     | -4 470         | 780            | 890            | -5 410         | -5 640              |

V tabuľke sú k polohám lietadla  $V$ ,  $U$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $U'$ ,  $U''$  vypočítané výškové uhly  $\varphi$  týchto polôh, ich vzdialenosti  $x_1$ ,  $x_2$  od zodpovedajúcich bodov  $V_1$ ,  $V_2$ ;  $U_1$ ,  $U_2$ ; a príslušné dráhové súradnice  $s_1$ ,  $s_2$ .

Vypočítame pomery

$$\frac{I(VU)}{I(RS)}, \quad \frac{I(VU')}{I(RS)}, \quad \frac{I(VU'')}{I(RS)}$$

kde  $I(VU)$  je priemerná intenzita zvuku dopadajúceho na vodorovnú jednotkovú plochu v mieste pozorovateľa  $P$  počas časového intervalu  $< 0, \Delta t >$ , keď lietadlo preletí z bodu  $V$  do  $U$ . (Čas začíname merať od okamžiku, keď sa lietadlo nachádza v bode  $V$ ). Obdobný význam majú symboly  $I(RS)$ ,  $I(VU')$ ,  $I(VU'')$  - príslušné časové intervaly označíme  $< t_0, t_0 + \Delta t_0 >$ ,  $< 0, \Delta t' >$ ,  $< 0, \Delta t'' >$ . Čitateľovi prenechávame, presvedčiť sa, že  $t_0 \doteq 5,5$ ,  $\Delta t = 0,182$ ,  $\Delta t_0 \doteq 0,194$ ,  $\Delta t' \doteq 0,018$ ,  $\Delta t'' \doteq 0,0018$ . Než prikróčíme napr. k výpočtu intenzity  $I(RS)$ , uvedomíme si, že sa rovná súčtu intenzít  $I_{S_1R_1}$ ,  $I_{R_2S_2}$  zvuku vysielaného z dvoch dráhových intervalov  $S_1R_1$ ,  $R_2S_2$ . Kým lietadlo preletí dráhu  $RS$ , prijíma pozorovateľ postupne zvuk vyslaný z dráhy  $R_2S_2$  v tomto poradí, čiže v priamom časovom slede, ale súčasne z dráhy  $S_1R_1$  v obrátenom časovom slede, t. j. z miesta  $S_1$ , v ktorom bolo lietadlo prv než v mieste  $R_1$ , prichádza zvuk pozdejšie. Na obr. 5 je zvislým šrafovaním vyjadrená súvislosť dráhového úseku  $RS$  s úsekmi  $S_1R_1$ ,  $R_2S_2$  a podobne vodorovným šrafovaním súvis medzi  $VU$  a  $U_1V_1$ .

Na približné určenie intenzít  $I_{S_1R_1}$ ,  $I_{R_2S_2}$  stačí použiť priemerné hodnoty:

$$\begin{aligned} x(S_1R_1) &= \frac{1}{2} (x_1(R) + x_1(S)) = \frac{1}{2} (R_1R + S_1S) = \\ &= \frac{1}{2} (35\,500 + 35\,820) = 35\,660 \end{aligned}$$

$$x(R_2S_2) = \frac{1}{2}(x_2(R) + x_2(S)) = \frac{1}{2}(20\,060 + 20\,080) = 20\,070.$$

(Pri presnom výpočte by sme museli použiť integrály, keď sú však dĺžky dráhových intervalov vzhľadom k ich vzdialenosti od bodu  $P$  dosť malé, je nepresnosť nášho výpočtu zanedbateľná.) Vypočítame ešte dĺžky príslušných dráhových intervalov, ktoré sa budú dosadzovať do vzorca (12) miesto  $\Delta s$ :

$$S_1R_1 = s(R_1) - s(S_1) = s_1(R) - s_1(S) = -14\,660 - (-14\,860) = 200,$$

$$R_2S_2 = s_2(S) - s_2(R) = 890 - 780 = 110$$

Tieto hodnoty dosadíme do vzorca (12):

$$\begin{aligned} I(RS) &= I_{S_1R_1} + I_{R_2S_2} = \frac{k}{\Delta t_0} \left[ \frac{S_1R_1}{x^3(S_1R_1)} + \frac{R_2S_2}{x^3(R_2S_2)} \right] \doteq \\ &\doteq \frac{k}{0,194} \left( \frac{200}{35\,660^3} + \frac{110}{20\,070^3} \right) \end{aligned}$$

čiže

$$I(RS) \doteq 9,29 \cdot 10^{-11} k \quad (13)$$

Hodnoty  $I(VU)$ ,  $I(VU')$ ,  $I(VU'')$  sa vlastne tiež dostanú sčítaním dvoch intenzít, napr.

$$I(VU) = I_{u_1v_1} + I_{v_2u_2}$$

Pretože však  $V_1 \equiv V_2$  je  $I(VU) = I_{U_1U_2}$  (pozri obr. 5) a podobne

$$I(VU') = I_{u'_1u'_2}, \quad I(VU'') = I_{u''_1u''_2},$$

teda sčítovať tu netreba.

Vypočítame jednotlivé hodnoty  $x$  a  $\Delta s$ :

$$\begin{aligned} x(U_1U_2) &= \frac{1}{2}(U_1U + U_2U) = \frac{1}{2}[x_1(U) + x_2(U)] = \\ &= \frac{1}{2}(24\,600 + 21\,900) = 23\,250, \end{aligned}$$

$$x(U'_1U'_2) = \frac{1}{2}[x_1(U') + x_2(U')] = \frac{1}{2}(23\,470 + 22\,740) = 23\,105,$$

$$x(U''_1U''_2) = \frac{1}{2}[x_1(U'') + x_2(U'')] = \frac{1}{2}(23\,230 + 22\,960) = 23\,095,$$

$$\begin{aligned}
U_1 U_2 &= s_2(U) - s_1(U) = -4470 + 7160 = 2690, \\
U_1 U_2 &= s_2(U') - s_1(U') = -5410 + 6140 = 730, \\
U_1 U_2 &= s_2(U'') - s_1(U'') = -5640 + 5910 = 270.
\end{aligned}$$

Po dosadení do vzorca (12) dostaneme

$$\begin{aligned}
I(VU) &= k \cdot \frac{U_1 U_2}{x^3(U_1 U_2) \cdot \Delta t} = k \cdot \frac{2690}{23 \cdot 250^3 \cdot 0,182} \\
I(VU') &= k \cdot \frac{U'_1 U'_2}{x^3(U'_1 U'_2) \cdot \Delta t'} = k \cdot \frac{730}{23 \cdot 105^3 \cdot 0,018} \\
I(VU'') &= k \cdot \frac{U''_1 U''_2}{x^3(U''_1 U''_2) \cdot \Delta t''} = k \cdot \frac{270}{23 \cdot 095^3 \cdot 0,0018}
\end{aligned}$$

Teda

$$\begin{aligned}
I(VU) &\doteq 118 \cdot 10^{-11} k, \quad I(VU') \doteq 329 \cdot 10^{-11} k, \quad I(VU'') \doteq \\
&\doteq 1220 \cdot 10^{-11} k.
\end{aligned} \tag{14}$$

Z hodnôt (13), (14) možno vypočítať pomery

$$\frac{I(VU)}{I(RS)} \doteq 12,7, \quad \frac{I(VU')}{I(RS)} \doteq 35,4, \quad \frac{I(VU'')}{I(RS)} \doteq 131$$

V časovom intervale o dĺžke  $\Delta t = 0,182$  s po okamžiku  $t = 0$ , keď zvuk lietadla prvýkrát doľahne k pozorovateľovi, je teda priemerná intenzita zvuku asi 13-krát väčšia než v „kontrolnom“ intervale  $K = \langle t_0, t_0 + \Delta t_0 \rangle$ . V intervale  $\langle 0, \Delta t' \rangle$  je to už 35-násobok a v intervale  $\langle 0, \Delta t'' \rangle$ , o dĺžke  $\Delta t'' = 0,0018$  s, dokonca 131-násobok priemernej intenzity v intervale  $K$ . Pritom si treba uvedomiť, že interval  $K$  je „posunutý“ oproti kritickému času iba o 5,5 s. Posledný výsledok už dosť jasne ukazuje, že zvuk, ktorý pozorovateľ počuje v okamihu, keď ho zasiahne rázová vlna, je podstatne silnejší, než zvuk doliehajúci pozdejšie. Pri zjednodušených predpokladoch, ktoré sme prijali, možno dokonca dokázať, že pomer  $I(\Delta t)/I(\Delta t_0)$ , kde  $I(\Delta t) = I(VU)$ ,  $I(\Delta t_0) = I(RS)$ , by rastol nad všetky medze, keď časový interval  $\langle 0, \Delta t \rangle$  neobmedzene zmešujeme. Matematicky to možno zapísať takto:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(\Delta t)}{I(\Delta t_0)} = \infty$$

# Dislokace v pevných látkách

PAVEL BARTUŠKA, Ústav fyziky pevných látek ČSAV, Praha

(Dokončení)

## *Vlastnosti dislokací*

Z uvedených obrázků jsou patrné tři základní vlastnosti dislokací: 1. je to čarová porucha, 2. nemůže v krystalu začínat ani končit (je to buď smyčka, nebo končí na povrchu krystalu, nebo na hranici zrna) a 3. rozdíl posunutí obou částí krystalu je podél dislokační čáry konstantní a určen velikostí Burgersova vektoru  $b$ , který také určuje velikost elementárního skluzu.

Vidíme tedy, že dislokace okolo sebe vytváří napěťové pole a že tedy představuje útvar s jistým obsahem energie. Dá se ukázat, že velikost této energie je  $G b^2$ , kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku<sup>3)</sup> příslušného kovu a  $b$  Burgersův vektor. Čím větší je hustota dislokací v materiálu, tím větší je i akumulovaná energie a v mezním případě po velkém tváření může dosáhnout několika jontů na gram kovu. (Hustota dislokací se vyjadřuje v počtu dislokačních čar na  $\text{cm}^2$  a po velké plastické deformaci může dosáhnout hodnoty až  $10^{12} \text{ cm}^{-2}$ ).

Z obrázků 2 a 3 je vidět i další rozdíl v obou druzích dislokací. U hranové dislokace v místech nad skluzovou rovinou (v okolí nadbytečné poloroviny) dochází k stlačení atomů, kdežto pod skluzovou rovinou k jejich roztahnutí. Reformační pole obsahuje tedy jak složky tlakové, tak smykové, a co je nejdůležitější, pohyb této dislokace je vázán na určitou skluzovou rovinu, kterou nemůže opustit.

Jinak je tomu u šroubové dislokace. Ta má okolo sebe válcové symetrické napěťové pole a její pohyb není vázán na určitou skluzovou rovinu. Z toho vyplývá i rozdíl v chování obou dislokací, když narazí na nějakou překážku při svém pohybu krystalem. Hranová dislokace se zastaví, kdežto šroubová dislokace má schopnost přejít do jiné skluzové roviny, neboli překážce se vyhnout a dále fungovat jako elementární přenašeč plastické deformace.

Tento přechod šroubové dislokace do jiné skluzové roviny je nesmírně důležitý v teorii zpevnění a nazývá se *příčný skluz*.

Hranová dislokace má však možnost ještě jiného druhu pohybu, ale k jeho objasnění si musíme něco říci o bodových poruchách v krystalických látkách.

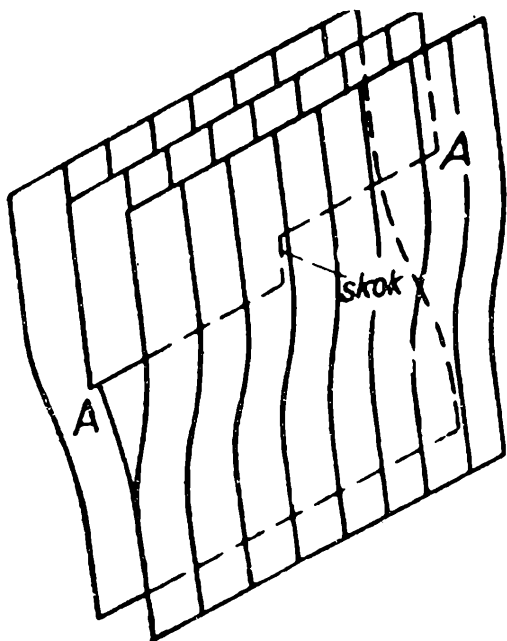
---

<sup>3)</sup>  $G$  je analogie modulu pružnosti v tahu, jestliže uvažujeme ne celkové napětí působící na vzorek, ale pouze jeho smykovou část v dané rovině.

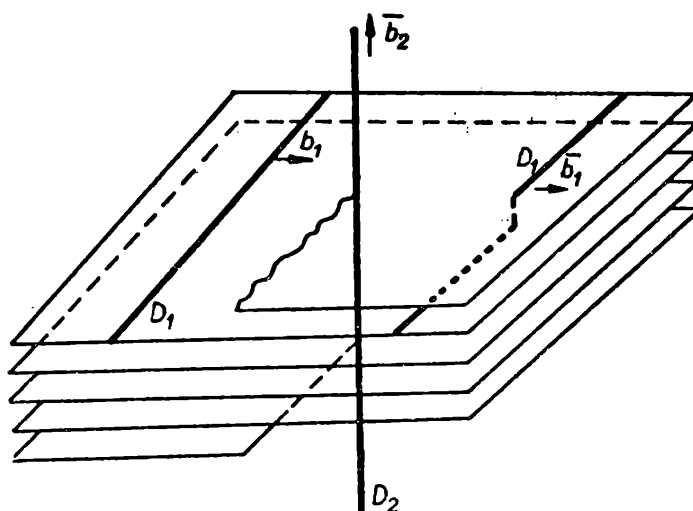


## Vliv bodových poruch na pohyb dislokací

Při zvyšování teploty od absolutní nuly<sup>4)</sup> dochází ke zvětšování kmitů atomů v uzlových bodech mřížky a při každé teplotě bude určitý počet těchto míst neobsazen, vznikají tzv. *vakance*. Čím vyšší je teplota materiálu, tím větší je i koncentrace vakancí. Tyto bodové poruchy se pohybují mříží tím způsobem, že si postupně vyměňují místo se sousedními atomy. Naproti tomu jestliže atom je vyražen ze své uzlové polohy, vzniká tzv. *intersticiál* (= intersticiální poloha).



Obr. 6. Skok na hranové dislokaci.



Obr. 7. Vznik skoku při protínání hranové a šroubové dislokace.

Jestliže tyto bodové poruchy při svém pohybu mřížkou narazí na nadbytečnou polovinu dislokace, dochází buď k jejímu narůstání (v případě intersticiálů), nebo k jejímu ubývání (v případě vakancí). Vidíme tudíž, že došlo vlastně k pohybu dislokace ve vertikálním směru a tento ve skluzový pohyb dislokací nazýváme *šplhání*.

Poněvadž přenos hmoty se zde děje po jednotlivých atomech, nebude již dislokační čára přímková, ale vytvoří se na ní zuby, tzv. *skoky*, z nichž jeden vidíme na obr. 6.

### Protínání dislokací

Skoky mohou však vznikat i jiným způsobem, a to při protínání dislokací. Na obr. 7 vidíme příklad vzniku skoku při protínání hranové

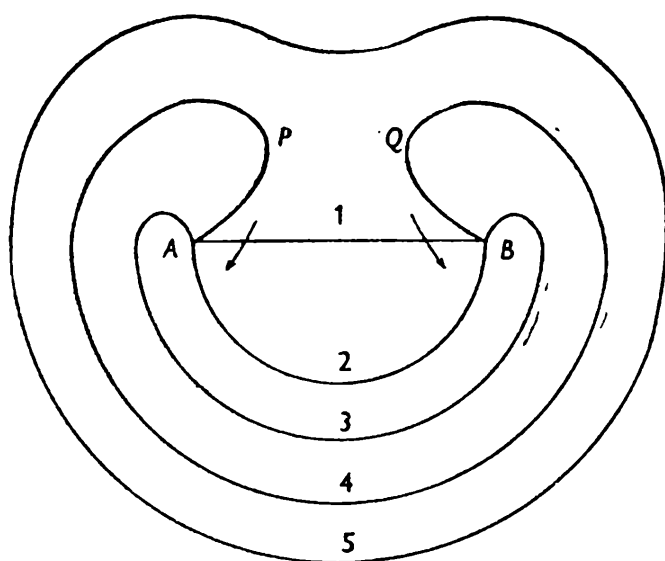
<sup>4)</sup> Absolutní nula (0 kelvinů je  $-273,16$  °C.

a šroubové dislokace. Šroubová dislokace  $D_2$  má Burgersův vektor rovnoběžný s dislokační čarou, kdežto u hranové dislokace  $D_1$  je Burgersův vektor k ní kolmý. Na levé straně obrázku vidíme původní polohu dislokace  $D_1$ , na pravé straně je stav po protnutí, kdy na dislokaci  $D_1$  můžeme pozorovat skok, který vznikl při protnutí obou dislokací. Obdobně může vzniknout skok při protínání dvou hranových nebo dvou šroubových dislokací.

Důvod, proč tak podrobně mluvíme o skocích na dislokacích, je v tom, že tyto útvary význačně ovlivňují pohyblivost zvláště šroubových dislokací a tím hrají důležitou úlohu při zpevnění materiálu během tváření. O tom se ještě zmíníme v druhém článku o plastické deformaci.

### *Vznik dislokací*

Při plastické deformaci jsou dislokace v krystalu blokovány a proto, aby mohlo dále docházet ke změně tvaru tělesa, musí existovat nějaký mechanismus vzniku stále nových dislokací. Podívejme se proto nyní na princip takového zdroje.



Obr. 8. Schematické znázornění Frankova-Readova zdroje.

Představme si, že úsek dislokace  $AB$  na obr. 8 je znehybněn (v bodech  $A$  a  $B$  je např. blokován precipitáty, nebo trojnásobnými průsečíky v dislokačních sítích). Jestliže skluzová rovina souhlasí s rovinou obrázku a na zdroj působí nějaké napětí větší než  $\frac{G \cdot b}{L}$  ( $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $b$  Burgersův vektor a  $L$  délka úsečky  $AB$ ), pak se začne dislokační čára pohybovat do polohy 2 a 3. Mezní případ nastane, když body  $P$  a  $Q$  se spojí, čili, když vznikne dislokační smyčka schopná dalšího neomezeného pohybu. Opakováním popsaného elementárního procesu

vysvětlujeme činnost dislokačního zdroje, nazvaného po svých objevitelích Frankův-Readův zdroj (takovýto zdroj je také výstižně nazván „dislokační mlýn“).

Teorie dislokací je dnes širokým oborem, na kterém probíhá intenzivní výzkum v řadě pracovišť na celém světě. V dalším článku si ukážeme použití pojmů, se kterými jsme se zde seznámili v důležité aplikaci teorie dislokací, a to v objasnění podstaty plastické deformace.

Pro čtenáře, mající zájem o hlubší poznání otázek souvisejících s teorií dislokací, uvádíme soupis některých souhrnných prací:

PIŠEK F., JENIČEK L., RYŠ P.: Nauka o materiálu, díl II, Academia Praha 1966.

SMALLMAN R. E.: Moderní nauka o kovech, SNTL Praha, 1964.

DEKKER A. J.: Fysika pevných látek, Academia Praha, 1966.

KROUPA F.: Dislokace v pevných látkách, Nakladatelství ČSAV, Praha 1961.

READ W. T.: Dislokacii v krystallach, Naučno-techničeskoe izdatělstvo, Moskva 1957.

BUEREN H. G. van: Imperfection in Crystals, North-Holland Publishing Company, Austerodam 1960.

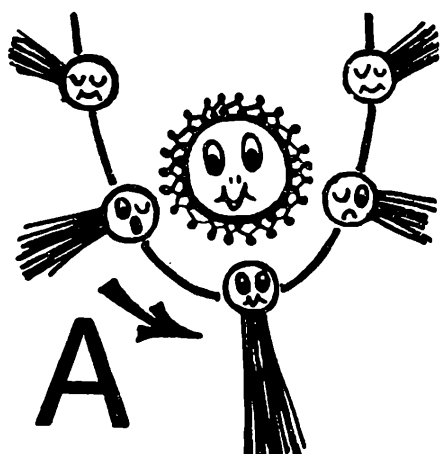
---

## Náhodné objevy v astronomii

Dán Olaus Roemer (1644 — 1710) pozoroval Jupiterovy měsíce, aby mohl těchto pozorování používat při navigaci; objevil však, že rychlost šíření světla je konečná.

Angličan James Bradley (1692 — 1762) měřil roční paralaxy hvězd; objevil aberaci světla.

Německý lékárník Heinrich Schwabe hledal domnělou planetu uvnitř dráhy Merkura; objevil cyklus sluneční činnosti.



## Zákrytové proměnné hvězdy

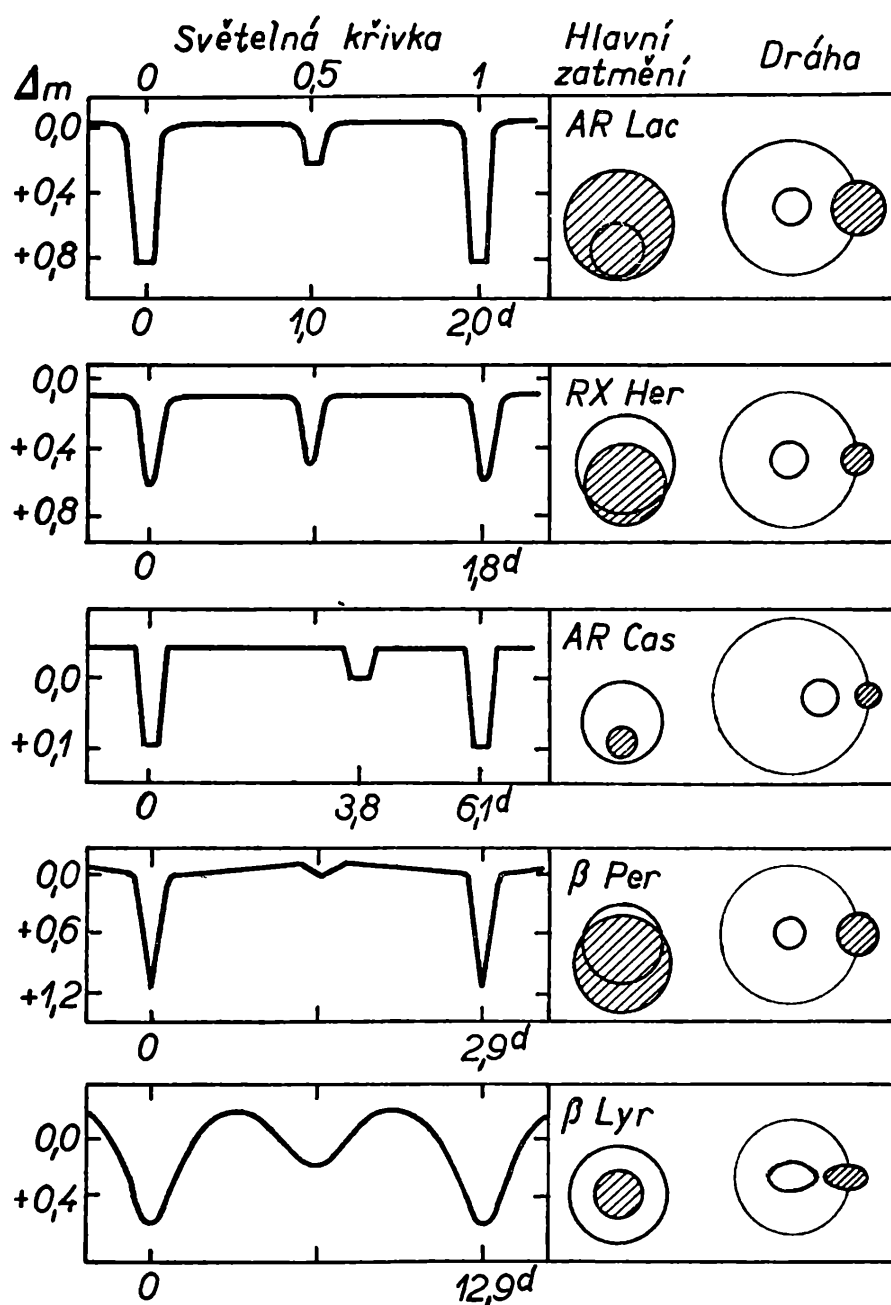
Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, UP, Olomouc:

Velmi bohatým zdrojem informací o fyzikálním stavu a dynamických charakteristikách hvězd jsou zákrytové proměnné hvězdy. V každé učebnici astronomie se dovíme, že jsou to dvojhvězdy, které obíhají kolem společného těžiště, přičemž je jejich dráha orientována tak, že zorný paprsek pozemského pozorovatele je přibližně v její rovině. Při oběhu nastávají vzájemné zákryty obou složek, což se projeví jako změna jasnosti celé soustavy. Obě hvězdy jsou tak blízko sebe a v tak velké vzdálenosti od nás, že je v dalekohledu od sebe nerozlišíme a pozorujeme změny jako by jediné hvězdy.

Nejdéle známou zákrytovou proměnnou hvězdou je hvězda  $\beta$  Persei, která byla v dávných dobách nazvána *Algol*, což v překladu znamená *Đábelská hvězda*. Změny v její jasnosti prý pozorovali již chaldejští hvězdáři. Jako proměnnou hvězdu ji objevil v r. 1667 italský astronom Montanari. Druhé vydání Generálního katalogu proměnných hvězd [1] z roku 1958 obsahuje údaje o 2763 hvězdách, které patří k tomuto typu proměnných hvězd.

Sledujeme-li po delší dobu zákrytovou proměnnou hvězdu a vynecháme graficky změny hvězdné velikosti v závislosti na čase, dostáváme *světelnou křivku*, neboli křivku jasnosti. Z přesně stanovené světelné křivky vycházíme při odvození celé řady konstant a vztahů platných pro soustavu. Na světelné křivce pozorujeme jednak hlavní minima jasnosti, jednak vedlejší minima, která bývají méně výrazná. Časový interval mezi dvěma sousedními hlavními minimy udává *periodu* pro-

měnnosti a je rovný oběžné době složek. Rozdíl hvězdných velikostí v maximu a v minimu se nazývá *amplituda*. Hlavní maximum nastává tehdy, když temnější složka dvojhvězdy zakrývá složku jasnější. Může přitom nastat zatmění úplné, částečné nebo prstencové. Vedlejší minimum pak nastává tehdy, když jasnější složka zakrývá složku temnější. Je-li temnější složka velmi slabá, pak vedlejší minimum nemusí vůbec nastat. Periody zákrytových proměnných hvězd jsou velmi rozdílné, a to od několika hodin (např. hvězda UX Ursae maioris, 4,7 hodin) až po několik desítek roků (hvězda S Doradus, 14 670 dní, tj. 40 roků). Amplituda změn jasnosti závisí na poměru svítivostí obou



Obr. 1. Světelné křivky některých zákrytových proměnných hvězd [2].

složek a také na tom, je-li zákryt úplný nebo částečný; maximální známá hodnota byla změřena u hvězdy RV Apodis a je 4,6 hvězdných velikostí.

Na obr. 1 jsou nakresleny některé typické světelné křivky zákrytových proměnných hvězd, poloha obou hvězd při hlavním zatmění a tvar dráhy soustavy. Ze světelné křivky hvězdy AR Lacertae lze usoudit, že dochází k úplnému zatmění, protože v minimu je po určitou dobu jasnost hvězdy konstantní. Z toho, že vedlejší minimum je uprostřed mezi minimy hlavními, usuzujeme na kruhový tvar dráhy. Není-li v minimu jasnost po určitou dobu konstantní (RX Herculis), pak usuzujeme na zatmění částečné. Z nesymetrické polohy vedlejšího minima (AR Cassiopeiae) plyne, že dráha je eliptická. U Algola ( $\beta$  Persei) je dráha prakticky kruhová a zatmění je částečné. Povšimneme-li si lépe světelné křivky, pak vidíme, že jasnost hvězdy v maximu na rozdíl od předcházejících tří hvězd není konstantní, ale roste a největší hodnoty nabývá před začátkem vedlejšího minima. Tuto okolnost si vysvětlujeme tím, že temnější složka kromě vlastního záření odráží světlo složky jasnější. Zcela odlišný tvar má světelná křivka hvězdy  $\beta$  Lyrae. Plynulá změna jasnosti svědčí o tom, že obě složky mají elipsoidální tvar a obíhají velmi blízko sebe, přičemž mají vázanou rotaci. To znamená, že kromě změny jasnosti způsobené zákrytem (popřípadě i odrazem světla), se jasnost mění též v důsledku změny orientace os elipsoidů vzhledem k pozorovateli.

Studium zákrytových proměnných hvězd vedlo k některým zajímavým objevům. Tak např. hvězda  $\epsilon$  Aurigae má periodu 9883 dní. Jasná hvězda je veleobr spektrální třídy F s povrchovou teplotou asi 8500 °K. Průvodce je veleobr, jehož povrchová teplota je velmi nízká, takže vysílá pouze infračervené záření. Hustota této hvězdy je tak malá, že její vnější části jsou téměř průhledné, takže v době zatmění světlo jasné hvězdy prochází chladnou hvězdou. Záření jasné hvězdy se částečně pohlcuje atmosférou infračervené hvězdy, což způsobuje pokles jasnosti, který pozorujeme jako minimum. Oběžná doba je 27 roků, takže minima nastávají poměrně vzácně a trvají po delší dobu. Minulé minimum nastalo v květnu 1956.

Podobnou zajímavou hvězdou je  $\xi$  Aurigae s periodou 972 dní. V této soustavě je větší hvězdou chladný veleobr spektrální třídy K4 a průvodcem obří hvězda spektrální třídy B8, čili s poměrně vysokou povrchovou teplotou. Poloměr veleobra spektrální třídy K4 je téměř stokrát větší než poloměr hvězdy třídy B8. V době zatmění prochází záření hvězdy B8 různými vrstvami veleobří hvězdy K4, takže ve spektru vznikají znatelné změny, což umožnilo studovat strukturu atmosféry veleobří hvězdy spektrální třídy K4.

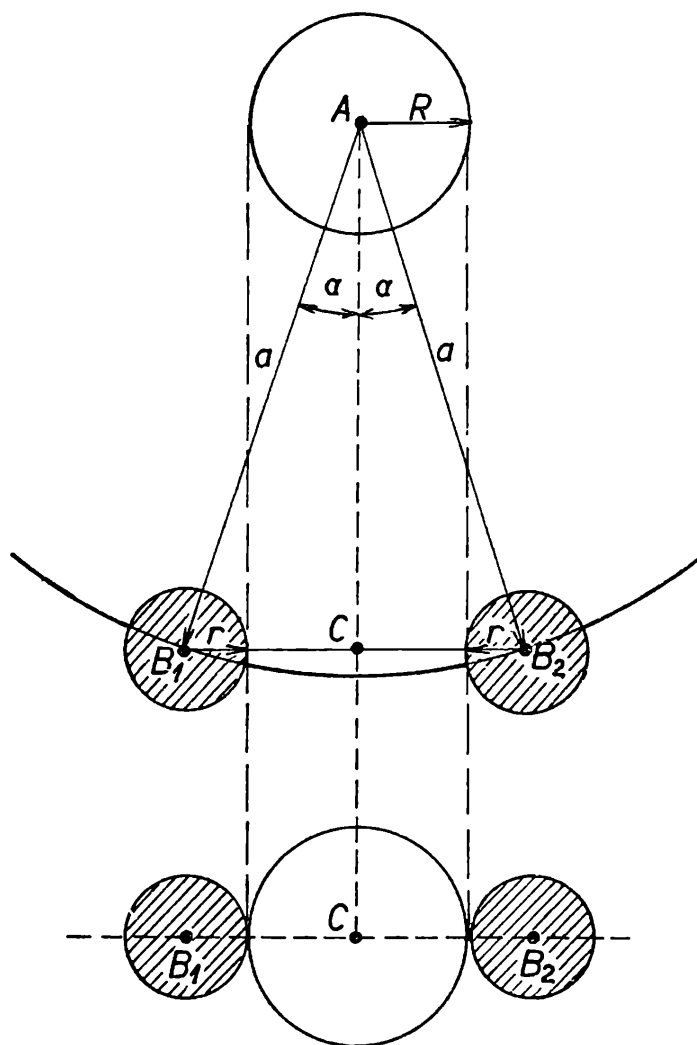
Ze světelné křivky zákrytových proměnných hvězd můžeme stanovit kromě doby oběžné také excentricitu dráhy, relativní svítivost obou

složek, která vyplývá z hloubky hlavního a vedlejšího minima, poloměr průvodec v jednotkách poloměru hlavní hvězdy a vzájemnou vzdálenost obou složek, rovněž v jednotkách poloměru hlavní hvězdy, zploštění obou složek, úbytek jasu od středu směrem k okraji hvězdného kotouče apod.

Ukážeme si nyní, jak se stanoví vzájemná vzdálenost  $a$  složek zákrytové proměnné hvězdy v jednotkách poloměru  $R$  jasnější složky. Přitom budeme předpokládat, že zákryt je centrální, dráha kruhová a že známe kromě oběžné doby  $T$  a doby trvání zákrytu  $t$  také poměr

poloměrů  $\frac{r}{R}$  temnější a jasnější složky. Na obr. 2 jsou znázorněny

polohy  $B_1$  a  $B_2$  temnějšího průvodec vzhledem k jasnější hvězdě  $A$  v okamžicích začátku a konce zatmění. Označíme-li  $\alpha$  úhel, který svírá



Obr. 2. K výpočtu vzájemné vzdálenosti složek zákrytové proměnné hvězdy.

průvodič  $a$  se směrem zorného paprsku v okamžiku začátku zatmění, pak z pravoúhlého trojúhelníka  $B_1CA$  můžeme vyjádřit délku průvodiče (tj. poloměr dráhy)

$$a = \frac{R + r}{\sin \alpha}$$

Protože známe pouze poměr poloměrů  $\frac{r}{R}$ , upravíme tento vztah na tvar

$$a = \frac{R}{\sin \alpha} \left( 1 + \frac{r}{R} \right)$$

Úhel  $\alpha$  stanovíme pomocí doby trvání zákrytu  $t$  a oběžné doby  $T$ . Za dobu  $t$  se přesune temný průvodič z polohy  $B_1$  do polohy  $B_2$ , průvodič opíše úhel  $2\alpha$ . Protože předpokládáme, že dráha je kruhová, pokládáme úhlovou rychlost  $\omega$  průvodiče za konstantní a úhel  $2\alpha$  vyjádříme vztahem

$$2\alpha = \omega t .$$

Za dobu oběhu  $T$  opíše průvodič úhel  $2\pi$ , úhlová rychlost je tedy

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

a po dosazení do předchozího vztahu máme pro úhel  $\alpha$  výraz

$$\alpha = \frac{t}{T} \pi$$

nebo, chceme-li úhel vyjádřit ve stupních

$$\alpha = \frac{t}{T} 180^\circ$$

Literatura.

- [1] Obščij katalog peremennych zvezd. 2. vydání. Moskva, 1958.
- [2] *Bakulin, P. I., Kononovič, E. V., Moroz, V. I.*: Kurs obščej astronomii. „Nauka“, Moskva 1966.
- [3] *Švestka, Z.*: Hvězdné atmosféry. Nakl. ČSAV, Praha 1954.

## OPRAVA

Ve 4. čísle byly omylem zaměněny na str. 167 a 168 obr. 1. s obr. 2.



---

# NAŠE SOUTĚŽ

---

## Řešení úloh loňské soutěže

### Matematika

9. Sečtěte  $n$  členů posloupnosti

$$\frac{a}{1+a} + \frac{a}{(1+a)(1+2a)} + \frac{a}{(1+2a)(1+3a)} + \\ + \frac{a}{[1+(n-1)a](1+na)}$$

Jaké hodnotě se blíží velikost součtu, jestliže počet členů vzrůstá bez omezení?

(Došlo 27 řešení)

Josef Kotyk

*Řešili Jozef Čulen a Alojz Caletka III. D SVVŠ M. Nešpora v Holíči:*

Obsah členů dané postupnosti

$$u_k = \frac{a}{[1+(k-1)a](1+ka)}$$

možno napísať v tvare

$$u_k = \frac{1}{1+(k-1)a} - \frac{1}{1+ka}$$

ak dosadzujeme postupne  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  a sčítame, vychádza súčet

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{1+na} = \frac{na}{1+na}$$

**Predpoklad** V súčte  $s_n$  musí byť  $1+ka \neq 0$  pre každé prirodzené  $k \leq n$ .

**Zkúšku správnosti** možno previesť matematickou indukciou. Okrem toho je zrejmé, že každý čiastočný súčet  $s_n = 0$ , ak  $a = 0$ .

Ak počet sčítaných členov rastie bez obmedzenia, daný rad sa stane nekonečným a má súčet

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{1 + n \cdot a} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + n \cdot a} = 1 - 0 = 1$$

10. Je-li  $z > 2$  základ číselné soustavy, pak čísla  $(z - 1)^2$ ,  $2(z - 1)$  napsaná v této soustavě mají vždy obrácený sled cifer. Dokažte.

(Došlo 24 řešení)

*Corneliu Popescu*

*Řešil Jan Bajnar, III. B, SVVŠ Nový Bohumín:*

K zápisu čísel v soustavě o základu  $z$  potřebujeme  $z$  cifer 0, 1, 2, ...,  $(z - 1)$ . Při  $z \leq 10$  vystačíme s ciframi desítkové soustavy, při  $z > 10$  je nutno zavést znaky pro další cifry, např. písmena řecké abecedy.

Označme číslo  $(z - 2)$  cifrou  $\xi$ . Potom číslo

$$(z - 1)^2 = (z - 2) \cdot z + 1 = \xi \cdot z^1 + 1 \cdot z^0$$

bude v soustavě o základu  $z$  zapsáno znakem  $\xi 1$ .

Podobně číslo

$$2(z - 1) = z + (z - 2) = 1 \cdot z^1 + \xi \cdot z^0$$

bude v téže soustavě zapsáno znakem  $1\xi$ .

Obě čísla jsou tedy v soustavě se základem  $z > 2$  dvojciferná a sled cifer v jejich zápisech je navzájem opačný.

11. Rozhodněte, zda libovolné dva body  $X$ ,  $Y$  ležící v daném mezikruží je možno spojit kruhovým obloukem, který celý leží v tomto mezikruží.

(Došlo 19 řešení)

*Jiří Sedláček*

*Riešil Pavol Černek, II.B, SVŠ Juraťa Hronca, Bratislava:*

Nech čitateľ si urobí svoj náčrt. Bod  $P$  leží na osi úsečky  $XY$ . Dalej si označme oblúk kružnice  $k \equiv (P, r \equiv PX)$  so stredovým uhlom  $\alpha$ ,  $180^\circ \geq \alpha \geq 0^\circ$  spájajúci body  $X$ ,  $Y$  obecne  $n$ .

Označme si ľubovoľný bod oblúka  $n$  obecne  $Z$ . Pre body  $P$ ,  $S$ ,  $Z$  platí nerovnosti

$$PS + PZ \geq SZ,$$

pričom

$$PS = SX - XP = SX - PZ,$$

čiže

$$SX \geq SZ \tag{1}$$

Pre trojice bodov  $S, P, Y$  a  $S, P, Z$  platí  $SP = SP$ ,  $PZ = PY$  a  
 $\sphericalangle SPY \leq \sphericalangle SPZ$ ,

čiže

$$SZ \geq SY \quad (2)$$

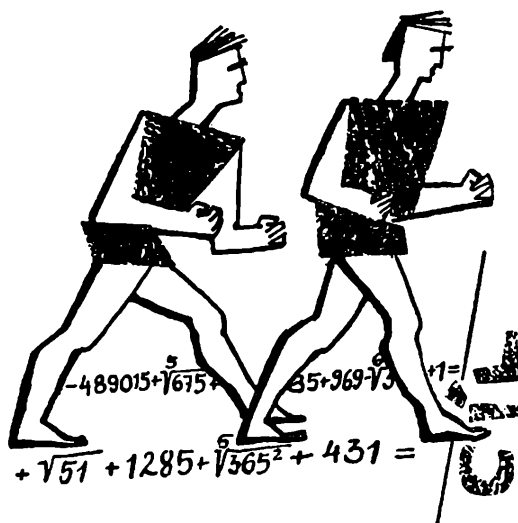
Z (1) a (2)

$$\Rightarrow SX \geq SZ \geq SY$$

Teda celý oblúk  $n$  leží v medzikruží kružníc  $k_1 \equiv (S, r = SX)$ ,  $k_2 \equiv (S, r = SY)$ , keďže medzikružie kružníc  $k_1, k_2$  leží celé v danom medzikruží, oblúk  $n$  leží celý v danom medzikruží.

Teda ľubovoľne dva body  $X, Y$  daného medzikružia je možné spojiť kruhovým oblúkom, a to aspoň oblúkom  $n$ .

# MMO



Ve 2. čísle Rozhledů jsme uvedli texty soutěžních úloh XI. MMO v Bukurešti. Abychom vás příliš dlouho nenapínali, uvádíme zde řešení členů naší delegace. Texty si zájemci vyhledají v 2. čísle.

4. příklad. Řešení Tomáše Maška (obr. 1.)

$$AB = c, AC = b, BC = a,$$

$$AD = p, BD = q, p + q = c.$$

Středy a poloměry kružnic  $k_1, k_2, k_3$  označme po řadě  $S_1, S_2, S_3; r_1, r_2, r_3$ . Jejich body dotyku s přeponou  $AB$  jsou po řadě  $T_1, T_2, T_3$ . Střed kružnice  $k$  je  $S$ . Bez újmy na obecnosti položíme  $b \geq a$ .

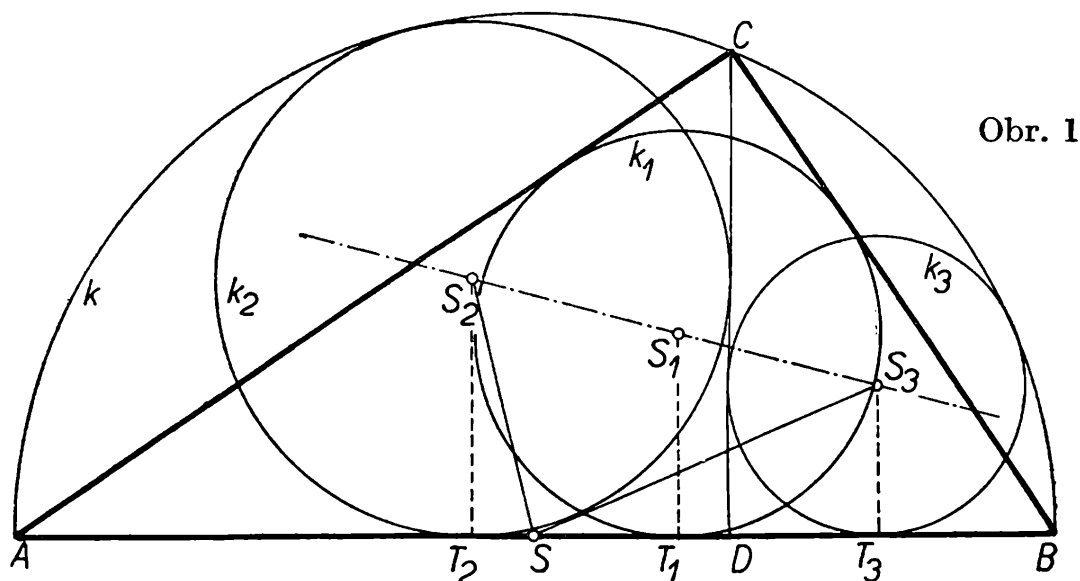
Na trojúhelník  $ST_2S_2$  použijme Pythagorovy věty

$$SS_2^2 = ST_2^2 + S_2T_2^2 \quad (1)$$

Ale

$$SS_2 = \frac{c}{2} - r_2, \quad S_2T_2 = r_2,$$

$$ST_2 = BT_2 - BS = BD + DT_2 - BS = q + r_2 - \frac{c}{2}$$



Po dosazení do rovnice (1) a po krátké úpravě dostaneme

$$(r_2 + q)^2 = qc = a^2, \\ r_2 = a - q. \quad (2)$$

Stejným způsobem z trojúhelníka  $ST_3S_3$  obdržíme

$$r_3 = b - p. \quad (3)$$

Snadno se dá zjistit, že

$$r_1 = s - c, \quad AT_1 = s - a, \\ AT_2 = c - a, \quad AT_3 = p - b - p = b \quad (4)$$

Nyní můžeme psát

$$AT_1 = \frac{1}{2}(c + b - a) = \frac{1}{2}(AT_2 + AT_3).$$

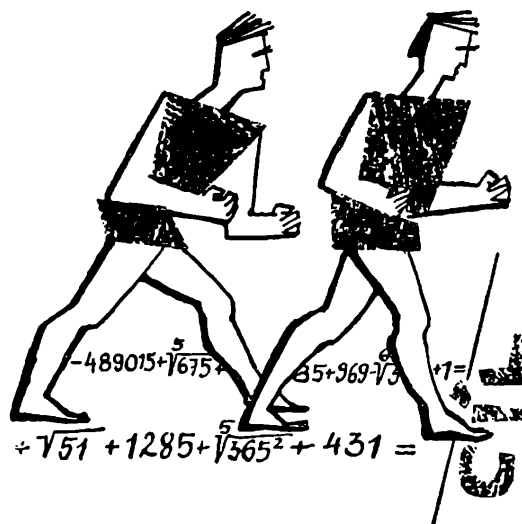
To však znamená, že  $T_1$  je střed úsečky  $T_2T_3$  a tudíž střed  $S_1$  je střed úsečky  $S_2S_3$ .

Počítejme délku poloměru  $r_1$

$$r_1 = \frac{1}{2}(a + b - c) = \frac{1}{2}(a - q + b - p) = \frac{1}{2}(r_2 + r_3)$$

Poněvadž  $r_1$  je aritmetický průměr poloměrů  $r_2, r_3$  a současně střed  $S_1$  leží uprostřed úsečky  $S_2S_3$ , existuje ještě jedna tečna, společná kružnicím  $k_1, k_2, k_3$ , která je souměrně sdružená se stranou  $AB$  podle přímky  $S_1S_2$ . A tím je důkaz proveden.

FO



## Rotační pohyby a setrvačníky

Ing. BOHUMIL VYBÍRAL, CSc., VAAZ, Vyškov

Úvod.

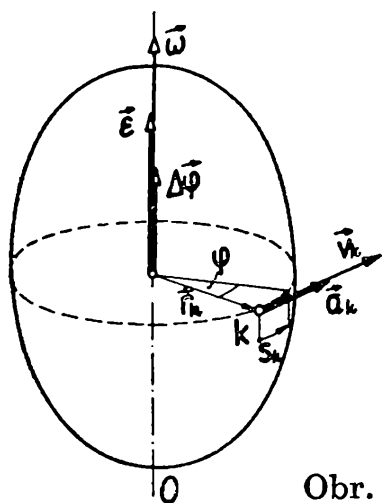
V učivu pro 1. ročník gymnasia je věnováno rotačním pohybům těles málo místa a o setrvačnicích se nehovoří vůbec. Důvody pro to jsou metodické, jde totiž o velmi obtížnou partii mechaniky. Protože teorie o pohybu těles je velmi důležitá pro fyzikální a zejména pro technické aplikace, a protože lze sestavit z této partie řadu poučných a zajímavých úloh, byl tento článek zařazen jako studijní text pro kategorii A v XI. roč. fyzikální olympiády.

### 1. Popis pohybového stavu tělesa.

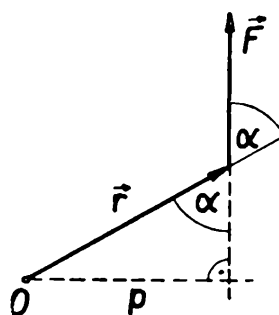
V tomto článku se budeme zabývat pohybem dokonale tuhého tělesa, tedy tělesa, u něhož vzdálenosti částic, z nichž je těleso složeno, jsou neproměnné.

Nejjednodušším pohybem dokonale tuhého tělesa je *pohyb translační (posuvný)*. Je to pohyb, při němž libovolná přímka spojená s tělesem zůstává stále rovnoběžná s kteroukoliv svou předcházející polohou. V důsledku toho všechny body tělesa opisují shodné dráhy, tzn., že i jejich rychlosti a zrychlení jsou v každém okamžiku stejné.

*Rotačním (otáčivým) pohybem kolem pevné osy* nazýváme pohyb, při němž alespoň dva body tělesa (určující osu rotace) jsou v klidu. Při rotaci opisují všechny body tělesa kruhové oblouky se středem na ose rotace. Můžeme proto za souřadnici udávající polohu tělesa zvolit středový úhel  $\varphi$  (viz obr. 1), měřený od jisté výchozí polohy. Tomuto úhlu



Obr. 1.



Obr. 2.

budeme říkat *úhlová dráha*. Bude užitečné zavést si úhlovou dráhu jako vektor, ležící v ose rotace. Jeho orientaci určíme podle pravidla pravé ruky: ukazují-li prsty pravé ruky směr pohybu bodů rotujícího tělesa, udává palec orientaci vektoru úhlové dráhy.

Úhlová dráha  $\varphi$ , která je stejná pro všechny body rotujícího tělesa, je dána jako funkce času. Bude proto vhodné dále si zavést pojem okamžité *úhlové rychlosti* vztahem

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (1)$$

a okamžitého *úhlového zrychlení* vztahem

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (2)$$

Je zřejmé, že  $\omega$  a  $\epsilon$  jsou vektory, jejichž směr a orientace je totožná se směrem a orientací vektoru  $\varphi$ . Rozměr jednotky úhlové rychlosti je  $s^{-1}$ , úhlového zrychlení  $s^{-2}$ . Pro dráhu, velikost rychlosti a tečného zrychlení  $k$ -tého bodu tělesa platí vztahy

$$s_k = \varphi r_k, \quad (3)$$

$$v_k = \omega r_k, \quad (4)$$

$$a_k = \varepsilon r_k, \quad (5)$$

kde  $r_k$  je vzdálenost  $k$ -tého bodu od osy rotace.

*Otáčením tělesa kolem okamžité osy* nazýváme takový pohyb, při němž jeden bod tělesa — jímž prochází osa rotace — je pevný.

Zcela volné těleso koná *obecný pohyb*; lze ukázat, že tento pohyb může být v každém okamžiku rozložen na jedinou elementární translaci a jedinou elementární rotaci kolem okamžité osy.

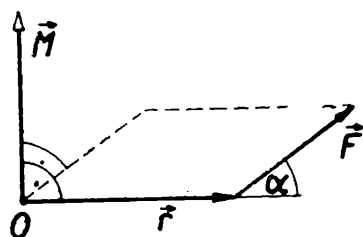
## 2. Dynamika rotačního pohybu tělesa

### 2.1. Moment síly

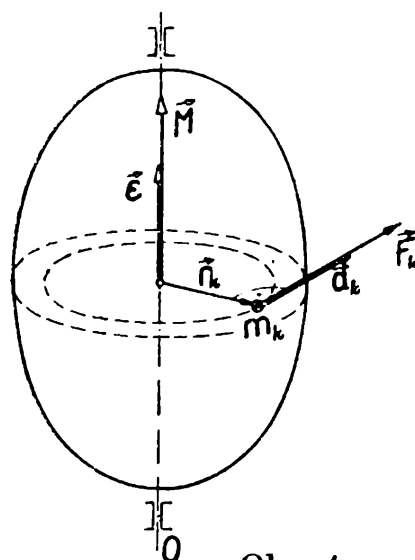
Představme si těleso, jehož jeden bod je pevný (např. bod  $O$  v obr. 2) a na něj působí síla  $\mathbf{F}$ , která neprochází tímto bodem. Pak tato síla způsobí otáčení tělesa. Otáčivý účinek síly bude tím větší, čím větší bude síla a čím dále bude působit od pevného bodu. Za míru otáčivého účinku síly můžeme proto považovat součin z velikosti síly a vzdálenosti její vektorové přímky od pevného bodu. Tento součin nazýváme *momentem síly* vzhledem k bodu  $O$ ; bod  $O$  pak nazýváme *momentovým bodem*. Pro velikost momentu síly tedy dostáváme

$$M = pF = rF \sin \alpha. \quad (6)$$

Protože síla  $\mathbf{F}$  způsobí rotaci kolem osy kolmé na rovinu určenou silou  $\mathbf{F}$  a polohovým vektorem  $\mathbf{r}$ , tedy kolem osy v prostoru jistým způsobem orientované, je moment síly vektorovou veličinou ležící v této ose.



Obr. 3



Obr. 4

Velikost tohoto vektoru je dána rovnicí (6), směr a orientace obrázkem 3, přičemž orientaci určujeme podle pravidla pravé ruky stejně jako u vektorů  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$ .

Velikost, směr i orientaci momentu síly  $\mathbf{M}$  lze vyjádřit jedinou vektorovou rovnicí užitím tzv. vektorového součinu (označuje se  $\times$ ) vektorů  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (7)$$

Operace vektorového součinu dvou vektorů se zavádí ve vektorové algebře, která se však na střední škole neprobírá. Uvedeme proto pro úplnost jeho definici: *vektorový součin* dvou vektorů je vektor; jeho velikost je rovna součinu velikostí obou vektorů a sinu menšího úhlu, který oba vektory svírají je kolmý k rovině obou vektorů a je orientován na tu stranu, z níž se jeví pozorovateli přechod od prvního vektoru ke druhému, přenesenému do společného působiště, při otočení o menší úhel, ve smyslu kladném, tj. proti pohybu hodinových ručiček. Ucelený přehled o vektorové algebře podává článek [1] a z učebnic např. [2].

Dosud jsme předpokládali, že těleso má jeden pevný bod. Bude-li těleso mít dva pevné body, které určují polohu pevné rotační osy tělesa, uplatní se pro rotaci jen průmět momentu síly do pevné rotační osy.

## 2.2. Základní rovnice pro rotační pohyb.

Nechť jde o těleso otočné kolem pevné osy  $O$  (obr. 4). Toto těleso si můžeme představit složeno z  $n$  bodů (částic). Hmotnost  $k$ -tého bodu označme  $m_k$ . Na  $k$ -tý bod nechť působí síla  $\mathbf{F}_k$  ležící v rovině kolmé na osu rotace a působící kolmo na průvodič  $\mathbf{r}_k$ . Tato síla uděluje  $k$ -tému bodu tečné zrychlení  $\mathbf{a}_k$ , které je určeno II. Newtonovým zákonem  $m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k$ . Jelikož pro velikost tečného zrychlení při rotaci tělesa platí vztah (5), můžeme pro velikost síly psát  $F_k = m_k r_k \varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je velikost úhlového zrychlení, jež je společné pro všechny body tělesa. Síla  $\mathbf{F}_k$  působí momentem o velikosti  $\mathbf{M}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{r}_k = \varepsilon m_k r_k^2$ . Velikost celkového momentu působícího na těleso dostaneme součtem přes všechny body, tj.

$$M = \sum_{k=1}^n M_k = \varepsilon \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \varepsilon J \quad (8)$$

kde

$$J = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 \quad (9)$$

je tzv. *moment setrvačnosti* daného tělesa vzhledem ke zvolené ose. Správněji píšeme výsledek (8) vektorově ve tvaru

$$\mathbf{M} = J \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (10)$$

Výraz (10), vyjadřující vztah mezi momentem síly a uděleným úhlovým zrychlením, se nazývá *základní rovnice rotačního pohybu*.



### 2.3. Moment setrvačnosti.

Moment setrvačnosti (9) je mírou setrvačných účinků tělesa při rotačním pohybu. Z výrazu (9) je zřejmé, že moment setrvačnosti tělesa závisí na rozložení hmotnosti v tělese vzhledem k rotační ose a jeho velikost nejvíce ovlivňují části tělesa nejvzdálenější od rotační osy. Velikost momentu setrvačnosti tedy závisí na poloze a směru rotační osy. Pro určitou polohu a směr osy má moment setrvačnosti určitou velikost a můžeme jej proto pokládat za veličinu skalární.

V případě tělesa se spojitě rozloženou hmotností vypočítáme moment setrvačnosti podle vztahu dáme limitu příslušného součtu, tedy

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 . \quad (11)$$

Podrobnější informaci o výpočtu momentu setrvačnosti najde čtenář v článku [3].

#### 1. úloha

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního rotačního válce (desky) poloměru  $r$  a hmotnosti  $m$  vzhledem k ose souměrnosti.

Řešení.

Válec rozdělíme na  $n$  tenkých dutých válců tloušťky

$$\Delta r = \frac{r}{n}$$

Hmotnost  $k$ -tého válce bude

$$m_k = 2\pi r_k \Delta r h \rho ,$$

kde  $h$  je výška válce a  $\rho$  jeho hustota. Pro poloměr  $k$ -tého válce můžeme psát

$$r_k = k \Delta r = r \frac{k}{n}$$

a pro jeho moment setrvačnosti

$$m_k r_k^2 = 2\pi r^4 h \rho \frac{k^3}{n^4} = 2mr^2 \frac{k^3}{n^4} ,$$

kde  $m = \pi r^2 h \rho$  je hmotnost válce. Moment setrvačnosti celého válce vypočteme dosazením do vztahu (11)

$$J = 2mr^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = 2mr^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left[ \frac{n}{2} (n + 1) \right]^2 =$$

$$= 2mr^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]^2 = \frac{1}{2} mr^2.$$

#### 2.4. Kinetická energie rotujícího tělesa

Nechť jde o těleso rotující kolem pevné osy úhlovou rychlostí  $\omega$ . Pak pro postupnou rychlost  $k$ -tého bodu platí vztah (4) a pro jeho kinetickou energii vztah

$$\frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} m_k r_k^2 \omega^2.$$

Pro kinetickou energii celého tělesa dostáváme

$$W = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$$

Protože suma na pravé straně je moment setrvačnosti (9) vzhledem k rotační ose, můžeme psát

$$W = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (12)$$

### 3. Obecný pohyb tělesa.

Jak bylo řečeno v 1. kapitole lze obecný pohyb tělesa rozložit na translaci, reprezentovanou např. pohybem těžiště, a na rotaci kolem těžiště. Dynamický popis tohoto pohybu určují *impulsové věty*, přičemž první věta popisuje translaci a druhá věta rotaci tělesa. V důsledku omezeného rozsahu článku se budeme zabývat jen druhou impulsovou větou. Vážný zájemce o mechaniku najde informaci o první impulsové větě např. v učebnicích [2], [4].

#### 3.1. Moment hybnosti

Podobně jako moment síly definujeme u rotačních pohybů i *moment hybnosti* jako vektorový součin polohového vektoru a hybnosti

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (13)$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor bodu tělesa, o jehož hybnosti  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  uvažujeme.

Stanovme nyní moment hybnosti tělesa rotujícího kolem pevné osy (viz obr. 4). Vzhledem k tomu, že rychlost  $\mathbf{v}_k$  je kolmá na průvodič  $\mathbf{r}_k$ , můžeme pro velikost momentu hybnosti  $k$ -tého bodu psát

$$b_k = r_k p_k \sin 90^\circ = r_k m_k v_k = \omega m_k r_k^2.$$

Pro velikost celkového momentu hybnosti tělesa dostáváme

$$b = \sum_{k=1}^n b_k = \omega \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \omega J \quad (14)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti tělesa k dané ose. Jelikož úhlová rychlost je vektor, bude moment hybnosti rovněž vektor ležící v ose rotace. Rovnici (14) můžeme tedy psát vektorově ve tvaru

$$\mathbf{b} = J\boldsymbol{\omega} \quad (15)$$

### 3.2. Druhá impulsová věta

Pro moment hybnosti  $k$ -tého bodu tělesa v čase  $t$  platí

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k. \quad (16)$$

Vzroste-li za krátký časový interval  $\Delta t$  průvodič o  $\Delta \mathbf{r}_k$  a hybnost o  $\Delta \mathbf{p}_k$ , vzroste moment hybnosti o  $\Delta \mathbf{b}_k$ . V čase  $t + \Delta t$  bude platit

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_k + \Delta \mathbf{b}_k &= (\mathbf{r}_k + \Delta \mathbf{r}_k) \times (\mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{p}_k) = \\ &= \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k + \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k. \end{aligned} \quad (17)$$

Použili jsme zákona distributivního, který zůstává v platnosti i při vektorovém součinu (nelze ovšem zaměnit pořadí členů v součinu). Zanedbáme-li malý člen  $\Delta \mathbf{r}_k \times \Delta \mathbf{p}_k$ , odečteme-li rovnici (16) od rovnice (17) a vydělíme-li vzniklou rovnici časovým intervalem  $\Delta t$ , dostaneme

$$\frac{\Delta \mathbf{b}_k}{\Delta t} = \mathbf{r}_k \times \frac{\Delta \mathbf{p}_k}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta t} \times \mathbf{p}_k$$

Protože

$$\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k \text{ a } \frac{\Delta \mathbf{r}_k}{\Delta t} = \mathbf{v}_k,$$

je druhý člen jako součin dvou stejnosměrných vektorů roven nule ( $\sin 0^\circ = 0$ ), platí tedy

$$\frac{\Delta \mathbf{b}_k}{\Delta t} = \mathbf{r}_k \times \frac{\Delta \mathbf{p}_k}{\Delta t} = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{M}_k \quad (18)$$

Je tedy časová změna momentu hybnosti  $k$ -tého bodu rovna momentu síly působícímu na  $k$ -tý bod.

Sečteme-li momenty (18) pro celé těleso, dostaneme

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Delta \mathbf{b}_k}{\Delta t} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_k = \mathbf{M}$$

a z toho

$$\frac{\Delta}{\Delta t} \sum_{k=1}^n \mathbf{b}_k = \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta t} = \mathbf{M} \quad (19)$$

Tento výsledek, který vyjadřuje, že časová změna celkového momentu hybnosti tělesa vzhledem k určitému bodu je rovna výslednému momentu vnějších sil k témuž bodu, se nazývá *druhá impulsová věta*. Tuto větu lze interpretovat geometricky: Rychlost koncového bodu vektoru celkového momentu hybnosti je rovna výslednému momentu sil k témuž bodu. Půjde-li o těleso rotující kolem pevné osy, můžeme užitím vztahu (15) přepsat výsledek (19) do tvaru

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (J\omega) = \mathbf{M} \quad (20)$$

Bude-li výsledný moment sil roven nule, pak bude i  $\Delta \mathbf{b} = 0$ , a tedy celkový moment hybnosti tělesa bude stálý co do velikosti i co do směru

$$\mathbf{b} = J\omega = \text{konst.} \quad (21)$$

Tento důležitý výsledek se nazývá *zákon zachování momentu hybnosti*.

Uvedme příklad, ve kterém se uplatní tento zákon. Roztočíme-li osobu stojící na otáčivé stoličce s pažemi upaženými (velký moment setrvačnosti) a osoba připaží (malý moment setrvačnosti), vzroste její úhlová rychlost. Tohoto úkazu využívá např. krasobruslař při piruetě nebo gymnasta při sklopce. Protože se jedná o izolovanou soustavu ( $\mathbf{M} = 0$ ), platí zde zákon zachování momentu hybnosti. Kinetická energie v obou polohách není stejná, ale liší se o práci, kterou osoba vykonala při zmenšování momentu setrvačnosti na překonání odstředivých sil.

## 4. S e t r v a č n í k y

### 4.1. Volný setrvačnick

Setrvačnickem nazýváme tuhé homogenní, osově souměrné rotační těleso s velkým momentem setrvačnosti. Pro homogenní těleso rotující kolem osy souměrnosti platí vztahy, které byly odvozeny pro rotaci tělesa kolem pevné osy. Osa souměrnosti je totiž tzv. *osou volnou*, tj. osou, kolem které bude těleso stabilně rotovat, i když nebude uložena v ložiskách (odmyslíme-li si ovšem působení tíhové síly nebo podepřeme-li těleso v těžišti).

Vyšetřeme nejprve chování tzv. *volného setrvačnicku*, tj. setrvačnicku, u něhož moment působících sil je roven nule. Takovým setrvačnickem je např. setrvačnick podepřený v těžišti (viz obr. 5). Roztočíme-li takový setrvačnick přesně kolem osy souměrnosti, která se nazývá osou setrvačnicku, bude v důsledku  $\mathbf{M} = 0$ ,  $\mathbf{b} = \text{konst.}$  (viz rovnici 19), tedy moment hybnosti, i osa setrvačnicku, budou mít v prostoru stálý směr.

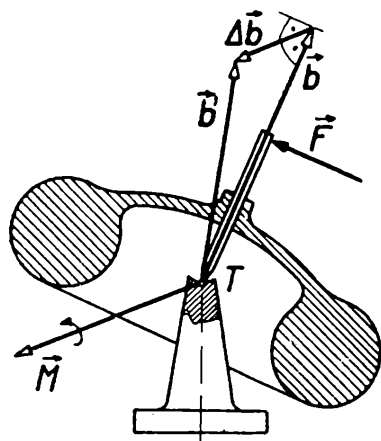
Této vlastnosti setrvačnicku se využívá v letectví u indikačních a stabilizačních přístrojů, jako je např. umělý horizont indikující polohu

letadla v mlze, zatačkoměr, setrvačnickový kompas a tzv. automatický pilot, který slouží k automatickému řízení a k stabilizaci letadla.

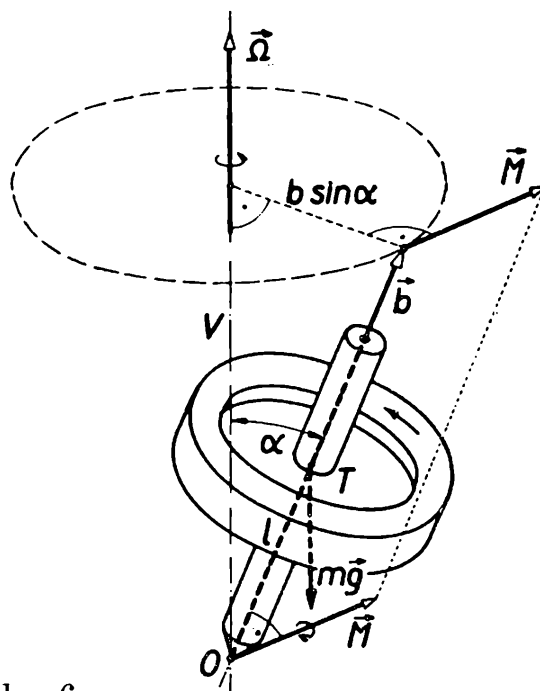
#### 4.2. Setrvačník podrobený vnějšímu působení

Uvažujme o setrvačníku z minulého odstavce, o kterém jsme předpokládali, že byl roztočen přesně podle osy souměrnosti, tedy tak, že osa setrvačníku splývá se směrem momentu hybnosti  $\mathbf{b} = J\boldsymbol{\omega}$ . Působí-li na setrvačník vnější moment síly, můžeme si jej rozložit do směru osy setrvačníku a do kolmice na osu. Všimněme si odděleně účinků těchto složek.

Moment síly působící v ose setrvačníku ovlivňuje podle II. impulsové věty pouze velikost momentu hybnosti, a tím úhlové rychlosti setrvačníku. Tedy setrvačník roztáčí nebo brzdí (např. vlivem tření v podpěrném bodě).



Obr. 5.



Obr. 6.

Nechť nyní působí v časovém intervalu  $\Delta t$  kolmo na osu setrvačníku v rovině nákresny (viz obr. 5) síla  $\mathbf{F}$ . Podle II. impulsové věty (19) vyvolá moment  $\mathbf{M}$  této síly, který míří kolmo z nákresny, změnu momentu hybnosti  $\Delta\mathbf{b} = \mathbf{M} \Delta t$  v téměř směřu. Osa setrvačníku se pak postaví do směru výsledného momentu hybnosti  $\mathbf{b}'$ . Účinek síly  $\mathbf{F}$  je tedy takový, že osa setrvačníku se snaží sklopit do směru osy rotace vynucené silou  $\mathbf{F}$ .

Vyšetřme nyní chování setrvačníku, působí-li kolmo na jeho osu moment síly  $\mathbf{M}$  stálé velikosti. Toho můžeme dosáhnout např. tím, že setrvačník podepřeme pod těžištěm v bodě  $O$  (obr. 6) a vykloníme

o úhel  $\alpha$  od svislice  $V$ . K vyšetření pohybu setrvačníku v tomto případě užijeme geometrické podoby II. impulsové věty. Protože moment síly  $\mathbf{M}$  působí stále kolmo na rovinu danou momentem hybnosti  $\mathbf{b}$  a svislicí  $V$  procházející opěrným bodem  $O$ , musí koncový bod vektoru  $\mathbf{b}$  vykonávat rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru  $b \sin \alpha$ . Podle II. impulsové věty je rychlost pohybu koncového bodu vektoru  $\mathbf{b}$  rovna momentu síly  $\mathbf{M}$ . Označme  $\Omega$  úhlovou rychlost tohoto pohybu, který se nazývá *pohybem precesním*. Ze vztahu  $\omega r = v$  mezi úhlovou rychlostí  $\omega$  a rychlostí  $v$  při pohybu po kružnici, ve kterém odpovídá  $\omega \sim \Omega$ ,  $r \sim b \sin \alpha$  a  $v \sim M$ , dostaneme vztah

$$\Omega b \sin \alpha = M$$

Z toho

$$\Omega = \frac{M}{b \sin \alpha} = \frac{M}{J\omega \sin \alpha} \quad (22)$$

je velikost úhlové rychlosti precesního pohybu setrvačníku. Směr a orientace vektoru  $\Omega$  jsou dány obr. 6. V případě setrvačníku na obr. 6, který nazýváme *setrvačníkem těžkým*, protože moment síly o velikosti  $M = mgl \sin \alpha$  je způsoben tíhou setrvačníku, dostáváme

$$\Omega = \frac{mgl}{J\omega}$$

U těžkého setrvačníku nezávisí tedy úhlová rychlost precesního pohybu na úhlu  $\alpha$ .

Právě popsaná teorie setrvačníku je jen přibližná, protože jsme nepočítali s příspěvkem momentu hybnosti od precesního pohybu. Jelikož bývá tento příspěvek velmi malý ( $\Omega \ll \omega$ ), je vztah (22) dostatečně přesný.

Precesního pohybu je využito ve vojenství k stabilizaci letu rotujících střel, ve sportovní oblasti k stabilizaci letu disku a v dopravě např. k stabilizaci kymácení velkých lodí. Příznivě se projevuje precese u jednostopých vozidel. Nahne-li motocyklista motocykl tělem např. vlevo, vznikne moment  $\mathbf{M}$  tíhové síly (obr. 7), který vyvolá precesi o úhlové rychlosti  $\Omega$ , otáčející kolo také vlevo. Moment tíhové síly je přitom vyrovnáván momentem odstředivé síly, a proto je motocykl v zatáčce dynamicky stabilnější než automobil, u kterého se precese projevuje nepříznivě.

## 2. úloha

Střela ráže (tj. vnějšího průměru)  $d = 100$  mm a hmotnosti  $m = 30,0$  kg byla vystřelena z hlavně kanonu počáteční rychlostí  $v_0 = 900$  ms<sup>-1</sup>. V hlavní byla střele udělena rotace tak, že střela se za-

řezávala do závitu o stoupání  $s = 30d$ . V důsledku kmitu hlavně při výstřelu se osa střely odchýlila od tečny k dráze o malý úhel  $\alpha$ . Ve vzduchu bude na střelu působit síla odporu vzduchu  $R = 2,00 \cdot 10^3 \text{ N}$  ve směru rovnoběžném s tečnou k dráze, a to v působišti  $C$  vzdáleném o  $l = 1,5 d$  od těžiště (viz obr. 8). Vypočítejte:

a) celkovou počáteční kinetickou energii střely,

b) kolik otáček precesního pohybu střela vykoná, je-li doba letu střely  $t = 64,1 \text{ s}$  a budeme-li předpokládat  $R = \text{konst.}$

Při výpočtu momentu setrvačnosti považujte střelu za válec.

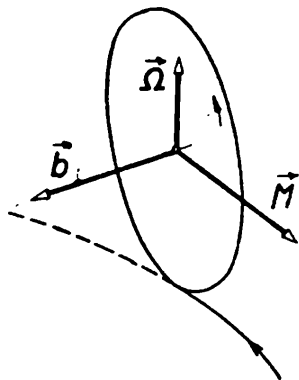
Řešení.

a) Pro celkovou počáteční kinetickou energii střely platí

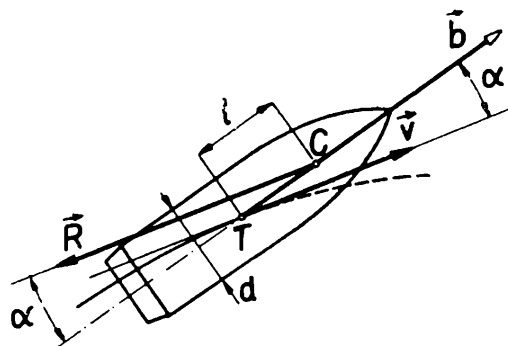
$$W_k = \frac{1}{2} (mv_0^2 + J\omega^2),$$

kde

$$J = \frac{1}{2} m \left( \frac{d}{2} \right)^2 \text{ a } \omega = \frac{2\pi}{T}$$



Obr. 7.



Obr. 8.

přičemž  $T$  je doba potřebná k jedné otáčce střely v hlavni, tj. k proběhnutí závitu výšky  $s$ . Platí tedy

$$s = v_0 T = 2\pi v_0 T = \frac{2\pi v_0}{\omega}$$

z toho

$$\omega = \frac{2\pi v_0}{s} = \frac{\pi v_0}{15d}$$

Po dosazení do hořejšího vztahu dostaneme

$$W_k = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{30} \right)^2 \right]$$

b) Střela bude vykonávat precesní pohyb s úhlovou rychlostí (22). Velikost momentu síly je  $M = Rl \sin \alpha = 1,5Rd \sin \alpha$ , velikost momentu hybnosti je

$$b = J\omega = \frac{\pi d m v_0}{120}$$

Po dosazení do výrazu (22) dostáváme

$$\Omega = \frac{180}{\pi} \frac{R}{m v_0}$$

Velikost úhlové rychlosti precesního pohybu tedy nezávisí na úhlu  $\alpha$  (pro velké  $\alpha$  by však střela ztratila stabilitu). Doba jedné otáčky je

$$T_p = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\pi^2}{90} \frac{m v_0}{R}$$

pro počet otáček precesního pohybu během letu střely dostáváme

$$n = \frac{t}{T_p}$$

Číselně.

$$\text{a) } W_k = \frac{1}{2} 30,0 \cdot 900^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{30} \right)^2 \right] J = 1,22 \cdot 10^7 J$$

$$\text{b) } T_p = \frac{\pi^2}{90} \frac{30,0}{2,00 \cdot 10^3} \frac{900}{s} = 1,48 \text{ s}, \quad n = \frac{64,1}{1,48} = 43,3.$$

Literatura:

- [1] Josef Zámečník, Základy vektorové algebry, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 47 (1968—69), č. 2, 75—80 a č. 3, 130—137.
- [2] Antonín Bělař a kol., Fyzika pro učitele I., Praha 1967.
- [3] Zdeněk Ungermann, Odvození momentu setrvačnosti elementárními prostředky, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 46 (1967—68), č. 8 a 9.
- [4] Zdeněk Horák, František Krupka, Fyzika, Praha 1966.

\*



## Ze života průkopnice v oboru atomové a radiologické fyziky

Prof. dr. VILÉM SANTHOLZER, DrSc., Hradec Králové

Před nedávným zemřela v Anglii (v Cambridge) ve věku devadesáti let prof. dr. *Lise Meitnerová*, dlouholetá spolupracovnice objevitele štěpení uranového jádra, prof. dr. *Otty Hahna*.<sup>1)</sup> Meitnerová byla třetí z velkých ženských postav a průkopnic v oboru radiologické fyziky. Byly to: paní *Marie Curieová*, objevitelka prvku radia (r. 1898), která zemřela r. 1934; dále její dcera *Irena Joliotová-Curieová*, manželka prof. *Joliot-Curie*, s nímž r. 1934 objevila umělou radioaktivitu; pí Joliotová-Curieová zesnula r. 1956 (prof. Joliot-Curie r. 1958).

*Meitnerová* společně s *Hahnem* objevila některé nové radioaktivní prvky a radioizotopy, a společně se svým synovcem *Ottou Robertem Frischem* první zavedla název „štěpení“ atomového jádra, a správně vysvětlila jeho podstatu. (Prof. *Frisch*, žák dánského prof. *Nielse Bohra*, byl za druhé svět. války ředitelem laboratoří v *Los Alamos* ve Spoj. státech amerických, kde byla vyrobena první atomová puma.)

*L. Meitnerová*, nar. r. 1878 ve Vídni, získala r. 1905 doktorát z matematické fyziky na vídeňské universitě za práci o tepelné vodivosti v nestejnorodých vrstvách hmoty. R. 1907 nastoupila jako asistentka na Ústav pro teoretickou fyziku berlínské university, jehož přednostou byl objevitel kvantové teorie prof. *Max Planck* (1858–1947). Za nedlouho začala spolupracovat s berlínským radiochemikem *Hahnem*. S tehdejšími jednoduchými a skromnými prostředky se jim zdařilo objevit některé krátce žijící (krátkodobé) členy v rozpadových řadách přírodních radioaktivních prvků, např. radioizotopy thalia *thorium C''* (poločas 3,1 min) a *aktinium C''* (4,8 min). Tím přispěli k postupnému doplnění rozpadových schémat řady *aktiniové* a *thoriové*, a k objasnění genetických souvislostí jednotlivých radionuklidů (radioizotopů) v těchto radioaktivních posloupnostech. Měření aktivity, tj. intenzity radio-

---

<sup>1)</sup> *V. Santholzer*, Rozhledy mat. fyz., 47 (1968–69), str. 469, č. 9. Viz také *M. Bobecký*, Čs. čas. fyz. A 19 (1969), str. 501.

aktivního záření, prováděli tenkrát jednoduchým lístkovým elektroskopem. Oba uvedené radioizotopy, ThC'' i AcC'' se přeměňují na stabilní slovo.

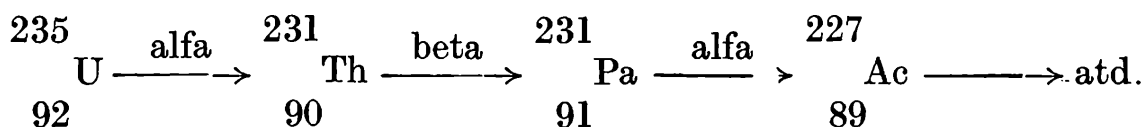
R. 1913 se *Hahn* z chemického ústavu přestěhoval do nově postaveného *Ústavu císaře Viléma pro chemii* (Kaiser Wilhelm Institut) v Berlíně-Dahlemu, kde postupně vznikla řada vědeckých ústavů (pro fyzikální chemii, pro biologii, pro zkoumání materiálů aj.). Ústavy zřídila a financovala Společnost císaře Viléma za spolupráce čelných vědeckých odborníků. Zde jako host pracovala i Meitnerová. Po první svět. válce vzniklo zde radiologické oddělení, světoznámé Abteilung *Hahn-Meitner*. (Ve 30. letech zde prováděl svou disertační práci i autor této statě, a vědecký zde pracovala i docentka RNDr. *Jarmila Petrová*, nyní na Biologické fakultě KU v Praze.)

Pro Hahna i Meitnerovou první světová válka znamenala vytržení z vědecké práce. V l. 1915—17 Meitnerová pracovala jako rentgenolog v rakouských lazaretech, podobně jako *paní Curieová* působila na válečné frontě ve Francii.

R. 1918 *Hahn* a *Meitnerová* objevili dosud neznámý radioaktivní prvek č. 91, předchůdce uranu v Mendělejevově tabulce prvků, kde doposud bylo prázdné místo. Nový prvek měl radioaktivitu alfa a byl objeven při pátrání po mateřském prvku aktinia v uranových zbytcích, vznikajících při výrobě prvku radia. Na jednu tunu uranu připadá v rovnovážném stavu 340 mg tohoto prvku, pro nějž *Hahn* a *Meitnerová* navrhli název *protaktinium* (Pa). (Název protaktinium, „první aktinium“, vystihuje skutečnost, že je to mateřská látka prvku aktinia.)

Poločas Pa je 34 000 let, takže jej lze vyrábět v gramových množstvích; asi ve třech tunách přírodního uranu je gram protaktinia. Nezávisle jej objevili též *Soddy* a *Cranston* v Anglii.

Přírodní řada aktiniová začíná aktinouranem (AcU), který je izotopem uranu hmotového čísla 235, tedy U 235. Přírodní uran obsahuje 99,3 % uranu 238 a 0,7 % uranu 235. V mírně nadkritickém množství je U 235 nukleárním palivem, ve značně nadkritickém množství je však nukleární trřaskavinou. Řada aktiniová má tedy následující počáteční, genetickou posloupnost:

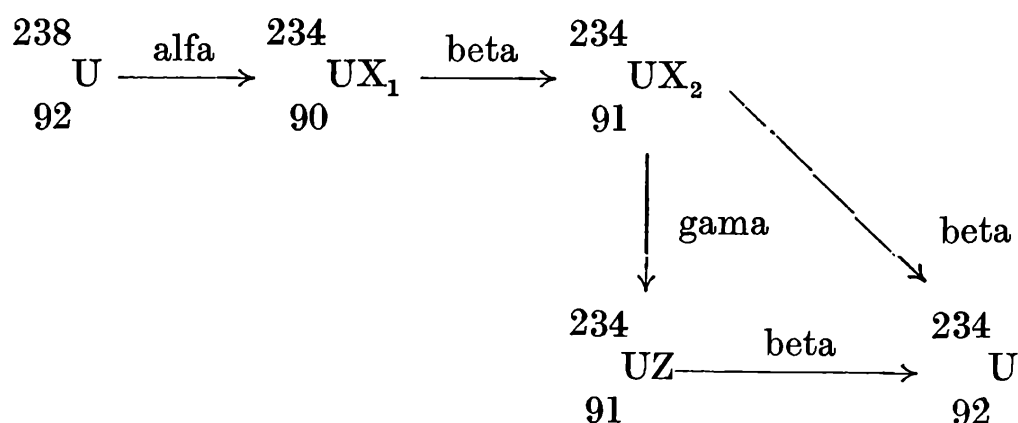


Je třeba si uvědomit, že vyslání paprsku alfa (heliového jádra náboje 2 a hmotnosti 4) má za následek snížení hmotnosti jádra o čtyři a náboje o dvě jednotky. Vyslání paprsku beta (negatronu) hmotnost nesnižuje, avšak atomové číslo zvýší o jednotku, neboť ztráta záporného náboje

znamená přebytek kladného. Dceřinou látkou aktinouranu  $U^{235}$  je tudíž thorium 231, izotop thoria hmotového čísla 231, který se účinkem vysílání paprsků beta mění na protaktinium; to se účinkem vysílání paprsků alfa mění na aktinium,  $Ac^{227}$  poločasu asi 22 let. Poločas aktinouranu je skoro miliarda let, a proto se ještě dnes vyskytuje v přírodním uranu - stáří zeměkoule je 5 miliard let. Poločas izotopu thoria 231 je asi 26 hodin (kdežto poločas thoria 232, které je výchozím členem řady thoriové, je 14 miliard let).

