

rozhledy

MATEMATICKO
FYZIKÁLNÍ

1

ROČNÍK 47, 1968-69, ZÁŘÍ



ROČNÍK 47
ZÁŘÍ 1968 - 69

1

MATEMATICKO FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání
Za zásluhy o výstavbu

VEDOUcí REDAKTOR:

doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha, nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR:

Stanislav Horák, ČVUT - Praha

REDAKČNÍ RADA:

zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; zasl. učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibeltka, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, DrSc., PF-UPJŠ, Košice; dr. Oldřich Lepil, PU, Olomouc; prof. dr. Cyril Palaj, PF-UPJŠ, Košice; CSc. Evžen Říman, ČVUT Praha; nositel vyznamenání Za vynikající práci; dr. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU Praha; ing. dr. Václav Šindelář CSc. MÚ UNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

REDAKCE:

Praha 2, Trojanova 13, telefon 244529

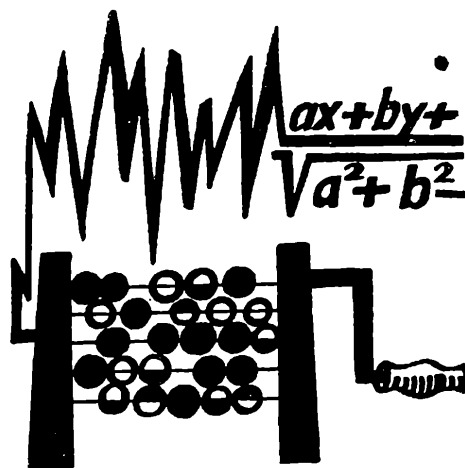
OBSAH

S. Horák st.: Úloha o maximu	1
J. Drábek: Souvislost geometrických posloupností s pravoúhlými trojúhelníky	4
Ing. J. Machalický: O gravitačním zákonu Newtonově	6
Doc. dr. I. Náter: Přenos tepla	10
XVIII. ročník Matematické olympiády	14
S. Horák, doc. O. Setzer: Po velkém matematickém boji	17
Fyzikální olympiáda	19
K. Hofman: Elektronkové zesilovače	29
Řešení úloh z minulého ročníku	42
Matematické zábavy	44
M. Bednařík: Záhadné fontány	46
J. Horský, M. Lenc: Akademik L. D. Landau zemřel	50
Dr. M. Zelenka: Slovníček německo-český	3. a 4. str. obálky

Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs, v zahraničí 3 \$, cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. podnik, závod 5, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönl. Titulní obrázky: V. Vaňková, studující FS.

Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1968.



Úloha o maximu

STANISLAV HORÁK st., ČVUT, Praha

Krychle může být rovinou protata v trojúhelníku, v rovnoběžníku, v pětiúhelníku, nebo v šestiúhelníku. Přitom obsahy jednotlivých mnohoúhelníků mohou být různé. Úkolem tohoto článku je důkaz věty:

Úhlopříčný řez krychle má ze všech rovnoběžníkových řezů krychle největší obsah.

Abychom tuto větu dokázali, odvodíme si nejdříve dvě pomocné věty.

Věta 1. Je dán kvádr $ABCD A'B'C'D'$. Jeho hlavní úhlopříčka AC' svírá s hranami $C'C$, $C'B'$, $C'D'$ po řadě úhly α , β , γ , o nichž platí

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1)$$

D ů k a z (obr. 1). Délky hran kváдру označme

$$x = CC' \quad y = C'B' \quad z = C'D'$$

a délku tělesové úhlopříčky označme u . Tedy

$$u = AC' = BD' = CA' = DB'$$

O ní, jak víme, platí

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Z pravoúhlých trojúhelníků $C'AC$, $C'AB'$, $C'AD'$ plyne po řadě

$$\cos \alpha = x : u, \quad \cos \beta = y : u, \quad \cos \gamma = z : u$$

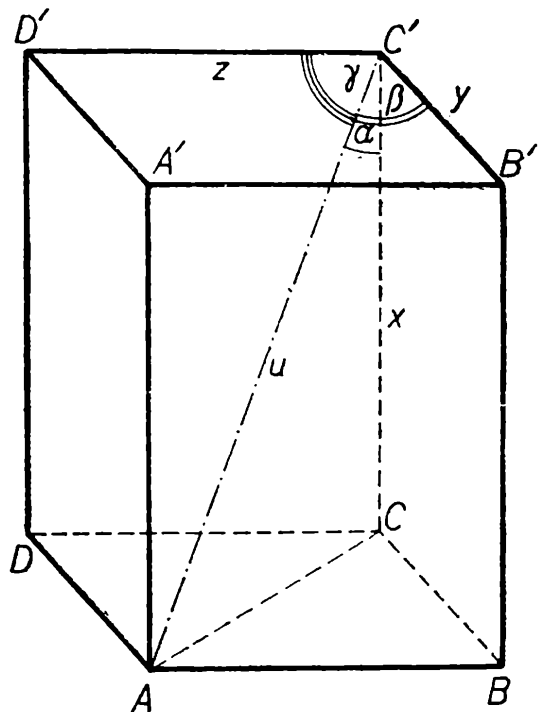
Rovnice umocníme na druhou a sečteme

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = (x^2 + y^2 + z^2) : u^2 = 1$$

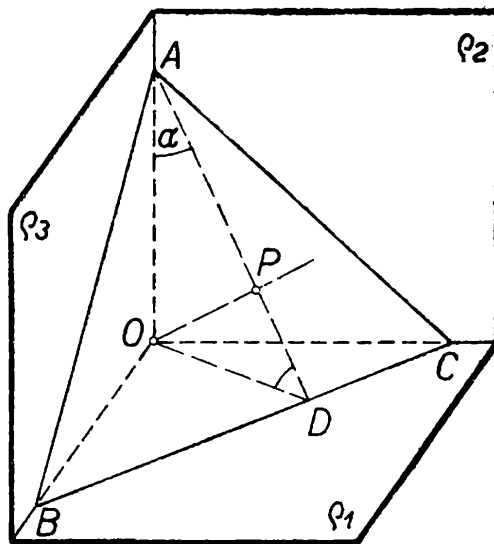
Znalost této věty nám dopomůže k rychlému důkazu další věty.

Věta 2. Rovinný obrazec o obsahu P promítněme postupně do tří rovin, z nichž každá je kolmá k druhým dvěma; obsahy průmětů označme P_1, P_2, P_3 . Pak platí

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$$



Obr. 1



Obr. 2

Důkaz provedeme jen pro trojúhelník ABC , jehož strany AB, BC, AC leží postupně v jednotlivých rovinách (obr. 2), které označíme $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Jejich společný bod je O . Z něho spustíme kolmici na rovinu trojúhelníku ABC a patu označme P . Kolmice OP svírá s přímkami OA, OB, OC po řadě úhly α, β, γ , které splňují rovnici (1). Rovina trojúhelníka svírá s rovinami $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ po řadě tytéž úhly α, β, γ .

Sestrojíme výšku AD v trojúhelníku ABC . Obsah trojúhelníka ABC je

$$P = \frac{1}{2} BC \cdot AD$$

Průmět daného trojúhelníka do roviny ϱ_1 je trojúhelník OBC a jeho obsah P_1 je

$$P_1 = \frac{1}{2} BC \cdot OD = \frac{1}{2} BC \cdot AB \cos \alpha = P \cos \alpha.$$

Podobně platí o průmětech P_2, P_3 daného trojúhelníka do druhých dvou rovin

$$P_2 = P \cos \beta, \quad P_3 = P \cos \gamma.$$

Z toho již dostáváme

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2.$$

P o z n á m k a. Právě uvedený vzorec platí i pro trojúhelník, jehož strany neleží v rovinách $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Platí i pro všechny mnohoúhelníky,

neboť ty se dají úhlopříčkami rozdělit na trojúhelníky. Limitními pochody se dá ukázat, že platí i pro rovinné obrazce omezené oblouky křivek. Důkaz toho všeho není obtížný, ale zdlouhavý. Jeho provedení na tomto místě by nás zbytečně oddalovalo od důkazu hlavní věty, k němuž již můžeme přistoupit. (obr. 3)

Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$ o hraně délky a . Rovina ϱ protíná krychli v rovnoběžníku. Poněvadž rovnoběžníkové řezy rovinami vzájemně rovnoběžnými jsou shodné — a mají tudíž též obsah P — můžeme rovinu ϱ proložit vrcholem A . Rovina ϱ protne tak hrany BC , $B' C'$, $A' D'$ po řadě v bodech E , F , G . Pro stručnost označme

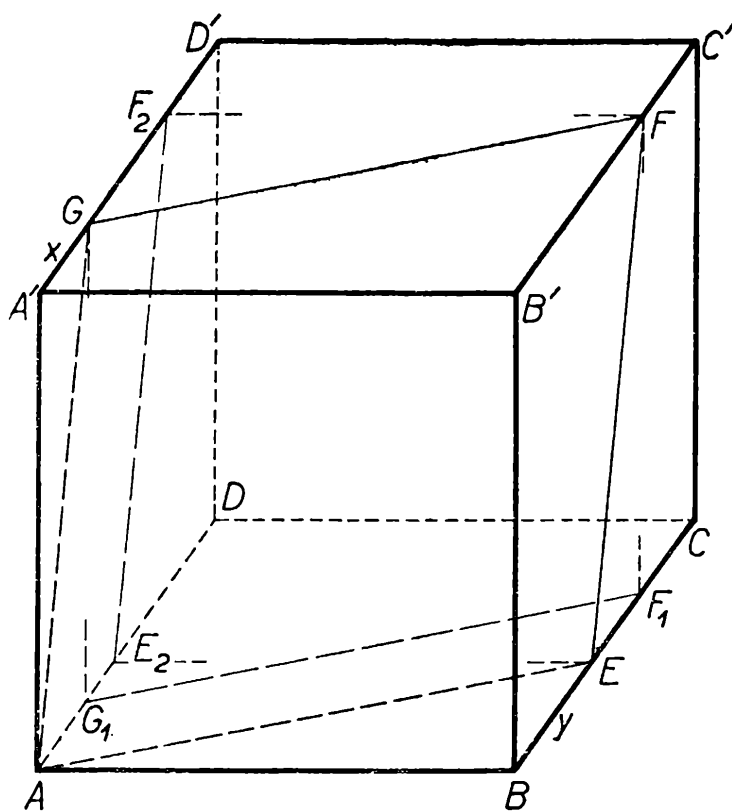
$$A' G = x \leq a, \quad B E = y \leq a.$$

Všimněme si ještě, že

$$E F_1 = A G_1 = A' G = x,$$

a proto

$$B' F = B F_1 = x + y \leq a.$$



Obr. 3

Průmětem rovnoběžníku $AEEFG$ do roviny $ABCD$ je rovnoběžník AEF_1G_1 , průmětem do roviny $CDD' C'$ je přímo čtverec $CDD' C'$ a průmětem do roviny $ADD' A'$ je rovnoběžník AGF_2E_2 . Obsahy těchto rovnoběžníků označíme

$$\begin{aligned} AEEFG &= P, & AEF_1G_1 &= P_1 = ax, \\ AGF_2E_2 &= P_3 = ay, & CDD' C' &= P_2 = a^2. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do výsledku druhé pomocné věty, dostaneme

$$P^2 = a^2 (x^2 + y^2 + a^2).$$

Tento výraz má mít maximální hodnotu. To nastane jedině tehdy, když bude mít maximální hodnotu výraz $x^2 + y^2$.

Představme si, že x má zatím pevnou, neměnnou hodnotu. Pak výraz $x^2 + y^2$ bude maximální, jestliže bude maximální i výraz $x + y$, jestliže $x + y = a$. Pak ovšem bod F splyne s vrcholem C' . Číslo y musí být tedy co největší. Největší hodnota, kterou může nabýt, je a , ale potom nutně $x = 0$. Tím jsme přišli k výsledku

$$P_{\max} = a^2 \sqrt{2}.$$

Řez je úhlopříčný, jak jsme měli dokázat.

Cvičení. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Řez rovnoběžný s dvěma protějšími (tj. mimoběžnými) hranami je rovnoběžník. Kdy má tento řez maximální obsah?

Souvislost s pravoúhlými geometrických posloupností s pravoúhlými trojúhelníky

JAROSLAV DRÁBEK, SVVŠ, Domažlice

V tomto článku bych chtěl uvést do souvislosti určitou geometrickou posloupnost s pravoúhlými trojúhelníky.

Definice 1. $\{G_n\}$ posloupností budeme rozumět geometrickou posloupnost, jejíž kvocient je dán vztahem

$$q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Věta 1. Tři sousední členy a_{n-1} , a_n , a_{n+1} libovolné $\{G_n\}$ posloupnosti jsou stranami pravoúhlého trojúhelníka.

Důkaz. Nechť sousední členy jsou a_{n-1} , a_n , a_{n+1} .

Z teorie geometrických posloupností můžeme vyjádřit členy a_n , a_{n+1} pomocí levého krajního členu a_{n-1} takto

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} \cdot q \\ a_{n+1} &= a_{n-1} \cdot q^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Stačí nyní ověřit rovnost

$$a_{n-1}^2 + a_n^2 = a_{n+1}^2$$

která po dosazení z (1) přechází do tvaru

$$a_{n-1}^2 + a_{n-1}^2 q^2 = a_{n-1}^2 q^4 \quad (2)$$

Po vykrácení a_{n-1} dostáváme

$$1 + q^2 = q^4.$$

Řešením této rovnice čtvrtého stupně se přesvědčíme, že má jediný kladný kořen ve tvaru kvocientu $\{G_n\}$ posloupnosti.

Definice 2. Pravoúhlý trojúhelník, jehož strany tvoří tři po sobě jdoucí členy libovolné $\{G_n\}$ posloupnosti nazveme G trojúhelníkem.

Věta 2. Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník, jehož strany tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti, potom tento trojúhelník je G trojúhelníkem.

Důkaz. Snadným výpočtem se přesvědčíme, že kvocient této reálné geometrické posloupnosti je roven

$$q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Věta 3. Všechny G trojúhelníky jsou si podobné.

Důkaz. V G trojúhelníku je poměr delší a kratší odvěsny roven

$$q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

a podobnost vyplývá podle věty uu.

Úloha 1. Vypočtete úhly v G trojúhelníku.

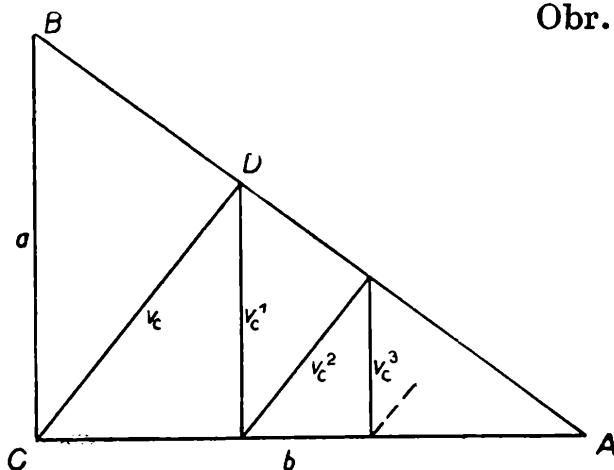
Věta 4. Nechť je dán G trojúhelník ABC s odvěsnami a , b a přeponou c (viz obr. 1). Potom z výšky v_c na přeponu AB a z jeho odvěsen a , b lze sestrojit pravoúhlý trojúhelník.

Důkaz. V trojúhelníku platí tyto vztahy

$$\begin{aligned} b &= a \cdot q, \\ c &= a \cdot q^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Z obsahu pro pravoúhlý trojúhelník

$$\text{dostáváme } v_c = \frac{a \cdot b}{c}, \quad (4)$$



Obr. 1

po dosazení za a , b , c z (3)

dostáváme
$$v_c = \frac{a}{q} \quad (5)$$

Čísla $\{v_c, a, b\}$ jsou podle předchozího členy G_n posloupnosti a podle věty 1. jsou stranami pravoúhlého trojúhelníka $c . b . d$.

V ě t a 5. Úsek DA na přeponě vyřazený výškou CD v G trojúhelníku a přilehlý k odvěsně b je roven odvěsně a .

Důkaz. Věta je důsledkem předcházející věty 4.

Ve větě 4. je možno pokračovat tímto způsobem:

V nově vytvořeném pravoúhlém trojúhelníku o stranách v_c , a , b sestrojíme opět výšku v_c^1 a z $\{v_c^1, v_c, a\}$ lze sestrojit podle předchozího opět pravoúhlý G trojúhelník... atd. do nekonečna.

Vytvořené výšky $\{v_c, v_c^1, v_c^2, \dots\}$ tvoří členy $\{G_n\}$ posloupnosti, tzn., že ze sousedních tří členů, které jsou ve tvaru $\{v_c^i, v_c^{i+1}, v_c^{i+2}\}$ lze vždy sestrojit pravoúhlý G trojúhelník, ve kterém je další člen v_c^{i+3} výškou na jeho přeponu.

Je zřejmé, že grafické znázornění těchto výšek má podobu lomené čáry v G trojúhelníku, snažící se dosáhnout bod A .

Ú l o h a 2. Zjistěte, zda součet příslušné lomené čáry, složené z členů $\{G_n\}$ posloupnosti je konečný nebo nekonečný.



F Y Z I K A

0 gravitačním zákonu Newtonově

ING. JIŘÍ MACHALICKÝ, CSc., Praha

Letos je tomu přibližně 300 let od stanovení gravitačního¹⁾ zákona. Jak se uvádí v některých historických pramenech, měl o všeobecné gravitaci jisté tušení už slavný polský hvězdář *Mikuláš Koperník* (1471

¹⁾ Gravitovat — klonit se k něčemu, tíhnout, přitahovat se.

až 1543). Později se otázkami gravitace zabýval italský matematik, fyzik a astronom *Galileo Galilei* (1564—1642), velký odpůrce zastaralých názorů Aristotelových a obdivovatel díla Koperníkova *Giordano Bruno* (nar. 1548, odsouzen církevním soudem za své učení o nekonečném množství světů a upálen r. 1600 v Římě), dánský astronom *Tycho de Brahe* (1546—1601), jeho žák německý hvězdář *Johann Kepler* (1571—1630), italský matematik a fyzik *G. A. Borrelli* (1608—1679), angličtí badatelé *R. Hooke* (1635—1703), *Ch. Wren* (1632—1723), *E. Halley* (1656—1742) aj.

Obr. 1. Isaac Newton se narodil 5. 1. 1643 ve Woolsthorpe v hrabství Lincoln, od r. 1669 prof. na Trinity College v Cambridgi, od r. 1672 členem Královské společnosti, od r. 1705 jejím předsedou. Za své neobyčejné zásluhy o rozvoj fyziky, matematiky a astronomie byl r. 1705 povýšen do rytířského stavu. Zemřel r. 1727 a je pochován v opatství westminsterském. Na jeho pomníku v Cambridgi (postaveném r. 1755) je nápis: „Qui genus humanum ingenio superavit.“ (Ten, který rozumem převýšil lidské pokolení.)



Gravitační zákon ve tvaru, jak jej známe dnes, odvodil však geniální duch 17. století *Isaac Newton*. Už za svých universitních studií v Cambridge usiloval o vyjádření síly, která podmiňuje oběžný pohyb planet kolem Slunce. Ačkoliv nepřímou úměrnost přitažlivé síly se čtvercem vzdálenosti těles znali už *Borrelli* a *Boulliau*, teprve Newtonovi se podařilo vyjádřit gravitační sílu v analytickém tvaru. Měl ovšem k dispozici výsledky neúnavné experimentální práce *Brahovy* a *Galileovy*, a zejména *Keplerovy* zákony planetárního pohybu odvozené z pozorování planety Mars. Jejich zobecněním se Newtonovi podařilo najít hledaný zákon v r. 1666. Protože však nedospěl ke kvantitativní shodě pro pohyb Měsíce kolem Země (jehož vzdálenost byla tehdy nesprávně stanovena), zůstal zákon po 18 let veřejnosti neznám. Teprve když byla z přesnějších geodetických měření [provedl je francouzský astronom a profesor na Collège de France *Jean Picard* (1620—1682)] odvozena správná vzdálenost Měsíce od Země, ověřil si Newton správnost svého vzorce a v r. 1684 o něm podal zprávu prostřednictvím *Halleyovým*²⁾ londýnské Royal Society. Obšírně jej pak uveřejnil v r. 1687

²⁾ Edmond Halley (1656—1742), anglický matematik a greenwichský hvězdář, úspěšný pozorovatel komet.

spolu s četnými jeho důsledky v III. díle své slavné knihy „*Philosophiae naturalis principia mathematica*“ (Matematické základy přírodních věd).

Naznačím stručně elementární odvození tohoto zákona. Napřed však pro úplnost připomenou Keplerovy zákony³⁾ pro pohyb planet kolem Slunce:

1. zákon. Planety obíhají kolem Slunce v elipsách od kružnic málo odlišných, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

2. zákon. Plochy opsané průvodičem (spojnicí středu planety se středem Slunce) ve stejných dobách jsou stejné.

3. zákon. Dvojmoči oběžných dob planet jsou v témže poměru jako trojmoči velkých poloos jejich drah. To lze vyjádřit vzorcem

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad \text{resp. } T^2 = \text{konst } a^3.$$

Newton si povšiml okolnosti, že v matematickém vyjádření Keplerových zákonů nevystupuje výstřednost eliptické dráhy, takže je možno bez újmy na obecnosti počítat sílu, kterou působí Slunce na planetu při jejím oběžném pohybu, jako by se pohyb děl na dráze kruhové. Při rovnoměrném kruhovém pohybu působí na obíhající těleso (hmotný bod) dostředivé zrychlení

$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = r \frac{4\pi^2}{T^2} \quad (1)$$

označíme-li r poloměr kruhové dráhy, v obvodovou a ω úhlovou rychlost a T oběžnou dobu (periodu pohybu).

Podle třetího Keplerova zákona je

$$T^2 = \text{konst } r^3, \quad (2)$$

takže zrychlení

$$a = \frac{4\pi^2 r}{\text{konst} \cdot r^3} = k \frac{1}{r^2} \quad (3)$$

³⁾ První dva zákony uveřejnil Kepler r. 1609 v díle „*Astronomia nova*“ za svého působení na dvoře císaře Rudolfa II. v Praze, třetí pak r. 1618 ve spise „*De harmonices Mundi libri V*“ (O souladu ve vesmíru knih patero) v Linci, kam odešel r. 1612 po smrti císaře.

⁴⁾ Později bylo nutno tento vzorec opravit s ohledem na to, že pohyb planet se neděje kolem nehybného centrálního tělesa (Slunce), ale kolem jejich společného těžiště. Opravený vzorec lze psát

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\kappa (M + m)} a^3,$$

kde M je hmotnost Slunce, m je hmotnost planety, κ je tzv. gravitační konstanta — viz další výklad.

je nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti středů planety a Slunce. Konstanta k má stejnou hodnotu pro všechny planety téže sluneční soustavy.

Sílu F , kterou působí Slunce na planetu, dostaneme podle II. pohybového zákona Newtonova, znásobíme-li zrychlení a hmotností m planety

$$F = ma = mk \frac{1}{r^2} . \quad (4)$$

Podle III. pohybového zákona Newtonova (akce = reakce) působí však planeta na Slunce stejně velkou silou opačného směru, která musí mít vzhledem k (4) souměrný tvar. Je tedy

$$F' = Mk' \frac{1}{r^2} , \quad (5)$$

kde M je hmotnost Slunce.

Protože velikosti obou sil jsou stejné

$$|F| = |F'| , \quad (6)$$

platí pro konstanty k a k'

$$mk = Mk' , \quad (7)$$

takže

$$\frac{k}{M} = \frac{k'}{m} = \kappa = (\text{konstanta}) . \quad (8)$$

Odtud dostáváme

$$k = \kappa M . \quad (9)$$

Můžeme tedy sílu, které podléhá planeta (kterou na ni působí Slunce), vyjádřit vzorcem

$$F = m\kappa M \frac{1}{r^2} = \kappa \frac{Mm}{r^2} \quad (10)$$

To je nejjednodušší forma vyjádření jednoho z nejdůležitějších přírodních zákonů, které kdy lidský duch objevil.

Poznámka redakce k článku na další straně:

Přesné české termíny jsou podle knihy Šindelář — Smrž: Nová měrová soustava, SPN, 1968 tyto: Měrná tepelná přestupnost, měrná tepelná prostupnost a měrná tepelná vodivost.

Prenos tepla

DOC. RNDr. IVAN NÁTER, SVŠT, Bratislava

1. Úvod

Javy, ktoré súvisia s prenosom tepelnej energie, alebo stručnejšie s prenosom tepla, môžeme skúmať a opisovať dvojakým spôsobom:

1. zo stanoviska molekulovej fyziky,
2. fenomenologicky, tak, že tieto javy opisujeme pomocou makroskopicky pozorovateľných a merateľných zmien, ktoré charakterizujeme vhodne zvolenými veličinami a látkovými konštantami.

V tomto článku sa budeme zaoberať fenomenologickým opisom prenosu tepla.

Pokiaľ nebola známa súvislosť tepelných javov s molekulovou štruktúrou látok, zavádzala sa na jednoduché vysvetlenie týchto javov predstava o existencii tzv. „tepelného fluida“, ktoré môže prechádzať z jednej časti telesa o vyššej teplote na druhú časť o nižšej teplote, alebo z telesa o vyššej teplote na teleso o teplote nižšej, ak sa tieto telesá dotýkajú. Presun tohto nevážiteľného fluida — tepla — má za následok na jednej strane zníženie, na druhej zvýšenie teploty telesa, alebo jeho časti. Táto predstava sa dlho udržala. Dôsledky z nej odvodené boli v súhlase so skutočnosťou najmä pri opisovaní javov súvisiacich s prenosom tepla. S touto predstavou úzko súvisí aj terminológia, ktorá sa v tejto oblasti fyziky dosiaľ používa. Z analógie medzi prenosom tepla a prúdením kvapalín zavádza sa pojem *t e p e l n é h o t o k u* ako množstva tepla, ktoré prechádza zvolenou plochou v určitom časovom intervale.

Ak neberieme do úvahy prenos tepla prostredníctvom elektromagnetických vln (žiarením, radiáciou), môžeme prenos tepla rozdeliť na dva základné druhy:

1. Prenos tepla vedením, pri ktorom sa vyrovnávajú stredné kinetické energie neusporiadného pohybu molekúl, nedochádza však k presunu molekúl (k presunu látky) v telesách. Tento druh prenosu tepla je typický pre tuhé látky a jediný, aký v nich môže existovať.

Poznámka k terminológii:

Slovenský termín
súčiniteľ prestupu tepla
súčiniteľ prechodu tepla stenou

Český termín
součinitel přestupu tepla
součinitel prostupu tepla

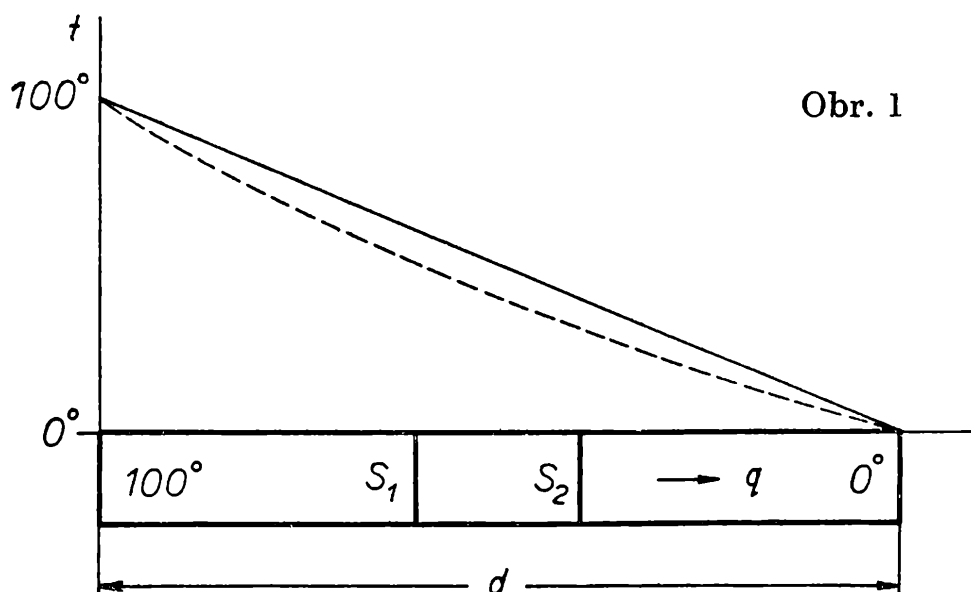
2. Prenos tepla prúdením, ktorý je typický pre kvapalné a plynné látky. Tu si zhluky molekúl s väčšou strednou kinetickou energiou vymieňajú miesta so zhlukmi molekúl s menšou strednou kinetickou energiou a navzájom sa premiešavajú, takže s prenosom tepla prenáša

sa súčasne aj látka. Prenos tepla prúdením v kvapalinách a plynoch je vždy sprevádzané aj prenosom tepla vedením, ktoré tu však hrá len podradnú úlohu.

2. Hustota tepelného toku

Zaoberajme sa najprv prenosom tepla vedením v homogénnom tuhom telese. Ak sa teplota v jednotlivých elementoch telesa s časom nemení (od miesta k miestu je však rozličná), hovoríme o ustálenom stave, alebo o *u s t á l e n o m* (stacionárnom) tepelnom toku. V opačnom prípade ide o neustálený (nestacionárny) stav. Budeme uvažovať len ustálené stavy.

Aby sa stacionárny tepelný tok mohol uskutočniť, musíme v jednom mieste telesa udržiavať trvale konštantnú vyššiu teplotu, v inom mieste konštantnú nižšiu teplotu. Teplo potom prechádza z miesta s vyššou teplotou na miesto s nižšou teplotou. Takýto prípad môžeme realizovať napr. v kovovej tyči, keď jeden jej koniec ponoríme do vriacej vody teploty $t_1 = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, druhý do zmesi ľadu a vody teploty $t_2 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (obr. 1). Teplomermi, priloženými k tyči v rozličných miestach, kon-



trolujeme teplotu pozdĺž tyče. V ustálenom stave je priebeh teploty pozdĺž tyče graficky znázornený čiarkovanou krivkou. Keby sme vhodnou izoláciou zabránili prenosu tepla do okolia tyče, pokles teploty pozdĺž tyče by bol lineárny (v grafe plná priamka).

V zmesi ľadu a vody stále viac ubúda ľadu a pribúda vody, ľad sa postupne roztápa teplom preneseným tyčou z vriacej vody. Pri ustálenom tepelnom toku cez ľubovoľný prierez tyče, kolmý na jej pozdĺžnu os, nastáva v tom istom časovom intervale τ prenos rovnakého množstva tepla Q . Toto tvrdenie dokážeme jednoduchou nepriamou úvahou. Predpokladajme, že prierezom S_1 (obr. 1) za zvolený časový

interval nastal prenos množstva tepla Q_1 , prierezom S_2 za rovnaký časový interval množstva tepla Q_2 . Ak by bolo $Q_1 > Q_2$, musela by sa v úseku tyče medzi rezmi S_1 a S_2 zvyšovať teplota. Ak by bolo $Q_1 < Q_2$, muselo by to zas viesť k ustavičnému znižovaniu teploty medzi uvažovanými rezmi. To by však v oboch prípadoch znamenalo, že prenos tepla vedením v tyči nie je ustálený. Z tejto úvahy jednoznačne vyplýva tvrdenie, ktoré sme mali dokázať.

Nech má uvažovaná tyč všade rovnakú prierezovú plochu S . Na dĺžku d tyče pripadá teplotný rozdiel

$$t_1 - t_2 \quad (t_1 > t_2).$$

Podiel

$$\frac{t_1 - t_2}{d}$$

nazývame **t e p l o t n ý m s p á d o m**. Merania ukazujú, že množstvo tepla Q , ktoré prejde prierezom tyče za čas τ , je priamo úmerné veľkosti prierezovej plochy S , časovému intervalu τ a teplotnému spádu. Môžeme teda písať

$$Q = \lambda S \tau \frac{t_1 - t_2}{d}. \quad (1)$$

Konštanta úmernosti λ vo vzťahu (1) závisí len od materiálu tyče, je to látková konštanta a nazýva sa **s ú č i n i t e ľ t e p e l n e j v o d i v o s t i**. Relatívne veľká hodnota konštanty λ prislúcha materiálu, ktorý označujeme ako dobrým vodičom tepla (napr. kov), malou tepelnou vodivosťou sa vyznačujú tepelne izolujúce látky. Číselne predstavuje súčiniteľ tepelnej vodivosti množstvo tepla, ktoré pri jednotkovom teplotnom spáde za časovú jednotku prejde jednotkovou plochou postavenou kolmo na smer tepelného toku. Jeho jednotkou v sústave SI je $\text{J m}^{-1} \text{s}^{-1} \text{deg}^{-1}$, v technickej praxi $\text{kcal m}^{-1} \text{h}^{-1} \text{deg}^{-1}$.

Najlepšími vodičmi tepla sú kovy, najmä striebro a meď. Nekovy vedú teplo podstatne horšie a používajú sa ako tepelné izolátory. Tepelná vodivosť kvapalín je priemerne as 1000 ráz menšia než kovov a najmenšia je tepelná vodivosť plynov (v tenkých vrstvách, alebo v malých objemoch, aby nemohlo vzniknúť prúdenie). Vzduchom vyplnené póry v pevných látkach preto značne zmenšujú ich tepelnú vodivosť, čo sa využíva pri výrobe tepelne izolujúcich látok (duté tehly, penový a plynový betón apod.).

Veľičina, ktorou kvantitatívne charakterizujeme tepelný tok, je hustota tepelného toku q , ktorú definujeme vzťahom

$$q = \frac{Q}{S \tau}. \quad (2)$$

Číselne táto veličina predstavuje množstvo tepla, ktoré za daných okolností prejde za jednotku času jednotkovou plochou postavenou kolmo na smer tepelného toku. Jednotkou hustoty tepelného toku v sústave SI je $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$, v technickej praxi $\text{kcal m}^{-2} \text{h}^{-1}$. V telese, ktoré sa vyznačuje konštantnou prierezovou plochou (kolmou na smer tepelného toku), pri ustálenom vedení tepla musí byť $q = \text{konšt.}$, hustota tepelného toku nezávisí od času ani od miesta v uvažovanom telese.

Zo vzťahu (2) môžeme ľahko vyjadriť množstvo tepla Q , prechádzajúce za čas τ plochou S kolmou na smer tepelného toku, pomocou hustoty tepelného toku

$$Q = qS\tau \quad (2a)$$

Ak pri vyjadrení hustoty tepelného toku použijeme vzťah (1), dostávame

$$q = \lambda \frac{t_1 - t_2}{d} . \quad (3)$$

Príklad: Vypočítajte, aké množstvo tepla prejde za čas $\tau = 3 \text{ h}$ cez 3 m^2 tehlovej steny hrúbky $d = 0,5 \text{ m}$, keď vnútorný povrch steny má teplotu $t_1 = 18^\circ\text{C}$ a vonkajší teplotu $t_2 = -2^\circ\text{C}$. Tepelným stratám do okolia sme zabránili. Súčiniteľ tepelnej vodivosti tehlovej steny $\lambda = 0,45 \text{ kcal m}^{-1} \text{h}^{-1} \text{deg}^{-1}$.

Riešenie: Podľa zadania sú $\tau = 3 \text{ h}$, $S = 3 \text{ m}^2$, $d = 0,5 \text{ m}$, $t_1 = 18^\circ\text{C}$, $t_2 = -2^\circ\text{C}$. Zo vzťahu (1) dostaneme

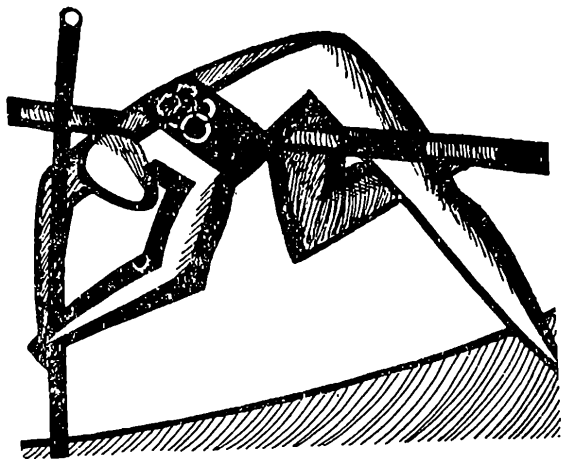
$$Q = \lambda S \tau \frac{t_1 - t_2}{d} = 0,45 \text{ kcal m}^{-1} \text{h}^{-1} \text{deg}^{-1} \cdot 3 \text{ m}^2 \cdot 3 \text{ h} \cdot$$

$$\frac{18^\circ\text{C} - (-2^\circ\text{C})}{0,5 \text{ m}} = 162 \text{ kcal} .$$

Za tri hodiny prejde cez 3 m^2 uvažovanej steny množstvo tepla 162 kcal .

Vzťah (3) sme odvodili z pokusov a úvah, pri ktorých sme predpokladali, že teplota v každej rovine kolmej na pozdĺžnu os tyče je všade rovnaká. Takéto vedenie tepla sa nazýva *j e d n o r o z m e r n é*. Je však veľmi prirodzené predpokladať, že veľmi jednoduchý a prehľadný vzťah (3) má pre izotropné látky všeobecnú platnosť, čo plne potvrdzujú dôsledky z neho vyplývajúce. Vzťah (3) je teda základným vzťahom prenosu tepla vedením v izotropných telesách, podľa ktorého hustota tepelného toku v danom smere je priamo úmerná teplotnému spádu.

(Pokračovanie)



MO

XVIII. ročník Matematické olympiády

Po organizační stránce se průběh XVIII. ročníku MO nebude lišit od předcházejícího; všechny podrobnosti budou uvedeny v „letácích“.

Termín odevzdání řešení přípravných úloh příslušnému učiteli matematiky je 15. listopad 1968.

Řešení soutěžních úloh je třeba odevzdat do 15. ledna 1969.

Soutěž II. kola kategorie A se koná v sobotu 8. března, kategorie B a C v neděli 9. března 1969; vždy v rámci kraje.

II. kolo kategorie D se bude konat v týdnu mimo jarní prázdniny ve středu 26. března 1969, a to v rámci okresu (obvodu).

Všechny termíny byly stanoveny tak, aby nekolidovaly s termíny FO.

Soutěžní úlohy XVIII. ročníku MO

Kategorie A

1. Je dáno n ($n \geq 4$) reálných čísel ve vzestupném uspořádání

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

Sestavte takovou jejich permutaci

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n,$$

aby součet absolutních hodnot

$$|b_1 - b_2| + |b_2 - b_3| + \dots + |b_{n-1} - b_n| + |b_n - b_1| \quad (1)$$

byl maximální. Popište vytvoření této permutace a napište vzorec pro maximální součet (1).

2. Je dána jednotková krychle a určitá její tělesová úhlopříčka u . Zvolíme přímku p tak, aby nebyla rovnoběžná ani s úhlopříčkou u ,

ani se žádnou stěnou dané krychle. Každým bodem úsečky u vedeme rovnoběžku x s přímkou p a sestrojíme střed X dvojice bodů, v nichž přímka x protne povrch krychle.

a) Dokažte, že množina M bodů X je při pevně zvolené přímce p buď úsečka, nebo lomená čára složená ze tří úseček.

b) Dokažte, že při libovolné volbě přímky p má čára M délku menší než $1 + \sqrt{2}$

3. Je dána rovnice

$$az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$$

s komplexními koeficienty, která má (komplexní) kořeny z_1, z_2 . Sestavte rovnici (s reálnými koeficienty), která má kořeny $|z_1|, |z_2|$. (Řešitelům doporučujeme prostudování 19. svazku ŠMM — Jiří Jarník: Komplexní čísla a funkce.)

4. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Na polopřímkách AB, AC, AD jsou sestrojeny po řadě body B', C', D' tak, že platí $AB' \cdot AB = AC' \cdot AC = AD' \cdot AD = 1$. Dokažte věty:

a) Čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový právě tehdy, když body B', C', D' leží v přímce.

b) Pro každý konvexní čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD;$$

v kterém případě nastane rovnost?

Kategorie B

1. Jestliže pro reálná čísla a, b, c platí

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0,$$

potom buď $a + b + c = 0$, nebo $a = b = c$. Dokažte.

2. Budiž $ABCD$ čtyřstěn té vlastnosti, že každé dvě z hran AD, BD, CD jsou navzájem kolmé. Označme U těžiště trojúhelníku ABC a T bod úsečky DU , pro který platí $DT = 3 \cdot TU$. Dále označme S střed kulové plochy, která prochází body A, B, C, D . Vyjádřete poloměr této kulové plochy jako funkci vzdálenosti ST .

3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně $2a$. Uvnitř jeho stran AB, BC, CD a DA zvolme po řadě body K, L, M a N tak, aby obsah čtyřúhelníka $KLMN$ byl $2a^2$ a aby existovala kružnice k opsaná čtyřúhelníku $KLMN$. Vyšetřete geometrické místo středu S opsané kružnice k .

4. Je dán lichý počet $2n + 1$ ($n \geq 2$) reálných čísel

$$a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$$

tak, že platí $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2n+1}$

Označme $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n+1}$

libovolné jejich uspořádání a označme

$$s = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{2n} - x_{2n+1}| + |x_{2n+1} - x_1|$$

Dokažte, že každý z těchto součtů s je menší nebo roven součtu vytvořenému z uspořádání

$$a_1, a_{n+2}, a_2, a_{n+3}, \dots, a_n, a_{2n+1}, a_{n+1}.$$

Najděte vzorec pro tento maximální součet s .

Kategorie C

1. Šachový kroužek sehrál klasifikační turnaj. (Hrálo se systémem „každý s každým“.) Z hráčů, kteří vyhráli alespoň jednu partii, vyhrál jeden všechny partie až na jednu, jeden všechny kromě dvou, jeden všechny kromě tří, atd., až konečně poslední z nich všechny kromě deseti. Nerozhodných partií bylo celkem 20.

Označme x počet hráčů.

a) Vypočtete x .

b) Dokažte, že hráč, který získal právě $\frac{x-1}{2}$ bodů, nebyl ani na prvním, ani na posledním místě.

Poznámka. Na šachových turnajích se hodnotí výsledky takto: za vítězství v partii dostane hráč jeden bod, za nerozhodný výsledek půl bodu a za prohru nedostane žádný bod.

2. Zostrojte konvexný rovnostranný (nikoli nutně pravidelný) pětuholník $ABCDE$, v ktorom sú dané uhlopriečky AC , AD , ak $\sphericalangle BAE = 2 \sphericalangle CAD$.

3. Soustava dvou rovnic o dvou neznámých x, y

$$a(x-1) + 2y = 1, \quad b(x-1) + cy = 3$$

je neřešitelná. Naproti tomu soustava

$$a(x-1) + 2y = 1, \quad b|x-1| + cy = 3$$

má řešení $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{5}{8}$. Vypočtete koeficienty a, b, c .

4. V rovine je daný rovnoramenný trojuholník PQR s pravým uhlom pri vrchole Q a bod A , ktorý je priesečíkom osi uhlu QPR a strany QR . Ďalej je dané kladné číslo c . Určite geometrické miesto vrcholov D obdĺžnikov $ABCD$, ktorých obsah je c a ktorých vrchol B leží na obode trojuholníka PQR . Narysujte obrázok pre $c = 2AQ$.

Kategorie D

1. Určite najmenšie trojciferné číslo n , ktorého ciferný súčet sa rovná trojnásobku ciferného súčtu čísla $n + 69$.

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Uvnitř stran AB, BC, CD, DA zvolme po řadě body K, L, M, N tak, aby $KL \parallel MN$. Uvnitř týchž stran zvolme další body K', L', M', N' tak, aby $K'L' \parallel M'N' \parallel KL$ a aby vzdálenost rovnoběžek $K'L', M'N'$ byla táž jako vzdálenost rovnoběžek KL, MN . Dokažte, že šestiúhelníky $AKLCMN$ a $AK'L'CM'N'$ mají týž obvod.

3. Ak sú a, b, c nezáporné čísla a ak je $a + b + c = 1$, potom platí

$$ab + ac + bc < \frac{1}{2}, \quad ab + ac + bc - abc < \frac{1}{3}.$$

Dokážte.

4. Je dán obdélník $ABCD$, M je střed strany AB . Uvnitř úseček BC, AD sestrojte body E, F tak, aby pětiúhelníku $MECDF$ bylo možno opsat kružnici. Vyjádřete poloměr této kružnice i obsah pětiúhelníka pomocí délek stran obdélníka $ABCD$. Určete podmínku řešitelnosti úlohy.

Po velkém matematickém boji

STANISLAV HORÁK, doc. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Jubilejní X. mezinárodní matematická olympiáda se letos konala v Moskvě za účasti 12 států: Anglie, Bulharska, Československa, Itálie, Jugoslávie, Maďarska, Mongolska, Německé demokratické republiky, Polska, Rumunska, Sovětského svazu a Švédska.

Družstva jednotlivých států byla jako obvykle osmičlenná a měla po dvou vedoucích.

Pro naše matematiky začala MMO 8. 7. 1968 v Praze na ministerstvu školství, kde vítězům domácí MO odevzal diplomy doc. Jan Vyšín a absolutní vítěz Bohuš Sivák převzal putovní pohár MŠ. Ve večerních hodinách téhož dne opustili účastníci na ruzyňském le-

tišii Prahu. V Moskvě přistálo letadlo o 1½12. hod. tamního času a po obvyklých pasových a celních formalitách se nás ujala s. Valentina Bogdanova, která plynou česťinou nás uvedla do připraveného autobusu. Po půlnoci jsme došli — jako poslední delegace — do Davídkova, kde v internátu tamní fyzikálně-matematické školy byly ubytovány všechny delegace kromě vedoucích.

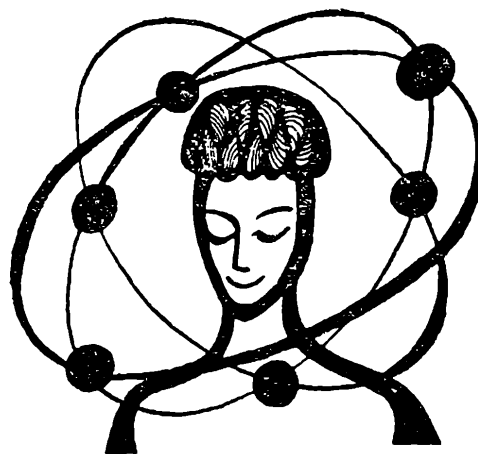
Vlastní soutěž se konala ve dnech 10. a 11. VII. Před soutěží promluvil k soutěžícím prof. Markuševič. Soutěž probíhala v 8 posluchárnách a v každé z nich bylo po 12 studentech, každý z jiného státu.

Československými reprezentanty byli: Martin Bukovčan (Bratislava), Michal Kaukič (Námestovo), Tomáš Mašek (Praha), Vladimír Müller (Praha), Libor Polák (Brno), Pavel Polcar (Velké Meziříčí), Bohuš Sivák (Zvolen), Jiří Vinárek (Praha). Neumístili se nijak špatně, jak ukazuje tabulka výsledků podle jednotlivých států.

Po- radí	Stát	prv- ních	Počet dru- hých cen	tře- tích	Sou- čet bodů	Jména vedoucích
1.	NDR	5	3	—	304	Helmut Bausch Herbert Titze
2.	SSSR	5	1	2	298	E. A. Morozova B. Vasiljev
3.	MLR	3	3	2	291	Emil Hódi István Reiman
4.	Anglie	3	2	2	263	Nòrman Routledge David Monk
5.	PLR	2	3	2	262	Mieczyslaw Czyżykowski
6.	Švédsko	1	2	5	256	Andrzej Makowski Per Martin Löf
7.	ČSSR	2	4	—	248	Peter Hackman František Zítek
8.	RPR	1	1	2	208	Jozef Moravčík Konstantin Jonescu
9.	BLR	—	3	1	204	Gleb Simionescu Doičin Bogdanov
						Doičinov Christo Stojanov
10.	FNRJ	—	—	3	177	Doganov Franze Križanovič
11.	Itálie	—	—	1	132	Vladimír P. Mičič Tulio Viola
12.	Mongol.	—	—	—	74	Angelo Pescarini Samžimjatav Duger

Z našich zástupců získali 1. cenu Tomáš Mašek a Bohuš Sivák, 2. cenu Vladimír Müller, Libor Polák, Pavel Polcar a Jiří Vinárek.

Fyzikální olympiáda



Další úlohy pro první kolo soutěže (první trojice byla otištěna v Rozhledech roč. 46, č. 10). Všechny úlohy řešte pokud možno obecně, pak teprve číselně.

Kategorie A

4. Je-li v polovodiči elektrické pole E , pohybují se nositelé nábojů (elektrony a díry) v něm průměrnými rychlostmi, které jsou úměrné intenzitě pole $v = bE$. Součinitel b je pohyblivost nositele náboje.

Určete měrnou vodivost polovodiče, jestliže v něm elektrony mají koncentraci n a pohyblivost b_n , díry koncentraci p a pohyblivost b_p . Elektron i díry mají náboje $\mp e$.

Řešte jen obecně, tj. vyjádřete měrnou vodivost pomocí veličin e , n , p , b_n , b_p .

5. Kovová tyč délky l padá volným pádem ve vodorovné poloze z výšky h tak, že svírá se směrem sever—jih úhel α . Za předpokladu, že se neuvažuje odpor vzduchu, udejte, jak se mění elektromotorické napětí na koncích tyče v závislosti na čase. Jak velké bude toto napětí těsně před dopadem tyče na zem? Horizontální složka magnetické indukce zemské je B_H .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 5,0$ m, $h = 50$ m, $\alpha = 60^\circ$, $B_H = 2 \cdot 10^{-5}$ T, tíhové zrychlení $g = 9,81$ m s⁻².

6. Z grafu závislosti svorkového napětí baterie na celkovém proudu z ní odebíraném určete elektromotorické napětí baterie.

Pomůcky: Baterie, voltmetr známého vnitřního odporu, ampérmetr, posuvný reostat, spojovací vodiče.

Postup:

Navrhněte vhodné zapojení. Svorkové napětí baterie a proud měřte desetkrát při různém zatížení a naměřené hodnoty zaznamenejte do

tabulky. Sestrojte graf závislosti svorkového napětí U na proudu I a určete z něho hodnotu elektromotorického napětí ε baterie.

7. a) Při malém mřížkovém budicím napětí U_g se získá triodou maximální výkon, je-li čistě ohmický zatěžovací odpor R_z rovný vnitřnímu odporu triody R_i . Dokažte.

b) Stanovte tento výkon u triody (μ, R_i) , je-li mřížkové budicí napětí U_g .

c) Je-li $R_z = R_i$, liší se směrnice tečny anodové charakteristiky v pracovním bodě od směrnice zatěžovací přímky jen znaménkem. Dokažte.

d) Podmínka pro optimální výkon při čistě ohmickém zatěžovacím odporu je $R_z = 2R_i$. Jaký je tento výkon, je-li mřížkové budicí napětí U_g ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\mu = 5$, $R_i = 1 \text{ k}\Omega$, $U_g = 2 \text{ V}$, $U'_g = 18 \text{ V}$.

8. Svíticí bod A leží ve výšce h_1 nad vodní hladinou. V hloubce h_2 pod vodní hladinou je horizontálně položeno rovinné zrcadlo.

Vypočítejte, v jaké svislé vzdálenosti od svíticího bodu A leží jeho zdánlivý obraz v zrcadle. Relativní index lomu ze vzduchu do vody je n .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h_1 = 5,0 \text{ cm}$, $h_2 = 8,0 \text{ cm}$, $n = \frac{4}{3}$.

9. Dvě různá homogenní prostředí mají absolutní indexy lomu N_1 a N_2 ($N_1 < N_2$) a jsou oddělena kulovou plochou o poloměru r . Střed křivosti kulového rozhraní leží v druhém prostředí.

a) Stanovte ohniskovou vzdálenost f pro přechod osových světelných paprsků z prostředí o indexu lomu N_1 do druhého prostředí.

b) Vyšetřete, kdy je $f = 2r$.

c) Na milimetrovém papíře narýsujte graf závislosti $\frac{f}{r}$ na relativním indexu lomu v mezích $1 \leq n \leq 2,5$.

Kategorie B

4. Každá ze dvou destiček bimetalového proužku má tloušťku d . Při teplotě t_0 je proužek přímý a má délku l_0 . Součinitelé teplotní délkové roztažnosti kovů bimetalu jsou α_1 a α_2 ; $\alpha_1 > \alpha_2$.

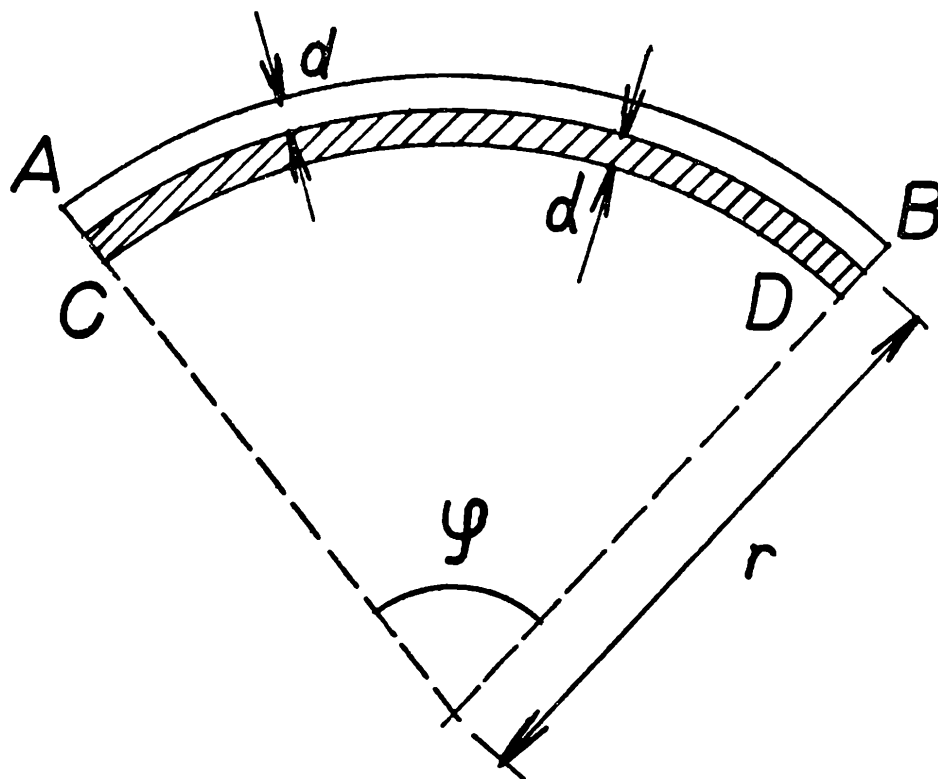
a) Určete střední poloměr křivosti r proužku při zvýšení teploty o $\Delta t = t - t_0$ (obr. 3).

b) Ve zvláštním případě je bimetalový proužek složen z destičky zinkové ($\alpha_1 = 3,0 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$) a ocelové ($\alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ deg}^{-1}$), $d =$

$= 2,0 \text{ mm}$, $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Pro tento případ sestrojte graf závislosti poloměru křivosti r na teplotě t pro $t \geq 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

c) Jaký tvar má proužek při teplotě $t < 20 \text{ }^\circ\text{C}$?

d) Doplňte ve zvláštním případě b) graf závislosti r na t pro $t < 20 \text{ }^\circ\text{C}$.



Obr. 3

V celém rozsahu změn teploty znázorněném na grafu považujeme oba součinitele teplotní délkové roztažnosti za konstantní. Jejich hodnoty α_1 a α_2 jsou dány pro počáteční teplotu $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

5. Gulá z rovnorodéj látky o hmotnosti m_1 , o teplotě t_1 a o mernom teple c_1 sa pohybuje rýchlosťou v_1 . Zrazí sa centrálne s gulou o hmotnosti m_2 , o teplotě t_2 a o mernom teple c_2 , ktorá bola pred zrážkou v pokoji. Zraz gúl je dokonale nepružný.

Určte výslednú teplotu telesa, ktoré vznikne po zrážke. Predpokladáme, že premeny energie prebiehajú v izolovanej sústave telies a že merné teploty c_1 a c_2 sú konštantné pre zmeny teplot telies, ktoré pri zrážke telies nastali.

6. Určení měrného tepla kapaliny.

Pomůcky: Směšovací kalorimetr (Dewarova nádoba), olej, kovový válec s držákem na ohřívání, teploměry s dělením po $0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ a po $1,0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Úkoly:

1. Určete tepelnou kapacitu K v jednotkách kJ deg^{-1} .

Viz Praktická cvičení z fyziky (SPN 1965), str. 95.

Vypočítejte absolutní chybu výsledku.

2. Určete měrné teplo oleje v jednotkách $\text{kJ kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$.

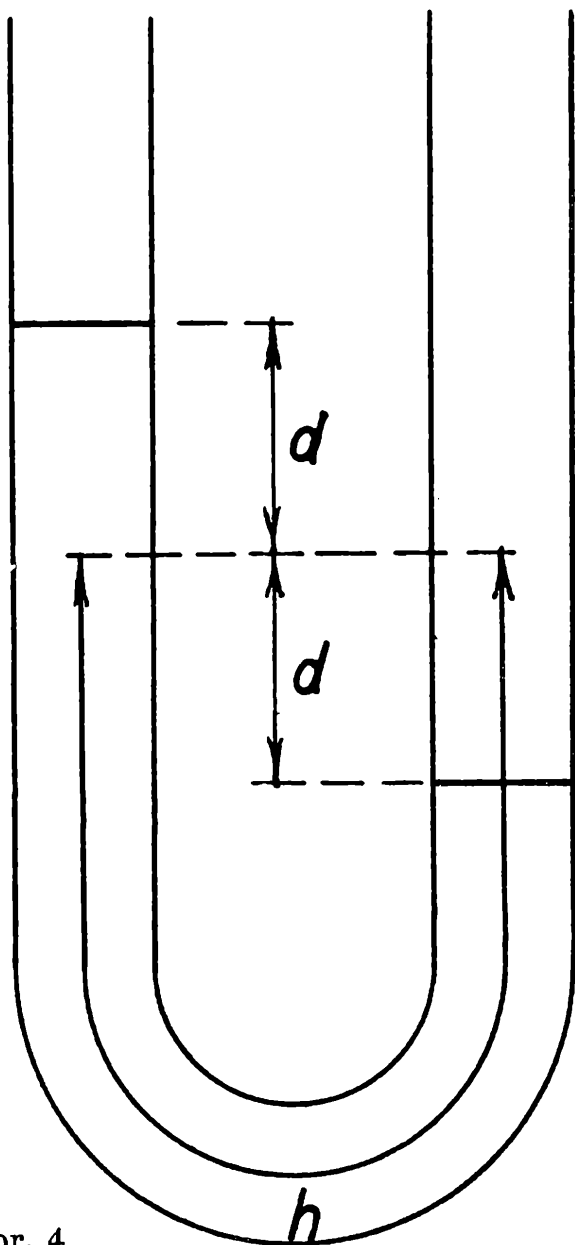
Viz Praktická cvičení z fyziky, str. 31.

Volte počáteční teplotu oleje v kalorimetru nižší, než je teplota vzduchu v laboratoři tak, že olej předběžně ochladíte ve vodní lázni. Kovový válec ohřívejte ve vodní lázni asi na teplotu varu vody. Teplota vodní lázně v okamžiku přenesení válce do kalorimetru je zároveň počáteční teplotou válce. Určete absolutní a relativní možné chyby dílčích měření. Rozhodněte, které z nich se více uplatňují při určení chyby výsledku a které lze zanedbat. Určete absolutní chybu výsledku.

3. Určete měrné teplo oleje v jednotkách $\text{kJ kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ kontrolním měřením tak, že ohřejete olej ve vodní lázni na počáteční teplotu asi 80°C a zároveň ochladíte kovový válec ve vodní lázni na teplotu nižší, než je teplota vzduchu v laboratoři. Porovnejte oba výsledky.

Zůstává zjištěný rozdíl v mezích absolutních chyb?

Posudte, zda některá z obou variant dává přesnější výsledek a proč.



Obr. 4

7. V trubici tvaru U , která má všude stejný průřez S , je sloupec dokonalé kapaliny celkové délky h . Tlakovou silou působící na povrch kapaliny v jednom ramenu vytlačíme z tohoto ramena sloupec kapaliny délky d . V okamžiku, kdy síla přestane působit, uveďte se kapalina v trubici do kmitavého pohybu (viz obr. 4).

a) Určete kmitočet f kapalinového sloupce. Tření kapaliny o stěny trubice zanedbejte.

b) Jak závisí kmitočet na hustotě kapaliny a na průřezu trubice?

8. V trojposchodovom obytnom dome s bytmi rovnakého typu je v každom byte miestnosť bez okien, ktorej podlaha má tvar štvorca o strane a . Výška miestnosti je b . Z troch strán priliehajú k tejto miestnosti iné obytné priestory bytu, štvrtú stenu tvorí vonkajšia

stena domu. Tehlové steny vnútorných priečok majú hrúbku d_t , vonkajšia betónová stena hrúbku d_b . Všetky steny sú z oboch strán omietnuté omietkou hrúbky d_o . Súčiniteľ tepelnej vodivosti tehlového muriva je λ_t , betónu λ_b , omietky λ_o . Súčiniteľ prechodu tepla pre vnútorný kludný vzduch je α_1 , pre vonkajší prúdiaci vzduch α_2 .

V uvažovaných miestnostiach od prízemí až po tretie poschodie chceme udržať teplotu t_1 . V obývacích izbách je všade teplota $t_2 < t_1$, vonkajšia teplota je $t_3 < t_2$.

a) Aké musia byť výkony ohrievacích telies v uvažovaných miestnostiach na prvom, alebo druhom poschodí?

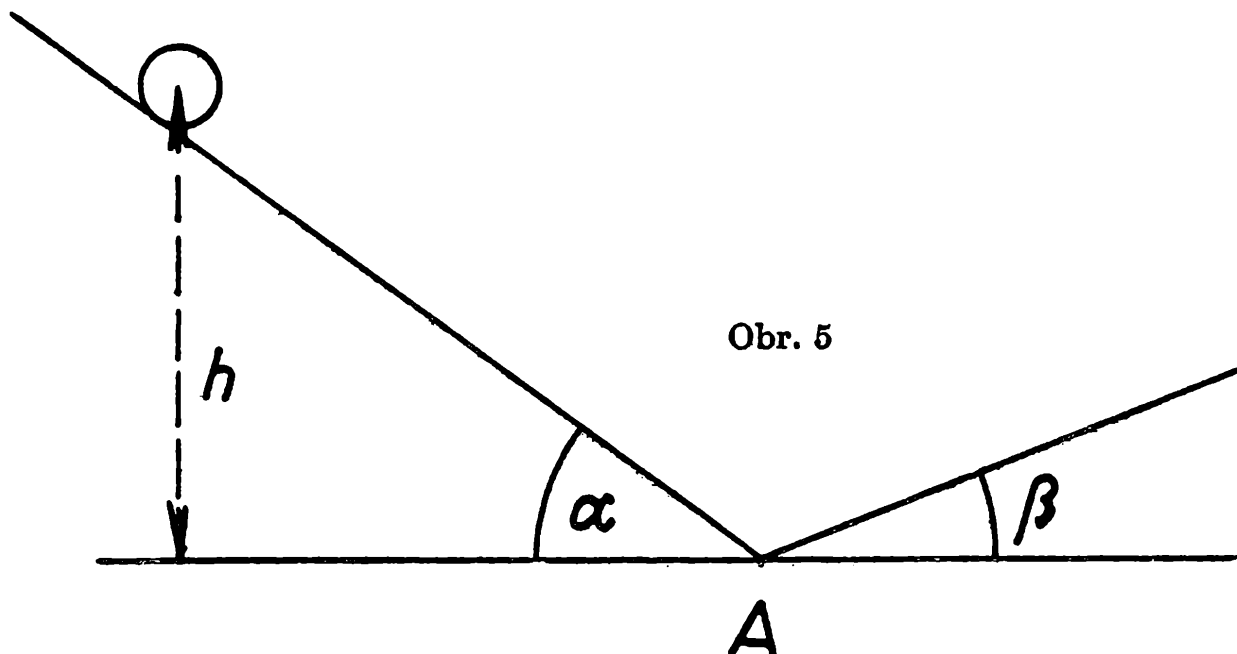
b) Aké by boli výkony ohrievacích telies podľa a), ak $t_1 = t_2 = t$?

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $a = 3,0$ m, $b = 2,5$ m, $d_t = 0,15$ m, $d_b = 0,30$ m, $d_o = 0,01$ m, $\lambda_t = 0,50$ kcal m⁻¹ h⁻¹ deg⁻¹, $\lambda_b = 0,30$ kcal m⁻¹ h⁻¹ deg⁻¹, $\lambda_o = 0,80$ kcal m⁻¹ h⁻¹ deg⁻¹, $\alpha_1 = 4,0$ kcal m⁻² h⁻¹ deg⁻¹, $\alpha_2 = 100$ kcal m⁻² h⁻¹ deg⁻¹, $t_1 = 25$ °C, $t_2 = 20$ °C, $t_3 = 0$ °C, $t = 20$ °C.

9. a) Určete dobu kmitu kuličky, ktorá sa kutáľí po dvoch naklonených rovinách z výšky h ; roviny svírajú s vodorovnou rovinou úhly α a β .

Uvažujeme len vzájemné premeny potenciálnej tíhovej a kinetické energie (obr. 5).

b) Pro danou dvojici úhlů, např. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 15^\circ$,



1. ověřte pokusem závislost doby kmitu téže kuličky na výšce h (každé měření opakujte pětkrát pro pět různých výšek),

2. závislost doby kmitu kuličky na její hmotnosti. Provedte měření pro pět kuliček různých hmotností při stálé výšce, každé měření opakujte pětkrát.

Výsledky měření запиšte do tabulek a porovnejte s teoretickým řešením podle a).

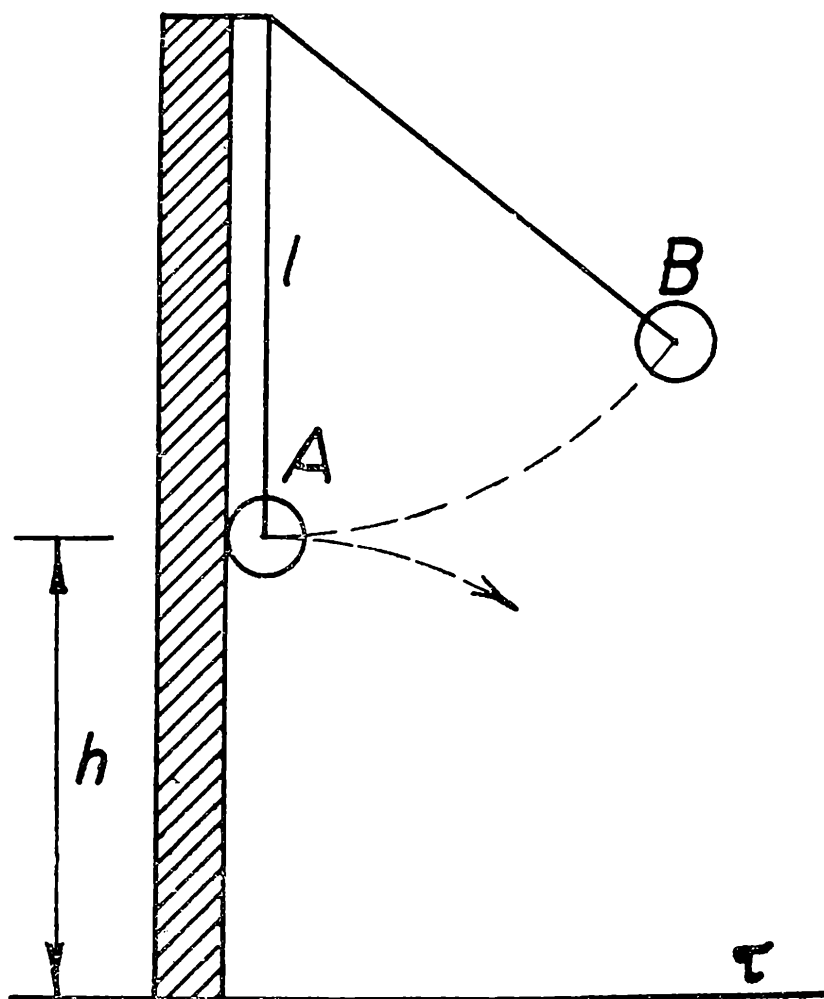
4. Na jednom konci vlákna vedeného přes pevnou kladku je zavěšen válec A o hmotnosti m , na druhém konci visí válec B o stejné hmotnosti. Na válci A leží přívažek o hmotnosti m' . Nad válcem B je



24

- a) Za jakou dobu a ve kterém místě dopadne kroužek k na válec B ?
 b) Jak se pohybuje soustava po dopadu kroužku k na válec B ?
 Závaží B i kroužek k jsou dokonale nepružné. Tření a otáčivý pohyb kladky neberte v úvahu.

5. Malá dokonale pružná kulička o hmotnosti m je zavěšena na pevné nepružné niti délky l tak, že se dotýká svislé dokonale pružné stěny ve výšce h nad vodorovnou rovinou τ (obr. 7). Poloměr kuličky lze vzhledem k délce závěsu zanedbat. Kuličku vychýlíme při napjatém závěsu v rovině σ , kolmé ke stěně, o úhel α do polohy B a pak ji uvol-



Obr. 7

níme. Po uvolnění se kulička pohybuje v rovině σ , narazí na stěnu a při nárazu se ze závěsu uvolní.

a) Jakou velikost a orientaci má rychlost kuličky po odrazu od stěny?

b) Jak velká je nárazová síla F při rázu kuličky se stěnou, trvá-li ráz dobu t_1 ?

c) Jaký pohyb koná kulička po uvolnění ze závěsu po nárazu na stěnu?

d) V jaké vzdálenosti d od stěny dopadne kulička na rovinu τ ? Závisí tato vzdálenost na hmotnosti kuličky a na tíhovém zrychlení?

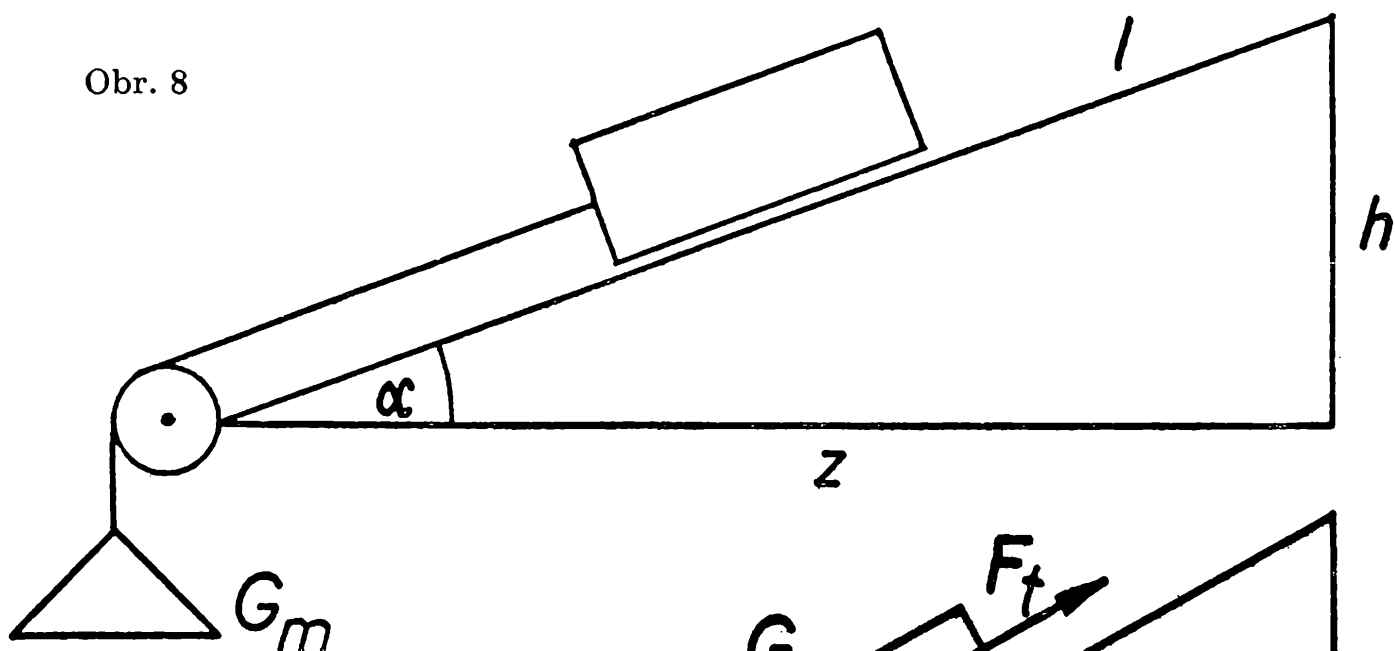
e) Vypočtete potenciální tíhovou energii W_p kuličky v místě B vzhledem k rovině τ a její kinetickou energii W_1 při dopadu na rovinu τ a porovnejte obě hodnoty.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, $l = 0,90 \text{ m}$, $h = 1,25 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$, $t_1 = 0,01 \text{ s}$, $g \doteq 10 \text{ m s}^{-2}$.

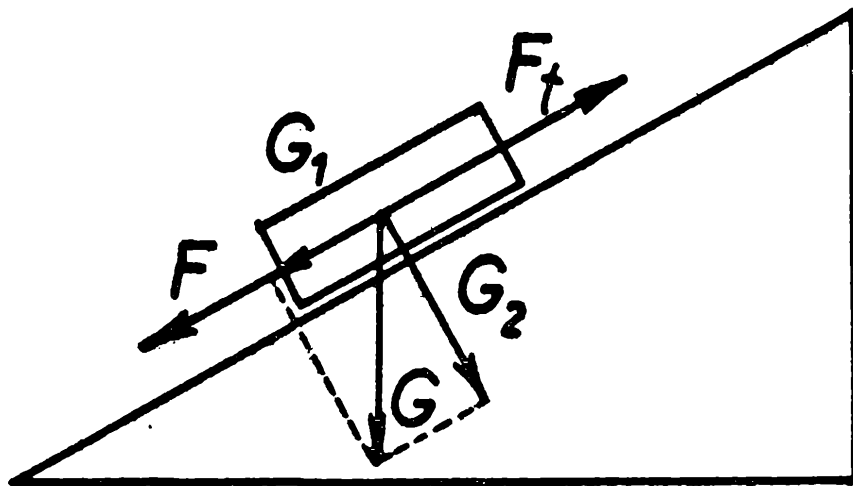
6. Měření součinitele smykového tření v klidu μ_0 a v pohybu μ .

Pomůcky: Tribometr nebo hladká nakloněná rovina, dřevěný kvádr, který má ve středu nejmenších bočních stěn zašroubovány kroužky a jednu z podstavních stěn má hladkou, libela, nit, miska na závaží, závaží, listovní váhy nebo siloměr, pevná kladka, délkové měřítko.

Obr. 8



Obr. 9



Označení veličin: Součinitele smykového tření v klidu označíme μ_0 , třecí sílu F_t , délku nakloněné roviny l , výšku h , základnu z a její úhel s vodorovnou rovinou α , tíhu kvádru G , pohybovou složku jeho tíhy G_1 , tlakovou složku G_2 . Při měření součinitele u tření v pohybu budeme uvedené veličiny značit čárkovanými písmeny. Tíhu misky označíme G_m (obr. 8).

Návod:

I. Leží-li kvádr na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α , avšak takový, aby kvádr po nakloněné rovině neklouzal,

může se tento kvádr uvést z klidu do pohybu po nakloněné rovině směrem vzhůru určitou nejmenší silou F_1 , působící rovnoběžně s délkou nakloněné roviny, jestliže tato síla má velikost (viz obr. 9) právě

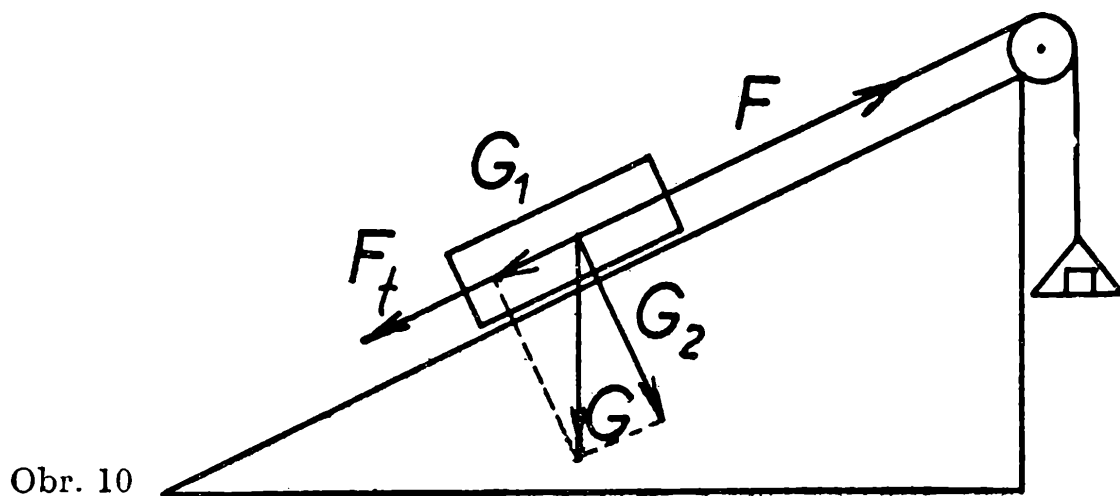
$$F_1 = F_t + G_1. \quad (1)$$

Nejmenší síla působící rovnoběžně s délkou nakloněné roviny směrem dolů, která ještě uvede kvádr z klidu do pohybu, má hodnotu (obr. 10)

$$F_2 = F_t - G_1. \quad (2)$$

Z rovnic (1) a (2) vypočítáme

$$F_t = \frac{1}{2} (F_1 + F_2) \text{ a } G_1 = \frac{1}{2} (F_1 - F_2). \quad (3a, b)$$



Obr. 10

Protože tlakovou silou, kterou působí kvádr na nakloněnou rovinu, je složka G_2 tíhy kvádru, kolmá k nakloněné rovině, je $F_t = \mu_0 G_2$, takže

$$\mu_0 = \frac{F_t}{G_2}, \quad (4)$$

kde $G_2 = \frac{z}{l}$.

Ze vztahu (3a) a (4) určíme

$$\mu_0 = \frac{(F_1 + F_2) l}{2Gz}. \quad (5)$$

Známe-li F_1 , F_2 , l , G a z , vypočítáme ze vztahu (5) hodnotu součinitele μ_0 smykového tření v klidu.

II. Najdeme-li zkusmo tak veliký úhel α nakloněné roviny, že se kvádr uvede malým silovým impulsem po této rovině do rovnoměrného pohybu směrem dolů, je pohybová složka G'_1 v rovnováze s třecí silou F'_t . Proto platí

$$G'_1 = F'_t = \mu G_2.$$

takže

$$\mu = \frac{G'_1}{G'_2} = \frac{G \sin \alpha'}{G \cos \alpha'} = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{h'}{z'}. \quad (6)$$

Z naměřených hodnot h' a z' určíme podle vztahu (6) velikost součinitele smykového tření v pohybu.

Úkoly:

I.

1. Odůvodněte správnost vztahů (1) a (2) a odvoďte z nich vztahy (3a, b).

2. Užitím vztahů (3a) a (4) určete vztah (5).

3. Provedte měření:

a) Změřte velikost tíhy G kvádrů a tíhy G_m misky na závaží.

b) Základnu nakloněné roviny uveďte pomocí libely do vodorovné polohy.

c) Položte kvádr na nakloněnou rovinu hladkou stěnou a sestavte pokus podle obr. 8 a nastavte úhel α tak, aby kvádr zůstal v klidu.

Upravte pokus podle obr. 9. Na misku umístěte takové závaží, aby se kvádr uvedl do pohybu. Velikost závaží postupně zmenšujte, až najdete nejmenší závaží, při kterém se ještě kvádr uvede do pohybu sám, bez vnějšího impulsu. Součet tíhy tohoto nejmenšího závaží a tíhy misky určuje velikost síly F_1 .

d) Obdobně určete při úpravě pokusu podle obr. 9 velikost síly F_2 .

e) Změřte délky l a z a vypočítejte podle vztahu (5) velikost μ_0 součinitele smykového tření v klidu.

II.

a) Položte kvádr na nakloněnou rovinu s malým úhlem α (obr. 10) a udělte mu slabý náraz směrem dolů. Zastaví-li se kvádr po nárazu, zvětšujte postupně sklon nakloněné roviny a opakujte pokus tak dlouho, až těleso po slabém nárazu pokračuje v rovnoměrném pohybu. Při tomto úhlu α' změřte velikost z' základny nakloněné roviny a její výšku h' .

b) Užitím vztahu (6) určete velikost μ součinitele smykového tření v pohybu.

III.

Porovnejte μ_0 a μ .

7. Kruhová deska z homogenního materiálu se středem S o poloměru R , všude stejné tloušťky, je otáčivá ve vodorovné rovině okolo svislé osy procházející bodem S kolmo k rovině desky.

Na desku působí tři síly $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ o velikostech $F_1 = F_2 = F_3$, jejichž vektorové přímky jsou vodorovné a mají v každém okamžiku směry tečen ke kružnici se středem S a o poloměru $r < \frac{R}{3}$. Působíště A , B , C sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ jsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníka rovno-ramenného, jehož přepona $AB = 2r$ prochází bodem S .

- Určete graficky i početně výslednici $\mathbf{F}$ sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$.
- Jaký pohyb koná deska působením sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$?
- Jakou vzdálenost má vektorová přímka síly $\mathbf{F}$ od středu desky?

8. Kvádr z homogenního materiálu, jehož hrany mají délky a , b , c , má tíhu G . Leží na vodorovné rovině.

a) Jak velkou má kvádr stabilitu? Za podstavu volte stěnu omezenou hranami a a b a předpokládejte, že se kvádr při překlápění otáčí okolo osy určené hranou b .

b) Platí výsledek části a) úlohy i tehdy, stojí-li kvádr na šikmé rovině?

c) Ve které poloze a vzhledem ke které ose otáčení má kvádr největší stabilitu?

9. Kužel s poloměrem podstavy r a o výšce h sa valí bez klzania svojím plášťom po vodorovnej rovine tak, že stred jeho podstavy koná rovnomerný pohyb po kružnici.

Vypočítajte veľkosť ω výslednej uhlovej rýchlosti kužela a uhol, ktorý zvierá vektor uhlovej rýchlosti $\boldsymbol{\omega}$ s vodorovnou rovinou.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $r = 0,10$ m, $h = 0,50$ m, $T = 5,0$ s.

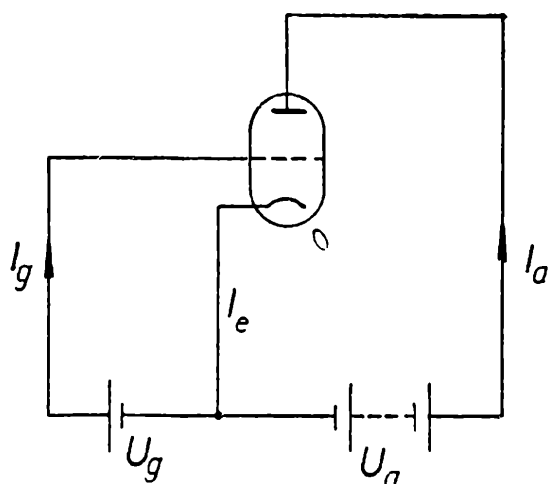
Elektronkové zesilovače (Studijní text FO, roč. X)

KONRÁD HOFMAN, PF, Č. Budějovice

1. Trioda, její charakteristiky a parametry

Především zopakujeme a doplníme to, co jste o triodě probírali na SVVŠ.

Emisní proud I_e se u triody (obr. 1) v obecném případě rozdělí na anodový proud I_a a mřížkový proud I_g . Je-li ale mřížkové napětí menší než asi $-1,3$ V, je mřížkový proud $I_g \doteq 0$ a $I_a \doteq I_e$. Tento případ, kdy má tedy mřížka záporné napětí vůči katodě, čili tzv. záporné předpětí, je důležitý u elektronkových zesilovačů.



Obr. 1. Emisní proud triody
 $I_e = I_a + I_g$

Anodový proud I_a závisí nejen na anodovém napětí U_a , ale hlavně na mřížkovém předpětí U_g , a protože tyto závislosti jsou nelineární a nelze je také vyjádřit přesným matematickým vztahem, znázorňujeme je graficky pomocí charakteristik.

Anodové charakteristiky (obr. 2, vpravo) znázorňují závislost

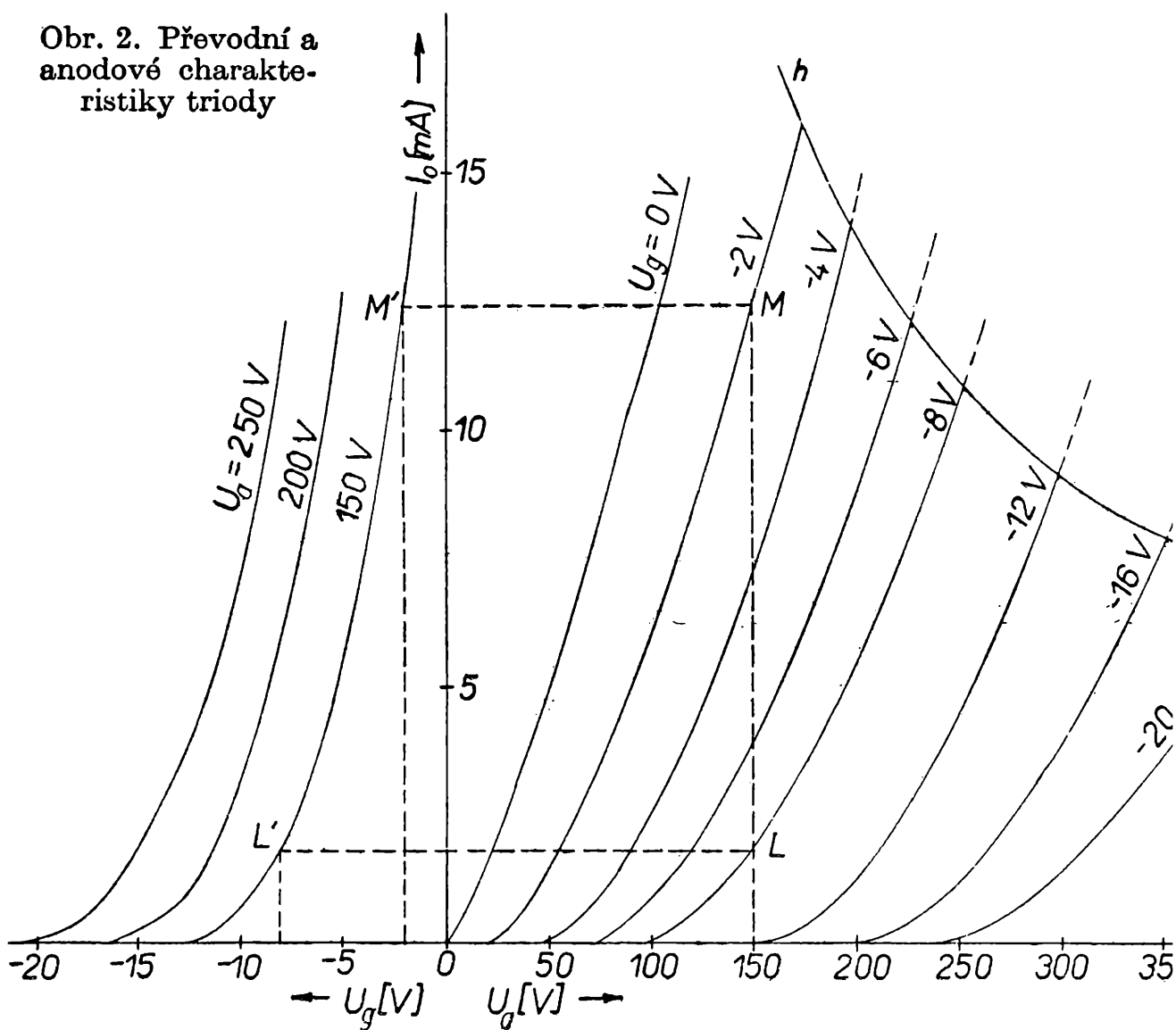
$$I_a = f(U_a) \text{ při } U_g = \text{konst.}$$

to je závislost anodového proudu I_a na anodovém napětí U_a , přičemž mřížkové napětí je pro určitou charakteristiku stálé.

Převodní (statické) charakteristiky (obr. 2, vlevo) znázorňují závislost

$$I_a = f(U_g) \text{ při } U_a = \text{konst.}$$

Obr. 2. Převodní a anodové charakteristiky triody



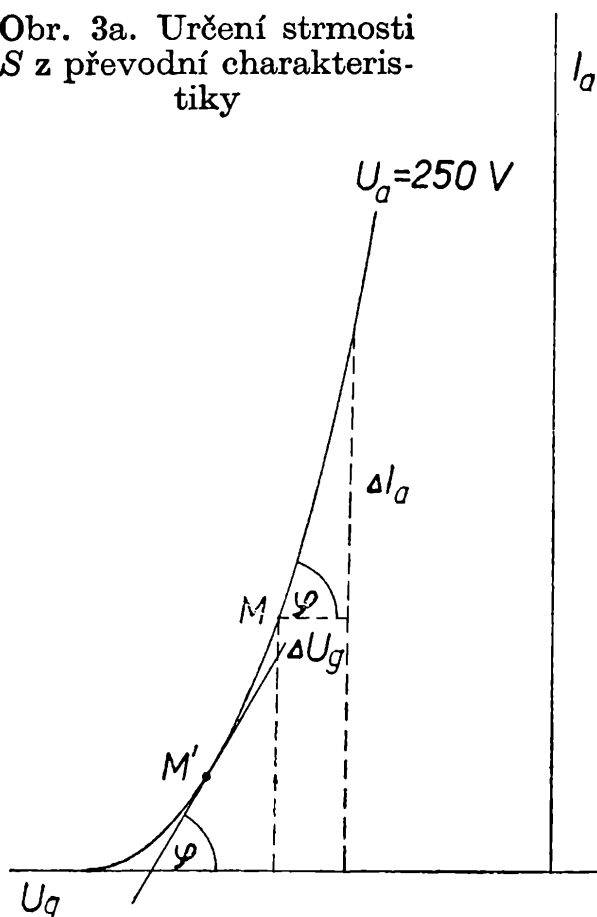
Z obr. 2 je současně patrné, jak ze soustavy anodových charakteristik lze sestavit soustavu převodních charakteristik a obráceně.

Pro triodu jsou dále důležité tři parametry.

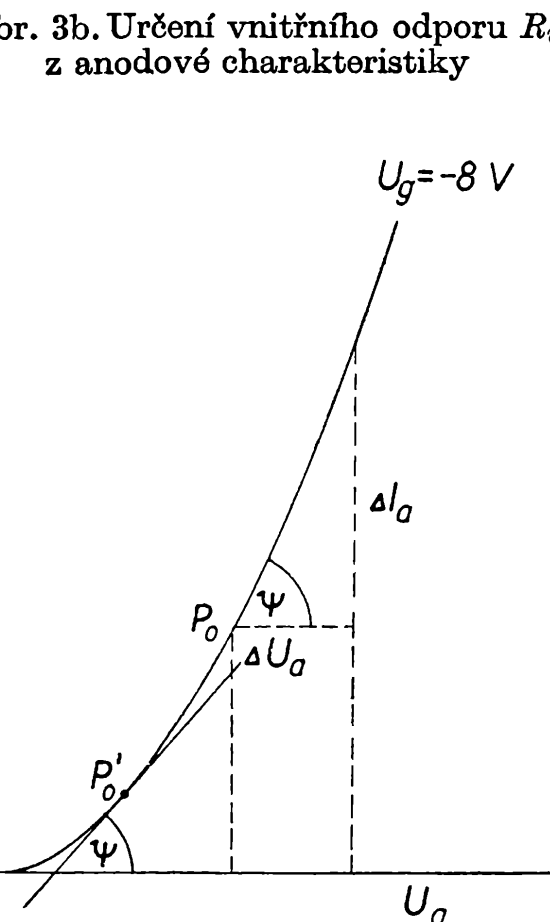
$$\text{a) strmost } S = \left(\frac{\Delta I_a}{\Delta U_g} \right) \text{ při } U_a = \text{konst.} \quad (1)$$

je číselně rovna směrnici tečny $\tan \varphi$ v určitém bodě převodní charakteristiky (obr. 3a). Udává se v mA/V.

Obr. 3a. Určení strmosti S z převodní charakteristiky



Obr. 3b. Určení vnitřního odporu R_i z anodové charakteristiky



Změny ΔI_a , ΔU_a , ΔU_g jsou obecně velmi malé (nekonečně malé).

V přímkových částech charakteristik mohou být ale libovolně velké.

$$\text{b) průnik } D = \left(\frac{\Delta U_g}{\Delta U_a} \right) \text{ při } I_a = \text{konst.} \quad (2)$$

Bývá udáván v procentech. Reciproká hodnota průniku

$$\frac{1}{D} = \mu$$

je zesilovací činitel, je to číslo bez rozměru.

Ze vztahu (2) plyne

$$\Delta U_g + D \cdot (-\Delta U_a) = 0$$

při konst. I_a .

To znamená: Změní-li se anodové napětí U_a o $-\Delta U_a$ a současně se změní mřížkové předpětí U_g o $\Delta U_g = D\Delta U_a$, anodový proud se nezmění.

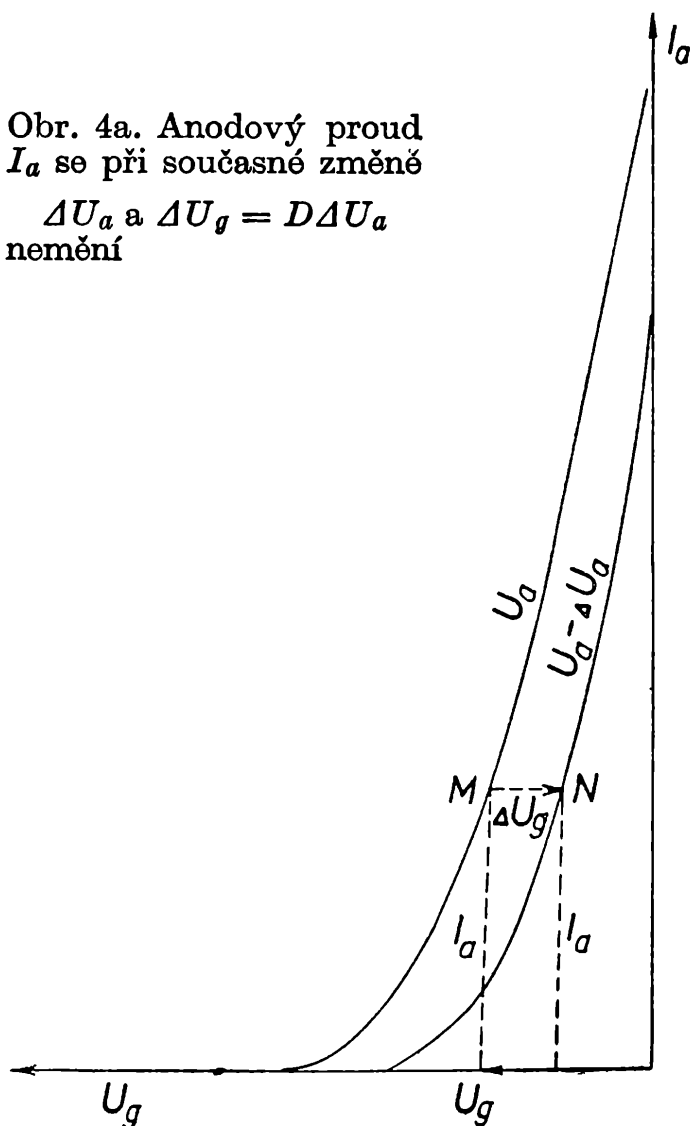
Je to zřejmé z obr. 4a. Původní stav daný bodem $M [U_g, I_a]$, který leží na převodní charakteristice pro anodové napětí U_a , přejde po změně $-\Delta U_a$ a změně ΔU_g do stavu, který je určen bodem

$$N [U_g + \Delta U_g, I_a]$$

ležícím na převodní charakteristice s anodovým napětím $U_a - \Delta U_a$. Anodový proud se nezměnil.

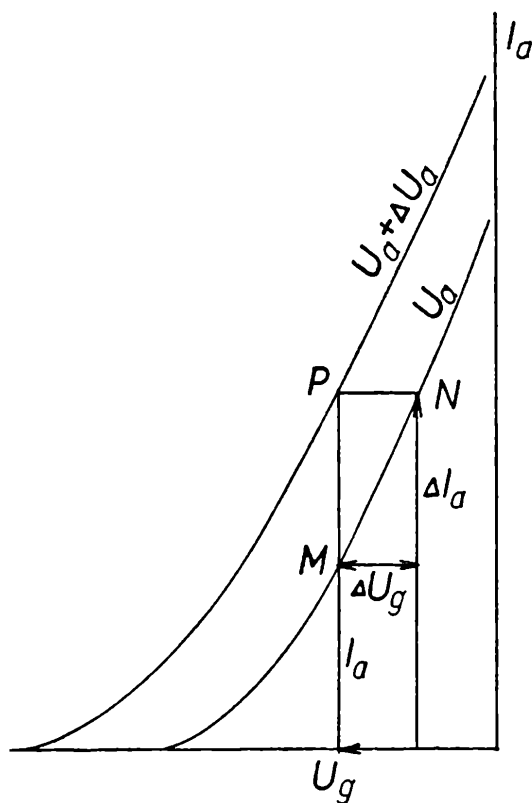
Rovnici (2) můžeme napsat také takto

$$\Delta U_g = D\Delta U_a.$$



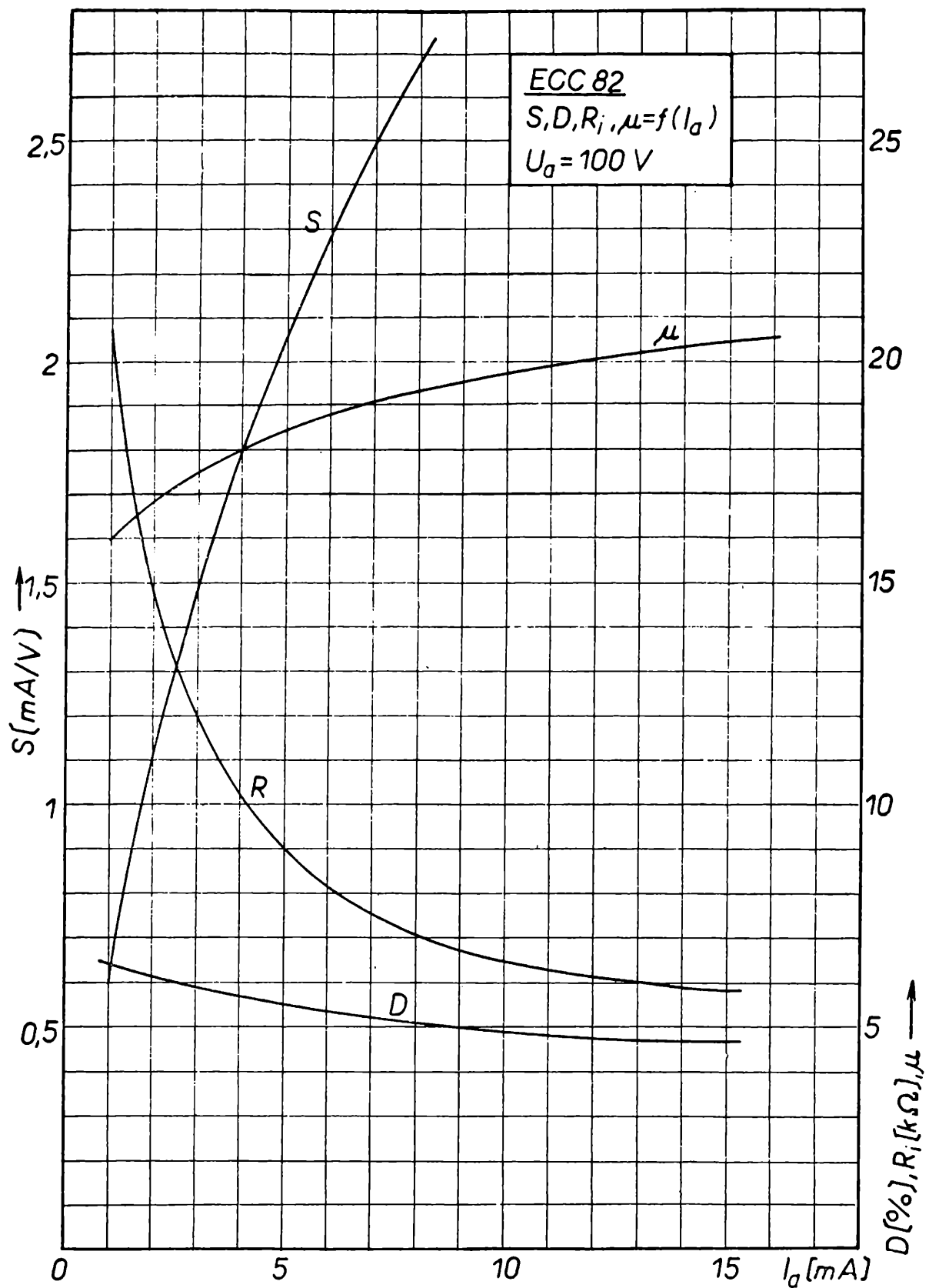
Obr. 4a. Anodový proud I_a se při současné změně ΔU_a a $\Delta U_g = D\Delta U_a$ nemění

Obr. 4b. Změna ΔU_a je ekvivalentní změně $\Delta U_g = D\Delta U_a$



Tento vztah lze interpretovat tímto způsobem: Změna anodového napětí ΔU_a způsobí stejnou změnu anodového proudu ΔI_a jako změna mřížkového předpětí $\Delta U_g = D\Delta U_a$ čili změna ΔU_a z hlediska změn anodového proudu je ekvivalentní změně $\Delta U_g = D\Delta U_a$.

Vysvětlíme to opět na grafu (obr. 4b). Vyjdeme z bodu $M [U_g, I_a]$.



Obr. 4c. Grafy udávající závislost parametrů triody na I_a

Přírůstku ΔU_g odpovídá přírůstek ΔI_a

(bod $N [U_g + \Delta U_g, I_a + \Delta I_a]$),

přičemž anodové napětí zůstalo konstantní. Ponecháme-li mřížkové

předpětí U_g stálé, ale anodové napětí U_a zvýšíme o ΔU_a , dostaneme se do bodu $P [U_g, I_a + \Delta I_a]$. Přírůstek ΔI_a je v obou případech stejný.

Protože

$$\Delta U_g = D \Delta U_a = \frac{1}{\mu} \Delta U_a,$$

má změna mřížkového předpětí ΔU_g na anodový proud μ -krát větší vliv než stejná změna anodového napětí ΔU_a .

Dále je z předešlého patrné, že zvětší-li se anodové napětí o ΔU_a , posune se převodní charakteristika o $\Delta U_g = -D \Delta U_a$ doleva.

$$\text{c) vnitřní odpor } R_i = \left(\frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} \right) \text{ při } U_g = \text{konst.} \quad (3)$$

Z obr. 3b je zřejmé, že směrnice tečny anodové charakteristiky $\text{tg } \psi$ je úměrná $\frac{1}{R_i}$. Protože anodové charakteristiky jsou značně zakřiveny,

závisí vnitřní odpor R_i velmi na pracovním bodě P_o (obr. 3b).

Vynásobíme-li vztahy (1), (2), (3), dostaneme Barkhausenovu rovnici

$$SR_i D = 1 \text{ nebo } SR_i = \mu.$$

Barkhausenova rovnice platí jen pro číselné hodnoty parametrů v témž určitém pracovním bodě daném dvěma souřadnicemi, např. U_g, I_a , jde-li o převodní charakteristiky, nebo U_a, I_a , jde-li o anodové charakteristiky. V každém pracovním bodě mají parametry jiné hodnoty. Proto v katalogích elektronik se uvádějí vedle uvedených charakteristik grafy udávající závislosti (obr. 4c)

$$R_i = f(I_a) \quad \text{při } U_a = \text{konst.}$$

$$S = f(I_a) \quad \text{při } U_a = \text{konst.}$$

$$D = f(I_a) \quad \text{při } U_a = \text{konst.}$$

$$\text{a} \quad \mu = f(I_a) \quad \text{při } U_a = \text{konst.}$$

V teoretických úvahách se trioda nahrazuje tzv. ekvivalentní diodou, jejíž anodový proud je roven anodovému proudu uvažované triody.

Taková ekvivalentní dioda má anodu v tom místě, v němž má trioda mřížku, a napětí, tzv. řídící, na anodě ekvivalentní diody je, jak se dá ukázat

$$U_r = U_g + D U_a,$$

kde průnik D udává, do jaké míry se anodové napětí uplatňuje v napětí řídícím.¹⁾

$$D = \frac{C_{ak}}{C_{gk}},$$

¹⁾ Uvažujeme-li elektrostaticky (bez prostoroového náboje) je průnik D dán vztahem

Tato úvaha platí jen pro oblast prostorového náboje, v níž elektronky téměř výhradně pracují. Neplatí pro oblast náběhu a oblast nasycení.

Čím více proniká anodové napětí mřížkou, čili čím je větší průnik D , tím méně ovládá mřížkové napětí anodový proud čili tím je menší zesilovací činitel μ , je to ostatně zřejmé ze vztahu

$$\mu = \frac{1}{D}$$

Anodový proud náhradní diody je (při stálé teplotě katody) funkcí jen jejího anodového napětí, tedy řídicího napětí U_r . Protože anodový proud triody je stejný, je rovněž funkcí jen řídicího napětí, tedy

$$I_a = f(U_g + DU_a) = f\left(U_g + \frac{1}{\mu} U_a\right)$$

2. Vliv střídavého napětí na mřížce triody na anodový proud

Z definice strmosti (1) plyne

$$\Delta I_a = S \Delta U_g \quad (4)$$

při konstantním U_a .

To znamená, že změně mřížkového napětí ΔU_g odpovídá změna anodového proudu $\Delta I_a = S \Delta U_g$, je-li U_a konstantní (obr. 3a).

Mřížkové napětí můžeme periodicky měnit střídavým napětím (signálem) zavedeným na mřížku zároveň se stejnosměrným předpětím. Pak se bude v témž rytmu měnit anodový proud, tj. objeví se v něm analogická střídavá složka. Anodový proud se mění při změnách mřížkového napětí téměř okamžitě, poněvadž doba letu elektronů od katody k anodě je velmi krátká. Teprve při velmi vysokých kmitočtech, kdy doba letu elektronů je řádově srovnatelná s periodou signálu, jsou

kde C_{ak} je kapacita mezi anodou a katodou, C_{gk} je kapacita mezi mřížkou a katodou. Je-li totiž na mřížce napětí U_g a na anodě napětí U_a , je celkový náboj indukovaný na katodě

$$Q = C_{gk}U_g + C_{ak}U_a = C_{gk}\left(U_g + \frac{C_{ak}}{C_{gk}} U_a\right)$$

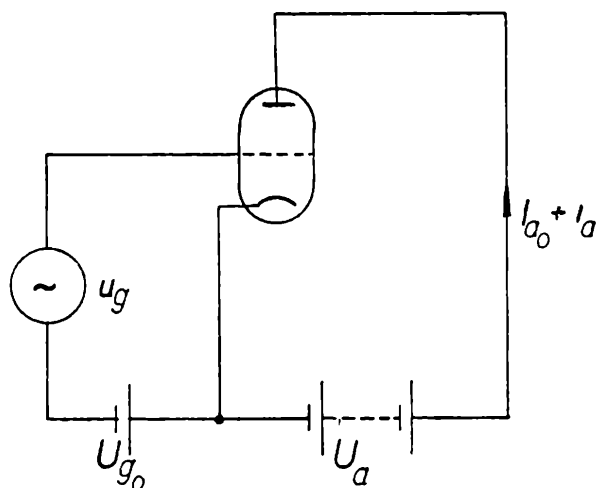
Týž náboj je na katodě diody, jejíž anoda má proti katodě kapacitu C_{gk} (tedy stejnou jako mřížka triody) a napětí

$$\left(U_g + \frac{C_{ak}}{C_{gk}} U_a\right).$$

Proud, který v oblasti prostorového náboje emituje katoda, je nyní určen intenzitou elektrického pole na katodě. Ta je však stejná v triodě i v uvažované ekvivalentní diodě, poněvadž jsou stejné náboje indukované na katodách.

změny anodového proudu znatelně opožděny za změnami mřížkového napětí.

V dalším budeme stejnosměrné proudy a napětí značit indexem o , tedy např. I_{ao} , U_{ao} , U_{go} , abychom je odlišili od střídavých proudů a napětí, kde malá písmena (i_a , u_a , u_g) značí okamžité hodnoty, velká písmena (I_a , U_a , U_g) hodnoty efektivní a I_{am} , U_{am} , U_{gm} amplitudy střídavého proudu nebo napětí.



Obr. 5. Trioda se střídavým signálem v mřížkovém obvodu

Uvažujme zapojení podle obrázku 5. Mřížkové předpětí U_{g0} zvolíme tak, aby pracovní (křidlový) bod $[U_{g0}, I_{ao}]$ padl do střední téměř přímkové části převodní charakteristiky (obr. 6). Potom střídavému napětí $u_g = U_{gm} \sin \omega t$ odpovídá (pracujeme-li v přímé části charakteristiky) střídavý anodový proud $i_a = I_{am} \sin \omega t$, který se překládá přes stejnosměrný proud I_{ao} .

Vztah (4) potom platí pro

hodnoty okamžité	$i_a = S u_g$,
hodnoty efektivní	$I_a = S U_g$,
amplitudy	$I_{am} = S U_{gm}$.

Všimněme si dále, střídavý proud i_a a střídavé napětí u_g mají stejnou fázi.

3. Anodová ztráta

Uvedený případ (obr. 5), kdy v anodovém obvodu není žádná zatěžovací impedance, nemá praktický význam. Střídavé napětí v mřížkovém obvodu vyvolá sice střídavý proud v anodovém obvodu, ale celý výkon anodového zdroje ohřívá anodu; tento výkon nazveme anodovou ztrátou a má velikost $P_a = U_{ao} I_{ao}$. Anodový proud se totiž s časem mění podle vztahu $I_{ao} + I_{am} \sin \omega t$, ale jeho průměrná hodnota je I_{ao} . Je to zřejmé z obr. 6. Každé hodnotě $I_{ao} + i_a$ kladné půlvlny odpovídá hodnota $I_{ao} - i_a$ záporné půlvlny, takže aritmetický průměr je I_{ao} . Anodová ztráta je proto stejná ať je anodový proud se střídavou složkou nebo bez ní.

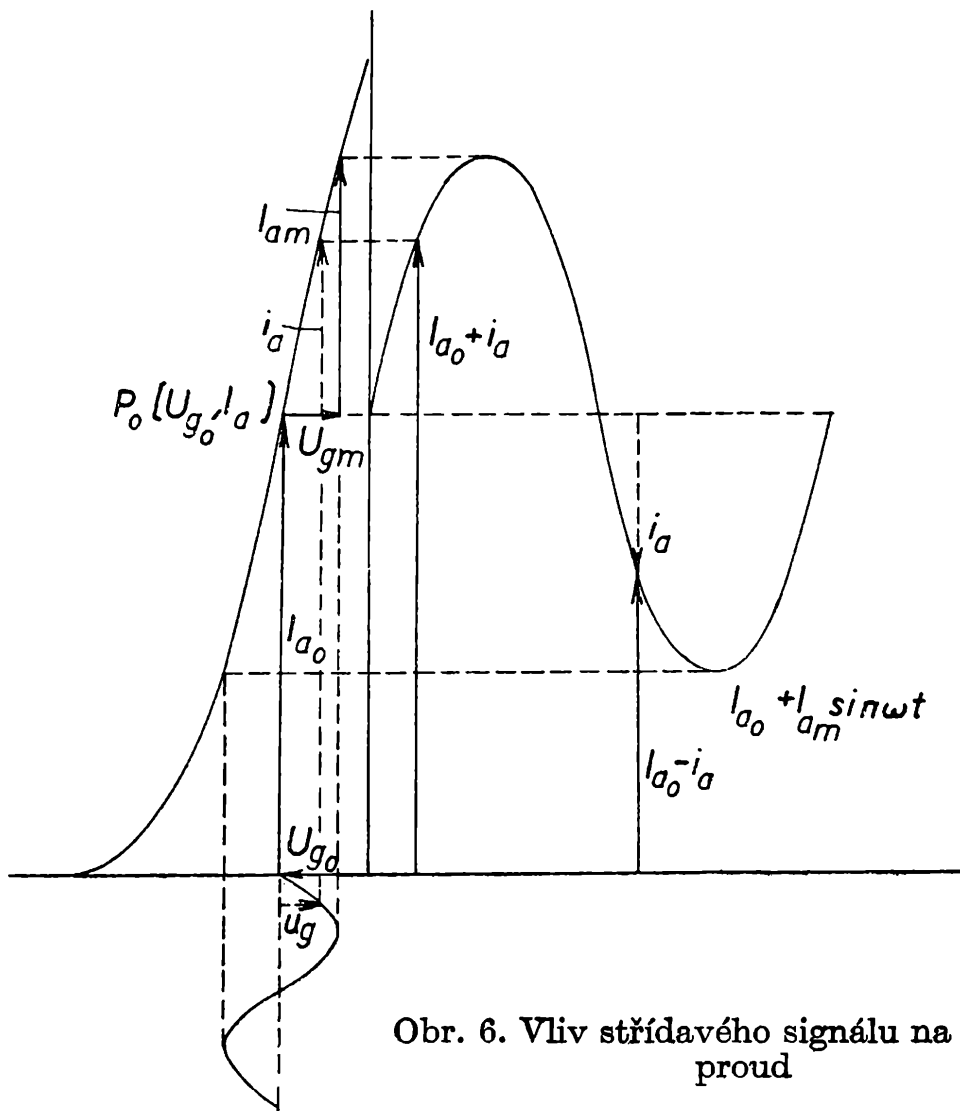
Grafickým znázorněním rovnice $P_a = U_{ao} I_{ao}$ je rovnoosá hyperbola (hyperbola anodové ztráty). Maximální přípustná anodová ztráta je udána v katalozích elektronek a při návrhu zesilovače nesmí být pře-

kročena. Na obr. 2 křivka h je hyperbolou maximální přípustné anodové ztráty.

4. Elektronkové zesilovače

Poučka o ekvivalentním obvodu triody

Zesilovač je zařízení, které zvětšuje napětí, proud nebo výkon tak, že vstupní hodnoty ovládají elektrický výkon dodávaný z místního



Obr. 6. Vliv střídavého signálu na anodový proud

zdroje výstupnímu obvodu. Nejčastěji přivádíme na vstup (mřížkový obvod) budící napětí u_g (signál), z anodového obvodu (výstupu) získáme buď zesílené napětí (zesilovač napětí), nebo značně silný proud (zesilovač proudu) anebo značný výkon (zesilovač výkonu).

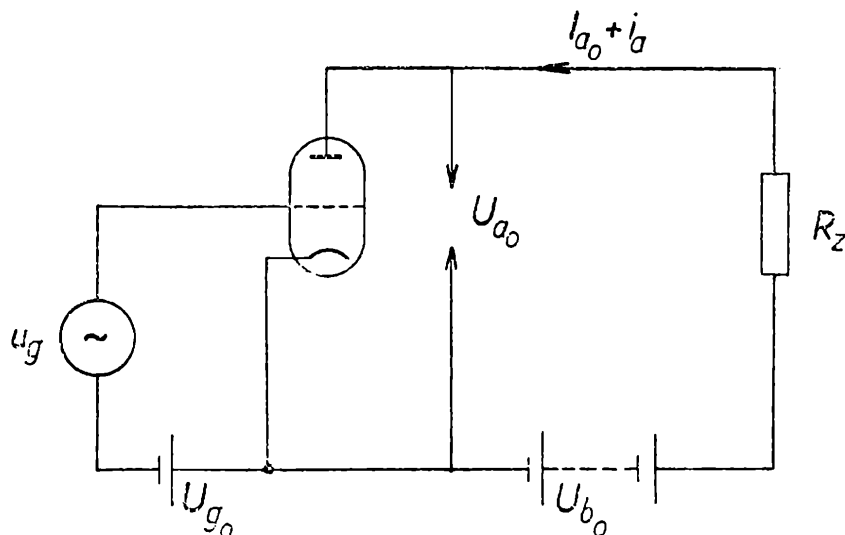
Proto musíme do anodového obvodu zapojit nějakou zatěžovací impedanci, kterou v nejjednodušším případě bude zatěžovací odpor R_z . Schéma takového zesilovače je na obr. 7.

Je-li v mřížkovém obvodu jen konstantní mřížkové předpětí U_{go} , je také anodový proud konstantní I_{ao} . Napájecí napětí U_{bo} se zčásti

spotřebuje na zatěžovacím odporu R_z a zbytek, napětí mezi anodou a katodou, je anodové napětí U_{ao} čili

$$U_{bo} = R_z I_{ao} + U_{ao}.$$

Střídavé mřížkové napětí u_g vyvolá střídavý anodový proud i_a , který bude ale menší než kdyby byl anodový obvod bez odporu R_z .



Obr. 7. Schéma triodového zesilovače

Zvětší-li se totiž anodový proud I_{ao} o střídavou složku i_a , zvětší se napětí na odporu R_z o $u_z = R_z i_a$ a o tutéž hodnotu musí klesnout anodové napětí U_{ao} , neboť U_{bo} je konstantní.

Protože anodový proud je řízen jak mřížkovým tak anodovým napětím, bude účinek mřížkového napětí u_g snížen o $Du_a = DR_z i_a$ (zpětné působení anody na mřížku).

Je tedy

$$i_a = S(u_g - Du_a) = Su_g - SDR_z i_a.$$

Vypočítáme-li z této rovnice i_a , dostaneme

$$i_a = \frac{u_g}{1 + SDR_z} = \frac{u_g}{DR_i(1 + SDR_z)} = \frac{u_g}{D} \cdot \frac{1}{R_i + R_z}$$

čili

$$i_a = \frac{\mu u_g}{R_i + R_z} \quad (5)$$

Při úpravě bylo použito Barkhausenova vzorce.

Dále je

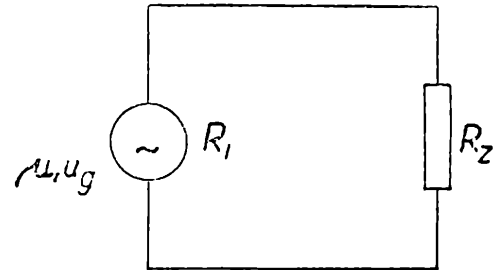
$$-u_a = u_z = R_z i_a = \mu u_g \frac{R_z}{R_i + R_z} \quad (6)$$

Ze vztahu (5) plyne důležitá poučka o ekvivalentním obvodu triody (Barkhausenova věta): Triodu, na jejíž mřížku je vloženo střídavé napětí u_g , je možno, pokud uvažujeme jen střídavý proud v anodovém

obvodu, nahradit generátorem střídavého proudu o elektromotorickém napětí μu_g a vnitřním odporem R_i (obr. 8).

Věta ovšem platí jen pro malé amplitudy napětí u_g , pokud totiž výsledné napětí mřížky (stejnoseměrné s přeloženou střídavou složkou) se stále pohybuje v tak malém intervalu kolem klidového bodu, že parametry μ , R_i lze považovat za stálé, tj. v němž lze charakteristiku považovat za přímkovou. Obvykle to bývá splněno pro efektivní hodnoty mřížkového střídavého napětí řádu nejvýše 10^{-1} V.

Jak je z předešlého patrné, slouží stejnosměrné klidové veličiny U_{go} , U_{ao} , I_{ao} , U_{bo} při návrhu zesilovače jen k nastavení vhodných pracovních podmínek, dále nás zajímají jen střídavé proudy a napětí, o nichž právě jedná věta Barkhausenova.



Obr. 8. Ekvivalentní obvod triody

Rovnici (5) můžeme dále upravit

$$i_a = \frac{\mu u_g}{R_i + R_z} = S \frac{R_i}{R_i + R_z} u_g = S' u_g,$$

kde

$$S' = S \frac{R_i}{R_i + R_z} = \frac{\mu}{R_i + R_z}$$

je tzv. dynamická strmost (strmost tzv. dynamické charakteristiky), kdežto statická převodní charakteristika má strmost

$$S = \frac{\mu}{R_i}.$$

U triody se zesilovací činitel μ velmi málo mění, vnitřní odpor R_i je ale značně závislý na pracovním bodě, je proto i strmost S stálá jen v malém pracovním rozsahu. Zvolíme-li ale $R_z \gg R_i$, je dynamická strmost S' konstantní ve větším rozsahu než strmost S .

V tomto větším rozsahu je pak dynamická charakteristika přibližně přímková. Poněvadž křivostí dynamické charakteristiky je způsobeno zkreslení (výstupní střídavé napětí není věrným obrazem napětí budícího), mohou triodové zesilovače pracovat s malým zkreslením.

5. Zatěžovací a dynamická charakteristika

Poučka o ekvivalentním obvodu nám umožňuje výpočet zesilovače na základě parametrů triody platných pro klidový bod určený hodnotami U_{ao} , I_{ao} , U_{go} . Poučka, jak bylo uvedeno, platí přesně jen v blízkém

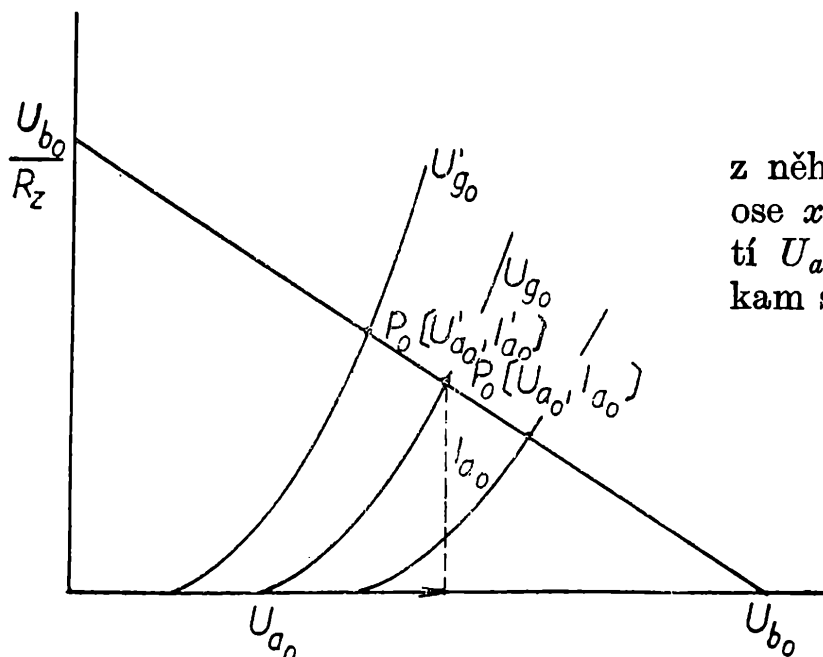
okolí klidového bodu. činnost zesilovače při větším pracovním rozsahu, tj. pro větší amplitudy mřížkového napětí, zjišťujeme nejsnáze graficky pomocí zatěžovací a dynamické charakteristiky.

Předpokládejme, že zatěžovací impedancí je opět odpor R_z . Přivádíme-li na mřížku jen mřížkové předpětí U_{g0} a je-li anodové napětí U_{a0} , platí pro anodový obvod, jak již bylo dříve uvedeno

$$U_{b0} = U_{a0} + R_z I_{a0} . \quad (7)$$

Považujeme-li U_{a0} , I_{a0} za proměnné, je lineární rovnice (7) rovnicí zatěžovací přímky. Dělením U_{b0} získáme úsekový tvar

$$\frac{U_{a0}}{U_{b0}} + \frac{I_{a0}}{\frac{U_{b0}}{R_z}} = 1$$

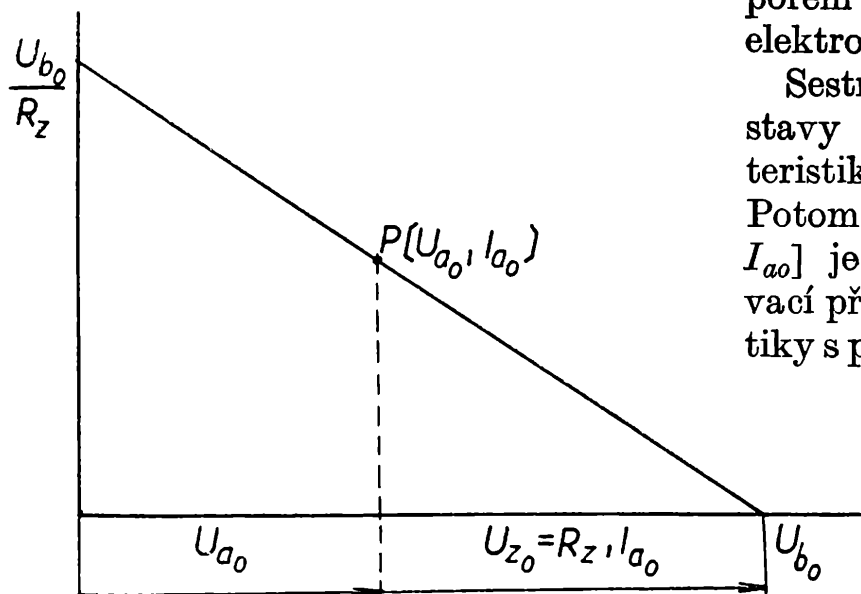


z něhož je zřejmé, že úsek na ose x , na níž nanášíme napětí U_{a0} , je U_{b0} , úsek na ose y , kam se nanáší I_{a0} , je

$$\frac{U_{b0}}{R_z}$$

Obr. 9. Zatěžovací přímka

Poloha zatěžovací přímky (obr. 9) je tedy určena napětím U_{b0} a odporem R_z , nezávisí proto na elektronce.



Sestrojíme nyní do soustavy anodových charakteristik zatěžovací přímku. Potom klidový bod $P_0 [U_{a0}, I_{a0}]$ je průsečíkem zatěžovací přímky a charakteristiky s parametrem U_{g0} (obr. 10). Změníme-li mřížkové předpětí na U'_{g0} , posune se bod P_0 po zatěžovací přímce do bodu P'_0 , jehož souřadnice opět určují U'_{a0} , I'_{a0} .

Obr. 10. Změnou mřížkového předpětí se posune bod P_0 do P'_0 po zatěžovací přímce

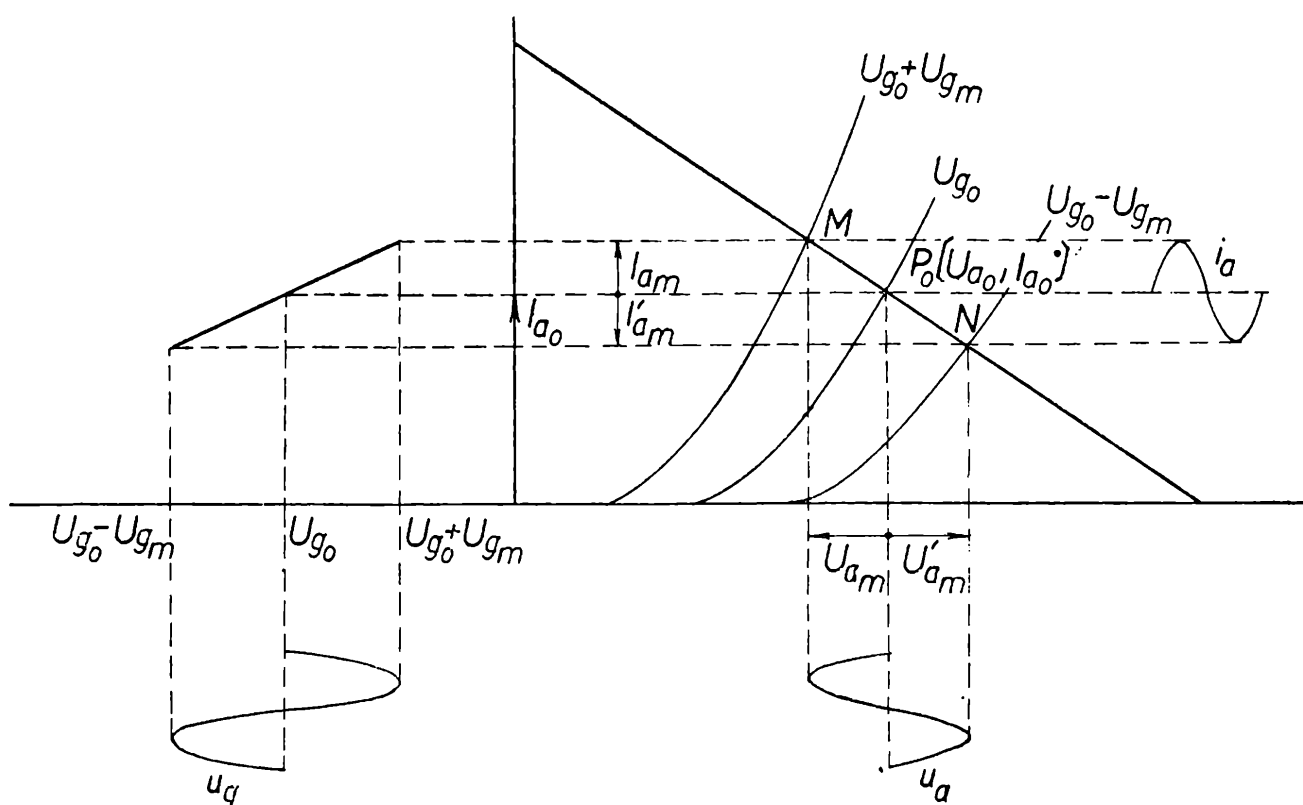
Privádíme-li nyní na mřížku triody (obr. 11) vedle mřížkového předpětí U_{g0} ještě střídavé napětí $u_g = U_{gm} \sin \omega t$, čili je-li celkové napětí na mřížce

$$u_{gc} = U_{g0} + U_{gm} \sin \omega t$$

pohybuje se bod P_0 kmitavým pohybem po úsečce MN , jeho pohyb ale nemusí být harmonický (může nastat zkreslení).

Přes klidové anodové napětí U_{a0} se překládá střídavé napětí u_a a přes klidový anodový proud I_{a0} se překládá střídavý proud i_a .

Ale ani kmitání anodového napětí u_a ani kmitání anodového proudu i_a nemusí být harmonické.



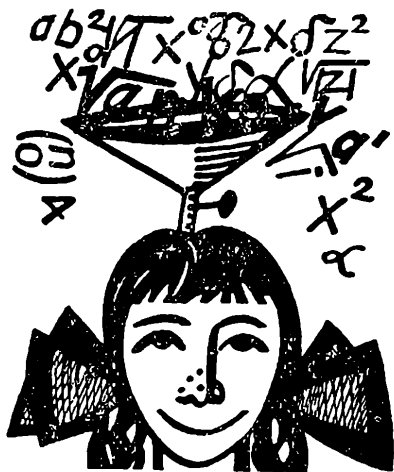
Obr. 11. Zatěžovací přímka a dynamická charakteristika

Všimněme si ještě, že u_g a i_a mají stejnou fázi, u_a má ale fázi opačnou.

O tom zda zkreslení nastane nás poučí dynamická charakteristika, kterou získáme tak, že zatěžovací charakteristiku přeneseme do soustavy převodních charakteristik, a to tak, že celkový anodový proud $i_{ac} = I_{a0} + i_a$, který odpovídá průsečíkům různých anodových charakteristik se zatěžovací přímkou, se vynese k příslušným hodnotám mřížkového napětí (obr. 11).

Bude-li dynamická charakteristika přímková, zkreslení nenastane, u_a , i_a budou harmonické.

(Pokračování)



NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh z minulého ročníku

Matematika

1. Nad stranami trojúhelníka ABC jsou sestrojeny vně čtverce, jejichž plošné obsahy mají daný součet P_1 . Nad stranami trojúhelníka, jehož vrcholy S_1, S_2, S_3 jsou středy těchto čtverců, jsou sestrojeny další tři čtverce, jejichž plošné obsahy mají daný součet $P_2 > P_1$. Určete plošný obsah P trojúhelníka ABC .

(Došlo 43 řešení)

Josef Brejcha

Řešil Karol Šafařík, 9. tř. ZDŠ, Bratislava:

Nech $BC = a, CA = b, AB = c, S_1$ střed štvorca o strane BC, S_2 střed štvorca o strane CA, S_3 střed štvorca o strane AB . Potom

$$P_1 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$P_2 = (S_1S_2)^2 + (S_2S_3)^2 + (S_3S_1)^2.$$

Pretože S_1C a S_2C sú uhlopriečky štvorcov o stranach a, b , je

$$S_1C = \frac{a}{\sqrt{2}}, S_2C = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Ďalej platí pre vnútorný uhol $\sphericalangle S_1CS_2$ trojuholníka S_1CS_2

$$\begin{aligned} \sphericalangle S_1CS_2 &= \sphericalangle S_1CB + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACS_2 = \\ &= 45^\circ + \sphericalangle BCA + 45^\circ = \\ &= R + \sphericalangle BCA, \end{aligned}$$

$\sphericalangle BCA$ vnútorný uhol trojuholníka ABC .

Nech $\sphericalangle BCA = \gamma, \sphericalangle CAB = \alpha, \sphericalangle ABC = \beta$; budiž ďalej

I. $0 < \gamma < R, 0 < \alpha < R, 0 < \beta < R$.

Podľa kosinovej vety platí

$$\begin{aligned}(S_1 S_2)^2 &= (S_1 C)^2 + (S_2 C)^2 - 2 \cdot S_1 C \cdot S_2 C \cdot \cos \sphericalangle S_1 C S_2 = \\&= \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} \cos (R + \gamma) = \\&= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab \sin \gamma = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2P\end{aligned}\quad (1)$$

vzhľadom k relácii $2P = ab \sin \gamma$.

Obdobne platí

$$(S_2 S_3)^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + 2P, \quad (2)$$

$$(S_3 S_1)^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 2P \quad (3)$$

Sčítaním rovností (1), (2), (3) a po snadnej úprave vychádza

$$\begin{aligned}P_2 &= P_1 + 6P, \\P &= \frac{P_2 - P_1}{6}\end{aligned}\quad (4)$$

II. $\gamma = R$, $0 < \alpha < R$, $0 < \beta < R$.

Pak je

$$\sphericalangle S_1 C S_2 = 2R, \quad (S_1 S_2)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + ab = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + 2P;$$

relácia (1) platí preto i pre trojuholník pravouhlý.

III. $R < \gamma < 2R$, $0 < \alpha < R$, $0 < \beta < R$.

Pak pre vnútorný uhol $\sphericalangle S_1 C S_2$ trojuholníka $S_1 C S_2$ platí

$$\begin{aligned}\sphericalangle S_1 C S_2 &= 4R - (R + \gamma) = 3R - \gamma, \\ \cos \sphericalangle S_1 C S_2 &= \cos (3R - \gamma) = -\sin \gamma\end{aligned}$$

Vzťah (1) platí teda i pre tento prípad; relácia

$$P = \frac{P_2 - P_1}{6}$$

platí preto pre ľubovoľný trojuholník.

Konstruktivní geometrie

1. Jsou dány různoběžné roviny α , β , v rovině α bod A neležící na průsečnici obou rovin. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, jehož strana má danou délku a tak, aby strana AB ležela v rovině α

a strana CD v rovině β . Prostorové řešení provedte obecně, graficky rozřešte pro případ, že $\alpha = \pi$, $\beta = \nu$, $A(0; 6; 0)$, $a = 4$, 5 .

(Došlo 26 řešení)

Stanislav Horák

Riešil Juraj Černák, 3.a SVŠ Turčianske Teplice:

R o z b o r. Nech p je priesečnica rovín α , β a nech šesťuholník $ABCDEF$ leží v rovine ρ . Rovina ρ pretína roviny α , β porade v priesečniciach AB , CD . Priamky p , AB , CD prechádzajú bodom K . Je samozrejmé, že trojuholníky ADK , BCK sú rovnostranné a dĺžky strán týchto trojuholníkov sú porade $2a$, a . Z toho vyplýva, že $AK = DK = AD = 2a$.

K o n š t r u k c i a. a) Na priamke p nájdeme bod K ($AK = 2a$).

b) V rovine β nájdeme bod D ($AD = KD = 2a$).

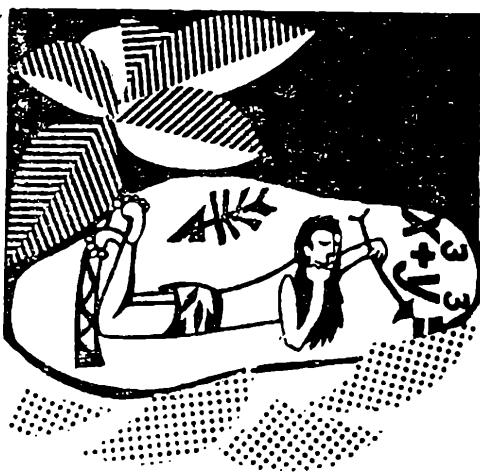
c) Stred úsečky AK je vrchol B a stred úsečky DK je vrchol C .

d) V rovine $\rho = AKD$ zostrojíme hľadaný šesťuholník.

D ô k a z. Správnosť konštrukcie vyplýva z rozboru.

D i s k u s i a. Úloha môže mať maximálne štyri rôzne riešenia, lebo obecné dostaneme dva rôzne body K a dva rôzne body D . Tento počet sa môže zredukovať na tri, dva, jedno riešenie, ale môže nastať aj prípad, že nejestvuje žiadne riešenie.

(Pokračování)



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

Hvězdičkou označené příklady jsou určeny pro naše nejmladší čtenáře.

1. Při svatební hostině se setkaly dvě rodiny, a to Nicnepovímové a Tichošlápkové. Nicnepovímové byli známi tím, že na nic neodpovídali pravdivě. Tichošlápkové mluvili vždy pravdu. Pan vrchní z restaurace, kde se hostina konala, o těchto poměrech byl informován, ale nikoho z nich neznal. Když za ním tři svatebčané přišli, již čekal určité potíže, ale jako člověk znající dobře povahy lidí, hned zahájil útok:

„Jsem Vám k dispozici, přítomní Nicnepovímové. Čím Vám mohu posloužit?“

„Jak jste to poznal, že jsme zde jenom Nicnepovímové,“ táže se první z nich.

Druhý se ohražuje: „Vždyť jsou zde jenom dva.“

Třetí rozhořčeně: „To není pravda.“

Panu vrchnímu bylo již vše jasné. Znáte také první tři svatebčany?

Stanislav Horák ml.

2. Na závěr letního prázdninového tábora byla uspořádána sportovní soutěž ve vrhu koulí. Určete pořadí a výkony prvních pěti závodníků, Milana, Petra, Jardy, Standy a Zdeňka, víte-li, že

a) Milan hodil dál než Zdeněk, ale nikoliv tak daleko jako Standa.

b) Dva koulaři měli stejné výkony.

c) Jardovi skončila koule na značce 855 cm, což bylo méně než Zdeňkův hod.

d) Milanův vrh byl o 263 cm delší než Jardův.

e) Vrh Petrův byl sice o 43 cm kratší než Standův, ale o 169 cm delší než Zdeňkův.

Stanislav Horák ml.

3.* V kapse mám deset mincí, jsou to pětihaléře, desetihaléře a pětadvacetihaléře. Víím, že mám 3 pětihaléře, nejméně 3 desetihaléře a nejméně 3 pětadvacetihaléře. V jakých mezích se pohybuje moje kapesní hotovost?

Stanislav Horák ml.

4.* Určete všechna přirozená čísla q , pro která je splněna nerovnost

$$486 < q \leq 501$$

a kromě toho platí právě jedna z následujících podmínek:

a) čísla q jsou sudá;

b) čísla q jsou dělitelná třemi;

c) čísla q jsou dělitelná dvěma nebo třemi;

d) čísla q nejsou dělitelná třemi, ale jsou dělitelná čtyřmi;

e) čísla q nejsou dělitelná ani třemi ani čtyřmi;

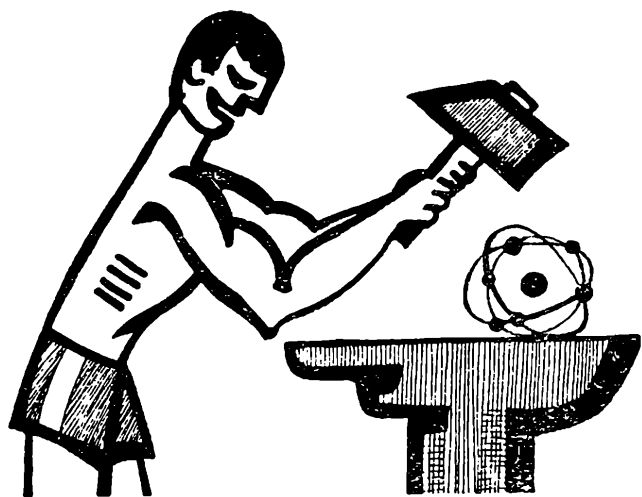
f) čísla q jsou dělitelná třemi, ale nejsou dělitelná šesti;

g) čísla q jsou dělitelná osmi nebo devíti;

h) čísla q jsou dělitelná jak třemi tak čtyřmi;

i) čísla q jsou dělitelná jedenácti.

Stanislav Horák ml.



FYZIKÁLNÍ ZAJÍMAVOSTI

Záhadné fontány

MILAN BEDNAŘÍK, Olomouc:

Každý již jistě viděl tzv. *Heronovu baňku* (obr. 1), jejíž činnost je založena na rozdílu tlaků uvnitř a vně baňky. Působí-li na hladinu uvnitř baňky větší tlak než je vnější tlak atmosferický, kapalina vystupuje trubicí a vytryskuje jejím zúženým koncem. Toho lze např. dosáhnout tím, že předem vženeme trubicí vzduch do baňky nebo postavíme celou baňku pod recipient vývěvy, z něhož vzduch odčerpáváme.

Tento primitivní přístroj, krátkodobě fungující jako vodotrysk, není však vynálezem muže, po němž je pojmenován¹⁾. Heronovým dílem je jiné, poněkud složitější, ale dnes již méně známé zařízení. *Heronova fontána*, zvaná též *Heronovo zřídlo*, se skládá ze tří nádob: dvou vzduchotěsně uzavřených koulí *A*, *B* a otevřené nádoby *C*; nádoby jsou propojeny trubicemi 1, 2, 3, jak je patrné z obr. 2.

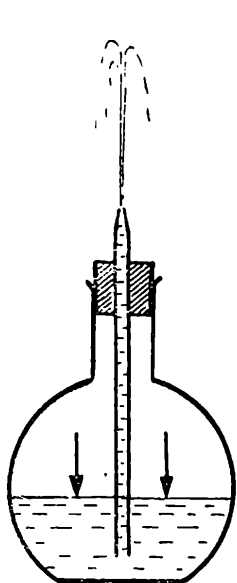
Zajímavá je funkce Heronovy fontány. Voda stéká z horní otevřené nádoby *C* trubicí 1 do nádoby *A*, z níž vytlačuje vzduch trubicí 2 do nádoby *B*. Pod tlakem tohoto vzduchu stoupá voda trubicí 3 a vytryskuje z ní nad nádobu *C*. Je zřejmé, že fontána začne pracovat jen tehdy, je-li dostatečné množství vody jednak v horní nádobě *C*, jednak v kulové nádobě *B*; čím větší množství vody je v této kouli, tím déle bude fontána v činnosti.

¹⁾ *Heron Alexandrijský* žil v době (kolem roku 100 př. n. l.), kdy vrcholila starořecká věda. Byl ředitelem alexandrijské polytechniky, autorem četných pojednání z oboru matematiky a fyziky (v jednom z nich popsal funkci baňky, která po něm má své jméno). Je konstruktérem několika přístrojů (nivelizačního přístroje s mikrometrickým posuvem, hodometru, vodních varhan aj.).

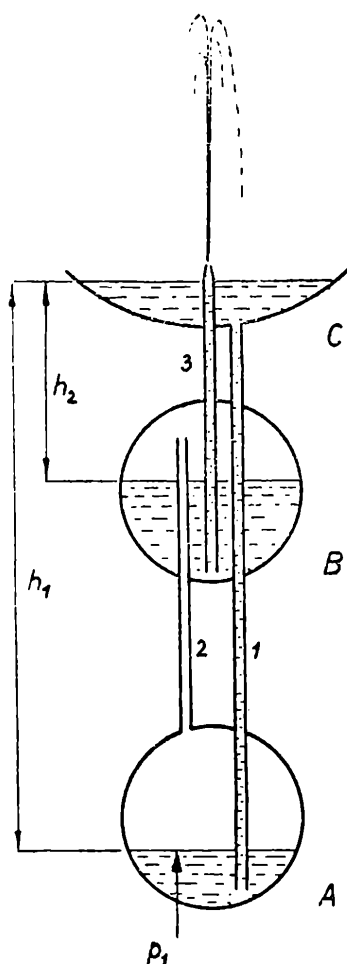
Zjistíme nyní, do jaké výšky voda z této dočasné fontány vytryskuje. Označíme h_1 výškový rozdíl hladin v nádobách A a C , h_2 výškový rozdíl hladin v nádobách B a C . Vodní sloupec o výšce h_1 působí na hladinu v nádobě A tlakem

$$p_1 = \rho g h_1,$$

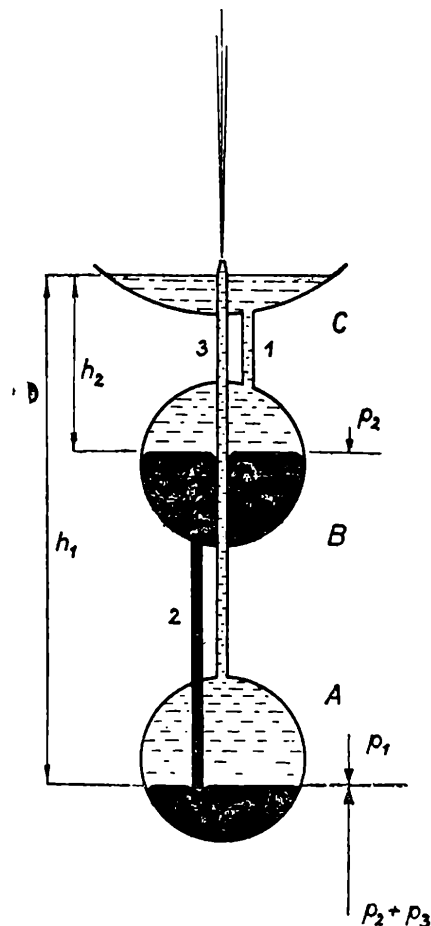
kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení. Se stoupající úrovní hladiny v nádobě A stlačuje se vzduch uzavřený jak v této nádobě, tak i v ná-



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

době B , která je s ní spojena trubicí 2, přičemž tlak vzduchu roste z počáteční hodnoty b (na počátku činnosti fontány je roven tlaku atmosférickému) postupně, až na hodnotu p_1^2). Tímto tlakem je pak voda vháněna z nádoby B do trubice 3 a vzhledem k tomu, že $p_1 =$

²⁾ Změna tlaku z počáteční hodnoty b na konečnou hodnotu p_1 probíhá spojitě přes všechny hodnoty tlaku

$$p = b \frac{V}{V_1},$$

kde V je počáteční objem vzduchu v dané soustavě nádob a V_1 objem vzduchu v ní stlačeného. Předchozí rovnice vyplývá z Boyleova-Mariottova zákona $pV_1 = bV$.

$= \rho g h_1$, by měla vystoupit nad úroveň hladiny v této nádobě do výše h_1 a nad úroveň hladiny horní otevřené nádoby C do výše

$$h = h_1 - h_2 .$$

Z fontány tryská tedy voda pod tlakem

$$p = \rho g (h_1 - h_2)$$

do výšky rovné rozdílu hladin v nádobách A , B . Této výšky však ve skutečnosti vodotrysk nedosahuje; působením odporu vzduchu a vnitřního tření v kapalině je vždy skutečná výška nižší.

Všimněme si ještě, že teoretická výška tryskající vody je dána pouze dočasným rozdílem hladin v obou uzavřených koulích A , B a nezávisí vůbec na poloze horního otevřeného talíře.

A nyní panu Heronovi jeho fontánu poněkud vylepšíme. Představme si, že v obou kulových nádobách nahradíme vodu rtutí a vzduch vodou a upravíme spojovací trubice podle obr. 3. Činnost takto upravené fontány je rovněž zcela jednoduchá: rtuť stéká z nádoby B trubicí 2 do nádoby A a vytlačuje z ní trubicí 3 vodu, která pak vytváří nad nádobou C vodotrysk.

Výšku tryskající vody určíme pak touto úvahou. Vodní sloupec o výšce h_2 působí na hladinu rtuti v nádobě B tlakem

$$p_2 = \rho g h_2 .$$

Tento tlak se přenáší rtutí do nádoby A , kde na rozhraní rtuti a vody k němu přistupuje tlak

$$p_3 = \rho' g (h_1 - h_2) ,$$

kde ρ' je hustota rtuti, $h_1 - h_2$ výška rtuťového sloupce. Proti tlaku $p_2 + p_3$ působí tlak vodního sloupce v trubicí 3

$$p_1 = \rho g h_1 .$$

Přetlak, kterým je voda vytlačována do trubic 3, je pak

$$\Delta p = p_2 + p_3 - p_1 ,$$

po dosazení a úpravě

$$\Delta p = (\rho' - \rho) (h_1 - h_2) g$$

Víme-li, že hustota rtuti je přibližně 13,5krát větší než hustota vody tj. $\rho' \doteq 13,5\rho$, je přetlak

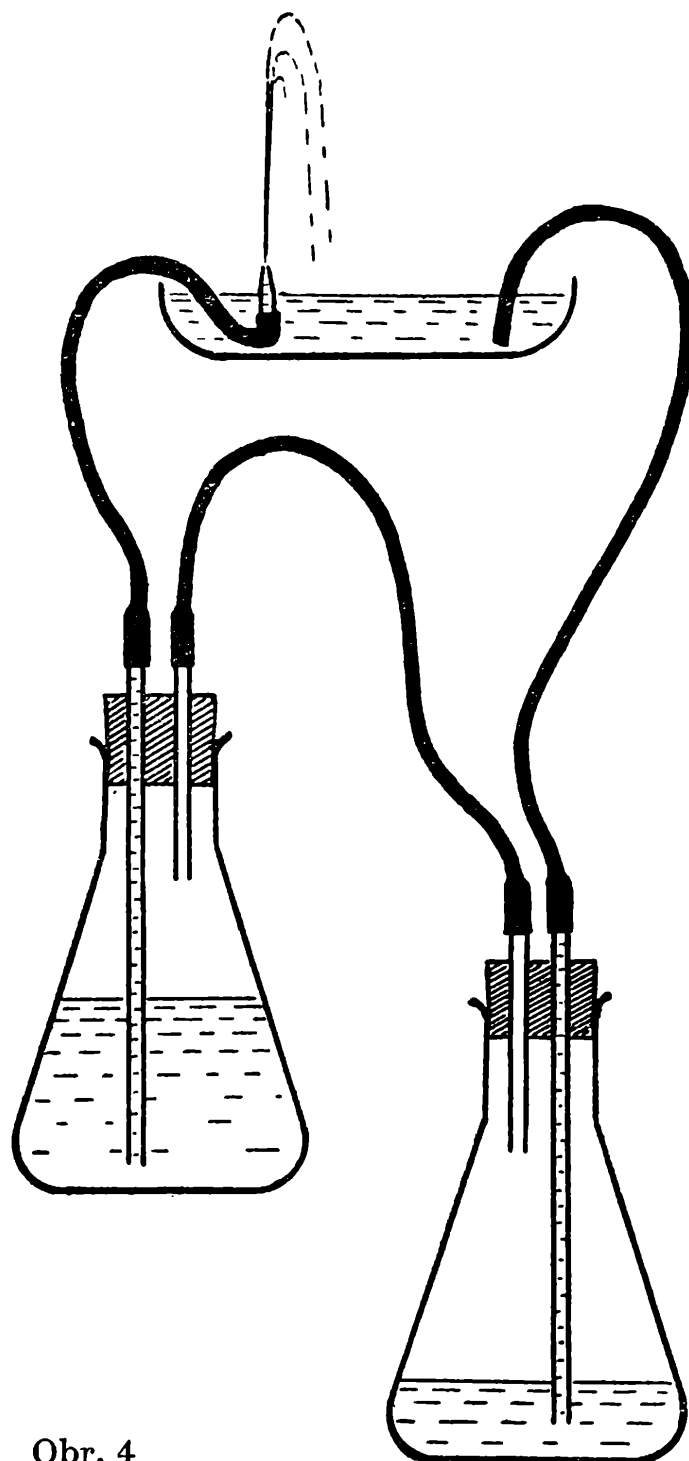
$$\Delta p = 12,5\rho g (h_1 - h_2) .$$

Voda vytryskuje pod tlakem 12,5krát větším než v případě původní Heronovy fontány a teoretická výška dostřiku činí

$$h' = 12,5 (h_1 - h_2) .$$

Opět si všimněme, že i tato výška závisí pouze na rozdílu hladin v nádobách A a B a nikoli na umístění nádoby C .

Uvedené úvahy svědčí o tom, že činnost Heronovy fontány (v její původní i změněné úpravě) není v podstatě žádnou záhadou, nýbrž je přirozeným důsledkem platnosti známých fyzikálních zákonů. Byla vysvětlena existencí hydrostatického tlaku, jehož velikost závisí na hloubce a hustotě kapaliny, ale nezávisí na směru působení (Pascalův



Obr. 4

zákon) a může být zdůvodněna zákonem zachování mechanické energie. Jestliže např. v případě původní Heronovy fontány (obr. 2) má voda o hmotnosti m v nádobě B vzhledem k hladině v nádobě A potenciální energii

$$W_p = mg(h_1 - h_2),$$

pak je pochopitelné, že toto množství vody vystříkané z trubice 3 vykoná práci

$$A = W_p,$$

tzn. že vystoupí teoreticky do výše $h_1 - h_2$ nad její horní konec.

A závěrem poznámka pro čtenáře, kteří by se chtěli o činnosti Heronovy fontány přesvědčit experimentálně. Jednoduché uspořádání pokusu je patrné z obr. 4. Funkci uzavřených koulí plní dvě skleněné baňky (Erlenmeyerovy baňky), funkci spojovacích trubíc gumové hadičky. Horní nádoba s vodotryskem je nahrazena miskou, do níž jsou vhodně uloženy konce hadiček. Výhodou takto sestrojené fontány je, že můžeme měnit vzájemnou polohu baněk a přitom sledovat, jak se mění výška vodotrysku.



R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě

Akademik L. D. Landau zemřel

J. HORSKÝ, M. LENC, Brno

Před krátkým časem svět ztratil jednoho z vedoucích fyziků, profesora teoretické fyziky Lomonosovovy university v Moskvě, Lva Davidoviče Landaua. Landauovy vědecké práce se zabývají vskutku rozličnými oblastmi současné fyziky, Landau byl snad poslední polyhistor fyziky, lze-li to takto říci. Díky výsledkům jeho práce vznikla celá řada nových vědeckých směrů, jeho vědecká škola se stala světově proslulou.

Mnohasvazková učebnice teoretické fyziky (kterou psali společně s E. M. Lifšicem) je významným důkazem jejich neobyčejného nadání,

pedagogického mistrovství, hlavně však důkazem jejich ostře vytríbeného fyzikálního vkusu. Těžko lze nepřipomenout, že tato učebnice byla již přeložena do deseti světových jazyků, že byla odměněna Leninovou cenou.

Smrtí L. D. Landaua ztrácí fyzika jednoho ze svých současných velikánů. Vždyť odešel nejen člen sovětské akademie věd, člen akademie věd dánské a holandské, člen anglické vědecké společnosti, akademie věd a umění USA, nýbrž i nositel Nobelovy ceny za fyziku.

L. D. Landau se narodil 22. ledna 1908 v Baku, v r. 1924 odchází pro fyzikální vzdělání na universitu do Leningradu. Zde se seznámil s pracemi W. Heisenberga a principiálními otázkám kvantové mechaniky byly věnovány i první Landauovy vědecké práce (1926 až 1927).

Za tři roky ukončil universitní studia (samozřejmě bez protekce) a odjíždí „na zkušenou“ do zahraničí. Vedle seznámení se s tak zvuknými jmény jako Pauli, Wigner, Paierls a Ehrenfest bylo pro Landauův další vývoj velmi důležité, že se stal přímým žákem N. Bohra.

V Kodani se tehdy scházeli u profesora Bohra ti nej přednější teoretici fyzikové. V diskusi na seminářích se rodily základní problémy moderní teoretické fyziky, kvantové mechaniky především. A Landau na těchto seminářích nebyl pouhým posluchačem...

Když L. Rosenfeld vzpomíná na počátky kvantové elektrodynamiky, píše: „Přijel jsem do Ústavu (v Kodani — pozn. autorů) posledního únorového dne roku 1931 na roční pobyt a první koho jsem potkal byl Gamov. Zeptal jsem se ho na novinky a on mi odpověděl svým způsobem — ukázal mi obrázek, který právě nakreslil. Na obrázku byl Landau s roubíkem v ústech a pevně přivázaný k židli. Nad ním stojící Bohr se zdviženým ukazovákem říká: Bitte, bitte, Landau, muss ich (= darf ich) nur ein Wort sagen.“

Landauův návrat do vlasti je rovněž počátkem jeho vědecké a pedagogické kariéry. V r. 1934 je jmenován doktorem fyzikálně matematických věd a o rok později se stává profesorem fyziky university v Charkově. Místa, kde Landau pracoval se rychle střídají — Leningrad, Charkov a konečně Moskva.

V těsně předválečných a prvních válečných letech vzniká jeho teorie supratekutého hélia 2 (1941) — jevu o kterém ještě bude řeč. Ve válce pracoval přirozeně na vojenských úkolech, i v těchto těžkých dobách se však věnoval „čisté fyzice“.

Poválečné období zastihuje Landaua opět v plné práci, jsou zde výsledky jeho práce v kvantové elektrodynamice, astrofyzice, fyzice pevných látek, obecné kvantové teorie pole. V r. 1955 se Landau stává profesorem teoretické fyziky Lomonosovovy university v Moskvě, intenzívně se věnuje pedagogické práci, výchově studentů i vědeckých aspirantů. V poslední době se Lev Davidovič Landau vrátil zpět k teorii

elementárních částic — dnes velmi moderní a lze říci, že i vedoucí oblasti zájmu mnoha předních teoretických fyziků.

Nobelovu cenu za fyziku obdržel Landau v r. 1962, v roce tragické automobilové nehody, která ho donutila přerušit práci na velmi dlouhou dobu. I když se podařilo společným úsilím předních světových lékařů a fyziků udržet Landaua při životě, možnost intenzivní vědecké práce mu již bohužel vrátit nemohli. Pro takovou osobnost jakou byl Landau to byla ztráta, s níž se vypořádat bylo téměř nemožné.

Není ani v krátkosti únosné, zmínit se podrobněji o výsledcích Landauovy práce, která je obsažena ve více než stovce vědeckých pojednání. Svědomí nám však nedá pokojně spát, nezmíníme-li se stručně alespoň o jeho teorii supratekutého hélia 2.

Tento jev byl objeven v r. 1937 P. L. Kapicou, který ukázal, že pod $2,18^\circ\text{K}$ přechází tekuté hélium do nové modifikace nazvané héliem 2, která se vyznačuje řadou udivujících vlastností. Nadešel i čas (1941), kdy Landau tento tvrdý oříšek dovedl rozlousknout. Nejen že teoreticky objasnil podivné chování této kapaliny, nýbrž dospěl i k závěrům, které teprve později byly potvrzeny i experimentálně. Zde tedy nacházíme počátky studia fyziky kvantové kapaliny, oblasti v níž později pracovali intenzivně i takoví fyzikové, jako např. R. P. Feynman.

V Landauových pracích (a samozřejmě i v jeho učebnici) se projevuje velmi zřetelně jeho osobitý styl v myšlení. Jeho výroky jsou dosti strohé až autoritativní, postup při řešení úlohy je díky jeho matematické vynalézavosti velmi rychlý.

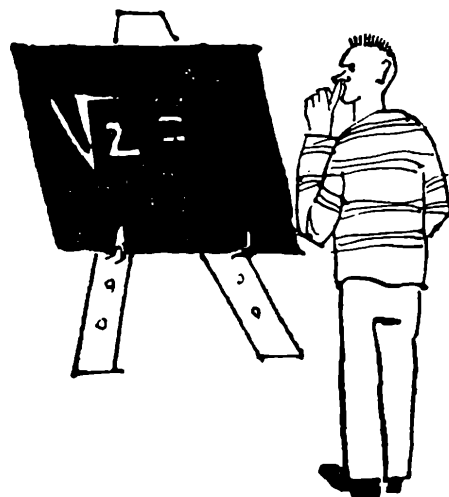
Rovněž Landauovo jednání bylo daleko od průměru. Vypráví se o tom celá řada veselých historek. Landauova přímočarost vyvolávala (jak už často bývá) mnoho konfliktů. Velká kritičnost k práci druhých však neznamenalala povyšování vlastní osoby. V L. Ginzburg píše: „Jeho záliba k systematizaci našla své vyjádření v podstatě žertovné klasifikaci fyziků podle logaritmické stupnice. . . A v této stupnici měl Einstein polovinný řád, Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Dirac a Fermi (a někteří jiní fyzikové) řád první. Sebe umístil Lev Davidovič do dvaapůltého řádu. “

I když můžeme, obecně řečeno, nesouhlasit s malou tolerancí lidí vůči sobě v dnešní době, nemůžeme upřít právo vynikajícímu vědci na soudy a kritiku týkající se té oblasti vědy, kde kapacitou opravdu je. A Lev Davidovič Landau světovým fyzikem byl, o tom nemůže být pochyb.

L i t e r a t u r a

Uspěchi Fizičeskich Nauk, Tom 94, str. 181, 1968.

A. A. Abrikosov: Akademik L. D. Landau, Nauka, Moskva 1965.



MATEMATIKA

Vstupme do množinového ráje

JAROSLAV ŠEDIVÝ, KU, Praha

V posledním čísle minulého ročníku Rozhledů jsme ohlásili invazi moderní matematiky na stránky Rozhledů. V jednotlivých číslech nynějšího ročníku uveřejníme články věnované tématům moderní matematiky. Každý z nich vyloží některou ideu, ukáže její použití k řešení úloh a poskytne čtenáři příležitost k jejímu uplatnění při řešení několika cvičení. Doufáme, že články s touto tematikou budou zajímat jak studenty, tak učitele, kteří jich mohou využít při práci v zájmových kroužcích. Svůj důvtip a vytrvalost mohou mladí čtenáři osvědčit při řešení série Mm úloh z moderní matematiky. Napište nám svůj názor na takto pojatou modernizaci obsahu matematické části Rozhledů.

Redakce

Přibližně před sto lety začínal německý matematik Georg Cantor¹⁾ vytvářet abstraktní teorii o souhrnech libovolných předmětů, kterou dnes nazýváme teorií množin. Cantorova teorie prošla velmi dramatickým vývojem, který podstatně zpřesnil původní představy o množinách. Z období bojů o principy teorie množin pochází dnes již okřídlené rčení „Nikdo nás nedokáže vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor“, jehož autorem byl známý matematik David Hilbert.

Je nesnadné vysvětlit na několika řádcích, proč lze obrazně hovořit o množinovém ráji matematiků. Připomeňme si jen, že rajský pocit prožívá člověk např. tehdy, když pochopí společnou podstatu rozdílných věcí. Takový pocit prožili matematici na konci minulého století v případě teorie množin, jejíž pojmy vystihují nejobecnější rysy ma-

¹⁾ G. Cantor (čti Kantor), profesor university v Halle, žil v letech 1845 až 1918; první práce z teorie množin uveřejnil na počátku sedmdesátých let 19. století.

tematických objektů. „Dnes víme, že v logickém smyslu lze vyvodit téměř celou matematiku z jediného zdroje — z teorie množin,“ píše N. Bourbaki.

V tomto ročníku Rozhledů nabízíme čtenáři malou procházku „rajským sadem“ teorie množin. Především se pokusíme rozšířit představy o situacích, v nichž lze uplatnit základní množinové pojmy. Zahájíme situacemi, při jejichž matematickém zpracování lze použít přehledného grafického znázornění pomocí *Vennových diagramů*.

1. Vennovy diagramy

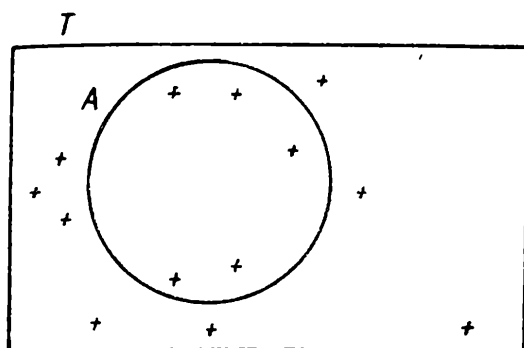
Základní ideje teorie množin lze demonstrovat i v úvahách o objektech známých z denního života. V popularizujících příručkách i v některých učebnicích se uvádějí jako příklady množin skupiny osob, zvířat nebo věcí shromážděných v určitém okamžiku na jednom místě. Pro takové skupiny má jazyk rozmanitá označení — zástup, osazenstvo, dav, roj, hejno, stádo, kolekce, hromada, souprava atd. V tomto článku budeme pracovat jen s touto prostou představou množin, až v některém z dalších čísel časopisu pojednáme o paradoxech, ke kterým může vést taková naivní představa o množinách.

Budeme vždy předpokládat, že je dána určitá základní množina všech uvažovaných jedinců, věcí atd., která tvoří rámec úvah. Zvolme si každý za základní množinu tu třídu žákyň a žáků, kterou dobře známe. Udáme-li některé vlastnosti, např. „být děvčetem“, „nosit brýle“, „být modrooký“, „mít dvojku z matematiky (na posledním vysvědčení)“, můžeme předpokládat, že o každém příslušníku zvolené třídy dovedeme rozhodnout, zda má uvedené vlastnosti či nemá. Vyjmenujeme-li ty příslušníky zvolené třídy, kteří mají jednotlivé vlastnosti, vytvoříme skupiny lidí, které lze považovat za množiny — podmnožiny základní množiny. Umluvme se na symbolickém označení těchto množin písmeny:

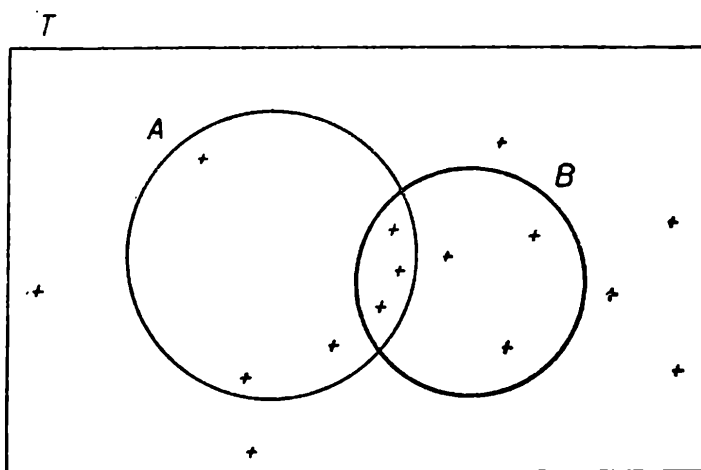
T	množina všech uvažovaných osob (třída),
A	množina všech děvčat ze třídy T ,
B	množina všech obrýlených příslušníků třídy T ,
C	množina všech modrookých příslušníků třídy T ,
D	množina všech žáků a žákyň třídy T majících dvojku z matematiky.

Některé jednoduché úvahy o těchto množinách můžeme výhodně znázornit způsobem, jehož autorem je *John Venn*, profesor logiky na universitě v Cambridge. Představme si, že shromáždíme třídu na školním hřišti pravoúhelníkového tvaru, na jehož povrch budeme kreslit kružnice. Chceme-li uvažovat o jedné množině, např. o množině A , nakreslíme jednu kružnici a vyzveme děvčata ze třídy, aby si stoupla

dovnitř kruhu omezeného kružnicí. Na obr. 1 vidíme diagram této situace — uvnitř obdélníka je zakreslena kružnice, k níž je připsán symbol množiny A . Křížky zakreslené uvnitř kruhu představují prvky množiny A , křížky zakreslené vně kruhu představují ty prvky množiny T , které nejsou prvky množiny A . **P o d s t a t a V e n n o v ý c h**



Obr. 1

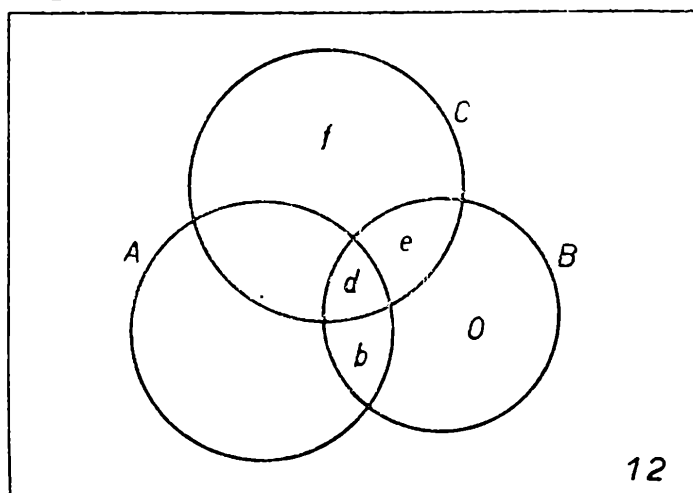


Obr. 2

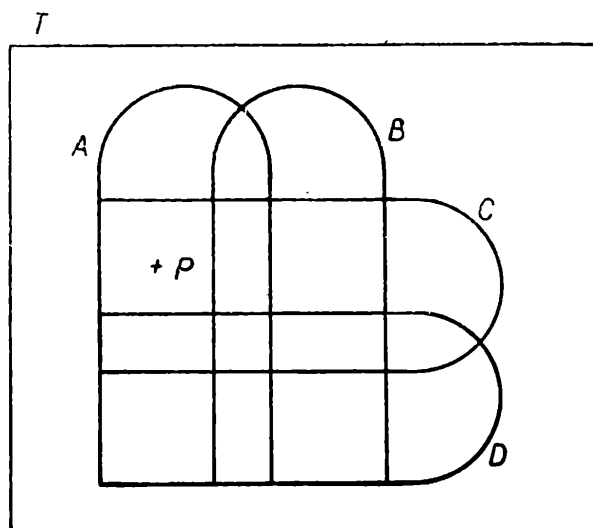
diagramů je v tom, že modelují vztah „předmět (osoba) je prvkem množiny“ názorným geometrickým vztahem „symbol předmětu (osoby) leží uvnitř kruhu znázorňujícího množinu“.

Chceme-li uvažovat o dvou množinách A , B , nakreslíme na hřišti dvě kružnice tak, aby se protínaly (obr. 2). Všichni obrýlení příslušníci třídy si stoupnou dovnitř kruhu B , děvčata však musí stát také uvnitř kruhu A , proto dojde k tomu, že obrýlená děvčata stojí v průniku obou kruhů. Děvčata, která nenosí brýle, stojí uvnitř kruhu A a vně kruhu B ; obrýlení chlapci stojí vně kruhu A a uvnitř kruhu B ; chlapci, kteří nenosí brýle, stojí vně obou kruhů. Na obr. 2 je tato situace schematicky zachycena Vennovým diagramem pro dvě množiny.

