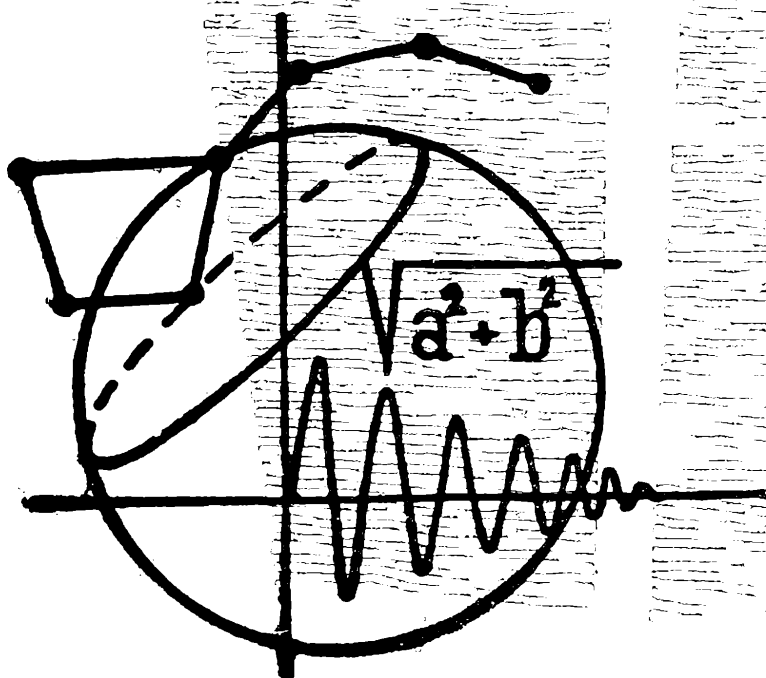


rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



1

1967-68

ROČ. 46

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 46

Září 1967

Číslo 1

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

nositel vyznamenání Za vynikající práci

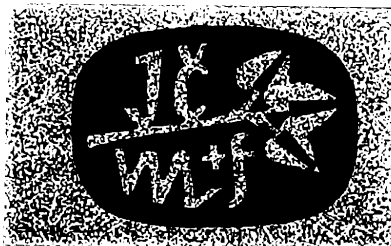
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

nositel vyznamenání Za vynikající práci

Redakční rada: zasl. škol. pracovník *Josef Bartůněk*, ústřed. insp. MŠK; *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; zasl. učitel *Petr Benda*, VUT, Brno; doc. dr. *Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; prof. dr. *Josef Korous*, DrSc., PF-UPJŠ, Košice; dr. *Oldřich Lepil*, PU, Olomouc; prof. dr. *Cyril Palaj*, PF-UPJŠ, Košice; CSc. *Evžen Říman*, ČVUT, Praha; dr. *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; dr. *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. *Václav Šindelář*, MÚ ÚNM, Praha; prof. dr. *Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha. Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telefon 244529

OBSAH

Doc. F. Dušek: Problémy z teorie čísel v různých číselných oborech	1
Z. Mudrák: Některá zajímavá pozorování v lichoběžníku	7
J. Stejskal: Pohybová neostrost	9
L. Vašek: Barometrické měření výšek	14
Dr. L. Sehnal: Umělé družice v r. 1966	18
Dr. L. Sehnal: Snímky Měsíce	21
XVII. ročník Matematické olympiády	23
Seznam vítězů a úspěšných řešitelů III. kola MO kategorie A	26
O průběhu konkursu na úlohy pro MO	28
Devátý ročník soutěže Fyzikální olympiáda	28
K. Hofman: Magnetické obvody — Točivé magnetické pole	32
J. Kotyk: Siemensův princip dynamoelektrický	48
Recenze	50
Dr. M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů německo-český 3. a 4. strana obálky	

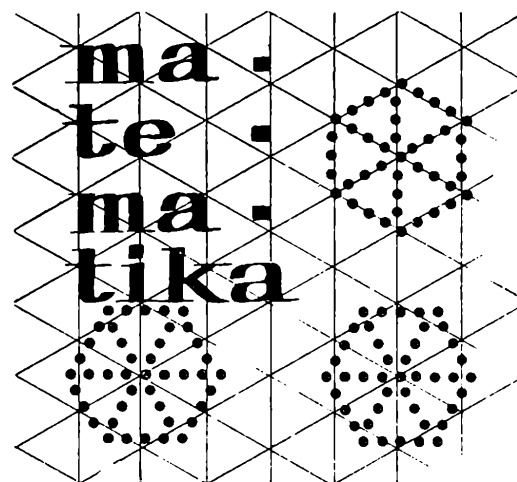


Vydává ministerstvo školství ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze, za odborné péče Jednoty čs. matematiků a fyziků.

Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs, v zahraničí 3 \$. Tiskne Mír, novín. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky:

V. Vaňková, studující FS.

A-11*71952



MATEMATIKA

Problémy z teorie čísel v různých číselných oborech

DOC. FRANTIŠEK DUŠEK, Ústí nad Labem

Ve vyučování a v populárně vědecké literatuře se uvádějí některé zajímavé, často starobylé, problémy z teorie čísel. Zpravidla se tyto problémy řeší v oboru přirozených čísel; lze je však přenést i do jiných číselných oborů. Uvedeme několik ukázek, jež probereme jednak v oboru N čísel přirozených, jednak v oboru S čísel sudých. Čísla oboru N budeme označovat písmenem n a čísla oboru S písmenem s . Použijeme-li množinové symboliky, je tedy

$$N = \{n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

$$S = \{s\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Pro jednoduchost budeme někdy i v oboru S užívat přirozených čísel n , např. lze ke každému s najít takové n , že $s = 2n$.

1. Čísla sudá a lichá.

A. V oboru N jsou jako sudá čísla definována čísla, která jsou násobky čísla 2, čili čísla dělitelná dvěma. Ostatní čísla nazýváme lichými. Obecně mají sudá čísla tvar $2n$, lichá $2n - 1$, kde n je přirozené číslo. Jejich součet a součin má tyto vlastnosti:

Součet dvou přirozených čísel je číslo liché jen tehdy, je-li jedno z nich liché a druhé sudé; jinak je součet číslo sudé. Součin dvou přirozených čísel je číslo liché jen tehdy, jsou-li oba činitele lichá čísla; jinak je součin číslo sudé. Tyto vlastnosti známe z počtářské zkušenosti.

nosti; dovedeme je však obecně potvrdit. Ukažme to na součinu dvou přirozených čísel n' a n'' , jež pišme

$$n' = 2n_1 - m_1, n'' = 2n_2 - m_2,$$

kde n_k jsou libovolná přirozená čísla a m_k čísla 0 nebo 1. Součin

$$\begin{aligned} n'n'' &= (2n_1 - m_1)(2n_2 - m_2) = \\ &= 2(2n_1n_2 - n_1m_2 - n_2m_1) + m_1m_2 \end{aligned}$$

je číslo liché jen tehdy, když $m_1m_2 = 1$. To nastane pouze pro $m_1 = m_2 = 1$, tedy jsou-li n' i n'' lichá čísla. Jinak je $m_1m_2 = 0$ a součin tedy číslo sudé.

B. Pro sudá čísla převezmeme v oboru S obdobnou definici jako v oboru N . Budou to násobky čísla 2, tj. čísla tvaru $2s$ čili $4n$. Jsou tedy sudými čísly v oboru S , např.

$$2 \cdot 2 = 4; 2 \cdot 4 = 8; 2 \cdot 6 = 12; 2 \cdot 8 = 16; \text{atd.}$$

Ostatní čísla nazveme lichými. Protože čísla oboru S mají tvar $2n$ a z nich sudá $4n = 2 \cdot 2n$, lze lichá čísla zapsat

$$2(2n - 1) = 4n - 2 = 2s - 2,$$

tedy např.

$$4 - 2 = 2; 8 - 2 = 6; 12 - 2 = 10; \text{atd.}$$

Všimněme si zdánlivého paradoxu, vyplývajícího ze zavedené definice sudých a lichých čísel, že totiž číslo 2 patří v oboru S mezi čísla lichá.

Pro součet a součin dvou čísel oboru S platí:

Součet dvou čísel je číslo liché jen tehdy, je-li jeden sčítanec lichý a druhý sudý. Součin dvou čísel je vždy číslo sudé, jak lze obecně ukázat:

Zapišme čísla s' a s'' ve tvaru

$$s' = 2s_1 - r_1; s'' = 2s_2 - r_2,$$

kde s_k jsou libovolná čísla oboru S a r_k čísla 0 nebo 2. Součin

$$\begin{aligned} s's'' &= (2s_1 - r_1)(2s_2 - r_2) = \\ &= 2(2s_1s_2 - s_1r_2 - s_2r_1) + r_1r_2 \end{aligned}$$

je vždy číslo sudé, protože r_1r_2 je buď 0 nebo 4.

Z toho vyplývá zajímavý závěr, že liché číslo oboru S nemůže být součinem čísel toho oboru.

2. Číslo složená a prvočísla.

A. Složeným číslem v oboru N rozumíme číslo, které lze rozložit v součin činitelů různých od daného čísla, např. $8 = 2 \cdot 4$, $9 = 3 \cdot 3$ apod. Ostatní čísla, např. 2, 5, 13 atd. nazýváme prvočísla. Je patrné, že každé složené číslo má aspoň tři různé dělitele, počítáme-li mezi dělitele čísla i číslo samo a číslo jedna, kdežto prvočísla jsou dělitelná jen sama sebou a číslem jedna. Mohli bychom tedy vyslovit definici prvočísla jako čísla majícího nejvýš dva různé dělitele. Pak by bylo

prvočíslem i číslo jedna. V teorii čísel se však vžila definice, která se od předchozí jen „nepatrně“ liší: Prvočíslo je číslo mající právě dva různé dělitele. Touto definicí se z množiny prvočísel vyčleňuje číslo jedna, které se nepokládá za prvočíslo ani za číslo složené. Posloupnost prvočísel tedy začíná čísly 2, 3, 5, 7, ... atd.

B. Obdobně jako v oboru N považujeme v oboru S za složené číslo takové číslo s , které lze rozložit v součin činitelů různých od s . Jsou tedy složenými čísla, např.

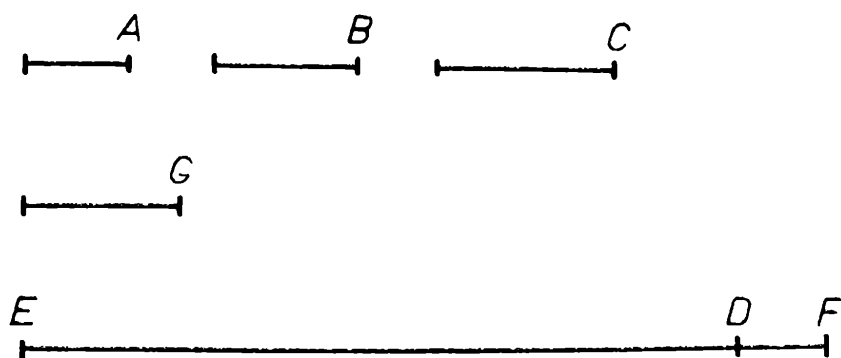
$$4 = 2 \cdot 2 ; 8 = 2 \cdot 4 ; 12 = 2 \cdot 6 ; 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 \text{ atd.}$$

Ostatní čísla nazýváme prvočísly. Není tedy libovolné prvočíslo p oboru S dělitelné žádným číslem různým od p . Musíme vyloučit i možnost, že by bylo dělitelné samo sebou, protože číslo jedna, které by v takovém případě bylo dalším dělitelem, nenáleží do oboru S . Tak docházíme k překvapující definici prvočísel v oboru S : Jsou to čísla nemající žádného dělitele. Čtenář, který pochybuje snad o správnosti tohoto závěru, nechť si jako konkrétní příklad vezme třeba číslo 14, které lze sice rozložit na $2 \cdot 7$ v oboru N , ale nikoliv v oboru S , který číslo 7 neobsahuje.

Zobecněním uvedeného příkladu dostáváme závěr, že prvočísly v oboru S jsou všechny dvojnásobky čísel lichých v oboru N , tedy čísla tvaru

$$2(2n - 1) = 4n - 2 = 2s - 2 ,$$

a to jsou lichá čísla oboru S . Úhrnem tedy platí, že v oboru S jsou všechna lichá čísla prvočísly a všechna sudá čísla čísla složenými. To souhlasí s tím, co bylo o lichých číslech oboru S řečeno na konci odstavce 1B.



Obr. 1

3. Kolik je prvočísel?

A. Řešení této otázky v oboru N je obsaženo už ve slavném Euklidově díle *Základy* ze třetího století p. n. l. Protože jde o proslulý důkaz, jehož se v podstatě užívá dodnes v učebnicích, ocitujeme jeho překlad z 20. propozice deváté knihy *Základů* (místo „prvočíslo“ užívá překladatel názvu „kmenné číslo“; důkaz je doprovázen¹⁾ znázorněním čísel úsečkami, viz obr. 1):

¹⁾ Eukleidy Základy, Praha 1907, nákladem Jednoty českých matematiků, přeložil František Šervít.

„Kmenných čísel je více než jakékoli dané množství kmenných čísel.

Danými kmennými čísly budtež A, B, C ; pravím, že je více kmenných čísel než A, B, C .

Nuže vezměme v úvahu nejmenší číslo, jehož měrami jsou A, B, C a budiž to DE a přičtíme k DE jednotku DF . EF tedy buď je kmenné, buď není. Budiž dříve kmenné; jsou tedy nalezena čísla kmenná A, B, C, EF , počtem více než A, B, C (obr. 1).

Avšak již nebuď EF kmenné. Tedy je mu nějaké číslo kmenné měrou. Budiž mu měrou kmenné G ; pravím, že G není rovno žádnému z čísel A, B, C . Nuže, možno-li, budiž rovno. Avšak A, B, C jsou měrami čísla DE ; tedy též G bude měrou čísla DE . Je pak měrou i čísla EF ; také zbývající jednotky DF měrou bude G , ač je číslo; což právě nesmyslné. Tedy G není rovno žádnému z čísel A, B, C . A bylo vzato za kmenné. Tedy je nalezeno více kmenných než A, B, C , totiž A, B, C, G , což právě bylo dokázati.“

V dnešním podání má důkaz při zachování základní myšlenky obecnější podobu a lze jej vést, např. takto:

T v r z e n í : K libovolně velkému prvočíslu p_k existuje aspoň jedno prvočíslu větší než p_k .

D ů k a z. Uvažujme posloupnost všech prvočísel $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_k$ a utvořme číslo P_k , které je o jednu větší než součin prvočísel uvažované posloupnosti, tedy

$$P_k = p_1 p_2 p_3 \dots p_k + 1.$$

Mohou nastat dva případy:

1. Buď je P_k prvočíslu a pak je tvrzení dokázáno, protože $P_k > p_k$.

2. Nebo je P_k číslo složené a lze je proto rozložit v součin prvočísel, z nichž každé je nutně různé od prvočísel $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$. Kdyby se totiž kterékoliv z nich, např. p_m , rovnalo některému z prvočísel $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$, byl by součin $p_1 p_2 p_3 \dots p_k$ číslem p_m dělitelný. Tento součin je však jednou částí čísla P_k , jehož druhou částí je číslo jedna, které by podle věty o dělitelnosti součtu musilo být rovněž dělitelné číslem $p_m = 1$, což není možné. Musí tedy být prvočíslu p_m různé od všech prvočísel $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ a je tedy $p_m > p_k$, jak se mělo dokázat.

Připomeňme, že čísla P_k jsou prvočísla pro $k > 6$, např. $P_1 = 3$, $P_2 = 7$, atd. Avšak číslo P_6 je složené, neboť — jak se čtenář může přesvědčit — je dělitelné číslem 59.

B. V oboru S je situace mnohem jednodušší, protože vzhledem k závěru odstavce 2B jsou prvočísla všechna lichá čísla $2s - 1$, a těch je nekonečně mnoho.

4. Intervaly bez prvočísel.

A. V oboru N existují libovolně dlouhé intervaly obsahující jen složená čísla. Libovolnost je omezena jen tím, že počet těchto složených čísel může být pouze liché číslo, protože jejich posloupnost musí začínat i končit sudým číslem. Máme-li najít posloupnost k (k liché) po sobě následujících složených čísel, vypočteme nejmenší číslo n_k , soudělné

s k po sobě následujícími přirozenými čísly 2, 3, 4, 5, ..., k , $k + 1$ a dvě z hledaných posloupností jsou pak

$$n_k + 2, \quad n_k + 3, \quad n_k + 4, \quad n_k + k, \quad n_k + k + 1, \\ n_k - k - 1, \quad n_k - k, \quad n_k - k + 1, \quad n_k - 3, \quad n_k - 2.$$

Číslo n_k je zřejmě součin všech prvočísel posloupnosti 2, 3, 4, ..., k , $k + 1$. Např. pro $k = 5$ je $n_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ a žádané posloupnosti složených čísel jsou

24, 25, 26, 27, 28 a 32, 33, 34, 35, 36.

Další pětičlenné posloupnosti by mohly začínat číslem $nn_5 - 6$ nebo $nn_5 + 2$, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Často však dostáváme posloupnosti delší. Např. pro $n = 2$ obdržíme v našem konkrétním příkladě dvě posloupnosti pětičlenné, pro $n = 3$ jednu pětičlennou a jednu sedmičlennou, pro $n = 4$ jednu třináctičlennou posloupnost začínající číslem 114 a končící číslem 126 atd.

B. V oboru S neexistují intervaly, které by obsahovaly jen složená čísla, protože tu je každé druhé číslo prvočíslem.

5. Prvočíselná dvojčata.

A. Prvočíselnými dvojčaty nazýváme taková dvě prvočísla, jejichž rozdíl činí 2, např. 11 a 13, 59 a 61 atd. Mohou to být jen dvě po sobě následující lichá čísla. Jinak lze říci, že jsou to dvě prvočísla oddělená právě jedním složeným číslem. Dosud nebylo dokázáno, zda-li je prvočíselných dvojčat konečný nebo nekonečný počet. Jejich obecný zápis dovedeme udat na základě této úvahy:

Libovolné číslo oboru N lze napsat ve tvaru $6k + z$, kde k je nezáporné celé číslo a pro celé číslo z platí $0 \leq z < 6$. Z čísel $6k + z$ mohou být prvočísla jen čísla $6k + 1$ a $6k + 5$, protože o ostatních lze ukázat, že (s výjimkou $k = 0$, $z = 2; 3$) jsou složená. Z toho plyne, že jedno prvočíselné dvojče musí vždy předcházet některý násobek čísla 6 a druhé za ním musí následovat; dvojčata musí mít tedy tvar $6n \pm 1$.

Nahlédnutím do tabulek prvočísel shledáváme, že první páry prvočíselných dvojčat jsou čísla 6 ± 1 ; $2 \cdot 6 \pm 1$; $3 \cdot 6 \pm 1$; $5 \cdot 6 \pm 1$; atd. B. Při přenesení otázky prvočíselných dvojčat do oboru S musíme pojem dvojčat definovat. Je možno použít výkladu z předchozího odstavce a definovat prvočíselná dvojčata jako dvojici prvočísel oddělených právě jedním číslem složeným. Pak otázku jejich počtu snadno zodpovíme: Prvočíselných dvojčat je v oboru S nekonečně mnoho. Je jimi každá dvojice po sobě následujících lichých čísel oboru S a její zápis zní $2s \pm 2$ pro libovolné s .

6. Goldbachova a Eulerova domněnka.

A. V roce 1742 vyslovil Christian Goldbach (1690—1764), tehdy člen Petrohradské akademie, v dopise Leonardu Eule-

rovi domněnku, že libovolné přirozené číslo větší než 5 lze vyjádřit jako součet tří prvočísel. Euler (1707—1783) mu odpověděl, že tuto domněnku nedovede dokázat, ale že může vyslovit domněnku ještě zajímavější, že totiž každé sudé přirozené číslo větší než 2 je součtem dvou prvočísel. Podle Goldbachovy domněnky je např.

$17 = 2 + 2 + 13$; $60 = 2 + 5 + 53 = 2 + 11 + 47$ atd. ,
podle Eulerovy domněnky je např.

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5 ; 100 = 3 + 97 = 11 + 89 ;$$

$$1000 = 3 + 997 = 17 + 983 = \text{atd.}$$

Obě domněnky byly numericky ověřeny pro všechna čísla až do devíti miliónů, ale obecný důkaz dosud podán nebyl, i když se k němu např. velmi důmyslným způsobem přiblížil v roce 1937 akademik I. M. Vinogradov, který dokázal, že existuje takové přirozené číslo n_0 , že každé liché přirozené číslo větší než n_0 je součtem tří prvočísel. Číslo n_0 je obrovské a k jeho napsání v desítkové soustavě by bylo zapotřebí stovky triliónů číslic.

B. V oboru S snadno vyvrátíme analogii Goldbachovy domněnky o možnosti rozkladu každého čísla s , většího než jisté číslo s_0 , v součet tří prvočísel. Prvočísla oboru S jsou totiž lichá čísla tvaru $4n - 2$ a součet tří z nich

$$(4n_1 - 2) + (4n_2 - 2) + (4n_3 - 2) = 4(n_1 + n_2 + n_3 - 1) - 2$$

(není nutno, aby čísla n_k byla navzájem různá) je opět číslo liché.

Nelze tedy v součet tří prvočísel rozložit v oboru S čísla sudá, nýbrž jen čísla lichá, a to počínaje od jistého čísla s_0 (které je to číslo?). Rozklad lze zřejmě provést tak, že např. dané liché číslo zmenšíme o 2, a tím dostaneme číslo sudé, které ještě zbývá rozložit v součet dvou prvočísel. To už je však analogie Eulerova problému, jež lze v oboru S vždy řešit, protože tu každé sudé číslo $4n$ můžeme psát jako součet dvou prvočísel $4n_1 - 2$ a $4n_2 - 2$, kde $n_1 + n_2 = n$. Počínaje od $n = 2$ lze rozklad provést několika různými způsoby, pro jejichž počet k při sudém n platí $k = \frac{n}{2}$, kdežto při lichém n je $k = \frac{n+1}{2}$ (je míněna sudost nebo lichost čísla n v oboru N). Obě možnosti lze zapsat jedinou nerovností

$$\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n+1}{2}$$

Např. pro $s = 28$ je $n = 7$ a nerovnost

$$\frac{7}{2} \leq k \leq 4$$

dává $k = 4$. Skutečně lze číslo 28 rozložit v oboru S v součet dvou prvočísel čtyřmi různými způsoby

$$28 = 2 + 26 = 6 + 22 = 10 + 18 = 14 + 14 .$$

7. Rozklad v prvočinitele.

A. Složená čísla rozkládáme v součin prvočinitelů. Úvahou, která se rozsahem vymyká z rámce stručného článku, se dá dokázat, že takový rozklad je jediný. Čtenář zná tuto skutečnost ze své počtářské zkušenosti a ví, že ať rozkládáme dané složené číslo, např. 60, v prvočinitele jakýmkoli postupem, dospějeme vždy k jedinému výsledku

$$60 = 4 \cdot 15 = (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$

$$60 = 6 \cdot 10 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

B. V oboru S lze složená čísla též rozkládat v prvočinitele, ale rozklad je tu někdy jediný, např. $20 = 2 \cdot 10$, jindy nikoli, např. $36 = 2 \cdot 18 = 6 \cdot 6$. Jediný rozklad je zřejmě jen tehdy, když složené číslo má tvar

$$s = 2^n \cdot p,$$

kde $n \geq 2$ a p je číslo 1 nebo prvočíslo oboru N . V ostatních případech je více různých rozkladů. Složená čísla připouštějící více různých rozkladů v prvočinitele mají tvar

$$s = 2^n \cdot p_1 p_2 p_3 \dots p_m,$$

kde $n \geq 2$ i $m \geq 2$ jsou přirozená čísla a p_k lichá prvočísla oboru N . Přitom může $p_j = p_k$ pro $j = k$.

Cvičení. Jako vhodné cvičení doporučujeme čtenáři, aby problémy uvedené v tomto článku řešil i v jiných číselných oborech, např. v oboru L čísel lichých, v oboru T násobků čísla 3, v oboru Z zlomků tvaru $\frac{n}{2}$ apod.

Pro úplnost připojujeme množinový zápis uvedených oborů

$$\begin{aligned} L &= \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}, \\ T &= \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}, \\ Z &= \{\tfrac{1}{2}, 1, 1\tfrac{1}{2}, 2, 2\tfrac{1}{2}, 3, \dots\} \end{aligned}$$

Některá zajímavá pozorování v lichoběžníku

ZDENĚK MUDRÁK, Třebíč

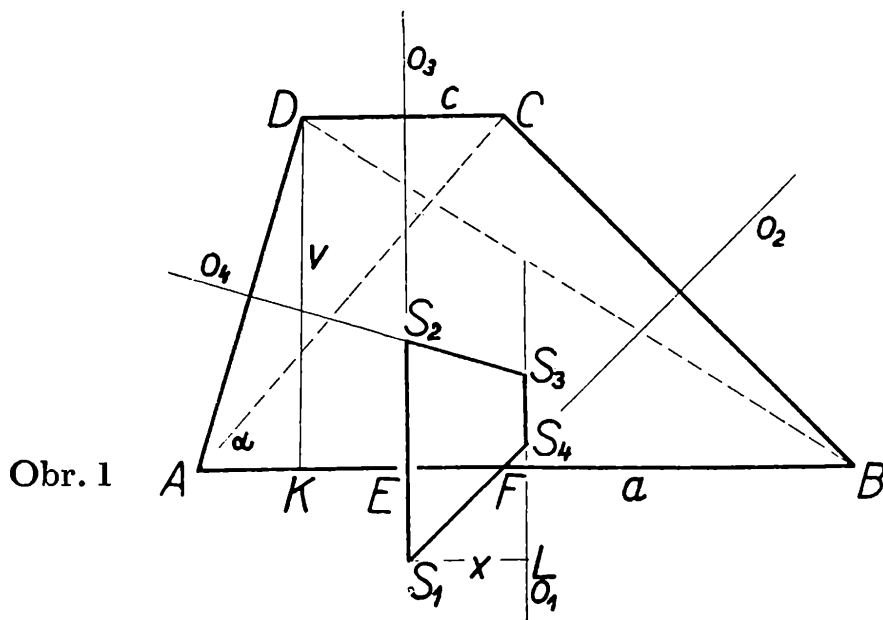
Ve škole jsem navštěvoval nepovinnou matematiku. V jedné hodině mě zaujal obrázek s kružnicemi vepsanými trojúhelníku a vztahy, které zde platí. Doma jsem pak narýsoval lichoběžník, rozdělil jej úhlopříčkami na trojúhelníky, opsal jim kružnice a hledal mezi nimi nějaké zajímavé vztahy. Výsledek je věta, kterou zde uvádím.

Mějme nerovnoramenný lichoběžník $ABCD$. Středů kružnic opsaných trojúhelníkům ABC , ABD , ACD , BCD označme po řadě S_4 , S_3 , S_2 , S_1 .

Čtyřúhelník $S_2S_1S_4S_3$ je podobný danému lichoběžníku $ABCD$ a poměr podobnosti je

$$k = \frac{v}{\frac{a-c}{2} - v \cotg \alpha},$$

kde v je výška lichoběžníka, a, c jsou základny a α je úhel při vrcholu A .



Obr. 1

D ů k a z (obr. 1). Předpokládejme, že $a > c$ a že úhly α, β při vrcholech A, B jsou ostré, nejvýše jeden z nich může být pravý. Pak

$$\triangle ABC \sim \triangle S_2S_1S_4. \quad (1)$$

Víme, že dva ostré úhly jsou shodné, jestliže jejich ramena jsou k sobě kolmá a zde skutečně

$$BA \perp S_1S_2, AC \perp S_2S_4,$$

a proto

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle S_1S_2S_4.$$

Podobně se dá dokázat, že

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle S_2S_1S_4$$

a z toho plyne správnost vztahu (1).

Stejným způsobem se dá dokázat podobnost

$$\triangle ACD \sim \triangle S_2S_4S_3;$$

tím máme dokázanu první část věty.

Poměr podobnosti obou lichoběžníků je roven poměru jejich výšek. Výšku DK lichoběžníku $ABCD$ označme v , výška v lichoběžníku $S_2S_1S_4S_3$ je $EF = x$. Dále označme

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAD &= \sphericalangle S_1S_2S_3 = \alpha, \\ AB &= a, CD = c. \end{aligned}$$

Jestliže osy stran AB , BC , CD , AD jsou po řadě o_1 , o_2 , o_3 , o_4 a průsečík osy o_3 se stranou AB je E , průsečík osy o_1 s toutéž stranou je F , platí

$$\begin{aligned} x = EF &= KF - KE = \left(\frac{a}{2} - AK \right) - \frac{c}{2} = \\ &= \frac{a - c}{2} - v \cotg \alpha. \end{aligned}$$

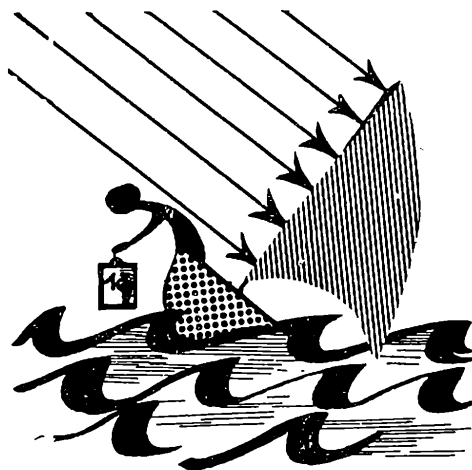
Poměr podobnosti je tudíž

$$k = \frac{v}{x} = \frac{v}{\frac{a - c}{2} - v \cotg \alpha},$$

jak jsme měli dokázat.

Za cvičení si může čtenář prozkoumat případ, kdy $\alpha > 90^\circ$. Mohou tu nastat dva případy: a) bod K leží vně AB , F leží uvnitř AB ; b) K i F leží vně AB .

Upravil St. Horák



FYZIKA

Pohybová neostrost

JIŘÍ STEJSKAL, Praha

Jedním z důležitých pojmů fotografické optiky hloubkou ostrosti, jsme se již zabývali¹⁾.

Dalším důležitým pojmem je pohybová neostrost. Pohybová neostrost vzniká při pohybu fotografovaného předmětu v době osvitů, kdy se na výsledném obraze zobrazí změny polohy zobrazova-

¹⁾ Jiří Stejskal, Hloubka ostrosti, Rozhledy (42), 1963—64, str. 423.

ného pohybujícího se předmětu. Při pohybové neostrosti se obrysy předmětů, které jsou v době osvitů v pohybu jeví neostře, zatímco předměty, které jsou v době osvitů v klidu mají uspokojující ostrost



Obr. 1. Neostrost pohybujícího se předmětu.

(obr. 1). Pro pohybovou neostrost není vždy rozhodující rychlost foto-
grafovaného objektu ve skutečnosti, ale rychlost jeho pohybu na citlivé
vrstvě filmu.

Bez pohybové neostrosti, která by byla příliš rušivá, můžeme na-
příklad $1/1000$ sekundy ze vzdálenosti 50 m fotografovat automobil
jedoucí kolmo k optické ose objektivu přístroje rychlostí 100 km/h
stejně jako brouka ve skutečné velikosti, který se pohybuje rychlostí
6 cm/s.

Vznik pohybové neostrosti bývá způsoben několika příčinami. Buď je pohybující se předmět zaznamenán neostře mezi předměty, které byly v klidu a jsou proto zaznamenány ostře, nebo jsou na snímku



Obr. 2. Fotopřístroj sleduje pohybující se předmět.

neostře všechny předměty, zpravidla tehdy, když se při snímku pohne celý přístroj. Výjimkou jsou snímky pořízené při pohybu přístroje, který sleduje pohybující se předmět; pak je předmět poměrně ostrý, zatímco klidné okolí je neostře (obr. 2).

Z našich úvah vyloučíme otázky estetického charakteru fotografie, kde se k vyjádření pohybu užívá mírné pohybové neostrosti. Tyto otázky se vymykají z rámce našich úvah.

Pohybová neostrost, jako každá jiná neostrost, nesmí přesáhnout určitou hranici. Mezi rychlostí obrazu předmětu na citlivé vrstvě a dobou osvitů musí být zachovány určité vztahy, které si nyní odvodíme.

Předpokládáme, že máme přístroj s ohniskovou vzdáleností f [mm], kterým fotografujeme předmět ze vzdálenosti a_1 [m]. Předmět se pohybuje rychlostí v [m/s]. Hledáme dobu osvitů t_1 [s] takovou, aby na výsledném obraze m -krát zvětšeném (ve srovnání s negativem), který budeme sledovat ze vzdálenosti X [mm] působil obraz ještě dojmem ostrosti.

Za určitou dobu t_1 se bod A pohybujícího se předmětu přemístí do polohy B (obr. 3) a urazí dráhu $s_1 = v \cdot t_1$. Za tutéž dobu t_1 se i obraz A' tohoto bodu přemístí do B' a urazí dráhu s_2 .

$$\text{Platí} \quad \Delta OAB \cong \Delta OA'B'$$

$$\text{proto} \quad s_1 : s_2 = a_1 : a_2 .$$

Vzhledem k tomu, že ve většině případů je $a_1 > f$, můžeme s dostatečnou přesností vyjádřit $a_2 = f$, kde a_2 je tzv. výťah přístroje.

Pak

$$s_1 : s_2 = a_1 : f$$

a pro dráhu s_2 obrazu tohoto bodu pohybujícího se předmětu

$$s_2 = \frac{s_1 f}{a_1} .$$

Dosadíme-li $s_1 = v t_1$ dostáváme

$$s_2 = \frac{v t_1 f}{a_1} \quad (1)$$

Chceme-li splnit požadavek dojmu úplné ostrosti výsledné zvětšení, pozorované ze vzdálenosti X , musí být dráha na snímku $s_2' = m \cdot s_2$ menší, nebo alespoň rovna velikosti rozptylového kroužku $d = X \cdot r = X \cdot 0,006$ (r je rozlišovací schopnost oka, která je přibližně asi 1 úhlová minuta; pro praxi uvažujeme asi 2 úhlové minuty - vyjádřeno v obloukové míře $r = 0,006$ rad).

Z předchozího plyne

$$s_2 = \frac{d}{m} = \frac{X \cdot 0,006}{m} ,$$

takže vzhledem k (1) můžeme psát

$$\frac{X \cdot 0,0006}{m} = \frac{v t_1 f}{a_1}$$

Z této rovnice je hledaný osvit

$$t_1 = \frac{0,0006 \ a_1 \ X}{v \ f \ m} . \quad (2)$$

Všechny úvahy dosud uvedené platí pro předmět pohybující se kolmo k optické ose objektivu. Směr pohybu předmětu svírá s optickou osou úhel $\alpha = 90^\circ$.

Uvažujme případ, kdy směr pohybu předmětu svírá s optickou osou úhel $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. V tomto případě odvodíme vzorec pro dobu osvitu t_2 podobnou úvahou jako v případě předcházejícím, pouze s tím rozdílem, že uvažujeme průmět dráhy předmětu.

Pro dobu osvitu t_2 v tomto případě platí

$$t_2 = \frac{0,0006 \ a_1 \ X}{v \ f \ m} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} . \quad (3)$$

Vzorec (3) přejde ve vzorec (2) je-li $\alpha = 90^\circ$, neboť $\sin 90^\circ = 1$.

Pro úplnost uveďme ještě vzorec pro výpočet doby osvitu t_3 , když se předmět pohybuje po optické ose objektivu.

Platí

$$t_3 = \frac{0,0012 \ a_1^2 \ X}{v \ f \ m \ Y}$$

(Y je velikost předmětu v metrech).

Poznámka. Pro odvození doby osvitu t_3 nelze použít vzorce (3), neboť pro $\alpha = 0^\circ$ je $\sin 0^\circ = 0$ a výraz (3) by neměl smysl.

Příklad 1. Fotopřístrojem na kinofilm s ohniskovou vzdáleností $f = 50$ mm, máme pořídit snímek motocyklisty jedoucího rychlostí $v = 90$ km/h ve vzdálenosti $a_1 = 15$ m, kolmo k optické ose objektivu. Předpokládáme, že snímek zvětšíme 5krát a budeme jej pozorovat z normální vzdálenosti $X = 250$ mm. Jaká bude doba osvitu t_1 ?

Podle vztahu (2) platí

$$t_1 = \frac{0,0006 \ a_1 \ X}{v \ f \ m} = \frac{0,0006 \cdot 15 \cdot 250}{25 \cdot 50 \cdot 5} \doteq 0,000 \ 036 \text{ s} ,$$

$$t_1 = \frac{1}{2777} \text{ s} .$$

Vzhledem k tomu, že vypočtená doba osvitu t_1 je příliš krátká a na našem přístroji je nejkratší doba osvitu $\frac{1}{1000}$ s, musíme změnit např. vzdálenost a_1 , kterou vypočteme ze vztahu (2)

$$a_1 = \frac{v \ f \ m \ t_1}{0,0006 \ X} = \frac{25 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 0,001}{0,0006 \cdot 250} \doteq 41,6 \text{ m} .$$

Vypočtená vzdálenost od předmětu je poměrně velká a předmět by byl na výsledném obraze poněkud malý. Proto změníme úhel (při zachování původní vzdálenosti $a_1 = 15$ m), který vypočteme ze vztahu (3)

$$\sin \alpha = \frac{0,0006 \ a_1 \ X}{t_2 \ v \ f \ m} = \frac{0,0006 \cdot 15 \cdot 250}{0,001 \cdot 25 \cdot 50 \cdot 5} \doteq 0,36 .$$

Této hodnotě odpovídá úhel $\alpha \doteq 21^\circ$.

Příklad 2. Fotopřístrojem s objektivem o ohniskové vzdálenosti $f = 135$ mm máme pořídit snímek lyžaře na slalomové dráze, který se pohy-

buje v optické ose objektivu přibližnou rychlostí $v = 22$ m/s. Vzdálenost našeho stanoviště od lyžaře je $a_1 = 30$ m, výška lyžaře $Y = 1,7$ m, zvětšovat budeme 5krát ($m = 5$) a snímek budeme pozorovat ze vzdálenosti $X = 250$ mm. Jaká bude doba osvitů t_3 ?

Podle vztahu (3) platí

$$t = \frac{0,0012 a_1^2 X}{v f m Y} = \frac{0,0012 \cdot 900 \cdot 250}{22 \cdot 135 \cdot 5 \cdot 1,7} \doteq 0,01 \text{ s}.$$

Barometrické měření výšek

LUBOMÍR VAŠEK, Gottwaldov

S otázkou barometrického měření výšek se žáci seznamují pouze stručnými poznámkami v učebnicích fyziky pro 7. post. ročník ZDŠ a pro I. ročník SVVŠ [1].

V učebnici pro 7. post. ročník ZDŠ je uvedeno na str. 87: Stoupáme-li do výše, zmenšuje se atmosférický tlak na každých 12 m výšky v průměru o 1 torr. V učebnici pro I. ročník SVVŠ je na str. 187 pouze tato zmínka: Vystupujeme-li vzhůru, tlak vzduchu klesá. V blízkosti zemského povrchu při výstupu o 100 m klesne tlak asi o 1 cm rtuťového sloupce. Tohoto úkazu užíváme k měření výšek.

Ke zdůvodnění těchto poznámek chci v tomto článku ukázat, jak závisí atmosférický tlak na výšce, a jak této závislosti můžeme užívat k určování nadmořské výšky.

Potřebujeme k tomu znát pouze zákon Boyle-Mariotteův, který říká, že za stejné teploty je součin z tlaku plynu p a jeho objemu V konstantní, tedy

$$p \cdot V = \text{konst.} \quad (1)$$

Poněvadž objem plynu V můžeme vyjádřit pomocí jeho hmotnosti m a hustoty ρ vztahem

$$V = \frac{m}{\rho},$$

dostaneme po dosazení do (1)

$$p \cdot \frac{m}{\rho} = \text{konst.}, \quad (1a)$$

a poněvadž hmotnost m lze považovat za neměnnou, platí

$$\frac{p}{\rho} = k, \quad (2)$$

kde k je konstanta, jejíž hodnotu pro suchý vzduch můžeme určit ze stavu vzduchu za normálních poměrů, tj. při teplotě $t_0 = 0^\circ\text{C}$ a tlaku $p_0 = 760 \text{ torrů} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$; hustota suchého vzduchu za normálních poměrů je $\varrho_0 = 1,293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Po dosazení do (1) obdržíme

$$k = \frac{p_0}{\varrho_0} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}}{1,293 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} = 78\,364,2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Uvažujme nyní vzduchový sloupec o průřezu 1 m^2 a myslíme si jej rozdělený na vrstvy výšky 1 m , takže každá vrstva obsahuje 1 m^3 vzduchu (obr. 1). Předpokládejme k tomu ještě, že vzduch má ve všech vrstvách stejnou teplotu a stejné složení. Podle tohoto předpokladu je v k -té vrstvě hustota ϱ_k , stejná v celé vrstvě a tlak p_k , který je podle (2) rovněž v celé vrstvě stejný.

Za základní výšku zvolme vzdálenost h_0 od středu Země a myslíme si, že je to výška mořské hladiny. Tlak na této hladině — a podle předpokladu také v celé metrové vrstvě nad ní — buď p_0 .

Ve výšce h_1 o 1 m vyšší než h_0 a v celé druhé vrstvě bude tlak vzduchu p_1 nižší o tlak způsobený tíhou 1 m^3 vzduchu tedy o

$$\varrho_0 \cdot g = \frac{p_0}{k} \cdot g,$$

takže

$$p_1 = p_0 - \frac{p_0}{k} \cdot g = p_0 \cdot \left(1 - \frac{g}{k}\right)$$

Ve výšce h_2 bude tlak vzduchu p_2 nižší o tlak způsobený tíhou 1 m^3 vzduchu v druhé vrstvě než tlak ve výšce h_1 , tedy

$$p_2 = p_1 - \frac{p_1}{k} \cdot g = p_1 \cdot \left(1 - \frac{g}{k}\right) = p_0 \cdot \left(1 - \frac{g}{k}\right)^2$$

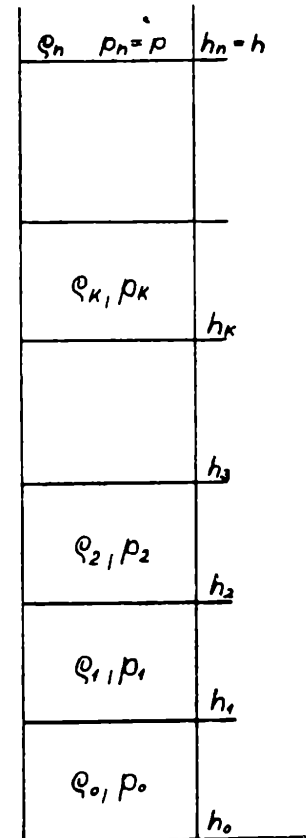
Podobně ve výšce h_3 bude tlak

$$p_3 = p_0 \cdot \left(1 - \frac{g}{k}\right)^3,$$

atd.

Ve výšce $h_n = h$ bude tedy tlak

$$p_n = p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{g}{k}\right)^n \quad (3)$$



Obr. 1

Poněvadž $n = h - h_0$, můžeme rovnici (3) psát ve tvaru

$$p_o = p_0 \cdot \left(1 - \frac{g}{k}\right)^{h-h_0} \quad (3a)$$

odtud plyne

$$\frac{p}{p_o} = \left(1 - \frac{g}{k}\right)^{h-h_0} \quad (4)$$

Poměr tlaků na levé straně rovnice (4) měřených v $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ nahradme poměrem barometrických tlaků b a b_0 v torrech čtených na barometru ve výšce h a ve výšce h_0 , takže platí

$$\frac{b}{b_o} = \left(1 - \frac{g}{k}\right)^{h-h_0} \quad (5)$$

Logaritmováním rovnice (5) obdržíme

$$\log b - \log b_0 = (h - h_0) \cdot \log \left(1 - \frac{g}{k}\right),$$

odkud

$$h - h_0 = K \cdot (\log b_0 - \log b), \quad (6)$$

kde K je konstanta, jejíž hodnota je

$$K = - \frac{1}{\log \left(1 - \frac{g}{k}\right)}.$$

Po vyčíslení dostaneme $K \doteq 20\,000$, takže přibližný vzorec pro výpočet nadmořské výšky zní

$$h - h_0 = 20\,000 \cdot (\log b_0 - \log b). \quad (7)$$

Přitom značí b barometrický tlak ve výšce h , b_0 barometrický tlak ve výšce h_0 (při hladině mořské).

Rovnice (7) ukazuje, že rozdíl nadmořských výšek je přímo úměrný rozdílu logaritmů barometrických tlaků.

Nesmíme však zapomínat, že vztah (7) platí pouze za předpokladu, že teplota je ve všech výškách stejná a atmosférický tlak je stejný vždy v celé metrové vrstvě. Proto je uvedený vztah jen přibližný.

S použitím vyšší matematiky se dá odvodit přesnější vztah, v němž se přihlíží ke skutečným poměrům, tj. k tomu, že tlaku vzduchu ubývá spojitě s výškou, že v různých výškách je různá teplota a že tíhové zrychlení se mění jednak s nadmořskou výškou, ale též se zeměpisnou šířkou; přihlíží se i k vlhkosti vzduchu, kterou stanoví napětí nasycených vodních par obsažených ve vzduchu.

Opravený vzorec, jak se ho používá v geodézii, pak zní [2]

$$h - h_0 = K' \cdot (\log b_0 - \log b), \quad (8)$$

kde

$$K' = 18\,400 \cdot (1 + \gamma t) \left(1 + \frac{h + h_0}{R} \right) (1 + 0,002\,59 \cdot \cos 2\varphi) \cdot \frac{1}{1 - \frac{3e}{8b}}. \quad (9)$$

Ve vztahu (9) značí

$\gamma = 0,003\,67 \text{ deg}^{-1}$ součinitel teplotní roztažnosti plynů,

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

průměrnou teplotu vypočtenou ze změřených teplot t_1 a t_2 ve výškách h_0 a h , $R = 6\,371\,100$ m střední hodnotu zemského poloměru, φ zeměpisnou šířku pozorovacího místa, e napětí vodních par obsažených ve vzduchu, měřené v týchž jednotkách jako tlak b .

V korekčním členu

$$\frac{h + h_0}{R}$$

stačí za h a h_0 položit jen zhruba odhadnuté hodnoty.

Příklady. 1. Jednoduchým výpočtem podle rovnic (7) a (8) se můžeme přesvědčit, že jsou přibližně správná tvrzení uvedená v učebnicích pro 7. třídu ZDŠ a pro I. ročník SVVŠ, citovaná v úvodu tohoto článku.

2. Vzorce (7) a (8) byly ověřovány žáky SVVŠ v Gottwaldově při stavbě komínu vysokého asi 140 m. Bylo změřeno: tlak u paty komínu $b_0 = 740,0$ torrů při teplotě $t_1 = 21,4^\circ\text{C}$, tlak na vrcholu komína $b = 728,1$ torrů při teplotě $t_2 = 19,8^\circ\text{C}$; průměrná teplota tedy byla $t = 20,6^\circ\text{C}$. Nadmořská výška paty komínu $h_0 = 213$ m byla zjištěna u projektanta. Dále byla z tabulek určena zeměpisná šířka daného místa $\varphi = 49^\circ 14'$ a napětí nasycených vodních par $e = 18,22$ torrů při teplotě t .

Z těchto údajů byla vypočtena výška komínu

podle vzorce (7): $h - h_0 = 140,8$ m ,

podle vzorce (8): $h - h_0 = 140,6$ m .

Souhlas obou vypočtených hodnot se skutečnou hodnotou je celkem dobrý.

Literatura

- [1] J. Vachek - M. Špaček, Fyzika pro 7. ročník ZDŠ, SPN, Praha, 1962; J. Marek a kolektiv, Fyzika pro I. roč. SVVŠ, SPN, Praha, 1964.
- [2] F. Nachtikal, Technická fyzika, JČMF, Praha, 1937.



Umělé družice v r. 1966

Dr. LADISLAV SEHNAL, Ondřejov

V dnešním článku pokračujeme v přehledech umělých družic, vypouštěných ve světě převážně k vědeckým účelům. Tentokráte to jsou družice z r. 1966, z nichž některé patří již k typům starším, jiné však byly vypuštěny na dráhy kolem Země poprvé.

V uplynulém roce byla celá řada družic Kosmos, celkem 34, které zkoumaly prostor kolem Země nejrůznějšími vědeckými aparaturami. Program výzkumů byl uveřejněn již před vypuštěním prvních družic této série. Družice Kosmos 122 je snad zajímavá jinou okolností - jejího vypuštění se zúčastnili představitelé jiného státu (pres. de Gaulle). Družice Proton byly již také dříve v Sov. svazu vypouštěny; měří intenzitu kosmického záření.

Nové meteorologické družice, navazující na série Tiros, nesou název ESSA a mají za účel pomáhat při zdokonalování předpovědi počasí. Meteorologickými družicemi jsou také družice NIMBUS a také družice Bluebell měla mít podobný účel, avšak brzy zanikla.

Diapason 1 je již třetí francouzskou družicí; je určena převážně ke geodetickým účelům a jejím úkolem bylo též prověření činnosti nosné rakety. Geodetickým účelům slouží též družice typu SECOR a ryze geodetické využití má družice PAGEOS, což je vlastně balón o průměru 30 m.

Družice Agena má těsný vztah ke družici Gemini 8. Posádka této druhé družice (N. Armstrong, D. Scott) provedla během letu své kosmické kabiny spojení s Agenou. Tento pokus byl opakován ještě dvakrát; pro posádku kabiny Gemini 9 (T. Stafford a E. Cernan) byla cílovým tělesem družice ATDA a jiná raketa Agena sloužila za cíl posádky kabiny Gemini 12 (J. Lovell, E. Aldrin).

Družice, označené zkratkami OV mají nejrůznější úkoly, od zkou-

Datum vypuštění 1966	Název	Hmot- nost [kg]	Doba oběhu [min]	Výška perigea [km]	Sklon dráhy [°]
7. 1.	Kosmos 104	?	90,2	193	65,0
22. 1.	Kosmos 105	?	89,6	204	65,0
25. 1.	Kosmos 106	?	92,8	281	48,4
3. 2.	Essa 1 (Tiros 11)	138	100,4	702	97,9
10. 2.	Kosmos 107	?	89,6	204	65,0
11. 2.	Kosmos 108	?	95,3	219	48,9
15. 2.	Bluebell 2, válec	8,7	88,1	115	96,5
	Bluebell 2, koule	4,1	88,7	149	96,5
17. 2.	Diapason 1	19	118,5	499	34,0
19. 2.	Kosmos 109	?	89,5	202	64,9
22. 2.	Kosmos 110	?	95,3	190	51,9
28. 2.	Essa 2 (Tiros 12)	138	113,6	1 356	101,0
1. 3.	Kosmos 111	?	88,2	182	51,8
16. 3.	Agena 8	3 175	90,2	285	28,9
16. 3.	Gemini 8	3 632	88,6	159	28,9
17. 3.	Kosmos 112	?	92,1	207	72,1
21. 3.	Kosmos 113	.	89,7	207	64,9
30. 3.	OV 1-4	87,6	87,6	879	144,5
6. 4.	Kosmos 114	?	90,1	210	72,9
8. 4.	Centaur 8	2 000	89,4	165	30,7
8. 4.	OA O 1	1 769	100,7	792	35,0
20. 4.	Kosmos 115	?	89,4	201	65,0
22. 4.	OV 3-1	69	151,8	351	82,5
25. 4.	Molnija 1	?	91,1	186	64,9
26. 4.	Kosmos 116	?	92,0	288	48,4
6. 4.	Kosmos 117	?	89,6	205	64,9
11. 5.	Kosmos 118	?	97,1	589	65,0
15. 5.	Nimbus 2	414	108,1	1 103	100,4
24. 5.	Kosmos 119	?	99,8	208	48,4
25. 5.	Explorer 32	225	116,0	289	64,7
1. 6.	ATDA	794	90,2	292	28,9
3. 6.	Gemini 9	3 680	89,8	270	28,9
7. 6.	OGO 3	515	2 915,0	319	31,4
8. 6.	Kosmos 120	?	89,4	205	51,8
9. 6.	Secor 6	17	125,1	168	90,0
10. 6.	OV 3-4	78,5	143,0	641	40,8
16. 6.	GGTS, IDCSP 1-7	45	1 335	33 690	0,1
17. 6.	Kosmos 121	?	89,8	200	72,8
24. 6.	Pageos	56,7	181,4	4 049	86,9
25. 6.	Kosmos 122	?	97,1	550	65,1
1. 7.	Explorer 33	93	19 488	30 532	29,0
6. 7.	Proton 3	12 200	92,2	185	63,4
8. 7.	Kosmos 123	?	92,1	256	48,7
14. 7.	OV-8	50	105,1	998	144,2
14. 7.	Kosmos 124	?	89,4	205	51,7
18. 7.	Gemini 10	3 630	95,0	298	28,8
20. 7.	Kosmos 125	?	89,1	205	65,0

(Pokračování)

Datum vypuštění 1966	Název	Hmot- nost [kg]	Doba oběhu [min]	Výška perigea [km]	Sklon dráhy [°]
28. 7.	Kosmos 126	?	90,0	204	51,8
4. 8.	OV 3-3	70	137,0	360	81,4
8. 8.	Kosmos 127	?	89,1	201	51,8
19. 8.	Secor 7	20	167,6	3 680	90,1
27. 8.	Kosmos 128	?	90,0	213	65,0
12. 9.	Gemini 11	3 630	100,1	653	28,8
2. 10.	Essa 3	148	114,6	1 383	101,1
5. 10.	Secor 8	20	167,6	3 676	90,2
14. 10.	Kosmos 129	?	89,5	180	64,7
20. 10.	Molnija 1	?	714,4	505	65,4
20. 10.	Kosmos 130	?	89,7	208	65,0
26. 10.	Intelsat 2	39	730,0	3 424	17,2
28. 10.	OV 3-2	24	104,1	319	81,9
3. 11.	OV 4-1	?	90,3	291	32,8
11. 11.	Gemini 12	3 630	89,9	243	28,8
12. 11.	Kosmos 131	?	89,9	204	72,9
19. 11.	Kosmos 132	?	89,4	210	65,0
28. 11.	Kosmos 133	?	88,4	171	51,8
3. 12.	Kosmos 134	?	89,5	201	65,0
7. 12.	ATS	352	1 465,9	35 852	0,23
11. 12.	OV 1-9	?	142,3	473	99,1
12. 12.	Kosmos 135	?	93,6	253	48,4
14. 12.	Biosatellite A	200	89,7	250	33,5
19. 12.	Kosmos 136	?	89,2	188	64,7
21. 12.	Kosmos 137	?	104,4	219	48,8

mání atmosféry až po biologické pokusy. Název družice OAO je zkratkou (za Orbiting Astronomical Observatory) a je to družice, vybavená velmi složitými astronomickými přístroji, jejíž vypuštění a první okamžiky existence byly zdařilé, avšak brzy vypověděly službu všechny baterie a aparatura je tedy v nečinnosti. Podobnou zkratku má družice OGO, obíhající geofyzikální observatoř.

Prostor mezi Zemí a Měsícem zkoumá důkladně družice Explorer 33, která se dostává až za dráhu Měsíce.

Družice GGTS slouží k výzkumům stabilizace těles pomocí gravitačního pole. Společně s touto družicí bylo vypuštěno sedm vojenských komunikačních družic IDCSP 1—7, jejichž dráhy se jen velmi málo liší a jsou zajímavé tím, že leží téměř v rovině rovníku.

Název jedné z posledních družic loňského roku Biosatellite sám napovídá, že se jedná o družici pro biologický výzkum. Její pouzdro neslo mnoho různých biologických zkušebních látek.

Snímky Měsíce

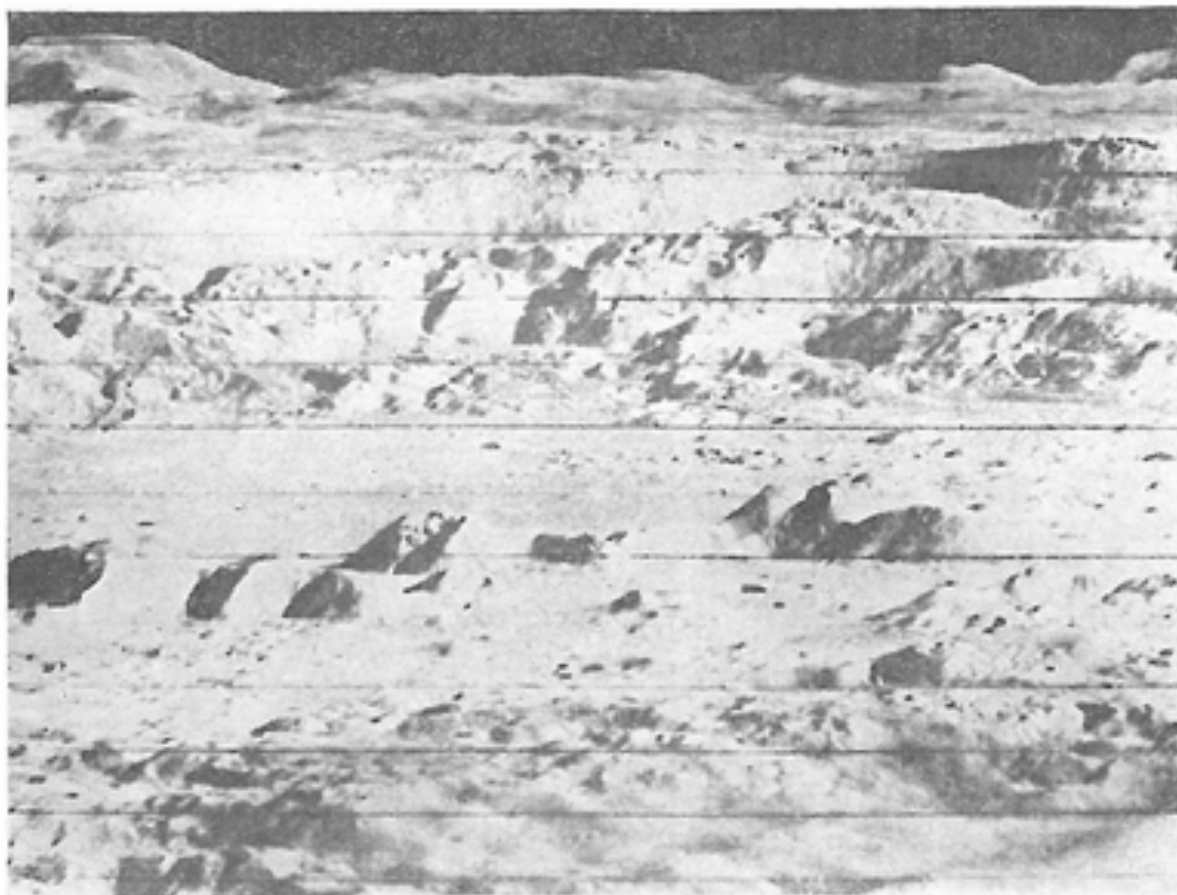
6. listopadu minulého roku byla vypuštěna z mysu Kennedy na Floridě (USA) umělá družice Měsíce, *Lunar Orbiter 2*, již druhá tohoto typu. Tyto družice mají za účel snímkování měsíčního povrchu a dopravení snímků k pozemským přijímacím stanicím. Snímky první družice nebyly zcela dobré, avšak tato druhá družice vyslala snímky výborné kvality. Na snímku 1 je vidět celkový záběr širokoúhlou kamerou, kde na obzoru je známý velký kráter Koperník, před ním pak menší, ale velmi výrazný kráter Fauth. Detaily z kráteru Koperník jsou vidět na druhém snímku (obr. 2), který je velmi názorný a silně připomíná pozemské „letecké“ snímky.

Výška družice byla 45,5 km nad měsíčním povrchem a její vzdálenost od kráteru Koperník činila 240 km. Snímky byly pořízeny 24. listopadu 1966 ve 4 hodiny 5 minut našeho času.

L. S.



Obr. 1

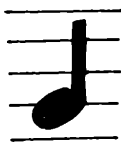


Obr. 2

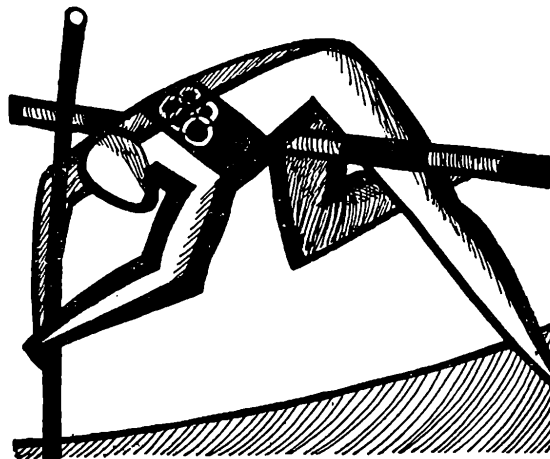
r → ich₂02f

R E B U S

R E B U S

vodík Y  ns

MO



XVII. ročník Matematické olympiády

V 10. čísle minulého ročníku tohoto časopisu byly otištěny *přípravné úlohy* XVII. ročníku MO. V tomto čísle uvedeme *texty soutěžních úloh I. kola*. V letošním ročníku jsou poněkud posunuty termíny odevzdání řešení úloh:

a) *Řešení přípravných úloh* odevzdejte svému učiteli matematiky nebo referentu MO na škole *do 15. listopadu 1967*.

V letošním ročníku *není opět podmínkou* pro účast v I. kole odevzdání a úspěšné rozřešení přípravných úloh; *doporučujeme, aby každý žák ve vlastním zájmu přípravné úlohy řešil*.

b) *Řešení soutěžních úloh I. kola* mají být odevzdána *do 15. ledna 1968*, aby bylo možno uskutečnit dříve II. kolo a aby závěrečné fáze MO po III. kole neprobíhaly v období maturit. Také pro výběr účastníků celostátního soustředění úspěšných řešitelů kategorie B zbude tím více času.

Další podrobnosti o průběhu XVII. ročníku MO se dočtete *v letáku MO*, který bude letos na školách snad již začátkem září.

Přejeme vám hodně úspěchu jak v soutěži MO tak při studiu matematiky vůbec.

Dále uvedeme texty soutěžních úloh I. kola všech čtyř kategorií.

Ústřední výbor MO

Kategorie A

1. Je dána úsečka AB . Množina bodů M je definována takto: a) obsahuje body A, B ; b) obsahuje-li body X, Y , obsahuje i bod Z úsečky XY , pro který platí $YZ = 3 \cdot XZ$. Dokažte, že každá úsečka ležící v úsečce AB obsahuje aspoň jeden bod množiny M .

2. Dokažte, že všechny nerovnosti

$$\sin x \leq \sin 2x \leq \sin 3x \leq$$

platí jen pro čísla tvaru $x = k \cdot \pi$, kde k je celé číslo.

3. Vyšetřte množinu M všech bodů roviny komplexních čísel, jež jsou obrazy komplexních čísel z splňujících nerovnosti

$$1 < \left| \frac{z}{|z|} + |z| \right| < a \cdot |z|,$$

kde a je kladné číslo. Zjistěte, pro která čísla a je množina M prázdná.

4. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Vyšetřte a popište množinu všech přímek x , které procházejí vrcholem D a mají tuto vlastnost: rovnoběžka s přímkou x vedená vhodným vrcholem čtyřstěnu $ABCD$ protne jeho protější stěnu v jejím vnitřním bodě.

Kategorie B

1. Pěticiferné číslo N , jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje jednu nulu a končí číslicí 1, dává při dělení číslem 43 trojciferný podíl a třikrát za sebou se při algoritmu dělení opakuje týž zbytek. Určete N .

2. Jsou-li α , β , γ velikosti vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku ABC , potom platí

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8};$$

dokažte.

3. Trojúhelník ABC má tu vlastnost, že kružnice procházející středy jeho stran se dotýká kružnice opsané.

Dokažte, že bod dotyku je jedním vrcholem trojúhelníka ABC a že vnitřní úhel při tomto vrcholu je pravý.

4. V prostoru jsou dány čtyři body A_1, A_2, A_3, A_4 , které neleží v rovině. Je-li X libovolný bod prostoru, označme X_1 patu kolmice spuštěné z X na přímkou A_1A_2 , X_2 patu kolmice z X na A_2A_3 , X_3 patu kolmice z X na A_3A_4 , X_4 patu kolmice z X na A_4A_1 .

Dokažte, že mezi všemi body X prostoru má střed kulové plochy procházející body A_1, A_2, A_3, A_4 tu vlastnost, že součet

$$(A_1X_1)^2 + (A_2X_2)^2 + (A_3X_3)^2 + (A_4X_4)^2$$

je minimální.

Kategorie C

1. Vyšetřte a načrtněte množinu všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice vyhovují nerovnosti

$$\frac{(x^5 - 13x^3 + 36x)(x^4 - 17x^2 + 16)}{(y^5 - 13y^3 + 36y)(y^4 - 17y^2 + 16)} \geq 0.$$

2. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož základna má střed D a délku 2.

a) Dokažte, že pro každý bod M výšky CD platí

$$AM + BM + CM \geq 1 + \sqrt{3}.$$

b) Sestrojte ten bod M výšky CD , pro který je součet $AM + BM + CM$ nejmenší.

3. Určete délky stran všech pravoúhlých trojúhelníků, které mají tyto vlastnosti:

a) délky stran v centimetrech jsou celá čísla;

b) obvod trojúhelníka v cm je roven obsahu trojúhelníka v cm^2 .

N á v o d : Označíme-li délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka ABC písmeny a , b a délku přepony písmenem c , lze délky těchto stran vyjádřit ve tvaru

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2,$$

kde m , n jsou přirozená čísla.

4. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 8 cm, který je rozdělen na způsob šachovnice na 16 shodných polí (čtverců). Sestrojte rovnoramenný trojúhelník AXY tak, aby vrchol X ležel v rohovém poli při vrcholu B , vrchol Y v rohovém poli při vrcholu D a aby délka jeho stran $AX = XY = YA$ byla co největší.

Kategorie D

1. Mirek dostal za domácí cvičení známou úlohu o nádržce a čtyřech kohoutech, ale marně se snažil ji rozřešit. Úloha zněla:

Prvním a druhým kohoutem nateče dohromady za hodinu p hektolitrů vody; druhým a třetím nateče za hodinu o 30 hl více. Třetím a čtvrtým nateče za hodinu dvakrát více než druhým a třetím dohromady. Prvním a čtvrtým kohoutem nateče za hodinu o 20 hl více než prvním a druhým. Kolik hektolitrů nateče za hodinu každým kohoutem zvlášť?

Vyložte, proč Mirek nenašel řešení úlohy.

2. Určete čísla a , b tak, aby pro každé libovolně zvolené číslo x platilo

$$\frac{a-b}{a+b} [a(x-a) + b(x-b)] = \frac{x-2ab(b-a)}{a+b} - \frac{2}{b-a}.$$

3. V trojúhelníku ABC , v němž je úhel $\alpha \neq 90^\circ$ a v němž C_1 značí patu výšky v_c , platí

$$AC^2 = AC_1 \cdot AB.$$

a) Dokažte, že pak platí také buď $c^2 = a^2 + b^2$ nebo $c^2 = a^2 - 3b^2$.

b) Vyslovte obrácenou větu a dokažte ji.

4. Je dán čtverec, jehož strana má délku 6 cm. Bod M má od dvou sousedních stran čtverce vzdálenosti 15 mm a 20 mm.

Sestrojte lomenou čáru procházející bodem M , která se skládá ze středů všech úseček XY navzájem rovnoběžných, jejichž krajní body leží na obvodu čtverce. Vypočtěte její délku.

ÚVMO

Doc. Dr. Miroslav Menšík a doc. Ota Setzer
děkují za projevená ústní i písemná blahopřání
k udělení státního vyznamenání Za vynikající práci.

Seznam vítězů a úspěšných řešitelů

III. kola MO v XVI. ročníku, kategorie A

V Í T Ě Z O V É

- *1. *Pavel Vejvoda*, 3. roč. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
- 2. *Martin Macháček*, 3. roč. SVŠ, Novohradská, Bratislava
- **3. *Bohuš Sivák*, 1. roč. SVŠ, Zvolen
- *4. *Radovan Gregor*, 3. roč. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
- **5. *Petr Kůrka*, 3. roč. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
- *6. až 7. *Jan Kastl*, 3. roč. SVVŠ, J. Fučíka, Plzeň
- Erich Wiszt*, 3b. roč. SVŠ, Banská Bystrica
- *8. až **9. *Pavel Polcar*, 2. roč. SVVŠ, Velké Meziříčí
- Zdeněk Slanina*, 4. roč. SPŠ chem., Vranovská ul., Brno
- 10. až **11. *Josef Niederle*, 3. roč. SVVŠ, Koněvova ul., Brno
- Alica Pirická*, 3. roč. SVŠ, Kovačská ul., Košice

Ú S P Ě Š N Í Ř E Š I T E L É

- 12. až 15. *Roman Kotecký*, 3. roč. SVVŠ, Šmeralova ul., Ostrava
- Mojmír Obdržálek*, 3. roč. SVVŠ, Koněvova ul., Brno
- * *Věra Pohlová*, 3. roč. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
- * *Radovan Slouka*, 4. roč. SPŠP, Leninova 40, Brno
- 16. až 19.* *Martin Bukovčan*, 2. roč. SVŠ, Novohradská, Bratislava
- Jiří Fér*, 1. roč. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
- Tomáš Mašek*, 1. roč. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2
- Jiří Vinárek*, 1. roč. SVVŠ, W. Piecka, Praha 2

Ústřední výbor MO

Poznámka. Společná místa jsou uvedena v abecedním pořádku. Jednou hvězdičkou jsou označeni letošní řešitelé soutěže Rozhledů, dvěma hvězdičkami řešitelé lonští. Redakce.

0 průběhu konkursu na úlohy pro MO

V květnu tomu byl právě rok, co byly v Rozhledech matematicko fyzikálních uveřejněny podmínky konkursu na návrhy úloh pro matematickou olympiádu, který vyhlásila JČMF.

Čtenáře, zvláště účastníky olympiády, bude možná zajímat, proč bylo nutno ke konkursu přistoupit. ÚV MO se totiž setkává s nemalými potížemi při získávání nových originálních úloh pro soutěž. Důvody jsou samozřejmé: tematika, tj. stře-

doškolské učivo, je dost omezená a přitom se ve šk. roce 1967/68 pořádá olympiáda už po sedmnácté.

Připomeňme si podmínky konkursu. Text a řešení každé úlohy je třeba zaslat napsané na listu formátu A4, vždy originál a jeden opis. Za každou přijatou úlohu je vyplácena odměna ve výši 50 Kčs v kategoriích A, B a C a 30 Kčs v kategorii D. Při recenzi se přihlíží k původnosti úlohy a odměna může být popřípadě zvýšena, např. úlohy pro

mezinárodní MO jsou odměňovány částkou 80 Kčs. Úlohy, které neprojdou úspěšně konkursním řízením, se autorům vrací. Přijaté úlohy jsou zařazeny do archívu ÚV MO, který vyplacením odměny autorovi získává dispoziční právo, zejména právo upravit text úlohy i autorské řešení a použít úlohy třeba v pozdějším vhodném termínu. Autor samozřejmě na sebe bere závazek, že přijatou úlohu utají, aby průběh olympiády nebyl narušen.

Recenzování úloh se vedle členů předsednictva ÚV MO účastní zejména také s. Jitka Kučerová a s. Milan Koman z katedry matematiky PF UK v Praze.

Potěšitelné je, že mezi autory úloh je celá řada bývalých i současných olympioniků (v následujícím seznamu je u jmen současných olympioniků a u olympioniků z nedávných ročníků MO hvězdička).

Již v XVI. ročníku byly zařazeny úlohy získané konkursem. Jde např. o úlohy, které zaslali dr. Miroslav Hlaváček, Praha; Ivan Chajda, Přerov; Dalibor Kluzký a Jaromír Krys, Olomouc; Petr Kůrka*, Zbraslav; Štefan Porubský*, Zvolen; Jaroslav Zemánek*, Slaný. Pro letošní MMO do šestice úloh navržených Československem byly zařazeny dvě úlohy z konkursu autoři: Ladislav Beran, Praha a Miloš Franek, Prievdza.

V XVII. ročníku mezi přípravnými úlohami a úlohami I. kola jsou např. úlohy, které zaslali Pavel Bartoš, Bratislava; Leo Bukovský, Košice; Miloš Franek, Prievdza; Marian Fúrik*, Zvolen; Josef Gli-vický, Prostějov; Jaroslav Zemánek*, Slaný.

Na závěr uvedme ještě několik zkušeností z prvního roku trvání konkursu, které budou jistě zajímat všechny, kteří úlohy do konkursu buď poslali nebo chtějí poslat.

Naprostý nedostatek úloh je pro kategorie C a D. Ovšem skutečně originálních úloh není dostatek ani pro kategorie A, B a pro MMO.

Pro účely MO se nehodí úlohy vysloveně školského charakteru a úlohy, k jejich řešení je třeba užít příliš umělých obrátů.

Autorské řešení úloh je třeba doprovázet slovním výkladem, aby bylo možno porozumět myšlenkovému postupu.

Úspěch mají v konkursu bývalí i současní účastníci MO. Důvod je snadno pochopitelný. Znájí totiž dobře charakter úloh, které se v olympiádě vyskytují. Proto také všem autorům doporučujeme, aby se s olympiádou blíže seznámili, např. z brožur Matematické olympiády, které obsahují texty a řešení úloh z jednoho ročníku soutěže.

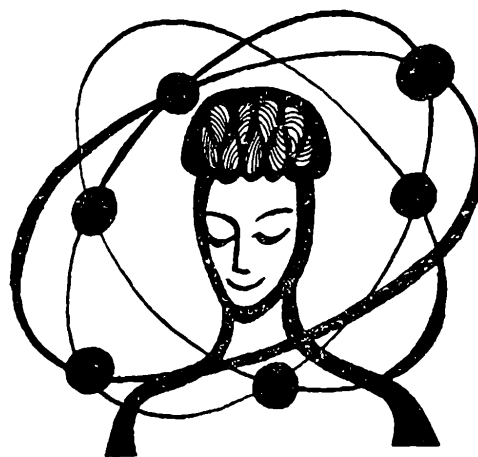
Na podzim vyjde *P a t n á c t ý*
r o č n í k m a t e m a t i c k é
o l y m p i á d y. Vedle látky probírané ve škole lze též v úlohách předpokládat znalosti získané studiem knížek z edice *Š k o l a m l a d ý c h m a t e m a t i k ů*.

O stavu konkursu bude veřejnost nadále informována v časopisech *R o z h l e d y m a t e m a t i c k o - f y z i k á l n í* a *M a t e m a t i k a v e š k o l e*. Pro úplnost uvedme ještě několik čísel: k 30. květnu 1967 došlo celkem 267 úloh od 53 autorů, 177 úloh bylo už recenzováno a 124 úlohy byly přijaty.

Redakční radu našeho časopisu opouští prof. K. U. Emil Kraemer, aby mohl vykonávat další funkce jimiž byl pověřen. Děkujeme mu za jeho jedenáctiletou činnost, která zvláště při znovuzahájení vydávání Rozhledů matematicko-fyzikálních byla velmi rozsáhlá.

Redakce.

FO



Devátý ročník soutěže Fyzikální olympiáda

Žákům středních všeobecně vzdělávacích škol a středních odborných škol!

V tomto školním roce se koná už devátý ročník soutěže Fyzikální olympiáda, kterou pořádá ministerstvo školství spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků a Československým svazem mládeže. Soutěž má vyhledávat a podchytit talenty a dále je vést tak, aby byli lépe připraveni pro studium fyziky na vysokých školách.

Pokyny pro žáky středních škol jsou obsaženy v letáku pro kategorie *A*, *B* a *C*, který vydává Státní pedagogické nakladatelství a který je počátkem školního roku rozesílán na školy.

V Rozhledech byly v 10. čísle ročníku 45 (1966/67) uveřejněny první tři příklady 1. kola kategorií *A*, *B* a *C*, v tomto čísle jsou otištěny příklady 4 až 9 a studijní téma pro kategorii *A*. Studijní témata pro další kategorie budou otištěna v dalších číslech.

Lhůty k odevzdání příkladů na škole pro 1. kolo FO jsou: příklad 1 až 3 do 30. listopadu 1967, příklad 4 až 6 do 10. ledna 1968, příklad 7 až 9 do 15. února 1968.

ÚV FO přeje všem řešitelům hodně úspěchů v soutěži!

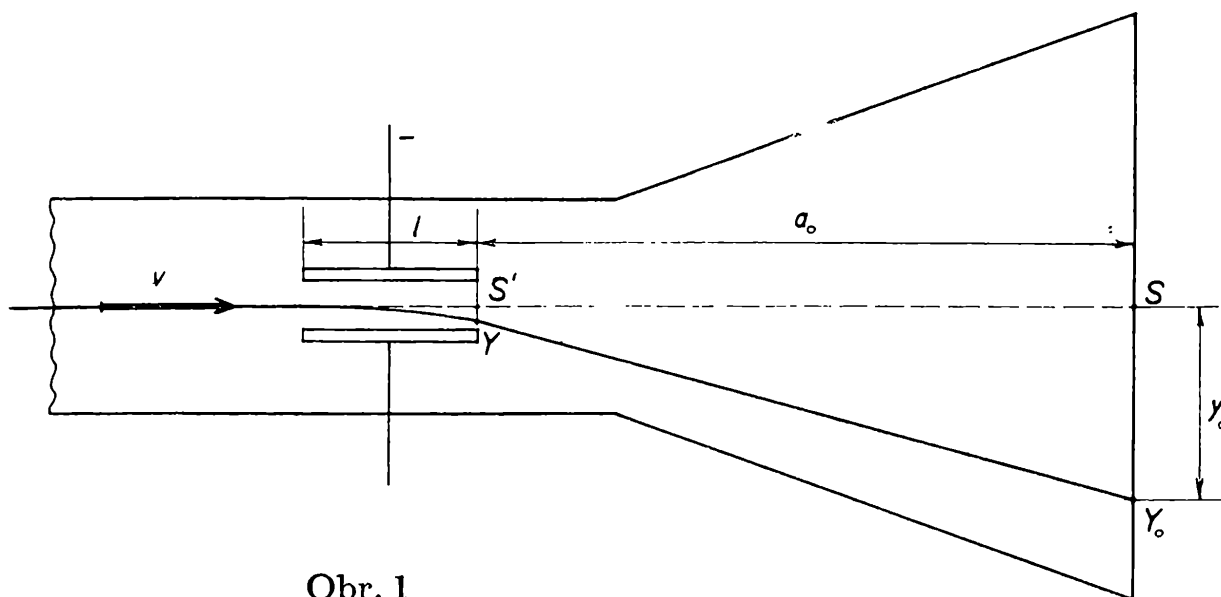
ÚVFO

IX. ročník fyzikální olympiády

Příklady 1., 2., 3. byly otištěny v č. 10 tohoto časopisu.

Kategorie A

4. Elektron vnikne mezi desky kondenzátoru Braunovy trubice rychlostí v podle obr. 1. Na fluorescenčním stínítku ve vzdálenosti a_0 od kondenzátoru se vytvoří světelná stopa, která je vzdálena od středu stínítko o délku y_0 .



Obr. 1

Vzdálenost desek kondenzátoru je d a jejich délka l .

Vypočítejte intenzitu elektrického pole kondenzátoru, je-li jeho kapacita C .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $v = 1,50 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$; $a_0 = 13,9 \text{ cm}$; $y_0 = 4,0 \text{ cm}$; $d = 16 \text{ mm}$; $l = 5,0 \text{ cm}$; $C = 5 \text{ pF}$; $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, kde e je náboj elektronu a m jeho klidová hmotnost.

5. Spirála zhotovená z ocelového drátu je připojena k stejnosměrnému zdroji se stálým elektromotorickým napětím U . Jak velký proud bude procházet spirálou v ustáleném stavu, má-li spirála při teplotě t_0 odpor R_0 . Tepelní součinitel odporu je α , součinitel přestupu tepla do okolního prostředí je β a teplota okolního prostředí je udržována na hodnotě t_1 .

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U = 6,0 \text{ V}$, $t_0 = 0^\circ \text{C}$, $t_1 = 20,0^\circ \text{C}$, $R_0 = 12,0 \Omega$, $\alpha = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ deg}^{-1}$, $\beta = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ J s}^{-1} \text{ deg}^{-1}$.

6. *Určení indexu lomu destilované vody.* Určete index lomu destilované vody dvěma metodami. Porovnejte výsledky a posuďte kterou metodou dosáhnete větší přesnosti.

Metoda první. Určete index lomu destilované vody použitím válcové tenkostěnné nádoby s vodou. Popis metody viz V. Pilát, Pokusy z optiky, SPN, Praha 1965, str. 137, úl. 3.05.

Poznámka k provedení pokusu: Při použití zdroje světla podle návodu, vsuňte mezi štěrbinu na povrchu nádoby a zdroj světla větší clonu se svislou štěrbinou. Je výhodné použít jako zdroje světla lampy z žákovské optické soupravy nebo jiné optické lampy s clonou se svislou štěrbinou.

Úkoly.

a) Vysvětlete metodu měření; narýsujte paprsky v půdorysné rovině a odvoďte z obrázku, ze kterých naměřených veličin se vypočítá index lomu.

b) Proveďte měření s použitím červeného filtru upevněného ke štěrbině clony. Velikost úhlů měřte v celých stupních; proveďte deset měření, pro každé určete index lomu kapaliny a vypočítejte aritmetický průměr hodnot. Tloušťku stěny nádoby zanedbejte.

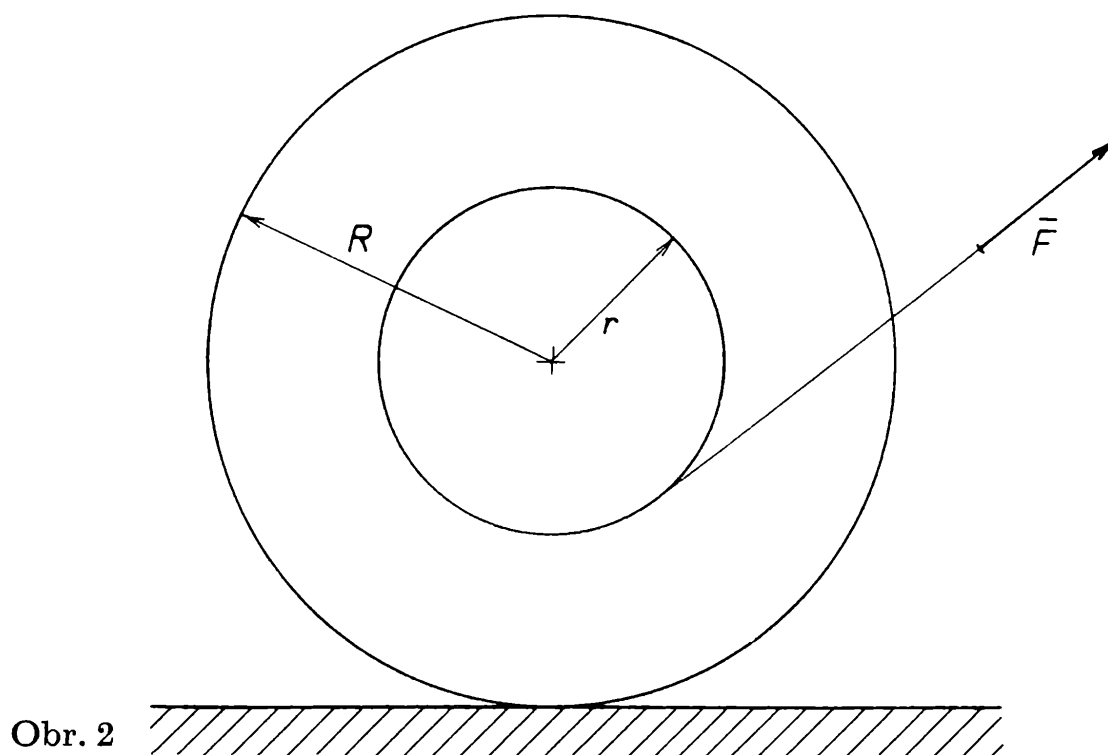
c) Opakujte měření s použitím zeleného filtru. Porovnejte výslednou hodnotu s hodnotou určenou podle bodu b).

Metoda druhá: Určete index lomu destilované vody jinou metodou podle vlastní volby; např. použitím kyvety, v níž kapalina tvoří planparalelní vrstvu; použitím nádoby tvaru poloválce, podle pokusu V. Pilát, Pokusy z optiky, str. 150, pokus č. 3.16; použitím refraktometru aj. Viz také: Z. Horák, Praktická fyzika, SNTL 1958, str. 535; Živný, Lepil, Praktická cvičení z fyziky, SPN 1965, str. 159.

Úkoly a), b), c) jako při použití první metody.

Kategorie B

4. Na vodorovné podložce leží dřevěná cívka, např. od nití, jejíž kruhová čela mají poloměr R . Válec, který čela spojuje, má poloměr r (obr. 3).



Uprostřed válce je navinuta nit v několika závitech. Táhneme-li za nit tak, že nit svírá s vodorovnou podložkou úhel α , koná cívka valivý pohyb bez klouzání. Vyšetřte pohyb cívky pro

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Po obecném vyšetření řešte pro číselné hodnoty $r = 2,0$ cm, $R = 4,0$ cm.

5. Plyn dané hmotnosti má teplotu t_1 , tlak p_1 a objem V_1 . Izotermickým stlačením se změnil jeho tlak na p_2 a objem na V_2 ; potom se izobarickým

dějem sníží jeho teplota na t_3 , přitom se objem změní na V_3 ; nakonec se izotermickým roztahováním změní objem na V_4 . Určete výsledný tlak plynu p_4 . Kromě veličin počátečního stavu (p_1 , V_1 , t_1) známe teplotu t_3 a objem V_4 .

1. Řešte obecně.
2. Řešte pro hodnoty $t_1 = 127^\circ\text{C}$, $p_1 = 10^5 \text{ N m}^{-2}$, $V_1 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $t_3 = -73^\circ\text{C}$, $V_4 = 10^{-3} \text{ m}^3$;
 - a) výpočtem;
 - b) graficky v soustavě souřadnic: (V , p); (T , p); (T , V).

6. Určení poměru povrchového napětí vody a lihu metodou vážení kapek.

Pomůcky. Dvě kapilární trubice různé světlosti s rovně zabroušeným okrajem s hadičkou a tlačkou, stojan s držákem, kádinka, technické váhy, sada závaží, destilovaná voda, líh.

Úvod. Do kapiláry nasajeme destilovanou vodu, upevníme ve svislé poloze a necháme z ní volně odkapávat určitý počet kapek, např. $n = 100$ kapek. Kapky jímáme do kádinky, kterou jsme dříve vyvážíli tárou na vahách a zjistíme hmotnost m_1 zachycené vody. Totéž opakujeme pro líh a zjistíme hmotnost m_2 stejného počtu n kapek lihu.

Úkoly. 1. Dokažte platnost vztahu

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{m_1}{m_2},$$

kde σ_1 , σ_2 značí povrchová napětí vody, popříp. lihu.

2. Měření hmotnosti zachycených kapek proveďte pětkrát pro různé počty kapek a naměřené hodnoty запиšte do tabulky.

Určete podíl

$$k = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

jako aritmetický průměr nalezených hodnot.

Vypočtete absolutní chybu hodnoty k a správně ji zaokrouhlete.

3. Opakujte měření podle úkolu 2 s kapilárou jiné světlosti.

Porovnejte oba výsledky. Ovlivňuje světlost kapiláry výsledky měření? Vysvětlete.

Kategorie C

4. Muž hmotnosti m_1 stojící na pokojnom člne hmotnosti m_2 sa nadchádza vo vzdialenosti d od brehu. Urobí v člne n krokov smerom kolmo k brehu a zastaví sa. Dĺžka jedného kroku je a .

Aká bude vzdialenosť l muža od brehu v okamihu, keď sa zastaví?

Predpokladáme, že sa čln môže po vode pohybovať bez trenia.

Riešte najprv všeobecne, potom pre hodnoty $d = 10,0 \text{ m}$, $a = 0,75 \text{ m}$, $n = 4$, $m_1 = 75 \text{ kg}$, $m_2 = 125 \text{ kg}$.

5. Z vrcholu věže, který je ve výši h_0 nad okolní vodorovnou rovinou ρ , bylo vrženo katapultem těleso hmotnosti m v elevačním úhlu α rychlostí v_0 .

a) Najděte vztahy pro závislost rychlosti a dráhy tělesa na čase, a to zvlášť pro složky ve směru vodorovném a zvlášť pro složky ve směru svislém.

b) Vypočítejte souřadnice (x , y) polohy tělesa na konci každé z prvních deseti vteřin za předpokladu, že lze zanedbat odpor vzduchu. Vypočítané hodnoty zaznamenejte do vhodné tabulky.

c) Podle tabulky části b) úlohy najděte výšku h vrhu nad rovinou τ proloženou vrcholem věže.

d) Ze vztahů v části a) úlohy vypočítejte dobu t_1 výstupu a dobu t_2 , kdy těleso proletí rovinou τ .

e) Vypočítejte tíhovou potenciální energii W_p vzhledem k rovině a kinetickou energii W_k tělesa při průchodu vrcholem dráhy.

f) Určete rychlost v' tělesa v čase t_2 .

g) Vypočítejte dobu t_3 , ve které těleso dopadne do vodorovné roviny ϱ v okolí věže, a vodorovnou vzdálenost d místa dopadu od místa počátku vrhu.

h) Užitím výsledků části a) úlohy najděte vztah mezi výškou y tělesa nad rovinou τ a vodorovnou vzdáleností x od místa startu.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $h_0 = 100$ m, $\alpha = 30^\circ$, $v_0 = 80$ m s⁻¹, $m = 1$ kg.

6. Těleso visí na siloměru, jenž je připevněn ke stropu výtahu.

a) Výtah stoupá se zrychlením $a > 0$. Siloměr je napínán silou F .

Jaká je tíha G tělesa?

b) Siloměr ukazuje sílu $F' < G$. Jak se výtah pohybuje?

c) Jaký by byl údaj siloměru, kdyby nosné lano výtahu se přetrhlo?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $F = 225$ N, $a = 1,25$ m s⁻², $F' = 175$ N.

(Dokončení)

Magnetické obvody

Točivé magnetické pole

K O N R Á D H O F M A N, PF, České Budějovice

Téma k prostudování pro IX. ročník FO, kategorie A

Magnetické pole, jak je v učebnici fyziky pro III. ročník SVVŠ vyloženo, se znázorňuje pomocí indukčních čar a kvantitativně se popisuje pomocí vektoru magnetické indukce B . Magnetická indukce B je přímo úměrná hustotě indukčních čar, tj. množství indukčních čar jdoucích kolmo jednotkovou plochou. Je-li magnetické pole homogenní, je indukční tok $\Phi = BS$, pro nehomogenní pole je $\Delta\Phi = B\Delta S$, kde ploška ΔS musí být tak malá, aby magnetické pole jdoucí kolmo ploškou ΔS bylo možno považovat za homogenní. Jednotka pro magnetickou indukci B je tesla [T] a pro indukční tok je jednotkou weber [Wb] = Vs.

Mezi nimi platí vztah $\text{Wb} = \text{T m}^2$. Magnetické pole můžeme znázornit také pomocí magnetických siločar a kvantitativně popsat pomocí

vektoru magnetické intenzity H , jež je nezávislá na magnetických vlastnostech prostředí a pro kterou je

$$H = \frac{1}{\mu_o \mu_r} B ,$$

kde permeabilita vakua

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \doteq \frac{1}{8 \cdot 10^5} \text{ H m}^{-1} ,$$

μ_r (číslo bez rozměru) charakterizuje prostředí a nazývá se relativní permeabilita. Součin $\mu_o \mu_r = \mu$ je permeabilita prostředí¹⁾.

Pro magnetické pole ve vakuu (a prakticky také ve vzduchu), kde $\mu_r = 1$, je

$$H = \frac{B_o}{\mu_o} .$$

Magnetickou indukci ve vakuu značíme B_o . Vektory H a B mají stejný směr a proto také siločáry mají stejný průběh jako indukční čáry.

Uvažujme v dalším magnetické pole ve vakuu.

Potom vzorcům uvedeným v učebnici pro magnetickou indukci B_o : odpovídají vzorce pro H :
přímkový velmi dlouhý vodič.

$$B_o = \mu_o \frac{I}{2\pi r} , \quad H = \frac{I}{2\pi r} ,$$

střed kruhového vodiče

$$B_o = \mu_o \frac{I}{2r} , \quad H = \frac{I}{2r} ,$$

střed dlouhého a tenkého solenoidu

$$B_o = \mu_o \frac{NI}{l} , \quad H = \frac{NI}{l} .$$

Jednotka pro intenzitu magnetického pole H plynoucí z předešlých vztahů je A m^{-1} .

Magnetomotorické napětí a magnetické napětí

Intenzita magnetického pole H (obr. 1) ve vzdálenosti r od velmi dlouhého přímkového vodiče s proudem I je

$$H = \frac{I}{2\pi r} .$$

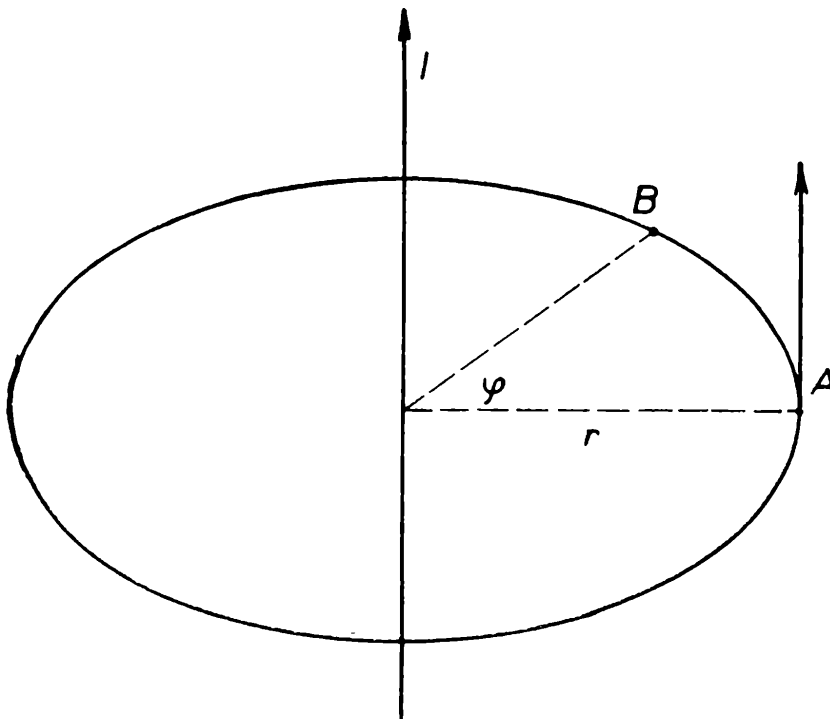
¹⁾ V učebnici fyziky pro III. ročník SVVŠ je uveden rozměr permeability N A^{-2} . Dosadíme-li do zákonné jednotky H m^{-1} za $\text{H} = \text{Vs A}^{-1}$, je $\text{H m}^{-1} = \text{Vs A}^{-1} \text{m}^{-1} = \text{VAs m}^{-1} \text{A}^{-2} = \text{VC m}^{-1} \text{A}^{-2} = \text{I m}^{-1} \text{A}^{-2} = \text{N A}^{-2}$.

Z toho

$$H \cdot 2\pi r = I = E_m. \quad (1)$$

Součin $H \cdot 2\pi r$, rovnající se proudu I , nazývá se magnetomotorické napětí E_m . Jednotkou magnetomotorického napětí je tedy ampér.

Dá se dokázat, že vztah (1) lze zobecnit pro libovolnou uzavřenou křivku. V tomto případě (obr. 2) musíme křivku rozdělit na elementy dl_1, dl_2 , tak malé, že intenzita H je ve všech bodech určitého ele-



Obr. 1



Obr. 2

mentu konstantní, v místě elementu stanovit intenzitu $H_1, H_2, \dots$ a za magnetomotorické napětí musíme vzít součet skalárních součinů

$$\overline{H_1} \cdot \overline{dl_1} + \overline{H_2} \cdot \overline{dl_2} + \dots = I = E_m, \quad (2)$$

přičemž sčítání musíme provést podél celé uzavřené křivky.

Procházel-li uzavřenou křivkou více proudů, je magnetomotorické napětí rovno součtu těchto proudů čili

$$E_m = \Sigma I_n.$$

☛ Magnetomotorické napětí E_m dané součtem skalárních součinů $\overline{H_k} \cdot \overline{dl_k}$ je pro libovolnou uzavřenou křivku rovno součtu všech proudů procházejících vnitřkem křivky.

Násobíme-li rovnici (1) zlomkem

$$\frac{\varphi}{2\pi},$$

získáme

$$H \cdot r\varphi = I \frac{\varphi}{2\pi},$$

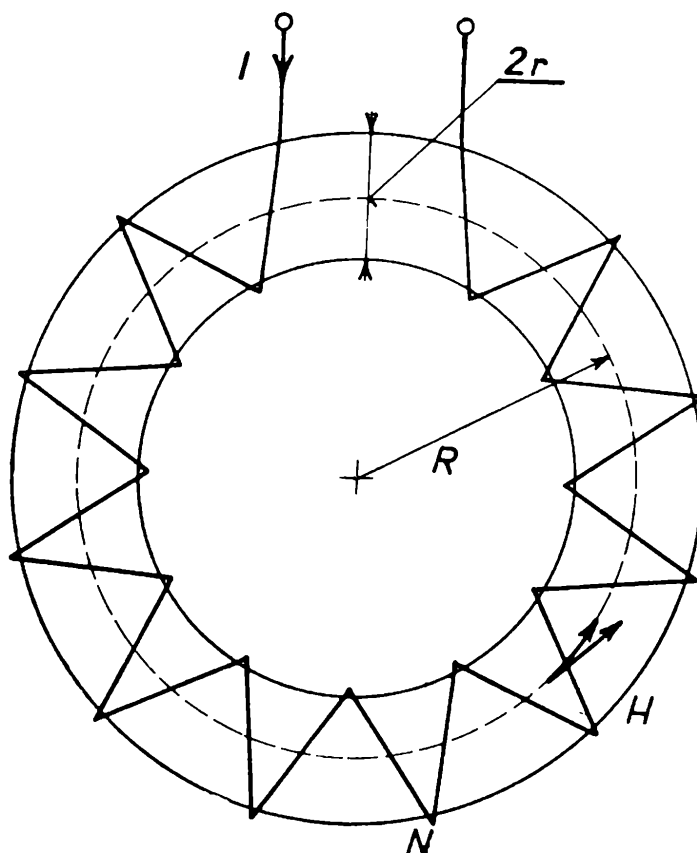
čili

$$H \cdot \widehat{AB} = I \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Součin $H \cdot \widehat{AB} = U_m$ je magnetické napětí mezi body A, B (obr. 1).

Prstencová cívka (toroid)

V prstencové cívce (obr. 3) s N závitů rovnoměrně rozloženými se středním poloměrem prstence R značně větším než je poloměr závitů r ,



Obr. 3

vzniká homogenní magnetické pole s intenzitou H , prochází-li cívkou proud I . Aplikujme na toroid větu o magnetomotorickém napětí. Uzávěrnou křivkou je kružnice s poloměrem R délky $l = 2\pi R$. Protože H má směr tečny k této kružnici, je magnetomotorické napětí

$$E_m = H \cdot l = NI.$$

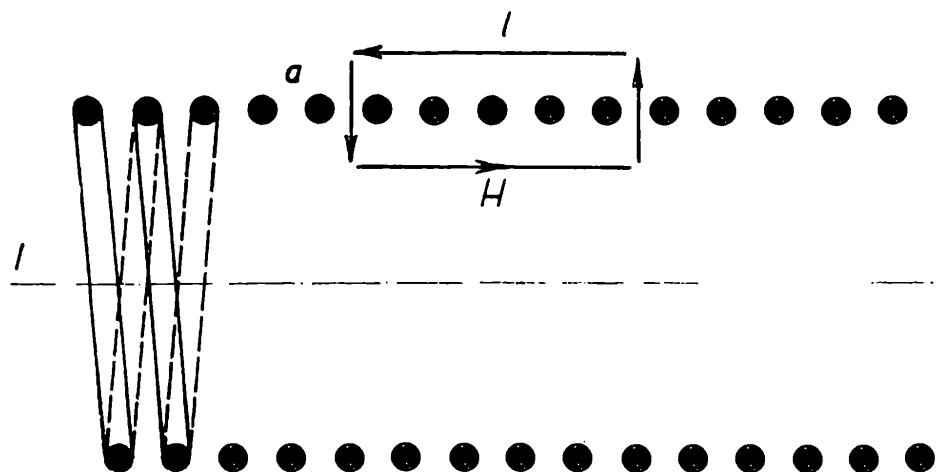
Kružnice totiž obepíná N vodičů s proudem I . Z toho plyne pro toroid

$$H = \frac{NI}{l} = Iz, \quad B = \mu_0 \frac{NI}{l} = \mu_0 Iz,$$

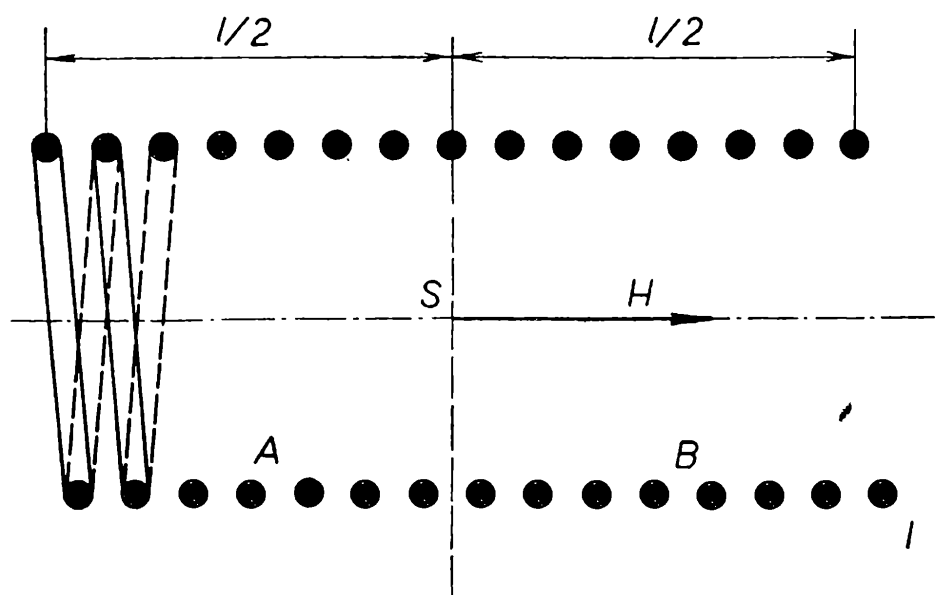
kde $z = \frac{N}{l}$ udává počet závitů na jednotce délky.

Solenoid

Uprostřed velmi dlouhého a tenkého solenoidu je homogenní magnetické pole, prochází-li závity proud I . Abychom odvodili vzorec pro intenzitu, postupujeme takto (obr. 4).



Obr. 4



Obr. 5

Zvolíme obdélník délky l a šířky a , který obepíná N závitů a stanovíme magnetomotorické napětí

$$E_m = H \cdot l + 0 \cdot a + 0 \cdot l + 0 \cdot a = NI.$$

Složka intenzity H ve směru délky a se rovná nule a intenzita vně solenoidu je také nulová. Z předešlé rovnice je

$$H = \frac{NI}{l} = Iz.$$

Při odvození byla délka l malou částí délky celého solenoidu a N byl počet závitů na této délce. Snadno nahlédneme, že za délku můžeme vzít délku solenoidu, vezmeme-li za N počet závitů celého solenoidu.

Vztah

$$H = \frac{NI}{l} = Iz \quad [\text{A/m}]$$

platí pro solenoid u něhož $l \gg r$, kde r je poloměr závitů.

Intenzitu magnetického pole na konci solenoidu stanovíme touto úvahou:

Intenzita H je uprostřed solenoidu (obr. 5) vektorovým součtem intenzit buzených všemi závity. Myslíme-li si solenoid rozpůlen na části A , B , potom obě části mají stejný podíl na výsledné intenzitě, tedy levá polovina budí v S intenzitu $H = \frac{1}{2} Iz$. Odstraníme-li pravou polovinu solenoidu, stane se bod S středem koncového závitu solenoidu. Na konci velmi dlouhého a tenkého solenoidu je tedy

$$H = \frac{1}{2} \frac{NI}{l} = \frac{1}{2} Iz . \text{ } ^2)$$

Magnetické obvody. Hopkinsonův zákon

M a g n e t i c k ý o b v o d je cesta, kterou se uzavírá magnetický indukční tok.

Z větší části je zpravidla tvořen feromagnetickou látkou. Mějme prázdnou prstencovou cívku (toroid) s N závity, kdy $R \gg r$. R je střední poloměr prstence, r je poloměr závitů (obr. 3). Uvnitř cívky je homogenní magnetické pole s intenzitou

$$H = \frac{NI}{l}$$

a indukci

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l} .$$

Indukční tok

$$\Phi = \mu_0 \frac{NI}{l} S ,$$

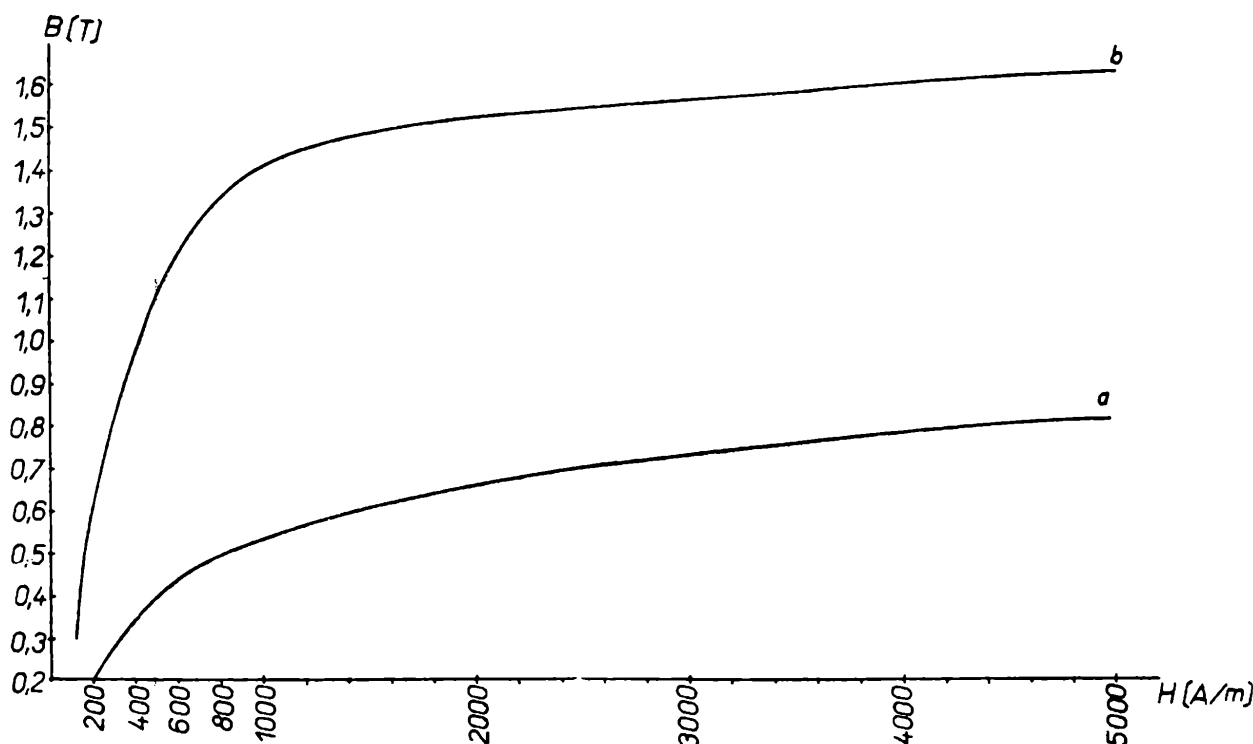
je-li S plocha řezu.

Dáme-li do cívky jádro z feromagnetické látky, intenzita H buzená proudem I se nezmění, ale indukce B_0 se μ_r -krát zvětší. Ve feromagnetiku je tedy indukce

$$B = \mu_r B_0 = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l} .$$

²⁾ Vzorci pro solenoid platí přesně jen pro solenoid velmi dlouhý a velmi tenký, tedy pro ideální podmínky, které prakticky jsou nerealizovatelné. Podobně je tomu i u jiných vzorců.

Charakteristickou vlastností feromagnetických látek je závislost μ_r a tudíž také μ na intenzitě magnetického pole H a na předcházejícím stavu magnetickém. O tom je pojednáno v učebnici fyziky pro III. roč. SVVŠ. Při řešení příkladů se proto většinou neobejdeme bez magnetizační křivky (obr. 6).



Obr. 6

Indukční tok v toroidu s feromagnetickým jádrem je

$$\Phi = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l} S = \frac{NI}{\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S}} = \frac{E_m}{R_m},$$

kde $E_m = NI$ je magnetomotorické napětí,

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S} \quad (3)$$

je magnetický odpor.

Vztah

$$\Phi = \frac{E_m}{R_m}$$

se nazývá **H o p k i n s o n ů v z á k o n**; je to vlastně obdoba Ohmova zákona pro uzavřený magnetický obvod³⁾.

³⁾ Jednotka pro magnetický odpor je $\text{AV}^{-1} \text{s}^{-1} = \text{H}^{-1}$.

Magnetomotorické napětí E_m odpovídá elektromotorickému napětí E , magnetický tok Φ odpovídá elektrickému proudu I a magnetický odpor R_m odpovídá elektrickému odporu R . Vztah (3) pro magnetický odpor má stejný tvar jako vztah pro odpor vodiče

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S},$$

kde γ je měrná vodivost. Ze srovnání plyne, že permeabilitu prostředí μ lze považovat za jakousi měrnou magnetickou vodivost. Mezi měrnou magnetickou a elektrickou vodivostí, pokud se týká látek, jsou však značné rozdíly. Neexistují např. magnetické izolátory, což má za následek rozptýl indukčních čar, látky diamagnetické a paramagnetické mají $\mu_r \doteq 1$, existuje proto velké množství látek s prakticky stejnou magnetickou vodivostí jakou má vakuum, látky feromagnetické jsou dobrými magnetickými vodiči, ale jejich magnetický odpor je značně závislý na H .

Úloha 1. Na prstencovém jádře z ocelolityny se střední délkou indukční čáry $l = 0,8$ m, průřezu $S = 10^{-3}$ m² je navinuto $N = 1000$ závitů.

Jaký proud je třeba k vytvoření indukčního toku a) $\Phi = 10^{-3}$ Wb, b) $\Phi = 1,5 \cdot 10^{-3}$ Wb. Jakou hodnotu má relativní permeabilita μ_r v těchto případech?

Řešení.

a)

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{10^{-3} \text{ Wb}}{10^{-3} \text{ m}^2} = 1 \text{ T}.$$

Z magnetizační křivky najdeme pro $B = 1$ T potřebné $H = 420$ A m⁻¹. Ze vztahu

$$H = \frac{NI}{l}$$

je

$$I = \frac{Hl}{N} = \frac{420 \text{ A m}^{-1} \cdot 0,8 \text{ m}}{1000} = 0,336 \text{ A}.$$

Ze vztahu

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

plyne

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}.$$

Dosadíme-li za

$$\mu_0 = \frac{1}{8 \cdot 10^5} \text{ H m}^{-1},$$

je

$$\begin{aligned} \mu_r &= \frac{1 \text{ T}}{\frac{1}{8 \cdot 10^5} \text{ H m}^{-1} \cdot 420 \text{ A m}^{-1}} \doteq 1,9 \cdot 10^3 \frac{\text{V s m}^{-2}}{\text{H A m}^{-2}} = \\ &= 1,9 \cdot 10^3 \frac{\text{V s}}{\text{V s A}^{-1} \text{ A}} = 1900. \end{aligned}$$

b) Podobně stanovíme $I = 1,44 \text{ A}$, $\mu_r = 0,67 \cdot 10^3 = 670$.

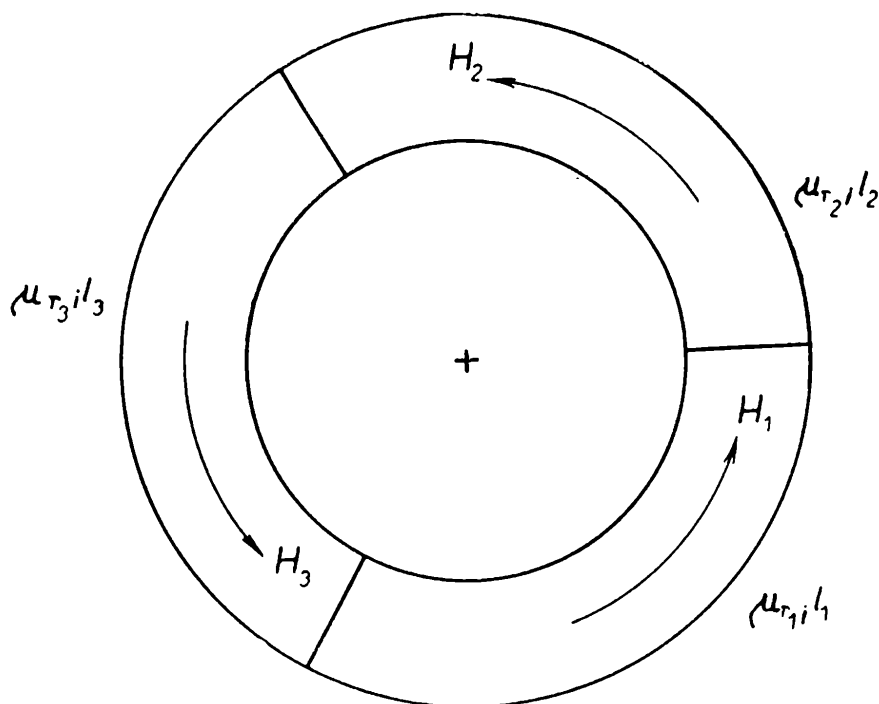
V tomto případě se stává jádro nasyceným, proto je potřebný proud velký a relativní permeabilita je značně menší než v a).

Složené magnetické obvody

Pro složené magnetické obvody platí zákony obdobné zákonům Kirchhoffovým a jejich důsledkům. Tak pro magnetické odpory zapojené sériově je výsledný odpor roven součtu jednotlivých odporů čili

$$R_m = \Sigma R_{mk}.$$

Mějme toroid složený ze tří různých feromagnetických materiálů stejného průřezu S (obr. 7) ovinutý N závity s proudem I .



Obr. 7

Délky středních indukčních čar a relativní permeability jednotlivých materiálů jsou l_1, μ_{r_1} ; l_2, μ_{r_2} ; l_3, μ_{r_3} .

Indukční tok Φ v magnetických odporech zapojených za sebou, zanedbáme-li rozptyl, je stejný, indukční čáry jsou vždy uzavřené. Je proto

$$\begin{aligned} E_m &= \Phi (R_{m_1} + R_{m_2} + R_{m_3}) = \\ &= BS \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_{r_1}} \frac{l_1}{S} + \frac{1}{\mu_0 \mu_{r_2}} \frac{l_2}{S} + \frac{1}{\mu_0 \mu_{r_3}} \frac{l_3}{S} \right) = \\ &= \frac{B}{\mu_0 \mu_{r_1}} l_1 + \frac{B}{\mu_0 \mu_{r_2}} l_2 + \frac{B}{\mu_0 \mu_{r_3}} l_3 = \\ &= H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = \\ &= NI = U_{m_1} + U_{m_2} + U_{m_3}, \end{aligned}$$

protože

$$H_1 l_1 = U_{m_1}, H_2 l_2 = U_{m_2}, H_3 l_3 = U_{m_3}$$

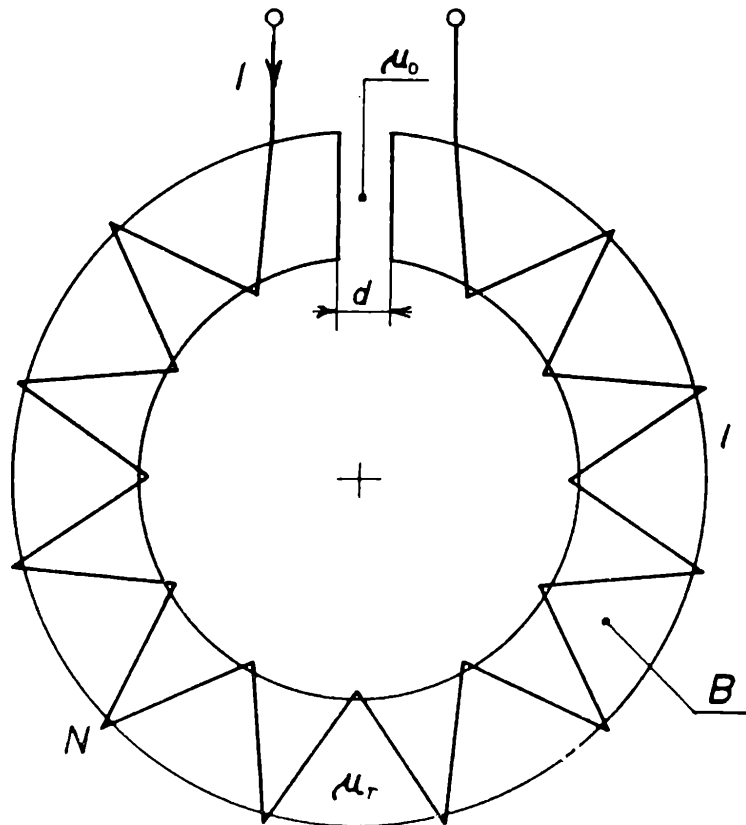
jsou magnetická napětí.

Úloha 2. Polovina prstence je z litiny, druhá polovina z ocelolitiný. Prstenec má průřez $S = 10^{-3} \text{ m}^2$, střední délku $l = 0,6 \text{ m}$ a $N = 480$ závitů. Jak velký je proud I , je-li indukční tok $\Phi = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$. Jak velká jsou magnetická napětí na litině a na ocelolitině?

Řešení. Indukce v prstenci

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{0,6 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}}{10^{-3} \text{ m}^2} = 0,6 \text{ T}.$$

Z magnetizačních křivek najdeme pro litinu $H_1 = 1400 \text{ A m}^{-1}$, pro ocelolitinu $H_2 = 200 \text{ A m}^{-1}$.



Obr. 8

Magnetická napětí

$$U_{m_1} = H_1 \cdot \frac{l}{2} = 1400 \text{ A m}^{-1} \cdot 0,3 \text{ m} = 420 \text{ A},$$

$$U_{m_2} = H_2 \cdot \frac{l}{2} = 200 \text{ A m}^{-1} \cdot 0,3 \text{ m} = 60 \text{ A},$$

$$E_m = NI = U_{m_1} + U_{m_2} \rightarrow I = \frac{U_{m_1} + U_{m_2}}{N} = \frac{480 \text{ A}}{480} = 1 \text{ A}.$$

Potřebný proud $I = 1 \text{ A}$. Magnetické napětí na litině je sedmkrát větší než na ocelolitině.

Magnetický obvod se vzduchovou mezerou

Prstencové jádro stálého průřezu S z feromagnetické látky s N závitů je přerušeno vzduchovou mezerou (obr. 8). Délka střední indukční čáry

ve feromagnetiku je l , ve vzduchové mezeře d . Rozptyl, který vzniká v okolí vzduchové mezery, zanedbáme.

Pro tento magnetický obvod je

$$E_m = NI = \Phi R_m = \Phi (R_{m_z} + R_{m_o}) = BS \left(\frac{1}{\mu_o \mu_r} \frac{l}{S} + \frac{1}{\mu_o} \frac{d}{S} \right) =$$

$$= \frac{B}{\mu_o \mu_r} l + \frac{B}{\mu_o} d = H_z l + H_o d ,$$

kde

$$H_z = \frac{B}{\mu_o \mu_r}$$

je magnetická intenzita ve feromagnetiku,

$$H_o = \frac{B}{\mu_o} = \frac{B}{\mu_o \mu_r} \cdot \mu_r = \mu_r H_z$$

je magnetická intenzita ve vzduchu.

Zatímco magnetické indukční čáry jsou vždy uzavřené, všude spojitě, jsou siločáry v tomto případě na rozhraní feromagnetika a vzduchu nespojitě, intenzita H_o ve vzduchu je μ_r -krát větší než ve feromagnetiku čili ve vzduchu je μ_r -krát více siločar než ve feromagnetiku. Proto na koncích feromagnetika vzniknou magnetické póly.

Poměr magnetických odporů je

$$R_{m_o} : R_{m_z} = d : \frac{l}{\mu_r} = \mu_r d : l ,$$

a protože μ_r feromagnetických látek dosahuje velkých hodnot, dokud nenastal stav nasycení, je $R_{m_o} \gg R_{m_z}$. Magnetomotorické napětí se z větší části spotřebuje na odporu vzduchové mezery, i když je d jen několik milimetrů. Uvedený případ můžeme chápat tak, že feromagnetikum s N závity s proudem I je zdrojem magnetomotorického napětí $E_m = NI$ a vnitřním odporem R_{m_z} . Vzduchová mezera s magnetickým odporem R_{m_o} představuje spotřebič.

Úloha 3. V toroidu z ocelolitiný střední délky $l = 0,5$ m se vzduchovou mezerou tloušťky $d = 1$ cm je magnetická indukce $B = 1,2$ T. Jaký proud vybudí tuto indukci, je-li $N = 500$ závitů a nepřihlížíme-li k magnetickému rozptylu ve vzduchové mezeře. Kolik procent magnetomotorického napětí E_m je magnetické napětí na ocelolitině.

Řešení. Z magnetizační křivky pro ocelolitinu najdeme pro $B = 1,2$ T intenzitu $H_z = 600$ A m⁻¹ a výpočtem získáme

$$H_o = \frac{B}{\mu_o} = 1,2 \cdot 8 \cdot 10^5 \text{ A m}^{-1} = 9,6 \cdot 10^5 \text{ A m}^{-1} .$$

Magnetické napětí

$$U_{m_z} = 600 \text{ A m}^{-1} \cdot 0,5 \text{ m} = 300 \text{ A} ,$$

$$U_{m_o} = 9,6 \cdot 10^5 \text{ A m}^{-1} \cdot 10^{-2} \text{ m} = 9600 \text{ A} ,$$

$$E_m = U_{m_z} + U_{m_0} = 9900 \text{ A} = NI ,$$

$$I = \frac{9900 \text{ A}}{500} = 19,8 \text{ A} ;$$

$$\frac{U_{m_z}}{E_m} 100 \% = \frac{300}{9900} \cdot 100 \% \doteq 3 \% .$$

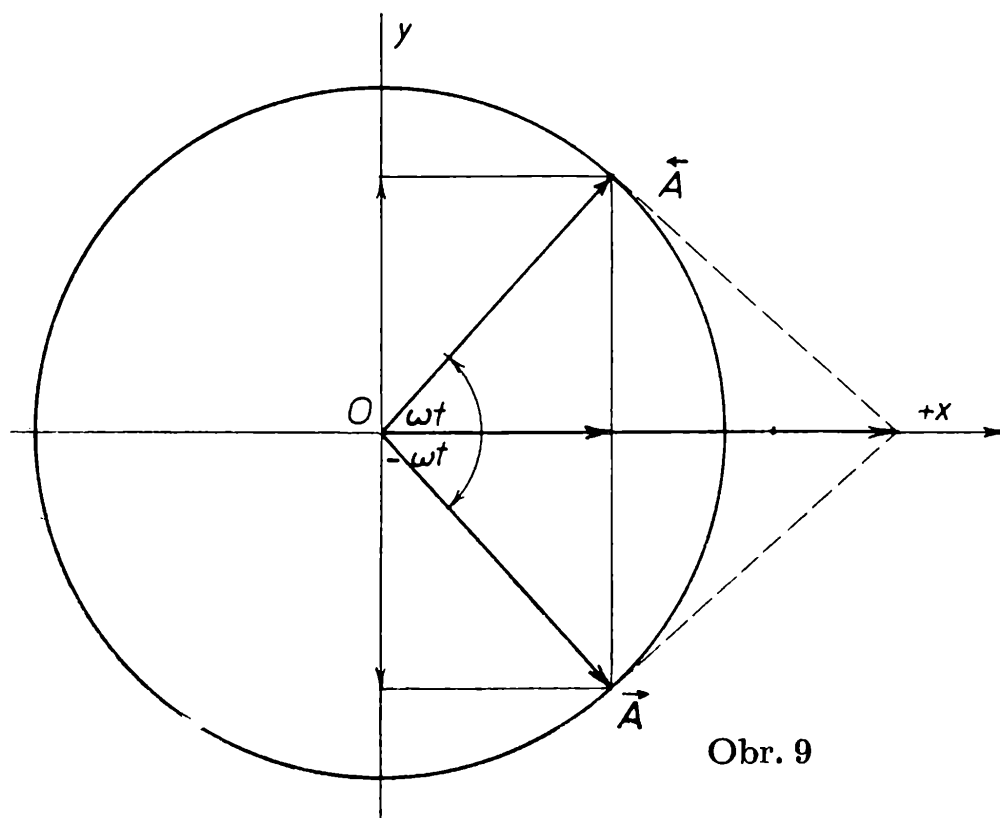
Při paralelním spojení magnetických odporů platí podobně jako v elektřině

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_{m_1}} + \frac{1}{R_{m_2}} .$$

Tím se ale dále zabývat nebudeme.

Točivé magnetické pole

Mějme dva točivé vektory $\overleftarrow{A}$, $\overrightarrow{A}$ stejně velké, z nichž první se otáčí úhlovou rychlostí ω v kladném smyslu, druhý úhlovou rychlostí $-\omega$ v záporném smyslu. Na obr. 9 jsou tyto točivé vektory znázorněny



v čase t . Stanovme jejich vektorový součet. Složky točivých vektorů do osy y se ruší, složky obou vektorů ve směru osy x jsou stejně velké a mají hodnotu $A \cos \omega t$, takže výslednice

$$\bar{x} = 2 \bar{A} \cos \omega t = \overleftarrow{A} + \overrightarrow{A} . \quad (4)$$

Rovnice $\bar{x} = 2 \bar{A} \cos \omega t$ je rovnicí harmonických kmitů s amplitudou

2 A . Kmity jsou v ose x . Obvykle se ve vztazích pro harmonické kmity vyskytuje funkce sinus, zde je kosinus, ale to na věci nic nemění.

Z rovnice (4) plyne, že složením dvou točivých vektorů $\overleftarrow{A}$, $\overrightarrow{A}$ vznikne harmonické kmitání ve směru osy x s amplitudou $2A$. Větu můžeme obrátit. Harmonické kmity ve směru osy x dané vztahem $x = A \cos \omega t$ můžeme nahradit dvěma točivými vektory $\frac{1}{2} \overleftarrow{A}$ a $\frac{1}{2} \overrightarrow{A}$.

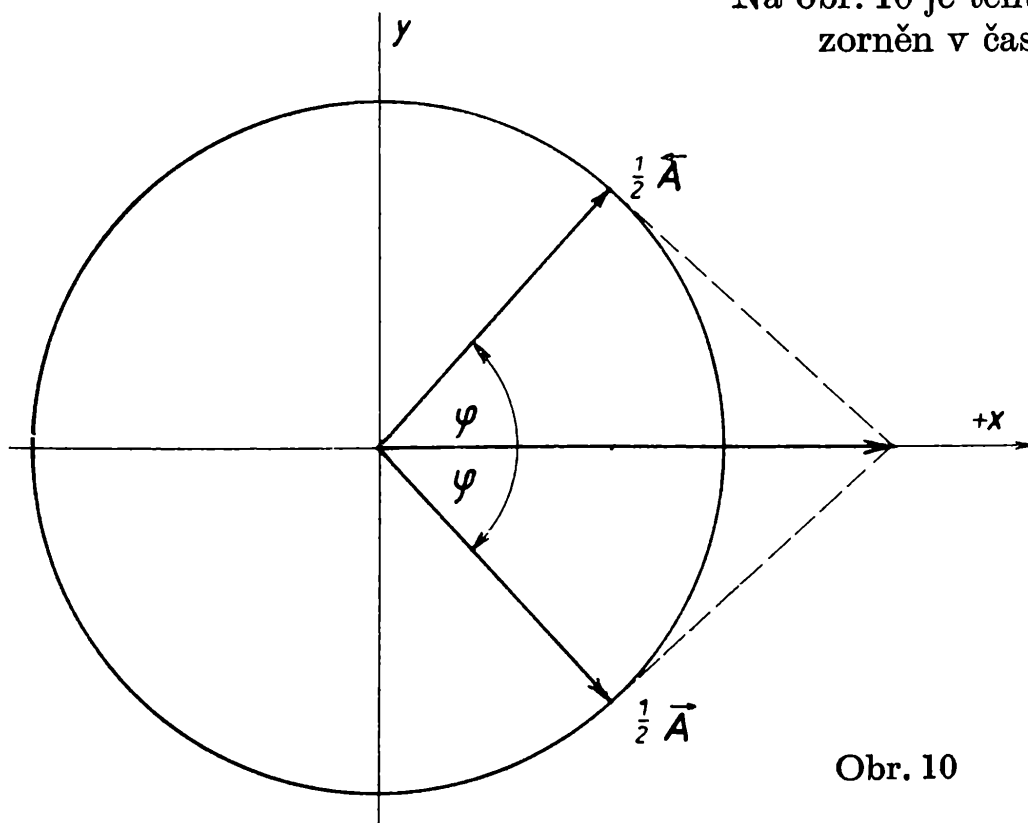
Rovnici (4) píšeme přesněji

$$\bar{x} = \bar{A} \cos(\omega t + 0) = \frac{1}{2} (\overleftarrow{A}_0 + \overrightarrow{A}_0),$$

kde značka $_0$ udává počáteční fázi točivých vektorů vzhledem ke kladnému směru osy x a 0 je současně počáteční fáze harmonického kmitání. Obecně můžeme psát

$$\bar{x} = \bar{A} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} (\overleftarrow{A}_\varphi + \overrightarrow{A}_\varphi).$$

Na obr. 10 je tento vztah znázorněn v čase $t = 0$.



Obr. 10

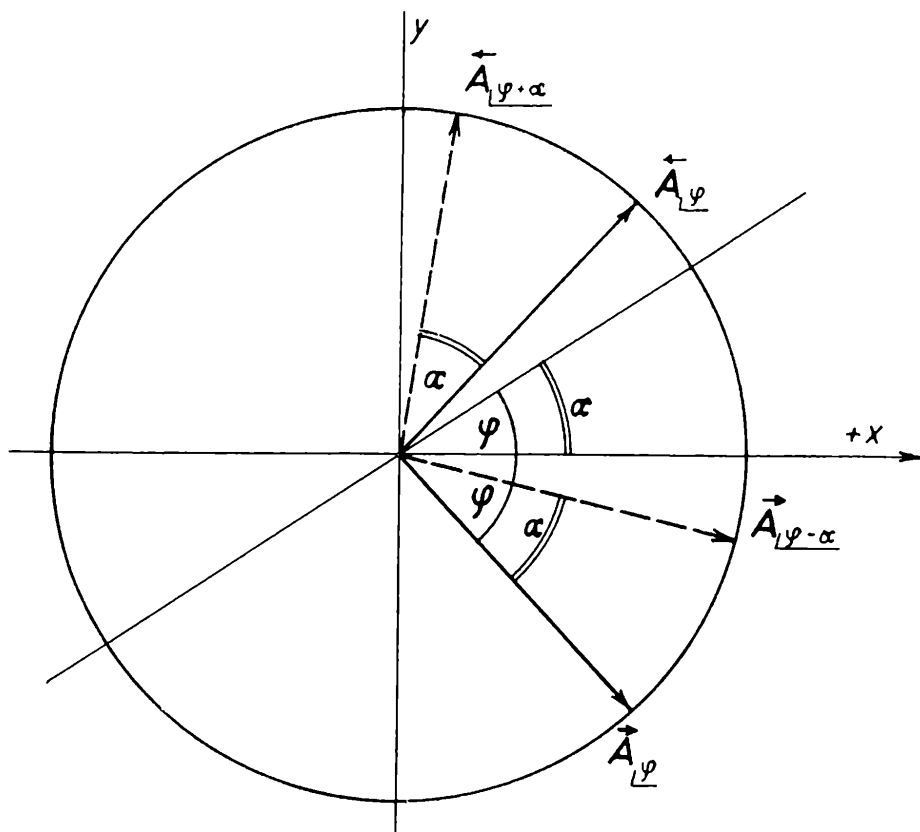
Otočíme-li přímku, v níž probíhá harmonické kmitání, o úhel α , musíme o úhel α otočit také točivé vektory, vektor $\overleftarrow{A}$ má nyní počáteční fázi $\varphi + \alpha$, vektor $\overrightarrow{A}$ má však počáteční fázi $\varphi - \alpha$, jak je patrné z obr. 11.

Je tedy

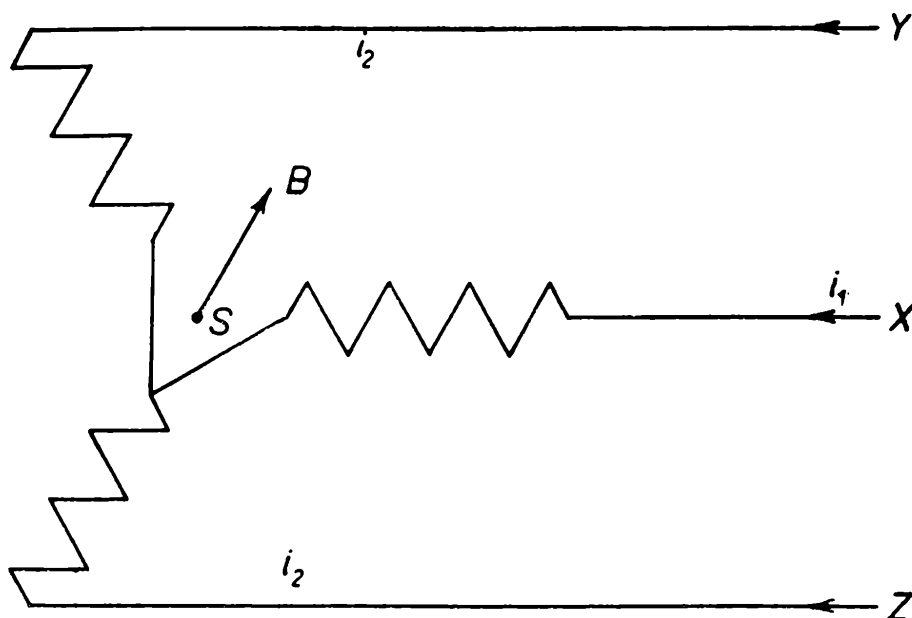
$$\bar{A}_\alpha \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} (\overleftarrow{A}_{\varphi+\alpha} + \overrightarrow{A}_{\varphi-\alpha}) \quad (5)$$

Mějme nyní tři cívky navzájem posunuté o úhel $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ (obr. 12) a vedme do nich trojfázový proud

$$\begin{aligned} i_1 &= I_m \cos \omega t, \\ i_2 &= I_m \cos \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right), \\ i_3 &= I_m \cos \left(\omega t + \frac{4}{3}\pi \right) \end{aligned}$$



Obr. 11



Obr. 12

První cívka s proudem i_1 budí v S magnetickou indukci $B_o \cos \omega t$, která se harmonicky mění a kterou můžeme podle (5) nahradit dvěma točivými vektory

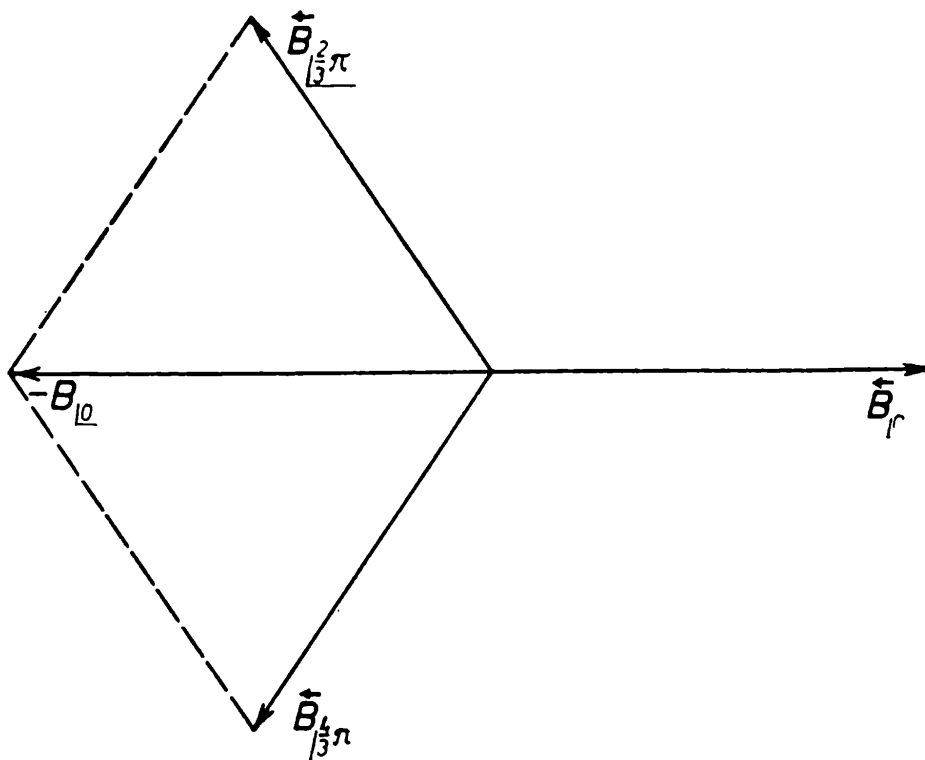
$$\overline{B}_o \cos \omega t = \frac{1}{2} (\overleftarrow{B}_o + \overrightarrow{B}_o).$$

Podobně druhá cívka budí v S magnetickou indukci, která podle (5), protože $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, je dána vztahem

$$\overline{B}_{\frac{2}{3}\pi} \cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2} (\overleftarrow{B}_{\frac{4}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_o) .$$

Podobně pro třetí cívku je $\varphi = \frac{4}{3}\pi$, $\alpha = \frac{4}{3}\pi$ a tudíž

$$\begin{aligned} \overline{B}_{\frac{4}{3}\pi} \cos(\omega t + \frac{4}{3}\pi) &= \frac{1}{2} (\overleftarrow{B}_{\frac{8}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_o) = \\ &= \frac{1}{2} (\overleftarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_o) \end{aligned}$$



Obr. 13

Výsledná indukce $\overline{B}$ v bodě S je určena šesti točivými vektory, z nichž tři se otáčejí v kladném, tři v záporném smyslu. Vektory otáčející se v stejném smyslu lze vektorově sečíst

$$\overline{B} = \frac{1}{2} (\overleftarrow{B}_o + \overleftarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overleftarrow{B}_{\frac{4}{3}\pi} + \overrightarrow{B}_o + \overrightarrow{B}_o + \overrightarrow{B}_o) = \frac{3}{2} \overrightarrow{B}_o ,$$

protože

$$\overleftarrow{B}_o + \overleftarrow{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \overleftarrow{B}_{\frac{4}{3}\pi} = 0 ,$$

jak snadno zjistíme vektorovým sčítáním (obr. 13). V bodě S vzniká tedy točivé magnetické pole s magnetickou indukcí $\overline{B} = \frac{3}{2} \overrightarrow{B}_o$.

Úloha 4. Vrcholy rovnostranného trojúhelníka o straně a jsou vedeny kolmo k ploše trojúhelníka velmi dlouhé přímé vodiče. Prochází-li vodiči trojfázový proud, jaká magnetická indukce vznikne ve středu trojúhelníka, půlí-li rovina trojúhelníka přímé vodiče? Co se stane, zaměníme-li mezi sebou dvě fáze?

Řešení. Proudů, které jdou jednotlivými vodiči, jsou (obr. 14)

$$i_A = I_m \cos \omega t ,$$

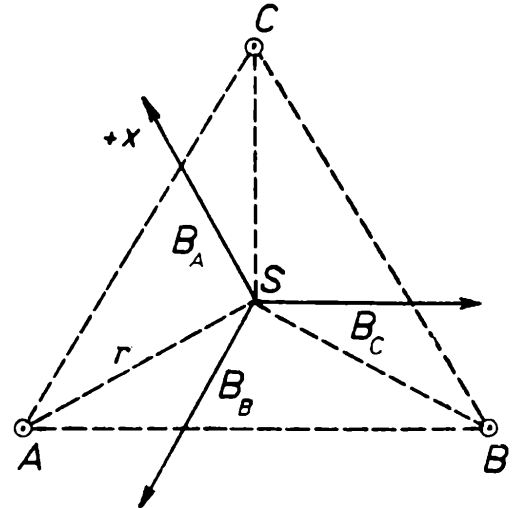
$$i_B = I_m \cos (\omega t + \frac{2}{3} \pi) ,$$

$$i_C = I_m \cos (\omega t + \frac{4}{3} \pi) .$$

Zvolíme-li bod S za počátek a kladný směr osy x ve směru indukce B_A , je

$$\vec{B}_A = \vec{B}_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} (\vec{B}_0 + \vec{B}_0) ,$$

$$\vec{B}_B = \vec{B}_{\frac{2}{3}\pi} \cos (\omega t + \frac{2}{3} \pi) = \frac{1}{2} (\vec{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \vec{B}_0) ,$$



Obr. 14

$$\vec{B}_C = \vec{B}_{\frac{4}{3}\pi} \cos (\omega t + \frac{4}{3} \pi) = \frac{1}{2} (\vec{B}_{\frac{4}{3}\pi} + \vec{B}_0) = \frac{1}{2} (\vec{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \vec{B}_0) .$$

Výsledná indukce v bodě S

$$\vec{B}_S = \frac{1}{2} (\vec{B}_0 + \vec{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \vec{B}_{\frac{4}{3}\pi} + \vec{B}_0 + \vec{B}_0 + \vec{B}_0) = \frac{3}{2} \vec{B}_0 ,$$

protože

$$\vec{B}_0 + \vec{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \vec{B}_{\frac{4}{3}\pi} = 0 .$$

V bodě S vzniká tedy točivé magnetické pole $\frac{3}{2} \vec{B}_0$, kde

$$B = \mu_0 \frac{I_m}{2\pi r} = \mu_0 \frac{I_m \sqrt{3}}{2\pi a} .$$

Zaměníme-li druhou fázi s třetí, je

$$i_A = I_m \cos \omega t ,$$

$$i_B = I_m \cos (\omega t + \frac{4}{3} \pi) ,$$

$$i_C = I_m \cos (\omega t + \frac{2}{3} \pi) .$$

Pro indukce nyní je

$$\vec{B}_A = \vec{B}_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} (\vec{B}_0 + \vec{B}_0) ,$$

$$\vec{B}_B = \vec{B}_{\frac{4}{3}\pi} \cos (\omega t + \frac{4}{3} \pi) = \frac{1}{2} (\vec{B}_{2\pi} + \vec{B}_{\frac{2}{3}\pi}) = \frac{1}{2} (\vec{B}_0 + \vec{B}_{\frac{2}{3}\pi}) ,$$

$$\vec{B}_C = \vec{B}_{\frac{2}{3}\pi} \cos (\omega t + \frac{2}{3} \pi) = \frac{1}{2} (\vec{B}_{2\pi} + \vec{B}_{-\frac{2}{3}\pi}) = \frac{1}{2} (\vec{B}_0 + \vec{B}_{\frac{4}{3}\pi}) .$$

Výsledná indukce

$$\vec{B}_S = \frac{1}{2} (\vec{B}_0 + \vec{B}_0 + \vec{B}_0 + \vec{B}_0 + \vec{B}_{\frac{2}{3}\pi} + \vec{B}_{\frac{4}{3}\pi}) = \frac{3}{2} \vec{B}_0 .$$

Zaměníme-li mezi sebou dvě fáze, změní točivé pole směr rotace.



Siemensův princip dynamoelektrický

(K 100. výročí)

PROF. JOSEF KOTYK, Pardubice

Před 100 lety bylo ve světě techniky rušno. Doba rychle zrála k tomu, aby byly sestrojeny vydatné zdroje elektrické energie a aby ještě v 19. století mohl být skutečně dálkový přenos elektrické energie¹⁾, technický zázrak elektrifikace celých států. Síla vodopádů pohání dnes továrny vzdálené od řeky mnoho kilometrů; neviditelně a bleskurychle letí po drátech dálkového vedení výkon tisíce koní tam, kde ho člověk potřebuje.

¹⁾ První velkolepý přenos elektrické energie proudem střídavým, transformuje-li se na vysoké napětí podle průkopnické myšlenky ruského elektrotechnika Michaila Osi-poviče Dolivo-Dobro-volského (1862—1919), byl proveden roku 1891 z Lauffenu nad Neckarem na výstavu do Frankfurtu nad Mohanem na vzdálenost 175 km.

U prvních generátorů proudu, jež byly sestrojovány od třicátých let minulého století²⁾ a nazývány zpravidla stroji magnetoelektrickými, bylo ke vzbuzení magnetického pole užíváno permanentních (trvalých) magnetů, jak se děje ještě dnes, např. u klikového indukto-ru, u zapalovačů výbušných motorů, u dynama jízdního kola a jinde. Jestliže získaný proud má však mít velikou elektromotorickou sílu, musí se rotor stroje otáčet v silném magnetickém poli velkou rychlostí. Od roku 1866 užívalo se proto ke vzbuzení silnějšího magnetického pole elektromagnetů; jejich další výhodou je, že u nich magnetizaci lze snadno měnit; jsou

²⁾ Jako první stroj tohoto druhu bývá nejčastěji uváděn generátor D a l N e g r ů v z roku 1832.

také lacinější než permanentní magnety ocelové. K jejich zmag-netování je ovšem třeba elektric-kého proudu; zprvu se užívalo buď článků, nebo jiného pomocného zdroje, např. samostatného men-šího stroje magnetoelektrického. Situace, která tak nastala, byla ovšem mimořádná a zcela zvláštní v tom, že stroj, který měl elek-trický proud vyrábět, byl odkázán na přívod proudu odjinud (buzení cizí).

Záhy (během jednoho roku) po-znal však Siemens³⁾ a skoro současně Wheatstone⁴⁾, že to není nutné, a prohlásil, že k buzení magnetického pole u generátorů na proud stejnosměrný ne-ní zvláštního zdroje v ů b e c t ř e b a. Poukázal na okolnost, že železná jádra elektro-magnetů mají od dřívějšíka zpra-vidla jakýsi magnetický zbytek, slabý magnetis-mus zv. remanentní⁵⁾,

³⁾ Werner von Siemens (1816—1892) založil roku 1847 s Halskem společnost pro stavbu telegrafů. Roku 1869 vybudoval telegrafické vedení z Anglie přes Německo, Rusko a Persii do Indie, zmechanizované tak, že na lince dlouhé 10 000 km nebylo (kromě konečných stanic) lidí třeba.

⁴⁾ Charles Wheatstone (1802—1875) vynalezl známý můstek k měření odporů vodičů (Wheat-stonův můstek), vlnostroj aj.

⁵⁾ Lat. remaneo = zůstávám.

m a g n e t i c k é r e s i d u u m, které však stačí k tomu, aby při-vodilo v armatuře stroje slabý indukční tok a tím i vznik nej-prve zcela slabého indukovaného proudu. Je pak důležité, aby od kartáčků šlo spojení do závitů elektromagnetu a teprve potom dál do vnějšího vedení. Tak lze k napájení elektromagnetu a k bu-zení magnetického pole s výhodou použít přímo proudu ve stroji vznikajícího. Stroj si tvoří své magnetické pole sám (buzení vlastní). Projde-li totiž proud v armatuře indukovaný závity cívek elektromagnetu, zesílí se magnetické pole, může pak indu-kovat proudy také silnější, ty se opět vedou do vinutí elektro-magnetu, jenž se tím zesílí ještě více atd. Děj se opakuje a účinek stupňuje tak dlouho, až elektro-magnet je nasycen, intenzita mag-netického pole dostoupí maxima, napětí proudu odváděného kar-táčky z armatury dostoupí plné hodnoty a stroj dosáhne při daném počtu otáček zároveň největšího výkonu.

Popsaný postup (myšlenka) se nazývá d y n a m o e l e k t r i c - k ý m p r i n c i p e m. Stroje na něm založené se jmenují rovněž d y n a m o e l e k t r i c k é nebo stručně d y n a m a.

Siemensův princip dy-n a m o e l e k t r i c k ý přispěl neobyčejně k velkolepému rozvoji elektrotechniky.



RECENZE

Teória čísel, základné pojmy a zbierka úloh

U. B. DAVYDOV — Š. ZNÁM

Slovenské pedagogické nakladateľstvo vydalo koncom roku 1966 zaujímavú knižku o teórii čísel, na ktorú chceme upozorniť našich čitateľov. RNDr. Š. ZnáM, CSc., preložil z ruského originálu zbierku úloh U. S. Davydova. Zbierka obsahuje 355 príkladov. Na konci sú uvedené výsledky a riešenia úloh. Pretože na našich stredných školách sa teória čísel nevyučuje, prekladateľ napísal prvú časť knižky ako teoretický úvod, aby žiaci mohli získať znalosti potrebné na riešenie úloh. Výklad je vždy elementárny a jednoduchý. Môžeme sa tu zoznámiť so základnými vecami z deliteľnosti čísel, najdôležitejšími číselne-teoretickými funkciami, tzv. dokonalými a spriatelenými číslami, Eulerovou funkciou a jej použitím atď. Potom sa autor zaoberá ne-

určitými rovnicami (aj vyšších stupňov), číselnými sústavami a napokon vysvetľuje niektoré užitočné metódy na riešenie úloh. V tejto úvodnej časti je 50 riešených príkladov ako ilustrácie preberanej látky.

Na Matematickej olympiáde sa objavujú tiež príklady z teórie čísel. Niektoré kapitoly tejto zbierky môžu byť osožné našim čitateľom v ich príprave na olympiádu a ďalej neskoršie ako poslucháči vysokých škôl nájdu v nej vhodné príklady z kapitol ťažších; teória čísel je zaradená do prednášok z algebry na našich univerzitách. Knižka môže slúžiť aj učiteľom stredných škôl ako pomôcka pre matematické krúžky.

Kniha má 184 strán vreckového formátu a stojí 8 Kčs.

Jaroslav Zemánek

Technické kreslení

M. MENŠÍK, J. KOCHMAN, O. SCHMIDT

Učebnice pro I. a II. ročník středních uměleckoprůmyslových škol. Vydalo SPN, Praha, 1967; stran 172, obr. 276, cena váz. výtisku 21 Kčs.

Podstatnou část knihy (kap. 1—7) napsal doc. dr. Miroslav Menšík, kap. 8 (o strojnickém rýsování) prof. ing. Josef Kochman a kap. 9 (stavitelské kreslení) prof. ing. arch. Otakar Schmidt.

Po zajímavém úvodu, osvětlujícím nutnost deskriptivní geometrie pro praktické použití na školách uměleckého zaměření je v kostce podán historický vývoj geometrie.

V 1. kapitole jsou podrobně popsány pomůcky pro technické kreslení i způsob práce s nimi; vedle méně užívaného elipsografu by bylo účelné se alespoň zmínit o perspektografu československé výroby — Prema. Doufejme, že žáci dostanou v odborných obchodech vždy v kvalitním provedení doporučené pomůcky, např. papír, rýsovadla, trubičková pera.

Kap. 2 je průpravou pro vlastní zobrazování. Čtenář se v ní doví o základních geometrických příbuznostech, souměrnosti, podobnosti, stejnolehlosti, afinitě s praktickým užitím i provedenými příklady. Z dalších konstrukcí je vysvětlen zlatý řez a sestrojování pravidelných mnohoúhelníků. U kuželoseček jsou solidně pro-

brány fokální vlastnosti. Z jiných křivek jsou vysvětleny nejdůležitější, sinusoida, kruhová evolventa, spirály, cykloidy a šroubovice.

Nejrozsáhlejší kap. 3 vysvětluje pravoúhlé promítání na dvě a tři kolmé průmětny; zavádí levotočivý souřadnicový systém, probírá promítání bodů, přímek i rovin v obecných i zvláštních polohách, vysvětluje jejich vzájemnou polohu, užívá důsledně stopních elementů, všímá si rovinných útvarů v obecné poloze, užívá třetí průmětny i otáčení. Dále jsou popsány základní plochy a tělesa, hlavně rotační. Zvláštní pozornost je věnována šroubovým plochám.

Kap. 4 seznamuje čtenáře s velmi názornou projekcí — kosoúhlým promítáním. Jsou v něm zobrazeny rovinné útvary i tělesa technické praxe v základních polohách.

Kap. 5 je věnována řezům a průnikům těles a ploch. Vedle řezů a sítí na hranatých tělesech je probrán řez na rotačním válci a kuželi s příslušnou větou Dandelinovou. Rovinný řez rotační plochou je vysvětlen na anuloidu. Před průniky těles je zařazena konstrukce průsečíků přímky s tělesy.

V kap. 6 jsou dány základy rovnoběžného osvětlení většinou pro technické osvětlení. S výhodou

se tu používá Pilletovy roviny. Dále se provádí osvětlení skupin těles i jejich dutin.

Kap. 7 se zabývá perspektivou. Po vysvětlení základních pojmů přistupuje autor k výkladu průsečné metody, užívá distančnicků a jejich redukce, konstruuje perspektivu kružnice, vysvětluje metodu sítí a ukazuje, jak se v perspektivě provádí rovnoběžné osvětlení. Žel, že autorem uváděné bloky sítí s předtíštěnými perspektivami krychlí — dříve hojně užívané — se nyní v našich obchodech již nevyskytují.

Kap. 8 uvádí čtenáře do strojnického kreslení, seznamuje jej se státními normami, mluví o kreslení čar, formátech výkresů, měřících, učí kreslit řezy tělesy i jejich průniky. Vysvětluje principy kótování, označování materiálu, normalizovaných součástí, ozubených kol i sestavení výkresu.

Kap. 9 je věnována technickým výkresům ve stavebnictví. Popisuje konstrukční systémy budov, vykládá státní normy o kótování stavebních výkresů, mluví o půdorysných, svislých i sklopených řezech, situačních výkresech i projektové dokumentaci.

Recenzovaná kniha je dobrou ukázkou, jak má vypadat učebnice pro školy uměleckého směru. Proti vžitému názoru, že umělec-výtvarník není vázán vědeckou přesností a má pracovat spíše intuitivně, ukázali autoři, že konstrukci obrazců (hlavně perspek-

tiv) je nutno dát solidní geometrický základ. Vyhýbají se však všem složitým důkazům, někdy se dokonce spokojí jen uvedením konstrukce, výklady doplňují četnými názornými obrázky, jež čtenáři celou látku velmi přibližují. Vhodný výběr příkladů z praxe činí text zábavnějším a srozumitelnějším. Také příklady k procvičení jsou voleny účelně a upevní čtenářovy vědomosti.

Závažná nedopatření se nevyskytují; z menších přehlédnutí uvádím, že např. obr. 120a představuje otevřenou (nikoli uzavřenou) šroubovou plochu, obr. 180 technické osvětlení trochilu (nikoli trochoidu), výslovnost na str. 98 pod čarou neodpovídá textu.

Výklad je prováděn vědecky přesně, metodicky i terminologicky správně s přihlédnutím na ty, jimž je kniha určena.