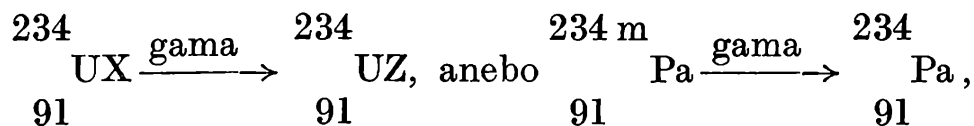
V dnešní době lze vyrábět *umělé protaktinium*, např. ostřelováním thoria deuterony (jádra těžkého vodíku), zrychlenými elektrickým polem v urychlovačích.

U přírodního protaktinia objevil *Hahn* zajímavý jev, který *Meitnerová* (podle obdoby s organickou chemií) nazvala *izomerie*. Izomery jsou jádra téhož atomového i hmotového čísla, patřící tedy na stejné místo v tabulce prvků. Přesto jsou to jádra rozdílná, lišící se různými vlastnostmi, např. svým obsahem energie a svou radioaktivitou. U protaktinia se vyskytují dva izomery, nazvané z historických důvodů *uran X<sub>2</sub>* a *uran Z*, ačkoliv nejde o izotopy uranu, nýbrž protaktinia. Oba izomery vznikají z izotopu uranu  $U^{238}$  postupnou přeměnou přes *uran X<sub>1</sub>* (který je izotopem thoria):



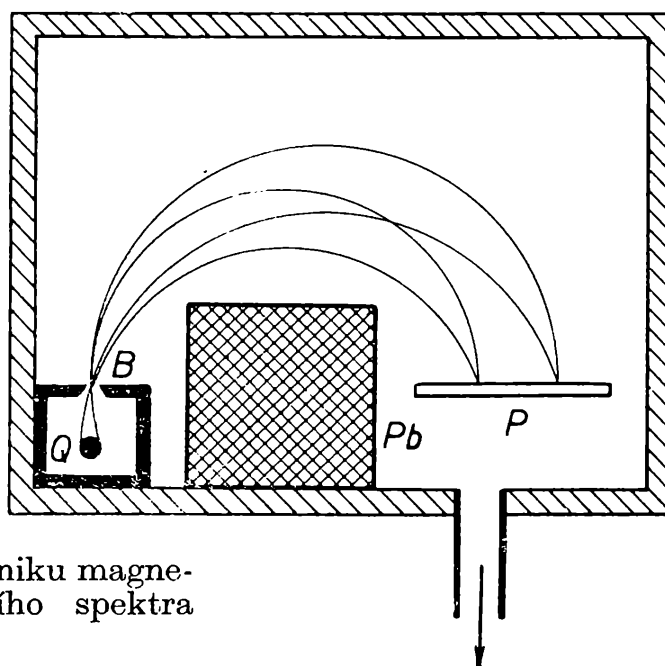
Oba izomery,  $UX_2$  a  $UZ$ , se mění nakonec na izotop uranu 234, jehož je v přírodním uranu asi 0,006 %. Při rozpadu  $UX_1$  se mění na *uran X<sub>2</sub>*, a 0,35 % *uran X<sub>2</sub>* se mění na *uran Z*, a to *vysláním paprsku gama*, které nemá za následek přeměnu prvku, nýbrž jen snížení energie jádra. Jádro  $UX_2$  je tedy excitované, vzbuze, a do základního energetického stavu může přejít buď přímo, tj. rozpadem beta na uran 234, anebo složitější cestou: vysláním fotonu (paprsku gama) a teprve potom vysláním paprsku beta. Jadernou izomerií tedy rozumíme jádra stejného složení, avšak lišící se svou excitací, což má za následek *různé poločasy rozpadu*. Izomer *uran X<sub>2</sub>* má poločas 1,1 minuty, kdežto izomer *uran Z* 6,7 hodiny. Pro tvorbu izomerů má tedy rozhodující význam rozložení energetických hladin v jádrech atomů. Rozeznáváme hladinu základní

a hladiny vzbuzené. *Hahn a Meitnerová* prokázali v chemicky odděleném protaktiniu právě uvedené různé poločasy, a tak objevili izomerii. Podle návrhu *Segrého* (po druhé svět. válce) označujeme vyšší izomer značkou *m* (znamená *metastabilní*), kterou připisujeme k hmotovému číslu:



neboť jsou to izotopy protaktinia, prvku č. 91. Uvedený vztah nazýváme *izomerický přechod*. V dnešní době je mnoho umělých izomerů mezi umělými radioizotopy neboli radionuklidy. Některé mají i několik excitačních, metastabilních hladin, označovaných  $m_1$ ,  $m_2$ , atd.

Meitnerová se v období po první svět. válce zabývala fotografováním *magnetických spekter* paprsků beta. Paprsky beta jsou záporně nabitě elektrony, a působí na ně tudíž magnetické pole. Podstata zařízení



Obr. 1. Podstata vzniku magnetického, rychlostního spektra paprsků beta.

k fotografování spekter je na obr. 1. Ve vyčerpané schránce je radioaktivní preparát *Q*, vysílající paprsky beta, vycloněné štěrbinou *B* v úzký svazek. Stejnorodé, příčné magnetické pole, v němž je schránka umístěna, zakřivuje dráhy elektronů do kruhových drah poloměrů tím menších, čím je energie elektronů nižší. Svazky elektronů stejné energie dopadají na určité místo na fotografické desce *P*, kde se po vyvolání objeví tmavá čára, vlastně obraz štěrbinu *B*. Je-li několik druhů paprsků beta různé energie, vznikne *čárové spektrum*. (Energie lze vypočítat ze známé intenzity magnetic. pole a z poloměru drah.)

Olověný blok *Pb* chrání fotografic. desku před přímým dopadem paprsků. *Primární* paprsky beta doprovázejí přeměnu radioaktivního jádra, a jejich spektrum je *spojité*, až do určité maximální energie. Kromě primárních paprsků beta jsou ještě *sekundární* paprsky beta, vyskytující se u všech látek, které při radioaktivních přeměnách vysílají paprsky gama. (Vznik sekundárních elektronů je obdobný vzniku fotoelektronů při fotoelektrickém jevu.) Meitnerová získala sekundární paprsky beta i např. dopadem paprsků gama vysílaných radioizotopem thoriem B na platinu a olovo. Z magnetického spektra určovala energie sekundárních paprsků, a tudíž také energie paprsků gama, a tím nepřímou i energii určitých hladin v jádře, z něhož paprsky gama pocházejí. (Protože magnetická spektra určují rychlosti paprsků beta, jsou nazývána také *rychlostní spektra beta*.)

V dnešní době se k určování energií paprsků gama užívá přímé metody: *scintilační spektrometrie gama*<sup>2)</sup>). Magnetická spektra byla průkopnickou metodou, která prvně dokázala existenci energetických hladin v atomových jádrech.

Od r. 1934 se Meitnerová účastnila prací, které prováděl Hahn a jeho asistent *Strassmann* (nyní prof. univ. v Bonnu). Tyto velmi závažné práce byly inspirovány pokusy, které prováděl *Enrico Fermi*, fyzik nemocnice v Římě. (Před druhou svět. válkou emigroval do Spoj. států amerických, kde v Chicagu r. 1942 postavil první atomový reaktor, a uskutečnil v něm první řetězovou, štěpnou reakci v uranu.)

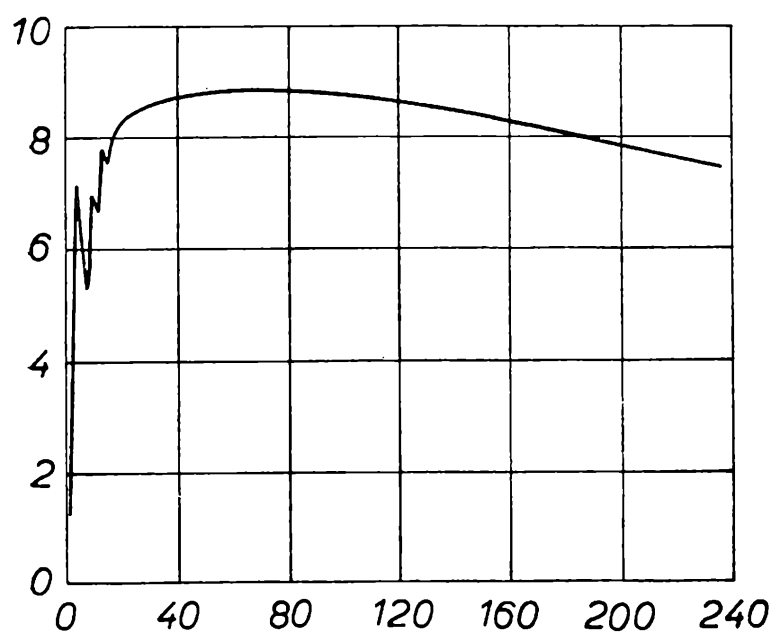
*Fermi* ostřeloval neutronovým zářením různé látky, a také nejvyšší tenkrát známý prvek uran. Prokazoval celou řadu různě aktivních látek, které přitom z uranu vznikaly. Hahn, Strassmann a Meitnerová v pokusech pokračovali, podobně jako v Paříži *Irena Joliotová-Curieová* se spolupracovníky. Dlouho se nedařilo vysvětlit, jaké vlastně látky z uranu vznikají, co neutronové střely v uranových jádrech působí. Správný výklad se zdařil r. 1939 Hahnovi a Strassmannovi: jde o rozbití uranového jádra, při čemž vzniká mnoho různých trosek, fragmentů uranového jádra, v podstatě radioizotopů poblíže středu Mendělejevovy soustavy prvků. (Dnes je známo, že se tvoří několik set trosek.) Při rozbití uranu se vzhledem k velikosti zúčastněných hmot uvolňuje obrovská energie - nový jev se stal později základem, na němž byl sestrojen první uranový reaktor a první atomová puma. Vznik obrovské energie se podařilo vysvětlit *L. Meitnerové* a *O. R. Frischovi* na základě již tenkrát známého obr. 2. Název *štěpení*, který Meitnerová současně navrhla pro rozbití uranu, se všeobecně ujal. Výklad podle obr. 2 je velmi jednoduchý. Jádra všech prvků se skládají z nukleonů, protonů a neutronů. Hmotnost

---

<sup>2)</sup> *V. Santholzer*, Rozhledy matem. fyzikální 43 (1964—65), str. 217—221, seš. 5.

jádra není však dána součtem hmotností nukleonů, při spojení nukleonů v jádro nastává *hmotový schodek*. Podle *Einsteinova zákona vzájemné souvislosti hmoty a energie* úbytku hmotnosti odpovídá vznik příslušné energie. Na obr. 2 jsou příslušné hmotové schodky přepočtené na energii, a ta je dělena celkovým počtem nukleonů. Na ose *y* jsou vazebné energie přepočtené na jeden nukleon, tedy střední vazebné energie pro nukleon; na ose *x* jsou hmotová čísla.

Při štěpení uranu je celková hmota odštěpků poněkud menší než původní hmota jádra. Je to tím, že prvky poblíže středu soustavy prvků mají větší vazebnou energii než uran. Křivka na obr. 2 jasně ukazuje,



Obr. 2. Vazebné energie jader (přepočtené na jeden nukleon) v závislosti na hmotovém čísle. Na ose *x* jsou hmotová čísla, na ose *y* vazebné energie v megaelektronvoltech (MeV).

že při štěpení uranu musí se uvolnit energie. Nukleonům uranu 235 přísluší vazebná energie 7,6 MeV (megaelektronvoltů), nukleonům prvků poblíže středu soustavy asi 8,4 MeV. Rozdíl energií je 0,8 pro nukleon, a protože uran 235 má 235 nukleonů, musí se při jednom štěpení uvolnit celková energie  $235 \times 0,8 = 188$  MeV, což přibližně odpovídá skutečnosti.

Tak byly zahájeny první kroky na cestě k technickému uvolnění atomové energie, ke vzniku atomových elektráren a pohonných reaktorových jednotech. V SSSR již řadu let je v provozu atomový ledoborec „Lenin“, v NSR byla nedávno dokončena nákladní loď s nukleárním pohonem a dostala jméno „Otto Hahn“. V USA byl dokončen nukleární raketový motor k pohonu meziplanetárních lodí.

Ve druhé svět. válce Meitnerová pracovala ve Švédsku u prof. Siegbahna, kam se již před začátkem války uchýlila z nacistického Německa. Za své vědecké práce obdržela různé ceny, např. medaili Maxe Plancka.

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

ellipsoïde *m*  
ellipsoïde de révolution  
(allongé, aplati)  
elliptique  
ennéagone *m*  
énoncé *m* (d'un problème)  
ensemble  
ensemble *m*  
ensemble dénombrable  
ensembles disjoints  
ensemble fini  
ensemble infini  
ensemble ordonné  
ensemble vide  
entier, ère  
nombre *m* entier  
entier *m*  
entourage *m*  
enveloppe *ž*  
environ  
envisager  
épaisseur *ž*  
épicycloïde *ž*  
épure *ž*  
équateur *m*  
équation *ž*  
équation d'une courbe  
équation différentielle  
équation linéaire  
équation du second degré  
résoudre une équation  
équation à plusieurs inconnues

elipsoid  
rotační elipsoid  
(protáhlý, zploštělý)  
eliptický  
devítiúhelník  
zadání (úlohy)  
spolu  
množina  
spočetná množina  
disjunktní množiny  
konečná množina  
nekonečná množina  
uspořádaná množina  
prázdná množina  
celý, celistvý  
celé číslo  
celé číslo  
okolí  
obálka (soustavy křivek)  
kolem, přibližně  
uvažovati  
výška, tloušťka  
epicykloida  
nárys, výkres  
rovník  
rovnice  
rovnice křivky  
diferenciální rovnice  
lineární rovnice  
kvadratická rovnice  
řešit rovnici  
rovnice o více neznámých

|                                  |                                                                                             |
|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| équerre                          | trojúhelník (jen smyslu rýsovací pomůcky)                                                   |
| équidistant, e                   | ekvidistantní                                                                               |
| équilatéral, e, aux              | rovnostranný                                                                                |
| équilatère (hyperbole)           | rovnosá (hyperbola)                                                                         |
| équilibre <i>m</i>               | rovnováha                                                                                   |
| équivalence <i>ž</i>             | ekvivalence                                                                                 |
| équivalent, e                    | ekvivalentní                                                                                |
| figures <i>ž</i> équivalentes    | utvary rovnoploché                                                                          |
| projection <i>ž</i> équivalente  | kartografická projekce rovnoplochá                                                          |
| espace <i>m</i>                  | prostor                                                                                     |
| espace-temps <i>m</i>            | časoprostor                                                                                 |
| espèce <i>ž</i>                  | druh                                                                                        |
| essentiel, elle                  | podstatný                                                                                   |
| étudier                          | studovat, zkoumat                                                                           |
| évidemment                       | očividně                                                                                    |
| évident, e                       | evidentní, očividný                                                                         |
| exact, e                         | správný, exaktní                                                                            |
| exactement                       | správně                                                                                     |
| excentricité <i>ž</i>            | výstřednost, excentricita                                                                   |
| exception <i>ž</i>               | výjimka                                                                                     |
| exclure                          | vyloučiti                                                                                   |
| principe <i>m</i> du tiers exclu | princip vyloučeného třetího<br>(buď platí <i>p</i> nebo non <i>p</i> , třetí možnosti není) |
| exécuter                         | provést                                                                                     |
| exemple <i>m</i>                 | příklad                                                                                     |
| exercice <i>m</i>                | cvičení                                                                                     |
| exinscrit, e                     | připsaný                                                                                    |
| cercle exinscrit au triangle     | kružnice připsaná trojúhelníku                                                              |
| existence <i>ž</i>               | existence                                                                                   |
| exister                          | existovat                                                                                   |
| explication                      | výklad                                                                                      |
| explicite                        | explicitní                                                                                  |
| expliquer                        | vyložit                                                                                     |
| exponentiel, elle                | exponenciální                                                                               |
| exposant <i>m</i>                | mocnitel, exponent                                                                          |
| expression <i>ž</i>              | výraz                                                                                       |
| exprimer                         | vyjádřit                                                                                    |
| extérieur                        | vnější                                                                                      |
| externe                          | vnější                                                                                      |
| extraction <i>ž</i>              | odmocnění                                                                                   |
| extraction d'une racine carrée   | určení druhé odmocniny                                                                      |
| extrême <i>m</i>                 | extrém                                                                                      |
| extrême <i>m</i>                 | extrémní hodnota funkce                                                                     |
| extrémité <i>ž</i>               | krajní či koncový bod                                                                       |



# **rozhledy**

**MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ**

---

**7**

**ROČNÍK 48. 1969-1970, MAREC**



ROČNÍK 48  
MAREC 1969-70

7

# MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

Za zásluhy o výstavbu

## VEDÚCI REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositel významného Za vynikající práci

## VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

## REDAKČNÁ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřední inšp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDS Praha; zasl. učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Pavel Ferko, PF, B. Bystrica; Miloš Franek, SVŠ, Prievidza; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Koros, DrSc., ČVUT, Praha; dr. Oldřich Lepil, PU, Olomouc; Milan Marčok, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava; prof. dr. Cyril Paľaj PF-UPJŠ, Košice; Evžen Říman, CSc., ČVUT, Praha, nositel významného Za vynikající práci; dr. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; Ing. dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ ÚNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarík, inšp. MŠ SSR, Bratislava

## REDAKCIA:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29

## OBSAH

|                                                                                                          |                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| J. Sedivý: Učme se jazyku not-et-vel                                                                     | 293                 |
| Fr. Kejla: Užití řetězových zlomků                                                                       | 296                 |
| RNDr. V. Kolesnikov - RNDr. J. Záhejský: Dopplerův jev v teorii relativity a jeho experimentální ověření | 303                 |
| Ing. A. Štěpánek: Foucaultovo kyvadlo                                                                    | 313                 |
| RNDr. M. Šíroková - RNDr. J. Šíroky: Ekosféry hvězd                                                      | 322                 |
| J. Kotyk: Albert Einstein, vědec a prorok                                                                | 326                 |
| Naše soutěž                                                                                              | 330                 |
| Mezinárodní matematická olympiáda                                                                        | 333                 |
| Matematické a fyzikální zábavy                                                                           | 383                 |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český                                                             | 3. a 4. str. obálky |

Vydává ministerstvo školstva v štátnom pedagogickom nakladateľstve v Prahe, za odbornej starostlivosti Jednoty čs. matematikov a fyzikov.

Vychádza desať razy do roka. Ročné predplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 €, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tlačí Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštová novinová služba. Informácie o predplatnom podá a objednávky prijímá každá pošta i doručovateľ. Objednávky do zahraničia vybavuje PNS, ústredný sklad expedície tlače, odd. vývoz tlače, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učiteľ dr. O. Hönl. Titulné obrázky: B. Šmejdivá, študujúca FS.

Štátne pedagogické nakladateľstvo, n. p. v Prahe, 1970.



## MATEMATIKA

---

# Učme se jazyku non - et - vel

JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

Ptáte se asi, o jaký podivný jazyk jde. Někteří z vás však jistě tuší, že se za tímto názvem skrývá nějaká logická záležitost. Latinská slova *non*, *et*, *vel* znamenají *ne*, *a*, *nebo* a používají se při tvoření výroků. Ano, půjde skutečně o tvoření výroků, novinkou však bude, že budeme usilovat o to, abychom vystačili pouze s těmito třemi slůvky.

V moderní matematice a logice se často hledají způsoby, jak vyřešit dané úlohy omezenými prostředky, např. jen operacemi, jež může provádět matematický stroj, který je k dispozici. Z technických důvodů se omezuje počet základních operací stroje, proto bývá třeba vyjádřit údaje úlohy způsobem „stroji srozumitelným“ a sestavit program jeho činnosti z několika málo operací tak, aby se dosáhlo vyřešení úlohy. Nejjednodušší matematické stroje provádějí operace, které těsně souvisejí s tvořením nových výroků pomocí slov *ne*, *a*, *nebo*. Proto nebude samoučelným hraním vaše úsilí vystačit při tvoření nových výroků se třemi operacemi. Tato činnost bude přípravou k výkladu, jak lze algebraicky vypočítávat pravdivost či nepravdivost výroků.

V Rozhledech jste četli řadu článků o negování výroků, další dvě operace — konjunkci a alternativu (disjunkci) jistě také znáte. Budeme vždy postupovat tak, že zvolíme v dané situaci několik výchozích výroků a všechny ostatní výroky o ní se pokusíme vyjádřit pomocí jen těchto tří operací:

negace výroku  $x$       Není pravda, že  $x$ . Symbol  $x'$        $\text{non } x$ ;

konjunkce výroků  $x, y$        $x$  a zároveň  $y$ . Symbol  $x \wedge y \dots x$  et  $y$ ;  
alternativa výroků  $x, y$        $x$  nebo  $y$ . Symbol  $x \vee y$        $x$  vel  $y$ .

Symbolické zápisy výroků budeme tedy číst jen pomocí názvů písmen a pomocí slov *non*, *et*, *vel*, proto můžeme říci, že budeme hovořit jazykem non-et-vel. Připomeňme si ještě, že slovo „nebo“ má v logice nevylučovací význam. Věť „Přijde Karel nebo Milan“ rozumí logik tak, že aspoň jeden z nich přijde, tj. mohou přijít i oba.

Začněme „po anglicku“ konstatováním, jaké je počasí. Zvolme výchozí výroky: Prší. Mrzne. Svítí slunce. Fouká vítr. Symboly:  $p, m, s, v$ . Použijeme-li tři operací, které jsme uvedli, můžeme charakterizovat různé počasí v danou chvíli, například: Nefouká vítr. Neprší. Mrzne a svítí slunce. Prší nebo fouká vítr. Fouká vítr a neprší. Symbolické zápisy těchto výroků pořídíme snadno:  $v', p', m \wedge s, p \wedge v, v \wedge p'$  Nyní si ukážeme některé zvláštnosti při vyjadřování výroků o počasí v jazyku non-et-vel. Uvedeme vždy znění výroku v hovorovém jazyce, pak jeho přepis v jazyce non-et-vel a nakonec symbolický zápis.

|                                             |                                                       |                   |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------|
| 1. Prší i svítí slunce.                     | Prší <i>a</i> svítí slunce.                           | $p \wedge s$      |
| 2. Slunce svítí, přesto však mrzne.         | Slunce svítí <i>a</i> mrzne.                          | $s \wedge m$      |
| 3. Neprší, ale fouká vítr.                  | Neprší <i>a</i> fouká vítr.                           | $p' \wedge v$     |
| 4. Nemrzne ani nefouká vítr.                | Nemrzne <i>a</i> nefouká vítr.                        | $m' \wedge v'$    |
| 5. Není pravda, že neprší ani nefouká vítr. | Není <i>pravda</i> , že neprší <i>a</i> nefouká vítr. | $(p' \wedge v')'$ |
| 6. Je zamračeno, lístek se nepohne.         | Slunce <i>nesvítí a</i> vítr <i>nefouká</i> .         | $s' \wedge v'$    |

Vidíte, jak různých spojek používáme v hovorovém jazyce tam, kde vystačíme s jedinou logickou spojkou. Zařazením slov „ale, ani, přesto však“ vyjadřujeme své podivení nad skutečností, to však logiků nezajímá, protože neregistruje naše pocity. Šestý příklad naznačuje, že si při překladu básnicky laděných lícení do jazyka non-et-vel musíme leccos domyslet.

Přejděme nyní do sféry, kde je pravdivost výroků zvlášť přísně posuzována. Jistě jste četli knihy nebo viděli filmy, kde porota rozhodovala o vině obviněných. Předpokládejme, že jsou obviněni dva muži  $A, B$ ; konečný výrok poroty musí tedy být zformulován pomocí těchto výroků:

$a$ :  $A$  je vinen,  $b$ :  $B$  je vinen,  $a'$ :  $A$  není vinen,  $b'$ :  $B$  je vinen.

Nevyznělo-li soudní přelíčení jednoznačně, mohou mít porotci různé názory. Napíšeme si opět několik jejich možných formulací o vině a vyjádříme je pak ve strohém jazyce non-et-vel.

|                                                 |                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7. Oba jsou vinni.                              | $A$ je vinen $a$ $B$ je vinen. $a \wedge b$                                                                                       |
| 8. $A$ je vinen, ale $B$ ne.                    | $A$ je vinen $a$ $B$ není vinen. $a \wedge b'$                                                                                    |
| 9. Aspoň jeden z nich je vinen.                 | $A$ je vinen <i>nebo</i> $B$ je vinen. $a \vee b$<br><i>Není pravda</i> , že $A$ není vinen $a$ $B$ není vinen. $(a' \wedge b')'$ |
| 10. Aspoň jeden z nich je nevinen.              | $A$ není vinen <i>nebo</i> $B$ není vinen. $a' \vee b'$<br><i>Není pravda</i> , že $A$ je vinen $a$ $B$ je vinen. $(a \wedge b)'$ |
| 11. Jestliže $A$ je vinen, pak $B$ rozhodně ne. | <i>Není pravda</i> , že $A$ je vinen $a$ $B$ je vinen. $(a \wedge b)'$                                                            |
| 12. Když je $B$ vinen, není vinen ten první.    | <i>Není pravda</i> , že je $B$ je vinen $a$ $A$ je vinen. $(b \wedge a)'$                                                         |
| 13. Buď jsou oba vinni nebo žádný z nich.       | $A$ je vinen $a$ $B$ je vinen <i>nebo</i> $A$ není vinen $a$ $B$ není vinen. $(a \wedge b) \vee (a' \wedge b')$                   |
| 14. Jediný z těch dvou je vinen.                | $A$ je vinen $a$ $B$ není vinen <i>nebo</i> $A$ není vinen $a$ $B$ je vinen. $(a \vee b') \wedge (a' \wedge b)$                   |

<sup>f</sup> Sedmý a osmý příklad jen potvrzuje předcházející zkušenosti se spojkou „a“. V 9. a 10. příkladě nacházíte dvojí možné vyjádření výroků s kvantifikátory aspoň jeden ze dvou, nejvýše jeden ze dvou. I jazyk non-et-vel tedy připouští nejednoznačné vyjádření výroků. Bedlivě si všimněte příkladů 10, 11 a 12, kde tři různé formulace v hovorovém jazyce mají totéž vyjádření v jazyce non-et-vel. To je rovněž velmi závažné zjištění. Zbývající příklady jsou poněkud složitější, nikoliv však obtížné.

Příklady 11 a 12 dokumentují, že v jazyce non-et-vel neužíváme implikací, tj. složených výroků tvaru „*jestliže*  $x$ , *pak*  $y$ “. Při jejich vyjádření v tomto jazyce vycházíme z toho, že implikace „*jestliže*  $x$ , *pak*  $y$ “ znamená přesně totéž co výrok „*není pravda*, že *platí*  $x$  a *neplatí*  $y$ “. Rozmyslete si dobře tuto věc, je neobyčejně závažná (podrobněji o ní pojednává souběžný článek A. Šarounové).

Jazyk non-et-vel nebyl vytvořen jako hříčka logiků, pozoruhodně těsně souvisí např. se základními množinovými operacemi, doplněk, průnik a sjednocení. Uvědomte si, že říkáme

$x \in A'$  právě tehdy, když *není pravda*, že  $x \in A$   $(x \in A)'$ ,  
 $x \in A \cap B$  právě tehdy, když  $x \in A$  *a zároveň*  $x \in B$   $(x \in A) \wedge (x \in B)$ ,  
 $x \in A \cup B$  právě tehdy, když  $x \in A$  *nebo*  $x \in B$   $(x \in A) \vee (x \in B)$ .

Všimněte si, že i množinová symbolika „ $\cap$ ,  $\cup$ “ je nápadně zvolena tak, aby odpovídala logické symbolice „ $\wedge$ ,  $\vee$ “, která je součástí abecedy jazyka non-et-vel.

Vyřešte si podle příkladů 1–14 cvičení, která jsou připojena k tomuto článku, v příštím čísle Rozhledů navážeme na výsledky cvičení a ukážeme si algebraickou metodu výpočtu pravdivosti a nepravdivosti výroků.

## Cvičení

1. Použijte základních výroků uplatňovaných v příkladech 1–14 i jejich symbolů a vyjádřete v jazyce non-et-vel tyto výpovědi: Při dešti nefouká vítr. Když mrzne, neprší. Vinen je právě jeden z obviněných  $A$ ;  $B$ . Žádný z nich není vinen. Pokud je vinen  $B$ , byl  $A$  jeho pomocníkem. Obviněný  $A$  to nemohl provést bez  $B$ .

2. Zvolte základní výroky, jejich symboly a запиšte pomocí nich v jazyce non-et-vel všechny výroky, které vystihnou zjištění obsažená v tomto textu: Při vyšetřování krádeže bylo zjištěno pět podezřelých  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ . Dále je známo, že v době činu mohl být na místě  $C$  nebo  $D$ , ale nejvýše jeden z dvojice  $A$ ,  $B$  a aspoň jeden z dvojice  $A$ ,  $C$ . Podezřelý  $E$  tam mohl být jen v přítomnosti  $D$ , ale pokud tam  $E$  byl, nechyběl ani  $C$ . Dávni kumpáni  $B$  a  $D$  se nyní nesnášejí, proto lze vyloučit jejich spolupráci, zato  $B$ ,  $C$  tvoří nerozlučnou dvojici. Který z podezřelých má alibi a jaké jsou možnosti pro složení party? Snažte se nalézt odpověď zatím zkusmo.

# Užití řetězových zlomků

FRANTIŠEK KEJLA, ČVUT Praha

Při praktickém použití řetězových zlomků k řešení rovnice  $f(x) = 0$ , kde  $f(x)$  je polynom stupně  $n$  s reálnými koeficienty, je třeba tento polynom „rozvést“ podle mocnin lineárního dvojčlenu  $(x - a)$ . To lze provést velmi jednoduše a přehledně vhodným uspořádáním výpočtu v tzv. Hornerově schématu, které si nyní odvodíme, abychom nemuseli později výklad tříštit.

**H o r n e r o v o s c h é m a.** Dělíme-li polynom  $f(x)$  stupně  $n$  dvojčlenem  $(x - a)$ , dostaneme podíl  $f_1(x)$  stupně  $n - 1$  a zbytek  $r_0$ . (Může být ovšem také  $r_0 = 0$ .) Pak ovšem platí

$$f(x) = (x - a) \cdot f_1(x) + r_0$$

nebo podrobněji

$$\begin{aligned} c_0x^n + c_1x^{n-1} + & \quad + c_{n-k}x^k + & \quad + c_{n-1}x + c_n = \\ = (x - a) (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + & \quad + b_{n-k-1}x^k + \\ + b_{n-k}x^{k-1} + & \quad + b_{n-2}x + b_{n-1}) + r_0 \end{aligned} \quad (5)$$

Provedeme-li násobení naznačené na pravé straně, budou na obou stranách rovnice (5) polynomy téhož stupně  $n$ . Ty jsou si rovny právě tehdy, mají-li u stejných mocnin shodné koeficienty. Odtud plyne

$$b_0 = c_0; b_1 - ab_0 = c_1; b_2 - ab_1 = c_2; \dots; b_{n-k} - ab_{n-k-1} = \\ = c_{n-k}; \dots; b_{n-1} - ab_{n-2} = c_{n-1}; r_0 - ab_{n-1} = c_n,$$

takže pro neznámé koeficienty  $b_0, b_1, \dots, b_{n-k}, r_0$  dostaneme

$$b_0 = c_0; b_1 = c_1 + ab_0; b_2 = c_2 + ab_1; \dots; b_{n-k} = \\ = c_{n-k} + ab_{n-k-1}; \dots; b_{n-1} = c_{n-1} + ab_{n-2}; r_0 = c_n + ab_{n-1} \quad (6)$$

Celý výpočet uspořádáme do přehledné tabulky:

*Hornerovo schéma*

|     | $c_0$       | $c_1$<br>$ab_0$ | $c_2$<br>$ab_1$ | $c_{n-k}$<br>$ab_{n-k-1}$ | $c_{n-1}$<br>$ab_{n-2}$ | $c_n$<br>$ab_{n-1}$ |
|-----|-------------|-----------------|-----------------|---------------------------|-------------------------|---------------------|
| $a$ | $b_0 = c_0$ | $b_1$           | $b_2$           | $b_{n-k}$                 | $b_{n-1}$               | $r_0$               |

*Postup:* V prvním řádku zapíšeme postupně všechny koeficienty daného polynomu  $f(x)$  — včetně těch, které jsou popřípadě rovny nule. Ve třetím řádku vyznačíme číslo  $a$  z dvojčlenu  $(x - a)$  a opíšeme koeficient  $c_0 = b_0$ . Tento koeficient vynásobíme číslem  $a$  a součin zapíšeme do druhého řádku pod  $c_1$ . Součet obou pod sebou stojících čísel zaneseme do třetího řádku jakožto koeficient  $b_1$ . Ten opět vynásobíme číslem  $a$ , součin zapíšeme do druhého řádku pod  $c_2$  a celý postup opakujeme až do konce.

Pomocí uvedeného schématu určíme polynomy  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  a konstanty  $r_0, r_1, \dots, r_n$  tak, aby platilo

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a) \cdot f_1(x) + r_0 \\ f_1(x) &= (x - a) \cdot f_2(x) + r_1 \\ f_2(x) &= (x - a) \cdot f_3(x) + r_2 \end{aligned} \quad (7)$$

$$f_{n-1}(x) = (x - a) \cdot f_n(x) + r_{n-1}$$

$$f_n(x) = r_n$$

Přitom stupeň polynomu  $f_k(x)$  je zřejmě roven  $n - k$ . Násobíme-li rovnosti (7) po řadě čísly 1,  $(x - a)$ ,  $(x - a)^2$ ,  $(x - a)^n$  a pak všechny sečteme, dostaneme

$$f(x) = r_0 + r_1 \cdot (x - a) + r_2 \cdot (x - a)^2 + \dots + r_n \cdot (x - a)^n, \quad (8)$$

vše ostatní se zruší. Všechny koeficienty  $r_k$  určíme snadno v jediném Hornerově schématu, jak je vidět z následujícího příkladu.

*Příklad:* Polynom  $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x + 4$  rozvedeme podle mocnin dvojčlenu  $(x - 2)$ .

Protože v tomto případě jde v příslušném Hornerově schématu stále o násobení a sčítání poměrně malých celých čísel, můžeme tyto dva početní úkony provést vždy z paměti a ušetřit tak ve schématu pomocný (druhý) řádek.

|   | 2 | −3 | 0  | −5 | 4 |
|---|---|----|----|----|---|
| 2 | 2 | 1  | 2  | −1 | 2 |
|   | 2 | 5  | 12 | 23 |   |
|   | 2 | 9  | 30 |    |   |
|   | 2 | 13 |    |    |   |
|   | 2 |    |    |    |   |

Platí tedy

$$f(x) = 2(x - 2)^4 + 13(x - 2)^3 + 30(x - 2)^2 + 23(x - 2) + 2.$$

Píšeme-li zde ještě  $x - 2 = t$ , dostaneme polynom

$$2t^4 + 13t^3 + 30t^2 + 23t + 2,$$

čímž je v původním polynomu provedena substituce  $x = t + 2$ .

Všimněme si ještě, jak se změní rovnice  $f(x) = 0$  substitucí  $x = \frac{1}{y}$ , jestliže  $f(x)$  je polynom stupně  $n$ . Mějme rovnici

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_{n-1}x + c_n = 0$$

a provedme v ní zmíněnou substituci. Celou rovnici pak vynásobme číslem  $y^n$ , aby na levé straně byl opět polynom. Tak dostaneme

$$c_0 + c_1y + c_2y^2 + \dots + c_{n-1}y^{n-1} + c_ny^n = 0$$

Porovnáme-li tuto rovnici s původní, vidíme, že stačí ponechat koeficienty v daném pořadí, kdežto příslušné mocniny nové neznámé se připojí v opačném pořadí. Nebo — chceme-li i novou rovnici uspořádat podle mocnin sestupně — připojíme k příslušným mocninám nové neznámé původní koeficienty v opačném pořadí. (Přitom je ovšem nutno dát pozor, jsou-li některé koeficienty v dané rovnici rovny nule.) Tak např. rovnice



$$2x^3 + 3x^2 - 6x - 1 = 0$$

přejde substitucí  $x = \frac{1}{y}$  po úpravě v rovnici

$$-y^3 - 6y^2 + 3y + 2 = 0,$$

kdežto rovnice

$$x^3 - 2x + 5 = 0,$$

v níž je jeden koeficient nulový, přejde v rovnici

$$5y^3 - 2y^2 + 1 = 0.$$

Nyní již můžeme přikročit k řešení rovnice  $f(x) = 0$ , kde  $f(x)$  je polynom, s použitím řetězových zlomků. V článku o řetězových zlomcích jsme si řekli, že každé reálné číslo lze vyjádřit ve tvaru (standardního) řetězového zlomku. Toho využil Lagrange k řešení právě nadhozené úlohy. Uvidíme, že Lagrangeova metoda umožňuje najít reálné kořeny zmíněné rovnice s libovolnou předem zvolenou přesností.

*Lagrangeova metoda* má velmi jednoduchou myšlenku:

1. Určíme interval jednotkové délky  $(a_0; a_0 + 1)$ , ve kterém leží hledaný kořen.

2. Potom v rovnici provedeme substituci

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}$$

a novou rovnici upravíme tak, aby na levé straně byl opět polynom (vynásobíme ji  $x_1^n$ , kde  $n$  je stupeň rovnice).

Tak dostaneme novou rovnici, která má aspoň jeden kořen větší než 1. Opět najdeme interval jednotkové délky, v němž tento kořen leží a postup opakujeme. Vzorec (4) z článku o řetězových zlomcích udává odhad chyby, takže snadno poznáme, zda už bylo dosaženo požadované přesnosti či nikoliv. Dokonce lze se informovat o dosažené přesnosti také z vlastností částečných řetězových zlomků, že jejich hodnota je střídavě menší nebo větší než hodnota přesná (viz věta 5 z citovaného článku).

Ukažme si tuto metodu nejprve na velmi jednoduchém — ale v jistém směru poučném — případě kvadratické rovnice.

*Příklad:* Metodou řetězových zlomků najdeme kladný kořen rovnice  $x^2 - 2x - 2 = 0$  s chybou menší než  $5 \cdot 10^{-4}$  (tj. na zaručená 3 desetinná místa).

Zkusmo snadno zjistíme, že hledaný kořen leží v intervalu  $(2; 3)$ , neboť  $f(2) = -2 < 0$ , kdežto  $f(3) = 1 > 0$ , takže graf  $y = f(x)$  protne

osu  $x$  někde uvnitř uvedeného intervalu. Hledaný kořen lze tedy psát ve tvaru

$$x = 2 + \frac{1}{x_1},$$

kde  $x_1 > 1$ . Použijeme tudíž právě napsané substituce a po jednoduché úpravě dostaneme rovnici

$$-2x_1^2 + 2x_1 + 1 = 0,$$

která má jediný kladný kořen v intervalu  $(1; 2)$ .

Dosadíme tudíž znovu

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$$

a po úpravě dostaneme rovnici

$$x_2^2 - 2x_2 - 2 = 0,$$

tj. dostali jsme náhodou rovnici shodnou s tou, ze které jsme původně vyšli. Z toho můžeme soudit, že „články řetězu“ se dále budou stále pravidelně opakovat. Zřejmě to připomíná situaci u periodických desetinných zlomků, proto i zde v takovém případě hovoříme o *periodickém řetězovém zlomku*. Dá se dokonce dokázat, že všechna reálná čísla tvaru  $a \pm \sqrt{b}$ , kde  $a, b > 0$  jsou racionální čísla, se dají vyjádřit periodickým řetězovým zlomkem. (Samozřejmě pokud  $\sqrt{b}$  není racionální číslo — pak by totiž příslušný řetězový zlomek byl konečný.)

Hledaný kořen můžeme tedy psát ve tvaru  $[2; 1; 2; 1; 2; 1; \dots]$  nebo stručněji  $[2; \overline{1; 2}]$ , jako jsme zvyklí psát podobně periodické zlomky desetinné.

Abychom zjistili, jak daleko máme jít při rozvoji a výpočtu tohoto řetězového zlomku, použijeme vzorce pro odhad chyby. V našem případě má platit

$$|R_n| < \frac{1}{q_n^2} \leq 5 \cdot 10^{-4}$$

Z této nerovnosti plyne  $q_n^2 \geq 2000$ , takže  $q_n \geq 45$ . (Zřejmě bude stačit i trochu menší  $q_n$ , protože jsme pro hrubou orientaci použili také jen hrubšího odhadu. Prakticky můžeme říci, že bude stačit  $q_n$  asi kolem 40.)

Napišeme si tedy schéma pro výpočet řetězového zlomku, přičemž budeme v něm vždy počítat především spodní řádek. Jakmile se v tomto řádku objeví číslo z našeho odhadu nebo dokonce větší, pak výpočet ukončíme.

|   |   |   | 1 | 2 | 1  | 2  | 1  | 2   |
|---|---|---|---|---|----|----|----|-----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 8 | 11 | 30 | 41 | 112 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4  | 11 | 15 | 41  |

Přesnější odhad chyby teď dává

$$|R_n| < \frac{1}{q_n (q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{41 \cdot 56} < 0,0005,$$

jak bylo požadováno v textu úlohy

Hledaný kořen je tedy přibližně roven číslu  $\frac{112}{41} \doteq 2,7317$

Z vlastností částečných řetězových zlomků dokonce můžeme usoudit, že přesná hodnota kořenu je větší, nikoli však o více než o 0,0005. (Přímým řešením dané kvadratické rovnice zjistíme přesný kořen  $1 + \sqrt{3} \doteq 2,732\,05$ , takže námi nalezená hodnota se liší od přesné asi o  $3,5 \cdot 10^{-4}$ .)

Při praktickém výpočtu, tak jak byl naznačen v uvedeném příkladu, je velmi nepohodlné provedení substituce

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}$$

zejména tehdy, jde-li o rovnici vyššího stupně. Celý výpočet se podstatně zjednoduší, použijeme-li při něm Hornerova schématu. Potřebnou substituci provedeme ve dvou krocích: Nejdříve dosadíme  $x = a_0 + t$ , potom dosadíme  $t = \frac{1}{x_1}$ . První krok provedeme tak, že Hor-

nerovým schématem rozvedeme levou stranu rovnice podle mocnin dvojčlenu  $(x - a_0)$ , za něž si pak myslíme dosazeno  $t$ . Druhý krok pak znamená pouze psaní koeficientů v opačném pořadí, jak jsme s už ukázali. Celý postup je patrný z následujícího příkladu.

*Příklad:* Lagrangeovou metodou řetězových zlomků najdeme reálný kořen rovnice  $x^3 + 3x - 5 = 0$  s přesností na 3 desetinná místa (tj. s chybou menší než  $5 \cdot 10^{-4}$ ).

Z hrubého náčrtku grafu levé strany dané rovnice snadno zjistíme, že má jediný reálný kořen v intervalu  $(1; 2)$ . Dál už počítáme mechanicky Hornerovým schématem, ve kterém vždy číslo udané osamoceně v levém sloupci značí levý krajní bod jednotkového intervalu, v němž leží příslušný kořen.

|    |    |     |     |    |
|----|----|-----|-----|----|
|    | 1  | 0   | 3   | -5 |
| 1  | 1  | 1   | 4   | -1 |
|    | 1  | 2   | 6   |    |
|    | 1  | 3   |     |    |
|    | 1  |     |     |    |
|    | -1 | 6   | 3   | 1  |
| 6  | -1 | 0   | 3   | 19 |
|    | -1 | -6  | -33 |    |
|    | -1 | -12 |     |    |
|    | -1 |     |     |    |
|    | 19 | -33 | -12 | -1 |
| 2  | 19 | 5   | -2  | -5 |
|    | 19 | 43  | 84  |    |
|    | 19 | 81  |     |    |
|    | 19 |     |     |    |
|    | -5 | 84  | 81  | 19 |
| 17 |    |     |     |    |

Výpočet řetězového zlomku:

|   |   |   |   |    |     |
|---|---|---|---|----|-----|
|   |   | 1 | 6 | 2  | 17  |
| 0 | 1 | 1 | 7 | 15 | 262 |
| 1 | 0 | 1 | 6 | 13 | 227 |

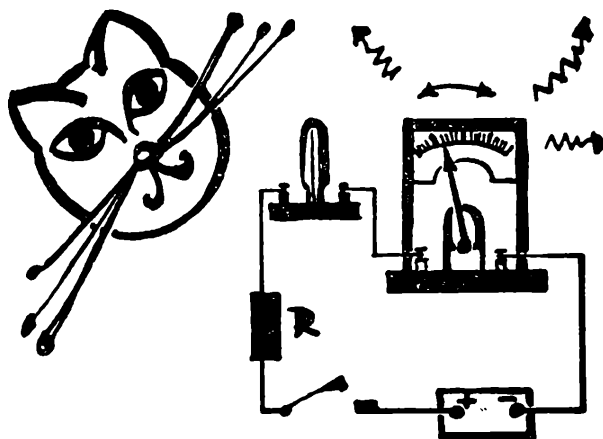
Stručně ještě jednou postup: Pro levý krajní bod jednotkového intervalu, v němž leží hledaný kořen, spočítáme Hornerovo schéma; nalezené koeficienty rozvoje napíšeme v opačném pořadí; určíme znovu jednotkový interval pro kořen nové rovnice a celý postup opakujeme. Dosáhne-li jmenovatel příslušného částečného zlomku dostačující hodnoty (v našem případě stačí, jak víme z minulého příkladu, přestoupí-li 40), výpočet ukončíme. (Jistě jste si všimli, že poslední Hornerovo schéma už nebylo třeba počítat. Jen jsme si tam poznamenali 17 jako poslední článek částečného zlomku.)

Nakonec ještě odhadneme velikost chyby

$$|R_3| < \frac{1}{227(227+13)} = \frac{1}{54\,480} < 2 \cdot 10^{-5}$$

Hledaný kořen je tedy určen dokonce s přesností na 4 zaručená desetinná místa a je  $x \doteq 1,154\,18$ . Přitom je přesná hodnota o něco menší, ne však o více než o 0,000 02, takže můžeme psát po zaokrouhlení  $x \doteq 1,1542$ .

O tom, jak se dá usnadnit hledání jednotlivých jednotkových intervalů, v nichž leží hledaný kořen, popřípadě o dalších podrobnostech uvedené metody, si něco povíme zase jindy.



# Dopplerův jev v teorii relativity a jeho experimentální ověření

RNDr. V. KOLESNIKOV, RNDr. J. ZÁHEJSKÝ, UP Olomouc

## 1. Úvod

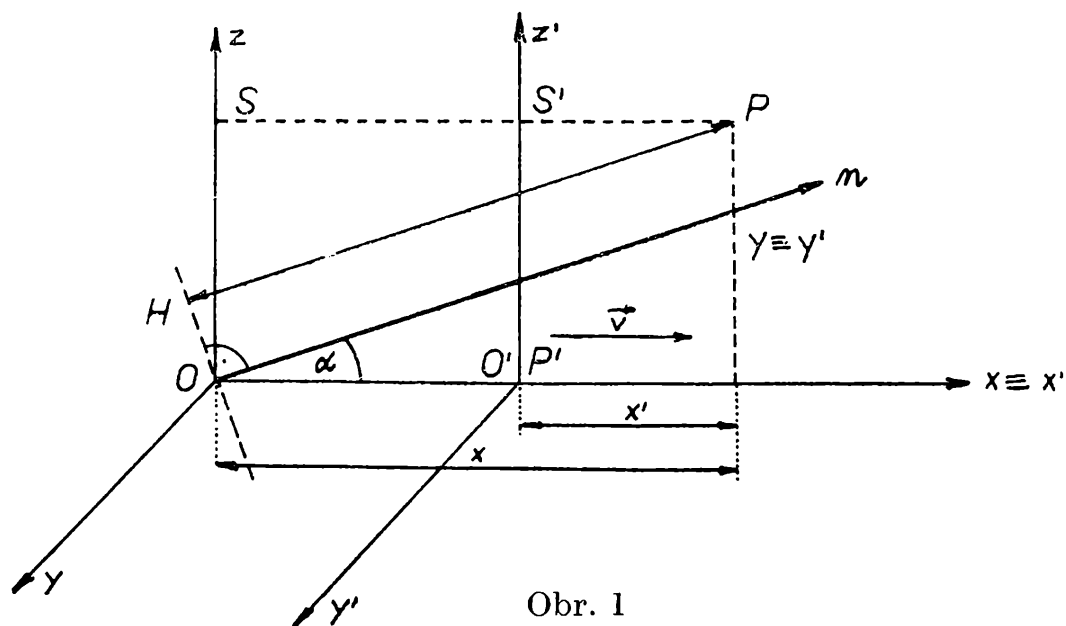
V r. 1842 *J. Ch. Doppler* vysvětlil jev, který vzniká v případě vzájemného pohybu zdroje vlnění a pozorovatele. Tento jev, později nazvaný *jevem Dopplerovým*, platí jak pro šíření vln akustických, tak i elektromagnetických. Odvodíme vztahy, které platí pro zmíněný jev z hlediska teorie relativity.

Uvažujme zdroj, který vysílá záření o frekvenci  $\nu_0$ . Tuto frekvenci naměří pozorovatel  $P'$ , který je v relativním klidu vzhledem ke zdroji záření. Pozorovatel  $P$ , který je vzhledem ke zdroji záření v relativním pohybu, přijímá toto záření pomocí vhodného detektoru a zjistí frekvenci  $\nu$  přijímaného záření. Přesněji řečeno,  $\nu_0$  představuje počet vlnových délek vlnění vyslaného zdrojem za jednotku vlastního času souřadné soustavy, pevně spojené se zdrojem záření. Počet vlnových délek téhož záření, zachyceného pozorovatelem  $P$  za jednotku vlastního času souřadného systému spojeného s pozorovatelem  $P$ , označujeme  $\nu$ . Předpokládáme, že záření se šíří ve vakuu za nepřítomnosti gravitačního pole. (Obr. 1.)

Jestliže pozorovatel a zdroj jsou ve vzájemném pohybu, pak:

1. frekvence  $\nu$  měřená pozorovatelem je jiná, než frekvence  $\nu_0$  vlnění vysílaného zdrojem,
2. dochází ke změně směru šíření vyzářeného vlnění.

V prvním případě jde o *Dopplerův jev*, ve druhém případě o tzv. *aberci*. Souřadný systém, který je v relativním klidu vzhledem k pozorovateli  $P$ , označme  $S$ . Souřadný systém spojený se zdrojem záření označme  $S'$ . Nechť soustava  $S'$  se pohybuje vzhledem k soustavě  $S$  rychlostí  $v$  ve směru osy  $x$ . Pozorovatel  $P$  má tedy vzhledem k soustavě  $S$  souřadnice  $x, y$  a vzhledem k soustavě  $S'$  souřadnice  $x', y'$ . Pozoruje záření, vysílané zdrojem ve směru  $On$  ( $n$  je normála čela vlny záření, která v soustavě pozorovatele svírá se směrem pohybu zdroje úhel  $\alpha$ , jak je patrné z obr. 1).



Obr. 1

Nechť v čase  $t = t' = 0$ , kdy soustavy  $S$  a  $S'$  splývají, je vyslána ze zdroje v bodě  $O$  první vlna. K tomu, aby prošla místem pozorovatele, potřebuje v soustavě  $S$  čas

$$t_1 = \frac{\overline{PH}}{c} = \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{c} \quad (1)$$

Tedy počet vlnových délek vlnění, které projde bodem  $P$  za určitý čas  $t$ , je roven

$$\nu(t - t_1) = \nu \left( t - \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{c} \right) \quad (2)$$

Čas, měřený v soustavě  $S'$ , za který čelo vlny dostihne  $P$ , je

$$t_2 = \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c} \quad (3)$$

a počet vlnových délek vlnění, které projde bodem  $P$  za čas  $t'$ , měřený v soustavě  $S'$ , je

$$v'(t' - t_2) = v' \left( t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c} \right) \quad (4)$$

Avšak počet vlnových délek, registrovaných pozorovatelem  $P$ , nemůže záviset na tom, k jaké soustavě jejich registraci vztahujeme. Platí tedy

$$v(t - t_1) = v'(t' - t_2) \quad (5)$$

Pomocí rovnic (2) a (4) dostaneme

$$v \left( t - \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{c} \right) = v' \left( t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c} \right) \quad (6)$$

Užijeme nyní *Lorentzových transformací*<sup>1)</sup>, které určují vztahy mezi souřadnicemi bodu  $P$  v systémech  $S$  a  $S'$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, y = y', z = z', t = \frac{t' + \frac{\beta}{c} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (7)$$

Z rovnice (6) užitím vztahů (7) dostaneme

$$\begin{aligned} v \frac{t' + \frac{\beta}{c} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{(x' + vt') v \cos \alpha}{c \sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{vy' \sin \alpha}{c} = \\ = v't' - \frac{v'x' \cos \alpha'}{c} - \frac{v'y' \sin \alpha'}{c} \end{aligned} \quad (8)$$

a po úpravě

$$\begin{aligned} t' \left( \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{v \cos \alpha}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \right) + x' \left( \frac{\beta v}{c \sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{v \cos \alpha}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \right) - \\ - \frac{vy' \sin \alpha}{c} = v't' - \frac{v'x' \cos \alpha'}{c} - \frac{v'y' \sin \alpha'}{c} \end{aligned} \quad (9)$$

Poněvadž však rovnost počtu vln daná rovnicí (5) nezávisí na volbě souřadnic bodu  $P$ , ani na volbě času  $t$ , platí rovnice (9) pro libovolná  $x, y$  a  $t$ . Porovnáním výrazů při  $x', y', t'$  dostaneme

<sup>1)</sup> Lorentzova transformace daná rovnicí (7) umožňuje přechod od jedné inerciální soustavy k jiné inerciální soustavě za předpokladu absolutního prostoru a času. Tato transformace má pro speciální teorii relativity základní význam a jejím důsledkem je, že všechna měření, prostorová i časová jsou relativní. Podrobnější informace najde čtenář v článku J. Horského „Základy teorie relativity“, *Rozhledy mat. - fyz.*, roč. 42 (1963 - 64), str. 121, 175, 215, 275, 318. Zmínka je též v článku V. Kolesnikova a J. Záhejského „Jak je to s experimentálním ověřením teorie relativity“, roč. 47, č. 5 (1968 - 1969), s. 234 - 237.

$$v' = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{v\beta \cos \alpha}{c \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v(1-\beta \cos \alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (10)$$

$$-v' \cos \alpha' = \frac{v(\beta - \cos \alpha)}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (11)$$

$$v \sin \alpha = v' \sin \alpha' \quad (12)$$

Dosadíme-li do rovnice (11) za výraz

$$\frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

z rovnice (10) máme

$$-v \cos \alpha' = \frac{v'}{1-\beta \cos \alpha} (\beta - \cos \alpha) \quad (13)$$

a odtud

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha} \quad (14)$$

Vztah (14) charakterizuje změnu směru šíření vyzářené vlny a odpovídá jevům *aberrace*.

## 2. A b e r a c e s v ě t l a

Tento jev pozoroval J. Bradley v r. 1728 a je to jeden z přímých důkazů oběhu Země kolem Slunce. Jeho klasický výklad je tento: Pozorujeme dalekohledem ze Země hvězdu v pólu ekliptiky. Světelný paprsek vyslaný hvězdou vstoupí do dalekohledu středem objektivu.

Než však proběhne délkou dalekohledu  $l$ , uplyne čas  $t = \frac{l}{c}$  a dalekohled se vlivem pohybu Země kolem Slunce rychlostí  $v = 30$  km/s posune za tuto dobu o vzdálenost  $x = vt$ . Proto se paprsek nepohybuje podél osy dalekohledu a nedopadne do středu okuláru. Aby se tak stalo, je nutné dalekohled natočit objektivovým koncem o úhel  $\delta$  ve směru jeho pohybu.

Z obr. 2 pro úhel  $\delta$  plyne

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v}{c}, \quad \delta = 20,5'' \quad (15)$$

Vlivem pohybu Země tedy neuvidíme hvězdu v její skutečné poloze, ale posunutou ve směru okamžité rychlosti Země o tzv. aberační úhel  $\delta$ . Důsledek toho je, že hvězda stojící v pólu ekliptiky opisuje kolem své skutečné polohy zdánlivou kružnici o úhlovém poloměru  $\delta$ . Hvězdy ekliptikální pak zdánlivě kmitají po úsečce a hvězdy ležící mezi ekliptikou a jejím pólem opisují malé zdánlivé elipsy o úhlové délce velké poloosy  $\delta$ .



Relativistický výklad aberace plyne z rovnic (11) a (12). Dostaneme z nich

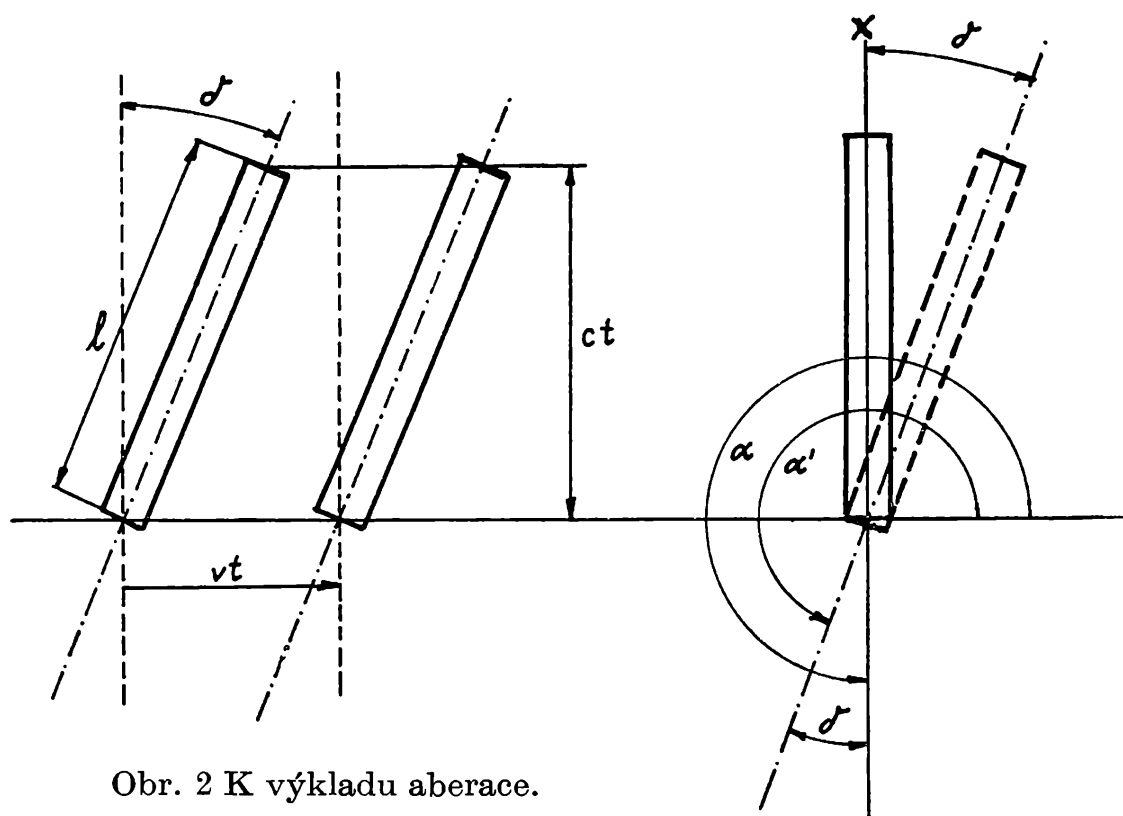
$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \alpha - \beta} \quad (16)$$

Pro paprsek přicházející z pólu ekliptiky je v soustavě pozorovatele  $P$  úhel  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  (Úhel  $\alpha$  je orientovaný úhel sevřený směrem šíření světla a kladnou osou  $x$ .) Tedy

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \quad (17)$$

Aberační úhel  $\delta$  můžeme psát

$$\delta = \frac{3\pi}{2} - \alpha' \quad (18)$$



Obr. 2 K výkladu aberace.

Pro aberační úhel tedy máme *relativistický vztah*

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha' \right) = \operatorname{cotg} \alpha' = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (19)$$

Je-li relativní rychlost zdroje a pozorovatele malá ve srovnání s rychlostí světla, pak  $\beta^2 \ll 1$  a relativistický vzorec (19) pro aberační úhel přechází v klasický vztah (15).

### 3. Dopplerův jev

Všimněme si nyní rovnice (10). Poněvadž  $S'$  je vztažný systém vzhledem k němuž je zdroj v klidu, nahradíme zde  $\nu'$  vlastní frekvencí zdroje  $\nu_0$ . Dostaneme

$$\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \nu (1 - \beta \cos \alpha) \quad (20)$$

a tedy

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha} \quad (21)$$

Vztah (21) udává závislost mezi frekvencí  $\nu_0$  zdroje a frekvencí zachycenou pozorovatelem  $P$  ve směru svírajícím se směrem pohybu zdroje úhel  $\alpha$ . Tímto vztahem je vyjádřen *Dopplerův jev v teorii relativity*.

Proveďme nyní diskusi vztahu (21):

a) Provádíme-li pozorování ve směru pohybu zdroje, pak  $\alpha = 0$  nebo  $\alpha = \pi$ . Přibližuje-li se zdroj a pozorovatel, je  $\alpha = 0$  a  $\cos \alpha = 1$ . Jde o tzv. *podélný Dopplerův jev*. Z rovnice (21) dostaneme

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} \quad (22)$$

a po úpravě

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \nu_0 \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \nu_0 \quad (23)$$

V tomto případě je  $\nu > \nu_0$  a pozorovatel zachytí vlnění o vyšší frekvenci. Pro zdroj, který se od pozorovatele vzdaluje rychlostí  $-v$ , je  $\alpha = \pi$ ,  $\cos \alpha = -1$  a

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \nu_0 \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} < \nu_0 \quad (24)$$

Z výsledku plyne, že vlnění  $\nu$  zachycené pozorovatelem má nižší frekvenci než vlnění vysílané zdrojem. Vyjádříme-li vztahy (23) a (24) pomocí vlnové délky příslušného záření, dostaneme pro přibližování zdroje a pozorovatele vztah

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} < \lambda_0 \quad (25)$$

a pro vzdalování zdroje a pozorovatele vztah

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} > \lambda_0 \quad (26)$$

b) Provádíme-li pozorování ve směru kolmém ke směru pohybu zdroje, pak  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  a  $\cos \alpha = 0$ . Jde o *příčný Dopplerův jev*. Z rovnice (21) dostaneme

$$\nu_{\perp} = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} < \nu \quad (27)$$

a závislost pro vlnovou délku

$$\lambda_{\perp} = \lambda_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (28)$$

Provedeme ještě diskusi vztahu (21) pro *klasický Dopplerův jev*. Pro  $v \ll c$  je  $\beta^2 \ll 1$  a dostáváme tak z (21) vztah pro klasický Dopplerův jev

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \beta \cos \alpha} \approx \nu_0 (1 + \beta \cos \alpha) \quad (29)$$

Pro pozorování při  $\alpha = 0$  nebo  $\alpha = \pi$ , je  $\cos \alpha = \pm 1$  a změna frekvence daná vztahem

$$\nu = \nu_0 (1 \pm \beta) \quad (30)$$

je v tomto případě maximální.

Pro  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  je  $\cos \alpha = 0$  a z (29) je zřejmé, že

$$\nu = \nu_0 \quad (31)$$

Vidíme, že při pozorování ve směru kolmém na směr pohybu zdroje nedochází ke změně frekvence.

Závěrem diskuse možno tedy říci, že podélný Dopplerův jev se skládá z nerelativistického (klasického) jevu, daného rovnicí (30) a z tzv. relativistických korekcí, tj. liší se výrazem  $\sqrt{1 - \beta^2}$ . V tomto případě neexistují aberační jevy. Naopak příčný Dopplerův jev má čistě relativistický ráz, a nerelativistický (klasický) jev, jak je zřejmé z rovnice (31), neexistuje. Tento jev je bezprostředním následkem dilatace času. Z rovnice (28) je zřejmé, že

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (32)$$

což je známý výraz pro časovou dilataci vyplývající z Lorentzových transformací.

Při relativním pohybu zdroje a pozorovatele pozorujeme změnu frekvence, která je dána jako superpozice relativistického efektu, který je druhého řádu pro  $\beta$ , a klasického efektu, který je řádu prvního pro  $\beta$ . Aberační jevy se projeví při pozorování pod úhly  $\alpha \neq 0$  a  $\alpha \neq \pi$ . Relativistický vztah pro aberační úhel se liší od klasického vztahu jen v druhém řádu pro  $\beta$ , z čehož plyne, že pro malé hodnoty  $\beta$  dávají

obě interpretace stejný výsledek, jak je zřejmé ze vztahů (15) a (19). Z rovnice (23) a (24) je vidět, že v případě přibližování zdroje a pozorovatele je pozorovaná frekvence  $\nu > \nu_0$ . Tedy energie záření registrovaná pozorovatelem je větší vlivem pohybu zdroje (nebo pozorovatele), než energie záření jím vysílaná, což se projeví v posunu spektrální čáry směrem k fialovému konci spektra. V případě vzdalování zdroje a pozorovatele je  $\nu < \nu_0$  a spektrální čáry se posouvají směrem k červenému konci spektra.

#### 4. Experimentální měření

Proměřením posunu spektrálních čar, který je způsoben příčným Dopplerovým jevem, je možné nepřímo experimentálně ověřit dilataci času. Tuto myšlenku, využít změnu frekvence záření ke zjištění časové dilatace, vyslovil *A. Einstein* a švýcarský fyzik *W. Ritz* již na počátku vývoje teorie relativity. Avšak příčný Dopplerův jev je druhého řádu a proto je při rychlostech  $v \ll c$  velmi nesnadno zjistitelný při běžné přesnosti fyzikálních měření, neboť při nepatrné odchylce směru pozorování od směru kolmého, překrývá podélný Dopplerův jev posun spektrálních čar, způsobený příčným jevem. Všimneme si dále požadované přesnosti měření.

Pozorovaná frekvence záření je při  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  dána vztahem (27). Poněvadž zde je  $\nu_{\perp} < \nu_0$ , můžeme rozdíl těchto frekvencí zapsat jako  $\nu_0 - \nu_{\perp}$ . Frekvence záření, pozorovaná pod libovolným úhlem  $\alpha$ , je dána vztahem (21). Rozdíl mezi touto frekvencí a frekvencí při přesně kolmém pozorování, je podle rovnic (21) a (27)

$$\nu_{\alpha} - \nu_{\perp} = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} \left( \frac{1}{1 - \beta \cos \alpha} - 1 \right) = \nu_{\perp} \frac{\beta \cos \alpha}{1 - \beta \cos \alpha} \quad (33)$$

Hledáme nyní takový úhel  $\alpha$ , pro který platí

$$\nu_{\alpha} - \nu_{\perp} = \nu_0 - \nu_{\perp} \quad (34)$$

Po dosazení a výpočtu dostaneme

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \\ \cos \alpha &\approx \frac{\beta}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

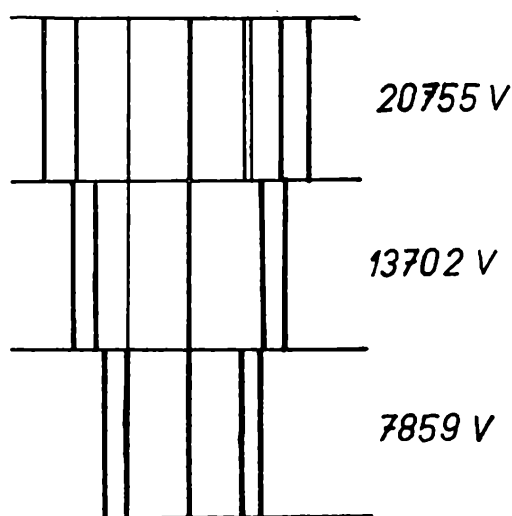
Kdyby např. byla rychlost pohybu zdroje (pozorovatele) vzhledem k pozorovateli (zdroji)  $v = 1300$  km/h, což byla rychlost iontů vodíku užitých v experimentu při napětí 18 kV, pak  $\beta = 4 \cdot 10^{-8}$

$$\cos \alpha = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\alpha \approx 89^\circ 53'$$

To znamená, že při odchylce směru pozorování asi o 0,1 stupně od kolmého směru se vliv podélného jevu téměř vyrovná s vlivem jevu příčného.

Uvedenou zásadní obtíž, která dlouho bránila provedení pokusu, překonali v r. 1938 *H. E. Ives* a *G. R. Stillwell*. Pozorovali spektrum vydávané molekulovými ionty vodíku, které byly urychleny vysokým napětím ve dvou opačných směrech tečných k rychlosti iontů. Obě pozorování byla přivedena optickými prvky na štěrbinu spektrografu.



Obr. 3 Spektrogramy s oboustranně posunutými čarami.

Poněvadž pro tečné směry pozorování je  $\alpha = 0$ , byl tak vlastně měřen podélný Dopplerův jev ve dvou opačných směrech a byly získány dvě soustavy spektrálních čar, které byly posunuty na obě strany od „klidové“ polohy (obr. 3). V celém zařízení byl udržován nízký tlak, aby nedocházelo ke vzájemné interakci molekul vodíku a nedošlo tak ke změně jejich náboje. Pozorování v tečných směrech bylo znesnadňováno tím, že nestejná rychlost iontů (nestejná energie) se projevovala Dopplerovským rozšířením spektrálních čar. Tato nesnáze byla odstraněna užitím tzv. *Dempsterovy* anodové trubice, která dává přibližně monoenergetický svazek paprsků. Spektrální čáry byly pak dostatečně úzké a jejich posunutí bylo možno určit s dostatečnou přesností. Pro pozorování užili *Woodův* mřížkový spektrograf dávající normální spektrum, takže požadovaná přesnost měření byla zaručena.

Při současném pozorování záření, které vycházelo ze zdroje ve dvou opačných směrech bylo možné pozorovat frekvence, které pro  $\alpha = 0$

jsou dány vztahy (23) a (24). Jejich příslušné vlnové délky jsou pak určeny vztahy (25) a (26). Pro „těžiště“<sup>2)</sup> obou opačně posunutých čar dostaneme

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\lambda_0 \left( \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \right)}{2} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (36)$$

Rozdíl mezi původní vlnovou délkou zdroje a vlnovou délkou, která odpovídá „těžišti“ dvou získaných čar spektra, se rovná

$$\Delta\lambda = \bar{\lambda} - \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \lambda_0 \approx \lambda_0 \frac{\beta^2}{2} \quad (37)$$

a pro relativní změnu vlnové délky máme

$$\frac{\bar{\lambda} - \lambda_0}{\lambda_0} \approx \frac{\beta^2}{2} \quad (38)$$

Posun spektrálních čar způsobený příčným Dopplerovým jevem je dán vztahem (28), který můžeme přibližně vyjádřit ve tvaru

$$\lambda_{\perp} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \lambda_0 \left( 1 + \frac{\beta^2}{2} \right) \quad (39)$$

Pro příslušnou relativní změnu vlnové délky platí vztah

$$\frac{\lambda_{\perp} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\beta^2}{2} \quad (40)$$

který je shodný s (38).

Tedy „těžiště“ obou opačně posunutých čar odpovídá právě hodnotě posuvu spektrální čáry při inerciálním pohybu zdroje, který vznikl vlivem příčného Dopplerova jevu. Jako střed provedených měření vyšla při napětí 18 kV hodnota posunu  $\Delta\lambda = 0,0468 \text{ \AA}$ . Pro rychlost iontu vodíku, která je v tomto případě  $v = 1300 \text{ km/s} = 0,004 \text{ c}$  vychází  $\beta = 4,3 \cdot 10^{-3}$ . Je-li hmotnost iontu  $\text{H}_2^+ = 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , pak pro danou rychlost  $v$  má iont energii  $W = \frac{1}{2} m_0 v^2 = 1,7 \cdot 10^4 \text{ eV}$ . Energie je zde počítána z klasického vzorce, poněvadž při dané rychlosti se hmotnost liší od klidové hmotnosti jen o 0,001 %. Z Lorentzovy dilatace času

---

<sup>2)</sup> Pojem „těžiště“ zde nemá obvyklý význam, jak jej známe z mechaniky. V tomto případě je výrazem „těžiště“ vyjádřena poloha středu vzdálenosti mezi oběma polohami opačně posunutých spektrálních čar.

pro danou rychlost pak vychází pro hodnotu posuvu spektrálních čar  $\Delta\lambda = 0,472 \text{ \AA}$ , což je v dobrém souhlase s hodnotou vyplývající z měření.

Tak byl poprvé v laboratorních podmínkách experimentálně ověřen s uspokojivou přesností posuv spektrálních čar, odpovídající *příčnému Dopplerovu jevu* při inerciálním pohybu zdroje, a tím i nepřímo Lorentzova dilatace času.

- [1] *Tonnelat, M. A.*: Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité. Paris (1959), ruský překlad Moskva (1962).
- [2] *Horák, Z.*: Nové metody měření dilatace času, Pokroky mat. fyz. astr. 6, roč. VI (1961), s. 304—314.
- [3] *Tonnelat, M. A.*: Les vérifications expérimentale de la relativité générale. Paris (1964).

## Foucaultovo kyvadlo

Ing. ANTONÍN ŠTĚPÁNEK, ČVUT Praha

Kývá-li matematické kyvadlo, jehož osa kyvu splývá s osou  $z$ , pak během kývání v inerciální soustavě<sup>1)</sup>  $Oxyz$  zůstává zachována rovina kyvu a průmětem do roviny kolmé k ose kyvadla (ose  $z$ ) je přímka — např. osa  $x$  (viz obr. 1).

Nechť existuje druhá otáčející se soustava  $O\xi\eta\zeta$ , která má s původní inerciální soustavou  $Oxyz$  společný počátek a otáčí se kolem osy  $z \equiv \zeta$  (obráz. 1).

Budeme-li nyní stát na otáčející se soustavě, která se otáčí úhlovou rychlostí  $\omega'$  a z ní vypustíme kuličku matematického kyvadla, např. v bodě  $B$  (jehož vzdálenost od počátku je  $A$ ) osy  $\xi$ , která nechť v okamžiku vypuštění splývá s osou  $x$ , pak při vypuštění udělujeme kyvadlu rychlost  $V_y = A\omega'$  kolmou na původní rovinu kyvu, neboť též naše ruka, která kuličku vypouští např. z bodu  $B$  se touto rychlostí otáčí kolem osy kyvadla (kolem osy  $z \equiv \zeta$ ). V rovnici pro rychlost značí  $A$  amplitudu výchylky a  $\omega'$  úhlovou rychlost.

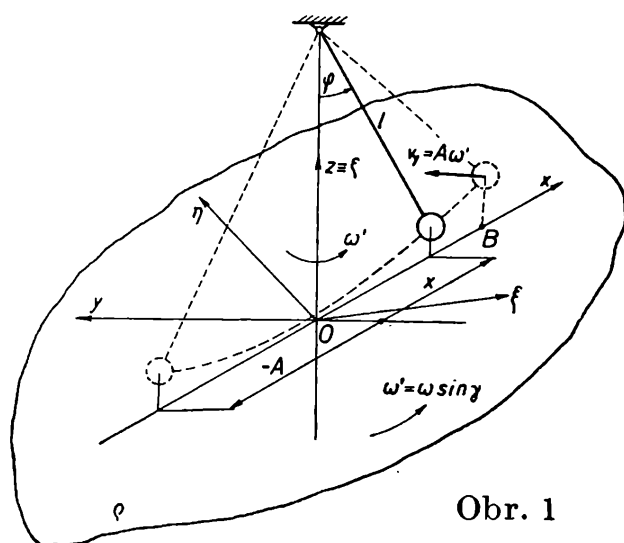
---

<sup>1)</sup> Inerciální soustavy jsou takové soustavy, které vzhledem ke stálícím jsou v klidu, nebo se pohybují přímočarým rovnoměrným pohybem, takže o nich platí Newtonův zákon setrvačnosti (lat. setrvačnost = inertia).

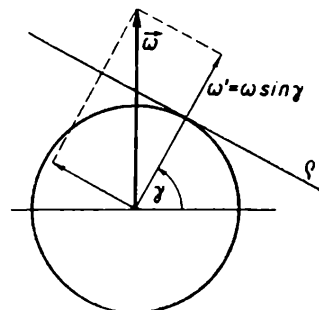
Kyvadlo koná tedy dva kyvadlové pohyby k sobě kolmé, jeden ve směru osy  $x$  a druhý ve směru osy  $y$ . Výsledný pohyb v rovině  $xy$  inerciální soustavy nebude tedy přímka, nýbrž, jak si ukážeme, elipsa.

Tento popsáný děj se vlastně odehrává u každého kyvadla kývajícího na Zemi. Pak osa  $z \equiv \zeta$  je totožná se závěsem olovnice v daném místě a osy  $\xi, \eta$  určují tečnou rovinu  $\rho$  k zeměkouli v místě, kde tento děj probíhá.

Tato rovina  $\rho$  se stáčí rychlostí  $\omega' = \omega \sin \gamma$ , neboť otáčí-li se země úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem své osy, pak pozorovatel na Zemi v místě o zeměpisné šířce  $\gamma$  se stáčí se svou tečnou rovinou rychlostí  $\omega' = \omega \sin \gamma$ . (Promítneme vektor úhlové rychlosti Země  $\omega$  do kolmice dané roviny  $\rho$  v místě o zeměpisné šířce  $\gamma$  — viz obr. 2.)



Obr. 1



Obr. 2

Pokusme se tento děj vyjádřit matematicky a určit analyticky rovnice dráhy kuličky kyvadla v soustavě inerciální. Jak víme, koná matematické kyvadlo při malých výchylkách harmonický pohyb, který časově rozložený dává sinusovou funkci, takže např. pro kývání v ose  $x$  můžeme psát rovnici

$$x = A_x \sin (\Omega t + \varphi_x) \quad (1)$$

Jak jsme si však již výše vysvětlili, pro náš případ kyvadlo bude konat dva pohyby, tzn. bude kývat ještě v ose  $y$ . Pohyb bude tedy rovinný ovšem za předpokladu, že výchylky budou malé, takže změny souřadnice  $z$  budou zanedbatelné.

Pak k rovnici (1) přistupuje ještě rovnice pro osu  $y$

$$y = A_y \sin (\Omega t + \varphi_y) \quad (2)$$

V těchto rovnicích  $A_x, A_y$  má význam amplitudy a  $\varphi_x, \varphi_y$  fázového posuvu v ose  $x$ , respektive ose  $y$ .



Pro matematické kyvadlo je

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

kde  $l$  je délka kyvadla a  $g$  je tíhové zrychlení.

Konstanty  $A_x$ ;  $A_y$ ;  $\varphi_x$ ;  $\varphi_y$  z rovnice (1) a (2) určíme z podmínek, které kyvadlo bude splňovat na počátku pohybu; to je pro  $t = 0$ . Těmto podmínkám proto říkáme počáteční.

V okamžiku vypuštění kyvadla, to je pro  $t = 0$ , nechť o souřadnici  $x$  platí  $x_{(0)} = A$  a rychlost v tomto směru  $V_{x(0)} = 0$ . Naopak pro osu  $y$  je  $y_{(0)} = 0$ . Ale rychlost v tomto směru není nulová, avšak je rovna  $V_{y(0)} = A\omega' = A\omega \sin \gamma$ .

(Touto počáteční podmínkou jsme vlastně obešli a nahradili stálé působení Coriolisovy síly.)

Jelikož víme, že rychlost je derivací dráhy podle času, pak rychlost do osy  $x$  a  $y$  dostaneme derivováním vztahů (1) a (2), neboli

$$V_x = \frac{dx}{dt} = A_x \Omega \cos(\Omega t + \varphi_x);^2)$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = A_y \Omega \cos(\Omega t + \varphi_y)$$

Dosazením počátečních podmínek v čase  $t = 0$  do rovnic (1), (2) a do rovnic pro rychlosti  $V_x$  a  $V_y$ , dostáváme čtyři rovnice pro čtyři neznámé

$$x = A = A_x \sin \varphi_x,$$

$$y = 0 = A_y \sin \varphi_y,$$

$$V_x = 0 = A_x \Omega \cos \varphi_x,$$

$$V_y = A\omega' = A_y \Omega \cos \varphi_y.$$

Pro splnění druhé a třetí rovnice musí být

$$\varphi_y = 0 \quad \text{a} \quad \varphi_x = \frac{\pi}{2}$$

Uplatněním těchto výsledků v rovnici první a čtvrté, dostáváme

$$A_x = A; \quad A_y = A \frac{\omega'}{\Omega}$$

---

<sup>2)</sup> Kdybychom nechtěli používat derivace pro získání těchto vztahů pro rychlost, pak můžeme podobně jako promítáme průvodič při rovnoměrném kruhovém pohybu promítnout i obvodovou rychlost  $V = A\Omega$ . (Viz učebnici fyziky pro stř. školu.)