Na obr. 3 vidí čtenář obvyklý tvar Vennova diagramu pro tři množiny, tzv. trojlístek, na obr. 4 je nakreslen Vennův diagram pro čtyři množiny A , B , C , D . Ve vyšrafovaném políčku diagramu na obr. 3 bychom zakreslili symboly těch příslušníků uvažované třídy, kteří nejsou děvčaty (nejsou prvky množiny A), nosí však brýle (jsou prvky množiny B) a jsou modroocí (jsou prvky množiny C). Čtenář jistě již dokáže samostatně charakterizovat pomocí uvažovaných vlastností skupinky příslušníků třídy, kteří by „obsadili“ jednotlivá políčka diagramu. Křížek se symbolem Y znázorňuje žáka Y , který není děvčetem, není modrooký a nenosí brýle. Zcela obdobně lze charakterizovat pomocí kombinace čtyř vlastností jednotlivé skupiny příslušníků třídy, jejichž symboly bychom zakreslili do některého políčka diagramu na obr. 4. Křížek s písmenem P znázorňuje např. modrooké děvče, které nenosí brýle a nemá dvojku z matematiky.



Obr. 3



Obr. 4

Plocha základního obdélníka je na Vennových diagramech dělena na 2, 4, 8 nebo 16 částí, z nichž každá představuje množinu charakterizovanou jinou kombinací uvažovaných vlastností. Názornost Vennových diagramů spočívá především v tom, že prvky každé množiny jsou soustředěny uvnitř souvislé části roviny; tuto vlastnost však nelze zachovat při znázorňování pěti a více množin. Vennovy diagramy jsou neobyčejně cenným prostředkem pro znázornění množinových úvah, proto jim budeme věnovat pozornost v několika dalších článcích. Nejprve se seznámíme s jejich použitím při řešení úloh o počtech prvků konečných množin.

Součet druhých a třetích mocnin přirozených čísel

FRANTIŠEK JANEČEK, SVVŠ Broumov

Ve středoškolské algebře zpravidla dokazujeme užitím matematické indukce tyto vzorce pro součet druhých a třetích mocnin přirozených čísel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (2)$$

kde n je přirozené číslo.

Dokážeme nyní platnost vzorců (1) a (2) užitím kombinatorických úvah.

Nejprve dokážeme pomocný vztah

$$\sum_{k=n}^m \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}, \quad (3)$$

tj.

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

D ů k a z. Užitím základního vztahu mezi kombinačními čísly

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

obdržíme

$$\sum_{k=n}^m \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^m \left[\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \right],$$

z čehož plyne

$$\sum_{k=n}^m \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^m \binom{k+1}{n+1} - \sum_{k=n}^m \binom{k}{n+1}$$

V posledním z těchto součtů zavedeme novou součtovou proměnnou ν vztahem

$$\nu + 1 = k,$$

tj.

$$\nu = k - 1.$$

Nové součtové meze jsou

$$\nu_1 = n - 1, \nu_2 = m - 1.$$

Je tedy

$$\sum_{k=n}^m \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^m \binom{k+1}{n+1} - \sum_{\nu=n-1}^{m-1} \binom{\nu+1}{n+1}$$

První sčítanec v posledním součtu je

$$\binom{n}{n+1} = 0,$$

takže dolní mez tohoto součtu můžeme nahradit číslem n . Poněvadž na označení součtové proměnné nezáleží, lze psát

$$\sum_{k=n}^m \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^m \binom{k+1}{n+1} - \sum_{k=n}^{m-1} \binom{k+1}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} \binom{k+1}{n+1} + \binom{m+1}{n+1} - \sum_{k=n}^{m-1} \binom{k+1}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

jak jsme měli dokázat.

Užitím pomocného vzorce (3) obdržíme pro každé přirozené číslo n — s přihlédnutím k tomu, že kombinační čísla

$$\binom{1}{2} \quad \binom{1}{3}, \quad \binom{2}{3}$$

jsou rovna nule

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4} \quad (6)$$

Přikročíme nyní k důkazu vztahu (1).

Poněvadž pro $k = 2, 3, \dots, n$ platí

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \left[k^2 - \binom{k}{1} \right],$$

plyne ze vztahu (5)

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[k^2 - \binom{k}{1} \right] = \binom{n+1}{3},$$

tj.

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{3}.$$

Opětným užitím vztahu (3) odvodíme z poslední rovnice

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{1}{2} \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{3}$$

Z této rovnice vypočteme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \\ &= \frac{2(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)}{6} (2n-2+3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Tím je důkaz vztahu (1) proveden.

Dokážeme ještě vztah (2).

Poněvadž

$$\begin{aligned}\binom{k}{3} &= \frac{k(k-1)(k-2)}{6} = \frac{1}{6}(k^3 - 3k^2 + 2k) = \\ &= \frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}\binom{k}{1}\end{aligned}$$

plyne ze vztahu (6)

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}\binom{k}{1} \right] = \binom{n+1}{4}$$

tj.

$$\frac{1}{6} \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{4}$$

Užitím vztahů (1) a (4) obdržíme z poslední rovnice

$$\frac{1}{6} \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{3} \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{4}$$

Odtud vypočteme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^3 &= 6 \binom{n+1}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 2 \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \left[(n-1)(n-2) + 2(2n+1) - 4 \right] = \\ &= \frac{n(n+1)}{4} (n^2 + n) = \frac{n(n+1)}{4} \cdot n(n+1) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2\end{aligned}$$

jak jsme měli dokázat.

P o z n á m k a. 1. Ze vztahů (2) a (4) porovnáním plyne

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\sum_{k=1}^n k \right]^2$$

neboť podle (4)

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Stejným způsobem jako při odvozování vztahů (1) a (2) lze stanovit hodnotu součtu

$$\sum_{k=1}^n k^r$$

kde n a r jsou libovolná přirozená čísla.

Otáčení soustavy souřadnic

EMIL FRÝDECKÝ, SVVŠ Kroměříž

(Příspěvek k analytické geometrii kuželoseček)

Ve III. ročníku SVVŠ se v analytické geometrii učíte o posunutí soustavy souřadnic. Je to jedna z transformací soustavy souřadnic, pomocí níž řešíme například úlohy o kuželosečkách, jejichž střed (vrchol) neleží v počátku. Jedná se ovšem o kuželosečky, jejichž osy jsou rovnoběžné s osami x, y .

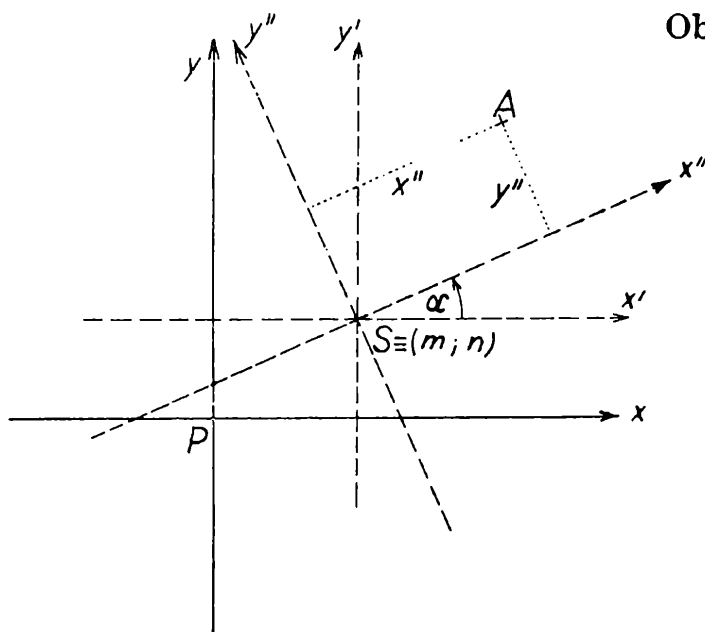
Jistě vás napadla otázka, zda je možno sestavit rovnici kuželosečky, jejíž osy nejsou rovnoběžné s osami souřadnic. Je to možné a jak uvidíte, nejedná se ani o příliš složitou záležitost. Použijeme k tomu jiné transformace, zvané otáčení soustavy souřadnic.

Mějme bod A v systému souřadnic x, y . (Viz obr. 1.) Otočíme osy x, y o úhel α do polohy x', y' . Bod A bude mít vzhledem k osám x', y' nové souřadnice, jejichž vztah k původnímu souřadnicovému systému se dá vyjádřit takto

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Důkaz (obr. 1). $PA_1 = x$, $AA_1 = y$; $PM = x'$; $AM = y'$; $x' = PQ + QM$; protože $QM = A_1N$, je $x' = PQ + A_1N$. $PQ = x \cos \alpha$; $A_1N = y \sin \alpha$. Je tedy $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, $y' = AN - MN$; $AN = y \cos \alpha$; $MN = QA_1 = x \sin \alpha$. Je tedy $y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$.



Obr. 1

Snadno se můžeme přesvědčit, že vztah platí pro libovolný úhel α , i pro každou polohu bodu A . K tomu stačí vědomosti o goniometrických funkcích orientovaného úhlu z II. ročníku.

Nyní již můžeme přistoupit k sestavování rovnic kuželoseček, jejichž osy nejsou rovnoběžné s osami x, y . Začneme parabolou.

Příklad 1. Napište rovnici paraboly, jejíž vrchol leží v počátku, její parametr je $2p$ a osa svírá s osou x úhel α [je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} \equiv (u_1; u_2)$].

Řešení.

Rovnice paraboly vzhledem k transformovanému systému souřadnic je

$$y'^2 = 2px'$$

Vzhledem k osám x, y

$$(y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = 2p (x \cos \alpha + y \sin \alpha),$$

$$y^2 \cos^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + x^2 \sin^2 \alpha = 2px \cos \alpha + 2py \sin \alpha,$$

$$x^2 \sin^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \cos^2 \alpha - 2px \cos \alpha - 2py \sin \alpha = 0$$

Položme

$$\sin^2 \alpha = A, \quad -\sin \alpha \cos \alpha = B, \quad \cos^2 \alpha = C, \quad -2p \cos \alpha = D,$$

$$-2p \sin \alpha = E$$

Parabola s vrcholem v počátku má rovnici tvaru

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0.$$

Při určitém zadání parametru a vektoru $\mathbf{u}$ vyčíslili bychom koeficienty. Jistě byste sami přišli na to, že

$$\sin \alpha = \frac{u_2}{|\mathbf{u}|}, \quad \cos \alpha = \frac{u_1}{|\mathbf{u}|}$$

Příklad 2. Napište rovnici elipsy se středem v počátku, jejíž hlavní osa svírá s osou x úhel α [je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} \equiv (u_1; u_2)$] a délky poloos jsou a, b .

Řešení.

☞ Rovnice elipsy vzhledem k transformované soustavě souřadnic je

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2.$$

Dosazením za x', y' dostaneme

$$b^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + a^2 (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = a^2 b^2,$$

$$b^2 x^2 \cos^2 \alpha + 2b^2 xy \sin \alpha \cos \alpha +$$

$$+ b^2 y^2 \sin^2 \alpha + a^2 y^2 \cos^2 \alpha - 2a^2 xy \sin \alpha \cos \alpha +$$

$$+ a^2 x^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2,$$

$$x^2 (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) + 2xy (b^2 \sin \alpha \cos \alpha - a^2 \sin \alpha \cos \alpha) +$$

$$+ y^2 (b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha) - a^2 b^2 = 0$$

Položme

$$b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha = A,$$

$$b^2 \sin \alpha \cos \alpha - a^2 \sin \alpha \cos \alpha = B,$$

$$b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha = C,$$

$$-a^2 b^2 = D$$

Elipsa se středem v počátku má rovnici tvaru

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D = 0$$

Příklad 3. Napište rovnici hyperboly se středem v počátku a poloosami a, b , jejíž hlavní osa svírá s osou x úhel α .

Řešení je podobné jako u elipsy. Postupně dostáváme

$$b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = a^2 b^2,$$

$$b^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 - a^2 (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = a^2 b^2,$$

$$\begin{aligned} & b^2 x^2 \cos^2 \alpha + 2b^2 xy \sin \alpha \cos \alpha + \\ & + b^2 y^2 \sin^2 \alpha - a^2 y^2 \cos^2 \alpha + \\ & + 2a^2 xy \sin \alpha \cos \alpha - a^2 x^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2, \\ & x^2 (b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha) + \\ & + 2xy (b^2 \sin \alpha \cos \alpha + a^2 \sin \alpha \cos \alpha) + \\ & + y^2 (b^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha) - a^2 b^2 = 0 \end{aligned}$$

Položme

$$\begin{aligned} b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha &= A, \\ b^2 \sin \alpha \cos \alpha + a^2 \sin \alpha \cos \alpha &= B, \\ b^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha &= C, \\ -a^2 b^2 &= D, \end{aligned}$$

dostaneme rovnici

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D = 0$$

Je to rovnice hyperboly se středem v počátku.

Přesvědčme se, zda otočení soustavy souřadnic pozmění rovnici kružnice. Již z vlastní představivosti byste poznali, že tomu tak nebude. Ale pro zajímavost se o tom přesvědčíme.

Rovnice kružnice vzhledem k transformované soustavě souřadnic je

$$x'^2 + y'^2 = r^2$$

Dosadme za x', y'

$$\begin{aligned} & (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = r^2, \\ & x^2 \cos^2 \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha + \\ & + y^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + \\ & + x^2 \sin^2 \alpha = r^2, \\ & x^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 2xy (\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + \\ & + y^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r^2, \\ & x^2 + y^2 = r^2 \end{aligned}$$

Udivuje vás možná, že u rovnic všech tří kuželoseček — paraboly, elipsy i hyperboly — se vyskytují členy s x^2 , y^2 a xy . U paraboly byste čekali, že se vyskytne jen jeden kvadratický člen. Vystává nová otázka, jak určit, o kterou kuželosečku se jedná? Jedná se o vztah mezi koeficienty A , B , C .

Je-li kuželosečka parabolou, pak

$$B^2 - AC = 0 ,$$

je-li elipsou, potom

$$B^2 - AC < 0 ,$$

je-li daná rovnice rovnicí hyperboly, je

$$B^2 - AC > 0$$

Provedeme důkaz.

1. Parabola

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 0 .$$

2. Elipsa

$$\begin{aligned} & (b^2 \sin \alpha \cos \alpha - a^2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 - \\ & - (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha) (b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha) = \\ & = b^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2a^2 b^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \\ & + a^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - b^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \\ & - a^2 b^2 \sin^4 \alpha - a^2 b^2 \cos^4 \alpha - a^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ & = - a^2 b^2 (\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \\ & = - a^2 b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 < 0 . \end{aligned}$$

3. Hyperbola

$$\begin{aligned} & (b^2 \sin \alpha \cos \alpha + a^2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 - \\ & - (b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha) \cdot (b^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha) = \\ & = b^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2a^2 b^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \\ & - b^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a^2 b^2 \sin^4 \alpha + \\ & + a^2 b^2 \cos^4 \alpha - a^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ & = a^2 b^2 (\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = \\ & = a^2 b^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 > 0 . \end{aligned}$$

Jestliže sestavujete rovnici kuželosečky, jejíž osa není rovnoběžná s osou x , není třeba, abyste si zapamatovali vyjádření koeficientů rovnice. Stačí k tomu jen znalost transformačních vztahů

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha ,$$

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha .$$

Když i ty zapomenete, nevadí, jen že si je dovedete odvodit.

Řešme tento příklad.

Příklad 4. Napište rovnici elipsy, jejíž střed leží v počátku, je-li $a = 5$, $b = 3$ a hlavní osa je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} \equiv (4; 3)$. Určete průsečíky elipsy s přímkou $3x - 4y = 0$.

Řešení

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2,$$

$$b^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + a^2 (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = a^2 b^2.$$

Mohli bychom dále obecně upravovat, nebo můžeme dosadit za

$$\cos \alpha = \frac{u_1}{|\mathbf{u}|} = \frac{4}{5}; \quad \sin \alpha = \frac{u_2}{|\mathbf{u}|} = \frac{3}{5}.$$

Dostaneme

$$9 \left(\frac{4}{5} x + \frac{3}{5} y \right)^2 + 25 \left(\frac{4}{5} y - \frac{3}{5} x \right)^2 = 25 \cdot 9,$$

$$\frac{144}{25} x^2 + \frac{81}{25} y^2 + \frac{216}{25} xy + \frac{400}{25} y^2 + \frac{225}{25} x^2 - \frac{600}{25} xy = 225$$

a po úpravě

$$369x^2 - 384xy + 481y^2 - 5625 = 0.$$

Tato rovnice je rovnicí dané elipsy.

Určení průsečíků elipsy s přímkou $3x - 4y = 0$. Snadno poznáte, že se jedná o přímku totožnou s hlavní osou elipsy a že průsečíky musí být $A \equiv (4; 3)$, $B \equiv (-4; -3)$. Přesvědčte se o tom sami. Nevadí, procvičíte-li se trochu v počítání s velkými čísly.

Řešme dále tento příklad.

Příklad 5. Napište rovnici rovnoosé hyperboly se středem v počátku, jejíž poloosa je a a hlavní osa je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} \equiv (1; 1)$.

Řešení.

Rovnice hyperboly, jestliže $a = b$, je

$$a^2 x'^2 - a^2 y'^2 = a^4,$$

$$x'^2 - y'^2 = a^2,$$

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 - (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = a^2,$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\left(x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = a^2$$

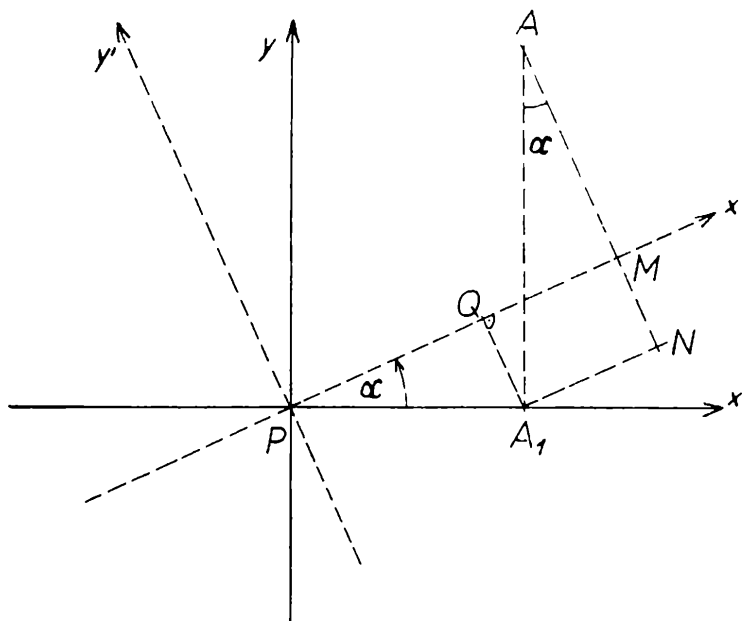
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + xy = a^2,$$

$$2xy = a^2, \quad xy = \frac{a^2}{2}$$

Jestliže $\frac{a^2}{2} = c$, dostaneme $xy = c$ nebo $y = \frac{c}{x}$

Dostáváme rovnici rovnoosé hyperboly. Protože její osy pólí úhel os souřadnic x, y , jsou souřadnicové osy jejími asymptotami. Tuto rovnici jste poznali již dříve jako rovnici nepřímé úměrnosti.

Dosud jsme sestavovali rovnice kuželoseček se středem (vrcholem) v počátku. Ukáží, jak sestavíme rovnici kuželosečky, jejíž střed je v bodě $S \equiv (m; n)$ a jejíž osy svírají s osami x, y úhel $\alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ (k celé číslo).



V tomto případě použijeme dvou transformací současně — posunutí a otáčení (obr. 2). Nejdříve posuneme osy x a y tak, aby bod S byl novým počátkem soustavy souřadnic x', y' . Potom otočíme osy x', y' o úhel α do polohy x'', y'' .

O souřadnicích x'', y'' bodu A vzhledem k systému x', y' bude platit vztah

$$x'' = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha,$$

$$y'' = y' \cos \alpha - x' \sin \alpha.$$

Protože $x' = x - m$, $y' = y - n$, platí o souřadnicích x'', y'' bodu A vzhledem k souřadnicovému systému x, y

$$x'' = (x - m) \cos \alpha + (y - n) \sin \alpha,$$

$$y'' = (y - n) \cos \alpha - (x - m) \sin \alpha.$$

Příklad 6. Napište rovnici elipsy, jejíž střed je v bodě $S \equiv (3; 2)$, hlavní osa je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} \equiv (4; 3)$; $a = 5$; $b = 3$.

Řešení

$$b^2 x''^2 + a^2 y''^2 = a^2 b^2,$$

$$b^2 [(x - m) \cos \alpha + (y - n) \sin \alpha]^2 +$$

$$+ a^2 [(y - n) \cos \alpha - (x - m) \sin \alpha]^2 = a^2 b^2 ,$$

$$a^2 = 25 ; b^2 = 9 , m = 3 , n = 2 ,$$

$$\cos \alpha = \frac{u_1}{|\mathbf{u}|} = \frac{4}{5} ;$$

$$\sin \alpha = \frac{u_2}{|\mathbf{u}|} = \frac{3}{5} .$$

Dosazením těchto hodnot a postupnou úpravou dostaneme rovnici

$$369x^2 - 384xy + 481y^2 - 1446x - 772y - 2684 = 0$$

Tato rovnice je rovnicí dané elipsy.

Přesvědčte se o tom. Porovnejte tuto rovnici s rovnicí elipsy z příkladu 4.

Jak vidíte, skládáním obou transformací — posunutím (translací) a otáčením (rotací) soustavy souřadnic můžeme sestavit rovnici kuželosečky v libovolné poloze.

Na závěr připojuji několik příkladů na procvičení.

1. *Napište rovnici paraboly, jejíž vrchol leží v počátku, ohnisko $F \equiv (2\sqrt{3}; 2)$.*

Řešení.

Rovnice paraboly vzhledem k transformovanému systému souřadnic je

$$y'^2 = 2px'$$

$$\frac{p}{2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 ,$$

$$y'^2 = 16x'$$

Vzhledem k osám x, y

$$(y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = 16 (x \cos \alpha + y \sin \alpha) ,$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad \sin \alpha = \frac{1}{2} ,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2} x \right)^2 = 16 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y \right) ,$$

$$\frac{3}{4} y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} xy + \frac{x^2}{4} = 8\sqrt{3} x + 8y ,$$

$$x^2 - 2\sqrt{3} xy + 3y^2 - 32\sqrt{3} x - 32y = 0$$

Rovnice paraboly s vrcholem v počátku a s ohniskem $F \equiv (2\sqrt{3}; 2)$ je

$$x^2 - 2\sqrt{3} xy + 3y^2 - 32\sqrt{3} x - 32y = 0$$

2. Napište rovnici paraboly, jejíž vrchol leží v počátku, její parametr je $2p = 10$, osa je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} \equiv (-1; 1)$.

Řešení.

Rovnice paraboly vzhledem k transformovanému systému souřadnic je

$$\text{Vzhledem k osám } x', y' \quad y'^2 = 2px'$$

$$(y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = 10 (x \cos \alpha + y \sin \alpha).$$

Mohou nastat dva případy:

a) Ohnisko leží ve II. kvadrantu, pak

$$\alpha = 135^\circ, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 = 10 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right),$$

$$\frac{1}{2}y^2 + xy + \frac{1}{2}x^2 = -5\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y$$

Rovnice paraboly je

$$x^2 + 2xy + y^2 + 10\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y = 0$$

b) Ohnisko leží ve IV. kvadrantu, pak

$$\alpha = 315^\circ, \quad \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 = 10 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right),$$

$$\frac{1}{2}y^2 + xy + \frac{1}{2}x^2 = 5\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y$$

$$\text{Rovnice paraboly je} \quad x^2 + 2xy + y^2 - 10\sqrt{2}x + 10\sqrt{2}y = 0$$

3. Rovnice paraboly, jejíž vrchol leží v počátku a ohnisko na kladné poloose x je $y^2 = 2px$. Užitím transformačních vzorců napište rovnice parabol s vrcholem v počátku a s ohniskem na

a) záporné poloose x , b) kladné poloose y , c) záporné poloose y .

Řešení.

Rovnice paraboly vzhledem k transformovanému systému souřadnic je

$$y'^2 = 2px'$$

Vzhledem k osám x, y

$$(y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = 2p (x \cos \alpha + y \sin \alpha).$$

a) $\alpha = 180^\circ$, $\cos \alpha = -1$, $\sin \alpha = 0$,

$$(-y - 0)^2 = 2p(-x + 0)$$

Rovnice paraboly je

$$y^2 = -2px.$$

b) $\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = 1$.

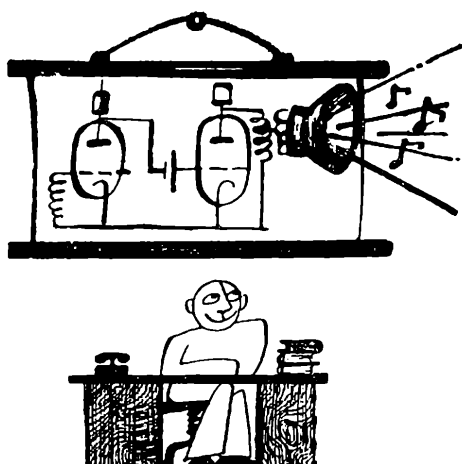
Rovnice paraboly je $x^2 = 2py$

c) $\alpha = 270^\circ$, $\cos \alpha = 0$, $\sin \alpha = -1$.

Rovnice paraboly je

$$x^2 = -2py$$

Jsou to tytéž rovnice, které jste vyvodili jinak ve škole.



FYZIKA

0 gravitačním zákonu Newtonově

ING. JIŘÍ MACHALICKÝ. CS c., Praha

(Pokračování)

Správnost gravitačního zákona potvrdil Newton kvantitativně mimo jiné tím, že z něho vypočetl zrychlení na povrchu Země, zrychlení, kterému podléhá Měsíc a zejména že z něho a svých dynamických zákonů zpětně odvodil Keplerovy zákony⁶⁾. Proporcionální činitel κ , zvaný *gravitační konstanta*, byl určen až o více než sto let později. Nejznámější jsou měření Cavendishova⁷⁾ z r. 1798, který je provedl torzními vážkami podobnými těm, jichž předtím Coulomb užil k svým elektrostatickým pokusům.

Newton odvodil gravitační zákon (10) pro pohyb planet, ukázal však, že platí také pro kosmická tělesa, jimž říkáme *komety*. Zatímco však planety opisují dráhy téměř kruhové, komety se pohybují na velmi protáhlých elipsách, někdy dokonce je dráha parabolická nebo hyper-

⁶⁾ Viz např. [5], str. 159, [6], str. 455.

⁷⁾ Podrobněji o těchto měřeních pojednává článek, který vyjde v některém z příštích čísel Rozhledů mat.-fyz.

bolická (podrobněji o kometách, jejich vzniku, pohybech a zániku viz [17], str. 117).

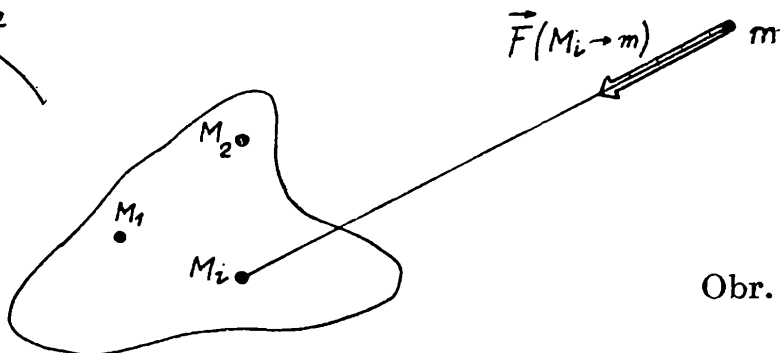
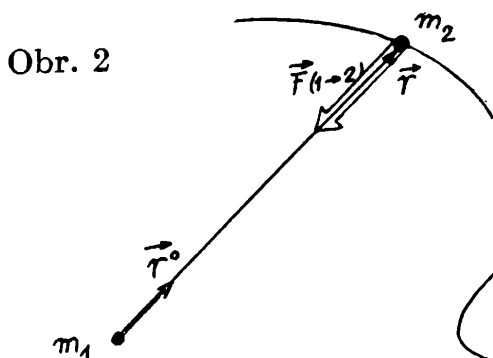
Gravitační zákon lze však užít pro libovolné dva hmotné body s hmotnostmi m_1, m_2 . Síla $\mathbf{F} (1 \rightarrow 2)$, kterou působí první hmotný bod na druhý ve vzdálenosti r , určené vektorem $\mathbf{r}$, se dá vyjádřit vzorcem

$$\mathbf{F} (1 \rightarrow 2) = - \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad (11)$$

jestliže zavedeme k vyjádření vzájemné polohy bodů jednotkový vektor, daný podílem vektoru $\mathbf{r}$ a jeho velikosti r

$$\mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (12)$$

Znaménko minus ve vzorci (12) znamená, že síla $\mathbf{F} (1 \rightarrow 2)$ má opačný směr než vektor $\mathbf{r}$, resp. $\mathbf{r}^0$. Stejně lze ovšem psát i vzorec (10).



Obr. 3

Každé těleso lze považovat za souhrn velikého počtu hmotných bodů, takže výslednou sílu, kterou toto těleso působí na jiný hmotný bod (jiné těleso), hmotnosti m dostaneme jako geometrický (vektorový) součet gravitačních sil $\mathbf{F} (M_i \rightarrow m)$ od všech těchto bodů.

Abychom ukázali, jak lze takový výpočet provést, stanovíme sílu, kterou na sebe vzájemně působí hmotný bod m a tenká tyč (hmotnosti M) — viz obr. 4. Mysleme si tyč rozdělenou kolmými řezy na velmi malé části s hmotností $dM = \rho S dx$ (ρ je hustota, S příčný průřez tyče). Každý takový element působí na hmotný bod m silou, jejíž velikost je podle (10) nebo (11) dána výrazem

$$dF = \kappa \frac{\rho S dx m}{x^2}.$$

Výslednou sílu pak určíme sečtením elementárních sil, integrací

$$F = \kappa m \rho S \int_{x=a}^{x=a+l} \frac{dx}{x^2} = \kappa m \rho S \frac{l}{a(a+l)}.$$

Protože $\rho Sl = M$, je

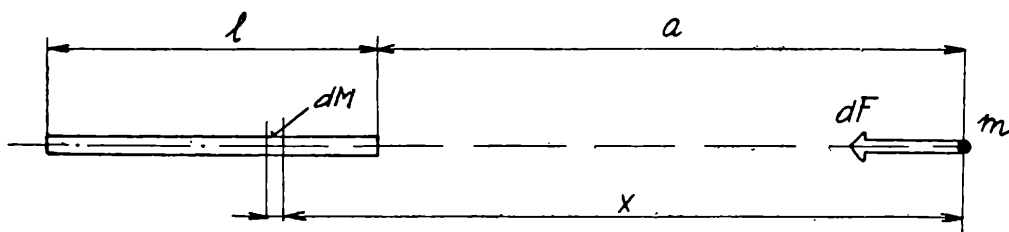
$$F = \kappa \frac{mM}{a(a+l)} \quad (13)$$

Kdyby délka tyče byla velmi malá proti vzdálenosti a , mohli bychom psát

$$F \doteq \kappa \frac{mM}{a^2}$$

jako pro hmotné body.

Dá se ukázat, že v případech určitým způsobem symetrických, lze z gravitačního zákona (11), podobně jako v předchozím příkladu vypočítat výslednou sílu, kterou na sebe působí dvě tělesa. Také lze odvodit, že přitažlivý účinek stejnorodé koule na hmotné body (tělesa) je právě takový, jako kdyby veškerá hmota koule byla soustředěna v jejím těžišti. Další příklady lze nalézt v literatuře⁸⁾.



Obr. 4. K výpočtu gravitační síly mezi tenkou tyčí a hmotným bodem.

Newton vysvětlil pomocí svého zákona také mořský příliv a odliv (mořské slapy), a to periodickými změnami gravitačního působení Měsíce a Slunce⁹⁾, závislost zemského zrychlení na zeměpisné šířce¹⁰⁾ a tzv. precesní a nutační pohyby Země.

Mimoto dal gravitační zákon podnět k mnohým úvahám o tvaru Země. Vyplývá z něho totiž, že vlivem otáčení musí mít Země tvar rotačního elipsoidu, na pólech zploštělého. To však odporovalo tehdy známým měřením. Spor byl vyřešen, teprve když *Jean Le Rond d'Alembert* (1717—1783) navrhl francouzské Akademii velkou expedici, jejímž úkolem bylo měření meridiánu zemského na pólu (v Laponsku) a na rovníku (v Peru). Newtonův názor byl potvrzen. Pozdějšími přesnějšími měřeními se však ukázalo, že skutečný tvar není elipsoid, ale složitější

⁸⁾ Např. [5], [10].

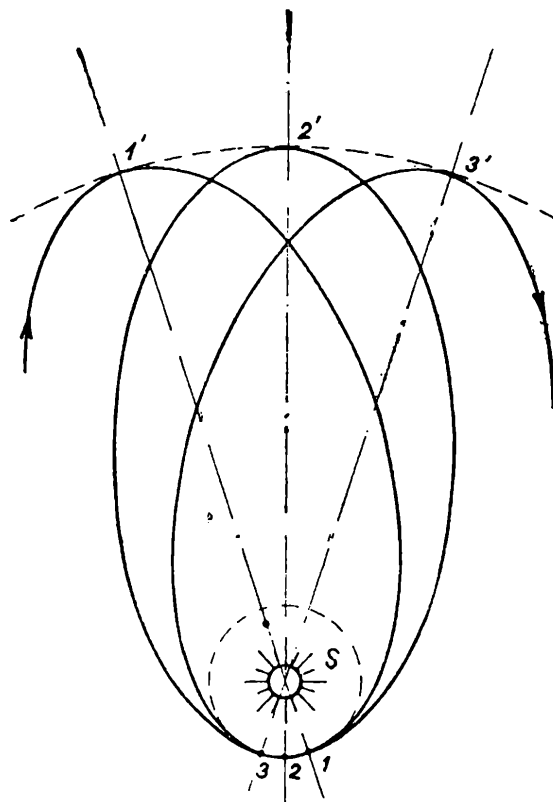
⁹⁾ Viz např. [11], str. 245.

¹⁰⁾ Viz [11], str. 262.

¹¹⁾ Podrobněji o tom pojednává J. Pantoflíček v článku „Pokroky geodzie ve XX. století“ — viz [14], str. 314 — nebo L. Skalský v článku „Slapové účinky Měsíce a Slunce na zemskou kůru“ v čas. Vesmír, č. 7 (1963), str. 177.

plocha zvaná *geoid*. Kromě toho ukázal r. 1909 franc. geofyzik *Jean Pierre Charles Lallemand*, že také zemská kůra podléhá změnám gravitačního působení Měsíce a Slunce. Je tedy i na kontinentech příliv a odliv (zemské slapy). Lallemand nazval tyto pohyby poeticky „dýcháním Země“. Měřením tzv. Zöllnerovými kyvadly je potvrdil v letech 1910—1915 *Schweydar*.

Gravitačním zákonem položil I. Newton základy teoretické astronomie, jejíž nejdůležitější úlohou, totiž vypočítáváním poruch (perturbací) v pohybu planet, komet, meteorů a jiných těles, vznikajících vzájemným gravitačním působením, se zaměstnávají astronomové a matematikové dodnes. Hlavní zásluhy o opracování matematických metod k výpočtu poruch má francouzský matematik, teoretický fyzik a hvězdář *Pierre Simon Laplace* (1748—1827, stěžejní dílo *Mécanique céleste* = *Nebeská mechanika* z r. 1800). Těmito metodami se podařilo vypočítat nezávisle na sobě anglickému hvězdáři *J. C. Adamsovi* (1819 až 1892) a francouzskému matematikovi a astronomovi *U. J. J. Leverrierovi* (1811—1877) z pozorovaných perturbací polohu i relativní hmotnost tehdy ještě neznámé planety Neptun, kterou pak na základě vypočtených údajů objevil na berlínské hvězdárně r. 1846 *J. G. Galle* ve vzdálenosti 1 stupně od vypočtené polohy.



Obr. 5.
Pohyb perihelia (přísluní) planet

Dále se ukázalo, že planety neopisují v sluneční soustavě pevné uzavřené eliptické dráhy, ale že se tyto dráhy velmi pomalu stáčíjí kolem Slunce, takže skutečná dráha tvoří růžici, znázorněnou schématicky na obr. 5.

Avšak v pohybu planety Merkur zůstal malý nevysvětlitelný rozdíl mezi teoretickými výsledky a velmi přesnými astronomickými pozorováními. Tento rozdíl činí pouhých 43 úhlových vteřin¹²⁾ za 100 let.

Vysvětlení se podařilo teprve *Albertu Einsteinovi* (1879—1955) jeho gravitační teorií (1916). Stočení eliptické dráhy vychází podle ní větší

¹²⁾ Podle klasické teorie vychází stočení perihelia Merkura $(5557,18 \pm 0,85)''$ za sto let, hodnota naměřená činí $(5599,74 \pm 0,41)''$ za sto let. Rozdíl je tedy $(42,56 \pm 0,19)''$ za sto let.

než podle klasické teorie o hodnotu danou vzorcem

$$\varphi = \frac{6\pi\alpha}{a(1 - \varepsilon^2)}, \quad (14)$$

v němž

$$\alpha = \frac{\kappa M}{c^2}$$

je tzv. gravitační poloměr Slunce (κ je gravitační konstanta, M hmotnost Slunce, c rychlost světla ve vakuu), a velká poloosa dráhy a ε její číselná výstřednost. Pro Merkur je $a = 5,787 \cdot 10^{10}$ m, $\varepsilon = 0,2056$ a oběžná doba $T = 87,97$ slunečních dní. Dosazením do hořejšího vztahu vychází

tj.

$$\varphi = 0,000\,000\,498 \text{ rad/1 oběh},$$

$\frac{365,25}{87,97}$

$$0,000\,000\,498 = 0,000\,002\,07 \text{ rad/100 let} = 42,9''/100 \text{ let}$$

Tato obdivuhodná shoda Einsteinovy teorie s výsledky přesných astronomických měření je jednou ze tří empirických opor její správnosti.

Závěrem poznamenejme, že ačkoli se gravitační zákon osvědčil jako snad žádný z fyzikálních zákonů, přece jen v něm zůstala nevysvětlena záhada tzv. *akce in distans* (působení těles na dálku). Podle gravitačního zákona závisí síla, kterou se dvě tělesa přitahují, na jejich okamžité vzdálenosti. To znamená, že tělesa, která se pohybují a jejichž vzdálenost se mění, se v každém okamžiku přitahují silou, která je dána tou vzdáleností, v níž se právě nacházejí. Tím je vyloučena představa, že by gravitační účinek byl přenášen prostředím rozloženým spojitě v okolním prostoru, neboť pak by se nutně šířil konečnou rychlostí a závisel by nikoli na okamžité vzájemné poloze, ale na určité poloze dřívější. Podle Newtonova gravitačního zákona by tedy měla gravitační síla působit na dálku a okamžitě. Proti akci in distans vystoupili už někteří současníci Newtonovi (Leibnitz, Huygens); Newton sám si byl vědom tohoto nedostatku své gravitační teorie. O původu gravitačních sil odmítl vyslovit nějaké hypotézy svým známým výrokem „*hypotheses non fingo*“ a o pohybu planet řekl: „Planety se pohybují tak, jako by na ně působila síla daná vzorcem (10).“ Gravitační zákon se však v praxi tak osvědčil, že všechny námitky proti němu byly zastíněny jeho úspěchy a akce in distans se stala hlavně v XVIII. století jedním ze základních fyzikálních principů.¹³⁾ Teprve v min. století se ji podařilo odstranit z teorie elektřiny a magnetismu (Faraday, Maxwell, Hertz), když se ukázalo, že elektromagnetické pole se šíří konečnou rychlostí. V teorii gravitace odstranil akci in distans Einstein. Stručně lze říci, že Newtonův gravitační zákon

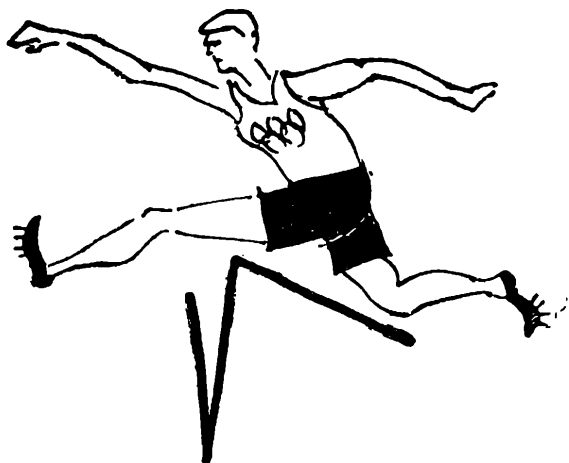
¹³⁾ Ještě za života Newtonova to důrazně vyslovil Roger Cotes (1682 až 1716, angl. matematik a astronom) v předmluvě II. vydání Newtonových Principií v r. 1713.

nahradil neobyčejně složitými rovnicemi, jejichž řešení se dosud podařilo nalézt jen v několika zvláště jednoduchých případech. Einsteinovi samotnému se však podařilo ukázat, že v obvyklých případech, tj. v ne příliš silných gravitačních polích a za předpokladu, že rychlosti těles jsou malé proti rychlosti světla ve vakuu, přechází jeho teorie v teorii Newtonovu. Pokud jde např. o pohyb planet v naší sluneční soustavě, dávají obě teorie prakticky stejné výsledky. Liší se tím, že Newton uvažuje jen síly gravistatické, kdežto Einstein zavádí vedle nich ještě nesmírně nepatrné síly gravidynamické, jejichž působením vykládá např. už zmíněné stáčení Merkurova perihelia a další pozorované efekty (ohyb světelných paprsků v silném gravitačním poli a tzv. rudý posuv).¹⁴⁾ Einsteinova teorie však rozvířila znovu otázku setrvačných sil, o jejíž správné a úplné řešení usiluje v současné době řada významných fyziků. Podrobněji o tom pojednává prof. RNDr. Z. Horák, DrSc. v článku, který vyšel v minulém ročníku *Rozhledů matematicko-fyzikálních*.

Použitá literatura

- [1] Kol. autorů: Fyzika pro I. roč. SVVŠ, II. vydání, SPN, Praha 1966.
- [2] K. K. Darrow: Renaissance fyziky (překlad dr. Z. Pírka z angl. originálu *The Renaissance of Physics*, New York 1937), nakl. Čin, Praha 1940.
- [3] Max von Laue: Dějiny fyziky, Orbis, Praha 1959.
- [4] Č. Strouhal: Mechanika, JČMF, Praha 1951.
- [5] V. Trkal: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa, ČSAV, Praha 1956.
- [6] F. Auerbach: Allgemeine Gravitation. Handbuch der Physik (dr. A. Winkelmann) II. Auflage, Leipzig 1890, erster Band, erste Hälfte, S. 450.
- [7] Z. Horák, F. Krupka: Fyzika, SNTL/SVTL, Praha 1966.
- [8] G. Galilei: Dialóg o dvoch systémoch sveta, Vydavateľstvo SAV, Bratislava 1962 (překlad dr. M. Pažitky z italského originálu *Galileo Galilei Opere*, sv. II, Milano — Roma, Rizzoli e. c. editori 1936).
- [9] Vl. Novák: Fyzika I. díl, Nakl. JČMF, Praha 1929.
- [10] D. Ilkovič: Fyzika, SNTL/SVTL, Praha — Bratislava 1958.
- [11] F. Závíška: Mechanika, JČMF, Praha 1933.
- [12] M. Kopecký, V. Letfus, B. Valníček: Co víme o vesmíru, Lidová demokracie, Praha 1960.
- [13] M. Born: Die Relativitätstheorie Einsteins, Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1964.
- [14] Sborník Dvacáté století, I. díl Daleké vesmíry a naše Země, III. díl Z říše hmot a sil, Nakl. V. Orel, Praha 1931.
- [15] A. Šternfeld: Umělé družice II. vydání, Orbis, Malé moderní encyklopedie, Praha 1958.
- [16] A. Hruška: Kosmická dynamika, Nakl. ČSAV, Cesta k vědění, sv. 2, Praha 1962.

¹⁴⁾ To je stručné označení pro snížení frekvence v gravitačním poli a z toho vyplývající posuv spektrálních čar směrem k delším vlnovým délkám spektra.



MMO

X. mezinárodní matematická olympiáda

DOC. OTA SETZER, Praha

V minulém čísle jste se dočetli o průběhu X. mezinárodní matematické olympiády, konané v červenci 1968 v Moskvě. Dnes uveřejňujeme slovenský text příkladů, které musili vyřešit olympionici ve dvou půldnech.

Vžijte se i vy na okamžik do role reprezentanta a pokuste se úlohy vyřešit, řešení nám však nezasílejte. Příště otiskneme řešení jednotlivých příkladů, jak je vypracovali někteří českoslovenští účastníci MMO během soutěže v úzce vymezeném čase.

První den:

1. Dokážte, že existuje jediný trojuholník taký, že dĺžky jeho strán sú vyjadrené tromi za sebou nasledujúcimi prirodzenými číslami a jeden z jeho uhlov je dvojnásobkom jedného zo zbývajúcich dvoch.

2. Nájdite všetky prirodzené čísla x také, že súčin ich cifier (v desiatkovickej zápise) je rovný $x^2 - 10x - 22$.

3. Je daná sústava rovníc s neznámymi $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{aligned}a_1 x^2 + b x_1 + c &= x_2, \\a x_2^2 + b x_2 + c &= x_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a x_{n-1}^2 + b x_{n-1} + c &= x_n, \\a x_n^2 + b x_n + c &= x_1,\end{aligned}$$

kde a, b, c sú reálne čísla, $a \neq 0$. Dokážte, že tato sústava

- I. nemá reálnych riešení, ak $(b - 1)^2 - 4ac < 0$;
- II. má práve jedno reálne riešenie, ak $(b - 1)^2 - 4ac = 0$;
- III. má viac než jedno reálne riešenie, ak $(b - 1)^2 - 4ac > 0$.

Druhý deň:

4. Dokážte, že v každom štvorstene existuje taký vrchol, že z úsečiek rovných hranám, ktoré z neho vychádzajú, možno zostrojiť trojuholník.

5. Nech $f(x)$ je funkcia s reálnymi hodnotami definovaná pre všetky reálne x a taká, že pre každé x platí

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2},$$

kde a je dané kladné číslo.

I. Dokážte, že funkcia f je periodická [tzn., že existuje kladné číslo b také, že $f(x + b) = f(x)$ pre všetky x].

II. Udajte pre $a = 1$ príklad funkcie f uvedených vlastností, ktorá nie je identicky rovná konštante.

6. Pre každé prirodzené číslo n vypočítajte súčet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n + 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n + 2}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor +$$

a dokážte správnosť odvodeného vzorca.

Symbol $[x]$ tu znamená celú časť čísla x , tj. najväčšie celé číslo m také, že $m \leq x$.

FO

Studijní text FO, roč. X

Základy vektorovej algebry

JOZEF ZÁMEČNÍK, Bratislava

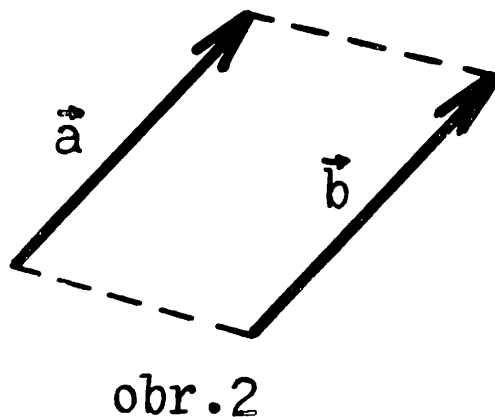
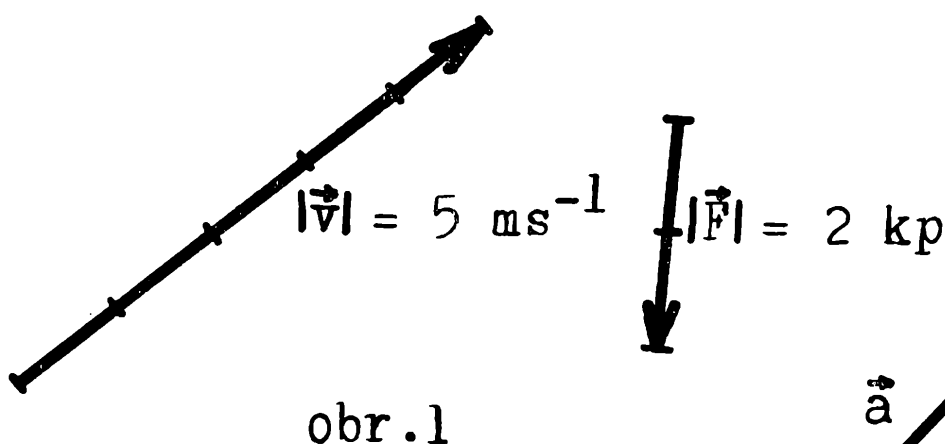
Vo fyzike, matematike i technickej praxi stretávame sa s veličinami, ktoré vo väčšine možno rozdeliť do dvoch skupín, a to na skaláry a vektory.

Veličiny, ktoré s ohľadom na zvolenú jednotku sú úplne určené jediným číselným údajom, menujú sa skaláry (dĺžka čiary 5 m, čas 2 s, hmotnosť 3 kg, teplota 10 °C, energia 20 J, elektrický náboj -2 C a podobne).

Veličiny, ktoré sa vyznačujú absolútnou hodnotou a aj smerom, menujú sa vektory (posunutie bodu, orientovaná úsečka, rýchlosť pri

pohybe bodu, zrýchlenie, sila a iné). Vektor, ktorého absolútna hodnota sa rovná nule, menuje sa nulový vektor.

V literatúre sa z technických dôvodov používajú pre označenie vektora najčastejšie tučné písmená. V obrázkoch, kde je treba popisovať šablonou, i v písanom texte, označujeme vektor obyčajne pruhom, alebo šipkou nad písmenom (napr. $\vec{v}$, alebo $\vec{v}$). Absolútnu hodnotu vektora označujeme $|\vec{v}| = v$.



Každý vektor, nech je jeho fyzikálny význam akýkoľvek (sila, rýchlosť apod.), možno zobraziť orientovanou úsečkou. Absolútnu hodnotu vektora znázorníme dĺžkou orientovanej úsečky vo vhodne zvolenej mierke a smer orientovanej úsečky stotožníme s jeho smerom. Ak však vyznačíme určitú, inak ľubovoľnú vektorovú veličinu — vektor orientovanou úsečkou, treba mať na pamäti, že je to len obraz tohto vektora.

So skalármi počítame podľa pravidiel bežnej aritmetiky.

Vektory však predstavujú veličiny obsahovo bohatšie. Preto počítanie s nimi vyžaduje osobitných pravidiel. Boli zavedené tak, aby boli v čo najväčšej zhode s pravidlami bežnej aritmetiky a súčasne čo najviac vyhovovali praktickým potrebám fyziky a matematiky.

I. Rovnosť vektorov

Dva vektory **a** a **b**, ktoré majú rovnaký fyzikálny význam považujeme za sebe rovné a píšeme **a** = **b** vtedy a len vtedy, ak sa zhodujú v absolútnej hodnote ($|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$) a aj v smere ($\mathbf{a} \uparrow \uparrow \mathbf{b}$).

Navzájom teda môžeme porovnávať len napr. rýchlosť s rýchlosťou, silu so silou a podobne.

Príklad: Majme dva pohybujúce sa hmotné body. Rýchlosť prvého nech je v_1 a druhého v_2 . Nech $v_1 = 20 \text{ ms}^{-1}$ a $v_2 = 20 \text{ ms}^{-1}$. Platí teda, že

$$v_1 = v_2. \quad (1)$$

Rovnosť (1) nám však nič nehovorí o smeroch týchto rýchlostí.

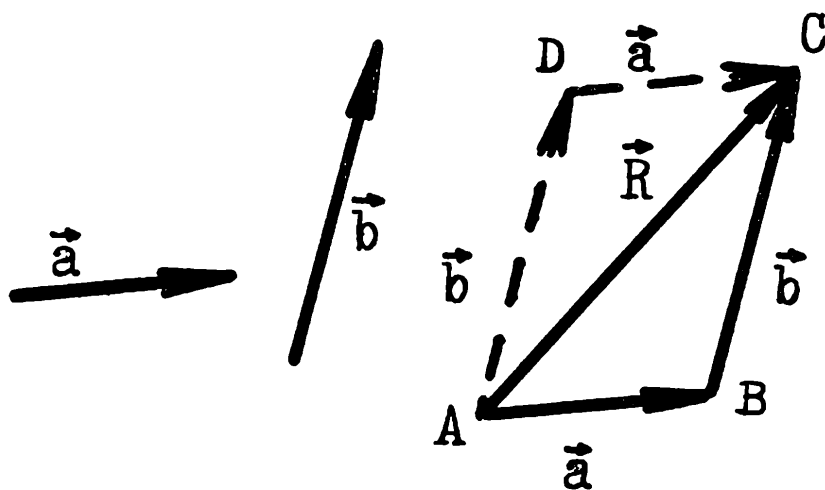
Smer rýchlosti prvého hmotného bodu môže byť so smerom rýchlosti druhého hmotného bodu súhlasný, ale práve tak môže byť naň kolmý, alebo práve opačný. Ak však platí, že

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad (2)$$

je jednoznačne povedané, že rýchlosti hmotných bodov sú rovnaké čo do veľkosti i čo do smeru. Vektorová rovnica (2) je teda obsahovo bohatšia ako skalárna rovnica (1). Ak teda $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow v_1 = v_2$ a nie naopak.

II. Sčítanie vektorov

Súčet aspoň dvoch vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ tohože druhu je opäť vektor $\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, ktorého obraz dostaneme, ak ku koncovému bodu obrazu prvého sčítanca pripojíme v správnom smere obraz druhého sčítanca



obr. 3

a spojíme úsečkou počiatok obrazu prvého sčítanca s koncovým bodom obrazu druhého sčítanca. Rovnaký výsledok však dostaneme, ak poradie pri sčítaní zameníme. Po doplnení trojuholníka ABC (obr. 3) na rovnobežník $ABCD$, v ktorom $\mathbf{AB} = \mathbf{DC} = \mathbf{a}$ a $\mathbf{AD} = \mathbf{BC} = \mathbf{b}$, vidíme, že platí $\mathbf{R} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$. Čiže pri sčítaní vektorov nezáleží na poradí v akom ich sčítujeme

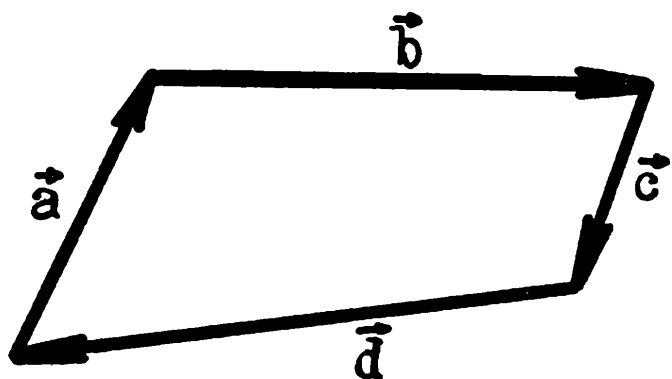
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

Hovoríme tiež, že vektory sčítame podľa rovnobežníkového pravidla.

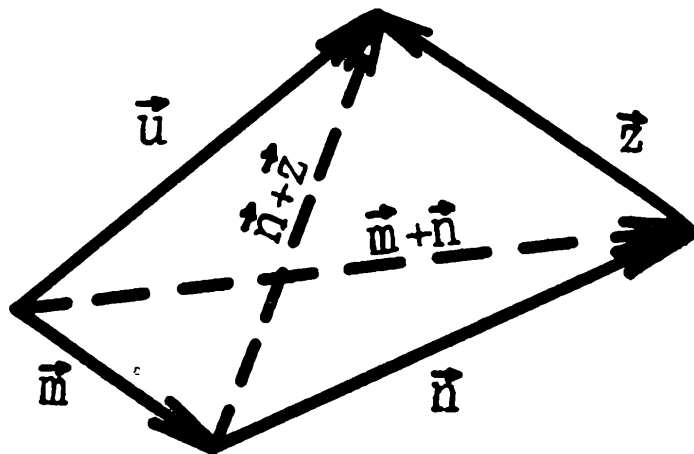
Pri sčítaní dvoch, alebo väčšieho počtu vektorov sa môže stať, že koncový bod obrazu posledného sčítanca sa stotožní s počiatkom obrazu prvého sčítanca. Absolútna hodnota súčtu v tom prípade sa rovná nule a súčet sám je nulový vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ (obr. 4).

Kedže súčet vektorov je opäť vektor a pri sčítaní nezáleží na poradí sčítancov, pri súčte väčšieho počtu vektorov môžeme jednotlivé členy súčtu spojiť v ľubovoľné čiastočné súčty a tie potom sčítať v ľubovoľnom poradí.

Príklad: $\mathbf{u} = \mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{z} = (\mathbf{m} + \mathbf{n}) + \mathbf{z} = \mathbf{m} + (\mathbf{n} + \mathbf{z})$.



obr. 4

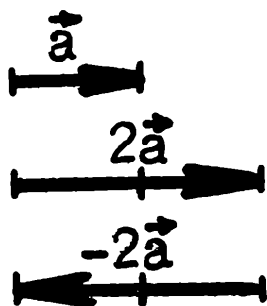


obr. 5

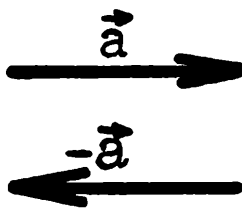
III. Jednotkový vektor

Pri počítaní s vektormi je veľmi výhodné zaviesť pojem jednotkového vektora. Jednotkový vektor je vektor daného smeru, ktorého absolútna hodnota je číslo $+1$ (bez rozmeru).

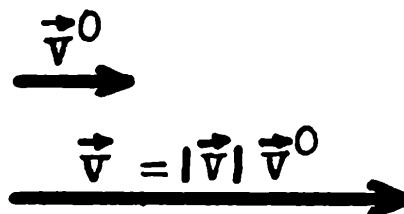
Pre označenie jednotkového vektora sa často používajú malé písmená gréckej abecedy, napr. $\vec{e}$, $\vec{v}$, $\vec{\sigma}$ a podobne, alebo jednotkový vektor, napríklad súhlasne rovnobežný s vektorom $\mathbf{a}$ sa často označuje symbolom $\mathbf{a}^0$ (každé číslo povýšené na nultú je $+1$).



obr. 6



obr. 7



obr. 8

IV. Násobenie vektora skalárom (čísлом)

Ak násobíme ľubovoľný vektor $\mathbf{a}$ skalárom (čísлом) s , dostaneme opäť vektor $\mathbf{b} = s\mathbf{a} = \mathbf{a}s$, ktorý je s vektorom $\mathbf{a}$ súhlasne rovnobežný, ak skalárny faktor s je kladný ($s > 0$), nesúhlasne rovnobežný, ak

skalárny faktor s je záporný ($s < 0$) a ktorého absolútna hodnota sa rovná súčinu absolútnych hodnôt vektora $\mathbf{a}$ a skaláru s . ($|\mathbf{b}| = |s| \cdot |\mathbf{a}|$). Ak $s = 0$ je $s\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (nulový vektor). Obrátene, kedykoľvek vektor $\mathbf{b}$ je rovnobežný s vektorom $\mathbf{a}$, jestvuje jednoznačne určený skalárny faktor s , ktorý splňuje rovnicu $\mathbf{b} = s\mathbf{a}$. Jeho absolútna hodnota je $|s| = b : a$ a jeho znamienko je kladné ak je vektor $\mathbf{b}$ s vektorom $\mathbf{a}$ súhlasne rovnobežný, záporné v prípade opačnom. Ak teda hľadáme pomer dvoch rovnobežných vektorov, stačí nájsť pomer ich veľkostí a prisúdiť im znamienko $+$ (plus) ak sú oba vektory súhlasne rovnobežné, poprípade $-$ (mínus) ak sú navzájom nesúhlasne rovnobežné. Teda

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \pm \frac{b}{a}$$

Príklad: Pre absolútnu hodnotu tiaže G telesa o hmotnosti m môžeme podľa II. Newtonovho zákona písať $G = mg$, kde g je absolútna hodnota zrýchlenia voľne padajúcich telies. Zrýchlenie je však vektorová veličina a hmotnosť skalárna. Bude teda platiť $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$. Tiaž $\mathbf{G}$ sme teda vyjadřili ako násobok skaláru m a vektora $\mathbf{g}$, a preto smer tiaže bude totožný so smerom zrýchlenia voľne padajúcich telies a jeho absolútna hodnota bude m -krát väčšia ako g (m je vždy kladné).

Násobok $(-1)\mathbf{a}$ stručne píšeme $-\mathbf{a}$. Vektor $-\mathbf{a}$ je teda vektor, ktorého absolútna hodnota sa rovná absolútnej hodnote vektora $\mathbf{a}$, má však opačný smer. Vektor $-\mathbf{a}$ nazývame vektorom opačným k vektoru $\mathbf{a}$ (obr. 7). Nie je to vektor záporný. Záporný vektor nepoznáme. Každý nenulový vektor, napr. $\mathbf{v}$ si môžeme predstaviť ako súčin jednotkového vektora $\mathbf{v}^0$, ktorý je s ním súhlasne rovnobežný a jeho absolútnej hodnoty $|\mathbf{v}|$

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \mathbf{v}^0. \quad (3)$$

Ak rovnicu (3) vynásobíme zlomkom $1 : |\mathbf{v}|$ dostaneme

$$\mathbf{v}^0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad (4)$$

Podľa rovnice (4) jednotkový vektor $\mathbf{v}$ smere ľubovoľného vektora určíme, ak daný vektor vynásobíme prevrátenou hodnotou jeho absolútnej hodnoty.

Deliť $\mathbf{a}$ ľubovoľným číslom m rôznym od nuly znamená násobiť ho číslom $\frac{1}{m}$, tj.

$$\frac{\mathbf{a}}{m} = \frac{1}{m} \mathbf{a}.$$

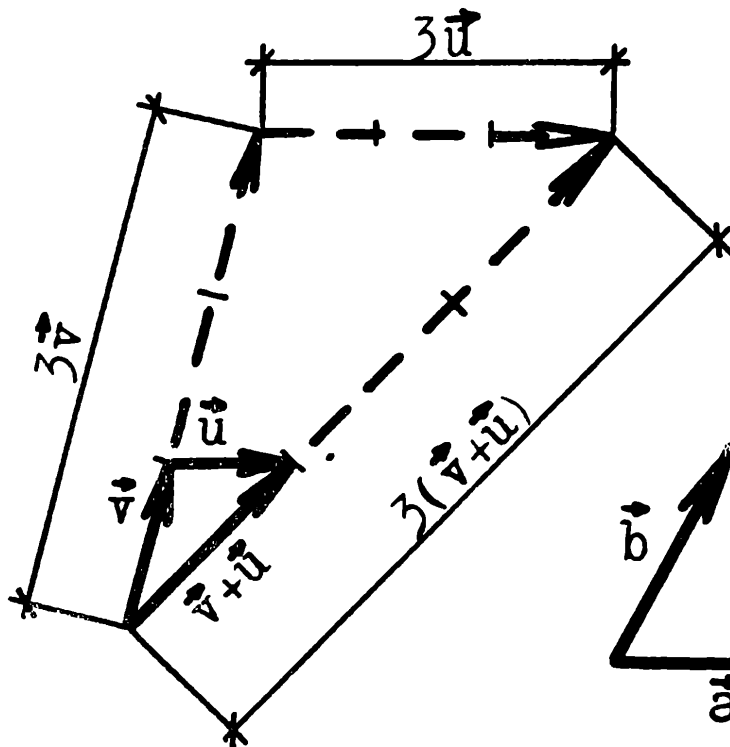
Vlastnosti, ktoré platia pre násobenie vektora číslom, si ukážeme na príkladoch.

Príklad: $(2\mathbf{v}) 3 = 3 (2\mathbf{v}) = (3 \cdot 2) \mathbf{v} = 6\mathbf{v}$.

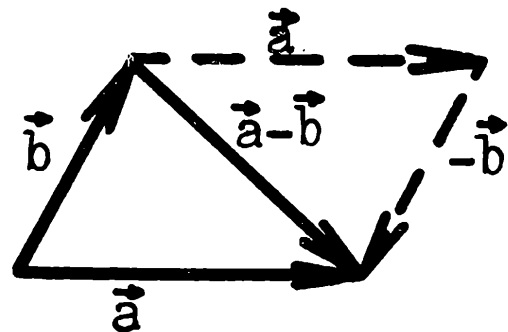
V podobných prípadoch zátvorky nie sú teda potrebné.

Príklad: $3 (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = 3\mathbf{v} + 3\mathbf{u}$.

Príklad: $2\mathbf{v} + 3\mathbf{v} = (2 + 3) \mathbf{v} = 5\mathbf{v}$.



obr. 9



obr. 10

V. Rozdiel dvoch vektorov

Každý rozdiel dvoch vektorov môžeme zapísať pomocou súčtu

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Rozdiel dvoch vektorov dostaneme, ak k menšencu pridáme vektor vzhľadom na menšiteľa opačného smeru a rovnakej absolútnej hodnoty.

Graficky je rozdiel prevedený na obr. 10. Ak obrazy menšenca a menšiteľa sú vynesené z tohože bodu, obraz rozdielu je teda orientovaná úsečka vedená od koncového bodu menšiteľa ku koncovému bodu menšenca.

(Pokračovanie)

Poznámka: Rozdiel dvoch vektorov nie je nikdy záporný. Tento fakt veľmi podstatnou mierou prispieva k názornosti a prehľadnosti vektorového počtu. Podľa veľkosti môžeme porovnávať len absolútne hodnoty vektorov.

Elektronkové zesilovače

(Pokračování)

KONRÁD HOFMAN, PF, Č. Budějovice

6. Rozdělení zesilovačů

Zesilovače můžeme dělit podle různých hledisek. Všimneme si jen dělení podle použití.

a) Zesilovače napětí mají odevzdat na výstupu co největší napětí, přičemž zatěžovací impedancí prochází jen velmi slabý proud.

b) Zesilovače proudu mají dodat do výstupní impedance (např. do vinutí relé) silný proud úměrný mřížkovému proudu. Mřížkový proud ale neprochází elektronkou, nýbrž jen mřížkovým odporem, a napětí na tomto odporu je mezi mřížkou a katodou, takže ovládá anodový proud.

c) Zesilovače výkonu mají dodat na výstupu (např. do reproduktoru) co největší výkon. K tomu se užívá tzv. koncových elektronek.

V dalším pojednáme jen o zesilovačích napětí a výkonu, a to za předpokladu, že zatěžovací impedancí je odpor R_z .

7. Zesilovače napětí

U těchto zesilovačů nám jde o získání co největšího napětí na odporu R_z , přičemž anodový proud bude malý. Triody používané pro tento účel, tzv. triody předzesilovací, mívají malou přípustnou anodovou ztrátu a velký vnitřní odpor. Tak např. trioda ECC83 má přípustnou anodovou ztrátu 1 W, vnitřní odpor 62,6 k Ω a zesilovací činitel 100.

Zesilovače pracují zpravidla s malým budícím napětím u_g , a proto můžeme použít poučky o ekvivalentním obvodu, z níž pro zesílení A ze vztahu (6) plyne

$$A = \frac{u_a}{u_g} = - \frac{u_z}{u_g} = - \mu \frac{R_z}{R_i + R_z}; \quad (A) = \frac{u_z}{u_g} = \mu \frac{R_z}{R_i + R_z} \quad (8)$$

Z tohoto vztahu je patrné, že zesílení A se bude tím více blížit zesilovacímu činiteli μ , čím bude odpor R_z větší. Je-li ale $R_z \gg R_i$, nemá již další zvětšování odporu R_z na zesílení valného vlivu, a proto nemá význam volit $R_z > 500 \text{ k}\Omega$.

8. Zesilovače výkonu

Při malém buzení, při němž získáme nezkreslený výkon, bude tento výkon maximální, volíme-li zatěžovací odpor R_z rovný vnitřnímu od-

poru triody R_i . Lze totiž dokázat, že zdroj dodává maximální výkon do spotřebiče tehdy, je-li odpor spotřebiče roven vnitřnímu odporu zdroje.

Protože se jedná o nezkreslený výkon, můžeme při řešení použít poučky o ekvivalentním obvodu triody. Výkon na zatěžovacím odporu $R_z = R_i$ bude tedy (I_a , U_g jsou efektivní hodnoty střídavého proudu a napětí)

$$P = R_z I_a^2 = R_z \left(\frac{\mu U_g}{R_i + R_z} \right)^2 = \frac{\mu^2 U_g^2}{4 R_i} = \frac{1}{4} \mu \frac{\mu}{R_i} U_g^2 = \frac{1}{4} \mu \frac{S R_i}{R_i} U_g^2 = \\ = \frac{1}{4} S \mu U_g^2 = \frac{1}{4} G U_g^2, \quad (9)$$

kde $G = S\mu$ je jakostní číslo (kvalita) triody.

Ze vztahu (9) plyne, že výkon je úměrný kvalitě triody, je tedy tím větší, čím je větší strmost a zesilovací činitel

$$\mu = \frac{1}{D}.$$

Protože strmost S nelze příliš zvětšit, je třeba zvětšit μ čili zmenšit průnik D .

Anodový proud je určen řídicím napětím $U_{ro} = U_{go} + D U_{ao}$. V zesilovači nemá téci mřížkový proud, musí proto $U_{go} < 0$, ale musí procházet anodový proud čili musí

$$U_{ro} = U_{go} + D U_{ao} > 0.$$

Z těchto dvou podmínek plyne

$$- D U_{ao} < U_{go} < 0.$$

Tento interval je maximálním pracovním rozsahem pro volbu křídového předpětí U_{go} .

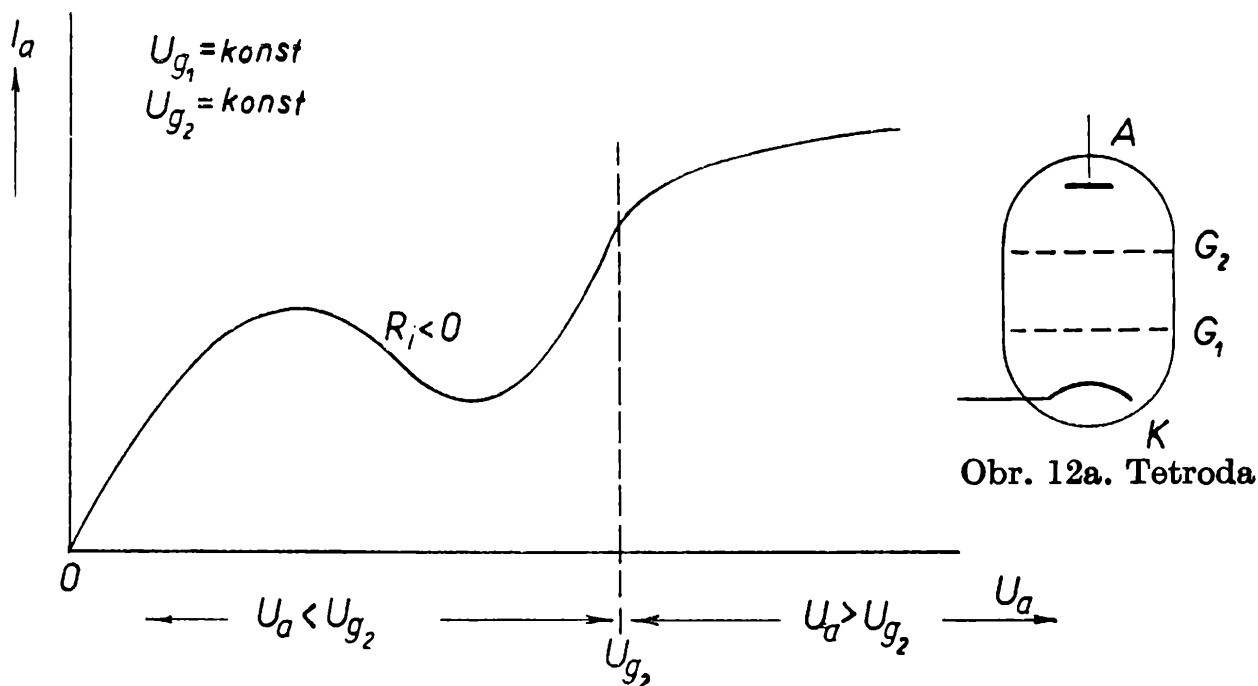
Pracovní rozsah bude tedy tím větší, čím bude větší průnik D a anodové napětí U_{ao} . Protože není vhodné zvětšovat příliš anodové napětí U_{ao} , bylo by třeba zvětšit průnik D .

9. Tetroda a pentoda

Průnik D má mít tedy dvě navzájem si odporující vlastnosti. Měl by být malý, aby bylo velké zesílení, měl by být velký, aby byl velký pracovní rozsah. Tento problém je u triody neřešitelný. Trioda má ale i jiné nedostatky, jako je např. velké zpětné působení anody na mřížku a jiné.

Tyto nedostatky lze odstranit přidáním další mřížky, čímž vznikne elektronka zvaná tetroda (obr. 12a). Mřížka G_1 je mřížkou řídicí, G_2 je mřížkou stínící.

Ukážeme jen, že stínící mřížkou se dají řešit oba vzájemně si odporující požadavky na velikost průniku.



Obr. 12b. Anodová charakteristika tetrody

Pro tetrodu lze provést podobné úvahy, jaké jsme učinili u triody.

V teoretických úvahách můžeme tetrodu nahradit triodou mající anodu v místech stínící mřížky, na níž působí napětí

$$U_{so} = U_{g2o} + D_2 U_{ao} ,$$

D_2 je průnik anody stínící mřížkou, který se volí velmi malý. Tuto triodu nahradíme diodou s řídicím napětím

$$U_{ro} = U_{g1o} + D_1 U_{so} = U_{g1o} + D_1 U_{g2o} + D_1 D_2 U_{ao} ,$$

kde D_1 je průnik druhé mřížky prvou, který se volí velký. Zvolíme-li tedy D_2 malé a D_1 velké, bude efektivní průnik anody $D_1 D_2$ malý a tudíž zesilovací činitel μ velký, současně také posouvací napětí

$$D_1 U_{g2o} + D_1 D_2 U_{ao} ,$$

které rozhoduje o pracovním rozsahu, bude rovněž velké, protože D_1 je velké a U_{g2o} lze zvolit také dost velké ($U_{g2o} \doteq U_{ao}$).

Tetroda tedy odstraňuje nedostatky triody, ale má novou vadu. Dopadem elektronů na anodu vzniká sekundární emise elektronů, která se u diody a triody nijak nepříznivě neprojevuje, poněvadž sekundární elektrony se opět vrací k anodě, jež je jedinou kladnou elektrodou soustavy. U tetrody se však může stát, že sekundární elektrony, emitované z anody, jsou přitahovány stínící mřížkou, má-li tato mřížka kladnější napětí než anoda.

Anodový proud je pak dán rozdílem primárního proudu I_{ap} přicházejícího z katody a odcházejícího sekundárního I_{as} , tedy

$$I_a = I_{ap} - I_{as} .$$

Při zvětšování U_a roste jak proud I_{ap} tak i proud I_{as} . V nějakém

oboru hodnot U_a může nyní I_{as} stoupat rychleji než I_{ap} , takže funkce $I_a = f(U_a)$ při konstantním U_{g1} a U_{g2} (anodová charakteristika) má klesající charakter. V tomto oboru (tzv. dynatronovém) má pak tetroda záporný vnitřní odpor, protože zvýšení anodového napětí odpovídá zmenšení anodového proudu, takže poměr obou změn je záporný. Obr. 12b znázorňuje typický průběh anodové charakteristiky tetrody.

Aby se tomu zamezilo, přidává se ještě další mřížka tzv. brzdící, která má potenciál stejný jako katoda. Někdy bývá (u výkonových pentod) uvnitř baňky propojena s katodou. Sekundární elektrony se potom vracejí zpět k anodě, poněvadž brzdící mřížka vytvoří před anodou záporný spád potenciálu, který je tak velký, že zastaví sekundární elektrony letící od anody a vrátí je zpět. Tato dnes nejužívanější elektronka se nazývá pentoda.

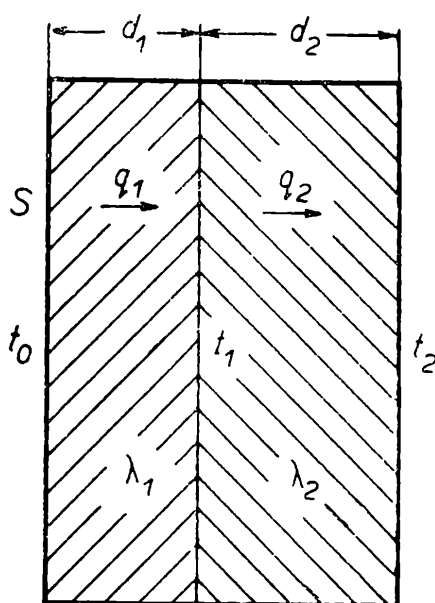
(Dokončení)

Prenos tepla

(Pokračovanie)

DOC. RNDr. IVAN NÁTER, SVŠT, Bratislava

Príklad: Doteraz uvedené vzťahy použijeme na riešenie tejto úlohy: Rovinná doska sa skladá z dvoch k sebe tesne priliehajúcich vrstiev hrúbok d_1 a d_2 , ktorých súčinitele tepelnej vodivosti sú λ_1 a λ_2 . Treba vypočítať množstvo tepla Q , ktoré za ustáleného tepelného toku prejde doskou za čas τ , ak plocha dosky je S a okrajové teploty sú t_0 a t_2 ($t_0 > t_2$). Ďalej treba vypočítať teplotu t_1 na rozhraní oboch vrstiev (obr. 2).



Obr. 2

Riešenie: Označme hustotu tepelného toku v prvej vrstve q_1 , v druhej q_2 . Podľa vzťahu (3) sú

$$q_1 = \lambda_1 \frac{t_0 - t_1}{d_1} \text{ a } q_2 = \lambda_2 \frac{t_1 - t_2}{d_2}, \quad (4)$$

pretože podľa zadania úlohy je zrejme $t_0 > t_1 > t_2$.

Podľa predchádzajúcich úvah pri ustálenom tepelnom toku je však $q_1 = q_2 = q$. Ak zo vzťahov (4) vyjadríme teplotné rozdiely $t_0 - t_1$, resp. $t_1 - t_2$

$$t_0 - t_1 = q \frac{d_1}{\lambda_1}, \quad t_1 - t_2 = q \frac{d_2}{\lambda_2}$$

a sčítame ľavé strany týchto rovníc a tiež ich pravé strany, dostaneme

$$t_0 - t_2 = q \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} \right),$$

odkiaľ vychádza

$$q = \frac{t_0 - t_2}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} \quad (5)$$

Podľa (2a) je potom

$$Q = qS\tau = \frac{t_0 - t_2}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} S\tau$$

Teplotu t_1 môžeme vypočítať napr. z prvej z rovníc (4) s použitím výsledku (5)

$$t_1 = t_0 - q \frac{d_1}{\lambda_1} = t_0 - \frac{t_0 - t_2}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} \cdot \frac{d_1}{\lambda_1}$$

Môžeme ovšem pre výpočet teploty t_1 použiť aj druhú z rovníc (4). Tak dostaneme výsledok

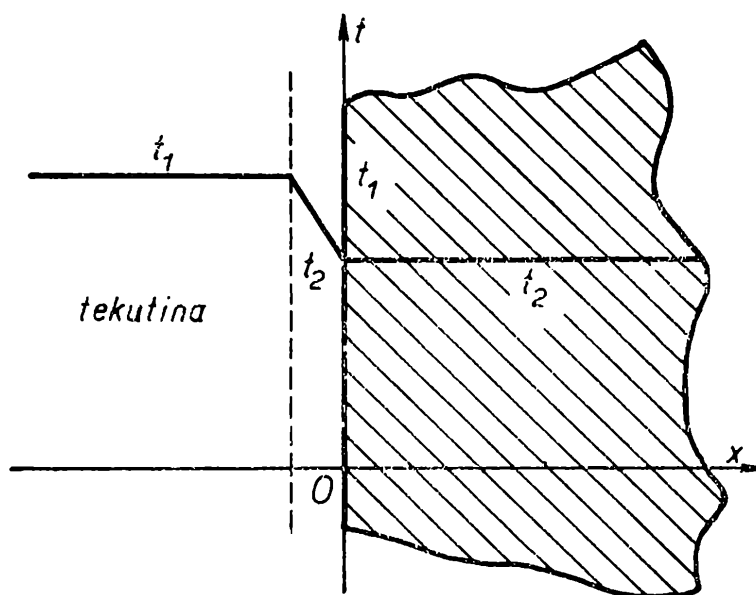
$$t_1 = t_2 + q \frac{d_2}{\lambda_2} = t_2 + \frac{t_0 - t_2}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} \cdot \frac{d_2}{\lambda_2}$$

Obe získané vyjadrenia teploty t_1 sú ovšem zhodné. Presvedčte sa o tom napr. tak, že od prvého výrazu vyjadrujúceho teplotu t_1 odčítate druhý. Tento rozdiel sa identicky rovná nule.

3. *Prestup tepla*

Naše predchádzajúce úvahy sa vzťahovali na vedenie tepla v telesách rozličných skupenstiev, museli sme však predpokladať, že pri vedení tepla v kvapalinách a plynch sa ich jednotlivé objemové elementy nepohybujú. Skutočnosť však môže byť iná. Ak ohrievame kvapalinu alebo plyn zdola, poruší sa v nich mechanická rovnováha, pretože teplejšie spodné vrstvy tekutiny majú menšiu mernú hmotnosť ako chladnejšie vrstvy horné. V tekutinách nastáva účinkom tiažového poľa prúdenie, pri ktorom prechádza teplo z miest o vyššej teplote na miesta o nižšej teplote omnoho rýchlejšie než pri čistom vedení tepla. Prúdenie tekutiny môžeme podľa potreby aj umele udržiavať pomocou miešačiek, čerpadiel, ventilátorov.

Iná je situácia na rozhraní, ktoré oddeľuje tuhú látku od kvapaliny alebo plynu. Ak teplo prechádza z tekutiny do tuhej látky alebo naopak, hovoríme o prestupe tepla rozhraním.



Obr. 3

Uvažujme prípad znázornený na obr. 3. Rovinné rozhranie σ nech oddeľuje tekutinu teploty t_1 od tuhého telesa, ktoré vhodným spôsobom udržíme na teplote $t_2 < t_1$. Pretože v tekutinách sa teploty rýchlo vyrovnávajú, môžeme predpokladať, že teplota v tekutine aj v malých vzdialenostiach od steny je všade rovnaká (t_1). Na povrchu pevného telesa je však tenká vrstva tekutiny (hraničná vrstva), vytvorená adsorpciou — príľnutím, kde tekutina môže prúdiť len laminárne rovno-bežne s rovinou rozhrania. Touto vrstvou môže sa teplo smerom k stene šíriť len vedením, preto v tejto vrstve môže vzniknúť aj pomerne veľký teplotný spád. Teplota ako funkcia vzdialenosti x od rozhrania je graficky znázornená na obr. 3.

Pre hustotu tepelného toku q v hraničnej vrstve z meraní vychádza lineárna závislosť od teplotného rozdielu $t_1 - t_2$

$$q = \alpha (t_1 - t_2) . \quad (6)$$

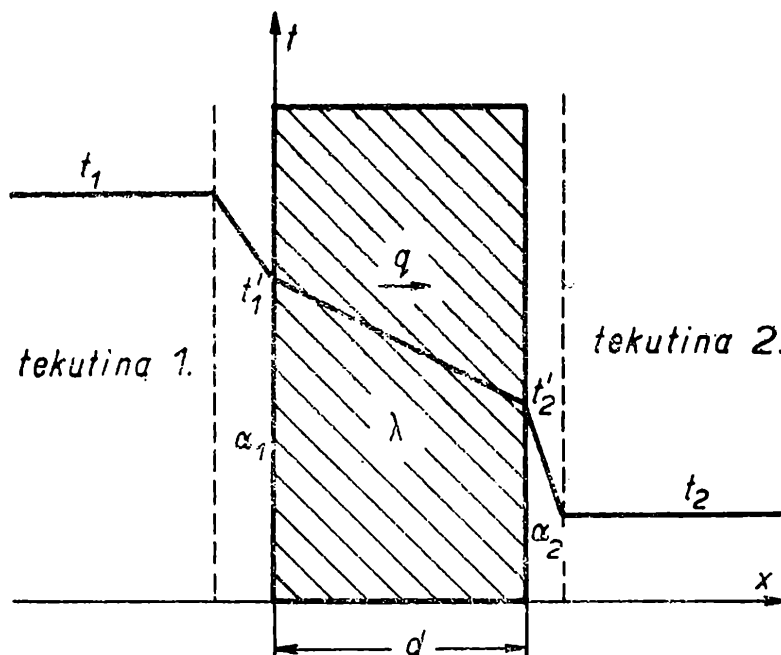
Konštanta úmernosti α v tomto vzťahu sa nazýva súčiniteľ prestupu tepla. Nezávisí len od akosti stýkajúcich sa látok, ale aj od drsnosti povrchu tuhého telesa a od toho, či je tekutina v pokoji, alebo či sa pohybuje. V sústave SI sa meria v jednotkách $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{deg}^{-1}$, v technickej praxi v jednotkách $\text{kcal m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{deg}^{-1}$.

Cez plochu S rozhrania prejde teda podľa (2a) množstvo tepla

$$Q = \alpha S \tau (t_1 - t_2) \quad (7)$$

Príklad: Vzduch v miestnosti má teplotu $t_1 = 24^\circ\text{C}$, vnútorné povrchové plochy stien teplotu $t_2 = 19^\circ\text{C}$. Koľko tepla prejde za 24 h do jednej steny, ktorej rozmery sú 4 m a 3,5 m, ak súčiniteľ prestupu tepla $\alpha = 5 \text{ kcal m}^{-2} \text{h}^{-1} \text{deg}^{-1}$?

Riešenie: Podľa zadania sú $\alpha = 5 \text{ kcal m}^{-2} \text{ h}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, $S = 4 \text{ m} \cdot 3,5 \text{ m} = 14 \text{ m}^2$, $\tau = 24 \text{ h}$, $t_1 = 24^\circ \text{C}$, $t_2 = 19^\circ \text{C}$. Dosadením do vzťahu (7) dostaneme



Obr. 4

$$Q = 5 \text{ kcal m}^{-2} \text{ h}^{-1} \text{ deg}^{-1} \cdot 14 \text{ m}^2 \cdot 24 \text{ h} \cdot (24^\circ \text{C} - 19^\circ \text{C}) = 8400 \text{ kcal}.$$

Do jednej steny prejde z miestnosti za 24 hodín 8400 kcal tepla.

4. Prechod tepla stenou

Predchádzajúce vzťahy, najmä (3) a (6), použijeme teraz na riešenie problému tzv. prechodu tepla stenou. Podľa obr. 4 uvažujme tuhú stenu hrúbky d , ktorá oddeluje dve tekutiny. Tekutina vľavo od steny nech má teplotu t_1 , tekutina vpravo od steny teplotu $t_2 < t_1$. Súčiniteľ tepelnej vodivosti steny nech je λ , súčiniteľ prestupu tepla v prvej hraničnej vrstve α_1 , v druhej α_2 . Aká je hustota tepelného toku z tekutiny o vyššej teplote cez stenu do tekutiny o nižšej teplote?

Vychádzame z podmienky konštantnej hustoty tepelného toku. V prvom rozhraní sa ustáli nejaká teplota t'_1 , v druhom t'_2 , pričom sú $t_1 > t'_1 > t'_2 > t_2$. Teplota ako funkcia vzdialenosti x od prvého rozhrania je graficky znázornená na obr. 4.

Podľa (3) a (6) vyjadríme postupne hustotu tepelného toku v prvej hraničnej vrstve, v stene a v druhej hraničnej vrstve

$$q = \alpha_1 (t_1 - t'_1), \quad q = \lambda \frac{t'_1 - t'_2}{d},$$

$$q = \alpha_2 (t'_2 - t_2)$$

Z týchto rovníc vyjadríme najprv príslušné teplotné rozdiely

$$t_1 - t'_1 = \frac{q}{\alpha_1}, \quad t'_1 - t'_2 = \frac{qd}{\lambda}, \quad t'_2 - t_2 = \frac{q}{\alpha_2}.$$

Sčítaním ľavých strán a pravých strán posledných troch rovníc dostávame

$$t_1 - t_2 = q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)$$

Podľa tohto výsledku hustota tepelného toku pri ustálenom prechode stenou je

$$q = k (t_1 - t_2). \quad (8)$$

Konštanta úmernosti k je určená vzťahom

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (9)$$

Táto konštanta sa nazýva **súčiniteľ prechodu tepla stenou**. Fyzikálny rozmer súčiniteľa prechodu tepla stenou je tožný s rozmerom súčiniteľa prestupu tepla.

V nasledujúcich tabuľkách sú uvedené súčinitele tepelnej vodivosti a súčinitele prestupu tepla pre niektoré látky.

Tabuľka 1. Súčinitele tepelnej vodivosti

Látka	λ kcal m ⁻¹ h ⁻¹ deg ⁻¹
Striebro	363,60
Meď	327,60
Železo	50,40 až 61,20
Tehla	0,36 až 0,72
Sklo	0,36 až 0,72
Drevo	0,11 až 0,21
Betón	0,18 až 1,10

Tabuľka 2. Súčinitele prestupu tepla

Látka	α kcal m ⁻² h ⁻¹ deg ⁻¹
Kľudný vzduch	3 až 10
Prúdiaci vzduch	10 až 500
Prúdiaca kvapalina	200 až 5000

≡ NAŠE SOUTĚŽ ≡

Soutěž pro školní rok 1968-69

Redakce vypisuje jako každoročně soutěž v řešení příkladů z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie.

Řešení každého příkladu pište čitelně, vždy na zvláštní list, formátu A4 (nečitelná řešení budeme letos automaticky vyřazovat) po jedné stránce, vpravo dole uveďte své plné jméno, třídu, školu a své bydliště.

Příklady řešte samostatně, věcně, přitom odborně správně, ekonomicky s užitím platné symboliky. Na rozdíl od dřívějších let se mohou letos zúčastnit soutěže i kolektivy — nejvýše trojčlenné — z téže třídy. Jména členů kolektivu a jejich adresy napište na nepopsanou druhou stránku papíru. Při eventuálním umístění má kolektiv ovšem nárok jen na jedinou cenu.

Řešení první části soutěžních příkladů (matematika 1—12), otištěných v tomto čísle, zašlete nejpozději do konce ledna 1969 na adresu vedoucího redaktora: Doc. Ota Šetzer, Trojanova 13, Praha 2.

Matematika

1. Budiž ϱ poloměr kružnice vepsané do rovnoramenného trojúhelníka P_1 , ϱ_1 poloměr kružnice připsané jeho základně, ϱ_2 poloměr kružnice připsané jeho rameni. Při konstantním ϱ sestrojíme další rovnoramenné trojúhelníky $P_2, P_3, \dots, P_n$, podle schématu

Trojúhelník	Poloměr vepsané kružnice	Poloměr kružnice připsané základně	Poloměr kružnice připsané rameni
P_1	ϱ	ϱ_1	ϱ_2
P_2	ϱ	ϱ_2	ϱ_3
P_3	ϱ	ϱ_3	ϱ_4
$\vdots$			
P_{n-1}	ϱ	ϱ_{n-1}	ϱ_n

Dokažte, že pro $n \rightarrow \infty$ blíží se trojúhelníky P_n tvarem trojúhelníku rovnostrannému, který je opsán kružnici poloměru ρ .

Josef Brejcha

2. Body A_1, A_2, A_3 tvoří rovnoramenný trojúhelník o hlavním vrcholu A_3 ; ρ budiž poloměr kružnice jemu vepsané. Při konstantním ρ určete polohu vrcholu A_3 tak, aby délka ramen $A_1A_2 = A_2A_3$ byla minimální.

Josef Brejcha

3. Rovnice

$$x^4 + kx^3 + lx^2 + 60x + m = 0,$$

kde k, l, m jsou reálná čísla, má dva reálné různé dvojnásobné kořeny.

a) Napište vztah mezi koeficienty k, l, m .

b) Volte $l = -11$, určete dvojnásobné kořeny a koeficienty k, m .

c) Proveďte zkoušku.

Jan Fráňa

4. Závod na výrobu konfekčního zboží měl zhotovit 1000 obleků tří různých druhů v úhrnné ceně 570 000 Kčs. Oděvy 1. druhu byly po 520 Kčs a závod na každém vydělal 70 Kčs, oděv 2. druhu byl za 580 Kčs a zisk závodu byl 80 Kčs, oděv 3. druhu se prodával po 620 Kčs a závod na něm vydělal 100 Kčs. Od každého druhu mělo být ušito aspoň 300 oděvů. Kolik oděvů jednotlivých druhů závod zhotovil, měl-li být zisk maximální? Jak velký byl tento zisk?

Stanislav Horák

5. Najděte ostré úhly vyhovující rovnicím

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + \frac{\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) \operatorname{cotg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) + \operatorname{cotg}(\alpha - \beta)} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Stanislav Horák

6. Na obr. 1 je zobrazena horní část okna, jehož klenutí je tvořeno půlkružnicí o poloměru $\frac{3}{2}a$.

a) Vypočtete průměr x vepsané kružnice.

b) Proveďte a popište geometrickou konstrukci této kružnice.

Jaromír Hroník

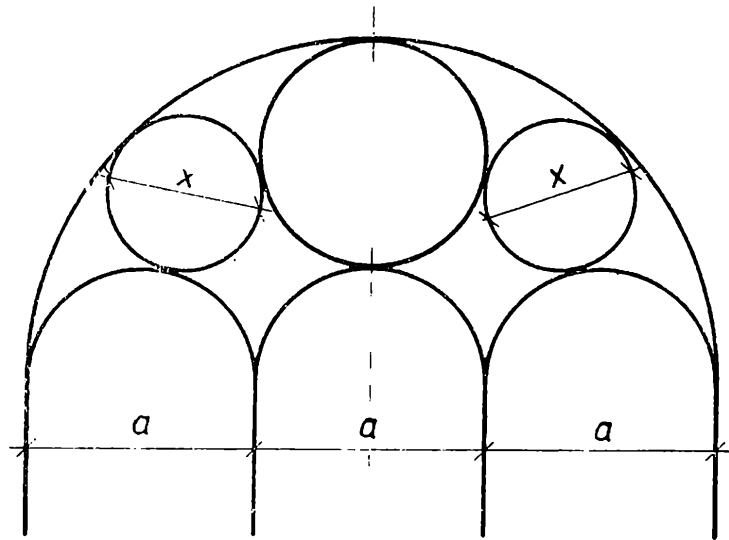
7. Dokažte správnost této konstrukce středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC : Ve vrcholu B vztyčme na stranu AB kolmici b ; ve

vrcholu C vztyčme na stranu AC kolmici c . Přímky b, c se protnou v bodě K . Střed úsečky AK je středem kružnice opsané danému trojúhelníku ABC .

Adolf Karger

8. Najděte největší přirozené číslo, které **n e l z e** vyjádřit ve tvaru:
a) $7x + 11y$; b) $7x + 11y + 13z$, kde x, y, z jsou přirozená čísla.

František Kejla



Obr. 1

9. Sečtěte n členů posloupnosti

$$\frac{a}{1+a} + \frac{a}{(1+a)(1+2a)} + \frac{a}{(1+2a)(1+3a)} + \dots + \frac{a}{[1+(n-1)a](1+na)}$$

Jaké hodnotě se blíží velikost součtu, jestliže počet členů vzrůstá bez omezení?

Josef Kotyk

10. Je-li $z > 2$ základ číselné soustavy, pak čísla $(z-1)^2, 2(z-1)$ napsaná v této soustavě mají vždy obrácený sled cifer. Dokažte.

Corneliu Popescu

11. Rozhodněte, zda libovolné dva body ležící v daném mezikruží je možno spojit kruhovým obloukem, který celý leží v tomto mezikruží.

Jiří Sedláček

12. Znázorněte graficky průběh funkcí

$$\text{a) } y = (\sqrt{\sin x})^2; \quad \text{b) } y = \frac{2 \sin^2 x}{\sin x + |\sin x|}.$$

Jiří Sedláček

Závěrečné poznámky k loňské soutěži Rozhledů

Loňské soutěže se zúčastnilo 69 řešitelů (63 jednotlivci a 6 kolektivů), mezi jednotlivci bylo 8 dívek. Celkem došlo 756 řešených příkladů. Řešení všech příkladů z matematiky zaslalo 17 studentů a jeden kolektiv, z fyziky 15 + 1, z konstruktivní geometrie 16 + 1; řešení všech 22 příkladů jsme obdrželi od 7 řešitelů. Potěšující byla účast 2 žáků a 1 žákyně z IX. třídy ZDŠ: Heleny Husové, Jiřího Parobka a Karla Šafaříka. Překvapuje neúčast řešitelů z průmyslových škol; čest pražského studentstva zachraňuje jako obvykle SVVŠ W. Piecka a dva řešitelé ze ZDŠ.

Úroveň soutěže proti loňsku stoupla, chybných řešení bylo poměrně málo.

Výsledky v matematice:

1. Komorník Jozef III.C, SVŠ, Holič	72 bodů
2.—3. Čech Vladimír, III.A, SVŠ, Bratislava	70 bodů
2.—3. Polcar Pavel, III.B, SVVŠ, Velké Meziříčí.	70 bodů
4. Kříž Miloš, III.S, SVVŠ, Brno	69 bodů
5.—10. Černák Juraj, III.A, SVŠ, Turč. Teplice	68 bodů
5.—10. Horáček Milan, III.A, SVVŠ, Ledec n. Sázavou	68 bodů
5.—10. Mašek Tomáš, III.F, SVVŠ, Praha 2	68 bodů
5.—10. Polák Libor, III.A, SVVŠ, Brno	68 bodů
5.—10. Šafařík Jiří, I.B, SVŠ, Bratislava	68 bodů
5.—10. Šafařík Karol, IX.B, ZDŠ, Bratislava	68 bodů

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož vnitřní při základně AB je α . Na rameni AC sestrojíme vnitřní bod D tak, aby $BD = BA$, na rameni BC vnitřní bod E tak, aby $DE = BA$. Jak velký musí být úhel α , aby $CE = AB$?

(Došlo 57 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Jiří Parobek, žák 9.a ZDŠ Praha 4:

Trojúhelníky ADB , BED a DCE jsou vesměs rovnoramenné a pak platí

$$\begin{aligned}\sphericalangle DBA &= 180^\circ - 2\alpha, \\ \sphericalangle DBE &= \alpha - \sphericalangle DBA = 3\alpha - 180^\circ \\ \sphericalangle DEC &= 180^\circ - \sphericalangle DEB = 180^\circ - \sphericalangle DBE = \\ &= 360^\circ - 3\alpha.\end{aligned}\tag{1}$$

Dále platí

$$\gamma = \sphericalangle ACB = 180^\circ - 2\alpha,\tag{2}$$

$$\sphericalangle CDE = \gamma = 180^\circ - 2\alpha.\tag{3}$$

Součet úhlů v trojúhelníku CDE je roven 180° a tudíž

$$\sphericalangle DEC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CDE = 180^\circ$$

Z rovnic (1), (2), (3) sem dosadíme

$$360^\circ - 3\alpha + 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ$$

Odtud již máme

$$7\alpha = 540^\circ,$$

$$\alpha = \frac{6}{7} R$$

Pro existenci rovnoramenného trojúhelníka je nutné (a také stačí), aby $\alpha < R$. Jak vidět, je tato podmínka v našem případě splněna.

Odpověď: Aby $CE = AB$, musí být $\alpha = \frac{6}{7} R$.

6. Určete součet prvních n členů posloupnosti

$$25, 77, 153, 253, 377, 525,$$

Matematickou indukci se přesvědčte o správnosti nalezeného výsledku.

(Došlo 49 řešení)

Ota Setzer

Řešil Tomáš Mašek, II.F SVVŠ W. Piecka, Praha 2:

Utvořme rozdíly dvou po sobě následujících členů dané posloupnosti $\{a_n\}$

$$a_2 - a_1 = d_1 = 52 ; a_3 - a_2 = d_2 = 76 ; a_4 - a_3 = d_3 = 100 ;$$

$$a_5 - a_4 = d_4 = 124 ; a_6 - a_5 = d_5 = 148 . \quad (1)$$

Posloupnost $\{d_n\}$ má konstantní rozdíly dvou po sobě jdoucích členů

$$d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = d_4 - d_3 = d_5 - d_4 = \delta = 24 ; \quad (2)$$

je proto daná posloupnost $\{a_n\}$ aritmetickou posloupností druhého řádu

$$d_n = d_1 + (n - 1) \delta = 52 + 24 (n - 1) = 28 + 24n \quad (3)$$

Z (1) plyne

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 + d_1 \\ a_3 = a_2 + d_2 \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + d_{n-1} \end{array} \right\} \quad (1')$$

Sečtením rovnic (1') dostaneme

$$a_n = a_1 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{n-1} ,$$

což po dosazení z (3) vede k výsledku

$$a_n = 25 + 28 (n - 1) + 24 [1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)] ,$$

$$a_n = 28n - 3 + 12 (n - 1) n = 12n^2 + 16n - 3 . \quad (4)$$

Součet s_n prvních n členů posloupnosti $\{a_n\}$ je podle toho

$$s_n = 12 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \\ + 16 (1 + 2 + 3 + \dots + n) - 3n ,$$

$$s_n = 2 (2n + 1) (n + 1) n + 8 (n + 1) n - 3n = \\ = n [4n^2 + 6n + 2 + 8n + 8 - 3] ,$$

$$s_n = n (4n^2 + 14n + 7) . \quad (5)$$

Důkaz vzorce (5) provedeme úplnou indukcí.

I. Pro $n = 1$, $s_1 = 25$, vzorec platí.

II. Předpokládáme, že platí pro $n \geq 1$

$$s_n = n (4n^2 + 14n + 7) ,$$

pak podle (4)

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = 4n^3 + 14n^2 + 7n + 12 (n + 1)^2 + \\ + 16 (n + 1) - 3 ,$$

$$s_{n+1} = 4n^3 + 26n^2 + 47n + 25 \quad (6)$$

Podle (5) však

$$\begin{aligned}s_{n+1} &= 4(n+1)^3 + 14(n+1)^2 + 7(n+1), \\s_{n+1} &= 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 14(n^2 + 2n + 1) + 7n + 7 \\s_{n+1} &= 4n^3 + 26n^2 + 47n + 25,\end{aligned}\tag{7}$$

což je shodný výraz se (6); tím je důkaz proveden.

Poznámka autora. Originální řešení pomocí nehomogenní diferenční rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty zaslal *Josef Hrdlička*, 3. roč. VUT, fak. elektr., Brno.

9. Jaký je součet koeficientů v rozvinutém mnohočlenu

$$(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1)^{1967} ?$$

(Došlo 42 řešení)

Ota Setzer

Řešil *Pavel Polcar, III.B SVVŠ, Velké Meziříčí*:
Máme-li nějaký mnohočlen

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

pak součet jeho koeficientů je vlastně funkční hodnota mnohočlenu v bodě $x = 1$, tj.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(1).$$

V našem případě je

$$f(x) = (x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1)^{1967}$$

Hledaný součet koeficientů je tedy roven

$$f(1) = (1 - 5 + 7 - 5 + 1)^{1967} = (-1)^{1967} = -1$$

Fyzika

1. Po nakloněné dokonale drsné rovině délky s , která svírá s vodorovnou rovinou úhel α , valí se do vodorovné roviny koule poloměru r . Jakou dráhu vykoná koule po vodorovné rovině než se zastaví? Koeficient valivého tření mezi koulí a rovinou je ξ . (Moment setrvačnosti koule $I = \frac{2}{5}mr^2$.)

(Došlo 24 řešení)

Josef Dibelka

Autorovo řešení:

Potenciální energie koule v nejvyšším bodě nakloněné roviny se přemění v energii kinetickou valivého pohybu a práci, kterou musí koule vykonat po nakloněné rovině

$$mgs \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{\xi}{r}mg \cdot s \cos \alpha ;$$

$$I = \frac{2}{5} m r^2 ; \omega = \frac{v}{r} ,$$

$$g \cdot s \cdot \sin \alpha = \frac{7}{10} v^2 + \frac{\xi}{r} g s \cdot \cos \alpha ,$$

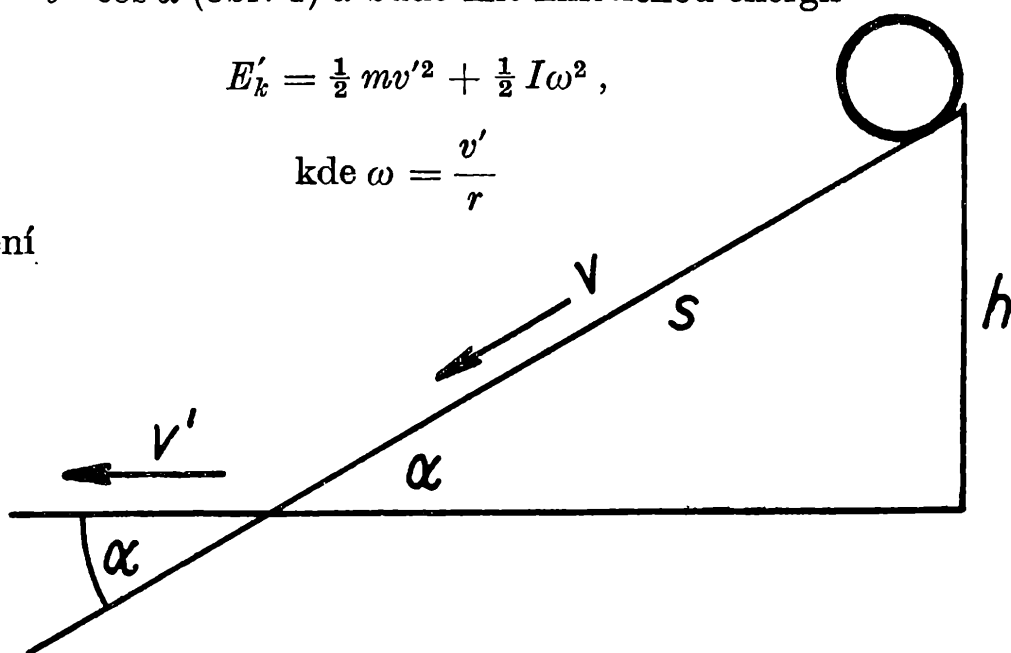
$$v^2 = \frac{10}{7} g s \left(\sin \alpha - \frac{\xi}{r} \cos \alpha \right)$$

Vektor rychlosti v je rovnoběžný s délkou nakloněné roviny. Po vodorovné rovině se bude koule pohybovat složkou rychlosti v , a to rychlostí $v' = v \cos \alpha$ (obr. 1) a bude mít kinetickou energii

$$E'_k = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 ,$$

$$\text{kde } \omega = \frac{v'}{r}$$

Po dosazení



Obr. 1

$$E'_k = \frac{7}{10} m v'^2 .$$

Práce síly valivého tření po dráze x , kterou vykoná koule než se zastaví, je rovna změně kinetické energie

$$- \frac{\xi}{r} m g \cdot x = - \frac{7}{10} m v'^2$$

Po dosazení za v' a po úpravě

$$x = \frac{r \cdot s}{\xi} \left(\sin \alpha - \frac{\xi}{r} \cos \alpha \right) \cos^2 \alpha .$$

2. Je-li zdroj napětí zatížen odporem R_1 , dává napětí U_1 . Je-li zatížen odporem R_2 , dává napětí U_2 . Voltmetr, kterým odčítáme napětí, má vnitřní odpor R_v . Vypočítejte vnitřní odpor zdroje.

(Došlo 19 řešení)

Josef Dibelka

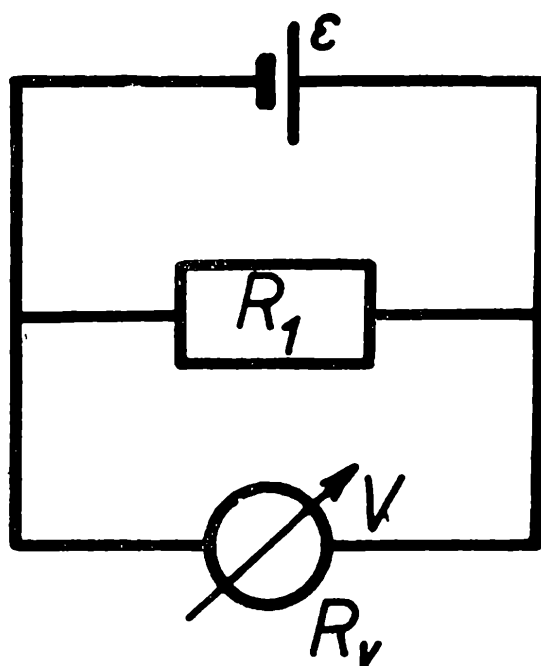
Řešil Miroslav Kawalec, III.b SVVŠ Haviřov:

Voltmetr o odporu R_v je zapojen s odporem R_1 , resp. s odporem R_2 paralelně; celkový odpor je R , resp. R' (obr. 1)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_v} \Rightarrow R = \frac{R_1 \cdot R_v}{R_1 + R_v},$$

$$R' = \frac{R_2 \cdot R_v}{R_2 + R_v}$$

Elektromotorické napětí zdroje označme E , jeho vnitřní odpor R_i , I , protékající odpor v nerozvětvené části při zapojení odporu R_1 a I_2



Obr. 2

při zapojení odporu R_2 . Elektromotorické napětí v obou případech je stejné, platí

$$\xi = R_i I_1 + U_1,$$

$$\xi = R_i I_2 + U_2.$$

Po odečtení druhé rovnice od první dostaneme

$$0 = R_i (I_1 - I_2) + U_1 - U_2. \quad (1)$$

Dále platí

$$I_1 = \frac{U_1}{R} = \frac{U_1 (R_1 + R_v)}{R_1 \cdot R_v},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R'} = \frac{U_2 (R_2 + R_v)}{R_2 \cdot R_v}$$

Dosadíme tyto výrazy do rovnice (1)

$$0 = R_i \left[\frac{U_1 (R_1 + R_v)}{R_1 \cdot R_v} - \frac{U_2 (R_2 + R_v)}{R_2 \cdot R_v} \right] + U_2 - U_1$$

Po úpravě

$$R_i = \frac{(U_2 - U_1) \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_v}{U_1 R_2 (R_1 + R_v) - U_2 R_1 (R_2 + R_v)}$$



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

Je dán trojúhelník ABC . Najděte přímku, od níž jsou všechny tři vrcholy trojúhelníka stejně vzdáleny.

Stanislav Horák ml.

5. Jsou dány dva různé body A , K . Bodem A (resp. K) procházejí přímky a , b , c , d , e (resp. k , l , m , n , p).

a) V kolika bodech se protínají přímky první pětice s přímkami druhé pětice, jestliže žádná z přímek a , b , c , d , e (k , l , m , n , p) neprochází bodem K (resp. A) a jestliže žádná z přímek první pětice není rovnoběžná s některou přímkou druhé pětice?

b) Kolik bude různých průsečíků, jestliže přímka a je rovnoběžná s přímkou k a přímka b je rovnoběžná s přímkou l ?

c) Kolik bude různých průsečíků, jestliže $a \parallel k$ a přímka b prochází bodem K ?

Stanislav Horák ml.

7. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ (konvexní). Najděte kružnici, od níž by měly body A , B , C , D stejné vzdálenosti.

Vysvětlení. Vzdálenost bodu M od kružnice k zjistíme takto:

Polopřímka SM — kde S je střed kružnice k — protne kružnici k v bodě L . Délka úsečky ML je vzdálenost bodu M od kružnice k .

Stanislav Horák ml.

8. Určete dvojciferné číslo, v jehož dvojmoci a trojmoci jsou obsaženy všechny cifry od 0 do 9, každá jen jednou.

O. S.

9. Čtyři osoby mají křestní jména Antonín, Bedřich, Cyril a David. Jejich příjmení jsou Antonín, Bedřich, Cyril a David. Víme o nich:

a) Nikdo z nich nemá stejné křestní jméno jako příjmení.

b) Cyrilovo příjmení není Antonín.

c) Bedřichovo příjmení je stejné jako křestní jméno osoby, jejíž příjmení souhlasí s křestním jménem toho, jenž má příjmení David.

Udejte úplná jména našich čtyř mužů.

O. S.

10. Šest studentů druhého ročníku strojí fakulty je ubytováno ve Strahovských kolejích. Jednou za měsíc odjíždějí v pátek na volnou sobotu a neděli k rodičům. Jaroslava bydlí šestkrát blíže než Pepík. Ivan bydlí tak daleko jako Zdeněk a Milan dohromady. Kdyby Pepík bydlel o 20 km dále, měl by Ivan cestu domů čtyřikrát kratší. Pepík to má domů tak daleko jako Bohouš, Ivan, Jaroslava a Milan dohromady. Bohouš má cestu kombinovanou vlakem a autobusem. Cestu vlakem má třikrát kratší než je cesta Pepíkova a autobusem jede ještě 10 km. Cesta Zdeněka domů a nazpátek je stejně dlouhá jako Jardova cesta k rodičům. Dokážete spočítat, jak daleko jezdí jednotliví studenti domů?

S. H. ml.

11. Na vyvolávání negativu připravuji si vývojku z převařené vody a zvláštního tekutého přípravku zvaného Rodinal. Vody dávám 40 dílů a jeden díl Rodinalu.

a) Kolik musím přidat Rodinalu, mám-li 1320 ml vody?

b) V jedné nádobě jsem měl směs 1500 ml vody a 240 ml Rodinalu a v druhé nádobě 3775 ml vody a 10 ml Rodinalu. Poradte, kolik směsi z první nádoby musím vlít do druhé nádoby, abych obdržel vývojku ve správném poměru (tj. 1 : 40).

S. H. ml.



Komplexní čísla a funkce

J I Ř Í J A R N Í K :

Komplexním číslům a funkcím je v edici Škola mladých matematiků věnován 19. svazek. Všimněme si stručně jeho obsahu. Nejprve si v úvodním článku zopakujeme definici komplexních čísel a uvědomíme si, že je můžeme znázorňovat jako vektory v rovině a vyjadřovat v goniometrickém tvaru. V 1. kapitole si procvičíme počítání s komplexními čísly a dokážeme si některé základní poučky. Kapitola 2. se zabývá odmocňováním komplexních čísel. Ve škole jste se jistě učili o kvadratických rovnicích s reálnými koeficienty a naučili jste se počítat jejich kořeny. Možná, že vás tehdy napadla otázka, jak by to bylo, kdyby koeficienty rovnice byla obecná komplexní čísla. A právě řešení této úlohy zde najdete v příkladu 15. Používá se v podstatě téže metody jako pro rovnice s reálnými koeficienty, jen je třeba dobře pochopit, co rozumíme odmocninou z komplexního čísla. To je zde také pěkně vysvětleno. Dokonce v příkladu 20 se vyšetřuje problém n -té odmocniny komplexního čísla. Ve 3. kapitole se naučíme znázorňovat komplexní čísla body v Gaussově rovině. Množinu komplexních čísel, vyhovujících jistým algebraickým vztahům, můžeme si pak představit jako geometrické místo bodů v Gaussově rovině. Právě na toto téma byla např. jedna z úloh 17. ročníku MO.

Na dalších stránkách knížka již mírně přesahuje středoškolské učivo. Nejprve se ve 4. kapitole rozšiřuje známý pojem reálné funkce v tom smyslu, že reálným číslům můžeme přiřazovat čísla komplexní, a nikoli jen reálná. Tak dostaneme komplexní funkci reálné proměnné. Takovou funkci si můžeme rozložit na dvě reálné funkce reálné proměnné, totiž na tzv. reálnou a imaginární část. Podstatně novější případ však nastává, když i nezávisle proměnná bude probíhat nějakou množinu komplexních čísel. Tak přicházíme v 5. kapitole k vyšetřování funkcí kom-

plexní proměnné. Prozkoumáme si aspoň několik příkladů. Zde se geometrické znázorňování funkcí stává již těžší. V závěrečné 6. kapitole se seznámíme s důležitými funkcemi komplexní proměnné — exponenciálou a logaritmem. Definuje se exponenciální funkce v komplexním oboru (to souhlasí se známou definicí, jestliže proměnná je reálná) a odvozují se její základní vlastnosti. Mimo jiné se ukazuje, že je to periodická funkce s periodou $2\pi i$, což je podstatně jiný výsledek než v reálném oboru. To se ostatně v teorii funkcí komplexní proměnné stává častěji. Tak např. komplexní logaritmus, který se definuje dále, je vlastně mnohoznačná funkce. Za každou kapitolou je několik cvičení s připojenými výsledky.

Knížka je napsána velmi citlivě s ohledem na mladé čtenáře, aby jim probíraná látka byla co nejlépe srozumitelná a názorná. Hlavním cílem je procvičení a prohloubení znalostí komplexních čísel. Navíc čtenáři získají vhodnou úvodní informaci o komplexních funkcích, s nimiž se budou později potýkat na vysoké škole, neboť tvoří důležitou součást matematiky. Doporučujeme proto našim středoškolákům, aby si předkládanou brožurku prostudovali. Má 80 stran, 9 obrázků a stojí 3,50 Kčs.

Jaroslav Zemánek

Goniometrické funkce

STANISLAV ŠMAKAL, BRUNO BUDÍNSKÝ

Vydal ÚVMO a ÚVČSM v Mladé frontě, edici ŠMM. 148 stran, 43 obrázky, 4,50 Kčs.

V první kapitole knížky jsou zavedeny goniometrické funkce pomocí vektorů v Gaussově rovině. Je sympatické, že autoři věnovali zavedení goniometrických funkcí, jejichž znalost u čtenářů předpokládají, značnou péči, přestože hlavní cíl knížky je v aplikacích.

Asi třetinu textu zaujímá druhá kapitola Goniometrické rovnice a úpravy goniometrických výrazů. Nejprve se vymezuje pojem goniometrické rovnice a jejího řešení a pak je připojeno několik jednoduchých příkladů. Trochu složitější úlohy následují po odstavci Úpravy goniometrických výrazů. Zbytek kapitoly je věnován soustavám goniometrických rovnic.

V kratičké třetí kapitole se čtenář seznámí s grafy nejběžnějších funkcí, obsahujících ve funkčním předpisu goniometrickou funkci. Autoři sami uvádějí, že nejde o systematický výklad, ale několik vhodně zvolených

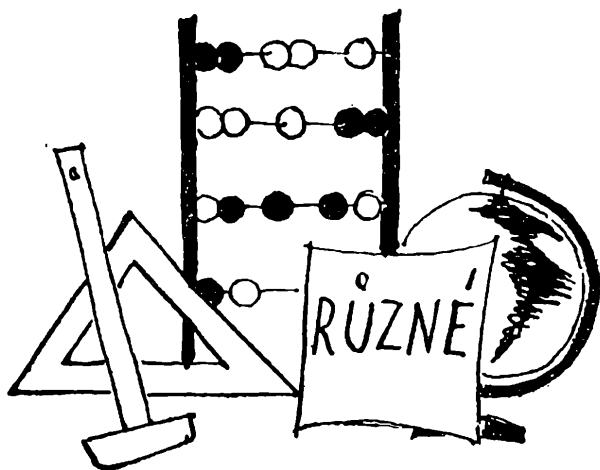
příkladů je dostatečným návodem k samostatnému sestrojování dalších „typů“ takových funkcí.

Čtvrtá kapitola zabírá zbývající třetinu textu a je věnována goniometrickým nerovnostem. Škoda, že není poněkud rozsáhlejší. Zejména druhý z jejích dvou odstavců by snesl ještě několik příkladů. Pro čtenáře bude jistě přitažlivý — mají v něm také možnost užít elementárních znalostí z analytické geometrie.

Za všemi kapitolami jsou připojena cvičení s uvedenými výsledky.

Tolik k obsahu knížky. O způsobu zpracování byla již částečně řeč. Celá knížka je zpracována s úzkostlivou přesností, takže — a nikoli za cenu nezáživnosti — splňuje svůj výchovný úkol. Pro tyto vlastnosti jí lze prorokovat úspěch u mladých čtenářů a uznání u jejich učitelů.

Jiří Rohlíček



Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

Roku 1778, před 190 lety, se v Penzance (v Cornwallu) narodil Humphry Davy (čti: Hamfry Dejvy), anglický fyzik a chemik, profesor na Royal Institution (čti: Rojal Institjúšon) v Londýně a předseda slavné Royal Society.¹⁾

Při studiu fyziologických účinků elektrického proudu učinil Davy náhodně důležitý objev: Přerušoval proud tím, že jeden konec drátu připojil k pilníku a druhým koncem po pilníku smýkal. Shledal, že při přerušení proudu vzniká jiskra. Jestliže napětí zdroje bylo aspoň 50 V, vzniklo místo jiskry trvalé světlo; konce drátů se značně zahřívaly a tavily. Po této zkušenosti spojil Davy dvě dřevěné uhlíkové tyčinky s póly baterie o 2000 článcích a přiblížil je, až se zašpičatělými konci dotkly; uhlíky se v místě dotyku následkem velkého odporu a intenzity rozžhavyly do bílého žáru. Když je pak poněkud (na několik

¹⁾ Royal Society (čti: Rojal sosajety), učená společnost v Londýně, založená králem Karlem II. roku 1662, v níž došlo v Anglii k nové organizaci vědecké práce.

mm) oddálil, proud procházel i potom a mezi jejich konci vznikl ohnivý oblouk (tzv. o b l o u k D a v y h o, roku 1821), nový vydatný zdroj světelný. Jím se vybíjí veliké množství elektřiny silně zahřátým plynem mezi oběma uhlíky. Davy shledal, že o b l o u k o v é s v ě t l o je oslňující a úplně bílé. Pozoroval také, že oblouk (proud) se dá vychýlit magnetem, prakticky této zkušenosti však nevyužil. Trvá-li pokus déle, mezera mezi uhlíky se zvětšuje, až konečně oblouk zhasne. Obloukové světlo vyžaduje tedy regulace. Roku 1878, *před 90 lety*, sestrojil F r a n t i š e k K ř i ž í k (tehdy působil v Plzni) obloukovou lampu se samočinným regulátorem, která se brzy rozšířila po celém světě.

Davy vyšetřoval také vedení proudu elektrolyty. Roku 1807 objevil, že lze rozkládat též elektrolyty roztavené; elektrolyticky podařilo se mu roku 1808, *před 160 lety*, vyloučit Na, K, Mg a Al. Elektrolyzy se užívá k výrobě těchto prvků v obloukových pecích podnes.

Velmi záslužná je D a v y h o b a d a t e l s k á č i n n o s t v t e r m i c e. Vznik tepla při některých mechanických dějích (např. třením) byl sice znám všeobecně; aby však souvislost práce a tepla náležitě objasnil, provedl Davy roku 1799 památný pokus: Ve vzduchoprázdném prostoru třel o sebe dva kusy ledu teploty -2°C ; zanedlouho roztály ve vodu teploty $+2^{\circ}\text{C}$. Teplo k tomu potřebné bylo vzbuzeno jedině třením. Davyho pokusy učinily tím konec nevědecké hypotéze fluidové o podstatě tepla (fluidum imponderabile caloricum).

Dobré tepelné vodivosti kovových sítěk použil Davy k sestrojení kahanu, který se osvědčil jako o c h r a n n á l a m p a v dolech (D a v y h o k a h a n, roku 1815). Byla opatřena sítí svinutou ve válec; vnikne-li sítí do lampy třaskavý plyn, vybuchuje jen uvnitř a nezapálí se mimo lampu, dokud sítí není rozžhavena. Horníci mohou odejít a důl se větrá.

Roku 1823 konal Davy (a Faraday) první — proto historicky zvlášť významné — pokusy o z k a p a l n ě n í p l y n ů. Do silnostěnné trubice, ohnuté do tvaru obráceného V, dal do jednoho ramene látku, z níž (např. zahříváním) se uvolňoval plyn, jenž v druhém rameni, ponořeném do chladicí směsi, kapalněl. Pokusy byly velmi úspěšné. Tímto způsobem se podařilo zkapalnit všechny tehdy známé plyny s výjimkou kyslíku, dusíku, vodíku, kysličníku uhelnatého a metanu, jež byly proto považovány za plyny permanentní (trvalé), tj. takové, jichž zkapalnit nelze. Teprve o 60 let později, roku 1883, zdokonalil dosavadní procesy polský badatel Z y g m u n t W r ó b l e w s k i, profesor fyziky na Jagellonské universitě v Krakově, zavedením tzv. m e t o d y k a s k á d n í, při níž se teplota snižuje p o s t u p n ě, a zkapalnil s chemikem Olszewskim ostatní plyny až na vodík. Uprostřed nejpilnější práce a úspěšných výsledků zastihla však Wróblewského smrt. Roku 1888, *před 80 lety*, zahynul 43letý při požáru způsobeném v laboratoři — převržením petrolejové lampy...

Poslední „permanentní“ plyn, hélium²⁾, zkapalnil roku 1908, *před 60 lety*, v slavné kryogenní laboratoři v Leydenu Holandan Heike Kamerlingh - Onnes; roku 1913 dostal s uznáním Nobelovu cenu za fyziku.

* *

*

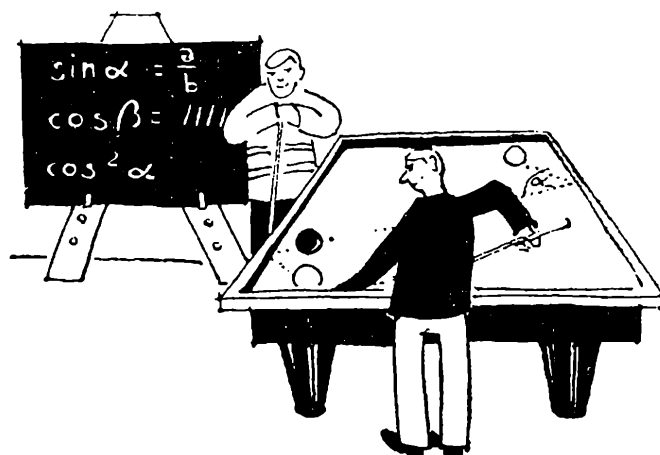
V témž roce jako Davy dne 6. prosince 1778, *před 190 lety*, v Saint-Léonard (département Haute-Vienne) narozený Louis Joseph Gay - Lussac (čti: Lui Žozef Gé-Lysak), francouzský fyzik a profesor Sorbonny, sestrojil některé přístroje, např. alkoholometr, tlakoměr dvouramenný (proto též Gay-Lussacovým zvaný) aj. V letech 1805 až 1808 zabýval se vyšetřováním objemu plynů při chemických reakcích; z pozorování těch vyplynula zákonitost, kterou dnes vyjadřuje zákon stálých poměrů objemových. Ve fyzice označujeme Gay-Lussacovým jménem zákon, že objemová roztažnost i rozpínavost je pro všechny plyny téměř stejná; Gay-Lussac potvrdil, že koeficient roztažnosti (i rozpínavosti) plynů nezávisí ani na tlaku ani na teplotě plynu a má pro všechny plyny hodnotu touž, velmi přibližně

$$\frac{1}{273} = 0,003\ 663 ;$$

uvedenou skupinu čísl si můžeme snadno zapamatovat.

Památnou stala se rovněž Gay-Lussacova plavba balónem, podniknutá k účelům vědeckým roku 1804. Vystoupiv do výše 7016 m, dosáhl Gay-Lussac zároveň rekordu, jenž teprve roku 1862 (Glaisher a Coxwell, 10 000 m) byl překročen. Balóny tehdy používané bylo možno řídit jen ve směru svislém; ve směru vodorovném byly hříčkou větru. Hlavní podmínky řiditelnosti byly teoreticky známy sice již v 2. pol. 18. století (památnými staly se zejména návrhy Meusnierovy v pařížské Akademii roku 1784), řiditelné balóny byly však sestrojovány teprve od roku 1891, soustavně pak počátkem tohoto století. Nesly jméno německého hraběte Ferdinanda von Zeppelin a (naroz. roku 1838, *před 130 lety*) — v z d u c h o l o d i Z e p p e l i n o v y. První „zeppelin“ vzlétl na přelomu století roku 1900 s hladiny Bodamského jezera. Národní dar umožnil Zeppelinovi stavbu speciální továrny na konstrukci vzducholodí ve Friedrichshafenu, jež nabyla pro Německo zvláštního významu za první světové války. Mírem ve Versailles roku 1919 byla proto zrušena. Zeppelin se však této události nedožil; zemřel v hodnosti generála roku 1917.

²⁾ Hélium bylo zjištěno poprvé spektroskopicky až ve 2. pol. minulého století při zatmění Slunce; i vzniklo domnění, že se vyskytuje jen na Slunci (řec. helios = Slunce). Teprve roku 1895 objevil anglický chemik Ramsay hélium v minerálu klevaitu také na Zemi.



MATEMATIKA

Vstupme do množinového ráje

JAROSLAV ŠEDIVÝ, K U, Praha

(Pokračování)

2. Číselné Vennovy diagramy

Zapišeme-li do jednotlivých políček Vennova diagramu čísla nebo písmena udávající počet prvků základní množiny, které by v nich měly být zakresleny, dostaneme tzv. číselný Vennův diagram. Situaci znázorněnou na obr. 2 pomocí křížků vyjadřuje číselný Vennův diagram na obr. 5a. Často nám takový diagram umožní pohodlné a rychlé řešení slovních úloh, jak se čtenář přesvědčí.

Úloha 1. Ve třídě s 34 žáky a žákyněmi je sedm obrýlených děvčat. Obrýlených chlapců je o pět méně než neobrálených děvčat; neobrálených chlapců je dvakrát více než neobrálených děvčat. Kolik je ve třídě děvčat a kolik je chlapců?

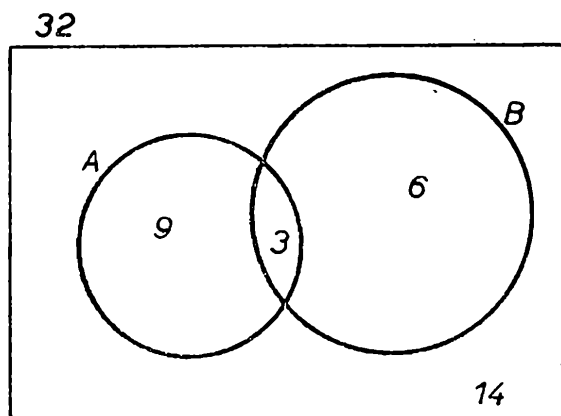
V textu úlohy se sice o množinách nemluví, ale je zřejmé, že skupiny děvčat a chlapců, o něž jde, můžeme považovat za množiny určené pomocí kombinací charakteristických vlastností „být děvčetem“, „nosit brýle“ a jejich negací („nebýt děvčetem = být chlapcem“, „nenosit brýle“). Nakreslíme-li Vennův diagram pro množiny A , B (obr. 5b), můžeme do průniku kruhů A , B napsat číslici 7, tj. počet příslušníků třídy, kteří jsou děvčaty a zároveň nosí brýle. Dále je vhodné označit písmenem x počet příslušníků třídy, kteří jsou neobrálenými děvčaty; podle podmínek úlohy můžeme pak vyjádřit počty obrýlených, resp.

neobřýlených chlapců čísla $x - 5$, resp. $2x$. Každý příslušník třídy patří do právě jedné ze čtyř uvažovaných skupin, proto platí

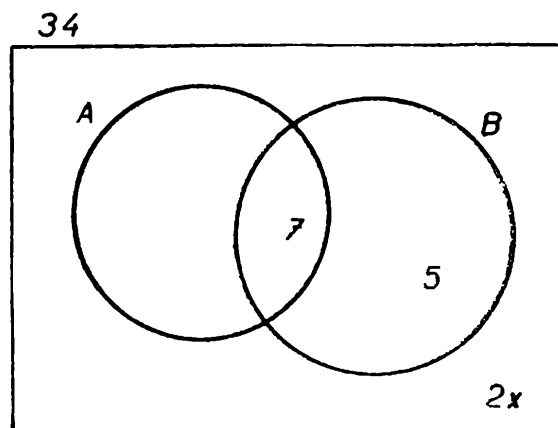
$$x + 7 + (x - 5) + 2x = 34.$$

Po výpočtu kořene $x = 8$ této rovnice snadno zjistíme, že počet děvčat $d = x + 7 = 15$, počet chlapců $ch = 19$.

Uvedenou úlohu lze samozřejmě vyřešit i bez Vennova diagramu, při jeho použití však získáme lepší přehled o situaci. Užitečnost Vennových diagramů vynikne ještě výrazněji při řešení úloh o třech či čtyřech množinách. Ukažme si příklad takové úlohy ze studentského prostředí.

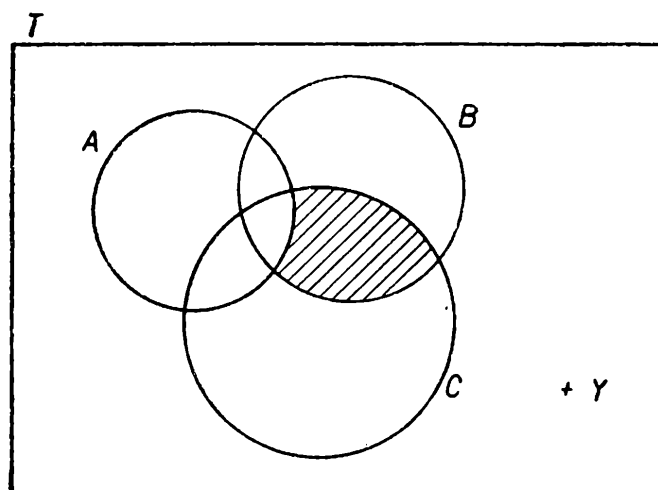


Obr. 5a



Obr. 5b

Úloha 2. Po prvním semestru na vysoké škole skládalo 120 studentů tři obtížné zkoušky, přitom 10 % z nich nesložilo ani jednu zkoušku. Nenašel by se nikdo, kdo složil zkoušku jen z druhého předmětu, devět



Obr. 6

studentů však z něj složilo zkoušku, ale neuspělo u zkoušky z prvního předmětu. 47 studentů bude muset skládat opravnou zkoušku z právě jednoho předmětu, 33 studentů bude opakovat zkoušku ze třetího předmětu. 56 studentů složilo zkoušku ze druhého i třetího předmětu, 20 studentů

nesložilo zkoušku ani z jednoho z těchto předmětů. Kolik studentů složilo všechny tři zkoušky? Určete počty opravných zkoušek pro examinátorů prvního a druhého předmětu.

Za základní množinu zvolíme souhrn všech studentů prvního ročníku, pak budeme moci charakterizovat všechny skupiny studentů kombinováním vlastností „mít složenu zkoušku z prvního předmětu“, „mít složenu zkoušku z druhého předmětu“, „mít složenu zkoušku ze třetího předmětu“ a jejich negací. Vystačíme zřejmě s Vennovým diagramem pro tři množiny (obr. 6), na němž vymezují tři kružnice osm polí. Pouze pro dvě z nich známe číselný údaj o počtu studentů, kteří by se do nich „postavili“. Pole zahrnující vnějšek všech tří kruhů je vyhrazeno studentům, kteří nesložili žádnou z uvažovaných zkoušek; je jich 10 % ze 120, tj. dvanáct. Také v jednom políčku v kruhu B můžeme vyplnit číselný údaj — nulu (nikdo nesložil zkoušku jen ze druhého předmětu). Do ostatních polí zapíšeme písmena a, b, c, d, e, f a pokusíme se vyjádřit pomocí nich podmínky úlohy. Kruhy A, B, C budou znázorňovat po řadě množinu studentů, kteří složili zkoušky z prvního (druhého, třetího) předmětu.

1. Studenti, kteří složili zkoušku ze druhého předmětu, ale neuspěli u zkoušky z prvního předmětu, stojí uvnitř kruhu B , ale vně kruhu A , proto $0 + e = 9$.

2. Studenti, kteří musejí skládat opravnou zkoušku z právě jednoho předmětu, stojí v políčkách s písmeny b, c, e , proto platí $b + c + e = 47$.

3. Zkoušku ze třetího předmětu musí opakovat ti studenti, kteří stojí vně kruhu C , proto platí $a + b + 0 + 12 = 33$.

4. Studenti, kteří složili zkoušku ze druhého i třetího předmětu, stojí v průniku kruhů B, C , proto platí $d + e = 56$.

5. Studenti, kteří nesložili zkoušku ani z druhého ani ze třetího předmětu, stojí jak vně kruhu B , tak vně kruhu C . Platí tedy $a + 12 = 20$.

6. Všichni studenti stojí uvnitř obdélníka, proto $a + b + c + d + e + f + 12 = 120$.

Vypíšeme-li si získané rovnice přehledně do zvláštního sloupce, najdeme snadno postup řešení soustavy šesti rovnic o šesti neznámých

$$\begin{array}{rcl} a + b + c + d + e + f + 12 & = & 120, \\ & e & = 9, \\ & b + c & + e = 47, \\ a + b & & + 12 = 33, \\ & d + e & = 56, \\ a & & + 12 = 20 \end{array}$$

Řešení

$$e = 9, d = 47, a = 8, b = 13, c = 25, f = 6.$$

Studenti, kteří složili všechny tři zkoušky, stojí v průniku všech tří kruhů; jejich počet udává číslo $d = 47$. Examinátor prvního předmětu bude zkoušet všechny studenty stojící vně kruhu A , tj. celkem

$e + f + 12 = 27$ studentů. Examinátor druhého předmětu musí vyzkoušet $a + c + f + 12 = 51$ studentů.

Zopakujeme si postup při řešení obdobných úloh pomocí Vennových diagramů: Nejprve vymezíme základní množinu a ty vlastnosti jejích prvků, pomocí nichž lze charakterizovat všechny skupiny (části základní množiny), o které se v úloze jedná. Vyjadřuje-li číselný údaj z textu úlohy počet prvků základní množiny v některém políčku diagramu, zapíšeme tam příslušné číslo. Do zbývajících políček zapíšeme písmena a pomocí nich vyjádříme počty prvků dalších skupin (částí základní množiny), o nichž se v úloze hovoří. Získané rovnice uspořádáme v soustavu rovnic, kterou řešíme. V jednodušších případech dovedou šikovní řešitelé provádět výpočet přímo na diagramech.

Cvičení

1. Ze 33 studentů ve třídě odebíralo aspoň jeden ze dvou studentských časopisů jen 20 studentů. První časopis neodebíralo 20 studentů, čtyři studenti odebírali oba časopisy. Kolik studentů odebíralo první časopis a kolik jich odebíralo druhý časopis?

2. Ze 163 zaměstnanců vývozní společnosti ovládá angličtinu 65 lidí, ruštinu 75 lidí a francouzštinu 55 lidí. Angličtinu a ruštinu ovládá 21 zaměstnanců, ruštinu a francouzštinu 15, francouzštinu a angličtinu 17 zaměstnanců. V předcházejících údajích jsou zahrnuti i ti, kteří ovládají všechny tři jazyky, těchto lidí je jen pět v celém podniku. Kolik zaměstnanců ovládá právě jeden z těchto tří jazyků a kolik jich ovládá právě dva jazyky?

3. Turistický oddíl, který má celkem 77 členů, uspořádal během sezóny tři pochody pro vytrvalce, známé „dálkoplasy“. Ani prvního pochodu se ovšem nezúčastnili všichni členové, na druhém se jich sešel poloviční počet než na prvním, a to ještě přišlo sedm členů, kteří chyběli na prvním pochodu. Třetího pochodu se zúčastnil opět jen poloviční počet členů než druhého pochodu, přitom jen pět členů absolvovalo tyto dva pochody. Na prvním ani na druhém pochodu nebylo 30 členů; z těch, kteří absolvovali první nebo druhý pochod, nenastoupilo 37 turistů k třetímu pochodu. Počet těch, kteří se zúčastnili jen druhého pochodu, je náhodou roven počtu těch členů oddílu, kteří se sice nezúčastnili druhého pochodu, ale absolvovali první i třetí pochod. Zjistěte z těchto údajů, kolik lidí absolvovalo všechny tři pochody, kolik vykonalo právě dva, kolik právě jeden a kolik členů se nezúčastnilo žádného pochodu.

Řešení tří cvičení k prvnímu článku

1. První časopis má 13 odběratelů, druhý 11 odběratelů ve třídě.

2. Právě jeden jazyk ovládá 104 zaměstnanců, právě dva jazyky 38 zaměstnanců.

3. Tři pochody absolvovali 3 členové oddílu, právě dva pochody 17 členů, právě jeden pochod 27 členů, žádný pochod 30 členů.

Invazi moderní matematiky bude provázet též série obtížnějších úloh, při jejichž řešení můžete výhodně uplatnit některé postupy vyložené v uveřejněných článcích. Tyto úlohy budou uváděny pod heslem *Série Mm* a číslovány. Zasílejte svá řešení úloh série *Mm* buď průběžně nebo po jejím skončení na adresu redakce. Jména nejúspěšnějších řešitelů uveřejníme v posledním čísle tohoto ročníku.

Úloha Mm — 1

Zaměstnanci jednoho závodu se sjíždějí do práce různými dopravními prostředky — vlakem, autobusem, tramvají, na kole; někteří docházejí pěšky. Při průzkumu bylo zjištěno, že ze 125 zaměstnanců používá 35 lidí právě jednoho dopravního prostředku, 22 lidí právě dvou a 15 lidí právě tří dopravních prostředků, nikdo nepoužívá všech čtyř. Vlakem jezdí celkem 16 lidí, autobusem 43, tramvají 23 a na kole 42 lidí. Čtyři zaměstnanci cestují do práce na kole, autobusem a ještě tramvají; deset lidí jezdí na kole, ale nepoužívá vlaku ani autobusu; 24 lidí jezdí na kole a používá vlaku nebo autobusu, ale ne tramvaje. Devět lidí jezdí autobusem a tramvají, pět z nich používá i vlaku. Zjistěte na základě těchto údajů, kolik zaměstnanců nepoužívá žádný z uvedených dopravních prostředků. Dále určete, kolik zaměstnanců dojíždí jen tramvají a kolik jen na kole. Co lze zjistit o počtu těch, kteří jezdí jen vlakem? Popište ve svém řešení i postup výpočtu, nezapomínejte, že řešení hledáte v oboru nezáporných celých čísel.

Otáčení soustavy souřadnic

EMIL FRÝDECKÝ, SVVŠ Kroměříž

(Dokončení)

4. Napište rovnici elipsy se středem v počátku, ohnisko $F_1 \equiv (-\sqrt{5}; 2)$, hlavní poloosa $a = 5$.

Řešení

$$e = \sqrt{5 + 4} = 3, b = 4,$$

$$16x'^2 + 25y'^2 = 400,$$

$$16 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + 25 (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = 400 ,$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} ; \quad \sin \alpha = \frac{2}{3} ,$$

$$16 \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} x + \frac{2}{3} y \right)^2 + 25 \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} y - \frac{2}{3} x \right)^2 = 400 ,$$

$$16 \left(\frac{5}{9} x^2 - \frac{4\sqrt{5}}{9} xy + \frac{4}{9} y^2 \right) + 25 \left(\frac{5}{9} y^2 + \frac{4\sqrt{5}}{9} xy + \frac{4}{9} x^2 \right) = 400 ,$$

$$\frac{80}{9} x^2 - \frac{64\sqrt{5}}{9} xy + \frac{64}{9} y^2 + \frac{125}{9} y^2 + \frac{100\sqrt{5}}{9} xy + \frac{100}{9} x^2 = 400 ,$$

$$189x^2 + 36\sqrt{5}xy + 189y^2 = 3600 .$$

Rovnice elipsy je

$$21x^2 + 4\sqrt{5}xy + 21y^2 - 400 = 0$$

5. Napište rovnici hyperboly, která má střed v počátku, hlavní vrchol $A \equiv (-2; 1,5)$ a prochází bodem $M \equiv (5; 0)$.

Řešení

$$b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = a^2 b^2 ,$$

$$b^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 - a^2 (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = a^2 b^2 ,$$

$$a = \sqrt{4 + 2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5 ,$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5} ; \sin \alpha = \frac{3}{5} ,$$

$$b^2 \left(-\frac{4}{5} x + \frac{3}{5} y \right)^2 - \frac{25}{4} \left(-\frac{4}{5} y - \frac{3}{5} x \right)^2 = \frac{25}{4} b^2 ,$$

$$b^2 \left(\frac{16}{25} x^2 - \frac{24}{25} xy + \frac{9}{25} y^2 \right) - \frac{25}{4} \left(\frac{16}{25} y^2 + \frac{24}{25} xy + \frac{9}{25} x^2 \right) = \frac{25}{4} b^2 .$$

Výpočet b^2

$$16b^2 - \frac{25}{4} \cdot 9 = \frac{25}{4} b^2 ,$$

$$b^2 = \frac{\frac{225}{4}}{\frac{39}{4}} = \frac{225}{39} = \frac{75}{13}$$

Dosadíme

$$\frac{75}{13} \left(\frac{16}{25} x^2 - \frac{24}{25} xy + \frac{9}{25} y^2 \right) - \frac{25}{4} \left(\frac{16}{25} y^2 + \frac{24}{25} xy + \frac{9}{25} x^2 \right) = \frac{25}{4} \cdot \frac{75}{13} ,$$

$$12 (16x^2 - 24xy + 9y^2) - 13 (16y^2 + 24xy + 9x^2) = 1875 ,$$

$$\begin{aligned}
& 192x^2 - 288xy + 108y^2 - 208y^2 - \\
& - 312xy - 117x^2 - 1875 = 0, \\
& 75x^2 - 600xy - 100y^2 - 1875 = 0
\end{aligned}$$

Rovnice hyperboly je

$$3x^2 - 24xy - 4y^2 - 75 = 0$$

6. Napište rovnici rovnoosé hyperboly se středem v počátku a hlavním vrcholem $A \equiv (2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

Řešení

$$a^2x'^2 - a^2y'^2 = a^4,$$

$$x'^2 - y'^2 = a^2,$$

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 - (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = a^2,$$

$$a = 4; \quad \alpha = 45^\circ, \quad \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} y - \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)^2 = 16,$$

$$\frac{1}{2} x^2 + xy + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} y^2 + xy - \frac{1}{2} x^2 = 16,$$

$$2xy = 16,$$

$$xy = 8,$$

$$y = \frac{8}{x}$$

Je to již známá rovnice grafu nepřímé úměrnosti (zvláštní případ lineární lomené funkce).

7. Určete rovnici paraboly, jejíž vrchol je $V \equiv (1; 2)$, ohnisko $F \equiv (-1; 3,5)$.

Řešení

$$\frac{p}{2} = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = \sqrt{4 + 2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5,$$

$$2p = 10.$$

Směrový vektor

$$\vec{VF} \equiv (-2; 1,5); \quad \mathbf{u} \equiv (-4; 3); \quad \mathbf{u} \parallel \vec{VF}$$

$$|\mathbf{u}| = 5,$$

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}; \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}; \quad m = 1; \quad n = 2$$

Rovnice paraboly vzhledem k transformovanému systému souřadnic je

$$y''^2 = 2px''$$

Dosadíme za

$$\begin{aligned}x'' &= (x - m) \cos \alpha + (y - n) \sin \alpha, \\y'' &= (y - n) \cos \alpha - (x - m) \sin \alpha, \\x'' &= (x - 1) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + (y - 2) \frac{3}{5}, \\y'' &= (y - 2) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + (x - 1) \cdot \frac{3}{5}, \\x'' &= -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}y - \frac{6}{5} = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}, \\y'' &= -\frac{4}{5}y + \frac{8}{5} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{5} = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, \\(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1)^2 &= 10 \left(-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}\right), \\\frac{9}{25}x^2 + \frac{16}{25}y^2 + 1 - \frac{24}{25}xy + \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y &= -8x + 6y - 4, \\\frac{9}{25}x^2 - \frac{24}{25}xy + \frac{16}{25}y^2 + \frac{46}{5}x - \frac{38}{5}y + 5 &= 0.\end{aligned}$$

Rovnice paraboly je

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 230x - 190y + 25 = 0.$$

8. Určete rovnici hyperboly, jejíž hlavní osa má rovnici $x + 2y - 2 = 0$, její střed leží na ose x a hlavní vrchol A na ose y , velikost vedlejší poloosy je $b = 4$.

Řešení

$$S \equiv (2; 0), A \equiv (0; 1), SA = a = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Směrový vektor přímky je

$$\mathbf{u} \equiv (-2; 1),$$

$$\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$b^2x''^2 - a^2y''^2 = a^2b^2,$$

$$x'' = (x - m) \cos \alpha + (y - n) \sin \alpha,$$

$$y'' = (y - n) \cos \alpha - (x - m) \sin \alpha,$$

$$x'' = (x - 2) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + y \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}},$$

$$y'' = y \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - (x - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Dosadíme

$$16 \left(-\frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} \right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 = 80 ,$$

$$\frac{16}{5} (4x^2 + y^2 + 16 - 4xy - 16x + 8y) -$$

$$- (4y^2 + x^2 + 4 + 4xy - 8y - 4x) = 80 ,$$

$$64x^2 + 16y^2 + 256 - 64xy - 256x + 128y - 20y^2 -$$

$$- 5x^2 - 20 - 20xy + 40y + 20x = 400 .$$

Rovnice hyperboly je

$$59x^2 - 84xy - 4y^2 - 236x + 168y - 164 = 0 .$$

9. Napište rovnici rovnoosé hyperboly se středem $S \equiv (3; 2)$, $a = b = 5$, hlavní osa je kolmá k přímce $x - y + 5 = 0$.

Řešení.

Směrový vektor hlavní osy je

$$\mathbf{u} \equiv (1; -1) , \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{2} ,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$a^2 x''^2 - a^2 y''^2 = a^4 ,$$

$$x''^2 - y''^2 = a^2 ,$$

$$x'' = (x - 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + (y - 2) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} .$$

$$x'' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$y'' = (y - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - (x - 3) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} ,$$

$$y'' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Dosadíme

$$\frac{1}{2} (x - y - 1)^2 - \frac{1}{2} (x + y - 5)^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y - x^2 - y^2 - 25 - 2xy +$$

$$+ 10x + 10y - 50 = 0 ,$$

$$- 4xy + 8x + 12y - 74 = 0 ,$$

$$-2xy + 4x + 6y - 37 = 0 ,$$

$$y(-2x + 6) = -4x + 37$$

$$y = \frac{4x - 37}{2x - 6}$$

Tato rovnice rovnosé hyperboly je rovnicí lineární lomené funkce. Asymptoty hyperboly jsou $y = 2$; $x = 3$.

10. Napište rovnice tečen ke křivce $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 24 = 0$, které jsou rovnoběžné s přímkou $3x - 4y + 5 = 0$. Určete, o jakou křivku se jedná.

Řešení.

Křivka je elipsa, protože

$$B^2 - AC = 4 - 10 = -6 < 0$$

Rovnice tečny je

$$3x - 4y + c = 0 ,$$

$$y = \frac{3x + c}{4} ,$$

dosadíme do rovnice elipsy

$$5x^2 - 4x \frac{3x + c}{4} + 2 \left(\frac{3x + c}{4} \right)^2 - 24 = 0 ,$$

$$5x^2 - 3x^2 - cx + \frac{9x^2 + 6cx + c^2}{8} - 24 = 0$$

$$40x^2 - 24x^2 - 8cx + 9x^2 + 6cx + c^2 - 192 = 0 ,$$

$$25x^2 - 2cx + c^2 - 192 = 0 ,$$

$$D = c^2 - 25(c^2 - 192) = 0 ,$$

$$c^2 - 25c^2 + 4800 = 0 ,$$

$$-24c^2 = -4800 ,$$

$$c^2 = 200 ,$$

$$|c| = 10\sqrt{2} .$$

Rovnice tečen jsou

$$3x - 4y + 10\sqrt{2} = 0 \text{ a } 3x - 4y - 10\sqrt{2} = 0$$

O střechanech a o určování jejich objemů

DR. ING. OTAKAR LEMINGER, Ústí nad Labem

Střechany budeme nadále rozumět hranatá tělesa o mnohoúhelníkové podstavě, o pobočných stěnách tvořených trojúhelníky nebo trojúhelníky a čtyřúhelníky, zakončena vrcholovou hranou, která může, ale nemusí být rovnoběžná s rovinou podstavy (obr. 1, 4, 9, 10). V praktickém životě se setkáváme se střechany ve strojnictví, dále ve formě hromad materiálu, sedlových i valbových střech, pohoří apod.

Z hořejší definice střechanů plynou tato pravidla: Boky střechanů jsou tvořeny trojúhelníky, jestliže vrcholová hrana není rovnoběžná se žádnou stranou n -úhelníkové podstavy, a ani s ní neleží v jedné rovině. Když vrcholová hrana je rovnoběžná s jednou nebo se dvěma stranami n -úhelníkové podstavy, nebo leží s ní či s nimi v jedné rovině, pak jednu nebo dvě stěny střechanu tvoří čtyřúhelník. Dvě z pobočných stěn tvoří s vrcholovou hranou vždy střechu střechanu, kde vrcholová hrana představuje společnou stranu těchto pobočných plošných útvarů. Střecha střechanu může tedy být tvořena trojúhelníky nebo čtyřúhelníky. Z pobočných stěn střechanu mohou nejvýš dvě být představovány čtyřúhelníky; ty pak tvoří střechu střechanu. Když jen jedna pobočná stěna střechanu odpovídá čtyřúhelníku, pak i ten je součástí střechy; druhou její součástí je pak trojúhelník. U dvou trojúhelníků, tvořících střechu střechanu, představuje vrcholová hrana společnou jejich stranu; jejich vrcholy se ztotožňují se dvěma vrcholy n -úhelníkové podstavy, ležícími na protilehlých stranách vrcholové hrany.

Ostatní pobočné hrany střechanu kromě hran střechy představují spojnice vrcholů základny ležících na stejné straně úhlopříčky, resp. hrany podstavy, spojující body, na nichž střecha spočívá (na obr. 2 body B a E) vždy s tím koncovým bodem vrcholové hrany, který svou polohou je přiřazen dotyčné straně zmíněné úhlopříčky, resp. hrany podstavy. Pobočné stěny, tvořící plášť střechanů, svírají spolu z vnější strany střechanu úhly buď vesměs větší než 180° , nebo zčásti i menší než 180° ; v tomto posledním případě má střechan kouty, resp. úžlabí. K tvorbě koutů (úžlabí) dochází zpravidla tehdy, jestliže body, na nichž střecha spočívá, jsou tvořeny dvěma sobě blízkými, např. sousedními vrcholy podstavy a tato se dále rozšiřuje. Z uvedeného plyne, že dané n -úhelníkové podstavě a dané vrcholové hraně odpovídá více střechanů.

Povrch střechanů je dán součtem ploch podstavy a všech pobočných stěn. Pro praxi je důležitější určení objemu střechanů, např. při zjišťování váhy materiálu v hromadách. Zde budeme rozeznávat dva ty-

pické případy, a to případ, kdy vrcholová hrana střečanu je rovnoběžná s rovinou podstavy a kdy není rovnoběžná s rovinou podstavy.

I. Určování objemu střečanů, jejichž vrcholová hrana je rovnoběžná s rovinou podstavy.

1. Podle Simpsona

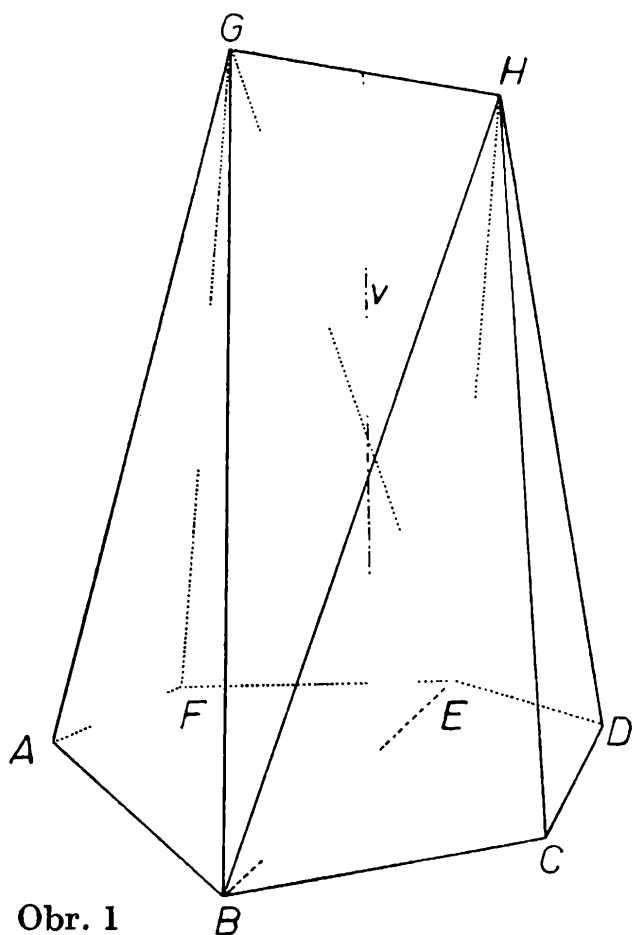
Střečan o vrcholové hraně rovnoběžné s rovinou podstavy (obr. 1) můžeme považovat za prismatoid, jehož hořejší podstava má plochu rovnou nule. Podle Simpsonova odvození je objem V prismatoidu dán vzorcem

$$V = \frac{1}{6} v (Z_1 + Z_2 + 4P), \quad (1)$$

kde v je výška prismatoidu, Z_1 je obsah dolní podstavy, Z_2 je obsah horní podstavy a P obsah středního řezu vedeného prismatoidem v polovině jeho výšky rovnoběžně s oběma podstavami. V našem případě střečanu o vrcholové hraně rovnoběžné s podstavou je $Z_2 = 0$, a tedy jeho objem V odpovídá vzorci

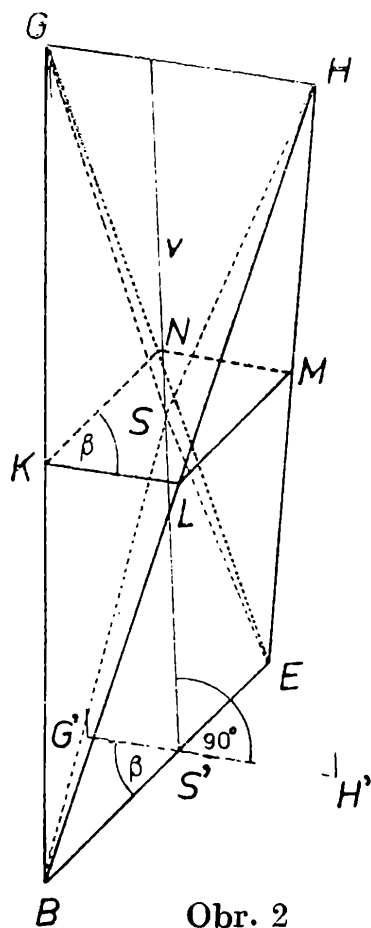
$$V = \frac{1}{6} v (Z_1 + 4P). \quad (2)$$

2. Metodou dvojího úhlopříčkového řezu

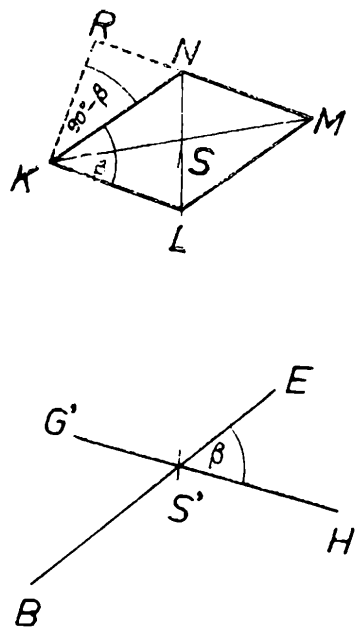


Obr. 1

Uvedený vzorec Simpsonův je sice teoreticky zajímavý, avšak prakticky není dobře použitelný, neboť určení potřebného obsahu středního řezu lze u skutečného tělesa velmi obtížně provést. Při stanovování objemu daného střečanu budeme proto raději postupovat tím způsobem, kde možno použít skutečně změřitelných prvků střečanu za užití páskových měřítek, tyčí a goniometru. V podstavě $Z \equiv ABCDEF$ daného střečanu (obr. 1) vedme úhlopříčku BE , která spojuje vrcholy trojúhelníků, v kterých se opírá střecha střečanu o podstavu. Touto úhlopříčkou a krajními body G, H vrcholové hrany proložíme dvě roviny. Tím se rozpadne daný střečan především ve dva jehlany o pod-



Obr. 2



Obr. 3

stavách Z_1 $ABEF$ a Z_2 $BCDE$, o společné výšce v , totožné s výškou střechanu; přitom platí $Z_1 + Z_2 = Z$. Dále zde vzniká nepravidelný trojboký jehlan $BEGH$, zvaný též sfénoid, jehož jednu hranu tvoří úhlopříčka BE , druhou vrcholová hrana GH ; ostatní jeho hrany jsou totožné s příslušnými hranami střechy střechanu. Objemy obou zmíněných jehlanů $ABEFG$ a $BCDEH$ jsou $\frac{1}{3} vZ_1$ a $\frac{1}{3} vZ_2$; u jehlanu $BEGH$ třeba k stanovení objemu určit plochu jeho středního řezu (obr. 2). Poněvadž vrcholová hrana GH našeho střechanu je rovnoběžná s rovinou podstavy, ve které leží úhlopříčka BE , představuje střední řez jehlanu $BEGH$ kosodélník $KLMN$, jehož strany $KN = LM$ mají délku poloviny úhlopříčky BE , strany $KL = MN$ pak délku poloviny vrcholové hrany GH . K určení obsahu tohoto kosodélníka třeba znát úhel β , který svírá kolmý průmět $G'H'$ vrcholové hrany GH do podstavy s úhlopříčkou BE . Úhel ten možno změřit obvyklým goniometrickým způsobem. Označíme-li délku vrcholové hrany GH jako h a délku úhlopříčky BE jako u , pak obsah středního řezu jehlanem $BEGH$ představovaný kosodélníkem $KLMN$ (obr. 3) je vyjádřen vztahem

$$P = KL \cdot KN \cdot \sin \beta = \frac{1}{4} hu \cdot \sin \beta. \quad (3)$$

Potom pro objem W jehlanu $BEGH$ na základě Simpsonovy věty (1) vychází

$$W = \frac{1}{6} v \quad 4P = \frac{2}{3} vP = \frac{1}{6} h u v \cdot \sin \beta, \quad (4)$$

proto pro objem V celého střechanu $ABCDEFGH$ plyne vzorec

$$V = \frac{1}{3} v (Z_1 + Z_2) + W = \frac{1}{3} v Z + \frac{1}{6} h u v \cdot \sin \beta = \\ = \frac{1}{6} v (2Z + h u \sin \beta) \quad (5)$$

(Pokračování)



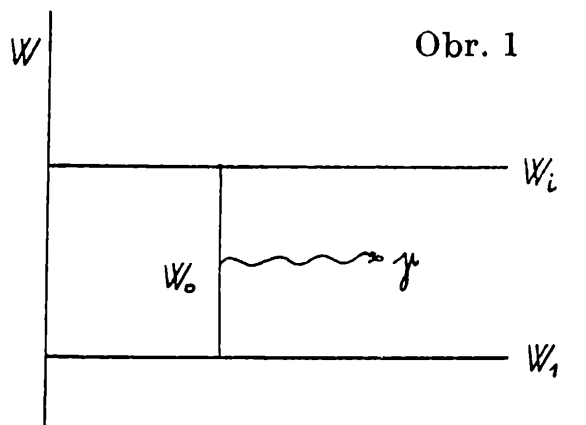
F Y Z I K A

Mössbauerův jev

RNDr. V. KOLESNIKOV a RNDr. J. ZÁHEJSKÝ, Olomouc

Úvod

Nobelova cena za fyziku byla v roce 1961 udělena mladému, ani ne třicetiletému německému fyzikovi R. A. Mössbauerovi. Jistě si mnohý, kdo se zajímá o fyziku, položí otázku: Jaký jev byl oceněn tak významným vyznamenáním a jaký je jeho význam? Pro tyto čtenáře má být náš článek stručnou odpovědí.



R. A. Mössbauer studoval jadernou rezonanční absorpci a zjistil, že záření γ emitované excitovanými jádry atomů radioaktivního prvku, může být za určitých okolností absorbováno (také emitováno) neradioaktivními jádry atomů izotopu

téhož prvku. Tato tzv. *bezodrazová jaderná rezonanční absorpce* je nazvána po svém objeviteli *Mössbauerovým jevem*. Pokusme se tento jev objasnit podrobněji.

1. Jaderná rezonanční absorpce

Záření γ vzniká při přechodech mezi dvěma energetickými stavy jádra atomu. Nukleony v jádře mohou být jen v určitých energetických stavech. Obr. 1. Nejčastěji bývá jádro ve svém základním stavu, kdy má minimální energii. Je-li jádro v excitovaném stavu, tj. s vyšší energií, může přejít do svého základního stavu a rozdíl energií těchto dvou stavů se vyzáří do okolí jako kvantum záření γ . Energie W_0 vyzářeného kvanta je tedy

$$W_0 = W_i - W_1 \quad (1)$$

a jeho frekvence je

$$\nu = \frac{W_0}{h}, \quad (2)$$

kde h je Planckova konstanta $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js.

Tento jev nazýváme *jadernou rezonanční emisí*.

Dopadne-li na látku složenou ze stejných atomů v základním stavu kvantum γ o frekvenci dané vztahem (2), pak může být absorbováno a jádro přejde do excitovaného stavu. Jde o tzv. *jadernou rezonanční absorpci*. Excitované jádro po určité době opět přejde do svého základního stavu a vyzáří kvantum záření γ , které se svojí energií rovná energii primárního kvanta. Mluvíme pak o tzv. *jaderné rezonanční fluorescenci*.

K rezonanční absorpci γ -kvanta jádrem může dojít jen tehdy, je-li splněna podmínka

$$W_{emit} = W_{abs}, \text{ nebo } \nu_{emit} = \nu_{abs}. \quad (3)$$

Energie emitovaných γ -kvant však nejsou naprosto stejné a liší se o určitou hodnotu od W_0 . V důsledku toho také jejich frekvence není stejná a liší se o určitou hodnotu $\Delta\nu$. Proto mají absorpční a emisní spektrální čáry konečnou šířku, tzv. *přirozenou šířku čáry* Γ , která je definována stejně jako v případě optických spekter

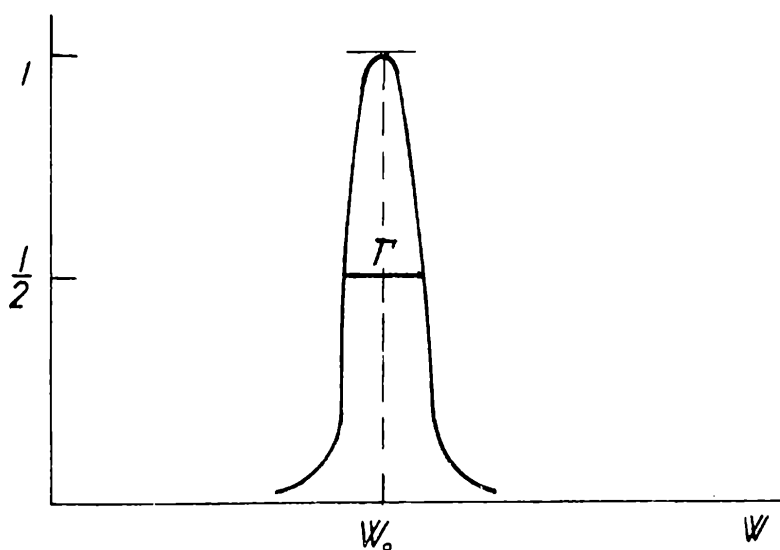
$$\Gamma = \Delta W = h\Delta\nu. \quad (4)$$

Pro relativní šířku čáry pak platí

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Gamma}{W_0} \quad (5)$$

Znáznorníme-li četnost γ -kvant (intenzitu emitovaného záření) emitovaných pevně poutanými jádry v závislosti na jejich energii, dostaneme

tzv. *emisní čáru o přirozené šířce Γ* . Přirozená šířka čáry Γ odpovídá úsečce vedené rovnoběžně s energetickou osou v polovině intenzitního maxima čáry a je v případě záření γ velmi malá. Obr. 2.



Obr. 2. Přirozená šířka spektrální čáry.

2. Vliv energie zpětného rázu

Avšak rezonanční jaderná absorpce bývá obvykle narušena vzájemným působením kvanta (fotonu) s jádrem, které jej emituje nebo absorbuje. Poněvadž záření γ má také korpuskulární charakter, přisuzujeme jeho fotonům hybnost danou vztahem¹⁾

$$p_0 = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu_0}{c} = \frac{W_0}{c}, \quad (6)$$

kde c je rychlost světla.

¹⁾ Dnešní představa o záření tvořeném fotony je založena na teorii relativity, podle níž je hmota ekvivalentní energii podle vztahu $W = mc^2$. Známe-li energii fotonu, můžeme mu přisoudit určitou „energetickou hmotnost“, která ovšem bude pro každou frekvenci jiná. Platí

$$m = \frac{W}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}.$$

Pak můžeme fotonu, který se pohybuje rychlostí c přisoudit také určitou hybnost podle známé definice

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Tak máme fotony charakterizovány jako mechanické hmotné částice, jejichž hmotnost m a hybnost p jsou přesně těmito rovnicemi definovány.

Tedy při emisi γ -kvanta volným jádrem musí být splněn zákon zachování hybností a jádro získává stejně velikou hybnost opačného směru, která je dána

$$p_0 = Mv = \frac{h\nu_0}{c}, \quad (7)$$

kde M je hmotnost emitujícího jádra a v jeho rychlost.