Zvláštní pozornost si zasluhuje technické vybavení knihy. Obrázky jsou rýsovány vzorně, popis normalizovaným písmem je i ve složitých případech proveden velmi čitelně. Umístění obrázků, volba typů písma, estetické rozvržení plochy svědčí o kvalitní práci výtvarnice, která pomohla knize k ještě větší přehlednosti. Připočteme-li k tomu i graficky pěkně vypracovanou obálku, můžeme knihu vřele doporučit nejen studentům uměleckoprůmyslových škol, nýbrž i všem pracovníkům výtvarných oborů.

Ota Setzer



MATEMATIKA

Metrické prostory

FRANTIŠEK KUŘINA, PF, Hradec Králové

Pokusme se nejprve odpovědět na otázku „Co je vzdálenost dvou bodů?“ V denním životě rozumíme obvykle vzdálenosti dvou míst „velikost nejkratší spojnice“ těchto míst. Taková formulace, přijatelná v praxi, je z hlediska matematiky naivní, pokud nevíme, jak rozumět slovům spojnice dvou míst a velikost spojnice. Místo abychom tyto pomocné pojmy upřesnili, ukažme, jaké požadavky vyplývají z takto názorně chápané vzdálenosti na matematický pojem vzdálenosti dvou bodů.

Především budeme patrně vzdáleností rozumět číslo vzniklé měřením, tedy kladné číslo. Jedině vzdálenost místa A od téhož místa A budeme považovat za nulovou.

Další přirozený požadavek je, že vzdálenost míst A, B , je táž jako vzdálenost míst B, A .

Protože vzdálenost míst A, C , je velikostí nejkratší spojnice těchto míst, musí pro libovolná tři místa A, B, C platit, že součet vzdáleností míst A, B a B, C je aspoň tak velký jako vzdálenost míst A, C . V opačném případě by totiž vzdálenost nebyla velikostí nejkratší spojnice.

V praxi mluvíme o vzdálenosti dvou míst ve městě, o vzdálenosti dvou bodů na součástce atp. V matematice budeme nazývat každou množinu, ve které bude definována vzdálenost jejích prvků, metrickým prostorem (metrein = měřiti).

Z praxe víte, že „v rovném terénu bez překážek“ jsou úsečky nejkratší spojnice. Vzdálenost jejich krajních bodů může být určena různě, např. počtem zvolených jednotek délky, kterými lze úsečku „změřit“, ale třeba také časem, potřebným k přemístění z jednoho krajního bodu do druhého

při dohodnutých podmínkách. V praxi ovšem nebývá „rovný terén bez překážek“ Vzdálenost vaší cesty z domova do školy patrně nebudete měřit jako velikost úsečky s krajními „body“ „domov“, „škola“, ale jako velikost skutečné nejkratší cesty, kterou musíte při cestě do školy urazit. Každá dvě místa mají jistou vzdálenost, a patrně jedinou ve smyslu velikosti nejkratší spojnice. Matematický pojem vzdálenosti musí mít tedy charakter funkce na množině dvojic prvků metrického prostoru.

V tomto článku podáme výklad o pojmu vzdálenost a ukážeme několik modelů metrického prostoru. Problémy měření vzdálenosti se nebudeme zabývat.

V souladu s připomenutými již souvislostmi formulujme nyní definici vzdálenosti a definici metrického prostoru.

Nechť $M \equiv \{A, B, C, \dots\}$ je libovolná množina obsahující aspoň dva prvky. Je-li každým dvěma prvkům A, B , množiny M přiřazeno jediné reálné číslo $\mu(A, B)$ tak, že

$$\text{I. Pro libovolné dva prvky } A, B \in M \text{ platí} \quad \mu(A, B) \geq 0 ; \quad (1)$$

$$\text{II.} \quad \mu(A, B) = 0 , \quad (2) \\ \text{právě když je} \quad A = B ;$$

$$\text{III. Pro libovolné dva prvky } A, B, \in M \text{ platí} \quad \mu(A, B) = \mu(B, A) ; \quad (3)$$

$$\text{IV. Pro libovolné tři prvky } A, B, C \in M \text{ platí} \quad \mu(A, B) + \mu(B, C) \geq \mu(A, C) , \quad (4)$$

říkáme, že je na množině M definována vzdálenost μ . Množina M tvoří s funkcí μ metrický prostor $\mathbf{M} \equiv (M; \mu)$. Prvky množiny M se nazývají body metrického prostoru, číslo $\mu(A, B)$ se nazývá vzdálenost bodů A, B .

Metrický prostor $\mathbf{M}$ je tedy uspořádaná dvojice $(M; \mu)$, jejíž první složka je množina M , druhá složka je vzdálenost μ definovaná na množině M .

Množina M a funkce μ mohou být zcela libovolné. Stačí, splňují-li požadavky definice metrického prostoru. Je-li M_i daná množina, μ_i daná funkce, které tyto požadavky splňují, nazývá se dvojice $\mathbf{M}_i \equiv (M_i; \mu_i)$ interpretací neboli modelem metrického prostoru. V dalším se budeme zabývat konstrukcí několika takových modelů.

Příležitostně připomeneme i některé pojmy tradiční geometrie, které v podmínkách různých metrických prostorů mohou nabývat podivuhodných a nečekaných „tváří“ Označení $\mu(A, B)$ pro vzdálenost bodů A, B odpovídá představě, že vzdálenost je v názorném smyslu „mírou velikosti“ nejkratší spojnice bodů A, B .

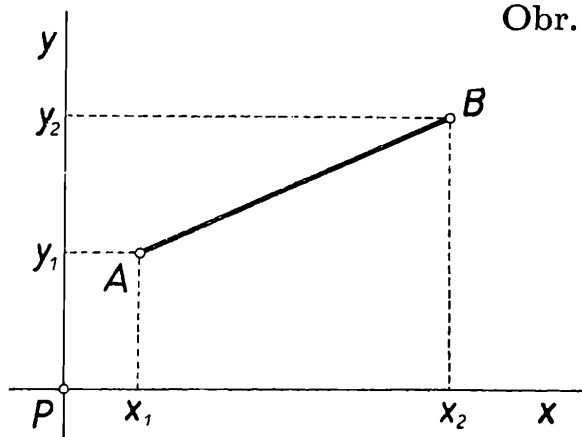
M o d e l $\mathbf{M}_1$. V euklidovské rovině π s kartézským systémem souřad-

nic (obr. 1), která je vám dobře známa ze školní geometrie, se vypočte vzdálenost libovolných bodů $A \equiv (x_1; y_1)$, $B \equiv (x_2; y_2)$ podle vzorce

$$\mu_1(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (5)$$

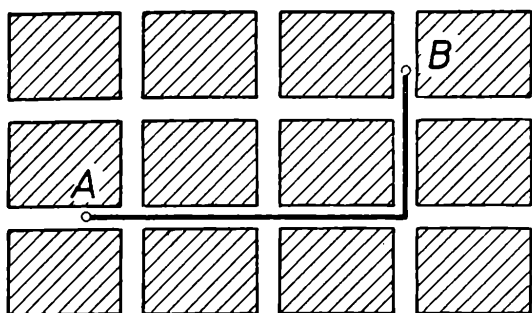
Čtenář si sám může ověřit, že takto definovaná vzdálenost splňuje podmínky I–IV z výše uvedené definice. Obr. 1

N á v o d. Při dokazování vlastnosti IV pro libovolné tři body $A \equiv (x_1; y_1)$, $B \equiv (x_2; y_2)$, $C \equiv (x_3; y_3)$ označte si $x_1 - x_2 = a_1$, $x_2 - x_3 = a_2$, $x_1 - x_3 = a_1 + a_2$ a $y_1 - y_2 = b_1$, $y_2 - y_3 = b_2$, $y_1 - y_3 = b_1 + b_2$. Z geometrického hlediska je ovšem splnění podmínky IV zřejmé. Vzdálenost μ_1 je totiž velikostí úsečky a jedná se tedy o známou „trojúhelníkovou nerovnost“.

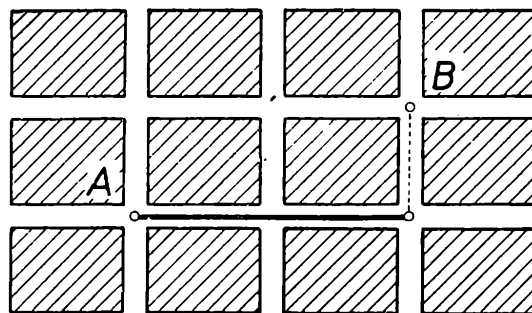


$\mathbf{M}_1 \equiv (\pi; \mu_1)$ je tedy model metrického prostoru.

Tento model vznikl abstrakcí ze situace, kterou jsme v úvodních poznámkách popsali slovy „rovný terén bez překážek“. Podívejme se nyní na situaci, kdy je sice „terén rovný“, ale tvoří v něm překážky např. domy ve městě. V takové „městské geometrii“ nebudou nejkratší spojnice úsečky, ale lomené čáry podle obr. 2. Jak definovat zde vzdálenost dvou míst? Odpověď na tuto otázku je lehká a dáme ji v následujícím modelu.



Obr. 2



Obr. 3

M o d e l $\mathbf{M}_2$. V rovině π s kartézským souřadným systémem definujeme pro libovolnou dvojici bodů $A \equiv (x_1; y_1)$, $B \equiv (x_2; y_2)$ funkci μ_2 vzorcem

$$\mu_2(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad (6)$$

Dokažme, že μ_2 splňuje všechny vlastnosti vzdálenosti podle naší definice. U vlastností I, II, III, je to na první pohled patrné. Dokazujme vlastnost

IV. Pro body $A, B, C \equiv (x_3; y_3)$ má nerovnost (4) tvar

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |x_2 - x_3| + |y_2 - y_3| \geq |x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|. \quad (7)$$

Protože pro libovolná reálná čísla a, b platí

$$|a| + |b| \geq |a + b|, \quad (8)$$

je

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| &\geq |x_1 - x_3|, \\ |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| &\geq |y_1 - y_3| \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme nerovnost (7).

Rovina π se vzdáleností μ_2 je tedy metrickým prostorem $\mathbf{M}_2 \equiv (\pi; \mu_2)$.

Představme si v „městské geometrii“ z modelu $\mathbf{M}_2$ toto omezení: Můžeme se pohybovat jen v ulicích jednoho směru (libovolně kterého), ne však v obou směrech k sobě kolmých při jedné cestě. Velikost cesty, kterou potřebujeme k tomu, abychom se co nejvíce přiblížili popsaným způsobem od křižovatky A ke křižovatce B , budeme považovat za vzdálenost v novém modelu. Vzdáleností křižovatek A, B je tedy maximální ze sčítanců ve vzorci (6) (obr. 3).

(Pokračování)

Zlatý slavík a matematika

MILOŠ MATULA, Praha

Hudba, zejména hudba tzv. malých žánrů, nás dnes obklopuje na každém kroku. Její autoři a interpreti patří dnes všude k nejpopulárnějším osobnostem, zejména u mládeže. Soutěž o Zlatého slavíka, kterou pořádá redakce Mladého světa a v níž se soutěží o zpěváka a zpěvačku číslo jedna v této oblasti, se těší značnému zájmu jak pro oblibu celého oboru, tak pro poměrně značnou objektivnost svých výsledků. Nebude tedy možná pro mladé čtenáře bez zajímavosti, že i na tomto poli se uplatní matematika. V tomto článku uvedu takový příklad.

V posledním Zlatém slavíku vzbudilo určitou pozornost také rozložení prvních, druhých a třetích míst, která získali jednotliví zpěváci. Bylo například konstatováno, že vítězka soutěže zpěvaček Marta Kubišová získala nejvyšší počet bodů a nejvyšší celkový počet hlasů, nikoli však nejvyšší počet prvních míst, a vyhrála prakticky velkým počtem druhých míst. V tomto konkrétním případě je důvodem zřejmě prostě to, že popularita vítězky v široké veřejnosti je značně mladého data, takže si leckterí účastníci ankety ještě „netroufli“ dát ji na prvé místo. Ale v některých případech lze třeba z velkého počtu prvních míst ve srovnání s celkovým výsledkem usuzovat, že příslušný zpěvák se líbí lidem určitého vyhraněného vkusu apod.

Vzniká tedy otázka, která se ovšem neomezuje na Zlatého slavíka a zpěváky, ale má obecnou zajímavost: je-li znám výsledek nějakého hodnocení nějakých jevů na základě určitého bodování pořadí, dá se pro jednotlivé jevy matematicky stanovit, jaké rozložení pořadí na různých místech by tomu mělo teoreticky odpovídat, tedy jaké je „pravděpodobné“, „očekávané“ rozložení míst (s nímž by bylo možno skutečné rozložení srovnat a případně se ptát na důvody větších odchylek)?

V přesnější formulaci zní otázka takto: Je dán určitý soubor hodnotných prvků $Z_1, Z_2, \dots$. Dále je určitý počet, řekněme N hodnotitelů, kteří sestavují své pořadí prvních q prvků Z_i . Je stanoveno bodování takové, že m -tému místu je přiřazena hodnota $b^{(m)}$ bodů. Jestliže prvek Z_i dostane od $N_i^{(1)}$ hodnotitelů první místo, od $N_i^{(2)}$ hodnotitelů druhé místo atd., pak získá celkem

$$B_i = b^{(1)} N_i^{(1)} + b^{(2)} N_i^{(2)} + \dots + b^{(q)} N_i^{(q)}$$

bodů. Předpokládejme nyní, že je dána tabulka všech výsledných bodových hodnot B_i (pro všechny hodnocené prvky Z_i). Jaké jsou teoreticky odpovídající počty $n_i^{(m)}$ hodnotitelů dávajících prvek Z_i na m -té místo (kteréžto počty ovšem musí být takové, aby

$$b^{(1)} n_i^{(1)} + \dots + b^{(q)} n_i^{(q)} = B_i)?$$

V případě soutěže o Zlatého slavíka udávají účastníci ankety první tři místa, přičemž bodové hodnoty míst jsou 3, 2, 1, tj. $b^{(1)} = 3, b^{(2)} = 2, b^{(3)} = 1$. Je-li N účastníků ankety, pak ovšem pro očekávané rozložení musí platit

$$\sum_{i=1}^r n_i^{(1)} = \sum_{i=1}^r n_i^{(2)} = \sum_{i=1}^r n_i^{(3)} = N,$$

kde r je počet zpěváků, resp. zpěvaček, kteří vůbec dostali nějaký hlas. Podobně pro skutečné rozložení platí

$$\sum_{i=1}^r N_i^{(1)} = \sum_{i=1}^r N_i^{(2)} = \sum_{i=1}^r N_i^{(3)} = N;$$

a dále $\sum_{i=1}^r B_i = 6N$. Očekávaný celkový počet hlasů odevzdaných pro zpěváka Z_i je ovšem $n_i^{(1)} + n_i^{(2)} + n_i^{(3)}$, skutečný počet odevzdaných hlasů je $N_i^{(1)} + N_i^{(2)} + N_i^{(3)}$.

Bude účelné místo s hodnotami $n_i^{(m)}$ počítat s příslušnými pravděpodobnostmi, které dostaneme dělením číslem N ; tedy $p_i^{(1)} = \frac{n_i^{(1)}}{N}$ bude pravděpodobnost umístění zpěváka Z_i na prvním místě, $p_i^{(2)}$, resp. $p_i^{(3)}$ pravděpodobnost jeho umístění na druhém, resp. třetím místě. Za bodovou hodnotou budeme pak místo B_i brát

$$b_i = \frac{B_i}{N} = b^{(1)} p_i^{(1)} + b^{(2)} p_i^{(2)} + b^{(3)} p_i^{(3)}$$

Zřejmě

$$\sum p_i^{(1)} = \sum p_i^{(2)} = \sum p_i^{(3)} = 1, \quad \sum b_i = 6$$

(obecně při bodování $b^{(1)}, \dots, b^{(q)}$ je ovšem $\sum b_i = b^{(1)} + \dots + b^{(q)}$).

Ukážeme nyní, že na položenou otázku je kladná odpověď, tedy že lze skutečně udat „matematicky očekávané“ rozložení hlasů na jednotlivých místech pořadí. Základní myšlenka řešení je tato:

Pravděpodobnost $p_i = p_i^{(1)}$ umístění prvku (zpěváka) Z_i na prvním místě můžeme považovat za pravděpodobnost volby prvku Z_i (za pravděpodobnost, že si hodnotitel zvolí právě prvek Z_i , má-li zvolit jen jeden). Pravděpodobnost $P_i^{(2)}$, že se prvek Z_i umístí na prvním nebo druhém místě, je pak pravděpodobnost, že při volbě dvou navzájem různých prvků bude mezi zvolenými prvky také Z_i , a obecně pravděpodobnost $P_i^{(k)}$, že se prvek Z_i umístí na jednom z prvních k míst, je pravděpodobnost, že při volbě k navzájem různých prvků bude mezi zvolenými prvky také Z_i (přičemž ovšem $P_i^{(1)} = p_i^{(1)}$). Pravděpodobnosti $P_i^{(k)}$, jak uvidíme, dovedeme vyjádřit pomocí „základní“ pravděpodobnosti $p_i^{(1)} = p_i$. Můžeme tedy také pomocí základní pravděpodobnosti p_i postupně vyjádřit pravděpodobnosti jednotlivých míst pro prvek (zpěváka) Z_i :

$$p_i^{(2)} = P_i^{(2)} - P_i^{(1)}, \quad p_i^{(3)} = P_i^{(3)} - P_i^{(2)} \text{ atd.,}$$

kde $p_i^{(m)}$ je pravděpodobnost umístění prvku Z_i na m -tém místě. Speciálně můžeme tedy udat závislost počtu bodů

$$b_i = b^{(1)} p_i^{(1)} + \dots + b^{(q)} p_i^{(q)}$$

na základní pravděpodobnosti p_i a odtud můžeme při daných b_i obráceně počítat pravděpodobnosti p_i , a tudíž také všechny pravděpodobnosti $p_i^{(m)}$.

Půjde nyní o to, vyjádřit pomocí základní pravděpodobnosti p_i pravděpodobnost

$$P_i^{(k)} = p_i^{(1)} + \dots + p_i^{(k)},$$

že prvek (zpěvák) Z_i se vyskytne ve zvolené k -tici různých prvků. Snadno vidíme, že tato pravděpodobnost je rovna zlomku, jehož čitatelem je pravděpodobnost volby k různých prvků, z nichž jedním je Z_i , a jmenovatelem pravděpodobnost volby k různých prvků vůbec.

Vypočítejme si nejprve konkrétně případ $k = 2$, tj. pravděpodobnost, že např. prvek Z_1 se umístí na jednom z prvních dvou míst. Dostaneme (s přihlédnutím k pořadí prvků ve zvolených dvojicích)

$$P_1^{(2)} = \frac{2p_1p_2 + 2p_1p_3 + \dots + 2p_1p_r}{2p_1p_2 + 2p_1p_3 + \dots + 2p_1p_r + 2p_2p_3 + \dots + 2p_{r-1}p_r} =$$

$$= \frac{2p_1(p_2 + \dots + p_r)}{(p_1 + p_2 + \dots + p_r)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_r^2)}$$

a protože $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$, dostaneme

$$\frac{2p_1(1 - p_1)}{1 - \sum_{j=1}^r p_j^2}.$$

Zřejmě stejným způsobem můžeme počítat u kteréhokoli jiného Z_i , takže platí

$$P_i^{(2)} = \frac{2p_i(1 - p_i)}{1 - A_2},$$

jestliže položíme $A_2 = \sum_{j=1}^r p_j^2$

Obecně označme pro $k \geq 1$ symbolem Q_k pravděpodobnost, že zvolená k -tice prvků bude obsahovat prvky vesměs různé a symbolem $Q_k^{(i)}$ pravděpodobnost, že zvolená k -tice prvků bude obsahovat vesměs různé prvky, z nichž žádným není Z_i . Položme dále $Q_0 = 1$.

Případy, že zvolená k -tice prvků obsahuje vesměs různé prvky, můžeme rozdělit na případy, že obsahuje na prvním místě prvek Z_1 a mimoto $k - 1$ prvků různých navzájem i od Z_1 , dále na případy, že obsahuje na prvním místě prvek Z_2 a mimoto $k - 1$ prvků různých navzájem i od Z_2 , atd. Proto

$$Q_k = p_1 Q_{k-1}^{(1)} + p_2 Q_{k-1}^{(2)} + \dots + p_r Q_{k-1}^{(r)} \quad (1)$$

Na druhé straně je možno při každém i rozdělit uvedené případy na takové, kde zvolená k -tice neobsahuje prvek Z_i a na takové, kde zvolená k -tice obsahuje prvek Z_i a současně obsahuje $k - 1$ prvků různých navzájem i od Z_i (přičemž je k možností pro pořadí prvku Z_i). Proto

$$Q_k = Q_k^{(i)} + kp_i Q_{k-1}^{(i)},$$

neboli

$$Q_k^{(i)} = Q_k - kp_i Q_{k-1}^{(i)} \quad (2)$$

Zřejmě je

$$P_i^{(k)} = p_i^{(1)} + \dots + p_i^{(k)} = \frac{kp_i Q_{k-1}^{(i)}}{Q_k} \quad (3)$$

Dokážeme nyní indukcí, že pro $k \geq 1$ je

$$\begin{aligned} Q_k^{(i)} &= Q_k - kp_i Q_{k-1}^{(i)} + k(k-1)p_i^2 Q_{k-2}^{(i)} - \\ &\quad - k(k-1)(k-2)p_i^3 Q_{k-3}^{(i)} + \dots + \\ &\quad + (-1)^k k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot p_i^k \end{aligned} \quad (4)$$

Pro $k = 1$ je to pravda. Dostáváme totiž $Q_1^{(i)} = Q_1 - p_i Q_0$, při čemž $Q_0 = 1$ a zřejmě platí $Q_1 = 1$, $Q_1^{(i)} = 1 - p_i$. Učiňme tedy indukční předpoklad, že (4) platí, když místo k píšeme $k - 1$. Z (2) pak plyne

$$Q_k^{(i)} = Q_k - k p_i Q_{k-1}^{(i)} = Q_k - k p_i (Q_{k-1} - (k-1) p_i Q_{k-2} + \\ + (k-1)(k-2) p_i^2 Q_{k-3} - \dots + \\ + (-1)^{k-1} (k-1)(k-2) \dots 2 \cdot 1 \cdot p_i^{k-1})$$

a odtud dostáváme přímo vztah (4).

Z (1) a (4) plyne pro $k \geq 1$

$$Q_{k+1} = p_1 Q_k^{(1)} + p_2 Q_k^{(2)} + \dots + p_r Q_k^{(r)} = \\ = p_1 Q_k - k p_1^2 Q_{k-1} + k(k-1) p_1^3 Q_{k-2} - \dots + \\ + (-1)^k k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot p_1^{k+1} + \\ + p_2 Q_k - k p_2^2 Q_{k-1} + k(k-1) p_2^3 Q_{k-2} - \dots + \\ + (-1)^k k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot p_2^{k+1} + \dots + \\ + p_r Q_k - k p_r^2 Q_{k-1} + k(k-1) p_r^3 Q_{k-2} - \dots + \\ + (-1)^k k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot p_r^{k+1} = \\ = (p_1 + \dots + p_r) Q_k - k(p_1^2 + \dots + p_r^2) Q_{k-1} + \\ + k(k-1)(p_1^3 + \dots + p_r^3) Q_{k-2} - \dots + \\ + (-1)^k k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot (p_1^{k+1} + \dots + p_r^{k+1}).$$

Označíme-li $A_m = p_1^m + \dots + p_r^m = \sum_{j=1}^r p_j^m$, máme tedy

$$Q_{k+1} = A_1 Q_k - k A_2 Q_{k-1} + k(k-1) A_3 Q_{k-2} - \dots + \\ + (-1)^k k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot A_{k+1} \quad (5)$$

(přičemž ovšem $A_1 = 1$).

Vztahy (3), (4), (5) nám umožňují postupně vyjadřovat pravděpodobnosti $P_i^{(2)}$, $P_i^{(3)}$, pomocí základní pravděpodobnosti $P_i^{(1)} = p_i$. Například pro $k = 2$ dostaneme (vynechávám zde index i), jak jsme už předtím vypočetli,

$$P^{(2)} = \frac{2p(1-p)}{1-A_2},$$

pro $k = 3$ dostaneme

$$P^{(3)} = \frac{3p(Q_2 - 2pQ_1 + 2p^2Q_0)}{Q_2 - 2A_2Q_1 + 2A_3Q_0}$$

a protože $Q_2 = 1 - A_2$, $Q_1 = Q_0 = 1$, máme

$$P^{(3)} = \frac{3p(1-A_2-2p+2p^2)}{1-3A_2+2A_3}$$

atd. Snadno vidíme, že obecně $P^{(k)}$ je polynom k -tého stupně v p (s nulovým absolutním členem), jehož koeficienty závisí na hodnotách $A_2, A_3, \dots, A_k$. Proto také totéž platí o pravděpodobnostech jednotlivých míst $p^{(k)}$, a tudíž nakonec počet bodů $b = b^{(1)}p^{(1)} + b^{(2)}p^{(2)} + \dots + b^{(q)}p^{(q)}$ je polynom q -tého stupně v p (s nulovým absolutním členem), jehož koeficienty závisí na hodnotách $A_2, \dots, A_q$. Označme tento polynom symbolem $S(p)$.

Celý problém tedy spočívá v tom, na základě vztahů $b_i = S(p_i)$, při čemž výrazy $A_2, \dots, A_q$ vyskytující se v koeficientech polynomu Q nejsou na začátku známe, vypočítat k daným bodovým hodnotám b_i základní pravděpodobnosti p_i tak, aby byly splněny podmínky $\sum p_i = 1$, $\sum p_i^{(2)} = 1, \dots, \sum p_i^{(q-1)} = 1$ (což dává $q - 1$ podmínek pro $q - 1$ zpočátku neurčených čísel $A_2, \dots, A_q$). I když principiálně je celá věc jednoduchá, numerické řešení v konkrétních případech bude zřejmě značně pracné.

Jak to konkrétně vypadá v případě Zlatého slavíka? V této soutěži se tipují první tři místa, při čemž hodnocení míst je 3, 2, 1. Je tedy

$$b = 3p^{(1)} + 2p^{(2)} + p^{(3)} = p^{(1)} + (p^{(1)} + p^{(2)}) + (p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)}) = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)}$$

Podle toho, co jsme nahoře vypočetli, je zde tedy

$$b = p + \frac{2p(1-p)}{1-A} + \frac{3p(1-A-2p+2p^2)}{1-3A+2B},$$

píšeme-li pro pohodlí $A_2 = A, A_3 = B$. Po úpravě dostaneme

$$(6-6A)p^3 - (8-12A+4B)p^2 + (6-16A+6A^2+6B-2AB)p = b(1-4A+3A^2+2B-2AB)$$

Hodnoty b pro jednotlivé zpěváky jsou dány ve výsledcích soutěže a z této rovnice k nim máme počítat odpovídající hodnoty p tak, aby

$$\sum p = 1, \quad \sum P^{(2)} = \sum \frac{2p(1-p)}{1-A} = 2$$

Druhou podmínku můžeme ovšem nahradit podmínkou $\sum p^2 = A$.

Pro druhá místa dostaneme pak samozřejmě

$$p^{(2)} = P^{(2)} - p = \frac{2p(1-p)}{1-A} - p,$$

pro třetí místa

$$p^{(3)} = P^{(3)} - P^{(2)} = \frac{3p(1-A-2p+2p^2)}{1-3A+2B} - \frac{2p(1-p)}{1-A}.$$

Poznamenejme ještě, že prakticky pochopitelně jen malý počet zpěváků dostal v anketě značný počet bodů. U většiny zpěváků je bodová hodnota b , a tím spíše pravděpodobnost prvního místa p malá, takže pro ně prakticky přibližně bude

Umístění a jméno	Počet bodů	Skutečný počet				Matematicky očekávaný počet			
		všech hlasů	1. míst	2. míst	3. míst	všech hlasů	1. míst	2. míst	3. míst
Zpěvačky	17 530	8542	2643	3702	2197	8095,2	3352,2	2729,9	2013,6
	16 459	7314	3614	1917	1783	7805,2	2980,9	2692,0	2132,3
	15 510	6804	3372	1962	1470	7526,3	2684,6	2614,5	2227,2
	5 430	3071	705	949	1417	3105,7	672,8	978,7	1454,2
	4 674	3236	136	1166	1934	2694,1	569,0	841,9	1283,2
	2 268	1253	268	479	506	1337,2	262,0	406,8	668,4
	1 005	671	57	220	394	598,9	113,2	179,7	306,0
	801	547	50	154	343	477,9	89,9	143,3	244,7
	513	350	27	109	214	306,9	57,2	91,7	158,0
	296	187	29	51	107	177,6	32,8	52,8	92,0
Zpěváci	24 431	9008	7098	1227	683	9488,3	6441,7	2059,5	987,1
	11 779	5634	1868	2409	1357	6188,8	1468,2	2653,8	2066,8
	8 410	4843	829	1909	2105	4714,9	931,2	1832,7	1951,0
	6 560	3981	503	1573	1905	3775,3	689,2	1406,3	1679,8
	3 991	2489	92	1318	1079	2367,4	393,2	837,2	1137,0
	3 356	2161	173	849	1139	2003,7	325,9	700,5	977,3
	1 743	1133	110	390	633	1056,3	163,6	359,5	533,2
	1 308	900	53	302	545	795,7	121,7	268,9	405,1
	912	551	91	179	281	556,9	84,1	186,9	285,9
	549	331	59	100	172	336,5	50,2	112,1	174,2

$$\frac{b}{p} = 1 + \frac{2}{1-A} + \frac{3(1-A)}{1-3A+2B}, \quad \frac{p^{(2)}}{p} = \frac{2}{1-A} - 1,$$

$$\frac{p^{(3)}}{p} = \frac{3(1-A)}{1-3A+2B} - \frac{2}{1-A}$$

Ukazuje se, že skutečné hodnoty v anketě jsou poněkud větší, tj. účastníci ankety dávali „slabším“ zpěvákům menší počet prvních míst, než by odpovídalo očekávaným hodnotám.

Pro zajímavost uvedu v následující tabulce výsledek přibližného výpočtu pro prvních deset zpěváků a zpěvaček, přičemž tento výsledek (který tedy ukazuje teoreticky předpokládané rozložení prvních, druhých a třetích míst pro dané rozložení celkového počtu bodů) je v tabulce (viz předchozí stránka) srovnán se skutečnými výsledky soutěže o Zlatého slavíka za rok 1966.

K logice

I V O Z A P L E T A L, výzk. ústav 401, Praha

V článku, který je první částí pro Rozhledy připravovaného souboru volně na sebe navazujících článků, pokouším se ukázat nutnost vytvoření „speciálního“ jazyka pro logiku a budu část elementární pojmové aparatury logiky.

Doufám, že tento a další články souboru přispějí studentům i profesorům k orientaci v novém učebním předmětu, v *logice*.

1. Základní úvahy

Každý z nás, ať si to uvědomuje či ne, zpracovává v množství denních situací různé informace. Jestliže máme množinu (soubor) informací (poznatků) a z nich vyvozujeme operací, které říkáme usuzování, další informace, říkáme, že jsme z jistých předpokladů (premis) vytvořili usuzováním závěry - provedli jsme *úsudek*.

Např.: z i n f o r m a c í (p ř e d p o k l a d ů)

Třídní profesor je dnes nemocen.

[Dnes má být třídní schůzka.]¹⁾

Třídní schůzku vede vždy jen třídní profesor.

V y v o z u j e m e z á v ě r Třídní schůzka dnes nebude.

Logika²⁾ se zabývá usuzováním jistého druhu, přičemž abstrahuje od psychologických a invenčních zvláštností a odlišností u různých lidí. Studuje vlastně jen schémata (kostry) usuzování, klade tedy důraz na *formu* při odhlédnutí od konkrétního obsahu.

¹⁾ Jak čtenář snadno nahlédne, je tento předpoklad nadbytečný.

²⁾ Logikou se bude vždy rozumět logika, která bývá uváděna přívlastky s y m b o l i c k á, m a t e m a t i c k á, m o d e r n í.

Usuzování, které zajímá logiku je obvykle formulováno v jazykové podobě. Někdy bývá nazýváno odvozování a dává se mu přívlastek „správné“, neboť logiku zajímá usuzování (odvozování), které dovoluje přechod od správných (platných) předpokladů ke správným (platným) závěrům.

Logika se tedy zabývá obecnými způsoby, jak lze správně usuzovat. Mějme tyto jednoduché úsudky (dvě premisy a závěr):

I. *Marie je příbuzná Bedřicha.*

Bedřich je příbuzný Zdeňky.

Závěr: *Marie je příbuzná Zdeňky.*

II. *Marie je příbuzná někoho.*

Někdo je příbuzný královny.

Závěr: *Marie je příbuzná královny.*

Všimneme-li si obou úsudků, zdá se jejich forma stejná (konstrukce závěrů je zdůrazněna podtrhnutím), ale přitom je zřejmé, že úsudek I. je správný a úsudek II. nesprávný. Oba úsudky mají sice stejnou *jazykovou formu*, ale jejich *logická forma* stejná být nemůže. Proto logika, aby se vyhnula obtížím plynoucím z nepřiměřenosti (neadekvátnosti) jazykové formy, vzhledem k formě logické, konstruuje speciální jazyk, tzv. *formalizovaný (formální) jazyk*, který by při totožnosti jazykové formy zaručil v obou případech současně správnost či nesprávnost úsudků (totožnost *formy logické*). V našem případě by do tohoto jazyka nepatřil výraz „někdo“ a „někoho“, který by musel být v II. nahrazen jménem jisté osoby (s přísl. vlastností) a teprve potom by se hovořilo o stejné formě úsudků a oba úsudky by již byly správné v důsledku své formy (předešleme, že mají formu jednoho ze zákonů logiky - hypotetického sylogismu).

Formalizovaný jazyk se obvykle tvoří z přirozeného jazyka tak, že se z něho přenášejí jisté pojmy, např. pojem jména. „Jménem“ se pak rozumí poněkud více než v běžném jazyce. Jména jsou např. Petr, Vltava, deset, autor Prodané nevěsty, devadesát šest atd. J m é n o tedy označuje nějaký předmět³⁾ (věc, osobu atd.) bezprostředně viz Petr, Vltava, deset nebo se ve jméně odráží způsob, jakým tato jména označují předměty (viz autor Prodané nevěsty, devadesát šest). Nutnost rozlišení jména a předmětu, který je tím jménem označován, je možno snadno ilustrovat tím, že nelze, aby např. v úsudcích I., resp. II., vystupovaly přímo osoby a ne jejich jména.

Do formalizovaného jazyka (dále f. j.) dále přeneseme pojmy k o n s t a n t a a p r o m ě n n á. *Konstanta* bude takové jméno, které bude mít právě jeden d e n o t á t (tj. předmět, který je tímto jménem označen), např. dvacet.⁴⁾ Petr I. apod. *Proměnná* bude jistý symbol, který bude zastupovat konstantu, tedy jméno.

³⁾ P ř e d m ě t je chápán dostatečně obecně.

⁴⁾ „Dvacet“ je v tomto pojetí chápáno jako jméno abstraktního předmětu.

Např. v úsudku I. je „Marie“ konstanta (jméno mající denotát). Jestliže tuto konstantu nahradíme symbolem x (proměnnou), dostaneme:

I. x je setra Bedřicha
Bedřich je bratr Zdeňky
 x je sestra Zdeňky.

O proměnné říkáme, že nabývá (může nabývat) různých hodnot z jistého oboru (množiny). Aby úsudek I. měl „smysl“, oborem hodnot proměnné x budou zřejmě osoby ženského rodu [úsudek bude správný, jestliže např. za x dosadíme jméno některé (jisté) sestry Bedřicha].

Výrazy, ve kterých se vyskytují proměnné (ve smyslu volné proměnné), se nazývají *formy* (např. x je sestra Zdeňky). Forma nabývá hodnotu pro jisté hodnoty proměnných, které se ve formě vyskytují.

Mějme formu

Autor opery x .

Jestliže proměnnou „ x “ nahradíme konstantou „Prodaná nevěsta“, která označuje známou operu, dostaneme hodnotu formy pro danou hodnotu proměnné, dostaneme výraz (konstantu)

autor opery Prodaná nevěsta,

čili hodnotou formy pro tuto hodnotu proměnné je osoba nesoucí jméno Bedřich Smetana.

Dále např. forma $x + y$ nabývá pro hodnotu proměnné,

$x = 7$ a hodnotu proměnné $y = 5$ hodnotu 12.

2. Výrok a výr. proměnná

Nyní si všimněme úsudku I. Věty tohoto úsudku jsou oznamovací a má o nich smysl říci, jsou-li pravdivé nebo nepravdivé. Takovéto věty nazýváme v logice obvykle *výroky*.

Výrok je tvrzení (oznamovací věta), o kterém má smysl říci, je-li pravdivé nebo nepravdivé.

Příklad: a) Praha je na Moravě

b) $7 > 3$

c) Neexistuje žádné přirozené číslo n a žádná přirozená čísla a, b, c tak, že platí

$$a^n + b^n = c^n \quad \text{pro } n > 2.$$

d) Půjdeš do kina?

e) Jdi se učit!

f) Číslo Karel je malé.

Věty a), b), c) jsou výroky, neboť má smysl uvažovat o jejich pravdivosti. Výrok a) je nepravdivý, b) je pravdivý, c) je nutně pravdivý anebo nepravdivý, ale důkaz jeho pravdivosti ještě nebyl podán.

Věty d) e) f) nejsou výroky, neboť nemá smysl uvažovat o jejich pravdivosti.

Jelikož jména a výroky jsou v tomto pojetí jazykové útvary, nabízí se možnost považovat výroky za zvláštní jména (jména sui generis) mající samozřejmě denotát; při čemž denotátem výroku bude abstraktní před-

mět, tzv. *p r a v d i v o s t n í h o d n o t a*. Pravdivostní hodnoty budeme mít dvě: *p r a v d i v o s t n í h o d n o t u p r a v d a* a *p r a v d i v o s t n í h o d n o t u n e p r a v d a*.

Nepravdivé výroky pak *označují* pravdivostní hodnotu *n e p r a v d a* (dále $\emptyset$). Říkáme, že výrok nabývá (má) hodnotu nepravda.

Pravdivé výroky *označují* pravdivostní hodnotu *pravda* (dále 1). Říkáme, že výrok nabývá (má) hodnotu pravda.

Výroky budeme v dalším značit zkratkami

$a, b, c, d, e,$
 $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1,$
 $a_2, b_2, c_2, d_2, e_2,$
 $a_3, b_3,$

„ $a = 1$ “ budeme číst „výrok a je pravdivý“,

„ $b = 0$ “ budeme číst „výrok b je nepravdivý“ atd.

Výroky (podobně jako jména, konstanty) lze zastoupit jistými symboly. Tyto symboly nazýváme *výrokové proměnné*.

Výrokové proměnné zastupují výroky a nabývají (mohou nabývat) hodnot z jistého oboru hodnot výrokové proměnné (zde 1 a 0).

Výrokové proměnné označíme

p, q, r, s, t
 $p_1, q_1, r_1, s_1, t_1,$
 $p_2, q_2,$

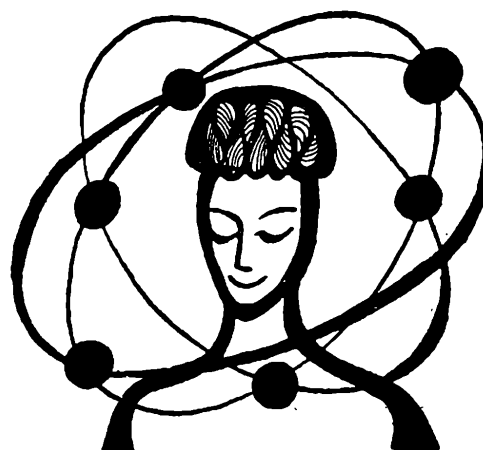
„ $p = 1$ “ budeme číst „výroková proměnná p nabývá pravdivostní hodnotu pravda“ atd.

(Pokračování)

REBUS ■ REBUS ■ REBUS



■ REBUS ■ REBUS ■ REBUS ■ REBUS ■ REBUS ■ REBUS



FYZIKA

Vznik střídavého proudu a jeho důležité hodnoty

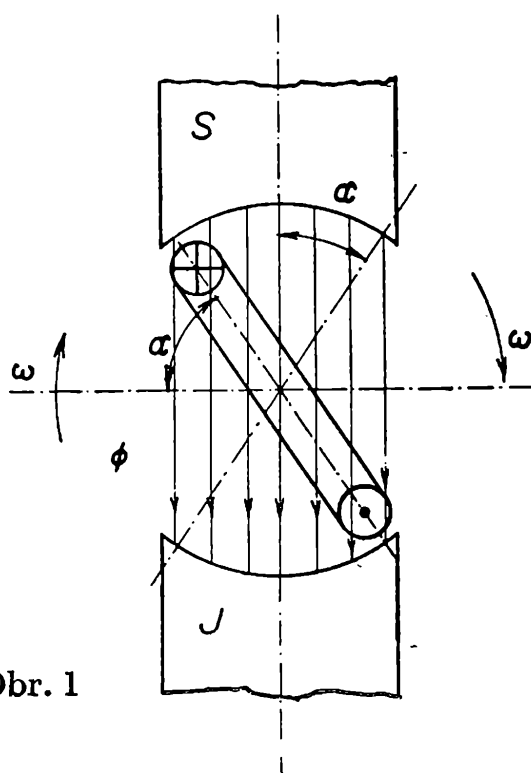
ING. LADISLAV SMRŽ, Praha

U ustáleného stejnosměrného proudu určité neproměnné velikosti se dá závislost uvažované elektrické veličiny (napětí, proudu) na čase znázornit přímkou rovnoběžnou s časovou osou.

U střídavého proudu mění však elektrické veličiny v závislosti na čase jak svou velikost, tak i směr. Opakují-li se tyto změny vždy po uplynutí určitého stálého časového úseku, nazývaného *periodou* T , mluvíme o periodickém střídavém proudu. Převrácenou hodnotou periody T je *kmítočet* f , představující tedy počet period za jednotku času, za sekundu.

Nejjednodušší a při tom v elektrotechnice nejdůležitější periodickou funkcí je funkce sinusová. Proto se snažíme při výrobě střídavého proudu, aby získaný proud a ostatní elektrické veličiny měly průběh pokud možno čistě sinusový. Mluvíme pak o harmonických střídavých veličinách.

Obvyklým zdrojem harmonického střídavého napětí je generátor. Schematicky je znázorněn v obr. 1. U generátoru je prakticky využito Faradayova objevu, že v proudovém obvodu, protínaném proměnlivým magnetickým tokem Φ , vzniká elektromotorické napětí, a tím v uzavře-



Obr. 1

ném proudovém obvodu elektrický proud. V obr. 1 je tento obvod představován jediným závitem, točícím se v magnetickém poli směru S-J. Podle své okamžité polohy je závit protínán větším nebo menším počtem silových čar pole Φ . Je tedy splněna základní podmínka, aby protínající magnetický tok byl proměnlivý (zde relativně vůči závitu). Dějí-li se tyto změny periodicky (což se docílí rovnoměrnou rotací závitu, např. poháněním generátoru turbinou apod.) a podle sinusového zákona (docílí se vhodnou konstrukcí generátoru, především vhodným tvarem pólových nástavců v obvodu toku Φ), je vzniklé elektromotorické napětí rovněž sinusové. Jeho směr, vyplývající ze směru pole a směru rotace, je v obr. 1 znázorněn obvyklými značkami: $\times$ a $\bullet$ v průřezu závitu. Značka $\times$ značí konec šipky, určující směr napětí a značka $\bullet$ pak hlavu šipky.

Podle indukčního zákona platí pro jeden závit, pro okamžitou hodnotu indukovaného napětí u a pro tok Φ vztah

$$u = - \frac{d\Phi}{dt} . \quad (1)$$

Výraz $d\Phi$ můžeme nahradit indukcí B v ploše závitu S a funkcí úhlu α . Indukce B je zde konstantní, poněvadž předpokládáme homogenní pole a úhel α je stejný pro všechny části roviny, v níž leží závit. Za těchto předpokladů platí pro magnetický tok Φ

$$\Phi = B S \cos \alpha , \quad (2)$$

a tedy pro indukované napětí podle vztahu (1)

$$u = - \frac{d(B S \cos \alpha)}{dt} = B S \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} . \quad (3)$$

Výraz $d\alpha/dt$ není nic jiného než úhlová rychlost závitu. Platí tedy

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega , \quad \text{čili} \quad d\alpha = \omega dt ,$$

z čehož integrací můžeme určit úhel α

$$\alpha = \omega t + C$$

Integrační konstanta C představuje konstantní fázový úhel φ , závisící na začátku počítání času. Když uvažujeme začátek průběhu sinusové veličiny pro čas $t = 0$, je počáteční fáze φ rovněž rovná nule.

Dosazením za úhel α dostaneme vztah (2) ve tvaru

$$\Phi = B S \cos (\omega t + \varphi) \quad (4)$$

a pro indukované napětí u pak platí

$$u = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega B S \sin (\omega t + \varphi) = 2\pi f \Phi_m \sin (\omega t + \varphi) \text{ voltů.} \quad (5)$$

Úhlovou rychlost ω můžeme si také vyjádřit podle známého vztahu z mechaniky

$$2\pi = \frac{(\text{úhlová}) \text{ dráha}}{\omega} = \frac{\text{úhlová rychlost}}{\omega} \frac{\text{čas}}{T}$$

výrazem

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f \quad (6)$$

V rovnici (5) je $\Phi_m = B S$, je to maximální hodnota magnetického toku Φ a výraz $2\pi f \Phi_m = U_m$ je pak největší hodnotou indukovaného napětí, nazývanou napětovou *amplitudou*.

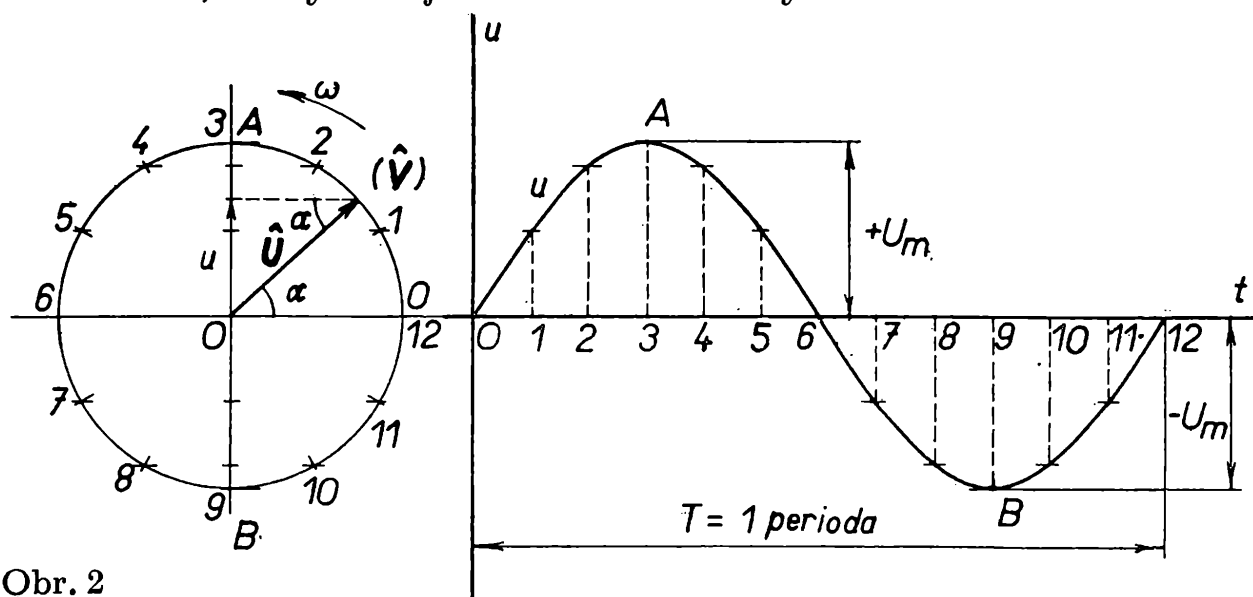
Okamžitá hodnota indukovaného napětí je pak dána vztahem

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

Obdobný výraz dostaneme i pro jiné elektrické veličiny se sinusovým průběhem; např. pro okamžitou hodnotu proudu platí

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Sinusovou funkci můžeme znázornit vektorem (obr. 2) absolutní velikosti V , který rotuje stálou úhlovou rychlostí ω kolem bodu O



Obr. 2

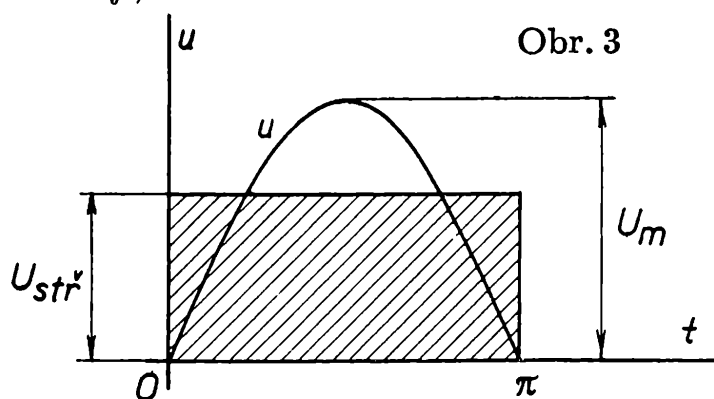
a s osou t svírá úhel α . Směr jeho pohybu považujeme za kladný, když se vektor otáčí proti směru hodinových ručiček.

Analogicky můžeme uvažovat také u elektrických veličin. Znázorňujeme je rovněž vektory, které jsou zde však pouhými symboly. Proto je pro rozlišení od skutečných vektorů nazýváme rovinnými, nebo častěji *časovými vektory*. Obvykle je označujeme tučným písmem doplněným

znakem $\wedge$ (např. časový vektor proudu značíme $\hat{\mathbf{I}}$). V obr. 2 je znázorněn časový vektor napětí $\hat{\mathbf{U}}$, jehož absolutní velikost se rovná amplitudě U_m uvažovaného napětí. Okamžité hodnoty napětí dostaneme projekcí časového vektoru na osu pořadnic $A-B$. Sinusový průběh zobrazíme

časovým rozvinutím, jehož konstrukce je patrná z obr. 2. Pro jasnější představu se zde vychází ze vztahu $u = U_m \sin \omega t$, časový vektor $\hat{U}$ se na začátku počítání doby uvažuje tedy ve směru časové osy t , a proto počáteční fáze $\varphi = 0$. Podle vztahu (7) byl by časový vektor $\hat{U}$ na začátku počítání doby obecně v poloze, v níž by s osou t svíral fázový úhel φ .

Střední hodnoty sinusového průběhu elektrických veličin. Okamžitých hodnot elektrických veličin se používá v teoretických pracích, pro praxi mají důležitost jednak *maximální hodnoty (amplitudy)*, jednak tzv. *střední hodnoty* elektrických veličin (napětí, proudu, magnetického toku aj.).



Utvoříme-li střední hodnotu z libovolného počtu period sinusové křivky, je vždy nulová, poněvadž kladné a záporné půlvlny mají stejnou velikost (obr. 2). Střední hodnota z jedné půlvlny může však nabývat různé velikosti podle volby začátku.

Největší je tato hodnota (z jedné půlvlny) mezi dvěma průchody nulou, jak je znázorněno v obr. 3. Tuto hodnotu, označenou v obr. 3 pro napětí symbolem $U_{stř}$, nazýváme *aritmetickou střední hodnotou*, nebo častěji jen *střední hodnotou*. Je dána výškou obdélníka, který má stejnou plochu s plochou uvažované půlvlny.

Platí zde tedy vztah

$$U_{stř} \cdot \pi = \int_0^{\pi} U_m \sin \alpha \, d\alpha, \quad (8)$$

z čehož po integrování a úpravě dostáváme výraz pro střední hodnotu $U_{stř}$

$$U_{stř} = \frac{2}{\pi} U_m \doteq 0,637 U_m. \quad (9)$$

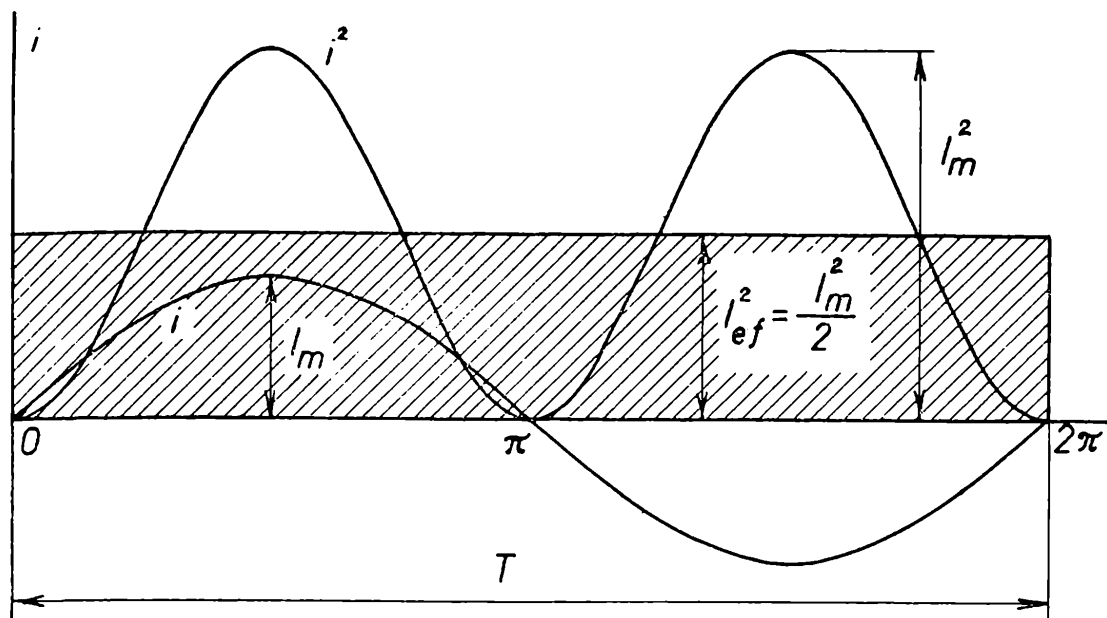
Střední hodnoty mají význam např. při usměrňování střídavého proudu nebo v elektrochemii.

Mnohem důležitější je však druhá střední hodnota, tzv. *kvadratická* nebo častěji *efektivní hodnota*, která ani pro libovolný počet period nenabývá nulové hodnoty. Podle obr. 4 určíme efektivní hodnotu střídavé elektrické veličiny (v obr. 4 efektivní hodnotu proudu) opět z rovnosti ploch, a to jednak plochy obou půlvln i^2 , jednak plochy obdélníka o výšce I_{ef}^2 a základně 2π . Křivku i^2 sestrojíme např. vynesením kvadrátů

jednotlivých okamžitých hodnot (v obr. 4 nejsou pro úsporu místa tyto hodnoty přesně v měřítku).

Zde platí vztah

$$I_{ef}^2 \cdot 2\pi = \int_0^{2\pi} I_m^2 \sin^2 \alpha \, d\alpha . \quad (10)$$



Obr. 4

Po integrování a celkové úpravě výrazu dostaneme vztah pro efektivní hodnotu proudu, označovanou obvykle I místo I_{ef}

$$I_{ef} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 I_m . \quad (11)$$

Efektivní hodnoty ukazuje většina elektrických měřicích přístrojů používaných v praxi, proto mají mimořádnou důležitost. Také ztráty teplem vyvolané efektivní hodnotou elektrického proudu jsou stejně velké jako u stejnosměrného proudu stejné velikosti. Tato skutečnost je využita u řady měřicích zařízení, která slouží k přesnému definování střídavých veličin porovnáním s odpovídajícími veličinami stejnosměrného proudu.

Vztahy (8) až (11) platí obdobně i pro jiné elektrické veličiny sinusového průběhu. Např. vztah (9) má stejný tvar pro $I_{stř}$

$$I_{stř} = \frac{2}{\pi} I_m \doteq 0,637 I_m ,$$

nebo vztah (11) pro napětí U

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \doteq 0,707 U_m$$

a podobně pro další střídavé elektrické veličiny, pokud mají sinusový průběh.

Použití obálek k řešení některých extrémálních úloh

ŠTEFAN JÁNOŠ, ČVUT Praha

Úvod

Cílem tohoto článku je vysvětlit a použít jednu z metod, pomocí které se v mnohých případech vyhneme zdoluhavému počítání a konstrukci řešení provedeme rychlou geometrickou metodou. Z důvodu názornosti zformulujeme a vyřešíme úlohy, které jsou základním kamenem ke konstrukci řešení složitějších problémů. Výhoda této metody spočívá v tom, že u čtenáře nepředpokládáme znalosti diferenciálního počtu, a tím méně teorii podmíněného extrému. K jejímu pochopení stačí znalosti elementární matematiky.

I. Definice a označení

Dříve než přistoupíme k samotným úlohám, uvedeme několik pojmů, kterých budeme často používat v dalším postupu.

V celém článku pracujeme s pravoúhlým systémem souřadnic s osami x, y, z . Souhrn všech bodů tohoto systému nazýváme prostorem E_3 . Hmotným bodem nazýváme takové těleso hmoty m , jehož rozměry a tvar v dané úloze můžeme zanedbat. Pod pohybem hmotného bodu rozumíme změnu jeho prostorových souřadnic v závislosti na čase. Vektorem nazýváme veličinu, která je úplně určená svou číselnou hodnotou a směrem v prostoru. Symboly $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ označují po řadě jednotkové vektory na osách souřadnic x, y, z . Homogenní gravitační pole charakterizujeme vektorem intenzity $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$. Říkáme, že v přímce p se realizuje pohyb hmotného bodu působením gravitačního pole, když hmotný bod s nulovou počáteční rychlostí působením zrychlení $\mathbf{g}$ dostane se do pohybu v jejím směru se zrychlením g ($\mathbf{k}p$) = $g \cos (\mathbf{k}p)$. Zde je $\mathbf{k}p$ odchylka směru přímky p od směru zrychlení gravitačního pole $\mathbf{k}$.

II.

Nechť je dán bod $A \in E_3$. Z bodu A v jistém časovém okamžiku t_0 dají se do pohybu hmotné body s nulovou počáteční rychlostí, pohybující se po polopřímkách procházejících bodem A , které realizují pohyb působením $\mathbf{g}$. Po uplynutí časového intervalu Δt nechť se pohybující body zastaví. Zjistíme, že všechny body leží na povrchu koule, která se dotýká roviny ϱ , $\varrho \parallel xy$, $A \in \varrho$ a prochází bodem A . Nyní si tuto skutečnost exaktně dokážeme. Z důvodu přehlednosti provedeme důkaz jen pro případ, že všechny polopřímky, po kterých se hmotné body pohybují,

leží v rovině xz . Pak stačí provést rotaci této roviny kolem osy z a dostaneme úplné řešení.

Podle obr. 1 platí tyto relace

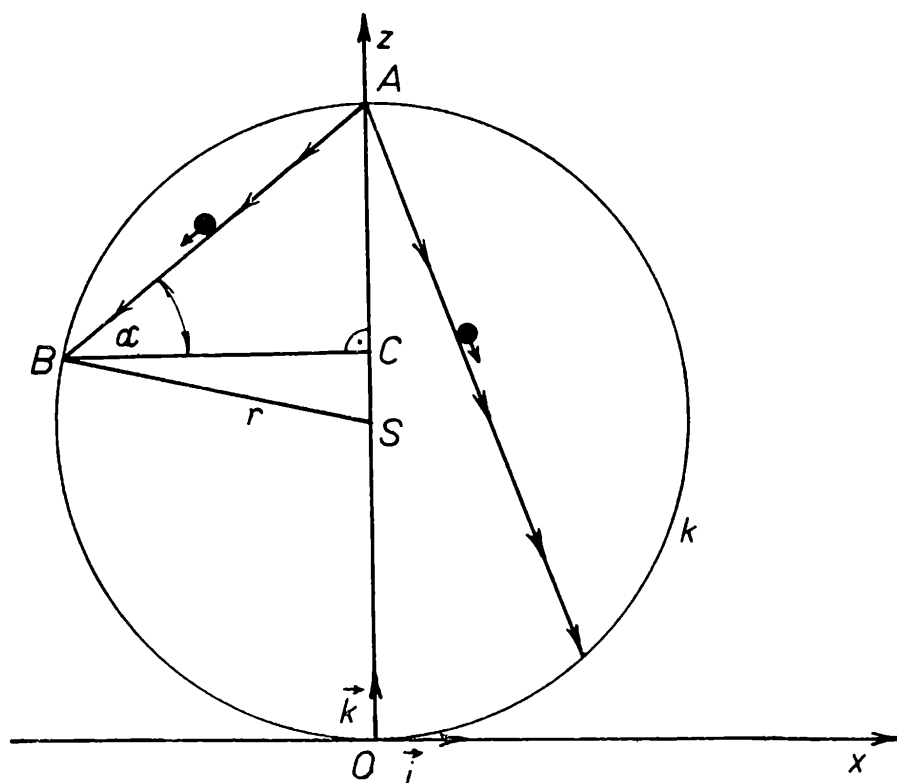
$$\frac{BC}{BS} = \sin 2\alpha, \quad \frac{BC}{BA} = \cos \alpha \Rightarrow \frac{BA}{BS} = 2 \sin \alpha \Rightarrow BA = 2BS \sin \alpha,$$

$$BS = r$$

Doba, za kterou hmotný bod projde vzdálenost AB , je

$$t = \sqrt{\frac{2AB}{a}} = \sqrt{\frac{4r}{g}},$$

kde a je zrychlení. Z posledního vztahu je tedy vidět, že t nezávisí na úhlu α a čas t , potřebný k dosažení kružnice k , je pro všechny hmotné



Obr. 1

body stejný. Rotací této kružnice kolem osy z dostaneme úplné prostorové řešení, tedy povrch koule.

Pomocí tohoto jednoduchého poznatku se nám podaří, jak uvidíme dále, vyřešit dosti složité extrémální úlohy. Nyní přistoupíme k formulaci první základní úlohy.

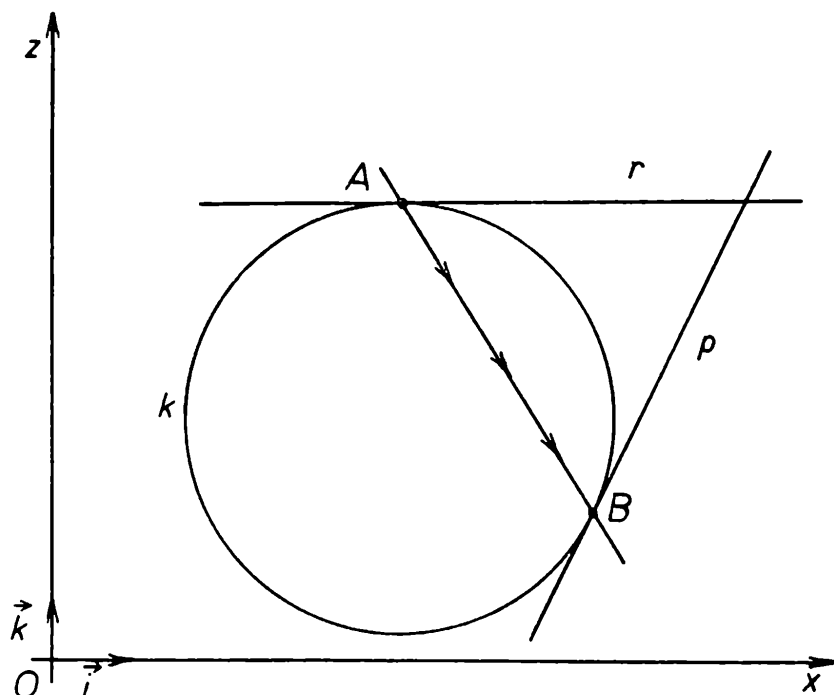
Úloha 1. Nechť je dána přímka p a bod A tak, že $A \notin p$ (A neleží na p). Určete přímku q , která má tyto vlastnosti

1. $A \in q$ (A leží na q).
2. $q \times p$ (q je různoběžná s p).
3. Hmotný bod pohybující se z bodu A po přímce q s nulovou počáteční rychlostí, působením $\mathbf{g}$ dosáhne přímky p v nejkratším možném čase.

Předpokládejme, že přímka p i bod A leží v rovině xz . Tento zdánlivě speciální případ však nic nemění na myšlence metody a princip jejího

použití není žádným způsobem omezen ani obecnou polohou přímky p a bodu A v prostoru E_3 .

Konstrukce řešení. Bodem A vedeme přímku $r \parallel x$. Sestrojíme kružnici k , která má dotykový bod s přímkou r v bodě A a dotýká se přímky p . Pak přímka určená body A, B je řešení úlohy. Geometricky existují dvě kružnice, které mají výše popsanou vlastnost. Fyzikální smysl má však jenom ta, u které přímka AB realizuje pohyb hmotného bodu působením $\mathbf{g}$, takže fyzikální řešení je jednoznačné. Důkaz konstrukce plyne z předcházející úvahy (obr. 2).



Obr. 2

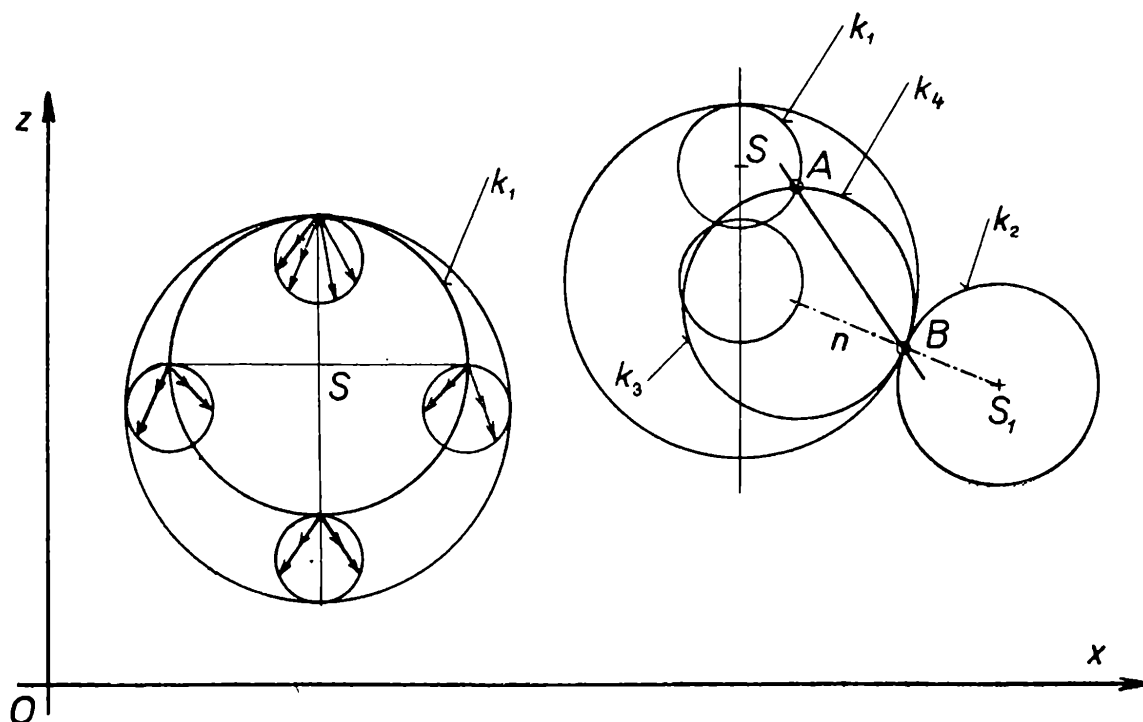
Úloha 2. V rovině xz jsou dány kružnice k_1, k_2 tak, že $k_1 \cap k_2 = \emptyset$ (k_1 a k_2 nemají společný žádný bod). Určete body $A \in k_1, B \in k_2$ tak, aby přímka, určená těmito body, realizovala pohyb hmotného bodu působením $\mathbf{g}$ v nejkratším čase.

Konstrukce řešení. Z každého bodu kružnice k_1 , v čase t_0 , dají se do pohybu všemi směry hmotné body s nulovou počáteční rychlostí, pohybující se působením gravitačního pole $\mathbf{g}$. V čase $t' > t_0$ budou se nacházet na kružnicích s průměrem $\frac{1}{2} g (t' - t_0)^2$. Obálka těchto kružnic je opět kružnice s průměrem $g (t' - t_0)^2 \frac{1}{2} + d_1$, kde d_1 je průměr kružnice k_1 . V jistém okamžiku t'' se tato kružnice dotkne kružnice k_2 . Tím dostáváme hledaný bod B . V tomto bodě sestrojíme normálu n ke kružnici k_2 . Množina středů kružnic, z kterých je vytvořena obálka v čase t'' , je kružnice k_3 s průměrem d_1 . Z průsečíku n a k_3 sestrojíme kružnici k_4 s průměrem $g (t'' - t_0)^2 \frac{1}{2}$, která protne kružnici k_1 ve dvou bodech, z nichž jenom jeden má fyzikální význam pro naši úlohu. Tím je určena přímka AB (obr. 3).

Úloha 3. V rovině xz jsou dány přímka p a kružnice k tak, že $p \cap k = \emptyset$. Určete body $A \in p, B \in k$, a to tak, aby přímka, určená těmito

body, realizovala pohyb hmotného bodu z přímky p na kružnici k , působením $\mathbf{g}$ v nejkratším možném čase.

Konstrukce řešení. Postupujeme úplně analogicky podle úlohy 2. V tomto případě bude obálkou přímka, která se posouvá současně s po-

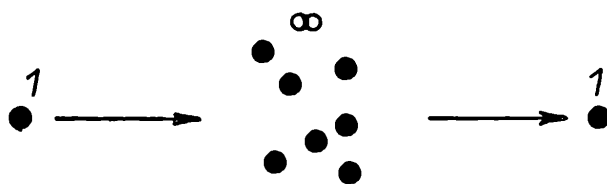


Obr. 3

hybem hmotných bodů. Její dotkový bod s kružnicí k je hledaným bodem B . Pak sestojíme množinu středů kružnic, vytvářejících obálku v čase, odpovídající dotyku obálky a kružnice. Tato množina je přímka a její průsečík s normálou, vedenou ke kružnici v bodě B dává střed kružnice, která protíná přímku p ve dvou bodech. Fyzikální význam má však jenom jeden, který poznáme na základě konstrukce obálky.

Závěr

Na těchto třech základních úlohách jsme vysvětlili podstatu metody, jejíž myšlenka je zcela neobvyklá a na první pohled nelogická, protože místo jednoho hmotného bodu zkoumáme souhrnný pohyb všech hmotných bodů a studujeme geometrii jimi vytvořeného obrazu. Pak na základě zkoumání souhrnného pohybu vybíráme z nekonečného počtu hmotných bodů právě ten, který má vlastnosti vyhovující extrémní úloze. Graficky můžeme tuto metodu znázornit takto (obr. 4):



Obr. 4

Čtenář, který zná metodu podmíněného extrému, může se přesvědčit, že řešení libovolné z úloh, které jsme uvedli, je dosti pracné a určitě dá přednost geometrické konstrukci. Pochopitelně, že touto metodou se dá řešit jenom jistá třída problémů a záleží jenom na fantazii řešitele, do jaké míry dokáže tuto třídu rozšířit. Nutno zdůraznit, že v obecnějších úlohách není na první pohled zřejmé, jaký geometrický útvar bude obálka; její rovnici musíme hledat řešením diferenciální rovnice, což není vždy nejjednodušší. Ve většině případů však určení obálky nedělá zvláštní potíže a použití této metody je značně efektivní. V našich úlohách jsme zkoumali pohyby hmotného bodu působením $\mathbf{g}$ po přímkách. Je možné se zabývat např. pohyby po parabolách a místo homogenního gravitačního pole uvažovat třeba intenzitu závislou na čtverci rychlosti hmotného bodu. Dále tato metoda není omezena jenom na fyzikální objekt - hmotný bod. Se stejným úspěchem jí lze použít při zkoumání procesu s různými objekty, jejichž vlastnosti nejsou žádným způsobem metodou požadovány. Metoda se zakládá na přesném určení pohybu jednotlivého objektu v jistém časovém intervalu a na souhrnných pohybových vlastnostech nekonečného počtu objektů. Pak místo obálek vlastnost, vytvořená nekonečným počtem objektů - je nutné studovat obecnější útvary s různou strukturou. Bylo by namístě, kdybychom obálky v našich úlohách nazvali ekvitemporálními (izochronními) hladinami, analogicky hladinám ekvipotenciálním.

Ty, kteří mají zájem se seznámit s teorií obálek, odkazujeme na hezkou knížku Boltjanského, *O g i b a j u š č a j a*.

ASTRONOMIE

Kosmické rychlosti

Elementární odvození

JOSEF ŠOLER, Č. Budějovice

V době, kdy se vysílají rakety nejen k Luně, nýbrž i k Venuši a Martovi, připomeneme si, jak se dají nejsnazší odvodit kosmické rychlosti. Pro ty čtenáře, jimž se zdá obtížným postup, uveřejněný v Rozhledech v ročníku 1957/58, podáváme zjednodušený výpočet. Odkazujeme ty, kdo se o ten problém zajímají hlouběji, na onen podrobnější článek.

Budeme předpokládat, že těleso hmotnosti m je vrženo vodorovně na rovníku ve směru rotace Země. Zanedbáme odpor vzduchu.

První kosmická rychlost c_1

Těleso obíhá kolem Země po kružnici poloměru $R = 6,378 \cdot 10^3$ km. Odstředivá síla se ruší s tíhou, tj.

$$m \frac{c_1^2}{R} = mg ,$$

kde

$$c_1 = \sqrt{Rg} = \sqrt{6,378 \cdot 10^3 \cdot 9,78 \cdot 10^{-3}} = 7,90 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \\ (g = 9,78 \cdot 10^{-3} \text{ km} \cdot \text{s}^{-2}) .$$

Druhá kosmická rychlost c_2

Je to parabolická rychlost vzhledem k Zemi. Při odvození užitíme Keplerova zákona, že střed Země je ohniskem parabolické dráhy. Proto parametr paraboly $p = 2R$. Při vodorovném vrhu rychlostí c_2 platí, volíme-li osu x vodorovně ve směru vrhu a osu y svisle dolů, rovnice

$$x = c_2 t , \quad y = \frac{1}{2} g t^2 ,$$

tedy

$$y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{c_2^2} , \quad x^2 = \frac{2c_2^2}{g} y$$

Srovnáním s rovnicí paraboly $x^2 = 2py$ plyne

$$p = \frac{c_2^2}{g} .$$

Dosadím-li za $p = 2R$, dostanu

$$c_2 = \sqrt{2gR} = c_1 \sqrt{2} = 11,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Oskulační kružnice ve vrcholu paraboly, jak se dokazuje v geometrii má poloměr r rovný parametru paraboly p . Je tedy $p = r = 2R$. Její poloměr se tedy rovná průměru Země a má střed v místě protilehlém bodu, z něhož byla raketa vypuštěna.

Druhé odvození kosmické rychlosti, při němž není třeba znát vlastnosti paraboly:

V bodu B_1 , vzdáleném o délku r_1 od středu koule hmotnosti m_1 a poloměru R působí na hmotnost m podle Newtonova gravitačního zákona síla

$$F_1 = \frac{kmm_1}{r_1^2} .$$

Ve vzdálenějším bodě B_2 , ve vzdálenosti $r_2 > r_1$, je tato síla rovna

$$F_2 = \frac{kmm_1}{r_2^2}$$

Za průměrnou sílu lze vzít jejich geometrický průměr

$$F = \frac{kmm_1}{r_1 r_2}.$$

Práce, vykonaná při přenesení hmotnosti 1 kg z bodu B_2 do B_1 , tj. rozdíl potenciálních energií, je, jak víme z fyziky

$$A' = \frac{km_1}{r_1 r_2} (r_2 - r_1),$$

neboť proběhnutá dráha je $r_2 - r_1$. Je tedy

$$A' = km_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Aby raketa unikla z gravitačního pole Země, musíme hmotnosti 1 kg dodat takovou kinetickou energii, aby se rovnala práci, potřebné k přenesení z povrchu Země ($r_1 = R$) do „nekonečna“, tj.

$$\frac{1}{r_2} = 0.$$

$$\frac{1}{2} c_2^2 = \frac{km_1}{R}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{2km_1}{R}}.$$

Avšak síla, kterou je hmotnost 1 kg přitahována na rovníku k Zemi, je

$$g = \frac{km_1}{R^2},$$

kde m_1 je hmotnost Země. Je tedy

$$\frac{km_1}{R} = gR,$$

$$c_2 = \sqrt{2gR} = c_1 \sqrt{2} = 11,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Výhodou tohoto odvození je, že nemusíme znát tvar dráhy a lze ho užít i v následujícím výpočtu.

Třetí kosmická rychlost c_3

Je parabolická vzhledem ke Slunci. Úniková rychlost musí být tak velká, aby kinetická energie každého 1 kg rakety $\frac{1}{2} c_3^2$ se rovnala práci, potřebné k tomu, aby

1. z gravitačního pole na povrchu Země unikla do „nekonečna“. K tomu je podle posledního odstavce zapotřebí vykonat práci

$$\frac{km_1}{R} = gR,$$

2. aby unikla z gravitačního pole Slunce ve vzdálenosti Země od Slunce (a). Je-li m_2 hmotnost Slunce, je potřebná práce

$$\frac{km_2}{a}.$$

Protože

$$k = \frac{gR^2}{m_1},$$

lze tuto práci psát ve tvaru

$$\frac{gR^2m_2}{am_1}$$

Proto

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} c_3^2 &= gR + gR \frac{R}{a} \cdot \frac{m_2}{m_1}, \\ c_3^2 &= 2gR \left(1 + \frac{R}{a} \cdot \frac{m_2}{m_1}\right) = c_2^2 \left(1 + \frac{R}{a} \cdot \frac{m_2}{m_1}\right).\end{aligned}$$

Podle tabulek je

$$\begin{aligned}\frac{m_2}{m_1} &= 331\,950, \quad R = 6,378 \cdot 10^3 \text{ km}, \quad a = 149,5 \cdot 10^6 \text{ km}, \\ c_3 &= c_2 \sqrt{1 + \frac{6,378}{1,495} \cdot 10^{-5} \cdot 3,3195 \cdot 10^5} = c_2 \sqrt{1 + 14,1} = \\ &= 11,3 \sqrt{15,1} = 43,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.\end{aligned}$$

Poněvadž střední hodnota rychlosti, kterou obíhá Země kolem Slunce, je $29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, využijeme toho tak, že odpálíme raketu ve směru revolučního oběhu Země. Vzhledem k Zemi stačí úniková rychlost $c_3' = 43,5 - 29,8 = 13,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Skutečná hodnota je o něco větší. Zanedbali jsme přitažlivé síly Měsíce a ostatních planet. Náš značně zjednodušený výpočet stačí jen pro odhad.

Starší čísla Rozhledů matematicko-fyzikálních.

K. Drábek, CSc., Praha 2, Trojanova 13, hledá č. 3. a 4., roč. 35 (1957) a č. 5. a 7., roč. 36 (1958). *Ivo Řezníček*, Brno, Květná 24, nabízí celý ročník 43 (1964/65); čis. 1., 4. až 10., roč. 44 (1965/66) a čis. 1. až 4. a 7. až 9., roč. 45 (1966/67).

O p r a v a. V čis. 1., str. 26, má být mezi úspěšnými řešiteli správně uveden *Stanislav Slouka*, IV. A SPŠE, Brno.

Řešení rébusů. Čis. 1., str. 22: *Gustav Robert Kirchhoff* (1824—1887); *Christian Huygens* (1629—1695). Čis. 2., str. 66: *Adrien-Marie Ampère* (1775—1836).

Redakce

≡ NAŠE SOUTĚŽ ≡

Závěrečné poznámky k loňské soutěži Rozhledů

Do loňské soutěže zaslalo 47 řešitelů - mezi nimi 8 dívek - celkem 564 řešených příkladů, z toho 332 z matematiky, 165 z fyziky a 67 z konstruktivní geometrie. Rádi jsme mezi svými řešiteli uvítali žáka J. Bureše z 9. třídy ZDŠ v Šumperku a několik žáků 1. a 2. tříd SVVŠ, byť s ojedinělými příklady. Těší nás zájem některých - i menších - škol o soutěž, zato Praha (až na SVVŠ W. Piecka) spí, asi tu chybí pedagogicky dobře fundovaní, nadšení a podnětní učitelé. Jak jsme se přesvědčili, žactvo na některých pražských školách ani neví o existenci Rozhledů.

Úroveň zaslaných řešení je celkem uspokojivá. Ve snaze zaslat řešení „vědecky“ správná, uchylují se řešitelé k mnohomluvným, nežádoucím, frázovitým úvahám - snad podle vzorů, jež často vidí kolem sebe - místo, aby příklad vyřešili co nejekonomičtěji. Úprava odevzdaných řešení je na některé škole tradičně špatná, nečitelný rukopis je doprovázen kostrbatým obrazcem s popisem ještě horším. Nechyběla ovšem ani vzorně upravená řešení, která jsou dobrou vizitkou žáka i jeho vychovatelů.

Výsledky v m a t e m a t i c e :

1. Marian Fúrik, III.C SVŠ, Zvolen. . .	72 bodů
2. Martin Bukovčan, II.A SVŠ, Bratislava.	71 bodů
3. Jan Kastl, III.F SVVŠ, Plzeň	68 bodů
4. Jan Louda, III.F SVVŠ, Plzeň.	67 bodů
5.—6. Milan Číha, III.A SVVŠ, Rakovník .	66 bodů
5.—6. Stanislav Slouka, IV.A SPŠE, Brno. .	66 bodů
7. Věra Jaroňová, III.B SVVŠ, Nový Bohumín	64 bodů
8. Tomáš Duby, IV.O SPŠE, Bratislava.	63 bodů

Jména nejlepších řešitelů z fyziky a konstruktivní geometrie uveřejníme příště, celkové umístění, přehled vítězů ve všech kategoriích i absolutních vítězů se dovíte v prosincovém čísle.

Soutěž pro školní rok 1967/68

Také v tomto školním roce vypisujeme soutěž v řešení příkladů z matematiky, fyziky a konstruktivní geometrie.

Řešení každého příkladu pište čitelně na papír formátu A4 (nečitelná řešení letos budeme automaticky vyřazovat) po jedné stránce, vpravo dole uveďte plné své jméno, třídu, školu a své bydliště.

Příklady řešte samostatně, věcně, přitom odborně správně, ekonomicky s užitím platné symboliky. Na rozdíl od minulých let se mohou letos soutěže zúčastnit i kolektivy - nejvýše trojčlenné - z téže třídy. Jména členů kolektivu a jejich adresy napište na nepopsanou druhou stránku papíru. Kolektiv má ovšem nárok při event. umístění na jedinou cenu.

Řešení první části soutěžních příkladů z matematiky a konstruktivní geometrie, otištěných v tomto čísle, zašlete nejpozději do 10. ledna 1968 na adresu výkonného redaktora: Doc. Ota Setzer, Praha 2, Trojanova 13.

Matematika:

1. Nad stranami trojúhelníka ABC jsou sestrojeny vně čtverce, jejichž plošné obsahy mají daný součet P_1 . Nad stranami trojúhelníka, jehož vrcholy S_1, S_2, S_3 jsou středy těchto čtverců, jsou sestrojeny další tři čtverce, jejichž plošné obsahy mají daný součet $P_2 > P_1$. Určete plošný obsah P trojúhelníka ABC .

Josef Brejcha

2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož vnitřní úhel při základně AB je α . Na rameni AC sestrojíme vnitřní bod D tak, aby $BD = BA$, na rameni BC vnitřní bod E tak, aby $DE = BA$. Jak velký musí být úhel α , aby $CE = AB$?

Stanislav Horák

3. Pro která přirozená čísla x je rozdíl $3^x - x^3$ dělitelný jedenácti?

František Kejla

4. Jsou dány dvě rovnoběžné tečny t, t' kružnice k . Průměr kružnice, který je k těmto tečnám kolmý a další libovolná tečna q kružnice vytínají na tečnách t, t' úsečky velikosti m, m' . Dokažte, že $m \cdot m' = r^2$, kde r je poloměr kružnice k .

Josef Novák

5. Určete všechna přirozená čísla x , pro něž platí

$$n(3x - 1; 5x + 7) = x^2 + x - 38,$$

kde $n(a; b)$ značí nejmenší společný násobek čísel a, b .

Jiří Sedláček

6. Určete součet prvních n členů posloupnosti

$$25, 77, 153, 253, 377, 525, \dots$$

Matematickou indukcí se přesvědčte o správnosti nalezeného výsledku.

Ota Setzer

Konstruktivní geometrie:

1. Jsou dány různoběžné roviny α, β , v rovině α bod A neležící na průsečnici obou rovin. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, jehož strana má danou délku a tak, aby strana AB ležela v rovině α a strana CD v rovině β . Prostorové řešení proveďte obecně, graficky rozřešte úlohu pro případ, že $\alpha \equiv \pi, \beta \equiv \nu, A(0; 6; 0), a = 4, 5$.

Stanislav Horák

2. Body A, B, C tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka a leží na hlavní kružnici kulové plochy daného poloměru r . Sestrojte průměty této kulové plochy, je-li dán bod A , nárys bodu B a souřadnice x_c bodu C .

Stanislav Horák

3. Je dána rovina ρ , bod M mimo ni a přímka $M // \rho$ jdoucí bodem M . Bod M je společným vrcholem podobných rovnoramenných trojúhelníků, které leží v rovinách procházejících přímkou m a jejichž základny leží v rovině ρ . Co vytvoří vrcholy základů těchto trojúhelníků?

Josef Novák

4. V kótovaném promítání zobrazte nad průměrem AB kružnici, jejíž eliptický průmět má numerickou výstřednost $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $A(-4; 4; 1), B(4; 0; 3)$.

Ota Setzer

Řešení úloh z minulého ročníku

Matematika

6. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány poloměry $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ kružnic vně vepsaných. (Užijte vztahů odvozených v autorově článku v 8. čísle loňských Rozhledů.)

Josef Glivický

(Došlo 26 řešení.)

Řešil Stanislav Slouka, M4.a SPŠE Brno:

R o z b o r. Předpokládejme, že jsme již sestrojili trojúhelník, jehož vně vepsané kružnice mají poloměry $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Použijeme označení podle obr. 1 v sedmém čísle 44. ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních 1965–66, str. 294.

Poněvadž

$$C^1T_1 = C^1T_2, B^1T_3 = B^1T_1, A^1T_3 = A^1T_2,$$

je postupně

$$AC + C^1T_1 = AC + C^1T_2 = AB + B^1T_3 = AB + B^1T_1.$$

Avšak

$$AC + C^1T_1 + AB + B^1T_1 = 2s.$$

Proto

$$A^1T_3 = AC + C^1T_1 = AB + B^1T_1 = s.$$

V trojúhelníku

$$A^1T_3S_1 \text{ je } \varrho_1 = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

podobně

$$\varrho_2 = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \text{ a } \varrho_3 = s \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

V trojúhelníku $B^1T_3S_1$, kdež $B^1T_3 = s - c$ je

$$s - c = \varrho_1 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

a cyklickou záměnou

$$s - a = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \quad s - b = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

Sečtením těchto rovností

$$s - a + s - b + s - c = s \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right)$$

čili

$$1 = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Dosadíme-li za tangenty je

$$1 = \frac{\varrho_2 \varrho_3}{s^2} + \frac{\varrho_1 \varrho_3}{s^2} + \frac{\varrho_1 \varrho_2}{s^2},$$

neboli

$$s = \sqrt{\varrho_1 \varrho_2 + \varrho_1 \varrho_3 + \varrho_2 \varrho_3}.$$

K o n s t r u k c e. Odvozený vztah pro s píšme ve tvaru

$$s = \sqrt{\varrho_1 (\varrho_2 + \varrho_3) + \varrho_2 \varrho_3},$$

položme pak

$$\varrho_1 (\varrho_2 + \varrho_3) = x^2, \quad \varrho_2 \varrho_3 = y^2.$$

Konstrukci výrazů x a y provedeme pomocí věty Euklidovy, pak bude s přeponou pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách x, y .

Zvolme pak polopřímku o počátku A a určíme $A^1T_3 = s$. Sestrojíme pak kružnici $k_1 \equiv (S_1, \varrho_1)$, která se dotýká A^1T_3 v bodě 1T_3 . Vedme pak z bodu A druhou tečnu, bod dotyku je 1T_2 . V polovině $A^1T_3S_1$ a současně v polovině opačné k $A^1T_2S_1$ sestrojíme kružnici $k_2 \equiv (S_2, \varrho_2)$, která se dotýká přímkou A^1T_3 a A^1T_2 po řadě v bodech $^2T_3, ^2T_2$. Sestrojíme druhou vnitřní tečnu kružnic k_1, k_2 . Tato tečna protne A^1T_2 v bodě C a AT v bodě B .

D ů k a z s p r á v n o s t i. Podle konstrukce má trojúhelník ABC dvě kružnice vně vepsané o poloměrech ϱ_1, ϱ_2 . Označme ϱ'_3 poloměr třetí vně vepsané kružnice. Podle konstrukce je $A^1T_3 = \sqrt{\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3}$. Podle rozboru však pro trojúhelník ABC platí $A^1T_3 = \sqrt{\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho'_3 + \varrho_2\varrho'_3}$. Je tedy $\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho'_3 + \varrho_2\varrho'_3 = \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3$, odtud $\varrho'_3 = \varrho_3$. Trojúhelník ABC má tedy požadované vlastnosti.

D i s k u s e. Výraz s je jednoznačně určen. Také sestavení kružnic k_1 a k_2 je jednoznačné a vždy možné. Druhá vnitřní tečka ke kružnicím k_1 a k_2 protíná úsečku A^1T_3 tehdy, je-li $A^1T_2 > A^2T_2$. Trojúhelníky $A^2T_3S_2$ a $S_1^1T_3A$ jsou podobné proto $S_1^1A_3 : A^1T_3 = A^2T_3 : S_2^2T_3$, to jest

$$\varrho_1 : s = A^2T_3 : \varrho_2, \text{ odtud } A^2T_3 = A^2T_2 = \frac{\varrho_1\varrho_2}{s}.$$

Dále jest $A^1T_2 = A^1T_3 = s$. Po dosazení do uvedené nerovnosti je $s > \frac{\varrho_1\varrho_2}{s}$, čili musí platit $s^2 = \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3 > \varrho_1\varrho_2$, což je splněno vždy. Úloha má tedy vždy jediné řešení.

7. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y - z \end{pmatrix} &= 15, \\ \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y - z \end{pmatrix} &= 1, \\ x - y + z &= 4. \end{aligned}$$

Stanislav Horák

(Došlo 34 řešení)

Riešil Juraj Černák, II.A SVŠ, Turčianske Teplice.

Pri riešení vychádzame z rovnice (2), z ktorej vyplývajú dve možnosti:

$$\text{I. } x + y - z = x - y - z,$$

čiže

$$y = 0.$$

Dosadením za y do rovnice (1) a (3) dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x + z \\ x - z \end{pmatrix} &= 15, \\ x + z &= 4. \end{aligned}$$

Odtiaľto máme

$$\begin{pmatrix} 4 \\ x - z \end{pmatrix} = 15.$$

Táto rovnica nemá riešenie, lebo $\begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix} < 15$.

II. $x + y - z$ je zatiaľ neurčité, ale

$$x - y - z = 0.$$

Túto rovnicu spojíme s rovnicou (3) a dostaneme

$$z = 2.$$

Dosadením do (1) máme

$$\frac{(x + y + 2)}{(x + y - 2)} = 15,$$

čiže

$$\frac{(x + y + 2)}{4} = 15.$$

Táto rovnica je splnená iba pre jedinú hodnotu

$$x + y + 2 = 6.$$

Ďalším riešením dostaneme výsledok

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = 2.$$

To je tiež jediné riešenie danej sústavy.

8. V intervale $< 0^\circ, 360^\circ >$ najdite všetky uhly, vyhovujúce rovnici

$$\frac{\operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{cotg} 3\alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{cotg} 3\alpha + \operatorname{cotg} \alpha} = 1.$$

Stanislav Horák

(Došlo 26 řešení)

Riešil Marian Fúrik, III.C SVŠ, Zvolen:

Menovatele zlomkov v danej rovnici musia byť rôzne od nuly a preto

a) $\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha \neq 0$, $\operatorname{cotg} 3\alpha + \operatorname{cotg} \alpha \neq 0$;

b) $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Za týchto predpokladov sa rovnica dá upraviť na tvar

$$\frac{\operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} = 1.$$

Po odstránení zlomkov a malej úprave

$$(\operatorname{tg} 3\alpha - 1)(\operatorname{tg} \alpha - 1) = 0.$$

I. $\operatorname{tg} 3\alpha = 1$.

$$3\alpha = 45^\circ + k \cdot 180^\circ,$$

$$\alpha = 15^\circ + k \cdot 60^\circ$$

Odtiaľto máme

$$\alpha = 15^\circ, 75^\circ, 135^\circ, 195^\circ, 255^\circ, 315^\circ$$

Uhly $135^\circ, 315^\circ$ s ohľadom na podmienku a) úlohe nevyhovujú.

II. $\operatorname{tg} \alpha = 1$,

čiže

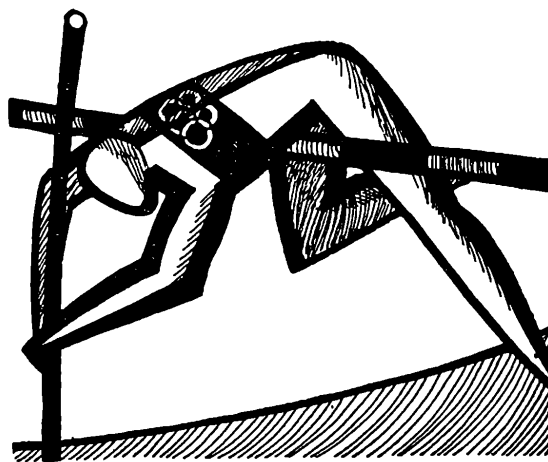
$$\alpha = 45^\circ, 225^\circ.$$

Tieto uhly tiež nevyhovujú s ohľadom na podmienku a).

Odpoveď: Úlohe vyhovujú uhly $\alpha = 15^\circ, 75^\circ, 195^\circ, 255^\circ$.

(Pokračování)

FO



Hudební akustika

FRANTIŠEK ČERNICKÝ, Praha

Studijní text pro kategorii B Fyzikální olympiády.

Z obecné nauky o zvuku čili akustiky zopakujeme některé základní pojmy a vztahy a vybudujeme na nich soustavu pravidel a jevů z hudební akustiky. Pak si všimneme blíže některých hudebních nástrojů.

I. Zvuk mající jen *výšku* a *intenzitu* je *jednoduchý zvuk*. Vzniká jednoduchými kmity pružných těles. Může být vyjádřen např. výrazem

$$u = u_m \sin \frac{2\pi}{T} t = u_m \sin 2\pi f t = u_m \sin \omega t \quad (1)$$

Zde je: u okamžitá akustická výchylka z rovnovážné polohy, u_m amplituda výchylky (rovná polovině rozkmitu), T perioda čili doba kmitu, f kmitočet čili frekvence, ω úhlový kmitočet. *Absolutní výška tónu* je rovna *frekvenci* f . Jednotkou pro měření frekvence je *hertz*, značka Hz; ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$). Intenzita zvuku je přímo úměrná u_m^2 .

Skutečná zvučící tělesa vydávají zpravidla *zvuky složené*. Kmitočty jednotlivých složek tu lze považovat za celistvé násobky jistého kmitočtu nejmenšího, což je *základní kmitočet* f_1 . Podle toho, jak jsou zastoupeny jednotlivé jednoduché zvuky ve zvuku složeném, posuzujeme jeho *barvu*. V dalším budeme pro složený zvuk užívat názvu *tón*. Stejně vysoké a stejně intenzivní tóny hrané na housle nebo flétu či trubku se odlišují právě barvou.

Příbuznost tónů

Z pokusů se sirénami zjišťujeme, že příbuznost tónů mezi sebou je dána nikoli rozdílem jejich absolutních výšek, nýbrž jejich *poměrem*. Pro určitost mějme na mysli sirénu Seebeckovu, v jejíž soustředných kružnicích jsou otvory; jejich počet v jednotlivých kružnicích je

$$24 \quad 27 \quad 30 \quad 32 \quad 36 \quad 40 \quad 45 \quad 48 \quad (2)$$

Ať ji rozezvučíme při malém nebo při velkém počtu obrátů za sekundu, příbuznost vzniklých osmi tónů zůstává zachována. Vznikající tóny můžeme

sledovat v posloupnosti od nižších k vyšším ($f_k > f_{k-1}$) nebo obráceně od vyšších k nižším; zde budeme předpokládat vždy posloupnost stoupající. Pro takovou řadu tónů se ujal označení *stupnice dur* (*stupnice tvrdá*). V hudbě tu přistupuje ještě označení počátečního tónu, např. C, příslušná stupnice je C dur. Pro jednotlivé stupně byly zavedeny názvy

$$C \quad D \quad E \quad F \quad G \quad A \quad H \quad c \quad (3)$$

Osmý tón má ve svém označení totéž písmeno jako počáteční tón, je *oktávou* tónu základního: $f = 2f_1$. Názevu *oktáva* se v hudbě užívá ještě v jiném významu; značí skupinu tónů s frekvencemi v rozsahu od některého tónu C (c, c' atp.) až do následujícího c (c', c'' atp.); tato horní mez sama už patří do oktávy následující. Tak všechny tóny od C do H tvoří tzv. *velkou* oktávu, konec řady (3) je začátkem *malé* oktávy atd. Jednotlivé stupně stupnice se zpravidla označují latinskými řadovými číslovkami: *prima*, *sekunda*, *tercie*, *kvarta*, *kvinta*, *sexta*, *septima*, *oktáva* nebo římskými číslicemi I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII.

Skutečnost, že příbuznost tónů tvrdé stupnice je nezávislá na výšce počátečního tónu a je dána poměrem příslušných kmitočtů, umožňuje jednoduché číselné vyjádření výšek tónů libovolné tvrdé stupnice. Tzv. *relativní výška tónu* je poměr kmitočtu daného tónu stupnice ke kmitočtu tónu základního

$$\frac{f_k}{f_1} = \frac{z_k n}{z_1 n} = \frac{z_k}{z_1};$$

zde je z_k počet otvorů v k -té kružnici, n počet otáček sirény za sekundu. Můžeme tedy sestavit tabulku I:

z_k	24	27	30	32	36	40	45	48
relativní výška tónu	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
stupeň	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

Je účelné rozdělit celou stupnici na dvě poloviny zvané *tetrachordy* a všimnout si *intervalů* (odlehlostí) každých dvou sousedních tónů.

Pro dolní tetrachord máme $\frac{3}{2} : 1 = \frac{3}{2}$, $\frac{4}{3} : \frac{3}{2} = \frac{10}{9}$, $\frac{5}{4} : \frac{4}{3} = \frac{15}{8}$,
pro horní tetrachord máme $\frac{5}{3} : \frac{3}{2} = \frac{10}{9}$, $\frac{15}{8} : \frac{5}{4} = \frac{3}{2}$, $2 : \frac{15}{8} = \frac{16}{15}$.

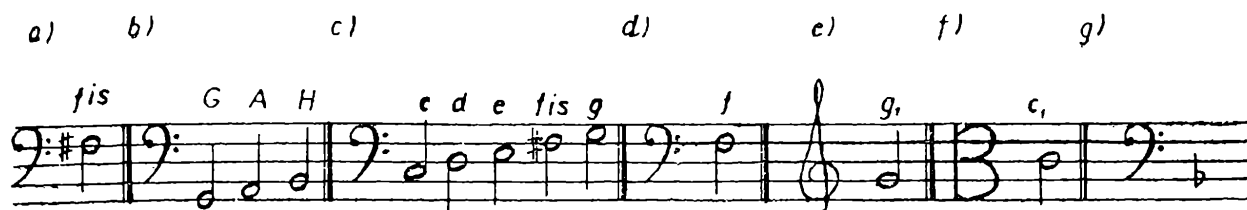
Mezi koncem dolního zetrachordu a začátkem horního je interval $\frac{9}{8}$. Interval dané zlomky $\frac{9}{8}$ a $\frac{10}{9}$ se od sebe liší poměrně málo,¹⁾ v hudbě se označují jako *celé tóny* ($\frac{9}{8}$ je velký celý tón, $\frac{10}{9}$ je malý celý tón). Poslední interval $\frac{16}{15}$ v každém z těchto dvou tetrachordů je výrazně odlišný. V hudbě se označuje názvem *půltón* (resp. zde přesněji *velký půltón*). S použitím těchto označení vyjadřuje schéma: 1 1 $\frac{1}{2}$ shodně stavbu dolního i horního tetrachordu tvrdé stupnice.

Jestliže nyní vytvoříme novou tvrdou stupnici tak, že k hornímu tetrachordu základní stupnice C dur jako spodnímu přidáme další tetrachord se shodnou stavbou jakožto tetrachord horní, dostaneme stupnici G dur: G A H c d e fis g. Zde jsme musili nahradit f tónem *vyšším*, aby byl druhý půltón ve stupnici až na konci horního tetrachordu. Toto zvýšení se v hudbě značí *křížkem* # před notou a připojením přípony -is k původnímu jménu tónu, zde tedy *fis*, v notách s basovým klíčem (obr. 1a). Napsaná stupnice G dur má tři tóny z velké oktávy a pět tónů z oktávy malé (obr. 1b, 1c).

Tóny v hudbě užívané se řadí do osmi oktáv, nejhlubší je *subkontraoktáva* od C₂ do H₂, pak následuje *kontraoktáva* od C₁ do H₁, dále *velká oktáva* od C

¹⁾ Interval $\frac{9}{8} - \frac{10}{9} = \frac{81}{80}$ je tzv. syntonické komma.

do H, *malá oktáva* od c do h, pak *jednočárkovaná* od c_1 do h_1 , *dvoučárkovaná* c_2 až h_2 , obdobně c_3 až h_3 a c_4 až h_4 . Na klavíru je nejnižší tón A_2 , nejvyšší a_4 . Mužský hlas obsahuje především tóny malé oktávy, doplněné menší nebo větší částí velké oktávy u hlubokého hlasu (*bas*) nebo oktávy čárkované u vysokého hlasu (*tenor*). Ženský hlas zní o oktávu výše než mužský; hluboký ženský hlas je *alt*, vysoký se nazývá *soprán*.



Obr. 1

Citlivost našeho ucha je různá pro tóny různých výšek; jako dolní mez se udává frekvence 16 Hz (frekvence nižší označujeme jako *infrazvuk*), horní hranice je různá u různých lidí a mění se s věkem, nejvyšší slyšitelné frekvence se blíží mezi 20 000 Hz (frekvence vyšší označujeme jako *ultrazvuk*).

Hudební skladba může např. obsahovat jen tóny vybrané z tónů stupnice G dur (obr. 1b, c) a všech stupnic z ní vzniklých zvýšením, resp. snížením všech stupňů o jednu nebo více oktáv. Taková skladba je v *tónině* G dur, tj. má všude *fis* místo f, fis_1 místo f_1 atd. Zpravidla se tento předpis v notách vyznačí hned za tzv. *klíčem* na začátku skladby nebo na začátku části skladby; obvykle se toto tzv. *předznamenání* (v našem případě #) opakuje na začátku každého řádku této části. To znamená, že každé psané f (ve všech oktávách) se hraje či zpívá o půl tónu výše, dokud není předepsána změna u jednotlivé noty - ta pak platí pro celou následující část taktu - nebo dokud se nezmění předznamenání přechodem skladby do jiné tóniny.

Klíčů se v hudbě užívá několik. Klíč *basový* (F) (obr. 1d) stanoví, že tón daný notou na lince čtvrté zdola je malé f. Klíč *houslový* (G) (obr. 1e) stanoví, že tón daný notou na lince druhé zdola je jednou čárkované g, tedy g' , což se častěji píše g^1 nebo g_1 . Méně často se vyskytuje klíč C, užívaný v několika polohách. Zde uvedeme jen C klíč *violový* čili *altový* (obr. 1f), který stanoví, že tón daný notou na střední lince osnovy je jednou čárkované c, tedy c' (c_1).

Shoda v absolutních výškách užívaných tónů se zaručí definicí určitého tónu jako normálního. R. 1885 bylo mezinárodní dohodou stanoveno, že tón a_1 - *komorní* a - má mít frekvenci 435 Hz. Nyní platí (od r. 1953) norma, podle níž má základní ladící tón frekvenci 440 Hz. Podle tohoto normálu se ladí všechny hudební nástroje s předem připravenými výškami tónu, např. klávesové. Pro c_1 z toho dostaneme

$$f_{c_1} \cdot \frac{5}{3} = f_{a_1}, \text{ tj. } f_{c_1} = \frac{3}{5} f_{a_1} = 0,6 \cdot 440 \text{ Hz} = 264 \text{ Hz.}$$

Podle starší normy bylo $f_{c_1} = 0,6 \cdot 435 \text{ Hz} = 261 \text{ Hz}$. Někdy se ještě užívá tzv. *fyzikálního* ladění, v němž $f_{c_1} = 256 \text{ Hz} = 2^8 \text{ Hz}$; podle tohoto normálu přísluší každému tónu C v kterékoli z užívaných oktáv frekvence daná celým číslem.

Všimněme si ještě dalších běžně užívaných tvrdých stupnic. Vezmeme-li spodní tetrachord základní stupnice C dur za horní tetrachord nové stupnice a doplníme jej novým tetrachordem spodním, musíme zde upravit polohu půltónu snížením tónu H_1 na Hes_1 , což se zpravidla píše B_1 .²⁾ Tak vznikne stupnice F dur: $F_1 G_1 A_1 B_1 C D E F$. Její předznamenání je jedno b

²⁾ Původně se rozlišovalo v abecedním sledu písmen a až g dvojí b: b rotundum a $\flat$ quadratum; z tohoto se pak vytvořilo h.

(obr. 1g). Touto značkou se v notách vyjadřuje snížení o půl tónu; snížený tón dostává k základnímu jménu příponu -es, snížené e je es, snížené a je as.

Analogicky můžeme vytvořit další tvrdé stupnice s libovolným tónem počátečním. V přirozeném ladění je potřebné zvýšení nebo snížení o půltón dáno poměrem $\frac{2}{4}$. Zrušení platného zvýšení nebo snížení se v notách vyjadřuje další posuvkou $\sharp$, které se říká *odrážka*.

Užívané stupnice a jejich předznamenání si snadno zapamatujeme podle schématu zvaného *kvintový kruh* v podobě hodinového ciferníku (obr. 2).

Stupnice C dur se umístí v poloze 0. Ve smyslu oběhu hodinových ruček pak následují stupnice vždy o kvintu vyšší, tj. G dur s jedním křížkem, D dur se dvěma atd. až Fis dur se šesti křížky. Opačným směrem se umístí stupnice vždy o kvintu nižší, tedy F dur s jedním bé, B dur se dvěma atd. až Ges dur se šesti bé. Tímto způsobem se stupnice Ges dur dostane ve schématu na totéž místo jako Fis dur.

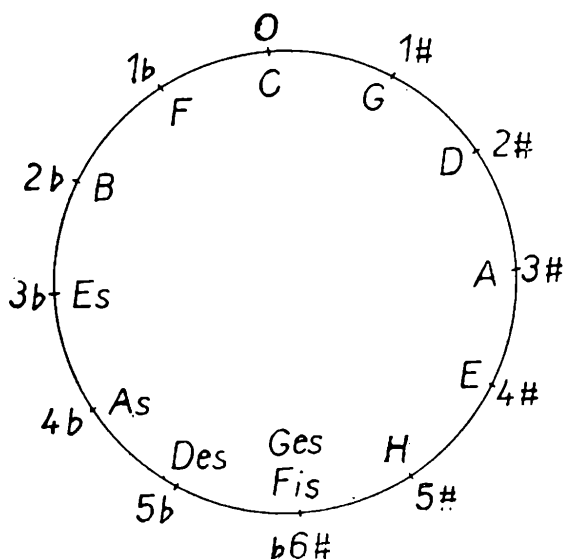
Při tvoření tónu podle sluchu (na smyčcových nástrojích a při zpěvu) se uplatňuje tzv. *přirozené* ladění, odpovídající naší základní řadě čísel, resp. relativních výšek tónu v tab. I. Hudební nástroje s tóny předem připravenými (klavír, varhany atd.) musí být laděny podle tzv. *temperovaného* ladění, při němž se stírá rozdíl mezi cis a des, dis a es atd. Mezi 8 tóny tvrdé stupnice je 7 intervalů, z toho 2 půltónové. V každém z ostatních pěti intervalů se umístí tón nový (cis=des, dis=es, fis=ges, gis=as, ais=b), takže v rozmezí oktávy je celkem 12 intervalů. V temperovaném ladění má každý z nich stejnou velikost x , takže pro oktávu platí

$$x^{12} = 2, \text{ tj. } x = \sqrt[12]{2} = 1,059\,5.$$

Výpočty se provádějí logaritmicky

$$\log x = \frac{1}{12} \log 2 = \frac{1}{12} \cdot 0,301\,03 = 0,025\,09.$$

Zavedením temperovaného ladění se mění všechny intervaly tvrdé stupnice (kromě oktávy) proti ladění přirozenému. Vypočteme kvintu. Od primy ke kvintě je 7 půltónů, proto $\log y = 7 \cdot \log x = 7 \cdot 0,025\,09 = 0,175\,63$, kdežto v ladění přirozeném je kvinta dána relativní výškou $z = 1,5$, tj. $\log z = 0,176\,09$. Znamená tedy zavedení temperovaného ladění jisté zhoršení libozvučnosti akordů. Přesto je však velmi účelné a umožňuje jednak konstrukci složitých hudebních nástrojů a usnadňuje jejich použití, jednak umožňuje mnohotvárnost harmonie při kompozici tzv. *enharmonickou záměnou*, tj. vyjádřením téhož tónu dvojím způsobem, např. cis = des apod.



Obr. 2

Kvintový kruh (obr. 2) ukazuje v temperovaném ladění správně všechny možné tóniny dur a jejich předznamenání. Shoda stupnice Ges dur o 6b se stupnicí Fis dur o 6# je prostě enharmonická záměna dvou stejně znějících, ale odlišně psaných tónů Ges a Fis. Také další myslitelné tvrdé tóniny jsou na obr. 2 již zastoupeny svou enharmonicky změněnou podobou: Cis dur se 7# není nic jiného než Des dur s 5b, stejně Ces dur se 7b spadá v jedno s H dur o 5#.

Všimněme si ještě jednou relativních výšek tónů tvrdé stupnice v tab. I. Zvýšením o oktávu, tj. násobením dvěma dostaneme z posloupnosti tam uvedené - zde ji označíme P_1 - posloupnost P_2 , z ní dalším násobením dvěma P_3 a stejně P_4 . Tak vznikne *tabulka II*.

P_1	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2 ,
P_2	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{15}{4}$	4 ,
P_3	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{20}{3}$	$\frac{15}{2}$	8 ,
$P_4 \dots$	8	9	10	$\frac{32}{3}$	12	$\frac{40}{3}$	15	16 .

Tóny vyjádřené zde celými čísly jsou tzv. *aliquotní* tóny základního tónu, ve fyzice je nazýváme *tóny harmonické*. Zaznívají zpravidla zároveň s tónem základním a dodávají mu určitou barvu různou podle toho, s jakou intenzitou je ten který harmonický tón přítomen. Barva závisí na tom, v kterém místě a jak byla struna rozechvěna (smyčcem, drnknutím, kladívkem) či jakého je píšťala typu (retná či jazýčková, kovová či dřevěná, otevřená či krytá, široká či úzká) atp. U píšťal se dá provést tzv. *přefouknutí*, takže se základní tón neozývá, silně se ozve některý z harmonických tónů.

Z tab. II s řadami P_1, P_2, P_3, P_4 se můžeme ještě dodatečně poučit o tom, proč byla zvolena právě řada čísel (2) pro vytvoření tvrdé stupnice, základního to útvaru v hudbě vyspělých národů. Vidíme, že celá čísla v tab. II se vyskytující tvoří přirozený základ pro tvorbu intervalů. S tím souvisí pocit uspokojení při současném znění některých dvojic či trojic tónů. Mluvíme o *konsonanci* (*libozvuku*).

Souzvuk oktávy s primou (2 : 1) už ani nepocítujeme jako *dvojzvuk*; současný zpěv téže melodie hlasem mužským a ženským lze považovat za *unisono*. Po oktávě nejlépe splývá v jednotný zvuk dvojzvuk kvinty s primou (3 : 2), pak kvarty s primou (4 : 3). Můžeme tak za konsonanci považovat souznění takových dvou tónů, jichž frekvence jsou v poměru malých celých čísel. Souzvuk sekundy nebo septimy považujeme za *disonanci* (*nelibozvuk*).

Zaznívají-li současně tři tóny, mluvíme o *trojzvuku*, obecně o *akordu*. Stupně I, III, V tvrdé stupnice mají frekvence v poměru 4 : 5 : 6 (srovnej P_3) a tvoří tzv. *terckvintový* akord, obvykle nazývaný jen kvintový akord resp. dur akord. S jeho vynikající konsonancí je v souhlasu skutečnost, že je dán poměrem tří nejmenších celých čísel (v rozmezí téže oktávy). Přeložíme-li kvintu o oktávu níže, dostaneme jeden z jeho převratů, tzv. *kvart-sext-akord* (3 : 4 : 5). Přeložíme-li naopak primu o oktávu výše, dostaneme jiný převrat základního dur-akordu, tzv. *sextakord* (5 : 6 : 8).

Vybudujeme-li trojzvuk na V. stupni, dostaneme $\frac{3}{2} : \frac{15}{8} : \frac{9}{4} = 4 : 5 : 6$, tedy zase dur akord, podobně na IV. stupni. Soustava trojzvuků na I., IV. a V. stupni zahrnuje v sobě všechny stupně tvrdé stupnice. Má základní význam pro *harmonii* jednoduché skladby. První stupeň se nazývá *tónika*, pátý *dominanta* a čtvrtý *subdominanta*, zkratkami T, D, S.

V hudbě se užívá běžně také tónin *měkkých* (*moll*). Proti stejnojmenným tvrdým stupnicím mají měkké stupnice tři stupně snižené o malý půltón $\frac{2}{5}$ (v přirozeném ladění): tercii, sextu a septimu, v číslech $\frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}$. Harmonie tu není již tak jednoduchá. Kvintakord moll je dán poměry $1 : \frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 10 : 12 : 15$. V melodii se tu užívá nezměněné stupnice moll zpravidla jen sestupně, při stoupání melodie se sexta a septima o půltón zvyšují. Grafické znázornění kvintovým kruhem je pro stupnice moll o to čen o 90° proti obrazu stupnic dur, takže tónina c moll má 3 ♭, tónina a moll je bez předznamenání atd. Blíže se měkkými tóninami zabývat nebudeme.

Jak tvrdá, tak měkká stupnice patří mezi stupnice *diatonické*. Od nich se odlišuje stupnice *chromatická*; postupuje kroky půltónovými.

Všimněme si ještě charakteru trojzvuků vytvořených na ostatních stupních tvrdé stupnice, různých od T, D, S. Obě části trojzvuku jsou tercie. Na II. stupni je dolní tercie malá, horní velká, je to trojzvuk moll; rovněž tak na stupni III. a VI. Trojzvuk vytvořený na VII. stupni není ani dur, ani moll, je to trojzvuk *zmenšený*, tvořený dvěma malými terciemi. Má výrazný charakter disonance s tendencí po „*usmíření*“ rozvedením do konsonantní tercie na VIII. stupni.

Z čísel v dosavadním textu uvedených by se dala odvodit ještě četná další pravidla hudební teorie, ale tím se zabývat nebudeme. Vedle zmíněných stupnic a intervalů se vyskytovaly a vyskytují u různých národů na různých stupních kulturního vývoje ještě četné jiné intervaly a stupnice, např. intervaly čtvrttónové, šestinotónové aj. Mezi českými skladateli je např. i skladatel a teoretik hudby čtvrttónové prof. Alois Hába. Pro zajímavost uvedme jen způsob konstrukce a hry na čtvrttónový klavír. Má dvě normální klaviatury nad sebou, jež jsou proti sobě laděním posunuty o čtvrt tónu tempe-

rované stupnice ($x' = \sqrt[24]{2}$). Hra je tu podstatně obtížnější než v soustavách obvyklých. Také označení jednotlivých stupňů je složité: a, vyšší a, ais, vyšší ais, h . . . , resp. a, nižší a, as, nižší as, g

■ *Poznámka.* V hudbě má velký význam i trvání daného tónu (hudební metrika). Od toho v tomto textu odhlížíme.

II. V této části studijního textu si všimneme některých vlastností hudebních nástrojů jako zdrojů zvuku. Rozdělujeme je do několika skupin. Nejdůležitější jsou nástroje strunové a nástroje dechové, méně se užívá nástrojů bicích.

Ve skupině nástrojů *strunových* jsou nástroje s m y č c o v é : housle, viola, violoncello, kontrabas, nástroje d r n k a c í : harfa, kytara, citera, mandolína atd., nástroje k l a d í v k o v é : klavír, cimbál.

Zdrojem zvuku je tu rozechvěná *struna*, tj. napjaté vlákno kovové, střevové, hedvábné apod., v četných případech vlákno opředené. Vzniklé stojaté vlnění má uzly na obou koncích struny. Vedle základního tónu se vytvářejí též tóny harmonické s frekvencemi $f_k = k \cdot f_1$, kde $k = 2, 3, 4, 5 \dots$ a f_1 je výška tónu základního, při němž se na struně vytvoří jediná půlvlna.

Při ladění nástroje se mění kolíčkem napětí struny. Pro výšku tónu základního platí vzorec

$$f = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{F}{m_1}}, \quad (5)$$

kde l je délka chvějící struny, F je síla strunu napínající a m_1 je hmotnost délkové jednotky struny. Tento vzorec lze také psát ve tvaru

$$f = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad (5')$$

kde σ je napětí struny a ρ její hustota.

A. Nástroje smyčcové

Při tahu smyčcem vznikají vlastně kmity netlumené, struně se během tahu stále dodává energie.

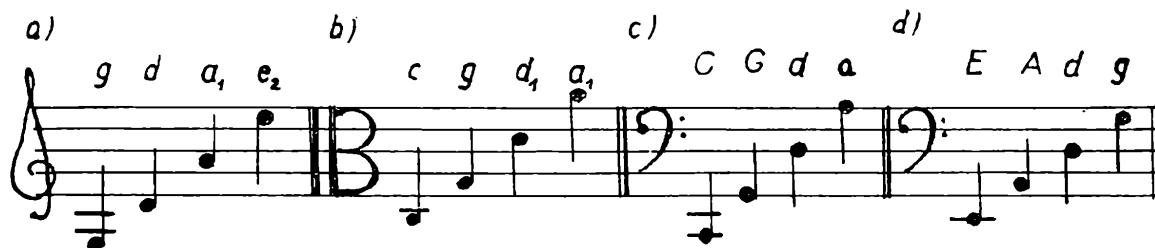
Nejznámější ze smyčcových nástrojů jsou *housle*. Mají čtyři struny napjaté nad hmatníkem přes kobylku na ozvučné skřínce. Jsou naladěny v kvintách g, d₁, a₁, e₂ (obr. 3a). Houslista hraje normálně tak, že zkracuje příslušnou strunu přitlačením některým prstem levé ruky v poloze základní (první) nebo v některé poloze vyšší, takže smyčcem rozechvívá část struny mezi prstem a kobylkou. Může však hrát i tak, že se struny na vhodném místě prstem jen

lehce dotýká, takže zní celá struna, rozdělená podle místa dotyku na 2 poloviny nebo 3 třetiny, 4 čtvrtiny atd. Ozývají se tu tedy tóny harmonické; v hudebním názvosloví se jmenují tóny *flažoletové*.

Trochu větší rozměry než housle má *viola*. S houslemi má 3 struny stejné, čtvrtá je nižší: c, g, d₁, a₁ (obr. 3b). Hra na violu je zcela obdobná hře na housle.

Violoncello (stručně: *cello*) má čtyři struny stejně laděné jako viola, avšak o oktávu níže: C, G, d, a (obr. 3c). Ozvučná skříň nástroje má už větší rozměry; hráč při hře sedí.

Kontrabas čili *basa* je největší ze smyčcových nástrojů. Basista hraje



Obr. 3

zpravidla vstojе. Čtyři struny basy jsou laděny v kvartách E₁, A₁, D, G. Noty pro kontrabas jsou psány o oktávu výše, tedy pro prázdné struny E, A, d, g (obr. 3d).

Kontrbasu se dnes hojně používá i bez smyčce. I na ostatní smyčcové nástroje se někdy část skladby hraje drnkáním - *pizzicato*.

B. Nástroje drnkací (*trsačí*)

Strunové nástroje rozechvíváné drnkáním byly známy už v nejstarších dobách historie lidstva. Dnes se užívá celé řady takových nástrojů. Uvedeme pouze typické představitele.

Harfa má buď diatonickou soustavu strun a 7 pedálů pro zvýšení tónu (*harfa pedálová*) nebo větší množství strun pevně naladěných (*harfa chromatická*). Struny se rozechvívají prsty pravé i levé ruky.

Kytara má 6 strun (E, A, d, g, h, e₁), Stiskem prstů levé ruky se struna zkrátí a dává příslušný vyšší tón. Rozechvívání se děje prsty pravé ruky. Kytary se hojně užívá k doprovodu zpěvu. Opatřena elektronickým zesilovačem má široké využití v moderních hudebních souborech.

Citera má dva druhy strun: jednak struny napjaté podél hmatníku s vestavěnými příčkami pro hraní melodie, jednak celou soustavu strun s pevnými kmitočty pro doprovod.

Mandolína má systém čtyř strun podobný jako housle, struny jsou však zdvojené; rozechvívají se tzv. *trsátkem*. Na stejném principu je založena celá skupina tzv. *tamburašských* nástrojů. Zvuk strun rozechvíváných trsátkem má ostřejší charakter pro větší zastoupení vyšších tónů harmonických.

C. Nástroje kladívkové

Sem patří především *klavír*. Má struny napjaté na litinovém rámu. Struny pro hluboké tóny jsou opředeny drátkem, aby jejich délka nepřesáhla přijatelnou mez. Rozsah je od A₂ do a₄, tedy sedm oktáv. Struny se rozechvívají *kladívky*, zpravidla dřevěnými s plstěným obalem, úderem prstů hráče do příslušných *kláves*. Rozechvěné struny se utlumí po uvolnění příslušných kláves. Systém tlumítek lze zdvihnout *pedálem*, takže pak rozechvěné struny volně doznívají. Klavír je jeden z nejdůležitějších hudebních nástrojů.

Ke kladívkovým strunovým nástrojům patří též *cimbál*. Hráč má v každé ruce jednu paličku, jejímž úderem rozechvívá tu či onu ze strun pevně nalaďených.

Dechové hudební nástroje

Podstatou dechového nástroje je píšťala retná nebo jazýčková. (Viz učebnice F 2 str. 147 a 148.)

D. Dřevěné dechové nástroje

Flétna je píšťala retná; zvuk tu vzniká v podobě tzv. *třecích tónů* tím, že hráč fouká vzduch z úst ve směru tečny k válcové trubici přes okrouhlý otvor (*ozvučný*). Resonancí vzduchového sloupce zaznívá hlasitě tón tím hlubší, čím je tento sloupec delší, tj. čím více postranních otvorů hráč svými prsty uzavře. Klapky kryjící otvory umístěné mezi otvory hlavní řady umožňují zvednutím vznik tónů o půltón vyšších. Přefukování do vyšších tónů harmonických se provádí jednak změnou způsobu foukání, jednak vhodnou kombinací odkrytých a zakrytých otvorů. Rozsah je zpravidla od c_1 do h_3 .

Poznámka: Flétna se počítá i nadále mezi tzv. „*dřeva*“, i když se nyní vyrábí většinou z kovu.

Pikola je vlastně „malá“ flétna; hraje o oktávu výše, její zvuk je nápadně pronikavý.

Zvláštním typem flétny je *flétna zobcová*. Hráč nefouká příčně přes nástroj, nýbrž ve směru délky nástroje.

Ostatní dřevěné nástroje dechové jsou svou podstatou píšťaly *j a z ý č k o v é*.

Hoboj má jako zdroj zvuku tzv. *strojek*, tvořený dvěma prohnutými plátky třtinovými. Hráč svírá strojek svými rty. Vlastní těleso píšťaly - tzv. *korpus* - je u hoboje mírně kuželovité. Je opatřen řadou otvorů a systémem klappek. Vedle základního tónu znějí u hoboje liché i sudé tóny harmonické. Přefukuje se pomocí „*oktávové*“ klapky. Rozsah hoboje je od h do f_3 .

Anglický roh je nástroj typu hoboje s rozsahem e až b_2 . Konec korpusu má hruškovitý tvar.

Fagot má dvojitý strojek jako hoboj. Má funkci basového nástroje. Aby jeho skutečná délka nepřesáhla přijatelnou mez, je korpus v polovici pomocí U-trubice obrácen do opačného směru. Rozsah B_1 až b_2 .

Do skupiny těchto dechových nástrojů patří svou povahou také *dudy*. Vlastní píšťala má zase řadu otvorů, jež dudák střídavě prsty odkrývá a zakrývá. Proud vzduchu se vhání do píšťaly z měchu. Zvláštností hry na dudy je okolnost, že proud vzduchu je nepřerušovaný. Oddělené tóny téže výšky se tvoří vkládáním tónu jiného. Hluboký stále znějící tón basové píšťaly dudy se nazývá *bručák* nebo *huk*.

Poněkud odlišnou konstrukci má *klarinet*. Má korpus válcovitého tvaru s rozšířeným koncem. Zvuk u něho vzniká chvěním jednoduchého třtinového *plátku* jako nárazného jazýčku na obdélníkovém otvoru zobcovité *hubičky*. Klarinet má tu vlastnost, že vydává jen *l i c h é* tóny harmonické. Přefouknutím (s pomocí zvláštní klapky) dostává hráč tón o duodecimu, tj. oktávu a kvintu vyšší. Rozsah e až a_3 .

Saxofon má za zdroj zvuku rovněž jednoduchý třtinový plátek jako klarinet. Kovový jeho korpus má tvar kuželovitý, takže se ozývají i sudé tóny harmonické. V moderní hudbě se ho užívá běžně v několika laděních pod názvy saxofon *sopránový*, *altový*, *tenorový*, *basový*.

Všeobecně je třeba říci, že u jazýčkových píšťal někdy převládá vliv velikosti a tvaru *j a z ý č k u* (např. u *harmoniky*) a *harmonia*, jindy vliv spřaženého *s l o u p c e v z d u c h o v é h o* (např. u *trumpet*). U dřevěných decho-

vých nástrojů zpravidla vzorec pro výšku tónu píšťaly otevřené $f = \frac{c}{2l}$, resp. kryté $f' = \frac{c}{4l}$ nevyhovuje. Číslo 2 resp. 4 je třeba nahradit čísly opravenými.

U píšťal vůbec má velký význam též tzv. *menzura*, tj. poměr délky píšťaly l k jejímu rozměru příčnému, např. průměru v případě píšťaly válcové. Zpravidla se však v hudbě mluví o menzuře „široké“, je-li např. $m = \frac{l}{d}$ rovno 9 až 14, nebo „úzké“, je-li např. $m = 25$. Při menzuře široké převládá tón základní, při úzké se více uplatňují vyšší tóny harmonické.

E. Varhany

Mnoho zajímavého by se dalo říci o tomto největším hudebním nástroji. Má větší nebo menší počet *rejstříků* (*hlasů*). Každý rejstřík je samostatná soustava píšťal určité barvy zvuku od nejnižších do nejvyšších. U většiny rejstříků se ozývají tóny té výšky, která je dána stlačenou klávesou. Pro takové je ustálené označení 8° - *rejstříky osmistopové*. Jméno to je odvozeno otevřené píšťaly pro velké C, která činila ve staré míře osm stop. Velké C je zpravidla nejhlubší tón jak tzv. *manuálu*, tj. klávesnice stejného vzhladu jako u klavíru, tak i *pedálu*, což zde znamená klávesnici, na které hraje varhaník nohama.

Rejstříky označené 4° - *rejstříky čtyřstopové* - znějí o oktávu výše než je psáno v notách, podobně rejstříky 16° znějí o oktávu níže. Vyskytují se též rejstříky dvoustopové, avšak rejstřík 32° je vzácný. Tzv. *mixtury* jsou rejstříky, které mají místo jednoduchých píšťal skupiny dvou či tří (až pěti) píšťal k sobě patřících podle přirozeného ladění (např. v kvintě). Jinak je ovšem ladění každé sady píšťal temperované.

Táž klávesa uvádí v činnost jí náležející píšťalu ve všech zapojených rejstřících příslušné klávesnice. Přenos pohybu od klávesy hracího stolu až k ventilu vpouštějícímu vzdušný proud do určené píšťaly je proveden u nejstarších strojů *mechanicky* pomocí drátů, dřevěných táhel a dalších zařízení. Pokrokem bylo zavedení traktury *pneumatické*. Moderní stroje mají zpravidla ovládání *elektromagnetické*.

Různé barvy hlasů se u varhan dosahuje druhem píšťal; jsou otevřené nebo kryté, dřevěné nebo kovové (cín), retné nebo jazýčkové, s úzkou či širokou menzurou atp. U vícemanuálových varhan lze kombinovat určitou barvu, resp. směs barev pro melodii hranou na jednom manuálu s jinou barvou (směsí) pro doprovod hranou na manuálu druhém. Basové rejstříky jsou napojeny na klávesnici pedálovou.

Varhany mívají také větší či menší počet *spojek*, tj. zařízení, která na danou klávesu napojí klávesu o oktávu (či dvě oktávy) vyšší nebo nižší, nebo zařízení, které napojí celou jednu klaviaturu (manuál I. či II. či pedál) na klaviaturu jinou.

Dynamické odstíny není u varhan možné realizovat na téže píšťale přímo regulací vzduchového proudu. U slabších rejstříků se proto někdy užívá *žaluzií*. Zpravidla se však u varhan mění intenzita zvuku skokem, zapínáním a vypínáním silnějších rejstříků. To se děje buď individuálně přímým výběrem varhaníkem nebo se užívá soustavy spojek zařazujících skupiny rejstříků v určitém sledu; celek se někdy ovládá jednoduchým pohybem, např. otáčením válce nohou.

F. Plechové (žestové) dechové nástroje

V podstatě jsou to zase píšťaly jazýčkové; zvuk tu vzniká přerušováním vzduchového proudu z plic hudebníka jeho sevřenými rty vpravenými do tzv. *nátrubku* na vstupu do nástroje. Rty tu fungují jako dvojitý blanitý (membranosní) jazýček. Výšku tónu tu určuje délka resonujícího sloupce vzduchového. Mosazný korpus nástroje má u trubek a lesních rohů tvar velmi úzkého kužele stočeného do oválu, resp. kruhu. Přefukování do vyšších tónů harmonických je tu pravidlem, základní tón nástroje se nedá vyloudit. U přirozených trubek a přirozených lesních rohů je soubor možných tónů omezen (*fanfárové trubky, polnice, signální rohy*). Chromatickou řadu tónů tu umožnilo v 19. století zavedení *ventilů*. Zpravidla má nástroj tři ventily, jimiž se prodlužuje znějící sloupec vzduchu tak, že zaznívá tón nižší o celý tón (ventil č. 1) nebo o půltón (ventil č. 2) nebo o $1\frac{1}{2}$ tónu (ventil č. 3).

Pozoun (taňový pozoun) poskytuje možnost spojitě změny délky píšťaly vytahováním U-trubice spojující dvě části nástroje. Nástroj mající místo posuvné trubice systém ventilů je *trombon*. Užívá se pozounu (trombonu) *tenorového* s rozsahem B_1 až d_2 a *basového* s rozsahem F_1 až f_1 .

V „dechovce“ se užívá celé řady plechových hudebních nástrojů od *křídlovky* až do basového *helikonu*, jehož veliký stočený korpus spočívá na rameni hráče. V symfonickém orchestru je nejhlubší žestový nástroj *tuba*.

G. Bicí hudební nástroje

U některých bicích nástrojů je zdrojem zvuku napjatá blána rozkmitávaná paličkou. U *bubnů* a *bubínků* jsou kůži potaženy obě podstavy válcové kostry. Ladění nástroje se tu během hry nemění. *Tympány* čili *kotle* mají napjatou kůži jen na horním okraji, naspodu kovové kotle je otvor pro vyrovnávání tlaku vzduchu. Tympány se během hry přeladují vhodným zařízením pro změnu napětí kožené potahu.

Jindy se využívá chvění desek. *Činely* jsou kruhové mosazné poklice, mírně vyklenuté. Rozechvívají se zpravidla vzájemnými nárazy, někdy též paličkou. *Zvony* jsou masivní prohnuté desky rozechvívávané údery kladiva (u hodin) nebo tzv. *srdcem* (u zvonů kostelních). Umění zvonářské je v tom, docílit vhodným tvarem zvonu lahodné plnosti zvuku. Obecně totiž nejsou spoluznějící vrchní tóny desek a blan příčně chvějících harmonické. Desky je možno rozechvívát též smyčcem. Varietní charakter má hra smyčcem na *kanadskou pilu*. Ohýbáním široké pily rozechvívávané smyčcem se spojitě mění výška jejího tónu. Soustava krátkých kovových destiček nahrazuje někdy v hudebních souborech malé zvony (*zvonková hra*).

Tyče, resp. trubice kovové příčně chvějící nahrazují ve velkém symfonickém orchestru *zvony*. Speciální význam má *ladička*, ohnutá ocelová tyč tvaru U s nožkou. Její vrchní tóny (jsou neharmonické) brzy po úderu paličkou zaniknou a ladička pak vydává prakticky jednoduchý tón dané frekvence. Dřevěné příčně chvějící tyče jsou podstatou *xylofonu*. *Triangl* je do trojúhelníka zahnutá příčně rozechvívávaná ocelová tyčka s vysokým cinkavým zvukem.

Užívá se ještě řady méně obvyklých hudebních nástrojů, o nichž se tu nebudeme zmiňovat. Rovněž lidský hlas a jeho orgány nebudou předmětem našich úvah v tomto studijním textu.

V moderní době je významným zdrojem zvuku též *membrána telefonu* a *ampliónu*. Může se rozechvět téměř na každý myslitelný způsob a reprodukuje s menším či větším zkreslením pomocí střídavých proudů vhodně zesílených zvuk současně snímáný mikrofonom nebo zachycený na gramofonové desce či filmovém pásu nebo pásku magnetofonovém.

Klasickým hudebním nástrojům vyvstává v moderní době jakási konkurence používáním hudebních nástrojů *elektrofonických*.

Obohacením naší hudby se stávají kombinace *elektronkových tónových generátorů*, jak je často slyšíme ve filmu, v rozhlasu nebo v televizi. Zde vůbec *s c h á z í* obvyklý zdroj zvuku (struna, jazýček apod.), příslušné frekvence vznikají přímo jako elektrické kmity, jež uvádějí po zesílení v činnost vhodné reproduktory. Dosahují se tím nové neobvyklé zvuky zajímavého zabarvení.

IX. ročník fyzikální olympiády

Příklady 1., 2., 3. byly otištěny v č. 10 tohoto časopisu,
příklady 4., 5., 6. byly otištěny v č. 1

Kategorie A

7. Dva stejné prstence z ocelolitiný střední délky $l = 40$ cm mají po $N = 200$ závitech. Jeden má vzduchovou mezeru tloušťky $d = 1,0$ mm, druhý je bez mezery. Vinutím plného prstence jde proud $I_1 = 1,0$ A. Jak velký proud musí procházet vinutím druhého prstence, aby v něm vznikla stejná magnetická indukce.

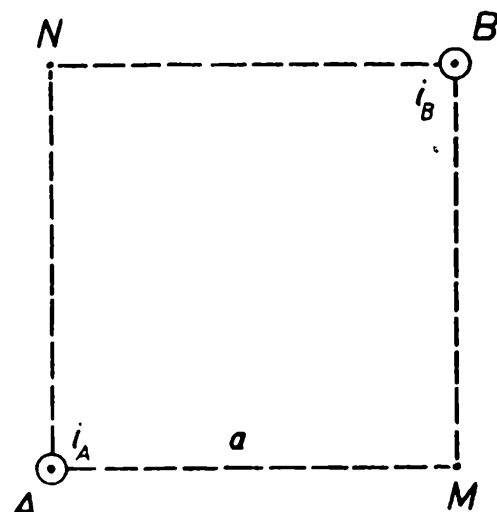
8. Je dán čtverec o straně a s vrcholy $AMBN$ (obr. 3). Vrcholy A, B procházejí kolmo k rovině čtverce velmi dlouhé přímé vodiče, kterými jdou proudy

$$i_A = I_m \cos \omega t,$$

$$i_B = I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

a) Stanovte magnetickou indukci v bodech M, N , jsou-li body A, B uprostřed přímých vodičů.

b) Jaká bude indukce v bodech M, N , jsou-li body A, B na koncích přímých vodičů. Řešte užitím točivých vektorů.



Obr. 3

9. *Meranie teplotného súčiniteľa elektrického odporu kovového vodiča.*

Pomôcky. Kúpeľ s transformátorovým olejom, plynový kahan alebo elektrický varič, izolovaný drôt navinutý na nevodivom valci (cievka), zdroj jednosmerného elektromotorického napätia (batéria), regulačný reostat, teplomer, súbor prístrojov na meranie odporu priamou alebo mostíkovou metódou.

Úvod. Elektrický odpor R_t kovového vodiča v rozmedzí stredných teplôt (napr. 0°C až 100°C) je lineárnou funkciou teploty t

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t),$$

kde R_0 je odpor tohoto vodiča pri teplote $t_0 = 0^\circ\text{C}$ a α je teplotný súčiniteľ odporu materiálu vodiča.

Z dvoch známych hodnôt odporu R_1 a R_2 daného vodiča pri teplotách t_1 a t_2 môžeme vypočítať súčiniteľ α

$$\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 t_2 - R_2 t_1}. \quad (1)$$

Grafickým obrazom funkcie $R = f(t)$ je priamka, ktorá s osou teplôt zvierá uhol φ . Smernica tejto priamky predelená odporom R_0 určuje súčiniteľ

$$\alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{R_0}. \quad (2)$$

Prevedenie. Do olejového kúpeľa ponorte cievku a pripojte ju na meracie zariadenie tak, aby ste mohli kedykoľvek odmerať jej odpor. Kúpeľ zohrievajte vhodným tepelným zdrojom a teplomerom stále kontrolujte jeho teplotu. Po zvýšení teploty kúpeľa o 4 až 5 °C odstavte tepelný zdroj a počkajte, až sa teplota kúpeľa ustáli, potom odmerajte odpor ponorenej cievky pri tejto teplote. Po ďalšom zohriatí kúpeľa meranie opakujte.

Úlohy.

a) Zvoľte si vhodnú metódu na meranie odporu, nakreslite schému zapojenia a realizujte meracie zariadenie.

b) Odmerajte odpor cievky pri 10 rozličných, postupne sa zvyšujúcich teplotách v intervale 0 °C až 100 °C. Namerané hodnoty zapíšte do vhodnej tabuľky.

c) Podľa vzťahu (1) vypočítajte súčiniteľ α z každých dvoch po sebe idúcich nameraných hodnôt odporu a zapíšte do tabuľky.

d) Najpravdepodobnejšiu hodnotu α_s určte ako aritmetický priemer hodnôt vypočítaných v c). Vypočítajte absolútnu a relatívnu chybu veličiny α_s .

e) Do grafu závislosti odporu od teploty zakreslite body odpovedajúce nameraným hodnotám a narysujte priamku, ktorá sa najviac približuje týmto bodom. Určte jej smernicu, odčítajte hodnotu R_0 a z týchto hodnôt vypočítajte súčiniteľ podľa vzťahu (2). Vysvetlite, ako ste určili smernicu priamky z grafu.

f) Porovnajte výsledky získané v d) a e) aj s ohľadom na veľkosť absolútnej chyby α_s .

Kategorie B

7. Velikost pultónu v rovnoměrně temperovaném ladění je

$$x = 1,0595 \quad (x^{12} = 2).$$

a) Určete relativní výšky velké tercie a zvětšené kvinty.

b) Přidejte ke zvětšené kvintě další interval velké tercie a stanovte jméno a frekvenci dosaženého tónu, je-li základním tónem c_1 (ve fyzikálním ladění).

c) Zmenšený čtvero-zvuk je dán třemi stejnými intervaly velikosti x^3 . Napište jména jeho čtyř tónů, je-li spodním tónem α) cis, β) d, γ) dis.

8. Do kalorimetru dáme vodu o hmotnosti m_1 a teplotě t_1 a led o hmotnosti m_2 a teplotě t_2 .

1. Které změny v kalorimetru mohou nastat a k jakému výslednému stavu látky v kalorimetru vedou?

2. $m_1 = 2,0$ kg, $t_1 = 5,0$ °C. Která změna nastane v případech:

a) $m_2 = 0,40$ kg, $t_2 = -90$ °C;

b) $m_2 = 0,20$ kg, $t_2 = -25$ °C;

c) $m_2 = 0,10$ kg, $t_2 = -10$ °C;

d) $m_2 = 4,0$ kg, $t_2 = -100$ °C.

Měrné teplo vody $c_1 = 1 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ deg}^{-1}$, ledu $c_2 = 0,5 \text{ kcal kg}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$, měrné skupenské teplo tání ledu (tuhnutí vody) $l = 80 \text{ kcal kg}^{-1}$, teplota tání ledu (tuhnutí vody) je 0°C .

V každém případě vypočítejte výslednou teplotu, hmotnost vody a hmotnost ledu při této teplotě.

Tepelné ztráty ani tepelnou kapacitu kalorimetru neuvažujte.

9. Určení závislosti periody harmonického pohybu tělesa zavěšeného na pružině na jeho hmotnosti; určení tuhosti pružiny.

1. Těleso o hmotnosti m , zavěšené na pružině, jejíž hmotnost m_0 je velmi malá vzhledem k hmotnosti m , koná harmonický pohyb; perioda tohoto pohybu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

kde k je tuhost pružiny.

Úkol. Odvoďte tento vztah. Není-li splněna podmínka $m_0 \ll m$, je perioda pohybu

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_0}{3}}{k}}.$$

Odvození viz Fyzika ve škole IV, 1966, č. 7, str. 302.

2. *Úkol.* Sestavte pokus, kterým ověříte závislost $T \propto \sqrt{m}$. Použijte postupně závaží různé hmotnosti (např. 100 g, 200 g, 300 g ... 1000 g), pokud prodloužení pružiny splňuje zákon Hookův. Změřte pokaždé dobu, např. 20 kmitů; čas začněte měřit vždy ve stejné fázi pohybu při průchodu závaží rovnovážnou polohou.

Vypočítejte periodu.

Pro každou hodnotu m vypočítejte

$$\frac{T}{\sqrt{m}}, k;$$

určete aritmetický průměr $\bar{k}$.

3. *Úkol.* Určete hmotnost pružiny m_0 zvážením; pro každou hodnotu m vypočítejte

$$m' = m + \frac{m_0}{3}.$$

4. *Úkol.* a) Narýsujte graf závislosti T na $\sqrt{m}$. Ve kterém rozsahu hodnot m lze považovat tuto závislost jako přímou úměrnost? b) Narýsujte graf závislosti T na $\sqrt{m'}$. Jak se liší od grafu a)?

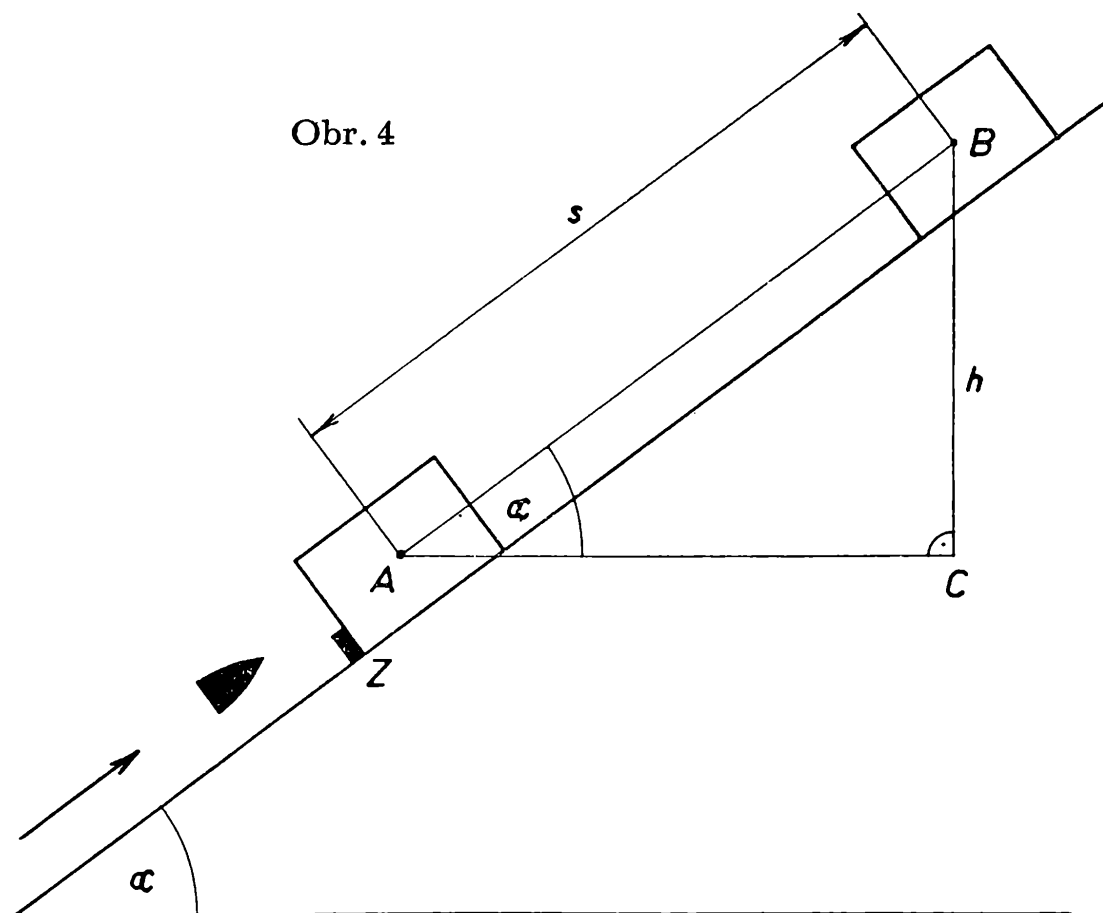
5. *Úkol.* Jak ověříte správnost hodnoty k , určené v úkolu 2, statickou metodou? Navrhněte příslušný pokus, popište postup a proveďte měření k_1 v rozsahu změn hmotnosti m v úkolu 2. Vypočítejte aritmetický průměr $\bar{k}_1$. Kterou metodou určíte tuhost pružiny přesněji? Odůvodněte odhadem relativní chyby.

7. Na naklonenej rovine, ktorá zvierá s horizontálnou rovinou uhol α , je hranol o hmotnosti m_1 a opiera sa o zarážku Z (viď obr. 4).

Hranol je zasiahnutý strelou hmotnosti m_2 , ktorá letela rýchlosťou v_2 rovnobežne s naklonenou rovinou zdola nahor, pričom uviazla v hranole.

a) Do akej výšky hranol vystúpi?

b) Akú dobu trvá, kým sa opäť vráti k zarážke?



Súčiniteľ trenia medzi hranolom a naklonenou rovinou je f . Hmotnosť hranola je podstatne väčšia ako hmotnosť strely, takže posunutie hranola počas vnikania strely je nepatrné. Trenie statické a dynamické považujeme približne za rovnaké.

8. Dva kotouče upevnéné na spoločné ose, kolmé k rovinám kotoučov konajú rovnomerný otáčivý pohyb s frekvenciou f . Vystrelíme proti nim ve smere rovnobežnom s osou rotácie. Střela proletí prvým kotoučem a než proletí vzdálenosť l medzi kotouči, otočí sa kotouče o úhel α .

Pohyb střely po dráze l je rovnomerný. Silové pôsobení rotujúceho kotouče na pronikajúcu střelu je zanedbateľné malé, neboť střela pronikne kotoučem za nepatrný zlomek sekundy. Určete rychlost střely.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $l = 2,0$ m, $f = 50$ s⁻¹, $\alpha = 45^\circ$.

9. Určenie súčiniteľa vnútorného trenia kvapaliny Stokesovou metódou.

Pomôcky. Vysoký sklený valec s kvapalinou (napríklad odmerný valec asi 50 cm vysoký, naplnený transformátorovým olejom alebo inou vhodnou

viskóznou kvapalinou), hustomer, mikrometer, stopky, váhy so závažím ocelové guľôčky o priemere 1 mm až 1,5 mm, milimetrové meradlo.

Úvod. Na guľu, ktorá sa pohybuje vo viskóznej kvapaline, pôsobí sila tieže, vztlaková sila podľa Archimedovho zákona a sila odporu prostredia vyjadrená Stokesovým vzťahom

$$F = 6\pi \eta r v,$$

kde η je súčiniteľ vnútorného trenia kvapaliny, r je polomer pohybujúcej sa guľôčky a v je jej rýchlosť. Ak necháme v kvapaline guľôčku padať dosiahne maximálnu rýchlosť $v_{\max}$, keď sú všetky tieto tri sily pôsobiace na guľôčku v rovnováhe. Guľôčka sa ďalej pohybuje rovnomerným pohybom touto maximálnou rýchlosťou.

Úlohy.

1. Z podmienky rovnováhy síl odvodte vzťah pre výpočet súčiniteľa vnútorného trenia pomocou známej rýchlosti $v_{\max}$.

2. Prevedte merania:

a) Určte hmotnosť jednej guľôčky odvážením určitého počtu guľôčiek. Opakujte váženie aspoň päťkrát, vždy s iným počtom guľôčiek.

b) Odmerajte priemer guľôčky (mikrometrom). Opakujte meranie aspoň päťkrát.

c) Odmerajte hustotu kvapaliny (meranie opakujte aspoň päťkrát).

d) Ohraničte na valci s kvapalinou značkami určitú dráhu s , začiatok ktorej je aspoň 10 cm pod povrchom kvapaliny.

Odmerajte dĺžku dráhy s (meranie opakujte aspoň päťkrát).

e) Vpusťte guľôčku do kvapaliny a odmerajte čas, za ktorý guľôčka prejde dráhu s (meranie opakujte aspoň päťkrát). Zapište namerané hodnoty do tabuľky, vypočítajte aritmetické priemery z opakovaných meraní a ich absolútne a relatívne chyby. Z meraní d) a e) určte $v_{\max}$ za predpokladu, že pohyb guľôčky je na celej dráhe s rovnomerný.

3. Vypočítajte súčiniteľ vnútorného trenia kvapaliny.

Uvážte, ktorá z nameraných hodnôt ovplyvní najviac presnosť vypočítanej hodnoty.

ÚVFO

RÚZNÉ • různé • RÚZNÉ • různé • RÚZNÉ

Marie Curie-Sklodovská

(1867—1967)

JARMILA KUPKOVÁ, SEŠ Gottwaldov

Již sto let uplynulo od narození geniální ženy, nositelky Nobelovy ceny a mnoha jiných vyznamenání, členky mnoha vědeckých společností, první ženy, kterou Sorbonna zařadila mezi své profesory - Marie Curie-Sklodovské.

Narodila se 7. listopadu 1867 v rodině polského středoškolského profesora Wladysława Sklodowského. Ač nejmladší, začala chodit do školy

zároveň se svou o dva roky starší sestrou Helenou, poněvadž se již ve čtyřech letech sama naučila číst. Ve třídě pak ve škole je stále nejlepší žačkou, přestože je zde také samozřejmě nejmladší. Má úžasnou paměť, lehce se učí, nic nezapomíná. Má vzácný zvláštní dar - soustředit se tak, že nic kolem nevnímá. Při svém nadání a touze dovědět se z knih a od svých učitelů co nejvíc, zůstává obyčejným veselým dítětem. Prázdniny prožívá bez myšlenek na školu, dovádí, vesele skotačí na venkově u příbuzných. Ve Varšavě již tak veselo není. Všechny děti vědí, že maminka je velmi vážně nemocná a že ani jejich hluboká láska a vroucí modlitby neodvrátí od ní smrt. A Máňa (jak Marii doma říkají) to ví také. Navíc je v rodině profesora Sklodowského často citelně znát nedostatek peněz a nad tím vším visí hrozivé strašidlo ruského cara a jeho slídilů.

Se zlatým vyznamenáním končí svá středoškolská studia 12. června 1883 na státním gymnasiu ve Varšavě. Je to už třetí zlatá medaile udělená čtyřem Sklodowským. Jediný však Josef může jít studovat dále na universitu. Obě sestry - Marie a Brona proklínají rád Varšavské university, kde nesmějí studovat ženy. Obě sní o pařížské Sorbonně, která dává vzdělání i ženám. Ale jak překlenout ty tisíce kilometrů, z čeho vydržet pět i více roků studia. Těch několik rublů za kondice stačí právě na jídlo a nutné oblečení. Nakonec našla východisko nejmladší Marie. Rozhodla se přijmout místo domácí učitelky s platem 400 rublů ročně, ze kterých miní podporovat Bronu v Paříži. Až tato dostuduje, pomůže zase jí.

Rok za rokem utíká. Marie už třetí rok učí na venkovském sídle daleko od Varšavy. Brona se v Paříži zatím vdala a jednoho dne dostává Marie od ní dopis: „Nastřádáš-li za tento rok pár set rublů, můžeš příštího roku přijet do Paříže a bydlet u nás, kde najdeš byt a stravu. Jen si musíš přivést těch pár set rublů na zápis na Sorbonnu.“ Marie však už nechce odjet, a proto odepisuje: „. . . Snila jsem o Paříži jako o své spáse, ale už dávno jsem ztratila naději. A teď, když se mi ta možnost nabízí, nevím co dělat . . . Bojím se promluvit o studiích s otcem, myslím, že už mu přirostl k srdci náš plán na společné bydlení, že se ho nebude chtít vzdát. Ráda bych mu trochu zpříjemnila stáří. Na druhé straně mi puká srdce pomyslením nad promarněnými schopnostmi. Snad bych přece jen něco dokázala.“ Marie je rozpolcena; jet či nejet. Láká ji svět zkumavek a přístrojů a nakonec zvítězí. A tak na podzim roku 1891 nasedá do vlaku, netuší, že ji odváží navždy.

První měsíce v Paříži Marie nevychází z okouzlení nad volným svobodným životem. Každý může mluvit rodnou řečí, všude se prodávají knihy ze všech zemí a na universitě se přednáší všem dychtivým mladým lidem. Z počátku bydlí u Broni, ale brzy se jí zdá, že promarní příliš času cestou přes celé město a rozhovory se sestrou a švagrem. A tak se z pohostinného bytu odstěhuje do chudičkého podkroví blízko university, odkud může chodit pěšky - ušetří a získá čas. Téměř nejí, nespí, aby dohonila, co jiní studenti získali v řádných školách. Chodí na přednášky

matematiky, fyziky a chemie. Její ocelová vůle a tvrdohlavost ji stále nutí vpřed. Při diplomových zkouškách z fyziky v roce 1893 je první. Marie je naprosto v zajetí vědy, nevnímá hlad, zimu, celou svou bídu. Je šťastná, že se může vzdělávat. Chce rychle dostudovat a vrátit se do Varšavy. Z programu svého života vyloučila naprosto lásku a sňatek, a přesto se jí tyto postavy nesmlouvavě do cesty.