Dosazením těchto konstant do rovnic (1) a (2) dostáváme tzv. parametrické rovnice

$$x = A \cos \Omega t, \quad (3)$$

$$y = \frac{A\omega \sin \gamma}{\Omega} \sin \Omega t, \quad (4)$$

které určují v závislosti na čase geometrické místo bodů středu kuličky kyvadla. Parametrické se nazývají proto, že v našem případě rovinná křivka není dána explicitně  $y = f(x)$ , ale že souřadnice  $x$  i  $y$  je funkcí tzv. parametru  $t$  (v našem případě času).

Vyloučením parametru  $t$  z rovnic (3) a (4) (umocněním na druhou a sečtením) získáme rovnici

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 \left( \frac{\omega'}{\Omega} \right)^2} = 1, \quad (5)$$

nebo v explicitním tvaru

$$y = \frac{\omega'}{\Omega} \sqrt{A^2 - x^2} \quad (6)$$

Je to rovnice elipsy s hlavní poloosou délky  $a = A$  a vedlejší

$$b = A \frac{\omega'}{\Omega}$$

kde  $\omega' = \omega \sin \gamma$  je úhlová rychlost stáčení tečné roviny zeměkoule v místě kývání.

Poloha této elipsy v inerciální soustavě je stálá, ale pozorovatel, který je na Zemi (a tedy s ní se otáčí) pozoruje, že hlavní osa elipsy se stáčí úhlovou rychlostí  $\omega'$  v opačném směru než se točí Země, tedy od východu přes jih k západu. (Známý důkaz zemské rotace.)

Je-li doba, za kterou se Země otočí o úhel  $2\pi$

$$T_z = 24 \text{ h } 60 \text{ min } 60 \text{ s} = 86\,400 \text{ s},^3)$$

pak pro Prahu se zeměpisnou šířkou  $\gamma' = 50^\circ 5'$  se otočí elipsa za hodinu o úhel

$$\begin{aligned} \varphi = \omega' t = \omega \sin \gamma \quad t &= \frac{2\pi}{86\,400} \sin 50^\circ 5' \cdot 3600 = \\ &= \frac{\pi}{12} \sin 50^\circ 5' = 15^\circ \cdot 0,7665 = 11^\circ 30' \end{aligned}$$

---

<sup>3)</sup> Přesná doba rotace je  $T_z = 24 \text{ h} - 3 \text{ min } 56 \text{ sec} = 86\,164 \text{ s}$ , neboť hvězdný den je právě o  $3 \text{ min } 56 \text{ s}$  kratší než den sluneční. (Viz astronomie pro 11. ročník.)

Tento pokus jako první provedli již 1661 V Viviani a po něm Bartolini v Rimini (1833).

V lednu 1851, neznaje pokusů svých předchůdců, provedl jej L. Foucault (1819–1868) v pařížském Pantheonu. Jeho kyvadlem byla koule vážící 30 kg, zavěšená na ocelovém drátě 67 m dlouhém. Doba kmitu byla, jak plyne ze známého vzorce pro dobu kmitu matematického kyvadla

$$T_k = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 6,28 \sqrt{\frac{67}{9,81}} \doteq 16,4 \text{ s}$$

Vypočítejte nyní, jaké budou rozměry elipsy pro toto kyvadlo, vychýlíme-li je např. na amplitudou  $A = 5 \text{ m}$ , což je pro Foucaultovo kyvadlo úhlové vychýlení o pouhé  $4^\circ 16'$ . Pak délka hlavní poloosy je též  $a = 5 \text{ m}$  a délka vedlejší

$$b = A \frac{\omega'}{\Omega} = A \frac{\omega}{\Omega} \sin \gamma$$

Vyjádříme-li úhlovou rychlost  $\omega$  pomocí doby za kterou se otočí Země o  $2\pi$ , což je doba  $T_z = 86\,400 \text{ s}$  a  $\Omega$  pomocí doby kmitu kyvadla  $T_k = 16,4 \text{ s}$ , dostáváme

$$b = A \frac{\frac{2\pi}{T_z}}{\frac{2\pi}{T_k}} \sin \gamma = A \frac{T_k}{T_z} \sin \gamma = 5 \cdot \frac{16,4}{86\,400} \cdot 0,7665 \doteq 7,28 \cdot 10^{-4} \text{ m},$$

$$b \doteq 0,728 \text{ min}.$$

Jak vidíme, je to elipsa velmi štíhlá. Poměr poloos elipsy

$$\frac{b}{a} = \frac{A \frac{\omega'}{\Omega}}{A} = \frac{\omega'}{\Omega} = \frac{T_k}{T_z} \sin \gamma = \frac{16,4}{86\,400} \cdot 0,7665 = 1,458 \cdot 10^{-4}$$

je řádu  $10^{-4}$ , takže u běžného kyvadla tento eliptický tvar dráhy nemůžeme pouhým okem postřehnout.

Nyní nás bude zajímat, jak vypadá tento pohyb v soustavě, která se otáčí úhlovou rychlostí  $\omega'$ . Pro tento účel byla koule Foucaultova kyvadla na své spodní části opatřena hrotem, který zapisoval do jemného popílků (aby kyvadlo nebylo brzděno) křivku, jejíž rovnici můžeme určit tak, že budeme transformovat rovnice elipsy (3) a (4) ze soustavy inerciální do soustavy, která se otáčí se Zemí. Tato soustava určená osami  $\xi$  a  $\eta$  se otáčí úhlovou rychlostí  $\omega'$  a je tečnou rovinou Země v místě kývání.

Z obr. 3 je patrné, že platí transformační rovnice

$$\xi = x \cos \omega' t + y \sin \omega' t,$$

$$\eta = -x \sin \omega' t + y \cos \omega' t$$

(Např. průmět lomené čáry  $OA_1A$  do osy  $\xi$  dá souř.  $\xi_A$ .) Dosadíme-li nyní za  $x$  a  $y$  z rovnice (3) a (4), dostáváme

$$\xi = A \left( \cos \Omega t \cos \omega' t + \frac{\omega'}{\Omega} \sin \Omega t \cdot \sin \omega' t \right) \quad (7)$$

$$\eta = A \left( \frac{\omega'}{\Omega} \sin \Omega t \cdot \cos \omega' t - \cos \Omega t \cdot \sin \omega' t \right) \quad (8)$$

což jsou parametrické rovnice křivky, kterou kyvadlo kreslí v soustavě určené osami  $\xi$  a  $\eta$ . Abychom z těchto rovnic mohli vyloučit parametr, všimněme si nejprve druhého členu v závorce rovnice (7)

$$\frac{\omega'}{\Omega} \sin \Omega t \cdot \sin \omega' t$$

Víme již, že poměr  $\frac{\omega'}{\Omega}$  je řádu  $10^{-4}$ , což také znamená, že  $\sin \omega' t$  se mění velmi pomalu s časem v porovnání s funkcí  $\sin \Omega t$ , neboli  $\sin \Omega t$  proběhne  $10\,000 \times$  interval  $\langle -1; 1 \rangle$ , zatímco funkce  $\sin \omega' t$  pouze jednou (jak je znázorněno na obr. 4).

Proto pro doby  $t \leq \frac{T_k}{2}$  je úhel  $\omega' t$  velmi malý, takže můžeme psát  $\sin \omega' t \doteq \omega' t$ .

Pak výraz

$$\frac{\omega'}{\Omega} \sin \Omega t \cdot \sin \omega' t = \frac{\omega'}{\Omega} \sin \Omega t \cdot \omega' t = \left( \frac{\omega'}{\Omega} \right)^2 \sin \Omega t \cdot \Omega t$$

poměr

$$\left( \frac{\omega'}{\Omega} \right)^2 = 2.126 \cdot 10^{-8}$$

a  $\sin \Omega t \cdot \Omega t$  může nabýt v intervalu

$$0 < t < \frac{T_k}{2}$$

maximální hodnotu, kterou získáme, položíme-li první derivaci funkce  $(\sin \Omega t) \cdot \Omega t$  rovnu nule

$$[(\sin \Omega t) \Omega t]' = \Omega (\cos \Omega t) \Omega t + \Omega \sin \Omega t = 0.$$

Dělením této rovnice výrazem  $\Omega \cdot \cos \Omega t$  dostáváme rovnici

$$\operatorname{tg} \Omega t + \Omega t = 0.$$

Této transcendentní rovnici<sup>4)</sup> vyhovuje řešení  $\Omega t \doteq 0,646\pi$ , takže celý výraz nabude maximální hodnoty

$$\left(\frac{\omega'}{\Omega}\right)^2 \sin \Omega t \cdot \Omega t = 2,126 \cdot 10^{-8} \cdot \sin(0,646\pi) \cdot 0,646\pi = 3,88 \cdot 10^{-8}$$

Z toho je patrné, že proti prvnímu členu rovnice (7) je výraz

$$\left(\frac{\omega'}{\Omega}\right)^2 \sin \Omega t \cdot \Omega t$$

zanedbatelný a s přihlédnutím k tomu, že  $\cos \omega' t \doteq 1$  (viz též obr. 3) můžeme psát rovnici (7) a (8) ve tvaru

$$\xi = A \cos \Omega t, \quad (9)$$

$$\eta = A \left( \frac{\omega'}{\Omega} \sin \Omega t - \cos \Omega t \cdot \omega' t \right) \quad (10)$$

Z těchto rovnic vidíme, že i v soustavě  $\xi\eta\zeta$  jde o pohyb rovinný. Elementárně to lze vysvětlit tím, že kulička kyvadla se pohybuje z místa, kde měla větší obvodovou rychlost, do míst s menší rychlostí, a tak jednotlivé body na ose  $X$  stále více a více předstihuje doprava.

Z prvé rovnice plyne pro parametr

$$t = \frac{l}{\Omega} \arccos \frac{\xi}{A}$$

a dosazením do rovnice (10) dostáváme explicitní tvar rovnice křivky, kterou kyvadlo proběhne za čas rovnající se době kyvu

$$\eta = \frac{\omega'}{\Omega} \sqrt{A^2 - \xi^2} - \frac{\omega'}{\Omega} \cdot \xi \cdot \arccos \frac{\xi}{A} \quad (11)$$

První výraz této rovnice

$$\frac{\omega'}{A} \sqrt{A^2 - \xi^2}$$

je vlastně stejný s pravou stranou rovnice (6), což je rovnice elipsy, tak jak jsme ji odvodili pro inerciální soustavu.

Od tohoto výrazu odečítáme výraz

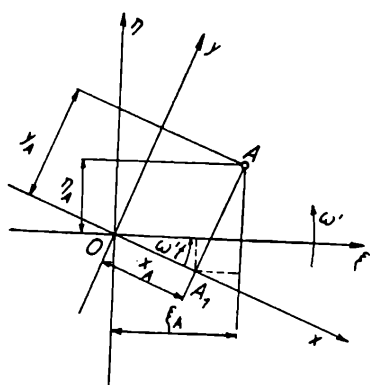
---

<sup>4)</sup> Transcendentní rovnice je taková rovnice, ze které neznámou veličinu nemůžeme žádnými algebraickými způsoby vypočítat. Na řešení rovnice tohoto typu je vypracováno několik přibližných metod, např. Newtonova metoda tečen, Regula falsi atd.

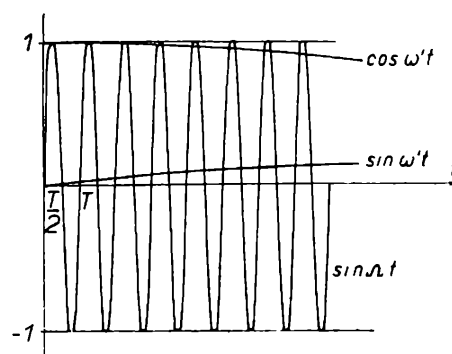
Tuto rovnici  $\operatorname{tg} x + x = 0$ , kde  $x = \Omega t$  lze řešit i graficky, a to tak, že nakreslíme co nejpřesněji graf funkcí  $y = \operatorname{tg} x$  a  $y = -x$  do jednoho souřadného systému  $xy$ ;  $x$ -ová souřadnice průsečíku obou čar je řešením této rovnice.

$$\frac{\omega'}{\Omega} \xi \arccos \frac{\xi}{A}$$

který je v první polovině kyvu kladný a v druhé polovině záporný. Grafické znázornění je na obrázku 4.



Obr. 3



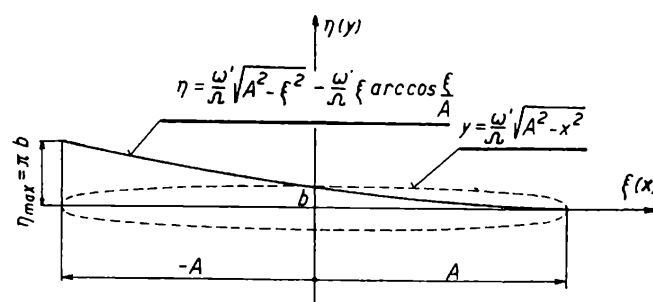
Obr. 4

Maximální hodnoty nabývá tato funkce pro  $\xi = -A$ , jak plyne z rovnice (11), což je tedy na konci kyvu pro  $t = \frac{T_k}{2}$

$$\eta_{\max} = \pi \frac{\omega'}{\Omega} A = \delta b \quad (12)$$

Vidíme, že maximální vychýlení je  $\pi$  násobek hodnoty  $\frac{\omega'}{\Omega} A$ , což je  $\pi$  násobek hodnoty  $\eta_{(0)}$  neboli délky vedlejší poloosy elipsy. Číselně pro Foucaultovo kyvadlo vychází

$$\eta_{\max} = \pi \cdot b = 3,14 \cdot 0,723 = 2,286 \text{ mm}$$



Obr. 5

Obrázek 6 znázorňuje pohyb kyvadla, který začíná v bodě A a směřuje do bodu B. Z bodu B pohyb opět pokračuje a kyvadlo kreslí stejnou křivku až do bodu C, kde již deviace od bodu A bude dvojnásobná.

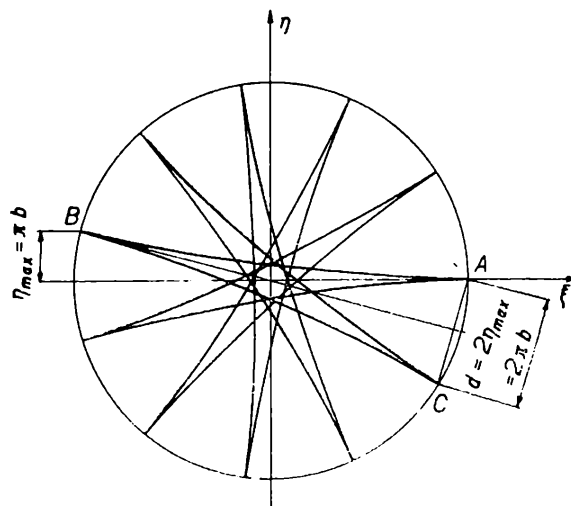
Dostáváme tak pro tuto deviaci rovnici

$$d = 2\eta_{\max} = 2\pi b = 2\pi \frac{\omega'}{\Omega} A \quad (13)$$

číselné vyjádření deviace bude

$$d = 2 \cdot 2,286 = 4,572 \text{ mm} ,$$

což je hodnota již dosti dobře měřitelná. Odchylka bodu  $C$  se nám bude jevit směrem na západ, neboť sami se otáčíme se Zemí na východ.



Obr. 6

Zkontrolujeme si ještě správnost rovnice (13) jednoduchou úvahou. Za dobu kmitu, kterou kyvadlo potřebuje, aby se dostalo z bodu  $A$  do bodu  $C$  se zatím rovina pod kyvadlem otočí o úhel  $\varphi = \omega' T$ . Deviace bodu  $C$  od  $A$  je tedy

$$d = A\varphi = A\omega' T = A\omega' \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \frac{\omega'}{\Omega} A ,$$

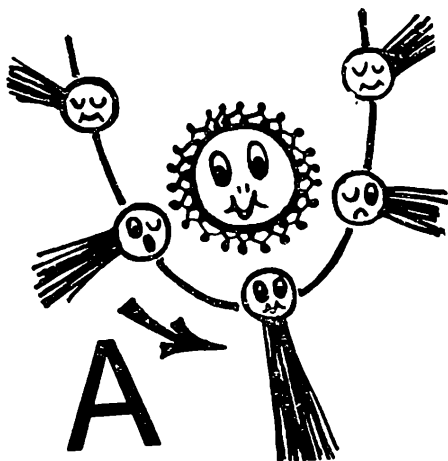
což je ve shodě s rovnicí (13), a tím i důkazem správnosti rovnice (11), která přechází pro  $\xi = -A$  v rovnici (12).

V případě, že poměr úhlových rychlostí  $\frac{\Omega}{\omega'}$  bude celé číslo, pak se pootočení roviny kyvu o  $2\pi$ , to je o úhel  $360^\circ$ , vrátí kyvadlo do výchozího bodu  $A$ .

V opačném případě, nebude-li tento poměr celým číslem, bude křivka neuzavřená a obraz dráhy při každém otočení roviny kyvu o plný úhel  $2\pi$  bude poněkud posunut (nebude se periodicky opakovat).

---

Pozn.: V obrázku 6 je nakreslen půdorys dráhy kyvadla, kde rozteč  $d = AC$  je ve skutečnosti mnohem menší proti průměru kružnice než je tomu na obrázku.



## Ekosféry hvězd

RNDr. MIROSLAVA ŠIROKA — RNDr. JAROMÍR ŠIROKÝ, UP Olomouc

V posledních deseti letech byla uveřejněna řada vědeckých prací, týkajících se možnosti života ve vesmíru. Vychází se přitom z předpokladu, že u velkého počtu hvězd v naší Galaxii existují planetární soustavy. Podle A. G. Camerona lze celkový počet hvězd s planetárními soustavami odhadnout na 2 milióny, přičemž střední vzdálenost mezi nimi je asi 100 světelných roků. Aby mohl na některé planetě vzniknout a rozvíjet se život, musí být splněna celá řada nutných podmínek, jako je vhodná teplota na povrchu planety, příznivé chemické složení atmosféry planety, existence vody, prakticky konstantní svítivost hvězd, poměrně malá výstřednost dráhy planety atd.

V tomto článku se budeme zabývat pouze jednou z těchto nutných podmínek, a to příznivou teplotou na povrchu planety. Americký astronom čínského původu Su-Shu Huang studoval hvězdy různých spektrálních tříd a výsledkem jeho úvah bylo stanovení tzv. e k o s f é r h v ě z d, tj. oblastí kolem hvězd, v nichž je příznivá teplota pro vznik a existenci živých organismů.

Průměrná teplota  $T$  na povrchu planety, která se otáčí kolem své osy, závisí na teplotě  $T^*$  a poloměru  $R^*$  hvězdy, kolem níž planeta obíhá a na poloměru  $r$  oběžné dráhy. Předpokládáme-li, že povrch planety zcela absorbuje záření všech vlnových délek, které vysílá hvězda a že planeta nemá vlastní zdroje energie, je průměrná teplota na jejím povrchu



$$T = T^* \sqrt{\frac{R^*}{2r}} \quad (1)$$

Podle polského astronoma J. Gadomského je ekosféra hvězdy definována jako kulová vrstva, ve které je průměrná teplota v mezích od  $T_A$ , což je maximální teplota příznivá pro existenci živých organismů do  $T_B$ , což je teplota minimální. Ze vztahu (1) pak plyne pro vnitřní poloměr  $r_A$  ekosféry rovnice

$$r_A = \left( \frac{T^*}{T_A} \right)^2 \frac{R^*}{2}, \quad (2)$$

a pro vnější poloměr  $r_B$  rovnice

$$r_B = \left( \frac{T^*}{T_B} \right)^2 \frac{R^*}{2}. \quad (3)$$

Ze vztahů (2) a (3) můžeme vypočítat poloměry ekosféry, známe-li povrchovou teplotu a poloměr centrální hvězdy, musíme ovšem stanovit maximální a minimální teplotu na povrchu planety, při níž pokládáme existenci života za možnou. Podle J. Gadomského je maximální teplota  $t_A = +80^\circ\text{C}$  (při této průměrné teplotě předpokládáme možnost existence života v okolí pólů planety, kde je teplota podstatně nižší) a minimální teplota  $t_B = -70^\circ\text{C}$  (zde předpokládáme existenci života v okolí rovníku planety, kde je teplota vyšší). Do vztahů (2) a (3) dosadíme tedy absolutní teploty  $T_A = 353^\circ\text{K}$ ,  $T_B = 203^\circ\text{K}$ . Při těchto číselných hodnotách  $T_A$  a  $T_B$  je  $r_B = 3r_A$ .

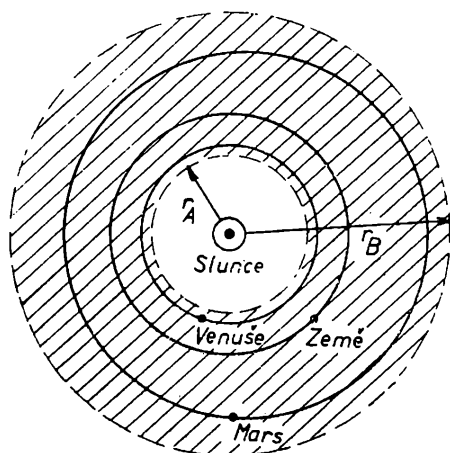
Jako příklad vypočteme vnitřní a vnější poloměry ekosféry u našeho Slunce (hvězda spektrální třídy G2), jehož povrchová teplota  $T^* = 5785^\circ\text{K}$ , poloměr  $R^* = 6,96 \cdot 10^5 \text{ km}$ . Po dosazení těchto číselných hodnot do rovnic (2) a (3) dostáváme vnitřní poloměr ekosféry  $r_A = 9,3 \cdot 10^7 \text{ km}$ , vnější poloměr  $r_B = 28 \cdot 10^7 \text{ km}$ . Pro lepší názornost vyjádříme tyto poloměry v astronomických jednotkách (a. j.); pak  $r_A = 0,62 \text{ a. j.}$ ,  $r_B = 1,86 \text{ a. j.}$  (obr. 1). Uvnitř sluneční ekosféry není pouze naše Země, která obíhá ve střední vzdálenosti 1 a. j., ale také Venuše (0,72 a. j.) a Mars (1,52 a. j.). Není proto zcela vyloučeno, že i na těchto dvou sousedních planetách může existovat v nějaké formě život. Odpověď na tuto otázku přinesou v nejbližších letech přímé výzkumy pomocí kosmických raket.

V tab. 1 jsou uvedeny poloměry ekosféry spektrálních hvězd tříd A5 až M5, které jsou na hlavní posloupnosti v Hertzsprungově-Russellově diagramu. V prvním sloupci je spektrální třída hvězdy, ve druhém její povrchová teplota  $T^*$ , ve třetím poloměr hvězdy  $R^*$ , vyjádřený v poloměrech Slunce, ve čtvrtém vnitřní poloměr ekosféry  $r_A$  v astronomických jednotkách a v pátém sloupci vnější poloměr ekosféry  $r_B$  rovněž v astronomických jednotkách.

Tabulka 1.

| Spektrální<br>třída | $T_*$<br>[°K] | $R_*$<br>[ $R_\odot = 1$ ] | $r_A$<br>[a. j.] | $r_B$<br>[a. j.] |
|---------------------|---------------|----------------------------|------------------|------------------|
| A5                  | 8500          | 1,7                        | 2,3              | 6,9              |
| F5                  | 6500          | 1,2                        | 0,93             | 2,8              |
| G5                  | 5500          | 0,9                        | 0,51             | 1,53             |
| K5                  | 4200          | 0,74                       | 0,24             | 0,72             |
| M5                  | 2800          | 0,25                       | 0,04             | 0,12             |

Z číselných hodnot v posledních dvou sloupcích tabulky vidíme, že ekosféra hvězdy spektrální třídy A5 je poměrně rozsáhlá — její tloušťka je 4,6 a. j. Kdyby bylo naše Slunce hvězdou třídy A5, pak by uvnitř ekosféry byl z planet sluneční soustavy pouze Jupiter, který obíhá ve vzdálenosti 5,2 a. j. Na naší Zemi, ani na Marsu, by pro vysokou teplotu nebyl život možný. Připomeňme však, že podle SuLShu Huanga se v okolí hvězd spektrální třídy A5 nepředpokládá existence života, neboť tyto hvězdy nemají po dostatečně dlouhou dobu konstantní sví-



Obr. 1. Ekosféra Slunce (šrafovaně) se zakreslenými drahami Venuše, Země a Marsu.

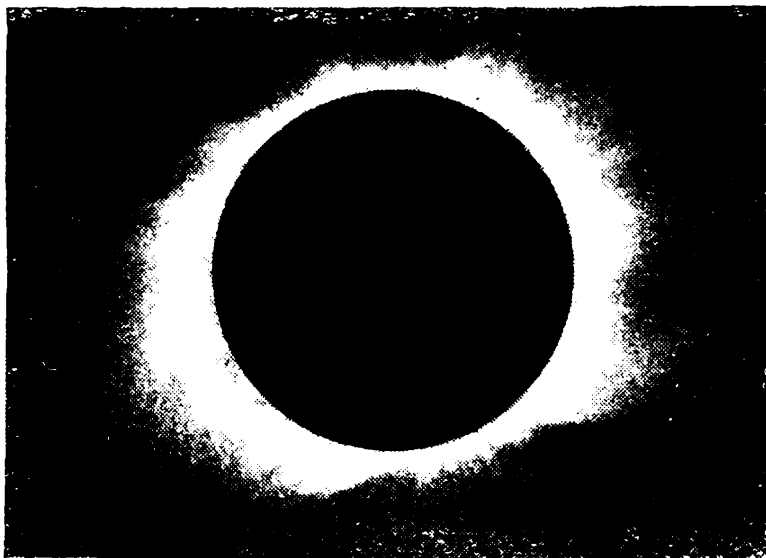
tivost. Kdyby bylo Slunce spektrální třídy F5, pak by již Země byla uvnitř ekosféry, i když velmi blízko k jejímu vnitřnímu okraji. Z tabulky 1 rovněž zřetelně vidíme, že s klesající spektrální třídou se ekosféra zužuje. U třídy K5 je její tloušťka jen 0,48 a. j. (uvnitř ekosféry by se pohyboval Merkur a na jejím vnějším okraji Venuše). Kolem hvězd spektrální třídy M5 se rovněž nepředpokládá existence života, neboť tloušťka ekosféry je již příliš malá — pouze 0,08 a. j.

Jak ukázal Su-Shu Huang, je nejpravděpodobnější existence života na planetách, které obíhají kolem hvězd spektrálních tříd F, G a K.

Příznivou okolností je to, že se tyto hvězdy poměrně pomalu otáčejí kolem své osy, takže se dá předpokládat, že mají planetární soustavy.

P ř í k l a d y.

1. Vypočtete podle vztahu (1) průměrnou teplotu na povrchu Země.  
[ $T = 279^\circ\text{K}$ ,  $t = 6^\circ\text{C}$ . Ve skutečnosti je průměrná teplota na povrchu Země 10 až  $15^\circ\text{C}$ .]



Obr. 2

2. Jaká je průměrná teplota na povrchu Marsu  
a) ve střední vzdálenosti Marsu od Slunce ( $r = 1,52$  a. j.),  
b) je-li Mars v periheliu ( $r_1 = 1,38$  a. j.),  
c) je-li Mars v afeliu ( $r_2 = 1,67$  a. j.).  
[a)  $t = -47^\circ\text{C}$ , b)  $t_1 = -36^\circ\text{C}$ , c)  $t_2 = -57^\circ\text{C}$ . Měřením byla zjištěna povrchová teplota  $-20^\circ\text{C}$  až  $-30^\circ\text{C}$ .]

3. Stanovte pomocí vztahů (2) a (3) poloměry ekosféry pro hvězdu hlavní posloupnosti spektrální třídy F0, jejíž povrchová teplota  $T^* = 7400^\circ\text{K}$ ,  $R^* = 1,5 R_\odot$ .

[ $r_A = 1,53$  a. j.,  $r_B = 4,6$  a. j. Kdyby Slunce bylo hvězdou spektrální třídy F0, pak by se uvnitř ekosféry pohybovaly planetky a na vnitřním okraji planeta Mars.]

4. Vypočtete vnitřní a vnější poloměr ekosféry hvězdy spektrální třídy K0, jejíž povrchová teplota je  $T^* = 4900^\circ\text{K}$ , poloměr  $R^* = 0,83 R_\odot$ .

[ $r_A = 0,37$  a. j.,  $r_B = 1,1$  a. j. (Venuše by obíhala uprostřed ekosféry, Merkur a Země na jejích okrajích.)]

L i t e r a t u r a k d a l š í m u s t u d i u :

Šklovskij, J. S.: Milióny cizích světů. Mladá fronta, Praha 1964.

Sullivan, W We are not alone. (Ruský překlad My ne odni. Vydalo nakladatelství „Mir“, Moskva 1967.)

## Albert Einstein, vědec a prorok

JOSEF KOTYK, Pardubice

Fyzice dostalo se v úmrtním roce Maxwellově badatele, jenž náleží netoliko k největším vědcům, nýbrž i prorokům naší doby. Dne 14. března 1879, *právě před 90 lety*, se narodil slavný *Albert Einstein*, geniální tvůrce principu relativnosti a teorie gravitační.

Z jevů jím předpověděných obrátíme svou pozornost nejprve na tzv. *efekt Einsteinův*, prakticky poprvé konstatovaný *právě před 50 lety* památného dne 29. května 1919, *vliv gravitace na dráhu (tvar) světelného paprsku*.

Gravitační síly obvyklé velikosti prohnou světelný paprsek velmi nepatrně. Zakřivení paprsku vlivem Země ( $g \doteq 10 \text{ ms}^{-2}$ ) nelze prakticky konstatovat. Nejsilnější účinky, jež nám jsou k dispozici, skýtá gravitační pole Slunce ( $a \doteq 270 \text{ ms}^{-2}$ ), pozorování byla proto prováděna na paprscích, jež přicházejí k Zemi od stálic, které vidíme na obloze těsně u slunečního kotouče. Ve skutečnosti jsou tyto stálice ovšem daleko, nesmírně daleko za Sluncem. Jestliže fotografujeme takovou skupinu stálic rozložených kolem sluneční desky a srovnáme tento snímek s jiným, získaným v době, kdy Slunce je na obloze daleko od nich, má se místo, v němž vidíme stálici, jejíž paprsek prošel blízko Slunce, podle Einsteinovy předpovědi vzdálit o několik setin mm od sluneční desky ve směru jejího poloměru. Fotografovat stálice v okolí Slunce je ovšem možné jen za úplného zatmění Slunce.<sup>1)</sup> Hledat jev Einsteinem předpověděný stalo se tak programem dvou anglických výprav, jež pozorovaly dne 29. května 1919 úplné zatmění Slunce, jedna v Sobralu v severní Brazílii, druhá na ostrově Principu v zálivu Guinejském. Oběma expedicemi byl Einsteinův efekt netoliko konstatován, nýbrž i popsáným posunutím vzájemných poloh stálic a měřením spolehlivě potvrzen. Přesnějších výsledků dosáhla úhlová měření při dalším úplném zatmění Slunce dne 21. září 1922, vykonaná ve Wollalu na severozápadním pobřeží Austrálie. Einstein vypočítal, že paprsek procházející těsně podél okraje sluneční desky se v gravitačním

---

<sup>1)</sup> „Zatměním“ Slunce rozumíme zaclonění Slunce Měsícem. Úplné „zatmění“ Slunce (viz obr. 1) pro určité pozorovací místo může trvat nejvýše 7,5 minuty.

poli Slunce prohne ve směru gravitační síly, a tím odchýlí od svého původního směru o  $1,75''$ ; měřením nalezená hodnota  $1,74''$  souhlasí velmi dobře s předpovědí.

K neméně krásným výsledkům Einsteinovy teorie patří proslavené Einsteinovy předpovědi vlivu gravitace na měření časová, na měření prostorová, na barvu (tj. vlnovou délku nebo kmitočet) světla vysílaného zdrojem, jenž je umístěn v gravitačním poli, na všechny fyzikální děje a výsledky všech měření. K nejparadoxnějším závěrům Einsteinovy teorie patří předpovědi, že např. měřítko se pohybem vůči pozorovateli zkracují (kontrakce délek), časový průběh fyzikálních dějů se stává pomalejším (dilatace času) aj. Požadavek, aby také tato proroctví byla potvrzena přímým měřením a uvedena v souhlas se zkušeností, je však příliš náročný. Uvažme, že délka metrového měřítka, které se vzhledem k pozorovateli pohybuje rychlostí  $108 \text{ km/h}$ , se zkrátí asi o 5 biliótin mm! Doba děje, trvajícího hodinu, se při udané rychlosti prodlouží asi o 18 biliótin sekundy! Naděje na experimentální potvrzení udaných číselných výsledků zatím není.<sup>2)</sup> Je asi taková jako naděje, že hmotnost Země 6 tisíc triliónů tun nebo hmotnost jiných planet potvrdíme přímým vážením; o správnosti uvedených čísel přesto nepochybujeme.

Také spojení geometrických vlastností (stručně říkáme metriky) prostoru s gravitací považujeme právem za jeden z nejkrásnějších výsledků Einsteinovy teorie.

Eliptické dráhy planet mají mít podle Newtonovy gravitační teorie vůči stálícím neproměnnou polohu. Einsteinova teorie tvrdí však, že zákony Newtonovy platí jen přibližně, a dokazuje, že eliptická dráha planety se zvolna vzhledem k stálícím ve své rovině stáčí; její bod Slunci nejbližší (tzv. perihelium) se pohybuje v kružnici, jejímž středem je Slunce. Zejména výklad precese perihelia Merkurova působil astronomům mnoho starostí. Podle výpočtů by tento bod Merkurovy oběžné dráhy opsal celou kružnici teprve asi za tři milióny let; za sto let činí jeho otočení asi  $43''$ , přesněji  $43,03'' \pm 0,08''$ . Přesnost astronomických měření je taková, že i tato veličina byla experimentálně zjištěna hodnotou  $42,56'' \pm 0,94''$  ve shodě s předpovědí Einsteinovy obecné teorie relativnosti.

---

<sup>2)</sup> V roce 1963 byla však dilatace času prokázána v Technologickém ústavě v Massachusetts měřením, jež bylo provedeno na tzv. mio-nech. Tyto částice vznikají pod vlivem kosmického záření při jeho průchodu ovzduším Země a pohybují se rychlostmi blízkými rychlosti světla. Mají krátkou životnost  $2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  a po proběhnutí dráhy 660 m od místa vzniku se již rozpadají; v atmosféře mohou však urazit dráhy desetkrát až padesátkrát větší, což lze vysvětlit jedině s přihlédnutím k dilataci času.

Světlo se šíří podle Einsteinových představ nezávisle na pohybu předmětů, má proto ke každému předmětu jiný pohybový stav; každý předmět má pak své míry vzhledem k ostatním posunuty a deformovány o tolik, že rychlost světla vychází ke každému táž. Einsteinův princip stálé světelné rychlosti.<sup>3)</sup>

Uvažujme ještě krátce o vlivu gravitace na barvu světla vysílaného zdrojem, jenž je umístěn v gravitačním poli. Běží ovšem opět o změny velmi nepatrné a je zcela vyloučeno, že by je snad bylo možno pozorovat prostým okem. Ani nejpřesnější zkoumání spektroskopická by je nemohla konstatovat v gravitačním poli Země, např. proměřením spekter téže látky, fotografovaných v různých nadmořských výškách. Měly by se však projevit ve spektru slunečním.

Přemýšlejme takto:

Nejpřesnější hodiny, které známe, jsou atomy vysílající světelné kmity. Porovnejme chod těchto atomových hodin na Zemi a na Slunci! Atomy vysílají ovšem kmity stále stejně rychlé, v silném gravitačním poli Slunce plyne však čas vzhledem k nám pomaleji, jednotka času je tam delší, proto i kmitů vychází (přepočteno na pozemskou jednotku času) méně. Za podmínek jinak stejných budou proto atomy na Slunci kmitat relativně pomaleji než na Zemi, vlnové délky vysílaného světla budou na Slunci větší, čáry ve slunečním spektru se posunou do oblasti zmenšených kmitočtů, k červenému kraji viditelného spektra. Podle Einsteinových předpovědí má tento tzv. rudý posuv čáry, která je na červeném kraji spektra, činit něco méně než dvě tisíci-milióntiny mm; pro čáry v jiných částech spektra je ještě menší, na fialovém kraji poloviční. Experimentální přezkoumání tohoto závěru znamenalo však problém velmi složitý a vyvolalo četné diskuse, poněvadž na Slunci mohou posuvy spektrálních čar vzbudit i četné jiné okolnosti<sup>4)</sup> a zkoumaný vliv gravitace nelze izolovat. Přes tyto nesnáze podařilo se St. Johnovi roku 1923 vykonat v Solar Observatory na Mount Wilson měření, jimiž byl rudý posuv Einsteinův potvrzen a jeho gravitační původ aspoň z 86 % pozorovaného celkového posuvu doložen.

---

<sup>3)</sup> V podrobnostech viz můj článek „Einstein a jeho princip stálé světelné rychlosti“ v Rozhledech roč. 48, čís. 3, str. 143 až 146.

<sup>4)</sup> Čtenářům je znám např. posuv Dopplerův, způsobený oběžným pohybem Země kolem Slunce, rotací Slunce kolem vlastní osy a vířením svítící hmoty sluneční, efekt Starkův a Zeemanův, vznikající vlivem elektrického a magnetického pole na Slunci aj.

Roku 1924 podrobil na Mount Wilson Einsteinovu předpověď nově, tentokrát rozhodující zkoušce, prof. Adams. Poukázal na to, že rudý posuv Einsteinův je zcela jasný u hvězd, jež mají normální hmotu, avšak neobyčejně malý poloměr a tedy i nesmírnou hustotu. Říkáme jim „bílé trpaslíci“ Takovou hvězdou je např. družice Siriova;<sup>5)</sup> tuna její hmoty by se při své neuvěřitelně veliké hustotě (střední hodnoty  $40 \text{ kg/cm}^3$ ) vešla do dvou — krabiček na zápalky!<sup>6)</sup> Einsteinův jev vychází pak asi tisíckrát větší než na Slunci a daleko převyšuje všechny posuvy podružné, které jej na Slunci překrývají a činí tam všechna měření tak obtížnými. Nesnáze působí toliko okolnost, že hustota „bílých trpaslíků“ a tedy i intenzita gravitačního pole na jejich povrchu je známa málo přesně; také rozptýlené světlo zářícího Siria velmi ruší.

A výsledky?

Rudý posuv, vyjádřen rychlostí ekvivalentní postupné rychlosti, jež by podle Dopplerova efektu přivodila posuv stejný, činí teoreticky  $26 \text{ km/s}$ , změřený  $23 \text{ km/s}$ , tj.  $88,46 \%$  — Einstein uměl i zde skvěle odkrýt roušku z tajemství přírody.

Závěrem ještě několik slov k profilu velikého vědce - proroka Einsteina jako člověka. Americký fyzik Banesh Hoffmann o něm napsal: „Byl jedním z největších vědců, ale kdybych měl Einsteinovu povahu shrnout do jednoho slova, musel bych se rozhodnout pro slovo — skromnost.“ Dokladem o tom mohou být také vlastní slova Einsteina:

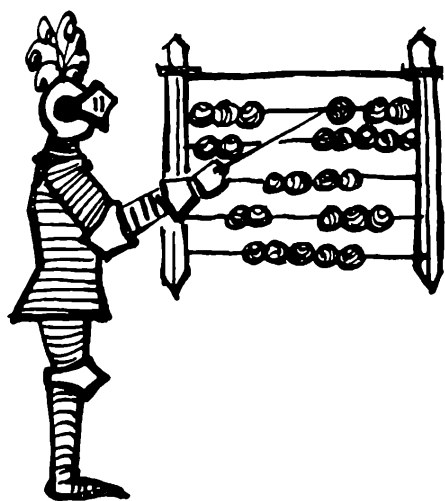
„Jsem sice v denním životě typický samotář, avšak vědomí, že patřím k neviditelnému bratrstvu těch, kdož usilují o pravdu, krásu a spravedlnost, způsobuje, že se necítím osamělým.“

Einstein zemřel v Princetonu (USA) dne 18. dubna 1955.

---

<sup>5)</sup> Čtenáři znají jistě skvělé souhvězdí nebeského lovce Oriona. Na lovu Býka je doprovázen dvěma psy. Na prodloužené spojnici hvězd Orionova pasu nalézáme v souhvězdí Velkého psa jasného Siria, stálici, jež upoutávala odedávna pozornost národů (Sothis starých Egyptanů, Psí hvězda Řeků aj.).

<sup>6)</sup> Případný dotaz čtenáře „Který atom či prvek to je?“ zaměním vhodnější otázkou „Jak je atom oblečen?“ Ve společnosti atomů v Siriově družici nejsou již v módě — krinolíny. Atomy jsou zbaveny krinolín elektronů, svých elektronových obalů; pouhá jádra mají pak nepatrné rozměry a jsou působením vysokých tlaků k sobě velmi těsně nahuštěna.



# NAŠE SOUTĚŽ

## Řešení úloh loňské soutěže

### Matematika

6. Na obr. 1 je zobrazena horní část okna, jehož klenutí je tvořeno půlkružnicí o poloměru  $\frac{3}{2}a$ .

a) Vypočtete průměr  $x$  vepsané kružnice.

b) Proveďte a popište geometrickou konstrukci této kružnice.

(Došlo 26 řešení)

Jaromír Hroník

Řešil Alexander Kirschner, 2a, SVŠ Jura Hronca — Novohradská, Bratislava:

a) Vid' označenie z obrázku 1

$$S_2S = a = S_1S, \quad (1)$$

$$ST = \frac{3}{2}a, \quad (2)$$

$$S_2S_1 = a\sqrt{2}, \quad (3)$$

$$SX = S_2X = S_1X = \frac{1}{2}S_1S_2 = \frac{a}{2}\sqrt{2} \quad (4)$$

$$S_2S_3 = S_1S_3 = \frac{a+x}{2}, \quad (5)$$

$$S_3X = ST - TS_3 - XS,$$

$$S_3X = \frac{3a}{2} - \frac{x}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}[a(3 - \sqrt{2}) - x].$$



Platnosť týchto vzťahov dokážem v časti b).

Z Pythagorovej vety plyne

$$(S_2 S_3)^2 = (S_3 X)^2 + (S_2 X)^2,$$

čiže

$$\left[ \frac{1}{2} (a + x) \right]^2 = \left\{ \frac{1}{2} [a (3 - \sqrt{2}) - x] \right\}^2 + \left( \frac{a}{2} \sqrt{2} \right)^2$$

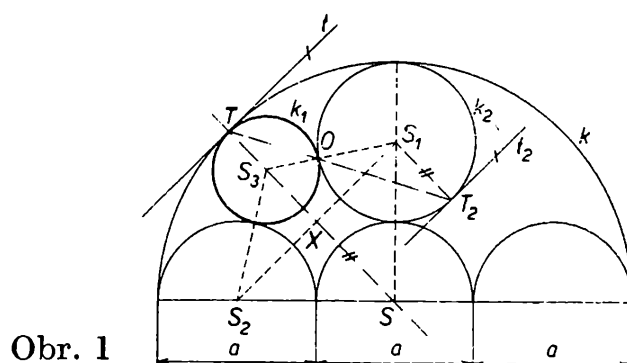
neboli

$$a^2 + 2ax + x^2 = a^2 \cdot (11 - 6\sqrt{2}) - 2ax(3 - \sqrt{2}) + x^2 + 2a^2$$

$$2ax(1 + 3 - \sqrt{2}) = a^2 \cdot (1 + 11 - 6\sqrt{2}),$$

a z toho

$$x = \frac{6a^2(2 - \sqrt{2})}{2a(4 - \sqrt{2})},$$



a konečnou úpravou

$$x = \frac{6a^2(2 - \sqrt{2})(4 + \sqrt{2})}{2a \cdot (4^2 - \sqrt{2}^2)},$$

$$x = \frac{3a(3 - \sqrt{2})}{7}.$$

b) Rozbor: Zo zadania vyplývajú vzťahy (1), (2), (3)

$\triangle SS_1S_2$  je rovnoramenný, pravoúhlý  $\Rightarrow$  vzťah (4)

$\triangle S_1S_2S_3$  je rovnoramenný ( $S_1S_3 = S_2S_3$ )  $\Rightarrow$  vzťah (5)

$$k_1 \equiv \left[ S_3; \frac{x}{2} \right], \quad k_2 \equiv \left[ S_1; \frac{a}{2} \right], \quad k \equiv \left[ S; \frac{3a}{2} \right].$$

Kružnice  $k_1$  a  $k$  sú rovnolahlé podľa bodu  $T$ , kružnice  $k_1$  a  $k_2$  sú rovnolahlé podľa bodu  $O$ ,  $ST$  je os úhla  $\sphericalangle S_2SS_1 = R$ .

### Konštrukcia

1. os  $ST$ , 2.  $t \perp ST$  v  $T$ , 3.  $S_1T_2 \parallel TS$ , 4.  $k_2 \cap TT_2 \equiv O$ , 5.  $S_1O \cap TS \equiv S_3$ , 6.  $k_1 \equiv [S_3; S_3T]$ .

Dôkaz plyne z rozboru. Diskusia: 1 riešenie.

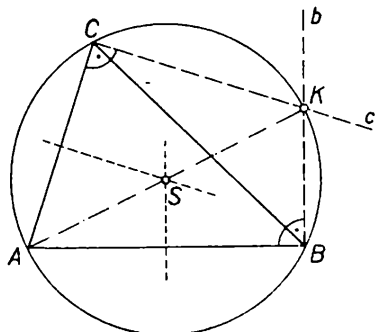
7. Dokažte správnosť tejto konštrukcie stredu  $S$  kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$ : Ve vrchole  $B$  vztyčme na stranu  $AB$  kolmicu  $b$ ; ve vrchole  $C$  vztyčme na stranu  $AC$  kolmicu  $c$ . Priamky  $b, c$  sa protínajú v bode  $K$ . Stred úsečky  $AK$  je stredom kružnice opísanej danému trojuholníku  $ABC$ .

(Došlo 28 riešení)

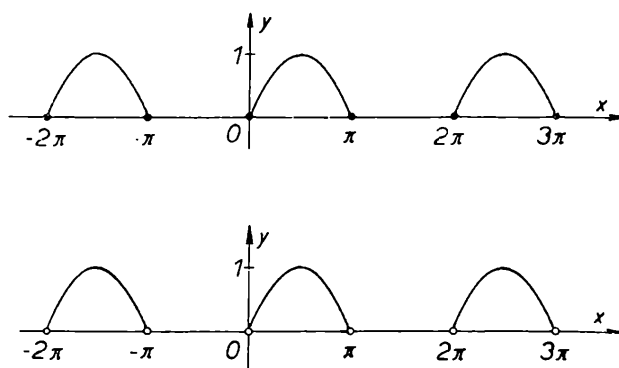
Adolf Karger

Riešil Tomáš Mašek, 3.F SVVŠ Praha 2 (obr. 2):

Ve stejnolehlosti  $H(A; 2)$  obrazem osy strany  $AB$  je priamka  $b$ , obrazem osy strany  $AC$  je priamka  $c$ , obrazem stredu  $S$  kružnice opísanej trojuholníku  $ABC$  ( $S$  je priesečník os stran  $AB, AC$ ) je priesečník  $K$



Obr. 2



Obr. 3

priamek  $b, c$ . Tudiž bod  $S$  je stredom úsečky  $AK$  a pretože  $AK$  je priemer kružnice opísanej danému trojuholníku, je bod  $S$  jejím stredom.

12. Znázorníte graficky průběh funkcí:

$$\text{a) } y = (\sqrt{|\sin x|})^2; \text{ b) } y = \frac{2 \sin^2 x}{\sin x + |\sin x|}.$$

(Došlo 29 riešení)

Jiří Sedláček

*Řešila Hana Drahoňovská, 1.A, SVVŠ Koněvova, Brno:*

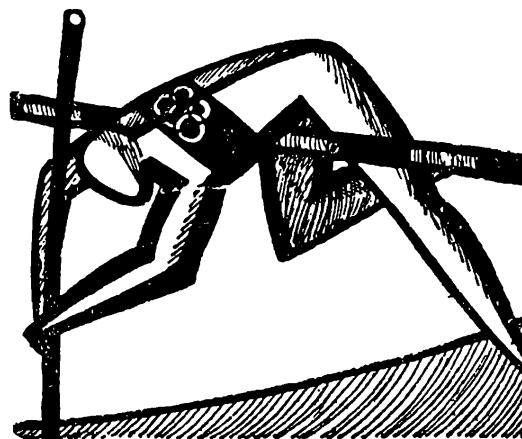
Pořadnice obou křivek jsou definovány tam, kde je  $\sin x > 0$  (tedy pro  $\pm k \cdot 2\pi < x < \pi \pm k \cdot 2\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ) a mají tam hodnotu  $y = \sin x$ ; jsou to tedy části sinusoidy. Pořadnice křivky a) jsou nadto definovány i pro  $x = 0 \pm k\pi$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , kde  $\sin x = 0$  a  $y = 0$ .

Pro jiné hodnoty  $x$  nejsou křivky definovány.

Výsledek vidíme na obrázcích 3, kde plné kroužky znamenají body, které ke grafu patří, zatímco prázdné kroužky ukazují, že příslušné body ke grafu nepatří.

*Redakční poznámka.* Nedopatřením se stalo, že jsme 12. úlohu zařadili do soutěže již podruhé. Poprvé se tento příklad vyskytl v Rozhledech ve školním roce 1961–62. Protože se od těch dob velmi změnil čtenářský okruh našeho časopisu, neovlivnilo zřejmě toto opomenutí letošní řešitele a žádný ze čtenářů nás na ně ani neupozornil.

MMO



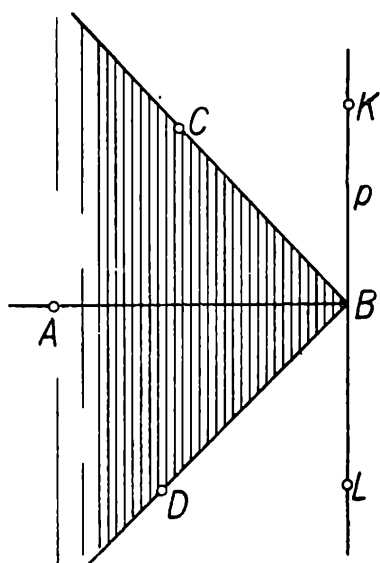
---

*5. příklad. Řešení Tomáše Maška*

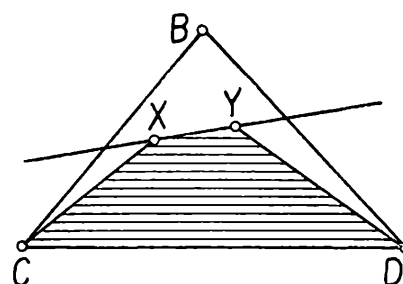
Je možné narysovat  $\binom{n}{2}$  úseček, které spojují vždy dva z daných bodů. Mezi nimi existuje úsečka nejdelší a tu označíme  $AB$ . Pro všechny dvojice bodů  $X, Y$  z dané množiny bodů platí

$$XY \leq AB.$$

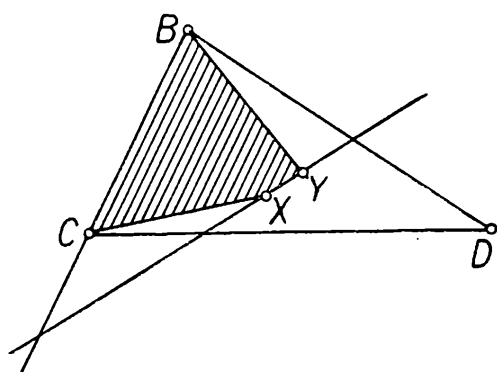
Bodem  $B$  proložíme přímkou  $p$   $AB$ . Potom všechny dané body kromě bodu  $B$  jsou vnitřními body poloroviny  $pA$  (obr. 1). Na přímce  $p$  zvolme body  $K, L$  tak, aby bod  $B$  byl vnitřním bodem úsečky  $KL$ .



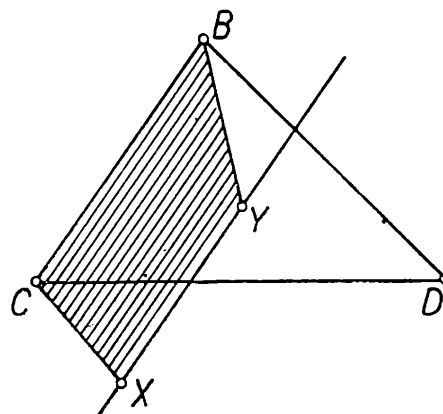
Obr. 1



Obr. 1a



Obr. 1b



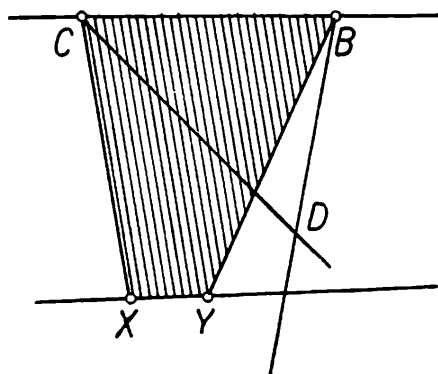
Obr. 1c

Mezi danými body lze nyní najít body  $C, D$  té vlastnosti, že všechny dané body (kromě bodů  $B, C, D$ ) leží uvnitř dutého úhlu  $CBD$ . Dva z těchto bodů, které leží uvnitř úhlu  $CBD$ , označme  $X, Y$ . Porovnáme-li polohu přímky  $XY$  vzhledem k úsečkám  $BC, BD$ , může nastat právě jeden z těchto případů:

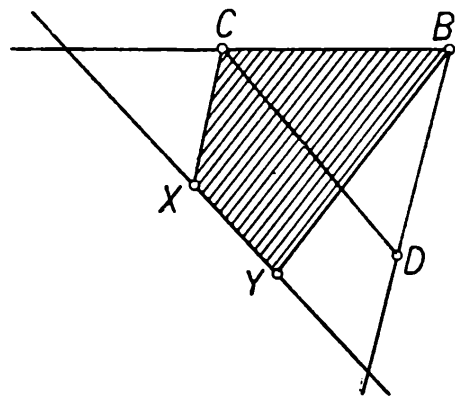
- Přímka  $XY$  protíná úsečky  $BC, BD$ . (Obr. 1a.)
- Přímka  $XY$  protíná úsečku  $BD$  ( $BC$ ) a polopřímku, která je opačná k polopřímce  $CB$  ( $DB$ ). (Obr. 1b.)

c) Přímka  $XY$  protíná úsečku  $BD$  ( $BC$ ) a je rovnoběžná s přímkou  $BC$  ( $BD$ ). (Obr. 1c)

d) Přímka  $XY$  protíná polopřímku opačnou k  $DB$  ( $CB$ ) a je rovnoběžná s přímkou  $BC$  ( $BD$ ). (Obr. 1d.)



Obr. 1d



Obr. 1e

e) Přímka  $XY$  protíná polopřímky opačné k polopřímkám  $CB$ ,  $DB$ . (Obr. 1e.)

Všimněme si nyní nejprve případu a). Čtyřúhelník  $CXYD$  je nutně konvexní, neboť je průnikem polorovin  $CDY$ ,  $DYC$ ,  $YXD$ ,  $XCX$ . Čtyřúhelník  $CXYD$  je tedy skutečně konvexní.

Podobně bychom dokázali v ostatních případech konvexitu vyšrafovaných čtyřúhelníků. Je vidět, že z každé dvojice bodů  $X$ ,  $Y$  dostaneme aspoň jeden konvexní čtyřúhelník a poněvadž bodových dvojic  $X$ ,  $Y$  je

$$\binom{n-3}{2} = \frac{1}{2}(n-3)(n-4),$$

je tím vyslovené tvrzení dokázáno.

### 6. příklad. Řešení Jiřího Vinárka

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat  $y_1 \geq y_2$ . Pak rozlišíme dva případy.

a)  $x_1 \leq x_2$ . Potom zřejmě platí též

$$x_1(y_1 - y_2) \leq x_2(y_1 - y_2) \quad (2)$$

čili

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq x_2y_1 + x_1y_2.$$

K oběma stranám nerovnosti přičteme  $x_1y_1 - x_2y_2$  a dostaneme

$$2(x_1y_1 + x_2y_2) \leq (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \quad (3)$$

Na základě nerovnosti

$$(z_1 - z_2)^2 \geq 0 \quad (4)$$

platí

$$-2z_1z_2 \geq -(z_1^2 + z_2^2)$$

a také

$$-(z_1 + z_2)^2 \geq -2(z_1^2 + z_2^2) \quad (5)$$

Z nerovností (3) a (5) plyne

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \geq 2[x_1y_1 - z_1^2 + x_2y_2 - z_2^2] \quad (6)$$

Podle věty o aritmetickém a geometrickém průměru kladných čísel

$(x_1y_1 - z_1^2), (x_2y_2 - z_2^2)$  platí dále

$$\frac{x_1y_1 - z_1^2 + x_2y_2 - z_2^2}{2} \geq \sqrt{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)} \quad (7)$$

Podle textu úlohy je  $x_1y_1 - z_1^2 > 0$ ,  $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ , proto jsou na obou stranách nerovnosti (6) kladná čísla. Po úpravě ze vztahů (6) a (7) dostaneme

$$\begin{aligned} a = \frac{2}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} &\leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2 + x_2y_2 - z_2^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)}} \end{aligned} \quad (8)$$

Dále je

$$\frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)}}. \quad (9)$$

Po dosazení vztahu (4) do (8) je

$$a \leq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \right),$$

tj.

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}, \quad c \quad b \quad d$$

Aby nastala rovnost, musí rovnost nastat ve vztazích (2), (4), (7) a (9), z nichž jsou ostatní nerovnosti odvozeny. Z (2) pro rovnost plyne podmínka  $x_1 = x_2$  nebo  $y_1 = y_2$ , ze (4) pak  $z_1 = z_2$ . Ze vztahu (7) opět máme  $x_1y_1 - z_1^2 = x_2y_2 - z_2^2$ . Za těchto podmínek nastane rovnost i v (9). Z odvození zároveň vyplývá, že podmínky

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2$$

jsou nejen nutné nýbrž i postačující k tomu, aby ve vztahu (1) nastala rovnost.

b)  $x_1 > x_2$ . V tomto případě označíme

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = kx_2$$

tak, že

$$x'_2 \geq x'_1, \quad y'_1 = ky_1, \quad y'_2 = y_2, \quad z'_1 = z_1/\sqrt{k}, \quad z'_2 = z_2/\sqrt{k}$$

Čísla  $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, z'_1, z'_2$  splňují případ a) a platí tudíž o nich

$$\begin{aligned} \frac{8}{(x'_1 + x'_2)(y'_1 + y'_2) - (z'_1 + z'_2)^2} &\leq \frac{1}{x'_1 y'_1 - z_1'^2} + \frac{1}{x'_2 y'_2 - z_2'^2} = \\ &= \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2} \right] \end{aligned}$$

Zvolíme-li číslo  $k$  tak, aby platilo

$$\frac{8}{k[(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)] - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{8}{(x_1 + kx_2)(ky_1 + y_2) - k(z_1 + z_2)^2},$$

je nerovnost dokázána. K tomu je potřebí, aby platilo

$$k(x_2 y_1 + x_1 y_2) \leq k^2 x_2 y_1 + x_1 y_2,$$

a toho lze vždy dosáhnout.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby nastala rovnost, je

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2.$$

Předmětem čisté matematiky jsou vztahy, které se dají abstraktně sestavit mezi jakýmkoli myšlenými elementy, předpokládáme-li, že jsou obsaženy v nějaké uspořádané množině. Zákon uspořádání této množiny musí být ponechán naší volbě.

Erwin Papperitz: Über das System der reinmathematischen Wissenschaften.



## MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY

8. Můj prapraděd se narodil v 19. století. Kolik mu bylo let v roce 1875, jestliže v roce  $x^2$  mu bylo  $x$  let?

9. Válcovitá nádoba s barvou váží 5 kg, je-li plná z poloviny a 4 kg, je-li plná z jedné třetiny. Kolik váží plná nádoba barvy?

|   | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| A | 2 | 6 | 3 |
| B | 9 |   | 7 |
| C | 5 | 8 | 4 |

Obr. 1

|   | I | II |
|---|---|----|
| A |   |    |
| B |   |    |

Obr. 2

10. Koníček. V osmi polích obr. 1 je vepsáno osm různých čísel. Z jednoho pole na jiné je možné se dostat jen tak, jak skáče kůň na šachovnici. Postavíme-li koně na kterékoli pole (kromě prostředního), stačí 7 tahů, aby prošel ostatními sedmi poli. Všechna pole si rozdělíme do dvou skupin. V 1. skupině bude pole, na které koně postavíme a 3 pole, jimiž kůň projde při prvních třech tazích. Ve 2. skupině budou pole, jimiž kůň projde při dalších čtyřech tazích. Kam je nutné postavit koně, aby součet čísel v prvních čtyřech polích byl roven součtu čísel ve druhé čtveřici polí?

11. Do jednotlivých políček čtverce v obrázku 2 vepište přirozená čísla tak, aby součet čísel v řádce A byl 5, součet čísel v řádce B byl 7 a součet čísel ve sloupci I byl 4.

Dříve než známe řešení této úločky, můžeme zjistit součet čísel ve sloupci II. Pokuste se o to.



## Řešení matematických zábav

24.  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ .

25. Označme  $x$  rokov vek Petra dňa 15. januára 1965. Vieme, že  $x$  je celé číslo. Vek Janka tohto dňa je  $\frac{x}{3}$  rokov. Podľa podmienok v úlohe je

$$\frac{x}{3} - 3 < \frac{1}{7}(x - 3)$$

$$\frac{x}{3} + 4 < \frac{1}{2}(x + 4)$$

Riešením dostaneme

$$12 < x < 13\frac{1}{2}$$

a odtiaľ

$$x = 13$$

Janko má 13 rokov a chodí teda do 7. triedy ZDŠ.

26. Pri řešení přihlídneme k tomu, že na hrací kostce součet ok na protilehlých stěnách je vždy roven 7. Bylo 6 kostek.

## Řešení fyzikálních zajímavostí

### ZNÁTE ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE?

(*Loňský ročník, str. 252*)

Spálením uhlí, které vyneseme ze sklepa do třetího poschodí, ne získáme větší množství tepelné energie. Přesto se však potenciální tíhová energie vyneseného uhlí neztratila. Zplodiny, které vznikly spálením uhlí (popel, kouřové plyny), mají totiž větší potenciální energii než by měly v případě, že by vznikly shořením uhlí ve sklepe. Tato vyšší potenciální energie zplodin však v našem případě k užitku není.

## KTERÝ STUDENT MÁ PRAVDU?

(Loňský ročník, str. 252)

Oba studenti neřešili úlohu správně, neboť část kinetické energie střely se předá i vlaku, aniž se změnila v teplo, takže konečná rychlost  $u_0$  soustavy střela + vlak je o něco větší než  $u$ .

Jde o nepružný ráz střely a vlaku. Ze zákona zachování hybnosti (hybnost soustavy před rázem se rovná hybnosti soustavy po rázu) dostáváme vztah

$$mv + Mu = (m + M) u_0 ,$$

kde  $M$  je hmotnost vlaku. Z tohoto vztahu plyne, že

$$u_0 = \frac{mv + Mu}{m + M} .$$

Kinetická energie  $W_1$  soustavy před rázem

$$W_1 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mu^2$$

Kinetická energie po rázu

$$W_2 = \frac{1}{2} (m + M) u_0^2 = \frac{1}{2} \frac{(mv + Mu)^2}{m + M}$$

V teplo se tedy přemění kin. energie

$$\begin{aligned} \Delta W &= W_1 - W_2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mu^2 - \frac{1}{2} \frac{(mv + Mu)^2}{m + M} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(m + M)(mv^2 + Mu^2) - (mv + Mu)^2}{m + M} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m^2v^2 + M^2u^2 + mM(v^2 + u^2) - m^2v^2 - 2mMuv - M^2u^2}{m + M} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{mM(v - u)^2}{m + M} = \frac{1}{2} \frac{m(v - u)^2}{1 + \frac{m}{M}} \end{aligned}$$

Poněvadž u nás je (jak mlčky předpokládáme)  $m \ll M$ , je

$$\Delta W = \frac{1}{2} m (v - u)^2$$

což je výsledek, k němuž dospěl druhý student. Ten byl tedy velmi blízko k správnému výsledku.

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

|                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| face <i>ž</i>            | stěna                      |
| face latérale            | boční stěna                |
| facile                   | snadný                     |
| facteur <i>m</i>         | činitel, faktor            |
| facteur premier          | prvočinitel                |
| factorielle <i>ž</i>     | faktoriál                  |
| faisceau <i>m</i>        | svazek                     |
| falloir                  | býti třeba, musiti         |
| il faut et il suffit     | je nutné a stačí           |
| famille <i>ž</i>         | třída, soustava, množina   |
| famille de courbes       | jednoparametrická soustava |
| faut                     | křivek                     |
| faute <i>ž</i>           | viz falloir                |
| faux, fausse             | chyba                      |
| fermé <i>e</i>           | chybný                     |
| figure <i>ž</i>          | uzavřený                   |
| fini, <i>e</i>           | obrazec                    |
| fixe                     | konečný                    |
| focal, <i>e</i> , aux    | pevný                      |
| distance <i>ž</i> focale | ohniskový, fokální         |
| fois                     | vzdálenost ohnisek         |
| deux fois                | krát                       |
| fonction <i>ž</i>        | dvakrát                    |
| fonction continue        | funkce                     |
| fonction d'une variable  | funkce spojitá             |
| fondamental, <i>e</i>    | funkce jedné proměnné      |
| fondement <i>m</i>       | základní                   |
| fondements de géométrie  | základ                     |
| forme <i>ž</i>           | základy geometrie          |
|                          | forma, homogenní mnohočlen |

formule *ž*  
 foyer *m*  
 fraction *ž*  
     fraction continue  
     fraction décimale  
     fraction réduite  
 frontale *ž*  
 frontière *ž*  
 fuite *ž*  
     point *m* de fuite  
 fuseau *m* sphérique

formule, vzorec  
 ohnisko  
 zlomek  
     řetězový zlomek  
     desetinný zlomek  
     nezkratitelný zlomek  
 hlavní přímka (vzhledem k nárysně)  
 hranice  
 útěk  
     úběžník  
 sférický dvojúhelník

## G

gauche  
     courbe *ž* gauche  
     surface *ž* gauche  
     symétrie gauche  
 général, e, aux  
     en général  
 généralisation *ž*  
 généraliser  
 généralisé, e  
 génératrice *ž*  
     génératrice d'une  
         surface cylindrique  
 genre *m*  
 géométrie *ž*  
     géométrie cotée  
     géométrie de l'espace  
     géométrie euclidienne  
     géométrie plane  
 géométrique  
 géométriquement  
 gerbe *ž*  
 goniométrie  
 grade *m*  
 gradué, e  
 grand, e  
     grand cercle  
     le plus grand  
     le plus grand diviseur *m*  
         commun  
 grandeur *ž*  
 grandir  
 graphe *m*  
 graphique  
     représentation *ž* graphique  
 gravitation *ž*  
 gravité *ž*  
     centre *m* de gravité  
 groupe *m*

levý, prostorový  
     prostorová křivka  
     zborcená plocha  
     antisymetrický  
 obecný  
     obecně  
 zobecnění  
 zobecnit  
 zobecněný  
 vytvářející přímka nebo křivka  
     vytvářející přímka válcové  
         plochy  
 druh, rod  
 geometrie  
     kótované promítání  
     prostorová geometrie  
     euklidovská geometrie  
     rovinná geometrie  
 geometrický  
 geometricky  
 trs  
 goniometrický  
 grad (úhlová míra)  
 opatřený dílky, stupnicí  
 velký  
     hlavní kružnice  
     největší  
     největší společný dělitel  
 velikost  
 zvětšovat  
 graf  
 grafický  
     grafické znázornění  
 gravitace  
 tíže  
     těžiště  
 grupa

# rozhledy

MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ

---

8

ROČNÍK 48, 1969-70, DUBEN



ROČNÍK 48  
DUBEN 1969-70

8

# MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání  
Za zásluhy o výstavbu

## VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci

## VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

## REDAKČNÍ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; zasl. učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B. Bystrica; Miloš Franek, PF UK, Bratislava; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, DrSc., ČVUT, Praha; dr. Oldřich Lepil, PU, Olomouc; Milan Marčok, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava; prof. dr. Cyril Palaj, PF-UPJŠ, Košice; Evžen Říman, CSc., ČVUT, Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci; dr. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Jaroslav Sedivý, KU, Praha; ing. dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ ÚNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarík, insp. MŠ SSR, Bratislava.

## REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29.

## OBSAH

|                                                                                  |                     |
|----------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Doc. V. Jozífek: V. I. Lenin a matematika                                        | 341                 |
| O. Odvárko: Nezávislost náhodných jevů                                           | 344                 |
| J. Hošek: O jedné metodě výpočtů objemů těles                                    | 348                 |
| Doc. K. Drábek: Geometrické příbuznosti                                          | 359                 |
| S. Horák: Rovina souměrnosti                                                     | 367                 |
| F. Golab - F. Kamenčák: Peltierův jev jeho využití k termoelektrickému ochlazení | 372                 |
| Dr. J. Široký - dr. M. Široká: Zodiakální souhvězdí                              | 378                 |
| Dr. J. Široký - dr. M. Široká: Souhvězdí letní oblohy                            | 381                 |
| S. Horák: Alexandrijští matematikové                                             | 384                 |
| Matematické a fyzikální zábavy                                                   | 386                 |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český                                     | 3. a 4. str. obálky |

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Höhnig. Titulní obrázky: B. Šmejdivá, studující FS.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1969.

# V. I. LENIN a matematika



Doc. Vítězslav Jozífek, ČVUT, Praha

V letošním jubilejním roce připomínáme si význam myšlenek V. I. Lenina pro všechna odvětví společenského i technického života. Připomeňme si proto jeho význam i pro matematiku.

V. I. Lenin nebyl matematikem, ale jeho učení odpovídá na otázky z filosofie matematiky.

V našem článku můžeme přinést jen nejdůležitější výňatky. Tím že vytrháváme citáty ze souborného díla, vystavujeme se nebezpečí že nevystihneme plně smysl úvah, a tím že náročné úvahy zpřístupňujeme, dopouštíme se nutně, i když podle možností v nejmenší míře, nepřesností. Toho si musíme být vědomi.

Teoretická matematika je logickou soustavou určitých specifických pojmů a jejich vztahů. Již v článku „Co je matematika“, ve 4. čísle Rozhledů, roč. 48 1969-70 jste se seznámili s otázkami o původu matematických pojmů. Objektivní obsah teorie matematiky nezávisí na ideologii, na společenském řádu. Ale systematizace faktů a vztahů, obecná interpretace, motivace, zaměření vývoje znalostí a v tomto smyslu i celá věda se jeví třídní. Můžeme říci, že matematika je jednotkou objektivního obsahu a jeho teoretického výkladu v rámci určité ideologie.

Každá filosofie dává charakteristické odpovědi podle svého pojetí na otázky o poměru myšlení a bytí, o poměru ducha a přírody, na otázky, co je prvotní. Odpověďmi se rozdělil svět, zhruba řečeno, na dva tábory, idealistický a materialistický.

Základní takové otázky jsou např. 1. O čem se vlastně v matematických větech hovoří, jaký je předmět matematiky, jestliže matematika nic nepraví o skutečnosti. 2. Na čem se zakládá jistota matematických důkazů, která se zdá být nezávislá na

smyslové zkušenosti, na názoru? 3. Jak to, že se matematické poučky hodí na skutečnost? Na první otázku odpovídá definice Engelsova, vyjádřena v jeho knize „Anti-Dühring“, str. 34, „Předmětem čisté matematiky jsou formy prostoru a kvantitativní vztahy skutečného světa, tedy velmi reálná látka.“

Engels nebyl matematik a abstrakce se netušeně rozvíjela až po jeho smrti. Přesto tento dialektik předvídal správně její rozkvět. Opravíme-li jeho výklad některých pojmů jejich zpřesněním, platí Engelsovy závěry stále.

Podle materialistického názoru jsou matematické pojmy historické. Vznikly jako výsledek dlouhého vývoje vědy a lidské práce a budou se dále rozvíjet v souladu s historickým postupem vědy podle zákonů materialistické dialektiky. Jen takové chápání předmětu matematiky je v souladu s jejím skutečným vývojem a s její službou praxi.

O problému proměnlivosti našich představ a prostoru říká Lenin: „Lidské představy o prostoru a času jsou relativní, ale z těchto relativních představ se skládá absolutní pravda. Tyto relativní představy jdou ve svém vývoji k absolutní pravdě, přibližují se jí. Proměnlivost lidských představ o prostoru a čase vyvrací objektivní realitu právě tak málo, jako proměnlivost vědeckých poznatků o struktuře a pohybových formách nevyvrací „objektivní realitu vnějšího světa“.

Relativnost našich představ o prostoru dokázal nejlépe B. I. Lobačevskij (1793–1856) svou teorií neeukleidovské geometrie. Dokázal tím i dialekticko-materialistické hledisko, že naše představy nejsou prvotní (apriorní), ale že pocházejí ze zkušenosti, že nejsou absolutní, ale že podléhají změně podle toho, jak lépe a úplněji poznáváme reálný prostor a čas.

Každé poznání je tedy relativní. Každý stupeň dosaženého vědění je jen částí celkového vědění, neboť ve světě, zvláště v poslední době, vznikají během vývojového procesu stále nové poznatky. Obsáhnout různé stránky skutečnosti myšlením, znamená vždy zjednodušení, zeschematizování skutečného stavu. Lenin



o tom říká: „Proces poznání je nevyhnutelně spjat se zhrubením, se schematizací poznávací činnosti“ V procesu poznávání se i v matematice setkáváme s procesem idealizace a abstrakce.

V abstrakci vyzvedáme, co ve skutečnosti existuje. Idealizováním tvoříme objekty, které neexistují, jako např. rovina, bod, přímka.

Otázku původu funkce a místa abstrakce zodpověděl Lenin takto: „Poznání je odrazem přírody člověkem. Není to však prosté, bezprostřední, celistvé odrážení, nýbrž proces řady abstrakcí, formování tvoření pojmů, zákonů, atd., kteréžto pojmy, zákony atd. také zahrnují podmíněčně, přibližně, univerzální zákonitost věčně se pohybující a vyvíjející se přírody. Člověk nemůže obsáhnout, odrazit, zobrazit přírodu v úplnosti, v její bezprostřední celistvosti, on se k tomu může jen věčně přibližovat, vytvářeje abstrakce, pojmy, zákony, vědecký obraz světa...

Na jiném místě Lenin píše: „Myšlení pocházející od konkrétního k abstraktnímu nevzdaluje se – pokud je správné – od pravdy, nýbrž naopak, k ní vede. Abstrakce hmoty, přírodního zákona, abstrakce hodnoty atd., jedním slovem veškeré vědecké (správné), seriosní, ne prázdné abstrakce odrážejí přírodu hlouběji, věrněji, úplněji. Od živého poznání k abstraktnímu myšlení a od něho k praxi, tj. dialektická cesta k poznání pravdy, poznání objektivní skutečnosti.“

V obou citacích je shrnuta podstata názoru dialekticko-materialistického na abstrakci, která je nezbytným stupněm poznání k úplnějšímu poznání přírody. Nesmíme ji ovšem absolutizovat a odtrhovat od obecného rozvoje poznání.

Správné odrážení přírody abstrakcemi se prověřuje praxí. Lenin opět o tom řekl: „Od živého vnímání k abstraktnímu myšlení a od něho k praxi, tj. dialektická cesta poznání pravdy, poznání objektivní skutečnosti.“

Tím se dostáváme k dialektické metodě v matematice, ke které řekl V. I. Lenin mnohem více, a to nejpodstatnější, jako i k problému formální, symbolické a dialektické logiky. O tom dalším článku.

(Pokračování)



## MATEMATIKA

# Nezávislost náhodných jevů

OLDŘICH ODVÁRKO, KU Praha

V článku „Pravděpodobnost jevu a číselné Vennovy diagramy“, který byl uveřejněn v čísle tohoto časopisu, jste poznali, jak lze pomocí Vennových diagramů řešit úlohy, které požadují určení pravděpodobnosti náhodného jevu. Nyní se seznámíme s pojmem podmíněné pravděpodobnosti jevu a s pojmy závislost, resp. nezávislost jevů.

Nejprve popíšeme jednu konkrétní situaci, na níž připomeneme úvahy z minulého článku a naznačíme nové pojmy. Číselný Vennův diagram na obr. 1 znázorňuje množinu **Z** všech dětí jedné národní školy, množinu **B** všech obrýlených dětí v této škole a množinu **H** všech hochů v této škole. Předpokládejme, že žádné dítě nechybí a že do školy přichází v době přestávky návštěvník, který potkává hned u vchodu děti procházející se po chodbě. První dítě, které návštěvník potká, může být hoch nebo děvče, může nosit brýle nebo ne. Jde zde zřejmě o náhodné jevy. Určeme pravděpodobnosti např. těchto náhodných jevů

jev **B** - první dítě, které návštěvník potkal, nosí brýle;

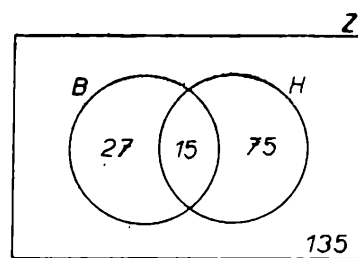
jev **H** - první dítě, které návštěvník potkal, je hoch;

jev **K** - první dítě, které návštěvník potkal, je dívka, která nemá brýle.

Těmto jevům lze přiřadit množiny **B**, **H**, **B' ∩ H'**. Snadno pomocí diagramu vypočítáme

$$P(B) = \frac{1}{6}, P(H) = \frac{5}{14}, P(K) = \frac{15}{28}$$

Představme si, že by z nějakého důvodu byla v době, kdy návštěvník vchází do budovy, děvčata shromážděna dále od vchodu. Návštěvník by tedy potkával jen hochy, a to by mohlo ovlivnit pravděpodobnost, že potká obrýlené dítě. Výstižně říkáme, že tato pravděpodobnost je podmíněna tím, že půjde jistě o hocha. Proto hovoříme o podmíněné pravděpodobnosti jevu  $B$  za předpokladu, že nastává jev  $H$ . Výpočet této pravděpodobnosti pochopíte z obecné definice.



Obr. 1

Uvažujme dva libovolné náhodné jevy  $M$ ,  $N$  pravděpodobnostního pokusu s množinou  $Z$  všech možných jeho výsledků. Jevům  $M$ ,  $N$  přiřadíme množiny  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  všech výsledků příznivých jevu  $M$ , resp.  $N$ . Podmíněnou pravděpodobností jevu  $M$  za předpokladu jevu  $N$  nazveme číslo  $\frac{r}{n}$ , kde  $r$  je počet všech prvků množiny  $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$  a  $n$  je počet všech prvků množiny  $\mathbf{N}$ . Tuto pravděpodobnost budeme označovat symbolem  $P(M/N)$ .

Při výpočtu  $P(M/N)$  uvažujeme vlastně jakýsi „upravený“ pokus, v němž chápeme jev  $N$  jako jistý a ptáme se, jaká je pravděpodobnost, že při uskutečnění jevu  $N$  nastane „navíc“ ještě jev  $M$ .

Ilustrujme si definici několika příklady podmíněných pravděpodobností jednoho z jevů  $B$ ,  $H$ ,  $B'$ ,  $H'$  jiným z nich. Pravděpodobnost jevu, že

první hoch, kterého návštěvník potká, bude mít brýle

$$P(B/H) = \frac{1}{6},$$

první obrýlené dítě, které návštěvník potká, bude hoch

$$P(H/B) = \frac{5}{14},$$

první dívka, kterou návštěvník potká, bude mít brýle

$$P(B/H') = \frac{1}{6},$$

první dívka, kterou návštěvník potká, nebude mít brýle

$$P(B'/H') = \frac{5}{6},$$

první neobrálené dítě, které návštěvník potká, bude dívka

$$P(H'/B') = \frac{76}{105}$$

Všimněte si, že platí  $P(B/H) = P(B/H') = P(B)$ . To znamená, že pravděpodobnost jevu, že návštěvník potká (jako první z dětí) obrýlené dítě, je stejná v případě, kdy budou kolem něho procházet jen hoši, v případě, kdy budou kolem něho procházet jen dívky, i v případě, kdy budou kolem něho procházet děti v libovolné směsi dívek a hochů. Zdá se, že je výstižné hovořit o tom, že jevy  $B$ ,  $H$  jsou nezávislé.

Náhodný jev  $M$  nazveme *nezávislým* na jevu  $N$  právě tehdy, když platí  $P(M/N) = P(M/N')$ . Dá se dokázat, že potom také platí  $P(M/N) = P(M)$ ,  $P(N/M) = P(N/M')$ . Jsme tedy oprávněni říkat, že jevy  $M$ ,  $N$  jsou navzájem nezávislé. Jevy, které nejsou navzájem nezávislé, budeme nazývat (navzájem) závislými jevy.

V našem příkladě lze vypočítat, že

$$P(H/K) = 0, P(H/K') = \frac{10}{13},$$

proto jsou jevy  $H$ ,  $K$  závislé. Přitom jsou těmto jevům přiřazeny disjunktní množiny. Nesměšujte proto pojmy nezávislé jevy a tzv. neslučitelné jevy, jimž jsou přiřazeny disjunktní množiny. Sami už zkuste rozhodnout, zda jsou závislé jevy  $B$  a  $K$ .