Tím se jádro uvede do pohybu a energie k tomu potřebná se nazývá *energie zpětného rázu* a značíme ji R

$$R = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{M^2 v^2}{2M} = \frac{h^2 \nu_0^2}{2Mc^2} = \frac{W_0^2}{2Mc^2} \quad (8)$$

O tuto energii je menší energie vyzářeného γ -kvanta, takže má též nižší frekvenci, než udává vztah (2), o hodnotu

$$\nu' = \frac{W_0^2}{2Mc^2 h} = \frac{h\nu_0^2}{2Mc} \quad (9)$$

Tedy frekvence emitovaného kvanta je

$$\nu = \nu_0 - \frac{h\nu_0^2}{2Mc^2} = \nu_0 \left(1 - \frac{W_0}{2Mc^2} \right) \quad (10)$$

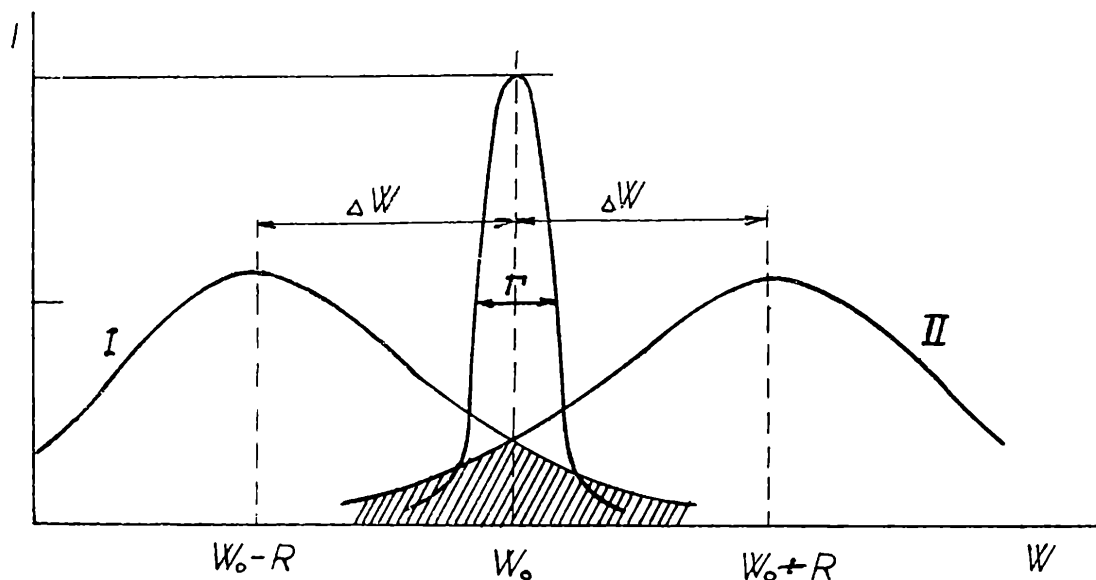
Ke změně frekvence dochází následkem zákona zachování hybností také při absorpci jádrem. Proto nastává posun spektrální emisní čáry proti čáře absorpční.²⁾ Je-li W_0 energie emitovaná excitovaným jádrem, pak po úbytku energie vlivem zpětného rázu je energie kvanta $W_0 - R$. Má-li být kvantum absorbováno, musí mít celkovou energii $W_0 + R$. Energetický defekt je tedy

$$W = W_0 + R - (W_0 - R) = 2R. \quad (11)$$

Situace při emisi a absorpci je graficky znázorněna na obr. 3. Aby došlo k rezonanční absorpci, je nutné nějakým způsobem kompenzovat energii zpětného rázu. Při kompenzaci, tj. při splnění podmínky (3), se obě čáry absorpční a emisní dostatečně překryjí. Tyto úvahy platí pro volná jádra, která jsou před emisí nebo absorpcí v klidu. Ve skutečnosti však jádra vlivem tepelného pohybu nejsou v klidu a v důsledku toho se teoreticky předpověděné velmi ostré spektrální čáry

²⁾ Energie zpětného rázu nemá význam při rezonanční absorpci v elektronovém obalu atomu, neboť má velmi malou hodnotu (ν_0 je řádově 10^{15} s^{-1}), viz (8). V případě jaderné rezonanční absorpce, kdy kvanta mají velkou energii (ν_0 je řádově 10^{20} s^{-1}) se zpětný ráz uplatňuje a v důsledku toho se spektrální emisní čáry, které jsou velmi úzké, dostatečně nepřekrývají.

rozšiřují vlivem změny frekvence způsobené Dopplerovým jevem. Tímto rozšířením se může pro určitou oblast frekvencí rušit vliv zpětného rázu a může tedy dojít k částečné absorpci. Při laboratorní teplotě je však zpětný ráz kompenzován jen pro malou část záření γ a emisní a absorpční čáry se jen částečně překrývají (viz obr. 3 šrafovaná část).



Obr. 3. I. Rozšířená a posunutá šířka čáry emisní.
II. Rozšířená a posunutá šířka čáry absorpční.

3. Způsoby kompenzace zpětného rázu

Kompenzace zpětného rázu se dá uskutečnit zvýšením teploty zářičů. S rostoucí teplotou roste kinetická energie molekul a atomů a nastane vlivem Dopplerova efektu rozšíření emisní čáry tak, že se s absorpční čarou překryjí a dojde k částečné rezonanční absorpci. Tohoto způsobu užil K. G. Malmfors.

Jiný způsob kompenzace spočívá v tom, že emitör se pohybuje k absorbátoru určitou rychlostí v . Tak dojde ke změně frekvence vlivem Dopplerova efektu o hodnotu $\Delta\nu$.

Platí

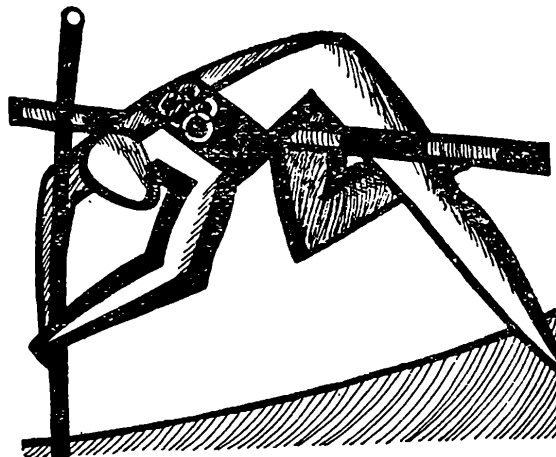
$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{v}{c} \quad (12)$$

Užitím vztahu (5) dostaneme pro relativní šířku čáry $\frac{\Gamma}{W_0}$ a pro rychlost v vztahy

$$\frac{\Gamma}{W_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = \frac{\Gamma c}{W_0} \quad (13)$$

(Pokračování)

MMO



X. mezinárodní matematická olympiáda

STANISLAV HORÁK PRAHA

A dnes si povíme, jak naši chlapeči řešili v Moskvě jednotlivé příklady. Máme tu přirozeně vždy to nejlepší řešení. (Texty jednotlivých příkladů jsou v č. 2.)

1. příklad. Řešení B. Siváka.

Nechť

$$\beta = 2\alpha$$

Ze sinové věty dostaneme

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha ,$$

$$b = 2a \cos \alpha .$$

Napišme ještě kosinovou větu a tu upravujeme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha .$$

$$a^3 = ab^2 + ac^2 - 2abc \cos \alpha ,$$

$$a^3 + b^2c - ab^2 - ac^2 = 0 ,$$

$$(a - c)(a^2 + ac - b^2) = 0$$

Ale $a \neq c$, a proto dostáváme vztah

$$a^2 + ac - b^2 = 0 . \tag{1}$$

Víme však, že

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \beta > \alpha \Rightarrow b > a .$$

Dále je nutné uvažovat — pokud se týče délek stran trojúhelníka — tři případy. Stále bereme ohled na nerovnost $b > a$.

A. $a = n - 1, b = n, c = n + 1$;

B. $a = n - 1, b = n + 1, c = n$;

C. $a = n, b = n - 1, c = n - 1$.

Ve všech případech je n přirozené číslo větší než 1, neboť $n - 1 > 0$,

A. Dosadíme do (1)

$$(n - 1)^2 + (n - 1)(n + 1) - n^2 = 0,$$

$$n(n - 2) = 0.$$

Ale $n > 0$, a proto

$$n = 2.$$

Strany trojúhelníka mají po řadě délky 1, 2, 3, což není možné vzhledem k trojúhelníkové nerovnosti. V tomto případě neexistuje řešení.

B. Dosadíme do (1)

$$(n - 1)^2 + (n - 1)n - (n + 1)^2 = 0,$$

$$n(n - 5) = 0$$

Poněvadž $n > 0$, máme

$$n = 5.$$

Strany trojúhelníka mají po řadě délky 4, 6, 5, což je možné. Je však potřeba dokázat, že skutečně $\beta = 2\alpha$.

Délky stran trojúhelníka splňují rovnici (1) a poněvadž $a \neq c$, můžeme psát

$$(a - c)(a^2 + ac - b^2) = 0,$$

$$a^3 = ab^2 + ac^2 - b^2c$$

Ale $a \neq 0$, a proto

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2c}{a}$$

Napišme ještě kosinovou větu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Z posledních dvou rovnic plyne

$$\frac{b^2c}{a} = 2bc \cos \alpha,$$

$$\frac{b}{a} = 2 \cos \alpha$$

My však víme, že

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Porovnáním posledních dvou rovnic docházíme k výsledku

$$\sin \beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha .$$

Poslední rovnost je splněna ve dvou případech, buď

$$\beta = 2\alpha$$

nebo

$$\beta = \pi - 2\alpha .$$

Všimněme si nejprve druhého příkladu a počítejme velikost úhlu γ

$$\gamma = \pi - \alpha - \beta = \pi - \alpha - (\pi - 2\alpha) = \alpha$$

To však není možné, neboť

$$c = 5 > 4 = a .$$

Platí tudíž první případ $\beta = 2\alpha$ a potom $a = 4$, $b = 6$, $c = 5$.

C. Tento případ neposkytuje žádné řešení, neboť délky stran jsou zde vyjádřeny iracionálními čísly, jak se snadno přesvědčíme. Jediné řešení je právě to, které vyšlo v případě B.

2. příklad. Řešení Libora Poláka.

Nejprve vyšetříme kolikaciferná čísla mohou splňovat podmínky naší úlohy. Označme n -ciferné číslo x_n , součin jeho cifer $S(x_n)$ a

$$f(x_n) = (x_n)^2 - 10x_n - 22$$

Zřejmě

$$S(x_n) \leq 9^n \leq 10^n$$

Funkce $f(x)$ nabývá hodnoty 0 pro

$$x' = 5 + \sqrt{47} > 10, \quad x'' = 5 - \sqrt{47}$$

Pro kladné x nabývá nezáporných hodnot v intervalu

$$[5 - \sqrt{47}; \infty),$$

kde je rostoucí. Pak platí

$$x_n \geq 10^{n-1},$$

a proto

$$f(x_n) \geq 10^{2n-2} - 10^n - 22$$

Tento vztah je splněn jen tehdy, když

$$S(x_n) \geq f(x_n)$$

nebo

$$10^n \geq 10^{2n-2} - 10^n - 22$$

Provádějme nyní úpravy, jimiž se zvětšuje počet řešení

$$10^n \geq 10^{2n-2} - 10^n - 10^n ,$$

$$3 \quad 10^n \geq 10^{2n-2} ,$$

$$10^{n+3} \geq 10^{2n} .$$

Odtud dostáváme

$$n + 3 > 2n ,$$

$$n < 3$$

Poněvadž $x' > 10$, mohou vyhovovat pouze dvojčíselná čísla. Pro ně platí

$$S(x) < 81 ,$$

a proto i

$$f(x) = x^2 - 10x - 22 < 81$$

čili

$$x^2 - 10x - 103 < 0 ,$$

což platí pro

$$5 - \sqrt{128} < x < 5 + \sqrt{128}$$

Avšak

$$\sqrt{128} < \sqrt{144} = 12 ,$$

z čehož plyne

$$x < 17$$

Tudíž

$$12 \leq x \leq 16$$

Pro tato čísla je

$$S(x) \leq 6$$

a zároveň

$$f(x) = x^2 - 10x - 22 \leq 6 ,$$

$$x^2 - 10x - 28 \leq 0 ,$$

což platí pro

$$5 - \sqrt{53} \leq x \leq 5 + \sqrt{53} < 5 + \sqrt{64} = 13$$

Zbývá jediná možnost

$$x = 12$$

a zkouškou zjistíme, že skutečně $x = 12$.

Druhá mezinárodní fyzikální olympiáda

Prof. dr. ROSTISLAV KOŠŤÁL, Brno

V době od 23. června do 1. července 1968 proběhla v Budapešti druhá mezinárodní fyzikální olympiáda (2. MFO). Zúčastnila se jí družstva z osmi států. Ke státům zastoupeným na 1. MFO ve Varšavě — Bulharsku, Československu, Maďarsku, Polsku a Rumunsku — přistoupila letos Jugoslávie, Německá demokratická republika a Sovětský svaz.

Soutěž se ještě neřídila statutem a směrnicemi. Při zahájení bylo usneseno, že se statut a směrnice projednají až později. Při zakončení byl stanoven termín na měsíc říjen.

Na 2. MFO byli z každého státu pozváni jen tři studenti a jeden vedoucí delegace. Vedením naší delegace byl pověřen MŠ předseda ÚV FO prof. RNDr. Rostislav Košťál. Poněvadž podle usnesení ÚV FO měli být účastníky 2. MFO první tři vítězové 3. kola FO, bylo stanoveno toto pořadí účastníků a náhradníků pro 2. MFO:

účastníci:

1. Jan Filipenský, 4. roč. SPŠE Brno, Leninova 40,
2. Ondřej Křivánek, 3. roč. SVVŠ Praha 2, W. Piecka 2,
3. Miroslav Kawalec, 3. roč. SVVŠ Havířov,

náhradníci:

4. Mojmír Simerský, 4. roč. SPŠVE Rožnov p. Radhoštěm,
5. Pavel Polcar, 3. roč. SVVŠ Velké Meziříčí,
6. Tomáš Markvart, 3. roč. SVVŠ Praha 2, W. Piecka 2.

Maďarská lidová republika stanovila pro účast na 2. MFO věkovou hranici 1. 1. 1949. Tím byl vyloučen z účasti Jan Filipenský, náš absolutní vítěz v 3. kole FO, poněvadž byl o 16 dní starší. Byl proto na jeho místo povolán náhradník, takže naše družstvo na 2. MFO mělo tyto členy: 1. Ondřeje *Křivánka*, 2. Miroslava *Kawalce* a 3. Mojmíra *Simerského*.

Do soutěže bylo zapojeno 24 studentů; byli to letos jenom hoši. Mezi rumunskými účastníky byl i studující vojenské střední školy.

Druhá mezinárodní fyzikální olympiáda byla slavnostně zahájena 24. června v 18 hodin v posluchárně Vysoké školy technické v Budapešti.

Klasifikace byla prováděna bodováním od 10 bodů do 0 bodů, jako na 1. MFO. Na řešení tří teoretických úloh 25. června byla dána doba 5 hodin, na řešení experimentální úlohy 26. června rovněž 5 hodin.

Největší počet dosažitelných bodů byl tedy 40. Po provedené klasifikaci bylo přijato, že úspěšným řešitelem je ten soutěžící, který dosáhl aspoň 19 bodů.

Řešení teoretických úloh bylo provedeno ve velké posluchárně Vysoké školy technické, řešení laboratorní úlohy ve fyzikálním ústavu přírodovědecké fakulty, ve velké laboratoři, která byla upravena tak, aby účastníci na práci sousedů neviděli.

Opravy úloh byly provedeny za pomoci vedoucích delegací a tlumočnicků maďarskými komisemi. Výsledky byly 30. června předloženy vedoucím delegací ke schválení. Výsledky jsou tyto:

	Jméno		Příklady				Součet bodů
			1	2	3	4	
1.—2.	Mojmír Simerský	ČSSR	9	9	9	8	35
	Tomáš Kreglewski	Polsko	8	9	9	9	35
3.	László Takács	Maďarsko	10	5	9	9	33
4.—6.	Peter Georgiev	Bulharsko	7	10	9	5	31
	Emil Matejev	Bulharsko	6	10	9	6	31
	László Mihály	Maďarsko	9	5	9	8	31
7.—8.	Ondřej Křivánek	ČSSR	7	9	9	5	30
	Andrej Detela	Jugoslávie	8	6	8	8	30
9.	Ferenc Marossy	Maďarsko	9	5	10	5	29
10.—11.	Joachim Loose	NDR	0	10	10	8	28
	Gad. Sel. Feizov	SSSR	8	5	9	6	28
12.—13.	Stefan Jackowski	Polsko	7	8	5	7	27
	Alex. Petr. Vinogradov	SSSR	6	6	9	6	27
14.—16.	Miroslav Dorešić	Jugoslávie	7	9	0	8	24
	Petre Dan	Rumunsko	9	8	0	7	24
	Sergěj Vikt. Solncev	SSSR	7	5	5	7	24
17.—18.	Wolfgang Pilz	NDR	0	5	9	8	22
	Jacek Kossut	Polsko	7	5	5	5	22
19.	Uwe Kofer	NDR	0	5	8	8	21
20.—22.	Gentho Mincev	Bulharsko	9	4	0	7	20
	Miroslav Kawalec	ČSSR	9	5	0	6	20
	Hrvoje Galić	Jugoslávie	0	5	9	6	20
23.—24.	Ilie Matra	Rumunsko	7	5	0	7	19
	Laurentiu Tincu	Rumunsko	8	2	0	9	19

Byli tedy všichni účastníci úspěšní.

Z našich se umístili Mojmir Simerský na 1.—2. místě, Ondřej Křivánek na 7.—8. místě a Miroslav Kawalec na 20.—22. místě.

Ceny byly uděleny podle dosažených bodů takto:

1. cena: Simerský — 35 (ČSSR) a Kreglowski — 35 (Pol.),
2. cena: Takács — 33 (Maď.),
3. cena: Georgiev — 31 (Bulh.), Matejev — 31 (Bulh.),
Mihály — 31 (Maď.),
4. cena: Křivánek — 30 (ČSSR) a Detela — 30 (Jug.).

Zvláštní cenu obdrželi:

Marossy (Maď.), Loose (NDR) a Feizov (SSSR).

Pořadí jednotlivých družstev podle dosažených bodů bylo toto:

- | | |
|---------------|----------|
| 1. Maďarsko | 93 bodů, |
| 2. ČSSR | 85 bodů, |
| 3. Polsko | 84 bodů, |
| 4. Bulharsko | 82 bodů, |
| 5. SSSR | 79 bodů, |
| 6. Jugoslávie | 74 bodů, |
| 7. NDR | 71 bodů, |
| 8. Rumunsko | 62 bodů. |

Byla tedy všechna družstva úspěšná.

Loňské první tři státy Maďarsko, ČSSR a Polsko obsadily opět první tři místa. Bulharsko, které loni bylo čtvrté, se značně proti loňsku zlepšilo a obsadilo v těžší soutěži opět čtvrté místo. Nově nastupující státy zařadily se na 5.—7. místo.

Naše druhé místo v pořadí družstev a první a čtvrtá cena je pro nás skutečně úspěchem.

O delegace bylo dobře postaráno; navštívily vědecké ústavy, kulturní a zábavní podniky a některá turistická místa.

Slavnostní vyhlášení výsledků bylo provedeno dne 30. června v hotelu Ifjuság, kde byly vítězům zároveň odevzdány dary.

Základy vektorovej algebry

JOZEF ZÁMEČNÍK, Bratislava

(Dokončení)

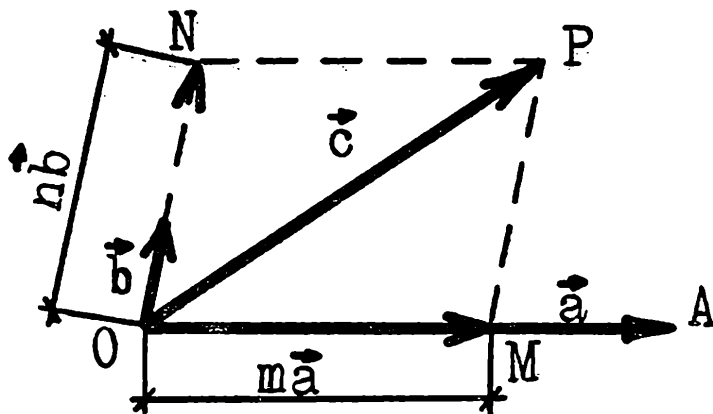
VI. Rozklad vektora na zložky

S rozkladom napríklad sily na zložky sme sa stretli už na ZDŠ. Zaoberajme sa teraz s rozkladom vektora na zložky trochu všeobecnejšie.

Majme vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ktoré ležia v jednej rovine a nech vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ nie sú navzájom rovnobežné. Prenesme ich do spoločného počiatku O (obr. 11). Koncovým bodom vektora $\mathbf{c} = \overrightarrow{OP}$ vedme priamky PN a PM , rovnobežne s $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Z rovnobežníka $OMPN$ potom zistíme, že

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}.$$

Rovnosť, ktorú sme dostali, vyjadruje rozklad vektora $\mathbf{c}$ na zložky $m\mathbf{a}$ a $n\mathbf{b}$ v smeroch vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Geometricky tieto zložky dostaneme tak, keď koncovým bodom vektora $\mathbf{c}$ vedieme rovnobežky so smermi vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ (obr. 11). Dĺžky úsečiek, ktoré tieto rovnobežky vytnú na vektoroch $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, sú absolútne hodnoty zložiek.



obr. 11

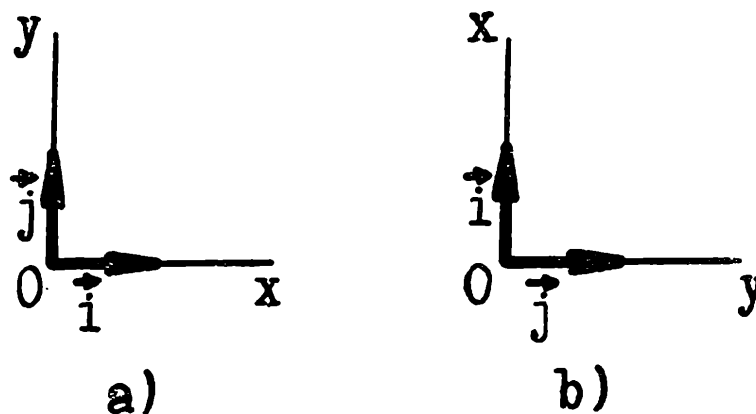
Je zrejmé, že vektor $\mathbf{c}$ možno rozložiť na ľubovoľné iné vektory, ktoré s ním ležia v tej istej rovine.

Podobne možno postupovať aj v trojrozmernom priestore, čo však nie je úkolom tohoto článku.

Ak je dané poradie dvoch rôznobežných vektorov, napríklad už uvedených vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, do ktorých potom rozkladáme všetky ostatné vektory v rovine, hovoríme, že vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ tvoria usporiadanú dvojicu vektorov — systém.

Systém sa nazýva pravotočivý, ak stotožnenie prvého vektora do smeru druhého vektora nastane otáčaním prvého vektora okolo jeho počiatočného bodu po kratšej ceste proti pohybu hodinových ručičiek. V opačnom prípade je systém ľavotočivý.

Špeciálny prípad systému dvoch rôznobežných vektorov sú dva navzájom kolmé jednotkové vektory, ktoré ďalej budeme označovať $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. Tieto jednotkové vektory určujú v naznačenom poradí osi x , y nám už známeho pravouhlého súradného systému (obr. 12). Pravouhlý (ortogonálny) systém môže byť teda pravotočivý (obr. 12a), alebo ľavotočivý (obr. 12b). Vo fyzike sa najčastejšie používa systém pravotočivý, a preto



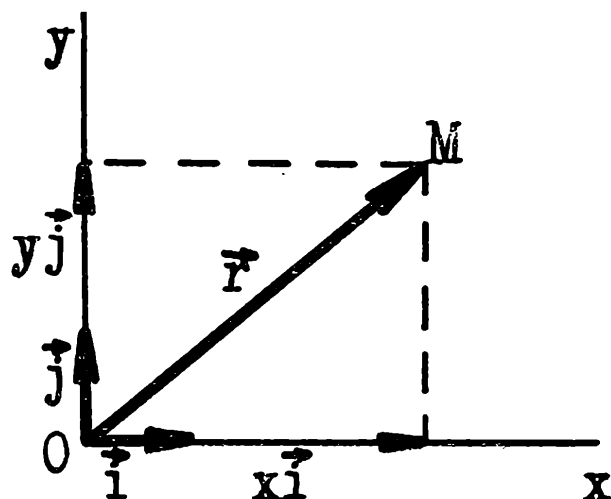
obr.12

i my v ďalšom budeme používať len pravotočivý systém. V pravouhlom systéme jednotkových vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ môžeme určiť polohu ľubovoľného bodu M polohovým vektorom. Označme ho $\mathbf{r}$. Vektor $\mathbf{r}$ môžeme však vyjadriť ako súčet jeho zložiek v smeroch základných jednotkových vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$. Teda

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

Poznámka: Polohový vektor je vektor, ktorý má vždy počiatočný bod v počiatku súradného systému a koncový bod v bode, polohu ktorého určuje.

kde $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ sú pravouhlé priemetky vektora $\mathbf{r}$ do osi x , y a nazývajú sa zložky vektora $\mathbf{r}$. Čísla x , y sú absolútne hodnoty týchto priemetov (zložiek) a nazývajú sa súradnice vektora $\mathbf{r}$ a teda súčasne i súradnice bodu M . Ak teda poznáme polohový vektor, potom poznáme i súradnice jeho koncového bodu a naopak, ak poznáme súradnice ľubovoľného bodu, vieme napísať jeho polohový vektor. Napríklad $A = (3, -2)$, potom polohový vektor $\mathbf{r}_A$, ktorý určuje polohu bodu A je



obr.13

$\mathbf{r}_A = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Z vlastností pravouhlého trojúhelníka (obr. 13) vyplývá, že absolutní hodnota vektora $\mathbf{r}$ je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5)$$

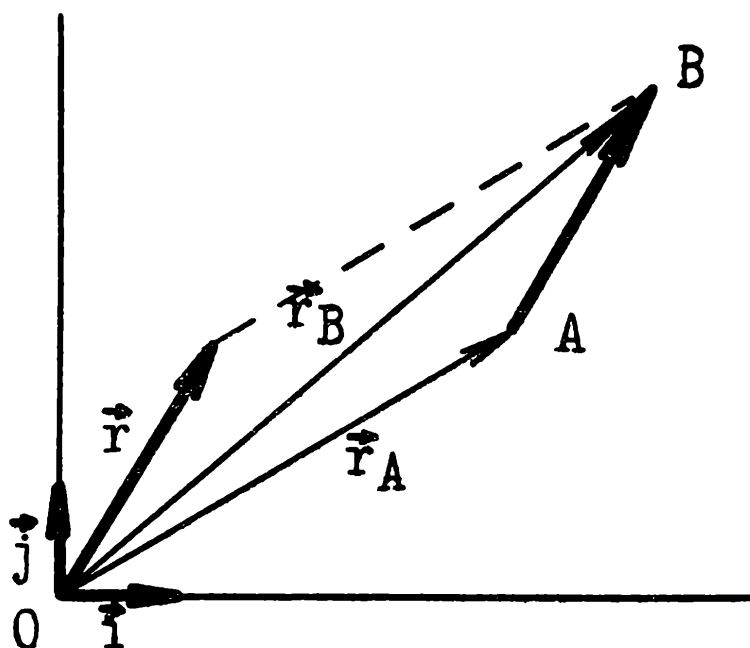
Konkrétně pro polohový vektor $\mathbf{r}_A$ bude

$$r_A = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

Uvažujme teraz ľubovoľný vektor $\vec{AB}$ (A je počiatkový a B koncový bod). Zostrojme polohový vektor $\mathbf{r} = \vec{AB}$ (obr. 14). Súradnice vektora $\mathbf{r}$ v pravouhlom súradnom systéme budú teda súčasne pravouhlé priemety vektora $\vec{AB}$ do osí súradného systému.

Vektor $\mathbf{r}$ dostaneme, ak od polohového vektora $\mathbf{r}_B$ odčítame polohový vektor $\mathbf{r}_A$. Teda

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$$



obr.14

Príklad: Nech $A = (3,2)$; $B = (4,4)$. Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A &= 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = \\ &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \vec{AB}. \end{aligned}$$

Pre absolútnu hodnotu vektora AB teda platí

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2}$$

Príklad: V jednom bode pôsobia tri sily, ktorých veľkosti priemetov do jednotlivých osí pravouhlého súradného systému sú $x_1 = 1 \text{ N}$, $y_1 = 2 \text{ N}$; $x_2 = -2 \text{ N}$, $y_2 = 3 \text{ N}$; $x_3 = 3 \text{ N}$, $y_3 = -4 \text{ N}$.

Treba určiť veľkosť výslednice týchto síl.

Riešenie: Označme jednotlivé sily $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ a ich výslednicu $\mathbf{F}$. Ak poznáme pravouhlé priemety, do osí súradného systému, čiže súradnice jednotlivých síl, potom môžeme písať

$$\mathbf{F}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ N},$$

$$\mathbf{F}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} = (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_3 = x_3 \mathbf{i} + y_3 \mathbf{j} = (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \text{ N},$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \text{ N},$$

$$F = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} \text{ N} = \sqrt{5} \text{ N}$$

Veľkosť výslednej sily je $\sqrt{5} \text{ N}$.

Poznámka: 1. Ak narábame s konkrétnou fyzikálnou veličinou, v tomto prípade so silou, potom súradniciam daného vektora treba priradiť i rozmer jednotky v ktorej danú fyzikálnu veličinu meriame.

2. $1 \text{ N} = 1 \text{ newton} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$.

Úlohy:

1. Je daný bod $M = (5, 3)$. Určte absolútnu hodnotu jeho polohového vektora.

2. Polohový vektor bodu P zvierá s osou x uhol 45° . Jeho absolútna hodnota je $r = 6 \text{ cm}$. Určte súradnice bodu P a vyjadrite vektor $\vec{r} = \vec{OP}$ pomocou jednotkových vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

3. Sú dané body $A = (1, 2)$ a $B = (3, -4)$. Znázornite graficky vektor $\vec{AB}$ a jeho zložky na osiach v pravouhlom súradnom systéme. Určte absolútnu hodnotu tohoto vektora.

4. Určte súradnice, absolútne hodnoty a uhly, ktoré zvierajú vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ s osou x , ak $\mathbf{a} = -2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{d} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

VII. Uhol dvoch vektorov

Skalárny súčin dvoch vektorov

Majme dva ľubovoľné vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Pod uhlom φ vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ rozumieme uhol zovretý týmito vektormi, ak ich preniesieme do spoločného počiatku O (obr. 15). Budeme ho označovať tiež $\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}$. Môže nadobúdať hodnoty od 0° do 180° .

Ukázalo sa užitočným zaviesť niekoľko súčinov medzi vektormi. Skalárny súčin dvoch vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, ktorý označujeme $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ je skalár

(číslo), a to v prípade nenulových vektorov súčin ich absolútnych hodnôt a kosínusu nimi zovretého uhla.

Teda

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos (\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}) . \quad (6)$$

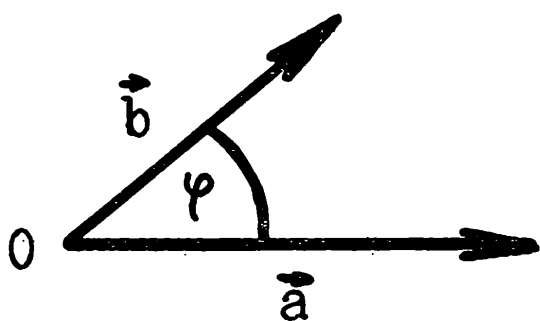
Čítame „ $\mathbf{a}$ krát $\mathbf{b}$ skalárne“.

Príklad: Nech $a = 5$, $b = 4$, $\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b} = 120^\circ$. Potom

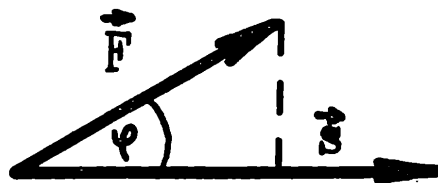
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cos (\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 5 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -10 .$$

Keďže vo všeobecnosti vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sú fyzikálne veličiny, potom skalár $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ má istý rozmer, daný súčinom rozmerov obidvoch vektorov.

Z rovnosti (6) je vidieť, že ak sa niektorý z vektorov rovná $\mathbf{0}$, je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Taktiež $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ak $\cos (\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Teda podmienka kolmosti dvoch nenulových vektorov je, aby ich skalárny súčin sa rovnal nule.



obr.15



obr.16

Z rovnosti (6) je tiež zrejmé, že platí $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Pre skalárny súčin jednotkových vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ podľa (6) možno písať

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (7)$$

Ak sú vektory určené svojimi pravouhlými súradnicami

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}, \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j},$$

potom uplatnením (7) bude

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) = \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = a_x b_x + a_y b_y . \end{aligned}$$

Teda

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y . \quad (8)$$

Podľa (8) skalárny súčin dvoch vektorov sa rovná súčtu súčinov rovnomených súradníc oboch vektorov.

Použitím (5), (6), (7) môžeme určiť uhol dvoch vektorov

$$\cos (\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} . \quad (9)$$

Príklad: Vypočítajme $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ a určme $\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}$ ak $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Podľa (8) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1 + 2 = 1$ a podľa (9)

$$\cos (\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

z čoho

$$\angle \mathbf{a}, \mathbf{b} \doteq 71^\circ 35'$$

Skalárny súčin sa vo fyzike okrem iného používa pri zavádzaní pojmu práce. Hovoríme, že sila $\mathbf{F}$ koná prácu A , ak sa pohybuje jej pôsobisko. V najjednoduchšom prípade je sila konajúca prácu konštantná (smer i absolútna hodnota) a jej pôsobisko sa pohybuje po priamke (obr. 16). Práca A , ktorá sa pritom vykoná, je definovaná súčinom dĺžky dráhy s , ktorú urazilo pôsobisko sily, a absolútnej hodnoty priemetu F_s sily $\mathbf{F}$ do smeru dráhy. Teda $A = F_s s = F s \cos \varphi$, čo možno zapísať vo vektorovom tvare $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$.

Úlohy:

1. Vypočítajte $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ a určte uhol vektorov ak $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

2. Pôsobením sily $\mathbf{F} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$ kp sa hmotný bod posunul o úsečku $\mathbf{s} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$ m. Vypočítajte prácu sily $\mathbf{F}$ a uhol medzi touto silou a úsečkou $\mathbf{s}$.

VIII. Vektorový súčin dvoch vektorov

Majme dva vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, ktoré nie sú navzájom rovnobežné. Ich vektorový súčin je vektor $\mathbf{c}$, ktorý je kolmý na rovinu, ktorú určujú vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Označujeme ho $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Absolútna hodnota vektora $\mathbf{c}$ sa rovná súčinu absolútnych hodnôt vektorov $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ a sínusu uhla vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Teda

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin (\angle \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (10)$$

O orientácii vektora $\mathbf{c}$ zatiaľ pomlčíme.

IX. Niektoré použitia vektorov v mechanike

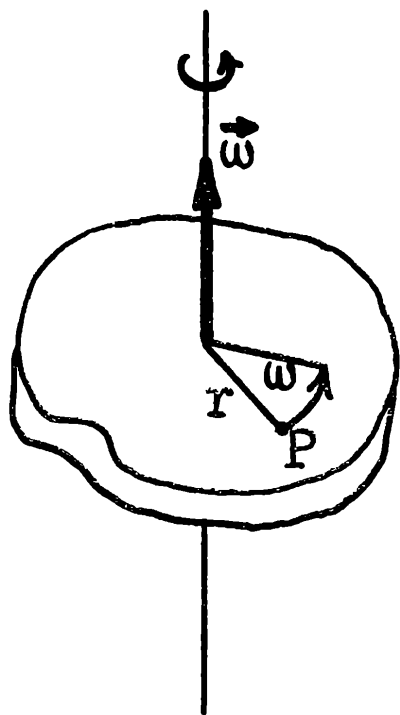
Použitie vektorov v mechanike je veľmi účelné a mnohostranné. Uvediem ešte, veľmi stručne, aspoň dva prípady.

a) Otáčanie sa tuhého telesa okolo pevnej osi

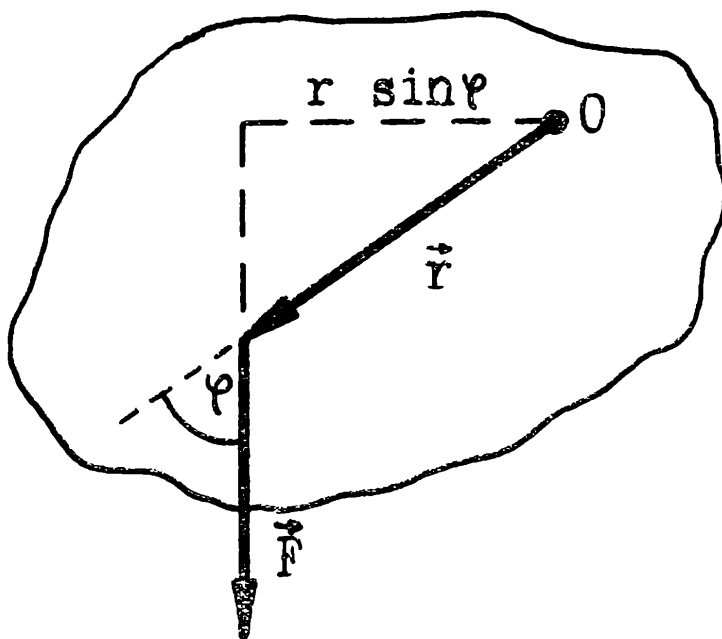
Ak sa tuhé teleso otáča rovnomerne okolo pevnej priamky — osi otáčania, potom jednotlivé body telesa sa pohybujú po kružniciach

v rovinách na túto os kolmých. Ich stredy sú na osi otáčania. Obežné rýchlosti týchto bodov sú vo všeobecnosti rôzne, avšak uhly, ktoré opíšu kolmice spustené z jednotlivých bodov na os otáčania v tomže časovom intervale budú rovnaké. Nech ω je uhol opísaný za jednotku času. Nazýva sa uhlová rýchlosť. Danému uhlu môžeme priradiť aj vektor. Potom uhlová rýchlosť ω otáčania sa tuhého telesa okolo osi je vektor s osou otáčania rovnobežný a orientovaný na tú stranu, z ktorej sa otáčanie javí v zmysle proti pohybu hodinových ručičiek a jeho absolútna hodnota ω je uhol opísaný za jednotku času (obr. 17).

Pozorujme teraz pohyb ľubovoľného bodu P telesa a určíme jeho rýchlosť. Jeho pohyb je rovnomerný po kružnici o polomere r , v rovine kolmej na os (obr. 17). Ako je nám známe, absolútna hodnota rýchlosti bodu pohybujúceho sa rovnomerne po kružnici polomeru r s uhlovou rýchlosťou ω je $v = \omega r$.



obr.17



obr.18

Príklad: Koleso sa otáča súčasne okolo vodorovnej a zvislej osi, pričom za jednu sekundu vykoná okolo vodorovnej osi dve otáčky a okolo zvislej osi jednu otáčku. Určte vektor výslednej uhlovej rýchlosti.

Riešenie: Zvoľme pravouhlý súradný systém tak, aby os x bola totožná s vodorovnou osou otáčania a os y so zvislou osou otáčania. Potom otáčanie okolo osi x je charakterizované vektorom uhlovej rýchlosti ω_x a otáčanie okolo osi y vektorom ω_y .

Výsledný pohyb kola je zložený z uvedených dvoch otáčavých

pohybov a je charakterizovaný vektorom výslednej uhlovej rýchlosti ω , pre ktorý platí

$$\omega = \omega_x + \omega_y.$$

Ak určíme vektor ω naznačeným spôsobom, bude to iba jeho okamžitá hodnota, lebo vektor ω_x , respektíve ω_y vo všeobecnosti nie je konštantný — mení stále svoj smer. Podľa (3)

$$\omega_x = \omega_x \mathbf{i}, \quad \omega_y = \omega_y \mathbf{j},$$

kde

$$\omega_x = \frac{2\pi}{T_x}, \quad \omega_y = \frac{2\pi}{T_y}$$

Poznámka: Predpokladáme, že z koncových bodov jednotkových vektorov $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ vidíme otáčanie kola proti pohybu hodinových ručičiek. Ak by sa koleso otáčalo v smere pohybu hodinových ručičiek, potom príslušný vektor ω_x , resp. ω_y by bol opačne orientovaný.

Ak dosadíme za $T_x = 0,5$ s a za $T_y = 1$ s, potom

$$\omega = (4\pi\mathbf{i} + 2\pi\mathbf{j}) \text{ s}^{-1}$$

a podľa (5)

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = 2\pi\sqrt{5} \text{ s}^{-1}$$

b) Moment sily

Ak na tuhé teleso, schopné otáčať sa okolo pevnej osi pôsobí sila, potom otáčivý účinok tejto sily vyjadrujeme jej momentom.

Nech O je bod na osi otáčania a súčasne počiatok súradného systému (obr. 18). $\mathbf{r}$ nech je polohový vektor pôsobiska sily $\mathbf{F}$.

Vieme, že moment $\mathbf{M}$ sily $\mathbf{F}$ vypočítame zo vzťahu

$$M = rF \sin \varphi,$$

čo však podľa (10) je absolútna hodnota vektorového súčinu vektorov $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$. Moment $\mathbf{M}$ je teda vektorová veličina, pre ktorú platí

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Záver

Prebrali sme tieto operácie: sčítanie a odčítanie vektorov, násobenie vektora číslom, skalárny súčin dvoch vektorov a veľmi stručne a neúplne vektorový súčin dvoch vektorov. Tým končia základné operácie vektorovej algebry. Pokiaľ ide o delenie vektora vektorom, vektorová algebra takúto operáciu nepozná. Možno hovoriť len o pomere dvoch rovnobežných vektorov ako o číse, ktorým je treba násobiť prvý vektor aby sme dostali druhý. Práve tak nemožno vo vektorovej algebre vektor umocniť.

mřížkového předpětí směrem k zápornějším hodnotám, tj. do oblasti menšího anodového proudu, takže původní zvětšení proudu se tím zmírňuje.

11. Výkonové zesilovače — grafické řešení

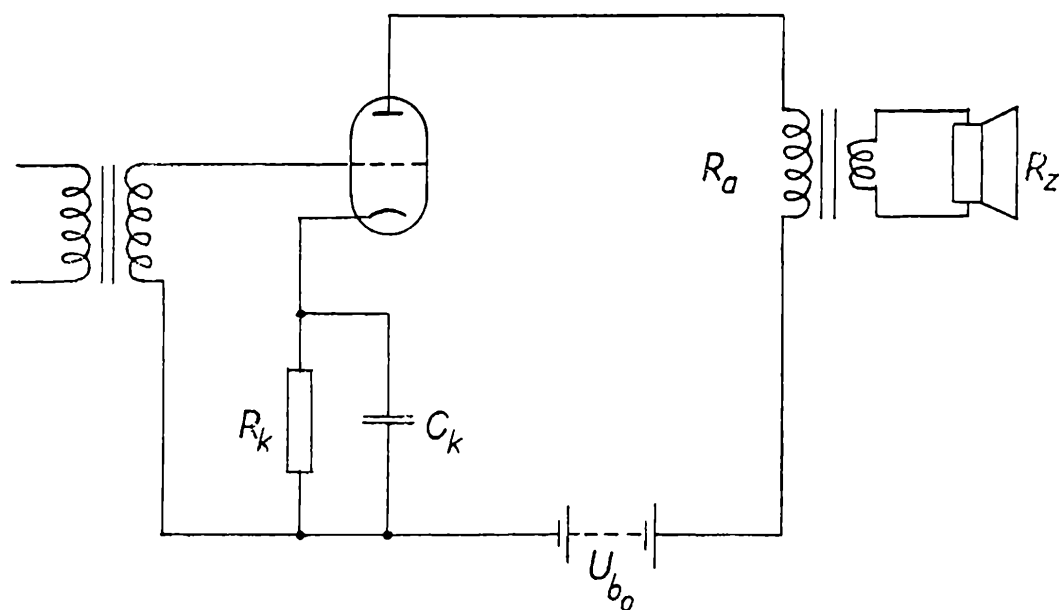
Protože při zesilovačích výkonu se do mřížkového obvodu přivádí již zesílené, dosti velké napětí, pracuje elektronka ve větší části dynamické charakteristiky, která je nelineární, a proto nelze na řešení užít ekvivalentního obvodu. Ukazuje se dále, že optimální výkon, tj. maximální výkon při určitém malém tvarovém zkreslení, získáme, volíme-li zatěžovací odpor

$$R_{z \text{ opt}} = \frac{U_{ao}}{I_{ao}} - 2R_i$$

jde-li o triodu, a

$$R_{z \text{ opt}} = \frac{U_{ao}}{I_{ao}},$$

jedná-li se o výkonovou pentodu.



Obr. 14. Výkonový zesilovač

Odpor skutečné zátěže (např. reproduktoru) se ale zpravidla nerovná optimálnímu, a proto se mezi triodu a zátěž zapojí výstupní transformátor (obr. 14), který odpor zátěže R_z transformuje na takovou hodnotu R_a , která se co nejvíce blíží odporu optimálnímu.

Mějme transformátor, který má na primární straně N_1 závitů, na sekundární N_2 závitů. Poměr

$$p = \frac{N_1}{N_2}$$

nazveme převodem transformátoru. K sekundáru nechť je připojen odpor R_z . Je-li na sekundáru napětí U_2 a vtéká-li do odporu R_z proud I_2 , potom v primáru musí působit napětí $U_1 = pU_2$ a musí do primáru vtékat proud

$$I_1 = \frac{I_2}{p}.$$

Podle Ohmova zákona je

$$R_z = \frac{U_2}{I_2}$$

a primár klade vtékajícímu střídavému proudu odpor

$$R_a = \frac{U_1}{I_1} = \frac{pU_2}{\frac{I_2}{p}} = p^2 R_z,$$

takže odpor připojený k sekundáru se do primáru transformuje násobkem druhé mocniny převodu. Tato úvaha platí ovšem jen pro ideální transformátor, který je bezztrátový a má rovnoměrné přenosové vlastnosti v celém oboru kmitočtů.

Stejnoseměrný zatěžovací odpor je tvořen činným odporem primárního vinutí transformátoru a katodovým odporem R_k . Součet těchto odporů je zpravidla malý vůči vnitřnímu odporu triody R_i . V dalším budeme uvažovat jen případ, kdy součet těchto odporů je vůči R_i zanedbatelný, potom je $U_{ao} \doteq U_{bo}$.

Pro střídavý signál je rozhodující střídavý, tzv. užitečný zatěžovací odpor R_a . Tomuto odporu odpovídá střídavá zatěžovací přímka (obr. 15), kterou získáme tak, že bod na ose y

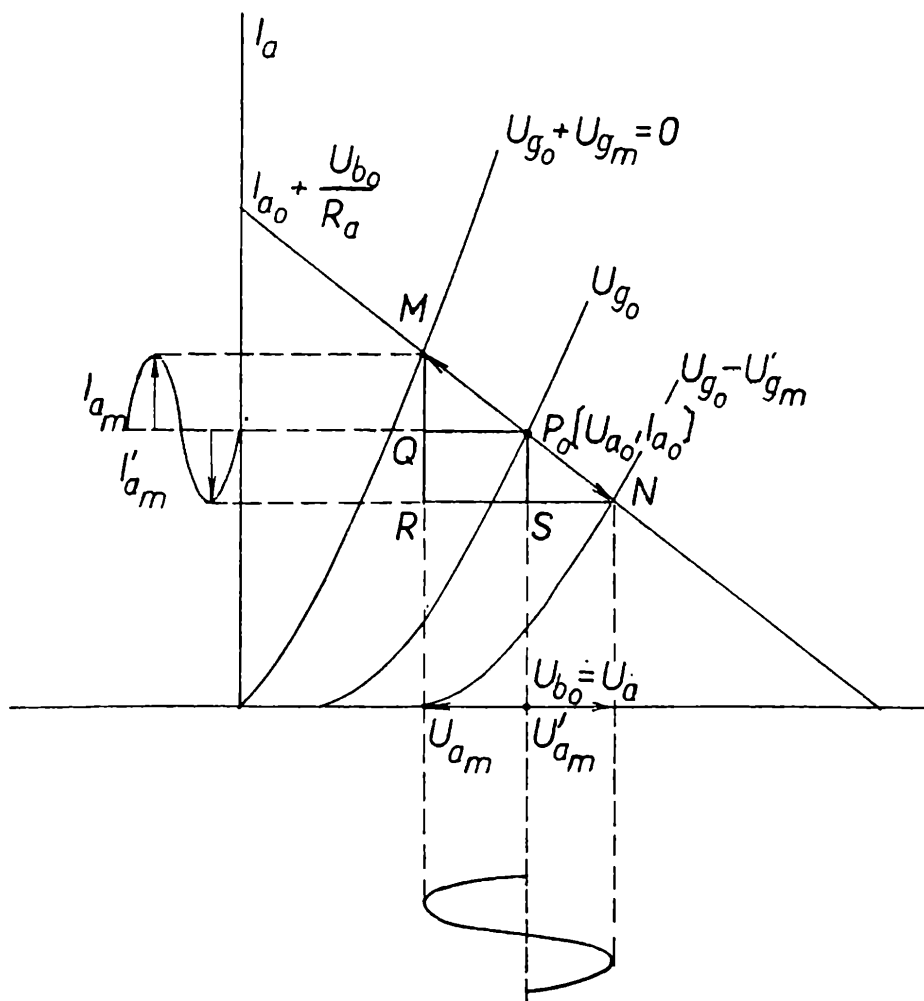
$$\left[I_{ao} + \frac{U_{bo}}{R_a} \right]$$

spojíme s bodem P_o [U_{ao} , I_{ao}], který je udán v katalogu elektronek. Bod P_o musí ležet pod nebo nanejvýš na hyperbole maximální anodové ztráty.

Maximální přípustná amplituda střídavého signálu, má-li být napětí mřížky stále záporné, je $U_{gm} = -U_{go}$.

Optimální výkon se rovná polovičnímu součinu amplitudy napětí U_{am} a amplitudy proudu I_{am} vytvořených maximálním budícím napětím s amplitudou $-U_{go}$, za předpokladu, že jde o harmonické střídavé veličiny. Je dán plochou trojúhelníka MP_oQ nebo plochou troj-

úhelníka P_oNS . Tyto trojúhelníky obecně ale nejsou shodné, protože nejsou stejné kladné a záporné půlvlny proudu ani napětí. Proto se



Obr. 15. Grafické řešení zesilovače výkonu

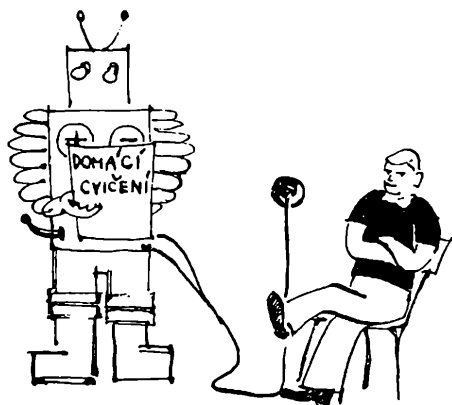
volívá $\frac{1}{4}$ plochy trojúhelníka MNR , tedy

$$P_v = \frac{1}{8} (U_{am} + U'_{am}) \cdot (I_{am} + I'_{am}) .$$

Protože příkon P_o se rovná anodové ztrátě $P_a = U_{ao}I_{ao}$, je účinnost triody

$$\eta = \frac{P_v}{P_a} = \frac{(U_{am} + U'_{am}) \cdot (I_{am} + I'_{am})}{8U_{ao}I_{ao}} .$$

Účinnost triod bývá asi 20 %.



≡ NAŠE SOUTĚŽ ≡

Úlohy k řešení

Řešení úloh otištěných v tomto čísle zašlete redakci v předepsané úpravě (viz str. 89) nejpozději do 31. l e d n a 1969.

Konstruktivní geometrie

1. Jsou dány dvě různoběžné roviny ϱ , σ . V rovině ϱ je dán bod A , v rovině σ bod C tak, že žádný z těchto dvou bodů neleží na průsečnici $r \equiv \varrho \times \sigma$. Sestrojte kvádr $ABCD A' B' C' D'$ o dané výšce v tak, aby vrchol B ležel v ϱ a vrchol D v σ .

Stanislav Horák

2. Jsou dány dvě různé rovnoběžky a , b a mimo jejich rovinu je dán bod M . Sestrojte roviny α , β tak, aby byly k sobě kolmé, aby rovina α procházela přímkou a , rovina β přímkou b a aby poměr vzdáleností bodu M od rovin α , β byl roven 3 : 2.

Stanislav Horák

3. Je dána rovina ϱ , v ní dva různé body A , B a přímka p neležící v rovině ϱ . Na přímce p najděte bod X tak, aby $\sphericalangle AX_1 B = 90^\circ$, je-li X_1 pravoúhlý průmět bodu X do roviny ϱ .

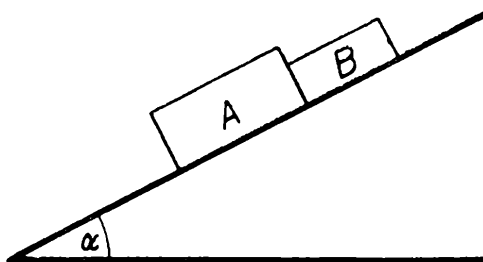
Stanislav Horák

4. Sestrojte rovnoosou hyperbolu, jsou-li dány polohou obě její osy a , b a normála n , přičemž pravoúhlý trojúhelník vytvořený přímkami a , b , n není rovnoramenný.

Ota Setzer

Fyzika

1. Po nakloněné rovině, svírající s vodorovnou rovinou úhel 30° , klouzájí působením tíže dva kvádry A a B o hmotnostech $m_1 = 100$ g a $m_2 = 50$ g (viz obr. 1). Koeficient tření mezi kvádrem A a nakloněnou rovinou je $f_1 = 0,30$; pro kvádr B je $f_2 = 0,15$. Určete:



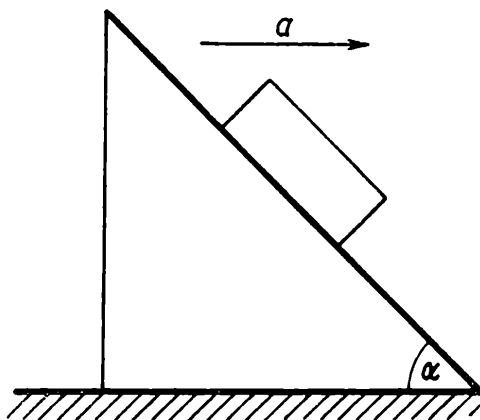
Obr. 1

a) zrychlení, jakým se soustava složená z kvádrů A a B pohybuje po nakloněné rovině,

b) sílu působící mezi oběma kvádry za pohybu.

Zdeněk Janout

2. Pravoúhlý klín, na jehož zkosené straně leží kvádr hmotnosti m , se pohybuje vpravo s konstantním zrychlením a (obráz. 2). Vypočítejte:



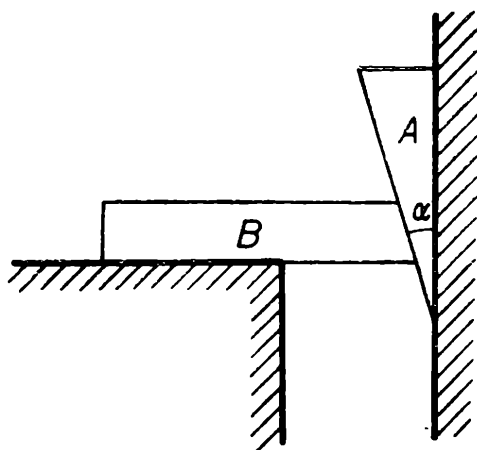
Obr. 2

a) s jakým zrychlením klouže kvádr po klínu,

b) jaké musí být zrychlení a , aby kvádr nesjel po klínu. Koeficient tření mezi klínem a kvádrem je $f = 0,2$. Úhel $\alpha = 45^\circ$.

Zdeněk Janout

3. Pravoúhlý klín A tíže Q se opírá jednou stěnou o hladkou svislou stěnu a částí druhé stěny o hladkou desku B tíže P , která může klouzat



Obr. 3

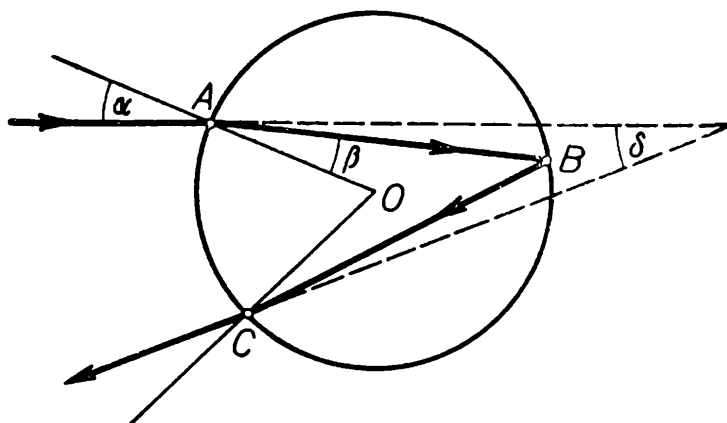
bez tření po pevné vodorovné rovině (viz obr. 3). Určete zrychlení hranolu a desky a tlak hranolu na desku. Úhel α je známý.

Zdeněk Janout

4. Vypočtete měrné teplo c_x vzorku z homogenního materiálu, použijeme-li k měření směšovací vodní kalorimetr. Jeho vodní hodnota, je-li prázdný (avšak včetně míchacího zařízení a teploměru) činí 110 J deg^{-1} , hmotnost vodní náplně je 900 g , hmotnost vzorku 195 g , teplota kalorimetru s vodou před vložením vzorku $\vartheta_0 = 25^\circ\text{C}$, po vložení vzorku $\vartheta_2 = 28^\circ\text{C}$, teplota vzorku před vložením do kalorimetru je $\vartheta_1 = 66^\circ\text{C}$. Měrné teplo vody bereme $c_v = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$.

Václav Šindelář

5. Světelný paprsek vstupuje v bodě A (obr. 4) do vodní kapky (index lomu vody $n = \frac{4}{3}$) pod úhlem velikosti α , odráží se v bodě B

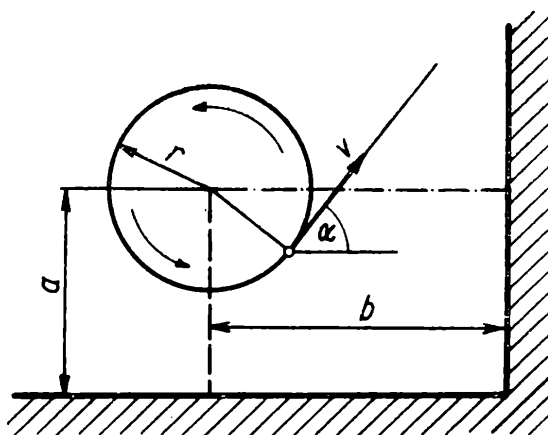


Obr. 4

a v bodě C vystupuje opět ven. Jak velký musí být úhel dopadu α , aby odchylka δ paprsku vystupujícího od paprsku odraženého byla co největší?

František Vencálek

6. Brusný kotouč poloměru r se roztrhl v okamžiku, kdy konal n otáček za minutu. Vypočtete, s jakou rychlostí udeřil na zeď úlomek kotouče, který byl vržen do výšky pod úhlem velikosti α (obr. 5). Osa



Obr. 5

kotouče má od podlahy vzdálenost a , od stěny b . Úlohu řešte obecně a do výsledku dosadte $n = 600$, $r = 0,2$ m, $a = 1,5$ m, $b = 4$ m a $\alpha = 45^\circ$. (Nedbejte odporu vzduchu.)

František Vencálek

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

3. Pre ktoré prirodzené čísla x je rozdiel $3^x - x^3$ deliteľný jednáctimi?

(Došlo 34 řešení.)

František Kejla

Riešil Eugen Ružický, III.Č SVŠ, Prešov:

Príklad riešme zvyškovými triedami. Množinu všetkých prirodzených čísel rozdelíme na 11 tried, a to podľa toho, aký dávajú zvyšok čísla, delené 11. Zhotovme si tabuľku:

x	$3x$	x^3	Zvyšok r čísla $3x$	Zvyšok r čísla x^3
1	3	1	3	1
2	9	8	9	8
3	27	27	5	5
4	81	64	4	9
5	243	125	1	4
6	729	216	3	7
7	2 187	343	9	2
8	6 561	512	5	6
9	19 683	729	4	3
10	59 049	1000	1	10
11	177 147	1331	3	0
12	531 441	1728	9	1

Číslo x sa dá vždy jednoznačne napísať v tvare $5k + q$, pričom q, k sú čísla prirodzené a $0 \leq q < 5$.

Potom

$$3^x = 3^{5k+q} = 3^{5k} \cdot 3^q \equiv 3^q,$$

$$3^{5k} \equiv 1$$

Z toho vyplýva, že zvyšky r čísla 3^x budú mať periodu 5.

Číslo x sa dá tiež jednoznačne napísať v tvare $x = 11k + q$, pričom q, k sú čísla prirodzené a $0 \leq q < 11$.

Potom

$$x^3 = (11k + q)^3 = 11a + q^3$$

$$a = 11^2 \cdot k^3 + 3 \cdot 11 \cdot k^2 \cdot q + 3 \cdot k \cdot q^2$$

Z toho vyplýva, že zvyšky r čísla x^3 budú mať periodu 11.

Rozdiel $3^x - x^3$ bude deliteľný jedenáctimi len vtedy, ak zvyšková trieda čísla 3^x podľa mod. 11 bude sa rovnať zvyškovej triede čísla x^3 podľa mod. 11.

1. ($r = 3$). Hľadáme také číslo x , aby bolo v tvare $5k_1 + 1$ a zároveň $11k_2 + 9$. Potom podľa tabuľky by boli zvyškové triedy rovnaké a rovnali by sa trom.

Perioda čísla x je 55, pretože najmenší spoločný násobok čísel 5 a 11 je 55. Najmenšie číslo v tvare $5k_1 + 1$ a $11k_2 + 9$ je 31.

Potom číslo $x = 55k + 31$ pre $k \geq 0$ (celé).

2. ($r = 9$). Potom $x = 5k_1 + 2$ a zároveň $11k_2 + 4$ (podľa tabuľky by znova boli zvyškové triedy rovnaké $r = 9$). Perioda je 55. Najmenšie číslo v tvare $5k_1 + 2$ a $11k_2 + 4$ je 37.

Potom číslo $x = 55k + 37$ pre $k \geq 0$ (celé).

3. ($r = 5$). Potom $x = 5k_1 + 3$ a zároveň $x = 11k_2 + 3$. Perioda je 55. Najmenšie číslo v tvare $5k_1 + 3$ a $11k_2 + 3$ je 3.

Potom $x = 55k + 3$ pre $k \geq 0$ (celé).

4. ($r = 4$). Potom $x = 5k_1 + 4$ a zároveň v tvare $x = 11k_2 + 5$. Perioda je 55. Najmenšie číslo v tvare $5k_1 + 4$ a $11k_2 + 5$ je 49.

Potom $x = 55k + 49$ pre $k \geq 0$ (celé).

5. ($r = 1$). Potom $x = 5k_1 + 5$ a zároveň $x = 11k_2 + 1$. Spoločným riešením je $x = 55k + 45$, $k \geq 0$ celé.

Poznámka autora:

Tisková chyba v prvom zadání této úlohy způsobila, že značná část řešitelů se zabývala pouze touto chybně uvedenou úlohou. Většinou došli k dosti obecným závěrům, z nichž ovšem nelze ani speciální volbou vyvodit úplné řešení opravené úlohy. Je s podivem, že pouze jediný řešitel z této skupiny zaslal dodatečně také řešení opravené úlohy.

4. Jsou dány dvě rovnoběžné tečny t, t' kružnice k . Průměr kružnice, který je k těmto tečnám kolmý, a další libovolná tečna q kružnice vytínají na tečnách t, t' úsečky velikosti m, m' . Dokažte, že $m \cdot m' = r^2$, kde r je poloměr kružnice k .

(Došlo 57 řešení.)

Josef Novák

Řešil Josef Jedlička, II.B SVVŠ, Moravské Budějovice:

Dotykové body tečen t, t', q kružnice k označíme T, T', P a průsečíky tečny q s tečnami t a t' označíme Q a Q' . Trojúhelníky STQ a SPQ jsou pravoúhlé, mají společnou přeponu SQ a shodnou odvěsnu $ST = SP = r$. Podle věty SSu je tedy

$$\triangle STQ \cong \triangle SPQ,$$

odkud dále plyne

$$QT = QP = m \text{ a } \sphericalangle TSQ = \sphericalangle QSP$$

Stejně dokážeme, že je

$$\triangle ST'Q' \cong \triangle SPQ'$$

a

$$Q'T' = Q'P = m', \sphericalangle Q'ST' = \sphericalangle PSQ'$$

Dále je

$$\sphericalangle TSQ + \sphericalangle QSP + \sphericalangle PSQ' + \sphericalangle Q'ST' = 180^\circ$$

a po úpravě — při dosazení

$$\sphericalangle TSQ = \sphericalangle QSP,$$

$$\sphericalangle Q'ST' = \sphericalangle PSQ' - \sphericalangle QSP + \sphericalangle PSQ' = 90^\circ$$

Trojúhelník QSQ' je tedy pravoúhlý a podle Euklidovy věty platí

$$PQ \cdot PQ' = \overline{PS}^2$$

Dosadíme-li za $PQ = m$, $PQ' = m'$, $PS = r$, dostáváme

$$m \cdot m' = r^2,$$

což bylo dokázat.

5. Určete všechna přirozená čísla x , pro něž platí

$$n(3x - 1; 5x + 7) = x^2 + x - 38,$$

kde $n(a; b)$ značí nejmenší společný násobek čísel a, b .

Jiří Sedláček

Řešil Pavel Sejrek, III.B SVVŠ, Velké Meziříčí:

Víme, že

$$n(a; b) \cdot D(a; b) = ab, \quad (1)$$

kde $D(a; b)$ je největší společný dělitel čísel a, b . Platí

$$D(a; b) = D(a - b; b)$$

Tímto způsobem lze upravit

$$\begin{aligned} D(3x - 1; 5x + 7) &= D(2x + 8; 3x - 1) = D(x - 9; 2x + 8) = \\ &= D(x + 17; x - 9) = D(26; x - 9). \end{aligned}$$

Pro největšího společného dělitele čísel $3x - 1, 5x + 7$ připadají tedy v úvahu čísla 1, 2, 13, 26. Po dosazení do rovnice (1) dostáváme čtyři kvadratické rovnice

$$\begin{aligned} (x^2 + x - 38) \cdot 1 &= 15x^2 + 16x - 7, \\ (x^2 + x - 38) \cdot 2 &= 15x^2 + 16x - 7, \\ (x^2 + x - 38) \cdot 13 &= 15x^2 + 16x - 7, \\ (x^2 + x - 38) \cdot 26 &= 15x^2 + 16x - 7. \end{aligned}$$

Pouze poslední rovnici splňuje jedno přirozené číslo, a to $x = 9$. Zkouškou dosazením můžeme se snadno přesvědčit, že $x = 9$ je jediné řešení dané úlohy.

Konstruktivní geometrie

2. Body A, B, C tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka a ležia na hlavnej kružnici guľovej plochy daného polomeru r . Zostrojte priemet tejto guľovej plochy, ak je daný bod A , nárys bodu B a súradnica x_C bodu C .

(Došlo 24 riešení.)

Stanislav Horák

Riešil Juraj Černák, III.A SVŠ, Turčianske Teplice:

R o z b o r. Skutočná dĺžka strán rovnostranného trojuholníka ABC je $a = r\sqrt{3}$. Môžeme teda určiť zbývajúci súradnicu bodu B . Bod C leží v rovine $\varrho(x_C; \infty; \infty)$. Platí preň tiež $AC = BC = a$, a preto

bod C leží na guľovej ploche $\kappa_A \equiv (A; a)$ a na guľovej ploche $\kappa_B \equiv (B; a)$. Bod C určíme ako spoločnú časť roviny ϱ s guľovými plochami κ_A, κ_B .

K o n š t r u k c i a.

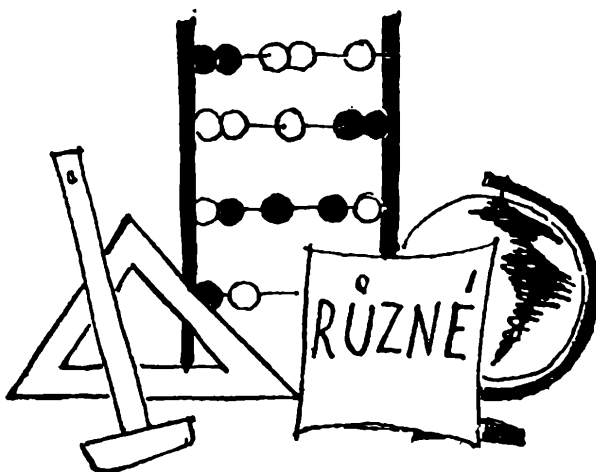
1. Zostrojíme úsečku $a = r\sqrt{3}$ a rovinu ϱ .
2. Zostrojíme súradnici y bodu B .
3. Zostrojíme guľovú plochu κ_A , ktorá pretne rovinu ϱ v kružnici k_B so stredom A_3 , kde A_3 je päta kolmice spustenej z bodu A na rovinu ϱ s polomerom $\sqrt{3r^2 - (x_C - x_A)^2}$.
4. Zostrojíme guľovú plochu κ_B . Guľová plocha pretne rovinu ϱ v kružnici k_B so stredom B_3 , kde B_3 je päta kolmice spustenej z bodu B na rovinu ϱ s polomerom $\sqrt{3r^2 - (x_C - x_B)^2}$.
5. Zostrojíme priesečík kružníc k_A, k_B . (Rovinu ϱ otočíme okolo pôdorysnej stopy do roviny π .)
6. Odvodíme pôdorys a nárys bodu C . Potom už môžeme opísať guľovú plochu.

D ô k a z. Správnosť konštrukcie vyplýva z rozboru.

D i s k u s i a. Konštrukcie 1, 3, 4, 7 sú jednoznačné, a preto počet riešení budú ovplyvňovať konštrukcie 2, 5. Úloha môže mať maximálne štyri rôzne riešenia, dve, jedno; úloha nemusí mať tiež žiadne riešenie.

Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice



Dne 15. října t. r. vzpomeneme 360. výročí narození italského fyzika Torricelliho.

Giovanni Torricelli (čti: Džovany Toričeli), žák Galileiho, odvodil

výrazem

$$v = \sqrt{2gh}$$

vzorec pro rychlost výtoku kapaliny otvorem (Torricelliův vzorec) a dokázal, že mezní výtoková rychlost takto stanovená je táž, jakou by kapalina získala volným pádem ve vakuu z výšky h ; nezávisí také na hustotě kapaliny. Vnitřní tření v kapalinách způsobuje, že skutečná rychlost vytékající kapaliny je ovšem menší.

Stoupání vody v pumpách a zkušenost na dvoře velkovévody toskánského ve Florencii tehdy opětovně ověřenou, že ji lze pomocí pístů čerpat pouze do výšky necelých 10 m, vyložil Torricelli působením atmosférického tlaku, k jehož měření výškou sloupce rtuti navrhl vtipný pokus, zvaný od té doby Torricelliův. Z podnětu Torricelliho provedl jej však roku 1643 Torricelliův žák Vincenzo Viviani. Ukázal, že se rtuť udrží ve svisle postavené trubici, v níž je nad povrchem rtuti vakuum (tzv. Torricelliovo vakuum), ve výšce přes 70 cm nad volnou hladinou rtuti v širší nádobě, do které je spodní konec trubice ponořen. Pascal provedl Torricelliův pokus s vodou a shledal, že stála ve výši asi 10 m.

Klasický pokus Torricelliův, vykonaný před 325 lety, vrátil názorně dřívější domněnku, že příroda má z vakua strach (horror vacui). Torricelliovu trubici lze považovat za jedno rameno spojených nádob, v jejichž druhém rameni je sloupec vzduchu. Je-li tato představa správná, musí být ve větší výšce tlak vzduchu menší. Přímé ověření tohoto závěru měřením bylo provedeno před 320 lety, památného dne 19. září 1648. Na vyzvání Pascalovo vystoupil tehdy jeho švagr Périer¹⁾ (čti: Pérje) na vrchol hory Puy-de-Dôme (čti: Pyi d'Dóm u Clermontu, rodiště Pascalova, zatímco páter Chastin (čti: Šastén) měřil tlak vzduchu na úpatí hory. Výsledky měření potvrdily rozdíl přes 8 cm Pascalovo očekávání. Torricelli se však již této události nedožil. Zemřel poměrně mlád, 39letý, dne 25. října 1647.

Málo je známo, že Torricelli sestrojoval také dalekohledy. Největší (s ohniskovou délkou 10 m) je dosud uložen ve Florencii, kde Torricelli se stal po smrti Galileiho († 1642) profesorem matematiky a působil tam až do své smrti.

Na počest Torricelliho byla jednotka atmosférického tlaku, stanovená hydrostatickým tlakem 1 mm rtuťového sloupce při teplotě 0 °C a normálním tíhovém zrychlení, nazvána torr. U příležitosti 350. výročí jeho narození roku 1958 vybrala Světová rada míru Torricelliho za

¹⁾ Učebnice fyziky pro I. ročník střední všeobecně vzdělávací školy (Praha 1964), uvádí na str. 186 omylem Périn, což zároveň opravují.

Vztah 1 torr $\doteq \frac{3}{4}$ mb, uvedený na str. 188 (7. řádek zdola), je rovněž nesprávný; má být buď 1 torr $\doteq \frac{4}{3}$ mb, nebo 1 mb $\doteq \frac{3}{4}$ torru.

svého jubilanta, čímž připomněla celému světu velikost jeho díla a oce-
nila jeho význam pro lidské poznání a pokrok společnosti.

* *
*

Roku 1868, právě *před 100 lety*, zemřel v Paříži J e a n B e r n a r d L é o n F o u c a u l t (čti: Žán Bernár Leon Fukó), jenž, podporován císařem Napoleonem III., zabýval se zejména optikou. Roku 1850 zjistil, že rychlost světla ve vzduchu činí $298\,000\text{ km s}^{-1}$, v klidné vodě však jen $225\,000\text{ km s}^{-1}$, je tedy menší než ve vzduchu. Podle korpusku-
lární neboli emanační (výronové) teorie Newtonovy měla ovšem mít právě obráceně hodnotu větší. Foucaultova měření vyvrátila tedy defi-
nitivně Newtonovy názory o podstatě světla a rozhodla o vítězství Huygensovy teorie undulační (vlnové).

V témž roce provedl Foucault (poprvé ve sklepě) svůj proslulý pokus kyvadlový. Roku 1851 zavěsil pak v kopuli pařížského Pantheonu na ocelový drát dlouhý 68 m kouli vážící 30 kp a rozkýval ji; doba kyvu činila asi 8 s. Směr kyvů se znatelně stácel ve smyslu záporném. Tím byl podán (s chybou asi $\frac{1}{2}\%$) historicky památný důkaz otáčivého pohybu Země.

Foucault studoval také elektrické proudy indukované ve vodičích plošných a tělesných. Proud, který se indukují v masívních vodičích, pohybují-li se v magnetickém poli, nabývají takového směru, že se snaží dalšímu pohybu vodiče bránit; říkáme jim, jak známo, p r o u d y v í ř í v é nebo také p r o u d y F o u c a u l t o v y.

* *
*

O deset let později, *před 90 lety*, dne 20. března 1878 zemřel v Heil-
bronnu německý fyzik J u l i u s R o b e r t v o n M a y e r.

Jako lodní lékař účastnil se v letech 1840 a 1841 cesty na Javu. Ve svém deníku líčí, jak se na moři těšil „krásné duševní pohodě, jež jej usměrňovala k vědecké činnosti“. Poutavě vypravuje, jak slyšel od kormidelníka, že voda rozbouřeného moře je vždy teplejší než voda moře klidného. To přivedlo Mayera k přemýšlení o ekvivalenci (rovno-
mocnosti) práce a tepla. Z těchto úvah vzešlo slavné pojednání „B e-
m e r k u n g e n ü b e r d i e K r ä f t e²⁾ d e r u n b e l e b t e n
N a t u r“, jež uveřejnil po svém návratu roku 1842. V něm naznačil již platnost z á k o n a z a c h o v á n í (k o n z e r v a c e) e n e r g i e.

Činí tak klasickými výroky „*Ex nihilo nihil fit*“ (Z ničeho se nic nestane) a „*Nil fit ad nihilum*“ (Nic nepřichází vniveč). Podle mínění Planckova³⁾ však „raději filosoficky generalizoval, než empiricky po částech budoval“, nedostal se proto dále než k úvahám obecného rázu. Nezávisle na Mayerovi dospěl k zákonu zachování energie Hermann von Helmholtz (1847). Vleklý spor s ním o prioritu objevu způsobil, že Mayer teprve v posledních letech svého pohnutého života⁴⁾ se dočkal uznání.

Poznámky.

1. V Mayerově pojednání nalézáme také výpočet mechanického ekvivalentu tepla. Probíhá v podstatě takto:

Představme si 1 dm³ vzduchu teploty 0 °C, uzavřený ve válci pístem. Rozeznávejme pak tyto dva případy:

Případ a)

Nechť píst je pevný. K zahřátí uzavřeného vzduchu o 1 deg je třeba tepla

$$Q_v = c_v \cdot M = c_v \cdot \rho_0 \cdot V_0,$$

kde $c_v = 0,1690 \text{ cal g}^{-1} \cdot \text{grad}$ je specifické teplo vzduchu při stálém objemu, $\rho_0 = 0,001293 \text{ g cm}^{-3}$ značí hustotu vzduchu při 0 °C a objem $V_0 = 1000 \text{ cm}^3$. Je tedy

$$Q_v = 0,1690 \cdot 1,293 \text{ cal} = 0,218517 \text{ cal}.$$

Případ b)

Nechť píst je pohyblivý. Jeho váhu a tření při pohybu zanedbávejme. Na píst nechť působí vnější tlak 1 at. K zahřátí uzavřeného vzduchu o 1 deg je nyní třeba tepla

$$Q_p = c_p \cdot M,$$

kde $c_p = 0,2375 \text{ cal g}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ je specifické teplo vzduchu při stálém

²⁾ Ačkoli již Leonardo da Vinci (1452–1519) činil ve svých pracích velmi přesný rozdíl mezi silou a (pohybovou) energií, užíval Mayer (podobně jako Helmholtz v díle „Über die Erhaltung der Kraft“, 1847) pojmu Kraft = síla ve významu energie. Názvu „živá síla“ (vis viva, lebendige Kraft), který pro výraz $\frac{1}{2}mv^2$ zavedl německý fyzik Leibniz (1646–1716), užívalo se pro kinetickou energii běžně dokonce ještě v našem století.

³⁾ Viz Max Planck „Das Prinzip der Erhaltung der Energie“, 1908, 2. vyd., Lipsko a Berlín.

⁴⁾ Mayer onemocněl vážnými horečnatými stavy a v deliriu vyskočil roku 1850 z okna ve druhém poschodí. Chromý, trávil pak mnohý čas také v ústavě pro choromyslné.

tlaku a $M = 1,293$ g jeho hmotnost. Je pak

$$Q_p = 0,2375 \cdot 1,293 \text{ cal} = 0,307 \, 087 \text{ cal}.$$

Rozdílem obou tepelných množství

$$Q_p - Q_v = 0,088 \, 57 \text{ cal}$$

vykonal roztahující se plyn proti vnějšímu tlaku práci

$$A = \frac{1}{273} \text{ litratmosféry} = \frac{10,332 \text{ kpm}}{273} = 0,037 \, 85 \text{ kpm}.$$

Mechanický ekvivalent tepla, stanovený velikostí práce potřebné k získání jednotkového množství tepla, je

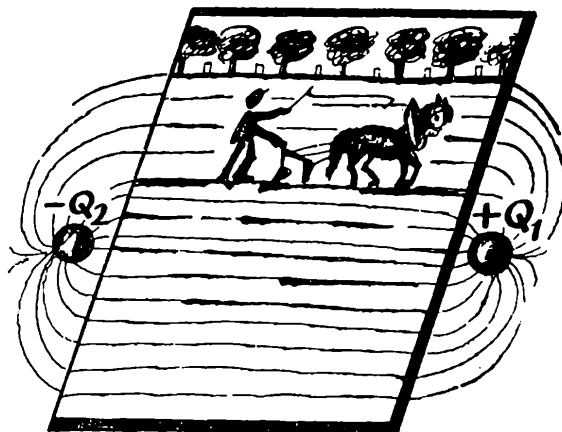
$$\frac{A}{Q_p - Q_v} = \frac{0,037 \, 85 \text{ kpm}}{0,088 \, 57 \text{ cal}} = 0,427 \text{ kpm kcal}^{-1} = 427 \text{ kpm kcal}^{-1}$$

Mayer neměl správných dat a dospěl k výsledku 365 kpm/kcal; úvahy jím provedené „činí však přesto jeho dílo nesmrtelným“.⁵⁾

2. U plynů zavádíme místo specifických tepel c_p , c_v zpravidla tepla molekulová, jež se vztahují na jednu grammolekulu. Označme je C_p , C_v . Jejich rozdíl je roven konstantě R stavové rovnice plynů

$$C_p - C_v = R$$

(rovnice Mayerova).



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

12. Při školní lékařské prohlídce zdravotní sestra zjistila při měření výšek osmi dívek (Dáša, Hana, Jíra, Lída, Maruška, Renata, Věra a Zdena):

a) Jíra je menší než Lída, ale vyšší než Dáša.

⁵⁾ Cituji z knihy K. Regea „Meister der Physik“, Stuttgart 1944, str. 149.

b) Lída a Věra jsou stejně velké, ale větší než Dáša a menší než Maruška.

c) Jestliže se vedle sebe postaví Maruška, Zdena a Renata (v tomto pořadí), jsou seřazeny podle velikosti.

d) Mezi nejvyšší a nejmenší studentkou je rozdíl 8 centimetrů.

e) Lída je o 2 cm vyšší než Zdena.

f) Hana, Jíra, Maruška jsou seřazeny podle abecedy, ale také podle velikosti.

g) Tři dvojice mají stejnou výšku.

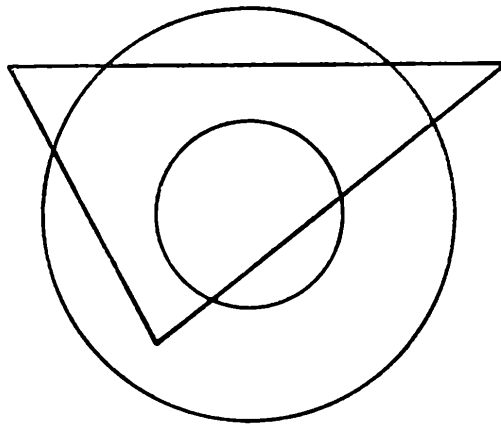
h) Výška Jíři se u žádného jiného děvčete nevyskytuje.

j) Dáša je vysoká 159 cm, a to je o 2 cm víc než má Hana.

k) Z kamarádek Renata a Zdena je Zdena vyšší.

Do třídní knihy zapsala zdravotní sestra přesnou výšku každé studentky. Je to možné z těchto zápisků určit?

S. H.



Obr. 1

13. Na obrázku jsou dvě soustředné kružnice a trojúhelník.

a) na kolik oblastí je rozdělena rovina těmito třemi útvary?

b) vyšrafujte tu oblast, která je společná oběma kruhům a trojúhelníku.

c) vyšrafujte tu oblast, která náleží do mezikruží, ale nepatří trojúhelníku.

d) umístěte trojúhelník tak, aby oblast společná oběma soustředným kruhům a trojúhelníku byla právě polovina obsahu vnitřního kruhu.

S. H.

14. V jedné zemi se sešlo pět přátel: Bulhar, Maďar, východní Němec, Polák a Rus. Všichni — kromě *C*, který ovládá jen svůj rodný jazyk — znali vedle své mateřštiny ještě jeden (vždy různý) jazyk svých přátel.

A se může s Polákem domluvit přímo.

Němec potřebuje k dorozumění s *C* svého přítele *E*.

Bulhar se může dohovorit s Maďarem jen přes D a B .

Pomozte určit národnosti turistů A , B , C , D , E a jejich jazykové znalosti, víte-li, že B nemluví žádným slovanským jazykem.

Ω

Řešení matematických zábav z minulého ročníku

Láhve za výkladem. Původně bylo v 1. výloze 24 lahví, v 2. výloze 8 lahví a v 3. výloze 1 láhev. (11 řešitelů.)

Oriešok. Gregor je kapitánom; Ambrož je čiašnikom; obidvaja menovaní hrajú stolný tenis. Novák je lodníkom a býva v Bratislave. Rekreatant Ambrož býva v Prahe. Rekreatant Novák (ktorý dávno zabudnul celú algebru) býva v Ostrave. Rekreatant Gregor je profesorom matematiky a býva v Bratislave. (45 riešiteľov.)

Tam a zpět. Průměrná rychlost je 24 km/hod. (5 řešitelů.)

Dva domy. Výška 1. domu až k okapu je 20 m, ke hřebeni 28,5 m.

Výška 2. domu je 17,3 m a 28,5 m. (7 řešitelů.)

Papírový pětiúhelník. Daný pětiúhelník označme $ABCDE$. Dále označme X průsečík úhlopříček AC , BE ; $Y \equiv BD \cdot AC$, $Z \equiv CE \cdot BD$, $U \equiv DA \cdot EC$, $V \equiv EB \cdot AD$. Největší obvod mají trojúhelníky ABX , BCY , CDZ , DEU , EAV . Tento obvod je roven $d \cdot \sqrt{5}$, kde d je velikost strany AB .

Vepsaná kružnice. a) $x = \frac{1}{4} r$; b) $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$

Výročí školy. Vyplněná tabulka:

				2
17	10	11	20	2
15	13	8	22	2
12	16	21	9	2
14	19	18	7	2
2	2	2	2	2

{Žádný řešitel.}

Tajné násobení- 357×735 . (9 řešitelů.)

Proč to vždycky nejde vypočítat? Postačující podmínka řešitelnosti je

$$a = \frac{2bc}{b+c},$$

kde a, b, c jsou po řadě rychlosti po rovině, s kopce a do kopce.

V Kocourkově. Lucerny byly od sebe vzdáleny 26 m.

Povedení bratřenci. Karel sebral věže, Petr pěšce, Míla střelce a Vašík koně. (4 řešitelé.)

Pět čtenářů. Bohuš čítal Poklad a Západ; Karel Fimfárům a Přehradu; Milan Krakatit a Fimfárům; Pavel Poklad a Západ; Standa Krakatit a Přehradu. (5 řešitelů.)

Mladí fotografové. Uspořádání aparátů:

$$\begin{array}{ccc} M & P & K \\ K & M & P \\ P & K & M \end{array}$$

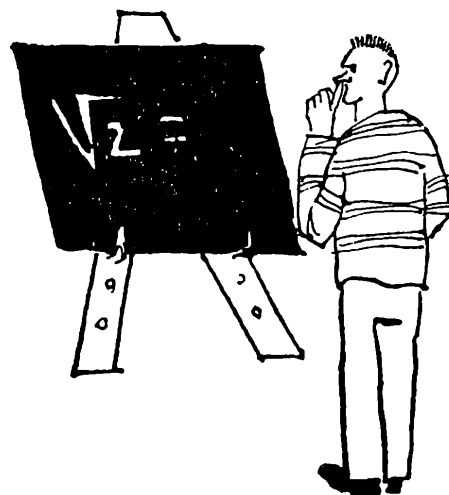
(9 řešitelů.)

Zábavná matematika. 1. Původně v jednotlivých hromádkách bylo 44, 28 a 24 jablek. 2. Dědečkovi je 63 let. (3 řešitelé.)

Neúplné násobení.

$$\begin{array}{r} 7 \ 8 \ 3 \ 0 \ 4 \ 9 2 \ 8 \ 7 \\ \hline 1 \ 5 \ 6 \ 6 \ 0 \ 9 \ 8 \\ 6 \ 2 \ 6 \ 4 \ 3 \ 9 \ 2 \\ 5 \ 4 \ 8 \ 1 \ 3 \ 4 \ 3 \\ \hline 2 \ 2 \ 4 \ 7 \ 3 \ 5 \ 0 \ 6 \ 3 \end{array}$$

(2 řešitelé.)



MATEMATIKA

Rovnost množin a Vennovy diagramy

OLDŘICH ODVÁRKO, MFF KU, Praha

V minulém čísle Rozhledů jste se seznámili s Vennovými diagramy a řešili jste s jejich pomocí úlohy o počtu prvků konečných množin. Zde si ukážeme, jak lze těchto diagramů výhodně užít při zjišťování, zda dvě množiny jsou si rovny či nikoli.

Nejprve si připomeňme pojem **rovnost dvou množin**. O dvou množinách A , B říkáme, že jsou si rovny, právě tehdy, když

- a) každý prvek množiny A je prvkem množiny B , a zároveň
- b) každý prvek množiny B je prvkem množiny A .

Zapisujeme: $A = B$.

Není-li splněna aspoň jedna z těchto podmínek a), b), říkáme, že množiny A , B jsou různé a zapisujeme $A \neq B$.

Uvedme dva příklady:

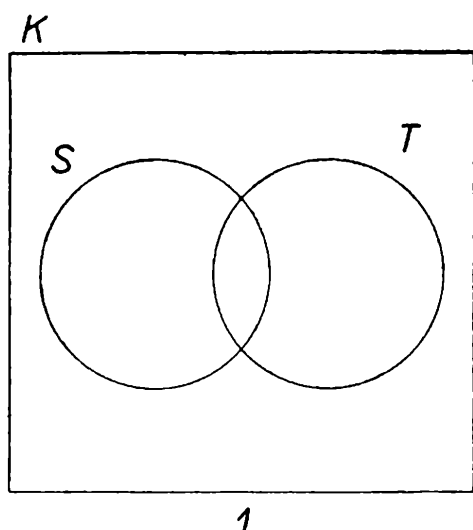
1. Nechť A je množina všech přirozených čísel dělitelných šesti, B množina všech přirozených čísel, která jsou současně dělitelná dvěma a třemi. Každé přirozené číslo, které je dělitelné šesti, je dělitelné dvěma a třemi; také obráceně každé přirozené číslo, které je dělitelné dvěma a zároveň třemi, je dělitelné šesti. Uvažované množiny A , B jsou si rovny.

2. Nechť A je množina všech přirozených násobků všech prvočísel, B množina všech přirozených čísel. Každý přirozený násobek libovolného prvočísla je přirozené číslo, podmínka a) z výše uvedené definice je tedy splněna. Podmínka b) však splněna není. Číslo 1 je přirozené číslo, je prvkem množiny B , ale není přirozeným násobkem žádného

prvočísla, není tedy prvkem množiny A . Uvažované množiny A, B jsou různé.

Nyní už můžeme přistoupit k první z úloh, při jejichž řešení použijeme Vennovy diagramy.

1. *Kritika tanečníků.* Přenesme se do tanečního kursu pro začátečníky. Dvě dívky si o přestávce svěrují dojmy o svých partnerech v tanci. Shodnou se na tom, že tančily už se všemi hochy navštěvujícími kurs, ale že mezi nimi není ani jeden, který by uměl dobře tančit a přitom byl dobrý společník. „Už to není jako za našich časů,“ vmísí se do jejich hovoru jedna z těch gardedám, kterým nesmí nic ujít, „v tomto kursu není ani jeden chlapec dobrým tanečníkem a přitom ani jeden není dobrým společníkem.“ „Ale tak to nemyslíme,“ protestují obě dívky. „Všichni chlapci tu nejsou takoví, jak vy říkáte.“ A druhá dívka vysvětluje: „My jenom tvrdíme, že žádný chlapec z našeho kursu neumí dobře tančit nebo není dobrý společník.“



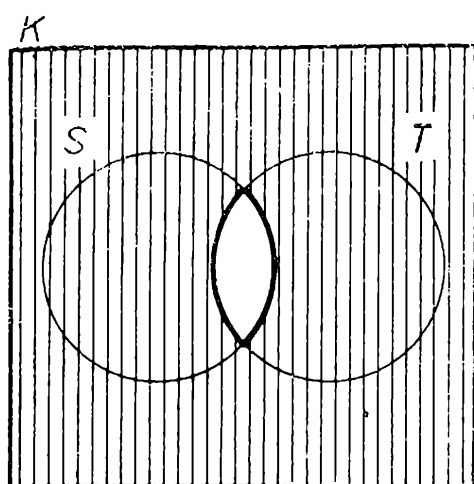
Jsou skutečně názory dívek a gardedám rozdílné? A je vysvětlení druhé dívky shodné s tím, na čem se před chvílí obě dohodly?

Zvolme za rámeček úvah základní množinu K všech chlapců, kteří navštěvují kurs. Množinu všech dobrých společníků označme písmenem S , množinu všech dobrých tanečníků písmenem T a nakresleme si Vennův diagram pro tyto dvě množiny (obr. 1).

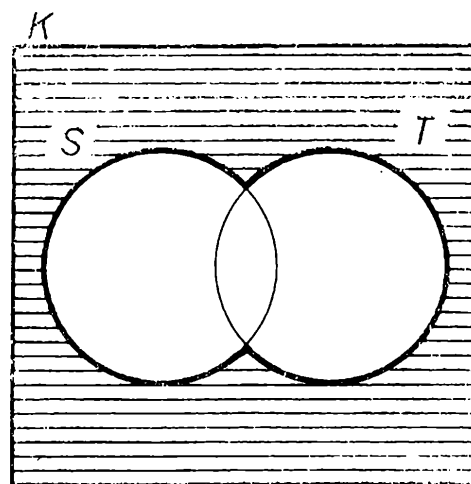
Představme si, že by takový diagram byl nakreslen na podlaze tanečního sálu a že by dovnitř kruhu S vstoupili právě ti chlapci, kteří jsou dobrými společníky, dovnitř kruhu T právě ti, kteří jsou dobrými tanečníky. O těchto jejich vlastnostech jsou vysloveny různé názory, nakresleme si proto na obrázcích 2a, b, c, d čtyřikrát Vennův diagram z obr. 1 a vyznačme na něm šrafováním ta políčka, do nichž by podle jednotlivých názorů směli chlapci vstoupit.

Z původní formulace názoru dívek vyplývá, že žádný chlapec nesmí stát v průniku kruhů S, T , protože žádný nemá obě uvažované vlastnosti. V každém ze zbývajících tří polí mohou jednotliví chlapci stát, proto je na obr. 2a svisle vyšrafován celý obdélník kromě uvedeného průniku kruhů S, T .

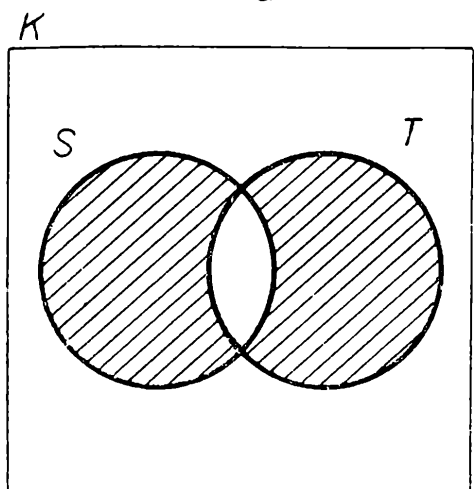
Gardedáma by zřejmě nedovolila žádnému chlapci vstoupit do kruhu S („ani jeden není dobrý společník“) ani do kruhu T („ani jeden není dobrý tanečník“). Podle jejího názoru by měli všichni stát ve vodo-



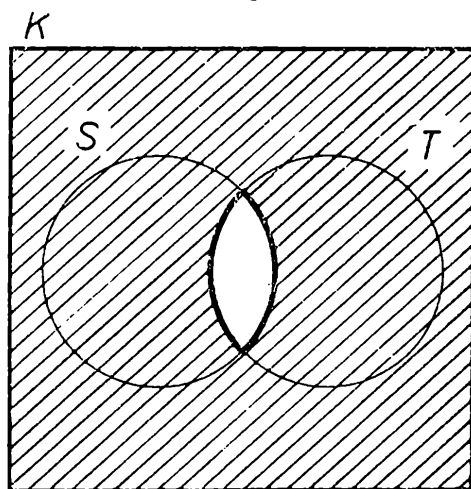
2a



2b



2c



2d

rovně šrafované oblasti obdélníka na obr. 2b. Porovnáme-li obrázky 2a a 2b, vidíme, že se vyšrafované oblasti neskládají ze stejných políček diagramu, proto jsou názory dívek a gardedámy rozdílné, hovoří o různých množinách.

Posuďme ještě vysvětlení druhé dívky, že chlapeci neumějí tančit nebo nejsou dobrými společníky. Zde je problém v tom, jak máme rozumět slůvku *n e b o*. Jsou dvě možnosti:

1. Chápe-li dívka „nebo“ ve smyslu vylučovacím, rozděluje chlapce do dvou skupin; v první jsou dobří společníci, kteří nejsou dobrými tanečníky, ve druhé dobří tanečníci, kteří nejsou dobrými společníky. V tomto případě by směli chlapeci stát pouze v políčkách vyšrafovaných na obr. 2c.

2. Chápe-li dívka „nebo“ ve smyslu nevylučovacím, pak připouští vedle dvou skupin chlapců uvedených v bodě 1 existenci třetí skupiny zahrnující ty chlapce, kteří nejsou dobrými společníky ani tanečníky. Tyto tři skupiny by obsadily políčka vyšrafovaná na obr. 2d. Porovnáme-li obr. 2a, 2d, vidíme názorně, že se vyšrafované oblasti skládají z těchže políček diagramu, znázorňují proto množiny, které

jsou si rovny. Dívka tedy vysvětlila původní názor správně jen v případě, že chápala „nebo“ ve smyslu nevylučovacím.

Poznámka: V logice a matematice chápeme „nebo“ ve smyslu nevylučovacím. Tak ho budeme také chápat ve všech dalších úlohách, pokud se vyskytne.

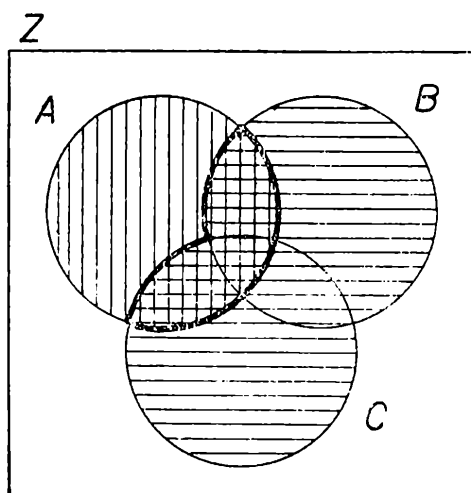
Často zjišťujeme políčka diagramu, z nichž se skládá obraz množiny, obtížněji než v úvodní úloze.

2. Dvě definice. Při hodině gramatiky učitel češtiny vykládá: „Souvětí nazýváme souřadné právě tehdy, když věty, které je tvoří, jsou na sobě nezávislé a přitom jsou spojeny spojkami souřadícími nebo jsou pouze odděleny čárkou.“ V učebnici češtiny jsem však našel formulaci na první pohled jinou: „Souvětí nazýváme souřadné právě tehdy, když věty, které tvoří souvětí, jsou na sobě nezávislé a zároveň jsou odděleny pouze čárkou; nebo jsou věty na sobě nezávislé a přitom jsou spojeny spojkami souřadícími.“

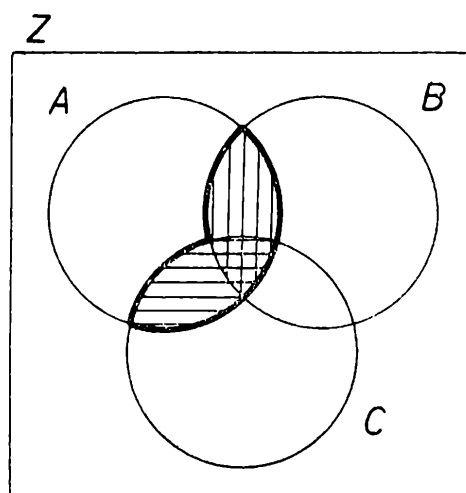
Vyjadřují obě tyto definice totéž, tj. charakterizují dvě sobě rovné množiny souvětí?

Za základ naší úvahy vezmeme množinu všech souvětí. Zavedme tato označení:

- Z množina všech souvětí,
- A množina všech souvětí, v nichž jsou věty na sobě nezávislé,
- B množina všech souvětí, v nichž jsou věty odděleny pouze čárkou,
- C množina všech souvětí, v nichž jsou věty spojeny spojkami souřadícími.



3a



3b

Nakresleme si dva Vennovy diagramy pro množiny A , B , C (obr. 3a, b) a zabývejme se nejprve učitelovou formulací (obr. 3a). Svisle vyšrafovaná políčka diagramu znázorňují množinu všech souvětí, v nichž jsou věty na sobě nezávislé, vodorovně vyšrafovaná pole množinu všech souvětí, jejichž věty jsou odděleny pouze čárkou nebo spo-

jeny souřadícími spojkami. Dvojité vyšrafovaná políčka diagramu znázorňují pak množinu všech souvětí souřadných podle učitelovy definice.

Svisle vyšrafované políčko diagramu na obr. 3b znázorňuje množinu všech souvětí, v nichž jsou věty na sobě nezávislé a přitom jsou odděleny pouze čárkou. Vodorovně vyšrafované pole diagramu znázorňuje množinu všech souvětí, v nichž jsou věty na sobě nezávislé a zároveň jsou spojeny spojkami souřadícími. Políčka diagramu aspoň jednou šrafovaná znázorňují množinu všech souvětí souřadných podle učebnice. Porovnáme-li obrazce omezené silnější čarou na obrázcích 3a, 3b, vidíme, že se skládají ze stejných políček. Obě definice vyjadřují tedy totéž, tj. charakterizují dvě sobě rovné množiny souvětí.

3. Hlavo l a m p r o č í š n í k a.

Host v restauraci: „Přeji si biftek.“

„A jakou oblohu, prosím? Máme k dispozici okurky, papriky, cibuli a hořčici.“

Host chce číšníka potrápit: „Přál bych si papriku nebo okurku, ale nechci obojí; zároveň bych chtěl papriku a k tomu cibuli nebo by to mohla být paprika a hořčice, ale ne všechny tři druhy, papriku, cibuli a hořčici, najednou.“

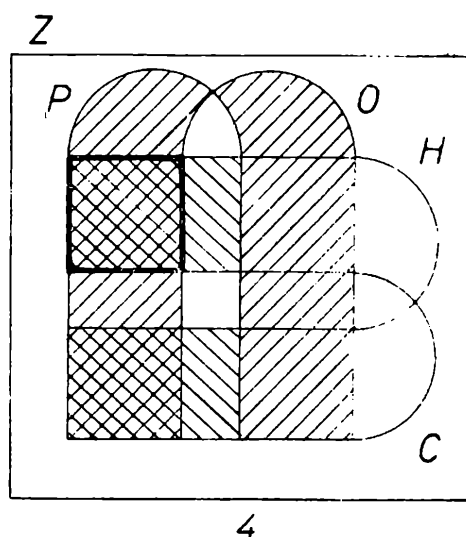
Číšník před zraky udiveného hosta obrátí jídelní lístek a črtá na něm jakési podivné obrazce a čáry. Pak se táže: „Přejete si mít v obloze cibuli či nikoli?“

„Raději ne.“

„Pak je všechno v pořádku. Bude to tedy jeden biftek s paprikou a hořčicí.“

Zajímá nás, zda skutečně číšník vyhověl hostovu přání a proč se ještě ptal na to, zda host chce či nechce mít v obloze cibuli. Řešení tohoto problému najdete na obr. 4. Vysvětlíme si, co značí jednotlivá písmena:

- Z* množina všech jídel, která je možno v daný den v restauraci připravit,
- P* množina všech bifteků s paprikou,
- O* množina všech bifteků s okurkou,
- H* množina všech bifteků s hořčicí,
- C* množina všech bifteků s cibulí.



Zkuste si sami modelovat příslušné úvahy na Vennově diagramu a porovnávejte s naším obrázkem. Zjistíte pak snadno, že číšník opravdu vybral správnou oblohu. Poslední otázku musel položit proto, že si host nevybral obložení k bifteku jednoznačně.

Na závěr uvádíme dvě cvičení, na nichž si můžete ověřit, jak umíte pracovat s Vennovými diagramy.

Cvičení

1. Dva žáci srovnávají výsledky svých řešení určité matematické úlohy.

První žák: „Řešením jsou všechna přirozená čísla, která jsou dělitelná dvěma a třemi, ale nejsou dělitelná pěti.“

Druhý žák: „Množinu řešení tvoří všechna přirozená čísla, která mají současně tyto vlastnosti: 1. jsou dělitelná dvěma a třemi, 2. nejsou dělitelná dvěma nebo nejsou dělitelná pěti.“

Jsou si rovny množiny přirozených čísel, o nichž žáci hovoří?

2. V závodě na výrobu měřicích přístrojů jsou zařazovány do druhé jakostní třídy výrobky s těmito vlastnostmi: Jsou přesné, ale mají sníženou citlivost nebo není kvalitně provedena vnější úprava; přitom nemají obě závady současně. Vedoucí výroby zaučuje nového kvalitáře: „Do druhé jakostní třídy budete zařazovat ty výrobky, které jsou sice přesné, ale mají sníženou citlivost; dále takové výrobky, které jsou sice přesné, ale nemají kvalitně provedenu vnější úpravu. Nezařazujte však do této třídy takové výrobky, které jsou jak přesné, tak mají sníženou citlivost i ne-kvalitně provedenou vnější úpravu.“

Je kvalitář instruován správně?

Řešení cvičení k článku O. Odvárka:

1. Množiny přirozených čísel, o nichž žáci hovoří, jsou si rovny.

2. Kvalitář je instruován správně.

Tautologie neboli zákony logiky¹⁾

DR. IVO ZAPLETAL, výzkumný ústav 401; Praha

Nejdříve si stručně shrneme, co je nutné znát k dalšímu výkladu. Výroky (tvrzení) budeme značit písmeny

$p, q, r, s, t,$

p_1, q_1, r_1, s_1, t_1

$p_2,$

¹⁾ Článek je ze souboru volně na sebe navazujících článků.

Výrok nabývá (může nabývat) dvou pravdivostních hodnot: pravdivostní hodnotu pravda (symbolicky: $p = 1$) anebo pravdivostní hodnotu nepravda (symbolicky: $p = 0$); (podle toho, zda je pravdivý anebo nepravdivý).

Z výroku (p) lze vytvořit jeho negaci ($\sim p$) obvykle pomocí úsloví „není pravda, že ...“, resp. pomocí částice „ne-“

Např.:

Tomáš má svátek v březnu (p).

Není pravda, že Tomáš má svátek v březnu ($\sim p$).

Resp.: Tomáš nemá svátek v březnu ($\sim p$).

Závislost mezi pravdivostní hodnotou výroku a jeho negace je možno vyčíst z tzv. pravdivostní tabulky pro negaci.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Čteme:

pro $p = 1$ je $\sim p = 0$ (negace pravdivého výroku je výrok nepravdivý),

pro $p = 0$ je $\sim p = 1$ (negace nepravdivého výroku je výrok pravdivý).

Výroky je možno spojovat pomocí tzv. výrokových spojek: a; nebo; anebo; jestliže, pak ...; tehdy a jen tehdy, když; (symbolicky po řadě: $\wedge$; $\vee$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$;) a obdržíme složené výroky, které po řadě nazýváme: konjunkce; disjunkce; alternativa; implikace; ekvivalence.

Pravdivostní hodnota takto vzniklých výroků je dána příslušnou pravdivostní tabulkou (konjunkce, disjunkce, ...).

Zde je uvedeme souhrnně

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1

Spojováním více výroků pomocí uvedených spojek obdržíme složené výroky²⁾ (formule), u kterých si můžeme provést tzv. pravdivostní

²⁾ Čtenář si zajisté povšiml, že výrok je zde chápán poněkud obecněji — jak konečně bylo naznačeno na str. 109/MF Rozhledy č. 3/1967—8, ročník 46.

ohodnocení (p. o.). Při p. o. využíváme znalostí pravdivostních tabulek, pro jednotlivá spojení a dbáme na pořadí, které je určeno závorkami.

Například:

P. o. formule (výroku)

$$(p \rightarrow q) \vee \sim r$$

je možno vyčíst z této tabulky

p	q	r	$\sim r$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \vee \sim r$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1

P. o. se provádí asi takto:

a) Do záhlaví tabulky si vypíšeme všechny různé jednoduché výroky, ze kterých se zkoumaná formule skládá. Pokud formule obsahuje negovaný výrok, vypisujeme pouze výrok bez negace (zde: p, q, r).

b) Počet „pracovních řádků“ je roven 2^k , kde k je počet výroků vypsanych podle a) (zde: $2^3 = 8$).

c) Do získaných sloupců vypíšeme všechny možné variace.

Obvykle postupujeme „automaticky“ tak, že

první sloupec: do první poloviny 1, do druhé poloviny 0,

druhý sloupec: do první čtvrtiny 1, do druhé čtvrtiny 0,

a toto se vystřídá stejně v druhé polovině, tj. do třetí čtvrtiny 1, do čtvrté čtvrtiny 0,

třetí sloupec: do první osminy 1, do druhé osminy 0, do třetí osminy 1 atd. (v naší tabulce poznačeno „—“).

d) Do záhlaví dále vypisujeme části zkoumané formulky; nejdříve obvykle negace vypsanych výroků a další formulky podle uzávorkování a „ohodnocujeme je“

V posledním sloupci obvykle obdržíme p. o. zkoumané formule, a to obvykle podtrhneme.

P formule je uspořádaná n -tice čísel 1, 0

$$(zde \langle 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle),$$

při p. o. p

$\langle 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle,$

při p. o. q

$\langle 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \rangle,$

při p. o. r

$\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \rangle)$

Důležité je si uvědomit, že jisté p. o. vždy přísluší jisté uspořádané n -tici čísel 1, 0 příslušné k výchozím výrokům [tj. výrokům, které obdržíme z a)].

Co do p. o. formulí mohou nastat tyto případy:

- P. o. jsou samé 1 (těmto formulím říkáme *taktologie* neboli zákony).
- P. o. jsou samé 0 (formulím říkáme *kontradikce*).
- V p. o. je alespoň jedna 1 a současně alespoň jedna 0, těmto formulím říkáme *smíšené (odvoditelné) formule*.

V tomto článku si ukážeme nejzákladnější zákony (taktologie) výrokového počtu. U hlavních zákonů si vždy provedeme ověření pomocí pravdivostní tabulky příslušné formule.

1. Zákon vyloučení třetího (tertium non datur)

$$p \vee \sim p,$$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
1	0	1
0	1	1

Slovy: Ze dvou výroků, z nichž jeden je negací druhého, je jeden (právě jeden) pravdivý (jejich disjunkce je tedy vždy pravdivá).

Např.:

- $5 > 3$ nebo není pravda, že $5 > 3$. Jinak $5 \leq 3$ nebo $5 \leq 3$.
- Číslo 5 je sudé nebo není sudé.
- Komenský se narodil na Moravě nebo není pravda, že se narodil na Moravě.

2. Zákon sporu

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim (p \wedge \sim p)$
1	0	0	1
0	1	0	1

Slovy: *Není pravda, že jsou pravdivé současně dva výroky, z nichž jeden je negací druhého.*

Konvence. Máme-li dva výroky, z nichž jeden je negací druhého, řekneme, že jsou to *kontradiktorní výroky*

Nyní vypadá slovní formulace zákona sporu takto:

Není pravda, že jsou pravdivé současně dva kontradiktorní výroky

Například:

a) *Není pravda, že ($5 > 3$ a $5 \leq 3$).*

b) *Není pravda, že (π je kladné číslo a π je nekladné číslo).*

c) *Není pravda, že (Olomouc leží na řece Moravě a neleží na řece Moravě).*

3. Zákon dvojité negace

	p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$p \leftrightarrow \sim(\sim p)$
	1	0	1	1
	0	1	0	1

Slovy: *Původní výrok je stejný jako jeho negovaná negace.*

Např.:

a) $(5 > 3) \leftrightarrow$ není pravda, že $5 \leq 3$. „ $\leftrightarrow$ “ čteme jako obvykle, tj. „tehdy a jen tehdy, když“, resp. „právě tehdy, když“

b) 1 je kladné číslo $\leftrightarrow$ není pravda, že 1 je nekladné číslo.

c) *Půjdu na koncert* $\leftrightarrow$ není pravda, že *nepůjdu na koncert.*

Pokračování

Zajímavé skupiny čísel

STANISLAV HORÁK, ml.

I. Mějme dvě skupiny čísel

$$\{1; 4; 7; 15; 18\} \quad \{2; 5; 8; 9; 21\}$$

a utvořme součty z prvků těchto skupin

$$1 + 4 + 7 + 15 + 18,$$

$$2 + 5 + 8 + 9 + 21$$

Snadno zjistíme, že součty obou skupin jsou si rovny. Ale utvořme ještě tyto součty

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + 15^2 + 18^2$$

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + 9^2 + 21^2$$

I tyto součty jsou stejné a jsou rovny 615.

Cvičení 1

Dokažte, že totéž platí i o skupinách těchto čísel:

a) {2; 7; 9}, {3; 5; 10};

b) {1; 5; 6}, {2; 3; 7}

To nás vede k tomu, abychom si zavedli nový pojem, a to touto úmluvou:

Mějme dány dvě skupiny celých čísel

$\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ $\{b_1; b_2; \dots; b_m\}$

té vlastnosti, že

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m b_i, ^{1)}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^m b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^k = \sum_{i=1}^m b_i^k$$

avšak

$$\sum_{i=1}^n a_i^{k+1} \neq \sum_{i=1}^m b_i^{k+1}$$

kde k, m, n jsou libovolná přirozená čísla. Pak říkáme, že uvedené dvě skupiny čísel jsou si rovny právě v k stupních.

Cvičení 2.

V kolika stupních jsou si rovny skupiny čísel ze cvičení 1?

V kolika stupních jsou si rovny skupiny čísel

{1; 14; 22; 35} {2; 11; 25; 34} ?

Než přistoupíme k dalšímu, uvedeme několik příkladů.

1) Symbol $\sum_{i=1}^n a_i$ značí součet $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

1. V kolika stupních jsou si rovny skupiny čísel

$$\{1; 5; 8; 12; 16; 24; 30; 100; 110\}$$

$$\{3; 4; 6; 10; 11; 22; 50; 80; 120\} ?$$

Odpověď. Jsou si rovny právě ve třech stupních. Jednotlivé součty po řadě jsou 306, 24 066, 2 378 286.

Součty čtvrtých mocnin jsou 247 642 770, 254 830 530.

2. V kolika stupních jsou si rovny skupiny čísel

$$\{1; 6; 7; 17; 18; 23\} \quad \{2; 3; 11; 13; 21; 22\} ?$$

Odpověď. Jsou si rovny právě v pěti stupních. Příslušné součty po řadě jsou 72, 1228, 23 472, 472 036, 9 770 352.

II. Uvažované skupiny čísel mají řadu zajímavých vlastností. Některé z nich uvedeme.

Nechť skupiny čísel

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

jsou si rovny právě v k stupních. Potom i skupiny

$$\{\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n\} \quad \{\lambda b_1, \lambda b_2, \dots, \lambda b_m\}$$

kde $\lambda \neq 0$ je libovolné celé číslo, jsou si rovny právě v k stupních.

Důkaz. Podle předpokladu platí

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m b_i ,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^m b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^k = \sum_{i=1}^m b_i^k$$

Napsané rovnice znásobíme po řadě čísly λ , λ^2 , ..., λ^k . Dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \lambda a_i = \sum_{i=1}^m \lambda b_i ,$$

$$\sum_{i=1}^n (\lambda a_i)^2 = \sum_{i=1}^m (\lambda b_i)^2 ,$$

$$\sum_{i=1}^n (\lambda a_i)^k = \sum_{i=1}^m (\lambda b_i)^k$$

Poněvadž platí

$$\sum_{i=1}^n a_i^{k+1} \neq \sum_{i=1}^m b_i^{k+1}$$

platí též

$$\sum_{i=1}^n (\lambda a_i)^{k+1} \neq \sum_{i=1}^m (\lambda b_i)^{k+1}$$

a tím je důkaz vyslovené věty proveden.

Cvičení 3.

Jsou dány dvě skupiny čísel

$$\{-16; -11; -10; 1; 6\}, \\ \{-15; -14; -6; -4; 4; 5\}$$

které jsou si rovny právě v pěti stupních. Všechny členy obou skupin znásobte číslem 2 a ukažte, že vzniklé dvě skupiny čísel jsou si též rovny právě v pěti stupních.

III. V této části budeme uvažovat jen takové skupiny čísel

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$$

které mohou mít nestejný počet členů, ale tu, která má členů méně, doplníme pomocí nul na stejný počet čísel. Skupiny budeme označovat

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

Další vlastnost:

Nechť jsou dány skupiny čísel

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

které jsou si rovny právě v k stupních. Každý člen obou skupin zvětšeme nebo zmenšeme o totéž číslo c . Dostaneme tak skupiny čísel

$$\{a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_n + c\} \\ \{b_1 + c, b_2 + c, \dots, b_n + c\}$$

které jsou si rovny také v k stupních.

Důkaz. O daných skupinách platí

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n a_i^k = \sum_{i=1}^n b_i^k$$

Pro každé přirozené číslo s platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (a_i + c)^s &= \sum_{i=1}^n a_i^s + \binom{s}{1} c \sum_{i=1}^n a_i^{s-1} + \binom{s}{2} c^2 \sum_{i=1}^n a_i^{s-2} + \\ &\quad + \binom{s}{s-1} c^{s-1} \sum_{i=1}^n a_i + nc^s \\ \sum_{i=1}^n (b_i + c)^s &= \sum_{i=1}^n b_i^s + \binom{s}{1} c \sum_{i=1}^n b_i^{s-1} + \binom{s}{2} c^2 \sum_{i=1}^n b_i^{s-2} \\ &\quad + \binom{s}{s-1} c^{s-1} \sum_{i=1}^n b_i + nc^s\end{aligned}$$

Dosazujeme-li sem postupně $s = 1, 2, \dots, k$, vidíme s ohledem na rovnice (1), že nově utvořené skupiny čísel

$\{a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_n + c\}$ $\{b_1 + c, b_2 + c, \dots, b_n + c\}$
jsou si rovny také v k stupních.

Cvičení 4.

a) Ze skupin čísel $\{2; 7; 9\}$, $\{3; 5; 10\}$ můžeme utvořit nové skupiny, připočteme-li ke všem členům číslo 1. Zjistěte, v kolika stupních jsou si rovny dané skupiny a v kolika stupních jsou si rovny skupiny nově utvořené.

b) Necht skupiny

$$\{a_1, a_2, a_3\} \quad \{b_1, b_2, b_3\}$$

jsou si rovny právě ve dvou stupních. Dokažte, že i skupiny

$$\{a_1 + c, a_2 + c, a_3 + c\} \quad \{b_1 + c, b_2 + c, b_3 + c\}$$

jsou si rovny právě ve dvou stupních.

c) Provedte důkaz této věty (aspoň v nějakém speciálním případě).
Necht

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

jsou dvě skupiny čísel, sobě rovných právě v k stupních. Potom skupiny

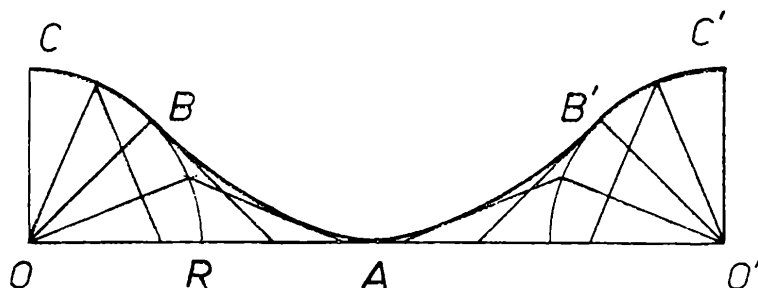
$$\begin{aligned}\{\lambda a_1 + c, \lambda a_2 + c, \dots, \lambda a_n + c\} \\ \{\lambda b_1 + c, \lambda b_2 + c, \dots, \lambda b_n + c\}\end{aligned}$$

kde λ, c jsou libovolná celá čísla, nikoli rovná nule, jsou si rovny také v k stupních.

Asteroida v autobusu

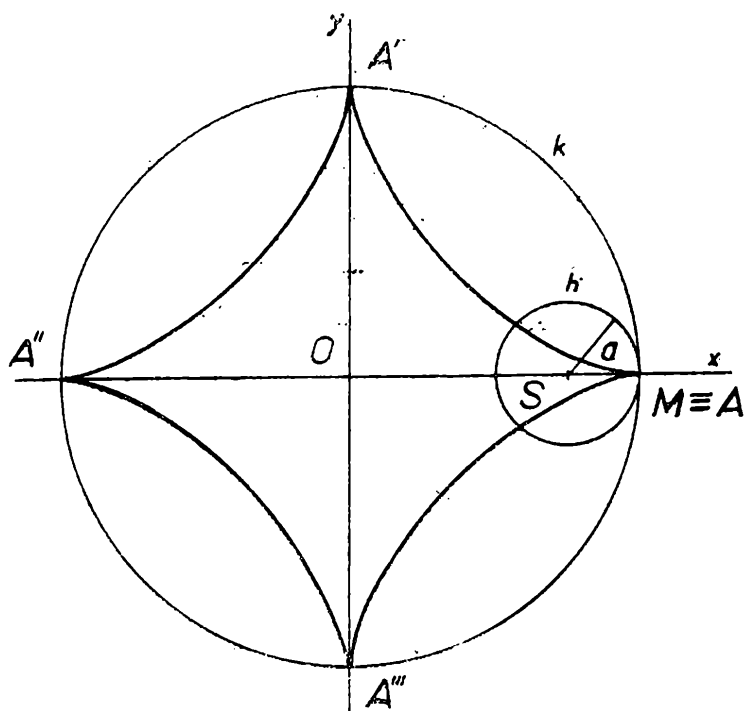
STANISLAV TRÁVNÍČEK, Olomouc

Jedete-li autobusem, trolejbusem nebo tramvají novějšího typu (kde se čtyřdílné dveře otevírají dovnitř) a podíváte-li se do prachu na nejnižším schůdku, můžete často spatřit jakousi křivku, kterou na něm zakreslily otevírající a zavírající se dveře. Na obr. 1 je v půdoryse vyznačeno několik poloh dveří a vzniklá křivka (o dvojdílných dveřích viz poznámku na konci článku). Tato křivka rozděluje schůdek na dvě části, a to na část, kde lze při otevírání dveří stát a na část, kde stát nelze. Nás bude zajímat zejména oblouk AB (budeme se dále zabývat jen levou částí dveří), protože oblouk BC je zřejmě kruhový.



Obr. 1

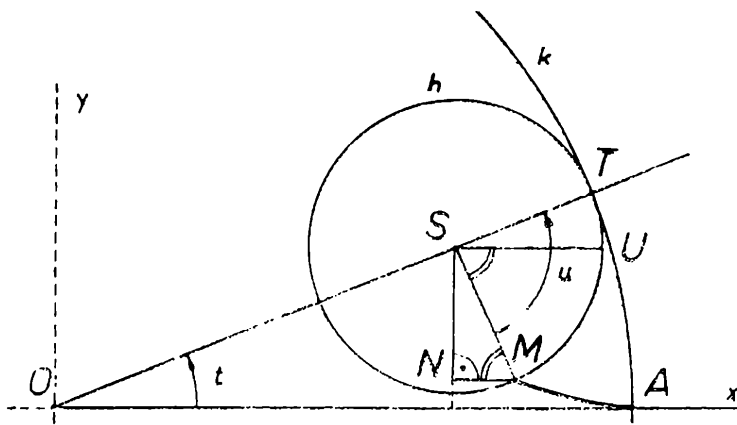
Nejprve si však něco řekněme o křivce zvané *asteroida* (obr. 2). Mějme kružnici k o poloměru a . Nechť se tato kružnice bez smyku



Obr. 2

kutálí svým „vnějším“ obvodem po „vnitřním“ obvodě pevné kružnice k o poloměru $4a$. Asteroidu pak vytváří každý bod obvodu kružnice h (uvažujeme např. bod $M \equiv A$), když h proběhne celý obvod kružnice k . Jednotlivé oblouky AA' , $A'A''$, asteroidy se nazývají *v ě t v e*.

Najdeme parametrické vyjádření asteroidy. Střed O pevné kružnice k (obr. 3) zvolme za počátek, přímku OA zvolme za osu x . Je-li S střed

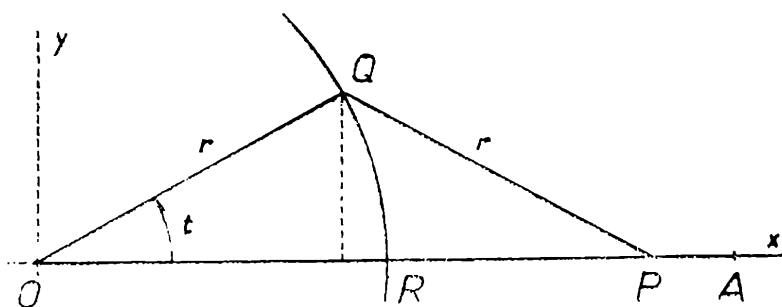


Obr. 3

kutálející se kružnice h a velikost $\widehat{AOS}$ je rovna t , pak souřadnice bodu S jsou zřejmě $3a \cos t$, $3a \sin t$. Označme nyní T bod dotyku kružnic h , k (v poloze dané úhlem t), U průsečík kružnice h a přímky vedené bodem S rovnoběžně s osou x a u velikost středového úhlu $\widehat{TSM}$. Podle předpokladu o kutálení platí pro velikosti kruhových oblouků $\widehat{AT} = \widehat{MT}$, tj. $4at = au$, odkud $u = 4t$. Vidíme, že pro velikosti úhlů platí $\widehat{SMN} = \widehat{MSU} = u - \widehat{UST} = 4t - t = 3t$, takže pro souřadnice bodu $M(x, y)$ asteroidy platí

$$x = 3a \cos t + a \cos 3t,$$

$$y = 3a \sin t - a \sin 3t$$



Obr. 4

Jestliže nyní vyjádříme $\cos 3t$, $\sin 3t$ pomocí funkcí jednoduchého úhlu, dostáváme rovnice *asteroidy v parametrickém tvaru*

$$\begin{aligned}x &= 4a \cos^3 t, \\y &= 4a \sin^3 t\end{aligned}\tag{1}$$

Vraťme se nyní ke křivce AB (obr. 1), jež je zřejmě vytvořena částí PQ dveří (obr. 4) tak, že bod P se pohybuje po úsečce OA a bod Q po kružnici $k = (O; r)$; velikost $\widehat{ROQ}$ označíme t a uvažujme

$$t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

Zvolme opět pravoúhlou souřadnicovou soustavu tak, aby bod O byl počátkem a přímka OA osou x . Víme, že směrnicový tvar rovnice přímky PQ , kde $P = P(x_1, 0)$, $Q = Q(x_2, y_2)$, je

$$y = \frac{y_2}{x_2 - x_1} (x - x_1)\tag{2}$$

Z obr. 4 vidíme, že platí $x_1 = 2r \cos t$, $x_2 = r \cos t$, $y_2 = r \sin t$, takže rovnice přímky PQ je [po dosazení do (2) a po úpravě]

$$y = -x \operatorname{tg} t + 2r \sin t\tag{3}$$

Pro různé úhly t dostáváme z (3) různé polohy přímky PQ . Úhel t tu má tedy opět úlohu parametru. Říkáme, že rovnice (3) definuje *jednparametrickou soustavu přímek*.

Dalo by se dokázat, že křivka AB má tu vlastnost, že se dotýká každé přímky dané soustavy přímek (3) právě v jednom bodě

$$\left(\text{pro úhly } t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle \right)$$

přičemž každý její bod je takovým bodem dotyku. Křivka AB je tedy tzv. *obálka* dané soustavy přímek. Z vyšší matematiky je známo, že obálku soustavy přímek dostaneme tak, že rovnici (3) derivujeme podle parametru t , tj.

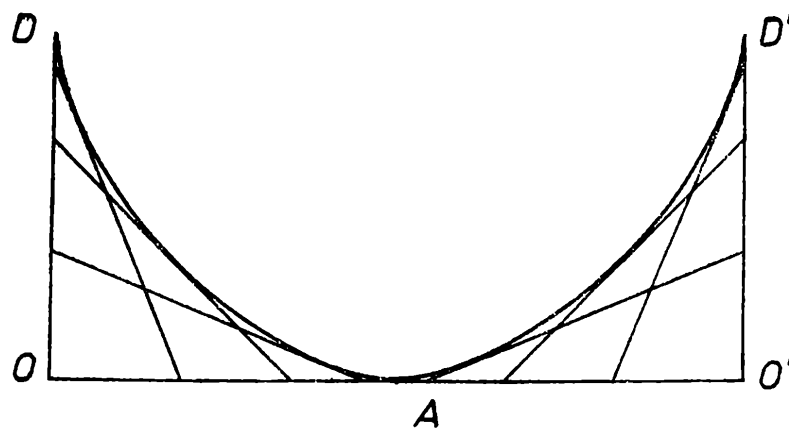
$$0 = -\frac{x}{\cos^2 t} + 2r \cos t,\tag{4}$$

a z rovnic (3), (4) vypočteme x , y . Ze (4) okamžitě plyne

$$x = 2r \cos^3 t\tag{5}$$

a po dosazení do rovnice (3) dostáváme

$$y = 2r \sin^3 t.\tag{6}$$



Obr. 5

Podle (1) nám tedy rovnice (5), (6) říkají, že oblouk AB je částí asteroidy ($r = 2a$). Křivka ABC na obr. 1 je tedy složena z části $\widehat{AB}$ asteroidy a z kruhového oblouku $\widehat{BC}$.

Jestliže jsou dveře dvojdílné (a otevírají se dovnitř), pak podle předchozího lehce odvodíme, že každý díl dveří vykreslí celou jednu větev asteroidy (obr. 5).

Prakticky ovšem nenajdete v autobusu (trolejbusu, tramvaji) vykresleny uvedené křivky zcela přesně, a to vlivem tolerance ve vodičích lištách apod., ovšem nakonec to ani není hlavním účelem dveří.

0 střechanech a o určování jejich objemů

DR. ING. OTAKAR LEMINGER, Ústí nad Labem

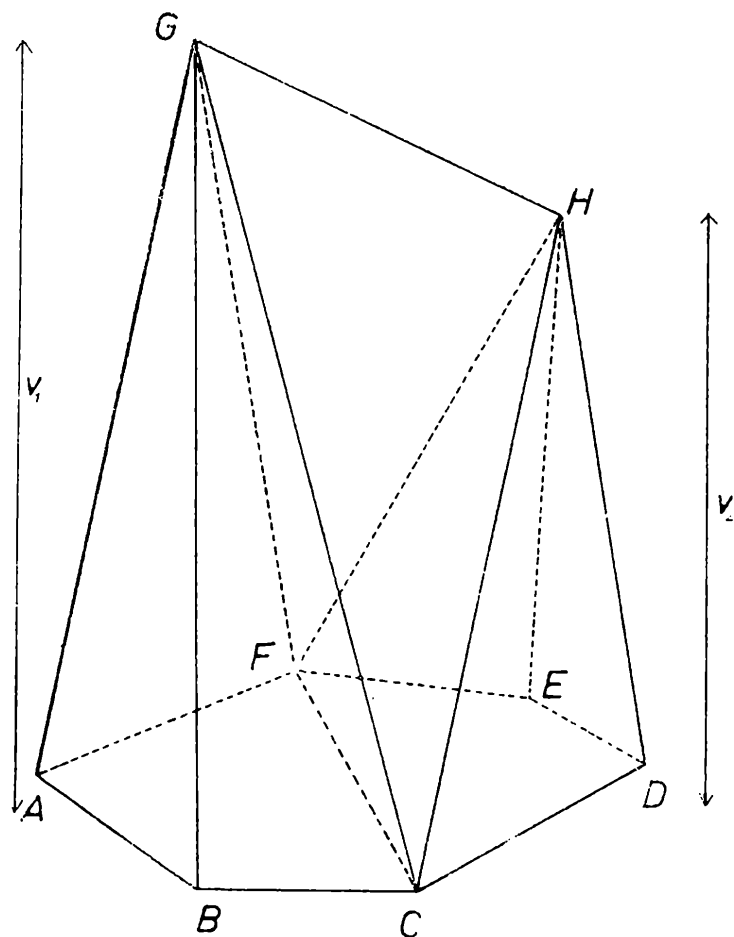
(Pokračování)

3. Určení objemu střechanu ze známých délek hran jeho střechy

Tento postup je uveden dále u určování objemu střechanů, jejichž vrcholová hrana není rovnoběžná s rovinou podstavy.

II. Určování objemů střechanů, jejichž vrcholová hrana není rovnoběžná s podstavou

Střechany, jejichž vrcholová hrana není rovnoběžná s rovinou podstavy, vyznačují se dvěma výškami v_1 a v_2 , které představují kolmé vzdálenosti krajních bodů G , H vrcholové hrany od podstavy (obr. 4).



Obr. 4

Také zde přísluší dané podstavě a dané vrcholové hraně více střechanů, lišících se polohou střešky a pořadem zbývajících pobočných stěn. Objemy střechanů tohoto druhu určíme buď Simpsonovým vzorcem, nebo pomocí dvojího úhlopříčného řezu při znalosti délek hran střešky.

- 1 *Určování objemů střechanů, jejichž vrcholová hrana není rovnoběžná s rovinou podstavy užitím vzorce Simpsonova*

Daný střechan (obr. 4) má podstavu o obsahu Z_1 a vrcholovou hranu GH , která není rovnoběžná s rovinou podstavy. Kolmé vzdálenosti krajních bodů G, H vrcholové hrany od podstavy představují výšky v_1, v_2 , přičemž $v_1 > v_2$. K stanovení objemu tohoto střechanu vedme vrcholem H rovinu rovnoběžnou s podstavou. Vzdálenost této roviny od roviny podstavy je tedy v_2 . Tím se rozpadne daný střechan v jehlan $GHRT$ a v prismatoid (obr. 5). Je-li známý nebo změřitelný obsah Z_2 vzniklého řezu, pak objem W_1 jehlanu $GHRT$ je roven

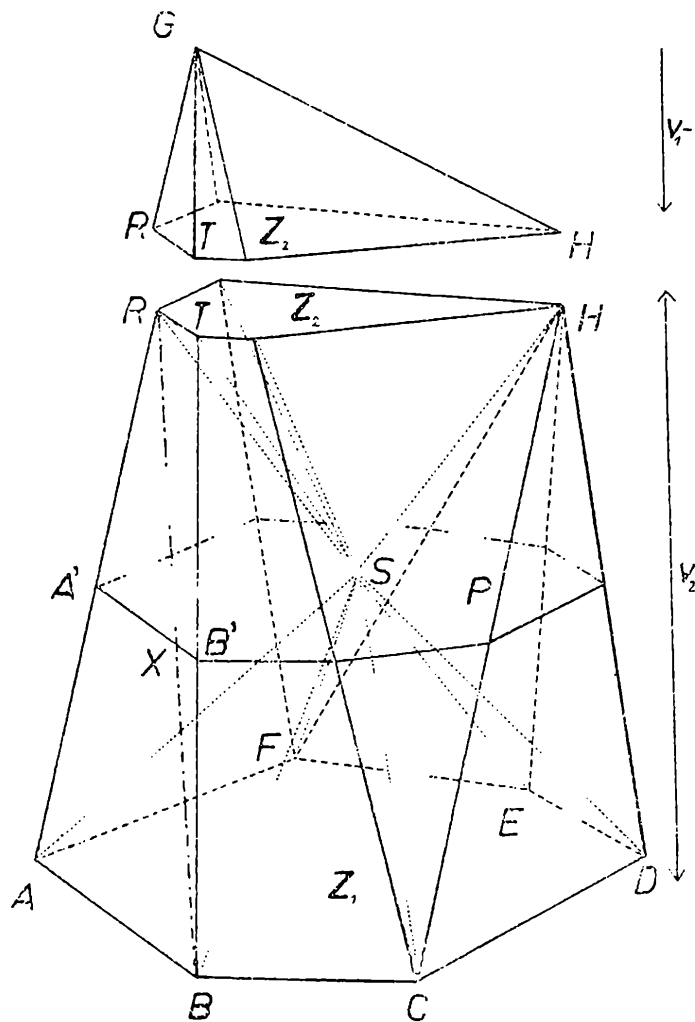
$$W_1 = \frac{1}{3} Z_2 (v_1 - v_2) \quad (6)$$

Objem W_2 prismatoidu pak je

$$W_2 = \frac{1}{6} v_2 (Z_1 + Z_2 + 4P) \quad (7)$$

kde P je obsah středního řezu prismatoidem, tj. řezu vedeného rovnoběžně s podstavou ve vzdálenosti $\frac{1}{2} v_2$. Objem V uvažovaného střechanu je potom dán vzorcem

$$V = W_1 + W_2 = \frac{1}{3} (v_1 - v_2) Z_2 + \frac{1}{6} v_2 (Z_1 + Z_2 + 4P) = \frac{1}{6} [2Z_2 v_1 + v_2 (Z_1 - Z_2 + 4P)] \quad (8)$$



Obr. 5

2. *Určování objemů střechanů, jejichž vrcholová hrana není rovnoběžná s rovinou podstavy užitím známých délek hran střechy*

Právě uvedené stanovení objemů střechanů, jejichž vrcholová hrana není rovnoběžná s podstavou pomocí Simpsonova vzorce má zajímavost hlavně teoretickou. Pro praktické účely není vhodné, neboť určení obsahu Z_2 horního a obsahu P středního řezu je v praxi velmi obtížné. Zde by se vyžadovala znalost skutečně změřitelných nebo stanovitelných prvků střechanu, např. délek jeho hran apod. Ukážeme dále, že k určení objemu střechanu tohoto druhu stačí znát vedle obsahu jeho podstavy a výšek v_1, v_2 délky hran jeho střechy a úhlopříčky v podstavě, spo-

jující vrcholy trojúhelníkových stěn střechy. V podstavě $Z \equiv ABCDEF$ takto daného střechanu $ABCDEFGH$ (obr. 4) vedme úhlopříčku CF , která spojuje vrcholy trojúhelníků, tvořících střechu střechanu. Touto úhlopříčkou CF a krajními body G, H vrcholové hrany proložíme dvě roviny, čímž se daný střechan rozpadne jednak na dva jehlany o podstavách $Z_1 \equiv ABCF, Z_2 \equiv CDEF$ a o výškách v_1, v_2 a dále v nepravidelný trojboký jehlan $CFGH$. Jelikož známe délky hran CG, FG, CH, FH, GH tohoto jehlanu $CFGH$, jakož i délku úhlopříčky CF , známe na základě Heronova vzorce i plochy jeho stěn. např. stěny $\triangle CFH \equiv Z'$

$$\triangle CFH \equiv Z' = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (9)$$

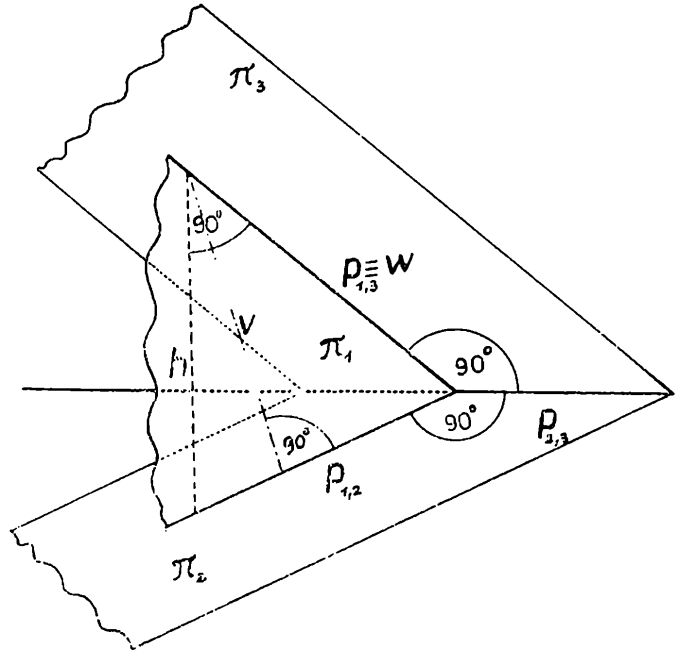
kde $a = CF$, $b = CH$, $c = FH$ a kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Objem daného střechanu V bude pak vyjádřen vzorcem

$$V = \frac{1}{3} v_1 Z_1 + \frac{1}{3} v_2 Z_2 + \frac{1}{3} v Z' = \frac{1}{3} (v_1 Z_1 + v_2 Z_2 + Z' v), \quad (10)$$

kde $v = GN$ je délka kolmice spuštěné z protilehlého vrcholu G na stěnu $Z' \equiv \triangle CFH$ jehlanu, resp. rovinu jí proloženou.

K určení této výšky $v = GN$ uijeme následující obecné poučky: Je-li určitá rovina π_1 (obr. 6) kolmá současně na dvě se protínající roviny π_2, π_3 , pak její průsečnice $p_{1,2}$ a $p_{1,3}$ s oběma těmito rovinami jsou kolmé na průsečnici $p_{2,3}$ obou těchto rovin. V našem případě jehlanu $CFGH$, který je k vytčenému cíli samostatně předveden na obr. 7, představuje rovinu π_2 jeho podstava $\triangle CFH$. Rovina $\pi_3 \equiv \triangle GKL$ je kolmá na hranu $CG = h$ uvažovaného jehlanu a rovina



Obr. 6

π_1 , obsahující hledanou výšku $v = GN$ jehlanu $CFGH$ je proložena hranou h a kolmicí $GM \equiv p_{1,3}$ spuštěnou z krajního bodu G hrany h na průsečnici KL $p_{2,3}$ roviny podstavy $\pi_2 \equiv \triangle CFH$ a roviny $\pi_3 \equiv \triangle GKL$.

K naznačenému stanovení výšky $v = GN$ je třeba ještě určit úhly $\gamma_1 = \widehat{FCG}$, $\gamma_2 = \widehat{GCH}$, $\gamma_3 = \widehat{FCH}$, které spolu svírají pobočné hrany jehlanu $CFGH$ vycházející z jednoho vrcholu podstavy $Z' \equiv \triangle CFH$, v našem případě z vrcholu C . To se provede kosinovou větou

$$\cos \gamma_1 = \frac{a^2 + h^2 - d^2}{2ah}, \quad (11_1)$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{b^2 + h^2 - e^2}{2bh}, \quad (11_2)$$

$$\cos \gamma_3 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad (11_3)$$

kde $a = CF$, $b = CH$, $c = FH$, $d = FG$, $e = GH$, $h = CG$.

Nyní vztyčíme z vrcholu G jehlanu $CFGH$, který je protilehlý podstavě $Z' \equiv \triangle CFH$, dvě kolmice GK a GL nad postranní hranou $CG = h$, spojující zvolený vrchol C podstavy Z' s vrcholem G tak, aby protínaly (popřípadě prodloužené) hrany CF , CH podstavy Z' , vycházející rovněž ze zvoleného jejího vrcholu C . Délky vzniklých úseček GK , GL , CK , CL jsou pak dány vzorci

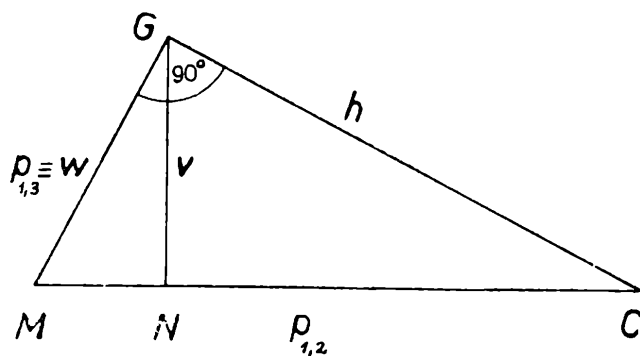
$$GK = h \operatorname{tg} \gamma_1, \quad (12)$$

$$GL = h \operatorname{tg} \gamma_2, \quad (13)$$

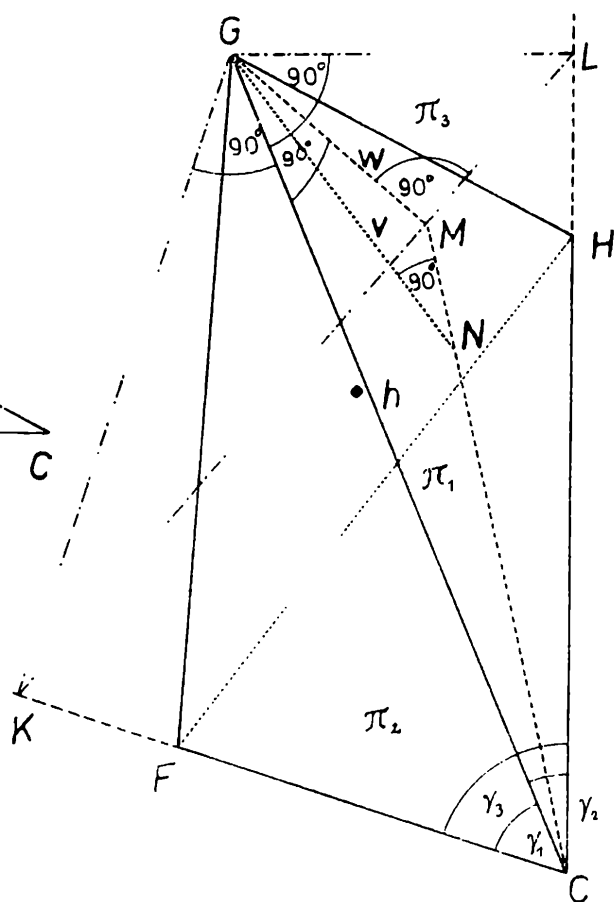
$$CK = \frac{h}{\cos \gamma_1} \quad (14)$$

$$CL = \frac{h}{\cos \gamma_2} \quad (15)$$

Vzniklý trojúhelník $\triangle GKL$ představuje část roviny kolmé na hranu $h = CG$ a proložené vrcholem G . Jeho základna $KL = p_2, 3$ představuje



Obr. 7a



Obr. 7b

průsečnici této roviny s rovinou podstavu $Z' \equiv \triangle CFH$

$$KL = p_{2,3} = \sqrt{\left(\frac{h}{\cos \gamma_1}\right)^2 + \left(\frac{h}{\cos \gamma_2}\right)^2 - 2 \frac{h^2 \cdot \cos \gamma_3}{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}}. \quad (16)$$

Obsah P tohoto trojúhelníka $\triangle GKL$ se určí Heronovým vzorcem

$$P = \sqrt{s'(s' - a')(s' - b')(s' - c')} \quad (17)$$

kde $a' = p_{2,3} = KL$, $b' = KG = h \operatorname{tg} \gamma_1$, $c' = GL = h \operatorname{tg} \gamma_2$ a $s' = \frac{1}{2}(a' + b' + c')$.

Výška $GM = w$ uvažovaného trojúhelníka $\triangle GKL$

$$w = GM = \frac{2P}{KL} = \frac{2P}{p_{2,3}} \quad (18)$$

a hrana $CG = h$ jehlanu $CFGH$ jsou na sebe kolmé a určují pravoúhlý trojúhelník $\triangle CGM$. Podle nahoře vyslovené poučky je rovina proložená tímto trojúhelníkem $\triangle CGM$ kolmá na rovinu podstavu $Z' \equiv \triangle CFH$. Potom výška $GN = v$ pravoúhlého trojúhelníka $\triangle CGM$ představuje hledanou výšku jehlanu $CFGH$ nad podstavou $Z' \equiv \triangle CFH$. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle CGM$ a $\triangle CNG$ plyne (obr. 7), že

$$v = GN = \frac{wh}{CM} = \frac{wh}{\sqrt{w^2 + h^2}} = \frac{\frac{2Ph}{p_{2,3}}}{\sqrt{\left(\frac{2P}{p_{2,3}}\right)^2 + h^2}} \quad (19)$$

neboť

$$CM = \sqrt{w^2 + h^2}$$

Objem jehlanu $CFGH$ je pak

$$W = \frac{1}{3} Z'v, \quad (20)$$

kde Z' a v jsou vyjádřeny vzorci (9) a (19). Pro objem V původního střechanu $ABCDEFGH$ z toho plyne

$$V = \frac{1}{3} (v_1 Z_1 + v_2 Z_2 + Z'v) \quad (21)$$

(Dokončení)

O p r a v a : Na upozornění prof. R. Cihláře z Č. Krumlova žádáme čtenáře, aby si v čísle 2 mezi sebou vyměnili obrázky ze str. 60 a 65.



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

0 jedné zajímavé vlastnosti ortocentrického čtyřstěnu

PAVEL POLCAR, Velké Meziříčí

V přípravných úlohách MO se vyskytla úloha týkající se tzv. ortocentrického čtyřstěnu. Zopakujme pro úplnost jeho definici:

Čtyřstěn se nazývá ortocentrický, jestliže se všechny jeho tělesové výšky protínají v jednom bodě. Tento bod nazýváme ortocentrem čtyřstěnu.

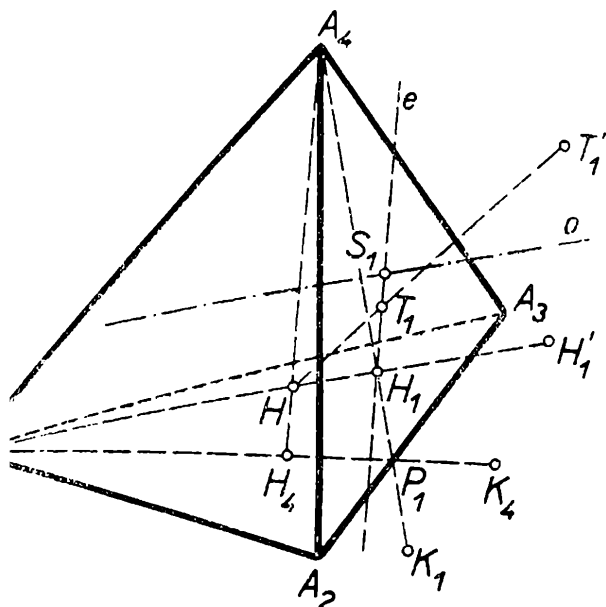
Ortocentrický čtyřstěn má některé zajímavé vlastnosti. Uvedme jednu, která připomíná podobnou větu v trojúhelníku o kružnici devíti bodů.¹⁾

V ě t a. V ortocentrickém čtyřstěnu leží na jedné kulové ploše těchto 12 bodů: těžiště a ortocentra stěn (8 bodů) a 4 body, které dostaneme z vrcholů čtyřstěnu stejnolehlostí se středem v ortocentru a koeficientem $\frac{1}{3}$. Poloměr této kulové plochy je roven $\frac{1}{3}r$, kde r je poloměr kulové plochy opsané čtyřstěnu.

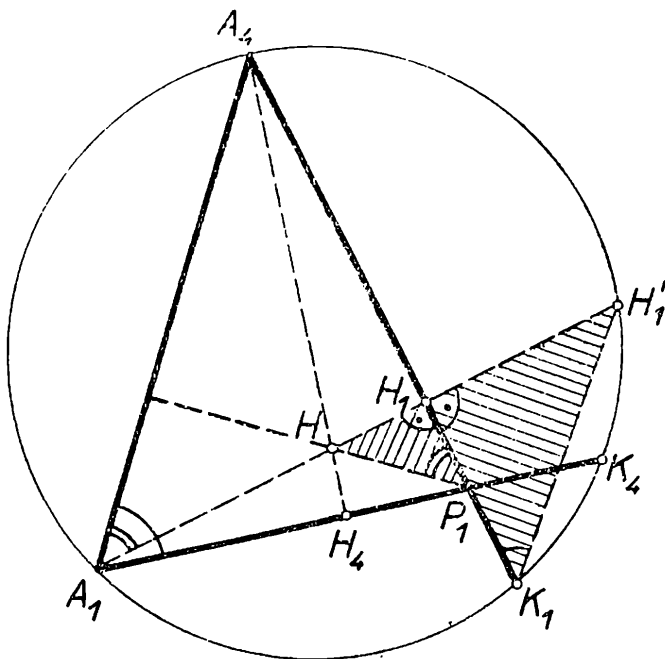
D ů k a z. Označme daný čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$, těžiště, resp. ortocentra stěn $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ označme po řadě T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , resp. H_1 , H_2 , H_3 , H_4 a ortocentrum čtyřstěnu označme H (obr. 1). Kulovou plochu opsanou čtyřstěnu označme κ . Dokážeme, že na ní leží kromě vrcholů ještě body, které jsou stejnolehle s ortocentrem H podle bodů H_i a T_i ($i = 1, 2, 3, 4$) s koeficientem -2 .

¹⁾ Kružnice devíti bodů v trojúhelníku prochází středy stran, patami výšek a středy úseků omezených průsečíkem výšek a vrcholy trojúhelníka.

Důkaz provedeme pro stěnu $A_2A_3A_4$. Především uvažme, že přímka A_1H protne stěnu $A_2A_3A_4$ v bodě H_1 . Roviny A_1A_2H , A_1A_3H , A_1A_4H jsou totiž kolmé po řadě na přímky A_3A_4 , A_2A_4 , A_2A_3 a protínají tedy rovinu $A_2A_3A_4$ ve výškách trojúhelníka $A_2A_3A_4$. Tedy jejich průsečnice A_1H protíná rovinu $A_2A_3A_4$ v průsečíku těchto výšek, tj. v bodě H_1 . Přímka A_4H_1 je v trojúhelníku $A_2A_3A_4$ výškou, protíná přímku A_2A_3 v bodě P_1 a kulovou plochu κ v bodě K_1 a platí $H_1P_1 = P_1K_1$, neboť v libovolném trojúhelníku protne prodloužená výška kružnici opsanou



Obr. 1



Obr. 2

v bodě souměrném s ortocentrem trojúhelníka podle příslušné strany. Přímka A_1H_4 protíná přímku A_2A_3 v témže průsečíku P_1 — obě přímky A_1H_4 , A_4H_1 náleží totiž rovině A_1A_4H — a kulovou plochu κ protíná v bodě K_4 , pro který platí $P_1H_4 = P_1K_4$.

Označme nyní H'_1 průsečík přímky A_1H_1 s kulovou plochou κ a zobrazme si řez kulové plochy κ a čtyřstěnu rovinou $A_1A_4H_1 = A_1A_4P_1$ (obr. 2).

Zde platí

$$\sphericalangle A_4K_1H'_1 = \sphericalangle A_4A_1H'_1 \text{ (obvodové úhly)},$$

$$\sphericalangle H_1P_1H = 90^\circ - \sphericalangle A_1A_4H_1 = \sphericalangle A_4A_1H_1 = \sphericalangle A_4A_1H'_1$$

Tedy

$$\sphericalangle H_1P_1H = \sphericalangle H_1K_1H'_1, \quad \sphericalangle HH_1P_1 = \sphericalangle K_1H_1H'_1 = 90^\circ$$

Z toho plyne

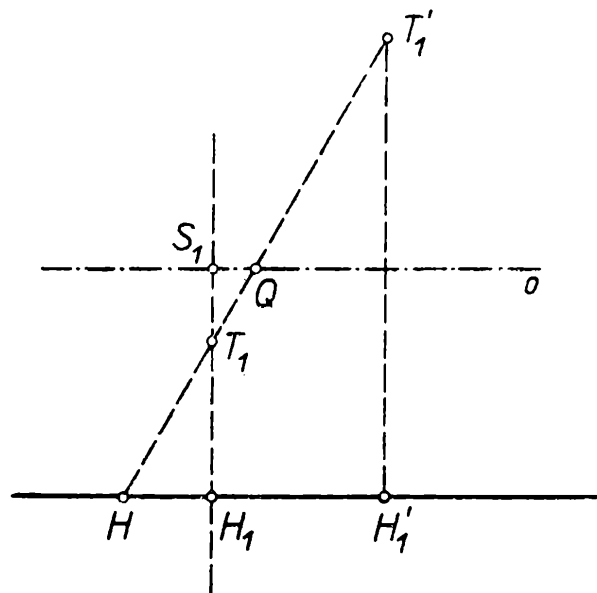
$$\triangle P_1H_1H \sim \triangle K_1H_1H'_1,$$

tedy

$$\frac{HH_1}{P_1H_1} = \frac{H_1H'_1}{K_1H_1} \Rightarrow \frac{H_1H'_1}{H_1H} = \frac{K_1H_1}{P_1H_1} = 2 \therefore$$

Bod H'_1 je tedy stejnohlý s bodem H podle středu H_1 s koeficientem $-2cbd$.

Bod stejnohlý s ortocentrem H podle těžiště T_1 s koeficientem -2 označme T'_1 . Dále označme S_1 střed kružnice opsané trojúhelníku $A_2A_3A_4$. Kolmice o bodem S_1 k rovině $A_2A_3A_4$ prochází středem kulové plochy. Body H_1, T_1, S_1 leží v trojúhelníku $A_2A_3A_4$ na Eulerově přímce (viz Škola mladých matematiků, sv. 7), a tedy bod T_1 leží mezi body H_1, S_1 a platí $H_1T_1 = 2 S_1T_1$. Zobrazme si nyní situaci v řezu rovinou



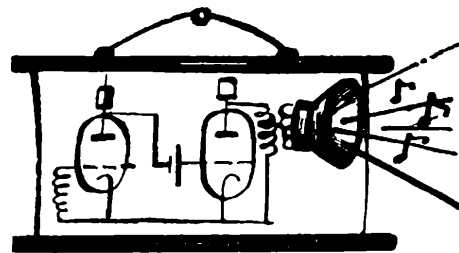
Obr. 3

(oH_1) (obr. 3). Tato rovina obsahuje bod H , neboť je $HH_1 \parallel o$. Dále obsahuje bod T_1 , a tudíž i bod T'_1 . Průsečík přímky HT'_1 s přímkou o označme Q . Je $H_1T_1 = 2 S_1T_1$, a tedy také $HT_1 = 2 T_1Q$. Dále je $HH'_1 = 3 \cdot HH_1$, a tedy také $HT'_1 = 3 HT_1$. Odtud máme $HQ = \frac{3}{2} \cdot HT_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot HT'_1 = \frac{1}{2} \cdot HT'_1$. Přímka o půlí úsečku HT'_1 , a tedy i úsečku $T'_1H'_1$, neboť je $T_1H_1 \parallel T'_1H'_1$. Tedy bod T'_1 je souměrně sdružený s bodem H'_1 podle přímky o . To však znamená, že také bod T'_1 leží na kulové ploše κ , neboť tato plocha je souměrná podle každé přímky procházející jejím středem.

Tím je důkaz pro stěnu $A_2A_3A_4$ proveden. Pro ostatní stěny se provede důkaz analogicky.

Kulová plocha κ obsahuje jednak vrcholy čtyřstěnu, jednak body stejnohlé s ortocentrem H podle bodů H_i a T_i a koeficientem -2 . Zobrazíme-li tedy tuto kulovou plochu κ ve stejnolehlosti se středem H a koeficientem $\frac{1}{3}$, bude její obraz κ' obsahovat body H_i a T_i a dále obrazy vrcholů v této stejnolehlosti. Odtud plyne, že κ' je hledaná kulová plocha a z vlastností stejnolehlosti plyne, že její poloměr je skutečně $\frac{1}{3} r$, kde r je poloměr kulové plochy κ . Tím je věta dokázána.

Jako cvičení si může čtenář dokázat, že v ortocentrickém čtyřstěnu existuje ještě jiná kulová plocha dvanácti bodů, která obsahuje středy hran čtyřstěnu a průsečíky hran se společnými kolmicemi protějších (tj. mimoběžných) hran a její střed je těžiště čtyřstěnu.



FYZIKA

Vlnové vlastnosti mikročástic

DR. MIROSLAV ROZSÍVAL, Praha

Jedním ze základních výsledků moderní fyziky je odhalení, že mikročástice, tj. hmotné částice z oblasti mikrosvěta jako jsou elektrony, protony, neutrony nebo složitější útvary jako atomy, molekuly apod., se mohou projevovat jako vlnění. Možnost vlnové povahy takových částic vyplynula poprvé z teoretické doktorské dizertace „Recherches sur la théorie des quants“ francouzského fyzika Louise de Broglieho podané v r. 1924 na universitě Sorbonne v Paříži.

V této své práci L. de Broglie odvodil, že hmotné mikročástice o hmotnosti m , letící rychlostí v , se mohou projevovat jako vlnění, jehož vlnová délka λ je dána vztahem

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (1)$$

kde h = Planckovo elementární kvantum ($6,6252 \cdot 10^{-34}$ Js), p = hybnost, m = hmotnost a v = rychlost letící částice.

Tyto teoretické výsledky L. de Broglieho, které vedly ke vzniku nové fyzikální teorie, tzv. *kvantové mechaniky*, rozpracované dále E. Schrödingerem, W. Heisenbergem, P. Bornem a M. Jordanem, byly potvrzeny experimentálně teprve po několika letech, a to nejprve u elektronů (C. J. Davisson a L. H. Germer 1927, G. P. Thomson 1927, S. Kikuchi 1927, P. S. Tartakovskij 1928 a další), pak u atomů a molekul (Stern 1929 a další), u protonů (T. G. Johnson 1930) a u neutronů (W. H. Zinn 1946 a další) [1].

Základní experimentální práce, které prokázaly nejen vlnové chování mikročástic, ale i správnost de Broglieovy teorie, byly provedeny pomocí difrakce (ohybu) elektronových paprsků na krystalech. Pokusy s ostatními korpuskulárními paprsky měly v podstatě již jen prokázat obecnou platnost závěrů z pokusů s elektrony.

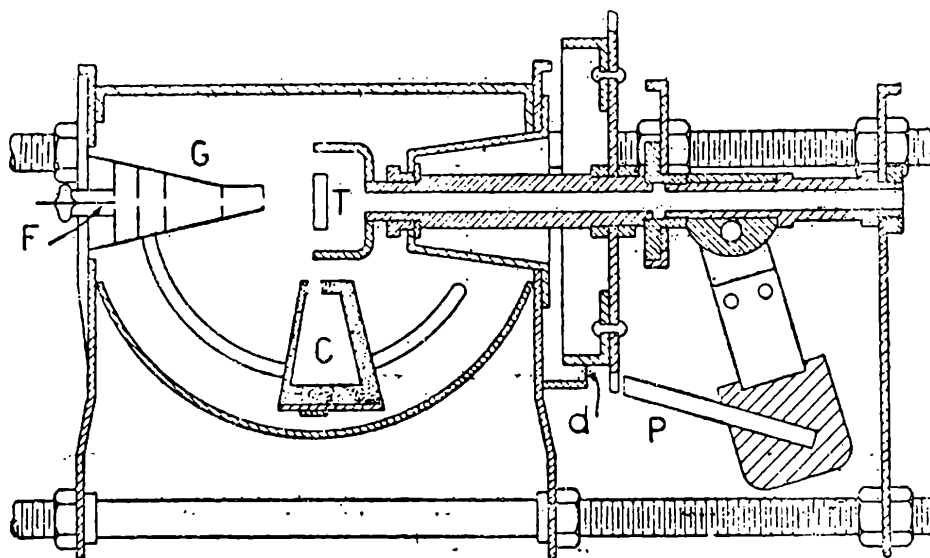
Zásadní význam prací o vlnové povaze mikročástic byl zdůrazněn udělením dvou Nobelových cen za fyziku, a to v r. 1929 L. de Brogliemu. „za odhalení vlnové povahy elektronů“ a v r. 1937 společně C. J. Davissonovi a G. P. Thomsonovi „za experimentální objev interferenčních jevů při ozařování krystalů elektrony“

Základní experimentální důkazy difrakce mikročástic

Popíšeme stručně některé základní experimenty, které prokázaly vlnovou povahu jednotlivých druhů mikročástic, s cílem ukázat nejen jakým způsobem, ale i jakou metodikou byly provedeny.

Difrakce elektronů

První pokusy provedli američtí fyzikové C. J. Davisson a L. H. Germer s tzv. pomalými elektrony (tj. s elektrony o energii několik desítek až stovek eV) a současně angličtí fyzikové G. P. Thomson



Obr. 1. Schéma původního zařízení pro difrakci pomalých elektronů Davissona a Germera

(G. P. Thomson — W. Cichrane: [3])

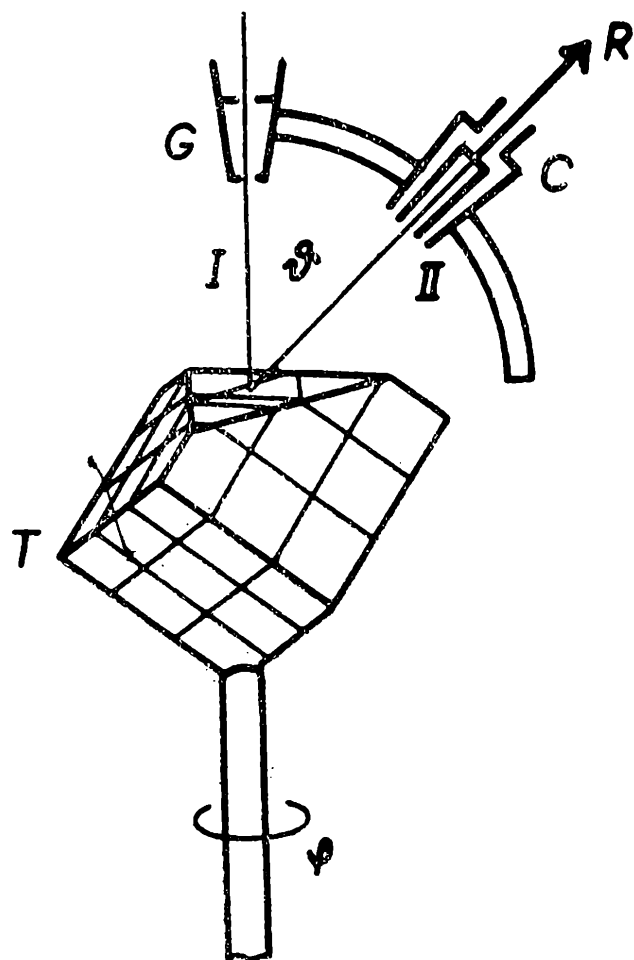
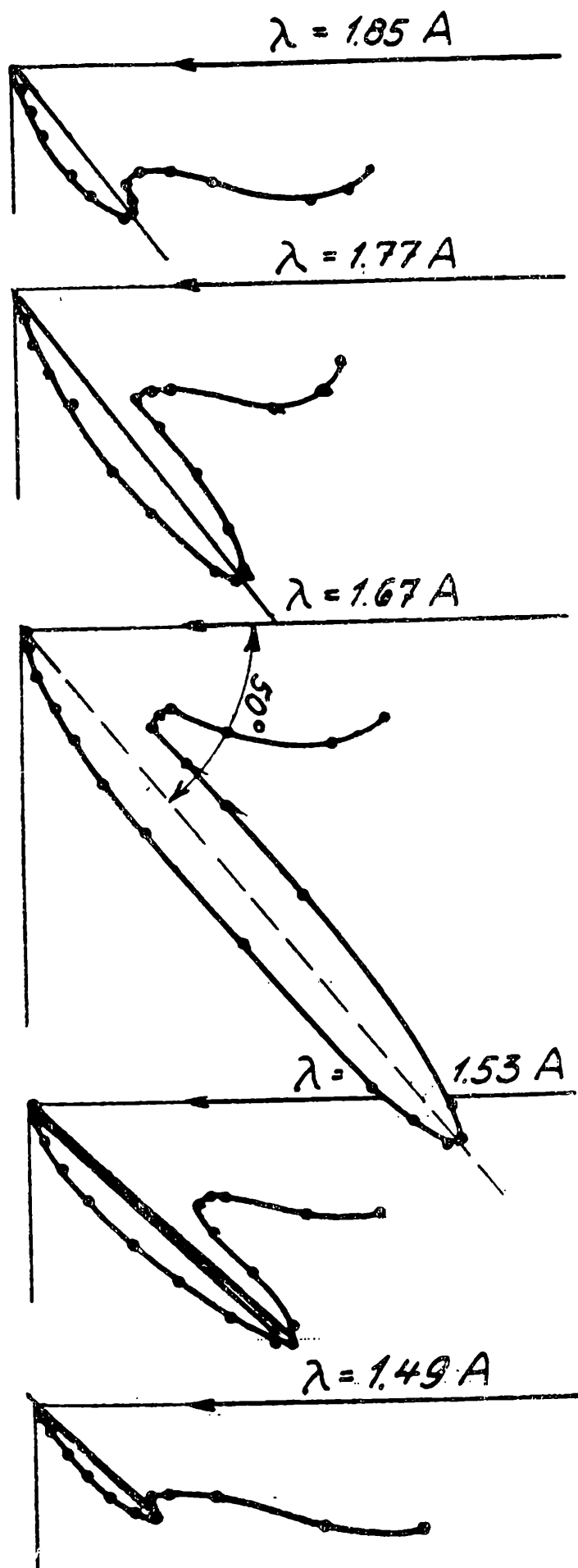
F - wolframové vlákno

G - elektronové dělo

T - vzorek

C - kolektor

P - pohybové ústrojí



Obr. 2. Schéma pokusu Davissona a Germera

- G zdroj elektronů
- T vzorek
- C kolektor
- R k registračnímu zařízení
- I dopadající paprsky
- II difraktované paprsky
- φ úhel difrakce
- ψ úhel azimutu

Obr. 3. Záznam rozložení intenzity elektronů po odrazu na krystalu v závislosti na rychlosti elektronů
(H. Mark, R. Wierl, [1])

a A. Reid s tzv. rychlými elektrony (tj. o energii několik desítek až stovek keV). Provedení zařízení pro difrakci pomalých a rychlých elektronů je rozdílné.

Zařízení pro difrakci pomalých elektronů, kterého použili Davisson a Germer, ukazuje schematický obr. 1.

Schematicky je jejich pokus znázorněn na obr. 2.

Elektrony vystupující ze zdroje G , které po vyclonění a urychlení elektrickým napětím (mezi 60 až 200 Volt) vytvoří úzký svazek elektronových paprsků I , nechali dopadat kolmo na zvolenou mřížovou rovinu monokrystalu niklu T , a studovali pomocí tzv. kolektoru C (malá Faradayova klíčka spojená s citlivým elektrometrem nebo vhodným galvanometrem) rozložení intenzity elektronů po odrazu na zvoleném monokrystalu. Dostali překvapující (tehdy) výsledek, že totiž intenzita odražených elektronů vykazuje poměrně ostrá maxima pod úhly ϑ , jejichž velikost závisí na energii elektronů (obr. 3) [2].