Na začátku roku 1894 poznává francouzského vědce Pierre Curieho. Pierre je hned napoprvé zcela zaujat inteligentní hezkou Polkou. Obdivuje se jejím správným vědeckým názorům a brzy po prvním setkání ji sám vyhledává. Vzájemnou úctou, obdivem a důvěrou sílí jejich přátelství. Vědce vábí k Marii láska a vysoká úcta zároveň. Marie však tvrději odmítá jeho nabídnutí k sňatku. Vdát se za Francouze, nevrátit se do vlasti, to považuje za zradu. Pierre Curie je však stejně tvrdohlavý. Nevzdává se, hledá všechny možné cesty k Marii, dokonce se rozhoduje odjet s ní do Polska. To však Marie také nemůže přijmout a nakonec se rozhodne mezi rodinou, vlastí a Pierrem - zůstává s Pierrem v Paříži. A tak 26. července 1895 se stává paní Curieovou.

Marie by potřebovala, aby den měl dvakrát tolik hodin, neboť nestačí jí na vše - laboratoř, domácnost, dítě. Píše a v roce 1897 vydává svou první práci; při tom skládá zkoušky, aby získala učitelský diplom. A další plány má před sebou - doktorát. Námět si vybrala opravdu nový, Becquerelovy paprsky a jejich tajemné záření. Když dochází k výsledku, že uvnitř zkoumaného smolince musí být mimo uran ještě jiný neznámý prvek, rozhoduje se i Pierre přerušit svou práci v krystalografii a připojit se k jejímu úsilí. Bez laboratoře, s nevyhovujícími přístroji hledají dva mozky a čtyři ruce neznámý prvek. A objeví nakonec dva. Roku 1898 polonium a rok nato radium. Nelidská dřina, kterou vyvíjejí při získávání čistého radia zanechává hluboké stopy na zdraví obou. Ocenění přichází zase z ciziny. Konečně po pětileté dřině, během které vydali Curieovi dvaatřicet vědeckých prací, skládá Marie doktorát a opět jako všechny své zkoušky s vyznamenáním. Svět se začíná zajímat o Curieovy - Anglie a Amerika je zve na přednášky, Ženeva nabízí Pierrovi místo na universitě, nejvyšší vyznamenání přichází ze Švédska. Roku 1903 jim švédská Akademie věd uděluje Nobelovu cenu. Pierre a Marie podávají nezištně zprávy o svém objevu všem, kdo o ně požádají, nedají si nic patentovat a dále žijí v prostých poměrech. Slávě utíkají, neúčastní se oslav a recepcí konaných na jejich počest. Marie dál nosí své staré obnošené šaty, doma zašívá na své dvě dcery - Irenu a Evu. V laboratoři a ve své malé vilce je šťastna, ostatní svět ji nezajímá.

Konečně i Francie přichází s uznáním: Pierre je jmenován profesorem na Sorbonně, ale s ubohou nevyhovující laboratoří! Nikdy se už nedočkal pořádné laboratoře. Strašlivá katastrofa 19. dubna 1906 přetrhla navždy jeho vědeckou práci. Jeho geniální mozek se rozstříkl do beztvaré hmoty pod koly těžkého dostavníku. Svůj strašný žal nedovede Marie Curieová

s nikým sdílet, je jako bez duše, bez citu, jako kámen. Chtěla by také zemřít, ale ví, že se musí starat o děti, cítí, že musí pokračovat v načatém výzkumu. Proto také přijímá, když ji Sorbonna nabídne místo po Pierrovi.

I když již Marie netrpí nouzí, nikdy nedovolí svým dcerám přepych. Vychovává je v prostotě, otužuje je sportem, vzděláním. Přebytky peníze rozdává vždy potřebnějším, nebo věnuje výzkumu. Chce, aby si dcery musely později samy vydělávat na živobytí.

Proslulost paní Curieové se šíří jako požár. Vedle obdivovatelů a ctitelů jejího génia se objevují ve Francii i závistiví pomlouvači, kteří rozpoutávají proti ní špinavou bitvu. A v té těžké době, jako výsměch Francii, přichází velké ocenění z ciziny. Stockholmská Akademie ji znovu vyznamenává Nobelovou cenou. Marie Curie se tak stává prvním dvojnásobnou nositelkou tohoto vysokého vyznamenání. Její zdraví je však podlomeno a velmi vážně onemocní. Ale za necelý rok se znovu objevuje na svém místě. Vrtkavá Francie ji zas již přijímá s poctami. V nové ulici Pierre Curieho se pro ni staví radiologický ústav. Slavnostní otevření ústavu oddálí však válka. Marie Curie zůstává v Paříži rozhodnuta pracovat i nyní. Vybudovává spoustu rentgenologických stanic a sama zajíždí s pojezdným rentgenologickým vozem přímo na frontu. Ani svým dcerám nebrání pomáhat. Neschovává je do krytů, neboť je vždy učila nebát se.

Mír přivítala pilnou prací v laboratoři. Po boku jí již pracovala jedenadvacetiletá Irena, která si zvolila cestu svých rodičů; chtěla studovat fyziku. Z matky a dcer se stávají přítelkyně. Společně prožívají nádherné prázdniny v Larcouestu, kde denně pořádají závody v plavání. A dvaapadesátiletá Marie se drží statečně, koupací čepice zakrývá její šediny a štíhlé pružné tělo, udržované sportem, neprozrazuje nic o jejím věku.

Prostá, vždy se obávající oslav, přece jen jim neujde. Je pozvána do Ameriky. Poněvadž jí americký prezident má předat gram radia, dar amerických žen, které chtějí splnit její jediné přání, pozvání přijímá, i když se bojí oslav lačné Ameriky. A skutečně Amerika ji přivítá velkolepě. Avšak veškeré ovace, návštěvy, recepce křehkou paní Curieovou tak unaví, že musí přerušit další cestu a po krátkém zotavení se vrací do Francie. Unavena, ale vcelku spokojena, jen s hořkostí v srdci při vzpomínce kolik amerických nemocnic je vybaveno pro léčení curieterapií. Ve Francii zatím ani jedna. A rozhoduje se vystoupit ze své samoty a využít své pověsti, svého jména. V Americe poznala, že svět se zajímá o věci. Navštěvuje různé kongresy po celém světě, vymáhá nadace, vše pro obohacení vědeckých institucí. Sama pro sebe si vždy odnáší jen krásy krajiny, uspokojuje svou věčnou dychtivou lásku k přírodě.

Léta usilovné práce paní Curieovou zmáhají, i když si to nechce přiznat a stále pracuje dvanáct, čtrnáct hodin denně, a to přes den v laboratoři nebo v Akademii, doma ještě dlouho do noci. Práce ji zmáhá čím dále tím

více a oči se zamžívají zrádným šedým zákalem. V červenci 1923 podstupuje operaci, ale uzdravení se protahuje, druží se komplikace. Ani další dvě operace neuspěly. Teprve poslední roku 1930 překonala zákal, ale oči již nejsou schopny akomodace. To však Marii stačí, naučí se používat svých očí, jen když je temnota pryč.

Ještě čtyři roky pracuje ve svých laboratořích a i když sama říká: „Je zřejmé, že už mnoho let žít nebudu,“ odmítá ve skutečnosti každou myšlenku na smrt. Záhadná nerozlišitelná nemoc ji přes její vůli odloučí od práce a upoutá na lůžko. Nejlepší lékaři Francie i cizí ji léčí, ale život nesmlouvavě prchá z unaveného organismu. Dne 4. července 1934 v sanatoriu v Sankallemonzu se její šlechetné srdce zastavilo, ne bez boje a zápasu.

Lékaři přec jen určili původce záhadné nemoci paní Curieové, který nedovolil reagovat jejich injekcím a lékům, který nad ní zvítězil. Radium! To radium, které sama v roce 1898 objevila a s nímž téměř třicet pět let pracovala.

IX. Mezinárodní matematická olympiáda

VLASTIMIL MACHÁČEK, Praha

Letošní Mezinárodní matematická olympiáda se konala od 3. do 12. července 1967 v Jugoslávii blízko pobřeží Jaderského moře v černo-horském městě Cetinji. Soutěže se zúčastnilo devět zemí socialistického tábora (*Bulharsko, Československo, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, Německá demokratická republika, Polsko, Rumunsko a Sovětský svaz*) a letos poprvé ve větší míře západní státy: *Anglie, Francie, Itálie a Švédsko*.

Jugoslávský svazový sekretariát pro vzdělání a kulturu pověřil pořádáním olympiády jugoslávskou matematickou společností (Savez društava matematicara, fizičara i astronoma Jugoslavije). Předsedou této společnosti je *akademik Danilo Blanuša*, generálním sekretářem *dr. Vojin Dajović*, profesor bělehradské university. Předsedkyní mezinárodní komise byla *dr. Milica Ilić Dajović*, která rovněž působí v Bělehradě jako profesorka university. IX. MMO se konala pod protektorem presidenta federace J. B. Tita a za spolupráce ministerstva školství černo-horské republiky. Soutěž byla vhodně umístěna do klidného prostředí v Cetinji, obklopené krásnou černo-horskou krajinou.

Vedoucím čs. delegace byl opět předseda ÚVMO *doc. Jan Vyšín*. Jeho zástupcem byl člen ÚVMO *dr. František Zítek*. Družstvo tvořili tito žáci (uvedeme je v pořadí, které měli při soutěži): 1. *Petr Kůrka*, 3. r. SVVŠ W. Piecka, Praha, 2. *Pavel Polcar*, 2. r. SVVŠ Velké Meziříčí, 3. *Bohuš Sivák*, 1. r. SVŠ Zvolen, 4. *Tomáš Mašek*, 1. roč. SVVŠ W. Piecka, Praha, 5. *Erich Wiszt*, 3. r. SVŠ Banská Bystrica, 6. *Martin Macháček*, 3. r. SVŠ Novohradská Bratislava, 7. *Jan Kastl*, 3. r. SVVŠ J. Fučíka, Plzeň, 8. *Radovan Gregor*, 3. r. SVVŠ W. Piecka, Praha.

Vlastní soutěž se konala ve dnech 5. a 6. července 1967. Uvedeme nyní texty úloh, zemí, která úlohu navrhla a nejvyšší počet bodů, jímž mohlo být řešení úlohy oceněno.

1. den

1. Budiž $ABCD$ rovnoběžník, jehož strany AB , AD mají po řadě délky a , 1 a jehož úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost α . Trojúhelník ABD nechť je ostroúhlý. Pak jednotkové kruhy se středy A , B , C , D , pokrývají¹⁾ rovnoběžník $ABCD$ právě tehdy, když platí

$$a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \cdot \sin \alpha.$$

Dokažte!

(Polsko, 6 b.)

2. Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než $\frac{1}{8}$, pak je jeho objem menší nebo roven $\frac{1}{8}$. Dokažte!

(Československo, 7 b.)

3. Budte k , m , n přirozená čísla taková, že $m + k + 1$ je prvočíslo větší než $n + 1$. Budiž $c_s = s(s + 1)$. Pak součin

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k) \quad (c_{m+n} - c_k)$$

je dělitelný součinem $c_1 c_2 \dots c_n$. Dokažte!

(Anglie, 8 b.)

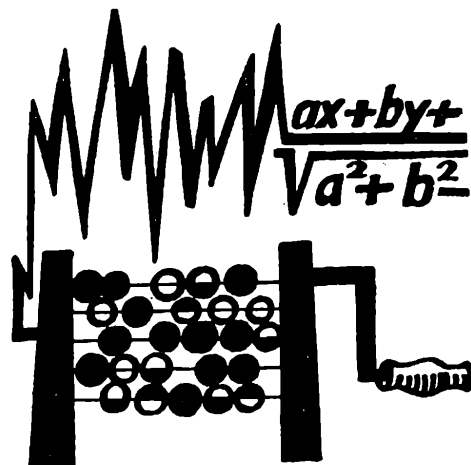
2. den

4. Jsou dány dva ostroúhlé trojúhelníky $A_0 B_0 C_0$ a $A_1 B_1 C_1$. Sestrojte některý z trojúhelníků ABC , podobných trojúhelníku $A_1 B_1 C_1$ (tak, že vrcholům A_1 , B_1 , C_1 odpovídají po řadě vrcholy A , B , C) a opsaných trojúhelníku $A_0 B_0 C_0$ tak, že strany AB , BC , CA procházejí po řadě body C_0 , A_0 , B_0 . Ze všech takových trojúhelníků ABC určete pak trojúhelník maximálního obsahu a sestrojte jej.

(Itálie, 6 b.)

¹⁾ To znamená, že každý bod rovnoběžníka náleží aspoň jednomu z těchto kruhů.

(Pokračování)



K logice (Pokračování)

IVO ZAPLETAL, výzkumný ústav 401, Praha

3. Negace výroku a výroková spojení

Mějme výroky

Antonín má 13. června svátek (1)

$5 < 3$ (2)

a výroky

Není pravda, že Antonín má 13. června svátek . (3)

Není pravda, že $5 < 3$. (4)

O výroku (3) říkáme, že je negací výroku (1), výrok (4) je obdobně negací výroku (2).

Negace jistého výroku je tedy výrok, který dostaneme pomocí úslví „není pravda, že ...“, kde do prázdného místa napíšeme daný výrok.

Všimněme si nyní pravdivostní hodnoty výroku a jeho negace.

Platí: Negací pravdivého výroku dostaneme výrok nepravdivý a negací nepravdivého výroku dostaneme výrok pravdivý. Srovnej (1), (3) a (2), (4).

Závislost pravdivostních hodnot zapíšeme do tzv. tabulky (matice) pravdivostních hodnot (tab. 1).

Poznámka 1. Místo „není pravda, že“ píšeme symbol „ $\sim$ “ a čteme „negace“.

Tab. 1

p	$\sim p$
1	0
0	1

Čteme:

Pro $p = 1$ je $\sim p = 0$,
pro $p = 0$ je $\sim p = 1$

a naopak.

Výroky (3), (4) lze psát také takto

Antonín nemá 13. června svátek . (a)

5 není menší než 3 . (b)

Čili negace výroku lze také tvořit pomocí částice *ne*.

Všimněme si výroku (b); lze totiž napsat také symbolicky

$$5 \geq 3 ,$$

i když svádí psát jen $5 > 3$.

Provedeme-li negaci výroků (a) a (b), dostaneme výroky, které budou mít stejnou pravdivostní hodnotu jako výroky původní (1) a (2) (tab. 2).

Obecně

Tab. 2

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
1	0	1
0	1	0

Výroky mezi sebou spojujeme pomocí výrokových spojek „a“, „nebo“, „anebo“, „jestliže — pak —“, „tehdy a jen tehdy, když“. Vznikají výroky, jejichž pravdivostní hodnota je závislá na pravdivostní hodnotě dílčích výroků a na použité spojce.

Jestliže dva výroky spojíme pomocí „a“, dostaneme výrok, kterému budeme říkat *konjunkce výroků*.

Např. z výroků

Dnes půjdu na koncert . (c₁)

Zítra se budu učit . (c₂)

Dostaneme výrok

Dnes půjdu na koncert a zítra se budu učit . (c)

Tento výrok bude pravdivý jen v tom případě, jestliže oba sliby splním (dnes půjdu na koncert a také se budu zítra učit).

Platí: Konjunkce dvou výroků je pravdivá, jestliže jsou pravdivé oba výroky a naopak oba výroky jsou pravdivé, jestliže je pravdivá jejich konjunkce. V ostatních případech je konjunkce těchto výroků nepravdivá.

Je zřejmé, že zde mohou nastat (mimo případ, že jsou oba výroky pravdivé) právě tyto případy

První výrok pravdivý, druhý nepravdivý,
první výrok nepravdivý, druhý pravdivý,
oba výroky nepravdivé.

Ve všech těchto případech je konjunkce výroků nepravdivá.

Poznámka 2. Místo „a“ píšeme symbolicky „ $\wedge$ “.

Uvedené závěry shrneme do tabulky pravdivostních hodnot (tab. 3).

Tab. 3

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Čteme:

Pro $p = 1, q = 1$

je (konjunkce)

$p \wedge q = 1$, pro $p = 1, q = 0$

je (konjunkce)

$p \wedge q = 0$ atd.

Jestliže dva výroky spojíme pomocí „nebo“, dostaneme výrok, kterému budeme říkat *disjunkce výroků*.

Např. z výroků (c_1) a (c_2) obdržíme výrok

Dnes půjdu na koncert nebo zítra se budu učit. (d)

Tento výrok je pravdivý, jestliže splníme jeden z těch slibů, ale také, jestliže splním oba sliby, nepravdivý, jestliže nesplním žádný z nich.

Poznámka 3. Místo „nebo“ píšeme symbolicky „ $\vee$ “.

Tab. 4

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Platí: Disjunkce dvou výroků je nepravdivá, jestliže jsou nepravdivé oba výroky a naopak oba výroky jsou nepravdivé, jestliže je nepravdivá jejich disjunkce. V ostatních případech je disjunkce těchto výroků (tab. 4).

Spojíme-li dva výroky pomocí „anebo“, obdržíme výrok, kterému budeme říkat *alternativa (neekvivalence) výroků*.

Např. z výroků (c_1) a (c_2) dostaneme výrok

Dnes půjdu na koncert anebo zítra se budu učit . (a)

Výrok (a) je pravdivý, jestliže splníme jediný z obou slibů, jindy je nepravdivý.

Poznámka 4. Místo „anebo“ píšeme symbolicky „ $\underline{\vee}$ “ (někdy také „ $\neq$ “).

Tab. 5

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Platí: Alternativa dvou výroků je nepravdivá, jestliže oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu a naopak oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu, jestliže je alternativa nepravdivá. V ostatních případech je alternativa výroků pravdivá (tab. 5).

Spojením dvou výroků pomocí „jestliže — pak —“ obdržíme, výrok kterému říkáme *implikace výroků*.

Např. z výroků (c_1) a (c_2) dostaneme výrok

Jestliže dnes půjdu na koncert, pak zítra se budu učit . (b)

Výrok (b) bude nepravdivý pouze v případě, že dnes půjdu na koncert, ale zítra slib o učení nesplním, jindy je pravdivý.

Poznámka 5. Místo „jestliže — pak —“ píšeme mezi oba výroky symbol „ $\rightarrow$ “ a čteme „implikuje“

Tab. 6

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Platí: Implikace dvou výroků je nepravdivá, jestliže první výrok je pravdivý a současně druhý nepravdivý a naopak první výrok je pravdivý a druhý nepravdivý, jestliže je nepravdivá implikace. V ostatních případech je implikace výroků pravdivá (tab. 6).

Spojíme-li dva výroky pomocí „tehdy a jen tehdy, když“ („právě tehdy, když“), dostaneme výrok, kterému říkáme *ekvivalence výroků*.

Např. z výroků (c_1) a (c_2) dostaneme výrok
Dnes půjdu na koncert tehdy a jen tehdy, když zítra se budu učit. (e)

Výrok (e) bude pravdivý pouze v tom případě, když splníme, resp. nesplníme oba sliby současně, jindy bude nepravdivý.

Poznámka 6. Místo „tehdy a jen tehdy“ píšeme „ $\leftrightarrow$ “, někdy „ $\equiv$ “ a čteme „je ekvivalentní“

Platí: Ekvivalence dvou výroků je pravdivá, jestliže oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu a naopak oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu, jestliže je pravdivá ekvivalence. V ostatních případech je ekvivalence nepravdivá (tab. 7).

Tab. 7

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Shrneme-li pak výroky (c), (d), (a), (b), (e), můžeme je po řadě napsat (pomineme-li závorky) pomocí c_1 , c_2 takto

- (c) $c_1 \wedge c_2$ (c_1 a c_2),
- (d) $c_1 \vee c_2$ (c_1 nebo c_2),
- (a) $c_1 \supset c_2$ (c_1 anebo c_2),
- (b) $c_1 \rightarrow c_2$ (c_1 implikuje c_2),
- (e) $c_1 \leftrightarrow c_2$ (c_1 je ekvivalentní c_2).

Výrok $\sim c_1$ by byl výrok

Není pravda, že dnes půjdu na koncert

Resp.

Dnes nepůjdu na koncert.

Rozdíl mezi výrazem „ $c_1 \wedge c_2$ “ a výrazem „ $p \wedge q$ “ je ten, že první z nich je výrok, konjunkce, druhý pak má tvar (formu) konjunkce (obsahuje výrokové proměnné). Obvykle se však konjunkce říká i této formě (formuli), která konjunkci jen zastupuje (reprezentuje).

Dosud jsme spojovali pouze dva výroky, ale je možné i spojení více výroků, dostáváme pak výrazy např. tohoto tvaru

$$\begin{aligned} &(p \rightarrow q) \vee r, \\ &(p \rightarrow q) \rightarrow p, \\ &[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \wedge q), \end{aligned}$$

$$(\sim r \vee s) \wedge q ,$$

$$t \leftrightarrow (p \supseteq q)$$

atd.

Nyní je čtenář schopen provést si samostatně příklady. Velmi důležité je pak používání závorek; je rozdíl mezi výrazem

$$(p \leftrightarrow q) \vee r \quad (3)$$

a výrazem

$$p \leftrightarrow (q \vee r) . \quad (4)$$

Proveďme si nyní tzv. „pravdivostní ohodnocení“, je to uspořádání n -tice nul a jedniček (dále „p. o.“) formulí (3) a (4).

Mezi pravdivostí tří výroků může být 2^3 možností. Jelikož umíme provést p. o. implikace a disjunkce, provedeme je v pořadí určeném závorkami (tab. 8).

Tab. 8

p	q	r	(1') $p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \vee r$ (1') $\vee r$	(2') $q \vee r$	$p \leftrightarrow (q \vee r)$ $p \leftrightarrow$ (2')
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1

Tab. 8 ukazuje, že formule mají pro jistá udělení hodnot jejím proměnným různé hodnoty. Například pro $p = 0$, $q = 1$, $r = 1$ má formule (3) hodnotu 1 a formule (4) hodnotu 0 (viz 5. řádek tab. 8). Pravdivostní ohodnocení (p. o.) formulí (3) a (4) je (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1) a (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1).

Jestliže dvě formule mají stejná pravdivostní ohodnocení, nazýváme je ekvivalentními formulemi a naopak, jestliže jsou formule valentní pak, mají stejné pravdivostní hodnoty pro všechna udělení hodnot jejím proměnným.

Např.

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

a

$$p \leftrightarrow q$$

Sestavme si tabulku pravdivostních hodnot pro tyto formule

Tab. 9

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Z tab. 9 je vidět, že obě formule jsou ekvivalentní, p. o. mají stejné (1, 0, 0, 1). Formule, které nabývají pro všechna udělení hodnot svým proměnným pravdivostní hodnotu pravda (nepravda), se nazývají tautologie (kontradikce).

Tautologiemi, neboli zákony výrokového počtu, se budeme zabývat v dalším článku.

O p r a v a. Na str. 64 v minulém čísle 15. řádka shora místo „podtrhnutím“ budiž „kurzivou“.

Metrické prostory *(Dokončení)*

FRANTIŠEK KUŘINA, PF, Hradec Králové

Model $\mathbf{M}_3$. Je dána rovina π s kartézským systémem souřadnic a funkce μ_3

$$\mu_3(A, B) = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|), \quad (9)$$

kde $A \equiv (x_1; y_1)$, $B \equiv (x_2; y_2)$.¹⁾ Dokažme, že μ_3 je vzdáleností na množině π .

Vlastnosti I—III jsou opět bezprostředně patrné. Nerovnost IV nabývá pro body $A, B, C \equiv (x_3; y_3)$ tvar

$$\begin{aligned} \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) + \max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|) &\geq \\ &\geq \max(|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|). \end{aligned} \quad (10)$$

Rozlišením podle vzájemné velikosti čísel $|x_i - y_j|$, $|y_k - y_l|$ v závorkách nerovnosti (10) nabývá tato nerovnost osmi různých tvarů. Např. platí-li nerovnosti

$$|x_2 - x_1| \geq |y_2 - y_1|, |x_2 - x_3| \geq |y_2 - y_1|, |x_3 - x_1| \leq |y_3 - y_1|, \quad (11)$$

¹⁾ Symbol $\max(a, b)$ znamená číslo a , je-li $a \geq b$, číslo b , je-li $b > a$.

je $\max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|) = |x_2 - x_1|$, $\max(|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|) = |x_2 - x_3|$, $\max(|x_3 - x_1|, |y_3 - y_1|) = |y_3 - y_1|$ a nerovnost (10) má tvar

$$|x_2 - x_1| + |x_2 - x_3| \geq |y_3 - y_1| \quad (10)'$$

Sečtením prvních dvou z nerovností (11) a úpravou podle (9) je správnost nerovnosti (10) dokázána.

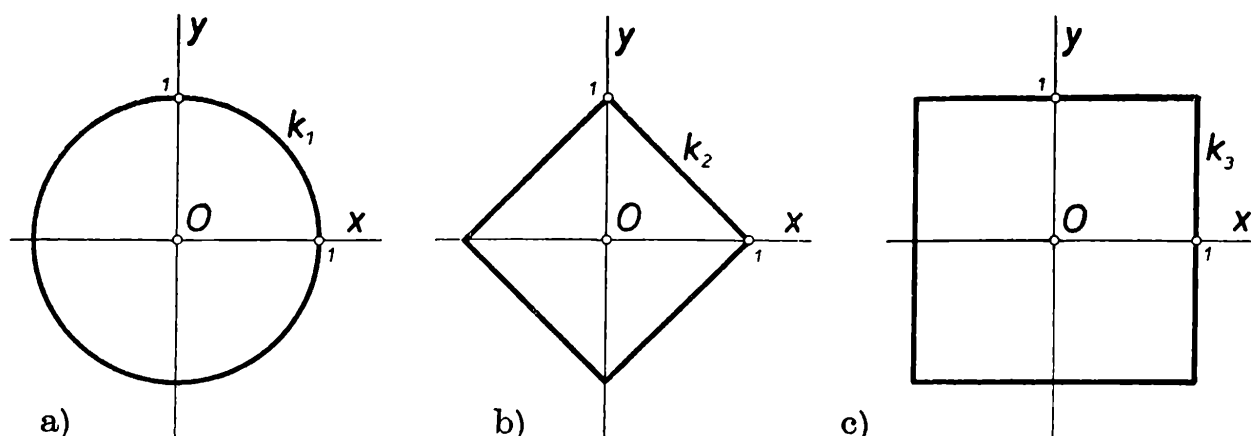
Analogicky lze postupovat ve zbývajících sedmi případech.

Funkce μ_3 je tedy vzdáleností a $\mathbf{M}_3 \equiv (\pi; \mu_3)$ je modelem metrického prostoru.

Na modelech $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ jsme sledovali tři různé způsoby definice vzdálenosti na téže množině π . Je otázka, jak budou vypadat v různých metrických prostorech pojmy, které jsou založeny na pojmu vzdálenosti. Jedním z nich je pojem kružnice. Upřesněme nejdříve známou definici.

V metrickém prostoru $\mathbf{M}_i \equiv (M_i; \mu_i)$ je dán bod O množiny M_i a kladné číslo r . Kružnicí k_i metrického prostoru $\mathbf{M}_i$ o středu O a poloměru r rozumíme množinu všech bodů X množiny M_i , pro které platí $\mu_i(O; X) = r$.

Příklad. V rovině π je dán kartézský systém souřadnic s počátkem O . Sestrojte kružnici o středu O a poloměru 1 v metrických prostorech $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$.



Obr. 4

V metrickém prostoru $\mathbf{M}_1$ dostáváme kružnici k_1 známou ze školní geometrie (obr. 4a).

V metrickém prostoru $\mathbf{M}_2$ je jednotková kružnice k_2 množinou všech bodů, pro které platí $|x| + |y| = 1$.

Tato množina, jak snadno ověříte, má tvar čtverce podle obr. 4b.

V metrickém prostoru $\mathbf{M}_3$ je jednotková kružnice množina všech bodů roviny, pro jejich souřadnice platí $\max(|x|, |y|) = 1$.

Kružnice k_3 má tvar čtverce podle obr. 4c.

Dalšími modely poukážeme na možnost studia metrických prostorů i v jiných oborech než je geometrie. A protože to budou modely vzaté z praxe, připomeneme tím i aplikabilitu studované problematiky v nematematických oborech.

M o d e l $\mathbf{M}_4$. Je dán slovník S . Považujeme tento slovník za množinu slov, která je uspořádána (např. abecedně - jak to ve slovnících bývá). Lze na této množině definovat vzdálenost slov? Vzhledem k uspořádání to je možné přirozeným způsobem taktó. Očíslujeme slova indexy, takže první slovo množiny S označíme ξ_1 , druhé ξ_2 , n -té ξ_n a definujeme

$$\mu_4(\xi_i; \xi_k) = |i - k| \quad (12)$$

Funkce μ_4 splňuje nejen požadavky I—III z definice vzdálenosti, avšak vzhledem k nerovnosti (8), i požadavek IV, který zní (podle definice 12):

$$|i - k| + |k - j| \geq |i - j|$$

$\mathbf{M}_4 \equiv (S; \mu_4)$ je tedy metrickým prostorem, jeho body jsou slova slovníku S .

Na množině S konstruujeme další metrický vzorec.

M o d e l $\mathbf{M}_5$. Je dán slovník S . Slova která obsahuje, považujeme za uspořádané n -tice písmen. Před dalšími úvahami „upravme“ slovník tak, aby všechna slova obsahovala týž počet „písmen“ K tomu stačí zjistit nejdelší slovo slovníku a všechna kratší doplnit dohodnutými znaky (např. tečkami) připsanými za slovo do patřičné délky. Tak např. má-li nejdelší slovo slovníku 10 písmen, budeme považovat i slovo PES za slovo o 10 písmenech: PES..... Vzdáleností $\mu_5(\xi; \eta)$ rozumějme počet míst, na kterých jsou ve slovech ξ a η různá písmena. Tak např. $\mu_5(\text{KORYTO}...., \text{KOPYTO}....) = 1$, $\mu_5(\text{RAK}....., \text{RAKOVINA}..) = 5$, $\mu_5(\text{VZDÁLENOST}, \text{LENOST}....) = 10$. Funkce μ_5 má zřejmě vlastnosti I, II, III z definice vzdálenosti. Platí pro libovolná tři slova ξ, η, ζ nerovnost

$$\mu_5(\xi, \eta) + \mu_5(\eta, \zeta) \geq \mu_5(\xi, \zeta) ?$$

Jistěže ano, neboť slova ξ a ζ se mohou lišit jen v těch místech, ve kterých se lišila buď ξ a η nebo η a ζ (jestliže se totiž shodují v místě m_i slova ξ a η i η a ζ , shodují se v něm i slova ξ a ζ).

Dvojice $\mathbf{M}_5 \equiv (S; \mu_5)$ je tedy modelem metrického prostoru. Konstruujeme v tomto modelu např. kružnici o poloměru 2 a středu MÍRA. Tato kružnice se bude skládat z bodů: KÁRA, MÁMA, MANA, MAPA, MARS, MOKA, MÓDA, NORA, PÁRA, PÍKA, PÍPA, ŘÍPA, SÍLA, TÁRA, TÍHA, TÚRA, VĚRA a patrně dalších, která zjistíme zevrubnou prohlídkou slovníku S .

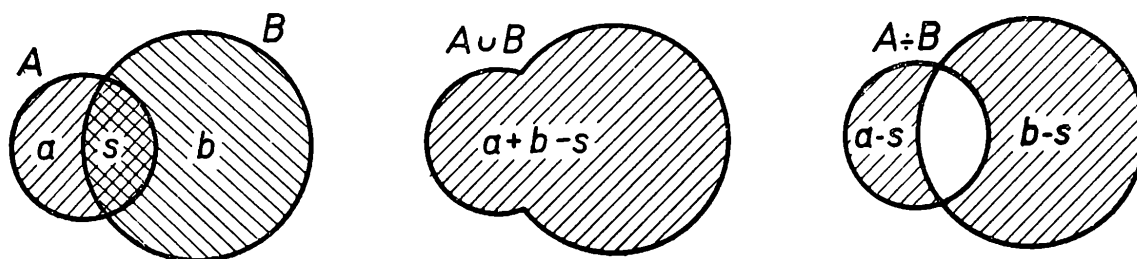
Na první pohled kuriózní metrický prostor $\mathbf{M}_5 \equiv (S; \mu_5)$ není bezcenný. Pomocí vzdálenosti μ_5 lze např. formulovat obecný princip konstrukce kódů tak, aby bylo možno studovat výskyt chyb při předávání informací.²⁾

²⁾ Šrejder, Čto tak o je rasstojanija, Moskva 1963, Hamming R. W. Error-detecting and error-correcting codes, ruský překlad Moskva 1965.

M o d e l $\mathbf{M}_6$. Při zkoumání určitého pojmu např. přírodovědy rozdělujeme množinu studovaných předmětů do disjunktních podmnožin, které se nazývají *d r u h y*. Při tom je důležitá otázka vzdálenosti druhů. Označme a počet podstatných znaků druhu A , b počet podstatných znaků druhů B , D množinu všech studovaných druhů. Vzdálenost druhů bude patrně záležet na tom, kolik znaků je společných druhu A i B . Tento počet označme s . Při tom musíme uvážit, že číslo s samo nebude stačit charakterizovat vzdálenost druhů, že bude podstatně záležet i na tom, zda společné znaky mají menší či větší „váhu“ vzhledem k celkovému počtu znaků v obou druzích. Vzdálenost druhů A, B definujeme vzorcem

$$\mu_6(A, B) = \frac{a + b - 2s}{a + b - s} . \quad (13)$$

Číslo $\mu_6(A; B)$ je poměr počtu znaků, které má druh A nebo B , ne však oba druhy současně, k počtu znaků, které má buď druh A nebo druh B . Toto tvrzení si snadno ověříme znázorněním jednotlivých druhů schématy podle obr. 5.³⁾



Obr. 5

Důkaz, že $\mathbf{M}_6 \equiv (D; \mu_6)$ je model metrického prostoru nebudeme provádět.

Vzdálenost μ_6 pochází od polského matematika H. Steinhausa, který ji zavedl při studiu problematiky lesních kultur.⁴⁾

A nakonec jeden „triviální“ metrický prostor.

M o d e l $\mathbf{M}_7$. Na libovolné množině M_7 , která má aspoň dva prvky, můžeme definovat vzdálenost μ_7 takto

$$\begin{aligned} \mu_7(A, B) &= 1, \text{ je-li } A \neq B \\ \mu_7(A, A) &= 0. \end{aligned}$$

Všechny vlastnosti vzdálenosti jsou zřejmě splněny a dvojice $\mathbf{M}_7 \equiv (M_7; \mu_7)$ je metrickým prostorem.

³⁾ Čtenář znalý základů teorie množin ovšem ví, že se jedná o poměr mohutností symetrického rozdílu $A \div B$ a sjednocení $A \cup B$ množin A, B .

⁴⁾ E. Marczewski, H. Steinhaus, *O o d l e g l o ś c i s y s t e m a t y c z n e j b i o t o p ó w*, Zastosowania Matematyki 4 (1959).

Cílem našeho článku bylo seznámení s pojmem *metrický prostor*, který byl do matematiky zaveden na začátku 20. století francouzským matematikem M. Fréchetem. Toto seznamování probíhalo na dvou „frontách“: Jednak abstraktní definicí uvedenou po úvodních poznámkách, jednak ukázkou sedmi modelů metrického prostoru. Posuďte sami, který z postupů vám lépe vyhovoval. Ještě si však uvědomíme, že definice metrického prostoru, uvedená na začátku, byla možná jen díky vysokému stupni abstrakce, který je pro matematiku charakteristický. Abstraktní pojem metrického prostoru přitom nejen odráží důležité souvislosti z praxe, ale popisuje i velmi mnoho „matematických situací“, jejichž podstata je táž (sedmi modely, které jsme uvedli, není vůbec „zásoba“ modelů metrických prostorů vyčerpána). Na základě uvedených příkladů však můžeme vytušit sílu matematiky. Všechny důsledky vlastností I, II, III, IV lze aplikovat na libovolné interpretaci metrického prostoru. Opíráme-li se při studiu metrických prostorů jen o základní vlastnosti I–IV, říkáme, že studujeme metrické prostory axiomaticky. Vlastnosti I–IV jsou axiomy metrického prostoru.

0 některých vztazích v trojúhelníku

FRANTIŠEK JANEČEK, Broumov

V tomto článku odvodíme některé vztahy o poloměrech kružnic vně vepsaných danému trojúhelníku a poloměrem kružnice vepsané. Úvodem zopakujeme základní pojmy.

Definice. Buď dán trojúhelník ABC (obr. 1). Kružnice, která se dotýká všech tří přímek AB , BC , CA , se nazývá *kružnice trojúhelníku ABC vepsaná*. Jestliže střed vepsané kružnice leží uvnitř trojúhelníka ABC , pak se kružnice nazývá *vepsaná*. Jestliže střed vepsané kružnice leží vně trojúhelníka, nazývá se *kružnice vepsaná vně* (připsaná).

Věta 1. Každému trojúhelníku ABC lze vepsat jedinou kružnici $k \equiv (S, \rho)$ a dále tři kružnice $k_a \equiv (S_a, \rho_a)$, $k_b \equiv (S_b, \rho_b)$, $k_c \equiv (S_c, \rho_c)$ vepsané vně. Bod S je společným bodem os vnitřních úhlů trojúhelníka ABC ; bod S_a je společným bodem osy vnitřního úhlu a os vnějších úhlů trojúhelníka při vrcholech B , C atd. (obr. 1).

Poznámky. 1. Z obr. 1 je patrné, že bod S je orthocentrem (průsečíkem výšek) v trojúhelníku $S_aS_bS_c$, neboť je např. $AS_a \perp S_bS_c$ (osy vedlejších úhlů). Toho se dá výhodně použít při konstrukci.

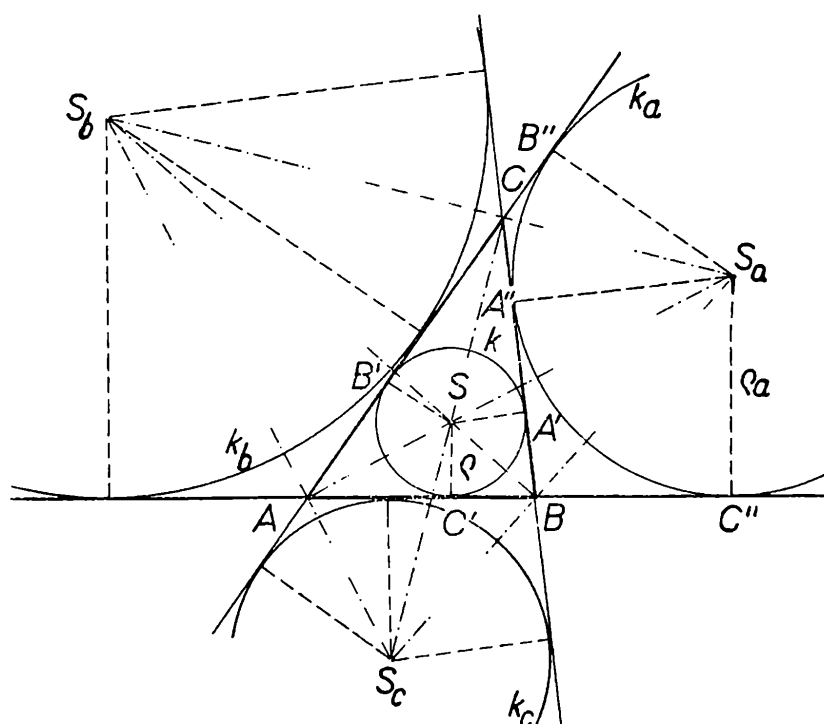
2. Každá ze tří kružnic vně vepsaných leží tedy uvnitř jednoho úhlu vnitřního a dotýká se jemu příslušné strany trojúhelníka; dále leží uvnitř dvou vnějších úhlů, k uvažovanému vnitřnímu nepříslušných a dotýká se

přímek, v nichž leží zbývající dvě strany; např. kružnice k_a se středem S_a leží v úhlu α , dotýká se strany a , leží uvnitř vnějších úhlů β' , γ' a dotýká se přímek AB , AC , v nichž leží strany b , c .

Dále dokážeme pomocnou větu:

Délka tečen, vedených z vrcholu trojúhelníka k příslušné kružnici vně vepsané je rovna polovině obvodu trojúhelníka. Délka tečen vedených z vrcholu trojúhelníka k nepříslušné kružnici vně vepsané je rovna délce tečen vedených z druhého takového vrcholu ke kružnici vepsané.

Přitom vrchol A je příslušný ke kružnici k_a atd., je nepříslušný ke kružnicím k_b , k_c .



Obr. 1

D ů k a z. Označme A' , B' , C' body, ve kterých se kružnice k dotýká stran trojúhelníka ABC , dotykové body kružnice k_a vně vepsané se středem S_a obdobně A'' , B'' , C'' . Protože velikosti tečen vedených z bodu ke kružnici jsou shodné, platí

$$AB' = AC' \quad BC' = BA' \quad CA' = CB'$$

Označme

$$AB' = x, \quad BC' = y, \quad CA' = z$$

Z obr. 1 je patrné, že

$$y + z = a, \quad z + x = b, \quad x + y = c \quad (1)$$

To jsou tři lineární rovnice o třech neznámých x , y , z . Jejich sečtením dostaneme

$$2x + 2y + 2z = a + b + c$$

Označíme-li $a + b + c = 2s$ (s je tedy poloviční obvod trojúhelníka), obdržíme

$$x + y + z = s$$

Odečtením vždy jedné z hořejších rovnic (1) dostaneme

$$x = s - a, y = s - b, z = s - c \quad (2)$$

Dále platí

$$AB'' = AC'' \quad BC'' = BA'' \quad CA'' = CB''$$

Položme

$$AB'' = x' \quad BC'' = y' \quad CA'' = z'$$

Z obr. 1 je vidět, že

$$y' + z' = a, x' - y' = c, x' - z' = b$$

Sečtením dostaneme

$$2x' = a + b + c,$$

tedy

$$x' = s \quad (3)$$

dále je

$$y' = s - c, z' = s - b \quad (4)$$

Porovnáním výsledků (2), (3) a (4) dostáváme konečně

$$x' = s, y' = z, z' = y,$$

odtud plyne správnost dokazované věty.

Nyní již můžeme přikročit k důkazu hlavní věty.

V ě t a 2. Jsou-li $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ poloměry kružnic vně vepsaných danému trojúhelníku, ϱ poloměr kružnice vepsané, r poloměr kružnice opsané a P obsah tohoto trojúhelníka, potom platí

$$a) P = (s - a) \varrho_a = (s - b) \varrho_b = (s - c) \varrho_c; \quad (5)$$

$$b) \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}; \quad (6)$$

$$c) P = \sqrt{\varrho \varrho_a \varrho_b \varrho_c}; \quad (7)$$

$$d) \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r \quad (8)$$

D ů k a z. a) Na obr. 1 je $SA' = SB' = SC' = \varrho, S_a A'' = S_a C'' = \varrho_a$. Podle pomocné věty je $AB' = AC' = s - a, BA' = BC' = s - b, CA' = CB' = s - c, AC'' = s$.

Z obr. 1 je patrné, že

$$\triangle AC'S \sim \triangle AC''S_a$$

Proto

$$AC'' : S_a C'' = AC' : SC'$$

po dosazení

$$s : \varrho_a = (s - a) : \varrho,$$

čili

$$\varrho s = \varrho_a (s - a)$$

Poněvadž, jak známo, $\varrho s = P$, dostáváme

$$P = \varrho_a (s - a),$$

což jsme měli dokázat. Další vzorce z (5) odvodíme cyklickou záměnou.

b) Podle části a) platí

$$\varrho_a = \frac{P}{s - a}, \quad \varrho_b = \frac{P}{s - b}, \quad \varrho_c = \frac{P}{s - c},$$

takže

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} &= \frac{(s - a) + (s - b) + (s - c)}{P} = \\ &= \frac{3s - (a + b + c)}{P} = \frac{3s - 2s}{P} = \frac{s}{P} = \frac{1}{\varrho}, \end{aligned}$$

což je vztah (6).

c) Znásobením rovnic

$$P = \varrho s, \quad P = \varrho_a (s - a), \quad P = \varrho_b (s - b), \quad P = \varrho_c (s - c)$$

dostaneme

$$P^4 = \varrho \cdot \varrho_a \varrho_b \varrho_c s (s - a) (s - b) (s - c).$$

Výraz $s (s - a) (s - b) (s - c)$ je podle Heronova vřorce roven P^2 , takže

$$P^4 = \varrho \cdot \varrho_a \varrho_b \varrho_c P^2$$

a odtud

$$P = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_a \varrho_b \varrho_c}.$$

d) S použitím předchozích výsledků dostáváme

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = \frac{P}{s - a} + \frac{P}{s - b} + \frac{P}{s - c} - \frac{P}{s}.$$

Zavedeme-li označení $s = \frac{1}{2} (a + b + c)$, je

$$s - a = \frac{1}{2} (-a + b + c),$$

$$s - b = \frac{1}{2} (a - b + c),$$

$$s - c = \frac{1}{2} (a + b - c).$$

Poslední výraz pak nabude postupně tvaru

$$\begin{aligned} &\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = \\ &\frac{s (s - b) (s - c) + s (s - a) (s - c) + s (s - a) (s - b) -}{P} = \\ &= \frac{s (s - c) \quad c + c (s - a) (s - b)}{P} = \\ &= \frac{c}{4P} [(a + b + c) (a + b - c) + (-a + b + c) (a - b + c)] = \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{4P} [(a+b)^2 - c^2 + c^2 - (a-b)^2] = \frac{c}{4P} \cdot 4ab = \frac{abc}{P} = 4r.$$

O poloměrech kružnic vně vepsaných a kružnice vepsané platí ještě další vztahy. Uvedeme si některé z nich bez důkazů, které přenechávám čtenáři.

$$\varrho_a = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\varrho_b = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \varrho_c = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\varrho_a} = -\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}, \quad \frac{1}{\varrho_b} = \frac{1}{v_a} - \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c},$$

$$\frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_c}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} \quad (11)$$

Zlatý slavík a matematika (Dokončení)

MILOŠ MATULA, Praha

Matematik si ovšem položí otázku existence a jednoznačnosti řešení, tj. otázku, zda ke každému možnému rozložení počtu bodů (splňujícímu podmínku $\Sigma b = 6$) je uvedeným postupem určeno rozložení základních pravděpodobností p a zda takové řešení (resp. monotonní řešení, při němž větším hodnotám b odpovídají větší hodnoty p) je jednoznačně určeno. Zásadně by bylo myslitelné, že například existují různé dvojice hodnot A, B tak, že hodnoty p vypočtené z naší rovnice vyhovují podmínkám $\Sigma p = 1, \Sigma p^2 = A$. Rozebereme zde tuto otázku jen pro nejjednodušší případ, že se bodují prvá dvě místa a nerozlišuje se jejich bodová hodnota [takže můžeme klást např. $b^{(1)} = b^{(2)} = 1$], jinak řečeno, že jsou dány celkové počty hlasů pro jednotlivé zpěváky a máme určit pravděpodobné rozložení prvních a druhých míst. V tomto případě je

$$b = P^{(2)} = \frac{2p(1-p)}{1-A},$$

přičemž

$$\Sigma b = \Sigma p^{(1)} + \Sigma p^{(2)} = 2.$$

Protože budeme (viz dále) předpokládat $r > 2$, je samozřejmě $b_i < 1$ pro každé i .

Pro p dostáváme pak kvadratickou rovnici

$$p^2 - p + \frac{1-A}{2} b = 0$$

a odtud

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1-A}{2} b} = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{1 - 2(1-A)b}], \quad (6)$$

přičemž A je takové, aby

$$\sum_{j=1}^r p_j = 1$$

Poznamenejme nejprve, že je-li $r = 2$, tj. dostanou-li v anketě hlasy pouze dva zpěváci, podílejí se tito zpěváci o obě prvá místa a každý z nich má právě tolik prvních míst, kolik druhý má míst druhých. V tomto případě je nutně $p_2 = 1 - p_1$ a vychází $b_1 = b_2 = 1$ (oba dostanou stejný počet hlasů a tudíž v tomto případě, při bodování 1, 1, také stejný počet bodů), ať jsou p_1, p_2 jakékoli. V tomto triviálním případě nelze samozřejmě o rozložení prvních a druhých míst říci nic. Budeme proto předpokládat, že $r > 2$.

Za druhé poznamenejme, že existují rozložení, při nichž ve vztahu (6) lze vzít vesměs znamení „minus“ (když žádné p nepřesáhne hodnotu $1/2$), ale také rozložení, kde pro některé Z_i je nutno vzít znamení „plus“. Takové Z_i však potom zřejmě může být pouze jedno (u zpěváka na prvním místě), protože nanejvýš jedno p může přesáhnout hodnotu $1/2$. V prvním případě budeme mluvit o řešení prvního druhu, v druhém případě o řešení druhého druhu.

Ukážeme si nyní, že odpověď na otázku existence řešení je kladná.

I. Předpokládejme nejprve, že $c < 1/2$, kde c znamená největší z daných bodových hodnot b_i . Je-li dáno nějaké číslo A , počítejme hodnoty

$$p_i = \frac{1}{2} [1 - \sqrt{1 - 2(1-A)b_i}] \quad (*)$$

hledejme řešení prvního druhu. Jak je známo (a dá se snadno ukázat), pro $0 < x < 1/2$ platí nerovnosti

$$\sqrt{1-2x} < 1-x < \sqrt{1-x}.$$

Je-li tedy $A = 0$, dostaneme výpočtem ze vzorce (*) hodnoty

$$p_i = 1/2 (1 - \sqrt{1-2b_i}) > 1/2 [1 - (1-b_i)] = 1/2 b_i,$$

a protože $\sum b_i = 2$, je pak $\sum p_i > 1$. Pro $A = 1/2$ dostaneme

$$p_i = 1/2 (1 - \sqrt{1-b_i}) < 1/2 [1 - (1-b_i)] = 1/2 b_i,$$

a tedy $\sum p_i < 1$. Protože však $\sum p_i$ při hodnotách p_i počítaných z (*) zřejmě spojitě závisí na A , existuje v intervalu $(0, 1/2)$ číslo A takové, že $\sum p_i = 1$. Tedy v případě $c < 1/2$ skutečně existuje řešení, a to dokonce

řešení prvního druhu (zřejmě pouze jediné takové řešení, protože každé p_i , a tedy také $\sum p_i$ klesá s rostoucím A).

Jestliže $c = 1/2$, pak buď všechna $b_i = 1/2$, a pak je $r = 4$ a existuje řešení takové, že všechna $p_i = 1/4$, nebo pro nějaké i je $b_i < 1/2$, a pak stačí nepatrná modifikace předchozí úvahy, kterou pro úsporu místa vypustím.

II. Předpokládejme nyní, že $1/2 < c < 1$. Zvětšujme $1 - A$ od 0 do $1/(2c)$ a počítejme p_i podle vzorce (*). Pro $1 - A = 0$ dostáváme $p_i = 0$ a při zvětšování $1 - A$ se zvětšují p_i . Jestliže pro některé $A \leq 1/(2c)$, dostaneme $\sum p_i = 1$, pak máme řešení (prvního druhu).

Jestliže však zůstává stále i pro $1 - A = 1/(2c)$ $\sum p_i < 1$, pak hledáme řešení druhého druhu, tj. počítáme p_0 odpovídající hodnotě $b = c$ podle vzorce

$$p_0 = 1/2 [1 + \sqrt{1 - 2(1 - A)c}],$$

ostatní p_i podle vzorce (*). Nechť nyní $1 - A$ klesá od $1/(2c)$ (při němž je p_0 nezávislé na volbě znamení u odmocniny, která má v tomto případě hodnotu 0) do $2(1 - c)$. Snadno ověříme, že $2(1 - c) < 1/(2c)$. Uvažujme případ $1 - A = 2(1 - c)$. Ze vztahu $b = 2p(1 - p)/(1 - A)$ v tomto případě vyplývá $p(1 - p) = b(1 - c)$. Protože $1 - p < 1$, je tedy $p > b(1 - c)$, a protože $\sum_{b \neq c} b = 2$, a tedy $\sum_{p \neq p_0} p = \sum_{p \neq p_0} p +$

$+ p_0 > (1 - c)(2 - c) + p_0$, při čemž

$$p_0 = 1/2 [1 + \sqrt{1 - 4c(1 - c)}] = 1/2 [1 + \sqrt{(2c - 1)^2}] = c,$$

tedy $\sum p > 1 + (1 - c)^2$. Tento výraz stoupá od 1 do $5/4$, když c klesá od 1 do $1/2$. Pro jakékoli c takové, že $1/2 < c < 1$, je tedy při $A = 2(1 - c)$ nutně $\sum p > 1$. To znamená, že při přechodu od $1 - A = 1/(2c)$ do $1 - A = 2(1 - c)$ se $\sum p$ mění od hodnoty menší než 1 k hodnotě větší než 1. Existuje tedy vzhledem k spojitě závislosti $\sum p$ na A opět taková hodnota A , pro kterou $\sum p = 1$ a která tedy dává řešení.

Konečně ukážeme, že také odpověď na otázku jednoznačnosti řešení je kladná.

Snadno vidíme, že různá řešení jsou možná jen při různých hodnotách A . Předpokládejme, že existují dvě různá řešení p_i, p_i^* s odpovídajícími hodnotami A, A^* . Ze vzorce (*) je vidět, že když například (jak budeme předpokládat) $A < A^*$, pak $p_i > p_i^*$ pro všechna „normální“ i , pro něž se p_i počítá podle (*). Protože $b_i = b_i^*$, platí

$$2p_i(1 - p_i)/(1 - A) = 2p_i^*(1 - p_i^*)/(1 - A^*),$$

takže

$$p_i(1 - p_i) = \frac{1 - A}{1 - A^*} p_i^*(1 - p_i^*),$$

a označíme-li

$$\frac{1 - A}{1 - A^*} = K,$$

je

$$p_i(1 - p_i) = K p_i^*(1 - p_i^*),$$

kde $K > 1$. Označme nyní b_r největší z bodových hodnot b_i , takže $i = 1, 2, \dots, r - 1$ jsou „normální“ případy. Protože

$$p_r = 1 - (p_1 + \dots + p_{r-1}),$$

máme vztahy

$$p_1 (1 - p_1) = K p_1^* (1 - p_1^*),$$

$$\begin{aligned} p_{r-1} (1 - p_{r-1}) &= K p_{r-1}^* (1 - p_{r-1}^*), \\ (1 - p_1 - \dots - p_{r-1}) (p_1 + \dots + p_{r-1}) &= \\ &= K (1 - p_1^* - \dots - p_{r-1}^*) (p_1^* + \dots + p_{r-1}^*). \end{aligned}$$

Sečteme-li tyto vztahy pro $i = 1, \dots, r-1$ a odečteme poslední vztah (pro $i = r$), dostaneme nalevo

$$\begin{aligned} (p_1 + \dots + p_{r-1}) - (p_1^2 + \dots + p_{r-1}^2) - (p_1 + \dots + p_{r-1}) + \\ + (p_1 + \dots + p_{r-1})^2 = 2 (p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_{r-2} p_{r-1}) \end{aligned}$$

a obdobný výraz napravo, takže

$$p_1 p_2 + \dots + p_{r-2} p_{r-1} = K (p_1^* p_2^* + \dots + p_{r-2}^* p_{r-1}^*) \quad (7)$$

Na druhé straně ze vztahů

$$\begin{aligned} p_i (1 - p_i) &= K p_i^* (1 - p_i^*), \\ p_j (1 - p_j) &= K p_j^* (1 - p_j^*) \end{aligned}$$

dostaneme násobením

$$p_i p_j = K^2 p_i^* p_j^* \frac{(1 - p_i^*) (1 - p_j^*)}{(1 - p_i) (1 - p_j)}.$$

Pro $i \neq r \neq j$ je $p_i > p_i^*$, $p_j > p_j^*$, tedy zřejmě $p_i p_j > K^2 p_i^* p_j^*$. Tudíž

$$p_1 p_2 + \dots + p_{r-2} p_{r-1} > K (p_1 p_2^* + \dots + p_{r-2}^* p_{r-1}),$$

což je ve sporu s (7).

Jiným problémem je otázka existence případné (aspoň teoretické) zákonitosti rozložení třeba pravděpodobností p_i samých, např. způsobu závislosti hodnoty p_i na pořadí i (seřadíme-li hodnocené prvky podle velikosti p_i). Zase tu ovšem jde o obecnější otázku, která se netýká zrovna jen hodnocení zpěváků ve Zlatém slavíku. To ovšem už není jen záležitost pravděpodobnostních úvah. Poznamenám jen, že považuji za dosti pravděpodobné, že v obdobných případech jde o zákonitost v podstatě matematicky podobného typu jako v případě závislosti pravděpodobnosti výskytu i -tého nejčastějšího slova v jazyce na pořadí i (která se studuje v matematické lingvistice) a že motivace pro takovou domněnku je značně obdobná motivaci obvyklé v oblasti výzkumu frekvence slov. Číselný materiál ze skutečných hodnocení typu Zlatého slavíka není ovšem dost rozsáhlý jako empirický podklad pro bližší studium této otázky. Tím se už pochopitelně v tomto článku nebudeme zabývat.



Svazky kružnic

KAREL DRÁBEK CSc. ČVUT Praha

Při hledání bodů, které mají ke dvěma daným (nesoustředným) kružnicím touž mocnost, jsme zjistili, že množinou takových bodů je přímka, tzv. *chordála*¹⁾. Tato přímka je pro dané dvě kružnice buď nesečnou — obě kružnice leží jedna vně druhé ($S_1S_2 > r_1 + r_2$), nebo jedna uvnitř druhé ($S_1S_2 < |r_1 - r_2|$), nebo je sečnou ($|r_1 - r_2| < S_1S_2 < r_1 + r_2$), nebo je tečnou. Obě kružnice se dotýkají vně ($S_1S_2 = r_1 + r_2$) nebo uvnitř ($S_1S_2 = |r_1 - r_2|$).

Všechny kružnice, které mají středy na přímce c , tzv. *centrále* a mají touž přímku $ch \perp c$ za chordálu, tvoří *svazek kružnic*.

Průsečík C centrály a chordály, tzv. *centrální bod* svazku kružnic, má vzhledem k určenému svazku kružnic vždy jednu ze tří možných mocností:

a) Je-li chordála ch nesečnou kružnic svazku, je centrální bod C vnějším bodem pro všechny kružnice svazku a jeho mocnost je kladná (obr. 1). Jestliže kružnice $k_1, k_2, \dots$ svazku protínají centrálu c v bodech $K_1, L_1; K_2, L_2$; pak pro orientované úsečky platí

$$\vec{CK}_1 \cdot \vec{CL}_1 = \vec{CK}_2 \cdot \vec{CL}_2 = \dots = k^2, k > 0,$$

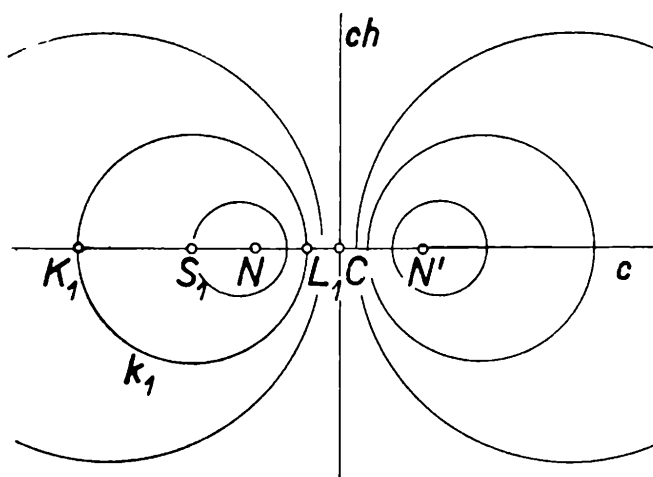
¹⁾ Viz např. článek J. Šedivý, Mocnost bodu ke kružnici, *Rozhledy* (40), 1961—62, str. 207.

tedy na přímce c existují dva body N, N' , pro které

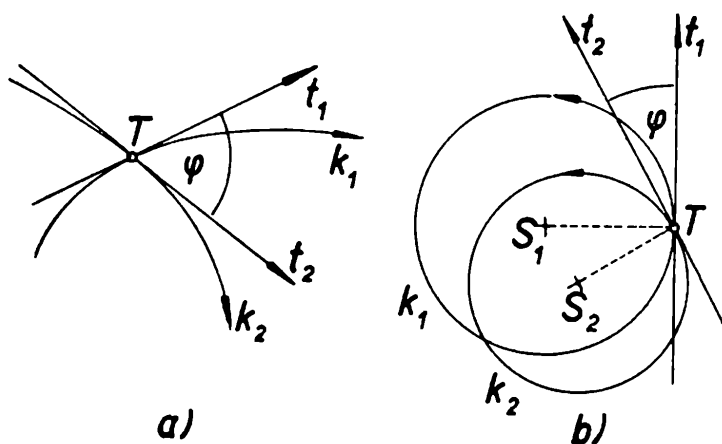
$$CN^2 = CN'^2 = k^2$$

Oba body N, N' , které jsou také průsečíky kružnice o středu v centrálním bodě C protínají pravouhle všechny kružnice daného svazku, považujeme za středy kružnic svazku, které mají poloměr rovný nule a nazýváme je také *nulovými kružnicemi*.

Tento svazek kružnic můžeme proto určit dvěma body N, N' jako nulovými kružnicemi, nebo jedním z nich a chordálou ch . Svazek tohoto druhu nazýváme *hyperbolickým svazkem kružnic*.²⁾



Obr. 1



Obr. 2

Poznámka. Připomeňme si, co rozumíme pod pojmem „úhel dvou křivek“ k_1, k_2 . Jako v případě přímky zvolme na křivce orientaci (zpravidla vyznačenou šipkou). U křivek, které jsou předem dány parametrickými rovnicemi nebo které lze parametrizovat, je po úmluvě kladný smysl dán směrem rostoucího parametru. Tak např. u kružnice $x = r \cos t, y = r \sin t$ je parametrem úhel t spojnice středu kružnice a jejího bodu s kladným směrem osy x . Ve společném bodě T orientovaných křivek k_1, k_2 sestrojme k nim tečny t_1, t_2 (samozřejmě, pokud je to možné). Orientace na těchto tečnách je již dána zvolenou orientací na křivkách k_1, k_2 (obr. 2a). Úhel φ těchto tečen, který získáme otočením kolem bodu T jedné tečny do druhé, přičemž tedy $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$, nazýváme úhlem křivek k_1, k_2 ve společném bodě T . V obr. 2b jsou zobrazeny kružnice k_1, k_2 , které se v bodě T protínají pod úhlem $\varphi = 30^\circ$. Je-li $\varphi = 90^\circ$, pak se dané křivky k_1, k_2 protínají pravouhle.

²⁾ Zdůvodnění názvu svazku kružnic se najde v projektivní geometrii v souvislosti s vyšetřováním speciální projektivnosti, tzv. involuce.

b) Je-li chordála ch sečnou jedné kružnice k_1 svazku a protíná ji tedy ve dvou bodech A, B (obr. 3), je sečnou všech kružnic svazku, které procházejí oběma body A, B dané chordály ch .

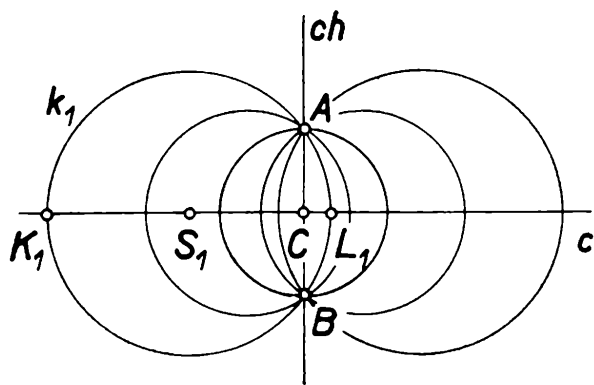
Tyto dva body A, B se nazývají *základní body eliptického svazku kružnic*. Centrální bod C je nyní vnitřním bodem všech kružnic takového svazku.

Jestliže kružnice k_1, k_2 , svazku protínají centrálu c ve dvojicích $K_1, L_1; K_2, L_2$; pak pro orientované úsečky platí

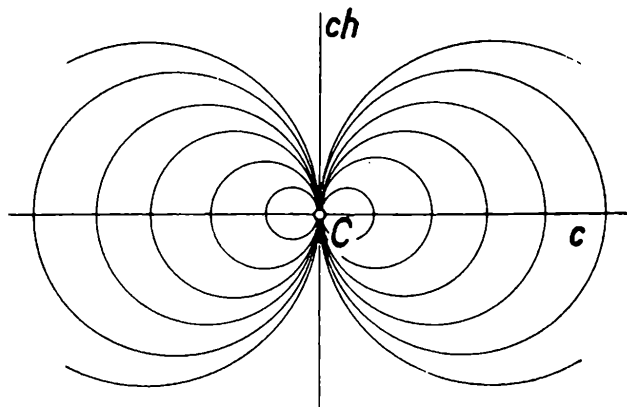
$$\overrightarrow{CK_1} \overrightarrow{CL_1} = \overrightarrow{CK_2} \overrightarrow{CL_2} = -k^2, k < 0$$

Eliptický svazek kružnic určujeme obvykle oběma základními body A, B na chordále ch . Centrála c je pak osou souměrnosti úsečky omezené základními body A, B .

Poznámka. Jestliže pro daný hyperbolický (eliptický) svazek kružnic sestrojíme kružnice, které protínají pravouhle všechny kružnice svazku a mají tedy středy na chordále svazku, dostaneme eliptický (hyperbolický) svazek kružnic, který má v nulových kružnicích (základních bodech) své základní body (nulové kružnice). Centrála nového svazku je chordála původního svazku kružnic. Dva svazky kružnic s uvedenou vlastností se nazývají *sdrúžené*.



Obr. 3



Obr. 4

c) Je-li konečně chordála ch tečnou jedné kružnice k_1 svazku (obr. 4), a tedy centrální bod C je bodem dotyku tečny ch s kružnicí k_1 , platí tato vlastnost opět pro všechny kružnice tohoto svazku, který se nazývá *parabolický svazek kružnic*.

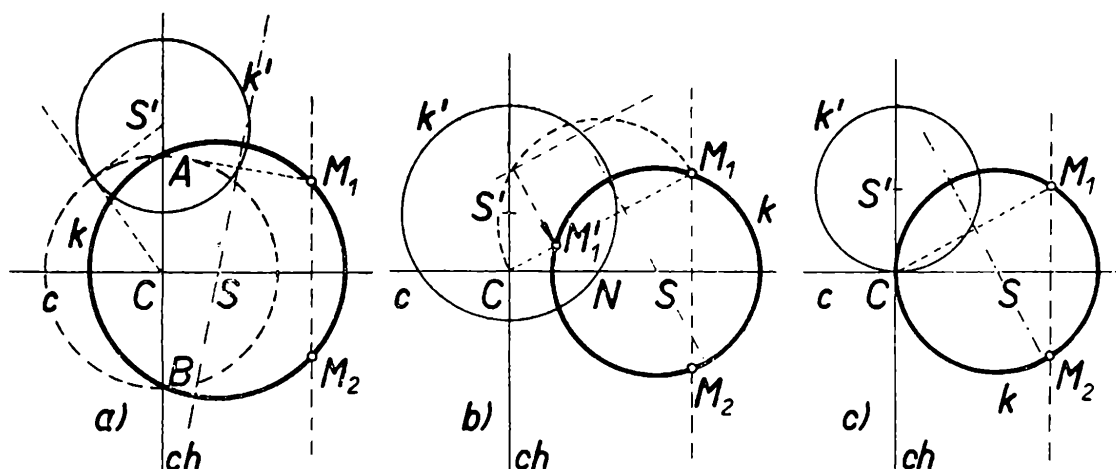
Tento svazek kružnic určíme např. chordálou ch a centrálním bodem C .

K parabolickému svazku sdrúžený svazek je opět parabolický.

Příklad. Sestrojte kružnici, která prochází dvěma body M_1, M_2 a protíná pravouhle danou kružnici k' (S', r').

Při konstrukci použijeme vlastnosti sdružených svazků kružnic.

Určíme svazek kružnic s centrálou c , která je osou úsečky M_1M_2 a chordálou ch , která prochází bodem S' kolmo k c .



Obr. 5

Je-li centrální bod $C \equiv c \cdot ch$ vnější bod pro k' (obr. 5a), je tento svazek eliptický a jeho základními body A, B prochází hledaná kružnice k . Body A, B jsou průsečíky kružnice o středu C , která protíná pravouhle danou kružnici k' .

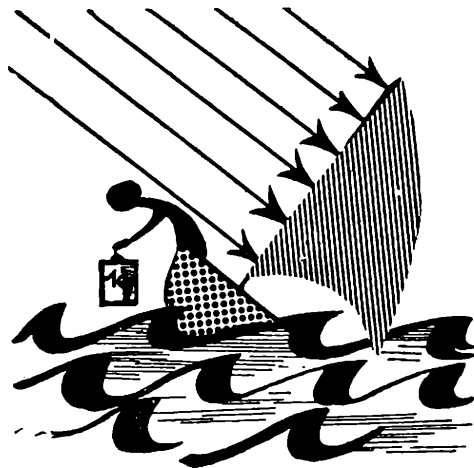
Je-li bod C vnitřním bodem kružnice k' (obr. 5b), je tento svazek hyperbolický, průsečíky N, N' (od N' není v obr. označen) kružnice k' , která patří do sdruženého svazku, s centrálou c jsou příslušné nulové kružnice. Z vlastnosti mocnosti bodu ke kružnici sestrojíme pro hledanou kružnici k její další bod z podmínky $CN^2 = \vec{CM}_1 \cdot \vec{CM}_1'$. Další postup při konstrukci kružnice k je zřejmý.

Je-li c tečnou kružnice k' , a tedy C bodem kružnice k' , pak hledaná kružnice k (obr. 5c) musí procházet centrálním bodem C .

Svazky kružnic mají mnoho zajímavých vlastností, které lze v geometrii využívat různými způsoby. V některém z příštích článků ukážeme vlastnost, která vede k vytvoření kuželoseček.

Rebus. Str. 143: Ch. Coulomb (1736—1806). Str. 155: J. P. Joule (1818—1889).

Oprava. V úloze č. 3 na str. 81 druhého čísla čtete 3^x místo $3'$.



Energie soustavy pružina - tuhé těleso

DR. OLDŘICH PIVNIČKA, SVVŠ, Znojmo

Při úvahách o energii soustavy, skládající se z pružné spirály a tělesa připevněného k této spirále, můžeme dojít k některým zajímavým výsledkům.

V dalším budeme předpokládat, že při deformaci je vždy splněn Hookův zákon pružné deformace, ať se jedná o prodlužování či zkracování pružiny, tj. že platí vztah

$$F = K \cdot \Delta l,$$

kde K je tuhost pružiny, F síla a Δl prodloužení.

1. Uvažujme nejprve o situaci, znázorněné na obr. 1. Těleso o hmotnosti m (tvaru dutého válce) zde koná kmity kolem rovnovážné polohy O mezi body obratu A , B s amplitudou r . Předpokládáme, že pohyb tělesa po vodící tyči se děje bez tření a že hmotnost pružiny je zanedbatelná.

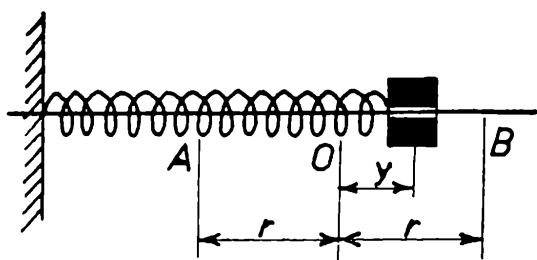
Pro libovolnou polohu, určenou okamžitou výchylkou y , je kinetická energie tělesa $W_k = \frac{1}{2} m v^2$ a elastická energie pružiny $W_e = \frac{1}{2} K y^2$. Uvážíme-li, že podle zákonů harmonického pohybu je

$$v = r\omega \cdot \cos \omega t, \quad y = r \cdot \sin \omega t, \quad m\omega^2 = K,$$

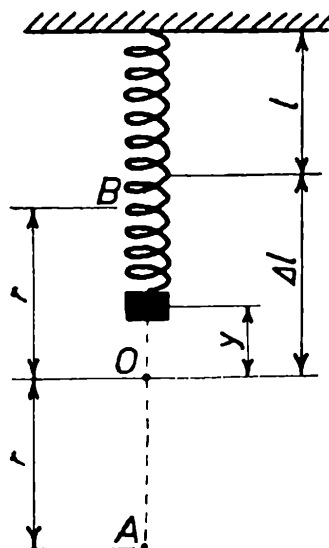
dostáváme pro energii kmitů

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \cdot \sin^2 \omega t = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} K r^2. \end{aligned}$$

Docházíme k výsledku, který bylo možno očekávat, že totiž celková energie kmitající soustavy je stálá a nezávislá na okamžité výchylce y . Přitom poslední výraz udává elastickou energii v krajních polohách, kdy okamžitá rychlost je nulová, výraz předposlední kinetickou energii při průchodu rovnovážnou polohou, kdy pružina není deformována. Při průchodu rovnovážnou polohou je totiž $|\cos \omega t| = 1$, takže $v = \pm \omega r$.



Obr. 1



Obr. 2

2. Uvažujme nyní o případě, kdy těleso je na pružině zavěšeno (obr. 2). Zde se situace poněkud komplikuje, neboť při kmitech se mění výška tělesa, tedy i jeho potenciální energie tíhová, ke které nemůžeme a priori nepřihlížet.

Označme délku nezatížené pružiny l . Zavěsíme-li na ni těleso hmotnosti m , prodlouží se o délku Δl , pro niž platí podle (1)

$$mg = K \cdot \Delta l, \quad (2)$$

kde g je místní tíhové zrychlení. Rozkmitáme-li soustavu, pak pro libovolnou polohu, určenou okamžitou výchylkou (elongací) y , platí pro kinetickou a tíhovou energii tělesa a pro elastickou energii pružiny

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2,$$

$$W_g = mgy,$$

$$W_e = \frac{1}{2} K (\Delta l - y)^2$$

Elongaci y bereme kladně ve směru vzhůru. Přitom nevylučujeme možnost $y > \Delta l$; v tom případě je pružina stlačena a výraz pro W_e zůstává v platnosti. Tíhové energii v rovnovážné poloze O prisoudíme nulovou hodnotu.

Celková energie je tedy

$$W = \frac{1}{2} m v^2 + mgy + \frac{1}{2} K (\Delta l)^2 - K \cdot \Delta l \cdot y + \frac{1}{2} K y^2.$$

Dosadíme-li sem podobně jako v předcházející úvaze příslušné výrazy za y , v a K , dostáváme po úpravě

$$W = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (\Delta l)^2 + m y (g - \omega^2 \cdot \Delta l). \quad (3)$$

Podle tohoto výsledku by se zdálo, že celková energie závisí na okamžité výchylce y , která se objevuje jako součinitel v posledním sčítanci. Avšak dosadíme-li do (2)

$$K = m \omega^2,$$

dostáváme po zkrácení

$$g = \omega^2 \cdot \Delta l,$$

takže poslední sčítanec je roven nule. Celková energie soustavy je tedy

$$W = \frac{1}{2} K r^2 + \frac{1}{2} K (\Delta l)^2. \quad (4)$$

Jestliže soustava nekmitá, přísluší jí pouze elastická energie pružiny protažené o délku Δl

$$W_e = \frac{1}{2} K (\Delta l)^2$$

Je-li soustava rozkmitána, vzroste její energie podle (4) o $\frac{1}{2} K r^2$. Je tedy celková energie kmitů stejně jako v prvním případě dána výrazem $\frac{1}{2} K r^2$.

3. Jestliže se při kmitech nemá pružina stlačovat, (to nastane například tehdy, když nedeformovaná pružina má závity těsně u sebe), je energie kmitů omezena podmínkou

$$r \leq \Delta l.$$

Dosadíme-li sem za Δl podle (2), dostaneme

$$r \leq \frac{mg}{K}. \quad (5)$$

Pro energii kmitů pak dostáváme

$$\frac{1}{2} K r^2 \leq \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2}{K} = \frac{1}{2} \frac{m g^2}{\omega^2}.$$

Jestliže tedy na pružinu upevníme těleso hmotnosti m a pružinu uvolníme (před uvolněním byla pružina nedeformovaná), kmitá soustava s energií

$$W = \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2}{K} = \frac{1}{2} \frac{m g^2}{\omega^2}. \quad (6)$$

V tomto případě závisí energie kmitů i na tíhovém zrychlení.

4. Doposud jsme předpokládali, že hmotnost pružiny je zanedbatelná. Uvažujme nyní, jaký vliv má při kmitech vlastní hmotnost pružiny. Závity se při kmitání pohybují, a proto se pružina podílí na kmitové

energii nejen energií elastickou, ale i energií kinetickou. (K tíhové energii závitů není třeba přihlížet vzhledem k výsledku úvahy uvedené v odstavci 2.)

Představme si pružinu rozdělenou na velký počet n stejných částí. Jen část poslední má stejnou rychlost v jako připevněné těleso. Část k -tá (počítáno shora) má rychlost

$$v_k = v \cdot \frac{k}{n}.$$

Označíme-li μ hmotnost pružiny, pak kinetická energie k -té části je

$$\frac{1}{2} \frac{\mu}{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu v^2}{n^3} k^2.$$

Kinetická energie všech částí je pak

$$W'_k = \frac{1}{2} \frac{\mu v^2}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2). \quad (7)$$

Úplnou indukci lze dokázat, že

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1),$$

čili

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \left(\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6} \right) \cdot n.$$

Dosazením do (7) dostáváme

$$W'_k = \frac{1}{2} \mu v^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right).$$

Jestliže je n veliké, můžeme zanedbat poslední dva členy v závorce a pro kinetickou energii pružiny dostáváme

$$W'_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \mu v^2. \quad (8)$$

Pro kinetickou energii celé soustavy pak platí

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{\mu}{3} \right) v^2.$$

Není-li hmotnost pružiny zanedbatelná, musíme k hmotnosti upevněného tělesa připočítat jednu třetinu hmotnosti pružiny.

Kdo zná základy integrálního počtu, dospěje k tomuto výsledku rychleji a přesněji:

Označíme délkový element pružiny dx , l délku, μ hmotnost pružiny.

Hmotnost délkové jednotky je pak $\frac{\mu}{l}$. Je-li okamžitá rychlost volného konce pružiny v , pak délkový element ve vzdálenosti x od pevného

konce má rychlost $\frac{x}{l} \cdot v$. Kinetická energie délkového elementu je

$$\frac{1}{2} \frac{\mu}{l} \cdot \frac{x^2}{l^2} v^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \frac{\mu v^2}{l^3} x^2 dx.$$

Celková kinetická energie pružiny je

$$W'_k = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{\mu v^2}{l^3} x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mu v^2,$$

což se shoduje se vztahem (8).

Grafické zobrazování veličin střídavého proudu

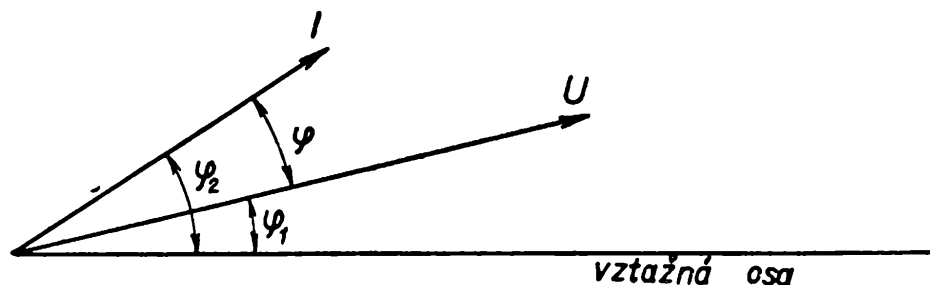
ING. LADISLAV SMRŽ

Při sinusovém průběhu veličin střídavého proudu, který můžeme v běžné elektrotechnické praxi předpokládat, používáme obvykle k jejich výpočtům trigonometrických funkcí a diferenciálních rovnic. Pro zjednodušení poměrně obtížného a časově náročného počtu a pro přehledné znázornění vzájemných poměrů veličin ve střídavém elektrickém obvodu je velmi vhodné grafické zobrazení. Bývá zde zvykem mluvit o tak zvaných vektorových diagramech střídavých veličin, což však není pojmově zcela přesné.

Vektory jsou matematické (fyzikální) veličiny, u nichž musíme při výpočtu uvažovat nejen jejich velikost, ale i směr v trojrozměrové soustavě. Pouze u tak zvaných skalárů vystačíme k jejich určení jen s jejich číselnými hodnotami. Veličiny střídavého proudu nemohou být považovány za vektory (i když jsou jim podobné), poněvadž jsou pouze časově proměnné. Tato závislost na čase může být zobrazena v dvou-rozměrové soustavě, tedy v rovině. Proto je jejich správný název rovinné vektory nebo častěji užívaný název časové vektory (točivé nebo rotační vektory).

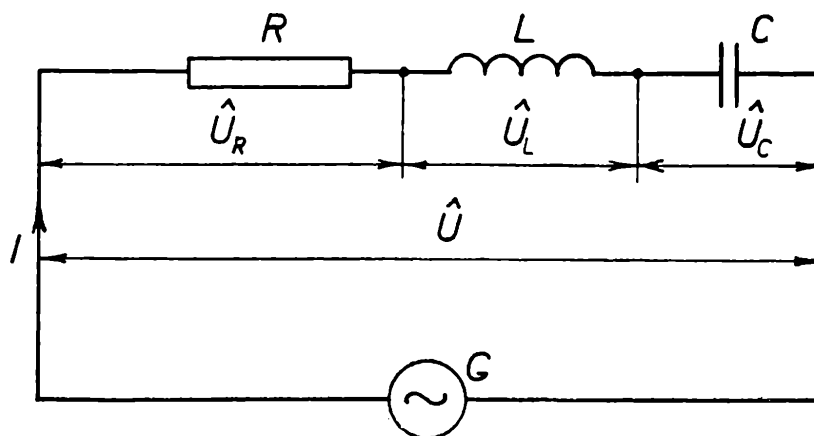
Při grafickém zobrazování časových vektorů si představujeme, že veličina sinusově se měnící je znázorněna časovým vektorem stálé velikosti, rotujícím stálou úhlovou rychlostí ω . Jeho velikost odpovídá amplitudě příslušné sinusové funkce. Fázový posun mezi dvěma veličinami je pak představován úhlem mezi příslušnými časovými vektory.

V obr. 1 je grafické zobrazení časových vektorů napětí $\hat{U}$ a proudu $\hat{I}$. Vidíme, že předcházející časový vektor proudu $\hat{I}$ je pootočen o větší úhel φ_2 vůči vztažné ose než časový vektor napětí $\hat{U}$ (úhel φ_1). Vzájemný posun mezi nimi je pak vyjádřen úhlem $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi$.



Obr. 1

Oběh časových vektorů, pokud se jedná o veličiny se stejnou frekvencí, v diagramu neuvažujeme. Pracujeme zde tedy s tak zvanými stojícími časovými vektory. To však plně vyhovuje, poněvadž nás zajímá pouze jejich velikost a vzájemný fázový posun.

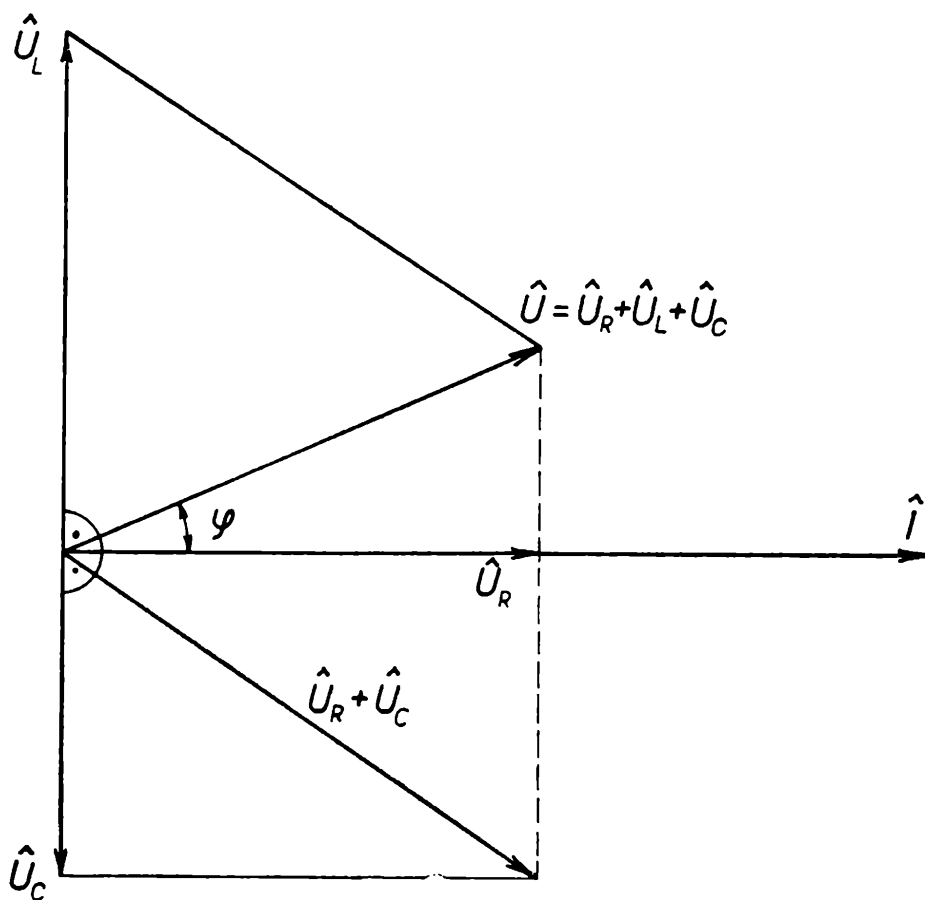


Obr. 2

K sčítání nebo odčítání dvou nebo více veličin vyjádřených sinusovými funkcemi používáme v diagramu vektorového součtu nebo rozdílu odpovídajících časových vektorů. Derivování sinusové veličiny zobrazíme v diagramu časovým vektorem, který předchází o 90° výchozí časový vektor, integrování pak časovým vektorem o 90° za ním zpožděným. Proto tedy v diagramu znázorňujícím obvod pouze s ohmickým odporem R budou časové vektory $\hat{U}$ a $\hat{I}$ ve fázi, jde-li o obvod pouze s indukčností L , bude časový vektor proudu zpožděn o 90° za časovým

vektorem napětí. U obvodu s kapacitou C bude naopak časový vektor proudu o 90° předcházet časový vektor napětí.

V obr. 2 je schématicky naznačen obvod střídavého proudu s ohmickým odporem R v sérii s indukčností L a kapacitou C . Příslušný diagram časových vektorů je v obr. 3. Z něho je patrná poloha jednotlivých časových vektorů vůči sobě a vůči společnému proudu $\hat{I}$, protékajícímu celým obvodem. V diagramu jsou vynesena dílčí napětí $\hat{U}_R$, $\hat{U}_L$ a $\hat{U}_C$ a postupným vektorovým skládáním je graficky určeno výsledné napětí $\hat{U}$, předcházející proud $\hat{I}$ v obvodu o úhel φ .



Obr. 3

Diagramy časových vektorů dávají dobrý přehled o vzájemných poměrech zúčastněných veličin co do fáze a velikosti a umožňují použití geometrických vztahů k výpočtu výsledné veličiny. Často však využíváme diagramů jen k názorné představě a výpočet provádíme komplexním počtem.

≡ NAŠE SOUTĚŽ ≡

Řešení úloh minulého ročníku

Matematika

4. Určete součet nekonečné řady

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

Jan Fráňa

(Došlo 26 řešení)

Řešil Jan Červenka, III.A SVVŠ, Havlíčkův Brod.

Položíme

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} + \frac{D}{n+3}.$$

Po vynásobení společným jmenovatelem a po úpravě máme rovnici:

$$A(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) + B(n^3 + 5n^2 + 6n) + C(n^3 + 4n^2 + 3n) + D(n^3 + 3n^2 + 2n) = 1;$$
$$n^3(A + B + C + D) + n^2(6A + 5B + 4C + 3D) + n(11A + 6B + 3C + 2D) + 6A = 1.$$

Porovnáním koeficientů u mocnin stejného stupně dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0, \\ 6A + 5B + 4C + 3D &= 0, \\ 11A + 6B + 3C + 2D &= 0, \\ 6A &= 1; \text{ odtud } A = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za A do zbývajících tří rovnic a soustavu řešíme, vychází

$$B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{3}, \quad D = -\frac{1}{6}.$$

Vztah

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} \right)$$

pro rozklad n -tého členu řady v parciální zlomy uijeme k úpravě jednotlivých členů řady:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right), \\ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right), \\ \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right), \\ \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right), \\
& \frac{1}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n-4} - \frac{1}{n-1} \right) - \\
& \quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} \right), \\
& \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1) \cdot n} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right), \\
& \frac{1}{(n-2)(n-1)n \cdot (n+1)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \\
& \frac{1}{(n-1)n(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \\
& \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right),
\end{aligned}$$

Sečtením levých stran a pravých stran, kde vynecháme členy, které se zrušily, máme vztah:

$$\begin{aligned}
& \sum_1^n \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \\
& = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right).
\end{aligned}$$

Součet nekonečné řady

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \\
&= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2}{36}; \\
S &= \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

5. V rovnici $x^5 - 11x^3 + 4x^2 + kx - 36 = 0$ určete k tak, aby platilo $x_1 + x_2 = 0$. Řešte rovnici.

Jan Fráňa

(Došlo 33 řešení.)

Řešil Pavel Polcar, II.B SVVŠ, Velké Meziříčí.

Podle vztahů mezi kořeny a koeficienty algebraické rovnice platí:

- (1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$
- (2) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 = -11$.
- (3) $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 = -4$,
- (4) $x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5 = k$,
- (5) $x_1x_2x_3x_4x_5 = 36$.

Ze vztahu (1) a z dané podmínky $x_1 + x_2 = 0$ plyne: $x_3 + x_4 + x_5 = 0$.

Upravme (3):

$$x_1x_2(x_3 + x_4 + x_5) + x_3x_4(x_1 + x_2) + x_3x_5(x_1 + x_2) + x_4x_5(x_1 + x_2) + x_3x_4x_5 = -4,$$

což dá po dosazení: $x_3x_4x_5 = -4$.

Užitím vztahů $x_2 = -x_1$ a $x_3x_4x_5 = -4$ dostaneme vztah (5): $x_1^2 = 9$ a z toho

$$x_1 = \pm 3, \quad x_2 = \mp 3$$

Pro $x = \pm 3$ vychází z dané rovnice $k = 18$.

Dělíme-li mnohočlen $(x^5 - 11x^3 + 4x^2 + 18x - 36)$ činitelem $(x^2 - 9)$, dostáváme pro kořeny x_3, x_4, x_5 rovnici:

$$x^3 - 2x + 4 = 0,$$

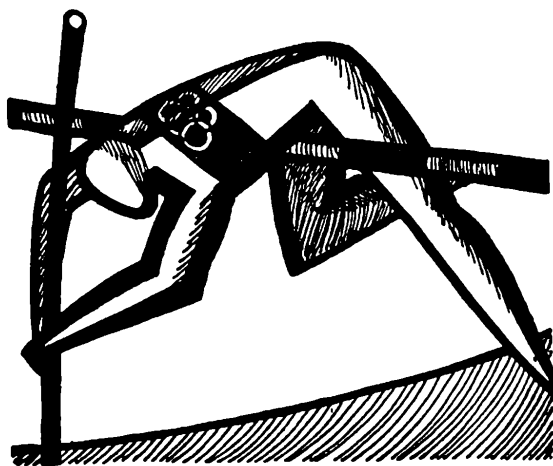
kterou píšeme ve tvaru:

$$(x^3 + 8) - 2x - 4 = 0,$$

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4 - 2) = 0.$$

Odtud kořeny:

$$x_3 = -2; \quad x_{4,5} = 1 \pm i.$$



FO

Vnútorné trenie v kvapalinách

Doc. Dr. I V A N N Á T E R, Bratislava

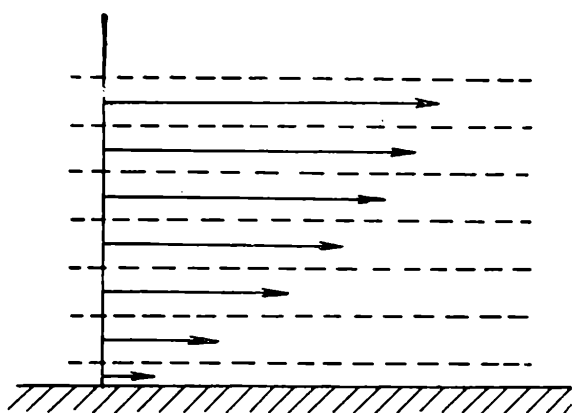
Téma na preštudovanie v IX. ročníku FO pre kategóriu C

V rámci stredoškolského učiva zoznamujú sa žiaci v mechanike kvapalín (hydromechanike) s vlastnosťami tzv. ideálnej kvapaliny a so zákonitosťami vzťahujúcimi sa na pokoj (rovnovážny stav) a pohyb (prúdenie) takejto kvapaliny. U ideálnej kvapaliny predpokladáme také vlastnosti, ktoré umožňujú v jej vnútri existenciu len normálových napätí (tlakov), tj. napätí kolmých na ľubovoľne orientovanú plošku v kvapaline. Hovoríme tiež, že takéto kvapaliny sú dokonale tekuté.

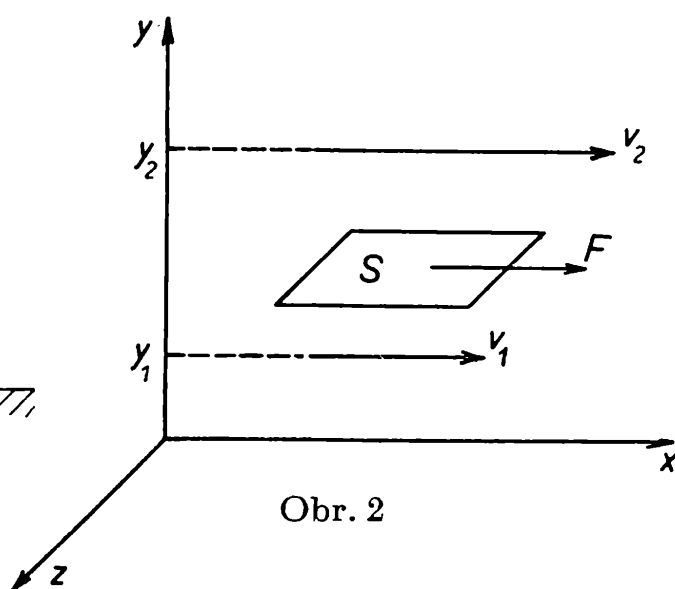
Na zmenu tvaru (odpovedajúcu deformácii v šmyku tuhého telesa) takejto kvapaliny netreba vynaložiť nijakú prácu, a to ani vtedy, ak táto zmena prebieha ľubovoľne rýchlo.

Skutočné kvapaliny sa od ideálnej líšia najmä tým, že nie sú dokonale tekuté. Nedokonala tekutosť prejavuje sa u reálnych kvapalín tým, že v prúdiacej kvapaline vznikajú tangenciálne napätia na plochách, ktoré sú rovnobežné s prúdnicami, teda so smerom rýchlosti prúdenia kvapaliny. Existencia týchto tangenciálnych napätí je podmienená tzv. vnútorným trením alebo viskozitou (vázkosťou) kvapaliny.

Pojem vnútorného trenia objasníme si nasledujúcou úvahou: Uvažujme kvapalinu prúdiacu v dostatočne širokom vodorovnom žlabu. V určitom zvislom pričnom reze bude rýchlosť prúdenia kvapaliny konštantná vo vodorovnom smere (v bodoch, ktoré majú rovnakú výšku nad dnom žlabu), najväčšie zmeny bude však táto rýchlosť vykazovať vo zvislom smere. Príčinou zmeny rýchlosti prúdenia kvapaliny vo zvislom smere je už napr. skutočnosť, že tenká vrstva kvapaliny tesne priliehajúca ku dnu žlabu sa prakticky nepohybuje v dôsledku prínavosti kvapaliny k pevnému dnu žlabu. Celú kvapalinu v žlabu si môžeme predstaviť rozdelenú na tenké vodorovné vrstvy, pričom rýchlosť prúdenia jednotlivých vrstiev vo zvislom smere nahor rastie (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

V dotykovej ploche dvoch susedných vrstiev, ktoré sa pohybujú nerovnakými rýchlosťami a teda po sebe kĺžu, vznikajú trecie sily. Tieto rýchlejšiu (hornú) vrstvu brzdia a pomalšiu (spodnú) vrstvu urýchľujú. Príčinou uvedených trecích síl v kvapaline je práve vnútorné trenie.

Zavedme si v uvedenom príklade pravouhlú sústavu súradníc pevne spojenú so stenami žlabu tak, aby os x bola orientovaná rovnobežne s rýchlosťou prúdenia kvapaliny a ležala v rovine dna žlabu, os y nech

je zvislá a os z vodorovná, ale kolmá na rýchlosť prúdenia kvapaliny (obr. 2). Vo výške y_1 nad dnom nech kvapalina prúdi rýchlosťou v_1 , vo výške y_2 rýchlosťou v_2 . Medzi dvoma susednými vrstvami vzniká na dotykovej ploche S tangenciálna trecia sila F (na obr. 2 zakreslená ako sila urýchľujúca pomalšiu spodnú vrstvu), ktorá je toľkokrát väčšia, koľkokrát väčšia je zvolená dotyková plocha S ; ďalej závisí táto sila aj od toho, do akej miery sa mení rýchlosť prúdenia kvapaliny pri prechode od jednej vrstvy k druhej. Na vzdialenosť $\Delta y = y_2 - y_1$ pripadá prírastok rýchlosti $\Delta v = v_2 - v_1$. Veličina

$$\frac{\Delta v}{\Delta y}$$

udáva, ako rýchlo sa mení rýchlosť prúdenia pri prechode od vrstvy k vrstve a nazýva sa gradient rýchlosti. Číselne je rovná prírastku rýchlosti prúdenia, pripadajúcemu na jednotkovú vzdialenosť v šmere najväčšieho vzrastu rýchlosti a má jednotku

$$\left[\frac{\Delta v}{\Delta y} \right] = \text{s}^{-1}$$

Sila F vnútorného trenia je úmerná aj gradientu rýchlosti, takže

$$F = \eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y} \cdot S. \quad (1)$$

Konštanta úmernosti η vo vzťahu (1) sa nazýva súčiniteľ vnútorného trenia (koeficient viskozity, dynamická viskozita) kvapaliny. Jeho prevrátená hodnota

$$\zeta = \frac{1}{\eta}$$

je tekutosť (fluidita) kvapaliny. Čím väčšia je hodnota súčiniteľa η , tým viac sa daná kvapalina líši od kvapaliny ideálnej.

Keďže sila vnútorného trenia závisí aj od veľkosti plochy S , na ktorej ju uvažujeme (meriame), je výhodnejšie charakterizovať vnútorné trenie v kvapaline tangenciálnym napätím τ vznikajúcim medzi susednými vrstvami kvapaliny. Napätie je všeobecne definované podielom sily a plochy, na ktorú táto sila pôsobí. Podľa (1) je teda

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y}. \quad (2)$$

Súčiniteľ η je dôležitou látkovou konštantou, charakterizujúcou vnútorné trenie v kvapaline. Jeho jednotka v sústave SI je

$$[\eta] = \left[\frac{F}{S} \cdot \frac{y}{v} \right] = \frac{\text{N m}}{\text{m}^3 \text{s}^{-1}} = \frac{\text{N s}}{\text{m}^2} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$$

Jednotka súčiniteľa vnútorného trenia v sústave SI sa nazýva *n e w t o n s e k u n d a* na štvorcový meter. V praxi sa dodnes používa jednotka viskozity zo sústavy CGS, ktorej rozmer je $\text{g cm}^{-1} \text{s}^{-1}$ a ktorá má názov *p o i s e* (čítaj poáz)

$$1 \text{ poise} = 1 \text{ P} = 10^{-1} \text{ N s m}^{-2}.$$

Vnútorné trenie hrá veľmi dôležitú úlohu u mazadiel, ktorými máme napr. čapy v ložiskách. Použitím mazadla mení sa pomerne veľké suché trenie medzi čapom a ložiskom na omnoho menšie vnútorné trenie v mazadle (oleji, vazelíne). O tom, aké mazadlo je v danom prípade najvýhodnejšie (s ohľadom na hodnotu súčiniteľa viskozity), rozhodujú dva faktory: tlak čapu na ložisko a rýchlosť otáčania sa čapu.

Pri malom tlaku čapu na ložisko a veľkej rýchlosti otáčania sa čapu vytvorí sa medzi čapom a ložiskom vrstva mazadla takmer všade rovnakej hrúbky. V dôsledku priľnavosti je tesne pri obvodovej stene ložiska tenučká vrstva mazadla, ktorá je voči ložisku v pokoji (nepohybuje sa), tesne pri obvode čapu zas tenučká vrstva mazadla, ktorá sa pohybuje (otáča) spolu s čapom rovnakou uhlovou rýchlosťou. Tangenciálne napätie na obvode čapu, vyvolané vnútorným trením v mazadle, je preto priamo úmerné súčiniteľu vnútorného trenia mazadla.

Pri veľkom tlaku čapu na ložisko leží čap, pokiaľ sa neotáča, jednou povrchovou priamkou priamo na ložisku. Pri roztáčaní vzniká v tomto mieste takmer len suché trenie. Priľnavosťou sa však pri otáčaní čapu privádza mazadlo aj do týchto miest a hrúbka jeho vrstvy tu závisí od viskozity mazadla. Čím viskóznejšie je mazadlo a čím väčšia je rýchlosť otáčania sa čapu, tým rovnomernejšia je vrstva mazadla medzi čapom a ložiskom. Aby bolo trenie medzi čapom a ložiskom čo najmenšie, treba pri veľkom tlaku na ložisko a malej rýchlosti otáčania sa čapu použiť mazadlá s veľkou hodnotou súčiniteľa vnútorného trenia.

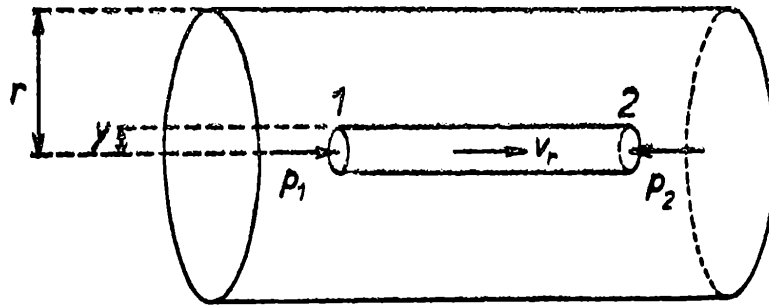
Uvažujme teraz prúdenie kvapaliny potrubím kruhového prierezu o polomere r . Ideálna kvapalina by v tomto potrubí prúdila tak, že v rovinnom reze kolmom na os potrubia bola by rýchlosť v prúdenia konštantná. Objem V kvapaliny, ktorý prierezom potrubia pretečie za čas t , určuje v tomto prípade jednoduchý vzťah

$$V = \pi r^2 \cdot v \cdot t.$$

Ak je však kvapalina viskózna, bude sa rýchlosť prúdenia od stien potrubia (tu je táto rýchlosť nulová) k jeho osi zväčšovať a najväčšiu hodnotu dosiahne v strede potrubia.

Aby sme zistili, akou rýchlosťou prúdi viskózna kvapalina priamym kruhovým potrubím polomeru r , uvažujme vnútri prúdiacej kvapaliny v potrubí valček dĺžky Δl s polomerom y , ktorého pozdĺžna os je zhodná s osou potrubia (obr. 3).

Ak majú čiastočky kvapaliny pretekať týmto valčekom od podstavy 1 k podstave 2 rovnomerným pohybom, musí byť rozdiel F' tlakových síl pôsobiacich na obidve podstavy v rovnováhe s trecou silou F pôsobiaceou na plášť tohoto valčeka.



Obr. 3

Sila $F' = \pi y^2 (p_1 - p_2) = \pi y^2 \Delta p$, kde Δp je pokles tlaku pripadajúci na dĺžku Δl potrubia pozdĺž jeho osi, zapríčinený energetickými úbytkami pri prekonávaní vnútorného trenia v prúdiacej kvapaline. Sila F podľa vzťahov (2) a (1) má veľkosť

$$F = \tau S = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} \cdot 2 \pi y \Delta l.$$

Platí teda rovnica

$$\pi y^2 \Delta p = 2 \eta \pi \Delta l y \frac{\Delta v}{\Delta y},$$

takže

$$\Delta v = \frac{1}{2 \eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} y \Delta y = z \Delta y, \quad (3)$$

kde Δv je úbytok rýchlosti prúdiacej kvapaliny pri zväčšení vzdialenosti od osi potrubia o hodnotu Δy a

$$z = \frac{1}{2 \eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot y \quad (3a)$$

Výraz

$$\frac{1}{2 \eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l},$$

ktorý je konštantný, označme k , takže $z = k \cdot y$. Veličiny z a y sú premenlivé, y je nezávisle premenná (mení sa v hraniciach $0 \leq y \leq r$); z je jej funkcia (závisle premenná). Z rovnice $z = k \cdot y$ vidieť, že veličina z je priamo úmerná veličine y . Grafickým obrazom funkcie

$$z = \frac{1}{2 \eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot y$$

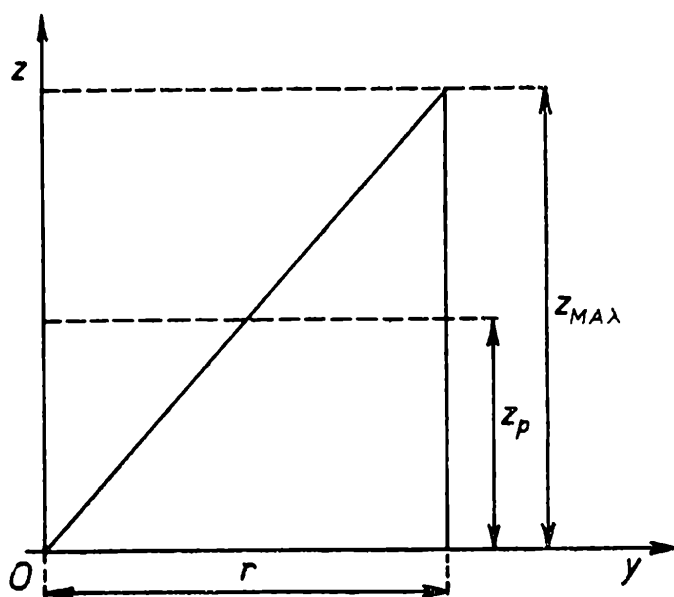
je teda priamka, ktorá prechádza začiatkom súradnicovej sústavy yz . Pri hodnote $y = 0$ má aj z nulovú hodnotu, pri hodnote $y = r$ má z najväčšiu hodnotu

$$z_{\max} = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r$$

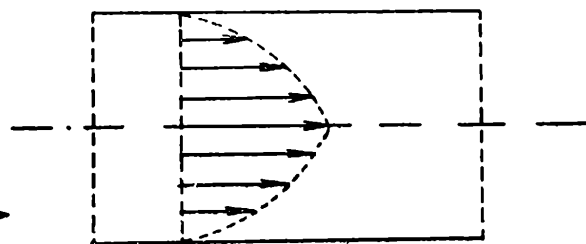
(obr. 4).

Pretože ide o priamu úmernosť, je priemerná hodnota z_p veličiny z rovná aritmetickému priemeru jej najväčšej a najmenšej hodnoty, takže

$$z_p = \frac{1}{2} \cdot z_{\max} = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r.$$



Obr. 4



Obr. 5

Podľa vzťahu (3) vyjadruje $\Delta v = z_p \cdot r$ úbytok rýchlosti prúdiacej kvapaliny odpovedajúci prírastku vzdialenosti y od osi potrubia o hodnotu r . V tejto vzdialenosti od osi potrubia je však rýchlosť prúdiacej kvapaliny nulová. Preto výraz $z_p \cdot r = v_r$ určuje rýchlosť častíc kvapaliny, ktoré sa pohybujú po osi potrubia. Je teda

$$v_r = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r^2, \quad (4)$$

a vo vzdialenosti y od osi valca má preto rýchlosť prúdiacej kvapaliny hodnotu

$$v_y = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r^2 - \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot y^2 = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot (r^2 - y^2). \quad (4a)$$

Ak považujeme x za nezávisle premennú a y za závisle premennú, je grafickým obrazom rovnice

$$y = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot y^2$$

v súradnicovej sústave x, y parabola. Preto vyplňujú koncové body vektorov rýchlostí, vynesných zo všetkých bodov priesečnice osového a kolmého rezu potrubím, parabolou (obr. 5) a koncové body vektorov príslušných rýchlostí vynesných zo všetkých bodov kolmého rezu potrubím rotačný paraboloid.

Pomocou integrálneho počtu, ktorý žiaci preberajú v matematike v III. triede SVŠ, možno vypočítať, že za čas t pretečie prierezom $S = \pi r^2$ kruhového potrubia kvapalina objemu

$$V = \frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot t. \quad (5)$$

Zo vzťahu (5) je zrejmé, že objem V veľmi rýchlo rastie s rastúcim polomerom potrubia, je priamo úmerný štvrtej mocnine tohoto polomeru.

Vnútorne trenie v kvapaline sa uplatňuje aj vtedy, ak sa v kvapaline pohybuje cudzie teleso. Vrstva kvapaliny priliehajúca k telesu prilne k jeho povrchu a je úplne unášaná telesom. Susedná vrstva kvapaliny je unášaná za telesom menšou rýchlosťou a tak vzniká medzi vrstvami trenie. Výsledkom týchto procesov je odpor, ktorý kvapalina kladie pohybujúcemu sa telesu. Veľkosť tohoto odporu závisí podstatne od tvaru a rozmerov telesa a, samozrejme, od viskozity kvapaliny. Ak sa v kvapaline viskozity η pohybuje guľa polomeru r rýchlosťou v , pôsobí proti nej odporová sila

$$F_S = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v. \quad (6)$$

Tento vzťah teoreticky odvodil *Stokes*, preto sa nazýva *Stokesovým vzťahom*. Na guľôčku voľne padajúcu v kvapaline pôsobia tak celkom tri sily: tiaž G guľôčky, vztlaková sila F_A podľa Archimedovho zákona a odporová sila Stokesova F_S . Prvá z uvedených síl má smer zvislý nadol, zbývajúce dve smerujú zvislo hore. Pritom Stokesova sila je priamo úmerná rýchlosti padania guľôčky a teda narastá pri zrýchľovaní sa guľôčky. V okamihu, keď nastane rovnováha síl pôsobiacich na guľôčku, platí rovnica $F_A + F_S = G$, a od tohoto okamihu sa guľôčka pohybuje bez zrýchlenia konštantnou rýchlosťou v_m , pri ktorej práve nastala rovnováha síl. To je maximálna rýchlosť,

akú môže voľne padajúca guľôčka v kvapaline dosiahnuť. Ak ρ je hustota kvapaliny a ρ' hustota guľôčky, sú

$$F_A = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g, \quad F_S = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v, \quad G = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho' \cdot g$$

Z podmienky rovnováhy týchto síl, vyjadrenej rovnicou

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g + 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_m = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho' \cdot g,$$

môžeme vypočítať maximálnu rýchlosť guľôčky

$$v_m = \frac{2 \cdot r^2 \cdot (\rho' - \rho) \cdot g}{9 \cdot \eta}. \quad (7)$$

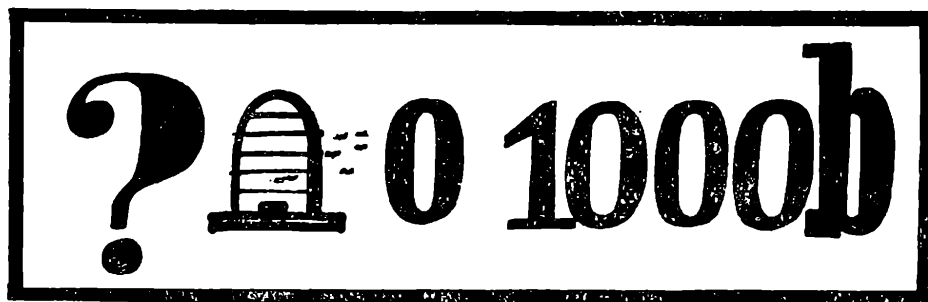
Zo vzťahu (7) je zrejmé, že maximálna rýchlosť padania guľôčky vo väzkej kvapaline je priamo úmerná štvorcu polomeru gule. Čím menšia guľôčka, tým pomalšie v kvapaline padá.

Stokesov vzťah môžeme použiť aj pri vyšetrovaní pohybu malých guľôčiek v plynnom prostredí, ktoré možno v tomto prípade považovať za väzkú kvapalinu.

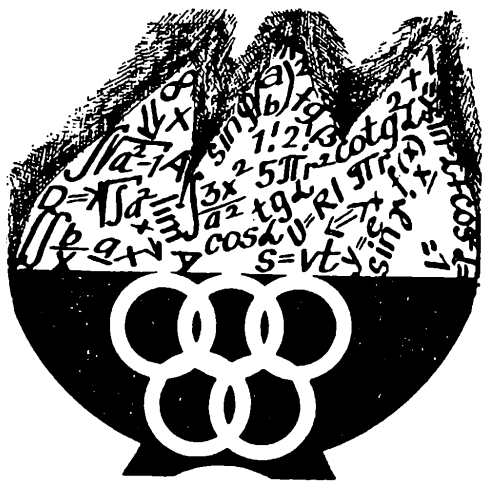
Ak nejakým vhodným spôsobom odmeriame rýchlosť v_m padania guľôčky, môžeme zo vzťahu (7) vypočítať súčiniteľ vnútorného trenia kvapaliny

$$\eta = \frac{2 \cdot r^2 (\rho' - \rho) \cdot g}{9 \cdot v_m}. \quad (8)$$

Zo vzťahu (8) vychádzame pri meraní súčiniteľa vnútorného trenia kvapalín Stokesovou metódou.



REBUS • REBUS • REBUS



MMO

IX. mezinárodní matematická olympiáda

VLASTIMIL MACHÁČEK, Praha

(Pokračování)

5. Budiž dána posloupnost

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_8, \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2, \end{aligned}$$

$$c_n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_8^n,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_8$ jsou reálná čísla, ne všechna rovná nule. Necht' dále nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{c_n\}$ je rovno nule. Určete všechna přirozená čísla n , pro která je $c_n = 0$.

(Sovětský svaz, 7 b.)

6. Při sportovní soutěži bylo rozděleno v n po sobě jdoucích dnech ($n > 1$) celkem m medailí. Prvního dne byla udělena 1 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících $m - 1$ medailí. Druhého dne byly uděleny 2 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících atd. Posledního dne bylo uděleno posledních n medailí. Kolik dní trvala soutěž a kolik medailí bylo celkem rozděleno?

(Maďarsko, 8 b.)

Řešení úloh a příslušný komentář přineseme v dalším čísle tohoto časopisu. Nyní se omezíme jen na uvedení výsledků soutěže. V tabulce 1 jsou uvedeny počty bodů, které získali jednotliví žáci i součet bodů získaných jednotlivými státy — i když MMO je soutěž jednotlivců. Počet členů italského a francouzského družstva byl nižší než osm a Francouzi se zúčastnili soutěže až druhý den; proto je nutno výsledky těchto družstev vzít v úvahu s příslušnými korekturami. Z tabulky 1 je též vidět, že jeden z nových účastníků — Anglie — bude

patřit mezi nejlepších pět družstev. Československé družstvo své umístění letos poněkud zlepšilo a dostalo se do čela skupiny slabších družstev.

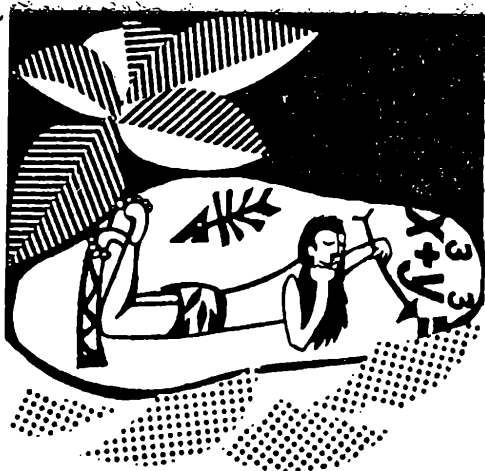
Maximální počet bodů, které mohl získat jeden žák, byl 42. Ceny byly uděleny v těchto rozmezích: první cena byla za 38 až 42 bodů, druhá cena za 30 až 37 bodů a třetí cena za 22 až 29 bodů. Na závěr dnešní zprávy uvedeme ještě tabulku 2, z níž je vidět počet získaných cen reprezentantů jednotlivých států.

Tabulka 1. Počty získaných bodů

Země	Počet bodů žáka č.								Celkový počet bodů země
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Sovětský svaz	37	35	32	42	27	38	39	25	275
Něm. dem. rep.	42	30	23	42	39	35	13	33	257
Maďarsko	34	31	38	33	23	26	38	28	251
Anglie	24	28	18	36	34	28	41	22	231
Rumunsko	34	42	22	17	29	19	28	23	214
Československo	16	27	30	24	9	13	11	29	159
Bulharsko	7	14	24	20	20	11	21	42	159
Jugoslávie	13	18	11	18	26	22	6	22	136
Švédsko	16	10	15	28	9	20	14	23	135
Itálie	20	35	19	7	26	3	—	—	110
Polsko	22	8	12	7	18	5	9	20	101
Mongolsko	10	11	26	5	6	9	7	13	87
Francie	4	10	9	6	12	—	—	—	41

Tabulka 2. Přehled udělených cen

Země	Cena			Celkem
	I.	II.	III.	
Anglie	1	2	4	7
Bulharsko	1	—	1	2
Československo	—	1	3	4
Itálie	—	1	1	2
Jugoslávie	—	—	3	3
Maďarsko	2	3	3	8
Mongolsko	—	—	1	1
Německá demokratická republika	3	3	1	7
Polsko	—	—	1	1
Rumunsko	1	1	4	6
Sovětský svaz	3	3	2	8
Švédsko	—	—	2	2
Celkem	11	14	26	51



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

0 jedné kombinatorické úloze

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

V 9. čísle ročníku 44 (1965/66) Rozhledů jsme předložili k řešení jednu slovní úlohu z kombinatoriky:

K úschově tajné dokumentace si chce ředitelství velkého podniku pořídit zvláštní sejf opatřený větším počtem zámků. Klíče od těchto zámků mají být rozděleny mezi ředitele, jeho tři náměstky a pět dalších úředníků tak, aby se sejf mohl otevřít jedině tehdy, jsou-li přítomni (samozřejmě se svými klíči) buď 1. ředitel a alespoň jeden jeho náměstek, nebo 2. všichni tři náměstci, nebo 3. dva náměstci a aspoň dva z pěti úředníků. Kolika zámků minimálně bude třeba sejf opatřit, kolik klíčů od jednotlivých zámků bude třeba a jak mají být klíče rozděleny?

Zdá se, že naši čtenáři shledali úlohu buď málo zajímavou, nebo příliš obtížnou: jenom tři z nich nám zaslali řešení.

Kromě toho se ukázalo, že takto formulovaná úloha připouští dvojí výklad. Existují totiž dva druhy zámků, které se liší tím, zda je nebo není možné klíč z otevřeného zámku vytáhnout. V prvním případě, a tak byla také úloha původně míněna, nemá smysl, aby na sejfu bylo několik stejných zámků (ke kterým se hodí stejný klíč): kdo klíč má, otevře je všechny, kdo ho nemá, neotevře ani jediný. Ve druhém případě však naopak stačí opatřit sejf větším počtem exemplářů jediného typu zámku a osobám oprávněným otevírat sejf přidělit klíče (všechny stejné!) v takovém počtu, aby byly podmínky úlohy splněny. Praktickou nevýhodou tohoto uspořádání je, že si kterýkoliv vlastník klíčů může sejf otevřít sám, jestliže si opatří dostatečný počet kopií klíčů, které sám vlastní. Tuto možnost lze ovšem poněkud omezit, nebude-li na sejfu jen jeden typ zámků, avšak v obecném případě je nutno ji brát v úvahu.

Ponechme pro jednoduchost zcela stranou i možnosti kombinací obou druhů zámků, „universálních“ klíčů, které se hodí k několika různým zámkům a přirozeně též celou technickou stránku problému, a všimněme si tu jen obou „čistých“ úloh.

Vezměme nejdříve první případ, kdy klíče lze po otevření opět vytáhnout. Takto pojatou úlohu řešila - jako jediná - *Renáta Žaludová*, studující S V V Š ve Znojmě. Její řešení je správné. Je potřeba (minimálně) celkem 19 zámků, jejichž klíče jsou (při vhodném očíslování zámků) rozděleny takto:

ředitel: 1 až 18;

- | | |
|-------------|--|
| 1. náměstek | 1, 2, 3, 4, 5, 16, 17, 19; |
| 2. náměstek | 6, 7, 8, 9, 10, 16, 18, 19; |
| 3. náměstek | 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19; |
| 1. úředník | 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14; |
| 2. úředník | 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15; |
| 3. úředník | 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15; |
| 4. úředník | 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15; |
| 5. úředník | 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15. |

Neuvedeme si zde explicitně řešení R. Žaludové v plném rozsahu (je ostatně trochu zbytečně zdlouhavé) a spokojíme se s naznačením obecného principu řešení, jehož řešitelka v podstatě rovněž používala.

Uvažujme všechny skupiny osob, jež lze utvořit z ředitele, náměstků a úředníků. Některé z nich jsou schopny sejf otevřít, jiné nikoliv. Nazvěme *maximální* každou takovou skupinu osob, která sice sama není schopna sejf otevřít, avšak bude moci tak učinit, jakmile se k ní připojí kterákoliv ze zbývajících osob. Takové maximální skupiny tvoří: ředitel se všemi pěti úředníky, nebo jeden (kterýkoliv) náměstek se všemi pěti úředníky, anebo dva náměstci s jedním úředníkem.

Je zřejmé, že každé této maximální skupině chybí klíč alespoň od jednoho zámku a přitom všichni ostatní tento klíč mají. Minimálního počtu zámků dosáhneme tak, že každé maximální skupině přiřadíme jeden zámek a klíče od něho dáme právě těm osobám, které k této skupině nepatří. Dostaneme jak hledané minimum, tak i explicitní rozdělení klíčů jednotlivým osobám. Počty potřebných exemplářů klíčů je rovněž vidět z jejich rozdělení.

Danou úlohu lze přirozeně ještě dále zobecňovat. Také o to se R. Žaludová pokusila. Úlohu řešila s obecnými počty náměstků a úředníků. To však zdaleka není konec všech možností. Patrně nejobecnější možná formulace úlohy je tato: všechny možné skupiny osob, jež lze tvořit z dané konečné množiny osob majících přístup k sejfu, jsou rozděleny do dvou tříd: skupiny z první třídy jsou schopny sejf otevřít, skupiny z druhé třídy nikoliv. Rozdělení skupin do těchto dvou tříd je zcela libovolné s jedinou podmínkou konsistence: je-li některá skupina neschopna sama sejf otevřít, musí být neschopna i každá její podskupina. Princip řešení zůstává stále stejný.

Obraťme se nyní ke druhému pojetí úlohy, kdy jedním klíčem lze otevřít jen jeden zámek (klíč lze vytáhnout jen ze zavřeného zámku). Začneme s jednoduchým případem, kdy všechny zámky (a tedy také všechny klíče) jsou stejné. Záleží na celkovém počtu klíčů přítomných osob.

Řešení této úlohy zaslal *Vlastimil Bartoš*, studující ŠVVŠ v Bystřici p. Hostýnem. K zajištění podmínek úlohy je potřeba minimálně 14 zámků a 31 klíčů. Při tom ředitel má osm klíčů, náměstci po šesti a úředníci po jednom klíči.

Srovnání s prvním pojetím úlohy ukazuje, že toto druhé uspořádání je pro uživatele sejfu pohodlnější. Nosí s sebou podstatně méně klíčů, ačkoliv zámků je jen o pět méně.

K uvedenému řešení lze dospět tímto postupem. Především je ze symetrického postavení náměstků i úředníků vidět, že všichni náměstci (a podobně i všichni úředníci) mají stejný počet klíčů. Označme si r počet klíčů ředitele, n počet klíčů, jež má každý náměstek, a u počet klíčů každého úředníka; dále buď z počet zámků na sejfu. O tom, zda určitá skupina je nebo není schopna sejf otevřít, rozhoduje nyní jen celkový počet klíčů, které dohromady vlastní: je-li tento počet alespoň roven z , skupina sejf otevře, je-li počet klíčů menší než z , skupina sejf neotevře. Z daných podmínek úlohy tak dostáváme ihned nerovnosti

$$\begin{aligned} r + n &\geq z, \\ 3n &\geq z, \\ 2n + 2u &\geq z. \end{aligned}$$

Avšak pro skupiny neschopné sejf otevřít lze napsat nerovnosti opačné, např.

$$\begin{aligned} r + 5u &< z, \\ 2n + u &< z, \\ n + 5u &< z. \end{aligned}$$

Setkali jsme se tu opět s „maximálními“ neschopnými skupinami z prvního řešení.

Řešení naší úlohy se tak zredukovalo na tuto úlohu: Najít přirozená čísla r, n, u, z vyhovující daným nerovnostem tak, aby z bylo minimální. Postupným kombinováním daných nerovností dojdeme k nerovnostem

$$5u < n < n + u < r,$$

takže ke zřejmé nerovnosti $u \geq 1$ dostaneme ještě $n \geq 6, r \geq 8$. Snadno si však ověříme, že existuje řešení, pro něž platí rovnosti $u = 1, n = 6, r = 8, z = 14$; minimalita je zřejmá.

Celou tuto úlohu je možno interpretovat ještě jiným zajímavým způsobem. Představme si, že se v daném kolektivu osob přijímají rozhodnutí hlasováním. K přijetí je potřeba určitého stanoveného minimálního počtu hlasů. Přitom členové kolektivu mohou mít i jiný počet hlasů než jeden. Nazvěme *d o s t a t e č n o u* každou skupinu, která má dohro-

mady počet hlasů potřebný k prosazení rozhodnutí. Naše úloha o klíčích je pak ekvivalentní následující úloze: V daném kolektivu jsou stanoveny skupiny osob, které mají být dostatečné; kolik hlasů mají mít jednotlivé osoby a kolik hlasů má tvořit minimum potřebné k odhlasování, aby toto minimum bylo co nejmenší.

Problémy tohoto druhu byly již často studovány. Pro další poučení o nich můžeme odkázat čtenáře na literaturu; např. na velmi zajímavou knihu J. G. Kemeny, J. L. Snell, G. L. Thompson, *Introduction to Finite Mathematics*, jež je u nás dostupná v ruském překladu (Dž. Kemeni, Dž. Snell, Dž. Tompson, *Vvedeniye v konechnuyu matematiku*, Moskva 1963).

Vraťme se však ještě na okamžik k původní úloze se zámky a klíči (ve druhém pojetí). Pripustíme-li více typů zámků nežli jen jeden, úloha se značně zkomplikuje. Dá se ovšem očekávat, že při tom klesne potřebný počet zámků. Tak např. pro dva typy zámků uvádí *V. Bartoš* (bez důkazu) toto řešení:

ředitel má 4 klíče typu 1 a 1 klíč typu 2,
každý náměstek má 2 klíče typu 1 a 1 klíč typu 2,
každý úředník má 1 klíč typu 1;
na seifu je celkem 6 zámků typu 1 a 2 zámky typu 2.

Úlohu lze řešit obdobně jako v případě jednoho typu zámků, tj. pomocí nerovností; postup je však o to složitější, že nerovnosti druhého druhu (pro skupiny neschopné sejf otevřít) tu vystupují v alternativách. V našem konkrétním případě však lze nepříliš dlouhou diskusí dokázat, že řešení podané *V. Bartošem* je skutečně minimální.

Také úlohu se dvěma typy zámků lze interpretovat v termínech hlasovacích koalicí: hlasování se koná odděleně ve dvou shromážděních (a rozhodnutí musí být schváleno v obou), v nichž jsou (s různým počtem hlasů) stejné osoby.

Jiná možná interpretace je geometrická, pomocí skládání vektorů (s celočíselnými nezápornými souřadnicemi) v rovině.

Z matematického hlediska mnohem zajímavější je ovšem hledání obecných algoritmů řešení takových úloh při libovolně stanovených skupinách, jež mají být schopny sejf otevřít. Jestliže připustíme ještě větší počet typů zámků (hlasuje se odděleně ve více shromážděních; skládáme vektory ve vícerozměrném prostoru), úloha se značně zkomplikuje a její obecné řešení bude asi skutečně dosti obtížné. S podnětným nápadem zde přišel třetí z řešitelů *Tomáš Duby* ze *SPŠE v Bratislavě* využít k řešení aparátu Booleových algeber.



RŮZNÉ • RŮZNÉ • RŮZNÉ

Vzpomínka na Michaela Faradaye

Dne 25. srpna 1967 uplynulo 100 let od úmrtí jednoho z největších fyziků XIX. století *Michaela Faradaye*. Připomeňme si v této krátké vzpomínce několik údajů z jeho života. Faraday se narodil r. 1791 v Newington Butts u Londýna. Jeho otec byl kovářem, ale chlapce nechal učit va-
začem knih. To bylo štěstí, protože mistr dovolil Faradayovi číst po práci knihy, které svázel. Tak se mu také dostaly do ruky knihy o chemii, fyzice a elektřině. Začal si podle nich dělat pokusy. Později navštěvoval večerní přednáškový vý-
znamného chemika sira H. Davy-
ho, na nichž si doplňoval vzdělání.

Po vyučení knihařem požádal H. Davyho o přijetí do jeho vědecké laboratoře v londýnské Královské společnosti. Byl přijat na podřadné místo, ale brzy se stal Davyho asistentem a r. 1825 teprve 34letý jeho nástupcem ve funkci ředitele laboratoře.

V té době měl už za sebou mnoho vlastních výzkumů z oboru chemie i fyziky. Např. r. 1821 se mu podařilo uvést do otáčivého pohybu pohyblivé části proudové-
ho obvodu účinkem permanentního magnetu a podobně roztočil i magnety účinkem proudů. Po sérii význačných objevů zejména francouzských fyziků Araga, Gay-



Lussaca, Biota, Savarta, Ampéra, Ohma a dalších, dosáhl Faraday svou nesmírnou houževnatostí a pílí patrně největšího úspěchu fyziky XIX. století — když objevil *elektromagnetickou indukci*. V r. 1833 byl povolán na profesorský stolec v londýnském Royal Institution. Ve své výzkumné činnosti však neustal. Pokračoval v práci svého učitele Davyho na výzkumu elektrolýzy a r. 1834 stanovil tzv. *elektrolytické zákony*. Roku 1837 objevil *působení dielektrika na elektrostatické procesy*, v r. 1843 dokázal *větu o zachování náboje* a r. 1846 *diamagnetismus*.

Celý život plnil Faraday své heslo „work, finish, publish“ — „pracuj, dokonči, uveřejni“.

Faradayovo dílo obdivoval vý-

značný fyzik J. C. Maxwell a s obzvláštním porozuměním je zpracoval v ucelený teoretický základ dalšího bádání — *teorii elektromagnetického pole*, kterou pak dále rozvíjeli Poynting, Lorentz, Poincaré, Hertz a další. Maxwell poznamenal o své vlastní práci skromně „Podnikl jsem tuto práci výhradně v naději, že se mi snad podaří vyjádřit Faradayovy myšlenky a metody teoreticky.“

Když před sto lety v Hampton Court u Londýna dne 25. srpna 1867 zavřela smrt Faradayovy oči, pak zavřela oči člověka, kterému bylo dopřáno vidět a poznat mnoho z tajů přírody jako prvnímu z lidí.

Inž. Jiří Machalický, CSc.

Josef Božek

JOSEF KOTYK, Pardubice

„Máme právo být hrdi na náš vklad do pokroku vědy a techniky,“ napsal Václav Kopecký. „Pyšníme se proto před světem jmény našich vynálezců...“

Jedním z nich, mužem vysoce talentovaným, jenž za příznivých okolností se mohl stát vynálezcem lokomotivy, byl *Josef Božek*. S jeho jménem se čtenáři našeho časopisu setkají jen zřídka, záslužné činnosti tohoto zapomínaného pionýra technického pokroku a jeho průkopnického díla vzpomínáme proto u příležitosti letošního 150. výročí jeho památných pokusů.



Josef Božek se narodil 28. února 1782 v Bírově (pol. Bierów) ve Slezsku. Již za studií v Těšíně a v Brně se pilně zabýval matematikou a fyzikou, zvláště mechanikou. Snášeje trpký úděl chudého studenta, živil se opravováním hodiněk a soukromým vyučováním. Nevlídné životní podmínky se zlepšily teprve

za jeho pobytu v Praze, kde Božek přijal místo vychovatele v rodině hraběte Clam-Martiniče, později místo mechanika tehdy vznikající vysoké školy technické.¹⁾ Pro ni vykonal Božek mnoho zdařilých prací a konstrukcí (připomíná se mj. na 25 modelů různých strojů); hodiny na pražské hvězdárně, umělá ruka pro rumunského knížete Ypsilantiho, umělé nohy pro ruského důstojníka Danielowského a jiná díla umělecké mechaniky dokumentovaly před celou Prahou jeho neobyčejné nadání, vynalézavost a dovednost tou měrou, že Božkovo jméno se brzo stalo i v nejvyšších kruzích známým. A na přízni české šlechty a nutném porozumění Božkovi, jenž si přes nedostatek potřebných prostředků vytyčil úkoly tak smělé a náročné, ovšem velmi záleželo.

Pozornost fyziků a techniků upoutávala v době, o níž píší, stále větší měrou nová hnací síla, *síla páry*. Zdařilé pokusy Američana Roberta Fultona (čti Faltna), jenž použil parního stroje poprvé roku 1807 k pohonu lodi, a Angličana George Stephena (čti Džordže Stývnsna) roku 1814 s první lokomotivou, jež mohla tzv. zvratným rozvodem jet dopředu i dozadu, dávaly tušit, že nové století XIX. se stane skutečně *stoletím páry*. Ani náš malý národ neměl zůstat bez účasti na tomto vývoji. Shledáváme pak, že již dne 17. září 1815 předvedl Božek v Praze ve Střemovce parní

¹⁾ Pražská polytechnika vznikla roku 1803 z veřejné stavovské školy inženýrské, zřízené reskriptem císaře Josefa I. již roku 1707.

vůz vlastní konstrukce, jehož pohyb osobně řídil.²⁾ O dvě léta později oznamoval Pražanům prostý plakátek, že „podepsaný Josef Božek, první mechanik na pražské polytechnice, bude mít s výsostným povolením nesmírnou čest představit na rameni Vltavy v Bubenči v neděli dne 1. června 1817 (když to počasí dovolí) vysoké šlechtě a ctihodnému publiku svou první parní loď³⁾, sedm sáhů dlouhou a devět stop širokou.“⁴⁾

Naděje, které Božek s touto produkcí spojoval, byly veliké. Pokusy, které předem vykonal s lodkou menších rozměrů (délky 5 stop) na rybníce zahrady Valdštejnského paláce v Praze, byly všechny úspěšné. Nejistou zůstávala tedy jen podmínka příznivého počasí.

Neděle 1. června 1817 nastala vskutku jako krásný letní den, jenž od časného rána sliboval velikou účast předních reprezentantů české šlechty Nostice, Kolovrata a Kounice, kteří Božka osobně poznali za jeho nedávných pokusů s parním vozem ve Smečně a k dalším úspě-

chům ho povzbuzovali. Božek nepotřeboval však ničeho více než peněz. V památnou červnovou neděli před 150 lety byla proto i panská přízeň vystavena zkoušce. V ní neobstála. Stačilo, aby obloha náhle ztemněla a nastal prudký liják. Panští kočí práskli do koní, šlechta odjela a z ostatního „ctihodného publika“ zůstala hrstka lidí. Ve zmatku, který za deště nastal, bylo Božkovi ukradeno i vybrané vstupné, jehož chtěl použít k zlepšení svého vynálezu.

Duševní stav vynálezce byl žalostný. Roztrpčen, zklamán, Božek upadl přímo v zoufalství.

To byla jeho odplata!

Nevděk ho mučil, hrozný nevděk za jeho veliké dílo.

I sebral své poslední síly. Chvěl se na celém těle. Vztáhl však pravici — s těžkým kladivem. Držel ji okamžik nad strojem, ještě váhal, ale pak — udeřil. Zděšený lid něco zmateně volal. Avšak Božek, nedbaje, udeřil stroj kladivem znovu, znovu a znovu, až bušením své dílo, jemuž léta obětavě žil, otec a mistr jeho, docela zničil...

Božek zemřel v Praze 21. října 1835.

Jméno Josefa Božka, které má na své přídi nová motorová loď plující z Děčína do Hamburku, je jen malou splátkou naší doby na velký dluh tomuto velikánu našich dějin.

Tragiku nadějného vynálezce Josefa Božka, jehož tehdejší společnost nechala zapadnout, přibližuje člověku nové doby film „Posel úsvitu“. Také stejnojmenná románová biografie od Jaroslava R. Vávry zasluhuje pozornosti čtenářů.

Portrét Josefa Božka stal se také námětem poštovní známky (viz obr.); byla vydána roku 1957 u příležitosti 175. výročí Božkova narození (zároveň 250 let trvání inženýrských škol v Praze) k uctění jeho památky.

²⁾ Obrázek Božkova parního vozu (podle současné kresby) mohou čtenáři nalézt např. v díle Devatenácté století slovem i obrazem, II. (svazek první), str. 4.

³⁾ Obrázek Božkovy parní lodi (podle současné kresby) přináší rovněž Devatenácté století slovem i obrazem, I. c.

⁴⁾ Sáhu a stopy bylo v té době užíváno jako měr délkových této velikosti: 1 sáh $\doteq$ 1,896 m, 1 stopa $\doteq$ 0,316 m.

Fyzika rekreačne

DANIEL KLUVANEC, Nitra

Rekreačné stredisko Západoslvenských elektrární v Obyciach, postavené v malebnom prostredí hôr v severnej časti nitrianskeho okresu, privítalo v predposledný júnový týždeň najlepších žiakov — fyzikov z radov absolventov 9. ročníkov ZDŠ Západoslvenského kraja na seminári Fyzikálnej olympiády. Usporiadatelia tohto seminára — pobočka Jednoty československých matematikov a fyzikov v Nitre a odbor školstva Zs KNV — si určili za cieľ prehĺbiť odborné vedomosti účastníkov seminára, získať ich pre systematické štúdium fyziky a vo voľnom čase seminára sa nádejným adeptom fyziky odvdáčiť za ich doterajšiu prácu športom, turistikou a zábavou a povzbudiť ich do ďalšej aktivity vo FO.

I napriek tomu, že pobočka JČMF v Nitre bola prvýkrát usporiadateľom takéhoto seminára, možno povedať, že vytýčený cieľ bol splnený. Účastníci seminára odchádzali z Obýc s plným uspokojením, niektorí snád s dojmom, že odborná časť seminára bola rozsahovo veľká, a teda aj mimoriadne náročná.

Odborne bol seminár zameraný na mechaniku hmotného bodu (kinematika priamočiarych a krivočiarych pohybov, základné zákony dynamiky hmotného bodu). Pracovný deň sa skladal zo 4hodinovej prednášky, 2hodinového seminára a z 2 hodín samostatného štúdia. K učebnej problematike boli premietané filmy (Úlohy o pohybe I a II, Pohyby v gravitačnom poli apod.). Veľký rozruch medzi účastníkmi seminára spôsobil skúšací stroj, ktorý vedenie seminára po-

užilo na preverenie žiakov, ako pochopili prednášanú látku. Záverom seminára sa uskutočnila súťaž v riešení príkladov, ktorú vyhral najmladší účastník seminára K. Šafařík, žiak 8. roč. ZDŠ na Košickej ulici v Bratislave s plným bodovým hodnotením. Na ďalších miestach sa umiestnili Vl. Černý zo ZDŠ na Košickej ulici v Bratislave a V. Szöcs zo slov. ZDŠ v Šamoríne. Reprezentanti Bratislava-mesto (K. Šafařík a J. Šafařík, Vl. Černý; všetci zo ZDŠ na Košickej ulici) súhrnne získali 137 bodov, kým družstvo okresu Dunajská Streda, ktoré skončilo na 2. mieste, získalo len 82 bodov. Všeobecne sa ukázala vyššia úroveň vedomostí žiakov z okresu Bratislava-mesto, a to pravdepodobne zásluhou ZDŠ na Košickej ulici.

Veľmi užitočné, podľa nášho názoru, by bolo zavedenie krajského kola v D-kategórii FO. Zároveň dúfame, že pri budúcich prijímacích skúškach za stredné školy bude úspešný riešiteľ z FO rovnocenný s úspešným riešiteľom z MO (hoci väčšinou ide o tých istých žiakov) a bude prijatý bez prijímacej skúšky z matematiky.

Pred odchodom do Obýc si účastníci seminára prezreli krásne objekty areálu Vysokej školy poľnohospodárskej v Nitre.

Voľný čas v samotných Obyciach trávil vychádzkami do okolia, kúpaním, športovými hrami, chytaním rakov v blízkom potôčku apod. Dobrí futbalisti P. Urbánek z Trenčína, G. Sajdák zo Senca a P. Cvik zo Šurian mali permanentných súperov vedúcich seminára, s ktorými dosahovali striedavo úspechy a ne-



Obr. 1. Účastníci seminára na Inovci (901 m n. m.)

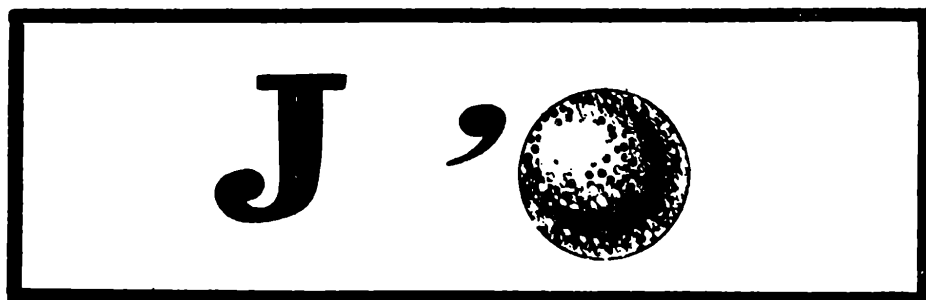
úspechy. Večer v družnom kolektíve vedeli všetkých zabaviť gitaristi J. Ráchela z Dunajskej Stredy a L. Bunta z Trnavy.

Pri táboráku a opekaní slaninky skupinové piesne sa striedali so sólovým spevom najlepších spevákov seminára E. Feherovej zo Selíc a J. Garmáňa z Komárna.

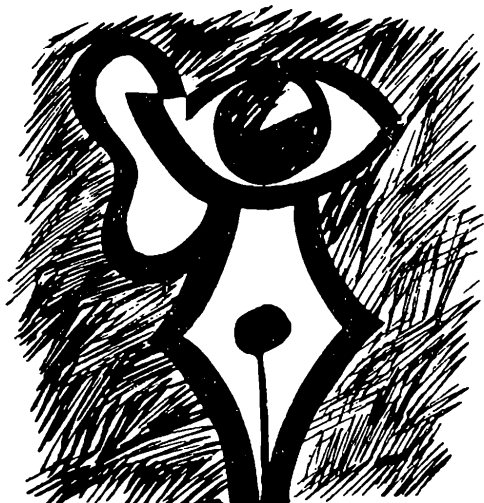
Na záver si dovoľíme citovať slová účastníka seminára, ktorý v anonymnej ankete na otázku „Čo navrhujete na zlepšenie podobných seminárov konaných v budúcnosti“, odpovedal: „Nič, len s tou istou svedomitosťou ich opakovať.“

Veľkú zásluhu na zdarnom priebehu seminára mal tajomník pobočky JČMF v Nitre doc. RNDr. Ladislav Dunajský, CSc. a odborní asistenti z katedry fyziky Pedagogickej fakulty v Nitre ss.: T. Korcová, T. Gál, D. Kluvanec. Napriek určitým ťažkostiam, najmä v prípravnej časti, radosť z dosiahnutých výsledkov a určité skúsenosti nás podporili v myšlienke, že tento seminár položil základ pre tradíciu stretnutia najlepších riešiteľov D-kategórie Fyzikálnej olympiády Západoslovenského kraja v Obyciach pri Nitre.

REBUS



REBUS



RECENZE

Sbírka úloh z matematiky

ČERMÁK - KAMARÝT - KOŘÍNKOVÁ

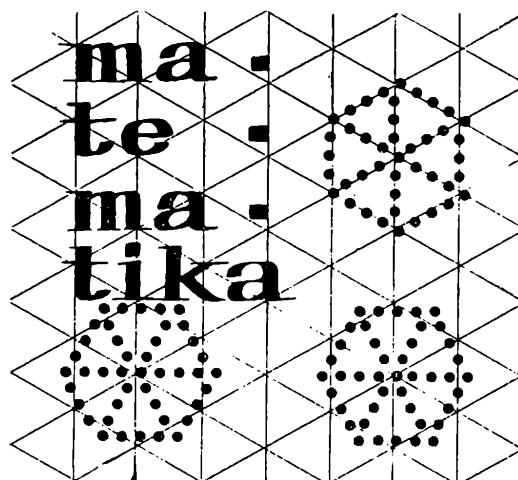
SNTL vydalo tuto knížku jako pomůcku absolventům středních škol, ale také, a to je hlavní účel, jak vyplývá z předmluvy jako pomůcku těm, kteří chtějí studovat na vysoké škole technického zaměření při zaměstnání. Jde tu tedy o studující na dálkovém nebo večerním studiu. Knižka je rozdělena do několika kapitol, v nichž jsou na začátku uvedeny potřebné vzorce, pak následují řešené příklady a konečně cvičení, která obsahují vždy dost příkladů pro samostatnou práci. Na konci knížky jsou připojeny výsledky. Výběr příkladů je vhodně volen, takže je tím zachycena všechna potřebná látka pro vysokou školu a příručka se tím stává vítaným (a bude jistě i hledaným) pomocníkem.

Knižce, která je sepsána pečlivě a odpovědně, se nedá mnoho vytknout. Já bych však rád na začátku každé kapitoly měl obecný

návod k řešení příkladů. Abych mluvil konkrétně. Na str. 16 a 18 by měl být návod, jak najdeme D a n . Na str. 57 zase návod k řešení rovnic (odstranění zlomků, neznámá na jednu a známé na druhou stranu rovnice). Na str. 72 návod k řešení exponenciálních rovnic. Pravidla používaná při úpravě nerovností. Na str. 112 by měl být ke vzorcům připojen obrázek, z něhož by bylo patrné, co znamenají c_a , c_b atd. Podobně v trigonometrii (str. 141) vztah (1) potřebuje nějaké vysvětlení. Při uvádění úplné kvadratické rovnice (str. 55) je nutné připojit $abc \neq 0$ a podobně u normované $pq \neq 0$.

I když jsou v knížce celkem drobné nedostatky, má přece tolik předností, že se stane jistě dobrou pomůckou všech, kteří hodlají při zaměstnání studovat na vysoké škole.

S. H.



M A T E M A T I K A

Směrové pole

Dr. STANISLAV TRÁVNÍČEK, Olomouc

Uvažujme rovinu, v níž je osou x a osou y dán pravoúhlý souřadnicový systém. Každý bod v této rovině je dán dvěma souřadnicemi, takže body roviny lze zapisovat jako uspořádané dvojice čísel (x, y) . Nechť je nyní ke každému bodu (x, y) přiřazen jednoznačně určitý směr, a to číslem z , které má význam směrnice. Víme, že pro dané z svírá příslušný směr s kladnou částí osy x orientovaný úhel α , kde $z = \operatorname{tg} \alpha$. Jestliže tedy jistým předpisem f přiřadíme každému bodu (x, y) směrnici z , píšeme

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

Znamená to, že z je funkcí dvou proměnných — souřadnic bodů v rovině.

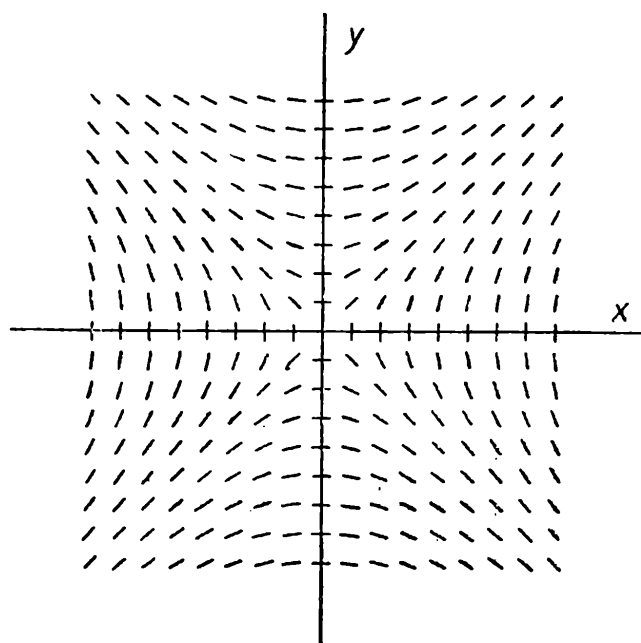
Množina všech bodů a příslušných směrů, tj. množina všech uspořádaných trojic $(x; y; z)$, se nazývá **směrové pole** a každý prvek $(x; y; z)$ směrového pole se nazývá **lineární element**. Směrové pole znázorníme tak, že vyznačíme v rovině větší počet bodů uspořádaných do několika řad (např. vodorovných a svislých) a v každém z těchto bodů zakreslíme malou úsečku mající příslušný směr. Tyto úsečky pak znázorňují jednotlivé lineární elementy.

Příklad 1. Znázorníme směrové pole dané rovnicí

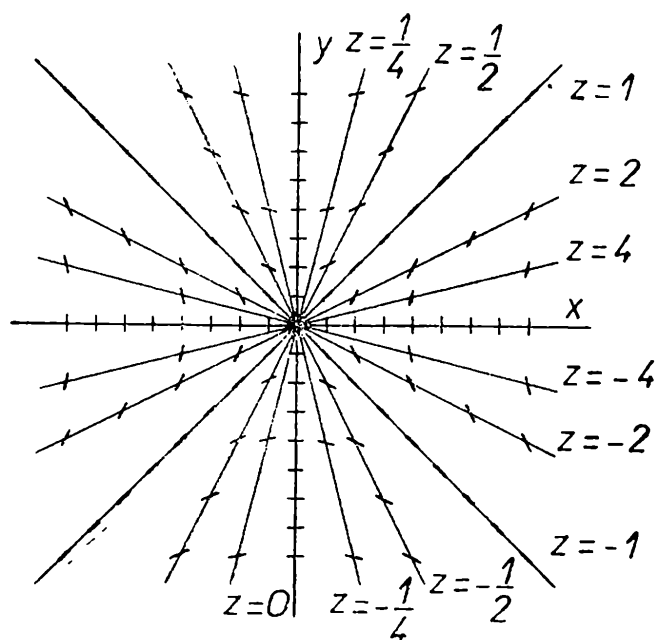
$$z = \frac{x}{y} . \quad (2)$$

Řešení. Nejprve sestavíme tabulku. K tomu, aby vznikl názorný obrázek, zvolíme body, jejichž obě souřadnice jsou postupně $-4; -3,5;$

—3; . . ; 3; 3,5; 4. Pro všechny tyto body vypočteme z rovnice (2) (pokud to lze provést) příslušné hodnoty z a zapíšeme je do tabulky (tab. 1). Vidíme např., že pro $x = 0$ (tedy na ose y), $y \neq 0$, jsou všechny lineární elementy rovnoběžné s osou x . Je-li $y = 0$, $x \neq 0$, není z rovnicí (2) definováno, avšak v tomto případě je vhodné definovat rovněž lineární elementy, a to tak, že jim přiřadíme směr kolmý k ose x a symbol ∞ jako „hodnotu směrnice“. V bodě $(0,0)$ v našem případě lineární element ne-
definujeme. Podle tabulky nyní znázorníme směrové pole graficky (obr. 1)¹⁾.



Obr. 1



Obr. 2

Praktickou interpretací směrového pole je např. *ustálený proud vody v řece* uvažovaný v nějaké rovině (třeba na hladině): každému místu v řece odpovídá jistý směr proudu. Jiným příkladem je *magnetické pole* na listu papíru, pod nějž umístíme magnet. Nasypeme-li na tento papír železné piliny, pak každou pilinu lze považovat za lineární element daného směrového (magnetického) pole, neboť víte z fyziky, že každá pilina se natočí ve směru magnetického pole magnetu.

Položme si nyní otázku, co je množinou bodů, jimž přísluší též směr. Je-li směr dán opět hodnotou k směrnice, pak množina bodů, kterým přísluší daný směr, je dána jako množina bodů, jež vyhovují rovnici

$$f(x, y) = k. \quad (3)$$

Pro dané k je rovnice tvaru (3) zpravidla rovnicí nějaké křivky a tyto křivky (existují-li tedy) nazýváme *isokliny směrového pole* příslušné ke směrnici k .

U směrového pole v příkladě 1 jsou isokliny dány rovnicí $\frac{x}{y} = k$, tj. pro $k \neq 0$ rovnicí

$$y = \frac{1}{k} x$$

¹⁾ Viz str. 208.

a pro $k = 0$ rovnicí $x = 0$. Vidíme, že isoklinami směrového pole (2) jsou přímky procházející počátkem, z nichž je však počátek vyňat. Také přímku $y = 0$, na níž jsou lineární elementy kolmé k ose x , lze považovat pro $x \neq 0$ za isoklinu (obr. 2).

Dalším důležitým problémem je nalezení křivky, která prochází zvoleným bodem (x_0, y_0) a která v každém svém bodě sleduje směr směrového pole, tj. v každém jejím bodě má lineární element směr tečny k této křivce. Jestliže takové křivky existují, pak je nazýváme *křivky integrální*. Ve výše uvedených praktických příkladech jsou to v prvním případě proudnice, ve druhém případě siločáry magnetického pole.

Použitím vyšší matematiky lze vypočítat, že ke směrovému poli (2) přísluší integrální křivky dané rovnicí

$$y^2 - x^2 = C, \quad (4)$$

kde C je libovolná konstanta, což jsou pro $C \neq 0$ hyperboly a pro $C = 0$ osy kvadrantů (obr. 3). Má-li integrální křivka procházet bodem (x_0, y_0) , pak musí souřadnice tohoto bodu vyhovovat rovnici (4), odkud $C = y_0^2 - x_0^2$, takže příslušná integrální křivka má rovnici

$$y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2.$$

Čtenář, který dosud nezná pojem derivace, může tento odstavec při čtení vynechat. Předpokládejme, že integrální křivka je grafem funkce $y = y(x)$. Podle definice integrální křivky platí pro derivaci y' funkce $y(x)$ rovnost $y' = f(x, y)$. Rovnice $y' = f(x, y)$ se nazývá *rovnice diferenciální* a každá funkce $y = y(x)$, která jí vyhovuje, *řešení diferenciální rovnice*. Integrální křivka je tedy grafem řešení diferenciální rovnice. Problémy, zda daným bodem (x_0, y_0) prochází nějaká integrální křivka, zda je právě jedna a problém jejího nalezení — to jsou významné úlohy teorie diferenciálních rovnic, k jejichž řešení je zapotřebí hlubších znalostí vyšší matematiky a s nimiž se seznamují studenti v matematice na vysoké škole. S diferenciálními rovnicemi se můžete blíže seznámit v knížce [1], která je v poslední době v prodeji (ale ve které je mnoho tiskových chyb), kde zájemce najde i seznam další literatury.