Aplikujme nyní naše úvahy při řešení jedné obtížnější úlohy. *Mezinárodní matematické konference se účastní celkem 108 matematiků z různých zemí. Každý z účastníků konference ovládá alespoň jeden z těchto jazyků: němčinu, angličtinu, ruštinu, francouzštinu. Existuje pouze jediný z přítomných, který ovládá jenom jeden z nich, a to francouzštinu, všichni ostatní znají aspoň dva jazyky. Všechny čtyři jazyky ovládá 10 účastníků, 18 přítomných zná všechny jazyky kromě němčiny, 2 účastníci ovládají všechny jazyky kromě angličtiny. Právě dva z uvedených jazyků zná 52 přítomných, z nich 2 ovládají němčinu a angličtinu, 5 němčinu a ruštinu, 9 francouzštinu a ruštinu, 24 francouzštinu a angličtinu. Němčinu a ruštinu zná 37 přítomných, angličtinu 81 účastníků. Recepční hotelu, v němž jsou všichni účastníci konference ubytováni, zná všechny čtyři z uvedených jazyků. Určete, čemu je rovna pravděpodobnost, že se s účastníkem konference, který od něho právě vyžaduje informace o odjezdech vlaků, dohovoří a) německy, b) francouzsky, c) rusky. Rozhodněte, které náhodné jevy, jejichž pravděpodobnost máte určit, jsou závislé.*

Úlohu vyřešíme užitím číselného Vennova diagramu. Označme písmeny **F**, **N**, **R**, **A** postupně tyto podmnožiny základní množiny **Z** všech účastníků konference; množinu všech přítomných ovládajících francouzštinu; množinu všech účastníků konference, kteří znají němčinu; množinu všech účastníků ovládajících ruštinu; množinu všech přítomných, kteří znají angličtinu. Náhodné jevy, jejichž pravděpodobnosti máme určit, označme postupně písmeny **N**, **F**, **R**. Jim jsou přiřazeny množiny **N**, **F** a **R**.

Nakreslete si nyní číselný Vennův diagram pro čtyři množiny **F**, **N**, **A**, **R**. Do některých jeho políček můžete podle podmínek v textu úlohy

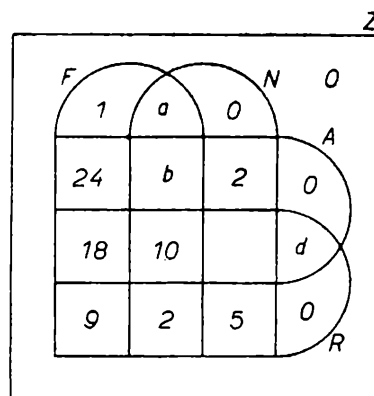
zapsat přímo čísla, do ostatních napište písmena. Porovnejte svůj diagram s obrázkem 2. Zapište všechny podmínky úlohy, jichž jste dosud nevyužili, pomocí proměnných  $a, b, c, d$ . Dospějete k soustavě čtyř lineárních rovnic o čtyřech proměnných

$$a + b + c + d = 37,$$

$$a + d = 12,$$

$$c = 20,$$

$$b + c + d = 27$$



Obr. 2

Řešením této soustavy je  $a = 10, b = 5, c = 20, d = 2$ . Zkouškou se můžete sami přesvědčit, že tato čtveřice čísel vyhovuje všem podmínkám úlohy.

Nyní vypočítejte všechny požadované pravděpodobnosti a dále všechny podmíněné pravděpodobnosti, které budete potřebovat k zodpovězení poslední otázky. Porovnejte své výsledky s našimi

$$P(N) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{79}{108}, P(R) = \frac{11}{18},$$

$$P(F/N) = \frac{1}{2}, P(N/R) = \frac{37}{66}, P(F/R) = \frac{39}{66}.$$

Pravděpodobnost, že se recepční domluví s účastníkem konference německy, je rovna  $\frac{1}{2}$ ; pravděpodobnost, že se s ním dohodou francouzsky, je rovna  $\frac{79}{108}$ ; pravděpodobnost, že se dohodou rusky, je rovna  $\frac{11}{18}$ . Na první pohled je zřejmé, že jevy  $N$  a  $F$  jsou závislé. Dokažte už sami, že jak jevy  $F$  a  $R$ , tak i jevy  $N$  a  $R$  jsou závislé.

## Cvičení

1. Při jednom společenském večeru bylo dáno do prodeje 500 losů a všechny byly prodány. Na 50 losů je možno vyhrát peněžitou nebo věcnou výhru. Věcných výher je připraveno o 10 více než peněžitých. Losů, jež přinesou jejich majitelům věcnou i peněžitou výhru, je o 30 méně než těch, které vyhrávají právě jednu cenu. Pan Sak si zakoupil jeden los. Určete pravděpodobnosti těchto náhodných jevů: a) pan Sak vyhraje jenom věcnou výhru; b) vyhraje jenom peněžitou výhru. Rozhodněte, zda jsou tyto dva náhodné jevy závislé či nezávislé.

$$\left(\frac{1}{20}, \frac{3}{100}; \text{závislé jevy.}\right)$$

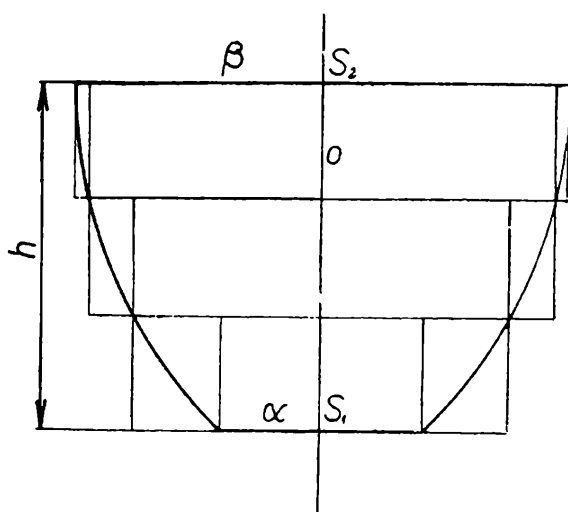
2. V jednom městě je celkem 20 obchodů, v nichž se prodává ovoce. Auty velkoobchodu ovocem a zeleninou byla právě do těchto obchodů rozvezena zásilka pomerančů, citrónů a banánů. Do 8 obchodů byly dodány banány a citróny, do 4 obchodů citróny a pomeranče, do 5 obchodů pomeranče. Do 5 obchodů byl dovezen právě jeden druh ovoce z těchto tří, do žádného z nich však nebyly dodány jenom citróny. Do 6 obchodů byly dodány právě dva druhy ovoce, do žádného z nich však nebyly dovezeny jenom pomeranče a banány. Uvažujme libovolný z uvedených obchodů. Rozhodněte, zda jsou nezávislé tyto náhodné jevy: a) do obchodu byly dovezeny citróny nebo banány; b) do obchodu byly dodány pomeranče nebo banány.

## 0 jedné metodě výpočtů objemů těles

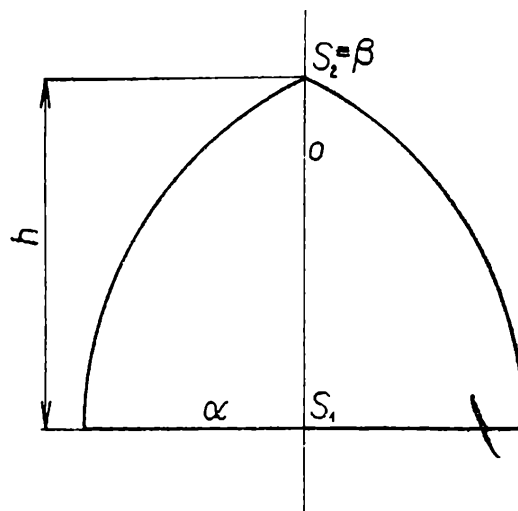
JOSEF HOŠEK, Olomouc

Definice, jakož i výpočet objemů těles, jsou založeny na pojmech a metodách infinitezimálního počtu. V tomto článku ukážeme na základě prostorových úvah hlavní myšlenku, kterou tyto metody používají, odvodíme vzorce pro objem a konečně vypočteme objem některých těles.

Pro jednoduchost uvažujme nejdříve rotační těleso (dále užíváme jen názvu těleso) s kruhovými podstavami  $\alpha$  a  $\beta$  (obr. 1). Přitom nevylučujeme případy, že některá z podstav nebo obě přejdou v bod (obr. 2 a 3). Nechť  $S_1$ ,  $S_2$  jsou středy podstav  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $o \equiv S_1S_2$  je osa rotace tělesa a  $h$  ( $h > 0$ ) je vzdálenost rovin podstav  $\alpha$ ,  $\beta$ , neboli



Obr. 1

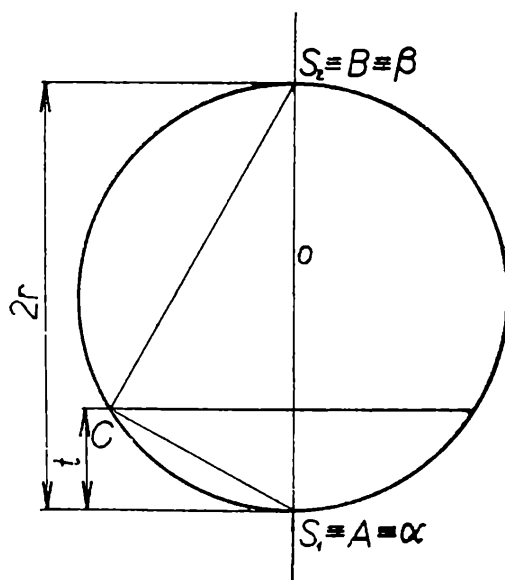


Obr. 2

v ý š k a tělesa (obr. 1). Průnik libovolné roviny kolmé k rotační ose s daným tělesem nazveme řezem tělesa. Dále označme  $t$  vzdálenost roviny řezu od roviny podstavy  $\alpha$  a předpokládejme, že obsah  $Q(t)$  libovolného řezu tělesa je spojitou funkcí nezávisle proměnné  $t$  v uzavřeném intervalu  $[0, h]$ .<sup>1)</sup>

Rozdělíme-li interval  $[0, h]$  dělicími body na  $n$  shodných částečných intervalů, má každý z nich délku  $\frac{h}{n}$  (na

obr. 1 je  $n = 3$ ). Jestliže nyní krajními body všech částečných intervalů vedeme roviny kolmé k ose rotace tě-



Obr. 3

lesa, získáme řezy, jejichž obsahy jsou  $Q(0)$ ,  $Q\left(\frac{h}{n}\right)$ ,  $Q\left(\frac{2h}{n}\right)$ , ...,  $Q(h)$ ; přitom  $Q(0)$  a  $Q(h)$  jsou obsahy podstav  $\alpha$  a  $\beta$ . Těmito řezy se rozdělí těleso na  $n$  vrstev o výškách  $\frac{h}{n}$ . Označíme-li  $V_1, V_2, \dots, V_n$  objemy vzniklých vrstev, lze objem  $V$  celého tělesa vyjádřit vzorcem

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n. \quad (1)$$

Objem vrstvy  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , je alespoň tak velký jako objem rotačního válce vepsaného do této vrstvy (obr. 1), tj.

$$m_i \frac{h}{n} \leq V_i,$$

kde  $m_i$  je nejmenší hodnota<sup>2)</sup> funkce  $Q$  v intervalu

$$\left[ \frac{(i-1)h}{n}, \frac{ih}{n} \right].$$

Dále sestrojme rotační válec opsaný téže vrstvě  $V_i$  (obr. 1). Je-li  $M_i$  největší hodnota<sup>3)</sup> funkce  $Q$  v intervalu

$$\left[ \frac{(i-1)h}{n}, \frac{ih}{n} \right],$$

<sup>1)</sup> O spojitosti funkce na intervalu je pojednáno v článku E. Kriegelsteina: Úvod do diferenciálního počtu. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1960–61, č. 8.

<sup>2)</sup> Zvaná též absolutní minimum. Viz redakční poznámku pod čarou k článku J. Hroníka: Jak určíme minimum funkce. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1963–64, č. 6.

<sup>3)</sup> Zvaná též absolutní maximum. Dále jako v <sup>2)</sup>.

je objem tohoto válce  $M_i \frac{h}{n}$ . Pro objem uvažované vrstvy  $V_i$  potom také platí

$$V \leq M_i \frac{h}{n}.$$

Objem  $V$  uvažovaného tělesa podle (1) je roven součtu všech čísel  $V_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, n$ , takže z právě vypsanych nerovností vyplývá

$$\frac{h}{n} (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \leq V \leq \frac{h}{n} (M_1 + M_2 + \dots + M_n). \quad (2)$$

Roste-li počet částečných intervalů nade všechny meze, konverguje délka  $\frac{h}{n}$  každého z nich k nule. Protože funkce  $Q$  je spojitá v uzavřeném intervalu  $[0, h]$ , lze dosáhnout toho, že částečné intervaly zvolíme tak malé, aby rozdíly  $M_i - m_i$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n$ , byly menší než libovolné předem dané kladné číslo. Potom také součty

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \text{ a } (M_1 + M_2 + \dots + M_n)$$

se liší od sebe velmi málo. Objem  $V$  tělesa je tak podle (2) aproximován čísly

$$\frac{h}{n} (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \text{ a } \frac{h}{n} (M_1 + M_2 + \dots + M_n).$$

Nyní nahradíme hodnoty  $m_i$  a  $M_i$  hodnotou  $Q(t_i)$ , kde  $t_i$  je libovolné číslo z intervalu

$$\left[ \frac{(i-1)h}{n}, \frac{ih}{n} \right],$$

a utvořme součet

$$s_n = \frac{h}{n} [Q(t_1) + Q(t_2) + \dots + Q(t_n)] \quad (3)$$

Zřejmě platí  $m_i \leq Q(t_i) \leq M_i$  pro všechna  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Pak lze dokázat, že objem  $V$  tělesa je limita posloupnosti  $\{s_n\}$  pro  $n \rightarrow \infty$ , takže podle (3), zvolíme-li

$$t_i = \frac{ih}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

se rovná objem  $V$  přibližně

$$V \doteq \frac{h}{n} \left[ Q\left(\frac{h}{n}\right) + Q\left(\frac{2h}{n}\right) + \dots + Q(h) \right]. \quad (4)$$

Avšak čím větší je přirozené číslo  $n$ , tím méně se liší hodnota na pravé straně (4) od hodnoty objemu  $V$ .



Protože v dalším výkladu se budeme zabývat zejména případy, kdy funkce  $Q$  je lineární nebo kvadratická, je zřejmě splněn předpoklad spojitosti funkce  $Q$  v uzavřeném intervalu  $[0, h]$ .

1. Nechť  $Q$  je lineární funkce proměnné  $t$ , tj.

$$Q(t) = a_0 + a_1 t, \quad (5)$$

kde  $0 \leq t \leq h$ ,  $a_0, a_1$  jsou konstanty. Dosadíme-li do této rovnice za  $t$  vzdálenosti jednotlivých řezů tělesa od podstavy  $\alpha$ , tzn. kladná čísla

$$\frac{h}{n}, \quad \frac{2h}{n}, \quad \frac{nh}{n},$$

jsou obsahy  $n$  řezů vyjádřeny těmito výrazy

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{h}{n}\right) &= a_0 + a_1 \frac{h}{n}, \\ Q\left(\frac{2h}{n}\right) &= a_0 + 2a_1 \frac{h}{n}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$Q\left(\frac{nh}{n}\right) = a_0 + na_1 \frac{h}{n}$$

Jestliže do vzorce (4) dosadíme za

$$Q\left(\frac{ih}{n}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

podle (6) a upravíme, platí přibližně

$$V \doteq a_0 h + a_1 (1 + 2 + \dots + n) \left(\frac{h}{n}\right)^2 \quad (7)$$

V dalším výkladu budeme potřebovat vztahy

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{1}{2} n (n + 1) \\ \text{a } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1), \end{aligned} \quad (8)$$

které lze snadno dokázat metodou matematické indukce. Po dosazení prvního vzorce (8) do (7) a jednoduché úpravě dostaneme pro objem  $V$  tělesa přibližný vzorec

$$V \doteq a_0 h + a_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{h^2}{2} \quad (9)$$

Jak již víme, přejdeme-li na pravé straně (9) k limitě pro  $n \rightarrow \infty$ , dostaneme přesnou hodnotu pro objem  $V$  uvažovaného tělesa,

takže

$$V = a_0 h + a_1 \frac{h^2}{2} \quad (10)$$

Máme-li dány obsahy dvou řezů tělesa, lze z (10) vyloučit konstanty  $a_0$ ,  $a_1$ . Například jsou-li  $Z = Q(0)$ ,  $Z'' = Q(h)$  obsahy podstav  $\alpha$ ,  $\beta$ , je postupně  $t = 0$ ,  $t = h$  a dosadíme-li tato čísla do (5), dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými  $a_0$ ,  $a_1$

$$\begin{aligned} Z &= a_0, \\ Z'' &= a_0 + a_1 h \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení

$$\begin{aligned} a_0 &= Z, \\ a_1 &= \frac{1}{h} (Z'' - Z) \end{aligned}$$

Dosazením těchto hodnot do (10) získáme následující vzorec pro objem  $V$  tělesa

$$V = \frac{h}{2} (Z + Z'') \quad (11)$$

Nyní si ukážeme praktické použití vzorce (11).

Nechť se parabola otáčí kolem své osy  $o$ . Plocha vzniklá při tomto otáčení se nazývá rotační paraboloid. Mějme rovinu  $\mu$  kolmou k ose paraboly ve vzdálenosti  $h > 0$  od jejího vrcholu (obr. 4).

**Příklad 1.** *Objem tělesa omezeného rotačním paraboloidem a rovinou  $\mu$  je  $V = \frac{1}{2} \pi h r^2$ .*

**Řešení.** Zvolme pravoúhlou soustavu souřadnic s počátkem  $O$ , osami  $x$ ,  $y$ . Rotační paraboloid umístíme tak, že má vrchol v počátku, osa rotace splývá s osou  $y$  a kladná poloosa  $y$  leží uvnitř rotačního paraboloidu (obr. 4). Parabola, která vytvoří rotací kolem své osy zmíněný paraboloid, má rovnici

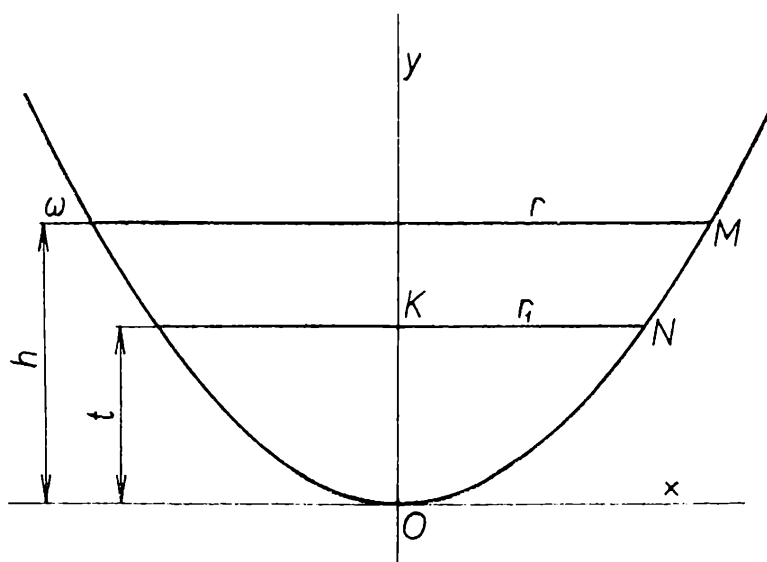
$$y = kx^2, \quad k > 0. \quad (12)$$

Chceme-li, aby těleso mělo výšku  $h$  a poloměr horní podstavy  $r$ , je třeba, aby parabola definovaná rovnicí (12) procházela bodem  $M(r, h)$ , (obr. 4). Pak nabude rovnice (12) tvaru

$$y = \frac{h}{r^2} x^2 \quad (13)$$

Z obrázku 4 je zřejmé, že obsahy dolní a horní podstavy tělesa jsou po řadě

Obr.



$$Z = 0 \text{ a } Z'' = \pi r^2 \quad (14)$$

Zvolme libovolné  $t$ ,  $0 < t < h$  a sestrojme řez tělesa ve vzdálenosti  $t$  od počátku 0. Z obr. 4 dále vyplývá, že poloměr  $r_1$  tohoto řezu se rovná velikosti úsečky  $KN$ ; přitom body  $K$ ,  $N$  mají souřadnice

$$K(0, t), N\left(r_1, \frac{h}{r^2} r_1^2\right).$$

Protože

$$t = \frac{h}{r^2} r_1^2, \text{ je } r_1^2 = \frac{r^2}{h} t$$

Odtud vidíme, že obsah řezu tělesa se rovná

$$Q(t) = \pi \frac{r^2}{h} t \quad (15)$$

Funkce definovaná rovnicí (15) vyhovuje všem výše uvedeným předpokladům a s přihlédnutím k (11), (14) je

$$V = \frac{1}{2} \pi h r^2$$

**P o z n á m k a.** Tím jsme dokázali **Archimédovu poučku**: *Objem tělesa, které je omezené rotačním paraboloidem a rovinou kolmou k ose rotace, se rovná polovině objemu válce se stejnou podstavou a stejnou výškou.*

2. Nechť  $Q$  je kvadratická funkce nezávisle proměnné  $t$ , tj.

$$Q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad (16)$$

kde  $0 \leq t \leq h$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  jsou opět konstanty. Analogickým způsobem jako v části 1. odvodíme, že platí pro obsahy  $n$  řezů tělesa

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{h}{n}\right) &= a_0 + a_1 \frac{h}{n} + a_2 \left(\frac{h}{n}\right)^2, \\
Q\left(\frac{2h}{n}\right) &= a_0 + 2a_1 \frac{h}{n} + 2^2 a_2 \left(\frac{h}{n}\right)^2 \\
Q\left(\frac{nh}{n}\right) &= a_0 + na_1 \frac{h}{n} + n^2 a_2 \left(\frac{h}{n}\right)^2
\end{aligned} \tag{17}$$

Dosadíme-li z (17) do (4) a upravíme, je přibližně

$$\begin{aligned}
V \doteq a_0 h + a_1 (1 + 2 + \dots + n) \left(\frac{h}{n}\right)^2 + \\
+ a_2 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \left(\frac{h}{n}\right)^3
\end{aligned} \tag{18}$$

Použitím (8) vyplývá z (18)

$$V \doteq a_0 h + a_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{h^2}{2} + a_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \frac{h^3}{6} \tag{19}$$

Zcela obdobným postupem jako v části 1. vychází pro objem  $V$  tělesa přesná hodnota

$$V = a_0 h + a_1 \frac{h^2}{2} + a_2 \frac{h^3}{3} \tag{20}$$

Známe-li obsahy tří řezů tělesa, je možné v (20) vyloučit koeficienty  $a_0, a_1, a_2$ . Nechť například

$$Z = Q(0), \quad Z' = Q\left(\frac{h}{2}\right), \quad Z'' = Q(h)$$

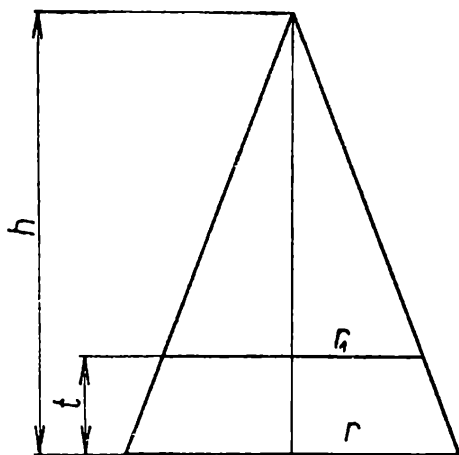
jsou obsahy dolního, středního a horního řezu tělesa. Dosadíme-li tyto obsahy do (16), dostaneme soustavu tří lineárních rovnic pro hledané koeficienty  $a_0, a_1, a_2$

$$\begin{aligned}
Z &= a_0, \\
Z' &= a_0 + a_1 \frac{h}{2} + a_2 \frac{h^2}{4} \\
Z'' &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2
\end{aligned}$$

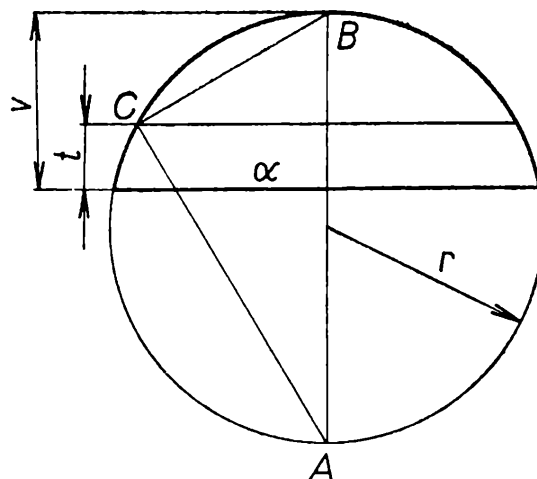
Uvedená soustava má jediné řešení

$$a_0 = Z, \quad a_1 = \frac{1}{h} (-3Z + 4Z' - Z''), \quad a_2 = \frac{1}{h^2} (2Z - 4Z' + 2Z'')$$

Dosadíme-li vypočtené hodnoty do (20), získáme tzv. Simpsonův vzorec pro objem tělesa



Obr.



Obr. 6

$$V = \frac{h}{6} (Z + 4Z' + Z'') \quad (21)$$

Nyní provedeme pomocí tohoto pozoruhodného vzorce výpočet objemů některých známých těles.

**Příklad 2.** Objem rotačního kužele o poloměru podstavy  $r$  a výšce  $h$

je dán vzorcem  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ . Dokažte.

**Řešení.** Sestrojíme-li libovolný řez rotačního kužele ve vzdálenosti  $t$ ,  $0 < t < h$  (obr. 5), dostáváme z platné úměry

$$\frac{r_1}{h-t} = \frac{r}{h},$$

pro poloměr  $r_1$  uvažovaného řezu rovnici ve tvaru

$$r_1 = \frac{r}{h} (h-t),$$

která platí i v krajních bodech intervalu  $[0, h]$ . Odtud plyne, že obsah  $Q(t)$  řezu lze vyjádřit rovnicí

$$Q(t) = \frac{\pi r^2}{h^2} t^2 - 2 \frac{\pi r^2}{h} t + \pi r^2, \quad 0 \leq t \leq h. \quad (22)$$

Je tedy obsah řezu kvadratickou funkcí proměnné  $t$  a stačí určit obsahy tří řezů. Z (22) snadno vypočteme

$$Z = Q(0) = \pi r^2, \quad Z' = Q\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4} \pi r^2 \text{ a } Z'' = Q(h) = 0$$

Dosadíme-li za  $Z$ ,  $Z'$ ,  $Z''$  do (21), dostaneme pro objem rotačního kužele

hledaný vzorec  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

**Příklad 3.** Objem koule se středem  $S$  a poloměrem  $r$  je  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

**Řešení.** Ve vzdálenosti  $t$ ,  $0 < t < 2r$  sestrojíme řez koule v rovině kolmé k ose  $o$  (obr. 3). Je-li  $r_1$  poloměr tohoto řezu, vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka  $ABC$  použitím Eukleidovy věty o výšce

$$r_1^2 = t(2r - t),$$

přičemž poslední rovnice platí i pro  $t = 0$ ,  $t = 2r$ , takže obsah  $Q(t)$  řezu je dán rovnicí

$$Q(t) = -\pi t^2 + 2\pi r t$$

Protože

$$Z = Q(0) = 0, Z' = Q\left(\frac{h}{2}\right) = \pi r^2, Z'' = Q(2r) = 0$$

a ježto  $h = 2r$ , je objem koule podle (21) vyjádřen vzorcem  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

**Příklad 4.** Je-li  $r$  poloměr koule, pak objem kulové úseče o výšce  $v$  je roven  $V = \frac{1}{3} \pi v^2 (3r - v)$ .

**Řešení.** Nechť  $r_1$  je poloměr řezu kulové úseče, který sestrojíme ve vzdálenosti  $t$ ,  $0 \leq t < v$ , od podstavy  $\alpha$  (obr. 6). Použitím Eukleidovy věty o výšce odvodíme z pravoúhlého trojúhelníka  $ACB$

$$r_1^2 = (v - t)(2r - v + t);$$

tento vztah platí i v případě  $t = v$ . Obsah  $Q(t)$  řezu je

$$Q(t) = -\pi t^2 + 2\pi(v - r)t + \pi v(2r - v)$$

Nyní snadno vypočteme obsahy dolního, středního a horního řezu kulové úseče

$$Z = Q(0) = \pi v(2r - v), Z' = Q\left(\frac{v}{2}\right) = \pi v\left(r - \frac{v}{4}\right),$$

$$Z'' = Q(v) = 0$$

Dosazením těchto hodnot a  $v = h$  do (21), vyjde po jednoduché úpravě vzorec pro objem úseče

$$V = \frac{1}{3} \pi v^2 (3r - v)$$

Nechť elipsa s hlavní poloosou  $a$ , vedlejší poloosou  $b$  otáčí se kolem své vedlejší osy  $o_2$  (obr. 8). Plocha vzniklá při tomto otáčení se nazývá rotační elipsoid zploštělý.

**Příklad 5** Objem  $V$  tělesa omezeného rotačním elipsoidem zploštělým je

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

**Řešení.** Umístíme elipsu tak, aby její střed  $S$  splynul s počátkem  $O$  pravouhlé soustavy souřadnic, hlavní osa  $o_1$  s osou  $x$  a vedlejší osa  $o_2$  s osou  $y$  (obr. 7) Potom lze vyjádřit elipsu rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (23)$$

Protože těleso omezené rotačním elipsoidem zploštělým je souměrně sdružené podle roviny  $\mu$  kolmé k ose  $o_2$  a procházející středem  $S$ , stačí k tomu, abychom určili objem  $V$  tělesa, vypočítat objem  $V'$  jedné jeho části, například té, která leží nad rovinou souměrnosti  $\mu$  tělesa. Zřejmě platí  $V = 2V'$ . Vedme dále ve vzdálenosti  $t$  od středu  $S$  kruhový řez tělesa. Označíme-li  $r_1$  poloměr řezu, je podle obr. 7  $r_1 = PL$ , kde  $P, L$  jsou průsečíky řezu s vedlejší osou  $o_2$  a elipsou (23). Souřadnice bodů  $P, L$  jsou po řadě

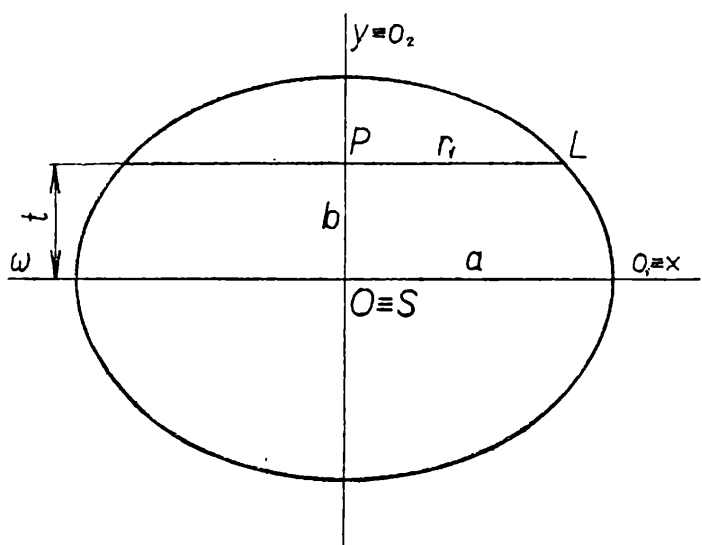
$$P(0, t) \text{ a } L\left(r_1, \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} r_1^2}\right)$$

Protože

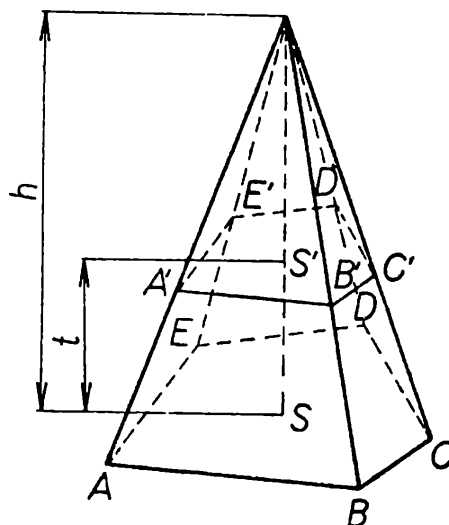
$$t = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} r_1^2}$$

$$r_1^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - t^2),$$

z čehož vychází obsah řezu



Obr. 7



Obr. 8

$$Q(t) = -\frac{a^2}{b^2} \pi t^2 + \pi a^2$$

Z poslední rovnice vypočteme obsahy dolního, středního a horního řezu

$$Z = Q(0) = \pi a^2, \quad Z = Q\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{3}{4} \pi a^2, \quad Z'' = Q(b) = 0$$

Dosadíme-li uvedené hodnoty a  $b = h$  do vzorce (21), máme

$$V' = \frac{2}{3} \pi a^2 b,$$

takže objem  $V$  celého tělesa je

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

3. Vzorce (11) a (21) byly odvozeny za předpokladu, že jde o tělesa rotační. Avšak (11) a (21) platí i pro tělesa, která nejsou rotační pokud  $Q$  je lineární nebo kvadratická funkce. Ověříme si to na jednom příkladě.

**Příklad 6.** *Pětiboký jehlan, jehož obsah podstavy je  $P$  a výška  $h$ , má objem  $V = \frac{1}{3} Ph$ .*

**Řešení** Označme  $ABCDE$  podstavu jehlanu (obr. 8). Řezem jehlanu ve vzdálenosti  $t$ ,  $0 \leq t \leq h$ , od podstavy je pětiúhelník  $A'B'C'D'E'$  podobný  $ABCDE$ . Je-li  $Q(t)$  obsah řezu  $A'B'C'D'E'$  obdržíme z podobnosti těchto pětiúhelníků

$$\frac{Q(t)}{P} = \frac{(h-t)^2}{h^2}$$

z čehož

$$Q(t) = \frac{P}{h^2} t^2 - \frac{2P}{h} t + P$$

Tato rovnice je splněna i pro  $t = h$ . Ještě určíme obsahy středního a horního řezu jehlanu. Z poslední rovnice snadno zjistíme, že

$$Z' = Q\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{4} P \text{ a } Z'' = Q(h) = 0,$$

takže pro objem pětibokého jehlanu platí podle (21) vzorec

$$V = \frac{1}{3} Ph.$$



# Geometrické příbuznosti

Doc. KAREL DRÁBEK, ČVUT Praha:

Jestliže pomocí určitého předpisu je bodu  $Z$  roviny  $\rho$  přiřazen jediný bod  $W$  (v planimetrii obvykle soumísné) roviny  $\rho'$  a obráceně každému bodu  $W$  je přiřazen týž bod  $Z$ , nazýváme toto přiřazení geometrickou příbuzností. Ke studiu příbuzností lze použít buď aparátu syntetické geometrie, jak je tomu např. v planimetrii, nebo analytické geometrie. Při použití analytické geometrie, kdy také určující předpis je dán vždy rovnicí, máme ještě možnost volby systému souřadnic.<sup>1)</sup>

Systém souřadnic volíme zpravidla tak, aby se výpočty zjednodušily a aby bylo možno obráceně získané výsledky snadno geometricky vyložit. V této práci použijeme vyjádření bodů pomocí komplexních čísel v Gaussově rovině.<sup>2)</sup>

A. Nejdříve se budeme zabývat příbuznostmi, které zachovávají shodnost mezi odpovídajícími si útvary.

1. *Osová souměrnost. Nutná a postačující podmínka pro souměrnost dvou bodů  $(z)$ ,  $(w)$  podle přímky*

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + A = 0 \quad (1)$$

*je splnění rovnice osově souměrnosti*

$$z = - \frac{\alpha\bar{w} + A}{\bar{\alpha}} \quad (2a)$$

kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{w} + A = 0 \quad (2b)$$

Přímka (1) je tzv. *osa souměrnosti*.

Jsou-li body  $(z)$ ,  $(w)$  osově souměrné a je-li  $(z_0)$  průsečík jejich spojnice s přímkou (1), platí (obr. 1)

$$z - z_0 = z_0 - w.$$

Protože přímka (1) je rovnoběžná s vektorem komplexního čísla  $i\alpha$ , je přímka  $(z)$ ,  $(w)$ , která je na (1) kolmá, rovnoběžná s vektorem komplexního čísla  $\alpha$ . Je-li tedy  $k > 0$  koeficient úměrnosti, platí

<sup>1)</sup> Proto se v poslední době začíná užívat v literatuře názvu souřadnicová geometrie místo dosavadního pojmenování analytická geometrie.

<sup>2)</sup> Přitom využijeme výsledků z článku: K. Drábek, Použití komplexních čísel v geometrii, Rozhledy (44), 1965—66, str. 289—293, 348—352.

$$z - z_0 = k\alpha,$$

$$z_0 - w = k\alpha$$

Sečtením dostaneme

$$z = w + 2k\alpha \quad (3)$$

Koeficient úměrnosti  $k$  určíme z podmínky, že bod  $(z_0)$  o souřadnici

$$z_0 = w + k\alpha \quad (4)$$

leží na přímce (1), neboť dosazením výrazu (4) do rovnice (1) dostaneme

$$k = -\frac{1}{2\alpha\bar{\alpha}} (\alpha w + \alpha\bar{w} + A),$$

a tedy z (3) po dosazení za  $k$  plyne nutnost podmínky (2a) nebo (2b).

Ukážeme, že také obráceně při platnosti rovnice (2) pro dva body  $(z)$ ,  $(w)$  na kolmici k přímce (1) jsou body  $(z)$ ,  $(w)$  vzhledem k (1) osově souměrné.

Je-li  $(z_0)$  průsečík přímky  $(z)$   $(w)$  s přímkou (1), musí platit

$$\begin{aligned} z &= z_0 + k_1\alpha, \quad k_1 > 0, \\ w &= z_0 - k_2\alpha, \quad k_2 > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Po dosazení za  $z$  z první rovnice (5) do (2a) máme

$$-\alpha\bar{w} - A = \bar{\alpha}z_0 + k_1\alpha\bar{\alpha}. \quad (6a)$$

Ke druhé z rovnic (5) určíme komplexně sdruženou a násobíme ji číslem  $\alpha$ . Dostaneme

$$\alpha\bar{w} = \alpha\bar{z}_0 - k_2\alpha\bar{\alpha} \quad (6b)$$

Sečtením rovnic (6a, b) obdržíme

$$-A = \bar{\alpha}z_0 + \alpha\bar{z}_0 + \alpha\bar{\alpha}(k_1 - k_2),$$

a protože bod  $(z_0)$  leží na přímce (1), plyne odtud

$$k_1 - k_2 = 0, \text{ tedy } k_1 = k_2$$

a postačitelnost podmínky (2a).

Je-li osa  $x$  osou souměrnosti, má rovnice (2a) tvar

$$z = \bar{w},$$

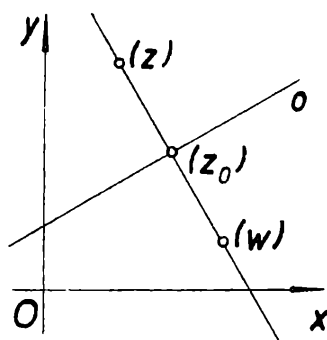
je-li osa  $y$  osou souměrnosti, má rovnice (2a) tvar

$$z = -\bar{w}$$

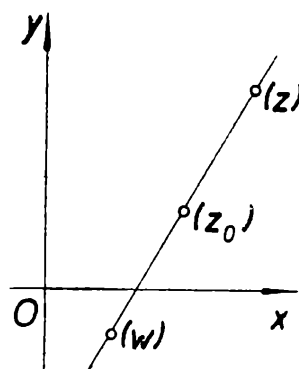
**Příklad 1.** Rovnice přímky osově souměrné k přímce

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + B = 0 \quad (7)$$

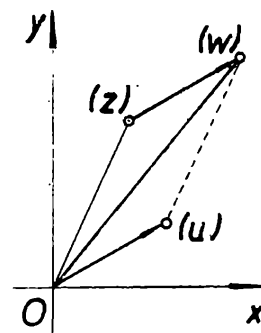
podle přímky (1) je přímka



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

$$\beta \bar{\alpha}^2 w + \bar{\beta} \alpha^2 \bar{w} + A (\beta \bar{\alpha} + \bar{\beta} \alpha) - B \alpha \bar{\alpha} = 0$$

Podle osy  $x$  je k přímce (7) souměrná přímka

$$\beta w + \bar{\beta} \bar{w} + B = 0,$$

podle osy  $y$  přímka

$$\beta w + \bar{\beta} \bar{w} - B = 0$$

**P ř í k l a d 2.** Ke kružnici

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2 \quad (7^*)$$

je osově souměrná podle přímky (1) kružnice

$$\left( w + \frac{\alpha \bar{z}_0 + A}{\bar{\alpha}} \right) \left( w + \frac{\bar{\alpha} z_0 + A}{\alpha} \right) = R^2,$$

o témž poloměru  $R$  a středu v bodě

$$w_0 = - \frac{\alpha \bar{z}_0 + A}{\bar{\alpha}}$$

odpovídajícím v osové souměrnosti (2) středu  $(z_0)$  dané kružnice.

**2. Středová souměrnost.** *Nutná a postačující podmínka pro středovou souměrnost dvou bodů  $(z)$ ,  $(w)$  podle bodu  $S(s)$  je platnost rovnice středové souměrnosti*

$$z + w = 2s \quad (8)$$

Bod  $S$  se nazývá *střed souměrnosti*.

Určíme-li k bodu  $(z)$  středově souměrný bod  $(w)$  (obr. 2) podle středu  $S(s)$ , pak platí

$$z - s = s - w,$$

a tedy je (8) nutnou podmínkou.

Postačitelnost podmínky ukážeme takto: Nechť pro dva body  $(z)$ ,  $(w)$  platí rovnice (8). Potom

$$z - s = k_1 \alpha, s - w = k_2 \alpha,$$

kde  $k_1 > 0, k_2 > 0, \alpha$  je směr přímky  $(z), (w)$ . Odečtením druhé rovnice od první dostaneme

$$z + w - 2s = (k_1 - k_2) \alpha = 0,$$

a tedy

$$k_1 = k_2,$$

z čehož plyne postačitelnost podmínky (8).

Je-li  $s = 0$ , tedy  $S \equiv O$ , pak rovnice středové souměrnosti je

$$z + w = 0$$

**Příklad 3.** K přímce (7) je středově souměrná podle bodu  $S(s)$  přímka

$$\bar{\beta}w + \beta\bar{w} - 2(\bar{\beta}s + \beta\bar{s}) - B = 0$$

téhož směru jako daná přímka (7).

Pro střed souměrnosti v bodě  $O$  je to přímka

$$\bar{\beta}w + \beta\bar{w} - B = 0$$

**Příklad 4.** Ke kružnici (7\*) je středově souměrná podle středu  $S(s)$  kružnice

$$(w - 2s + z_0)(\bar{w} - 2\bar{s} + \bar{z}_0) = R^2$$

téhož poloměru jako daná kružnice a o středu v bodě  $(w_0)$ , který je středově souměrný k bodu  $(z_0)$ , tj. středu dané kružnice.

**3. Posunutí.** Je-li  $u$  komplexní číslo, pak posunutí, které bodu  $(z)$  přiřazuje bod  $(w)$  je dáno rovnicí

$$w = z + u \quad (9)$$

Komplexním číslem  $u$  je určen směr, velikost a smysl (tj. vektor) posunutí.

Nutnost i postačitelnost této podmínky (9) plyne z tohoto vztahu: Jsou-li  $(z_1), (z_2)$  dva různé body, k nimž přísluší posunuté body  $(w_1), (w_2)$ , pak střed úsečky  $(z_1)(w_2)$  je totožný se středem úsečky  $(z_2)(w_1)$ .

Důkaz tvrzení je snadný a ponecháváme jej čtenáři jako cvičení.

**Příklad 5.** Přímce (7) odpovídá při posunutí (9) přímka

$$\bar{\beta}w + \beta\bar{w} + B - (\bar{\beta}u + \beta\bar{u}) = 0,$$

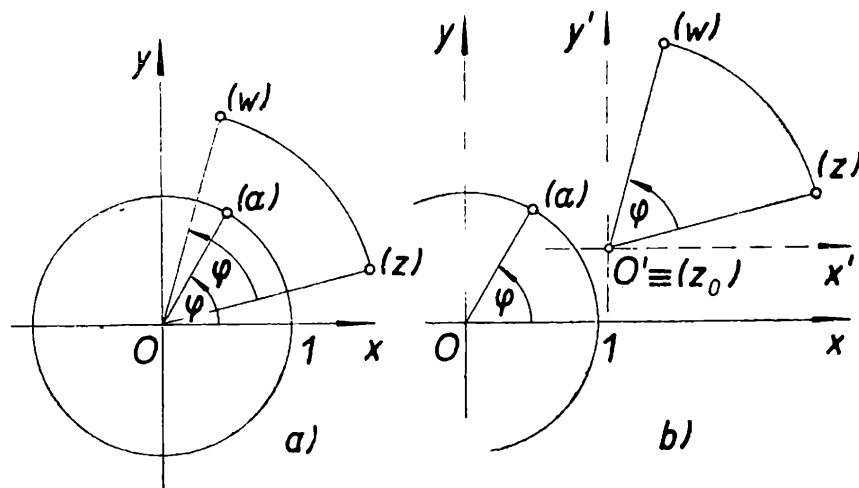
která je s danou přímkou rovnoběžná.

**4. Otáčení.** Odvodíme nejdříve rovnici otáčení o daný úhel  $\varphi$ , určený komplexním číslem

$$\alpha = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad |\alpha| = 1$$

kolem počátku  $O$  (obr. 4a).

Obr. 4



Jsou-li  $(z)$  a  $(w)$  body, které si odpovídají v daném otáčení, platí

$$w = \alpha z. \quad (10)$$

Pro stanovení rovnice otáčení kolem bodu  $(z_0) \neq O$ , posuneme počátek  $O$  do tohoto středu otáčení, takže pak platí

$$w' = \alpha z'$$

Protože (obr. 4b)

$$z = z' + z_0, w = w' + z_0, \quad (11)$$

dostaneme

$$z' = z - z_0, w' = w - z_0 \quad (12)$$

a odtud rovnici otáčení

$$w - z_0 = \alpha (z - z_0). \quad (13)$$

Pro  $\alpha = 1$  je úhel otáčení  $\varphi = 0$  nebo  $360^\circ$  a příbuznost je totožností, pro  $\alpha = -1$  je  $\varphi = 180^\circ$  a otáčení je středovou souměrností.

**Příklad 6.** Přímce (7) odpovídá v otáčení daném rovnicí (13) přímka

$$\bar{\alpha}\bar{\beta}w + \alpha\bar{\beta}\bar{w} + \bar{\alpha}\bar{\beta}z_0(\alpha - 1) + \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{z}_0(\bar{\alpha} - 1) + \alpha\bar{\alpha}B = 0,$$

která s danou přímkou (7) svírá úhel rovný úhlu otáčení  $\varphi$ .<sup>4)</sup>

<sup>4)</sup> Pro dva směry dané komplexními čísly  $(z_1), (z_2)$  platí

$$z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

$$\bar{z}_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1), \bar{z}_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2).$$

Odtud

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{2|z_1|} (z_1 + \bar{z}_1), \sin \varphi_1 = \frac{1}{2i|z_1|} (z_1 - \bar{z}_1),$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{2|z_2|} (z_2 + \bar{z}_2), \sin \varphi_2 = \frac{1}{2i|z_2|} (z_2 - \bar{z}_2).$$

Ve všech uvedených příbuznostech jsou odpovídající si útvary shodné, a to buď přímo (středová souměrnost, posunutí a otáčení) nebo nepřímo (osová souměrnost).<sup>5)</sup>

*Složením dvou shodností*, to znamená, že na bod ( $z$ ) provedeme shodnost, která jej převádí do bodu ( $w$ ) a na tento bod pak shodnost, která jej převádí do bodu ( $v$ ), *dostaneme opět shodnost*, tj. existuje shodnost, která převádí bod ( $z$ ) do bodu ( $v$ ). Tento vztah ukážeme na několika příkladech.

**Příklad 7.** Složme dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou rovnoběžné a dány přímkami

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + A_1 = 0, \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + A_2 = 0$$

Na osovou souměrnost danou rovnicí

$$z = -\frac{\alpha\bar{w} + A_1}{\bar{\alpha}},$$

provedeme osovou souměrnost danou rovnicí

$$w = -\frac{\alpha\bar{v} + A_2}{\bar{\alpha}}$$

Po dosazení za  $w$  do první rovnice máme (po úpravě)

$$z = v + \frac{A_2 - \alpha A_1}{\bar{\alpha}},$$

tedy od bodu ( $z$ ) do bodu ( $v$ ) se dostaneme posunutím, jehož rovnici jsme právě napsali.

---

Pro úhel  $\varphi$ , který svírají směry platí

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

a tedy

$$\cos \varphi = \frac{1}{2|z_1||z_2|} (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2), \sin \varphi = \frac{1}{2i|z_1||z_2|} (\bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2)$$

Po dosazení za  $z_1 = i\beta$ ,  $z_2 = i\alpha\beta$  (nebo pro směry kolmé  $z_1 = \beta$ ,  $z_2 = \alpha\beta$ ) plyne

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (\alpha + \bar{\alpha}), \sin \varphi = \frac{1}{2i} (\alpha - \bar{\alpha}),$$

a tedy

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = \alpha,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

<sup>5)</sup> O příbuznostech v geometrii viz knihu A. Urbana: Deskriptivní geometrie I, SNTL, Praha, 1965, str. 22 a další.

Ukažme si, že (obecně) záleží na pořadí skládaných shodností.  
Jestliže na osovou souměrnost danou rovnicí

$$z = - \frac{\alpha \bar{w} + A_2}{\bar{\alpha}},$$

provedeme osovou souměrnost danou rovnicí

$$w = - \frac{\alpha \bar{v} + A_1}{\bar{\alpha}},$$

dostaneme po úpravě posunutí s rovnicí

$$z = v + \frac{A_1 - \alpha A_2}{\bar{\alpha}},$$

která není totožná s rovnicí prvního případu.

Složením dvou nepřímých shodností dostali jsme přímou shodnost.

**P ř í k l a d 8.** Složením dvou posunutí

$$z = w + u_1, w = v + u_2$$

dostaneme posunutí

$$z = v + u_1 + u_2.$$

V tomto případě nezáleží na pořadí prováděných posunutí.

**P ř í k l a d 9.** Složením dvou osových příbuzností, jejichž osy jsou k sobě kolmé přímky

$$\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} + A_1 = 0, (-i\bar{\alpha}) z + i\alpha \bar{z} + A_2 = 0$$

s průsečíkem

$$z_0 = \frac{A_2 - iA_1}{2i\bar{\alpha}},$$

dostaneme středovou souměrnost s rovnicí

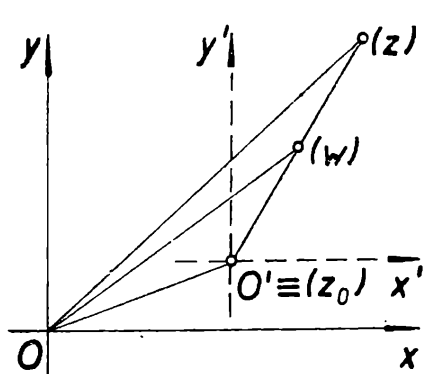
$$z + v = \frac{A_2 - iA_1}{i\bar{\alpha}}$$

Také v tomto případě je výsledek nezávislý na pořadí.

Složením dvou osových souměrností, jejichž osy nejsou ani k sobě kolmé, ani rovnoběžné, dostaneme otáčení kolem jejich průsečíku, výsledek je závislý na pořadí.

**B.** Přístupme nyní k příbuznostem, které sice zachovávají úhly (tedy tvar), velikosti odpovídajících si úseček jsou však v předem daném konstantním poměru.

1. *S t e j n o l e h l o s t* je příbuzností, ve které spojnice odpovídajících si bodů  $(z)$ ,  $(w)$  procházejí tzv. středem stejnolehlosti  $S(z_0)$  a úsečky  $(z)$   $(z_0)$ ,



Obr. 5

( $w$ ) ( $z_0$ ) jsou v konstantním poměru (obr. 5). Pro rovnici stejnolehlosti platí tedy rovnice

$$z - z_0 = k(w - z_0), \quad (14)$$

kde  $k \neq 1, 0$  reálné je koeficient stejnolehlosti.

Tuto rovnici odvodíme z rovnice stejnolehlosti

$$z' = kw'$$

která platí v soustavě souřadnic  $O'(x', y')$ , kde  $O' \equiv S(z_0)$ ,  $x' \parallel x$ ,  $y' \parallel y$ , jestliže použijeme rovnic (11) a (12) platných pro rovnoběžné posunutí souřadnicového systému.

**Příklad 10.** Přímce (7) odpovídá ve stejnolehlosti (14) přímka

$$\bar{\beta}w + \beta \bar{w} + \frac{1-k}{k}(\bar{\beta}z_0 + \beta \bar{z}_0) + \frac{B}{k} = 0,$$

která je s danou přímku (7) rovnoběžná.

**Příklad 11.** Kružnici

$$z\bar{z} = R^2$$

odpovídá ve stejnolehlosti (14) kružnice

$$\left[ w - \frac{z_0(k-1)}{k} \right] \left[ \bar{w} - \frac{\bar{z}_0(k-1)}{k} \right] = \frac{R^2}{k^2}$$

se středem v bodě

$$w_0 = \frac{z_0(k-1)}{k}$$

odpovídajícím středu  $O$  dané kružnice v příbuznosti (14) a s poloměrem  $\frac{R}{k}$

**2. Podobnost** je příbuznost, která je složena ze stejnolehlosti a shodnosti (nebo obráceně). Její rovnice se dá vždy vyjádřit ve tvaru

$$z = kv + \gamma, \quad (15)$$

kde  $k, \gamma$ , jsou komplexní čísla (která ovšem mohou být také reálná).

Ukažme to na případě složení stejnolehlosti a posunutí:

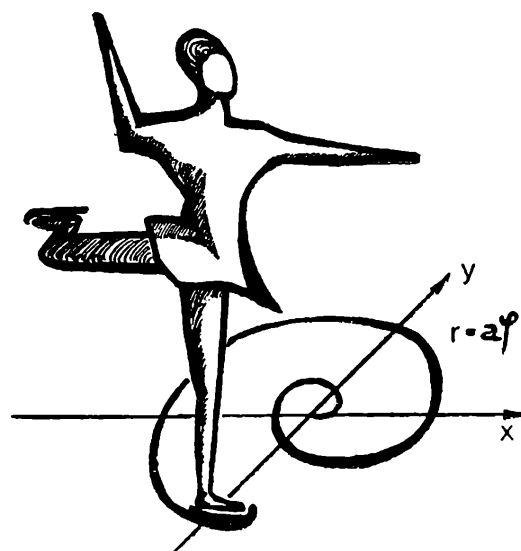
Na stejnolehlost danou rovnicí (14) provedme posunutí

$$w = v + u$$

Po dosazení za  $w$  do rovnice (14) a úpravě plyne rovnice (15).

Podobně bychom postupovali v ostatních případech.





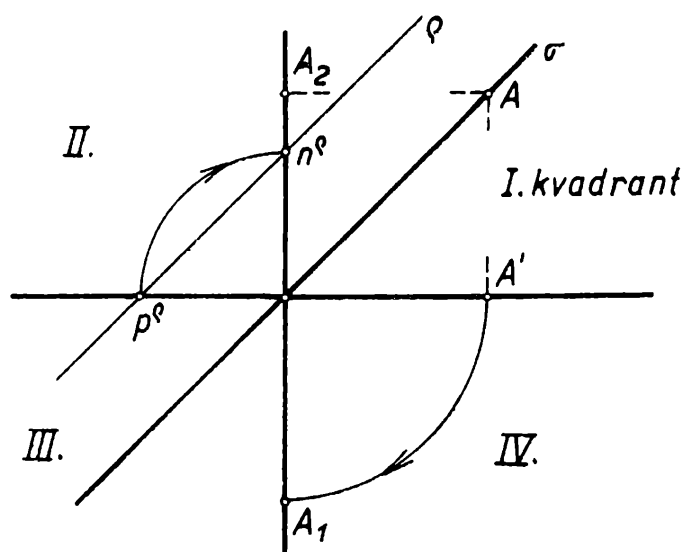
## Rovina souměrnosti

STANISLAV HORÁK, ČVUT Praha

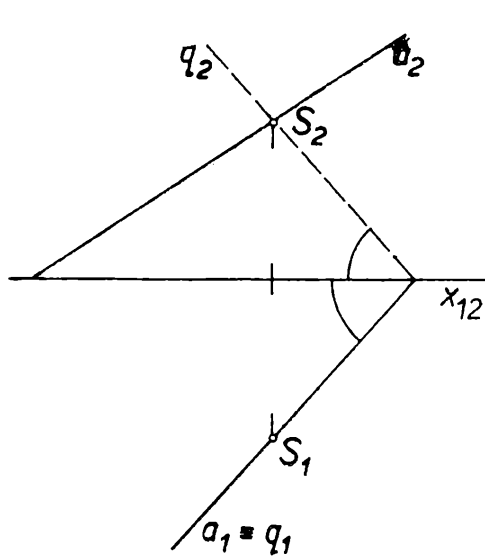
I. Rovina, která pólí úhel mezi první a druhou průmětnou a prochází přitom I. a III. kvadrantem, se nazývá rovina souměrnosti. Budeme ji značit  $\sigma$ .

*Věta 1. Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod  $A$  ležel v rovině souměrnosti, je: jeho sdružené průměty jsou souměrně sdružené podle základnice.*

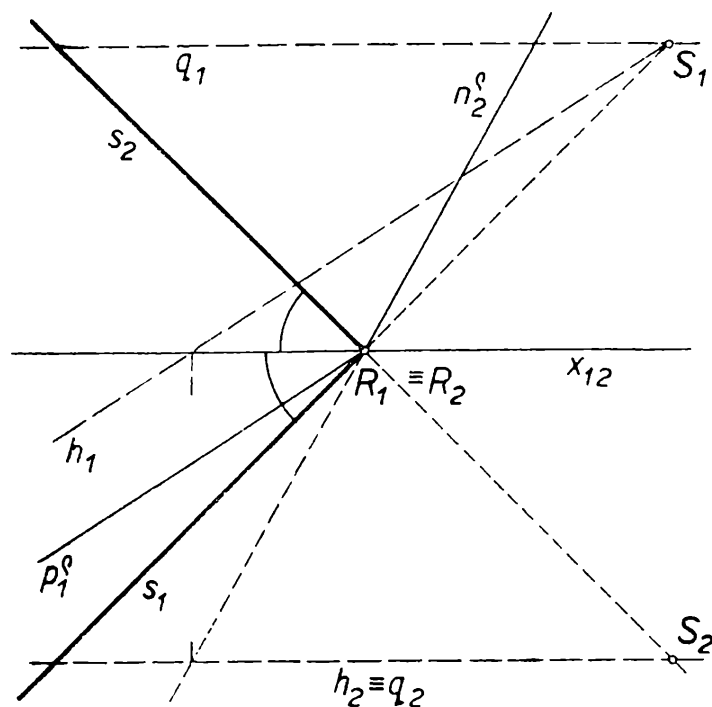
*Důkaz (obr. 1). Věta je samozřejmá pro body, ležící na základnici. Mějme tedy bod  $A$  v rovině souměrnosti, který neleží na základnici. Jeho první průmět je  $A'$  a druhý průmět je  $A_2$ . Oba průměty mají od základnice stejnou vzdálenost*



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

$$A' \dashv x = A_2 \dashv x$$

Sdružíme-li první průmětnu s druhou, přejde bod  $A'$  do bodu  $A_1$  a po-  
něvadž

$$A_1 \dashv x = A' \dashv x = A_2 \dashv x, \quad (1)$$

jsou body  $A_1, A_2$  souměrně sdružené podle základnice  $x$ .

Mějme obráceně sdružené průměty  $A_1, A_2$  bodu  $A$ , a to tak, že body  $A_1, A_2$  jsou souměrně sdružené podle základnice  $x$ . Jestliže první průmětnu otočíme do původní polohy, bod  $A_1$  přejde do bodu  $A'$  a vzhledem ke vztahům (1) leží bod  $A$  v rovině souměrnosti.

**D ů s l e d e k.** Vyslovená věta platí o všech bodech v rovině souměrnosti, a proto platí nutně i o množinách bodů, ležících v rovině souměrnosti.

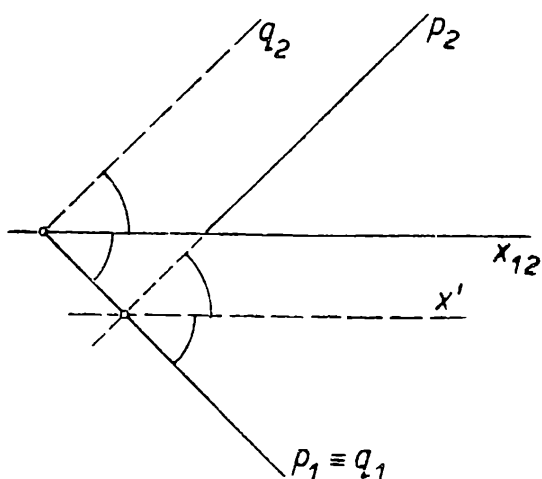
**V ě t a 2.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby sdružené průměty rovinného útvaru byly souměrně sdružené podle základnice, je: útvar leží v rovině souměrnosti.*

**P ř í k l a d 1.** Určete sdružené průměty průsečíku  $S$  dané přímky  $a$  s rovinou souměrnosti.

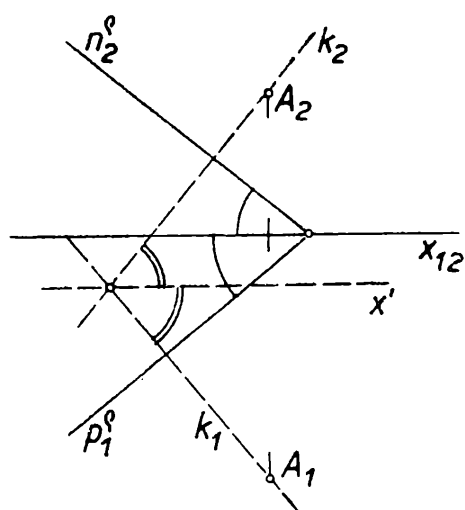
**Ř e š e n í** (obr. 2). Průsečík přímky s rovinou hledáme zpravidla pomocí krycí přímky. Použijeme první krycí přímky, kterou označíme  $q$ . Poněvadž krycí přímka leží v rovině souměrnosti, je její druhý průmět souměrně sdružený s prvním průmětem podle základnice. Tak byla také v obr. 2 přímka  $q_2$  sestrojena.

**P ř í k l a d 2.** Sestrojte průsečnici roviny  $\varrho$  s rovinou souměrnosti.

**Ř e š e n í** (obr. 3). Hledaná průsečnice  $s$  prochází stopním bodem  $R$  roviny  $\varrho$ . Další bod  $S$  přímky  $s$  je průsečík první hlavní přímky  $h$  roviny  $\varrho$  s rovinou souměrnosti. V obr. 3 je celá konstrukce patrna.



Obr. 4



Obr. 5

**Příklad 3.** Sestrojte sdružené průměty pětiúhelníka  $ABCDE$ , který leží v rovině souměrnosti. —  $A(0; 7; ?)$ ,  $B(-4; ?; 3)$ ,  $C(-2; 1; ?)$ ,  $D(4; 2; ?)$ ,  $E(5; ?; 4)$ .

**Řešení.** Souřadnice  $y$  a  $z$  každého bodu v rovině souměrnosti jsou stejné a odtud plyne návod, jak doplnit chybějící průměty bodů.

II. V tomto odstavci pohovoříme o dalších vlastnostech roviny souměrnosti.

**Věta 3.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímka  $p$  byla rovnoběžná s rovinou souměrnosti, je: sdružené průměty přímky  $p$  jsou souměrně sdružené podle nějaké přímky rovnoběžné se základnicí.*

**Důkaz** (obr. 4). Mějme přímku  $p$ , jejíž sdružené průměty  $p_1$ ,  $p_2$  jsou souměrně sdružené podle přímky  $x'$ , rovnoběžné se základnicí. Hledejme průsečík přímky  $p$  s rovinou souměrnosti užitím první krycí přímky  $q$ . Druhý průmět  $q_2$  krycí přímky  $q$  je s prvním průmětem  $q_1$  souměrně sdružený podle základnice a tudíž je  $q_2 \parallel p_2$ . Průsečík přímky  $p$  s rovinou souměrnosti neexistuje (je nevlastní), a proto přímka  $p$  je rovnoběžná s rovinou souměrnosti.

Obráceně, mějme danu přímku  $p$  rovnoběžnou s rovinou souměrnosti. Pak v rovině souměrnosti existuje přímka  $r$  rovnoběžná s přímkou  $p$ . Sdružené průměty přímky  $r$  jsou souměrně sdružené podle základnice a poněvadž

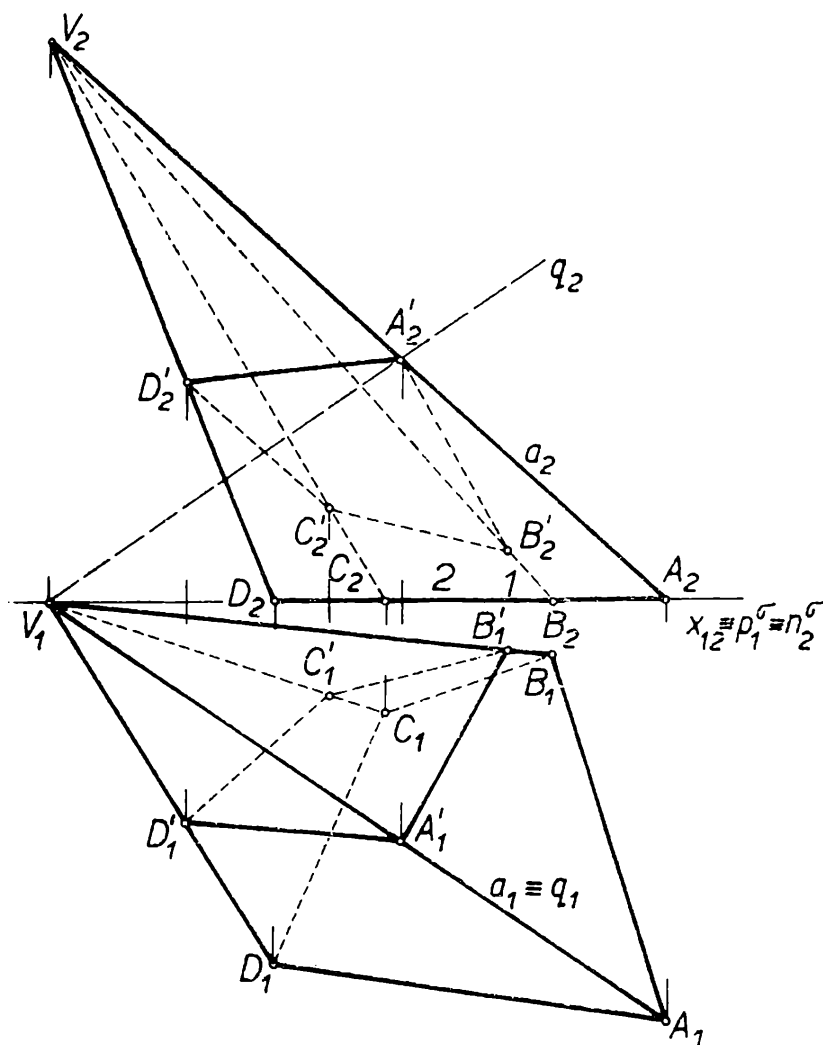
$$p_1 \parallel r_1, p_2 \parallel r_2,$$

mají sdružené průměty přímky  $p$  vlastnosti uvedené ve větě 3. Tím je důkaz proveden.

**Věta 4.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovina  $\rho$  byla rovnoběžná s rovinou souměrnosti, je: první průmět první stopy splývá s druhým průmětem druhé stopy.*

Důkaz nebudeme ani provádět, je patrný z obr. 1.

Obr. 6



**V ě t a 5.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovina  $\varrho$ , která neprochází základnicí, byla kolmá k rovině souměrnosti, je: první průmět první stopy a druhý průmět druhé stopy jsou souměrně sdružené podle základnice.*

**D ů k a z** (obr. 5). Mějme rovinu  $\varrho$  té vlastnosti, že první průmět první stopy a druhý průmět druhé stopy jsou souměrně sdružené podle základnice. Zvolme v prostoru libovolný bod  $A$  a spusťme z něho kolmici  $k$  na rovinu  $\varrho$ . Půdorys  $k_1$  a nárys  $k_2$  kolmice  $k$  jsou souměrně sdružené podle přímky  $x'$  rovnoběžné se základnicí. To znamená, že přímka  $k$  je rovnoběžná s rovinou souměrnosti a tudíž rovina  $\varrho$  je kolmá k rovině souměrnosti. Stručněji a přehledněji

$$\left. \begin{array}{l} k \perp \varrho \\ k \parallel \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow \varrho \perp \sigma$$

Obráceně, mějme rovinu  $\varrho$  kolmou k rovině souměrnosti  $\sigma$ . V prostoru zvolme libovolný bod  $A$  a z něho spusťme kolmici  $k$  na rovinu  $\varrho$ . Kolmice  $k$  je rovnoběžná s rovinou souměrnosti, a proto její první průmět  $k_1$  je souměrně sdružený s jejím druhým průmětem  $k_2$  podle

někaké přímky rovnoběžné se základnicí. Důsledek toho je,  $p_1^o$  a  $n_2^o$  jsou souměrně sdružené podle základnice.

**Příklad 4.** Je dán kosý čtyřboký jehlan s podstavou v první průmětně. Protněte jej rovinou  $\sigma$  tak, aby sdružené průměty řezu byly souměrně sdružené podle základnice.  $A(5; 7,5; 0)$ ,  $B(3; 1; 0)$ ,  $C(0; 2; 0)$ ,  $D(-2; 6,5; 0)$ ,  $V(-6; 0; 10)$ .

**Řešení** (obr. 6). Aby bylo vyhověno úloze, musí být rovina řezu totožná s rovinou souměrnosti. Ostatní je už známé. Z obr. 6 je zároveň patrné, že vrchol  $A'$  řezu byl sestrojen jako průsečík hrany  $a \equiv AV$  s rovinou souměrnosti.

### Cvičení

1. Sestrojte průsečík přímky  $a \equiv [(-4; 2; 2), (4; 6; 6)]$  s rovinou  $\varrho(4; 5; 5)$ . — Co můžete říci o přímce  $a$  a o rovině  $\varrho$ ?

2. Přímkou  $a \equiv [(-5; 4,5; 0), (5; 0; 7)]$  proložte rovinu kolmou k rovině souměrnosti.

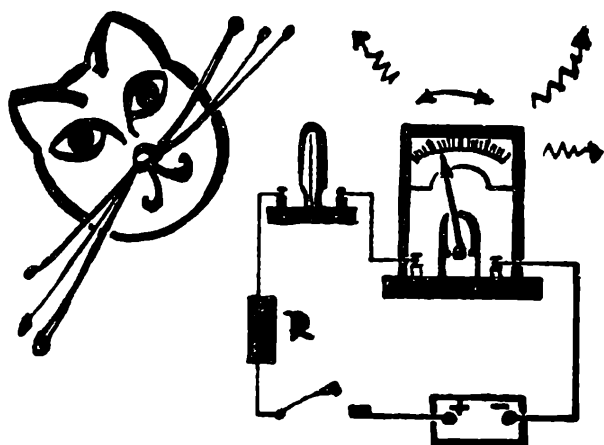
3. Zjistěte průsečík  $A$  přímky  $a$  s rovinou souměrnosti a průsečnici  $s$  roviny  $\varrho$  s rovinou souměrnosti. Pak určete vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $s$ . —  $a \equiv [(-6; 11; 0), (4; 0; 6)]$ ,  $\varrho(0; 150^\circ; 45^\circ)$ .

4. Pětiboký hranol, (jehož podstava je pravidelný pětiúhelník  $ABCDE$  v druhé průmětně, protněte rovinou  $\varrho$  tak, aby první průmět řezu byl souměrně sdružený podle základnice s druhým průmětem řezu. —  $S(-5; 0; 7,5)$ ,  $A(-4,5; 0; 3)$ ,  $A(-2; 2,5; 0)$ .

5. Kosý kruhový válec, jehož kruhová podstava je v první průmětně, protněte rovinou  $\varrho$  tak, aby první průmět řezu byl souměrně sdružený podle základnice s druhým průmětem řezu. —  $S(5; 8; 0)$ ,  $r = 4$ ,  $S(-1; 0; 6,5)$ .

W. H. Nernst, významný fyzik a nositel Nobelovy ceny za formulaci třetí hlavní věty termodynamiky, měl mimořádné pochopení pro studenty sužované horkem v posluchárnách či laboratořích. Na svém stole měl zkumavku s organickou sloučeninou difenylmetanem, která přechází do kapalného stavu při  $26^\circ\text{C}$ . Nastal-li tento jev již v 11 hodin dopoledne, říkal Nernst: „Proti přírodě nic nezmůžeš!“ a pouštěl studenty k vodě.

Jaroslav Šedivý



F Y Z I K A

# Peltierův jev a jeho využití k termoelektrickému ochlazení

FRANTIŠEK GOLAB, FRANTIŠEK KAMENČÁK, PF Ostrava

## Úvod

V článku „Termoelektrické jevy“<sup>1)</sup> jsme vysvětlili Peltierův jev. Stručně zopakujeme základní poznatky.

Prochází-li stejnosměrný proud spojením dvou různých vodičů, polovodičů nebo polovodiče a kovu, pak se tento spoj buď ochlazuje nebo zahřívá, což závisí na směru elektrického proudu. Při reverzaci proudu změní se i znaménko tepla.

Množství uvolněného nebo pohlceného tepla je dáno vztahem

$$Q_p = \alpha \cdot T \cdot I \cdot t = \pi \cdot I \cdot t,$$

kde

$$\pi = \alpha \cdot T$$

Zde  $Q_p$  uvolněné (pohlcené) Peltierovo teplo,  
 $\alpha$  součinitel termoelektrického napětí,  
 $I$  elektrický proud,  
 $T$  absolutní teplota spoje,  
 $t$  doba, po kterou proud spojením procházel,  
 $\pi$  Peltierův koeficient.

<sup>1)</sup> Viz Rozhledy, r. 1967/68, č. 10.

Protože teplo  $Q_p$  je u kovů velmi malé, nebylo možné technické využití Peltierova jevu, i když již roku 1911 německý fyzik Altenkirch odvodil matematické vztahy, jež dosud považujeme za správné. Ale teprve pokrok fyziky polovodičů po druhé světové válce umožnil využít Peltierova jevu k praktickému ochlazování.

Na Světové výstavě v Bruselu v roce 1958 byla vystavována Sovětským svazem první termoelektrická chladnička, která byla založena na Peltierově jevu.

I když tato první, a ani současné termoelektrické chladničky nemohou zatím plně konkurovat konvenčním druhům chladniček, její objevení se v Bruselu obrátilo pozornost výzkumných vědeckých i technických pracovníků na celém světě k Peltierovu jevu na polovodičích.

Ani naše věda nezůstala pozadu. Vynikající práce inženýrů Šmirouse a Štourače znamenaly ještě v nedávné době světové prvenství. V poslední době se zaměřily na výzkum termoelektrického ochlazování početné štáby pracovníků v USA, Japonsku i jinde a dosáhly překvapujících výsledků.

## 2. Výběr termoelektrických materiálů

Peltierovo teplo  $Q_p$  je u kovů, a stejně tak i u čistých polovodičů, velmi malé. Mnohem větší teplo  $Q_p$  se objevuje u polovodičových sloučenin a jejich slitin (tuhých roztoků), ale i zde je určitá hranice možnosti praktického využití.

Aby bylo možné využít těchto polovodičových materiálů pro praktické ochlazování, musejí jejich fyzikální parametry nabývat určitých hodnot. Peltierovo teplo  $Q_p$  musí být dostatečně veliké, aby na něm závislý rozdíl teplot mezi ochlazovaným spojem a teplým koncem dosáhl alespoň hodnoty  $35^\circ\text{C}$ , jinak řečeno materiály musejí být dostatečně efektivní. Jejich efektivita je dána veličinou „ $Z$ “, zvanou též termoelektrická efektivita, stručně jen „parametr  $Z$ “, která je dána vztahem

$$Z = \frac{\alpha^2 \sigma}{\lambda}, \quad (1)$$

kde  $\alpha$  - součinitel termoelektrického napětí,

$\sigma$  - měrná elektrická vodivost,

$\lambda$  - měrná tepelná vodivost,

$Z$  - termoelektrická efektivita.

Aby parametr  $Z$  dosáhl hodnoty, která umožňuje technické aplikace ( $Z > 5,75 \cdot 10^{-4} \text{ deg}^{-1}$ ), musejí parametry  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  ležet svými hodnotami pod těmito mezemi

$$\alpha < 1,5 \text{ až } 2,0 \cdot 10^2 \text{ V deg}^{-1},$$

$$\sigma < 1,0 \text{ až } 2,5 \cdot 10^3 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1},$$

$$\lambda < 4 \cdot 10^{-2} \text{ W cm}^{-1} \text{ deg}^{-1}$$

Použitý materiál musí mít oba typy elektrické vodivosti ( $p$  i  $n$  a obě znaménka součinitele termoelektrického napětí.

Na základě těchto požadavků dojdeme k závěrům:

a) Kovy mají velmi malou hodnotu  $\alpha$ , velkou hodnotu  $\sigma$ , značnou hodnotu  $\lambda$ . Odtud podle vztahu (1) plyne malá hodnota „ $Z$ “ a nevhodnost použití k ochlazování.

b) Elementární polovodiče (čisté Ge, Si) mají malou hodnotu  $\sigma$ , značnou hodnotu  $\lambda$ . Proto se rovněž nehodí jako termoelektrické materiály.

c) Většina polovodičových binárních (dvojsložkových) sloučenin má hodnoty parametrů  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  vně hranic efektivního užití. Jen některé sloučeniny se blíží hodnotami těchto parametrů dolní hranici použitelnosti. Jde vesměs o polovodičové sloučeniny těžkých prvků IV a V skupiny s prvky VI. skupiny (viz tabulka). Vlastnosti těchto sloučenin se dají ještě zlepšit přidáním různých aktivačních příměsí, tzv. legováním.

Přehled prvků vhodných k výrobě termoelektrických materiálů

| IV                    | V                                                 | VI                                            |
|-----------------------|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 82 olovo<br>Pb 207,31 | 51 antimon<br>Sb 121,76<br>83 vizmut<br>Bi 209,00 | 34 selén<br>Se 78,94<br>52 telur<br>Te 127,61 |

Legováním takových binárních sloučenin, hlavně teluridů vizmutu  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  a olova  $\text{PbTe}$  lze získat vhodné materiály dosahující dolní hranice efektivnosti. Chladicí články vyrobené z těchto materiálů v Ústavu technické fyziky ČSAV v Praze, dosáhly hodnoty parametru  $Z = 8,5 \cdot 10^{-4} \text{ deg}^{-1}$ , což odpovídá teoretickému rozdílu teploty teplého a studeného konce článku  $\Delta T = 35 \text{ K}$ . Prakticky bylo ovšem dosaženo menšího rozdílu teplot, jen asi 14 K. Byl-li teplý konec udržován proudící vodou na teplotě (12 až 13) °C, pak teplota studeného konce klesla pod 0 °C.

Při hledání efektivnějších materiálů zjistil A. F. Ioffe, že nejvhodnějšími termoelektrickými materiály jsou tzv. ternární (třísložkové) slitiny, vlastně tuhé roztoky, dvou binárních sloučenin o jednom spo-



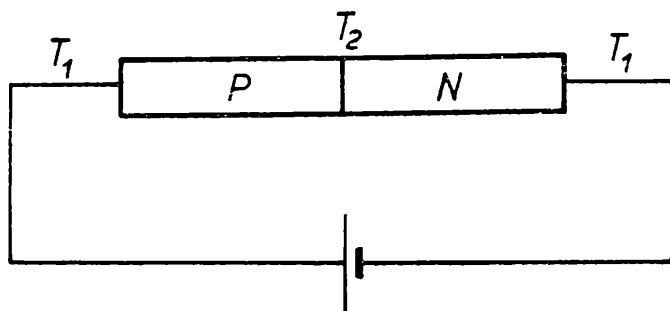
lečném prvku. K nejběžněji dnes používaným patří slitiny teluridu a selenidu vizmutu ( $\text{Bi}_2\text{Te}_3 - \text{Bi}_2\text{Se}_3$ ), běžně označované Bi — Se — Te a teluridu vizmutu a antimonu ( $\text{Bi}_2\text{Te}_3 - \text{Sb}_2\text{Te}_3$ ) označované Bi — Sb — Te. Z těchto slitin se metodami práškové metalurgie s použitím aktivačních přísad lisováním a případným dalším tepelným zpracováním, nebo metodou orientované krystalizace, zhotovují vzorky potřebných tvarů a rozměrů. Z nich se sestavují termoelektrické chladicí baterie, o nichž bude ještě dále hovořeno.

Výzkumem termoelektrických materiálů se zabývá u nás několik vědeckovýzkumných pracovišť a vysokých škol. Výrobou materiálů i baterií je znám Výzkumný ústav práškové metalurgie v Šumperku, kde byly vyvinuty i některé technické aplikace.