Když pak po náhodné oxidaci povrchu monokrystalu Ni zjistili, že poloha maxim se mění podle použitého monokrystalu, pokusili se pozorované jevy vysvětlit jako difrakci de Broglieových vln příslušejících použitým elektronům podle vztahu, který vyplývá z (1)

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2em U}} \doteq \sqrt{\frac{150}{U_{\text{volt}}}} [\text{\AA}]^1 \quad (2)$$

Pro představu, o jak velké vlnové délky přitom jde, uvedeme vlnové délky λ odpovídající některým vybraným urychlujícími napětím U

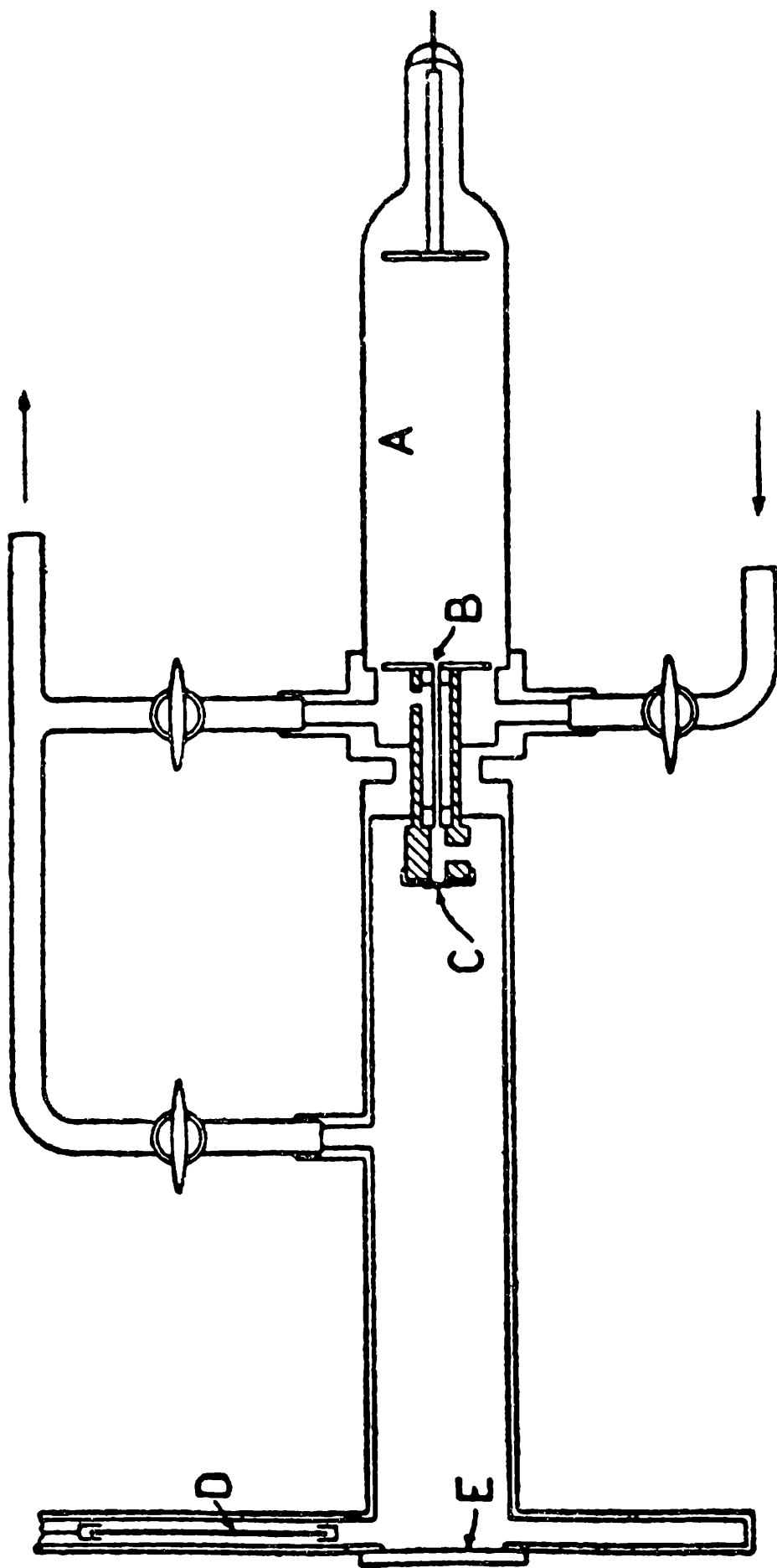
Tabulka 1

Urychlující napětí U Volt	Vlnová délka λ cm
150	1,000 10^{-8}
1 500	3,162 10^{-9}
15 000	9,938 $\cdot 10^{-10}$
50 000	5,354 $\cdot 10^{-10}$
100 000	3,700 $\cdot 10^{-10}$

¹⁾ Pro vysoká urychlující napětí (při velmi přesných měřeních již asi nad 20 kV) je třeba ve vztahu (2) respektovat relativistickou změnu hmoty elektronů, takže přesný vztah pro vlnovou délku λ elektronů je

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2em_0 U \left(1 + \frac{eU}{2m_0 c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9,76 \cdot 10^{-7} U}} \sqrt{\frac{150}{U}}, \quad (2a)$$

kde m_0 = klidová hmotnost elektronu.



Obr. 4. Schéma původního zařízení G. P. Thomsona a A. Reida
(*G. P. Thomson, W. Cochrane: [3]*)

- A* výbojová trubice
- B* clonka
- C* tenká fólie
- D* fotografická deska
- E* fluorescenční stínítko

Za uspořádání, kterého Davisson a Germer použili, platí pro difrakci podmínka

$$d (1 - \sin \vartheta) = n\lambda , \quad (3)$$

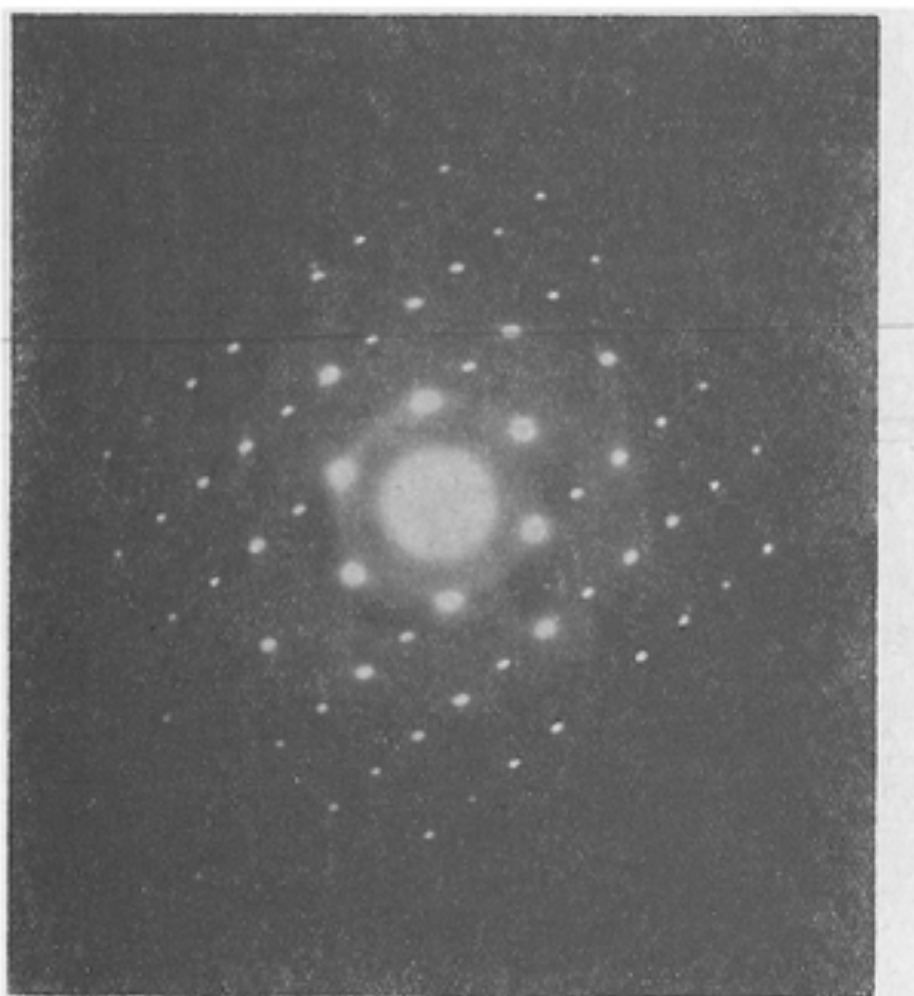
kde n je celé kladné číslo (tzv. řád).

Dosazením za d a λ vypočetli Davisson a Germer hodnotu difrakčního úhlu ϑ , která se až na malou odchylku, kterou se brzy podařilo vysvětlit vlivem lomu elektronových paprsků na hraniční ploše krystalu, velmi dobře shodovala s hodnotou naměřenou při pokusech.

Ke stejným výsledkům došli Davisson a Germer, když provedli pokusy s difrakcí pomalých elektronů v Braggově uspořádání, jak je to obvyklé při difrakci rentgenových paprsků; difrakční podmínka má pak tvar

$$\lambda = 2d \sin \Theta \quad (4)$$

(kde Θ je Braggův úhel difrakce), známý pod jménem Braggova rovnice. Davissonovy a Germerovy pokusy s pomalými elektrony opakovala řada dalších pracovníků s různými krystaly i energiemi elektronů.

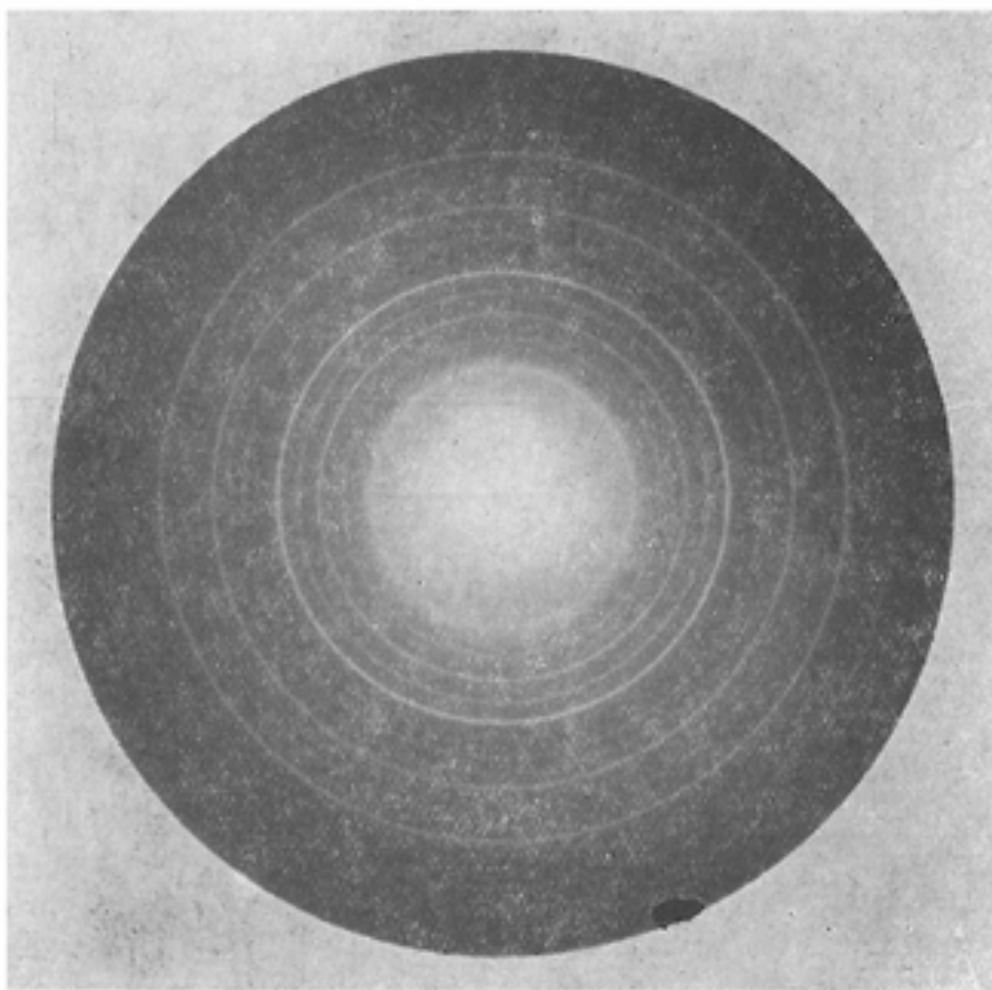


Obr. 5. Elektronogram monokrystalické fólie parafínu

Jejich výsledky vesměs prokázaly správnost de Broglieovy teorie pro pomalé elektrony.

Základní pokusy s rychlými elektrony provedli G. P. Thomson a A. Reid (který brzy na to tragicky zahynul) na zařízení, které je schematicky znázorněno na obr. 4 [3].

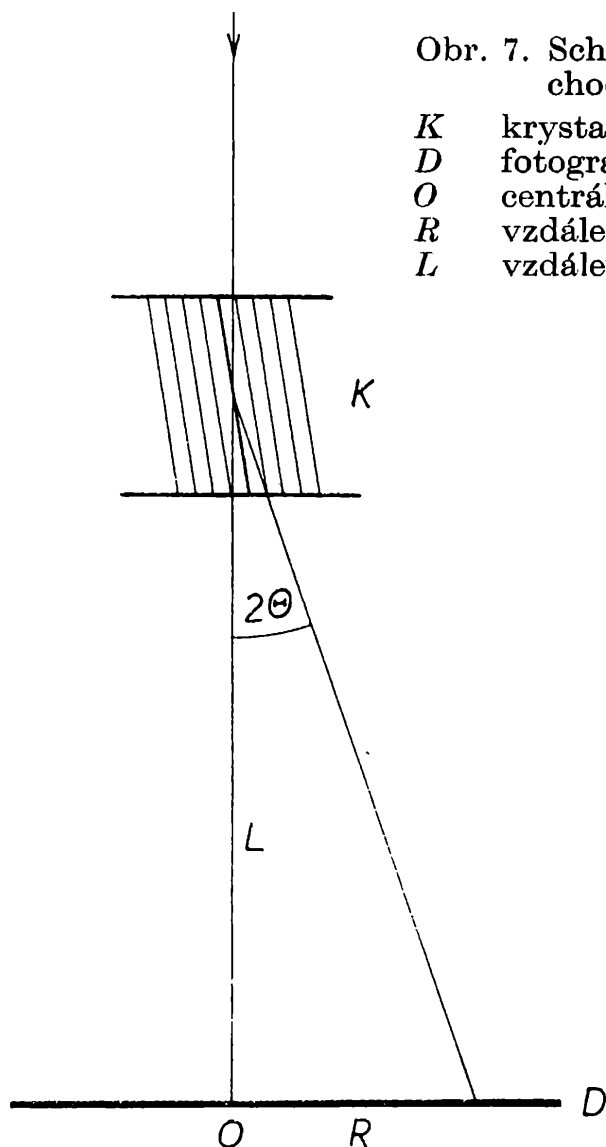
Elektrony z výbojové trubice *A* (buzené indukční cívkou) urychlené napětím několik desítek tisíc Volt proletují clonkou *B* s velmi malým otvorem, takže vytvoří úzký svazek elektronových paprsků, které procházejí velmi tenkou fólií (asi 10^{-5} mm) *C*. Jevy vznikající průchodem elektronů fólií se daly jednak pozorovat na fluorescenčním stínítku *E*, nebo fotografovat na desku *D*, která se zasouvala před toto stínítko. Celé zařízení bylo vyčerpáno třístupňovou rtuťovou vývěvou na vysoké vakuum. Urychlující vysoké napětí bylo měřeno pomocí kulového jiskřiště. Vzniklé difrakční jevy mají různý tvar podle toho, jde-li o monokrystalickou nebo polykrystalickou fólii. Příklady takových difrakčních obrazců ukazují elektrogramy na obr. 5 a 6.



Obr. 6. Elektronogram polykrystalické fólie NH_4Cl

Obr. 7. Schéma vzniku difrakčních obrazců průchodem fólií

K krystal
 D fotografická deska
 O centrální stopa
 R vzdálenost difrakčního maxima od O
 L vzdálenost $K . D$



Geometrii vzniku těchto obrázků ukazuje schematický obr. 7.

Podle obr. 7 lze Braggovu podmínku difrakce psát ve tvaru

$$\lambda = 2d \sin \Theta \doteq d \sin 2\Theta = d \frac{R}{L}, \quad (5)$$

Podle obr. 7 lze Braggovu podmínku difrakce psát ve tvaru

$$\lambda = 2d \sin \Theta \doteq d \sin 2\Theta = d \frac{R}{L}, \quad (6)$$

kde úhel difrakce Θ je pouze několik málo stupňů, L = vzdálenost krystalu od fotografické desky a R = vzdálenost maxima od centrální stopy na snímku. Pokusy s difrakcí rychlých elektronů byly rovněž mnohokrát opakovány různými pracovníky na nejrůznějších vzorcích a s urychlujícími napětími až do 1 miliónu Volt. Všechny nezvratně potvrdily správnost de Broglieovy teorie, a tím také vlnovou povahu těchto korpuskulárních mikročástic.

(Pokračování)

Mössbauerův jev

RNDr. V. KOLESNIKOV a RNDr. J. ZÁHEJSKÝ, Olomouc

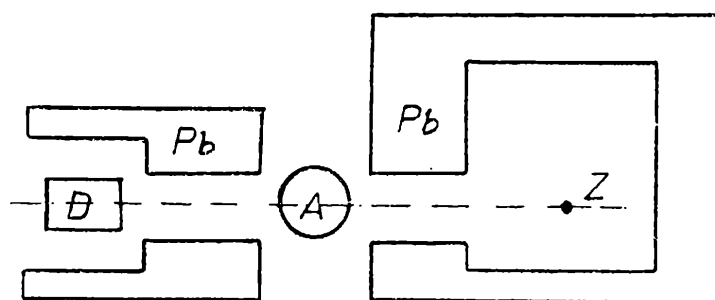
(Dokončení)

4. Mössbauerův jev

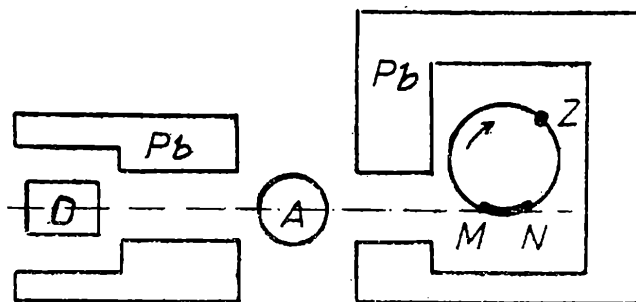
Mössbauer objevil v roce 1958 nový způsob měření jaderné rezonanční absorpce. Užil jádra Ir^{191} , které při přechodu na základní stav vysílá kvantum záření γ o energii 129 keV. Tomu odpovídá spektrální čára o velké intenzitě a malé přirozené šířce

$$\Gamma = 6 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

Jako absorbátoru užil přirozeného iridia obohaceného izotopem Ir^{191} . Při svém prvním pokusu (uspořádání je zřejmé z obr. 4a) nechal zdroj Z i absorbér A v klidu a předpokládal, že při laboratorní teplotě část záření emitovaná zdrojem a absorbovaná absorbérem má rezonanční energii W_0 , která odpovídá excitovanému stavu, což umožňuje vznik malé, ale měřitelné rezonanční absorpce. Při snížení teploty by mělo



a



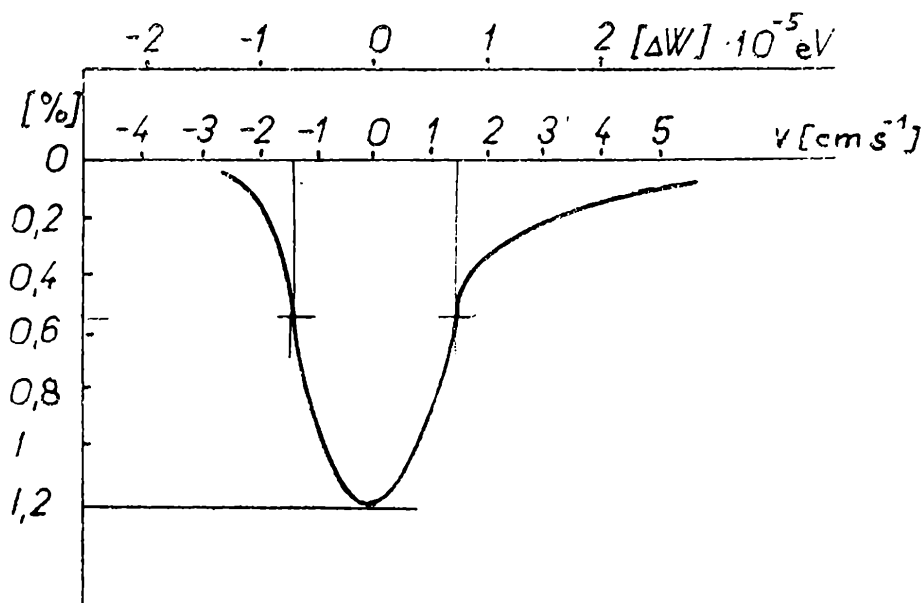
b

Obr. 4a, b. Experimentální uspořádání.

dojít k zúžení absorpčních a emisních čar v důsledku zmenšení kmitů krystalické mřížky a rezonanční absorpce by měla poklesnout. Při teplotě 88 °K pozoroval však naopak vzrůst absorpce. Provedl proto v roce 1959 další pokus, kde zdroj byl umístěn na obvodu rotujícího disku (obr. 4b). Při rovnoměrné rotaci disku pak předpokládal, že pohyb po malém oblouku MN odpovídá přímočarému rovnoměrnému pohybu. Při rychlosti dané vztahem (13) o hodnotě

$$v = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{129 \cdot 10^3} = 1,4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1},$$

by měl být kompenzován vliv zpětného rázu. Rezonanční absorpce by pak měla být maximální. Pokus však ukázal, že absorpce je maximální právě při klidném zdroji a ubývá se vzrůstající rychlostí zdroje. Ukázalo se, že již při malé rychlosti pohybu zdroje směrem k absorbéru rezonanční absorpce silně klesá (obr. 5). Z těchto měření Mössbauer usoudil, že zpětný ráz je již nějakým způsobem kompenzován.



Obr. 5.

Tuto samovolnou kompenzaci je možné vysvětlit tak, že jádra atomu v krystalu jsou vázána na krystalickou mřížku a na druhu této vazby závisí i energie o kterou se zmenší energie W_0 emitovaného fotonu. Energie, kterou jádra získávají vlivem zpětného rázu, se projeví ve vzrůstu vnitřní energie krystalu. U některých pevných látek dochází však za určitých podmínek k tomu, že pro některá γ -kvanta nemůže nastat příslušné zvýšení energie krystalu, a proto se zpětný impuls fotonu přenesse na krystal jako na celek. Poněvadž je hmotnost krystalu

daleko větší než hmotnost jádra, je foton emitován prakticky bez ztráty energie. Je to obdoba pružného rázu malé kuličky s masívním tělesem, kdy se kulička odrazí prakticky s nezměněnou rychlostí. Takovým způsobem je zpětný ráz samovolně kompenzován. Mössbauer podal sám výklad jaderné bezodrazové rezonance, avšak jeho matematická stránka daleko přesahuje rámec tohoto článku.

Kromě Mössbauerem použitého Ir^{191} nastane samovolná kompenzace zpětného rázu také pro Fe^{57} , Sn^{119} , Zn^{67} , Re^{187} , Au^{198} , kterých bylo použito při dalších experimentech využívajících tohoto jevu. Nejvýrazněji se Mössbauerův jev projevuje u Fe^{57} , které vyniká vysokou ostrostí spektrální čáry γ přechodu 14,4 keV o relativní šířce čáry

$$\left(\frac{\Gamma}{W_0} \right)_{\text{Fe}^{57}} = 3 \cdot 10^{-13}$$

Ještě ostřejší čáru dává Zn^{67} , kde relativní ostrost čáry je

$$\left(\frac{\Gamma}{W_0} \right)_{\text{Zn}^{67}} = 5 \cdot 10^{-16}$$

5. Aplikace Mössbauerova jevu

Jaderná bezodrazová rezonance je velmi citlivá na „rozladění“ zdroje a absorberu. Např. pohyb zdroje rychlostí $10^{-5} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ stačí k tomu, aby v důsledku Dopplerova jevu nedošlo ke vzniku Mössbauerova jevu. Proto je této měřicí metody s výhodou používáno ke zkoumání jevů, které se projevují nepatrnou změnou frekvence elektromagnetického záření. Bylo jí s úspěchem použito při prověřování velmi jemných efektů, které vyplývají z teorie relativity.

V roce 1960 skupina anglických fyziků H. J. Hay, J. P. Schiffer, T. E. Cranshaw a P. A. Egelstaff užili Mössbauerova jevu k ověření tzv. *principu ekvivalence*, který je základním principem obecné teorie relativity. Fyzikové R. V. Pound a G. A. Rebka užili tohoto jevu pro ověření tzv. *rudého posuvu* v poli zemské tíže, tj. změny kmitočtu záření, která je způsobena gravitačním polem. Zdroj a absorber umístili ve vzájemné vzdálenosti 22 m a měřili při vzájemných záměnách poloh zdroje a absorberu rozdíl v kmitočtu záření v gravitačním poli Země. Pro relativní změnu kmitočtu naměřili hodnotu

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gh}{c^2} = 4,92 \cdot 10^{-15}.$$

Tento výsledek je v dobrém souhlase s teorií. Tak byl experimentálně ověřen jeden z efektů, které potvrzují obecnou teorii relativity.

Dále bylo Mössbauerova jevu s úspěchem použito při studiu energetických hladin v jádrech atomů a doby setrvání jádra v excitovaném stavu, ke studiu typu krystalické mřížky krystalů a jejich poruch a má také široké uplatnění v jiných vědních oborech, např. fyzikální chemii ke studiu vazeb ve sloučeninách a o nic méně také v technické praxi, kde na jeho principu jsou konstruovány přesné měřicí přístroje, které mají uplatnění v metalurgii, automatizaci, geologii a jinde. Poněvadž Mössbauerův jev je velice citlivou měřicí metodou současné fyziky s širokým polem uplatnění, je mu věnována v laboratořích všech států velká pozornost.

L i t e r a t u r a

- [1] *Mössbauer R. A.*: „Úspěchy fizičeskich nauk“ LXXII, 658 (1960).
- [2] *Tonnelat M. A.*: „Les principes de la théorie électromagnétique et de la relativité“ Paris (1959), 360—367.
- [3] *Tonnelat M. A.*: „Les verifications expérimental de la relativité générale“ Paris (1964), 152—170.
- [4] *Dlouhá J.*: „Mössbauerův jev“ Elektrotech. obzor, sv. 55, č. 7 (1966), 368—372.
- [5] *Horák Z.*: „Nové metody měření dilatace času“ Pokroky mat. fyz. astronomie 6, roč. VI (1961), 304—314.
- [6] *Hušák V.*: „Mössbauerův jev“ Fyz. ve škole, roč. 3, č. 3 (1964), 97 až 102.

Z NOVINEK

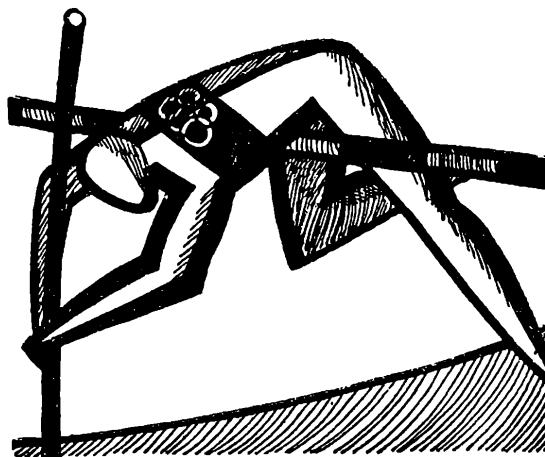
Státního pedagogického nakladatelství, n. p.

L. Hirman: UČÍME SA ELEKTRONIKU

Publikácia chce umožniť mládeži získať nielen potrebné teoretické poznatky z elektroniky, ale aj praktické vedomosti a zručnosti potrebné pri pokusoch a cvičeniach. Je určená pre technické krúžky žiakov škôl II. cyklu, ale dobre poslúži aj žiakom 9. ročníka ZDŠ a samoukom z radov mládeže i dospelých.

Edícia — Knižnica všeobecného vzdelania
Prvé vydanie, strán 256, Kčs 9,50.

MMO



X. mezinárodní matematická olympiáda

STANISLAV HORÁK, Praha

(Dokončení)

3. príklad. Riešenie Bohuša Siváka.

Označme

$$P(x) = ax^2 + (b-1)x + c$$

Danú sústavu napíšeme v tvare

$$P(x_1) = x_2 - x_1$$

$$P(x_2) = x_3 - x_2,$$

$$P(x_{n-1}) = x_n - x_{n-1},$$

$$P(x_n) = x_1 - x_n$$

I. Nech

$$(b-1)^2 - 4ac < 0$$

Ak $a > 0$, je

$$P(x) > 0$$

pre všetky reálne x , a preto

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) > 0$$

Ak $a < 0$, je

$$P(x) < 0$$

pre všetky reálne x , a preto

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) < 0$$

Pretože však

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) = 0$$

nemá daná sústava riešenie.

II. Nech

$$(b - 1)^2 - 4ac = 0$$

Ak $a > 0$, je

$$P(x) \geq 0$$

pre všetky reálne x , a preto

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) \geq 0$$

Ak $a < 0$, je

$$P(x) \leq 0$$

pre všetky reálne x , a preto

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) \leq 0$$

Pretože však

$$P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n) = 0,$$

je

$$P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n) = 0$$

Rovnica

$$P(x) = 0$$

čiže rovnica

$$ax^2 + (b - 1)x + c = 0$$

má práve jedno reálne riešenie a daná sústava má práve jedno riešenie

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1 - b}{2a}$$

takže diskriminant

$$(b - 1)^2 - 4ac = 0$$

III. Nech

$$(b - 1)^2 > 4ac$$

Rovnica

$$P(x) = 0$$

alebo

$$ax^2 + (b - 1)x + c = 0$$

má dva rôzne reálne riešenia

$$x_1 = \alpha, x_2 = \beta$$

Preto n -tice $(\alpha, \alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ a $(\beta, \beta, \beta, \dots, \beta)$ sú dve rôzne riešenia danej sústavy. Daná sústava má teda viac ako jedno reálne riešenie.

4. príklad. Riešenie Bohuša Siváka.

Štvorsten označíme $ABCD$, pričom bez ujmy na obecnosti môžeme voliť označenie tak, že krajné body hrany najväčšej dĺžky sú A, B . Použijeme trojuholníkovú nerovnosť pre steny ABC, ABD

$$AC + BC > AB,$$

$$AD + BD > AB$$

Sečteme

$$AC + BC + AD + BD > 2 AB,$$

$$(AC + AD - AB) + (BC + BD - AB) > 0$$

Platí teda buď

$$AC + AD - AB > 0$$

alebo

$$BC + BD - AB > 0$$

Pretože hrana AB je najdlhšia, možno v prvom prípade z hrán AC, AD, AB , v druhom prípade z hrán AB, BC, BD zostrojiť trojuholník, čo sme mali dokázať.

5. příklad. Řešení Pavla Polcara.

I. Platí

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} \quad (1)$$

Vypočteme $f(x+2a)$

$$\begin{aligned} f(x+2a) &= \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + [f(x)]^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \left| \frac{1}{2} - f(x) \right| \end{aligned}$$

Ze vzorce (1) je vidět, že pro všechna x platí

$$f(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{1}{2} - f(x) \right| = f(x) - \frac{1}{2}$$

a tedy

$$f(x+2a) = f(x)$$

To znamená, že funkce $f(x)$ je funkce periodická s periodou $b = 2a$.

II. V intervalu $< 0; 2 >$ definujeme funkci $f(x)$ takto:

Pro $0 \leq x < 1$ nechť je $f(x) = 1$,

pro $1 \leq x < 2$ nechť je $f(x) = \frac{1}{2}$.

Pro všechna ostatní x definujeme funkci $f(x)$ pomocí periodičnosti; tedy

$$f(x+2) = f(x)$$

nebo

$$f(x) = f(x-2)$$

Funkce $f(x)$ není identicky rovna konstantě. Dále: Je-li $x \in (-1; 0)$, je $x+1 \in (0; 1)$ a platí

$$f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{1-1} = \frac{1}{2}$$

Je-li $x \in (0; 1)$, je $(x+1) \in (1; 2)$ a je

$$f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 1$$

neboť pro $x \in (1; 2)$ je hodnota funkce rovna 1.

Pro všechna ostatní x plyne tato vlastnost z periodičnosti.

6. příklad. Řešení Libora Poláka.

Odvoďme nejprve pomocnou větu:

Každé přirozené číslo n lze právě jedním způsobem napsat ve tvaru

$$n = 2^k (2a - 1),$$

kde k je celé nezáporné číslo a a je přirozené číslo.

Je zřejmé, že přirozené číslo n lze rozložit na prvočinitele právě jedním způsobem. Nechť

$$n = 2^{k'} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \cdot p_4^{k_4} \cdots p_r^{k_r}$$

kde p_i je prvočíslo různé od dvou, k_i je přirozené a k' celé nezáporné. Tedy

$$n = 2^{k'}$$

kde z je zřejmě liché. Položíme-li

$$2^k (2a - 1) = 2^{k'} z$$

musí být nutně

$$2^k = 2^{k'}$$

z čehož plyne

$$k = k'$$

a zároveň

$$2a - 1 = z$$

tj.

$$a = \frac{z+1}{2}$$

přičemž je třeba ještě dodat, že každé liché číslo lze ve tvaru $2a - 1$ vyjádřit právě jedním způsobem.

Mějme nyní jeden ze sčítanců

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right]$$

a dosazujme tam postupně přirozená čísla. Při zvětšení čísla n o 1 může tento sčítanec zvětšit svou hodnotu také pouze o 1, a to jen tehdy, je-li $n + 2^k$ násobkem čísla 2^{k+1} , což nastává právě tehdy, je-li

$$n = 2^k (2a - 1) = a \cdot 2^{k+1} - 2^k$$

poněvadž potom

$$\left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right] = \left[\frac{a \cdot 2^{k+1}}{2^{k+1}} \right] = [a] = a$$

Podle pomocné věty lze číslo n napsat ve tvaru

$$n = 2^k (2a - 1)$$

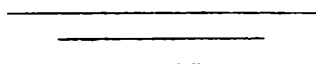
právě jedním způsobem, znamená to, že se o 1 zvýší právě jeden ze sčítanců. Poněvadž je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1 + 2^k}{2^{k+1}} \right] = 1$$

platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n + 2^k}{2^{k+1}} \right] = n$$

což bylo třeba určit a dokázat.



Z NOVINEK

Slovenského pedagogického nakladateľstva, n. p.

V. Matuška Z. Trefný: OTÁZKY A ODPOVEDE Z MATEMATIKY ZDŠ

Táto malá, užitočná knižočka vychádza v krátkom čase v druhom vydaní s viac ako dvojnásobným rozsahom, čo iste svedčí o tom, ako rýchlo si našla cestu k žiakom. Okrem otázok a odpovedí sú v nej uvedené príklady a cvičenia, ktoré umožnia overiť si vedomosti hneď po zopakovaní učiva. Tomu slúžia aj výsledky na konci knihy.

Edícia — Knižnica všeobecného vzdelania

Druhé vydanie, strán 186, Kčs 10,—.



NAŠE SOUTĚŽ

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

V 2. čísle letošního ročníku Rozhledů jsme uveřejnili jména těch našich řešitelů, kteří se umístili na prvních místech v matematice. Nyní k tomu připojujeme obdobné seznamy z fyziky a konstruktivní geometrie.

Fyzika

1.	Miloš Kříž, 3.s SVVŠ Brno . . .	27 bodů
2.—3.	{ Pavel Kalášek, 3.b SVVŠ Ostrava Miroslav Kawalec, 3.b SVVŠ Havířov }	26 bodů
4.	Vladimír Čech, 3.a SVŠ Bratislava	25 bodů
5.—8.	{ Jaromír Plášek, 3.c SVVŠ J. A. K. Uherský Brod Jiří Šafařík, 1.b SVŠ Bratislava Karel Šafařík, 9.b ZDŠ Bratislava Bohumila Vlachová, 3.c SVVŠ Brno }	24 body
9.	Milan Volf, 3.a SVVŠ Dvůr Králové nad Labem	23 body
10.—12.	{ Jozef Komorník, 3.c SVŠ Holič Pavel Polcar, 3.b SVVŠ Velké Meziříčí Jiří Vinárek, 2.f SVVŠ Praha }	22 body

Konstruktivní geometrie

1.—3.	{ Vladimír Čech, 3.a SVŠ Bratislava Libor Polák, 3.a SVVŠ Brno Pavel Polcar, 3.b SVVŠ Velké Meziříčí Pavel Kalášek, 3.b SVVŠ Ostrava Jozef Komorník, 3.c SVŠ Holič }	24 body
4.—9.	{ Tomáš Mašek, 3.f SVVŠ Praha Jiří Vinárek, 2.f SVVŠ Praha Milan Volf, 3.a SVVŠ Dvůr Králové nad Labem Václav Zahradník, 3.f SVVŠ Plzeň }	22 body
10.	Bohumila Vlachová, 3.c SVVŠ Brno	21 bod

Vítězové

V celkové soutěži se umístili řešitelé takto:

1.	Vladimír Čech, 3.a SVŠ Bratislava	119 bodů
2.—3.	{Jozef Komorník, 3.c SVŠ Holíč Pavel Polcar, 3.b SVVŠ Velké Meziříčí }	116 bodů
4.—5.	{Pavel Kalášek, 3.b SVVŠ Ostrava Miloš Kříž, 3.s SVVŠ Brno }	113 bodů
6.	Jiří Vinárek, 2.f SVVŠ Praha	111 bodů
7.	Tomáš Mašek, 3.f SVVŠ Praha.	107 bodů
8.	Milan Volf, 3.a SVVŠ Dvůr Králové nad Labem	105 bodů
9.	Juraj Černák, 3.a SVŠ Turčianske Teplice	104 bodů
10.	Josef Jirásko, 2.a SVVŠ Semily	103 body

* * *

Na konec připojujeme abecední seznam všech úspěšných řešitelů. Za jménem řešitele je uveden ústav, na němž řešitel studuje, pak čísla správně řešených příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie. Čísla uvedená v závorkách jsou čísla příkladů rozřešených s menšími nedostatky. Příklady nesprávně řešené neuvádíme.

a) Jednotlivci:

Vladimír Čech, SVŠ Bratislava, M 1—3, 5—12, (4), F 4, 5, (1, 3, 6), G 1—4; *Juraj Černák*, SVŠ Turč. Teplice, M 2—9, 11, 12, (1, 10), F 5, (3, 4, 6), G 1, 3, 4; *Pavol Černek*, SVŠ Bratislava, M 2, 4—12, (1); *Jaroslav Daniel*, SVVŠ Mor. Budějovice, M 2, 4, 6, 8—11, (5); *Pavel Danihelka*, SVVŠ Plzeň, M 2, 4—9, 11, 12, (1, 3, 10); *Jiří Demel*, SVVŠ Valašské Meziříčí, M 1—3, 6—10, 12, (4, 11); *Vladimír Dražan*, SVVŠ Příbram, M 2, 4—6, 8, 10, 11, G (1—4); *Jiří Glac*, SVVŠ Nový Bohumín, G 2, (1, 3, 4); *Juraj Glosík*, SVŠ Košice, M 2, 4, 8, 9, 11, (2), G 2, 3; *Michal Grell*, SVŠ Bratislava, M 1, 2, 4—6, 8—12; *Pavel Hejda* SVVŠ Jindř. Hradec, M 2, 4, 6, 8, 10, 11, F (3); *Antonín Hok*, SVVŠ Nový Bohumín, M 2—4, 6, 8, 9, 11, 12, (1, 10); *Milan Horáček*, SVVŠ Ledec n. Sázavou, M 2, 3, 5—12, (1, 4); *Josef Hrdlička*, VUT Brno, M 2, 4, 6—12, (1, 3, 5); *Helena Husová*, ZDŠ Praha 1, M 2, 4, 5, 7, 9—11, (6); *Josef Jedlička*, SVVŠ Mor. Budějovice, M 2—6, (1); *Josef Jirásko*, SVVŠ Semily, M 2, 4, 5, 7—12, (1, 3, 6), F (3—6), G 2, 3, (1, 4); *Jindřich Jirk*, SVVŠ Nymburk, M 1, 2, 6, (3, 4), G 1, 2, (3, 4); *Pavel Kalášek*, SVVŠ Ostrava, M 2—6, 8—12, (1), F 3—6, G 2—4, (1); *Ladislav Kastl*, SVVŠ Liberec, M 1, 2, 4, 6—9, 11, (3, 10); *Miroslav Kawalec*, SVVŠ Havířov, F 3—6; *Miroslav Keppert*, SVVŠ Ostrava, M 2, 4, 6, 9—11; *Aleš Killian*, SVVŠ Praha, M 2, 4, 7—9, 11, 12, (1, 6, 10); *František Kmeč*, SVŠ Michalovce, M 2, 4; *Jozef Komorník*, SVŠ Holíč, M 1—12, F 5, 6, (3, 4), G 1, 3, 4, (2); *Jiří Král*, SVVŠ Praha, M 2, 4, 8, 11, (1, 6, 10); *Miloš Kříž*, SVVŠ Brno, M 1—6, 8—12, (7), F 4—6, (1, 3), G 1, 2, (3); *N. Losenický*, SVVŠ Pardubice, M 2, 8, 11, (4, 6, 10), G (1, 2); *Tomáš Mašek*, SVVŠ Praha, M 2—9, (1, 10), F 3, 6, (4), G 1, 3, 4, (2); *Václav Mokřý*, SVVŠ Nymburk, M 2, 6, (1, 4); *Stanislav Nedbal*, SVVŠ Praha, M 1, 2, 4,

7–9, 12, (3, 10), F 5, 6, (3), G (1–3); *Peter Némethy*, SVŠ Bratislava, M 2, 4–6, 8–11; *Jaromír Neumann*, SVVŠ Mimoň, F (4); *Pavel Ošmera*, SVVŠ Mor. Budějovice, M 2, 4–6, 8–11; *Jiří Parobek*, ZDŠ Praha 4, M 2, 4, 6, 8, 9, 11, (10); *Vladimír Perdoch*, SVŠ Čadca, M 8, 10, 11, F (3, 6); *Ivan Petrovič*, SVŠ Bratislava, M 8, 9, 11, (10), F 6; *Květa Pilařová*, SVVŠ Nová Paka, M 2, 4, 8, 11, (1, 10); *Jaromír Plášek*, SVVŠ J. A. Komenského Uherský Brod, M 2, 8–12, (1, 4), F 4–6, (3), G 3, (1); *Zdeněk Podrázský*, SVVŠ Praha, M 2, 6, (1, 4); *Libor Polák*, SVVŠ Brno, M 1, 2, 4–9, 11, 12, (3, 10), G 1–4; *Pavel Polcar*, SVVŠ Velké Meziříčí, M 1, 2, 4–12, (3), F 5, 6, (3, 4), G 1–4; *Josef Psutka*, SVVŠ Domažlice, M 1, 2, 4, 8, 11, (10), F (3); *Evžen Ružický*, SVŠ Prešov, M 1–4, G 1, 2, (3); *Jitka Sáblová*, SVVŠ Mnichovo Hradiště, M 4, 6, (1), G 1, (2); *Pavel Sejrek*, SVVŠ Velké Meziříčí, M 2, 4–6, 8, 9, 11, (1, 10), G 1, 3; *Václav Soukup*, SVVŠ Blovice, M 4, 11, (10); *František Straka*, SVVŠ J. Fučíka Plzeň, M 2, 4, 6, 7, 9, 11, 12, (1, 10); *Jiří Šafařík*, SVŠ Bratislava, M 1, 2, 4–9, 11, 12, (3, 10), F 3, 4, 6, (5); *Karel Šafařík*, ZDŠ Bratislava, M 1, 2, 4–9, 11, 12, (3, 10), F 3, 4, 6, (5); *Michal Šamudovský*, SVŠ Michalovce, M 2; *Václav Šrámek*, SVVŠ Praha, M 2, 3, 5–7, 9–12, (1, 4, 8); *Jindra Taterová*, SVVŠ Sušice, M 1, 2, 4, (6, 8, 10); *Jana Tauberová*, SVVŠ Domažlice, M 2, 4, 8, 11, (6, 10); *Věra Trejbalová*, SVVŠ Brno, G 1–3; *Marián Vajtersíc*, SVŠ Nitra, M 1, 2, 4–6, 8, 9, 11, 12, (3, 10); *Jiří Vinárek*, SVVŠ Praha, M 1, 2, 4–12, F 5, 6, (1, 4), G 1, 3, 4, (2); *Bohumila Vlachová*, SVVŠ Brno, M 2, 4, 6, 8–11, (1), F 3, 5, 6, (4), G 2–4, (1); *Stanislav Vokál*, SVŠ Prešov, M 8, 11, (10); *Milan Volf*, SVVŠ Dvůr Králové n. Labem, M 1, 2, 4–7, 9, 11, (3, 8, 10), F 3, (1, 4–6), G 1–3, (4); *Václav Zahradník*, SVVŠ Plzeň, M 2, 4–11, (1, 3), G 1, 2, 4, (3); *Anna Zelená*, SVVŠ Broumov, M 11, (8, 10), F 5, (3, 4); *Jiří Zemánek*, SVVŠ Slaný, M 7, 9, 11, (8, 10).

b) Kolektivy:

3.a SVŠ Bratislava (*Eva Balážová*, *Štefan Kreml*), G (1, 2); 2.a SVVŠ Frýdek-Místek (*Randa*, *Rudecký*), M 8, 9, 11, (10); 3.b SVVŠ Holešov (*Libuše Kučerová*, *Zdeněk Nešpor*, *Vladimír Smolka*), M 2–4, 6, 8, 9, 11, (1, 5, 10), F 3, (4–6), G 3, 4, (1, 2); I. kol. 2.a maď. SVŠ Komárno (*Magdaléna Bajáková*, *Jozef Katuš*, *Ladislav Németh*), M 2–4, (1); II. kol. 2.a maď. SVŠ Komárno (*Jozef Gögh*, *Akos Nagy*, *Magdaléna Szalayová*), M 2, 5, 8–11, (1, 3, 4); 1.d SVŠ Michalovce (*Anna Jusková*, *Ján Modrák*, *Peter Mokroš*) M 2, 4.

Řešené příklady z fyziky

3. Na nakloněné rovině stojí plné těleso tvaru přímého čtyřbokého jehlanu. Délka strany čtvercové základny jehlanu je 100 mm, výška jehlanu je 350 mm. Materiál, z něhož je těleso zhotoveno, je homogenní. Máme určit, jaký maximálně může být úhel α sklonu roviny, aby se těleso (stojící základnou na nakloněné rovině) nepřeklopilo, je-li přitom základna orientována tak, že

a) dvě strany základny jsou rovnoběžné se spádovou přímkou nakloněné roviny;

b) úhlopříčka základny je rovnoběžná se spádovou přímkou.

Daný příklad řešte pro těleso stejného tvaru a stejně situované s tím rozdílem, že je jehlan dutý a jeho stěny mají vesměs zanedbatelnou tloušťku.
(Došlo 23 řešení) Václav Šindelář

Řešil Milan Volf, III.A SVVŠ, Dvůr Králové n. Labem:

a) Dvě strany základny jsou rovnoběžné se spádovou přímkou podložené roviny:

Těžiště plného jehlanu je vzdáleno o $\frac{1}{4}$ výšky jehlanu od středu jeho podstavy (a leží na výšce přímého jehlanu). Maximální úhel sklonu roviny je takový úhel α , při němž tíha G tělesa prochází nějakým bodem podstavy. V daném případě jde o množinu bodů tvořících níže situovanou stranu základny jehlanu, kolmou na spádovou přímkou. Označíme-li délku strany základny a a výšku těžiště nad středem základny t , platí, že

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a/2}{t} = \frac{50}{87,5} \doteq 0,5714 ,$$

z čehož podle tabulek

$$\alpha_1 \doteq 29^\circ 45'$$

b) Je-li úhlopříčka základny rovnoběžná se spádovou přímkou, bude mezní úhel dán obdobným vztahem, přičemž ovšem namísto poloviční délky strany základny dosadíme poloviční délku úhlopříčky

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sqrt{2} a/2}{t} = \frac{\sqrt{2} \cdot 50}{87,5} \doteq 0,808 ,$$

z čehož

$$\alpha_2 \doteq 38^\circ 56'$$

Pro dutý jehlan

Označme vzdálenost těžiště dutého jehlanu od středu podstavy x . Poněvadž velikost tíhy jednotlivých ploch tvořících jehlan je přímo úměrná jejich plošným obsahům ($G \approx S$), plyne pro hodnotu x momentová rovnice

$$M = x \cdot S_{stv} = \left(\frac{v}{3} - x \right) 4 S_{troj}.$$

z čehož

$$x = \frac{4}{3} \frac{S_{troj} \cdot v}{4 S_{troj} + S_{sto}}$$

kde v je výška jehlanu, S_{stv} plošný obsah čtvercové základny a S_{troj} plošný obsah jedné ze čtyř trojúhelníkových bočních stěn jehlanu.

Po dosazení dostáváme

$$x = \frac{4 \cdot 17\,700 \cdot 350}{4 \cdot 17\,700 + 10\,000} \doteq 102,2 \text{ mm}$$

Potom pro obdobné případy jako v první části úlohy dostáváme

$$\text{a) } \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{a/2}{t'} = \frac{50}{102,2} \doteq 0,489 ,$$

z čehož

$$\alpha_3 \doteq 26^\circ 4' ;$$

$$b) \quad \operatorname{tg} \alpha_4 = \frac{\sqrt{2} \cdot a/2}{t'} = \frac{\sqrt{2} \cdot 50}{102,2} = 0,693 ,$$

z čehož

$$\alpha_4 = 34^\circ 43'$$

U uvedených vztahů značí t' výšku těžiště dutého jehlanu nad středem základny.

4. Elektrický obvod má ohmický odpor R a indukčnost L (obě veličiny jsou uvažovány v sérii). Kapacitu obvodu zatím zanedbáváme ($C \equiv 0$). Činný výkon obvodu je při střídavém napětí $U_{ef} = 1600$ V s frekvencí $f = 3$ kHz roven $P = 24$ kW. Účinník je roven $\cos \varphi = 0,75$. Máme vy počítat:

a) efektivní proud I_{ef} v daném obvodu a dále zdánlivý odpor Z , ohmický odpor R a indukčnost L obvodu,

b) jakou kapacitu C bychom museli sériově vložit do obvodu, aby bylo fázové posunutí nulové,

c) jakou hodnotu bude mít v případě b) činný výkon a jalový výkon?

(Došlo 19 řešení)

Václav Šindelář

Řešil Karel Šafařík, 9.b ZDŠ, Bratislava:

a) Platí rovnice

$$P = U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \varphi ,$$

z níž plyne

$$I_{ef} = \frac{P}{U_{ef} \cdot \cos \varphi}$$

dosadíme-li $P = 24\,000$ W, $U_{ef} = 1600$ V a $\cos \varphi = 0,75$, dostaneme

$$I_{ef} = \frac{24\,000}{1600 \cdot 0,75} = 20 \text{ A}$$

Podle Ohmova zákona je

$$U_{ef} = I_{ef} \cdot Z ,$$

z čehož

$$Z = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} = \frac{U_{ef}}{\frac{P}{U_{ef} \cos \varphi}} = \frac{U_{ef}^2 \cdot \cos \varphi}{P}$$

Po dosazení

$$Z = \frac{1600 \cdot 1600 \cdot 0,75}{24\,000} = 80 \, \Omega$$

Z vektorového pojetí zdánlivého a ohmického odporu plyne

$$R = Z \cdot \cos \varphi ,$$

z čehož numericky

$$R = 80 \cdot 0,75 = 60 \, \Omega .$$

Víme, že platí

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

kde ω je úhlový kmitočet, vázaný s frekvencí f vztahem

$$\omega = 2\pi f$$

Po dosazení do předešlé rovnice

$$Z = \sqrt{R^2 + (2\pi fL)^2}$$

a úpravě

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f}$$

dostaneme numericky

$$L = \frac{\sqrt{6400 - 3600}}{2 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 300} \doteq 0,0028 \text{ H}$$

b) Aby fázové posunutí bylo nulové, musí $\cos \varphi = 1$, potom

$$U_L = U_C,$$

a tedy také

$$I \cdot \omega L = \frac{I}{\omega C}$$

z čehož

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^6 \cdot 28 \cdot 10^{-4}} = 1,005 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

což je hledaná kapacita pro rezonanční stav obvodu.

c) Protože počítáme s poměry vypočtenými pro b), kdy $\cos \varphi' = 1$, kdy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

plyne pro zdánlivý odpor, že

$$Z' = \sqrt{R^2 + 0} = R$$

Ohmův zákon zde zní

$$U_{ef} = Z' \cdot I'_{ef} = R \cdot I'_{ef},$$

a z něho

$$I'_{ef} = 26,6 \text{ A}.$$

Činný výkon je roven

$$P' = U_{ef} \cdot I'_{ef} \cdot \cos \varphi'$$

z čehož po dosazení

$$P' \doteq 43 \text{ kW}$$

Přitom je jalový výkon (při $\cos \varphi' = 1$) roven

$$P'' = U_{ef} \cdot I'_{ef} \cdot \sin \varphi' = 0.$$

Poznámka: Text byl poněkud zkrácen a v malé míře upraven autorem.

Řešené příklady z matematiky

10. Součet čtverců tří po sobě jdoucích čísel je čtyřciferné číslo napsané stejnými ciframi. Určete je.

(Došlo 53 řešení)

Ota Setzer

Řešil Pavel Polcar, III.B SVVŠ, Velké Meziříčí:

Označme tři po sobě jdoucí lichá čísla $2k + 1$, $2k + 3$, $2k + 5$. Pak je $(2k + 1)^2 + (2k + 3)^2 + (2k + 5)^2 = 12k^2 + 36k + 35$. (1)

Toto číslo není zřejmě dělitelno ani dvěma, ani třemi. Jako řešení dané úlohy připadají v úvahu čísla 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888, 9999. Z nich však přicházejí v úvahu jenom čísla 1111, 5555, 7777, protože ostatní čísla jsou dělitelna buď dvěma nebo třemi a nemohou se tedy rovnat výrazu (1).

Řešíme-li nyní rovnici $12k^2 + 36k + 35 = N$, kde N je jedno z čísel 1111, 5555, 7777, zjistíme, že celočíselné řešení má tato rovnice pouze pro hodnotu $N = 5555$, a to $k_1 = 20$, $k_2 = -23$. Řešením dané úlohy je tedy číslo 5555 a platí

$$5555 = 41^2 + 43^2 + 45^2$$

nebo

$$5555 = (-41)^2 + (-43)^2 + (-45)^2$$

11. Kdy se narodil člověk, jehož stáří v roce 1968 se bude rovnat cifer-nému součtu roku jeho narození?

(Došlo 54 řešení)

Ota Setzer

Řešil Václav Zahradník, III.F SVVŠ, Plzeň:

Označme x rok narození, $S(x)$ cifer-ný součet roku x , pak

$$S(x) = 1968 - x. \quad (1)$$

a) Předpokládejme, že $x < 1900$, potom

$$S(x) \leq 27 = (1 + 8 + 9 + 9),$$

odtud

$$S(x) + x < 1927,$$

což je ve sporu s (1);

b)

$$1900 < x < 1968,$$

položme

$$x = 1900 + 10a + b, \quad 0 \leq a \leq 6, \quad 0 \leq b \leq 9,$$

$$10 + a + b = 1968 - 1900 - 10a - b,$$

$$58 = 11a + 2b,$$

$$b = 29 - \frac{11}{2}a \quad (2)$$

$$0 \leq 29 - \frac{11}{2}a \leq 9$$

Celočíselná řešení této nerovnosti jsou $a_1 = 4$, $a_2 = 5$, po dosazení do (2) dostáváme $b_1 = 7$, b_2 není celé, proto a_2 nevyhovuje.

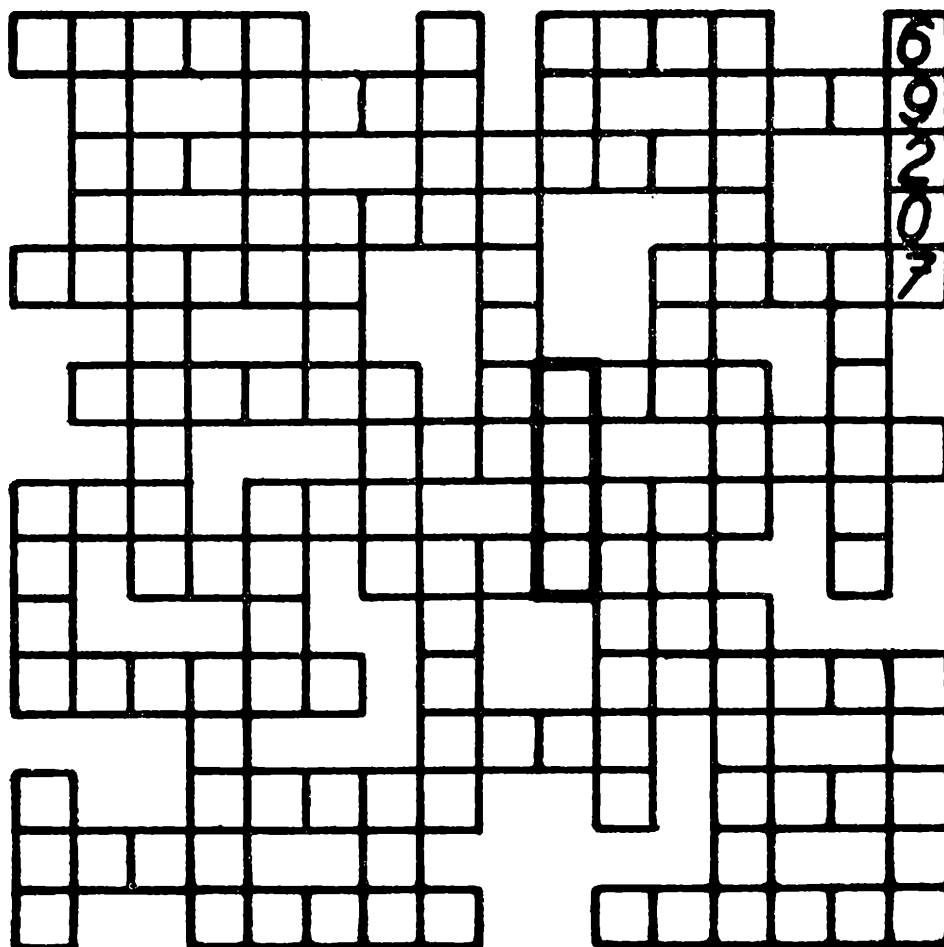
Člověk se narodil v roce 1947.



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

15. K očíslování telegrafních sloupů se použilo 711 cifer. Číslování se provádělo od čísla 1 výše. Kolik bylo očíslovaných sloupů?

St. H. ml.



Obr. 1

16. Doplněte chybějící čísla seřazená podle určitého pravidla.

1, 3, 9, ?, ?, ?, 2187;

0, 3, 9, 18, ?, ?, ?, 108;

0, 1, 3, 6, ?, ?, ?, 45;

2, 4, 1, 3, 4, 6, 3, 5, ?, ?, ?, ?, 10;

$\frac{64}{81}$, $\frac{32}{27}$, $\frac{16}{9}$, ?, ?, ?, $\frac{27}{2}$

St. H. ml.

17. Nalezněte přirozené číslo, které splňuje rovnici

$$\sqrt{t(t-3)(t+3)} = \sqrt{28}.$$

(Snažte se kořen rovnice získat rozkladem čísla 28.)

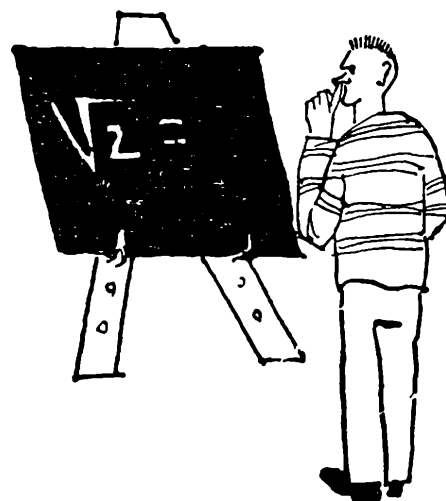
St. H. ml.

18. Danými čísly vyplňte čtvercovou síť na obr. 1 tak, aby to bylo v souladu s vepsaným číslem 69 207. Určete silně orámované číslo.

1 8 4	1 0 0 8	1 7 7 1 6	0 0 1 2 3 5
2 1 7	1 1 0 3	2 4 3 9 1	0 1 2 3 2 2
3 0 2	2 0 0 9	3 3 9 4 3	1 3 3 9 4 4
4 0 0	3 6 9 8	4 1 0 0 2	2 8 4 4 8 0
5 5 0	3 8 5 6	5 0 8 1 9	3 4 6 6 1 6
6 3 1	4 1 1 5	5 5 7 7 7	4 2 7 1 4 9
7 4 8	4 3 1 3	6 2 5 6 3	5 6 8 9 6 8
8 9 7	5 5 5 3	6 8 5 3 4	6 4 4 0 3 3
7 7 7	5 5 2 2	6 9 2 0 7	6 5 2 7 7 7
	6 6 7 7	7 6 1 5 2	7 8 9 0 1 1
	7 4 0 0	8 2 0 6 5	8 8 5 5 4 9
	7 6 3 4	9 0 6 8 1	9 7 2 8 9 9
	7 8 8 8	9 7 5 2 8	
	8 2 4 5		
	9 9 2 1		
	9 9 9 9		

St. H. ml.

Oprava. Laskavý čtenář si vymění obr. 6 ze str. 106 za obr. 3 ze str. 56, a naopak.



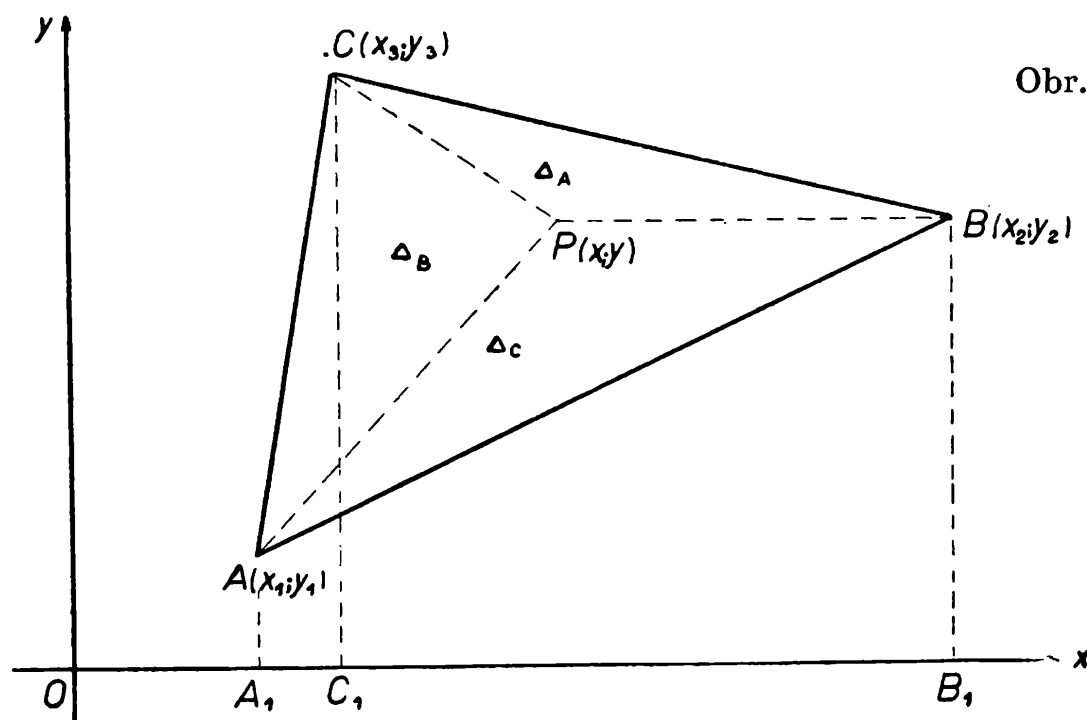
MATEMATIKA

Trojúhelníkové souřadnice (nehomogenní)

MILAN GERYK, Přerov

V rovinné analytické geometrii jsou běžně používány kartézské souřadnice. Ve speciálních úlohách jsou pohodlnější některé jiné souřadné systémy. Zde si ukážeme použití nehomogenních trojúhelníkových souřadnic k jistým úlohám.

Nechť v rovině s kartézským systémem souřadnic x, y je dán pevný trojúhelník o vrcholech $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, neležících v přímce, přičemž smysl otáčení $A \rightarrow B \rightarrow C$ je kladný (viz obr. 1). Pak



polohu obecného bodu $P(x, y)$ můžeme vztáhnout vzhledem k bodům A, B, C . Jeden z možných způsobů je pomocí obsahu vzniklých trojúhelníků. Označme Δ obsah daného trojúhelníka ABC , Δ_A , Δ_B , Δ_C postupně obsahy trojúhelníků BCP , CAP , ABP .

Obsah trojúhelníka daného kartézskými souřadnicemi vrcholů lze vypočítat pomocí vzorce

$$2 \cdot \Delta = x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2. \quad (1)$$

Vzorec můžeme odvodit snadno podle obr. 1, neboť obsah trojúhelníka ABC je roven obsahu lichoběžníka $A_1 C_1 C A$ plus obsah lichoběžníka $C_1 B_1 B C$ minus obsah lichoběžníka $A_1 B_1 B A$

$$\Delta = \frac{y_1 + y_3}{2} (x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2} (x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1)$$

Odtud úpravou plyne vzorec (1). Ihned jej použijeme pro výpočet obsahů trojúhelníků Δ_A , Δ_B , Δ_C

$$2 \cdot \Delta_A = x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2, \quad (2)$$

$$2 \cdot \Delta_B = x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3, \quad (3)$$

$$2 \cdot \Delta_C = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1. \quad (4)$$

Hodnota výrazu (1) je kladná. Hodnoty (2), (3), (4) mohou být kladné nebo záporné podle toho, zda bod P leží uvnitř nebo vně trojúhelníka ABC . Nejde tedy o obsah v pravém slova smyslu („obsah je číslo kladné“), ale o hodnotu kladnou nebo zápornou, tak jak vyjde při pevném pořadí bodů B, C, P , resp. C, A, P , A, B, P ve výpočtu. Jestliže smysl otáčení při postupu $B \rightarrow C \rightarrow P$ je záporný (tj. bod P leží v opačné polorovině k polorovině BCA než na obr. 1), obsah vyjde záporný, atd. Toto vše je známo z analytické geometrie.

Zavedme nyní (nehomogenní) trojúhelníkové souřadnice ξ, η, ζ (v tomto pořadí) pomocí vztahů

$$\xi = \frac{\Delta_A}{\Delta}, \quad \eta = \frac{\Delta_B}{\Delta}, \quad \zeta = \frac{\Delta_C}{\Delta}. \quad (5)$$

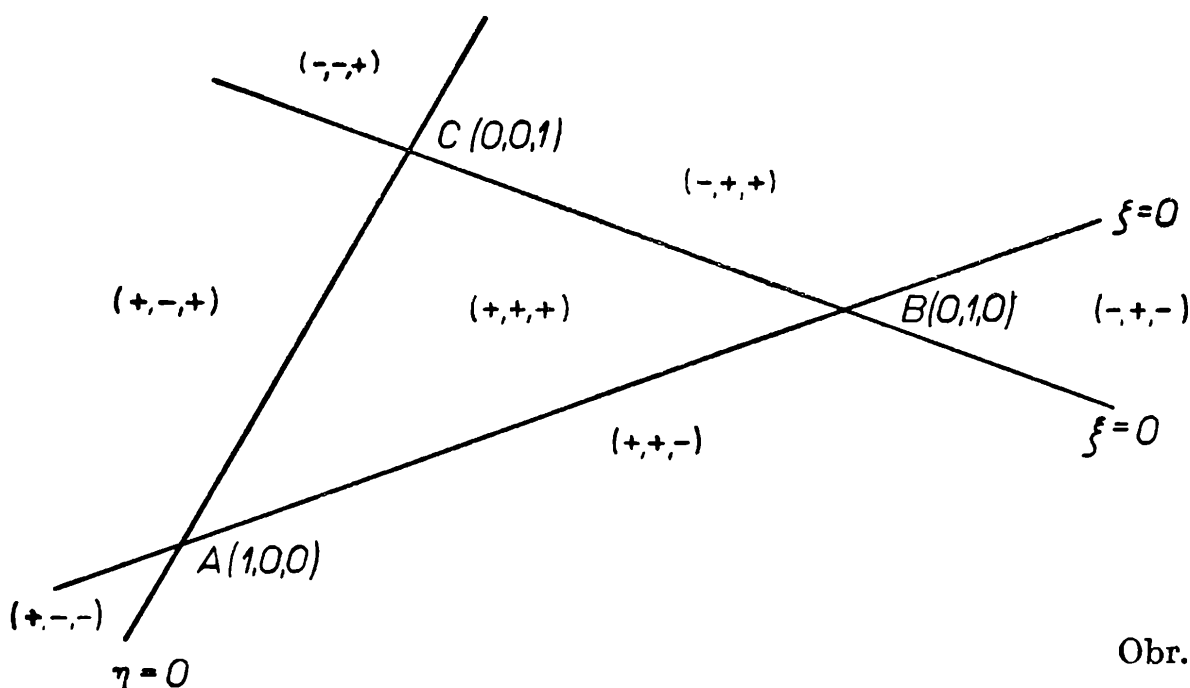
Protože v rovině je bod určen dvěma souřadnicemi, nutně jedna ze souřadnic (5) musí být závislá na ostatních. Tuto závislost vyjadřuje zřejmě relace

$$\xi + \eta + \zeta = 1, \quad (6)$$

jak plyne bezprostředním dosazením z (5) a z věty o součtu obsahů nepřekrývajících se obrazců. Tak jako obsahy trojúhelníků i souřadnice ξ, η, ζ mohou být kladné nebo záporné. Přímkami AB, AC, BC rozdělí rovinu na sedm částí. Znaménka souřadnic bodů v jednotlivých částech jsou patrna z obr. 2.

Každému bodu v rovině odpovídá jediná trojice (ξ, η, ζ) , neboť obsahy (2), (3), (4) mají jediné hodnoty. Platí ovšem i opačné tvrzení, že každé trojici (ξ, η, ζ) odpovídá právě jeden bod v rovině. Abychom se o tom přesvědčili, najdeme kartézské souřadnice (x, y) bodu P daného trojúhelníkovými souřadnicemi ξ, η, ζ . Úpravou vztahů (5) dostaneme pro x, y tři lineární rovnice

$$\begin{aligned} x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) &= x_3y_2 - x_2y_3 + \xi \triangle, \\ x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) &= x_1y_3 - x_3y_1 + \eta \triangle, \\ x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) &= x_1y_2 - x_2y_1 + \zeta \triangle. \end{aligned} \quad (7)$$



Obr. 2

Vzhledem k relaci (6) a vzorci (1) je třetí rovnice součtem prvních dvou. Proto k výpočtu použijeme jen prvních dvou rovnic. Řešením dostaneme výrazy, které ihned upravíme s ohledem na relaci (6)

$$\begin{aligned} x &= \xi \cdot x_1 + \eta \cdot x_2 + \zeta \cdot x_3, \\ y &= \xi \cdot y_1 + \eta \cdot y_2 + \zeta \cdot y_3 \end{aligned} \quad (8)$$

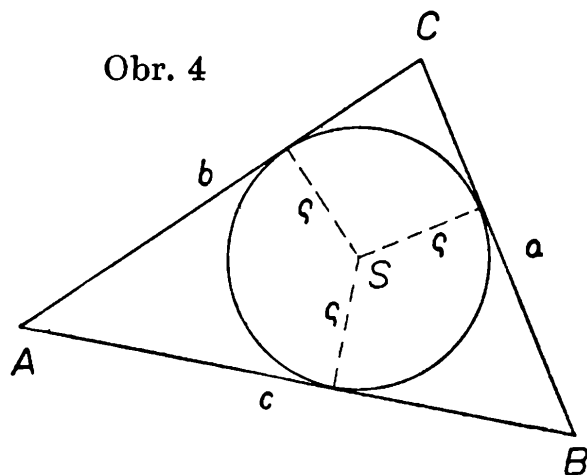
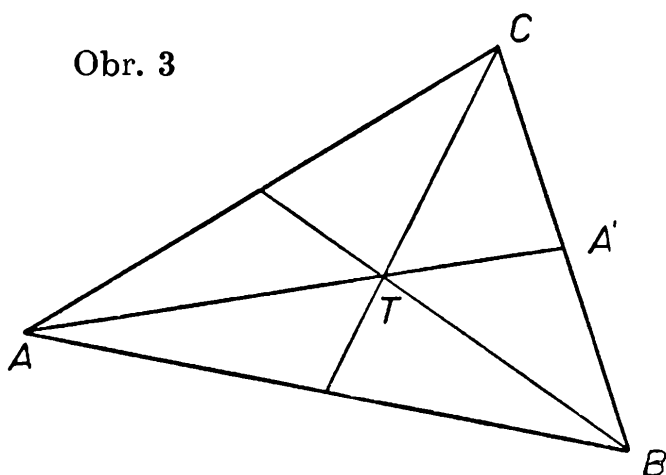
Tedy daným souřadnicím ξ, η, ζ bodu P odpovídá jediná dvojice kartézských souřadnic (x, y) , a tedy jediný bod roviny. Zavedené souřadnice jsou proto jednoznačné.

Poznámka. Součet součinů, z nichž každý je utvořen z dané pevné hodnoty (např. x_1) a volitelného parametru, tj. libovolného čísla (např. ξ), nazýváme lineární kombinací. Podle (8) jsou tedy souřadnice proměnného bodu P lineární kombinací souřadnic bodů A, B, C , stručněji: bod P je lineární kombinací bodů A, B, C . Jde o důsledek obecnější věty: Každý bod roviny lze vyjádřit jako lineární kombinaci jiných

tří bodů roviny neležících v přímce. Čísla ξ , η , ζ jsou zde ovšem vázána relací (6); u jiných souřadnic by šlo o jinou relaci.

Jako příklad pro použití nových souřadnic vypočteme kartézské souřadnice těžiště daného trojúhelníka ABC . Těžiště má totiž zajímavou vlastnost, že totiž plochy $\triangle_A$, $\triangle_B$, $\triangle_C$ jsou stejné (viz obr. 3).

Důkaz. Těžnice AT prochází půlícím bodem A' protější strany, a tedy půlí plochu trojúhelníka ABC , neboť základna BA' je poloviční proti



původní základně BC a výška na stranu BC zůstává v obou případech stejná. Přímka TA je ovšem těžnicí též trojúhelníka TBC , takže půlí plochu i tohoto trojúhelníka. Proto jsou rovnoploché trojúhelníky TBA' a $TA'C$ a také trojúhelníky ABT a ATC . Provedeme-li totéž s další těžnicí, dokážeme již tvrzení věty v plném rozsahu.

Platí tedy pro těžiště

$$\xi = \eta = \zeta = \frac{1}{3} \quad (9)$$

a po dosazení do (8) získáme ihned

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (10)$$

Vzorce (10) je ovšem možno získat snadněji bez zavádění nových druhů souřadnic. Ukážeme si však příklad, který by byl běžnými prostředky dosti pracný. Najdeme kartézské souřadnice středu kružnice vepsané, viz obr. 4. Tento bod má stejnou vzdálenost od všech stran, a proto platí

$$\triangle_A = \frac{1}{2} \varrho \cdot a, \quad \triangle_B = \frac{1}{2} \varrho \cdot b, \quad \triangle_C = \frac{1}{2} \varrho \cdot c \quad (11)$$

(a , b , c jsou délky stran BC , AC , AB a vypočtou se známým způsobem ze souřadnic koncových bodů). Plocha trojúhelníka ABC je jejich součtem

$$\triangle = \frac{\varrho}{2} (a + b + c) \quad (12)$$

(odtud plyne známý vzorec pro poloměr ρ kružnice vepsané). Pak

$$\xi = \frac{a}{a+b+c}, \quad \eta = \frac{b}{a+b+c}, \quad \zeta = \frac{c}{a+b+c} \quad (13)$$

Po dosazení do (8) dostaneme

$$x_S = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \quad y_S = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c} \quad (14)$$

Tautologie neboli zákony logiky

DR. IVO ZAPLETAL, výzkumný ústav 401; Praha

(Pokračování)

4. Zákon transpozice

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p),$$

(1)

(2)

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$(1) \rightarrow (2)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Např.:

a) Jestliže

$$(5 > 3 \rightarrow 5 > 0),$$

pak

$$(5 \leq 0 \rightarrow 5 \leq 3).$$

b) Jestliže (20 je dělitelno 10 $\rightarrow$ 20 je dělitelno 5), pak (20 není dělitelno 5 $\rightarrow$ 20 není dělitelno 10).

c) Jestliže (lednička je otevřena $\rightarrow$ v pokoji je zima), pak (v pokoji není zima $\rightarrow$ lednička není otevřena).

Čtenář nechtě si ověř, že je tautologií ekvivalence

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p).$$

5. Zákon transitivní implikace

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

			(1)	(2)			
p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$	$(1) \rightarrow (2)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Např.:

a) Jestliže

$$(5 > 3 \rightarrow 5 > 0) \text{ a } (5 > 0 \rightarrow 5 > -1),$$

pak

$$(5 > 3 \rightarrow 5 > -1).$$

b) Jestliže (bude pršet $\rightarrow$ půjdu domů) a (půjdu domů $\rightarrow$ budu studovat), pak (bude pršet $\rightarrow$ budu studovat).

Ověřte, že je tautologií formule

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)].$$

6. Zákony De Morganovy

$$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

$$\sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

(1)				(2)			
p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$(1) \longleftrightarrow (2)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

(1)				(2)			
p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(1) \longleftrightarrow (2)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Např.:

a) Není pravda, že (prší a svítí slunce) $\longleftrightarrow$ neprší nebo nesvítí slunce.

b) Není pravda, že (prší nebo svítí slunce) $\longleftrightarrow$ neprší a nesvítí slunce.

Čtenář nechť si sám ověří, že jsou tautologiemi tyto formule

$$((p \wedge q) \longleftrightarrow [\sim (\sim p \vee \sim q)]),$$

$$(p \vee q) \longleftrightarrow [\sim (\sim p \wedge \sim q)].$$

Další zákony si uvedeme jen přehledně. Ověření (pomocí p. o.) a příklady si čtenář udělá již sám.

7. Zákon Dunse Scotta

$$(p \wedge \sim p) \rightarrow q$$

Slovy: Spor $(p \vee \sim p)$ implikuje libovolný výrok (z nepravdy plyne cokoli).

8. Zákon Claviův (*reductio ad absurdum*)

$$(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$$

Slovy: Výrok, který je implikován svou negací, je pravdivý.

9. Zákon simplifikace

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

10. Zákony komutativní, asociativní a distributivní

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

$$[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \vee r)]$$

$$[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

$$[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

$$[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

11. Zákony idempotence

$$(p \vee p) \leftrightarrow p$$

$$(p \wedge p) \leftrightarrow p$$

12. Základní převodní zákony

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

13. Další zákony (tautologie)

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$

Příklad:

a) $\text{Prší} \rightarrow \text{prší nebo svítí slunce.}$

b) $\text{Prší a svítí slunce} \rightarrow \text{prší.}$

$$\begin{aligned}(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) , \\ [p \wedge (q \vee \sim q)] \longleftrightarrow p , \\ [p \vee (q \wedge \sim q)] \longleftrightarrow p , \\ [p \rightarrow (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p , \\ (p \longleftrightarrow q) \rightarrow [(p \vee r) \longleftrightarrow (q \vee r)] , \\ (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow [(p \wedge r) \longleftrightarrow (q \wedge r)] , \\ [(p \wedge q) \rightarrow r] \longleftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)] .\end{aligned}$$

14. Zákon Fregův

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)] .$$

15. Zákon Hauberův

$$\begin{aligned}[(p \rightarrow \lambda) \wedge (q \rightarrow t) \wedge (r \rightarrow u) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge \\ \wedge \sim (\lambda \wedge t) \wedge \sim (\lambda \wedge u) \wedge \sim (t \wedge u)] \rightarrow \\ \rightarrow [(\lambda \rightarrow p) \wedge \sim (t \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow r)] .\end{aligned}$$

Doporučujeme čtenáři, aby si ze cvičných důvodů udělal pravdivostní ohodnocení uvedených formulí a uvedl si vhodné příklady. Dále, aby se pokusil o přibližné slovní vyjádření i o čtení formulí, resp., aby si promyslel některé možné závěry, které plynou z uvedených tautologií.

Reálná čísla

JOSEF KOTYK, Pardubice

Z počátků matematiky jsou obecně známa čísla 1, 2, 3, 4, 5, ..., jež nazýváme čísla přirozenými. K nim nás přivádí numerace (čítání)¹⁾, tedy přímá zkušenost. Přirozené číslo udává počet předmětů nějaké skupiny, vyjadřuje početnost libovolného souboru předmětů.

¹⁾ V podrobnostech odkazuji k svému článku *Numerace*. (Čítání) v *Rozhledech*, roč. 25, čís. 2, str. 54.

Staří matematikové neznali jiných čísel než čísla přirozená. Důležitý pokrok ve vývoji matematiky znamenal rozšíření pojmu čísla. Na prvním místě se jedná o vyjádření početnosti souboru prázdného. Neobsahuje-li soubor žádných předmětů, říkáme, že počet předmětů v něm je roven nule. Tímto výrokem zavádíme do matematiky nové číslo: *nulu*. Svědčí o pokročilosti matematického myšlení starých kultur, že již v nich byl zaveden také symbol ničeho, obdoba naší nuly, např. v říši Inků²⁾ šňůrka s místem „prázdným“ apod.

Z dvou nebo několika čísel daných numerací (čítáním) dospíváme pomocí *početních výkonů* k dalším číslům i k novým možnostem, jak pojem čísla rozšířit. Vedení snahou učinit odčítání výkonem vždy proveditelným, rozšířili jsme dosavadní obor číselný o čísla záporná a dospěli tak k oboru čísel celých. Avšak i tento obor číselný bylo třeba časem rozšířit. Snažili jsme se tedy učinit také dělení libovolným číslem kromě nulou výkonem vždy proveditelným, proto *definujeme* dvojicí celých čísel p, q , z nichž $q \neq 0$, zlomkem $\frac{p}{q} = p : q$ číslo zv. *racionální*³⁾. Z desetinných čísel přicházejí v úvahu jednak desetinné zlomky, tj. rozvoje ukončené (v nich od určitého desetinného místa počínaje jsou všechny další číslice nuly), jednak neukončené rozvoje periodické, v nichž se určitá skupina číslic, zv. *perioda*, ve stejném pořádku stále opakuje.

Učebnice algebry se v stati o desetinných zlomcích zabývají zpravidla výkladem tvrzení, že každému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$ přísluší desetinný rozvoj periodický, jenž ve zvláštním případě, neobsahuje-li jmenovatel q jiných prvočinitelů než 2 a 5, má periodu 0, je tedy ukončeným desetinným zlomkem. Zabývejme se však i poučkou obrácenou: Každý periodický desetinný rozvoj vyjadřuje racionální číslo. Předpokládejme proto, že existuje dvojice přirozených čísel p, q , pro něž je např.

$$0,3\overline{18} = 0,318\ 18\ 18\ 18\ \dots = \frac{p}{q}.$$

Utvořme nejprve desetinasobek čísla p , v němž je číslo q obsaženo 3krát se zbytkem z . Ze zbytku, jenž je číslem přirozeným, utvoříme stonasobek a dělíme dále číslem q . Vychází podíl 18 a opět zbytek z . Platí pak $100z = 18q + z$ neboli $99z = 18q$, z čehož

$$z = \frac{18q}{99}.$$

²⁾ Viz autorův článek *Z říše Inků* v *Rozhledech*, roč. 43, čís. 3, str. 141.

³⁾ Lat. ratio (čti racio) = rozum.

Dosadíme-li tento výraz do vztahu $10p = 3q + z$, vychází

$$10p = 3q + \frac{18q}{99} = \frac{315q}{99},$$

z čehož

$$\frac{p}{q} = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}.$$

Správnost učiněného předpokladu ověříme zkouškou.

Popsaný postup se dá použít na kterýkoliv desetinný rozvoj periodický, lze tedy tvrdit, že takový rozvoj vyjadřuje vždy nějaké racionální číslo.

P o z n á m k a. Rovnost

$$0,3\overline{18} = \frac{315}{990}$$

lze „odvodit“ také tak, že považujeme daný rozvoj za racionální číslo a a utvoříme rozdíl $1000a - 10a = 318,18 - 3,18 = 318 - 3 = 315$; jestliže $990a = 315$, je

$$a = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}.$$

Jaké ned statky však lze vytknout tomuto postupu?

* *

*

Avšak ani s čísly racionálními nevystačíme při všech úvahách, k nimž nás matematika přivádí. Vedení snahou učinit např. také odmocňování přirazeného čísla vždy výkonem proveditelným⁴⁾, rozšiřujeme obor čísel racionálních dále v obor čísel reálných, jež *definujeme* jako symboly (znaky) myšlené v tvaru desetinného rozvoje (kladného, záporného nebo rovného nule), jenž má počet číslic nekonečný, tj. symboly, v nichž za každou číslicí, ležící napravo od desetinné čárky, následují číslice ještě dále napravo ležící. Rozšíření oboru čísel racionálních je tedy zřejmě provedeno o desetinné rozvoje neukončené neperiodické, zároveň tak, aby v rozšířeném oboru byl obsažen obor čísel racionálních. Racionální čísla jsou proto zvláštním případem čísel reálných.

Reálné číslo nelze vždy udat tím, že bychom je skutečně napsali. Je však dáno, jestliže je (kromě znaménka) jednoznačně stanovena

⁴⁾ Že např. rovnici $x^2 = 2$ nevyhovuje ani číslo celé, ani lomené, že rovnice $x^2 = 2$ není tedy řešitelná v oboru čísel racionálních, věděl již okolo roku 300 před n. l. slavný Euklides z Alexandrie.

číslíce na libovolném místě jeho desetinného rozvoje. Příkladem konstruktivního předpisu reálného čísla může být výrok: „Nalevo od desetinné čárky je číslice 2, napravo na k -tém místě číslice 1 nebo 0 podle toho, zdali k je či není prvočíslem.“ Doporučuji čtenářům, aby napsali desetinný rozvoj tohoto čísla na větší počet (např. sto, dvě stě) míst.

Uvažujme nyní o velikosti a uspořádání reálných čísel. Jsou-li a, b dvě reálná čísla, platí buď vztah $a = b$ nebo vztah $a \neq b$.

Rovnost $a = b$ znamená, že čísla a, b jsou buď totožná nebo ekvivalentní, tj. taková, jež se mohou navzájem zastupovat, např.

$$\begin{aligned} 35,482\ 599\ 999 &= 35,482\ 600\ 000 &= 35,482\ 6; \\ -1,733\ 999\ 99 &= -1,734\ 000\ 00 &= -1,734 \end{aligned}$$

apod. Jedním z ekvivalentních symbolů

$$+0,000\ 00 \quad = \quad -0,000\ 00$$

je určeno číslo, jež tvoří rozhraní mezi čísly kladnými a zápornými, nula.

Není-li $a = b$, je buď $a > b$, nebo $a < b$. Rozeznávejme pak tyto případy:

Číslo a je kladné, jestliže $a > 0$, záporné, jestliže $a < 0$.

Jedno z čísel a, b je kladné, druhé záporné. Číslo kladné je větší než kterékoli číslo záporné.

Čísla a, b nechť jsou obě kladná a nikoli právě ekvivalentní. Potom je $a > b$, jestliže první číslice zleva čísla a , která se neshoduje se stejnohlou číslicí čísla b , je větší než tato číslice.

Jsou-li čísla a, b dvě různá čísla záporná a čísla $a' = -a, b' = -b$ čísla kladná, jež se od nich liší jen znaménkem (tzv. čísla opačná), je $a > b$, nebo $a < b$ podle toho, zdali je $a' < b'$, nebo $a' > b'$.

Jsou-li tři reálná čísla a, b, c všechna kladná nebo všechna záporná a je-li $a > b, b > c$, je také $a > c$. To vyplývá přímo z definice. Ve zvláštních případech, je-li např. $a = 0$ a čísla b, c jsou obě záporná, nebo $c = 0$ a čísla a, b jsou obě kladná, nebo je-li $b = 0, a > 0, c < 0$, je věta samozřejmá.

Tvrzení, jimiž jsme se zabývali:

I. „Čísla a, b splňují vždy jeden ze vztahů $a > b, a = b, a < b$.“

II. „Je-li $a > b, b > c$, je $a > c$ “

nazýváme *postuláty uspořádanosti* reálných čísel.

Mezi každými dvěma různými racionálními čísly

$$a = \frac{p_1}{q_1}, \quad b = \frac{p_2}{q_2},$$

kde $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$, existuje další racionální číslo

$$\frac{a+b}{2} = \frac{p_1q_2 + p_2q_1}{2q_1q_2}$$

Vkládání racionálního čísla mezi každá dvě různá racionální čísla můžeme však libovolně mnohokrát opakovat. Z toho vyplývá, že mezi dvěma libovolnými různými čísly racionálními je nesčíslné množství dalších racionálních čísel. Tuto okolnost vyjadřujeme slovy: *Racionální čísla tvoří množinu uspořádanou hustě.*

Z definice reálného čísla vyplývá již bezprostředně, že mezi kterákoli dvě různá reálná čísla a , b — budiž např. $a < b$ — lze vložit nekonečné množství čísel c tak, aby $a < c < b$. Proto i čísla reálná tvoří množinu uspořádanou hustě.

Zobrazujeme-li čísla body číselné osy, přísluší každému racionálnímu číslu určitý jediný bod jako jeho obraz. Obrácené tvrzení však neplatí. Obrazy racionálních čísel vyplňují osu číselnou sice „všude hustě“ (uvažme, že např. mezi čísly 1,8 a 1,800 001 existuje nekonečně mnoho čísel racionálních), avšak — nedejme se klamat názorem — nevyplňují ji zcela.⁵⁾ Teprve obrazy reálných čísel vyplňují zcela číselnou osu. Důkazem tohoto tvrzení (neboli výroku, že reálná čísla tvoří kontinuum) se však na tomto místě nemůžeme zabývat.

Cvičení

1. Konstruktivní předpis reálného čísla zní: Nalevo od desetinné čárky je číslice 7, napravo na k -tém místě číslice 1 nebo 0 podle toho, zdali k je či není mocninou čísla dvě. Napište desetinný rozvoj tohoto čísla na větší počet (např. sto) míst.

2. Reálné číslo, které má na k -tém desetinném místě číslici, jež zakončuje součin $5 \cdot k$, je racionální. Dokažte.

3. Reálná čísla opačná a , $a' = -a$ bývají nazývána také symetrickými (souměrnými). Odůvodněte.

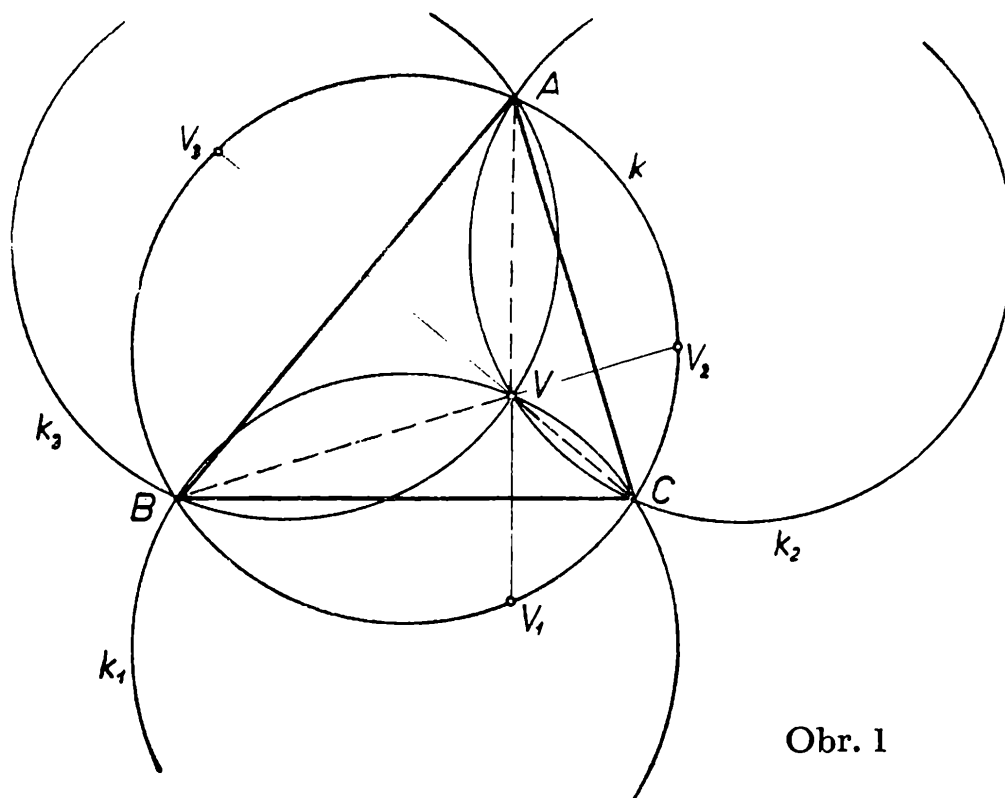
⁵⁾ Představa, kterou získáváme z názoru o tom, zdali čára probíhá bodem spojitě, je tedy zcela nespolehlivá. Pojem spojitosti funkce (čáry) je třeba definovat přesněji. Viz např. článek inž. K r i e g e l s t e i n a: Ú v o d do d i f e r e n c i á l n í h o p o č t u v Rozhledech, roč. 39, definice 7, na str. 349.

0 některých vztazích v trojúhelníku

DOC. JIŘÍ KŮST, Plzeň

První vztah se týká vzdáleností ortocentra trojúhelníku od jeho vrcholů, ve druhém jde o vzdálenosti středu kružnice opsané trojúhelníku od přímek, v nichž leží jeho strany. Třetí vztah je obecnější povahy. Přicházejí v něm jednak vzdálenosti vrcholů trojúhelníku a jednak vzdálenosti přímek, v nichž leží strany trojúhelníku, od libovolného bodu uvnitř trojúhelníku.

I. Buďte a, b, c velikosti stran trojúhelníku ABC a V jeho ortocentrum. Označme x, y, z po řadě velikosti úseček AV, BV, CV . Pak platí v trojúhelníku



Obr. 1

a) ostroúhlém

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{c}{z} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}, \quad (1)$$

b) tupoúhlém s tupým úhlem při vrcholu A

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{c}{z} = \frac{a}{x} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z}. \quad (2)$$

D ů k a z. Použijeme dvou pomocných vět:

1. Je-li P obsah trojúhelníku ABC , pak pro poloměr r kružnice k jemu opsané platí

$$r = \frac{abc}{4P}.$$

2. Kružnice k opsaná trojúhelníku ABC prochází body V_1, V_2, V_3 , které jsou po řadě souměrně sdružené s ortocentrem V podle přímk BC, CA, AB^1).

a) Nyní přistoupíme k důkazu vztahu (1). Sestrojíme kružnice k_1, k_2, k_3 , které jsou po řadě souměrně sdružené s kružnicí k podle přímk BC, CA, AB . Tyto kružnice jsou ovšem shodné s kružnicí k o poloměru r . Snadno nahlédneme, že procházejí bodem V (obr. 1).

Kružnice k prochází totiž body, např. A, B a bodem V_3 (podle pomocné věty 2); prochází proto kružnice k_3 , která je s k souměrně sdružená podle osy AB , samodružnými body A, B a bodem V souměrně sdruženým s V_3 .

Obdobně to platí i pro kružnice k_1 a k_2 . Jsou tedy kružnice k_1, k_2, k_3 po řadě opsány trojúhelníkům BCV, CAV, ABV .

Trojúhelník ABC lze složit ze tří nepřekrývajících se trojúhelníků BCV, CAV a ABV . Označíme-li jejich obsahy po řadě P_1, P_2, P_3 , pak platí

$$P = P_1 + P_2 + P_3. \quad (3)$$

Podle pomocné věty 1 je

$$P = \frac{abc}{4r}, \quad P_1 = \frac{ayz}{4r}, \quad P_2 = \frac{bzx}{4r}, \quad P_3 = \frac{cxy}{4r}. \quad (4)$$

Dosadíme-li odtud do rovnosti (3), máme

$$\frac{abc}{4r} = \frac{ayz}{4r} + \frac{bzx}{4r} + \frac{cxy}{4r}$$

Znásobíme-li tuto nerovnost zlomkem $\frac{4r}{xyz}$, dostaneme vztah (1).

b) Nyní je ortocentrum V bodem vnějšku trojúhelníku ABC . Snadno se přesvědčíte, že leží uvnitř úhlu vrcholového k vnitřnímu úhlu $\sphericalangle BAC$ trojúhelníku ABC (obr. 2). Jinak můžeme zde vše opakovat, co bylo již napsáno v případě a), jedine s tou výjimkou, že nyní trojúhelník BCV lze složit z nepřekrývajících se trojúhelníků ABC, CAV, ABV

¹⁾ První věta je známá. Druhou si čtenář snadno dokáže aspoň pro ostroúhlý trojúhelník, volí-li např. tento postup:

a) vypočte, že $\sphericalangle BV_1C = \sphericalangle BVC = \beta + \gamma = 2R - \alpha$;

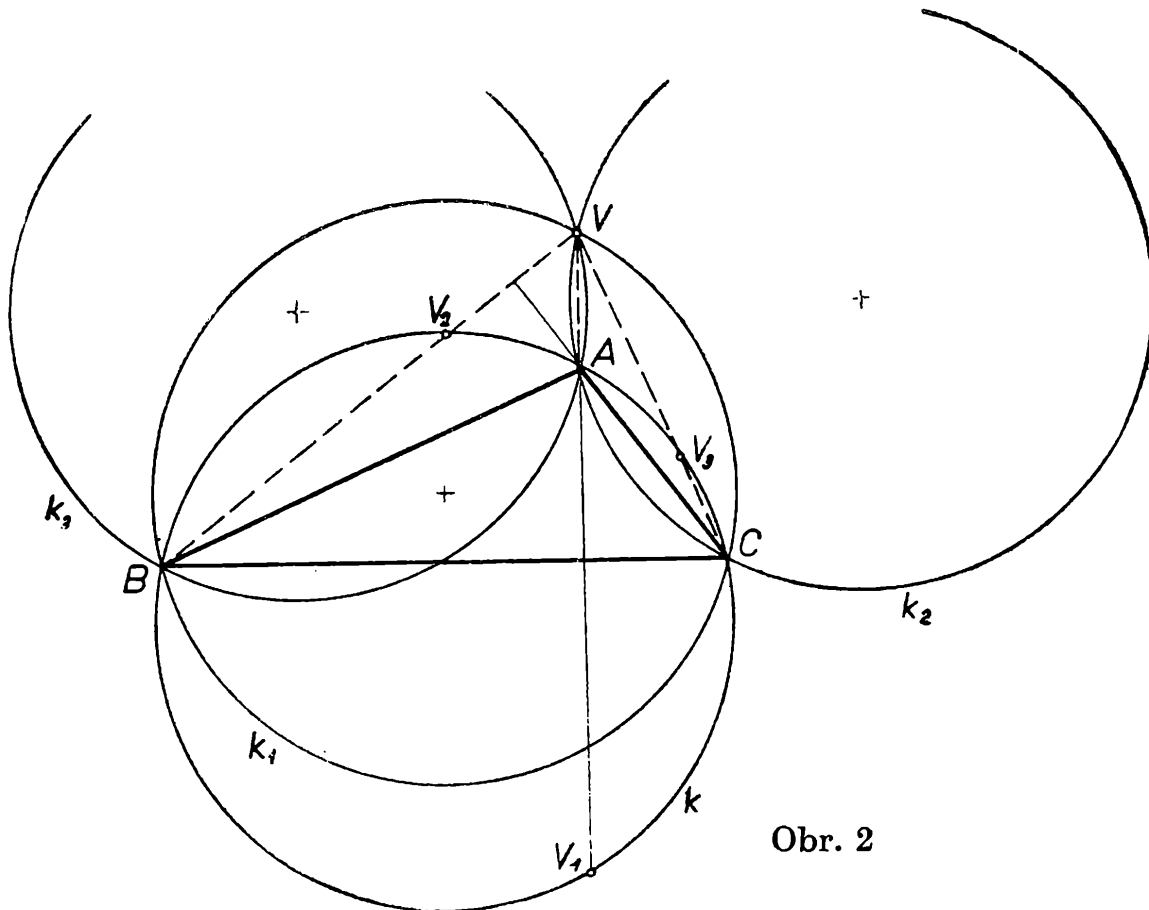
b) usoudí z a), že bod V_1 , který je přímkou BC oddělován od bodu A , je vrcholem obvodového úhlu příslušného k oblouku výplňkovému k oblouku BAC .

Platí proto $P_1 = P + P_2 + P_3$, čili $P = P_1 - P_2 - P_3$.

Dosadíme-li sem z rovností (4), dostaneme po úpravě

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} \cdot \frac{c}{z} = \frac{a}{x} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z}.$$

Pro pravouhlý trojúhelník ztrácí ovšem vztahy (1) a (2) smysl.



Obr. 2

II. Buďte a, b, c velikosti stran trojúhelníku a O střed kružnice jemu opsané. Označme m, n, p po řadě vzdálenosti středu O od přímek BC, CA, AB . Pak platí v trojúhelníku

a) ostroúhlém

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} = 4 \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} \right), \quad (5)$$

b) tupouhlém s tupým úhlem při vrcholu A

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} = 4 \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{n} - \frac{c}{p} \right) \quad (6)$$

D ů k a z. a) Sestrojíme body O_1, O_2, O_3 , které jsou po řadě souměrně sdružené se středem O podle přímek BC, CA, AB (obr. 3).

Snadno dokážeme, že $\triangle O_1O_2O_3 = \triangle ABC$ (sss). Z vlastností středních příček totiž plyne, že $O_1O_2 = 2A_1B_1 = AB$, $O_2O_3 = 2B_1C_1 = BC$, $O_3O_1 = 2C_1A_1 = CA$. Je tedy $O_1O_2 = c$, $O_2O_3 = a$, $O_3O_1 = b$.

Střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC je ortocentrem trojúhelníku $O_1O_2O_3$, neboť je $OO_1 \perp BC$, $BC \parallel B_1C_1 \parallel O_2O_3$, tedy $OO_1 \perp O_2O_3$ a obdobně $OO_2 \perp O_3O_1$, $OO_3 \perp O_1O_2$ ²⁾.

Dále je $OO_1 = 2m$, $OO_2 = 2n$, $OO_3 = 2p$. V trojúhelníku $O_1O_2O_3$ máme stejnou situaci jako v Ia).

Jsou tu zřejmě splněny předpoklady vedoucí ke vztahu (1). Proto platí

$$\begin{aligned} & \frac{a'}{2m} \cdot \frac{b'}{2n} \cdot \frac{c}{2p} = \\ & = \frac{a'}{2m} + \frac{b'}{2n} + \frac{c}{2p}, \end{aligned}$$

čili

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} = 4 \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} \right).$$

b) Má-li trojúhelník ABC tupý úhel při vrcholu A , má s ním shodný trojúhelník $O_1O_2O_3$ tupý úhel při vrcholu O_1 .

Až na tuto výjimku platí tu vše, co bylo uvedeno v případě IIa). Protože jsou zde splněny všechny předpoklady vedoucí ke vztahu (2), platí

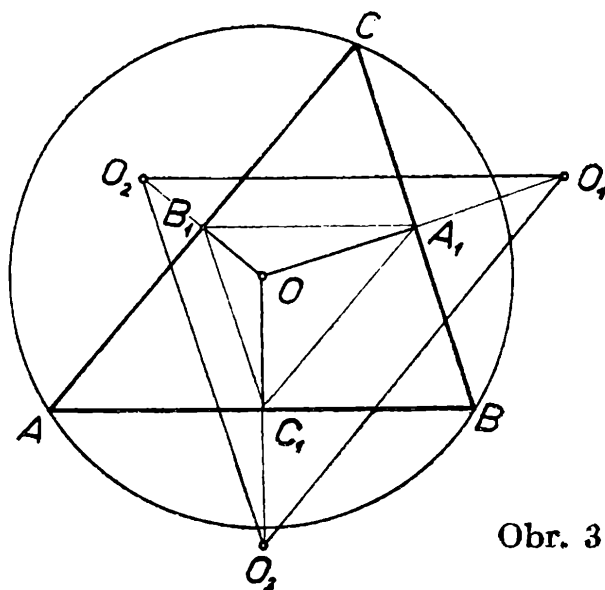
$$\frac{a}{2m} \cdot \frac{b}{2n} \cdot \frac{c}{2p} = \frac{a}{2m} - \frac{b}{2n} - \frac{c}{2p},$$

čili vskutku

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} = 4 \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{n} - \frac{c}{p} \right).$$

Pro pravoúhlý trojúhelník ztrácí ovšem smysl také vztahy (5), (6).

(Pokračování)



Obr. 3

²⁾ Trojúhelníky ABC , $O_1O_2O_3$ mají kromě uvedených ještě další zajímavé vlastnosti. Zjistili jsme, že střed kružnice opsané trojúhelníku ABC je ortocentrem trojúhelníku $O_1O_2O_3$. Tento vztah je symetrický, tj. vzájemný. Čtenář sám si lehko dokáže, že obrácené ortocentrum trojúhelníku ABC je středem kružnice opsané trojúhelníku $O_1O_2O_3$.

Z dalších vlastností uvádím, že oba trojúhelníky mají touž Eulerovu přímku a touž Feuerbachovu kružnici devíti bodů.

O střechanech a o určování jejich objemů

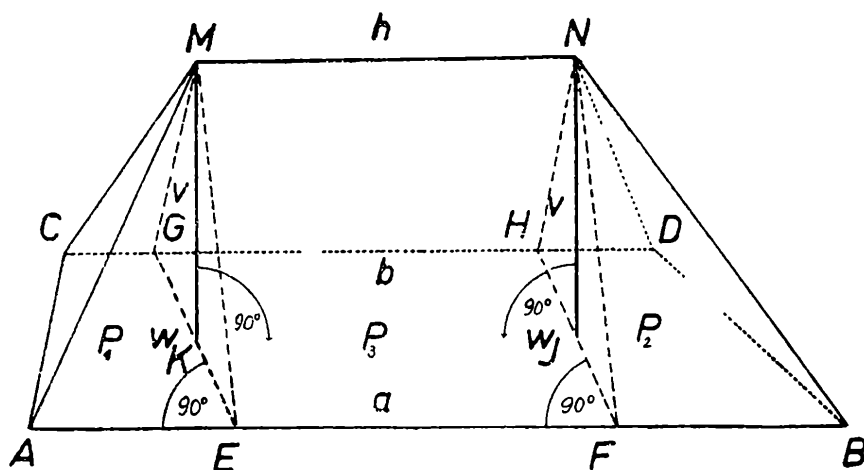
DR. ING. OTAKAR LEMINGER, Ústí nad Labem

(Dokončení)

III. Objem střechanů se čtyřúhelníkovitou střechou, tj. kde vrcholová hrana je rovnoběžná se dvěma hranami podstavy

1. Střechan s lichoběžníkovou podstavou

Tento jednoduchý druh střechanu, který se může vyskytnout častěji v praxi ve formě hromad materiálu (šterku, uhlí, pyritu apod.) má za podstavu lichoběžník $ABCD$ (obr. 8); jeho vrcholová hrana $MN = h$



Obr. 8

je rovnoběžná s oběma rovnoběžnými stranami $AB = a$, $CD = b$ lichoběžníkové podstavy. Dány jsou zmíněné délky a , b , délka vrcholové hrany $MN = h$, výška střechanu, tj. kolmá vzdálenost vrcholové hrany od podstavy $v = KM = JN$ a výška $w = EG = FH$ lichoběžníkové podstavy. Z těchto změřitelných dat třeba určit objem střechanu $ABCDMN$. K tomu cíli vedme krajními body M , N vrcholové hrany dvě roviny kolmé na podstavu i vrcholovou hranu. Tím se rozpadne střechan v trojboký hranol s trojúhelníkovou podstavou

$$\triangle EGM = \triangle FHN = \frac{1}{2} vw$$

a výškou h , dále ve dva jehlany o společné výšce v a o podstavách představujících úseky P_1 , P_2 původní lichoběžníkové podstavy $P = P_1 + P_2 + P_3$. Objem daného střechanu bude se tedy rovnat součtu objemů těchto tří těles

$$V = \frac{1}{2} vwh + \frac{1}{3} vP_1 + \frac{1}{3} vP_2 = \frac{1}{2} vwh + \frac{1}{3} v(P_1 + P_2). \quad (18)$$

Obsah P lichoběžníkové podstavy je

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = hw + P_1 + P_2 = \frac{1}{2} (a + b) w, \quad (19)$$

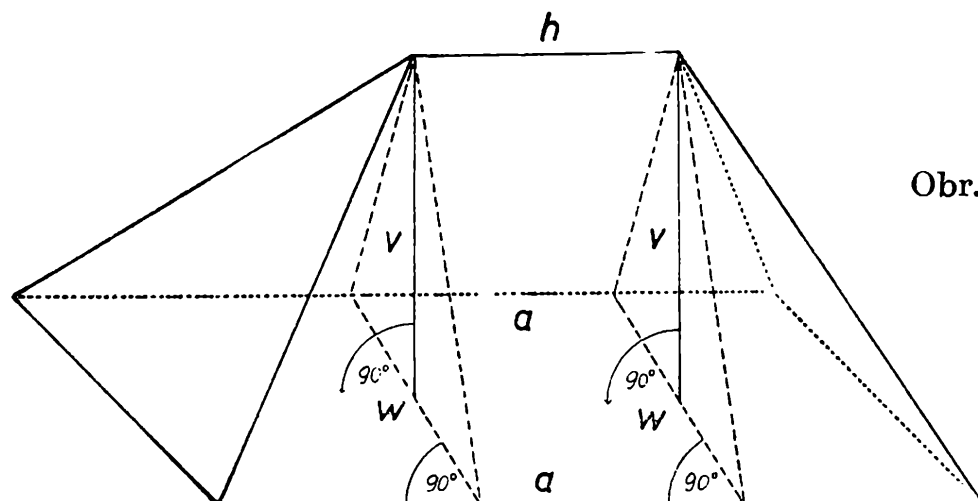
a tedy

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} (a + b) w - wh = \frac{1}{2} w (a + b - 2h) . \quad (20)$$

Dosadíme-li tento vztah (20) do (18), obdržíme konečný vzorec pro objem V uvažovaného střechanu

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} vwh + \frac{1}{6} vw (a + b - 2h) = \frac{1}{2} vw [h + \frac{1}{3} (a + b - 2h)] = \\ &= \frac{1}{6} vw (a + b + h) \end{aligned} \quad (21)$$

K stejnému výsledku dospějeme použitím Simpsonova vzorce pomocí středního řezu, vedeného ve výšce $\frac{1}{2} v$. Objem pojednávaného střechanu



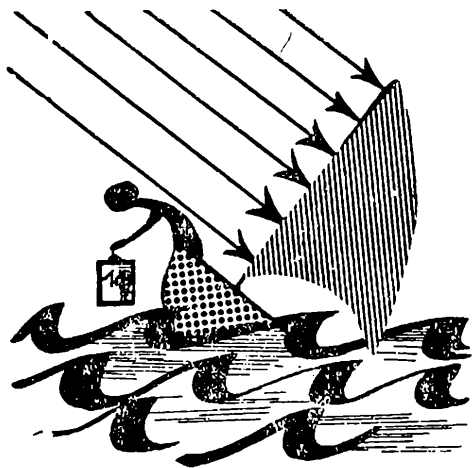
Obr. 9

je tedy roven součinu obsahu středního kolmého řezu střechanem a třetiny součtu délek vrcholové hrany a rovnoběžných stran lichoběžníkové podstavy.

2. Střechan s rovnoběžníkovou podstavou

Také tento druh střechanů se vyskytuje v praxi ve formě hromad materiálu, jejichž objem třeba stanovit. Zde se jedná o zjednodušení předchozího případu, neboť rovnoběžné strany a , b podstavy se sobě rovnají, tj. $a = b$ (obr. 10). Dosadíme-li tuto rovnost do vzorce (21), dostaneme pro objem uvažovaného střechanu vztah

$$V = \frac{1}{6} vw (2a + h) . \quad (22)$$



Vlnové vlastnosti mikročástic

DR. MIROSLAV ROZSÍVAL, Praha

(Pokračování)

Difrakce atomů a molekul

Difrakci paprsků těchto částic prokázala experimentálně řada fyziků [2]. Nejpersvědčivější pokusy však provedl v letech 1926—1933 německý fyzikální chemik O. Stern se svými spolupracovníky [4], který se zabýval studiem vlastností atomových a molekulových paprsků. (Za výsledky těchto prací a za objev magnetického momentu protonu byla v r. 1943 udělena O. Sternovi Nobelova cena za fyziku.)

Paprsky neutrálních částic jako jsou atomy nebo molekuly se v principu získávají tak, že páry nebo plyny, zahřáté ve speciální pídce na vhodnou teplotu se nechají proudit z uzavřené nádoby velmi malým otvorem (o $\varnothing 10^{-2}$ až 10^{-3} cm) do vyčerpáného prostoru aparatury, v níž se vlastnosti těchto paprsků studují. Pro difrakci se z těchto paprsků vymezí soustavou clonek (tzv. kolimátorem) úzký svazek, který se nechá difraktovat na vhodné látky a vzniklé difrakční jevy se registrují vhodným detektorem. Protože u takto získaných paprsků mají částice různé rychlosti, jejichž velikosti odpovídají Maxwellovu rozdělení, provádí se zpravidla jejich monochromatizace nejlépe odrazem na vhodném monokrystalu. Vlnové délky takových paprsků jsou při obvyklých (termických) rychlostech částic řádově 10^{-8} cm nebo kratší.

K registraci difrakčních jevů atomových nebo molekulových paprsků je třeba použít speciálních detektorů, jako jsou detektory na principu povrchové ionizace nebo citlivé manometrické detektory apod.

Detektory využívající povrchové ionizace, které lze použít pro paprsky atomů o nízkém ionizačním potenciálu, pracují tak, že při dopadu

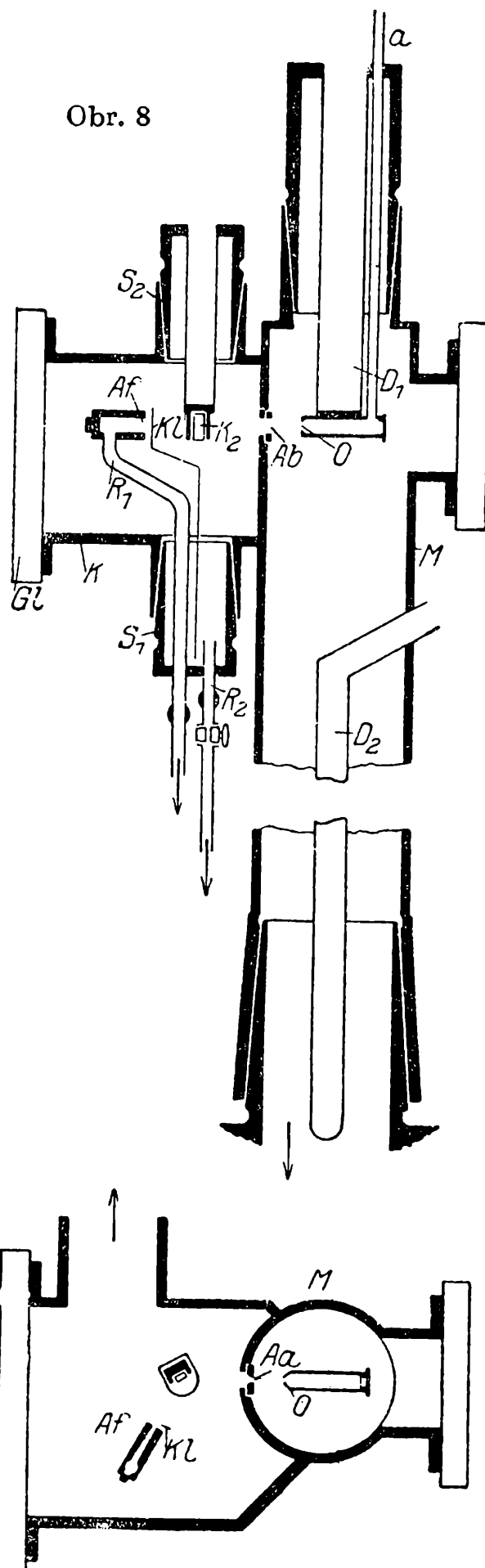
paprsků na rozžhavené wolframové vlákno dochází v důsledku ztráty elektronu při dotyku atomu s povrchem rozžhaveného vlákna ke vzniku kladných iontů, které se zachycují na záporné elektrodě. Výsledný iontový proud udává pak přímo počet atomů za jednotku času, které dopadly na rozžhavené vlákno, a tím intenzitu paprsků. Princip manometrických detektorů, které se používají pro paprsky permanentních plynů nebo nekondenzovatelných par je v tom, že tenkou štěrbinou dopadají paprsky do uzavřené manometrické trubice, čímž dojde v této trubici ke zvýšení tlaku, které se měří. Protože zpravidla jde o měření tlaků řádu 10^{-8} až 10^{-9} torr při totálním tlaku řádu 10^{-5} až 10^{-6} torr, používá se k měření principu ionizačního nebo Piraniho manometru.

Pro speciální účely lze jako detektorů atomových nebo molekulových paprsků užít např. termokřížů nebo bolometrů.

Pokusy s difrakcí byly provedeny s paprsky atomů H a He a molekul H_2 na krystalech LiF a NaCl a platnost de Broglieovy rovnice (1) byla prokázána s přesností na 1 %.

Schéma zařízení použitého O. Sternem ukazuje obr. 8, záznam difrakce obr. 9.

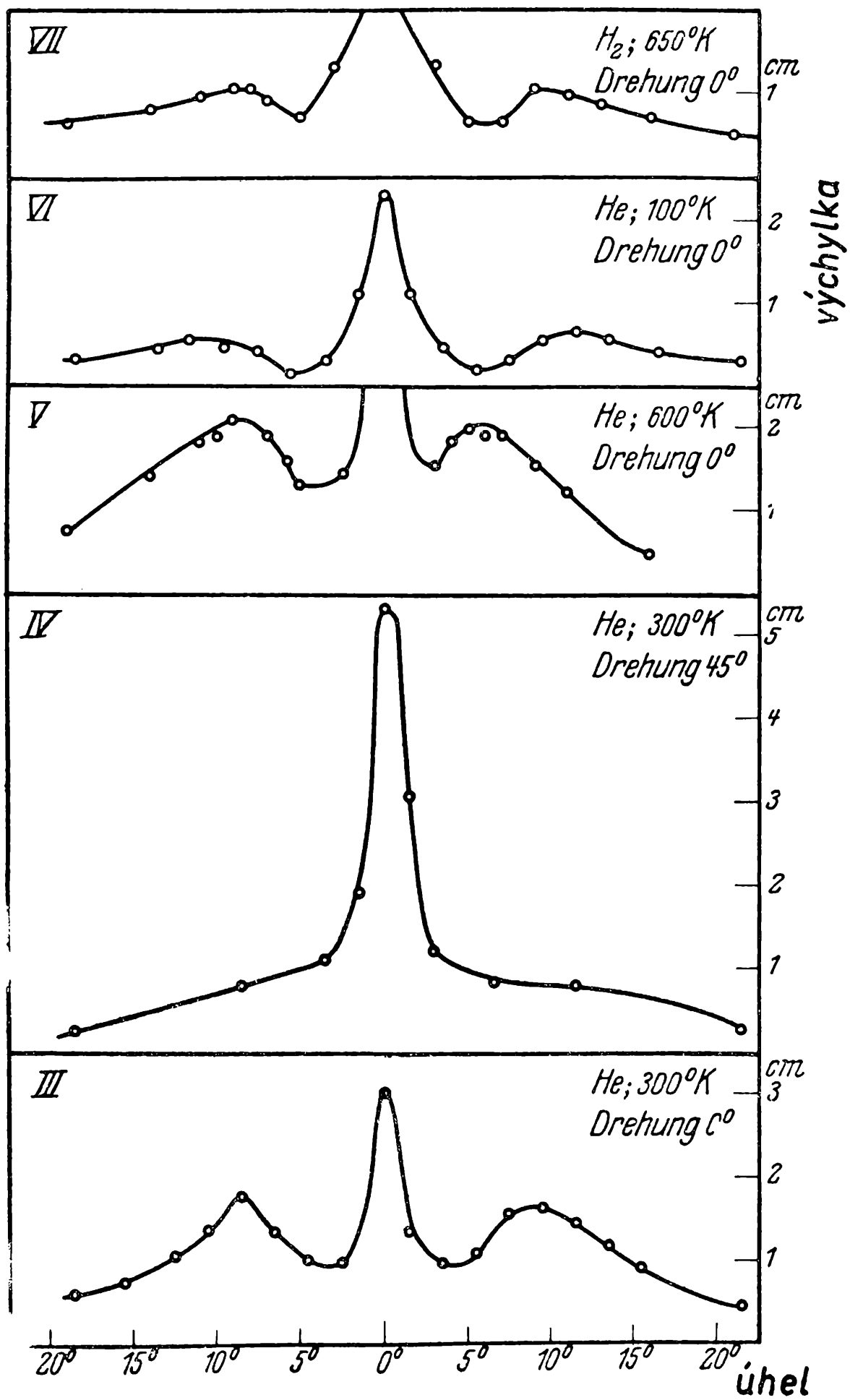
Obr. 8



Obr. 8. Schéma původního zařízení pro difrakci atomových paprsků Knauera a Sterna

(F. Knauer, O. Stern: [4])

- O - zdroj paprsků
- K_2 - krystal
- Af - kolektor
- R_1 - spojení s detektorem



Obr. 9. Příklad difrakčních diagramů paprsků atomů a molekul (I. Estermann a O. Stern: [4])

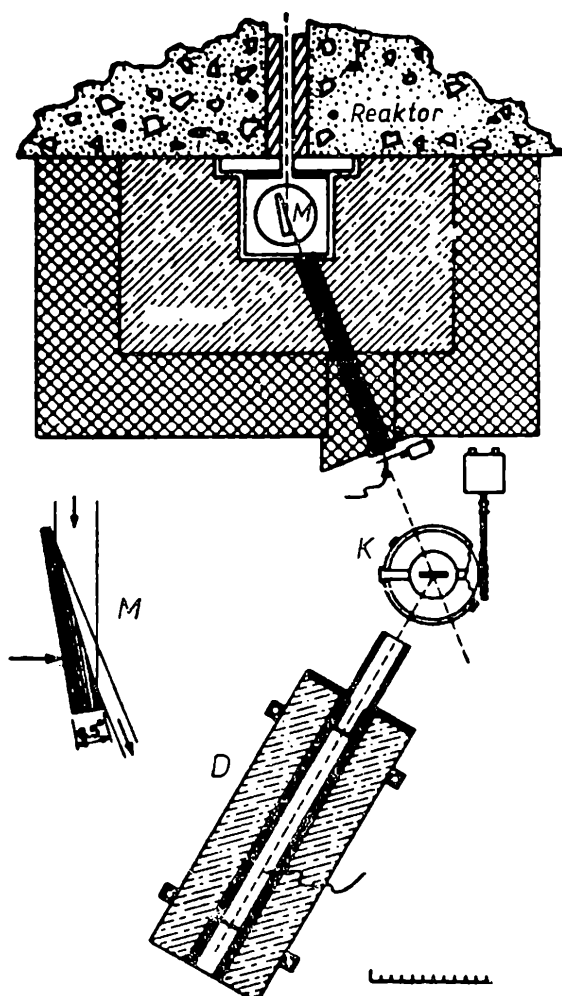
Difrakce neutronů

Kvantitativní pokusy s difrakcí neutronů (objevených r. 1932 J. Chadwickem) mohly být provedeny teprve tehdy, až konstrukce jaderných reaktorů (vypracované během 2. světové války) umožnily získat dostatečně intenzivní neutronové paprsky [5]. První měření difrakcí neutronů na monokrystalech provedl W. H. Zinn [6] na reaktoru Argonne Company r. 1946 a současně L. B. Borst se spolupracovníky [7] na reaktoru v Oak Ridge National Laboratory. Pokusy na krystalických práscích provedli r. 1948 E. O. Wollan a C. G. Shull [8] v téže laboratoři. Podobně jako u difrakce atomových a molekulových paprsků je třeba pro přesná měření provádět monochromatizaci neutronových paprsků získaných z reaktoru, neboť jednotlivé částice mají různé rychlosti odpovídající Maxwellovu rozdělení, nejčastěji pomocí krystalového monochromátoru. Vlnové délky λ de Broglieových vln neutronových paprsků používaných k difrakci leží v oboru asi od 5 do 0,02 Å, tedy odpovídají vlnovým délkám rentgenových paprsků nejčastěji používaným při difrakčních pokusech.

Protože neutronové paprsky jsou velmi pronikavé, nelze k jejich registraci užít obvyklých způsobů, jak jsme je uvedli pro elektrony nebo neutrální částice. Nejčastěji slouží jako indikátor záření dlouhý proporcionální počítač plněný BF_3 , obohaceným izotopem B^{10} pro větší absorpci neutronů, dokonale stíněný proti rozptýlenému záření silnou vrstvou práškovitého B_4C a parafínu.

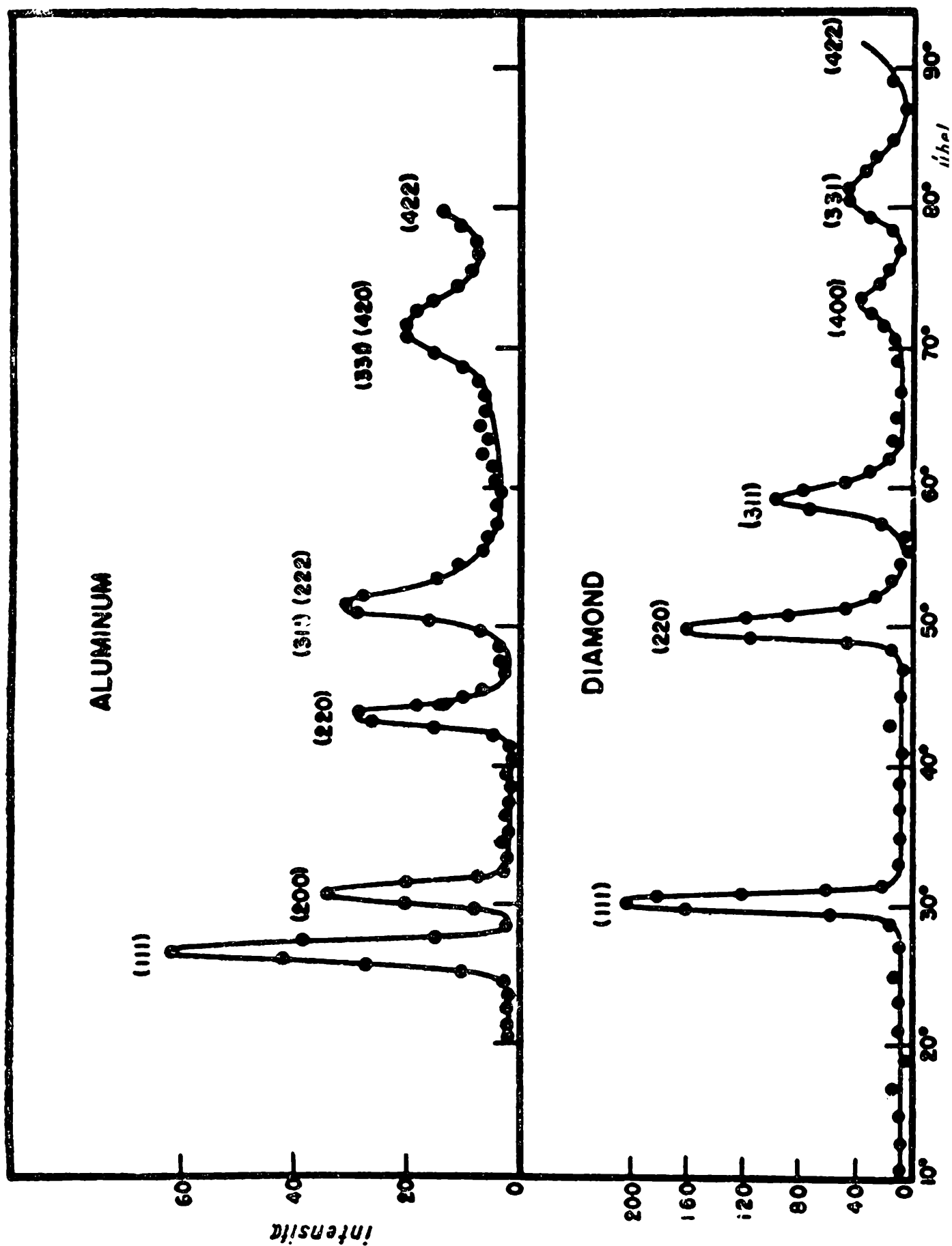
V některých případech bylo použito také fotografické techniky. K tomu účelu byl fotografický film preparován BF_3 , Li nebo H, nebo pobyt vrstvou citlivou na neutrony. Dopadem neutronů dochází v důsledku jaderných reakcí k emisi ionizovaných částic, které ve fotografické emulzi způsobí černání, a tím registraci dopadajících neutronů.

Jako příklad zařízení pro difrakci neutronů uvádíme na obr. 10



Obr. 10. Schéma původního zařízení pro difrakci neutronů v Oak Ridge (E. O. Wollan, C. G. Shull: [8])

M monochromátor
K studovaný krystal
D - detektor



Obr. 11. Příklad záznamu difrakčních diagramů neutronů
(E. O. Wollan, C. G. Shull: [8])

schematický náčrt zařízení pro difrakci na práškových materiálech použitého při prvních takových experimentech v laboratoři v Oak Ridge. Záznam difrakčního diagramu provedeného takovým zařízením ukazuje obr. 11 [8].

Pokusy s difrakcí mikročástic byly mnohokrát opakovány různými autory a také s dalšími mikročásticemi. Všechny pokusy jednak prokázaly zcela jednoznačně existenci de Broglieových vln u těchto částic jednak vedly ke vzniku tzv. korpuskulární optiky, jejímiž nejvýznamnějšími výsledky byly konstrukce elektronového a protonového mikroskopu.

Ke všem těmto pokusům je třeba připomenout, že v důsledku toho, že korpuskulární paprsky s výjimkou neutronů jsou při průchodu hmotou silně rozptylovány a absorbovány, jsou zařízení, na nichž jsou prováděny pokusy s jejich difrakcí, vysokovakuová (10^{-4} až 10^{-5} torr) a v případě pomalých elektronů dokonce ultravakuová (asi 10^{-8} až 10^{-9} torr).

V průběhu let byly metody difrakce rychlých elektronů a později také neutronů tak vypracovány a zpřesněny, že se staly velmi důležitými metodami pro studium krystalové struktury látek. V posledních letech k nim přistoupila také metoda difrakce pomalých elektronů, když se podařilo vyřešit otázku fotografické registrace difrakčních diagramů a techniku ultravysokého vakua, která má veliký význam pro studium povrchových vrstev.

Literatura

- [1] *M. von Laue*: Materiewellen und ihre Interferenzen. Akad. Verlagsgesellschaft, Becker & Erler, Leipzig 1944, str. 37, 38, 192, 198, 209 a 218.
Ch. S. Barrett: Struktura kovů. Nakladatelství ČSAV, Praha 1959, str. 574—595.
Z. G. Pinsker: Difrakcija elektronov. Izd. AN SSSR, Moskva, Leningrad 1949, str. 392.
- [2] *H. Mark u. R. Wierl*: Die experimentellen und theoretischen Grundlagen der Elektronenbeugung. Verl. Gebr. Borntraeger, Berlin 1931, str. 37, 84.
- [3] *G. P. Thomson — W. Cochran*: Theory and Practice of Electron-Diffraction. Macmillan and Co, Ltd, London 1939, str. 39.
- [4] *I. Estermann u. O. Stern*: Zs. f. Phys. 61 (1930), 95—125.
I. Estermann: Rev. Mod. Phys. 18 (1946), 300—323.
O. Knauer u. O. Stern: Zs. f. Phys. 53 (1930), 779—791.
- [5] *E. O. Wollan, C. G. Shull*: Nucleonics — July 1948, 8—21.
- [6] *W. H. Zinn*: Phys. Rev. 70 (1946), 102 A.
- [7] *L. B. Borst, A. J. Ulrich, C. L. Osborne, B. Hasbrouck*: Phys. Rev. 70 (1946), 108 A.
- [8] *E. O. Wollan, C. G. Shull*: Nucleonics — August 1948, 17—31.

Jak je to s experimentálním ověřením teorie relativity?

RNDr. VLADISLAV KOLESNIKOV,
RNDr. JIŘÍ ZÁHEJSKÝ, Olomouc

Úvod

A. Einstein, geniální fyzik, nositel Nobelovy ceny, formuloval poprvé v roce 1905 základy *speciální teorie relativity*. O deset let později uveřejnil konečnou formu gravitačního zákona *obecné teorie relativity*. Teorie relativity se stala jedním ze základních kamenů fyziky, znamenala zvrat v nazírání na základní pojmy nejen ve fyzice, ale i ve filosofii. Celá řada fyzikálních jevů se nedá objasnit bez teorie relativity. Na jejích principech jsou konstruovány složité přístroje, např. urychlovače elementárních částic, propočítávají se jaderné reakce apod. Teorie relativity dala nový pohled téměř na všechny fyzikální teorie a dala vznik i teoriím novým, např. relativistické kvantové teorii elektronu vybudované P. M. Diracem. Teorie relativity, právě pro svůj dosah, se stala velmi populární, a proto vyvolala hned po svém vzniku tolik záporných reakcí, jak mezi fyziky světových jmen, tak i mezi laiky. I dnes dostávají redakce časopisů práce, které se pokoušejí dokázat nekonzistenci teorie relativity v podstatě stejnými argumenty, které byly vyvráceny hned po jejím vzniku. Tehdy vznášeli námitky proti teorii relativity i fyzikové. Mezi nimi nechyběli ani nositelé Nobelových cen a snad žádná teorie nezpůsobila takové množství chybných výkladů, i od filosofů.

1. Speciální teorie relativity

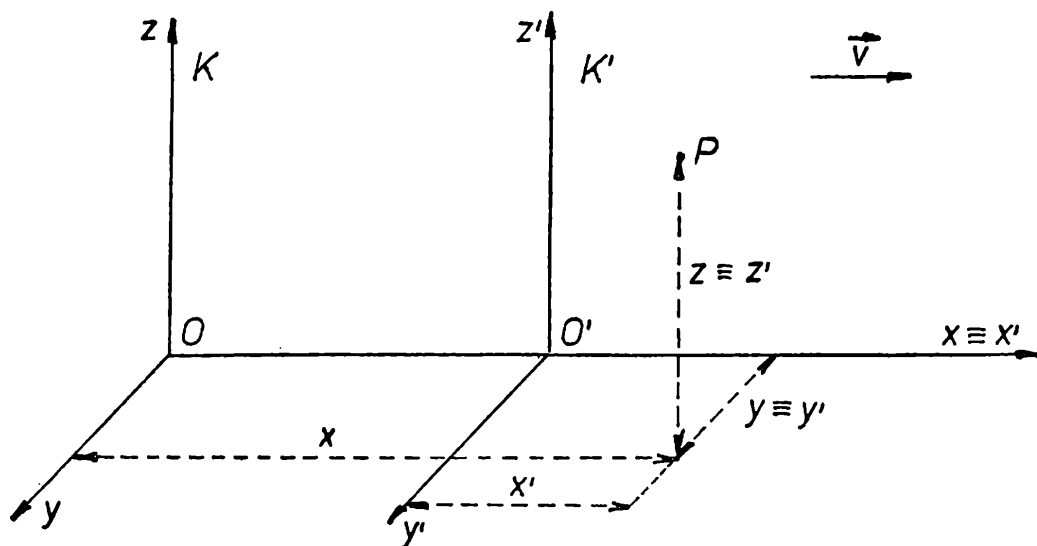
Speciální teorie relativity se zabývá inerciálními soustavami a je založena na dvou postulátech: první rozšiřuje platnost klasického principu relativity i na zákony elektromagnetického pole a druhý postuluje stálost světelné rychlosti, tj. nezávislost rychlosti světla na pohybu pozorovatele a světelného zdroje. Matematickým základem této teorie jsou *Lorentzovy transformace* (1), které umožňují popsat děj, odehrávající se v jedné inerciální soustavě K , vzhledem k druhé inerciální soustavě K' (obr. 1). Mají tvar

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y = y', z = z', t = \frac{t' + \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

kde x, y, z, t jsou prostorové a časové souřadnice nějaké události v soustavě K a x', y', z', t' jsou souřadnice události v jiné inerciální soustavě K'

Tato transformace vyjadřuje základní objektivní vlastnosti prostoru a času, vyplývající z pokusů. Tedy každý fyzikální zákon, matematicky vyjádřený v souřadnicích jedné soustavy, musí při přechodu k jiné inerciální soustavě podle vztahu (1) zachovat svůj tvar. Říkáme, že musí být invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. Je nutno poznamenat, že *H. A. Lorentz* a *H. Poincaré* našli již před *Einsteinem* (1904) ryze formálním způsobem transformaci (1), když se snažili vysvětlit některé paradoxní výsledky tehdy provedených optických pokusů.

Ze speciální teorie relativity vyplývají významné důsledky, jako *zkracování délek*, *dilatace času*, *relativistické skládání rychlostí*, *závislost hmotnosti na rychlosti* a další.¹⁾



Obr. 1. K Lorentzovým transformacím.

V souvislosti s kosmickými lety byl nejvíce diskutován problém dilatace času, tj. závěr, že v soustavě, která se vzhledem k pozorovateli pohybuje přímočaře rovnoměrně, čas plyne pomaleji. To se lidem neznámým s teorií relativity jeví v rozporu se „zdravým rozumem“, neboť to odporuje vžité představě o prostoru a čase. Je to možné vysvětlit tím, že člověk získává představy o energii, elektromagnetickém poli a jiných fyzikálních jevech až v době svých studií, kdežto představu o prostoru a čase si vytváří daleko dříve, že je ochoten považovat ji za vrozenou a jen těžko chápe jiné nazírání na tyto dva základní pojmy.

Po vzniku speciální teorie relativity se začala přezkoumávat řada známých fyzikálních zákonů z hlediska invariantnosti vzhledem k Lo-

¹⁾ Podrobnější zpracování kinematiky speciální teorie relativity je v článku J. Horského: „Základy teorie relativity“, který byl publikován v *Rozhledech mat.-fyz.*, roč. 42 (1963–64), str. 121, 175, 215, 275, 318.

rentzově transformaci. Byla vybudována relativistická mechanika hmotného bodu i tuhého tělesa, relativistická elektrodynamika, termodynamika i optika a bylo nutné si všimnout také jevů gravitačních.

2. Obecná teorie relativity

Jak již bylo uvedeno, speciální teorie relativity se týká vzájemných pohybů rovnoměrných a přímočarých. V roce 1915 zobecnil *A. Einstein* princip relativity na libovolné relativní pohyby. Dal tak vznik obecné teorii relativity, která je vybudována na dvou základních principech: *obecném principu relativity* a *principu ekvivalence*. Speciální teorie relativity učí, že fyzikální zákony musí být formulovány tak, aby měly stejný tvar ve všech inerciálních soustavách, tj. aby byly invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. *Einstein* zobecnil princip relativity také na neinerciální soustavy, tj. takové, které se vůči sobě pohybují nerovnoměrně. Tento zobecněný princip relativity vyžaduje, aby obecné přírodní zákony měly stejný tvar v libovolných souřadných systémech, ať je jejich pohyb jakýkoliv.

Princip ekvivalence říká, že *setrvačná a gravitační hmotnost se rovnají*. Jak je známo, na povrchu Země působí na těleso síla zemské přitažlivosti

$$F = \kappa \frac{Mm'}{R^2}, \quad (2)$$

kde M je hmotnost Země, m' je *gravitační hmotnost tělesa*, R je poloměr Země a $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta.

Působením této síly F nabývá těleso podle druhého pohybového zákona Newtonova zrychlení g podle vztahu

$$F = mg, \quad (3)$$

kde m je tzv. *setrvačná hmotnost tělesa*. Srovnáním vztahu (2) a (3) dostaneme

$$g = \kappa \frac{M}{R^2} \cdot \frac{m'}{m}. \quad (4)$$

Výraz $\kappa \frac{M}{R^2}$ nezávisí na vlastnostech tělesa. Poněvadž ve vakuu padají

všechna tělesa se stejným zrychlením g , je podíl $\frac{m'}{m}$ konstantní pro všechna tělesa, tj. gravitační hmotnost je úměrná setrvačné hmotnosti a při vhodné volbě jednotek je gravitační hmotnost rovna setrvačné hmotnosti.

Tato úměrnost byla experimentálně dokázána velmi přesnými měřeními v roce 1890 *R. V. Eötvösem*. Princip jeho měření byl tento. Na povrchu Země působí na těleso jednak síla zemské přitažlivosti, která je úměrná gravitační hmotnosti tělesa, jednak síla odstředivá, způsobená rotací Země, která je úměrná setrvačné hmotnosti tělesa. Byla měřena

výslednice obou těchto sil. Kdyby podíl m'/m nebyl pro různá tělesa konstantní, pak i výslednice sil by musela mít pro různá tělesa ve stejném místě různý směr. Avšak všechna měření dala negativní výsledek. Eötvös experimentálně prokázal, že platí

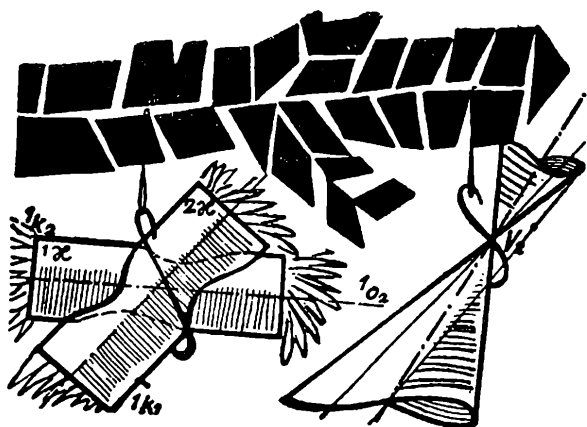
$$\frac{m'}{m} = 1 \pm 10^{-8} \quad (5)$$

Profesor princetonské university *R. H. Dicke* v roce 1957 ještě zpřesnil výsledky těchto měření o tři řády.

Princip ekvivalence můžeme názorně objasnit, uvažujeme-li např. pohyb v rovnoměrně zrychleném souřadném systému. Volná tělesa o různých hmotnostech, umístěná v tomto systému, budou mít stejná zrychlení rovná zrychlení systému, ale opačného směru. Tato tělesa by se však pohybovala stejně, kdyby uvažovaný systém se nepohyboval zrychleně, ale byl v homogenním a konstantním gravitačním poli. Pozorovatel umístěný v uvažovaném systému nemůže tedy odlišit sílu pocházející od homogenního konstantního gravitačního pole od síly setrvačnosti, která vzniká následkem přímočarého zrychleného pohybu systému v opačném směru. Rovnoměrně zrychlený vztažný systém je ekvivalentní systému s konstantním a homogenním gravitačním polem. Gravitační pole, která jsou ekvivalentní neinerciálním vztažným soustavám, nejsou zcela totožná s gravitačními poli „uzavřených“ těles (Slunce, Země apod.). Mezi nimi je podstatný rozdíl v jejich chování v nekonečnu, neboť gravitační pole uvažovaných „uzavřených“ těles je v nekonečnu rovno nule. Gravitační pole, které je ekvivalentní neinerciálnímu systému, vymizí v celé oblasti, jakmile se přejde k systému inerciálnímu. I nehomogenní gravitační pole lze nahradit vhodným souřadným systémem, který by se pohyboval se zrychlením rovným zrychlení gravitačnímu, avšak jen v malé oblasti prostoru, kde lze toto gravitační pole považovat za homogenní. Žádným místním pokusem nemůžeme od sebe rozlišit gravitační pole a silové pole, které vzniká při zrychleném pohybu soustavy. V tomto pojetí má princip ekvivalence jen lokální ráz a mluvíme často o *principu lokální ekvivalence*. Proto lze říci, že oba typy polí musí splňovat stejné zákony.

Z principu ekvivalence je zřejmé, že pro malou oblast prostoru můžeme najít takovou souřadnou soustavu S_0 , ve které nepůsobí gravitační síly. Proto můžeme na soustavu S_0 aplikovat zákony speciální teorie relativity. Jestliže tedy vyloučíme gravitační pole pomocí transformace souřadnic, fyzikální zákony zůstávají invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. Z principu ekvivalence vyplývá také zavedení tzv. *neeuclidovské geometrie*, poněvadž gravitační pole má vliv na prostorčasové vztahy, tj. na *metriku prostoru*. V obecné teorii relativity musíme uvažovat prostor neeuclidovský, prostor „zakřivený“.

(Pokračování)



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Niektoré dotyčnicové vlastnosti stredových kužeľosečiek

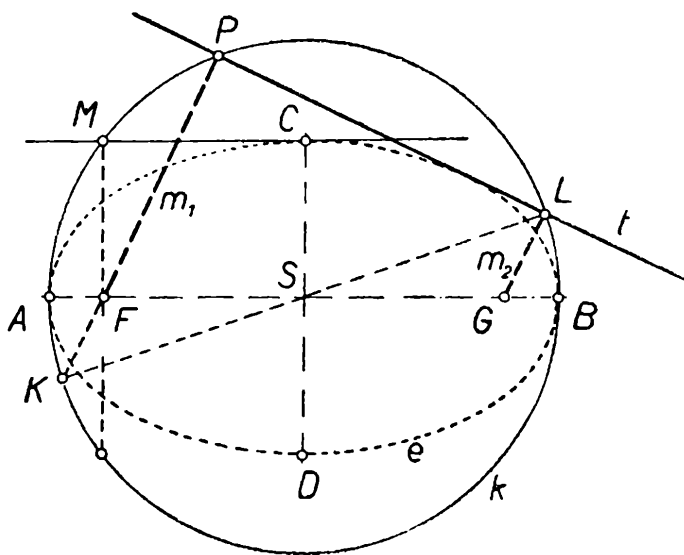
MATÚŠ KUNIAK, Košice

V príspevku budú odvodené niektoré elementárne dotyčnicové vlastnosti stredových kužeľosečiek, ktorých možno výhodne použiť pri konštrukčnom riešení úloh o kužeľosečkách.

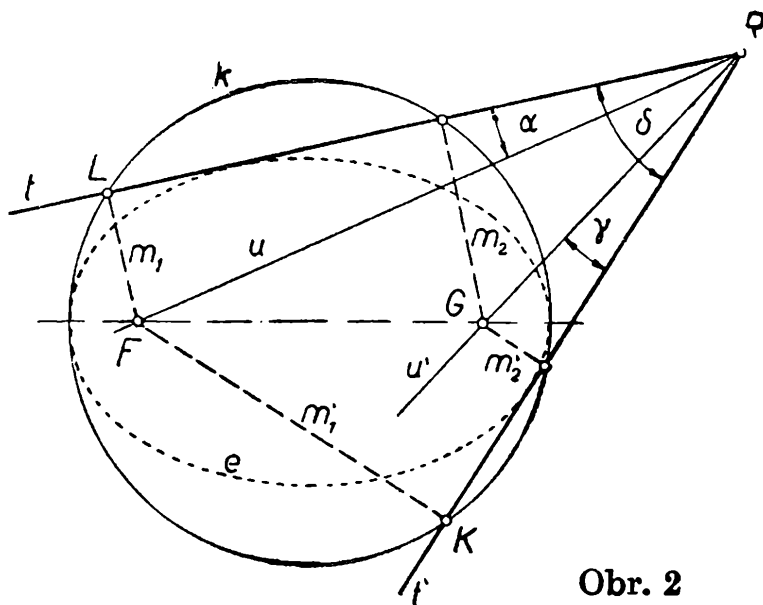
Dokážeme nasledujúcu vlastnosť dotyčnice elipsy:

V e t a 1. *Súčin vzdialeností ohnísk elipsy od jej ľubovolnej dotyčnice je hodnota stála a rovná sa štvorcu dĺžky vedľajšej poloosi elipsy.*

Dôkaz. Množinou päť kolmíc zostrojených z ohniska na dotyčnice elipsy je úpätnicová kružnica k , zostrojená nad hlavnou osou elipsy ako priemerom. Označme (obr. 1) $FP = m_1$, $GL = m_2$, kde F , G sú



Obr. 1



Obr. 2

ohniská elipsy e a P, L päty kolmíc zostrojených z ohnísk na dotyčnicu t . Zostrojme bod K súmerný k bodu L podľa stredu S elipsy e . Potom platí $FK = GL$. Ak uvažujeme mocnosť ohniska F ku kružnici k opísanej nad hlavnou osou ako priemerom platí

$$m_1 \cdot m_2 = \varepsilon \kappa,$$

kde $\kappa > 0$ a $\varepsilon = -1$ lebo F je vnútorný bod kružnice k .

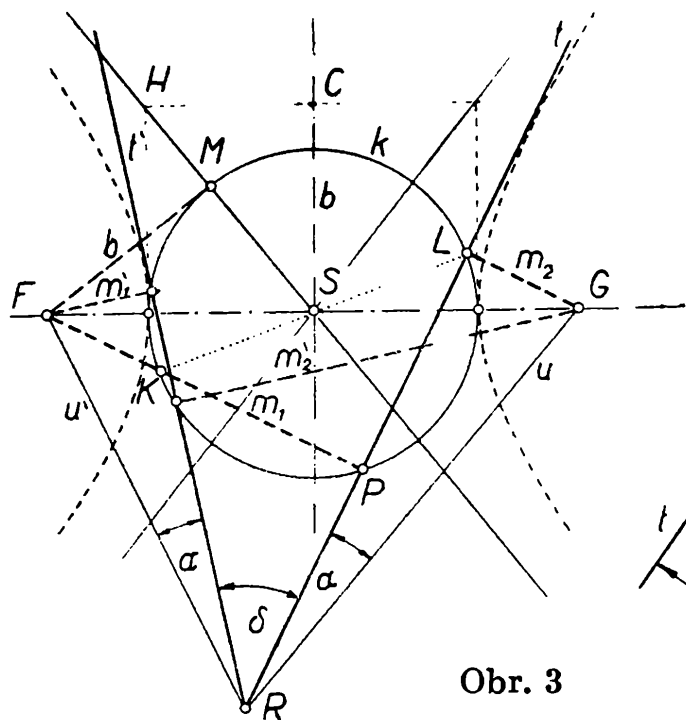
Z obr. 1 je vidieť, že konstanta $\kappa = FM^2 = b^2$. Preto je

$$m_1 \cdot m_2 = b^2,$$

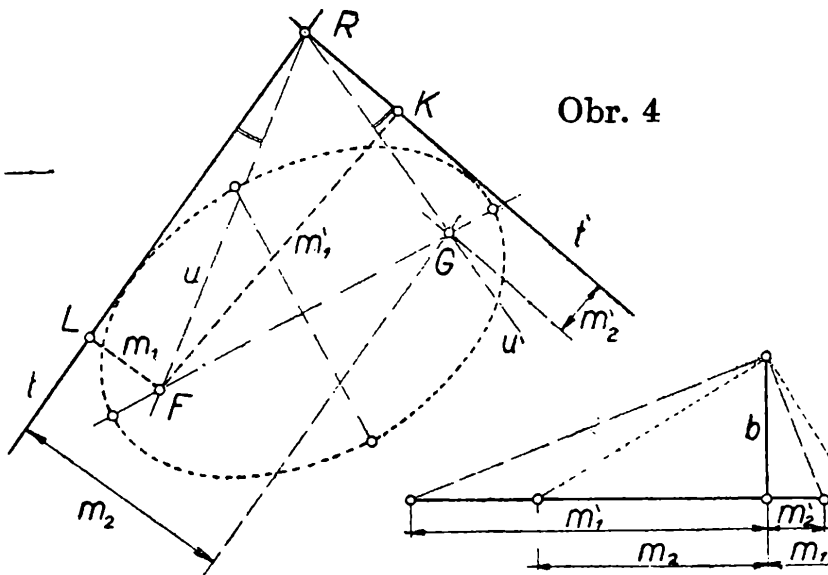
čo bolo treba dokázať.

Poznámka. Vetu 1 možno tiež vyjadriť ako vlastnosť ohniska: *Abсолютная hodnota mocnosti ohniska elipsy k jej úpätnicovej kružnici k sa rovná štvorcu vedľajšej poloosi elipsy.*

Na základe vety 1 je možné odvodiť ďalšiu vlastnosť dvoch dotyčníc elipsy:



Obr. 3



Obr. 4

V e t a 2. Ak zostrojíme dotyčnice z bodu R ku elipse a vedieme bodom R priamky idúce ohniskami F a G elipsy, potom tieto ohniskové priamky zvierajú s odpovedajúcimi dotyčnicami rovnaké uhly ($\sphericalangle LRF = \sphericalangle GRK$, resp. $\sphericalangle KRF = \sphericalangle GRL$).

Dôkaz. Z predchádzajúcej vety 1 podľa obrazu 2 môžeme písať

$$m_1 \cdot m_2 = m_1' \cdot m_2'$$

alebo tiež

$$\frac{m_1'}{m_1} = \frac{m_2}{m_2'}. \quad (2)$$

Ak označíme δ uhol medzi dotyčnicami t a t' , dostávame

$$\begin{aligned} m_1 &= FR \cdot \sin \alpha, \quad m'_1 = FR \cdot \sin (\delta - \alpha), \\ m_2 &= GR \cdot \sin (\delta - \gamma), \quad m'_2 = GR \cdot \sin \gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

Po dosadení (3) do (2) a úprave dostávame

$$\frac{\sin (\delta - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin (\delta - \gamma)}{\sin \gamma} \quad (4)$$

táto rovnosť (4) platí iba pre prípad ak $\alpha = \gamma$.

Ak podobné úvahy prevedieme u hyperboly, môžeme konštatovať, že vety 1 a 2 o dotyčniciach elipsy platia v nezmenenom rozsahu i pre hyperbolu. Z obr. 3 môžeme písať $GL = FK$. Pri uvažovaní mocností bodu F ku úpätnicovej kružnici k platí $FK \cdot FP = FM^2$ (ohnisko F je v tomto prípade vonkajším bodom kružnice k). Zo zhodnosti trojuholníkov $\triangle SCH$ a $\triangle MFS$ je vidieť, že veľkosť úsečky FM je rovná veľkosti imaginárnej poloosi b hyperboly.

Taktiež platnosť druhej vety ($\sphericalangle ut = \sphericalangle u't'$) si môže čitateľ overiť analogickým postupom ako pri dôkaze u elipsy.

Príklad. Zostrojiť elipsu, určenú ohniskom F , dvoma dotyčnicami t, t' a veľkosťou vedľajšej poloosi b . (Obr. 4).

Riešenie. Priesečník R daných dotyčníc t, t' spojíme s ohniskom F . Bodom R vedieme priamku u' tak, aby platilo $\sphericalangle ut = \sphericalangle u't'$. Zostrojíme vzdialenosti m_1 a m'_1 ohniska F od dotyčníc t, t' ; $m_1 = FL$, $m_2 = FK$. Na pomocnom obrázku zostrojíme graficky úsečku

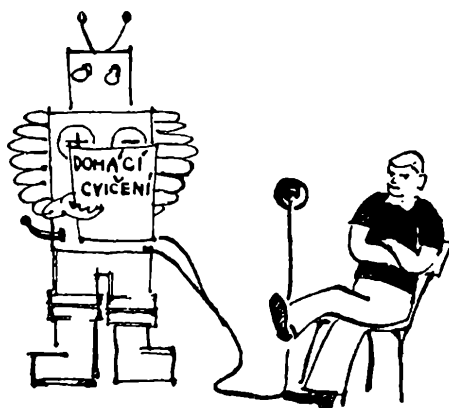
$$m_2 = \frac{b^2}{m_1},$$

resp.

$$m'_2 = \frac{b^2}{m'_1}$$

(Euklidova veta). Rovnobežka s dotyčnicou t vo vzdialenosti m_2 pretína priamku u' v druhom ohnisku G elipsy (resp. rovnobežka s dotyčnicou t' vo vzdialenosti m'_2). Po získaní druhého ohniska je už ľahké dokončiť daný príklad.

NAŠE SOUTĚŽ



Řešení úlohy loňské soutěže

Konstruktivní geometrie

3. Je dána rovina ϱ , bod M mimo ni a přímka $m \parallel \varrho$ jdoucí bodem M . Bod M je společným vrcholem podobných rovnoramenných trojúhelníků, které leží v rovinách procházejících přímkou m a jejichž základny leží v rovině ϱ . Co vytvoří vrcholy základů těchto trojúhelníků?

(Došlo 25 řešení)

Josef Novák

Řešil Pavel Polcar, III.B SVVŠ, Velké Meziříčí:

Vedme bodem M rovinu σ tak, aby $\sigma \perp \varrho$, $\sigma \perp m$. Necht MAB je jeden z uvažovaných trojúhelníků, kdy $MA = MB$ a $\sphericalangle AMB = \alpha$ je stejný pro všechny takové trojúhelníky. Pro výšku a zároveň osu MP trojúhelníka MAB platí $MP \perp m$, $MP \perp AB$. Odtud plyne, že MP náleží rovině σ . Dále přímky MA , MB svírají s přímkou MP stále úhel $\frac{\alpha}{2}$, tj. svírají stále s rovinou σ úhel $\frac{\alpha}{2}$. Odtud plyne, že při všech polohách trojúhelníka MAB opíší přímky MA , MB rotační kuželovou plochu, která má osu v přímce m a vrcholový úhel $180^\circ - \alpha$ (s výjimkou těch dvou přímek této kuželové plochy, které jsou rovnoběžné s ϱ — pak by totiž body A , B byly nevlastní). Hledané geometrické místo je pak zřejmě průsečná čára této kuželové plochy a roviny ϱ . Protože rovina ϱ je rovnoběžná s m , tj. s osou kuželové plochy je tato čára hyperbolou. Body A , B opíší tedy hyperbolu. Její hlavní osa je zřejmě průsečnice τ . ϱ roviny $\tau \perp \varrho$ položené přímkou m . Ohniska bychom mohli sestavit např. podle věty Quételetovy-Dandelinovy, která by se zde zjednodušila na rovinnou konstrukci v rovině τ .

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

V minulých číslech Rozhledů jsme uveřejnili jména našich vítězných řešitelů. Dnes otiskujeme fotografie nejlepších v celkové klasifikaci, popř. vítězů v jednotlivých oborech.

Vítězové



Vladimír Čech
v celkové soutěži první, v M 2.,
ve F 4. a DG 1.



Jozef Komorník
celkově 2.—3., v M 1.



Pavel Polcar
celkově 2.—3., v M 2., v DG 1.



Pavel Kalášek
celkově 4., ve F 2.



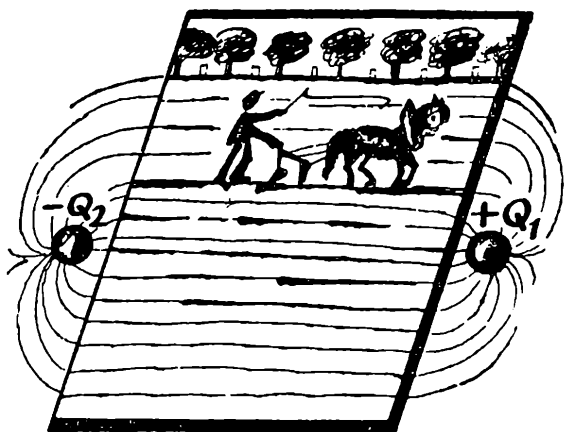
Miloš Kříž
celkově 5., v M 4., ve F 1.



Miroslav Kawalec
ve F 2.



Libor Polák
v M 5., v DG 1.



Vennovy diagramy v roli rozhodčího

JAROSLAV ŠEDIVÝ, UK, Praha

V třetím článku věnovaném množinovým diagramům poznáte, že Vennovy diagramy mohou sehrát roli rozhodčího v některých případech, kdy se s někým přete, zda určitý úsudek je logicky správný. Půjde o úsudky, které se nazývají *kategorické sylogismy* a s nimiž jste se již setkali nebo se setkáte v hodinách logiky.¹⁾ Zde však nebudeme žádné znalosti z logiky předpokládat, použijeme opět jen intuitivních představ o množinách a grafického znázornění složitějších situací.

Často slýcháme i sami říkáme „To je logické“, „To logicky vyplývá z toho, co bylo řečeno“ apod. Někdy tomu tak skutečně je, mnohdy se však mýlíme, zvláště při složitých úsudcích. Vyzkoušejte si svůj postřeh logičnosti úsudku na úloze, kterou uvedeme jako první, ale vyřešíme ji až v závěru článku:

Úloha 1. *Pět děvčat se bavilo o fyzických a duševních přednostech manekýnek. Eva tvrdila, že každá manekýnka je příjemná nebo hezká a že všechny hezké manekýnky jsou často fotografovány. Pavla prohlásila, že žádná nepříjemná manekýnka není často fotografována. Hanka řekla, že každý inteligentní člověk je příjemný; dodala však hned, že některé hezké manekýnky nejsou inteligentní a také ovšem některé inteligentní manekýnky nejsou hezké. Věra usoudila, že z toho, co děvčata dosud řekla, vyplývá, že všechny často fotografované manekýnky jsou hezké nebo inteligentní. Katka jí však oponovala a tvrdila, že z uvedených předpokladů vyplývá, že některé manekýnky jsou příjemné a inteligentní. Posuďte, která z těchto dvou dívek usuzovala logicky správně.*

¹⁾ Podrobný výklad o logické správnosti úsudků najdete též v knížce P. Materny *Umíte logicky myslet?*, která vyšla ve Státním pedagogickém nakladatelství v roce 1968.

Naznačili jsme, že nám Vennovy diagramy pomohou v posuzování logické správnosti takových úsudků. Uvidíme, jak nemilosrdně odhalují nedostatky logického myšlení i některá opomenutí, jichž se běžně dopouštíme, uvažujeme-li o množinách lidí, předmětů, jevů atd. Které množiny se však vyskytují v úvahách děvčat o manekýnkách? Dívky přece nehovoří o nějakých množinách, můžete namítat. Je pravda, že nehovoří o množinách zjevně, zároveň je však zřejmé, že můžeme v jejich výpovědích spatřovat výroky o množině všech lidí a množině všech manekýnek. V textu úlohy 1 jistě sami objevíte např. množinu všech inteligentních manekýnek, množinu všech hezkých manekýnek atd. Předpokládejme, že o každé manekýnce lze rozhodnout, do které množiny patří, pak nám nebude nic bránit v množinových úvahách o popsané situaci.

Které výroky o uvedených množinách se skrývají v citovaných výpovědích děvčat? Jde o dva typy výroků — jedny začínají slovy každý, každá, všichni, žádná apod., druhé pak slovy někteří, některé apod. Výroky prvního typu bývají nazývány *obecné soudy*, protože hovoří o vztahu všech prvků některé množiny k další množině, např. každý prvek množiny všech inteligentních lidí je prvkem množiny všech příjemných lidí. Výroky druhého typu se označují jako *částečné soudy*, protože charakterizují vztah jen některých prvků jedné množiny ke druhé množině, např. některé prvky množiny všech inteligentních lidí nejsou prvky množiny všech hezkých lidí.

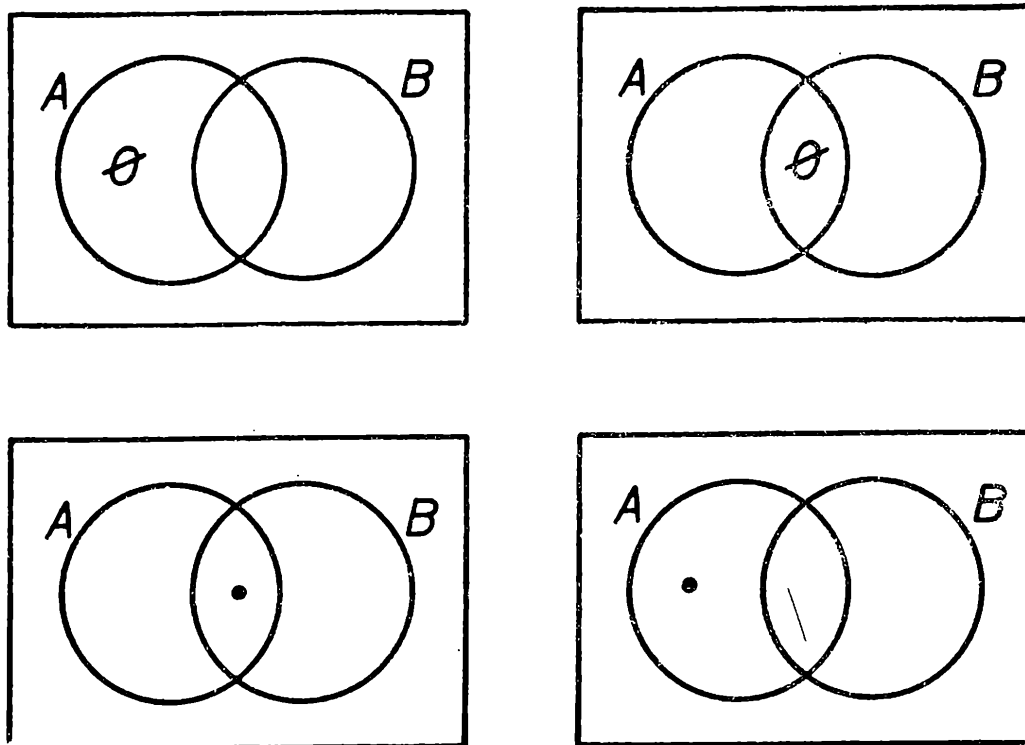
Slovní formulace výroků pomocí množinových termínů jsou zřejmě delší než původní, proto samy o sobě nenapomáhají k snadnější orientaci v úvahách. Můžeme jich však využít ke grafickému znázornění vztahů mezi množinami, a tehdy dosáhneme překvapivé přehlednosti úvah. Obecné a částečné soudy vyjadřují čtyři různé vztahy dvou množin. Označíme-li množiny písmeny A, B, jde o tyto čtyři případy:

- | | |
|--|--------------------------|
| a) Každý prvek množiny A je prvkem množiny B. | Každé a je b . |
| b) Žádný prvek množiny A není prvkem množiny B. | Žádné a není b . |
| c) Některé prvky množiny A jsou prvky množiny B. | Některá a jsou b . |
| d) Některé prvky množiny A nejsou prvky množiny B. | Některá a nejsou b . |

V pravém sloupci jsou výroky a)–d) vyjádřeny stručněji díky tomu, že libovolný prvek množiny A je označen písmenem a a libovolný prvek množiny B písmenem b . Ukažme si nyní jeden způsob grafického znázornění výroků a)–d) na Vennových diagramech se dvěma kruhy (obr. 1a–d). Na obr. 1a má být vyjádřena situace, že každý prvek množiny A je prvkem množiny B. Při představě, že prvky množiny A umístíme dovnitř kruhu A a prvky množiny B dovnitř kruhu B, to znamená, že v políčku se značkou $\emptyset$ není žádný prvek množiny A (všechny prvky množiny A jsou v průniku obou kruhů). Symbol $\emptyset$ nepochybně již znáte jako symbol pro množinu bez prvků, tzv. *prázdnou množinu*, v tomto významu jej budeme používat. Na obr. 1b je obdobně

použít ke znázornění situace, že žádný prvek množiny A není prvkem množiny B.

Na obr. 1c chceme znázornit výrok c), který popírá (neguje) výrok b) a zaručuje existenci aspoň jednoho prvku množiny A, který je prvkem množiny B. Použijeme v tomto případě plného kroužku k vy-



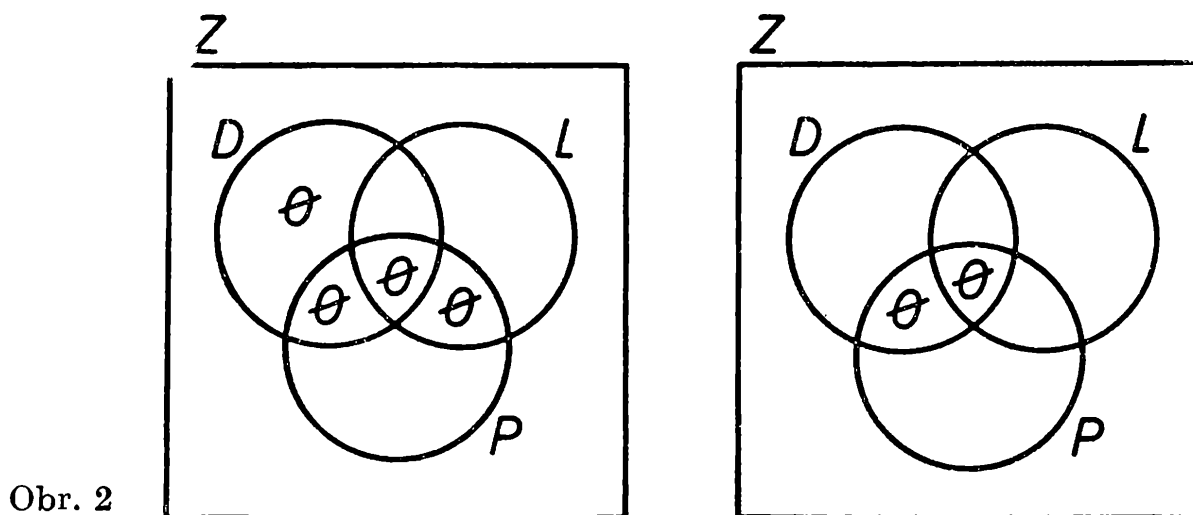
Obr. 1

značení skutečnosti, že v průniku kruhů A, B by bylo možno zakreslit aspoň jeden prvek. Obdobným způsobem je na obr. 1d znázorněn výrok d), který zaručuje existenci aspoň jednoho prvku množiny A, jenž není prvkem množiny B. Tím opět výrok d) popírá (neguje) výrok a).

Vennovy diagramy se značkami $\emptyset$, $\bullet$ pro prázdnotu, resp. neprázdnotu příslušných políček diagramu slouží ke kontrole správnosti úsudků složených pouze z obecných a částečných soudů. Příklad takového usuzování jsme poznali již v textu úlohy 1, kde čtenář jistě snadno objeví mezi předpoklady tři soudy typu a), jeden soud typu b) a dva soudy typu d); Věřino tvrzení je typu a), Katčino typu c). Kontrolu správnosti tohoto úsudku se šesti předpoklady a dvěma tvrzeními provedeme až v závěru článku, nejprve se zaměříme na úsudky se dvěma předpoklady a jedním tvrzením. Pro osvěžení se budeme zabývat úlohami z anglických učebnic, které mají všechny znaky suchého humoru.

Úloha 2. *Posuďte správnost tohoto úsudku: Jestliže je pravda, že každý duševně zdravý člověk může studovat logiku a přitom žádný z vašich přátel ji studovat nemůže, pak z toho plyne, že žádný z vašich přátel není duševně zdrav.*

To nemá být útok na vaše přátele, ale spíše na vaši schopnost usuzovat. Vytkněme nejprve, o které množiny zde půjde. Základní množinou bude nepochybně množina všech lidí, dále musíme uvažovat o množině D všech duševně zdravých lidí, o množině P všech vašich přátel a o množině L všech lidí, kteří mohou studovat logiku. Tyto tři množiny D , L , P znázorníme Vennovým diagramem ve tvaru trojlístku (obr. 2a, b).



Na obr. 2a vyznačíme pomocí symbolu θ (—) předpoklady; můžeme si opět pomoci představou kruhů, do nichž vstupují právě ti lidé, kteří mají charakteristickou vlastnost prvků příslušné množiny. Podle prvního předpokladu musí všichni duševně zdraví lidé stát uvnitř kruhu D a zároveň uvnitř kruhu L , proto zůstanou prázdná obě políčka v kruhu D , která nejsou částmi kruhu L . Druhý předpoklad vede k tomu, že vaši přátelé stojící uvnitř kruhu P nesmějí stát uvnitř kruhu L , proto zůstanou prázdná dvě políčka v průniku kruhů P , L . Celkem tedy zakreslíme na obr. 2a čtyři značky prázdné množiny.

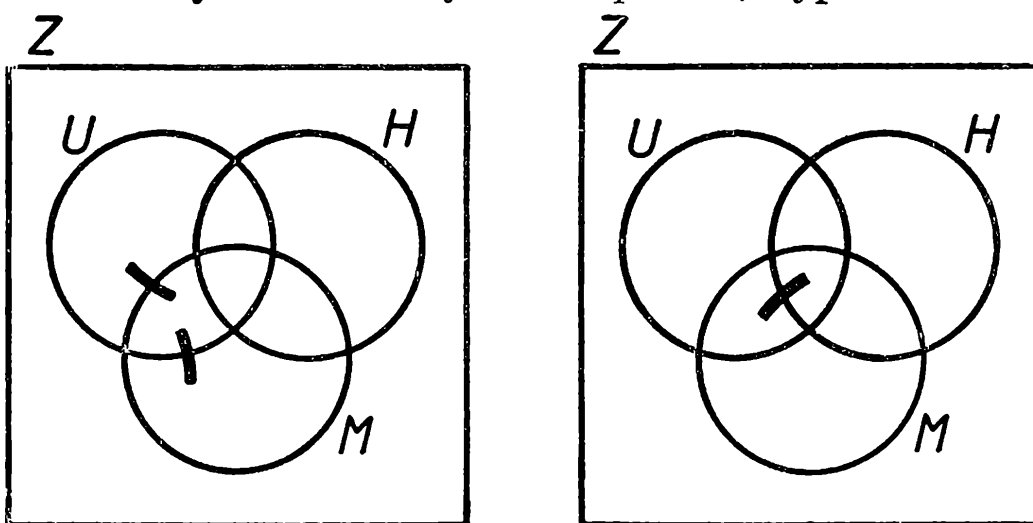
Na obr. 2b symbolicky znázorníme závěrečné tvrzení, že žádný z vašich přátel není duševně zdravý. Zřejmě toho dosáhneme tak, že zakreslíme značku prázdné množiny do obou políček v průniku kruhů D , P . A nyní se pouhým pohledem na obr. 2a, b přesvědčíme, že při platnosti obou předpokladů je již na obr. 2a zajištěna prázdnost obou políček v průniku kruhů D , L , tj. pravdivost tvrzení. Úsudek popsany v textu úlohy 2 je tedy logicky správný, i když jeho závěrečné tvrzení, doufejme, není pravdivé. To svědčí ovšem jen o tom, že není vše v pořádku s pravdivostí předpokladů, nedotýká se to však správnosti úsudku.