Výpočty vedoucí k nalezení integrálních křivek mohou být však i za použití prostředků vyšší matematiky velmi obtížné, nebo je prakticky ani nelze provést, ale protože je v tomto problému skryta řada velmi významných praktických úloh (viz např. [1]), je důležité znát nějakou metodu, která by umožnila zjistit alespoň přibližný průběh integrální křivky vycházející z daného bodu směrového pole.

Popíšeme si tzv. *Eulerovu metodu*, a to nejprve obecně a pak jí použijeme na konkrétní příklad. Předpokládejme dále, že funkce $f(x, y)$ je definována v každém bodě uvažované části roviny a že každým bodem této části roviny prochází právě jedna integrální křivka.

Vyhledáme přibližný průběh integrální křivky, která vychází z bodu (x_0, y_0) , například v intervalu $\langle x_0, x_0 + a \rangle$, $a > 0$. Tento interval rozdělíme dělicími body $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x_0 + a$ na n částí (například stejných). Každým bodem x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) vedeme přímkou $x = x_i$ (rovnoběžku s osou y). Nejprve zakreslíme bod $M_0(x_0, y_0)$ (dělejte si náčrtek) a doprava polopřímku s počátkem M_0 a se směrem lineárního elementu v bodě M_0 , tj. se směrnici $f(x_0, y_0)$. Bod, v němž tato polopřímka protne přímkou $x = x_1$, označíme $M_1(x_1, y_1)$. Nyní opět sestrojíme doprava polopřímku, která vychází z bodu M_1 a má směr lineárního elementu v bodě M_1 , tj. směrnici $f(x_1, y_1)$. Bod, v němž tato polopřímka protne přímkou $x = x_2$, označíme $M_2(x_2, y_2)$. Tak určíme postupně lomenou čáru s vrcholy $M_0, M_1, \dots, M_n$, které odpovídají dělicím bodům $x_0, x_1, \dots, x_n = x_0 + a$. Je zřejmé, že pro dané M_0 závisí tato lomená čára (zvaná též *Eulerův polygon*) na vzdálenosti dělicích bodů, že v bodech $M_0, M_1, \dots, M_n$ sleduje přesně a v ostatních bodech přibližně směr směrového pole a že je tedy pro dosti jemné dělení intervalu $\langle x_0, x_0 + a \rangle$ jistou aproximací integrální křivky vycházející z bodu M_0 . Podobně bychom mohli vytvořit Eulerův polygon i doleva od daného bodu M_0 .

Popsanou konstrukci Eulerova polygonu lze provést i početně. Rovnice přímkou, jež prochází daným bodem $M_i(x_i, y_i)$ a má danou směrnici $f(x_i, y_i)$, je (jak znáte z analytické geometrie)

$$y - y_i = f(x_i, y_i)(x - x_i). \quad (5)$$

Ježto souřadnice x_i vrcholů Eulerova polygonu známe, využijeme rovnice (5) (pro $i = 1, 2, \dots, n$) k výpočtu souřadnic y_i . Postupným dosazováním do (5) dostáváme

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

takže

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1),$$

takže

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$$

atd.,

$$y_n - y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}),$$

takže

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Příklad 2. Najdeme Eulerův polygon směrového pole (2) vycházející z bodu $(0,2)$ pro $x \in \langle 0,3 \rangle$.

Řešení. Interval $\langle 0,3 \rangle$ rozdělíme např. na 6 intervalů, a to $\langle 0; 0,5 \rangle$, $\langle 0,5; 1 \rangle$, $\dots$, $\langle 2,5; 3 \rangle$, takže budeme hledat souřadnice bodů $M_1, M_2, \dots, M_6$; bod $M_0(0,2)$ je dán. Dostáváme postupně (zaokrouhlujeme na dvě desetinná místa)

$$x_1 = 0,5, y_1 = 2 + \frac{0}{2} 0,5 = 2,$$

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 2 + \frac{0,5}{2} 0,5 \doteq 2,13,$$

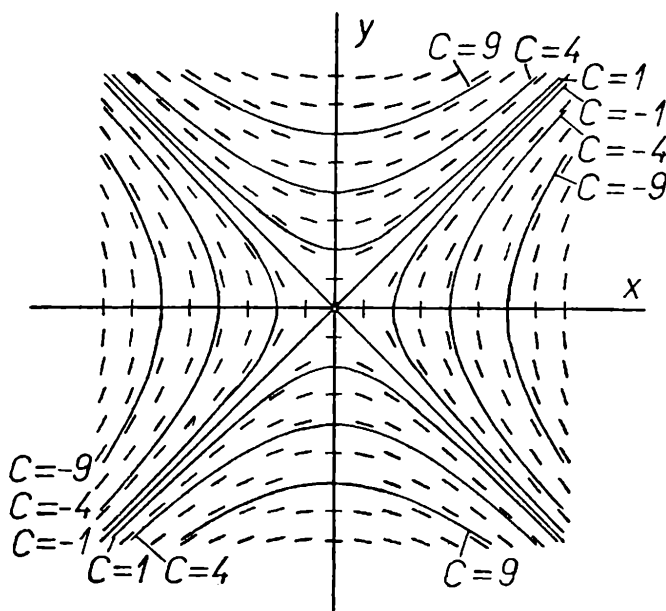
$$x_3 = 1,5, \quad y_3 = 2,13 + \frac{1}{2,13} 0,5 \doteq 2,36,$$

$$x_4 = 2, \quad y_4 = 2,36 + \frac{1,5}{2,36} 0,5 \doteq 2,68,$$

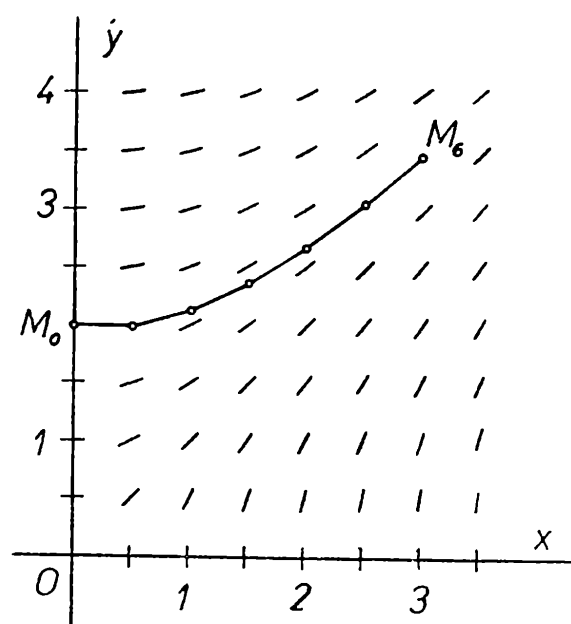
$$x_5 = 2,5, \quad y_5 = 2,68 + \frac{2}{2,68} 0,5 \doteq 3,05,$$

$$x_6 = 3, \quad y_6 = 3,05 + \frac{2,5}{3,05} 0,5 \doteq 3,46,$$

takže máme $M_0(0; 2)$, $M_1(0,5; 2)$, $M_2(1; 2,13)$, $M_3(1,5; 2,36)$, $M_4(2; 2,68)$, $M_5(2,5; 3,05)$, $M_6(3; 3,46)$. Výslednou lomenou čarou $M_0M_1 \dots M_6$ vidíme na obr. 4. (Srovnejte její průběh s příslušnou integrální křivkou, tj. pro $C = 4$, na obr. 3!).



Obr. 3



Obr. 4

Úloha. Sestrojte směrové pole dané rovnicí

$$z = \frac{y}{x+y};$$

sestrojte několik jeho isoklin a vytvořte Eulerův polygon vycházející z bodu $M_0(-1; 1,5)$ pro $x \in \langle -1, 2 \rangle$.

L i t e r a t u r a

- [1] Richard Rychnovský, *Obvyčejné diferenciální rovnice a jejich řešení*. Polytechnická knižnice, II. řada, 30. svazek, SNTL Praha 1963.

„MAGICKÁ METODA“ pro převod čísel z jedné soustavy do druhé

JIŘÍ FIALA, Praha

Samočinné počítače provádějí výpočty ve dvojkové soustavě; ovšem čísla, se kterými vstupujeme do počítače, jsou obvykle vyjádřena v soustavě desítkové. Proto je nutné převést tato čísla do soustavy, ve které počítá stroj. A obráceně výsledky, které stroj získal ve dvojkové soustavě, je třeba převést do desítkové soustavy, aby se nám staly srozumitelnějšími.

Ukážeme si jednu zajímavou metodu pro převádění čísel z jedné soustavy do druhé, která pro svou zdánlivě záhadnou podobu má v literatuře název *m a g i c k á*. Od čtenáře předpokládám, že je seznámen aspoň se základními pojmy týkajícími se počítání v jiných soustavách než je desítková¹⁾.

Máme převést číslo 5125_8 z osmičkové soustavy do desítkové. Můžeme použít různých způsobů. Tak například vyjdeme přímo z definice a počítáme

$$5125_8 = 5 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 5 \cdot 512 + 1 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 5 = 2645_{10}.$$

Vyčíslení uvedeného rozvoje je vlastně výpočet hodnoty polynomu, a proto je můžeme zjednodušit pomocí *Hornerova schématu*

	5	1	2	5
		40	328	2640
8	5	41	330	2645

Této metody se používá častěji.

Hornerova schéma se používá pro výpočet hodnoty polynomu. V našem příkladě počítáme hodnotu polynomu

$$5x^3 + x^2 + 2x + 5$$

pro $x = 8$. Princip Hornerova schématu je jednoduchý. Ukažme si ho na našem polynomu. Je možno jej zřejmě přepsat do tvaru

$$[(5x + 1)x + 2]x + 5,$$

takže hodnotu polynomu v čísle x můžeme vypočítat tímto početním postupem: koeficient u nejvyšší mocniny násobíme x a přičteme koeficient

¹⁾ Je možno se s nimi seznámit například v článku Vlastimila Mráze, *Číselné soustavy*, *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 44 (1965 až 1966), číslo 4, str. 145–150.

u další mocniny. Takto získaný výsledek násobíme opět x a přičteme další koeficient atd. Tento postup se snadno provede pomocí tohoto schématu (Hornerovo schéma)

	5	1	2	5	koeficienty polynomu
		$5x$	$(5x + 1)x$	$[(5x + 1)x + 2]x$	
x	5	$5x + 1$	$(5x + 1)x + 2$	$[(5x + 1)x + 2]x + 5$	sloupcové součty

Zkuste si Hornerovo schéma na jiných polynomech!

Ukažme si teď jiný způsob. Bude sice „záhadnější“ (a o to snad zajímavější), ale zato méně pracný. První cifru našeho čísla násobíme 2 ($= 10 - 8$), tedy rozdílem základů soustav a výsledek napíšeme tak, aby jeho jednotky přišly pod druhou cifru převáděného čísla a odečteme (desítkově!)

$$\begin{array}{r}
 2 \cdot 5 = 10 \qquad \qquad \begin{array}{r} 5 \ 1 \ 2 \ 5 \\ - \quad \overline{1 \ 0} \\ \hline 4 \ 1 \ 2 \ 5 \end{array}
 \end{array}$$

S takto získaným číslem provedeme stejnou proceduru, ale budeme nyní brát ne pouze první cifru, ale první dvě cifry a jednotky sepíšeme pod třetí cifru

$$\begin{array}{r}
 2 \cdot 41 = 82 \qquad \qquad \begin{array}{r} 4 \ 1 \ 2 \ 5 \\ - \quad \overline{8 \ 2} \\ \hline 3 \ 3 \ 0 \ 5 \end{array}
 \end{array}$$

Ještě jednou vše zopakujeme (teď už se třemi ciframi)

$$\begin{array}{r}
 2 \cdot 330 = 660 \qquad \begin{array}{r} 3 \ 3 \ 0 \ 5 \\ - \quad \overline{6 \ 6 \ 0} \\ \hline 2 \ 6 \ 4 \ 5 \end{array}
 \end{array}$$

ale to již je převedené číslo. Zkusme to ještě jednou na jiném příkladu bez dlouhého vysvětlování

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 2 \ 5 \ 7 \ 3 \ 5 \\ - \quad \overline{4} \\ \hline 2 \ 1 \ 7 \ 3 \ 5 \\ - \quad \overline{4 \ 2} \\ \hline 1 \ 7 \ 5 \ 3 \ 5 \\ - \quad \overline{3 \ 5 \ 0} \\ \hline 1 \ 4 \ 0 \ 3 \ 5 \\ - \quad \overline{2 \ 8 \ 0 \ 6} \\ \hline 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 9 \end{array}
 \end{array}$$

Proveďte si hned výsledek pro porovnání pomocí Hornerova schématu! Celý postup je jistě dost záhadný: s číslem 5125, které je osmičkové, zacházíme jako by bylo desítkové. Ve Spojených státech označují tuto metodu jako *m a g i c k o u* (MAGIC) a používají ji k převodům čísel na některých samočinných počítačích. Rozdíl soustav 10 — 8 se nazývá *m a g i c k é č í s l o*.

Musíme ovšem zjistit, jak je možné, že takový postup může dát správný výsledek. Zkusme si proto podrobně rozepsat jednotlivé kroky.

Nejprve se na číslo 5125 díváme jako na číslo desítkové, tj. vycházíme ze součtu

$$5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

První krok. Odečítáme číslo

$$5 \cdot (10 - 8) \cdot 10^2,$$

výsledek

$$(5 \cdot 8 + 1) \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Druhý krok. Odečítáme

$$(5 \cdot 8 + 1) \cdot (10 - 8) \cdot 10^1,$$

výsledek

$$(5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 2) \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Třetí krok. Odečítáme

$$(5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8 + 2) \cdot (10 - 8),$$

výsledek

$$5 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0.$$

Všechny výpočty provádíme desítkově, a proto i výsledek je desítkový. Zkuste si sami tentýž rozbor na druhém příkladu!

Již vidíme do postupu přesněji a můžeme se pokusit o obecný důkaz. Převádíme číslo

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0,$$

které je vyjádřeno v osmičkové soustavě. Vyjdeme z výrazu

$$\sum_{i=0}^n a_i 10^i$$

První krok. Odečteme

$$a_n (10 - 8) 10^{n-1},$$

výsledek

$$(a_n 8 + a_{n-1}) 10^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i 10^i$$

Druhý krok. Odečítáme

$$(a_n 8 + a_{n-1}) (10 - 8) 10^{n-2},$$

výsledek

$$(a_n 8^2 + a_{n-1} 8 + a_{n-2}) 10^{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} a_i 10^i$$

Třetí krok. Odečítáme

$$(a_n 8^2 + a_{n-1} 8 + a_{n-2}) (10 - 8) 10^{n-3},$$

výsledek

$$(a_n 8^3 + a_{n-1} 8^2 + a_{n-2} 8 + a_{n-3}) 10^{n-3} + \sum_{i=0}^{n-4} a_i 10^i,$$

atd. Teď již je jasné, že po celkem n krocích dostaneme desítkově provedený součet

$$\sum_{i=0}^1 a_i 8^i.$$

Všimněte si, že tento součet jsme pořizovali bez ohledu na nějaká omezení koeficientů a_i . Stejnou metodou můžeme tedy získat například i součet

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 9 \cdot 8^0 \\ \quad \quad \quad \underline{3 \ 2 \ 9} \\ - \quad \quad \quad \underline{\dot{6}} \\ \quad \quad \quad \underline{2 \ 6 \ 9} \\ - \quad \quad \quad \underline{5 \ 2} \\ \quad \quad \quad \underline{2 \ 1 \ 7} \end{array}$$

Také výběr soustav o základech 10 a 8 není podstatný. Touto metodou můžeme provést převod ze soustavy o základu p do soustavy o základu q , kde p a q jsou nějaká přirozená čísla. Přitom ovšem všechny výpočty musíme provádět v aritmetice o základu q (tedy v aritmetice soustavy do které převádíme). Magickým číslem bude v tomto případě rozdíl $q - p$.

Pocvičme se v osmičkovém počítání a převedme desítkové číslo 2645 zpět do osmičkové soustavy. Magické číslo je $8 - 10 = -2$. Všechny operace je nutno provádět osmičkově

$$\begin{array}{r} -2 \cdot 2 = -4 \\ -2 \cdot 32 = -64 \\ -2 \cdot 410 = -1020 \end{array} \quad \begin{array}{r} + \quad \quad \quad \underline{2 \ 6 \ 4 \ 5} \\ \quad \quad \quad \underline{\dot{4}} \\ \quad \quad \quad \underline{3 \ 2 \ 4 \ 5} \\ + \quad \quad \quad \underline{6 \ 4} \\ \quad \quad \quad \underline{4 \ 1 \ 0 \ 5} \\ + \quad \quad \quad \underline{1 \ 0 \ 2 \ 0} \\ \quad \quad \quad \underline{5 \ 1 \ 2 \ 5} \end{array}$$

A ještě jeden příklad. Provedeme převod ze soustavy šestnáctkové (hexadecimální) do soustavy desítkové. Šestnáctková soustava je soustava o základu 16 a má tyto cifry

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\overline{10}$, $\overline{11}$, $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$

Tato soustava (podobně jako soustava osmičková) souvisí úzce se soustavou dvojkovou (jak?) a u některých počítačů se jí používá k vyjádření čísel.

Převeďme číslo $\overline{10} \overline{13} 7$, tj.

$$10 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16 + 7$$

Magické číslo pro převod ze šestnáctkové do desítkové soustavy je $10 - 16 = -6$. Převod

$$\begin{array}{r} 10 \quad 13 \quad 7 \\ + \quad 6 \quad 0 \\ \hline 17 \quad 3 \quad 7 \quad (\text{řadový přenos, proč?}) \\ + \quad 10 \quad 3 \quad 8 \\ \hline 27 \quad 7 \quad 5 \end{array}$$

Výsledek je tedy 2775. Rozeberte si tento převod stejně podrobně jako první příklad!

Dokažte obecně algoritmus MAGIC pro převod ze soustavy o základu p do soustavy o základu q !

Obsah tětíivového a tečnového čtyřúhelníka

EVA BENEŠOVÁ, Jihlava

Čtyřúhelník je obrazec, který patřil vždy mezi nejrozšířenější geometrické útvary. Čtyřúhelník a jeho nejdůležitější vlastnosti velmi dobře znali již Egypťané, Řekové, Indové a Číňané, protože se s ním neustále setkávali ve stavebnictví a zeměměřictví.

Potřeba umět určit obsah rovinného obrazce (nejčastěji právě čtyřúhelníka), jakožto výměru pole, se objevuje velmi dávno. Jak se dovídáme z babylónského seznamu polí z doby asi r. 2000 př. n. l., byl již tehdy znám předpis pro určení obsahu rovnoramenného lichoběžníka.

Jiná z dochovaných písemností, která rovněž obsahuje zmínku o čtyřúhelnících, je Ahmesova sbírka matematických příkladů.

V literatuře je běžněji označovaná jako *R h i n d ů v* papyrus, a to podle prvního novověkého majitele. Ahmes žil asi r. 1800 př. n. l. Na stránkách tohoto papyrusu zapsal Ahmes řadu rozřešených příkladů, většinou hospodářských problémů své doby. Zabývá se takovými příklady, v nichž se vyskytují pole výhradně ve tvaru rovnoramenných trojúhelníků, čtverců a také rovnoramenných lichoběžníků. Obsah obdélníka sice nikde neuvádí, ale můžeme se domýšlet, že ho znal.

Obsah obecného čtyřúhelníka se poprvé objevuje v nápisech *E d f s k é - h o o b ě t i š t ě*, založeného až roku 237 př. n. l., tedy v době Euklidově. Zde se poprvé vedle rovnoramenných lichoběžníků objevuje konvexní čtyřúhelník a jeho obsah je roven součinu polovičních součtů protilehlých stran.

V druhé polovině 5. stol. př. n. l. *H i p p o k r a t e s z C h i o s u*, řecký geometr, napsal *S t o i c h e j a*, tj. *Z á k l a d y*, jež jsou skutečně prvními základy v řecké matematice. Bohužel, originál se nezachoval, ale dovídáme se o nich od jednoho komentátora ze 4. stol. n. l. V těchto *Z á k l a d e c h* se vyskytuje pojem tětiového čtyřúhelníka, a to v souvislosti s Hippokratovými měsíci (viz Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 1964—65, č. 2, str. 49).

Od té doby můžeme sledovat až dodnes zájem o čtyřúhelníky, a to zejména o tětiové a tečnové čtyřúhelníky.

V současných středoškolských učebnicích není téměř žádná zmínka o tak zajímavých obrazcích. V tomto článku si hlavně všimneme obsahu tětiového a tečnového čtyřúhelníka, a to z několika hledisek.

Nejdříve vysvětlíme pojem tětiového čtyřúhelníka.

Definice 1. Čtyřúhelník ABCD nazýváme tětiovým, leží-li jeho vrcholy na určité kružnici. Říkáme, že tato kružnice je opsána čtyřúhelníku.

P o z n á m k a. 1. Zvláštními případy jsou čtverec, obdélník a rovnoramenný lichoběžník.

2. Platí, že součet protějších vnitřních úhlů je $2R$. Tato vlastnost vyplývá z vlastnosti obvodových úhlů.

V ě t a 1. Obsah tětiového čtyřúhelníka daného velikostmi stran a, b, c, d , vypočteme podle vzorce

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

kde

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Tento vzorec se nazývá *B r a h m a g u p t ů v*.

D ů k a z. Nechť je dán obecný tětiový čtyřúhelník $ABCD$. Předpokládejme, že přímky DC a AB jsou různoběžné a že se protínají v bodě E (obr. 1). Označme dále $ED = x$, $AE = y$. Platí, že troj-

ale také

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 2R,$$

$$\angle ADC + \angle EDA = 2R.$$

Po odečtení obou rovnic dostáváme

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle EDA.$$

Dále vidíme, že oba trojúhelníky mají úhel $\sphericalangle BEC$ společný. Z podobnosti obou trojúhelníků vyplývá pro obsahy $P_{\triangle EBC}$, $P_{\triangle EDA}$ trojúhelníků EBC a EDA

$$\frac{P_{\Delta EBC}}{P_{\Delta EDA}} = \frac{b^2}{d^2}.$$

Nyní použijeme známé vlastnosti úměry

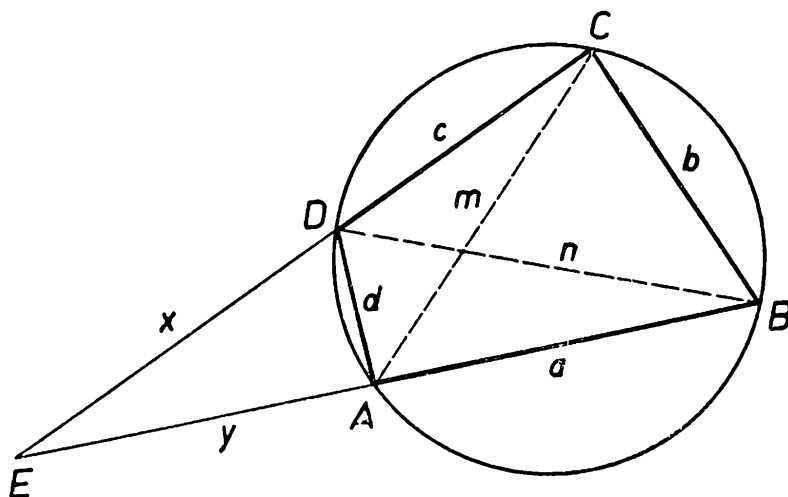
$$(P_{\triangle EBC} - P_{\triangle EDA}) : P_{\triangle EDA} = (b^2 - d^2) : d^2.$$

Z obrázku je patrné, že rozdíl $P_{\triangle EBC} - P_{\triangle EDA}$ je hledaný obsah čtyřúhelníka; označme jej P . Potom lze psát

$$P : P_{\wedge EDA} = (b^2 - d^2) : d^2,$$

a odtud

$$P = \frac{b^2 - d^2}{d^2} \cdot P_{\Delta EDA} \quad (1)$$



Obr. 1

Nyní stačí určit obsah trojúhelníka EDA . Obsah tohoto trojúhelníka určíme pomocí **H e r o n o v a v z o r c e**. K tomu ovšem potřebujeme vyjádřit úsečky x a y pomocí stran tětíkového čtyřúhelníka. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle EBC$ a $\triangle EDA$ použijeme poměru

$$\begin{aligned} b:d &= (x+c):y, \\ b:d &= (a+y):x. \end{aligned} \tag{2}$$

Rovnice (2) mají po úpravě tvar

$$by - dx = cd, \quad (3)$$

$$bx - dy = ad \quad (4)$$

Použijeme-li sčítací metody řešení rovnic, dostaneme výrazy

$$x = \frac{d(cd + ab)}{b^2 - d^2}, \quad (5)$$

$$y = \frac{d(ad + cb)}{b^2 - d^2} \quad (6)$$

Nyní postupně sečtěme a odečtěme rovnice (5) a (6)

$$x + y = \frac{d(cd + ab) + d(ad + bc)}{b^2 - d^2}$$

$$x - y = \frac{d(ab + cd) - d(ad + bc)}{b^2 - d^2}$$

Po úpravě a krácení dostaneme výrazy

$$x + y = d \frac{a + c}{b - d} \quad \text{a} \quad x - y = d \frac{a - c}{b + d}. \quad (7)$$

Vyjádřeme nyní obsah trojúhelníka EDA

$$P_{\triangle EDA} = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-d)},$$

dosadíme za

$$s = \frac{x + y + d}{2}$$

$$P_{\triangle EDA} = \frac{1}{4} \sqrt{(x + y + d)(x + y + d - 2x) \cdot (x + y + d - 2y)(x + y + d - 2d)}$$

Sloučením výrazů v závorkách dostaneme

$$P_{\triangle EDA} = \frac{1}{4} \sqrt{(x + y + d)(y - x + d)(x - y + d)(x + y - d)}$$

Dosadíme nyní ze vztahu (7)

$$P_{\triangle EDA} = \frac{1}{4} \sqrt{d \left(\frac{a + c}{b - d} + 1 \right) \cdot d \left(1 - \frac{a - c}{b + d} \right) \cdot d \left(\frac{a - c}{b + d} + 1 \right) \cdot d \left(\frac{a + c}{b - d} - 1 \right)}$$

Provedme částečné odmocnění

$$P_{\triangle EDA} = \frac{1}{4} d^2 \frac{1}{(b - d)(b + d)}.$$

$$\cdot \sqrt{(a+c+b-d)(b+d+c-a)(b+d+a-c)} \\ \sqrt{(a+c-b+d)} \quad (8)$$

Nyní upravme výraz pod odmocninou. Označme s poloviční obvod čtyřúhelníka

$$s = \frac{a+b+c+d}{2},$$

pak

$$s-a = \frac{b+c+d-a}{2},$$

$$s-b = \frac{a+c+d-b}{2},$$

$$s-c = \frac{a+b+d-c}{2},$$

$$s-d = \frac{a+b+c-d}{2}$$

Potom lze výraz (8) přepsat

$$P_{\triangle EDA} = \frac{1}{4} d^2 \frac{1}{(b-d)(b+d)} \sqrt{2(s-a)2(s-b)2(s-c)2(s-d)},$$

po odmocnění a krácení

$$P_{\triangle EDA} = d^2 \frac{1}{b^2 - d^2} \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Nyní dosadíme do výrazu (1) a po úpravě získáme

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

což jsme měli dokázat.

Dříve než dokážeme další větu o obsahu čtyřúhelníka, je nutné, abychom uvedli pomocnou větu, týkající se vztahu mezi úhlopříčkami. Tato věta se nazývá *Ptolemaiova věta*.

P o m o c n á v ě t a 1. *Označíme-li úhlopříčky $DB = n$, $AC = m$, pak platí $mn = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.*

D ů k a z. V tětiovém čtyřúhelníku (obr. 2) vedeme obě úhlopříčky $AC = m$, $BD = n$. Označme strany $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, sestrojme dále úhel $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$; E leží na AC . Pak trojúhelníky AED a BCD jsou podobné podle věty *uu* ($\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$). Z podobnosti obou trojúhelníků plyne

$$d : AE = n : b \quad (9)$$

Podobně trojúhelníky $\triangle ABD$, $\triangle ECD$ jsou podobné podle věty *uu* ($\sphericalangle ADB = \sphericalangle EDC$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$). Z podobnosti těchto troj-

úhelníků plyne

$$c : EC = n : a \quad (10)$$

Upravme rovnice (9) a (10)

$$AE \cdot n = b \cdot d ,$$

$$EC \cdot n = a \cdot c ,$$

a sečteme je

$$(AE + EC) n = ac + bd ,$$

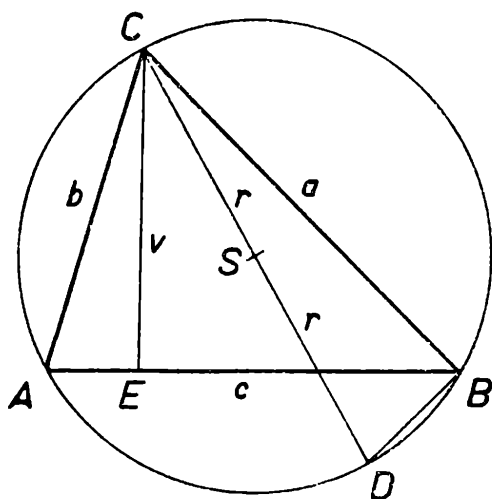
kde

$$AE + EC = m ,$$

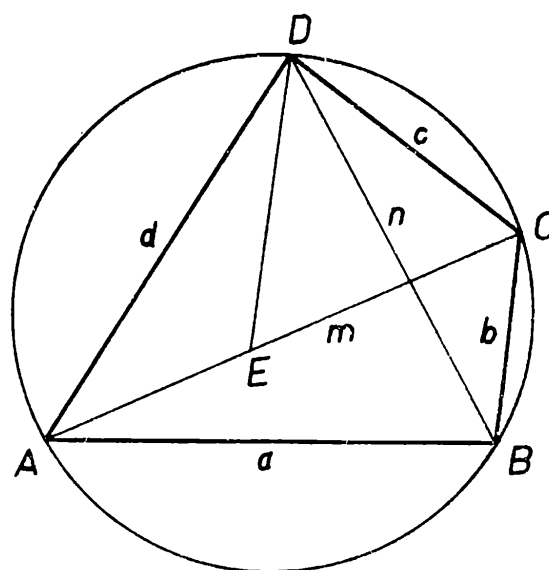
odtud tedy

$$m \cdot n = ac + bd ,$$

což jsme měli dokázat.



Obr. 2



Obr. 3

Nyní odvodme další pomocnou větu.

P o m o c n á v ě t a 2. Necht' je dán trojúhelník ABC o stranách a , b , c , obsahu P a poloměru opsané kružnice r , pak platí

$$P = \frac{abc}{4r}$$

*D ů k a z. Trojúhelníku ABC opišme kružnici k o středu S . Přímka CS (obr. 3) protíná kružnici k v bodě D . Výšku v trojúhelníku označme CE . Trojúhelníky AEC a DBC jsou podobné podle věty *uu* ($\sphericalangle CAE = \sphericalangle CDB$, $\sphericalangle AEC = \sphericalangle DBC = 90^\circ$).*

Označme $AC = b$, $CE = v$, $CD = 2r$, $BC = a$, $AB = c$.

Pak platí úměra

$$v : b = a : 2r ,$$

odtud

$$2rv = ab .$$

Násobíme-li obě strany rovnice velikostí strany c

$$2cvr = abc,$$

odtud

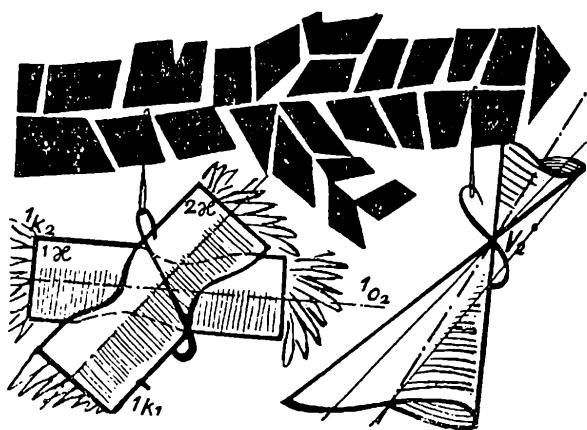
$$4Pr = abc,$$

neboli

$$P = \frac{abc}{4r},$$

což jsme měli dokázat.

(Pokračování)



DESKRIPTIVNÍ
GEOMETRIE

Niektoré dotyčnicové vlastnosti paraboly

MATÚŠ KUNIAK, Košice

Parabola, ako nestredová kužeľosečka má niektoré osobitné dotyčnicové vlastnosti, ktorých možno výhodne použiť pri konštrukčnom riešení rôznych úloh. Dokážeme nasledujúcu vlastnosť dvoch dotyčníc paraboly:

Veta 1. Spojnica priesečníka dvoch dotyčníc paraboly s jej ohniskom zvierá s jednou dotyčnicou rovnaký uhol, aký zvierá druhá dotyčnica s osou paraboly.

Dôkaz. Nech sa dve ľubovoľné dotyčnice t a m paraboly (obr. 1) pretínajú v bode R . Zostrojme päty P a K kolmíc z ohniska F k dotyčniciam m a t paraboly. Nad úsečkou RF ako priemerom zostrojme kružnicu k , ktorá v dôsledku Thaletovej vety prechádza i cez body P a K . Podľa obr. 1 platí

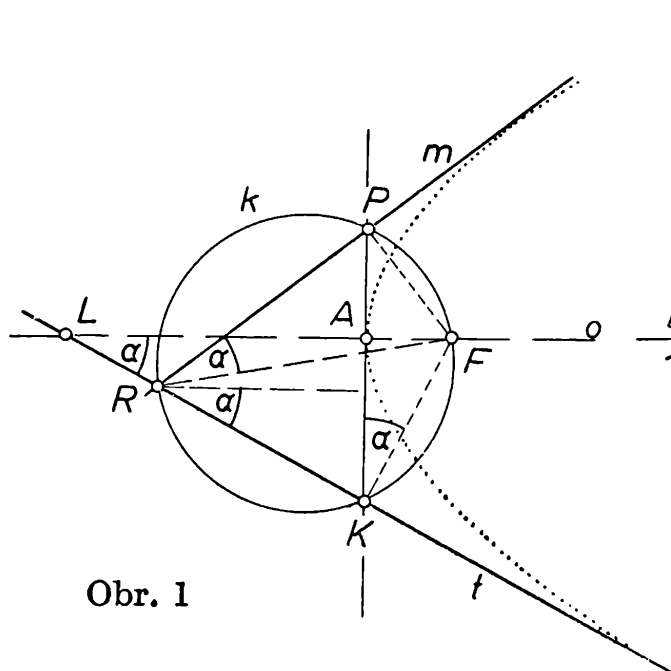
$$\sphericalangle FRP = \sphericalangle FKP$$

ako obvodové uhly nad oblúkom $\widehat{FP}$ kružnice k . Ďalej z obr. 1 môžeme konštatovať, že trojuholníky $\triangle FKA$ a $\triangle FLK$ sú podobné, preto môžeme písať

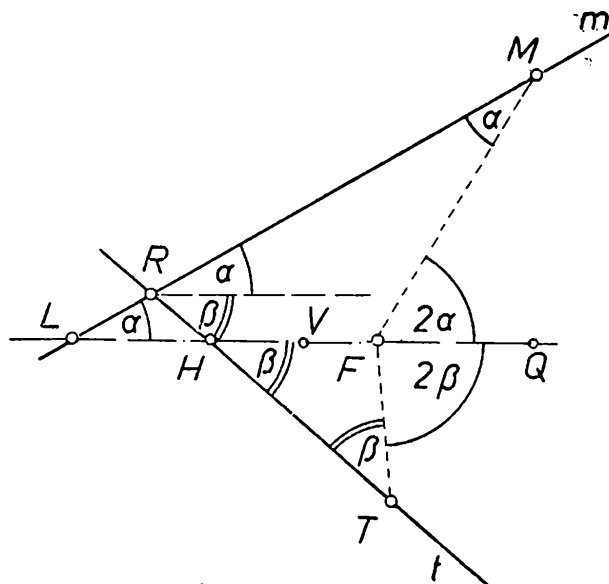
$$\sphericalangle FRP = \sphericalangle FKA = \sphericalangle KLF = \alpha.$$

Inú vlastnosť dvoch dotyčníc paraboly vyjadruje

Veta 2. Dutý uhol ohniskových sprievodičov dvoch bodov paraboly rovná sa dvojnásobku dutého uhla dotyčníc zostrojených v týchto bodoch paraboly.



Obr. 1



Obr. 2

Dôkaz. Vieme, že dotyčnica paraboly zvierá s osou paraboly i s ohniskovým sprievodičom jej dotykového bodu rovnaké uhly. Nech V je vrchol paraboly, F jej ohnisko a Q ľubovoľný bod polpriamky VF za bodom F (obr. 2). Ďalej priamky m a t sú dotyčnice paraboly s dotykovými bodmi M a T . Podľa obr. 2 platí

$$\begin{aligned}\sphericalangle FMR &= \alpha = \sphericalangle FLM, \\ \sphericalangle MFQ &= 2\alpha = 2 \sphericalangle MLF, \\ \sphericalangle TFQ &= 2\beta = 2 \sphericalangle THF\end{aligned}$$

Taktiež platí

$$\sphericalangle MFQ + \sphericalangle TFQ = 2(\alpha + \beta) = 2 \sphericalangle MRT,$$

to znamená, že

$$\sphericalangle MFT = 2 \sphericalangle MRT.$$

Veta 3. Kružnica opísaná trojuholníku, ktorý je vytvorený troma dotyčnicami paraboly, prechádza ohniskom paraboly.

Dôkaz. Tri dotyčnice t , u , m paraboly vytvárajú trojuholník KLR (obr. 3). Budeme uvažovať i body dotyku M a T na dotyčniciach m , t . Vo štvoruholníku $FLRK$ na základe vety 1 platí

$$\sphericalangle FRL = \sphericalangle FKL = \sphericalangle THF,$$

$$\sphericalangle KRF = \sphericalangle KLF = \sphericalangle FDM$$

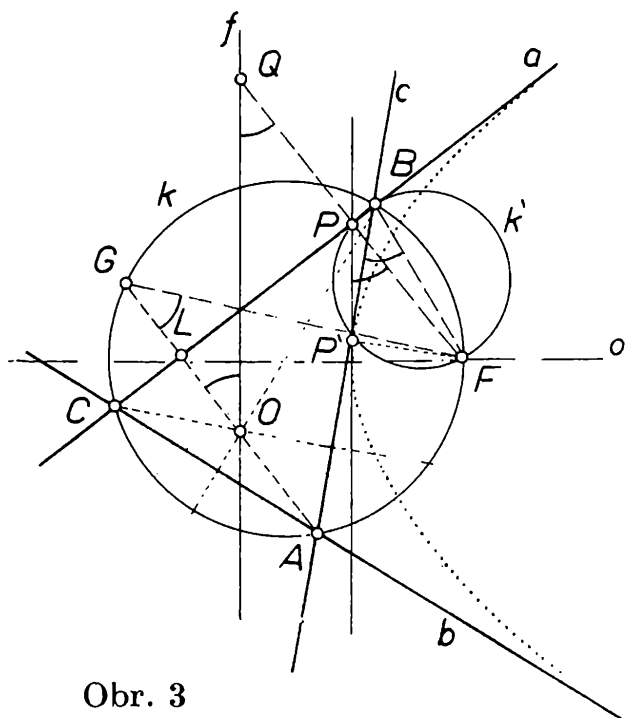
Na základe predchádzajúcich viet a z vlastnosti súčtu vnútorných uhlov trojuholníka FLK môžeme písať

$$\sphericalangle LFK = 180^\circ - (\sphericalangle FLK + \sphericalangle LKF),$$

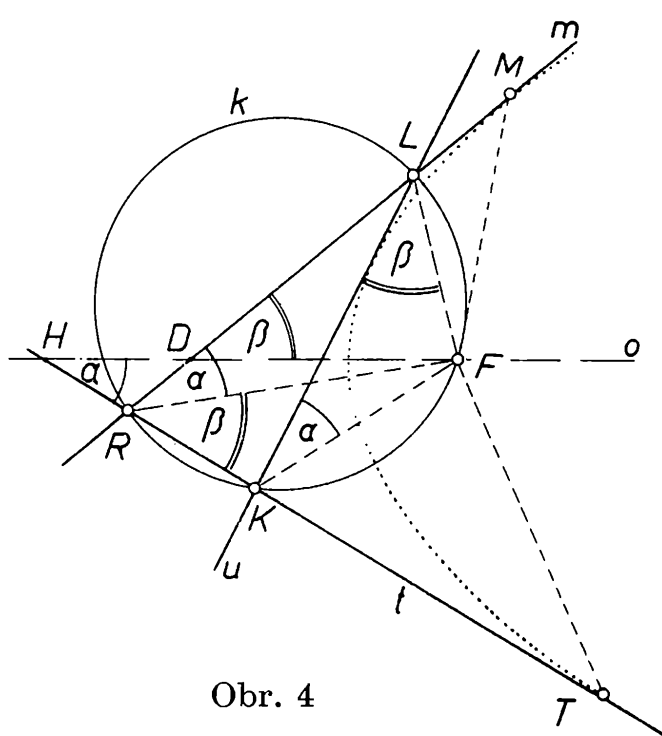
alebo tiež

$$\sphericalangle LFK = 180^\circ - \sphericalangle TRM$$

O štvoruholníku $FLRK$ u ktorého vrchol F je ohniskom paraboly sme dokázali tú vlastnosť, že súčet protíhlých uhlov v tomto štvoruholníku sa rovná 180° ; o takomto štvoruholníku vieme, že je možné jemu opísať kružnicu.



Obr. 3



Obr. 4

Veta 4. Ortocentrum trojuholníka, ktorý je vytvorený troma dotyčnicami paraboly leží na riadiacej priamke paraboly.

Dôkaz. Tri dotyčnice a , b , c paraboly vytvárajú trojuholník ABC (obr. 4). Zostrojme výšku trojuholníka z vrcholu A na stranu BC . Dokážeme, že priesečník tejto výšky s riadiacou priamkou f paraboly je ortocentrum trojuholníka ABC . Výška trojuholníka z vrcholu A pretína riadiacu priamku paraboly v bode O , stranu BC v bode L a kružnicu k opísanú trojuholníku ABC v bode G . Platí

$$\sphericalangle AGF = \sphericalangle ABF$$

ako vnútorné uhly, odpovedajúce tomu istému oblúku $\widehat{AF}$. Zostrojme bod Q súmerne združený s ohniskom F podľa dotyčnice a . Nad úsečkou FB ako priemerom zostrojme kružnicu k' , ktorá v dôsledku Thaletovej vety prechádza bodmi P a P' , ktoré sú pätami kolmíc, zostrojených z ohniska F na dotyčnice a , c paraboly. Ďalej platí

$$\sphericalangle P'BF = \sphericalangle P'PF,$$

lebo oba uhly odpovedajú oblúku $P'F$. Ďalej platí

$$\sphericalangle P'PF = \sphericalangle OQF$$

ako vnútorné uhly ležiace pri rovnobežných priamkach ($PP' \parallel f$). Tak tiež platí

$$\sphericalangle AGF = \sphericalangle OQF = \sphericalangle GOQ$$

ako vnútorné uhly ležiace pri rovnobežných priamkach ($FG \parallel OG$). Pretože $FP = PQ$ platí tiež rovnosť úsečiek

$$OL = LG$$

Bod O na riadiacej priamke f je skutočne ortocentrom trojuholníka ABC , ktorého strany sú dotyčnicami paraboly, lebo vyhovujú určitej vlastnosti ortocentra obecného trojuholníka, že totiž body súmerne združené s ortocentrom trojuholníka vzhľadom k jeho stranám ležia na kružnici opísanej trojuholníku.

Uvedených dotyčnicových vlastností paraboly možno vhodne použiť pri riešení rôznych úloh o parabole.

Kuželosečky vytvořené ve svazcích kružnic

KAREL DRÁBEK, CSc., ČVUT, Praha

V tomto článku ukážeme, že platí:

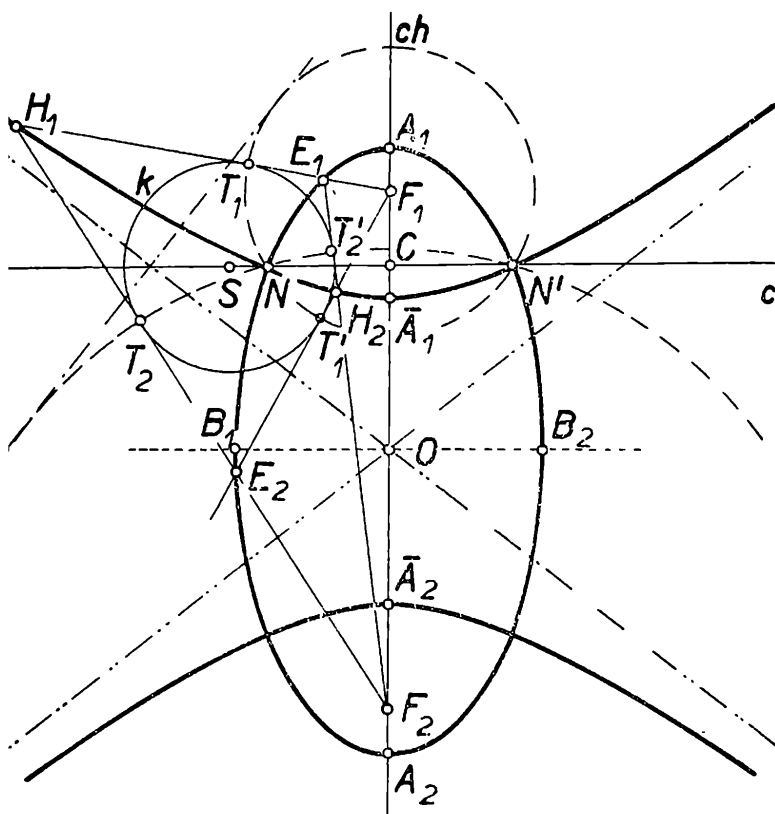
Tečny sestřené ze dvou (různých) pevných bodů chordály svazku kružnic ke každé z kružnic svazku se protínají ve čtyřech bodech, které leží po dvou na dvou kuželosečkách. Oba body chordály jsou ohnisky kuželoseček, které jsou tedy konfokální.

Ve zvláštním případě volby obou bodů jedna z kuželoseček degeneruje.

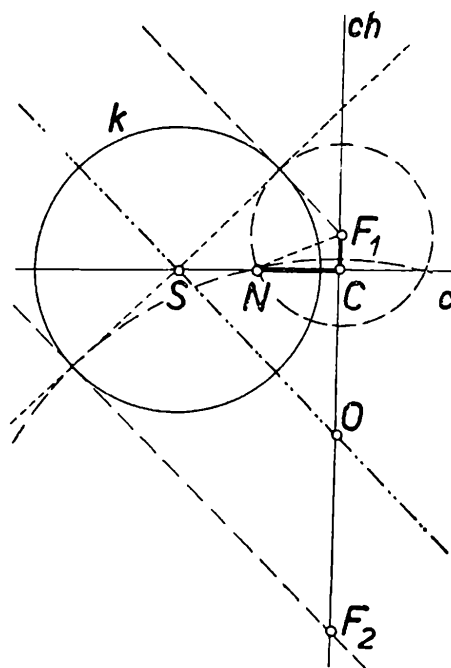
Důkaz provedeme postupně pro všechny tři druhy svazků kružnic.

a) Na chordále ch hyperbolického svazku kružnic (obr. 1) zvolme dva různé body F_1 , F_2 tak, aby $F_1C \neq F_2C$, kde C je centrální bod (tj. průsečík chordály ch a centrály c svazku kružnic).

Tečny sestrojené z bodu F_1 k jedné kružnici k svazku se protínají s tečnami sestrojenými z bodu F_2 k téže kružnici ve čtyřech bodech $E_1, E_2; H_1, H_2$. Body E_1, E_2 leží na elipse, body H_1, H_2 na hyperbole, přičemž obě kuželosečky mají společná ohniska v bodech F_1, F_2 .



Obr. 1



Obr. 2

Označíme-li T_1, T'_1 , popříp. T_2, T'_2 body dotyku tečen z bodu F_1 , popříp. F_2 ke kružnici k , platí

$$E_1F_1 = T_1F_1 - T_1E_1, E_1F_2 = T'_2F_2 + T'_2E_1.$$

Protože $E_1T_1 = E_1T'_2$, plyne

$$E_1F_1 + E_1F_2 = F_1T_1 + F_2T'_2 = \text{konst.}$$

neboť tečny z bodu F_1 , popříp. F_2 mají touž délku ke všem kružnicím svazku.

Body E leží na elipse, která prochází body N, N' , tj. nulovými kružnicemi svazku.

Obdobně dostaneme pro body H_1, H_2 , že

$$H_1F_1 - H_1F_2 = F_1T_1 - F_2T_2 = \text{konst.},$$

a tedy oba body H leží na téže větvi hyperboly, která rovněž prochází body N, N' . Protože jsou tedy obě vytvořené kuželosečky konfokální, protínají se v bodech N, N' pravouhle.

V případě hyperboly pro určitou kružnici svazku získáme tečnu bodem F_1 a odpovídající tečnu bodem F_2 , které jsou rovnoběžné a určují směr asymptoty vytvořené hyperboly. Pro kružnici souměrnou podle

chordály dostaneme směr druhé asymptoty. Středů kružnic svazku s uvedenou vlastností jsou průsečíky centrály a společných tečen kružnic o středech v bodech F_1, F_2 , které protínají pravoúhle kružnice svazku. Spojnice středů těchto kružnic se středem O hyperboly jsou asymptotami vytvořené hyperboly, neboť jsou, jak se snadno přesvědčíme, rovnoběžné s tečnami určujícími směry asymptot.

S rostoucím poloměrem kružnice svazku se vzdálenost průsečíku příslušných tečen od hlavního vrcholu sestrojené kuželosečky blíží k nule. V limitě (tj. pro kružnici svazku, jejíž poloměr roste nade všechny meze a která přejde do chordály) získáme tedy popsanou konstrukci hlavní vrcholy kuželoseček.

Úvaha nevylučuje případ volby bodu F_2 nebo F_1 v bodě C .

Poznámka 1. Je-li $F_1C = F_2C$, pak dostaneme pouze elipsu s vedlejší poloosou $CN = CN'$

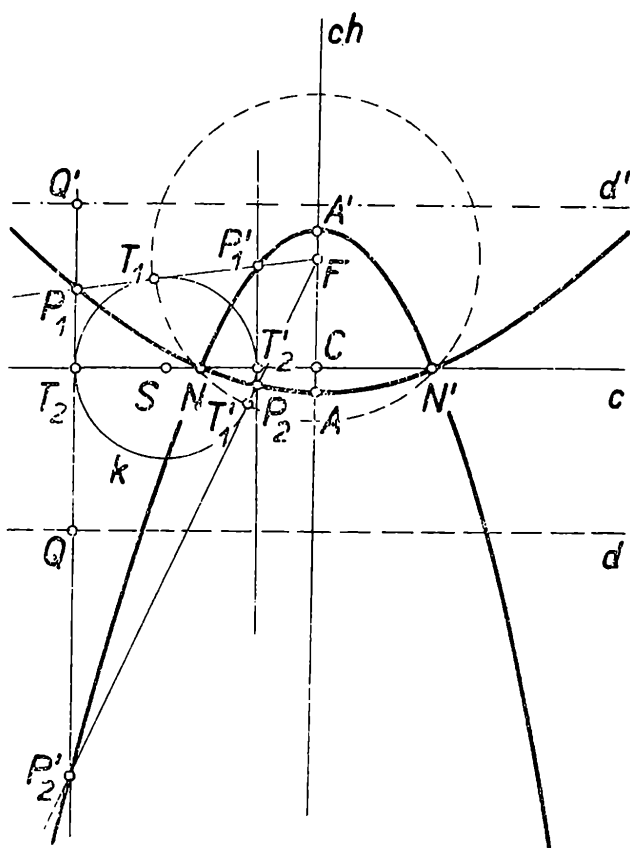
Poznámka 2. Aby vedle elipsy byla vytvořena rovnoosá hyperbola, musí společné tečny obou kružnic se středy v bodech F_1, F_2 , které protínají pravoúhle kružnice svazku, svírat s chordálou, a tedy i s centrálou úhel 45° . Z toho plyne (obr. 2), jestliže označíme $x = F_1C$, že ke zvolenému bodu F_1 existují dva body F_2, F'_2 , které určí rovnoosou hyperbolu, pro které

$$F_2C = 3x + 2\sqrt{2(x^2 + a^2)},$$

kde $a = CN$.

Poznámka 3. Jestliže zvolíme pouze jeden bod F a sestrojíme vedle tečen z bodu F ke každé kružnici svazku tečny rovnoběžné s chordálou ch^1 , pak jejich čtyři průsečíky $P_1, P_2; P'_1, P'_2$ leží na dvou parabolách (obr. 3) se společným ohniskem F a řídicími přímkami rovnoběžnými s centrálou ve vzdálenosti rovné délce tečny z bodu F ke kružnicím svazku, tj. ve vzdálenosti FN . Obě paraboly procházejí opět nulovými kružnicemi N, N' svazku, v těchto bodech se protínají pravoúhle.

Je-li $F \equiv C$, pak jsou obě paraboly shodné a řídicí přímky jsou tečnami kružnice $(F; FN)$ v jejich průsečících s chordálou.



Obr. 3

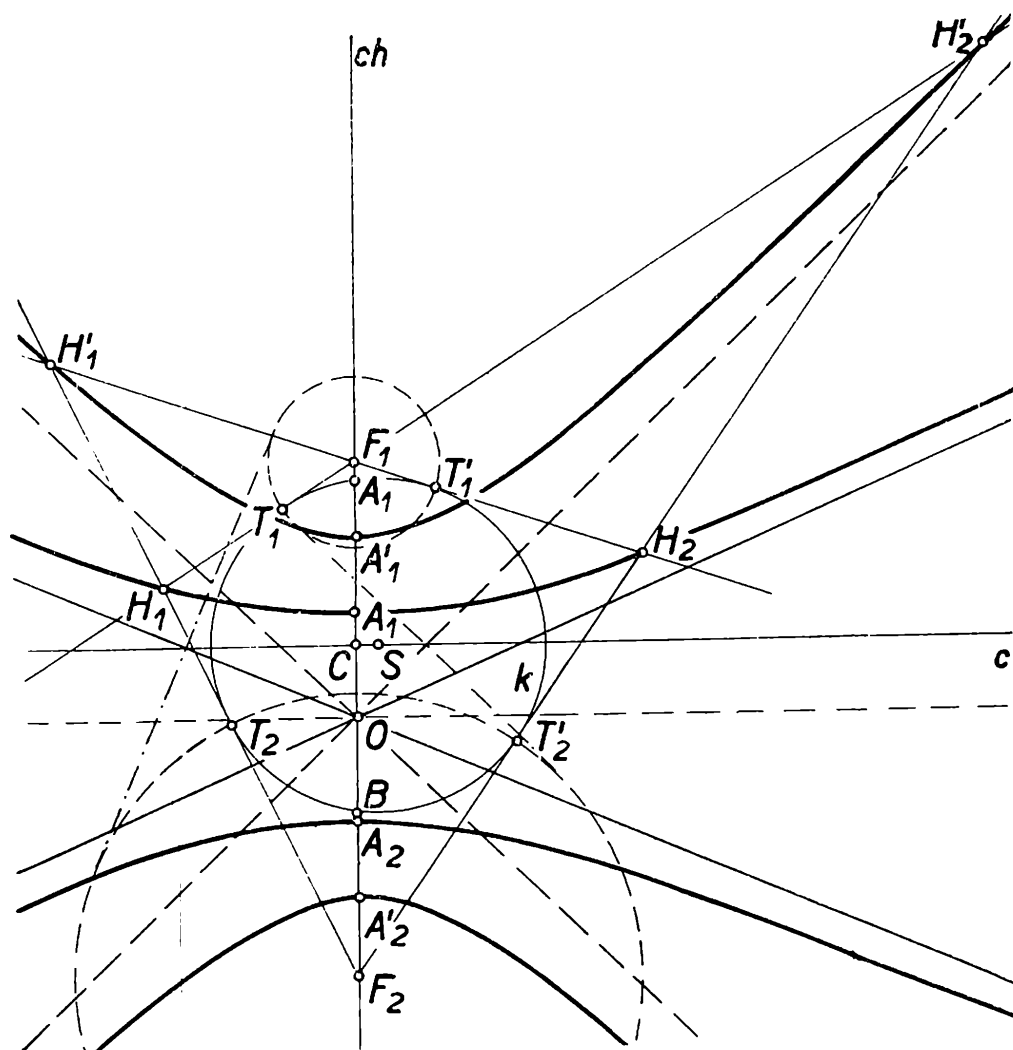
¹⁾ Jinak řečeno, bod F_2 je nyní nevlastním bodem chordály ch .

Důkaz těchto tvrzení se ponechává čtenáři za cvičení.

b) Při eliptickém svazku kružnic pro reálný případ kuželoseček je nutno volit body F_1, F_2 vně úsečky AB , kde A, B jsou základní body svazku kružnic. Rozlišíme přitom dvojí vzájemnou polohu bodů F_1, F_2 .

1. Oba body F_1, F_2 jsou v opačných polorovinách určených společnou centrálou c kružnic svazku (obr. 4) a žádný z nich není totožný s bodem A nebo B , přičemž $F_1C \neq F_2C$. Pak tečny z bodu F_1 se protínají s tečnami z bodu F_2 k téže kružnici k svazku ve čtyřech bodech $H_1, H_2; H'_1, H'_2$, které leží na dvou hyperbolách.

Obr. 4



Platí např. při volbě $F_2C > F_1C$

$$H_1F_2 - H_1F_1 = H_1T_2 + T_2F_2 - H_1T_1 - T_1F_1 = F_2T_2 - F_1T_1 = \text{konst.}$$

a obdobně

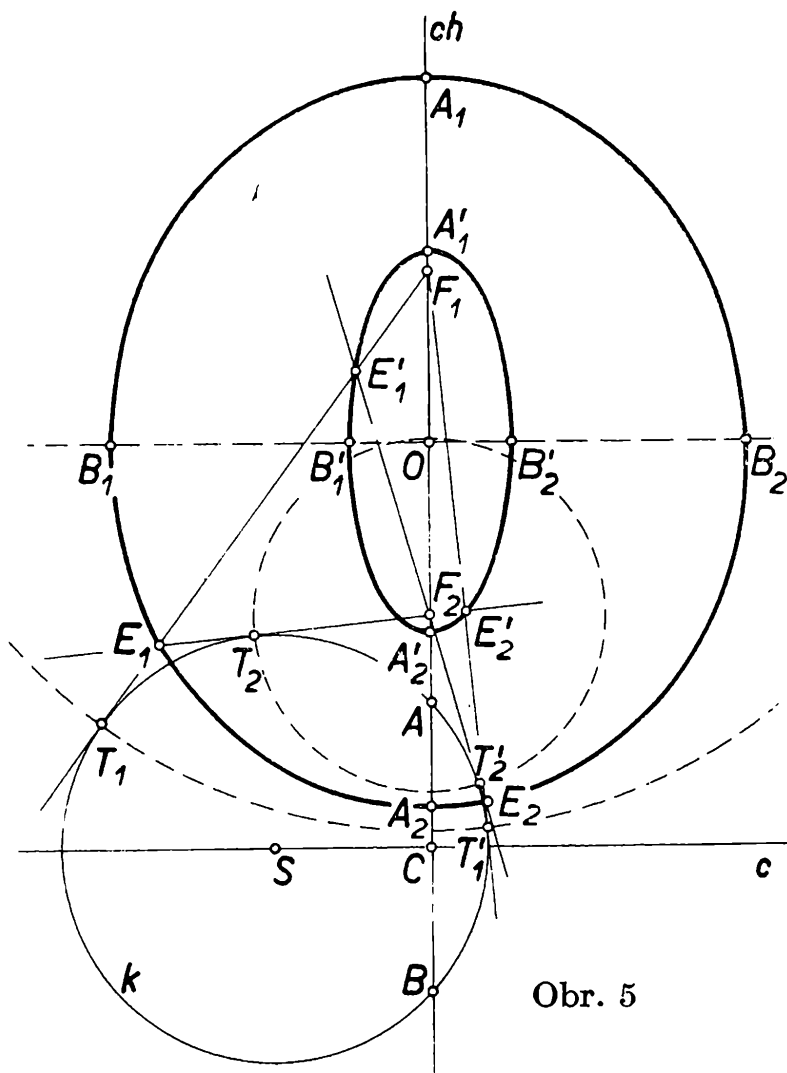
$$H'_1F_2 - H'_1F_1 = F_2T_2 + T_2H'_1 - H'_1T'_1 + F_1T'_1 = F_1T'_1 + F_2T_2 = F_1T_1 + F_2T_2 = \text{konst.}$$

Oba body H , popříp. H' leží pro touž kružnici svazku na téže větvi vytvořené hyperboly.

Je-li $F_1C = F_2C$ je vytvořena opět pouze jedna hyperbola.

Poznámka 4. Aby byla vytvořena rovnoosá hyperbola, musí buď obě

vnější nebo obě vnitřní společné tečny kružnic se středy v bodech F_1 , F_2 a protínající pravouhle všechny kružnice svazku, svírat s chordálou úhel 45° . Je-li úhel vnější (vnitřní) tečny s chordálou roven 45° , je úhel vnitřní (vnější) tečny větší (menší) než 45° , obě možnosti současně nenastávají.



Obr. 5

Při stejném označení jako v pozn. 2 dostaneme pro případ vnějších tečen

$$F_2C = 3x + 2\sqrt{2(x^2 - a^2)},$$

pro případ vnitřních tečen

$$F_2C = 3x - 2\sqrt{2(x^2 - a^2)}$$

Je-li $F_1C = F_2C$ je $F_1C = a\sqrt{2}$

2. Oba body F_1 , F_2 jsou v téže polorovině (obr. 5) určené centrálou c svazku kružnic a žádný z nich není totožný s bodem A . Tečny z bodu F_1 se protínají s tečnami z bodu F_2 k téže kružnici k svazku ve čtyřech bodech E_1 , E_2 ; E'_1 , E'_2 , které leží na dvou elipsách, neboť ($F_1C > F_2C$)

$$E_1F_1 + E_1F_2 = F_1T_1 - T_1E_1 + F_2T_2 + T_2E_1 = F_1T_1 + F_2T_2$$

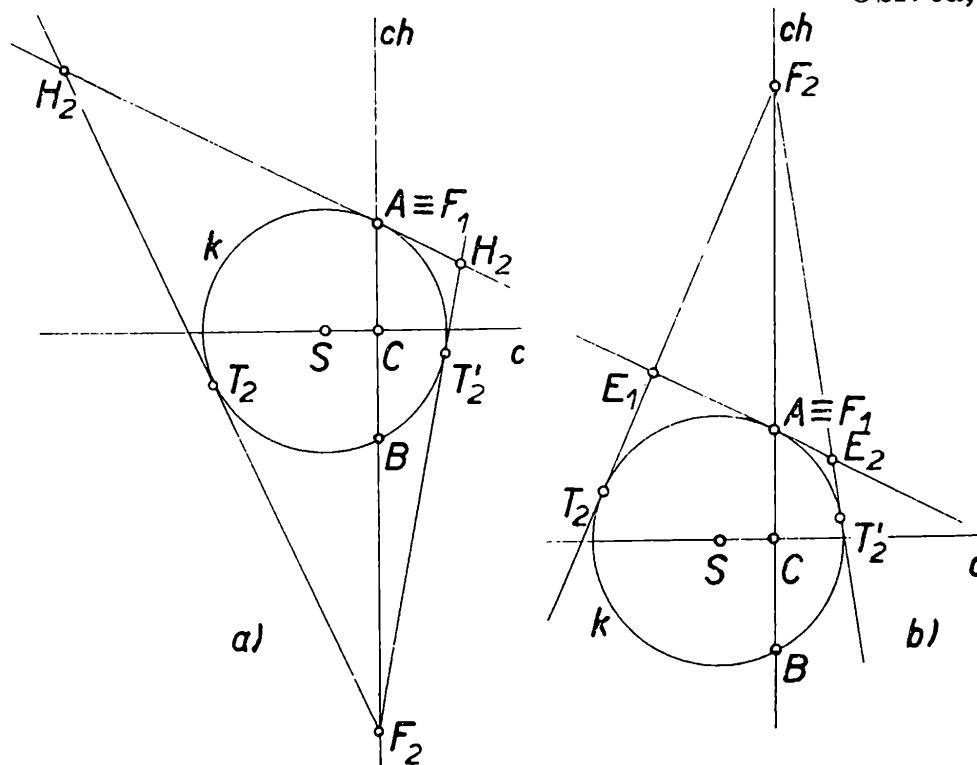
a obdobně

$$E'_1F_1 + E'_1F_2 = F_1T_1 - T_1E'_1 + E_1T'_2 - F_2T'_2 = F_1T_1 - F_2T'_2.$$

Poznámka 5. Je-li $F_1 \equiv A$, $F_2 \neq B$ je v případě 1. vytvořena pouze jedna hyperbola (obr. 6a), pro jejíž body platí $|H_1F_1 - H_1F_2| = F_2T_2$, v případě 2. pouze jedna elipsa (obr. 6b), pro kterou platí

$$E_1F_1 + E_1F_2 = F_2T_2.$$

Obr. 6a, 6b



Aby obě vytvořené kuželosečky byly paraboly, postupujeme stejně jako v případě hyperbolického svazku kružnic. V tomto případě, je-li $F \equiv A$, je vytvořena pouze jedna parabola s řídicí přímkou v centrále c svazku kružnic.

c) Pro parabolický svazek kružnic vyslovíme pouze výsledky, jejich důkaz nechť si provede čtenář opět jako cvičení.

Jestliže body F_1 , F_2 zvolíme v opačných polorovinách určených centrálou c , je vytvořena hyperbola, jsou-li oba body F_1 , F_2 v téže polorovině, je vytvořena elipsa.

Jestliže v prvním případě $F_1C = F_2C$ pak neexistuje regulární kuželosečka.

Aby byla vytvořena rovnoosá hyperbola, pak při volbě $F_1C = x > 0$ musí pro F_2C platit vztah

$$F_2C = x(3 \pm 2\sqrt{2})$$

Všechny takto vytvořené kuželosečky mají v bodě C hlavní vrchol.

Pro zvolený bod $F \neq C$ existuje jediná parabola, která má v bodě C vrchol a řídicí přímkou ve vzdálenosti FC v opačné polorovině určené centrálou c než je bod F .



Výkon sinusového střídavého proudu

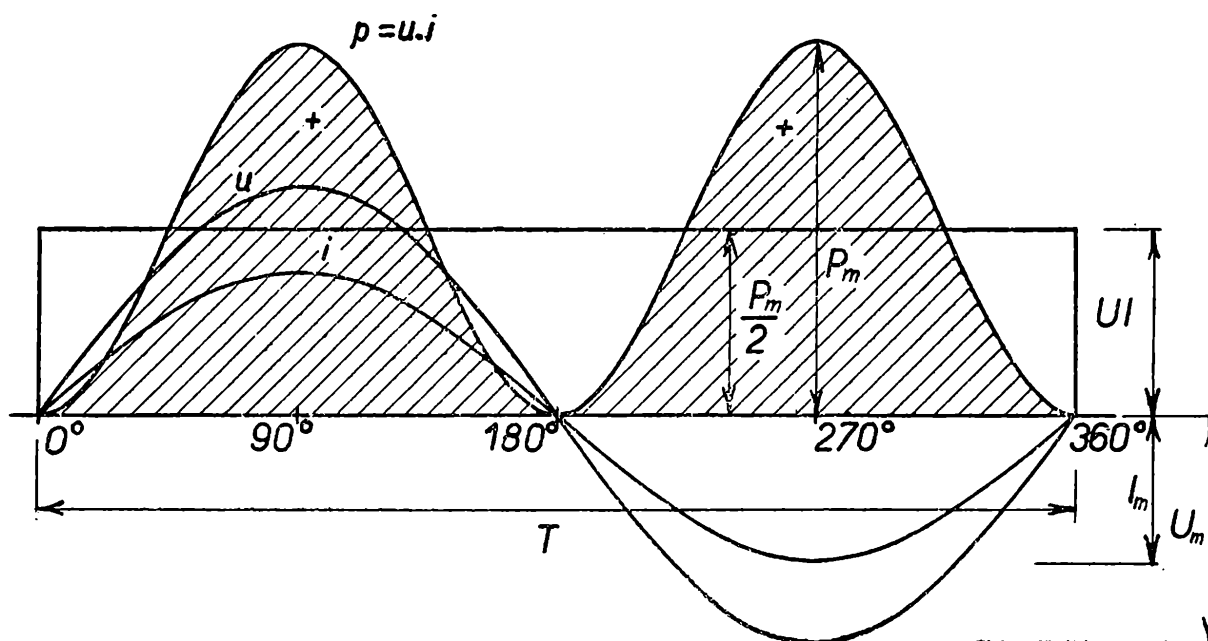
ING. LADISLAV SMRŽ, Praha

Výkon stejnosměrného proudu je dán součinem napětí U a proudu I podle vztahu

$$P = U \cdot I, \quad (1)$$

přičemž u ustáleného proudu mají obě tyto veličiny stálou, časově neproměnnou hodnotu.

U střídavého proudu tomu tak není. Předpokládáme-li u napětí U i proudu I sinusový průběh podle obr. 1, mění se jejich hodnoty periodicky mezi maximální kladnou a zápornou hodnotou, tzv. amplitudou, U_m a I_m (v obr. 1 je znázorněna jedna perioda T tohoto stále



Obr. 1

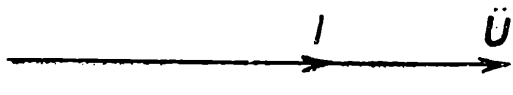
stejně se opakujícího průběhu). Chceme-li tedy vyjádřit výkon střídavého proudu vztahem (1), musíme jej uvažovat pouze pro okamžité hodnoty u , i , tedy

$$p = u \cdot i \quad (2)$$

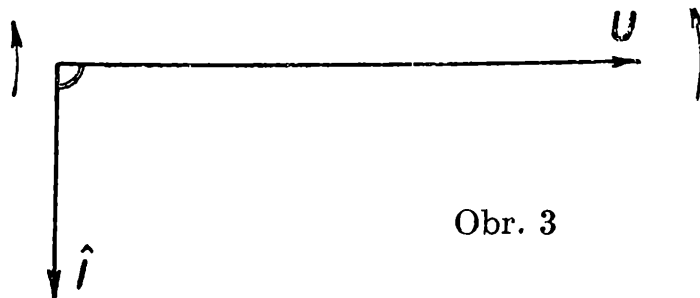
Z obr. 1 vidíme, že můžeme pro každý časový úsek celé periody T vypočítat okamžitou hodnotu výkonu p vynásobením příslušných okamžitých hodnot u , i . Největší výkon P_m je v okamžiku, kdy napětí a proud dosahují současně svých maximálních hodnot (amplitud) U_m a I_m . Pro tuto maximální hodnotu výkonu platí tedy vztah

$$P_m = U_m \cdot I_m. \quad (3)$$

Okolnost, že ve stejný okamžik dosahují výkon, napětí a proud maximálních hodnot (a právě tak i mají ve stejný okamžik nulovou hodnotu) svědčí o tom, že uvažovaný elektrický obvod má pouze ohmický odpor R a že tedy časové vektory proudu a napětí, jimiž si graficky znázorňujeme poměry v elektrickém obvodu, mají stejný směr, jsou vzájemně ve fázi (obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

V první půlce (0° až 180°) mají napětí i proud kladné hodnoty, v druhé půlce (180° až 360°) mají obě tyto veličiny záporné hodnoty. Proto je jejich součin stále kladný. Proudový zdroj dodává energii spotřebiči (s čistě ohmickým odporem R), která se v něm přeměňuje v tepelnou energii.

Matematicky si můžeme odvodit, že plocha ohraničená časovou osou a křivkou průběhu výkonu p se dá nahradit plochou obdélníka, jehož základna je T a výška

$$\frac{P_m}{2},$$

která představuje střední hodnotu dodávaného výkonu. Dosadíme-li tuto hodnotu do vztahu (3), dostaneme výraz

$$P = \frac{P_m}{2} = \frac{U_m \cdot I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U \cdot I \quad (4)$$

Hodnoty

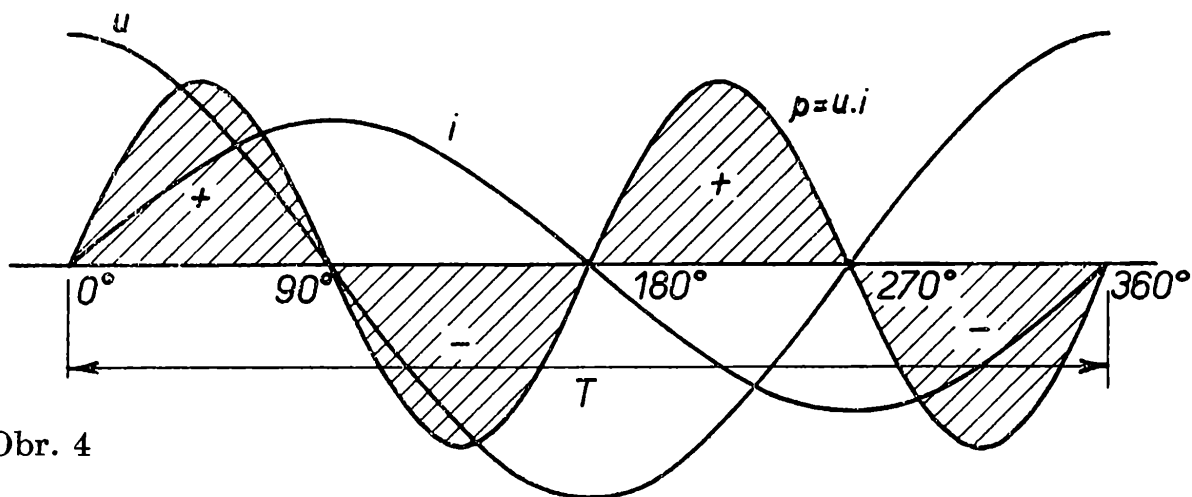
$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

mají v elektrotechnice velkou důležitost. Nazýváme je efektivní hodnoty a jsou to střední kvadratické hodnoty, které ukazují všechny běžně používané elektrické měřicí přístroje (voltmetry, ampérmetry, wattmetry aj.). Označujeme je velkými písmeny, např. efektivní hodnotu napětí U , efektivní hodnotu proudu I (jako je v rovnici 4). Hodnota

$$\frac{P_m}{2}$$

ve vztahu (4) je podle toho rovněž střední hodnota výkonu, efektivní výkon střídavého proudu. Nazýváme jej *činným výkonem*, vzhledem k tomu, že se zde dá elektrická energie měnit v jinou energii, např. v tepelnou. Přitom množství vzniklého tepla je stejné jako množství tepla vyvolaného rovnocenným stejnosměrným napětím U a proudem I . Proto se výraz $P = U \cdot I$ v čistě ohmickém obvodu střídavého proudu neliší od vztahu (1) pro stejnosměrný proud.

Obvykle však nejsou obvody střídavého proudu tak ideální, aby měly pouze ohmický odpor. Téměř vždy obsahují kombinaci všech tří druhů odporu, tedy ohmického, induktivního a kapacitního. Např. v síti jsou zapojeny nejrůznější spotřebiče jako vařiče, akumulární kamna, motory, žárovky, zářivky aj., u nichž se u žádného nedá uvažovat pouze čistě ohmický odpor. Proto je také vždy určitý fázový posun mezi síťovým napětím a odebíraným proudem, vznikající působením indukčních a v menší míře také kapacitních odporů.

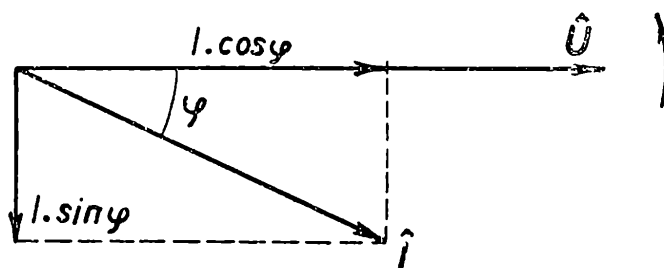


Obr. 4

Všimněme si nejprve případu, kdy obvod střídavého proudu má pouze čistě induktivní, nebo čistě kapacitní odpor. Teoreticky se dá odvodit, že se v obvodu s čistě induktivním odporem zpožďuje časový vektor proudu za časovým vektorem napětí o 90° a naopak v obvodu s čistě kapacitním odporem časový vektor proudu předbíhá o 90° časový vektor napětí. V obr. 3 jsou tyto poměry znázorněny pro obvod s čistě induktivním odporem, proud $\hat{I}$ je o 90° zpožděn za napětím $\hat{U}$. Když si prohlédneme obr. 4, kde jsou vyznačeny sinusové průběhy napětí,

proudu i výkonu, vidíme, že v první čtvrtině periody T (0° až 90°) jsou napětí i proud kladné, tedy i výkon p je kladný. Zdroj dodává energii do spotřebiče. To se opakuje i ve třetí čtvrtině periody (180° až 270°), kdy napětí i proud jsou záporné. Ve druhé a čtvrté čtvrtině periody T mají však napětí a proud opačná znaménka, výkon p je záporný. To znamená, že energie dodaná spotřebiči se v těchto úsecích periody T opět vrací do zdroje. Celkový výkon během periody T je tedy nulový, nazýváme jej *jalovým výkonem*. Elektrická energie jemu odpovídající se nedá měnit na jiný druh energie. Jalového výkonu se proto nedá užitečně využít.

Také případy, kdy elektrický obvod má pouze induktivní nebo kapacitní odpor, jsou jen ideální. Ve skutečnosti je zde vždy určitý činný odpor, takže fázový posun mezi proudem a napětím je menší než 90° . Poměry v takovém obvodu jsou znázorněny (pro induktivní charakter obvodu) v obr. 5. Proud I se zpožďuje za napětím U o fázový úhel φ , který je skutečně menší než 90° . Znázorníme-li si sinusové průběhy všech užitých veličin, jak je naznačeno v obr. 6, vidíme, že kladný



Obr. 5

výkon je větší než výkon záporný. Dostáváme tedy určitý činný výkon P , jehož se dá užitečně využít (v obr. 6 je to vyjádřeno obdélníkem o základně T a výšce P , která představuje střední hodnotu výkonu za celou periodu T). Takový případ bývá nejčastější v elektrických obvodech.

Velikost výkonu střídavého sinusového proudu mohli bychom si počítat z rovnic, jimiž je dán sinusový průběh proudu a napětí

$$u = U_m \sin \omega t \quad \text{a} \quad i = I_m \sin (\omega t - \varphi),$$

posunutých vůči sobě o úhel φ .

Jednodušeji však k tomu dojdeme pomocí geometrických vztahů z obr. 5. Ve shodě s mechanikou je činný výkon P dán součinem napětí U a složky proudu I , promítnuté do směru napětí U . Podle obr. 5 je tedy *činný výkon* P střídavého sinusového proudu dán vztahem

$$P = U \cdot I \cos \varphi. \quad (5)$$

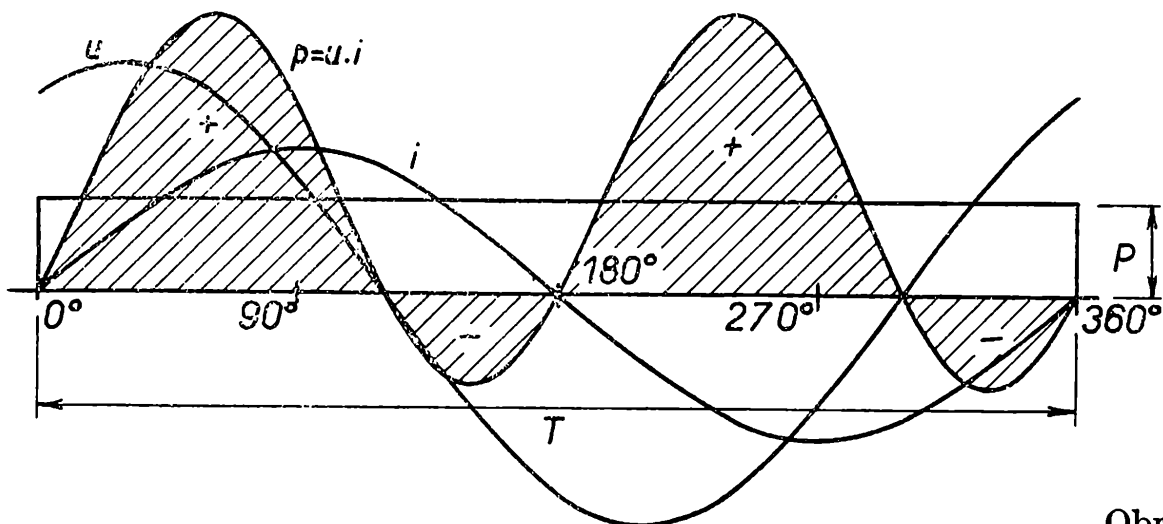
Analogicky k tomu je *jalový výkon* P_q dán součinem napětí U a kolmé složky proudu I k napětí U . Platí tedy

$$P_q = U \cdot I \sin \varphi. \quad (6)$$

Použijeme-li k tomuto výpočtu výkonu vztahu (5), musíme dosadit za fázový úhel $\varphi = 90^\circ$ a dostaneme tak

$$P = U \cdot I \cdot \cos 90^\circ = U \cdot I \cdot 0 = 0. \quad (7)$$

Vztah (7) je důkazem, že skutečně jalová energie nemůže být převedena na jiný druh energie.



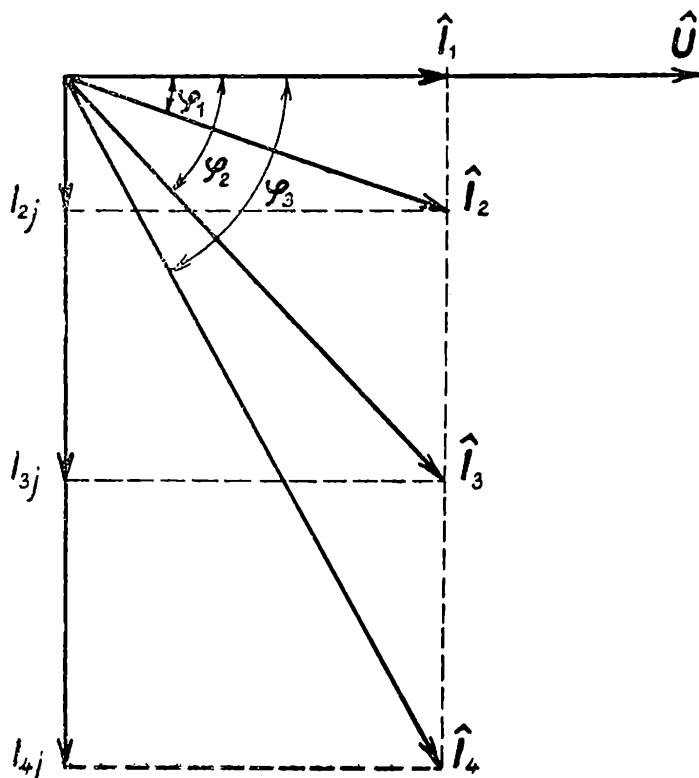
Obr. 6

Uvažujeme-li ve vztahu (5) pouze součin $U \cdot I$ bez ohledu na fázový posun φ mezi napětím U a proudem I , dostáváme tak zvaný *zdánlivý výkon* P_s . Má pouze teoretický význam a je důležitým při výpočtech generátorů pro určování dovoleného zatížení apod.

Zákonnými jednotkami všech tří druhů výkonů střídavého proudu jsou

- watt [W] pro *činný výkon* P ,
- voltampér reaktanční [VAR nebo var] pro *jalový výkon* P_q ,
- voltampér [VA] pro *zdánlivý výkon* P_s .

Z obr. 3 až 6 je zřejmé, že největší užitečný (činný) výkon dostáváme, jsou-li napětí U a proud I ve fázi, není-li mezi nimi žádný fázový posun. Proto se výrobce elektrické energie, elektrárna, snaží, aby v síti byl fázový posun mezi proudem a napětím co nejmenší. Důvody k tomu jsou zřejmé z obr. 7, kde jsou naznačeny různé poměry v síti. Činný výkon P je dán součinem proudu I_1 (ležícího ve směru napětí) a napětí U . Při rostoucím fázovém posunu mezi proudem a napětím, musí



potřebný proud I růst stále na větší hodnoty I_2, I_3, I_4 , má-li být zachován potřebný výkon P . Vyšší proud musí však generátor v elektrárně skutečně dodat, musí být vybuzen, aniž by se docílilo zvýšení činného výkonu. Tím se zhoršuje účinnost celého zařízení, výroba elektrické energie se zdražuje. Z toho je také odvozen název pro veličinu $\cos \varphi$ [vyskytující se ve vztahu (5) pro činný výkon] *účinník*. Je to jakési měřítko hospodárnosti při výrobě elektrické energie. Aby elektrárna donutila velké spotřebitele (továrny apod.) k udržování malého posunu při odběru elektrické energie, měří jalovou energii speciálními elektroměry a při překročení určité smluvené hodnoty vybírá přírázky k ceně za odebranou energii.



NAŠE SOUTĚŽ

ÚLOHY K ŘEŠENÍ

(Pokračování)

Fyzika

1. Po nakloněné dokonale drsné rovině délky s , která svírá s vodorovnou rovinou úhel α , valí se do vodorovné roviny koule poloměru r . Jakou dráhu vykoná koule po vodorovné rovině než se zastaví? Koeficient valivého tření mezi koulí a rovinou je ξ . (Moment setrvačnosti koule $J = \frac{2}{5} mr^2$.)

Josef Dibelka

2. Je-li zdroj napětí zatížen odporem R_1 , dává napětí U_1 . Je-li zatížen odporem R_2 , dává napětí U_2 . Voltmetr, kterým odčítáme napětí, má vnitřní odpor R_v . Vypočítejte vnitřní odpor zdroje.

Josef Dibelka

3. Na nakloněné rovině stojí plné těleso tvaru přímého čtyřbokého jehlanu. Délka strany čtvercové základny jehlanu je 100 mm, výška jehlanu 350 mm. Materiál, z něhož je těleso zhotoveno je homogenní. Máme určit, jaký maximálně může být úhel α sklonu roviny, aby se těleso (stojící zá-

kladnou na nakloněné rovině) nepřeklopilo, je-li přitom základna tělesa orientována tak, že:

a) dvě strany základny jsou rovnoběžné se spádovou přímkou nakloněné roviny,

b) úhlopříčka základny je rovnoběžná se spádovou přímkou.

Daný příklad řešte obdobně pro těleso stejného tvaru a stejně situované pouze s tím rozdílem, že jehlan je dutý a jeho stěny mají vesměs zanedbatelnou tloušťku.

Václav Šindelář

4. Elektrický obvod má ohmický odpor R a indukčnost L (obě veličiny jsou uvažovány v sérii). Kapacitu obvodu zatím zanedbáváme ($C = 0$). Činný výkon obvodu je při střídavém napětí $U_{ef} = 1600$ V s frekvencí $f = 3$ kHz roven $P = 24$ kW. Účinník je roven $\cos \varphi = 0,75$. Máme vy počítat:

a) efektivní proud I_{ef} v daném obvodu a dále zdánlivý odpor Z , ohmický odpor R a indukčnost L obvodu,

b) jakou kapacitu C bychom museli sériově vložit do obvodu, aby bylo fázové posunutí nulové,

c) jakou hodnotu bude mít v případě b) činný výkon a jalový výkon?

Václav Šindelář

5. Měděná a olověná koule stejné hmotnosti m byly zahřáty ve vodní lázni na stejnou teplotu t . Pak byly ponořeny do dvou nádob, v nichž bylo stejné množství vody, která měla stejnou teplotu $t_1 < t$. Kolik kg vody musí být v každé nádobě, aby se rozdíl v měrných teplech c_1 a c_2 obou kovů projevil co nejvíce? (Měrné teplo mědi $c_1 = 0,093$ kcal $\cdot$ kg $^{-1}$ $\cdot$ deg $^{-1}$, měrné teplo olova $c_2 = 0,031$ kcal $\cdot$ kg $^{-1}$ $\cdot$ deg $^{-1}$). Úlohu řešte nejdříve obecně a do výsledku dosadte $t = 100$ °C, $t_1 = 15$ °C a $m = 1$ kg.

František Vencálek

6. Družice o hmotnosti m vnikla ve výšce h rychlostí v do hustých vrstev atmosféry. Kolik tepla se vyvine třením o vzduch za předpokladu, že se celá mechanická energie družice změnila v teplo. Úlohu řešte nejdříve obecně a pak do výsledku dosadte $m = 1$ kg, $h = 30$ km, $v = 8$ km $\cdot$ s $^{-1}$. Volte $g = 9,81$ m $\cdot$ s $^{-2}$.

František Vencálek

Matematika

7. Dokažte, že číslo

$$N = 407^{697^{321}} + 321^{407^{697}} + 697^{321^{407}}$$

je dělitelné číslem 435.

(Podle rumunského časopisu Gazeta Matematica)

František Kejla

8. Řešte rovnici

$$n! - 5n - 4 = 0.$$

Věra Pohlová

9. Jaký je součet koeficientů v rozvinutém mnohočlenu

$$(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1)^{1967}?$$

(Podle jugoslávského časopisu Obzornik za matematiko in fiziko - soutěž mladých matematiků na II. gymnasiu v Lublani)

Ota Setzer

10. Součet čtverců tří po sobě jdoucích lichých čísel je čtyřciferné číslo napsané stejnými ciframi. Určete je!

(Podle západoněmeckého časopisu Archimedes)

Ota Setzer

11. Kdy se narodil člověk, jehož stáří v roce 1968 se bude rovnat cifer-
nému součtu roku jeho narození?

(Podle holandského časopisu Pythagoras)

Ota Setzer

12. Trojúhelníkové pole ABC rozdělte lomenou mezi $PQRH$ na dva stejné díly tak, aby daný bod $P \in BC$, dané body Q a R byly vnitřními body trojúhelníka ABC a hledaný bod $H \in AB$.

Karel Špaček

Řešení úloh uveřejněných v tomto čísle zašlete nejpozději do 15.
b ř e z n a 1968 na adresu: Doc. Ota Setzer, Praha 2, Trojanova 13.

Výsledky loňské soutěže ROZHLEDŮ

V č. 2 letošního ročníku jsme uveřejnili výsledky v části *Matematika*,
dnes k tomu připojujeme výsledky z oboru *Konstruktivní geometrie*
a *Fyzika*.

Konstruktivní geometrie

1. Pavel Polcar, II.B SVVŠ, Velké Meziříčí .	24 bodů
2. Martin Šolc, III.G SVVŠ, W. Piecka, Praha 2	23 bodů
3.—7. Jan Červenka, III.A SVVŠ, Havlíčkův Brod	22 bodů
Milan Číha, III.A SVVŠ, Rakovník	
Marian Fúrik, III.C SVŠ, Zvolen	
Jan Louda, III.F SVVŠ, Plzeň	
Stanislav Slouka, IV.A SPŠE, Brno	

Fyzika

1. Jan Louda, III.F SVVŠ, Plzeň	36 bodů
2.—3. Jiří Leicman, III.B SPŠS, Brno	35 bodů
Stanislav Slouka, IV.A SPŠE, Brno	
4. Renata Žaludová, III.A SVVŠ, Znojmo .	34 bodů
5.—6. Marian Fúrik, III.C SVŠ, Zvolen	33 bodů
Jan Kastl, III.F SVVŠ JF, Plzeň	
7. Bohumila Vlachová, II.S SVVŠ, Brno	31 bodů

Dále uveřejňujeme abecední seznam úspěšných řešitelů. Za jménem každého řešitele jsou uvedena čísla správně vyřešených příkladů z příslušného oboru, v závorce pak čísla úloh, řešených s menšími nedostatky. Nesprávná řešení neuvádíme vůbec.

Martin Bukovčan, SVŠ, Bratislava - M 1—12; *Jiří Bureš*, ZDŠ, Šumperk - M 3; *Jan Coufal*, SVVŠ, Karviná - M 3, 5, 7—9, (10), G (1); *Bohumil Čapek*, SVVŠ, W. Piecka, Praha - M 2—4, 7, 9, 12, (1, 5, 8, 10, 11), F 1, (2, 3), G 3, 4, (1, 2); *Juraj Černák*, SVŠ, Turč. Teplice - M 3—5, 7, 9, 11, 12, (8), F 2, 4, 6, (1, 3, 5); *Jan Červenka*, SVVŠ, Havlíčkův Brod - M 2, 4, 5, 12, (3, 6—9), F 1, 3, 6, (2, 4, 5), G 1, 3, 4, (2); *Milan Čiha*, SVVŠ, Rakovník - M 1—5, 7, 9, 10, 12, (6, 8, 11), F 1, (3, 5, 6), G 2—4, (1); *Tomáš Duby*, SPŠE, Bratislava - M 1, 2, 4, 5, 7—9, 11, 12, (3, 6), F 1, 4, 5, (2, 3, 6), G 1, 4, (2, 3); *Marian Fúrik*, SVŠ Zvolen - M 1—12, F 1, 3—6, (2), G 2—4, (1); *Radovan Gregor*, SVVŠ W. Piecka, Praha - M 2, 3, 7, 11, (1, 4, 5, 8, 9, 12); *Michal Grell*, SVŠ, Bratislava - M 5—7, 9, 12, (8); *Otakar Grošek*, SVŠ, Bratislava - M 3—5, 7, 8, (10); *Eugen Guttek*, SVŠ, Prešov - M 9, (5); F 5, 6, (3, 4), G 1, 3, (2); *František Hajnovič*, SVŠ, Bratislava - M 4, 5, 7—9, 12, (1—3, 6, 11), F (2, 3, 5, 6), G (1); *Jiří Henzler*, SVVŠ, Praha 6 - M 3, 5, 7, (4, 8—10, 12); *Jiří Houska*, SVVŠ, Čakovice - F 1, (2), G 3, 4, (1, 2); *Věra Jaroňová*, SVVŠ, Nový Bohumín - M 1—4, 7—9, 11, (5, 6, 10, 12); *Josef Jirásko*, SVVŠ, Semily - M 3—5, 7, 9, 12, (6, 8, 10), F 5, (2, 3, 6), G (1); *Petr Just*, SVVŠ, Trutnov - M (8); *Jan Kastl*, SVVŠ, Plzeň - M 1, 3—9, 11, 12, (2, 10), F 1—5, (6), G 3, 4, (1, 2); *Miroslav Kawalec*, SVVŠ, Havířov - M 4—9, 11, (3, 10, 12), F 1, 3—6; *Miloš Kříž*, SVVŠ, Brno - M 3, 6—10, (5), F 3, 4, 6, (5); *Lubomír Kuka*, SVŠ, Dolný Kubín - F 3, 6, (5); *Jiří Leicman*, SPŠS, Brno - F 1—6; *Jan Louda*, SVVŠ, Plzeň - M 2, 4—9, 11, 12, (1, 3, 10), F 1—6, G 1, 3, 4, (2); *Věra Pohlová*, SVVŠ W. Piecka, Praha - M 2, 3, 7—9, (1, 4—6, 10, 12), F 1, 3, 6, (2, 4, 5), G 2, 3, (1, 4); *Libor Polák*, SVVŠ, Brno - M 2—5, 7—9, 12, (6, 10), F 2, (1, 3, 4, 6), G 1, 2, (3, 4); *Pavel Polcar*, SVVŠ, Velké Meziříčí - M 1, 3, 5, 7, 9, 12, (2, 4, 6, 8, 10), F 2, 3, 6, (1, 4, 5), G 1—4; *Jan Pospíchal*, SVVŠ, Telč - F 3—5, (6); *Rudolf Požgay*, SVŠ, Bratislava - M (5, 7); *Emília Pridalová*, SVŠ, Bratislava - M 5, 9, (1—3, 6—8, 10), F 1, (2, 5, 6); *Vojtěch Rödl*, SVVŠ W. Piecka, Praha - M 3, 7—9, 12, (1, 2, 4—6, 10), F 1, (2, 3, 5, 6), G 2, 3, (1, 4); *Jan Sedláček*, SVVŠ, Hradec Králové - F 2, 3, 5, 6, (1, 4); *Pavel Sejrek*, SVVŠ, Velké Meziříčí - M 8, 9, 12, (4), G (1); *Stanislav Slouka*, SPŠE, Brno - M 2, 3, 5—7, 9—12, (1, 4, 8), F 1—6, G 2—4, (1); *Mojmír Šob*, SVVŠ, Velké Meziříčí - M 5, 7, 9, (8), F 3, 4, 6, (5), G 1; *Martin Šolc*, SVVŠ W. Piecka, Praha - M 2, 3, 7—9, 12, (1, 4—6, 10, 11), F 1, 5, 6, (2—4), G 1—4; *Jana Štiková*, SVVŠ W. Piecka, Praha - M 2—4, 7, 9, 11, 12, (1, 5, 6, 8); *Jaroslav Štoviček*, SVVŠ, Jihlava - F 1, 3, 6, (2, 4, 5); *Jana Tauberová*, SVVŠ, Domažlice - F 3, (4—6); *Marián Vajtersíc*, SVŠ, Nitra - M (3, 10); *Pavel Vejvoda*, SVVŠ W. Piecka, Praha - M 1—3, 7—9, 11, (4, 5, 10, 12); *Bohumila Vlachová*, SVVŠ, Brno - M 7, (8, 10), F 3—6, (1, 2); *Marie Zedníčková*, SVVŠ, Třebíč - M 7, (8, 10); *Renata Žaludová*, SVVŠ, Znojmo - M 2, 3, 7, 9, 11, 12, (4—6, 8, 10), F 1—3, 5, 6, (4); *Jan Žebrok*, SVVŠ, Karviná - M 7—9, (3, 5, 6, 10).

Jiří Fidler, Praha 7, Haškova 2, nabízí zájemcům tyto ročníky Rozhledů matematicko-fyzikálních: 1959/60 (roč. 38), 1960/61 (roč. 39), 1964/65 (roč. 43), 1965/66 (roč. 44).

Redakce

VÍTĚZOVÉ

V celkové soutěži se umístili vítězni řešitelé takto:

1. Marian Fúrik, SVŠ Zvolen	127 bodů
2. Jan Louda, SVVŠ Plzeň	125 bodů
3. Stanislav Slouka, SPŠE Brno	123 bodů
4. Jan Kastl, SVVŠ Plzeň	121 bodů
5. Martin Šolc, SVVŠ Praha 2	113 bodů
6. Tomáš Duby, SVŠ Bratislava	112 bodů
7. Pavel Polcar, SVVŠ Velké Meziříčí	109 bodů
8. Milan Číha, SVVŠ Rakovník	108 bodů
9. Věra Pohllová, SVVŠ Praha 2	101 bodů
10. Libor Polák, SVVŠ Brno	98 bodů
11. Jan Červenka, SVVŠ Havlíčkův Brod	97 bodů
12. Vojtěch Rödl, SVVŠ Praha 2	95 bodů

Podle rozhodnutí redakční rady byly vítězům zakoupeny výherní knižní poukázky z prostředků MŠ a SPN a ještě před tahem zaslány. Rovněž byli odměněni vítězové jednotlivých oborů.

Blahopřejeme.

O. S.

Řešení úloh z minulého ročníku

Fyzika

1. Dutá koule (poloměry: vnější $R_1 = 0,1$ m, vnitřní $R_2 = 0,08$ m) je do poloviny naplněna kapalinou. Hustota materiálu koule je

$$\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

hustota kapaliny

$$\rho_2 = 1,26 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

Kouli valíme po vodorovné rovině tak, že její maximální obvodová rychlost je rovna $v_0 = 0,2 \text{ m s}^{-1}$. Máme vypočítat celkovou kinetickou energii W_k koule s kapalinou pro případ, že neuvažujeme vliv vnitřního tření kapaliny při pohybu koule. Napište také z jakého materiálu je koule a o jakou čistou kapalinu se jedná. Objemový moment setrvačnosti plné koule vzhledem k libovolné ose procházející jejím středem je roven

$$J_V = \frac{8}{15} \pi r^5,$$

kde r je poloměr koule.

(Došlo 25 řešení)

Václav Šindelář

Řešil Jan Louda, III.F SVVŠ, Plzeň:

Celková pohybová energie W_k tělesa je rovna součtu energie jeho posuvného pohybu a energie jeho otáčivého pohybu

$$W_k = W_{k\ pos} + W_{k\ ot} ,$$

tedy

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 ,$$

kde m je hmotnost tělesa, J jeho moment setrvačnosti, v rychlost posuvného pohybu tělesa a ω úhlová rychlost jeho otáčivého pohybu.

Označme hmotnost duté koule m_1 a hmotnost kapaliny m_2 .

Platí

$$m_1 = \rho_1 V_1 ,$$

kde

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi (R_1^3 - R_2^3)$$

je objem „mezikouli“. Jeho hmotnost

$$m_1 = \frac{4}{3} \pi \rho_1 (R_1^3 - R_2^3) \quad (1)$$

a dále

$$m_2 = \rho_2 V_2 ,$$

kde

$$V_2 = \frac{2}{3} \pi R_2^3$$

je objem kapaliny a její hmotnost je

$$m_2 = \frac{2}{3} \pi \rho_2 R_2^3 \quad (2)$$

Pro energii posuvného pohybu platí

$$W_{k\ pos} = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

přičemž

$$m = m_1 + m_2 = \frac{2}{3} \pi [2\rho_1 (R_1^3 - R_2^3) + \rho_2 R_2^3] ,$$

$$v = v_0 ,$$

tedy

$$W_{k\ pos} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi v_0^3 [2\rho_1 (R_1^3 - R_2^3) + \rho_2 R_2^3] ,$$

$$W_{k\ pos} = \frac{\pi}{3} v_0^2 [2\rho_1 (R_1^3 - R_2^3) + \rho_2 R_2^3] \quad (3)$$

Moment setrvačnosti (hmotnostní) homogenní koule (s hmotností M) vzhledem k libovolné ose jdoucí jejím středem je

$$J = \frac{2}{5} M r^2$$

Moment setrvačnosti duté koule vypočteme jako rozdíl momentů setrvačnosti koncentrických plných homogenních koulí (o stejné hustotě ρ_1) o poloměrech R_1 a R_2 a hmotnostech M_1 a M_2

$$J = J_1 - J_2 = \frac{2}{5} M_1 R_1^2 - \frac{2}{5} M_2 R_2^2 ,$$

kde

$$M_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho_1 \quad \text{a} \quad M_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3 \rho_1 ,$$

z čehož

$$J = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \varrho_1 (R_1^5 - R_2^5). \quad (4)$$

Hmotnostní moment setrvačnosti J je roven také součinu objemového momentu setrvačnosti J_V téhož homogenního tělesa (a vzhledem k téže ose) a jeho hustoty ϱ

$$J = J_V \varrho.$$

Energie otáčivého pohybu duté koule vzhledem k ose jdoucí jejím středem je rovna

$$W_{kot} = \frac{1}{2} J \omega^2,$$

přitom

$$\omega = \frac{v_0}{R_1},$$

takže

$$W_{kot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi \varrho_1 \frac{v_0^2}{R_1^2} (R_1^5 - R_2^5),$$

$$W_{kot} = \frac{4}{15} \pi \varrho_1 \frac{v_0^2}{R_1^2} (R_1^5 - R_2^5). \quad (5)$$

Úhrnná kinetická energie valící se duté koule s kapalinou je rovna po úpravě

$$\begin{aligned} W_k &= W_{kpos} + W_{kot} = \\ &= \frac{\pi}{15} v_0^2 \left\{ \varrho_1 \left[14 R_1^3 - 2 R_2^3 \left(5 + 2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \right) \right] + 5 \varrho_2 R_2^3 \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Číselně

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{\pi}{15} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \{ 7,8 \cdot 10^3 [14 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 0,512 \cdot 10^{-3} (5 + 2 \cdot 0,8^2)] + \\ &\quad + 5 \cdot 1,26 \cdot 10^3 \cdot 0,512 \cdot 10^{-3} \} \doteq 5,22 \cdot 10^{-1} \text{ J} \end{aligned}$$

Závěr. Úhrnná kinetická energie ocelové duté koule naplněné do poloviny glycerinem valící se po vodorovné rovině rychlostí v_0 je rovna zhruba 0,522 joulu.

Poznámka autora. V původním zadání příkladu v č. 2 minulého ročníku byl vzorec pro objemový moment setrvačnosti homogenní koule vzhledem k ose jdoucí jejím středem nesprávně vysazen; měl znít

$$J_V = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi r^5.$$

Převážná většina řešitelů použila však přesto správný vzorec. Použití neúplného vzorce nebylo ovšem za chybu pokládáno.

Ani jedno z řešení neobsahovalo diskusi k maximální obvodové rychlosti. Valení koule po rovině, při němž jednotlivé její body opisují dráhy zvané cykloidy (kromě bodů ležících na ose koule), lze považovat rovněž za rotaci okolo okamžitých os ležících v rovině podložky, kolmých na směr valení a jdoucích tím bodem povrchu koule, který je v témže okamžiku ve styku

s podložkou. Pro takový případ pojetí rotace byla by posuvná rychlost valící se koule rovna polovině „obvodové“ rychlosti bodu koule právě protilehlého dotykovému bodu na podložce, tedy maximální „obvodové“ rychlosti.

Matematika

10. Danému čtverci $ABCD$ ($AB = a$) opište čtyřúhelník tak, aby trojúhelníky vzniklé nad stranami čtverce měly obsahy v poměru $1 : 2 : 3 : 4$ a součet jejich obsahů byl roven obsahu čtverce.

(Došlo 32 řešení)

Ota Setzer 

Řešil Stanislav Slouka, IVa SPŠE, Brno:

Rozbor. Výšky vedené z vrcholů V_1, V_2, V_3, V_4 vzniklých trojúhelníků na strany čtverce $ABCD$ jsou

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 = 1 : 2 : 3 : 4.$$

Součet obsahů trojúhelníků je

$$\frac{a}{2} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = a^2,$$

proto

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 2a,$$

odtud

$$v_1 = \frac{a}{5}, \quad v_2 = \frac{2a}{5}, \quad v_3 = \frac{3a}{5}, \quad v_4 = \frac{4a}{5}.$$

Nechť trojúhelník ABV_1 o výšce v_1 vznikne nad stranou AB (vznikne-li nad jinou stranou, půjde jen o cyklickou záměnu vrcholů). Pro další trojúhelníky mohou nastat jen tyto tři možnosti:

1. BCV_2, CDV_3, DAV_4 ; 2. BCV_2, DAV_3, CDV_4 ; 3. CDV_2, BCV_3, ADV_4 .

Další tři případy — vzniklé souměrností podle osy strany AB — nebudeme považovat za nová řešení. Paty výšek z vrcholu V_i označme P_i , dále $BP_1 = x$.

$$1. \quad \triangle P_1B_2V_1 \sim \triangle P_2V_2B \Rightarrow \frac{P_1V_1}{BP_1} = \frac{BP_2}{P_2V_2},$$

$$BP_2 = \frac{P_1V_1 \cdot P_2V_2}{BP_1} = \frac{2a^2}{25x};$$

$$CP_2 = a - BP_2 = \frac{25ax - 2a^2}{25x}.$$

$$\triangle P_2CV_2 \sim \triangle P_3V_3C \Rightarrow CP_3 = \frac{P_2V_2 \cdot P_3V_3}{CP_2} =$$

$$= \frac{\frac{3a}{5} \cdot \frac{2a}{5}}{\frac{25ax - 2a^2}{25x}} = \frac{6ax}{25x - 2a},$$

$$DP_3 = a - CP_3 = \frac{19ax - 2a^2}{25x - 2a}$$

$$\triangle P_3DV_3 \sim \triangle P_4V_4D \Rightarrow DP_4 = \frac{P_3V_3 \cdot P_4V_4}{DP_3} =$$

$$= \frac{\frac{4a}{5} \cdot \frac{3a}{5}}{\frac{19ax - 2a^2}{25x - 2a}} = \frac{300ax - 24a^2}{475x - 50a},$$

$$AP_4 = a - DP_4 = \frac{175ax - 26a^2}{475x - 50a}$$

$$\triangle P_4AV_4 \sim \triangle P_1V_1A \Rightarrow AP_1 = \frac{P_4V_4 \cdot P_1V_1}{AP_4},$$

$$a - x = \frac{\frac{a}{5} \cdot \frac{4a}{5}}{\frac{175ax - 26a^2}{475x - 50a}},$$

po úpravě

$$175x^2 - 125ax + 18a^2 = 0,$$

$$x_1 = \frac{a}{5}, \quad x_2 = \frac{18a}{35}$$

$$2. \quad \triangle P_1BV_1 \sim \triangle P_2V_2B \Rightarrow BP_2 = \frac{P_1V_1 \cdot P_2V_2}{BP_1} = \frac{2a^2}{25x},$$

$$CP_2 = a - BP_2 = \frac{25ax - 2a^2}{25x},$$

$$\triangle P_2CV_2 \sim \triangle P_4V_4C \Rightarrow CP_4 = \frac{P_2V_2 \cdot P_4V_4}{CP_2} =$$

$$= \frac{\frac{2a}{5} \cdot \frac{4a}{5}}{\frac{25ax - 2a^2}{25x}} = \frac{8ax}{25x - 2a},$$

$$DP_4 = a - CP_4 = \frac{17ax - 2a^2}{25x - 2a}$$

$$\triangle P_4DV_4 \sim \triangle P_3V_3D \Rightarrow DP_3 = \frac{P_3V_3 \cdot P_4V_4}{DP_4} =$$

$$= \frac{\frac{3a}{5} \cdot \frac{4a}{5}}{\frac{17ax - 2a^2}{25x - 2a}} = \frac{300ax - 24a^2}{25(17x - 2a)},$$

$$AP_3 = a - DP_3 = \frac{125ax - 26a^2}{25(17x - 2a)};$$

$$\triangle P_3AV_3 \sim \triangle P_1V_1A \Rightarrow AP_1 = \frac{P_1V_1 \cdot P_3V_3}{AP_3};$$

$$a - x = \frac{\frac{a}{5} \cdot \frac{3a}{5}}{\frac{125ax - 26a^2}{25(17x - 2a)}},$$

po úpravě

$$25x^2 - 20ax + 4a^2 = 0,$$

$$x_3 = \frac{2a}{5}$$

$$3. \quad \triangle P_1BV_1 \sim \triangle P_3V_3B \Rightarrow BP_3 = \frac{P_1V_1 \cdot P_3V_3}{BP_1} = \frac{3a^2}{25x},$$

$$CP_3 = a - BP_3 = \frac{25ax - 3a^2}{25x};$$

$$\triangle P_3CV_3 \sim \triangle P_2V_2C \Rightarrow CP_2 = \frac{P_2V_2 \cdot P_3V_3}{CP_3} =$$

$$= \frac{\frac{2a}{5} \cdot \frac{3a}{5}}{\frac{25ax - 3a^2}{25x}} = \frac{6ax}{25x - 3a},$$

$$DP_2 = a - CP_2 = \frac{19ax - 3a^2}{25x - 3a}.$$

$$\triangle P_2DV_2 \sim \triangle P_4V_4D \Rightarrow DP_4 = \frac{P_2V_2 \cdot P_4V_4}{DP_2} =$$

$$= \frac{\frac{2a}{5} \cdot \frac{4a}{5}}{19ax - 3a^2} = \frac{200ax - 24a^2}{25(19x - 3a)},$$

$$AP_4 = a - DP_4 = \frac{275ax - 51a^2}{25(19x - 3a)};$$

$$\triangle P_4AV_4 \sim \triangle P_1V_1A \Rightarrow AP_1 = \frac{P_1V_1 \cdot P_4V_4}{AP_4};$$

$$a - x = \frac{\frac{a}{5} \cdot \frac{4a}{5}}{\frac{275ax - 51a^2}{25(19x - 3a)}},$$

po úpravě

$$275x^2 - 250ax + 39a^2 = 0,$$

$$x_4 = \frac{a}{5}, \quad x_5 = \frac{39a}{55}.$$

Konstrukce. Na straně AB sestrojíme bod P_1 , pro nějž platí $BP_1 = x$, vně čtverce bod V_1 tak, aby

$$P_1V_1 \perp AB, \quad P_1V_1 = \frac{a}{5}.$$

Se stranami BC a AD sestrojíme rovnoběžky ve vzdálenosti odpovídajících výšek a na nich další vrcholy opsaného čtyřúhelníka.

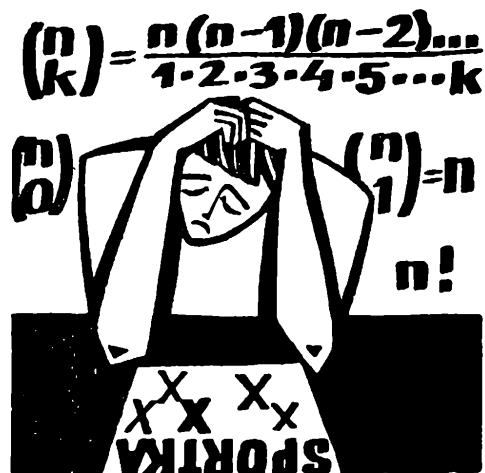
Správnost konstrukce plyne z rozboru.

Diskuse. Existuje pět různých čtyřúhelníků žádané vlastnosti.

UP 67, informační bulletin o učebních pomůckách

Bulletin vychází nepravidelně podle potřeby. Vydává jej propagační odd. n. p. Učební pomůcky, Praha 1, Národní tř. 20. Publikace informuje o různých nových učebních pomůckách a školních filmech. Velká jeho část je věnována matematice, fyzice a deskriptivní geometrii.

M. M.



S matematikou nejdál dojdeš

aneb Jak zaručeně zbohatnout

„Představ si,“ pravila nakvašeně tetička, „že ta ženská naproti vyhrála ve Sportce padesát tisíc!“ Tato zpráva mne rozrušila, a tak jsem začala přemýšlet, jak bych i já pomocí Sportky rozmnožila své pozemské statky. „Všichni lidé říkají,“ dumala jsem, „že vyhrát ve Sportce je čistá náhoda. Já však všem těm nevzdělančům dokáži opak, neboť na to půjdu přísně matematicky!“ A s tímto pevným předsevzetím jsem usedla za psací stůl a začala jsem počítat.

Za vsazení jednoho tiketu dám tři koruny. To není mnoho, zároveň i naděje na výhru je nepatrná. Čím více tiketů vsadím, tím více sice zaplatím, ale tím jistěji vyhraji. Sportka má čtyřicet devět čísel. Vsadím-li všechny možnosti, vyhraji jedno první pořadí, to bude dvě stě tisíc, to bude ta baba naproti koukat; čtyřicet tři druhých pořadí (to máme nejméně dvacet pět tisíc krát čtyřicet tři) a tak dále. To bude najednou peněz! Ale vyplatí se to vůbec? Musíme tedy nejdříve počítat.

Matematická kniha mi pravila: „Kombinace k -té třídy z n prvků jsou skupiny po k prvcích, vybrané z množiny mající n prvků tak, že každé dvě skupiny, které se liší pouze pořadím prvků, pokládáme za totožné.

Počet kombinací k -té třídy z n prvků budeme označovat $\binom{n}{k}$ Potom platí, že

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}.$$

Počítala jsem tedy, že $n = 49$, $k = 6$, čili počet všech možných kombinací čísel ve Sportce se bude rovnat

$$\frac{49!}{6! (49 - 6)!} = \frac{49!}{6! : 43!}$$

Bohužel se mi nepodařilo najít žádné matematické tabulky, v nichž by byly faktoriály.

Musela jsem tedy začít počítat. $49 \cdot 48 = 2352$ $47 \cdot 46$ Když jsem násobila čtyřiceti dvěma, začaly se mi dělat nepříjemné mžitky před očima, avšak jedna silná černá káva mne osvěžila. Násobíc třiceti pěti, byla jsem vyrušena tetičkou. „Vsaď čísla 2, 12, 29, 31, 34 a 41. Našla jsem si to v snáři!“ Pohrdlivým mávnutím ruky jsem ji odehnala. Kampak s takovými pověrami proti přesné a neomylné matematice!

Když byl poslední den pro vsazení tiketu, násobila jsem devatenácti. „Jen se neboj, teto, až to dopočítám, vsadíme, a pak se budeme v penězích doslova koupat!“

V neděli jsem násobila třinácti. Abych si trochu odpočinula, pustila jsem si rádio. Šťastné typy ve Sportce 2, 12, 29, 31, 34 a 41. Dostala jsem nervový záchvat a odvezli mne do sanatoria.

Už jsme se probírala z bezvědomí a sedíc na bělostné nemocniční posteli násobím šesti

Zuzana Boryslawská

Mnemotechnická pomůcka pro trigonometrii

DOC. OTA SETZER, ČVUT, Praha

K snazšímu zapamatování základních vztahů mezi goniometrickými funkcemi může dobře posloužit šestiúhelník na obr. 1, z něhož odvodíme:

a) Funkce spojené vodorovnými příčkami jsou komplementární (předpona co -), tj. funkce ostrého úhlu se rovná kofunkci doplňkového úhlu, např.

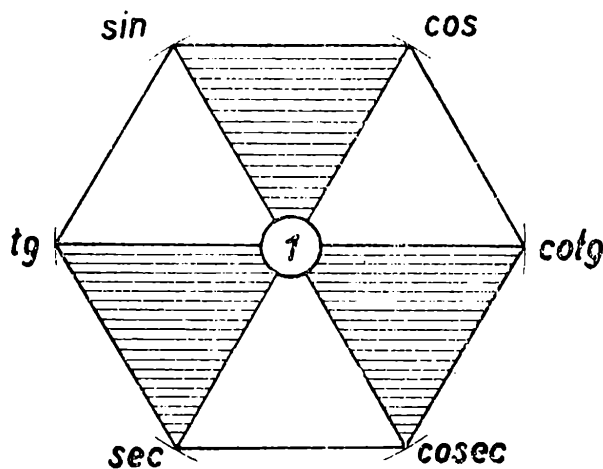
$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad \sec \beta = \operatorname{cosec} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

b) Funkce spojené úhlopříčkou jsou reciproké, např.

$$\sec \gamma = \frac{1}{\cos \gamma}$$

c) Součet čtverců funkcí ve vrcholech vodorovné strany vyšrafovaného trojúhelníka se rovná čtverci funkce ve zbývajícím vrcholu, např.

$$\sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1, \quad 1 + \cotg^2 \varepsilon = \operatorname{cosec}^2 \varepsilon$$



Obr. 1

d) Podíl funkcí na rovnoběžných stranách kteréhokoli kosočtverce — počítáno v témž smyslu — je stejný, např.

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1}, \quad \frac{\sec \psi}{\operatorname{cosec} \psi} = \frac{1}{\cotg \psi}$$

Užitím šestiúhelníka snadno vypočteme $\sin \omega$, je-li dáno

$$\cotg \omega = \frac{3}{4}$$

Podle věty c)

$$\operatorname{cosec}^2 \omega = 1 + \cotg^2 \omega = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16},$$

$$\operatorname{cosec} \omega = \frac{5}{4}$$

a podle věty b)

$$\sin \omega = \frac{1}{\operatorname{cosec} \omega} = \frac{4}{5}$$

Je-li dáno $\sec \varrho = \frac{5}{13}$, určíme $\operatorname{cosec} \varrho$ takto

$$\cos \varrho = \frac{1}{\sec \varrho} = \frac{5}{13}$$

(podle b),

$$\sin^2 \varrho = 1 - \cos^2 \varrho = \frac{144}{169}$$

(podle c),

$$\sin \varrho = \frac{12}{13}, \quad \operatorname{cosec} \varrho = \frac{1}{\sin \varrho} = \frac{13}{12}$$

(podle b).

Upraveno podle rumunského časopisu Gazeta Matematica LXXI, 5/1966.



R Ů Z N Ě

Hrst vzpomínek

JOSEF KOTYK, Pardubice

*Hans Christian Oersted*¹⁾, dánský fyzik, profesor university v Kodani, narodil se před 190 lety roku 1777 v Rudkjöbingu na ostrově Langelandu. Roku 1820 uveřejnil objev, který učinil náhodně při jedné přednášce: Deklinační magnetka, s kterou vedl rovnoběžně elektrický proud, se vychýlila z roviny magnetického poledníku. Studuje poutavý jev blíže, poznal dále, že účinek nenastal, když směr proudu byl k magnetce kolmý. Zjistil také, že i naopak magnet uvádí do pohybu pohyblivý vodič. Za svůj významný objev dostal s uznáním od francouzského Institutu national de France²⁾ v Paříži cenu 3000 franků, od anglické Royal Society³⁾ Copleyovu medaili, od dánského krále venkovské sídlo nedaleko Kodaně, kde roku 1851 zemřel.

¹⁾ Jméno bývá někdy psáno také *O e r s t e d*, starší jednotka intenzity magnetického pole, nazvaná k jeho počtě, však vždy jednoduše *o e r s t e d*; převodní vztah zní

$$1 \text{ Oe} = \frac{\pi}{4} \cdot 10^3 \text{ A/m} \text{ nebo } 1 \text{ Oe} = \frac{\pi}{4} \cdot 10^3 \text{ Az/m}.$$

²⁾ Institut national de France (čti: Enstytty nasional d fráns), soubor pěti Akademií, z nichž proslula zejména Académie française (čti: Akademi franséz) o čtyřiceti členech (slavných 40 „nesmrtelných“; jejich počet se od roku 1640 doplňoval volbou, kterou potvrdovala hlava státu).

³⁾ Royal Society (čti: Rojal sosajety), učená společnost v Londýně, založená králem Karlem II. roku 1662, v níž došlo v Anglii k nové organizaci vědecké práce.

V témž roce jako O e r s t e d t, dne 30. dubna 1777 v německém městě Brunšviku (Braunschweig) narozený *Karl Friedrich Gauss*, uvedl s přítelem *Wilhelmem Weberem* již roku 1833 poprvé v činnost elektromagnetický „telegraf“, založený na objevu O e r s t e d t o v ě. Oba fyzikové spojili v úspěšné spolupráci hvězdárnu v Göttingen s tamějším fyzikálním ústavem a na vzdálenost 2,3 km se dorozuměli depešemi, které četli z výchylek magnetky.

V rozpravě uveřejněné roku 1832 popsal Gauss metodu určení intenzity zemského magnetismu; v ní užil poprvé také absolutní soustavy měr, zvolil však za jednotku délky 1 mm, za jednotku hmotnosti 1 mg. K jeho počtě byla jednotka magnetické indukce (hustoty magnetického toku) nazvána gauss (G); převodní vztah na hlavní jednotku teslu (T) zní $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$.

V matematice⁴⁾ proslul Gauss jako *p r i n c e p s m a t h e m a t i c o r u m*. V doktorské disertační práci podal již roku 1799, 22letý, první důkaz fundamentální věty algebry o existenci kořenů algebraických rovnic, jímž upoutal na sebe zájem celého matematického světa. O jeho neobyčejných schopnostech svědčí okolnost, že později podal další (celkem čtyři) důkazy této důležité věty. Vyložil také podstatu čísel komplexních a přispěl tím k jejich správnému pochopení, propracování, rozšíření a všeobecnému uznání; rovina, jejímiž body komplexní čísla zobrazujeme, bývá dosud nazývána zpravidla *r o v i n o u G a u s s o v o u*.

Matematika byla Gaussovi *královnou věd*, jež spolu s krásnou literaturou nejvíce vzdělává lidského ducha. Když roku 1801 objevil Piazzzi v Palermu první planetoidu Ceres, vypočítal Gauss její dráhu a umožnil tak, že byla po konjunkci se Sluncem znovu nalezena. Když se o 10 let později objevila velká kometa, vypočítal rovněž její parabolickou dráhu. Těmito výpočty se proslavil po celém světě.

Zemřel dne 23. února 1855.

* *
*

Deset let po narození O e r s t e d t o v ě a G a u s s o v ě, před 180 lety, spatřil v Erlangen roku 1787 světlo světa *Georg Simon Ohm*, o sto let později roku 1887 zemřel v Berlíně *Robert Gustav Kirchhoff*, autoři základních a po nich dosud nazývaných zákonů elektrokinetiky. Z á k o n O h m ů v o vedení elektrického proudu byl uveřejněn před

⁴⁾ O Gaussově rozsáhlé badatelské činnosti v matematice pojednal autor ve svém článku *Z d ě j i n n ě m e c k é m a t e m a t i k y* v Rozhledech, roč. 22, čís. 3, 4 a 5. Gauss bývá pokládán za n e j v ě t š í h o n ě m e c k é h o m a t e m a t i k a v ů b e c.

140 lety roku 1827⁵⁾, z á k o n K i r c h h o f f ů v o rozvětvení proudu byl uveřejněn před 120 lety roku 1847.

Zásluhy obou badatelů jsou o to větší, že Ohm vykonal své objevné práce jako středoškolský učitel (působil na reálce v Bambergu, pak na gymnasiu v Kolíně nad Rýnem) s malým počtem skromných pomůcek, jež si namnoze sám zhotovil, Kirchhoff dokonce jako 23letý student — krásné příklady tvořivosti snaživé učitelské a studující mládeže! Zákon

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + \dots + R_n \cdot I_n,$$

tj. v každém okruhu je algebraický součet elektromotorických sil roven algebraickému součtu součinů proudů ve vodičích a jejich odporů (II. z á k o n K i r c h h o f f ů v) je zároveň jen zobecněním z á k o n a O h m o v a

$$U = R \cdot I$$

Oba badatelé mají zásluhy také v jiných oborech fyziky. Ohm pracoval s úspěchem v akustice (studoval kombinační tóny a rázy zvuku), Kirchhoff vynikl pracemi v nauce o vlnění a v optice. Pokračuje v badatelské činnosti Fresnelov⁶⁾, Kirchhoff propracoval podrobněji Huygensův princip a roku 1882 podal z Maxwellovy elektromagnetické teorie světla jeho přesný výklad. Čtenářům je též znám památný Kirchhoffův pokus o obrácení sodíkové spektrální čáry. Pozorováním spekter emisních a absorpčních byl Kirchhoff přiveden ke studiu analogií s rezonančními úkazy v mechanice a akustice; klasičtým způsobem je vyjadřuje Kirchhoffův z á k o n o e m i s i a a b s o r p c i. K v a l i t a t i v n í s p e k t r á l n í a n a l ý z a, jejímiž zakladateli jsou Kirchhoff a Bunsen⁷⁾ (1860), prokázala již, zejména také astrofyzice, platné služby, neboť podala přímý důkaz o hmotné jednotnosti vesmíru. Vesmír je podle jejích nálezů jediným hmotným celkem.

Spektroskopie užíváme však i k určení pohybů nebeských těles vzhledem k Zemi, konají-li se ve směru paprsku. Rychlost takového pohybu (tzv. radiální rychlost) určujeme pomocí principu, který odvodil před

⁵⁾ Hlavní jednotka elektrického odporu byla k počtě Ohmově nazvána jeho jménem. Málo je známo, že anglický fyzik Henry Cavendish (1731 až 1810), studoval schopnost různých látek pro vedení elektřiny, přitom již také předpokládal z á k o n zvaný dnes O h m ů v.

⁶⁾ Zásluhy Augusta Jeana Fresnela, slavného francouzského fyzika, který zemřel před 140 lety, roku 1827, zhodnotíme čtenářům Rozhledů ve zvláštním článku.

⁷⁾ Robert Wilhelm Bunsen (1811 až 1899) byl profesorem chemie na universitě v Heidelbergu, kde v letech 1852 až 1875 spolupracoval s Kirchhoffem. Oba badatelé, chemik a fyzik, se velmi dobře doplňovali.

125 lety roku 1842 *Jan Christian Doppler*, tehdy profesor na pražské stavovské technice. Blíží-li se zdroj pozorovateli, přijímá pozorovatel vlnění většího kmitočtu, než je vlastní kmitočet zdroje; spektrální čáry se posouvají k fialovému konci spektra, světlo se stává fialovějším než obvyklé. Jestliže se zdroj vzdaluje, je kmitočet vlnění přijímaného pozorovatelem menší; spektrální čáry se posouvají k červenému konci spektra. Správnost *Dopplerova principu* ověřil četnými pokusy ruský astronom akademik A. A. *Bělopol'ský* (1854 až 1934) na hvězdárně v Pulkově.

*

Roku 1687, před 280 lety, vyšlo slavné a pro celou fyziku základní dílo Newtonovo *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Matematické základy teoretické fyziky). V nich Newton napsal sice: *Hypotheses non fingo* (Nezavádím hypotézu), jeho *axiomata sive leges motus* (zákony pohybu) jsou však hypotézy, které se v obrovském počtu případů výborně osvědčily a staly se spolehlivými *základy*, na nichž zákonodárce postavil *velkolepou budouvu klasické* (neboli *Newtonovy*) *mechaniky*. Newtonovo dílo bylo tak dokonalé, že teprve v našem století (a to téměř současně) vznikly dvě teorie, které klasickou mechaniku doplnily: Einsteinova teorie relativity a Planckova teorie kvant. Newtonova mechanika je toliko jejich speciálním případem.

O sto let později, roku 1787, před 180 lety, uveřejnil ve spise *Neue Entdeckungen über die Theorie des Klanges* 31letý německý fyzik *Ernst Florens Chladni* své objevy v akustice. Studuje příčné chvění desek, jejichž okraj třel smyčcem, shledal, že vzniká nekonečně mnoho uzlů, jež se druží v uzlové čáry; aby je učinil patrnými, posypal desku jemným pískem a pozoroval obrazce dosud po něm nazývané: *Chladniho obrazce*. Čím vyšší je tón desky, tím je příslušný Chladniho obrazec složitější.

Chladni předváděl svůj způsob zkoumání chvění desek roku 1809 také v Paříži; jeho obrazce vzbudily všeobecnou senzací. I Napoleon vyžádal si opakování pokusů v Tuileriích. Za matematické rozřešení problematiky Chladniho obrazců vypisoval Institut v Paříži opětovně (celkem třikrát) konkursem cenu 3000 franků. Chladnimu poukázal pak sám Napoleon částku 6000 franků k překladu jeho hlavního díla *Akustik* (1802) do francouzštiny.

Dodám ještě, že Chladniho rodina pocházela ze Slovenska, odkud se za náboženského pronásledování vystěhovala do Německa. Chladni se narodil roku 1756 ve Wittenbergu, zemřel roku 1827, před 140 lety, ve Vratislavi (něm. Breslau, dnešní pol. Wrocław).

Před zahájením zajímavého kursu

Ústav pro studium na vysokých školách technických při ČVUT ve spolupráci s Čs. televizí zahájí ve středu dne 7. února 1968 reprízu televizního kursu „Opakujeme si matematiku pro uchazeče o studium na vysokých školách“. Kurs zpracoval kolektiv matematiků z různých typů vysokých škol a z ČSAV.

Je určen především pro absolventy středních škol, a to i s odstupem let od jejich absolvování, pro studenty I. ročníků vysokých škol všech směrů, kde je matematika základním předmětem, pro účastníky přípravy pořádané vysokými školami nebo osvětovými zařízeními, Socialistickou akademií, podnikovými instituty, podnikovými a závodními školami, různými institucemi. Rovněž je určen i pro učitele matematiky škol II. a III. stupně, i pro studenty těchto škol, kteří se připravují ke vstupu na vysokou školu.

Kurs obsahuje 20 půlhodinových lekcí o dvou až třech úlohách ze středoškolské látky z matematiky. Kurs není dělán běžnou formou, používanou ve škole, tj. formou výkladu a procvičování, nýbrž řešením určitých matematických problémů v rozhovoru mezi studenty. Aby sledování lekcí bylo televizním posluchačům usnadněno, zpracoval autorský kolektiv pod vedením prof. dr. K. Hruši, doc. J. Vyšína a H. Kořínkové, prom. ped., mat. metodické pokyny a příklady do příručky „Televizní kurs matematiky“. Tato příručka vyjde v nakladatelství Práce a bude ji možno zakoupit v každé prodejně Kniha, n. p. Cena této příručky je asi 8 Kčs.

H. K.

Tři listy účastníkům matematické olympiády

List první — téměř nematematický

Milí přátelé,

asi před padesáti lety žil u nás jeden starý pán — původním povoláním středoškolský profesor, který napsal třídílnou knihu o dobrém společenském chování. Tato kniha je pro dnešního čtenáře čtení dosti humorné. Dočtete se tam např., že „pán vstoupiv do krámu smekne

a zůstane o hlavě nepokryté, zvláště jsou-li v krámě dámy“; nebo, že „pán a paní odevzdají při návštěvě manželům jiným navštívenku společnou, ku které pán připojí ještě navštívenku svoji“. Místy má člověk při čtení opravdu dojem, že se lidé např. navštěvují jen proto, aby provětrali kravatu či sako určitého druhu, aby si vyměnili navštívenky, aby provedli několik předepsaných poklon a pronesli několik naučených frází, zkrátka, aby absolvovali určitý počet ryze formálních záležitostí.

Protikladem k tomuto otročení samoučelným formám je příhoda, která se skutečně stala v nedávné minulosti. Na jedné vysoké škole si povolal děkan fakulty jistého studenta do své pracovny. Mladý muž se ihned dostavil; zaklepání nahradil vydatnou ranou na dveře, vpadl dovnitř a ohlásil se bodře slovy: „Tak už sem tady!“ Nesmírně se pak podívoval, že ho děkan po tomto vstupním proslovu ze své pracovny vykázal. Jaká to krásná ukázka syrové aformálnosti!

Nemělo by být nesnadné přesvědčovat lidi, kteří aspoň přivoněli k matematice, o důležitosti formální stránky. Kde by byla matematika bez symboliky, bez kalkulů, bez formální logiky! A přece to, co samozřejmě uznávají mladí lidé v matematice, rádi přehlíží v jiných oblastech lidského konání, např. ve společenském styku. Nejde nám pochopitelně o formy přepjaté, samoučelné, které jsou jen na překážku, ale o formy rozumné, které usnadňují hladký vzájemný styk lidí.

Jsme nesmírně neradi, musíme-li se na schůzkách ústředního výboru MO zabývat různými těmi texaskami a svetry na slavnostních divadelních představeních, kontroverzemi olympioniků s příslušníky VB, řidiči, funkcionáři internátů a jinými ukázkami nevhodného chování při různých akcích matematické olympiády doma i v zahraničí. Situace je o to trapnější, že tu jde o kolektivní vystoupení, kde bohužel veřejnost podle chování jednotlivce soudí o celku. Malé recese, které za jiných okolností mohou být neškodným projevem zdravého temperamentu, jsou při kolektivním a reprezentativním vystoupení trapné.

Vše kam patří, říkával starý dánský pohádkář H. Ch. Andersen a dokonce napsal povídku s tímto názvem. Zdá se nám, že opravdu tato tři slova neztratila svou platnost ani v druhé polovině dvacátého století.

Zdraví Vás srdečně

Jan Vyšín

Předseda ústředního výboru matematické olympiády doc. Jan Vyšín napsal tři otevřené listy účastníkům MO a předal je naší redakci. Dnes otiskujeme list první, v příštích číslech Rozhledů najdete druhé dva. Jejich přečtení bude však prospěšné všem našim čtenářům.

Redakce



RECENZE

ING. GUSTAV TAUŠ

Pokusy z radiotechniky

Praha, SNTL-Práce 1967, 280 str., 269 obr., 2 tab. Cena brož. výtisku Kčs 15,00.

Jedním z předpokladů úspěchů ve studiu je zájem o učební předmět. Ve fyzice je často prostředkem k vytvoření hlubšího vztahu k předmětu zájmová činnost, stavba různých zařízení a přístrojů, při jejichž konstrukci lze nejen získat nejrůznější praktické dovednosti, ale také je možno prohloubit si vědomosti. Takovým oborem, který v sobě spojuje jak možnosti uplatnění zručnosti, tak fyzikálních znalostí, je radiotechnika. Proto se jistě setká se zájmem recenzovaná publikace, která zasvěceně, se znalostí schopností žáků škol pojednává o vybraných poznatcích ze slaboproudé elektrotechniky.

Kniha je rozdělena do 23 kapitol, jež můžeme podle tematiky rozdělit asi do sedmi částí. V první jsou uvedeny některé základní poznat-

ky z elektrotechniky. Je podán návod na stavbu jednoduchého měřicího přístroje, který je nutný pro další pokusy.

Druhá část obsahuje velmi vděčnou tematiku pro žákovské pokusy - stavbu tranzistorových přijímačů. Při těchto pokusech vystačíme s jednoduchými snadno dostupnými prostředky a dosáhneme výsledků, které jsou povzbuzením pro složitější pokusy.

Avšak ani pokusy s elektronkami nejsou opomenuty. Čtenář se prakticky seznámí s funkcí elektronkového usměrňovače, se způsoby zesilování signálů a s jednoduchým dvouelektronkovým přijímačem. Pro názorné studium činnosti přijímače slouží panelová učební pomůcka.

Průpravou pro pokusy se zesilovačem jsou experimenty s tranzistorovým i elektronkovým oscilátorem nízkého a vysokého kmi-

točtu. Návodů k pokusům vrcholí popisem konstrukce dvojkanálového zesilovače, doplněného audio-novým přijímačem.

V další části knížky jsou pokusy s přijímači vyráběnými továrně a je pojednáno o gramofonech a magnetofonech. Publikaci uzavírají pokusy s tranzistory v různých zapojeních jako fotorelé, termorelé, kapacitní relé apod.

Publikace je napsána jasným

slohem a mnoho pozornosti věnuje fyzikální podstatě jednotlivých jevů v radiotechnických zařízeních. Výklad je provázen mnoha instruktivními vyobrazeními, schématy i fotografiemi. Knihu lze doporučit každému, kdo chce uplatněním svých dovedností dosáhnout hlubších vědomostí z fyziky a radio-techniky.

Dr. Oldřich Lepil

NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM



Láhve za výkladem

Aranžér měl při úpravě tří výkladních skříní v obchodu s potravinami k dispozici určitý počet stejných lahví se zavařenými měručkami. Do každé výkladní skříně si jich několik připravil. Během úpravy však láhve z jedné skříně přemísťoval do druhých. Nejdříve vzal z 1. skříně 10 lahví, z 2. skříně 5 lahví a dal je do 3. skříně. Potom z 1. skříně vzal 3 láhve, z třetí

skříně 5 lahví a dal je do druhé skříně. Nakonec z 2. skříně vzal jednu láhev, z 3. skříně 3 láhve a dal je do první. Pak zjistil, že v každé skříně je stejný počet lahví.

Při řešení (rozumí se přirozenými čísly) dojdete k tomu, že existuje nescísně mnoho řešení. Vy však máte najít řešení vyjádřené nejmenšími čísly.

S. H.

Tabulka 1

$\frac{x}{y}$	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2,5	3	3,5	4
4	-1	-0,88	-0,75	-0,63	-0,5	-0,38	-0,25	-0,13	0	0,13	0,25	0,38	0,5	0,63	0,75	1
3,5	-1,14	-1	-0,88	-0,71	-0,57	-0,43	-0,29	-0,14	0	0,14	0,29	0,43	0,57	0,71	0,88	1,14
3	-1,33	-1,17	-1	-0,83	-0,67	-0,5	-0,33	-0,17	0	0,17	0,33	0,5	0,67	0,83	1	1,33
2,5	-1,6	-1,4	-1,2	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,6
2	-2	-1,75	-1,5	-1,25	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2
1,5	-2,67	-2,33	-2	-1,67	-1,33	-1	-0,67	-0,33	0	0,33	0,67	1	1,33	1,67	2	2,67
1	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4
0,5	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	8
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	n. d.	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
-0,5	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-8
-1	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	-0,5	-1	-1,5	-2	-2,5	-3	-4
-1,5	2,67	2,33	2	1,67	1,33	1	0,67	0,33	0	-0,33	-0,67	-1	-1,33	-1,67	-2	-2,67
-2	2	1,75	1,5	1,25	1	0,75	0,5	0,25	0	-0,25	-0,5	-0,75	-1	-1,25	-1,5	-2
-2,5	1,6	1,4	1,2	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0	-0,2	-0,4	-0,6	-0,8	-1	-1,2	-1,6
-3	1,33	1,17	1	0,83	0,67	0,5	0,33	0,17	0	-0,17	-0,33	-0,5	-0,67	-0,83	-1	-1,33
-3,5	1,14	1	0,88	0,71	0,57	0,43	0,29	0,14	0	-0,14	-0,29	-0,43	-0,57	-0,71	-0,88	-1,14
-4	1	0,88	0,75	0,63	0,5	0,38	0,25	0,13	0	-0,13	-0,25	-0,38	-0,5	-0,63	-0,75	-1

K článku Dr. Stanislav Trávníček: Směrové pole (str. 158).



MATEMATIKA

Trisekce úhlu

DOC. JAROSLAV CHUDÝ, ČVUT, Praha

Každý rok se objeví v redakci Rozhledů (i v redakcích jiných matematických časopisů, a to nejen v Československu) příspěvky, zabývající se klasickými neřešitelnými problémy matematiky: kvadraturou kruhu, duplicitou krychle a zejména trisekcí úhlu. Jde při nich o to, pravítkem a kružítkem, použitých jen tradičně, sestrojit

1. k dané úsečce r úsečku x tak, aby $x^2 = \pi r^2$,
2. k dané úsečce a úsečku x tak, aby $x^3 = 2a^3$,
3. k danému úhlu α úhel $\frac{\alpha}{3}$.

Formulací „použitých jen tradičně“ rozumíme přitom tyto konstrukce: spojit dva dané body přímkou, sestrojit kružnici daného středu a daného ~~poměru~~ (nebo procházející daným bodem), průsečík dvou přímek, průsečík přímky a kružnice, průsečíky dvou kružnic. Tyto konstrukce nám dovolují geometricky řešit lineární a kvadratické rovnice o jedné neznámé. Přesněji a úplněji řečeno: Nutná a postačující podmínka pro to, aby se veličina x dala sestrojit ve smyslu formulace „tradičně“ kružítkem a pravítkem pomocí daných veličin $a, b, c, \dots$ je to, aby se veličina x dala vyjádřit pomocí veličin $a, b, c, \dots$ racionálními operacemi (sčítáním, odčítáním, násobením a dělením) a konečným počtem druhých odmocnin.

Právě popsáním konstrukcím říká se někdy euklidovské konstrukce. Neřešitelnost uvedených tří problémů (a řady jim podobných) byla matematiky většinou v minulém století plně a beze zbytku prokázána.

Neřešitelnost kvadratury kruhu spočívá v transcendentnosti čísla π .

Číslo nazýváme algebraické, je-li kořenem nějakého polynomu s racionálními koeficienty. Čísla, která nejsou algebraická, nazýváme transcendentní.

Tak např. $\sqrt{2}$ je algebraické číslo, protože je kořenem rovnice $x^2 - 2 = 0$, transcendentní jsou např. $\log 5$, $\sin 10^\circ$, π atd.

Neřešitelnost dalších dvou problémů vyplývá z věty:

Vede-li geometrická úloha v analytickém vyjádření k určení kořene x nerozložitelné algebraické rovnice n -tého stupně, pak tato úloha je jistě euklidovsky neřešitelná, není-li n mocninou čísla 2.

Důkaz této věty a mnoho dalších zajímavostí nalezne čtenář např. v knížce dr. Štefana Schwarze: O roynicích, vydané v edici Cesta k vědě ní, svazek 1, 2. vydání, JČMF, 1947, kterou vřele doporučuji.

Protože duplicita krychle vede k rovnici $x^3 - 2 = 0$ (pro $a = 1$), kterou nelze rozložit (pomocí racionálních čísel a druhých odmocnin z nich) a u níž $n = 3$, nelze podle uvedené věty úlohu euklidovsky řešit.

Obraťme nyní svou pozornost k trisekci úhlu. Mějme dán obecný úhel α a chtějme jej rozdělit na tři stejné části. Označíme-li $\cos \alpha = a$, $\cos \frac{\alpha}{3} = x$, dostáváme ze známého trigonometrického vztahu

$$\cos 3\beta = 4\cos^3 \beta - 3\cos \beta, \text{ v němž } 3\beta = \alpha$$

rovnici

$$4x^3 - 3x - a = 0, \quad (1)$$

kde a je nám známé reálné číslo, které pro daný úhel α dovedeme sestrojit. U této rovnice je $n = 3$ a podle uvedené věty nelze kořen x , tj. $\cos \frac{\alpha}{3}$, a tedy i $\frac{\alpha}{3}$ euklidovsky sestrojit pro obecně dané číslo a .

Pro některé speciální případy čísla a to ovšem dovedeme. Tak např. je-li $\alpha = 90^\circ$, tj. $a = 0$, má rovnice (1) tvar $4x^3 - 3x = 0$ a lze je rozložit na $x(4x^2 - 3) = 0$, jejíž jeden kořen

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

vedoucí k řešení $\frac{\alpha}{3} = 30^\circ$ dovedeme sestrojit.

Nebo při $\alpha = 180^\circ$, tj. $a = -1$, má rovnice (1) tvar $4x^3 - 3x + 1 = 0$ a lze ji rozložit na $(2x - 1)^2(x + 1) = 0$, jejíž jeden kořen $x = \frac{1}{2}$ vedoucí k úhlu $\frac{\alpha}{3} = 60^\circ$ lze sestrojit.

Podobně při $\alpha = 135^\circ$, tj. $a = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dostáváme rovnici (1) po úpravě ve tvaru

$$8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 0,$$

kterou lze rozložit na součin

$$(4x^2 + 2x\sqrt{2} - 1)(2x - \sqrt{2}) = 0,$$

přičemž jeden z kořenů $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ vedoucí k úhlu $\frac{\alpha}{3} = 45^\circ$ lze sestrojit.

Hloubavějším čtenářům doporučuji, aby si dokázali možnost konstrukce trisekce úhlů, jejichž kosinus má tvar

$$\frac{4p^3 - 3pq^2}{q^3},$$

kde p, q jsou celá čísla.

Řekli jsme si již, že euklidovská konstrukce trisekce úhlu není možná. Existuje však nepřeberné množství konstrukcí, jež lze rozdělit zhruba do těchto tří skupin:

a) Konstrukce přibližné, jež dovolují euklidovsky provést trisekci s menší či větší chybou, obvykle závislou na velikosti úhlu α .

b) Konstrukce, jež dovolují provést trisekci sice přesně, ale s použitím pomocných křivek (nikoliv kružnic), jež ovšem dovedeme sestrojit jen bod za bodem, popř. s tečnami v nich; konstrukce nejsou ovšem euklidovské.

c) Konstrukce sice přesné, jež však používají pravítka a kružítko jinak než v našem euklidovském smyslu.

O trisekci bylo v celé známé historii matematiky napsáno tisíce stránek. Není proto dost dobře možné podat i jen trochu úplnější přehled o všech možných konstrukcích trisekce úhlu. K tomu by byly potřeba aspoň 2 až 3 ročníky Rozhledů. Nelze ani dost dobře uveřejnit všechny příspěvky, které k tomuto problému došly redakci Rozhledů za posledních několik roků; to by si vyžadovalo několika celých čísel časopisu. Pokusím se v tomto článku shrnout došlé příspěvky, uvést některé konstrukce v nich uvedené (autoři příspěvků a konstrukcí, které zde neuvedu, nechť mi to prominou), popř. i jiné známé konstrukce tak, aby byly zastoupeny všechny tři uvedené skupiny konstrukcí. Přitom ponechávám stranou ty autory, kteří se čas od času (písemně nebo osobně) objeví na matematických pracovištích s vyřešením trisekce, kteří však nechtějí (a někdy ani nemohou) pochopit, že jimi vynalezená konstrukce vyplynula jen z grafické náhody a že je v nejlepším případě jen přibližná (vždyť to vyšlo správně podle měření 20 ti haléřovým papírovým úhloměrem!).

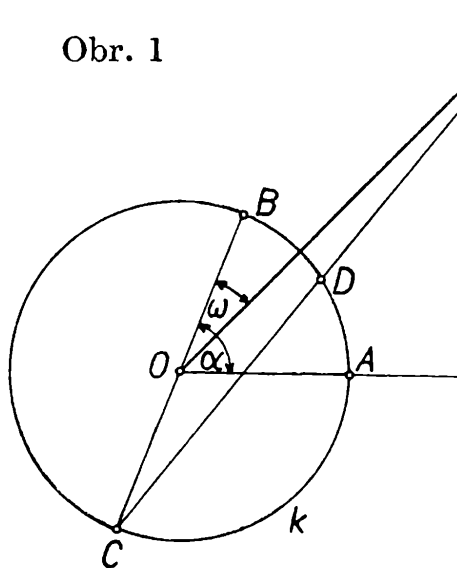
a) *Euklidovské přibližné konstrukce*

Helena Žáková, přírodovědecká fakulta UP Olomouc, ve svém příspěvku podává stručnou historii trisekce a řadu přibližných konstrukcí. Jedna z nich, poměrně jednoduchá a dostatečně přesná je známá konstrukce Lindberga (obr. 1), jež je jasná z obrázku a ze vztahů $AD = DB, DE = BC$,

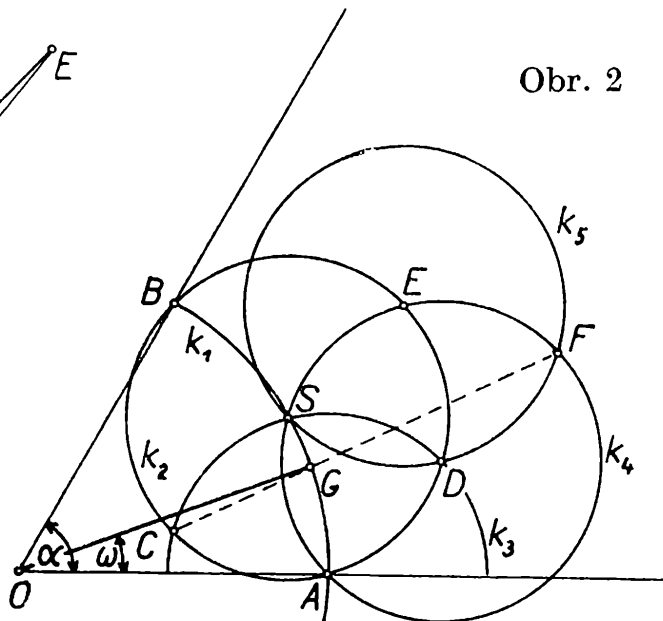
$$\omega = \sphericalangle EOB \doteq \frac{\alpha}{3}$$

Chyba pro ostré úhly je přibližně 3', pro tupé přibližně 22'

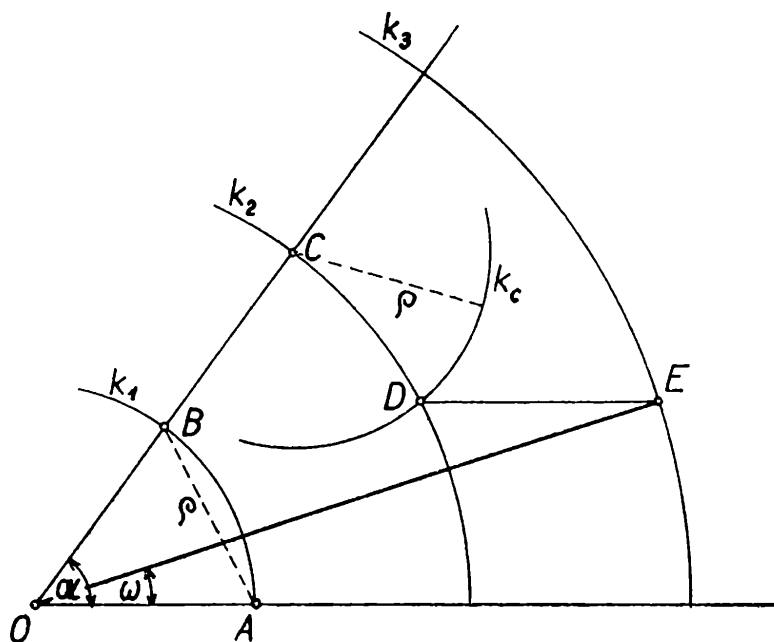
Obr. 1



Obr. 2



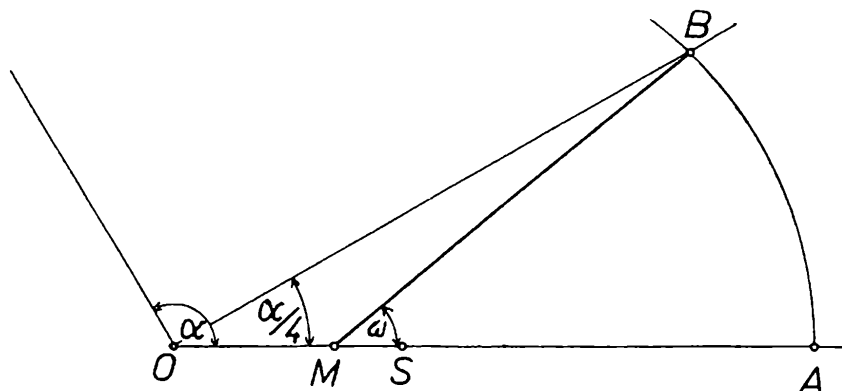
V té mž příspěvku uvádí také jednu novou konstrukci provedenou *Antonínem Spáčkem*, učitelem SVVŠ ve Frenštátě pod Radhoštěm; konstrukce je na obr. 2 a lze ji popsat stručně takto: (k_i značí kružnici k_i) $k_1 \equiv (O; \text{libovol. poloměr})$, $\widehat{AS} = \widehat{SB}$; $k_2 \equiv (S; r = AS = SB)$; $k_3 \equiv (A; r)$, $(k_2 \times k_3) \equiv C, D$; $k_4 \equiv (D; r)$, $(k_2 \times k_4) \equiv A, E$; $k_5 \equiv (E; r)$, $(k_4 \times k_5) \equiv S, F$; $G \equiv (k_1 \times CF)$, $\omega = \sphericalangle AOG \doteq \frac{\alpha}{3}$.



Obr. 3

Chyba této konstrukce pro ostré úhly je v průměru 13', pro tupé úhly je konstrukce prakticky nepoužitelná (chyba víc než 1°).

Obr. 4

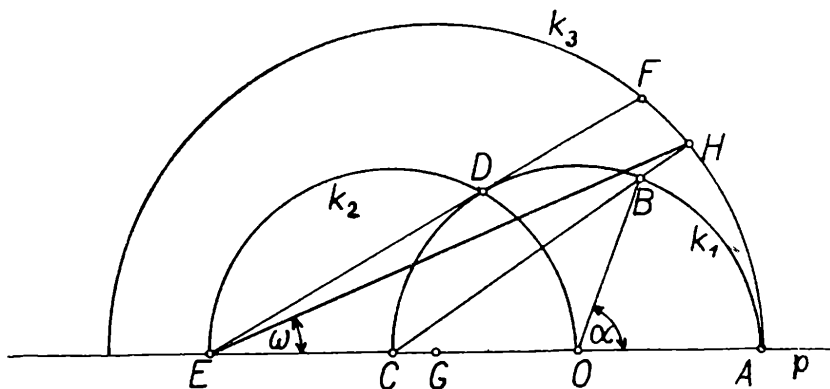


Karel Morav ve svém příspěvku uvádí konstrukci *Karla Sóra* z Olomouce (obr. 3), kde k_1, k_2, k_3 mají též střed O a poloměry $r, 2r, 3r$, r libovolné; k_c má střed v bodě C a poloměr $\varrho = AB$; $(k_2 \times k_c) \equiv D$; $DE \parallel OA$, E na k_3 ;

$$\omega = \sphericalangle AOE \doteq \frac{\alpha}{3}$$

Chyba konstrukce použitelné jen pro ostré úhly je největší pro úhel kolem 72° a je přes 7'. Modifikace této konstrukce lze použít i pro přibližné dělení ostrého úhlu na n dílů.