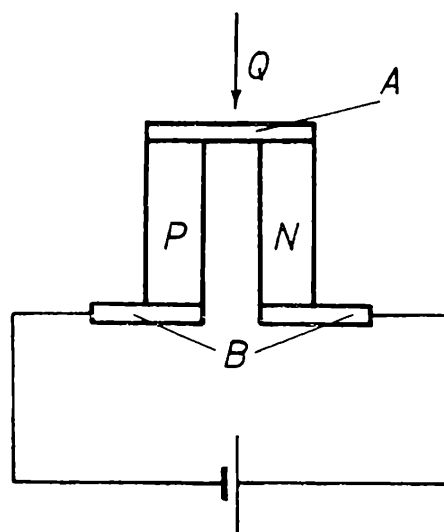
### 3. Chladicí článek a baterie

Již v úvodu jsme řekli, že na rozhraní (ve spoji) dvou různých polovodičů procházejícím proudem podle jeho směru teplo se buď pohlcuje nebo uvolňuje. Použijme nyní jako ony různé polovodiče již uvedené ternární slitiny (Bi — Se — Te jako polovodič typu  $n$  a Bi — Sb — Te jako polovodič typu  $p$ ) a sestavme obvod podle obr. 1. V tom případě je teplota  $T_2$  spoje větší než teplota  $T_1$  konců obou polovodičů. Z termiky je známo, že teplo přechází vedením z místa teplejšího na místo chladnější, tedy v našem případě od styku obou polovodičů k jejich koncům. Tímto teplem se však zvyšuje teplota  $T_1$  a pochopitelně se snižuje chladicí účinek. Aby zvýšení teploty  $T_1$  bylo co nejmenší, musí mít materiál pokud možno malou měrnou tepelnou vodivost, jak to plyne ze vzorce (1). Při reverzaci proudu budou poměry obrácené.

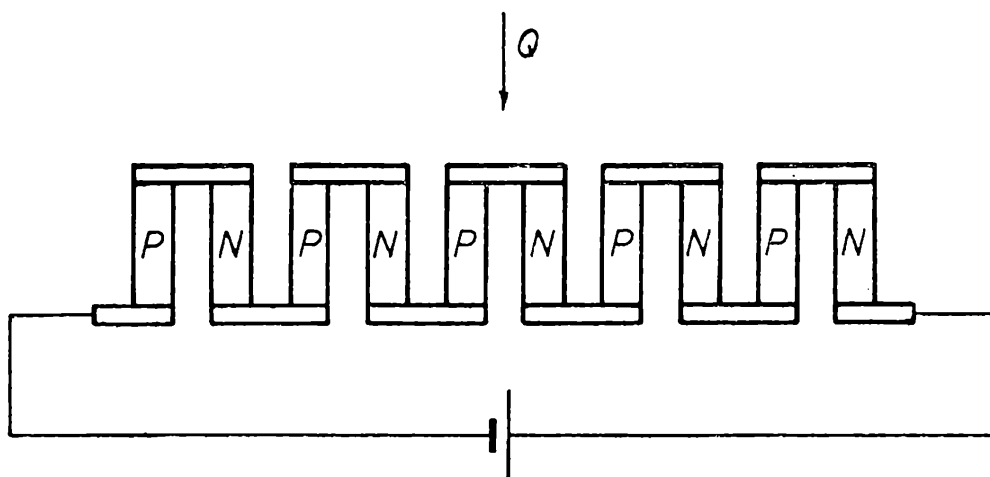
Zapojení podle obr. 1 představuje princip chladicího článku. Praktické uspořádání a zapojení článku je schematicky znázorněno na obr. 2.



1. Princip chladicího článku na podkladě Peltierova jevu



2. Schéma chladicího článku



3. Schéma zapojení chladicích článků ve vícečládkovou baterii

Srovnajme oba obrázky. Je zřejmé, že teplota destičky *A* je nižší než teplota destiček *B*. Destička *A* proto ochlazuje prostor nad plochou, s níž je ve styku. Teplo, které destička *A* odebírá ochlazovanému okolí se odvádí na teplé destičky *B* směrem, který je na obr. 2 označen šipkou. Destičky *B* odevzdávají toto přiváděné teplo svému okolí. Aby se odevzdávání tepla urychlilo, ochlazují se často destičky *B* proudící studenou vodou. Destičky *A*, *B*, zvané též spojovací můstky, bývají obvykle měděné.

Vztah (1), který jsme nazvali termoelektrickou efektivitou, platí pro každý sloupek článku zvlášť. Abychom obdrželi výraz pro parametr z článku jako celku, musíme uvažovat, že každý sloupek má při stejných geometrických rozměrech parametry  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$  jiné. Rozlišíme je od sebe indexy —  $p$  pro sloupek  $p$  a  $n$  pro sloupek  $n$ , přičemž  $\alpha_n$  má záporné znaménko.

Termoelektrickou efektivitu chladicího článku pak vyjádříme vztahem

$$Z = \frac{[\alpha_p - (-\alpha_n)]^2}{\left(\sqrt{\frac{\lambda_p}{\sigma_p}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\sigma_n}}\right)^2} \text{ [deg}^{-1}\text{]}$$

Chladicí výkon takového jednoho článku je pochopitelně malý, protože malá je i chladicí plocha a rozměry celého článku (rozměry sloupků bývají  $5 \times 5 \times 5$  mm<sup>3</sup> a menší). Aby se zvýšil chladicí výkon, spojují se jednotlivé články v baterie o různém počtu článků zapojených za sebou. Příklad takového zapojení je na obr. 3.

#### 4. Praktické využití

V praktickém využití termoelektrického ochlazování byly učiněny teprve první kroky. Zatím se převážně konstruují taková chladicí zaří-

zení, u nichž je požadován poměrně malý chladicí výkon, i když experimentálně byla sestrojena zařízení s chladicím výkonem až  $10^4$  kcal/hod<sup>-1</sup>.

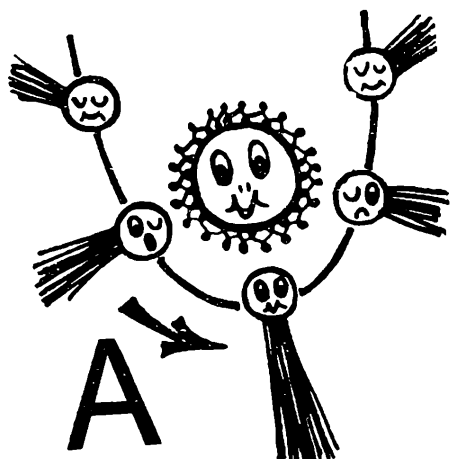
Běžnější jsou menší zařízení, jako již zmíněná sovětská chladnička, nebo v poslední době japonská chladnička Sanyo o obsahu 13,5 litru, která je schopna snížit teplotu ochlazovaného prostoru na  $-2^\circ\text{C}$  při teplotě okolí  $30^\circ\text{C}$ , příkonem 45 W. Naopak při reverzaci proudu se vnitřní prostor vyhřeje příkonem asi 30 W až na  $80^\circ\text{C}$ . I u nás byla již před několika lety v závodě Tesla Piešťany zkonstruována termoelektrická chladnička.

Z dalších zařízení jsou známé chladiče pitné vody, chladicí boxy apod. Aplikace však hlavně směřují ke konstrukci různých zařízení a přístrojů pro vědecké účely. Hlavní uplatnění našlo termoelektrické ochlazování v biologii a lékařství, kde se ho využívá k ochlazování při mikroskopování (tzv. chladicí stolky k mikroskopům), k ochlazování tkání, konzervace malých preparátů apod.

Další rozvoj a hlavně masové rozšíření termoelektrického ochlazování je závislé na výzkumu nových termoelektrických materiálů. V podstatě jde o přípravu materiálů s větším parametrem  $Z$ . Dnešní materiály mívají „ $Z$ “ kolem  $3 \cdot 10^{-3} \text{ deg}^{-1}$ . Zvýšení „ $Z$ “ je možné dvěma cestami. Buď je třeba hledat nové technologické postupy výroby dosavadních známých materiálů (orientovaná krystalizace je jedna z nich), nebo hledat materiály zcela nové. Protože se tohoto úkolu ujali vědci a výzkumní pracovníci v mnoha zemích světa, můžeme očekávat, že nám budoucnost přinese brzy nové úspěchy i na tomto poli.

#### L i t e r a t u r a

- [1] Ioffe, A. F.: Fyzika polovodičů, NČSAV Praha 1959.
- [2] Ioffe, A. F.: Termoelektričeskoje ochlaždenije, IAN SSSR, Moskva Leningrad 1956.
- [3] Syrový, K.: Využití Peltierova jevu k termoelektrickému chlazení, Strojírenství 13, 1963, č. 6, str. 464—471.
- [4] Kulčický, I.: Osobní sdělení (Výzkumný ústav práškové metalurgie v Šumperku).



## Zodiakální souhvězdí\*)

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, UP, Olomouc

Všechny planety, Měsíc i Slunce se pohybují po obloze v blízkost roviny ekliptiky. Ve zdánlivém pohybu Slunce se zrcadlí pohyb Země na dráze kolem Slunce (přesněji řečeno: pohyb Země kolem společného těžiště celé sluneční soustavy), takže Slunce se zdánlivě pohybuje přesně v rovině ekliptiky. Ekliptika<sup>1)</sup> je hlavní kružnice na sféře, kterou vytváří průsečík roviny, v níž obíhá Země kolem Slunce, se sférou. Starověcí astronomové rozdělili ekliptiku na 12 stejných dílů, tzv. *znamení*, která nazvali podle souhvězdí, jež byla v tehdejší době v dané části oblohy. Protože většina jejich názvů jsou jména zvířat, mluvíme o *zodiaku*, čili zvěrokruhu (zvířetníku). Názvy znamení i souhvězdí jsou stejné. Bližší údaje jsou v tab. I a v tab. II.

Zodiakální souhvězdí jsou různě rozsáhlá, avšak každému znamení byla přiznána délka  $30^\circ$ . Vlivem precese se *jarní bod*, definovaný jako průsečík roviny ekliptiky s rovinou světového rovníku, posune na obloze o  $1^\circ$  za 72 roků. Tento posuv způsobil, že se v současné době již znamení a souhvězdí neshodují. Znamení Berana je v souhvězdí Ryb.

\*) Volně navazuje na článek Cirkumpolární souhvězdí, otištěný v tomto časopise, roč. 47, 1968/69, č. 9, s. 433.

<sup>1)</sup> Viz obr. 162, str. 157 v učebnici „Fyzika pro 1. ročník SVVŠ“, 4. vydání. SPN, Praha 1969.

Tabulka II — Zodiakální souhvězdí

| Latinský<br>název | Zkratka | „Plocha“<br>ve čtverečních<br>stupních*) | Počet hvězd,<br>jasnějších než<br>6,0m |
|-------------------|---------|------------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. Aries          | Ari     | 441                                      | 50                                     |
| 2. Taurus         | Tau     | 797                                      | 125                                    |
| 3. Gemini         | Gem     | 514                                      | 70                                     |
| 4. Cancer         | Cnc     | 506                                      | 60                                     |
| 5. Leo            | Leo     | 947                                      | 70                                     |
| 6. Virgo          | Vir     | 1290                                     | 95                                     |
| 7. Libra          | Lib     | 538                                      | 50                                     |
| 8. Scorpius       | Sco     | 497                                      | 100                                    |
| 9. Sagittarius    | Sgr     | 867                                      | 115                                    |
| 10. Capricornus   | Cap     | 414                                      | 50                                     |
| 11. Aquarius      | Aqr     | 980                                      | 90                                     |
| 12. Pisces        | Psc     | 889                                      | 75                                     |

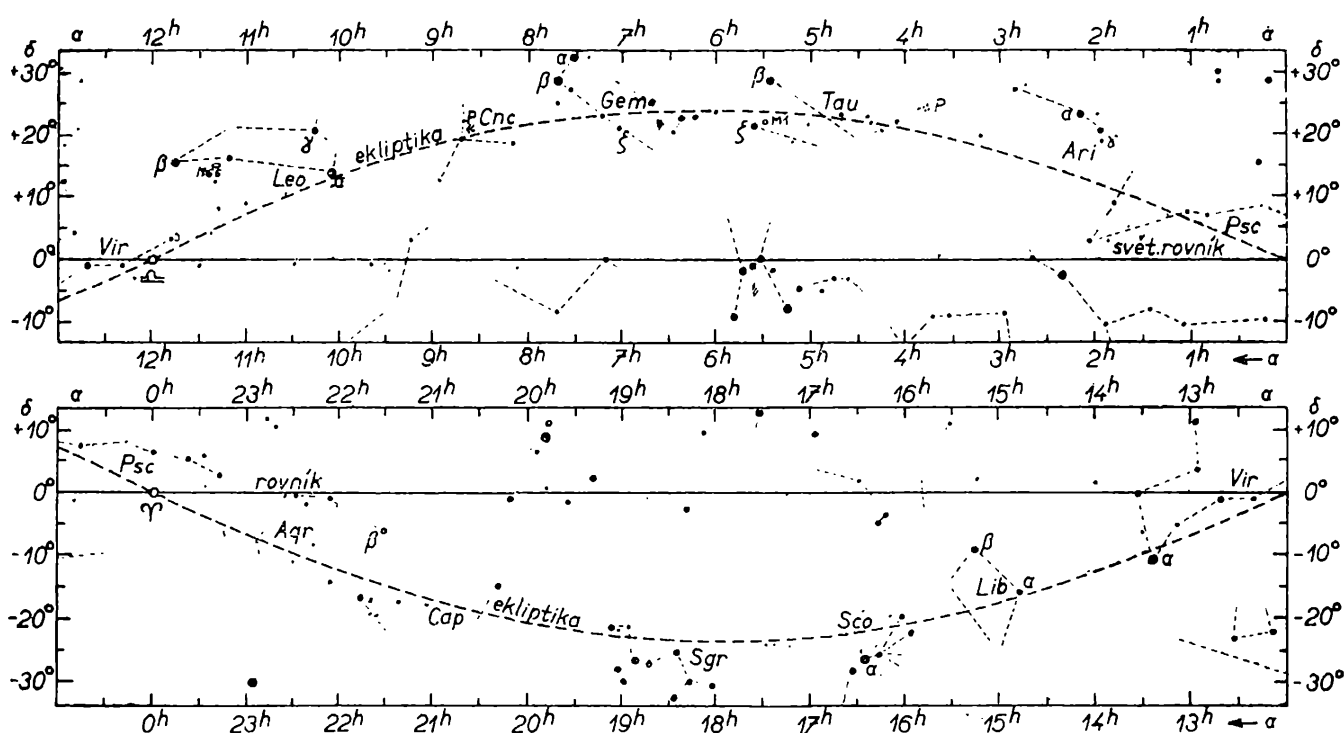
\*) čtvereční stupně jsou jednotkou prostorového úhlu

Tabulka I — Zodiakální znamení

| Latinský<br>název | Český<br>název | Astrono-<br>mická<br>délka | Vstoupí-li Slunce<br>do znamení,<br>nastává |
|-------------------|----------------|----------------------------|---------------------------------------------|
| 1. Aries          | Beran          | 0°                         | jarní                                       |
| 2. Taurus         | Býk            | 30°                        | rovnodennost                                |
| 3. Gemini         | Blíženci       | 60°                        |                                             |
| 4. Cancer         | Rak            | 90°                        | letní                                       |
| 5. Leo            | Lev            | 120°                       | slunovrat                                   |
| 6. Virgo          | Panna          | 150°                       |                                             |
| 7. Libra          | Váhy           | 180°                       | podzimní                                    |
| 8. Scorpius       | Štír           | 210°                       | rovnodennost                                |
| 9. Sagittarius    | Střelec        | 240°                       |                                             |
| 10. Capricornus   | Kozoroh        | 270°                       | zimní                                       |
| 11. Aquarius      | Vodnář         | 300°                       | slunovrat                                   |
| 12. Pisces        | Ryby           | 330°                       |                                             |

Za  $72 \times 360$  roků projdou znamení celou ekliptiku a vrátí se na čas ke svým původním souhvězdím. Tato doba, přibližně 26 000 roků, nazývá se *platónský rok*. Řekneme-li, že nějaké těleso, např. Slunce, vstoupilo do znamení Kozoroha, pak to znamená, že jeho astronomická délka, měřená od jarního bodu po ekliptice směrem přímým (proti zdánlivému otáčení oblohy), dosáhla hodnoty 270°.

Nyní uvedeme některé zajímavé objekty, které můžeme pozorovat v zodiakálních souhvězdích (obr. 1).



Obr. 1. Mapa zodiakálních souhvězdí v okolí ekliptiky. Nakresleno podle „Arbeitskarte der Tierkreiszone“ od A. Zenkerta. Čárkovaně je zakreslena poloha ekliptiky. Hvězdy jsou spojeny čarami k snazšímu zapamatování tvaru souhvězdí.

1. *Aries*. Nejjasnější hvězda  $\alpha$  (Hamal) je druhé hvězdné velikosti. Hvězda  $\gamma$  je dvojhvězda, rozlišitelná kukátkem.

2. *Taurus*. Kolem hvězdy  $\alpha$  (Aldebaran) je otevřená hvězdokupa Hyady (H), ve vzdálenosti 130 světelných roků. Velmi výrazná je hvězdokupa Plejady (P), česky nazývaná Kuřátka, s nejjasnější hvězdou Alcyone. Vzdálenost Plejad je 430 světelných roků. Blízko hvězdy  $\xi$  vzplanula v roce 1054 supernova, jejímž zbytkem je Krabí mlhovina (M 1).

3. *Gemini*. Nejjasnější hvězdy  $\alpha$  a  $\beta$  se nazývají Castor a Pollux. Hvězda  $\xi$  je jednou z nejjasnějších cefeid. V tomto souhvězdí objevil W. Herschel r. 1781 planetu Urana a v r. 1930 C. Tombaugh planetu Pluta. Otevřená hvězdokupa M 35 je ve vzdálenosti 2600 světelných roků.

4. *Cancer*. Nepříliš výrazné souhvězdí. Význačným objektem je otevřená hvězdokupa Praesepe (P, česky Jesle) ve vzdálenosti 600 světelných roků. Je viditelná prostým okem, protože její hvězdná velikost je 3,7<sup>m</sup>.

5. *Leo*. Nejjasnější hvězdou je  $\alpha$  (Regulus). V souhvězdí je značný počet vnějších galaxií, z nichž nejjasnější je M 66. Hvězda  $\gamma$  (Algeiba) je pěknou dvojhvězdou.

6. *Virgo*. Nejjasnější hvězda  $\alpha$  se nazývá Spica. Je to spektroskopická dvojhvězda, jejíž složky obíhají kolem společného těžiště za 4 dny. V souhvězdí je velký počet galaxií; nejjasnější z nich je M 104 na hranici souhvězdí Panny a Havrana.

7. *Libra*. Hvězdy  $\alpha$  a  $\beta$  jsou druhé hvězdné velikosti. Hvězda  $\delta$  je zákrytová proměnná hvězda.

8. *Scorpius*. Toto souhvězdí je jen zčásti viditelné v našich zeměpisných šířkách. Nejjasnější hvězda  $\alpha$  (Antares) je veleobr, jehož průměr je 300krát větší než průměr Slunce. Souhvězdí je bohaté na hvězdokupy, z nichž nejjasnější je M 4 v blízkosti Antara.

9. *Sagittarius*. Také toto souhvězdí vystupuje jen v letních měsících z části nad jižní obzor. Je v něm řada proměnných hvězd, otevřených i kulových hvězdokup a do jeho směru se promítá jádro naší Galaxie.

10. *Capricornus*. Poměrně nenápadné souhvězdí mezi Střelcem a Vodnářem. Můžeme ho pozorovat v létě a na podzim.

11. *Aquarius*. Nejjasnější hvězdy jsou třetí hvězdné velikosti. V blízkosti hvězdy  $\beta$  je kulová hvězdokupa M 2. V tomto souhvězdí objevil v r. 1846 astronom Galle planetu Neptuna, jehož polohu předem vy počítali Adams a Leverrier.

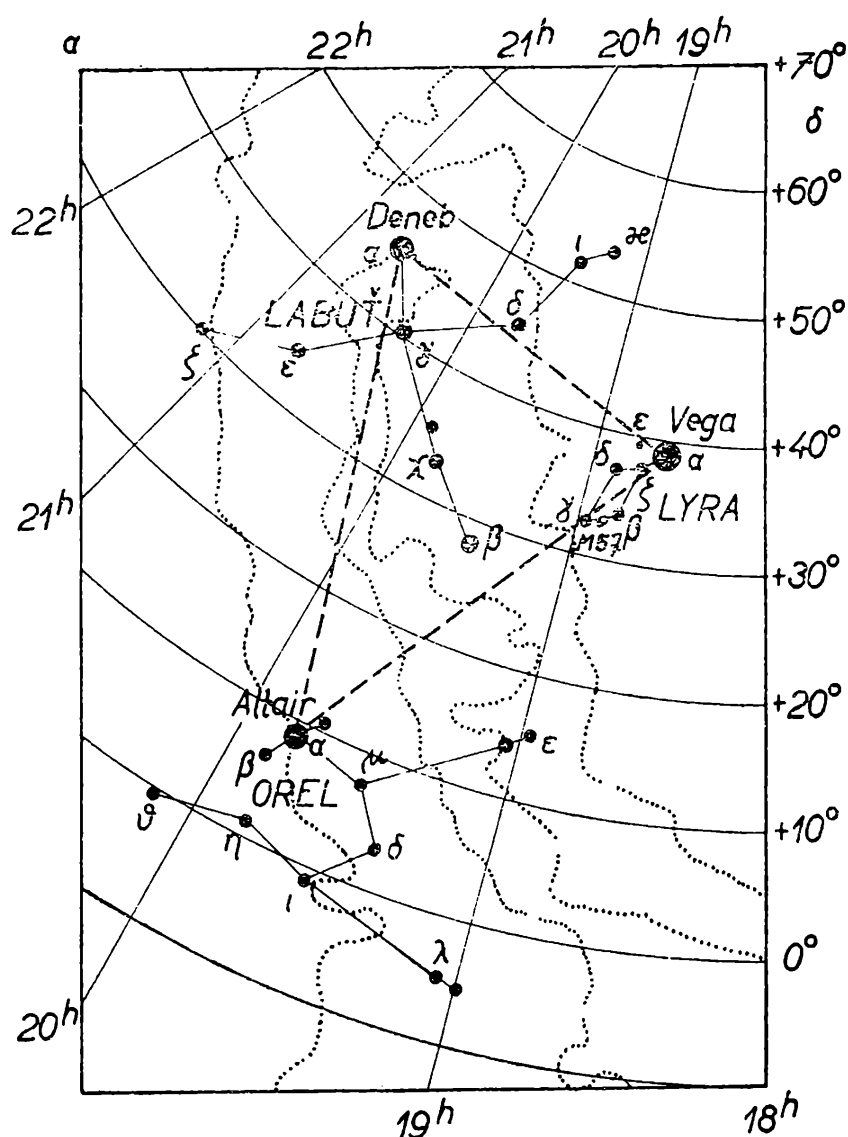
12. *Pisces*. Poměrně málo jasných hvězd; v tomto souhvězdí je nyní jarní bod, jímž Slunce prochází 21. března. Souhvězdí je viditelné v podzimních měsících.

## Souhvězdí letní oblohy

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Mezi výrazná souhvězdí letní oblohy patří *L a b u ť* (lat. Cygnus, zkratka Cyg), *O r e l* (Aquila, Aql) a *L y r a* (Lyra, Lyr) s nejjasnější hvězdou severní hvězdné oblohy, Vegou. V měsíci červenci vrcholí tato souhvězdí nad obzorem kolem 23 hodin, v srpnu ve 22 hodin. Nejjasnější hvězdy těchto tříd souhvězdí, tj. Vega v Lyře, Deneb v Labuti a Altair v Orlu, tvoří tzv. *letní trojúhelník* (obr. 1).

V souhvězdí Labutě má hvězda  $\alpha$  (Deneb) zdánlivou hvězdnou velikost 1,26<sup>m</sup> a je ve vzdálenosti 650 světelných roků. Hvězda  $\beta$  se nazývá Albireo, a je to optická dvojhvězda, jejíž dvě složky (3,2<sup>m</sup> a 5,4<sup>m</sup>) jsou ve vzájemné vzdálenosti 34,3". Vzdálenost Albirea od nás je 400 světelných roků. V Labuti je velmi mnoho mračen difúzní látky (např. svítící mlhovina, nazývaná Severní Amerika) a řada zdrojů rádiového záření.



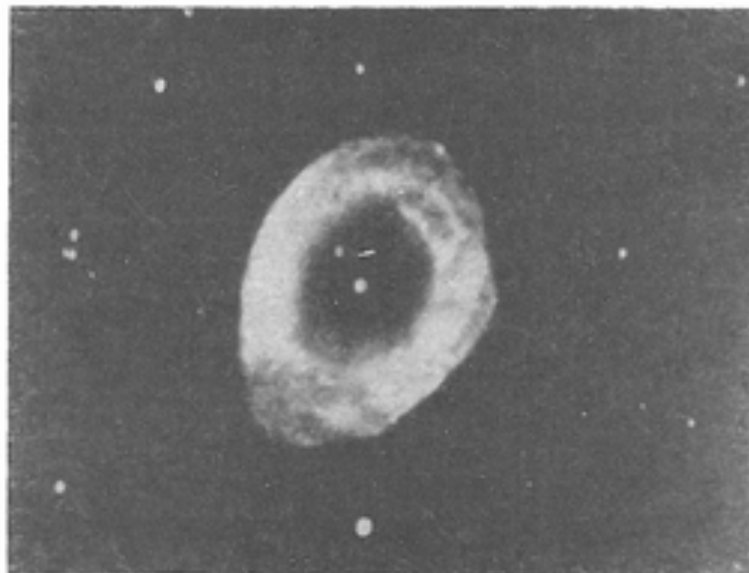
Obr. 1. Hvězdy Vega, Deneb a Altair tvořící „letní trojúhelník“ [2]. Tečkovaně jsou vyznačeny obrysy Mléčné dráhy, která se v souhvězdí Labutě rozděluje na dva proudy.

Nejjasnější hvězda v Orlu, Altair, má zdánlivou hvězdnou velikost  $0,80^m$  a je ve vzdálenosti 16 světelných roků. Jeho průměr je dvakrát větší a svítivost desetkrát větší než průměr a svítivost našeho Slunce. V souhvězdí Orla vzplanula v roce 1918 nova. Při výbuchu se od hvězdy oddělil plynný obal, který se rozpíná ročně o  $2''$ . Proměnná hvězda  $\eta$  je nejjasnější proměnnou pulsující hvězdou (typu cefeid). Hvězdná velikost se mění od  $4,1^m$  do  $5,3^m$  v periodě 7,18 dne.

Poměrně malé, ale velmi výrazné souhvězdí je Lyra. Zdánlivá hvězdná velikost Vegy je  $0,04^m$ , spektrální třída  $A_0$  a je ve vzdálenosti 26 světelných roků. Vega má vysokou povrchovou teplotu (12 000 K) a její průměr je čtyřikrát větší než průměr Slunce. Poměrně malá jasná



Obr. 2. Prstencová mlhovina M 57 (NGC 6720)  
v souhvězdí Lyry



hvězda  $\epsilon$  je čtyřnásobná hvězda<sup>1)</sup> ve vzdálenosti 200 světelných roků. Hvězda  $\beta$  (Sheliak) je zákrytová proměnná hvězda, jejíž hvězdná velikost se mění od 3,4<sup>m</sup> do 4,3<sup>m</sup> v periodě 12,9 dne. Větší složka je veleobří spektrální hvězda třídy B<sub>9</sub>, menší spektrální třídy F. Obě hvězdy mají společnou atmosféru a jsou silně zploštělé. Hvězda RR Lyrae je typickou představitelkou početné skupiny pulsujících proměnných hvězd s krátkou periodou pulsací. Její hvězdná velikost se mění od 6,9<sup>m</sup> do 8,0<sup>m</sup> v periodě 0,567 dne. Přibližně na spojnici hvězd  $\beta$  a  $\gamma$  je prstencová planetární mlhovina M 57 (NGC 6720). Její rozměry na obloze jsou 83"  $\times$  59" a zdánlivá hvězdná velikost 9,3<sup>m</sup> (obr. 2). Skutečný průměr mlhoviny se odhaduje na 50 000 astronomických jednotek. V souhvězdí Lyry leží radiant meteorického roje Lyrid, jehož maximum činnosti je kolem 21. dubna. Průměrný hodinový počet je 12 meteorů. Tento roj souvisí s kometou 1861 I, jejíž oběžná doba je 415 roků.

Znalost souhvězdí pomáhá při rychlé orientaci na hvězdné obloze; většina názvů souhvězdí severní oblohy pochází z řecké mytologie.

#### L i t e r a t u r a

- [1] Ullerich, K.: Noči u teleskopa. „Mir“, Moskva 1966.
- [2] Mapa severní hvězdné oblohy. Ústřední správa geodézie a kartografie, Praha 1960.

---

<sup>1)</sup> Vzájemné polohy obou párů hvězd  $\epsilon_1$  a  $\epsilon_2$  Lyrae, jakož i optické dvojhvězdy  $\beta$  Cygni jsou nakreslené na obr. 2, v článku Pozorujeme dvojhvězdy, Rozhledy MF, 47, 1968/69, č. 9, s. 429—432.

## Alexandrijští matematikové

STANISLAV HORÁK st., ČVUT, Praha

Velká říše *Alexandra Velikého* (356—323 př. n. l.) se po jeho smrti rozpadla. Byla rozchvácena jednotlivými vojevůdci. Egypt zabral *Ptolemaios* a jeho rod udržel samostatný Egypt až do r. 30 př. n. l. Poslední panovnicí byla *Kleopatra VII.*, manželka *Ptolemaia XIV.* Je to panovnice všem dobře známá, neboť její život byl několikrát zpracován literárně.

Alexandr založil v Egyptě město *Alexandrii*, které se mělo stát středem jeho obrovské říše. Tím se ovšem nestalo, ale během krátké doby se z něho stalo kvetoucí obchodní město a zároveň kulturní středisko celého tehdejšího vzdělaného světa. První *Ptolemaios*, zvaný *Ptolemaios Soter*, založil *Museion*, v němž byli zaměstnáni nejpřednější současní učenci; filologové, historici, zeměpisci, matematici, hvězdáři, filosofové a básníci. K *Museionu* náležela též velká knihovna, která obsahovala v době rozkvětu asi 700 000 svazků. Byla zničena při obléhání *Alexandrie Caesarem* v r. 48—47 př. n. l.

Nás nejvíc zajímají matematici, kteří působili v *Alexandrii*. Neznáme je všechny, ale několik jmen snad postačí. Nejstarší a také jistě nejvýznamnější je *Eukleides* (žil kolem r. 300 př. n. l.). Znáte jistě *Eukleidovy* věty. O jeho životě nic nevíme. Nevíme, kdy se narodil, odkud pocházel, kdy zemřel, kdo byl jeho učitelem, prostě nic. *B. L. van Waerden* ve své knize *Erwachende Wissenschaft* píše: „*Eukleides* vydal knižně celou elementární matematiku z doby *Platona* (žil 427—347 př. n. l.). My všichni, antičtí i moderní matematici jsme jeho žáky.“ Tím je *Eukleidův* význam sdostatek popsán.

O *Erastothenoví Kyrenejském* byl článek v *Rozhledech* a proto o něm již mluvit nebudeme.

*Apollonios z Pergy* žil v *Alexandrii* kolem r. 210 př. n. l. Jeho nejznámější dílo je o kuželosečkách. Úloha, sestrojiti kružnici, která se dotýká daných tří kružnic, se nazývá úlohou *Apolloniovou*. Je to úloha, kterou se zabývali slavní matematici ještě v době nedávno minulé. U nás např. to byl profesor *Karlovy univerzity* dr. *Jan Sobotka*.

Po *Apolloniově* to šlo z matematikou v *Řecku* s kopce. Ještě se někdy vyskytla významnější osobnost, ale ta již nedosáhla velikosti dřívějších.

Asi kolem r. 180 př. n. l. se připomíná *Hypsikles*, který žil brzo po *Apolloniově*. R. 60 n. l. žil v *Alexandrii* *Heron*. Jím napsané knihy tvoří v podstatě praktické aplikace geometrie a mechaniky. A v těchto kni-

hách se též vyskytuje dobře známý Heronův vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka. Ve fyzice jste jistě poznali Heronovu baňku.

Brzy po Heronovi se připomíná *Ptolemaios Klaudios* (90—160 n. l.). Byl astronom, matematik a zeměpisec v jedné osobě. Jeho nejznámější dílo je *Almagest*, které obsahuje základy sférické astronomie a výklad o pohybu planet za předpokladu, že Země je nehybná. Základy k tomu však byly položeny v alexandrijské škole již dříve. Vy jste se jistě seznámili s Ptolemaiovým vzorcem, který platí o úhlopříčkách a stranách tětíkového čtyřúhelníka.

Zvláštní postavou řecké matematiky je *Diofant* (asi 250 n. l.). Řeční matematikové se převážně zabývali geometrií. Diofant však zájem přenesl na algebru. Zabýval se řešením rovnic. Tím navázal na *Pythagora* a *pythagorejskou školu* a na *starou Babylónii*. Středem jeho zájmu byly tzv. neúčité rovnice, kterým teď říkáme diofantické.

Znáte Pappovy úlohy? Je jich celkem šest a jedna z nich je: Je dána kružnice  $k$ , přímka  $p$  a na ní bod  $A$ . Sestrojte kružnici, která se dotýká kružnice  $k$  a v bodě  $A$  se dotýká přímky  $p$ . Úlohy jsou nazvány po alexandrijském matematikovi *Pappovi*, který žil kolem r. 320 n. l. Odkud známe tento rok a zase žádné další datum z jeho života? V jednom svém díle učinil Pappos zmínku o zatmění Slunce v r. 320 n. l., které sám pozoroval. A tak známe aspoň přibližně dobu, v níž žil.

Kolem r. 380 n. l. se připomíná *Theon*, matematik, který nijak nevynikl nad průměr. Tento Theon měl dceru *Hypatii*, která byla velmi nadaná a vzdělaná a kromě toho i hezká. V Alexandrii se zabývala platonskou filosofií, tedy filosofií pohanskou. Svým bezvadným chováním a taktním vystupováním si však získala úctu i u křesťanů. Biskup *Syneios* ji nazývá „matka, sestra a ctěná učitelka“. Její vliv v Alexandrii sahal až do nejvyšších společenských kruhů. Přesto nebyla tím uchráněna před tragickým koncem.

Římský prefekt v Alexandrii a alexandrijský biskup byli velcí nepřátelé, i když oba byli křesťané. Lid obvinil Hypatii jako pohanku z toho, že oba tyto hodnostáře rozeštvala. Jednou, když se Hypatie vracela v kočáře domů, vyvlekl ji dav z kočáru, přivedl ji před kostel a zabil. Dokonce snad její tělo roztrhal na kusy a spálil. To se stalo r. 418 n. l. Smrt Hypatie je zároveň konec kdysi tak slavné alexandrijské školy.

A zbytek velkolepé knihovny? Několik let před touto tragedií - bylo to r. 392 n. l. - dal římský císař *Theodosius Veliký* rozkaz ke zničení všech pohanských chrámů a alexandrijská knihovna byla umístěna v chrámu bohyně Semiramis. Lůza, vždy chtivá drancování, vyplnila tento rozkaz velmi důkladně, předůkladně.

Malý dodatek, který se již alexandrijské školy netýká. Nějaký čas žila ještě pohanská škola athénská. Ale r. 529 na rozkaz císaře *Justiniána* byla i ta zavřena. Zbylí učitelé odešli ke dvoru perského krále. Slavná doba řeckých škol skončila.

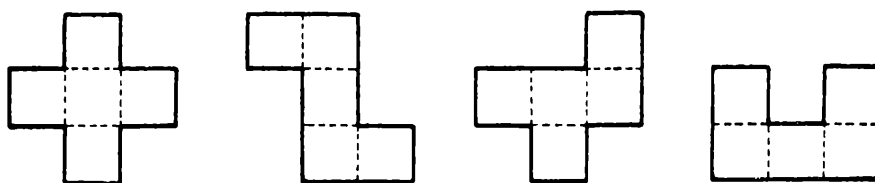


## MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY

### Vyrobte si pentomino

V zahraničí se prodává souprava dvanácti destiček, která se nazývá pentomino a slouží ke geometrickým zábavám. Ušetříte, vyrobíte-li si takovou soupravu sami. Poznáte, že kromě hraní může být souprava pentomina zdrojem i dosti náročných matematických problémů, každý si tedy může přijít na své. Již výrobní postup si popíšeme jako problém.

Oč jde? Každá destička soupravy je nízkým hranolkem s podstavou o obsahu  $5 \text{ cm}^2$  (penta = pět). Navíc má však tato podstava vždy tvar, který lze získat vhodným přiložením pěti jednotkových čtverců k sobě. Na obrázku vidíte zmenšené půdorysy čtyř takových destiček, celkem lze vytvořit dvanáct různých neshodných destiček. Promyslete si, jaké tvary mohou mít a dokažte, že je jich právě dvanáct.



Vystřihněte pak z tuhého papíru jednotlivé destičky, pracujte však přesně, abyste ve všech rozích opravdu dostali pravé úhly. Jedině v tom případě nebudete mít později potíže při skládání destiček k sobě. První úlohou může být srovnání destiček do nějaké krabíčky, součet obsahů jejich podstav je  $60 \text{ cm}^2$ , pokuste se tedy destičky narovnat vedle sebe tak, abyste jimi plně pokryli obdélník o rozměrech  $6 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ . Dále můžete zkusit pokrýt obdélník  $3 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ . Konečně můžete pokrýt „mezičtverčí“ vytvořené čtvercem  $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$  a čtvercem  $8 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$  se společným středem.

Kdo považuje takové hraní za činnost pod svou důstojnost, může zjišťovat, kolika různými způsoby lze vyřešit každou ze tří uvedených úloh. Podle autorů hry má první citovaná úloha 2339 různých řešení, druhá jen dvě řešení a třetí 65 různých řešení.

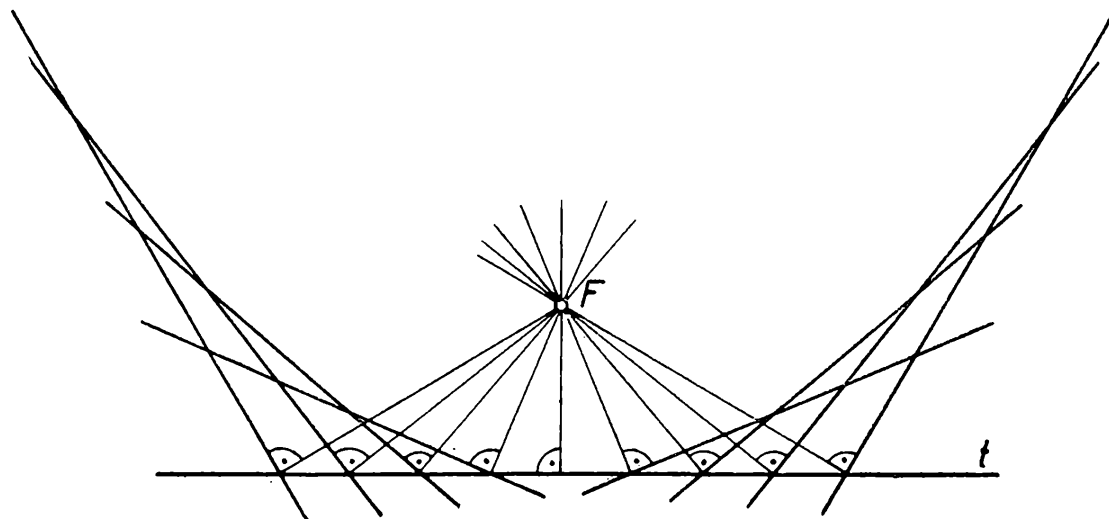
## Obálky soustav přímek

Křivky jako bodové množiny se běžně sestavují tak, že se pokud možno přesně sestrojí několik desítek jejich bodů a ty se spojí oblouky podle křivítka. Zpravidla se přitom snažíme dostat „hladkou“ čáru, bez zlomů a rušivých vypuklin, všude stejně tlustou atd. Kdo to zkusil, třeba i s pouhou parabolou, ví, jaká je to práce. Seznamme se však krátce s jiným způsobem vyznačování křivek v rovině.

Je-li dána přímka  $t$  a bod  $F$ , který na ní neleží, můžeme postupně volit různé body  $X$  přímky  $t$  a sestavovat v nich kolmice k přímkám  $FX$ . Při vzrůstajícím počtu těchto kolmic začneme nabývat dojmu, že se všechny dotýkají jakési křivky. Chtělo by se říci, že tato křivka obsahuje z každé přímky jeden bod a že se celé soustavy přímek lehce dotýká. Spokojíme se zde s tímto téměř básnickým líčením, protože přesná matematická definice pojmu o b á l k a s o u s t a v y p ř í m e k je příliš náročná. Obálkou soustavy přímek na obrázku je zřejmě parabola s ohniskem  $F$  a vrcholovou tečnou  $t$ .

Sestrojte si obálku soustavy přímek kolmých k přímkám  $FX$  v případě, že bod  $X$  je bodem nějaké kružnice  $k$ , kterou si předem zvolíte. Co dostanete v jednotlivých případech, kdy  $F$  je středem  $k$ , kdy leží uvnitř  $k$ , kdy leží na kružnici  $k$ , kdy leží vně  $k$ ?

[Měli byste postupně získat kružnici, elipsu, diametrálně protilehlý bod k bodu  $F$ , hyperbolu.]



# ŘEŠENÍ FYZIKÁLNÍCH ZAJÍMAVOSTÍ

## KOLIK VODY VYTEČE? (*Loňský ročník, str. 350*)

Vzhledem ke známým hustotám vody a ledu, ponořuje se vždy led z  $\frac{9}{10}$  svého objemu do vody a  $\frac{1}{10}$  jeho objemu zůstává nad hladinou.

Když kus ledu o objemu  $V_1 = 1 \text{ dm}^3$  a hustotě  $\rho_1 = 0,9 \text{ g cm}^{-3}$  roztaje, vznikne voda o objemu  $V_2$  a hustotě  $\rho_2 = 1 \text{ g cm}^{-3}$ . Poněvadž se při změnách skupenství množství látky nemění, platí rovnice

$$V_2 \rho_2 = V_1 \rho_1.$$

Po dosazení a výpočtu

$$V_2 = 0,9 \text{ dm}^3$$

Z  $1 \text{ dm}^3$  ledu vznikne tedy  $0,9 \text{ dm}^3$  vody. To byl však právě objem ponořené části ledu. Z toho vyplývá, že při tání ledu z kbelíku žádná voda nevteče.

## PORUŠÍ SE ROVNOVÁHA? (*Loňský ročník, str. 351*)

Podle Archimedova zákona jsou všechna tělesa v ovzduší Země nadlehčována silou, která je stejně velká jako tíha vzduchu tělesem vytlačeného. Jestliže je hliníková koule v rovnováze s koulí olověnou na Zemi, nebude tomu tak na Měsíci, jehož povrch je téměř bez atmosféry. V ovzduší naší Země byla totiž nadlehčována větší silou koule hliníková, která je objemově větší než stejně těžká koule olověná. Na povrchu Měsíce, kde toto nadlehčování vymizí, převáží pak miska s koulí hliníkovou.

## JÍZDA SMRTI (*Loňský ročník, str. 397*)

Rychlosti obou jezdců jsou stejné pokud jezdí v kouli o stejném poloměru. Aby řidič z nejvyššího bodu dráhy „nespadl“, musí být velikost odstředivé síly  $F_0$  nejméně rovna velikosti tíhy  $G$  pohybujícího se tělesa. Tedy

$$F_0 \geq G$$

neboli

$$\frac{mv^2}{r} \geq mg$$

a odtud

$$v \geq \sqrt{rg}$$

Z výsledku vidíme, že rychlost  $v$  nezávisí na hmotnosti  $m$  pohybujícího se objektu; závisí pouze na poloměru koule  $r$  a tíhovém zrychlení  $g$ .

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

### H

hachure *ž*  
harmonique  
    points *m* conjugués harmoniques  
hasard *m*  
haut *m*  
    20 mètres de haut  
hauteur *ž*  
    hauteur d'un triangle  
hélice *ž*  
hélicoïdal, e, aux  
    mouvement *m* hélicoïdal  
hélicoïde *ž*  
hémisphère *m*  
heptagone *m*  
heure *ž*  
hexaèdre *m*  
hexagone *m*  
homofocal, e, aux  
homogène  
homographie *ž*  
homographique  
    déformation *ž* homographique  
homologie *ž*  
homologue  
  
homothétie *ž*  
horizon *m*  
horizontal, e, aux  
horizontale *ž*

horloge *ž*

šrafování  
harmonický  
    harmonicky sdružené body  
náhoda  
výše  
    dvacet metrů do výše  
výška  
    výška trojúhelníka  
šroubovice  
šroubový  
    šroubový pohyb  
šroubová plocha  
polokoule  
sedmiúhelník  
hodina  
šestistěn  
šestiúhelník  
konfokální  
homogenní  
projektivní či kolineární zobrazení  
projektivní  
    projektivní či kolineární zobrazení  
homologie  
odpovídající (např. odpovídající si  
    body při zobrazení)  
stejnolehlost, homotetie  
obzor, horizont  
vodorovný, horizontální  
hlavní přímka (vzhledem k půdo-  
    rysň)  
hodiny

|                               |                      |
|-------------------------------|----------------------|
| huit                          | osm                  |
| huitième                      | osmý                 |
| huitième <i>m</i>             | osmína               |
| hyperbole <i>ž</i>            | hyperbola            |
| hyperbolique                  | hyperbolický         |
| hyperboloïde <i>m</i>         | hyperboloid          |
| hyperplan <i>m</i> $\ddot{a}$ | nadrovina            |
| hypersphère <i>ž</i>          | nadkoule             |
| hypoténuse <i>ž</i>           | přepona              |
| hypothèse <i>ž</i>            | předpoklad, hypotéza |

---

## OPRAVA

- 172<sub>13</sub> místo  $ax$  má být  $a_x$   
 175<sup>1</sup> a 175<sup>4,5</sup> má být  $0 \leq m'_s \leq m_s$   
 175<sup>16</sup> má být resp.  $m'_s$ ).  
 233<sup>10</sup> má být ...vlákna, aby.  
 233<sub>7</sub> místo  $0,9 \cdot 10^{-8}$  C má být  $9,0 \cdot 10^{-8}$  C,  
 233<sub>4</sub> místo  $\mathbf{F} = \mathbf{gE}$  má být  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$   
 233<sub>4</sub> místo  $\mathbf{G} = \mathbf{mg}$  má být  $\mathbf{G} = m \mathbf{g}$   
 235<sub>10</sub> místo 400,0 m má být 400,0 nm  
 235<sub>8</sub> místo  $o(2p+1)$  má být  $(2p+1)$   
 236<sup>5</sup> místo  $\dots < 3\lambda' + \lambda_p$  má být  $< 3\lambda'_+ \lambda_p$ ,  
 237<sub>2</sub> místo  $U_-$  má být  $U_a$   
 238 místo  $\frac{l}{m}$  má být  $\frac{1}{m}$   
 238<sub>5</sub> ve vzorci (3) místo  $l$  má být 1  
 239<sup>2</sup> ve vzorci (4) totéž  
 239<sup>4</sup> v postupné nerovnosti místo  $l$  má být 1  
 239<sub>9</sub> totéž  
 240<sup>4</sup> místo  $l$  má být 1



# rozhledy

MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ

---

9

ROČNÍK 48, 1969-70, MÁJ



ROČNÍK 48  
MÁJ 1969-70

9

# MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositeľ vyznamenania  
Za zásluhy o výstavbu

## VEDÚCI REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositeľ vyznamenania Za vynikajúcu prácu

## VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

## REDAKČNÁ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed-  
inšp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ Praha; zasl.  
učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef  
Díbelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B.  
Bystrica; Miloš Franek, SVŠ, Prievidza; doc.  
Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef  
Korous, DrSc., ČVUT, Praha; dr. Oldřich Lep-  
pí, PU, Olomouc; Milan Marčok, VŠLD, Zvo-  
len; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava;  
prof. dr. Cyril Palaj PF-UPJŠ, Košice; Evžen  
Říman, CSc., ČVUT, Praha, nositeľ vyzname-  
nania Za vynikajúcu prácu; dr. Jiří Sedláček,  
ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV,  
Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; Ing.  
dr. Václav Šindelář, CSc., MÚ UNM, Praha;  
doc. dr. Ladislav Them, VŠLD, Zvolen; prof.  
dr. Ján Vonovič, UK, Bratislava; František  
Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarík, inšp. MŠ  
SSR, Bratislava

## REDAKCIA:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29

## OBSAH

|                                                                           |                     |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Fr. Zahradecký: Historický mezník vývoje<br>Československa                | 389                 |
| J. Šedivý: Algebra pravdy a lži                                           | 391                 |
| Ing. dr. J. Reich: Součet druhých a tře-<br>tích mocnin přirozených čísel | 394                 |
| J. Kotyk: Hlavní věty trigonometri                                        | 396                 |
| St. Horák: Rovina totožnosti                                              | 397                 |
| Pplk. Boh. Sedláček: Měření rychlosti<br>střely                           | 403                 |
| Prof. dr. J. Skotnický: Počet úměrnosti<br>v přírodních vědách            | 413                 |
| P. Bartuška: Základní pojmy plastické<br>deformace                        | 418                 |
| Zd. Půlpán: Výpočet potenciálu pole bo-<br>dového náboje                  | 424                 |
| Dr. M. Šíroková, dr. J. Šíroky: Spektrosko-<br>pické dvojhvězdy           | 427                 |
| Doc. V. Jozífek: O aplikacích matema-<br>tiky                             | 430                 |
| Nejmladším čtenářům                                                       | 434                 |
| J. Šedivý: Obálky soustavy kružnic                                        | 435                 |
| J. Šedivý: Záhady Möbiova listu                                           | 436                 |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-<br>český                          | 3. a 4. str. obálky |

Vydává ministerstvo školstva v štátnom pedagogickom nakladateľstve v Prahe, za odbornej  
starostlivosti Jednoty čs. matematikov a fyzikov.

Vychádza desať razy do roka. Ročné predplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého  
čísla 2,- Kčs. Tlačí Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2.  
Rozširuje Poštová novinová služba. Informácie o predplatnom podá a objednávky prijíma každá  
pošta i doručovateľ. Objednávky do zahraničia vybavuje PNS, ústredný sklad expedície tlače,  
odd. vývoz tlače, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönl. Titulné  
obrázky: B. Šmejdoval, študujúca FS.

Štátné pedagogické nakladateľstvo, n. p. v Prahe, 1970.



# Historický mezník vývoje Československa

FRANTIŠEK ZAHRADECKÝ, Praha

Před 25 roky skončila druhá světová válka, která ničivě zasáhla území čtyřiceti států a ve válečné pole bylo proměněno 22 560 000 km<sup>2</sup> souše, na níž bojovalo přes 150 000 000 zmobilisovaných lidí a bezpočet dalších z vlastní vůle. V tomto gigantickém zápase každý třetí voják padl nebo byl těžce raněn. Sedm vědců z deseti bylo průměrně vtaženo na válečná pole.

Materiální ztráty dosáhly sumy 4 000 000 miliónů dolarů a jen v Evropě bylo zničeno 23,6 mil. obytných domů, 14,5 mil. veřejných budov a závodů, přes 200 000 km železnic.

Na území Československa bylo rozbito 122 fašistických divizí, přičemž bylo zajato 1 231 000 nepřátelských vojáků. Od září roku 1944 do konce roku 1945 ztratili fašisté na našem území 18 079 děl a minometů, 3189 tanků a 1878 letounů. Sovětská armáda musela provést devět velkých operací, z toho šest na Slovensku a tři v českých zemích (ostravskou od 10. 3.—5. 5. 1945, bratislavsko-brněnskou od 25. 3. do 4. 5. 1945 a pražskou od 6. 5. do 10. 5. 1945). V jejich průběhu položilo společně život na čtvrt miliónu sovětských, rumunských, československých a polských vojáků, mnozí proto, aby nebyly zničeny klíčové objekty na Ostravsku, v Brně a na území Čech.

Ani politicky se nepostupovalo živelně — osou této práce se stal Košický vládní program, který byl plánem obnovy a současně vytyčoval záměry národně-demokratické revoluce. Podařilo se rychle odčinit důsledky zločinné německé kolonizace minulých staletí, byly likvido-

vány zbytky agrární oligarchie, odstraněna hitlerovská pátá kolona, byl odčiněn Mnichov.

V roce 1948 byl odražen pokus o restauraci předmnichovských poměrů a nastoupen obtížný proces socialistických přeměn: během deseti let došlo k zásadní přeměně výrobních poměrů, změnily se nejen vlastnické vztahy, nýbrž i vnitřní struktura a orientace průmyslové výroby ve prospěch klíčových odvětví a její surovinová stabilizace, socialistická industrializace se stala skutkem. Současně se zásadně měnilo malovýrobně organizované zemědělství a v relativně krátké době zde byla nastolena družstevní a průmyslově organizovaná výroba. Paralelně se rozvíjela přestavba pravděpodobně ze všech nejkomplicovanější v oblasti řídicího systému, včetně vědy, školství a kulturní oblasti. To byly tři pilíře socialistických přeměn.

Na konec si připomeňme, co pro naše školství znamenalo vítězství nad fašismem. Za okupace byly zavřeny v českých zemích vysoké školy, byla zrušena četná gymnasia, mnoho studentů (počet byl vždy předepsán) muselo zanechat studia. Byl předepsán počet těch, kteří museli propadnout (týkalo se to i maturitních zkoušek).

Všechna vysvědčení se psala dvojjazyčně, nejprve německy a pak teprve česky, matematice a zeměpisu se jednu hodinu týdně učilo německy. Předsedové maturitních komisí byli velmi často Němci. Při různých příležitostech musely být vyvěšovány nenáviděné prapory s hákovým křížem vedle praporů našich. Prapory nacistické byly ovšem na čestném místě.

Při všech slavnostech jsme museli vyslechnout vedle naší hymny i hymnu německých okupantů.

Po porážce fašistického Německa se vše rázem změnilo. Vysoké školy se znovu otevřely, studenti, kteří nemohli za okupace dokončit studium, mohli je dokončit, zrušená gymnasia se znovu zřídila. V našem školství se rozproudil nový život, zkalený jen vzpomínkami na těžké oběti, jimiž byl vykoupen.



## MATEMATIKA

# Algebra pravdy a lži

JAROSLAV ŠEDIVÝ, MFF UK Praha

V článku „Učme se jazyku non-et-vel“ jste poznali, že při tvoření výroků lze vystačit pouze s třemi operacemi. Uvidíte, že při takovém zpracování výroků je velmi snadné osvojit si algebraickou metodu výpočtu jejich pravdivosti či nepravdivosti. Budeme pěstovat algebru pravdivostních hodnot výroků, skutečnou algebru pravdy a lži.

Zapišme si nejprve pomocí symbolů  $p$ ,  $n$  pravdivostní hodnoty negace  $x'$  výroku  $x$ , konjunkce  $x \wedge y$  dvou výroků  $x$ ,  $y$  a jejich alternativy  $x \vee y$ . Mnozí již dobře znáte tyto tabulky

| $x \mid x'$ |     |     |              |            |
|-------------|-----|-----|--------------|------------|
| $p \mid n$  | $x$ | $y$ | $x \wedge y$ | $x \vee y$ |
| $n \mid p$  | $p$ | $p$ | $p$          | $p$        |
|             | $p$ | $n$ | $n$          | $p$        |
|             | $n$ | $p$ | $n$          | $p$        |
|             | $n$ | $n$ | $n$          | $n$        |

Přes svůj zdánlivě „učený vzhled“ nevyjadřují tyto tabulky nic jiného, než podrobný rozpis těchto tvrzení:

Negace  $x'$  výroku  $x$  má vždy opačnou pravdivostní hodnotu než výrok  $x$ . Konjunkce  $x \wedge y$  je pravdivá právě tehdy, když  $x$  platí a  $y$  platí.

Alternativa  $x \vee y$  je pravdivá právě tehdy, když platí aspoň jeden z výroků  $x, y$ .

Na přiřazování pravdivostních hodnot složeným výrokům lze pohlížet jako na algebraické operace s pravdivostními hodnotami. Abychom se algebře co nejvíce přiblížili, použijeme pro označení nepravdy symbolu 0 a pro označení pravdy symbolu 1. Uvedené tabulky pak můžeme zapsat

$$\begin{array}{lll} 1' = 0 & 1 \wedge 1 = 1 & 1 \vee 1 = 1 \\ 0' = 1 & 1 \wedge 0 = 0 & 1 \vee 0 = 1 \\ & 0 \wedge 1 = 0 & 0 \vee 1 = 1 \\ & 0 \wedge 0 = 0 & 0 \vee 0 = 0. \end{array}$$

V obvyklé algebře, kterou běžně používáme, nemáme operaci vyznačenou čárkou, zde je to však tak jednoduchá operace vzájemného zaměnění nuly a jedničky, že není problémem ji používat.

Operace vyznačená dosud symbolem „ $\wedge$ “, velmi nápadně připomíná násobení nul a jedniček v běžné algebře. Posuďte sami

$$\begin{array}{llll} 1 \wedge 1 = 1 & 1 \wedge 0 = 0 & 0 \wedge 1 = 0 & 0 \wedge 0 = 0 \\ 1 \times 1 = 1 & 1 \times 0 = 0 & 0 \times 1 = 0 & 0 \times 0 = 0. \end{array}$$

Obě operace dávají formálně stejné výsledky. Příjemněji se nám však počítá se znakem násobení, zvláště, zvolíme-li za něj tečku. Proto opustíme znak konjunkce a budeme v naší algebře pravdivostních hodnot užívat tečky.

Operace „ $\vee$ “ s pravdivostními hodnotami není daleko od sčítání nul a jedniček v běžné algebře

$$\begin{array}{llll} 1 \vee 1 = 1 & 1 \vee 0 = 1 & 0 \vee 1 = 1 & 0 \vee 0 = 0 \\ 1 + 1 = 2 & 1 + 0 = 1 & 0 + 1 = 1 & 0 + 0 = 0 \end{array}$$

Jedině první dvojice výsledků se liší. Není však divu, symbol 2 mezi pravdivostními hodnotami vůbec nemáme. Přijmeme-li úmluvu, že v algebře pravdivostních hodnot budeme užívat místo „ $\vee$ “ symbolu „ $+$ “ a hovořit o sčítání pravdivostních hodnot, musíme pamatovat na to, že  $1 + 1 = 1$ .

Je to zvláštní algebra! Počítá se jen se dvěma prvky 0,1 a provádějí se tři operace: záměna, sčítání a násobení těchto prvků. Protože je prvků tak málo, můžeme zapsat „záměnkou“, „sčítalkou“ a „násobilku“ v malých tabulkách

$$\begin{array}{c|c} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Počítejme trochu v naší algebře. Nebudete-li si jisti součtem nebo součinem; podívejte se vždy do příslušné tabulky.

$$(1+0+1')' (1'+0.0') = (1+0)' (0+0.1) = 1' \cdot 0 = 0$$

$$(0'+1) (0+1')' (0+1)' = 0 \cdot (1' \cdot 1) = 0$$

K čemu je užitečná tato algebra? To poznáte větším dílem v dalších článcích, zde si ukažme dva příklady:

**Příklad 1.** Víme, že výroky  $A, B, D$  neplatí a výrok  $C$  platí, chceme zjistit, zda platí výrok  $[(A \vee B)' \wedge (C' \vee D')]' \vee (C \wedge A)'$

Nahraďme nejprve písmena  $A, B, D$  symbolem 0 a písmeno  $C$  symbolem 1

$$[(0 \vee 0)' \wedge (1' \vee 0')]' \vee (1 \wedge 0)'$$

pak pišme „+“ místo „ $\vee$ “, „ $\cdot$ “ místo „ $\wedge$ “ a počítejme

$$[(0+0)' (1'+0')]' + (1.0)' = [0' (0+1)]' + (1.1)' =$$

$$= (1.1)' + (1.1)' = 1' + 1' = 0 + 0 = 0$$

Uvedený složený výrok má tedy pravdivostní hodnotu 0, tj. neplatí.

**Příklad 2.** O třech bratřích  $A, B, C$  je známo, že  $A$  nejde do lesa bez  $C$ , zatímco  $B$  nechodí nikdy s  $C$ , ale jde vždy, když jde  $A$ . Víme-li, že  $B$  jde do lesa, kdo ho doprovází?

Použijeme písmen  $A, B, C$  k označení výroků  $A$  jde do lesa,  $B$  jde do lesa,  $C$  jde do lesa. Jednotlivé podmínky můžeme vyjádřit v jazyku non-et-vel takto:

|                                         |                 |
|-----------------------------------------|-----------------|
| Není pravda, že $A$ platí a $C$ neplatí | $(A \wedge C)'$ |
| Není pravda, že $B$ platí a $C$ platí   | $(B \wedge C)'$ |
| Není pravda, že $A$ platí a $B$ neplatí | $(A \wedge B)'$ |

Všechny podmínky však jsou splněny zároveň, platí tedy složený výrok

$$(A \wedge C)' \wedge (B \wedge C)' \wedge (A \wedge B)'$$

Víme, že  $B$  platí, ale neznáme pravdivostní hodnoty výroků  $A, C$ ; prodiskutujeme tedy všechny čtyři možnosti a) – d). Za písmena  $A, B, C$  dosadíme symboly 0,1 a vypočítáme pravdivostní hodnotu zapsaného složeného výroku

|                                        |                                                 |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| a) $A$ platí, $B$ platí, $C$ platí     | $(1.1)' (1.1)' (1.1)' = (1.0)' \cdot 1'.0' = 0$ |
| b) $A$ platí, $B$ platí, $C$ neplatí   | $(1.0)' (1.0)' (1.1)' = (1.1)' \cdot 0'.0' = 0$ |
| c) $A$ neplatí, $B$ platí, $C$ platí   | $(0.1)' (1.1)' (0.1)' = (0.0)' \cdot 1'.0' = 0$ |
| d) $A$ neplatí, $B$ platí, $C$ neplatí | $(0.0)' (1.0)' (0.1)' = (0.1)' \cdot 0'.0' = 1$ |

Za situace, kdy  $B$  jde do lesa a jsou splněny všechny podmínky uvedené v úloze, je jisté, že  $B$  jde sám.

**Příklad 3.** Ve cvičeních k článku citovanému v úvodu byla uvedena úloha zjistit všechny pachatele krádeže mezi pěti podezřelými  $A, B, C, D, E$ . Pokud jste text úlohy překládali do jazyka non-et-vel, získali jste souhrnný zápis podmínek

$$(C \vee D) \wedge (A \wedge B)' \wedge (A \vee C) \wedge (E \wedge D')' \wedge (E \wedge C')' \wedge (B \wedge D)' \wedge \wedge [(B \wedge C) \vee (B' \wedge C')].$$

Tento složený výrok je pravdivý, neznáme však všechny možnosti pro pětici pravdivostních hodnot  $A, B, \dots, E$ , při kterých je tento výrok pravdivý. Při obdobném postupu jako v příkladě 2 bychom diskutovali 32 možných petic, a to je příliš zdlouhavá práce. Proto se v dalším článku seznámíme s řešením rovnic (s libovolným počtem neznámých) v algebře pravdivostních hodnot výroků.

### Cvičení

1. Vypočítejte v algebře pravdivostních hodnot 0,1:

$$\text{a) } (0' + 1')' \quad \text{b) } (0 + 0') \quad (0' \cdot 1')' \quad \text{c) } (0' + 1') \quad (0 + 1)' \quad (1' + 1)$$

2. Považujte v příkladě 2 řešeném v článku za platné všechny podmínky kromě předpokladu, že  $B$  jde do lesa. Zjistěte, zda může nastat situace, že  $A$  je v lese sám.

3. Přesvědčte se výpočtem, zda je možné, aby krádež popsanou v příkladě 3 spáchali podezřelí  $A, C, E$  bez účasti podezřelých  $B, D$ .

## Součet druhých a třetích mocnin přirozených čísel

Ing. dr. EMIL REICH, Praha

V 2. čísle 47. ročníku Rozhledů byl uveřejněn článek F. Janečka, v němž autor odvozoval vzorce pro součty druhých a třetích mocnin přirozených čísel pomocí kombinačních čísel. Tyto vzorce lze snadno odvodit, použijeme-li elementárních znalostí z integrálního počtu. V tomto krátkém článku naznačím podstatu metody, kterou jsem před lety objevil.

Nakresleme si část grafu funkce  $y = x^2$  v intervalu  $(0, \alpha)$  a vyznačme v něm pruhy vytvořené kolmicemi k ose  $x$  v bodech  $x = 1, 2, \dots, n, n + 1$ . Obsah obrazce  $OBD$  omezeného úsečkami  $OB, BD$  a obloukem paraboly dovedeme vypočítat:

$$P = \int_0^{n+1} x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{n+1} = \frac{1}{3} (n+1)^3 = \frac{1}{3} n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3}.$$



Číslo  $P$  lze získat též jako součet obsahů jednotlivých pruhů, na něž jsme obrazec  $OBD$  již dříve rozdělili:

$$P = \sum_{i=0}^n P_i, \text{ kde } P_i = \int_i^{i+1} x^2 dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_i^{i+1} = i^2 + i + \frac{1}{3}$$

Zapišme si jednotlivé výsledky pod sebe:

$$P_0 = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = 1^2 + 1 + \frac{1}{3}$$

$$P_2 = 2^2 + 2 + \frac{1}{3}$$

$$P_3 = 3^2 + 3 + \frac{1}{3}$$

$$P_n = n^2 + n + \frac{1}{3}$$

---


$$\sum_{i=0}^n P_i = \sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i + (n+1) \frac{1}{3} = P$$

Uvážíme-li, že  $\sum_{i=0}^n i = \frac{1}{2} n(n+1)$ , a dosadíme-li tento výsledek do předešlého výrazu, dostaneme

$$\sum_{i=0}^n i^2 + \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{3} (n+1) = \frac{1}{3} n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3}.$$

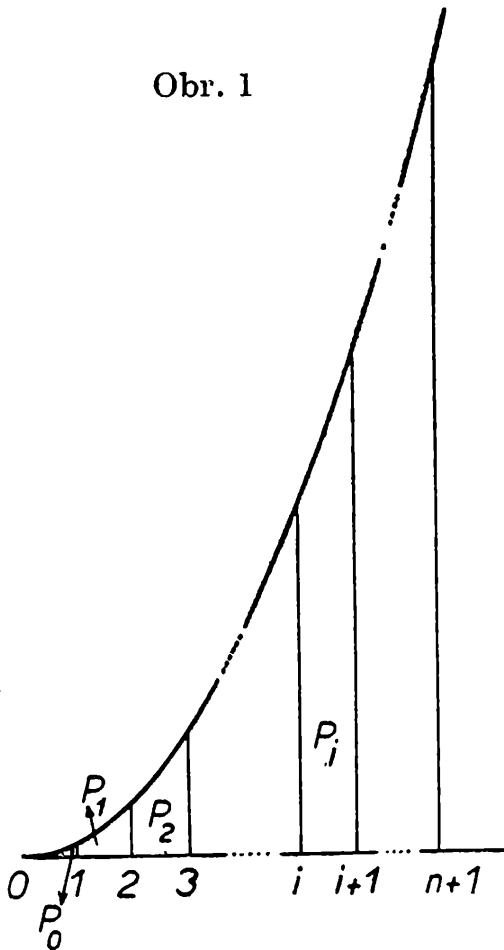
Odtud snadno vypočítáme

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$$

Zcela obdobně můžeme vypočítat součet  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ , použijeme-li funkce  $y = x^3$ . Čtenář si může nakreslit obrázek a provést samostatně výpočet, uvedu zde jen některé dílčí výsledky:

$$P = \int_0^{n+1} x^3 dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{n+1} = \frac{1}{4} n^4 + n^3 + \frac{3}{2} n^2 + n + \frac{1}{4},$$

Obr. 1



$$P = \int_i^{i+1} x^3 dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_i^{i+1} = i^3 + \frac{3}{2} i^2 + i + \frac{1}{4},$$

$$P = \sum_{i=0}^n P_i,$$

$$\frac{1}{4} n^4 + n^3 + \frac{3}{2} n^2 + n + \frac{1}{4} = \sum_{i=0}^n i^3 + \frac{3}{2} \sum_{i=0}^n i^2 + \sum_{i=0}^n i + \frac{1}{4} (n+1)$$

Protože již známe vzorce pro součet druhých mocnin přirozených čísel, můžeme vypočítat

$$\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Počítáme-li vzorce pro součet  $r$ -tých mocnin  $1^r + 2^r + \dots + n^r$ , dostaneme vždy polynom s racionálními koeficienty. Z výše popsaného způsobu odvození je zřejmé, že v takovém polynomu má nejvyšší stupeň člen  $\frac{1}{r+1} n^{r+1}$ . Součet všech koeficientů v těchto polynomech je roven jedné, protože příslušný vzorec platí pro každé  $n$ , tedy i pro  $n = 1$ . Možná, že objevíte i další vztahy.

## Hlavní věty trigonometrie

JOSEF KOTYK, Pardubice

V 6. čísle loňského ročníku Rozhledů podal František Kuřina důkaz kosinové věty rovinné trigonometrie. Čtenářům, kteří znají základy vektorového počtu, uvedu v dalším jiné jednoduché odvození kosinové věty užitím tohoto počtu.

Rovinný trojúhelník  $ABC$  nechť je sestrojen z vektorů  $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$ ,  $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$  (viz obr. 1); jejich součet je proto roven nule:  $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Jestliže každou stranu rovnosti  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{c}$  násobíme skalárně samu sebou, vychází  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$ . Tento vztah vyjadřuje již kosinovou větu; činí tak jen v tvaru méně známém, v symbolice vektorového počtu.

V obvyklém tvaru dostaneme znění kosinové věty (objevíme pak i kosinus, po němž se nazývá), jestliže v rovnosti  $\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$  provedeme naznačené početní výkony. Vychází

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos (\pi - \gamma)$$

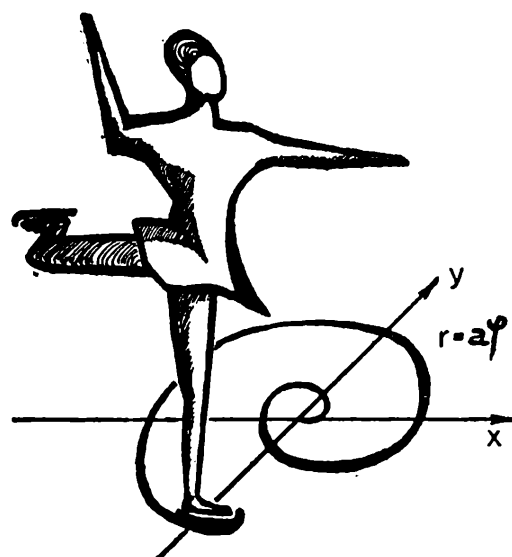
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma .$$

Stejně snadno lze pomocí vektorového počtu odvodit v ě t u s i n o-  
v o u. Obsah trojúhelníka  $ABC$  je stanoven polovinou prosté hodnoty  
vektorového součinu krerýchkoli dvou vektorů, které tento trojúhelník  
tvoří. V obvyklé mluvě jest  $b \cdot c \cdot \sin (\pi - \alpha) = a \cdot c \cdot \sin (\pi - \beta) =$   
 $= a \cdot b \cdot \sin \gamma$  neboli  $b \cdot c \cdot \sin \alpha = a \cdot c \cdot \sin \beta = a \cdot b \cdot \sin \gamma$ . Dělíme-li  
všechny členy této rovnosti součinem  $abc \neq 0$ , vychází

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Také obráceně má poměr délky strany k sinu protilehlého úhlu v ro-  
vinném trojúhelníku hodnotu stálou; je rovna velikosti průměru kruž-  
nice opsané trojúhelníku, jak se čtenář snadno přesvědčí.

## DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE



# Rovina totožnosti

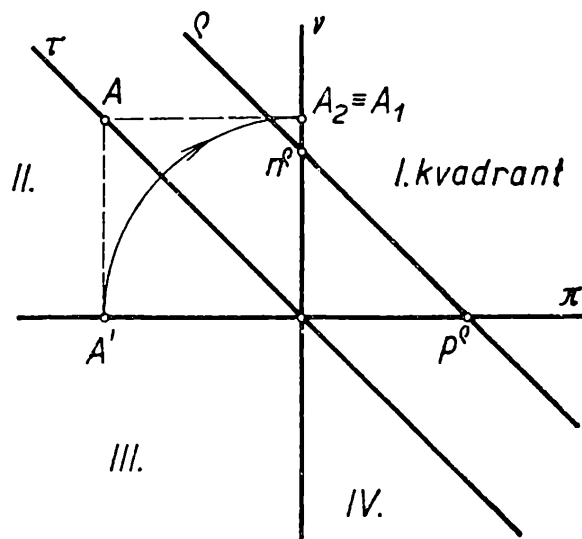
STANISLAV HORAK, ČVUT Praha

I. Rovina, která pŕlÍ úhel první a druhé průmĕtny a prochází pŕitom  
II. a IV. kvadrantem, se nazývá rovina totožnosti. Budeme ji označovat  
 $\tau$ . Průmĕty útvarů, které v ní leží, mají zajímavé vlastnosti a některých  
si v tomto článku všimneme.

V ě t a 1. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bod  $A$  ležel v rovině  
totožnosti, je: sdružené průmĕty bodu  $A$  splývají (tj.  $A_1 \equiv A_2$ ).*

**D ů k a z** (obr. 1). Věta je samozřejmá pro body, ležící na základnici. Mějme tedy v rovině totožnosti bod  $A$ , který neleží na základnici. Jeho první průmět je  $A'$ , druhý průmět je  $A_2$ . Sdružíme-li průmětny, přejde bod  $A'$  do bodu  $A_1 \equiv A_2$  (který neleží na základnici).

Obráceně, mějme v prostoru mimo základnici bod  $A$ , jehož sdružené průměty splývají, tedy  $A_1 \equiv A_2$ . Jestliže první průmětnu otočíme zpět do původní polohy, přejde bod  $A_1$  do bodu  $A'$ . Poněvadž body  $A'$ ,  $A_2$  mají od základnice stejné vzdálenosti, leží bod  $A$  v rovině totožnosti. Tím je důkaz proveden.



Obr. 1

Velmi důležitý je důsledek právě dokázané věty. Poněvadž vyslovenou vlastnost mají všechny body v rovině totožnosti, platí věta pro všechny útvary, ležící v rovině totožnosti:

**V ě t a 2.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby sdružené průměty rovinného útvaru splývaly, je: útvar leží v rovině totožnosti.*

**P ř í k l a d 1.** Určete průměty průsečíku  $T$  dané přímky  $a$  s rovinou totožnosti.

**Ř e š e n í** (obr. 2). O průmětech průsečíku  $T$  platí:

$$T_1 \equiv T_2$$

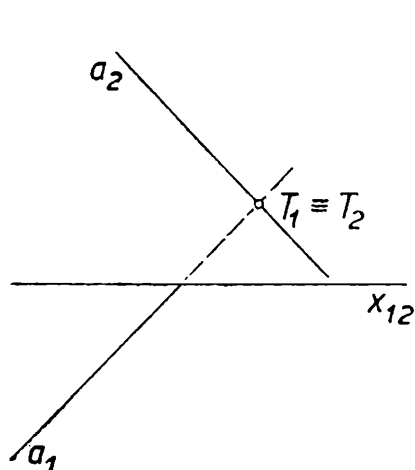
$$T_1 \in a_1, \quad T_2 \in a_2$$

a odtud vyplývá, že sdružené průměty bodu  $T$  splývají s průsečíkem přímek  $a_1$ ,  $a_2$ .

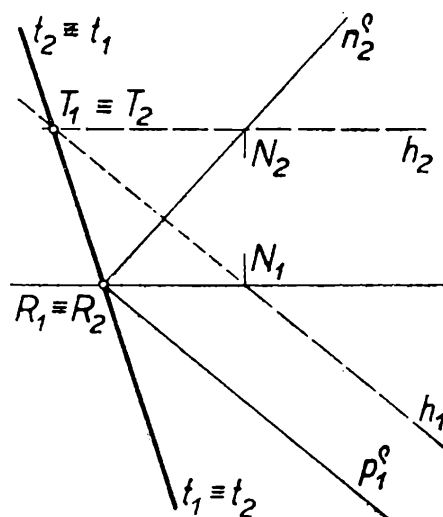
**P ř í k l a d 2.** Sestrojte průsečnici dané roviny  $\rho$  s rovinou totožnosti.

**Ř e š e n í** (obr. 3). Hledaná průsečnice (označme ji  $t$ ) prochází průsečíkem  $R$  stop roviny  $\rho$ . Další bod  $T$  přímky  $t$  je průsečík libovolné přímky roviny  $\rho$  (kromě  $p^e$  a  $n^e$ ) s rovinou totožnosti a pak  $t \equiv RT$ . Zvolíme si třeba první hlavní přímku  $h$ . Ostatní je patrné z obr. 3.

Je přirozené, že  $t_1 \equiv t_2 \equiv R_1 T_1 \equiv R_2 T_2$ .



Obr. 2

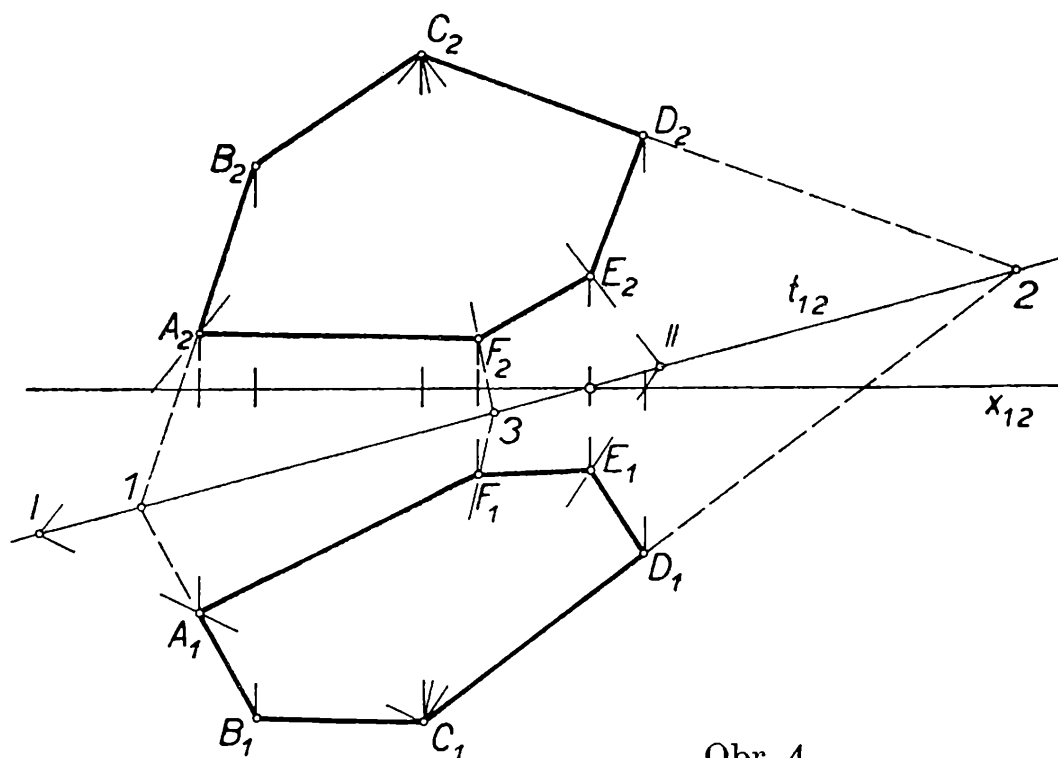


Obr. 3

**P o z n á m k a.** Na přímce  $t_1 \equiv t_2 \equiv R_1 T_1 \equiv R_2 T_2$  se protínají sdružené průměty všech přímek roviny  $\varrho$ . To vyslovíme větou:

**V ě t a 3.** Mezi prvním a druhým průmětem obrazce, ležícího v libovolné rovině  $\varrho$ , platí vztah osové afinity, jejíž osou je průsečnice  $t_{12}$  rovin  $\varrho$  a  $\tau$  a jejímž směrem je směr ordinál. Jestliže však  $\varrho \parallel \tau$ , pak se afinita změní v posunutí. V případě  $\varrho \equiv \tau$  je posunutí nulové a oba průměty obrazce splývají.

**P ř í k l a d 3.** Sestrojte sdružené průměty rovinného šestiúhelníka  $ABCDEF$ .  $A (-7; 4; 1)$ ,  $B (-6; ?; 4)$ ,  $C (-3; 6; 6)$ ,  $D (1; 3; ?)$ ,  $E (0; 1,5; 2)$ ,  $F (-2; 1; ?)$ .



Obr. 4

**Ř e š e n í** (obr. 4). Nejdřív sestrojíme sdružené průměty  $t_1 \equiv t_2$  průsečnice roviny totožnosti s rovinou  $\varrho$ , v níž leží daný šestiúhelník. Ta je určena průsečíky přímek  $AC$ ,  $CE$  s rovinou totožnosti. Na přímce  $t_1 \equiv t_2$  se protínají i sdružené průměty přímky  $AB$  a proto: přímka  $A_2B_2$  protíná  $t_1 \equiv t_2$  v bodě  $I$ . Na přímce  $IA_1$  (a na ordinále) leží bod  $B_1$ . Obdobně se sestrojí body  $D_2$  a  $F_2$ .

**P o z n á m k a.** Je přirozené, že se tento příklad dá řešit i jinak.

## II. Nyní si uvedeme další vlastnosti roviny totožnosti.

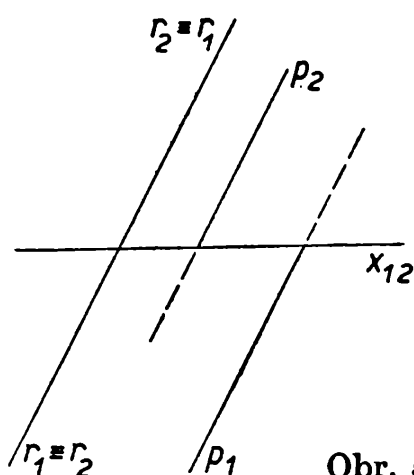
**V ě t a 4.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímka  $p$  byla rovnoběžná s rovinou totožnosti, je: sdružené průměty přímky  $p$  jsou navzájem rovnoběžné (tj.  $p_1 \parallel p_2$ ).*

**D ů k a z.** Jestliže  $p_1 \equiv p_2$ , leží přímka  $p$  v rovině totožnosti a věta platí. Uvažujme tedy případ, kdy  $p_1 \parallel p_2$ , ale  $p_1 \not\equiv p_2$  (obr. 5). Je ihned patrné, že průsečík přímky  $p$  s rovinou totožnosti neexistuje (říkáme také, že je nevlastní) a tudíž přímka  $p$  je rovnoběžná s rovinou totožnosti.