Úloha 3. *Posudte správnost tohoto úsudku: Jestliže je pravda, že někteří úředníci nemají smysl pro humor a že i někteří moudří lidé nemají smysl pro humor, pak z toho vyplývá, že někteří úředníci jsou moudří lidé.*

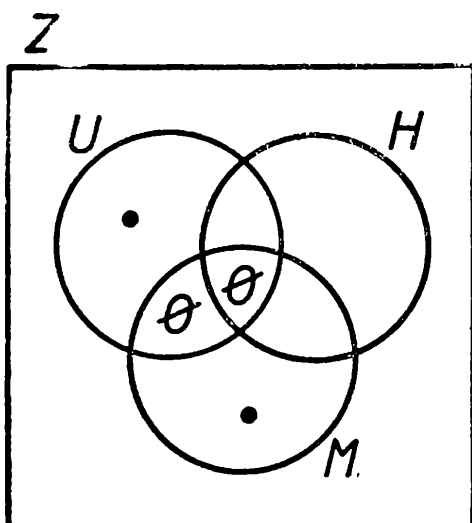
Posuzování správnosti tohoto úsudku bude obtížnější, protože jde o částečné soudy. Nenechme se zmást tím, že tvrzení „někteří úředníci

jsou moudří lidé“ je jistě pravdivé; my musíme posoudit, zda nutně vyplývá z uvedených předpokladů. V množinové úvaze se jistě uplatní základní množina Z všech lidí, dále množina U všech úředníků, množina H všech lidí se smyslem pro humor a množina M všech moudrých lidí. Na obr. 3a jsou tyto tři množiny znázorněny pomocí kruhů, do nichž budou příslušní lidé v naší představě vstupovat.

Podle prvního předpokladu musí existovat aspoň jeden úředník (člověk stojící uvnitř kruhu U), který nestojí uvnitř kruhu H , pak ovšem musí stát v některém ze dvou políček kruhu U , která nejsou částmi kruhu H . Protože nevíme, ve kterém políčku stojí, nemůžeme zakreslit symbol $\bullet$ do jediného políčka; vypomůžeme si však „roz-



Obr. 3



Obr.4

máznutím“ takové značky do obloučku zasahujícího obě zmíněná políčka (obr. 3a). Obdobně je znázorněn druhý předpoklad, který zaručuje, že aspoň jeden člověk stojící uvnitř kruhu M nestojí uvnitř kruhu H . Na obr. 3b je znázorněno tvrzení úsudku, že v průniku kruhů U , M musí stát aspoň jeden člověk. Správnost úsudku zde nemůžeme posoudit jen na základě pohledu na obr. 3a, b, protože každý oblouček zasahující do dvou políček představuje tři možnosti — neprázdné může

být jen první políčko, nebo jen druhé, nebo obě dvě. Velmi často některá z těchto možností vyvrací správnost úsudku, na obr. 4 vidíte takovou situaci. Neprázdná jsou dvě políčka se symboly $\bullet$, zatímco políčka v průniku kruhů U , M jsou prázdná. I tehdy jsou splněny oba předpoklady úsudku, ale není pravdivé jeho tvrzení, proto toto tvrzení nevyplyvá z předpokladů nutně a úsudek není logicky správný.

Série Mm, úloha Mm - 2

Jirka je přeborníkem ve vymýšlení nových her, je však také mistrem v tom, jak změnit jednoduchá pravidla v složitější rébusy. Právě teď navrhuje Karlovi novou hru; sledujte pozorně jejich rozhovor.

Jirka: „V tomto sáčku je šest červených, šest bílých, šest modrých a šest zelených kuliček. Budeme z něho střídavě vytahovat skupiny po šesti kuličkách, za některé šestice získá ten, kdo je vytáhne, jeden bod, za ostatní nezíská nic. Po každém tahu vrátíme kuličky zpět do sáčku. Kdo z nás dosáhne po deseti tazích více bodů, vyhraje.“

Karel: „Tak to zkusme, ale za které šestice získám jeden bod?“

Jirka: „Dávej pozor. Budou-li mít kuličky z šestice, kterou vytáhneš, aspoň tři různé barvy, dostaneš bod jen tehdy, nebude-li mezi nimi modrá spolu se zelenou. Budou-li vytažené kuličky mít jen dvě různé barvy, dostaneš za takovou šestici bod, pokud bude aspoň jedna z kuliček červená, ale nepůjde-li o bílé a červené kuličky. Vytáhneš-li kuličky stejné barvy, dostaneš bod v případě, že nejsou červené ani bílé. V ostatních případech nedostaneš žádný bod.“

Karel se po chvílce přemýšlení usmál a řekl: „Jednoduše to lze říci tak, že bod dostanu za každou šestici aspoň s jednou zelenou nebo modrou kuličkou, pokud v ní není zastoupena ani barva bílá bez červené ani červená barva se zelenou a modrou. Za ostatní šestice nedostanu nic. Je to tak?“

Za Jirku odpovězte vy, řešitelé našeho seriálu úloh z moderní matematiky. Posuďte, zda Karlova formulace pravidel zaručuje, že by za každou možnou šestici kuliček hráč dostal totéž bodové ohodnocení, jako podle Jirkových pravidel. Výhodně můžete uplatnit Vennovy diagramy pro čtyři množiny, zvolíte-li za charakteristické vlastnosti šestice to, zda obsahují aspoň jednu kuličku té či oné barvy. Svá řešení se zdůvodněním konečné odpovědi zašlete redakci. Připojte též svůj návrh, jak lze co nejstručněji, ale přesně vyjádřit Jirkova pravidla.

Řešení úlohy Mm - 1

Nakreslíme si Vennův diagram pro čtyři množiny A , V , T , K zaměstnanců, kteří jezdí autobusem, vlakem, tramvají, na kole. Na základě údajů můžeme vyplnit počty lidí ve čtyřech políčkách diagramu, která tvoří průnik množin A , T ; do ostatních políček napíšeme písmena

podle obrázku. Podmínky úlohy zapíšeme ve tvaru soustavy deseti rovnic o 12 neznámých

$$a + b + c + d + e + f + g + h + k + l + m + n = 116, \quad (1)$$

$$a + c + e + h = 35, \quad (2)$$

$$b + d + g + k + m = 22, \quad (3)$$

$$f + l = 6, \quad (4)$$

$$a + b + l + m = 34, \quad (5)$$

$$b + c + d + f + k + l = 11, \quad (6)$$

$$d + e + f + g = 14, \quad (7)$$

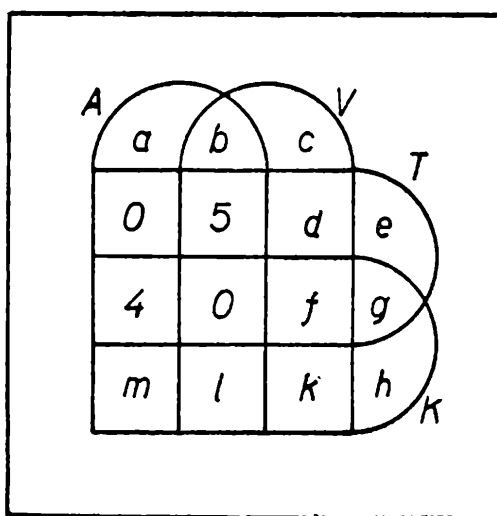
$$f + g + h + k + l + m = 38, \quad (8)$$

$$g + h = 10, \quad (9)$$

$$k + l + m = 24. \quad (10)$$

Odečteme-li od (1) součet (2) + (3) + (4), získáme $n = 53$ a tím odpověď na první úkol. Odečteme-li od (8) součet (9) + (10), vypočítáme $f = 4$; potom ze (4) vyjde ihned $l = 2$ a z (10) plyne $k + m = 22$. Po dosazení tohoto čísla do (3) získáme rovnost $b + d + g = 0$ pro nezáporná čísla b, d, g , proto $b = 0, d = 0, g = 0$. Z rovnice (9) pak

125



Obr. 1

získáme $h = 10$, z rovnice (7) dostaneme $e = 10$, tato dvě čísla poskytují odpověď na další dva úkoly řešitele.

Dosadíme-li dosud získané výsledky do rovnic (1) až (10), dostaneme pět rovnic se zbývajících neznámými

$$a + c = 15,$$

$$a + m = 32,$$

$$c + k = 5,$$

$$k + m = 22,$$

$$a + c + k + m = 37$$

Tyto rovnice jsou navzájem závislé a neumožňují jednoznačné určení neznámých a, c, k, m . Třetí z těchto rovnic poskytuje možnost pro

vymezení počtu různých řešení, protože neznámá c může nabývat jen celočíselných nezáporných hodnot, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, pak $k = 5, 4, 3, 2, 1, 0$, $a = 10, 11, 12, 13, 14, 15$, $m = 22, 21, 20, 19, 18, 17$. Na poslední otázku úlohy lze tedy odpovědět, že vlaku jako jediného dopravního prostředku používá nejvýše pět lidí.

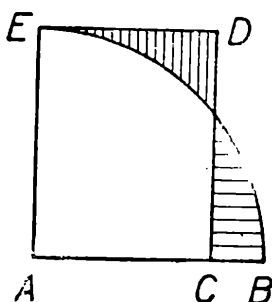
19. Za horkého letního dne vypily 4 manželské páry 33 sklenic nápojů. Jana vypila jednu, Irena dvě, Božena tři a Karla čtyři sklenice. Muži měli větší žízeň. Pan Novák vypil sice jen tolik co jeho žena, avšak pan Nožička dvakrát, pan Nebeský třikrát a pan Novotný čtyřikrát více sklenic než jeho žena. Určete úplná jména všech čtyř žen.

20. Liška je pronásledována psem; má náskok 18 skoků. Do délky se vyrovnají 4 skoky lišky třem psím. Zatímco pes udělá 4 skoky, vykoná jich liška 5. Po kolika skocích dostihne pes lišku?

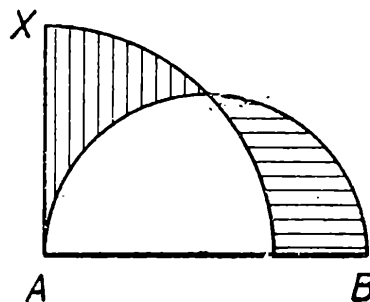
21. Dva obchodníci prodávají zboží za tutéž cenu. První z nich však nabízí 25 % slevy z ceny zboží, druhý dává zákazníkovi o 30 % zboží navíc. Která nabídka je výhodnější?

22. Jestliže v trojčíslném čísle dělitelném sedmi jsou krajní cifry stejné, pak součet jeho dvou nestejných cifer je také dělitelný sedmi.

23. a) Je dán čtvrtkruh o poloměru $AB = AE = 4$; sestrojte obdélník $ACDE$ tak, aby vyčárkované obrazce měly stejný obsah (obr. 1).



Obr. 1



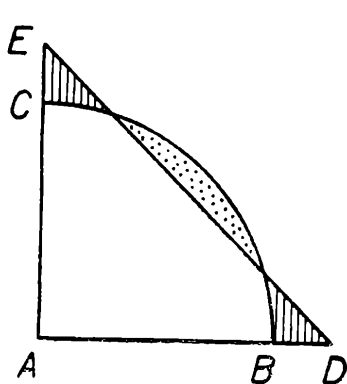
Obr. 2

b) Nad průměrem $AB = 4$ je sestrojen půlkruh. Sestrojte takový čtvrtkruh poloměru AX , aby vyčárkované obrazce měly též obsah (obr. 2).

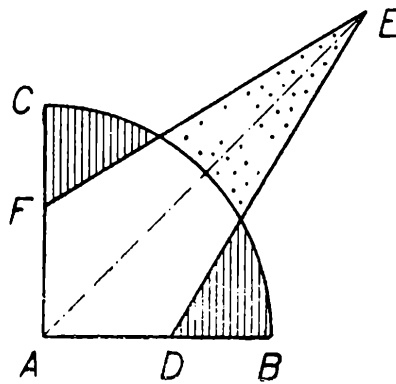
c) Je dán čtvrtkruh o poloměru $AB = AC = 4$; sestrojte pravoúhlý

rovnoramenný trojúhelník ADE ($AD = AE$), aby obsahy vyčárkovaných obrazců se rovnaly obsahu obrazce vytečkovaného (obr. 3).

d) Je dán čtvrtkruh poloměru $AB = AC = 4$. Sestrojte deltoid $ADEF$, jehož úhlopříčka $AE = 2 \cdot AB$ tak, aby obsahy vyčárkovaných obrazců se rovnaly obsahu vytečkovaného obrazce (obr. 4).



Obr. 3



Obr. 4

Které z daných úloh lze řešit euklidovsky, tj. jen pravítkem a kružítkem?

(Podle západoněmeckého časopisu Archimedes upravil O. Setzer.)

FYZIKÁLNÍ ZAJÍMAVOSTI

Znáte zákon zachování energie?

Někdo vynáší denně kbelík uhlí ze sklepa do bytu ve třetím poschodí. Touto mechanickou prací získává vynesené uhlí vždy určitou potenciální tíhovou energii. Kam se však tato energie poděje, když uhlí spálíme? Nezískáme snad z tohoto uhlí také více tepla?

Be

Vlak jede rychlostí u . Střela hmotnosti m a rychlosti v dožene vlak a zaryje se do zadní stěny posledního vagónu. Určete energii, která se uvolní po dopadu střely ve formě tepla.

Dva studenti, kteří řešili tuto úlohu, uvažovali takto:

Prvý: Do dopadu střely je její energie $\frac{1}{2}mv^2$, po dopadu je $\frac{1}{2}mu^2$. To znamená, že střela ztratila energii rovnou $\frac{1}{2}m(v^2 - u^2)$ a tato část kinetické energie se přeměnila v teplo.

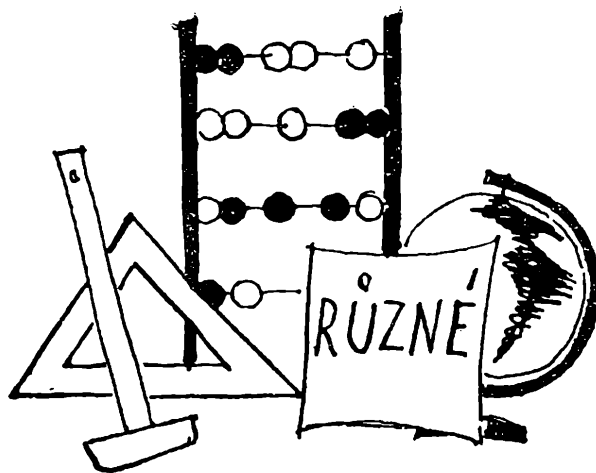
Druhý: Poněvadž relativní rychlost střely vzhledem k vlaku je rovna $v - u$, bude energie, která se přemění v teplo $\frac{1}{2}m(v - u)^2$.

Který ze studentů má pravdu?

Zdeněk Janout

Zkapalnění helia

JOSEF KOTYK, Pardubice



Vzpomínka k 60. výročí prvního zkapalnění helia

Když Faraday (1791—1867) zobecnil známou zkušenost, že např. sloučenina H_2O se vyskytuje jednak jako voda, jednak jako led nebo vodní pára, v domněnku, že obdobně všechny látky existují ve skupenství pevném, kapalném i plynném, netušil, jak obtížné bude někdy realizovat různé podmínky, např. velmi nízké teploty, za nichž je možné pouhé zkapalnění některých plynů. Pokusům zkapalnění vzdorovalo úporně, a proto i nejdéle helium. Bylo ještě v prvních letech tohoto století pokládáno za tzv. plyn permanentní (trvalý). Teprve dne 10. července 1908 o 19,30 hodině dostavil se okamžik památný historicky, v němž slavný holandský fyzik Heike Kamerlingh Onnes (1853—1926) a jeho spolupracovníci spatřili poprvé kapalně helium v laboratořích proslulého kryogenního ústavu university v Leidenu. Pro zajímavost uvádím, že běželo asi o 60 cm^3 látky udržující se po dvě hodiny v kapalném, snadno pohyblivém stavu. Za tlaku 1 at vřela tato kapalina při teplotě $-268,6^\circ\text{C}$. Jestliže vřela při velmi nízkém napětí, klesla teplota až na $-272,2^\circ\text{C}$ — nejnižší hodnotu v té době dosaženou (tzv. nadir teploty).

Jak mohl Onnes dosáhnout „chládku“ tak znamenitého, teplot tak enormně nízkých? Řeknu ihned, že mu nešlo o žádný druh sportu, nýbrž o vyšší triumfy, o vědecké zkoumání fyzikálních vlastností látek v blízkosti absolutní nuly 0°K , které podle třetí hlavní termodynamické věty, z důvodů teoretických, nelze dosáhnout.

Za východisko při získávání nízkých teplot slouží plyn, který lze poměrně snadno zkapalnit, zpravidla CH_3Cl . Za pokojové teploty stačí k tomuto účelu tlak asi 6 at. Nechá-li se kapalina z tohoto plynu vzniklá mocně vypařovat, ochlazuje se až na teplotu -90°C , při níž lze dost pohodlně zkapalnit plyn C_2H_4 , etylén. Mocným odsáváním par ze získané kapaliny dospěje se k jejímu ochlazení až na teplotu

—145 °C, při níž lze značným stlačením zkapalnit kyslík. Mocným odpařováním kapalného kyslíku lze dospět k teplotám, při nichž zkapalní velmi levný materiál — vzduch, jímž možno dojít teploty až —190 °C.

Tato metoda, kterou se teplota snižuje postupně, se nazývá kaskádní (stupňová), někdy též Pictetova. S úspěchem jí používali zejména také zasloužilí badatelé polští Wróblewski a Olszewski. Použitím nízké teploty, kterou získali na předcházejícím stupni a stlačením přivodili zkapalnění plynu a mocným odpařováním pak další ochlazení. Odsávané páry se znovu stlačily a kapalněly. Onnes dosahoval mimo to značné úspornosti tím, že v každém cyklu odsával zkapalněný plyn, jenž vykonal svůj úkol a vypařil se. Tyto odsávané a velmi studené páry vedl Onnes kolem kovových spirál, tzv. regenerátorových spirál, jimiž postupoval další plyn ke svému zkapalnění a dosáhl jeho kondenzace již dříve, než plyn vstoupil do kondenzátoru. Onnes zařídil také stálou chladicí lázeň, udržovanou vypařováním a opětným zkapalňováním (le y d e n s k á k a s k á d a), jež mu umožňovala pracovat za teplot až —200 °C. Kapalný vzduch sebechladnější má však teplotu vždy vyšší, než je např. kritická teplota vodíku (—240 °C) nebo helia (—268 °C). Zkapalnění těchto plynů za teplot dosažitelných vylíčenou metodou kaskádní nemohlo se proto zdařit ani tlaky sebe vyššími. Podmínkou nutnou ke zkapalnění plynů podle výsledků teoretických úvah v a n d e r W a a l s o v ý c h¹⁾ a zkušeností A n d r e w s o v ý c h²⁾ je snížení jejich teploty pod teplotu kritickou, tedy další pronikavé ochlazení plynů.

Obtíže, které nastaly, podařilo se úspěšně zdolat využitím tzv. j e v u J o u l e - T h o m s o n o v a (K e l v i n o v a). Nechá-li se plyn značně ochlazený a silně stlačený rychle rozepnout na malé napětí, koná na účet své tepelné energie jednak práci na překonání soudržnosti svých molekul, jednak práci proti vnějšímu tlaku, jeho teplota tedy značně klesne. Tak se Olszewskému roku 1895 podařilo srazit v o d í k v m l h u, ochlazený kapalným kyslíkem a stlačený na 150 at, při prudkém rozepnutí na 20 at. Vodíková lázeň skýkala pak teploty —252,5 °C až —259 °C.

Význam vylíčeného postupu vynikl jasně i při zkapalnění helia,

¹⁾ J o h a n n e s D i d e r i k v a n d e r W a a l s (1837—1923) byl profesorem fyziky na universitě v Amsterdamu. Jeho rovnice pro stav plynu a zákon korespondujících (souhlasných) stavů staly se nezbytným vodítkem při zkapalňování vodíku a helia.

²⁾ T h o m a s A n d r e w s (1813—1885) byl profesorem chemie na Queen's College v rodném Belfastu v Irsku. Čtenářům jsou známy jeho diagramy, zobrazující závislost napětí nasycených par na teplotě (viz učebnici fyziky pro II. ročník SVVŠ — 1965, obr. 84, str. 93) i jejich význam.

kde Onnes použil roku 1908 téže metody jako u vodíku. Stlačené helium, jež ochladil na teplotu kapalného vodíku, nechal expandovat, čímž se ještě více ochladilo a konečně rovněž z k a p a l n ě l o. „Hladina kapaliny se stala velmi zřetelnou zrcadlením světla,“ zaznamenal Kamerlingh Onnes ve svém sdělení Akademii věd v Amsterdamu. „Jakmile byla jednou spatřena, nebyla již spuštěna z očí. Stála kolmo ke stěně nádoby.“³⁾

Není účelem těchto řádků zabývat se rozmanitým (často velmi speciálním) používáním helia v praxi. Dodám jen, že spotřeba, a proto i výroba helia stoupá tak, že vyráběná denní množství helia nebylo by v plynném skupenství možné skladovat. Zkapalněním helia lze však dosáhnout přibližně 800násobného využití objemu. Podle údajů časopisu „Pokroky matematiky, fyziky a astronomie“, roč. XIII (1968), čís. 3, str. 198—200; vyrobí jediný závod v USA denně 14 400 l kapalného helia. Celková výroba v USA překročila v roce 1965 na 20 miliónů m³. Po amerických dálnicích přepravují kapalné helium „cisterny“, objemu 35 000 l. Dodávky kolem 3500 l může kterýkoli zákazník na naší planetě dostat letecky během 48 hodin. Pro skladování kapalného helia používané „termosky“, zv. Dewarovy nádoby⁴⁾ z nerezavějící oceli, s objemem až 230 m³, jsou tak dokonalé, že denní úbytek kapalného obsahu odpařením nedosahuje ani 1,5 %. Útok člověka na poslední „permanentní“ plyn se setkal úspěchem opravdu mimořádným. Událost, ke které došlo p e l 60 lety v slavné kryogenní laboratoři v Leidenu, „nejchladnějším“ místě našeho pozemského světa, má proto v dějinách fyziky mimořádný význam.

Přijímací zkouška v minulém století

VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, Praha

Slavný astronom François Arago (1786—1853) — křestní jméno François uvádí historik W. Ahrens, historik Dirk I. Struik uvádí křestní jméno Dominique — studoval již na lyceu (dnešní střední škole) matematické spisy klasiků Eulera, Lagrangeho. Měl jít na techniku, která se nazývala l'École Polytechnique. Byla to vysoká škola, která vychovávala dělostřelecké důstojníky a inženýry, kteří stavěli mosty a opevnění. Studium na ní bylo internátní a trvalo dva roky. Přijímací

³⁾ Širší výtah z Onnesovy zprávy uveřejnil O. Tomíček v časopise „Chemické listy pro vědu a průmysl“, roč. XX (1926), str. 144—148

⁴⁾ J a m e s D e w a r (1842—1923) byl profesorem chemie na Royal Institution v Londýně. Jeho nádoby pro uchování zkapalněných plynů mají v podstatě podobnou úpravu jako kalorimetry s vakuem.

zkoušky se konaly v provinciálních městech a zkoušeli na nich profesori polytechniky, kteří své příští posluchače neznali.

Arago se podrobil zkoušce v Toulouse ještě s jedním svým krajanem před Ludvíkem Mongem (1748—1827), který byl bratrem Gasparde Mongeho, slavného geometra, po němž je nazváno pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny.

Krajan Araga měl tzv. „horečku zkoušení“ a u přijímacího pohovoru propadl. O své zkoušce napsal Arago ve své knize „Historie mého mládí“ v podstatě toto:

Jakmile jsem předstoupil před svého examinátora, rozpředl se mezi mnou a jím tento zvláštní rozhovor. Monge začal: „Kdybyste měl odpovídat jako Váš krajan, bylo by zbytečné, abych se Vás vůbec na něco ptal.“

Odpověděl jsem: „Pane, můj kamarád zná mnohem víc, než ukázal. Doufám, že budu šťastnější než on, ale to, co jste mně právě řekl, by mne mohlo jen zastráhit a oloupit o všechny moje schopnosti.“

Monge na to odpověděl: „Ostýchavost je vždy omluvou pro neznalost. Abych Vám uspořil ostudu propadnutí, navrhuji Vám, že Vás nebudu vůbec zkoušet.“

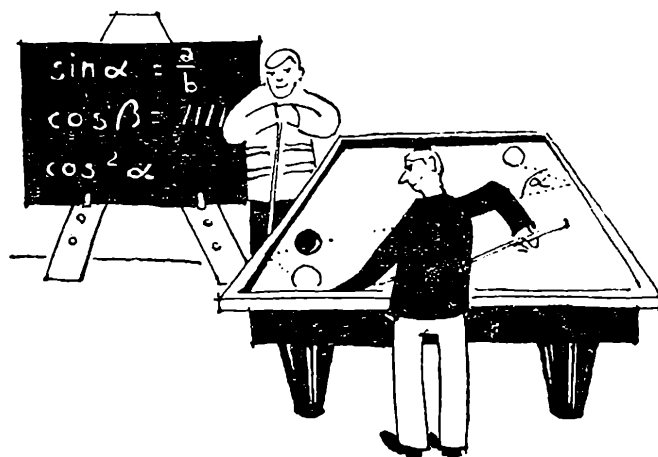
Na to jsem řekl: „Neznám žádnou ostudu, která je větší než ta, kterou mně nabízíte. Prosím, položte mi otázku, je to Vaše povinnost.“

Examinátorova odpověď byla: „Mluvíte sympaticky. Uvidíme, je-li Vaše pýcha oprávněna.“

Na to mně dal Monge otázku z geometrie a po mé odpovědi začal jeho předsudek proti mně ustupovat. Další otázka byla z algebry, a to řešení numerické rovnice. Lagrangeův spis o rovnicích jsem znal a předvedl jsem Mongemu všechny známé způsoby řešení i jejich přednosti a nedostatky tak, jak je uváděl Lagrange (Joseph Louis Lagrange byl již ve svých 19 letech profesorem matematiky na dělostřelecké škole v Turině).

Po této „exhibici“ řekl Monge: „Mohli bychom již ukončit tuto zkoušku, ale pro své uspokojení chci Vám položit ještě dvě otázky. Jaký je vztah mezi křivkou a její tečnou?“ Sáhl jsem opět k Lagrangeovi, a to tentokrát k jeho „*Traité des fonctions analytique*“ (Pojednání o analytických funkcích). Monge ukončil zkoušku otázkou o napětí vláken. K odpovědi jsem použil opět Lagrangeho, a to jeho „*Mécanique analytique*“. Tak se ukázalo, že moje odpovědi vycházely z Lagrangeových děl. Zkouška trvala 2 $\frac{1}{4}$ hodiny. Potom Monge vstal, objal mne a řekl slavnostně, že jsem u něho prvním mezi jeho posluchači.

Tuto scénu uvádíme, abyste si mohli udělat představu o jedné přijímací zkoušce, která byla jistě výjimečná. Arago měl ještě při studiu jinou výjimečnou zkoušku, nebo lépe řečeno scénu u zkoušky, ale o tom jindy.



MATEMATIKA

0 celej časti reálneho čísla a funkcii $y = [x]$

JOZEF ELIAŠ, Bratislava

V matematike sa veľmi často vyšetrujú nespojité funkcie. Zaujímavé sú nespojité funkcie, ktoré obsahujú celú časť nezávisle premennej alebo sú definované pomocou funkcie celá časť. V tomto článku uvedieme definíciu celej časti reálneho čísla, definíciu funkcie celá časť, ich niektoré vlastnosti a niekoľko príkladov.

Definícia 1. Nech x je ľubovoľné reálne číslo. Celou časťou reálneho čísla x rozumieme najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako číslo x .

Označujeme ju $E(x)$, alebo $[x]$. Platí teda

$$x - 1 < E(x) \leq x,$$

alebo

$$x - 1 < [x] \leq x$$

V ďalšom budeme používať iba označenie $[x]$.

Napríklad

$$\begin{aligned} [2] &= 2, [2,3] = 2, [3,9] = 3, [0,5] = 0, \\ [0] &= 0, [-0,7] = -1, [-1,3] = -2, [-1] = -1 \end{aligned}$$

V e t a 1. Nech x, y sú ľubovoľné reálne čísla. Potom platí

- $[x + k] = [x] + k$, kde k je celé číslo;
- $[x + y] \geq [x] + [y]$;
- $\left[\frac{[x]}{k} \right] = \left[\frac{x}{k} \right]$, kde k je celé kladné číslo.

D ô k a z. a) Z nerovnosti $x - 1 < [x] \leq x$, ktorá platí pre každé reálne číslo x , vyplýva nerovnosť

$$x + k - 1 < [x] + k \leq x + k,$$

kde k je celé číslo. Z tejto nerovnosti je vidieť, že $[x] + k$ je najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako $x + k$, teda platí

$$[x] + k = [x + k].$$

b) Pre každé reálne číslo x, y z definície celej časti čísla x, y vyplýva

$$x - 1 < [x] \leq x, \quad (1)$$

$$y - 1 < [y] \leq y. \quad (2)$$

Sčítaním nerovností (1) a (2) dostaneme nerovnosť

$$x + y - 2 < [x] + [y] \leq x + y. \quad (3)$$

Podľa definície celej časti $x + y$ je

$$x + y - 1 < [x + y] \leq x + y. \quad (4)$$

Z nerovností (3) a (4) vyplýva $[x + y] \geq [x] + [y]$.

c) Z nerovnosti $x - 1 < [x] \leq x$, ktorá platí pre každé reálne číslo x , pre celé kladné číslo k vyplýva nerovnosť

$$\frac{x - 1}{k} < \frac{[x]}{k} \leq \frac{x}{k}$$

Z tejto nerovnosti vyplýva nerovnosť

$$\frac{x}{k} - 1 \leq \frac{x - 1}{k} < \frac{[x]}{k} \leq \frac{x}{k}.$$

Odtiaľ je

$$\frac{x}{k} - 1 < \frac{[x]}{k} \leq \frac{x}{k}$$

Z tejto nerovnosti vidieť, že

$$\left[\frac{[x]}{k} \right]$$

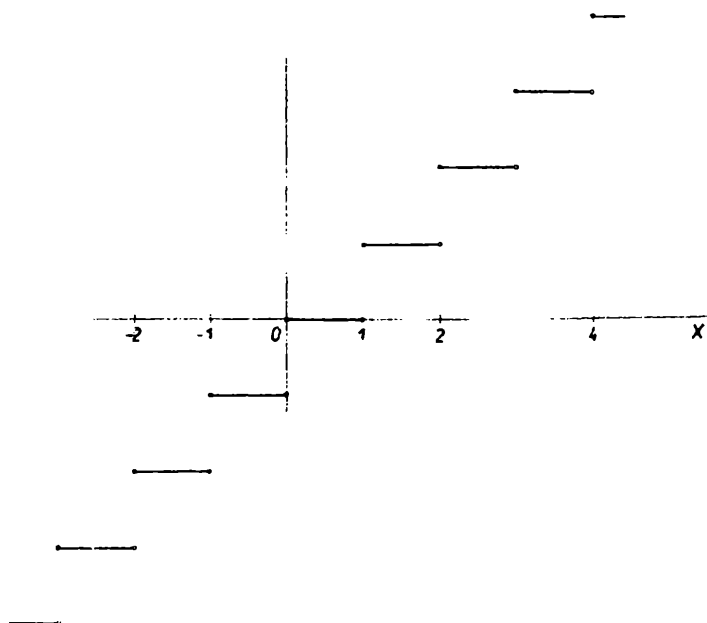
je najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako

$$\left[\frac{x}{k} \right],$$

teda

$$\left[\frac{[x]}{k} \right] = \left[\frac{x}{k} \right].$$

Teraz uvedieme definíciu funkcie $y = [x]$.



Obr. 1

Definícia 2. Nech M je množina všetkých reálnych čísiel. Predpis, podľa ktorého každému reálnemu číslu $x \in M$ priradíme jeho celú časť, nazývame funkciou celá časť x .

Označujeme ju $y = E(x)$, alebo $y = [x]$.

Príklad 1. Nakreslime graf funkcie $y = [x]$.

Riešenie. Funkcia $y = [x]$ je definovaná pre všetky reálne čísla x . Jej grafom je množina všetkých bodov (a, b) , kde $a \in (-\infty, \infty)$ a $b = [a]$.

Pre všetky čísla a , pre ktoré platí $0 \leq a < 1$, je $[a] = 0$, preto všetky body $(a, 0)$ sú bodmi grafu funkcie $y = [x]$. Graf funkcie $y = [x]$ na intervale $<0, 1)$ je totožný s úsečkou, ktorá je určená bodmi $(0, 0)$, $(1, 0)$, pričom bod $(0, 0)$ patrí do úsečky a bod $(1, 0)$ do úsečky nepatrí.

Pre všetky čísla a , pre ktoré platí $1 \leq a < 2$, je $[a] = 1$, preto všetky body $(a, 1)$ sú bodmi grafu funkcie $y = [x]$. Graf funkcie $y = [x]$ na intervale $<1, 2)$ je totožný s úsečkou, ktorá je určená bodmi $(1, 1)$, $(2, 1)$, pričom bod $(1, 1)$ patrí do úsečky a bod $(2, 1)$ do úsečky nepatrí.

Všeobecne, pre všetky čísla a , pre ktoré platí $k \leq a < k + 1$, kde k je celé číslo, je $[a] = k$, preto všetky body (a, k) sú bodmi grafu funkcie $y = [x]$. Graf funkcie $y = [x]$ na intervale $<k, k + 1)$ je totožný s úsečkou, ktorá je určená bodmi (k, k) , $(k + 1, k)$, pričom bod (k, k) patrí do úsečky a bod $(k + 1, k)$ do úsečky nepatrí.

Graf funkcie $y = [x]$ pozri na obr. 1.

O funkcii $y = [x]$ platí nasledujúca veta.

V e t a 2. Funkcia $y = [x]$ je

a) neklesajúca;¹⁾

b) nespojitá v čísle $x = k$, kde k je celé číslo; spojitá v každom čísle $x = a$ rôznom od celého čísla.²⁾

D ô k a z. a) Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné reálne čísla, ktoré splňujú nerovnosť $x_1 < x_2$. Potom platí $[x_1] \leq x_1 < x_2$. Z toho vyplýva, že najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako x_2 , je číslo väčšie alebo rovné $[x_1]$, teda je $[x_1] \leq [x_2]$. Tým sme zistili, že funkcia $y = [x]$ je neklesajúca.

b) Funkcia $y = [x]$ je v každom celom čísle nespojitá, pretože pre každé celé číslo k platí

$$\lim_{x \rightarrow k^-} [x] = k - 1 < k = \lim_{x \rightarrow k^+} [x] \text{ .}^3)$$

Funkcia nemá v čísle k limitu, pretože

$$\lim_{x \rightarrow k^+} [x] \neq \lim_{x \rightarrow k^-} [x] ,$$

nemôže platiť

$$\lim_{x \rightarrow k} [x] = [x] .$$

V každom celom čísle k je funkcia $y = [x]$ nespojitá.

Vo všetkých číslach $x = a$, kde a je rôzne od celého čísla, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} [x] = [x] = [a] ,$$

preto funkcia $y = [x]$ v čísle a je spojitá.

P r í k l a d 2. Nakreslime graf funkcie $y = [x] - x + \frac{1}{2}$.

R i e š e n i e. Funkcie $y = [x] - x + \frac{1}{2}$ je definovaná pre každé reálne číslo.

¹⁾ Funkciu f nazývame neklesajúcou, ak pre každé dve čísla x_1, x_2 z jej oboru definície, splňujúce nerovnosť $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

²⁾ Hovoríme, že funkcia f je v čísle a spojitá, ak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

Body, v ktorých funkcia f nie je spojitá, nazývame body nespojitosti funkcie f .

³⁾ Nech f je funkcia a číslo a také, že preň existuje jeho okolie, v ktorého každom čísle, azda až okrem čísla a je funkcia f definovaná. Hovoríme, že funkcia f má v čísle a limitu [limitu zprava, limitu zľava] číslo b , ak ku každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$, že pre všetky čísla x , pre ktoré platí $a - \delta < x < a + \delta$ [$a < x < a + \delta$, $a - \delta < x < a$] je

$$|f(x) - b| < \varepsilon .$$

Limitu [limitu zprava, limitu zľava] funkcie f v čísle a , ak existuje, označujeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) [\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) , \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)] .$$

Podrobnejšie o týchto pojmoch pozri [1].

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí $0 \leq x < 1$ je $[x] = 0$

a
$$y = [x] - x + \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2}.$$

Graf danej funkcie na intervale $<0, 1)$ je totožný s grafom priamky $y = -x + \frac{1}{2}$

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí $1 \leq x < 2$, je $[x] = 1$

a
$$y = [x] - x + \frac{1}{2} = 1 - x + \frac{1}{2} = -x + \frac{3}{2}$$

Graf danej funkcie na intervale $<1, 2)$ je totožný s grafom priamky

$$y = -x + \frac{3}{2};$$

atd.

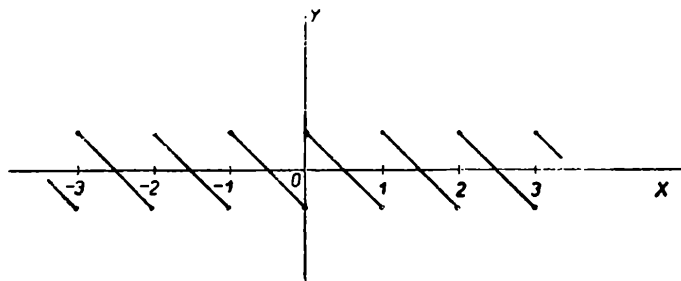
Pre všetky čísla x , pre ktoré platí $-1 \leq x < 0$, je $[x] = -1$

a
$$y = [x] - x + \frac{1}{2} = -1 - x + \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$$

Graf danej funkcie na intervale $<-1, 0)$ je totožný s grafom priamky

$$y = -x - \frac{1}{2};$$

atd.



Obr. 2

Všeobecne, pre všetky čísla x , pre ktoré platí $k - 1 \leq x < k$, kde k jde celé číslo, je $[x] = k - 1$

a
$$y = [x] - x + \frac{1}{2} = -x + k - \frac{1}{2}.$$

Graf danej funkcie na intervale $<k - 1, k)$ je totožný s grafom priamky $y = -x + k - \frac{1}{2}$.

Graf danej funkcie sa skladá z nekonečne mnoho úsečiek bez pravých koncových bodov. Pozri obr. 2.

(Pokračovanie)

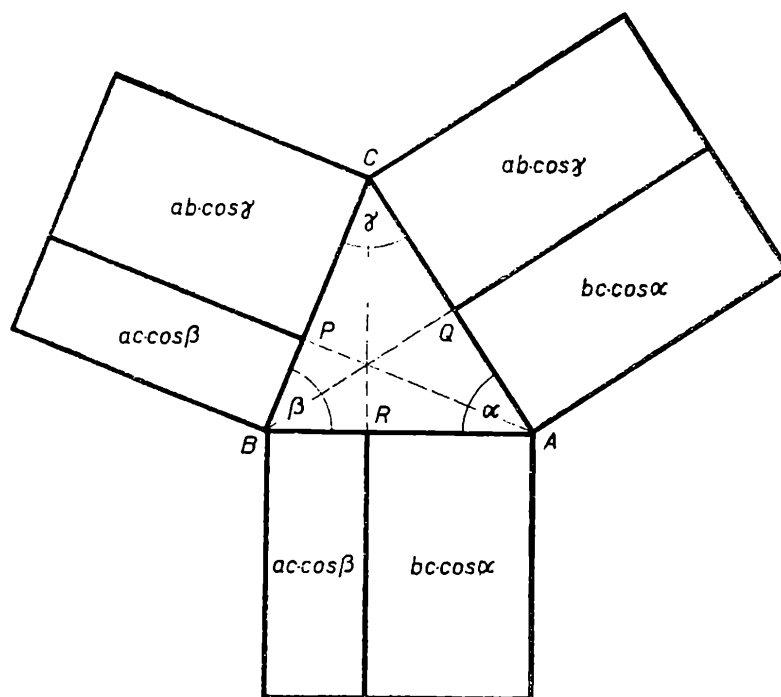
Kosinová veta

FRANTIŠEK KUŘINA, PF, Hradec Králové

Ve 3. čísle 45. ročníku Rozhledů uvedl Karel Drábek článek K z o b e c n ě n í P y t h a g o r o v y v ě t y. Jedno zobecnění této věty znáte ze školy jako tzv. větu kosinovou¹⁾. Uvedme její důkaz,

¹⁾ Matematika pro II. ročník SVVŠ, SPN 1964, str. 275.

který si lze nejen snadno zapamatovat, ale který svou názorností pomáhá i při zapamatování samotného tvrzení kosinové věty.



Obr. 1

Na obr. 1 je znázorněn ostroúhlý trojúhelník ABC . V běžném označení ($AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, P je pata výšky ke straně a , Q je pata výšky ke straně b , R je pata výška ke straně c); platí

$$\begin{aligned} AQ &= c \cos \alpha, BP = c \cos \beta, CP = b \cos \gamma, \\ AR &= b \cos \alpha, BR = a \cos \beta, CQ = a \cos \gamma \end{aligned}$$

Sestrojíme čtverce „nad stranami“ trojúhelníka ABC a rozdělíme je přímkami AP , BQ , CR na obdélníky (obr. 1). Napíšeme-li do každého z takto získaných obdélníků jeho obsah, můžeme z obrázku ihned „číst“ tvrzení

$$c^2 = ac \cos \beta + bc \cos \alpha, \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 = ac \cos \beta + bc \cos \alpha + 2ab \cos \gamma$$

Tuto druhou rovnost můžeme přepsat na tvar

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = ac \cos \beta + bc \cos \alpha. \quad (2)$$

Pravé strany rovností (1) a (2) se sobě rovnají, a proto se sobě rovnají i jejich levé strany. Tím je dokázána kosinová věta pro ostroúhlý trojúhelník.

Důkaz kosinové věty pro tupoúhlý trojúhelník a podobný důkaz Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník přenechávám čtenářům.

Řešení diofantických rovnic

ING. OTAKAR LACINA, ČKD, Praha

Neurčité rovnice typu

$$ax + by = c,$$

jejichž řešením má být dvojice celých čísel, nazývají se *rovnice mi diofantickými*. Tento typ rovnic se sice v praxi vyskytuje poměrně zřídka, ale přesto je užitečné znát způsob jejich řešení. Postup výpočtu si ukážeme na těchto příkladech.

Příklad 1. Určete všechny dvojice celých kladných čísel, která vyhovují rovnici

$$3x + 5y = 28. \quad (1)$$

Z této rovnice vypočteme neznámou x

$$x = \frac{28 - 5y}{3}. \quad (2)$$

Provedeme dělení

$$x = 9 - y + \frac{1 - 2y}{3}. \quad (3)$$

Aby řešení vyhovělo podmínce celých čísel, musí být i zlomek celé číslo. Zavedeme substituci

$$\frac{1 - 2y}{3} = u. \quad (4)$$

Z rovnice (4) vypočteme y a provedeme dělení

$$y = \frac{1 - 3u}{2} = -u + \frac{1 - u}{2}. \quad (5)$$

Aby byla splněna podmínka celých čísel, musí být zlomek v rovnici (5) celé číslo. Zavedeme další substituci

$$\frac{1 - u}{2} = v \quad (6)$$

Z rovnice (6) vypočteme u

$$u = 1 - 2v \quad (7)$$

Pokud v bude celé číslo, bude i u celé číslo a hledané neznámé budou

též celá čísla. Dosadíme vypočtené u do rovnic (5) a (2) a dostáváme řešení

$$y = 3v - 1, \quad (8)$$

$$x = 11 - 5v \quad (9)$$

Dosazením do dané rovnice (1) provedeme dílčí zkoušku

$$3(11 - 5v) + 5(3v - 1) = 28, \\ 28 = 28$$

Zkouška ukazuje, že dosavadní výpočet je správný. Nyní určíme velikost v , abychom vyhověli podmínce kladných čísel.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x \geq 0 \\ & 11 - 5v \geq 0, \\ & v \leq \frac{11}{5} \end{aligned} \quad (10)$$

Aby x bylo celé kladné číslo, musí být

$$v \leq 2 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & y \geq 0, \\ & 3v - 1 \geq 0, \\ & v \geq \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Aby y bylo celé kladné číslo, musí být

$$v \geq 1. \quad (13)$$

Spojením nerovnin (11) a (13) dostáváme

$$1 \leq v \leq 2. \quad (14)$$

Z podmínky (14) dostáváme dvě možná řešení dané rovnice, a to

$$\text{a)} \quad v_a = 1, x_a = 6, y_a = 2$$

Zkouška

$$3 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 28$$

$$\text{b)} \quad v_b = 2, x_b = 1, y_b = 5$$

Zkouška

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 28.$$

Podobně řešíme i soustavy diofantických rovnic, kde nejprve vylučovací metodou snížíme počet neznámých na dvě a pak postupujeme shora uvedeným způsobem. Jako příklad uveďme úlohu vyskytující se v různých obměnách snad ve všech matematických rekreacích, hrách, koutcích atd.

Příklad 2. Za 5 Kčs jsme koupili 20 poštovních známek o hodnotách 40 h, 25 h a 5 h. Kolik bylo kterých známek?

Počty označíme x, y, z a napíšeme rovnice

$$x + y + z = 20, \quad (1)$$

$$40x + 25y + 5z = 500. \quad (2)$$

Rovnici (2) krátíme pěti a po odečtení rovnice (1) dostáváme

$$7x + 4y = 80. \quad (3)$$

Dále pokračujeme shora uvedeným způsobem

$$y = \frac{80 - 7x}{4} = 20 - x - \frac{3}{4}x, \quad (4)$$

$$\frac{3}{4}x = u, \quad (5)$$

$$x = \frac{4}{3}u = u + \frac{u}{3}, \quad (6)$$

$$\frac{u}{3} = v, \quad (7)$$

$$u = 3v \quad (8)$$

Dosazením do rovnice (6) získáme

$$x = 4v, \quad (9)$$

dosazením do rovnice (4)

$$y = 20 - 7v, \quad (10)$$

dosazením (9) a (10) do (1) dostaneme

$$4v + 20 - 7v + z = 20, \quad (11)$$

$$2 = 3v \quad (12)$$

Dílčí kontrolu správnosti provedeme dosazením (9), (10) a (12) do (2)

$$40 \cdot 4v + 25(20 - 7v) + 5 \cdot 3v = 500,$$

$$500 = 500$$

Zkouška dokazuje, že dosavadní výpočet je správný. Nyní určíme velikost v , aby byla splněna podmínka celých kladných čísel.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x > 0, \\ & 4v > 0, \\ & v > 0; \\ \text{b)} & y > 0, \end{array} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 20 - 7v &> 0, \\ v &< 2\frac{6}{7}. \end{aligned} \quad (14)$$

Pro splnění podmínky celého y platí

$$v \leq 2; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad z &> 0, \\ 3v &> 0, \\ v &> 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Spojením nerovnin (13), (15) a (16) dostáváme

$$0 < v \leq 2. \quad (17)$$

Úloha má tedy dvě řešení, a to

$$\text{a)} \quad v_a = 1, x_a = 4, y_b = 13, z_a = 3;$$

$$\text{b)} \quad v_b = 2, x_b = 8, y_b = 6, z_b = 6.$$

Zkoušky

$$\text{a)} \quad 4 \cdot 40 + 13 \cdot 25 + 3 \cdot 5 = 500;$$

$$\text{b)} \quad 8 \cdot 40 + 6 \cdot 25 + 6 \cdot 5 = 500.$$

Hovoříme se samočinným počítačem

PAVEL SOUČEK, Biofyzikální ústav UK, Praha

Se samočinným počítačem je možné se dorozumět i tehdy, neznáme-li jeho vnitřní strukturu, právě tak, jako se můžeme dohovorit s člověkem, aniž známe stavbu lidského těla. Avšak obdobně, jako musíme znát angličtinu, chceme-li hovořit s Angličanem, je třeba znát i jazyk, jímž je možné se domluvit se samočinným počítačem. Podle toho, s jakým samočinným počítačem pracujeme, volíme zpravidla příslušný jazyk.¹⁾

V našich setkáních se samočinným počítačem budeme užívat jazyka, kterému se snadno naučíte a který se nazývá M O S T.

Uvedme příklad, jak je možno využít samočinného počítače při řešení

¹⁾ V samočinném počítači je zabudován takzvaný s t r o j o v ý j a z y k; do něho se překládá program napsaný v nějakém jiném, vhodnějším programovacím jazyce, pomocí zvláštního programu, zvaného p ř e k l á d á č, neboli k o m p i l á t o r. K dorozumění se strojem není třeba strukturu tohoto překládače znát.

některých úkolů známých ze školy. Představme si, že máme libovolné množství pravoúhlých trojúhelníků a máme spočítat u každého obvod O a obsah P , když jsou dány vždy pouze délky obou odvěsen. Máme-li takových trojúhelníků pět, zvládneme tuto práci snadno i bez počítače. Máme-li však takových trojúhelníků třeba padesát nebo i více, stává se práce zdoluhavou, únavnou a monotónní. Vypracujeme tedy program pro samočinný počítač, zadáme jej stroji spolu se známými parametry a ten rychle spočítá to, co by nám trvalo dlouho a v čem bychom se mohli dopustit i chyby.

Je samozřejmé, že chceme-li využít programu pro libovolné množství trojúhelníků, musíme program vypracovat obecně, nikoli tedy pouze pro jeden případ. Nejprve však, abychom si dokonale objasnili způsob, jak se takový program tvoří, naprogramujeme si právě jen jeden, a to zcela určitý případ.

Napřed několik obecných poznámek. Co je to vlastně `p r o g r a m` pro samočinný počítač? Je to jakýsi dopis, ve kterém píšeme samočinnému počítači, co má dělat a určujeme mu přesný postup (algoritmus) práce. Stačí zavést do samočinného počítače jen program? Jistě nestačí. Program obsahuje instrukce, `c o a j a k`. Je však třeba také sdělit počítači, `s č í m` (například s jakými čísly) má pracovat. Musíme tedy ještě do něho zavést `d a t a`.

Instrukce i data se zavádějí do počítače nejčastěji `d ě r n ý m i š t ě t k y` nebo `d ě r n o u p á s k o u`. Program, vypracovaný v příslušném jazyce, kterému stroj rozumí, přepíšeme třeba na `d á l n o p i s e`, kde se současně děrují do děrné pásky otvory podle zavedeného mezinárodního dálkopisného kódu.²⁾ Takto získané děrné pásky založíme do `s n í m a č e`, připojeného k počítači. Ten si přečte údaje vyděrované na páskách a uloží do `p a m ě t i`. Po skončení výpočtového procesu tiskne stroj výsledek na dálnopise.³⁾

(Pokračování)

0 některých vztazích v trojúhelníku

DOC. JIŘÍ K Ů S T, Plzeň

(Dokončení)

III. Budiž U libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α, β, γ , $UU_1 = m$, $UU_2 = n$, $UU_3 = p$ vzdálenosti bodu U po řadě od přímk BC , CA , AB , a konečně $UA = x$, $UB = y$, $UC = z$

²⁾ Uspořádání otvorů vyjadřuje určitou číslici nebo písmeno.

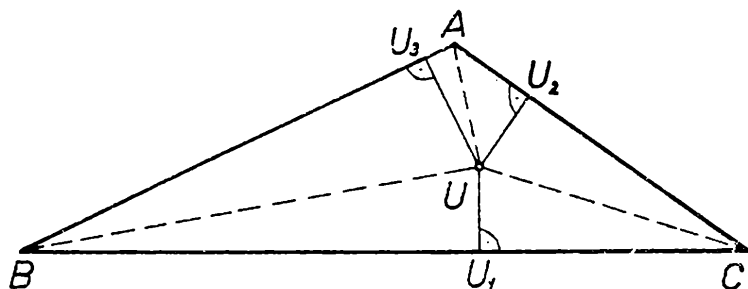
³⁾ Výstup výsledků je možný i jiným způsobem, nikoli tedy jen na dálnopis.

vzdálenosti bodu U po řadě od vrcholů A, B, C . Pak platí

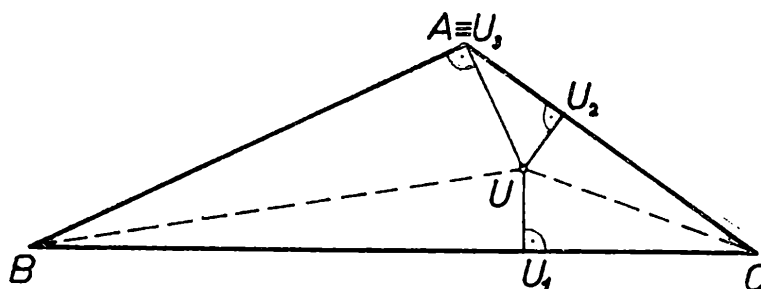
$$x + y + z \geq 2(m + n + p)$$

Rovnost nastane jen pro rovnostranný trojúhelník, a to pro bod U , který splývá s jeho středem.

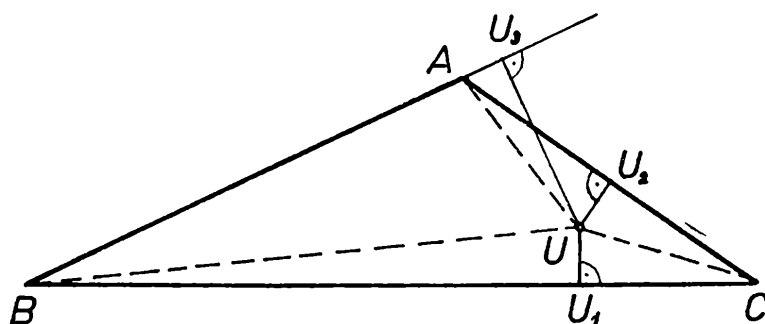
D ů k a z. Nejprve uvážíme polohu pat kolmic U_2, U_3 . Jsou-li úhly $\sphericalangle B A U$, $\sphericalangle C A U$ ostré, leží bod U_2 uvnitř polopřímky AC a bod U_3 uvnitř polopřímky AB . Tak tomu bude pro každý bod U uvnitř trojúhelníku ABC , je-li úhel $\sphericalangle B A C$ ostrý nebo pravý a pro některé body U ,



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

je-li $\sphericalangle B A C$ tupý (obr. 4). Je-li úhel $\sphericalangle B A C$ tupý, pak pro každý bod U , pro který např. úhel $\sphericalangle B A U$ je pravý, je $U_3 \equiv A$ (obr. 5) a pro každý bod U , pro který $\sphericalangle B A U$ je tupý, leží bod U_3 na prodloužení úsečky AB za bod A (obr. 6).

V obou těchto případech je bod U_2 uvnitř polopřímky AC . Ve všech případech leží body A, U, U_2, U_3 zřejmě na kružnici opsané nad průměrem AU ; $AU = x$.

Nyní vypočteme velikost úsečky $U_2U_3 = u$ dvěma způsoby. V případech znázorněných na obr. 4, 5 je U_2U_3 stranou trojúhelníku U_2U_3A ,

jehož vnitřní úhel $\sphericalangle U_2AU_3$ (protější k U_2U_3) je buď α (obr. 4), nebo $2R - \alpha$ (obr. 5). Průměr kružnice opsané tomuto trojúhelníku je $UA = x$.

Je tedy v prvním případě $U_2U_3 = u = x \sin \alpha$, v druhém

$$u = x \sin (2R - \alpha) = x \sin \alpha.^3)$$

Také v případě znázorněném na obr. 6 je

$$U_2U_3 = u = AU \sin (2R - \alpha) = x \sin \alpha ,$$

jak plyne z pravoúhlého trojúhelníku U_2U_3U , ve kterém

$$\sphericalangle U_2UU_3 = 2R - \alpha$$

Je tedy vždy

$$u = x \sin \alpha \quad (7)$$

Velikost úsečky U_2U_3 můžeme však také vypočítat užitím kosinové věty z trojúhelníku U_2UU_3 , ve kterém všude (obr. 4, 5, 6) je

$$\sphericalangle U_2UU_3 = 2R - \alpha .$$

Je tedy

$$U_2U_3^2 = UU_2^2 + UU_3^2 - 2UU_2 \cdot UU_3 \cos (2R - \alpha) ,$$

čili

$$u^2 = n^2 + p^2 + 2np \cos \alpha ; \quad (8)$$

ze vztahů (7) a (8) plyne

$$x^2 \sin^2 \alpha = n^2 + p^2 + 2np \cos \alpha$$

Dosadíme-li sem $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$, tedy $\cos \alpha = -\cos (\beta + \gamma)$, máme

$$x^2 \sin^2 \alpha = n^2 + p^2 - 2np \cos (\beta + \gamma) .$$

Dalšími úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 \sin^2 \alpha &= n^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + \\ &+ p^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) - 2np (\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) , \\ x^2 \sin^2 \alpha &= (n \sin \gamma + p \sin \beta)^2 + (n \cos \gamma - p \cos \beta)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Protože $x \sin \alpha$, $n \sin \gamma + p \sin \beta$ jsou čísla kladná, z toho plyne

$$x \sin \alpha \geq n \sin \gamma + p \sin \beta , \quad (10)$$

³⁾ Zde užíváme této známé věty: Jsou-li a, b, c velikosti stran, α, β, γ velikosti protějších úhlů trojúhelníku ABC a $2r$ průměr kružnice trojúhelníku opsané, pak platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r .$$

čili

$$x \geq n \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + p \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Obdobně bychom dostali další dvě cyklické nerovnosti

$$y \geq p \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + m \frac{\sin \gamma}{\sin \beta},$$

$$z \geq m \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + n \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

Sečteme-li všechny tři nerovnosti, máme

$$\begin{aligned} x + y + z \geq m \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \right) + \\ + n \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right) + p \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

V závorkách je vždy součet dvou kladných čísel navzájem převrácených. Takový součet je vždy větší než dvě nebo rovný dvěma.⁴⁾ Je tedy

$$x + y + z \geq 2(m + n + p)$$

Uvažme, kdy tu nastane rovnost. Ohlédneme-li se zpět, vidíme, že především musí být rovný dvěma každý součet dvou navzájem převrácených čísel ve všech třech závorkách nerovnosti (11). To nastane právě tehdy, když $\beta = \gamma = \alpha$, to znamená, je-li trojúhelník ABC rovnostranný.

Dále, vrátíme-li se k rovnosti (9) a k nerovnosti (10), vidíme, že rovnost v (10) — a v cyklických nerovnostech — nastane právě tehdy, když se rovná nule každé z čísel

$$m \cos \beta - n \cos \alpha, n \cos \gamma - p \cos \beta, p \cos \alpha - m \cos \gamma$$

Se zřetelem k první podmínce ($\beta = \gamma = \alpha$) se tak stane právě tehdy, když $m = n = p$, tj. splývá-li bod U se středem rovnostranného trojúhelníku.

Z nerovnosti $x + y + z \geq 2(m + n + p)$ lze odvodit zajímavý vztah pro úhly α, β, γ ostroúhlého trojúhelníku ABC . Zvolme totiž bod U ve středu O kružnice opsané trojúhelníku ABC ; její poloměr označme r

⁴⁾ Pro každé číslo $a > 0$ platí

$$(a - 1)^2 \geq 0 \iff a^2 - 2a + 1 \geq 0 \iff a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Rovnost nastane pro $a = 1$.

(obr. 3). Pak je $UA = UB = UC$, tj. $x = y = z = r$ a naše nerovnost nabude tvaru

$$3r \geq 2(m + n + p).$$

Z pravoúhlých trojúhelníků BA_1O , CB_1O , AC_1O a ze vztahu mezi středovým a obvodovým úhlem, příslušných k témuž oblouku, plyne, že

$$\cos \alpha = \frac{m}{r}, \quad \cos \beta = \frac{n}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{p}{r}.$$

Dosadíme-li odtud do poslední nerovnosti, dostaneme vztah

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2} \quad (12)$$

Rovnost tu platí jen pro rovnostranný trojúhelník.

Lze dokázat, že vztah (12) platí i pro každý tupouhlý a pravoúhlý trojúhelník. U pravoúhlého trojúhelníku lze dokonce snížit horní mez součtu

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$$

na číslo $\sqrt{2}$.

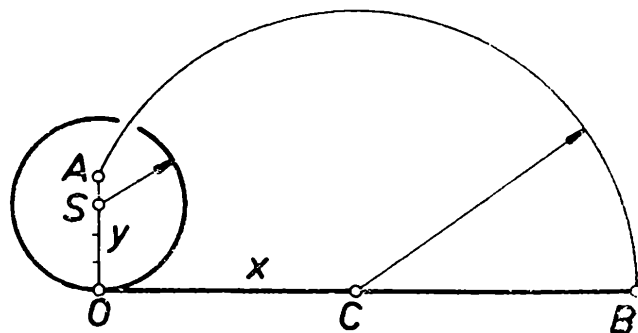
Použití čtvercové sítě k rektifikaci kružnice

Doc. ing. LADISLAV DRS, ČVUT Praha

Sestrojit úsečku, jejíž délka je přibližně rovna obvodu kruhu (tj. provést rektifikaci kružnice) pravítkem a kružítkem lze mnoha způsoby, a to způsoby více či méně přesnými a více či méně složitými. Ukážeme si takové rektifikace, které jsou konstruktivně jednoduché a navíc může podle nich „objevit“ čtenář i svou vlastní rektifikaci. Konstrukce budeme provádět na čtvercové síti (milimetrovém papíru).

1. Zvolme kružnici k s poloměrem r rovným třem jednotkám, $r = 3$ j (na milimetrovém papíru volme např. $j = 5$ mm) se středem S v rohu čtverce sítě (obr. 1). Středem S vedme svisle přímku y a jedním jejím průsečíkem O s kružnicí k vodorovně přímku x . Na přímce y určíme bod A tak, aby $OA = 4$ j, na přímce x bod C tak, aby $OC = 3r = 9$ j. Pak je

$$AC^2 = (3r)^2 + \left(\frac{4}{3}r\right)^2,$$



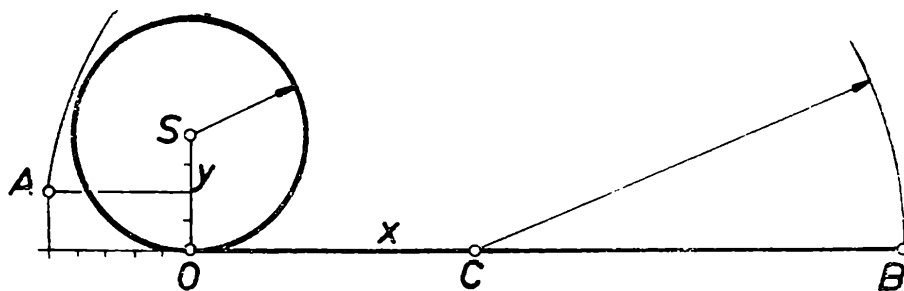
Obr. 1

$$AC = r \frac{\sqrt{97}}{3} = r \cdot 3,2829$$

Sestrojíme-li na přímce x bod B tak, aby $AC = BC$, bude

$$OB = OC + CA = r \cdot 6,2829$$

což se liší od $2\pi r = r \cdot 6,2831 \dots$ o méně než tři desetitisíciny poloměru. Úsečka OB je tedy dostatečně přesnou rektifikací kružnice k . Při teoreticky přesném rýsování je např. chyba pro $r = 1$ m menší než 0,3 mm.

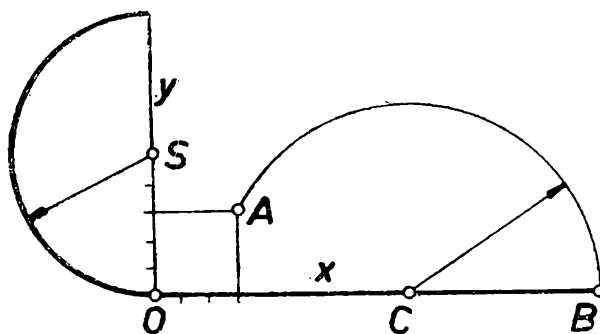


Obr. 2

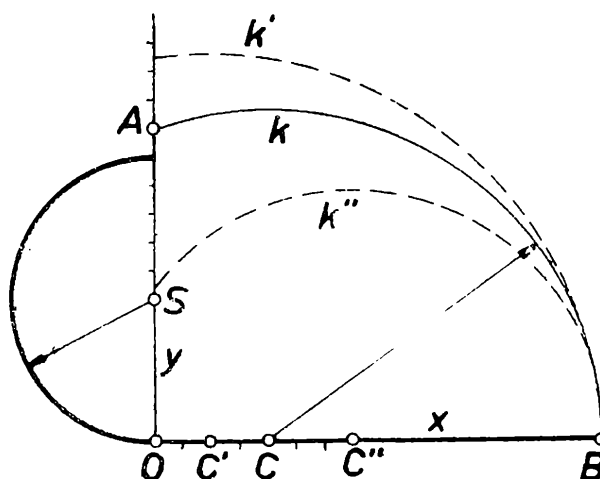
2. Ještě přesnější rektifikaci získáme podle obr. 2. Za poloměr kružnice k jsou zvoleny čtyři jednotky, $r = 4$ j, bod O jako v obr. 1, bod C tak, aby $OC = 10$ j, bod A má od přímky x vzdálenost 2 j, od přímky y vzdálenost 5 j. Bod B určíme jako v odst. 1, $CA = CB$. Úsečka OB je rektifikací této kružnice. Tato konstrukce se sice hůře pamatuje než předešlá, ale zato je chyba při této rektifikaci menší než milióntina poloměru.

3. *Rektifikace půlkružnice.* Podle obr. 3 má kružnice k poloměr $r = 5$ j, $OC = 9$ j, bod A je od přímek x i y vzdálen o 3 j. Sestrojíme-li opět bod B na přímce x tak, aby $AC = BC$, je OB rektifikací půlkružnice, $\pi r = OB$, s chybou menší než pět stotisícin poloměru.

4. Pokuste se podle konstrukcí 1–3 nalézt svou vlastní rektifikaci. Postupovat můžete takto: Na milimetrovém papíru (obr. 4) zvolte



Obr. 3



Obr. 4

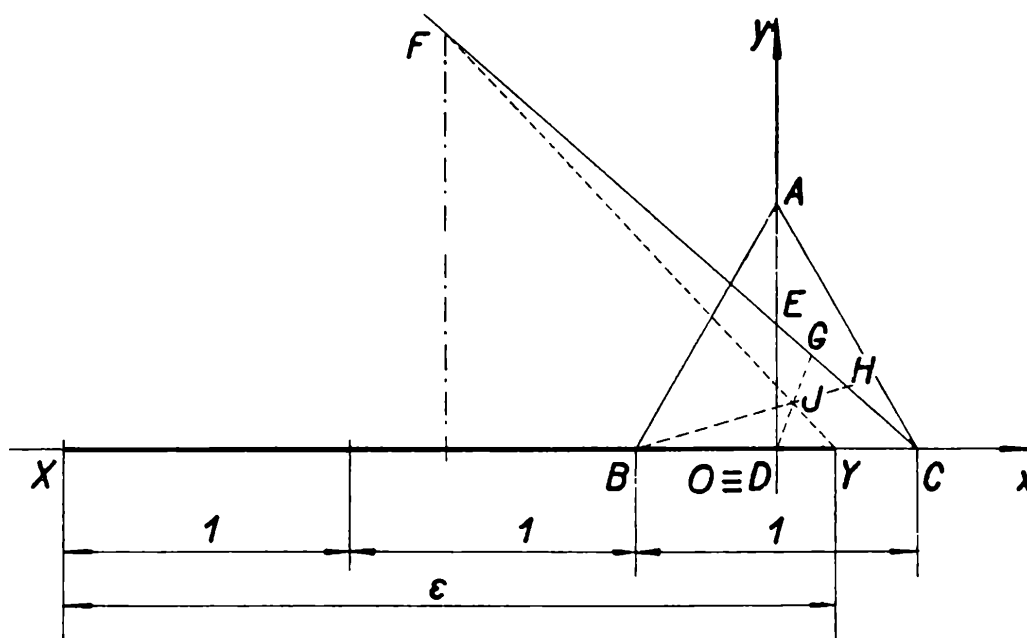
střed S a bod O kružnice k tak, aby poloměr r byl roven celistvému násobku jednotky (na obr. 4 je $j = 5$ mm, $r = 5 j = 25$ mm). Z tabulek vyhledejte délku πr (78,5 mm) a vyznačte na vodorovné přímce x bodem O bod B tak, aby $OB = \pi r$. Na přímce x volte zkusmo body C' , C'' , ... tak, aby jejich vzdálenosti od bodu O byly rovny celistvému násobku jednotky. Body C' , C'' , ... budou středy kružnic s poloměrem $C'B$, $C''B$, ... Ten bod čtvercové sítě na přímce y , který leží nejbližší některé z těchto kružnic, označme A a příslušný střed C . Získáme tak rektifikaci půlkružnice podobnou jako v obr. 1. Její chybu spočítáme stejně jako v odst. 1. Na obr. 4 je nejlepší rektifikace pro $OC = 4 j$ a $OA = 11 j$. Má chybu menší než tisícina poloměru. Za bod A můžeme též zvolit i bod v rohu čtvercové sítě mimo přímku y , tedy jako v obr. 2 a 3, a to takový, který leží nejbližší některé ze sestrojených kružnic. Podaří se vám najít rektifikaci aspoň tak přesnou, jako jsou zde uvedené?

K přibližné konstrukci čísla e

Doc. KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT Praha

Mezi transcendentními čísly, tj. mezi čísly, která nejsou řešením žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty, je jedním z nejdůležitějších čísel číslo e .¹⁾ Takové číslo při dané jednotce nemůžeme euklidovsky, tj. pomocí pravítka a kružítko zobrazit na číselné ose, a proto se snažíme aspoň o přibližnou konstrukci.

Takovou konstrukci, která určuje iracionální číslo ε lišící se od transcendentního čísla e o méně než $16 \cdot 10^{-11}$, ukázal H. F. Sandham²⁾



Obr. 1

¹⁾ Číslo e , které tvoří základ tzv. přirozených logaritmů a vedle jiných oborů se jej velmi používá zejména v matematické analýze, je definováno např. jako limita výrazu

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

kde n je přirozené číslo, když $n \rightarrow \infty$, nebo jako součet nekonečné řady

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} +$$

²⁾ Viz článek An approximate construction for e , The American Mathematical Monthly, (54), 1947, str. 215—216, nebo Приближенное построение числа e , Математическое просвещение, (4), 1959, str. 170.

tím, že použil čísla

$$\varepsilon = \frac{4711 + 3\sqrt{7}}{1736} = 2,718\,281\,828\,30$$

kdežto pro číslo e máme

$$e = 2,718\,281\,828\,459 \dots$$

Konstrukci provedeme (podle Sandhama) takto (obr. 1):

V rovnostranném trojúhelníku ABC o straně $a = BC$ rovné zvolené jednotce, stanovme výšku AD . Její půlicí bod E spojme s bodem C a nanesme na polopřímku CE od bodu C délku $2 + \frac{1}{3}EC$ do bodu F . Dále určíme na polopřímce CE bod G tak, že $CG = \frac{1}{2}$ a bod H tak, že $CH = \frac{1}{3}$. Průsečík J přímek BH a DG spojme s bodem F a sestrojme její průsečík Y se stranou BC . Jestliže pak ještě na polopřímku CB nanese od bodu B délku dvou jednotek do bodu X , je $XY = \varepsilon$.

Správnost konstrukce pro číslo ε ukážeme pomocí analytické geometrie.³⁾

Systém souřadnic zvolme tak, že počátek O je v bodě D , osa x obsahuje stranu BC a osa y výšku AD . Potom souřadnice vrcholů A , B , C našeho trojúhelníka jsou

$$A \left[0; \frac{1}{2} \sqrt{3} \right], B \left[-\frac{1}{2}; 0 \right], C \left[\frac{1}{2}; 0 \right].$$

Dále

$$D [0; 0], E \left[0; \frac{1}{4} \sqrt{3} \right].$$

Souřadnice bodu F , G , H jsou

$$F \left[\frac{1}{21} (7 - 12\sqrt{7}), \frac{3}{84} (7 + 24\sqrt{7}) \right], G \left[\frac{1}{14} (7 - 2\sqrt{7}); \frac{\sqrt{21}}{14} \right],$$

$$H \left[\frac{1}{42} (21 - 4\sqrt{7}); \frac{\sqrt{21}}{21} \right].$$

Rovnice přímky BH je

$$y = \frac{\sqrt{21}}{21 - 2\sqrt{7}} \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

a přímky DG

$$y = \frac{\sqrt{21}}{7 - 2\sqrt{7}} x$$

³⁾ Sandham používá podobnosti trojúhelníků a dělicích poměrů, v ruském znění není důkaz proveden.

Jejich průsečík J má souřadnice

$$x_J = \frac{1}{28} (7 - 2\sqrt{7}), \quad y_J = \frac{\sqrt{21}}{28}$$

Pro průsečík Y přímky FJ s osou x dostaneme souřadnici

$$x_Y = \frac{x_F (y_J - y_F) - y_F (x_J - x_F)}{y_J - y_F},$$

po dosazení a výpočtu máme

$$x_Y = \frac{371 + 3\sqrt{7}}{1736},$$

takže délka $\varepsilon = 2,5 + x_Y$.

Umocnění úseček celými čísly

J I Ř Í M A R E K, P F, Plzeň

Úloha 1.

Je dána úsečka délky u . Máme sestrojit úsečku délky u^n , kde a) $n \geq 2$ je přirozené číslo, b) n je záporné celé číslo.

Řešení. a) Na polopřímku OM nanese úsečku délky u (obr. 1), takže

$$OB_1 = u.$$

Zvolíme jednotkovou úsečku OA , tj. $OA = 1$.¹⁾ Sestrojíme libovolnou přímku $q \parallel OM$. Obě rovnoběžky protne přímkou r vedenou bodem O .

Označíme $O' \equiv q \cdot r$.

Rovnoběžky vedené po řadě body A a B_1 k přímce r protnou přímku q v bodech A' a B'_1 ; pak platí $OA = O'A'$ a $OB_1 = O'B'_1$. Průsečík S spojnice bodů B_1 a A' s přímkou r (který zřejmě existuje) spojíme s bodem B'_1 . Označíme $B_2 \equiv OM \cdot SB'_1$.

Stejným způsobem sestrojíme postupně body B_3, B_4 , jak je patrné z obr. 1.

Dokážeme, že platí

$$OB_2 = u^2; OB_3 = u^3; OB_4 = u^4$$

¹⁾ Předpokládáme, že $OA \neq OB_1$, neboť případ $OA = OB_1$ je triviální. Na obr. 1 volíme např. $OA < OB_1$.

Z obr. 1 je patrné, že postupně platí

$$OB_2 : OB_1 = O'B'_1 : O'A'$$

$$OB_2 : u = u : 1$$

$$OB_2 = u^2$$

Dále je

$$OB_3 : OB_2 = O'B'_2 : O'B'_1,$$

$$OB_3 : u^2 = u^2 : u,$$

$$OB_3 = u^3$$

Důkaz dokončíme matematickou indukcí:

Předpokládejme, že pro libovolné přirozené číslo n platí

$$OB_{n-1} = u^{n-1},$$

$$OB_n = u^n \quad (1)$$

Vzhledem k tomu, že

$$O'B'_{n-1} = OB_{n-1}; O'B'_n = OB_n,$$

platí (podle obr. 1) postupně

$$OB_{n+1} : OB_n = OB_n : OB_{n-1},$$

$$OB_{n+1} : u^n = u^n : u^{n-1}$$

a konečně

$$OB_{n+1} = u^{n+1} \quad (2)$$

Platí-li tedy vztahy (1), platí i vztah (2). Víme již, že pro $n = 2$ jsou vztahy (1) splněny, neboť je

$$OB_1 = u; OB_2 = u^2$$

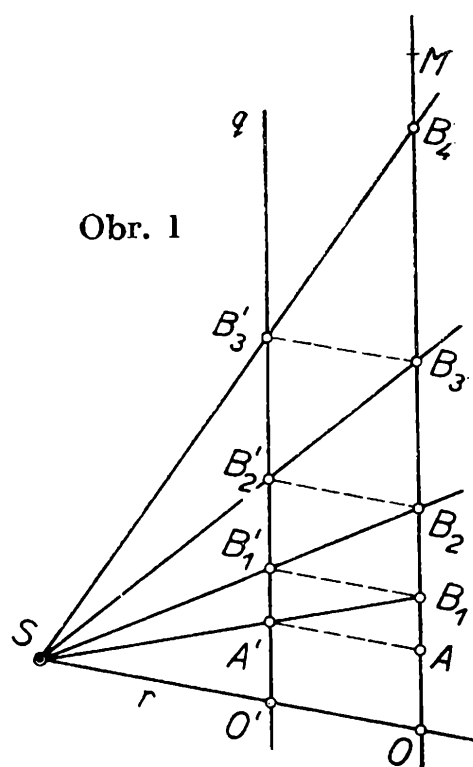
Tím je důkaz proveden.

Čtenář si sám načrtne obrázek pro případ, že $OA > OB_1$; nahlédne, že stejným postupem dojde k témuž výsledku.

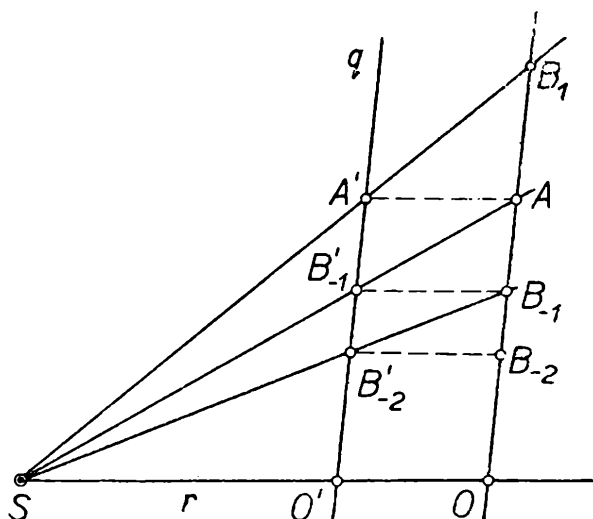
b) Uvedený postup lze rozšířit i na případ, že n je záporné celé číslo. Z obr. 2, kde opět $OA = 1$, $OB_1 = u$, je patrné, že platí postupně

$$OB_1 : OA = OA' : OB_{-1},$$

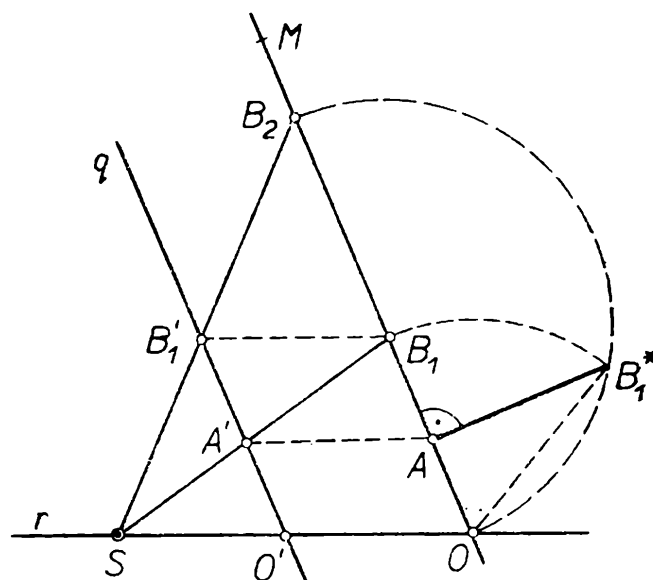
$$OB_1 : OA = OA : OB_{-1},$$



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

tj.

$$u \cdot 1 = 1 \cdot OB_{-1}$$

$$OB_{-1} = u^{-1}.$$

Dále dostaneme podobně

$$1 \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot OB_{-2}$$

tj.

$$OB_{-2} = u^{-2}$$

atd.

Tímto postupem získáme snadno úsečku délky $\frac{1}{u}$ a úsečku délky u^{-n} , kde exponent n je záporné celé číslo.

Ukážeme nyní, jak lze nalézt bod S na obr. 1, známe-li na polopřímce OM polohu bodů A , B_2 , kde $OA = 1$, $OB_2 = u^2$. Této pomocné konstrukce pak užijeme v jiné úloze.

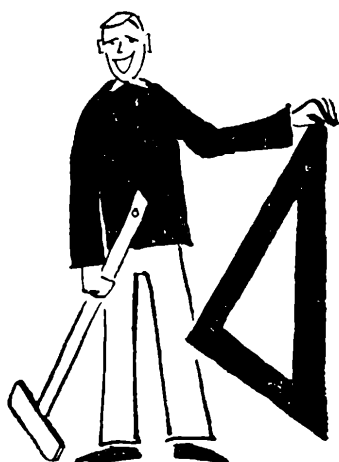
Její postup sledujme na obr. 3, kde $OB_1^* = OB_1$ je střední geometrická úměrná úseček OA a OB_2 , sestavená podle Eukleidovy věty o odvěsně. Je tedy

$$OB_1 = OB_1^* = \sqrt{OA \cdot OB_2},$$

tj.

$$OB_1 = u$$

Konstrukce bodu S pomocí bodů A' a B_1 je již jasná. Potom můžeme



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Průsečíky přímky s kuželosečkou

OLDŘICH LANTA, Ostrava:

Při konstruktivních úlohách lze často s výhodou použít kuželoseček, ale řešení zpravidla ztroskotává na euklidovské konstrukci průsečíků přímky s touto křivkou. Jak se sestrojí průsečíky přímky s parabolou, je vyloženo v článku E. Cívky, *Rozhledy*, roč. 42, č. 8, str. 356. V tomto článku vyřešíme průsečíky přímky s elipsou.

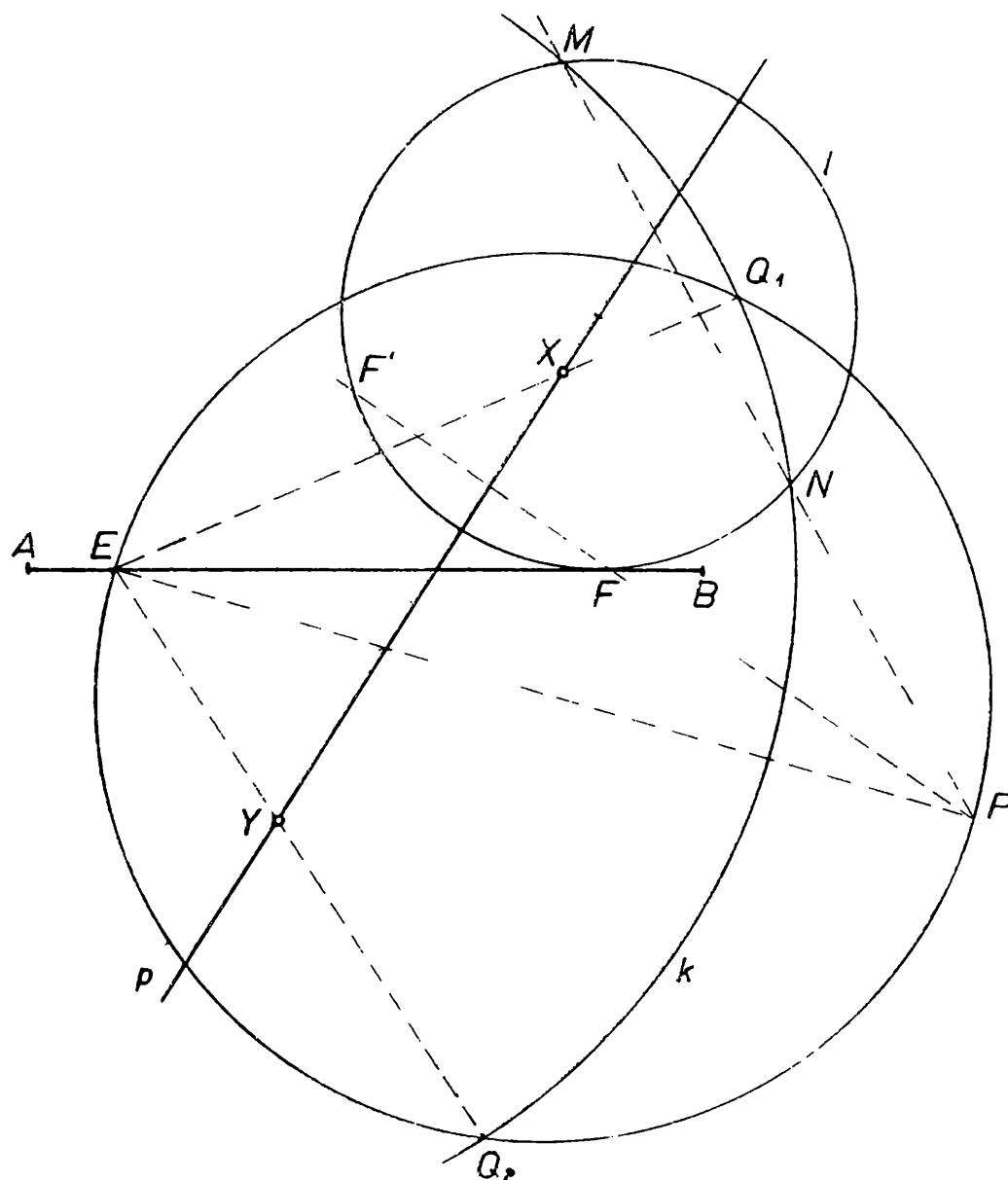
Elipsa je určena ohnisky E , F a hlavní osou $AB = 2a$, uvažovaná přímka je p .

Elipsu můžeme definovat jako geometrické místo středů kružnic, které procházejí jedním ohniskem a dotýkají se řídící kružnice opsané z druhého ohniska poloměrem hlavní osy.

Řídící kružnice nechť je $k(E; 2a)$; viz obr. 1. Podle uvedené definice elipsy máme na přímce p určit střed kružnice procházející ohniskem F a dotýkající se řídící kružnice k . Hledaná kružnice obsahuje zřejmě také bod F' osově souměrný k bodu F podle přímky p . Lze proto naši úlohu vyslovit takto:

Sestrojit kružnici obsahující body F , F' a dotýkající se kružnice k .

Libovolná kružnice l body F , F' protíná kružnici k v bodech M , N . Uvažujme tři kružnice: k , l a hledanou m . Dvě chordály FF' , MN těchto kružnic se protnou v potenčním středu P , jímž prochází i třetí chordála (kružnic k a m). Protože se tyto kružnice mají dotýkat, je touto třetí chordálou jejich společná tečna. Sestrojíme proto z bodu P tečnu ke kružnici k a dotykový bod Q_1 spojíme s bodem E . Bod $X \equiv Q_1E$. p je hledaný průsečík přímky p s elipsou. Druhá tečna PQ_2 určí na k bod Q_2 a přímka Q_2E protne přímku p v dalším průsečíku Y .



Obr. 1

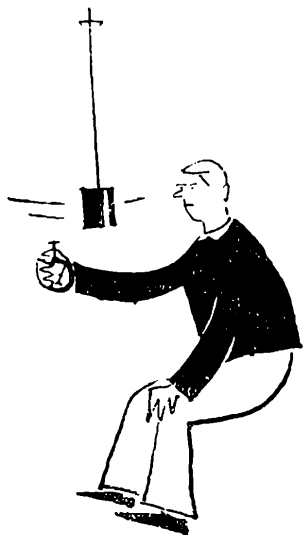
Diskuse řešení.

1. Přímka p obsahuje bod F . Potom je přímka $PF \perp p$ tečnou hledané kružnice v bodě F a konstrukce je podobná jako v předešlém případě.

2. Bod F' souměrný k bodu F podle přímky p je na řídicí kružnici k . Přímka p je v tomto případě tečnou elipsy, neboť řídicí kružnice k je geometrickým místem bodů souměrně sdružených k ohnisku F podle tečen elipsy. Hledaný bod X je průsečíkem přímky p s osou úsečky FF' .

3. Bod F' je vnějším bodem kružnice k . V tomto případě nelze sestavit kružnici procházející body F , F' a dotýkající se kružnice k ; přímka p elipsu neprotíná.

Průsečíky přímky s hyperbolou se sestojí podobně jako u elipsy



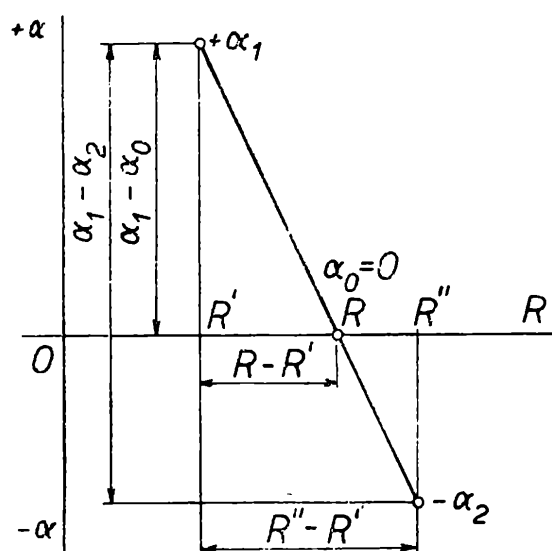
Použití interpolace při přesném měření

ING. LADISLAV SMRŽ, Praha († 8. ledna 1969)

Při měření kompenzátořem, odporovým můstkem nebo jiným měřícím zařízením se velmi často stává, že nemůžeme nastavit vyrovnávací části zařízení tak jemně, aby ukazatel indikátoru (např. světelný index galvanometru) zaujal přesně nulovou polohu.

V takovém případě si pomáháme lineární interpolací. Přesnou hodnotu hledané veličiny (např. odporu) vypočteme podle interpolačního vzorce pro dvě hodnoty jí blízké, ležící po obou stranách přesné hodnoty, a pro dvě výchylky ukazatele indikátoru, které jim odpovídají.

Interpolační vzorec si můžeme odvodit z úměry, postupem vyplý-



Obr. 1

vajícím z obr. 1, kresleným pro případ, kdy hledáme správnou hodnotu odporu R , pro niž by byla výchylka galvanometru $\alpha_0 = 0$. Stanovili jsme si jeho výchylky takto: $+\alpha_1$ pro nejbližší nižší hodnotu R' a $-\alpha_2$ pro nejbližší vyšší hodnotu R'' . Podle obr. 1 platí zde úměra

$$\frac{R - R'}{\alpha_1 - \alpha_0} = \frac{R'' - R}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

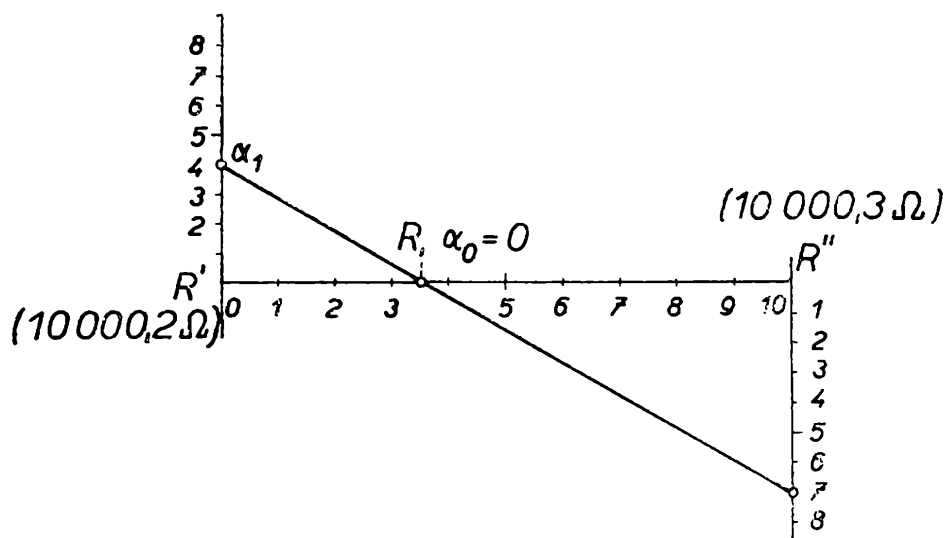
Pro $\alpha_0 = 0$ dostaneme po uspořádání vztahu výraz

$$R - R' = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} (R'' - R'),$$

takže hledaná hodnota odporu R je

$$R = R' + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} (R'' - R'). \quad (1)$$

Při velmi přesném měření používáme interpolace úmyslně, podobně jako při přesném vážení.



Obr. 2

Správnou hodnotu R můžeme také stanovit graficky (obr. 2). Na osu úseček nanese v libovolném měřítku odpory R' a R'' . Jsou to např. dva stupně poslední dekády odporového můstku, $R' = 0,1\,\Omega$ a $R'' = 0,2\,\Omega$. Vzdálenost mezi nimi si rozdělíme na deset stejných dílků a v koncových bodech vztyčíme kolmice. Na ně vyneseme čtené výchylky galvanometru, odpovídající nastaveným odporům R' a R'' , obě ve stejném (libovolném) měřítku. Spojnice těchto bodů α_1 a α_2 protíná osu X v bodě R , pro který platí $\alpha_0 = 0$. Je to tedy hledaná hodnota R pro přesně vyrovnaný odporový můstek.

Příklad použití

Wheatstoneovým můstkem byl měřen etalonový odpor R_x jmenovité hodnoty $1000\,\Omega$. Poměrové odpory můstku byly zvoleny $a = 100\,\Omega$, $b = 1000\,\Omega$, takže podle vztahu pro vyrovnaný Wheatstoneův můstek

$$R_x = \frac{a}{b} R$$

musí mít porovnávací odpor můstku R hodnotu v okolí $10\,000\,\Omega$.

Při měření bylo použito interpolace. Podle výchylek indexu galvano-

metru leží správná hodnota odporu R mezi $R' = 10\,000,2\ \Omega$ a $R'' = 10\,000,3\ \Omega$. Odpovídající výchylky galvanometru byly:

pro $R' = 10\,000,2\ \Omega$ výchylka $\alpha_1 = +4$ dílky,

pro $R'' = 10\,000,3\ \Omega$ výchylka $\alpha_2 = -7$ dílků.

Do interpolačního vzorce (1) dosadíme pro jednoduchost počtu pouze poslední desetinná místa hodnot R' a R''

$$\Delta R = 0,2 + \frac{4}{11} (0,3 - 0,2) = 0,236,$$

takže

$$R = 10\,000 + \Delta R = 10\,000,236\ \Omega$$

Je tedy změřená hodnota etalonu R_x

$$R_x = \frac{a}{b} R = \frac{100}{1000} 10\,000,236 = 1000,024\ \Omega$$

Z obr. 2 je patrné grafické určení hledané hodnoty R . Užíváme ho v praxi častěji než výpočtu podle interpolačního vzorce (1).

Vztah redukované délky a vzdálenosti těžiště od osy otáčení fyzického kyvadla

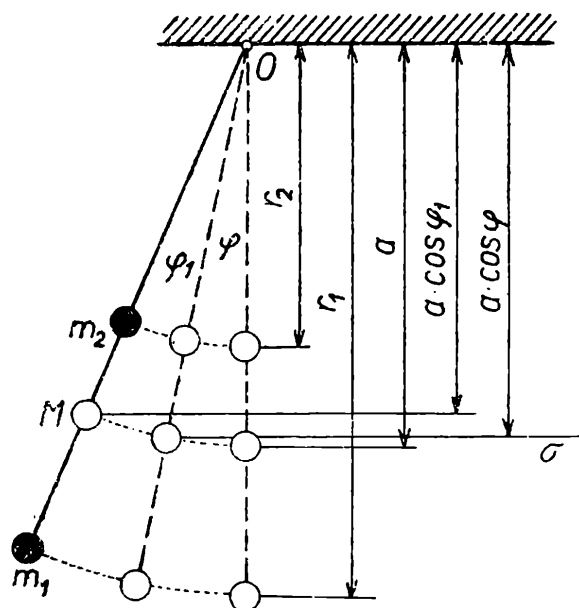
VOJTĚCH STACH, České Budějovice

I. Určení redukované délky fyzického kyvadla

Uvažujme speciální fyzické kyvadlo reprezentované dvěma tělesy se hmotnostmi m_1 , m_2 , které jsou upevněny na tyčce tak, že jejich středy mají od koncového bodu O tyčky vzdálenosti r_1 a r_2 . Hmotnost tyčky a odpor prostředí zanedbáváme. (Obr. 1)

m_1, m_2	hmotnosti,
v_1, v_2	jejich obvodové rychlosti,
ω	úhlová rychlost fyz. kyvadla,
τ	doba kyvu,
l_{red}	reduk. délka fyz. kyvadla,
l	délka matemat. kyvadla,
ω'	úhlová rychlost mat. kyvadla,
a	vzdálenost těžiště od osy kyvu.

Svírá-li tyčka, otáčivá kolem vodorovné osy, jdoucí bodem O , se



Obr. 1

svislým směrem úhel φ_1 , je těžiště ve výšce $a - a \cos \varphi_1$ nad rovinou σ (σ vodorovná rovina procházející těžištěm v rovnovážné poloze). Při odchýlení kyvadla o úhel φ je tato vzdálenost $a - a \cos \varphi$.

Přejde-li kyvadlo z polohy s odchylkou φ_1 do polohy s odchylkou φ , zmenší se jeho potenciální energie a vzroste kinetická. Tyto energie se musí sobě rovnat, a tedy po malé úpravě platí

$$(m_1 + m_2) g a (\cos \varphi - \cos \varphi_1) = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2), \quad (1)$$

neboť $v_1 = r_1 \omega$, $v_2 = r_2 \omega$.

Pro polohu těžiště (vzdálenost a) platí

$$\frac{m_1 g}{m_2 g} = \frac{a - r_2}{r_1 - a},$$

odtud pro a platí

$$a = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

Ze vztahu (1) po dosazení pro ω dostáváme

$$\omega = \sqrt{\frac{2g (m_1 r_1 + m_2 r_2) (\cos \varphi - \cos \varphi_1)}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}}. \quad (2)$$

Tomuto kyvadlu fyzickému musíme nalézt kyvadlo matematické se stejnou dobou kyvu, a tedy i ω .

Obdobnou úvahou jako u kyvadla fyzického pro kyvadlo matematické délky l a hmotnosti m po srovnání energií dostáváme

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \omega'^2 = m g l (\cos \varphi - \cos \varphi_1)$$

a odtud

$$\omega' = \sqrt{\frac{2g(\cos \varphi - \cos \varphi_1)}{l}}. \quad (3)$$

Protože ovšem klademe požadavek, aby $\omega = \omega'$, pak

$$l = l_{\text{red}} = \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2}, \quad (4)$$

a to je vztah pro redukovanou délku uvažovaného fyzického kyvadla.

Pro dobu kyvu τ pak platí

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l_{\text{red}}}{g}} = \pi \sqrt{\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{g(m_1 r_1 + m_2 r_2)}}.$$

Uvažujme nyní fyzické kyvadlo s n -hmotnými body. Výraz (4) pro redukovanou délku pak nabude tvaru

$$l_{\text{red}} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k r_k^2}{\sum_{k=1}^n m_k r_k},$$

a dále po úpravě

$$l_{\text{red}} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k r^2}{\sum m_k \frac{1}{\sum m_k} \sum m_k r_k}, \quad (5)$$

kde označíme

$$\sum m_k r_k^2 = J, \quad \sum m_k = m \quad \text{a} \quad \frac{1}{m} \sum m_k r_k = a.$$

Vztah (5) pak nabude tvaru

$$l_{\text{red}} = \frac{J}{m a} \quad (6)$$

Veličina J ovšem není nic jiného než moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů a a je vzdálenost těžiště od osy otáčení.

Pro spojitě rozloženou hmotnost vzhledem k jedné rotační ose platí obdobné výrazy

$$J = \int x^2 dm, \quad a = \frac{1}{m} \int x dm$$

Vztah (6) není ovšem nic jiného než vzorec, který dostaneme pro redukovanou délku fyzického kyvadla při řešení jeho diferenciální rovnice. Z tohoto vztahu je vidět, že redukovaná délka nesouhlasí se vzdá-

leností těžiště od osy otáčení, neboť (obecně) pro fyzické kyvadlo platí $J \neq ma^2$.

Nepochopením tohoto vztahu by mohla vzniknout chybná úvaha v tom, že nahradíme-li soustavu hmotných bodů (v našem případě m_1, m_2) hmotnosti soustředěnou v těžišti, pak vznikne matematické kyvadlo a vzdálenost těžiště je redukovanou délkou fyzického kyvadla s původně rozloženými hmotnostmi.

Ovšem to není pravda. Matematické kyvadlo tu sice vznikne (je-li zanedbána hmotnost závěsu), ale s jinou dobou kyvu než uvažované kyvadlo fyzické.

II.

Pokusme se to dokázat. Užijeme vztahu $l_{\text{red}} = \frac{J}{m \cdot a}$

Máme tedy dvě kyvadla

- a) s původně rozloženými hmotnostmi m_1 a m_2 ,
- b) se soustředěnou hmotností $m = m_1 + m_2$ v těžišti.

Obě můžeme považovat za kyvadla fyzická a srovnávat je vzhledem k vztahu

$$l_{\text{red}} = \frac{J}{ma},$$

neboť $J = ma^2$ pro matematické kyvadlo, a tedy $l_{\text{red}} = a$. V našem případě m, a zůstávají stejné, mění se pouze J .

Označme J moment setrvačnosti kyvadla s původně rozloženými hmotnostmi, J' moment setrvačnosti s hmotností $m_1 + m_2$ v těžišti.

Platí

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2, \quad (7)$$

$$J' = ma = (m_1 + m_2) \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)^2}{m_1 + m_2}, \quad (8)$$

kde $a = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$ je vzdálenost těžiště.

Porovnejme nyní J a J' Vydělíme proto

$$(m_1 r_1 + m_2 r_2)^2 \quad (m_1 + m_2)$$

jako mnohočlen mnohočlenem a dostaneme po úpravě

$$\frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)^2}{m_1 + m_2} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 - \frac{m_1 m_2 (r_1 - r_2)^2}{m_1 + m_2}. \quad (9)$$

Vzhledem ke vztahům (7) a (8) můžeme psát

$$J' = J - \frac{m_1 m_2 (r_1 - r_2)^2}{m_1 + m_2}$$

Výraz

$$\frac{m_1 m_2 (r_1 - r_2)^2}{m_1 + m_2}$$

je pro $r_1 \neq r_2$ větší než nula, a tedy pro momenty J a J' platí

$$J' < J \quad (10)$$

Vzhledem ke vztahu pro dobu kyvu

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

je tedy také doba kyvu kyvadla s původně rozloženými hmotnostmi (fyzické) větší než s touž celkovou hmotností, soustředěnou v těžišti, a proto vzdálenost tohoto těžiště od osy otáčení nemůže být redukovánou délkou uvažovaného fyzického kyvadla.

III.

Pokračujme v úvaze o vztahu (9) dále. Bude nás zajímat výraz

$$\frac{m_1 m_2 (r_1 - r_2)^2}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

Spočítejme proto moment setrvačnosti uvažovaných hmotností m_1 , m_2 vzhledem k ose procházející rovnoběžně jejich těžištěm a označme ho J_T .

Tedy

$$J_T = m_1 (r_1 - a)^2 + m_2 (a - r_2)^2 \quad (12)$$

Po dosazení za a do vztahu (12) a po úpravě dostaneme

$$J_T = \frac{m_1 m_2 (r_1 - r_2)^2}{m_1 + m_2},$$

a to je výraz (11), který tedy vyjadřuje moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm.

Přepíšeme-li nyní vztah (9), dostáváme

$$J' = J - J_T \Rightarrow J = J_T + J' \quad (13)$$

Uvedené výpočty lze zobecnit pro n -hmotných bodů a uvedený vztah (13) zůstává v platnosti. Obecně můžeme tento závěr formulovat takto:

Moment setrvačnosti J tělesa vzhledem k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti tělesa se hmotností m soustředěnou v těžišti (J'), zvětšenému o moment setrvačnosti J_T tělesa vzhledem k ose rovnoběžně vedené těžištěm.

Toto je ovšem Steinerova věta, na jejímž základě (byla-li odvozena jinou cestou) se dá uvedený problém bezprostředně nahlédnout.

Jak je to s experimentálním ověřením teorie relativity?

RNDr. VLADISLAV KOLESNIKOV,

RNDr. JIŘÍ ZÁHEJSKÝ, Olomouc

(Dokončení)

3. Experimentální ověření obecné teorie relativity

Na základě obecné teorie relativity předpověděl *A. Einstein* některé fyzikální jevy, které byly později experimentálně ověřeny. Jsou to:

- Vznik ohybu světla hvězd v blízkosti Slunce.*
- Rudý posuv spektrálních čar v gravitačním poli.*
- Stáčení Merkurova perihelia, které nelze vysvětlit Newtonovou gravitační teorií.*

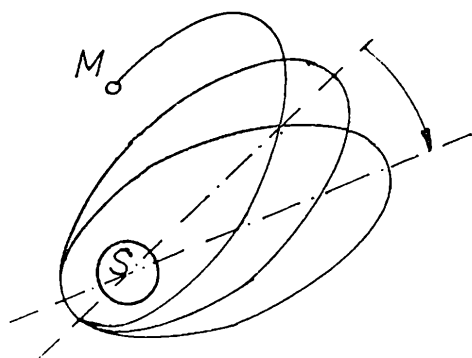
Ohyb světla hvězd v blízkosti slunečního kotouče lze zjišťovat jen při úplném zatmění Slunce, a to jen pomocí přenosných přístrojů, poněvadž pás zatmění Slunce většinou neprochází oblastmi s přístrojově vybavenými hvězdárnami. Přesto měření, provedená od roku 1919 až do současnosti, můžeme považovat za bezvadné potvrzení Einsteinovy předpovědi.

Rudý posuv spektrálních čar v gravitačním poli byl zjišťován ve spektrech tzv. bílých trpaslíků²⁾. Proti zjištěné hodnotě posunu lze

²⁾ Bílí trpaslíci jsou nebeská tělesa, která mají obrovské hustoty, okolo 50 000 g/cm³. Tato ohromná hustota vede k představě, že jsou zde vlivem vysokých tlaků k sobě těsně nahuštěna jádra atomů, které jsou zbaveny svých elektronových obalů. Typem takového tělesa je družice Siriova.

však vznášet oprávněné námitky, poněvadž hustota bílých trpaslíků je známa málo přesně, a tedy není přesně známa ani intenzita gravitačního pole na jejich povrchu. Též vzhledem k dalším nesnázím při tomto měření nepovažujeme ověření tohoto důkazu obecné teorie relativity za uspokojivé.

V poslední době však byl tento nedostatek odstraněn měřením rudého posuvu pomocí *Mössbauerova jevu* přímo v pozemských podmínkách. Pomocí Mössbauerova jevu naměřili fyzikové *R. V. Pound* a *G. A. Rebka* velmi nepatrné změny vlnových délek zářícího zdroje, který byl umístěn ve výšce několika desítek metrů nad povrchem Země. Absorbér byl umístěn přímo na povrchu Země, a tak v obou místech byla nepatrně odlišná intenzita gravitačního pole. Naměřené výsledky byly v bezvadné shodě s hodnotami předpověděnými obecnou teorií relativity.



Obr. 2. Stáčení oběžné dráhy Merkura
S - Slunce, M - Merkur.

Nevýhodou těchto měření je, že efekty předpověděné obecnou teorií relativity jsou velmi malé a současná úroveň měřicí techniky, vyjma Mössbauerův jev, je nedostačující pro přesné vyhodnocení zjištěných efektů. Ale i tak jsou získané výsledky v dobré shodě s teorií.

Nejvýznamnější je poslední důkaz — stáčení perihelia Merkurovy oběžné dráhy (obr. 2). Tato veličina je dobře měřitelná a činí téměř 43 obloukové vteřiny za století,

což je zcela ve shodě s předpovědí podle obecné teorie relativity.

Existuje však námitka některých fyziků, že stejný efekt dostaneme, když vyjdeme z Newtonovy teorie, avšak opustíme předpoklad, že Slunce je dokonalá koule, protože poměrně malé zploštění Slunce má za následek rovněž stáčení Merkurova perihelia. Měření zploštění Slunce je velmi nesnadné pro velký jas slunečního kotouče. V poslední době fyzikové *R. H. Dicke* a *H. M. Goldenberg* z důmyslných měření, trvajících čtyři měsíce, mohli odvodit, že polární průměr Slunce je menší než rovníkový, o $69 \text{ km} \pm 10 \text{ km}$. Stáčení Merkurova perihelia následkem tohoto zploštění by mělo být jen 3,4 obloukové vteřiny za století, což je jen 8 % skutečně zjištěné hodnoty. Tedy pozorované zploštění Slunce nedovede vysvětlit ani jednu desetinu hodnoty stáčení Merkurova perihelia, zatímco Einsteinova teorie vysvětluje tento úkaz beze zbytku.

Lze ještě namítnout, že zploštění slunečního povrchu nemusí odpovídat zploštění jeho vnitřních vrstev, které jsou daleko hustší a da-

leko větší měrou přispívají ke gravitačním poruchám ovlivňujícím pohyby planet. *R. H. Dicke* jako odpůrce obecné teorie relativity předpokládá, že nitro Slunce je více zploštělé než jeho povrchové vrstvy, aby hodnota stáčení Merkurova perihelia šla vysvětlit bez Einsteinovy teorie. Tento předpoklad je však velmi umělý, poněvadž nitro Slunce by muselo rotovat daleko rychleji než jeho povrchové vrstvy. Daleko přijatelnější je předpoklad, že vnitřní vrstvy Slunce mají zploštění menší, nebo nanejvýš rovné tomu, které *Dicke* a *Gol-denberg* naměřili.

V poslední době *Irwin I. Shapiro* z Massachuttského technologického ústavu navrhl další pokus, který by využil odrazu centimetrových vln od planety Merkura a mohl se tak stát dalším ověřením obecné teorie relativity

4. Experimentální ověření speciální teorie relativity

Do počtu experimentálních potvrzení speciální teorie relativity zahrnujeme nejen pokusy, které bezprostředně ověřovaly platnost jejích postulátů, ale také pokusy, které ověřovaly důsledky vyplývající z této teorie. Zmíníme se nejprve o experimentálním potvrzení nejdiskutovanějšího důsledku speciální teorie relativity — *dilatace času*.

Dilatace času úzce souvisí s tzv. *příčným Dopplerovým efektem*, který má čistě relativistický ráz a je bezprostředním důsledkem zpoždování hodin. Jeho experimentální potvrzení je tedy současně potvrzením časové dilatace, které provedli v roce 1941 *H. E. Ives* a *G. R. Stillwell* pozorováním spektra vydávaného molekulárními ionty vodíku, které byly urychleny vysokým napětím. Tak byl vlastně poprvé experimentálně ověřen rudý posuv při inerciálním pohybu zdroje, a tím i Lorentzova dilatace času.

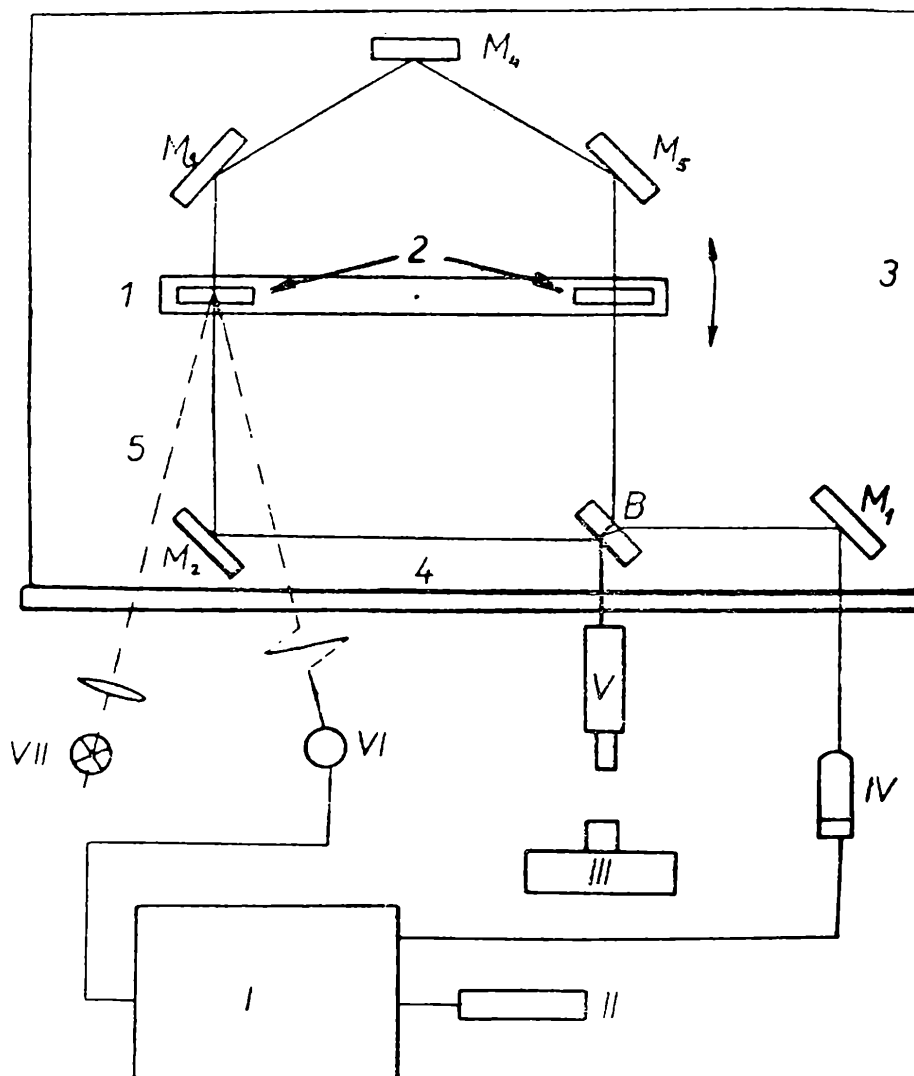
Dále byla dilatace času prokázána na částicích zvaných miony, které vznikají vlivem průchodu kosmického záření zemskou atmosférou. Miony se pohybují rychlostmi blízkými rychlosti světla, jak vyplývá z měření jejich energií. Tyto částice mají krátkou dobu života $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s, takže jsou nestálé a zanikají (tj. rozpadají se v jiné částice) po proběhnutí krátké dráhy $l = v\tau_0 \approx 660$ m od místa vzniku. Z četných měření, z nichž bylo jedno např. provedeno v Massachuttském technologickém ústavu v roce 1963, vyplývá, že miony mohou v atmosféře urazit dráhy, které jsou desetkrát až padesátkrát větší. To lze vysvětlit jedině s přihlédnutím k dilataci času.

Všimněme si ještě pokusů ověřujících závislost hmotnosti na rychlosti. Jde vlastně o ověření vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6)$$

kde m_0 je tzv. klidová hmotnost. Jeden z experimentů provedený *V Bertozim* v Cambridge prověřoval tento vztah měřením rychlosti a energie elektronů. K urychlení elektronů užil *Van de Graaffova* generátoru s lineární urychlovací trubicí. Elektrony tak získávaly energii od 0,5 do 15 MeV. Jejich rychlost byla určována přímo měřením času potřebného k tomu, aby proletěly danou vzdálenost 8,4 m. Kinetická energie byla měřena také přímou metodou pomocí speciálních kalorimetrů.

Další pokus realizovali *V P. Zrellov, A. A. Tjapkin a P. S. Farago* v laboratoři Spojeného ústavu jaderných výzkumů v Dubně. Závislost hmotnosti na energii prověřovali měřením rychlosti a impulsu protonu



Obr. 3. Schématické znázornění interferenčního pokusu Babcocka a Bergmana

I - rotující rameno, *2* - skleněná okénka, *3* - vakuová komora, *4* - kovová deska stolu, *5* - synchronizační paprsek, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 - odrazná zrcátka vybroušená s velkou rovinnou přesností, *B* - polopropustná destička, *I* - osciloskop, *II* - počítač, *III* - fotografický přístroj, *IV* - pulsní zdroj světla, *V* - autokolimační dalekohled, *VI* - fotonásobič, *VII* - světelný zdroj.

o energii 660 MeV. K urychlení protonů užili synchrocyclotronu. K měření rychlosti použili tzv. *čerenkovovských počítačů* a impuls měřili pomocí tzv. *metody proudové nitě*. Získané výsledky obou pokusů souhlasí v mezích chyb daných použitou aparaturou se vztahem (6).

Pokud jde o přímé ověření prvního postulátu speciální teorie relativity, byl několikrát ověřen pokusy *Michelson-Morleyho typu*. V roce 1958 byly tyto pokusy provedeny pomocí maserů a laserů a v poslední době též pomocí Mössbauerova jevu. Přesnost těchto pokusů převyšovala až 45krát přesnost Michelson-Morleyho pokusu.

Druhý postulát speciální teorie relativity byl také ověřen přímými optickými interferometrickými pokusy. Z celé řady pokusů za nejprůkaznější lze považovat pokus, který provedli v roce 1963 *G. C. Babcock* a *T. G. Bergman*. Jeho schématické znázornění je na obr. 3. V tomto pokusu byly na rotujícím rameni 1 upevněny dvě tenké průhledné destičky 2. Rameno bylo uvedeno do otáčivého pohybu. Paprsek, který vystupoval ze zdroje 4, byl pulsně modulován v závislosti na frekvenci rotace raménka a dopadal po odrazu na zrcadlo M_1 na polopropustnou destičku B , kde se dělil na dvě části. Jedna část paprsku probíhala ve směru BM_2M_3 . M_5B a druhá ve směru opačném. Paprsky při svých obězích procházejí okénky na rotujícím rameni, a to tak, že jeden prochází ve směru rotace a druhý ve směru opačném. Po projití těchto drah se setkávají v B , kde interferují. Z velikosti posunu interferenčních proužků se dá usuzovat na platnost druhého postulátu speciální teorie relativity. Celý optický systém byl umístěn ve vakuové komoře. Pomocí synchronizačního paprsku 5 byla frekvence pulsů zdroje synchronizována s frekvencí rotace raménka 1. Výsledek tohoto pokusu potvrzuje podle interpretace autorů platnost druhého postulátu. Jeho platnost byla potvrzena rovněž pokusy v nichž se měřila rychlost záření γ , které bylo vysíláno rychle se pohybujícími atomy.

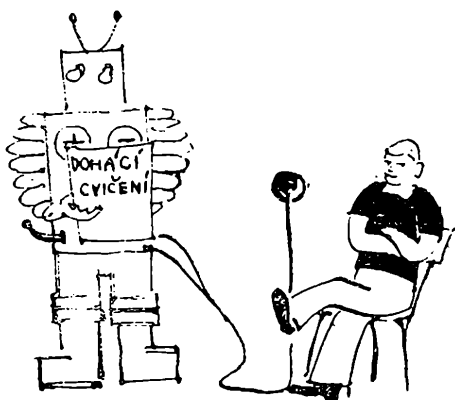
Závěr

Můžeme tedy říci, že existuje řada experimentálních důkazů správnosti teorie relativity. Není cennějšího kritéria pro platnost jakékoliv teorie, než experimentální ověření jejích základů a důsledků z ní vyplývajících. A těch, jak je vidět z uvedeného neúplného výčtu, je dost. Je sice pravda, že tu a tam se v tisku (spíše informativním než odborném) objeví zprávy, jejichž autoři — často nefyzikové — ve snaze popularizovat vědecké výsledky, se neopírají o vědecky podložené prameny, nebo jim připisují jiný význam.

Závěrem možno říci, že námitky proti teorii relativity byly vznášeny již od jejího vzniku. O to však více vystupuje oprávněnost této teorie,

která již přes šedesát let úspěšně podstupuje jak teoretické, tak experimentální prověrky.

Poznámka. Tento článek je odpovědí na dopis adresovaný čtenářkou E. Dvořákovou z SVVŠ Kroměříž redakci Rozhledů matematicko-fyzikálních, ve kterém žádá o uveřejnění článku o problémech a experimentálním ověření teorie relativity.



NAŠE SOUTĚŽ

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika

7. Dokažte, že číslo

$$N = 407^{697^{321}} + 321^{407^{697}} + 697^{321^{407}}$$

je dělitelné číslem 435.

(Došlo 31 řešení)

František Kejla

Řešila Helena Husová, IX.C ZDŠ, Praha 1:

Protože $435 = 3 \cdot 5 \cdot 29$, stačí dokázat, že platí zároveň

$$3 \mid N, \quad (1)$$

$$5 \mid N, \quad (2)$$

$$29 \mid N \quad (3)$$

V celém důkaze budeme užívat této pomocné věty:

Je dáno celé číslo a , celá nezáporná čísla i, k, h , přirozené číslo m .
Potom

$$a^k \equiv a^h \pmod{m} \Rightarrow a^{k+i} \equiv a^{h+i} \pmod{m} \quad (4)$$

Pro každé celé $k \geq 0$ platí

$$a \equiv 2 \pmod{3}, \quad a^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$$

Protože $407 \equiv 2 \pmod{3}$ a číslo 697^{321} je zřejmě liché, je tedy

$$407^{697^{321}} \equiv 2 \pmod{3}.$$

Dále

$$\left. \begin{aligned} 3 \mid 321 &\Rightarrow 321^{407^{697}} \equiv 0 \pmod{3}, \\ 697 &\equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 697^{321^{407}} \equiv 1 \pmod{3} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ze součtu kongruencí (5) ihned vyplývá tvrzení (1).

Dále je

$$\begin{aligned} 407 &\equiv 697 \equiv 2 \pmod{5}, \quad 2^4 \equiv 1 \pmod{5}, \quad 321 \equiv 1 \pmod{5}, \\ 697^{321} &\equiv 1 \pmod{4}, \quad 321^{407} \equiv 1 \pmod{4}, \end{aligned}$$

takže

$$407^{697^{321}} \equiv 2 \pmod{5}, \quad 697^{321^{407}} \equiv 2 \pmod{5}, \quad 321^{407^{697}} \equiv 1 \pmod{5}$$

Ze součtu těchto kongruencí vyplývá tvrzení (2).

Konečně platí

$$407 \equiv 697 \equiv 1 \pmod{29},$$

takže

$$407^{697^{321}} + 697^{321^{407}} \equiv 2 \pmod{29} \quad (6)$$

Zbývá dokázat, že

$$321^{407^{697}} \equiv 27 \pmod{29} \quad (7)$$

Poněvadž 29 je prvočíslo, $2 \not\equiv 0 \pmod{29}$, je podle věty Fermatovy $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ a odtud ovšem také $2^{28k} \equiv 1 \pmod{29}$.

Dále platí

$$2^{15} = (2^5)^3 = 32^3 \equiv 3^3 = 27 \pmod{29}$$

Je tedy vztah (7) ekvivalentní se vztahem

$$407^{697} \equiv 15 \pmod{28} \quad (8)$$

Ale $407 \equiv 15 \pmod{28}$, takže

$$407^{697} \equiv 15^{697} \pmod{28} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 15^{697} &= 15^{2 \cdot 348 + 1} = (15^2)^{348} \cdot 15 = 225^{348} = \\ &= 15 \cdot (28 \cdot 8 + 1)^{348} \equiv 15 \cdot 1^{348} = 15 \pmod{28}. \end{aligned}$$

Odtud a ze vztahu (9) plyne (8), takže platí (7), jak jsme měli dokázat.

Závěr: Protože číslo N je dělitelné čísly 3, 5 a 29, je dělitelné číslem 435.

8. Řešte rovnici

$$n! - 5n - 4 = 0$$

(Došlo 53 řešení)

Věra Pohlová

Řešil Pavel Hejda, II.B SVVŠ v Jindřichově Hradci:

Celou rovnici vydělíme nenulovým číslem n . Dostaneme

$$(n - 1)! - 5 - \frac{4}{n} = 0$$

Aby rovnice měla řešení, musí být $\frac{4}{n}$ celé číslo, takže musí platit

$$n = 1 ; 2 ; 4$$

Dosazením do původní rovnice zjistíme, že vyhovuje jen číslo 4.
Jediným kořenem dané rovnice je tedy číslo 4.

12. Trojúhelníkové pole ABC rozdělte lomenou čarou $PQRH$ na dva stejné díly tak, aby bod $P \in BC$, dané body Q a R byly vnitřními body trojúhelníka ABC a hledaný bod $H \in AB$.

(Došlo 25 řešení)

Karel Špaček

Řešení autorovo:

Řešení úlohy je založeno na proměnách mnohoúhelníků na rovnoploché části.

1. Zvolený trojúhelník ABC rozdělíme spojnicí AS , kde S je střed úsečky BC ($BS = SC$) na dva rovnoploché trojúhelníky ABS , ACS .

Důkaz: Základny BS , SC jsou shodné a výška (tj. vzdálenost bodu A od stran BS , SC) je společná.

2. Rovnoploché trojúhelníky ABS , ACS proměníme na další rovnoploché obrazce, a to čtyřúhelník $ACPD$ a trojúhelník BPD tak, že spojíme bod P s bodem A , bodem S sestrojíme rovnoběžku SD s AP a spojíme bod D s bodem P .

Důkaz: Trojúhelníky APS , APD jsou shodné, mají společnou základnu AP a výšku (tj. vzdálenost rovnoběžek AP ; DS). Trojúhelník APX je společný oběma, pak trojúhelníky AXD , PXS jsou nutně rovnoploché.

3. Rovnoploché obrazce $ACPD$, BPD proměníme na nové rovnoploché obrazce, a to pětiúhelník $ACPQD$ a čtyřúhelník $BDQP$ tak, že bod Q spojíme s bodem D , bodem P sestrojíme rovnoběžku PE s PD a bod E spojíme s bodem Q .

Důkaz: Přeměna je analogická, důkaz je obdobný, jako v případě 2.

4. Rovnoploché obrazce $ACPQD$, $BDQP$ přeměníme na jiné rovnoploché obrazce, a to šestiúhelník $AHRQPC$ a pětiúhelník $BPQRH$ tak,

že spojíme bod R s bodem E , bodem Q sestrojíme rovnoběžku QH s RE a bod H spojíme s bodem R .

Důkaz: Přeměna je opět analogicky zdůvodněna jako v případě 2.

Důsledek: Trojúhelník ABC je lomenou čarou $PQRH$ dělen na rovnoploché obrazce $ACPQRH$ a $BPQRH$. Úloha je řešitelná, pokud bod H padne na úsečku AB .

Fyzika

5. Měděná a olověná koule stejné hmotnosti m byly zahřáty ve vodní lázni na stejnou teplotu t . Pak byly ponořeny do dvou nádob, v nichž byla stejná množství vody, která měla stejnou teplotu $t_1 < t$. Kolik kg vody musí být v každé nádobě, aby se rozdíl v obou měrných teplech c_1 a c_2 projevil co nejvíce? (měrné teplo mědi $c_1 = 0,093 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, měrné teplo olova $c_2 = 0,031 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$).

Úlohu řešte nejdříve obecně a pak dosadte do výsledku $t = 100^\circ\text{C}$, $t_1 = 15^\circ\text{C}$ a $m = 1 \text{ kg}$.

(Došlo 17 řešení)

František Vencálek

Řešil Jozef Komorník, III.C SVVŠ Holič:

Označme m_0 hmotnost vody v každé nádobě, její měrné teplo c_0 . Nechť je $\bar{t}_1$ výsledná teplota vody, do níž byla ponořena koule měděná a $\bar{t}_2$ výsledná teplota v nádobě druhé.

Z kalorimetrické rovnice dostáváme

$$(t - \bar{t}_1) c_1 m = (\bar{t}_1 - t_1) c_0 m_0, \quad (1)$$

$$(t - \bar{t}_2) c_2 m = (\bar{t}_2 - t_1) c_0 m_0 \quad (2)$$

Rovnici (1) upravme takto

$$[(t - t_1) - (\bar{t}_1 - t_1)] c_1 m = (\bar{t}_1 - t_1) c_0 m_0,$$

$$(\bar{t}_1 - t_1) (c_0 m_0 + c_1 m) = (t - t_1) c_1 m,$$

$$(\bar{t}_1 - t_1) = (t - t_1) \cdot \frac{c_1 m}{c_0 m_0 + c_1 m}$$

Obdobnou úpravou rovnice (2) dostáváme

$$(\bar{t}_2 - t_1) = (t - t_1) \cdot \frac{c_2 m}{c_0 m_0 + c_2 m}$$

Rozdíl v měrných teplech se projeví nejvýrazněji, bude-li $|\bar{t}_1 - \bar{t}_2|$ největší. Odečtením posledních dvou rovnic dostaneme

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = (\bar{t}_1 - t_1) - (\bar{t}_2 - t_1) = (t - t_1) \left(\frac{c_1 m}{c_0 m_0 + c_1 m} - \frac{c_2 m}{c_0 m_0 + c_2 m} \right),$$

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = (t - t_1) \frac{c_0 m_0 m (c_1 - c_2)}{c_0^2 m_0^2 + c_0 m_0 m (c_1 + c_2) + c_1 c_2 m^2},$$

$$|\bar{t}_1 - \bar{t}_2| = |t - t_1| |c_1 - c_2| m c_0 \cdot \frac{1}{c_0^2 m_0 + c_0 m (c_1 + c_2) + \frac{c_1 c_2 m^2}{m_0}}.$$

Poněvadž za daných podmínek je $|t - t_1| |c_1 - c_2| m c_0$ konstanta, bude $|\bar{t}_1 - \bar{t}_2|$ největší, nabude-li funkce

$$f(m_0) = c_0^2 m_0 + c_0 m (c_1 + c_2) + \frac{c_1 c_2 m^2}{m_0}$$

nejmenší hodnoty

$$f'(m_0) = c_0^2 - \frac{m^2 c_1 c_2}{m_0^2},$$

$$f''(m_0) = 2 \frac{m^2 c_1 c_2}{m_0^3}.$$

Řešením rovnice

$$c_0^2 - \frac{m^2 c_1 c_2}{m_0^2} = 0$$

dostáváme kořeny

$$(m_0)_{1,2} = \pm \frac{m \sqrt{c_1 c_2}}{c_0}.$$

Kořen záporný nemá fyzikální smysl. Pro kladný kořen je $f''(m_0)$ kladná, nabývá tedy funkce $f(m_0)$ pro tuto hodnotu minima a $|\bar{t}_1 - \bar{t}_2|$ bude největší. Dosazením za m_0 do rovnice pro $\bar{t}_1 - \bar{t}_2$ dostáváme

$$\bar{t}_1 - \bar{t}_2 = (t - t_1) \cdot \frac{c_1 - c_2}{(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2})^2}.$$

Pro hodnoty $t = 100^\circ\text{C}$, $t_1 = 15^\circ\text{C}$, $c_1 = 0,093 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, $c_2 = 0,031 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$ a $m = 1 \text{ kg}$ dostáváme

$$m_0 = 0,054 \text{ kg a } \bar{t}_1 - \bar{t}_2 = 22,8^\circ\text{C}.$$

Vzhledem k malému m_0 nemá příklad praktický význam.

6. Družice o hmotnosti m vnikla ve výšce h nad povrchem Země rychlostí v do hustých vrstev atmosféry. Kolik tepla se vyvine třením o vzduch za předpokladu, že se celá mechanická energie družice změnila na teplo. Úlohu řešte nejdříve obecně a pak do výsledku dosadte: $m = 1 \text{ kg}$, $h = 30 \text{ km}$, $v = 8 \text{ km s}^{-1}$. Volte $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

(Došlo 22 řešení)

František Vencálek

Řešil Miroslav Kawalec, III.B SVVŠ, Havířov:

Kinetická energie družice je $W_k = \frac{1}{2} m v^2$.

Potenciální energie družice W_p se rovná práci A , kterou musíme vykonat, abychom zvedli družici o hmotnosti m ze vzdálenosti R (R je poloměr Země) do vzdálenosti $R + h$ od středu Země. Je-li M hmotnost Země a κ gravitační konstanta, je

$$\begin{aligned} W_p = A &= \int_R^{R+h} \frac{\kappa M m}{r^2} dr = \kappa M m \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{R+h} = \\ &= \kappa M m \left[-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R} \right] = \kappa M m \frac{h}{R(R+h)} \end{aligned}$$

Poněvadž je

$$\kappa \frac{M m}{R^2} = m g, \text{ je } \kappa \frac{M}{R} = g R$$

a tedy

$$W_p = m g h \cdot \frac{R}{R+h}$$

Avšak h je velmi malé vzhledem k R , takže

$$\frac{R}{R+h} \doteq 1$$

a $W_p \doteq m g h$.

Mechanická energie družice

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} m v^2 + m g h = m \left(\frac{1}{2} v^2 + g h \right)$$

se celá změní v teplo Q . Je tedy

$$\begin{aligned} Q [\text{J}] &= m \left(\frac{1}{2} v^2 + g h \right), \\ Q [\text{kcal}] &= 2,4 \cdot 10^{-4} m \left(\frac{1}{2} v^2 + g h \right) \end{aligned}$$

Pro dané hodnoty $m = 1 \text{ kg}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$, $h = 3 \cdot 10^4 \text{ m}$ a $v = 8 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$ je

$$Q = 32,3 \cdot 10^6 \text{ J} = 7,75 \cdot 10^3 \text{ kcal}.$$

*



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

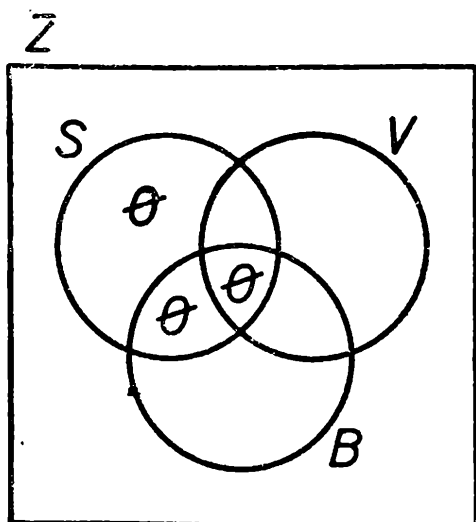
Vennovy diagramy v roli rozhodčího

JAROSLAV ŠEDIVÝ, UK, Praha

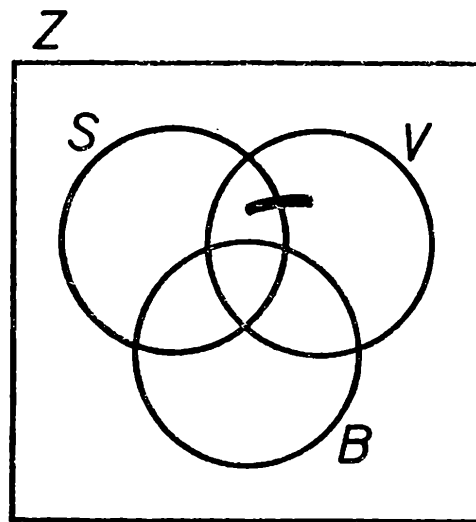
(Pokračování)

Úloha 4. *Posuďte správnost tohoto úsudku: Jestliže je pravda, že každý student je chtivý vědění a že žádný student není bohatým člověkem, pak z toho vyplývá, že někteří lidé chtiví vědění nejsou bohatí.*

I v této úloze jde o základní množinu všech lidí a tři její části — množinu S všech studentů, množinu V všech lidí chtivých vědění a množinu B všech bohatých lidí. Nyní jistě již snadno sami dospějete



Obr. 5a



Obr. 5b

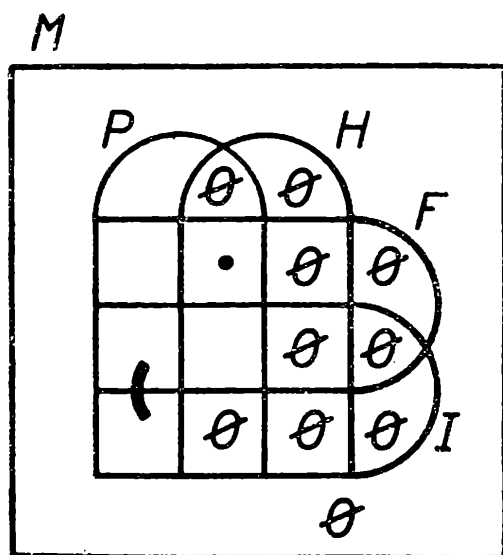
ke znázornění předpokladů na obr. 5a a ke znázornění závěrečného tvrzení na obr. 5b. Při srovnání obou obrázků je zřejmé, že úsudek není logicky správný, protože o políčkách vyznačených obloučkem na obr. 5b se z obr. 5a nic nedozvídáme. Obr. 5a však také naznačuje, že ze čtyř políček zahrnutých v kruhu S jsou tři prázdná, proto všichni studenti, pokud vůbec existují, patří do čtvrtého políčka. Doplňme-li tedy předpoklady úsudku výrokem, že někteří lidé jsou studenti, bu-

deme moci do čtvrtého políčka v kruhu S na obr. 5a zakreslit symbol $\bullet$ jeho neprázdnosti. Potom bude závěrečné tvrzení úsudku logickým důsledkem rozšířených předpokladů. Vidíte, jak až protivně jemným nástrojem jsou Vennovy diagramy, neprominou nám ani nejmenší nedopatření a dokonce ani úplné samozřejmosti.

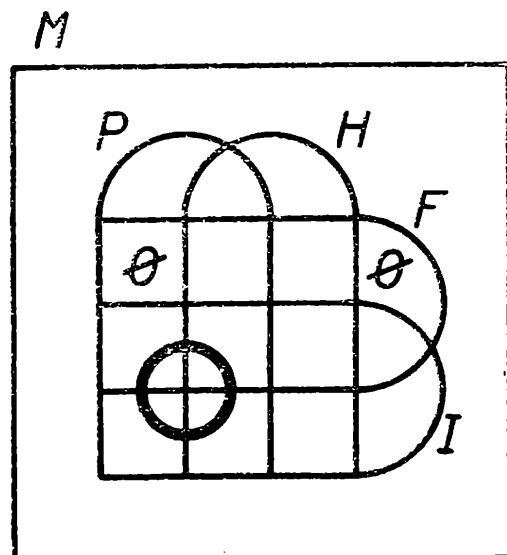
Řešení úlohy 1. Jak jsme již řekli, má úsudek popsany v úloze 1 šest předpokladů, které se týkají většího počtu množin. Protože však obě závěrečná tvrzení hovoří jen o množinách manekýnek, zjednodušíme situaci tím, že základní množinu zúžíme na množinu M všech manekýnek a výroky vyslovené o všech lidech vztáhneme jen na manekýnky. Na Vennově diagramu znázorníme kromě základní množiny M čtyři její části — množinu P všech příjemných manekýnek, množinu H všech hezkých manekýnek, množinu F všech často fotografovaných manekýnek a množinu I všech inteligentních manekýnek.

Představíme si velkolepé defilé všech manekýnek, které zaujímají místa uvnitř políček našeho diagramu, aby tak daly najevo, jaké vlastnosti mají. Evin první výrok zaručuje, že všechny manekýnky musí stát uvnitř oblasti P nebo uvnitř oblasti H , proto do všech čtyř ostatních políček zakreslíme značky prázdné množiny. Evin druhý výrok znázorníme tak, že nakreslíme značky $\emptyset$ do čtyř políček, která jsou částmi H , ale nejsou částmi F . Pavlin výrok vyjádříme tím, že zakreslíme značky $\emptyset$ do všech políček, která leží v oblasti F a mimo oblast P . Hančin první výrok zaručuje prázdnotu všech políček ležících uvnitř oblasti I a vně oblasti P ; v těchto polích však již jsou značky $\emptyset$ zakresleny. Druhý Hančin výrok je částečným soudem, který znamená, že aspoň v jednom políčku zahrnutém v oblasti H a ležícím mimo oblast I musí stát některá manekýnka; ze čtyř takových políček je neprázdné již jen jediné, proto do něho zakreslíme značku $\bullet$. Poslední Hančin výrok zaručuje, že aspoň v jednom políčku zahrnutém v I a ležícím mimo H stojí některá manekýnka; ze čtyř takových políček jsou jen dvě bez značky $\emptyset$, proto zakreslíme oblouček, který zasahuje do těchto dvou políček (obr. 6a). Tak máme na diagramu zachyceno vše, co tvrdí o manekýnkách Eva, Pavla a Hanka.

Množinový obsah Věřina úsudku znázorníme na obr. 6b. Její závěr znamená, že všechny manekýnky stojící v polích oblasti F stojí zároveň v polích oblasti H nebo I . To vyjádříme dvěma značkami $\emptyset$ v polích oblasti F (obr. 6b). Porovnáme-li toto rozmístění značek $\emptyset$ s obr. 6a, vidíme, že Věřino tvrzení nevyplývá z předpokladů, proto je její úsudek nesprávný. Katka vyslovila opatrnější závěr z týchž předpokladů, na obr. 6b jej znázorníme kroužkem, abychom dali najevo, že aspoň v jednom ze čtyř políček v průniku oblastí P , I stojí manekýnky. Pohled na obr. 6a nás v tomto případě přesvědčuje, že neprázdnost aspoň jednoho z těchto čtyř polí je zajištěna již předpoklady úsudku. To svědčí o logické správnosti Katčina úsudku.



Obr. 6a



Obr. 6b

Popsanou metodu si můžete snadno osvojit, k prvnímu zácviku vám poslouží cvičení zařazená v závěru tohoto článku. Vennovy diagramy se skutečně osvědčují v roli rozhodčího ve sporech o správnosti úsudků složených ze soudů typu a)–d). Připomeňme si však znovu, že nesmíme považovat úsudek za správný jen proto, že jeho závěrečné tvrzení je pravdivým výrokem. Stejně tak nemusí být nesprávný úsudek, který vede k nepravdivému závěru. Správné úsudky vedoucí k nepravdivým závěrům ukazují na nepravdivost některého předpokladu a jsou základem důkazů sporem.

Cvičení

1. Posuďte správnost tohoto úsudku: Jestliže je každý levný výrobek dobře prodejný a zároveň žádný levný výrobek není kvalitní, pak z toho vyplývá, že žádný dobře prodejný výrobek není kvalitní.

2. Posuďte správnost tohoto úsudku: Je známo, že někteří nepozorní žáci nepíší domácí úkoly a že žádný žák, který domácí úkoly píše, nemá pětku z matematiky. Z toho vyplývá, že někteří nepozorní žáci mají pětku z matematiky.

3. Vyplývá z předpokladů úsudku v úloze 3, že někteří úředníci jsou moudří a přitom mají smysl pro humor?

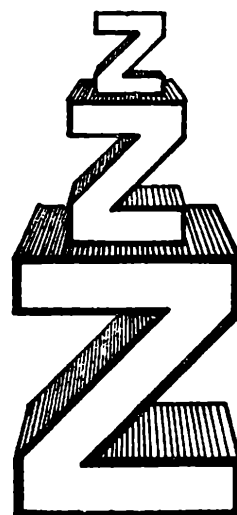
4. Vyplývá z předpokladů úsudku v úloze 1, že některé často fotografované manekýnky jsou příjemné a zároveň hezké?

Řešení cvičení k článku Vennovy diagramy v roli rozhodčího

Úsudky ve cvičeních 1, 2 a 3 jsou nesprávné, úsudek ve cvičení 4 je správný.

Záhady Zmatlíkova zápisníku

JAROSLAV ŠEDIVÝ, KU, Praha



Za $2^2 + 2^1 + 2^0$ horami byla škola, kterou navštěvoval student s předzdivkou Zmatlík. Vysloužil si ji za některé své matematické úvahy, jimiž docházel k podivným závěrům. Někdy našel chybu ve svém postupu sám, jindy ji po dlouhém zkoumání objevili spolužáci. Chybami se člověk učí a tak se i zvědavý Zmatlík stal dobrým matematikem. Zápisník se svými záhadami poskytl naší redakci, aby jich použila pro vaše pobavení i poučení.

Název článku má vám připomenout, že *nesmíte věřit všemu, co bude pod ním napsáno, ale kriticky zkoumat, v čem se Zmatlík prohřešil proti logické nesmlouvavosti matematiky*. V dalších číslech uveřejníme ještě několik ukázek Zmatlíkových záhad; pokuste se objevit, v čem je chyba a zformulujte výstižně správný postup. V některém z následujících čísel najdete vždy vysvětlení chyby, takže si budete moci zkontrolovat správnost svého postřehu.

Kam se poděl kořen rovnice?

Zmatlík si zapsal toto řešení rovnice o jedné neznámé, které provedl v kontrolní práci z matematiky

$$\begin{aligned}2 - \frac{6}{x-2} &= \frac{2x-10}{x-3}, \\ \frac{2(x-2) - 6}{x-2} &= \frac{2x-10}{x-3}, \\ \frac{2x-10}{x-2} &= \frac{2x-10}{x-3}\end{aligned}$$

Protože oba zlomky mají stejné čitatele a jsou si rovny, musí si být

rovni i jejich jmenovatelé, proto platí

$$\begin{aligned}x - 2 &= x - 3, \\ 2 &= 3\end{aligned}$$

a úloha nemá řešení.

Zmatlíkovi spolužáci však dospěli k jinému výsledku. Napište správné řešení rovnice a vysvětlete chybu, kterou udělal Zmatlík.

Na stránkách svého zápisníku Zmatlík mnohokrát „dokázal“, že $1 = 2$, $1 + 1 = 3$, $1 = -1$ apod. Vždy však úsilovně hledal, kde udělal chybu ve svém postupu. Jeden z nejobtížnějších problémů si způsobil zcela nečekaně při dosazování do vzorce. Zamyslete se nad tím, kde spáchal nepravost.

I dosazování do vzorců má svá úskalí

Pro každá dvě reálná čísla a , b a libovolné přirozené číslo n platí

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

Zmatlík dosadil opatrně jen „malá“ čísla $a = 1$, $b = 1$, $n = 1$ a dostal

$$\begin{aligned}(1 + 1)^n &= 1^1 + 1 \cdot 1^0 \cdot 1 + 0 + \dots + 0 + 1 \cdot 1^0 + 1^1, \\ 2 &= 1 + 1 + 0 + \dots + 0 + 1 + 1, \\ 2 &= 4\end{aligned}$$

Kde udělal chybu?

Publikace SPN

POMOCNÉ KNIHY PRO ŽÁKY:

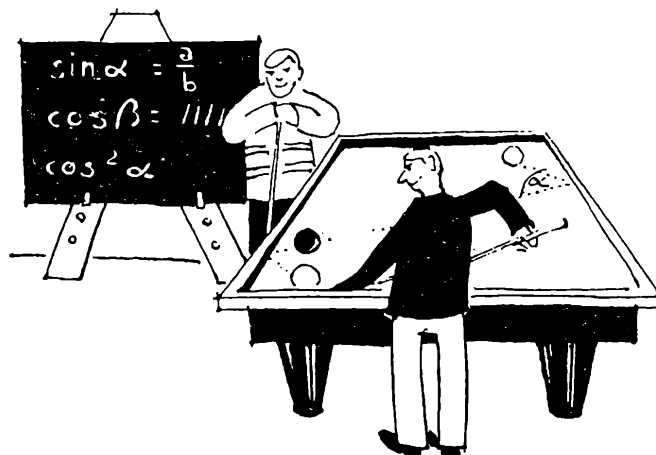
Hofman: Kirchhoffovy zákony. Vyd. 1., 1968, str. 74, brož. Kčs 3,50.

Edice: Pomocné knihy pro žáky.

Konrád, Košťál: Osmý ročník fyzikální olympiády. Vyd. 1., 1968, str. 224, brož. Kčs 10,—. Edice: Pomocné knihy pro žáky.

KNIHY PRO MLÁDEŽ:

Matuška, Trefný: Matematika v otázkách a heslech. Vyd. 1., 1968, str. 204, váz. Kčs 12,—. Edice: Knižnice všeobecného vzdělání — MAJÁK.



MATEMATIKA

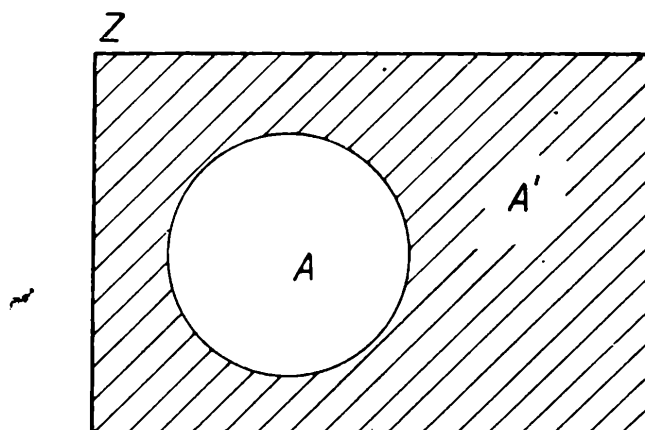
Nebojme se množinové algebry

OLDŘICH ODVÁRKŮ, KU Praha

1. V článku „Rovnost množin a Vennovy diagramy“ používali jsme Vennových diagramů k znázornění množinových úvah o konkrétních množinách. Přejdeme nyní k abstraktním úvahám o libovolných množinách, zabývejme se základy tzv. množinové algebry. Každý čtenář zná algebru, která pracuje se zápisy čísel pomocí písmen, zjednodušováním a úpravami těchto zápisů a uvádí nezbytné vzorce, které jsou pro tyto úpravy důležité a které platí pro libovolná čísla. Množinová algebra se obdobně zabývá zápisy množin pomocí písmen, jejich úpravami a zjednodušováním a objevuje pravidla, která platí pro libovolné množiny.

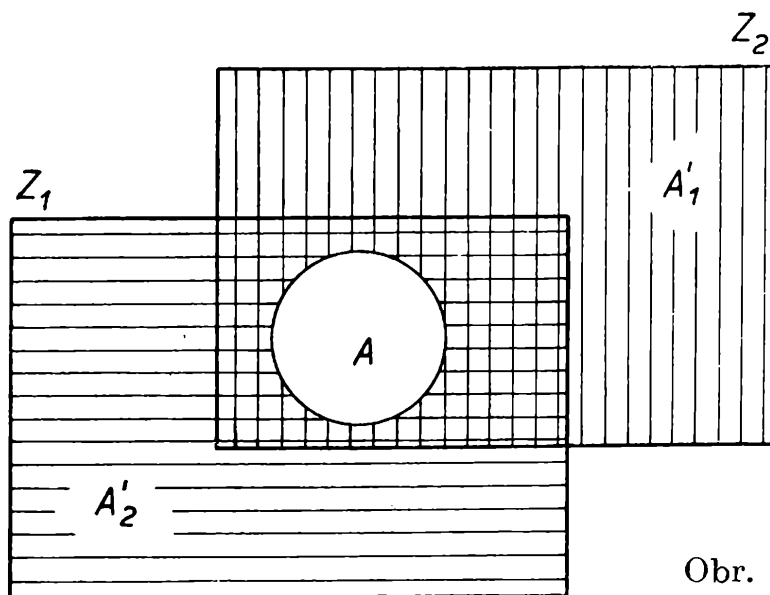
2. V „číselné“ algebře provádíme jisté operace s čísly. Každému číslu dovedeme přiřadit číslo opačné, každému číslu různému od nuly přiřazujeme číslo převrácené. Každé dvojici čísel umíme určit jejich součet a součin. Zavedme si nyní operace množinové.

Uvažujme Vennův diagram pro jednu množinu **A** (obr. 1). Vyšrafo-



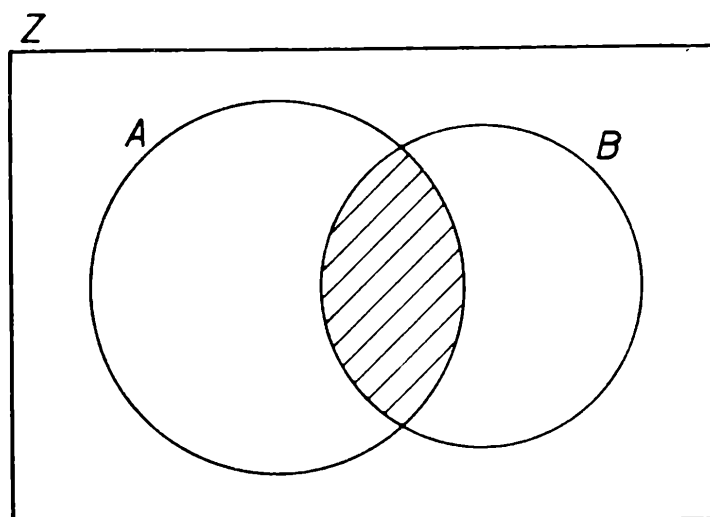
Obr. 1

vané políčko je obrazem množiny všech těch prvků základní množiny Z , které nepatří množině A . Množinu znázorněnou vyšrafovaným políčkem nazveme doplňkem množiny A vzhledem k množině Z .



Obr. 2

žině Z a budeme ji označovat A'_2 nebo stručněji A' , bude-li známo, o kterou základní množinu jde. Znalost základní množiny je při definici doplňku nezbytná, jak ukáže následující úvaha. Jestliže místo základní množiny Z_1 vezmeme jako základní množinu jinou množinu Z_2 , potom také doplněk A'_1 množiny A vzhledem k množině Z_1 bude různý od doplňku A'_2 množiny A vzhledem k množině Z_2 . Nejlépe si to objasníme na Vennových diagramech na obr. 2, kde je svisle šrafovaná oblast obrazem množiny A'_1 a vodorovně šrafovaná oblast je obrazem množiny A'_2 .



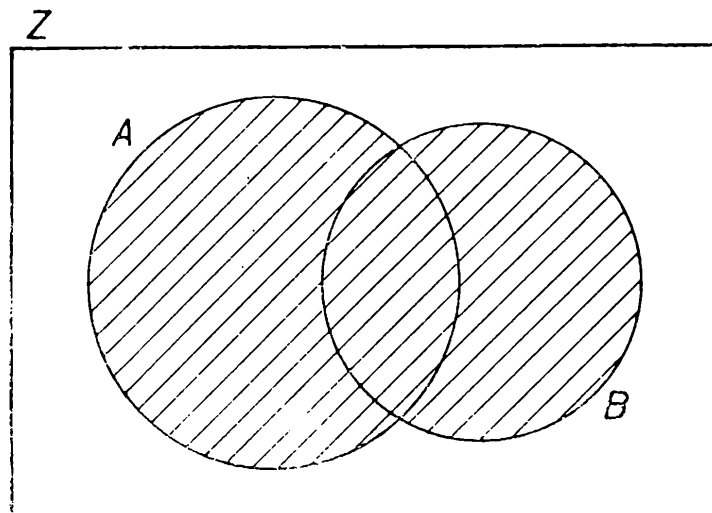
Obr. 3

žiny A'_2 . Z obrázku je vidět, že uvažované doplňky A'_1 , A'_2 množiny A vzhledem k různým množinám Z_1 , Z_2 jsou různé.

Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme říkat místo „doplněk množiny A vzhledem k množině Z “ pouze „doplněk množiny A “.

Na obr. 3 je znázorněn Vennův diagram pro dvě množiny **A**, **B**. Vyšrafované políčko je obrazem množiny všech těch prvků množiny **Z**, které patří do množiny **A** a zároveň do množiny **B**. Pro tuto množinu si zavedeme název **p r ů n i k m n o ž i n A, B** a budeme ji označovat **$A \cap B$** . Čtenář by jistě už dovedl samostatně definovat průnik tří, čtyř i více množin.

Uvažujme oblast Vennova diagramu pro dvě množiny vyšrafovanou na obr. 4.



Obr. 4

Tato oblast je obrazem množiny všech těch prvků množiny **Z**, které patří do množiny **A** nebo do množiny **B** (slovo „nebo“ chápeme ve smyslu nevylučovacím). Tuto množinu nazveme **s j e d n o c e n í m n o ž i n A, B** a zavedeme pro ni označení **$A \cup B$** .

3. Uvedeme dva příklady, na nichž si ozřejmíme pojmy doplněk množiny, průnik a sjednocení množin.

Příklad 1. Zvolme za základní množinu, např. množinu všech reálných čísel, kterou označíme písmenem **P**. Nechť **A** je množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 + 2x - 3 = 0$ a nechť **B** je množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Potom je množina všech reálných kořenů rovnice

$$(x^2 + 2x - 3) (x^2 + 4x + 3) = 0$$

sjednocením množin **A**, **B**, tj. množinou **$A \cup B$** .

Množina všech reálných kořenů soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= 0, \\ x^2 + 4x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

je průnikem množin **A**, **B**, tj. množinou **$A \cap B$** .

Doplňkem množiny **A** vzhledem k množině **P** je množina všech reálných čísel x , pro něž je $x^2 + 2x - 3 \neq 0$.

Doporučuji čtenáři, aby si samostatně vyřešil obě rovnice a určil, která reálná čísla jsou prvky množin **A**, **B**, **$A \cap B$** , **$A \cup B$** .

Příklad 2. Zvolme za základní množinu všech čtyřúhelníků v rovině. Nechť **A** je množina všech rovnostranných čtyřúhelníků a nechť **B** je množina všech čtyřúhelníků, které mají všechny vnitřní úhly pravé. Prosím čtenáře, aby si důkladně promyslel tato tvrzení:

a) $\mathbf{A \cap B}$ je množinou všech čtverců.

b) $\mathbf{A \cup B}$ je množinou všech čtyřúhelníků, které mají aspoň dvě osy souměrnosti.

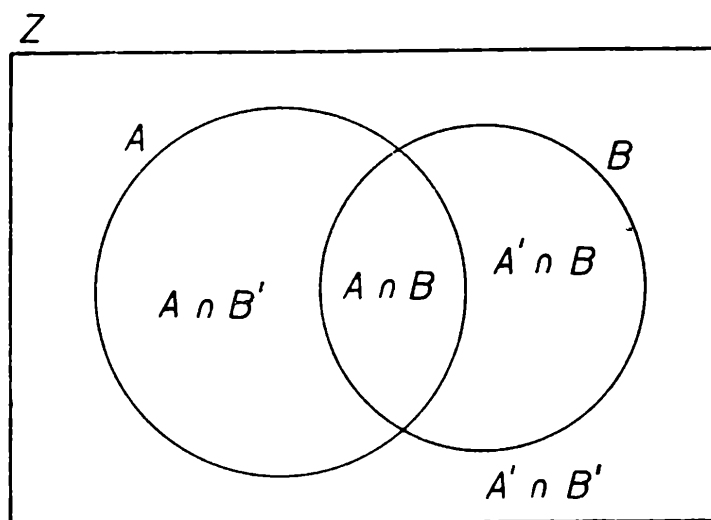
c) Doplněk $\mathbf{B'}$ množiny **B** je množina všech čtyřúhelníků, které mají aspoň jeden vnitřní úhel ostrý nebo tupý.

d) Množina všech rovnostranných čtyřúhelníků, které mají aspoň jeden vnitřní úhel ostrý, je průnik množiny **A** a doplňku množiny **B**, tj. $\mathbf{A \cap B'}$

e) Množina všech čtyřúhelníků, které mají nejvýše jednu osu souměrnosti, je doplněk sjednocení množin **A**, **B**, tj. množina $\mathbf{(A \cap B)'}$

4. Uvažujme Vennovy diagramy pro jednu, dvě, tři a čtyři množiny a pokusme se charakterizovat každé jejich políčko pomocí množinových operací uvedených v odstavci 2.

Vennův diagram pro jednu množinu je dostatečně popsán (viz obr. 1). Přejdeme tedy k Vennovu diagramu pro dvě množiny (obr. 5). Víme

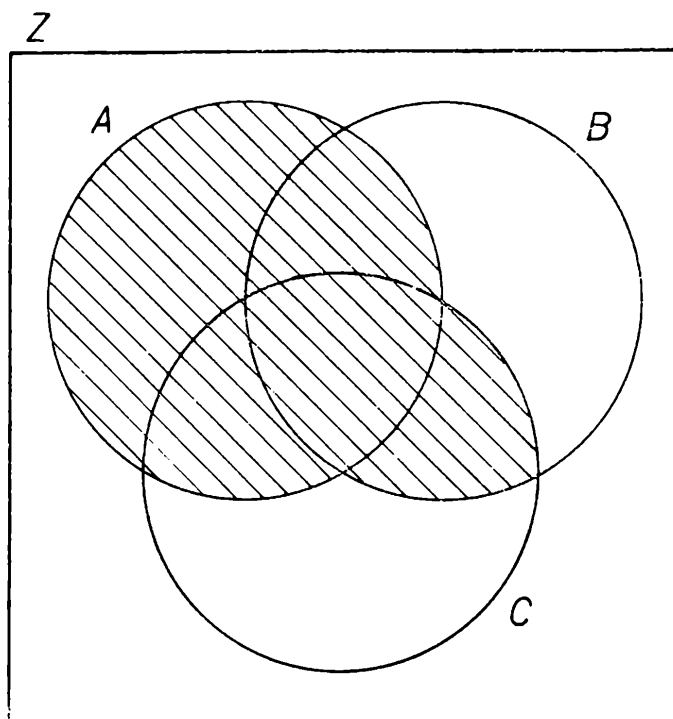


Obr. 5

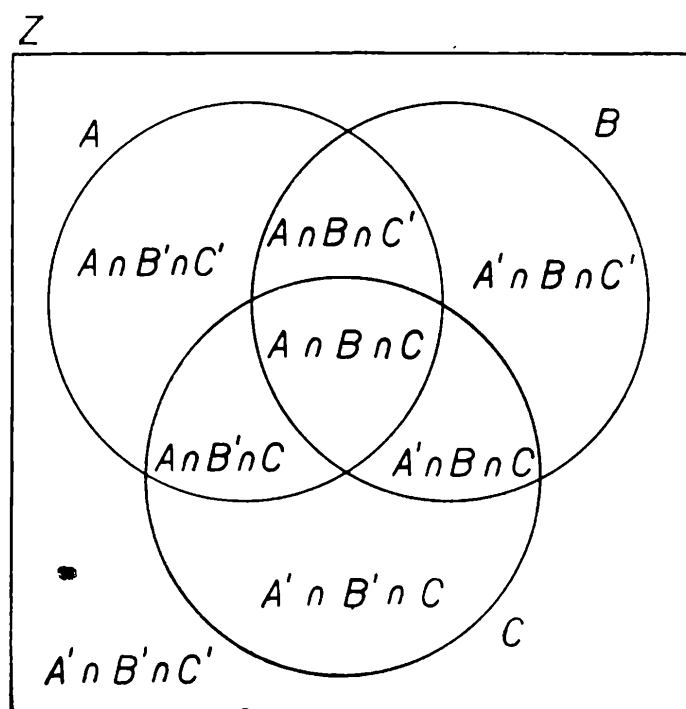
již, které políčko je obrazem průniku $\mathbf{A \cap B}$ množin **A**, **B**. Sousední políčko vlevo je obrazem množiny všech prvků množiny **Z**, které patří množině **A** a zároveň nepatří množině **B**, tj. patří množině **A** a zároveň patří množině $\mathbf{B'}$, jde tedy o průnik $\mathbf{A \cap B'}$ množin **A**, $\mathbf{B'}$. Prosím čtenáře, aby si samostatně provedl podrobnou úvahu týkající se zbývajících políček a aby se přesvědčil, že jsou na obr. 5 správně označena.

Na obr. 6 jsou popsána všechna políčka Vennova diagramu pro tři množiny. Z obrázku je vidět, že každé z těchto políček je obrazem množiny, kterou lze vytvořit pomocí průniku tří ze šesti množin **A**, **B**, **C**, $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$. Obdobnou úvahu pro Vennův diagram čtyř množin může čtenář provést samostatně.

5. Vzhledem k tomu, že umíme popsat každé políčko Vennova diagramu, můžeme se pokusit o zápis množiny, která je na Vennově diagramu znázorněna oblastí skládající se z několika políček. Takovou oblast vidíme např. na obr. 7, kde je vyznačena šrafováním; pokusme se zapsat množinu, jejímž obrazem je právě tato oblast.



Obr. 6



Obr.

Oblast se skládá z políček, která znázorňují průniky množin, o nichž jsme hovořili výše; znázorněnou množinu zapíšeme jako sjednocení průniků

$$(A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B \cap C) \cup \\ \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$$

Tento zápis množiny je dlouhý a nepřehledný. Zahledíme-li se pozorněji na obrázek, napadne nás, že uvažovanou množinu lze zapsat stručněji jedním z těchto způsobů

$$(A \cup B) \cap (A \cup C), A \cup (B \cap C)$$

Oba poslední zápisy jsou jistě velmi přehledné.

Čtenář však může namítnout: „Nejsem přesvědčen, že poslední dva zápisy vyjadřují touž množinu. Je vůbec možné, aby nějaká množina byla zapsána různými způsoby?“ Provedme tedy některé obecné úvahy, na jejichž základě bude čtenář moci na tuto námitku odpovědět.

6. V číselné algebře je často třeba zjistit, v jakém vztahu jsou dvě čísla, zda jsou si rovna či zda jsou různá, popřípadě, lze-li to určit, které z nich je menší. Například čísla 8 a 56/7 jsou si navzájem rovna, i když jsou různě zapsána; čísla 9 a 10 jsou různá a přitom je 9 menší než 10; komplexní čísla $5 + 7i$, $4 - 2i$ jsou různá a přitom žádné z nich není menší než druhé. Zkoumejme obdobné vztahy mezi množinami.

Prosím čtenáře, aby nyní pozorně sledoval obrázky 4 a 5. Uvažujme dvě množiny, z nichž první je zapsána $(A \cap B') \cup (A \cap B)$ a druhá $A \cup B$. Všechna políčka, která jsou částmi obrazu první množiny, jsou též částmi obrazu množiny $A \cup B$. Každý prvek, který patří první množině, je i prvkem druhé množiny. Říkáme, že množina

$$(A \cap B') \cup (A \cap B)$$

je podmnožinou množiny $A \cup B$ a zapisujeme

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) \subset (A \cup B)$$

Obecně lze vyslovit definici podmnožiny dané množiny takto:

Množinu M nazýváme podmnožinou množiny N právě tehdy, když každý prvek množiny M je prvkem množiny N . Zapisujeme $M \subset N$.

Uvažujme nyní množinu $(A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$ a množinu $A \cup B$. Obrazy těchto dvou množin se skládají z těchže políček. Každý prvek první množiny je též prvkem druhé množiny; proto je první množina podmnožinou druhé. Také obráceně platí, že druhá z množin je podmnožinou první množiny. V tomto případě říkáme, jak již víme, že uvažované množiny jsou si rovny. Obecně lze definovat rovnost množin takto:

Říkáme, že množiny M , N jsou si rovny právě tehdy, když množina M je podmnožinou množiny N a zároveň množina N je podmnožinou množiny M . K zápisu rovnosti množin používáme obyčejného rovnítko, píšeme $M = N$. Není-li splněna aspoň jedna z podmínek, říkáme, že množiny jsou různé; v tom případě zapisujeme např. $P \neq Q$.

Příkladem různých množin jsou množiny

$$A \cup B \text{ a } (A \cap B') \cup (A \cap B)$$

Obdobně platí

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) \neq (A \cap B) \cup (A' \cap B),$$

z nichž ani jedna není podmnožinou druhé.

(Pokračování)

Analytické vyjádření některých rovinných útvarů

J I Ř Í K O B Z A, Olomouc

„Pomocí souřadnic bodů můžeme početně charakterizovat různé rovinné geometrické útvary.“

(Matematika III, SVVŠ)

V článku budeme používat symbolické značení, zavedené v učebnici pro SVVŠ, III. díl: Jsou-li $A \equiv (a_1; a_2)$, $B \equiv (b_1; b_2)$ body v rovině, pak $X = A + B$ znamená bod $X \equiv (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$, kA znamená bod $(ka_1; ka_2)$.

Je známo (viz zmíněná učebnice), že rovnice

$$X = A + t(B - A), t \geq 0$$

je analytickým vyjádřením polopřímky AB , tj. pro každou hodnotu $t \geq 0$ dostaneme po dosazení symbolické vyjádření bodu na polopřímce AB . Rovnice

$$X = A + t(B - A), 0 \leq t \leq 1$$

je analytickým vyjádřením úsečky AB . Tuto rovnici je též možno psát ve tvaru

$$X = (1 - t)A + tB, 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

Všimněme si, že součet nezáporných koeficientů u A a B je roven jedné; odpovídající rovnice pro složky bodu $X \equiv (x_1; x_2)$ jsou

$$x_1 = (1 - t)a_1 + tb_1, x_2 = (1 - t)a_2 + tb_2.$$

Parametr t je roven podílu velikostí úseček AX a AB . Jinými slovy, množinou bodů X , které při daných bodech A, B pro uvedená t vyhovují rovnici (1) je úsečka AB .

Ukažme si analytické vyjádření některých jiných rovinných geometrických útvarů.

1. Je-li $A \neq B \neq 0$, pak rovnice

$$X = t_1 A + t_2 B, \quad t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0 \quad (2)$$

je analytickým vyjádřením úhlu AOB .

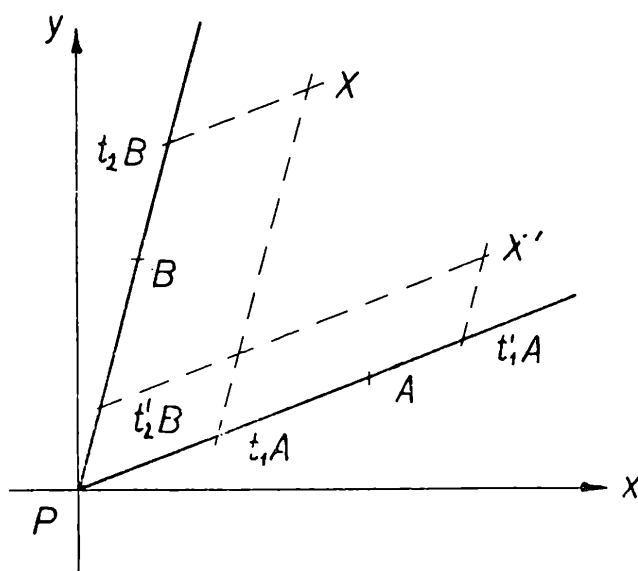
Důkaz. (Obr. 1)

pro $t_1 = t_2 = 0$ je $X \equiv 0$,

pro $t_1 = 0$ je $X = t_2 B$ bodem polopřímky OB ,

pro $t_2 = 0$ je $X = t_1 A$ bodem polopřímky OA .

Jsou-li $t_1, t_2 \neq 0$, pak bod $t_1 A$ leží na polopřímce OA , bod $t_2 B$ leží na polopřímce OB a bod $X = t_1 A + t_2 B$ leží uvnitř úhlu AOB . Naopak, leží-li X' uvnitř úhlu AOB , vedme rovnoběžky s rameny úhlu. Jejich průsečíky s druhým ramenem se dají vyjádřit jako $t'_1 A, t'_2 B$, a tedy $X' = t'_1 A + t'_2 B$. Tím je tvrzení dokázáno.