Obr. 5



Adolf Kodým uvádí ve svém příspěvku konstrukci *P. Finslera*, uveřejněnou v r. 1938. Na jednom rameni daného úhlu α o vrcholu O sestrojme body M, S, A tak, že $OM = r$, $OS = \frac{10}{7}r$, $OA = 4r$, kde r je libovolné (obr. 4). Rozdělme úhel α na 4 díly a určíme průsečík B ramene vzniklé čtvrtiny úhlu (s jedním ramenem OA) s kružnicí o středu S procházející bodem A . Pak úhel

$$\omega = \sphericalangle AMB \doteq \frac{\alpha}{3}.$$

Chyby konstrukce jsou řádově minuty.

Pro zajímavost uvádím ještě jednu velmi přesnou konstrukci, po-

cházející od krejčovského mistra *Kopfa* (uveřejněnou v r. 1933 v Německu), která pro ostré úhly má maximální chybu necelých 15". Pro představu o velikosti chyby uvažme, že při poloměru jednoho metru vytíná středový úhel 15" oblouk délky 0,07 mm. Pro úhly menší než 20° je chyba menší než 1". Její konstrukce je tato (obr. 5): Na přímce p zvolíme bod O a kolem něho opíšeme kružnici k_1 libovolného poloměru r , jež protne p v bodech A, C ; kolem bodu C opíšeme kružnici k_2 téhož poloměru r , která přímku p protne v bodech O, E a kružnici k_1 v bodě D . Na spojnici ED (jež je tečnou k_1) naneseleme délku zvoleného poloměru r od bodu D do bodu F , $DF = r$. Sestrojíme nyní kružnici k_3 tak, aby procházela body A, F a měla střed G na přímce p . Daný úhel α naneseleme tak, aby $\sphericalangle AOB = \alpha$. Spojnice CB protne k_3 v bodě H a úhel

$$\omega = \sphericalangle AEH = \frac{\alpha}{3}.$$

Přitom je výhodné, že kružnice k_1, k_2, k_3 a body E, F, G jsou použitelné pro každý úhel α ; na úhlu α závisí teprve body B, H .

(Pokračování)

Obsah tětiového a tečnového čtyřúhelníka

EVA BENEŠOVÁ, Jihlava

(Dokončení)

V ě t a 2. *Obsah tětiového čtyřúhelníka pomocí poloměru r kružnice opsané je*

$$P = \frac{1}{4r} \sqrt{(ab + cd)(bc + ad)(ac + bd)}$$

D ů k a z. Označme úhlopříčky čtyřúhelníka $DB = n$, $AC = m$ (obr. 2); pak obsah trojúhelníka ABC , jemuž je opsána kružnice o poloměru r , je

$$P_{\triangle ABC} = \frac{abm}{4r}.$$

Obsah trojúhelníka ACD máme

$$P_{\triangle ACD} = \frac{cdm}{4r}$$

a sečtením těchto dvou rovnic dostaneme

$$P_{ABCD} = \frac{m}{4r} (ab + cd) \quad (11)$$

Obdobně pro druhou úhlopříčku

$$P_{ABCD} = \frac{n}{4r} (ad + cb) . \quad (12)$$

Znásobme obě rovnice (11) a (12) mezi sebou

$$P_{ABCD}^2 = \frac{mn}{16r^2} \cdot (ab + cd) (ad + cb) . \quad (13)$$

Vyjádřeme nyní součin mn pomocí P t o l e m a i o v y v ě t y (pomocná věta 1.)

$$mn = ac + bd ,$$

po dosazení tohoto výrazu do vztahu (13) a po odmocnění je

$$P_{ABCD} = \sqrt{\frac{ac + bd}{16r^2} (ab + cd) (ad + bc)}$$

a po úpravě

$$P_{ABCD} = \frac{1}{4r} \sqrt{(ac + bd) (ab + cd) (ad + bc)} ,$$

což jsme měli dokázat.

P o z n á m k a. Pomocí tohoto vztahu a výsledku věty 1. lze určit poloměr kružnice opsané r .

Podívejme se ještě na tečnový čtyřúhelník.

D e f i n i c e. Čtyřúhelník $ABCD$ nazýváme *tečnovým čtyřúhelníkem*, jestliže existuje kružnice, která má střed uvnitř čtyřúhelníka a dotýká se přímk AB, BC, CD, AD .

P o z n á m k a. 1. Jinak lze říci, že tečnovému čtyřúhelníku můžeme vepsat kružnici.

2. Zvláštním případem je kosočtverec a čtverec.

3. Platí, že $a + c = b + d$, kde $a = AB, b = BC, c = CD, d = AD$. Dokažme si tvrzení třetí.

P o m o c n á v ě t a 3. V tečnovém čtyřúhelníku platí vztah

$$AB + CD = BC + AD = s .$$

Slovy: Součet dvou protějších stran je roven polovičnímu obvodu.

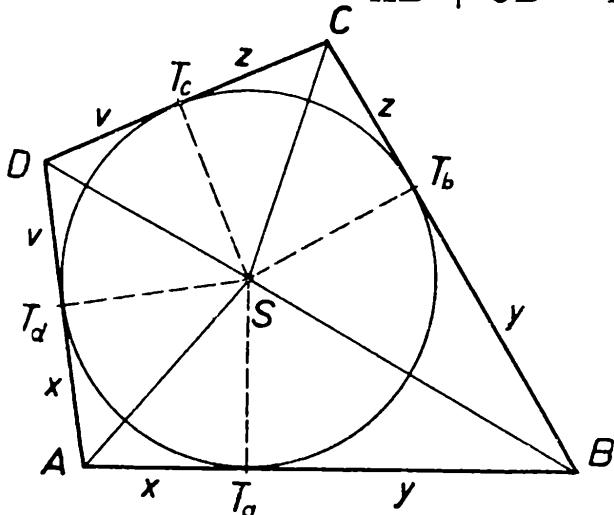
D ů k a z. Označme dotykové body na stranách a, b, c, d po řadě T_a, T_b, T_c, T_d (obr. 4). Pak z vlastnosti tečen vyplývá

$$AT_a = AT_d = x ,$$

$$BT_a = BT_b = y ,$$

$$CT_b = CT_c = z ,$$

$$DT_c = DT_d = v$$



Obr. 4

a platí

$$a + c = x + y + v + z ,$$

$$b + d = y + z + x + v ,$$

to znamená, že skutečně platí

$$a + c = b + d = s ,$$

což jsme měli dokázat.

Nyní dokažme větu o obsahu tečnového čtyřúhelníka.

V ě t a 3. *Obsah tečnového čtyřúhelníka je dán vztahem*

$$P_{ABCD} = r \cdot s ,$$

kde

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}$$

a r je poloměr vepsané kružnice.

D ů k a z. Označme S střed kružnice vepsané a spojme ho s vrcholy čtyřúhelníka. Pak obsah tečnového čtyřúhelníka se rovná součtu obsahů trojúhelníků ABS , BCS , CDS , ADS .

Vyjádřeme obsahy těchto trojúhelníků

$$P_{\triangle ABS} = \frac{a r}{2} , \quad P_{\triangle BCS} = \frac{b r}{2} ,$$

$$P_{\triangle CDS} = \frac{c r}{2} , \quad P_{\triangle ADS} = \frac{d r}{2}$$

Sečteme tyto výrazy

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} r (a + b + c + d) ,$$

což je

$$P_{ABCD} = r s ,$$

jak jsme měli dokázat.

Nyní se zabývejme zvláštním typem čtyřúhelníka, který je tečnový a tětiový zároveň.

Definice 3. *Čtyřúhelník $ABCD$ nazýváme dvojstředový, lze-li mu opsat a vepsat kružnici.*

P o z n á m k a. Tento čtyřúhelník má zřejmě vlastnosti tětiového i tečnového čtyřúhelníka.

1. $a + c = b + d$, a , b , c , d jsou strany.

2. Součet protějších úhlů je $2R$.

3. Příkladem je čtverec.

V ě t a. *Obsah dvojstředového čtyřúhelníka je $P = \sqrt{abcd}$, kde a , b , c , d jsou velikosti stran dvojstředového čtyřúhelníka.*

D ů k a z. Použijeme pomocné věty 2.

$$a + c = s \text{ a z toho } c = s - a , \text{ nebo } a = s - c$$

a pro další dvojici stran

$$b + d = s \text{ a z toho } d = s - b, \text{ nebo } b = s - d.$$

Takto získané výrazy dosadíme do vztahu odvozeného ve větě 1. a dostaneme ihned

$$P = \sqrt{abcd}$$

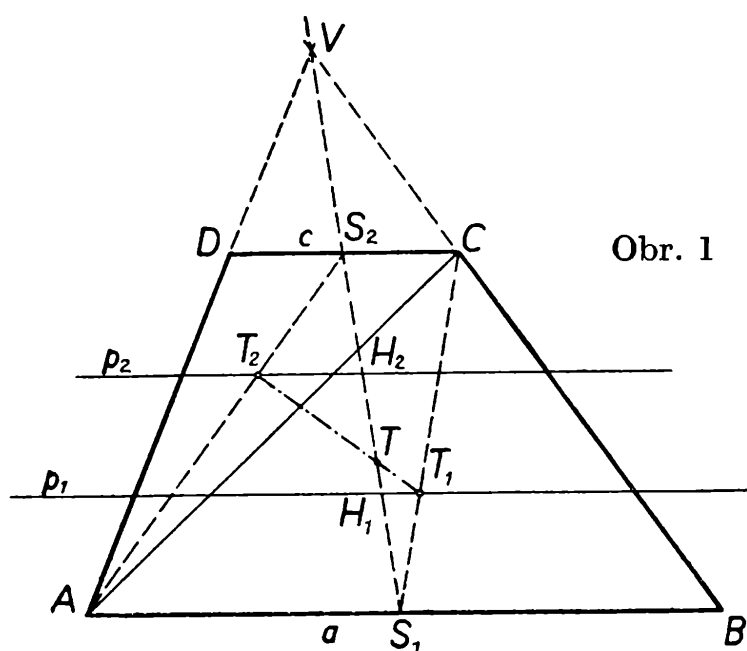
Jak Archimedes určil těžiště lichoběžníka

MIROSLAV LITOMISKÝ, Praha

Ve svém spise *Rovnováha rovinných útvarů* (viz Ernst Nizze: *Archimedes von Syrakus vorhandene Werke*, Stralsund 1824) uvádí Archimedes nejdříve všeobecné věty o podmínkách rovnováhy rovinných obrazců (míní hmotná tělesa ve tvaru velmi tenkých desek) a o poloze těžiště těchto obrazců. Dokazuje pak, že těžištěm rovnoběžníka je průsečík jeho úhlopříček a těžištěm trojúhelníka průsečík spojnic jeho vrcholů se středy protějších stran.

Průzkum lichoběžníka zakládá na poznatku, že těžiště T_1 , T_2 dvou útvarů a těžiště T celku z nich složeného jsou tři body ležící na téže přímce; je to tzv. *věta o třech těžištích*.

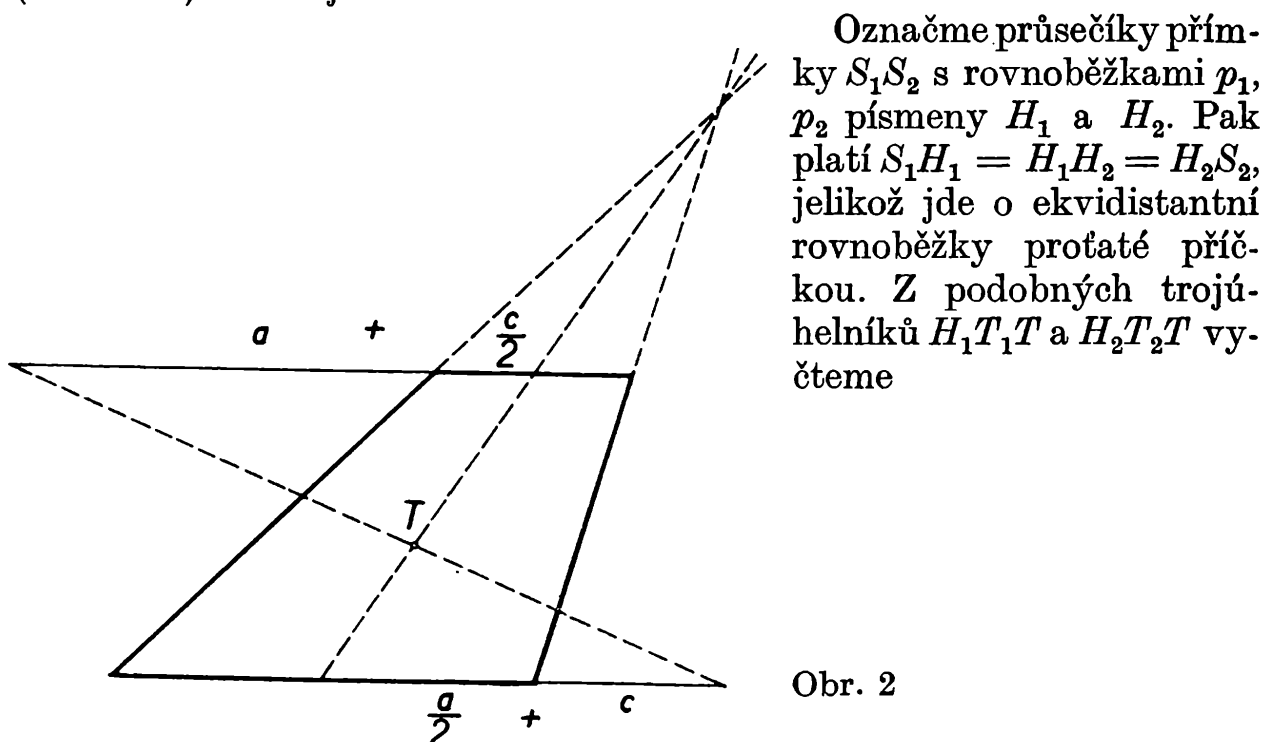
Mějme tedy lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $AB = a$, $CD = c$ (obr. 1). Průsečík přímek AD , BC označíme V . Spojíme-li jej se středy základů S_2 , S_1 , dostáváme těžnici celku ($\triangle ABV$) a zároveň těžnici jedné části ($\triangle DCV$). Podle věty o třech těžištích musí



Obr. 1

těžiště druhé části ($ABCD$) ležet na téže přímce, tj. na spojnici středů základů. Jeho polohu určíme užitím téže věty na trojúhelníky ABC , ACD . První z nich má těžnici CS_1 , druhý AS_2 . Sestrojíme-li ještě přímky $p_1 \parallel p_2$ rovnoběžné se základnami ve vzdálenosti třetiny a dvou třetin výšky, obdržíme těžiště T_1 a T_2 obou trojúhelníků. Těžiště celku z nich složeného musí být hledáno na jejich spojnici. Je to tedy průsečík přímek $T_1T_2 \times S_1S_2$.

Archimedes dokazuje, že takto nalezené těžiště lichoběžníka rozděljuje úsečku S_2S_1 v poměru „dvojnásobné delší (základny) zvětšené o kratší (základnu) ke dvojnásobné kratší zvětšené o delší“.



$$H_2T : H_1T = T_2H_2 : T_1H_1 = \frac{1}{3} AS_1 : \frac{1}{3} CS_2 = a : c .$$

Tuto úměru můžeme psát v podobě dvou rovnic

$$H_2T = aq , H_1T = cq ,$$

kde q je určitá konstanta. Platí tedy

$$\begin{aligned} (2 H_2T + H_1T) : (H_2T + 2 H_1T) &= \\ &= (2aq + cq) : (aq + 2cq) = (2a + c) : (a + 2c) \end{aligned}$$

Prvý člen upravíme

$$\begin{aligned} 2 H_2T + H_1T &= H_2T + (H_2T + H_1T) = \\ &= H_2T + H_1H_2 = H_2T + S_2H_2 = S_2T \end{aligned}$$

a podobně druhý

$$H_2T + 2 H_1T = S_1T ,$$

čímž je dokázána správnost Archimedovy úměry

$$S_2T : S_1T = (2a + c) : (a + 2c)$$

Pro konstrukci (obr. 2) se hodí tvar

$$S_2T : S_1T = \left(a + \frac{c}{2} \right) : \left(\frac{a}{2} + c \right)$$



Použitie deskriptívnej geometrie v kryštalografii

JOSEF FILIP, Bratislava

V č. 4, roč. 37 (1959) tohto časopisu bol uverejnený článok Doc. Dr. K. Havlíčka o stereografickom premietaní. V našom príspevku chceme podať ukážku použitia tohto zobrazovacieho spôsobu v kryštalografii.

1. Najprv v krátkosti zhrneme výsledky odvodené v cit. článku.

Daná je guľová plocha κ ($S; r$) a na nej bod C . Zostrojíme rovinu π , ktorá sa dotýka plochy κ v bode P diametrálne protilahlom¹⁾ k bodu C . Každému bodu $M \neq C$ plochy κ priradíme na rovine π bod M' , ktorý s bodom M leží na priamke prechádzajúcej bodom C . Obrátene každému vlastnému bodu N' roviny π priradíme na ploche κ bod N , v ktorom pretína plochu κ spojnice CN . Tým je definované vzájomne jednoznačné zobrazenie bodov plochy κ (s výnimkou bodu C) a bodov roviny π , ktoré sa nazýva stereografické premietanie (stereografická projekcia). Je to zvláštny prípad stredového premietania a my ho budeme v tomto článku ponímať ako premietanie bodov guľovej plochy κ na rovinu π z bodu C (stred premietania).

Toto premietanie sa často používa v praxi, lebo má dve význačné vlastnosti. Vyjadríme ich týmito vetami:

Veta 1a. Každá kružnica na ploche κ , ktorá prechádza bodom C , sa zobrazí na rovine π do priamky a každá vlastná priamka roviny π je stereografickým priemetom takej kružnice.

¹⁾ Body diametrálne protilahlé na guľovej ploche (alebo na kružnici) majú tú vlastnosť, že ich spojnice prechádza stredom plochy (kružnice).

Veta 1b. Každá kružnica k na ploche κ , ktorá neprechádza bodom C , sa zobrazí na rovine π do kružnice k_s . Stredom kružnice k_s je stredový priemet vrcholu kužeľovej, resp. valcovej plochy²⁾, ktorá sa dotýka plochy κ pozdĺž kružnice k (veta o zachovaní kružníc).

Veta 2. Každé dve čiary e, f na ploche κ , ktoré sa pretínajú v bode $Q \equiv C$ sa zobrazia na rovine π do čiar e_s, f_s , ktoré sa pretínajú v bode Q_s pod tým istým uhlom ako čiary e, f (veta o zachovaní uhlov).

Dôkazy oboch viet najde čitateľ v cit. článku.

Poznámka 1. Je zrejmé, že vety 1 a 2 platia aj vtedy, keď za priemetňu zvolíme ľubovoľnú inú rovinu $\pi' \parallel \pi$, ktorá neprechádza stredom premietania C .

2. Prv ako prikročíme k vlastnej téme, oboznámime sa v krátkosti aspoň s tými základnými pojmami a poznatkami z kryštalografie, ktoré budeme v ďalšom potrebovať.

M o n o k r y š t á l (ďalej iba kryštál) je z geometrického stanoviska konvexný mnohosten, o ktorom platí známy Eulerov vzťah

$$s + v = h + 2,$$

ak s je počet stien, h počet hrán a v počet vrcholov.

V kryštalografii sú obvyklé názvy odlišné od geometrických názvov: stena je p l o c h a a vrchol je r o h. V ďalšom texte budeme používať názvy: plocha v zmysle stena a roh v zmysle vrchol.

Pre rozdelenie a opis kryštálov je dôležitý tzv. o s o v ý k r í ž. Tvorí ho tri, resp. štyri priamky, kryštálové osi, ktoré prechádzajú jedným bodom, stredom osového kríža. Ak sú tri, majú obvyklé označenie a, b, c . Stred O osového kríža rozdelí každú os na kladnú a zápornú polos. Kladné polosy na osiach a, b, c budeme v tomto príspevku označovať po rade OX, OY, OZ a záporné $O\bar{X}, O\bar{Y}, O\bar{Z}$, pričom X, Y, Z , resp. $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ budú body vzdialené od stredu O o jednotkovú úsečku.

Osi zvierajú tzv. u h l y : $\alpha = \sphericalangle bc, \beta = \sphericalangle ac$ a $\gamma = \sphericalangle ab$. Keď sú všetky tieto uhly pravé, hovoríme o p r a v o u h l o m o s o v o m k r í ž i. V tomto príspevku budú predmetom našich úvah výlučne kryštály s pravouhlým osovým krížom.

Kryštál stavíme obyčajne tak, že os c je z v i s l á (vertikála), os b p r a v o ľ a v á (makrodiagonála) a os a p r e d o z a d n á (brachydiagonála).

Predpokladajme, že nejaká kryštálová plocha p pretína kryštálové osi a, b, c vo vlastných bodoch radom A, B, C . Plocha p teda odtína na kryštálových osiach úseky, ktorých veľkosti označujeme zhodne s príslušnými osami a nazývame p a r a m e t r a m i p l o c h y p : $OA = a, OB = b, OC = c$. Parametre vyjadrujeme číslami tak, že jeden,

²⁾ Vrcholom valcovej plochy je nevlastný bod, ktorým prechádzajú všetky tvoriace priamky plochy; lit. [2], str. 19–23.

obyčajne to býva parameter b , volíme za jednotku. Pri raste kryštálu sa na plochu prikladajú planparalelné vrstvičky a preto sa parametre plochy zväčšujú úmerne. Keď nám teda nejde o veľkosť kryštálu, ale iba o polohu plochy vzhľadom na kryštálové osi, postačí, keď poznáme pomer parametrov $a : b : c$. Keď plochu p zvolíme za základnú, môžeme každú ďalšiu kryštálovú plochu, ktorá na kryštálových osiach odtína iné úseky a' , b' , c' , odvodiť z tejto základnej plochy porovnaním úsekov a' , b' , c' k úsekom a , b , c . Dostaneme čísla

$$m = \frac{a'}{a}, \quad n = \frac{b'}{b}, \quad p = \frac{c'}{c},$$

ktoré sa volajú *odvodzovacie čísla* alebo *Weissove koeficienty* a sú vždy racionálne podľa zákona racionality odvodzovacích čísel³⁾. Odvodená plocha má potom pomer parametrov $ma : nb : pc$.

Medzi kryštálovými plochami sa vyskytujú aj také plochy, ktorých roviny pretínajú jednu alebo dve z kryštálových osí v nevlastných bodoch, čiže sú s jednou alebo dvomi osami rovnobežné. V tom prípade označujeme veľkosť úseku na osi; s ktorou je rovina plochy rovnobežná, znakom ∞ a pomer parametrov zapisujeme analogicky, ako keby boli všetky úseky konečné. Tak plocha rovnobežná s vertikálou c , má pomer parametrov $a' : b' : \infty$ a plocha rovnobežná s osami a , b má pomer $\infty : \infty : c'$.

Podľa veľkosti uhlov medzi osami a pomeru parametrov $a : b : c$ základnej plochy rozdeľujeme kryštály do kryštálových sústav (kubická, tetragonálna, rombicá, monoklinická, ...) z ktorých prvé tri majú pravouhlý osový kríž⁴⁾.

3. V novšej dobe sa používajú na označenie kryštálovej plochy takmer výlučne tzv. *Millerove indexy* h, k, l ⁵⁾. Sú to obrátené čísla k Weissovým koeficientom m, n, p , teda

$$h = \frac{1}{m}, \quad k = \frac{1}{n}, \quad l = \frac{1}{p}$$

Aj keď v Millerovom symbole plochy zapisujeme indexy hkl prosté vedľa seba, ide tu zase o pomerné čísla a preto uvedené zlomky prevádzame na celé čísla vynásobením spoločným menovateľom (najmenším).

Príklady:

Pomer parametrov	$3a : 2b : 4c$	Millerov symbol	463
	$5a : 3b : \infty$		350
	$\infty : \infty : c$		001

³⁾ Literatúra [1], str. 12 a n.

⁴⁾ V sústave kubickej je $a = b = c$, v sústave tetragonálnej $a = b \neq c$ a v sústave rombickej $a \neq b \neq c$.

⁵⁾ Literatúra [1], str. 27, alebo [4], str. 453.

Obráteným postupom odvodíme z Millerovho symbolu pomer parametrov

$$a' : b' : c' = \frac{a}{h} : \frac{b}{k} : \frac{c}{l}$$

Samozrejme, že postupný pomer rozšírime, aby sme z neho odstránili zlomky. Napr. kryštalová plocha 342 má pomer parametrov

$$\frac{a}{3} : \frac{b}{4} : \frac{c}{2} = 4a : 3b : 6c .$$

Keď je v Millerovom symbole plochy niektorý index nulový, kladieme na jeho miesto v postupnom pomere (definitorky) znak ∞ . Napr. kryštalová plocha 230 má pomer parametrov $3a : 2b : \infty$.

Keď kryštalová plocha pretína namiesto kladných záporné polosi, píšeme nad príslušnými indexmi prúžky $\bar{h}$, $\bar{k}$, $\bar{l}$. Napr. symbol $\bar{2}\bar{5}4$ znamená, že plocha pretína záporné polosi a , b a kladnú polos c .

4. Kryštalové osi vytvárajú tzv. pásma (pásmový zákon)⁶⁾. Pásmom nazývame súhrn kryštalových plôch, ktorých roviny sú rovnobežné s tou istou priamkou. Ak táto priamka prechádza stredom O , nazýva sa osou pásma. Teda každé dve kryštalové plochy toho istého pásma sa pretínajú v hranách (skutočných alebo myslených) navzájom rovnobežných a rovnobežných s osou pásma. Alebo presnejšie: roviny kryštalových plôch toho istého pásma majú tú vlastnosť, že sa každé dve z nich pretínajú v priamke (vlastnej alebo nevlastnej) rovnobežnej s osou pásma.

Je zrejmé, že pásmo je určené dvomi kryštalovými plochami, ktorých roviny sú navzájom rôznobežné. Také pásma, do ktorých patrí relatívne najväčší počet kryštalových plôch, nazývame hlavnými pásmami. Osi takých troch hlavných pásem volíme obyčajne za kryštalové osi.

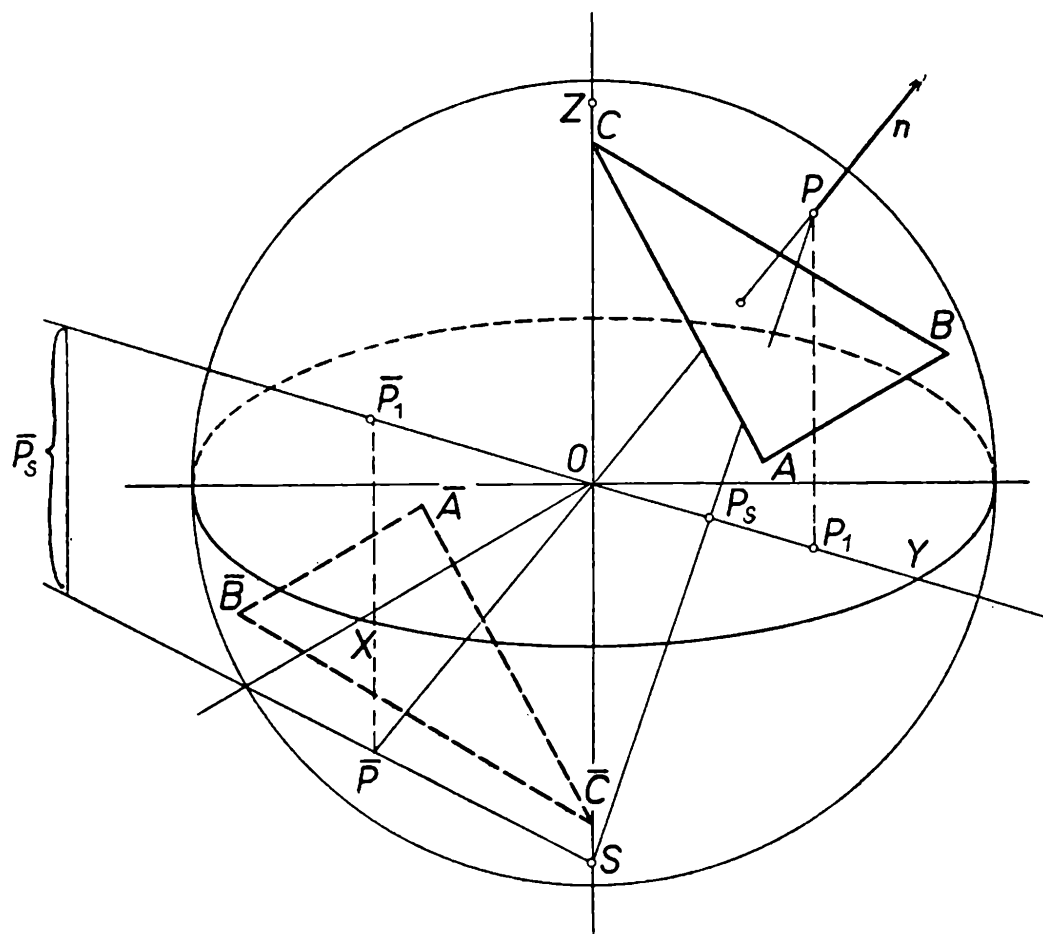
5. Teraz môžeme prikročiť k vlastnému predmetu nášho príspevku, tj. k zobrazeniu kryštálu pomocou stereografickej projekcie. Omedzíme sa pritom na kryštály s pravouhlým osovým krížom, teda na kryštály zo sústav: kubickej, tetragonálnej a rombickej. Na určenie kryštálovej plochy postačí v tomto prípade jej pomer parametrov.

Najprv zobrazíme kryštalovú plochu p na guľovú plochu κ , ktorú si obyčajne myslíme opísanú zo stredu O osového kríža polomerom rovným jednotke dĺžky (napr. 1 dm). Túto jednotkovú guľovú plochu κ budeme nazývať sférou. Body X , Y , Z , resp. $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, o ktorých sme hovorili v odst. 2, sú priesečníky osí a , b , c so sférou.

Kryštalovú plochu p zobrazíme na sféru týmto spôsobom: zo stredu O vedieme na plochu p kolmicu n (normálu) a zostrojíme jej priesečník P so sférou (obr. 1). Tento bod P nazveme sférickým obrazom alebo pólom plochy p . Pritom predpokladáme, že plocha p ne-

⁶⁾ Literatúra [1], str. 11 a n.

prechádza stredom O a že normála je polpriamka vedená z bodu O na plochu p tak, aby túto plochu pretla. Pretína teda sféru v jedinom bode a bod P ako pól plochy p je teda určený jednoznačne. Pravda, táto jednoznačnosť je iba jednostranná. Každé dve kryštálové plochy navzájom rovnobežné, ktoré majú spoločnú normálu (a pretínajú túto normálu v jej vnútorných bodoch), majú ten istý pól. O takých plochách povieme stručne, že ležia na tej istej strane od stredu O ⁷⁾.

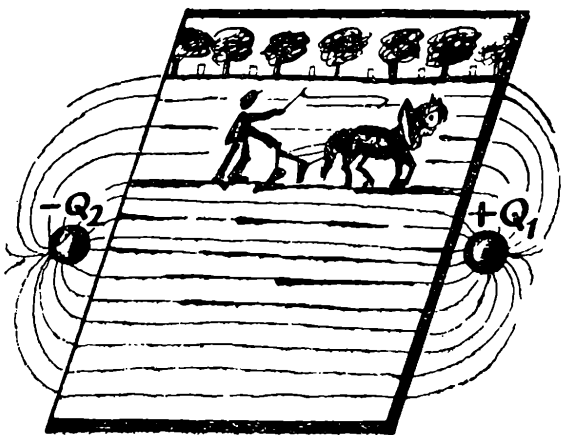


Obr. 1

Na obr. 1 sme znázornili plochu p trojuholníkom ABC a plochu $\bar{p}$ s plochou p symetrickú podľa stredu O (tzv. rovnocennú plochu) trojuholníkom $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Póly P a $\bar{P}$ týchto plôch sú na sfére bodmi diametrálne protilahlými. Plochu $\bar{p}$ nazývame protiplochou plochy p a pól $\bar{P}$ protipólom plochy p .

(Pokračování)

⁷⁾ Všimnime si, že pri tomto zobrazení nezáleží na veľkosti kryštálu. Každé dva kryštály podobné a podobne postavené majú ten istý sférický obraz. A dokonca nemusia byť tieto kryštály ani geometricky podobné. Ak ich plochy sú po dvoch navzájom rovnobežné na tej istej strane od stredu O , má každá z týchto dvojíc spoločnú normálu, teda ten istý pól a také dva kryštály majú ten istý sférický obraz (ak sférickým obrazom kryštálu nazveme súhrn pólov jednotlivých jeho plôch).



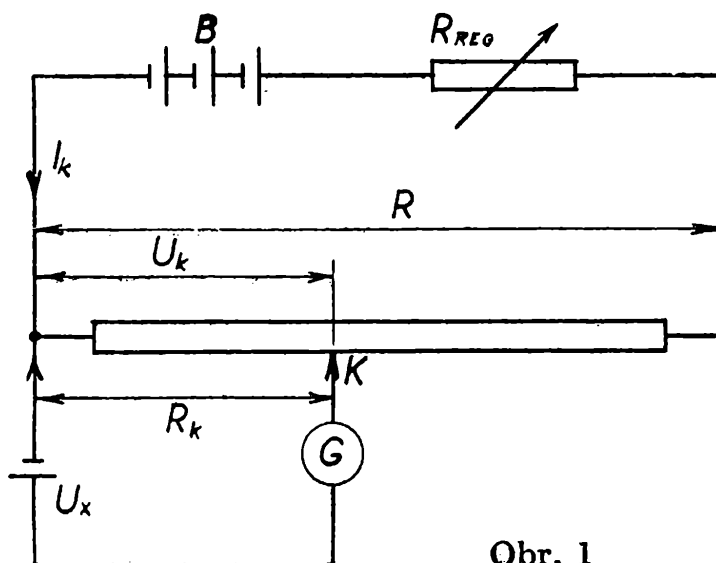
FYZIKA

Přesné měření elektrického napětí

ING. LADISLAV SMRŽ, Praha

K nejstarším a nejpresnějším metodám pro měření stejnosměrného elektrického napětí patří klasická k o m p e n z a č n í m e t o d a, používaná v různých obměnách až dodnes. Dnešní typy kompenzátorů pro stejnosměrný proud jsou již tak dokonale propracovány, že přesnost měření v mezích několika setin procenta je běžná a některé výrobky (např. kompenzátory anglické firmy Tinsley aj.) dosahují přesnosti až několika tisícin procenta měřené hodnoty napětí.

Přitom vlastní princip kompenzační metody je velmi jednoduchý. Neznámé napětí U_x , jehož velikost chceme měřit, určí se kompenzací (vyrovnáním) známým napětím U_k . Proto jsou obě napětí v kompenzátoru zapojena tak, aby působila proti sobě. Schematicky se dá kompenzační metoda znázornit zapojením v obr. 1. Kompenzátor je zde



Obr. 1

představován přesným odporem R , který je zapojen jako potenciometr ke zdroji stejnosměrného napětí B (proto se velmi často cizí výrobky označují názvem „přesný potenciometr“). Pohyblivým kontaktem K můžeme jemně regulovat napětí přiváděné z baterie B od nulové hodnoty až do plného napětí tohoto zdroje. Tím máme k dispozici regulovatelný zdroj kompenzačního napětí U_k , proti němuž zapojujeme neznámé měřené napětí U_x . V obvodu napětí U_x je zapojen citlivý galvanometr G , který svou výchylkou reaguje na rozdíl obou napětí U_x a U_k . Pohybem kontaktu K na odporu R můžeme nalézt takové místo, v němž úbytek napětí na takto nastaveném odporu R_k (který je tedy částí celkového odporu R) se přesně rovná měřenému napětí U_x . Říkáme, že neznámé napětí U_x je vykompenzováno napětím na odporu R_k . Je to v okamžiku, kdy index galvanometru G je v nulové poloze. Platí-li totiž podle našeho předpokladu, že $U_x = U_k$, je rozdíl obou těchto napětí nulový a systémem galvanometru neprotéká žádný proud. Tím je kompenzace ukončena a známe-li s dostatečnou přesností kompenzační napětí U_k , známe tím se stejnou přesností i měřené napětí U_x .

Kompenzační napětí U_k , nastavené na kompenzačním odporu R_k je podle Ohmova zákona dáno vztahem $U_k = I_k \cdot R_k$, kde I_k je kompenzační proud, protékající odporem R (obr. 1). Měřené napětí U_x vypočteme tedy z rovnice

$$U_x = I_k \cdot R_k. \quad (1)$$

Abychom mohli podle vztahu (1) vypočítat měřené napětí U_x s postačující přesností, musíme znát přesnou velikost jak kompenzačního proudu I_k , tak i kompenzačního odporu R_k .

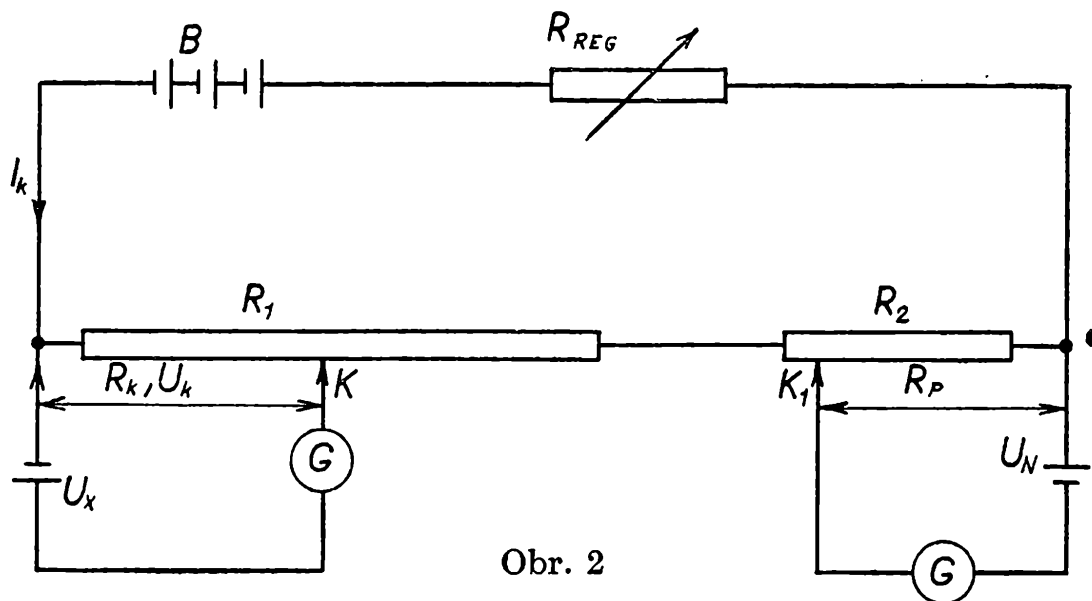
U odporu R_k , který je částí celkového odporu R kompenzátoru, je to vcelku jednoduché, poněvadž jeho velikost můžeme s velkou přesností kontrolovat odporovým měřením.

U kompenzačního proudu I_k je to však obtížnější. Mohli bychom jej měřit a nastavit nebo kontrolovat jeho potřebnou hodnotu citlivým a přesným miliampérmetrem. Ovšem přesnost nastavení byla by zde omezena přesností použitého miliampérmetru, takže by dosahovala maximálně 0,1 až 0,2 %. Proto se tohoto způsobu používá jen u technických, méně přesných kompenzátorů.

Máme však ještě jinou možnost. Kompenzační proud I_k můžeme stanovit nepřímou, opět využitím Ohmova zákona, z určitého známého odporu a známého napětí. Jako zdroje tohoto napětí se používá etalonového Westonova článku. To je galvanický článek speciální konstrukce, jehož elektrody (kladná - čistá rtuť, záporná - amalgam kadmia) jsou uloženy ve skleněné nádobce tvaru H , naplněné nasyceným roztokem síranu kademnatého, který tvoří elektrolyt. Při dodržení provozních podmínek, z nichž jsou nejdůležitější stálost teploty, bezotřesnost a nepatrný odběr proudu (řádu nejvýše 10^{-5} A), udržuje Westonův článek stálé, neproměnné napětí, na teplotě málo závislé, jehož střední hod-

nota je 1,018 65 V při teplotě 20 °C. Skutečná hodnota tohoto napětí, podle provedení článku, je jen málo odlišná od uvedené hodnoty a stanoví se pro teplotu 20 °C speciálním měřením s přesností až 10^{-4} %. Hodnota napětí při jiné teplotě se vypočte z teplotní závislosti Westonova článku (změny napětí Westonova článku s teplotou jsou obvykle uvedeny v tabulkách).

Použití Westonova etalonového článku jako zdroje stálého, přesně známého napětí umožňuje nastavit potřebnou velikost kompenzačního proudu I_k podobným postupem jako dříve, tedy opět kompenzací. V obr. 2 je schematicky znázorněna potřebná konstruktivní úprava.



Obr. 2

Toto zapojení se liší od zapojení v obr. 1 pouze tím, že do série s kompenzačním odporem R_1 (označeným v obr. 1 jako R) je v obvodu baterie B a regulačního odporu R_{reg} zapojen přesný odpor R_2 , představující takzvaný pomocný kompenzátor. Napětí Westonova článku U_N směřuje opět proti úbytku napětí vznikajícímu na odporu R_p , který je vhodně nastavenou částí celkového odporu R_2 . Regulací kompenzačního proudu I_k regulačním odporem R_{reg} můžeme opět dosáhnout rovnosti obou napětí, kdy index galvanometru G , zapojeného v obvodu Westonova (etalonového) článku, bude v nulové poloze. Pak platí vztah $U_N = I_k \cdot R_p$, z něhož určíme kompenzační proud I_k

$$I_k = \frac{U_N}{R_p}. \quad (2)$$

Když se vrátíme k základnímu kompenzačnímu vztahu (1) a do-
zadíme do něho výraz (2) pro kompenzační proud I_k , dostaneme rovnici pro výpočet měřeného napětí U_x v jiném tvaru

$$U_x = I_k \cdot R_k = U_N \frac{R_k}{R_p}. \quad (3)$$

Vidíme z něho, že přesnost měření bude záležet na přesnosti, s jakou máme definováno napětí Westonova článku a na přesnosti kompenzačního odporu R_k a odporu R_p pomocného kompenzátoru.

Velikost kompenzačního proudu I_k bývá u vyráběných kompenzátorů nejčastěji 0,0001 A (u některých typů také 0,001 A nebo 0,01 A), takže výpočet měřeného napětí U_x podle vztahu (1) je velmi jednoduchý a dekády kompenzátoru mohou být označeny přímo ve voltech místo v ohmech. Tím, že jsme si zvolili velikost proudu I_k předem, dostáváme ze vztahu (2) potřebnou velikost odporu R_p pomocného kompenzátoru, vhodnou pro určitou hodnotu napětí U_N Westonova článku. Ze vztahu (2) vyplývá, že velikost odporu R_p musí být desettisíckrát větší než je hodnota napětí Westonova článku, chceme-li nastavit kompenzační proud $I_k = 0,0001$ A. Je-li např. napětí Westonova článku $U_N = 1,018\,68$ V, nastaví se na pomocném kompenzátoru R_2 odpor $R_p = 10\,186,8$ ohmu a regulačním odporem R_{reg} se reguluje proud I_k tak dlouho, až index galvanometru G je v nulové poloze. Pak platí přesně vztah (2) a proud I_k má přesně velikost 0,0001 A.

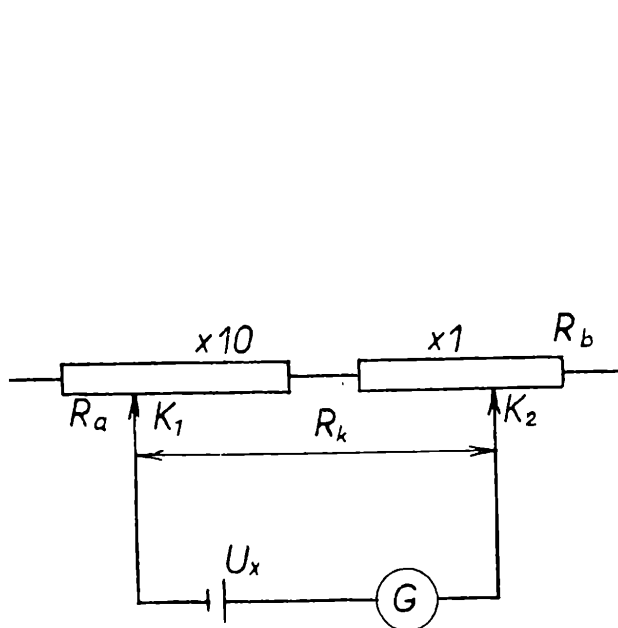
U skutečného kompenzátoru jsou proti schematickým znázorněním v obr. 1 a obr. 2 určité konstruktivní odchylky. Nebylo by ekonomické používat dvou galvanometrů (podle obr. 2), proto se galvanometr G přepíná buď do obvodu pomocného kompenzátoru při nastavování nebo kontrole kompenzačního proudu I_k , nebo do obvodu hlavního kompenzátoru R_1 při vlastním měření, tedy při kompenzaci měřeného napětí U_x . Pomocný kompenzátor se obvykle nedá nastavovat po desetinných ohmů. Tím se hodnota odporu R_p poněkud liší od správné hodnoty a vzniká tak určitá systematická chyba kompenzátoru. Pro méně přesná měření je však zanedbatelná a může být, je-li třeba, početně eliminována.

Při prvních konstrukcích kompenzátorů byla nejobtížnější úprava kompenzačního odporu R_k u hlavního kompenzátoru R_1 . Kdyby byl kompenzátor konstruován podle obr. 1 a obr. 2, byla by možnost čtení pouze jediného místa. To by bylo ovšem zcela nepostačující. Kdyby se odpor R_k rozdělil na dvě odporové dekády R_a a R_b , zapojené v sérii a ve vzájemném poměru 1 : 10 podle obr. 3, mohli bychom podle nastavení kontaktů K_1 a K_2 číst již dvě desetinná místa. U přesných kompenzátorů, které dovolují čtení pěti až šesti desetinných míst, je užito různých, více méně složitých úprav dekadových odporů hlavního kompenzátoru. Nejčastěji je použito u nich vzájemné elektrické nebo mechanické vazby.

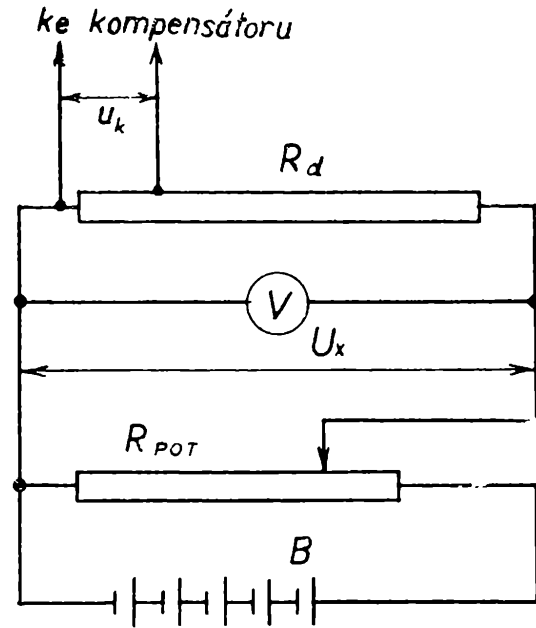
Podrobnější rozbor konstrukce kompenzátoru není však obsahem tohoto článku. Proto se spíše zaměříme na způsoby využití kompenzační metody, která je víceúčelová. Kompenzátozem můžeme velmi přesně měřit elektrické napětí. Ale právě tak jej můžeme použít k měření i jiných elektrických veličin, pokud se dá toto měření vhodným po-

stupem nebo konstruktivní úpravou převést opět na měření elektrického napětí. A tak kompenzátory slouží nejen k měření elektrického napětí, ale také k měření elektrického proudu, výkonu a odporu.

1. *Měření elektrického napětí.* Použijeme-li k měření samotného kompenzátoru, bez dalších přidavných zařízení, můžeme měřit pouze takovou velikost elektrického napětí, která nepřesahuje měřicí rozsah kompenzátoru. Bývá to obvykle 10^{-5} nebo 10^{-6} V až 1,1 V, 1,5 V nebo 2 V



Obr. 3



Obr. 4

Je-li třeba měřit vyšší napětí, použije se přesného děliče napětí R_d . Je to přesný odpor s odbočkami tak vyměřenými, že pro všechny jeho rozsahy (např. 11 V, 110 V a 1100 V) má napětí u_x , odbočující z něho ke kompenzátoru, pokaždé velikost, odpovídající měřicímu rozsahu kompenzátoru (např. 1,1 V). Zapojení děliče je schematicky znázorněno v obr. 4, který zároveň představuje kontrolu správnosti voltmetru V kompenzační metodou. Při ní se porovnávají údaje voltmetru s přesnými hodnotami napětí, stanovenými kompenzátozem.

2. *Měření elektrického proudu.* Měření elektrického proudu kompenzační metodou si převedeme na měření napětí tím, že neznámý, měřený proud I_x necháme protékat etalonovým odporem R_N , jehož hodnotu přesně známe. Na jeho potenciálních svorkách měříme pak kompenzátozem vzniklý úbytek napětí (obr. 5). Podle Ohmova zákona platí pro něj vztah

$$U_x = I_x \cdot R_N \quad (4)$$

Toto napětí U_x vykompenzujeme postupem, který byl již dříve popsán, takže podle vztahu (1) platí

$$U_x = I_k \cdot R_k, \quad (5)$$

kde I_k je kompenzační proud a R_k je nastavení dekád na kompenzátoru.

Z rovnic (4) a (5) dostaneme pak výraz pro měřený proud I_x

$$I_x = I_k \frac{R_k}{R_N} = \frac{U_N}{R_p} \cdot \frac{R_k}{R_N}, \quad (6)$$

kde proud I_k byl nahrazen výrazem podle vztahu (2).

Etalonový odpor R_N musí být volen tak veliký, aby úbytek napětí na něm vzniklý nebyl větší než je měřicí rozsah kompenzátoru. Tak např. pro měření proudu $I_x = 10$ A, volíme etalonový odpor velikosti $R_N = 0,1 \Omega$, takže na něm vznikne při protékání proudem I_x úbytek napětí (podle vztahu 4) velikosti 1 volt, tedy menší než je obvyklý měřicí rozsah kompenzátoru.

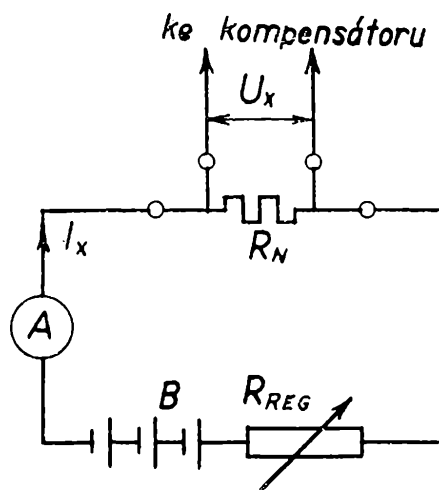
V obr. 5 je současně znázorněna kontrola ampérmetru A kompenzační metodou. Podobně jako při kontrole voltmetru porovnávají se zde údaje ampérmetru s přesnými hodnotami protékajícího proudu stanovenými kompenzátozem.

3. *Měření elektrického výkonu.* Výkon stejnosměrného proudu je dán vztahem $P = U \cdot I$. Pro jeho přesné měření, např. při kontrole správnosti wattmetrů, použijeme opět kompenzační metody. Vzhledem

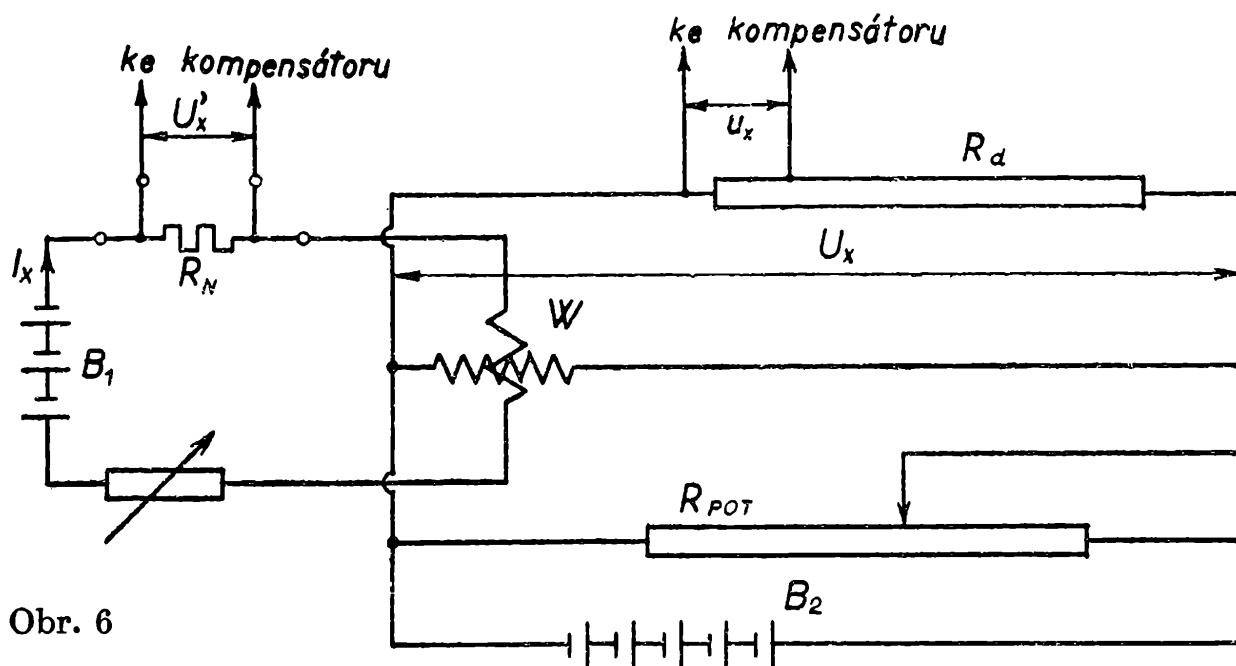
k tomu, že se zde jedná o měření dvou veličin, napětí U a proudu I , měli bychom použít dvou kompenzátorů v zapojení, naznačeném v obr. 6; současně je znázorněno zapojení wattmetru W při jeho kontrole správnosti. Jedním z nich by se kompenzovalo napětí U , druhým pak proud I . Poněvadž se však u napětí U jedná při kontrole wattmetru pouze o kompenzaci jediné stálé hodnoty, používá se podstatně jednoduššího kompenzátoru napětí, kterým se vlastně pouze kontroluje stálost jeho přesně nastavené hodnoty během celého měření. Takto je např. upraven laboratorní kompenzátor QsLK, výrobek n. p. Metra, Blansko.

Pro měření výkonu může se však použít také pouze jediného kompenzátoru, na němž se postupně kompenzuje měřené napětí U a měřený proud I . Je tedy kompenzátor jednou zapojen podle obr. 5, podruhé pak podle obr. 4. Aby se i zde zajistila dostatečná spolehlivost a přesnost měření, kompenzuje se napětí a proud ve sledu

kompenzace napětí — proudu — napětí ,



Obr. 5



Obr. 6

čímž máme kontrolu, že se během kompenzace proudu nezměnila hodnota měřeného napětí U .

4. *Měření elektrického odporu.* Také měření neznámého odporu R_x se dá převést na měření úbytku napětí na něm vznikajícího a tím se opět umožňuje použití kompenzační metody.

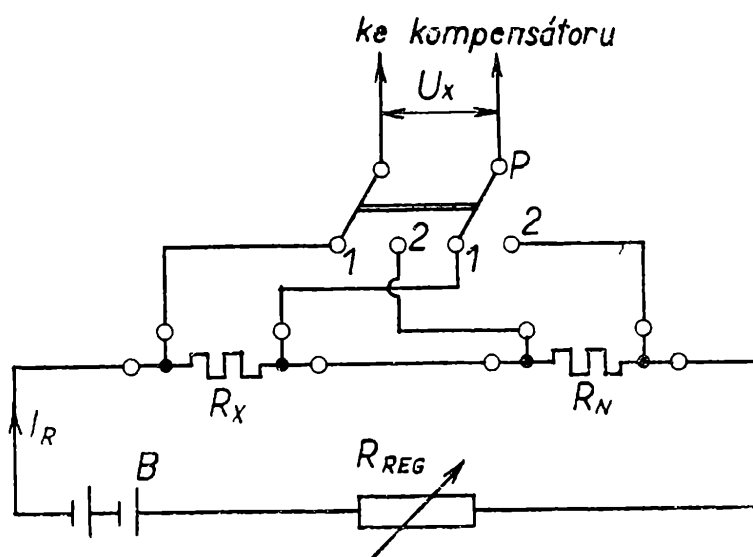
Neznámý odpor R_x se zapojí (podle obr. 7) v sérii s přesně definovaným odporem R_N , pokud možno stejné velikosti a postupně se kompenzují úbytky napětí na nich vznikající. Ke kompensátoru se připojují oba porovnávané odpory R_x a R_N přepínačem P s polohami 1—1 a 2—2. Pro obě měření dostáváme vztahy podle rovnice (1)

pro etalon R_N

$$I_R \cdot R_N = I_k \cdot R_k, \quad (7)$$

pro etalonový měřený odpor R_x

$$I_R \cdot R_x = I_k \cdot R'_k, \quad (8)$$



Obr. 7

kde I_k je kompenzační proud, R_k a R'_k jsou nastavení na dekadách kompenzátoru.

Pro poměr obou odporů R_x a R_N ze vztahů (7) a (8) se proudy I_k a I_N vykrátí a po úpravě dostaneme vztah

$$R_x = R_N \frac{R'_k}{R_k}. \quad (9)$$

Měřený odpor R_x je tedy dán součinem hodnoty etalonu R_N a podílu obou nastavení R'_k a R_k na kompenzátoru.

Podmínkou přesného měření je především stálost proudu I_R , protékajícího oběma porovnávanými odpory R_x a R_N . Jeho velikost je omezena jednak měřicím rozsahem kompenzátoru, jednak dovoleným zatížením porovnávaných odporů.

Brzdil včas?

OTAKAR SAMEK, Jihlava

Ve svém článku chci ukázat způsob výpočtu pravděpodobné rychlosti vozidla před dopravní nehodou pomocí základních vzorců z kinematiky a dynamiky.

Ve většině nehodových případů se řidič snaží odvrátit nebezpečí brzděním, které je nejúčinnější na přechodu mezi otáčením a úplným zastavením kol. Brzdění zanechává na vozovce charakteristickou stopu, jejíž délku je možno změřit a použít k výpočtu rychlosti, kterou mělo vozidlo v okamžiku, kdy začalo brzdit.

Při zastavování vozidla pomocí brzd se jeho kinetická energie mění v teplo třením v brzdném ústrojí a třením mezi pneumatikou a vozovkou. I když nedochází k úplnému zastavení otáčení kol, je možno tření mezi nimi a vozovkou považovat za tření smykové. Síla tření, působící proti směru pohybu, závisí v daném případě na druhu styčných ploch (např. guma na asfaltu, guma na šterku apod.) a na jejich jakosti (plochy drsné, hladké, suché, vlhké, zledovatělé apod.). Zvětšuje-li se tlaková síla N vozidla na podložku (přidáváním zátěže), zvětšuje se síla tření T tak, že poměr

$$f = \frac{T}{N} \quad (1)$$

je při stejném druhu a jakosti styčných ploch stálý (f nazýváme sou-

činitel smykového tření). Ze vztahu (1) pro sílu tření dostáváme

$$T = f \cdot N \quad (2)$$

Součinitel smykového tření mezi pneumatikou a různými druhy vozovek se dá experimentálně zjistit a sestavit do tabulky

Vozovka	Suchá	Mokrá	Zledovatělá
šterkovaná	0,7	0,4–0,5	suchá 0,05–0,2
betonová	0,6–0,9	0,2–0,5	led 0,07
dlážděná	0,5–0,8	0,2–0,4	suchý led 0,1
asfaltovaná	0,5–1,0	0,2–0,4	uježděný sníh 0,1–0,3

Pro naše další úvahy bude nutné odvodit základní vztahy pro pohyb rovnoměrně zpomalený.

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb hmotného bodu ve směru kladné osy x platí pohybová rovnice

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a' \quad (3)$$

kde a' je zpomalení.

Prvním integrováním této rovnice dostaneme okamžitou rychlost

$$\frac{dx}{dt} = -a't + v_0, \quad (4)$$

kde v_0 je integrační konstanta, která udává rychlost v čase $t = 0$ (rychlost počáteční).

Označíme-li $v = \frac{dx}{dt}$, pak

$$v = v_0 - a't. \quad (5)$$

Druhým integrováním rovnice (3) dostaneme pro dráhu

$$x = -\frac{1}{2}a't^2 + v_0t + x_0,$$

kde x_0 je integrační konstanta vyjadřující velikost dráhy, kterou hmotný bod urazil před začátkem měření času.

Konstantu x_0 můžeme dále vynechat, položíme-li polohu počátku sledování do počátku souřadnicového systému. Označíme-li $s = x$, pak

$$s = v_0t - \frac{1}{2}a't^2. \quad (6)$$

Úpravou rovnic (5) a (6) pro dráhu dostaneme

$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a'} \quad (7)$$

Při rovnoměrně zpomaleném pohybu hmotného bodu se rychlost rovnoměrně zmenšuje podle rovnice (5), v okamžiku zastavení $v = 0$.

Pro dráhu tedy v tomto případě platí

$$s = \frac{v_0^2}{2a'}. \quad (8)$$

Aplikujme uvedené vztahy na pohyb vozidla. Sešlápnutím brzdového pedálu působí proti směru pohybu vozidla konstantní síla, vozidlo vykonává pohyb rovnoměrně zpomalený. Podle Newtonova pohybového zákona se tato síla rovná součinu hmotnosti m [kg] vozidla a jeho zpomalení a' [ms^{-2}]

$$F = m \cdot a' \quad (9)$$

Tato síla je rovná síle tření $F = T$. Dosadíme-li za N tíhu vozidla $G = mg$, kde $g \doteq 9,81 \text{ ms}^{-2}$ je tíhové zrychlení, do rovnice (2) a úpravou s rovnicí (9) dostáváme pro zpomalení vozidla

$$a' = f \cdot g \quad (10)$$

Pohybující se vozidlo má v okamžiku, kdy začne řidič brzdít, počáteční rychlost v_0 , po době t , měřené od tohoto okamžiku, vozidlo zastaví. Za tuto dobu, potřebnou k zastavení, urazí dráhu s , přičemž zanechá na vozovce brzdné stopy.

Pro pohyb vozidla v našem případě platí rovnice (8). Dosadíme-li do této rovnice a' ze vztahu (10), pak

$$s = \frac{v_0^2}{2 \cdot f \cdot g}. \quad (11)$$

Rychlost vozidel se obvykle měří v $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, délka brzdné dráhy, kterou zanechá vozidlo na vozovce v metrech, musíme tedy rovnici (11) upravit. Označme počáteční rychlost V_0 [$\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$] a uijme převodního vztahu

$$V_0 [\text{km} \cdot \text{h}^{-1}] = 3,6 v_0 [\text{m s}^{-1}].$$

Dosazeno do (11)

$$s = \frac{\frac{V_0^2}{3,6^2}}{2 \cdot f \cdot g} \doteq \frac{V_0^2}{3,6^2 \cdot 2 \cdot f \cdot 9,81} \doteq \frac{V_0^2}{254,3 \cdot f}.$$

Pro okamžitou rychlost na začátku brzdění dostáváme

$$V_0 \doteq \sqrt{254,3 \cdot f \cdot s}. \quad (12)$$

Změříme-li délku brzdné dráhy s [m] vozidla, hodnotu součinitele smykového tření pro příslušný druh vozovky zjistíme v tabulce a dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice (12), můžeme vypočítat rychlost, kterou se pohybovalo vozidlo v okamžiku, kdy začal řidič brzdít.

Předpokládejme, že vozidlo při brzdění vykonává pohyb rovnoměrně zpomalený a narazí na pevnou překážku nebo na jiné stojící nebo jedoucí vozidlo. Užijeme-li vzorce (12) ke zjištění jeho rychlosti v okamžiku, kdy začal řidič brzdít, vypočteme vždy rychlost menší, než jakou se ve skutečnosti pohybovalo. Vzorec (12) byl odvozen za předpokladu, že na vozidlo působí pouze síla tření; tedy brzdná dráha je v tomto případě větší než skutečná brzdná dráha při nehodě. Dále brzdy často působí dříve než zanechají kola brzdné stopy na vozovce.

Proto rychlost vozidla před dopravní nehodou, kterou získáme výpočtem z rovnice (12) musí být považována za minimální rychlost, jakou vozidlo před nehodou jelo.

Mnohdy výpočet rychlosti touto metodou (i když neumožňuje vypočítat skutečnou rychlost) může objasnit příčinu dopravní nehody.

Je zřejmé, že výsledky zde uvedené jsou platné pro vodorovnou vozovku, vzorce (12) můžeme prakticky použít i v případě, že sklon vozovky je velmi malý.

Příklad. Osobní automobil jedoucí po suché rovině vozovce, dlážděné velkou kostkou, brzdil 60 m a narazil na zeď. Vypočtete minimální rychlost, jakou jel automobil v okamžiku, kdy začal řidič brzdít. K výpočtu užijeme vzorce (12). Délku brzdné dráhy známe, podle tabulky je součinitel smykového tření asi 0,6. Dosazením získáme

$$V_0 \doteq \sqrt{254,3 \cdot 0,6 \cdot 60} \doteq \sqrt{9154,8} \doteq 95,68.$$

Minimální rychlost automobilu v okamžiku, kdy začal řidič brzdít, byla 95,68 km . h⁻¹.

* * *

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA XVIII B R O J 1	Z A G R E B	ŠKOL. GOD. 1967. — 1968.
---------------------------	-------------	-----------------------------

Při návštěvě obou redaktorů v Jugoslavii byla navázána spolupráce s časopisem, jehož titulní hlavičku otiskujeme a o jehož náplni, obdobné obsahu našeho časopisu, otiskneme v některém z příštích čísel informativní zprávu.

O. S.



Nejjednodušší výpočet dráhy umělých satelitů Země

JOSEF ŠOLER, České Budějovice

Dráha tělesa volně vrženého je parabola. To platí jen v případě, je-li vrženo malou rychlostí a z nevelké výšky, takže lze předpokládat, že se nemění během dráhy ani velikost gravitačního zrychlení ani jeho směr, tj. „svislé“ směry v jednotlivých bodech dráhy zůstávají navzájem rovnoběžné. Pro vrh z velké výšky a rychlosti blízké 8 km s^{-1} , tj. první kosmické rychlosti, se však směr i velikost gravitačního zrychlení mění. Dráha tělesa, dokud nepadne na Zemi, je elipsou. Jen v bezprostřední blízkosti místa odstřelu lze ji nahradit parabolou vodorovného vrhu, jež je tzv. hyperoskulační parabolou této elipsy. Teprve pro parabolickou rychlost

$$c_2 = \sqrt{2gR}$$

je dráha parabolou v celém rozsahu.

Toho lze užít k stanovení parametrů dráhy satelitu z jeho počáteční rychlosti.

Čtenáři se jistě zajímají o to, jak se propočítává dráha rakety kolem Země a jak lze volbou vhodné odpalovací rychlosti volit polohu perigea a apogea dráhy. Podávám nejjednodušší řešení, odvolává se v něm na konstrukce oskulačních kružnic ve vrcholech kuželoseček, známých z deskriptivní geometrie. Jde o tuto úlohu:

Vodorovně ve směru rotace Země je na rovníku rychlostí c , která je větší než prvá a menší než druhá kosmická rychlost, vypuštěna raketa.

Určete poloosy a , b , lineární a numerickou excentricitu eliptické dráhy, polohu perigea a apogea i dobu oběhu. Co se stane, má-li raketa druhou kosmickou rychlost?

Lze užít těchto údajů: Elipsa o poloosách a , b , má lineární výstřednost

$$e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

číslnou

$$\varepsilon = \frac{l}{a}.$$

Kružnice křivosti vedlejšího vrcholu elipsy, jak snadno určíte ze známé konstrukce, má poloměr

$$\frac{b^2}{a}$$

Kosmické rychlosti jsou

$$c_1 = \sqrt{Rg}, \quad c_2 = \sqrt{2Rg}.$$

Ohnisko oběžné dráhy leží ve středu Země. Kružnice křivosti vrcholu paraboly má poloměr rovný parametru paraboly p (vzpomeňte si na větu o dutém sférickém zrcadle: Ohnisko leží uprostřed mezi středem křivosti a vrcholem!).

Abyste lépe porozuměli dalším výkladům, uvažte:

V místě, odkud byla vypuštěna raketa, hyperoskulují, tj. co nejtěsněji se stýkají ve vrcholu, tyto křivky: 1. Elipsa, po které raketa obíhá Zemi. 2. Parabola „vodorovného vrhu“, ovšem jen v bezprostředním okolí místa odpálení rakety. O této parabole říkáme, že elipsu oskuluje. 3. Oskulační kružnice obou těchto křivek, která je společnou oskulační kružnicí parabolické dráhy v okolí místa odpalu, i oběžné elipsy. Této okolnosti se v geometrii stručně říká, že se kružnice, parabola a elipsa v okolí místa odpálení rakety nejtěsněji stýkají, čili oskulují. Diferenciální geometrie přesněji mluví o hyperoskulaci ve vrcholu, tj. jde o tzv. styk třetího řádu. Využijeme této geometrické úvahy k nejkratšímu způsobu výpočtu.

Pro vodorovný vrh při obvyklé poloze os platí

$$x = ct, \quad y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{c^2}, \quad x^2 = 2 \frac{c^2}{g} y.$$

Srovnáním s rovnicí paraboly $x^2 = 2py$ dostaneme

$$p = \frac{c^2}{g}$$

Tento výraz se rovná poloměru oskulační kružnice ve vrcholu paraboly a také poloměru křivosti vedlejšího vrcholu elipsy

$$\frac{b^2}{a}.$$

To dává první rovnici

$$\frac{c^2}{g} = \frac{b^2}{g}. \quad (1)$$

Druhá rovnice plyne z připojeného obr. 1

$$a - e = R. \quad (2)$$

Třetí rovnice plyne ze vztahu, známého z deskriptivní geometrie

$$a^2 - b^2 = e^2. \quad (3)$$

Tím je úloha po fyzikální stránce hotova. Z rovnic máme určit hodnoty a , b .

Dosadíme z (1) do (3) za

$$b^2 = \frac{ac^2}{g}$$

a dostaneme

$$a^2 - e^2 = \frac{ac^2}{g}.$$

Levou stranu upravíme na $(a + e)(a - e)$ a dosadíme podle (2) za $a - e = R$

$$(a + e) R = \frac{ac^2}{g}, \quad a + e = \frac{ac^2}{gR}, \quad a - e = R$$

Sečtením posledních dvou rovnic je

$$a = \frac{ac^2 + R^2g}{2g \cdot R},$$

odtud

$$a = \frac{gR^2}{2gR - c^2}.$$

Zlomek je kladný a má význam, neboť podle předpokladu $c_2 > c > c_1$ je

$$\sqrt{2gR} > c > \sqrt{gR}.$$

Podle obrázku je perigeum ve výšce 0 nad povrchem Země a apogeum ve vzdálenosti

$$2(a - R) = \frac{2R(c^2 - Rg)}{2Rg - c^2}$$

od povrchu Země.

Čitatel $c^2 - Rg$ je kladný podle naší podmínky, že rychlost odpálení je větší než první kosmická rychlost.

Dobu oběhu T_1 určíme z 3. Keplerova zákona

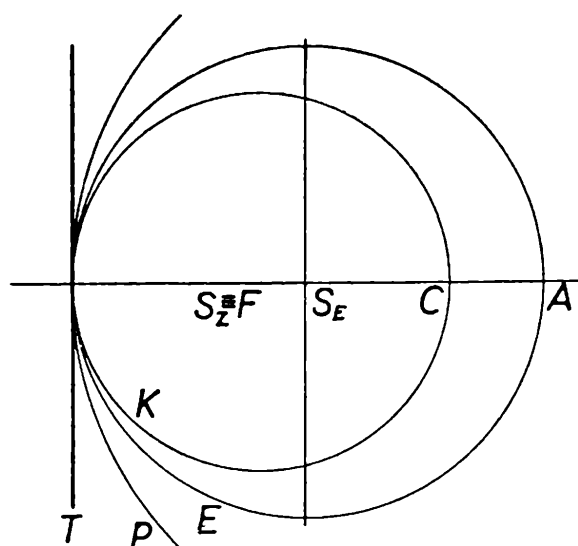
$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}.$$

Pro prvou kosmickou rychlost, je-li raketa odpálena blízko povrchu Země, $c_1 \doteq 8 \text{ km s}^{-1}$, obíhá podél rovníku, $a_2 = R$. Doba oběhu je tedy $T_2 = 40\,000 : 8 = 5000 \text{ s} = 1 \text{ h } 23 \text{ min}$. Prvý satelit měl $T = 90 \text{ min}$. Dosadíme do 3. Keplerova zákona za $a_2 = R$, $T_2 = 5000 \text{ s}$,

$$a_1 = \frac{gR^2}{2gR - c^2}$$

a určíme T_1 .

Naše vzorce pro a , b , e ztrácejí význam pro



Obr. 1

$$c \rightarrow \sqrt{2gR},$$

tj. blíží-li se druhé kosmické rychlosti. Všechny ty tři veličiny neomezeně rostou. Eliptická, uzavřená dráha, se mění v parabolickou a raketa opustí Zemi navždy. Poněvadž podle 1. Keplerova zákona je ohniskem parabolické dráhy střed Země, je $p = 2R$. Křivost ve vrcholu paraboly je

$$\frac{c_2^2}{g} = 2R,$$

kde $c_2 = \sqrt{2gR}$ je druhá kosmická rychlost. Vzdálí-li se raketa dostatečně od Země, převládá gravitační působení Slunce a raketa se promění v planetární družici. Luník III. (4. 10. 1959) byl veden tak, že se dostal do gravitačního pole našeho Měsíce, stal se jeho družicí a fotografoval jeho odvrácenou stranu. Podobně je to plánováno s raketami, jež mají fotografovat Venuši a Marta.

Je-li perihelium ve výšce h nad povrchem Země, tedy ve vzdálenosti $(R + h)$ od jejího středu, nutno ve vzorcích R nahradit $(R + h)$, a poněvadž intenzity gravitačního pole Země ubývá se čtvercem vzdálenosti od jejího středu, nahradíme

$$g \text{ výrazem } g \left(\frac{R}{R+h} \right)^2.$$

Z údajů o vzdálenosti perigea a apogea od středu Země u známých satelitů lze zjistit, jakou rychlostí byly vypuštěny.

Poznámka: Obr. 1 je rýsován v měřítku $1 : 2 \cdot 10^8$ a pro $c = 9 \text{ km s}^{-1}$.

Řešení



úloh

Matematika

2. Budiž v_1 výška na základnu rovnoramenného trojúhelníka $\triangle_1$, v_2 výška příslušná k jeho rameni, ϱ poloměr vepsané kružnice. Při konstantním ϱ sestrojíme další rovnoramenné trojúhelníky $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \dots, \triangle_n$ podle schématu

Trojúhelník	Poloměr vepsané kružnice	Výška na základnu	Výška na rameno
$\triangle_1$	ϱ	v_1	v_2
$\triangle_2$	ϱ	v_2	v_3
$\triangle_3$	ϱ	v_3	v_4
$\triangle_n$	ϱ	v_n	v_{n+1}

Dokažte, že pro $n \rightarrow \infty$ přecházejí trojúhelníky $\triangle_n$ v trojúhelník rovnostranný, opsaný kružnici poloměru ϱ .

Josef Brejcha

(Došlo 21 řešení)

Řešení autorovo:

V úloze popsaná konstrukce je vždy možná, neboť pro každé přirozené n platí

$$v_n > 2\rho$$

(důkaz zřejmý).

Výšky v_1 , v_2 a poloměr ρ kružnice vepsané danému rovnoramennému trojúhelníku jsou vázány známou relací

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2}.$$

Z konstrukce podle dané úlohy plynou proto rovnice

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{v_1} + \frac{2}{v_2} = \frac{1}{v_2} + \frac{2}{v_3} = \dots = \frac{1}{v_n} + \frac{2}{v_{n+1}} = \quad (1)$$

Odtud po úpravě

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right), \\ \frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_4} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n-1}} \right)$$

Další jednoduchou úpravou, položíme-li

$$M = \text{konst} = \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1},$$

vychází

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3} = \frac{1}{2} M,$$

$$\frac{1}{v_3} - \frac{1}{v_4} = -\frac{1}{2^2} M,$$

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} M.$$

Pro $n \rightarrow \infty$ pak plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{M}{2^{n-1}} = 0.$$

Lze tedy klást

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n+1} = v > 2\rho.$$

Ze vztahů (1) je pak ihned

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{v_n} + \frac{2}{v_{n+1}} \right) = \frac{1}{\varrho} ,$$

$$\frac{1}{v} + \frac{2}{v} = \frac{1}{\varrho} ,$$

$$v = 3\varrho ,$$

což se mělo dokázat.

11. Která přirozená čísla splňují rovnici

$$|3x - 2y| = 7 ?$$

(Došlo 17 řešení)

Ota Setzer

Řešil Stanislav Slouka, IV.a SPŠE, Brno:

Rozlišujeme: I. $3x - 2y > 0$, II. $3x - 2y < 0$.

I. Zde opět rozlišíme dva případy: 1. $x = 2k$, 2. $x = 2k - 1$.

I. 1. Rovnici $3x - 2y = 7$ upravíme na tvar

$$3 \cdot 2k - 1 = 6 + 2y ,$$

čili

$$(3k + 1) \cdot (3k - 1) = 2 \cdot (3 + 2y-1) .$$

Součin dvou po sobě jdoucích čísel sudých na levé straně je dělitelný aspoň osmi, proto na pravé straně rovnice musí být v závorce sudé číslo. Tomu lze vyhovět jen, když $2y-1 = 1$, neboť jiné mocniny dvou jsou sudé, odtud plyne $y = 1$, $x = 2$.

I. 2. Po vynásobení třemi má naše rovnice tvar

$$3 \cdot 2k = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2y ,$$

čili

$$(3k + 1) \cdot (3k - 1) = 2^2 \cdot (5 + 2y-2 \cdot 3) .$$

V závorce na pravé straně musí být zase sudé číslo, proto $y = 2$. Pro tuto hodnotu však nevychází x přirozené.

II. Zde rozlišíme tři případy.

II. 1. $y = 2m$, $x = 2k$, rovnici upravíme na tvar

$$(3k + 2m) \cdot (-3k + 2m) = 7$$

Protože v závorkách jsou přirozená čísla, dostáváme vzhledem k jejich velikosti soustavu rovnic

$$3k + 2m = 7 ,$$

$$-3k + 2m = 1 ,$$

jejíž řešení je $m = 2$, $k = 1$ a tedy $x = 2$, $y = 4$.

II. 2. $y = 2m$, $x = 2k - 1$, rovnici $2 \cdot 2m - 3 \cdot 2k - 1 = 7$ upravíme na

$$(3k + 1) \cdot (3k - 1) = 2 \cdot (3 \cdot 2m-1 - 11) .$$

Číslo v závorce na pravé straně musí být sudé, tedy $2m - 1 = 0$, čemuž nelze vyhovět pro žádné přirozené m .

II. 3. $y = 2m - 1$. Naši rovnici

$$2 \cdot 2m-1 = 7 + 3x$$

upravíme na tvar

$$(2^m + 1) \cdot (2^m - 1) = 13 + 2 \cdot 3^x$$

Na levé straně je součin dvou po sobě jdoucích lichých čísel ($2^m \neq 3 \cdot k$), proto musí být pravá strana dělitelná třemi. Tomu však nelze vyhovět.

Naši rovnici splňují jen tyto dvojice přirozených čísel

$$x = 2, y = 1 \text{ a } x = 2, y = 4.$$

Fyzika

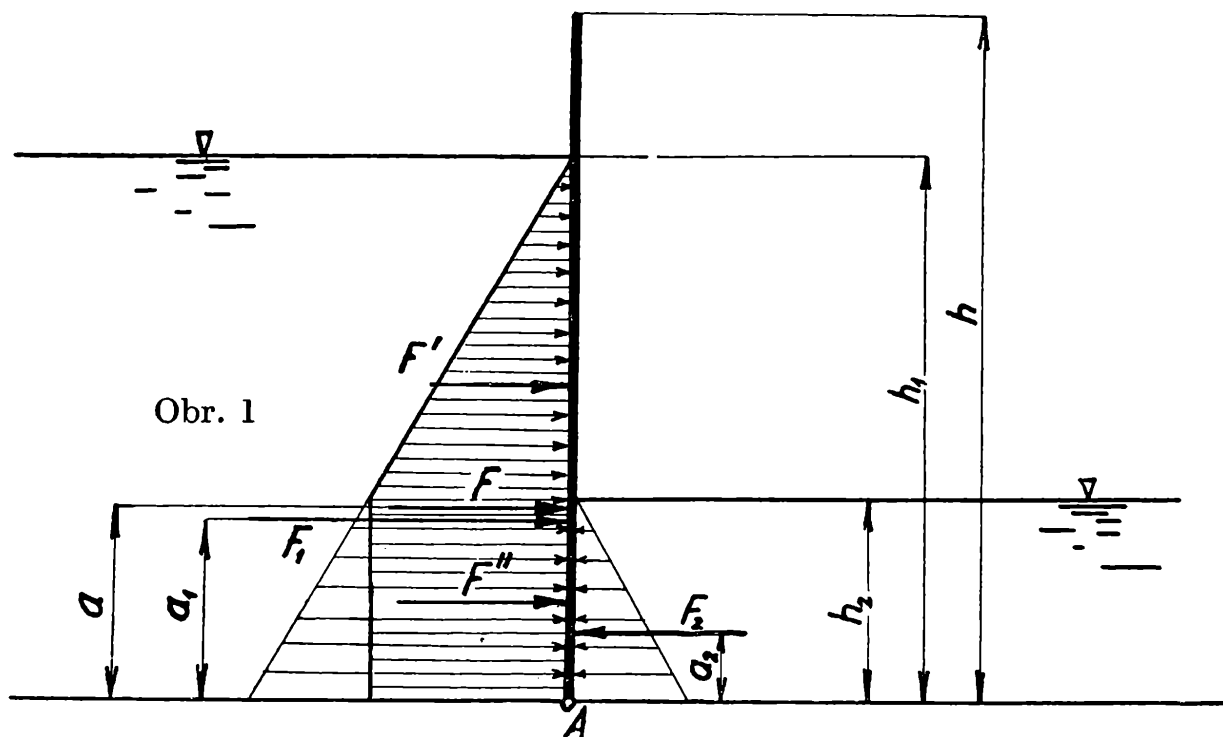
2. Vrata propustě na řece jsou 9 m vysoká a 10 m široká. Spodní hladina dosahuje výšky 3 m vrat. Při jejich uzavření je rozdíl výšek hladin 4 m. Máme vypočítat: a) jaká celková síla působí na zavřená vrata propustě, b) kde leží působíště výslednice, c) jaký je střední tlak na vrata. Sílu vypočtete v jednotkách N a kp, tlak v jednotkách N m^{-2} a kp cm^{-2} . Hustotu vody volíme $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m s}^{-1}$.

(Došlo 25 řešení)

Václav Šindelář

Řešil Jiří Leicman, III.B SPŠS, Brno:

Označuji $h = 9 \text{ m}$, $b = 10 \text{ m}$, $h_1 = 4 + 3 = 7 \text{ m}$, $h_2 = 3 \text{ m}$ a pro výšky působíště jednotlivých sil zavádím výšky a , a_1 , a_2 (obr. 1).



Hydrostatický tlak vzrůstá pod hladinou podle přímky, takže síly F_1 a F_2 , působící na levou, resp. na pravou stranu vrat mají velikosti

$$F_1 = \frac{1}{2} p_1 S_1,$$

respektive

$$F_2 = \frac{1}{2} p_2 S_2,$$

kde

$$p_1 = h_1 \rho g, \quad p_2 = h_2 \rho g$$

a

$$S_1 = h_1 b, \quad S_2 = h_2 b.$$

Přitom p_1 a p_2 jsou maximální tlaky u dna vrat na levé, respektive

na pravé jejich straně a S_1 a S_2 jsou omočené plochy vrat opět z levé, respektive z pravé strany.

Obě síly F_1 a F_2 jsou protisměrné (působí kolmo na vrata z obou stran), proto jejich výslednice F je rovna

$$F = F_1 - F_2 = \frac{1}{2} b \rho g (h_1^2 - h_2^2) \quad (1)$$

Nyní napíšeme momentovou větu vzhledem k bodu A

$$F_1 a_1 - F_2 a_2 = F a \quad (2)$$

Přitom a_1 , a_2 , a jsou souřadnice (svislé) působišť sil. Pro první dvě platí

$$a_1 = \frac{1}{3} h_1 ,$$

resp.

$$a_2 = \frac{1}{3} h_2 ,$$

protože tlakovým diagramem je trojúhelník.

Po dosazení za F_1 , F_2 , F , a_1 , a_2 z předešlých vztahů do (2) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_1 \rho g h_1 b \frac{1}{3} h_1 - \frac{1}{2} h_2 \rho g h_2 b \frac{1}{3} h_2 &= \\ &= \frac{1}{2} b \rho g (h_1^2 - h_2^2) a \end{aligned}$$

a odtud

$$a = \frac{1}{3} \frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{h_1 + h_2} \quad (3)$$

Střední tlak na vrata lze počítat jako podíl celkové síly a celkové plochy vrat

$$p_s = \frac{F}{S} ,$$

kde $S = h b$, tedy

$$p_s = \frac{1}{2} \rho g \frac{h_1^2 - h_2^2}{h} \quad (4)$$

Číselný výpočet

$$F = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 9,81 (7^2 - 3^2) \doteq 1,962 \cdot 10^6 \text{ N} = 2 \cdot 10^5 \text{ kp} ,$$

$$a = \frac{1}{3} \frac{7^2 + 3 \cdot 7 + 3^2}{3 + 7} = \frac{79}{30} \doteq 2,633 \text{ m} ,$$

$$p_s = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot \frac{7^2 - 3^2}{9} \doteq 2,18 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2} =$$

$$= 2,22 \cdot 10^3 \text{ kp m}^{-2} = 2,22 \cdot 10^{-1} \text{ kp cm}^{-2} .$$

Závěr. Na zavřená vrata propustě působí síla F , obecně daná vztahem (1), rovná v daném případě $F \doteq 1,962 \cdot 10^6 \text{ N} = 2 \cdot 10^5 \text{ kp}$. Její působíště leží ve výšce (svislé vzdálenosti) a od spodního okraje vrat (ode dna); tato výška je obecně dána vztahem (3), v daném případě $a \doteq 2,633 \text{ m}$. Střední tlak na celá vrata je obecně dán vztahem (4), v daném případě je jeho hodnota

$$p_s \doteq 2,18 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2} = 0,222 \text{ kp cm}^{-2}$$

Poznámka autora. Při výpočtu středního tlaku bylo žádoucí provést diskusi problému. Ani jeden z řešitelů ji neprovedl, i když řešení bylo u některých jiné, nežli v otištěném případě. Tak například střední tlak pouze pro větší z omočených ploch vrat počítal Jan Louda z Plzně. Střední tlak zvláště po obou omočených plochách vrat počítal např. Juraj Čermák z Bratislavy.

Výpočet středního tlaku pro celou plochu vrat, tak jak je na konci otištěného řešení, dává výsledky formální, protože v celkové ploše je zahrnuta i neomočená část vrat, na kterou žádná kapalina nepůsobí. Výhodnější je vztahovat celkovou sílu, působící na vrata propustě, na větší z omočených ploch (na obrázku na levou část).

Třetí způsob výpočtu, vyskytující se v řešeních, dává výsledky ne zcela názorné, protože v oboustranně omočené části působí tlaky proti sobě. Otázka byla v zadání příkladu dána proto, aby se řešitelé zamysleli nad průběhem výsledného tlaku působícího na vrata.

■ Celková síla působící na vrata propustě je také rovna (jak je zřejmé z obrázku) součtu dvou sil F' a F'' , z nichž první působí z levé strany na jednostranně omočenou část a druhá z téže strany na oboustranně omočenou část vrat. Pro tyto síly platí vztahy

$$F' = \underbrace{\frac{1}{2} (h_1 - h_2) \rho g b}_{p'_s} \underbrace{(h_1 - h_2)}_{S'},$$

respektive

$$F'' = \underbrace{(h_1 - h_2) \rho g b}_{p''_s} \underbrace{h_2}_{S''}.$$

Výsledný (nikoliv celkový) střední tlak p''_s působící z levé strany na oboustranně omočenou část vrat má dvojnásobnou velikost nežli střední tlak p'_s , který působí (rovněž z levé strany) na jednostranně omočenou část vrat.

■ Zatímco u jednostranně omočené části vrat je hydrostatický tlak funkcí polohy a směrem dolů lineárně vzrůstá, je výsledný hydrostatický tlak působící na oboustranně omočenou část vrat všude stejný a nemění se tedy zřejmě s hloubkou.

Konstruktivní geometrie

2. Jsou dány tři přímky a , b , c tak, že každé dvě z nich jsou mimoběžné. Najděte takový směr kosoúhlého promítání, aby jejich průmětem byly dvě rovnoběžky a přímka k těmto rovnoběžkám kolmá.

(Došlo 15 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Pavel Polcar, II.B SVVŠ, Velké Meziříčí.

Průmětnu kosoúhlého promítání zvolme tak, aby nebyla rovnoběžná se žádnou z daných tří přímek. Mimoběžky a , b , se promítají jako dvě rovnoběžky, jestliže směr kosoúhlého promítání leží v rovině σ , která je rovnoběžná s přímkami a , b . Pak můžeme přímkou a proložit rovinu $\alpha \parallel \sigma$, a přímkou b rovinu $\beta \parallel \sigma$. Stopy těchto rovin jsou zároveň průměty a_1 , b_1 přímek a , b . Stopníkem C přímky c vedme kolmici c_1 k přímkám a_1 , b_1 . Považujeme-li c_1 za kosoúhlý průmět přímky c , pak směr s hledaného promítání je průsečnice roviny $\varrho \equiv (cc_1)$ s rovinou σ . Tím je také dána konstrukce.

Jestliže $c \equiv c_1$, existuje nekonečně mnoho řešení. Jestliže $c \not\equiv c_1$, existuje jediné řešení. Jestliže směr s je rovnoběžný s některou z přímek a , b , neexistuje žádné řešení. Poněvadž můžeme tutéž úvahu provést s přímkami jinak uspořádanými, máme tento výsledek: Úloha má buď tři řešení, nebo nekonečně mnoho řešení nebo nemá žádné řešení. ■



RŮZNÉ • RŮZNÉ • RŮZNÉ

Fresnel a princip relativnosti v optice

JOSEF KOTYK, Pardubice

V článku *Auguste Jean Fresnel*¹⁾, uveřejněném v minulém ročníku našeho časopisu²⁾, jsem čtenáře seznámil s obsáhlou vědeckou činností badatele. Ač zemřel 39letý, tedy poměrně mlád, náležel k nejhorlivějším zastáncům Huygensovy undulační (vlnové) teorie světla a stal se v jejím boji s korpuskulární neboli emanační (výronovou) teorií Newtonovou posléze i dovrшитelem jejího vítězství. Zabýval jsem se zejména vývojem Fresnelových názorů o podstatě světla. Úkolem tohoto článku je podat výklad Fresnelových představ o šíření světla hmotou a objasnit příslušné souvislosti s principem relativnosti klasické mechaniky.

Princip relativnosti klasické mechaniky³⁾ zní:

Jestliže skupina těles (např. Země) koná jako celek rovnoměrnou translaci, průběh mechanických dějů k ní vztahovaných se nezmění.

V období tzv. mechanistické fyziky, kdy se soudilo, že celá fyzika je podrobena zákonům mechaniky (např. první pokusy

¹⁾ Čti: Ogyst Žán Frenel.

²⁾ Ročník 45, čís. 8, str. 393 až 397.

³⁾ V podrobnostech viz můj článek *Galilei — otec principu relativnosti klasické mechaniky* v *Rozhledech*, roč. 43, čís. 5, str. 237 až 240.

o soustavný výklad světelných dějů vycházely rovněž z analogií mechanických) bylo snadné říci: Princip relativnosti klasické mechaniky platí zřejmě i pro světelné děje, neboť optika je částí mechaniky. K dané skupině těles je ovšem třeba počítat i světelný éter⁴⁾, neboť je podle Huygensovy teorie hmotný jako jiná prostředí. Bylo jen třeba rozeznávat dva případy:

a) Jako Země unáší při pohybu své ovzduší, mohou i tělesa unášet éter, který jimi prostupuje a obklopuje je. Rovnoměrná translace skupiny těles nemá pak na světelné děje vlivu. V konkrétním případě: Pohyb Země kolem Slunce by neměl za učiněného předpokladu vlivu na světelné děje, které probíhají na Zemi.

Avšak předpoklad, že éter je pohybuje tělesy unášen, se nepodařilo ověřit. L o d g e⁵⁾ shledal roku 1892, že se rychlost světelného paprsku, který postupuje těsně vedle desky, nezmění, jestliže desku uvedeme v prudké otáčení; to by nebylo možné, kdyby světelný éter byl pohybem desky strhován. Také experimentální zjištění, že proudící plyn světlo nestruhuje, odporuje předpokladu, že by se éter mohl pohybovat s ním.

b) Jako řídké síto se může pohybovat nehybným vzduchem, mohlo by se i těleso, složené z hmotných částic, jež zcela nevyplňují prostor tělesem zaujatý, pohybovat neobyčejně jemným a nehybným éterem. Éter by pak nebyl tělesem strhován a pronikal by při tomto pohybu hmotou, aniž by se zadržel.

Avšak osoba, která dlí na palubě lodi, jež se pohybuje nehybným vzduchem, cítí vanutí větru. Éterový vítr, který by za popsanych okolností obdobně vznikal při pohybu Země nehybným éterem, bychom sice svými smysly cítit nemohli, strhoval by však světlo a prozradil by se změnami v průběhu světelných dějů probíhajících úplně na Zemi. Z nich měl by se podařit důkaz pohybu Země vzhledem k éteru, a tím i kolem Slunce. První pokusy, které měly vliv pohybu Země na optické děje (v konkrétním případě na lom světla hranolem) potvrdit, konal A r a g o⁶⁾, přítel Fresnelův. Jako světelného zdroje užil stálice; nešlo

⁴⁾ O vlastnostech této hypotetické substance viz můj článek H u y g e n s o v a t e o r i e s v ě t l a v Rozhledech, roč. 38, čís. 7, str. 327 až 331.

⁵⁾ Čtenářům jsou známy památné L o d g e h o pokusy o elektrické rezonanci, vazbě kmitavých okruhů aj. L o d g e (čti Lodž) studoval však také složení éteru.

⁶⁾ A r a g o D o m i n i q u e F r a n ç o i s (1786—1853) proslul studiem magnetických účinků elektrického proudu, rotačního magnetismu (Aragův rotační magnetismus) aj.

tedy o děj probíhající úplně na Zemi. Pokusy skončily mimo očekávání — negativně. Aragova měření opakoval později M a x w e l l se zdrojem pozemským, výsledek byl však opět záporný.

Situace dospěla do stadia, v němž bylo třeba znovu pronést rozhodné slovo. Nepřekvapuje, že se tak stalo opět formou hypotézy.⁷⁾ Těžkého a odpovědného úkolu se ujal F r e s n e l. Negativní výsledky Aragových a Maxwellových pokusů vyložil novou velmi odvážnou domněnkou: Z o k o l n o s t i, ž e h m o t o u, k t e r á s e p o h y b u j e, n e n í s t r h o v á n s v ě t e l n ý é t e r, n e p l y n e, p r o h l á s i l F r e s n e l, ž e j í n e n í s t r h o v á n o s v ě t l o. S t r h o v á n í s v ě t l a m u s í p a k b ý t j e n č á s t e č n é; š í ř e n í s v ě t l a h m o t o u o b s t a r á v á t o t i ž z č á s t i é t e r, z č á s t i h m o t a s a m a, s t r h o v a t s e p r o t o m ů ž e j e n t a č á s t s v ě t e l n é h o r o z r u c h u, n a k t e r o u m á v l i v h m o t a. Č á s t e č n ý m s t r h o v á n í m s v ě t l a s e v l i v p o h y b u Z e m ě n a o p t i c k é d ě j e z e s l a b í t a k, ž e s e s t a n e t ě m ě ř n e p o z o r o v a t e l n ý m. P o k u s y A r a g o v y, M a x w e l l o v y a j. n e m ě l y ž á d o u c í p ř e s n o s t i, a b y s e j i m i d a l y z m ě n y t a k m a l é k o n s t a t o v a t, n e m ě l y p r o t o a n i o č e k á v a n é h o v ý s l e d k u.

F r e s n e l o d v o d i l v š a k t a k é p ř í s l u š n é v z o r c e. P ř e d s t a v m e s i n a p ř ., ž e s v ě t e l n ý p a p r s e k p r o c h á z í o s o u t r u b i c e, v n í ž p r o u d í t e k u t é p r o s t ř e d í r y c h l o s t í v . R y c h l o s t s v ě t l a v e v z d u c h o p r á z d n ě m p r o s t o r u o z n a č m e c , v k l i d n ě m p r o s t ř e d í, j e h o ž i n d e x l o m u j e n , p a k c' J e s t l i ž e s v ě t l o p o s t u p u j e t r u b i c í v t ě m ž s m ě r u, v n ě m ž p r o s t ř e d í p r o u d í, š í ř í s e p o d l e F r e s n e l a r y c h l o s t í

$$c' + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

postupuje-li ve směru opačném, je jeho rychlost

$$c' - v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Výrazu

$$1 - \frac{1}{n^2} < 1$$

říkáme s t r h o v a c í k o e f i c i e n t F r e s n e l ů v.

Zbývala otázka, zdali nepatrné změny rychlosti, Fresnelem předpověděné, se podaří také experimentálně stanovit nebo aspoň konstatovat. Optická měření jsou na štěstí tak přesná. Fresnel se ověření své hypotézy však nedožil; zemřel roku 1827. Teprve roku 1850 zjistil F o u-

⁷⁾ „Formou rozvoje přírodních věd je hypotéza,“ napsal B. Engels ve své *Dialektice přírody* (Svoboda, Praha 1950).

cault⁸⁾, že rychlost světla ve vzduchu činí 298 000 km/s, v klidné vodě však jen 225 000 km/s, je tedy menší než ve vzduchu. Podle emanační teorie Newtonovy měla ovšem mít hodnotu větší, Foucaultova měření vyvrátila tedy definitivně teorii Newtonovu a rozhodla ve prospěch teorie vlnové. Umožnila dále, aby již po roce, roku 1851, provedl Fizeau⁹⁾ památná měření rychlosti světla v pohybujícím se prostředí, jimiž Fresnelovu hypotézu plně potvrdil; shledal, že v proudící vodě indexu lomu $n \doteq \frac{4}{3}$ stoupne rychlost světla postupujícího ve směru proudění asi o $\frac{7}{16}$ hodnoty rychlosti vody. S tímž výsledkem potvrdil Fresnelův předpoklad roku 1886 Michelson, později Zeeman aj. Proudící plyn naproti tomu světlo nestrhuje; indexy lomu plynů se liší jen zcela málo od 1, strhovací koeficient Fresnelův je proto prakticky roven nule.

Fizeauův pokus platil dlouho za pádný důkaz existence éteru, jenž prostupuje všechna tělesa a neúčastní se jejich pohybu, Fresnelovy strhovací koeficienty pak podle Laueho¹⁰⁾ za cenný prubířský kámen pro teorii optiky pohybujících se těles. Až později, když se názory na podstatu světelných dějů změnily a když se ukázalo, že optika neobstojí jako část mechaniky, nezůstal tento vývoj bez vlivu na představy o světelném éteru. Spekulace o něm utuchly a většina fyziků se shodla v tom, že se slovem éter stačí spojovat představu — vakua a jeho (optických i elektromagnetických) vlastností. Tím se změnil zároveň i význam měření, která měla dokázat vliv pohybu Země na průběh světelných dějů pro naši otázku, zdali princip relativnosti klasické mechaniky platí také v optice. Líčit krásy dalšího vývoje, jenž vede odtud přímou cestou k Einsteinovi a jeho teorii relativnosti, vymyká se však již obsahu tohoto článku.

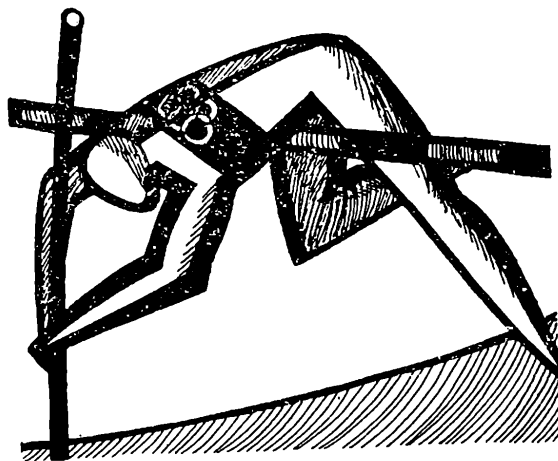
⁸⁾ Jean Bernard Léon Foucault (1819 až 1868) podal roku 1851 jiný neméně památný důkaz, důkaz otáčení Země. V pařížském Pantheonu zavěsil na ocelový drát dlouhý 68 m kouli vážící 30 kp a rozkýval ji; doba kyvu trvala asi 8 s. Směr kyvů se zřetelně stáčel ve směru záporném.

Podporován císařem Napoleonem III. zabýval se Foucault (čti Fukó) však nejvíce optikou.

⁹⁾ Hippolyte Fizeau (čti Fizó; 1819—1896) proslul měření rychlosti světla pozemských zdrojů již v roce 1849. Je nedostatkem učebnice fyziky pro 3. roč. SVVŠ (1965), nepřináší-li o vtipné Fizeauově metodě poučení.

¹⁰⁾ Max Laue Geschichte der Physik, 1958, 6.

MO



Projev při předávání cen za II. kolo MO XVI. roč. v Praze

PAVEL VEJVODA, III. roč. W. Piecka, Praha

Každým rokem bývá zvykem, že jeden z úspěšných řešitelů vystoupí, aby zhodnotil olympiádu z hlediska jejích účastníků. Chtěl bych především poděkovat těm, kteří se podíleli na organizaci olympiády, a zejména těm, kteří trávili nekonečné hodiny na vyluštění našich pologeniálních škrabopisů.

Musím uvítat, a to nejen za sebe, některé organizační změny, uskutečněné při olympiádě v tomto roce. Týká se to především prvního kola, kde nebylo požadováno vypracování přípravných úloh. To jednak způsobilo, že olympiáda přivábila ty, které dříve odrazovalo množství úloh, bez nichž nebylo možno postoupit do krajského kola. Druzí uvítali tuto změnu z prostých časových důvodů, poněvadž matematika nebývá pro velmi nadané žáky jediným koníčkem. Organizaci druhého a třetího kola nepatří skutečně nic jiného než chvála. Snad jen termín třetího kola byl stanoven jako obvykle na dobu těsně před

maturitou naší třídy, což se s dost velkou pravděpodobností opět odrazí na celkovém umístění. Doufám však, že se nebude opakovat situace z minulých let, kdy vybraná třída především z Prahy, která obsadila všechna první místa ve druhém kole, zklamala ve třetím.

Poněvadž byla naše třída zastoupena na olympiádě dost vysokým procentem, dovolím si omezit své zkušenosti jen na tento zúžený obor. Myslím, že je velmi výhodné soustřeďovat žáky talentované na tak důležitou disciplínu jako matematika, do zvláštních tříd. V naší třídě se podle mého názoru shromáždila skutečná elita a k její vysoké úrovni přispěla především teoretická výchova pana profesora Caldy. Snad jeho nevysoký věk a do jisté míry zvláštní povaha mají za důsledek dost velkou mentální přizpůsobivost a pochopení pro žáky se stejně zvláštními povahami. Děkuji mu za všechny žáky, kterým věnoval svou pozornost a volný čas,

především pak za sebe, protože jen díky jeho ochotě, jež se dost často střetávala někdy i s poněkud nesmyslnými školskými konvencemi, jsem měl dost času, abych se mohl věnovat svému vyhraněnému zájmu. Jen jedinou vadu si dovoluji vytknout speciálním třídám. Diferenciace žáků by měla být prováděna ještě důkladněji a třídy by měly mít daleko menší počet žáků. Úroveň a výkonnost tříd by se tím podstatně zvýšila.

Při polemikách o mezinárodních matematických olympiádách, které probíhaly na nejrůznějších konferencích, bylo těmto soutěžím hlavně vytýkáno to, že jednotlivé státy si pro ně vychovávají téměř profesionální matematiky a tak prý tyto soutěže postrádají amatérství. Domnívám se, že taková výtka nemá opodstatnění. Každý žák podléhá jakési výchově a záleží především na úrovni této výchovy, zda bude zdatným matematikem. Vysoké úrovni takové výchovy musí být nutně přizpůsobeny i prostředky. U nás se již druhým rokem pokoušejí o jedno takové zařízení, jemuž se říká „matematický kroužek“ a které mělo zčásti nahradit nedostatek hodin věnovaných matematice na škole a zčásti se vyrovnat podobným zařízením, které úspěšně probíhají v Maďarsku, Polsku, Sovětském svazu a jinde. Jistě uznáte, že to je na jeden kroužek úkolů příliš mnoho, navíc nedosahuje-li takový kroužek úrovně například kroužků, které probíhají v Sovětském svazu nebo probíhaly v Sovětském svazu pod vedením akademika Kolmogorova, Dělony, Gelfanda a jiných. Při posledním rozhovoru s pracovníkem Matematického ústavu panem Fukou jsem se dozvěděl, že semináře podobné úrovně se chystají v letošním roce po důkladné přípravě pro letní soustředění matematické a fyzikální olympiády, které každoročně probí-

haly pro účastníky kategorie B. Je opravdu škoda, že se taková věc připravuje obvykle trochu déle, než by bylo zdrávo, i když zásluha pana docenta Vyšína na zvýšení úrovně kroužku proti loňskému roku byla patrná.

Měl jsem tady promluvit o svém vlastním životě, ale omezím se jen na několik zásad, které jsou mými životními zkušenostmi. Člověk mající o něco zájem se snaží najít literaturu nebo jiné zdroje, v nichž by se o svém zájmu něco podrobnějšího dověděl. Začátečník obvykle tápá, protože si neumí vybrat sobě přiměřenou literaturu. Pak se mu stává, že stráví mnoho zbytečného času nad věcí, která by mu příslušela třeba po delší přípravě a nejenže mu nemusí pomoci, ale může mu navíc velmi uškodit. Máte-li o něco zájem, mluvím o matematice, snažte se najít někoho, kdo by vám skutečně odpovědně poradil. Někoho takového Vám půjde najít velmi těžko, ale obtěžujte ty učené pány vytrvale a buďte jisti, že za nějaký čas budete vyslyšeni. Přitom není špatné je přesvědčit o tom, že byste se za každou cenu chtěli stát nejen jejich žáky, ale i pokračovateli jejich velikého bádání. Existuje velké množství literatury, na kterou obecně nestačíte, ale jež obsahuje některé velmi přístupné a zajímavé partie, a je dobré takové partie vyhledávat. Na soustavné studium nejste ještě dost dobře připraveni a je takové studium pro vás dost únavné a někdy i nevhodné. Ty přístupnější partie, to jsou obvykle takové perličky, které se během času spojí v ucelenou teorii a přispějí k vašemu duševnímu rozvoji mnohem více než rozbolavělé oči nad nekonečně dlouhým Kořínkem, nebo pro nás ještě nestravitelným akademikem Čechem.

Tím bych skončil a přeji vám do dalšího studia mnoho zdarů a sobě ještě víc do zítřejší maturity.



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

Od podávania rúk ku geometrii

JÁN MACHÁN, Košice

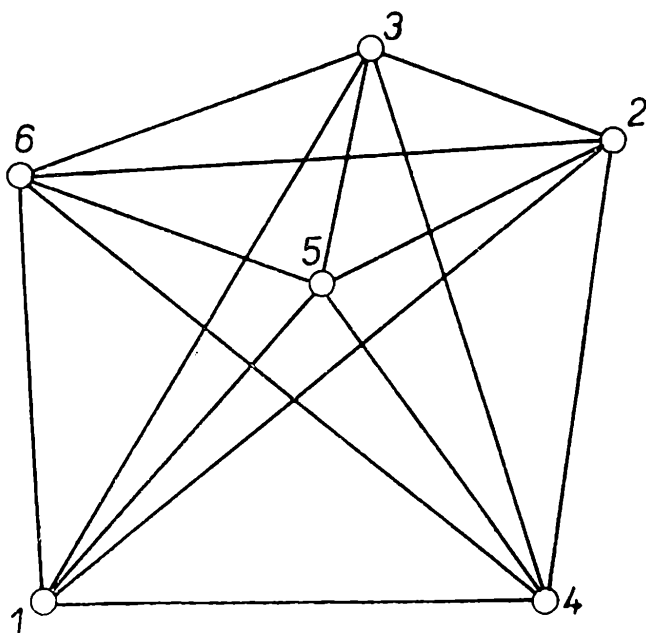
Jedna šesťčlenná spoločnosť sa lúči, pričom každý s každým si podá ruku. Spočítajme koľko tu bolo podaní rúk? Každý človek si podá ruku s piatimi zbývajúcimi; boli šiesti, to znamená spolu $6 \cdot 5 = 30$. Hneď sa ukáže, že tento výsledok nie je správny. Nech dvaja z tejto spoločnosti sú Ondrej a Vojtech. Potom medzi Ondrejovými piatimi podaniami rúk sa nachádza aj Vojtechovo, medzi piatimi Vojtechovými aj Ondrejovo. V predošlom výpočte sme teda každé podanie rúk uvažovali dvakrát; preto skutočný výsledok je rovný polovine. Ak si teda šesťčlenná spoločnosť podáva ruky, znamená to spolu $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ podaní rúk.

Má však získaný výsledok nejaký praktický význam? Zdanlivo to vyzerá že nie. Skúsme sa na celý problém pozrieť zhora — a to ešte v pravom zmysle slova: dívajme sa na spoločnosť zhora (obr. 1). Jednotlivé podania rúk spájajú ľudí, čo v matematickom jazyku vyjadríme: medzi šiestimi „prvkami“ vytvoríme párne spojenia. Podľa zisteného výsledku je možné 15 takýchto párných spojení. Tým, že miesto ľudí hovoríme o akýchsi „prvkoch“, stratil problém svoju konkrétnu podobu a tým sa jeho význam značne zväčšil. Napr. pri výpočte elektronických zariadení alebo organizácii futbalových majstrovstiev môže byť veľmi dôležité, koľko je možných takýchto spojení. Preto má význam tento výsledok aj zovšeobecniť: celkový počet párných spojení

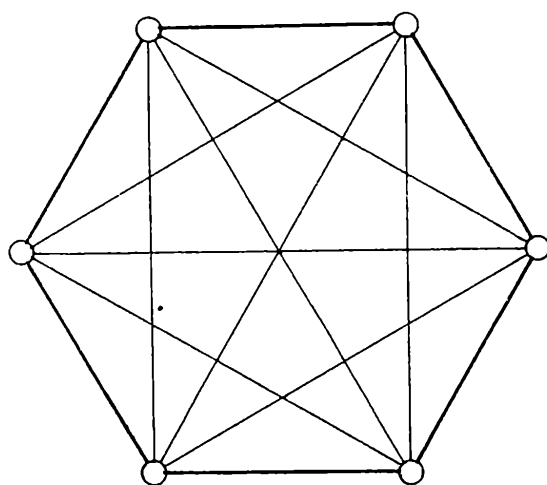
u ľubovoľného počtu prvkov dostaneme, ak počet prvkov násobíme číslom o jedno menším a ich súčin delíme dvoma, toto vyjadrené vzorcom bude

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Matematika sa obvykle u rozličných úloh — niekedy zdanlivo bezvýznamných — snaží odhliadnuť od konkrétnej podoby; usiluje sa ju zovšeobecniť. Tým sa dosiahne, že získaný výsledok je možné použiť aj pri riešení iných úloh. Pozrime sa napr. na použitie posledne získa-



Obr. 1



Obr. 2

ného vzorca v geometrii. Otázka je nasledujúca: koľko uhlopriečok má konvexný mnohoúholník? Ak má mnohoúholník n -strán (obr. 2), potom má aj práve toľko vrcholov; podľa predošlého medzi n -vrcholmi je možných

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

spojení. Do toho sú započítané aj strany n -uholníka, preto pre počet uhlopriečok n -uholníka bude platiť nasledujúci vzťah

$$\frac{n(n-1)}{2} - n$$

a po úprave

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Ako teda môžeme vidieť, aj z každodenného jednoduchého pozorovania môžeme dôjsť k matematickým výsledkom.

Hra aritmomachia

ŠTEFAN PORUBSKÝ, Zvolen

Iste veľa čitateľov pozná túto hru i keď možno nie práve podľa jej názvu. Jej základná a súčasne aj najjednoduchšia forma je keď sa spolu bavia len dvaja hráči. Jeden z hráčov si volí číslo, ktoré nesmie prekročiť vopred zvolenú veľkosť. K tomuto číslu pripočítava jeho súper číslo zvolené podobným spôsobom. Takýmto vzájomným striedaním a pričítovaním zvoleného čísla k predchádzajúcemu výsledku sa obidvaja hráči snažia dosiahnuť vopred zvolenú hranicu. Ten, ktorý toto číslo dosiahne prvý — vyhráva. Toto je základný princíp hry aritmomachie, ktorý sa potom vyskytuje v rôznych obmenách, ako v odoberaní zápaliiek alebo mincí z kopy a pod.

Zamyslime sa teraz ako treba hrať aby sme vyhrali.

Nech hráči A , B sa snažia dosiahnuť číslo n striedavými voľbami čísiel z rozsahu $1, 2, \dots, a$ ($a > 1$). Pod pojmom číslo budeme vždy rozumieť prirodzené číslo. Zrejme hráč, ktorý dosiahne číslo $n - (a + 1)$ vyhráva, pretože jeho protivník nemôže žiadnym spôsobom dosiahnuť n , ale pre neho samotného je táto hranica po kroku protivníka ľahko dosiahnuteľná. Dosiahnutím čísla $n - 2(a + 1)$ si zase zabezpečuje prístup k číslu $n - (a + 1)$, atď. Vidíme, že hráč, ktorý sa pridržiava „strategických“ čísiel

$$r, r + a + 1, r + 2(a + 1), \dots, r + q(a + 1) = n$$

si vždy vynúti výhru. Zde r je zvyšok a q je podiel pri delení čísla n číslom $a + 1$, pričom $r < a + 1$.

V prípade $r = 0$ si víťazstvo môže zabezpečiť vždy druhý hráč, nakoľko prvý hráč žiadnou voľbou nemôže hneď dosiahnuť číslo $a + 1$, čo je pre druhého hráča ľahké. V ostatných prípadoch, keďže $r \leq a$ si výhru môže vždy vynútiť hráč, ktorý hru začína.

Toto boli úvahy nad základnou formou hry. Hra sa stáva zaujímavejšia, ak pravidlá trochu pozmeníme. Všimnime si niektoré z možných zmien hry, hranej stále dvomi hráčmi.

Nech hráč A si volí z čísiel od 1 do a a hráč B od 1 do b , kde $a < b$ a n je dostatočne veľké vzhľadom na b . Kým v predchádzajúcom prípade pridržiavanie sa strategických čísiel umožňovalo hociktorému z hráčov vyhrať, v tomto prípade pre hráča A už neexistuje predpis umožňujúci mu vždy vyhrať. To znamená, že hráč A môže vyhrať len pri netaktickej hre hráča B . Hráč B si naopak môže víťazstvo vždy vynútiť, nech A hrá akokoľvek.

Všimnime si preto pozíciu hráča B . Strategické čísla sú pre neho

$$r, r + b + 1, r + 2(b + 1), \dots, r + q(b + 1), \quad (1)$$

kde $n = q(b + 1) + r$ a $0 \leq r < b + 1$. Zrejme, ak hráč B dosiahne jedno z týchto čísiel, môže sa vždy dostať k nasledujúcemu strategickému číslu. Hráč A totiž žiadnym spôsobom nemôže toto číslo jednou voľbou dosiahnuť, nakoľko rozdiel medzi susednými číslami je $b + 1$ a $b + 1 > a$, no pre B je po kroku hráča A dosiahnutie nasledujúceho strategického čísla ľahké. Teda B sa môže pridržiavať týchto strategických čísiel, a tým aj vyhrať, ak jedno z nich už dosiahol. Ukážme teraz, že B sa vždy môže dostať k týmto číslam.

Ak je hráč B na ťahu prvý, môže číslo r hneď dosiahnuť, keďže $r < b + 1$. Zložitejší je prípad keď ide prvý hráč A . Pritom môžu nastať tieto prípady: $r > a$ alebo $r \leq a$. V prvom prípade je dosiahnutie čísla r pre B ľahké. V druhom prípade predpokladajme, že A si zvolil prvé číslo d ($d \leq a$). Ak $d > r$ hráč B dosiahne r jednoducho pripočítaním čísla $r - d$. Ak $d < r$ môže B už dosiahnuť len číslo $r + b + 1$, a to pričítaním čísla $r + b + 1 - d$, čo je možné lebo $r + b + 1 - d \leq b$. V prípade $d = r$ nech pripočíta B číslo $b - a$. Teraz ak zvolí A ľubovoľné číslo m ($m \geq a$) dosiahne B číslo $r + b + 1$ pričítaním čísla $a - m + 1$. Skutočne $r + (b - a) + m + (a - m + 1) = r + b + 1$.

Vidíme, že B sa môže dostať v najhoršom prípade už k druhému strategickému číslu a ako to vyplýva z predchádzajúcich úvah vie si zabezpečiť vždy výhru, ak $n > 2(b + 1)$. Pripomeňme, že v (1) môže vystupovať namiesto b ľubovoľné číslo b' , pre ktoré $a < b' \leq b$.

Všimnime si teraz aspoň sčasti prípad, keď si hráči vyberajú čísla z intervalov, ktoré sa neprekrývajú, napr. A z intervalu $\langle a, b \rangle$, B z intervalu $\langle c, d \rangle$. V tomto prípade sa hra v obecnosti môže skončiť bez víťaza, pretože nemožno vždy presne dosiahnuť vopred zvolenú hranicu. Preto zmeníme pravidlá tak, že vyhráva ten hráč, ktorý prvý presiahne dohovorené číslo n .

Vyšetrimo najprv jednoduchšie prípady:

1. Keď $b - a = d - c \Rightarrow a + d = b + c$.

Ak $a + d \mid n$ víťazstvo si môže vždy zabezpečiť druhý hráč tým, že vždy doplní spoluhráča na násobky čísla $a + d$, čo je zrejme vždy možné.

Ak $a + d \nmid n$ situácia je zložitejšia. Nech $n = k(a + d) + r$. Potom ak číslo r padne do jedného z intervalov $\langle a, b \rangle$, $\langle c, d \rangle$ víťazstvo si vždy zabezpečí hráč, ktorému číslo r padne do jeho intervalu a začne ako prvý, pridržiavajúc sa nižšie uvedených strategických čísiel.

Vidíme, že v prípade $a + d = b + c$ sú strategické čísla

$$r, r + a + d, r + 2(a + d), \dots, r + k(a + d)$$

a zvíťazí vždy ten hráč, ktorému prvému sa podarí dosiahnuť jedno číslo z tejto postupnosti, a potom sa týchto čísiel pridržiava.

2. Ak nastane obecnější prípad, že $b - a > d - c$, tj. hráč A má k dispozícii širší interval ako B . Vtedy hráč A môže napr. tým, že

používa len takú časť svojho intervalu, že prevedie tento prípad na jeden z predchádzajúcich pre neho výhodný alebo... a tu už veľa záleží od bystrosti a vynaliezavosti hráčov. Možno čitateľ chytí ceruzku a nájde „recept na isté víťazstvo“ pre jedného z hráčov v niektorých iných prípadoch.

Je len samozrejmé, že aritmomachiu môžu hrať aj viacerí hráči než dvaja. V týchto prípadoch je situácia ešte zložitejšia. Poznamenajme len, že ak hrajú traja hráči hru v jej pôvodnom znení, nemôže si žiadny z hráčov dopredu zabezpečiť výhru, pretože vtedy vzhľadom na neho sa jeho súper správajú svojimi voľbami ako jeden hráč, ktorý si volí od 1 do $2n$ (presnejšie od 2 do $2n$). Tu ako sme už ukázali nemôže hráč, ktorý má k dispozícii podinterval svojho súpera vždy si vynútiť víťazstvo.

Rôznymi inými obmedzeniami sa hra stáva často napínavejšia, ale aj jej matematická teória je obťažnejšia.

Poznámka: Symbol $p \mid n$ značí, že p je dělitelné číslom n ; podobně $p \nmid n$ značí, že p není dělitelné n .

Oriešok

EVŽEN ŘÍMAN, Praha

Na rekreačnej lodi idúcej z Bratislavy do Beogradu sú zamestnanci Ambrož, Gregor a Novák, z ktorých jeden je kapitánom lodi, jeden lodníkom a jeden čiašnikom. (V ďalšom označíme týchto zamestnancov len samotným menom.)

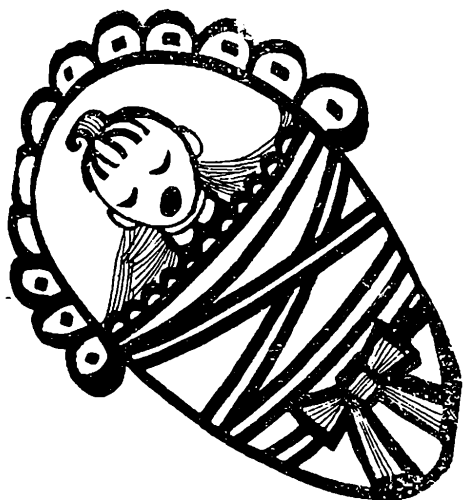
Medzi cestujúcimi na lodi sú rekreanti tých istých mien; aby ne-nastal omyl, budeme ich značiť „rekreant“.

Zistite, ako sa volá kapitán, ako lodník a ako čiašnik a v ktorom meste má bydlisko každý z menovaných rekreantov. Možno to zistiť z týchto výrokov logickou úvahou:

- (1) Rekreant Ambrož má bydlisko v Prahe.
- (2) Lodník býva v Bratislave.
- (3) Rekreant Novák už dávno zabudnul z algebry všetko, čomu sa naučil na strednej škole.
- (4) Rekreant majúci to isté meno ako lodník má bydlisko v Ostrave.
- (5) Jeden z menovaných troch rekreantov, ktorý je profesorom matematiky, býva v tom istom meste ako lodník.
- (6) Zamestnanec Gregor porazil čiašnika v stolnom tenise.

Riešiteľ môže s výhodou použiť metódy vyložené v č. 9 minulého ročníka Rozhľadov: J. Šedivý, Řešení logických úloh pomocí grafů.

† Pošlite riešenie redakcii do 29. februára 1968 s udaním zamestnania, školy a presnej adresy.



NEJMLADŠÍM
ČTENÁŘŮM

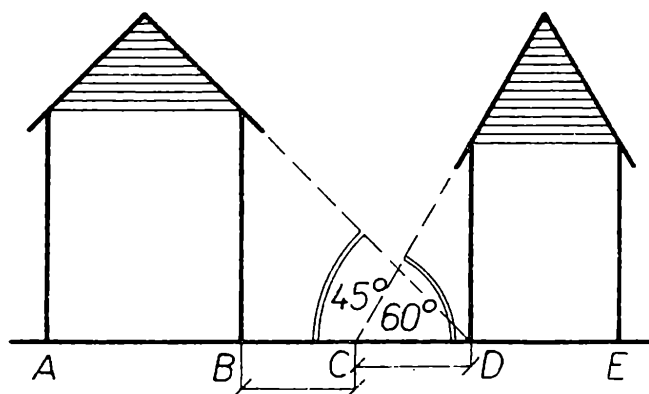
hádanky

Tam a zpět

Někdo jel do města rychlostí 30 km/hod a vracel se rychlostí 20 km/hod. Jaká byla jeho průměrná rychlost?

Zde se velmi často dělají chyby. Aby se vám příklad poněkud přiblížil, myslíte si, že město bylo vzdáleno 60 km a teprve potom počítejte průměrnou rychlost.

S. H.



Dva domy

To, co je nakreslené na obrázku, bylo o obou domech dávno známé. Nestačí to však k výpočtu výšek domů. Poznáme-li však, že $BC = CD = 10$ m, můžeme vypočítat výšku domu od jeho paty k okapu. Prozradíme-li vám ještě, že obsahy obou štítů (jsou vyznačené šrafováním) se sobě rovnají a že $AB = 17$ m, můžete vypočítat výšku domu až k hřebeni. Zkuste to a výsledky nám pošlete.

S. H.

Doc. RNDr.
Miroslav Menšík

nositel vyznamenání
Za vynikající práci

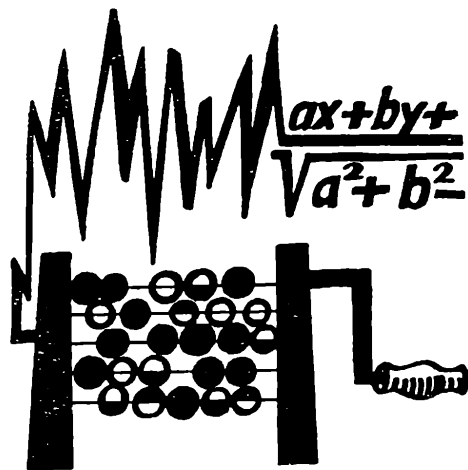


* 3. 8. 1906 † 12. 1. 1968.

Českoslovenští geometři se rozloučili dne 17. ledna 1968 v pražském krematoriu s typickým představitelem naší deskriptivní geometrie, vzorným pedagogem, docentem stavební fakulty ČVUT, RNDr. Miroslavem Menšíkem, který po více než deset let byl vedoucím redaktorem našeho časopisu. Dlouholeté zkušenosti získané na středních a později i na vysokých školách se plně uplatňovaly v jeho redakční práci, ať již šlo o náplň i koncepci časopisu a jeho estetický vzhled, nebo o volbu schopných spolupracovníků, s nimiž redaktor Menšík vytvořil výborně pracující kolektiv, odměněný státním vyznamenáním „Za zásluhy o výstavbu“. Při každé příležitosti využíval zesnulý svých četných známostí v matematickém světě, aby získal pro svůj časopis co nejvíce vhodných rukopisů, nad jejichž úpravami strávil mnoho drahocenných chvil.

Doc. Menšík měl své Rozhledy rád a jejich desetitisícová čtenářská obec jistě s láskou a vděčností bude vzpomínat na jeho vzorně vykonávanou práci, za kterou patří zesnulému náš nejupřímnější dík.

O. S.



Automatické programování na samočinných počítačích

ING. JAN SEDLÁK, Praha

Samočinné počítače (číslicové) se postupně stávají nepostradatelným výpočtovým prostředkem moderní techniky. Nastupuje jejich nasazování do oboru automatického zpracování hromadných dat. Účinnost samočinných počítačů závisí na řadě faktorů, z nichž podstatným je vybavení počítače programovacími prostředky se stanovenou programovací technikou. Sem patří především:

1. Systém programů pro řízení a použití přídavných zařízení (vstupní, výstupní, přesuny mezi pamětmi aj.).
2. Knihovna podprogramů ¹⁾ (standardní podprogramy elementárních funkcí, programy základních úloh numerické analýzy, ekonomických a statistických úloh, dvojnásobné aritmetiky apod.).
3. Metody zkoušení programů.
4. Systém profylaktických programů k prověrce správné činnosti počítače.
5. Systémy automatického programování.

Směřujeme přirozeně k tomu, aby byl styk člověka s počítačem snadný, rychlý a bez prací rutinní povahy.

Abychom si objasnili, jaké druhy práce jsou předmětem automatizování při programování, uvedme stručně fáze, ve kterých spočívá příprava kódovaného programu pro samočinný počítač. Kódovaný

¹⁾ Podprogram je program nebo část programu, který se dá začleňovat do rozsáhlejšího programu. (Podrobněji viz např. ČSN 17 8008 — Názvosloví číslicových a analogových počítačů, Praha 1966.)

program je zápis programu v jazyku počítače, který si uloží samočinný počítač pomocí vstupní jednotky do operativní paměti v takovém zobrazení, které je řadič samočinného počítače schopen zpracovávat.

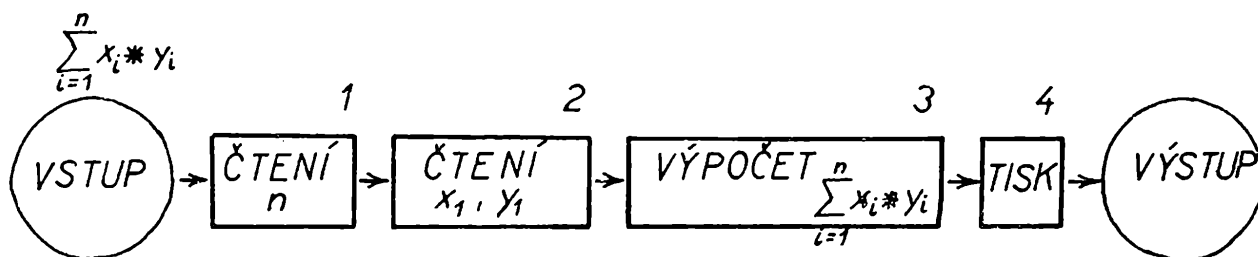
Fáze přípravy kódovaného programu:

1. Analýza — rozbor úlohy po stránce matematické, fyzikální; jejím výsledkem je formulace úlohy v jazyku matematickém, jazyku elektroinženýra, linguisty, ekonoma apod.

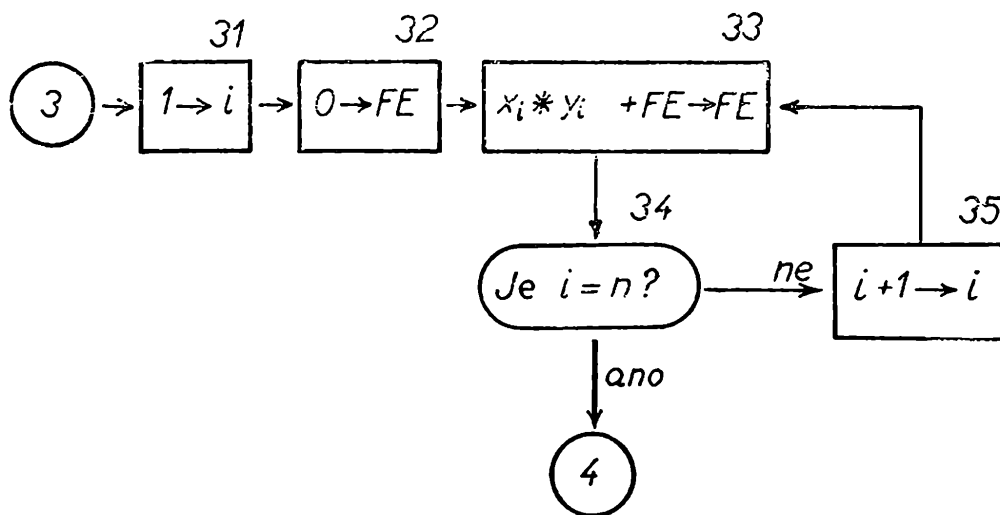
2. Volba metody — výběr metod praktické matematiky a prostředků výpočtové techniky k řešení úlohy, zkoumání nepřesností vstupních a výstupních údajů, vypracování systému kontrol a zkušebního příkladu.

Jestliže se rozhodneme řešit úlohu na číslicovém samočinném počítači, je nutné nastoupit fáze přípravy kódovaného programu, jeho vyzkoušení a vlastní výpočet odhadneme rozsah úloh, určíme druhy přídavných zařízení, kterých použijeme, sestavíme kontrolní příklad.

3. Volba výpočtového postupu — výsledkem může být formalizovaný zápis výpočtového postupu v jazyku algoritmickém, jindy v jazyku blokových schémat, či jazyku operátorovém.



Obr. 1a.



Obr. 1b.

Poměrně nej názornější je grafické znázornění logické stavby programu pro samočinný počítač. Nazývá se **b l o k o v é s c h é m a**. To se skládá ze značek, do nichž se vpisují slovně nebo symbolicky operace prováděné počítačem nebo symboly, které blíže určují účel jednotlivých značek blokového schématu. Značky se spojují orientovanými spojni-

cemi pro vyznačení sledu operací. Je výhodné číslovat značky v blokovém schématu (obr. 1a, b) vpravo nahoře. Pro naše účely budeme používat tři značek:

- *kružnice* jako mezní značky pro vstup nebo výstup v blokovém schématu,
- *obdélníku* pro označení operačního bloku,
- *oválu* (značka 34 na obr. 1b) pro označení rozhodovacího bloku.

Pro ilustraci jednotlivých fází přípravy kódovaného programu zvolme úlohu ocenění zásoby skladu jednotkovými (plánovanými) cenami. Označme i -tou položku ve skladu x_i , její jednotkovou cenu y_i , počet položek n . Pak ocenění zásoby se vypočte podle výrazu

$$x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + \dots + x_n * y_n = \sum_{i=1}^n x_i * y_i,$$

kde $*$ znamená o p e r á t o r n á s o b e n í.

Z matematického hlediska jde v dané úloze o aplikaci známého skalárního součinu dvou vektorů. Plán zpracování úlohy na počítači je zobrazen na obr. 1a.

Na obr. 1a, 1b je příklad pro výpočet skalárního součinu dvou vektorů, např. pro ocenění zásob jednotkovými (plánovanými) cenami.

Podrobnější zápis tohoto blokového schématu může být užitečnější. Tak např. blok 3 si rozepíšeme:

4. Sestavení obecného programu v instrukcích zvoleného počítače, který se zapíše v jazyku symbolických adres.

Jednotlivé bloky rozepíšeme symbolicky v takovém jazyku, který je ještě blízký jazyku matematickému, ale má již některé vlastnosti jazyku počítače, např. blok 31 se zapíše ve tvaru

$$1 \rightarrow \langle U1 \rangle,$$

kde $\langle U1 \rangle$ znamená obsah symbolické adresy $U1$. Odtud význam instrukce je: dosad' číslo 1 na adresu $U1$, takže po této operaci bude platit rovnost

$$\langle U1 \rangle = 1$$

Zde není účelem podat ucelený přehled souboru instrukcí počítače. Ten lze nalézt např. v [4]. Objasníme však ještě jednu nearitmetickou instrukci, tzv. p o d m í n ě n ý s k o k na adresu

$$\langle FE \rangle = 0 \Rightarrow \text{skok } p, U2,$$

kde FE označuje střádač počítače. Tato instrukce má tuto interpretaci: je-li obsah střádače FE roven nule, pak se jako další instrukce v počítači vyčíslí instrukce přečtená ze symbolické adresy $p + \langle U2 \rangle$.

5. Přidělení absolutních adres²⁾ symbolickým adresám z 4. Např. $p = 148$, $U1 = 40\,001$.

6. Přepis programu do absolutních adres, čímž vznikne kódovaný program zapsaný v jazyku počítače, který je tak připraven ke zkoušení.

Instrukce z fáze 4 mají tento tvar v jazyku EPOS:

000 100 040 000 ,
000 875 200 148 .

Druhá trojčíslí 100 a 875 jsou operační znaky našich instrukcí.

Kódovaný program je tedy posloupnost číslic, sestavená podle jistých syntaktických pravidel jazyku počítače.

7. Příprava kódovaného programu na vstupní médium (děrný štítek, děrná páska, filmová páska).

8. Zkoušení programu na počítači.

9. Výpočet.

Rozborem jednotlivých fází vidíme, že mohou být podle programátorových zkušeností někde spojovány (5. a 6.) a že některé fáze mají povahu rutinní. Proto nastupuje snaha tyto fáze *automatizovat*. Podle toho, kolik fází předáme počítači, rozlišujeme různé úrovně automatizace.

Všechny úrovně automatizace mají tuto společnou vlastnost. Informace o způsobu zpracování dat se nepředávají do počítače v kódovaném vyjádření. Program se zapíše v jazyku systému automatického programování (v pseudoinstrukcích, ve větách algoritmického jazyka). Tento zápis se předá počítači ke zpracování. K tomu se předá počítači programu tzv. překladač, pomocí kterého se překládá zápis z jazyka systému do jazyka počítače, někdy do jazyka blízkého jazyku počítače. Takový překladač obsahuje algoritmy, kterými se v podstatě nahrazuje programátorova činnost, kterou vykonával při sestavování „ručního“ programu. V tomto smyslu vzniká pojem samočinného programování jako trojice:

1. Programovací jazyk.

2. Samočinný počítač (jazyk počítače a fyzikální vlastnosti počítače a jeho jednotek přídatných zařízení).

²⁾ *Adresa* je číslo jednoznačně přiřazené paměťovému místu v počítači, na které se ukládá uspořádaná posloupnost číslic stanovené délky, tzv. *slovo*. Slovo může mít rozličnou reprezentaci, např. číslo, které má být zpracováno nebo *instrukce*, podle které počítač provádí jednu operaci. Druhá operace se v instrukci určuje operačním znakem a operandy (to, co má být zpracováno) zpravidla adresami. Adresy se totiž rozlišují podle způsobu zápisu na *symbolické* a *absolutní* (zapsané číslicemi). Jiné rozlišení adres je podle jejího vztahu k instrukci, a to na *vnější* (adresa, na které je uložena instrukce) a na *vnitřní* (adresa, která je součástí instrukce). Vnitřní adresy se pak dělí na *skutečné* (adresa, na které je uložen operand instrukce) a na *modifikované* (vnitřní adresa, ze které se jistou modifikací, tj. úpravou provedenou v počítači, automaticky vyčíslí skutečná adresa). Další druhy rozlišování adres užívané v odborné literatuře není zde účelné zavádět.

3. Překladač (kompilátor), který přeloží úlohu z jazyka programovacího do jazyka počítače.

V dalším se podrobněji dotkneme bodů 1. a 3.

1. Jazyk automatického programování

Programovací jazyk je soustava prostředků, jimiž se vyjadřuje výpočtový algoritmus pro samočinný počítač. Slouží jednak ke styku člověka se samočinným počítačem, jednak k vzájemnému dorozumívání mezi programátory, tvůrci výpočtových algoritmů (techniky, matematiky, ekonomy apod.) a posléze i mezi výpočtovými středisky.

Každý programovací jazyk poskytuje možnost zapsat algoritmus pomocí jednotek zápisu, kterými se vyjadřují pro počítač jeho jisté elementární akce (rozhodování, změny hodnot proměnných, změny v postupu vykonávání instrukcí apod.). Způsob sestavování elementárních akcí do jednotek zápisu může být vzat jako klasifikační hledisko jazyků systémů automatického programování. Níže uvedeme některé nejčastější typy programovacích jazyků. Jejich rozvoj byl totiž během posledních desetiletí tak prudký a zároveň i živelný, že je velmi obtížné provést jejich striktní klasifikaci.

Jazyk symbolických adres. Jednotce zápisu tohoto jazyku odpovídá jedna instrukce počítače. V jednotlivých částech jednotky zápisu je použito mnemotechnických označení. Přitom se předpokládá používání alfanumerického kódu.

Při programování v těchto systémech může programátor využívat všech operačních možností jazyka počítače. Systémem se automatizuje přidělování absolutních adres a přepis symbolického zápisu programu do kódovaného programu.

Některé systémy jsou sestaveny tak, že používají relativního adresování, takže podprogramy se zapisují v „absolutních“ adresách, např. Sestavující program pro URAL, Relativní adresování na EPOSu. Jinými systémy jsou např. SOAP (Symbolic Optimum Assembly Program) pro IBM 650, GP-1 (Generalized Programming) pro UNIVAC Fac-Tronic, Židkovův systém pro počítač STRELA (SSSR), SP-1 (Symbolické programování 1) pro EPOS.

Příklad. Jednotkami zápisu SP-1 jsou instrukce o 18 alfanumerických symbolech (symbol je číslice, písmeno, značka nebo prázdný znak, mezera) alfanumerického kódu EPOS. Jedna instrukce SP-1 odpovídá instrukci strojové. Srovnajme schematické znázornění jednotek zápisu počítače a SP-1.

Strojová instrukce (12 dekadických míst)

<i>s</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

operační
znak

adresa s modifikujícím registrem *f*
a popřípadě i s označením adresy 2. řádu
(v číslici *e*)

Jednotka zápisu SP-1 (18 alfanumerických znaků)

část pro operaci						adresa					
<i>s</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>g</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	12 alfanumerických znaků					

operační
znak

Poznámka. *s*, *k*, *j* jsou poloviční adresy, tj. čísla univerzálních registrů. Operace se zapisují symbolicky, např.

$U +$ symbolizuje operaci „přečtení k univerzálnímu registru“,

$U + P$ symbolizuje operaci $U +$ s testem na přečtení a s přeskokem,

$*$ je operace „násobení s pevnou čárkou“,

$*$, je operace „násobení s pohyblivou čárkou“.

Operační znaky je možno také zapsat v jazyku počítače. Adresy ferritové se zapisují hned zleva. Mohou být symbolické, a to bez indexu (např. MZDA, A1), nebo s indexy [např. A (1), ALFA (I, J)], nebo absolutní (např. 11, 3128, 000). Jak u operačních znaků, tak i u adres se zbylá místa vpravo vyplňují mezerami, tj. při psaní programu se nevyplňují. Univerzální registry se mohou vypsát číslem, nebo symbolem (místa *s*, *j*, *k*), nebo mezerou, není-li použito daného univerzálního registru.

Konstanty se značí tak, že do části operací se umístí symboly KONST a na 12 míst pro adresu se zapíše 12 číslic příslušné konstanty.

Zatím je SP-1 budován tak, že nezařazuje automaticky podprogramy. Při použití magnetické pásky lze však snadno rozšířit systém tak, že zařazuje podprogramy pomocí vyvolávacích posloupností. Vyvolávací posloupností rozumíme posloupnost instrukcí a konstant v programu, které zařadí podprogram do výpočtů.

Jazyk s pseudoinstrukcemi. Jednotkou zápisu je pseudoinstrukce, která zpravidla odpovídá posloupnosti několika instrukcí počítače, pro který se úloha programuje a často i celý podprogram. Jednotky zápisu nemusí mít pevný formát, jak tomu bývá u jazyků symbolických adres. Programování je přístupnější běžnému počítači. Např. pro počítač jednoadresový se programuje v pseudoinstrukcích tříadresově, což je blízké běžnému počítání na kalkulačním stroji. Nebo pro počítač s pevnou řádovou čárkou se programuje v pseudoinstrukcích tak, jako by měl vestavěné operace s pohyblivou čárkou. Jednotlivé typy pseudoinstrukcí

jsou stanoveny obyčejně výčtem (v seznamu), jejich názvy mnemotechnicky vystihují elementární akce počítače, přiřazené jednotce zápisu. Výhody těchto systémů spatřujeme jak v tom, že umožňují rychlý styk s počítačem (i za cenu málo efektivních programů), tak i v tom, že mohou být důležitým meziklánekem mezi jazykem počítače i jazyky dokonalejších systémů automatického programování. Systémem se automatizuje sestavování obecného programu v instrukcích zvoleného počítače, přiřazení absolutních adres a vypracování kódovaného programu. V ČSSR jsou známy systémy, např. autokód pro SIRIUS, pro NE 803, ACT 1 pro LGP 30. U všech se jedná v podstatě o tříadresové programování aritmetických výrazů pro jednoadresové počítače a jsou pseudoinstrukcemi automatizovány výpočty cyklů a zařazování podprogramů standardních funkcí.

Jazyk kompilačních systémů. Tyto jazyky automatizují prakticky běžné „ruční“ programátorské práce, tj. fáze 4. až 7. Slouží k zápisu zvoleného výpočtového postupu — algoritmu výpočtu. Říkáme jim také algoritmické programovací jazyky. Jednotky zápisů jsou definovány často rekurentními definicemi. Jednotlivým syntaktickým jednotkám zápisu odpovídá v jazyku počítače zpravidla celý podprogram. Např. aritmetický výraz může obsahovat i standardní funkce a přitom je jednotkou zápisu. V létech šedesátých byly nejznámějšími jazyky tohoto typu programovací systém pro BESM (SSSR), viz [3] a FORTRAN (Mathematical Formulas Translating System) pro počítače IBM. Růst požadavků na programovací jazyk však neustával. Jmenujme alespoň některé:

- Jazyk má umožnit zápis široké třídy problémů (univerzálnost).
- Jazyk má zajistit jednoduchost a přehlednost zápisu algoritmů.
- Jazyk má ovlivnit jednoduchý, účinný a rychlý překlad bez lidského zápisu.
- Přeložené programy mají být účinné.
- Jazyk má mít možnost zapisovat části programu v jazyku počítače, popřípadě i v jazyku s pseudoinstrukcemi.

Již těchto několik požadavků na programovací jazyk, z nichž jsou i některé v rozporu (vyšší účinnost překladu vyžaduje náročnější kompilátor a delší dobu překladu) opravňuje to, že se mezinárodně přistoupilo k pečlivé přípravě algoritmického jazyka. Výsledkem několikaleté práce mnoha světových odborníků a výpočtových institucí byl na podkladě zkušeností s programováním na počítačích jak úloh, tak překladačů sestaven algoritmický jazyk ALGOL 60 (Algorithmic Language). Je vhodný pro zápisy výpočtových postupů úloh z numerické analýzy, úloh technických a ekonomických. Je velmi blízký jazyku matematickému, a proto je snadno srozumitelný nejen matematikům, nýbrž i technikům. ALGOL 60 má tudíž dvě důležitá uplatnění: je výborným programovacím jazykem (styk člověka s počítačem) a záro-

veň výborným jazykem pro vzájemné dorozumívání mezi techniky, matematiky a programátory (člověka s člověkem). Původní zpráva o jazyku z r. 1960 byla brzy přeložena do světových jazyků. Zpráva byla také revidována a její nové znění s malými úpravami bylo publikováno v r. 1962 [1]. Její české znění nalezne čtenář v [2].

Ilustrujme některé vlastnosti jazyka ALGOL 60 na příkladu výpočtu skalárního součinu dvou vektorů o n složkách

$$\sum_{i=1}^n x_i \times y_i .$$

Blokové schéma bylo uvedeno dříve při popisu etap, vypracování etap kódovaného programu (obr. 1).

Zapišme nyní program v ALGOLu ve tvaru bloku. (Termín blok je v jazyku ALGOL přesně definován. Dosud užívaný termín blok ve významu blokového schématu nebude se používat.) Celý blok (obr. 2)

začátek pole $x, y [1 : n];$
celý i ; **reálný** s ;

poznámka *Ukončili jsme zápis popisů parametrů, které budou zpracovány v příkazech tohoto bloku. Tyto popisy musí být předány překladači dříve než bude zpracovávat příkazy, které následují;*

SOUČIN: $s := 0$; **pro** $i := 1$ **krok** 1 **do** n **provést**
 $s := s + x[i] * y[i]$

Obr. 2. Skalární součin dvou vektorů v ALGOLu.

je uzavřen závorkami **začátek** (levá závorka bloku) a **konec** (pravá závorka), **tučně tištěná** slova jsou základní symboly jazyka ALGOL 60, jako např. operátor $+$. Při praktickém programování se zpravidla zapisují v původním anglickém znění. České znění je použito z důvodů pedagogických. Za závorkou **začátek** jsou umístěny informace, podle kterých překladač je schopen správně interpretovat příkazy bloku při jejich překladu do kódovaného programu. Těmito informacím říkáme popisy. V našem příkladě určujeme, že identifikátory x a y označují proměnné typu **reálný** (pohyblivé čárky), a že každý z nich tvoří jedno-rozměrné pole s mezemi indexů 1 a n . Dále se popisují identifikátor i jako proměnná typu **celý** a identifikátor s jako proměnná typu **reálný**. Identifikátor n musí být popsán vně tohoto bloku. Rovněž i hodnota n musí být známá před vstupem do bloku.

Mezi algolský text lze vkládat podle jistých předpisů poznámky, které překladač při překladu pomíjí. V našem příkladě jde o text od základního symbolu jazyka ALGOL tzv. oddělovače **poznámka** až po oddělovač. Za popisy bloku jsou umístěny příkazy bloku, které se od-
dělují středníky. Každý z nich může být označen návěštím (v našem

příkladu SOUČIN), které slouží pro orientaci v bloku a pro možnost zapisovat případné skokové příkazy na toto návěští. Náš blok sestává ze dvou příkazů:

1. Přiřazovací příkaz $s := 0$, kterým se provede přípravná část cyklu. Tento příkaz je opatřen návěštím SOUČIN.

2. Příkaz cyklu, obsahující sloučení tří částí cyklu: výpočtové, rozhodnutí o konci cyklu a přípravy dalšího průchodu výpočtovou částí.

Z příkladu je patrná srozumitelnost jazyka ALGOL. Když zvážíme, že text od symbolu *poznámka* až po ; nemá pro překladač význam, chápeme i úsporu zápisu programu. Z ostatních předností uvedme redukci ručních chyb (počítač vykonává rutinní práce ručního programování) a operativnost styku člověka s počítačem (programátor se může více soustředit na problém a ne nutně výhradně na počítač).

(Dokončení)

Trisekce úhlu

DOC. JAROSLAV CHUDÝ, ČVUT, Praha

(Dokončení)

b) Konstrukce pomocí křivek

Zde je historie konstrukcí zvláště bohatá. Začíná (podle dostupných pramenů) v 5. století před n. l., kdy *Hyppias* použil k trisekci křivky zvané kvadratrix. Další autoři používali celé řady křivek (konchoida, Archimedova spirála, trisektrix atd.) a zejména kuželoseček.

Jednu takovou konstrukci podává ve svém příspěvku inž. *Václav Seifert*. Používá rovnoosé hyperboly k následující konstrukci (obr. 6): Ramena daného úhlu α o vrcholu O protněme kružnicí libovolného poloměru o středu O v bodech A, B . Zavedeme-li pravoúhlý systém souřadnic Oxy , má bod B souřadnice $(a; b)$, přičemž

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Bod $B_1(-a; b)$,

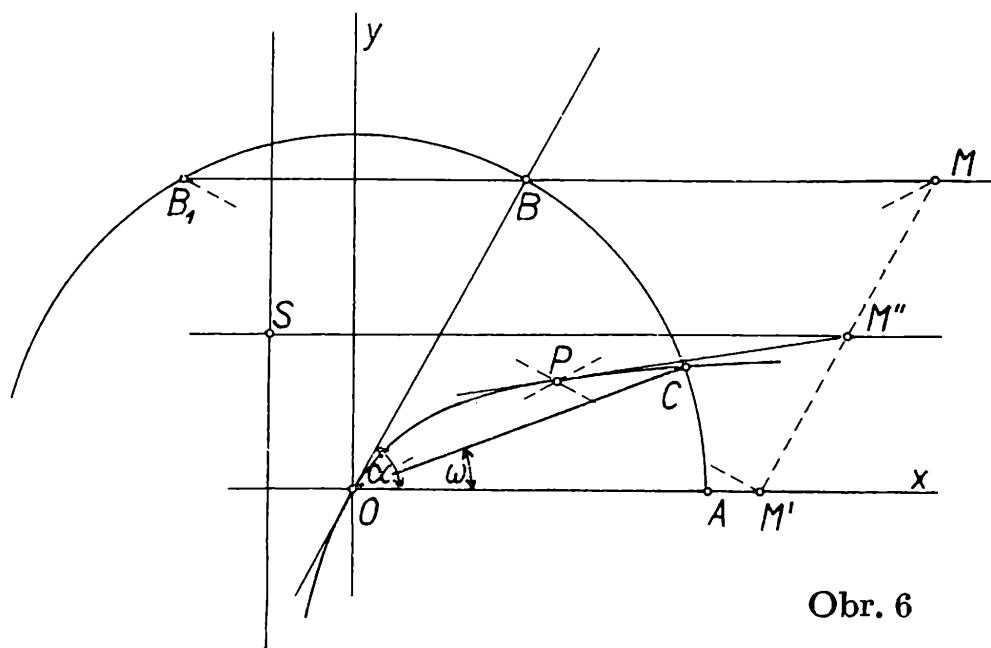
$$S\left(-\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right).$$

Bod S je střed rovnoosé hyperboly, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné s osami souřadnic a jež procházejí bodem O . Tím je hyperbola dostatečně určena a lze ji sestrojiti. Není obtížné ukázat, že OB je její tečnou v bodě O a že její libovolný bod P dostaneme tak, že vedeme $MM' \parallel OB$,

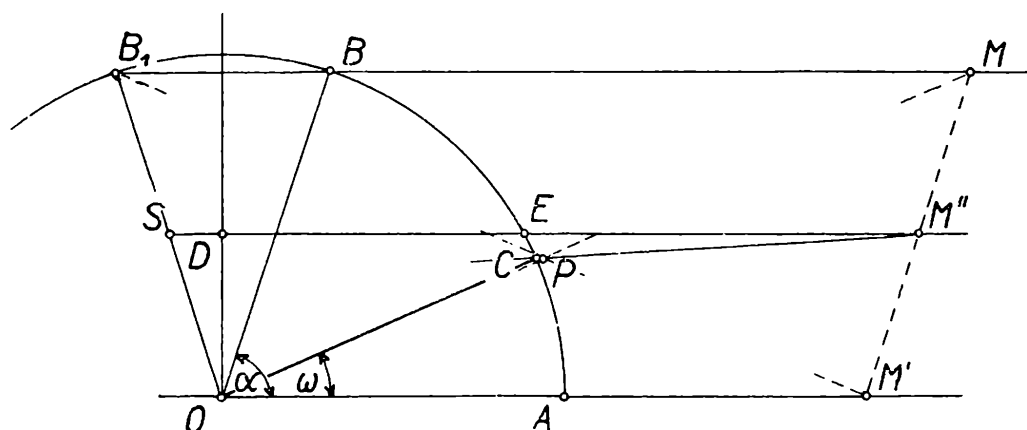
$MM' = OB$ a $P \equiv (OM \times B_1M')$, přičemž tečna v bodě P je PM'' . Na obrázku je narysována jen jedna větev hyperboly. Označíme-li průsečík této větve hyperboly s kružnicí bodem C , je

$$\omega = \sphericalangle AOC = \frac{\alpha}{3}$$

V témž příspěvku dospívá autor k přibližné konstrukci tím, že průsečík hyperboly a kružnice nahraňuje průsečíkem C kružnice a tečny hyperboly v bodě P sestrojeném pomocí bodu M' , kde $AM' = DE$ (obr. 7).