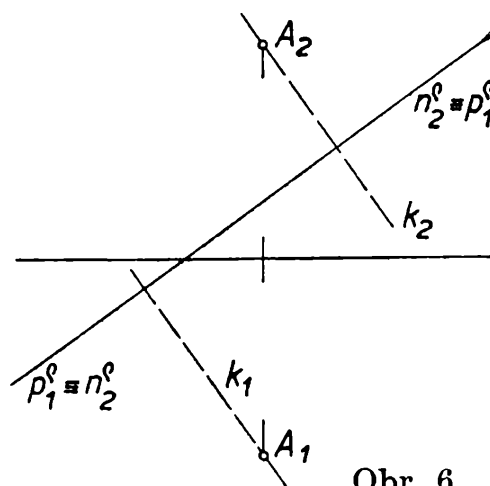
Než přistoupíme k druhé části důkazu, zopakujeme si: Přímka  $p$  je rovnoběžná s rovinou  $\varrho$ , jestliže v rovině  $\varrho$  existuje aspoň jedna přímka rovnoběžná s přímkou  $p$ .

Naopak. Je-li přímka  $p$  rovnoběžná s rovinou totožnosti  $\tau$ , pak v rovině  $\tau$  existuje přímka  $r \parallel p$ , pro niž platí  $r_1 \equiv r_2$ , protože však  $p_1 \parallel r_1$  a  $p_2 \parallel r_2$ , platí též  $p_1 \parallel p_2$ .

**V ě t a 5.** *Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovina  $\varrho$ , která neobsahuje základnici, byla kolmá k rovině totožnosti, je: první průmět první stopy splývá s druhým průmětem druhé stopy (tj.  $p_1^o \equiv n_2^o$ ).*



Obr. 5



Obr. 6

**D ů k a z** (obr. 6). Mějme rovinu  $\varrho$ , o níž platí  $p_1^o \equiv n_2^o$  a která neobsahuje základnici. Zvolme v prostoru libovolný bod  $A$  a spusťme z něho kolmici  $k$  na rovinu  $\varrho$ . O sdružených průmětech  $k_1$ ,  $k_2$  platí

$k_1 \parallel k_2$ , a to znamená (podle věty 3), že přímka  $k$  je rovnoběžná s rovinou totožnosti a proto  $\varrho \perp \tau$ .

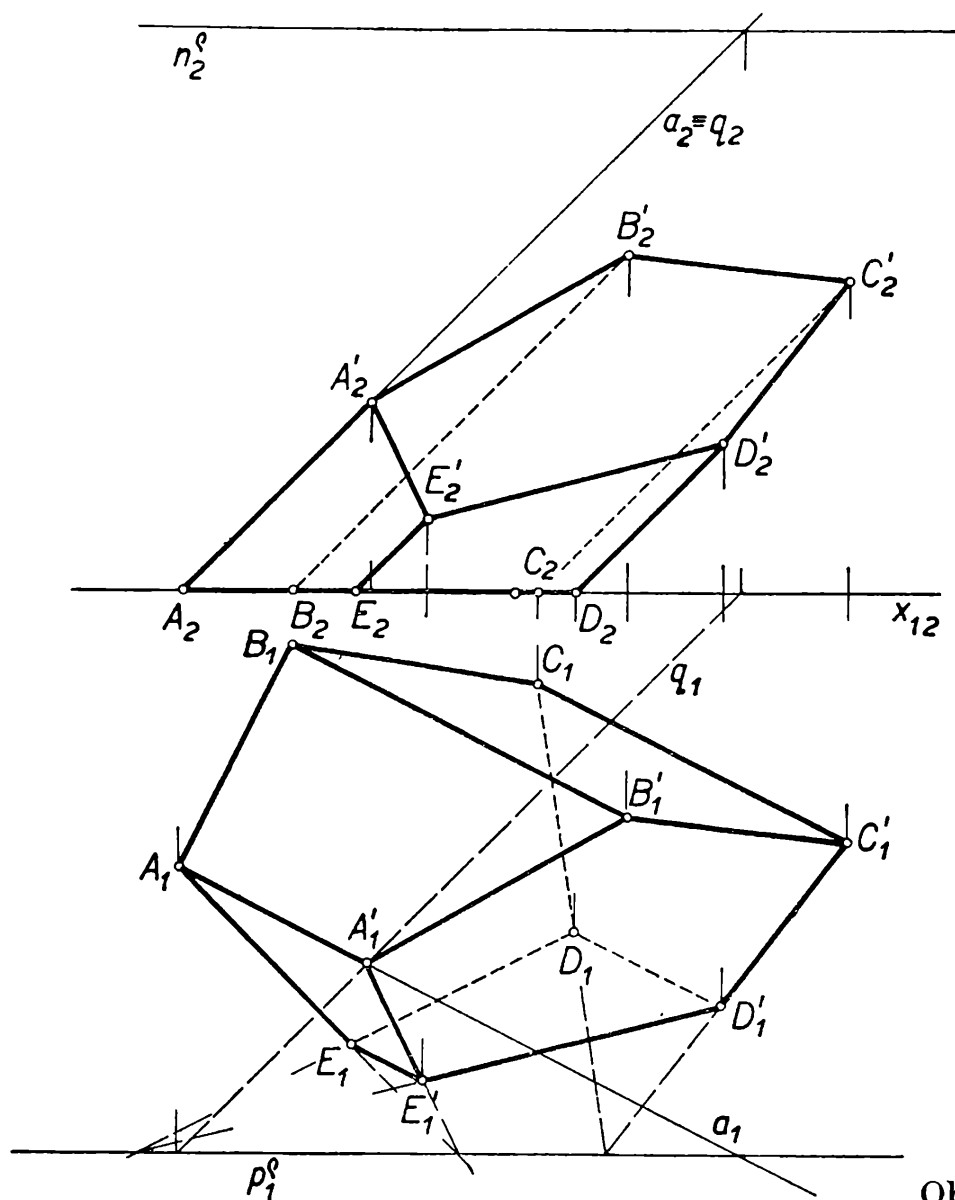
Stručněji a přitom přehledněji můžeme psát

$$\left. \begin{array}{l} k \perp \varrho \\ k \parallel \tau \end{array} \right\} \Rightarrow \varrho \perp \tau$$

Obráceně, mějme rovinu  $\varrho$  kolmou k rovině totožnosti. V prostoru zvolme libovolný bod  $A$  a z něho spusťme kolmici  $k$  na rovinu  $\varrho$ . Tato kolmice je nutně rovnoběžná s rovinou totožnosti a proto  $k_1 \parallel k_2$  a odtud pak plyne  $p_1^e = n_2^e$ , čímž je důkaz proveden.

P o z n á m k a. Vyslovená věta nemusí platit, jestliže rovina  $\varrho$  obsahuje základnici.

Všimněme si posléze případu, kdy rovina  $\varrho$  je rovnoběžná s rovinou totožnosti. Z obr. 1 je ihned patrné, že první průmět první stopy a druhý



Obr. 7

průmět druhé stopy jsou souměrně sdružené podle základnice a přitom jsou se základnicí rovnoběžné. To vyjádříme větou.

*V ě t a 6. Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovina  $\varrho$  byla rovnoběžná s rovinou totožnosti, je: první průmět první stopy je rovnoběžný se základnicí a zároveň je podle základnice souměrně sdružený s druhým průmětem druhé stopy.*

Mějme dále rovinu  $\varrho$  rovnoběžnou s rovinou totožnosti a v ní libovolný  $n$ -úhelník  $ABC\dots$ . Jeho sdružené průměty jsou  $A_1B_1C_1\dots, A_2B_2C_2\dots$ . Poněvadž

$$AB \parallel \tau, AC \parallel \tau, BC \parallel \tau,$$

platí (viz věta 3)

$$A_1B_1 \parallel A_2B_2, A_1C_1 \parallel A_2C_2, B_1C_1 \parallel B_2C_2,$$

Z toho (a z toho, že sdružené průměty téhož bodu leží na ordinálách) je patrné, že sdružené průměty  $n$ -úhelníka  $ABC\dots$  jsou souhlasně shodné  $n$ -úhelníky. Jeden z nich vznikne z druhého posunutím ve směru ordinál.

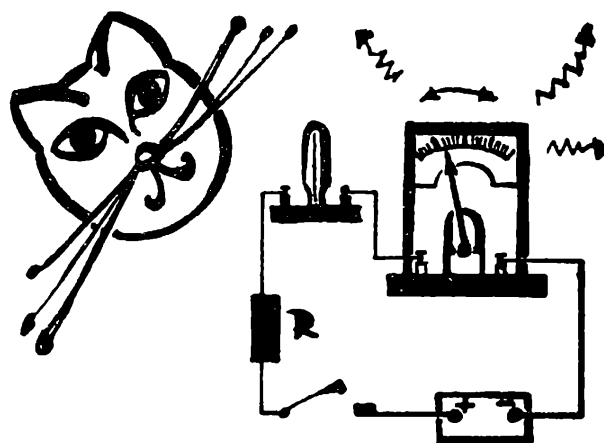
**P ř í k l a d 4.** Je dán kosý hranol, jehož podstata je pravidelný pětiúhelník  $ABCDE$  ležící v první průmětně. Protněte jej rovinou  $\varrho$  a zobrazte dolní část vzniklou řezem.  $A(-6; 5; 0)$ ,  $B(-4; 1; 0)$ ,  $A(0; 8; 6)$ ,  $\varrho(\infty; 10; 10)$ .

**Ř e š e n í** (obráz. 7) je známé a proto je nebudeme ani uvádět. Podotkneme však, že první průmět řezu je přímo shodný s druhým průmětem řezu, neboť rovina  $\varrho$  je rovnoběžná s rovinou totožnosti.

### C v i č e n í

1. Setrojte průsečík přímky  $a \equiv [(5; 10; -10), (-5; -6; 6)]$ , s rovinou  $\varrho(5; 4; -4)$ . Co můžete říci o přímce  $a$  a o rovině  $\varrho$ ?
2. Najděte průsečík  $A$  přímky  $a$  s rovinou totožnosti a průsečnici  $t$  roviny  $\varrho$  s rovinou totožnosti. Potom najděte vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $t$ .  $a \equiv [(6; -4; 0), (-4,5; 5; 10)]$ ,  $\varrho(-4,5; 3; 3,5)$ .
3. Sestrojte sdružené průměty rovinného pětiúhelníka  $ABCDE$ .  $A(0; 10; 9,5)$ ,  $B(-4; 6; ?)$ ,  $C(-2,5; 2; 1)$ ,  $D(2,5; ?; 1)$ ,  $E(4; 4,5; 5,5)$ .
4. Daný pravidelný pětiboký jehlan s podstavou v první průmětně  $[S(0; 6; 0)$ ,  $A(-0,5; 1; 0)$ ,  $v = 10$  protněte rovinou  $\varrho$  tak, aby první průmět řezu byl obrazec přímo shodný s druhým průmětem řezu. Rovina  $\varrho$  prochází bodem  $R(0; 11; 0)$ .
5. Je dán kosý kruhový válec  $[S(4,5; 3,5; 0)$ ,  $r = 3,5$ , podstava leží v první průmětně,  $\bar{S}(0; 6,5; 6)$ . Protněte jej rovinou  $\varrho = \tau$ , která prochází bodem  $\bar{R}(-7; 5; 5)$ .





## Měření rychlosti střely

Pplk. BOHUMIL SEDLÁČEK:

K měření počáteční rychlosti střely  $v_0$  byla vypracována řada metod. Tyto metody můžeme rozdělit na přímé a nepřímé. Při přímé metodě se vychází z definice rychlosti, to znamená, že se měří dráha střely a příslušný čas. Při nepřímých metodách jsou měřeny jiné veličiny, z kterých se určuje počáteční rychlost početně.

### A. Metody přímé

Při praktickém měření se vždy užívá dvou na sobě nezávislých základů umístěných v takové vzdálenosti od sebe, aby bylo možné podle typu použitého časoměřiče měřit dobu letu střely mezi oběma základnami s dostatečnou přesností. Potíž při měření rychlosti střely nespočívá však v měření času, ale spíše v přesném měření dráhy střely. Střela letí přesně změřenou dráhou, na jejímž začátku i konci ovlivňuje časoměřič. Toto ovlivnění se může dít mechanicky (průstřel drátů nebo síta, zkrat dvou kovových folií, přerušení kontaktů), opticky (světelné clony, světelná stopa střely), magneticky (střela letí mezi dvěma cívkami protékanými elektrickým proudem, nebo předem zmagnetovaná střela letí kolem antén) anebo akusticky (balistická vlna střely působí na mikrofony).

Měříme-li dráhu střely  $s$  a dobu letu střely  $t$ , dostaneme průměrnou rychlost  $\bar{v}$  podle vztahu

$$\bar{v} = \frac{s}{t}$$

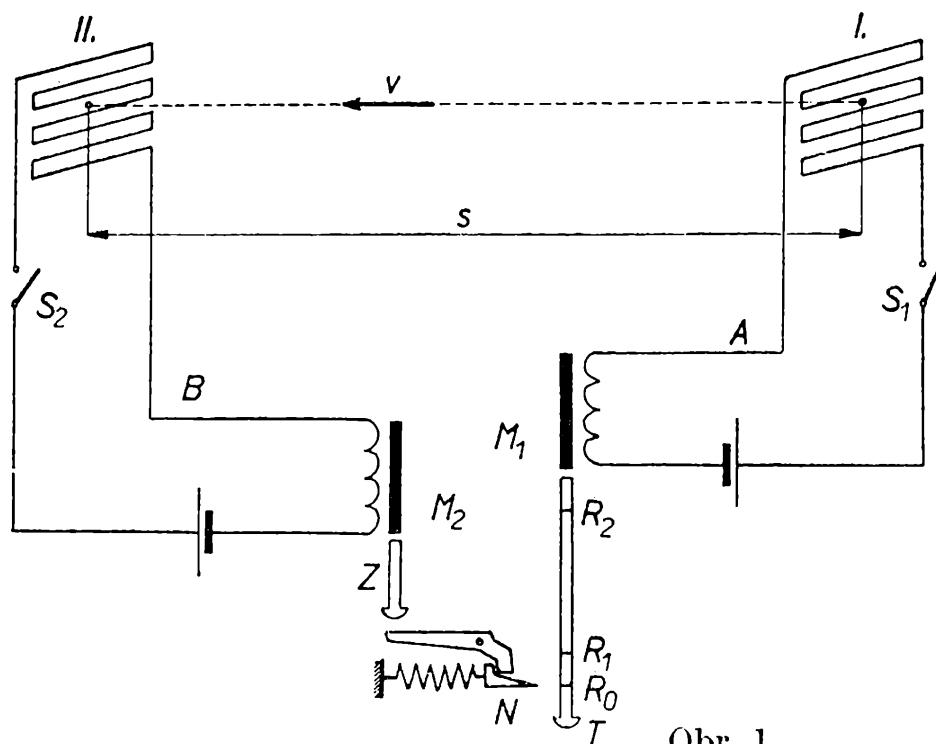
Za předpokladu, že pokles rychlosti střely vlivem odporu prostředí se na změřené dráze děje lineárně, lze zjistit počáteční rychlost střely  $v_0$  lineární extrapolací.

K měření rychlosti střely metodou přímou je třeba měřit čas se značnou přesností. Z velkého počtu přístrojů na měření času popíši jen ty nejdůležitější:

#### a) *Přístroj Boulengé.*

Tento přístroj byl pro svou jednoduchost a spolehlivost do nedávné doby nejpoužívanějším chronografem na střelnicích i ve zbrojních továrnách. Tímto přístrojem lze měřit doby řádu 0,1 s.

Princip přístroje Boulengé (obr. 1):



V proudovém obvodu  $A$  a  $B$  jsou elektromagnety  $M_1$  a  $M_2$ . Elektromagnet  $M_1$  přidržuje železnou tyčku potaženou zinkovou trubkou  $T$ . Elektromagnet  $M_2$  přidržuje závaží  $Z$ . Při průletu střely sítí  $I$  přeruší se obvod  $A$  a tyčka  $T$  začíná padat volným pádem. Při průletu střely sítí  $II$  přeruší se obvod  $B$ , tím se uvolní závaží  $Z$ , dopadne na sekáček  $N$ , který vysekne do tyčky  $T$  rysku  $R_2$ . Ryska  $R_0$  se vysekne v klidovém (počátečním) stavu přístroje. Od okamžiku uvolnění závaží  $Z$  až do okamžiku, kdy sekáček  $N$  narazí na tyčku  $T$ , uplyne doba  $t_k$ , potřebná k uražení dráhy  $h_1$  mezi závažím a sekáčkem. Doba  $t_k$  je tzv. korekce přístroje či disjunkce, pro níž platí

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_k^2 \quad \text{čili} \quad t_k = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

Vzdálenost  $h_1$  zjistíme tak, že současně vypneme oba spínače  $S_1$  a  $S_2$ . Závaží  $Z$  vysekne na padající tyčce tzv. disjunkční značku  $R_1$ . vzdálenost mezi značkami  $R_0$  a  $R_1$  označme  $h_1$ .

Měřicí tyčka padá rovněž volným pádem. Pro její dráhu  $h$  (tj. vzdálenost mezi ryskami  $R_0$  a  $R_2$ ) platí

$$h = \frac{1}{2} g (t + t_k)^2,$$

kde  $t$  je čas potřebný k tomu, aby střela prolétla stálou (průměrnou) rychlostí  $v$  vzdálenost  $s$  mezi síty, a  $t_k$  korekční čas přístroje (disjunkce):  
odtud

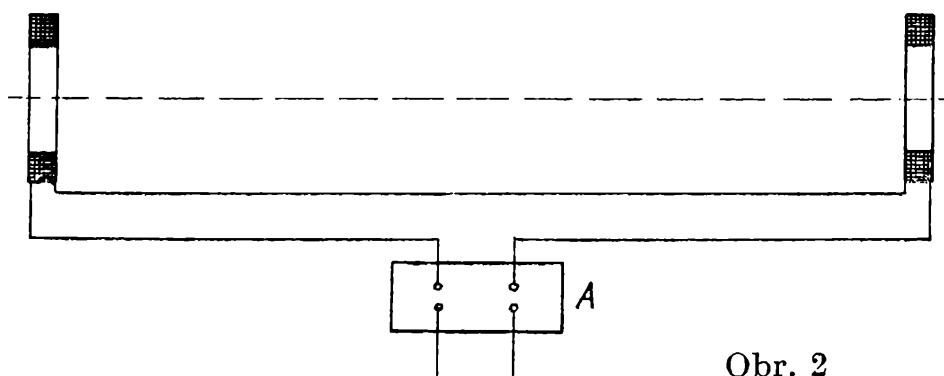
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} - t_k$$

Pro průměrnou rychlost střely tedy platí

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{s}{\sqrt{\frac{2h}{g}} - t_k} = \frac{s}{\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2h_1}{g}}}$$

b) *Cívkový přístroj Boulengé.*

U tohoto přístroje (obr. 2) je vymezena dráha střely dvěma plochými cívkami, zapnutými do série, které lze užít podle velikosti pro ráže od



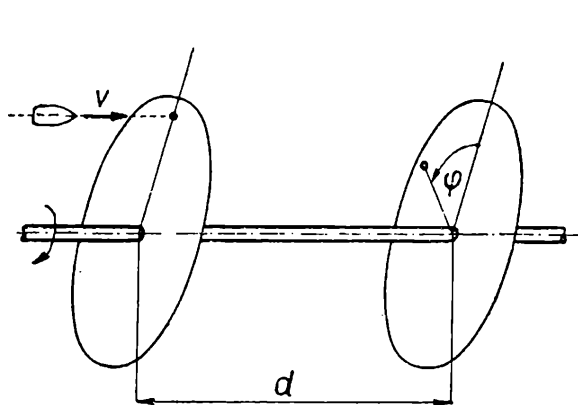
Obr. 2

*K přístroji Boulengé*

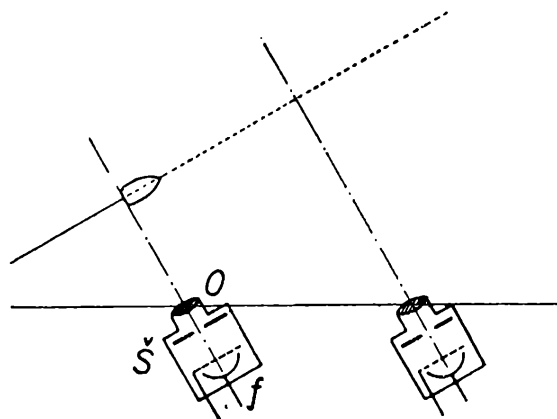
20 mm výše. Před výstřelem se střela zmagnetuje. Průletem střely cívkou je v cívce vzbuzen náraz proudu, kterým se uvede přes zesilovač a relé (1) v činnost chronograf Boulengé.

c) *Cívkový oscilograf.*

Cívkový oscilograf je zařízen podobně jako cívkový přístroj Boulengé s tím rozdílem, že proudové impulsy jsou přiváděny k oscilografu a zaznamenány na filmu, který se pohybuje rychlostí  $15 \text{ m s}^{-1}$ .



Obr. 3



Obr. 4

d) *Přístroj s rotujícími kotouči.*

Tento přístroj pozůstává ze dvou papírových kotoučů na společném hřídeli (obr. 3). Vzdálenost mezi kotouči je  $d$ . Hřídel je uváděn do rotace motorkem o  $n$  otáčkách za minutu. Oba kotouče se prostřelí rovnoběžně se směrem hřídele. Střela proletí dráhu  $d$  za dobu  $t$ . Průstřely obou kotoučů budou proti sobě pootočený o úhel  $\varphi$ . Pro průměrnou rychlost střely  $v$  mezi kotouči platí

$$\bar{v} = \frac{d}{t}$$

a pro úhel  $\varphi$  platí

$$\varphi = \omega t = 2\pi f t = 2\pi \frac{n}{60} t$$

Vyjádřením  $t$  z druhé rovnice a dosazením do první rovnice dostáváme

$$\bar{v} = \frac{d\pi n}{30\varphi}$$

při čemž  $\varphi$  nutno vyjádřit v radiánech. Chceme-li  $\varphi$  vyjádřit v stupních užijeme vztahu

$$\bar{v} = \frac{6 d n}{\varphi}$$

Tato metoda je vhodná pro měření rychlostí střel malých ručních zbraní.

e) *Měřicí komora.*

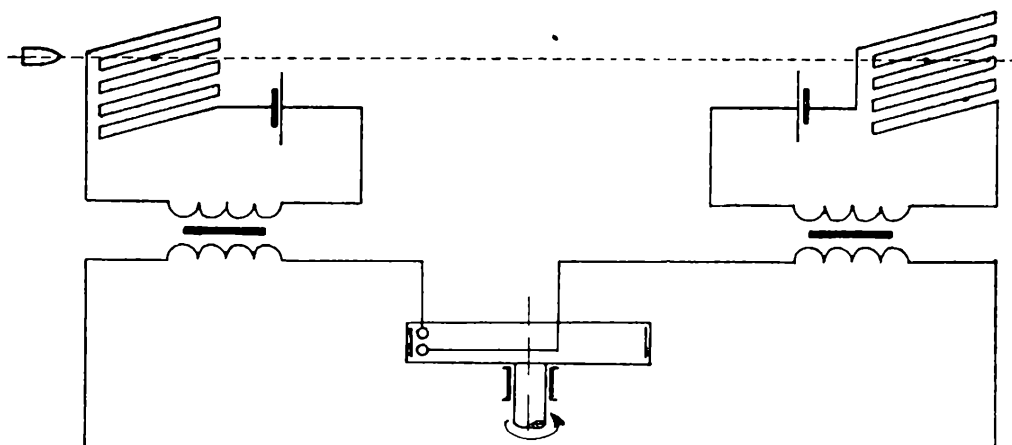
Měřicí komora (obr. 4) slouží k měření  $v_0$  v polních podmínkách a pro střely dělostřeleckých ráží. Měřená dráha je ohraničena dvěma fotografickými komorami, opatřenými štěrbinou a fotonkou. Dno střely je opatřeno světelnou stopou, jejíž světlo dopadá přes objektiv  $O$  a štěrbinu  $\mathcal{S}$  na fotonku  $f$ . Každá fotonka je spojena přes zesilovač na oscilograf. Jakmile dopadne světelný paprsek ze *stopovky* na fotonku, vychýlí se smyčka oscilografu. Výchylka je zaznamenána na pohybujícím se filmu. Současně se na film zaznamenají časové značky vytvořené ladičkou. Ze záznamů výchylek smyčky oscilografu od obou komor lze stanovit časový interval průletu střely rovinami definovanými optickými osami obou objektivů a *příslušnými štěrbinami*. Touto metodou lze dosáhnout přesnosti na 0,1 %.

f) *Jiskrové chronografy.*

Z početných typů jiskrových chronografů, zmíním se jen o dvou.

1. *Jiskrový chronograf pro přerušení proudu.*

Při svém letu protrhává střela dvě síta jako u přístroje Boulengé. V proudovém obvodu každého síta je zapojeno primární vinutí transformátoru. Při přerušení proudu indukuje se v sekundárním vinutí transformátoru vysoké napětí, které způsobuje jiskrový výboj v jiskřišti (obr. 5). Jiskřiště od obou proudových obvodů jsou uspořádána uvnitř rotujícího bubnu tak, že jiskra přeskočí na obvod bubnu. Dovnitř bubnu



Obr. 5

je vložen proužek papíru, který je jiskrou propálen. Ze vzdálenosti obou vypálených značek na proužku papíru a ze známé postupné rychlosti papírového proužku, lze zjistit časový interval mezi oběma jiskrami. Používá se bubnu o obvodu jednoho metru, který je poháněn motorem

o 6000 otáčkách za minutu. Potom je postupná rychlost proužku papíru  $100 \text{ m s}^{-1}$ .

## 2. Jiskrový chronograf pro spojení proudu.

Je zařízen obdobně jako jiskrový chronograf pro přerušení proudu s tím rozdílem, že místo sít je užito lepenkových terčů potažených z obou stran kovovou folií. Při průletu střely terčem spojí se obě folie nakrátko a v jiskřišti uspořádaném podobně jako u dříve zmíněného jiskrového chronografu, přeskočí jiskra tím, že se vybijí předem nabitý kondenzátor.

### g) Impulsní počítací.

V posledních letech se pro měření velmi krátkých časů, které se vyskytují při měření rychlosti střely, osvědčil impulsní počítací. Základem počítací je křemenný krystal, jehož doby kmitu je využito k měření času. Přístroj počítá kmity křemenného krystalu. Počet kmitů a tím i dobu měřeného intervalu lze číst bezprostředně. Dnes se používá krystalů s frekvencí až  $10^7 \text{ Hz}$ . Přesnost měření je dána hodnotou  $\pm (1 \text{ až } 2)$  kmity krystalu. Jako příklad přístroje na měření rychlosti střely pomocí impulsního počítací uvádím stručný popis přístroje Oerlikon.

Pro měření počáteční rychlosti střely u 7,5 cm protiletadlového kanonu se používá dvou cívek o průměru 160 mm, které jsou pomocí latěk připevněny přímo na hlaveň zbraně tak, že první cívka je u ústí a druhá je ve vzdálenosti jednoho metru od ústí ve směru střelby. Cívkami protéká elektrický proud. Při prolétnutí střely cívkami vzbudí se elektrický impuls, který uvádí v chod příp. zastavuje impulsní počítací. Pro měření rychlosti střel malé ráže je možné zmenšit vzdálenost cívek až na 20 mm (milimetrů). Při automatické registraci údajů impulsního počítací na fotografický papír, lze určit rychlost střel i při nepřetržité palbě do kadenace 2000 ran za minutu. Při tom lze měřit i časový interval mezi dvěma za sebou následujícími střelami.

## B. Metody nepřímé

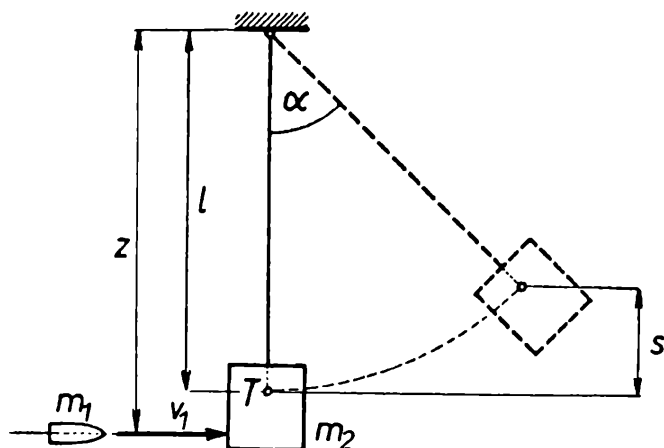
Pro určení rychlosti střely měří se jiné veličiny, než veličiny, kterými je rychlost definována, tj. dráha a čas. Z naměřených veličin se rychlost vypočítává.

### a) Balistické kyvadlo.

Je nejstarším přístrojem na měření rychlosti střely. Bylo k tomuto účelu používáno již od r. 1742. Je zde využito zákona o zachování momentu hybnosti. Balistické kyvadlo je v podstatě zavěšené masivní těleso, které může kývat kolem horizontální osy a od kterého se střela neodráží, nýbrž do něho vniká. Prakticky se realizuje jako bedna naplněná pískem nebo hlínou, která je pevně spojená s tyčí. Druhý konec

tyče je otočně upevněn na vhodné konsole. Bedna musí být dimensována tak, aby v ní střela uvázla.

Když se vystřelí ve vodorovném směru proti kyvadlu střela o hmotnosti  $m_1$ , předá svou hybnost kyvadlu o hmotnost  $m_2$ . Kyvadlo se vychýlí ze své rovnovážné polohy a dosáhne při své největší výchylce, které říkáme výchylka balistická, největší potenciální energii (obr. 6). Kinetická



Obr. 6

energie kyvadla v okamžiku, kdy do něho vnikne střela je  $\frac{1}{2} J \omega^2$  a rovná se potenciální energii kyvadla  $(m_2 + m_1) g s$ , při balistické výchylce  $\alpha$ , tedy

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = (m_2 + m_1) g s .$$

Protože  $s = 2 l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , můžeme psát

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = 2 (m_2 + m_1) g l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Energie kyvadla však bude menší, než byla energie střely, neboť část energie střely se spotřebovala na destrukci materiálu kyvadla při vnikání střely a proměnila se v teplo. Protože jde u kyvadla o pohyb rotační, musí platit pro celou soustavu, že součet momentů hybností před nárazem se rovná součtu momentů hybností po nárazu. Proto můžeme psát, označíme-li vzdálenost vstřelu do kyvadla od osy kyvadla  $z$

$$m_1 v_1 z = J \omega ,$$

z toho

$$\omega = \frac{m_1 v_1 z}{J}$$

a dosazením do druhé rovnice dostáváme

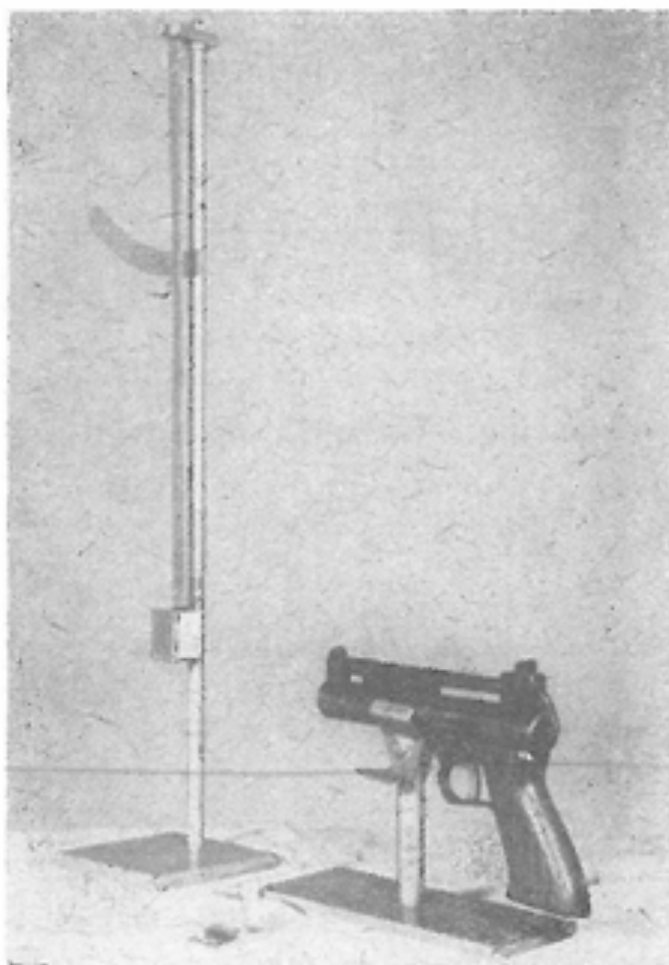
$$\frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2 z^2}{J} = 2 (m_2 + m_1) gl \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Poněvadž pro dobu kmitu balistického kyvadla o hmotě  $m_2 + m_1$  platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{(m_2 + m_1) gl}}$$

je

$$J = \frac{T^2}{4\pi^2} (m_2 + m_1) gl .$$



Obr. 7

Dosazením do (2) dostáváme pro rychlost střely  $v_1$

$$v_1 = \frac{m_2 + m_1}{m_1} \frac{l}{z} g \frac{T}{\pi} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

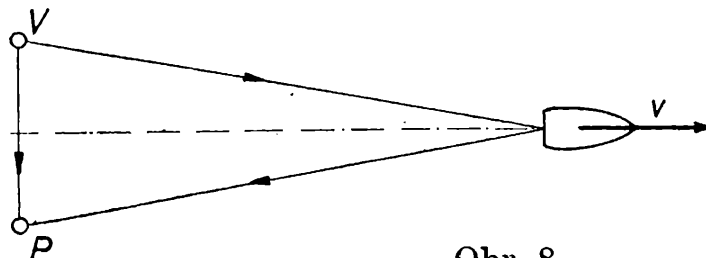
při čemž  $m_1$  je hmotnost střely,  $m_2$  je hmotnost kyvadla,  $l$  vzdálenost těžiště kyvadla od jeho osy,  $z$  je vzdálenost vstřelu od osy kyvadla,  $\alpha$  úhel balistické (maximální) výchylky kyvadla,  $g$  je tíhové zrychlení a  $T$  doba kmitu kyvadla se střelou.

Skutečné provedení balistického kyvadla pro měření rychlosti střely ze vzduchovkové pistole je na obr. 7.



b) *Přístroj využívající Dopplerova principu.*

Toto zařízení má stále rostoucí význam pro měření rychlosti střely. Lze ho použít i v polních podmínkách a lze jím zjišťovat okamžitou rychlost střely v libovolném místě dráhy střely. Princip je velmi jedno-



Obr. 8

duchý. V blízkosti výstřelné roviny (tj. svislé roviny proložené osou hlavně při výstřelu) se umístí vysílač velmi krátkých elektromagnetických vln (centimetrové vlny) a přijímač těchto vln. Vysílačem vysílané vlny jsou přijímány přijímačem jednak přímo, jednak odražené od střely (obr. 9). Pro přijímač je tedy zdrojem vlnění vysílač, který je v klidu a střela, která je v pohybu. Předpokládejme, že vysílač (V) vysílá vlnění o frekvenci  $f_0$ . Kdyby byla střela v klidu, dopadlo by na ni vlnění o této frekvenci. Střela se však vzdaluje od vysílače rychlostí  $v$  a uplatní se proto Dopplerův princip, podle kterého bude na střelu dopadat vlnění o frekvenci  $f_1 < f_0$  podle vztahu

$$f_1 = f_0 \frac{c - v}{c} ,$$

při čemž  $c$  je rychlost elektromagnetického vlnění. Od střely se vlnění odráží a střela se tedy stává zdrojem nového vlnění o frekvenci  $f_1$ . Na přijímač však bude, opět podle Dopplerova principu, dopadat vlnění odražené od střely o frekvenci  $f_2 < f_1$ .

$$f_2 = f_1 \frac{c}{c + v}$$

Výsledná frekvence  $f$ , která dopadne na přijímač (P), bude

$$f = f_0 \frac{c - v}{c + v} = f_0 \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}$$

Protože  $c$  je proti  $v$  velmi velké, liší se jmenovatel zlomku málo od jedné a vztah můžeme upravit na tvar

$$f \doteq f_0 \left( 1 - 2 \frac{v}{c} \right)$$

Složením frekvence  $f_0$  a  $f$  dostaneme záznějovou (rozdílovou) frekvenci či rázy  $f_D$  (Dopplerova frekvence).

$$f_D = f_0 - f = f_0 - f_0 \left( 1 - 2 \frac{v}{c} \right) = 2 f_0 \frac{v}{c}$$

Protože

$$c = \lambda_0 f_0,$$

můžeme psát

$$f_D = 2 \frac{v}{\lambda_0}$$

a z toho

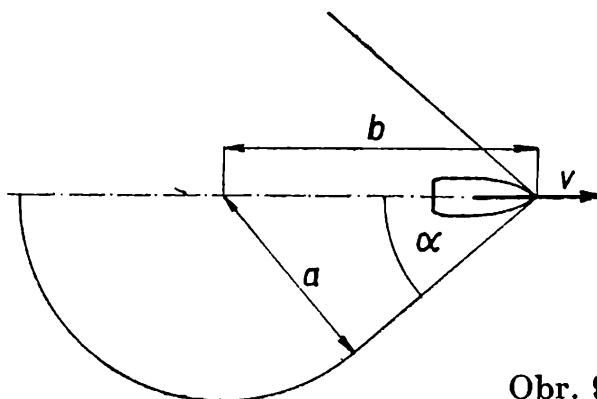
$$v = \frac{\lambda_0 f_D}{2},$$

při čemž  $\lambda_0$  je vlnová délka vysílaného elektromagnetického vlnění.

Velkou výhodou této metody je to, že nevyžaduje žádné úpravy před hlavní zbraně a není třeba definovat přesnou dráhu střely a také to, že práce je velmi rychlá. Používá se vlnových délek od 3 cm do 23 cm, podle ráže střely. Pomocí této metody lze měřit i rychlost detonační vlny. Využívá se při tom té skutečnosti, že detonační vlna se následkem ionisace stává vodivou a odráží velmi krátké elektromagnetické vlny.

c) *Určování rychlosti střely z fotografie letící střely.*

V laboratořích se často zjišťuje rychlost střely fotografováním střely. Jestliže se střela pohybuje větší rychlostí, než je rychlost zvuku ve vzduchu, vytvoří tzv. rázovou nebo balistickou vlnu. Balistická vlna je



Obr. 9

na fotografii pořízené při osvětlení elektrickou jiskrou velmi dobře viditelná. Z úhlu, který svírá balistická vlna se směrem letu střely lze rychlost střely zjistit (obr. 9). V době, kdy střela vykonala dráhu  $b$ , proběhl zvuk dráhu  $a$ . Označíme-li rychlost střely  $v$  a rychlost zvuku  $c$ , platí

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{v}$$

z toho môžeme vyjadriť rýchlosť strely

$$v = c \frac{b}{a}$$

neboli

$$v = \frac{c}{\sin \alpha}$$

Kromě popsaných metod pro měření rychlosti střely se používá ještě celá řada metod dalších, které jsou však většinou jen obměnami uvedených základních metod.

## Počet úmernosti v prírodných vedách

Prof. dr. JOZEF SKOTNICKÝ, UPJŠ Košice

*Úvod.*

Snahy pedagogov po zlepšení a modernizácii štúdia všeobecne zasahujú aj do najnižších tried stredných škôl a postihujú tam aj výuku matematiky, ktorá je vedená konzervatívne a opiera sa o dlhoročnú tradíciu. V poslednej dobe bola napadnutá zvlášť trojčlenka, lebo rieši úlohy úmernosti — počtu proporcionality starosvetským spôsobom, metódou tzv. regula de tri. V priebehu dlhej doby a praxe boli oba tieto pojmy neoprávnene stotožnené, lebo často sa hovorí miesto úmernosti trojčlenka a naopak. Táto zámena ale nie je správna, lebo trojčlenka predstavuje len jednu a to hodne starú metódu riešenia úloh počtu úmernosti proporcionality, pričom posledný sa rozpadá na priamu a nepriamu úmernosť a zahrnuje teda v sebe najčastejšie sa vyskytujúce funkčné závislosti.

Úmernosť a pojem proporcionality predstavujú nie len návod k určitej počtovej operácii, ale vytvárajú hlavne symbol pre určité kvantitatívne vzťahy medzi rôznymi veličinami a tak slúžia k hovorovému zvládnutiu týchto matematických vzťahov; sú preto hojne užívané a potrebné najmä v prírodných vedách. Na vysokých školách je účelné mnohé prírodné zákony nie len písať vo forme matematických rovníc, ale ich aj hovorovo exaktne vyjadrovať, čo ovšem treba cvičiť už na stredných školách, aby sa tak pripravovala a upevňovala cesta k logickému mysleniu. Uvedme niektoré príklady:

Odpor elektrického vodiča je priamo úmerný jeho dĺžke a nepriamo jeho prierezu.

Keď elektrický prúd prechádza viacerými vodičmi spojenými za sebou, sú napätia na týchto vodičoch priamo úmerné odporom vodičov. — Pri paralelnom spojení vodičov sú prúdy cez ne tečúce nepriamo úmerné odporom vodičov.

Lambertov zákon z optiky: svetelný prúd medzi dvoma plochami je priamo úmerný veľkosti týchto plôch, kosinom uhlov emisie aj dopadu a nepriamo úmerný štvorcu ich vzdialenosti.

Týmto spôsobom mohli by sme pokračovať ďalej v nesčetných príkladoch a všade zisťovať logiku a eleganciu tohoto spôsobu vyjadrovania. Pojem a počet úmernosti sú teda pre vzdelaného človeka nepostrádateľné.

### *Metodika.*

Čisté čísla sú abstrakcie, lebo v prírode se stretáme len s určitým počtom predmetov. Prirodzené je preto počítanie s veličinami tj. pomenovanými číslami skladajúcimi sa z čísla a jednotky tj. rozmeru. Čisté čísla dostaneme keď spolu porovnávame rôzne počty rovnakých jednotiek, čo uskutočňujeme vytváraním pomerov-kvocietov. Hektoliter je stokrát väčší než liter a liter je stotina hektolitra. V tomto druhom prípade dpstávame zlomok, ktorý vyjadrujeme pomocou desatinných čísel a čítame často nie slovensky v desatinách, stotinách atď., ale latinsky alebo medzinárodne v procentách a promille. Liter je teda procentom hektolitra a 34,56 metrov je 34,56 promille z kilometra. Procentá % a promille ‰ sú teda nie len vhodné medzinárodné symboly užívané najmä v obchode, ale šetria nás aj od písania desatinných čiarok a núl po oboch stranách čiarok, lebo  $5\% = 0,05$ . V matematických rovniciach nutno ovšem procentá písať číselne verne, teda napr.  $2,3\%$  ze 456 kg obnáša  $0,023 \cdot 456 = 10,49$  kg. — Z uvedeného je vidno, že procentá predstavujú dôležitý a užitočný kvantitatívny vyjadrovací prostriedok medzinárodne uznaný a užívaný najmä v ekonomii a preto musia byť aj v škole dôkladne objasnené a zaužívané. Teda procentá aj promille sú bezrozmerné čísla:  $1\% = 0,01$  a  $‰ = 0,001$ .

Počítanie s veličinami sa riadi tými istými zákonmi ako počítanie s čistými číslami. Preto je nutné pokiaľ možno včas zoznámiť sa s pojmom rovnice a s operáciami ktoré možno robiť s rovnicami: rovnica musí byť verná nielen číselne ale aj rozmerove, k rovnici možno pričítať alebo odčítať ľubovoľný počet týchže jednotiek a rovnica môže byť násobená alebo delená ľubovoľnou veličinou. Tieto operácie stačia k riešeniu jednoduchých rovníc typov  $y = x \pm a$ ,  $y = xb$  resp.  $x/b$  a  $y = c/x$ . Pritom musí byť veľmi presne precvičené slovné vyjadrovanie funkčných závislostí medzi oboma premennými veličinami:  $y$  je o  $a$  väčšie resp. menšie než  $x$ ,  $y$  je  $b$  krát väčšie resp. menšie než  $x$  alebo  $y$  je priamo úmerné  $x$ , a  $y$  je nepriamo úmerné  $x$ .

V sumačnom type rovníc musia mať všetky veličiny ten istý rozmer, v multiplikačnom type rovníc môžu mať premenné veličiny rôzne rozmery a tak sa vytvárajú pomocou násobenia a delenia nové zložené rozmery-jednotky  $b = y/x$  a  $c = xy$ , ktoré dostávajú aj nové pomenovanie keď majú fyzikálny zmysel a význam, napr. rýchlosť m/s alebo práca kilowatt. hodina a pod. Konstanta priamej úmernosti  $b$  má teda zložený rozmer daný kvocientom rozmerov premenných veličín  $y$  a  $x$ , kdežto konstanta nepriamej úmernosti  $c$  má rozmer daný súčinom rozmerov  $x$  a  $y$ .

Význam konštánt úmernosti  $b$  a  $c$  v uvedených rovniciach vystúpi ešte plastickejšie do popredia, keď si príslušné funkcie graficky znázorníme: potom dostaneme pre priamku prechádzajúcu počiatkom  $b = y/x = y_0/x_0 = \operatorname{tg} \alpha$  a pre rovnoosú pravoúhlú hyperbolu  $c = xy = x_0 y_0 = S$ , kde  $x_0$ ,  $y_0$  predstavujú súradnice známeho bodu a  $\operatorname{tg} \alpha$  smernicu priamky resp.  $S$  plochu súradnicového obdĺžnika dotýkajúceho sa hyperboly.

Tieto posledné rovnice sú aj preto dôležité, lebo pomocou nich dospievame k formálne jednotnému spôsobu riešenia priamej aj nepriamej úmernosti, teda  $x = x_0 \cdot y/y_0$  a  $x_0 = x \cdot y_0/y$ . Tieto rovnice sú písané rozmerove verne, lebo  $x$  má po oboch stranách rovnice tenže rozmer a oba zlomky obsahujúce ypsilony musia byť preto bezrozmerné, čomu aj tak je, lebo rozmery  $y$  pri tvorbe kvocientov odpadajú. Nakoľko pre  $b$  a  $c$  je už rezervovaný názov „konstanta úmernosti“, ktorá vykazuje zložený rozmer, musí byť pre bezrozmerné zlomky obsahujúce ypsilony volený nový názov. V práci [1] bol navrhnutý „korekčný zlomok“ alebo „korekčný faktor“ a v úvahu prichádza aj „korekčný alebo číselný kvocient resp. koeficient“.

Rovnice tu uvedené a ich grafické znázornenie sú síce veľmi užitočné pre plné chápanie počtu úmernosti, ale nie sú bezpodmienečne potrebné pre prevádzanie početných výkonov. To čo si musíme uvedomiť pri počte úmernosti, aby sme mohli správne riešiť úlohy tohoto počtu, je nutnosť zachovania rozmerovej vernosti výsledných rovníc, ako to je zdôraznené aj v práci [1]. Toto jednoduché a základné pravidlo stačí úplne, aby sme riešili úlohy správne a aj pomerne rýchlo, nezávisle na tom či sa jedná o priamu, nepriamu, jednoduchú alebo zložitú úmernosť, lebo všetky sa riešia podľa tejže schémy:  $x = x_0 \cdot y/y_0 \cdot z_0/z \dots$  ktorá sa živelne má inkorporovať už do hláv dozrievajúcej mládeže;  $x$  bude číselne rôzne od  $x_0$  podľa hodnôt proporcií  $y/y_0$ ,  $z_0/z$  atď., ktoré práve dali svoje meno počtu proporcionality-úmernosti.

Uplatnenie tejto „rozmerovej“ metódy v počte úmernosti v oblasti prírodných vied si ukážeme na viacerých príkladoch:

1. Koľko percent obnáša 4,5 kg z 18 kg?  
Jednoducho  $x = 4,5/18 = 0,25 = 25 \%$ .

Rozmerovou metódou  $x \% = 100 \% \cdot 4,5/18 = 25 \%$

2. Z ktorej hodnoty tvorí 17 kg 7 %?

Jednoducho  $7 \% = 0,07 = 17 \text{ kg}/x$ ;  $x = 17 \text{ kg}/0,07 = 243 \text{ kg}$ .

Rozmerovou metódou  $x \text{ kg} = 17 \text{ kg} \cdot 100 \% / 7 \% = 243 \text{ kg}$ .

3. Aký je elektrický odpor drátu dlhého 29,3 km a prierezu  $0,067 \text{ mm}^2$ , keď odpor 7 krát lepšieho vodiča dĺžky 0,6 m a prierezu  $2,2 \text{ mm}^2$  obnáša  $0,1 \Omega$ ?

$$x\Omega = 0,1\Omega \cdot 7/1 \cdot 29\,300/0,6 \cdot 2,2/0,067 = 7 \cdot 2,93 \cdot 2,2 \cdot 10^3 \Omega / 6 \cdot 6,7 \cdot 10^{-3} = 1,121 \cdot 10^6 \Omega = 1,121 \text{ M}\Omega.$$

Číselný výpočet sa prevádza tak, že najprv sa všetky čísla uvedú na jednotkové hodnoty (medzi 1 a 10 a ich súčin -- podiel sa približne vypočíta nazpamäť, teda  $7 \cdot 2,93 \cdot 2,2/6 \cdot 6,7 \doteq 7 \cdot 3 \cdot 2/6 \cdot 7 \doteq 1$ ). Radové hodnoty čísel sa v čitatelovi aj menovatelovi vyjadria mocninami desati a spočítajú  $10^{-1} \cdot 10^4/10^{-1} \cdot 10^{-2} = 10^3/10^{-3} = 10^6$ . Tento spôsob číselného počítania dáva nám subjektívnu istotu že sme počítali správne, aj keď nie celkom presne. Presný číselný výpočet sa potom prevádza najpohodlnejšie a najrýchlejšie na logaritmickom pravítku, presne na 1 ‰ a dáva 1121. Číselný výpočet možno ovšem prevádzať aj jednoduchým alebo skráteným násobením a delením tužkou na papieri alebo na počítacom stroji a tiež pomocou logaritmických tabuliek, podľa nášho vybavenia počítacími pomôckami.

Najúčelnejšie a najkratšie je ovšem počítanie pomocou logaritmického pravítka, nakoľko toto počíta v celom číselnom rozsahu s konštantnou presnosťou dosahujúcou u bežného 25 cm pravítka 1 ‰. Ostrosť nášho videnia obnáša totiž priemerne 0,1 mm zo vzdialenosti 25 cm, lebo na milimetrovom pravítku dokážeme odhadnúť desatiny milimetra. Presnosť čísla dĺžky  $a$  na pravítku je daná jeho relatívnou zmenou  $da/a = d \ln a = 2,3 d \log a$ . Stupnica dekadických logaritmov čísel na logaritmickom pravítku je lineárna a najmenšia zmena dekadického logaritmu  $d \log a$ , ktorú na pravítku môžeme odhadnúť, obnáša práve 0,1 mm, čo zodpovedá  $0,1 \text{ mm}/25 \text{ cm} = 1/2500 = d \log a$ . Z týchto skutočností plyne že číslo  $a$  môžeme odčítať s presnosťou  $da/a = 2,3 d \log a = 2,3/2500 \sim 1/1000 = 1 \text{ ‰}$  a to nezávisle na veľkosti čísla  $a$ , lebo logaritmická stupnica je v celom rozmedzí čísel na pravítku rovnomerná a preto zmena logaritmu  $d \log a$  je rovnaká.

S počtom úmernosti-proporcionality sa stretáme vo všetkých prírodných vedách, najčastejšie ovšem vo fyzike a chemii a preto chcem práve z tejto oblasti uviesť viaceré typické príklady, ktoré ovšem nijako nemôžu zahrnúť celú tematiku, ale predsa len poukážu na rozsiahly význam tohoto počtu.

4. Akú dráhu urazí automobil pri stálej rýchlosti za 87 minút, keď za 27 minút urazil 30 km?

$$x \text{ km} = 30 \text{ km} \quad 87/27 = 96,7 \text{ km}.$$

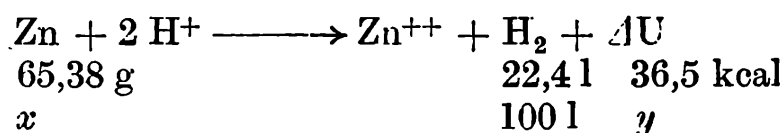
Zredené plyny sa chovajú podľa zákonov Boyle-Mariotteovho a Gay-Lussacovho, ktoré hovoria, že objem plynu je nepriamo úmerný jeho tlaku a priamo úmerný jeho absolútnej teplote.

5. Aký je objem plynu pri tlaku 500 tor a teplote 50 °C, keď za normálnych podmienok obnáša 1 liter?

$$x = 1 \text{ l} \cdot 760/500 \quad 323/273 = 1 \text{ l} \cdot 1,52 \quad 1,184 = 1,8 \text{ litra}$$

Zvlášť účelne a často môžeme použiť počet úmernosti pri fyzikálnych a chemických dejoch, ktoré môžeme písať vo forme chemických reakcií. Prvým úkonom pri tom je správne symbolicky napísať príslušný fyzikálny alebo chemický dej. Ďalším úkonom je kvantitatívne vyhodnotiť písomné symboly, pri čom si treba uvedomiť, že symboly znamenajú gramatom, gramion alebo grammolekulu príslušnej látky. Pri látkach tuhých vyjadrujú sa tieto množstvá v gramoch, pri látkach kvapalných alebo plyných v litroch. Keď sa jedná o látky rozpustné v roztokoch, vyjadruje sa množstvo látky súčinom objemu roztoku a jeho koncentrácie, takže grammolekula látky sa vyjadří litrom jej molárneho roztoku. Prevod medzi molárnou  $m$  a grampercentnou koncentráciou  $g\%$  udáva vzorec  $g\% = m \cdot u/10$  kde  $u$  znamená molekulovú hmotu látky a  $g\%$  počet gramov látky rozpustenej v 100 ml roztoku.

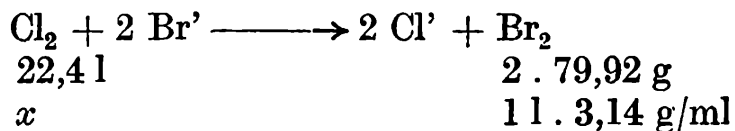
6. Koľko zinku treba hodiť do kyseliny, aby sme získali 100 l vodíku za normálnych podmienok a koľko tepla sa pri tom vyvinie?



$$x = 65,38 \text{ g} \cdot 100/22,4 = 65,38 \cdot 4,46 = 292 \text{ g Zn}$$

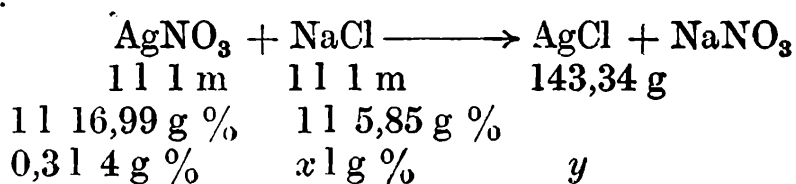
$$y = 36,5 \text{ kcal} \cdot 100/22,4 = 163 \text{ kcal}$$

7. Koľko chlóru treba nechať prebublať cez roztok bromidu, aby sme získali liter bromu?



$$x = 22,4 \text{ l} \cdot 3140/2 \cdot 79,92 = 440 \text{ l Cl}_2$$

8. Aké minimálne množstvo 1 g % roztoku NaCl treba pridať do 300 ml 4 g % roztoku AgNO<sub>3</sub>, aby sa zrazilo všetko striebro a koľko zrazeniny obdržíme?



$$x = 11.585/1.4/16.99 \cdot 0.3/1 = 413 \text{ ml}$$

$$y = 143.34 \text{ g} \cdot 0.3/1.4/16.99 = 10.12 \text{ g AgCl}$$

Nakonec treba zdôrazniť, že na priamu úmernosť sa dá upraviť každý lineárny vzťah medzi dvoma premennými, keď sa hodnota jednej premennej zmení; takáto zmena je veľmi účelná, lebo tým podstatne stúpne názornosť funkčnej závislosti medzi oboma premennými. — Obečný lineárny vzťah medzi premennými  $x$  a  $y$  má formu  $y = kx + q$ . Tento môžeme premeniť na priamu úmernosť, keď  $y$  zmeníme na  $y' = y - q$  takže  $y' = kx$ , alebo keď  $x$  zmeníme na  $x' = x + q/k$  takže  $y = k(x' - q/k) + q = kx'$ .

Túto poslednú zámenu prevádzame pri Gay-Lussacovom zákone, ktorý hovorí, že objem  $V$  plynu (pri konstantnom tlaku) lineárne stúpa s Celsiovou teplotou  $t$ :  $V = kt + V_0$ . Po zámene  $T = t + V_0/k$  dostaneme  $V = k(T - V_0/k) + V_0 = kT$ , čo je už priama úmernosť medzi objemom a teplotou, ovšem absolutnou; konstanta úmernosti má hodnotu  $k = V/T = V_0/T_0 = V_0/273$ , takže  $V = V_0 \cdot T/T_0$  a tiež  $T = t + V_0/k = t + 273$ .

Z uvedených príkladov vysvitá význam počtu úmernosti v prírodných vedách ale najmä dôležitosť jeho praktického osvojenia pomocou rozmerovej metódy, ktorá je úsporná úvahove aj priestorove a umožňuje ihneď písať výsledky.

#### *Literatúra:*

- [1] J. Skotnický: Priama a nepriama úmernosť. Matematika ve škole IX, 6 (1959) 344—347, Archimedes 14 (1962) 113—116.

## **Základní pojmy plastické deformace**

PAVEL BARTUŠKA, Ústav fyziky pevných látek ČSAV, Praha

V předchozím článku, věnovaném principům teorie dislokací seznámili jsme se s vlastnostmi a chováním těchto čarových poruch v tuhých krystalických látkách. V tomto článku si všimneme, co se děje s dislokacemi, jestliže na těleso působí vnější napětí, čili jaké děje probíhají při plastické deformaci. Chtěli bychom však doporučit, aby se čtenář nejdříve seznámil se základními pojmy, uvedenými v článku „Dislokace v pevných látkách“ (viz Rozhledy č. 5).

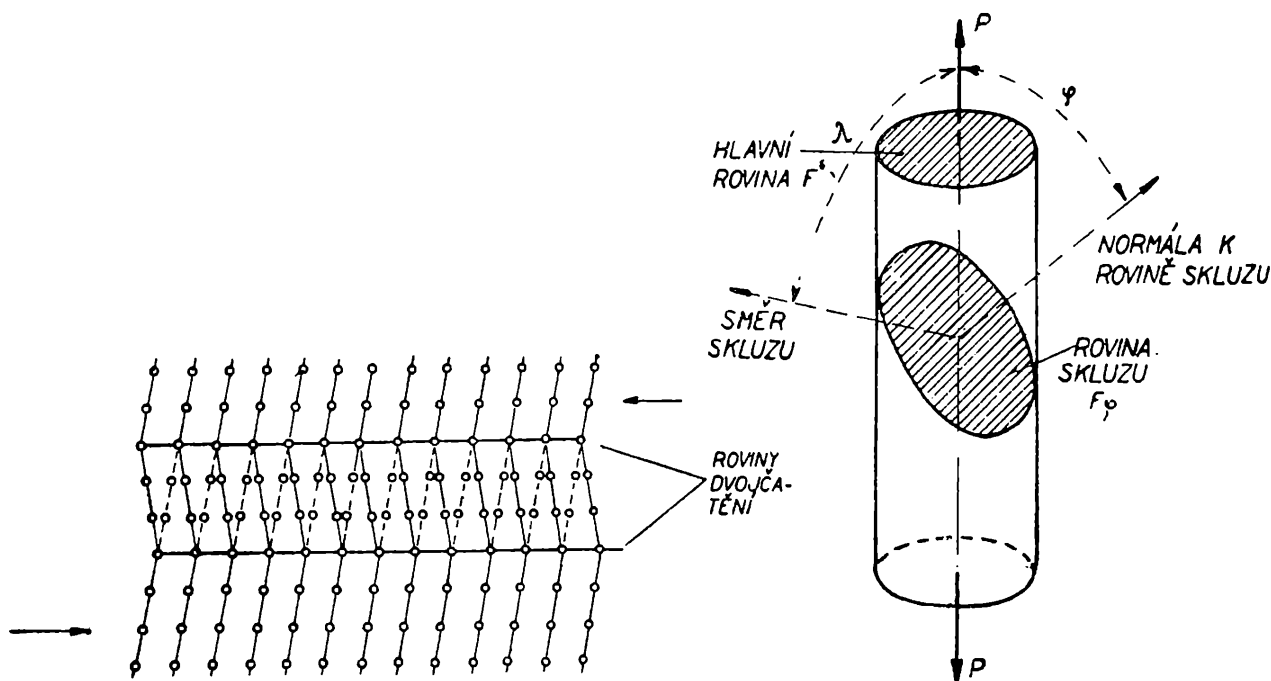


## Druhy deformace

Jestliže působíme na tuhou látku, např. kov nebo slitinu vnější silou, dochází ke dvěma druhům deformace v závislosti na její velikosti. V případě, že působící napětí je malé a atomy mřížky se pod jeho vlivem nevychýlí více než o polovinu meziatomové vzdálenosti, vrátí se po odtížení do původní polohy a mluvíme o tzv. *d e f o r m a c i e l a s t i c k é*. Pro tento případ platí Hookův zákon (viz článek o dislokacích).

V praxi jde však téměř vždy o *d e f o r m a c i p l a s t i c k o u*, při které dochází k nenávratným změnám tvaru tělesa. Plastická deformace se uskutečňuje převážně *s k l u z e m*, to znamená opakovaným pohybem dislokací. Hlavním znakem tohoto typu deformace je, že posunutí částí krystalu vůči sobě se děje o celý násobek mřížkové konstanty.

Za určitých podmínek (nízká teplota, velká rychlost deformace, nebo krystaluje-li kov v hexagonální soustavě), dochází k méně obvyklému typu deformace, tak zvanému *d v o j č a t ě n í* (obr. 1).



Obr. 1 Schematické znázornění plasticke deformace dvojčatěním. Obr. 2 Vztah mezi rovinou skluzu, směrem skluzu a směrem působení síly  $P$ .

Vidíme, že tak jako skluz dislokací se děl podél skluzové roviny, tak i dvojčatění probíhá podle určitých rovin, nazývaných *rovinami dvojčatění*. Hlavním rysem tohoto procesu je, že atomy

se neposouvají o celé mřížkové konstanty, ale jen o jejich části. Pás omezený na obr. 1 rovinami dvojčatění se nazývá dvojče. Tento typ deformace se však uplatňuje pouze za určitých podmínek, jakožto pomocný mechanismus, a proto se o něm nebudeme dále podrobněji zmiňovat.

## Skluzový systém, skluzové napětí

Nyní si zapamatujme dva důležité pojmy. Již při popisu dislokací jsme mluvili o skluzové rovině jakožto krystalografické rovině, ve které se uskutečňuje skluzový pohyb dislokací. Dislokace se však v této rovině šíří vždy v určitém směru, který se nazývá *směr skluzu*. Tyto roviny a směry skluzu však nejsou libovolné, ale platí, že *směr skluzu* je totožný se směrem nejhustěji obsazeným atomy a rovina skluzu je rovněž nejhustěji obsazenou krystalografickou rovinou.

Představíme-li si válcové těleso o průřezu  $F$  (viz obr. 2), v jehož ose působí síla  $P$ , pak výsledné napětí  $\frac{P}{F} = \tau$  v rovině skluzu můžeme rozložit na dvě části: napětí normálové (působí kolmo na skluzovou rovinu a snaží se atomy oddělit od sebe) a na napětí smykové (působí v rovině skluzu a snaží se posunovat tyto roviny po sobě). Pro napětí působící v rovině skluzu a ve směru skluzu platí

$$\tau = \frac{P}{F} \cdot \cos \lambda \cdot \cos \varphi ,$$

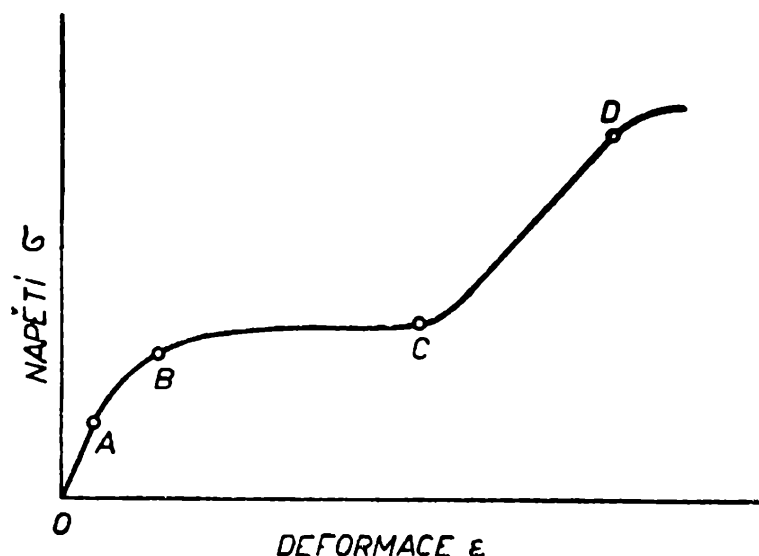
kde  $\lambda$  je úhel mezi směrem působení síly a směrem skluzu a  $\varphi$  je úhel mezi směrem působení síly a kolmicí ke skluzové rovině. Teprve toto napětí  $\tau$  je schopno uvést v pohyb dislokace ve skluzové rovině.

Nyní zavedeme další často používaný pojem, a to *skluzový systém*, který je definován směrem skluzu a rovinou skluzu. Tak např. krystaly se strukturou krychlovou, plošně centrovanou mají dvanáct skluzových systémů: čtyři ekvivalentní roviny (111) (vždy třemi vrcholy krychle můžeme proložit celkem 4 roviny, které jsou krystalograficky rovnocenné) a tři ekvivalentní směry skluzu (krychlí můžeme opět proložit 3 rovnocenné tělesové úhlopříčky). U krychlové prostorově centrované soustavy je směr nejtěsnějšího uspořádání (111) a o tom, která rovina skluzu se bude uplatňovat, rozhoduje teplota, při které deformaci provádíme.

Napětí, při kterém začne fungovat skluzový systém, se nazývá *kritické skluzové napětí*. Platí obecné pravidlo, že se začne uplatňovat ten skluzový systém, kde napětí ve směru skluzu a v rovině skluzu právě dosáhne hodnoty kritického skluzového napětí.

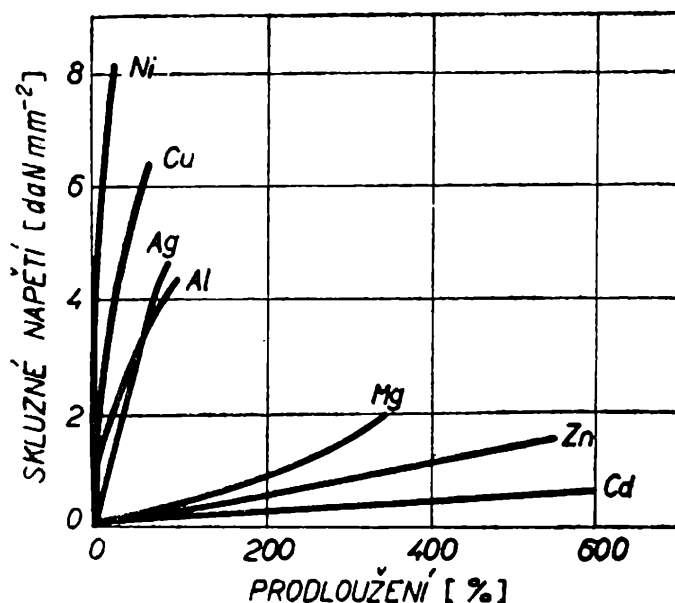
Navzájem rovnoběžných skluzových rovin existuje velké množství, ale ne všechny se budou uplatňovat při deformaci, to znamená, že

v některých dochází k mnohonásobnému skluzu, kdežto jiné se neuplatňují. Skluz se proto děje v jakýchsi vrstvách, které za určitých podmínek můžeme pozorovat elektronovým mikroskopem na krystalu.



Obr. 3 Závislost mezi deformací a působícím napětím u monokrystalu krychlové, plošně centrované soustavy.

Obr. 4 Závislost skluzového napětí na prodloužení u různých kovů.



Na obr. 3 vidíme, že k tomu, aby deformace mohla plynule pokračovat, musí neustále růst napětí (nejméně v části BC). To ilustruje i obr. 4, kde můžeme sledovat vzrůst skluzového napětí v závislosti na deformaci. Vidíme tedy, že hodnota skluzového napětí není konstantní, ale neustále roste, čili, že v materiálu se musejí objevovat překážky, bránící pohybu dislokací.

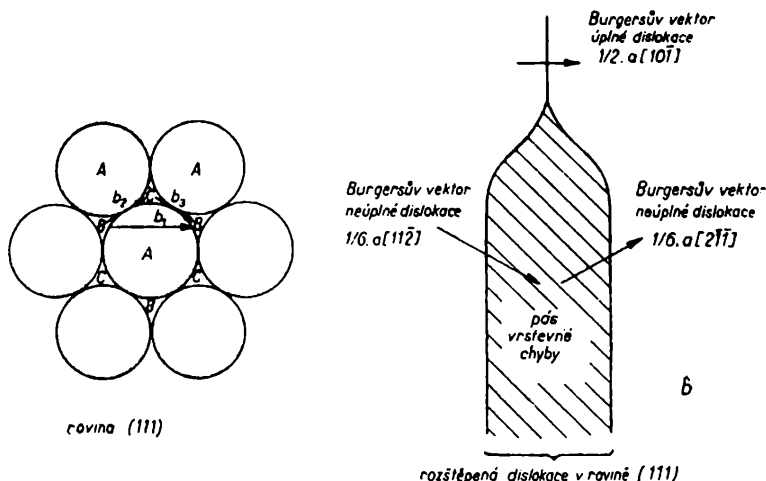
## Faktory, ovlivňující pohyb dislokací

Nyní probereme jednotlivé strukturní překážky, které se uplatňují během plastické deformace a jsou tedy odpovědné za zpevnění materiálu.

### 1. Vrstevné chyby

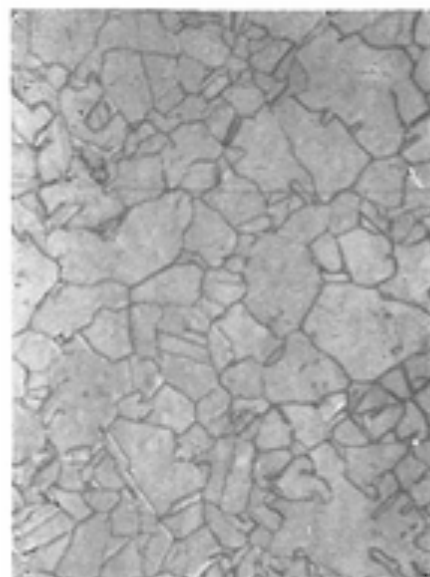
Pojem vrstevné chyby je velmi důležitý a k jeho osvětlení se vrátíme k popisu vzniku krystalové mřížky. Na obr. 5a je písmenem *A* označena vrstva atomů roviny (111) v krychlové, plošně centrované mřížce. Vidíme, že mezi dotýkajícími se atomy vznikají dvě rovnocenné polohy *B* a *C*. Jestliže druhá vrstva (111) zaplní např. polohy *B*, nemůže již dojít k zaplnění poloh *C*, poněvadž na to není dost místa. Skluz vrstvy atomů z *B* do *B* se může dít přímo, nebo přechodem *B*, *C*, *B*. Jestliže se volí tato druhá cesta, dochází k chybnému kladení rovin, vzniká tzv. vrstevná chyba.

Badatel Shockley ukázal, že většina dislokací neexistuje jako jednoduché dislokace, o kterých jsme mluvili v předchozím článku, ale jako tzv. dislokace rozšířené. Takováto dislokace je tvořena dvěma neúplnými dislokacemi (s Burgersovým vektorem menším než mřížková konstanta), které jsou spojeny pásem vrstevné chyby (viz obr. 5b).<sup>1)</sup>



Obr. 5a. Znázornění skluzu v krychlové, plošně centrované soustavě v rovině (111).

Obr. 5b ukazuje rozštěpení dislokace na dvě dislokace neúplné, spojené pásem vrstevné chyby.



Obr. 6 Nikl žíhaný 30 minut na 700 °C. Zvětšení 500 ×.

<sup>1)</sup> Na obr. 5b jsou uvedeny hodnoty Burgersových vektorů těchto neúplných dislokací. V hranatých závorkách jsou směry skluzu a písmeno *a* značí meziatomovou vzdálenost.

Důležité je, že má-li dojít k protínání dvou dislokací jak jsme o něm mluvili, musí se tato rozšířená dislokace zaškrtnit, což vyžaduje jistou energii. Protínání rozšířených dislokací je tudíž obtížnější než protínání úplných dislokací, což se uplatňuje při zpevnění.

Dá se ukázat, že čím větší je energie této vrstevné chyby (je to konstanta pro daný materiál), tím menší je šířka pásu na obr. 5b. U kovů s vysokou energií vrstevných chyb (hliník, nikl), je toto rozšíření 2–3 meziatomových vzdáleností, kdežto u kovů s nízkou energií vrstevných chyb (nerez ocel,  $\alpha$ -mosaz) je to třeba 10 meziatomových vzdáleností.

## 2. *Vznik zakotvených dislokací*

Popis vzniku těchto útvarů je již složitý. Omezíme se proto na konstatování, že při protínání vhodně orientovaných dislokací mohou vznikat silně zakotvené útvary, např. tzv. Lomerovy-Cottrellovy dislokace, které pak představují účinnou překážku pro šíření dislokací.

## 3. *Existence napěťových polí*

Jak jsme již řekli, dislokace ve svém okolí vytváří napěťová pole a jestliže je těchto dislokací více (tzv. les dislokací, viz dále), je toto napětí tak velké, že zabrání nebo alespoň silně ztíží pohyb dislokace ve skluzové rovině.

## 4. *Hranice zrn<sup>2)</sup>*

Hranice představují silnou překážku pro skluz, a transmisní elektronovou mikroskopií můžeme mnohdy pozorovat dislokace nahromaděné před nimi.

5. Pokud materiál není enormně čistý, uplatňují se ještě vliv cizích atomů a precipitátů (tj. částic, které mají odlišné chemické složení a odlišnou krystalografickou mřížku než okolní hmota), které brání skluzovému pohybu dislokací a zvyšují tudíž hodnotu skluzového napětí. (Pokračování)

---

<sup>2)</sup> Zrnem nazýváme část vzorku, která má stejnou krystalografickou orientaci, tj. jednotlivé směry a roviny bez přerušení pokračují v celém objemu tohoto zrna. V praxi je však možno připravit velké krystaly (nazývané monokrystaly) jen speciálními postupy. Normálně se vzorek skládá z mnoha zrn (od velikosti setin milimetru do několika milimetrů), které jsou odděleny hranicemi zrn, na kterých se skokem mění krystalografická orientace obou sousedních mřížek. Úhel jejich styku bývá v desítkách stupňů. Příklad toho, jak se jeví polykrystalický vzorek pod optickým mikroskopem, je na obr. 6, kde vidíme strukturu niklu po žíhání na 700 °C při zvětšení 500 $\times$ .

# Výpočet potenciálu pole bodového náboje

ZDENĚK PULPÁN, SVVŠ Hradec Králové

Výpočet potenciálu pole bodového náboje o velikosti  $Q$  je možno provést nejjednodušší pomocí integrálního počtu. Větší námahu nám dá postup, kde se vyhneme tomuto způsobu výpočtu.

Z aditivní vlastnosti veličiny práce plyne, že celkovou práci  $A$  lze počítat jako součet elementárních prací  $\Delta A$ .

Napětí mezi dvěma místy, kde je k přenesení náboje  $Q'$  potřebí práce  $\Delta A$  je dáno

$$\Delta U = \frac{\Delta A}{Q'}.$$

V elektrickém poli nabitého tělesa o nepatrném rozměru práce nezávisí na tvaru dráhy, po níž se náboj přenáší, ale jen na rozdíl vzdáleností obou míst od místa náboje  $Q$ , který vytváří pole o intenzitě

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

Označme tento rozdíl obou vzdáleností  $\Delta r$  (jedno místo je tedy ve vzdálenosti  $r$ , druhé ve vzdálenosti  $r + \Delta r$  od náboje  $Q$ ). Pomocí  $E$  se dá vyjádřit  $\Delta U$  takto

$$\Delta U = \bar{E} \cdot \Delta r, \quad (2)$$

kde  $\bar{E}$  je průměrná intenzita elektrického pole ve dvou místech vzdálených  $r$  a  $r + \Delta r$  od náboje  $Q$  a  $\Delta r$  je tak malé číslo, že je možné  $(\Delta r)^2$  vůči  $\Delta r$  zanedbat. Z tohoto předpokladu počítejme  $E$  takto

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r + \Delta r)^2} \right) \right]. \quad (3)$$

Výraz v lomené závorce označme  $y$  a upravujme

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r + \Delta r)^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{(r + \Delta r)^2 + r^2}{r^2 (r + \Delta r)^2} = \frac{1}{2} \frac{2r^2 + 2r \Delta r}{[r(r + \Delta r)]^2} = \\ &= \frac{r^2 + r \Delta r}{(r^2 + r \Delta r)^2} = \frac{1}{r^2 + r \Delta r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Vynásobme (4) činitelem  $\Delta r$  a zjednodušíme

$$\begin{aligned}\bar{y} \cdot \Delta r &= \frac{\Delta r}{r^2 + r \Delta r} = \frac{\Delta r + r - r}{r(r + \Delta r)} = \frac{1}{r} - \frac{r}{r(r + \Delta r)} = \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r}\end{aligned}\quad (5)$$

Dosaďme nyní to, co jsme vyjádřili v (5) a (4) do (2)

$$\begin{aligned}\Delta U &= E \cdot \Delta r, \\ \Delta U &= \frac{Q}{4\pi\epsilon'} \cdot \frac{1}{r^2 + r \Delta r} \cdot \Delta r = \frac{Q}{4\pi\epsilon'} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon'} \cdot \frac{1}{r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon'} \cdot \frac{1}{r + \Delta r}.\end{aligned}\quad (6)$$

V posledním výrazu z (6) již máme rozdíl, kde každý z členů rozdílu závisí postupně na  $r$  a  $r + \Delta r$ . Dá se tedy (6) přepsat na tvar

$$\Delta U = V(r) - V(r + \Delta r),$$

kde

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon'} \cdot \frac{1}{r}.$$

Napětí mezi dvěma místy, vzdálenými od náboje  $Q$  o délky  $r_1$ , resp.  $r_2$  označme

$$\begin{aligned}U(r_1, r_2) &= V(r_1) - V(r_1 + \Delta r) + V(r_1 + \Delta r) - \\ &- V(r_1 + 2\Delta r) + \quad + V(r_2) = V(r_1) - V(r_2).\end{aligned}$$

Položíme-li  $V(r) = 0$  pro  $r \rightarrow \infty$  značí výraz  $V(r)$  potenciál náboje  $Q$  ve vzdálenosti  $r$  od náboje.

Uvedený postup lze znázornit v grafu závislosti tvaru

$$y = \frac{1}{r^2},$$

kde  $r$  je proměnná. Hodnota  $\bar{y}$  je příslušná průměrné hodnotě ze dvou hodnot funkce

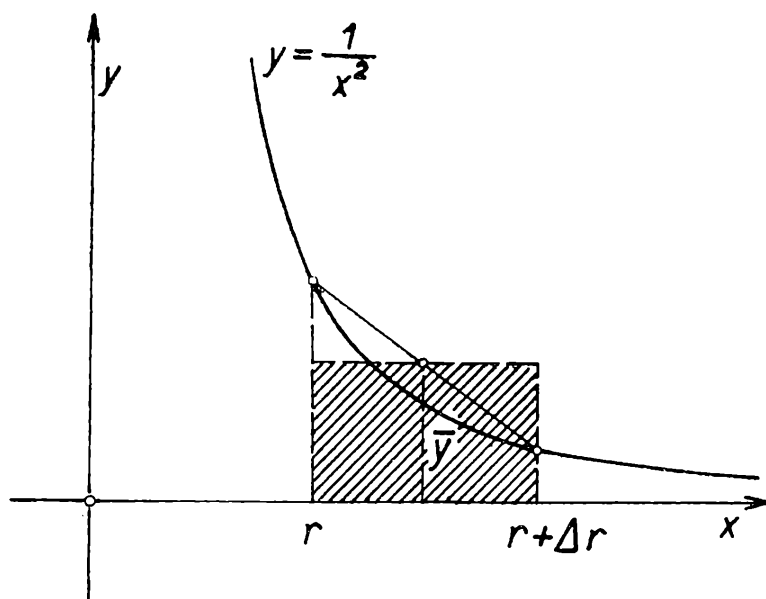
$$y = \frac{1}{r^2},$$

pro hodnoty argumentu  $r$  a  $r + \Delta r$  — viz (4).

Při  $\Delta r \rightarrow 0$  je velikost plochy, omezené grafem funkce

$$y = \frac{1}{x^2},$$

přímkami procházejícími na ose  $x$  body o souřadnicích



Obr. 1

$$[r; 0] \text{ a } [r + \Delta r; 0]$$

a rovnoběžnými s osou  $y$ , a osou  $x$ , úměrná hodnotě blížící se hodnotě výrazu tvaru (5) — (viz obrázek).