Obr. 1. Na obrázku je

$$A \equiv \left(\frac{5}{2}; 1\right), \quad B \equiv \left(\frac{1}{2}; 2\right); \quad X = \frac{1}{2} A + \frac{3}{2} B, \quad X' = \frac{4}{3} A + \frac{1}{3} B.$$

Cvičení. a) Ukažte, že pro $A_1 \neq A_2 \neq 0$ je rovnice $X = t_1 A_1 + t_2 A_2$, $t_2 \geq 0$, t_1 libovolné reálné číslo analytickým vyjádřením polopřímky OA_1A_2 .

b) Rovnice $X = t_1 A_1 + t_2 A_2$, t_1, t_2 lib. reálná čísla, je za předpokladu $A_1 \neq A_2 \neq 0$ analytickým vyjádřením celé roviny. Známým příkladem takového vyjádření je geometrické znázornění komplexních čísel v rovině, kdy bod $A \equiv (a_1; a_2)$ je obrazem komplexního čísla $a = a_1 + a_2 i$

$$[a_1(1; 0) + a_2(0; 1) = (a_1; a_2)].$$

2. Necht body A, B, C neleží v přímce. Rovnice

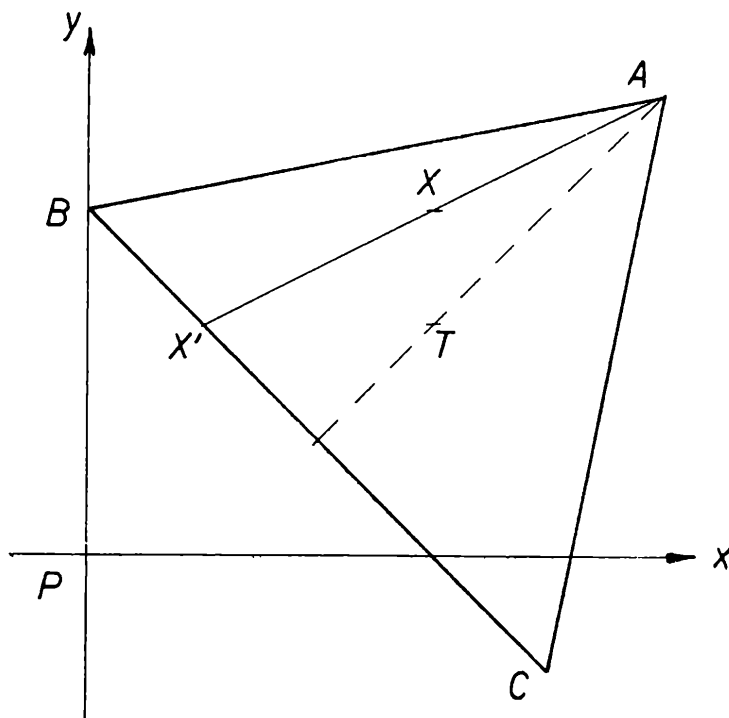
$$X = t_1 A_1 + t_2 A_2 + t_3 A_3; \quad t_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1 \quad (3)$$

je analytickým vyjádřením trojúhelníka ABC .

Důkaz. Ukážeme, že a) každý takovýto bod X leží v trojúhelníku ABC .

b) Každý bod trojúhelníka ABC se dá takto vyjádřit.

Jsou-li dva z koeficientů t_i nulové, musí být podle podmínky $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ třetí koeficient roven jedné. Bod X je pak jedním z vrcholů trojúhelníka. Je-li jeden z koeficientů t_i nulový, pak součet zbylých dvou je roven jedné a podle předchozího body X vyplní úsečku — jednu ze stran trojúhelníka. Zabývejme se tedy obecným případem, kdy všechny tři koeficienty t_i jsou nenulové (obr. 2).



Obr. 2. Na obrázku je

$A \equiv (5; 4)$, $B \equiv (0; 3)$, $C \equiv (4; -1)$; $X' = \frac{3}{4}B + \frac{1}{4}C$,
 $X = \frac{1}{2}X' + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A + \frac{3}{8}B + \frac{1}{8}C$; $T \equiv (3; 2)$.

a) Nechť

$$X = t_1A + t_2B + t_3C = t_1A + (t_2 + t_3) \left[\frac{t_2}{t_2 + t_3}B + \frac{t_3}{t_2 + t_3}C \right]$$

Poněvadž

$$\frac{t_2}{t_2 + t_3} > 0, \quad \frac{t_3}{t_2 + t_3} > 0, \quad \frac{t_2}{t_2 + t_3} + \frac{t_3}{t_2 + t_3} = 1,$$

leží bod

$$X' = \frac{t_2}{t_2 + t_3}B + \frac{t_3}{t_2 + t_3}C$$

na úsečce BC . Je tedy

$$X = t_1A + (t_2 + t_3)X'$$

protože podle předpokladu

$$t_1 + (t_2 + t_3) = 1,$$

leží bod X na úsečce AX' , tedy uvnitř

$$\triangle ABC$$

b) Naopak, nechť X leží uvnitř $\triangle ABC$; označme X' průsečík AX s BC . Platí

$$X' = t'_1 B + t'_2 C, \quad t'_1 + t'_2 = 1,$$

$$X = t''_1 A + t''_2 X' \quad t''_1 + t''_2 = 1,$$

tedy

$$X = t''_1 A + t''_2 (t'_1 B + t'_2 C) = t_1 A + t_2 B + t_3 C,$$

kde

$$t_1 = t''_1, \quad t_2 = t'_1 t''_2, \quad t_3 = t'_2 t''_2;$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = t''_1 + t''_2 (t'_1 + t'_2) = t''_1 + t''_2 = 1$$

Tvrzení je dokázáno.

Cvičení. Zvolíme-li všechna t_i stejná ($t_i = \frac{1}{3}$), pak bod

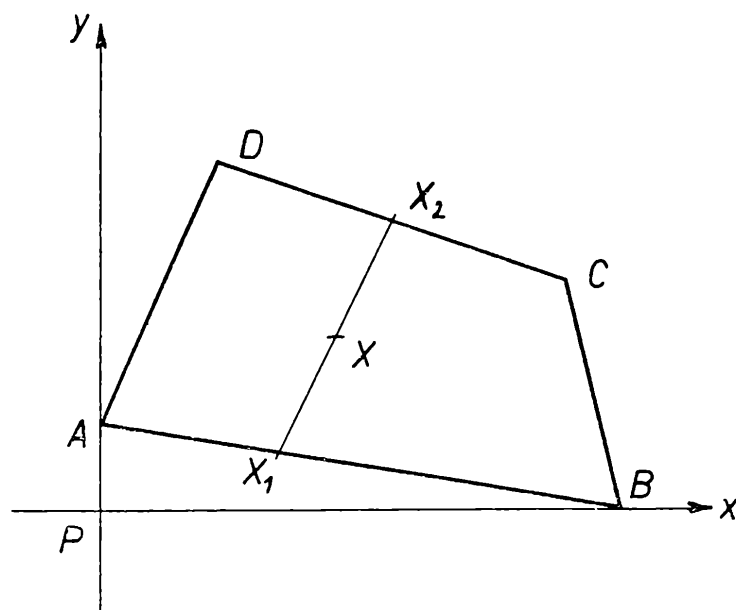
$$T = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} C$$

je těžištěm trojúhelníka ABC (obráz. 2).

3. Jestliže žádné tři z bodů A, B, C, D neleží v přímce a bod D neleží v trojúhelníku ABC , pak rovnice

$$X = t_1 A + t_2 B + t_3 C + t_4 D, \quad t_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \sum_{i=1}^4 t_i = 1 \quad (4)$$

je analytickým vyjádřením konvexního čtyřúhelníka $ABCD$.



Obr. 3. Na obrázku je

$$A \equiv (0; \frac{3}{4}), \quad B \equiv (\frac{2}{3}; 0), \quad C \equiv (4; 2), \quad D \equiv (1; 3);$$

$$X_1 = \frac{2}{3} A + \frac{1}{3} B, \quad X_2 = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} D;$$

$$X \equiv (4; 3) = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 = \frac{1}{3} A + \frac{1}{6} B + \frac{1}{4} C + \frac{1}{4} D.$$

Důkaz. (Obr. 3.) Jsou-li alespoň dva z koeficientů t_i nulové, leží bod X na některé ze stran nebo úhlopříček čtyřúhelníka a naopak. Zabývejme se tedy případem, kdy je nejvýše jeden z koeficientů t_i nulový.

a) Pro bod X můžeme psát

$$X = t_1 A + t_2 B + t_3 C + t_4 D = (t_1 + t_2) \left[\frac{t_1}{t_1 + t_2} A + \frac{t_2}{t_1 + t_2} B \right] + \\ + (t_3 + t_4) \left[\frac{t_3}{t_3 + t_4} C + \frac{t_4}{t_3 + t_4} D \right]$$

Bod

$$X_1 = \frac{t_1}{t_1 + t_2} A + \frac{t_2}{t_1 + t_2} B ,$$

leží na úsečce AB , bod

$$X_2 = \frac{t_3}{t_3 + t_4} C + \frac{t_4}{t_3 + t_4} D ,$$

leží na úsečce CD .

Tedy

$$X = (t_1 + t_2) X_1 + (t_3 + t_4) X_2 ;$$

protože

$$(t_1 + t_2) + (t_3 + t_4) = 1 ,$$

leží bod X na úsečce $X_1 X_2$, tedy uvnitř čtyřúhelníka.

b) Naopak, leží-li X uvnitř našeho čtyřúhelníka, leží jistě na nějaké úsečce $X_1 X_2$, kde X_1 leží na AB , X_2 leží na CD . Platí pro vhodné koeficienty

$$t'_1, t'_2, t''_1, t''_2, t'''_1, t'''_2$$

$$X_1 = t'_1 A + t'_2 B, t'_1 + t'_2 = 1 ; \quad X_2 = t''_1 C + t''_2 D, t''_1 + t''_2 = 1 ,$$

$$X = t'''_1 X_1 + t'''_2 X_2 = t'''_1 (t'_1 A + t'_2 B) + t'''_2 (t''_1 C + t''_2 D) = \\ = t_1 A + t_2 B + t_3 C + t_4 D ,$$

kde

$$t_1 = t'''_1 t'_1, t_2 = t'''_1 t'_2, t_3 = t'''_2 t''_1, t_4 = t'''_2 t''_2 ;$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t'''_1 (t'_1 + t'_2) + t'''_2 (t''_1 + t''_2) = t'''_1 + t'''_2 = 1$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka. Bod

$$T = \frac{1}{4} A + \frac{1}{4} B + \frac{1}{4} C + \frac{1}{4} D$$

je těžištěm soustavy hmotných bodů A, B, C, D se stejnými hmotami.

4. Ukažme obecně. Je-li

$$X = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_n A_n = \sum_{i=1}^{i=n} t_i A_i, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{i=n} t_i = 1 \quad (5)$$

analytickým vyjádřením konvexního mnohoúhelníka $P = A_1 A_2 \dots A_n$,

A_{n+1} libovolný bod, pak též rovnice

$$X' = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \dots + t_n A_n + t_{n+1} A_{n+1},$$

$$t_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n+1, \sum_{i=1}^{i=n+1} t_i = 1 \quad (6)$$

je analytickým vyjádřením nějakého konvexního mnohoúhelníka.

Důkaz. Leží-li A_{n+1} v P , je pro vhodná p_i

$$A_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n} p_i A_i, p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Pak

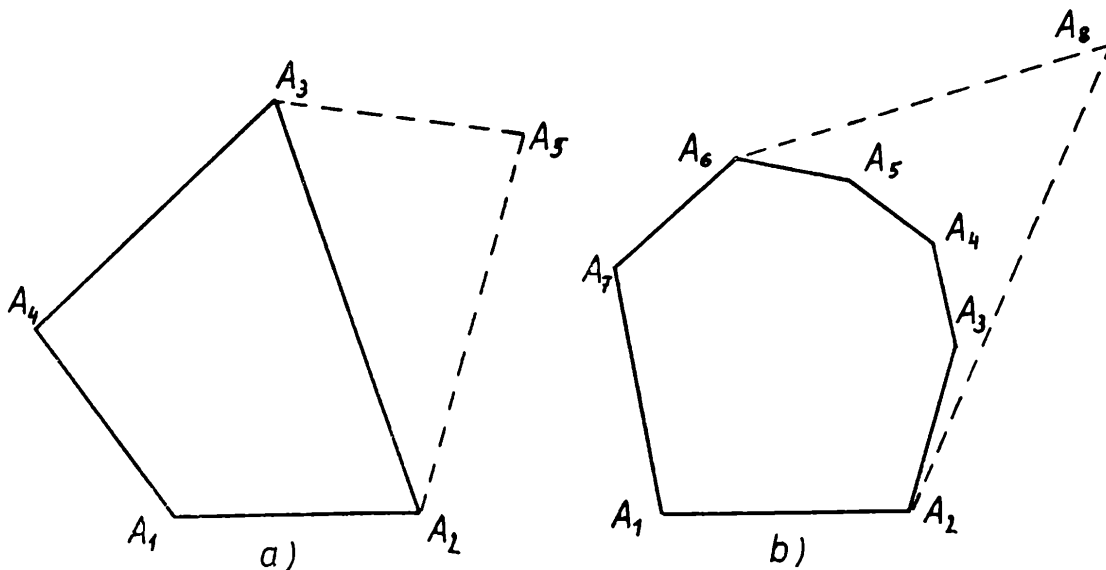
$$X' = \sum_{i=1}^{i=n+1} t_i A_i = \sum_{i=1}^{i=n} t_i A_i + t_{n+1} \sum_{i=1}^{i=n} p_i A_i = \sum_{i=1}^{i=n} (t_i + t_{n+1} p_i) A_i;$$

X' je bodem v P , neboť

$$\sum_{i=1}^{i=n} (t_i + t_{n+1} p_i) = \sum_{i=1}^{i=n} t_i + t_{n+1} \sum_{i=1}^{i=n} p_i = \sum_{i=1}^{i=n} t_i + t_{n+1} = 1$$

V tomto případě jde tedy jen o nové analytické vyjádření P .

Leží-li A_{n+1} vně P , pak spojnice bodů X z P s bodem A_{n+1} vyplní nový konvexní mnohoúhelník. Přitom počet stran a vrcholů se může jak zvětšit, tak i zmenšit (obr. 4a, 4b).



Obr. 4

Ukažme, že rovnice

$$X' = \sum_{i=1}^{i=n+1} t_i A_i, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{i=n+1} t_i = 1$$

je analytickým vyjádřením tohoto nového mnohoúhelníka.

a) Leží-li X' na úsečce $A_{n+1}X$, kde X leží v P

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} p_i A_i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1,$$

pak

$$X' = t'_1 X + t'_2 A_{n+1}, \quad t'_1 + t'_2 = 1, \quad t'_1, t'_2 \geq 0,$$

tj.

$$X' = t'_1 \sum_{i=1}^{i=n} p_i A_i + t'_2 A_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} t_i A_i,$$

kde

$$0 \leq t_i = t'_1 p_i \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n;$$

$$t_{n+1} = t'_2, \quad \sum_{i=1}^{n+1} t_i = t'_1 \sum_{i=1}^{n+1} p_i + t'_2 = t'_1 + t'_2 = 1$$

b) Naopak, je-li

$$X' = \sum_{i=1}^{i=n+1} t_i A_i, \quad t_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n+1} t_i = 1,$$

pak

$$X' = \sum_{i=1}^{i=n} t_i \left(\frac{t_1}{\sum_{i=1}^{i=n} t_i} A_1 + \frac{t_2}{\sum_{i=1}^{i=n} t_i} A_2 + \dots + \frac{t_n}{\sum_{i=1}^{i=n} t_i} A_n \right) + t_{n+1} A_{n+1}$$

Výraz v závorce představuje bod X'' z P (součet koeficientů je roven jedné). Tedy

$$X' = \left(\sum_{i=1}^{i=n} t_i \right) X'' + t_{n+1} A_{n+1},$$

tj. X' leží na úsečce $X''A_{n+1}$, neboť

$$\sum_{i=1}^n t_i + t_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} t_i = 1,$$

podle předpokladu.

Bod X' leží tedy v novém mnohoúhelníku.

Odtud podle principu úplné matematické indukce plyne, že každý bod vnitřku a obvodu konvexního mnohoúhelníka o vrcholech $A_1, A_2, \dots, A_k$ se dá vyjádřit ve tvaru

$$X = \sum_{i=1}^{i=k} t_i A_i, \quad t_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{i=k} t_i = 1$$

5. Všechny rovinné útvary, kterými jsme se v článku zabývali (přímka, polopřímka, úsečka, polorovina, úhel, trojúhelník, konvexní mnohoúhelníky) mají jednu společnou vlastnost (využívali jsme jí též v důkazech), která se dá popsat takto:

Patří-li dva body A_1, A_2 do útvaru K , pak i všechny body úsečky A_1A_2 patří do útvaru K .

Geometrické útvary, které mají tuto vlastnost se nazývají *konvexní*.

Mezi takto definované konvexní útvary patří ovšem ještě jiné známé útvary, např. kruh, kruhová výseč a jiné. Mezi rovinnými konvexními útvary se úsečka a konvexní mnohoúhelníky vyznačují svým — formálně podobným — analytickým vyjádřením tvaru

$$X = \sum_{i=1}^{i=k} t_i A_i, \quad t_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{i=k} t_i = 1$$

Mají-li koeficienty t_i uvedené vlastnosti, nazývá se proto výraz

$$\sum_{i=1}^{i=k} t_i A_i$$

konvexní kombinací bodů A_i .

Výše uvedenou vlastnost bodů konvexního mnohoúhelníka je možno pak vyjádřit takto: Každý bod konvexního mnohoúhelníka je konvexní kombinací vrcholů mnohoúhelníka.

Je možno ukázat, že tento vztah platí i mezi body a vrcholy konvexních mnohostěnů. Své použití má např. v teorii lineárního programování.

0 jedné konstrukci pravidelného pětiúhelníka

JAROSLAV LIBICHER, Lipník nad Bečvou

V tomto článku užijeme řešení binomické rovnice

$$x^5 - 1 = 0 \tag{1}$$

k algebraickému odvození konstrukce pravidelného pětiúhelníku.

Rovnici (1) můžeme řešit buď způsobem popsaným v Doplnku k základní učebnici matematiky pro II. ročník SVVŠ, větev přírodovědná, přičemž její kořeny dostaneme v goniometrickém tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ, \\ x_3 &= \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}x_4 &= \cos 216^\circ + i \sin 216^\circ, \\x_5 &= \cos 288^\circ + i \sin 288^\circ\end{aligned}$$

nebo můžeme postupovat takto:

Rozložíme levou stranu rovnice (1) a dostaneme

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

Odtud vyplývá, že $x_1 = 1$ je kořenem rovnice (1). Dále řešíme rovnici

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Poněvadž tato rovnice nemůže mít kořen $x = 0$, násobíme obě strany číslem $\frac{1}{x^2}$ a přerovnáme členy podle mocnin. Obdržíme

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0 \quad (3)$$

Zavedeme-li substituci

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad (4)$$

tj.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \quad (5)$$

a dosadíme-li ze vztahů (4) a (5) do rovnice (3), dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 + y - 1 = 0,$$

která má diskriminant $D = 5$. Existují tedy dva reálné různé kořeny

$$y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Položíme-li nyní ve vztahu (4) $y = y_1$, dostaneme kvadratickou rovnici

$$2x^2 - (-1 + \sqrt{5})x + 2 = 0,$$

která má záporný diskriminant

$$D_1 = -2\sqrt{5} - 10$$

Má tedy dva komplexně sdružené kořeny, které označíme

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{|D_1|}}{4},$$

$$x_5 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{|D_1|}}{4} \quad (6)$$

a to jsou zároveň kořeny rovnice (1).

Podobně. Položíme-li ve vztahu (4) $y = y_2$ a řešíme vzniklou kvadratickou rovnici

$$2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2 = 0,$$

která má záporný diskriminant

$$D_2 = 2\sqrt{5} - 10,$$

dostaneme zbývající dva kořeny rovnice (1), které označíme

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{|D_2|}}{4} \\ x_4 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i \frac{\sqrt{|D_2|}}{4} \end{aligned} \quad (7)$$

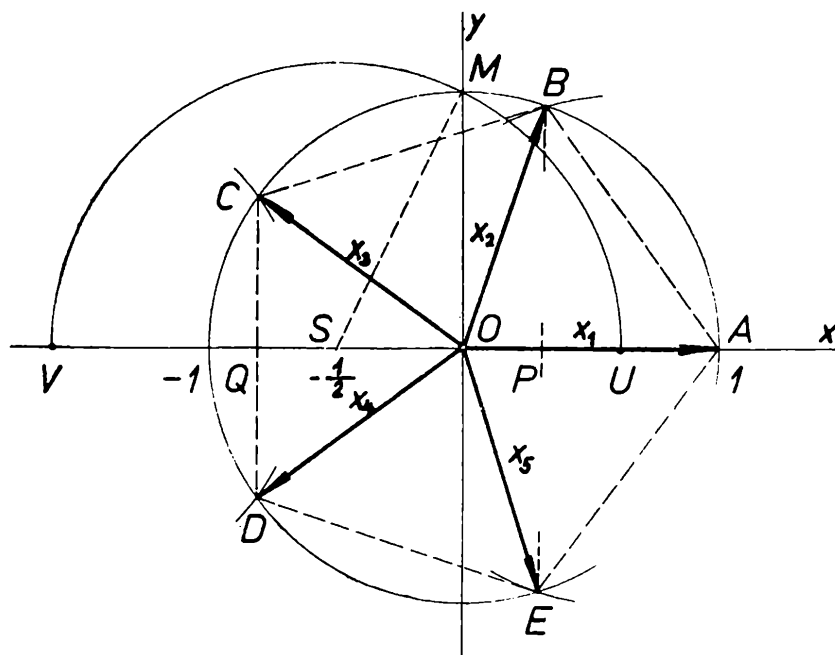
Naznačeným postupem jsme ovšem komplexně sdružené kořeny rovnice (1) obdrželi v algebraickém tvaru. O tom, že v obou případech jsou řešením též komplexní čísla, můžeme se snadno přesvědčit vyčíslením goniometrických funkcí ve tvaru (2), popřípadě odmocnin ve tvaru (6) a (7) na určitý počet platných desetinných míst, což ponechávám čtenáři.

Znázorníme-li kořeny rovnice (1) pomocí vektorů v kartézské soustavě souřadnic tak, že kořenům x_1 až x_5 přiřadíme po řadě vektory $\vec{OA}$ až $\vec{OE}$, pak koncové body A, B, C, D, E těchto vektorů tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníka vepsaného do jednotkové kružnice, který je souměrný podle osy x (viz obr. 1). Vyplývá to z toho, že všechny kořeny rovnice (1) mají stejnou absolutní hodnotu rovnu jedné a jejich argumenty se po řadě liší o týž ostrý úhel $\varphi = 72^\circ$. Souměrnost je pak důsledkem toho, že vektory $\vec{OB}$ a $\vec{OE}$, resp. $\vec{OC}$ a $\vec{OD}$, jsou obrazy čísel komplexně sdružených, jak zjistíme nejlépe z algebraického tvaru kořenů (6) a (7).

Z uvedeného vyplývá, že vrcholy B, E a C, D v obr. 1 lze sestrojit tak, že na osu x nanese souřadnice x vektorů $\vec{OB}$ a $\vec{OC}$, tj. úsečky

$$\begin{aligned} OP &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right), \\ OQ &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

a sestrojíme průsečíky kolmic v koncových bodech P a Q s jednotkovou kružnicí.



Obr. 1

Z praktických důvodů konstrukci dále upravíme tak, že místo úseček OP a OQ budeme nanášet úsečky

$$OU = 2 \cdot OP = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$OV = 2 \cdot OQ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2},$$

takže vrcholy B , E a C , D budou pak průsečíky os těchto úseček s jednotkovou kružnicí.

Konstrukci bodů U a V provedeme tak, že nejdříve sestrojíme úsečku

$$SM = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka OMS s odvěsnami

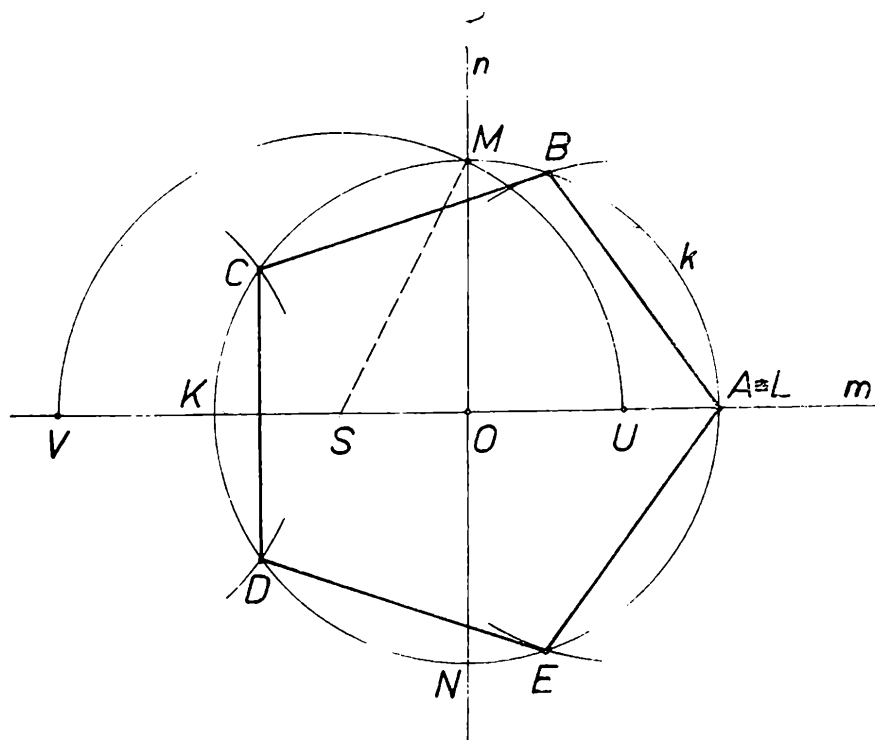
$$OM = 1, \quad OS = \frac{1}{2}$$

a tuto úsečku naneseme z bodu o souřadnicích

$$-\frac{1}{2}, 0$$

na osu x v obou směrech.

Protneme-li nyní z bodů U a V jednotkovou kružnici kruhovými oblouky o poloměru $r = 1$, dostaneme přímo vrcholy B , E a C , D pravidelného pětiúhelníka, neboť takto získané body leží současně na osách úseček OU , resp. OV



Obr. 2

Vzhledem k tomu, že libovolnou kružnici $k \equiv (O; r)$ lze považovat za jednotkovou, uvažujeme-li její poloměr jako jednotku délky a její střed za počátek soustavy souřadnic, můžeme nalezenou konstrukci pravidelného pětiúhelníka obecně formulovat takto (viz obr. 2).

Sestrojíme kružnici $k \equiv (O; r)$, která je kružnicí opsanou pravidelnému pětiúhelníku a zvolíme dva její kolmé průměry $m \equiv KL$ a $n \equiv MN$. Dále sestrojíme střed S jednoho z poloměrů, např. OK a protne-
me průměr m kruhovými oblouky o středu S a poloměru $r_1 = SM$; dostaneme body U a V . Z těchto bodů protne-
me kružnici k kruhovými oblouky o poloměru rovném poloměru opsané kružnice a dostaneme body B , E , resp. C , D , které spolu s bodem $A \equiv L$ tvoří vrcholy hledaného pravidelného pětiúhelníka $ABCDE$.

Hovoříme se samočinným počítačem

PAVEL SOUČEK, Biofyzikální ústav UK, Praha

(Pokračování)

Přistupme konečně k řešení konkrétního příkladu. Mějme pravoúhlý nerovnoramenný trojúhelník. Budte dány délky obou odvěsen ($k = 3$ m, $l = 4$ m). Máme vypočítat obvod O trojúhelníka a obsah P trojúhelníka. Napřed ovšem musíme vypočítat délku přepony z podle Pythagorovy věty.

Program bude mít několik částí:

- a) Přípravné instrukce.
- b) Výpočet přepony podle Pythagorovy věty.
- c) Výpočet obvodu O a tisk jeho hodnoty.
- d) Výpočet obsahu P a tisk jeho hodnoty.

Program tedy bude vypadat takto

```
real pozl
label l
begin

l : z = 3.0 ☆ 3.0
l = 4.0 ☆ 4.0
z = z + l
z = sqrt z
o = z + 3.0
o = o + 4.0
print Ω o = Ω
print o, 2.0
p = 3.0 ☆ 4.0
p = p ☆ 0.5
print Ω p = Ω
print p, 2.0
stop l
start l
```

Vysvětlíme si nyní jednotlivé instrukce jednu po druhé. První tři instrukce (*real*, *label*, *begin*) nazýváme *přípravné*. Za instrukcí *real* (čti *ríl*) píšeme všechny reálné proměnné, kterých v programu užíváme. Za instrukcí *label* (čti *lejbl*) píšeme počet referenčních čísel, která se v programu vyskytnou. *Referenční číslo* je takové číslo, kterým označujeme libovolnou část programu, ke které se má počítač vrátit, až k tomu dostane pokyn. Takové číslo vždy opatřujeme dvojtečkou. V našem programu máme jediné referenční číslo, totiž *l*:, na samém začátku programu. Instrukce *begin* (čti *bigin*) sděluje stroji, že instrukce bezprostředně po ní následující zahajuje vlastní program, a tedy i vlastní výpočet.

Chceme napřed, aby počítač vypočítal délku přepony z podle Pythagorovy věty. Dáváme tedy stroji instrukce za sebou tak, jak bychom postupovali sami při takovém výpočtu. Především se umocní délka jedné odvěsny, $a = 3.0$ a výsledek se uloží na buňku z ($z = 3.0 \star 3.0$).⁴⁾

⁴⁾ Operace násobení se v jazyce *MOST* zapisuje symboly $\star$, aby nedošlo k záměně s desetinnou tečkou, popřípadě s písmenem x .

Tatáž operace se provede i s délkou druhé odvěsny, $b = 4.0$ a výsledek se uloží na buňku l . Tyto čtverce délek se sečtou, uloží na buňku z ($z = z + l$) a z jejich součtu se vypočte druhá odmocnina, čímž získáme délku přepony z ($z = \text{sqrt } z$).⁵⁾ Samočinný počítač si vypočtenou délku přepony uchová v paměti na buňce z . V průběhu výpočtu ukládáme dílčí výsledky stále na buňku z , abychom zbytečně nedeklarovali další proměnné.

Nyní se spočte obvod trojúhelníka. To znamená, že se sečtou všechny tři jeho strany. První krok tedy bude: $o = z + 3.0$. (K délce přepony, kterou si počítač pamatuje, přičte délku 3.0.) Dalším krokem bude přičtení zbývajících délek 4.0 k předchozímu součtu, tedy $o = o + 4.0$. Tím máme obvod vypočítaný. Jeho hodnotu nyní počítač vytiskne. Dáme mu k tomu instrukce: `print Ω o = Ω`⁶⁾ a `print o`, 2.0. Druhou z uvedených instrukcí tisku dáváme stroji příkaz, aby za rovnítko vytiskl hodnotu o , a to na dvě místa před desetinnou tečkou.⁷⁾

Dále bude stroj počítat obsah trojúhelníka. Dáme počítači příkaz, aby provedl součin délek odvěsen ($p = 3.0 \star 4.0$). Pak žádáme na počítači, aby násobil výsledek jednou polovinou ($p = p \star 0.5$) a konečně si přejeme, aby tento výsledek počítač vytiskl, což vyjádříme instrukcemi: `print Ω p = Ω` a `print p`, 2.0. Tím končí výpočet obsahu trojúhelníka a u konce je i celý naprogramovaný výpočet, týkající se jednoho určitého trojúhelníka.

Instrukcí `stop` dáváme stroji příkaz, aby se zastavil. Poslední instrukce začíná slovem `start`. Toto slovo sděluje počítači, že program končí, a proto nemá již dále číst pásku s programem. Číslo za slovem `start` je referenční číslo (v takovémto případě za ním nepíšeme dvojtečku), od něhož má začít výpočet podle právě přečteného programu.

Snad se zdá na první pohled rozumné a samozřejmé, že výpočet by měl začít od první instrukce, napsané za slovem `begin`. To však platí jen pro velmi jednoduché výpočty; složitější výpočty mohou začít instrukcí, napsanou uprostřed programu, jak poznáme snad v některém z dalších setkání.

⁵⁾ Symbol odmocniny $\sqrt{\quad}$ nahrazujeme v jazyce M O S T slovem `sqrt`, což je zkratka anglického slova `squareroot`.

⁶⁾ Symbol Ω (zvoneček) užíváme tehdy, když chceme počítači sdělit, jaký text má vytisknout. To znamená, že text omezený z obou stran zvonečkem (Ω), bude tisknut na dálnopise. V našem případě konkrétně $o =$.

⁷⁾ Protože jsme na začátku programu definovali všechny užití proměnné jako `real`, píšeme všechna čísla, tedy i celá, v programu užitá, v desetinném tvaru. Užíváme přitom nikoli desetinné čárky, ale desetinné tečky. Čárka v jazyce M O S T má jiný význam.

Podobná situace je s instrukcí `stop`. Jen nejjednodušší programy mají tuto instrukci napsanou až na konci.

Program, který jsme právě popsali, byl určen pro jediný trojúhelník. Nyní vypracujeme obecný program, který můžeme užít pro výpočet obvodu O a obsahu P libovolného pravoúhlého trojúhelníka, budou-li zadány délky obou odvěsen. Všimněte si, že tento program bude velmi podobný programu předchozímu. Pouze za určitá čísla dáme proměnné. Použijeme instrukce `*read` (čti `ríd`), která dává stroji příkaz ke čtení hodnoty z děrné pásky. Protože jsme v předchozím, velmi jednoduchém programu pásky dat výjimečně nepoužívali (do programu jsme totiž data přímo zabudovali), nepoužili jsme ani této instrukce `read`.

Na pásku dat vyděrujeme vždy dvojici čísel (délky odvěsen jednoho trojúhelníka).⁸⁾ Za poslední dvojici vyděrujeme ještě číslo 2 následované dvojtečkou.

Napišme tedy tento obecný program

```
real*aboplz
label 2
begin

1: read a
read b
 $z = a \star a$ 
 $l = b \star b$ 
 $z = z + l$ 
 $z = \text{sqrt } z$ 
 $o = z + a$ 
 $o = o + b$ 
print  $\Omega$   $o = \Omega$ 
print  $o, 2.0$ 
 $p = a \star b$ 
 $p = p \star 0.5$ 
print  $\Omega$   $p = \Omega$ 
print  $p, 2.0$ 
go to l
2: stop l
start l
```

První tři instrukce jsou stejné jako u programu předchozího. Výjimku tvoří číslo 2, uvedené za instrukcí `l a b e l`. Říká stroji, že v tomto

⁸⁾ O systému otvorů na pásce dat, reprezentujícím čísla, si řekneme něco více v některém dalším článku.

programu užíváme dvou referenčních čísel. Za instrukcí `read` deklarujeme reálné proměnné v tomto programu užité. Instrukcí `read a` přikazujeme počítači: čti první číslo z pásky dat a dosad' ho za proměnnou `a`. Podobně instrukcí `read b` se čte druhé číslo z pásky dat a dosadí za proměnnou `b`. Ostatní instrukce, tak, jak jdou za sebou, jsou obecným vyjádřením výpočtu, který byl popsán v předchozím programu. Není tedy třeba je znovu vysvětlovat.

Počítač tedy provede výpočet, po němž dospěje k instrukci `goto 1` (čti `goutu jedna`); touto instrukcí stroji přikazujeme: nepokračuj na následující napsanou instrukci, nýbrž na instrukci hned za referenčním číslem 1:. Tím vlastně začíná celý výpočet znovu, ovšem pro jinou dvojici čísel, které máme jako další vyděrované na pásce dat. Tak chodí počítač stále, až vyčerpá všechna čísla zadaná na pásce dat.

Instrukce `read` pracuje tak, že přečte-li z pásky dat číslo, následované dvojtečkou, neprovede obvyklé dosazení za proměnnou, nýbrž způsobí, že výpočet se na daném místě přeruší a začne od odpovídajícího referenčního čísla: v našem případě, přečte-li se instrukcí `read a` číslo 2:. Proveďte se vlastně instrukce `goto 2`, aniž by tato instrukce byla přímo v programu zapsána. Výpočet tedy odskočí na příslušnou instrukci v programu, tímto referenčním číslem označenou. V našem programu je to instrukce `stop 1`. Počítač se tedy zastaví.

Z uvedených programů je zřejmé, že samočinnému počítači je nutno sdělit krok za krokem, co má dělat, aby správně počítal. Jinak řečeno, co samočinnému počítači neřekneme, aby učinil, sám neudělá. V tom spočívá obtížnost programování, totiž v dokonale vyčerpávající analýze výpočtového postupu.

V příštím článku se seznámíte se složitějšími programy.

0 celej časti reálneho čísla a funkcii $y = [x]$

JOZEF FLIAŠ, Bratislava

(Pokračování)

P r í k l a d 3. Nakreslite graf funkcie $y = \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x}$

Riešenie. Daná funkcia je definovaná pre všetky reálne čísla x rôzne od nuly.

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí $x > 1$, je

$$\frac{1}{x} < 1, \left[\frac{1}{x} \right] = 0, y = \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}.$$

Graf danej funkcie je na intervale $(1, \infty)$ totožný s grafom funkcie

$$y = -\frac{1}{x}$$

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí $\frac{1}{2} < x \leq 1$, je

$$1 \leq \frac{1}{x} < 2$$

a

$$\left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

Potom

$$y = \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Graf danej funkcie je na intervale $(\frac{1}{2}, 1]$ totožný s grafom funkcie

$$y = 1 - \frac{1}{x};$$

atď.

Všeobecne, pre každé číslo x , pre ktoré platí

$$\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k},$$

kde $k = 1, 2, 3, \dots$ je

$$k \leq \frac{1}{x} < k+1 \text{ a } \left[\frac{1}{x} \right] = k$$

Potom

$$y = \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x} = k - \frac{1}{x}$$

Graf danej funkcie na intervale

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$$

je totožný s grafom funkcie

$$y = k - \frac{1}{x}$$

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí $x \leq -1$, je

$$0 > \frac{1}{x} \geq -1$$

a

$$\left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

Potom

$$y = \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x} = -1 - \frac{1}{x}$$

Graf danej funkcie na intervale $(-\infty, -1 >$ je totožný s grafom funkcie

$$y = -1 - \frac{1}{x}$$

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí

$$-1 < x \leq -\frac{1}{2},$$

je

$$-2 \leq \frac{1}{x} < -1$$

a

$$\left[\frac{1}{x} \right] = -2.$$

Potom

$$y = \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x} = -2 - \frac{1}{x}$$

a jej graf na intervale

$$(-1, -\frac{1}{2} >$$

je totožný s grafom funkcie

$$y = -2 - \frac{1}{x};$$

atď.

Všeobecne, pre každé číslo x , pre ktoré platí

$$\frac{1}{k} < x \leq \frac{1}{k-1},$$

je

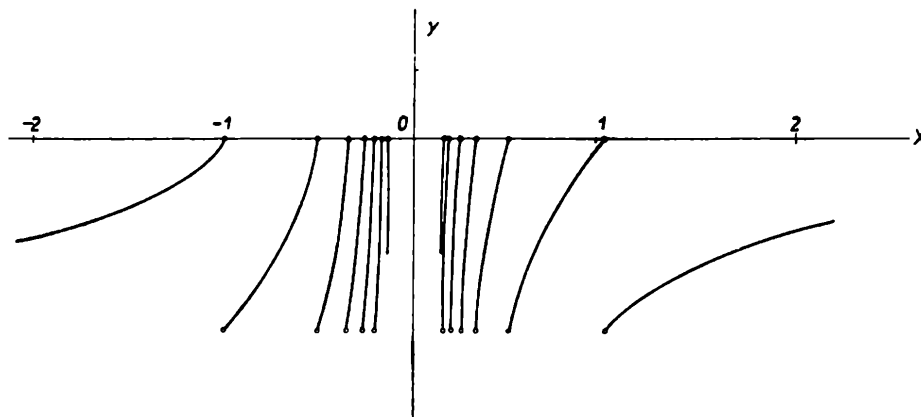
$$k-1 \leq \frac{1}{x} < k$$

a,

$$\left[\frac{1}{x} \right] = k - 1 ,$$

kde $k = -1, -2, \dots$. Potom

$$y = \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x} = k - 1 - \frac{1}{x} .$$



Obr. 3. Graf funkcie $y = \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x}$.

Graf danej funkcie na intervale

$$\left(\frac{1}{k} , \frac{1}{k-1} \right)$$

je totožný s grafom funkcie

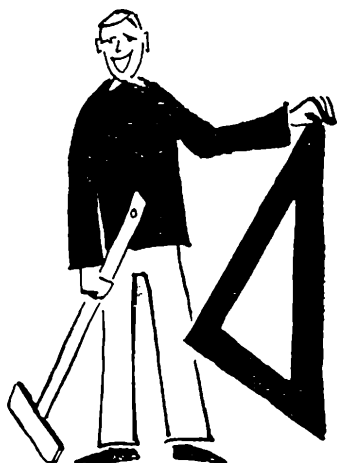
$$y = k - 1 - \frac{1}{x}$$

Graf funkcie

$$y = \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{x}$$

je na obr. 3.

(Dokončení)



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

0 jisté kuželové ploše druhého stupně jako geometrickém místě bodu

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

V tomto článku se budeme zabývat vyšetřováním geometrického místa bodů, které mají od dané roviny a dané přímky, která není s rovinou rovnoběžná, stejnou vzdálenost.

Za rovinu zvolme průmětnu π a přímku p umístíme do roviny $\gamma \perp \pi$ tak, aby procházela počátkem O a měla od roviny π odchylku α . Na přímce p zvolíme bod $P \neq O$ a jeho vzdálenost od bodu O označme $PO = v$. Tímto bodem vedme rovinu $\varrho \perp p$; $\varrho \cdot \gamma \equiv s$. Přímka $q \perp \pi$ procházející bodem O protíná přímku s v bodě S . V rovině ϱ hledejme geometrické místo bodů, které mají od přímky p a od roviny π stejnou vzdálenost (obr. 1).

Hledanému geometrickému místu bodů náleží zřejmě body A, B , které jsou průsečíky přímky s s osami úhlu přímky p a $p_1 \equiv x$. Je-li X bod ležící v rovině ϱ , pak vzdálenost bodu X od roviny π je rovna úsečce

$$X_2X_1 = OS_2 - S_2H_2 = \frac{v}{\sin \alpha} - x \cos \alpha;$$

vzdálenost bodu X od přímky p je XP . Abychom našli množinu bodů X v rovině ϱ , zavedeme si v ní pravoúhlou soustavu souřadnic. Bod S je počátkem, přímka s je osou x , osa $y \perp s$ je osou pořadnic. Je pak $S_2X_2 = x$, $y = X_2(X)$; $P_2X_2 = S_2P_2 - S_2X_2 = v \cdot \cotg \alpha - x$.

Z pravoúhlého trojúhelníka $P_2X_2(X)$ plyne podle věty Pythagorovy

$$\overline{P_2(X)}^2 = \overline{P_2X_2}^2 + \overline{X_2(X)}^2. \quad (1)$$

Poněvadž $P_2(X) = X_1X_2$, dostaneme po dosazení předcházejících vztahů do (1)

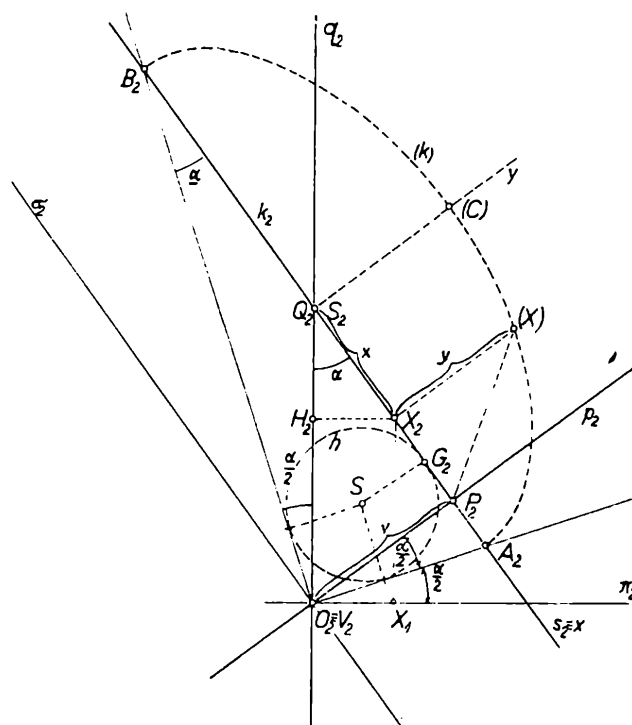
$$\left(\frac{v}{\sin \alpha} - x \cdot \cos \alpha \right)^2 = (v \cdot \cotg \alpha - x)^2 + y^2$$

a po zjednodušení

$$x^2 \sin^2 \alpha + y^2 - v^2 = 0 ,$$

tj.

$$\frac{x^2}{\left(\frac{v}{\sin \alpha} \right)^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1 \quad (2)$$



Obr. 1

Je tudíž hledaným geometrickým místem bodů v rovině ϱ elipsa o poloosách

$$a = \frac{v}{\sin \alpha}, b = v ;$$

excentricita této elipsy je

$$e^2 = \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} - v^2 = v^2 \cotg^2 \alpha ,$$

tj. $e = v \cotg \alpha = SP$. To značí, že bod P je ohniskem elipsy.

Jestliže se vzdálenost $v = OP$ mění, mění se i poloha elipsy k v rovinách $\varrho_i \perp p$. Všechny elipsy v rovinách rovnoběžných s rovinou ϱ tvoří soustavu elips, z nichž kterékoliv dvě jsou stejnohlé podle středu stejnohllosti v bodě O . Leží tudíž na kuželové ploše o vrcholu O a řídicí kuželosečce k v rovině ϱ .

Zvolíme-li obráceně na elipse k libovolný bod X' , pak pro jeho souřadnice (x', y') platí rovnice (2) a

$$\begin{aligned} P_2(X') &= \sqrt{(v \cotg \alpha - x')^2 + v^2 - (x' \sin \alpha)^2} = \\ &= \left| \frac{v}{\sin \alpha} - x' \cos \alpha \right| = X'_1 X'_2, \end{aligned}$$

což se rovná vzdálenosti bodu X' od roviny π .

Geometrickým místem bodů, které mají od roviny π a od přímky p , která je s touto rovinou různoběžná, stejnou vzdálenost, je kuželová plocha ξ o vrcholu $V \equiv 0$ a řídící elipsou k v rovině $\rho \perp p$. Hlavní vrcholy této elipsy leží na přímkách a, b , ($a \perp b$), jež rozpulují úhly, které svírá přímka p se svým pravoúhlým průmětem p_1 do roviny π . Jedním ohniskem elipsy k je bod $P \equiv p \cap \rho$ a její střed S leží na přímce $q \perp \pi$ procházející vrcholem O .

Vedeme-li bodem O rovinu $\sigma \perp p$, pak snadno zjistíme, že nalezená kuželová plocha je též geometrickým místem bodů, které mají od roviny σ a od přímky $q \perp \pi$ stejné vzdálenosti. Roviny kolmé k přímce q protínají kuželovou plochu ξ v soustavě elips, které mají jedno ohnisko na přímce q a jejich středy leží na přímce p . Mají tudíž přímky p a q vzhledem ke kuželové ploše ξ též vztah a mají stejné vlastnosti.

Přímky p, q nazveme *fokálními přímkami kuželové plochy* ξ . Dosaďme-li výsledky můžeme vyslovit větou:

Roviny kolmé k fokálními přímkám kuželové plochy ξ protínají tuto plochu v elipsách, které mají v průsečíku fokální přímky s rovinou k ní kolmou jedno své ohnisko, přičemž středy těchto elips leží na druhé fokální přímce této kuželové plochy.

Poznámka. Kuželová plocha, která má za řídící křivku kuželosečku, je kuželovou plochou druhého stupně. Charakteristickým znakem kuželové plochy ξ je, že její přímky v hlavním osovém řezu jsou navzájem kolmé.

Nalezená kuželová plocha není pro libovolně zvolenou přímku p plochou rotační. Určíme nyní podmínku, aby tato plocha byla plochou rotační. Proto vepíšeme do trojúhelníku OA_2B_2 kružnici h . Kdyby plocha ξ byla rotační kuželovou plochou, byla by kružnice h osovým řezem kulové plochy, která je do této kuželové plochy vepsána tak, aby se dotýkala roviny řezu, tj. roviny ρ . Podle věty Quételetovy-Dandelinovy je dotykový bod G ohniskem kuželosečky, v níž rovina ρ protíná kuželovou plochu. V našem případě musí bod G splýnout s bodem P .

Snadným výpočtem zjistíme, že kružnice h vepsaná do trojúhelníku OAB

$$\left(AB = c, OA = a, OB = b, \sphericalangle OBP = \frac{\alpha}{2} \right)$$

má poloměr

$$\varrho = \frac{a + b - c}{2} = \frac{v}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \right),$$

a pak je

$$SG = SA - AG = \frac{v}{\sin \alpha} - \frac{v}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \varrho = \frac{v}{2} \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)$$

Aby $SG = SP$, musí platit

$$\frac{v}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) = v \cotg \alpha$$

Po zkrácení a zjednodušení dostaneme rovnici

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha$$

Zavedeme-li na levé straně místo argumentu $\frac{\alpha}{2}$ argument $\frac{\alpha}{4}$ a pravou stranu upravíme podle známých vzorců, dostaneme

$$2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} = 2 \cos \frac{3\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} \quad (*)$$

Nyní mohou nastat tyto možnosti:

a) $\cos \frac{\alpha}{4} = 0$, tj. $\alpha = (4k + 1) \cdot 2\pi$, kde k je celé číslo. Tento výsledek však pro naši úlohu nemá smysl.

b)
$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4} \right) = \cos \frac{3\alpha}{4},$$

tj.

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4} + 2k\pi = \frac{3\alpha}{4},$$

odkud

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

a pro $k = 0$ je

$$\alpha = \frac{\pi}{2} ;$$

nebo

$$\frac{\alpha}{4} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{3\alpha}{4} ,$$

a odtud pro $k = 0$ dostaneme $\alpha = -\pi$, což však nemá pro naši úlohu smysl.

Je tedy jediným řešením rovnice (*)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} ;$$

to znamená:

Je-li přímka $p \perp \pi$, pak obě fokální přímky splynou s osou kuželové plochy a kuželová plocha ξ je rotační.

Další vlastnosti. Pro vzdálenost bodu X na elipse k od fokální přímky q platí

$$XH = \sqrt{(x \sin \alpha)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 \sin^2 \alpha + v^2 - x^2 \sin^2 \alpha} = v$$

Elipsa k leží na rotační válcové ploše o ose q a poloměru v . Jinak: Pravoúhlým průmětem elipsy k do průmětny π je kružnice o středu O a poloměru v .

Tohoto výsledku užijeme v řadě konstruktivních úloh.

Označíme-li velikosti úhlů $\sphericalangle XOQ = \varphi$ a $\sphericalangle XOP = \psi$ (obr. 2), pak ze vztahu $OX = OH$, který jsme vpředu dokázali, plyne

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{HX}{OH} = \frac{v}{\frac{v}{\sin \alpha} - x \cos \alpha} ; \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{XP}{OP} = \frac{\frac{v}{\sin \alpha} - x \cos \alpha}{v} \end{aligned} \quad (3)$$

Má-li bod X být bodem elipsy k , pak je

$$\frac{v}{\sin \alpha} > x \cos \alpha ,$$

takže $\operatorname{tg} \varphi > 0$, $\operatorname{tg} \psi > 0$.

Ze vztahu (3) plyne, že

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = 1 ,$$

tj. $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{cotg} \psi$; pro úhly $\varphi < \pi$, $\psi < \pi$ pak platí

$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$$

Součet velikostí úhlů, které svírají přímky kuželové plochy ξ se svými fokálními přímkami, je konstantní.

(Pokračování)



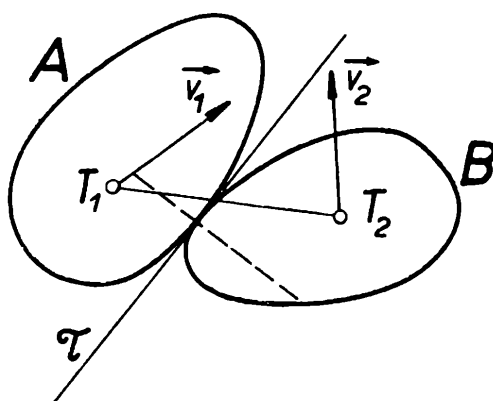
FYZIKA

0 šikmém rázu drsných těles

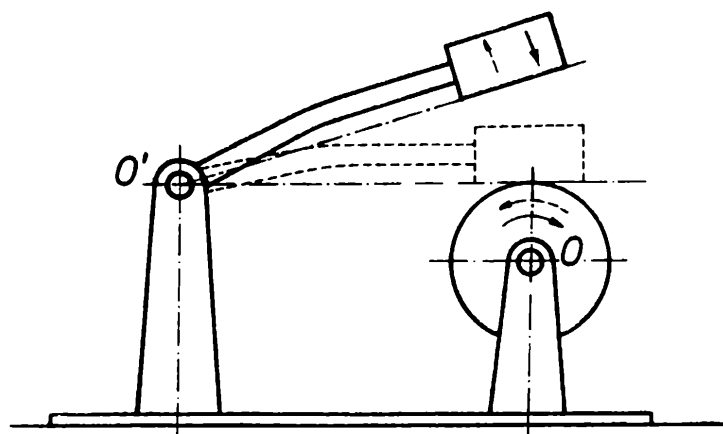
DOC. RNDr. IVA PACÁKOVÁ, CSc., ČVUT Praha

Ačkoli studiem rázu se fyzika zabývá již plných 300 let, vyřešil průběh rázu poprvé německý fyzik Heindrich Hertz a v roce 1881 vypracoval teorii rázu dokonale pružných a dokonale hladkých těles. Jde o tzv. statickou teorii, která řeší jen přímý ráz těles a platí dobře pro oblá tělesa z velmi pružných látek, jako je např. ocel, sklo nebo slonová kost. V průběhu let se objevovaly v literatuře jak teoretické, tak experimentální práce z oboru mechaniky rázu, které vedly k názoru, že Hertzova teorie přímého rázu i klasická teorie šikmého rázu drsných těles je v dobré shodě se skutečností. Teprve v roce 1926 publikovali dva Angličané Howland a Dickson (čti Houlend a Diksn) výsledky svých pokusů s ocelovou kuličkou, kterou nechali dopadat na šikmo postavenou skleněnou nebo kovovou desku. Výsledky těchto pokusů však na základě tehdy známé klasické teorie rázu drsných těles, kterou vypracovali Francouzi Poisson (čti Puason) a Coriolis, se nedali vysvětlit.

Jejich teorie rázu spočívá totiž na předpokladu, že tření mezi tělesy přestane působit v okamžiku, kdy se tečné složky relativní rychlosti jejich styčných plošek zcela vyrovnají. Tento předpoklad je správný jen pro šikmý ráz dokonale nep pružných těles, jak se můžeme přesvědčit, budeme-li nyní uvažovat o šikmém rázu dvou drsných, pružných těles.



Obr. 1



Obr. 2

Setkají-li se dvě tělesa, z nichž těleso A se pohybuje rychlostí $\mathbf{v}_1$ a těleso B rychlostí $\mathbf{v}_2$ (obr. 1) tak, že relativní rychlost $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$ obou těles není kolmá ke společné tečné rovině τ , působí na obě tělesa nárazová síla, která také není kolmá k této rovině. To má za následek, že kromě stlačení (deformace v kolmém směru) vznikají vlivem tření také smykové deformace. Tyto tečné deformace mají podobný průběh jako kolmá stlačení, neboť tělesa se vzpružují i v tečném směru a síly tření mezi tělesy nepřestanou působit v okamžiku vyrovnání tečných rychlostí stejně, jako tlak mezi pružnými tělesy nevymizí v okamžiku největšího stlačení. Proto může tečná složka relativní rychlosti pružných těles při šikmém rázu změnit smysl (znaménko), podobně jako jej mění kolmá složka.

Tato úvaha je pochopitelná, snad i samozřejmá, a proto překvapuje, že možnost zpětného odskoku drsného tělesa při šikmém rázu nebyla teoreticky předvídána již mnohem dříve. Je to však jen jeden z příkladů tzv. „Kolumbova vejce“, s kterými se ve fyzice setkáváme dosti často. Poznaték, který dlouho nebyl objeven, se po svém objevu zdá

samozřejmý. Jev zpětného odrazu drsných těles odvodil teprve v roce 1929 z velmi náročné tenzorové teorie tzv. „neholonomních nárazových pohybů“ RNDr. Zdeněk Horák Dr Sc, profesor fyziky na strojní fakultě ČVUT. Vlastními pokusy prokázal také experimentálně existenci tohoto jevu.

Tyto zjištěné zákonitosti šikmého rázu si můžeme názorně ukázat na modelu, nakresleném na obr. 2.

Na pryžový kotouč, otáčivý kolem pevné vodorovné osy O , dopadne dřevěné kladivo, které se rovněž otáčí kolem pevné vodorovné osy O' . Je-li kladivo upraveno tak, že rovina jeho spodní stěny prochází osou O' (obráz. 2), jde o přímý ráz kladiva na klidný kotouč, který po odskoku kladiva zůstane v klidu. Jestliže kotouč před nárazem kladiva roztočíme, vznikne ráz šikmý, při kterém síly tření působí na kotouč nárazovým momentem a tím se rotace kotouče změní. Buď se bude kotouč po rázu otáčet pomaleji, nebo se zastaví, nebo se roztočí v opačném smyslu než před rázem. O tom, který z těchto tří případů nastane, rozhoduje součin momentu setrvačnosti kotouče a jeho úhlové rychlosti před rázem. Tento součin se nazývá točivost nebo moment hybnosti kotouče. Je-li točivost kotouče před rázem větší než vnější točivý náraz, po rázu se zmenší, kotouč se bude otáčet pomaleji a v původním směru. Je-li však točivost kotouče před rázem menší než točivý náraz tření, zastaví se kotouč ještě před koncem rázu. V tom okamžiku dosahuje tečná deformace kotouče maxima a vlivem vzpružování se počne zmenšovat. Protože se kotouč ještě dotýká drsné plochy kladiva, roztočí se v opačném smyslu. Kotouč se tedy může po rázu točit v původním nebo v opačném smyslu, nebo za vhodně volené rychlosti před rázem se po rázu netočí.

Zenerova dioda jako etalon elektrického napětí

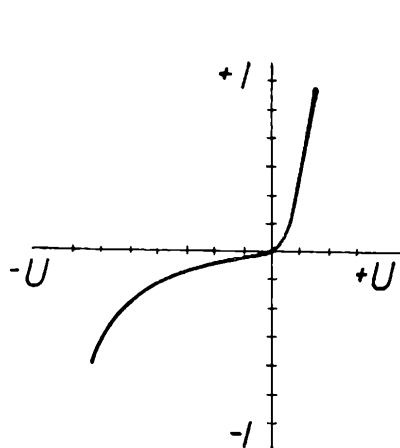
ING. LADISLAV SMRŽ, Praha († 8. ledna 1969)

V elektrotechnice se používá pro přesná měření jako etalonu elektrického napětí etalonového Westonova článku. Je to vhodně upravený galvanický článek, u něhož kladnou elektrodou je čistá rtuť, zápornou elektrodou amalgam kadmia. Jako elektrolytu je použito nasyceného roztoku síranu kademnatého. Westonův článek dnešní výroby je vysoce stabilní, pokud se dodržují určité provozní podmínky. Nejdůležitější z nich je nepatrný odběr proudu z článku (řádu 10^{-5} až 10^{-6} A) a ochra-

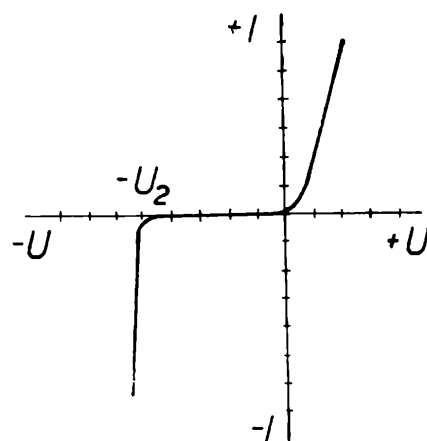
na před otřesy a většími změnami teploty. Ale i při dodržení všech podmínek může se stabilita článku vnitřními pochody porušit, takže nemůže být buď po určitou dobu nebo trvale používán jako etalon napětí.

Proto se již více let hledala vhodná náhrada Westonova článku. Podle výsledků dosavadních pokusů se zdá, že by bylo možno využít k tomuto účelu vlastnosti Zenerovy diody, která za určitých podmínek má ve své pracovní charakteristice oblast velmi stabilního napětí, tzv. Zenerova napětí.

Zenerovy diody jsou plošné křemíkové diody, u nichž se speciálním technologickým postupem vytvořila v nepropustném směru charakteristiky oblast, kde po dosažení určitého napětí, jež nazýváme Zenerovým napětím, začne rychlý růst proudu. Hodnota Zenerova napětí zůstává však přitom prakticky nezměněná. V obr. 1 je charakteristika běžné germaniové diody, v obr. 2 charakteristika Zenerovy diody.



Obr. 1



Obr. 2

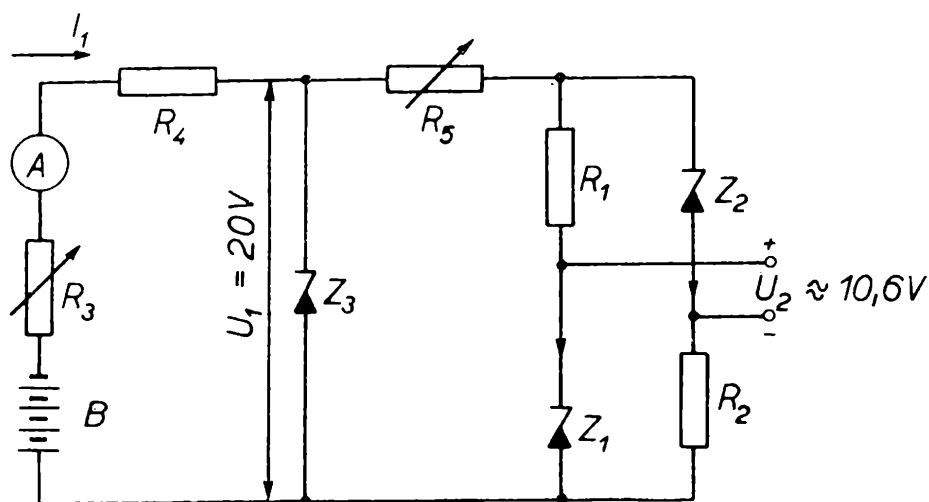
Rozdíl průběhů jejich charakteristik v závěrné části je z obrázků dobře patrný. U Zenerovy diody je proud až do dosažení Zenerova napětí ($-U_Z$) téměř nulový, a potom velmi rychle roste.

Zenerových diod se začalo používat jako stabilizátorů stejnosměrného napětí. Stabilita Zenerova napětí se také využilo k náhradě za Westonovy články v různých registračních přístrojích, nebo jako referenčních etalonů v číslicových voltmetrech apod.

V poslední době se však konají v metrologických ústavech různých zemí pokusy využít Zenerových diod i jako vysoce stabilních etalonů elektrického napětí místo klasických Westonových článků. Z výsledků dosud dosažených vyplývá možnost využití Zenerových diod především jako cestovních etalonů elektrického napětí při mezinárodním porovnávání mezi měrovými službami jednotlivých států.

Při studiu stability napětí v závislosti na teplotě a jiných vnějších vlivech se ukázalo, že se dosáhne lepších výsledků při můstkovém

zapojení Zenerových diod než při jejich přímém použití. Je zde možnost volit diody s různým teplotním koeficientem, takže výsledné napětí je prakticky na teplotě nezávislé. V obr. 3 je schematicky naznačena můstková úprava, která byla vyvinuta v měrovém ústavu NSR (Physikalisch-Technische Bundesanstalt) v Braunschweigu. Zenerovy diody Z_1 a Z_2 jsou v jedné dvojici protilehlých můstkových větví, ve zbývajících jsou odpory R_1 a R_2 velikosti vnitřního (dynamického) odporu diod. Třetí Zenerova dioda Z_3 snižuje vliv kolísání napájecího proudu I_1 a vliv okolní teploty. Napětí U_2 , odebírané z jedné diagonály mostu, má velikost asi 10,6 voltu a teplotní koeficient (podle údajů PTB) je asi $+3 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$ až $5 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$ pro teplotu 25°C .



Obr. 3

Nevýhodou Zenerových diod je příliš velká hodnota jejich napětí, která by vyžadovala při jejich praktickém používání podstatných změn u měřicích zařízení. Rovněž tak je nevýhodné, že je pro jejich funkci nutné použít napájecího zdroje, u něhož musí být zaručena stabilita napájecího proudu asi na 5 %. Naproti tomu Westonovy články jsou samy zdrojem napětí a jeho velikost (1,018 65 V při 20°C jako střední hodnota) je velmi vhodná.

Studium Zenerových diod jako základních etalonů elektrického napětí nepokročilo však ještě tak daleko, aby se dalo uvažovat o plné náhradě za etalonové Westonovy články. Ani jejich časová stabilita nemohla být v tak poměrně krátké době (pokusy se provádějí teprve několik roků) spolehlivě definována.

Moment setrvačnosti

FRANTIŠEK JIRÁSEK, ČVUT Praha

Pojem momentu setrvačnosti byl asi před 200 lety zaveden matematikem Leonardem Eulerem. Moment setrvačnosti má velký význam při řešení úloh o pohybu tuhých těles.

Mějme pevný bod S a hmotný bod A , jehož hmotnost je m . To zapisujeme $A \equiv (A, m)$. Moment setrvačnosti bodu A vzhledem k bodu S nazýváme výraz $m \cdot SA^2$.

Mějme nyní danu soustavu hmotných bodů $(A_1, m_1), (A_2, m_2), \dots, (A_n, m_n)$ libovolně položených v prostoru. Momentem setrvačnosti I_S této soustavy vzhledem k bodu S nazýváme součet

$$I_S = m_1 \cdot SA_1^2 + m_2 \cdot SA_2^2 + \dots + m_n \cdot SA_n^2. \quad (1)$$

Takovýto součet se dá zapsat stručněji

$$I_S = \sum_{j=1}^n m_j \cdot SA_j^2 \quad (1')$$

Pro zapamatování vyslovených definic vypočítejme si příklady.

1. Ve vrcholech šestiúhelníka $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ jsou po řadě umístěny body s hmotnostmi 2, 6, 4, 2, 3, 6 jednotek. Vypočítejte moment setrvačnosti soustavy těchto šesti bodů vzhledem k bodu S . (Příklad se vztahuje k obr. 1, v němž strana čtverce je rovna dvěma délkovým jednotkám.)

Řešení. Moment setrvačnosti je dán vztahem (1), do něhož dosadíme. Dříve však vypočteme čtverce vzdáleností $SA_1^2, SA_2^2, \dots, SA_6^2$

$$\begin{aligned} SA_1^2 &= 8^2 + 6^2 = 100, & SA_4^2 &= 6^2 + 6^2 = 72, \\ SA_2^2 &= 2^2 + 2^2 = 9, & SA_5^2 &= 4^2 + 16^2 = 272, \\ SA_3^2 &= 6^2 + 2^2 = 40, & SA_6^2 &= 4^2 + 16^2 = 272. \end{aligned}$$

Potom

$$I_S = 2 \cdot 100 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 72 + 3 \cdot 272 + 6 \cdot 272 = 3000$$

2. Vypočítejte moment setrvačnosti I_T bodů $(A_1, 4), (A_2, 4), (A_3, 8)$, které neleží v přímce, vzhledem k jejich těžišti T a moment setrvačnosti I_S vzhledem k bodu $S \equiv T, A_1, A_2, A_3$.

Řešení (obr. 2, čtverce sítě mají délku strany rovnou 1). Nejprve určíme polohu těžiště T . Těžiště M hmotných bodů A_1, A_2 pólí úsečku A_1A_2 a má hmotnost rovnou součtu hmot bodů A_1, A_2 , tedy 16. (Pozor, zde těžiště hmotných bodů a těžiště trojúhelníka v obvyklém smyslu jsou dva různé body. Jestliže však hmotnosti bodů A_1, A_2, A_3 jsou stejné, pak oba body splývají.) Z obr. 2 je patrné

$$TA_1^2 = 2^2 + 3^2 = 13 ,$$

$$TA_2^2 = 2^2 + 3^2 = 13 ,$$

$$TA_3^2 = 4$$

Potom

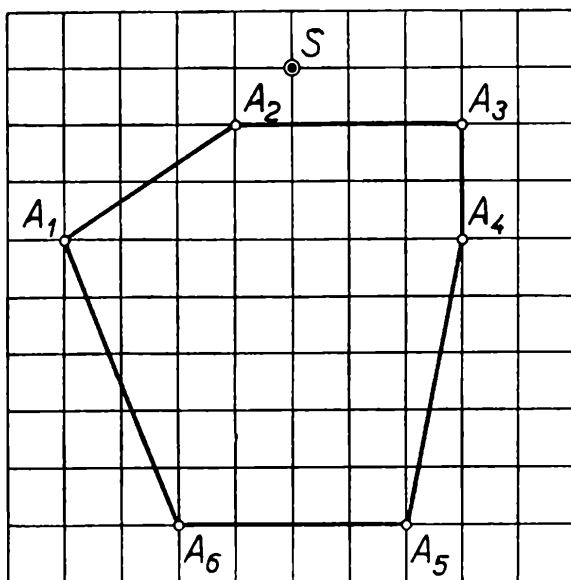
$$I_T = 4 \cdot 13 + 4 \cdot 13 + 8 \cdot 4 = 136$$

Počítejme nyní moment setrvačnosti I_S

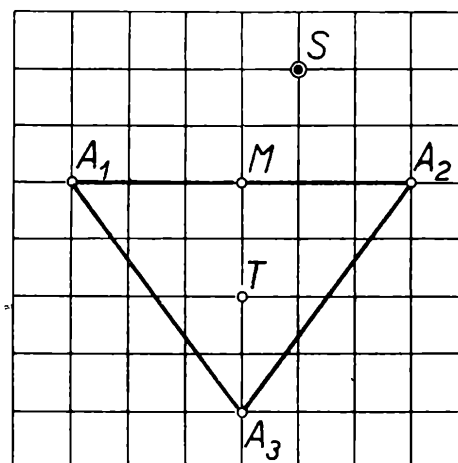
$$SA_1^2 = 20 , \quad SA_2^2 = 8 , \quad SA_3^2 = 37$$

Moment setrvačnosti pak je

$$I_S = 4 \cdot 20 + 4 \cdot 8 + 8 \cdot 37 = 408$$



Obr. 1



Obr. 2

Mezi momenty I_T , I_S je velmi jednoduchá souvislost. Vypočtème ještě moment setrvačnosti I těžiště T vzhledem k bodu S

$$I = ST^2 \cdot 16 = 17 \cdot 16 = 272$$

A tu platí

$$I_S - I_T = 272 , \quad \text{jinak} \quad I_S = I_T + 272 = I_T + I$$

Jak dále uvidíme, není tento výsledek čistě náhodný. Platí obecně. Budeme-li znát velikost momentu setrvačnosti soustavy hmotných bodů vzhledem k jejich těžišti, pak snadno vypočítáme moment setrvačnosti vzhledem k libovolnému bodu jinému. To přesně formuloval již v 18. st. francouzský matematik Lagrange (čti lagranž) touto větou:

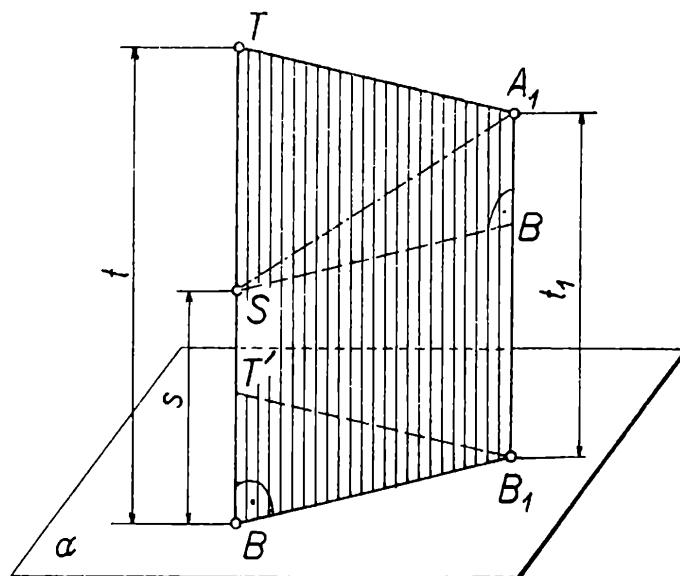
Moment setrvačnosti I_S libovolné soustavy hmotných bodů vzhledem k libovolně danému bodu S je roven součtu dvou veličin, momentu setrvačnosti I_T těžiště této soustavy a momentu setrvačnosti těžiště T vzhledem k bodu S .

Tato věta zapsána matematicky dá velmi jednoduchý a přehledný vzorec

$$I_S = I_T + I$$

a tedy

$$I_S - I_T = I$$



Obr. 3

D ů k a z (obr. 3). Mějme v prostoru n hmotných bodů (A_1, m_1) , (A_2, m_2) , (A_3, m_3) , $\dots$, (A_n, m_n) a T nechť je jejich těžiště. Bod $S \neq T$ je pak libovolný bod prostoru. Zvolme si libovolnou rovinu α kolmou k přímce TS , avšak tak, aby body $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, T, S$ ležely právě v jednom jejím poloprostoru. Pravoúhlé průměty bodů A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) označme po řadě B_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Pravoúhlé průměty bodů S, T splývají v jediný bod, který označíme B . Vzdálenosti bodů A_i, T, S od roviny α označme po řadě t_i, t, s . Předpokládejme ještě, že $B_1 \neq B$. V pravoúhlém lichoběžníku BB_1A_1T vedme bodem S přímku rovnoběžnou s přímkou BB_1 a bodem B_1 přímku rovnoběžnou s přímkou TA_1 . V prvním případě dostaneme pravoúhlý trojúhelník SA_1B' a v druhém pravoúhlý trojúhelník BB_1T' . Je patrné, že

$$BB_1 = SB', TA_1 = T'B_1$$

Z trojúhelníku SA_1B' máme

$$SA_1^2 = SB'^2 + B'A_1^2 = BB_1^2 + (t_1 - s)^2 \quad (a)$$

Z trojúhelníku BB_1T'

$$T'B_1^2 = TA_1^2 = BB_1^2 + T'B^2 = BB_1^2 + (t - t_1)^2. \quad (b)$$

Odečtením těchto dvou rovnic obdržíme novou rovnici, kterou hned upravujeme

$$SA_1^2 - TA_1^2 = (t_1 - s)^2 - (t - t_1)^2 = (t - s)(2t_1 - t - s) =$$

$$\begin{aligned}
&= (t-s) [(t-s) + 2(t_1-t)] = \\
&= (t-s)^2 + 2(t-s)(t_1-t)
\end{aligned}$$

Dospěli jsme tak ke vzorci

$$SA_1^2 - TA_1^2 = ST^2 + 2(t-s)(t_1-t) \quad (c)$$

Tuto rovnici znásobíme číslem m_1

$$m_1 \cdot SA_1^2 - m_1 \cdot TA_1^2 = m_1 \cdot ST^2 + 2(t-s)(m_1 t_1 - m_1 t)$$

Podobným postupem bychom dostali pro body $A_2, A_3, \dots, A_n$

$$\left. \begin{aligned}
m_2 \cdot SA_2^2 - m_2 \cdot TA_2^2 &= m_2 \cdot ST^2 + 2(t-s)(m_2 t_2 - m_2 t), \\
m_3 \cdot SA_3^2 - m_3 \cdot TA_3^2 &= m_3 \cdot ST^2 + 2(t-s)(m_3 t_3 - m_3 t), \\
m_n \cdot SA_n^2 - m_n \cdot TA_n^2 &= m_n \cdot ST^2 + 2(t-s)(m_n t_n - m_n t).
\end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Rovnice (c) a (d) sečtěme. Dostaneme

$$\begin{aligned}
I_S - I_T &= (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \cdot ST^2 + \\
&+ 2(t-s)[m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n - (m_1 + m_2 + \dots + m_n)t]
\end{aligned}$$

Pro jednoduchost položíme ještě

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = M$$

a předcházející rovnice se zjednoduší

$$I_S - I_T = M \cdot ST^2 + 2(t-s)[m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n - Mt]$$

Ale T je těžiště hmotných bodů A_i , a proto platí

$$m_1 t_1 + m_2 t_2 + \dots + m_n t_n = (m_1 + m_2 + \dots + m_n)t = Mt$$

a máme

$$I_S - I_T = M \cdot ST^2,$$

což jsme měli právě dokázat.

Cvičení

1. Pravidelnému čtyřstěnu $ABCD$ je opsána kulová plocha. Na ní zvolme libovolný bod P , který nesplývá se žádným vrcholem čtyřstěnu. Dokažte, že součet $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ nezávisí na volbě bodu P . (Návod. Označme střed kulové plochy S . Ve vrcholech A, B, C, D umístíme bod s hmotností rovné jedné jednotce. Potom $I_P = I_S + 4 \cdot PS^2$.)

2. Určete moment setrvačnosti vzhledem k vrcholům obdélníka $ABCD$, v nichž jsou umístěny postupně hmotnosti 1, 2, 3 a 4 jednotek, jeho středu S .

Úlohy řešené pomocí energie a pracovních diagramů

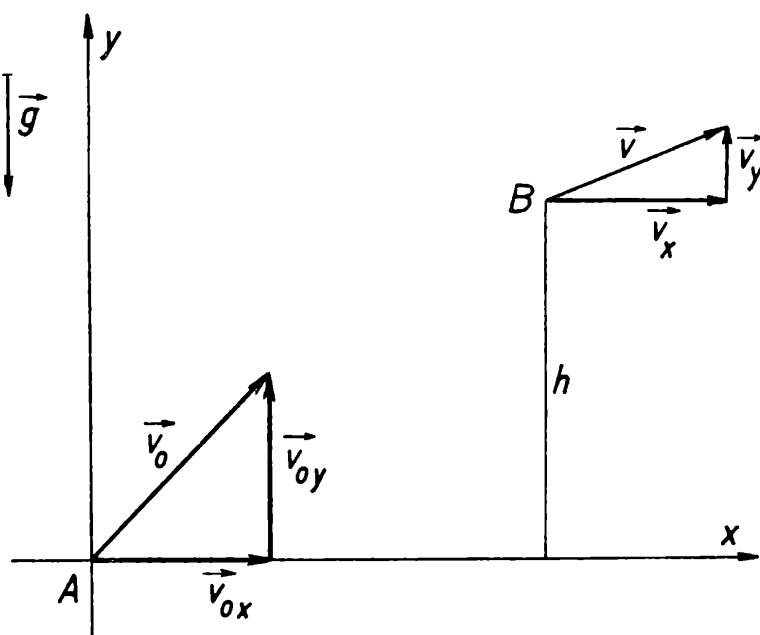
ZDENĚK PŮLPÁN, SVVŠ Hradec Králové

Pojem energie hraje v moderní fyzice význačnou roli. Zde se na některých jednoduchých a už jistě známých příkladech z mechaniky pokusíme nejprve ukázat důležitost zavedení pojmu energie a pak ještě ukážeme jeden grafický způsob řešení některých úloh pomocí tzv. pracovních diagramů.

Příklad 1. Těleso bylo vrženo z místa A šikmo vzhůru rychlostí v_0 . Určete rychlost tělesa ve výšce h nad horizontem. (Odpor vzduchu zanedbáváme.)

Řešení: a) Čistě kinematické;

Za čas t dospěje těleso do bodu B ve výšce h nad horizontem, kde bude mít rychlost velikosti v . Rychlosti tělesa $\mathbf{v}_0$ a $\mathbf{v}$ rozložíme do



Obr. 1

dvou kolmých směrů x (v rovině horizontu), a y které leží v rovině vrhu a jejich velikosti označíme (viz obr. 1) v_{0x} , v_{0y} , v_x , v_y .

Zřejmě platí, že

$$v_{0x} = v_x, \quad (1)$$

$$v_y = v_{0y} - gt, \quad (2)$$

$$h = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2. \quad (3)$$

Rychlost v je podle Pythagorovy věty rovna

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Použitím (1), (2), (3) postupně máme

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 - 2g v_{0y} t + g^2 t^2} = \\ &= \sqrt{v_0^2 - 2g \left(v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2 \right)}, \\ v &= \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \end{aligned}$$

b) Dynamicky:

Energie tělesa E_h ve výšce h je rovna

$$E_h = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

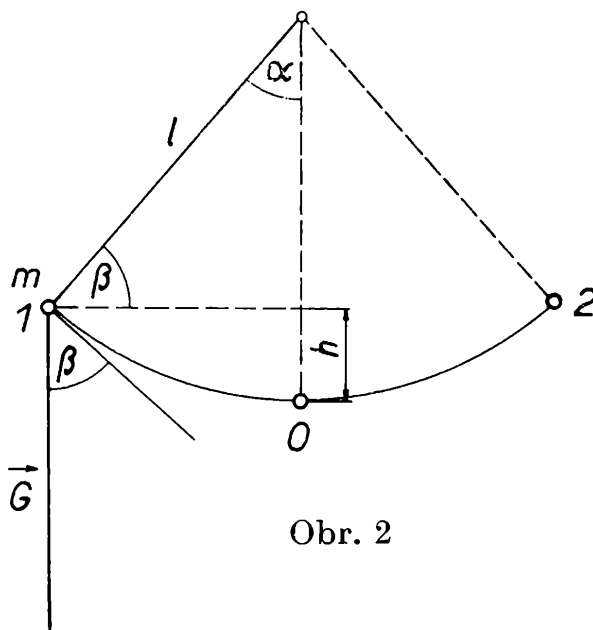
V místě A je zřejmě energie tělesa

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$$

Podle zákona zachování energie $E_0 = E_h$, a z toho

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Příklad 2. Vypočítejte největší rychlost, s jakou se bude pohybovat kývající těleso hmotnosti m , zanedbatelného objemu, na závěsu zanedbatelné hmotnosti a konstantní délky l , když maximální výchylka od vertikální polohy je α (viz obr. 2).



Chceme-li tuto úlohu řešit jen z kinematického hlediska, narazíme hned na počátku na potíže. Ze školy známe závislost dráhy na čase a závislost rychlosti na čase pouze v případech, kdy na těleso nepůsobí

žádná síla, nebo kdy působí konstantní síla co do velikosti i směru působení. V našem příkladě na těleso působí kromě síly tíhové ještě taková síla závěsu, která mění jak svou velikost, tak směr.

Z energetického hlediska je řešení této úlohy jednoduché. Platí ze zákona zachování energie

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2,$$

a z toho pak $v = \sqrt{2gh}$. Dosazením pro h

$$h = l - l \cos \alpha = l (1 - \cos \alpha)$$

dostáváme $v = \sqrt{2gl (1 - \cos \alpha)}$

Příklad 3. Nakloněná rovina délky l svírá s horizontální rovinou úhel α . Po nakloněné rovině klouže dolů těleso, a) jehož tření můžeme zanedbat, b) s koeficientem vlečného tření f . Jaká je jeho rychlost po uražení dráhy délky l ?

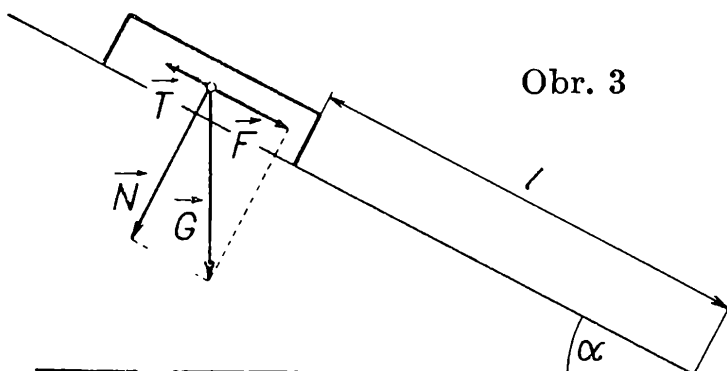
Řešení. a) Vyřešíte jistě sami známým způsobem z dynamického i z kinematického hlediska (víme, že pohyb po nakloněné rovině je rovnoměrně zrychlený, se zrychlením $a = g \sin \alpha$).

b) Koeficient vlečného tření je definován pomocí vztahu

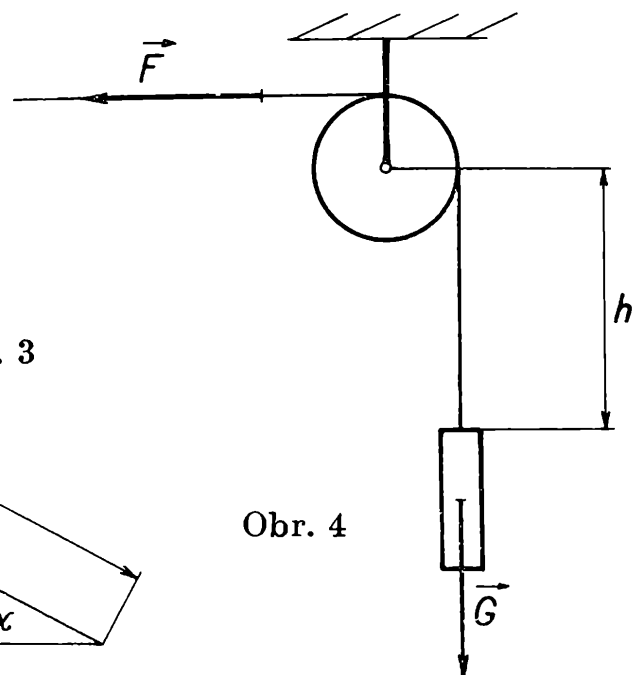
$$f = \frac{T}{N},$$

kde T je třecí síla a N je kolmá tlaková síla tělesa na podložku, tedy dynamicky a řešení této úlohy proto musí vycházet už i z dynamického hlediska (viz obr. 3). Těleso se po nakloněné rovině pohybuje silou $(F - fN)$ a z toho snadno zjistíte, že zrychlení tělesa pohybujícího se po nakloněné rovině je $a = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$. Ze vztahu

$$l = \frac{1}{2} at^2$$



Obr. 3



Obr. 4

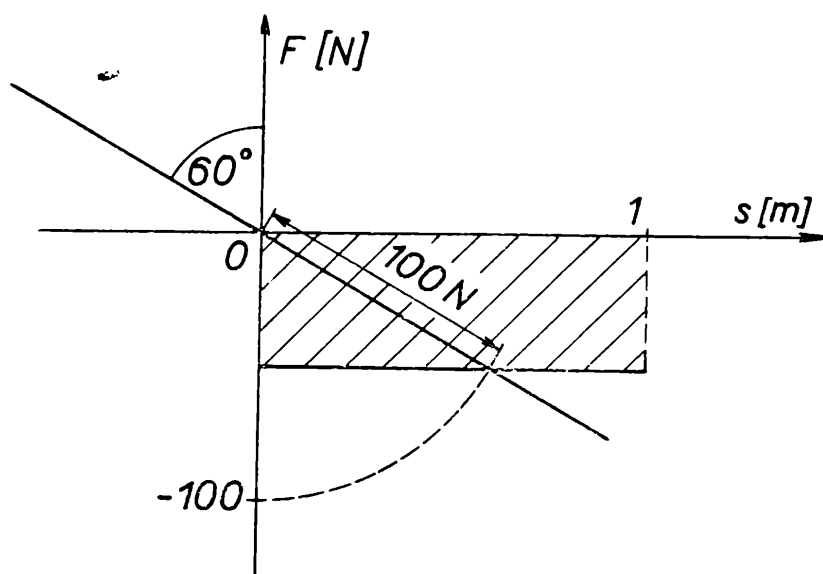
spočtete čas a dosadíte-li do vzorce pro rychlost $v = at$, dostanete

$$v = \sqrt{2lg (\sin \alpha - f \cos \alpha)}$$

Tak bychom mohli uvést řadu příkladů, kdy užíváme k řešení úlohy jak našich znalostí z kinematiky, tak i z dynamiky.

Bernoulliho rovnice je vlastně zákon zachování energie pro proudící tekutinu a jistě se pamatujete, že by bez ní nebylo možné uspokojivě vyjádřit rychlost proudící kapaliny, když by byl udán např. tlak kapaliny v trubici.

To vyplývá z toho, že kinematický, resp. dynamický popis jevu, vyjadřuje vždy jen určitou stránku fyzikálního děje a oba popisy dohromady nám teprve mohou podat komplexnější charakteristiku děje. Spojením obou způsobů popisu jevu někdy velice zjednodušíme řešení úlohy (viz příklad 1). I když kinematický a dynamický popis vede



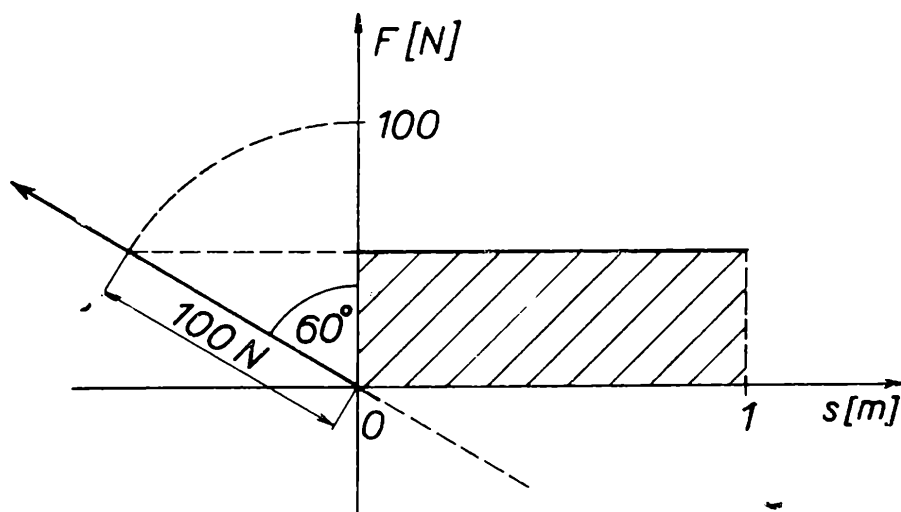
Obr. 5

ke stejnému výsledku, mnohdy bez dynamického popisu se neobejdeme vůbec (viz příklad 2).

Příklad 4. Těleso o hmotnosti $m = 10$ kg je zvedáno do výše rovnoměrným pohybem po šikmé dráze délky $s = 1$ m, která svírá se svislým směrem úhel $\alpha = 60^\circ$. Jak veliká mechanická práce se vykoná? ($g = 10$ m/s²).

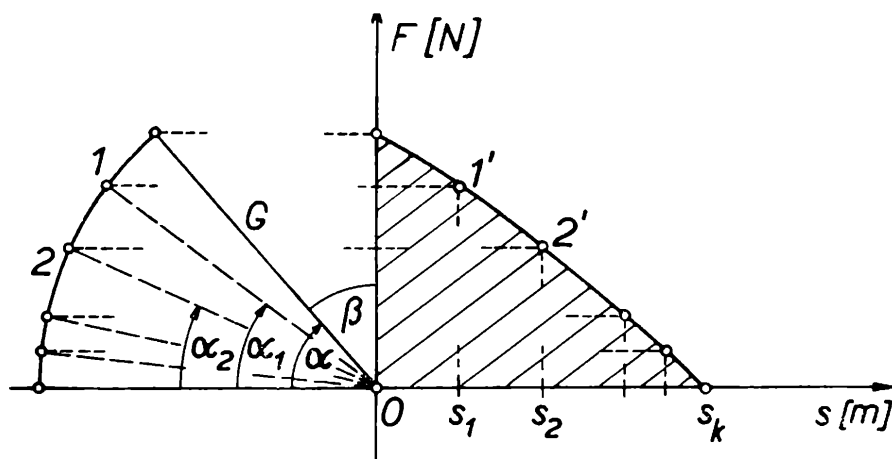
Řešení. Práce A je v tomto případě $A = G s \cos \alpha = mgs \cos \alpha = 50$ J. Protože víme, že práce v gravitačním poli nezávisí na tvaru dráhy, ale jen na výšce h , pracovní diagram sestrojíme tak, že na osu dráhy naneseme $s \cos \alpha$ a na osu síly G . Uvedený pracovní diagram můžeme sestrojit i tak, že osu síly pootočíme o úhel $\alpha = 60^\circ$ doleva (viz obr. 5). Takto sestrojený diagram můžeme použít vždy, když síla bude se směrem dráhy svírat úhel α . Můžeme se dohodnout, že budeme nanášet sílu F pod osu s , když síla F bude působit proti pohybu tělesa. Tak např. práci tíhy proti pohybu tělesa v tomto příkladě můžeme vyjádřit podle obr. 8. Případy znázorněné na obr. 5 a 6 můžeme inter-

pretovat také tak, že nad osou s je na obr. 5 znázorněna práce tělesu dodaná a na obr. 6 je znázorněna práce tělesem spotřebovaná (na přemáhání tíhy), která u tělesa se projeví zvětšením potenciální energie, jejíž velikost je právě plocha vyčárkovaného obdélníka na obr. 6.



Obr. 6

Příklad 5. Určete graficky práci tíhových sil spotřebované na přemístění tělesa v příkladu 2 z polohy 1 (v klidu) do polohy 0.



Obr. 7

Řešení. Stálá síla G zde v každém okamžiku svírá se směrem dráhy jiný úhel β (směr dráhy je určen tečnou ke dráze) a tak pracovní diagram sestrojíme bod po bodu podle příkladu 5 (viz obr. 7).

V obr. 9 je

$$s_i = l \Delta \alpha_i = l (\alpha - \alpha_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, k,$$

$$\alpha_0 = \alpha,$$

$$\alpha_k = 0$$

a vyčárkovaná plocha je rovna velikosti práce A .

Poznámka. Z tohoto grafu je přímo vidět, že síla uvádějící těleso do pohybu pro větší úhly α není lineárně závislá na α .

≡ NAŠE SOUTĚŽ ≡

Řešení úlohy loňské soutěže

Konstruktivní geometrie

4. V kótovaném promítání zobrazte nad průměrem AB kružnici, jejíž eliptický průmět má numerickou výstřednost $\frac{1}{2}$. $A(-4; 4; 1)$, $B(4; 0; 3)$.

(Došlo 23 řešení)

Ota Setzer

Řešil Pavel Polcar, III.B SVVŠ, Velké Meziříčí:

Označme ρ rovinu hledané kružnice. Jejím půdorysem je elipsa e_1 s poloosami a, b ; podle podmínky platí

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{1}{2},$$

neboli

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{a}{2},$$

odtud

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pro půdorysnou odchylku α roviny ρ dostaneme

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

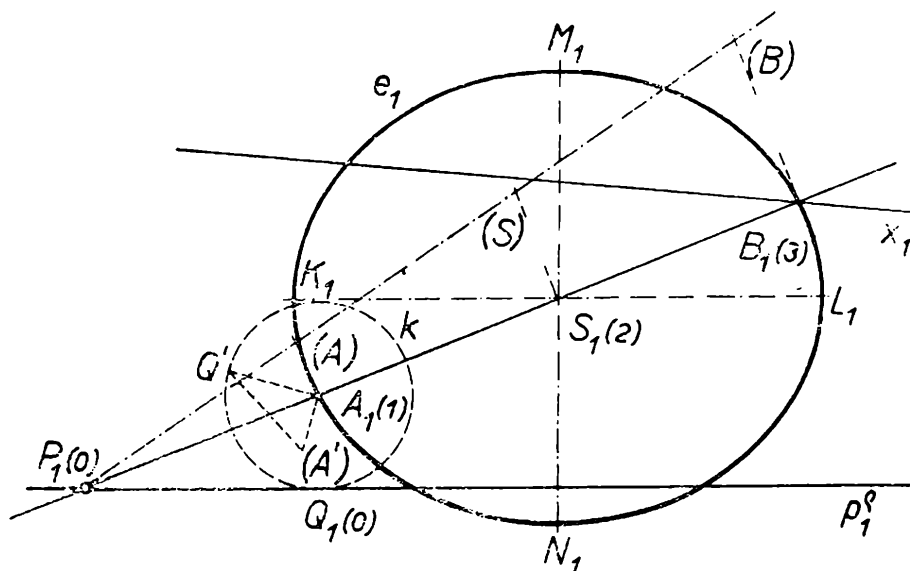
čili

$$\alpha = 30^\circ$$

Proto proložíme přímkou AB rovinu ρ o odchylce $\alpha = 30^\circ$. Sklopením promítací roviny přímky AB určíme její stopník $P_1(0)$ a sklopené body (A) , (B) , (S) , pro něž platí

$$(A)(S) = (S)(B) = a$$

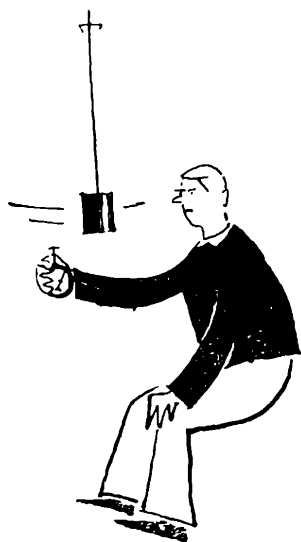
Kolem půdorysu A_1 opíšeme podstavnu kružnici k příslušného spádového kužele $A_1(A)' = 1$, úhel $A_1Q'(A) = 30^\circ$. Tečna ke kružnici k



Obr. 1

z bodu P_1 je stopou p_1^e hledané roviny ϱ . Hlavní osa elipsy e_1 je $K_1L_1 \parallel p_1^e$, $K_1L_1 = 2a$. Vedlejší osu M_1N_1 omezíme z podmínky $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Úloha je v daném případě dvojznačná, protože lze z bodu P_1 vést ke kružnici k dvě tečny, ostatní konstrukce jsou jednoznačné. V obr. 1 je sestrojeno jen jedno řešení.



FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY

Kolik vody vyteče?

Ve kbelíku, který je naplněn až po okraj vodou, plove kus ledu o objemu 1 dm^3 . Kolik vody vyteče, jakmile led roztaje? Hustota vody je 1 g cm^{-3} , hustota ledu $0,9 \text{ g cm}^{-3}$.

Be

Poruší se rovnováha?

Na citlivých rovníramenných vahách vyvážíme přesně dvě koule; na jednu misku položíme hliníkovou kouli, na druhou misku stejně těžkou kouli olověnou. Zůstalo by vahadlo vah v rovnováze, jestliže bychom přemístili váhy s oběma váženými předměty na povrch Měsíce? V případě, že se rovnováha poruší, určete, která koule bude pak těžší.

Be



RECENZE

VÁCLAV ŠINDELÁŘ, LADISLAV SMRŽ:

Nová měrová soustava

Státní pedagogické nakladatelství Praha 1968.

Václav Šindelář, Ladislav Smrž: *Nová měrová soustava*. Státní pedagogické nakladatelství Praha 1968.

Tato kniha pojednává o měrové soustavě, obsahuje soustavně uspořádaný výčet důležitých fyzikálních a technických veličin, jejich definiční vztahy a jednotky a seznamuje veřejnost se státní metrologií, jejím vývojem a organizací.

Autoři rozčlenili tuto problematiku na tři části. V první, vše-

obecné části, uvádějí nezbytné základní metrologické pojmy, přičemž výklad doprovázejí výstižně volenými příklady. Autoři uvádějí čtenáře do složité a veřejnosti mnohdy vzdálené problematiky základních metrologických pojmů právě v potřebném rozsahu. Dále se uvádí vývoj měrových jednotek a zdůrazňuje se snaha o jejich sjednocování, která již v roce 1876 byla podnětem k sjednání mezinárodní metrické konvence. Metrologickému vývoji elektrických a mag-

netických jednotek věnují autoři zvláštní kapitolu. V této části knihy se autoři též zabývají organizací, která ve světě umožňuje udržovat jednotnost a správnost měrové soustavy. Výklad dále pokračuje soustavnou úvahou o roztržení jednotek, tvoření jejich násobků a poddělení a o významu státní metrologie. Přehledem měrových soustav je první část knihy uzavřena.

Ve druhé části knihy se autoři zabývají základními veličinami. Podávají nejprve vysvětlení příslušné veličiny, uvádějí dále její rozměr, hlavní jednotku s její definicí, používané násobky a poddělení a tabelární přehled abecedně sestavených jiných nezákonných a starších jednotek s jejich převodem na jednotku veličiny základní. Ke každé základní jednotce uvádějí autoři bezprostředně petitem psané poznámky, vysvětlivky, popřípadě odkazy na literaturu, čímž dílo získává na přehlednosti a neztrácí na úplnosti.

Třetí část knihy je vyhrazena veličinám odvozeným, které autoři rozdělili do těchto oborů: mechanika, kmitání, vlnění a akustika, termika a molekulová fyzika, elektřina a magnetismus, optika a atomová a jaderná fyzika. Při výkladu a rozboru těchto veličin dodržují autoři tentýž systém, jako u veličin základních. Touto jednotností získává celé dílo na přehlednosti a snadné orientaci v obsažném materiálu.

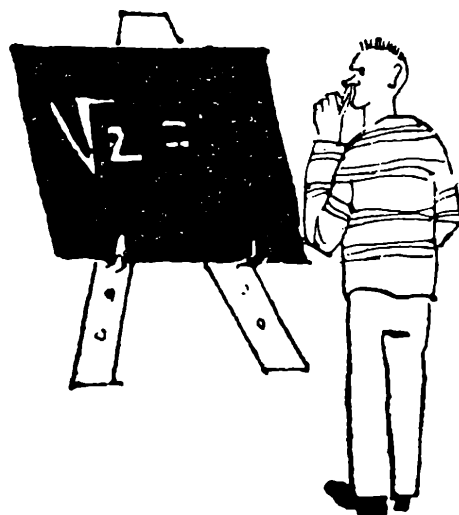
Úvodem ke čtvrté, tabulkové části knihy, se zprvu předvádí

aproximace, používané k výpočtům ve fyzikálních rovnicích, načež je uváděn zajímavý způsob, pomocí něhož lze velmi jednoduše identifikovat libovolnou veličinu, je-li znám její rozpis v hlavních jednotkách. Jde o velmi zajímavou, tabelárně zpracovanou exploitaci teorie dimenzí (tab. a, tab. b, str. 468). Tabelárně sestaveným abecedním přehledem fyzikálních veličin s jejich rozměrem, hlavní jednotkou a odkazem na příslušnou stránku druhé části knihy, je čtvrtá část knihy uzavřena.

Dílo je ukončeno připojeným seznamem literatury a stručným slovníčkem cizích jednotek a výrazů, vázaných na měrovou problematiku. Celé dílo zakončuje obsažný rejstřík.

Kniha „Nová měrová soustava“ je soustavným dílem, které se vyznačuje přesnou terminologií a důsledností ve způsobu zpracování. Seznamuje veřejnost s problematikou měrové soustavy včetně úkolů a organizace státní metrologie, tedy s oborem, o němž technická veřejnost získává zpravidla jen kusé informace vzdor tomu, že jde o obor, jenž nezbytně proniká celým národním hospodářstvím a všemi obory lidské tvořivosti. Kniha „Nová měrová soustava“ obohatí naši technickou literaturu a stane se vyhledávanou příručkou široké technické veřejnosti včetně pedagogických pracovníků, jimž je také doporučena.

Prof. Ing. Dr. R. Drechsler Dr Sc



MATEMATIKA

Dva trojuholníky vpísané do tej istej kružnice

DOC. DR. ERNEST JUCOVIČ, CSc., Prešov

Geometria trojuholníka je nepochybne jedna z najrozpracovanejších častí matematiky, veď pestovala sa oddávna vo všetkých obdobiach. A je obdivuhodné, že ešte i v súčasnosti sa nachádzajú nové vlastnosti trojuholníka (a jeho zovšeobecnenia na n -rozmerný priestor - simplexa). V týchto riadkoch chceme hlbavého čitateľa podnietiť k rozmyšľaniu nad okruhom problémov o trojuholníkoch, ktoré - zdá sa - nemusia byť všeobecne známe ani triviálne. Pôjde o metrické vzťahy medzi dvoma trojuholníkmi vpísanými do tej istej kružnice. Nech do kružnice s polomerom r sú vpísané trojuholníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ s ťažiskami T_1 , T_2 , ortocentrami (priesečníkmi výšok) O_1 , O_2 , polomeri vpísaných kružníc ϱ_1 , ϱ_2 , stredmi vpísaných kružníc V_1 , V_2 atď. V akom vzájomnom vzťahu sú dĺžky úsečiek T_1T_2 , S_1S_2 , O_1O_2 , T_1V_2 , V_1O_2 čísla r , ϱ_1 , ϱ_2 , atď.? Namiesto o dvoch trojuholníkoch vpísaných do tej istej kružnice je možné uvažovať o dvoch trojuholníkoch tej istej kružnici opísaných, alebo je možné celú problematiku skúmať v priestore s väčším počtom dimenzií ako 2. Špeciálne otázky tu sú veľmi rôznorodé. My na ukážku dokážeme jedno tvrdenie tohoto druhu. Vopred si len pripomeňme, že ortický trojuholník UVZ trojuholníka ABC má za vrcholy päty výšok trojuholníka ABC .

Nech F_1 resp. F_2 sú stredy kružníc opísaných ortickým trojuholníkom trojuholníkov $A_1B_1C_1 = \Delta_1$ resp. $A_2B_2C_2 = \Delta_2$, nech m_1 resp. m_2 je

najdlhšia strana trojuholníka $\triangle_1$ resp. $\triangle_2$. Nech trojuholníky $\triangle_1, \triangle_2$ sú vpísané do kružnice $(S; r)$. Platí

$$F_1 F_2 \leq r + \frac{1}{2} (\sqrt{4r^2 - m_1^2} + \sqrt{4r^2 - m_2^2})$$

K dôkazu našej vety nám bude užitočná nasledujúca pomocná veta: Ak A, B, C , sú tri rôzne body kružnice $k \equiv (S; r)$, potom ortocentrum O trojuholníka ABC leží na kružnici k' súmerne združenej ku k podľa každej z priamok AB, BC, AC . Dôkaz vykonáme napr. pre priamku AB :

1. Ak AB je priemer kružnice k je $k' \equiv k$, $O \equiv C$ a tvrdenie je podľa Tálesovej vety evidentné.

2. Nech AB nie je priemer kružnice k ; potom priamky AC, BC zvierajú alebo úhol $\gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle ASB$, alebo úhol $2R - \gamma$. O uhle $\sphericalangle AOB$, kde $AO \perp BC, BO \perp AC$ platí alebo $\sphericalangle AOB = \gamma$ alebo $\sphericalangle AOB = 2R - \gamma$. Preto bod O leží alebo na kružnici k , alebo na kružnici k' . Ukážeme, že z bodov kružnice k môže byť ortocentrom uvažovaného trojuholníka ABC len bod A a bod B .

V ďalšom použijeme tieto označenia: Priesečníky kolmíc, vedených k priamke AB bodmi A, B , s kružnicou k označme A_0, B_0 , priesečníky tých istých priamok s kružnicou k' označme A'_0, B'_0 . Keď budeme hovoriť o oblúku určenom dvoma z bodov $A, B, A_0, B_0, A'_0, B'_0$, budeme mať na mysli ten menší z príslušných dvoch nezhodných oblúkov.

a) Nech C je vnútorný bod oblúka $\widehat{A_0 B_0}$ (obr. 1); potom je ABC ostrouhlý trojuholník a jeho ortocentrum leží vnútri neho. Z bodov kružníc k, k' ležia vnútri trojuholníka ABC len vnútorné body oblúku $\widehat{AB}$ kružnice k' . Preto ortocentra všetkých trojuholníkov ABC , kde C je vnútorný bod oblúku $\widehat{A_0 B_0}$, ležia vnútri oblúku AB kružnice k' .

b) Ak je $C \not\equiv A_0$, resp. $C \not\equiv B_0$, ortocentrum O trojuholníka splýva s bodom A , resp. s bodom B .

c) Ak C je vnútorný bod oblúku $\widehat{AB}$ kružnice k , je $\sphericalangle ACB$ tupý, a preto ortocentrum trojuholníka ABC leží vnútri uhla vrcholového k uhlu $\sphericalangle ACB$. Ale v tom uhle neleží žiaden bod kružnice k .

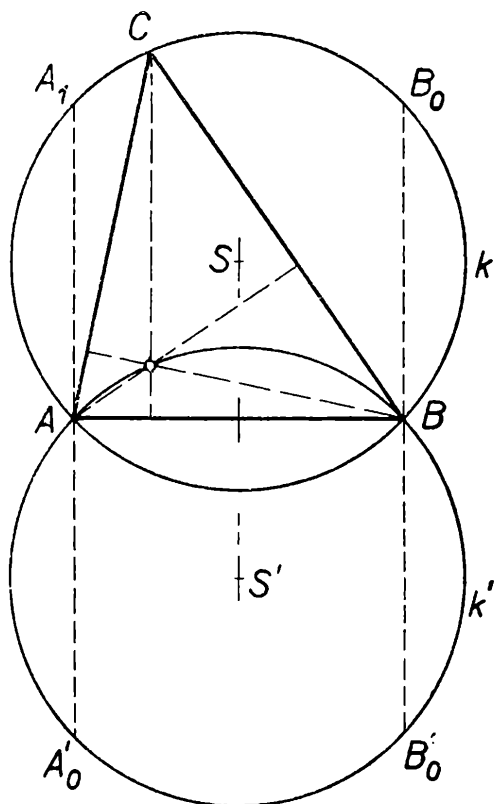
Z bodov kružnice k' môže byť ortocentrom uvažovaného trojuholníka len taký bod, ktorý leží vnútri rovinného pásu s hraničnými priamkami $AA_0 \parallel BB_0$. Ortocentrom trojuholníka ABC , kde C je vnútorný bod oblúku $\widehat{AB}$, leží tedy vnútri oblúku $A'_0 B'_0$.

d) Nech C je vnútorný bod oblúku $\widehat{AA_0}$; potom je $\sphericalangle CAB$ tupý, a preto ortocentrum O trojuholníka ABC leží vnútri uhla vrcholového k uhlu $\sphericalangle CAB$. Ale v tom uhle neleží žiaden bod kružnice k . Keďže je $CO \perp AB$, ortocentrum O leží v polrovine opačnej k polrovine $AA_0 S$, teda na oblúku $\widehat{AA'_0}$. Rovnakým postupom dokážeme, že ortocentrum trojuhol-

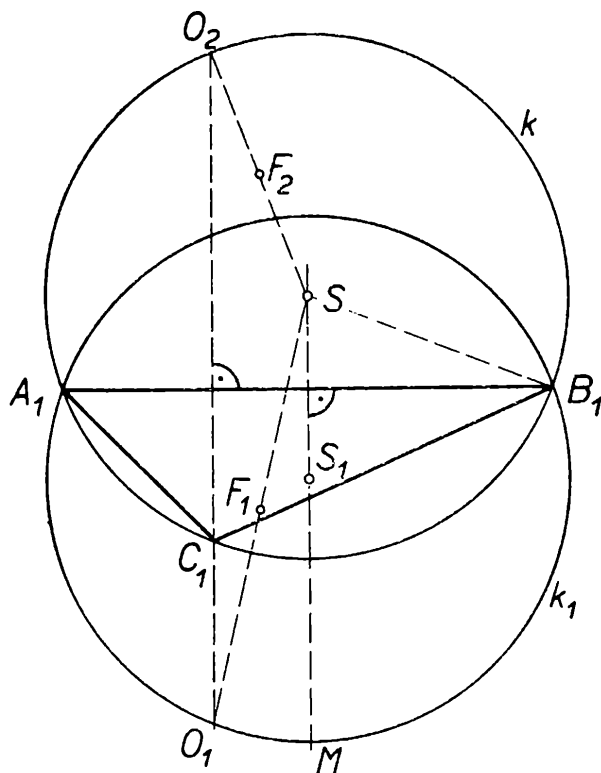
níka ABC je bod oblúka $\widehat{BB_0}$ vtedy, keď C je bod oblúku BB_0 . (K prípadom b), c), d), nech si čitateľ sám doplní obr. 1.)

Tým sme tvrdenie pomocnej vety dokázali pre všetky body $C \neq A, B$ kružnice k .

Môžeme prejsť k dôkazu našej vety. Z pomocnej vety vyplýva, že body O_1^a, O_1^b, O_1^c , súmerne združené k ortocentru O_1 trojuholníka $A_1B_1C_1$ podľa priamok B_1C_1, A_1B_1, A_1C_1 , ležia na kružnici k a teda stredy úsečiek $O_1O_1^a, O_1O_1^b, O_1O_1^c$ sú päty výšok trojuholníka $A_1B_1C_1$. Kružnice opísaná ortickému trojuholníku trojuholníka $A_1B_1C_1$ je tedy priradená ku kružnici k v rovnolehlosti $[O_1; \frac{1}{2}]$. Jej stred F_1 je preto stredom úsečky O_1S . Úplne rovnako sa nahliadne, že F_2 je stredom úsečky SO_2 .



Obr. 1



Obr. 2

Ak m je dĺžka ktorejkoľvek strany, napr. A_1B_1 , trojuholníka $A_1B_1C_1$, (pozri obr. 2) potom $O_1S \leq SM = S_1M + SS_1 = r + 2 \sqrt{r^2 - \frac{m^2}{4}}$ (s použitím Pytagorovej vety), kde M je priesečník priamky SS_1 s kružnicou k_1 ležiaci na predĺžení úsečky SS_1 za bod S_1 , (k_1 je kružnica súmerne združená ku k podľa priamky A_1B_1). SM má minimálnu dĺžku, a $k = m_1$ je maximálna dĺžka strany trojuholníka Δ_1 . Keďže $SF_1 = \frac{1}{2}SO_1$, $SF_2 = \frac{1}{2}SO_2$, je $F_1F_2 \leq \frac{1}{2}(SO_1 + SO_2) \leq \frac{1}{2} \left(r + 2 \sqrt{r^2 - \frac{m_1^2}{4}} + r + \right.$

+ $2 \sqrt{r^2 - \frac{m_2^2}{4}} = r + \sqrt{r^2 - \frac{m_1^2}{4}} + \sqrt{r^2 - \frac{m_2^2}{4}}$ (s použitím trojuholníkové nerovnosti).

Tým je naša veta dokázaná.

Odporúčam čitateľovi, aby sa pokúsil vymyslieť obdobné nerovnosti ako bola uvedená v našej vete. Na precvičenie si môže dokázať toto tvrdenie:

Ak T_1 resp. T_2 je ťažisko štvorstena κ_1 resp. κ_2 , ktoré oba sú vpísané do guľovej plochy s polomerom r , potom platí

$$T_1 T_2 < \frac{6r + u}{4} \quad (*)$$

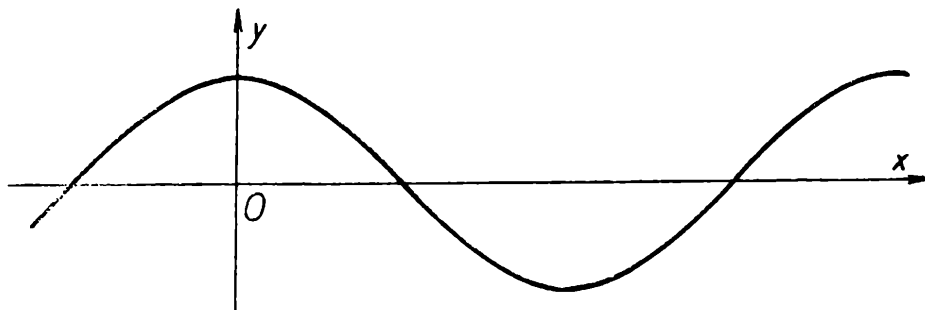
kde u je minimálna vzdialenosť vrchola štvorstena κ_1 od vrchola štvorstena κ_2 .

Ako by sa zmenila nerovnosť (*), ak by sme neuvažovali o štvorstenoch, ale o dvoch trojuholníkoch, vpísaných do tej istej kružnice? Ako sa (*) dá zovšeobecniť pre ľubovoľné n -simplexy?

Periodické funkce vyjádřené druhými mocninami

DOC. FRANTIŠEK DUŠEK, Ústí nad Labem

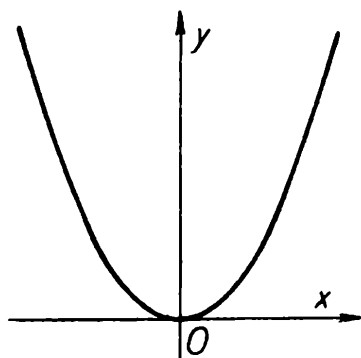
Charakteristickou vlastností goniometrických funkcí, např. funkce $y = \cos x$, je jejich periodičnost (obr. 1). Ukážeme, že lze periodické funkce vytvářet také opakováním částí průběhu jednodušších funkcí, např. kvadratické funkce $y = x^2$, jejímž grafem v pravoúhlé soustavě



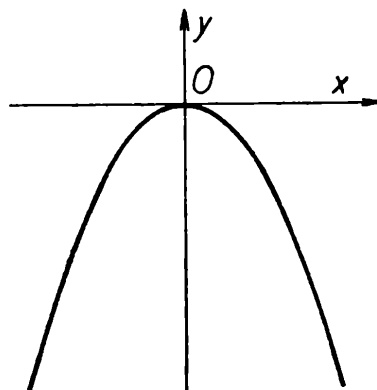
Obr. 1

souřadnic je parabola (obr. 2). K rovnici periodické funkce, jejíž graf se skládá ze shodných parabolických oblouků a podobá se grafu funkce $y = \cos x$, se postupně dostaneme touto úvahou:

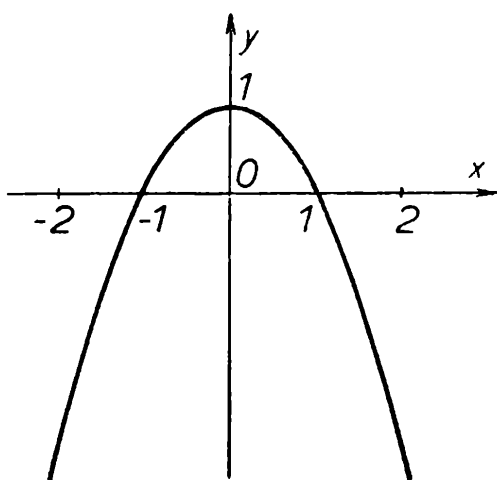
Sestrojíme parabolu $y = -x^2$, souměrnou k parabole $y = x^2$ podle osy x (obr. 3) a posuneme ji o jeden dílek nahoru (obr. 4). Dostaneme rovnici $y = 1 - x^2$, jejíž graf protíná osu x v bodech $(-1; 0)$ a $(1; 0)$.



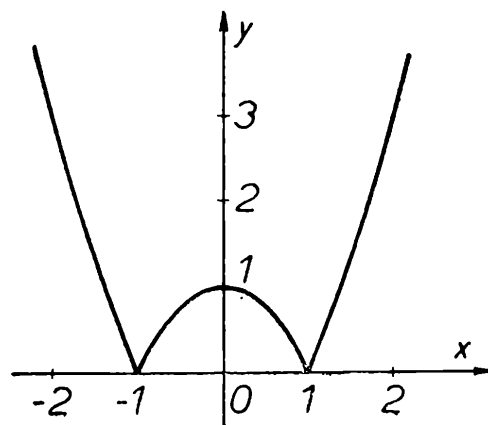
Obr. 2



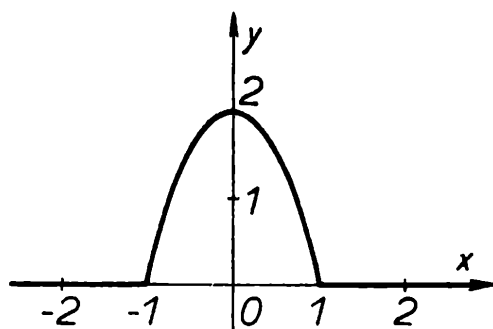
Obr. 3



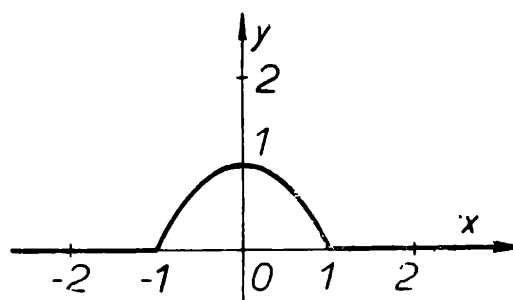
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Pak napíšeme rovnici $y = |1 - x^2|$, jejíž graf je v intervalu od $x = -1$ do $x = 1$ shodný s grafem funkce $y = 1 - x^2$, ale v intervalech, pro něž platí $x < -1$, případně $x > 1$, je s ním souměrný podle osy x (obr. 5).

Okolnost, že grafy funkcí $y = 1 - x^2$ a $y = |1 - x^2|$ jsou v intervalech, pro něž platí $|x| > 1$, souměrné podle osy x , vyvolává myšlenku sestavit součet obou grafů, to je uvažovat funkci

$$y = 1 - x^2 + |1 - x^2|$$

Už z názoru je patrné, že graf této funkce se v intervalech pro $|x| > 1$ skládá z částí osy x a v intervalu od $x = -1$ do $x = 1$ z parabolického oblouku, jehož body mají souřadnice y dvakrát větší než odpovídající body paraboly $y = 1 - x^2$ (obr. 6). To můžeme potvrdit i počteně.

1. Pro $|x| > 1$ je $1 - x^2 < 0$,

$$\text{a tedy } y = 1 - x^2 + |1 - x^2| = 1 - x^2 - 1 + x^2 = 0$$

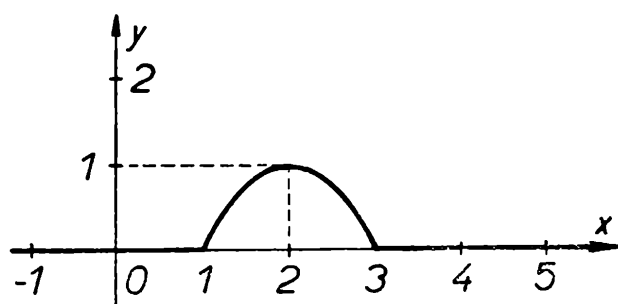
2. Pro $|x| \leq 1$ je $1 - x^2 \geq 0$,

$$\text{a tedy } y = 1 - x^2 + |1 - x^2| = 1 - x^2 + 1 - x^2 = 2 - 2x^2 = 2(1 - x^2)$$

Chceme-li se vrátit k oblouku původní paraboly $y = 1 - x^2$, musíme ypsilonové souřadnice zmenšit na polovinu a dostaneme rovnici

$$y = \frac{1}{2}(1 - x^2 + |1 - x^2|), \quad (1)$$

jejíž graf je na obr. 7.



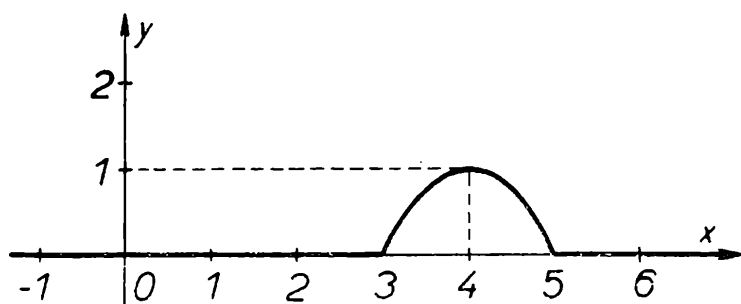
Obr. 8

Dalším krokem na cestě k vytčenému cíli, to je k sestavení rovnice periodické funkce, je nejprve posunutí posledního grafu o dva dílky vpravo (obr. 8). Příslušná rovnice zní

$$y = \frac{1}{2}[1 - (x - 2)^2 + |1 - (x - 2)^2|]. \quad (2)$$

Posuneme-li o 4 dílky, dostaneme graf na obr. 9 o rovnici

$$y = \frac{1}{2}[1 - (x - 4)^2 + |1 - (x - 4)^2|] \quad (3)$$



Obr. 9

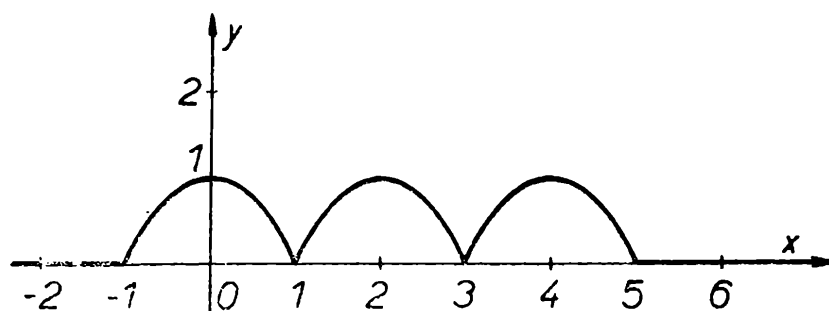
Obecně posunutím o $2n$ dílků, kde n je libovolné celé číslo, dostaneme graf o rovnici

$$y = \frac{1}{2}[1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|].$$

Nyní už je nasnadě uvažovat graf, který vznikne např. sečtením všech tří grafů (1), (2) a (3) a má rovnici

$$y = \frac{1}{2} [1 - x^2 + |1 - x^2|] + \\ + \frac{1}{2} [1 - (x - 2)^2 + |1 - (x - 2)^2|] + \\ + \frac{1}{2} [1 - (x - 4)^2 + |1 - (x - 4)^2|]$$

Těto graf se skládá v intervalu od $x = -1$ do $x = 5$ ze tří shodných parabolických oblouků a vně tohoto intervalu z částí osy x (obr. 10).



Obr. 10

Zdlouhavý zápis můžeme nahradit jednodušším, použijeme-li sumačního symbolu $\sum$, v němž uvedeme, která celá čísla se mají postupně za n dosazovat. Společného činitele $\frac{1}{2}$ lze vytknout před sumační znak, takže dostaneme rovnici

$$y = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=2} [1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|]$$

Počet za sebou následujících shodných oblouků můžeme libovolně zvětšovat. Např. grafem funkce

$$y = \frac{1}{2} \sum_{n=-3}^{n=4} [1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|]$$

je v intervalu od $x = -7$ do $x = 9$ osm shodných parabolických oblouků a vně tohoto intervalu části osy x . Čtenář nechť si graf laskavě načrtne sám jako cvičení.

(Pokračování)

Některé speciální případy trojic kružnic, protínajících se v jednom bodě

JOSEF BREJCHA, Brno

Budte k_i tři různé kružnice o poloměrech r_i ($i = 1, 2, 3$), které se protínají ve společném bodě P . Budtež dále A_i jejich středy, α_i vnitřní úhly trojúhelníka o vrcholech A_i , a_i jeho strany. Dále označme B_i další

průsečík kružnic k_j, k_m ; M_i průsečík tětivy B_iP s centrálou A_jA_m (i, j, m libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3).

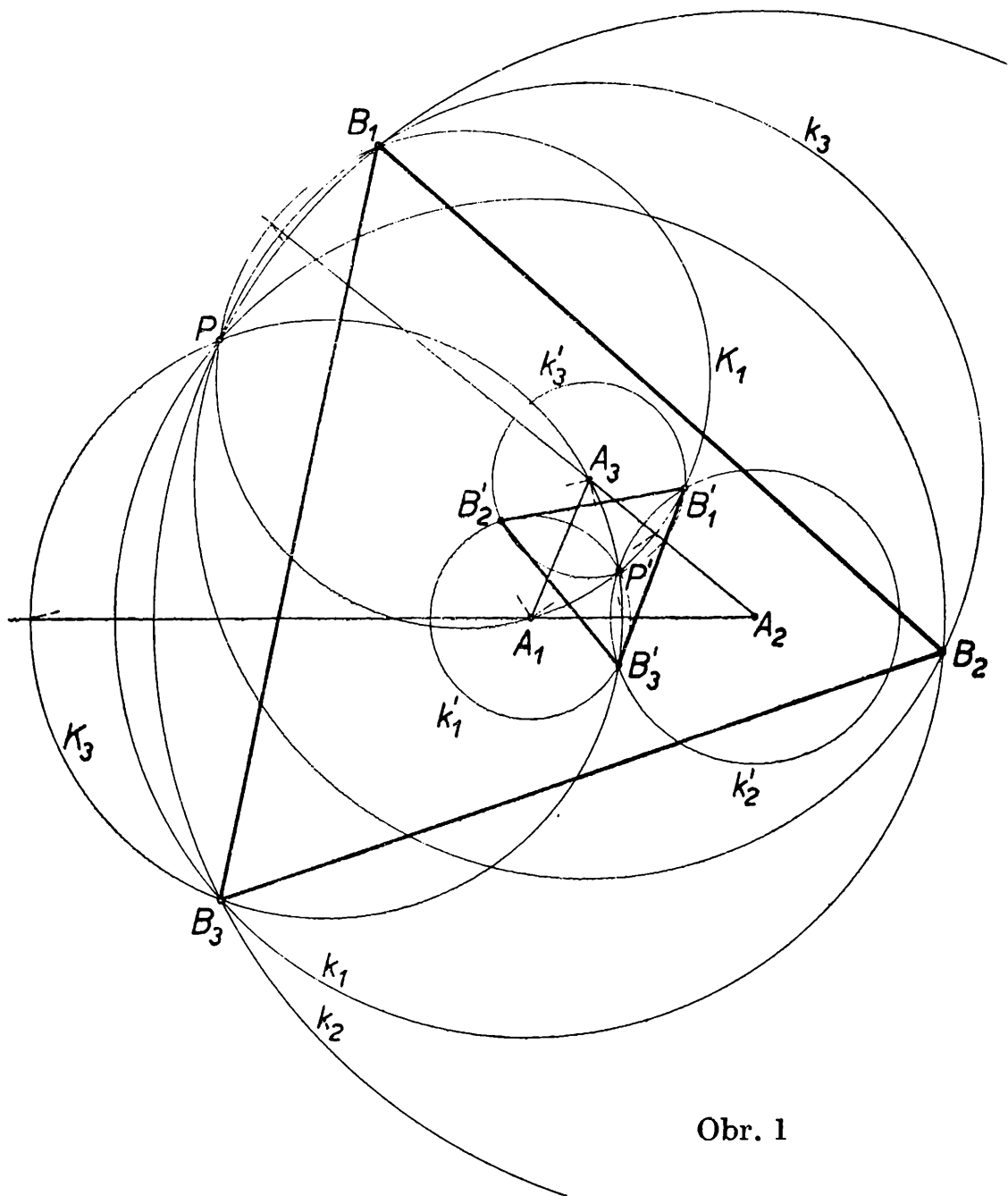
Věta 1.

Délky b_i stran trojúhelníka o vrcholech B_i jsou dány relacemi

$$b_i = B_jB_m = 2r_i \sin \alpha_i. \quad (1)$$

Důkaz. Vzhledem k vlastnostem společné tětivy a centrály dvou kružnic je

$$PB_m \perp A_iA_j;$$



Obr. 1

proto je čtyřúhelník $PM_jA_iM_m$ tětivový a platí

$$\sphericalangle M_jPM_m = 2R - \sphericalangle M_jA_iM_m = 2R - \alpha_i.$$

Dále je $\sphericalangle B_j P B_m$ obvodový úhel nad tětivou $B_j B_m$ v kružnici k_i ježto

$$\sphericalangle B_j P B_m = \sphericalangle M_j P M_m = 2R - \alpha_i ,$$

ihned

$$\sphericalangle B_j A_i B_m = 2\alpha_i .$$

Z trojúhelníka o vrcholech A_i, B_j, B_m , rovnoramenného při vrcholu

$$A_i, A_i B_j = A_i B_m = r_i, \sphericalangle A_i = 2\alpha_i ,$$

obdržíme ihned relace (1).

1. Chtějme nyní určit polohu bodu P tak, aby trojúhelník o vrcholech B_i byl rovnostranný. Pak musí platit rovnost úseček

$$B_1 B_2 = B_2 B_3 = B_3 B_1 ,$$

tj. vzhledem k (1)

$$r_1 \sin \alpha_1 = r_2 \sin \alpha_2 = r_3 \sin \alpha_3 .$$

Odtud

$$\left. \begin{aligned} r_1 : r_2 &= \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 , \\ r_2 : r_3 &= \sin \alpha_3 : \sin \alpha_2 , \\ r_3 : r_1 &= \sin \alpha_1 : \sin \alpha_3 . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Užitím sinové věty na trojúhelník o vrcholech A_i a s ohledem na to, že podle konstrukce je $r_i = A_i P$, přecházející rovnice (2) na tvar

$$A_j P : A_m P = a_m : a_j , \quad (3)$$

$$j = 1, 2, 3 ; m = 1, 2, 3 ; m \neq j$$

Body P leží tedy na Apolloniově kružnici se základními body A_j, A_m . Označme ji K_i . Na této kružnici leží zřejmě třetí vrchol A_i daného trojúhelníka, neboť splyne-li bod P s bodem A_i , dává podmínka (3) relaci

$$A_j A_i : A_m A_i = a_m : a_j ,$$

tj. identitu

$$a_m : a_j = a_m : a_j$$

Poznámka:

Budiž $\lambda > 0, \lambda \neq 1$ libovolné reálné číslo, A_1, A_2 dva libovolné různé body roviny. Pak platí

geometrickým místem bodů P , pro něž platí

$$\frac{A_1 P}{A_2 P} = \lambda ,$$

je kružnice K , zvaná kružnice Apolloniova. Tato kružnice je opsána nad průměrem CD , přičemž bod C leží uvnitř, bod D vně úsečky $A_1 A_2$ na přímce $A_1 A_2$. Pro tyto body platí

$$\frac{A_1 C}{A_2 C} = \frac{A_1 D}{A_2 D} = \lambda ,$$

a to tak, že pro $\lambda > 1$ leží bod D vně za bodem A_2 , je-li tento koncovým bodem úsečky A_1A_2 , pro $\lambda > 1$ vně za bodem A_1 , je-li tento počátečním bodem úsečky A_1A_2 .

Jsou-li body A_1, A_2, A_3 vrcholy trojúhelníka, a_1, a_2, a_3 jeho strany podle běžného označení, pak např. Apolloniova kružnice K_3 pro základní body A_1, A_2 ,

$$\lambda = \frac{A_1P}{A_2P} = \frac{a_2}{a_1}$$

je opsána nad úsečkou CD jako průměrem, kde C je průsečík osy vnitřního, D průsečík osy vnějšího úhlu daného trojúhelníka při vrcholu A_3 s protější stranou A_1A_2 .

Proto platí věta 2.

Hledané body P jsou společnými body tří Apolloniových kružnic K_i ; každá z nich prochází vrcholem A_i a průsečíky symetrál vnějšího a vnitřního úhlu při tomto vrcholu s protější stranou A_jA_m daného trojúhelníka.

Je známo, že Apolloniovy kružnice K_i mají vždy dva společné reálné body. Tyto průsečíky jsou tedy hledanými body P .

2. Určeme nyní polohu bodu P tak, aby trojúhelník B_i byl pravoúhlý. Má-li být bod B_i (pro určitý index 1, 2, 3) vrcholem pravého úhlu, vychází z relací (1) podmínka

$$r_i^2 \sin^2 \alpha_i = r_j^2 \sin^2 \alpha_j + r_m^2 \sin^2 \alpha_m, \quad (4)$$

která užitím sinové věty pro trojúhelník o vrcholech A_i a relace $r_i = A_iP$ přechází na tvar

$$A_iP^2a_i^2 = A_jP^2a_j^2 + A_mP^2a_m^2 \quad (5)$$

Podle podmínky (5) opisuje bod P kružnici, jíž označme C_i , jak ihned plyne z vyjádření (5) v kartézské souřadnicové soustavě $A_i(x_i, y_i)$, $P(x, y)$.¹⁾

Kružnice C_i má tyto vlastnosti:

α) Kružnice C_i prochází vrcholy A_j, A_m daného trojúhelníka.

Důkaz. V relaci (5) položíme $P \equiv A_j$

$$A_iA_j^2a_i^2 = A_jA_j^2a_j^2 + A_mA_j^2a_m^2,$$

tj.

$$a_m^2a_i^2 = 0 + a_i^2a_m^2,$$

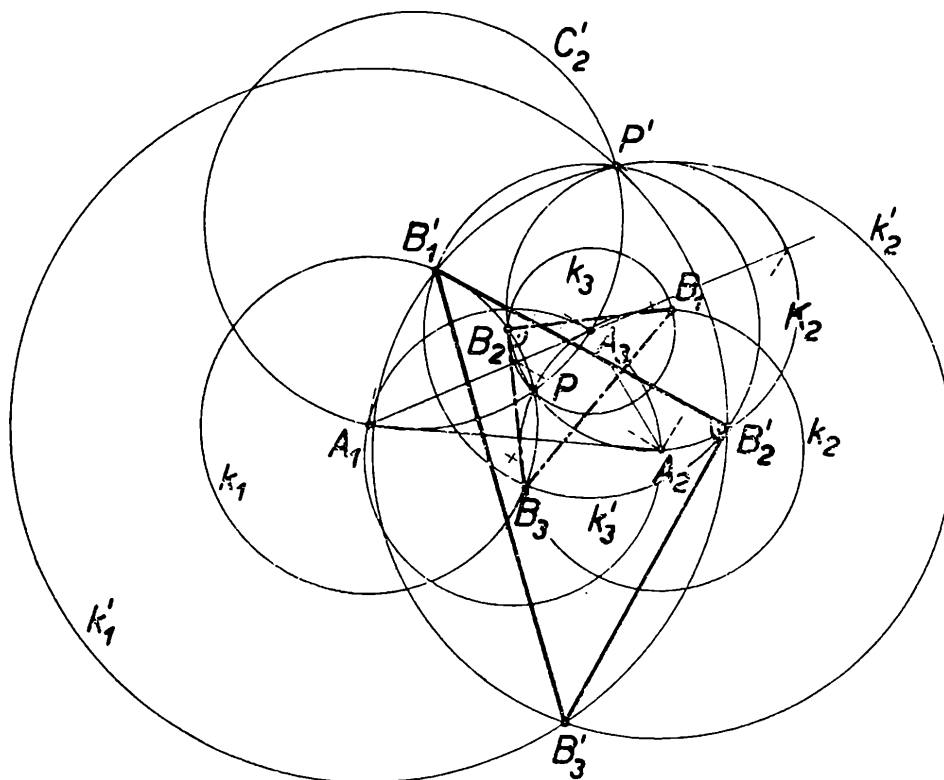
¹⁾ Relace (3) přejde na tvar

$$a_i^2 [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] = a_j^2 [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2] + \\ + a_m^2 [(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2];$$

odtud po úpravě obdržíme rovnici kružnice C_i .

vzhledem k užitému běžnému označení

$$A_i A_j = a_m, A_i A_m = a_j.$$



Obr. 2

β) Kružnice C_i, C_j se dotýkají vzájemně ve společném vrcholu A_m daného trojúhelníka.

Důkaz. Buď bod P^* společný bod kružnic C_i, C_j , různý od bodu A_m . Pro tento bod musí současně platit rovnice

$$A_i P^{*2} a_i^2 = A_j P^{*2} a_j^2 + A_m P^{*2} a_m^2,$$

$$A_j P^{*2} a_j^2 = A_i P^{*2} a_i^2 + A_m P^{*2} a_m^2$$

Sečtením obdržíme

$$2A_m P^{*2} \cdot a_m^2 = 0, \quad A_m P^* = 0,$$

ježto vzhledem ke geometrickému významu je $a_m \neq 0$. Je tedy $A_m \equiv P^*$, což je spor s předpokladem $A_m \not\equiv P^*$.

γ) Apolloniova kružnice K_m z věty 2. a kružnice C_i se dotýkají navzájem ve společném vrcholu A_m .

Důkaz. Buď $P^* \not\equiv A_m$ bod, společný kružnicím K_m a C_i . Pro tento bod musí tedy současně platit relace

$$A_i P^* : A_j P^* = a_j : a_i$$

podle (3)

$$A_i P^{*2} a_i^2 = A_j P^{*2} a_j^2 + A_m P^{*2} a_m^2$$

podle (5).

Z prvé z těchto rovnic určíme

$$A_i P^* = A_j P^* \frac{a_j}{a_i};$$

dosazením do druhé

$$A_j P^{*2} \frac{a_j^2}{a_i^2} a_i^2 = A_j P^{*2} a_j^2 + A_m P^{*2} a_m^2,$$

$$A_m P^{*2} a_m^2 = 0, \quad A_m \equiv P^*,$$

ve sporu s předpokladem $A_m \not\equiv P^*$.

δ) Potenčním středem kružnic C_i je střed S kružnice, opsané trojúhelníku o vrcholech A_i ($i = 1, 2, 3$).

Důkaz. Podle vlastnosti β) je chordálou kružnic C_i, C_j jejich společná tečna ve vrcholu A_m . Je-li S chordální střed všech tří kružnic C_i , musí platit

$$SA_1 = SA_2 = SA_3 \cdot c \cdot b \cdot d$$

Souhrnně lze tedy vyslovit větu 3.

Geometrickým místem bodů P té vlastnosti, že trojúhelník o vrcholech B_i, B_j, B_m je pravoúhlý při vrcholu B_i , je kružnice C_i , která ve vrcholech A_j, A_m kolmo protíná kružnici, opsanou trojúhelníku o vrcholech A_i, A_j, A_m . (i, j, m zase libovolná cyklická permutace čísel 1, 2, 3.)

Střed kružnic C_i leží tedy v průsečících symetrál stran trojúhelníka o vrcholech A_i, A_j, A_m s tečnami, vedenými ve vrcholech A_j, A_m ke kružnici trojúhelníku A_i, A_j, A_m opsané.

Požadujeme ještě speciálněji, aby trojúhelník o vrcholech B_i byl pravoúhlý rovnoramenný při jednom z těchto vrcholů. Je-li i jeden z indexů 1, 2, 3, musí při našem požadavku platit současně rovnice

$$A_i P^2 a_i^2 = A_j P^2 a_j^2 + A_m P^2 a_m^2,$$

vyjadřující kolmost odvěsen $B_i B_j, B_i B_m$ a rovnice

$$A_j P : A_m P = a_m : a_j,$$

vyplývající z podmínky rovnosti těchže odvěsen.

Platí proto:

Body P , vyhovující danému požadavku, jsou společnými body kružnic C_i a K_i podle užitého označení.

Poněvadž kružnice C_i se dotýká kružnic K_j, K_m ve vrcholech A_j , resp. A_m , nemůže s nimi mít další společné body. Nedotýká se však kružnice K_i , s níž tedy musí mít dva společné body P_i, P'_i . Tyto dva body jsou však vždy reálné různé, vzhledem k tomu, že jeden bod

Apolloniovy kružnice K_i je vnitřním bodem tětiny $A_j A_m$, která náleží kružnici C_i .

V rovině obecného trojúhelníka o vrcholech A_i existují tedy vždy tři dvojice bodů P_i, P'_i té vlastnosti, že průsečíky B_i tří kružnic, opsaných kolem vrcholů A_i a procházejících body P_i , resp. P'_i , tvoří pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Přitom platí věta 4.

Každá dvojice bodů P_i, P'_i ($i = 1, 2, 3$) a střed S kružnice, opsané trojúhelníku A_i leží v přímce.

Důkaz. Podle vlastnosti γ) je chordála kružnic C_i a K_m jejich společnou tečnou v bodě A_m . Podle δ) je střed S kružnice, opsané trojúhelníku A_i potenčním středem kružnic C_i . Budťež P_i, P'_i společné body kružnic C_i, K_i . Připojme ještě další kružnici, třeba C_m . Pak chordála kružnic C_i, C_m prochází středem S , chordála kružnic K_i, C_m prochází rovněž bodem S . Podle věty o chordálách tří kružnic musí i chordála kružnic C_i, K_i procházet bodem S . Touto chordálou je však přímka $P_i P'_i$.

(Pokračování)

0 celej časti reálneho čísla a funkcii $y=[x]$

JOZEF ELIÁŠ, Bratislava

(Dokončení)

P r í k l a d 4. Nakreslite graf funkcie

$$y = x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2$$

Riešenie. Daná funkcia je definovaná pre všetky reálne čísla x rôzne od nuly.

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí

$$x > 2 \quad \text{je} \quad \frac{2}{x} < 1$$

a

$$\left[\frac{2}{x} \right] = 0$$

Potom

$$y = x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{2} - 2$$

Graf danej funkcie na intervale $(2, \infty)$ je totožný s grafom priamky

$$y = \frac{x}{2} - 2$$

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí $1 < x \leq 2$, je

$$1 \leq \frac{2}{x} < 2$$

a

$$\left[\frac{2}{x} \right] = 1$$

Potom

$$y = x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2 = \frac{3x}{2} - 2$$

Jej graf na intervale $(1, 2>$ je totožný s grafom priamky

$$y = \frac{3x}{2} - 2$$

Všeobecne, pre všetky čísla x , pre ktoré platí

$$\frac{2}{k+1} < x \leq \frac{2}{k},$$

je

$$k \leq \frac{2}{x} < k+1$$

a

$$\left[\frac{2}{x} \right] = k$$

kde $k = 2, 3$, Potom

$$y = x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2 = kx + \frac{x}{2} - 2$$

Graf danej funkcie na intervale

$$\left(\frac{2}{k+1}, \frac{2}{k} \right]$$

je totožný s grafom priamky

$$y = kx + \frac{x}{2} - 2$$

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí $x \leq -2$, je

$$\frac{2}{x} \geq -1$$

a

$$\left[\frac{2}{x} \right] = -1$$

Potom

$$y = x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2 = -\frac{x}{2} - 2$$

Graf danej funkcie na intervale $(-\infty, -2>$ je totožný s grafom priamky

$$y = -\frac{x}{2} - 2$$

Pre všetky čísla x , pre ktoré platí $-2 < x \leq -1$, je

$$-2 \leq \frac{2}{x} < -1$$

a

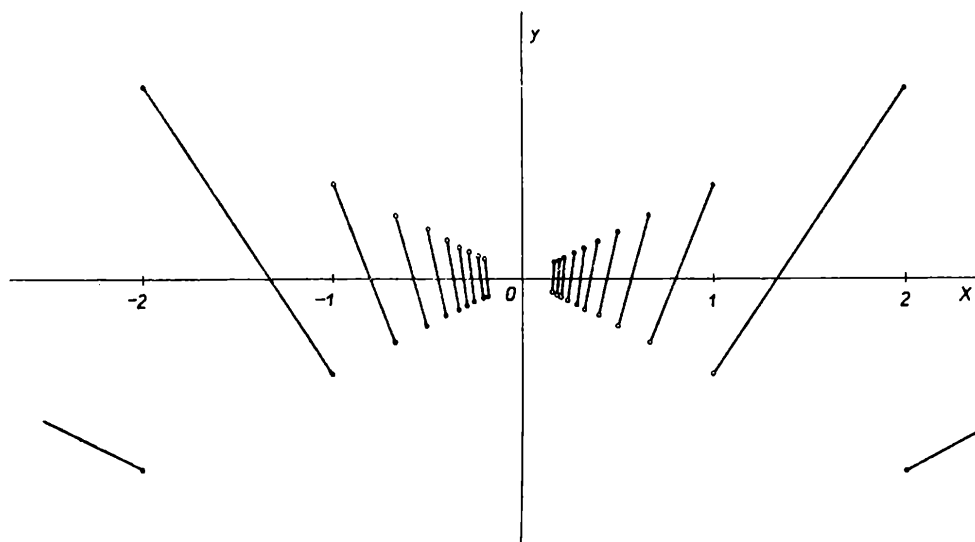
$$\left[\frac{2}{x} \right] = -2$$

Potom

$$y = x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2 = -\frac{3x}{2} - 2$$

Graf danej funkcie na intervale $(-2, -1>$ je totožný s grafom priamky

$$y = -\frac{3x}{2} - 2 \text{ (obr. 4).}$$



Obr. 4. Graf funkcie $y = x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2$

Všeobecne, pre všetky čísla x , pre ktoré platí

$$-\frac{2}{k} < x \leq -\frac{2}{k+1},$$

je

$$(k+1) \leq \frac{2}{x} < k$$

a

$$\left[\frac{2}{x} \right] = -k - 1$$

kde $k = 2, 3, 4, 5$, Potom

$$y = x \left[\frac{2}{x} \right] + \frac{x}{2} - 2 = -(k+1)x + \frac{x}{2} - 2$$

Jej graf na intervale

$$\left(-\frac{2}{k}, -\frac{2}{k+1} \right)$$

je totožný s grafom priamky

$$y = -(k+1)x + \frac{x}{2} - 2$$

Graf funkcie sa skladá z nekonečne mnoho úsečiek, pozri obr. 4.

Cvičenie. Nakreslite grafy funkcií:

a) $y = (-1)^{[x]}$;

b) $y = x - [x]$

c) $|[x]|$;

d) $y = [x^2]$;

e) $y = x + (-1)^{[x]}$;

f) $y = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] - \frac{1}{2}$;

g) $y = 2 \left(x - \frac{1}{2} - [x] \right) \left([x] + \frac{1}{2} - 2 \left[\frac{x}{2} \right] \right)$

Literatúra

[1] Matematika pre III. ročník SVŠ, vetev prírodovedná, SPN, Praha 1967.

Nebojme se množinové algebry

OLDŘICH ODVÁRKO, KU Praha

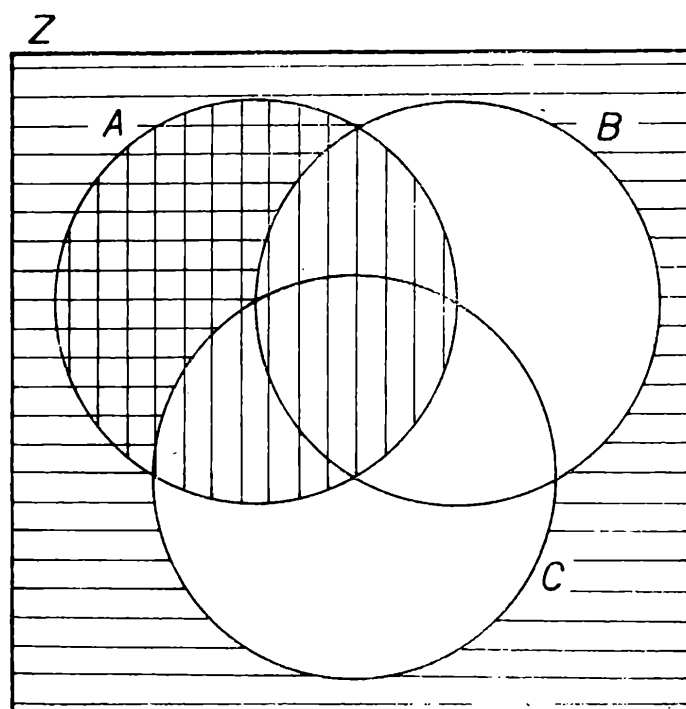
(Dokončení)

7. Ukažme si nyní na dvou příkladech, jak lze rozhodnout, zda dvě různě zapsané množiny jsou si rovny či nikoliv.

Příklad 3. Rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny **A**, **B**, **C** základní množiny **Z** platí

$$\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})' = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}') \cap (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}')$$

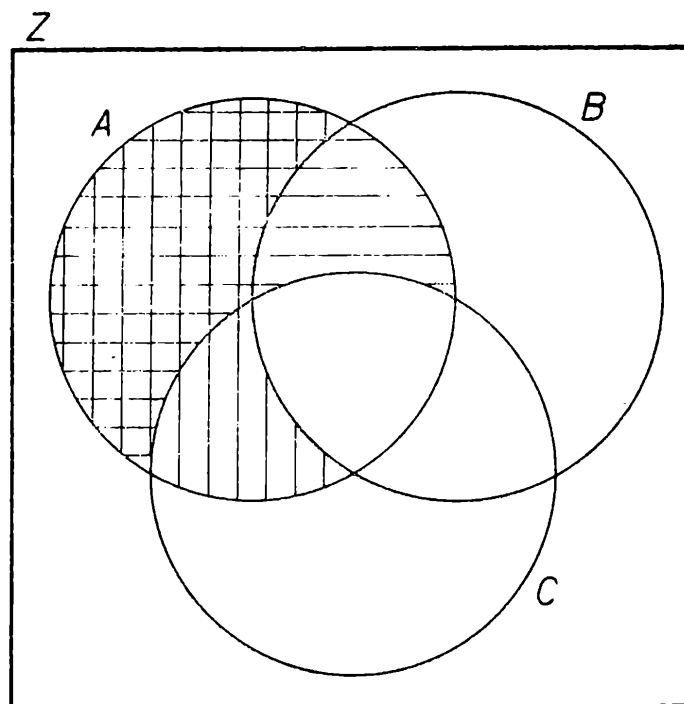
Řešení. Využijme Vennova diagramu pro tři množiny **A**, **B**, **C** (obr. 8a, b). Svisle vyšrafovaný kruh je na obr. 8a obrazem množiny **A**,



Obr. 8a

vodorovně vyšrafovaná oblast je obrazem množiny $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C})'$. Svisle vyšrafovaná oblast na obr. 8b odpovídá množině $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}'$, vodorovně vyšrafovaná oblast znázorňuje množinu $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}'$. Dvakrát šrafované políčko na obr. 8a je obrazem množiny $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})'$, obdobné políčko na obr. 8b znázorňuje množinu $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}') \cap (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}')$. Porovnáním obrázků dospějeme k závěru, že uvažované množiny jsou si rovny.

Čtenář by však mohl znovu namítnout, že tento způsob řešení úlohy je pochybný, když pracujeme jen s obrázky. Mohli bychom je nakreslit nepřehledně nebo se splést při šrafování. Provedme tedy ještě



Obr. 8b

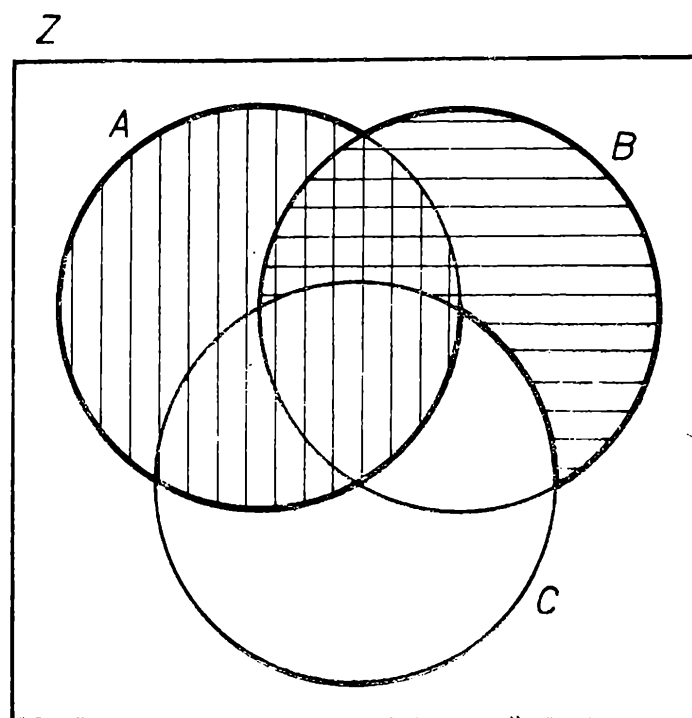
podrobný důkaz rovnosti dvou množin, který jistě uzná i pochybující čtenář. Doporučuji, aby si načetl Vennův diagram pro tři množiny a sledoval na něm všechny úvahy.

Chceme-li dokázat, že

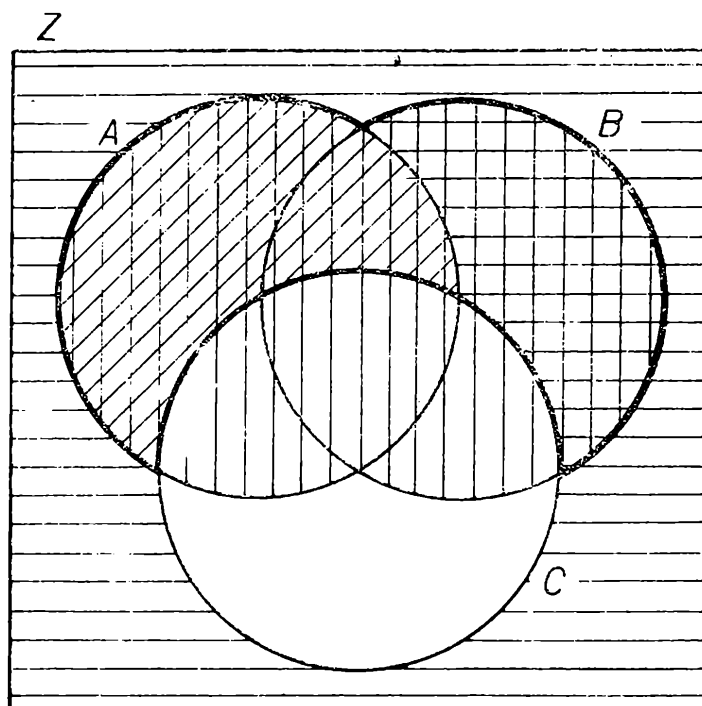
$$\mathbf{A \cap (B \cup C)' = (A \cap B') \cap (A \cap C')},$$

postačí, abychom dokázali, že platí

$$\mathbf{A \cap (B \cup C)' \subset (A \cap B') \cap (A \cap C')}$$



Obr. 9a



Obr. 9b

a zároveň

$$(A \cap B') \cap (A \cap C') \subset A \cap (B \cup C)'$$

a) Nejprve dokážeme, že platí

$$A \cap (B \cup C)' \subset (A \cap B') \cap (A \cap C')$$

Předpokládejme, že $x \in A \cap (B \cup C)'$. To znamená, že $x \in A$ a zároveň $x \in (B \cup C)'$; z toho vyplývá, že $x \in A$ a přitom $x \notin B \cup C$. Vzhledem k tomu, že x nepatří sjednocení množin B a C , není prvkem žádné z nich. Platí tedy $x \in A$, $x \in B'$, $x \in C'$, a tedy platí jak $x \in A \cap B'$, tak $x \in A \cap C'$. Přihlédneme-li k definici podmnožiny, je první část důkazu provedena.

b) Dokažme, že platí též

$$(A \cap B') \cap (A \cap C') \subset A \cap (B \cup C)'$$

Nechť je $x \in (A \cap B') \cap (A \cap C')$, pak platí jednak $x \in A \cap B'$, tj. $x \in A$ a zároveň $x \notin B$, jednak $x \in A \cap C'$, tj. $x \in A$ a zároveň $x \notin C$. Platí tedy $x \in A$ a přitom $x \notin B$ a $x \notin C$, to znamená, že $x \notin B \cup C$. Je tedy zaručeno, že platí $x \in A$ a zároveň $x \in (B \cup C)'$, tj. $x \in A \cap (B \cup C)'$. Tím je dokončena i druhá část důkazu rovnosti uvažovaných množin.

Příklad 4. Rozhodněte, zda pro libovolné tři podmnožiny A, B, C dané základní množiny Z platí

$$A \cup (B \cap C') = [(A \cup B) \cap (A \cup C')] \cup (A \cap C')$$

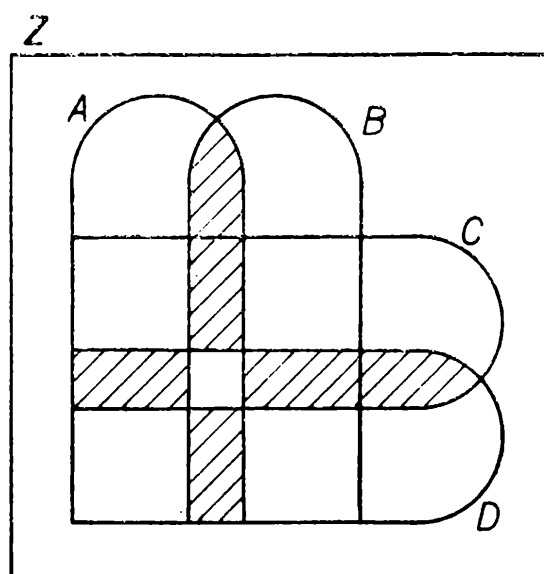
Řešení. Čtenář může provést celou úvahu samostatně a dospěje k obr. 9a, b. Tlustě obtažené oblasti diagramů znázorňují množiny, které srovnáváme. Porovnáním obrázků dospějeme k závěru, že druhá z uva-

žovaných množin (zapsaná vpravo od rovnítka v textu příkladu) je podmnožinou množiny $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}')$. Obě množiny si budou rovny právě tehdy, když platí $\mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \emptyset$.

8. V tomto článku jsme se seznámili se základními množinovými operacemi (doplňek, průnik, sjednocení), připomněli jsme si pojmy podmnožina dané množiny, rovnost množin a přesvědčili jsme se, že různé zápisy množin mohou označovat navzájem rovné množiny. V následujícím článku dokážeme a naučíme se používat základní vzorce množinové algebry.

C v i č e n í.

1. Rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ dané základní množiny $\mathbf{Z}$ platí: a) $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \cap \mathbf{B}'$; b) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \cup \mathbf{B}'$



Obr. 10

2. Na obr. 10 je šrafováním vyznačena oblast Vennova diagramu pro čtyři množiny, která znázorňuje jistou množinu $\mathbf{M}$. Vyjádřete tuto množinu pomocí sjednocení průniků (obdobně jako v úvaze o obr. 7) a rozhodněte, zda zápis

$$[(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{C} \cap \mathbf{D})] \cap (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{D})'$$

označuje množinu rovnou množině $\mathbf{M}$.

Výsledky cvičení: Všechny rovnosti platí.

*

*

Matematika je obdivuhodné dobrodružství. Skutečná pravda je vždy krásná, skutečná krása je vždy pravdivá.

(Citováno z knihy Alfréd Érényi, Dialoge über Mathematik, str. 94.)

0 umění negovat

ALENA ŠAROUNOVÁ, UK Praha

Člověk je tvor společenský, žije mezi lidmi a setkává se s jejich názory. Někdy souhlasí s tím, co slyší, jindy vidí daný problém v poněkud jiném světle, v některých případech zastává zcela jiný názor než jeho společníci. Lidé označují za pravdivé nebo nepravdivé ty názory, které se jich hluboce týkají. Každé malé dítě na obvinění „tys to rozbil“ umí odpovědět „nerozbil“, na „musíš“ „nemusím“. Jazyk dospělého je pestřejší. Pokud si myslí „to není pravda“, říká např. „problém je poněkud složitější“.

Logika však nemůže pracovat s výroky, které se podobají předchozímu, nemůže vycházet z nejasných a vyhýbavých formulací. Je nutné, aby výrok popírající platnost jiného výroku byl formulován jasně a výrazně, aby nebyl možný dvojí výklad. Utvořit výrok, který zcela nepřímo popírá (neguje) tvrzení jiného výroku, není vždy snadnou záležitostí. Všimneme si proto poněkud podrobněji některých otázek, které se týkají negování výroků.

Uvědomme si nejprve na konkrétním příkladu, jaké podmínky musí splňovat výrok, který „zcela a přímo“ popírá tvrzení tohoto výroku q ... Ivan běží.

Uveďme několik výroků, které popisují odlišné situace

- q_1 Ivan volá.
- q_2 ... Ivan sedí.
- q_3 Ivan leží.
- q_4 Ivan neběží.
- q_5 Není pravda, že Ivan běží.

Výroky $q_1, q_2 \dots q_5$ hovoří o různých Ivanových činnostech. Víme z vlastní zkušenosti, že při běhu se dá volat - je tedy možné, aby Ivan současně běžel i volal; výrok q_1 tedy nepopírá výrok q a nemůžeme ho považovat za negaci výroku q . S výroky q_2 a q_3 je to jiné - při běhu nelze sedět ani ležet. Je-li pravdivý např. výrok q_2 , vylučuje pravdivost výroku q , tj. platí-li výrok q_2 , výrok q neplatí. Není to však *přímé* popírání výroku q . K tomu, že nemohou být tyto dva výroky současně pravdivé, nedospíváme přímo z jejich formulace, ale až po myšlenkové úvaze. Negací výroku q musí být takový výrok, který *přímo*, tj. sám o sobě, bez jakéhokoliv dalšího uvažování tvrdí, že výrok q neplatí. Prohlédnete-li si ještě jednou výroky $q_1 \dots q_5$, rozhodnete se pravděpodobně pro výrok q_4 , případně q_5 . Oba tvrdí totéž a liší se pouze formulací. Každý z výroků q_4, q_5 lze nazvat negací výroku q .

Pokusme se dále negovat výrok q_4 . Použijeme-li obratu uvedeného v q_5 , řekneme: Není pravda, že Ivan neběží. Negováním jsme získali výrok,

který vyjadřuje touž skutečnost jako výrok q . Tato vlastnost, že obsah výroku dvojnásobně negovaného se kryje s obsahem původního výroku, je pro tvoření negovaných výroků charakteristická.

Všimněme si ještě jednou výroků q_4 a q_5 . Každý z nich můžeme považovat za negaci výroku q a obráceně. Výrok q je negací každého z výroků q_4 a q_5 , protože úplně a přímo popírá to, co výroky q_4 , q_5 tvrdí. Rozdíl mezi výroky q_4 a q_5 je pouze ve formulaci. Tvoření negace výroku w vazbou „není pravda, že w “ má před druhým způsobem dvě velké výhody: je velmi snadné a dá se použít bez výjimky vždy, když chceme vytvořit negaci nějakého výroku.

I druhý způsob má jisté přednosti. Věty jsou kratší, mluvnicky uhlazenější a jasnější. Podíváme se, kdy je vhodné tento způsob použít a jak. Dříve však pro ověření svých schopností utvoříme několik výroků a jejich negací

a	Petr se učí.	a'	... ⁵ Petr se neučí.
b	Věřím vám.	b'	... Nevěřím vám.
c	Honza je chytrý.	c'	Honza není chytrý.
d	... Stromy byly ošetřené.	d'	Stromy nebyly ošetřené. Stromy byly neošetřené.

K výrokům a , b , c , d jste jistě správně utvořili jejich negace a' , b' , c' , d' dříve, než jste si je přečetli. K výroku d uvádím dvě možná znění jeho negace. Utvořme ještě negaci výroku e

e Ivan je můj přítel.

Pravděpodobně jste utvořili jeden z následujících výroků

e_1 Ivan není můj přítel.

e_2 ... Ivan je můj nepřítel.

Formálně jste postupovali obdobně jako při formulaci výroků, které popírají výrok d : přidali jste záporku „ne“ ke slovesu nebo podstatnému jménu. Přesto však cítíte, že se významem tyto dvě věty velmi liší. Víte, že lidi nerozdělujeme pouze na přátele a nepřátele. Je mnohem více lidí, které známe, ale jsou nám lhostejní a nesmírné množství lidí, které neznáme vůbec. Není-li Ivan mým přítelem, nemusí být ještě mým nepřítelem – jsou zde i další možnosti, neznám ho nebo je mi lhostejný. Kdo považoval výrok e_2 za negaci výroku e , dopustil se chyby tím, že tvrzení příliš zúžil. Výroky e a e_2 nevystihují všechny možnosti, proto e_2 nepopírá e . Naproti tomu výrok e_1 je negací výroku e .

Zde jsme narazili na skryté úskalí při tvoření negace pomocí záporky „ne“. Musíme vždy přihlížet k obsahu výroku, který chceme negovat. Hovoříme-li o činnostech (viz výroky a , b), je vhodné umístit záporku „ne“ ke slovesu; jedná-li se o vlastnost nebo stav, věnujeme zvýšenou pozornost pomocným slovesům. V každém případě se však vyplatí provést kontrolu, jsou-li vyčerpány všechny možnosti. Mějme např. výrok

f Tu knihu jsem četla právě jednou.

Negace f' výroku f zní

f' Tu knihu jsem nečetla právě jednou.

Výrok f' můžeme přetvořit tak, aby tvrzení bylo vyjádřeno kladným způsobem

f'_1 Tu knihu jsem buď nečetla vůbec nebo jsem ji četla nejméně dvakrát.

Je možné, že se vám zdá formulace f'_1 poněkud zvláštní, obvykle takto nemluvíme, ale přesto je výrok f'_1 správně utvořenou negací výroku f . Zahrnuje v sobě nejen možnosti opakovaného čtení knihy (tj. aspoň dvakrát), ale také případ, že jsem knihu dosud nečetla.

Obdobně výrok $5 \leq a$ je negací výroku $5 > a$ (nezapomeňte na rovnítko!) atd. Pokuste se teď sami vytvořit negace výroků h, i, j, k, l . Pokud můžete, vyjmenujte všechny situace, které musí negace zahrnovat.

h Narodila se mi dcera.

i Hledám přítele.

j ... Svátek v pondělí slavit nebudu.

k ... Viděli jsme dravého ptáka.

l Někdo tomu nerozumí.

Výroku l si všimněme trochu blíže. Jaké tvrzení obsahuje? Ve skupině lidí, kteří se něčemu učili, např. vázat námořnický uzel, je někdo, možná jeden člověk, možná tři, čtyři i více, kdo nepochopil, jak se takový uzel „Aspoň jeden (člověk) tomu nerozumí“. Negací tohoto výroku bude zřejmě výrok

$\bar{l}$ Každý tomu rozumí.

Výroky obdobného typu se v naší řeči vyskytují velmi často. Zajímá nás např., kolik lidí z určité skupiny se zabývá tím či oním, o kolik dobrých knih mohu rozšířit knihovnu atd. tedy určité množství *kvantum*. Výrokům, které takové údaje vyjadřují, se říká *k v a n t i f i k o v a n é v ý r o k y*.

Protože ve skupině lidí mohou mít určitou vlastnost nebo konat nějakou činnost buď všichni nebo jen někteří lidé, případně vůbec nikdo, budeme potřebovat termíny k vyjádření právě těchto tří možností. Aby nedocházelo k omylům, používá se obvykle místo výrazu „někdo“ nebo „někteří“ výraz „aspoň jeden“. Dále se v literatuře dává přednost výrazu „každý“ před výrazem „všichni“.

Již jsme si ukázali, že negací výroku l : „Někdo tomu nerozumí“ je výrok $\bar{l}$: „Každý tomu rozumí“ Porovnejme tuto dvojici výroků. Výrazu „někdo“ (ještě lépe „aspoň jeden“) odpovídá výraz „každý“, slovesu „nerozumí“ sloveso „rozumí“ Chceme-li utvořit negaci kvantifikovaného výroku, musíme tedy nejen změnit znění věty tak, jako při negování jednodušších výroků, ale je třeba zaměnit vhodně i obrat, udávající množství (tj. kvantifikátor). Kdybychom to neučinili, získali bychom větu, která má smysl, ale nevyjadřuje negaci původního výroku.

Tak bychom získali např. k výroku l výrok „Někdo tomu rozumí“ (tj. „Aspoň jeden člověk tomu rozumí“), který připouští i případ, zahrnutý ve výroku l (někdo tomu rozumí, někdo ne) a který proto není jeho negací.

Jakými obraty nahradíme při tvoření negací další kvantifikátory? Je zřejmé, že např. negací výroku

m Nikdo nepřišel

je výrok

m' Někdo přišel

V jazyce logiky bychom obsah výroku m vyjádřili větou „Žádný nepřišel“ a m' větou „Aspoň jeden přišel“. Zapamatujeme si tedy další dvojici: *žádný*, *aspoň jeden*.

Všimněte si, že vazba „aspoň jeden“ se zde vyskytuje ve dvou různých situacích:

aspoň jeden - každý,

aspoň jeden žádný.