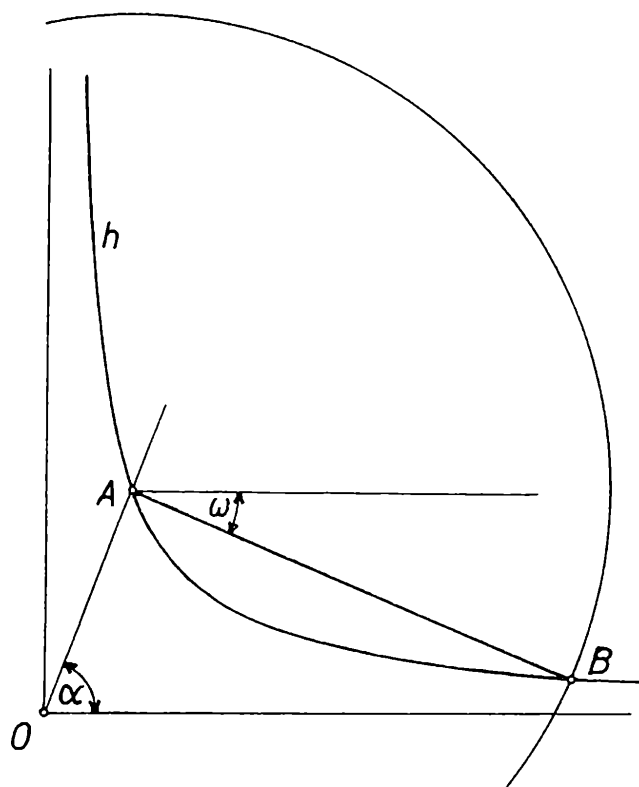
Obr. 6



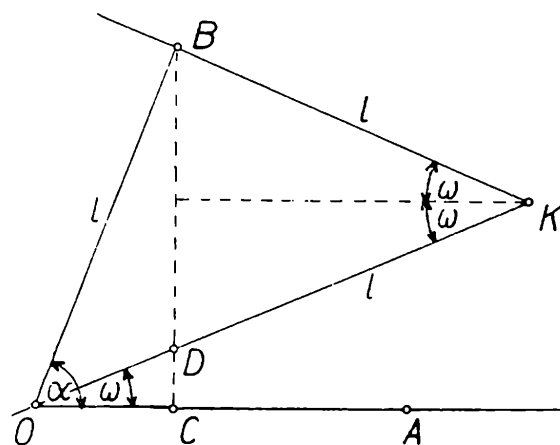
Obr. 7

Jinou takovou konstrukci, jejíž autor je jeden ze zakladatelů ne-euklidovské geometrie *János Bolyai*, uvádí v již zmíněném příspěvku *H. Žáková*. Konstrukce lze použít k trisekci libovolného ostrého úhlu,

je-li sestrojena jedna větev h rovnosé hyperboly (obr. 8). Daný úhel α nanese tak, aby jedno rameno splynulo s asymptotou a vrchol se středem hyperboly. Druhé rameno protne hyperbolu v bodě A , kolem něhož opíšeme kružnici poloměru $r = 2 \cdot OA$. Průsečík této kružnice s větví hyperboly (ten, který leží uvnitř úhlu α) označme B . Úhel ω , který svírá rovnoběžka s druhým ramenem úhlu α vedená bodem A se spojnicí AB je rovný $\frac{\alpha}{3}$.



Obr. 8



Obr. 9

c) Konstrukce, používající pravítka a kružítko neeuklidovskými

Jedna taková konstrukce používající kružítko jinak než euklidovskými je na obr. 9. Na ramenech kružítko o vrcholu K vyznačíme si body B, D stejně vzdálené od K ve vzdálenosti l a touž délku nanese na druhé rameno OB daného úhlu $\alpha = \sphericalangle AOB$. Bodem B vedme kolmici BC na rameno OA . Polohu kružítko (spočívajícího stále na nákresně) měňme nyní tak, aby bod B byl stále pevný a druhý bod D se pohyboval po kolmici BC a zafixujeme polohu, kdy prodloužené rameno KD prochází bodem O . Pak úhel

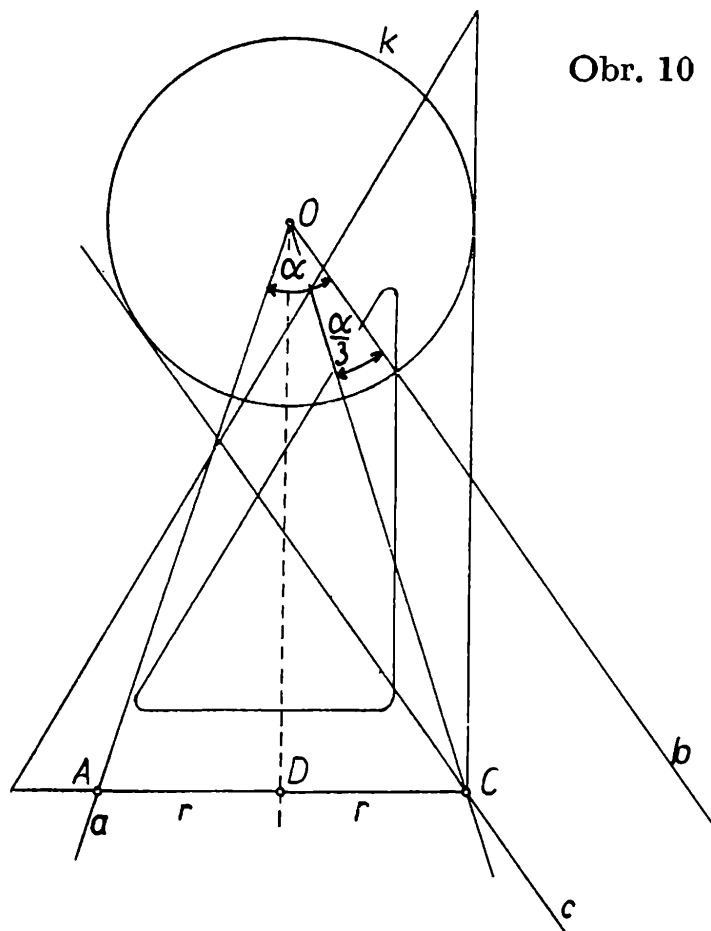
$$\omega = \sphericalangle COD = \frac{\alpha}{3},$$

jak plyne ihned z obrázku.

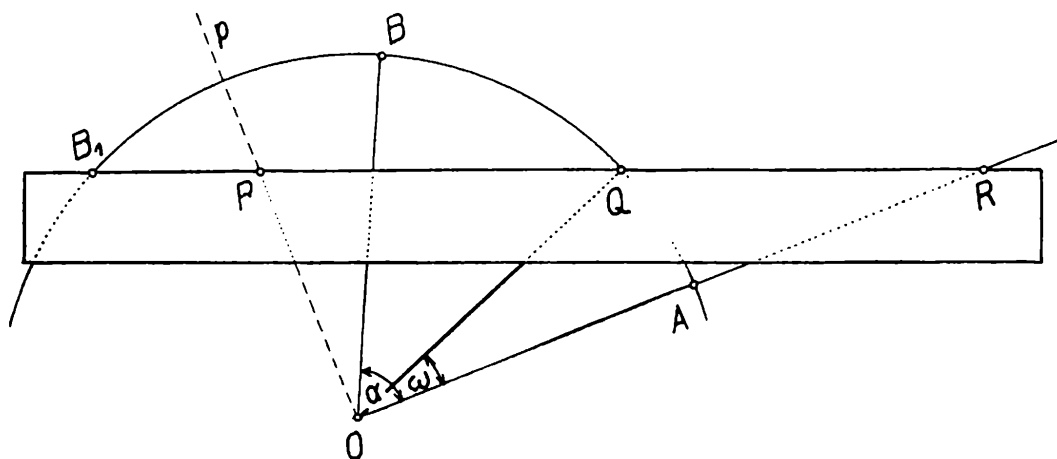
Jinou konstrukci podává ve svém příspěvku inž. Klement Nedbal, Praha. Používá jednak dvou kolmic narýsovaných na pohyblivé šabloně

a zlepšené konstrukce použitím uzpůsobeného pravoúhlého trojúhelníkového pravítka. Konstrukce je na obr. 10. Na kratší rameno trojúhelníkového pravítka nanese dvakrát touž délku r do bodů D , A , takže $CD = DA = r$. Jsou-li a , b ramena daného úhlu α o vrcholu O , opišme kolem bodu O kružnici k poloměru r a vedme k ní tečnu c rovnoběžnou s ramenem b , která protíná rameno a . Pohybujme nyní trojúhelníkem tak, aby vrchol pravého úhlu C byl stále na sestrojené tečně c kružnice k a delší rameno pravého úhlu aby se stále dotýkalo kružnice k . Zafixujeme-li tu polohu, kdy bod A padne právě na rameno a , bude úhel

$$\begin{aligned} \sphericalangle AOD &= \sphericalangle DOC = \\ &= \sphericalangle COb = \frac{\alpha}{3}. \end{aligned}$$



Obr. 10



Obr. 11

Další konstrukci uvádí v již zmíněném příspěvku inž. V. Seifert. Je na obr. 11. Kolem vrcholu O daného úhlu $\alpha = \sphericalangle AOB$ opišme kružnici k libovolného poloměru r a v bodě O vztyčme kolmici p k OA . K bodu B sestrojme bod souměrně sdružený podle p a označme jej B_1 . Na okraji pomocného papíru vyznačme tři body P , Q , R tak, že $PQ =$

$= QR = r = OB$. Posunujeme nyní tímto pomocným papírem tak, aby okraj papíru procházel bodem B_1 , první bod P ležel na kolmici p a druhý bod Q padl na kružnici k . Přitom musí třetí bod R ležet na přímce OA . Pak úhel

$$\omega = \sphericalangle AOQ = \frac{\alpha}{3}.$$

Na závěr několik slov k čtenářům. Byl bych spokojen, kdyby čtenáři tohoto článku získali přesvědčení, že problém trisekce úhlu, ač má bohatou historii, nemá budoucnost a že je dnes pro matematiku v podstatě uzavřeným problémem. Je skutečně škoda času zabývat se dalšími konstrukcemi toho či onoho typu, jež, objeví-li se, mohou přinést snad úsporu jedné nebo dvou čar, popř. zlepšit přesnost, ale matematice nijak neprospějí. Je lépe využít tohoto času k studiu mnoha krásných a většinou ještě otevřených partií matematiky. Studentům středních škol doporučuji např. již vzpomenutou knížku Schwarzovu, zvláště stať o řešitelnosti algebraických rovnic, jedné z nejhezčích partií matematiky.

Poznámka redakce. Redakce se plně připojuje k názoru autora a nebude v blízké budoucnosti žádné články k tomuto problému přijímat ani uveřejňovat.

Metoda nejmenších čtverců a vyrovňování hodnot měřených veličin

J I Ř Í K O L Á Ř, Jakubov

Měříme-li nějakou veličinu (např. délku předmětu), nedojdeme a ani nemůžeme dojít ke zcela přesné hodnotě. Nepřesnost je způsobena chybami vzniklými při měření. Tyto chyby dělíme na *soustavné* a *nahodilé*.

1. *Chyby soustavné* jsou způsobeny např. kratším nebo delším měřítkem, na němž jednotka délky neodpovídá jednotce stanovené normou. Tyto chyby je nutno předem vyloučit použitím přesných měřidel.

2. Další skupinu tvoří *chyby nahodilé* (někdy kladné, jindy záporné), které podléhají zákonům teorie chyb. Jejím zakladatelem byl *Gauss*. Tyto zákony dovolují při dostatečném množství naměřených (přibližných) hodnot nalézt nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny.

Chtěl bych poukázat na některé případy, kde lze užít jedné z nejpožívanějších metod vyrovňovacího počtu — *metody nejmenších čtverců*.

a) V nejjednodušším případě jde o nalezení nejpravděpodobnější hodnoty jediné veličiny z n měření.

Měřením byly získány hodnoty $x_1, x_2, \dots, x_n$. Je-li x skutečná hodnota veličiny, pak rozdíly $x_1 - x, x_2 - x, \dots, x_n - x$ jsou nahodilé chyby měření. Pak také součet chyb

$$D = (x_1 - x) + (x_2 - x) + (x_3 - x) + \dots + (x_n - x) = \sum_{i=1}^n (x_i - x)$$

musí být roven nule (stejný počet kladných i záporných chyb), tj. $D = 0$. Pak z rovnosti

$$(x_1 - x) + (x_2 - x) + \dots + (x_n - x) = 0,$$

$$nx = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

což je aritmetický průměr naměřených veličin. Ke stejnému výsledku dojdeme též metodou nejmenších čtverců, která je založena na požadavku, aby součet čtverců chyb byl co nejmenší. To vyjádříme podmínkou

$$Y = \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 = \text{minimum}.$$

Y je funkcí x , kde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jsou obecně různé konstanty, tj.

$$Y = f(x, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Pro určitou hodnotu x má funkce Y minimální hodnotu. Tuto hodnotu x právě hledáme.

Má-li nějaká funkce v daném bodě minimum, pak v tomto bodě tečna ke grafu funkce je rovnoběžná s osou x , čili svírá s ní úhel 0° . Směrnice tečny (tangenta úhlu, sevřeného tečnou a osou x) je tedy rovna nule. Z diferenciálního počtu je známo, že směrnice tečny v daném bodě funkce je rovna první derivaci funkce v tomto bodě. Platí

$$Y' = \frac{dY}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n (x_i - x)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx} (x_i - x)^2 = 0.$$

(Dále již místo $\sum_{i=1}^n$ píšeme jen Σ).

$$Y' = \Sigma - 2(x_i - x) = -2 \Sigma (x_i - x) = -2 [\Sigma x_i - nx] = 0,$$

$$\Sigma x_i - nx = 0,$$

$$x = \frac{\Sigma x_i}{n}.$$

Došli jsme zase k závěru, že nejpravděpodobnější hodnotou (x) měřené veličiny je *a r i t m e t i c k ý* *p r ů m ě r* z naměřených hodnot. To ovšem platí pouze v případě, že všechny hodnoty x_i byly naměřeny se stejnou přesností. Není-li tomu tak, tj. nejsou-li všechna měření stejně přesná, a tedy i spolehlivá, přikládáme jednotlivým měřením *r ů z n o u* *z á v á Ź n o s t* (*v á h u*). Tato váha se vyjadřuje číslem tím vyšším, čím je hodnota podle našeho mínění spolehlivější. Jestliže má naměřená hodnota x_i váhu P_i , vyplývá zase z metody nejmenších čtverců, že funkce

$$Y = P_1 (x_1 - x)^2 + P_2 (x_2 - x)^2 + \dots + P_n (x_n - x)^2$$

musí mít minimum, tj.

$$Y' = -2P_1 (x_1 - x) - 2P_2 (x_2 - x) - \dots - 2P_n (x_n - x) = 0,$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n - x (P_1 + P_2 + \dots + P_n) = 0,$$

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n},$$

$$x = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}.$$

Tomuto průměru se říká *p r ů m ě r* *v á Ź e n ý*.

Jsou-li všechny veličiny x_i změřeny se stejnou přesností P (tj. $P_i = P$ pro všechna i), pak dostáváme již dříve uvedený průměr aritmetický

$$x = \frac{P \sum x_i}{n P} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

b) Metody nejmenších čtverců se používá též k výpočtu konstant A , B , ... funkce $Y = f(x, A, B, \dots)$, kde konstanty jsou prozatím neurčené a závislost Y na x byla získána experimentálně, a tedy nepřesně. Víme-li např., že Y závisí na x podle vztahu $Y = A + Bx$ a máme-li změřenou sérii hodnot $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ pro $x_1, x_2, \dots, x_n$, pak po přenesení do grafu dostaneme množinu bodů, jejichž souřadnice by měly vyhovovat rovnici $Y = A + Bx$, čili rovnici jisté přímky, což ovšem přesně splněno není.

Proto je nutno vypočítat z provedených měření takové hodnoty konstant A , B , aby nalezená přímka, která bude grafem vztahu $Y = A + Bx$, probíhala tak, že množina bodů $[x_i, y_i]$ je kolem této přímky rozložena rovnoměrně, což znamená, že součet čtverců odchylek (hodnoty vypočtené od hodnoty naměřené) má být minimální (požadavek Legendreův).

Tomuto postupu říkáme *v y r o v n á v á n í* *p ř í m k o v é* *z á v i s l o s t i*. Praktické užití této metody ukažme na příkladě z teorie pružnosti.

Podle Hookeova zákona pro délkovou roztažnost látek je délka h při teplotě t dána vztahem $h = h_0(1 + \alpha t)$, jehož grafem je přímka. Tento vztah je však pouze přibližný a s vyhovující přesností platí jen v nepříliš velkém intervalu teplot. h_0 budiž délka tyče při 0°C , α je teplotní koeficient délkové roztažnosti látky, h je délka tyče při teplotě t .

Měřením jsme získali hodnoty $h_1, h_2, \dots, h_n$ při teplotách $t_1, t_2, \dots, t_n$. Chyby, kterých jsme se dopustili při měření teplot, považujeme za zanedbatelné. Jsou vzhledem k nepřesnostem při měření délek nepatrné. Naměřené hodnoty h_i budou rozptýleny kolem přímky dané rovnicí $h = h_0(1 + \alpha t)$, kde α je konstanta, kterou chceme vypočítat pro daný teplotní interval.

Postup výpočtu je analogický předchozímu

$$Y = \sum [h_i - h_0(1 + \alpha t_i)]^2 = \sum (h_i - h_0 - h_0 \alpha t_i)^2 = \min ,$$

$$Y' = \frac{d}{d\alpha} \sum (h_i - h_0 - h_0 \alpha t_i)^2 = -2 h_0 \sum (h_i t_i - h_0 t_i - h_0 \alpha t_i^2) = 0 ,$$

$$\sum (h_i t_i - h_0 t_i - h_0 \alpha t_i^2) = \sum h_i t_i - h_0 \sum t_i - h_0 \alpha \sum t_i^2 = 0$$

Tuto rovnici nazýváme **n o r m á l n í r o v n i c í** pro výpočet α

$$\alpha = \frac{\sum h_i t_i - h_0 \sum t_i}{h_0 \sum t_i^2}$$

Grafické odvození součtu nekonečné geometrické řady

J I Ř Í M A R E K, PF Plzeň

Odvodme geometrickou cestou součet nekonečné geometrické řady, jejíž první člen je a , stálý podíl q , $0 < q < 1$.

Řešení. Na obr. 1 jsou OP , OR dvě polopřímky, které neleží v jedné přímce. Na polopřímku OP nanese jednotkovou úsečku, takže $OA = 1$. Na polopřímce OR sestrojíme bod B , pro který $OB = a$. Uvnitř úsečky OA lze sestrojit bod C , aby $CA = q$, kde $0 < q < 1$.

Protože je $q^{n+1} < q$ (n je přirozené číslo), existuje uvnitř úsečky CA bod D , pro který $DA = q^{n+1}$. Přímka vedená bodem D rovnoběžně s BC protne polopřímku OR v bodu E . Dokážeme, že platí

$$OE = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n$$

Z podobnosti trojúhelníků OCB , ODE plyne postupně

$$OD : OC = OE : OB ,$$

$$(1 - q^{n+1}) : (1 - q) = OE : a ,$$

$$OE = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = a (1 + q + q^2 + \dots + q^n) ,$$

$$OE = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n .$$

Provedme nyní následující úvahu: Bude-li se číslo n neustále zvětšovat, tj. $n \rightarrow \infty$, potom číslo q^{n+1} se bude stále více blížit číslu 0, tj.

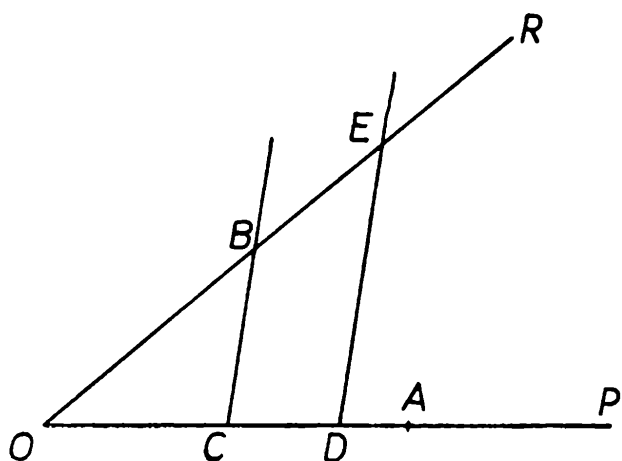
$$\lim q^{n+1} = 0 .$$

Na obr. 1 se bude bod D neomezeně blížit bodu A .

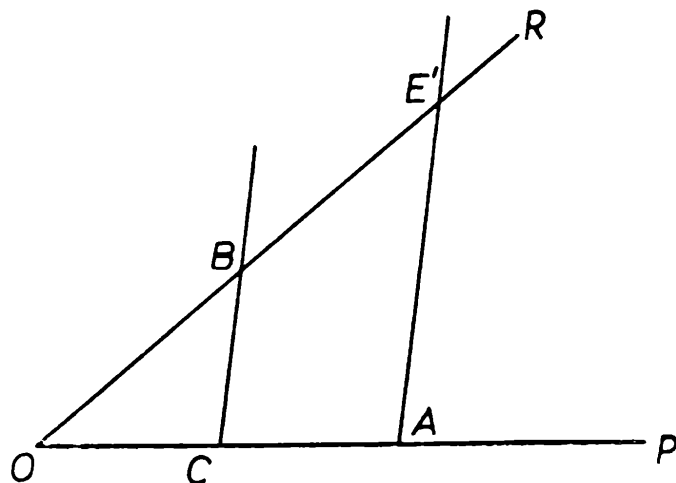
Je proto součet nekonečné geometrické řady

$$s = a + aq + aq^2 +$$

dán velikostí úsečky OE' , kde E' je bod, ve kterém protne polopřímku OR přímka vedená bodem A rovnoběžně s přímkou CB (obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

Nyní již snadno, geometrickou cestou, odvodíme vzorec pro součet nekonečné geometrické řady.

Z podobnosti trojúhelníků OCB , OAE' plyne postupně

$$OA : OC = OE' : OB ,$$

$$1 : (1 - q) = OE' : a ,$$

$$OE' = \frac{a}{1 - q} .$$

Je tedy

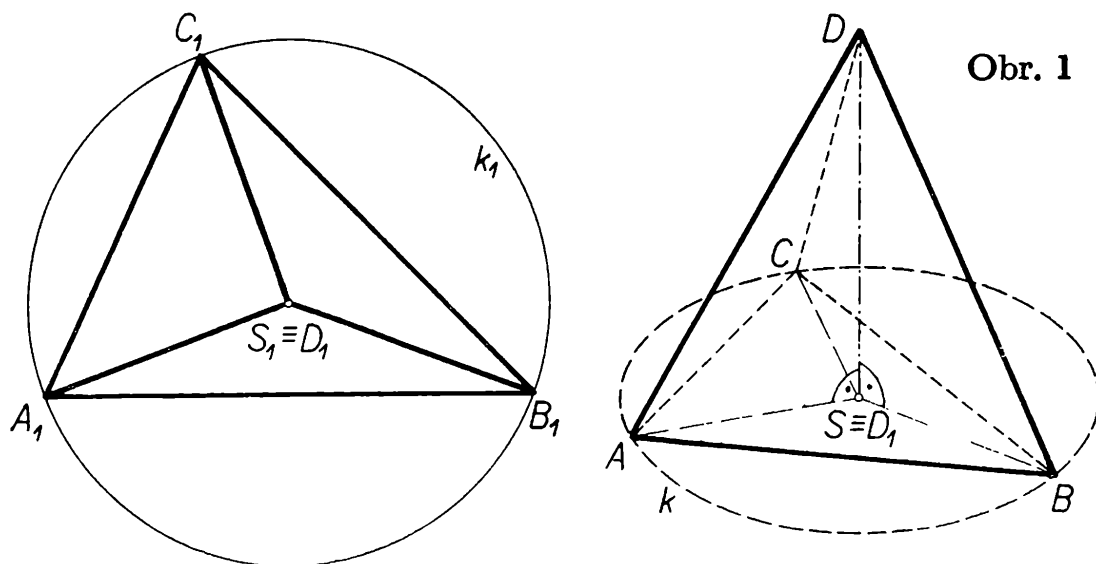
$$s = \frac{a}{1 - q} .$$



Úloha z deskriptivní geometrie

STANISLAV HORÁK st. ČVUT, Praha

I. V obr. 1 je dvěma různými způsoby zobrazen obecný trojboký jehlan (čtyřstěn) $ABCD$, jehož podstava ABC spočívá v první průmětně, promítá se tedy do této průmětny ve skutečné velikosti. Průmět D_1 vrcholu D splývá se středem S kružnice k opsané podstavě ABC . A tu platí věta:



Obr. 1

V 1. Jestliže výška DD_1 jehlanu $ABCD$ prochází středem S kružnice k opsané podstavě ABC , pak délky hran AD , BD , CD si jsou rovny a též úhly, které tyto tři hrany svírají s rovinou ABC , si jsou rovny.

Důkaz je velmi jednoduchý. Platí totiž

$$\triangle ADD_1 \cong \triangle BDD_1 \cong \triangle CDD_1,$$

neboť

- a) všechny tyto trojúhelníky jsou pravoúhlé,
- b) odvěsna DD_1 je všem společná,
- c) $AD_1 = BD_1 = CD_1$.

Všechny tři trojúhelníky jsou tudíž shodné podle věty sus. Z dokázané shodnosti trojúhelníků vyplývá pak správnost vyslovené věty.

Větu lze však obrátit.

V 2. Jestliže v trojbokém jehlanu $ABCD$ platí aspoň jeden z následujících vztahů

a) $AD = BD = CD$, b) $\sphericalangle DAD_1 = \sphericalangle DBD_1 = \sphericalangle DCD_1$, pak pata D_1 výšky DD_1 splývá se středem kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Důkaz provedeme jen pro případ a), pro případ b) je důkaz podobný. Opět tu platí

$$\triangle ADD_1 \cong \triangle BDD_1 \cong \triangle CDD_1$$

podle věty sus (důvody uveďte sami) a tudíž

$$AD_1 = BD_1 = CD_1,$$

což znamená, že bod D_1 je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC . Zároveň platí

$$\sphericalangle DAD_1 = \sphericalangle DBD_1 = \sphericalangle DCD_1.$$

II. Právě dokázané věty se dá použít v úloze, která se dříve velmi často vyskytovala u písemných maturitních zkoušek. Je to úloha:

Jsou dány tři přímky a, b, c , z nichž každé dvě jsou spolu mimoběžné, a bod M . Bodem M proložte rovinu ϱ tak, aby všechny tři přímky s ní svíraly shodné úhly.

Řešení. Zvolme libovolný bod D v prostoru a jím proložme přímky a', b', c' tak, aby $a' \parallel a, b' \parallel b, c' \parallel c$. Na přímce a' (na přímce b' , na přímce c') určíme body A, A' (body B, B' , body C, C') tak, aby

$$DA = DA' = DB = DB' = DC = DC'$$

Body D, A, B, C splňují podmínky věty V 2, a proto přímky a', b', c' svírají s rovinou ABC shodné úhly. Rovina ϱ je pak s rovinou ABC rovnoběžná.

Úloha nemá žádné řešení v případě, že mimoběžky a, b, c jsou rovnoběžné s nějakou rovinou. Potom přímky a', b', c' leží v rovině. (Tuto rovinu můžeme považovat za řešení naší úlohy.) Jinak má úloha osm různých řešení, neboť místo roviny ABC můžeme vzít kteroukoli z rovin $A'BC, AB'C, ABC', A'B'C, AB'C', A'BC', A'B'C'$

Uvedený příklad dostali maturanti na německé reálce v Chebu v r. 1907 s těmito souřadnicemi:

$$a \equiv [(0; 0; 6,5), (3,5; 0; 10)], \quad b \equiv [K(0; 0; 1,5), L(0; 3,5; 6)], \quad c \equiv [(0; 0; 4,5), (7; 1,5; 8)], \quad M(5; 5; 10).$$

Použitie deskriptívnej geometrie v kryštalografii

JOSEF FILIP, Bratislava

(Pokračovanie)

6. Osobitné postavenie medzi pólmi majú priesečníky vertikály c so sférou. V tomto príspevku ich budeme dôsledne označovať S a Z . Sú to póly kryštálových plôch vodorovných. Bod Z je zo všetkých pólů najvyšší a bod S najnižší.

Póly vertikálnych plôch ležia na hlavnej kružnici v rovine vodorovnej. Táto kružnica, ktorú budeme dôsledne označovať znakom z , tvorí na sfére rovník a rozdeľuje ju na polovice, ktoré pomenujeme hornou a dolnou hemisférou.

7. Normály plôch, ktoré tvoria pásma, ležia v jednej rovine idúcej stredom O kolmo na os pásma (4). Preto ich priesečníky so sférou ležia na hlavnej kružnici⁸). Teda póly plôch tvoriacich pásma ležia na hlavnej kružnici. Túto kružnicu, ktorú pokladáme za sférický obraz pásma, nazveme pásmovou kružnicou.

Vertikálne plochy na kryštále vytvárajú pásma, ktorého pásmová kružnica splyva s rovníkom z . Nazveme ho teda **r o v n í k o v ý m p á s m o m**. Keď pásmová kružnica splynie s poludníkom sféry, hovoríme o poludníkovom pásme.

Pretože každé dve rôzne hlavné kružnice na sfére sa pretínajú v bodoch diametrálne protilahlých, pretína každá pásmová kružnica rovník z v bodoch diametrálne protilahlých.

Os pásma pretína sféru v dvoch diametrálne protilahlých bodoch. Jeden z týchto bodov nazývame **p ó l o m** a druhý **p r o t i p ó l o m p á s m a**. Keď pásma nie je poludníkovým pásmom, je jeho pól vždy na vrchnej hemisfére. Poludníkové pásma má pól i protipól na rovníku. Rozlíšime ich takto: Body Y a $\bar{Y}$, v ktorých kryštálová os b pretína rovník, rozdeľia rovník na prednú a zadnú polovicu (predná obsahuje bod X a zadná bod $\bar{X}$). Pólom poludníkového pásma je bod na prednej polovici rovníka. Špeciálne pólom poludníka idúceho bodmi Y a $\bar{Y}$, tzv. **h l a v n é h o p o l u d n í k a**, je bod X . Pólom poludníka idúceho bodmi X a $\bar{X}$ je bod Y . Na základe toho môžeme ku každej pásmovej kružnici určiť jednoznačne príslušný pól.

Čitateľ si ľahko overí správnosť vety:

⁸) Hlavná kružnica na guľovej ploche má stred v strede plochy a polomer zhodný s polomerom plochy.

Veta 3. *Nech p je pásmová kružnica a P k nej príslušný pól. Všetky pásmové kružnice prechádzajúce pólom P majú póly na pásmovej kružnici p a obrátene všetky pásmové kružnice pólův ležiacich na pásmovej kružnici p prechádzajú pólom P .*

8. My však chceme mať obraz kryštálu nie na sfére, ale na rovine. Preto obraz na sfére premietneme na rovinu. Použijeme na to *stereografické premietanie*. Za priemetňu zvolíme rovinu π rovníka z a za stred premietania najnižší pól S . Priemety na rovine budeme označovať indexom s a nazývať *stereografický π priemet* m_i . Stereografický priemet P_s pólu P (obr. 1) je teda priesečník premietacej priamky SP s priemetňou π a je to zároveň stereografický priemet kryštálovej plochy p . Práve tak bod $\bar{P}_s \equiv S\bar{P}$. π je stereografickým priemetom protipólu $\bar{P}$, resp. protiplochy $\bar{p}$. Je zrejmé, že $SP \perp S\bar{P}$.

Rovník z , ktorého stereografický priemet s ním splýva, budeme nazývať *základnou kružnicou projekcie*. Stereografické priemety pólův ležiacich na základnej kružnici, ktoré teda splývajú s bodmi samotnými, budeme označovať bez indexu.

Situáciu na priemetni π prenášame vo vhodnej mierke na nákresňu. Obraz stereografického priemetu na nákresni nazývame *stereografickým obrazom*. V záujme zjednodušenia si však budeme myslieť, že priemetňa π je zároveň aj nákresňou a že teda stereografický priemet splýva so stereografickým obrazom. Za tohto prepokladu je stereografický priemet a stereografický obraz to isté. Obyčajne používame pomenovanie stereografický obraz a často ďalej zjednodušujeme: namiesto stereografický obraz pólu hovoríme krátko *stereografický pól*.

Stereografické obrazy pólův ležiacich na hornej hemisfére (mimo rovníka z) sú vnútornými bodmi základnej kružnice z . Naproti tomu body dolnej hemisféry (rôzne od bodu S) sa premietajú do vonkajších bodův kružnice z ⁹⁾. Jediným bodom, ktorý nemá stereografický obraz, je bod S .

9. Často okrem stereografických priemetův zostrojujeme ako pomocné aj pravouhlé priemety na π . Budeme ich označovať indexom l . Na obr. 1 sme vyznačili pravouhlý priemet P_l pólu P a pravouhlý priemet $\bar{P}_l$ protipólu $\bar{P}$. Je evidentné, že stereografický priemet a pravouhlý priemet toho istého bodu sféry ležia vždy na polpriamke vychádzajúcej zo stredu O . Sú to vždy rôzne body s jedinou výnimkou bodu Z , ktorého oba priemety stereografický i pravouhlý splývajú so stredom O .

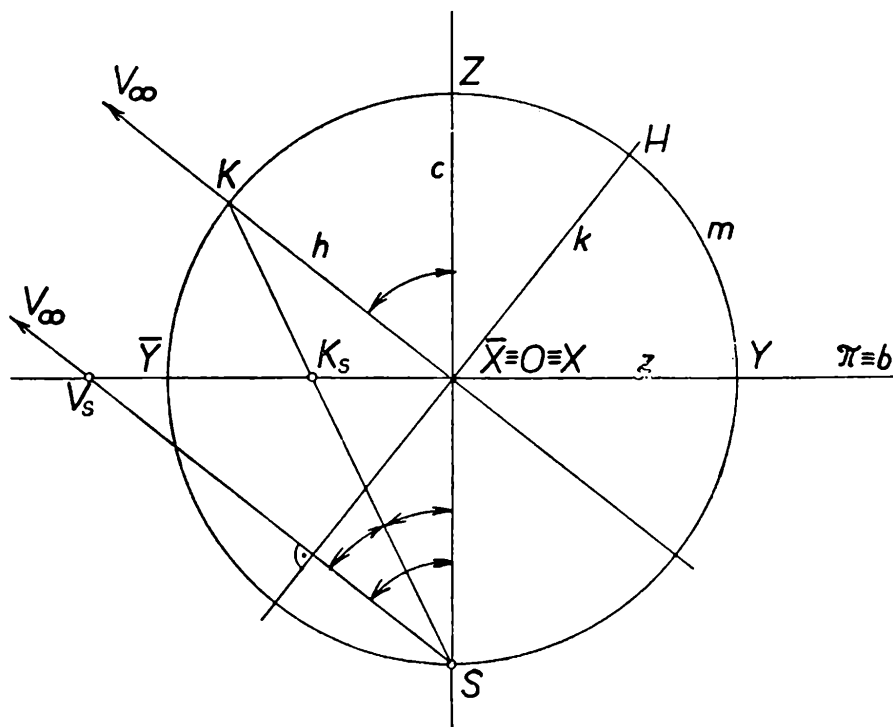
10. Pásmová kružnica (7) sa zobrazí v stereografickom premietaní

⁹⁾ Obvykle kreslíme len obrazy pólův ležiacich na vrchnej hemisfére. Keď máme zobrazit póly na dolnej hemisfére, prenášame obyčajne stred premietania do bodu Z .

podľa vety 1. do priamky alebo do kružnice. Do priamky sa zobrazí poludníkové pásmo, každé iné pásmo sa zobrazí do kružnice. Špeciálne obrazom rovníkového pásma je kružnica z .

Pretože každá pásmová kružnica (s výnimkou rovníka) pretína kružnicu z diametrálne (7), je stereografickým obrazom pásmovej kružnice v prípade poludníkového pásma priamka idúca stredom O , v inom prípade kružnica, ktorá pretína kružnicu z diametrálne, čiže ktorá ju rozpoľuje.

V záujme stručnosti pri vyjadrovaní budeme namiesto stereografický priemet pásmovej kružnice hovoriť jednoducho o *s t e r e o g r a f i c k o m p r i e m e t e* (obraz) *p á s m a*, alebo inokedy, keď to nebude na újmu zrozumiteľnosti, *proste o p á s m e*. Podobne budeme niekedy stereografický obraz pólu pásma nazývať stručne *p ó l o m p á s m a*.



Obr. 2a

11. Na obr. 2a sme zobrazili v pravouhlom premietaní na rovinu hlavného poludníka (7) sféru κ a na nej dve pásmové kružnice h , k , ktorých roviny sú kolmé na rovinu hlavného poludníka a kolmé navzájom. Obrazy sme označili rovnako ako útvary samotné. Obrazom sféry je kružnica m (O ; $r = 1$). Krajné body zvislého priemeru, ktorý je obrazom osi c , sú obrazmi bodov S a Z . Vodorovný priemer kružnice m je obrazom osi b , resp. roviny π a na ňom je obraz kružnice z . V strede O je obraz osi a a bodov X a $\bar{X}$. Kružnice h , k sa zobrazia do primerov kružnice m navzájom kolmých. Najvyšší bod K kružnice h je pólom kružnice k a podobne najvyšší bod H kružnice k je pólom kružnice h (veta 3). Na obr. 2a je zostrojený aj stereografický pól K_s .

Poznámka 2. Na obr. 2a je tiež naznačené, ako by sme mohli zostrojiť bod V_s na základe druhej časti vety 1b. Z obr. 2a vidno, že $\sphericalangle OSK_s = \sphericalangle K_sS V_s$ a podľa toho aj na obr. 2b je $\sphericalangle OXK_s = \sphericalangle K_sX V_s$.

(Pokračování)



0 původu setrvačných sil

PROF. RNDr. ZDENĚK HORÁK, DrSc., ČVUT, Praha

Z denní zkušenosti víme, že k uvedení každého tělesa z klidu do pohybu je třeba síly, a to i tehdy, děje-li se pohyb po velmi hladké vodorovné ploše nebo na lehce otáčivých kolech. I když je tření velmi malé, musíme totiž přemáhat znatelný odpor, který je projevem setrvačnosti těles a který pociťujeme stejně zřetelně, chceme-li pohyb tělesa zpomalit nebo je zcela zastavit. Také ke změně směru pohybu je třeba síly.

Tyto jevy nás poučují o setrvačnosti těles, kterou znal již Galilei, ale teprve *Isaac Newton* uveřejnil r. 1687 ve svém slavném spise *Philosophiae naturalis principia mathematica* zákon setrvačnosti v tomto znění:

Každé těleso setrvává v klidu nebo v přímočarém pohybu stálou rychlostí, pokud není nuceno působením nějaké síly svůj stav změnit. Síla uděluje tělesu zrychlení, které se rovná síle dělené jeho hmotností.

K objasnění zákona setrvačnosti jsme zvolili pohyb po vodorovné rovině, abychom vyloučili vliv zemské tíže, které podléhají všechna tělesa na povrchu Země. Newton geniálním způsobem zobecnil poznatek o zemské přitažlivosti a vyslovil zákon všeobecné gravitace:

Každá dvě tělesa se navzájem přitahují silou přímo úměrnou jejich hmotnostem a nepřímo úměrnou čtverci vzdálenosti jejich středů.

Zákon setrvačnosti spolu se zákonem síly a zákonem gravitačním jsou stále základem klasické mechaniky, ačkoli Newton sám si byl vědom některých obtíží, které se v nich skrývají. Probereme zde jen

filosofické problémy spojené se zákonem setrvačnosti. Tento zákon může být správný jen tehdy, když vztahujeme pohyb pozorovaného tělesa k vhodně zvoleným okolním tělesům, tj. když pozorovatel sám, nebo měřicí přístroje se pohybují v souhlase s tímto zákonem. Říkáme, že taková tělesa určují vztažnou neboli pozorovací soustavu souřadnic, danou například třemi k sobě kolmými osami. Zvolíme-li např. za osy souřadnic dvě vodorovné a jednu svislou hranu jídelního vozu, platí v této soustavě zákon setrvačnosti a zákon síly, pokud vlak stojí nebo jede po přímých vodorovných kolejích stálou rychlostí. Pozorujeme-li však sklenici vody v okamžiku, kdy se vlak rozjíždí, zjišťujeme, že vodní hladina zaujímá šikmou polohu a při brzdění vlaku se skloní na opačnou stranu. V zatáčce pozorujeme pak boční sklon hladiny způsobený odstředivou silou.

To jsou známé projevy tzv. *s e t r v a č n ý c h s í l*, které sice vyplývají ze zákona setrvačnosti, ale o jejichž původu tento zákon nic neříká.

Bylo by logické předpokládat, že setrvačné síly vznikají zrychleným pohybem vlaku vzhledem k okolnímu povrchu Země, k budovám na trati apod. Newton však ukázal svým známým pokusem s roztočeným vědrem vody, že parabolicky prohloubený vodní povrch se nevytváří při relativní rotaci vody vzhledem k stěnám vědra, s kterými je v přímém mechanickém styku, ale jen tehdy, když se voda točí vzhledem k Zemi. Mohli bychom tedy Zeměkouli pokládat za zdroj odstředivé síly.

Ukázalo se však, že ani rotace vzhledem k Zemi není pro vznik setrvačných sil rozhodující. Náznorně to vyplývá z pokusu, který poprvé uskutečnil již r. 1661 (tedy čtvrt století před vydáním Newtonova spisu) italský matematik *Vincenzo Viviani* (1622—1703) ve Florencii, ale kterým se nejvíce proslavil francouzský fyzik *Jean Bernard Léon Foucault* (1819—1868) o 190 let později (1851). Ukázal, že třicetikilogramová kovová koule, kývající na sedmašedesátimetrovém lanu v pařížském Pantheonu, nesledovala svými kyvy otáčivý pohyb Země, ale že její rovina kyvu zůstávala nehybná v prostoru určeném sluneční soustavou¹⁾. Uvedené pokusy jsou v souhlase s Newtonovým názorem, že původ setrvačných sil nelze hledat v nejbližších tělesech obklopujících rotující těleso ba ani v samé zeměkouli. Protože pak Newton zřejmě vylučoval vliv vzdálených nebeských těles, jako jsou Slunce, planety a stálice, dospěl k přesvědčení, že existenci setrvačných sil nelze vysvětlit působením žádných hmotných objektů. To ho vedlo k metafyzickému výkladu zákona setrvačnosti založenému na zcela

¹⁾ Podrobně je pohyb Foucaultova kyvadla popsán např. v článku Bř. Šikoly v *Rozhledech matematicko-přírodovědeckých* roč. 28 (1948/49) č. 4, str. 68, nebo v knize V. Trkal, *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*, ČSAV, Praha 1956.

abstraktním pojmu tzv. *absolutního prostoru*. Podle Newtona není tento prostor určen žádnými reálnými hmotnými objekty (např. nebeskými tělesy), ale sám má vliv na pohyb skutečných těles v tom smyslu, že zrychlený pohyb vzhledem k němu dává vznik setrvačným silám. Zákon setrvačnosti platí v tomto absolutním prostoru a ve všech soustavách os souřadnic, které se vzhledem k absolutnímu prostoru pohybují rovnoměrně a přímočaře. Protože tedy setrvačné síly nemají příčinu v žádném hmotném objektu, nazval je Newton silami *zdánlivými* (fiktivními).

Proti tomuto pojetí setrvačnosti se stavěli velmi rozhodně zejména dva velcí současníci Newtonovi

Známý irský filosof a biskup *George Berkeley* (1684—1753) dokazoval, že pohyb může být jen relativní, protože se musí vždycky dít v nějakém směru a směr je možno definovat jen pomocí nejméně dvou hmotných bodů (těles). Poukazoval na to, že odstředivá síla se objevuje jen při otáčení tělesa vzhledem k stálícím, a že tedy pohyb je třeba vztahovat k stálícím a v nich také hledat původ setrvačných sil.

Také slavný německý matematik a filosof *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646—1716) protestoval proti zavedení pojmu absolutního prostoru, který není nijak fyzikálně definován.

Naproti tomu neméně slavný švýcarský matematik a fyzik *Leonard Euler* (1707—1783) i jiní fyzikové pokládali myšlenku působení hvězd na pohyb těles za vědecky nepřijatelnou a fantastickou představu, která i podle *Bertranda Russela* z r. 1927 „zavání astrologií“. Když se pak ukázalo, že pohyby Měsíce kolem Země a planet kolem Slunce velmi dobře vyhovují Newtonovým principům a gravitačnímu zákonu, zvítězily Newtonovy názory a jeho mechanika slavila triumfy po celá dvě staletí.

Přece však zůstávalo stále nevysvětlenou záhadou, proč vzniká odstředivá síla právě jen při rotaci vzhledem k stálícím.

Žádný vědec není ochoten věřit na náhodu a ani s touto náhodou se fyzikové dodnes nemohou smířit. A je zřejmé, že náhodnost koincidence Newtonova absolutního prostoru s prostorem určeným stálícemi lze odstranit — a shodu obou prostorů logicky zdůvodnit — jedině předpokladem, který vyslovil již Berkeley a s kterým znovu vystoupil r. 1872 německý fyzik *Ernest Mach*.

Byl přesvědčen, že setrvačné síly vznikají při zrychleném nebo rotačním pohybu vzhledem k stálícím proto, že mají původ právě ve stálících.

Ve smyslu tohoto názoru, který Einstein nazval *Machovým principem*, si musíme představit, že hvězdy udržují pohyb Foucaultova kyvadla ve stálé, nehybné rovině proto, že na kyvadlo působí jistou silou, která se nazývá *Coriolisova síla* podle francouzského fyzika, který ji objevil.

K tomu je třeba dodat, že Machův názor, že setrvačné síly mají původ ve *stálicích*, je třeba pozměnit. Dnes víme, že všechny pozorované stálice tvoří hvězdnou soustavu *Mléčné dráhy* čili naší *Galaxii*. Toto seskupení hvězd, jehož rozměry jsou řádu několika desítek tisíc světelných roků, je jen jednou z ohromného počtu dalších galaxií, podobných naší Galaxii, které jsou rozloženy ve vesmíru, jehož hranice ani dnes ještě neznáme. Byly pozorovány až do vzdáleností desítek miliard světelných roků a všechny tyto hvězdné útvary se ve smyslu Machova principu podílejí na setrvačnosti těles a jsou zdrojem setrvačných sil. Plyne to ze skutečnosti, že nejen soustava Mléčné dráhy, ale i jiné galaxie, které se vzhledem k celému vesmíru otáčejí, jeví znatelné zploštění způsobené odstředivou silou.

Ačkoli *Albert Einstein* (1879—1955) založil na Machově principu svou obecnou teorii relativnosti²⁾ již před 50 lety, je tento princip ještě dnes předmětem řady vědeckých prací teoretických fyziků na celém světě.

Einstein, inspirován Machovou myšlenkou, si položil za úkol vyjádřit fyzikální zákony rovnicemi, které by nezávisely na tom, v které soustavě os souřadnic pohyb těles a síly na ně působící měříme.

Uvědomil si zejména, že setrvačné síly mají s gravitačními silami společnou jednu základní vlastnost, že totiž *udělují všem tělesům stejné zrychlení*. Tento dávno známý fakt zobecnil Einstein geniální intuicí na obecně platný princip *ekvivalence*, který tvrdí, že setrvačné a gravitační síly mají stejnou fyzikální podstatu a jsou ve všech svých účincích rovnocenné.

Na tomto principu založil Einstein svou teorii gravitace, která jej vedla k objevu tří nových efektů, které Newtonova teorie neznala.

Je to především *zakřivení světelných paprsků v gravitačním poli*, které bylo skutečně pozorováno u paprsků procházejících v blízkosti slunečního povrchu při úplném zatmění Slunce.

Dále je to *zpomalení běhu času v gravitačním poli*, které se projevuje snížením frekvence světelných kmitů, čili tzv. „rudým posuvem“ spektrálních čar. Tato gravitační dilatace času byla nejprve zjištěna v gravitačním poli Slunce a před několika lety i v gravitačním poli zemském.

(Pokračování)

* *

*

²⁾ Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Annalen der Physik 49 (1916).

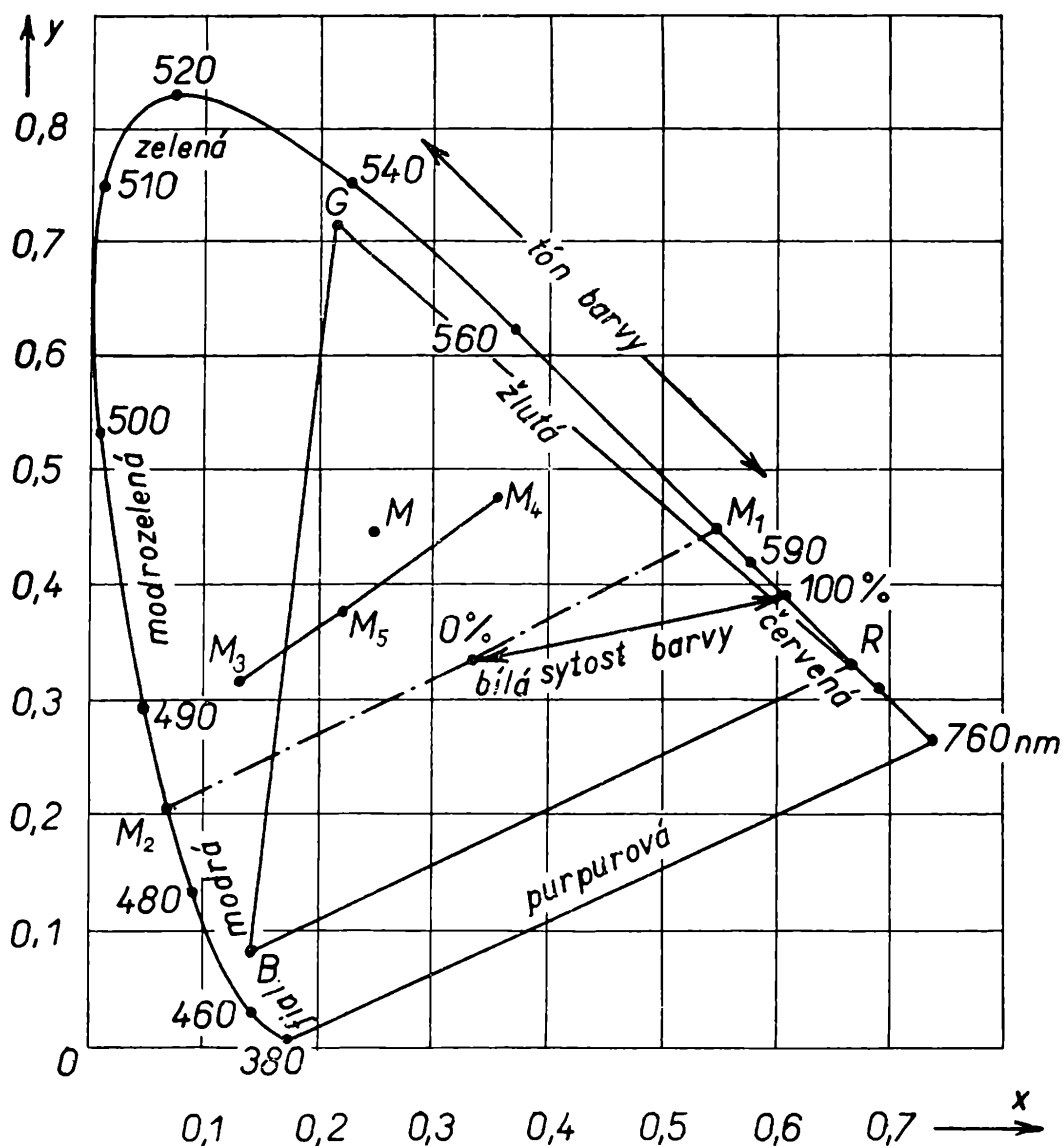
Barevná televize

ING. JIŘÍ PAZDERÁK, CSc, Praha

V době velkého rozmachu černobílé televize začíná se pomalu hlásit ke slovu i televize barevná. Přináší s sebou hodně složitých, ale i zajímavých problémů. Při jejich řešení se uplatňují poznatky mnoha technických oborů, jimž všem je společným jmenovatelem fyzika a matematika.

Princip přenosu barevných televizních obrazů

Vytváření barevných obrazů v televizi je založeno na principu *aditivního* (součtového) mísení tří základních barevných světél — červeného, zeleného a modrého. Fyzikální pravidla tohoto mísení



Obr. 1. Diagram barev MKO.

barev popisuje nauka o barvách — *kolorimetrie*. Jedna ze základních pouček kolorimetrie stanoví, že mísením těchto tří základních barev červené R (z angl. red), zelené G (green) a modré B (blue) v různém jejich poměru lze vytvořit celý obsah barev jiných, sytých i méně sytých, včetně nepestrých šedé a bílé. V *diagramu barev*¹⁾ Mezinárodní komise pro osvětlování (MKO) na obr. 1 je tento obsah barev reprodukovatelný v barevné televizi uzavřen plochou trojúhelníka, jehož vrcholy jsou právě základní barvy R , G , B . Úplně celou oblast všech existujících viditelných barev, ohraničenou v diagramu MKO podkovovitou křivkou sytých spektrálních barev, tedy v barevné televizi **r e p r o d u k o v a t n e l z e**; nicméně trojúhelník základních barev R , G , B zahrnuje oblast barev nejčastěji se vyskytujících kolem nás.

Aditivní mísení základních barev R , G , B , při kterém vzniká např. barva M , lze vyjádřit kolorimetrickou rovnicí

$$r(R) + g(G) + b(B) \Rightarrow M,$$

kde r , g , b značí počet jednotek (např. jasu) základních barev R , G , B . Výsledná barva M leží v diagramu barev MKO uvnitř trojúhelníka R , G , B blíže té základní barvě, která byla při mísení zastoupena větším počtem jednotek.

Kolorimetrická poučka o mísení barev je vratná. Právě tak jako lze mísením zvolených základních barev R , G , B v určitém jejich poměru vytvořit barvu novou, je možné každou barvu uvnitř trojúhelníka R , G , B ležící rozložit do určitých složek základních barev R , G , B . Rozklad barva M do složek základních barev lze obdobně vyjádřit kolorimetrickou rovnicí

$$M \Rightarrow r(R) + g(G) + b(B).$$

¹⁾ *Diagram barev MKO*, který byl v r. 1931 přijat Mezinárodní komisí pro osvětlování, znázorňuje graficky rozsah existujících barev, umožňuje jejich jednoznačnou definici a lze v něm provádět kolorimetrické operace s barvami. Základním rastrem diagramu barev je soustava souřadnic x , y , jejíž každý bod odpovídá určité barvě definované souřadnicemi x a y . V přírodě existující obsah barev je v diagramu ohraničen křivkou podkovovitého tvaru, na které jsou definovány všechny viditelné maximálně syté barvy spektrální (vznikající rozkladem bílého světla hranolem) v rozmezí vlnových délek (380 až 760) nm (určujících tón barvy). Směrem ke středu této oblasti se definují barvy s postupně ubývající sytostí, až v jejím středu o souřadnicích $x = 0,33$, $y = 0,33$ je barva bílá s nulovou sytostí. Dvě barvy přes tuto bílou protilehlé (např. barvy M_1 a M_2 v diagramu na obr. 1) jsou barvy doplňkové. Jejich vzájemným mísením může vzniknout barva bílá. Mísením dvou libovolných barev (např. M_3 a M_4) v určitém poměru vzniká barva třetí (M_5), která leží v diagramu na jejich vzájemné spojnici blíže té barvě, která se mísení účastnila větším počtem jednotek. Jestliže tedy mísením dvou základních barev lze získat lineární obsah barev, mísením tří základních barev (např. barev R , G , B v obr. 1) lze získat již plošný obsah barev.

Zmíněného *rozkladu* barev do základních barevných složek červené R , zelené G a modré B se v barevné televizi užívá ve *snímací soustavě* při přeměně barevného obrazu v elektrické signály. Barevný obraz snímané scény, který obsahuje libovolné barvy, rozkládá se do složek základních barev R, G, B podle analogické kolorimetrické rovnice

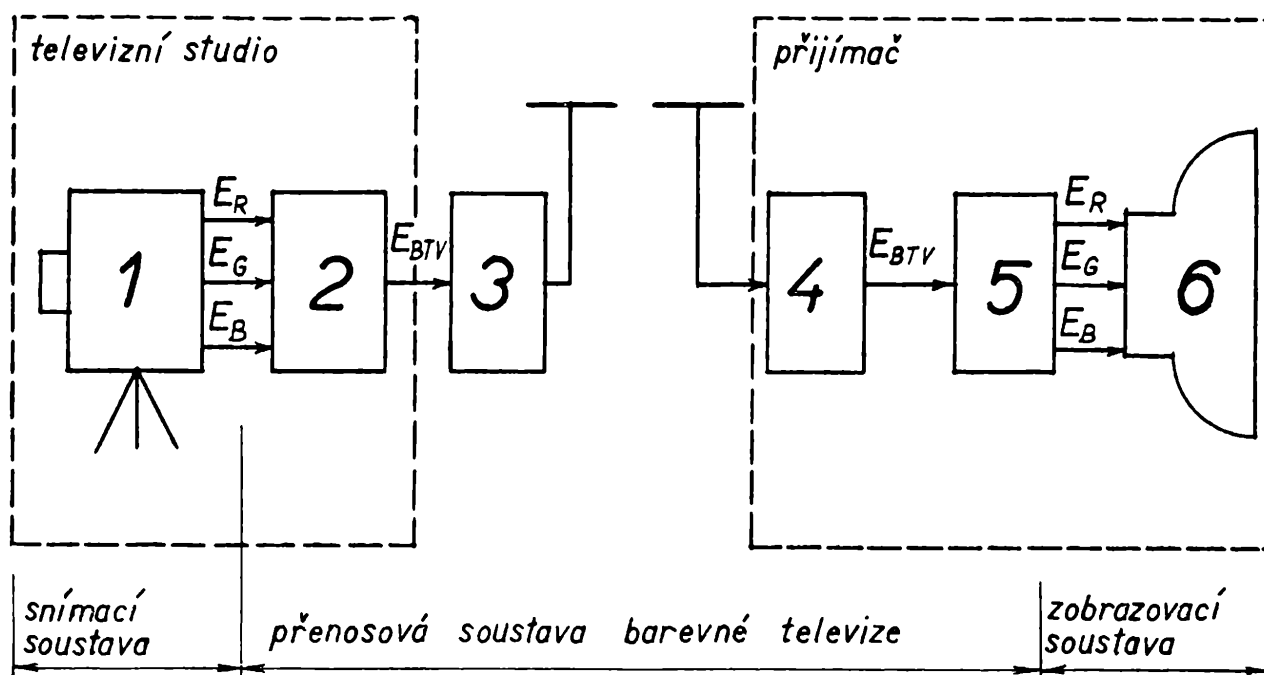
$$\begin{array}{ccccccc} \text{Obraz} & & \text{Červená} & & \text{Zelená} & & \text{Modrá} \\ \text{snímané} & \Rightarrow & \text{složka} & + & \text{složka} & + & \text{složka} \\ \text{scény} & & \text{obrazu} & & \text{obrazu} & & \text{obrazu} \end{array}$$

Jednotlivé složkové obrazy se snímají a přenášejí dále již ve tvaru elektrických signálů.

Naopak, na počátku zmíněného kolorimetrického principu *mísení* barev se užívá v *zobrazovací soustavě* barevné televize při přeměně elektrických signálů v reprodukováný barevný obraz. Jednotlivé složkové obrazy v základních barvách R, G, B se mísí podle kolorimetrické rovnice

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Červená} & & \text{Zelená} & & \text{Modrá} & & \text{Reprodukováný} \\ \text{složka} & + & \text{složka} & + & \text{složka} & \Rightarrow & \text{barevný} \\ \text{obrazu} & & \text{obrazu} & & \text{obrazu} & & \text{obraz} \end{array}$$

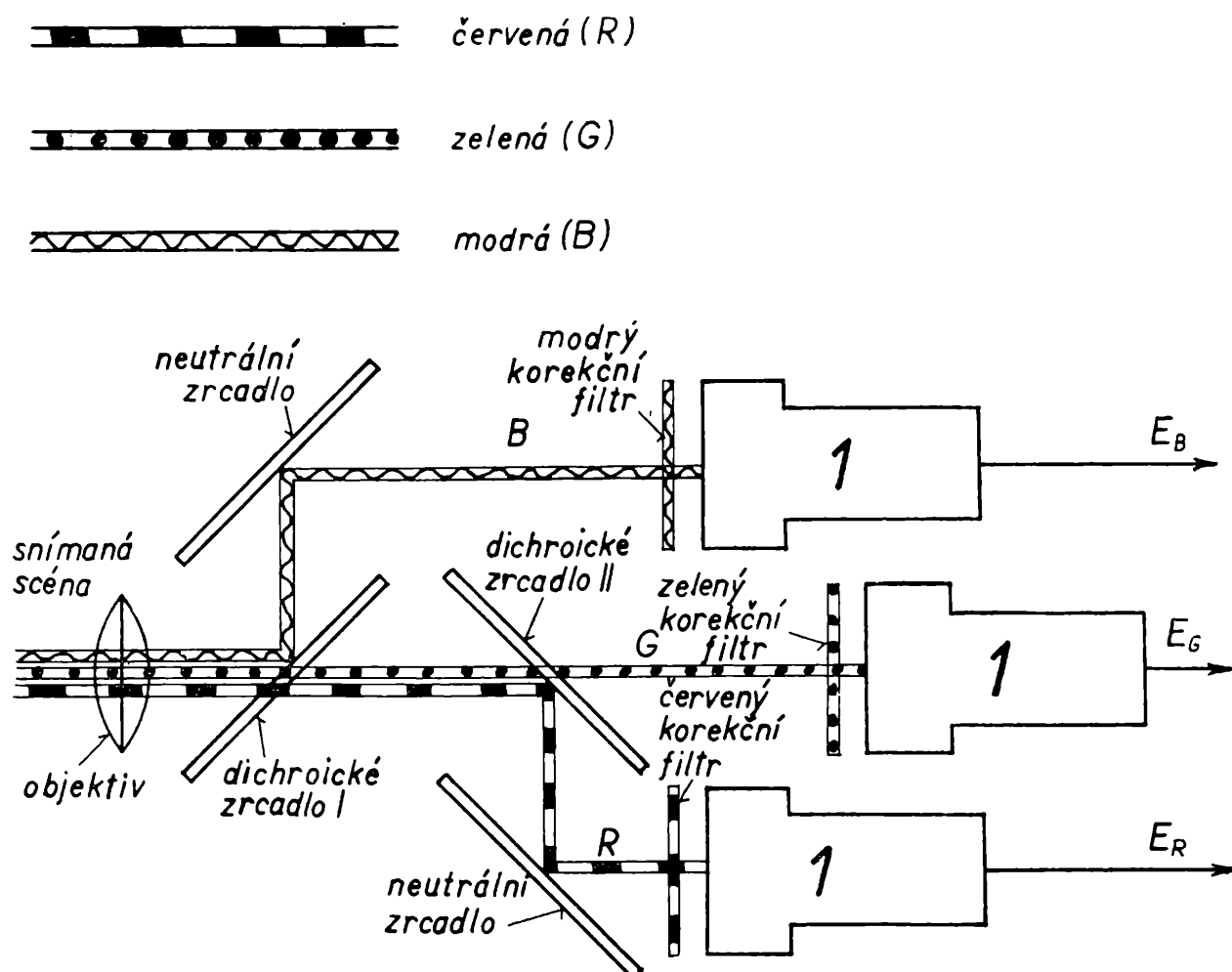
v jediný reprodukováný barevný obraz snímané scény.



Obr. 2. Princip přenosu barevných televizních obrazů. 1. Kamera barevné televize. 2. Kódování signálů. 3. Vysílač. 4. Zpracování přijatého signálu. 5. Dekódovací obvod. 6. Barevná obrazovka.

Princip přenosu barevných televizních obrazů znázorňuje obr. 2. Ve *snímací soustavě* televizní kamery se obraz snímané scény rozkládá do tří složkových obrazů červeného, zeleného

a modrého, které se snímají každý samostatnou snímací elektronkou obdobně jako v černobílé televizi a přeměňují se v tři obrazové signály tzv. *základní barevné signály* — červený E_R , zelený E_G a modrý E_B . Zatímco v černobílé televizi stačí k přenosu snímané scény jediný obrazový signál, v barevné televizi jsou nutné obrazové signály tři. Tyto tři základní barevné signály se však v tomto tvaru nevysílají, ale kódují se v jediný složený tzv. *úplný signál barevné televize*, jehož skladba závisí na zvolené *přenosové* soustavě barevné televize. Úplný signál barevné televize E_{BTV} se v televizním studiu dále zpracovává a přenáší se prostřednictvím místních nebo dálkových televizních spojů k vysílači, který jej vysílá do prostoru. V přijímači barevné televize po obvyklém zpracování přijatého signálu se úplný signál barevné televize E_{BTV} opět dekóduje v dekódovacích obvodech přijímače a obnovují se tak původní tři základní barevné signály E_R , E_G , E_B . Tyto signály se vedou do *zobrazovací* soustavy přijímače, kterou je obvykle barevná obrazovka a v ní se přeměňují opět ve tři složkové obrazy snímané scény v základních barvách červené, zelené a modré. Smísením těchto složkových obrazů na stínítku barevné obrazovky vzniká reprodukováný barevný obraz.



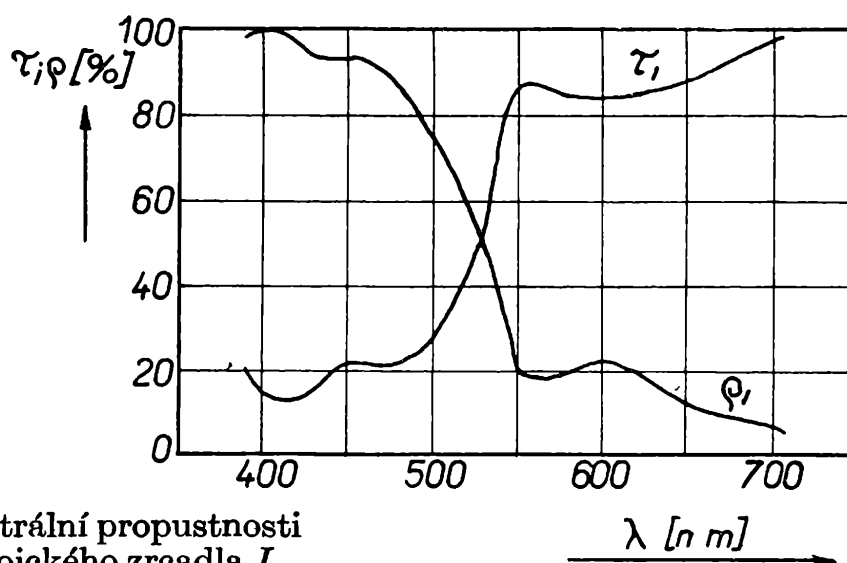
Obr. 3. Snímací soustava kamery barevné televize. 1. Snímací elektronka.

V tomto místě je třeba připomenout, že při přenosu barevných televizních obrazů zůstávají zachovány všechny základní principy černobílé televize, tj. především rozklad obrazu snímané scény do řádkového televizního rastru ve snímací soustavě a s ním synchronní sklad reprodukováného obrazu v zobrazovací soustavě. Stejně i současný přenos zvukového doprovodu, který není ve schématu na obr. 2 uveden, provádí se stejně jako v černobílé televizi.

Z principu přenosu barevných televizních obrazů schematicky uvedeného v obr. 2 vyplývá, že základní problémy barevné televize, které jsou proti černobílé televizi nové, jsou především ve snímacích, přenosových a zobrazovacích soustavách barevné televize.

Snímací soustavy barevné televize

Princip rozkladu barevného obrazu snímané scény sledujeme na klasickém řešení studiové kamery barevné televize se třemi snímacími elektronkami (obr. 3). Snímací soustava této kamery užívá k rozkladu do složek polopropustných dichroických a neutrálních zrcadel a barevných korekčních filtrů.



Obr. 4. Křivky spektrální propustnosti τ_I a odrazu ρ_I dichroického zrcadla I .

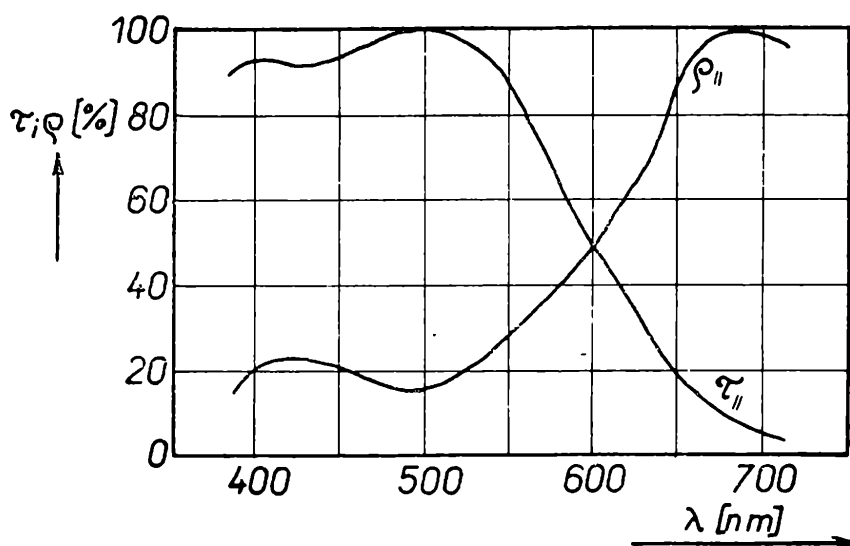
Barevné světlo od snímané scény přicházející objektivem do snímací soustavy kamery dopadá nejdříve na dichroické zrcadlo I , které je selektivně polopropustné: odráží modrou složku dopadajícího světla a ostatní složky propouští. Křivky spektrální propustnosti a odrazu tohoto dichroického zrcadla jsou znázorněny v diagramu na obr. 4. Odražená modrá složka (obr. 3) se prostřednictvím neutrálního (spektrálně rovnoměrně odrážejícího) zrcadla dále odráží na snímací elektronku, ale ještě se upravuje modrým korekčním filtrem. Jeho úkolem je odstranit z procházejícího světla všechny zbývající nemodré složky tak, aby se na snímací elektronce zobrazila pouze modrá složka obrazu snímané scény.

Přeměna této složky obrazu ve snímací obrazové elektronce v elek-

trický signál E_B se provádí tak, jako by šlo o černobílý obraz snímané scény, tedy obdobně jako v černobílé televizi.

Vlastní proces této opticko-elektrické přeměny je závislý na typu snímací elektronky (v současné době hlavně *superortikon* nebo *vidikon*). V podstatě však vždy se k optickému obrazu zobrazenému na snímací elektronce vytváří paralelně elektrický (nábojový) obraz ve snímací elektronce, který se snímá elektronovým paprskem řádkujícím ve tvaru televizního rastru. V obvodu tohoto elektronového paprsku vzniká pak příslušný elektrický signál, jehož velikost je odvislá od jasu snímaných míst obrazu. Poněvadž tento signál nese obrazovou informaci nazývá se *obrazový* signál. Obrazový signál vystupující ze snímací elektronky snímající modrou složku obrazu se dále nazývá základní barevný signál modrý E_B pro odlišení od ostatních dvou obrazových signálů kamery barevné televize.

Obdobně se v kameře barevné televize vytváří základní barevný signál červený E_R (obr. 3). Červená složka barevného světla zbývajícího po průchodu dichroickém zrcadlem I se odráží od dichroického zrcadla II , které odráží červenou složku dopadajícího světla a zelenou propouští. Křivky spektrální propustnosti a odrazu tohoto dichroického zrcadla jsou znázorněny v diagramu na obr. 5. Červená složka (obr. 3) se prostřednictvím neutrálního zrcadla odráží na snímací elektronku, když se před tím ještě upravuje červeným korekčním filtrem. Snímací elektronka přeměňuje červenou složku obrazu v základní barevný signál červený E_R .

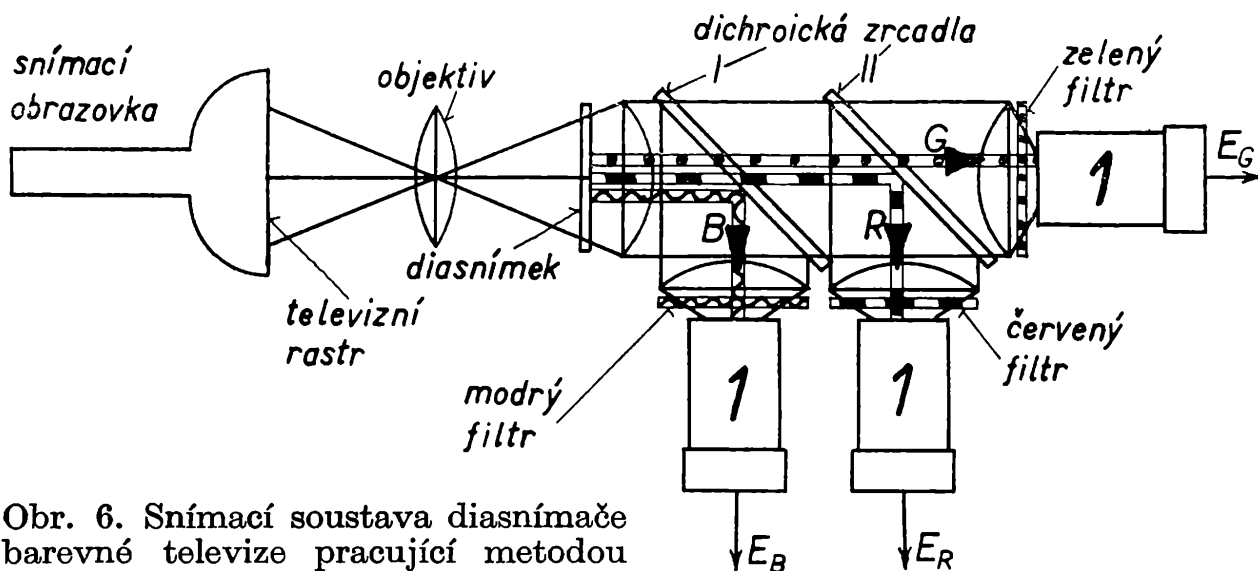


Obr. 5. Křivky spektrální propustnosti τ_{II} a odrazu ρ_{II} dichroického zrcadla II .

Zelená složka barevného světla zbývajícího po průchodu dichroickým zrcadlem II se upravuje zeleným korekčním filtrem, vytváří na snímací elektronce obraz zelené složky snímané scény a přeměňuje se v ní v základní barevný signál zelený E_G .

Kamera barevné televize je typickým zdrojem televizního signálu využívaným v televizních studiích i v exteriérech při snímání živých scén. Je však i značně složitým a drahým zařízením náročným na přesnost jejích optických členů i stabilitu elektrických obvodů.

Pro snímání barevných televizních obrazů z filmů nebo z diasnímků se užívá buď popsané snímací soustavy (obr. 3) nebo častěji tzv. *metody snímání běžícím paprskem* (angl. flyingspot, čti flajingspot). Při tomto způsobu snímání se barevný film nebo diasnímek prosvětluje speciální snímací obrazovkou a procházející světlo se rozkládá do základních barevných složek. Přeměna těchto složek v základní barevné signály se ale neprovádí zmíněnými obrazovými snímacími elektronkami, ale jednodušeji fotoelektrickými násobiči. (Fotoelektrický násobič je elektrovakuový prvek, který světelný tok dopadající na jeho fotokatodu přeměňuje v slabý proud elektronů, který se zesiluje v elektronooptickém systému násobiče elektronů.) Princip flyingspotové snímací soustavy znázorňuje obr. 6. Na stínítku snímací obrazovky se vytváří



Obr. 6. Snímací soustava diasnímače barevné televize pracující metodou běžícího paprsku (flyingspot). 1. Fotoelektrický násobič.

intenzívně svítící bílý televizní rastr (např. formátu 60×80 mm² s poměrem výšky k šířce v televizi obvyklým 3 : 4), který se objektivem zobrazuje do roviny snímaného barevného diasnímku (nebo filmu). Světlo procházející diasnímkiem není však už bílé, ale je modulováno co do intenzity i barvy podle obrazového obsahu diasnímku. Světelný paprsek snímacího rastru probíhá po řádkách postupně celou plochu diasnímku, prosvětluje jej a mění svoji intenzitu i barvu podle obrazového obsahu. Procházející světelný paprsek se poté usměrňuje na dichroické zrcadlo I (s obdobnými vlastnostmi jako u kamery barevné televize), od kterého se odráží jeho modrá složka. Ta se dále upravuje modrým korekčním filtrem a dopadá na fotokatodu fotoelektrického násobiče, který ji proměňuje v elektrický obrazový signál — základní

barevný signál modrý E_B . Obdobně se po odrazu od dichroického zrcadla II odráží červená složka světla, která po průchodu červeným korekčním filtrem dopadá na fotokatodu fotoelektrického násobiče a přeměňuje se v základní barevný signál červený E_R . Zelená složka barevného světla procházející oběma dichroickými zrcadly po průchodu zeleným korekčním filtrem dopadá na fotoelektrický násobič, kde se přeměňuje v základní barevný signál zelený E_G .

Předností uvedené metody snímání běžícím paprskem proti dříve uvedené snímací soustavě kamery barevné televize se snímacími obrazovými elektronkami je, že rozklad barevného světla procházejícího snímaným diasnímkiem (nebo filmem) je nenáročný na optickou přesnost chodu paprsků po průchodu diasnímkiem. Naproti tomu metoda snímání běžícím paprskem není z principiálních důvodů použitelná při snímání otevřených živých scén ve studiu i mimo ně.

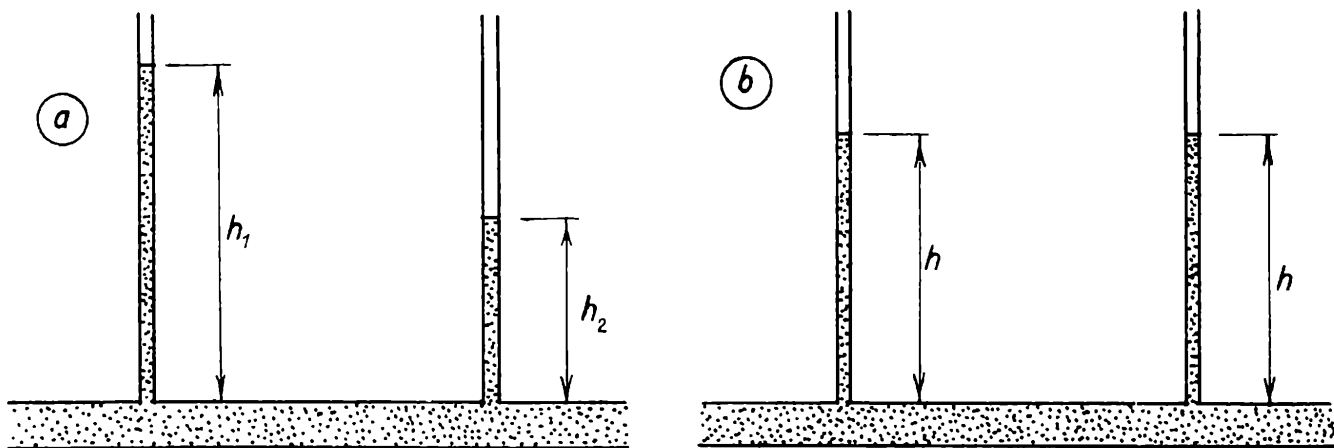
Kamera barevné televize s obrazovými snímacími elektronkami (obr. 3) i princip metody snímání běžícím paprskem (obr. 6) představují dvě typické snímací soustavy barevné televize, které provádějí opticko-elektrickou transformaci snímané scény v základní barevné signály E_R , E_G , E_B .

(Dokončení)

Supratekutost

ING. JIŘÍ KODEŠ, CSc, Praha

Nachází-li se kapalina v klidu a chceme-li ji uvést do pohybu, pak na ni musíme působit silou. Účinkem této síly se kapalina uvede do pohybu a říkáme, že teče. Tedy pro to, aby kapalina mohla téci např. nějakou trubicí nebo potrubím, musí mezi konci trubice existovat rozdíl tlaků. O tom, že nějakým potrubím protéká kapalina se můžeme

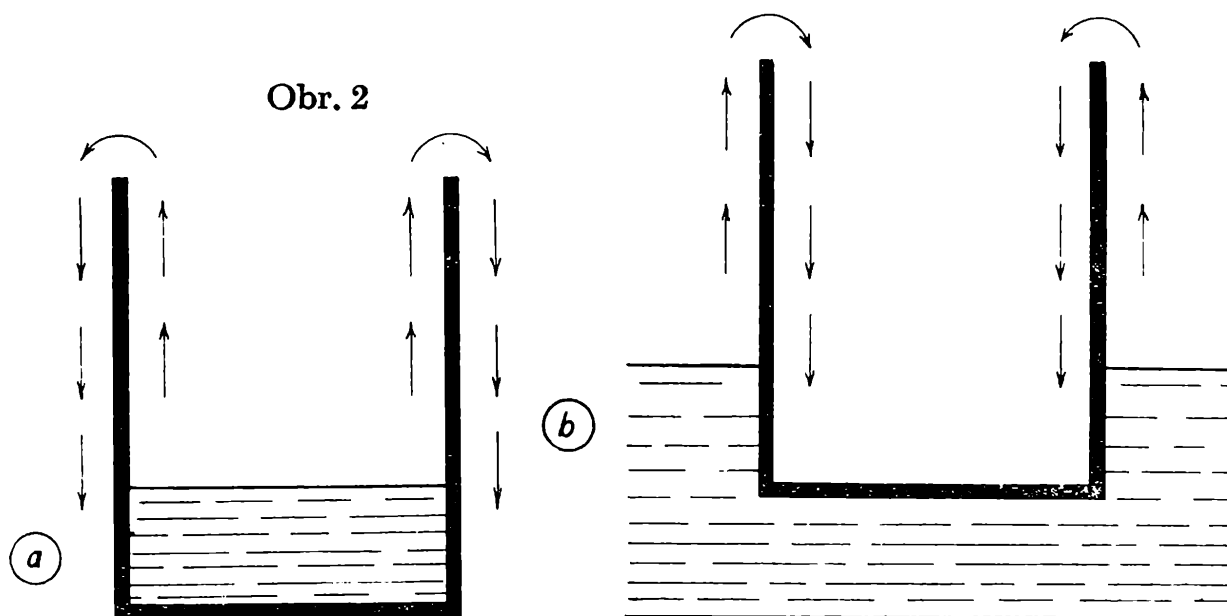


Obr. 1

přesvědčit, změříme-li Pitotovou trubicí tlak kapaliny ve dvou různých místech potrubí (obr. 1a). Výška sloupce kapaliny v Pitotově trubicí je pak úměrná tlaku kapaliny v měřeném místě. Na obr. 1a jsou výšky kapaliny v Pitotově trubicí h_1 a h_2 , přičemž $h_1 > h_2$. Z toho tedy plyne, že tlak $p_1 > p_2$ a kapalina teče zleva doprava. Bude-li rozdíl tlaků mezi konci potrubí nulový, výška kapaliny h v obou Pitotových trubicích bude stejná (obr. 1b), kapalina neteče.

Snížujeme-li teplotu běžných kapalin pod bod mrazu (tj. $0\text{ }^{\circ}\text{C}$), pak již při několika stupních až desítkách stupňů „pod nulou“ ztrácí schopnost téci a přecházejí z kapalného do tuhého skupenství. Snížení teploty způsobuje tak kvalitativní změnu jednoho skupenství ve druhé. Podobně jako u kapalin, vyvolá u plynů snížení teploty hluboko pod bod mrazu kvalitativní změnu skupenství plynného v kapalném.

Snížíme-li teplotu plynného helia na $4,2\text{ }^{\circ}\text{K}$ ($0\text{ }^{\circ}\text{C} \equiv 273,15\text{ }^{\circ}\text{K}$), pak při této teplotě přechází plynné helium v kapalném. Získanou kapalinu nazýváme kapalným heliem. Při těchto teplotách má kapalném helium



vlastnosti normálních kapalin a aby mohlo protékat nějakou trubicí, je zapotřebí rozdílu tlaků (viz obr. 1a). Snížíme-li teplotu kapalného helia na $2,2\text{ }^{\circ}\text{K}$, dochází náhle ke kvalitativní změně jeho chování jakožto kapaliny. V tomto případě může kapalném helium téci touto trubicí bez rozdílu tlaku mezi jejími konci (obr. 1b). Tato vlastnost kapalného helia téci bez rozdílu tlaků se nazývá *supratekutost*. Supratekuté helium bývá též označováno jako *helium II*. Kromě této vlastnosti se supratekuté helium vyznačuje velmi dobrou tepelnou vodivostí. Tepelný rozruch se šíří v supratekutém heliu všemi směry rychlostí až 20 m s^{-1} . Uvedeme-li nějakou vnější silou supratekuté helium do rotačního pohybu, potom tento pohyb ustane (to znamená

přestane pohyb kapaliny v daném směru) až za několik hodin od okamžiku, kdy přestane působit vnější síla. Jinou velmi zajímavou vlastností supratekutého helia je jeho schopnost vytékat z nádoby. Na obr. 2a je otevřená nádoba naplněná supratekutým heliem. Za velmi krátkou dobu se nádoba samovolně vyprázdní. Supratekuté helium z ní „vyteče“ po stěnách nádoby (viz směr šípek na obr. 2a). K reciprokému jevu, tj. samovolnému naplnění nádoby, dochází tehdy, jestliže prázdnou nádobu částečně ponoříme do supratekutého helia (obr. 2b).

Uvedené chování supratekutého helia vede k domněnce, že vazkost supratekutého helia je rovna nule.

Supratekuté vlastnosti helia se začaly studovat teprve začátkem šedesátých let našeho století. Je to velmi krátká doba k tomu, abychom o mechanismu supratekutosti již vše věděli. Předpokládá se však, že je způsobena odlišným chováním atomů helia v supratekutém a tekutém stavu. Teče-li kapalina nějakou trubicí, přičemž velikosti rychlosti jednotlivých atomů a molekul tvořících kapalinu je různá, pak vzájemnou interakcí tohoto neuspořádaného pohybu dochází k víření kapaliny. V supratekutém stavu se však určitá skupina atomů helia pohybuje stejně velkou rychlostí tímž směrem. Skupina takto se pohybujících atomů je nazývána *shustkou*. Předpokládá se, že v supratekutém stavu tvoří atomy helia takovéto shustky, přičemž proces vzájemných srážek atomů helia mezi sebou i se stěnami trubice je minimální. Dochází tudíž k velmi malé ztrátě energie atomů, neboť srážkový proces je minimální. Uspořádaný pohyb atomů ve shustku je tedy nutný pro existenci supravodivého stavu.



NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM

Papírový pětiúhelník

Představte si pravidelný pětiúhelník vystřižený z papíru, na němž je narýsováno všech pět jeho úhlopříček. Rozstříhneme-li tento pětiúhelník podél všech úhlopříček, rozpadne se obrazec na 11 částí. Vypočtěte, která z těchto částí má největší obvod.

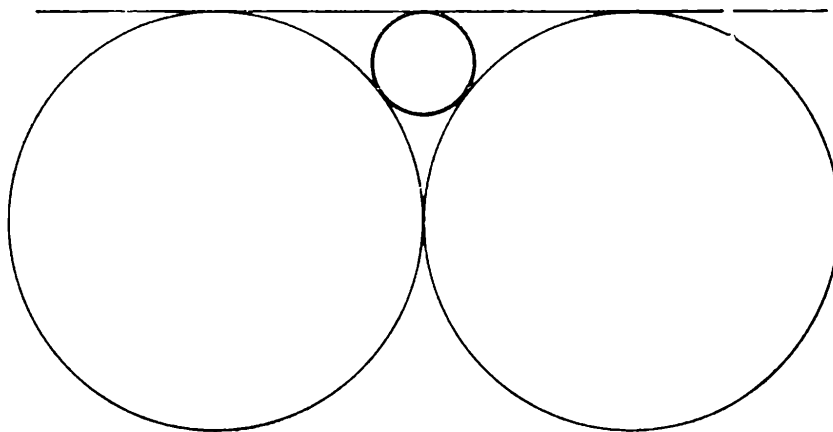
J. S.

Řešení úloh zašlete do redakce našeho časopisu. Nejlepší rádi otiskneme.

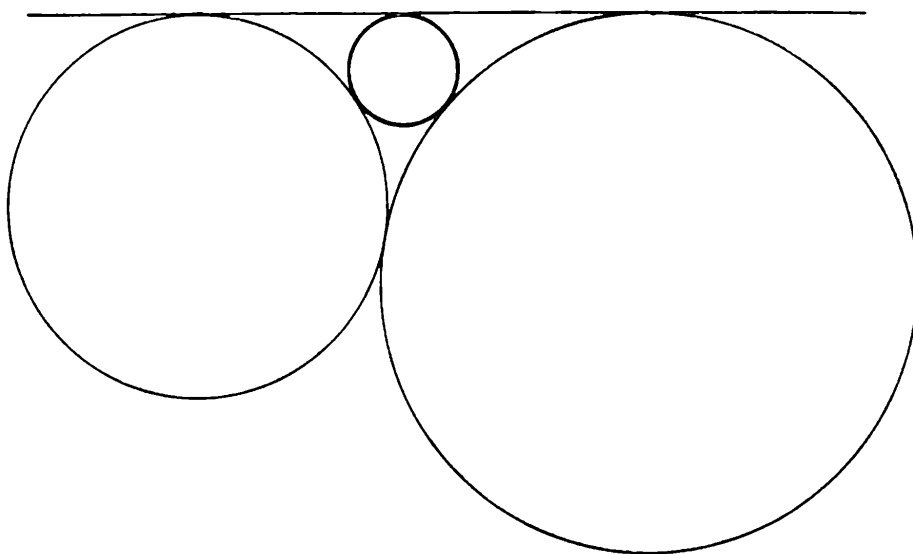
Vepsaná kružnice

Na obrázku 1 jsou naryšovány dvě shodné kružnice poloměru r a jejich společná tečna. Menší kružnice se dotýká obou větších i přímky. Pokuste se vypočítat poloměr menší kružnice pomocí r . Ještě vám napovíme, že k tomu stačí Pythagorova věta.

Pro starší máme podobnou úlohu (obr. 2) v níž dané kružnice (mají poloměry r_1, r_2) nejsou shodné. Ale i zde vystačíme s Pythagorovou větou.



Obr. 1



Obr. 2

Výročí školy

V r. 1908 byla v Turnově založena reálka, předchůdkyně pozdějšího reálného gymnasia a nyníjší SVVŠ. V r. 1968 bude proto sjezd všech dosavadních abiturientů. K tomuto významnému jubileu — významnému jistě aspoň pro Turnováky — předkládám tuto drobnou úložku. Do volných políček připojené tabulky vepište čísla od 7 až do 22, a to

				2
				2
				2
				2
				2
2	2	2	2	2

tak, aby součty čísel (včetně už zapsaných dvojek) v každém řádku, v každém sloupci i v obou úhlopříčkách daly dobu trvání turnovského ústavu. Rozumí se, že doba trvání bude dána počtem let. A ještě poznámku; jedna úhlopříčka začíná dvojkou v pravém rohu dole a druhá úhlopříčka začíná dvojkou v posledním sloupci nahoře.

S. H.

MO

List druhý — tentokrát o výběru soutěžních úloh

Milí řešitelé soutěžních úloh,

jeden z Vás poslal ústřednímu výboru MO korespondenční lístek, v němž si stěžuje na výběr a formulaci olympiádních úloh. Protože se nám zdá, že v odpovědi na tyto stesky je ledacos, co by mohlo zajímat všechny řešitele, odpovídáme dvěma otevřenými listy.

Tedy dnes o tom výběru úloh. Autor lístku, žák III. ročníku SVVŠ, píše, že mu moc vadí „...výběr nepraktických příkladů — vždyť to každého spíš odradí — aspoň nižší kategorie by měly být voleny s ohledem na duševní obzory žáků: V olympiádách se vyskytuje celá řada příkladů, doslova bůhví kde nalezených, přitom je celá řada neméně těžkých příkladů, které jsou bližší učební látce škol — takové, jaké jsou v sovětské literatuře běžné, viz Lidskij¹⁾), sbírky maturitních pří-

¹⁾ Je míněna sbírka, Lidskij a kol., *Sbírka úloh z elementární matematiky*, český překlad SPN, Praha 1965.

kladů ze sovětské literatury — nemělo by to pro MO daleko větší cenu? Nejsou nevhodné příklady příčinami pozdějšího krachu Mezinárodní MO?“

Co jsou to „praktické příklady“? Autor lístku má asi na mysli úlohy, jejichž náměty jsou vzaty z aplikací matematiky. Jenže s úlohami tohoto druhu je trápení; k jejich řešení potřebujeme totiž tři věci:

a) mít jisté znalosti z oboru, na který matematiky používáme (tj. z fyziky, technického oboru, ekonomie apod.);

b) umět z daného fyzikálního, technického či jiného problému zformulovat matematickou úlohu;

c) znát matematický aparát potřebný k řešení této úlohy.

V okruhu středoškolské matematiky je situace asi tato: potřebný matematický aparát při aplikacích je zpravidla dosti jednoduchý, matematické „jádro“ řešení je chudé a nezajímavé. Nejobtížnější část řešení bývá složka b) — vzpomeňte jen na neblaze proslulé „slovní úlohy“, s nimiž jste se možná leckdy dost potýkali. Jindy se část b) redukuje na pouhé dosazení do vzorce; takové úlohy se ovšem do olympiády nehodí. Také není právě sympatické, předpokládat v matematické olympiádě hlubší znalosti z jiných předmětů, popřípadě i mimoškolských oborů: snadno bychom se pak mohli setkat s námitkou, že to není matematická soutěž. A tato situace je tím horší, čím mladší jsou soutěžící (kategorie *D* a *C*).

Rozhodně není možné hledat náměty pro soutěžní úlohy v takových sbírkách, jako je Lidskij. Je tu sice hodně pěkných úloh a dobře se hodí pro přípravu na olympiádu — proto byla sbírka přeložena; ale sbírka neobsahuje ani větší množství úloh soutěžního charakteru ani úlohy „praktické“. Soutěžní úlohy nemohou být úlohy „bližší učební látce škol“, naopak, musí vést účastníky, aby se přiučili novým metodám, novým myšlenkovým postupům. Chceme-li hledat vzory pro soutěžní úlohy v sovětské literatuře nebo jinde v zahraničí, musíme vzít např. letáky moskevských olympiád nebo Straszewiczovu sbírku úloh z polských matematických olympiád²⁾; ovšem najdeme převážně úlohy ryze teoretické — nikoli „praktické příklady“, a velmi mnoho úloh dosti vzdálených běžné školské matematice.

Prolistujete-li, milí přátelé, v minulých ročnících Rozhledů texty úloh z dosavadních devíti mezinárodních olympiád, zjistíte, že také tyto úlohy nejsou „praktické příklady“, ale že jsou to většinou zcela netradiční úlohy vyžadující od řešitele dobrý nápad, někdy trochu experimentování, dosti schopnosti deduktivně uvažovat — zkrátka různé složky toho, co nazýváme odborně „matematická erudice“. Rozhodně tedy není příčinou našeho malého úspěchu na mezinárodních

²⁾ Straszewicz, *Zadania z olimpiad matematycznych*, Warszawa.

olympiádách (proč mluvit o krachu?), že „naši reprezentanti nejsou vedeni k řešení praktických příkladů blízkých učební látce“.

A ještě něco o zdroji našich soutěžních úloh. Nejsou „doslova bůhvíckde nalezené“; je pravda, že přihlížíme k vhodným úlohám z domácích soutěží cizích zemí (např. ze Sovětského svazu, Polska, Maďarska, NDR, ale i USA, Francie aj.); ovšem většina našich úloh jsou původní práce našich autorů. Jednota čs. matematiků a fyziků vypsalala nepřetržitě probíhající konkurs na soutěžní úlohy; došlé návrhy se čas od času velmi důkladně recenzují; přijaté úlohy se zařadují do archívu MO a podle potřeby pak do soutěže.

V příštím dopise si povíme něco o formulaci soutěžních úloh, které nám samým dělají velmi často těžkou hlavu.

Zdraví Vás

doc. Jan Vyšín

FO

ČSM nejúspěšnějším řešitelům ve fyzikální olympiádě

ING. BOHUMIL VYBÍRAL, zástupce ČSM v ÚVFO

Československý svaz mládeže dobře spolupracuje s výbory fyzikální olympiády a přispívá k popularizaci této soutěže mezi nadanými mladými fyziky. Tato spolupráce se projevuje zejména tím, že ČSM financuje vhodné odměny, které povzbuzují nejlepší řešitele i ostatní žáky k další práci ve fyzikální olympiádě.

Letošního roku např. ústřední výbor fyzikální olympiády projednal s ústředním výborem ČSM odměny pro nejlepší fyziky na celostátním soustředění úspěšných řešitelů fyzikální a matematické olympiády kategorie *B* (resp. *A*, jedná-li se o žáky, kteří ještě budou studovat dále na SVVŠ, resp. SPŠ). Na soustředění se přednáší fyzika a matematika na vysokoškolské úrovni a aby se zvýšila účinnost soustředění, dělají se z fyziky kontrolní testy. Účast na celostátním soustředění, jehož

pořadatelem je ministerstvo školství, je pro žáky odměnou, aby mohli obohatit své znalosti dalšími poznatky. Někteří účastníci — obvykle ve fyzice slabší — se však mylně domnívají, že má jít především o rekreaci, a proto vidí kontrolky neradi. Na závěr soustředění se z fyziky studenti vyhodnotí na základě výsledků kontrol z látky probírané v soustředění, přičemž se přihlédne k jejich aktivitě při výkladu.

Nejlépe vyhodnocení účastníci celostátního soustředění, které se konalo na závěr minulého školního roku (19. června až 8. července 1967) v Hranicích na Moravě byli:

1. Filipenský Jan, SPŠ El Brno, Leninova,
2. Kawalec Miroslav, SVVŠ Ostrava - Havířov,
3. Treybalová Věra, SVVŠ Brno, Koněvova,
4. Leicman Jiří, SPŠS Brno, Sokolská,
5. Peland Jan, SVVŠ Praha 6, Parlérská,
6. Šilhavý Miroslav, SVVŠ Třebíč,
7. Bulla Vladimír, SVŠ Košice, Kovačská,
8. Nagy Petr, SVŠ Banská Bystrica,
9. Vlachová Bohumila, SVVŠ Brno, Křenová,
10. Simerský Mojmir, SPŠ Ve, Rožnov pod Radhoštěm.

Všem uvedeným studentům byla zaslána jako odměna od ústředního výboru ČSM kniha prof. RNDr. Zdeňka Horáka, DrSc., a doc. inž. dr. Františka Krupky „Fyzika“ — příručka pro fakulty strojního inženýrství.

Podobně krajský výbor ČSM v Brně odměnil knihou prof. inž. Jiřího Kracíka, DrSc., a kolektivu „Vyšší škola technické fyziky“ tři nejlepší fyziky kategorie *B* a osm nejlepších fyziků kategorie *C* krajského soustředění fyzikální a matematické olympiády, které se konalo ve dnech 19. června až 1. července 1967 v Jihlavě - Helenině.

Spolupráce krajského výboru ČSM v Brně s krajským výborem fyzikální olympiády se projevuje zvláště výrazně. V Jihomoravském kraji již se stalo tradicí, že krajský výbor ČSM odměňuje každoročně tři nejlepší řešitele z každé kategorie (*A*, *B*, *C*) 2. kola fyzikální i matematické olympiády vyhlídkovým letem nad Brnem. První let se uskutečnil v r. 1961, ve školním roce 1966/67 byl let uspořádán již po sedmé.

Vyhlídkový let provádí aeroklub Svazarmu v Brně na malých letadlech typu Aero 45, Meta-Sokol, resp. Morava L-200. Záslouhou našeho významného sportovního letce Františka Nováka, světového rekordmana v dálkovém přeletu na sportovním letadle, si mladí fyzikové a matematikové vyzkoušeli i stav beztláče. Pilot letí ve svislé rovině po přibližně kruhovém oblouku takového vhodného poloměru, aby odstředivé zrychlení ve vrcholu dráhy vyrovnalo tíhové zrychlení.

Věříme, že spolupráce s Československým svazem mládeže se bude dále rozvíjet.



R Ů Z N Ě

Kam po maturitě?

DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK, ČVUT, Praha

Vykonáte-li maturitní zkoušku na střední všeobecně vzdělávací škole a nebudete-li přijat na vysokou školu nebo z finančních či jiných důvodů na ni nemůžete vstoupit, pak budete v celkem nepříjemné situaci. Abiturient není totiž ničím „vyučen“ a jeho všeobecné vzdělání je dosud málo ceněno a tudíž i existenční zajištění není valné s ohledem k jeho věku.

Proto naše čtenáře — a to nejen žáky SVVŠ — u kterých předpokládáme zájem o matematiku a přírodní nebo technické vědy, pokládáme za vhodné seznámit s příležitostí, kterou jim může poskytnout Čs. vědeckotechnická společnost svými odbornými kursy v oboru výpočetní techniky.

Jsou to kursy jednak d á l k o v é podávající systematický úvod a pak kursy d o c h á z k o v é prohlubující znalosti a orientující účastníky na programování některých ze tří základních druhů strojů výpočetní techniky.

Kursy zahrnují tedy tři základní oblasti:

1. *Organizaci a projektování mechanizované evidence stroji na děrné štítky* — tzv. kurs MEPRO.
2. *Analýzu a programování úloh pro číslicové samočinné počítače* — tzv. kurs DIPRO.
3. *Programování analogových počítačů* — kurs ANAL.

Pro usnadnění studia v kursech i pro samostatné studium mají kursy poradní (konzultační) střediska, pořádají exkurse a z podnětu R a d y k u r s ů v ý p o č e t n í t e c h n i k y ČSVTS vydávají potřebnou literaturu v nakladatelství P r á c e.

K studiu směru MEPRO slouží publikace:

J. Smrčina: Pracujeme s počítačem Aritma 520 (Kčs 11,—)

Inž. Ehleman: Stroje na děrné štítky (Kčs 19,50)

J. Kolář: Podklady v soustavě děrných štítků (Kčs 6,—)

F. Mareš: Základní učebnice pro projektanty a organizátory mechanizace administrativy stroji na děrné štítky, I. a II. díl (Kčs 15,—)

Inž. Chytil: Sbíрка zkušebních otázek a odpovědí pro obor projektant mechanizace administrativy stroji na děrné štítky (Kčs 12,50)

Pro studium směru DIPRO jsou příručky:

Inž. dr. Stibic: Základy formulace, analýzy a programování z oblasti automatizace zpracování dat, I. a II. díl (Kčs 16,50)

J. Nečas: Použití samočinných počítačů v oblasti MTZ (Kčs 21,—)

Inž. Z. Dráb: Základy automatického řízení (systémové inženýrství) (Kčs 13,—)

Dr. Havel: Algoritmy a automatické programování (Kčs 10,—)

Inž. Nešický: Nové směry v zavádění samočinných počítačů ve světě (Kčs 14,—)

Kolektiv: Sbíрка zkušebních otázek a odpovědí pro obor analytik-programátor číslicových samočinných počítačů (Kčs 19,—)

Pomocná literatura směru ANAL je:

Inž. J. Valenta: Základy programování analogových počítačů (Kčs 5,50)

Inž. J. Valenta: Základní operace diferenciálního analyzátoru (Kčs 6,50)

V. Fiala: Praktické otázky používání diferenciálních analyzátorů (Kčs 3,—)

Inž. Kotva: Principy analogových počítačů (Kčs 7,—)

Inž. Kotva: Sbíрка otázek a odpovědí pro ústní zkoušky ANAL Základy programování analogových počítačů (Kčs 5,—)

Inž. K. Kabeš: Základní stavební prvky diferenciálního analyzátoru (Kčs 5,—)

Jako další publikace z oblasti výpočetní techniky jmenujme ještě:

Inž. Nešický: Příručka výpočetní techniky, II. vydání (Kčs 28,50)

Inž. Chytil: Strojové třídění informací (Kčs 15,—)

Absolventi kursů mohou se též přihlásit z dříve uvedených tří oborů ke komisionální ústní a písemné zkoušce, aby tak měli své znalosti stvrzeny řádným vysvědčením, nutným popřípadě pro platové zařazení ve svém zaměstnání. V oborech DIPRO a ANAL se k připuštění ke zkoušce vyžaduje složení maturity.

§ Všechny potřebné informace o pořádaných kursech, z nichž některé právě začínají, získáte v *Domech techniky* Československé vědecko-technické společnosti v těchto místech:

Bratislava, Kocelova 17,
Brno, Výstaviště BVV,
České Budějovice, nám. 1. máje,
Košice, Leninova 31,
Liberec, tř. 1. máje 18,
Ostrava, Revoluční 18,
Pardubice, nábřeží Čs. armády 1,
Plzeň, Pobřežní 10,
Praha 1, Gorkého nám. 23,
Ústí nad Labem, Dvořákova 1,
Žilina, Hliny.

Tam si můžete objednat i uvedenou literaturu. Při korespondenci se odvolejte na toto oznámení v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

Vzhledem k všeobecnému zavádění pokrokových metod bude administrativa i průmysl potřebovat mnoho pracovníků uvedených oborů.

Doporučujeme tyto kursy studentům i učitelům.

Opakujte si matematiku

HANA KOŘÍNKOVÁ, ČVUT, Praha

(K televiznímu kursu)

Ústav pro studium na vysokých školách technických při ČVUT za spolupráce s Čs. televizí připravil televizní kurs matematiky pro uchazeče ke studiu na vysokých školách *Opakujte si matematiku*.

Přípravou tohoto kursu se zabýval kolektiv matematiků z různých typů vysokých škol a z ČSAV, kteří se o problematiku přípravy k vysokoškolskému studiu již po několik let zabývají. Autorský kolektiv pod vedením s. prof. dr. K. Hruši, doc. J. Vyšína a H. Kořínkové, prom. ped. mat., zpracoval pokyny a příklady do příručky *Televizní kurs matematiky*, která sledování lekcí usnadní a pomůže účastníkům televizního kursu při studiu. Příručka vyjde v nakladatelství Práce a můžete ji zakoupit v každé prodejně Knihy, n. p. Cena je cca 8 Kčs.

Kurs obsahuje 20 půlhodinových lekcí ze středoškolské látky z matematiky. Není dělán běžnou formou, které se používá ve škole, tj. formou výkladu a procvičení, nýbrž řešením určitých problémů matematických v kroužku studentů.

Kurs je především určen pro absolventy středních škol, a to i s odstupem od absolvování, pro studenty I. roč. vysokých škol všech směrů, kde je matematika základním předmětem, pro účastníky předstudijní

přípravy pořádané vysokými školami nebo jinými zařízeními, pro učitele matematiky škol II. a III. stupně, i pro studenty těchto škol, kteří se připravují ke vstupu na vysokou školu.

Kurs byl vysílán již v loňském roce. Letos je repríza, která začne dne 7. února 1968 a bude pokračovat každou středu v 17.10 hod.; opakování lekce je každý pátek v 9.05 hod.

Účastníci televizního kursu si jistě budou chtít ověřit, čemu se naučili. Pro kontrolu práce bude proto několikrát během celého kursu účastníkům uloženo při vysílání několik úloh. *Po 3. lekci* mají účastníci vyřešit tento úkol

1. Sestrojte trojúhelník o straně c a výškách v_a ; v_c .

Po 5. lekci

Vyjádřete jako úměrnost

a) $y = 5x - 2,$

b) $y = \frac{x + 1}{x - 1}.$

Po 6. lekci

Vypočtete všechny kořeny rovnice

$$(a^2 - b^2)x^2 - 4abx - (a^2 - b^2) = 0,$$

kde a , b jsou daná čísla a x je neznámá.

V příštím čísle otiskneme řešení daných úloh a texty dalších, které budou ještě při 10., 11., 12 a 14. lekci, tj. 10. 4; 17. 4; 24. 4. a 8. 5. 1968.

Úlohy mají být vyřešeny a do týdne zaslány (celé řešení, nikoli tedy jen výsledky) na adresu *Čs. televize, Praha 1, Jindřišská 16, Kurs matematiky*, která řešené příklady předá matematikům ke kontrole.

O správnosti řešení bude každý účastník vyrozuměn písemně. Není nutné vyřešit všechny příklady.

Budete-li mít při řešení nějaké potíže, uveďte to u jednotlivých úloh. Vaše sdělení zároveň pomůže pracovníkům, kteří kurs připravili, zjistit účinnost této formy výuky. Proto uvítají, když k řešení připojíte i své vyjádření k dosud vysílaným lekcím.

Vysílání skončí pravděpodobně na začátku července.



NAŠE SOUTĚŽ

Konstruktivní geometrie

3. Jsou dány dva různé body A , B a úsečka d . Sestrojte přímku, která má stejně velkou první i druhou odchylku, prochází bodem A a od bodu B má vzdálenost d . Proveďte diskusi.

(Došlo 16 řešení)

Stanislav Horák

Řešil Vojtěch Rádl, III.G SVVŠ W. Piecka, Praha:

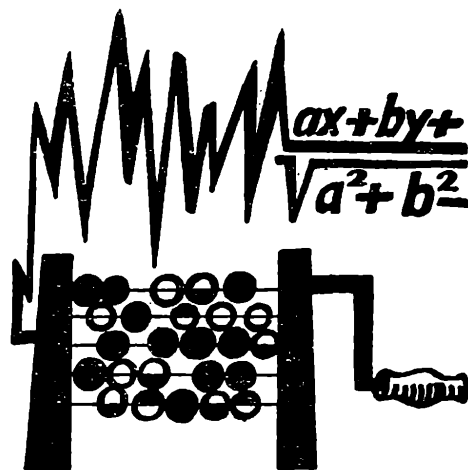
Je patrné, že hledaná přímka p musí ležet buď v rovině σ_1 , která je rovnoběžná s rovinou souměrnosti nebo v rovině τ_1 , která je rovnoběžná s rovinou totožnosti a přitom procházet bodem A . (Rovina souměrnosti i rovina totožnosti pólí úhel průměten; přitom první z nich prochází I. a III. kvadrantem, druhá II. a IV. kvadrantem.) Dále; množina všech přímek, jdoucích bodem A a majících od bodu B vzdálenost d , je rotační kuželová plocha opsaná z bodu A kulové ploše $\kappa \equiv (B, d)$. Hledaná přímka je potom průsečnice roviny σ_1 (τ_1) s touto kuželovou plochou.

Aby existovalo řešení, musí nutně $d \leq AB$. Tedy v případě $d > AB$ řešení neexistuje. V případě $d = AB$ existují buď dvě různá řešení, nebo jediné. Jediné řešení má úloha tenkrát, když AB je kolmá na průsečnici rovin σ_1 , τ_1 . Jestliže $d < AB$, existují čtyři různá řešení.

*

Upozorňujeme všechny zájemce o publikaci dr. Lepila „Kvanta a vlny“, o níž jsme čtenáře informovali ve 4. čísle roč. 45, že omezený počet výtisků této brožury je dosud na skladě. Pokud ji nedostanete ve svém knihkupectví, obraťte se na nakladatelský odbyt Státního pedagogického nakladatelství, Ostrovní 30, Praha 1 — Nové Město.

Podrobnější zprávu o literatuře z oboru matematika, fyzika a astronomie, vydávané Státním pedagogickým nakladatelstvím, přineseme v některém z dalších čísel Rozhledů.



Automatické programování na samočinných počítačích

ING. JAN SEDLÁK, Praha

(Dokončení)

2. Překladač systému automatického programování

Rozsah činnosti překladačů je velmi rozmanitý a závisí především na úrovni jazyka daného systému automatického programování. Hlavními typy překladačů podle způsobu zpracování algoritmického zápisu úlohy jsou typy *interpretační* a *generační*.

V interpretačním typu se zpracovávají jednotky zápisu postupně podle daného výpočtového předpisu (např. jednotlivé pseudoinstrukce) a současně po jejich překladu se ihned provedou jednotce zápisu odpovídající elementární akce v počítači. Výsledkem práce interpretačních překladačů je vypočtená úloha (nikoli tedy kódovaný program). Při tomto způsobu odpadá práce s výstupem a pamatování kódovaného programu v počítači. Avšak při častém opakování výpočtu se provádí zbytečně opět překlad.

Překladač generačního typu zpracovává jednotky zápisu postupně podle výpočtového předpisu, aniž by vyhodnocoval jim odpovídající operace v počítači. Výsledkem práce tohoto systému je kódovaný program. Úloha se vyřeší teprve tehdy, až se přidají ke kódovanému programu i data, která má zpracovávat. Efekt generačního překladače se zvláště zvýší při zpracování úloh, které se mnohokrát řeší na počítači.

Před vypracováním kompilátoru (překladače) je nutné provést řadu ekonomických úvah, neboť jde o velmi nákladnou práci. V literatuře se uvádí cca 20 „člověkoroků“ talentovaného programátora s tříletou praxí u příslušného počítače. Při volbě jazyka systému mají uživatelé zájem zvolit jazyk blízký člověku (např. jazyk matematický) a zároveň mít účelný překlad. To je však v nepřímé závislosti s obtížností práce na překladači. Teoreticky je možné automatizovat celý programovací proces vycházející z jazyka matematického. Tento úkol je však značně těžký, ale přesto se vyplatí, neboť se dělá pouze jednou.

Jisté částečné řešení přinesl algoritmický jazyk ALGOL 60. Není však jazykem univerzálním. Pro jiné typy úloh než vědeckých a technických, např. zpracování dat, řízení výroby, syntéza a analýza logických obvodů apod., jsou hledány nové jazyky, i když se vychází z vlastností jazyka ALGOL. Jednotný jazyk ALGOL 60, je-li vybrán pro systém automatického programování, je ve většině případů upravován. Důvod úprav vyplývá z požadavku efektivnosti celého systému. Také při volbě typu překladače je nutné vyvážit tyto dva protichůdné požadavky:

1. Překladač má být rychlý, úsporný, inteligentní.
2. Přeložený program má být rychlý, úsporný, obecný.

Všimněme se, že např. vyšší obecnost přeložených programů je v rozporu s úsporností a rychlostí přeloženého programu, nebo inteligentní překladač je v rozporu s rychlostí a úsporností. Pomalý překladač by se mohl lehce stát nepoužitelný.

V neposlední řadě je nutné zvážit všechny vlastnosti počítače, pro který se buduje systém automatického programování. Odtud také název systému se zpravidla odvozuje od názvu počítače a od názvu jazyka, který je zvolen za základ v systému, např. EPOS ALGOL, GIER ELLIOTT ALGOL, ALGOL apod. Jmenované systémy jsou generační. Jejich hlavními úkoly jsou:

1. Přiřazení absolutních adres všem objektům zpracovaného algoritmického textu (konstantám, proměnným, parametrům, návěštím).
2. Rozpletení jednotek zápisu zpracovaného textu do instrukcí kódovaného programu.

Ilustrujme práci překladače na drobných příkladech.

Přiřazovací příkaz

$$a := a * b - c \uparrow d$$

se zpracovává pomocí překladu výrazu

$$a * b - c \uparrow d,$$

kde $c \uparrow d$ je zápis mocniny c^d .

Výraz $a * b - c \uparrow d$ se zpracovává pomocí jeho složek $a * b$ a $c \uparrow d$, které se pak odečtou. Hodnota rozdílu se pak přiřadí proměnné a .

Relaci

$$a \neq b,$$

kde $a = \langle m \rangle$, $b = \langle n \rangle$ odpovídají v EPOS ALGOL instrukce, určené překladačem

$p \quad \langle m \rangle \rightarrow \langle F \rangle,$
 $p + 1 \quad \langle F \rangle - \langle n \rangle \rightarrow \langle F \rangle,$
 $p + 2 \quad \langle F \rangle = 0 \Rightarrow \text{skok na } p + 4,$
 $p + 3 \quad 9 \rightarrow \langle U2 \rangle, \text{ skok na } p + 5,$
 $p + 4 \quad 0 \rightarrow \langle U2 \rangle,$
 $p + 5 \quad \langle U2 \rangle \rightarrow \langle h \rangle,$

kde p je vnější relativní adresa instrukcí,

h je pomocná adresa,

$9 \rightarrow \langle U2 \rangle$ (resp. $0 \rightarrow \langle U2 \rangle$) odpovídá hodnotě booleovského výrazu *ano*, resp. *ne*.

Překlad příkazu „když“

if a $\neq$ b then go to BRNO

v kompilátoru EPOS ALGOLu.

Překladač zjistí adresy hodnot a , b a že skoku *go to BRNO* odpovídá skok na některou adresu. Např.

$a = \langle 300 \rangle$, $b = \langle 301 \rangle$, $\text{BRNO} = 711$.

Překladač zjistí strukturu booleovského výrazu $a \neq b$, jak vidíme v předešlém příkladu a dosadí do něho absolutní adresy, pokud je zná

$p \quad \langle 300 \rangle \rightarrow \langle F \rangle,$
 $p + 1 \quad \langle F \rangle - \langle 301 \rangle \rightarrow \langle F \rangle,$
 $p + 2 \quad \langle F \rangle = 0 \Rightarrow \text{skok na } p + 4,$
 $p + 3 \quad 9 \rightarrow \langle U2 \rangle, \text{ skok } - - -,$
 $p + 4 \quad 0 \rightarrow \langle U2 \rangle,$
 $p + 5 \quad \langle U2 \rangle \rightarrow \langle h \rangle;$

po přečtení *then* se provede rozbor a úprava příkazu, jejímž výsledkem jsou náhrady posledních čtyř instrukcí

$p + 2 \quad \langle F \rangle = 0 \Rightarrow \text{skok na } p + 4,$
 $p + 3 \quad \text{skok na } 711.$

Počínaje adresou $p + 4$ jsou již zapsány instrukce, které odpovídají další části zpracovaného textu v jazyku EPOS ALGOL. V případě, že by dosud nebyla známá např. absolutní adresa BRNO, zůstala by instrukce nevyplněná a dosazení adresy by se uskutečnilo později. V některých kompilátorech se dosazení provede ihned, jakmile se adresa zjistí, jinde až po překladu.

Nyní, kdy jsme si uvědomili úkoly překladače, všimněme si blíže jeho struktury. Za příklad je zvolen kompilátor EPOS ALGOL.

Kompilátor sestává ze čtyř programů, uložených na magnetické pásové paměti MP 3 podle pořadí účasti na zpracování algolovského textu: vstupní program, hlavní program, závěrečný program a výstupní program. Ty se uloží v době jejich práce do magnetické bubnové

paměti (MB). Uložení kompilátoru na MP 3 zrychlí jeho činnost. MP 3 může být nahrazena pomalejším vstupním zařízením (např. děrno-páskovým).

Pracovními pamětmi překladače jsou operativní paměti (9 U-registrů a 300 adres ferritové paměti) a magnetická bubnová paměť kapacity max. 5000 slov. Dále je třeba ještě dvou magnetických páskových pamětí (MP 1 a MP 2) pro ukládání dat. Překladač pracuje po řadě ve čtyřech fázích:

1. Vstupní program přečte algolovský text ze vstupní jednotky, zpracovává jej do zhuštěného symbolického záznamu (tzv. jazyka *p*-Algolu) a zapíše jej na MP 1.

2. Hlavní program zpracovává symboly z MP 1 do téměř již hotového kódovaného programu, který zapisuje na MP 2. Používá k tomu také tři tabulek (identifikátorů, návěstí, procedur), uložených na MB.

3. Závěrečný program pak dohotoví překlad uložený na MP 2 a na MP 1, zapíše sestavený kódovaný program, sestavený v tomto pořadí:

- a) vyhrazené adresy pro vstupní program a pak pro mezivýsledky,
- b) vlastní program (slova sestavená závěrečným programem, slova sestavená hlavním programem, konstanty, vlastní jednoduché proměnné, standardní procedury),

- c) úsek adres, které se využívají různým způsobem (jednoduché, proměnné a parametry volané hodnotou, úsek pro „bubnové“ bloky, vlastní pole, pole).

4. Výstupní program děruje z MP 1 výsledný kódovaný program, např. do děrné pásky.

Přizpůsobením překladače fyzikálním vlastnostem počítače a vzhledem k četným významným automatizačním prostředkům jazyka EPOS, sestává překladač bez vstupního a výstupního programu z 3000 slov. Vstupní program vyžaduje 775 slov v MB. Jeho práce nevyžaduje aritmetické jednotky a technika překladu odpovídá programu, který může pracovat i v rámci sdílení času současně s jinými programy.

3. Význam automatického programování

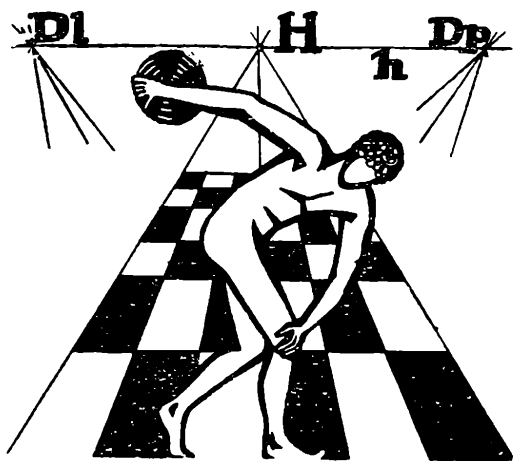
Automatické programování přináší svou technikou užitek každému, kdo se míní stýkat se samočinným počítačem. Tak se stává pro začátečníka mechanickým prostředkem k použití počítače, neboť jazyk systému automatického programování je blízký jazyku matematickému a umožňuje mu rychlý přístup k počítači. Zkušený programátor používá systému automatického programování jako prostředku k vyloučení úmorné rutinní práce, aby se mohl spíše věnovat logické struktuře budoucího programu a jeho algoritmickému zápisu. Přehlednost programů a menší výskyt chyb při zápisu programů jsou zřejmé výhody. Nelze však říci, že nasazením systému automatického programování

vymizí tzv. „ruční“ programování. Praxe dostatečně dokazuje, že se úlohy, které mají vysokou četnost použitelnosti na počítači, programují v jazyku počítače. Důvody jsou především ty, že překlad kompilátorem není nikdy nejefektivnější jak časově, tak obsazením paměti. Dále lze říci, že jazyk systému automatického programování není univerzální, takže úlohy z jiných oborů, než pro které byl algoritmický jazyk sestaven, se jím zapisují obtížně, nebo zápis nelze vůbec provést. Tak je obecně známo, že např. pro úlohy automatického zpracování hromadných dat, nebo úlohy z numericky řízeného obrábění, se vypracovávají zvláštní systémy, jak plyne ze specifických vlastností těchto oborů úloh vzhledem k vědeckým a technickým úlohám.

Nová programovací technika má svým algoritmickým jazykem významný vliv na přesnou formulaci výpočtových algoritmů běžných praktických výpočtů. Tím podporuje i vzájemný styk pracovníků téhož oboru i pracovníků oborů jiných, neboť mají k dispozici vzájemný dorozumívací prostředek. Její vliv působí také zpětně i na vývoj logické struktury samočinných počítačů. Teprve samočinný počítač, vybavený dobrou programovací technikou, se stává účinným výpočtovým prostředkem.

Literatura

- [1] Backus, J. W. a j., Revised Report on the Algorithmic Language ALGOL_60. Numerische Mathematik, 4 (1963), 420 až 453.
- [2] Backus, J. W., Programování v jazyku ALGOL 60. Přeložili inž. J. Sedlák, inž. J. Imlauf, inž. J. Klouček, původními doplňky opatřili inž. J. Sedlák a E. Kindler. Praha 1963, SNTL.
- [3] Jeršov, A. P., Programmirujuščaja programma dlja bystrodejstvujučej elektronnoj sčotnoj mašiny. MOSKVA, 1958, AN SSSR.



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Použitie deskriptívnej geometrie v kryštalografii

JOSEF FILIP, Bratislava

(Pokračování)

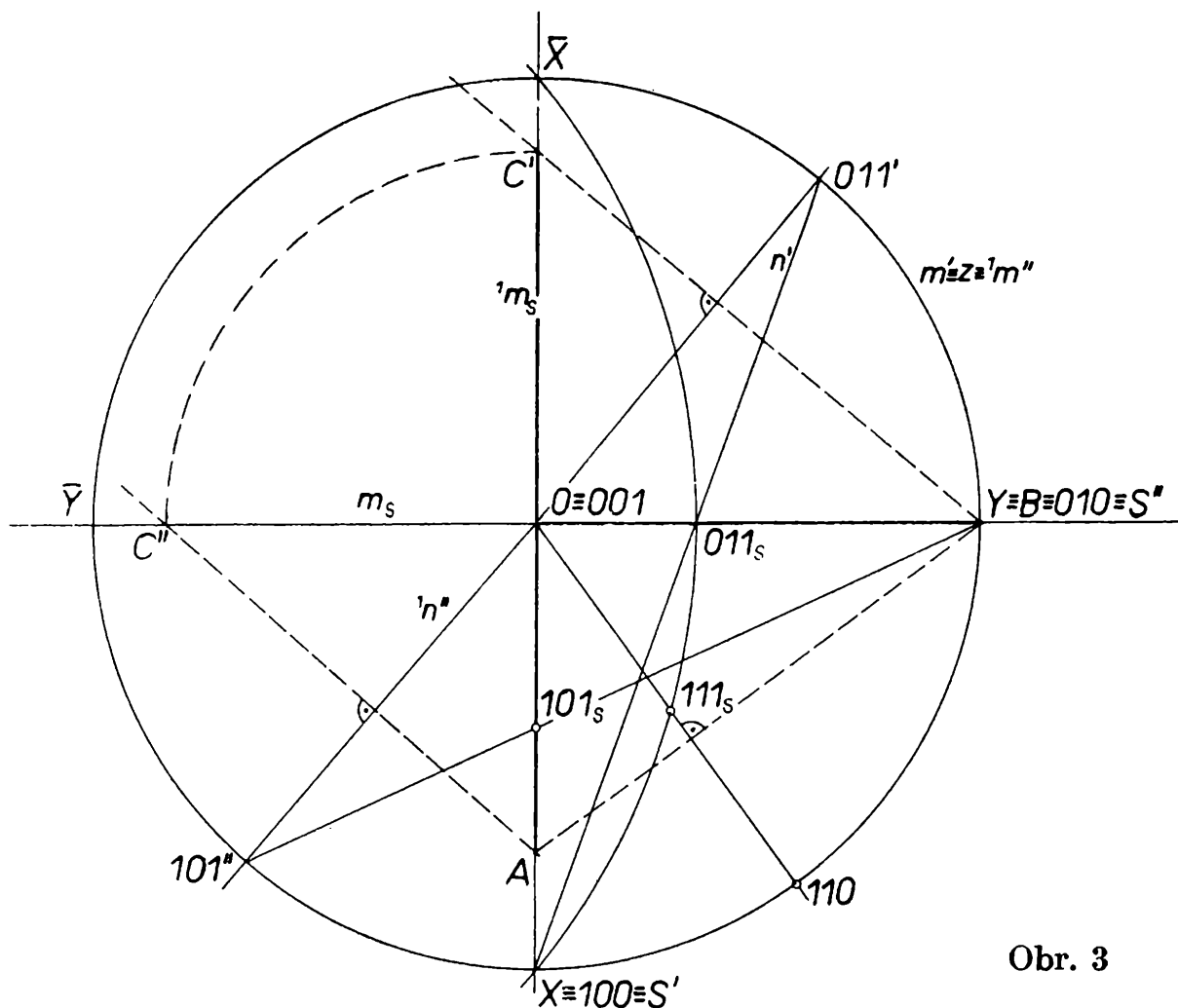
12. Položme si teraz za úlohu zostrojiť stereografický obraz kryštálovej plochy z jej symbolu (Millerovho). Predpokladajme, že zobrazovaný kryštál patrí do sústavy rombickéj a že je daný pomer parametrov základnej plochy $a : b : c = 0,765 : 1 : 0,890$. Ak označíme priesečníky roviny tejto plochy s kryštálovými osami a, b, c radom A, B, C a zvolíme $b = 1$ dm, dostaneme obraz bodu A , keď na polos OX nanesieme úsečku $OA = 76,5$ mm (obr. 3). Obraz bodu B splýva zrejme s bodom Y a obraz bodu C s bodom O . Z dôvodov, ktoré vysvitnú z ďalšieho, bude účelné naniesť parameter c na polos $O\bar{X}$ a znázorniť ho úsečkou $OC' = 89$ mm.

Bod Y je zrejme už stereografickým obrazom plochy 010 , lebo jej normálou je práve polpriamka OY . Bod X je zase obrazom plochy 100 , lebo jej normálou je polpriamka OX . Stred O je obrazom plochy 001 , lebo príslušnou normálou je polpriamka OZ .

Aby sme zostrojili obraz plochy 110 , uvedomíme si, že táto plocha, resp. jej rovina, je vertikálna a pretína rovinu π v priamke AB . Normála na túto plochu teda leží na π a je kolmá na priamku AB . Obraz plochy 110 je preto v bode, v ktorom polpriamka vedená z bodu O kolmo na priamku AB pretína kružnicu z .

Plocha 011 , resp. jej rovina, je kolmá na rovinu μ hlavného poludníka m a pretína ju v priamke BC . Normála n tejto plochy leží teda v rovine poludníka m , a preto ho pretína. Aby sme tento prie-

sečník, tj. pól 011, jednoducho zostrojili, sklopíme rovinu μ s poludníkom m a normálou n do priemetne π . Po sklopení splynie poludník m s kružnicou z , bod S s bodom $S' \equiv X$, bod C s bodom C' a normála n s polpriamkou $n' \perp BC'$. Priesečník polpriamky n' s kružnicou $m' \equiv z$ je sklopený pól 011'. Keď ho premietneme z bodu S' na priamku $m_s \equiv Y\bar{Y}$, ktorá je stereografickým priemetom poludníka m , dostaneme stereografický obraz 011, plochy 011.



Obr. 3

Podobne zostrojíme obraz plochy 101, ktorej rovina je kolmá na rovinu ac poludníka 1m a pretína ju v priamke AC . Normála 1n plochy 101 leží teda v rovine ac , a preto pretína poludník 1m . Aby sme tento priesečník zostrojili, sklopíme zase rovinu ac s poludníkom 1m a normálou 1n do priemetne π . Sklopený poludník $^1m''$ splynie s kružnicou z , sklopený bod S'' s bodom Y a bod C s bodom C'' , ktorý leží na polpriamke $O\bar{Y}$ a $OC'' = OC'$. Normála 1n splynie po sklopení s polpriamkou $^1n'' \perp AC''$ a jej priesečník s kružnicou $^1m'' \equiv z$ je sklopený pól 101'' plochy 101. Keď ho premietneme z bodu S'' na priamku $^1m_s \equiv X\bar{X}$, ktorá je stereografickým obrazom poludníka 1m , dostaneme stereografický obraz 101, plochy 101.

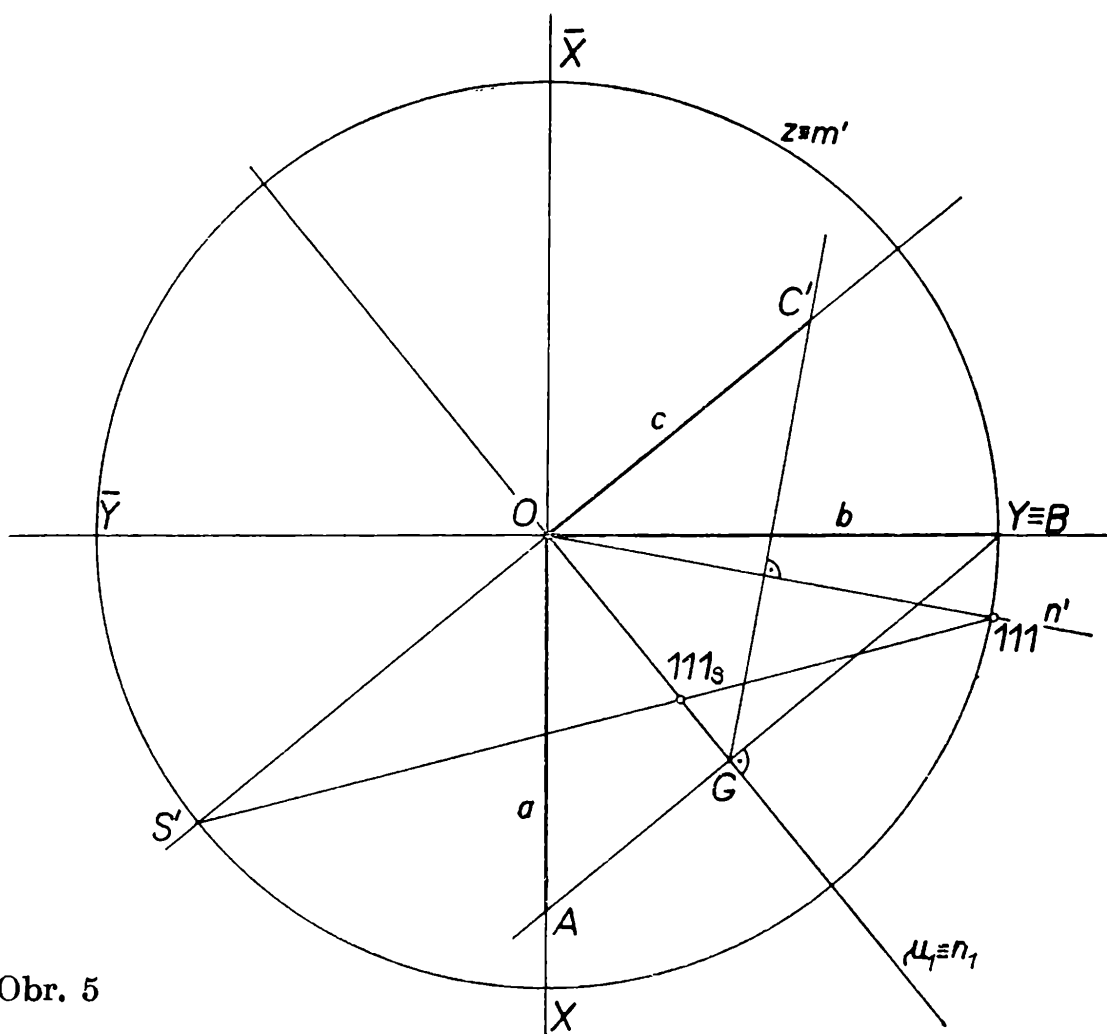
Poznámka 3. Obraz plochy $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ by bol s bodom 111 , symetrický podľa priamky $X\bar{X}$, obraz plochy $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ podľa priamky $Y\bar{Y}$ a obraz plochy $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ by bol s bodom 111 , symetrický podľa bodu O .



312

níkom m , tj. hľadaný pól plochy 111 , zostrojíme sklopením roviny μ do priemetne π . Poludník m po sklopení splynie s kružnicou z , bod S s bodom S' na kružnici z a bod C s bodom C' ($S'C' \perp m_s$, $OC' = 89 \text{ mm}$). Sklopená priesečnica GC je spojnice GC' a sklopená normála $n' \perp GC'$. V priesečníku polpriamky n' a kružnice $m' \equiv z$ je sklopený pól $111'$. Keď ho premietneme z bodu S' na priamku m_s , dostaneme stereografický pól 111_s , ktorý sme mali zostrojiť.

Poznámka 4. Z pólu 111_s môžeme potom zostrojiť póly 011_s a 101_s na príslušných pásmových kružniciach, a to pól 011_s na kružnici, ktorá ide bodmi $X, \bar{X}, 111_s$ a pól 101_s na kružnici idúcej bodmi $Y, \bar{Y}, 111_s$. No a pól 110 je na priemere kružnice z idúcim bodom 111_s .



Obr. 5

14. Keď máme zobraziť kryštálovú plochu odvodenú, ktorej indexy h, k, l nie sú samé jednotky (3), zostrojíme body $A^\times, B^\times$ a $C^\times$, v ktorých táto plocha, resp. jej rovina pretína kryštálové osi. Ak a, b, c značia základné parametre (tj. parametre plochy 111), je

$$OA^\times = \frac{a}{h}, \quad OB^\times = \frac{b}{k}, \quad OC^\times = \frac{c}{l}$$

za predpokladu, že ani jeden z indexov h, k, l sa nerovná nule. Keď je niektorý index nulový, je kryštálová plocha rovnobežná s tou osou,

na ktorú sa nulový index vzťahuje. Keď máme body $A^\times$, $B^\times$, $C^\times$, môžeme na zostrojenie obrazu plochy hkl vždy aplikovať niektorú z konštrukcií opísaných v odst. 12 alebo 13, s tým jediným rozdielom, že namiesto bodov A , B , C použijeme body $A^\times$, $B^\times$, $C^\times$.

Poznámka 5. Keď vieme zobrazit ľubovoľnú kryštálovú plochu, vieme zostrojit obraz celého kryštálu, lebo je to súhrn obrazov jednotlivých kryštálových plôch.

Poznámka 6. Keby sme mali zobrazit namiesto kryštálu zo sústavy rombickej kryštál zo sústavy tetragonálnej alebo kubickej, postupujeme rovnako. To, že v sústave tetragonálnej pre základné parametre platí $a = b \neq c$ a v sústave kubickej $a = b = c$, nijako neovplyvní spôsob konštrukcie.

15. Na obr. 5 sme vyriešili obrátenú úlohu k úlohe v odst. 13. Daný je stereografický obraz 111_s základnej plochy 111 a máme určiť jej pomer parametrov $a : b : c$ za predpokladu, že sme zvolili $b = 1$.

Riešenie: Rovina plochy 111 pretína kryštálové osi a , b , c po rade v bodoch A , B , C , pričom $B \equiv Y$. Normála n plochy 111 sa premieta kolmo na π do polpriamky n_1 idúcej zo stredu O cez bod 111_s (9). Vieme, že $AB \perp n_1$ (13), preto vedieme bodom B kolmicu na n_1 a táto priamka odsekne na polosi OX parameter $a = OA$.

Ostáva zostrojit parameter c . Normála n leží v rovine μ poludníka m , ktorý prechádza pólom 111 . Rovina plochy 111 pretína rovinu μ v priamke $GC \perp n$, kde G je priesečník priamky AB s rovinou μ . Keď rovinu μ sklopíme do π okolo priamky μ , ktorá je pravouhlým priemetom roviny μ a ktorá teda obsahuje polpriamku n_1 , splynie sklopený poludník m' s kružnicou z . Bod S príde po sklopení do bodu S' na kružnici z ($OS' \perp \mu_1$) a sklopený pól 111 do bodu $111'$, ktorý dostaneme, keď bod 111_s premietneme na kružnicu $m' \equiv z$ z bodu S' . Spojnica bodov O a $111'$ je sklopená normála n' a na ňu je kolmá sklopená priamka GC' . Pritom $OC' \perp \mu_1$ a $OC' = c$.

(Dokončení)

* *

Redakce upozorňuje, že letos neotiskne ukázkové příklady z matematiky, diskriptivní geometrie a fyziky k přijímacím zkouškám na jednotlivé fakulty ČUVT v Praze, protože se chystá poněkud jiná forma těchto zkoušek, které budou organizovány centrálně.



0 původu setrvačných sil

PROF. RNDr. ZDENĚK HORÁK, DrSc., ČVUT, Praha

(Dokončení)

Za nejpřesvědčivější důkaz správnosti Einsteinovy teorie se pokládá stáčení perihelu Merkura, které bylo již dávno známo, a které Newtonova teorie vysvětlit nedovedla. Einsteinova teorie dává pro úhel otočení osy oběžné dráhy Merkurovy hodnotu $43''$ za 100 let, která velmi dobře souhlasí s astronomickým pozorováním³⁾.

Přes tyto nepopíratelné úspěchy Einsteinovy teorie je třeba přiznat, že z ní sice vyplývá existence sil, které mají podobné vlastnosti jako známé síly setrvačné, že se však dosud nepodařilo odvodit pro ně správné teoretické vzorce.

Ještě závažnější je, že se nepodařilo uvést teorii relativnosti do plného souhlasu s Machovým principem v tom smyslu, že by z ní vyplývala souvislost setrvačných sil s rozložením galaxií v kosmickém prostoru.

Podrobným studiem Einsteinových rovnic pro gravitační pole se ukázalo, že jeho teorie nevede bez dalších hypotéz k logickému výsledku, že setrvačné síly mají opravdu původ ve vesmíru.

Ačkoli fyzikové oslavili již 50. narozeniny Einsteinovy teorie, ne našli dosud žádné všeobecně uznávané řešení tohoto základního problému důležitého pro celou fyziku.

Byla ovšem učiněna řada pokusů vyrovnat se s touto významnou otázkou, a proto v závěru naznačím aspoň v hrubých rysech myšlenku ukazující směr, v němž by bylo možno hledat řešení.

³⁾ Viz článek J. Machalického, O gravitačním zákonu Newtonově, který bude otištěn v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

Klíčový význam mají zřejmě naše základní představy o podstatě setrvačnosti. Popřeme-li existenci absolutního prostoru a přijmeme zásadu, že zrychlený pohyb může vyvolat reálné síly, kterými setrvačné síly nesporně jsou, jen tehdy, když mění velikost nebo směr rychlosti měřené vzhledem k nějakým reálně existujícím hmotným objektům, je zřejmé, že nemůžeme podržet představu, že setrvačnost je svébytnou vlastností těles nezávislou na okolí. Musíme naopak vycházet z požadavku, že setrvačnost je nutně vlastností *r e l a t i v n í* určenou hmotami, které těleso obklopují. Jakým způsobem to lze pochopit a vyloužit, nás poučí jeden z nejdůležitějších Einsteinových objevů, že hmotnost a energie jsou dva rovnocenné pojmy, protože každému tělesu přísluší nezávisle na jeho pohybovém stavu jistá energie, která se rovná jeho hmotnosti násobené čtvercem rychlosti světla. Obráceně každé energii přísluší jistá hmotnost, kterou dostaneme, dělíme-li energii čtvercem rychlosti světla. Platnost tohoto vztahu se skvěle potvrdila při transmutacích prvků, při nichž se uvolňuje jaderná energie rovnocenná úbytku hmotnosti atomových jader.

Tak jsme vedeni k představě, že *e n e r g i e m á s e t r v a č n o s t*, že podléhá gravitačním silám, a že je také jejich zdrojem stejně jako jí rovnocenná hmotnost.

Tím jsme se však podstatně přiblížili k řešení problémů setrvačnosti. Zatímco hmotnost každého tělesa pokládáme ve smyslu klasické mechaniky za neproměnnou absolutní veličinu, která charakterizuje těleso nezávisle na ostatních tělesech, víme, že energie tělesa může být i v klasické mechanice určena okolními tělesy, které na těleso silově působí.

Zvláště zřejmé je to u energie gravitační. Každé těleso na povrchu zemském podléhá tíži a má tzv. *p o t e n c i á l n í e n e r g i i*, která při zvednutí tělesa na vyšší hladinu vzroste o hodnotu úměrnou hmotnosti tělesa a rozdílu výšek. Tato energie tedy závisí na relativní poloze tělesa vzhledem k Zemi. Čím větší je tato energie, tím větší je ekvivalentní hmotnost tělesa a tím je také větší jeho setrvačnost. Přiblížíme-li tedy k zkušebnímu tělesu nějaký hmotný objekt, v jehož gravitačním poli má těleso potenciální energii, zvětší se jeho setrvačnost, a proto při jeho zrychleném pohybu budeme pozorovat větší setrvačnou sílu. Tato přídatná setrvačná síla má tedy původ v onom hmotném objektu, který dává tělesu gravitační potenciální energii, a objeví se proto tehdy a jen tehdy, když se tento objekt bude pohybovat zrychleně vzhledem k pozorovateli, který pohyb tělesa měří.

K tomuto výsledku dospěl Einstein na základě svých rovnic gravitačního pole, ale byl si vědom toho, že to samo o sobě nestačí k důkazu platnosti Machova principu. Říká doslovně: „V tom musíme vidět silnou oporu pro Machovy ideje, pokud jde o relativnost všech setrvačných účinků, a promyslíme-li tyto ideje důsledně až do konce, mu-

síme očekávat, že celá setrvačnost je nutně určena hmotou vesmíru.“

Domnívám se, že tato závažná Einsteinova slova přímo vnucují následující úvahu: Je-li zvýšení setrvačnosti tělesa způsobeno přiblížením zdroje gravitačního pole a zvětšením potenciální energie tělesa v tomto poli a má-li mít veškerá setrvačnost původ ve vesmíru, musíme předpokládat, že těleso má nějakou potenciální energii v gravitačním poli vesmíru.

Opravdu by bylo vrcholně nelogické a nevědecké zásadně popírat gravitační působení galaxií. To není v rozporu s poznatkem, že se silové působení všech kosmických objektů navzájem ruší, jak je třeba usuzovat z platnosti zákona setrvačnosti. Gravitační přitažlivost všech galaxií, které nás obklopují ze všech stran se v celku ruší, podobně jako se ruší gravitační síly uvnitř duté koule, ať má koule jakkoli velkou hmotnost. To ovšem neznamena, že potenciální energie hmotné částice uvnitř koule je nutně nulová. Naopak je známo, že její energie je všude uvnitř koule stejná a rovná se potenciální energii, kterou by měla na kouli. Musíme tedy připustit, že „uvnitř“ vesmíru má každé těleso jistou potenciální energii, která je úměrná hmotnosti tělesa. Tato potenciální energie, kterou bychom mohli nazvat kosmickou energií tělesa, je stejná ve všech místech vesmíru, kde platí zákon setrvačnosti. Tak jsme vysvětlili vznik celé setrvačnosti tělesa jako důsledek jeho kosmické energie, jejímž zdrojem jsou všechny galaxie rozptýlené ve vesmíru. Proto také vzniká klasická setrvačná síla — úměrná celkové hmotnosti tělesa — právě jen při pohybu zrychleném vzhledem k vesmíru.

Z tohoto výkladu vyplývá závažný důsledek. Kdyby se počet galaxií ve vesmíru zmenšil, byla by kosmická potenciální energie menší a tedy i setrvačnost všech těles by se zmenšila. K zastavení pohybu tělesa by pak také stačila menší síla. Kdyby konečně vesmír zcela vymizel, neprojevovala by tělesa žádnou setrvačnost, nehledíme-li k nepatrné setrvačnosti odpovídající potenciální energii v místním gravitačním poli jednotlivých sluncí nebo planet.

Správnost této názorné teorie setrvačnosti je možno velmi pádně zdůvodnit známým experimentálním poznatkem z jiného oboru fyziky, totiž z elektromagnetismu. Je známo, že transformace střídavých proudů je založena na skutečnosti, že časově proměnný elektrický proud v primárním vinutí transformátoru indukuje proměnný proud v sekundárním vinutí. To znamená, že zrychlený pohyb elektronů v jednom vodiči způsobuje zrychlený pohyb elektronů ve druhém vodiči. Uvážíme-li, že elektrony sekundárního vinutí mají v elektrickém poli elektronů primárního vinutí potenciální energii, vidíme, že elektromagnetická indukce se dá vyložit jako důsledek setrvačnosti elektrostatické energie elektronů.

Setrvačnost těles a transformace proudu jsou tedy jevy obdobné a oba jsou založeny na setrvačnosti energie. V prvním případě gravitační energie, ve druhém energie elektrické.

Je třeba dodat, že naznačený výklad setrvačnosti, který vysvětluje setrvačné síly nikoli jako síly zdánlivé, ale jako skutečné síly způsobené zrychleným pohybem vzhledem k vesmíru, je v zásadním souhlasu s obecnou teorií relativnosti i s Machovým principem.

Nápadná jednoduchost načrtnutého pojetí setrvačnosti jakožto vlastnosti kosmické gravitační energie jistě přispívá k jeho věrohodnosti, neboť právě nejzákladnější fyzikální představy a vztahy jsou obvykle velmi jednoduché. Na druhé straně by se však přílišná jednoduchost mohla zdát podezřelou. Mohlo by se skutečně namítnout, že tak jednoduchá myšlenka by se už dávno jistě objevila, kdyby nebyla z nějakého důvodu nepřijatelná.

Této námitce však lze ulomit hrot nebo jej aspoň otupit připomeneme-li, že lidské představy o vesmíru byly až do novější doby velmi nedokonalé. V době Newtonově byly známy jen stálice tvořící naši galaxii (Mléčnou dráhu), a proto se zdál Berkeleyův názor, že setrvačné síly mají původ ve hvězdách, velmi fantastický. Ilustruje to výrok jistého fyzika z pozdější doby, který prohlásil, že si nedovede představit, že by malá třpytivá hvězdička mohla usměrňovat pohyb Foucaultova kyvadla v pařížském Pantheonu. Opravdu je možno se přibližným výpočtem přesvědčit, že podle dnešních představ o systému Mléčné dráhy, vznikají gravitačním působením všech stálic v ní obsažených setrvačné síly téměř miliónkrát slabší než jaké skutečně pozorujeme.

Ještě v době, kdy Einstein koncipoval svou obecnou teorii relativnosti, byla existence mimogalaktických mlhovin (tj. ostatních galaxií obklopujících naši vlastní Galaxii) velmi pochybná. Ani přibližně správná představa o množství, vzdálenostech a pohybech galaxií není starší než asi 30 let!

Závěrem zdůrazňuji, že jsem se zde omezil na zásadní myšlenky této jednoduché teorie setrvačnosti, a že její podrobná matematická formulace nebyla dosud plně propracována.

Na problému setrvačnosti intenzívně pracuje řada teoretických fyziků v různých zemích, a proto lze očekávat, že i tento obtížný problém bude v dohledné době dořešen, a že se nakonec fyzikové shodnou na nejsprávnějším řešení, které nejlépe vystihne skutečnou podstatu setrvačnosti.

Barevná televize

ING. JIŘÍ PAZDERÁK, CSc., Praha

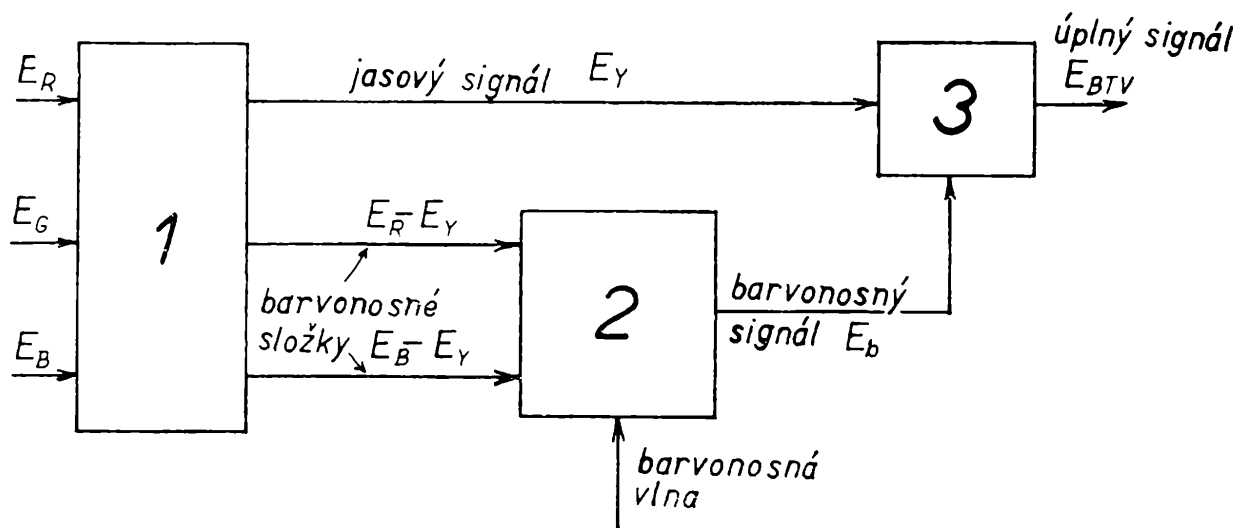
(Pokračování)

Přenosové soustavy barevné televize

Pod pojmem *přenosová soustava* nebo též *systém* barevné televize máme na mysli způsob, kterým se základní barevné signály E_R , E_G , E_B vycházející ze snímací soustavy *kódují* v jediný úplný signál barevné televize E_{BTV} , resp. způsob, kterým se tento signál na přijímací straně *dekóduje* a obnovují se základní barevné signály.

Úplný signál barevné televize se skládá ze signálu *jasového* a signálu *barvonosného*. Jasový signál E_Y přenáší pouze údaj o *jasu* snímané scény a nikoliv o její barvě. Jasový signál, jehož skladba je ve všech moderních soustavách prakticky shodná, vytváří se v maticovém obvodu kódovacího zařízení televizního studia (obr. 7) lineární kombinací základních barevných signálů podle vztahu

$$E_Y = 0,30 E_R + 0,59 E_G + 0,11 E_B .$$



Obr. 7. Principiální schéma kódovacího zařízení barevné televize

- 1 - Kódovací maticový obvod
- 2 - Modulátor
- 3 - Součtový zesilovač

Tato skladba jasového signálu odpovídá i běžnému signálu černobílé televize. Svojí přítomností v úplném signálu barevné televize splňuje tak jasový signál požadavek *slučitelnosti* soustavy barevné televize s užívanou soustavou černobílé televize, tzn. umožňuje příjem barevného vysílání i na přijímačích černobílé televize (samozřejmě jen v černobílém podání) nebo i příjem černobílého vysílání na přijímačích barevné televize (také jen v černobílém podání). V kódovacím zařízení postupuje jasový signál E_Y z kódovacího maticového obvodu do součtového zesilovače, kde se sčítá s barvonosným signálem.

Barvosný signál E_b přenáší pouze informace o barvě snímané scény, nikoliv o jejím jasu. Skladba barvosného signálu je proti jasovému signálu složitější a je typická pro různé moderní přenosové soustavy barevné televize. Základem barvosného signálu je *barvosná vlna* $A \sin(2\pi f_b t + \varphi)$, tj. elektrický signál sinusového průběhu v závislosti na čase t , amplitudy A , kmitočtu f_b a fáze φ . Modulací této barvosné vlny vzniká barvosný signál E_b . Působí-li modulační signál na amplitudu A nosné vlny, která se mění v jeho rytmu, jde o *modulaci amplitudovou*. Působí-li signál změny okamžitého kmitočtu barvosné vlny f_b , jedná se o *modulaci kmitočtovou*. Při kmitočtové modulaci zůstává amplituda barvosné vlny konstantní. Konečně ovlivňujeme-li modulačním signálem fázi barvosné vlny φ , jde o *modulaci fázovou*. Typ modulace je jedním z hlavních znaků, kterým se jednotlivé přenosové soustavy barevné televize navzájem odlišují.

Vytváření barvosného signálu sledujme ve schématu kódovacího zařízení barevné televize na obr. 7. Lineární kombinací základních barevných signálů E_R , E_G , E_B se v kódovacím maticovém obvodu vytvářejí také dva signály tzv. *barvosných složek* $E_R - E_Y$ a $E_B - E_Y$

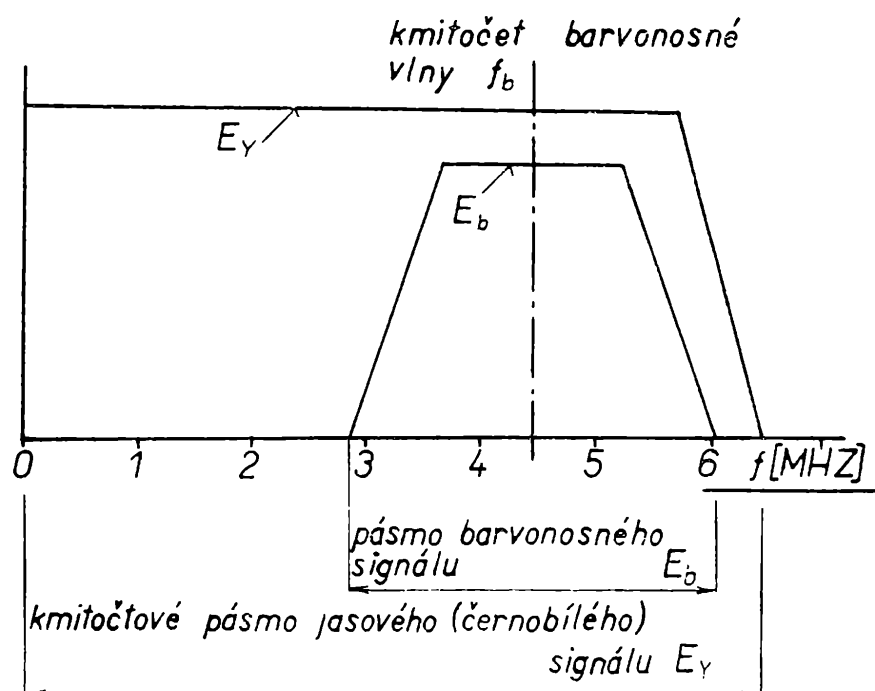
$$E_R - E_Y = 0,7 E_R - 0,59 E_G - 0,11 E_B,$$

$$E_B - E_Y = -0,3 E_R - 0,59 E_G + 0,89 E_B,$$

které nesou informace o barvě snímané scény. Tyto barvosné složky modulují v modulátoru barvosnou vlnu. Výsledkem je barvosný signál E_b , který v součtovém zesilovači spolu se signálem jasovým E_Y vytváří úplný signál barevné televize

$$E_Y + E_b = E_{BTV}.$$

Kmitočtovou skladbu úplného signálu barevné televize znázorňuje obr. 8. Kmitočtové pásmo jasového signálu (tj. spektrum kmitočtů,



Obr. 8. Kmitočtová skladba úplného signálu barevné televize

které je nutné pro přenos obrazového signálu) odpovídá kmitočtovému pásmu běžného signálu černobílé televize, jehož šířka je v naší televizní normě 6,5 MHz. Tato značná šíře kmitočtového pásma jasového (černobílého) signálu odpovídá potřebné rozlišovací schopnosti jasového (černobílého) obrazu. (S požadavkem reprodukce jemných detailů v televizním obrazu roste i potřeba šíře kmitočtového pásma přenosu obrazového signálu.)