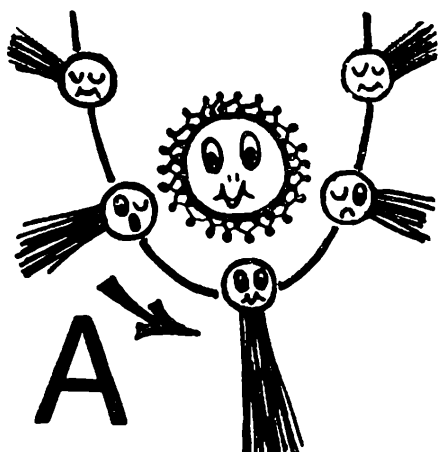
Hodnota výrazu  $\Delta U$  je tedy při „dostatečně“ malém  $\Delta r$  úměrná velikosti vyčárkované plochy v grafu. Z grafu je přímo vidět, že  $\Delta U$  při zvětšujícím se  $r$  klesá tak, že pro  $r \rightarrow \infty$  se  $\Delta U$  (při stejných  $\Delta r$ ) blíží 0.

Z tohoto důvodu je výhodné volit  $V = 0$  pro bod nekonečně vzdálený. Velikost plochy pod tímto grafem měřená z nekonečna do místa vzdáleného  $r$  od náboje  $Q$ , je pak úměrná velikosti potenciálu v tomto místě (je to součet ploch obdélníků o stranách  $\Delta r$  a  $\bar{y}$  příslušných hodnotám  $r$ ).

\*

Pozn.: Zde jsme použili grafu až při interpretaci jednotlivých částí postupu výpočtu. Je možné ale i přímo vyjít z grafu a na jeho základě provést uvedený výpočet. Podobný postup provedeme i pro gravitační potenciál.





## Spektroskopické dvojhvězdy

Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

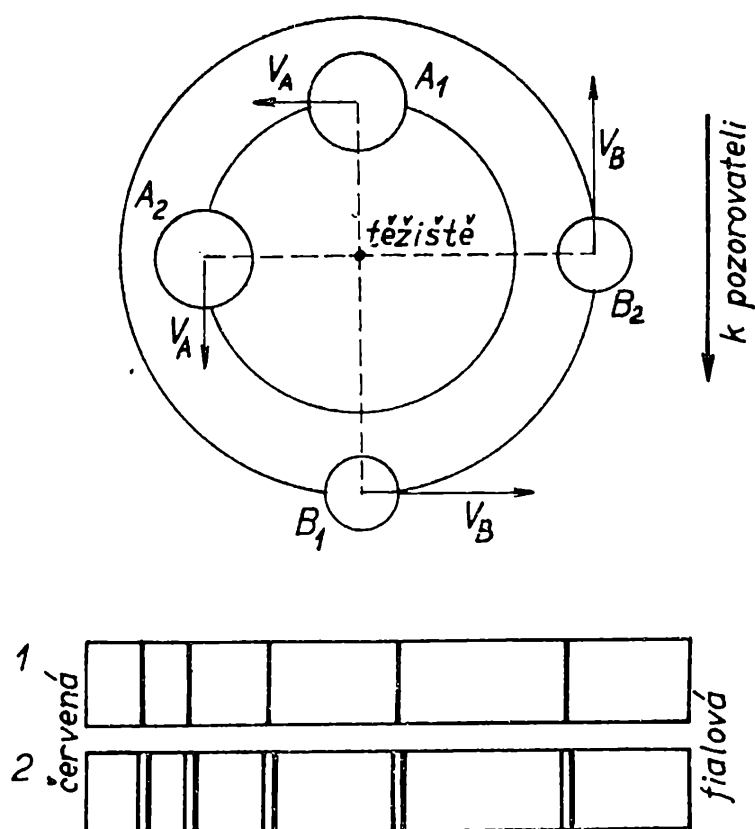
Kromě vizuálních dvojhvězd<sup>1)</sup> a zákrytových proměnných hvězd<sup>2)</sup> existují ještě spektroskopické dvojhvězdy. Podobně jako u zákrytových dvojhvězd jsou složky spektroskopických dvojhvězd tak blízko u sebe (anebo v tak velké vzdálenosti od nás), že je ani v největších dalekohledech nelze od sebe rozlišit. Na rozdíl od zákrytových proměnných hvězd nedochází obvykle k změnám celkové hvězdné velikosti (s výjimkou případů, kdy spektroskopická dvojhvězda je současně zákrytovou dvojhvězdou) a existenci dvou hvězd, obíhajících kolem společného těžiště, zjistíme z periodických posuvů čar ve spektru hvězdy.

Výzkum spektroskopických dvojhvězd začal až koncem minulého století, kdy E. C. Pickering objevil, že u známé hvězdy *Mizar* v souhvězdí Velké medvědice ( $\xi$  Ursae majoris) nastávají periodická zdvojení spektrálních čar v periodě 20,5 dne. V současné době je známo několik set spektroskopických dvojhvězd. Dráhy spektroskopických dvojhvězd mají poměrně malou výstřednost. 50 procent známých soustav má výstřednost menší než 0,1.

Zdvojení spektrálních čar vysvětlíme na obr. 1. V horní části obrázku jsou znázorněny složky *A* a *B* spektroskopické dvojhvězdy, v dolní části její spektrum. V okamžiku, kdy hvězdy jsou v polohách  $A_1$  a  $B_1$ , jsou vektory rychlosti kolmé k zornému paprsku a spektrální čáry splývají.

<sup>1)</sup> Viz články *Pozorujeme dvojhvězdy*, *Rozhledy MF*, 47, 1968/69, č. 9, s. 429 a *Hmotnosti dvojhvězd*, *Rozhledy MF*, 47, 1968/69, č. 10, s. 476.

<sup>2)</sup> *Rozhledy MF*, 48, 1969/70, č. 6, str. 266.



Obr. 1. Zdvojení čar ve spektru dvojhvězdy (1 - spektrum při polohách hvězd  $A_1, B_1$ ; 2 - spektrum při polohách hvězd  $A_2, B_2$ ).

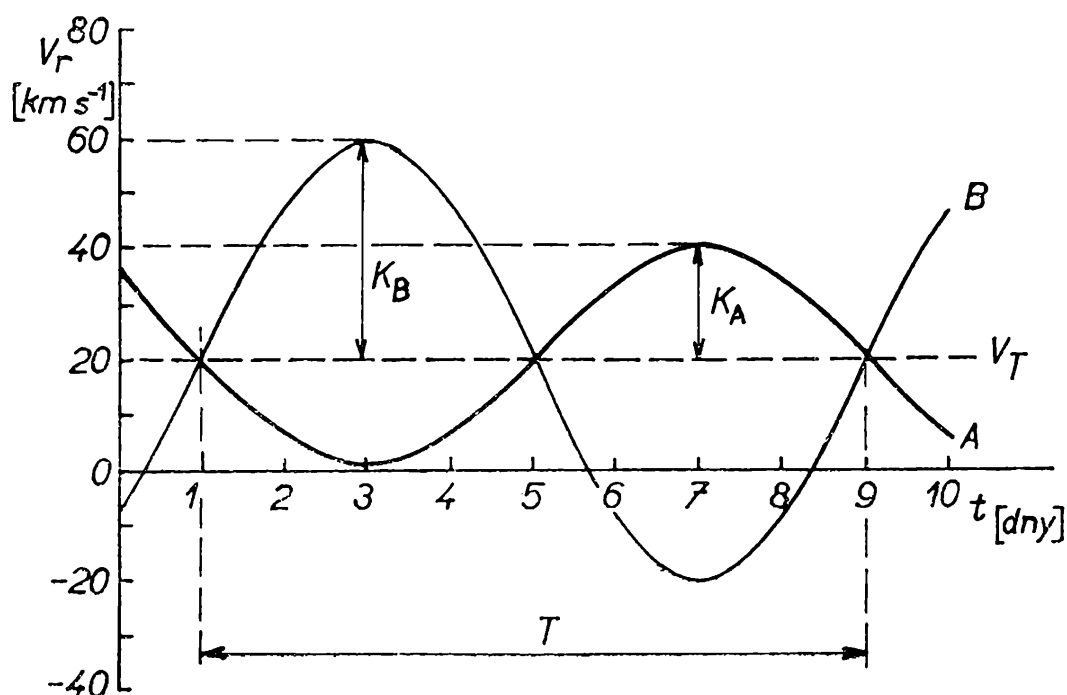
Naproti tomu v polohách  $A_2$  a  $B_2$  se složka  $A$  přibližuje k pozorovateli a složka  $B$  se od něj vzdaluje. Ve spektru hvězdy se tento pohyb projeví tím, že spektrální čáry patřící k hvězdě  $A$  se posunou k fialovému konci spektra a čáry od hvězdy  $B$  se posunou k červenému konci spektra. Podle Ch. Dopplera souvisí změna  $\Delta\lambda$  vlnové délky  $\lambda$  záření s radiální rychlostí  $V_r$  zdroje vztahem

$$\Delta\lambda = \frac{V_r}{c} \lambda$$

kde  $c$  je rychlost šíření světla. Změříme-li posunutí spektrálních čar vzhledem k jejich původní poloze, můžeme podle výše uvedeného vzorce určit radiální rychlosti<sup>3)</sup> obou složek.

Skutečné zdvojení spektrálních čar pozorujeme jen asi u jedné pětiny spektroskopických dvojhvězd. Předpokladem totiž je, aby obě hvězdy byly přibližně stejně jasné. U ostatních spektroskopických dvojhvězd, kdy jedna složka převyšuje svou jasností složku druhou, pozorujeme pouze periodické změny polohy spektrálních čar této jasnější složky.

<sup>3)</sup> Definici radiální rychlosti viz učebnici Fyziky pro 3. ročník SVVŠ, 1 vyd., SPN, Praha 1965, s. 210.



Obr. 2. Křivka radiálních rychlostí spektroskopické dvojhvězdy s kruhovou drahou. ( $T$  je oběžná doba,  $V_T$  radiální rychlost těžiště soustavy.  $K_B$ ,  $K_A$  jsou tzv. poloviční amplitudy radiálních rychlostí složek.)

Znázorníme-li graficky velikosti radiálních rychlostí složek v závislosti na čase, dostaneme tzv. *křivku radiálních rychlostí*. Z této křivky můžeme stanovit některé parametry soustavy, jako tvar dráhy, oběžnou dobu, radiální rychlost těžiště soustavy, poměr hmotností složek a v případě, že známe také sklon dráhy, celkovou hmotnost soustavy. (Sklon dráhy ze spektroskopických měření nelze stanovit. Známe jej pouze u těch spektroskopických dvojhvězd, které jsou současně zákrytovými dvojhvězdami.)

Na obr. 2 je znázorněna křivka radiálních rychlostí spektroskopické dvojhvězdy s kruhovou drahou. Na svislé ose je vynesena radiální rychlost  $V_r$  v  $\text{km s}^{-1}$ , na vodorovné ose čas ve dnech. Z obr. 2 je patrné, že oběžná doba je 8,0 dne, obě křivky se protínají u rychlosti  $+20 \text{ km s}^{-1}$ , což odpovídá rychlosti  $V_T$  těžiště soustavy, dvojhvězda se od nás vzdaluje touto rychlostí. Amplitudy rychlostí jsou v poměru 2 : 1, tzn., že složka A má hmotnost dvakrát větší než složka B.

Výzkum spektroskopických dvojhvězd ukázal, že oběžné doby  $T$  jsou nejčastěji v intervalu (2 až 50) dnů. Nejkratší oběžnou dobu má hvězda W Ursae majoris,  $T = \frac{1}{3}$  dne. Radiální rychlosti jsou v mezích od  $2 \text{ km s}^{-1}$  (nejnižší možná mez pozorování) do  $300 \text{ km s}^{-1}$ .

## 0 aplikacích matematiky

Doc. VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, Praha

V knize *Dialoge über Mathematik* vydané r. 1967 v Berlíně (překlad maďarského originálu) hovoří autor Alfréd Rényi formou dialogu o tom, co je matematika, o aplikacích matematiky a o řeči knihy přírody. Rozhovor o aplikacích matematiky je vložen do úst Archimédovi a Hieronovi.

Ještě dříve než shrneme podstatné části a myšlenky úvah řekněme, že pojem aplikace matematiky nemá jednotný obsah. Mluvím-li o aplikaci ve fyzice na odborné úrovni, představuji si, že fyzik použil ve svém bádání k důkazu vět fyziky znalostí a hlavně metod matematiky. Tak např. dokázal určitý fyzikální zákon použitím matematické analýzy. Řeší-li žák úlohu z mechaniky a použije-li při úpravě vzorce obvyklých vět a obrátů, které probíral v matematice, teoretici pak mluví o službě matematiky fyzice.

Ještě dříve než přijdeme k výkladu druhé kapitoly uvedené knihy, uvědomme si, že staří Řekové pěstovali jak v Aténách, tak i v Alexandrii matematiku hlavně pro její krásu a hloubku ke tříbení myšlení. Thales a Archimédes byli snad jedni z prvních, kteří ukázali užitečnost matematické teorie pro praxi. Zvláště Archimédes ukázal nové cesty, kterými je možno objevovat a dokazovat neznámé vztahy v matematice. Je zajímavé, že staří Řekové se např. báli a také nedovedli zachytit matematicky pohyb, ačkoli byli předchůdci matematických disciplín a metod, které se uplatnily teprve v 17. stol. našeho věku.

Listujeme-li v historii matematiky, musíme si všimnout, že byli stateční teoretici, zvláště fyzici, kteří nedovolili, aby praxe zneužila jejich teoretických úspěchů pro zkázu lidstva. Z novější historie připomeňme projevy Alberta Einsteina o zneužití teoretických objevů k výrobě atomové pumy, které můžeme číst na str. 143 a na dalších stránkách knihy A. Einstein: *Jak vidím svět*, edice *Otázky a názory*, sv. 35, roč. 1966.

A. Rényi uvádí ve své knize v rozhovoru Archiméda s Hieronem, jak Archimédes odmítal dát k dispozici výpočty, které byly podkladem konstrukcí obranných opatření města Syrakus. Myšlenky z aplikací

matematiky uvádíme zkráceně a nikoli formou autorova dialogu. Jde v ní pochopitelně o teorii známou v době Archimédově (287 až 212 p. n. l.).

Abstraktní matematiku nemůžeme oddělit od tzv. matematiky užité. Nejsou totiž matematiky „čistá“ a „aplikovaná“. Aplikovat matematiku může jen matematik, který má fantazii. Dostaneme-li určitý problém ze života, snažíme se ho matematizovat, tj. vybrat z něho principy, abstraktní jádro a vyjádřit je matematicky. Pak převádíme danou úlohu na úlohu matematickou. K témuž praktickému problému bývá k dispozici více matematických modelů, z nichž je nutné vybrat ten nejvhodnější. To je takový model, který odpovídá nejlépe dané situaci, neboť nemůže ji nikdy úplně krýt. Matematický model nesmí být příliš komplikovaný, aby mohl být přístupný matematickému řešení.

Je zajímavé, že přesné odpovídání skutečné situace jejímu matematickému modelu a jednoduchost jsou zpravidla sobě si odporující požadavky. Vzájemně je vyvážit a uvést do uspokojivého souladu není nikdy jednoduché. Musíme totiž přiblížit zvolený model skutečné situaci právě ve všech vztazích, které jsou pro zvolený cíl důležité a zároveň oddělit, co je vedlejší. Matematický model nemusí být v každém ohledu podoben skutečné situaci. To není konečně ani možné. Stačí, když se dané skutečnosti přibližuje v tom vztahu, který je pro daný úkol důležitý.

Proto může být tentýž model využit pro rozdílné situace. Podíváme-li se na jednoduché příklady, byla např. parabola zvolena Archimédem jako model pro obranné stroje Syrakus, neboť dráha střel je přibližně parabolická. Při výpočtu, jak hluboko se potopí loď pod váhou svého nákladu, použil Archimédes opět paraboly, i když průřez lodi nebyl přímo parabolický. Křivka přiléhavější průřezu by předpokládala příliš náročný výpočet pro přesnější výsledky. Přesto získané výsledky výpočtu jsou cenné pro konstrukci lodi, která by dobře odolávala vlnám a větru.

Pak může být v mnohých případech hrubý matematický model velmi užitečný, jestliže ovšem podává aspoň kvalitativně správný výsledek. Ten je důležitější než jen správný výsledek kvantitativní. Zkušenost nutí k tomu, aby se právě zde promýšlely logicky všechny možnosti od začátku až do konce, a aby se jasně definovaly použité pojmy bez špatného nebo mylného porozumění, aby se bral zřetel na všechny faktory, které by v dané situaci mohly hrát důležitější úlohu a které na konec budou rozhodující.

Vede-li zvolený matematický model k výsledkům, které nejsou v souladu se skutečnou situací, znamená to, že jsme při jeho volbě zapomněli na nějakou důležitou okolnost. Je přirozené, že musíme model změnit.

Zavržený model může být přesto užitečný právě k tomu, aby přinesl hlubší porozumění sledované situace. Je to něco podobného, jako když je porážka ve válce v podstatě někdy cennější, než vítězství, neboť ukazuje, jak musíme pro budoucno měnit strategii, výzbroj, abychom mohli později v závažnějších situacích zvítězit.

Vraťme se opět k jedné zbrani Archimédově, k parabolickému zrcadlu. Pro odpověď na otázku, jak zrcadlo vybrousit, musíme si opatřit znalosti vlastností hmoty zrcadla. A tak, i když je matematické řešení praktického problému v principu jednoduché, je v jednotlivostech složité.

Chceme-li aplikovat matematiku, musíme dobře znát její teorii. Chce-li matematik jít vlastní cestou a nechce-li opakovat to, co bylo užito jiným matematikem v podobných situacích, musí být tvořivým odborníkem. Ale i obráceně, může být zaměstnávání se aplikacemi velmi užitečné i pro teorii matematiky. Ukažme opět jednoduchý příklad ze starořecké matematiky. Výsledky, ke kterým se došlo v mechanice o těžišti tělesa, pomohly nejen při uskutečňování původního cíle, tj. při řešení určitého problému lodí, ale vedly k objevení nebo k důkazu nových vět v geometrii. Archimédes sám vytvořil tehdy ve 3. stol. p. n. l. zvláštní metodu, která vyplynula z úvah o těžišti prováděných v mechanice. Metoda má dnes hlavně objevitelský (heuristický) charakter a nedává žádné přesné důkazy. Přesto je v principu ukázkou vzájemného vztahu mezi teorií matematiky a mechaniky a úspěchů z něho mají obě disciplíny. Později se podařilo Archimédovi provést důkazy získaných vět užitím jen matematiky.

V takových jednoduchých, dnes již historických problémech, je lehčí nalézt k větě přesný důkaz, jestliže si opatříme k matematickému problému prostřednictvím mechaniky jistou orientaci o problému. Spojení obou zřetelů můžeme použít ke kontrole výsledků.

Poněvadž se matematický model skutečnosti jen přibližuje, musíme dbát o to, aby se jejich rozdíly nezvětšovaly tím, že řešíme praktický problém, představovaný modelem matematickým, jen matematicky. Jestliže dokazujeme např. v teorii fyziky určitou větu, řídíme se při svých úvahách pravidly, která platí pro dokazování v matematice.

Určujeme-li přibližnost výsledku, nebo lépe rozdíl mezi skutečností a vypočteným výsledkem matematickým, užíváme nerovnosti a nerovnic. Při důkazech o správnosti výpočtu těchto odchylek — tolerancí — se řídíme týmiž úpravami a pravidly, jako při důkazech o správnosti řešení rovnice. Stejně přesnou metodou jako Euklidovy věty dokazoval Archimédes přibližnost obsahu kruhu. Můžeme proto říci, že přesný důkaz a logika jsou nepostradatelné, i při aproximacích.

Archimédes přišel užitím metody z mechaniky ke známým, na první pohled pozoruhodným výsledkům, např., že objem rovnostranného rotačního válce je přesně 1,5krát větší, než objem koule o průměru rov-

němu průměru podstavy válce. Tento výsledek považoval za tak závažný, že si vymínil, aby byl zvěčněn na pomníku na jeho hrobě. To proto, že byl přesvědčen, že metoda, kterou byl tento výsledek získán, je závažnější a důležitější, než samotný výsledný konec.

Jsou známá slova, která autor knihy vkládá do úst Archimédovi: „Gib mir einen festen Punkt, an welchem ich ansetzen kann und ich hebe die Welt aus den Angeln.“ Takový bod jistě neexistuje, ale v matematice ho představují axiomy a logika. Proto jsou podle dalších slov Archimédových přesný důkaz a přísná logika nepostradatelné pro užití matematiky.

Aby ukázal tehdejší názor na užitečnost matematiky, uvádí autor známou anekdotu o Euklidovi a o užitečnosti matematiky, která nebyla tehdy uznávána jako průkazná pro potřebu studovat matematiku, neboť matematika je tak krásná, že stačí za to ji studovat pro její krásu a pravdivost. Tato anekdota vypráví: Jeden z žáků Euklida se ptal svého učitele: „Jaký užitek budu mít z toho, že se naučím všem těmto teoriím?“ Euklid místo odpovědi poručil svému otrokovi: „Dej tomuto muži obolus, neboť chce mít z toho, čemu se učí, užitek.“ Tím chtěl naznačit, že jen ten má ze studia matematiky užitek, kdo dokáže pohlédnout do jejího tajemství, kdo se nadchne její krásou, kdo žije jen snahou po vědění. Měli bychom se učit od nepřítele, abychom s ním mohli bojovat s větším úspěchem.

A ještě ke knize. V jejím doslovu autor píše, že zájem o matematiku roste. Velmi mnoho lidí nematematiků chce vědět, co je vlastně matematika, odkud plynou zvláštnosti její metody a co dává ostatním vědám. Autor říká, že zjistil, že o principiálních otázkách matematických, o aplikaci matematiky jsou rozšiřována mylná vyprávění, a to nejen mezi lidmi, kteří mají daleko k matematice, ale i mezi těmi, kteří jsou ve styku s matematikou. Proto je prý téma, o kterém se v knize hovoří, aktuální.

Jednotlivé kapitoly knihy byly přednášeny v Maďarsku, v Paříži, v Edmontonu, v Torontu a byly uveřejňovány v časopisech států těchto měst. Autor se omezoval povětšinou na problémy řešené v době autorů dialogu, v našem případě Archiméda a Hierona. I když zachovával historická data a skutečnosti, neklade si za povinnost přísně se jich držet. Jde tedy spíše o popularizování v dobrém slova smyslu se zachováváním hlavních ideí a myšlenek účastníků dialogu.



## NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM

### Pro nejmladší matematiky

12. V městečku M, v jehož blízkosti se stýkaly hranice čtyř států, se konaly velké trhy, kterých se zúčastnili kupci všech čtyř států. Potíž byla však v tom, že v jednotlivých státech počítali v různých číselných soustavách a tak se stalo, že čtyři prodávající, každý z jiného státu, měli na tabulkách napsáno:

2 kopy vajec 162 grošů,  
2 kopy vajec 114 grošů,  
2 kopy vajec 96 grošů,  
2 kopy vajec 79 grošů.

Každá cena je napsána v jiné číselné soustavě, ale jinak představuje jednu a tutéž hodnotu. Dovedli byste říci v jakých číselných soustavách jsou jednotlivé ceny napsány? S. H.

13. Při letu na trati dlouhé 6000 km letělo letadlo rychlostí 720 km za hodinu. Potom se povětrnostní podmínky zlepšily natolik, že pilot mohl zvýšit rychlost na 840 km za hodinu. Za několik hodin na to přistál. Kolik hodin letěl rychlostí 720 km za hodinu a kolik hodin rychlostí 840 km za hodinu. (Počty hodin jsou vyjádřeny přirozenými čísly.) S. H.

14. Šel jsem na koupaliště pěšky. Soused vyjel za mnou na kole o 5 minut později a byl na koupališti o 5 minut dříve než já. Na kole se pohyboval dvakrát rychleji než já pěšky. Jak dlouho jsem šel na koupaliště? S. H.



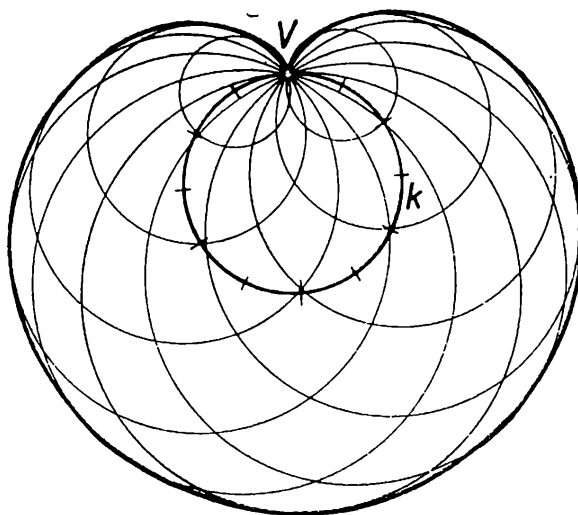
# MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY



## Obálky soustav kružnic

V minulém čísle Rozhledů jste se mohli přesvědčit, jak lze pomocí přímek „opříst“ ladné křivky. Neméně zajímavé křivky získáte jako obálky soustav kružnic, jejichž středy leží na známých čarách. Podívejte se na obrázek, kde je znázorněna soustava kružnic, které procházejí bodem  $V$  a jejichž středy leží na „ostnaté“ kružnici  $k$ . Obálka sestrojené soustavy kružnic je dosti výrazná křivka srdčitého tvaru, proto se nazývá *kardioida*.

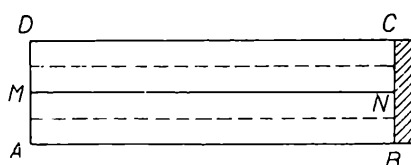
Obdobné konstrukce můžete provádět sami s libovolnými křivkami jako nositelkami středů všech kružnic soustavy. Budete mile překvapeni, zvolíte-li za nositelku středů rovnoosou hyperbolu (např. graf funkce  $y = \frac{3}{x}$ , a za bod  $V$  zvolíte střed hyperboly (počátek souřadnicového systému v daném případě). Křivka, kterou byste měli získat, sama sebe kolmo protíná, nazývá se Bernoulliova lemniskáta. Ať se vám podaří!



Obr. 1

# Záhady Möbiova listu

Zmatlíkův kolega Štoural si přečetl něco o Möbiově listu a zamlul si, že vyzkouší kamarádovu představivost. Přinesl obdélníkový proužek papíru, lepidlo a nůžky. Obdélník byl asi 2 cm široký a asi 15 cm dlouhý. Štoural na něm vyznačil podélnou osu  $MN$  a osy obou pásů vytvořených pomocí ní (viz obrázek). Pak velel Zmatlíkovi, aby pásek jednou přetočil, a to tak, že bude moci přiložit vrchol  $A$  na bod  $C$  a vrchol  $D$  na bod  $B$ . V takové poloze měl pásek slepit a získat tak Möbiův list (šrafovaná část pásku slouží k nanesení lepidla).



Obr. 1

Tepřve pak přišla vlastní zkouška Zmatlíkovy představivosti. Měl říci předem, co dostane, když rozstříhne Möbiův list podle osy označené původně  $MN$ . Zmatlík hádal, že od sebe oddělí dva Möbiovy listy. Zmýlil se však. Získal jeden dvakrát překroucený Möbiův list. Pak měl odhadnout, co dostane po rozstřížení tohoto listu podle osy na něm vyznačené. Tentokrát očekával, že získá čtyřikrát překroucený Möbiův list, ale chyba lávky.

Zkuste si sami předem odhadnout, co může vyjít při popsané manipulaci s Möbiovým listem. Pak se přesvědčte na hmotném modelu, co opravdu dostanete. Provedete tak svůj vlastní topologický experiment, který je zcela přesvědčující. Teoretické zdůvodnění a předvídání je ovšem mnohem náročnější jako vůbec celá topologie.

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁNÍ)

### I

|                         |                                                             |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------|
| icosaèdre <i>m</i>      | dvacetistěn                                                 |
| identifier              | ztotožnit                                                   |
| identique               | identický, totožný                                          |
| identiquement           | identicky                                                   |
| identité <i>ž</i>       | identita                                                    |
| illimité, <i>e</i>      | neomezený                                                   |
| illustration            | ilustrace, obrázek                                          |
| illustrer               | ilustrovat, znázornit                                       |
| image <i>ž</i>          | obraz, obrázek                                              |
| imaginaire              | imaginární                                                  |
| immobile                | nepohyblivý                                                 |
| impair, <i>e</i>        | lichý                                                       |
| implication <i>ž</i>    | implikace                                                   |
| implicite               | implicitní                                                  |
| impliquer               | implikovat                                                  |
| impossible              | nemožný                                                     |
| impropre                | nevlastní                                                   |
| inaccessible            | nepřístupný                                                 |
| incidence <i>ž</i>      | incidence                                                   |
| angle d'incidence       | úhel dopadu                                                 |
| inclus, <i>e</i>        | obsažen                                                     |
| A inclus dans B         | A je částí B (o množinách)                                  |
| inclusion <i>ž</i>      | inklúze                                                     |
| incommensurable         | nesouměřitelný                                              |
| incompatible            | neslučitelný                                                |
| équations incompatibles | rovnice, které nemají žádné řešení<br>(které jsou ve sporu) |
| inconnu, <i>e</i>       | neznámý                                                     |
| inconnue <i>ž</i>       | neznámá                                                     |
| indécomposable          | nerozložitelný                                              |
| indéfini, <i>e</i>      | neurčitý, indefinitní                                       |
| indépendance <i>ž</i>   | nezávislost                                                 |
| indépendant, <i>e</i>   | nezávislý                                                   |

indéterminé, e  
indexe *m*

indice *m*  
inégal, e, aux  
inégalité *ž*  
inertie *ž*  
inférieur, e  
infini, o  
infini *m*  
    point *m* à l'infini  
    droite *ž* de l'infini  
infiniment  
    infiniment petit  
infinitésimal, e, aux  
initial, e, aux  
injectif, ive  
    application *ž* injective  
injection *ž*  
injection *✓*

inscrire  
inscrit, e  
instantané, e  
intégral, e, aux  
intégrale *ž*  
intégration *ž*  
intégrer  
intercaler  
intercepté, e  
    arc *m* intercepté par les côtés de  
        l'angle au centre  
intercepter  
intérieur, e  
    point *m* intérieur à un ensemble  
interne  
interpolation *ž*  
intersection *ž*  
    point *m* d'intersection  
    droite *ž* d'intersection  
intervalle *m*  
intervertir  
intrinsèque  
invariance *ž*  
invariant, e  
invariant *m*  
inverse  
    éléments inverses  
  
    figures inverses  
  
    nombres inverses l'un de l'autre  
inverse *m*  
    inverse d'un nombre  
inversion *ž*

neurčený, neurčitý  
ukazovák, abecední seznam na konci  
    knihy  
index  
nestejný  
nerovnost  
setrvačnost  
dolní  
nekonečný  
nekonečno  
    bod v nekonečnu  
    přímka v nekonečnu  
nekonečně  
    nekonečně malá (veličina)  
infinitesimální  
počáteční, výchozí  
injektivní  
    prosté zobrazení do množiny  
    prosté zobrazení do množiny  
injektivní zobrazení (prosté zobrazení do množiny)  
  
vepsat  
vepsaný  
okamžitý  
celý, úplný, integrální  
integrál  
integrace  
integrovat  
vložit mezi ostatní  
vyřatý  
    oblouk vyřatý rameny středového  
        úhlu  
vytínat  
vnitřní  
    vnitřní bod množiny  
vnitřní  
interpolace  
průnik (množin), průsek  
    průsečík  
    průsečnice  
interval  
zaměnit  
vnitřní  
neměnnost, invariance  
invariantní  
invariant  
inverzní, opačný  
    opačné prvky (vzhledem k operaci  
        na množině)  
    útvary, které sobě odpovídají při  
        inverzi  
    čísla vzájemně inverzní  
opak  
    převrácená hodnota čísla  
inverze

# rozhledy

MATEMATICKO  
FYZIKÁLNÍ

---

10

ROČNÍK 48, 1969-1970, ČERVEN



ROČNÍK 48  
ČERVEN 1969-70

10

## MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání  
Za zásluhy o výstavbu

### VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci

### VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

### REDAKČNÍ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; zasl. učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B. Bystrica; Miloš Franek, PF UK, Bratislava; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, DrSc., ČVUT, Praha; dr. Oldřich Lepil, PU, Olomouc; Milan Marčok, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava; prof. dr. Cyril Palaj, PF-UPJŠ, Košice; Evžen Říman, CSC., ČVUT, Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci; dr. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; ing. dr. Václav Šindelář, CSC., MÚ ÚNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarík, insp. MŠ SSR, Bratislava.

### REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29.

### OBSAH

|                                                                    |                     |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Doc. V. Jozífek: Lenin a matematika (pokračování)                  | 437                 |
| A. Šarounová: Co prozrazuje negování implikací                     | 440                 |
| Fr. Novák: Mocniny prirodzených čísel                              | 443                 |
| Doc. K. Drábek, CSc.: Konstrukce s rovinou totožnosti              | 446                 |
| P. Ferko: Odvođenje kozmických rýchlostí                           | 449                 |
| P. Bartuška: Základní pojmy plastické deformace (dokončení)        | 453                 |
| Dr. J. Široký, dr. M. Široká: Čtyřicet let od objevu planety Pluta | 455                 |
| J. Kotyk: Hrst vzpomínek                                           | 458                 |
| MO                                                                 | 462                 |
| FO                                                                 | 464                 |
| Matematické a fyzikální zábavy                                     | 470                 |
| Dr. J. Pavlíček: Slovníček francouzsko-český                       | 3. a 4. str. obálky |

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: B. Šmejdivá, studující FS.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1970.

# V. I. LENIN a matematika



Doc. Vítězslav Jozífek, ČVUT, Praha

(Pokračování)

V. I. Lenin napsal ve svém pojednání „K voprosu o dialektike“ v podstatě toto (podáno ve zkráceném znění):

„Podstatou dialektiky je rozdvojení jednotného a poznání si odporujících částí. Její správnost musí být potvrzena dějinami vědy. Totožnost protikladů je často pojata jako souhrn příkladů a nikoli jako zákon poznání. Totožnost (jednota) protikladů je uznání odporujících si a vzájemně se vylučujících protikladných tendencí ve všech procesech přírody. Vývoj je bojem protikladů.

Jsou dvě základní koncepce vývoje, a to zmenšování a zvětšování jako opakování, anebo jednota protikladů. Při první koncepci je samo – pohyb hybnou silou, při druhé koncepci je pozornost věnována poznání zdroje pohybu. V dialektice je poměrný rozdíl mezi relativním a absolutním. Lidské poznání nejde přímou čarou, ale křivkou podobající se spirále...“

Potud V. I. Lenin. Tyto ideje provázejí také vývoj matematiky. Při jejich sledování můžeme vyjít z páté části Leninova „Materialismus a empiriokriticismus“ věnované filosofické krizi fyziky. Původ matematických pojmů z vnějšího světa je zřejmý, i když ho zastřel složitý vývoj matematiky. Je to patrné např. při objevu ne-eukleidovské geometrie. Podobně tomu je např. při zavedení imaginárních čísel jako protikladu k číslům reálným. Společnou syntézou obou je pojem čísla komplexního.

Podle Engelse jsou komplexní čísla výtvozem rozumu. Při řešení rovnice třetího stupně (vzorec Cardanův) bylo postupováno také dialekticky. Ukazuje se zde – jako i např. při řešení kvadratické rovnice v oboru reálných čísel – že ani dobře sestavená pravi-

dla, ani dobře volená soustava výchozích vět nechrání před výskytem logických rozporů. V těchto případech zavádí matematika nové pojmy. Jakmile se dojde v matematice k rozporu uvnitř soustavy při správné dedukci, zavedou se nové pojmy, a to dialekticky. Potom se opět stačí s dedukcí a s logikou. Pravidla zůstanou i v novém oboru, v nové soustavě. A tak nezanikají při dialektickém vzniku nových kvalit ani původní kvality, ani původní vztahy, ale dostávají jen nový obsah a význam. Při zavedení komplexních čísel byl překročen číselný obor i názor v jejich geometrické interpretaci.

Dialektické a nikoli jen logické je např. spojení dvou bodů nebo počátek diferenciálního počtu při odvozování derivace geometrickou interpretací. Jako krajní póly protikladů figurují diskrétnost a spojitost, úplná rozdělenost na jednotlivé prvky a naopak nerozdělitelnost nazvaná spojitost.

Aritmetika je první etapou matematiky, a to historickým vývojem i svou logikou. Odtud je diskrétnost prvním počátkem matematiky. Geometrie, jejíž počátky v dávnověku nedovedeme přesně odhadnout, je symbolem ryzí spojitosti. Geometrický obrazec je abstrakcí ryzí spojitosti, prostorová spojitost uvažovaná ve své formě, se zanedbáváním veškeré konkrétnosti, je holé schéma prostorové spojitosti.

Vývoj matematiky je v řadě svých podstatných etap bojem a sjednocením protikladu diskretního a spojitého. Mohlo by se zdát, že to, co zde bylo řečeno, jsou jen abstraktní, anebo dokonce filosofické termíny. Ale ony vyjadřují velmi reálné věci. Jednota diskretního čítání a spojitě rozměrnosti se objevuje při měření délky úsečky.

Bojem protikladů v historii matematiky byla teorie Demokrita, řeckého matematika z přelomu 3. a 4. století p. n. l., že obrazce jsou složeny z atomů (převodění spojitosti v diskretní) a že délka úsečky se dá vyjádřit poměrem celých čísel, které vyjadřují počet atomů obsažených v těchto úsečkách. Řekové, hlavně Eudoxos z Knidu (pravděpodobně 408 až 355 p. n. l.), spoluautor Eukleidových Základů objevili, že ze základních předpokladů a z vět geometrie plyne existence nesouměřitelných úseček, jejichž délky jsou vyjádřeny iracionálními čísly. Uvažme např. délku úhlo-



příčky čtverce. Řekové nedošli ještě k abstraktnímu pojmu iracionálního čísla, jehož přesné vyjádření čekalo na svůj objev do druhé poloviny 19. stol.

Známé paradoxy Zenonovy jsou další ukázkou protikladu spojitého a diskrétního v historii starořecké matematiky. Také základy matematické analýzy jsou ukázkou protikladu spojitého a nespojitého, a to ve vyjádření „nekonečně malé veličiny“ a nejmodernější ukázkou sjednocené algebry a geometrie je abstraktní algebra a abstraktní geometrie, topologie jako obecná nauka o spojitosti.

Závěrem můžeme říci, že vývoj matematiky je jasný obraz jednoty a boje protikladů vycházejících od základního protikladu dvou forem hmotné skutečnosti – diskretnosti a spojitosti. Je to spirálovitý pohyb matematické nauky a rozměrnosti.

Tak se potvrzují slova Leninova: Jednota protikladů je podmíněná, dočasná, přechodná, relativní. Boj vzájemně se vylučujících protikladů je absolutní, jako je absolutní vývoj, pohyb.

Vedle uvedených ukázek mohli bychom sledovat i jiné protiklady z vývoje matematiky, např. protiklady abstraktního a konkrétního, obsahového a formálního, hmotné skutečnosti a logické možnosti, konečného a nekonečného.

Vynecháváme ukázky přeměny kvantity v kvalitu, i když byly připomenuty v objevu neeukleidovské geometrie a v matematické analýze. Zbývá se podívat na další zásahy Leninových myšlenek do matematiky, tj. do formální a dialektické logiky.

---

Slavného matematika Davida Hilberta se kdosi ptal na jednoho jeho bývalého žáka. „A ten?, rozpomínal se Hilbert, ten se stal básníkem. Pro pěstování matematiky měl příliš málo fantazie!“

● ●

Fyzik J. Frank vyprávěl jednou při besedě o namáhavosti výzkumné práce: „Zdalo se mi o zesnulém kolegovi, zeptal jsem se ho, zda na onom světě znají už všechny fyzikální zákony. Řekl, že si tam mohou vybrat, buď mohou znát všechno nebo jen to, co znali už na Zemi. On si prý vybral tu druhou možnost, aby se nenudil.“



## MATEMATIKA

# Co prozrazuje negování implikací

ALENA ŠAROUNOVÁ, MFF UK

Termín implikace jistě znáte jako název pro výroky, které mají některý z tvarů „*jestliže ... , pak ...*“, „*když ... , potom ...*“, „*je-li ... , je ...*“, nebo jim podobný tvar. Jaké příklady byste bez přípravy uvedli? Možná, že by vás napadlo nějaké přísloví, konstatování vztahu příčiny a následku nebo matematická věta. Představte si, že byste slyšeli tyto tři příklady

*a Nemáš-li co říci, mlč.*

*b Když prší, nesvítí slunce.*

*c Jestliže v trojúhelníku  $ABC$  je  $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ , pak je  $AC = BC$ .*

Jak byste se zatvářili na takové příklady implikací? Měli byste se tvářit odmítavě, protože žádná z vět *a*, *b*, *c* není implikace. Věta *a* není vůbec výrokem, protože vyjadřuje rozkaz a nelze jí přiřadit žádnou pravdivostní hodnotu. Věty *b*, *c* mají sice na první pohled typický tvar implikace, ale to jen proto, že jsou ledabyly vysloveny. V čem spočívá tato ledabylost, prozradí vám právě negování výroků. Pokuste se stručně vyjádřit, že není pravda to, co vyrozumíváte z vět *b*, *c*.

Větu *b* chápete jistě jako nepravdivý výrok, její nepravdivost byste asi zdůvodnili poukazem na to, že *existují* případy, kdy prší a přitom svítí slunce. A tu jsme u kořene věci — existenční kvantifikátor se

objevuje v negacích výroků, které obsahovaly obecný kvantifikátor. V textu věty *b* je zamlčen nějaký obecný kvantifikátor, např. jeden z těchto tří: „v každém případě“, „pokaždé“, „v každém okamžiku“. Napíšeme-li větu *b* v takto doplněném tvaru, vystihneme její zamýšlený obsah a získáme kvantifikovaný výrok

*b* V každém případě platí, že *když* prší, *pak* nesvítí slunce.

*b'* Existuje aspoň jeden případ, kdy prší a svítí slunce.

Obdobnou úvahou můžete dospět k této úplnější formulaci věty *c* a její negace

*c* O každém trojúhelníku *ABC* platí, že *když* je  $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ , *pak* je  $AC = BC$ .

*c'* Existuje aspoň jeden trojúhelník *ABC*, o němž platí, že je  $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ , a není  $AC = BC$ .

Zaměříme se nyní na negování implikací, které nejsou součástí kvantifikovaných výroků. Odhalíme tak ještě jasněji, jak nevhodné je vynechávat kvantifikátory a spoléhat na to, že si je každý správně domyslí. Představte si výslech svědka nějakého přestupku, který nemůže jednoznačně označit pachatele, ale může říci tento výrok

*d* Je-li vinen Karel, je vinen i Milan.

Předpokládejme, že se vyšetřovateli podaří zjistit pravdivost či nepravdivost výroků *k* ... Karel je vinen, *m* Milan je vinen. Ve kterých případech může být svědkův výrok považován za pravdivý a kdy za nepravdivý? Pořídme si tabulku pravdivostních hodnot výroků *k*, *m*, *d*:  $k \Rightarrow m$ , v níž písmena *p*, *n* označují pravdivost, resp. nepravdivost, výroků.

| <i>k</i> | <i>m</i> | <i>d</i> : $k \Rightarrow m$ |
|----------|----------|------------------------------|
| <i>p</i> | <i>p</i> | <i>p</i>                     |
| <i>p</i> | <i>n</i> | <i>n</i>                     |
| <i>n</i> | <i>p</i> | <i>p</i>                     |
| <i>n</i> | <i>n</i> | <i>p</i>                     |

Tabulka zachycuje všechny čtyři možnosti. Výrok *d* je zřejmě pravdivý v prvním případě a nepravdivý ve druhém. Není-li však Karel vinen, může se svědek právem ohradit proti nařčení z křivého svědectví, protože není splněn předpoklad, který vyslovil. Proto je nutné považovat implikaci  $k \Rightarrow m$  za pravdivou v obou případech, kdy *k* neplatí.

Z tabulky také vidíme, že nepravdivost implikace „*jestliže k*, *pak m*“ vyjadřujeme stručně a přesně, řekneme-li: platí *k* a neplatí *m*.

| Implikace                | Negace implikace                                |
|--------------------------|-------------------------------------------------|
| $k \Rightarrow m$        | $(k \Rightarrow m)'$                            |
| Jestliže $k$ , pak $m$ . | Není pravda, že platí: jestliže $k$ , pak $m$ . |
|                          | Platí $k$ a neplatí $m$ .                       |

Kdybychom aplikovali toto pravidlo pro negování implikací na větu  $c$ , tj. kdybychom ji považovali za úplný výrok, dostali bychom tuto větu

$c^*$  V trojúhelníku  $ABC$  je  $\sphericalangle A = \sphericalangle B$  a není  $AC = BC$ .

V této formulaci věta  $c^*$  neobsahuje sice kvantifikátor, ale my si domýšlíme obecný kvantifikátor, tj. chápeme větu  $c^*$  v tomto významu

V každém trojúhelníku  $ABC$  je  $\sphericalangle A = \sphericalangle B$  a není  $AC = BC$ .

A to je očividně jiný výrok než negace  $c'$ , kterou jsme získali výše. Znovu tedy nacházíme důvod, proč nelze větu  $c$  považovat za výrok.

Nyní můžeme odpovědět na otázku položenou v názvu článku. Při negování matematických vět, které obvykle mají tvar „Jestliže ..., pak ...“, není radno podlehnout hned dojmu, že jde o implikaci jakožto výrok bez kvantifikátorů. Téměř každou větu z učebnic matematiky můžete usvědčit ze zamlčení kvantifikátorů. Přesvědčte se o tom, ale nehoršete se za to na matematiku ani na matematiky. Kritizovaná nedůslednost byla až do nedávné doby považována za výhodné zestručnění formulací. Zvýšené nároky na logickou přesnost matematických zápisů si vynucuje v dnešní době mimo jiné i spolupráce člověka se stroji — stroj si žádný kvantifikátor nedomyslí.

Nepřesnosti v chápání implikací mají svůj odraz i v nesprávném usuzování, které najdete na mnoha místech. Ukažme si příklad, který asi vyzní trochu nešetrně k hezké lidové písni. Znáte jistě řadu slok písně, z níž ocitujeme tuto jedinou: *Kdyby byla Morava jako je Slezsko, dala bych ti huběnkou, až by to plesklo. Ale že je Morava malúčka, ošidila dcerečka synečka.* Toto zkrácené drama podrobme logické analýze, první větu zapišme ve tvaru

*Jestliže  $M$  je  $S$ , pak dostaneš polibek.*

Druhá věta hatí naděje tím, že vyvozuje z neplatnosti předpokladu neplatnost závěru, říká

*$M$  není  $S$ , p r o t o nedostaneš polibek.*

Tabulka pravdivostních hodnot implikace však nedovoluje takový úsudek, protože při nepravdivosti předpokladu  $k$  a zaručené pravdivosti implikace  $k \Rightarrow m$  může závěr  $m$  být pravdivý. Autorka písně tedy neošidila jen šohaje, ale i logiku usuzování. Rozhodněte sami, co je větší prohřešek.

A nyní již zkuste uplatnit své nové poznatky sami v několika cvičeních. Přistupujte s krajní nedůvěrou ke každé větě a podle potřeby v ní doplňte chybějící kvantifikátory dříve, než začnete negovat.

## Cvičení

1. Neudělám-li domácí úlohu dnes, zítra se k tomu nedostanu. Když se ti něco nelíbí, jsi protivný. Je-li  $a < 10$ , pak  $a^2 < 100$ . Je-li čtyřúhelník středově i osově souměrný, pak je čtvercem. Má-li rovnice jediný kořen, je jím reálné číslo.

2. Prohlédněte si dobře pravdivostní tabulku implikace  $k \Rightarrow m$  a rozhodněte, zda je pravda, že implikace je pravdivá právě v těch případech, kdy  $k$  neplatí nebo  $m$  platí (nebo chápejte v nevylučovacím významu).

3. Najděte si příklady nesprávných úsudků v jiných lidových písních nebo v literárních dílech. Jste si jisti, že nepřistihnete sami sebe při nesprávném úsudku typu: Je pravda, že když  $a$  pak  $b$ . Ale  $a$  neplatí, tedy  $b$  také neplatí.

# Mocniny prirodzených čísel

FRANTIŠEK NOVÁK, Žilina

O pytagorovej vete napísali matematici — vedci veľa úvah a pojednaní. No, cez to všetko, keď túto vetu podrobnejšie študujeme, najdeme vždy tam niečo nového, zaujímavého, alebo sa nám pritom vynoria nové a nové problémy. Jedným takým zaujímavým problémom sú k-té mocniny prirodzenej rady čísel:

$$\begin{array}{ll} 1. & \begin{array}{ll} 1^1, 2^1, 3^1, 4^1, 5^1, 6^1, 7^1, 8^1, & n^1 \\ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, & n^2 \\ 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, & n^3 \\ 1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, & n^4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \dots\dots\dots & \cdot \\ 1^k, 2^k, 3^k, 4^k, 5^k, 6^k, 7^k, 8^k, & n^k \end{array}$$

Prvnež by sme sa zaoberali týmito mocninami, zavedieme si niektoré definície a vety.

*Definícia 1:* Nech je daná funkcia  $f(n)$  nezávislej premennej  $n$  definovaná na množine všetkých celých nezáporných číslach. Definujme pre  $\nu = 0, 1, 2$ ,

$$\begin{array}{l} \Delta^0 f(n) = f(n), \\ \vdots \\ \Delta^{\nu+1} f(n) = \Delta^\nu f(n) - \Delta^\nu f(n-1), \end{array}$$

kde  $\Delta^\nu f(n)$  je  $\nu$ -tá diferencia funkcie  $f(n)$  v bode (čísle)  $n$ .

*Pomocné vety:*

Pri označení zavedenom v definícii platí, že

$$\Delta^{\nu} [f_1(n) + f_2(n)] = \Delta^{\nu} f_1(n) + \Delta^{\nu} f_2(n) \quad (1)$$

$$\Delta^{\nu} c f(n) = c \Delta^{\nu} f(n) \quad (2)$$

kde  $c$  je konštanta na  $n$  nezávislá. Z toho vyplýva, ak  $c_i$  sú konštanty na  $n$  nezávislé, vzťah

$$\Delta^{\nu} \sum_{i=1}^s c_i f_i(n) = \sum_{i=1}^s c_i \Delta^{\nu} f_i(n) \quad (3)$$

*Dôkaz:*

Vzorec (1) dokážeme matematickou indukciou podľa  $\nu$ :

$$a) \Delta^0 [f_1(n) + f_2(n)] = f_1(n) + f_2(n) = \Delta^0 f_1(n) + \Delta^0 f_2(n)$$

t. j. pre  $\nu = 0$  vzorec (1) platí.

b) Predpokladajme, že (1) platí aj pre celé nezáporné číslo  $\nu$  (indukčný predpoklad). Potom

$$\begin{aligned} \Delta^{\nu+1} [f_1(n) + f_2(n)] &= \Delta^{\nu} [f_1(n) + f_2(n)] - \\ &- \Delta^{\nu} [f_1(n-1) + f_2(n-1)] = \Delta^{\nu} f_1(n) + \Delta^{\nu} f_2(n) - \\ &- [\Delta^{\nu} f_1(n-1) + \Delta^{\nu} f_2(n-1)] = [\Delta^{\nu} f_1(n) - \Delta^{\nu} f_1(n-1)] + \\ &+ [\Delta^{\nu} f_2(n) - \Delta^{\nu} f_2(n-1)] = \Delta^{\nu+1} f_1(n) + \Delta^{\nu+1} f_2(n) \end{aligned}$$

t. j. ak vzorec (1) platí pre  $\nu$ , potom platí aj pre  $\nu + 1$ . Podobne sa dokáže vzorec (2) matematickou indukciou podľa  $\nu$ . Vzorec (3) sa dokáže na základe vzorcov (1) a (2) taktiež matematickou indukciou podľa  $s$ .

*Hlavná veta:* Nech  $k$  je nezáporné celé číslo. Potom  $\Delta^k n^k = k!$  Špeciálne pre  $k = 0$  je  $\Delta^0 n^0 = \Delta^0 1 = 1 = 0!$

*Poznámka:* Z toho je vidno, že postupnosť  $[\Delta^{k-1} n^k]_{n=1}^{\infty}$  je aritmetická s diferenciou  $d = k!$

*Dôkaz:* Zavedme si teraz funkciu  $f(n, k)$  premennej  $n$  definovanej na množine nezáporných celých číslach

$$f(n, k) = \binom{n}{k},$$

kde  $k$  je parameter

$k = 0, 1, 2, \dots$  Potom jednotlivé diferencie budú

$$\Delta^1 f(n, k) = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} = f(n-1, k-1),$$

$$\Delta^2 f(n, k) = \Delta^1 f(n-1, k-1) = \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-2}{k-2} = f(n-2, k-2).$$

$$\Delta^r f(n, k) = \binom{n-r}{k-r} = f(n-r, k-r)$$

$$\Delta^k f(n, k) = \binom{n-k}{k-k} = \binom{n-k}{0} = 1 \quad (\text{w})$$

Matematickou indukciou podľa  $k$  dokážeme, že  $k$ -tá diferencia  $n^k$  je  $k!$  t. j.  $\Delta^k n^k = k!$  (z)

Pre  $k=0$  platí samozrejme, že  $\Delta^0 n^0 = n^0 = 1 = 0!$  t. j. pre  $k=0$  platí vzorec (z).

Ďalej predpokladajme, že vzorec (z) platí aj pre  $k=0, 1, 2, \dots, r$  (indukčný predpoklad). Potom dokážeme, že platí aj pre  $k=r+1$ , tým bude vzorec (z) dokázaný pre každé  $k$ .

Vieme, že platí

$$f(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Ak túto rovnicu vhodne upravíme, dostaneme, že

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} + \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{\nu}^k n^{\nu}, \text{ kde } a_{\nu}^k \text{ sú čísla nezávislé na } n \text{ (závisia len na } k\text{)}.$$

Podľa (w) a pomocnej vety (3) je

$$\begin{aligned} \Delta^{r+1} f(n, r+1) &= 1 = \Delta^{r+1} \frac{n^{r+1}}{(r+1)!} + \Delta^{r+1} \sum_{\nu=0}^r a_{\nu}^{r+1} n^{\nu} = \\ &= \Delta^{r+1} \frac{n^{r+1}}{(r+1)!} + \sum_{\nu=0}^r a_{\nu}^{r+1} \Delta^{r+1} n^{\nu} \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Podľa indukčného predpokladu pre  $\nu=0, 1, 2, \dots, r$  je

$$\Delta^{r+1} n^{\nu} = 0,$$

pretože podľa tohto predpokladu je

$$\Delta^{\nu} n^{\nu} = \nu! \text{ t. j. } \Delta^{r+1} n^{\nu} = \nu! - \nu! = 0$$

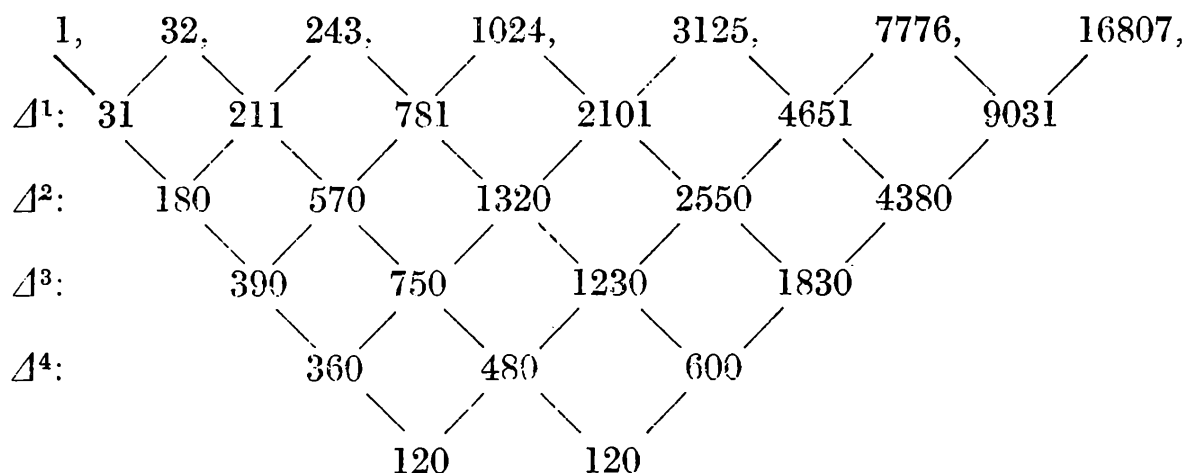
Potom z (a) plynie

$$\begin{aligned} \Delta^{r+1} f(n, r+1) &= 1 = \Delta^{r+1} \frac{n^{r+1}}{(r+1)!} + 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta^{r+1} \frac{n^{r+1}}{(r+1)!} &= 1 \Rightarrow \Delta^{r+1} n^{r+1} = (r+1)! \end{aligned}$$

Tým je dôkaz prevedený.

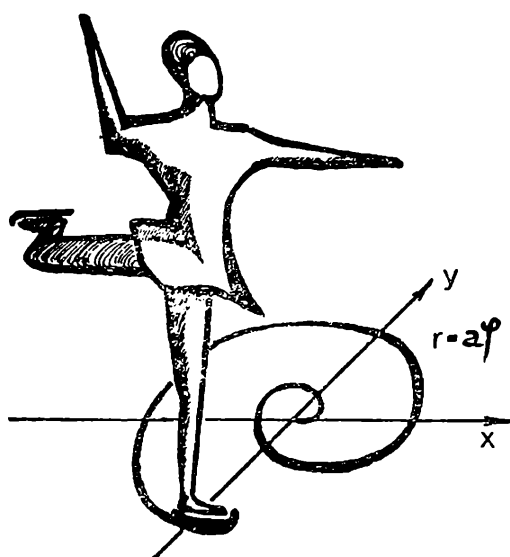
Overme si naše predošlé tvrdenie na piatich mocninách prírodzenej rady čísel:

$1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5, 7^5,$



$(k - 1)$ , t. j. 4-té diferencie tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou  $d = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ .

Takto by sme mohli pokračovať. Tým sme zároveň ukázali na konkrétnych číslach, že predošlé tvrdenia všeobecne platia.



DESKRIPTIVNÍ  
GEOMETRIE

## Konstrukce s rovinou totožnosti

Doc. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

V Mongeově promítání se vždy činí zmínka o dvou zvláštních rovinách, které jsou rovinami souměrnosti mezi první a druhou průmětnou. Jde o *rovinu souměrnosti*  $\sigma$ , pro jejíž body platí  $y_M = z_M$  a o *rovinu*



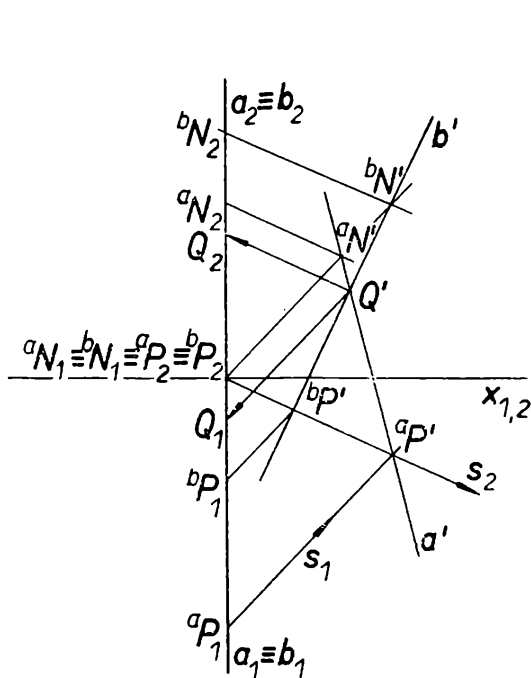
*totožnosti*  $\tau$ , pro kterou je  $y_M = -z_M$ . Název obou rovin je zdůvodněn tím, že útvary položené v rovině  $\sigma$  mají sdružené průměty souměrné podle osy  $x$ , kdežto útvary z roviny  $\tau$  mají sdružené průměty totožné.

Je známo, že průsečnice roviny totožnosti a dané roviny se používá pro důkaz afinního vztahu mezi sdruženými průměty rovinného útvaru.

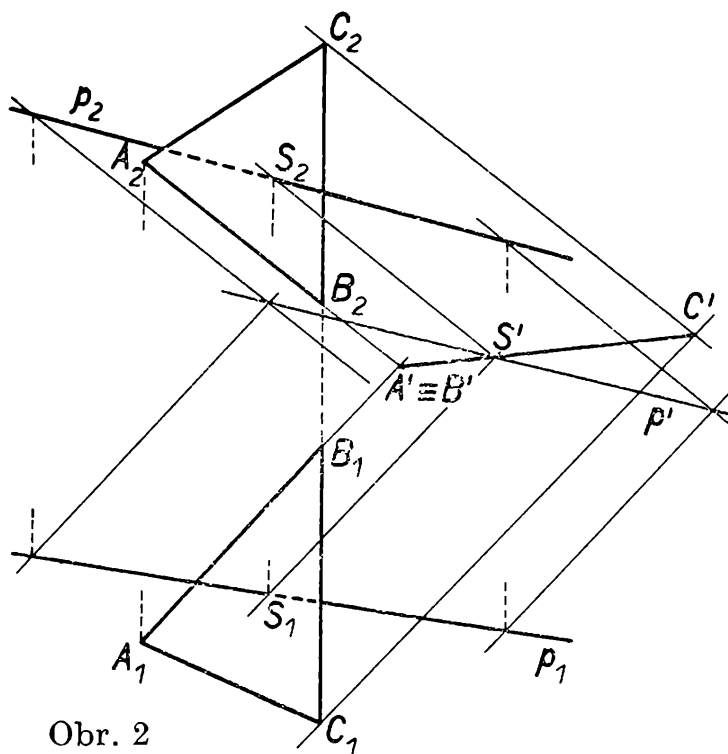
Ukážeme, že roviny totožnosti  $\tau$  se může s výhodou použít při některých konstrukcích. Daný útvar je přitom dán svým prvním a druhým průmětem. Pro konstrukci použijeme pomocného kosoúhlého promítání do roviny totožnosti, přičemž směr promítání je buď zcela libovolný, nebo jej volíme tak, aby se konstrukce pokud možno nejvíce zjednodušila.

To vše vyložíme na několika příkladech:

1. Sestrojte průsečík  $Q$  přímek  $a, b$  položených v rovině kolmé k ose  $x$  (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

Přímky  $a, b$  promítneme kosoúhle do roviny totožnosti  $\tau$ , směr promítání  $s$  zvolíme libovolně. Kosoúhlý průmět  ${}^aP'$  bodu  ${}^aP$  do roviny  $\tau$  je v průsečíku prvního a druhého průmětu promítací přímky bodu  ${}^aP$ , tj.  ${}^aP' \equiv s_1 \cdot s_2$ . Obdobně pro další body, které určují dané přímky  $a, b$ .

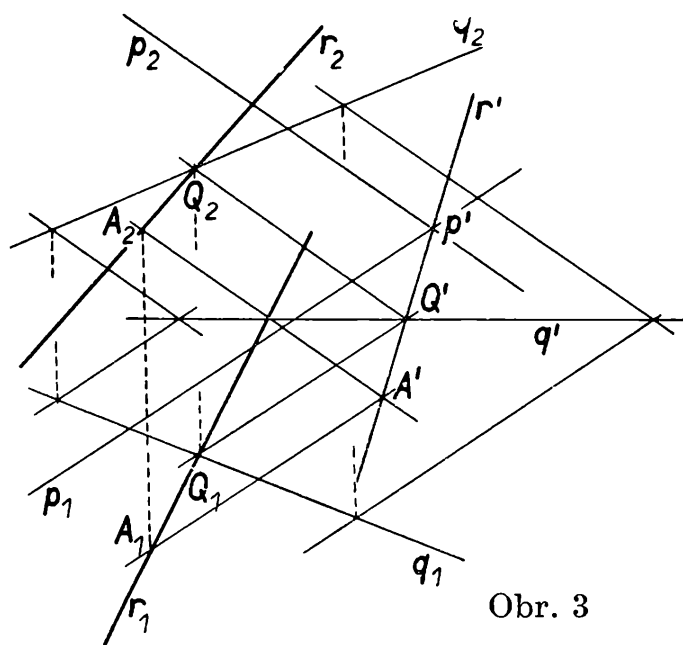
Přímky  $a', b'$  se protínají v bodě  $Q'$ , který je kosoúhlým průmětem hledaného průsečíku  $Q$ . První a druhý průmět tohoto bodu stanovíme zpětnou konstrukcí.

Poznamenejme, že je možné při těchto konstrukcích promítat do roviny totožnosti  $\tau$  také středově z vhodně zvoleného středu  $S$ . Rovněž je patrné, že při těchto konstrukcích není nutná osa  $x$ .

2. Sestrojte průsečík přímky  $q \equiv QR$  s trojúhelníkem  $ABC$ , jehož strana  $BC$  je kolmá k ose  $x$  (obr. 2).

Směr promítání zvolíme nyní tak, aby se daný trojúhelník  $ABC$  promítl do úsečky. K tomu stačí zvolit promítací přímku v přímce  $AB$ . Na rovině totožnosti  $\tau$  tak dostaneme body  $A' \equiv B'$  a bod  $C'$ , které určují průmět našeho trojúhelníka. Průsečík  $S'$  průmětu  $p'$  dané přímky  $p$  s výše sestrojenou úsečkou odvodíme zpět do prvního, popříp. druhého průmětu na přímku  $p_1$ , popříp.  $p_2$ . Úloha je tím vyřešena.

3. Sestrojte příčku  $r$  mimoběžek  $p, q$ , která prochází daným bodem  $A$  (obr. 3).



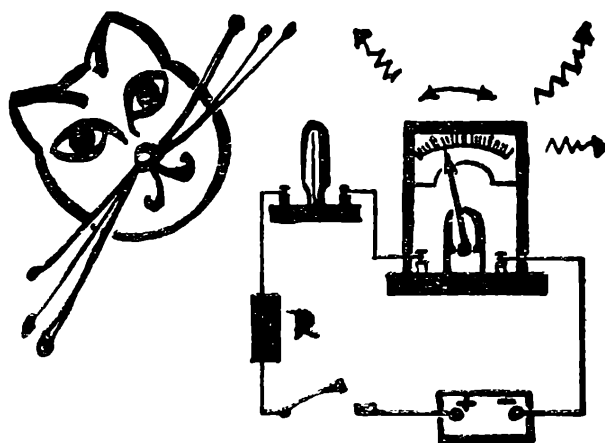
Obr. 3

Směr promítání zvolme v přímce  $p$ . Pak jejím kosoúhlým průmětem do  $\tau$  je bod  $p'$ , kosoúhlým průmětem bodu  $A$  je bod  $A'$  a přímky  $q$  přímka  $q'$  (byla sestrojena pomocí dvou bodů zvolených na  $q$ ). Hledaná příčka  $r$  má kosoúhlý průmět  $r' \equiv A'p'$ , pro průsečík  $Q \equiv r \cdot q$  máme ihned jeho průmět  $Q' \equiv r' \cdot q'$ . Další postup je již zřejmý.

Jak patrné, lze řešit tímto způsobem pouze ty úlohy, které obsahují vztahy neměnicí se při kosoúhlém promítání. Naproti tomu konstrukce vyžadující určení úhlu nebo kolmosti dvou útvarů, by byly velmi složité a tudíž prakticky nepoužitelné.

Cvičení:

1. Sestrojte průsečnici  $p$  dvou rovin  $\alpha, \beta$  rovnoběžných s osou  $x$ .
2. Sestrojte průsečík přímky  $p$  kolmé k ose  $x$  s rovinou trojúhelníka  $ABC$ .
3. Určete průsek dvou trojúhelníků  $ABC$  a  $DEF$ .
4. Sestrojte příčku  $r$  dvou mimoběžek  $p, q$ , která je rovnoběžná s danou přímkou  $s$ .



## Odvodenie kozmických rýchlostí

PAVOL FERKO, PF, Banská Bystrica

Učebnica fyziky pre I. ročník SVŠ v IX. tematickom celku Gravitáčné pole pojednáva o kozmických rýchlostiach, ktoré vyvodzuje na základe predchádzajúceho, už známeho učiva. V tomto spracovaní Keplerove zákony sú osamotené a spomínajú sa len na okraj celého tematického celku. Nedozieme sa nikde o súvislosti Keplerových zákonov a Newtonovho gravitačného zákona. Chýba tu určitá náväznosť.

V Rozhľadoch [2] sme sa už pokúsili, i keď nepriamo ohodnotiť Keplerove zákony a použiť ich pri odvodení Newtonovho gravitačného zákona. Tým sme si pripravili cestu na odvodenie vzorca pre ľubovoľnú rýchlosť kozmického telesa, čo teraz môžeme urobiť.

Pozorujme pohyb kozmického telesa vzhľadom na našu Zem (druhé teleso), ktorý sa deje bez odporu prostredia. Pričom budeme uvažovať, že hmotnosť pohybujúceho sa telesa je menšia ako hmotnosť Zeme. Podľa I. Keplerovho zákona bude sa teleso pohybovať po elipse, v ohnisku ktorej sa nachádza druhé teleso — Zem.

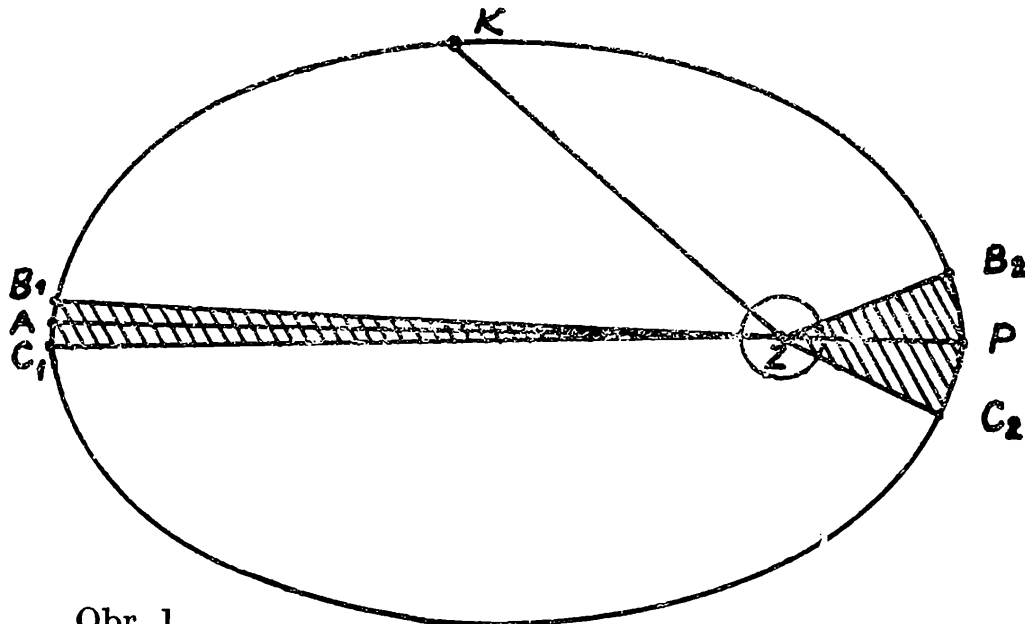
Nech sa okolo telesa  $Z$  pohybuje kozmické teleso  $K$ , ktorého eliptická obežná dráha je charakterizovaná veľkou poloosou  $a$ , ohniskovou vzdialenosťou  $f$  (obr. 1).

Vychádzajúc zo zákona zachovania energie môžeme zapísať

$$\frac{mv^2}{2} + mgr = \frac{mv_A^2}{2} + mg_A(a + f), \quad (1)$$

kde  $m$  je hmotnosť kozmického telesa  $K$ ,  $v$  je jeho rýchlosť v danom bode obežnej dráhy,  $g$  zrýchlenie telesa v uvažovanom bode dráhy,

$r$  vzdialenosť kozmického telesa od stredu druhého telesa (Zeme),  $v_A$  rýchlosť kozmického telesa v bode  $A$  (apogeum),  $g_A$  zrýchlenie telesa v bode  $A$ ,  $(a + f)$  vzdialenosť kozmického telesa nachádzajúceho sa v bode  $A$  od druhého telesa (Zeme).



Obr. 1

Gravitačné zrýchlenie dá sa vyjadriť pomocou všeobecného gravitačného zákona [1]

$$g = \kappa \frac{M}{r^2}, \quad (2)$$

kde  $M$  je hmotnosť druhého telesa (Zeme),  $r$  vzdialenosť stredov telies a  $\kappa$  gravitačná konštanta.

Keď dosadíme do rovnice (1) vyjadrené gravitačné zrýchlenie, ktoré budeme pokladať za záporné, po úprave dostaneme

$$\frac{v^2}{2} - \kappa \frac{M}{r} = \frac{v_A^2}{2} - \kappa \frac{M}{a + f} \quad (3)$$

Podobne možno zapísať upravený zákon zachovania energie aj v bodoch  $A, P$  obežnej dráhy

$$\frac{v_A^2}{2} - \kappa \frac{M}{a + f} = \frac{v_P^2}{2} - \kappa \frac{M}{a - f} \quad (4)$$

Ak predpokladáme, že  $B_1C_1$  a  $B_2C_2$  sú dráhy, ktoré teleso  $K$  prešlo za rovnaké časové intervaly, potom podľa II. Keplerovho zákona obsah zašrafovaných obrazcov (pozri nákres)  $B_1ZC_1$  a  $B_2ZC_2$  je rovnaký.

Pri voľbe dostatočne malých časových intervalov môžeme  $B_1C_1$

a  $B_2C_2$  pokladať za úsečky a matematicky vyjadriť rovnosť obsahov vzniknutých trojuholníkov

$$\frac{v_A (a + f)}{2} = \frac{v_P (a - f)}{2}, \quad (5)$$

odkiaľ

$$v_P = v_A \frac{a + f}{a - f} \quad (6)$$

Keď dosadíme výraz (6) do (4) dostávame

$$\frac{v_A^2}{2} - \kappa \frac{M}{a + f} = \frac{v_A^2 (a + f)^2}{2 (a - f)^2} - \kappa \frac{M}{a - f} \quad (7)$$

odkiaľ po úpravách

$$\frac{v_A^2}{2} = \kappa M \frac{a - f}{2a (a + f)} \quad (8)$$

Po dosadení výrazu (8) do (3) dostávame vzťah

$$\frac{v^2}{2} - \kappa \frac{M}{r} = \kappa M \frac{a - f}{2a (a + f)} - \kappa \frac{M}{a + f} \quad (9)$$

z ktorého po zjednodušení je

$$v^2 = \kappa M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (10)$$

teda

$$v = \sqrt{\kappa M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (11)$$

čo je vzťah pre výpočet rýchlosti kozmického telesa, ktorého trajektória je elipsa [3].

V prípade, že sa teleso pohybuje po kruhovej obežnej dráhe je  $a = r$ , potom

$$v^2 = \kappa \frac{M}{r}$$

a

$$v = \sqrt{\kappa \frac{M}{r}} \quad (12)$$

Podľa vzťahov (11) a (12) môžeme vypočítať prvú kozmickú rýchlosť telesa, ktoré obieha po elipse alebo kružnici okolo Zeme.

Kozmické teleso, ktoré by obiehalo po kružnici, malo by nad povrchom Zeme dráhovú rýchlosť 7,9 km/s (prvá kozmická rýchlosť), jeho obežná dráha by bola 86 minút.

Ak je kozmické teleso uvedené na obežnú dráhu väčšou rýchlosťou než je kruhová rýchlosť, pohybuje sa po elipse; jej rovina prechádza stredom Zeme, ktorý je v ohnisku elipsy. Bod, v ktorom bolo kozmické teleso uvedené na obežnú dráhu je najbližším bodom dráhy stredom Zeme a nazýva sa perigeum (P). Protíľahlý bod dráhy je najvzdialenejší od stredom Zeme a nazýva sa apogeum; ich spojnice prechádza stredom Zeme a je hlavnou osou elipsy [1].

Čím väčšou rýchlosťou je kozmické teleso uvedené na obežnú dráhu, tým je eliptická dráha ploskejšia. Pri určitej rýchlosti prestane byť dráhou uzavretou, jej tvar sa zmení v parabolu; kozmické teleso sa vzdaluje od Zeme. Táto rýchlosť sa nazýva druhá kozmická rýchlosť.

Vzťah pre výpočet tejto rýchlosti odvodíme zo vzťahu (11) za predpokladu, že  $a \rightarrow \infty$ , lebo teleso sa pohybuje po parabole. Potom dostávame

$$v = \sqrt{2\kappa \frac{M}{r}}$$

V blízkosti povrchu Zeme je druhá kozmická rýchlosť (parabolická) 11,2 km/s.

Ak sa telesu v danej výške nad povrchom Zeme udelí rýchlosť väčšia, než je rýchlosť parabolická, pohybuje sa po dráhe hyperbolickej a tiež sa trvale vzdaluje od Zeme. Vzťah pre výpočet hyperbolickej rýchlosti tiež vyvodíme zo vzťahu (11) za predpokladu, že  $a < 0$  (čo platí o hyperbole). Potom dostávame

$$v = \sqrt{\kappa M \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)}$$

Ak má kozmické teleso dosiahnuť parabolickú rýchlosť vzhľadom na Slnko, jeho kinetická energia sa musí rovnať polohovej energii v polohe Zeme, vzhľadom na Slnko, zväčšenej o polohovú energiu vzhľadom na Zem. Táto parabolická rýchlosť vyjde z rovnice

$$\frac{1}{2}mv^2 = \kappa \frac{mM}{r} + \kappa \frac{mM'}{R}$$

teda

$$= \sqrt{2\kappa \left( \frac{M}{r} + \frac{M'}{R} \right)}$$

pričom  $M$ ,  $M'$  sú hmotnosti Zeme a Slnka,  $r$ ,  $R$  vzdialenosti polohy štartu od zemského alebo slnečného stredom. Odtiaľ potom vychádza parabolická rýchlosť kozmického telesa vzhľadom na Slnko, tzv. tretia kozmická rýchlosť 43,67 km/s [4].

Záverom môžeme zhrnúť: rýchlosť potrebnú na udržanie kozmického telesa na stabilnej dráhe okolo Zeme nazývame prvá kozmická rýchlosť.

Rýchlosť, ktorú kozmické teleso potrebuje, aby sa navždy vzdialilo od Zeme, považujeme za druhú kozmickú rýchlosť. Pod treťou kozmickou rýchlosťou rozumieme rýchlosť, ktorú by sme museli udeliť kozmickému telesu, aby uniklo z gravitačného poľa Slnka — z našej slnečnej sústavy [5].

### *Literatúra*

- [1] Kolektív: Fyzika pre 1. ročník stredných všeobecnovzdelávacích škôl, SPN, Bratislava 1964, s. 153—168.
- [2] Machalický, J.: O gravitačnom zákone Newtonov. „Rozhledy matematicko-fyzikální“ 1, 1968—69, s. 7—9.
- [3] Nisnevič, A. M.: Vyvod formuly skorosti nebeskovo tela. „Fizika v škole“ 1, 1962, s. 61—62.
- [4] Vanovič, J.: Astronautika, Osveta, Bratislava 1964, s. 76.
- [5] Lepil, O.: Kosmické rýchlosti. „Rozhledy mat.-fyz.“ 1, 2, 1959, s. 22—24, 71—73.

## **Základní pojmy plastické deformace**

PÁVEL BÁRT UŠKA, Ústav fyziky pevných látek ČSAV, Praha

Dokončení

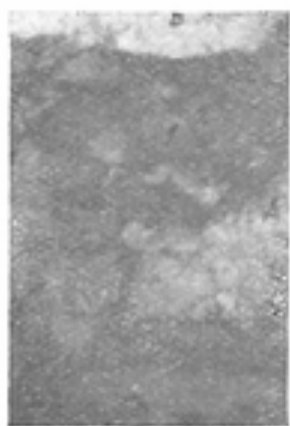
### **Z á k l a d n í t e o r i e z p e v n ě n í**

Nyní se vraťme ke křivce na obr. 3. Předem nutno poznamenat, že tato křivka platí pro krychlový, plošně centrovaný monokrystal. V polykrystalickém materiálu se sčítají účinky působení napětí na jednotlivé krystaly (které mají různou orientaci) a výsledná křivka má poněkud jiný tvar.

V části *OA* se materiál deformuje elasticky a bod *A* můžeme pokládat za mez pružnosti. Od bodu *B* lze makroskopicky pozorovat plastickou deformaci.

Oblast *BC* se nazývá oblastí s n a d n é h o s k l u z u. Vidíme, že k prodlužování vzorku dochází při velmi malém růstu napětí, neboli, že materiál minimálně zpevňuje. Mikroskopickou podstatou této části zpevňovací křivky je, že působí pouze jediný skluzový systém, nebo-li kromě nečistot nic nebrání pohybu dislokací ve skluzové rovině.

Část *CD* nazýváme oblastí *l i n e á r n í h o z p e v n ě n í*. Z obrázku vidíme, že zpevnění krystalu je značné. Je zřejmé, že ve vzorku musí docházet k aktivaci dalších skluzových systémů a ke vzniku překážek, které brání pohybu dislokací. Dnes existují tři teorie na objasnění tohoto intenzivního zpevnění, žádná však úplně nevysvětluje všechna experimentální fakta. Proto se zdá, že zde působí současně několik mechanismů.



Obr. 7 Nikl deformovaný válcováním (ztenčení o 50 %). Snímek pomocí transmisní elektronové mikroskopie. Zvětšení 20 000 ×.

Jen ve stručnosti se podívejme na podstatu těchto teorií. První z nich předpokládá, že dislokace se zastaví před překážkou (např. Lomerovou-Cottlerovou dislokací) a aby deformace mohla pokračovat, musí dojít ke zvýšení napětí a aktivaci nového skluzového systému a Frankových-Readových zdrojů.