Ve výroku l se k tomuto obratu pojil mluvnický zápor a v negaci jsme jej museli nahradit slovem „každý“; výrok m' obsahuje sdělení, které je samo o sobě kladné a jeho negace - tj. výrok m - je utvořena pomocí kvantifikátoru „žádný“. Budeme-li tvořit negace kvantifikovaných výroků, můžeme použít následující tabulky:

+	každý aspoň jeden	aspoň jeden žádný	—
—	aspoň jeden žádný	každý aspoň jeden	+

V levé části tabulky jsou kvantifikátory původního výroku, v pravé kvantifikátory výroku negovaného. Dále je tabulka rozdělena podle obsahu původních výroků. Horní polovina je pro výroky s kladným obsahem, dolní část použijeme v případě, že původní výrok něco popírá. Negaci kvantifikovaného výroku provádíme pak takto

a) rozhodneme, je-li obsah výroku kladný nebo záporný,

b) určíme pomocí tabulky kvantifikátor odpovídající původnímu kvantifikátoru,

c) utvoříme negaci zbývajících částí výroku.

Ukažme si několik příkladů; číslice v závorce za každou dvojicí udává, které řádky tabulky jsme použili.

Všichni hráči se dostavili včas.

Někteří hráči se nedostavili včas. (3)

Někdo nás volal.

Nikdo nás nevolal. (2)

Žádný člověk by to neudělal.

Aspoň jeden člověk by to udělal. (4)

Pokuste se sami utvořit negace následujících výroků:

- n* Všechny státy Jižní Ameriky leží u moře.
- o* Po hlásce *r* se v každém případě píše ypsilon.
- p* Pro každé číslo *x* platí: $x^2 < 0$.
- r* Na každé cestě se rozbil aspoň jeden vůz.

Jistě jste si všimli, že výroky *n*, *p* jsou nepravdivé. Zamysleme se nad pravdivostí jejich negací *n'*, *p'*. Výrok *n'* zcela odpovídá skutečnosti (např. Paraguay je vnitrozemský stát); nad formulací *p'* jste se možná pozastavili. Pokud jste negaci utvořili správně, přemýšlíte nad pravdivostí výroku

p' Existuje aspoň jedno číslo *x*, pro které platí $x^2 \geq 0$. Možná, že váháte uznat tento výrok za pravdivý, protože víte, že vztah $x^2 \geq 0$ platí pro *všechna* *x* bez výjimky a zde se hovoří pouze o existenci aspoň jednoho takového čísla. Sami můžete takové číslo udat (např. $3^2 = 9$) a tím jste pravdivost výroku *p'* ověřili. Výrok *p'* neobsahuje totiž bližší údaje o množství vyhovujících čísel *x*, říká pouze to, že lze určit nejméně jedno takové číslo. Připouští však, že danému vztahu může vyhovovat mnohem více čísel, případně všechna. Je tedy výrok *p'* sice neobvykle formulován, ale je pravdivý.

Na závěr se vrátíme ještě k výroku *r*. Všimněte si, že zde udáváme dvojí množství: „*každá* cesta“ a „*aspoň jeden* vůz“. Tato okolnost umožňuje vytvořit ne jeden, ale tři další výroky tak, že zaměníme při negování buď jeden kvantifikátor (výroky r_1 , r_2), nebo oba (výrok r_3):

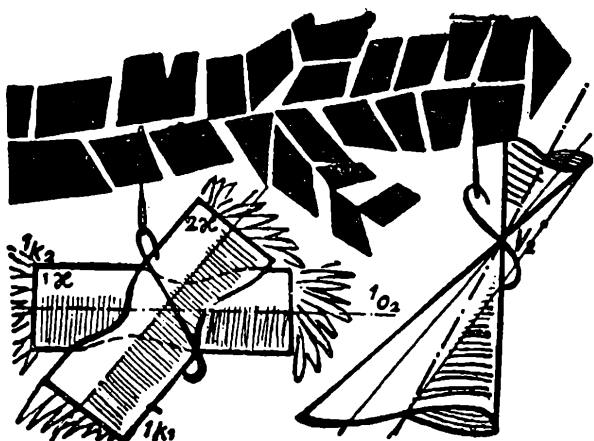
- r_1 *Aspoň na jedné cestě se nerozbil aspoň jeden vůz.*
- r_2 *Na každé cestě se nerozbil žádný vůz.*
- r_3 ... *Aspoň na jedné cestě se nerozbil žádný vůz.*

Chcete-li, můžete je ještě mluvnicky upravit. Kterému z nich přiřknete právo být nositelem názvu „negace výroku *r*“?

Je na čase skončit procházku světem negace. Neukázali jsme si sice všechny možnosti, které tento svět nabízí, ale jistě jste se už sami přesvědčili, že odporovat není vždy snadné. Chcete-li tedy něco popírat „úplně a beze zbytku“, popírejte s rozvahou a pozor na formulaci!

V každé přírodě je možné najít jen tolik vlastní vědy kolik je v ní matematiky.

(Immanuel Kant, Vorrede zu *den Metaphysischen Anfangsgründel der Naturwissenschaft*, Kantswerke IV, Berlin 1922, str. 372.)



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

O jisté kuželové ploše druhého stupně jako geometrickém místě bodu

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

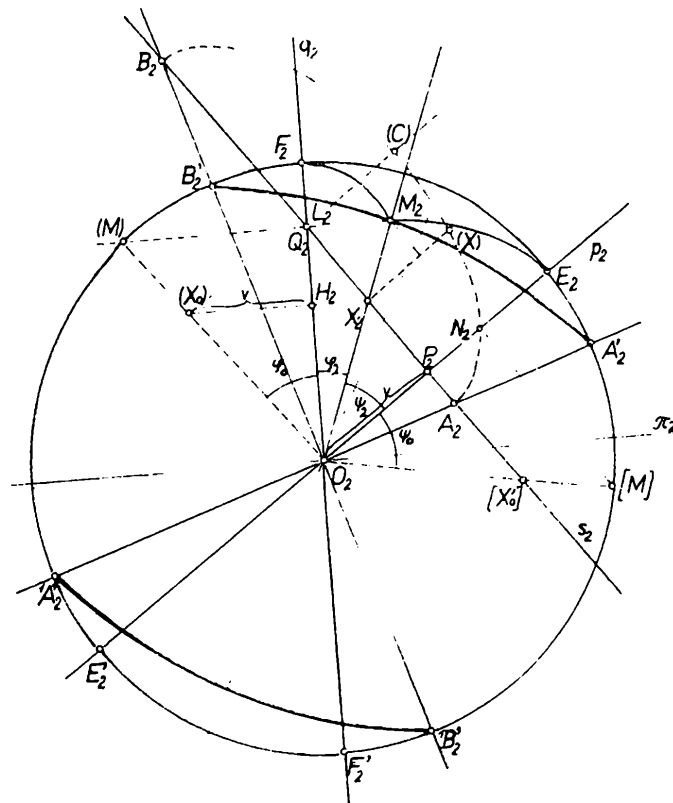
(Pokračování)

Nyní se vrátíme ještě ke zdůvodnění názvu fokálních přímek. Předpokládejme, že kolem bodu O byla sestrojena kulová plocha κ o libovolném poloměru r a určíme průsečíky E, F polopřímek OP, OQ, A', B', M průsečíky polopřímek OA, OB, OX s touto kulovou plochou. Průsečíky opačných polopřímek k polopřímek OE, OF s kulovou plochou označme E', F' . Délky kratších oblouků hlavních kružnic procházejících body M, E , resp. M, F nazveme *sférickými vzdálenostmi* bodu M od bodů E, F na kulové ploše. Podobně určíme *sférické vzdálenosti* bodu M od bodů E' a F' (obr. 2).

Otočíme-li trojúhelník $\triangle OML$ kolem přímky q do roviny ν , přejde bod M do bodu (M) a $\sphericalangle FOM$ do úhlu $\sphericalangle FO(M) = \varphi_0$. Podobně otočíme-li $\triangle OMN$ kolem přímky p do roviny ν , přejde bod M do bodu $[M]$ a $\sphericalangle EOM$ do úhlu $\sphericalangle EO[M] = \psi_0$. Bod X přejde do bodu (X_0) , přičemž, jak jsme dříve dokázali, je $H(X_0) = OP = v$. Poněvadž $O(X_0) = O[X_0]$ jsou trojúhelníky $\triangle OH(X_0) \cong \triangle [X_0]PO$, plyne odtud opět, že

$$\varphi_0 + \psi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Délka oblouku $\widehat{ME} = r \cdot \text{arc } \psi$, délka oblouku $\widehat{MF} = r \cdot \text{arc } \varphi$, kde



Obr. 2

r je poloměr kulové plochy κ . Délky oblouků $\widehat{ME'} = r \cdot \pi - r \cdot \text{arc } \psi$, $\widehat{MF'} = r \cdot \pi - r \cdot \text{arc } \varphi$. Snadno zjistíme, že platí vztahy

$$\widehat{ME} + \widehat{MF} = r (\text{arc } \varphi + \text{arc } \psi) = r \cdot \frac{\pi}{2} = A'B',$$

$$\widehat{ME'} + \widehat{MF'} = 2\pi r - r (\text{arc } \varphi + \text{arc } \psi) = \frac{3\pi}{2} r$$

$$\widehat{MF'} - \widehat{ME} = \pi r - r (\text{arc } \varphi + \text{arc } \psi) = \frac{\pi}{2} r,$$

$$\widehat{ME'} - \widehat{MF} = \pi r - r (\text{arc } \varphi + \text{arc } \psi) = \frac{\pi}{2} r$$

Z toho plyne: Body průnikové křivky kuželové plochy ξ a kulové plochy κ , opsané kolem jejího vrcholu, mají od průsečíků fokálních přímek kuželové plochy na této kulové ploše stálý součet (roz-díl) sférických vzdáleností.

Proto se tato prostorová křivka nazývá sférickou kuželosečkou.

P o z n á m k a. Sférická kuželosečka je definována jako průniková křivka kulové plochy a kvadratické kuželové plochy, která má vrchol ve středu kulové plochy. Sférické kuželosečky mají řadu analogických

Ř e š e n í.

Sestrojíme kuželovou plochu ξ jako geometrické místo bodů, které mají od přímky a a od roviny π stejnou vzdálenost a určíme její průsečíky s přímkou b .

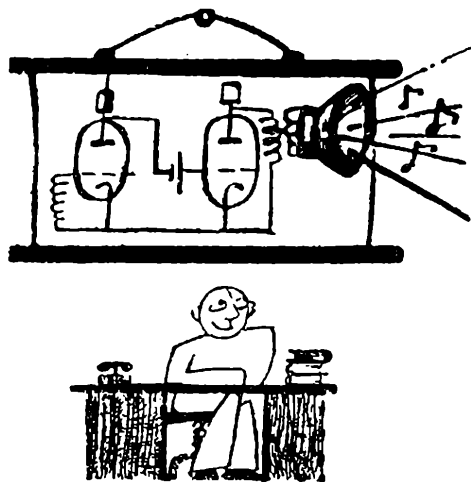
Kuželová plocha ξ je určena vrcholem A a elipsou k v rovině $\varrho \perp a$, kterou sestrojíme podle předcházejícího výkladu. Pravoúhlým průmětem této elipsy do průmětny π je kružnice $k_1 \equiv (A_1; r = A_1P_3)$.

Průsečíky přímky b s kuželovou plochou ξ určíme užitím vrcholové roviny $\varphi \equiv Ab$ kuželové plochy. Rovina φ protíná rovinu ϱ v přímce $m \equiv QK$, kde $Q \equiv p^\varphi \cdot p^\varrho$ a $K \equiv \varrho \cdot b$. (Bod K je v obr. 3 určen užitím třetího pomocného průmětu.)

Rovina φ protíná kuželovou plochu ξ v přímkách A_1, A_2 , které protínají přímku b v bodech S a 1S , jež jsou středy hledaných kulových ploch.

Počet řešení závisí na počtu průsečíků přímky b s kuželovou plochou ξ . Úloha může mít dvě, jedno, nebo žádné řešení. V daném příkladě má úloha dvě řešení, která splňují předpoklady dané úlohy.

(Dokončení)



F Y Z I K A

Luminiscence

ING. JIŘÍ KODEŠ, CSc., Praha

Luminiscenční světelné zdroje hrají v technice důležitou úlohu. Vložme si několik základních pojmů týkajících se tohoto tématu.

L u m i n i s c e n c í rozumíme v dnešní době jen ú z k o p á s m o - v é¹⁾ záření vysílané různými látkami následkem změn v energetických

stavech jejich atomů, iontů nebo molekul. Toto záření vzniká v látkách, jsou-li schopny vysílat luminiscenční záření, vlivem nějakého vnějšího činitele, s výjimkou tepla, např. působením světla, chemickými reakcemi, nebo elektrickými silami. Luminiscenci jeví látky všech tří skupenství, pevného²⁾, kapalného i plynného.

Avšak záření vysílané látkou následkem zvýšení teploty (např. žárovkou nebo rozžhaveným drátem) není již luminiscence, nýbrž inkandescence, neboť je to záření širokopásmové a způsob, jak je energie atomů zvyšována, je jiný než u luminiscence.

Mechanismus luminiscenčního záření.

Jak vlastně vzniká luminiscenční záření v atomech, snadno pochopíme pomocí původních Bohrových postulátů³⁾, které se týkají možných energií oběžných⁴⁾ elektronů v atomu. Tyto postuláty znějí zjednodušeně takto:

I. Elektron může trvale obíhat kolem jádra jen v určitých kvantových⁵⁾ dráhách.

II. Pokud elektron obíhá okolo jádra v téže kvantové dráze, potud atom nevydává (neemituje), ani nepřijímá (neabsorbuje) energii.

III. Přejde-li obíhající elektron na jinou kvantovou dráhu, v níž má nižší nebo vyšší energii, pak atom vyzáří nebo absorbuje jisté množství zářivé energie zv. f o t o n. Tento postulát je vyjádřen velmi jednoduchou, ale důležitou rovnicí

$$W_2 - W_1 = h \cdot \nu = \varepsilon, \quad (1)$$

kde W_1 , W_2 značí energii elektronu na kvantové dráze první, resp. druhé, $h = 6,6249 \cdot 10^{-34}$ Js je Planckova konstanta (účinkové kvantum), ν je kmitočet elektromagnetického záření, ε je energie fotonu.

Hlavní myšlenka, spojující všechny postuláty, je ta, že energie elektronu obíhajícího okolo jádra atomu se nemůže měnit spojitě (tj. o libovolně malou část), nýbrž jen diskretně čili po skocích.

Tento zvláštní jev si vysvětlíme obdobným příkladem z mechaniky. Pustíme po nakloněné rovině kuličku tíhy G (obrázek 1a) a sledujeme

1) Úzkopásmovým nazýváme záření složené z jednotlivých spektrálních čar nebo úzkých pásů

2) Pevné zdroje luminiscenčního záření se nazývají luminofoxy.

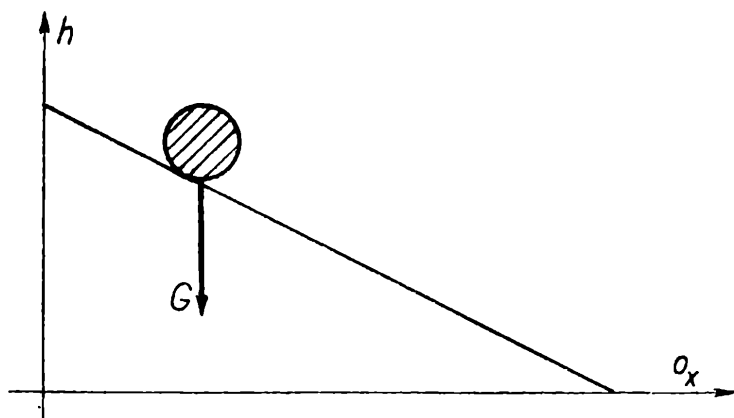
3) Slovo „postulát“ znamená „požadavek“ nebo „předpoklad“.

4) Místo názvu „oběžný“ elektron užívá se též „orbitální“ elektron.

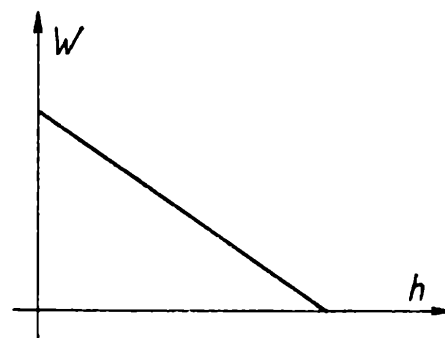
5) V původním Bohrově pojetí byly to kruhové dráhy, pro něž součin poloměru r a rychlosti elektronu v je celistvým násobkem konstanty

$$\frac{h}{2\pi} m_e$$

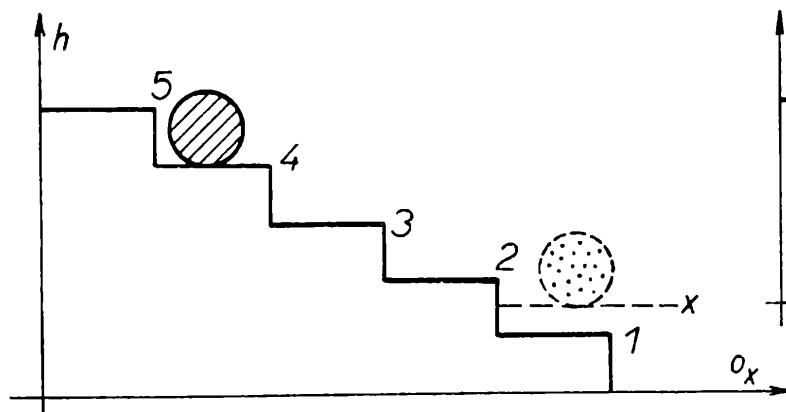
kde m_e je hmotnost elektronu, h je Planckova konstanta.



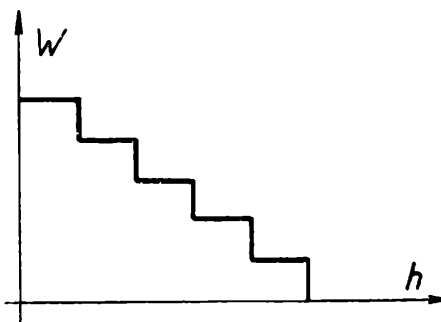
Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 1c



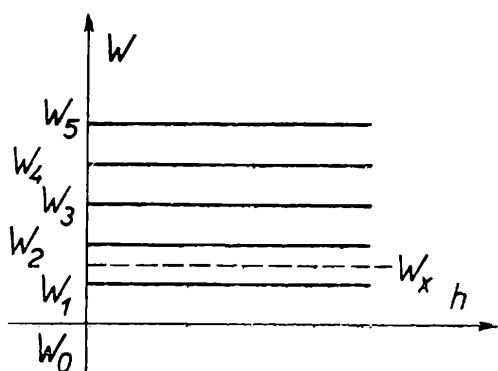
Obr. 1d

změny její polohové energie. Při pohybu po nakloněné rovině se polohová energie kuličky W mění spojitě. Její závislost na výšce h ukazuje obr. 1b.

Avšak dráha kuličky kutálející se po schodech dolů (obr. 1c) již není tak jednoduchá. Ve vodorovném směru je pohyb přímočarý a trvá delší dobu, avšak při každém pádu se schodu na schod je parabolická a trvá jen krátce. Při každém dopadu by se mohla ještě několikrát odrazit, takže skutečná povaha její dráhy je velmi složitá. Kvůli zjednodušení předpokládejme, že pohyb ve vodorovném směru je pomalý a výška každého schodu je malá. Pak závislost polohové energie kuličky na výšce h , jak je zobrazena na obr. 1d, má rovněž povahu skokovou, čili diskretní. Není možné např., aby kulička při přemísťování se schodu 2 na schod 1 zůstala „stát ve vzduchu“ v místě x (obr. 1c). Je patrné, že pro změnu energie kuličky platí vztah obdobný vztahu (1) tj.

$$W_2 - W_1 = \Delta W \quad (2)$$

Jinak řečeno. Podobně jako energie kuličky kutálející se po schodech se mění skokem (diskretně), zcela podobně se mění celková energie oběžného elektronu přecházejícího z jedné kvantové dráhy na druhou.



Obr. 2

Energetický model atomu, lze si tedy představit podle obr. 2, kde vodorovné přímky znázorňují jednotlivé schody, tj. „hladiny“ energie, na nichž je hodnota energie elektronu konstantní.

Má-li se tedy elektron, mající energii W_1 dostat na hladinu energie W_2 hladinu energie W_5

musí získat přírůstek energie

$$\Delta W_{1,2} = W_2 - W_1 = h \cdot \nu_{1,2}$$

$$\Delta W_{1,5} = W_5 - W_1 = h \cdot \nu_{1,5}$$

při čemž jistě platí, že $\Delta W_{1,2} < \Delta W_{1,5}$, ⁶⁾

čili $\nu_{1,2} < \nu_{1,5}$ a též $\lambda_{1,2} > \lambda_{1,5}$,

kde λ značí vlnovou délku emitovaného záření⁷⁾.

Proto je také nemožné, podle zákonů kvantové fyziky, aby elektron nabyl např. energii $\frac{1}{2} (W_3 - W_2)$, neboť tato hodnota se nenachází na žádné z dovolených hladin. Ony hodnoty energie, kterých elektron nemůže nabýt, se nazývají *z a k á z a n é* energie nebo hladiny. (Takovou by byla např. hladina W_x na obr. 2.)

Jsou-li všechny nejnižší dovolené energetické hladiny oběžných elektronů v atomu obsazeny patřičným⁸⁾ počtem elektronů, říkáme, že atom se nachází v *z á k l a d n í m* čili *s t a b i l n í m* (nevzbuzeném, neexcitovaném) stavu. Pak atom má celkovou energii nejmenší. Označme ji W_0 . Žádný další elektron nemůže na obsazené dráhy sestoupit, takže atom nemůže zářit.

Jestliže se nějaké místo uvolní (vyšínutím čili přeskokem některého elektronu) na vyšší⁹⁾ dráhu, např. nárazem jiné částice nebo absorpcí fotonu, pak atom má energie $W_i > W_0$, tedy větší než je energie základního stavu. Takový atom nazýváme *a t o m e m v e v z b u z e n é m* (*e x c i t o v a n é m*) stavu.

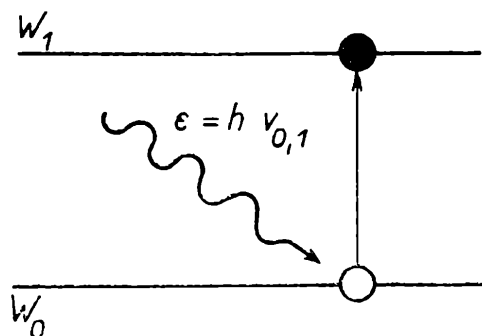
Při přechodu ze základního do vzbuzeného stavu, musí elektron pohltnout (absorbovat) kvantum energie splňující podmínku (1). Naopak při

⁶⁾ Index 1, 2 značí, že jde o přechod z dráhy jednokvantové (tj. první od jádra) na dráhu dvoukvantovou (čili druhou). Podobně index 1,5 značí přechod z dráhy první na pátou.

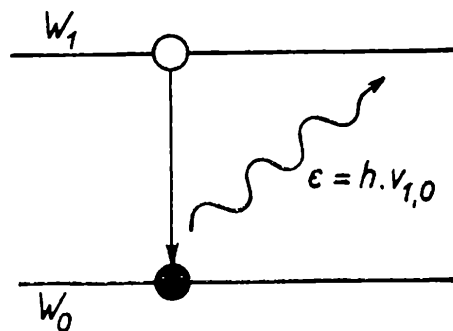
⁷⁾ Vzpomeňte na důležitý vztah z nauky o vlnění, tj. $\lambda \cdot \nu = c$, slovy: součin vlnové délky a kmitočtu je roven rychlosti světla.

⁸⁾ V základním (čili nevzbuzeném) stavu krouží v jednokvantové dráze 2 elektrony, ve dvoukvantových dráhách 8 elektronů, v trojkvantových 18 elektronů atd., obecně $2n^2$ elektronů, kde n je pořadové číslo dráhy.

přechodu z excitovaného do základního stavu atom vyzáří (emituje) kvantum splňující opět podmínku (1).



Obr. 3a



Obr. 3b

Nechť atom, nacházející se v základním stavu W_0 (viz obr. 3a), absorbuje foton o energii $\epsilon = h \cdot \nu$. Potom celková energie atomu se zvětší na hodnotu W_1 a atom je excitován. Excitovaný stav však není jeho stabilním stavem, tj. atom nemůže v excitovaném stavu setrvávat nekonečně dlouho, nýbrž přejde za velmi krátkou dobu (tzv. „relaxační“ dobu¹⁰) do základního, tj. stabilního stavu W_0 . Jeho energie se při tomto přechodu změní, podle vztahu (1) o hodnotu

$$\Delta W_{1,0} = W_1 - W_0 = \epsilon_{1,0} = h \nu_{1,0} \quad (3)$$

Tuto energii může atom buď vyzářit ve formě fotonu luminiscenčního záření, nebo tuto energii odevzdá krystalové mříži.

Jestliže totiž absorbuje energii menší, než předpisuje vztah (1), neexcituje se, nýbrž odevzdá absorbovanou energii krystalové mříži ve formě f o n o n u (což je označení pro kvantum energie t e p e l n é).

Mechanismus inkandescence. Inkandescenční záření lze získat tehdy, jestliže atom přechází ze základního do excitovaného stavu následkem zvýšení své t e p e l n é energie¹¹). Tepelná energie dodávaná nějakému krystalu, je odevzdávána krystalové mříži, tedy atomů nebo iontům. Příkladem inkandescenčního zdroje je žárovka. Protéká-li vláknem žárovky elektrický proud, pak podle Jouleova zákona se elektrická energie mění v tepelnou, čímž se zvyšuje teplota vlákna. Excitované atomy při přechodu do základního stavu emitují fotony světelného záření.

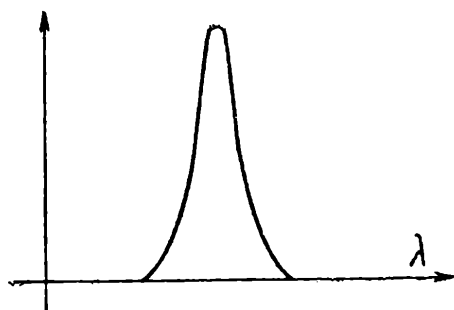
Porovnání luminiscence a inkandescence. Fundamentální odlišnost mezi luminiscenčním a inkandescenčním zářením je ve vyzařované šířce spektra elektromagnetických vln (viz obr. 4). Protože při luminiscenci se

⁹) Slůvko „vyšší“ zde znamená dráhu vzdálenější od jádra.

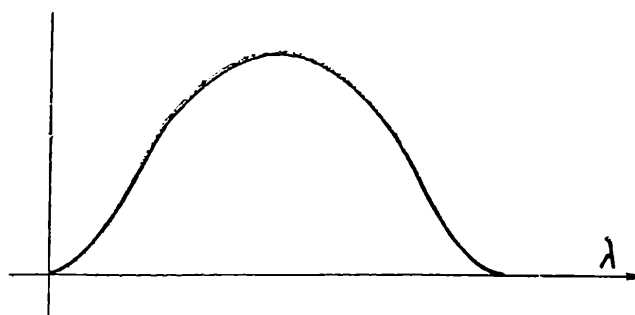
¹⁰) „Relaxační“ pochází z latiny a značí „uvolňující“, „zvolňující“.

¹¹) Inkandescence znamená v latině „rozžhavení do běla“, neboť „candidus“ značí „jasně bílý“.

imituje světlo pouze z několika nejblížejších energetických hladin excitovaného atomu, tudíž energie vyzařovaných fotonů se vzájemně od sebe liší jen málo. Ze vztahu (1), resp. (3), pak plyne, že šířka vyzařovaného spektra (tj. rozdíl mezi největší a nejmenší vlnovou délkou) je malá (obr. 4a). Avšak atomy excitované absorpcí tepla mají značně odlišné hodnoty



Obr. 4a



Obr. 4b

energie, proto šířka emitovaného spektra elektromagnetických vln je při inkandescenci velmi značná (obr. 4b).

Spektrum elektromagnetických vln při luminiscenčním vyzařování skládá se z jednotlivých čar nebo úzkých pásů, které mohou ležet uvnitř i vně viditelného oboru, kdežto inkandescenční záření je převážně v oblasti infračervené. Jen několik procent celkového inkandescenčního záření připadá na viditelnou oblast, kterou u svítidel využíváme. Tepelná energie, které by bylo zapotřebí k tomu, aby inkandescenční záření bylo převážně v oblasti viditelné, by musela být tak značná, že by se např. vlákno žárovky přetrhlo.

Přehled druhů luminescence

Název	Budící činitel. Excitace atomů nastává následkem
fotoluminescence	absorpce kvant zářivé energie, zde fotonů jejich srážky s rychle letícími elektrony (příkladem je stínítko obrazovky)
katodoluminescence	
rentgenoluminescence	
radioluminescence	
elektroluminescence	
chemiluminescence	chemických procesů v luminoforech (zpravidla kapalných)

Použití elektronové mikroskopie ke studiu kovů

PAVEL BARTUŠKA, Ústav fyziky pevných látek ČSAV, Praha

Kvalita snímků při mikroskopických pozorováních je zásadním způsobem ovlivněna rozlišovací schopností objektivu δ , která je definována např. jako nejmenší vzdálenost dvou bodů, které jsme schopni rozlišit

$$\delta = \frac{\lambda}{2d \cdot \sin \alpha},$$

kde λ je vlnová délka použitého světla, d index lomu prostředí a α poloviční úhel mezi objektem a objektivem. Tato rovnice nám také dává odpověď na otázku, jak zvětšit rozlišovací schopnost, a tím odhalit nové podrobnosti na pozorovaném předmětu.

Jednou z cest je zvýšení indexu lomu prostředí mezi objektivem a objektem použitím inverzního oleje (pro cedrový olej $d = 1,5$). Druhou cestou je zmenšení vlnové délky, např. použitím ultrafialového světla, což však klade značné nároky na experimentální zařízení, poněvadž musíme použít křemenné optiky.

Zásadní zlepšení znamená použití elektronového svazku k osvětlení objektu. Při tom se využívá známého faktu, že každému pohybujícímu se hmotnému bodu přísluší jistá vlnová délka nepřímo úměrná jeho hmotnosti a rychlosti, s jakou se pohybuje (vztah de Broglieho):

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v},$$

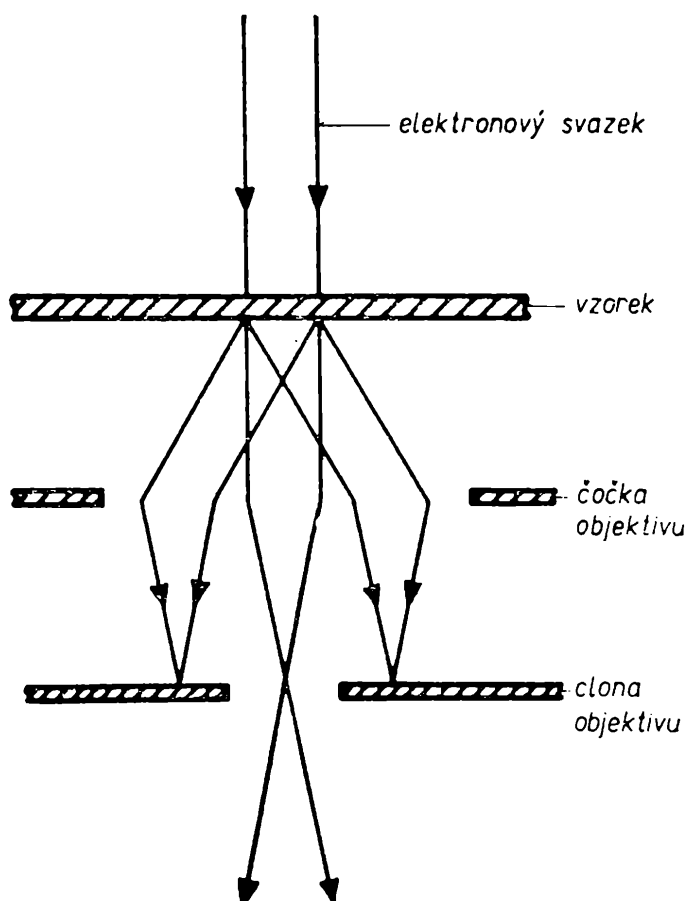
kde h je Planckova konstanta a m a v hmotnost respektive rychlost tohoto bodu.

Z jednoduchého vztahu mezi urychlovacím napětím a rychlostí elektronu vyplývá, že při napětí 100 kV je λ asi 200 000krát kratší, než u viditelného světla. Rozlišovací schopnost při tomto záření by byla fantastická, teoreticky by měla postačit pro rozlišení elektronů v atomech. Dosažená rozlišovací schopnost elektronových mikroskopů je jen několik málo Å*), což je důsledek zobrazovacích vad elektronových čoček. Vidíme tedy, že jestliže rozlišovací schopnost optického mikroskopu je v nejlepším případě $0,2 \mu\text{m}$ (a stačí tudíž zvětšení $1000\times$, poněvadž oko není schopno rozlišit dva body vzdálenější než asi $0,2 \text{ mm}$), můžeme

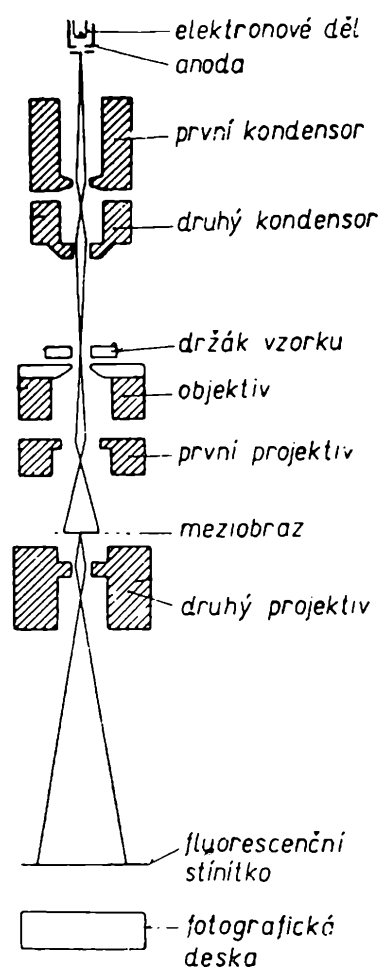
*) Angströmů, tj. starších jednotek, pro něž platí převod na nanometr
 $1 \text{ Å} = 0,1 \mu\text{m}$

u elektronového mikroskopu pracovat s užitečným zvětšením větším než $100\,000\times$.

Obraz na fluorescenčním stínítku však vzniká v tomto případě na úplně jiném principu, než u mikroskopu optického, kde jde buď o odlišnou absorpční schopnost různých míst vzorku (při průchodu světla preparátem), nebo o odraz světla pod různým úhlem od povrchových ne-



Obr. 1. Schéma vzniku difrakčního kontrastu. Více difraktovaná část elektronového svazku z místa obsahujícího poruchu je zachycena clonou objektivu.



Obr. 2. Schéma elektronového mikroskopu.

rovností (La Chaterierův obrácený mikroskop, používaný při metalografickém zkoumání kovů).

Kontrast v elektronovém mikroskopu vzniká v převážné míře díky difrakci (rozptylu) záření. Dopadá-li totiž na krystal s periodickou mřížkou záření, dochází podle Braggovy podmínky k jeho odrazu na jednotlivých krystalografických rovinách. Jestliže je periodicitu mřížky porušena, dochází v tomto místě také ke změně v difrakci, elektronový paprsek z této oblasti je odražen mimo hlavní svazek a na fluorescenčním stínítku vzniká proto tmavé místo. Na obr. 1 je uvedeno schéma vzniku difrakčního kontrastu u prozařovacího elektronového mikroskopu. Svazek,

difraktovaný vzorkem, je objektivem soustředěn do roviny objektivové clony, kde je zachycena jeho více odchýlená část.

Je si ovšem potřeba uvědomit, že i u prozařovacího mikroskopu se uplatňuje absorpce, takže tlustší místa se jeví na stínítku tmavší. Např. v přítomnosti precipitátů se uplatňuje jak absorpce (díky odlišné hustotě vyloučené částice), tak i difrakční kontrast (v jeho okolí totiž existuje napěťové pole). Pochopitelně významnou úlohu hraje absorpční kontrast u tzv. stínového mikroskopu (pozorování např. tvaru prachových částic, nebo jednotlivých krystalků organických i anorganických látek), nebo při studiu replik (otisků).

Schéma moderního elektronového mikroskopu je na obr. 2. Vidíme, že zde pracujeme s třístupňovým zvětšením, kde každá čočka zvětšuje asi $50\times$ část obrazu, vytvořeného čočkou předcházející. Nad preparátem je umístěno elektronové dělo emitující elektrony, které se urychlují napětím (30 až 100) kV. Celý systém je evakuován do vysokého stupně.

Užijeme-li elektronové mikroskopie ke studiu kovů a slitin, můžeme postupovat dvojím způsobem. Prvý je použití replik (otisků), kdy povrch vzorku naleptáme nějakým chemickým činidlem, které různě intenzivně rozpouští odlišné strukturní součásti materiálu. Z takto připraveného povrchu zhotovíme co nejvěrnější otisk, např. pomocí kolodia, formvaru, uhlíku, nebo jiné vhodné vrstvy, po případě vytvořením vrstvy kysličníku. Abychom zvětšili kontrast tohoto preparátu, nanášíme na něj ve vysokém vakuu pod vhodným úhlem vrstvičku těžkého kovu.

Je zřejmé, že jakost rozlišení záleží v tomto případě na dokonalosti, se kterou jsme schopni zhotovit otisk, co nejlépe sledující detaily povrchu. Rozlišovací schopnost je v tomto případě dále snížena, v nejprůzračnějším případě na (20 až 30) Å.

Lepší rozlišovací schopnosti lze dosáhnout užitím tzv. transmisní techniky (na průchod), která užívá přímého prozařování kovových vzorků (folií) o tloušťce (1000 až 2000) Å. Cest, jak získat tyto tenké vzorky, je několik: řezání ultramikrotomem, vakuové napařování, vylučování z roztoku, tepání kovů, nebo příprava folií z roztaveného kovu povrchovým napětím. Uvedené metody však mají tu nevýhodu, že mění strukturu vzorku, nebo vlivem specifických podmínek přípravy neobrážejí charakter kompaktního materiálu. Charakter kompaktního materiálu je ve foliích zachován pouze při užití techniky elektrolytického leštění, nebo chemického zeslabování. Tato druhá metoda však má tu nevýhodu, že se obvykle různé strukturní součásti leští odlišnou rychlostí a folie je proto různě tlustá. Nejdokonalejší je proto technika elektrolytického leštění, kdy vzorek je zapojen jako anoda v elektrolytické lázni a rovnoměrně se rozpouští z výchozí tloušťky okolo 0,1 mm.

(Pokračování)

Jednoduché odvození zákonů zobrazení odrazem a lomem na kulové ploše z Huygensova principu

LUBOMÍR VAŠEK, Gottwaldov:

Huygensův princip slouží v elementární optice zpravidla k tomu, aby se zdůvodnilo přímočaré šíření světla a aby se odvodily základní zákony lomu a odrazu rovinné vlny na rovinném rozhraní dvou prostředí z představ vlnové teorie světla. Používá se k tomu známých konstrukcí, které jsou uvedeny ve všech středoškolských učebnicích fyziky (např. v současné učebnici [1] v odst. 77, str. 138—139).

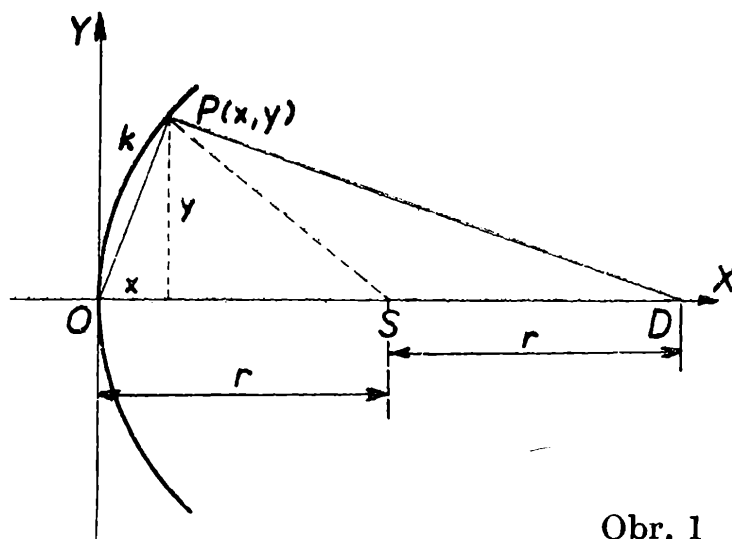
Při výkladu optického zobrazování kulovou plochou se naproti tomu ve všech učebnicích používá výhradně světelných paprsků, s nimiž se pracuje čistě geometricky. K ukázání souvislosti mezi vlnovou a geometrickou optikou se zpravidla spokojujeme jen se shora zmíněnými zákony odrazu a lomu rovinné vlny, odvozenými z Huygensova principu. Je ovšem známo, že pomocí světelných paprsků se nedají vyložit všechny jevy geometrické optiky. Optické jevy v prostředích se spojitě proměnným indexem lomu je nutno vykládat pomocí vlnoploch. Také je známo, že k uskutečnění optického zobrazení není dostačující podmínkou fakt, že paprsky vycházející z jednoho bodu (předmětu) se po průchodu optickou soustavou sbíhají opět v jednom bodě (obrazu). Musí být kromě toho splněna podmínka, že sbíhající se paprsky se setkávají ve stejné fázi. Je proto třeba zvláštního důkazu, že optické dráhy mezi sdruženými body v předmětovém a obrazovém prostoru jsou pro všechny paprsky stejně dlouhé. Tento důkaz je zbytečný, jestliže zobrazovací zákony odvozujeme pomocí Huygensova principu. Kromě toho se získá jednoduchá představa o souvislosti geometrické a vlnové optiky.

Vzorem může být Huygensův spis „Abhandlung über das Licht“ z r. 1687 [2]. V posledním odstavci tohoto pojednání nazvaném „Ueber die Gestalt der durchsichtigen Körper, welche zur Brechung und Zurückwerfung dienen“ jsou probírány jednotlivě nejdůležitější problémy odrazu a lomu světla na zakřivených plochách. Nejsou tam však uvedeny dnes běžné vztahy pro odraz a lom na kulové ploše (např. zrcadlová a čočková rovnice), které v době Huygensově nebyly ještě známy.

Chci ukázat, že tyto vztahy se dají snadno odvodit z Huygensova principu.

Odvození je založeno na užití pomocné věty, kterou uvedu nejdříve:
Zvolme souřadnicovou soustavu (X, Y) . Z bodu S ležícího na ose x

ve vzdálenosti r od počátku O opišeme kruhový oblouk k tak, aby procházel počátkem. Dále zvolme na kruhovém oblouku k bod $P(x, y)$ (obr. 1).



Obr. 1

Z nákresu plyne

$$x = r - \sqrt{r^2 - y^2} = r \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} \right) \quad (1)$$

Podle Eukleidovy věty platí

$$y^2 = (2r - x) \cdot x = 2rx - x^2. \quad (2)$$

Předpokládejme, že bod P je velmi blízko bodu O ; pak $y \ll r$ a $x^2 \rightarrow 0$, takže z rovnice (2) plyne

$$x = \frac{y^2}{2r} \quad (3)$$

Je patrné, že zvolíme-li několik kruhových oblouků $k_1, k_2, \dots$ o poloměrech $r_1, r_2, r_3, \dots$, pak pro body $P_i(x_i, y)$, ležící na obloucích k_i bude vždy x_i nepřímo úměrné poloměru r_i (přitom $i = 1, 2, 3, \dots$); lze také říci, že vzdálenost x_i je vždy přímo úměrná křivosti příslušné kružnice $\frac{1}{r_i}$

v bodě O . Můžeme tedy vyslovit tuto větu:

Uvažujme dvě kružnice k_0, k_1 o poloměrech r_0 a r_1 , které mají středy na ose x a které procházejí počátkem O . Zvolme na kružnicích body P_0 a P_1 blízke bodu O tak, aby jejich souřadnice y byly stejně veliké; souřadnice x bodů P_0 a P_1 budou podle (3)

$$x_0 = \frac{y^2}{2r_0}, \quad x_1 = \frac{y^2}{2r_1}.$$

Jsou-li m, n libovolná reálná čísla, pak vztahem

$$x_2 = mx_0 + nx_1$$

je definována souřadnice x bodu $P_2(x_2, y)$ třetí kružnice k_2 , jejíž střed leží na ose x a poloměr r_2 je určen rovnicí

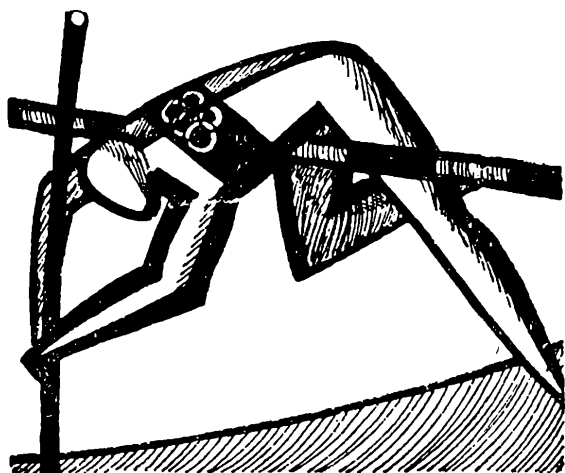
$$\frac{y^2}{2r_2} = m \frac{y^2}{2r_0} + n \cdot \frac{y^2}{2r_1},$$

čili

$$\frac{1}{r_2} = \frac{m}{r_0} + \frac{n}{r_1} \quad (4)$$

Vztah tohoto typu dostaneme, když pomocí Huygensova principu budeme sledovat změnu, která se děje s kulovou vlnou, která se odráží nebo láme na kulové ploše. Zvolíme-li střed kulové plochy S na ose x a budeme předpokládat, že kulová plocha prochází počátkem. Zvolíme dále na ose x bod A , z něhož vychází kulová vlna, stačí z důvodů symetrie uvažovat osový řez vedený osou x a v něm se vlnoplochy budou jevit jako kružnice. Proto můžeme použít uvedené pomocné věty. Všimneme si nejprve odrazu a pak lomu na kulové ploše.

(Pokračování)



MFO

Příklady z 2. mezinárodní fyzikální olympiády

PROF. DR. ROSTISLAV KOŠTÁL, VUT, Brno

Druhá mezinárodní fyzikální olympiáda se konala ve dnech 23. června až 1. července 1968 v Budapešti. Na ni byly soutěžícím dány k řešení tři teoretické úlohy a jedna úloha laboratorní. Byly to tyto úlohy.

1. ú l o h a

Text.

Na nakloněné rovině s úhlem sklonu $\alpha = 30^\circ$ je homogenní válec o hmotnosti $m_1 = 8 \text{ kg}$ a o průměru $2r = 10 \text{ cm}$. Na ose válce je připevněna nehmotným vláknem cihla o hmotnosti $m_2 = 4 \text{ kg}$. S jakým zrychlením se tělesa pohybují? Koeficient vlečného tření mezi cihlou a nakloněnou rovinou je $f = 0,2$. Valivé tření a tření v ose zanedbejte! Moment setrvačnosti válce je $J = \frac{1}{2} m r^2$ (obr. 1).

Řešení

Hledané zrychlení označme a .

a) *Řešení užitím principu zachování energie.*

Když je soustava v klidu a pak klesne o výšku h , tj. o dráhu s na nakloněné rovině, zmenší se potenciální energie o hodnotu

$$W_p = (m_1 + m_2) g h = (m_1 + m_2) g s \sin \alpha .$$

Při tomto pohybu nabyla soustava kinetické energie

$$W_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 ,$$

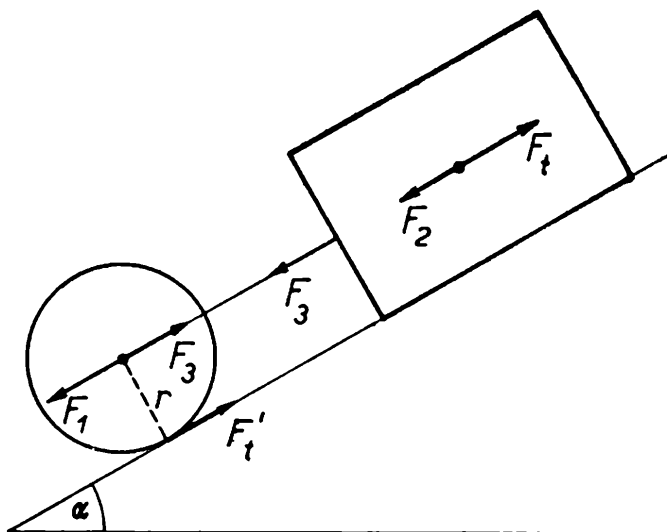
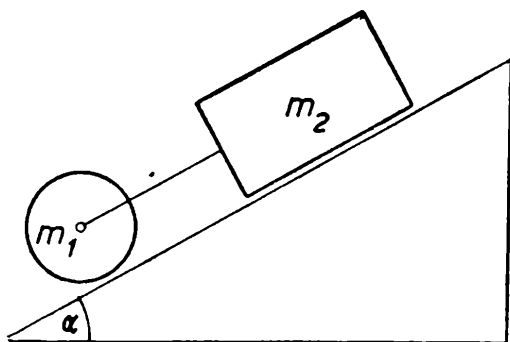
kde J je moment setrvačnosti otáčejícího se válce kolem osy a ω je úhlová rychlost otáčení. Poněvadž $J = \frac{1}{2} m_1 r^2$ a $\omega = \frac{v}{r}$, je

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{4} m_1 r^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4} m_1 v^2 ,$$

a tedy

$$W_k = \frac{1}{2} \left(m_1 + m_2 + \frac{m_1}{2} \right) v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) v^2 .$$

Obr. 1



Obr. 2

Třením spotřebovaná práce je

$$A = f m_2 g \cos \alpha \cdot s .$$

Z principu zachování energie plyne

$$(m_1 + m_2) g s \sin \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) v^2 + f m_2 g s \cos \alpha \quad (1)$$

Poněvadž ze vztahů

$$s = \frac{1}{2} a t^2 , \quad v = a t ,$$

plyne $s = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}$ čili $v^2 = 2 a s$,

dostáváme po dosazení do (1) a po zkrácení

$$a = \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} g$$

Po dosazení daných číselných hodnot dostáváme

$$a = \frac{12 \cdot \frac{1}{2} - 0,2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}}{16} g = \frac{6 - 0,4 \sqrt{3}}{16} g = \frac{15 - \sqrt{3}}{40} g = \\ = 0,3317 g = 3,254 \text{ ms}^{-2}$$

b) *Řešení užitím sil (1. způsob).*

Složka tíhové síly válce do směru pohybu (obr. 2) je

$$F_1 = m_1 g \sin \alpha ,$$

složka tíhové síly cihly do směru pohybu

$$F_2 = m_2 g \sin \beta ,$$

síla, kterou na sebe působí válec a cihla F_3 a síla vlečného tření u cihly

$$F_t = f m_2 g \cos \alpha .$$

Tyto síly působí jednak posuvný pohyb válce se zrychlením a .

Síla zrychlení posuvného pohybu válce bude

$$F_t = m_1 a ,$$

jednak otáčivý pohyb válce. Aby vzniklo otáčení válce po nakloněné rovině (nikoliv jen pohyb smykem), musí mezi válcem a nakloněnou rovinou vzniknout tření. Tření valivé se zanedbává, nikoliv však tření vlečné F'_t , které souvisí s brzdícím pohybem cihly (vyšetření podmínky úloha nežádala). Tato síla působí momentem vzhledem k ose válce o velikosti

$$M = F'_t r ,$$

pro nějž platí

$$M = J \varepsilon , \quad \text{kde } J = \frac{1}{2} m_1 r^2 , \quad \varepsilon = \frac{a}{r} .$$

Pak tedy

$$F'_t = \frac{M}{r} = \frac{J}{r} \varepsilon = \frac{1}{2} m_1 a .$$

Tedy celková síla zrychlení válce je]

$$m_1 a + \frac{1}{2} m_1 a$$

a musí být rovna síle na těleso působící, tedy

$$\frac{3}{2} m_1 a = F_1 - F_3 \quad (2)$$

Síly působící na cihlu způsobí posuvný pohyb se zrychlením a , a tedy pro výslednou sílu zrychlení $m_2 a$ musí platit

$$m_2 a = F_3 + F_2 - F_t. \quad (3)$$

Sečtením rovnic (2) a (3) dostáváme

$$(\frac{3}{2} m_1 + m_2) a = F_1 + F_2 - F_t$$

a po dosazení

$$a = \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha - f m_2 \cos \alpha}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} g,$$

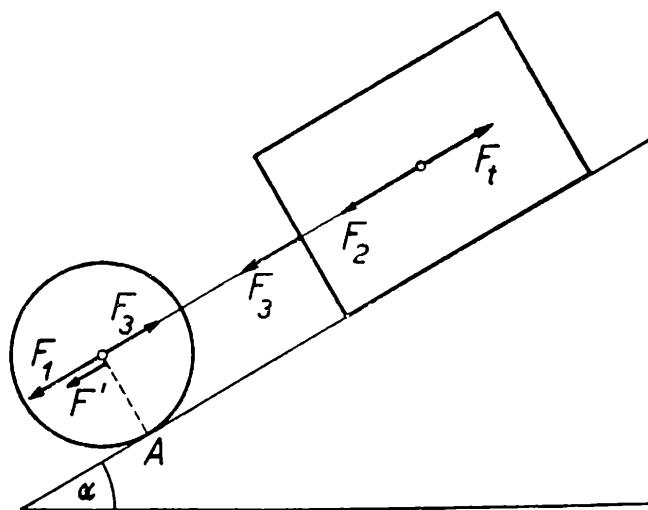
tedy stejný výsledek jako v a).

Z rovnic (2) a (3) lze vypočíst též F_3 a F_t ; vychází $F_3 = 0,192 \text{ N}$, $F_t = 6,80 \text{ N}$.

c) *Řešení užitím sil (2. způsob).*

Válec koná v určitém okamžiku vlastně otáčivý pohyb kolem okamžité přímky dotyku válce s nakloněnou rovinou (obr. 3). Sílu, působící v ose, která způsobuje tento otáčivý pohyb označme F' ; kolem bodu A působí momentem

$$M = F' r, \text{ kde } M = J' \varepsilon.$$



Obr. 3

Je-li moment setrvačnosti válce vzhledem k jeho rotační ose J , podle Steinerovy věty je moment setrvačnosti válce vzhledem k bodu A

$$J' = J + m_1 r^2 = \frac{1}{2} m_1 r^2 + m_1 r^2 + \frac{3}{2} m_1 r^2$$

Poněvadž $\varepsilon = \frac{a}{r}$, je

$$F' = \frac{M}{r} = \frac{J'}{r} \varepsilon = \frac{3}{2} m_1 a ,$$

a tedy pohybová rovnice válce má tvar

$$\frac{3}{2} m_1 a = F_1 - F_3$$

Další postup je jako v b).

Poznámka.

Eliminujeme-li z rovnic (2) a (3) zrychlení a , dostaneme

$$m_2 F_1 - m_2 F_3 - \frac{3}{2} m_1 F_3 - \frac{3}{2} m_1 F_2 + \frac{3}{2} m_1 F_t = 0 ;$$

z toho

$$F_3 \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2 \right) = m_2 F_1 - \frac{3}{2} m_1 F_2 - \frac{3}{2} m_1 F_t$$

Aby nastal valivý pohyb, musí být $F_3 \geq 0$. To nastane pro úhel α , pro nějž po dosazení za F_1 , F_2 a F_3 dostáváme ($\frac{3}{2} m_1 + m_2$ je kladné)

$$m_2 m_1 g \sin \alpha - \frac{3}{2} m_1 m_2 g \sin \alpha + \frac{3}{2} m_1 f m_2 g \cos \alpha \geq 0,$$

čili

$$\sin \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha + \frac{3}{2} f \cos \alpha \geq 0,$$

$$-\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{3}{2} f \cos \alpha \geq 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 3 f = 0,60, \quad \alpha \leq 30^{\circ} 58'$$

Valivý pohyb nastane tehdy, pokud úhel α bude menší než $30^\circ 58'$

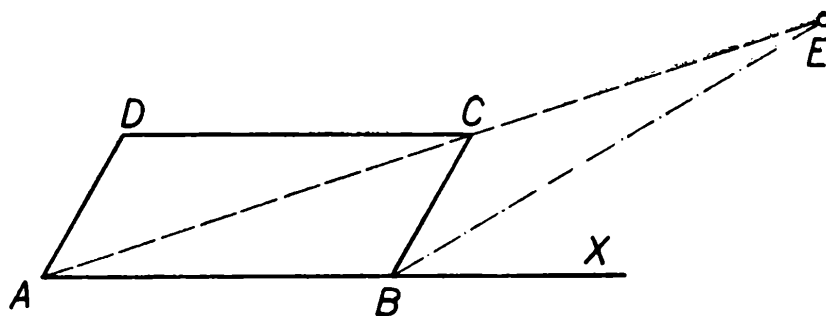
(Dokončení)



MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY

24. V obr. 1 je $ABCD$ rovnoběžník, body A, B, X leží v přímce a body A, C, E také. Dále platí

a) $\sphericalangle CAB = \frac{1}{3} \sphericalangle DAB,$



Obr. 1

b) $\sphericalangle EBX = \frac{1}{2} \sphericalangle CBX$,

c) $\sphericalangle BEA = 10^\circ$

Jak velké jsou vnitřní úhly rovnoběžníka?

St. Horák st.

25. V deň svojich narodenín (15. apríla 1969) povedal Peter svojim spolužiakom: Mám brata Janka, ktorého vek je tretina môjho. Pred tromi rokmi bol jeho vek menej než sedmina a o štyri roky bude menej než polovina môjho veku.

V ktorom ročníku akej školy sa to stalo, ak Peter riadne postupoval do vyšších ročníkov.

Pavel Bartoš

26. Sousedův Petřík házel několika kostkami a zapisoval počet padlých ok. Když ho hra omrzela, postavil si ze všech kostek sloupek. Kolik měl kostek, jestliže počet zakrytých ok byl roven dvojnásobku počtu ok horní stěny nejvyšší kostky?

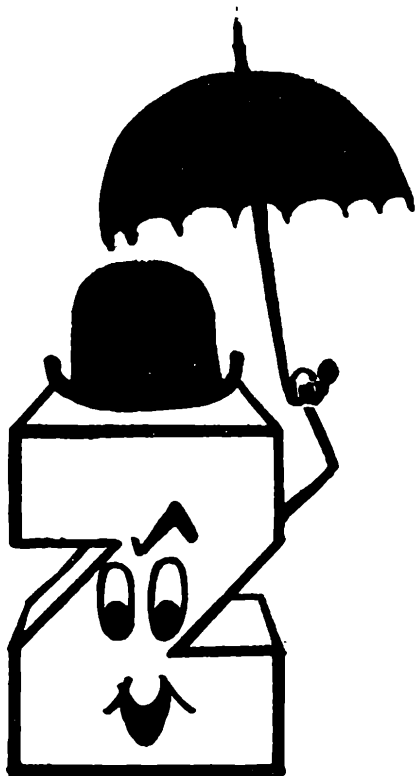
O. S.

Jízda smrti

Snad jste již někdy měli příležitost vidět na vlastní oči nebezpečnou atrakci, při které jezdí řidič na motocyklu ve velké, z kovových mříží vytvořené kouli tak, že jeho tělo opisuje kruhové dráhy ve svislé rovině. Vysvětlení toho, že v nejvyšším bodě dráhy je vždy řidič „vzhůru nohama“, aniž by spadl dolů, není obtížné. Při určité rychlosti dosáhne odstředivá síla takové velikosti, že překoná tíhu jezdce s motocyklem.

A nyní váš úkol. Na téže motorce jezdí jednou jezdec o hmotnosti 60 kg, podruhé jezdec o hmotnosti 80 kg. Který z nich se musí pohybovat na svislé kruhové dráze větší rychlostí? Nebo snad rychlost potřebná k překonání nejvyššího bodu kruhové dráhy je pro oba řidiče stejná?

Be



Záhady ze Zmatlíkova zápisníku

JAROSLAV ŠEDIVÝ (Pokračování)

V minulých číslech Rozhledů jste poznali několik jednoduchých příkladů úvah, v nichž nějaká nedůslednost nebo nenápadná chyba vedla k nesprávnému výsledku. Dosavadní ukázky byly rázu algebraického. Podívejme se proto dnes do geometrie. Zmatlíkův zápisník obsahuje řadu záludných záhad s geometrickou tematikou.

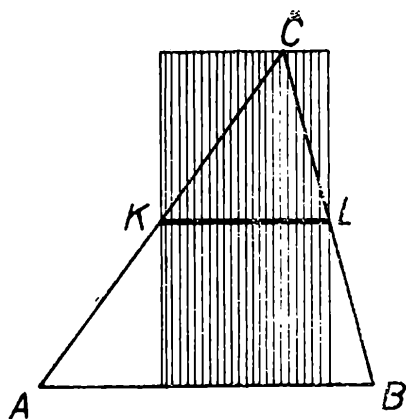
P o t í ž e s a n a l o g i e m i.

V hodině geometrie žáci Zmatlíkovy třídy opakovali způsoby odvození vzorečků pro obsahy rovinných obrazců. Z objemů si připomněli jen objem kvádrů; další vzorce pro objemy těles měli odvozovat v další hodině. Zmatlíkovi se velmi líbilo odvození vzorce pro obsah trojúhelníka pomocí obdélníka, který má základnu shodnou se střední příčkou trojúhelníka a výšku stejnou jako trojúhelník (obr. 1). Obdélník má zřejmě stejný obsah jako trojúhelník, a tak si Zmatlík řekl, že obdobným způsobem bude možné vyzrát na jehlany. Nakreslil si pravidelný čtyřboký jehlan s podstavou hranou o délce a a s výškou v , sestrojil střední řez tělesa (obr. 2) a vytvořil kvádr s podstavami shodnými s tímto řezem a se stejnou výškou jako jehlan. Objem tohoto kvádrů dovedl vypočítat

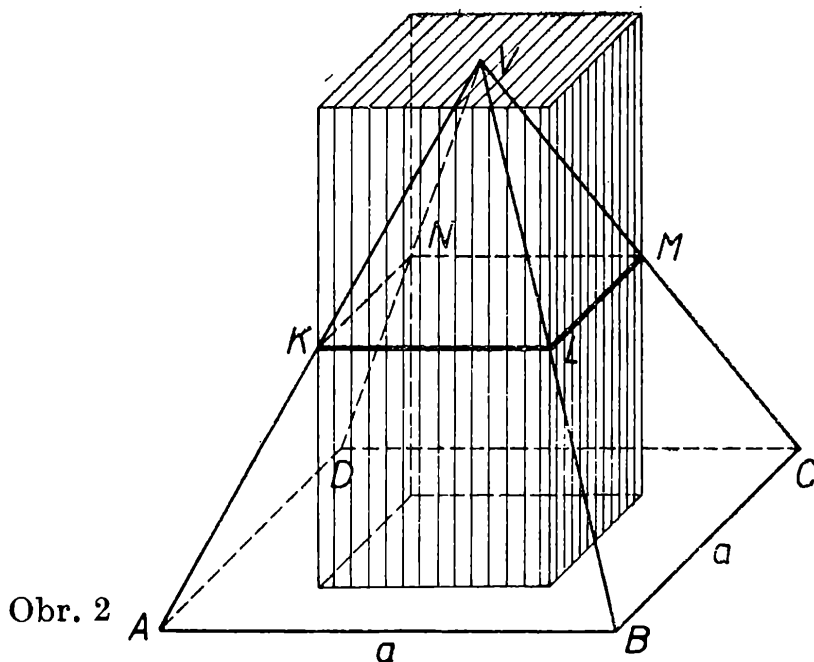
$$V_1 = \left(\frac{1}{2} a\right)^2 v = \frac{1}{4} a^2 v$$

Poznamenal si, že jehlan má týž objem a že jej lze vypočítat podle tohoto vzorce. Když se však podíval do učebnice, nemohl uvěřit svým očím, pro objem uvažovaného jehlanu tam byl uveden vzorec

$$V = \frac{1}{3} a^2 v$$



Obr. 1



Obr. 2

Zmatlík si byl tak jist svým výsledkem, že myslel, že v učebnici je tisková chyba. Celá třída pak přemýšlela, jak je možné, že tak názorný a přesvědčivý způsob odvození vzorců dává správný výsledek v rovině, ale ne v prostoru. Jste si jisti, že byste Zmatlíkův postup neschválili? Jak byste jej tedy vyvrátili? Tentokrát se odpověď nedozvíte v tomto čísle, ale až po prázdninách. Napište nám své vysvětlení této záhady spolu se svým názorem na naši novou rubriku. V dalším ročníku budeme pokračovat a podle vašeho zájmu zařadíme i soutěžní záhady.

RECENZE

Šestnáctý ročník matematické olympiády

(Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1968, 150 stran)

Brožuru XVI. ročníku MO sestavil docent Jan Vyšín za spolupráce odborného asistenta PFUK Vlastimila Macháčka. Knížka obsahuje celkem 6 kapitol. Texty soutěžních úloh jsou letos doplněny jen menším počtem (44) názorných pérovek; překlad do slovenštiny provedl dr. J. Moravčík, CSc.

I. kapitola se zabývá průběhem a problematikou XVI. ročníku MO. Je uveden seznam nejlepších řešitelů II. kola v kategoriích B, C a D v jednotlivých krajích. Pak následuje zpráva z letního soustředění 90 olympioniků v Hranicích a dalších 10 v Praze. Z pražské desítky se

vybíralo osmičlenné reprezentační družstvo pro IX. ročník MO. V závěru kapitoly je i stručná zmínka o vzájemném působení matematické a fyzikální olympiády, které by se měly vždy jenom doplňovat a nikdy k sobě nezaujímat konkurenční postoje.

V této části knihy jsou čtyři přehledné tabulky, statisticky zachycující účastníky obou prvních kol soutěže.

I I. k a p i t o l a obsahuje přípravné úlohy I. kola MO pro všechny čtyři kategorie. Každá má čtyři úlohy doplněné podrobným, často i alternativním řešením.

I I I. a I V. k a p i t o l a tvoří jádro celé publikace a jsou také rozsahem nejobsáhlejší. Obsahují všechny soutěžní úlohy I. a II. kola ve všech kategoriích; každý příklad je ovšem doplněn vyčerpávajícím řešením.

V k a p i t o l a dovršuje tematiku soutěže uvedením všech úloh II. kola v kategorii A s jejich úplným řešením.

V I. k a p i t o l a, poslední, se podrobně zabývá devátou mezinárodní olympiádou, která probíhala v červenci 1967 v Jugoslávii.

Jugoslávští organizátoři doplnili soutěž i malým symposiem o vyučování matematice, které otevřelo řadu problémů v důsledku odlišných informací a názorů jak na vyučování matematice, tak i na pořádání matematických soutěží.

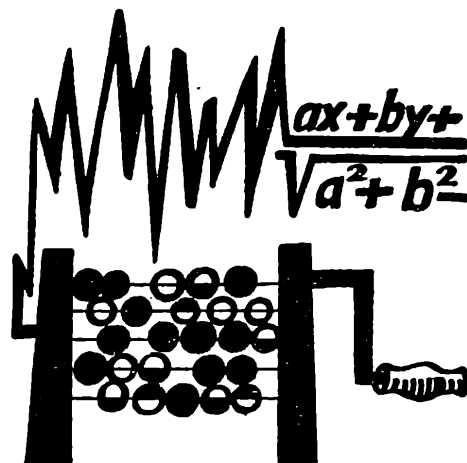
Podle vzájemné dohody mezi rumunským a sovětským delegátem se bude desátá MMO konat v Moskvě, jedenáctá pak v Bukurešti.

Jako každoročně bylo i pro jugoslávskou MMO vybráno šest úloh, mezitím jedna naše. Z toho byly tři úlohy algebraické a tři geometrické. Je zde podrobně uvedeno řešení všech úloh i výsledky celé soutěže. V brožurce je stručně popsán průběh této soutěže i posoutěžních rekreačních a společenských podniků. Vzhledem k předčasnému odjezdu se naše delegace nemohla těch posledních podniků zúčastnit.

Poslední část publikace je věnována úvaze o účasti a výsledcích našich olympioniků. Majíce stejné počty bodů, dělíme se s Bulharskem o šesté a sedmé místo. Podle skutečných možností naší soutěžní osmy je to o hodně méně, než jsme s pevnějšími nervy mohli dosáhnout. Základ našeho chronického olympijského neúspěchu tkví v malé matematické rutině a nízké náročnosti naší středoškolské matematické výuky i v malé nervové odolnosti většiny našich delegátů. Máme tedy před sebou řadu výchovných, odborně metodických i psychologických problémů, které bychom měli v dohledné době řešit proto, abychom dosáhli lepšího bodového ohodnocení při příštích ročnících MMO, abychom se také výrazněji uplatnili v mezinárodní vědecké soutěži v nejrůznějších vědních oborech, které nějak souvisejí s matematikou.

Vkusnou dvoubarevnou obálku s geometrickým motivem navrhl Jaromír Jarkovský. Publikaci lze dostat v prodejnách KNIHY za 6,— Kčs.

Jaromír D u b s k ý



Rovnice, ktoré obsahujú celú časť neznámej

JOZEF ELIAŠ, Bratislava

Pomocou nerovností možno riešiť rovnice, ktoré obsahujú celú časť neznámej alebo celú časť výrazu s neznámou. Uvedieme niektoré jednoduché rovnice tohto typu, podmienky, kedy existuje riešenie, spôsob, ako sa riešia a niekoľko príkladov.

Najjednoduchšou rovnicou, ktorá obsahuje celú časť neznámej x , je rovnica

$$[x] = \alpha, \quad (1)$$

kde α je reálne číslo.

Z definície celej časti reálneho čísla x vyplýva, že rovnica (1) nemá riešenie, ak α nie je celé číslo.

Ak α je celé číslo, rovnica (1) je ekvivalentná so složenou nerovnosťou

$$x - 1 < \alpha \leq x,$$

čiže so systémom nerovností

$$\begin{aligned} x - 1 &< \alpha, \\ x &\geq \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Riešením systému nerovností (2) je množina všetkých čísel x , pre ktoré platí

$$\alpha \leq x < 1 + \alpha. \quad (3)$$

O riešení rovnice (1) platí teda nasledujúca veta.

Veta 1. *Ak α nie je celé číslo, potom rovnica (1) nemá riešenie. Ak α je celé číslo, potom všetky riešenia rovnice (1) sú všetky čísla x , pre ktoré platí nerovnosť (3).*

Rovnica

$$[ax + b] = \alpha, \quad (4)$$

kde $a \neq 0$, b, α sú čísla, nemá riešenie, ak α nie je celé číslo.

Ak α je celé číslo, potom rovnica (4) je ekvivalentná so složenou nerovnosťou

$$ax + b - 1 < \alpha \leq ax + b,$$

čiže so systémom lineárnych nerovností

$$\begin{aligned} ax + b - 1 &< \alpha, \\ ax + b &\geq \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Riešením systému lineárnych nerovností (5), ak $a > 0$, je množina všetkých čísel x , pre ktoré platí

$$\frac{\alpha - b}{a} \leq x < \frac{\alpha - b + 1}{a} \quad (6)$$

Ak $a < 0$, riešením systému lineárnych nerovností (5) je množina všetkých čísel x , pre ktoré platí

$$\frac{\alpha - b + 1}{a} < x \leq \frac{\alpha - b}{a}. \quad (7)$$

O riešení rovnice (4) platí veta 2.

Veta 2. Ak α nie je celé číslo, potom rovnica (4) nemá riešenie. Ak α je celé číslo a $a > 0$, všetky riešenia rovnice (4) je množina všetkých čísel x , pre ktoré platí nerovnosť (6). Ak α je celé číslo a $a < 0$, všetky riešenia rovnice (5) je množina všetkých čísel x , pre ktoré platí nerovnosť (7).

Príklad 1. Riešme rovnicu

$$[2x + 7] = 1. \quad (8)$$

Riešenie. Rovnica (8) je ekvivalentná so složenou nerovnosťou

$$2x + 7 - 1 < 1 \leq 2x + 7,$$

čiže so systémom nerovností

$$\begin{aligned} 2x + 6 &< 1, \\ 2x + 7 &\geq 1. \end{aligned}$$

Jeho riešením je množina všetkých čísel x , pre ktoré platí

$$-3 \leq x < -\frac{5}{2} \quad (9)$$

Podľa vety 2 riešením rovnice (8) je množina všetkých čísel x , pre ktoré platí nerovnosť (9).

Uvažujme o rovnici

$$[ax^2 + bx + c] = \alpha, \quad (10)$$

kde $a \neq 0$, b, c, α sú čísla.

Ak α nie je celé číslo, rovnica (10) nemá riešenie.

Ak α je celé číslo, rovnica (10) je ekvivalentná so složenou nerovnosťou

$$ax^2 + bx + c - 1 < \alpha \leq ax^2 + bx + c,$$

čiže s nerovnosťou

$$\alpha \leq ax^2 + bx + c < \alpha + 1 \quad (11)$$

Zistíme nutnú a postačujúcu podmienku o riešení nerovnosti (11). Postupujme nasledovne. Zvoľme si v rovine pravouhlý súradnicový systém. Označme $f_1(x) = \alpha$, $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ a $f_3(x) = \alpha + 1$. Grafom funkcie $f_1(x) = \alpha$ pri zvolenom pravouhlom súradnicovom systéme je priamka, ktorá je rovnobežná s osou o_x pravouhlého súradnicového systému a prechádza bodom $A = (0, \alpha)$. Grafom funkcie $f_3(x) = \alpha + 1$ je priamka, ktorá je rovnobežná s osou o_x a prechádza bodom $B = (0, \alpha + 1)$. Grafom funkcie $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola s vrcholom

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right),$$

parametrom

$$p = \frac{a}{2}.$$

Osou paraboly je priamka

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Nerovnosť (11) bude platiť vtedy a len vtedy, keď vrchol paraboly $y = ax^2 + bx + c$ bude pod priamkou $y = \alpha + 1$, ak $a > 0$ a nad alebo na priamke $y = \alpha$, ak $a < 0$.¹⁾

Pretože súradnica y vrcholu paraboly $y = ax^2 + bx + c$ je

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

nerovnosť (11) má riešenie vtedy a len vtedy, keď

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < \alpha + 1, \text{ ak } a > 0, \quad (12)$$

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq \alpha, \text{ ak } a < 0. \quad (13)$$

Tým sme o riešení rovnice (10) dokázali vetu.

(Dokončení)

¹⁾ Hovoríme, že bod (x_0, y_0) leží pod [nad], resp. na priamke $y = kx + q$ vtedy a len vtedy, keď platí $y_0 < kx_0 + q$ [$y_0 > kx_0 + q$], resp. $y_0 = kx_0 + q$.

Periodické funkce vyjádřené druhými mocninami

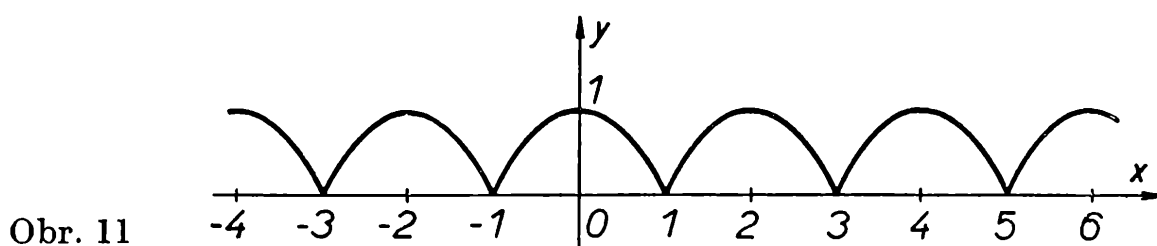
DOC. FRANTIŠEK DUŠEK, Ústí nad Labem

(Dokončení)

Dosud jsme ovšem nedostali periodickou funkci, jejíž průběh by se opakoval neomezeně. Abychom dospěli k tomuto cíli, jejíž jsme si na začátku určili, musíme zajistit nekonečné opakování oblouků tím, že v sumačním symbolu stanovíme postupné dosazování všech celých čísel od $-\infty$ do ∞ zápisem

$$y = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} [1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|]. \quad (4)$$

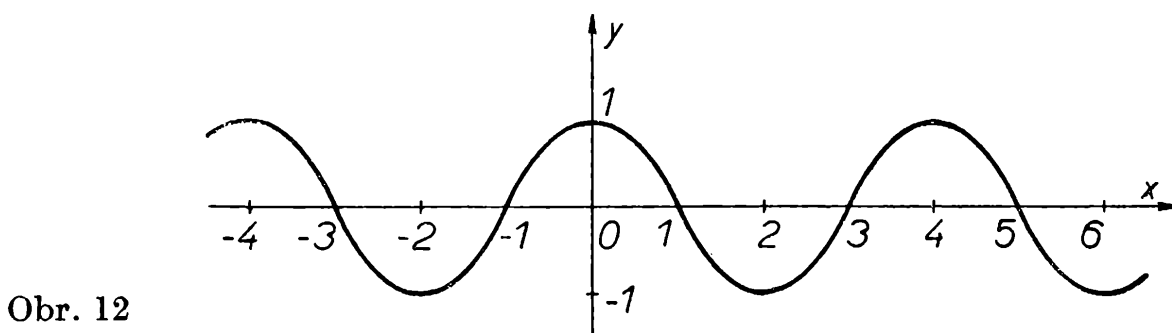
Příslušný graf je na obr. 11 a podobá se grafu funkce $y = |\cos x|$.



Abychom zápis nepřehližovali, umluvíme se, že v dalších zápisech periodických funkcí budeme u sumačního symbolu zaznamenávat jen písmeno n . Rovnici (4) budeme tedy psát

$$y = \frac{1}{2} \sum_n [1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|].$$

Chceme-li dospět ke grafu analogickému funkci $y = \cos x$, musíme docílit toho, aby oblouky střídavě probíhaly nad osou x a pod ní, to je,

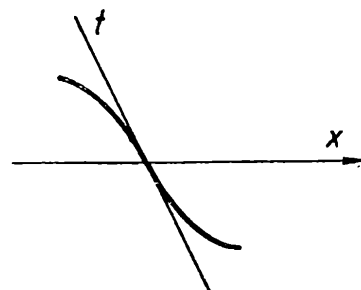


aby měly střídavě kladné a záporné ypsilonové souřadnice. Zajistíme to činitelem $(-1)^n$, který je pro sudá n kladný a pro lichá n záporný.

Tak dostaneme rovnici

$$y = \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n [1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|],$$

jejíž graf je na obr. 12. Protože všechny oblouky grafu jsou shodné a každá dvojice sousedních oblouků je středově souměrná podle společného bodu na ose x , mají oblouky v tomto bodě společnou tečnu t (obr. 13), takže graf tu nemá „zlom“, ale je tam - odborně řečeno - hladkou křivkou. Do podrobného rozboru průběhu grafu v těchto bodech se pouštět nebudeme. Čtenář znalý základů diferenciálního počtu si sám laskavě objasní rozdíl od průběhu funkce $y = \cos x$.



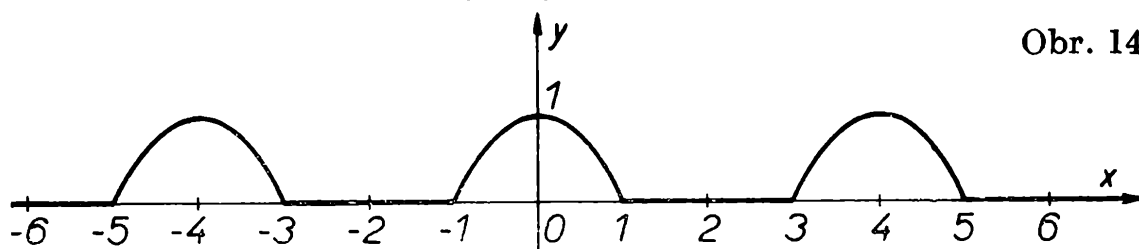
Obr. 13

Sestavením poslední rovnice jsme splnili úkol vytčený na začátku článku. Připojme ještě, že vhodnými úpravami můžeme vytvářet rovnice periodických funkcí, jejichž grafy se skládají z parabolických oblouků a z úseček. Jako příklad uveďme rovnici

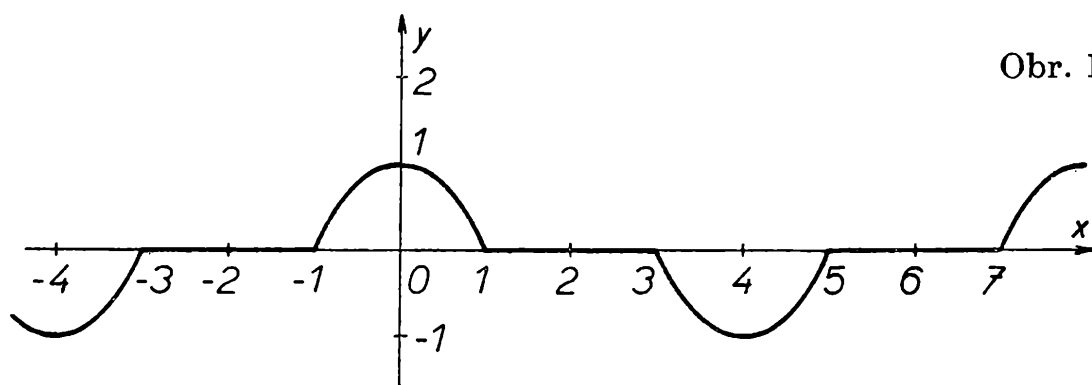
$$y = \frac{1}{2} \sum_n [1 - (x - 4n)^2 + |1 - (x - 4n)^2|],$$

nebo $y = \frac{1}{2} \sum_n (-1)^n [1 - (x - 4n)^2 + |1 - (x - 4n)^2|].$

Grafy těchto funkcí jsou zachyceny na obr. 14 a 15.



Obr. 14

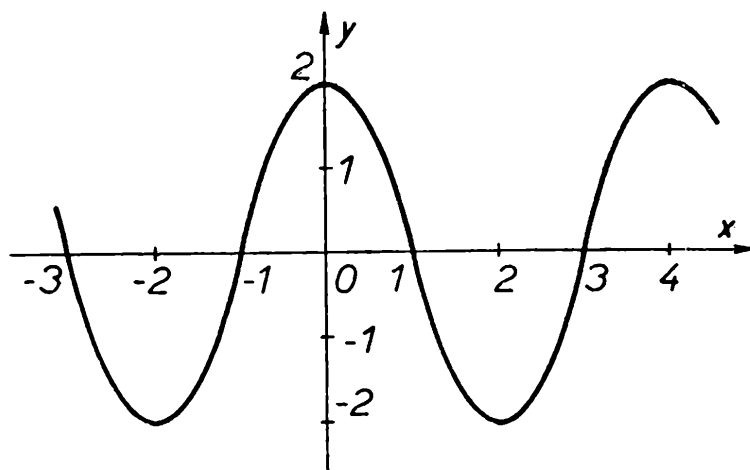


Obr. 15

Nahradíme-li činitele $\frac{1}{2}$ před sumačním znakem jiným číslem $k \neq 0$, vzniknou oblouky s větší či menší „amplitudou“ podle toho, je-li $|k| > \frac{1}{2}$ nebo $|k| < \frac{1}{2}$. Pro $k = 1$ dostáváme rovnici

$$y = \sum_n (-1)^n [1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|],$$

jejíž graf je na obr. 16.



Obr. 16

Můžeme též kombinovat oblouky s různými amplitudami. Např. součet grafů o rovnicích

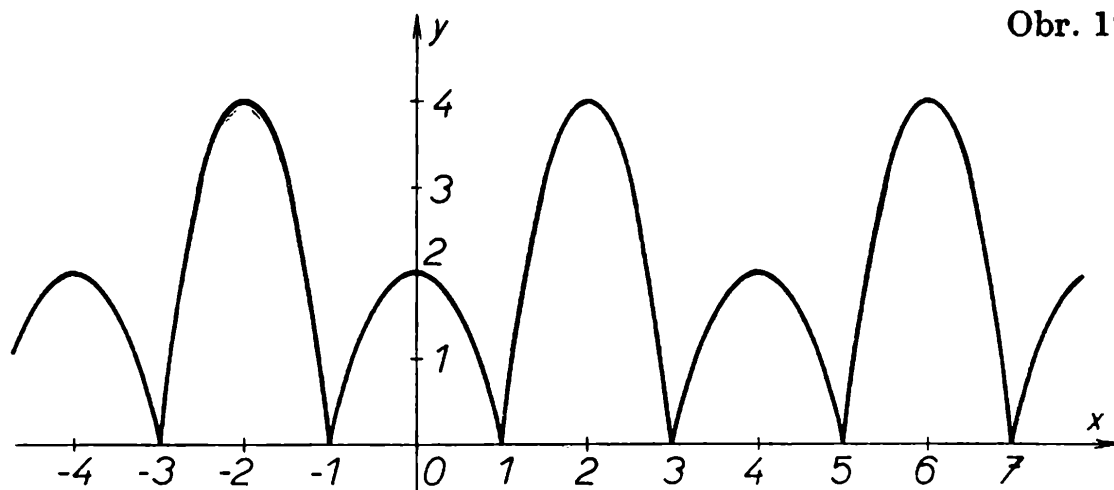
$$y = \sum_n [1 - (x - 4n)^2 + |1 - (x - 4n)^2|]$$

a
$$y = 2 \sum_n [1 - (x - 4n - 2)^2 + |1 - (x - 4n - 2)^2|]$$

zapišeme jedinou rovnicí

$$y = \sum_n [1 - (x - 4n)^2 + |1 - (x - 4n)^2|] + 2 [1 - (x - 4n - 2)^2 + |1 - (x - 4n - 2)^2|],$$

jejíž graf je na obr. 17.



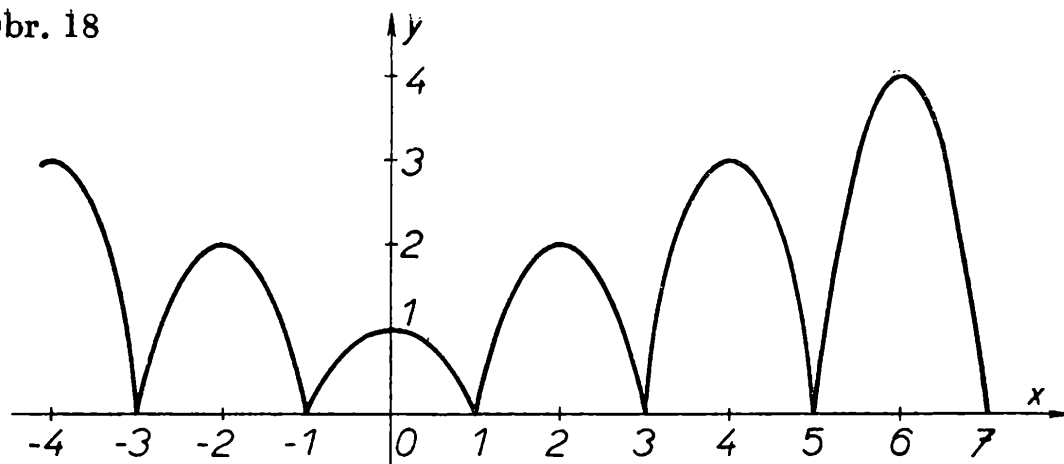
Obr. 17

Závěrem uvedme ještě příklad neperiodické funkce, jejíž graf se skládá z oblouků, jejichž amplituda vzrůstá se stoupající absolutní hodnotou čísla n . Funkce je znázorněna na obr. 18 a má rovnici

$$y = \frac{1}{2} \sum_n (|n| + 1) [1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|].$$

Čtenáři majícímu dostatek fantazie se naskýtá možnost vytváření dalších neobvyklých funkcí a jejich grafů. Jako konkrétní cvičení doporučujeme

Obr. 18



1. Načrtněte graf funkce

$$y = \sum_{n=-5}^{n=5} \frac{3}{|n| + 1} [1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|].$$

2. Načrtněte graf funkce

$$y = \sum_{n=-2}^{n=2} (-2)^n [1 - (x - 2n)^2 + |1 - (x - 2n)^2|].$$

Je tento graf v průsečících s osou x hladkou křivkou?

3. Napište rovnice obdobných funkcí, jejichž grafy se skládají z oblouků paraboly třetího stupně $y = x^3$.

Alespoň jeden, nejvýše jeden, právě jeden

JAROSLAV ŠEDIVÝ, KU Praha

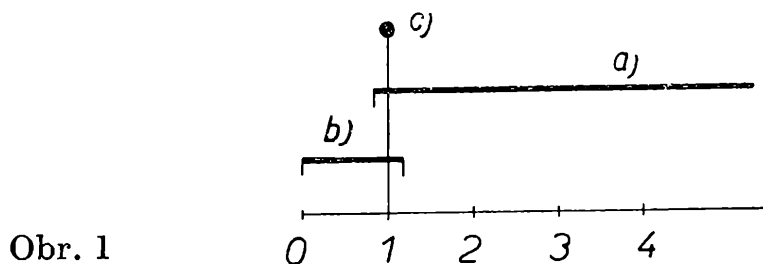
V názvu článku jsou obsažena tři slovní spojení, která se nazývají *kvantifikátory* (viz článek A. Šarounové v předcházejícím čísle Rozhledů). V běžném hovoru o životních záležitostech se málokdy vyslovují v úplném tvaru; obvykle se hovoří o jednom člověku, jednom objektu apod., a posluchač ze souvislostí vyrozumívá, který ze tří uvedených výrazů měl mluvčí na mysli. Objednává-li si zákazník jednu skříň, chce určitě *právě jednu* skříň. Odpovídá-li někdo kladně na otázku, zda má u sebe jednu stokorunu, potvrzuje tím, že má *aspoň jednu*, o dalších třeba úmyslně mlčí. Říká-li sportovní fanoušek, že z ligy sestoupí nejspíše jeden z pražských klubů, ale že se může ještě

zachránit, mohl by se stručněji vyjádřit, že sestoupí *nejvýše jeden* pražský klub.

V matematice a logice jsou kvantifikátory „aspoň jeden, nejvýše jeden, právě jeden“ velmi užitečné k přesnému a stručnému vyjadřování. Rovněž při řešení slovních úloh matematickými a logickými prostředky bývá nezbytné uplatnit uvedené kvantifikátory v přesném významu. Máme-li na mysli počet lidí, objektů nebo jevů, pak můžeme význam zmíněných kvantifikátorů vyjádřit takto:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------------|
| a) aspoň jeden předmět | jeden nebo dva nebo i více předmětů; |
| b) nejvýše jeden předmět | žádný nebo jeden předmět; |
| c) právě jeden předmět | jeden jediný předmět. |

Ze schematického obr. 1 je patrné, že případ c) nastává právě tehdy, když platí a) a zároveň b). Dosud jsme si připomínali většinou známé poznatky, přejdeme nyní k méně známým věcem.



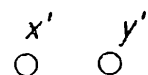
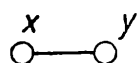
Obr. 1

V tomto článku se naučíme řešit úlohy, jejichž podmínky jsou vyjádřeny pomocí kvantifikátorů „aspoň (nejvýše, právě) jeden ze dvou“. Hovoříme-li o dvojicích, můžeme vystačit s jen jedním kvantifikátorem z uvedené trojice. Posuďte sami: řekneme-li, že *nejvýše jedno* z čísel 99, 101 je prvočíslo, zformulovali jsme pravdivý výrok. Stejnou skutečnost můžeme vyjádřit též takto: *aspoň jedno* z čísel 99, 101 *není* prvočíslo. Zamyslete se nad tímto přechodem ke kvantifikátoru „aspoň jeden ze dvou“, při kterém se objevují negace původních vlastností čísel. Svůj poznatek můžeme vyjádřit obecným pravidlem, v němž použijeme symbolů x' , y' pro negace výroků x , y :

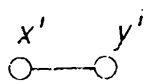
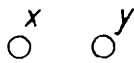
- | | |
|---|--|
| platí nejvýše jeden
z výroků x , y | platí <i>aspoň jeden</i> z výroků x' , y' ; |
| platí právě jeden
z výroků x , y | platí <i>aspoň jeden</i> z výroků x , y a zároveň
platí <i>aspoň jeden</i> z výroků x' , y' |

Protože je dosti náročné pracovat se slovními formulacemi výroků, budeme používat jednoduchého grafického znázornění výrazů „aspoň jeden ze dvou výroků platí“. Výroky x , y a jejich negace x' , y' znázorníme malými kroužky (viz obr. 2). Budeme-li chtít vyjádřit, že

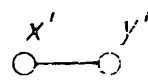
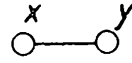
aspoň jeden ze dvou výroků je pravdivý, spojíme čarou kroužky, které znázorňují tyto výroky. Podle této zásady znázorňuje obr. 2a tvrzení, že aspoň jeden z výroků x, y platí. Obr. 2b zřejmě znázorňuje tvrzení „platí aspoň jeden z výroků x', y' “, které však vyjadřuje totéž co tvrzení „nejvýše jeden z výroků x, y platí“. Obr. 2c nepochybně znázorňuje tvrzení „platí právě jeden z výroků x, y “. Užitečnost této grafické symboliky poznáte hned při řešení následující úlohy.



Obr. 2a



Obr. 2b



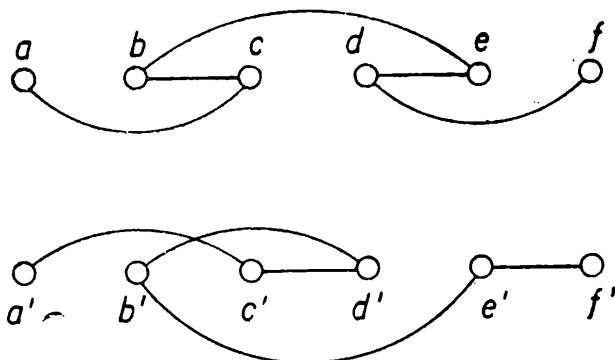
Obr. 2c

Úloha 1. Je třeba obsadit tři klíčové funkce v předsednictvu svazu složeného ze šesti organizací A, B, C, D, E, F . Osobní kvality představitelů jednotlivých organizací, jejich vzájemné osobní vztahy, předpoklady k dobré spolupráci, koaliční zřetele apod., jsou souhrnně vyjádřeny v těchto podmínkách: Ve vybrané trojici musí být představitel aspoň jedné z organizací D, E , nejvýše jedné z C, D , právě jedné z A, C , nejvýše jedné z E, F , aspoň jedné z D, F , právě jedné z B, E , aspoň jedné z B, C a nejvýše jedné z organizací B, D . Určete všechny možnosti pro výběr těchto tří funkcionářů, při nichž budou splněny všechny podmínky.

Úlohu lze samozřejmě vyřešit zkusmo tak, že si vypíšeme všech dvacet trojic představitelů šesti organizací a jednu trojici po druhé podrobíme zkoušce, zda splňuje všechny podmínky. Je však jasné, že při větším počtu možných případů je tato metoda řešení prakticky nepoužitelná (u některých úloh by bylo třeba prověřovat statisíce možností). Proto bude užitečné, seznámíme-li se s úspornější metodou založenou na již smluveném grafickém znázornění podmínek úlohy.

Grafický záznam všech podmínek úlohy získáme tak, že pomocí kroužků znázorníme všechny výroky x, x' , které mají tvar „představitel organizace X je vybrán pro klíčovou funkci“, resp. „představitel organizace X není vybrán pro klíčovou funkci“. Čtenář se může přesvědčit, že obr. 3 zachycuje všechny podmínky obsažené v textu úlohy.

Spojnice dvojic kroužků vytvořily zcela náhodně dvě souvislé čáry, horní z nich je dokonce souměrná; tyto okolnosti však nejsou pro řešení úlohy podstatné. Při něm uplatníme jakousi hru na grafu, při níž nás povedou jednak čáry spojující



Obr. 3

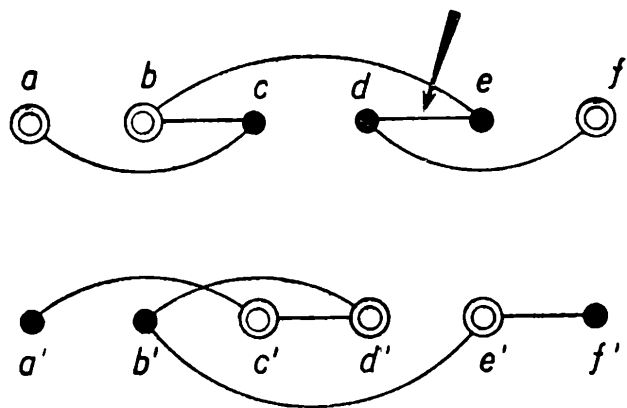
dvojice kroužků, jednak budeme využívat dvojice kroužků x, x' znázorněných pod sebou. Umluvme se, že pravdivost výroku vyznačíme tak, že příslušný kroužek zdvojíme, zatímco nepravdivost výroku vyznačíme začerněním příslušného kroužku. Vyznačování těchto úprav kroužků budeme nazývat barvením grafu; použijete-li místo zdvojení kroužků červené barvy, budete graf skutečně vybarvovat.

Jaká pravidla musíme při barvení grafu dodržovat? Zřejmě taková, která odpovídají jednoduchým úsudkům. Zapišme si v levém sloupci základní tvrzení nebo úsudek, vpravo z něj odvozené pravidlo pro barvení grafu:

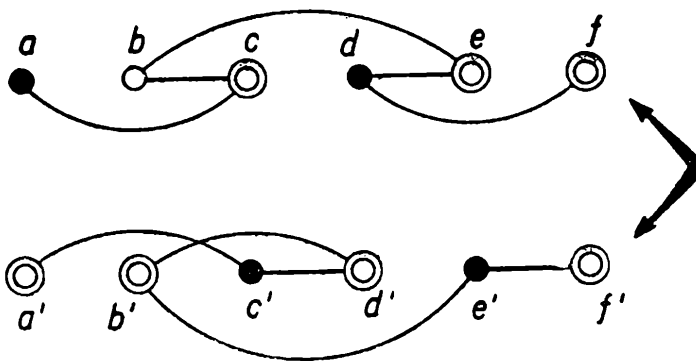
- | | |
|--|--|
| 1. Každý výrok má právě jednu z pravdivostních hodnot platí, neplatí. | 1. Každý kroužek je buď dvojitý nebo černý, ale ne zároveň. |
| 2. Jestliže výrok x platí, pak výrok x' neplatí; jestliže výrok x neplatí, pak výrok x' platí. | 2. Je-li kroužek x dvojitý, musí být x' černý; je-li x černý, musí být x' dvojitý. |
| 3. Je-li známo, že platí aspoň jeden z výroků x, y a přitom jeden z nich neplatí, musí platit druhý. | 3. Jsou-li dva kroužky spojeny čarou a přitom je jeden z nich černý, musí být druhý dvojitý. |

Nyní můžeme zahájit řešení úlohy 1 na grafu zakresleném na obr. 3. O žádném z výroků $a, b, \dots, f$ není známo, zda platí či neplatí, proto musíme provést diskusi. Čtenář může sledovat průběh řešení na základě popisu, který dále uvedeme, bude však lépe, když si nakreslí graf podobný grafu na obr. 3 a pokusí se o samostatné řešení. Obrázky 4a, b mu pak poslouží ke kontrole výsledků.

a) Předpokládejme, že výrok a platí, tj. že kroužek a je dvojitý. Potom podle pravidla 2 výrok a' neplatí (černý kroužek), dále podle pravidla 3 platí výrok c' (dvojitý kroužek) a podle pravidla 2 výrok c neplatí (černý



Obr. 4a



Obr. 4b

kroužek). Dále použijme stručnějšího zápisu: podle 3 platí b , podle 2 neplatí b' , podle 3 platí d' i e' , podle 2 neplatí d , e , podle 3 platí f , podle 2 neplatí f' . Všechny kroužky jsou vybarveny, dvojité jsou kroužky a , b , f . Ale pozor, to neznamená, že je nalezeno jedno řešení úlohy. Nezbytnou součástí řešení je zkouška, zda dosažené vybarvení grafu neodporuje některému z pravidel 1, 2 a 3. Šipka na obr. 4a ukazuje na čáru spojující dva černé kroužky, tím upozorňuje na spor s pravidlem 3. Nalezené vybarvení grafu nevyhovuje všem podmínkám úlohy, proto nelze jím vyjádřené pravdivostní hodnoty výroků a , b , ..., f považovat za řešení úlohy.

b) Předpokládejme, že výrok a neplatí (černý kroužek a na obr. 4b). Potom podle 2 výrok a' platí, podle 3 platí c , podle 2 neplatí c' , podle 3 platí d' , podle 2 neplatí d , podle 3 platí e i f , podle 2 neplatí e' , podle 3 platí b' , f . A dále již nemusíme pokračovat, protože dvojice kroužků f , f' vykazuje spor s pravidlem 2.

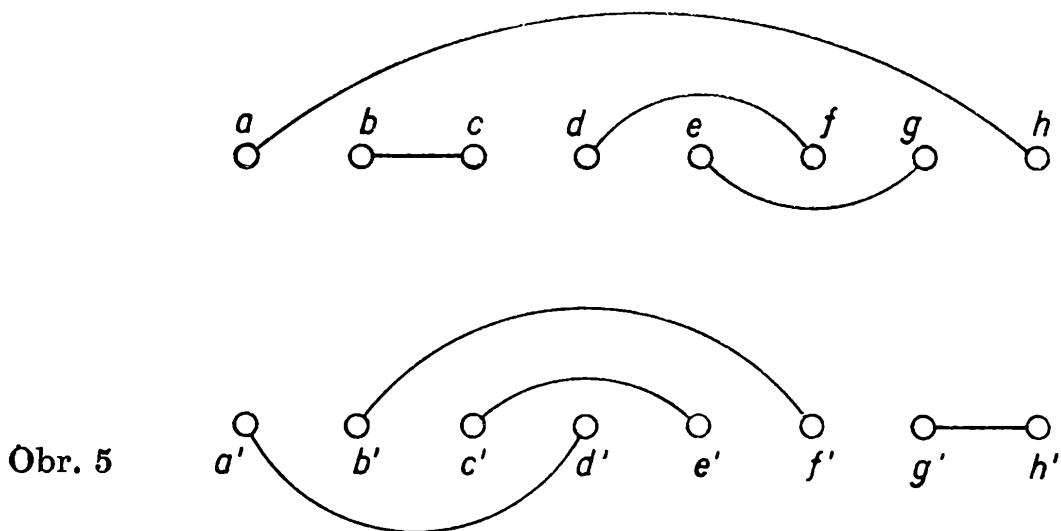
Snad se čtenář necítí zklamán tím, že hned první úloha nemá řešení. Funkcionáři svazu, o který v úloze šlo, dospějí jistě též k názoru, že za daných podmínek předsednictvo svazu nevyberou. Budou asi muset upustit od některé podmínky, chtějí-li nalézt aspoň jedno řešení. Kterou podmínku by stačilo vynechat, aby trojice představitelů organizací A , B , F byla přijatelným řešením úlohy?

Prováděl-li čtenář samostatné řešení na svém vlastním grafu, jistě si uvědomil, jak sloupce a čáry v grafu vedou jeho myšlenky k objevení důsledků již získaných poznatků. V tom je hlavní přednost grafické metody — pomáhá nám orientovat se ve vzájemných závislostech pravdivostních hodnot výroků, poskytuje nám v jistém smyslu mapu s vyznačenými stezkami myšlení. Nepříjemná je nutnost kreslit nový graf při každé diskusi, protože jednou vybarvený graf nelze již dost dobře použít k vyznačení jiných barev kroužků. Této nepříjemnosti se vyhneme, nakreslíte-li si graf natolik zvětšený, že na jeho kroužky lze klást knoflíky nebo šachové figurky. Položením bílé figurky vyznačujete pravdivost příslušného výroku, položením černé figurky jeho nepravdivost. „Přehrajte“ si v tomto provedení znovu řešení úlohy 1.

Připomeňme si ještě, že místo výrazu „platí aspoň jeden ze dvou výroků x , y “ se v logice používá stručnější formulace „platí x nebo y “. Je důležité uvědomovat si stále, že se tím nevylučuje současná platnost obou výroků. V tomto smyslu budeme chápat slůvko „nebo“ v další úloze i ve cvičeních.

Úloha 2. *Osm kamarádů se rozchází po návratu z jednoho výletu a domlouvá si další. Den, který navrhuje vedoucí A , se nehodí všem. Ukazuje se, že ze sourozenců C , E i B , F bude moci jet na výlet vždy nejvýše jeden. Dále bude chybět aspoň jeden ze dvojic A , D a G , H . Naproti tomu je jisté, že pojede A nebo H , dále pak E nebo G a aspoň jeden z dvojice D , F . Z dvojice nadšených turistů B , C bude scházet nejvýše jeden. Kdo se vypraví na výlet s vedoucím A a kdo pojede v případě, že A se nebude moci výletu zúčastnit?*

Řešení úlohy popíšeme jen velmi stručně. Pomocí kroužků znázorníme výroky, které mají tvar „ X pojedí na příští výlet“, a jejich negace. Podmínky úlohy budou na grafu znázorněny pomocí čar spojujících dvojice kroužků (obr. 5). Čtenář se může přesvědčit, že všechny podmínky jsou správně vyjádřeny pomocí tvrzení zformulovaných ve



tvaru „platí aspoň jeden ze dvou výroků ...“ a správně graficky znázorněny. Vyjdeme-li z předpokladu, že výrok a platí, dospějeme po vybarvení grafu k závěru, že pak platí též výroky c , f a g a žádné jiné. Předpokládáme-li, že výrok a neplatí, dojdeme obdobným způsobem k závěru, že platí výroky b , d , e a h (a žádné jiné). To znamená že na příští výlet pojedí buď skupina složená z A , C , F , G nebo skupina složená z B , D , E , H , ale ne obě současně.

Cvičení

1. Do konce soutěže druhé ligy zbývají dvě kola, v nichž se střetnou navzájem i některé dvojice kandidátů sestupu – klubů A , B , C , D . Sestupovat budou nejvýše dva kluby, ale zaručeně aspoň jeden (podle počtu oddílů první ligy, které sestoupí do této skupiny druhé ligy). Všeobecně se očekává, že sestoupí nejvýše jeden z klubů A , D a nejvýše jeden z klubů B , C , ale aspoň jeden z klubů A , B a právě jeden z klubů B , D . Který klub bude sestupovat, budou-li splněny všechny uvedené podmínky?

2. Trenér fotbalového mužstva přemýšlí nad sestavou jedenáctky pro nejbližší zápas; má k dispozici dvacet hráčů. Přiřadíme-li jim pořadová čísla od jedné do dvaceti, můžeme vyjádřit podmínky, které ovlivňují volbu hráčů, takto: Musí nastoupit právě jeden z hráčů 1 a 2, právě jeden z hráčů 19 a 20, aspoň jeden z dvojice 2, 4, z dvojice 7, 8, z dvojice 15, 17 a dvojice 10, 13. Z hráčů specializovaných na určité místo v sestavě může nastoupit samozřejmě nejvýše jeden, to se týká dvojic 2, 3; 1, 5; 6, 3; 5, 4; 9, 6; 7, 12; 8, 10; 13, 9; 11, 12; 13, 15; 14, 15; 17, 16; 17, 19 a 16, 14. Dále bude moci nastoupit 3 nebo 6; 5 nebo 7; 9 nebo 12; 11 nebo 13; 12 nebo 14; 16 nebo 18. (Hudák trenér, řeknete si jistě; pokuste se nést jeho břímě a zjistěte všechny varianty sestavy mužstva, které přicházejí v úvahu.)

Některé speciální případy trojic kružnic, protínajících se v jednom bodě

JOSEF BREJCHA, Brno

(Dokončení)

3. Vyšetřme další speciální případ, a to, že všechny kružnice k_i jsou stejné, a tedy je $r_1 = r_2 = r_3 = r$.

Věta 5.

Trojúhelník o vrcholech A_i a trojúhelník o vrcholech B_i jsou středově souměrné ($i = 1, 2, 3$).

Důkaz. Podle konstrukce je bod P středem kružnice poloměru r , opsané trojúhelníku o vrcholech A_i . Je pak $\sphericalangle A_j A_i A_m$ obvodovým úhlem, příslušným ke středovému úhlu $\sphericalangle A_j P A_m$, je nutně

$$\sphericalangle A_j P A_m = 2\alpha_i. \quad (6)$$

Dále je podle konstrukce

$$B_j A_i = A_j B_i = r$$

Podle 2. shodnostní věty bude proto vzhledem k (6)

$$\triangle A_j A_i P \cong \triangle B_j B_i A_m.$$

Čtyřúhelníky $A_j A_i B_j B_i$ mají dvojice protějších stran téže délky; jsou to proto rovnoběžníky o úhlopříčkách $A_i B_i$, protínajících se ve společném bodě S . Tím je důkaz ukončen.

Důsledek.

Opíšeme-li kolem bodů B_i kružnice k'_i téhož poloměru r_i jako kružnice k_i , protínají se kružnice k'_i též v jednom bodě Q , souměrném k bodu P podle středu S .

4. Tvoří-li body A_i trojúhelník rovnostranný, je $\alpha_i = 60^\circ$; z relací (1) pak plyne

$$b_i = B_j B_m = 2r_i \sin 60^\circ = r_i \sqrt{3}$$

a trojúhelník o vrcholech B_i je podobný trojúhelníku, sestavenému z délek r_i jako stran podle poměru podobnosti $\lambda = \sqrt{3}$.

Důsledek.

Opíšeme-li kolem vrcholů rovnostranného trojúhelníka o straně a kružnice k_i procházející jeho středem, protínají se v dalších třech bodech B_i , které tvoří trojúhelník, shodný s trojúhelníkem o vrcholech A_i .

V tomto případě je totiž

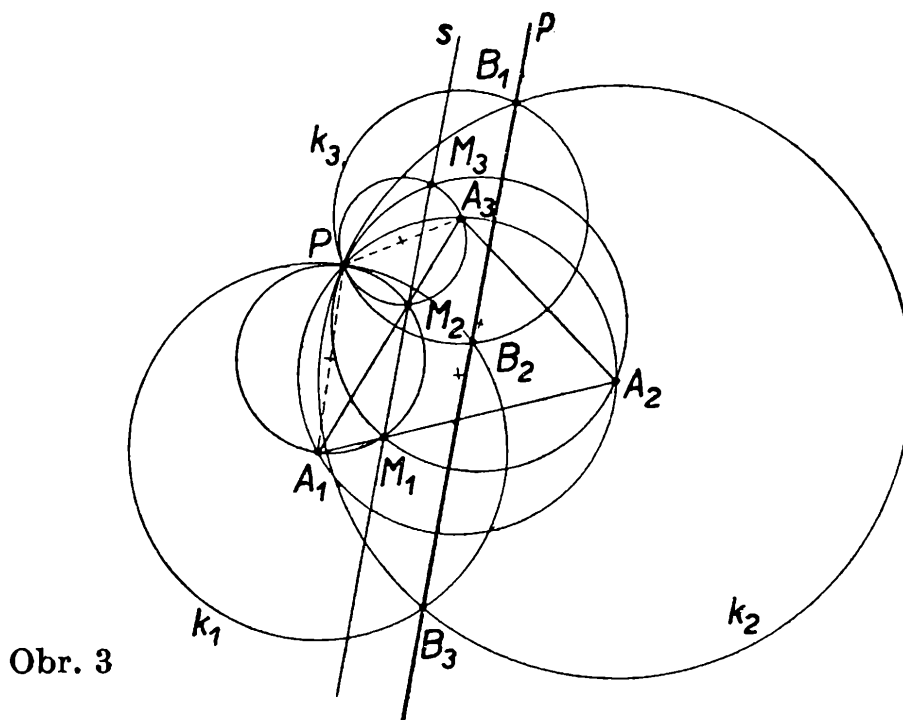
$$r_i = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

a z rovnice (1) plyne

$$b_i = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = a.$$

Podle věty 5 jsou trojúhelníky A_i a B_i středově souměrné.

5. Budiž dále P bodem kružnice, opsané trojúhelníku o vrcholech A_i . Pak platí věta 6 (obr. 3).



Obr. 3

Body B_i leží v přímce.

Důkaz. Vzhledem k vlastnostem společné tětivy a centrály dvou kružnic platí

$$PB_i = 2PM_i, \quad (7)$$

$$\sphericalangle PM_i A_j = R. \quad (8)$$

V důsledku relace (8) leží body M_i na Simsonově²⁾ přímce s , příslušné bodu P vzhledem k trojúhelníku A_i ; relace (7) definuje homotetii bodů M_i , B_i podle středu P a podle poměru homotetie $\lambda = 2$. Body B_i leží tedy též na přímce p a je $p \parallel s$.

²⁾ Jsou-li body A_i ($i = 1, 2, 3$) vrcholy daného trojúhelníka, bod $P \neq A_i$ libovolný bod kružnice tomuto trojúhelníku opsané, pak je známo, že platí:

Paty kolmic, spuštěných z bodu P na strany daného trojúhelníka o vrcholech A_i , leží v přímce.

Tato přímka se v literatuře nazývá přímkou Simsonovou nebo Wallaceovou.

Poznámka. Jsou-li kružnice K_i opsány nad úsečkami A_iP jako průměry, splývají body B_i s body M_i a leží tedy též v jedné přímce.

Z á v ě r e m dokažme ještě obecně platnou větu 7.

Opíšeme-li trojúhelníkům o vrcholech A_i, B_j, B_m kružnice k'_i , protnou se tyto kružnice rovněž ve společném bodě Q .

Důkaz. Předpokládejme, že tento společný bod existuje a že leží uvnitř trojúhelníka o vrcholech B_i .

Podle konstrukce jsou čtyřúhelníky $A_iB_jQB_m$ tětivové a platí

$$\sphericalangle B_jQB_m = 2R - 2\alpha_i,$$

tj.

$$\sphericalangle QB_jB_m + \sphericalangle QB_mB_j = 2R - (2R - 2\alpha_i) = 2\alpha_i.$$

Pak pro součet vnitřních úhlů trojúhelníka o vrcholech B_i nutně platí

$$\begin{aligned} \sphericalangle QB_1B_2 + \sphericalangle QB_2B_1 + \sphericalangle QB_1B_3 + \sphericalangle QB_3B_1 + \sphericalangle QB_2B_3 + \\ + \sphericalangle QB_3B_2 = 2\alpha_3 + 2\alpha_2 + 2\alpha_1 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 4R, \end{aligned}$$

což není možné. Bod Q tedy uvnitř trojúhelníka B_i ležet nemůže. Snadno se ukáže, že nemůže ležet ani na jeho obvodu.

Předpokládejme tedy, že bod Q leží vně trojúhelníka B_i a že např. bod Q a bod B_1 leží na téže straně přímky B_2B_3 . Pak bod Q a bod A_2 (A_3) leží nutně na opačných stranách přímky B_3B_1 (B_1B_2). Předpokládejme dále, že bod Q leží v průsečíku kružnic k'_2, k'_3 .

Pak platí

$$\begin{aligned} \sphericalangle B_1QB_3 &= 2R - 2\alpha_2, \\ \sphericalangle B_1QB_2 &= 2R - 2\alpha_3. \end{aligned}$$

Odtud pak sečtením

$$\begin{aligned} \sphericalangle B_1QB_3 + \sphericalangle B_1QB_2 &= \sphericalangle B_2QB_3 = 4R - 2(\alpha_2 + \alpha_3) = \\ &= 4R - 2(2R - \alpha_1) = 2\alpha_1. \end{aligned}$$

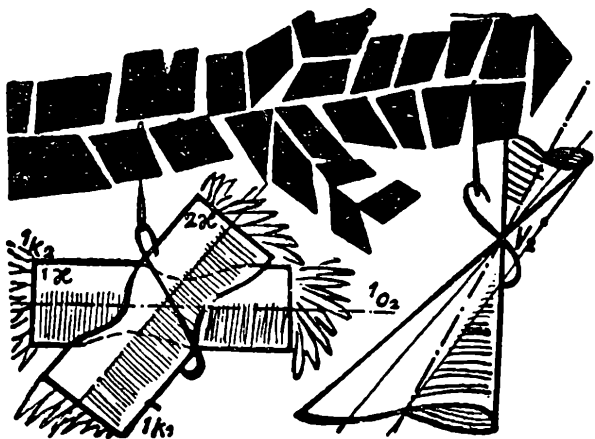
Bod Q leží tedy na kruhovém oblouku nad tětivou B_2B_3 o obvodových úhlech $2\alpha_1$, což je právě oblouk kružnice k'_1 .

Kružnice k'_i se tedy protínají v bodě Q .

V ý s l e d k y c v i č e n í k e č l á n k u J. Š e d i v é h o

1. Z druhé ligy sestoupí klub B v každém případě, stejný osud však může postihnout i klub A .

2. Trenér má jedinou možnost — bude nominovat hráče s čísly 1, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 14, 17, 18 a 20. Jinou sestavu mužstva nelze vytvořit, protože z předpokladu, že hráč č. 1 nenastoupí, plyne, že nastoupí jen devět nebo deset hráčů.



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

0 jisté kuželové ploše druhého stupně jako geometrickém místě bodu

FRANTIŠEK HRADECKÝ, Praha

(Dokončení)

2. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká přímky $a \equiv MA$ v bodě A , průmětny π a prochází bodem B . [$M(0; 6; 0)$, $A(2; 8; 3)$, $B(-1,5; 6; 5)$].

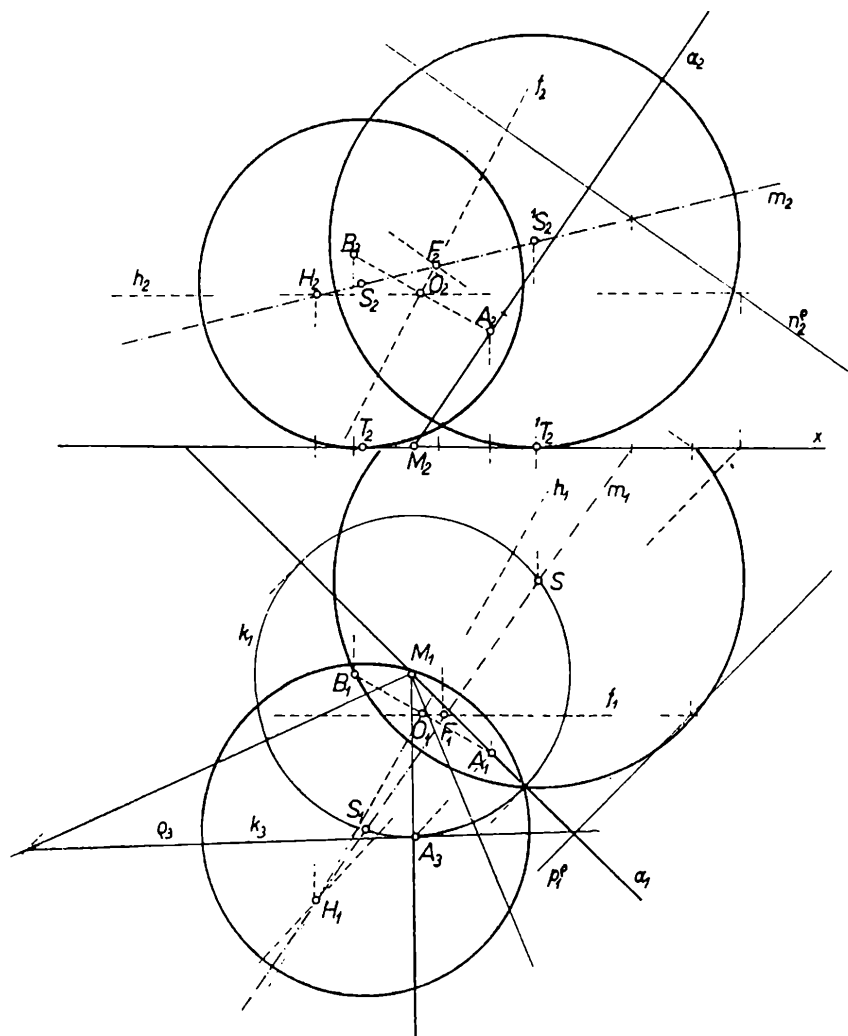
Řešení.

Geometrickým místem středů kulových ploch, které se dotýkají přímky a v bodě A a průmětny π , je elipsa k ležící v rovině $\rho \perp a$ a procházející bodem A . Tato elipsa se promítá do průmětny π do kružnice $k_1 \equiv [M_1, r = M_1A_3]$ (obr. 4).

Rovina souměrnosti σ bodů A , B protíná rovinu ρ v přímce m . Rovinu σ určíme hlavními přímkami $h \parallel \pi$, $f \parallel \nu$, které procházejí středem O úsečky AB . Průsečíky těchto přímek s rovinou ρ jsou body H a F . Je tedy $m \equiv HF$. Průsečíky přímky m s elipsou k jsou středy S , 1S hledaných kulových ploch. Poloměry těchto kulových ploch určíme jako vzdálenosti bodů S a 1S od průmětny π v druhém obraze.

Uvedené úlohy jsme řešili eukleidovskými konstrukcemi. V dalším příkladě rozřešíme jako ukázkou úlohu, v níž hledané středy dostaneme jako průsečíky dvou kuželoseček, které leží v téže rovině.

3. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká obou průmětů π , ν ($\pi \perp \nu$) a mimoběžek a , b , z nichž každá je s průmětnou π různoběžná. $\{a \equiv AB [A (6; 4; 0), B (1; 12; 9)], b \equiv CD [C (-5; 4; 0); D (-2; 7; 8)]\}$.



Obr. 5

Řešení.

Středý hledaných kulových ploch leží jednak na kuželové ploše ξ , která je geometrickým místem bodů stejně vzdálených od přímky a a průmětny π na kuželové ploše η , jež je geometrickým místem bodů stejně vzdálených od přímky b a průmětny π a jednak v rovinách σ a τ , které procházejí osou $x \equiv \pi \cdot \nu$ a jsou geometrickým místem bodů stejně vzdálených od obou průmětů. V našem příkladě se omezíme na konstrukci středů hledaných kulových ploch pouze v rovině σ procházející prvním a třetím kvadrantem.

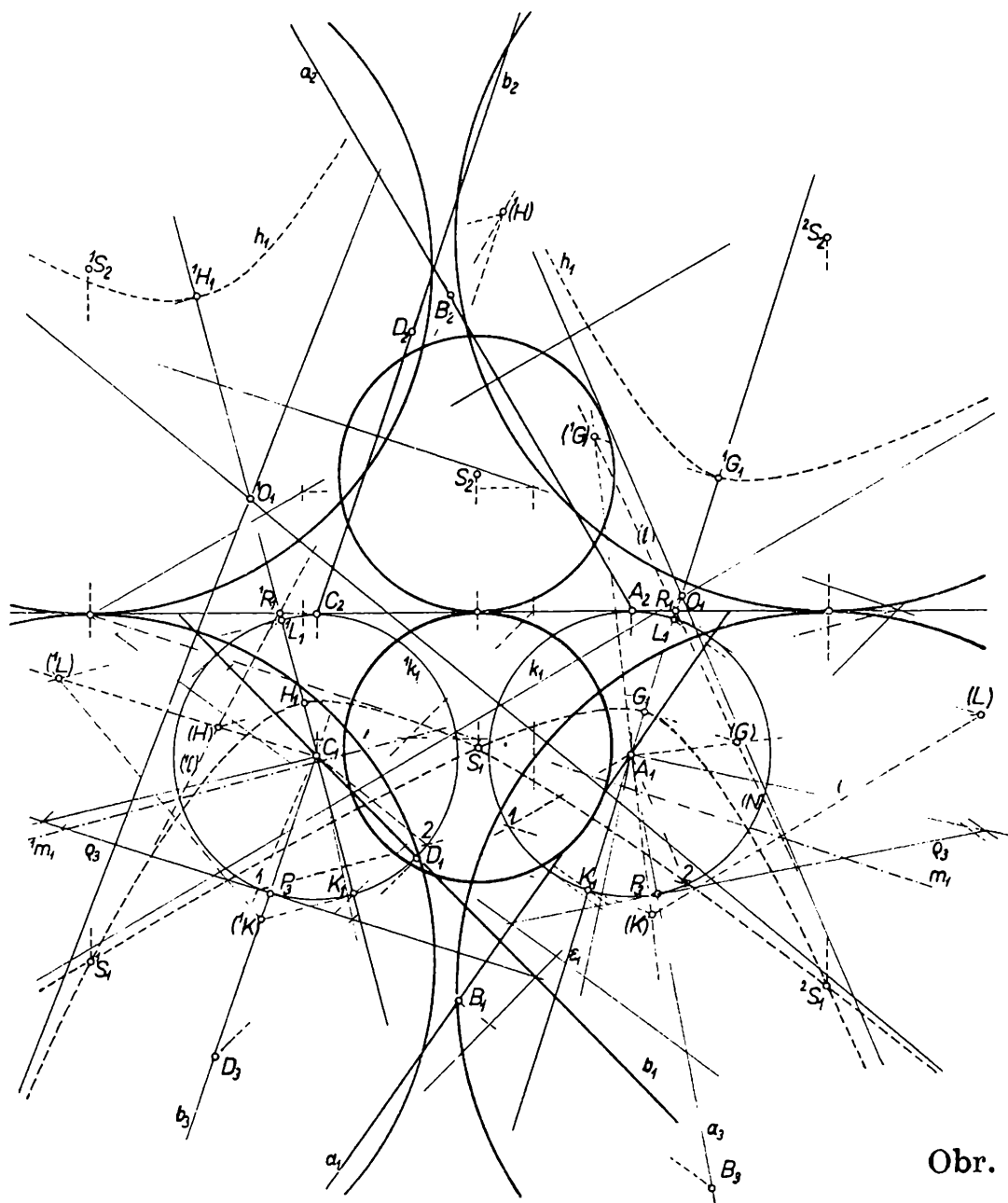
Zvolíme tento postup konstrukce (obr. 5).

1. Určíme v rovině σ kuželosečku h , která je průsečnou křivkou této roviny s kuželovou plochou ξ ; $h = \sigma \cap \xi$.

2. V rovině σ sestrojíme kuželosečku ${}^1h \equiv \sigma \cap \eta$.

3. Průsečíky iS kuželoseček h a 1h jsou středy hledaných kulových ploch; jejich poloměry jsou rovny vzdálenostem bodů iS od některé průmětny.

Kuželová plocha ξ je určena elipsou k v rovině $\varrho \perp a$, jež se do průmětny π promítá do kružnice $k_1 \equiv [A_1; A_1P_3]$. Řez roviny σ s kuželovou plochou ξ určíme tak, že nejprve určíme průsečnici $m \equiv \sigma \cdot \varrho$



Obr. 5

a ke směru m v rovině ϱ určíme k elipse k průměr sdružený $n = KL$. Poněvadž průmětem elipsy k do průmětny π je kružnice k_1 , je $K_1L_1 \perp m_1$.

Promítací rovina ε přímky KL protíná rovinu σ v přímce $NR \equiv l$ a kuželovou plochu ξ v přímkách AK, AL . Průsečíky $G \equiv AL \cdot l$

a ${}^1G \equiv AK \cdot l$ určíme ve sklopení promítací roviny ε do průmětny π . První průměty $G_1, {}^1G_1$ těchto bodů jsou vrcholy hyperboly h , v níž rovina σ protíná kuželovou plochu ξ . Asymptoty této hyperboly jsou rovnoběžné s přímkami $A1, A2$, v nichž protíná kuželovou plochu ξ rovina $\sigma' \parallel \sigma$ procházející vrcholem A kuželové plochy.

Kuželosečku 1h určíme tímž způsobem.

Průsečky hyperbol h_1 a 1h_1 určují první průměty středů hledaných kulových ploch. Poloměry těchto kulových ploch udávají vzdálenosti bodů S od průmětny π , resp. ν .

V obr. 5 jsou určeny středy třech kulových ploch, které leží v 1. kvadrantu. Střed čtvrté kulové plochy leží ve 3. kvadrantu a v obr. není určen.

Počet řešení této úlohy nehledě ke konkrétnímu zadání závisí na počtu reálných průsečíků kuželoseček h a 1h v rovině σ , resp. v rovině τ . V každé z těchto rovin mohou ležet nejvýš 4 středy hledaných kulových ploch. Může tedy tato úloha mít nejvýš osm řešení.

Užitím uvedeného geometrického místa bodů je možno řešit i složitější úlohy o kulových plochách, které vyžadují určení průnikových křivek kuželových ploch s jinými plochami. Jejich řešení je podstatně složitější než řešení úloh, které jsme zde provedli.

Pro čtenáře připojujeme několik dalších úloh v konkrétním zadání.

Příklady k cvičení.

1. Sestrojte kulové plochy, jež jsou vepsány do trojhranu $V(ABC)$ a dotýkají se přímky $t \equiv MN$ [$V(-9; 3; 0)$, $A(-4; 14; 0)$, $B(8; 0; 0)$, $C(1; 5; 10)$, $M(-2,5; 8; 0)$, $N(2; 4; 13)$].

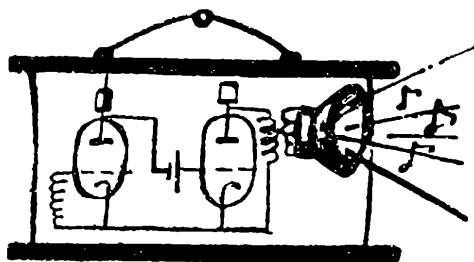
2. Sestrojte kulovou plochu dotýkající se obou průměten π, ν ($\pi \perp \nu$) a přímky $t \equiv AT$ v bodě T [$A(0; 3,5; 0)$, $T(-2; 6; 4)$].

3. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká průmětny π , přímky $t \equiv AT$ v bodě T a mající střed v dané rovině σ [$A(2; 4; 0)$, $T(0; 7; 5)$; $\sigma(8; 10; 6)$].

4. Sestrojte kulovou plochu, která prochází bodem A , dotýká se přímky $t \equiv MN$, roviny π a má poloměr $r = 3,5$ [$A(0; 4,5; 5)$, $M(-1; 9; 0)$, $N(2,5; 3; 6)$].

5. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká přímky $a \equiv MA$ v bodě A , přímky $b \parallel a$ procházející bodem B a průmětny π [$M(0; 8; 0)$, $A(-2; 6; 5)$, $B(2; 6; 0)$].

6. Sestrojte kulovou plochu dotýkající se obou průměten π, ν ($\pi \perp \nu$) a různoběžek $a \equiv PM$, $b \equiv QM$ [$M(0; 5; 8)$, $P(-5; 5; 0)$, $Q(6; -3; 0)$].



F Y Z I K A

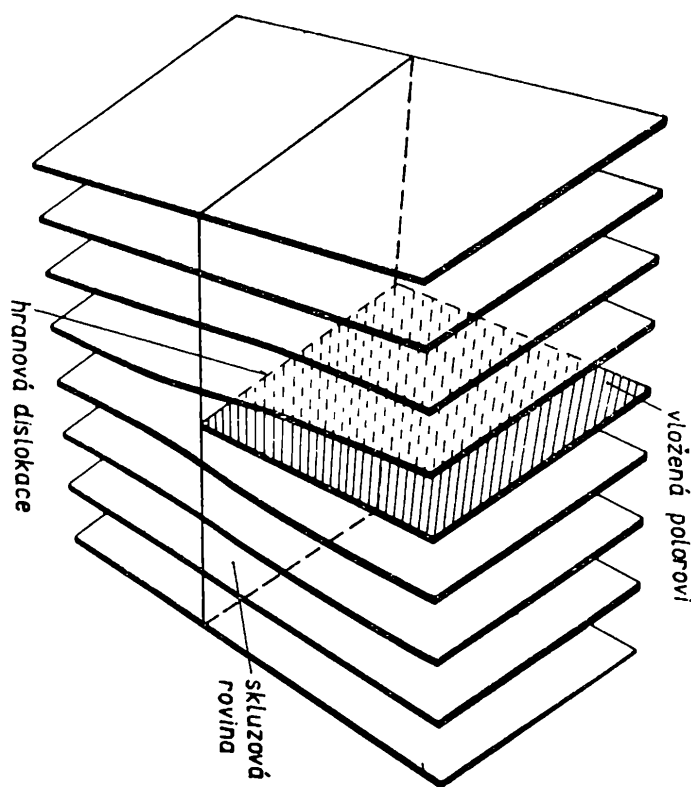
Použití elektronové mikroskopie ke studiu kovů

PAVEL BARTUŠKA, Ústav fyziky pevných látek ČSAV, Praha (Dokončení)

Podíváme se také na několik příkladů použití transmisní elektronové mikroskopie ve fyzice kovů. Dále uvedené příklady představují nejdůležitější oblasti, ve kterých použití elektronové mikroskopie znamenalo kvalitativně hlubší stupeň poznání podstaty daného jevu.

Tak jako všechny krystalické látky, i kovy a jejich slitiny, jsou tvořeny pravidelně uloženými kationty, tvořícími tzv. krystalovou mříž. Skutečná krystalová mřížka obsahuje poruchy ve své pravidelné periodicitě, z nichž u kovů mají pro mechanické vlastnosti největší význam poruchy čarové, zvané dislokace.

Na obr. 3 je uveden příklad této důležité čarové poruchy, vznikající při plastické deformaci ve všech krystalických látkách. My-



Obr. 3. Hranová dislokace v krystalu. Poměrně snadno se pohybuje ve skluzové rovině, kolmé na vloženou polorovinu.

šlenkovým spojením identických bodů krystalografické mřížky dostáváme tzv. krystalografické roviny, schematicky zobrazené na tomto obrázku. (Na obrázku jsou zakresleny pouze svislé roviny, stejně však můžeme proložit roviny probíhající vodorovně, nebo šikmo.) Reálné krystaly však obsahují jakési nadbytečné (vložené) poloroviny, jejichž konec tvoří čarovou poruchu, nazývanou dislokace. Dislokace se může pod vlivem působícího napětí krystalem poměrně snadno pohybovat v rovině procházející jejím koncem a kolmé na vloženou polorovinu (tak zvaná skluzová rovina, schematicky naznačená na obr. 3). Právě snadný pohyb dislokací krystalem způsobuje snížení pevnosti materiálu asi na 1/1000 teoretické hodnoty, kterou by měl materiál vykazovat v případě ideální mříže bez poruch.

Poněvadž v okolí dislokace vzniká evidentně jiné uložení atomů než v ostatních místech krystalu, dochází i k odlišné difrakci (rozptylu) elektronů a způsobem dříve popsáním, vzniká obraz této dislokace na stínítku elektronového mikroskopu (dislokace se jeví jako tmavá čára).

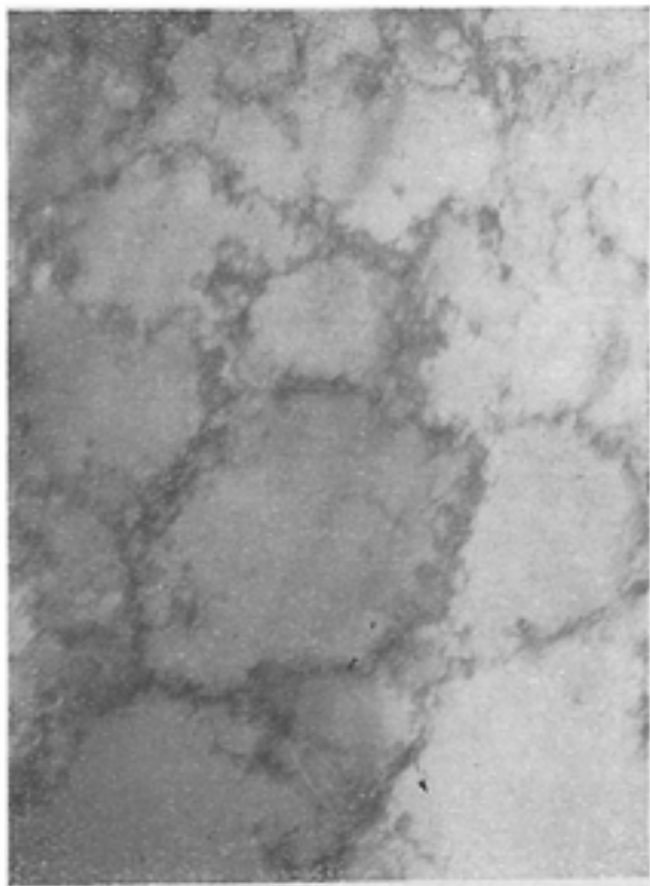
Jestliže působíme na kov vnější silou, dochází ke změně jeho tvaru; kov se plasticky deformuje. Při tom v něm rychle vzrůstá množství dislokací. V silně tvářených kovech dosahuje jejich hustota řádu až 10^{13} na cm^2 . Jejich uložení v objemu materiálu je však velmi nerovnoměrné. Dislokace se totiž seskupují do určitých úzkých pásem nazývaných podhranice, které ohraničují objem kovu, jež je prakticky bez dislokací (podzrna). Vzniká takzvaná podstruktura, obsahující podzrna různé velikosti, na jejichž hranicích můžeme rozeznat jednotlivé dislokace.

Na obr. 4 je uveden příklad takové podstruktury u čistého niklu, který byl tvářen protažením o 9 %. Čím silnějším tvářením kov vystavíme, tím menší je velikost podzrn, a tím více dislokací se objevuje i uvnitř podzrn, takže později již těžko rozeznáme jejich tvar.

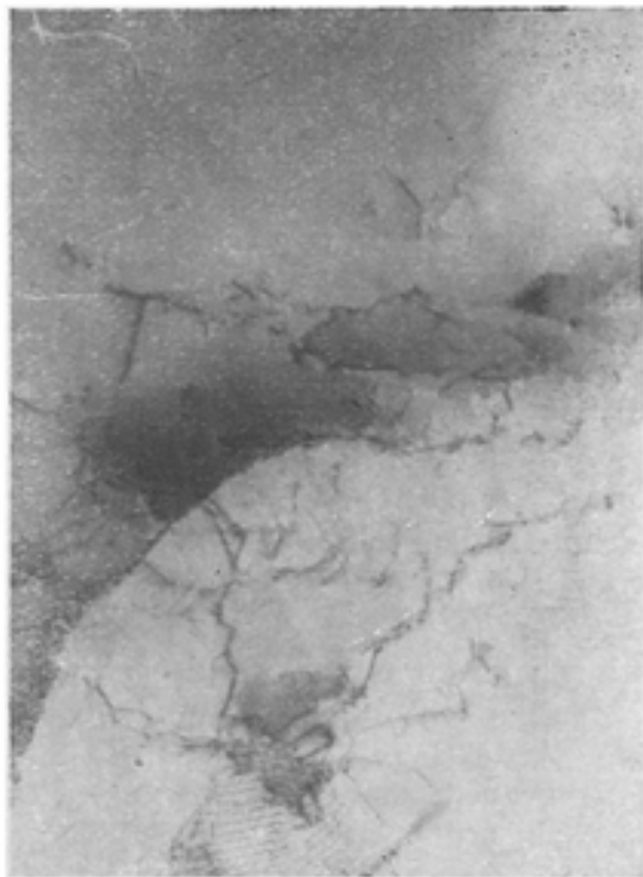
Při žhání tvářeného materiálu dochází k pohybu dislokací jednak v horizontálním směru (pohybem ve skluzové rovině), jednak částečně i ve směru vertikálním, tzv. šplháním (pohybem jednotlivých atomů k polorovině dislokace nebo od ní). Při tom dochází ke zmenšování hustoty dislokací. Dislokace mohou zanikat tak zvanou anihilací (jestliže se setkají dvě s opačně orientovanými polorovinami), nebo na hranicích zrn, a konečně i na povrchu vzorku.

Podhranice, které byly po deformaci poměrně široké (difusní), se stávají užšími, s mnohem menší hustotou dislokací. Na obr. 5 je příklad takové podhranice. Interakcí dislokací, jejichž skluzové roviny se protínají, vznikají tzv. sítě, což je seskupení dislokací do pravidelného geometrického tvaru. Průměrná velikost podzrn se zvětšuje úměrně s velikostí teploty a dobou žhání. S tím se mění i mechanické vlastnosti, klesá tvrdost a pevnost, roste houževnatost kovu.

Celý tento proces nazýváme polygonizací, poněvadž vznikající podstruktura je v prvním přiblížení polygonálního tvaru.



Obr. 4. Nikl tvářený protažením o 9 %. Vidíme dokonalou podstrukturu; na podhranicích můžeme rozeznat jednotlivé dislokace. Zvětšení 20 000 ×.

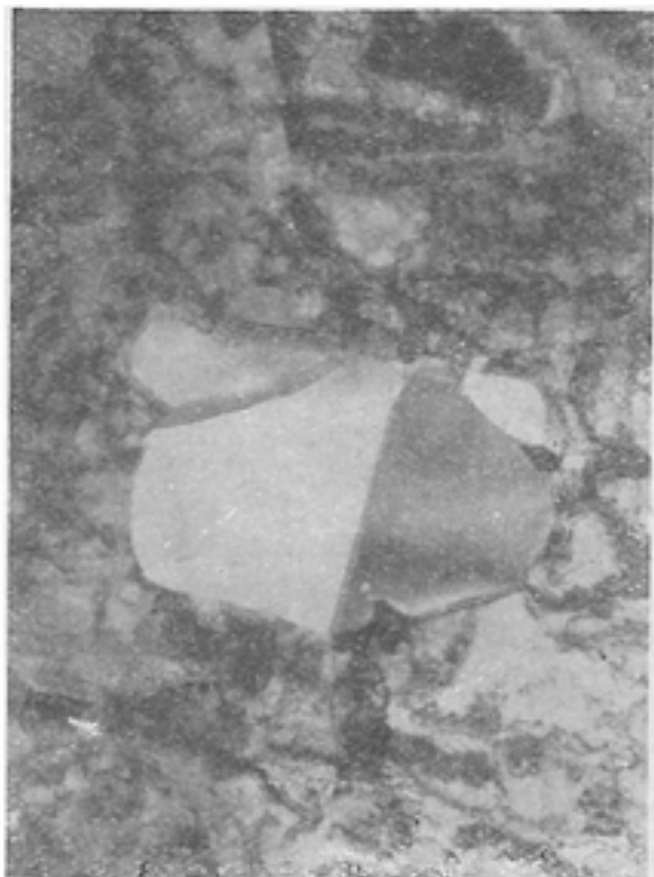


Obr. 5. Nikl tvářený protažením o 6,5% a žíhaný 2 hodiny na 1200 °C. Příklad polygonizované podhranice. V horní a pravé části snímku je vidět síť dislokací. Zvětšení 20 000 ×.

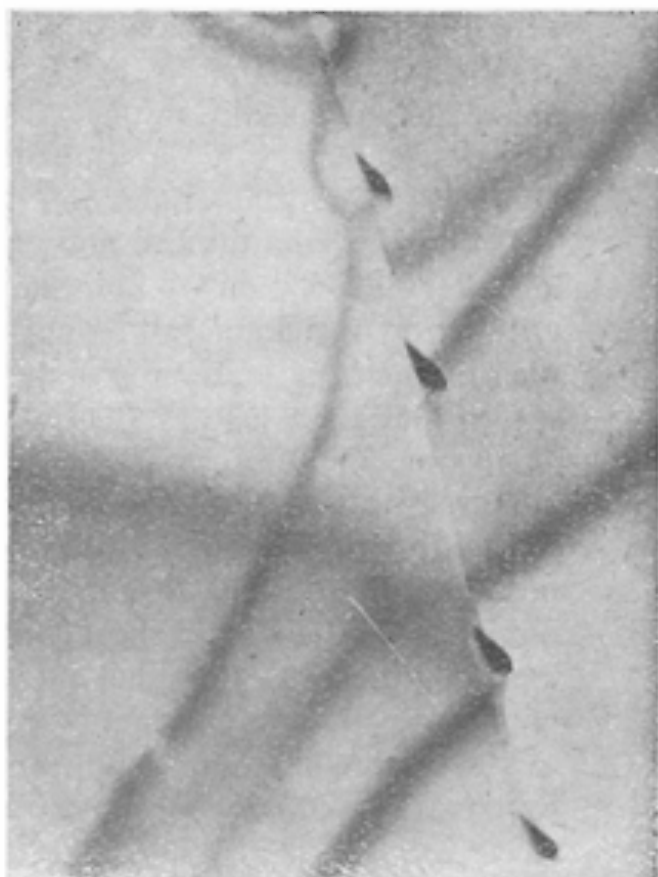
Jestliže kov žíháme na vyšší teplotu, nebo po delší dobu na nižší teplotu (avšak vyšší než určitá kritická teplota rovná přibližně $0,4 T_{\text{tání}}$), dochází v materiálu k hlubokým změnám. Některá podzrna začnou totiž zvětšovat objem na úkor svých sousedů. Tím vznikají tak zvané rekrytalizační zárodky, které se odlišují tím, že jsou větší než okolní podzrna, neobsahují dislokace (nebo jen v nepatrné míře) a mají schopnost dalšího růstu.

Rekrytalizační zárodek je obklopen vysokoúhlou hranicí, to znamená, že identické krystalografické roviny v mřížkách sousedních zrn spolu svírají poměrně velký úhel. Na těchto hranicích také můžeme rozeznat jednotlivé dislokace, což velmi pěkně pozorujeme na obr. 6, kde ve středu snímku vidíme takový zárodek, obklopený polygonizovanou maticí.

Popsaný děj nazýváme rekrytalizací. Dochází při něm ke kvantitativním změnám ve struktuře materiálu, objeví se nová zrna s neporušenou mříží, která postupně vyplňují celý objem materiálu. K ukončení tohoto děje dojde v okamžiku, kdy se jednotlivá zrna dotknou. K dal-



Obr. 6. Nikl tvářený na 80 % a žíhaný 2 hodiny na 450 °C. Ve středu vidíme tři vzájemně se dotýkající rekrytaliizační zárodky. Zvětšení 10 000 ×.



Obr. 7. Slitina Al - 2 % Ag, žíhaná po kalení 1 hodinu na 150 °C. Na hranici zrna jsou vyloučeny precipitáty. Zvětšení 16 000 ×.

šímu přiblížení stavu termodynamické rovnováhy může nyní dojít pouze zvětšováním velikosti zrn (mluvíme o období růstu zrn), až v mezním případě může být celý objem vzorku vyplněn jediným krystalem, tzv. monokrystalem.

Jednou z prvních oblastí, kde byla transmisní technika použita, bylo sledování procesů, ke kterým dochází při precipitaci a stárnutí slitin. Jestliže totiž zakalíme některé např. hliníkové slitiny a pak je ponecháme po určitou dobu při zvýšené teplotě (čím vyšší teplota, tím kratší doba), dochází k prudkým změnám vlastností (roste tvrdost, pevnost a elektrický odpor). Při tom v optickém mikroskopu v této fázi tepelného zpracování nepozorujeme žádné změny.

Pomocí transmisní elektronové mikroskopie a tzv. maloúhlového rozptylu rentgenových paprsků bylo zjištěno, že atomy legujícího prvku se shromažďují na určitých místech mřížky základního kovu, kde tvoří oblasti charakteristického tvaru, které se po svých objevitelích nazývají zóny Guinieovy-Prestonovy. Tyto zóny nemají vlastní krystalografické mřížky. Mřížka základního kovu je tam pouze obohacena o kov legující

a okolí zóny je o tento kov ochuzeno. Mřížky obou oblastí na sebe plynule přecházejí (mluvíme o tzv. koherentní mřížce). V okolí koherentní oblasti existují velká napěťová pole, brzdící pohyb dislokace. Poněvadž deformace materiálu je umožněna pohybem dislokací, dochází v této fázi vytvrzování ke značnému zpevnění.

Při dalším žhání vznikne tzv. rovnovážný precipitát s vlastní krystalografickou mřížkou (nekoherentní precipitát), který již je také pozorovatelný v optickém mikroskopu. Poněvadž rovnovážný precipitát má vlastní mřížku, je napěťové pole v jeho okolí menší, a proto dochází v této fázi k poklesu tvrdosti a pevnosti.

Na obr. 7 vidíme příklad takových precipitátů, které se vyloučily při žhání slitiny Al-2%Ag na hranici zrna.

Uvedli jsme několik typických příkladů použití transmisní elektronové mikroskopie ve fyzice kovů. Je zřejmé, že tato technika se svou stonásobně vyšší rozlišovací schopností proti mikroskopii optické umožňuje kvalitativně hlubší pohled na procesy probíhající v kovových soustavách. Na řadě pracovišť na celém světě se dnes pracuje jak na zdokonalení vlastních elektronových mikroskopů a jejich příslušenství, tak na vypracování dokonalejších preparativních technik.

Magnetismus jako zdroj pohybu

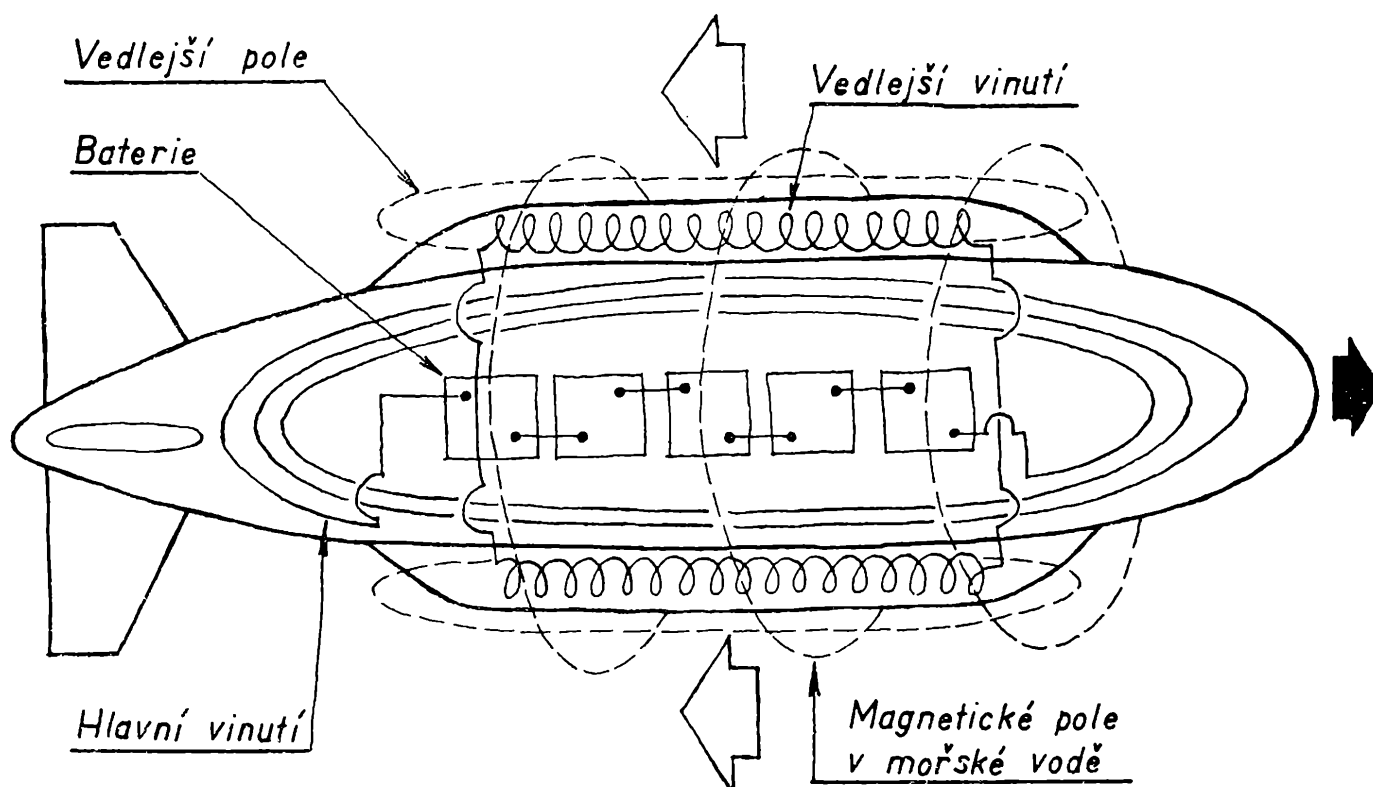
Dr. IVO KRAUS, CSc., ČVUT Praha

Jedním z mnohostranně využívaných fyzikálních jevů je pohyb, který má původ ve vzájemném působení magnetických polí. Čtenáři je bezpochyby dobře znám historický objev dánského fyzika H. Ch. Oersteda, který v roce 1820 náhodně zjistil vliv elektrického proudu na magnetickou střelku (magnetka se orientuje kolmo ke směru elektrického proudu). Mezi klasické pokusy v této oblasti patří dále např. pohyb solenoidu ve vnějším magnetickém poli (solenoid má snahu se orientovat ve směru siločar pole), chování dvou rovnoběžných vodičů, jimiž protékají proudy ve stejných směrech (vodiče se přitahují) a ve směrech opačných (vodiče se odpuzují). Z velkého počtu průmyslových aplikací interakce¹⁾ magnetických polí si jmenujme alespoň dvě, s nimiž se ve svém okolí denně setkáváme: měřicí přístroje (např. zrcátkový galvanoměr) a elektromotory.

Výčet možností praktického využití vzájemného působení magnetických polí dodnes nelze považovat zdaleka za ukončený. K jedné

¹⁾ Interakce = vzájemné působení.

zcela nové aplikaci směřuje nedávný pokus, který provedl profesor kalifornské university Stewart Way. Se svými žáky zkonstruoval ponorku, jejíž pohyb má sice jako u elektromotorů původ v interakci polí, avšak využití interakce k pohonu plavidla je zcela originální. Popíšme si stručně fyzikální podstatu tohoto velmi zajímavého experimentu.



Obr. 1. Princip ponorky na magnetický pohon.

Pokusná ponorka, jejíž půdorys je uveden na obr. 1, má délku 10 stop (1 stopa = 30,48 cm) a váhu 900 liber (1 libra = 454 g). Její trup je vyroben ze skelného laminátu. Jak je zřejmé z obrázku, po obou stranách jsou umístěny dvě cívky. Vedlejší magnetické pole, které při průchodu proudu v nich vzniká, interaguje s polem vytvořeným v okolním prostředí, mořské vodě, mohutným hlavním vinutím uvnitř plavidla. Výsledná síla uvádí částice mořské vody do pohybu směrem k zadní části ponorky a žene tak plavidlo vpřed. Mořská voda zde hraje podobnou úlohu jako armatura u elektrického motoru.

Celý tento objev je však prozatím pouze ve stadiu prvních pokusů. Teprve na základě výsledků celé řady dílčích výzkumů bude možno prohlásit, zda model zkonstruovaný na kalifornské universitě je předchůdcem nového typu plavidla, nebo pouze originální pomůckou k demonstraci pohybových účinků interakce magnetických polí.

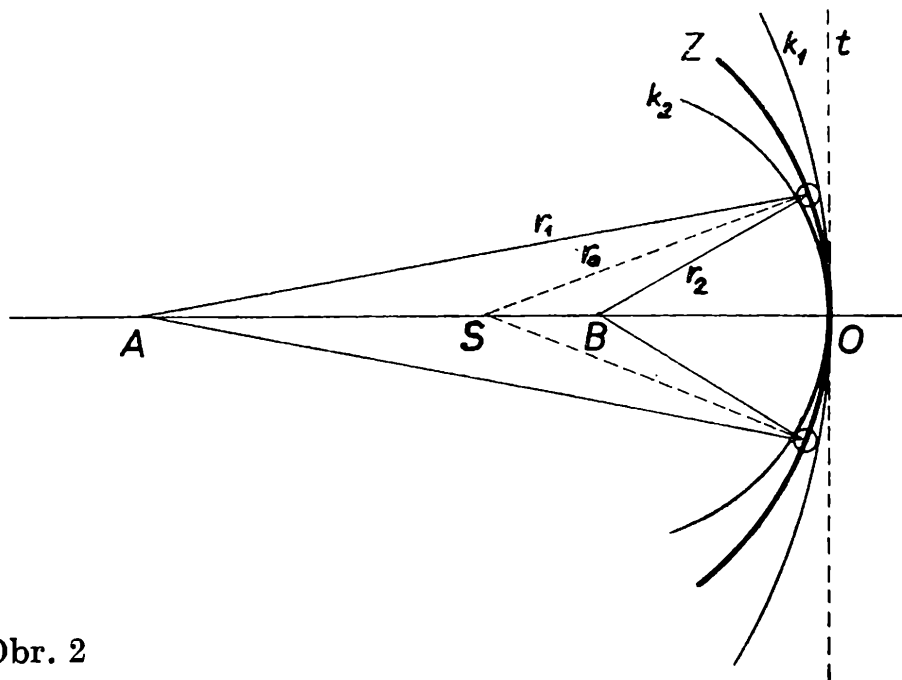
Jednoduché odvození zákonů zobrazení odrazem a lomem na kulové ploše z Huygensova principu

LUBOMÍR VAŠEK, Gottwaldov

(Pokračování)

1. Odraz na kulové ploše.

Uvažujme duté kulové zrcadlo Z o poloměru křivosti r_0 a středu křivosti S a vrcholu O (obr. 2). Na optické ose zrcadla zvolme bod A , z něhož se šíří světlo v kulových vlnoplochách. Vlnoplocha procházející bodem O buď k_1 . Abychom získali vlnoplochu odraženého vlnění od



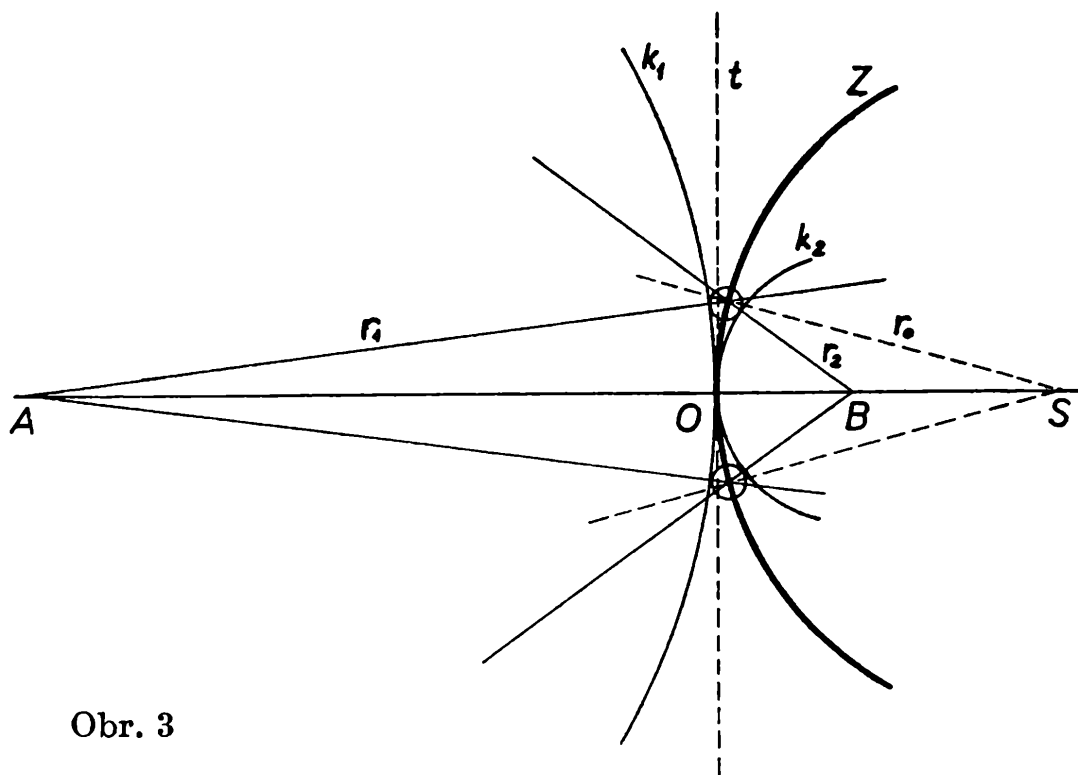
Obr. 2

zrcadla, předpokládáme podle Huygensova principu, že každý bod rozhraní (tj. zrcadla) se stává zdrojem vlnění, odkud se šíří vlnění v elementárních vlnoplochách, jejichž poloměr je pro každý bod zrcadla rovný úsečce, o kterou je tento bod svítícímu bodu A blíže nebo dále než bod O . Obalová plocha těchto elementárních vlnoploch tvoří na jedné straně vlnoplochu dopadajícího vlnění, na druhé straně vlnoplochu odraženého vlnění. Omezíme-li se na části vlnoploch, které leží v blízkosti bodu O , můžeme poloměry elementárních vlnoploch v prvním přiblížení položit rovný horizontální vzdálenostem zrcadlové plochy jednak od dopadající vlnoplochy, jednak od vlnoplochy odražené. Lze říci, že

jsou rovny rozdílům úseček, které udávají horizontální vzdálenosti těchto tří ploch (Z, k_1, k_2) od společné tečné roviny v bodě O . (V obr. 2 to jsou horizontální vzdálenosti od společné tečny t procházející bodem O .)

Označme vzdálenosti od společné tečny t v bodě O

- x_0 pro zrcadlovou plochu Z ,
- x_1 pro dopadající vlnoplochu k_1 ,
- x_2 pro odraženou vlnoplochu k_2 .



Obr. 3

Poloměr elementární vlnoplochy je pak zřejmě v prvním přiblížení rovný $x_0 - x_1$ a odražená vlnoplocha původního vlnění bude určena podmínkou

$$\begin{aligned} x_2 - x_0 &= x_0 - x_1, \quad \text{čili} \\ x_2 &= 2x_0 - x_1. \end{aligned} \quad \dots (5)$$

Podle pomocné věty je tedy odražená vlnoplocha rovněž kulová a její poloměr r_2 určíme z rovnice (5), dosadíme-li do ní

$$x_0 = \frac{y^2}{2r_0}, \quad x_1 = \frac{y^2}{2r_1}, \quad x_2 = \frac{y^2}{2r_2}. \quad \dots (6)$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{r_2} = \frac{2}{r_0} - \frac{1}{r_1}. \quad \dots (7)$$

Střed odražené vlnoplochy je v bodě B , který je sdružený s bodem A . Lze také říci, že bod B je obrazem bodu A , vytvořeným dutým zrcadlem. Obráz 2 tedy udává konstrukci obrazu pomocí dutého zrcadla. Obr. 3 řeší stejnou úlohu pro zrcadlo vypuklé.

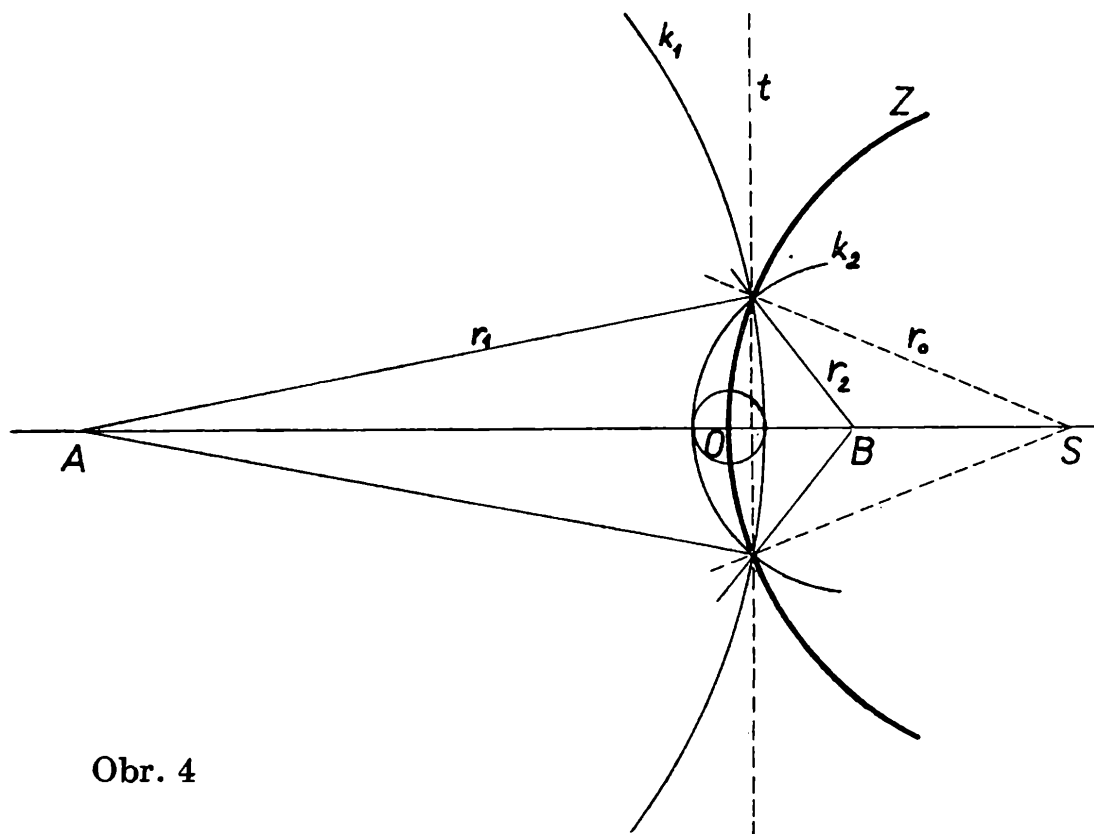
Aby bylo možno vyjádřit vztahy pro zrcadlo vypuklé početně, je třeba zavést znaménkovou konvenci, která spočívá v tom, že pro duté zrcadlo zavedeme kladný poloměr křivosti ($r_0 > 0$), pro vypuklé zrcadlo záporný poloměr křivosti ($r_0 < 0$).

Pro vypuklé zrcadlo bude podle obr. 3 $r_1 > 0$, $r_0 < 0$, $r_2 < 0$, a proto také $x_1 > 0$, $x_0 < 0$, $x_2 < 0$.

Rovnice udávající poloměry elementárních vlnoploch bude tedy vzhledem ke znaménkové konvenci

$$\begin{aligned} x_1 + (-x_0) &= -x_2 - (-x_0), \quad \text{čili} \\ x_2 &= 2x_0 - x_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Dosazením z rovnic (6) do (8) dostaneme rovnici odražené vlnoplochy, která je shodná s rovnicí (7).



Obr. 4

Kreslíme-li v případě vypuklého zrcadla odraženou vlnoplochu před zrcadlem, jak tomu je ve skutečnosti, při čemž dopadající vlnoplocha protíná částečně zrcadlo, musí se konstrukce kreslit tak, jak je uvedeno v obr. 4. Kulové plochy nemají v tomto případě sice společný vrchol, ale poloměry elementárních vlnoploch budou dány vzhledem ke znaménkové konvenci opět vztahem (8), takže poloměr odražené vlnoplochy r_2 bude opět dán vztahem (7).

Označíme-li vzdálenosti $AO = r_1 = a$, $BO = r_2 = b$, $SO = r_0 = r$, dostaneme dosazením do rovnice (7) známou zrcadlovou rovnici

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}, \quad (9)$$

kde a je vzdálenost předmětu od vrcholu zrcadla, b vzdálenost obrazu od vrcholu zrcadla a r poloměr křivosti kulového zrcadla.

Obrázky 2 a 3 jsou rýsovány pro hodnoty $a = 12$ cm, $|r_0| = 6$ cm. Pak v případě dutého zrcadla je $b = 4$ cm, v případě vypouklého zrcadla $b = -2,4$ cm.

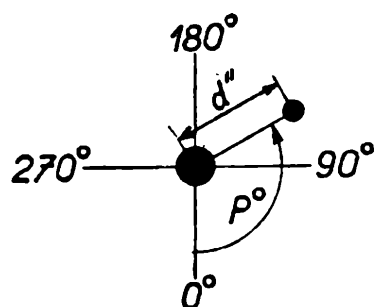


ASTRONOMIE

Pozorujeme dvojhvězdy

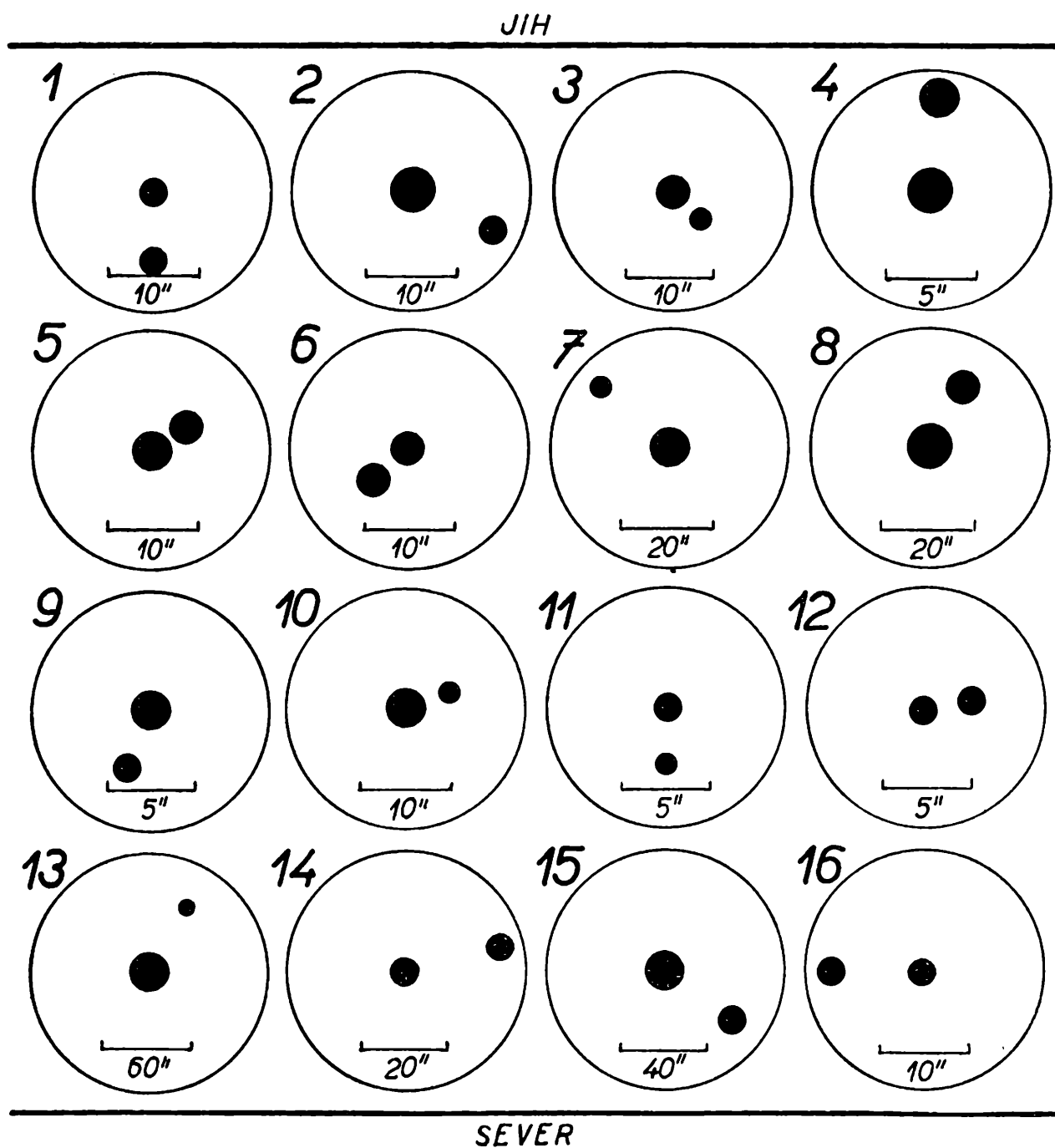
Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, Olomouc

Dvojhvězdy lze obecně rozdělit na dvojhvězdy optické a fyzické. Mezi optické, čili zdánlivé, patří takové dvě hvězdy, které se jen náhodně promítají na obloze blízko sebe, avšak nijak spolu nesouvisí. Fyzické (skutečné) dvojhvězdy jsou skutečně v prostoru blízko sebe a obíhají kolem společného těžiště; dělíme je na vizuální, spektroskopické a zákrytové. Budeme se zde zabývat především vizuálními dvojhvězdami, které jsou pro pozorování nejpřístupnější, neboť jsou rozlišitelné pomocí hvězdářského dalekohledu. Zbývající dvě skupiny dvojhvězd nelze rozlišit optickými prostředky buď pro velkou vzdálenost dvojhvězdy, anebo pro vzájemnou blízkost obou hvězd. Existenci spektroskopických dvojhvězd lze zjistit podle periodických posuvů čar ve spektru; u zákrytových dvojhvězd dochází ke změně jasnosti, která je způsobena střídavým zakrýváním dvou nestejně jasných hvězd.