Signály barvonosných složek a i barvonosný signál se naproti tomu přenášejí úsporným způsobem se značně omezeným kmitočtovým pásmem přenosu proti signálu jasovému, což dovoluje snížená barevná rozlišovací schopnost zraku proti jeho rozlišovací schopnosti černobílé.

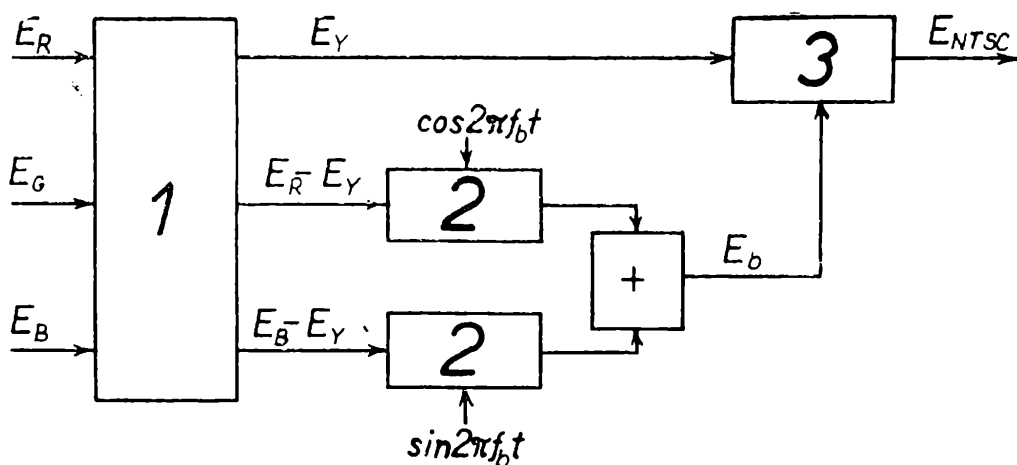
Barvonosný signál vytvořený určitým typem modulace barvonosné vlny se přenáší ve společném kmitočtovém kanálu se signálem jasovým. Kmitočet barvonosné vlny se pak volí uvnitř kmitočtového pásma jasového signálu tak, aby se jasový a barvonosný signál co nejméně ovlivňovaly.

V minulých patnácti letech vznikla řada různých přenosových soustav barevné televize, které soutěžily o provozní využití. Z nich nejzávažnější je americká soustava *NTSC*, francouzská *SECAM* a západoněmecká *PAL*

Soustava barevné televize NTSC

Přenosová soustava barevné televize *NTSC* (National Television System Committee) byla vyvinuta v USA, kde je v provozu od roku 1953. Později byla vypracována její evropská varianta přizpůsobená zdejšími soustavám černobílé televize s rozkladem obrazu na 625 řádků. Barvonosný signál se v soustavě *NTSC* vytváří *kvadrurní* (amplitudovou i fázovou) modulací barvonosné vlny

Princip kódování signálů v soustavě barevné televize *NTSC* znázorňuje schéma na obr. 9. V kódovacím maticovém obvodu se lineární



Obr. 9. Princip kódování signálů v soustavě barevné televize *NTSC*

1 - Kódovací maticový obvod

2 - Modulátor

3 - Součtový zesilovač

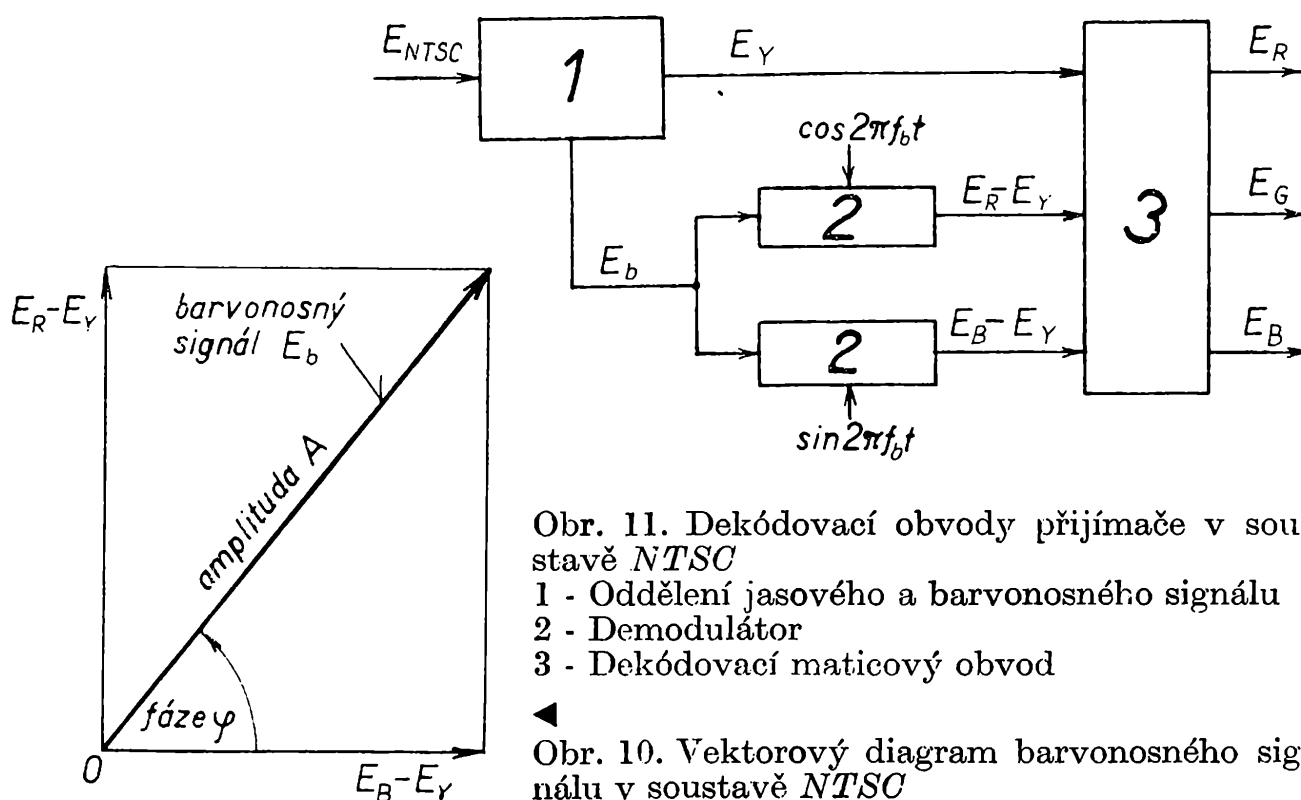
kombinací základních barevných signálů E_R , E_G , E_B vytváří jasový signál E_Y a obě barvonosné složky $E_R - E_Y$ a $E_B - E_Y$.

Podstata kvadrurní modulační spočívá v tom, že obě barvonosné složky modulují barvonosnou vlnu v kvadratuře, a to tak, že v jednom modulátoru složka $E_R - E_Y$ moduluje amplitudu kosinusové vlny kmitočtu f_b

$$(E_R - E_Y) \cos 2\pi f_b t$$

a v druhém modulátoru barvonosná složka $E_B - E_Y$ moduluje amplitudu sinusové vlny stejného kmitočtu f_b

$$(E_B - E_Y) \sin 2\pi f_b t$$



Obr. 11. Dekódovací obvody přijímače v soustavě NTSC

1 - Oddělení jasového a barvonosného signálu

2 - Demodulátor

3 - Dekódovací maticový obvod

Obr. 10. Vektorový diagram barvonosného signálu v soustavě NTSC

Jak znázorňuje diagram na obr. 10, jsou obě takto vzniklé amplitudově modulované vlny navzájem v kvadratuře, tj. vzájemně fázově posunuté o 90° . Jejich sečtením vzniká jediný barvonosný signál

$$E_b = A \sin (2\pi f_b t + \varphi) ,$$

jehož amplituda

$$A = \sqrt{(E_R - E_Y)^2 + (E_B - E_Y)^2}$$

a fáze

$$\varphi = \arctg \frac{E_R - E_Y}{E_B - E_Y}$$

se mění podle velikosti barvonosných složek a tím i podle přenášené barvy. Barvonosný signál se v součtovém stupni sčítá s jasovým signálem a vzniká úplný signál barevné televize E_{NTSC} , který se vysílá.

V přijímači po zpracování vysokofrekvenčního signálu přijatého anténou a po jeho zesílení vstupuje úplný signál E_{NTSC} do dekódovacích obvodů (obr. 11). Zde se kmitočtovými filtry nejdříve odděluje jasový a barvosný signál. Barvosný signál vstupuje do dvojice demodulátorů, kde se opět v kvadratuře demoduluje a vznikají původní barvosné složky $E_R - E_Y$ a $E_B - E_Y$. Jejich lineární kombinací s jasovým signálem E_Y se v dekódovacím maticovém obvodu podle vztahů

$$E_R = E_Y + (E_R - E_Y),$$

$$E_G = E_Y - 0,51 (E_R - E_Y) - 0,19 (E_B - E_Y),$$

$$E_B = E_Y + (E_B - E_Y),$$

vytvářejí obnovené základní barevné signály E_R , E_G , E_B pro barevnou obrazovku přijímače. (Dokončení)



ASTRONOMIE

Jak lze určit vzdálenost Měsíce od Země

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ, UP Olomouc

Výzkum Měsíce dostal se po delší době opět do popředí zájmu astronomů. Řada umělých družic Měsíce vyslala na Zemi snímky měsíčního povrchu a některé sondy konají přímý průzkum měsíčního povrchu. Předpokladem pro tyto úspěchy kosmonautiky bylo určení mnoha důležitých veličin, mezi něž patří vzdálenost Měsíce od Země.

Pokud je z historie známo, poprvé se pokusil o určení vzdálenosti Měsíce od Země alexandrijský astronom Aristarchos ze Samu (narozený počátkem 3. století př. n. l.). Geometrickou úvahou se pokusil stanovit, kolikrát je vzdálenost Země od Slunce větší než vzdálenost Měsíce od Země. Aristarchos uvažoval asi takto: v okamžiku, kdy je Měsíc v první anebo v poslední čtvrti, tvoří střed Slunce, střed

Měsíce a pozorovací místo na povrchu Země pravouhlý trojúhelník s pravým úhlem ve středu Měsíce M (obr. 1).

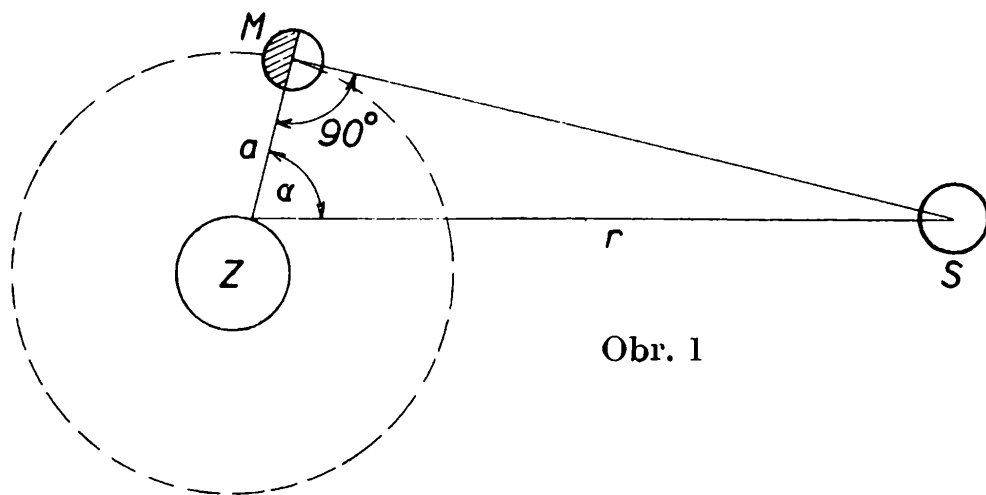
Změříme-li úhel α , který svírá směr ke Slunci S se směrem k Měsíci, pak platí

$$\cos \alpha = \frac{a}{r}$$

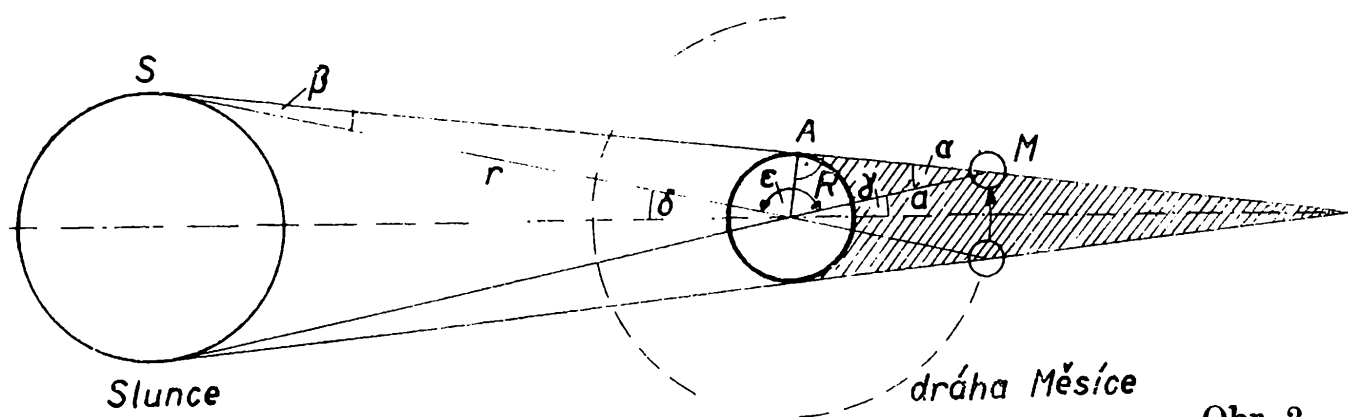
kde a je vzdálenost pozorovacího místa na Zemi od středu Měsíce, r vzdálenost od středu Slunce.

Aristarchova úvaha byla v podstatě správná, přesto však dospěl k chybnému výsledku, a to jednak proto, že pro něj bylo velmi obtížné určit přesně časový okamžik, kdy je Měsíc ve čtvrti, a jednak proto, že neměl možnost přesně změřit úhel α , který se navíc jen málo liší od pravého úhlu. Aristarchos určil $\alpha = 87^\circ$ a z toho vypočítal

$$\frac{a}{r} = \cos 87^\circ \quad \text{čili} \quad \frac{a}{r} = 0,0523 \quad \text{neboli} \quad \frac{r}{a} \doteq 19$$



Obr. 1



Obr. 2

Podle současných přesných měření je úhel $\alpha = 89^\circ 51'$, tedy $\cos \alpha = 0,002\,62$, což odpovídá poměru

$$\frac{r}{a} \doteq 380$$

Skutečný poměr vzdáleností Slunce a Měsíce od Země je tedy 20krát

větší, než určil Aristarchos. Přesto je Aristarchova úvaha historicky velmi cenná, neboť znamenala kvalitativní skok ve studiu vesmíru.

Asi 100 roků po Aristarchovi měřil vzdálenost Měsíce od Země Hipparchos, který k tomuto účelu využil pozorovaná úplného zatmění Měsíce. Vzdálenost Měsíce od Země stanovil v jednotkách poloměru Země a dospěl k velmi dobrému výsledku.

Hipparchos zjistil, že při úplném zatmění Měsíce projde střed Měsíce stínovým kuželem Země přibližně za tři hodiny (obr. 2). Protože oběžná doba Měsíce vzhledem ke Slunci (tzv. synodický měsíc) je asi 30 dní, pak za jeden den Měsíc urazí oblouk

$$\frac{360^\circ}{30} = 12^\circ \quad \text{a za tři hodiny oblouk} \quad \frac{12^\circ}{8} = 1,5^\circ$$

Úhel γ na obr. 2 je poloviční, je tedy $\gamma = 0,75^\circ$. Zdánlivý průměr Slunce je $0,5^\circ$, je tedy úhel $\delta = 0,25^\circ$. Pro trojúhelník MSZ můžeme psát

$$\sin \alpha : \sin \beta = r : a.$$

Hipparchos vzal podle Aristarchova výsledku poměr vzdáleností Slunce a Měsíce od Země $r : a = 19 : 1$; protože úhly α a β jsou velmi malé, můžeme psát

$$\alpha : \beta = 19 : 1$$

Pro součet úhlů v trojúhelníku MSZ platí $\alpha + \beta + \varepsilon = 180^\circ$, dále platí $\gamma + \varepsilon + \delta = 180^\circ$, a odtud

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta.$$

Protože $\gamma + \delta = 0,75^\circ + 0,25^\circ = 1^\circ$, je také

$$\alpha + \beta = 1^\circ = 60'$$

Známe poměr i součet úhlů $\alpha + \beta$ a odtud stanovíme $\beta = 3'$, $\alpha = 57'$. Protože trojúhelník ZAM je pravoúhlý, platí

$$\frac{R}{a} = \sin \alpha.$$

Číselná hodnota je $\sin \alpha = \sin 57' = 0,016\,58$, je tedy

$$\frac{R}{a} = 0,016\,58$$

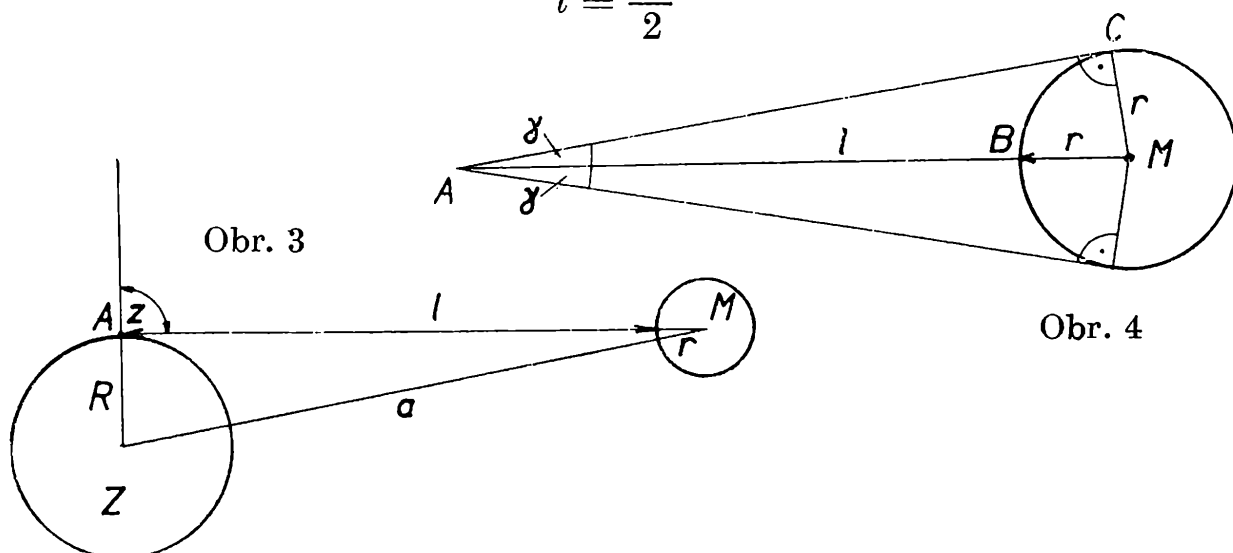
a odtud vzdálenost Měsíce od Země $a = 60,3 R$.

Vidíme, že Hipparchův výsledek souhlasí velmi dobře se skutečností, i když použil nesprávného Aristarchova výsledku pro poměr vzdáleností Slunce a Měsíce od Země. Součet úhlů $\alpha + \beta$ určil celkem správně, poměr úhlů je ve skutečnosti $380 : 1$, avšak chyba v určení α nemůže být větší než $3'$ (Hipparchos stanovil $\alpha = 57'$, součet $\alpha + \beta = 60'$; nemůže tedy α být větší než $60'$ a odchylka od správné hodnoty nemůže přesáhnout $3'$).

Aristarchos i Hipparchos mohli stanovit pouze poměrné vzdálenosti, protože v jejich době nebyla známa žádná veličina, vystupující ve výpočtech, a to v žádné z tehdy užívaných délkových jednotek.

Přejdeme nyní do současnosti. Moderní metodou je měření vzdálenosti Měsíce pomocí rádiových signálů. Z bodu A na Zemi vyšleme rádiový signál o vlnové délce $\lambda = (10 \text{ až } 15) \text{ m}$ směrem k Měsíci M (obr. 3). Rádiové vlny se odrazí od povrchu Měsíce a vrátí se do bodu A za dobu t ; za tuto dobu urazí vzdálenost $2l$ rychlostí c . Je tedy

$$l = \frac{c t}{2}$$



Dobu t změříme přesnými stopkami, rychlost elektromagnetických vln je $c = 299\,795 \text{ km s}^{-1}$, můžeme tedy vypočítat vzdálenost bodu A od povrchu Měsíce.

Chceme-li znát vzdálenost středu Měsíce od bodu A na povrchu Země, musíme ke vzdálenosti l přičíst poloměr r Měsíce. Tento poloměr stanovíme, změříme-li z bodu A zdánlivý průměr Měsíce. Označíme-li zdánlivý průměr Měsíce 2γ , pak podle obr. 4 je

$$\frac{r}{l + r} = \sin \gamma \quad \text{a odtud} \quad r = \frac{l \sin \gamma}{1 - \sin \gamma}$$

Je tedy
$$l + r = l + \frac{l \sin \gamma}{1 - \sin \gamma} = \frac{l}{1 - \sin \gamma}$$

Nyní můžeme určit vzdálenost a středu Země od středu Měsíce, potřebujeme však ještě změřit zenitovou vzdálenost z Měsíce v pozorovacím místě A . Potom pomocí kosinové věty vypočítáme z trojúhelníku ZMA (obr. 3)

$$a = \sqrt{R^2 + (l + r)^2 + 2 R (l + r) \cos z}$$

Podle současných měření je střední vzdálenost Měsíce od Země

$$a = (384\,405 \pm 4) \text{ km}$$

a poloměr Měsíce

$$r = 1738,0 \text{ km}$$

NAŠE SOUTĚŽ



Matematika

1. Paty kolmic spustěných z libovolného bodu (různého od vrcholu) kružnice opsané pravidelnému šestiúhelníku na jeho strany tvoří nekonvexní šestiúhelník s úhly vesměs pravými (vnitřními nebo vnějšími). Dokažte.

(Došlo 18 řešení)

Josef Brejcha

Riešil Marian Fúrik, III.C SVŠ, Zvolen:

Označme pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ a zvolme pravouhlú súradnú sústavu Pxy tak, že stred šesťuholníka je v počiatku P a jeho strana má veľkosť 1. Zvolme ďalej $A \equiv (1,0)$; pak je

$$B \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad C \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad D \equiv (-1,0), \quad E \equiv \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ F \equiv \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Libovolný bod kružnice opísanej šesťuholníku rôzny od jeho vrcholov označme $N \equiv (n, \sqrt{1-n^2})$ ($|n| < 1$). Rovnice priamok, v ktorých ležia strany šesťuholníka, sú

$$AB \equiv 3x + \sqrt{3}y - 3 = 0, \quad BC \equiv 2y - \sqrt{3} = 0, \\ CD \equiv 3x - \sqrt{3}y + 3 = 0, \quad DE \equiv 3x + \sqrt{3}y + 3 = 0, \\ EF \equiv 2y + \sqrt{3} = 0, \quad FA \equiv 3x - \sqrt{3}y - 3 = 0.$$

Než pristúpime k ďalšiemu, dokážeme vzorec. Majme priamku $p \equiv ax + by + c = 0$ a bod $B \equiv (\xi, \eta)$. Potom päta kolmice k spustenej z bodu B na priamku p má súradnice

$$x \equiv \left[\frac{b^2\xi - ab\eta - ac}{a^2 + b^2}, \frac{a^2\eta - ab\xi - bc}{a^2 + b^2} \right].$$

Dôkaz: Ak $a = 0, b \neq 0$ alebo $a \neq 0, b = 0$, ľahko sa presvedčíme, že vzorec platí. Ďalej nech $a \neq 0, b \neq 0$. Priamka k má zrejme rovnicu $k \equiv bx - ya + d = 0$. Keďže k prechádza bodom B , je $b\xi - a\eta + d = 0$.

Z toho vyplýva, že $k \equiv bx - ay + a\eta - b\xi = 0$. Z rovníc

$$ax + by + c = 0, \quad bx - ay + a\eta - b\xi = 0$$

určíme ekvivalentnými úpravami

$$x = \frac{b^2\xi - ab\eta - ac}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{a^2\eta - ab\xi - bc}{a^2 + b^2}, \quad c . b . d .$$

Teraz pomocou dokázaného vzorca ľahko vypočítame súradnice piat kolmíc spustených z bodu N na strany šesťuholníka. Tieto päty označme: P_{AB} (päta kolmice prechodiacej bodom N spustenej na stranu AB) atď. Je

$$P_{AB} \equiv \left[\frac{-\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-n^2} + n + 3}{4}, \frac{3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{3}n + \sqrt{3}}{4} \right],$$

$$P_{BC} \equiv \left[n, \frac{\sqrt{3}}{2} \right],$$

$$P_{CD} \equiv \left[\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-n^2} + n - 3}{4}, \frac{3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n + \sqrt{3}}{4} \right],$$

$$P_{DE} \equiv \left[\frac{-\sqrt{3} \cdot \sqrt{1-n^2} + n - 3}{4}, \frac{3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{3}n - \sqrt{3}}{4} \right],$$

$$P_{EF} \equiv \left[n, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right],$$

$$P_{FA} \equiv \left[\frac{\sqrt{3} \sqrt{1-n^2} + n + 3}{4}, \frac{3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n - \sqrt{3}}{4} \right].$$

Dalej je ve vektorovom označení

$$\overrightarrow{P_{AB}P_{BC}} \equiv \left[\frac{\sqrt{3} \sqrt{1-n^2} + 3n - 3}{4}, \frac{-3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n + \sqrt{3}}{4} \right],$$

$$\overrightarrow{P_{BC}P_{CD}} \equiv \left[\frac{\sqrt{3} \sqrt{1-n^2} - 3n - 3}{4}, \frac{3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n - \sqrt{3}}{4} \right],$$

$$\overrightarrow{P_{CD}P_{DE}} \equiv \left[\frac{-\sqrt{3} \sqrt{1-n^2}}{2}, \frac{-\sqrt{3}n - \sqrt{3}}{2} \right],$$

$$\overrightarrow{P_{DE}P_{EF}} \equiv \left[\frac{\sqrt{3} \sqrt{1-n^2} + 3n + 3}{4}, \frac{-3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n - \sqrt{3}}{4} \right],$$

$$\overrightarrow{P_{EF}P_{FA}} \equiv \left[\frac{\sqrt{3} \sqrt{1-n^2} - 3n + 3}{4}, \frac{3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n + \sqrt{3}}{4} \right],$$

$$\overrightarrow{P_{FA}P_{AB}} \equiv \left[\frac{-\sqrt{3} \sqrt{1-n^2}}{2}, \frac{-\sqrt{3}n + \sqrt{3}}{2} \right].$$

Ľahko dokážeme, že tieto vektory sú nenulové (použitím toho, že $N \neq A, B, \dots, F$ a $|n| < 1$).

Vypočítajme skalárny súčin

$$\overrightarrow{P_{AB}P_{BC}} \cdot \overrightarrow{P_{BC}P_{CD}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{1-n^2} + 3n - 3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3} \sqrt{1-n^2} - 3n - 3}{4} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n + \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n - \sqrt{3}}{4} = \\
& = \frac{1}{16} \left[(3\sqrt{1-n^2} - 3)^2 - 9n^2 + 3n^2 - (3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{3})^2 \right] = \\
& = \frac{1}{16} \left[3 - 3n^2 - 6\sqrt{3}\sqrt{1-n^2} + 9 - 9n^2 + 3n^2 - 9 + 9n^2 + \right. \\
& \quad \left. + 6\sqrt{3}\sqrt{1-n^2} - 3 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Podobne dokážeme, že platí

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_{BC} P_{CD}} \cdot \overrightarrow{P_{CD} P_{DE}} &= 0, \quad \overrightarrow{P_{CD} P_{DE}} \cdot \overrightarrow{P_{DE} P_{EF}} = 0, \\
\overrightarrow{P_{DE} P_{EF}} \cdot \overrightarrow{P_{EF} P_{FA}} &= 0, \quad \overrightarrow{P_{EF} P_{FA}} \cdot \overrightarrow{P_{FA} P_{AB}} = 0, \\
\overrightarrow{P_{FA} P_{AB}} \cdot \overrightarrow{P_{AB} P_{BC}} &= 0.
\end{aligned}$$

Platí teda

$$\begin{aligned}
P_{AB} P_{BC} \perp P_{BC} P_{CD} \perp P_{CD} P_{DE} \perp P_{DE} P_{EF} \perp P_{EF} P_{FA} \perp \\
\perp P_{FA} P_{AB} \perp P_{AB} P_{BC}
\end{aligned}$$

Z toho plynie, že

$$P_{AB} P_{BC} P_{CD} P_{DE} P_{EF} P_{FA} P_{AB}$$

je lomená (uzavretá) čiara s pravými uhlami vo všetkých vrcholoch (vnútornými alebo vonkajšími).

Dokážeme, že táto lomená čiara sama seba nepretína. Zrejme stačí dokázať, že dvojice úsečiek

$$P_{AB} P_{BC}, P_{DE} P_{EF}; P_{BC} P_{CD}, P_{EF} P_{FA}; P_{CD} P_{DE}, P_{FA} P_{AB},$$

nemajú spoločný vnútorný bod (ostatné dvojice sú buď rovnobežné alebo majú spoločný jeden koncový bod).

Bez újmy na obecnosti môžeme predpokladať, že bod N leží na kratšom oblúku $\widehat{AB}$, teda pre n platí $\frac{1}{2} < n < 1$ a ďalej $\sqrt{1-n^2} > 0$.

Pre súradnice y bodov

$$P_{AB}, P_{BC}, P_{DE}, P_{EF}$$

platí pak

$$P_{AB} \quad \frac{3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{3}n + \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{3}(n-1)}{4} > 0,$$

$$P_{BC} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} > 0,$$

$$P_{DE} \dots \frac{3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{3}n - \sqrt{3}}{4} < 0$$

[táto nerovnosť je totiž ekvivalentná s $(n + 1) \cdot (2n - 1) > 0$],

$$P_{EF} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Z toho plynie, že úsečky

$$P_{AB} P_{BC}, P_{DE} P_{EF}$$

ležia v opačných polrovinách vyťatých osou x a preto nemajú žiaden spoločný bod.

Pre súradnice y bodov

$$P_{BC}, P_{CD}, P_{EF}, P_{FA}$$

platí

$$P_{BC} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$P_{CD} \quad \frac{3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n + \sqrt{3}}{4} > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[lebo je ekvivalentná s $(n - 1) \cdot (2n + 1) < 0$],

$$P_{EF} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$P_{AF} \quad \frac{3\sqrt{1-n^2} + \sqrt{3}n - \sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(lebo je ekvivalentná s $2n^2 - 3n + 3 > 0$).

Preto úsečky

$$P_{BC} P_{CD}, P_{EF} P_{FA}$$

ležia v opačných polrovinách vyťatých priamkou $2y - \sqrt{3} = 0$ a teda nemajú spoločný žiaden bod.

Pre súradnice x bodov

$$P_{CD}, P_{DE}, P_{FA}, P_{AB}$$

platí

$$P_{CD} \quad \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-n^2} + n - 3}{4} < \frac{\sqrt{3} + 1 - 3}{4} < 0,$$

$$P_{DE} \quad \frac{-\sqrt{3}\sqrt{1-n^2} + n - 3}{4} < \frac{0 + 1 - 3}{4} < 0,$$

$$P_{FA} \dots \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-n^2} + n + 3}{4} > \frac{0 - 1 + 3}{4} > 0,$$

$$P_{AB} \quad \frac{-\sqrt{3}\sqrt{1-n^2} + n + 3}{4} > \frac{-\sqrt{3} - 1 + 3}{4} > 0.$$

Úsečky

$$P_{CD} P_{DE}, P_{FA} P_{AB}$$

teda ležia v opačných polrovinách vyťatých osou y a preto nemajú spoločného bodu.

Preto sa uvedená loměná čiara nepretína a

$$P_{AB} P_{BC} P_{CD} P_{DE} P_{EF} P_{FA}$$

je šesťuholník. Predpokladajme, že je konvexný. Potom všetky vnútorné uhly musia byť pravé; ich súčet je $6R$. Avšak každý šesťuholník má súčet vnútorných uhlov $2(6 - 2)R = 8R$; spor. Teda náš šesťuholník musí byť nekonvexný. Konkrétne vyhovuje šesťuholník s jedným vnútorným uhlom veľkosti $3R$. Tým je úloha rozriešená.

Konstruktívni geometrie

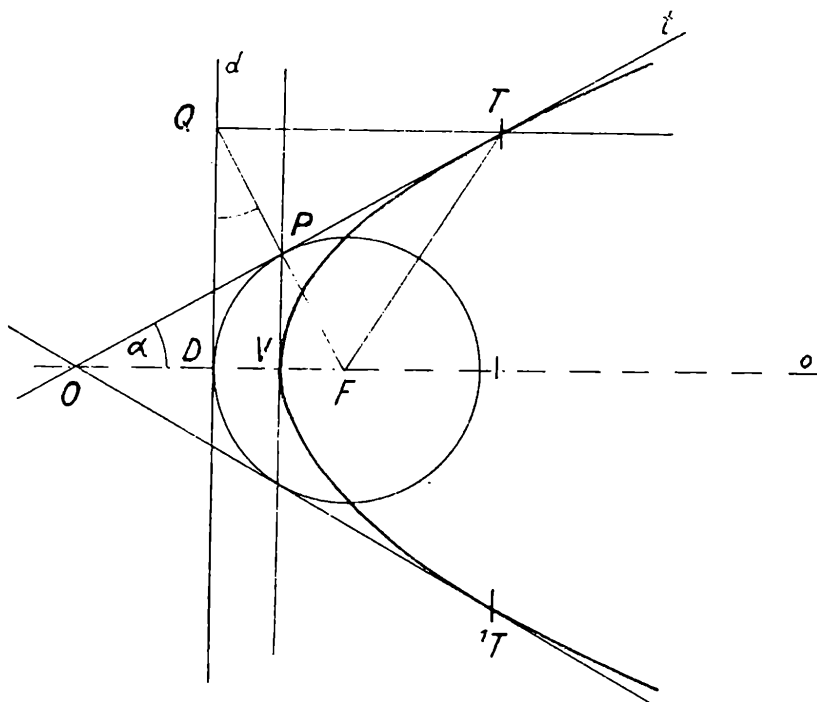
1. Dokažte, že spoločné tečny paraboly dané ohniskom F a rídici priamkou d a kružnice opsané z ohniska polomërom rovným parametru paraboly, protínajú osu paraboly v bode súmernom s ohniskom F podľa priamky d . Určete veľkosť uhlu obou tečen.

(Došlo 22 riešení)

Josef Glivický

Riešil Tomáš Duby, 4.O₁ SPŠE, Bratislava:

Nech priamka t je spoločná dotyčnica paraboly a kružnice $k \equiv (F, p)$, kde p je parametr paraboly (obr. 1). Označme T dotykový bod priamky t



Obr. 1

a paraboly. Pre bod T platí

$$FT = TQ,$$

kde TQ je vzdialenosť bodu T od riadiacej priamky d . Trojuholník FQT je rovnoramenný o základni FQ . Pre dotyčnicu paraboly je

$$\sphericalangle FTP = \sphericalangle QTP$$

pričom bod P je priesečník priamok FQ a t a súčasne bodom dotyku priamky t a kružnice $k \equiv (F, p)$. Dotyčnica je osou súmernosti trojuholníka FTQ a $FP = PQ = p$, $PQ \perp t$, $FQ = 2FP = 2p$.

Označme O priesečník dotyčnice t a osi paraboly o , D priesečník riadiacej priamky s osou paraboly ($d \perp o$).

Ramená uhlov FOP a FQD sú na seba kolmé, a preto

$$\sphericalangle FOP = \sphericalangle FQD$$

Je tiež $FP = FD = p$, a preto

$$\triangle FOP \cong \triangle FQD$$

a tiež $FQ = FO = 2p$.

Nakolko však $FD = p$, $FD + OD = FO = 2p$, potom je bod O súmerne združený s bodom F podľa riadiacej priamky d .

Označme $\sphericalangle FOP = \alpha$, potom

$$\sin \alpha = \frac{PF}{FO} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Preto veľkosť uhlu oboch dotýčnic je $\sphericalangle TO^1T = 2\alpha = 60^\circ$.

Poznámka: $\sphericalangle QTP = \sphericalangle FOP$, $PQ = PF$, $\triangle OFP \cong \triangle TQP$, a preto $\triangle FTQ$ je rovnostranný.

Fyzika

3. Kometa má postupnou rýchlosť v odsluní 4krát menší než v prísluní. Jak velká je její numerická výstřednost ε ?

V prísluní má tato kometa od středu Slunce vzdálenost $r_{\Pi} = 1,465$ planetárních jednotek. Stanovte její střední vzdálenost a od Slunce, délkovou výstřednost e a vzdálenost odsluní r_A . Jak velká je její oběžná doba T ? Porovnáním výsledků s hodnotami v tabulkách zjistěte, o kterou kometu jde.

P o k y n : Planetární jednotka R je střední vzdálenost Země od Slunce, tj. $R = 149,5 \cdot 10^6$ [km].

(Došlo 29 řešení)

Otakar Julák

Řešení autorovo:

Ve vrcholech hlavní osy je úhel sevřený rychlostí v eliptické dráze a příslušným průvodičem roven 90° , proto platí přímo z 2. Keplerova zákona

$$u_{\Pi} \cdot r_{\Pi} = u_A \cdot r_A,$$

kde u jsou rychlosti, r příslušné průvodiče, index π značí perihelium, index A afhelium komety

$$u_{\Pi} : u_A = r_A : r_{\Pi}.$$

Ježto

$$u_{\Pi} : u_A = 4,$$

je

$$r_A = 4r_{\Pi}.$$

Délka hlavní osy

$$2a = r_{\Pi} + r_A, a = (4 + 1) \cdot r_{\Pi} : 2 = \frac{5}{2} r_{\Pi},$$

$$2e = r_A - r_{\Pi}, e = (4 - 1) \cdot r_{\Pi} : 2 = \frac{3}{2} r_{\Pi},$$

kde e je délková výstřednost, číselná výstřednost

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\frac{3}{2} r_{\Pi}}{\frac{5}{2} r_{\Pi}} = 0,6.$$

Podle 3. Keplerova zákona platí

$$T_Z^2 : T_K^2 = r_Z^3 : a_K^3 ,$$

odtud

$$T_K = T_Z \sqrt[3]{a_K^3 : r_Z^3} ,$$

kde $T_Z = 1$ rok, $r_Z = 1$ plan. jedn., $T_K =$ oběžná doba komety v rocích, $a_K = \frac{5}{2} r_H = 3,6625$ plan. j. ,

$$T_K = \sqrt[3]{a_K^3} = \sqrt[3]{3,6625^3} = 7,009 \text{ roků} .$$

Vzdálenost odsluní

$$r_A = 2a - r_H = 2 \cdot 3,6625 - 1,465 = 5,860 \text{ pl. j.}$$

Vypočtené parametry odpovídají parametrům komety Borrelly z r. 1905.

4. První umělá družice Měsíce, nazvaná Luna 10, byla vypuštěna dne 31. III. 1966. Její nejmenší výška nad povrchem Měsíce byla $h_H = 350$ [km] (v pericentru, tj. v nejbližším bodě své eliptické dráhy od středu Měsíce) a největší výška nad povrchem Měsíce (v apocentru, tj. v nejvzdálenějším místě dráhy od středu Měsíce) byla $h_A = 1000$ [km]. Hmotnost Měsíce je $m_0 = 7,347 \cdot 10^{22}$ [kg], jeho poloměr je $r_0 = 1738$ [km], gravitační konstanta je $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}$ [m³ kg⁻¹ s⁻²].

Pro družici Luna 10 určete numerickou výstřednost ε , velkou poloosu a eliptické dráhy, kruhovou rychlost (tj. střední dráhovou rychlost) u_k a dobu oběhu T .

Jak veliký (ve stupních) by se jevil zdánlivý poloměr Měsíce pozorovateli z této družice v nejmenší vzdálenosti od Měsíce a kolikrát by pozorovaný poloměr měsíčního kotouče se jevil větší než zdánlivý poloměr Měsíce pozorovaný ze Země?

(Došlo 29 řešení)

Otakar Julák

Řešení autorovo:

Poloměr dráhy Luny 10 je v pericentru

$$r_H = r_0 + h_H = 2088 \text{ [km]} ,$$

v apocentru

$$r_A = r_0 + h_A = 2378 \text{ [km]} ; \quad r_H + r_A = 2a ,$$

takže

$$a = 2413 \text{ [km]} , \quad 2e = r_A - r_H , \quad e = 325 \text{ [km]}$$

Číselná výstřednost

$$\varepsilon = e : a = 0,1346$$

Konstanta gravitačního pole Měsíce je

$$\kappa \quad m_0 = 4,9005 \cdot 10^{12} \text{ [m}^3 \text{ s}^{-2}]$$

Oběžná doba

$$T = 2\pi \sqrt[3]{a^3 / \kappa \cdot m_0} = 10\,640 \text{ s} = 177,3 \text{ min} = 2 \text{ h } 57,3 \text{ min.}$$

Střední dráhová rychlost je buď

$$u_a^2 = \frac{\kappa \cdot m_0}{a}$$

nebo

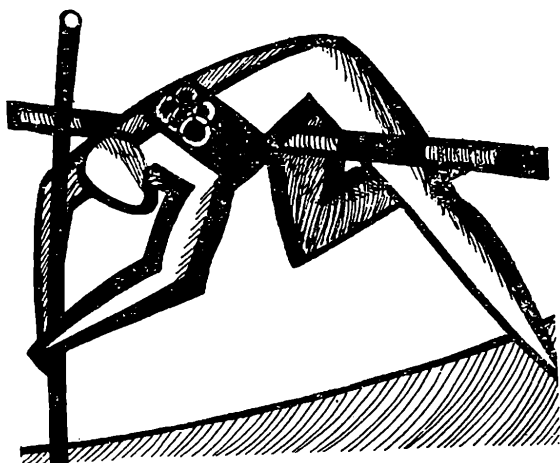
$$u_a = 2\pi a : T \quad u_a = 1,424 \text{ [km s}^{-1}\text{]}$$

Zdánlivý poloměr Měsíce pozorovaný z pericentra Luny 10 udává

$$\sin \alpha = r_0 : r_{II} = 0,8324, \quad \alpha = 56^\circ 21'$$

zdánlivý poloměr Měsíce pozorovaný ze střední vzdálenosti Země činí podle Valouchových tabulek $15'$. Poměr úhlů je $56^\circ 60' 15' = 224$.

Pozorovatel by viděl ze vzdálenosti pericentra Luny 10 poloměr Měsíce 224krát větší než ze střední vzdálenosti Země.



MMO

Řešení úloh IX. Mezinárodní matematické olympiády ve dnech 3. až 12. července 1967 v Jugoslávii

DOC. JAN VYŠÍN, Praha

1. Budiž $ABCD$ rovnoběžník, jehož strany AB , AD mají po řadě délky a , 1 a jehož úhel $\sphericalangle DAB$ má velikost α . Trojúhelník ABD nechť je ostroúhlý. Pak jednotkové kruhy se středy A , B , C , D pokrývají¹⁾ rovnoběžník $ABCD$ právě tehdy, když platí

$$a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \cdot \sin \alpha$$

Dokažte!

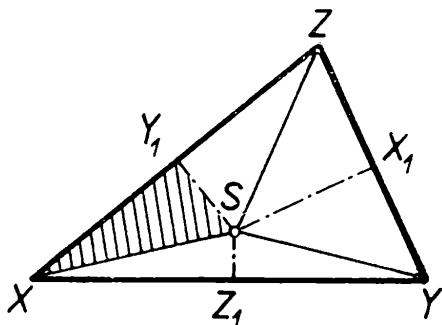
¹⁾ To znamená, že každý bod rovnoběžníku náleží aspoň jednomu z těchto kruhů.

Ř e š e n í. a) Nejprve dokážeme pomocnou větu **P**:

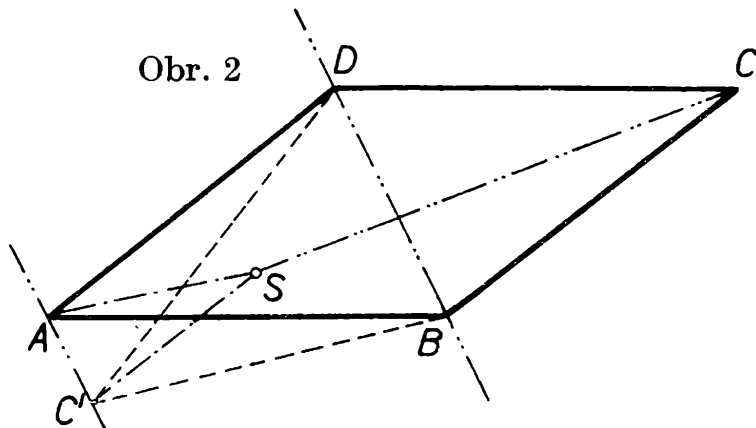
Budiž XYZ ostroúhlý trojúhelník, r poloměr kružnice jemu opsané. Pak tři kruhy se středy X, Y, Z o poloměru ρ pokrývají trojúhelník XYZ právě tehdy, když platí $\rho \geq r$.

D ů k a z. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku XYZ (obr. 1). Protože je trojúhelník XYZ ostroúhlý, náleží bod S jeho vnitřku. Označme dále X_1, Y_1, Z_1 paty kolmic spuštěných z bodu S po řadě na přímky YZ, ZX, XY . Protože je trojúhelník XYZ ostroúhlý, padnou body X_1, Y_1, Z_1 do vnitřku příslušných stran. Je-li $\rho < r$, pak bod S nenáleží žádnému z kruhů $K_X \equiv (X; \rho), K_Y \equiv (Y; \rho), K_Z \equiv (Z; \rho)$. Je-li $\rho \geq r$, pak bod S náleží každému z kruhů K_X, K_Y, K_Z . Protože je $XY_1 < XS$, náleží také bod Y_1 kruhu K_X , a tedy všechny body (vyšrafovaného) trojúhelníka XY_1S náleží kruhu K_X . Obdobně se dokáže, že každý z ostatních trojúhelníků $XZ_1S, YZ_1S, YX_1S, ZX_1S, ZY_1S$ náleží některému z kruhů K_X, K_Y, K_Z .

Obr. 1



Obr. 2



Tím je pomocná věta **P** dokázána.

b) Nechť jednotkové kruhy K_A, K_B, K_C, K_D se středy A, B, C, D pokrývají rovnoběžník $ABCD$. Pak kruhy K_A, K_B, K_D pokrývají trojúhelník ABD . Kdyby tomu totiž tak nebylo, platila by podle pomocné věty **P** nerovnost $1 < r$, kde r značí poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABD . Pro střed S této kružnice by tedy platilo

$$r = AS > 1, CS \leq 1, \quad (1)$$

neboť bod S by podle předpokladu náležel kruhu K_C . Z obr. 2, v němž je BDC' trojúhelník souměrně sdružený s trojúhelníkem BDC podle přímky BD , plyne

$$AS = C'S < CS, \quad (2)$$

neboť bod S leží uvnitř poloroviny BDA opačné k BDC . Z (1) dostaneme $CS < AS$, což je ve sporu s (2).

c) Protože kruhy K_A, K_B, K_D pokrývají trojúhelník ABD , platí podle pomocné věty **P** nerovnost $r \leq 1$. Vypočteme r ; podle kosinové věty a podle známého vzorce je

$$BD^2 = a^2 + 1 - 2a \cos \alpha, \quad BD = 2r \sin \alpha. \quad (3)$$

Vyloučíme-li z rovnic (3) BD a použijeme-li vztahu $r \leq 1$, vyjde

$$a^2 + 1 - 2a \cos \alpha \leq 4 \sin^2 \alpha,$$

neboli

$$a^2 - 2a \cos \alpha + 1 - 4 \sin^2 \alpha \leq 0,$$

neboli

$$(a - \cos \alpha)^2 \leq 3 \sin^2 \alpha. \quad (4)$$

Protože trojúhelník ABD je ostroúhlý, padne pata jeho výšky spuštěné z vrcholu D mezi body A, B ; proto je $a > \cos \alpha$ a z nerovnosti (4) dostaneme

$$a - \cos \alpha \leq \sqrt{3} \sin \alpha,$$

neboli

$$a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha \quad (5)$$

d) Obráceně, platí-li (5), platí i (4). Odtud dostaneme obrácením postupu $4r^2 \sin^2 \alpha = BD^2 \leq 4 \sin^2 \alpha$, tj. $r \leq 1$. Z toho vyplývá podle pomocné věty **P**, že kruhy K_A, K_B, K_D pokrývají trojúhelník ABD . Užijeme-li souměrnosti podle průsečíku úhlopříček AC, BD , zjistíme, že kruhy K_A, K_B, K_C, K_D pokrývají rovnoběžník $ABCD$.

2. Má-li jediná hrana čtyřstěnu délku větší než 1, pak je jeho objem menší nebo roven $\frac{1}{8}$. Dokažte!

Řešení. Budiž $ABCD$ tetraedr, jehož hrany mají délky $AB = 2x \leq 1$, $AC \leq 1$, $AD \leq 1$, $BC \leq 1$, $BD \leq 1$, $CD > 1$. Označme u, v délky výšek trojúhelníků ABC, ABD , spuštěných na stranu AB .

Budiž ρ rovina stěny ABC . Pak vrchol C náleží vyšrafované části roviny ρ , která je průnikem jednotkových kruhů se středy A, B (obr. 3).

Označíme-li body P, Q, M, C', R podle obr. 3,

je zřejmé

$$u = CR \leq C'R \leq PM = \sqrt{1 - x^2}$$

neboli

$$u \leq \sqrt{1 - x^2} \quad (6)$$

Obdobně dostaneme z trojúhelníka ABD

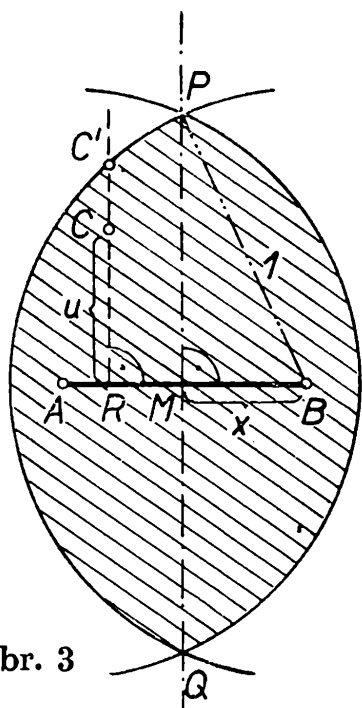
$$v \leq \sqrt{1 - x^2} \quad (7)$$

Protože výška čtyřstěnu $ABCD$ spuštěná z vrcholu D má nejvýše velikost v (jsou-li stěny ABC, ABD navzájem kolmé), platí pro objem y čtyřstěnu $ABCD$ tento odhad

$$y = \frac{1}{3} x uv,$$

neboli podle (6), (7)

$$y \leq \frac{1}{3} (x - x^3) \quad (8)$$



Obr. 3

Naším úkolem je najít maximum funkce

$$\frac{1}{3} (x - x^3)$$

v intervalu

$$0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

Dokážeme, že tato funkce je v uvedeném intervalu rostoucí. Skutečně, je-li

$$x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2},$$

platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (x_2 - x_2^3) - \frac{1}{3} (x_1 - x_1^3) &= \frac{1}{3} (x_2 - x_1) (1 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2) \geq \\ &\geq \frac{1}{3} (x_2 - x_1) (1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{12} (x_2 - x_1) > 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\frac{1}{3} (x_2 - x_2^3) > \frac{1}{3} (x_1 - x_1^3)$$

Ze vztahu (8) pak dostaneme pro $x = \frac{1}{2}$

$$y \leq \frac{1}{3} (\frac{1}{2} - \frac{1}{8}) = \frac{1}{8}.$$

Tetraedr, jehož hrany mají délky $AB = AC = AD = BC = BD = 1$ a jehož stěny ABC , ABD jsou navzájem kolmé, má objem $\frac{1}{8}$ a jeho hrana CD má délku

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$$

Tím je dokázána věta z úlohy 2 a zároveň je ověřeno, že existuje tetraedr maximálního objemu $\frac{1}{8}$.

3. Budte k, m, n přirozená čísla taková, že $m + k + 1$ je prvočíslo větší než $n + 1$. Budiž $c_s = s(s + 1)$. Pak součin

$$(c_{m+1} - c_k) (c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k)$$

je dělitelný součinem $c_1 c_2 \dots c_n$. Dokažte!

Ř e š e n í. a) Nejprve zjistíme rozepsáním součinu $c_1 c_2 \dots c_n$, že platí

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n = n! (n + 1)! \quad (9)$$

Dále vypočteme

$$c_{m+\lambda} - c_k = m + \lambda - k + (m + \lambda)^2 - k^2,$$

tj.

$$\begin{aligned} c_{m+\lambda} - c_k &= m + \lambda - k + (m + \lambda - k) (m + \lambda + k) = \\ &= (m + \lambda - k) (m + \lambda + k + 1) \end{aligned} \quad (10)$$

přítom λ je libovolné přirozené číslo. Pomocí rovnosti (10) upravíme daný součin takto

$$P = (c_{m+1} - c_k) (c_{m+2} - c_k) \dots (c_{m+n} - c_k) = P_1 P_2,$$

kde

$$\begin{aligned} P_1 &= (m+1-k)(m+2-k) \dots (m+n-k), \\ P_2 &= (m+k+2)(m+k+3) \dots (m+k+n+1). \end{aligned} \quad (11)$$

Součin P_1 obsahuje n za sebou jdoucích celých čísel. Je-li některé z těchto čísel nula, je

$$\frac{P_1}{n!} = 0,$$

tj. číslo celé.

Není-li žádný z činitelů P_1 roven nule, je P_1 až na znamení rovno součinu n po sobě jdoucích přirozených čísel a pak je také

$$\frac{P_1}{n!}$$

číslo celé. Platí totiž pro libovolná přirozená čísla α, β , že

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+\beta)}{\beta!} = \binom{\alpha+\beta}{\beta}$$

je číslo celé.

Tím je dokázáno, že součin P_1 je vždy dělitelný číslem $n!$

b) Nyní budeme vyšetřovat součin $(m+k+1)P_2$. Je to součin $n+1$ po sobě jdoucích přirozených čísel, proto je podle předchozího dělitelný číslem $(n+1)!$ Platí tedy

$$(m+k+1)P_2 = q \cdot n! (n+1), \quad (12)$$

kde q je přirozené číslo. Pravá strana (12) je dělitelná prvočíslem $m+k+1$. Protože je $m+k+1$ větší než každé z čísel $1, 2, \dots, n+1$, je $m+k+1$ dělitel čísla q , tj.

$$q = r(m+k+1), \quad (13)$$

kde r je přirozené číslo. Dosadíme-li z (13) do (12) a krátíme-li číslem $m+k+1$, vyjde

$$P_2 = r(n+1)!,$$

tj. součin P_2 je dělitelný číslem $(n+1)!$

Podle (11) je tedy součin $P = P_1 P_2$ dělitelný číslem $n!(n+1)!$, tj. podle (9) je součin P dělitelný součinem $c_1 c_2 \dots c_n$, jak jsme měli dokázat.

Mezinárodní fyzikální olympiáda

Je jen málo známo, že ve dnech 25. června až 4. července 1967 se konala ve Varšavě první Mezinárodní fyzikální olympiáda. Iniciativa tentokráte náležela Polsku.

Olympiády se zúčastnilo Bulharsko, Československo, Maďarsko, Polsko a Rumunsko. Každý z těchto států vyslal tříčlenné družstvo žáků. Od nás to byli:

František Klein, 3. roč. SVVŠ Brno,
Jaroslav Kozáčík, 4. roč. SPŠJT Praha,
Ladislav Obdržálek, 3. roč. SVVŠ Brno,

které vedl prof. dr. Rostislav Košťál z Brna.

Soutěžící dostali tři úlohy, z nichž jedna byla experimentální. Nejvíce bylo možno získat 40 bodů, úspěšný soutěžící musel dosáhnout více než 20 bodů. Plný počet 40 bodů nedosáhl nikdo, nejlepší byl jeden člen maďarského družstva s 39 body. Nejlepším naším soutěžícím byl J. Kozáčík s 38 body.

Přehled výsledků ukazuje tabulka

1. <i>Maďarsko</i>	107 bodů,
2. <i>Polsko</i>	104 bodů,
3. <i>Československo</i>	103 bodů,
4. <i>Bulharsko</i>	68 bodů,
5. <i>Rumunsko</i>	43 bodů.

Jistě si všichni přejeme, aby podobně jako Mezinárodní matematická olympiáda i Mezinárodní fyzikální olympiáda se konala každoročně a měla také tak velkou mezinárodní účast. Statut MFO připraví zvláštní tříčlenný mezinárodní výbor.

M. M.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots k}$$



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

Tajné násobení

V označeném násobení nahradte tečky vhodnými číslicemi:

$$\begin{array}{r} \dots7 \times 7\dots \\ \hline \dots\dots \\ 1.71 \\ 17\dots \\ \hline .6\dots\dots \end{array}$$

S. H.

Proč to vždycky nejde vypočítat?

Jistě jste již vyřešili velký počet úloh o pohybech, délkách jejich drah, rychlostech, době trvání apod. Následující úloha není příliš obtížná, jsou však problémy s její řešitelností. Zamyslete se nad ní a pošlete redakci vysvětlení záhady, před kterou stojí dva kamarádi. Petr a Pavel.

Jistý cyklistický závod se koná každoročně na stejné trati, kterou závodníci projíždějí tam a zpět. Petr se dozvěděl údaje o rychlosti vítěze letošního závodu, ale nezná délku trati. Chystá se jí vypočítat z těchto údajů: vítěz dosáhl času 5 hodin, do kopce jel průměrnou

rychlostí 30 km/hod, po rovině 40 km/hod a s kopce 60 km/hod. Pavel mu říká: „Tyto údaje nestačí k výpočtu délky trati, já jsem to zkoušel vypočítat loni, kdy vítěz dojel za nepříznivých podmínek v čase o půl hodiny horším a dosáhl na rovině rychlosti 40 km/hod, do kopce jen 25 km/hod a s kopce 50 km/hod.“ Petr tomu nevěřil a pokusil se o výpočet z „letošních“ údajů, kupodivu vypočítal délku trati závodu velmi snadno. Když však chtěl stejným způsobem provést výpočet na základě „loňských“ údajů, neuspěl. Jak je to možné? Pokuste se nalézt vztah mezi údaji o rychlostech, při jehož platnosti je úloha řešitelná.

Jaroslav Šedivý



O Euklidovi

DOC. VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, ČVUT, Praha

Každý z vás, čtenářů Rozhledů se setkal se jménem Euklides nebo také Eukleides. Věty Eukleidovy o výšce a odvěsně trojúhelníku pravoúhlého, Eukleidovy konstrukce máte jistě všichni šťastně za sebou, s eukleidovskou a s ne-euklidovskou geometrií nebo s euklidovským prostorem se mnozí ještě setkáte.

Kdo to byl Euklides? Historik odpoví, že byli dva, jeden filosof, druhý matematik a o toho nám jde. Víme jen, že žil kolem roku 300 před naším letopočtem, tedy asi 100 let po filosofu Platónovi, o kterém jsme jistě již slyšeli. Platón, žák Sokratův, byl stoupencem athénské aristokracie, protivník materialistického filosofa Démokrita. Přesto se přičinil o vypracování návodu přesného matematického myšlení. Teprve nyní byly zavedeny definice a názvy geometrických útvarů a vypracován systematický postup řešení

konstrukčních úloh. Platón je jedním z prvních, kteří užili nepřímého důkazu. Bohužel nevíme ani přesně kdy a kde se Euklides narodil, a kdy a kde zemřel. Byl geometrem a studoval tuto vědu pravděpodobně v Athénách, ale žil v době svého největšího působení v Alexandrii. Tam byl předním pracovníkem tzv. alexandrijské matematické školy.

Víte všichni, že historie hodnotí správně osobnosti jen tenkrát, jestliže vykreslí přesně dobu, společnost a filosofii, v které učenec žil. Pokusme se tedy nejdříve říci něco o matematice v tomto věku.

Nejznamenitějších výsledků v geometrii v době p. n. l. bylo dosaženo v Athénách ve 4. a 5. století a hlavně v Alexandrii asi ve 3. století p. n. l. Mluvíme o „Zlaté době řecké matematiky“, mezi jejímiž hlavními pracovníky jsou uváděni Euklides, Archimédes a Apollonios z Pergy. Před nimi

bylo v athénské Akademii nashromážděno velmi mnoho závažných geometrických poznatků. Učenci Akademie postřehli záhy zajímavé souvislosti mezi geometrickými větami a tak začali budovat základy teorie geometrie. Vyhýbali se praktickému užití poznatků, takže mluvíme o nich jako o teoreticích matematiky. Mezi tyto učence se počítají Thales z Miletu (6. století p. n. l.), Pythagoras (6. stol. p. n. l.), Hippokrates (5. stol. p. n. l.) a vám, asi méně známí Démokritos, Eudoxos a vzpomenutý Platón.

Geometři a historik Pappos říkají, že Euklides byl svědomitý, skromný, ale vtipný a nebojácný. Vypravuje se, že faraón Ptolemaios I. žádal Euklida, aby ho zasvětil snadno do teorie geometrie. Odpověď Euklidova prý byla: „Není ani pro krále soukromé cesty ke geometrii.“ Odpovědi se naráží na soukromé schodiště ke královským komnatám. Již před Euklidem byly pokusy utřídit soustavně poznatky geometrické v soubory, kterým se říkalo „Soichea“, latinsky „Elementa“, česky Základy. První, kdo takový souhrn vypracoval, byl Hippokrates. Jeho práce se nám bohužel nezachovaly. Vzpomeňte na Hippokratovy měsíčky početní geometrie o kruhu.

Z těchto a dalších Základů jsou nejznámější a první zachované Základy Euklida napsané r. 325 p. n. l. Jimi byla ovlivněna geometrie na tisíciletí. Říká se, že po bibli byla přeložena do největšího počtu jazyků. Česky vyšla v roce

1905 v překladu profesora vinohradského gymnasia Františka Servíta. V ČSSR je dále k dispozici krásně vypravený překlad ruský s velmi obsáhlým doprovodem a hlubokým rozbořením péčí sovětské Akademie.

Základy nejsou jedinou knihou Euklidovou. Jsou to dále Data (v německém překladu od Clemense Thaera) obsahující 94 vět z planimetrie, dílo z astronomie, fyziky (o světle), o hudebních intervalech. Dále úryvkovité spisy o dělení útvarů a dnes ztracené spisy o kuželosečkách a o klamných důkazech. Z matematické školy pythagorejské a ionské pocházejí ještě další knihy, které vděčí za své vydání matematické tradici.

Vraťme se k Euklidovým Základům. Jsou ve 13 knihách, z nichž 4 nejnáročnější byly sepsány jeho předchůdci, a to kniha pátá a dvanáctá Eudoxem a kniha desátá a třináctá Theaitetem. Tyto knihy mají vysokou logickou úroveň. Později byly k uvedeným 13 knihám přidány další dvě.

Přesto se Euklidovi, který byl zřejmě podle našich dnešních poměrů hlavním redaktorem a upravovatelem spisu, přikládá největší zásluha. Euklides vypracoval důkladně teorii konstrukcí, které se prováděly jen pravítkem a kružítkem (vzpomeňte na euklidovské konstrukce) a dále se přičinil metodickou i logickou úpravou o to, že matematika první vybudovala správnou vědeckou soustavu a přesný vědecký způsob myšlení.

Tento cenný postup je zachován

v každé z 15 knih. Nejprve se definují pojmy. Jsou to definice nepřesné v našem pojetí, např. bod je to, co nemá části. Po těchto definicích následují věty, které nazývá autor „postuláty“ (požadavky). Př postulátech následují věty, kterým říká axiomy, např. z první knihy: Veličiny rovné třetím jsou si navzájem rovny (výrazy postulát a axiom jsou namnoze mezi sebou zaměňovány).

Všechny knihy můžeme rozdělit na 4 části: V první skupině knih jde o útvary zobrazené v rovině, o poměr jejich obsahů, o shodnost. Druhá část „Základů“ se věnuje míře velikosti, tj. číslu. V další skupině se projednává nesouměřitelnost úseček, jednotky a velikosti útvaru a ve čtvrté části stereometrie. Je v ní také důkaz, že existuje jen pět pravidelných těles. Z uváděné ukázky pochopíte rozdílnost dnešních učebnic s Euklidovými základy.

V druhé knize se ukazují algebraické identity. Tak např. vzorec

$$(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

je formulován takto: Rozdělíme-li libovolně přímku (dnes bychom řekli úsečku) a doplnili na 2 úsečky, potom čtverec z celé (úsečky) rovná se čtvercům z (obou) úseček a dvojnásobnému pravoúhelníku úsečkami sevřenému. (Výklad v závorce doplňujeme až dnes, jinak je citace z českého překladu slohově upravená.) Důkaz identity je znám ze znázornění platnosti poučky $(a + b)^2$ pro a , b kladná čísla, které bývá v učebnici.

Jde o 10 identit, např.

$$ab + a(a - b) = a^2,$$

$$a^2 = b^2 + (a - b)^2 + 2b(a - b);$$

$$(a + b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2,$$

$$a^2 + b^2 = 2ab + (a - b)^2$$

atd. Všechny jsou formulovány geometricky.

V Základech je uveden tzv. zlatý řez, geometrické řešení rovnice, např.

$$x(a - x) = b^2,$$

definice prvočísel, dělitelnost a hlavně tehdy známá iracionalita.

Znáte jistě klasickou úlohu starověku zvanou zdvojení krychle. Iracionalita geometricky řešená byla známa ve starověku, zatímco počítání se zápornými čísly přichází až o mnoho století později.

Uvedme ještě důležitý, tzv. pátý postulát z úvodu Základů. V něm se požaduje, aby přímka prořezala dvěma dalšími přímkami a tvořící s nimi po jedné své straně vnitřní přilehlé úhly o součtu menším než $2R$, měla vždy průsečík oněch dalších přímek na této straně.

Tento postulát tvoří základ nauky o rovnoběžkách. Pomocí něho dokazuje Euklides poučku, že lze libovolným bodem vést k libovolné přímce vždy jedinou rovnoběžku.

Složitost postulátu byla příčinou nedůvěry k němu. Ta se projevila ve snahách po celých 19 století dokázat, že postulát není postulátem, ale větou. Že tato snaha je marná, ukázal až v 19. století ruský matematik N. I. Lobačev-

skij, který rozřešil otázku rovnoběžnosti a tak dal základ k další geometrii, zvané neeuklidovská.

V Základech postoupilo abstraktní myšlení starověku vrcholu. Matematika zaujala zvláštní postavení mezi ostatními vědami tím, že abstrahovala od vlastností hmotných těles a studovala pouze kvantitativní vztahy a prostorové formy. Tyto stránky mají platnost v různých oborech.

Třebaže axiomatická soustava a metoda Základů má mnohé nedostatky, byly Základy po více než dva tisíce let vzorem dokonalé učebnice geometrie. Dokonalejší soustavu axiomů než Euklides zvolil až německý matematik David Hilbert, který vytvořil tzv. Hilbertův systém axiomů (na přelomu 19. a 20. století). O jeho

soustavě axiomů se můžete poučit z učebnice doc. Vyšína: Soustava axiomů euklidovské geometrie.

To všechno, po stránce vědecké, a i to, že Euklidovy Základy byly po více než dva tisíce let podkladem a někdy dokonce i vzorem učebnice geometrie, zvláště pro anglické učebnice, ukazuje, jak Euklides zasáhl svého času do teorie vědy, jak Euklidovo dílo ovlivnilo tuto teorii. Proto uznáváme právem Euklida za jednoho z největších matematiků starověku přesto, že si uvědomujeme, že mnohé poznatky přebíral od jiných řeckých matematiků.

Za jeho celoživotní práce a za jeho odkaz všem matematikům, kteří přišli po něm, vzdáváme mu upřímný dík.

Opakujte si matematiku

HANA_KOŘÍNKOVÁ, ČVUT_Praha

K televiznímu kursu

V Rozhledech matematicko-fyzikálních v č. 6, str. 302, jsme vám otiskli texty úloh, které během televizního kursu „Opakujte si matematiku“ byly dány televizním divákům. V tomto čísle najdete jejich řešení, u některých příkladů pouze návody k řešení. Dále jsme vám slíbili, a to po 3., 5. a 6. lekci, že otiskneme i texty dalších úloh, které budou dány televizním divákům po 10., 11., 12. a 14. lekci. Jejich řešení uveřejníme v příštím čísle.

Po 10. lekci:

1. Vypočtete úhly a $\bar{}$ odvěsny pravoúhlého trojúhelníka daného délkami přepony $c = 12$ a výšky $v = 5$ na přeponu.

2. Vypočtete velikost stran a úhlů pravoúhlého trojúhelníka daného obvodem $2s = 30$ a poloměrem $\rho = 2,5$ vepsané kružnice.

Po 11. lekci:

1. Najděte všechna řešení, která splňují nerovnost

$$4x - 7 \geq |6 - 5x|.$$

2. Čítec zlomku je přirozené číslo, které je o 1 menší než jmenovatel. Když k čitateli i k jmenovateli přičteme 3, dostaneme zlomek větší než $\frac{1}{2}$; když od čitatele i od jmenovatele odečteme 2, dostaneme zlomek větší než $\frac{1}{3}$. Jaký je to zlomek?

Po 12. lekci:

1. Najděte všechna čísla x , která vyhovují rovnici

$$x - 7 |7 - 2x| = 2 - |x + 3|$$

2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\sqrt{3x^2 - 2y} = y + 4, \\ x = 3y$$

Po 14. lekci:

V trojúhelníku daném dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným vypočítejte třetí stranu a velikost zbývajících dvou úhlů $a = 9,5$, $b = 4,8$, $\gamma = 36^\circ 30'$

V příkladech postupujte obdobně, jak bylo uvedeno v č. 6 na str. 303.

1. Úloha je řešitelná, bude-li existovat trojúhelník ABM , tj. bude-li splněna podmínka $v_a \leq c = AB$. Řešení je jedno v dané polorovině.

Sestrojíme:

a) Pravoúhlý trojúhelník ABM s přeponou c a s odvěsnou $AM = v_a$ (vrchol M na Thaletově kružnici nad průměrem AB).

b) Geometrickým místem vrcholů C je přímka $q \parallel AB$ ve vzdálenosti v_c .

c) Průsečík přímky BM s přímkou q je hledaný vrchol C .

2a. Funkce $y = 5x - 2$ je definována pro každé x ; tak např. pro $x_1 = -1$ dostaneme $y_1 = -7$; pro $x_2 = 0$, $y_2 = -2$; pro

$$x_3 = \frac{2}{5} \quad y_3 = 0$$

atd.; pro libovolné x_0 , $y_0 = 5x_0 - 2$.

Grafem této funkce je přímka p a body

$$A(-1; -7), B(0; -2), C(\frac{2}{5}; 0), P(x_0; 5x_0 - 2)$$

jsou body přímky p .

Jestliže posuneme soustavu souřadnic počátkem do bodu P , dostaneme pro každý bod roviny nové souřadnice $X; Y$, pro něž platí

$$X = x - x_0, Y = y - (5x_0 - 2)$$

Daná rovnice bude mít v nových souřadnicích tvar

$$Y + (5x_0 - 2) = 5(X + x_0) - 2$$

a po úpravě dostaneme $Y = 5X$, což je přímá úměrnost, kterou jsme mohli dostat tím, že jsme posunuli počátek nové soustavy souřadnic, např. do bodu $B(0; -2)$ nebo

$$C(\frac{2}{5}; 0),$$

píšeme-li $y + 2 = 5x$ a položíme-li $y = Y - 2$, $x = X$, nebo píšeme-li

$$y = 5(x - \frac{2}{5})$$

a položíme-li

$$x = X + \frac{2}{5}, \quad y = Y$$

b) Zlomek

$$\frac{x+1}{x-1}$$

má význam, pokud není jeho jmenovatel nula; daná funkce

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

je definována pro každé $x \neq 1$.

Vyloučíme-li případ $x = 1$, můžeme daný zlomek napsat ve tvaru

$$1 + \frac{2}{x-1};$$

zavedeme-li označení $X = x - 1$ a $Y = y - 1$, dostaneme

$$Y = \frac{2}{X},$$

což je nepřímá úměrnost. Grafem je rovnoosá hyperbola souměrná podle bodu $P(1; 1)$.

3. Je-li $a = b = 0$, každé x vyhovuje; je-li $|a| = |b| = 0$, má daná rovnice kořen rovný nule; je-li $|a| = |b| \neq 0$, má rovnice dva kořeny

$$x_1 = \frac{a+b}{a-b}; \quad x_2 = -\frac{a-b}{a+b}$$

Písemná maturitní zkouška z matematiky

Poprvé v historii maturit zavedlo ministerstvo školství na přírodovědné větvi SVVŠ písemnou maturitní zkoušku z matematiky. Toto opatření má však řadu omezení. Vztahuje se jen na přírodovědnou větev, a to ještě podle vlastního rozhodnutí žáka místo písemné maturitní zkoušky z jazyka ruského a zatím jen v jarním a podzimním období 1968. Jen ve speciálních třídách pro žáky nadané v matematice a fyzice (tříd je v celém státě jen několik) je písemná maturitní zkouška z matematiky místo písemné maturitní zkoušky z jazyka ruského povinná.

Písemná maturitní zkouška z matematiky se ověřovala již od roku 1965 na několika středních všeobecně vzdělávacích školách. Výsledky pokusu ukazují, že lze při zachování volitelnosti této zkoušky očekávat uspokojivé výsledky.

Předpokládá se, že písemnou maturitní zkoušku z matematiky budou volit ti žáci, kteří mají zájem i přiměřené schopnosti a znalosti vyřešit látku probranou podle učebních osnov v daných příkladech.

Předběžně možno informovat žáky, že v čistém čase čtyř hodin musí vypracovat čtyři příklady, v nichž bude obsažena látka z algebry i z geometrie při použití běžných matematických operací. Ale spoň jeden z příkladů bude vyžadovat i konstruktivní řešení úlohy. Bude to tedy typ čtvrtletní měsíční písemné úlohy, jaké studenti během studií pracovali, s větší náročností na úplné řešení, na výpočet i na formální úpravu. Žáci si ke zkoušce přinesou rýsovací náčiní a logaritmické tabulky.

Každý příklad bude hodnocen určitým počtem bodů podle úplnosti a správnosti zpracování a klasifikace se určí podle dosaženého součtu všech bodů.

Tímto článkem chceme žákům, kteří budou volit písemnou maturitní zkoušku z matematiky, poskytnout informaci o tom, jak tato zkouška bude probíhat a že jde o závěrečný druh písemné práce, jaké žák během studia již vypracoval. Při této zkoušce žák prokazuje schopnost samostatné práce a schopnost využití teoretických poznatků na konkrétní úkol.

Zavedením volitelné písemné maturitní zkoušky z matematiky na přírodovědné větví a volitelné ústní zkoušky z matematiky na větví humanitní se prohlubuje diferenciaci na SVVŠ v přípravě pro určitý směr vyššího školního studia, případně na praktické povolání.

Žáci, kteří studují na humanitní větví a nevolili matematiku za čtvrtý předmět ústní maturitní zkoušky, mohou požádat ředitelství školy, aby z ní mohli konat ústní zkoušku jako z dobrovolného, tj. pátého předmětu ústní zkoušky.

Žáci, kteří studují na přírodovědné nebo humanitní větví a konají ústní zkoušku z matematiky, nemusí se z ní podrobit písemné zkoušce. Výjimku činí speciální třídy pro žáky nadané v matematice a fyzice.

Josef Bartůněk,

ústřední školní inspektor ministerstva školství

O přijímacích zkouškách z matematiky na matematicko-fyzikální fakultě KU v Praze ve školním roce 1968-69

Nedílnou součástí přijímacích zkoušek na MFF KU v Praze je písemná a ústní zkouška z matematiky. Článek navazuje na stať M. Vlacha z příštího čísla Rozhledů a pojednává podrobněji o jejich průběhu.

Důležitou částí studia na matematicko-fyzikální fakultě KU v Praze je ve všech specializacích studium matematiky. Všichni uchazeči o přijetí na MFF KU musí proto při přijímacích zkouškách prokázat, že pochopili a zvládli učivo z matematiky v plném rozsahu vyučovaném na středních všeobecně vzdělávacích školách.

Úvodem chtěli bychom upozornit, že tento obecně formulovaný požadavek lze vykládat různým způsobem. Rozhodně není správné, znát nazpaměť spousty vzorců, definic a pouček, neumět vysvětlit jejich význam a smysl, nebo nedovést spojit jejich znalost s jednoduchou úsudkovou úvahou. Bude tedy při přijímacích zkouškách z matematiky kladen hlavní důraz na porozumění látce a na schopnost samostatného logicky správného úsudku.

Přijímací zkouška z matematiky bude rozdělena na písemnou a ústní. Účelem písemné části, v níž bude zadáno pět různých příkladů, je ověřit schopnost uchazečů samostatně je řešit i schopnost přehledné a úplné formulace zvoleného postupu a výsledků.

Příklady budou vybrány tak, aby pokrývaly většinu vyučované látky a aby ověřovaly jednak skutečně základní nutné faktické znalosti (např. algebraické úpravy složitějších výrazů, řešení rovnic nebo nerovností, vlastnosti goniometrických funkcí, rovinných i prostorových útvarů, komplexních čísel atp.), jednak schopnost logického uvažování (diskuse řešení soustavy lineárních rovnic, správné vyčerpání všech možností při řešení nerovností s absolutními hodnotami, diskuse řešitelnosti geometrické úlohy atp.).

V žádném případě nepůjde o cvičení ve slohu a krasopisu. Bude však třeba, aby řešení každého příkladu bylo zapsáno přehledně, aby bylo jasno, jak řešitel postupoval a při složitějších krocích také, proč takto postupoval. Každé řešení by mělo být úplné. Je-li např. úkolem řešit soustavu rovnic, jejíž koeficienty závisí na některém parametru, je nutno podrobně rozebrat případy, kdy má soustava jediné řešení, nekonečně mnoho řešení, popřípadě pak žádné řešení. Je-li úkolem sestavit třeba trojúhelník z některých jeho prvků, je potřeba nejen popsat všechny jednotlivé kroky při konstrukci, nýbrž také ukázat, že nalezený trojúhelník skutečně splňuje požadavky úlohy a v případě, že úloha může mít více řešení nebo žádné řešení, všechny tyto možnosti podrobně rozebrat.

Znovu bychom chtěli zdůraznit, že celá přijímací zkouška se bude výhradně týkat látky, která má být probrána na každé střední všeobecně vzdělávací škole. I když příklady nebudou vybírány pouze z učebnic, nebudou se v obtížnosti podstatně lišit.

Mnozí z uchazečů znají z matematiky řadu věcí, s nimiž se při výuce na střední škole nesetkají. Získávají tyto znalosti buď z kroužků MO, ze samostatného studia atp. Je přirozené, že tyto znalosti i hlubší zájem o matematiku mohou uchazečům při studiu na vysoké škole jen prospět. Při přijímací zkoušce jim však nebude nic platná znalost třeba i sebetěžších částí, tzv. „vyšší matematiky“, nebudou-li důkladně ovládat středoškolské učivo z matematiky, i když se jim třeba zdá z hlediska jejich navíc získaných vědomostí velmi „jednoduché“.

Na vypracování písemné zkoušky bude dostatek času. I když se uchazeči nepodaří vyřešit správně a úplně všechny příklady, neznamena to neúspěch. I ze započatých řešení nebo z řešení některých příkladů lze poznat obvykle dostatečně dobře jeho schopnosti a kromě toho je to pouze jedna část přijímací zkoušky.

Ústní zkouška z matematiky bude mít poněkud jiný charakter. Každý uchazeč dostane dvě, eventuálně více otázek, které budou zpravidla formulovány ve tvaru příkladů. Zkoušející bude sledovat jeho odpovědi, bude klást různé otázky vztahující se k danému tématu a v případě potřeby i pomůže. Účelem bude tedy např. zjistit, jak obratně uchazeč reaguje na podněty zkoušejícího, jak ovládá třeba i teoretickou část látky (důkazy některých vět) atp. Zkoušející bude mít možnost poznat uchazečovy zájmy, osobní vlastnosti a ověřit jeho zájem o zvolený obor.

Obě zkoušky — písemná i ústní — budou naprosto rovnocenné. Jejich výsledky dají pouze základ k celkovému hodnocení uchazeče, při němž bude vhodným způsobem přihlédnuto i k prospěchu na střední škole, úspěšné účasti v MO atp. Podstatný je ovšem výsledek přijímací zkoušky, neboť různorodost úrovně jednotlivých středních škol nezaručuje, že žáci se stejným prospěchem budou mít přibližně stejnou úroveň znalostí a stejnou schopnost studovat na vysoké škole.

V závěru ještě několik slov. Studium na matematicko-fyzikální fakultě je velice zajímavé, ale není lehké. Matematika a fyzika získávají stále větší a větší důležitost a podstatně ovlivňují i ostatní vědecké obory, s nimiž jen zdánlivě nesouvisí. Pokrok ve vědě, technice i průmyslu je dnes již bez matematiky a fyziky nemyslitelný, a proto naše republika potřebuje a bude potřebovat jak značný počet odborníků v matematice a fyzice, tak i řadu nových dobrých učitelů těchto oborů. Bylo by proto třeba, aby se ke studiu přihlásili všichni ti, kteří mají o tyto obory zájem a mají matematiku i fyziku rádi.

J. M.



RECENZE

Analytická geometrie a nerovnosti

KAREL HAVLÍČEK:

Knížka vyšla na podzim roku 1967 jako 18. svazek edice *Škola mladých matematiků*. Náš známý matematik a autor úspěšných knížek prof. dr. Karel Havlíček, CSc., v ní seznamuje mladé čtenáře hlavně s geometrickými metodami řešení nerovností, které bývají názornější než metody aritmetické známé ze školy a které zvláště oceníme na příkladech úloh z hospodářské praxe.

V 1. kapitole si nejprve zopakujeme jednoduché základní věty o nerovnostech a dále se seznámíme s lineární funkcí, rovnicí přímky a analytickým vyjádřením poloroviny lineárních nerovností. V 2. kapitole se studují lineární funkce s absolutními hodnotami, jejichž grafy jsou lomené čáry. Na pěkném příkladě se přesvědčí-

me, jak se vyplatí matematicky vypočítat např. vhodné místo na stavbu garáží pro autobusy než rozhodovat jen podle zdání. 3. kapitola je o množinách. Autor vysvětluje, co znamená slovo množina a provádí základní operace s množinami: sjednocení a průnik. K správnějšímu pochopení slouží řada názorných příkladů. V druhé části kapitoly se mluví o konvexních množinách v rovině. 4. kapitola je věnována řešení lineárních nerovností (i s absolutními hodnotami) a kvadratických nerovností pomocí analytické geometrie. V poslední 5. kapitole jsou praktické příklady, které se řeší pomocí soustav lineárních nerovností a analytické geometrie. Příklady jsou ovšem voleny tak, aby nevznikaly potíže při numerickém počítání. Ve skutečnosti problémy

bývají numericky náročnější a řešení je třeba rychle najít, takže se vezmou na pomoc počítačové stroje.

Čtení textu usnadňují obrázky a ke každé kapitole jsou připojena cvičení, jejichž výsledky najdeme na konci. K pochopení celé knížky úplně postačí znalosti ze školy. Je též uveden seznam vhodné literatury.

Knížka se snadno čte a je vidět, že byla napsána velmi pečlivě. Výklad probírané látky je jasný i dosti podrobný, což zvláště bude

dobré pro začínající čtenáře matematických textů. Doufáme, že přispěje k lepšímu matematickému rozhledu žáků středních škol, k čemuž patří i to, že na příkladech poznají, jak je matematika velice užitečná při řešení praktických úloh. Proto ji doporučujeme našim čtenářům.

Knížka má 88 stran a stojí 4 Kčs. Pořadové číslo svazku vytištěné na obálce má správně být 18 a nikoli 17, jak se stalo nedopatřením v tiskárně.

Jaroslav Zemánek

Patnáctý ročník matematické olympiády

(Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1967, 174 stran)

Soutěžní materiály autorsky zpracoval a uvedl do knižní formy docent KU J. Vyšín, místopředseda ÚV MO a odb. as. PedFUK V. Macháček, jednatel ÚV MO. Zpráva o patnáctém ročníku soutěže je rozdělena do sedmi kapitol. Asi třetina soutěžních úloh i s řešeními je přeložena do slovenského jazyka dr. J. Moravčíkem, CSc. Texty doplňuje 76 vzorně provedených obrázků, jež přispívají k jasnosti řešení příkladů. Jejich tvůrcem je V. Macháček, spoluautor textu brožury.

I. kapitola obsahuje organizační základy soutěže, složení ÚV MO a záznam z jeho schůzí. Byly na nich pozměněny zásady pro pořádání I. kola soutěže, koordinace matematické a fyzikální olympiády a honorování soutěžních návrhů úloh. Důležité je rozhodnutí, že souhrn příkladů ze všech našich dosud pořádaných matematických olympiád bude tematicky roztríděn, metodicky zpracován a rozdělen do tří sbírek úloh podle kategorií A, B, C, D. Sbírka čerpaná z kategorie A bude doplněna příklady z mezinárodních olympiád. Tento ediční návrh povede k vytvoření tří publikací, které přispějí k popularizaci MO, poskytnou zájemcům prověřené a uspořádané materiály, jež budou moci být využity ke zkvalitňování středoškolského matematického vzdělání. Jde o sbírky příkladů, o něž je v posledních letech mimořádný zájem. V první kapitole je dále popsán průběh jednotlivých kol soutěže ve všech kategoriích, různé podpůrné akce a sedmáct titulů vyšlých v edici Škola mladých matematiků, které spolu s touto brožurou jsou studijní literaturou jak pro kandidáty soutěže, tak i pro pokračující olympioniky.

II. kapitola zachycuje výsledky všech tří kol a čtyř kategorií olympiády s jmenným pořadím vítězů. Za tímto textem jsou připojeny čtyři přehledné tabulky.

III. kapitola uvádí přípravné úlohy I. kola, po šesti úlohách v každé ze čtyř kategorií.

IV., V. a VI. kapitola tvoří jádro brožury, neboť v nich jsou podána vzorová řešení všech soutěžních úloh v jednotlivých kolech a kategoriích. Zatímco výsledky XV. ročníku naší národní soutěže ukazují na její pozvolný kvalitativní vzestup v posledních dvou ročnících, neprojevila se tato domácí aktiva nijak kladně při naší účasti na mezinárodní matematické olympiádě v Bulharsku v r. 1966.

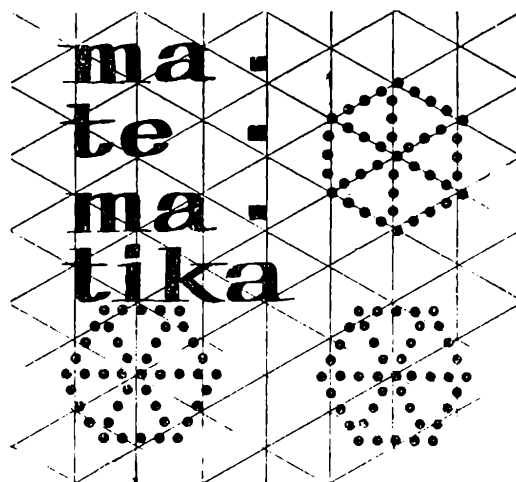
VII. kapitola shrnuje průběh a výsledky VIII. mezinárodní matematické olympiády v Sofii v červenci 1966. Vedoucím naší soutěžní delegace byl doc. J. Vyšín, ped. průvodcem odb. as. V. Macháček. Zpráva o VIII. MNO začíná v knížce úvahami o současném stavu soutěže a o našem dosavadním zapojení do ní. Z této soutěže, která má být především soutěží matematicky nadaných jednotlivců, se stává čím dál více soutěž celých národních družstev, která se stávají reprezentanty soutěžících států. Většina jich nevybírá členy svých soutěžních kolektivů ze žáků zapojených do současně probíhajících národních olympiád, nýbrž vychovává si z nejnadanějších studentů individuálně školené reprezentanty, kteří pak jako mezinárodní matematictí olympionici hájí často po více let za sebou na MMO matematickou prestiž svého národa. Protože my jsme zatím této soutěžní technologie neužili, máme rok od roku výsledky klesající. Bude nutné zásadně se rozhodnout, máme-li se vůbec nadále mezinárodních soutěží tohoto typu zúčastňovat. V kladném případě je třeba uvážit, jak dalece a jak brzy se budeme moci vyrovnat se současně rozšířenou soutěžní praxí tak, abychom svůj dosavadní handicap dohonili. V tom budou hrát úlohu i připravované organizační změny soutěže a rostoucí nároky na společensko-reprezentační roli pořadatelských zemí. Zprávu o VIII. MMO doplňují texty a řešení jednotlivých soutěžních úloh a zhodnocení výsledků našeho družstva (tj. především kritický rozbor jeho nedostatků). Nadále se ústřední výbor MO rozhodl přejít pokusně na individuální přípravu nadaných matematiků, pokud možno z nižších školních tříd, aby nás pak takto vyškolený olympionik mohl reprezentovat po více let. Ke zprávě jsou připojeny tabulky, zachycující statisticky v přehledu výsledky VIII. ročníku této mezinárodní soutěže.

Dvoubarevná obálka brožury byla i letos provedena podle návrhu J. Jarkovského. Publikaci je možno zakoupit v prodejně KNIHY za 6,— Kčs.

Jaromír Dubský

Stále docházejí do redakce dopisy, v nichž čtenáři žádají zaslání některých čísel Rozhledů.

Zrovnu upozorňujeme, že redakce nemá k dispozici volné exempláře. Žádejte je proto důrazně u své PNS.



M A T E M A T I K A

Cauchyova nerovnost¹⁾

JOSEF HOŠEK, Olomouc

Při studiu matematiky na SVVŠ i v soutěžních úlohách matematické olympiády se často setkáváte s úlohami, u nichž se požaduje dokázat platnost nějaké nerovnosti. V tomto článku se seznámíme s jednou nerovností, které můžeme někdy použít při důkazech mnoha dalších. Než tuto nerovnost dokážeme, připomeňme si jeden poznatek, který potom v následujících úvahách budeme potřebovat. Jedná se o tuto větu:

Pro libovolná reálná čísla u, v platí

$$-\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \leq uv \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2). \quad (1)$$

D ů k a z. Z nerovnosti $0 \leq (u - v)^2$ po snadné úpravě obdržíme $uv \leq \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$; podobně z nerovnosti $0 \leq (u + v)^2$ stejným způsobem a po vynásobení číslem (-1) plyne $-\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \leq uv$. Tyto výsledky okamžitě dávají požadované tvrzení. A nyní již můžeme vyslovit a dokázat zmíněnou nerovnost.

V ě t a. *Pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ (n je přirozené číslo) platí*

$$\begin{aligned} & (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 \leq \\ & \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2). \end{aligned} \quad (2)$$

D ů k a z. Rozlišujeme dva případy:

A. Jsou-li buď všechna $x_i = 0$, nebo všechna $y_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$, je zřejmé nerovnost (2) splněna.

¹⁾ Čti Košiova. Augustin Louis Cauchy (1789–1857) – vynikající francouzský matematik.

B. Nenastane-li případ A, je alespoň jedno z čísel x_i a alespoň jedno z čísel y_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$, různé od nuly. Označíme-li

$$a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad b = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}, \quad (3)$$

je $a > 0$, $b > 0$ a položíme-li pro $i = 1, 2, \dots, n$

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{a}, \quad \bar{y}_i = \frac{y_i}{b}, \quad (4)$$

máme podle (3)

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \dots + \bar{x}_n^2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{a^2} = 1, \\ \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \dots + \bar{y}_n^2 &= \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}{b^2} = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Dosazením postupně všech čísel $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, přičemž $i = 1, 2, \dots, n$, do (1) dostaneme soustavu nerovností

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2) &\leq \bar{x}_1\bar{y}_1 \leq \frac{1}{2}(\bar{x}_1^2 + \bar{y}_1^2), \\ -\frac{1}{2}(\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2) &\leq \bar{x}_2\bar{y}_2 \leq \frac{1}{2}(\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2), \\ &\vdots \\ -\frac{1}{2}(\bar{x}_n^2 + \bar{y}_n^2) &\leq \bar{x}_n\bar{y}_n \leq \frac{1}{2}(\bar{x}_n^2 + \bar{y}_n^2). \end{aligned}$$

Jestliže všechny tyto nerovnosti sečteme, dostáváme po malé úpravě výraz

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}[(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \dots + \bar{x}_n^2) + (\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \dots + \bar{y}_n^2)] &\leq \\ &\leq \bar{x}_1\bar{y}_1 + \bar{x}_2\bar{y}_2 + \dots + \bar{x}_n\bar{y}_n \leq \\ &\leq \frac{1}{2}[(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \dots + \bar{x}_n^2) + (\bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \dots + \bar{y}_n^2)], \end{aligned}$$

což lze s přihlédnutím k (5) přepsat na tvar

$$-1 \leq \bar{x}_1\bar{y}_1 + \bar{x}_2\bar{y}_2 + \dots + \bar{x}_n\bar{y}_n \leq 1,$$

neboli

$$|\bar{x}_1\bar{y}_1 + \bar{x}_2\bar{y}_2 + \dots + \bar{x}_n\bar{y}_n| \leq 1.$$

Umocníme-li nyní obě strany poslední nerovnosti na druhou, vyjde

$$(\bar{x}_1\bar{y}_1 + \bar{x}_2\bar{y}_2 + \dots + \bar{x}_n\bar{y}_n)^2 \leq 1$$

a dosadíme-li sem za čísla $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, podle (4), je

$$\left(\frac{x_1 y_1}{ab} + \frac{x_2 y_2}{ab} + \dots + \frac{x_n y_n}{ab} \right)^2 \leq 1,$$

z čehož jednoduchou úpravou a pomocí (3) konečně obdržíme požadovanou nerovnost (2).

Vztah (2) se nazývá *Cauchyova nerovnost* (dále jen C. n.). Poprvé

byla dokázána Cauchym v roce 1821 a má velmi široké upotřebení nejen v teorii nerovností, ale i v jiných oblastech matematiky a též fyziky. O tom se jistě přesvědčíte mnozí z vás, až budete studovat na vysoké škole. V další části tohoto článku si ukážeme použití C. n. při řešení několika příkladů.

Příklad 1. Jsou-li čísla $p_1, p_2, \dots, p_n$ kladná, platí nerovnost

$$n^2 \leq (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right).$$

Dokažte!

Řešení. Protože všechna čísla p_i jsou kladná, označme

$$x_i = \sqrt{p_i}, \quad y_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}},$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$; podle (2) dostaneme

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{p_1} \frac{1}{\sqrt{p_1}} + \sqrt{p_2} \frac{1}{\sqrt{p_2}} + \dots + \sqrt{p_n} \frac{1}{\sqrt{p_n}} \right)^2 \leq \\ & \leq (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right), \end{aligned}$$

z čehož vyplývá tvrzení věty, neboť levá strana této nerovnosti je rovna n^2 .

Příklad 2. Pro libovolná reálná čísla a, b, c , přičemž $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, platí nerovnost

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2}. \quad (6)$$

Dokažte!

Řešení. Pro $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, platí tato identita

$$\begin{aligned} & [(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) + (a^2 + b^2)] \left[\frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} \right] = \\ & = 6 + 2 \left[\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

o jejíž správnosti se přesvědčíme tak, že výrazy v obou závorkách na levé straně (7) vynásobíme a potom sloučíme. Dále položíme

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{b^2 + c^2}, & x_2 &= \sqrt{c^2 + a^2}, & x_3 &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ y_1 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}, & y_2 &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}}, & y_3 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Podle C. n. vychází

$$3^2 \leq [(b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) + (a^2 + b^2)].$$

$$\cdot \left[\frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} \right]$$

a odtud vzhledem k (7) platí

$$3^2 \leq 6 + 2 \left[\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \right]$$

a z toho již plyne dokazovaná nerovnost (6).

P o z n á m k a. K odvození nerovnosti (6) je také možné použít výsledku z příkladu 1; proveďte si to.

P ř í k l a d 3. Pro libovolná kladná čísla $p_1, p_2, \dots, p_n$ platí

$$\frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \leq \sqrt{\frac{1}{n} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)}.$$

Dokažte!

Ř e š e n í. Pišme

$$\frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n) = p_1 \frac{1}{n} + p_2 \frac{1}{n} + \dots + p_n \frac{1}{n};$$

klademe-li dále

$$x_i = p_i, \quad y_i = \frac{1}{n}$$

pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$, je podle (2) splněna nerovnost

$$\begin{aligned} \left(p_1 \frac{1}{n} + p_2 \frac{1}{n} + \dots + p_n \frac{1}{n} \right)^2 &\leq \\ &\leq (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) \underbrace{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)}_{n \text{ sčítanců}}, \end{aligned}$$

čili po úpravě

$$\left[\frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \right]^2 \leq \frac{1}{n} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)$$

a poněvadž čísla na obou stranách tohoto vztahu jsou kladná, platí proto

$$\frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \leq \sqrt{\frac{1}{n} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)},$$

což jsme měli dokázat.

P o z n á m k a. Číslo

$$\frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$$

nazývame aritmetický průměr a číslo

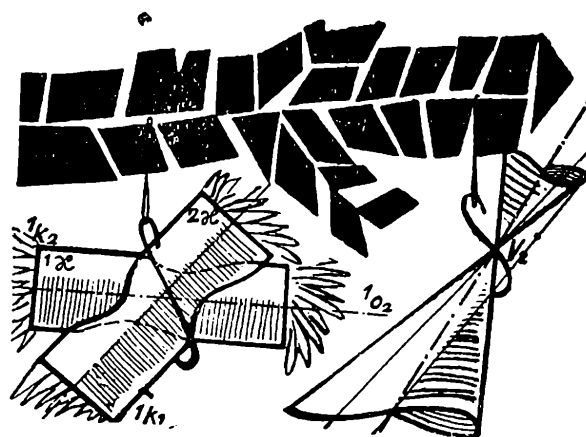
$$\sqrt{\frac{1}{n} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)}$$

kvadratický průměr čísel $p_1, p_2, \dots, p_n$. Máme tedy dokázanou větu:

Aritmetický průměr čísel $p_1, p_2, \dots, p_n$ není větší než jejich průměr kvadratický.

(Dokončení)

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE



Použitie deskriptívnej geometrie v kryštalografii

JOSEF FILIP, Bratislava

(Dokončení)

16. Zo stereografického priemetu môžeme odvodiť pravouhlý priemet kryštálu za predpokladu, že nezáleží na veľkosti kryštálu a že jeho tvar je známy. Vtedy postačí, keď vieme v priemete zostrojiť smer hrán zobrazovaného kryštálu.

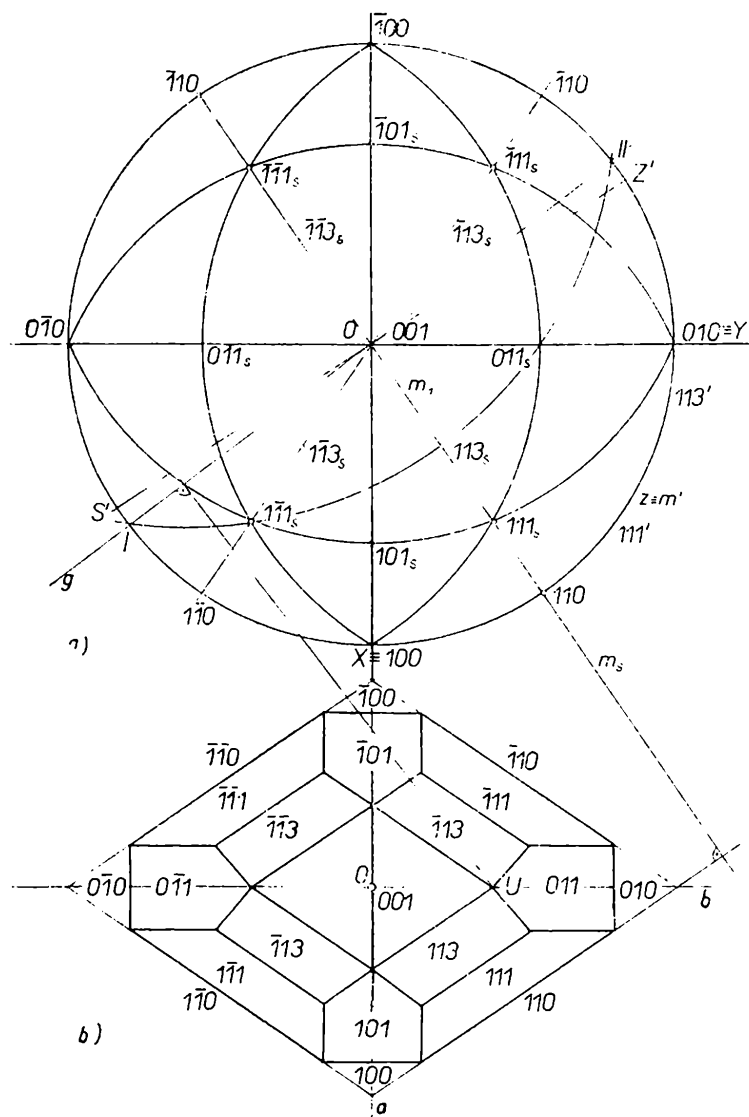
Za priemetňu pravouhlého priemetu volíme rovinu π alebo inú rovinu π' , ktorá prechádza stredom O a s priemetňou π zvierá pravý alebo kosý uhol.

Najprv zostrojíme pravouhlý priemet kryštálu na priemetni π . Ako sme spomenuli, ide nám o smer hrany, resp. o smer hrán, v ktorých sa pretínajú plochy toho istého pásma. Plochy pásma vertikálneho sa pretínajú vo vertikálnych hranách a tie sa zobrazujú do bodov. Hrany kryštálových plôch pásma (nie vertikálneho) sú v priemete kolmé na stopu pásmovej roviny na priemetni π . Touto stopou je spojnice priesečníkov pásmovej kružnice s kružnicou z .

Ako príklad sme na obr. 6 zostrojili pravouhlý priemet kryštálu rombickej síry, ktorý je omedzený plochami: (100), (010), (001), (110), (101), (011), (111), (113)¹⁰. Póly týchto plôch sú dané pozičnými uhlami φ a ϱ podľa pripojenej tabuľky¹¹:

Plocha	Uhol φ	Uhol ϱ
111	50°51'	71°40'
113	50°51'	45°10'

Obr. 6



V tabuľke uvádzame len uhly pri plochách 111 a 113, lebo póly ostatných plôch môžeme odvodiť z pólu plochy 111 (pozn. 4).

Pomocou uhlov φ a ϱ zostrojíme na obr. 6a stereografické póly 111_s a 113_s týmto spôsobom: Póly 111 a 113 ležia na poludníku m odchýlenom od hlavného poludníka o uhol 50°51'. Pravouhlým priemetom poludníka m je teda priemer m_1 kružnice z odchýlený od priemeru $Y\bar{Y}$ o uhol 50°51'. Rovinu tohoto poludníka sklopíme do π . Poludník m splynie po sklopení s kružnicou z , bod S príde do bodu S' a bod Z do bodu Z' na kružnici z ($S'Z' \perp m_1$). Nasklopenom poludníku $m' \equiv z$ zostrojíme sklopené póly 111' a 113' tak, aby $\angle Z'O 111' = 71°40'$ a $\angle Z'O 113' = 45°10'$. Keď body 111' a 113'

¹⁰) Symbol (113) značí súbor plôch: 113, $\bar{1}13$, $1\bar{1}3$, $11\bar{3}$, $\bar{1}\bar{1}3$, $\bar{1}1\bar{3}$, $1\bar{1}\bar{3}$, $\bar{1}\bar{1}\bar{3}$.

¹¹) Pozičné uhly φ a ϱ meriame na uhlomernom prístroji (goniometri). Ich význam je tento: φ je uhol, o ktorý je odchýlený poludník m idúci daným pólom P od hlavného poludníka. Ak M je ten priesečník poludníka m s rovníkom z , ktorý je od pólu Z oddelený pólom P , je $\varphi = \angle YOM$. Uhol φ meriame od počiatočného ramena OY súhlasne s pohybom ručiek na hodinách v intervale $< 0,360^\circ$. Uhol $\varrho = \angle ZOP$ a meria sa od počiatočného ramena OZ v intervale $< 0^\circ; 90^\circ >$.

premietneme z bodu S' na priamku m_s , ktorá je stereografickým priemetom poludníka m a obsahuje teda aj priemet m_1 , dostaneme stereografické póly 111_s a 113_s . Potom 'podľa poznámky 4 doplníme stereografické póly ostatných plôch.

Keď máme zostrojený stereografický priemet na obr. 6a, prikročíme ku konštrukcii pravouhlého priemetu na obr. 6b. Nakreslíme osi $a \perp b$ rovnobežne s osami OX a OY . Budú to symetrály budúceho obrazu. Obrýs obrazu tvoria úsečky, do ktorých sa premietajú vertikálne plochy kryštálu. Obraz plochy 110 je kolmý na "príslušnú" normálu, ktorá v priemete splýva s priamkou m_s . Nakreslíme ho tak, aby celkový obraz mal primeranú veľkosť. Obrazom plochy 010 je úsečka rovnobežná s osou a a obrazom plochy 100 úsečka rovnobežná s osou b . Obe úsečky majú voliteľnú veľkosť. Pri kreslení máme na pamäti symetriu obrazu podľa osí a , b a teda aj podľa stredu O .

Keď máme hotový obrýs obrazu, nakreslíme plochu 001. Je to kosoštvorec, ktorého strany sú rovnobežné s obrazmi plôch (110). Jeden jeho vrchol, napr. U , zase vhodne volíme.

Hrana $113 : 011^{12)}$ prechádza bodom U a je v priemete kolmá na spoločnú tetivu pásmovej kružnice h_s idúcej pólmi 113_s a 011_s a kružnice z . Kružnica h_s prechádza okrem pólův 113_s a 011_s tiež príslušnými protipólmi. Zostrojíme teda napr. protipól k pólu 113_s . Ten je na priamke m_s a na kolmici na spojnicu bodov S' a 113_s vedenej bodom S' (8). Kružnica h_s je potom určená tromi bodmi: Pólom 011_s , pólom 113_s a príslušným protipólom. (Tento protipól nie je na obr. 6a nakreslený.) Keď kružnica h_s pretne kružnicu z v bodoch I a II , je pravouhlý priemet hrany $113 : 011$ kolmý na spojnicu bodov I a II , ktorá, pravda, musí prechádzať stredom O .

Ďalší postup pri konštrukcii pravouhlého priemetu, na ktorom už nie je nič voliteľného, vidíme na obr. 6b.

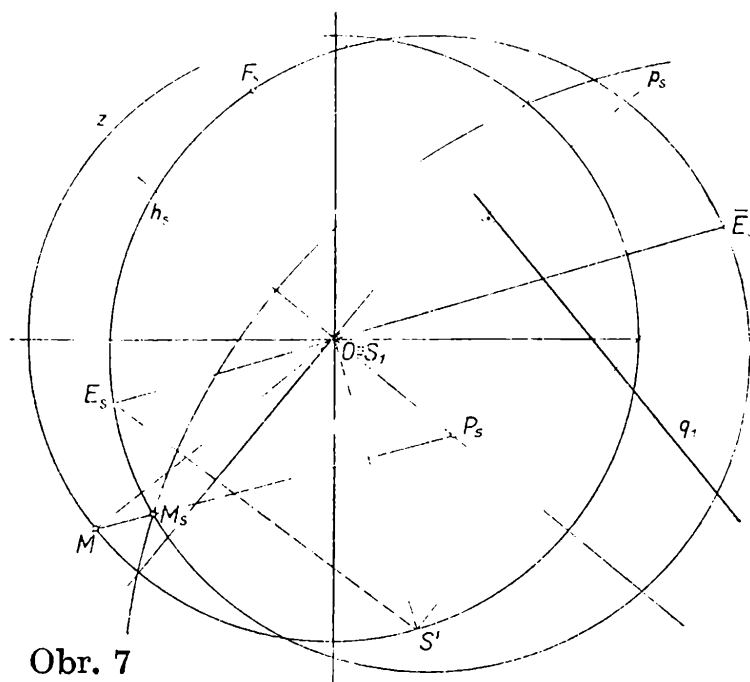
Nakoniec ukážeme, ako sa zostrojí pravouhlý priemet kryštálu na rovine π' rôznej od roviny π . Priemetňu π' určíme stereografickým obrazom P_s pólu P alebo stereografickým obrazom p_s hlavnej kružnice p , v ktorej rovina π' pretína sféru.

Poznámka 7. Aby pravouhlý priemet kryštálu bol čím názornejší, zachováame pri voľbe priemetne tieto pravidlá: 1. kružnica p_s nemá prechádzať pólom kryštálovej plochy, 2. kružnica p_s nemá prechádzať priesečníkom dvoch pásmových kružníc. V prípade 1 sa príslušná kryštálová plocha zobrazí do úsečky, v 2. prípade sa osi príslušných pásiem zobrazia do jednej priamky, ačkoľvek v skutočnosti sú rôznobežné. Obidva spomenuté prípady značne oslabujú názornosť obrazu, a preto sa im vyhýbame.

Predpokladajme, že je priemetňa π' určená kružnicou p_s a že sme zostrojili k nej príslušný pól P_s podľa odst. 11. Možno dokázať, že

¹²⁾ Týmto znakom označujeme v kryštalografii hranu, v ktorej sa pretínajú plochy 113 a 011.

smer pravouhlého priemetu hrany dvoch kryštálových plôch, ktoré sú dané svojimi stereografickými pólmi E_s a F_s , sa dá zostrojiť týmto jednoduchým spôsobom (obr. 7): Pólmi E_s a F_s položíme kružnicu h_s , ktorá rozpoľuje kružnicu z (16). Jeden z jej priesečníkov s kružnicou p_s , trebárs priesečník M_s , premietneme z bodu P_s na kružnicu z do bodu M . Potom kolmica na priemer OM kružnice z je už smer pravouhlého priemetu hrany, v ktorej sa pretínajú dané kryštálové plochy. (Na obr. 7 je tento smer vyznačený priamkou q_1 .)



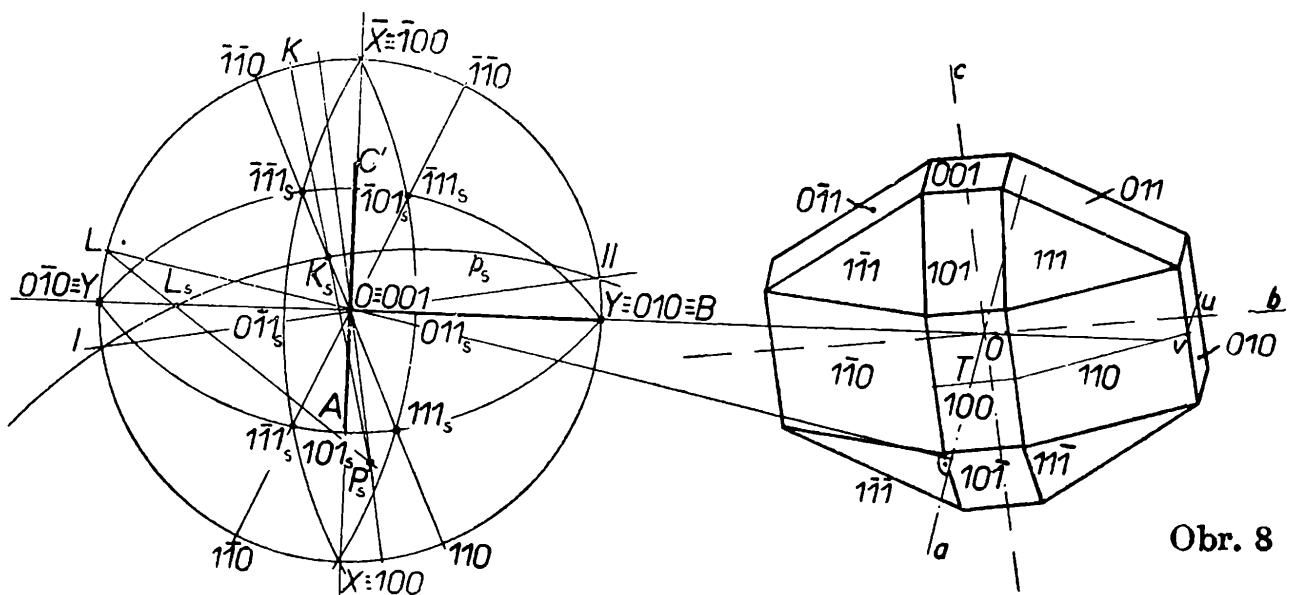
Obr. 7

Na ukážku sme na obr. 8 zostrojili názorný pravouhlý priemet kryštálu olivínu $(\text{MgFe})_2\text{SiO}_4$. Kryštál patrí do sústavy rombickej a je omedzený plochami: (100), (010), (001), (110), (101), (011) a (111). Základná plocha 111 má pomer parametrov $a : b : c = 0,466 : 1 : 0,587$.

Stereografický obraz kryštálu (obr. a) sme zostrojili podľa odst. 12, resp. 13. Pri konštrukcii pravouhlého priemetu (obr. b) postupujeme obyčajne takto: Zvolíme bod O ako obraz stredu osového kríža a zostrojíme obrazy kryštálových osí a , b , c (index 1 budeme vynechávať). Os a zostrojíme ako priesečnicu rovín ab , ac , ktorých pólmi sú radom body 001 a 010. Pásmová kružnica, ktorá nimi prechádza, má stereografický priemet v spojnici bodov 001 a 010 (obr. a). Táto priamka pretne kružnicu p_s v bode L_s . Bod L_s premietneme z pólu P_s na kružnicu z do bodu L . Keď vedieme na obr. b kolmicu z bodu O na priemer OL kružnice z , dostaneme obraz osi a . Podobne zostrojíme obraz osi b . Obraz osi c je kolmý na priemer kružnice z prechádzajúci priesečníkmi I a II kružníc p_s a z .

Potom zostrojujeme obrazy jednotlivých plôch. Začneme napr. s plochou 100. Nech táto plocha pretína os a v bode T . Bod T na osi a

môžeme voliť ľubovoľne, pravda s ohľadom na to, ako chceme mať obraz veľký a tiež na to, že dĺžky na osi a sa v priemete hodne skracujú. Obraz plochy 100 je rovnobežník, ktorý má stred T a ktorého dve strany sú rovnobežné s osou b a druhé dve s osou c . Ich veľkosti zase môžeme voliť. K obrazu plochy 100 pripojíme obraz plochy 110, ktorý je zase rovnobežník. Tento rovnobežník má jednu stranu spoločnú s rovnobežníkom 100 (je to hrana 100 : 110). Jednu susednú stranu tvorí hrana 110 : 111. Smer tejto hrany v priemete zostrojíme



Obr. 8

takto: Kružnica idúca pólmi 110 a 111 je v tomto prípade poludník. Jeho stereografickým priemetom na obr. a je priemer kružnice z , ktorý pretína kružnicu p_s v bode K_s . Bod K_s premietneme z bodu P_s na kružnicu z do bodu K (16). Smer hrany 110 : 111 na obr. b je kolmý na priemer KO kružnice z . Dĺžku tejto hrany môžeme zase voliť, pravda so zreteľom na to, že na kryštále existuje aj plocha 010. Keď máme nakreslenú plochu 110 môžeme pripojiť plochu 010, ktorá je na obr. b zase rovnobežníkom. Jeho dve strany sú rovnobežné s osou a a druhé dve s osou c . Stred U tohto rovnobežníka, ktorý leží na osi b zostrojíme tak, že stredom V hrany 110 : 010 vedieme rovnobežku s osou a . Táto rovnobežka pretína os b v bode U .

Keď nakreslíme plochu $0\bar{1}0$, ktorá je symetrická s plochou 010 podľa stredy O , môžeme hneď nakresliť aj plochu $1\bar{1}0$ a potom ostatné plochy vertikálneho pásma, ktoré sú s plochami už zostrojenými symetrické podľa stredy O .

Na ostatných plochách, ktoré ešte máme nakresliť, už nie je nič voliteľného. Smery hrán omedzujúcich ďalšie plochy zostrojíme podobne, ako sme ich zostrojovali pri ploche 110. (Na obr. b sme ne-nakreslili neviditeľné hrany, aby sme obrázok nepreplnili.)

Poznámky: 8. Kryštály tej istej látky nemusia byť všetky geometricky podobné. Rast kryštálov nebýva rovnomerný, a preto všetky plochy kryštálu nebývajú rovnako vyvinuté. Príčinou môžu byť napr. odchýlky v koncentrácii roztoku, z ktorého sa kryštál tvorí. Na strane väčšej koncentrácie rast kryštálu prebieha rýchlejšie, takže kryštál, ktorý by mal za ideálnych podmienok tvar, povedzme, kocky, sa zmení následkom odchýlok od tohto stavu na kváder. Pretože však kryštál rastie vždy prikladaním planparalelných vrstvičiek, majú kryštálové plochy pri raste stále tú istú vzájomnú polohu, tj. zvierajú konštantný uhol (zákon o stálosti uhlov hrán; lit. [1], str. 12).

Preto všetky kryštály tej istej látky a tej istej sústavy majú — pokiaľ niektoré plochy nechýbajú — ten istý sférický a teda aj ten istý stereografický obraz. Z toho dôvodu nemôže byť pravouhlý priemet určený stereografickým priemetom jednoznačne, a to nielen čo sa týka veľkosti, ale aj konkrétneho tvaru kryštálu. Tým možno vysvetliť istú ľubovôľu pri konštrukcii pravouhlého priemetu kryštálu z jeho stereografického obrazu, ktorá čitateľa možno trochu prekvapila.

9. Keby sme však body T , U na obr. 8b nechceli voľiť ľubovoľne, ale tak aby úsečka OT , resp. OU mala v skutočnosti určitú danú dĺžku, mohli by sme zostrojiť pomer skrátenia pre úsečky na osiach a , b , c známym spôsobom, ako to robíme napr. v pravouhlej axonometrii.

Literatura

[1] Slavík - Novák Pacák: Mineralogie. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.

[2] Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 35, č. 1, Praha 1957.

[3] Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 37, č. 5, Praha 1959.

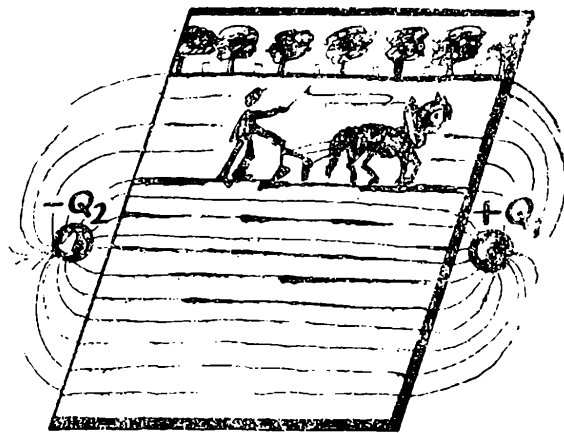
[4] Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 43, č. 10, Praha 1965.

[5] Matematika ve škole, roč. XVI, č. 2, Praha 1965.



V 5. čísle Rozhledů jsme na str. 249 otiskli projev, který při předávání cen za II. kolo XVI. ročníku Matematické olympiády pronesl vítěz tohoto kola, Pavel Vejvoda, tehdejší žák III. ročníku SVVŠ v Praze 2, tř. W. Piecka. Dnes přinášíme dodatečně Vejvodovu fotografii i se získanou cenou.

O. S.



Odvození momentu setrvačnosti těles elementárními prostředky

ZDENĚK UNGERMANN, Hradec Králové

Moment setrvačnosti rotujícího tělesa vzhledem k dané ose je dán (viz Rozhledy matematicko-fyzikální č. 2, loňského ročníku, str. 44) vztahem

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (1)$$

kde r_i je vzdálenost hmotného bodu m_i tělesa od osy rotace. Někdy píšeme (1) ve tvaru $J = mR^2$, kde m je celková hmotnost tělesa a R poloměr setrvačnosti (gyrační). R závisí na rozložení hmoty kolem osy rotace. Ze vztahu (1) vyplývá, že moment setrvačnosti můžeme vypočítat tak, že dané těleso rozdělíme na několik částí, jejichž momenty setrvačnosti k dané ose známe, nebo je můžeme snadno určit. Hledaný moment dostaneme sečtením momentů jednotlivých částí. V článku tedy budeme postupovat od jednoduchých těles k složitějším.

V našich úvahách budeme často potřebovat znát moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose neprocházející těžištěm tělesa. Lze dokázat, že moment setrvačnosti tělesa k libovolné ose lze určit, známe-li hmotnost tělesa a moment setrvačnosti k ose rovnoběžné s danou osou a procházející těžištěm (Steinerova věta). Nechť se těleso otáčí kolem osy o kolmé k nákrese (obr. 1). T je těžiště tělesa a $d\varphi$ je malý úhel otočení za velmi krátkou dobu dt . Označme dále $OT = a$. Daný pohyb si můžeme představit tak, že se těleso pohybuje postupným pohybem ve směru TT' (OT přechází v $O'T'$) a zároveň se otáčí kolem T .

Kinetická energie při otáčení kolem osy O se tedy skládá ze dvou částí. Pro pohyb postupný dostáváme

$$W_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{OO'}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{OT d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2. \quad (2)$$

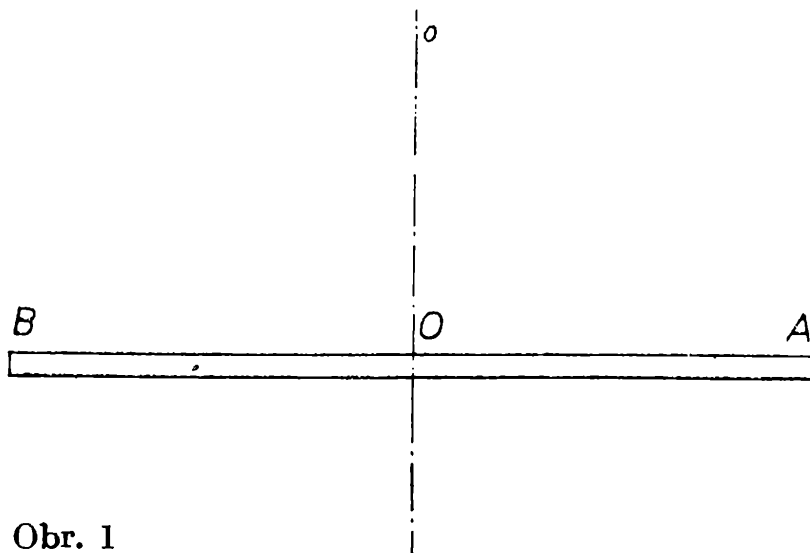
Druhá část odpovídá otáčivému pohybu kolem osy T

$$W_2 = \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{d\varphi'}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2, \quad (3)$$

kde J_0 je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rovnoběžné s danou osou a procházející těžištěm. Dále

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt}$$

je úhlová rychlost v daném okamžiku.



Obr. 1

Je-li J moment setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose, můžeme na základě předcházejících úvah a podle (2), (3) psát

$$\frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2.$$

Krácením této rovnice dostaneme

$$J = m a^2 + J_0. \quad (4)$$

Vztah (4) je matematickým vyjádřením *Steinerovy věty*.

Dále budeme potřebovat některé vztahy, které uvedu bez důkazu

$$S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} (n+1) \cdot (2n+1) n,$$

$$S_2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 =$$

$$= \frac{1}{3} n (2n-1) (2n+1),$$

$$S_3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2 (2n^2-1),$$

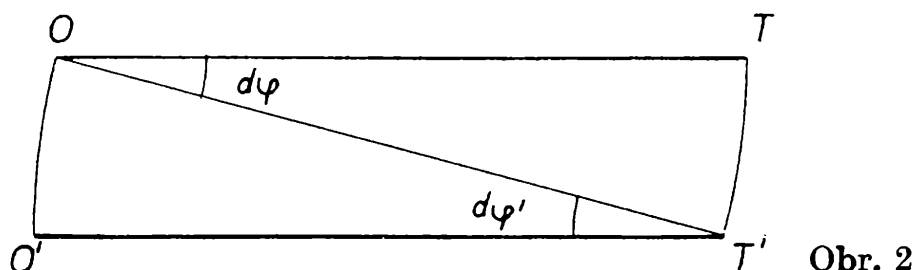
$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \sum_{k=1}^n k^4 =$$

$$= \frac{1}{30} n (n+1) (2n+1) (3n^2+3n-1).$$

Dokažte uvedené vztahy.

Můžeme přistoupit k odvození momentu setrvačnosti některých homogenních těles.

1. *Moment setrvačnosti homogenní tyče vzhledem k ose jdoucí těžištěm* (obr. 2). Hmotnost tyče je m a délka l , průřez zanedbáme.



Hledaný moment se skládá ze dvou částí: z momentu části OA (J_1) a z momentu OB (J_1). Tedy

$$J = 2J_1. \quad (5)$$

Moment setrvačnosti J_1 vypočteme tak, že tyč OA rozdělíme na n velmi malých stejných dílků ($n \rightarrow \infty$). Hmotnost jednoho dílku označíme μ a délku d . Platí

$$m = 2n\mu, \quad l = 2nd. \quad (6)$$

Předpokládejme, že hmotnost jednoho dílku je soustředěna ve středu dílku, pak

$$J_1 = \mu \left(\frac{d}{2} \right)^2 + \mu \left(\frac{3}{2} d \right)^2 + \mu \left(\frac{5}{2} d \right)^2 + \dots + \mu \left[\frac{d}{2} + (n-1)d \right]^2$$

Dále

$$J_1 = \frac{\mu d^2}{4} [1 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2] = \mu S_2 \frac{d^2}{4}.$$

Použitím S_2 dostaneme

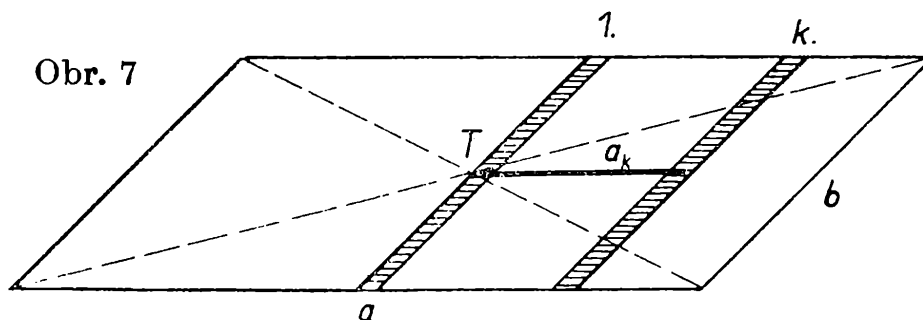
$$J_1 = \frac{\mu d^2}{4} \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Jelikož n je velké ($n \rightarrow \infty$), můžeme jedničku proti $2n$ zanedbat. Užitím (5), (6) a jednoduchou úpravou dostáváme konečný výsledek

$$J = 2 J_1 = \frac{ml^2}{12}. \quad (7)$$

Vztah (7) určuje moment setrvačnosti tyče délky l a hmotnosti m . Osa otáčení prochází těžištěm a je kolmá na délku tyče. Tohoto výsledku použijeme k odvození momentu setrvačnosti desky.

2. *Moment setrvačnosti obdélníkové desky*, jejíž tloušťku vzhledem k ostatním rozměrům zanedbáme. Osa prochází těžištěm a je kolmá k desce (obr. 3).



Obr. 7

Rozdělme délku a desky na $2n$ velmi tenkých pruhů, každý o hmotnosti μ . Je-li hmotnost desky m , pak

$$m = 2n\mu. \quad (8)$$

Moment desky J určíme jako součet momentů jednotlivých pruhů k -tý pruh má podle Steinerovy věty a podle (7) moment

$$J_k = \frac{\mu b^2}{12} + \mu a_k^2,$$

kde a_k je vzdálenost těžiště od středu k -tého pruhu, tj.

$$a_k = k \frac{a}{2n} - \frac{a}{4n} \doteq k \frac{a}{2n},$$

jelikož

$$\frac{a}{4n} \rightarrow 0.$$

Moment setrvačnosti poloviny desky je

$$J_1 = \sum_{k=1}^n J_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mu b^2}{12} + \mu a_k^2 \right).$$

Další úpravou dostáváme

$$J_1 = \sum_{k=1}^n \frac{\mu b^2}{12} + \sum_{k=1}^n \mu \frac{k^2 a^2}{4n^2}$$

Použijeme-li vztahu S_1 a (8), obdržíme

$$J_1 = m \frac{a^2 + b^2}{24}.$$

Tedy celkový moment setrvačnosti

$$J = 2J_1 = \frac{m}{12} (a^2 + b^2). \quad (9)$$

Pro čtverec podle (9) platí

$$J = \frac{ma^2}{6}.$$

Příklad. Na základě předcházejících úvah dokažte, že moment setrvačnosti homogenního kvádru (hmotnosti m) vzhledem k ose jdoucí těžištěm kolmo na některou stěnu je dán vztahem (9), kde a , b jsou rozměry příslušné stěny.

(Dokončení)

Barevná televize

ING. JIŘÍ PAZDERÁK, CSc., Praha

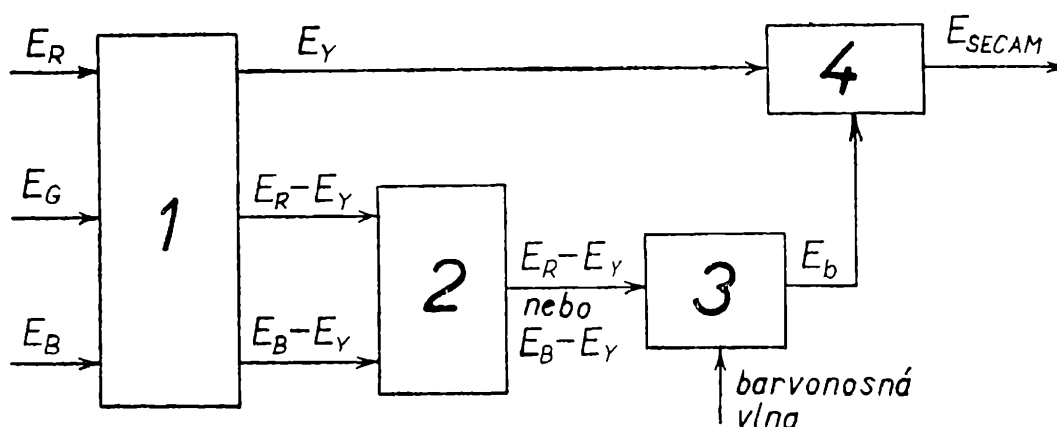
(Dokončení)

Soustava barevné televize SECAM

Typickým znakem soustavy barevné televize *SECAM* (Sequentiel á memoire), která byla vyvinuta ve Francii, je *kmitočtová* modulace barvonosného signálu, který přenáší v řádcích jdoucích po sobě střídavě vždy jen jednu barvonosnou složku ($E_R - E_Y$ nebo $E_B - E_Y$). Druhá barvonosná složka nutná pro správnou reprodukci obrazu v přijímači se získává jejím opakováním z předchozího řádku prostřednictvím *zpožďovací linky*, která zpožďuje procházející signál právě o dobu jednoho televizního řádku. Využívá se přitom skutečnosti, že dva bezprostředně po sobě následující řádky se co do průběhu obrazového signálu obvykle podstatně od sebe neliší.

Při kódování v soustavě *SECAM* (obr. 12) se opět v maticovém obvodu vytváří jasový signál E_Y a barvonosné složky $E_R - E_Y$

a $E_B - E_Y$. Barvosné složky se vedou do elektronického přepínače, který střídavě po řádcích propouští dále vždy jen jednu barvosnou složku $E_R - E_Y$ nebo $E_B - E_Y$. Procházející barvosná složka vstupuje do kmitočtového modulátoru, kde její amplituda řídí kmitočet

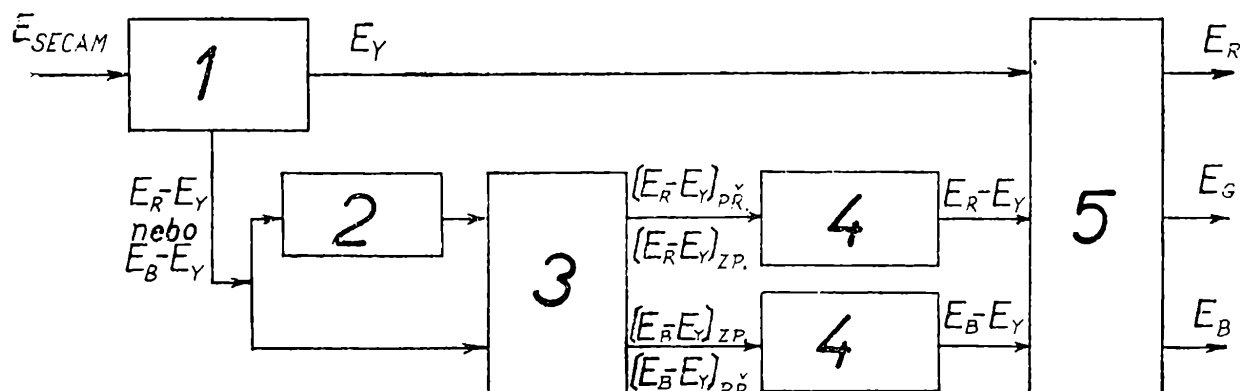


Obr. 12. Princip kódování signálů v soustavě SECAM

- 1 - Kódovací maticový obvod
- 2 - Elektronický přepínač
- 3 - Kmitočtový modulátor
- 4 - Součtový zesilovač

f_b barvosné vlny $A \sin(2\pi f_b t + \varphi)$. Tak vzniká kmitočtově modulovaný barvosný signál E_b , jehož okamžitý kmitočet nese údaj o přenášené barvě. Barvosný signál se sčítá s jasovým signálem a vzniká úplný signál barevné televize E_{SECAM} .

Při dekódování v přijímači (obr. 13) se kmitočtovou filtrací nejdříve oddělují jasový a barvosný signál. Barvosný signál pak vstupuje do elektronického přepínače, a to jednak přímo, jednak přes zpožďovací linku se zpožděním o dobu trvání jednoho televizního řádku ($64 \mu s$). Elektronický přepínač přepíná (synchronně s elektronickým



Obr. 13. Dekódovací obvody přijímače v soustavě SECAM

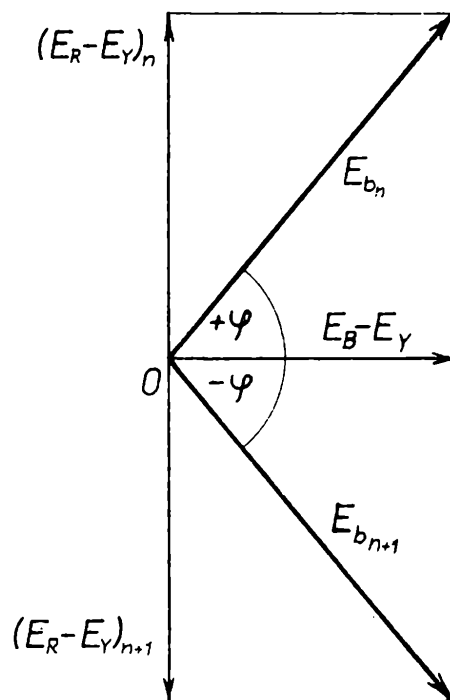
- 1 - Oddělení jasového a barvosného signálu
- 2 - Zpožďovací linka
- 3 - Elektronický přepínač
- 4 - Kmitočtový demodulátor
- 5 - Dekódovací maticový obvod

přepínačem při kódování) na výstup postupně vždy úplnou dvojici kmitočtově modulovaných barvonosných složek, a to buď dvojici $[E_R - E_Y]_{\text{přímé}}$ a $[E_B - E_Y]_{\text{zpožděné}}$ nebo dvojici $[E_R - E_Y]_{\text{zpožděné}}$ a $[E_B - E_Y]_{\text{přímé}}$. V následujících demodulátorech, které přeměňují kmitočet barvonosného signálu opět na velikost amplitudy signálu, obnovují se původní barvonosné složky $E_R - E_Y$, $E_B - E_Y$ které spolu s jasovým signálem E_Y vytvářejí v dekódovacím maticovém obvodu základní barevné signály E_R , E_G , E_B pro barevnou obrazovku.

Použitím kmitočtové modulace barvonosného signálu v soustavě *SECAM* dosahuje se proti soustavě *NTSC* snížené citlivosti vůči poruchám a zkreslením, které se mohou vyskytnout při přenosu úplného signálu barevné televize retranslačními spoji a při jeho vysílání a příjmu. Kmitočtová modulace signálu se tedy obdobně jako při přenosu rozhlasových pořadů na velmi krátkých vlnách i zde uplatňuje středník kvalitního přenosu signálu. I zde je to však za cenu složitějšího řešení kódovacích a dekódovacích obvodů.

Soustava barevné televize *PAL*

Soustava barevné televize *PAL* (Phase Alternating Line), která byla vyvinuta v Německé spolkové republice, převzala ze soustavy *NTSC* princip *kvadrurní modulace* barvonosného signálu a ze soustavy *SECAM* princip *zpoždování* barvonosného signálu o jeden televizní řádek v dekódovacích obvodech přijímače. Nový je v soustavě *PAL* princip *střídání polarity* barvonosné složky $E_R - E_Y$ v řádcích po sobě následujících (viz diagram na obr. 14). Takto vytvořený barvonosný signál, jehož fáze nabývá postupně po řádcích hodnoty $+\varphi$, $-\varphi$, je méně citlivý na zkreslení při jeho přenosu a umožňuje jednodušší demodulaci a obnovení barvonosných složek $E_R - E_Y$, $E_B - E_Y$ v přijímači.



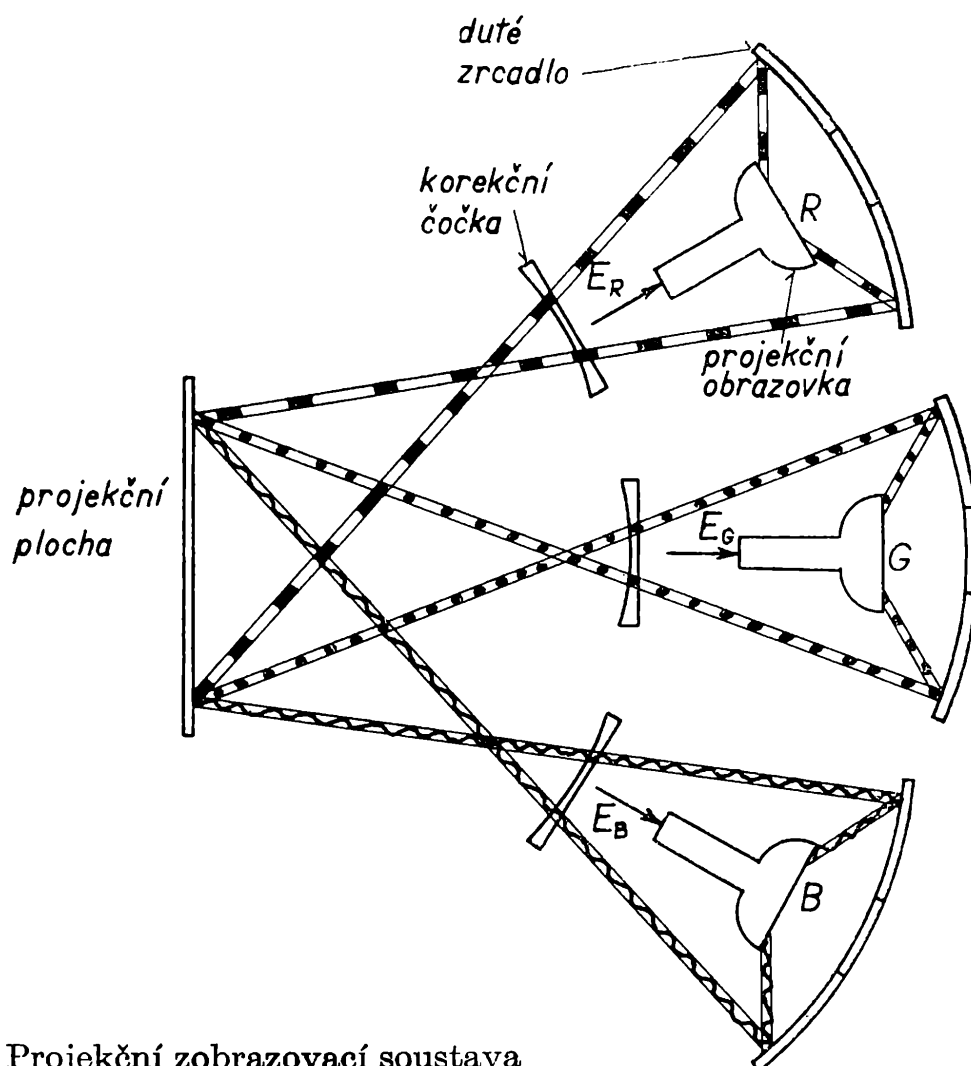
Obr. 14. Barvonosný signál v soustavě *PAL* v n -tém a v $(n + 1)$ řádku

Zobrazovací soustavy barevné televize

Pod pojmem *zobrazovací* soustava barevné televize si představujeme zařízení, které v přijímači přeměňuje obnovené základní barevné signály E_R , E_G , E_B v barevný obraz.

Principiální řešení zobrazovacích soustav je založeno na zmíněném aditivním mísení tří složkových obrazů v základních barvách R , G , B

a lze je nejlépe sledovat na zobrazovací soustavě *projekční* uvedené v obr. 15. Tato soustava užívá trojice speciálních projekčních obrazovek, z nichž každá se budí jedním ze základních barevných signálů



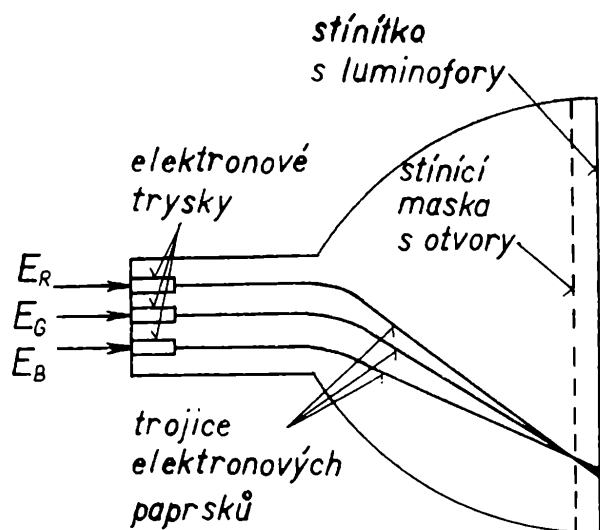
Obr. 15. Projekční zobrazovací soustava

E_R , E_G , E_B . Stínítka těchto obrazovek jsou opatřena luminofory (fosfory zářícími po dopadu elektronového paprsku) zářícími v odpovídajících základních barvách R , G , B . Tři složkové obrazy červený, zelený a modrý vytvořené na stínítkách jednotlivých obrazovek se prostřednictvím *Schmidtovy optiky* (duté zrcadlo s korekční čočkou) zobrazují přesně na sebe na jedinou projekční plochu, kde se tak reprodukuje barevný obraz snímané scény.

Uvedený princip projekční soustavy je v podstatě společný všem zobrazovacím soustavám barevné televize, její praktické využití je však vhodné pouze pro velkoploché zobrazení barevných televizních obrazů. V přijímačích barevné televize se užívá jako zobrazovací soustavy *barevné obrazovky*, obdobného, ale složitějšího systému než u obrazovky černobílé televize.

Nejčastěji užívanou zobrazovací soustavou barevné televize v při-

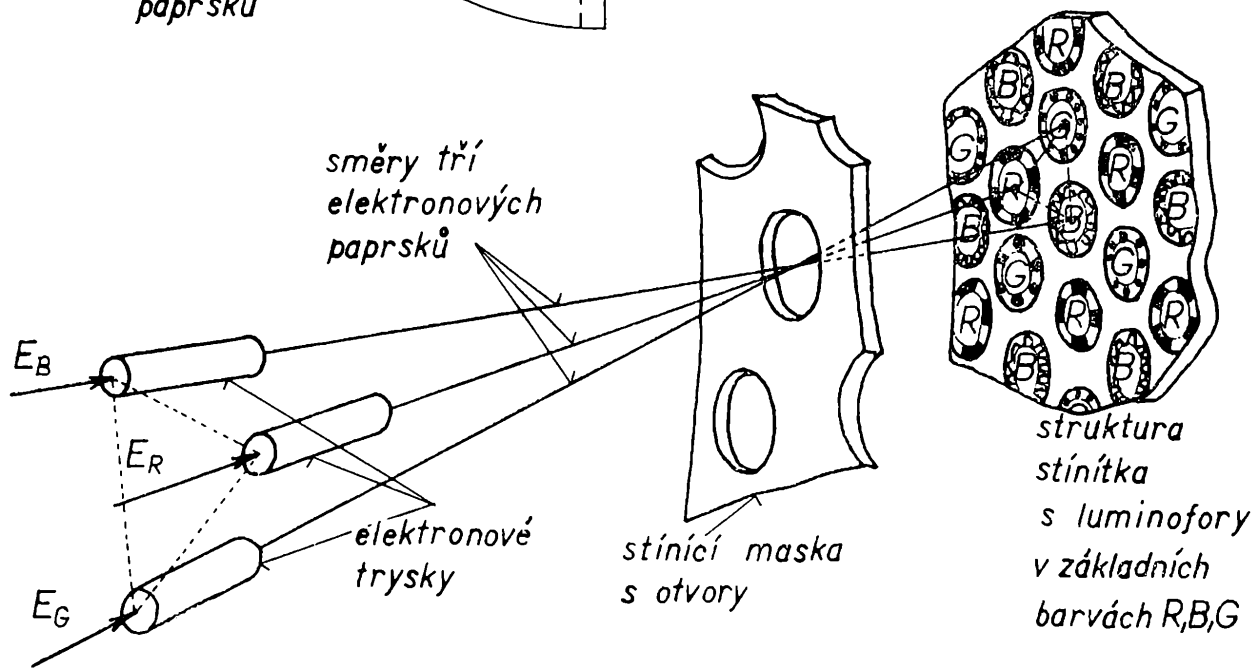
jímačích je barevná obrazovka se stínící maskou (obr. 16a). Tato obrazovka má tři elektronové trysky umístěné ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka (obr. 16b), z nichž vycházejí tři samostatné elektronové paprsky. Intenzita každého paprsku je modulována jedním ze základ-



Obr. 16. Princip barevné obrazovky se stínící maskou

a) Celkové řešení obrazovky

b) Detail stínítka a chodu elektronových paprsků



ních barevných signálů E_R , E_G , E_B . Trojice elektronových paprsků se společně vychyluje a zaostřuje na stínítka obrazovky, které je zevnitř pokryto jemnou pravidelnou strukturou trojic kruhových plošek luminoforů v základních barvách R , G , B , ležících opět ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Před stínítkem zevnitř obrazovky je pevně uchycena kovová stínící maska s kruhovými otvory, z nichž každý leží před jednou trojicí luminoforů stínítka. Trojice elektronových paprsků se sbíhá v rovině stínící masky a rozbíhá se opět tak, že jednotlivé elektronové paprsky dopadají jen na plošku luminoforu té základní barvy, jejíž základní barevný signál paprsek moduluje. Každý ze tří elektronových paprsků vytváří tak na stínítku složkový obraz v jedné

ze základních barev s bodovou strukturou, která není již z běžné vzdálenosti okem rozeznatelná. Poněvadž se všechny tři složkové obrazy na stínítku kryjí, vzniká jejich aditivním složením úplný barevný obraz.

Literatura

Ilwain, Dean: Principy barevné televize. SNTL, Praha 1960.

Pazderák, Ptáček: Barevná televize. SNTL, Praha 1964.



ASTRONOMIE

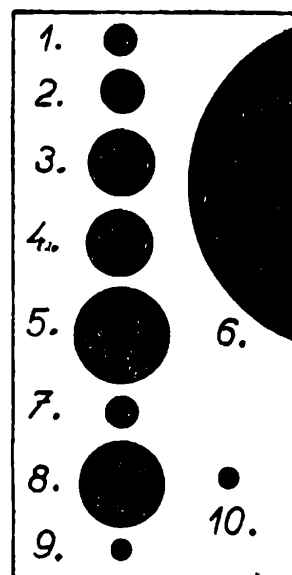
Deset měsíců planety Saturna

Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ — Dr. M. ŠIROKÁ, UP Olomouc

Druhá největší planeta sluneční soustavy — *Saturn* — je právem označována za nejkrásnější planetu. Je obklopena několika prstenci a vedle Jupitera má největší počet měsíců. Poslední, desátý měsíc, nazvaný *Janus*, objevil koncem roku 1966 francouzský astronom dr. A. Dollfus z hvězdárny v Meudonu u Paříže. Jde o těleso 14. hvězdné velikosti, které se pohybuje po dráze o průměru 315 000 km a kolem Saturna oběhne za necelých 18 hodin. Jeho dráha je téměř kruhová s nulovým sklonem vůči rovníku Saturna. Objev desátého měsíce byl během r. 1967 potvrzen i na jiných hvězdárnách.

Největším Saturnovým měsícem je *Titan* (obr. 1), jehož průměr 4820 km je prakticky stejný jako průměr planety Merkura. Objevil jej v r. 1655 Ch. Huygens; v r. 1944 objevil Američan G. P. Kuiper, že Titan je obklopen atmosférou složenou z metanu. Další čtyři měsíce objevil D. Cassini a jejich názvy jsou: *Japetus*, *Rhea*, *Dione* a *Tethys*.

Známý anglický pozorovatel W. Herschel objevil další dva měsíce (*Mimas* a *Enceladus*), konečně před více než sto lety byl objeven *Hyperion*. Devátý měsíc, *Phoebe*, objevil astronom Pickering v r. 1898, který o sedm let později oznámil objev dalšího měsíce. Jeho objev nebyl však potvrzen a zdá se, že šlo o planetku, která se jen dočasně pohybovala v gravitačním poli Saturna. Přehled o soustavě Saturnových měsíců podává připojená tabulka, sestavená podle Hvězdářské ročenky na rok 1968.



Obr. 1. Srovnání velikosti Saturnových měsíců.

Tabulka 1. Saturnovy měsíce

Měsíc	Vzdálenost [a. j.]	Sider. perioda d	Synod. perioda d h m	Ex- centr.	Sklon [°]	Prů- měr [km]	Hv. vel. [m]
10. Janus	0,001 054	0,749	—	0,0?	0?	240?	14
1. Mimas	0,001 240	0,942	22 37	0,020	1,5	480	12,1
2. Ence- ladus	0,001 591	1,370	1 8 53	0,004	0,0	640	11,7
3. Tethys	0,001 969	1,888	1 21 19	0,000	1,1	960	10,6
4. Dione	0,002 522	2,737	2 17 42	0,002	0,0	960	10,7
5. Rhea	0,003 523	4,518	4 12 28	0,001	0,4	1360	10,0
6. Titan	0,008 166	15,945	15 23 15	0,029	0,3	4820	8,3
7. Hype- rion	0,009 893	21,277	21 7 39	0,104	0,4	400	15
8. Japetus	0,023 798	79,331	79 22 05	0,028	14,7	1200	10,8
9. Phoebe	0,086 575	550,450	523 16	0,163	150	240	14,5

Má-li planeta měsíce, pak lze poměrně snadno vypočítat její hmotnost. K výpočtu hmotnosti Saturna použijeme oběžnou dobu a vzdálenost měsíce Titana. Uvažujme, že Titan obíhá kolem Saturna po kruhové dráze o poloměru $a = 1,22 \cdot 10^9$ m; jeho siderická oběžná doba je 15,95 dne — po přepočtení na sekundy je $T = 1,38 \cdot 10^6$ s.

Při kruhovém pohybu je gravitační zrychlení ve vzdálenosti a od středu Saturna rovné dostředivému zrychlení Titana. Označíme-li M hmotnost Saturna a v dráhovou rychlost Titana, platí

$$\frac{\kappa M}{a^2} = \frac{v^2}{a}, \quad (1)$$

kde $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻² je gravitační konstanta.

Hmotnost Saturna pak můžeme vyjádřit vztahem

$$M = \frac{v^2 a}{\kappa} . \quad (2)$$

Dráhovou rychlost vyjádříme pomocí poloměru a oběžné doby

$$v = \frac{2\pi a}{T} .$$

Dosadíme-li tuto rychlost do rovnice (2), máme

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{\kappa T^2} . \quad (3)$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme pro hmotnost Saturna hodnotu $M = 5,65 \cdot 10^{26}$ kg.

Hmotnosti planet sluneční soustavy se obvykle udávají v jednotkách hmotnosti Země. Hmotnost Saturna v jednotkách hmotnosti Země vy počteme tak, že jeho hmotnost v kilogramech vydělíme hmotností Země v kilogramech. Protože hmotnost Země $M_z = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, je hmotnost Saturna $M = 94,5 M_z$. Tento výsledek se poměrně dobře shoduje s číselnou hodnotou, kterou udávají astronomické tabulky ($M = 95,2 M_z$).