Druhá teorie uvažuje napětí, která vznikají před nahromaděnými dislokacemi. Jestliže se totiž setká mnoho dislokací z různých skluzových systémů, vzniká spleť dislokací, tzv. dislokační les. To je stabilní útvar a v něm vznikající napětí opět brání pohybu dislokací.<sup>3)</sup>

Konečně třetí teorie uvažuje brzdící vliv skoků na pohyb dislokací, jak jsme o něm mluvili v předešlém článku.

Část křivky na obr. 3 za bodem *D* se nazývá oblastí *p a r a b o l i c k é h o z p e v n ě n í*. Vidíme, že zpevnění krystalu se zmenšuje, dochází k rychlému protažení a později i přetržení vzorku (mluvíme někdy o tzv. deformačním odpevnění). Hlavním znakem této oblasti je, že dochází k příčnému skluzu, tj. dislokace mohou obejít překážku ve své skluzové rovině a šířit se dále.

Poněvadž jsme řekli, že k příčnému skluzu dochází snadno u kovů s velkou energií vrstevných chyb (u rozšířených dislokací musí nejdříve dojít k jejich zaškrcení), nastoupí u nich deformační odpevnění poměrně brzy a celková velikost zpevnění je malá. Materiál se nám tudíž

<sup>3)</sup> Takovou spleť dislokací vidíme na obr. 7 v místě označeném A a B. Místa vzorku, označená 1 a 2 jsou tzv. *p o d z r n a* (vidíme, že jsou bez dislokací) a ta jsou oddělena *p o d h r a n i c e m i*, na nichž můžeme rozeznat jednotlivé dislokace. Na rozdíl od zrn je rozorientace sousedních podzrn malá (několik stupňů). Podzrna spolu se spleťmi dislokací tvoří tzv. *d e f o r m a č n í p o d s t r u k t u r u*.



jeví jako tvárný a ne příliš pevný (hliník). Naopak u kovů s nízkou energií vrstevných chyb je rozštěpení dislokací velké, k příčnému skluzu dochází obtížně a zpevnění těchto kovů je tudíž velké (např. legované ocele).

Vidíme tedy, že plastická deformace je složitý děj, který závisí nejen na krystalografické orientaci, soustavě, ve které vzorek krystaluje, dále pak na velikosti energie vrstevných chyb, ale i na čistotě vzorku, teplotě a rychlosti deformace. Na základě znalosti mikroskopické podstaty tohoto děje se podařilo vysvětlit řadu experimentálně pozorovaných faktů a předpovědět chování konkrétních kovů a slitin za působení vnějších sil.

Pro čtenáře, mající zájem o hlubší poznání otázek souvisejících s plastickou deformací, uvádíme soupis některých souhrnných prací.

PIŠEK F., JENÍČEK L., RYŠ P.: Nauka o materiálu, díl 12, Academia Praha 1966.

NABARRO F. R. N., BASINSKI Z. S., HOLT D. B.: Plastičnost čistých monokrystallov, Izdatelstvo Metallurgija, Moskva 1967.

Sborník: Strengthening Mechanisms in Solids, ASTM, 1960.

GERCRIKEN S. D. a spol.: Fizičeskíe osnovy pročnosti i plastičnosti metallov, Naučno-techničeskoe izdatelstvo, Moskva 1963.

Sborník: Electron Microscopy and Strengtu of Crystals, Interscience Publishers, New York 1963.

## ASTRONOMIE

---

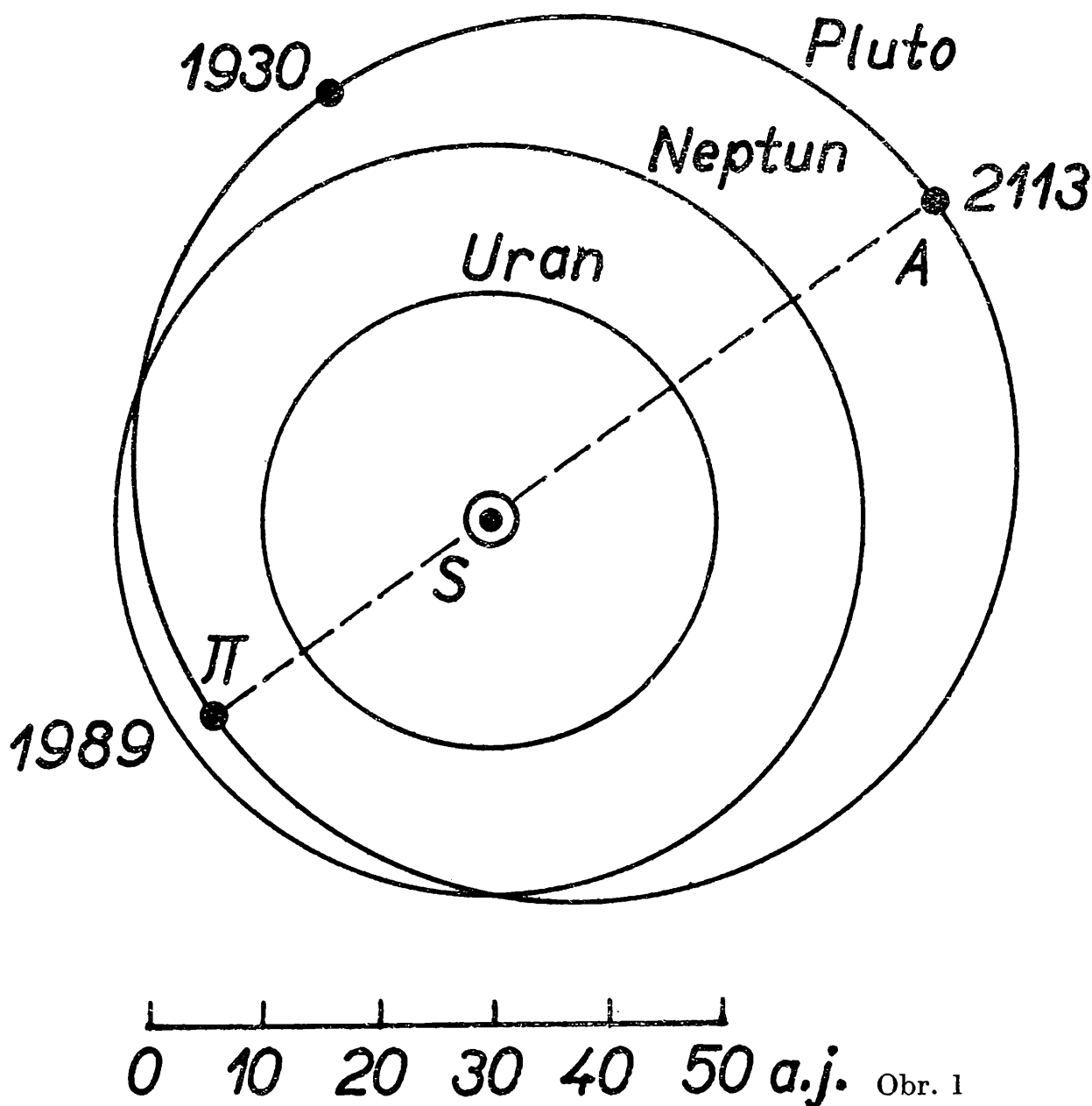
# Čtyřicet let od objevu planety Pluta

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Od objevu deváté planety sluneční soustavy — *Pluta* — uplynulo 21. ledna 1970 čtyřicet let. Objev byl však oznámen až 13. března 1930, kdy již bylo skutečně jisté, že jde o dlouho hledanou planetu. Bylo to přesně v den 149. výročí objevu Urana a v den 75. výročí narozenin *Percivala Lowella*.

Již ve třicátých létech minulého století vyslovil *P. A. Hansen* domněnku, že za drahou Urana se pohybují ještě dvě planety. Také slavný

francouzský astronom *U. J. Leverrier* byl i po objevu planety Neptuna (1846) přesvědčen, že ve sluneční soustavě existuje ještě další planeta. Na existenci této planety se soudilo z odchylek mezi pozorovanou a vypočtenou polohou Neptuna. Protože však Neptunova dráha nebyla tehdy ještě známa s dostatečnou přesností, převládal názor, že dráhu další planety nelze vypočítat. Tohoto obtížného úkolu se ujal Američan



*Percival Lowell*, který v roce 1915, rok před svou smrtí, uveřejnil výpočet dráhy transneptunské planety. Od té doby začalo usilovné hledání této planety, jejíž hvězdná velikost podle Lowella měla být 12 až 13<sup>m</sup>, oběžná doba 282 roků a střední vzdálenost od Slunce 43 astronomických jednotek (aj.). V době objevu měla být astronomická délka hledané planety 104°. Na fotografii exponované *C. O.*

*Lamplandem* objevil mladý asistent *C. W. Tombaugh* slabou hvězdičku 15. hvězdné velikosti ve vzdálenosti  $4^\circ$  od vypočtené polohy. Pohyb „hvězdy“ mezi okolními hvězdami svědčil o tom, že je to dlouho hledaná planeta. Na návrh *V. M. Sliphera* dostala pak nová planeta jméno Pluto („Vládce temnot“). Podle dnešních vědomostí pohybuje se Pluto ve střední vzdálenosti 39,73 a. j. od Slunce po velmi výstředné dráze ( $e = 0,248\ 64$ ).

Otázkou, zda číselné hodnoty, které použil P. Lowell k výpočtu dráhy deváté planety, byly dostatečné, zabýval se teoretik *E. W. Brown*, který ukázal, že objev Pluta byl šťastnou shodou okolností. Na druhé straně však nebýt výpočtů P. Lowella, sotva by se někdo zabýval systematickým hledáním této planety. Nejlepší vysvětlení bude asi to, které uvádějí *Z. Horský* a *M. Plavec* ve své knize *Poznávání vesmíru* (Orbis, Praha 1962): „Pluto je velký jen asi jako Země nebo menší, jeho přitažlivé působení na okolní planety je patrně velmi malé, a proto soudíme, že objev byl spíše výsledkem soustavného hledání než výpočtů.“

K historii objevu Pluta je třeba ještě dodat, že dodatečně se zjistilo, že byl již několikrát vyfotografován od r. 1914 na Harvardské hvězdárně, dále na hvězdárnách Yerkesově, v Uccle, na Mount Wilsonu a v Heidelbergu. Po ohlášení objevu byla planeta fotografována 16. a 17. března 1930 na Yerkesově hvězdárně a první snímek v Evropě zhotovila 18. března 1930 hvězdárna ve Staré Dale (nyní Hurbanovo), na níž byl tehdy instalován v té době největší československý dalekohled o průměru 60 cm, vyrobený firmou Carl Zeiss v Jeně.

V úvodu jsme se zmínili o výstředné dráze Pluta, která způsobuje, že nejmenší vzdálenost od Slunce je jen 29,72 a. j. v periheliu a největší vzdálenost 49,72 a. j. v afeliu. Střední vzdálenost Neptuna od Slunce je 30,11 a. j. (nejmenší 29,90 a. j., největší 30,32 a. j.). Nejblíže průchod Pluta přísluním nastane v roce 1989, takže od r. 1979 do r. 1998 nebude Pluto nejvzdálenější planetou sluneční soustavy, ale po dobu téměř dvou desetiletí jí bude Neptun.

---

Pravou filosofii nám objevuje příroda. Rozumět jí však může jenom ten, kdo se naučil její řeči a značkám. Tato řeč je však řečí matematiky a její značky jsou matematické obrazy.

(*Galileo Galilei: Saggiatore Opera 6, Firenze 1890—1900, str. 233*)

## Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

Vývoj, kterým v minulosti prošly jednotlivé kapitoly fyziky, je velmi rozdílný. *N a u k a o m a g n e t i s m u a e l e k t ř i n ě* je např. mnohem mladší než mechanika a optika. Ze starověku se z ní datují jen prostá pozorování, že jantar (řecky zvaný elektron), je-li třen jinou látkou (zejména vlnou), přitahuje lehounká tělíska. Z těchto dob pocházejí také slova magnet a magnetismus, odvozovaná domněle od města Magnesie v Malé Asii, v jehož okolí se hojně vyskytují železné rudy, zejména Herkulův (Hérakleův) kámen, neboli magnetovec, jenž přitahuje železné částice a trvale je u sebe přidržuje. Avšak to je zároveň vše. Shledáváme, že ještě badatele 17. století a první poloviny 18. století zaměštnávaly jevy jako elektřina buzená třením, tvoření jisker, vliv vlhkosti vzduchu aj., které nedovedli objasnit. Teprve v těchto pozdních dobách prochází nauka o elektřině a magnetismu „prehistorickým“ stadiem, než její bádání dospělo k jasným představám a vědeckým závěrům. Toto období se víže k jménům zasloužilých fyziků *W i l l i a m a G i l b e r t a a B e n j a m i n a F r a n k l i n a*.

*William Gilbert* se narodil roku 1540, *před 430 lety*, v Colchesteru (v hrabství Essexu) v Anglii. Jako lékař v Londýně dosáhl takového věhlasu, že jej královna Alžběta jmenovala svým osobním lékařem. Hmotně zajištěn, mohl se Gilbert již zcela věnovat vědecké činnosti. Studoval nejen *m a g n e t y p ř i r o z e n é*, ale i *u m ě l é*. Poznal, že zlomíme-li zmagnetovaný drát uprostřed, vzniknou dva magnety, každý opět s oběma póly, což nasvědčuje tomu, že ve středu drátu byly i dříve již dva póly, a to nesouhlasné a stejně silné, ve svých vnějších účincích se proto rušily. Lámeme-li části drátu dále, dostáváme nové a nové magnety stále kratší. Tyto zkušenosti vedly k *p ř e d s t a v ě m o l e k u l o v ý c h m a g n e t ů*. Gilbert pozoroval také, že magnet, je-li zahříván, slábne; zahřejeme-li jej do červeného žáru, přestane být magnetickým.

Gilbert vyslovil prvý také domněnku, že i Země je velký magnet s dvěma póly. Znal také indukční účinek zemského magnetismu na železné předměty (tyče, kamna, zábradlí, mříže, kolejnice aj.), jež se



# rozhledy

## MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

*nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu*

ROČNÍK 48, 1969-70

Vydává

ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. OTA S E T Z E R  
nositel vyznamenání Za vynikající práci  
VÝKONNÝ REDAKTOR: STANISLAV H O R Á K

*Redakční rada:* zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústř. insp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; zasl. učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Pavol Ferko, PF, B. Bystrica; Miloš Franek, PF, UK, Bratislava; doc. dr. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, DrSc, ČVUT, Praha; dr. Oldřich Lepil, CSc., PU, Olomouc; Milan Marčok, VŠLD; Zvolen; prof. dr. Václav Medek, VŠT, Bratislava; prof. dr. Cyril Palaj, PF-UPJŠ, Košice; Evžen Říman, CSc, nositel vyznamenání Za vynikající práci, ČVUT, Praha; dr. Jiří Sedláček, CSc, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, CSc, ČSAV Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; ing. dr. Václav Šindelář, CSc, MÚ, ÚNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha; Štefan Zvarík, insp. MŠ SSR, Bratislava

*Redakce:* Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29.

## OBSAH

### Úvodníky

|                                                                |          |
|----------------------------------------------------------------|----------|
| Jozífek Vítězslav: V. I. Lenin a matematika                    | 341, 437 |
| Setzer Ota: Do nového ročníku                                  | 1        |
| Zahradecský František: Historický mezník vývoje Československa | 389      |

### Matematika

|                                                                  |               |
|------------------------------------------------------------------|---------------|
| Dítě Josef: Konstrukce grafu složené funkce                      | 8             |
| Drábek Karel: Geometrické příbuznosti                            | 359           |
| Horák Stanislav: Síť pravidelných mnohoúhelníků v rovině         | 65            |
| Horák Stanislav: Odvození goniometrického vzorce                 | 255           |
| Hošek Josef: O jedné metodě výpočtů objemů těles                 | 348           |
| Hradecký František: Užití komplexních čísel v geometrii          | 153, 207, 249 |
| Janeček František: Maximum a minimum reálných čísel              | 53            |
| Jozífek Vítězslav: Zobecnění znaků dělitelnosti                  | 252           |
| Kejla František: Řetězové zlomky                                 | 200           |
| Kejla František: Užití řetězových zlomků                         | 296           |
| Kotyk Josef: Hlavní věty trigonometrie                           | 396           |
| Novák František: Mocniny prirodzených čísel                      | 443           |
| Odvárko Oldřich: Nezávislost náhodných jevů                      | 344           |
| Odvárko Oldřich: Pravděpodobnost jevů a číselné Vennovy diagramy | 245           |
| Odvárko Oldřich: Zopakujme si látku o množinách                  | 2             |
| Reich Emil: Součet druhých a třetích mocnin přirozených čísel    | 394           |
| Stejskal Jiří: Ptolemaiova věta                                  | 56            |
| Srb Oldřich: Složená čísla tvaru $n^4 - 4b^4$                    | 205           |
| Šarounová Alena: Nespolehlivé analogie                           | 149           |
| Šarounová Alena: Co prozrazuje negování implikací                | 440           |
| Šedivý Jaroslav: Algebra pravdy a lži                            | 391           |
| Šedivý Jaroslav: Jak formulovat dementi pomocí diagramů          | 101           |
| Šedivý Jaroslav: Kurs negování pro pokročilé                     | 197           |
| Šedivý Jaroslav: Učme se jazyku non-et-vel                       | 293           |
| Šedivý Jaroslav: Znovu o množinách                               | 5             |
| Trávníček Stanislav, Voráček Jan: O periodických posloupnostech  | 11            |
| Troják Jan: Několik poznámek ke grafickému řešení nerovností     | 104           |

### Fyzika

|                                                                                                 |          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Bartuška Pavel: Dislokace v pevných látkách                                                     | 222, 262 |
| Bartuška Pavel: Základní pojmy plastické deformace                                              | 418, 453 |
| Ferko Pavel: Odvození kozmických rychlostí                                                      | 449      |
| Fránek Miloš: Ako sa šíri zvuk z nadzvukových lietadiel                                         | 215, 256 |
| Golab František, Kamenčák František: Peltierův jev a jeho využití k termoelektrickému ochlazení | 372      |
| Jánoš Štefan: Fyzika a nízké teploty                                                            | 67       |
| Kolesnikov V., Záhejský J.: Dopplerův princip v teorii relativity a jeho experimentální ověření | 303      |
| Kotyk Josef: Fizeauova metoda určení rychlosti světla                                           | 226      |
| Půlpán Zdeněk: Výpočet potenciálu pole bodového náboje                                          | 424      |
| Sedláček Bohumil: Měření rychlosti střely                                                       | 403      |
| Skotnický Jozef: Počet úmrtnosti v přírodních vědách                                            | 413      |
| Štěpánek Antonín: Foucaultovo kyvadlo                                                           | 313      |
| Ungermann Zdeněk: Pružná deformace tuhého tělesa                                                | 74, 116  |
| Vybíral Bohumil: Grafická statika                                                               | 22       |

### Deskriptivní geometrie

|                                                  |          |
|--------------------------------------------------|----------|
| Drábek Karel: Konstrukce s rovinou totožnosti    | 446      |
| Horák Stanislav st.: Několik konstrukcí elipsy   | 212      |
| Horák Stanislav st.: Poznámka k průmětu kružnice | 20       |
| Horák Stanislav st.: Rovina souměrnosti          | 367      |
| Horák Stanislav st.: Rovina totožnosti           | 397      |
| Janeček František: Asymptoty hyperboly           | 109, 159 |
| Setzer Ota: Z geometrie rovnosé hyperboly        | 58       |

### Astronomie

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| Páv Tomáš: Signály z vesmíru                                           | 78  |
| Široký Jaromír: Astronomické efemeridy                                 | 30  |
| Široký Jaromír, Široká Miroslava: Astronomické symboly                 | 123 |
| Široký Jaromír, Široká Miroslava: Čtyřicet let od objevu planety Pluta | 455 |
| Široký Jaromír, Široká Miroslava: Ekosféry hvězd                       | 322 |
| Široký Jaromír, Široká Miroslava: Souhvězdí letní oblohy               | 381 |

|                                                                              |                            |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| Široký Jaromír, Široká Miroslava: Spektroskopické dvojhvězdy                 | 427                        |
| Široký Jaromír, Široká Miroslava: Zdánlivé a absolutní velikosti hvězd       | 169                        |
| Široký Jaromír, Široká Miroslava: Zodiakální souhvězdí                       | 378                        |
| <b>Matematická olympiáda</b>                                                 |                            |
| XI. mezinárodní matematická olympiáda                                        | 86, 169, 228, 273, 333     |
| XIX. ročník matematické olympiády                                            | 34                         |
| XX. ročník matematické olympiády                                             | 462                        |
| <b>Fyzikální olympiáda</b>                                                   |                            |
| Košťál Rostislav: Třetí mezinárodní fyzikální olympiáda v Brně               | 135, 233                   |
| Další příklady pro 1. kolo XI. ročníku fyzikální olympiády                   | 38                         |
| K výročí založení FO v Československu                                        | 175                        |
| První skupina příkladů XII. ročníku FO                                       | 464                        |
| <b>Naše soutěž</b>                                                           |                            |
| Soutěžní příklady a řešení úloh loňské soutěže                               | 31, 81, 126, 177, 271, 330 |
| <b>Různé</b>                                                                 |                            |
| Jozífek Vítězslav: Co je matematika?                                         | 191                        |
| Jozífek Vítězslav: O aplikacích matematiky                                   | 430                        |
| Jozífek Vítězslav: První učebnice geometrie s úplnou českou terminologií     | 93                         |
| Kotyk Josef: Albert Einstein, vědec a prorok                                 | 328                        |
| Kotyk Josef: Einstein a jeho princip stálé světelné rychlosti                | 143                        |
| Kotyk Josef: Hrst vzpomínek                                                  | 458                        |
| Kotyk Josef: Max Laue                                                        | 140                        |
| Kotyk Josef: Vědecké předpovědi                                              | 188                        |
| Kotyk Josef: Za profesorem Františkem Záviškou                               | 90                         |
| Santholzer Vilém: Ze života průkopnice v oboru atomové a radiologické fyziky | 287                        |
| Súťaž mladých matematikov                                                    | 52                         |
| <b>Matematické a fyzikální zábavy</b>                                        |                            |
| Horák Stanislav st.: Neurčitá rovnice                                        | 475                        |
| Lukáš Otakar: Měření hloubky vody                                            | 470                        |
| Šedivý Jaroslav: Obálka soustavy přímek                                      | 387                        |
| Šedivý Jaroslav: Obálky soustavy kružnic                                     | 435                        |
| Šedivý Jaroslav: Obrazy rotačních těles                                      | 472                        |
| Šedivý Jaroslav: Pro nejmladší matematiky                                    | 434                        |
| Šedivý Jaroslav: Vytvořte si pentomino                                       | 386                        |
| Šedivý Jaroslav: Záhada Möbiova listu                                        | 436                        |
| Šedivý Jaroslav: Záhady Zmatlíkova zápisníku                                 | 240, 477                   |
| Vojan Karel: Důkaz Pythagorovy věty                                          | 471                        |
| Mikulčák Jiří: Živé počítačové stroje                                        | 98                         |
| Řešení zábavných úloh z minulého ročníku                                     | 243, 388                   |
| Zábavné úlohy                                                                | 195, 244, 338              |
| Řešení zábavných úloh z letošního ročníku                                    | 474                        |
| <b>Citáty a historky ze života velkých matematiků a fyziků</b>               |                            |
| Korunované hlavy                                                             | 19                         |
| Ta profesorská zapomětlivost                                                 | 29                         |
| Pochváleno buď jméno matematika                                              | 100                        |
| Ta roztržitost                                                               | 100                        |
| Že by rána osudu?                                                            | 100                        |
| Životu nebezpečné vědomosti                                                  | 139                        |
| Max Planck, Albert Einstein                                                  | 242                        |
| Rozdíl mezi géníem, expertem a začátečníkem                                  | 254                        |
| Náhodné objevy v astronomii                                                  | 265, 337                   |
| W. H. Nernst                                                                 | 371                        |
| Příroda objevuje filosofii                                                   | 457                        |
| Z matematika básník                                                          | 439                        |
| Fyzik na onom světě                                                          | 439                        |
| <b>Recenze</b>                                                               |                            |
| Odvárko Oldřich: J. Šedivý, O modernizaci školské matematiky                 | 51                         |
| Setzer Ota: J. Hroník, Úlohy o maximech a minimech funkcí                    | 50                         |
| <b>Redakční</b>                                                              |                            |
| Redakce hovoří se čtenáři                                                    | 148                        |



stávají v magnetickém poli Země rovněž magnetickými. Gilbert sledoval malou magnetkou průběh siločar v okolí zmagnetované ocelové koule a shledal, že běží o obdobu působení Země na kompas. Zemským magnetismem vyložil správně podstatu magnetické deklinace a inklinace, okolnost, že totální (celková) intenzita magnetického pole Země je různá na různých místech, že inklinace<sup>1)</sup> směrem k pólům vzrůstá apod. Tím vyvrátil dřívější báje o velikých magnetových horách na severní točně, nebo o přitažlivé síle vycházející z Polárky a dílem „De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete Tellure“ (1600) stal se zakladatelem nauky o zemském magnetismu.

Gilbert zemřel roku 1603. Nedožil se tedy již skvělého potvrzení svých závěrů Hudsonem<sup>2)</sup>, jenž na  $75^\circ$  sev. šířky naměřil roku 1608 inklinaci  $89^\circ 30'$ , kdežto v Londýně ( $51,5^\circ$  sev. šířky) činila její hodnota jen  $72^\circ$ . Horizontální složku intenzity zemského pole magnetického určil poprvé roku 1832 Karl Friedrich Gauss. Roku 1839 zpracoval Gauss nauku o zemském magnetismu klasickým dílem „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus“. Gaussova teorie je ovšem přímým a ukončeným pokračováním díla Gilbertova.

\*       \*

\*

Do doby, o níž píší (přesněji řečeno do Oerstedtova objevu magnetických účinků elektrického proudu roku 1820 a Faradayova objevu elektromagnetické indukce roku 1831), byl magnetismus vykládán tak, jako by s elektřinou vůbec nesouvisel. Nauka o elektřině se vyvíjela nezávisle, zcela samostatně. Z této doby pochází však řada důležitých kvalitativních pozorování. Také Gilbert se na nich podílel. Podle svých pokusů rozdělil látky na idioelektrické, jež mohl třením ze elektrovat a aneelektrické, na nichž podobný zjev pozorovat nemohl. Tím se stal zakladatelem nauky o novém fyzikálním stavu těles, který nazval elektrickým a jeho příčinu elektrinou.

Pomocí těchto pojmů popsal Gilbert např. také sdílení elektřiny a elektrického stavu těles aj. Záhy se poznalo, že třením lze ze elektrovat všechny látky, jsou-li vhodně opatřeny, izolovány. Není pak aneelektrických látek ve významu Gilbertově. Tělesa aneelektrická jsou vlastně neizolovanými tělesy vodivými.

<sup>1)</sup> Magnetka inklináční (viz obr. 1) se otáčí ve vidlici  $V$  kolem osy vodorovné a spolu s vidlicí kolem svislého závěsu. Magnetickou inklinací rozumíme úhel, který tvoří osa  $SJ$  této magnetky s vodorovnou rovinou.

<sup>2)</sup> Po něm, svým objeviteli, byl pojmenován Hudsonův průliv v Severní Americe; spojuje Hudsonův záliv s Atlantickým oceánem.

Teorie, jež měly vykládat elektrické jevy, byly vypracovány v padesátých letech 18. století. Autorem jedné z nich je *Benjamin Franklin* (naroz. roku 1706), syn mydláře v Governors Island u Bostonu, vyučený knihtiskař, jenž pilným sebevzděláváním se vyšinul na vědeckého pracovníka, vynálezce a vynikajícího státníka. Podle jeho představ je příčinou elektrického stavu těles elektrické fluidum, nevažitelná látka, které je v neelektrickém tělese určité normální množství. Obsahuje-li těleso fluida více (méně) než za normálních okolností, jeví se kladně (záporně) elektrické. Skupina, sestávající např. z neelektrického skla a hedvábí, obsahuje jisté normální množství fluida. Třeme-li sklo hedvábím, přechází fluidum z hedvábí na sklo, hedvábí se jeví záporně a sklo kladně elektrické.

Více než u n i t á r n í h y p o t é z a F r a n k l i n o v a se rozšířila hypotéza dualistická, podle níže existuje dvojí různé elektrické fluidum, kladné a záporné. Tato hypotéza je sice složitější než Franklinova, ujalá se však na dlouhou dobu. Také názvosloví nauky o elektřině se opírá o ni. Označení kladná a záporná elektřina pochází však od Franklina.<sup>3)</sup>

Patří k půvabům dějinného vývoje a k jeho dialektice, že dnešní fyzika zastává názor dualistický i unitární zároveň. Přisuzuje kladné a záporné náboje různým nositelům, prohlašuje však atomová jádra, nejzákladnější nositele kladných nábojů, za nejpodstatnější složku hmoty.

Obvyklý tvar deskového kondenzátoru má rovněž jméno Franklinovo; je to známá Franklinova deska. Leydenská láhev je v podstatě také Franklinova deska, svinutá však do tvaru sklenice. Franklin vysvětlil i působení těchto přístrojů.

Pokusy s jiskrovými výboji vzbudily ve Franklinovi myšlenku, že velikou elektrickou jiskrou je také — b l e s k. Jeho účinky jsou totiž podobné účinkům jiskrového výboje kondenzátoru; jsou však mnohem mohutnější, poněvadž elektrická energie na nich zúčastněná je ohromná. Již roku 1749 podal proto Franklin první návrh ke zkoumání a t m o s f é r i c k é e l e k t ř i n y. Aby zjistil elektrický stav ovzduší a vyšetřil elektrické pole Země, vyšel dne 22. června 1752 před bouří se svým synem do přírody a vypouštěl do vzduchu papírového draka, opatřeného vpředu kovovým hrotem; na konci konopného provázku byl klíč, od něhož vedla hedvábná izolující šňůra, za kterou byl drak držen. Když drak vystoupil, zkoušel Franklin, zdali dostane z klíče jiskry. Pokus se zprvu nedařil. Teprve když začalo pršet a provázek zvlhl, přeskakovaly mezi klíčem a rukou silné jiskry...

---

<sup>3)</sup> C h a r l e s D u f a y (1698—1739), člen pařížské Akademie, zaváděl názvy elektřina sklová a pryskyřicová.

Franklin netušil, že jeho pokus je velmi nebezpečný.<sup>4)</sup> Jeho práce vedly jej však k úvahám, jak chránit budovy, lodi a jiné objekty proti ničivým účinkům blesku a k sestrojení bleskosvodu<sup>5)</sup>. První Franklinův bleskosvod byl zřízen ve Philadelphii roku 1760, jiný byl postaven v Bostonu roku 1764.<sup>5)</sup>

Franklinův bleskosvod se pro technickou jednoduchost a účelnost záhy velice rozšířil. Chrání přibližně kuželový prostor, jehož výškou  $v$  je výška bleskosvodu nad zemí a poloměr podstavu  $r = 2v$ . Je-li budova rozsáhlá, chrání se několika bleskosvody.

*Benjamin Franklin* je čtenářům našeho časopisu znám také jako slavný politik, jenž organizoval odpor britských osad v Severní Americe proti anglickému panství, vedoucí 4. července 1776 k prohlášení jejich úplné nezávislosti a ke vzniku Spojených států severoamerických. Když dne 17. dubna 1790, právě před 180 lety zemřel, měl nad hrobem svého spolubojovníka řeč sám George Washington, první president USA. Ve Francii měl smuteční projev proslavený řečník hrabě de Mirabeau, na jehož návrh francouzský národ uctil Franklinovu památku třídenním smutkem. Pamětihodná jsou též slova, kterými Franklina oslavil francouzský matematik d'Alembert:

„Nebesům vyrval blesk —  
a žezlo tyranům!“

\*                      \*

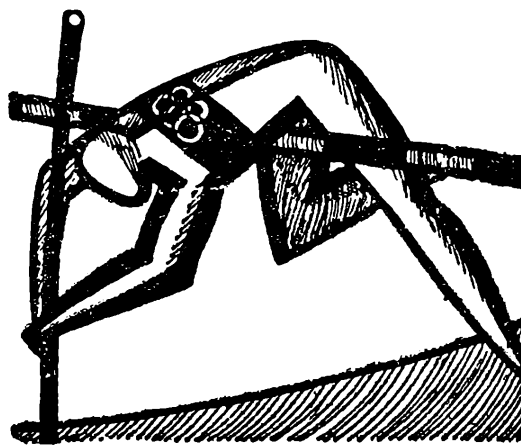
\*

---

<sup>4)</sup> Při podobném pokuse byl zabit profesor fyziky na universitě v Petrohradě Georg Wilhelm Richmann v dalším roce dne 26. července 1753 elektrickým výbojem.

<sup>5)</sup> Prvý bleskosvod postavil dne 15. června 1754 Prokop Diviš, farář v Příměticích u Znojma. V podrobnostech viz autorův článek „Prokop Diviš“ v Rozhledech roč. 44, čís. 3, str. 139 až 143.

# MO



## XX. ročník Matematické olympiády

*Kategorie Z*

### Přípravné úlohy

1. Součet druhých mocnin tří po sobě jdoucích lichých čísel je čtyřciferné číslo, jehož všechny číslice jsou stejné.

Najděte všechny takové trojice lichých čísel.

2. Ozubené pedálové kolečko jízdního kola (bicyklu) má 48 převodních zubů; malé převodové kolečko na zadním kole má 20 zubů. Průměr zadního kola bicyklu je 72 cm. (Uvědomte si, že vzdálenost dvou sousedních zubů u obou koleček je táž.) Cyklista jede po vodorovné silnici stálou rychlostí 25 km za hodinu na plný záběr (šlape rovnoměrně).

a) Kolikrát musí šlápnout za jednu minutu, aby si udržel stálou rychlost 25 km za hodinu?

b) Kolikrát musí šlápnout na trati dlouhé 4,5 km?

3. Je dán rovnostranný trojúhelník o straně délky 8 cm. Dále je dán pravidelný šestiúhelník  $KLMNOP$  o straně délky 4 cm tak, že vrcholy  $A$  a  $K$  v základní poloze splývají a vrchol  $L$  leží na polopřímce  $AB$ ; oba útvary leží v opačných polorovinách vyřazených přímkou  $AB$ .

Šestiúhelník  $KLMNOP$  se kotálí po obvodu trojúhelníka  $ABC$ .

a) Vyšetřete dráhu vrcholu  $K$ .

b) Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného dráhou bodu  $K$ .

4. Je dána velikost  $s$  střední příčky a velikost  $v$  výšky lichoběžníka  $ABCD$ , jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé. Průsečíky úhlopříček se

střední příčkou lichoběžníka  $ABCD$  dělí tuto střední příčku na tři shodné úsečky.

Sestrojte lichoběžník  $ABCD$ .

### Soutěžní úlohy I. kola

1. Je dán zlomek

$$V = \frac{a^2 - ab - ac + bc}{a^3 - a^2b - a^2c - a^2d + abc + abd + acd - bcd}$$

Určete, pro která čísla  $a, b, c, d$ :

- a) ztratí tento zlomek smysl a pak jej zkratíte;
- b) je daný zlomek roven nule;
- c) je daný zlomek kladný, popřípadě záporný.

2. Hrací kostka má tvar krychle; její stěny jsou označeny oky v počtu 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, že součet počtu ok na dvou protějších stěnách je vždy týž.

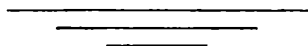
K hrací kostce přilepíme další dvě stejné hrací kostky z téhož materiálu vždy celými stěnami. Jak kostky slepit a pak slepenec položit na stůl aspoň jednou stěnou tak, aby počet viditelných ok byl: a) maximální; b) minimální?

3. Je dán trojúhelník  $ABC$  o stranách  $AB = 9$  cm,  $BC = 5$  cm,  $CA = 8$  cm. Vepište mu kružnici  $k$  a na kružnici  $k$  sestrojte všechny body  $X$  této vlastnosti: přímka  $p$  rovnoběžná s  $AC$  vedená bodem  $X$  protíná strany  $AB, BC$  po řadě v takových bodech  $Y$  a  $Z$ , že  $X$  je středem úsečky  $YZ$ .

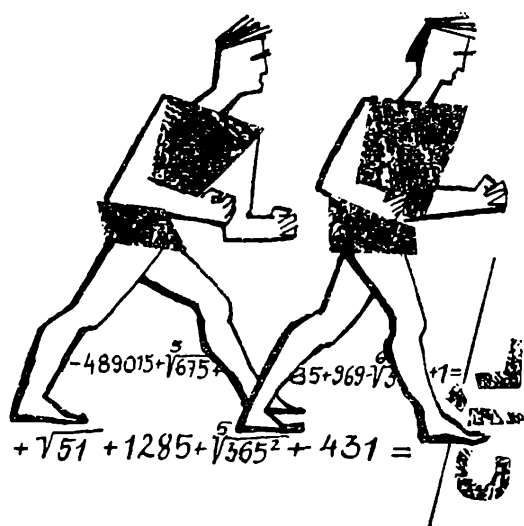
4. Jsou dány dva různé pravidelné šestiúhelníky  $ABCDEF$  a  $KLMNOP$ , které mají společnou stranu ( $A \equiv K, B \equiv L$ ).

a) Určete dráhu, kterou opíše vrchol  $K$  šestiúhelníka  $KLMNOP$ , který se kotálí vně po obvodu šestiúhelníka  $ABCDEF$ .

b) Vypočítejte délku této dráhy.



**P o z n á m k a** Organizace soutěže MO ve XX. ročníku v kategorii Z je táž jako v ročníku XIX.



FO

## XII. ročník fyzikální olympiády

XII. ročník FO proběhne opět ve čtyřech kategoriích. Kategorie A je určena pro žáky IV. ročníků gymnasií, III. ročníků SVVŠ, III. a IV. ročníků středních odborných škol; kategorie B je určena pro žáky II. a III. ročníků gymnasií a II. ročníků SVVŠ a středních odborných škol. V kategorii C soutěží žáci I. ročníků všech středních výběrových škol a v kategorii D žáci 9. tříd ZDŠ. Soutěž probíhá v kategoriích B, C a D ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech. V prvním kole mají soutěžící řešit 9 úloh a prostudovat příslušné fyzikální téma (v kategoriích A, B, C). Fyzikální téma bude uveřejněno v příštím ročníku „Rozhledů matematicko-fyzikálních“

Pro kategorii A je připraveno téma „Elektrické pole“ — autor dr. O. Pivnička;

pro kategorii B je připraveno téma „Hydrodynamika“ — autor St. Zhejbal;

pro kategorii C je připraveno téma „Hodnota a chyba měřené veličiny“ — autor prof. dr. R. Košťál.

Zadání všech úloh najdete v samostatném letáku vydaném SPN. Abychom umožnili zájemcům řešit úlohy s předstihem, uvádíme texty prvních tří úloh kategorií A, B, C v tomto čísle. Další úlohy budou otištěny v některém z prvních čísel příštího ročníku „Rozhledů“. Podobně úlohy kategorie D budou uveřejněny v časopise „Fyzika ve škole“

V závěru uvádíme, že úspěšný řešitel prvního kola musí vyřešit správně šest z devíti zadáných úloh (z nich jedna až dvě souvisí se

studijním tématem), přičemž ze dvou úloh majících experimentální charakter musí řešit (i když neúspěšně) aspoň jednu úlohu.

Termíny pro odevzdávání vyřešených úloh referentům FO na gymnasiích a středních odborných školách jsou:

do 30. 11. 1970 — úloha 1.—3.

do 10. 1. 1971 — úloha 4.—6.

do 10. 2. 1971 — úloha 7.—9.

Při řešení fyzikálních úloh Vám přejeme hodně úspěchů a radosti z poznání, že dovedete samostatně užít poznatků získaných při studiu fyziky.

Ústřední výbor fyzikální olympiády

## Úlohy pro první kolo

### *Kategorie A*

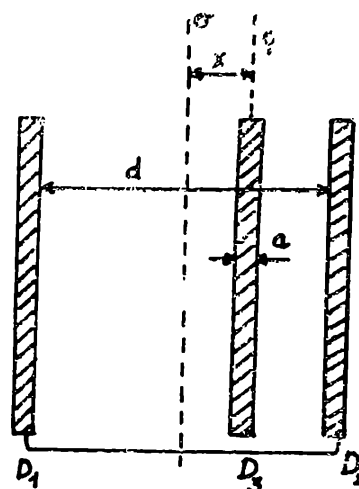
1. Lyžař sjede z kopce, jehož úhel sklonu je  $\alpha$ , za dobu  $t_1$ . Potom jede setrvačností po dobu  $t_2$  po vodorovné rovině, načež vyjíždí na protější kopec, jehož úhel sklonu je  $\beta$ . Určete, jak daleko vyjede na druhý kopec. Při řešení předpokládejte, že energie se ztrácí jenom třením, k jiným překážkám pohybu nepřihlížejte. Součinitel smykového tření  $\mu$  je po celé dráze stálý.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $t_1 = 5,0$  s;  $t_2 = 10$  s;  $\mu = 5,0 \cdot 10^{-2}$ ;  $g = 9,8$  m s $^{-2}$ .

2. Dvě velmi velké rovnoběžné kovové desky  $D_1$ ,  $D_2$  jsou spolu vodivě spojeny, jejich vzdálenost je  $d$  (viz obr. 1). Mezi nimi je zasunutá stejná kovová deska  $D_3$  tloušťky  $a$ . Deska  $D_3$  je od desek  $D_1$  a  $D_2$  elektricky izolována. Rovina  $\sigma$ , která půlí vzdálenost  $d$ , má od střední roviny  $\rho$  desky  $D_3$  vzdálenost  $x$ . Účinná plocha každé desky má obsah  $S$ .

a) Vypočítejte kapacitu  $C$  mezi vloženou deskou  $D_3$  a spojenými deskami  $D_1$ ,  $D_2$  za předpokladu, že elektrická pole v soustavě jsou homogenní.

b) Stanovte, pro kterou hodnotu  $x$  má kapacita  $C$  minimální hodnotu  $C_{\min}$  a vypočítejte  $C_{\min}$ .



Obr. 1

c) Stanovte, pro které hodnoty  $x$  nabývá poměr  $C/C_{\min}$  hodnoty  $n$ , kde  $n$  je dané číslo  $>1$ .

d) Graficky znázorněte funkci

$$n = f\left(\frac{x}{d-a}\right)$$

v oboru

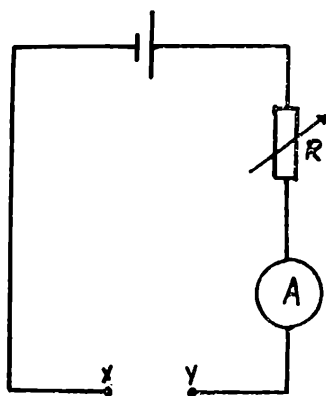
$$0 \leq \frac{x}{d-a} \leq 0,45$$

e) Vyložte, jak lze výsledků této úlohy využít k seřizování technických otočných kondenzátorů při jejich výrobě.

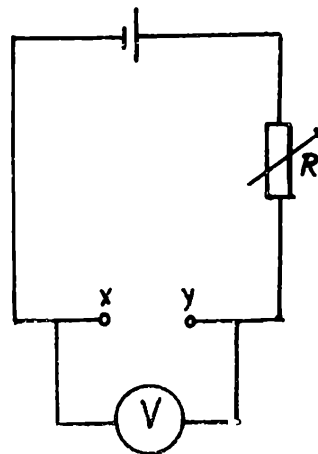
### 3. Měření odporu metodou substituční

**P o m ů c k y :** Voltmetr, ampérmetr, reostat, odporová dekáda, baterie, odpor neznámé hodnoty.

**P o p i s m e t o d y** Zapojíme obvod podle obr. 2, resp. obr. 3. Mezi svorky  $X$ ,  $Y$  připojíme neznámý odpor  $R_x$  a regulačním reosta-



Obr. 2



Obr. 3

tem  $R$  nastavíme proud tak, aby ampérmetr  $A$ , resp. voltmetr  $V$  dával dobře čitelnou výchylku. Údaj ampérmetru  $I_0$ , resp. voltmetru  $U_0$  zaznamenáme. Pak odpojíme neznámý odpor  $R_x$  a nahradíme jej odporovou dekádou. Na dekádě nastavíme postupně odpory  $R_1$ ,  $R_2$  takové, aby údaje měřidel  $I_1$ ,  $I_2$ , resp.  $U_1$ ,  $U_2$  byly v prvním případě o něco větší, v druhém případě o něco menší než  $I_0$ , resp.  $U_0$ . Velikost neznámého odporu vypočítáme ze vztahů

$$R_x = R_1 + \frac{I_1 - I_0}{I_1 - I_2} (R_2 - R_1), \quad (1)$$



resp.

$$R_x = R_1 + \frac{U_1 - U_0}{U_1 - U_2} (R_2 - R_1) \quad (2)$$

Ú l o h y : a) Odvodte (pomocí lineární interpolace) vztahy (1) a (2) pro výpočet odporu  $R_x$ .

b) Změřte velikost neznámého odporu pětkrát v zapojení podle obr. 2 a pětkrát v zapojení podle obr. 3. Při každém měření změňte poněkud velikost proměnného odporu  $R$ .

c) Velikost neznámého odporu stanovte jako aritmetický průměr z deseti hodnot určených podle bodu b).

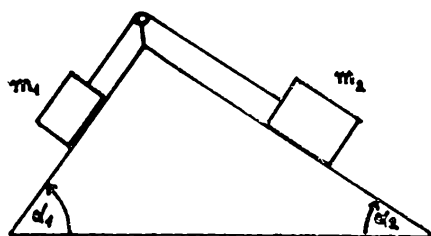
P o z n á m k y : 1. Ampérmetr a voltmetr volte se stejnou třídou přesnosti (např. Avomet) a poměry v obvodu nastavujte tak, aby ručky ukazovaly přibližně stejné výchylky (ve stupních) v zapojení podle obr. 2 a v zapojení podle obr. 3.

2. Při nastavování dekády v zapojení podle obr. 2 postupujte od větších hodnot odporu k menším, v zapojení podle obr. 3 naopak, abyste nepřetížili ampérmetr, popř. voltmetr.

3. Proud v obvodu, nastavený reostatem  $R$ , nesmí překročit hodnotu, která je pro použitou odporovou dekádu nejvýše přípustná.

### Kategorie B

1. Na obrázku 8 je znázorněný rez dvoma naklonenými rovinami, ktoré zvierajú s vodorovnou rovinou uhly  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ ,  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Na prie-



Obr. 8

sečnici naklonených rovin je upevnená kladka; niť vedená cez kladku spojuje hranol o hmotnosti  $m_1$  s hranolom o hmotnosti  $m_2$ . Súčiniteľ šmykového trenia  $\mu$  je pre obe telesá a podložky rovnaký.

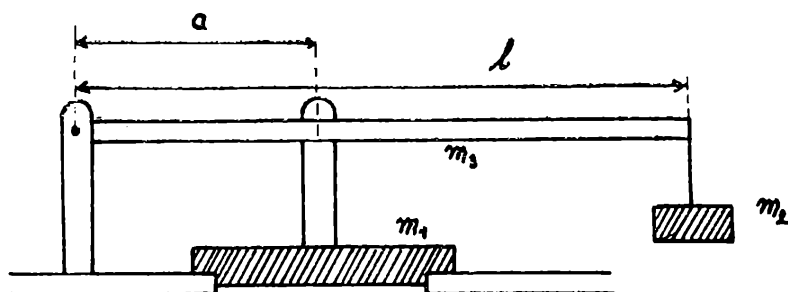
Určte pomer  $p = \frac{m_1}{m_2}$ , ak telesá konajú:

- a) rovnomerne zrýchlený pohyb;
- b) rovnomerný pohyb.

Prevedte diskusiu pre obe možnosti, a to že klesá hranol o hmotnosti  $m_1$  alebo hranol o hmotnosti  $m_2$ . Hmotnosť nite a moment zotrvačnosti kladky neuvažujeme.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty  $\alpha_1 = 60^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,  $\mu = 0,2$ .

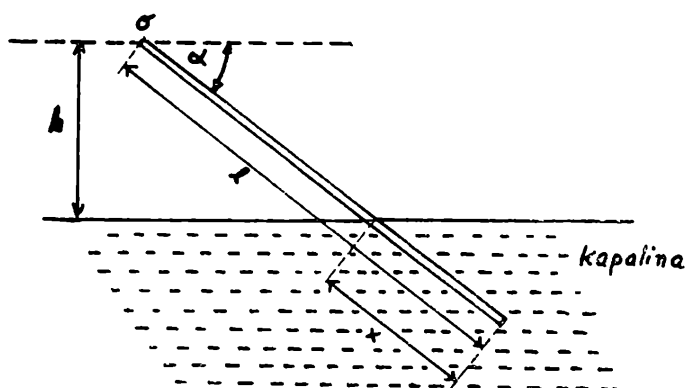
2. Pojistný ventil zajišťuje parní kotel před nepřipustným přetlakem. Stěny kotle jsou konstruovány tak, že v něm může být maximální tlak  $p$  při vnějším tlaku atmosférickém  $b$ . Na obr. 9 je znázorněno schéma konstrukce ventilu. Ve víku kotle je kruhový otvor o průměru  $d_1$ , který uzavírá ventil o hmotnosti  $m_1$ . Těsnění je zajištěno pryžovým prstenem. Ventil je upevněn k ocelové tyči, všude stejného



Obr. 9

průřezu o délce  $l$  a hmotnosti  $m_3$  ve vzdálenosti  $a$  od vodorovné osy otáčení na konci páky. Na volném konci páky je upevněno závaží o hmotnosti  $m_2$ . Určete hmotnost závaží  $m_2$  tak, aby při překročení tlaku  $p$  uvnitř kotle se ventil nadzvedl. Předpokládáme, že páka je ve vodorovné poloze.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $p = 9,00$  at,  $b = 1,00$  at,  $d_1 = 50,00$  mm,  $l = 1,00$  m,  $a = 10,00$  cm,  $m_1 = 2,00$  kg,  $m_3 = 8,00$  kg.



Obr. 10

3. Tenká tyč z homogenního materiálu všude stejného průřezu o hustotě  $\rho_1$  je v jednom koncovém bodě otáčivá kolem nehybné vodorovné osy  $o$  a druhý konec má volně spuštěn do kapaliny hustoty  $\rho_2 > \rho_1$  (obr. 10).

a) Jaká část délky  $l$  tyče je ponořena v kapalině, je-li tyč v rovnovážné poloze a svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha$ , pro který platí  $0 < \alpha < 90^\circ$ ?

b) Jak se změní délka ponořené části tyče, změní-li se výška  $h$  osy  $o$  nad povrchem kapaliny? Provedte diskusi a určete mezní polohy osy  $o$ .

c) Obě předcházející části úlohy řešte i v případě, že osa  $o$  je pod povrchem kapaliny.

### Kategorie C

1. Rovnoběžné mantinely  $a$ ,  $b$  kulečníku jsou od sebe vzdáleny o délku  $d$ . Od mantinelu  $a$  jsou současně vrženy po stejné dráze kolmo k mantinelu  $b$  dvě stejné koule  $A$ ,  $B$  různými rychlostmi  $v_A > v_B$ . Rozměry koulí zanedbejte. Rychlejší koule ( $A$ ) se odrazí od mantinelu  $b$  bez ztráty energie a střetne se s koulí pomalejší ( $B$ ), přičemž si obě koule vymění rychlost. Koule  $B$  se po odrazu od koule  $A$  pohybuje rychleji než koule  $A$ , odrazí se pak od mantinelu  $a$  a střetne se podruhé s koulí  $A$ . Vypočtěte:

a) polohy míst, kde dojde k prvnímu a druhému střetnutí;

b) doby, které uplynou od okamžiku uvedení koulí do pohybu do jejich prvního a druhého střetnutí.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $d = 1,26$  m,  $v_A = 7,0$  m s<sup>-1</sup>,  $v_B = 2,0$  m s<sup>-1</sup> a také pro hodnoty  $v'_A = 7,0$  m s<sup>-1</sup>,  $v'_B = 5,0$  m s<sup>-1</sup>.

2. Vozidlo se pohybuje pohybem přímočarým rovnoměrným rychlostí  $v$ . V místě  $B$  vyšle zvukový signál, šířící se rychlostí  $c$ , který dospěje po dráze  $AB$  do místa  $A$  za dobu  $t$  po průjezdu vozidla místem  $A$ .

a) Jaká je vzdálenost  $AB$ ?

b) Jestliže se signál v místě  $A$  odrazí, v jaké vzdálenosti  $AC$  dostihne odražený signál vozidlo?

c) Jaká musí být rychlost  $v$  vozidla, má-li být  $BC = \frac{1}{n} AB$ ?

3. Po dvou rovnoběžných přímých kolejích se pohybují proti sobě lokomotiva s tendrem o délce  $d_1$  a vlak délky  $d_2$ . Lokomotiva s tendrem má stálou rychlost  $v_1$  a vlak jede stálou rychlostí  $v_2$ . Lokomotiva mine vlak za dobu  $t_1$ . Předjíždí-li lokomotiva s tendrem, vracející se stejnou rychlostí  $v_1$ , vlak, pohybující se rychlostí  $v_2$ , míjí jej za dobu  $t_2$ .

a) Jakou rychlostí se pohybuje vlak?

b) Jak dlouhý je vlak?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty  $d_1 = 8,0$  m,  $v_1 = 54$  km h<sup>-1</sup>,  $t_1 = 4,0$  s,  $t_2 = 16$  s.



## MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY

# Měření hloubky vody

OTAKAR LUKÁŠ, Kroměříž

Sportovní potápěči používají hloubkoměry, jejichž jedinou součástí je úzká, skleněná trubice, na horním konci zatavená. Trubice je naplněna vzduchem, jehož objem se s rostoucí hloubkou vody zmenšuje. Je kalibrována a cejchována tak, že při čtení objemu v ní stlačeného vzduchu čteme na trubici přímo hloubku v metrech. Provedeme zde odvození vzorce, z něhož lze hodnoty potřebné pro kalibraci trubice vypočítat.

Odvození provedeme pomocí Boyleova-Mariotteova zákona, který říká, že součin objemu  $V$  a tlaku  $p$  určitého množství plynu je při stálé teplotě stálý. Tedy

$$p \quad V = p_0 \quad V_0 = \text{konst.}, \quad (1)$$

kde  $p_0$ ,  $V_0$  jsou počáteční hodnoty tlaku a objemu.

Hydrostatický tlak  $p$  vody hustoty  $\varrho$  v hloubce  $h$  je v místě tíhového zrychlení  $g$  dán běžně známým vztahem

$$p_h = \varrho \quad g \cdot h \quad (2)$$

Má-li trubice, obrácená zataveným koncem vzhůru, ústí těsně nad hladinou vody, je v ní vzduch, jehož tlak je roven atmosférickému tlaku  $p_0$ . Posuneme-li trubici svisle dolů tak, že se právě dotkne svým ústím hladiny vody, uzavře se vodou v trubici určitý objem vzduchu  $V_0$ , jehož tlak zůstane roven atmosférickému tlaku  $p_0$ . Ponoříme-li trubici hlouběji pod vodní hladinu, pozorujeme, že se objem vzduchu, uzavřeného v trubici, se vzrůstající hloubkou vody zmenšuje. Je to tím, že hydrostatický tlak je úměrný hloubce a tlak vzduchu uzavřeného v trubici  $p$  v hloubce  $h$  se rovná původnímu

tlaku  $p_0$ , zvětšenému o hydrostatický tlak  $p_h$ , který je příčinou zmenšení původního objemu vzduchu  $V_0$  na hodnotu  $V$ . S použitím (2) můžeme tlak vzduchu stlačeného v hloubce  $h$  vyjádřit vztahem

$$p = p_0 + p_h = p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad (3)$$

Za předpokladu, že při ponořování trubice do různých hloubek zůstává teplota stlačovaného vzduchu konstantní, můžeme dosadit (3) do (1) a dostaneme

$$p_0 \cdot V_0 = (p_0 + \rho \cdot g \cdot h) \cdot V \quad (4)$$

Úpravou rovnice (4) dostaneme hledaný vzorec, který vyjadřuje závislost vodou uzavřeného objemu vzduchu  $V$  na hloubce vody  $h$ , ve tvaru

$$V = V_0 \cdot \frac{p_0}{p_0 + \rho \cdot g \cdot h} \quad (5)$$

Grafem závislosti objemu  $V$  na hloubce vody  $h$ , tj. grafickým zobrazením rovnice (5), je hyperbola.

Dosadíme-li do (5) hodnoty  $\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  a  $p_0 = 1 \text{ at} \doteq 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , zjistíme, že v hloubce 10 m klesne objem  $V$  vzduchu v trubici na polovinu původní hodnoty  $V_0$ , v hloubce 20 m na třetinu atd. Vypočítané hodnoty použijeme při kalibraci popsaného hloubkoměru, u něhož čteme hodnotu na více desetinných míst tehdy, když je použita trubice užší a delší.

## Důkaz Pythagorovy věty

Pan K. Vojan, gen. v. v., z Teplic nad Metují, nám zaslal důkaz Pythagorovy věty, který je jednoduchý, i když není nový. Pan Vojan však na něj přišel sám.

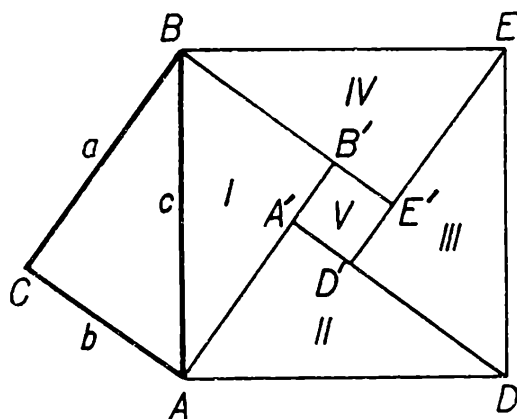
Nad přeponou  $AB = c$  daného trojúhelníka  $ABC$  (viz obr. 1) sestrojme čtverec  $ADEB$  a jeho vrcholy vedme rovnoběžky s odvěsnou  $AC$  nebo  $BC$ , jak je naznačeno v obr. 1. Tím se čtverec  $ADEB$  rozdělí na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky, které jsou označeny  $I$ ,  $II$ ,  $III$ ,  $IV$  a menší čtverec uprostřed  $A'D'E'B'$ , který stručně označíme  $V$

Tyto trojúhelníky mají tentýž obsah jako daný trojúhelník, poněvadž se s ním shodují v přeponě a v jednom úhlu. Dále snadno nahlédneme, že platí

$$AC = AA' = DD' = EE' = BB' = b,$$

a proto je

$$A'B' = AB' - AA' = a - b$$



Obr. 1

Daný trojúhelník má obsah

$$P = \frac{1}{2} ab$$

Čtverec  $ADEB$  má obsah jednak  $c^2$  a jednak

$$4 \cdot \frac{1}{2} ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$$

Odtud již máme

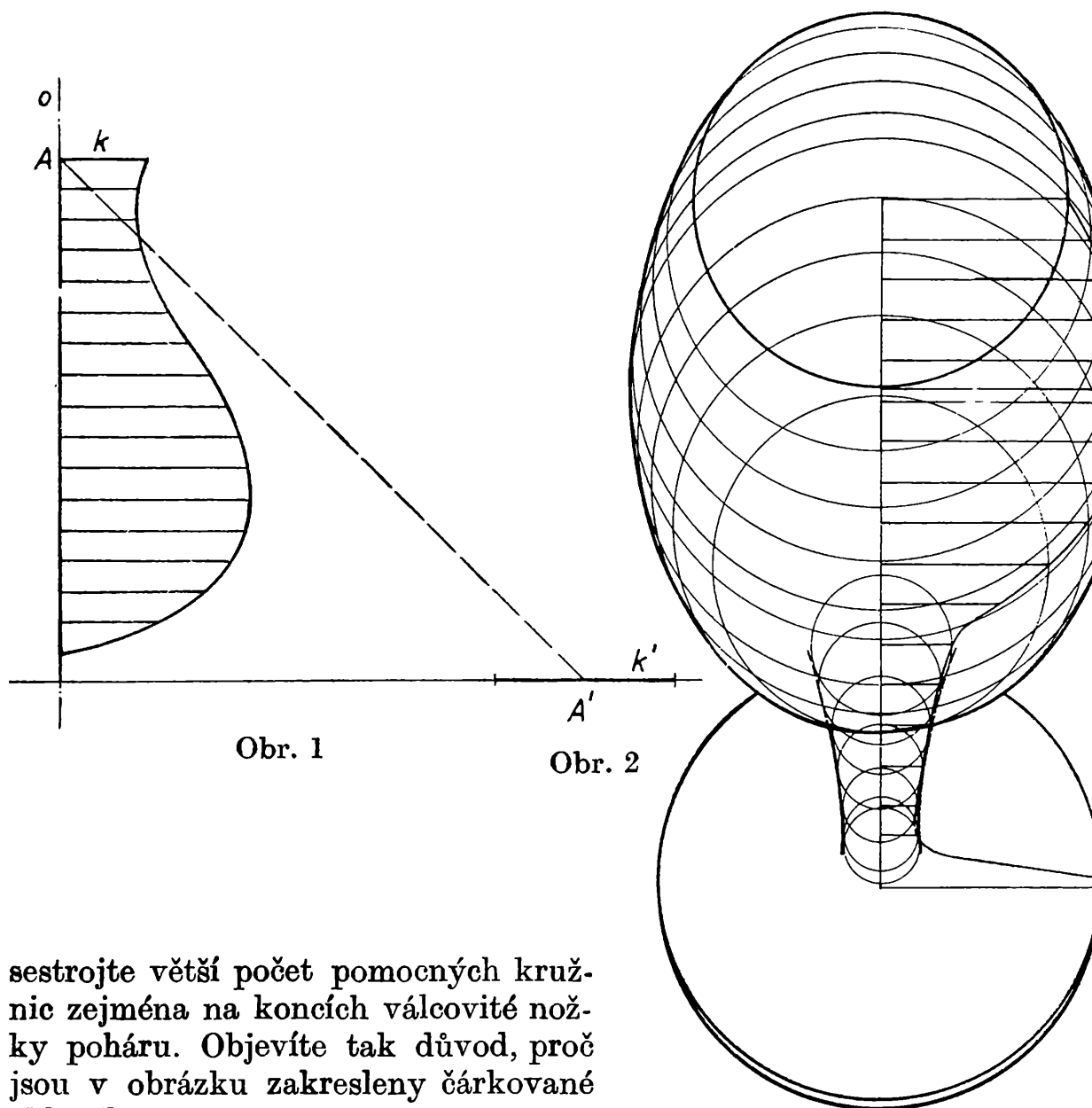
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Důkaz je ovšem proveden jako podmínka nutná. Chybí důkaz toho, Pythagorova věta je postačující podmínka k tomu, aby daný trojúhelník byl pravouhlý.

## Obrazy rotačních těles

Obálky soustav kružnic, které jste poznali v minulém čísle Rozhledů, mohou sloužit jako pomůcka při zobrazování rotačních těles majících složitější tvary, např. číše, kuželky, žárovky apod. Postačí, máme-li přesně zakreslen osový řez tělesa nebo aspoň jeho polovinu, tzv. poledník (meridián), jako na obr. 1. Představíme si větší počet řezů tělesa rovinami kolnými k ose; všechny takové řezy jsou kruhy, kružnice nebo mezikruží. Zvolíme-li vhodný směr rovnoběžného promítání s do roviny  $\pi$  kolmé k ose, zobrazí se každý z uvedených řezů ve své skutečné velikosti.

Prakticky postačí, vyznačíme-li v obrázku zachycujícím meridián tělesa úsečky kolmé k ose a končící na meridiánu tělesa. Každé takové úsečce přiřadíme kružnici, která má střed na ose a prochází bodem na meridiánu (viz obr. 2), obálka těchto kružnic pomáhá vytvářet obrys rotačního tělesa. Nakreslete si svůj vlastní obrázek a v něm



sestrojte větší počet pomocných kružnic zejména na koncích válcovité nožky poháru. Objevíte tak důvod, proč jsou v obrázku zakresleny čárkované obloučky.

Sestrojte si obraz šachového pěšce, hříbku nebo třeba číše na šampaňské víno. Přesvědčíte se, že obrazy získáte snadno; působí však trochu nezvykle tím, že obsahují kružnice tam, kde jste zvyklí vidat elipsy. Zamyslete se nad problémem, pod jakým úhlem musí dopadat sluneční světlo na desku stolu, aby rotační těleso postavené na této desce vrhlo na ni stín shodný s obrazem, který jste sestrojili metodou popsanou v tomto krátkém článku. Proveďte si takový pokus s některým předmětem vysokým 15–20 cm.

# Řešení hádanek a zábav z letošního ročníku

1. a) Nemůže, b) nemůže, c) dvě.

2. Od 1 do 9 je 9 cifer,  
od 10 do 99 je 180 cifer,  
od 100 do 257 je 474 cifer,

dohromady 663 cifer.

3. a) Z pěti hráčů je možné sestavit 10 dvojic. b) Každý hráč se vyskytuje ve čtyřech dvojicích. Každá dvojice hraje s deseti soupeři. To znamená, že každý hráč se zúčastní čtyřiceti her. c) První škola vyhrála 49 utkání a 51 jich prohrála. Z vítězných utkání měla 98 bodů a z porážek 51 bod. Druhá škola vyhrála 51 utkání a 49 jich prohrála. Výsledek: První škola získala 149 bodů, druhá škola získala 151 bod.

4. Číslo je dělitelné číslem 24, je-li současně dělitelné třemi a osmi. Pro dělitelnost osmi je nutné, aby předposlední cifra byla buď 2 nebo 6.

a) Je-li předposlední cifra 2, pak cifra na druhém místě je některá z následujících: 0, 3, 6, 9. (To proto, aby byla zaručena dělitelnost třemi.) Vyhovují tedy čísla

50 328 , 53 328 , 56 328 , 59 328 .

b) Je-li předposlední cifra 6, dostaneme výsledek

52 368 , 55 368 , 58 368

5. Ve všech případech znamená  $x$  počet čtverečků počítaných směrem dolů od přímky  $r_0$ , která je o 1 čtvereček výš než je přímka  $r$ . Je patrné, že  $x \geq 0$ .

a) Příklad vede k rovnici

$$\begin{aligned}8 + 2x + 20 &= 6 + 3x, \\ x &= 22\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad (8 + 2x) \cdot 1,5 &= 6 + 3x, \\ 0 \cdot x &= 2\end{aligned}$$

Řešení neexistuje.

$$\begin{aligned}\text{c)} \quad (8 + 2x) \cdot 2 &= 6 + 3x, \\ x &= -10\end{aligned}$$

Řešení neexistuje. — Všimněte si obou posledních případů a důvodů, proč neexistuje řešení.

6. a) Má-li daná krychle vrcholy  $A, B, C, D, E, F, G, H$ , pak je po řadě označíme 1, 8, 3, 6, 7, 2, 5, 4. b) Ke hraně  $AB$  připišeme číslo 1, k  $BC$  připišeme 11,  $CD$  (4),  $AD$  (10),  $EF$  (12),  $FG$  (3),  $GH$  (9),  $EH$  (2),  $AE$  (6),  $BF$  (7),  $CG$  (5),  $DH$  (8).



7. Číselná křížovka.  $A$ : 25 — 14,  $B$ : 211,  $C$ : 3960,  $D$ : 6 — 909,  $E$ : 3113.

8.  $x = \sqrt[3]{1849} = 43$ ; pradědovi bylo v roce 1875 69 let.

9.  $y + \frac{1}{2}x = 5$ ,  $y + \frac{1}{3}x = 4$ . Řešení této soustavy je  $x = 6$ ,  $y = 2$ .

Plná nádoba váží 8 kg.

10. Proběhnou se postupně tato pole: A2, C3, B1, A3; C2, A1, B3, C1. Součet čísel na prvních čtyřech polích je 22 a na druhých čtyřech polích také 22.

11. Čísla v řádku  $A$  označme po řadě  $x$ ,  $y$ , v řádku  $B$ ,  $u$ ,  $v$ . Pak platí

$$x + y = 5, \quad (1)$$

$$u + v = 7 \quad (2)$$

$$x + u = 4 \quad (3)$$

S rovnicemi provedme úpravu, kterou symbolicky označíme (1) — (3) + (2). Dostaneme tak

$$y + v = 8.$$

Součet čísel v 2. řádku je 8. Hledaná čísla jsou  $x = 3$ ,  $y = 2$ ,  $u = 1$ ,  $v = 6$ .

Ve 4. čísle měsíčníku T67 na str. 254 je tato zajímavá úloha:

3367 je nejmenší číslo, které je rozdílem dvou třetích mocnin přirozených čísel třemi způsoby. Jeden z nich je

$$3367 = 15^3 - 2^3$$

Určete dva další.

Zamyslíte-li se poněkud nad touto úlohou, zjistíte, že tu jde o řešení neurčité rovnice

$$x^3 - y^3 = 3367 \quad (1)$$

přirozenými čísly. Možná, že vás udiví, řeknu-li, že tato úloha se dá řešit prostředky velmi jednoduchými. Pro zajímavost řešení uvedeme.

Rovnici (1) lze psát též takto

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1 \quad 7 \quad 13 \cdot 37$$

Je ihned patrné, že  $x \neq y$ , a proto můžeme předpokládat  $x > y$ . Výrazy  $x - y$ ,  $x^2 + xy + y^2$  představují přirozená čísla, která musí být obsažena jako dělitelné v čísle 3367. A tu jsou možné tyto případy:

I.

$$\begin{aligned}x - y &= 1 , \\ x^2 + xy + y^2 &= 3367\end{aligned}$$

Máme tu soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Řešíme ji třeba takto

$$x = y + 1$$

a dosadíme do druhé rovnice. Po úpravě dostaneme rovnici

$$y^2 + y - 1122 = 0 .$$

Odtud

$$y_1 = 33 , x_1 = 34 .$$

Dosazením do rovnice (1) se přesvědčíme, že jsme tu skutečně dostali jedno řešení.

II.

$$\begin{aligned}x - y &= 7 , \\ x^2 + xy + y^2 &= 481 (= 13 \cdot 37)\end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme

$$x_2 = 16 , y_2 = 9$$

III.

$$\begin{aligned}x - y &= 13 , \\ x^2 + xy + y^2 &= 259 (= 7 \cdot 37) .\end{aligned}$$

Řešení této soustavy je

$$x_3 = 15 , y_3 = 2 ,$$

což je řešení uvedené v textu úlohy. Tím jsme také našli všechna požadovaná řešení. Přesvědčte se sami, že soustava

$$\begin{aligned}x - y &= 37 , \\ x^2 + xy + y^2 &= 91 (= 7 \cdot 13)\end{aligned}$$

nedává žádné řešení.

*Stanislav Horák, st.*

# Záhady

## ze Zmatlíkova zápisníku

JAROSLAV ŠEDIVÝ

(pokračování)

V šestém čísle minulého ročníku Rozhledů jsme čtenářům představili studenta Zmatlíka, který zamotal často hlavu sobě i spolužákům své-  
ráznými úvahami s podezřelými závěry. I v tomto ročníku uveřejníme  
několik záhad z jeho zápisníku. Některé budou průhledné, jiné však  
budou tvrdým oříškem i pro maturanty. K první záhadě podáme ko-  
mentář, v ostatních si najdete zrnka poučení sami.

### Podivný důkaz, že $1 = 2$

Jednou z nejchoulostivějších algebraických operací je krácení v zá-  
pisech rovností a nerovností s písmeny. I Zmatlík po jistou dobu velko-  
ryse krátil zápis  $2a^2 = 4a$  na tvar  $a = 2$ , ale brzy si svou chybu uvě-  
domil (vidíte ji také jasně?). Do zápisníku si poznamenal příklad po-  
divného důkazu, ve kterém tato chyba dominuje hned dvakrát.

Pro každé přirozené číslo  $x$  jistě platí, že

$$x^2 - x^2 = x^2 - x^2.$$

Každou stranu zápisu rozložíme jiným způsobem a upravíme krácením,  
jak je patrné z tohoto sloupku postupných úprav

$$x(x - x) = (x + x)(x - x),$$

$$x = x + x,$$

$$x = 2x,$$

$$1 = 2$$

Našli jste obě chyby? Jistě ano, jde přece o nezákonné krácení nulou. Ponaučení pro život. Před každým krácením ve svých výpočtech se raději zastavujte jak autobus před železničním přejezdem! Rozhlédněte se, zda nemůže jít o skryté krácení nulou, vždyť z rovnosti  $a \cdot 0 = b \cdot 0$  neplyne, že  $a = b$ . Vyzkoušejte si svou pozornost na příklad při řešení rovnice

$$2(x - 8)^{13} = 4(x - 8)^{12},$$

která má právě dva různé kořeny.

### Záhada s číslem 1089

Zmatlík si jednou hrál s čísly tak, že si napsal nějaké přirozené číslo (aspoň dvojčíferné) a vytvořil číslo zapsané v opačném pořadí číslic. Menší z těchto čísel odečetl od většího, k rozdílu určil opět číslo s obráceným pořadím číslic, ale tentokrát obě čísla sečetl. Zarazilo ho, že kdy zvolil původní číslo trojčíferné, získal v několika případech též konečný výsledek — číslo 1089. Když se pochlubil svému kamarádovi Štouralovi, netrvalo dlouho, a již slyšel námitku. Kamarád, věren svému jménu, vyhmátl příklad, kdy výsledek 1089 nevyšel.

Dovedete i vy takový příklad nalézt? Pokuste se odhadnout, pro která trojčíferná čísla vyjde výsledek 1089 a dokažte svou domněnku. Zmatlík to zvládl pomocí vyjádření čísla ve tvaru

$$100a + 10b + c$$

### ŘEŠENÍ ZÁHAD

Záhada při placení v restauraci. Určitě platí rovnost

$$4 \cdot 25 = 75 + 5 + 4 \cdot 5.$$

Problematická situace je navozena uměle. Divíme se, proč se

$$4 \cdot (25 - 5) + 5$$

nerovná stu? Přičítání pěti odporuje smyslu úlohy, protože spropitné je zahrnuto v částce  $4 \cdot (25 - 5)$ .

Záhada s nekomutativním sčítáním peněžních částek. Rozdělíme-li 1000 Kčs na 3 částky  $a_1, a_2, a_3$ , které postupně vybíráme, budou na vkladní knížce vyznačeny zůstatky  $1000 - a_1, 1000 - a_1 - a_2, 0$ . Je-li součet zůstatků roven původnímu vkladu, platí

$$1000 - a_1 + 1000 - a_1 - a_2 + 0 = 1000 ,$$

$$1000 = 2a_1 + a_2 ,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2a_1 + a_2 ,$$

$$a_3 = a_1 .$$

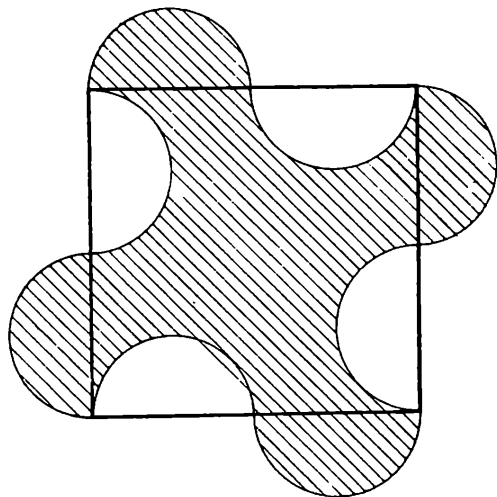
Navíc je každé z čísel  $a_1, a_2, a_3$  kladné, proto je  $2a_1 < 1000$ . Zkouškou se přesvědčíme, že pro libovolné  $a_1$  splňující podmínku  $0 < a_1 < 500$  lze vytvořit uspořádanou trojici  $a_1, a_2 = 1000 - 2a_1, a_3 = a_1$  splňující podmínky úlohy.

## ZÁHADA S DÉLKAMI ČAR

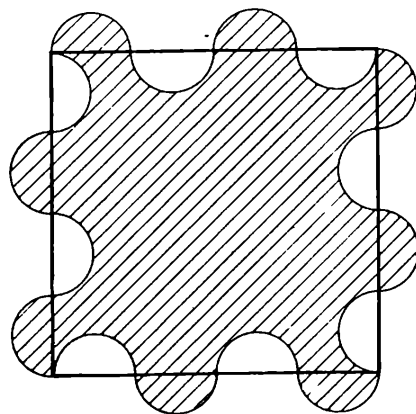
Na rozloučenou s letošním ročníkem uvedeme jednu, kterou se budou moci vážněji zabývat čtenáři z maturitních ročníků, půjde totiž o záhady limitního přechodu vlnitých čar v úsečky. Jistě se nám však podaří „nasadit brouka do hlavy“ i ostatním zájemcům o matematiku.

### *Záhada s délkami čar*

Délky křivých čar se obvykle určují tak, že se sestrojí lomené čáry složené z úseček, spojujících zvolené body křivé čáry. Délka takové zlomené čáry přibližně vyjadřuje i délku křivé čáry, a to zpravidla tím přesněji, čím z kratších úseček se použítá lomená čára skládá. Pravidelný 32úhelník vepsaný do kružnice má jistě obvod, jehož délka dosti přesně vystihuje délku kružnice. Také opticky nám obvody pravidelných  $2^n$ úhelníků při rostoucím  $n$  stále více splývají s kružnicí; říkává se, že kružnice je limitní čarou posloupnosti obvodů  $2^n$ úhelníků.



Obr. 1



Obr. 2

Přemýšlivý student Zmatlík si jako filatelista často prohlížel známky a jejich vroubkování, a tu si uvědomil, že obvod takové známky je vlnitou čarou, která by se při postupném zjemňování vroubků stále

více přimykala k obvodu jistého obdélníka. Chtěl tento proces matematicky sledovat. Pro jednoduchost si zvolil čtverec se stranou  $a$ , každou jeho stranu rozdělil na  $2^n$  dílů a nad každým dílkem sestrojil půlkružnici způsobem, který je patrný z obr. 1 a 2 (pro  $n = 1$ ,  $n = 2$ ). Získal tak zajímavé obrazce, které mají vesměs stejný obsah jako původní čtverec, navíc mají všechny tyto obrazce stejně dlouhé obvody — při libovolné hodnotě  $n$  má příslušná vlnitá čára délku  $2\pi a$ .

Zmatlík si byl vědom, že postupuje právě opačně než obvykle, protože aproximuje lomenou čáru křivou čarou, přesto však neočekával rozpor, ke kterému došel. Vlnité čáry tvoří při rostoucím  $n$  posloupnost čar stále těsněji se přimykajících k obvodu čtverce, lomenou čáru obvodu čtverce lze proto považovat za limitní čáru posloupnosti vlnitých čar. Délky vlnitých čar tvoří konstantní posloupnost  $d_n = 2\pi a$ , proto je i limita této posloupnosti rovna  $2\pi a$ . A v tomto momentě Zmatlík užasl, protože si řekl, že délka limitní čáry, tj. obvodu čtverce, musí být rovna číslu  $2\pi a$ . Shledáváte nějakou chybu ve Zmatlíkově postupu? Přemýšlejte nad tím, snažte se objevit, kde je Zmatlíkova úvaha matematicky přesná a kde spočívá jen na geometrickém názoru. Destáváte se zde k problematice limitních postupů, o níž si řekneme více v dalším ročníku Rozhledů; tam se dozvíte podstatu Zmatlíkovy chyby.

---

### **Publikace Státního pedagogického nakladatelství**

Běloun a kol.: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro 7.—9. ročník*. Vyd. 5., 1969, str. 128, váz. 8,50 Kčs. Edice: Pomocné knihy pro žáky.

Novotný a kol.: *Sbírka úloh z fyziky pro žáky ZDŠ. — Elektřina a stavba atomu*. Vyd. 2., 1969, str. 92, brož. 7 Kčs. Edice: Pomocné knihy pro žáky.

# SLOVNÍČEK

## FRANCOUZSKO-ČESKÝ (POKRAČOVÁ)

invisible  
involution *ž*  
irrationnel, elle  
irréductible  
irrégulier, ère  
isocèle *těž* isoscèle  
isogone  
isolé, e  
isométrique  
isomorphe  
isomorphisme *m*  
isoscèle *těž* isocèle  
isotrope  
issu, e  
droite *ž* issue d'un point

neviditelný  
involuce  
iracionální  
nerozložitelný, nezkratitelný  
nepravidelný  
rovnoramenný  
izogonální  
izolovaný  
izometrický  
izomorfní  
izomorfismus  
rovnoramenný  
izotropní  
vycházející odkud  
přímka vedená bodem

### J

jeu *m*  
joindre  
jonction *ž*  
droite *ž* de jonction  
jouir d'une propriété  
juste

hra  
spojit  
spojení  
spojnice  
mít vlastnost  
správný

### K

kilogramme *m*  
kilomètre *m*  
kilotonne *ž*

kilogram  
kilometr  
1000 tun

|                                        |                                 |
|----------------------------------------|---------------------------------|
| largeur                                | šířka                           |
| latéral, e, aux                        | postranní, boční                |
| surface latérale                       | plášť                           |
| latitude $\lambda$                     | zeměpisná šířka                 |
| lemme                                  | lemma <i>str.</i> pomocná       |
| lemniscate                             | lemniskata                      |
| lieu                                   | místo                           |
| lieu géométrique                       | geometrické místo               |
| ligne                                  | řádek                           |
| ligne brisée                           | lomenná čára                    |
| ligne courbe                           | křivka                          |
| ligne droite                           | přímka                          |
| ligne d'intersection                   | průsečná čára, průsečnice       |
| limite                                 | limita                          |
| linéaire                               | lineární                        |
| local, e, aux                          | lokální                         |
| logarithme $m$                         | logaritmus                      |
| logarithme dans un système de base $a$ | logaritmus o základu $a$        |
| logarithme naturel (népérien)          | přirozený logaritmus (Napierův) |
| logarithme vulgaire (décimal)          | dekadický logaritmus            |
| logique                                | logický                         |
| logique $\lambda$                      | logika                          |
| loi $\lambda$                          | zákon                           |
| long                                   | dlouhý                          |
| le long                                | podél                           |
| longueur                               | délka                           |
| longitude                              | zeměpisná délka                 |
| losange $m$                            | kosočtverec                     |