Obr. 1. Určení polohy průvodce vzhledem k hlavní hvězdě.

U vizuálních dvojhvězd můžeme změřit jednak vzdálenost d obou hvězd (obr. 1), jednak poziční úhel P méně jasné hvězdy (průvodce) vzhledem k jasnější hvězdě. Poziční úhel měříme od severního bodu kladným směrem. Vy-
nášíme-li úhlovou vzdálenost a poziční úhel po dosti dlouhou dobu, obdržíme zdánlivou dráhu průvodce vzhledem



Obr. 2. Vybrané dvojhvězdy, vhodné k pozorování malými dalekohledy.

k hlavní hvězdě. Na obr. 2 jsou nakresleny některé dvojhvězdy, které můžeme vyhledat během roku na hvězdné obloze. Složka *A*, která je jasnější než složka *B*, je vždy nakreslena ve středu kroužku, poloha průvodce (složka *B*) je zakreslena tak, jak se jeví v převráceném astronomickém dalekohledu (sever dole, jih nahoře). Měřítko ve vteřinách se vztahuje jen na vzdálenost středů obou hvězd, nikoliv na jejich „průměr“ (hvězdy se ve skutečnosti jeví pouze jako svítící body); velikost kotoučků vyznačuje zdánlivou hvězdnou velikost obou složek, nikoliv jejich skutečný průměr. K vyhledání těchto dvojhvězd můžeme použít mapky hvězdné oblohy anebo atlasy; hvězdičkou označené hvězdy z tab. 1 jsou nakresleny na mapkách hvězdné oblohy v učebnici Fyziky pro 1. ročník SVVŠ (2. vydání, str. 162–165).

Při pozorování dvojhvězd se můžeme přesvědčit o kvalitě používaného dalekohledu. Teoretická rozlišovací schopnost ψ (pro vlnovou délku $\lambda = 5500 \text{ Å} = 550 \text{ nm}$, tj. nanometrů) je dána vztahem

$$\psi = \frac{120''}{D},$$

kde D je průměr vstupní pupily (objektivu), vyjádřený v milimetrech. Rozlišovací schopností dalekohledu rozumíme nejmenší úhlovou vzdálenost mezi dvěma body, které dalekohledem ještě rozlišíme. Tak např. dalekohled o průměru objektivu 80 mm má teoretickou rozlišovací schopnost $\psi = 1,5''$.

Tabulka 1

Hvězda	α	δ	m_A	m_B	d	P
1. γ Arietis	1h 51min	+19,0°	4,8	4,9	7,9''	0°
2. γ Andromedae*	2 01	+42,1	2,4	5,1	10,0	64
3. λ Orionis	5 32	+ 9,9	3,7	5,7	4,4	44
4. α Geminorum*	7 31	+32,0	2,0	3,0	2,4	175
5. γ Leonis*	10 17	+20,1	2,6	3,8	4,3	122
6. γ Virginis*	12 39	– 1,2	3,7	3,7	5,2	310
7. α Canum venaticorum	12 54	+38,6	2,9	5,5	19,6	228
8. ζ Ursae Maioris*	13 22	+55,2	2,4	4,1	14,5	151
9. ε Bootis*	14 43	+27,3	2,7	5,3	3,0	336
10. α Herculis*	17 12	+14,5	3,5	5,7	4,7	108
11. ε_1 Lyrae*	18 43	+39,6	5,1	6,2	2,8	1
12. ε_2 Lyrae*	18 43	+39,6	5,1	5,3	2,2	103
13. β Lyrae	18 48	+33,3	3,4	6,7	45,8	149
14. θ Serpentis	18 54	+ 4,1	4,5	4,9	22,2	104
15. β Cygni*	19 29	+27,9	3,2	5,3	34,3	54
16. γ Delphini	20 44	+16,0	4,5	5,4	10,0	268

Tabulka 2

Hvězda	Sp	$\frac{V_r}{[\text{km s}^{-1}]}$	$\frac{\pi}{["]}$	$\frac{r}{[\text{ly}]^2}$	M
1. γ Ari	A_0p	+ 1	0,022	150	+0,7
2. γ And	$K_0 + A_0$	- 13	0,008	400	-3,3
3. λ Ori	Oe_5	+ 33	0,004	800	-3,5
4. α Gem	A_0	+ 3	0,070	46	+0,8
5. γ Leo	K_0	- 36	0,020	160	-1,2
6. γ Vir	F_0	- 20	0,095	34	+2,8
7. α CVn	A_0p	- 3	0,024	140	-0,3
8. ζ UMa	A_2	- 10	0,042	80	+0,3
9. ε Boo	$K_0 + A_0$	- 16	0,015	220	-1,5
10. α Her	$M_5 + G$	- 33	0,006	550	-2,8
11. ε_1 Lyr	A_3	- 33	0,016	200	+1,4
12. ε_2 Lyr	A_5	- 33	0,016	200	+1,2
13. β Lyr	B_8p	- 19	0,003	1100	-4,2
14. ϑ Ser	A_5	- 50	0,023	140	+0,9
15. β Cyg	$K_0 + A_0$	- 24	0,008	400	-2,3
16. γ Del	$G_5 + F_8$	8	0,029	110	+1,4

Oběžné doby vizuálních dvojhvězd jsou poměrně dlouhé: γ Andromedae má oběžnou dobu 56,0 roků, γ Virginis 171,86 roků a α Geminorum dokonce 341,2 roků! Některé složky vizuálních dvojhvězd z našeho seznamu (tab. 1 a 2) jsou ještě spektroskopickými dvojhvězdami: α Geminorum — složka A je spektroskopická dvojhvězda s oběžnou dobou 9,2 dne, složka B s oběžnou dobou 2,9 dne. Navíc je zde ještě třetí složka C , ve vzdálenosti 73" od složky A . V soustavě α Herculis je složka B spektroskopická dvojhvězda s oběžnou dobou 52 dní. Vzájemné vzdálenosti mezi oběma hvězdami se obvykle uvádějí v astronomických jednotkách ($1 \text{ AU} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$, což je střední vzdálenost Země od Slunce): dvojhvězda γ Virginis má obě složky ve vzájemné vzdálenosti 44 AU, což je o 4,5 AU více, než je střední vzdálenost planety Pluto od Slunce. V tab. 1 jsou uvedeny rovníkové souřadnice (α , δ), zdánlivé hvězdné velikosti (m_A , m_B) obou složek, úhlová vzdálenost d a poziční úhel P průvodce vzhledem k hlavní hvězdě. V tab. 2 jsou spektrální třídy Sp hvězd, jejich radiální rychlost V_r , roční paralaxa π , vzdálenost r a absolutní hvězdná velikost (M^1). Studium dvojhvězd má velký význam pro určení hmotnosti obou hvězd. O tom však až v příštím článku.

¹⁾ Pojmy spektrální třída, radiální rychlost, roční paralaxa a absolutní hvězdná velikost jsou vyloženy v odst. 127–131 v učebnici Fyziky pro 3. roč. SVVŠ (SPN, Praha 1965), na str. 203–213.

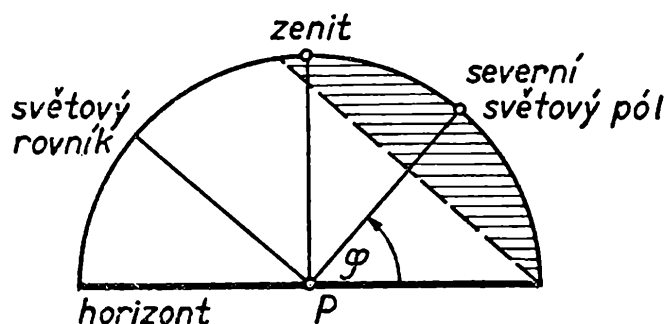
²⁾ Je uváděno v jednotkách zvaných světelný rok (zkratka sv. r. nebo mezinárodně ly). Hodnota této jednotky podle Rec. ISO je rovna $9,4605 \cdot 10^{15} \text{ m}$.
Poznámka redakce

Cirkumpolární souhvězdí

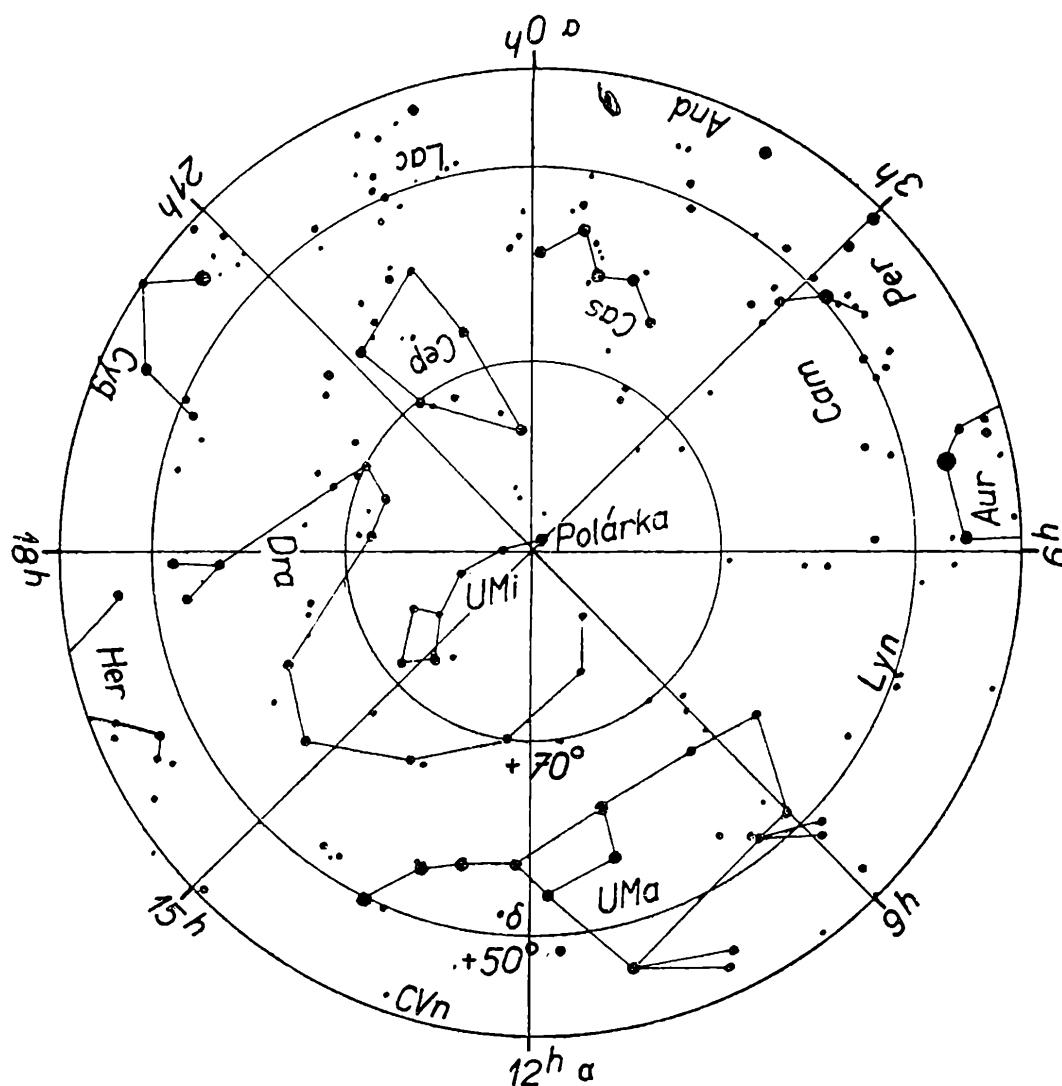
Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ

Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ, UP Olomouc

Cirkumpolární neboli obtočnová souhvězdí jsou ta souhvězdí, která pro dané pozorovací místo nikdy nezapadají. Výška světového pólu nad obzorem je rovna zeměpisné šířce φ pozorovacího místa; z obr. 1 je zřejmé, že všechny hvězdy, jejichž úhlová vzdálenost od světového pólu je rovna zeměpisné šířce pozorovacího místa P budou stále nad obzorem.



Obr. 1. Výška pólu [nad obzorem] je rovna zeměpisné šířce φ pozorovacího místa P .



Obr. 2. Mapka cirkumpolárních souhvězdí severní oblohy.

Tabulka 1. Cirkumpolární souhvězdí severní oblohy

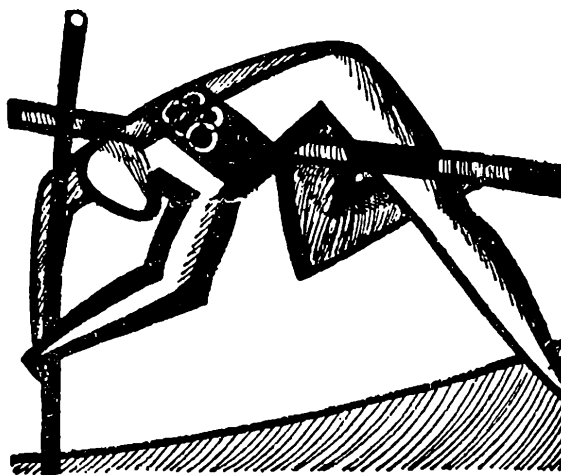
Čís. Český název	Latinský název	Zkratka	„Plocha“ □°	Počet hvězd viditel- ných okem
1. Malá medvědice	Ursa minor	UMi	256	20
2. Velká medvědice	Ursa maior	UMa	1280	125
3. Drak	Draco	Dra	1083	80
4. Cefeus	Cepheus	Cep	588	60
5. Kasiopeja	Cassiopeia	Cas	598	90
6. Žirafa	Camelopardalis	Cam	757	50
7. Herkules	Hercules	Her	1225	140
8. Labuť	Cygnus	Cyg	804	150
9. Andromeda	Andromeda	And	722	100
10. Perseus	Perseus	Per	615	90
11. Vozka	Auriga	Aur	657	90
12. Rys	Lynx	Lyn	545	60
13. Ještěrka	Lacerta	Lac	201	35
14. Honicí psi	Canes venatici	CVn	565	30

Pro pozorovatele na pólech Země jsou cirkumpolárními souhvězdími všechna souhvězdí až ke světovému rovníku, tj. všechna souhvězdí severní polokoule a na jižním pólu Země všechna souhvězdí jižní polokoule. Na zemském rovníku cirkumpolární hvězdy neexistují.

V našem státě bereme za základ rovnoběžku 50° severní zeměpisné šířky (prochází jižně od Prahy a severně od Ostravy); severní světový pól je tedy ve výši 50° nad severním obzorem. Proto všechny hvězdy, jejichž úhlová vzdálenost od severního pólu je 50° (neboli jejich deklinace je $+40^\circ$ a větší) nezapadají pod obzor ani během noci, ani během roku.

Na obr. 2 je nakreslena mapka jasnějších hvězd, které jsou v naší zeměpisné šířce cirkumpolární. Jsou to souhvězdí: *UMi* (Ursa minor, Malá medvědice, lidově nazývaná Malý vůz), *Dra* (Draco, Drak), *Cep* (Cepheus, Cefeus), *Cas* (Cassiopeia, Kasiopeja), *UMa* (Ursa maior, Velká medvědice, lidově Velký vůz) a dále části těchto souhvězdí: *Her* (Hercules, Herkules), *Cyg* (Cygnus, Labuť), *And* (Andromeda), *Per* (Perseus) a *Aur* (Auriga, Vozka) s jasnou hvězdou Capellou. Mimo to mezi cirkumpolární souhvězdí patří menší a nevýrazná souhvězdí Žirafy (Camelopardalis, *Cam*), Rysa (Lynx, *Lyn*), Ještěrky (Lacerta, *Lac*) a Honicích psů (Canes Venatici, *CVn*). V připojené tabulce 1 jsou shrnuty některé údaje o cirkumpolárních souhvězdích, jako jsou „plocha“ souhvězdí ve čtverečních stupních (jednotkách prostorového úhlu) a počet hvězd viditelných pouhým okem (do 6. hvězdné velikosti).

V posledních osmi souhvězdích jsou jen některé hvězdy stále nad naším obzorem.



Příklady z 2. mezinárodní fyzikální olympiády

PROF. DR. ROSTISLAV KOŠŤÁL, VUT, Brno

(Dokončení)

2. příklad.

Text.

V skleněné nádobce je 300 cm^3 toluenu o teplotě 0°C . V druhé nádobce je 110 cm^3 toluenu v teplotě 100°C (součet objemů je tedy 410 cm^3). Jaký bude společný objem, když obě kapaliny slejeme? Teplotní součinitel objemové roztažnosti toluenu je $\beta = 0,001 \text{ deg}^{-1}$. Tepelné ztráty zanedbejte.

Řešení.

Abychom stanovili výsledný objem po smíchání, musíme nejdříve určit výslednou teplotu. Abychom stanovili výslednou teplotu, musíme určit poměr hmotností jednotlivých množství kapalin m_1 a m_2 . Poněvadž poměr hmotností jednotlivých množství kapalin musí být týž jako poměr jejich objemů za téže teploty, vypočteme si nejdříve příslušné objemy pro teplotu 0°C . Označme proto u prvního množství kapaliny

objem při teplotě t_1 písmenem V_1 ,
objem při teplotě 0°C písmenem V_{10} ,

u druhého množství kapaliny

objem při teplotě t_2 písmenem V_2 ,
objem při teplotě 0°C písmenem V_{20} .

Pak musí platit

$$V_{10} = \frac{V_1}{1 + \beta t_1}, \quad V_{20} = \frac{V_2}{1 + \beta t_2},$$

kde β je teplotní součinitel objemové roztažnosti kapaliny. Označíme-li hustotu kapaliny při teplotě 0°C písmenem ϱ_0 , pak jsou hmotnosti kapalin

$$\begin{aligned} m_1 &= \varrho_0 V_{10}, & m_2 &= \varrho_0 V_{20}, \\ m_1 + m_2 &= \varrho_0 (V_{10} + V_{20}) \end{aligned} \quad (1)$$

Označíme-li teplotu kapalin po smíchání t'

$$t' = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}, \quad (2)$$

pak objemy kapalin při této teplotě budou

$$V'_1 = V_{10} (1 + \beta t'), \quad V'_2 = V_{20} (1 + \beta t'),$$

a tedy celkový objem užitím (2) a (1)

$$\begin{aligned} V &= V'_1 + V'_2 = V_{10} + V_{20} + (V_{10} + V_{20}) \beta t' = \\ &= V_{10} + V_{20} + (V_{10} + V_{20}) \beta \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \\ &= V_{10} + V_{20} + \frac{\beta}{\varrho_0} (m_1 t_1 + m_2 t_2) = \\ &= V_{10} + V_{20} + \beta V_{10} t_1 + \beta V_{20} t_2 = V_1 + V_2. \end{aligned}$$

Zůstává tedy objem kapalin i po smíchání též jako před smícháním.

Pro případ $t_1 = 0^\circ\text{C}$, $t_2 = 100^\circ\text{C}$, $V_1 = V_{10} = 300 \text{ cm}^3$, $V_2 = 110 \text{ cm}^3$, $\beta = 0,001 \text{ deg}^{-1}$ vychází

$$V_{20} = \frac{V_2}{1 + \beta t_2} = \frac{110}{1,1} \text{ cm}^3 = 100 \text{ cm}^3,$$

$$m_1 : m_2 = V_{10} : V_{20} = 3 : 1,$$

$$t' = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \frac{100}{4}^\circ\text{C} = 25^\circ\text{C}$$

a objem při této výsledné teplotě

$$V = 400 (1 + 0,025) \text{ cm}^3 = 410,0 \text{ cm}^3;$$

tedy výsledný objem je též jako součet původních objemů.

3. příklad.

Text.

Půlválec je zhotoven ze skla o indexu lomu $n = \sqrt{2}$. Na rovinnou plochu dopadají světelné paprsky pod úhlem dopadu $\alpha = 45^\circ$. Světelné paprsky jsou v rovině kolmé na osu válce. Z které části válce paprsky vystupují (obr. 4)?

Řešení,

Pro index lomu platí podle Snelliova zákona

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n,$$

kde α je úhel dopadu a β je úhel lomu. V našem případě je $\alpha = 45^\circ$, $n = \sqrt{2}$, a tedy

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{1}{2}$$

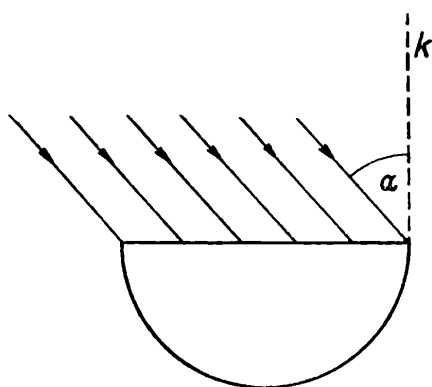
čili

$$\beta = 30^\circ$$

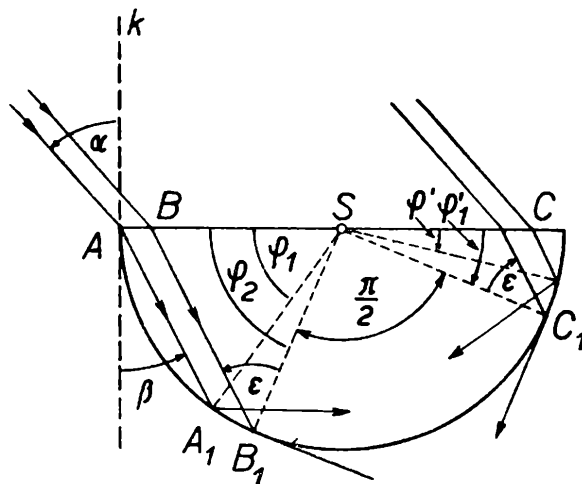
Paprsky, které se na rovinné ploše lomí, budou dopadat na válcovou oblínu pod různými úhly a projdou jen tehdy, když jejich úhel dopadu bude menší nebo roven tzv. meznímu úhlu ε , pro který platí ($\alpha = 90^\circ$)

$$\sin \varepsilon = \frac{\sin 90^\circ}{n} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Mezní úhel pro sklo v daném případě má velikost $\varepsilon = 45^\circ$.



Obr. 4



Obr. 5

Zvolme nákretnou rovinu kolmou k ose válce a v této rovině provedme konstrukci chodu paprsků (obr. 5). Bod S je obrazem osy válcové plochy. Paprsek jdoucí levým krajním bodem A se lomí do bodu A_1 . Označme obecně φ úhel, který svírá spojnice bodu na polokružnici v nákretné rovině a středu S s polopaprskem SA . Úhel ASA_1 označme φ_1 . Pak na povrch válce od $\varphi = 0^\circ$ do $\varphi_1 = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$ (tj. v obr. 5 na povrch od A do A_1) nedopadá žádný lomený paprsek. Paprsek bude vystupovat z válce tehdy, když bude úhel $BB_1S \leq \varepsilon$, tj.

$$\varphi_2 = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - \varepsilon = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

Paprsky dopadající blízko pravého kraje rovinné plochy se po lomu

budou od válcové plochy úplně odrážet až na paprsek, který splňuje podmínku (podle obr. 5), že úhel $CC_1S \leq \varepsilon$, tj. při zavedení úhlu φ' , že bude

$$\varphi'_1 = 180^\circ - (90^\circ + \beta) - \varepsilon$$

Poněvadž $\beta = 30^\circ$, $\varepsilon = 45^\circ$, vychází

$$\varphi'_1 = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

Označme $\widehat{ASC}_1 = \varphi_3$; pak

$$\varphi_3 = 180^\circ - \varphi'_1 = 165^\circ$$

Vychází tedy, že v prostoru $75^\circ \leq \varphi \leq 165^\circ$ bude úhel, který svírá lomený paprsek s kolmicí dopadu na válcovou plochu menší nebo roven úhlu meznímu, a proto bude pro tento úhel φ paprsek ze skla vystupovat. Je to tedy právě z poloviny válcové plochy ($\varphi_3 - \varphi_2 = 90^\circ$).

4. příklad experimentální.

Text.

Dostanete tři zavřené krabičky, které nesmíte otevřít. V každé krabičce je zabudován element elektrického obvodu.

- Určete, co je v krabičce zabudováno, aniž ji otevřete.
- Určete měřením charakteristické údaje zabudovaných elementů.

K měření lze použít:

2 univerzální měřicí přístroje (UNIVO),
zdroj střídavého proudu o 50 Hz,
zdroj stejnosměrného proudu.

Střídavý proud lze odebírat z rozvodné desky z horních bílých zdířek, stejnosměrný proud z dolních bílých zdířek. Při použití měřicích přístrojů je třeba dbát těchto pokynů:

- Před provedením jednotlivého měření postavit přepínač do vhodné polohy (= nebo $\sim$).
 - Jeden přívodní drát zapnout do kontaktu označeného —, druhý do kontaktu zvoleného rozsahu měření.
 - Při každém měření začínat od největšího rozsahu.
 - Stupnice je dělena na 60 dílků.
 - Zakryté kontakty nesmějí být použity.
- | | | | | | | | |
|------------------------|------|-------|-------|-------|------|------|--------|
| 6. Měřicí rozsah | 6 A | 1,2 A | 0,3 A | 120 A | 30 A | 6 mA | 1,2 mA |
| Vnitřní odpor | | | | | | | |
| přístroje v Ω | 0,17 | 0,85 | 3,4 | 8,5 | 34,0 | 170 | 850 |
| Měřicí rozsah ve V | 600 | 300 | 120 | 30 | 6 | 3 | |
| Vnitřní odpor | | | | | | | |
| přístroje v k Ω | | 600 | 300 | 120 | 30 | 6 | 3 |
- Možná chyba přístroje při stejnosměrném proudu je 2 %, při střídavém proudu 3 %.

Řešení.

- a) α) Jestliže připojíme na zdířky krabičky stejnosměrné napětí a pak stejně veliké střídavé napětí a v obou případech prochází elementem stejný proud, pak jde o element s ohmickým odporem.
 β) Jestliže elementem prochází při střídavém napětí menší proud než při stejně velkém stejnosměrném napětí, jde o cívku s ohmickým odporem a indukčností.
 γ) Jestliže elementem prochází proud při střídavém napětí, ale neprochází při stejnosměrném napětí, obsahuje krabička kondenzátor.

V jedné krabičce byl element s ohmickým odporem, v druhé cívka s ohmickým odporem a indukčností a v třetí kondenzátor.

b) Měření ohmického odporu, indukčnosti a kapacity kondenzátoru bylo pak provedeno obvyklými metodami.



R Ů Z N Ě

Ze života objevitele štěpení atomového jádra

Prof. Dr. VILÉM SANTHOLZER, DrSc., KU Hradec Králové

V roce 1968 zemřel prof. dr. Otto Hahn, světoznámý svým objevem štěpení atomového jádra, který byl prvním krokem k mírovému, bohužel však i k vojenskému využití jaderné energie.

Objev štěpení uranového a thoriového jádra provedl Hahn r. 1938 se svým tehdejším spolupracovníkem dr. Strassmannem, nyní profesorem university v Bonnu. Radiochemik Hahn tenkrát pracoval v Berlíně, v Kaiser Wilhelm Institut für Chemie v radiologickém oddělení,



kteře vedl společně s fyzičkou profesorkou dr. Lise Meitnerovou. Ta původně studovala u slavného teoretického fyzika Maxe Plancka, a s Hahnem spolupracovala již od r. 1907. Prováděla potřebná radiologická a dozimetrická měření, takže se vytvořila ideální spolupráce radiochemika s fyzičkou. Též na objevu štěpení jádra Meitnerová spolupracovala, a společně se svým synovcem dr. Frischem správně vysvětlila podstatu štěpení. (Prof. dr. Otto Frisch byl ředitelem laboratoří v Los Alamos v USA, kde byla vyrobena první atomová puma.) Jen o málo později uveřejnil výsledky svých pokusů se štěpením také prof. Joliot Curie v Paříži.

Objev štěpení jádra byl proveden na prahu druhé světové války. Je to druh jaderné reakce vznikající ostřelováním jader neutrony, kdy z původního jádra vznikají dva fragmenty (odštěpky) hmotností zhruba polovičních, přičemž se uvolňují dva až tři další neutrony, které mohou štěpit další jádra, takže za vhodných podmínek může vzniknout řetězová reakce. Rozštěpením jádra uvolňuje se poměrně značná energie. Podmínky vzniku řetězové reakce nelze snadno uskutečnit, Němcům se až do konce války nepodařilo je vytvořit, prof. Hahn s nacisty nespupracoval. První řetězovou ovladatelnou reakci provedl italský prof. Fermi r. 1942 za války v Chicagu. Fermiho práce v Římě před r. 1938 vlastně byly podnětem k pokusům Hahnovým, který konečně štěpení objevil. Hahn si brzy uvědomil možnost vzniku řetězové reakce výbušného charakteru, a byl tím hluboce znepokojen. Nobelovu cenu za svůj objev obdržel r. 1944, avšak převzal ji teprve po válce r. 1946, když byl propuštěn z internačního tábora v Anglii. Byl tam internován osm měsíců společně s jinými německými profesory, a chtěl spáchat sebevraždu po zprávě, že nad Hirošimou vybuchla první atomová puma.

Po návratu z internace byl prof. Hahn zvolen presidentem nově zřízené Společnosti Maxe Plancka v západoněmeckém universitním městě Göttingen, a tuto funkci vykonával až do r. 1960. Svoje stanovisko jasně projevil göttingenskou mírovou výzvou podepsanou jím a dalšími německými vědci, a požadující zákaz nukleárních zbraní. U nás je znám z této výzvy, a také ze své návštěvy v Jáchymově r. 1966, kde jej doprovázel akademik Fra-

t i š e k B ě h o u n e k. Stanovisko prof. Hahna k nukleárním zbraním bylo stejné jako prof. Joliot-Curie, býv. předsedy Světové rady míru. Přesto, že Hahn byl některými západoněmeckými politiky za svůj mírový projev nazván senilním, neustal ve svém úsilí přesvědčovat svůj národ o tom, že nukleární válka byla by nebezpečím pro celé lidstvo. Na jeho počest byla první obchodní loď s nukleárním pohonem postavená v NSR nazvána „O t t o H a h n“.

Je zajímavé, že původně Hahn vystudoval organickou chemii, a zač. našeho století se stal asistentem Ústavu organické chemie university v Marburgu nad Lahnou. Úmyslem Hahnovým bylo později pracovat v chemickém průmyslu, což vyžadovalo i dobrou znalost angličtiny. Zdokonalení v angličtině bylo možné jen pobytem v Anglii, a proto jeho přednosta prof. Z i n c k e mu dal doporučení do laboratoře sira W i l l i a m a R a m s a y e. Byla to šťastná náhoda, že prof. Ramsay svěřil Hahnovi jako první pracovní úkol separaci prvku radia smíšeného s baryovou solí, tedy úkol radiochemický. (Hahn v podstatě postupoval metodou Curieových, jímž se izolace radia ponejprv zdařila r. 1898.) Baryovou sůl obdržel Ramsey od Rutherforda, který se tehdy snažil přesně dokázat, že částice alfa vysílané z radia jsou jádra heliová, že z radia musí tudíž unikat plyn helium. Ramsay byl odborníkem v oboru vzácných plynů, a společně se S o d d y m pozoroval, že v okolí radioaktivních preparátů vysílajících záření alfa se postupně hromadí helium. Rutherford provedl přesný spektrometrický důkaz přítomnosti helia v okolí radiové soli.

Hahn se tedy náhodou ocitl ve středisku radiochemických prací, a radiochemií se pak zabýval až do konce svého života. Již r. 1905 objevil nové přírodní radioaktivní prvky mezothorium a radiothorium, po první světové válce protaktinium (s Meitnerovou).

Mezothoria bylo záhy využíváno v lékařství k ozařování, později i v technice v defektoskopii, podobně jako prvku radia. R. 1911 měl Hahn již značné množství mezothoria, svým zářením rovnocenného několika stům mg radia. Výrobou se začala zabývat Auerova společnost, a mezothorium bývalo tehdy nazýváno „německé radium“.

Ramsay přesvědčoval Hahna aby nepřešel do průmyslu a pracoval nadále v oboru radiochemie. S jeho doporučením byl přijat u Rutherforda, který tenkrát pracoval v Montrealu v Kanadě a velmi se zajímal o Hahnův objev radiothoria, ačkoliv původně jej on i jeho kolegové posuzovali skepticky. (Je to „směs thoria a hlouposti“.) Rutherford později vedl slavnou Cavendishovu laboratoř v Cambridgi v Anglii, kde r. 1919 bylo provedeno první „rozbití atomu“, tenkrát jen teoretického významu. (Štěpení jádra dusíku ostřelováním částicemi alfa na kyslík a vodík.)

R. 1906 Hahn opouští Montreal a stává se zaměstnancem Chemického ústavu prof. Emila Fischera v Berlíně. Jeho šéf sám nevěřil tomu,

že je možno připravit a fyzikálně evidovat nevažitelná množství některých prvků, jejichž rychlý rozpad jim zabraňuje, aby se vyskytovaly v množstvích važitelných. Za nejjemnější považoval Fischer zkoušku čichovou, velmi citlivou radiologickou metodiku fyzikální neuznával.

R. 1913 byla Fischerova laboratoř již tak kontaminována, že bylo nutno hledat jiné pracoviště. Hahn tenkrát úzce spolupracoval s Meitnerovou, která prováděla fyzikální část výzkumů. R. 1913 byly Hahnovi a Meitnerové poskytnuty místnosti v nově postaveném Kaiser Wilhelm Institut für Chemie v Berlíně-Dahlemu, takže bylo možno pracovat i se slabě aktivními látkami. Tam objevil Hahn později i jadernou izomerii, kterou předvídal již Soddy. Izomery jsou izobariké izotopy, jádra s týmž počtem protonů a neutronů, avšak lišící se od sebe svým energetickým stavem a dalšími, především radioaktivními vlastnostmi. Název „jaderná izomerie“ pochází od Meitnerové. Hahn objevil izomerii na izotopu protaktinia hmotového čísla 234, tedy na izotopu ^{234}Pa . (Jsou dva izomery různých poločasů.)



MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁBAVY

Již dvakrát jste se mohli zahhloubat nad tím, kde a jakou chybu udělal ve svých matematických úvahách trochu nepozorný student Zmatlík. Dnes vám předkládáme záhadu, která souvisí s matematikou jen volně, jde spíše o slovní úlohu.

Z á h a d n é z m i z e n í p e n ě z

Prodavač u stánku se zeleninou převzal od vedoucího prodejny dva koše rané zeleniny. V jednom koši bylo 120 kusů ředkviček a v druhém 120 kusů mladé mrkve. Podle příkazu vedoucího měl vázat svazečky po pěti ředkvičkách a prodávat jeden za 3 Kčs, dále měl vázat mrkev po třech kusech a prodávat takový svazeček za 4 Kčs. Celkem měl tedy odevzdat tržbu 232 Kčs; když však zjistil, že má málo provázku, začal vázat pět ředkviček a tři mrkve do jednoho svazku a prodávat jeden

za 7 Kčs. Právě teď se zarazil a zkoprněl, protože si uvědomil, že ze 240 kusů zeleniny uváže jen 30 svazků po 7 Kčs a utrží tedy jen 210 Kčs. Jak je to možné, když cena nového svazku je rovna součtu cen původních svazečků, z nichž ho lze vytvořit? Najdete vysvětlení dříve než za tři minuty (čas jsou peníze)? Prodavač se záhy orientoval, v čem ve své úvaze pochybil.

J.Š.

V naší první lize košíkové sehraje každé družstvo s každým za jednu sezónu celkem čtyři utkání. Kolik je mužstev, víme-li, že tímto systémem bylo sehráno celkem 220 utkání?

S. H. ml.

Série Mm, úloha Mm - 3

Ve druhém kole Matematické olympiády řeší soutěžící čtyři úlohy. Jednou došlo k tomu, že každý soutěžící vyřešil aspoň jednu úlohu; přitom se do řešení čtvrté úlohy pouštěli jen ti, kteří vyřešili aspoň dvě z předcházejících úloh. Po zhodnocení výsledků se ukázalo, že nikdo neřešil úlohu s pořadovým číslem vyšším než jedna, pokud nevyřešil aspoň jednu z úloh, které měly pořadové číslo nižší. Každý, kdo vyřešil první i druhou úlohu, vyřešil třetí nebo čtvrtou úlohu. Nikdo z těch studentů, kteří vyřešili třetí a nevyřešili druhou úlohu, nestačil již vyřešit čtvrtou úlohu. Naproti tomu rozřešení druhé úlohy pomohlo některým studentům k rozřešení čtvrté úlohy. Našli se studenti, kteří nevyřešili třetí ani čtvrtou úlohu.

Na základě těchto poznatků někteří lidé po krátkém zamyslení vyslovili různé závěry: To znamená, řekl první z nich, že někteří studenti vyřešili pouze první úlohu. Druhý tvrdil, že někteří vyřešili všechny úlohy. Třetí usoudil, že tvrzení druhého je neodůvodněné, ale že je jisté, že někteří studenti vyřešili aspoň tři úlohy. Čtvrtý prohlásil, že si dovoluje tvrdit, že by se našli studenti, kteří vyřešili právě tři úlohy. Pátý vyvodil, že každý soutěžící vyřešil první nebo třetí úlohu. Šestý usoudil, že někteří úspěšní řešitelé čtvrté úlohy nevyřešili první úlohu. Sedmý dospěl k závěru, že žádný úspěšný řešitel druhé úlohy neselhal při řešení čtvrté úlohy.

Posuďte, kteří z těchto sedmi lidí usuzovali logicky správně a kteří provedli logicky nesprávný úsudek.

Poznámka pro čtenáře. Touto úlohou končí série úloh z moderní matematiky v tomto ročníku Rozhledů. Vzhledem k tomu, že první úloha mohla být zařazena místo do prvního až do třetího čísla časopisu, zůstala letošní série jen krátká. Považujte ji za zkušební „nultou“ sérii, která naznačila charakter úloh do ní zařazovaných. Uveřejňujeme

také autorská řešení úloh, abyste poznali jejich zpracování. Napište nám svůj názor na tyto úlohy, na jejich obtížnost; zmiňte se o svých zkušenostech s jejich řešením. K vašim připomínkám přihlédneme při koncipování dalšího ročníku Rozhledů a řešitelských soutěží. Děkujeme za spolupráci.

Redakce

„Čím pomaleji, tím dříve“

MILAN BEDNAŘÍK, Olomouc

Při řešení fyzikálních příkladů docházíme někdy k závěrům, které se zdají být na první pohled nesmyslné nebo přinejmenším podivné. Pak se obvykle domníváme, že jsme buď použili nesprávných fyzikálních vztahů (vzorců), nebo se dopustili nějaké chyby v algebraických úpravách při dosazování, nebo dokonce v numerickém výpočtu. Když se nám však při dodatečné kontrole celého postupu řešení žádnou z uvedených závad nepodaří odhalit, nezbývá nic jiného, než výsledek úlohy prozatím přijmout a přemýšlet, zda nemá věc nějaký háček. A poněvadž student bývá ve své podstatě tvor hloubavý, láme si nad takovým problémem hlavu tak dlouho, až mu přijde na kloub. Potom se často ukáže, že i nejméně očekávaný výsledek se dá náramně snadno a přitom věcně vysvětlit. Konečně přesvědčte se o tom sami na řešení jedné celkem velmi jednoduché fyzikální úlohy.

Máme vypočítat počáteční rychlost tělesa, které bylo vrženo svisle vzhůru a ocitlo se ve výši 15 m nad povrchem země právě po:

- a) pěti sekundách,
- b) třech sekundách

svého pohybu. Odpor vzduchu zanedbáváme.

Řešení. Jde o svislý vrh vzhůru, o němž víme, že je pohybem složeným z pohybu rovnoměrného směrem svislým nahoru a z volného pádu, který se děje směrem svislým dolů. Pro výšku h tělesa v čase t platí rovnice

$$h = v_0 t - \frac{g t^2}{2}, \quad (1)$$

v níž v_0 je počáteční rychlost pohybu, g tíhové zrychlení. Z rovnice vyjádříme počáteční rychlost vztahem

$$v_0 = \frac{2h + g t^2}{2t},$$

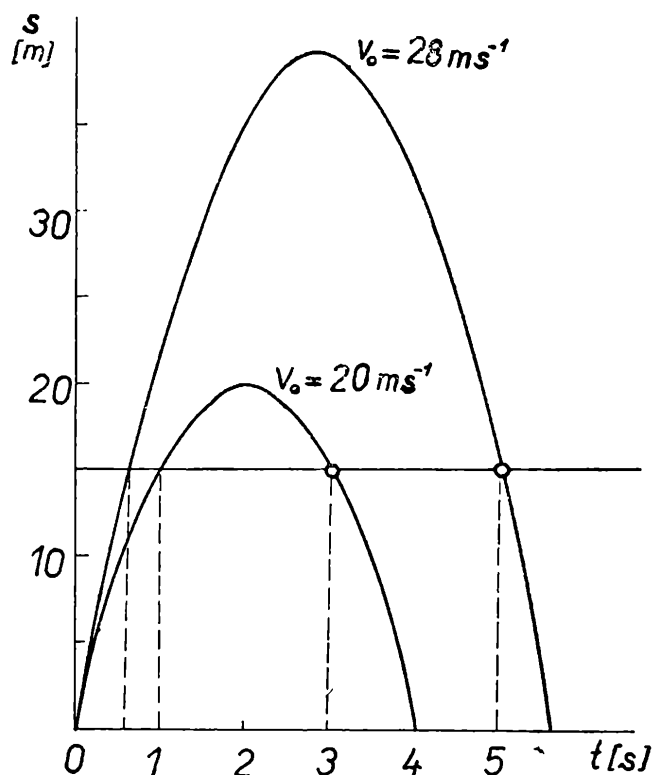
do něhož dosazujeme výšku $h = 15$ m, tíhové zrychlení $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a čas a) $t = 5$ s, b) $t = 3$ s.

Snadno vypočítáme, že pro:

a) dobu $t = 5$ s je počáteční rychlost $v_0 = 28 \text{ m s}^{-1}$,

b) dobu $t = 3$ s počáteční rychlost $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$.

Z výsledku, o jehož správnosti se můžete sami přesvědčit, vyplývá, že těleso se ocitne v uvažované výšce za 5 sekund, jestliže bylo vrženo rychlostí 28 m s^{-1} , nebo již za 3 sekundy při počáteční rychlosti 20 m s^{-1} .



Obr. 1

Podle toho bychom mohli tvrdit, že těleso vyhozené menší rychlostí dosáhne dané výšky dříve než těleso vržené rychlostí větší. Je to však možné? Vždyť to odporuje naší nejprostší zkušenosti. (Na tomto místě doporučuji, aby se čtenář pokusil vysvětlit protismyslnost tohoto výsledku nejdříve sám a potom teprve pokračoval ve čtení dalšího textu.)

Prověříme nezvyklý výsledek úlohy výpočtem doby, potřebné k výstupu tělesa do výšky $h = 15$ m při počáteční rychlosti: a) $v_0 = 28 \text{ m s}^{-1}$, b) $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$.

Z rovnice (1) vyplývá

$$g t^2 - 2 v_0 t + 2 h = 0$$

a odtud

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 g h}}{g}.$$

Dosadíme-li známé číselné hodnoty, dostaneme

a) pro $v_0 = 28 \text{ m s}^{-1}$ dobu $t_1 = 5$ s, $t_2 = 0,6$ s,

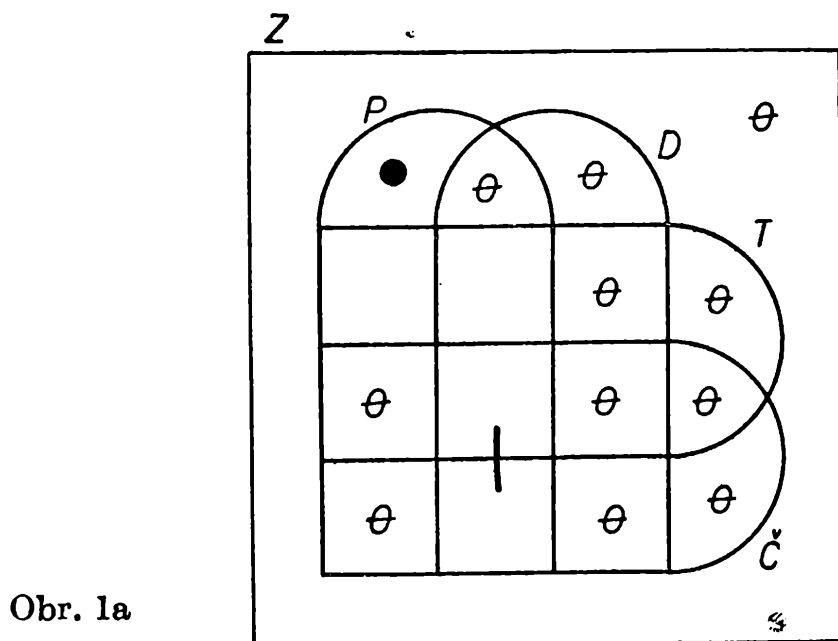
b) pro $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$ dobu $t_1 = 3$ s, $t_2 = 1$ s.

To znamená, že se těleso ocitá během svého pohybu ve výši $h = 15$ m celkem dvakrát. Poprvé při pohybu směrem vzhůru v čase t_2 , po druhé při pohybu zpět v čase t_1 . Nyní již jistě poznáváte, že číselné hodnoty času byly v textu úlohy voleny tak, aby odpovídaly právě sestupu tělesa. V tom případě byl také náš závěr, že těleso vržené svisle vzhůru je v požadované výši tím dříve, čím je jeho počáteční rychlost menší, naprosto správný, ovšem s tím dodatkem, že se tak stane na jeho zpáteční cestě.

Ještě názornější představu o celé situaci poskytuje graf závislosti výšky h vrženého tělesa na čase t při počáteční rychlosti v_0 (obr. 1). Každá z obou parabol protíná přímkou $h = 15$ m ve dvou bodech, přičemž souřadnice bodu na sestupné části paraboly představuje okamžik t_1 , kdy se těleso ocitá při určité počáteční rychlosti v_0 v dané výši již podruhé.

Řešení úlohy Mm-3

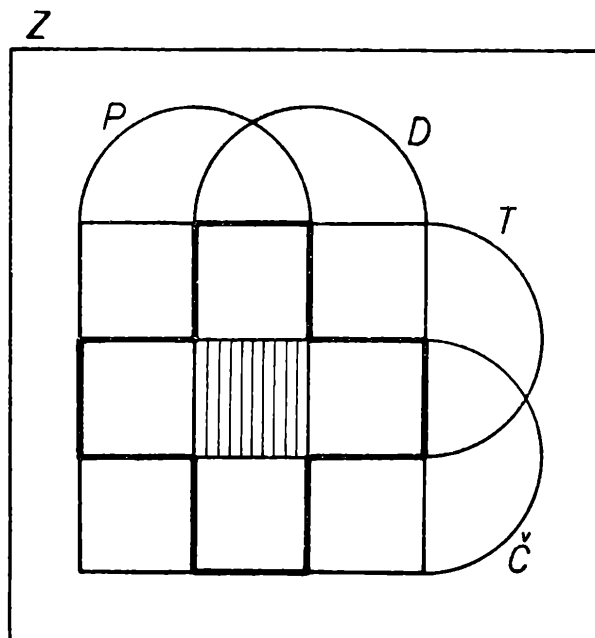
V článcích uveřejněných v tomto ročníku Rozhledů byl vysvětlen princip rozhodování o správnosti úsudků pomocí Vennových diagramů. Použijeme diagramy pro čtyři množiny P , D , T , $\check{C}$, které jsou množinami všech úspěšných řešitelů první, druhé, třetí, resp. čtvrté úlohy;



Obr. 1a

základní množinou bude množina všech soutěžících studentů. Představíme si Vennův diagram natolik zvětšený, že soutěžící budou moci dávat najevo svou příslušnost k jednotlivým množinám tím, že si stoupnou do příslušných políček diagramu.

Jsou-li splněny všechny podmínky úlohy, je řada políček prázdných, zatímco jiná jsou zaručeně neprázdná. Výsledné schéma zachycuje obr. 1a; lze k němu dospět pomocí tohoto vyjádření podmínek úlohy: Nikdo nestojí vně sjednocení oblastí P , D , T , $\check{C}$. Nikdo nestojí v těch políčkách oblasti $\check{C}$, která nejsou částmi aspoň dvou z oblastí P , D , T .



Obr. 1b

Nikdo nestojí vně oblasti P a přitom uvnitř oblasti D . Nikdo nestojí vně oblastí P , D a přitom uvnitř T . Nikdo nestojí vně oblastí P , D , T a přitom uvnitř oblasti $\check{C}$. Nikdo nestojí uvnitř průniku P , D a přitom vně T i $\check{C}$. Nikdo nestojí uvnitř T a přitom vně D a uvnitř $\check{C}$. Aspoň jeden student stojí v průniku oblastí D , $\check{C}$ (ze čtyř políček průniku jsou dvě prázdná, proto je proužek vyznačen jen přes zbývající dvě). Aspoň jeden student stojí v průniku vnějšků oblastí T , $\check{C}$ (ze čtyř políček průniku jsou tři prázdná, proto je znak neprázdnoty ve čtvrtém z nich).

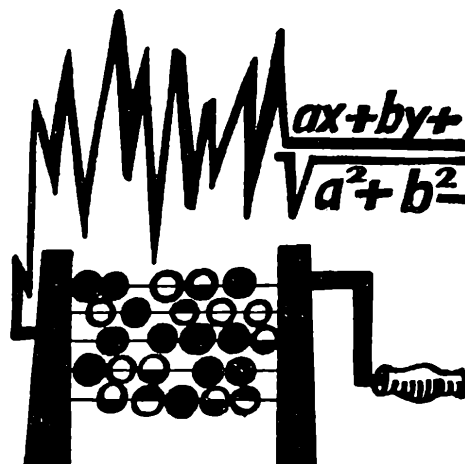
Obsah tvrzení každého ze sedmi „komentátorů“ znázorníme opět na Vennově diagramu. *První* tvrdí, že políčko ležící uvnitř P a vně všech ostatních oblastí, je neprázdné; to je patrné z obr. 1a, proto je úsudek správný. *Druhý* tvrdí, že je neprázdné svisle šrafované políčko na obr. 1b; tak jednoznačný závěr nelze na základě obr. 1a učinit, proto je jeho úsudek nesprávný. *Třetí* tvrdí, že oblast znázorněná na obr. 1b silným obtažením pěti políček je neprázdná; to je na obr. 1a zajištěno, proto je jeho úsudek správný. *Čtvrtý* tvrdí, že oblast složená z nešrafovaných políček ležících uvnitř silně obtažené oblasti na obr. 1b je neprázdná; to nelze zajistit na obr. 1a (všichni studenti mohou stát ve šrafovaném políčku), proto je jeho úsudek nesprávný. *Pátý* tvrdí, že sjednocení oblastí P , T obsahuje všechny prvky základní množiny; pohled na obr. 1a nás přesvědčuje, že jeho úsudek je správný. *Šestý*

tvrdí, že oblast složená z políček ležících uvnitř $\check{C}$ a vně P je neprázdná; pohled na obr. 1a nás přesvědčuje, že to není pravda, proto je jeho úsudek nesprávný. *Sedmý* tvrdí, že políčka ležící uvnitř D a vně $\check{C}$ jsou vesměs prázdná; z obr. 1a je patrné, že tomu tak nemusí být, proto je jeho úsudek rovněž nesprávný.

Jaroslav Šedivý

ČTENÍ NĚKTERÝCH NĚMECKÝCH MATEMATICKÝCH SYMBOLŮ:

$\frac{1}{2}$	— ein Halb	$\frac{2}{3}$	— zwei Drittel
$\frac{1}{3}$	— ein Drittel	$\frac{3}{4}$	— drei Viertel
$\frac{1}{4}$	— ein Viertel	$\frac{6}{13}$	— sechs Dreizehntel, sechs durch dreizehn
$\frac{1}{5}$	— ein Fünftel	$\frac{7}{8}$	— sieben Achtel, sieben durch acht
$\frac{1}{10}$	— ein Zehntel	$\frac{24}{39}$	— vierundzwanzig durch neununddreißig
$\frac{1}{25}$	— ein Fünfundzwanzigstel	0,1	— Null Komma eins
$\frac{1}{100}$	— ein Hundertstel	0,02	— Null Komma Null zwei, Null Ganze zwei Hundert- stel
$\frac{1}{1000}$	— ein Tausendstel	0,003	— Null Komma Null Null drei, Null Komma drei Tausendstel
$\frac{1}{2367}$	— eins durch zweitausend- dreihundertsiebenund- sechzig	0,45	— Null Komma vier fünf
+	— plus, und	0,0678	— Null Komma Null sechs sieben acht
—	— minus, weniger	12,304	— zwölf Komma drei Null vier
	— mal		
	— durch		
=	— gleich, ist gleich		
()	— runde Klammer		
[]	— eckige Klammer		
{ }	— geschweifte, geschwungene Klammer		



Hledejme základy množinové algebry

OLDŘICH ODVÁRKO, MFFKU Praha

V článku „Nebojme se množinové algebry“ jsme objasnili pojmy podmnožina dané množiny, rovnost množin, doplněk množiny vzhledem k základní množině, sjednocení a průnik množin. Ukázali jsme si, jak lze rozhodnout, zda dvě množiny jsou si rovny, zda dva různé zápisy charakterizují vždy touž množinu apod. Nyní se pokusíme objevit některé věty, které platí v množinové algebře. Jak však máme takové věty objevovat? Budeme jen naslepo hádat? To by asi nebylo rozumné.

Pokusme se využít svých znalostí z číselné algebry. Jistě všichni dobře znáte základní vlastnosti operací sčítání a násobení reálných čísel. Pro všechna reálná čísla a, b, c platí

$$a + b = b + a$$

komutativnost operace sčítání,

$$a \cdot b = b \cdot a$$

komutativnost operace násobení,

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

asociativnost operace sčítání,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

asociativnost operace násobení,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

distributivnost operace násobení vzhledem k operaci sčítání.

Pokusme se nyní zjistit, zda operace sjednocení a průnik množin mají obdobné vlastnosti. V pěti předcházejících zápisech nahradme písmena a, b, c označující libovolná čísla písmeny A, B, C označujícími libovolné podmnožiny dané základní množiny Z . Symbol „+“ nahradme znakem $\cup$ a symbol „ $\cdot$ “ znakem $\cap$. Ponecháme-li závorky a znaménka rovnosti beze změny, dostaneme tyto zápisy

$$A \cup B = B \cup A, \quad (1)$$

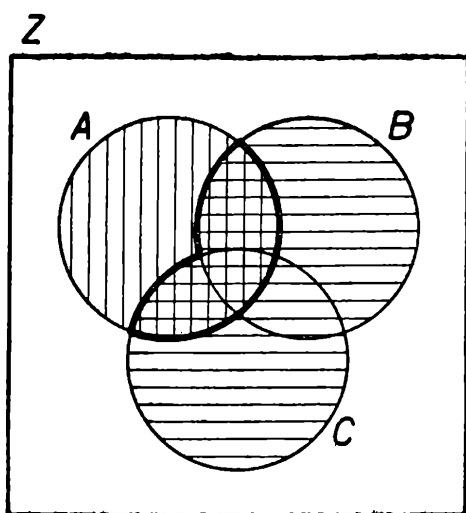
$$A \cap B = B \cap A, \quad (2)$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad (3)$$

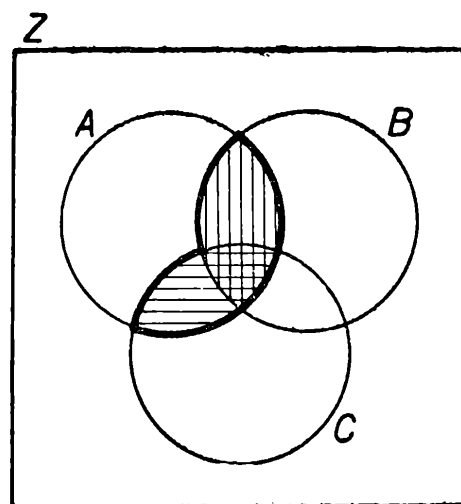
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad (4)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (5)$$

P o z n á m k a. Mohli jsme ovšem zaměňovat znak „+“ za znak $\cap$ a znak „ $\cdot$ “ za znak $\cup$. Způsob, který jsme zvolili, má však své oprávnění. Operace sčítání čísel a sjednocování množin spolu dosti úzce souvisejí. Jsou-li totiž dány dvě množiny bez společných prvků, potom počet prvků jejich sjednocení je roven součtu počtu prvků těchto množin.



Obr. 1a



Obr. 1b

Prosím, abyste nyní každý samostatně rozhodl, zda rovnosti uvedené v zápisech (1) až (4) platí pro libovolné množiny. Postačí, když k důkazu použijete Vennova diagramu pro dvě a tři množiny. Snadno dospějete k závěru, že vztahy (1) až (4) platí pro všechny množiny A, B, C . Jsou tedy operace sjednocení a průnik komutativní i asociativní.

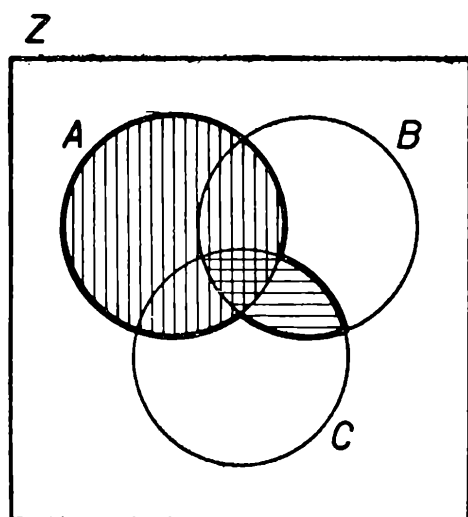
Rozhodněme nyní, zda vztah (5) platí pro libovolné tři množiny. Na obr. 1a je grafickým obrazem množiny $A \cap (B \cup C)$ oblast složená z dvakrát šrafovaných políček. Grafickým obrazem množiny $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ je oblast na obr. 1b složená ze všech políček aspoň jednou

vyšrafovaných. Porovnáním obrázků 1a, 1b dospíváme k závěru, že i vztah (5) platí pro všechny množiny **A**, **B**, **C**. Operace průnik množin je distributivní vzhledem k operaci sjednocení množin.

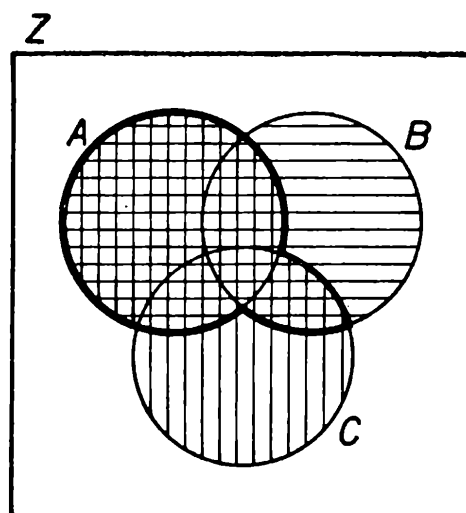
Všimněme si nyní jedné zajímavé okolnosti. Dva ze zápisů (1) až (5) se týkají komutativnosti, dva asociativnosti, ale pouze jediný distributivnosti operací. Zápis (2) se liší od zápisu (1) pouze v tom, že místo znaku $\cup$ je znak $\cap$. Právě tak je tomu u zápisů (3) a (4). Co by se stalo, kdybychom v zápisu (5) zaměnili znaky $\cup$ a $\cap$? Dostaneme pak výraz

$$\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) .} \quad (6)$$

Rozhodněme, zda množiny $\mathbf{A \cup (B \cap C)}$ a $\mathbf{(A \cup B) \cap (A \cup C)}$ jsou si rovny. Řešení je znázorněno na obrázcích 2a, 2b. Grafickým obrazem první množiny na obr. 2a je oblast složená ze všech políček aspoň jednou šrafovaných, grafický obraz druhé množiny se skládá ze všech políček dvakrát šrafovaných na obr. 2b. Vztah (6) tedy platí pro všechny množiny **A**, **B**, **C**. Operace sjednocení množin je distributivní vzhledem k operaci průnik množin.



Obr. 2a



Obr. 2b

Jestlipak obdobně v číselné algebře je operace sčítání distributivní vzhledem k operaci násobení, to je platí pro všechna čísla a, b, c vzorec $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$? Dosadíte-li např. za $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -3$, zjistíte, že tomu tak není. Získali jsme tak první ukázkou toho, že číselná a množinová algebra jsou rozdílné. Postupně objevíme celou řadu dalších rozdílů mezi oběma algebry.

V číselné algebře zavádíme mocniny a přirozené násobky čísel. Např. mocninu a^2 definujeme jako $a \cdot a$, dvojnásobek $2a$ čísla a , jako součet $a + a$.

V množinové algebře však zřejmě pro každou množinu $\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (7)$$

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}. \quad (8)$$

Pojmy obdobné pojmům mocnina čísla a přirozený násobek čísla není tedy třeba v množinové algebře vůbec zavádět. Jistě je zřejmé, že v číselné algebře neplatí vzorce obdobné vzorcům (7), (8). Rovnost $a \cdot a = a$ platí pouze pro $a = 1$ anebo $a = 0$, rovnost $a + a = a$ jenom pro $a = 0$.

Čísla 0 a 1 mají v číselné algebře význačnou roli. Pro všechna čísla a platí $a + 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot 1 = a$.

Budou platit obdobné věty v množinové algebře? Které množiny bychom měli použít při prepisování zápisů místo čísel 0 a 1? Snad by to mohly být prázdná množina a základní množina, které mají v množinové algebře důležitou úlohu. Přepišme tedy předcházející zápisy podle dřívější úmluvy a místo znaku 0 pišme všude znak $\emptyset$, místo znaku 1 znak $\mathbf{Z}$. Dostaneme tak

$$\mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}, \quad (9)$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{Z} = \mathbf{A}, \quad (10)$$

$$\mathbf{A} \cap \emptyset = \emptyset \quad (11)$$

Vztahy (9) až (11) zřejmě platí pro každou množinu $\mathbf{A}$. Všimněme si opět, že k prázdné množině se váží dva vzorce, k základní množině pouze jeden. Napišme místo znaku $\cap$ v (10) znak $\cup$. Množina $\mathbf{A} \cup \mathbf{Z}$ je zřejmě pro každou množinu $\mathbf{A}$ rovna množině $\mathbf{Z}$. Dostáváme tak další vzorec

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \quad (12)$$

Kdybychom tento vzorec přepsali zpět do číselné algebry, dostali bychom výrok: Pro každé číslo a platí rovnost $a + 1 = a$. Tento výrok však není pravdivý, a to znovu svědčí o značných rozdílech mezi číselnou a množinovou algebrou.

Dosud jsme hovořili o zákonech platných pro množinové operace sjednocení a průnik, mezi základní množinové operace však patří i tvoření doplňku dané množiny vzhledem k základní množině. V číselné algebře bychom marně hledali operaci, která by plně odpovídala této množinové operaci. Uvedeme si pět vzorců množinové algebry, v nichž vystupují doplňky množin, jde vesměs o vzorce, jejichž platnost snadno dokážete pomocí Vennových diagramů.

Pro každou množinu $\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{A}' = \mathbf{Z}, \quad (13)$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{A}' = \emptyset \quad (14)$$

$$(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}. \quad (15)$$

Pro každé dvě množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí

$$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \cap \mathbf{B}' \quad (16)$$

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \cup \mathbf{B}' \quad (17)$$

Posledními dvěma vzorci jste se zabývali již ve cvičeních k úvodnímu článku o množinové algebře. Jejich slovní formulace znějí trochu záhadně, ale vystihují podstatu věci (16): Doplněk sjednocení množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je roven průniku doplňků množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ (17): Doplněk průniku množin $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je roven sjednocení doplňků těchto množin.

V číselné algebře umíte na základě známých vět upravovat dané výrazy, zjednodušovat je, dokazovat další věty atd. Ukažme si několik příkladů, jak lze použít vzorce množinové algebry k zjednodušování množinových zápisů. „Počítání“ se znaky $\cup$ a $\cap$ bude pro vás zpočátku nezvyklé, postupujte tedy pomalu a zdůvodňujte každý krok pomocí vzorců (1) až (17).

V závěru řešení každého příkladu jsou po řadě uvedeny vzorce, které byly při úpravě výrazu použity.

Příklad 1. Zjednodušte výraz $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{A}')$.

Řešení

$$\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{A}') = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{A}') = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{Z} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}.$$

Použity byly vzorce (6), (13), (10).

Příklad 2. Zjednodušte množinový zápis $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}') \cap (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}')$.

Řešení

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}') \cap (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}') &= \mathbf{A} \cap \mathbf{B}' \cap \mathbf{A} \cap \mathbf{C}' = \\ &= (\mathbf{A} \cap \mathbf{A}) \cap \mathbf{B}' \cap \mathbf{C}' = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}' \cap \mathbf{C}' \end{aligned}$$

Použity byly vzorce (4), (2), (7).

Příklad 3. Dokažte, že pro libovolné tři množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})' = \mathbf{A}' \cup \mathbf{B}' \cup \mathbf{C}'$$

Řešení

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})' &= [(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}]' = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})' \cup \mathbf{C}' = \\ &= (\mathbf{A}' \cup \mathbf{B}') \cup \mathbf{C}' = \mathbf{A}' \cup \mathbf{B}' \cup \mathbf{C}' \end{aligned}$$

Použity byly vzorce (4), (17), (3).

Příklad 4. Dokažte, že pro všechny množiny $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ platí

$$(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}.$$

Řešení

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup B &= (A \cap B) \cup (B \cap Z) = (A \cap B) \cup (Z \cap B) = \\ &= (A \cup Z) \cap B = Z \cap B = B \end{aligned}$$

Použity byly vzorce (10), (2), (5), (12), (10).

Příklad 5. Zjednodušte množinový zápis

$$(A' \cap B \cap C) \cup [A' \cap (B \cup C')] \cup (A \cap B \cap C)$$

Řešení

$$\begin{aligned} &(A' \cap B \cap C) \cup [A' \cap (B \cup C')] \cup (A \cap B \cap C) = \\ &= (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup [A' \cap (B \cup C')] = \\ &= [(A \cup A') \cap (B \cap C)] \cup [A \cup (B \cup C')] = \\ &= [Z \cap (B \cap C)] \cup [A \cup (B' \cap C)] = \\ &= (B \cap C) \cup A \cup (B' \cap C) = A \cup (B \cap C) \cup (B' \cap C) = \\ &= A \cup [C \cap (B \cup B')] = A \cup (C \cap Z) = A \cup C \end{aligned}$$

Použity byly vzorce (2), (4), (5), (17), (13), (16), (3), (2), (5), (13), (10).

Při řešení celé řady matematických i slovních úloh bývá užitečné zjednodušovat množinové zápisy. Přesvědčíte se o tom v dalších článcích. Pořídte si zatím přehledný seznam základních zákonů množinové algebry, které jste již poznali a procvičte si dovednost aplikovat je při řešení úloh ve cvičení.

Cvičení.

1. Zjednodušte tyto množinové zápisy: a) $A \cup (B \cap A')$, b) $(A' \cup B) \cap (A' \cup B')$, c) $(A \cup B) \cap (A' \cap B')$, d) $(A \cup B) \cup (A' \cap B')$, e) $(A \cap B \cap C) \cup [B \cap (A' \cup C)']$, f) $(A' \cup B')' \cap (A' \cap B)'$, g) $(A' \cap C \cap B') \cup [(B' \cup A')' \cap C] \cup (A \cap C \cap B') \cup [(A \cup B')' \cap C]$.

2. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C, D platí:

a) $A \cap (B \cup C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$, b) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$, c) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$.

Porovnejte výroky a), c) s větami číselné algebry.

Výsledky cvičení k článku O. Odvárka.

1. a) $A \cup B$, b) A' , c) $\emptyset$, d) Z , e) $A \cap B$, f) $A \cap B$, g) C .

Množinová algebra řeší rodinné problémy

OLDŘICH ODVÁRKO, MFFKU, Praha

Dnes jsme pozváni na návštěvu do rodiny Novákových. Představuji vám její členy: babička, otec, matka, Jirka a Jana. Zúčastníme se jejich zasedání, které se má zabývat dvěma ožehavými rodinnými problémy, a pokusíme se jim při jejich řešení pomoci. Otec Novák vyslovil naději, že vzhledem k dobrým znalostem množinové algebry oba problémy úspěšně vyřešíme.

První problém: Odběr denního tisku.

Matka: Odebíráme tři deníky: Práci, Mladou frontu a Lidovou demokracii. Je to zbytečné, a proto je třeba, aby otec jako předplatitel zrušil u PNS odběr aspoň jednoho deníku. To je moje přání, vyslovte nyní každý svůj požadavek.

Babička: Mně je to celkem jedno, ale nesouhlasím s tím, abychom odhlásili Lidovou demokracii a přitom dále odebírali Mladou frontu.

Jana: Budu protestovat jedině v tom případě, když by se dále odebírala Práce a neodebírala Mladá fronta.

Otec: Mně by pouze nevyhovovalo, kdybychom odebírali Lidovou demokracii a přestali odebírat Práci.

Jirka: Mě jenom zajímá, které deníky bude vlastně nyní otec pro naši rodinu předplácet.

Zkusme tento problém vyřešit užitím vzorců množinové algebry, s nimiž jsme se seznámili v článku „Hledejme základy množinové algebry“. Za základní množinu zvolme množinu všech lidí a označme ji Z . Obdobně zavedme označení pro některé podmnožiny množiny Z :

- P množina všech lidí, kteří jsou předplatiteli deníku Práce,
- L množina všech lidí, kteří jsou předplatiteli deníku Lidová demokracie,
- M množina všech lidí, kteří jsou předplatiteli deníku Mladá fronta.

Naším úkolem je určit tu podmnožinu množiny Z , do níž bude patřit otec Novák jako předplatitel, bude-li respektovat přání všech členů rodiny. Babička si přeje, aby otec nepatřil do množiny $(L' \cap M)$, souhlasí tedy s tím, aby byl prvkem doplňku množiny $(L' \cap M)$ vzhledem k množině Z , tj., aby patřil do množiny $(L' \cap M)'$. Janě vyhovuje, když je otec prvkem množiny $(P \cap M)'$, otcův požadavek je patřit do množiny $(L \cap P)'$. Chceme-li vyhovět přání babičky, otce i Jany, musí otec patřit do množiny $(L' \cap M)' \cap (P \cap M)' \cap (L \cap P)'$. Z to-

hoto zápisu lze těžko na první pohled usoudit, s odběrem kterých titulů denního tisku budou všichni tři souhlasit. Upravme proto zápis naší množiny

$$\begin{aligned}
 & (L' \cap M)' \cap (P \cap M')' \cap (L \cap P')' = \\
 & = (L \cup M') \cap (P' \cup M) \cap (L' \cup P) = \\
 & = [((L \cup M') \cap P') \cup ((L \cup M') \cap M)] \cap (L' \cup P) = \\
 & = [(L \cap P') \cup (M' \cap P') \cup (L \cap M) \cup \\
 & \quad \cup (M' \cap M)] \cap (L' \cup P) = \\
 & = [(L \cap P') \cup (M' \cap P') \cup (L \cap M) \cup \emptyset] \cap (L' \cup P) = \\
 & = [(L \cap P') \cap (L' \cup P)] \cup [(M' \cap P') \cap \\
 & \quad \cap (L' \cup P)] \cup [(L \cap M) \cap (L' \cup P)] = \\
 & = [(L \cap P' \cap L') \cup (L \cap P' \cap P)] \cup [(M' \cap P' \cap L') \cup \\
 & \quad \cup (M' \cap P' \cap P)] \cup [(L \cap M \cap L') \cup (L \cap M \cap P)] = \\
 & = (\emptyset \cup \emptyset) \cup [(L' \cap M' \cap P') \cup \emptyset] \cup [\emptyset \cup (L \cap M \cap P)] = \\
 & = (L' \cap M' \cap P') \cup (L \cap M \cap P)
 \end{aligned}$$

Babička, otec i Jana budou tedy souhlasit se dvěma možnostmi odběru deníků: buď neodebírat žádný nebo odebírat všechny tři. Přihlédneme-li k matčinu přání, zbývá jediné řešení: Nepředplácet žádný deník.

Poznámka: Bude-li mít čtenář zájem, může si tento problém vyřešit také pomocí Vennova diagramu pro tři množiny.

Druhý problém: Kam na výlet?

Otec: O první červencové neděli pojedeme na výlet do Českého ráje.

Nejpozoruhodnějšími místy tam jsou hrady Kost a Trosky, lázně Sedmihorky, Hrubá Skála a Prachovské skály. Vyberte si, která z nich byste chtěli navštívit. Pokusím se splnit všechna vaše přání.

Matka: Ráda bych se podívala na Trosky, kromě toho do Sedmihorek nebo na Hrubou Skálu nebo na Kost.

Jirka: Mám jediné přání — navštívit Sedmihorky nebo Prachovské skály.

Jana: Právě tak jako matka bych chtěla navštívit Trosky, mimo to ještě Hrubou skálu nebo Kost.

Babička: Navštěvovat Trosky i Kost současně je zbytečné. Chtěla bych se podívat na Prachovské skály nebo Hrubou Skálu nebo na Kost.

Otec: Není vašich přání příliš mnoho? Mohu je všechna splnit?

Zvolme jako základní množinu množinu **Z** všech výletníků v první červencové neděli r. 1969. Zavedme označení pro některé podmnožiny množiny **Z**:

- K** množina všech výletníků, kteří navštíví Kost,
- T** množina všech výletníků, kteří navštíví Trosky,
- H** množina všech výletníků, kteří navštíví Hrubou Skálu,

P množina všech výletníků, kteří navštíví Prachovské skály,
S množina všech výletníků, kteří navštíví Sedmihorky.

Každý člen rodiny vyjádřil své přání, do které podmnožiny množiny **Z** by měla jejich rodina patřit. Zapišme postupně tyto podmnožiny pomocí písmen **K, T, H, P, S** a znamének množinových operací.

Matka: $T \cap (S \cup H \cup K)$.

Jirka: $(S \cup P)$.

Jana: $T \cap (H \cup K)$.

Babička: $(T \cap K)' \cap (P \cup H \cup K)$.

Chceme-li vyhovět přání všech, musí být rodina Novákových podmnožinou průniku všech těchto čtyř množin, tj. musí být částí množiny

$$T \cap (S \cup H \cup K) \cap (S \cup P) \cap T \cap \\ \cap (H \cup K) \cap (T \cap K)' \cap (P \cup H \cup K)$$

3 Zkusme upravit tento nepřehledný zápis množiny

$$\begin{aligned} & T \cap (S \cup H \cup K) \cap (S \cup P) \cap T \cap \\ & \cap (H \cup K) \cap (T \cap K)' \cap (P \cup H \cup K) = \\ & = (T \cap T) \cap (T' \cup K') \cap (S \cup (H \cup K)) \cap \\ & \cap (\emptyset \cup (H \cup K)) \cap (P \cup H \cup K) \cap (S \cup P) = \\ & = (T \cap T') \cup (T \cap K') \cap [(S \cap \emptyset) \cup (H \cup K)] \cap \\ & \cap (P \cup H \cup K) \cap (S \cup P) = \\ & = T \cap K' \cap (\emptyset \cup (H \cup K)) \cap (P \cup (H \cup K)) \cap (S \cup P) = \\ & = T \cap K' \cap [(P \cap \emptyset) \cup (H \cup K)] \cap (S \cup P) = \\ & = T \cap K' \cap (H \cup K) \cap (S \cup P) = \\ & = T \cap [(K' \cap H) \cup (K' \cap K)] \cap (S \cup P) = \\ & = T \cap K' \cap H \cap (S \cup P) = \\ & = T \cap K' \cap H \cap [(S \cap P') \cup (S \cap P) \cup (S' \cap P)] = \\ & = (T \cap K' \cap H \cap S \cap P') \cup \\ & \cup (T \cap K' \cap H \cap S \cap P) \cup \\ & \cup (T \cap K' \cap H \cap S' \cap P) \end{aligned}$$

4 Z posledního zápisu množiny vidíme, že existují tři různé varianty výletů, z nichž otec může kteroukoliv zvolit a přitom splní přání všech členů rodiny.

Poznámka: Upozorňuji čtenáře, že tento problém nelze řešit pomocí Vennova diagramu. Umíme totiž sestavit Vennův diagram nejvýše pro čtyři množiny a v řešení našeho problému se vyskytuje pět množin.

Cvičení: Řešte užitím vzorců množinové algebry všechny úlohy uvedené v článku „Množiny a Vennovy diagramy“ (Rozhlady č. 4, r. 1968/69).

Kontrola základních početních výkonů

ING. OTAKAR LACINA, ČKD-Praha

Úvod.

Kontrola je jednou z nejdůležitějších částí výpočtu. Pokud řešíme příklad obecně, je nejvýhodnější, pokud je to možno, provést výpočet dvěma navzájem nezávislými metodami. Opakování výpočtu ať obecného, nebo zvláštního touž metodou má to nebezpečí, že se dopustíme téže chyby jako při prvním řešení. Další kontrolou, i když ne postačující, je pečlivý rozbor obecných výsledků. Tento rozbor vede k hlubšímu porozumění řešeného případu. Je vhodné jej provádět i u dílčích výsledků obecného řešení. Konečně další užitečnou kontrolou je kontrola rozměrem.

Zásadně se vždy musíme snažit, abychom obecné řešení dovedli co nejdále a abychom počítání zvláštními čísly omezili na nejmenší možnou míru. Způsob numerického výpočtu volíme vždy již s ohledem na možnost kontroly. Například pro řešení soustav lineárních rovnic je výhodná Gaussova metoda (RMF č. 9., 1965—66, Řešení soustav lineárních rovnic) umožňující kontrolu po každém početním kroku. V řadě případů je lépe použít pro řešení takový způsob, kde se k výsledku postupně blížíme, jinými slovy, postupně zpřesňujeme přibližné řešení. Chybu v numerickém výpočtu pak poznáme snadno tím, že se od řešení vzdálíme, místo abychom se přibližili. Dílčí chyba nemusí mít na konečné správné řešení vůbec vlivu (RMF č. 6, 1964—65, Praktické řešení kubické rovnice; RMF č. 3, 1965—66, Praktické řešení rovnic vyšších stupňů; RMF č. 8, 1965—66, Řešení rovnic iterací). Konečně lze doporučit i takový postup, že nejprve řešení provedeme odhadem, pak početně, nebo teprve na logaritmickém pravítku a pak pomocí logaritmických tabulek.

V žádném případě nesmějí prováděné kontroly výpočet příliš komplikovat, nebo snad být složitější než vlastní výpočet. V dalším si ukážeme jednak běžné způsoby kontroly základních početních výkonů, jednak kontrolu pomocí jednomístných ciferných součtů.

1. Běžné způsoby kontroly základních početních výkonů

Výsledek sečítání můžeme kontrolovat tak, že sečítáme-li při prvním výpočtu směrem dolů, pak při kontrolním výpočtu sečítáme směrem nahoru. Měníme tedy pořadí sčítanců. Dále je možno při větším počtu

sčítanců rozdělit je do několika skupin, určit dílčí součty, jejichž sečtením dostáváme výsledný součet. Pro sčítání velkých čísel je výhodná kontrola křížovým součtem. Při této kontrole rozdělíme každého sčítance na skupiny o dvou nebo třech číslicích a vypočteme součty skupin skupin v řádcích, jednak skupin ve sloupcích. Potom součet řádkových součtů musí být roven součtu sloupcových součtů. Na příklad při sčítání devítimístných čísel

238	672	835		1745
671	281	379		1331
827	458	675		1960
1736	1411	1889		5036

rozdělíme každého sčítance do tří skupin po třech číslicích, určíme řádkové součty $238 + 672 + 835 = 1745$ atd. Kontrolní křížový součet $5036 = 1745 + 1331 + 1960 = 1736 + 1411 + 1889$. Výsledek sečítání je pak

$$\begin{array}{r} 1736 \\ 1411 \\ 1889 \\ \hline 1737412889 \end{array}$$

Výsledek odečítání kontrolujeme tak, že k rozdílu přičteme menšítelem a máme dostat menšence. Výsledek násobení kontrolujeme opětným násobením při změněném pořadí činitelů. Konečně kontrola dělení se provádí tak, že podíl násobíme dělitelem a připočteme zbytek. Máme pak dostat dělence.

2. Kontrola jednomístnými cifernými součty

Jednomístný ciferný součet daného čísla získáme tak, že u jeho cifer-
ného součtu provedeme opět ciferný součet a tento úkon opakujeme to-
likrát, až dostaneme ciferný součet vyjádřený pouze jednou číslicí.

Například pro dané číslo 55 876 je první ciferný součet 31, další už jednomístný ciferný součet je 4. Pro dané číslo 728 697 je první ciferný součet 39, další ciferný součet 12 a konečně další už jednociferný součet jsou 3.

Z uvedených příkladů plyne, že jednomístné ciferné součty získáme velmi snadno a můžeme je určovat z paměti.

2a. *Základní vlastnosti jednomístných ciferných součtů při sčítání.*
Pro jednomístný ciferný součet součtu několika sčítanců platí: Jedno-
místný ciferný součet součtu několika sčítanců je roven jednomístnému
cifernému součtu jednomístných ciferných součtů daných sčítanců. Této
podmínky, která sice není postačující, ale je nutná, využijeme pro kontro-
lu sečítání, jak ukážeme na následujícím příkladu.

25 372	19	10	1	
83 639	29	11	2	
26 754	24		6	
36 140	14		5	
171 905	23	5	14	5

2b. *Kontrola odečítání jednomístnými cifernými součty.* Na základě pravidla odstavce 2a. určíme pravidlo pro odčítání: Součet jednomístných ciferných součtů rozdílu a menšitele se rovná jednomístnému cifernému součtu menšence.

Uvedme příklad

7863	24	6	menšeneo
— 5326	16	7	menšitel
2537	17	8	rozdíl

jednomístný ciferný součet menšitele	7	
jednomístný ciferný součet rozdílu . .	8	
jednomístný ciferný součet menšence	15	6

2c. *Kontrola násobení jednomístnými cifernými součty.* Při násobení vynásobíme jednomístný ciferný součet násobence jednomístným ciferným součtem násobitele. Jednomístný ciferný součet výsledku tohoto násobení se rovná jednomístnému cifernému součtu součinu. Toto pravidlo lze rozšířit na libovolný počet činitelů násobení. Uvedme příklad.

$$2837 \quad 724 \quad 375 = 770 \, 245 \, 500.$$

$$\overset{\cdot}{2}0 \quad \overset{\cdot}{1}3 \quad 15 \quad \overset{\cdot}{3}0$$

$$\overset{\cdot}{2} \quad \overset{\cdot}{4} \quad 6 \quad 3$$

$$\text{Kontrola: } 2 \quad 4 \quad 6 = 48 \quad 12 \quad 3.$$

2d. *Kontrola dělení jednomístnými cifernými součty.* Kontrola dělení je dána současně pravidly odstavců 2a. a 2c. Vynásobíme jednomístný ciferný součet podílu jednomístným ciferným součtem dělitele. Výsledek upravíme na jednomístný ciferný součet a připočteme k němu jednomístný ciferný součet zbytku. Po úpravě na jednomístný ciferný součet máme dostat jednomístný ciferný součet dělence.

5	6	8
58 937,27	:	0,375
= 157 166		
21 43		
2 687		
62 2		
24 77		
2 270		
20	2	

Kontrola. $8 \cdot 6 = 48$ 12 $\begin{array}{r} 3 \\ + 2 \\ \hline 5 \end{array}$ (zbytek)

shoduje se s dělen-
cem.

2e. *Závěr odstavce 2.* Kontrola základních početních úkonů pomocí jednomístných ciferných součtů, i když není zcela jistá, protože vychází z podmínky nutné, ale nikoliv postačující, je pro svou jednoduchost velmi výhodná, zvláště při řešení školních úloh, kde ve většině případů nepoužíváme žádných početních pomůcek.

3. Důkaz správnosti kontroly jednomístnými cifernými součty

Každé celé kladné číslo, v jakékoliv číselné soustavě, můžeme napsat ve tvaru

$$N = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0,$$

kde z je přirozené číslo větší než 1 a nazývá se základ číselné soustavy a čísla a_i jsou celá čísla, pro něž platí $0 \leq a_i < z$.

Toto vyjádření lze rozšířit i na čísla N necelá. Při běžném počítání používáme soustavu desítkovou, kde $z = 10$. Tato soustava nemá proti jiným soustavám žádné výhodné vlastnosti. Je dána pouze tím, že lidé počítali nejprve na prstech. Naše babičky počítaly např. také v soustavě dvanáctkové: 12 kusů = 1 tucet, 12 tuctů = 1 veletucet a my dosud používáme při měření úhlů soustavu šedesátkovou $60'' = 1'$, $60' = 1^\circ$. V samočinných číslicových počítacích strojích se používá běžně i jiné soustavy, hlavně dvojková a osmičková. V soustavách, kde $z < 10$, používá se týchž číslic jako v soustavě desítkové. V soustavách, kde $z > 10$, je nutno zavést nové znaky, např. α, β, γ . Uvedme tabulku vyjádření různých množství v různých číselných soustavách.

Představme si dále, že máme např. hromadu zápalek, které je třeba sečíst. Můžeme postupovat tak, že uděláme svazečky po deseti kusech. Zápalky, které nám zbudou, dávají počet jednotek výsledku. Ze svazečků uděláme větší svazky po deseti svazečcích. Svazečky, které nám zbudou, dávají počet desítek výsledku. Do krabiček dáme po deseti svaz-

$z = 2$	$z = 3$	$z = 4$	$z = 5$	$z = 6$	$z = 7$	$z = 8$	$z = 9$	$z = 10$	$z = 11$	$z = 12$	$z = 13$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
100	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
101	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4	4
110	12	11	10	5	5	5	5	5	5	5	5
111	20	12	11	10	6	6	6	6	6	6	6
1111	21	13	12	11	10	7	7	7	7	7	7
1000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8	8
1001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9	9
1010	101	22	20	14	13	12	11	10	α	α	α
1011	102	23	21	15	14	13	12	11	10	β	β
1100	110	30	22	20	15	14	13	12	11	10	γ
1101	111	31	23	21	16	15	14	13	12	11	10
1110	112	32	24	22	20	16	15	14	13	12	11
1111	120	33	30	23	21	17	16	15	14	13	12
10 000	121	100	31	24	22	20	17	16	15	14	13
10 001	122	101	32	25	23	21	18	17	16	15	14
10 010	200	102	33	30	24	22	20	18	17	16	15
10 011	201	103	34	31	25	23	21	19	18	17	16
10 100	202	110	40	32	26	24	22	20	19	18	17
10 101	210	111	41	33	30	25	23	21	1 α	19	18
10 110	211	112	42	34	31	26	24	22	20	1 α	19
10 111	212	113	43	35	32	27	25	23	21	1 β	1 α
11 000	220	120	44	40	33	30	26	24	22	20	1 β
11 001	221	121	100	41	34	31	27	25	23	21	1 γ
11 010	222	122	101	42	35	32	28	26	24	22	20

cích. Svazky, které nám zbudou, dávají počet stovek výsledků atd., až hromadu zápalek spočítáme. Můžeme však dělat svazečky po pěti kusích, svazky po pěti svazečkách, krabičky po pěti svazcích. Zbylé kusy, svazečky a svazky atd. nám opět dají koeficienty $a, a_1, a_2, \dots$, ovšem tentokrát v soustavě pětkové. Tímto způsobem postupujeme při převodu čísla z desítkové soustavy do soustavy jiné. Dané číslo dělíme základem z a zbytek nám dá koeficient a_0 . Získaný podíl dělíme opět z , zbytek nám dá koeficient a_1 atd., až poslední dělení, jehož podíl je menší než základ z , dává koeficient a_n a zbytek koeficient a_{n-1} . Výpočet samozřejmě vhodně graficky upravíme. Např. předvedme číslo 397 v desítkové soustavě do soustavy osmičkové.

$$\begin{array}{r|l}
 397_{10} = 615_8 & \\
 \hline
 49 & 5 \\
 6 & 1 \\
 \text{podíly} & \text{zbytky}
 \end{array}$$

Kontrola. $6 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 5 = 384 + 8 + 5 = 397$

Pro základní početní úkony v jiných číselných soustavách platí tatáž pravidla jako v soustavě desítkové. Je však nutno dbát příslušných řádových přechodů.

Obraťme nyní svou pozornost na dělení devíti. Dělíme-li jakoukoliv mocninu deseti, tj. 10^m , kde $m \geq 0$ je celé kladné číslo, zbude vždy jednotka. Máme-li tedy celé kladné číslo N a dělíme-li je devíti, můžeme psát

$$N : 9 = (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n) : 9 = \\ = M + \frac{1}{9} (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) = M + \frac{1}{9} \sum_{k=0}^n a_k,$$

kde M je násobek devíti a $\sum_{k=0}^n a_k$ je ciferný součet. O ciferném součtu

$$\sum_{k=0}^n a_k = A \text{ platí } 1 \leq A \leq 9(n+1).$$

Provedeme opět dělení devíti

$$A : 9 = (b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + \dots + b_{r-1} \cdot 10^{r-1} + b_r \cdot 10^r) : 9 = \\ = P + \frac{1}{9} \sum_{k=0}^r b_k.$$

Tak pokračujeme, až ciferný součet je jednomístný. Z uvedeného však víme, že zbytek daného čísla v desítkové soustavě po dělení devíti dává počet jednotek tohoto čísla v devítkové soustavě. Při kontrole jednomístnými cifernými součty srovnáváme tedy vlastně počty jednotek těchto čísel v devítkové soustavě. Z toho plyne, že splněním kontroly plníme pouze podmínku nutnou, ale nikoli postačující.

Podobně jako jsme při jednomístném ciferném součtu využili pro kontrolu jednotek devítkové soustavy, lze pro kontrolu využít také výhodně jednotek soustavy jedenáctkové. Potřebujeme tedy opět co nejrychleji a co možná nejjednodušším způsobem určit zbytek po dělení jedenácti. Po dělení mocnin deseti číslem jedenáct dostáváme zbytek jedna, pokud je mocnitel ve tvaru $(2k)$, tj. $10^2, 10^4, \dots$. Pokud je mocnitel ve tvaru $(2k+1)$, musíme vždy jednotku přidat, abychom dostali celý podíl. Je tedy v tomto případě zbytek záporný. Máme-li celé kladné číslo N a dělíme-li jej jedenácti, můžeme psát

$$N : 11 = (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n) : 11 = \\ = M + \frac{1}{11} (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots),$$

kde M je násobek jedenácti. Výraz $(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots) = B$ může

být buď kladný, nebo záporný a jeho velikost se může pohybovat v mezích

$$\frac{-2k}{2} \cdot 9 \leq B \leq \frac{2k}{2} \cdot 9,$$

kde $(2k)$ je nejvyšší sudý mocnitel. Prakticky je číslo B vždy tak velké, že další dělení můžeme provést z paměti. Pokud je číslo B záporné, je zbytkem dělení doplněk nejbližšího vyššího násobku jedenácti. Provedme nyní kontrolu příkladů z odstavce 2 pomocí jedenáctkové soustavy.

Sčítání

25 372	(7 — 12)	(— 5)	6	
83 639	(23 — 6)	(17)	6	
26 754	(13 — 11)	.	2	
36 140	(4 — 10)	(— 6)	5	
<u>171 905</u>	(21 — 2)	(19)	8	<u>19</u> 8

Odčítání

7863	(11 — 13)	(— 2)	9
— 5326	(9 — 7)		2
<u>2537</u>	(12 — 5)		7

Kontrola. $2 + 7 = 9$

Násobení

2837	734 . 375 = 770 245 500	
2837	(15 — 5)	10
734	(11 — 2)	9
375	(8 — 7)	1

Kontrolní součin.	$10 \cdot 9 \cdot 1 = 90$	(— 9)	2
Součin příkladu.	770 245 500	(16 — 14)	2

Dělení

$$58\,937,27 : 0,375 = 157\,166 + \frac{20}{375}$$

58 937 270	(13 — 28)	(— 15)	7	dělenec
375	(8 — 7)	.	1	dělitel
157 166	(12 — 14)	(— 2)	9	podíl
20 .	(— 2).	.	9	zbytek

Kontrola. $9 \cdot 1 = 9$ dělitel . podíl

$$+ 9 \quad + \text{zbytek}$$

18 (8 — 1) 7 dělenec.

Použijeme-li při kontrole výpočtu jak kontroly pomocí devítkové soustavy, tak i kontroly pomocí jedenáctkové soustavy (jsou obě velmi jednoduché), pak máme praktickou jistotu, že výsledek je správný.

Rovnice, ktoré obsahujú celú časť neznámej

JOZEF ELIAŠ, Bratislava

(Dokončenie)

Veta 3. Rovnica (10) nemá riešenie, ak α nie je celé číslo. Rovnica (10) má riešenie vtedy a len vtedy, keď platí nerovnosť (12) alebo (13), pričom α je celé číslo.

Rovnicu (10), ak existuje jej riešenie, riešime tak, že riešime s ňou ekvivalentnú zloženú nerovnosť (11), čiže systém nerovností

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &< \alpha + 1, \\ ax^2 + bx + c &\geq \alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

Každé riešenie systému nerovností (14) je aj riešením rovnice (10), pretože systém nerovností (14) a rovnica (10) sú ekvivalentné.

Príklad 2. Riešme rovnicu

$$[3x^2 - 7x + 5] = -1.$$

Riešenie. Ak porovnáme danú rovnicu s rovnickou (10), vidíme, že $a = 3$, $b = -7$, $c = 5$, $\alpha = -1$. Pretože nutná a postačujúca podmienka (12)

$$-- \frac{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}{12} = \frac{11}{12} < (-1) + 1$$

neplatí, podľa vety 3 daná rovnica nemá riešenie.

Príklad 3. Riešme rovnicu

$$[-x^2 + 5x + 5] = 1. \quad (15)$$

Riešenie. Ak porovnáme rovnicu (15) s rovnicou (10), vidíme, že $a = -1$, $b = 5$, $c = 5$, $\alpha = 1$. Pretože nutná a postačujúca podmienka (13)

$$-- \frac{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}{4 \cdot (-1)} = \frac{45}{4} > 1$$

je splnená, rovnica (15) má riešenie.

Rovnica (15) je ekvivalentná so zloženou nerovnosťou

$$-x^2 + 5x + 5 - 1 < 1 \leq -x^2 + 5x + 5,$$

čiže so systémom nerovností

$$\begin{aligned}x^2 - 5x - 3 &> 0, \\x^2 - 5x - 4 &\leq 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Riešením systému nerovností (16) je množina všetkých čísel x , pre ktoré platí

$$\frac{5 - \sqrt{41}}{2} \leq x < \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$$

a

$$\frac{5 + \sqrt{37}}{2} < x \leq \frac{5 + \sqrt{41}}{2}.$$

Pretože rovnica (15) a systém nerovností (16) sú ekvivalentné, je riešenie systému nerovností (16) aj riešením rovnice (15).

Riešenie rovníc

$$[x] = F(x), \tag{17}$$

$$[ax + b] = F(x), \tag{18}$$

$$[ax^2 + bx + c] = F(x), \tag{19}$$

kde $F(x)$ je funkcia, môže byť komplikované. Keď funkcia $F(x)$ je polynóm prvého alebo druhého stupňa, rovnice (17), (18), (19) sú ekvivalentné so systémom lineárnych alebo kvadratických nerovností, s určitou podmienkou, ktorý vieme riešiť.

Uvažujme napr. o rovnici

$$[ax^2 + bx + c] = \alpha x + \beta, \tag{20}$$

kde $a \neq 0$, $b, c, \alpha \neq 0$, β sú reálne čísla.

Ak $\alpha x + \beta$ je celé číslo, potom rovnica (20) je ekvivalentná so zloženou nerovnosťou

$$ax^2 + bx + c - 1 < \alpha x + \beta \leq ax^2 + bx + c,$$

čiže so systémom nerovností

$$\begin{aligned}ax^2 + (b - \alpha)x + c - \beta - 1 &> 0, \\ax^2 + (b - \alpha)x + c - \beta &\geq 0,\end{aligned}\tag{21}$$

s podmienkou, že $\alpha x + \beta$ je celé číslo.

Ak systém (21) má riešenie, toto riešenie je buď nejaké číslo, nejaký interval, alebo dva intervaly. V riešení systému (21) treba zistiť všetky čísla, v ktorých funkcia $y = \alpha x + \beta$ má celočíselné hodnoty. Všetky riešenia rovnice (20) sú všetky tie čísla x , z riešení systému (21), v ktorých funkcia $y = \alpha x + \beta$ nadobúda celočíselné hodnoty.

Príklad 4. Riešme rovnicu

$$[x^2 - 3x + 2] = x - 1. \tag{22}$$

Riešenie. Ak $x - 1$ je celé číslo, potom rovnica (22) je ekvivalentná so zloženou nerovnosťou

$$x^2 - 3x + 2 - 1 < x - 1 \leq x^2 - 3x + 2,$$

čiže so systémom nerovností

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 2 &< 0, \\ x^2 - 4x + 3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Riešením systému nerovností (23) je množina všetkých čísel x , pre ktoré platí

$$2 - \sqrt{2} < x \leq 1 \quad \text{a} \quad 3 \leq x < 2 + \sqrt{2}. \quad (24)$$

Zistíme, v ktorých číslach x , pre ktoré platí (24), funkcia $f(x) = x - 1$ nadobúda celočíselné hodnoty. Najskôr zistíme, aké hodnoty nadobudne funkcia $f(x)$, keď pre x platí (24). Ak

$$2 - \sqrt{2} < x \leq 1,$$

potom

$$1 - \sqrt{2} < x - 1 \leq 0.$$

Ak

$$3 \leq x < 2 + \sqrt{2},$$

potom

$$2 \leq x - 1 < 1 + \sqrt{2}.$$

Odtiaľ vyplýva, že funkcia $f(x)$ v číslach x , pre ktoré platí (24), nadobúda celočíselné hodnoty 0 a 2. Zistíme, pre ktoré čísla x , pre ktoré platí (24) je $x - 1 = 0$ a $x - 1 = 2$. Sú to čísla $x_1 = 1$ a $x_2 = 3$. Riešením rovnice (22) sú teda čísla 1 a 3.

P o z n á m k a. Riešenie rovnice (20) sa môže zjednodušiť, ak vieme, pre ktoré čísla x je výraz $\alpha x + \beta$ celé číslo.

Napríklad v rovnici

$$[x^2 - 5x + 6] = -x + 6$$

pravá strana $-x + 6$ je celé číslo vtedy a len vtedy, keď x je celé číslo. Pri týchto číslach aj $x^2 - 5x + 6$ je celé číslo. Daná rovnica pre celé čísla x je ekvivalentná s rovnicou

$$x^2 - 5x + 6 = -x + 6,$$

čiže s rovnicou

$$x^2 - 4x = 0.$$

Jej riešenia sú $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, čo sú riešenia aj danej rovnice.

Rovnicu (20) možno riešiť aj graficky. Graficky nájdeme korene rovnice (20) ako x -ové súradnice priesečníkov grafu funkcie

$$f(x) = [ax^2 + bx + c]$$

a grafu funkcie

$$F(x) = \alpha x + \beta.$$

Za tým účelom musíme zostrojiť graf funkcie $f(x)$. Graf tejto funkcie je symetrický podľa priamky

$$x = -\frac{b}{2a},$$

kde číslo

$$-\frac{b}{2a}$$

je x -ová súradnica vrcholu paraboly

$$y = ax^2 + bx + c.$$

„Vrcholom“ grafu funkcie $f(x)$ sú všetky body (x, α) , kde

$$\alpha = \left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right]$$

a x sú všetky riešenia rovnice

$$[ax^2 + bx + c] = \alpha.$$

Ďalšie body (x, α) grafu funkcie $f(x)$ dostaneme tak, že za ďalšie hodnoty α v rovnici

$$[ax^2 + bx + c] = \alpha$$

treba vziať všetky celé čísla väčšie ako

$$\left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right],$$

ak $a > 0$ a všetky celé čísla menšie ako

$$\left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right],$$

ak $a < 0$; za x všetky riešenia prislúchajúcich rovníc.

Tak napr. pri zostrojovaní grafu funkcie

$$f(x) = [x^2 - 3x + 2],$$

nájďme najskôr číslo

$$\alpha = \left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right] = \left[-\frac{9 - 8}{4} \right] = -1$$

Bodmi „vrcholu“ grafu funkcie $f(x)$ budú všetky body (x, α) , kde $\alpha = -1$ a x sú všetky riešenia rovnice $[x^2 - 3x + 2] = -1$, t.j. všetky čísla x , pre ktoré platí $1 < x < 2$.

Pretože $a = 1 > 0$, ďalšie body grafu funkcie $f(x)$ budú všetky body (x, α) , kde $\alpha = 0$ a x sú všetky riešenia rovnice $[x^2 - 3x + 2] = 0$, tj. všetky čísla x , pre ktoré platí

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x \leq 1$$

a

$$2 \leq x < \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ďalšie body grafu funkcie $f(x)$ budú všetky body (x, α) , kde $\alpha = 1$ a x sú všetky riešenia rovnice $[x^2 - 3x + 2] = 1$, tj. všetky čísla x , pre ktoré platí

$$0 < x \leq \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

a

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq x < 3.$$

Ďalšie body grafu funkcie $f(x)$ budú všetky body (x, α) , kde $\alpha = 2$ a x sú všetky riešenia rovnice $[x^2 - 3x + 2] = 2$, tj. všetky čísla x , pre ktoré platí

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} < x \leq 0$$

a

$$3 \leq x < \frac{3 + \sqrt{13}}{2};$$

atď.

Výpočet dekadického logaritmu čísla

JOSEF DÍTĚ, SVVŠ, Sušice

V článku ukážeme jednu metodu výpočtu dekadických logaritmov, ktorá sice není najvýhodnejší (výpočty logaritmov pro logaritmické tabulky se provádějí jinak), ale je zcela elementární.

Budiž $x = \log a$; tj. $10^x = a$. Předpokládejme, že $1 < a < 10$, pak $0 < x < 1$. Vyjádřeme číslo x v dvojkové soustavě

$$x = z_1 \cdot 2^{-1} + z_2 \cdot 2^{-2} + z_3 \cdot 2^{-3} + \dots + z_k \cdot 2^{-k} + \dots \quad (1)$$

kde pro všechna přirozená čísla k je buď $z_k = 0$ nebo $z_k = 1$. Vyloučíme-li rozvoje, ve kterých by pro skoro všechna k platilo, že $z_k = 1$, pak číslo $x = \log a$ lze jediným způsobem vyjádřit ve tvaru nekonečné řady (1). Chceme určit koeficienty z_k .

Z rovnosti $10^x = a$ vyplývá

$$10^{2x} = a^2. \quad (2)$$

Protože je $1 < a < 10$, je $1 < a^2 < 100$, a tedy $0 < 2x < 2$. Podle (1) je

$$2x = z_1 + z_2 \cdot 2^{-1} + z_3 \cdot 2^{-2} + \dots + z_k \cdot 2^{-k+1} + \dots \quad (3)$$

Je-li $1 < a^2 < 10$, je $0 < 2x < 1$ a $z_1 = 0$; je-li $10 \leq a^2 < 100$, je $1 \leq 2x < 2$ a $z_1 = 1$.

Z rovnosti (2) vyplývá

$$10^{2x-z_1} = a^2 \cdot 10^{-z_1} \quad (4)$$

Z rovnosti (3) vyplývá

$$2x - z_1 = z_2 \cdot 2^{-1} + z_3 \cdot 2^{-2} + \dots + z_k \cdot 2^{-k+1} + \dots \quad (5)$$

Snadno dokážeme, že je vždy

$$1 \leq a^2 \cdot 10^{-z_1} < 10. \quad (6)$$

Platí tudíž buď $1 < a^2 < 10$, pak $0 < 2x < 1$, $z_1 = 0$ a $0 < 2x - z_1 < 1$, nebo $10 \leq a^2 < 100$, pak $1 \leq 2x < 2$, $z_1 = 1$ a $0 \leq 2x - z_1 < 1$.

Umocníme-li rovnost (4) dvěma, dostaneme

$$10^{2 \cdot (2x-z_1)} = a^4 \cdot 10^{-2z_1} \quad (7)$$

Z (5) dostaneme

$$2 \cdot (2x - z_1) = z_2 + z_3 \cdot 2^{-1} + z_4 \cdot 2^{-2} + \dots + z_k \cdot 2^{-k+2} + \dots \quad (8)$$

Protože platí (6) je $1 \leq a^4 \cdot 10^{-2z_1} < 100$, je tedy podle (7) buď $0 \leq 2 \cdot (2x - z_1) < 1$ a $z_2 = 0$, nebo $1 \leq 2 \cdot (2x - z_1) < 2$ a $z_2 = 1$. Tím je určen druhý koeficient. Stejně postupujeme při určování všech dalších koeficientů.

Postup při určování koeficientů $z_1, z_2, z_3, \dots$ v rozvoji (1) bude tento:

1. Určíme a^2 , bude-li $\begin{cases} 1 < a^2 < 10, \text{ pak } z_1 = 0 \\ 10 \leq a^2 < 100, \text{ pak } z_1 = 1 \end{cases}$
2. Určíme $(a^2 \cdot 10^{-z_1})^2 = a^4 \cdot 10^{-2z_1}$, $\begin{cases} 1 < a^4 \cdot 10^{-2z_1} < 10, \text{ pak } z_2 = 0 \\ 10 \leq a^4 \cdot 10^{-2z_1} < 100, \text{ pak } z_2 = 1. \end{cases}$
3. Určíme $(a^4 \cdot 10^{-2z_1-z_2})^2 = \begin{cases} 1 < a^8 \cdot 10^{-4z_1-2z_2} < 10, \text{ pak } z_3 = 0 \\ = a^8 \cdot 10^{-4z_1-2z_2}, \text{ bude-li } 10 \leq a^8 \cdot 10^{-4z_1-2z_2} < 100, \text{ pak } z_3 = 1 \end{cases}$

Čísla $a^2, a^4 \cdot 10^{-2z_1}, a^8 \cdot 10^{-4z_1-2z_2}$ určujeme podle tabulek druhých mocnin.



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 47, 1968-69

Vydává

ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. O T A S E T Z E R
nositel vyznamenání Za vynikající práci
VÝKONNÝ REDAKTOR: STANISLAV H O R Á K

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústř. insp. MŠ; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; zasl. učitel Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, DrSc, ČVUT, Praha; dr. Oldřich Lepil, CSc, PU, Olomouc; prof. dr. Cyril Palaj, PF-UPJŠ, Košice; Evžen Říman, CSc, nositel vyznamenání Za vynikající práci, ČVUT, Praha; dr. Jiří Sedláček, CSc, ČSAV, Praha; dr. Ladislav Sehnal, CSc, ČSAV Ondřejov; Jaroslav Šedivý, KU, Praha; Ing. dr. Václav Šindelář, CSc, MÚ, ÚNM, Praha; doc. dr. Ladislav Thern, VŠLD, Zvolen; prof. dr. Ján Vanovlč, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telefon 24 45 29.

O B S A H

Matematika

Bednařík Milan: Činí vám potíže kreslení sinusoidy	471
Brejcha Josef: Některé speciální případy trojic kružnic, protínajících se v jednom bodě	359, 413
Dítě Josef: Výpočet dekadického logaritmu čísla	469
Drábek Jaroslav: Souvislost geometrických posloupností s pravoúhlými trojúhelníky	4
Drábek Karel: K přibližné konstrukci čísla e	274
Drs Ladislav: Použití čtvercové sítě k rektifikaci kružnice	271
Dušek František: Periodické funkce vyjádřené druhými mocninami	356, 404
Eliáš Jozef: O celej časti reálneho čísla a funkcii $y = [x]$	257, 326, 365
Eliáš Jozef: Rovnice, ktoré obsahujú celú časť neznámej	401, 465
Frýdecký Emil: Otáčení soustavy souřadnic	60, 109
Geryk Milan: Trojúhelníkové souřadnice nehomogenní	209
Horák Stanislav ml.: Zajímavé skupiny čísel	166
Horák Stanislav st.: Úloha o maximu	1
Janeček František: Součet druhých a třetích mocnin přirozených čísel	58
Jucovič Ernest: Dva trojúhelníky vpísané do tej istej kružnice	353
Kobza Jiří: Analytické vyjádření některých rovinných útvarů	311
Kotyk Josef: Reálná čísla	217
Kuřina František: Kosinová věta	281
Kůst Jiří: O některých vztazích v trojúhelníku	222, 267
Lacina Otakar: Řešení diofantických rovnic	263
Lacina Otakar: Kontrola základních početních výkonů	458
Leminger Otakar: O střechanech a o určování jejich objemů	115, 174, 226
Libicher Jaroslav: O jedné konstrukci pravidelného pětiúhelníka	318
Marek Jiří: Umocnění úseček celými čísly	278
Odvárko Oldřich: Rovnost množin a Vennovy diagramy	157
Odvárko Oldřich: Nebojme se množinové algebry	305, 369
Odvárko Oldřich: Hledejme základy množinové algebry	449
Odvárko Oldřich: Množinová algebra řeší rodinné problémy	455
Souček Pavel: Hovoříme se samočinným počítačem	280, 322
Sarounová Alena: O umění negovat	373
Šedivý Jaroslav: Vstupme do množinového ráje	53, 105
Šedivý Jaroslav: Alespoň jeden, nejvýše jeden, právě jeden	407
Trávníček Stanislav: Asteroida v autobusu	171
Zapletal Ivo: Tautologie neboli zákony logiky	162, 213

Fyzika

Bartuška Pavel: Použití elektronové mikroskopie ke studiu kovů	387, 420
Jirásek František: Moment setrvačnosti	340
Kodeš Jiří: Luminescence	381
Kolesnikov V.—Záhejský J.: Mössbauerův jev	118, 191
Kolesnikov V.—Záhejský J.: Jak je to s experimentálním ověřením teorie relativity?	234, 289
Kraus Ivo: Magnetismus jako zdroj pohybu	424
Machalický Jiří: O gravitačním zákonu Newtonově	6, 68
Náter Ivan: Přenos tepla	10, 84
Pacáková Iva: O šikmém rázu drsných těles	335
Půlpán Zdeněk: Úlohy řešené pomocí energie a pracovních diagramů	344
Rozsival Miroslav: Vlnové vlastnosti mikročástic	183, 228
Smrž Ladislav: Zenerova dioda jako etalon elektrického napětí	337
Smrž Ladislav: Použití interpretace při přesném měření	282
Stach Vojtěch: Vztah redukované délky a vzdálenosti těžiště od osy otáčení fyzického kyvadla	284
Vašek Lubomír: Jednoduché odvození zákonů zobrazení odrazem a lomem na kuželové ploše z Huygensova principu	390, 426, 473

Deskriptivní geometrie

Hradecký František: O jisté kuželové ploše druhého st. jako geometrickém místu bodu	330, 378, 416
Kuniak Matúš: Niektoré dotyčnicové vlastnosti stredových kuželosečiek	238
Lanta Oldřich: Průsečíky přímky s kuželosečkou	280
Polcar Pavel: O jedné zajímavé vlastnosti ortocentrického čtyřstěnu	180

Astronomie

Široký J. — Široká M.: Pozorujeme dvojhvězdy	429
Široký J. — Široká M.: Cirkumpolární souhvězdí	433
Široká M. — Široký J.: Hmotnosti dvojhvězd	478

Matematická olympiáda

Horák Stanislav: Desátá mezinárodní matematická olympiáda	123, 195
Horák S. — Setzer O.: Po velkém matematickém boji	17
Ma + Vy: XVIII. ročník matematické olympiády	14
Ma + Vy: XIX. ročník matematické olympiády	479
Setzer Ota: X. mezinárodní matematická olympiáda	74

Fyzikální olympiáda

Hofman Konrád: Elektronkové zesilovače	29, 81, 138
Košťál Rostislav: II. mezinárodní fyzikální olympiáda	127
Košťál Rostislav: Příklady z II. mezinárodní fyzikální olympiády	392, 435
Zámečník Jozef: Základy vektorové algebry	75, 130
Soutěžní příklady fyzikální olympiády	19
ÚV MO: XI. ročník soutěže Fyzikální olympiáda	482

Naše soutěž

Soutěžní příklady a řešení úloh loňské soutěže	42, 89, 92, 93, 142, 200, 241, 294, 349, 489
--	--

Různé

Horský J. — Lenc M.: Akademik L. D. Landau zemřel	50
Jozífek Vítězslav: Příjímací zkouška v minulém století	255
Kotyk Josef: Hrst vzpomínek	102, 149
Kotyk Josef: Zkapalnění helia	253
Santholzer Vilém: Ze života objevitele štěpení atomového jádra	439
Sedláček Jiří: Kdo byl Bedřich Pospíšil?	488
Zelenka Miloslav: Čtení některých německých matematických symbolů	448
Zelenka Miloslav: Slovníček německo-český na obálkách č. 1 až 10	

Matematické zábavy

Šedivý Jaroslav: Úlohy Mm	109, 249, 443, 448
Šedivý Jaroslav: Vennovy diagramy v roli rozhodčího	244, 300
Šedivý Jaroslav: Záhady Zmatlíkova zápisníku	303, 398
Matematické zábavy	44, 98, 153, 207, 251, 396, 442
Řešení matematických zábav z minulého ročníku	155

Fyzikální zajímavosti

Bednařík Milan: Záhadné fontány	48
Bednařík Milan: Čím pomaleji, tím dříve	444
Fyzikální zajímavosti	252, 350, 397

Recenze

Drechsler R.: V. Šindelář — L. Smrž, Nová měrová soustava	351
Dubský Jaromír: Ma + Vy, XVI. ročník MO	389
Rohlíček Jiří: St. Šmakal — Br. Budínský: Goniometrické funkce	101
Zemánek Jaroslav: Jiří Jarník, Komplexní čísla a funkce	100

P ř í k l a d. Určete $\log 2$ na čtyři desetinná místa.

Pro $x = \log 2$ platí $0 < x < 1$. Vyjádříme číslo x v dvojkové soustavě

$$x = z_1 \cdot 2^{-1} + z_2 \cdot 2^{-2} + z_3 \cdot 2^{-3} + \dots$$

Podle (9) určíme koeficienty $z_1, z_2, z_3, \dots$ a dostaneme neúplný rozvoj čísla x v dvojkové soustavě

$$x = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} + 2^{-13} + 2^{-14} + 2^{-15} + 2^{-16} \quad (10)$$

Vypočteme-li součet (10), dostaneme $\log 2 = 0,3010$. Chceme-li určit logaritmus čísla na více desetinných míst, musíme určovat velký počet koeficientů $z_1, z_2, z_3, \dots$ — i když jejich určování je snadné. Jestliže bychom měli tabulky desátých mocnin čísel, pak by bylo výhodnější vyjádřit číslo x ve tvaru

$$x = z_1 \cdot 10^{-1} + z_2 \cdot 10^{-2} + z_3 \cdot 10^{-3} + \dots$$

Postup při určování koeficientů $z_1, z_2, z_3, \dots$ by byl obdobný.

Činí vám potíže kreslení sinusoidy?

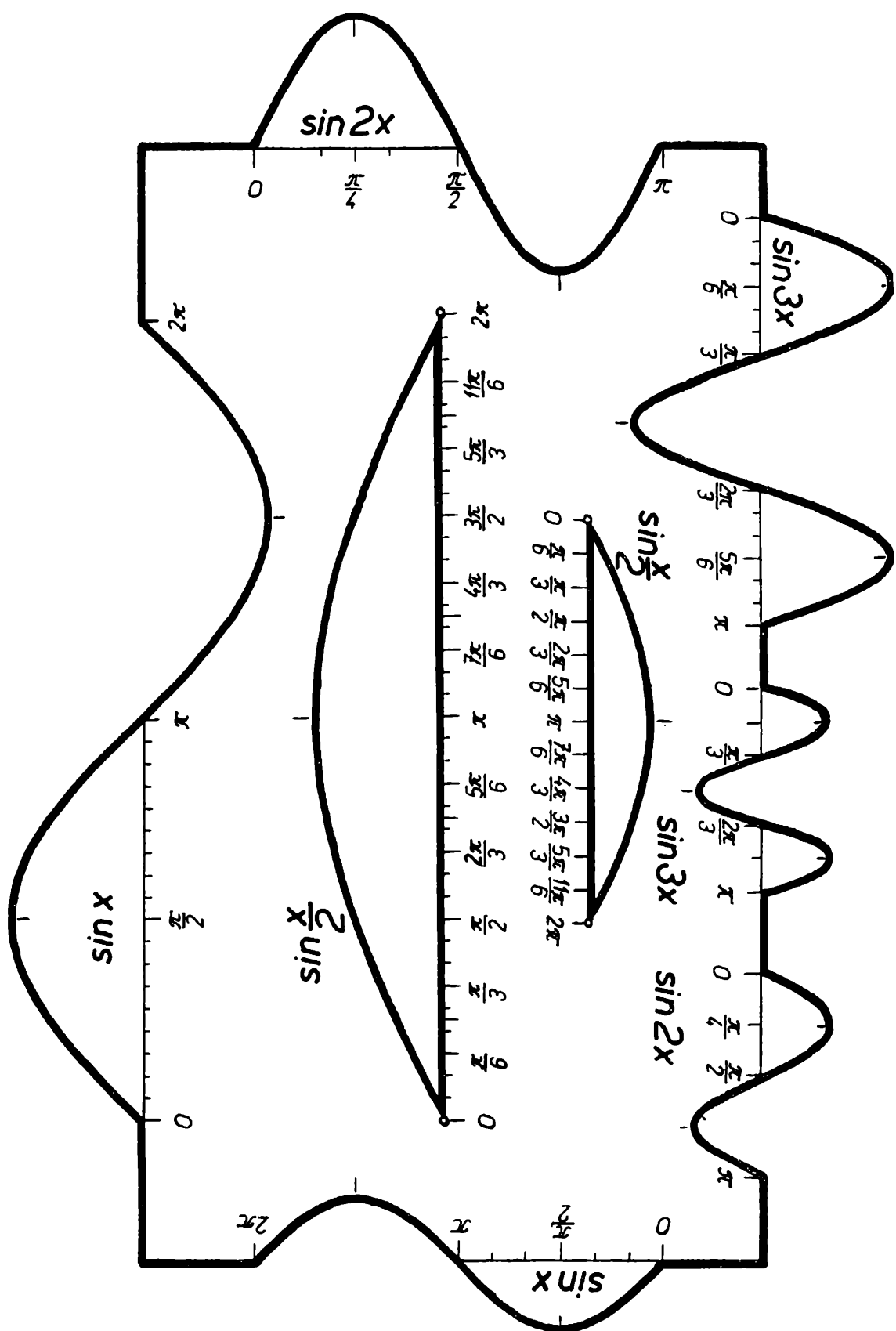
MILAN BEDNAŘÍK, Olomouc

Velmi snadno a rychle nakreslíte sinusoidu pomocí speciální šablony (obr. 1), kterou si můžete zhotovit buď z tuhého papíru nebo ještě lépe z podložky z umělé hmoty.

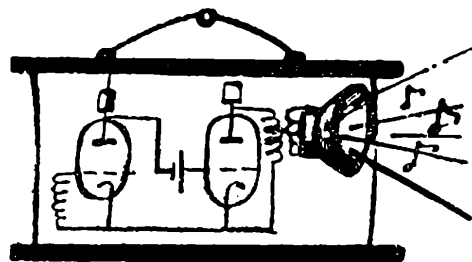
Šablona má celkem osm obrysových hran pro sinusoidu a dvě přímé hrany s úhlovou stupnicí. Dá se jí hojně použít jak v matematice tak i ve fyzice. V matematice dobře poslouží jednak k zakreslování průběhu funkcí $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin 3x$, $y = \sin \frac{x}{2}$ a při posunutí

o $-\frac{\pi}{2}$ funkcí $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = \cos 3x$, $y = \cos \frac{x}{2}$ (přičemž průběh každé z nich se vyskytuje ve dvou různých velikostech, jejichž poměr je 1 : 2), jednak ke grafickému řešení goniometrických rovnic (zakreslíme-li např. do jednoho grafu funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$, pak souřadnice x průsečíku obou křivek dává řešení rovnice $\sin x = \cos x$).

Ve fyzice využijete šablony ještě častěji, a to ke grafickému znázorňování všech dějů, které mají sinusový průběh. V nauce o vlnění je to např. časový průběh harmonického pohybu, zobrazení příčného vlnění, interference vlnění, v elektřině pak časový průběh střídavého napětí a proudu apod.



Obr. 1



F Y Z I K A

Jednoduché odvození zákonů zobrazení odrazem a lomem na kulové ploše z Huygensova principu

LUBOMÍR VAŠEK, Gottwaldov

(Dokončení)

2. Lom světla kulovou plochou.

Pro lom na kulové ploše postupujeme stejně, jen musíme pro vlnu postupující v drsném prostředí zkrátit poloměry elementárních vln v poměru, ve kterém jsou rychlosti světla v jednotlivých prostředích. Tzn. je-li rychlost světla v prvním prostředí v_1 a v druhém v_2 , musíme poloměry elementárních vln zkrátit v poměru relativního indexu (lomu)

$$\frac{v_1}{v_2} = n. \quad (10)$$

Dohodneme-li se, že budeme značit pro dutou kulovou plochu poloměr křivosti záporně ($r_0 < 0$) a pro vypuklou kulovou plochu kladně ($r_0 > 0$), dále, že vzdálenost svítícího bodu od vrcholu kulové plochy budeme považovat za kladnou, bude-li svítící bod vlevo od vrcholu kulové plochy a konečně, že obraz svítícího bodu označíme jako kladný, bude-li vpravo vrcholu kulové plochy (předpokládáme, že světlo dopadá na plochu vždy zleva), pak podle obr. 5 je lomená vlna na duté kulové ploše ($r_0 < 0$) určena podmínkou

$$\frac{-x_0 - x_1}{v_1} = \frac{-x_0 - (-x_2)}{v_2}$$

Vzhledem k (10) dostaneme

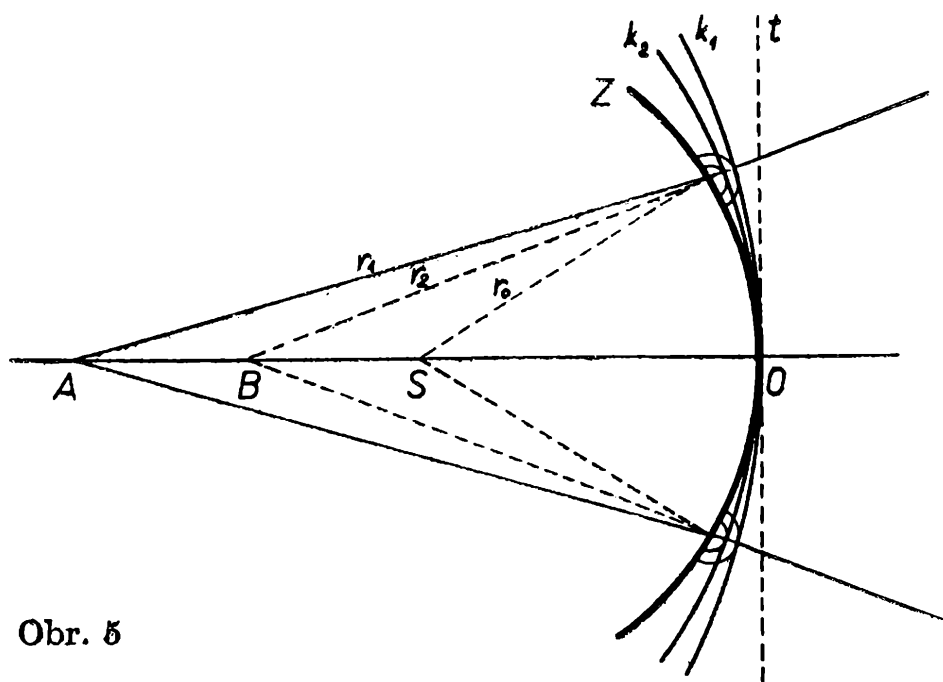
$$nx_2 = (n - 1) \cdot x_0 - x_1$$

a dosazením z (6) plyne

$$\frac{n}{r_2} = \frac{n - 1}{r_0} - \frac{1}{r_1}. \quad (11)$$

Snadno se odvodí, že pro vypuklou kulovou plochu dojdeme ke stejnému vztahu. Zavedeme-li opět označení $r_1 = a$, $r_2 = b$, $r_0 = r$, přičemž a , b , r mají stejný význam jako při odrazu na kulové ploše, přejde rovnice (11) v zobrazovací rovnici pro kulovou plochu

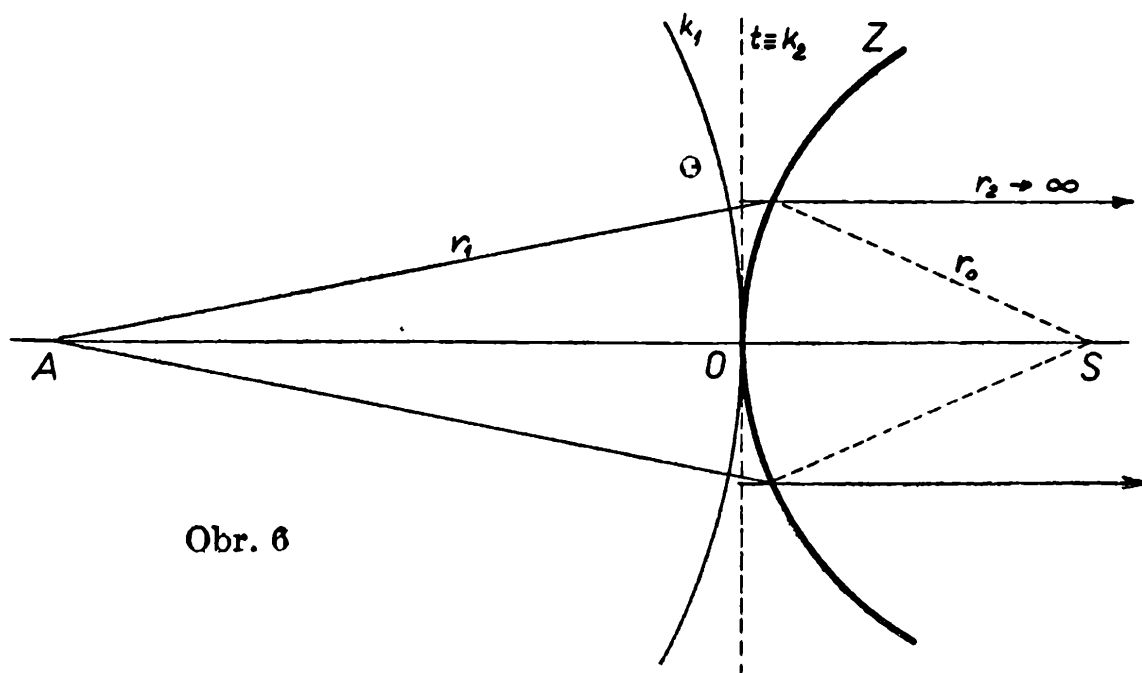
$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n - 1}{r}. \quad (12)$$



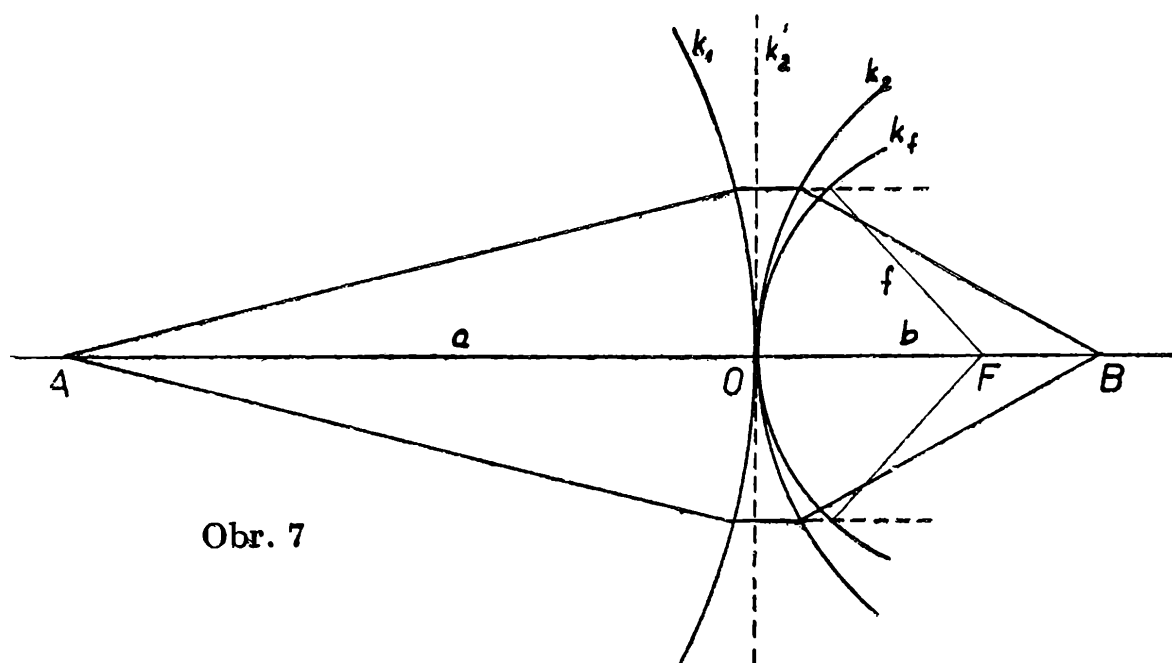
Obr. 5

Obrázek 5 je rýsován pro $a = 12$ cm, $r = -6$ cm, $n = \frac{3}{2}$, pak $b = -9$ cm. Pro vypuklou kulovou plochu při stejných hodnotách a , r_0 , n vychází $b \rightarrow \infty$ (obr. 6); dopadající kulová vlna se v tomto případě změní na rovinnou vlnu. Svítící bod A v tomto případě splývá s předmětovým ohniskem kulové plochy.

Všimneme si ještě případu, kdy optická soustava je tvořena velmi tenkou vrstvou omezenou kulovými plochami. Soustava je určena ohniskovou délkou f . U takové optické soustavy přejde rovinná vlna po dopadu na kulovou plochu v kulovou vlnu o poloměru f , tzn., že body dopadající rovinné vlnoplochy se posunou vodorovně buď v kladném nebo zápor-



Obr. 6



Obr. 7

ném smyslu (podle toho, zda bude $f > 0$ nebo $f < 0$) o délku x_0 , danou vztahem

$$x_0 = \frac{y^2}{2f}$$

Stejné posunutí musí vzniknout i pro každou jinou vlnoplochu. Je-li vlnoplocha kulová a vychází ze svítícího bodu A (obr. 7), a je-li $OA = a$, jsou body, které se nacházejí ve stejné fázi, posunuty o délku

$$x_1 = \frac{y^2}{2a}$$

před odpovídajícími body rovinné vlny, tj. před tečnou rovinou vedenou bodem O . Působením optické soustavy se tyto body posunou vodorovně o x_0 a budou ležet na vlnoploše k_2 ; od bodu ležícího na kulové vlnoploše o poloměru f budou horizontálně vzdáleny o x_1 . Vlna postupující soustavou bude tedy určena rovnicí

$$x_2 = x_0 - x_1$$

a po dosazení z (6) a přihlédnutí, že $r_0 = f$, $r_1 = a$, $r_2 = b$, dostaneme známou čočkovou rovnici

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (13)$$

Rovnicím (9), (12) a (13) můžeme pak z hlediska vlnové teorie přisoudit jednoduchý fyzikální smysl. Rovnice totiž nevyjadřují nic jiného, než rovnost fází dopadající a dále postupující vlny (ať již jde o vlnu odrážející se do téhož prostředí nebo lámající se do jiného prostředí).

Literatura:

- [1] Vanovič a kol., Fyzika pro II. roč. SVVŠ, Praha, 1965
- [2] Ch. Huygens, Abhandlung über das Licht (1678), Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 20, Leipzig, 1890.



ASTRONOMIE

Hmotnosti dvojhvězd

Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ - Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ, Olomouc

Velmi důležitou fyzikální charakteristikou hvězdy je její hmotnost. Nejlepších výsledků v určování hmotností hvězd dosahuje současná astronomie právě při studiu dvojhvězd, které jsou ve vesmíru stejně časté jako samostatné hvězdy typu našeho Slunce. Do vzdálenosti

10 parseků od Slunce známe 254 hvězd, z nichž 127 hvězd tvoří podvojně nebo vícenásobné soustavy. Známe-li oběžnou dobu T a délku velké poloosy a dráhy průvodce kolem hlavní hvězdy, můžeme podle třetího Keplerova zákona vypočítat celkovou hmotnost obou hvězd.

Třetí Keplerův zákon ve tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{konst.}$$

jak jej známe pro planety obíhající kolem Slunce, platí za předpokladu, že hmotnosti planet jsou zanedbatelně malé vzhledem k hmotnosti Slunce.

Pro libovolná dvě tělesa o hmotnostech M_1 a M_2 lze odvodit obecný tvar třetího Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{T^2} = k \cdot (M_1 + M_2),$$

kde k je konstanta, jejíž velikost závisí na volbě jednotek.

Počítáme-li poloosu dráhy a v astronomických jednotkách (a. j.), oběžnou dobu T v rocích a hmotnosti obou hvězd v jednotkách hmotnosti Slunce $M_\odot$, je velikost konstanty $k = 1$ a součet hmotností vypočteme z jednoduchého vzorce

$$\frac{a^3}{T^2} = M_1 + M_2. \quad (1)$$

Velká poloosa dráhy dvojhvězdy se měří v obloukových vteřinách (a''); její velikost a v astronomických jednotkách pak můžeme vypočítat, známe-li roční paralaxu π'' dvojhvězdy, podle vzorce

$$a = \frac{a''}{\pi''} \quad (2)$$

Z rovnice (1) vypočteme součet hmotností obou složek. Chceme-li určit hmotnost každé složky, musíme znát nejen poloosu a relativní dráhy, ale také poloměry a_1 , a_2 drah obou složek kolem společného těžiště. Pro poměr hmotností pak platí

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (3)$$

Výpočet hmotností vizuálních dvojhvězd ukážeme na dvou příkladech:

1. Dvojhvězdu γ Virginis (v Aitkenově katalogu dvojhvězd má pořadové číslo 8630) tvoří dvě hvězdy spektrální třídy F_0 . Roční paralaxa $\pi = 0,095''$, oběžná doba $T = 172$ roků a velká poloosa relativní

dráhy $a = 3,72''$. Dosazením do vzorce (2) dostáváme pro poloosu dráhy hodnotu $a = 39,2$ astronomických jednotek. Dosadíme-li T a a do rovnice (1), máme

$$M_1 + M_2 = \frac{39,2^3}{172^2} \doteq 2$$

Součet hmotností obou složek je tedy $M_1 + M_2 \doteq 2M_\odot$. Přesnějším rozbořem pohybu složek dvojhvězdy bylo zjištěno, že velké poloosy obou drah jsou prakticky stejné ($a_1 = a_2$) a podle rovnice (3) pak také $M_1 = M_2$. Hmotnost každé složky je tedy přibližně rovna hmotnosti Slunce.

2. Dvojhvězda α Canis Minoris (Procyon) je jednou z velmi blízkých hvězd v okolí Slunce. Je vzdálena 3,5 parseku (11 světelných roků), čili její roční paralaxa $\pi = 0,288''$. V Aitkenově katalogu dvojhvězd (ADS) má pořadové číslo 6251. Hlavní hvězda je spektrální třídy F_5 , průvodce je bílý trpaslík, jehož průměr je jen jedna setina průměru Slunce, tedy přibližně stejný, jako průměr Země. Poloosa $a'' = 4,55''$, oběžná doba $T = 40,65$ roku.

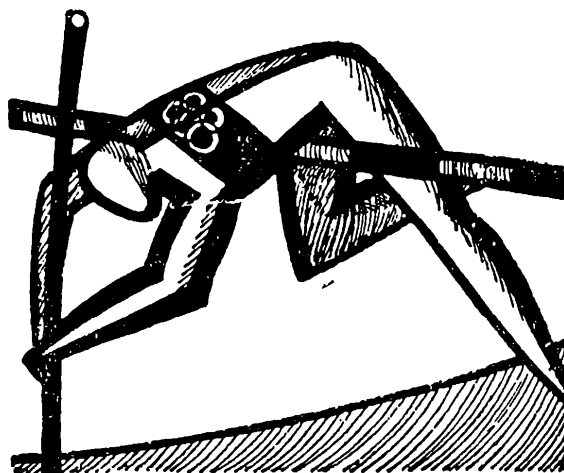
Pomocí rovnice (2) zjistíme, že poloosa skutečné dráhy $a = 15,8$ a. j.; dosadíme-li hodnoty a a T do rovnice (1), dostaneme $M_1 + M_2 \doteq 2,4 M_\odot$. U této dvojhvězdy bylo zjištěno, že velká poloosa dráhy průvodce je třikrát větší než poloosa dráhy hlavní hvězdy, je tedy $a_2 : a_1 = 3$, a tím je také dán poměr hmotností obou složek $M_1 : M_2 = 3$. Ze známého součtu a poměru stanovíme hmotnosti složek $M_1 = 1,8 M_\odot$, $M_2 = 0,6 M_\odot$.

Pro ilustraci připojujeme tabulku 1, v níž jsou shrnuty údaje o deseti vizuálních dvojhvězdách.

Tabulka 1

Označení hvězdy	$\frac{\pi}{['']}$	$\frac{a}{['']}$	$\frac{a}{[\text{a. j.}]}$	$\frac{T}{[\text{rok}]}$	$\frac{M_1}{[M_\odot]}$	$\frac{M_2}{[M_\odot]}$
α Centauri	$0,761 \pm 0,006$	17,68	23,2	80	1,1	0,9
α Canis Maioris	$0,375 \pm 0,004$	7,62	20,3	50	2,2	1,1
61 Cygni	$0,292 \pm 0,004$	24,55	84,1	720	0,7	0,4
α^2 Eridani	$0,200 \pm 0,004$	6,86	34,3	252	0,4	0,2
ρ Eridani	$0,148 \pm 0,007$	8,36	56,5	244	1,5	1,5
μ Herculis	$0,108 \pm 0,006$	1,32	12,2	43,24	0,5	0,5
α Aurigae	$0,073 \pm 0,004$	0,054	0,7	0,285	2,7	2,2
α Geminorum	$0,072 \pm 0,004$	5,941	82,5	380	1,3	2,6
α Ursae Maioris	$0,031 \pm 0,003$	0,634	20,5	44	3,0	1,4
α Pegasi	$0,028 \pm 0,004$	0,336	12,0	11,37	7,5	5,9

MO



XIX. ročník Matematické olympiády

V organizaci XIX. ročníku nastávají podle usnesení ÚVMO některé změny. Především se mění rozdělení účastníků (vzhledem k přestavbě SVVŠ na gymnasia) do jednotlivých kategorií. Zřizují se jen tři kategorie *A*, *B* a *Z*, přičemž se perspektivně počítá se zřízením další, náročné výběrové kategorie. Rozdělení do kategorií je toto:

Kategorie <i>A</i>	III. a IV. ročník střední všeobecně vzdělávací školy (gymnasia) nebo střední odborné školy
Kategorie <i>B</i>	I. a II. ročník střední všeobecně vzdělávací školy (gymnasia) nebo střední odborné školy
Kategorie <i>Z</i> (bývalá <i>D</i>)	9. ročník základní devítileté školy

Kategorie *A* a *B* v rámci kraje řídí krajský výbor *MO* (*KVMO*), kategorii *Z* (bývalou *D*) v rámci okresu řídí okresní výbor *MO* (*OVMO*).

Žáci se opět mohou účastnit i soutěže ve vyšší kategorii, než do které patří.

V kategorii *Z* mohou soutěžit žáci nižšího ročníku ZDŠ než devátého.

Soutěž má opět tato kola: a) *přípravné*; b) *I. kolo* (obě proběhnou na vaší škole); c) *II. kolo* (v rámci okresu nebo kraje a d) *III. celostátní kolo* jen v kategorii *A*.

Průběh a náplň *přípravného kola* se ani v XIX. ročníku neliší od ročníků předcházejících; v každé kategorii budou zadány čtyři úlohy.

Učitel, popříp. referent pro *MO*, je oprávněn, vysvětlí žákům chyby, ale neklasifikuje.

Podmínkou postupu do I. kola *není*, aby žáci odevzdali řešení všech přípravných úloh a správně vyřešili většinu z nich. Tím je zdůrazněn studijní ráz přípravných úloh. Předpokládá se však, že *každý, kdo se chce účastnit I. kola, bude řešit ve vlastním zájmu samostatně všechny přípravné úlohy.*

Termín odevzdání řešení úloh je posunut na 30. listopad 1969.

V kategorii *A* a *B* nastanou však v I. kole podstatné změny. O těchto změnách Vás budeme podrobně informovat v 1. čísle příštího ročníku tohoto časopisu. Zatím uvedeme jen *texty přípravných úloh.*

Kategorie A

1. Najděte všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 + px + p} + \sqrt{x^2 - px + p} = x,$$

kde p je reálný parametr.

2. Zrkadlením na priemere ciferníka hodín prejdú ručičky do nových polôh, ktoré vo všeobecnosti bodú v rozpore s mechanizmom hodín, tj. nebudú ukazovať možný čas. (Napr. zrkadlová poloha ručičiek, súmerná vzhľadom na priemer 9 — 3, v okamžiku keď je presne jedna hodina, neukazuje možný čas: Malá ručička je presne na 5-ke, veľká na 6-ke.)

Úlohou je najst' tie časy (polohy ručičiek) a polohy osi súmernosti, kedy po zrkadlení vzniká možný čas.

3. V rovině ρ jsou dány dvě neshodné úsečky AB , CD . Sestrojte všechny takové body X roviny ρ , pro které platí $\triangle ABX \sim \triangle CDX$.

4. Určete všechny hodnoty parametru a , pro které nemá rovnice

$$\sin^2 x = a \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

žádný kořen x .

Kategorie B

1. Rok 1967 začal i končil nedělí. Která příští léta 20. století budou mít tutéž vlastnost?

2. Jsou-li $x_1, x_2, \dots, x_n$ kladná čísla, pak platí

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_2} + \frac{x_n}{x_1} \geq n;$$

dokažte.

3. V rovině jsou dány dva různé body M, N a dále velikost úhlu γ ($0^\circ < \gamma < 180^\circ$). Trojúhelník ABC má bod M za střed strany AC a bod N za střed strany BC a dále platí

$$\sphericalangle ACB = \gamma.$$

Určete množinu a) vrcholů C ; b) vrcholů A všech takových trojúhelníků ABC .

4. Jsou dána dvě kladná čísla a, b ($a > b$).

a) Určete všechny hodnoty podílu $\frac{a}{b}$, pro něž lze sestrojit trojúhelník ABC se stranami délek $a, b, c = \sqrt{ab}$

b) Určete všechny hodnoty podílu $\frac{a}{b}$, pro které bude trojúhelník ABC z odst. a) ostroúhlý (pravoúhlý, tupoúhlý).

Kategorie Z

1. Zdeněk krátil při výpočtech zlomky takto:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \qquad \frac{26}{65} = \frac{2}{5} \qquad \frac{199}{995} = \frac{1}{5}.$$

Učitel tento způsob „krácení“ pochopitelně neschvaluje, ale Zdeněk se hájí tím, že výsledek je správný.

Najděte všechny zlomky a) s dvojcifernými, b) s trojcifernými čitateli i jmenovateli, které mohl Zdeněk svým způsobem „krátit“ a přitom dostal správný výsledek.

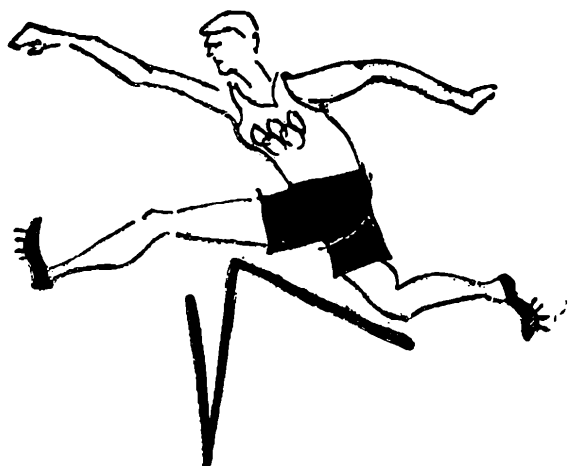
2. Nákladním autem se má převézt m tun stavebního materiálu do vzdálenosti d km (po vodorovné silnici). Auto má hmotu V tun. Při stálém výkonu motoru je rychlost vozu nepřímo úměrná celkové hmotě vozu a hmotě nákladu. Doba nakládání a skládání (přibližně stejná) je přímo úměrná hmotě nákladu. Materiál nelze naložit najednou, je nutno jet několikrát.

Rozhodněte výpočtem, co je časově výhodnější: Nakládat méně, jezdit tedy rychleji, ale ovšem vícekrát nebo nakládat více, jezdit pomaleji, zato však méněkrát. (K době rozjíždění a zastavování nepřihlížíme.)

3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně $a = 10$ cm. Každá ze stran BC, CD je rozdělena devíti body na deset shodných úseček. Střed K strany AB je spojen s dělicím bodem X strany BC a vrchol B je spojen s dělicím bodem Y strany CD . Které dělicí body X, Y musíme vybrat, aby přímky KX, BY byly navzájem kolmé.

4. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany jsou v poměru $2 : 1$. Do obdélníku je vepsána polokružnice k nad stranou AB jako průměrem. Úhlopříčky AC a BD protínají kružnici k po řadě v bodech E , F .

Určete obsah obrazce, který je omezen obloukem EF polokružnice k a úsečkami EC , CD , DF .



FO

XI. ročník soutěže Fyzikální olympiáda

První trojice příkladů

Kategorie A

1. V obvodu naznačeném na obr. 1 jsou zapojeny baterie o elektromotorických napětích E_1 , E_2 s vnitřními odpory R_1 , R_2 , dále odpory R_3 , R_4 a ampérmetr s vnitřním odporem R_A .

a) Určete proudy ve všech větvích obvodu.

b) Určete proudy ve všech větvích obvodu, jestliže u baterie o elektromotorickém napětí E_2 změňte polaritu.

c) Určete svorkové napětí první baterie, jestliže baterie o elektromotorickém napětí E_2 má polaritu jako v případě b) a ampérmetrem neprochází proud (takto určíme napětí tzv. kompenzační metodou).

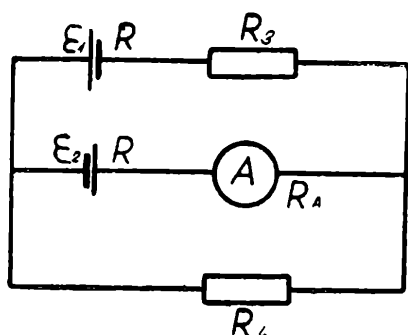
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 2 \text{ V}$, $R_1 = 0,5 \Omega$, $R_2 = 0,1 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 1 \Omega$, $R_A = 0,5 \Omega$.

2. a) Určete změnu energie kondenzátoru nabitého nábojem Q , jestliže se jeho kapacita změní z hodnoty C_1 na hodnotu C_2 ($C_1 > C_2$).

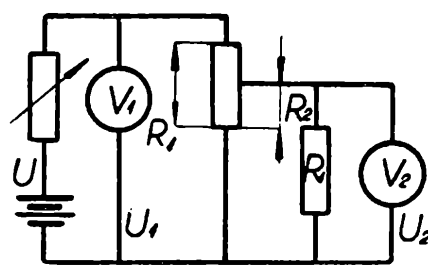
b) Mějme soustavu dvou paralelně spojených kondenzátorů, z nichž každý má kapacitu C_1 a náboj Q . Určete změnu energie jednoho z kondenzátorů, když se jeho kapacita změní na C_2 a kapacita druhého se nezmění.

c) Vypočítejte změnu energie soustavy kondenzátorů při změně podle b). Porovnejte změny energie v b) a c) vzhledem k a) a vysvětlete rozdíly.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $C_1 = 450 \text{ pF}$, $C_2 = 50 \text{ pF}$, $Q = 1,8 \cdot 10^{-1} \mu\text{C}$.



Obr. 1



Obr. 2

3. Měření regulační charakteristiky zatíženého potenciometru

Potřeby: Zdroj stejnosměrného napětí (asi 6 V), regulační reostat, dva stejné válcové potenciometry nejvýše asi po 100 Ω (aby bylo možno zanedbat spotřebu energie ve voltmetru, který měří napětí U_2), dva Avometry, odporový můstek Omega, spojovací dráty.

V zapojení podle schématu na obr. 2 značíme U_1 napětí na celém potenciometru o odporu R_1 , U_2 je napětí na části potenciometru odporu R_2 , kde $R_2 = p R_1$ ($0 \leq p \leq 1$).

Regulační charakteristikou potenciometru nazýváme závislost poměru $\frac{U_2}{U_1}$ na čísle p .

a) Změřte a zakreslete regulační charakteristiku zatíženého potenciometru pro speciální případ, že spotřebič má stejný odpor jako potenciometr. Měřte v 10 různých polohách jezdcy potenciometru a příslušnou hodnotu p stanovte vždy tak, že můstkem Omega, popřípadě jinou vhodnou metodou změříte odpor obou částí děliče (bez připojeného spotřebiče). Zapište do tabulky hodnoty R_2 , p , příslušné naměřené hodnoty U_2 , U_1 a poměr $\frac{U_2}{U_1}$. Podle tabulky sestrojte graf.

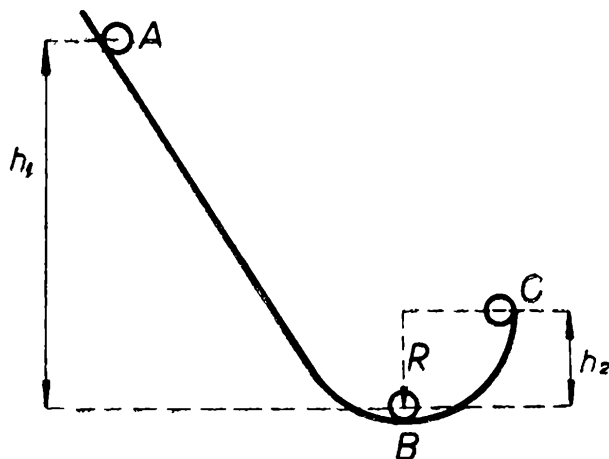
Čís. měř.	$R_2 [\Omega]$	$U_2 [V]$	$U_1 [V]$	p	$\frac{U_2}{U_1}$

b) Odvoďte teoreticky vztah $\frac{U_2}{U_1}$ jako funkci čísla p a sestrojte příslušný graf.

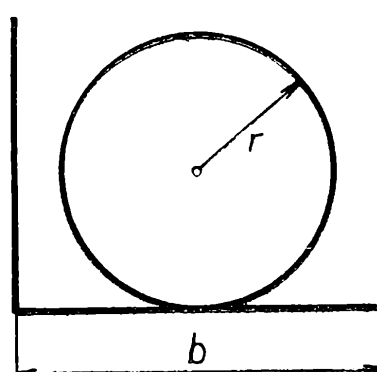
c) Porovnejte oba grafy a odůvodněte případné odchylky.

Kategorie B

1. Homogenní kulička o hmotnosti m a o poloměru r se pohybuje ve žlábků podle obr. 3 z polohy A. Příčný profil žlábků znázorňuje obr. 4. Kulička koná valivý pohyb bez klouzání. Výška $h_1 > h_2$, rozměr $b > 2r$. Moment setrvačnosti kuličky vzhledem k ose procházející jejím středem je $J = \frac{2}{5} mr^2$. Poloměr křivosti dráhy středu kuličky $R = h_2$.



Obr. 3



Obr. 4

- Určete výšku h , do které vystoupí kulička.
- Určete výslednou sílu, která působí na kuličku v nejnižší poloze dráhy (v bodě B).

Při pohybu kuličky uvažujte jen změny mechanické energie kuličky. Vodorovnou rovinu vedenou středem kuličky v bodě B volte za rovinu s nulovou potenciální tíhovou energií kuličky.

2. Těleso je vrženo z povrchu Země svisle vzhůru rychlostí v_0 .

- Určete rychlost tělesa ve vzdálenosti r od středu Země. Hmotnost Země je M .
- Určete výšku vrhu a proveďte diskusi řešení.

Při řešení berte v úvahu ubývání tíhového zrychlení s rostoucí vzdáleností tělesa od středu Země a zanedbejte vliv rotace Země na tíhové zrychlení. Předpokládejte, že pohyb se děje ve vakuu.

Pro potenciální energii tělesa hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu Země použijte vztahu

$$W_p = - \kappa \frac{mM}{r}$$

K tomu prostudujte článek Volf — Chytilová, Pohyb družic v gravitačním poli, Rozhledy matematicko-fyzikální, r. 44, č. 3, nebo brožuru VII. ročník FO, SPN 1967.

3. Válcová trubice z homogenní umělé hmoty o délce $2l_1$ a o vnějším průměru $2r$ ($r \ll l_1$) má všude stejnou tloušťku stěny a je na jednom konci uzavřena. Dno je tak tenké, že jeho hmotnost lze zanedbat. Hmotnost trubice je m_1 . Do trubice vložíme drát délky $2l_2$, který má všude stejný průměr, o málo menší než vnitřní průměr trubice. Drát se opírá jedním koncem o dno trubice. Podíl hmotnosti drátu a jeho délky l_2 označme μ .

Trubice s drátem, ponořená uzavřeným koncem do vody, má plavat ve svislé poloze. Ve kterých mezích je nutno volit délku drátu $2l_2$?

Řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty $m_1 = 1,00 \cdot 10^{-3}$ kg, $\mu = 3,00 \cdot 10^{-2}$ kg m⁻¹, $l_1 = 1,00 \cdot 10^{-1}$ m, $r = 2,00 \cdot 10^{-3}$ m, měrná hmotnost vody $\rho = 1,00 \cdot 10^3$ kg m⁻³.

Kategorie C

1. Z kulometu se střílí po nepřátelském pancéřovém automobilu, který se dá při pozorování úplně zakrýt tužkou o průměru a , jež je ve svislé poloze ve vzdálenosti d před okem. Automobil má délku b . Situaci ukazuje obr. 5.

a) O kolik délek automobilu se musí mířit před automobil, který se pohybuje rovnoměrně po přímé silnici rychlostí v_1 , aby se zasáhl cíl, je-li průměrná rychlost střely v_2 ($v_2 \gg v_1$)?

b) Jak daleko je automobil od kulometu v okamžiku, kdy je zasažen střelou?

c) Jak dlouho trvá pohyb střely, než po opuštění hlavně zasáhne cíl?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $a = 6,0$ mm, $b = 3,0$ m, $d = 60$ cm, $v_1 = 20$ m s⁻¹, $v_2 = 500$ m s⁻¹.

2. Vlak o n stejně dlouhých vozech se rozjíždí z klidu po přímé trati pohybem rovnoměrně zrychleným. Pozorovatel stojí v místě, kde bylo čelo prvního vozu, dokud byl vlak v klidu. Konec posledního vozu

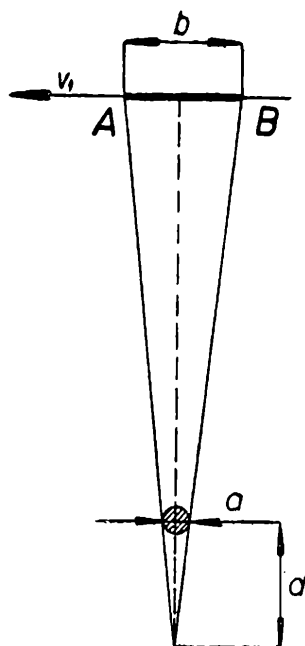
projede kolem pozorovatele v čase t_n od okamžiku, kdy se dal vlak do pohybu.

a) Určete časový interval Δt_1 , ve kterém projíždí kolem pozorovatele první vůz vlaku.

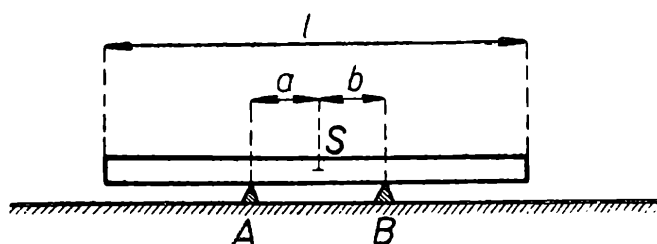
b) Určete časový interval Δt_n , ve kterém projíždí kolem pozorovatele poslední vůz vlaku.

Mezery mezi jednotlivými vozy neuvažujte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $t_n = 12$ s, $n = 9$.



Obr. 5



Obr. 6

3. Určení průměru tenkého drátu

Pomůcky: Tenký drát, milimetrové měřítko, mikrometr, laboratorní váhy a sada závaží, pyknometr.

Návod:

a) Odstříhneme kus drátu a milimetrovým měřítkem změříme jeho délku l .

b) Vážením na laboratorních vahách určíme hmotnost m tohoto kusu drátu.

c) Měrnou hmotnost ρ materiálu drátu určíme užitím pyknometru (viz Živný Lepil, Praktická cvičení z fyziky nebo brožura IV. ročník FO, SPN 1964, str. 66).

d) Průměr drátu vypočítáme ze vztahu

$$d = 2 \sqrt{\frac{m}{\pi \rho l}} \quad (1)$$

Ukoly:

1. Dokažte správnost vztahu (1).
2. Provedte všechna potřebná měření a odhadněte nebo určete absolutní i relativní chyby měření.
3. Podle vztahu (1) vypočítejte průměr drátu. Určete relativní a absolutní chybu vypočítané hodnoty d .
4. Zkontrolujte vypočítanou hodnotu d s hodnotou získanou přímým měřením mikrometrem.

Kategorie D

1. Stejnorodý dřevěný trám délky l všude stejného příčného průřezu je vodorovně položen na podpěrách A a B (obr. 6). Podpěra A je od středu S trámu vzdálena o délku a , podpěra B je od středu trámu vzdálena o délku b ($b > a$). Tíha trámu je G . Uprostřed trámu stojí chlapec o tíze G_1 .

a) Jak daleko může chlapec postoupit od středu S po trámu, aby se trám neotáčel kolem podpěry A nebo B ?

b) Jakou nejmenší tíhu musí mít závaží, které umístíme na jednom nebo na druhém konci trámu, aby chlapec mohl stát na opačném konci trámu a trám se neotáčel?

Tloušťku trámu zanedbejte.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 5$ m, $a = 0,4$ m, $b = 0,5$ m, $G = 100$ kp, $G_1 = 50$ kp.

2. Na moři nastal výbuch. Pozorovatelé na lodi značně vzdálené od místa výbuchu naměřili, že zvuk, šířící se vzduchem, dospěl z místa výbuchu k lodi o čas Δt později než zvuk šířící se vodou.

a) Jak daleko byla loď od místa výbuchu v okamžiku, kdy se výbuch udál, v těchto případech:

1. loď byla zakotvena,
2. loď se přibližovala k místu výbuchu rychlostí v ,
3. loď se vzdalovala od místa výbuchu stejnou rychlostí v ?

b) Jak daleko byla loď od místa výbuchu v případech 2. a 3. v okamžicích, kdy přijala zvukový signál ze vzduchu a kdy přijala zvukový signál z vody?

Vzduchem se šíří zvuk rychlostí c_1 , vodou rychlostí c_2 ($v < c_1 < c_2$).

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $c_1 = 340$ m/s, $c_2 = 1440$ m/s, $v = 36$ km/h, $\Delta t = 11$ s.

3. Do nekrytého kalorimetru, v němž je voda hmotnosti m_1 a o teplotě t_1 , jsme nalili roztavené olovo hmotnosti m_2 a teploty t_2 (teplota tání olova). Výsledná teplota látek v kalorimetru je t . Při nalévání olova

do vody se část vody uvedené do varu vypařila (za normálního tlaku). Určete hmotnost m_3 vody, která zůstala v kalorimetru. Tepelné ztráty kromě tepla, potřebného k odpaření vody, zanedbáváme.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m_1 = 0,50$ kg, $t_1 = 60$ °C, $m_2 = 0,50$ kg, $t_2 = 327$ °C, měrné teplo olova v mezích teplotních změn při pokusu považujeme za stálé $c_2 = 0,030$ kcal/kg · °C, měrné skupenské teplo tání olova $l_t = 6$ kcal/kg, měrné skupenské teplo varu vody $l_v = 539$ kcal/kg.



R Ů Z N Ě

Kdo byl Bedřich Pospíšil?

J I Ř Í S E D L Á Č E K, Praha

Letos v říjnu uplyne čtvrt století od smrti významného českého matematika RNDr. Bedřicha Pospíšila, kterého naši čtenáři pravděpodobně znají z jeho velmi úspěšné knížky *Nekonečno v matematice*. Bedřich Pospíšil se narodil 25. září 1912. V letech 1931 až 1935 studoval na tehdejší Masarykově universitě v Brně, kde byl r. 1937 promován na doktora přírodních věd. Až do uzavření vysokých škol za okupace byl asistentem 2. ústavu matematiky na české technice v Brně a pak přešel na 1. reálné gymnasium v Brně. V dubnu 1941 byl však gestapem zatčen a odsouzen na tři léta do káznice. Vrátil se s podlomným zdravím v květnu 1944 a na následky prožitých útrap zemřel 27. října 1944.

Již v roce 1939 podal z podnětu prof. dr. E. Čecha, jehož topologický seminář v Brně navštěvoval, žádost o habilitaci. Jeho práce byla tehdy příznivě přijata, ale k definitivnímu vyřízení již nedošlo pro uzavření vysokých škol. Teprve r. 1946 se Bedřich Pospíšil stal posmrtně docentem brněnské university a byl též jmenován mimořádným členem druhé třídy České akademie věd a umění.

Nemůžeme zde hodnotit Pospíšilovo vědecké dílo, které je věnováno zejména obecné topologii a Booleovým okruhům. Vzniklo převážně v brněnském topologickém semináři. Zhodnocení Pospíšilovy vědecké činnosti provedl prof. E. Čech v závěru své knihy *Topologické prostory* a také v zmíněné již Pospíšilově knížce *Nekonečno v matematice*, která

vyšla až r. 1949, najdete podrobnější údaje o osobnosti Bedřicha Pospíšila. Čtenáře Rozhledů chceme letos upozornit na toto jubileum československé matematiky a těm, kteří dosud neznají pěknou Pospíšilovu knížku, doporučujeme ji k prostudování. Naším odpovědným činitelům bychom při této příležitosti chtěli připomenout, že by bylo vhodné vydat Pospíšilovo *Nekonečno v matematice* v druhém vydání, neboť jeho kniha je na knižním trhu dávno rozebrána a v matematických knihovnách je o tuto knížku velký zájem.

== NAŠE SOUTĚŽ ==

Řešení úloh loňské soutěže

Konstruktivní geometrie

1. Sú dané dve rôznobežné roviny ρ, σ . V rovine ρ je daný bod A , v rovine σ bod C tak, že žiadny z týchto dvoch bodov neleží na priesečnici $r \equiv \rho \cdot \sigma$. Zostrojte kváder $ABCD A' B' C' D'$ o danej výške v tak, aby vrchol B ležal v rovine ρ a vrchol D v rovine σ .

(Došlo 11 riešení)

Stanislav Horák

Riešil Jiří Šafařík, II.B SVŠ, Bratislava:

R o z b o r. Základňa $ABCD$ je obdĺžnik, teda platí $AB \parallel CD$. Ak $ABCD$ leží v rovine π , potom zrejme roviny ρ, π sú rôznobežné a jejich priesečnica je priamka AB . Podobne priamka CD je priesečnica rovín σ, π . Ak sú dve priesečnice troch rovín rovnobežné, je s nimi rovnobežná i tretia, tj. priamka r . Teda $AB \parallel r, CD \parallel r$. Ďalej je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 90^\circ$ a základňu ľahko doplníme.

K o n š t r u k c i a.

a) V rovine ρ bodom A vedieme priamku $a \parallel r$.

b) V rovine σ bodom C zostrojíme priamku $b \parallel r$.

c) V rovine $\pi \equiv ab$ zostrojíme v bode A kolmicu c na a a v bode C kolmicu d na b . Priesečník priamok b, c je vrchol D a priesečník priamok a, d je vrchol B .

d) Na rovinu ABC v bodoch A, B, C, D zostrojíme kolmice a na nich zostrojíme po rade body A', B', C', D' tak, aby $AA' = BB' = CC' = DD' = v$.

D ô k a z. Správnosť konštrukcie vyplýva z rozboru.

D i s k u z i a. Konštrukcie priamok a, b, c, d sú jednoznačné. O počte riešení rozhoduje konštrukcia popísaná v bode d). Úloha má teda dve rôzne riešenia.

8. Najděte největší přirozené číslo, které nelze vyjádřit ve tvaru:
a) $7x + 11y$, b) $7x + 11y + 13z$, kde x, y, z jsou přirozená čísla.
(Došlo 16 řešení) *František Kejla*

Řešili Miloš Zahradník a Miloš Mazánek, III.A SVVŠ, Tanvald:

- a) Hledané číslo označme n . Z podmínek úlohy plyne, že $n \geq 17$.

Z rovnosti

$$1 = 22 - 21 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7$$

vyplývá

$$n = 2n \cdot 11 - 3n \cdot 7 \quad (1)$$

Pišme

$$3n = 11k - x, \quad (2)$$

kde k, x jsou přirozená čísla.

Rovnici (1) můžeme pak psát ve tvaru

$$n = 11 \cdot (2n - 7k) + 7x.$$

Označme dále

$$2n - 7k = y. \quad (3)$$

Potom

$$n = 7x + 11y. \quad (4)$$

Protože x, y jsou přirozená čísla, musí vzhledem k (2) a (3) platit zároveň

$$11k > 3n, \quad 7k < 2n,$$

odtud

$$\frac{21n}{77} < k < \frac{22n}{77} \quad (2, 3)$$

Z uvedeného postupu plyne: Existuje-li přirozené číslo k splňující (2, 3), pak existují také přirozená čísla x, y splňující (4). Obráceně, existují-li přirozená čísla x, y splňující (4), vypočteme z (2) a (3)

$$k = 2x + 3y,$$

takže k je přirozené číslo splňující (2) a (3) a tedy taky (2, 3).

Z podmínky (2, 3) vyplývá, že pro $n > 77$ existuje vždy přirozené k (délka intervalu, v němž k leží, je $\frac{n}{77} > 1$), kdežto pro $n = 77$ takové k neexistuje.

Je tedy $n = 77$ největší přirozené číslo, které nelze vyjádřit ve tvaru $7x + 11y$, kde x, y jsou přirozená čísla.

Poznámka autora: Uvedený postup ovšem nevylučuje, že pro některá $n < 77$ přirozená k , a tudíž i přirozená x, y , existují. Např. pro $n = 36$ dostaneme

$$\frac{108}{11} < k < \frac{72}{7}$$

takže $k = 10, x = y = 2$.

b) Nejprve ukážeme, že celé nezáporné číslo $a < 7$ lze napsat ve tvaru

$$a = 7x_1 + 11y_1 + 13z_1, \quad (5)$$

kde x_1, y_1, z_1 jsou celá čísla, přičemž $\min(x_1, y_1, z_1) \geq -1$

$$\begin{aligned} 0 &= 7 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 13 \cdot 0, \\ 1 &= 7 \cdot 2 + 11 \cdot 0 + 13 \cdot (-1), \\ 2 &= 7 \cdot 0 + 11 \cdot (-1) + 13 \cdot 1, \\ 3 &= 7 \cdot 2 + 11 \cdot (-1) + 13 \cdot 0, \\ 4 &= 7 \cdot (-1) + 11 \cdot 1 + 13 \cdot 0, \\ 5 &= 7 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 13 \cdot (-1), \\ 6 &= 7 \cdot (-1) + 11 \cdot 0 + 13 \cdot 1 \end{aligned}$$

Každé celé nezáporné číslo n lze psát ve tvaru

$$n = 7n_1 + a,$$

kde $a < 7$ je celé nezáporné, n_1 celé nezáporné.

Vzhledem k (5) platí

$$n = 7(n_1 + x_1) + 11y_1 + 13z_1.$$

Každé přirozené číslo N lze pak psát ve tvaru

$$\begin{aligned} N &= 62 + n = \\ &= 7 \cdot (n_1 + x_1 + 2) + 11 \cdot (y_1 + 2) + 13 \cdot (z_1 + 2), \\ N &= 7x + 11y + 13z. \end{aligned} \quad (6)$$

Vzhledem k (5) platí $\min(x, y, z) \geq 1$, takže x, y, z jsou přirozená čísla. Tím je dokázáno, že každé přirozené číslo $N \geq 62$ lze vyjádřit ve tvaru

$$N = 7x + 11y + 13z,$$

kde x, y, z jsou přirozená čísla.

• Dokážeme sporem, že číslo $N = 61$ v tomto tvaru napsat nelze. Kdyby

$$61 = 7x + 11y + 13z;$$

pak $13z = 61 - 7x - 11y \leq 61 - 7 - 11 = 43$,

takže $z \leq 3$. Mohou nastat tedy tři případy

$z = 1$

$$61 - 13 = 7x + 11y = 48,$$

$z = 2$

$$61 - 26 = 35 = 7x + 11y,$$

$z = 3$

$$61 - 39 = 22 = 7x + 11y$$

O tom, že tyto vztahy neplatí, se snadno přesvědčíme, volíme-li postupně $y = 1, 2, 3, 4$.

Je tedy $N = 61$ největší přirozené číslo, které nelze napsat v požadovaném tvaru.

ČTENÍ NĚKTERÝCH NĚMECKÝCH MATEMATICKÝCH SYMBOLŮ:

$a = b$ — a gleich b
 $a \neq b$ — a ungleich b
 $a \approx b$ — a angenähert gleich b
 $a > b$ — a größer als b
 $a < b$ — a kleiner als b
 $2 \cdot 2 = 4$ — zwei mal zwei ist (gleich) vier
 $2 \text{ m} \cdot 2 = 4 \text{ m}$ — zwei Meter mal zwei sind vier Meter
 $3 \cdot 5 = 15$ — drei mal fünf ist (gleich) fünfzehn
 $3 \text{ m} \cdot 5 = 15 \text{ m}$ — drei Meter mal fünf sind fünfzehn Meter
 $a \cdot b = c$ — a mal b gleich c
 $a : b = c$ — a durch b gleich c
 $a : b = c : d$ — a zu b wie c zu d , a verhält sich zu b wie c zu d
 x^2 — x hoch zwei, x Quadrat, x zum Quadrat, x zur zweiten (Potenz) — písmeno x se čte iks jako v češtině
 x^3 — x hoch drei, x zur dritten (Potenz)

x^n — x hoch n , x zur n -ten (Potenz)
 $\sqrt{y}$ — Quadratwurzel aus y — písmeno y se čte ypsilon jako v češtině
 $\sqrt[3]{y}$ — Kubikwurzel aus y , dritte Wurzel aus y
 $\sqrt[n]{y}$ — n -te Wurzel aus y
 $\%$ — Prozent
 v. H. — vom Hundert = Prozent
 j, q, v, w, z — se čte jot, kú, fau, vé, cet
 a_1 — a Eins, a mit dem Index Eins
 a', a'' — a Strich, a zwei Strich, und so weiter
 $\bar{a}$ — a quer
 a^* — a Stern
 $n!$ — n Fakultät
 $\binom{n}{r}$ — n über r
 A — groß A