Hmotnost Saturna můžeme stanovit také přímo v hmotnostech Země. Potřebujeme k tomu znát oběžnou dobu a vzdálenost našeho Měsíce. Označme a_M vzdálenost Měsíce od Země, T_M jeho oběžnou dobu. Pak hmotnost Země lze vyjádřit vztahem

$$M_z = \frac{4\pi^2 a_M^3}{\kappa T_M^2} . \quad (4)$$

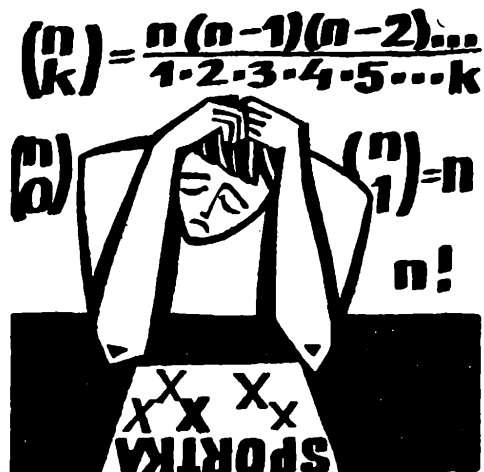
Dělíme-li rovnici (3) rovnicí (4), dostáváme pro poměr hmotností Saturna a Země

$$\frac{M}{M_z} = \frac{a^3}{a_M^3} \cdot \frac{T_M^2}{T^2} . \quad (5)$$

Měsíc obíhá kolem Země ve vzdálenosti $a_M = 385 \cdot 10^6$ m s oběžnou dobou $T_M = 27,3$ dne. Odpovídající údaje pro Titana jsou: $a = 1,22 \cdot 10^9$ m, $T = 15,95$ dne. Dosadíme-li tyto číselné hodnoty do rovnice (5), dostaneme $M = 94 M_z$.

* * *

NAŠE SOUTĚŽ



Matematika

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC . Úhly při základně AB měří 80° . Ve vrcholu A sestrojíme úhel 50° , ve vrcholu B úhel 60° . Ramena těchto úhlů protnou ramena daného trojúhelníka po řadě v bodech K a L . Určete úhel KLB .

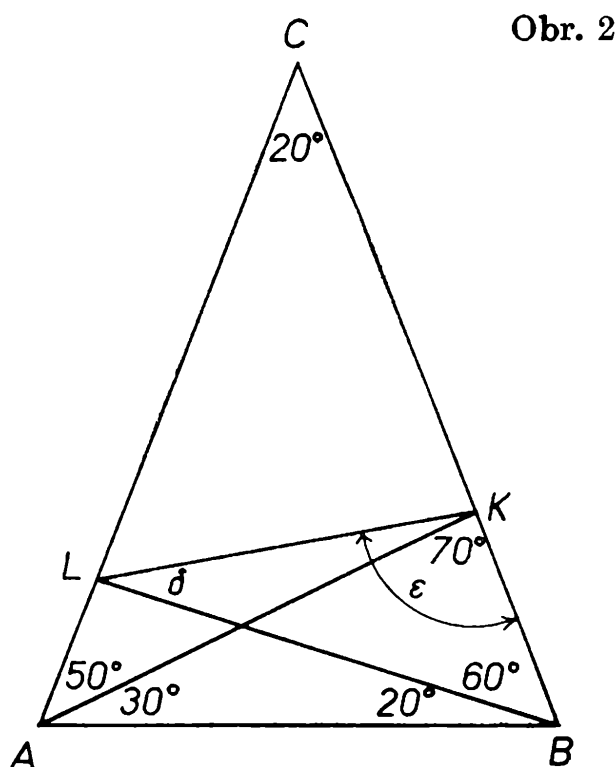
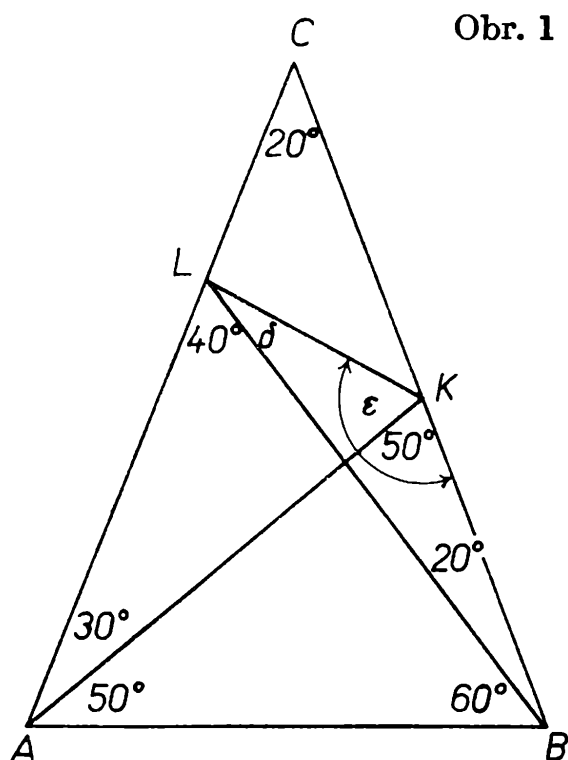
(Došlo 31 řešení)

Josef Dibelka

Řešil Pavel Vejvoda, SVVŠ, Praha 2, W. Piecka:

Rozlišíme tyto tři případy:

1. Uvažujme $\triangle ABL$ a $\triangle BKL$ (obr. 1).



Z $\triangle ABL$ plyne

$$BL : AB = \sin 80^\circ : \sin 40^\circ$$

Z $\triangle BKL$ plyne

$$BL : BK = \sin \varepsilon : \sin \delta ; \varepsilon = 180^\circ - (\delta + 20^\circ)$$

$\triangle ABK$ je rovnoramenný $AB = BK$, pak

$$\frac{\sin (\delta + 20^\circ)}{\sin \delta} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} ,$$

$$\frac{\sin \delta \cos 20^\circ + \cos \delta \sin 20^\circ}{\sin \delta} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} ,$$

$$\cotg \delta = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ \sin 20^\circ} - \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} ,$$

$$\cotg \delta = \frac{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ \sin 20^\circ} - \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} ,$$

$$\cotg \delta = \frac{\cos 40^\circ - 2 \sin 30^\circ \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} ,$$

$$\cotg \delta = \frac{2 \sin 60^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3} ,$$

$$\delta = 30^\circ$$

2. Uvažujme $\triangle BKL$ a $\triangle ABK$ (obr. 2).

Z $\triangle BLK$ plyne

$$BL : BK = \sin (\delta + 60^\circ) : \sin \delta .$$

Z $\triangle ABK$ plyne

$$AB : BK = \sin 70^\circ : \sin 30^\circ$$

$\triangle ABL$ je rovnoramenný, pak $AB = BL$, tedy

$$\frac{BL}{BK} = \frac{AB}{BK} ,$$

$$\frac{\sin (\delta + 60^\circ)}{\sin \delta} = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ} (\sin 30^\circ = \frac{1}{2} , \sin 70^\circ = \cos 20^\circ) ,$$

$$\frac{\sin \delta \cos 60^\circ + \cos \delta \sin 60^\circ}{\sin \delta} = 2 \cos 20^\circ$$

$$\cotg \delta = \frac{2 \cos 20^\circ}{\sin 60^\circ} - \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} ,$$

$$\cotg \delta = \frac{2 \cos 20^\circ - 1}{3} \doteq 1,59 ; \quad \delta \doteq 32^\circ 10'$$

3. Z $\triangle BKL$ plyne (obr. 3)

$$BL : BK = \sin (\delta + 60^\circ) : \sin \delta ,$$

$\triangle ABK$ je rovnoramenný

$$AB = BK,$$

$\triangle ABL$ je také rovnoramenný

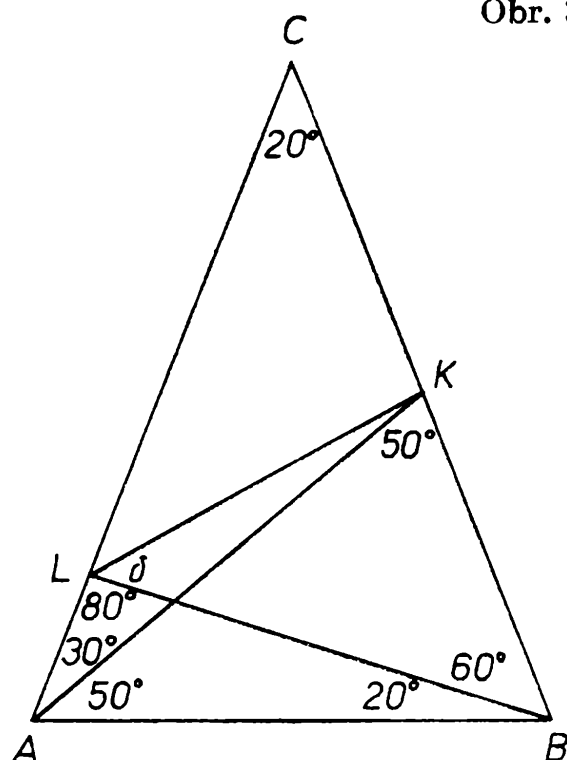
$$AB = BL = BK,$$

$$\frac{BL}{BK} = 1 = \frac{\sin(\delta + 60^\circ)}{\sin \delta},$$

$$\frac{\sin \delta \cos 60^\circ + \cos \delta \sin 60^\circ}{\sin \delta} = 1,$$

$$\cotg \delta = \frac{1 - \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\delta = 60^\circ$$



Obr. 3

Poznámka redakce: Tuto úlohu bylo možno řešit několika způsoby, což se také objevilo v řešení našich čtenářů. Otiskujeme řešení, které danou úlohu podrobně rozebralo. Většina řešitelů uvažovala jen případ první. I řešení bez případů 2 a 3 pokládáme za správné.

9. V rovnoramenném lichoběžníku o základnách $2a$, $2b$ a výšce v ($v > a + b$) protíná příčka vedená ze středu jednoho ramene kolmo k druhému rameni osu souměrnosti lichoběžníka v bodě, z něhož tečny, vedené ke kružnicím nad základnami jako průměry, mají stejnou délku.

(Došlo 32 řešení)

Ota Setzer

Řešila Věra Jaroňová, III. tř.

SVVŠ, Nový Bohumín:

Podle obr. 1 platí

$$MA = MD,$$

$$OS_1 = OS_2,$$

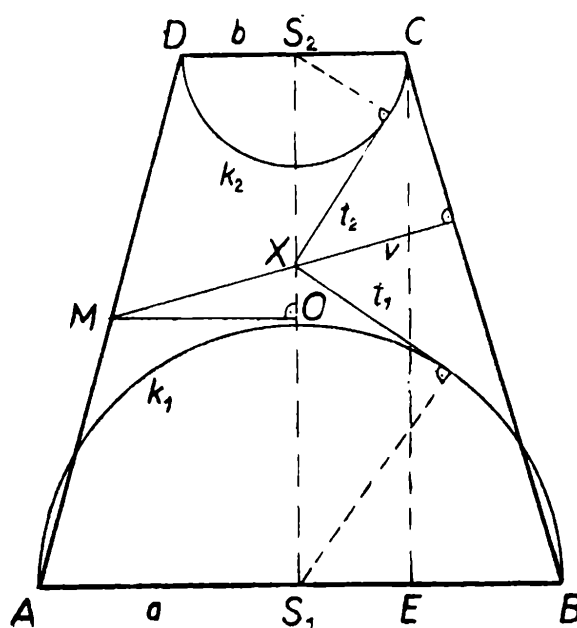
$$EB = a - b,$$

$$MX \perp BC,$$

$$OM = \frac{a + b}{2},$$

$$\frac{OX}{OM} = \frac{EB}{EC}$$

$$\text{a odtud } OX = q = \frac{a^2 - b^2}{2v}.$$



Označíme-li t_1 (t_2) délkou tečny vedené z bodu X ke kružnici k_1 (k_2), budou mocnosti bodu X k těmto kružnicím

$$\begin{aligned}
 M_1 = t_1^2 &= (XS_1 - a) \cdot (XS_1 + a) = \left(\frac{v}{2} + q - a \right) \cdot \left(\frac{v}{2} + q + a \right) = \\
 &= \left(\frac{v}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2v} - a \right) \cdot \left(\frac{v}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2v} + a \right) = \frac{(a - v)^2 - b^2}{2v} \cdot \\
 &\cdot \frac{(a + v)^2 - b^2}{2v} = \frac{1}{4v^2} (a + b + v) \cdot (a + b - v) \cdot (a - b + v) \cdot \\
 &\cdot (a - b - v) \cdot \\
 &\cdot M_2 = t_2^2 = (XS_2 - b) \cdot (XS_2 + b) = \left(\frac{v}{2} - q - b \right) \cdot \\
 &\cdot \left(\frac{v}{2} - q + b \right) = \frac{(v - b)^2 - a^2}{2v} \cdot \frac{(v + b)^2 - a^2}{2v} = \frac{1}{4v^2} (a + b + v) \cdot \\
 &\cdot (a + b - v) \cdot (a - b + v) \cdot (a - b - v).
 \end{aligned}$$

Je tedy $t_1^2 = t_2^2$, a proto též $t_1 = t_2$.

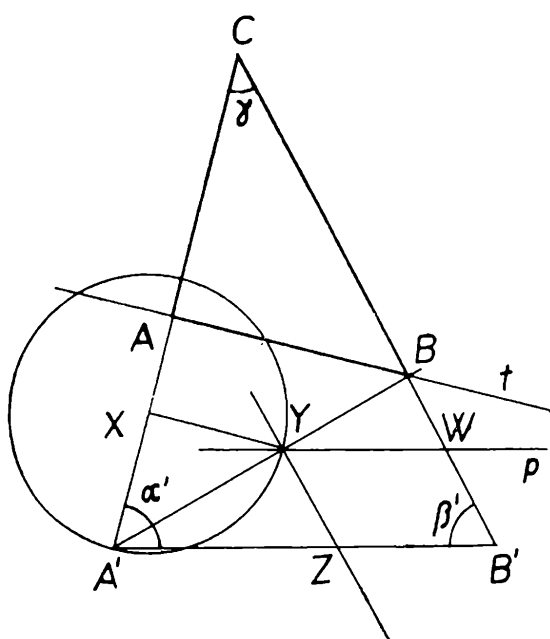
12. Sestrojte trojúhelník, znáte-li úhel γ a $a + c$, $b + c$.

(Došlo 26 řešení)

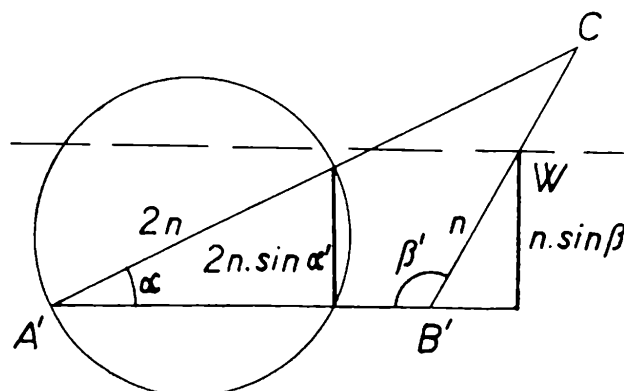
Karel Špaček

Řešil Milan Číha, IIIA SVVŠ, Rakovník:

Ve čtyřúhelníku $A'B'BA$ (obr. 1) platí $A'A = AB = B'B$ a úhly $AA'B$, $A'B'B$ jsou známé velikosti. Je možné sestrojit čtyřúhelník stejnoolehý se čtyřúhelníkem $A'B'BA$, např. podle vrcholu A' .



Obr. 1



Obr. 2

Konstrukce:

1. Podle věty (sus) sestrojíme trojúhelník $A'CB'$, kde úhel $A'CB' = \gamma$, $A'C = b + c$, $B'C = a + c$.

2. Na polopřímky $A'C$ a $B'C$ nanese se stejně dlouhé úsečky $A'X = B'W = n$.

3. Sestrojíme kružnici $k \equiv (X; n)$ a určíme průsečík Y kružnice k s přímkou p vedenou bodem W rovnoběžně s $A'B'$. Přímka q , vedená bodem Y rovnoběžně s $B'C$, protne přímku $A'B'$ v bodě Z .

4. Čtyřúhelníky $A'ZYX$ a $A'B'BA$ jsou stejnohlé podle středu A' . Přímka $A'Y$ protne stranu $B'C$ v hledaném vrcholu B ; pak $AB \parallel XY$. Trojúhelník ABC je hledaným trojúhelníkem.

Z postupu konstrukce plyne, že $A'A = AB = BB' = c$; úhly $A'CB' = ACB = \gamma$ ($AC = b + c$, $BC = a + c$).

Diskuse:

Všechny prováděné konstrukce jsou jednoznačné až na sestrojení bodu Y . Bod Y — vrchol čtyřúhelníka $A'XYZ$ stejnohlého podle středu A' se čtyřúhelníkem $A'ABB'$ — musí ležet uvnitř úhlu $CA'B'$, musí tedy přímka p protínat kružnici $k \equiv (X; n)$ v jediném bodě uvnitř tohoto úhlu, což nastane tehdy a jen tehdy (obr. 2), když

$$2 \sin \alpha' > \sin \beta'$$

kde úhly $B'A'C = \alpha'$ a $A'B'C = \beta'$.

Fyzika

5. V jak velké vzdálenosti h od povrchu Země, jejíž rovníkový poloměr je $R = 6378$ [km], by musel obíhat po kruhové dráze Sputnik, aby se trvale nehnul nad týž bodem zemského rovníku, tj. aby měl oběžný čas

$$T_2 = 23 \text{ [h]} 45 \text{ [min]} 4 \text{ [s]} .$$

Řešte pomocí 3. Keplerova zákona, víte-li, že oběžná doba Měsíce je

$$T_1 = 27,3 \text{ dne} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ [s]}$$

a jeho střední vzdálenost od středu Země je

$$r_1 = 3,84 \cdot 10^5 \text{ [km]} .$$

Dokažte, že postupnou rychlost tohoto stacionárního Sputnika lze určit vzorcem

$$v_2 = \frac{2\pi r_1}{\sqrt[3]{T_1^2 T_2}} .$$

Řešte nejprve obecně a potom vyčíslete dosazením daných hodnot.

Počítejte jen na 3 platná místa.

(Došlo 30 řešení)

Otakar Julák

Řešení autorovo:

Sputnik musí obíhat Zemi v kruhové dráze nad zemským rovníkem s oběžnou dobou T_S rovnou jedné hvězdné otočce Země, tj.

$$T_S = T_Z = 23 \text{ [h]} 45 \text{ [min]} 4 \text{ [s]} = 85\,504 \text{ [s]} .$$

Sputnik bude obíhat ve výšce h nad povrchem Země, tj. ve vzdálenosti

$$r_S = R + h$$

od středu Země. Tuto vzdálenost určíme z 3. Keplerova zákona srovnáním s daty oběhu a vzdálenosti Měsíce.

Střední vzdálenost Měsíce od Země je

$$a_L = 384\,000 \text{ [km]}$$

a doba oběhu

$$T_L = 2,36 \cdot 10^6 \text{ [s]}$$

$$T_S^3 : T_L^3 = r_S^3 : a_L^3 ,$$

odtud

$$\begin{aligned} r_S &= a_L \cdot \sqrt[3]{T_S^3 : T_L^3} = \\ &= 384\,000 \cdot \sqrt[3]{85\,504^2 : 2,36^2 \cdot 10^{12}} = 42\,045 \text{ [km]} \end{aligned}$$

Výška nad Zemí

$$h = 42\,045 - 6378 = 35\,667 \text{ [km]}$$

Příslušná kruhová rychlost

$$v_a = 2\pi r_S : T_S = 2\pi \cdot 42\,045 : 85\,504 = 3,0886 \text{ [km} \cdot \text{s}^{-1}\text{]}$$

Dosadíme-li do předchozího vzorce za r_S příslušný výraz, dostaneme

$$\begin{aligned} v_a &= 2\pi a_L \cdot \sqrt[3]{T_S^3 : T_L^3} : T_S , \\ v_a &= \frac{2\pi a_L}{\sqrt[3]{T_L^3 \cdot T_S}} , \end{aligned}$$

což bylo dokázat.

6. Matematické kyvadlo délky l , hmotnosti m kývá s maximální úhlovou výchylkou φ_0 . Určete energii tohoto kyvadla a dokažte, že postupná rychlost v , s jakou projde nejnižším bodem, je dána vztahem

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi_0)} .$$

(Došlo 30 řešení)

Otakar Julák

Řešil Martin Šolc, SVVŠ v Praze 2:

Nulovou hladinu potenciální energie položíme do nejnižšího bodu. Při maximální výchylce φ_0 je výška kyvadla h_0 nad nulovou hladinou

$$h_0 = l(1 - \cos \varphi_0) .$$

V nejnižším bodě dráhy se tato potenciální energie W_p zatím už úplně proměnila v energii kinetickou, tj.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos \varphi_0) .$$

Z toho plyne hledaná rychlost

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi_0)} ,$$

jak bylo dokázat.

O b e c n é řešení podal *Stanislav Slouka, SPŠE v Brně:*

Při libovolné úhlové výchylce φ_1 má kyvadlo potenciální energii

$$W_p = mgl (1 - \cos \varphi_1)$$

a kinetickou energii

$$W_k = \frac{1}{2} mv_1^2$$

Součet obou těchto částečných energií dá celkovou energii

$$W = mgl (1 - \cos \varphi_0)$$

v závislosti na maximální výchylce φ_0

$$W_p + W_k = W$$

$$mgl (1 - \cos \varphi_1) + \frac{1}{2} mv_1^2 = mgl (1 - \cos \varphi_0)$$

Odtud rychlost v libovolném bodě s okamžitou výchylkou φ_1 je

$$v_1 = \sqrt{2gl (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0)}$$

Pro

$$\varphi_1 = 0, \quad \cos \varphi_1 = 1, \quad v = \sqrt{2gl (1 - \cos \varphi_0)}$$

Konstruktivní geometrie

4. V Mongeově promítání zobrazte rotační válec, jehož jedna kruhová hrana se dotýká půdorysny π v bodě $P (-3,5; 5; 0)$, nárysny ν v bodě $N (-5; 0; 4)$, druhá kruhová hrana roviny $\rho (5; \infty; \infty)$.

(Došlo 18 řešení)

Ota Setzer

Řešil Jan Louda, III.f SVVŠ v Plzni:

R o z b o r :

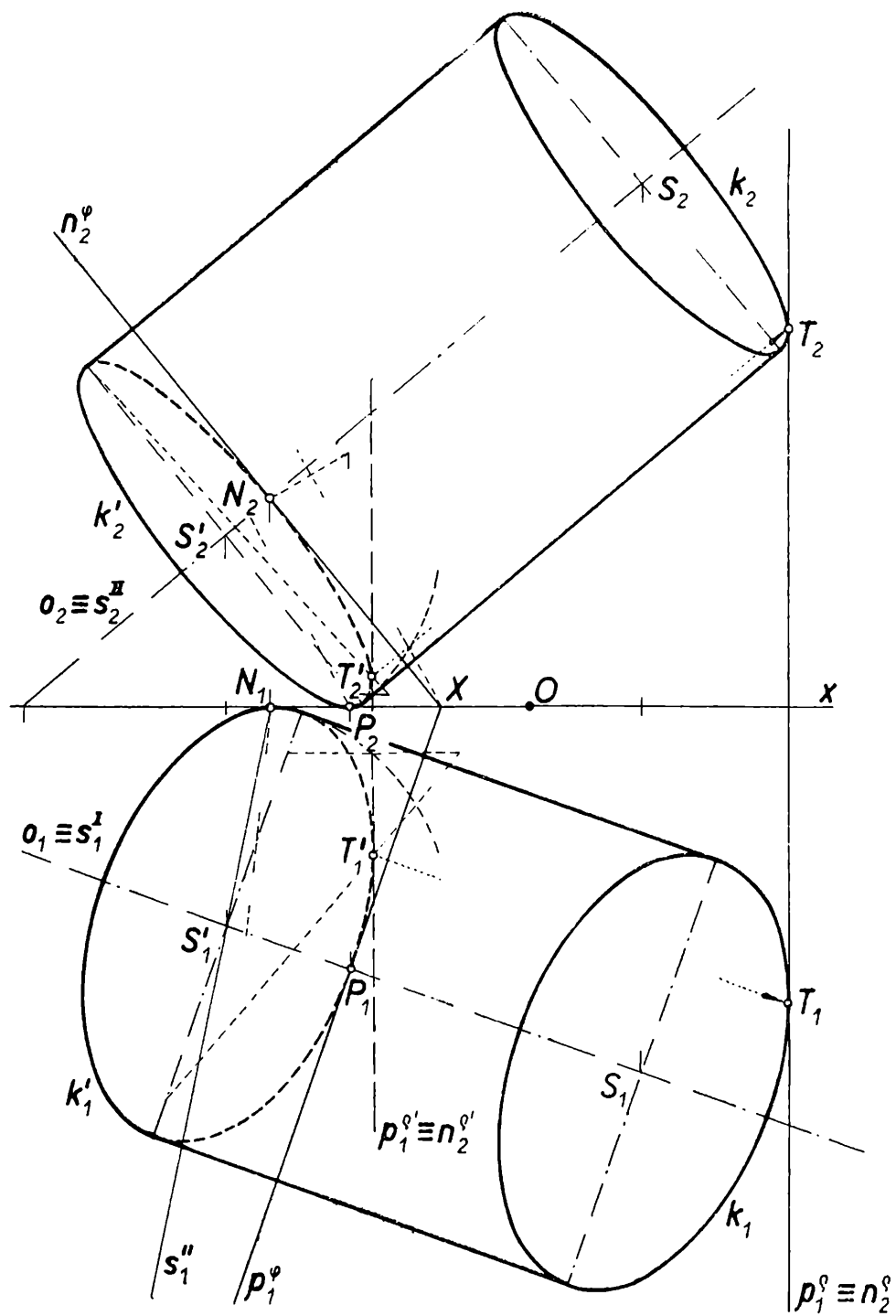
Kružnice k' dotýkající se v bodech P a N po řadě rovin π a ν leží v rovině φ , která protíná osu x v bodě X . Tečny ke kružnici k' z bodu X jsou stejně dlouhé, proto také $XP_1 = XN_2$. Kružnice k horní podstavu se dotýká roviny ρ v bodě T . Sestrojíme rovinu $\rho' \parallel \rho$ dotýkající se kružnice k' v bodě T' . Posunutím kružnice k' o vektor $\overrightarrow{T'T}$ dostaneme horní podstavnu kružnici k .

K o n s t r u k c e :

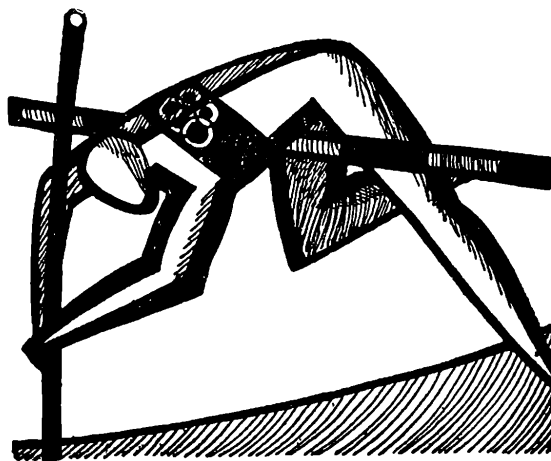
Osa souměrnosti úsečky N_2P_1 protne osu x v bodě X , $XP_1 \equiv p_1^e$, $XN_2 \equiv n_2^e$. Užitím spádové přímky s^{Π} druhé soustavy odvodíme na s^I průmět S'_1 středu kružnice k' , jejíž průměty k'_1, k'_2 snadno odvodíme. Z fokálních vlastností elips k'_1, k'_2 odvodíme jejich tečny $p_1^{e'}$ a $n_2^{e'}$ kolmé k ose x . Dotykové body T'_1, T'_2 posuneme ve směru osy o_1 , resp. o_2 do stopy p_1^e , resp. n_2^e do bodů T_1, T_2 , jimiž jdou průměty k_1, k_2 druhé podstavu k .

D i s k u s e

Protože lze k elipse k'_1 vést 2 tečny kolmé k ose x , existují 2 řešení (v obr. rýsováno jen jedno).



Obr. 1



Řešení úloh IX. Mezinárodní matematické olympiády ve dnech 3. až 12. července 1967 v Jugoslávii

DOC. JAN VYŠÍN, Praha

(Pokračování)

4. Jsou dány dva ostroúhlé trojúhelníky $A_0B_0C_0$ a $A_1B_1C_1$. Sestrojte některý z trojúhelníků ABC , podobných trojúhelníku $A_1B_1C_1$ (tak, že vrcholům A_1, B_1, C_1 odpovídají po řadě vrcholy A, B, C) a opsaných trojúhelníku $A_0B_0C_0$ tak, že strany AB, BC, CA procházejí po řadě body C_0, A_0, B_0 . Ze všech* takových trojúhelníků ABC určete pak trojúhelník maximálního obsahu a sestrojte jej.

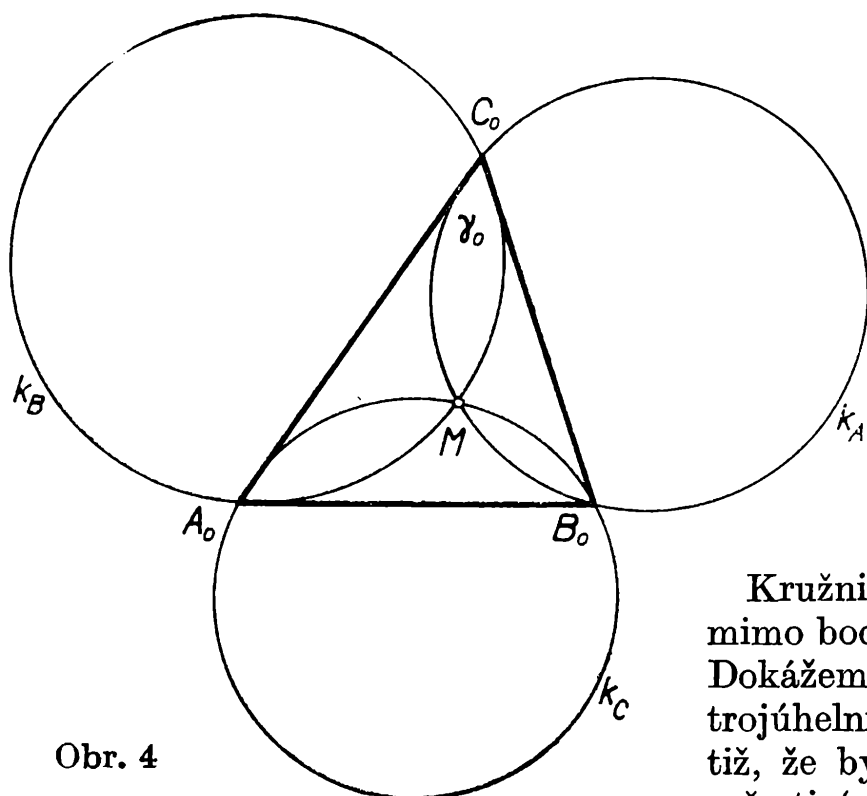
Řešení. a) Dokážeme nejprve pomocnou větu **P**:

Je-li $A_0B_0C_0$ ostroúhlý trojúhelník a jsou-li $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ tři ostré úhly, pro něž platí $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$, pak existuje uvnitř trojúhelníka $A_0B_0C_0$ jediný bod M , z něhož je vidět úsečky A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 po řadě pod úhly $\pi - \gamma_1, \pi - \alpha_1, \pi - \beta_1$.

Sestrojme kružnice k_A, k_B, k_C takto: k_A prochází body B_0, C_0 a z každého jejího bodu ležícího v polorovině $B_0C_0A_0$ je vidět úsečku B_0C_0 pod úhlem $\pi - \alpha_1$. Cyklickou záměnou dostaneme kružnice k_B, k_C (obr. 4).

Kružnice k_A, k_B se nedotýkají v bodě C_0 . Jinak by totiž platilo podle vlastností úsekových úhlů

$$\pi - \alpha_1 + \gamma_0 + \pi - \beta_1 = 2\pi,$$



Obr. 4

neboli

$$\gamma_0 = \alpha_1 + \beta_1 = \pi - \gamma_1,$$

což je nemožné, neboť

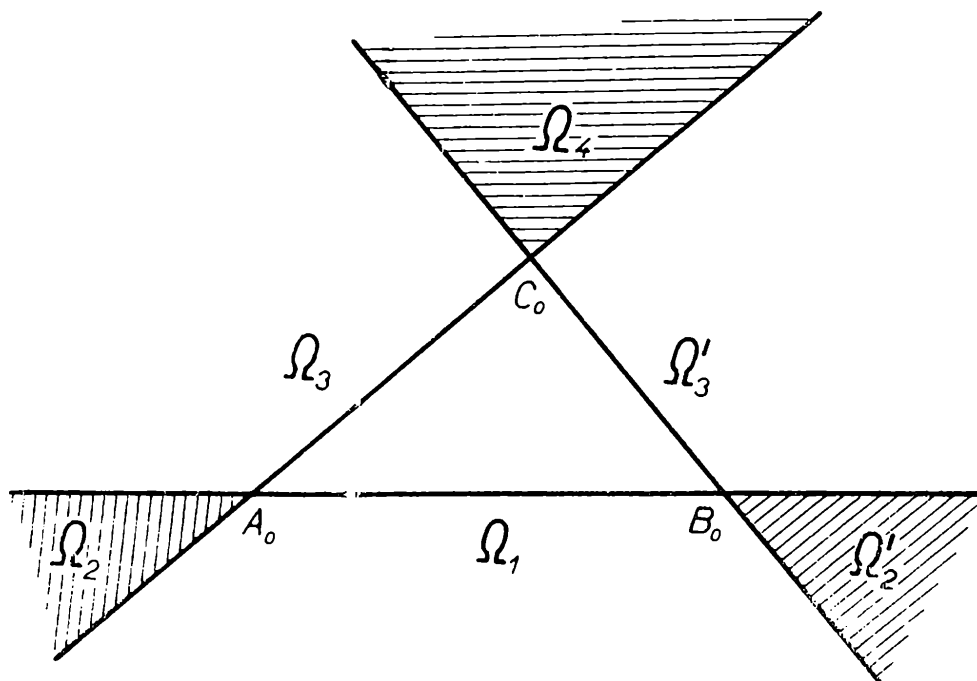
$$\gamma_0 = \sphericalangle A_0C_0B_0$$

je ostrý,

$$\pi - \gamma_1$$

tupý.

Kružnice k_A, k_B se tedy protnou mimo bod C_0 ještě v dalším bodě M . Dokážeme, že bod M leží uvnitř trojúhelníka $A_0B_0C_0$; vyvrátíme totiž, že by bod M náležel některé z šesti (uzavřených) oblastí označených na obr. 5 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega'_2, \Omega_3, \Omega'_3, \Omega_4$.



Obr. 5

Nechť bod M náleží oblasti Ω_1 (obr. 6a); pak je $\sphericalangle A_0MB_0 = \sphericalangle A_0MC_0 + \sphericalangle C_0MB_0 = \pi - \beta_1 + \pi - \alpha_1 = \pi + \gamma_1$; avšak $\sphericalangle A_0MB_0 \leq \pi$, což je spor.

Nechť bod M náleží oblasti Ω_2 ; pak je (obr. 6b)

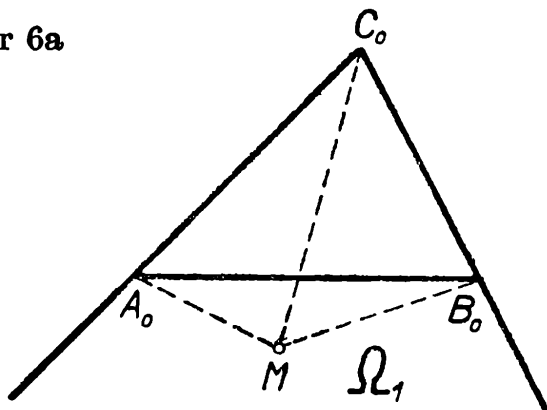
$$\sphericalangle C_0MB_0 < \sphericalangle C_0A_0B_0 = \alpha_0 < \frac{\pi}{2};$$

avšak

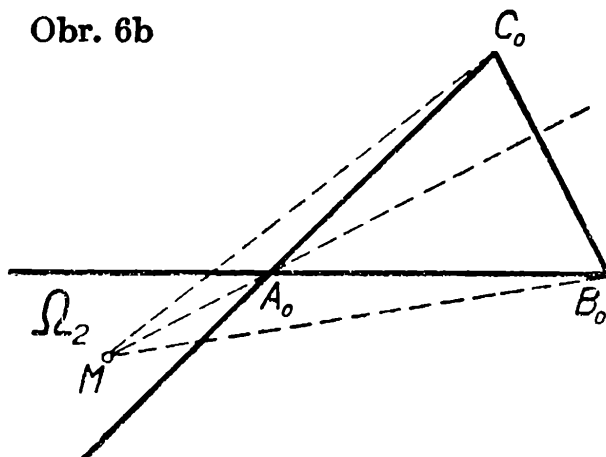
$$\sphericalangle C_0MB_0 = \pi - \alpha_1 > \frac{\pi}{2},$$

což je opět spor. Obdobně se vyloučí oblast Ω'_2 .

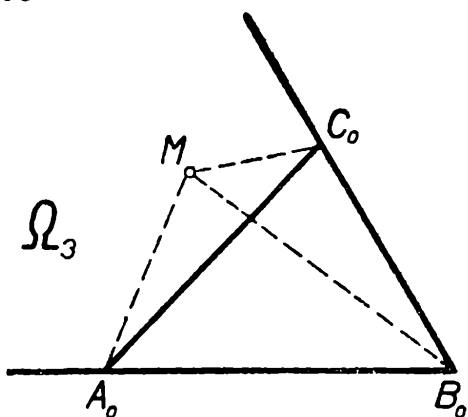
Obr 6a



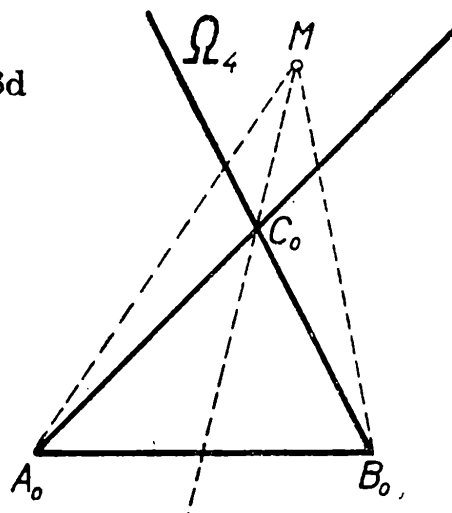
Obr. 6b



Obr. 6c



Obr. 6d



Leží-li bod M v oblasti Ω_3 (obr. 6c), je

$$\sphericalangle A_0MC_0 > \sphericalangle B_0MC_0,$$

tj. $\beta_1 > \pi - \alpha_1$ což je nemožné, neboť

$$\beta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \pi - \alpha_1 > \frac{\pi}{2}.$$

Obdobně se vyloučí oblast Ω'_3 .

Leží-li konečně bod M v oblasti Ω_4 (obr. 6d), je

$$\sphericalangle A_0MC_0 + \sphericalangle C_0MB_0 = \sphericalangle A_0MB_0 < \sphericalangle A_0C_0B_0,$$

tj. $\beta_1 + \alpha_1 < \gamma_0$, což je opět spor, neboť

$$\alpha_1 + \beta_1 = \pi - \gamma_1 > \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_0 < \frac{\pi}{2}.$$

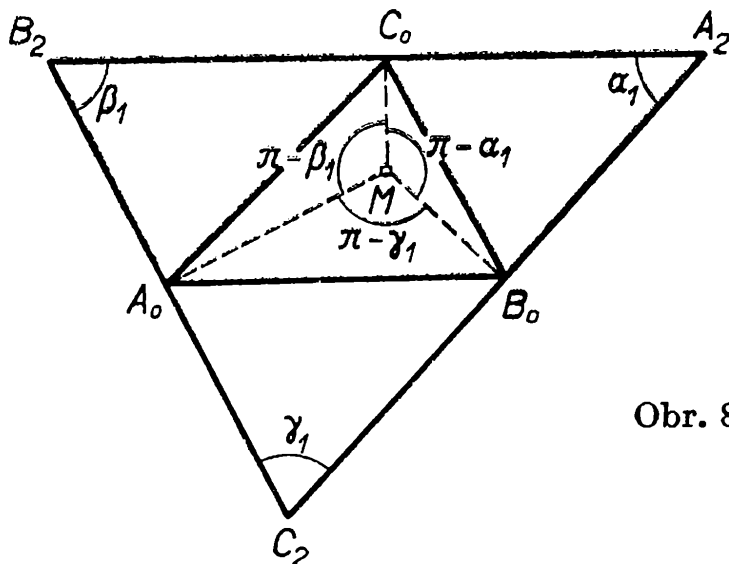
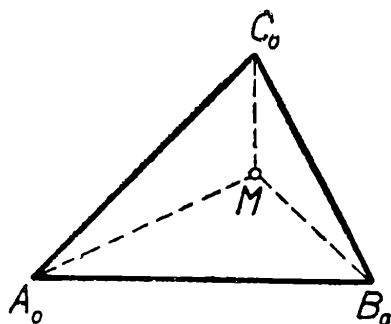
Protože bod M leží uvnitř $\triangle A_0B_0C_0$ (obr. 7), platí

$$\sphericalangle A_0MC_0 = \pi - \beta_1, \quad \sphericalangle B_0MC_0 = \pi - \alpha_1,$$

$$\sphericalangle A_0MB_0 = 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \beta_1) = \alpha_1 + \beta_1 = \pi - \gamma_1,$$

tj. bod M je společným bodem kružnic k_A, k_B, k_C .

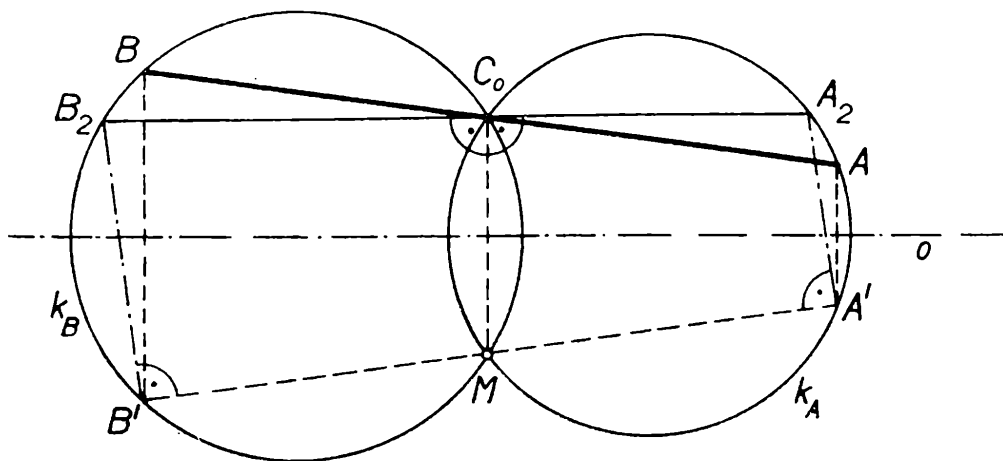
Obr. 7



Obr. 8

b) Sestrojme v bodech A_0, B_0, C_0 po řadě kolmice k přímkám MA_0, MB_0, MC_0 . Tyto přímky se protnou po dvou v bodech A_2, B_2, C_2 (obr. 8). Vznikne tak trojúhelník $A_2B_2C_2$, jehož vnitřní úhly jsou $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Body A_2, B_2, C_2 leží po řadě na kružnicích k_A, k_B, k_C . Snadno dokážeme, že trojúhelník $A_2B_2C_2$ má maximální obsah, ze všech možných trojúhelníků ABC . Trojúhelník $A_2B_2C_2$ má maximální obsah, má-li maximální jednu stranu, např. A_2B_2 . Na obr. 9 jsou kružnice $k_A,$

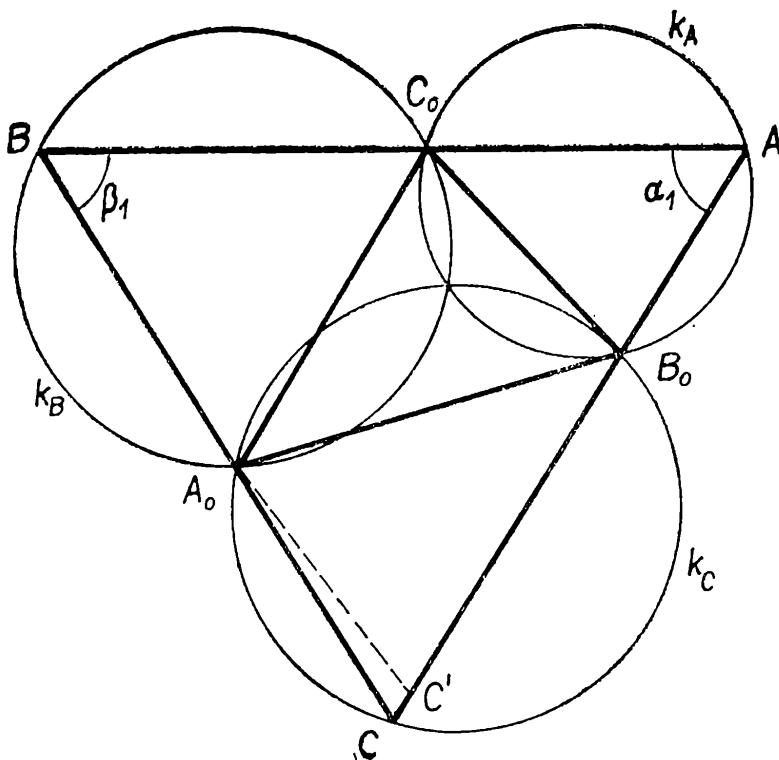
Obr. 9



k_B , jejich průsečíky C_0, M , úsečka A_2B_2 a strana AB libovolného trojúhelníka ABC , procházející bodem C_0 . Na též obrázku je sestrojena úsečka $A'B'$ souměrně sdružená s AB podle středné kružnic k_A, k_B . Z vřetivových čtyřúhelníků MC_0A_2A', MC_0B_2B' plyne, že je $A_2A' \perp A'B', B_2B' \perp A'B'$; proto je $A_2B_2 \geq A'B' = AB$.

Tím je důkaz proveden.

Maximální trojúhelník $A_2B_2C_2$ zajišťuje existenci aspoň jednoho trojúhelníka žádaných vlastností. Intuitivně lze ovšem sestavit další. Zvolíme libovolný bod A na kružnici k_A vně trojúhelníka $A_0B_0C_0$; sestojíme přímky AB_0 , AC_0 . Protnou-li tyto přímky kružnice k_C , k_B po řadě v bodech C , B ležících vně $\triangle A_0B_0C_0$, pak trojúhelník ABC je trojúhelník žádaných vlastností.



Obr. 10

Body B , A_0 , C leží totiž v přímce, pak plyne z následujícího důkazu (obr. 10): přímka BA_0 protne polopřímku AB_0 v bodě C' (tento průsečík vznikne, neboť $\alpha_1 + \beta_1 < \pi$). Z trojúhelníka ABC' dostaneme, že $\sphericalangle BC'A = \pi - \alpha_1 - \beta_1 = \gamma_1$. Protože bod C' leží podle své konstrukce v polorovině opačné k $A_0B_0C_0$, je $\sphericalangle A_0C'B_0 = \sphericalangle BC'A = \gamma_1$, tj. bod C' náleží kružnici k_C i přímce AB_0 a splyne tedy s bodem C .

(Dokončení)

Vážení čtenáři,

chcete-li, aby vám Rozhledy matematicko-fyzikální byly po prázdninách doručovány pravidelně již od prvního čísla, proveďte si jejich objednávku u svého poštovního úřadu (Poštovní novinové služby) již nyní.

List třetí - o formulaci soutěžních úloh MO

Milí přátelé,

možná, že jste četli naše dva dopisy, které vyšly v minulých číslech Rozhledů. Dnes se na Vás obracíme s listem třetím, který — podobně jako list druhý — vznikl jako odpověď na připomínky jednoho z Vás. Tento účastník MO si stěžuje také na nesrozumitelnosti textů soutěžních úloh. Píše: „Přesto, že jsem prostudoval všechny minulé ročníky (MO) i různou studijní literaturu, nedokázal jsem vůbec pochopit složitou formulaci přípravné úlohy 2 kategorie A a formulaci soutěžní úlohy 1. Zároveň bych prosil o takové doplnění — objasnění výše uvedených úloh letošního ročníku v takové míře, aby se mi požadavky úloh staly srozumitelné. Moc mi vadí příliš stručná (a často nepřesná) formulace otázek...“

Projděme texty obou úloh. Přípravná úloha 2 zní:

Množina M se skládá z n prvků $1, 2, \dots, n$. Utvořte kombinace k -té třídy z prvků množiny M . Sečtěte čísla, která vytvářejí kombinaci k -té třídy. Utvořte součet všech takto získaných součtů a označte jej S_k . Stanovte vzorec

a) pro S_k ;

b) pro součet $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$.

Text doslovně vede čtenáře „za ruku“. Řešitel, který má trochu zkušeností se čtením textů úloh, si zkontroluje čísla S_k pro určité n . Např. pro $n = 4$ máme

$$M = 1, 2, 3, 4.$$

Pro $k = 2$ utvoříme podle textu tyto kombinace

$$1; 2 - 1; 3 - 1; 4 - 2; 3 - 2; 4 - 3; 4. \quad (1)$$

Součty čísel, která vytvářejí kombinace 2. třídy, jsou po řadě

$$3, 4, 5, 5, 6, 7$$

Součet všech takto získaných součtů je tedy

$$S_2 = 3 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7 = 30.$$

Obdobně získáme

$$S_1 = 10, S_3 = 30, S_4 = 10,$$

tedy

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 80.$$

„Kouzelný klíč“ k pochopení textu je — jako v mnohých jiných případech — konkrétní numerický výpočet. Takový numerický příklad

zpravidla pomáhá i při nalezení postupu řešení: všimněme si, že v souhrnu (1) všech kombinací 2. třídy prvků 1, 2, 3, 4 se každé z čísel 1, 2, 3, 4 vyskytuje právě třikrát; proto součet všech čísel ze všech těchto kombinací je $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 30$. Tuto induktivně získanou metodu není nesnadné zobecnit.

Soutěžní úloha 1 zní: Je dána úsečka AB . Množina M je definována takto: a) obsahuje body A, B ; b) obsahuje-li body X, Y , obsahuje i bod Z úsečky XY , pro který platí $YZ = 3 \cdot XZ$. Dokažte, že každá úsečka ležící v úsečce AB obsahuje aspoň jeden bod množiny M .

Jistě, že při čtení tohoto textu vezmeme papír a budeme načrtávat body množiny M . Definice je zřejmě rekurentní, tj. její body se tvoří postupně podle určitého předpisu (algoritmu) nejprve z bodů A, B a pak z dalších bodů, které pomocí nich byly sestrojeny. Abychom se ve struktuře množiny M lépe vyznali, pokusíme se vyjádřit ji aritmeticky — na číselné ose. Nechť body A, B mají souřadnice $A = [0]$, $B = [1]$; pak podle části b) textu úlohy obsahuje množina M také body $\left[\frac{1}{4}\right], \left[\frac{3}{4}\right]$. Použijeme-li nyní bodů $[0], [1], \left[\frac{1}{4}\right], \left[\frac{3}{4}\right]$ a výtvarného zákona b), zjistíme, že množina M obsahuje ještě body o souřadnicích $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{3}{8}, \frac{10}{16}, \frac{13}{16}$ a $\frac{15}{16}$. Ukazuje se, že bodů z množiny M bude přibývat po jednotlivých krocích a že snad bude výhodné zachytit část množiny M vzniklou až do n -tého kroku pomocí zlomků se společným jmenovatelem 4^n . Dostaneme tedy po prvním kroku body se souřadnicemi

$$0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}; \quad (2)$$

po druhém kroku

$$0, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{10}{16}, \frac{12}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}, \frac{16}{16} \quad (3)$$

atd. Struktura množiny M bude tedy nalezena, zjistíme-li, která čísla se vyskytují v soustavách zlomků (2), (3) a dalších. Určíme-li tuto strukturu, bude odpověď na otázku úlohy poměrně snadná.

Je pravda, že tato úloha je pro středoškoláka neobvyklá, ale zato matematicky velmi cenná. „Cizost“ úlohy je způsobena asi tím, že střední škola se málo zabývá rekurentními definicemi a matematickou indukcí vůbec. V knižnici Škola mladých matematiků vyšel před časem svazek dr. Výborného: Matematická indukce (sv. 6), jehož prostudování Vám v tomto směru prospěje.

Můžeme Vás ujistit, že věnujeme textaci soutěžních úloh velkou pozornost — texty recenzuje vždy několik pracovníků. Sem tam se sice vyskytne tisková chyba nebo menší nejasnost, ale těžko lze říci,

že by texty byly „často nepřesné“. Jiná věc je to ovšem s jejich srozumitelností: to je pojem velmi subjektivní. Chceme vést účastníky olympiády k chápání stručně formulovaných úloh; uvažte, že porozumění textu matematické úlohy je prvním stupínkem dovednost číst a chápat matematické texty.

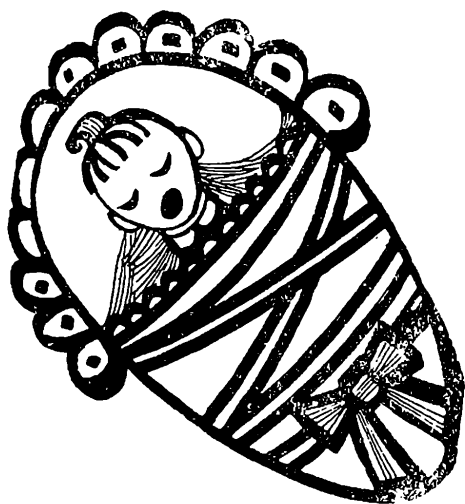
A ještě něco: Vaším hlavním poradcem při jakýchkoli nesnázích v matematické olympiádě by mohl být Váš učitel matematiky nebo některý jiný z učitelů matematiky na Vaší škole. Mimo to se pořádají v řadě měst přednášky pro olympioniky, kde Vám jistě ochotně poradí (ovšem nežádejte, aby Vám úlohu rozřešili). Není opravdu v silách ústředního výboru, resp. jeho předsednictva, aby poradil a pomohl všem, kteří by to potřebovali.

Nedejte se však odradit od práce ani nesnázemi ani třeba dočasnými neúspěchy. Pište nám své připomínky: věcný dopis napsaný bez zaujatosti je vždy impulsem k přemýšlení a nápravě, byť i ne okamžité. Konkrétně: připomínky, které byly podnětem k napsání tohoto dopisu, jsou i podnětem k tomu, aby se na příští schůzi ústředního výboru MO jednalo znovu o výběru a zejména o textaci soutěžních úloh.

Přejeme Vám hodně dobrých nápadů, úspěchů v práci a srdečně Vás pozdravujeme.

Za ÚVMO:

Doc. Jan Vyšín



NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM

V Kocourkově

Bylo to v Kocourkově, kde se konšelé rozhodli zavést osvětlení do hlavní ulice, která přirozeně ústila do rynku. První lucerna byla přirozeně na rynku před radnicí, následující svítila před domem páně purkmistrovým a ostatní před domy pánů konšelů. Dopadlo to však jako v Kocourkově. Všechny byly v přímce, to zase všechna čest, ale ty vzdálenosti mezi nimi. První dvě byly od sebe vzdáleny 50 m, třetí od druhé byla vzdálena 4 m a další vzdálenosti byly po řadě 26 m, 28 m, 42 m. Kocourkovští se tím proslavili široko daleko a tak není divu, že pomýšleli na nápravu. Sami na to nestačili, a proto si pozvali odborníky z nedalekého Chytrčíkova. Ti jim rozestavili lucerny ve stej-

ných vzdálenostech. Přitom ponechali světlo před radnicí a mezi každé dvě lucerny dříve postavené dali jednu lucernu novou. Vzdálenosti luceren byly vyjádřeny přirozenými čísly (v metrech). Dovedli byste říci, v jakých vzdálenostech byly lucerny rozestaveny?

S. H.

Povedení bratranci

O prázdninách se u strýčka sešli čtyři bratranci. Byli ještě malí, do všeho vlezli, všechno bylo pro ně zajímavá hračka. A tak se dostali i k šachům. Jeden sebral věže, druhý střelce, třetí koně a čtvrtý všechny pěšce. S kořistí si pak hráli. Strýc se trochu polekal, když si chtěl přehrát zajímavou partii a našel jen krále a dámy. Teta, která kluky zahlédla, jak si s figurkami hráli, mohla poskytnout tyto kusé informace:

- a) Hráli si spolu vždy jen dva.
 - b) Karel s Petrem si hráli a měli věže a pěšce.
 - c) Když si spolu hráli Petr a Míla, neměli koně.
 - d) Při hře Karla a Míly neviděla pěšce.
 - e) Míla s Vašíkem během hry hledali pod skříní zatoulaného koně.
- To vše stačí nyní k tomu, abyste zjistili, co si kdo vzal.

S. H.



RECENZE

Populárne o počte pravdepodobnosti

BEDŘICH ŠOFR:

Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry (SVTL) Bratislava ve spolupráci se Socialistickou akadémiou, 1967. Stran 120, cena Kčs 8,—.

Vydání této knížky je příjemným překvapením, které nám SVTL připravilo. Ve skrovné dosud sbírce „Popularizační literatury o matematice v slovenčine“ v Polytechnické knižnici SVTL je to zřejmě první svazek, který není překladem z cizí řeči. A je to svazek zdařilý. Na několika stránkách je podáno stručnou, ale přesnou a jasnou formou mnoho věcí. Čtenář tu najde úvod do kombinatoriky, klasickou i statistickou definici pravděpodobnosti, pravděpodobnost úhrnnou i složenou, binomické rozdělení pravděpodobností, aplikace na různé hry a na úlohy z pojišťovací matematiky, najde i zmínku o geometrických pravděpodobnostech.

Po metodické stránce je knížka dokonale promyšlena: Projevuje se tu autorova velká učitelská zkušenost. Jednotlivé věty jsou uvedeny různými instruktivními příklady, vzatými často přímo ze života. Nechybějí ani úlohy ke cvičení. Důkazy jsou uváděny stručně, zřejmě se předpokládá, že inteligentní zájemce si podrobnosti doplní sám. To je po stránce výchovné velmi dobré stanovisko.

Knížka je zajímavá ještě v jednom směru. V dnešní době, kdy předválečné naše středoškolské učebnice tvoří více méně archivní materiál v různých knihovnách, je asi Šofrova knížka u nás asi jediným dostupným pramenem, kde i středoškolský student najde např. vzorce pro počet kombinací s opakovaním prvků apod., a to i s důkazy.

Znalcům bude možná v knížce chybět Kolmogorovova moderní definice pravděpodobnosti. Ale z předmluvy vyplývá, že autor o ní ví. Nevádí ji tedy úmyslně. Je třeba uvážít, že příslušný výklad by vyžadoval seznámit čtenáře nejdříve s abstraktní teorií aditivních množinových funkcí. Tím by rozsah knížky neúměrně vzrostl a zvýšila by se ovšem i nákupní cena. Popularizační význam knížky by tím byl pak oslaben, v popularizaci by takové téma vyžadovalo prostě samostatný svazek.

Je škoda, že o slovenských knížkách tohoto druhu je česká veřejnost málo informována. Šofrova knížka přispěje jistě k propagaci slovenské literatury u nás. Můžeme ji každému vřele doporučit.

Karel Havlíček

Naším nejmladším čtenářům!

V příštím ročníku Rozhledů chceme věnovat větší pozornost našim nejmladším čtenářům. Pro ně budou určeny zvláštní články, které je budou — mimo jiné — připravovat na MO. Red.

RŮZNÉ • RŮZNÉ • RŮZNÉ

K přijímacím zkouškám z matematiky na matematicko-fyzikální fakultu Karlovy university v Praze

Mladí přátelé,

předpokládáme, že máte vážný zájem o studium matematiky a fyziky. Chceme Vám tímto krátkým článkem pomoci při vašem rozhodování a říci Vám alespoň několik slov o Vašich prvních krocích, které Vás čekají, rozhodnete-li se studovat na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university v Praze.

Nechceme Vás ke studiu na naší fakultě lákat krásnými slovy o matematice a fyzice, o významu a nezbytnosti těchto vědních oborů v moderní společnosti — ani Vás nechceme od studia odradit tím, že hned zpočátku řekneme to, co považujeme za svou povinnost říci, tj. že studium na naší fakultě není lehké, naopak, je náročné; stát se dobrým matematikem nebo fyzikem je úkol obtížný, vyžadující svědomitou, soustavnou a vytrvalou práci. Můžeme Vám však z vlastní zkušenosti říci, že výsledek této práce stojí za to a že odměnou Vám bude, vedle pocitu dobře vykonané práce, také poznání netušených možností, které se lidstvu otevírají správným využitím poznatků moderní vědy a schopnost přetvářet tyto možnosti ve skutečnost. Mnoho záleží jenom na Vás, nebudete vázáni proti jiným letům ani umístěnkovým řízením, které bylo zrušeno.

Chceme Vám stručně říci základní věci, které byste, podle našeho názoru, měli znát o prvním kroku, který Vás na naší fakultě čeká, tj. o přijímací zkoušce.

Přijímací zkouška z matematiky a z fyziky se skládá ze dvou částí — písemné a ústní.

V písemné části zkoušky z matematiky budete řešit pět různých příkladů. Správné, logicky bezvadné a úplné řešení všech pěti úloh je velmi náročný úkol. Nepodaří-li se Vám takové řešení najít, neznamená to, že nemůžete být přijati, protože i z nedořešených úloh lze mnohdy poznat způsob usuzování, vlohy pro samostatnou práci, počtářskou zručnost a další schopnosti i dovednosti, které jsou při studiu matematiky a fyziky na naší fakultě potřebné.

Při ústní části zkoušky z matematiky budete rovněž řešit několik úloh. Při ústní zkoušce z fyziky se však zpravidla neřeší úlohy početního charakteru. Při ústní zkoušce budete v bezprostředním styku se zkoušejícím, se kterým se — v případě potřeby — můžete o některých otázkách poradit a který Vám může vhodnými otázkami při řešení úloh pomoci. Při ústní zkoušce můžete prokázat své vědomosti, přesahující rámec učiva střední školy, informovat zkoušejícího o svých zájmech a poradit se s ním o volbě studijního směru. Pro Vaši informaci uvádíme nejdůležitější z nich:

Učitelské studium:

a) matematika v kombinaci s deskriptivní geometrií, s fyzikou nebo s filosofií,

b) tělesná výchova, matematika pro kombinace na fakultě tělesné výchovy a sportu UK.

Odborné studium:

a) obor matematika se zaměřením: algebra, aplikovaná matematika, geometrie, matematická analýza, matematická statistika, numerická matematika, teoretická kybernetika, topologie,

b) obor fyzika se zaměřením: astronomie, biofyzika, elektronika a vakuová fyzika, fyzika pevných látek, geofyzika, meteorologie a klimatologie, teoretická fyzika.

V prvních dvou letech studia lze bez velkých potíží volbu studijního směru změnit; v pozdějších letech je to také možné, ale již obtížnější pro nutnost úspěšného vykonání potřebných diferenčních zkoušek.

Víme, že přijímací zkouška není příjemnou záležitostí a vyžaduje určitou duševní a tělesnou námahu. Budeme rádi, pochopíte-li, že nemění nároky klade i na nás, kteří Vás budeme zkoušet.

Věřte nám, že se snažíme rozhodovat nezaujatě a že naším největším přáním při přijímacích zkouškách je, přijmout ty nejlepší z Vás. Každý bude posuzován nezávisle nejméně čtyřmi učiteli naší fakulty a ve sporných případech bude o přijetí ještě rozhodovat hlavní přijímací komise. Kromě toho, protože věříme Vaším učitelům, kteří měli možnost Vás během studia na střední škole velmi dobře poznat, přihlížíme i k Vaším výsledkům při tomto studiu. Sami však jistě víte, že by nebylo spravedlivé rozhodovat o přijetí pouze na základě výsledků středoškolského studia. Ani to nejlepší vysvědčení nezaručuje úspěšné vysokoškolské studium.

Pokusíme se o to, aby nejlepším účastníkům celostátního kola matematické a fyzikální olympiády byla přijímací zkouška z příslušného oboru prominuta.

Podáte-li na Vaší škole (či na Vašem pracovišti) přihlášku ke studiu na naší fakultě, budou Vás zajisté zajímat ještě další podrobnosti o studiu a přijímacích zkouškách.

Tyto informace získáte ze zprávy, která bude naší fakultou odeslána

na všechny školy, od kterých dojdou na fakultu přihlášky. Kromě toho v příštím čísle Rozhledů najdete podrobnější články, věnované mimo jiné průběhu a obsahu přijímacích zkoušek z matematiky a z fyziky na naší fakultě.

☞ Přejeme Vám úspěch při přijímací zkoušce a při dalším studiu na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university v Praze.

Milan Vlach

K přijímacím zkouškám z fyziky na MFF UK v Praze v r. 1966/67

PRÓF. DR. EMIL KAŠPAR, KÚ Praha

Součástí přijímací zkoušky na MFF na obory: specializace matematika, specializace fyzika a učitelské studium matematika-fyzika byla též písemná a ústní zkouška z fyziky. V tomto článku jsou uvedeny některé informace a zkušenosti o průběhu zkoušek v minulém školním roce.

Přijímací zkouška z fyziky se na MFF UK skládala z písemné a ústní části. Přitom písemná zkouška předcházela ústní, ale obě zkoušky byly klasifikovány nezávisle na sobě.

K písemné zkoušce z fyziky byly předem připraveny série po 5 úlohách. Děkan fakulty těsně před provedením zkoušky volil (tažením zalepených obálek z osudí) úlohy, které byly zadány. Po zjištění vylosovaných úloh dostal každý uchazeč text úloh písemně a od okamžiku rozdání textů měl na řešení 60 minut čistého času.

Při ústní zkoušce z fyziky dostal každý uchazeč dvě otázky, které si volil tažením z osudí.

Písemná i ústní zkouška z fyziky (a podobně i z matematiky) byla klasifikována navzájem nezávisle známkou od 1 do 5 a součet známek (spolu s klasifikací z druhého předmětu) měl vliv na pořadí při přijímání na fakultu.

Obsah zkoušky. Všem středním školám bylo předem sděleno, že obsahem zkoušky z fyziky je učivo z předepsaných učebnic fyziky pro střední všeobecně vzdělávací školy.

Písemná zkouška obsahovala 5 úloh, které byly voleny tak, aby pokud možno pokrývaly různé oddíly fyziky (mechaniku, termiku a molekulovou fyziku, popř. vlnění a akustiku, elektřinu a magnetismus, optiku [paprskovou i vlnovou] a atomovou fyziku). Obsah a obtížnost úloh odpovídaly běžným úlohám ve středoškolských učebnicích. Jestliže si tedy absolvent v průběhu studia na střední škole sám vyřešil všechny úlohy z učebnic pro SVVŠ, nebyla pro něho písemná zkouška z fyziky žádným problémem. Při zkoušce se také projevilo,

jak se který žák věnoval v průběhu středoškolského studia řešení fyzikálních úloh. Zkouška měla ukázat, jak uchazeč rozumí fyzikálním zákonům a jak jich dovede užívat při řešení fyzikálních problémů. Všechny potřebné údaje (konstanty apod.) byly v textu úlohy uvedeny, kromě toho byly úlohy tak sestaveny, že k jejich řešení potřeboval uchazeč jen velmi jednoduché matematické úkony, převážně jen algebraické a numerické. Proto nebylo dovoleno užívat žádných knižních nebo jiných písemných pomůcek.

Jestliže uchazeč vyřešil úlohu správně v obecném tvaru a dosadil do výsledného vzorce správně číselné hodnoty veličin se správnými jednotkami, byla úloha hodnocena jako správně vyřešená, i když nebyla numericky dopočítána do konce. Podobně byla hodnocena, jestliže výpočet obsahoval nezávažnou numerickou chybu. (Jako závažnější chyba byl posuzován numerický výsledek, který byl po fyzikální stránce hrubě nesprávný. Příklad: hustota kovu $\rho = 1500 \text{ kg/dm}^3$.)

Vcelku dopadly písemné zkoušky příznivě, velká řada uchazečů vyřešila správně všechny úlohy. Na druhé straně se vyskytovaly některé časté chyby. Tak např. veličiny nebyly převedeny na jednotky téže soustavy, vyskytovala se i neznalost jednotek, i důležitých fyzikálních zákonů. Nebylo výjimkou, že zkoušený nedovedl řešit jednoduché rovnice.

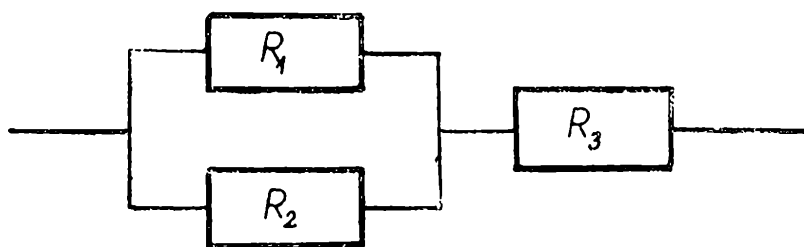
V tomto stručném článku není možné uvádět všechny úlohy, které byly při přijímacích zkouškách zadány. Domníváme se však, že pro informaci stačí dvě ukázky, tj. dvě pětice úloh, které byly označeny I a II.

I.

1. Čerpadlo vyčerpá 8 t vody za 1 minutu z dolu 300 m hlubokého. Určete výkon čerpadla. ($g \doteq 10 \text{ m/s}^2$.)

2. Oč stoupla teplota skleněné tyče délky 0,6 m, jestliže se prodloužila o délku $l = 0,15 \text{ mm}$? ($\alpha \doteq 0,000 01 \text{ deg}^{-1}$.)

3. Jaký je výsledný odpor spotřebičů, zapojených podle obrázku 1, je-li $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 15 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$?



4. Zvětšení hvězdářského dalekohledu je $30\times$. Jaká je vzdálenost objektivu a okuláru, jestliže objektiv má ohniskovou vzdálenost $f_1 = 1,5 \text{ m}$?

5. Spektrální čára 2. řádu monochromatického světla je na matnici, postavené 2 m od optické mřížky (kolmo ke spojnici středu matnice a optické mřížky), vzdálena od čáry nultého řádu o 12 cm. Mřížková konstanta je $b = 2 \cdot 10^{-2}$ mm. Určete vlnovou délku světla. (Uvažte, že pro malé úhly platí $\sin \alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha$.)

II.

1. Jakou rychlostí dopadlo kladivo hmotnosti 0,5 kg na hřebík, jestliže pronikl do desky do hloubky 45 mm, počítáme-li, že průměrný odpor při pronikání hřebíku byl 50 N?

2. Vodík má při teplotě 27 °C objem 3 l a tlak 600 torr. Jaký bude mít objem, zmenší-li se jeho tlak na 450 torr a teplota se zvýší na 57 °C? ($T_0 \doteq 273$ °K.)

3. Kondenzátor o kapacitě $C = 1 \mu\text{F}$ byl nabit na 100 V. Za 1 hodinu pokleslo napětí na kondenzátoru na 10 V. Jakým průměrným proudem se kondenzátor vybíjel?

4. Jak velká je rychlost šíření světla ve skle, jestliže index lomu skla je $n = 1,5$?

5. Určete energii fotonu záření X, které má vlnovou délku $= 1 \text{ \AA}$. ($h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$.)

Ústní zkouška se konala před komisí, v níž vedle předsedy byl examinátor pro matematiku a další pro fyziku. Z fyziky si uchazeč sám vytáhl z osudí dvojici otázek. Jedna otázka byla z některého tématu z mechanických oddílů (mechanika, vlnění a akustika, molekulová fyzika a termika) a druhá z některého ze zbývajících oddílů (elektřina a magnetismus, optika paprsková a vlnová, atomová fyzika). V každé otázce byl většinou naznačen i rozsah učiva, které je obsahem dané zkoušky. Při zkoušce šlo především o zjištění, jak uchazeč rozumí fyzikálním jevům, jejím souvislostem, zákonitostem, jak zná obsah fyzikálních pojmů, zvláště veličin. Nešlo tedy o slovní reprodukci naučeného učiva podle učebnice, o znalost konstant na řadu platných míst a jiné podobně formální vědomosti. Ukážeme si na příkladě dvou dvojic otázek, jak byly při ústní zkoušce formulovány. Potom na jedné z nich provedeme rozbor, v jakých souvislostech by asi uchazeč měl příslušné učivo znát.

I.

a) Mechanická energie. Zákon zachování mechanické energie.

b) Vznik a vlastnosti katodového a rentgenového záření.

II.

a) Vypařování, var. Kondenzace (Křivka nasycených par. Kritická teplota, kritický tlak. Význam pro zkapalňování plynů).

b) Elektrický odpor vodiče (Elektronový výklad odporu kovu. Značka odporu, definice veličiny a jednotky odporu. Vztah pro odpor drátu. Reostaty. Závislost odporu na teplotě. Měření odporu metodou přímou, substituční a můstkovou).

Rozbor otázek ve dvojici I.

Ad a) Při otázce o mechanické energii může dojít na tyto poznatky: Mechanická energie je energie kinetická, potenciální gravitační a potenciální elastická. (Veličinu „energie“ definovat nelze. Věta „Energie je schopnost tělesa konat práci“ není definicí veličiny „energie“.) Souvislost energie a práce: při ději „konání práce“ přechází mechanická energie z jednoho tělesa na druhé. Množství energie, která přitom přechází z jednoho tělesa na druhé, se měří veličinou práce. - Jednotkou energie je v SI joule (J), tj. jednotka práce. - Jednotka kpm. - $1 \text{ kpm} \doteq 9,81 \text{ J}$ (odvození tohoto vztahu). - Odvození vztahu $W_k = \frac{1}{2} mv^2$ pro kinetickou energii: Hmotný bod o hmotnosti m , který byl na počátku v klidu, se pohybuje účinkem stálé síly F rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $a = F/m$. Síla koná práci $A = F \cdot s$, kde s je dráha rovnoměrně zrychleného pohybu $s = \frac{1}{2} at^2$. Je tedy práce (a tedy též kinetická energie tělesa) rovna

$$A = F \cdot s = ma \cdot \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} ma^2t^2 = \frac{1}{2} mv^2 = W_k,$$

kde $v = at$ je rychlost pohybu rovnoměrně zrychleného v čase t .

Potenciální energie tíhová - odvození vztahu $W_p = mgh$ pro tuto formu mechanické energie z úvahy pro práci, která se koná při zvedání tělesa tíhy $G = mg$ do výše h v homogenním tíhovém poli s tíhovým zrychlením g .

Zákon zachování mechanické energie se odvozuje pro případ volného pádu (viz Fyzika pro 1. tř. SVVŠ, str. 94). - Jiné příklady na zákon zachování mechanické energie: pohyb kyvadla, kmitání závaží zavěšeného na pružině. - Příklady na přeměnu energie v různých oddílech fyziky (kalorimetrická rovnice, Jouleův-Lencův zákon apod.).

Ad b) Vznik katodového záření v trubici (závislost na stupni vyčerpání trubice a na napětí). Podstata katodového záření - letící elektrony. Vliv elektrického, popř. magnetického pole na katodové záření. Účinky katodového záření (světelné, tepelné, mechanické), popř. popsát některé pokusy.

Vznik rentgenového záření. Rozdílnost povahy katodového a rentgenového záření. Rentgenka. Vlastnosti rentgenového záření. Závislost pohlcování RTG záření na atomovém čísle prvku, užití v praxi. Tvrdé a měkké záření. Účinky RTG záření: fluorescenční, fotografické, ionizační. Užití v praxi.

Poznamka. Z uvedeného příkladu plyne, že při ústní zkoušce nebylo zdaleka možné vyzkoušet všechno to, co s danými otázkami

souvisí. Na druhé straně je však zřejmé, že při určité otázce může dojít i na zdánlivě velmi odlehlá fyzikální témata. Tak s otázkou Ia) souvisí témata:

dráha a rychlost pohybu rovnoměrně zrychleného,
2. pohybový zákon Newtonův,
práce (děj a veličina),
tíhové pole, práce v tíhovém poli,
volný pád,
pohyb kyvadla,
kmitavý pohyb tělesa na pružině,
teplo jako forma energie,
kalorimetrická rovnice,
energie elektrického proudu,
atd. atd.

Při otázce Ib) může dojít na témata:

vývěvy, vakuum, měření tlaku plynu,
elektrické napětí, elektrický proud, proud v plynu,
elektron, katodové záření jako proud letících elektronů,
elektronky,
ionizace vzduchu, ionizace vůbec,
působení elektrického a magnetického pole na pohybující se elektrický náboj, popř. na vodič s proudem,
působení magnetického pole na letící elektron,
fluorescence,
elektromagnetické záření, rentgenové záření, záření vůbec,
přeměna energie při přeměně záření,
vznik fotonu v elektronovém obalu atomu,
absorpce záření RTG,
užití záření RTG v praxi,
atd. atd.

Z předešlého plyne, jak je potřebné, aby uchazeč znal vzájemné souvislosti fyzikálních jevů, aby měl přehled o fyzikálních zákonech ze všech oddílů fyziky. Při zkoušce se nevyžaduje znalost detailů, zejména ne znalost konstant na řadu platných číslic. Proto se při přípravě ke zkoušce má každý uchazeč sám kontrolovat, jak zná to, co s danou otázkou souvisí. Ne nadarmo se říká, že se na kterékoli otázce může vyzkoušet celá fyzika.

Závěrem je třeba uvést, že přijímací zkoušky na MFF v r. 1966/7 dopadly ve velké většině případů příznivě. Nové přijímací zkoušky z fyziky budou pravděpodobně organizovány podobně jako v minulém roce. Malý rozdíl bude asi v písemné části zkoušky, kde z 5 úloh jedna bude problémové povahy (nepočetní, kvalitativní úloha), ale opět na úrovni učiva SVVŠ. Takovými úlohami jsou např. tyto (první je obsažena v učebnici Fyzika 1 pro SVVŠ, str. 72):

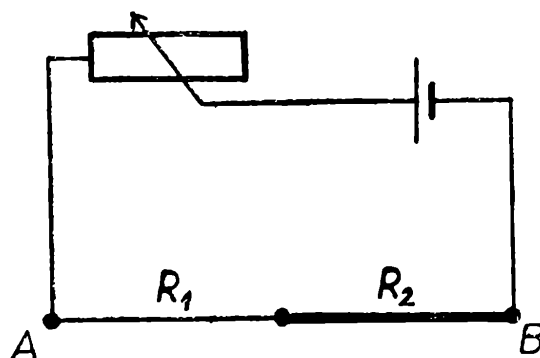
1. Plavec sedící na loďce se přitahuje

a) v prvním případě ku břehu za lano, které je upevněno pevně druhým koncem ku břehu, silou 1 kp;

b) ve druhém případě je druhý konec lana připevněn k jiné loďce, volně plovoucí, ale síla, kterou plavec působí na lano, je opět 1 kp.

Otázka: Vysvětlete, proč je v obou případech zrychlení loďky plavce stejné.

Řešení: Podle 2. pohybového zákona Newtonova musí být zrychlení v obou případech stejné, neboť jak síla, tak hmotnost loďky je v obou případech stejná.



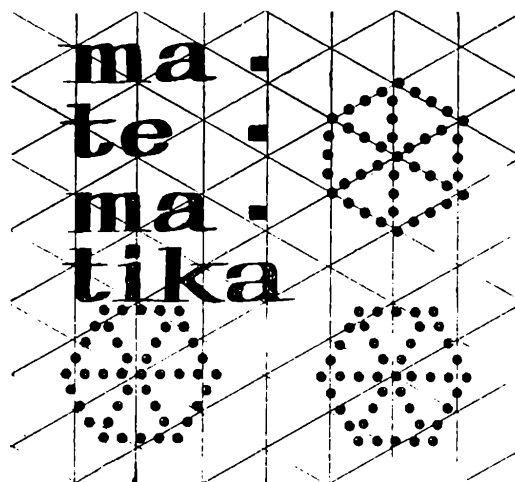
2. Ke dvěma svorkám A , B (obr. 2) jsou připojeny v sérii stejně dlouhé železné dráty, jeden tenčí o odporu $R_1 = 5 \Omega$ a druhý tlustší o odporu $R_2 = 1 \Omega$. Ke svorkám A , B přivádíme napětí, které plynule zvětšujeme.

Otázka: Vysvětlete, proč začne dříve žhnout drát o větším odporu.

Řešení: Oběma dráty prochází stejně veliký proud I , neboť jsou zapojeny v sérii. Proud prochází po stejnou dobu t . Uvolněné teplo v 1. drátě je $Q_1 = R_1 I^2 t$ a ve 2. drátě $Q_2 = R_2 I^2 t$ (v joulech). Protože je $R_1 > R_2$, je i $Q_1 > Q_2$. V tenkém drátě vzniká tedy teplo větší, a proto se rozžhaví dříve (při menším proudu) než drát silnější.

Našim předplatitelům!

Jestliže nedostanete některé číslo Rozhledů, urgujte je u Poštovní novínové služby, tj. u svého poštovního doručovatele. Redakce nemá přebytečná čísla, nemůže je proto rozesílat. Redakce



Řešení kubické rovnice pomocí stupnice

ING. JAN PETRÁSEK, Praha

Úvod

V 6. čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních, roč. 43, v článku Praktické řešení kubické rovnice je popsán jeden ze způsobů řešení rovnice 3. stupně, která se vyskytuje často v praxi. Několik metod řešení této rovnice, uvedených v minulých ročnících tohoto časopisu¹⁾, svědčí o velkém úsilí autorů najít metodu, která by byla pokud možno univerzální a odstranila by při řešení velkou početní pracnost. Metoda uvedená v tomto článku podává rychlý postup řešení grafickou stupnicí. Čtenář, který si prostuduje tuto metodu i metody předešlé, může sám posoudit, která je výhodnější. Vzhledem k tomu, že je žádoucí, aby rozsah článku příliš nevzrostl, neopakujeme základní obecné vlastnosti kubické rovnice a odkazujeme na dřívější uvedené články²⁾.

¹⁾ Jiří Marek, Výhodné řešení rovnice třetího stupně, roč. 1957 (35), č. 7, Rozhledy m.-f.

Jiří Marek, Přímé řešení úplné rovnice třetího stupně, roč. 1954 (33), č. 3, Matematicko-přírodovědecké rozhledy.

²⁾ Čtenáře, který by si chtěl podrobně prostudovat teorii rovnic třetího stupně, odkazujeme na knížku, vydanou v poslední době Šisler - Andrys, O řešení algebraických rovnic.

O d v o z e n í m e t o d y g r a f i c k o u s t u p n í c í .
V obecné rovnici

$$x^3 + ax + bx + c = 0 \quad (1)$$

provedme substituci

$$x = - \left(kz + \frac{a}{3} \right), \quad (2)$$

dostaneme

$$\left[- \left(kz + \frac{a}{3} \right) \right]^3 + a \left[- \left(kz + \frac{a}{3} \right) \right]^2 + b \left[- \left(kz + \frac{a}{3} \right) \right] + c = 0.$$

Další úpravou pak

$$\begin{aligned} & - \left[k^3 z^3 + 3k^2 z^2 \frac{a}{3} + 3kz \frac{a^2}{9} + \frac{a^3}{27} \right] + \\ & + a \left[k^2 z^2 + \frac{2}{3} kza + \frac{a^2}{9} \right] - kzb - \frac{ab}{3} + c = 0. \end{aligned}$$

Vynásobme rovnici výrazem

$$- \frac{1}{k^3} (k \neq 0),$$

potom je

$$\begin{aligned} z^3 + \frac{1}{k} az^2 + \frac{1}{k^2} \frac{a^2 z}{3} + \frac{a^3}{27 k^3} - \frac{az^2}{k} - \frac{2a^2 z}{3k^2} - \\ - \frac{1}{k^3} \frac{a}{9} + \frac{bz}{k^2} + \frac{ab}{3k^3} - \frac{c}{k^3} = 0 \end{aligned}$$

a dále

$$z^3 - \frac{1}{k^2} \left[\frac{1}{3} a^2 - b \right] z - \frac{1}{k^3} \left[\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right] = 0.$$

Rovnici ještě upravme na tvar

$$z^3 - \frac{1}{k^2} \left[3 \left(\frac{a}{3} \right)^2 - b \right] z - \frac{1}{k^3} \left\{ \left(\frac{a}{3} \right) \left[2 \left(\frac{a}{3} \right)^2 - b \right] + c \right\} = 0. \quad (3)$$

Konstantu k zvolme tak, aby bylo

$$k^3 = \left\{ \left(\frac{a}{3} \right) \left[2 \left(\frac{a}{3} \right)^2 - b \right] + c \right\}, \quad (4)$$

z čehož můžeme určit k , k^2 .

Dále označme

$$m = \frac{1}{k^2} \left[3 \left(\frac{a}{3} \right)^2 - b \right]; \quad (5)$$

potom rovnice (1) přejde na tvar

$$z^3 - mz - 1 = 0 \quad (6)$$

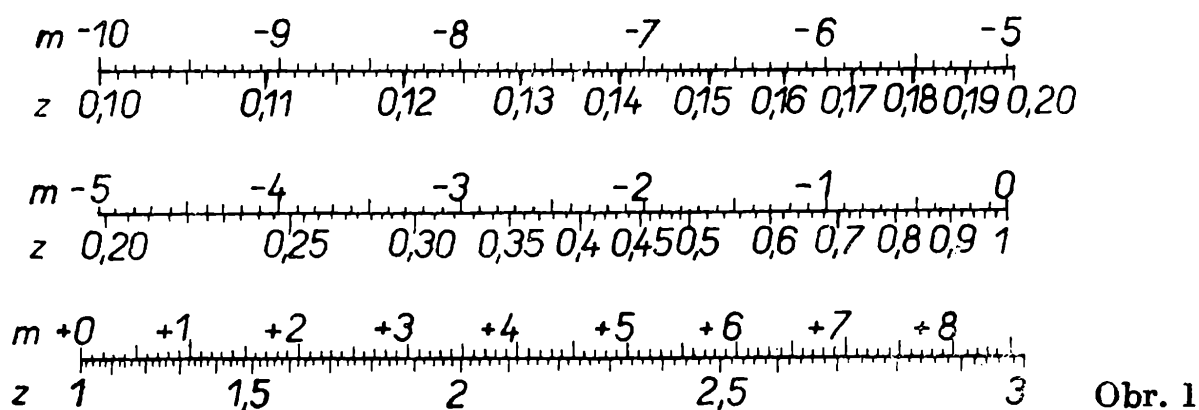
Sestrojení grafických stupnic

Závislost veličin v rovnici (6) lze vyjádřit tabulkou, kterou vyneseme pro větší přehled grafickou dvojstupnicí.

K tomu převedme rovnici (6) na tvar

$$m = z^2 - \frac{1}{z}. \quad (7)$$

Čtenář může tuto dvojstupnici sestrojit, a to tak, že si vyneseme nejprve hodnoty m v určitém měřítku, např. 1 dílek = 3 mm.



K ní sestrojí příslušnou stupnici z . Na obr. 1 je stupnice m sestrojena v intervalu $-10 < m < 8,6$.

Nyní stručně shrneme postup výpočtu.

1. Vypočteme hodnotu k^3 z rovnice (4). Známe-li k^3 , můžeme určit k , k^2 .
2. Vypočteme podle rovnice (5) hodnotu m .
3. Na grafické dvojstupnici přečteme k danému m příslušné z .
4. Známe-li z , vypočteme první kořen x_1 z rovnice (2).
5. Další dva kořeny x_2 , x_3 dostaneme řešením kvadratické rovnice

$$x^2 + (a + x_1)x - \frac{c}{x_1} = 0. \quad (8)$$

6. Kontrolu výpočtu všech tří kořenů umožní známé závislosti koeficientů a kořenů kubické rovnice⁴⁾

³⁾ Viz např. v úvodu citovaný článek, roč. 43, str. 243.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -a, \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= b, \\x_1x_2x_3 &= -c,\end{aligned}$$

čímž je výpočet i kontrola skončena.

Příklad.

$$x^3 + 3x^2 - 7x + 2 = 0.$$

Nejprve vypočtème

$$\left(\frac{a}{3}\right) = 1, \quad \left(\frac{a}{3}\right)^2 = 1, \quad k^3 = \{1 \cdot [2(1)^2 + 7] + 2\} = 11,$$

z toho

$$k = \sqrt[3]{11} \doteq 2,22, \quad k^2 \doteq 4,93.$$

Dále stanovme

$$m = \frac{1}{4,93} [3 \cdot 1 + 7] \doteq 2,03.$$

Na grafické stupnici vyhledáme $m \doteq 2,03$ a k němu přečteme příslušné $z \doteq 1,63$.

První kořen rovnice je

$$x_1 \doteq -(2,22 \cdot 1,63 + 1) \doteq -4,62.$$

Další kořen dostaneme z kvadratické rovnice

$$x^2 - 1,62x + 0,433 = 0, \quad x_2 \doteq 1,28, \quad x_3 \doteq 0,34.$$

Kontrola výsledku

$$-a \doteq -4,62 + 1,28 + 0,34 \doteq -3,00,$$

$$-c \doteq (-4,62) \cdot 1,28 \cdot 0,34 \doteq 2,01$$

Kontrola výsledku ukazuje, že výpočet kubické rovnice s použitím logaritmického pravítka a grafické dvojstupnice dává rychlý a dosti přesný výsledek, který je postačující v technických úlohách (např. v nauce o železovém a předpjatém betonu).

⁴⁾ Týž článek, str. 245.

Pravidelný dvanáctiúhelník

VÁCLAV SKALICKÝ, PF Hradec Králové

1. Pravidelný dvanáctiúhelník vepsaný do kružnice poloměru r má zajímavou vlastnost. Jeho obsah je racionální násobek r^2 , dokonce násobek celý

$$P_{12} = 3r^2 \quad (1)$$

Lze dokázat, i když to není právě nejsnadnější, že obdobnou vlastnost má ze všech pravidelných n -úhelníků do kružnice vepsaných už jen pravidelný čtyřúhelník ($P_4 = 2r^2$).

Vzorec (1) lze snadno dokázat planimetricky, nebo pomocí goniometrických funkcí (obr. 1)

$$P_{12} = 12 \frac{a_{12} \cdot \varrho}{2} = 6a_{12}\varrho,$$

$$a_{12}^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 = r^2(2 - \sqrt{3}),$$

$$\varrho^2 = r^2 - \frac{a_{12}^2}{4} = r^2 - \frac{r^2(2 - \sqrt{3})}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} r^2,$$

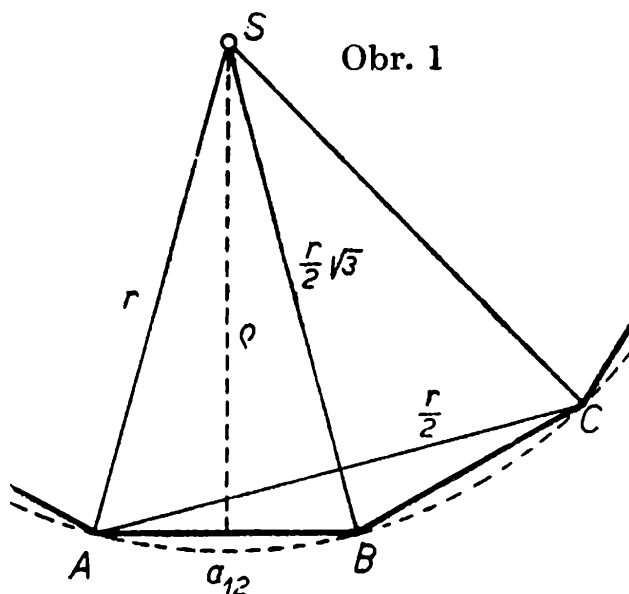
$$P_{12} = 6r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 3r^2\sqrt{4 - 3} = 3r^2$$

S použitím goniometrických funkcí počítáme rychleji

$$\begin{aligned} P_{12} &= 12 r^2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \\ &= 3r^2 \end{aligned}$$

Ještě rychleji dojdeme k cíli s pomocí vzorce pro obsah trojúhelníka z délek dvou stran a sinu úhlu jimi sevřeného

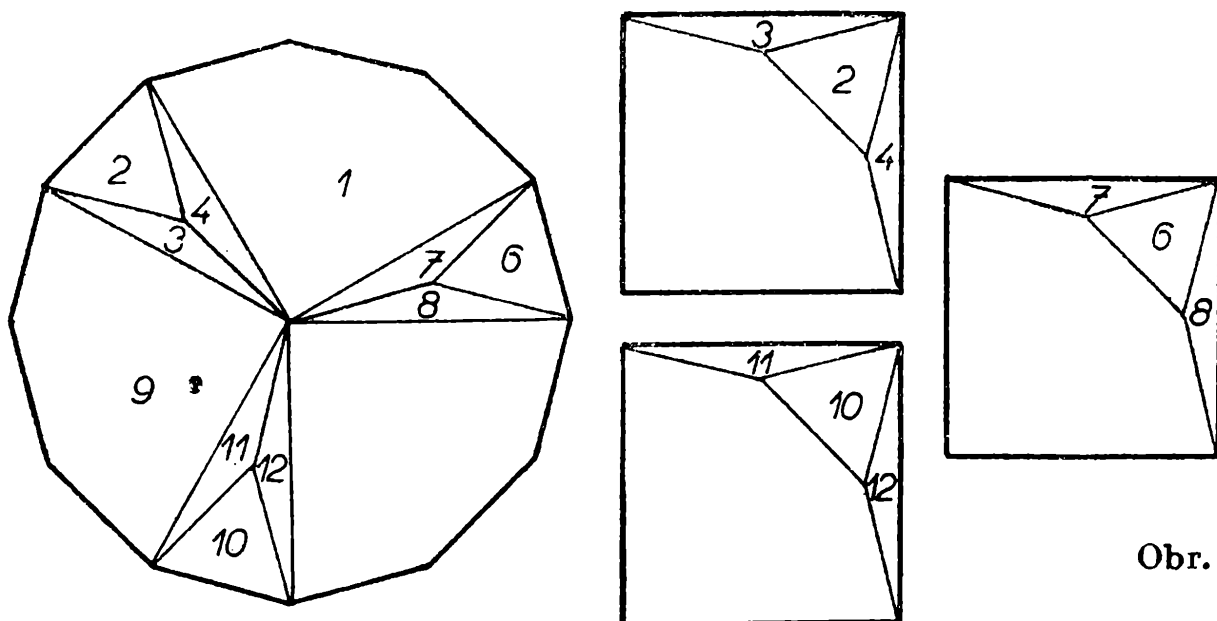
$$\begin{aligned} P_{12} &= 12 \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin 30^\circ = \\ &= 3r^2 \end{aligned}$$



2. Odvozený vzorec (1) pro obsah pravidelného dvanáctiúhelníku lze zajímavě ilustrovat rozkladem tohoto obrazce v části vzájemně se nepřekrývající, z nichž lze složit jiné jednoduché obrazce.

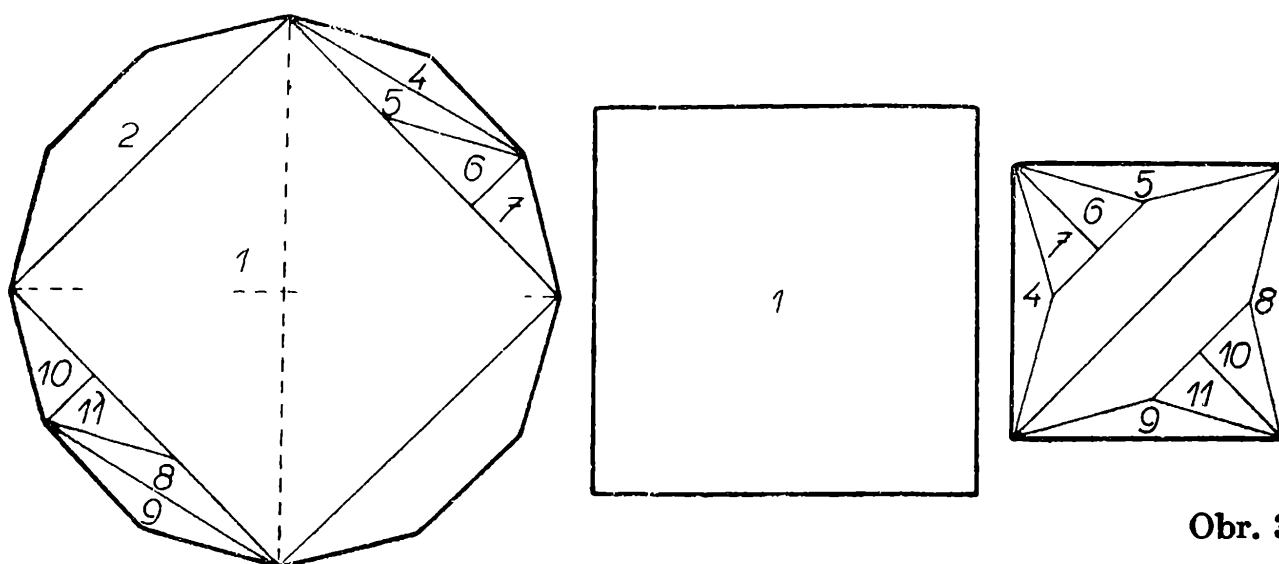
Tak např. obr. 2 ukazuje rozklad v části, z nichž lze složit tři čtverce o straně r , tedy rozklad

$$P_{12} = r^2 + r^2 + r^2.$$



Obr. 2

Části 3, 4, 7, 8, 11, 12 jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky s úhly 150° , 15° , 15° , části 2, 6, 10 jsou shodné rovnostranné trojúhelníky. Potřebné důkazy jsou snadné a není třeba je tu podrobně uvádět.



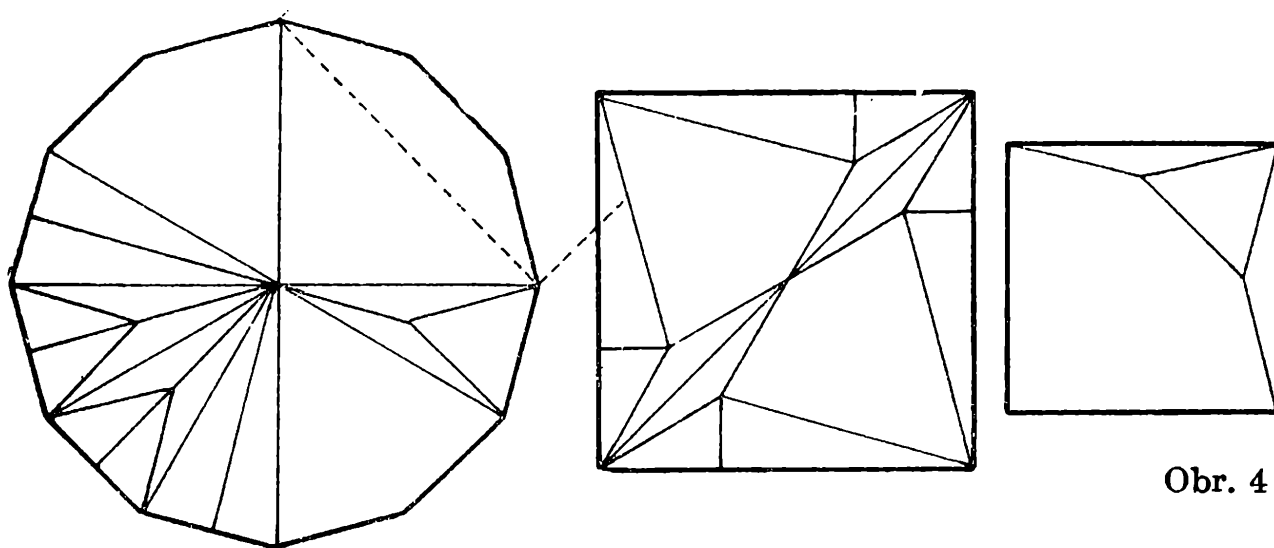
Obr. 3

V obr. 3 je znázorněn rozklad pravidelného dvanáctiúhelníku ve dva neshodné čtverce podle vzorce

$$P_{12} = 2r^2 + r^2 = (r\sqrt{2})^2 + r^2 \quad (2)$$

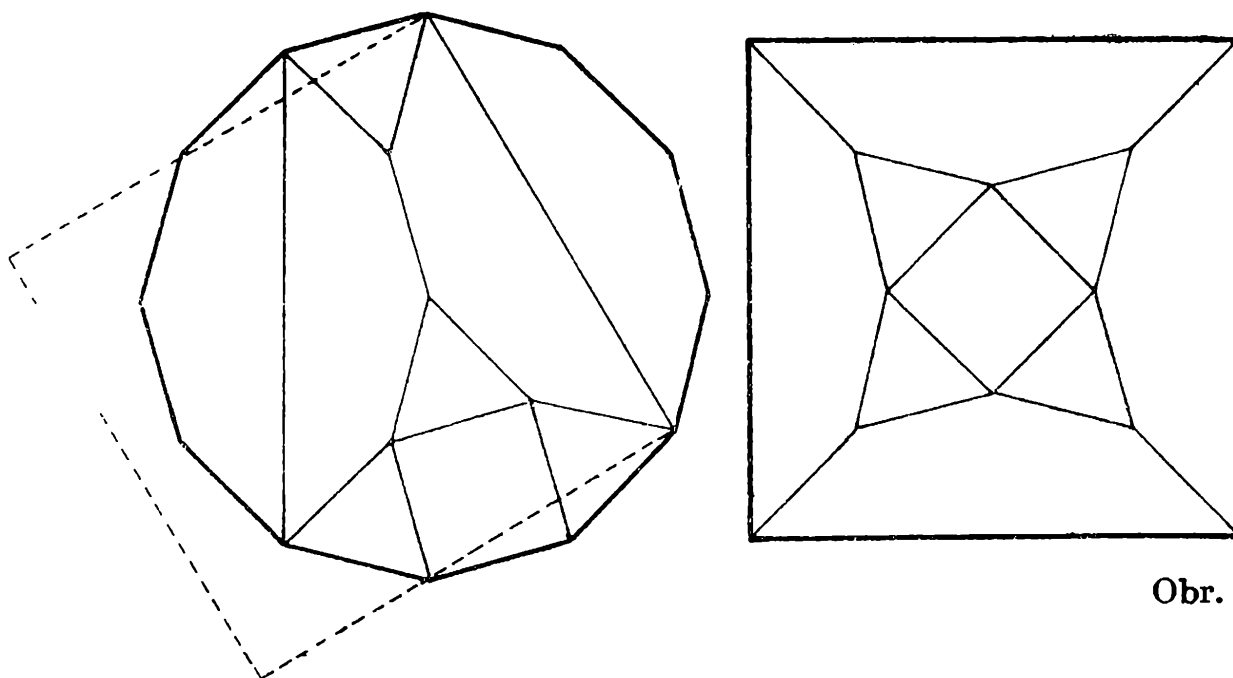
Tvar dílčích obrazců je zčásti přímo patrný z nákresu, zčásti jej lze snadno určit. Části 4, 5, 8, 9 jsou rovnoramenné trojúhelníky (150° ,

15°, 15°), části 6, 7, 10, 11 jsou pravoúhlé trojúhelníky (30°, 60°, 90°). O příslušných důkazech lze říci totéž, co u rozkladu předešlého. Jiná forma tohoto rozkladu je v obr. 4. Je však složitější než předešlá.



Obr. 4

Velmi pěkný, jednoduchý a symetrický je rozklad pravidelného dvanáctiúhelníku v části, z nichž lze složit jediný čtverec (tedy provést kvadraturu pravidelného dvanáctiúhelníku). Strana tohoto čtverce je



Obr. 5

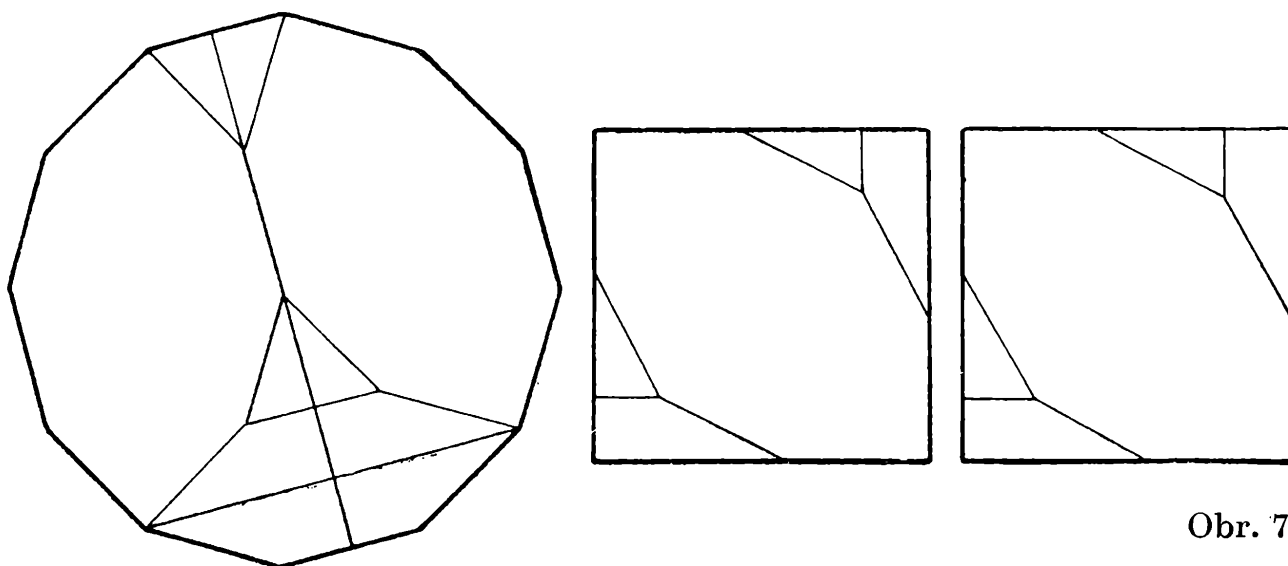
$r\sqrt{3}$, rozklad je proveden podle vzorce

$$P_{12} = 3r^2 = (r\sqrt{3})^2 \quad (3)$$

Uvedenou sérii rozkladů doplníme ještě rozkladem pravidelného dvanáctiúhelníku v části, z nichž lze složit dva shodné čtverce, tedy rozkladem podle vzorce

$$P_{12} = 3r^2 = \frac{3}{2} r^2 + \frac{3}{2} r^2 = \left(\frac{r\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{6}}{2}\right)^2 \quad (4)$$

Ve všech uvedených rozkladech byla dodržována zásada, aby dílčí obrazce byly vesměs konvexní mnohoúhelníky. Kdybychom připustili i mnohoúhelníky nekonvexní, bylo by možno počet dílčích obrazců zmenšit. Např. v obr. 2 lze spojit části $2 + 4$, v obr. 5 části $5 + 7 + 8 + 9$ atp.



Obr. 7

3. Provedené rozklady jsou jen zvláštní případy vět mnohem obecnějších. V elementární geometrii se odvozují různé konstrukce obecně zvané proměny obrazců (rozumí se v obrazce téhož obsahu). Cílem je tu zpravidla odvození vzorců pro výpočet obsahů, popřípadě důkazy důležitých planimetrických pouček. Tak je tomu např. u vět pro trojúhelník pravoúhlý. Většina důkazů věty Pythagorovy (několik desítek důkazů) je založena na proměně čtverce nad přeponou v dvojici čtverců nad oběma odvěsnami. Ostatní důkazy jsou pak více či méně takové proměny algebraicky i jinak maskované. Obdobně je tomu u obou vět Euklidových.

Uvedli jsme výše několik rozkladů pravidelného dvanáctiúhelníku v konvexní obrazce, z nichž lze složit obrazce jiné, obsahu rovného obsahu dvanáctiúhelníku. Obrazcem rozumíme přitom takový rovinný útvar, jenž je sjednocením konečného počtu trojúhelníků vzájemně se nepřekrývajících. (Nikoli např. kruh.)

Lze pak dokázat větu: *Mají-li dva obrazce rovné obsahy, lze vždy najít takový rozklad jednoho z nich v trojúhelníky vzájemně se nepřekrývající, že z nich lze složit obrazec druhý.* Důkaz této významné věty je víc zdlouhavý než těžký a my se jím zde nebudeme zabývat.

Zdvojení krychle

ING. KLEMENT NEDBAL, Praha

Zdvojení krychle, trisekce úhlu a kvadratura kruhu jsou proslavené problémy starověku. Trvalo však přes 2000 let, než byly tyto tři úlohy rozřešeny. Dnes už víme, že zdvojení krychle se nedá přesně kružítkem a pravítkem sestrojít, neboť při početním řešení vede na rovnici 3. stupně¹⁾.

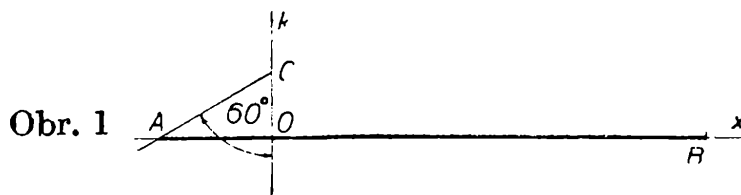
Zopakujme si historii naší úlohy. Pověst vypráví, že obyvatelé řeckého ostrova Delos byli sužováni morem. Obrátili se proto na delfskou věštírnu s prosbou o radu, jak tuto metlu ostrova zažehnat. Dostalo se jim odpovědi: „Váš oltář, který má tvar krychle, zdvojnásobte, aniž byste změnili tvar.“ To bylo asi r. 400 let př. n. l.

Nevíme, jak spokojeni odcházeli Delští z Delf, ale víme, že matematikům přibýlo starostí. Pokusme se úlohu řešit početně.

Označíme-li a délku hrany dané krychle a x délku dvojnásobné krychle (tj. krychle dvojnásobného objemu), pak platí

$$x^3 = 2a^3, \text{ čili } x = a \sqrt[3]{2}$$

(Zde je rovnice 3. stupně, o níž jsme mluvili v 1. odst.) Jde nyní o přibližné sestrojení úsečky, jejíž délka je $\sqrt[3]{2}$. Konstrukce má být ovšem hodně jednoduchá a dostatek přesná. Uvedu zde svoji konstrukci, která oběma těmito požadavkům vyhovuje.



Na dané přímce x zvolme libovolný bod O (obr. 1). Od něho v určitém smyslu (na obr. 1 doprava) nanese úsečku délky 1. Dostaneme tak bod B . V bodě O vztyčíme kolmici k k přímce x a nanese na ni od bodu O úsečky délky 0,15. V polorovině opačné k polorovině kB sestrojme úhel $OCA = 60^\circ$, přičemž bod A leží na x . Pak platí

$$OA = OC \sqrt[3]{3} = 0,259\ 807\ 62$$

¹⁾ Kružítkem a pravítkem se dají totiž řešit jen úlohy, které při početním řešení vedou k rovnici lineární nebo kvadratické.

a tudíž

$$AB = 1,259\,807\,62 \quad \doteq \sqrt[3]{2}$$

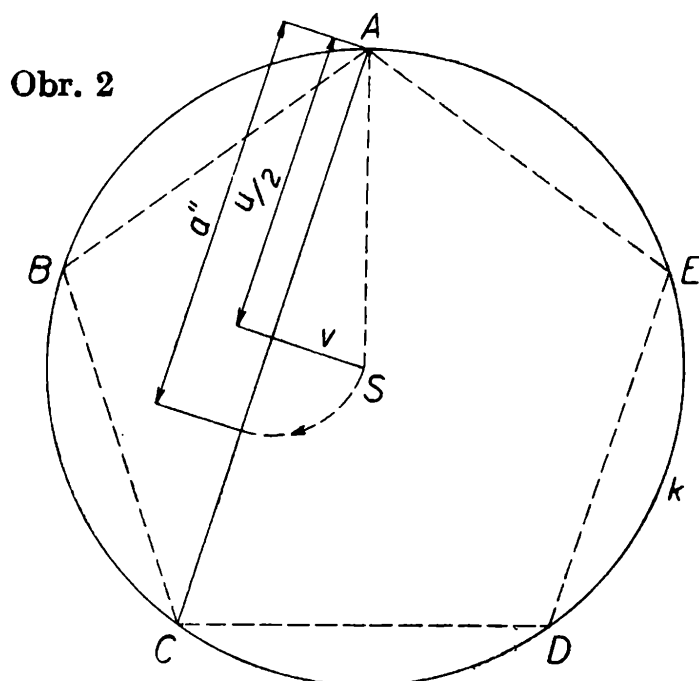
Z tabulek zjistíme, že

$$\sqrt[3]{2} = 1,259\,921\,0$$

Rozdíl mezi přesnou hodnotou a hodnotou sestrojenou je

$$0,000\,114\,4$$

Vidíme, že chyba, které se při přibližné konstrukci dopouštíme, je nepatrná, a tudíž popsaná konstrukce je dostatek přesná.



Poznámka: Doc. Ota Setzer uveřejnil v Rozhledech, roč. 29, str. 27 v článku „Multiplikace krychle“ tuto přibližnou konstrukci zdvojení krychle (obr. 2)

$$a'' \doteq v + \frac{u}{2} ,$$

kde a je poloměr kružnice k , u úhlopříčka vepsaného pravidelného pětiúhelníka, v její vzdálenost od středu kružnice

$$a'' = a (\sin 72^\circ + \cos 72^\circ) = a \cdot 1,260\,08 ,$$

chyba je

$$\Delta = a \cdot 0,000\,16 .$$

Cauchyova nerovnost

JOSEF HOŠEK, Olomouc

(Dokončení)

Příklad 4. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c, d platí vztah

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{8}c + \frac{1}{24}d \leq \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{8}c^2 + \frac{1}{24}d^2} \quad (8)$$

Řešení. Označíme-li

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}a, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}b, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}c, \quad x_4 = \frac{1}{\sqrt{24}}d,$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}, \quad y_4 = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

a výraz na levé straně (8) písmenem V , je podle C. n.

$$V^2 \leq \left(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{8}c^2 + \frac{1}{24}d^2 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right),$$

neboli po úpravě

$$V^2 \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{8}c^2 + \frac{1}{24}d^2$$

a dále pak

$$|V| \leq \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{8}c^2 + \frac{1}{24}d^2},$$

a tedy tím spíše

$$V \leq \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{8}c^2 + \frac{1}{24}d^2}$$

Příklad 5. Pro libovolná reálná čísla $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ je splněna nerovnost

$$\sqrt{(p_1 + q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2 + \dots + (p_n + q_n)^2} \leq \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2} + \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2}. \quad (9)$$

Dokažte!

Řešení. Použití C. n. na čísla $p_i, q_i, i = 1, 2, \dots, n$, dává výsledek

$$(p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n)^2 \leq$$

$$\leq (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)(q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2),$$

neboli

$$\begin{aligned} & |p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n| \leq \\ & \leq \sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)(q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2)} \end{aligned}$$

a z toho dále

$$\begin{aligned} & p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n \leq \\ & \leq \sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)(q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2)} \end{aligned}$$

Poslední nerovnost nejdříve vynásobíme dvěma a potom k oběma stranám přičteme výraz

$$[(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) + (q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2)].$$

Po úpravě vychází

$$\begin{aligned} & (p_1 + q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2 + \dots + (p_n + q_n)^2 \leq \\ & \leq (\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2} + \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2})^2, \end{aligned}$$

z čehož vyplývá

$$\begin{aligned} & \sqrt{(p_1 + q_1)^2 + (p_2 + q_2)^2 + \dots + (p_n + q_n)^2} \leq \\ & \leq \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2} + \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2}. \end{aligned}$$

P o z n á m k a. Speciálně pro $n = 1$ z (9) vyplývá známá nerovnost

$$|p_1 + q_1| \leq |p_1| + |q_1|.$$

P ř í k l a d 6. Dokažte, že jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v libovolném trojúhelníku, pak platí

$$\text{a) } \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1, \quad (10)$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Ř e š e n í. Z předpokladu především je patrné, že

$$0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi, 0 < \gamma < \pi \text{ a } \alpha + \beta + \gamma = \pi;$$

z toho je dále vidět, že pro uvažované velikosti úhlů

$$\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\gamma}{2}$$

je funkce tangens definována a je

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} > 0, \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} > 0.$$

Označme nyní

$$x_1 = y_3 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad x_2 = y_1 = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad x_3 = y_2 = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

a použijeme-li C. n. je splněna nerovnost

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2 &\leq \\ &\leq \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Označme V výraz v závorce na levé straně nerovnosti (11). Dokážeme-li, že

$$V = 1, \quad (12)$$

bude tím zřejmě podle (11) dokázána i platnost (10). Pro V však platí

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = {}^2) \\ &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + 1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 1. {}^3) \end{aligned}$$

Čtenář si jistě sám ověří, že za výše uvedených předpokladů vzorec skutečně platí.

²⁾ Neboť

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2},$$

takže

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \operatorname{cotg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

³⁾ Přitom používáme známé identity

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$$

Přístupme k důkazu tvrzení b). Vynásobíme-li (12) dvěma a tento výsledek přičteme k nerovnosti (10), máme

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} + 2V \geq 3,$$

čili

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right)^2 \geq 3.$$

Konečně uvážíme-li, že výraz v závorce je číslo kladné, plyne odtud

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}.$$

K dalšímu procvičení použití C. n. uveďme ještě několik příkladů.

1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$, která vyhovují vztahům

$$p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 = 1, \quad q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2 = 1,$$

platí

$$-1 \leq p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n \leq 1.$$

2. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $p_1, p_2, \dots, p_n$ platí nerovnost

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq \sqrt[n]{n(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)}.$$

3. Necht jsou dána libovolná reálná čísla a_i, b_i, c_i, d_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$. Dokažte, že platí

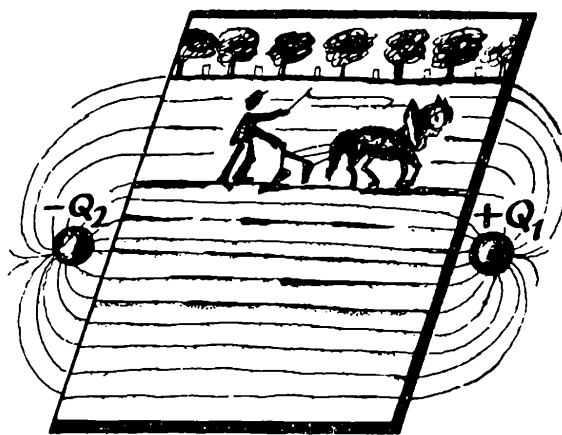
$$\begin{aligned} & (a_1 b_1 c_1 d_1 + a_2 b_2 c_2 d_2 + \dots + a_n b_n c_n d_n)^4 \leq \\ & \leq (a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) (b_1^4 + b_2^4 + \dots + b_n^4) \cdot \\ & \cdot (c_1^4 + c_2^4 + \dots + c_n^4) (d_1^4 + d_2^4 + \dots + d_n^4). \end{aligned}$$

4. Necht jsou dána kladná čísla a_i, b_i, c_i, d_i , přičemž $i = 1, 2, \dots, n$. Dokažte, že platí nerovnost

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{a_1 b_1 c_1 d_1} + \sqrt[4]{a_2 b_2 c_2 d_2} + \dots + \sqrt[4]{a_n b_n c_n d_n} \leq \\ & \leq \sqrt[4]{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \sqrt[4]{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \\ & \cdot \sqrt[4]{c_1 + c_2 + \dots + c_n} \sqrt[4]{d_1 + d_2 + \dots + d_n}. \end{aligned}$$

5. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c platí nerovnost

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{2}{a+b+c}.$$



Fyzikální zjišťování radioaktivity celého lidského těla

PROF. DR. VILÉM SANTHOLZER, DrSc., KU Hradec Králové

Případné znečištění (kontaminaci) lidského organismu radioaktivními látkami je třeba zjišťovat u pracovníků v radioizotopových laboratořích, v závodech na výrobu svítivých ciferníků, zaměstnanců u jaderných reaktorů aj. Nedávno vyšetřoval prof. dr. Joyet v Curychu 111 takových pracovníků, jejichž povolání při nedodržování předepsaných opatření může být příčinou kontaminace. Asi 20 % vyšetřovaných osob bylo lehce kontaminováno radionuklidy (= radioizotopy) jódu, cesia, india, kadmia a technecia. Zamoření zřídka kdy překročilo desetinu ještě přípustného množství, tzv. *maximálně přípustné dávky*, kterou stanovila mezinárodní komise odborníků.

Jinou takovou „zátěž“ pro organismus znamená výskyt atmosférického neboli nukleárního spadu, v podstatě radioaktivního prachu vzniklého následkem pokusných výbuchů nukleárních pum. Pokusy v ČLR již se blíží megatunovému ekvivalentu, tj. patrně v brzkou budou rovnocenné miliónům tun tritolu. Také Francie připravuje megatunové výbuchy v Polynésii. Sovětský svaz a USA dodržují moskevskou dohodu z r. 1963, a výbuchy v ovzduší a ve vodě neprovádějí. Hlavním důvodem k uzavření moskevské dohody byla skutečnost, že se stratosféra začala naplňovat radioaktivními zplodinami nukleárních výbuchů, které velmi pomalu (s poločasem asi 4 roky) klesají do troposféry, odkud jsou srážkami vymývány na zemský povrch. Cestou přes potravu se radioaktivní látky dostávají do organismů. Významné jsou zejména déle a dlouho žijící štěpné produkty stroncium 90 a yttrium 90, cesium 137, antimon 125, telur 125, plutonium 239 atd.

Maximální množství radioaktivity nahromaděné v organismu bylo nejisté, neboť rychlosti vylučování jednotlivých radioizotopů se od sebe velmi liší. Tato nejistota o zamoření organismů v budoucnosti byla hlavním důvodem, který velmocenské státy vlastníci nukleární zbraně přiměl k opatrnosti.

Ve Švýcarsku podobně jako na naší měřicí stanici čínský výbuch v květnu 1966 zvýšil aktivitu asi 7krát, avšak tato radioaktivita byla řádově 10 až 100krát menší než aktivita v roce 1962, kdy SSSR a USA prováděly megatunové výbuchy vodíkových pum. Přesto je v současné době nutná stálá kontrola radioaktivity vzduchu a srážek.

Moderní radiologická fyziky vypracovala spektrometrii gama s velkým krystalem jodidu sodného, popř. s několika krystaly, takže je možné změřit aktivitu celého lidského těla. Základní poznatky z oboru spektrometrie gama, která nahrazuje velmi obtížnou chemickou analýzu fyzikálním měřením paprsků gama vysílaných dotyčným radioizotopem, byly již vysvětleny.¹⁾

Při celotělové spektroskopii gama je nutno aktivitu okolí velmi silně snížit, aby bylo měření vůbec možné. Specifická aktivita organismu, tj. aktivita pro jednotku hmoty je asi 40krát nižší než aktivita okolních hmot, půdy, stěn, radonu ve vzduchu aj. Tato aktivita se odstíní tlustými kovovými stěnami obvykle ocelovými, někdy ještě potaženými olovem (3 až 5) mm Pb. Ocelová stěna tloušťky kolem 20 cm s olověným potahem sníží aktivitu pozadí asi na setinu — to se týká aktivity paprsků gama energie (0,1 až 2,0) MeV. Použité olovo musí být bez radioaktivních přímíšenin, což není požadavek snadno splnitelný.

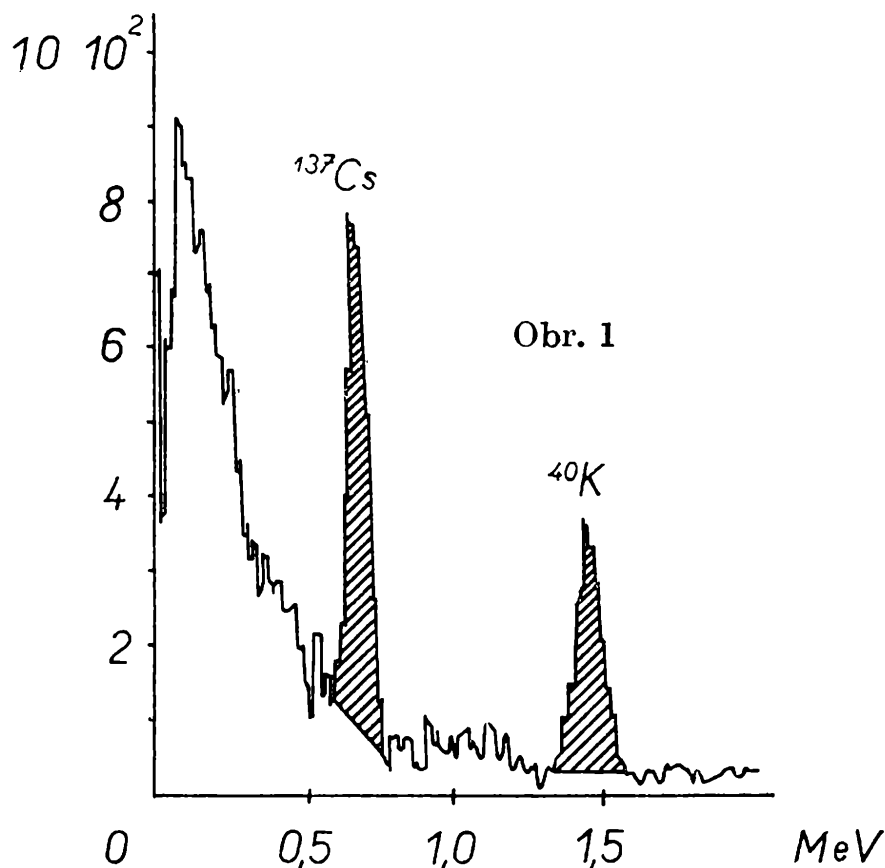
V ocelové komoře je značně výkonná ventilace opatřená speciálními filtry, na nichž se zachycují dceřiné látky radonu (aktivní depozit radia).

Celotělový počítač je také u nás ve Výzkumném ústavě hygieny záření (v oddělení dr. Lenger, CSc.). Několik celotělových počítačů pracuje v SSSR, ve Švédsku a jinde. Na Západě jsou často nazývány *monitory záření lidského těla* a používají i několik vhodných krystalů umístěných nad měřenou osobou.

Měřená osoba je osprchována, aby se odplavila kontaminace povrchu, a pak ulehne pod měřicí krystal do ocelové komory počítače paprsků. Leží na zvláštním lehátku eliptického tvaru v takové poloze, aby byla zcela určitá „geometrie“ měření. V krystalu vznikají scintilace (záblesky), které se vhodným zařízením přeměňují v elektrické impulsy. Ty jsou přístrojem tříděny podle velikosti a při měření ukládány v magnetické paměti. Po měření může být obsah paměti zaznamenán graficky nebo číselně. Vlastní absorpce paprsků gama v organismu člověka je stanovena z kontrolních pokusů, takže při měření je možno

¹⁾ Rozhledy matematicko-fyzikální 5 (1964 — 65), str. 217.

na ni patřičně vzít zřetel. Prof. Joyet se pokusil určit obsah radionuklidů z atmosférického spadu ve skupině mužů a žen stáří kolem dvaceti let, na prahu *reprodukčního období*, neboť obvykle krátce po tomto období jsou uzavírána manželství. Mužů i žen bylo kolem padesáti a měření byla provedena v období, kdy se výbuchy v ČLR neuplatňovaly. (Zvýšení radioaktivity ve střední Evropě jimi způsobené bylo stejně poměrně malé.)



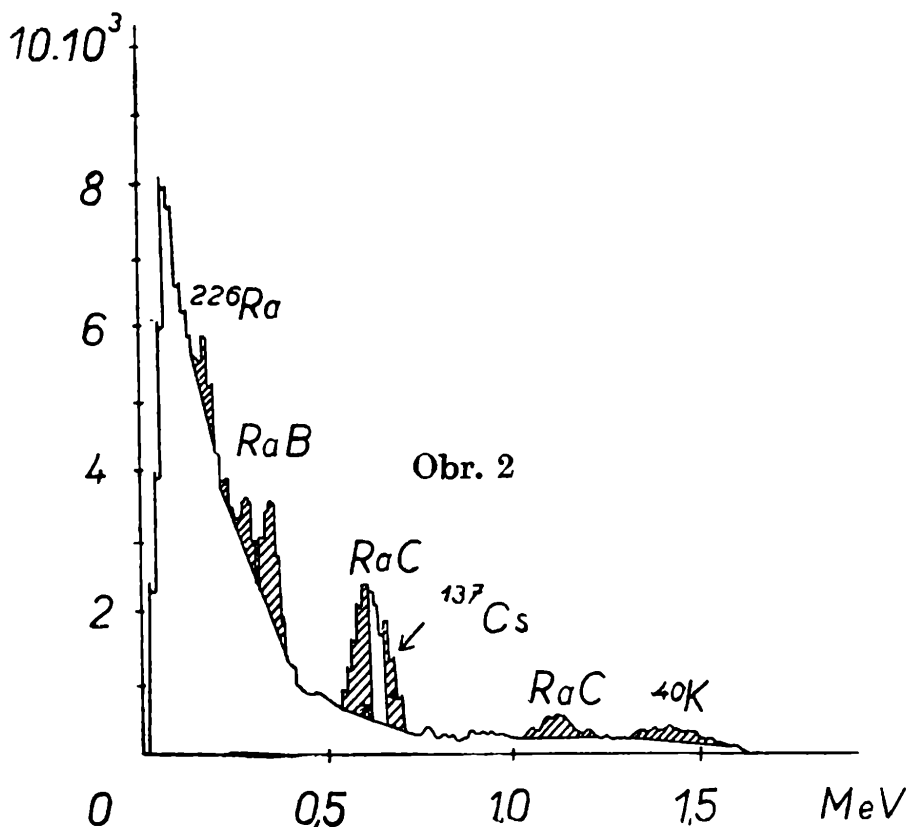
Obr. 1. Spektrum zdravého dvacetiletého muže. Na jedné ose je energie paprsků gama v MeV, na druhé intenzita paprsků.

Na obr. 1 je spektrum gama dvacetiletého muže, jak bylo v průměru zaznamenáno zjara v loňském roce. Spektrum má dva hlavní píky (vrcholy, z anglic. *peak*). Vrchol cesia 137 přísluší energii 0,66 MeV, vrchol draslíku 40 energii 1,46 MeV. Planimetrováním vrcholů v oblasti vyznačené šrafováním bylo možno přibližně určit celkovou aktivitu obou radionuklidů v lidském těle. Pro radioaktivní cesium 137 (pocházející z nukleárních výbuchů) vychází asi 16 nanocurie ($1 \text{ nCi} = 10^{-9} \text{ Ci}$).

Cesium 137 se v lidském těle objevilo až po období, kdy byly prováděny atomové výbuchy, kdežto draslík 40 je v lidském těle obsažen trvale. Přírodní draslík se skládá ze dvou stabilních izotopů, z draslíku 39 (93,08 %) a draslíku 41 (6,91 %), a z jednoho radioizotopu K 40 (0,0119 %). Radioaktivní draslík tedy v nepatrném množství doprovází

v přírodě oba stabilní izotopy a je možno jej zjišťovat měřením paprsků, jež vysílá. Rozpadá se velmi pomalu, jeho poločas je 1,25 miliardy let a jediné díky tomuto dlouhému poločasu se dosud všechen nerozpadl. (Stáří naší Země je 3 až 5 miliard let.)

Paprsky gama vysílané draslíkem umožňují jeho přímé stanovení v organismu. Podle obr. 1 lze určit celkové jeho množství v lidském těle, které je kolem 150 gramů.



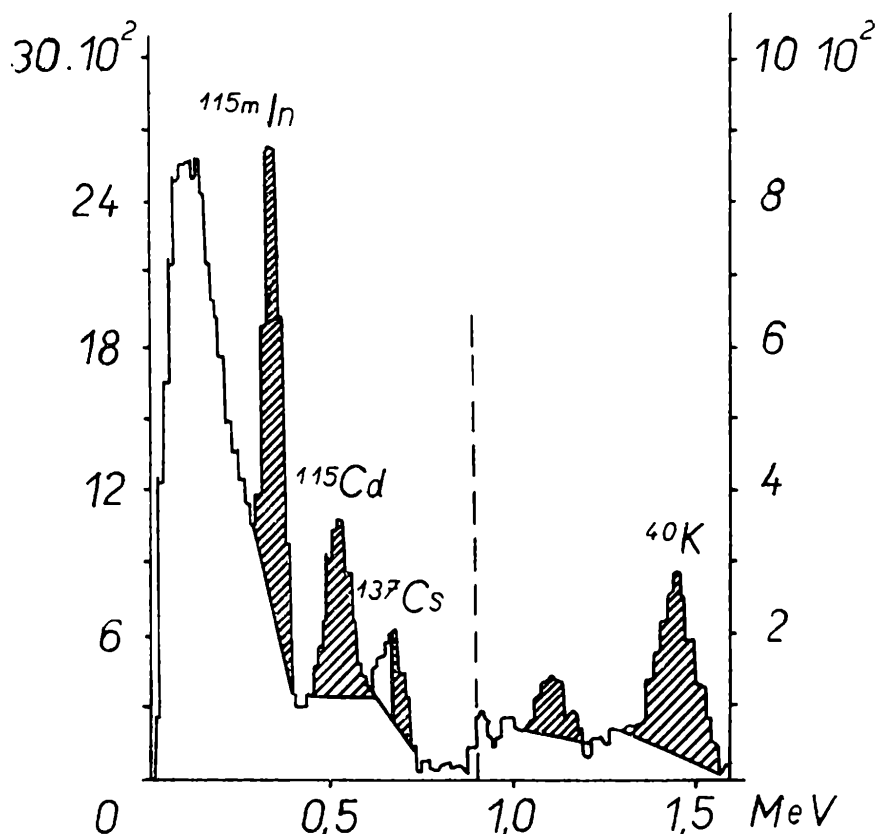
Obr. 2. Spektrum ženy stáří 45 let, která pracovala v hodinářském průmyslu ve Švýcarsku. Vyráběla svítící ciferníky, přičemž se kontaminovala radiem.

Důležitá zplodina nukleárních výbuchů stroncium 90, které se ukládá v kostech, není ve spektru na obr. 1 patrné, neboť nevysílá paprsky gama (vysílá jen paprsky beta).

Mezi oběma hlavními vrcholy na obr. 1 a před vrcholem cesia jsou malé vrcholy, jejichž příčinou je zčásti statistické kolísání množství paprsků, ale zčásti také stopy prvků radia a thoria v lidském těle. Jejich aktivita je řádově jen desetiny nanocurie, takže touto metodou je sotva zjiřitelná.

Množství cesia v organismu žen je zhruba poloviční než u mužů. Naměřené hodnoty jsou celkově 2 až 4krát vyšší než v roce 1957. V USA a v Anglii bylo tenkrát zjištěno průměrně 5 nCi. Po roce 1957 začala cesiová zátěž organismu klesat a na začátku roku 1962 byla minimální. Po sérii megatunových výbuchů vodíkových pum v letech

1961 až 62 zátěž opět vzrůstala a dosáhla maxima až roku 1965, tři roky po zastavení výbuchů. Zřejmě je to následek poklesu cesia ze stratosférického rezervoáru, kam jej vymrštily megatunové výbuchy, a pomalého jeho vylučování z těla. Maximum v roce 1965 bylo podle měření laboratoře v Brookhavenu (New York) šestkrát vyšší než minimum v roce 1962. V současné době byla by tendence klesající, jestliže další nukleární výbuchy nebudou zásobu cesia v atmosféře opět zvyšovat.



Obr. 3

Obr. 3. Malá kontaminace indiem a kadmiem následkem zacházení s kadmiiovou regulační tyčí z reaktoru.

Menší obsah $\text{Cs } 137$ u žen je možno vysvětlit tím, že jejich svalstvo je v průměru méně vyvinuto, neboť Cs se ukládá hlavně ve svalích. Také draslík se ukládá hlavně ve svalových buňkách. U mladých žen jeho množství je průměrně 1,6 g pro kg váhy, kdežto u mužů 2,1 g pro kg.

Geometrie měření celotělovým počítačem je volena tak, aby koncentrace draslíku byla nezávislá od různých typů lidských těl. Metodika umožňuje prokázat i patologické (chorobné, nenormální) odchylky od průměrného množství u zdravých lidí.

Celotělového počítače lze použít i ke kontrole případného zamoření pracovníků s radioaktivními látkami. Na obr. 2 je spektrum ženy stáří 45 let, která pracovala 12 let v továrně na svítící ciferníky se sirníkem zinečnatým, aktivovaným sloučeninou prvku radia. Ve spektru jsou

všechny čáry paprsků gama radia B a radia C, rozpadových produktů neboli dceřiných látek prvku radia 226.

Celková aktivita radia a jeho produktů je asi 60⁻nanocurie. Prvním rozpadovým produktem radia je plynný radon, který je asi ze dvou třetin vydýchán plícemi, takže celková aktivita příslušejí spektru na obr. 2 by byla $3 \times 60 = 180$ nCi. Tato hodnota již je větší než 100 nCi, maximálně přípustná zátěž pro tyto produkty.

Na obr. 3 je spektrum paprsků gama z těla pracovníka, který zacházel s kadmiovými regulačními tyčemi reaktoru. (Pravá část obr. 3 je v jiném měřítku.) Celkem nepatrné zamoření zřetelně prozrazují čáry india 115 a kadmia 115. In 115 má poločas přibližně 4 hodiny a vzniká rozpadem radioaktivního kadmia 115. Tento radioizotop se tvoří v regulačních kadmiových tyčích ozařováním neutrony v reaktoru. Jeho rozpadem za vysílání paprsků beta (negatronů) vzniká prvek atomového čísla o jedničku vyššího, než je kadmium, tedy indium 115. Na obr. 3 je označen ^{115m}Jn , přičemž *m* značí metastabilní, vzbuzený stav jádra, obvykle označovaný hvězdičkou In 115*.

Z obr. 3 lze usoudit, že kontaminace pracovníka od reaktoru je nepatrná, neboť dosahuje pouhé desetiny toleranční (nejvýše přípustné) dávky. Tuto nepatrnou kontaminaci bylo možno již před spektrometrováním dokázat kontrolou vzorků moče, která byla pravidelně prováděna.

Někdy je důležité určit lokalizaci a koncentraci radioaktivní látky v určitém orgánu nebo ve tkáni. Lokalizace může se vyskytnout a tvoří zátěž pro tento orgán. Velké snížení pozadí v ocelové komoře umožňuje získat spektrum kousku tkáně hmoty jen 80 až 30 g. Řez tkáně se dá do nádobky z plexiskla a umístí do blízkosti krystalu. Spektrometruje se asi 7 hodin přes noc a získá se spektrum stejně zřetelné jako na obr. 1—3. Čáry příslušející cesiu 137 a draslíku 40 jsou stejně význačné jako na obr. 1, pokud se nejedná o pracovníky kontaminované ještě dalšími radioizotopy. Taková spektra byla získána z částí svalů, ze štítné žlázy, z ovarií (vaječníků) apod. Na základě spektrometrie bylo možno vypočíst i *gonádovou dávku* (gonády = pohlavní žlázy), důležitou pro event. účinky genetické, tj. účinky na potomstvo. Zatím je tato dávka pod nebezpečnou hranicí, avšak další nukleární výbuchy mohly by lidstvo vážně ohrozit. Americký prof. *Linus Pauling*, dvojnásobný laureát Nobelovy ceny, uvádí, že již dosud provedené výbuchy působily u zcela určité, malé části lidstva neblaze a rozmnožily některé choroby. Odtud mohutné celosvětové hnutí za trvalý zákaz nukleárních výbuchů všech druhů, v jehož čele je stále Sovětský svaz.

0 měření gravitační konstanty

ING. JIŘÍ MACHALICKÝ, CSc., Praha

Podle gravitačního zákona Newtonova¹⁾ se přitahují tělesa dvě s hmotnostmi m_1 , m_2 , jejichž vzdálenost r je velká ve srovnání s jejich rozměry, silou F , která je úměrná součinu obou hmotností a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (1)$$

Pro homogenní koule platí gravitační zákon přesně, ať je vzdálenost jejich středů jakákoliv (samozřejmě ovšem větší, než součet obou poloměrů). Konstanta úměrnosti κ mezi silou F a výrazem

$$\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

zv. *gravitační*, patří k tzv. univerzálním konstantám a má v celém vesmíru (přístupném našim pozorováním) stejnou hodnotu. Závisí jen na jednotkách, v nichž měříme veličiny vystupující v gravitačním zákonu. Měříme-li je všechny v jednotkách měrové soustavy SI, má podle měření Heylových²⁾ hodnotu

$$\kappa = (6,670 \pm 0,007) \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}.$$

Nejdokonaleji byly propracovány dvě metody měření:

a) *metoda torzních vah* (Michell a Cavendish, Bailly, Reich, Braun, Boys, Eötvös, Heyl ...);

b) *metoda pákových (rovnoramenných) vah* (Jolly, Poynting, Wilsing, Richarz a Krigar — Menzel ...).

Blíže popíšeme jen metodu torzních vah. Navrhl ji *John Michell*, ale měření provedl v letech 1797–1798 *Henry Cavendish* s přesností v té době neobyčejnou. Později měření zdokonalili ještě další experimentátoři³⁾, a to hlavně tím, že zmenšili rozměry měřicího zařízení. Princip měření můžeme sledovat na obr. 1, kde je nakreslen schematicky půdorys přístroje.

Na dlouhém vlákně (ocelový drát, bronzový pásek, křemenné vlákno) visí lehká rovnoramenná příčka p , na jejíchž koncích jsou upevněna

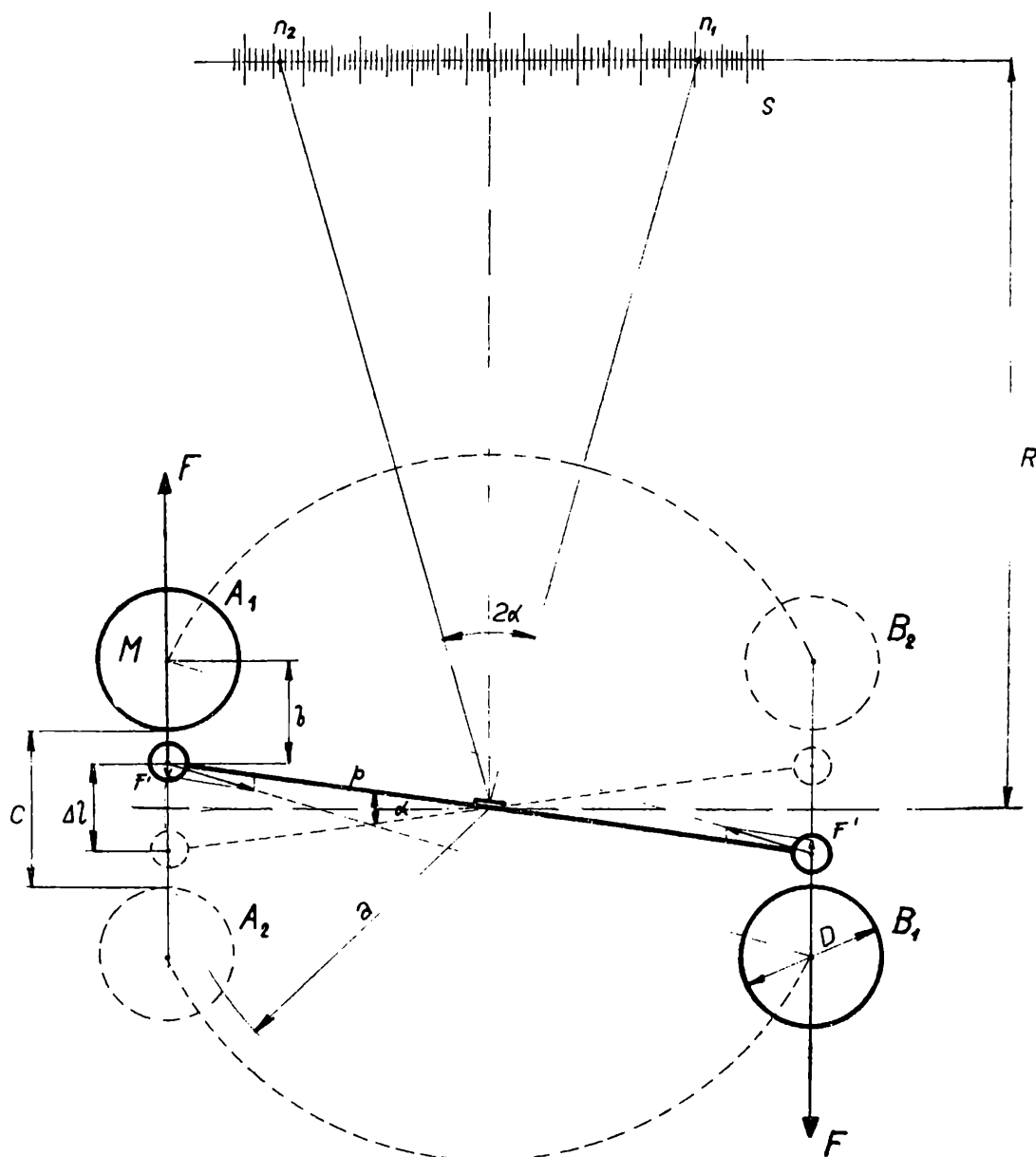
¹⁾ Viz článek „O gravitačním zákonu Newtonově“ v dalším čísle *Rozhledů mat.-fyzikálních*, roč. 46 (1967/68).

²⁾ Heyl měřil gravitační konstantu torzními vážkami z přitažlivé síly mezi ocelovými válci (hmotnosti 66 kg) a malými kuličkami ze skla, zlata, platiny a jiných kovů.

³⁾ Viz literaturu [1 ÷ 4].

malá závažíčka (olověné, zlaté, platinové kuličky). K nim lze z opačných stran přiblížit veliké kovové koule nebo válce A_1 , B_1 . Tyto nehybné koule (válce) působí na malé kuličky upevněné k příčce torzních vážek gravitační silou F . Dvojice sil

$$D_g = 2aF = 2a\kappa \frac{Mm}{b^2} \quad (2)$$



Obr. 1. Schéma torzních vážek k měření gravitační konstanty (půdorys).

stočí příčku p do takové pozice 1, v níž se vyrovná torzní dvojici

$$D_t = K \frac{\alpha}{2} = K \frac{\Delta l}{2a} \quad (3)$$

(všechny rozměry jsou vyznačeny v obr. 1). Přemístíme-li velké koule do *pozice 2* (A_2 , B_2 — v obr. nakresleno čárkovaně), stočí se příčka torzních vážek na opačnou stranu. Torzní tuhost K vlákna určíme

nejlépe z doby kyvu τ otáčivého systému⁴⁾. Označíme-li jeho moment setrvačnosti k ose vlákna J , je

$$K = J \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 \quad (4)$$

Protože příčka p má malou hmotnost proti oběma kuličkám, můžeme psát přibližně $J = 2ma^2$. Malé úhlové výchylky (v obr. 1 jsou značně přehnány) lze měřit zrcátkovou metodou; platí

$$\operatorname{tg} 2\alpha \doteq 2\alpha = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (5)$$

takže

$$D_t = 2ma^2 \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 \frac{n_2 - n_1}{4R}. \quad (6)$$

Z rovnosti $D_g = D_t$ pak dostaneme výsledný vztah

$$\left[\kappa = \frac{\pi^2}{4} \frac{ab^2 (n_2 - n_1)}{MR\tau^2} \right], \quad (7)$$

do kterého je třeba dosadit všechny délky v metrech; vzdálenost b určíme výpočtem z rovnice

$$b = \frac{c + D - a\alpha}{2} = \frac{1}{2} (c + D) - a \frac{n_2 - n_1}{4R}, \quad (8)$$

v níž a , c , D jsou míry dané konstrukcí přístroje.

Při přesných měřeních je třeba eliminovat všechny nepříznivé vlivy. Především se musí udržovat teplota na stálé hodnotě, aby se neměnila pružnost vlákna. Také se ukázalo, že vlákna vykazují při měření torzní tuhosti systematické chyby způsobené elastickou hysteresí. Proto použil Boys křemenného vlákna, u kterého je dopružování velmi nepatrné. Aby se při stále zmenšovaných rozměrech přístroje zabránilo chybám způsobeným oxidací koulí, užil Braun koulí pozlacených. Také bylo třeba dbát na to, aby byly koule (zejména velké) v dostatečné míře homogenní; proto se místo olověných koulí užívalo např. oceli nebo rtuti, která se přečerpávala do pevně uložených nádobek. Tím se současně odstranil nepříznivý vliv nárazů, které nebylo možno úplně vyloučit při přemísťování koulí z pozice 1 do pozice 2.

Při všech těchto opatřeních a ještě některých dalších se však neodstranila systematická odchylka měření způsobená tím, že malé kuličky na příčce p jsou přitahovány nejen tou velkou koulí, která je v bezprostřední blízkosti, ale také vzdálenou velkou koulí. Tato velmi

⁴⁾ Má-li být výchylka vážek spolehlivě měřitelná, musí být torzní tuhost vlákna malá, takže doba kyvu vychází velmi značná. Proto je třeba rovnovážné polohy (n_1 , n_2) určovat z pozorovaných bodů obratu (podobně jako na nebrzděných analytických vahách).

malá síla má ve směru síly F průmět F' , pro který lze odvodit z geometrie přístroje přibližný vztah

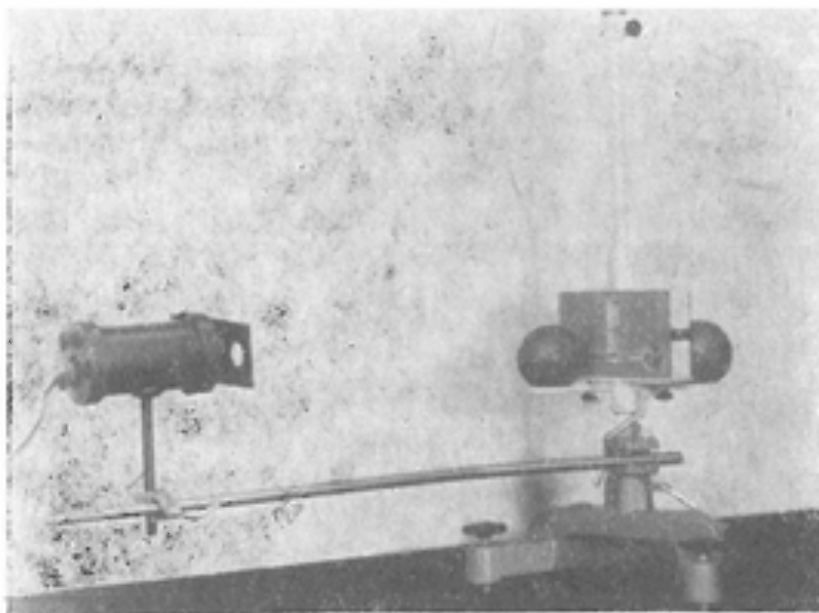
$$F' = \beta F, \quad \beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4a^2) \sqrt{b^2 + 4a^2}} \quad (9)$$

Vztah (7) nabude s ohledem na tuto korekci tvaru

$$\kappa = \frac{\pi a b^2 (n_2 - n_1)}{4 M R \tau^2 (1 - \beta)}. \quad (7a)$$

Při měření je nutno dbát na to, abychom veličiny b a τ (které vystupují v druhé mocnině) určili s větší relativní přesností než ostatní veličiny.

Při Cavendishových měřeních⁵⁾ bylo $m = 0,730$ kg, $M = 158$ kg, $a = 8$ angl. palců, $\tau = 14$ min (slabší drát), $\tau = 7$ min (silnější drát).



Obr. 2. Školní přístroj k měření gravitační konstanty.

Na obr. 2 je snímek torzních vážek určených ke školním demonstracím. Je to výrobek německé firmy Leyboldt.

Literatura

- [1] *F. Auerbach*: Allgemeine gravitation, Winkelmann, Handbuch der Physik, Band I., str. 450—495.
- [2] *Č. Strouhal*: Mechanika, JČMF, Praha 1901, str. 297.
- [3] *F. Závíška*: Mechanika, JČMF, Praha 1933, str. 239.
- [4] *V. Novák*: Fyzika, JČMF, Brno 1929 (třetí vydání), str. 120.
- [5] *Z. Horák, F. Krupka*: Fyzika, SNTL 1966, str. 92.
- [6] *J. Machalický, I. Pacáková, K. Moltaš*: Fyzikální měření (skriptum), Praha, SNTL 1967, str. 71.

⁵⁾ Byla provedena ve sklepení Cambridžské laboratoře, která nese nyní jméno Cavendishovo.

Substituce jako prostředek ke zvýšení přesnosti měření

ING. LADISLAV SMRŽ, Praha

Proti výchylkovým přístrojům, u nichž záleží nejen na jejich správném konstruktivním provedení, ale i na spolehlivosti a zručnosti pozorovatele, dosahujeme v elektrotechnice měřicími zařízeními několikanásobně vyšší přesnosti měření, zvláště při jejich pečlivém laboratorním provedení. Jako příklad můžeme uvést Wheatstoneův můstek pro měření elektrického odporu. Při jeho laboratorním provedení leží přesnost měření v mezích $\pm 0,02 \%$ až $\pm 0,1 \%$ měřené hodnoty, v závislosti na velikosti měřeného odporu a na nastavení poměrových větví můstku. Chceme-li získat vyšší přesnost a spolehlivost výsledku měření, musíme do výpočtu zavést korekce na odchylky odporů jednotlivých můstkových větví od jejich jmenovitých hodnot a eliminovat případný vliv termoelektrických napětí provedením dvojího měření pro oba směry můstkového proudu. V dalším výpočtu se pak počítá s jejich střední hodnotou.

Přesnost každého měřicího zařízení můžeme však vystupňovat také užitím zvláštního měřicího postupu. Z toho se nejvíce používá substituční metody. Jak již její název napovídá, nahrazuje se zde měřený objekt, např. odporový etalon, druhým stejně velikým a přesně definovaným objektem. Měřicí zařízení vyrovnáme postupně pro oba tyto porovnávané objekty a vhodným početním zpracováním výsledků obou měření dosáhneme toho, že hodnoty čtené na měřicím zařízení slouží pouze ke stanovení jejich vzájemného rozdílu. Tímto postupem jsme téměř úplně vyloučili ovlivnění výsledku měření vlastními odchylkami měřicího zařízení. Výsledek měření je především dán hodnotou přesně známého porovnávacího objektu a pouze jeho poslední desetinná místa jsou určována z nastavení čteného na měřicím zařízení.

Substituční metodou můžeme snadno dosáhnout vysoké přesnosti měření i na zařízení méně přesném. Změna nastavení měřicího zařízení při substitučním měření je velmi malá, a tím jeho vlastní chyba (např. odchylky posledních odporových dekád u Wheatstoneova můstku apod.) ovlivňuje výsledek měření velmi nepatrně. Je ovšem podmínkou, aby se během obou měření neměnily vnější podmínky, např. teplota, velikost proudu, velikost napětí apod.

Příklad použití

Wheatstoneovým můstkem chceme substituční metodou měřit etalonový odpor R_x . Jako substitučního prvku použijeme etalonový odpor

R_n stejné jmenovité hodnoty, k němuž máme ověřovací list, takže můžeme přesně určit jeho hodnotu při dané teplotě.

Nejprve vyrovnáme můstek pro měřený odpor R_x , potom zaměníme etalon R_x za substituční etalon R_n a opět můstek vyrovnáme. Tím dostáváme pro rovnováhu můstku dva vztahy známého tvaru

$$R_x = R' \frac{a}{b} \quad \text{a} \quad R_n = R'' \frac{a}{b},$$

kde R' a R'' jsou hodnoty nastavené na dekádách můstku (na porovnávacím odporu R), a , b jsou poměrové odpory můstku.

Odečtením a úpravou obou rovnic dostáváme výsledný vztah pro hledanou hodnotu etalonu R_x

$$R_x = R_n + (R' - R'') \frac{a}{b}$$

Jsou-li oba porovnávané odpory R_x a R_n prakticky shodné, liší se nastavení můstku R' a R'' pouze na posledních dekádách, takže jejich rozdíl $(R' - R'')$ je řádově velmi malý. Přesnost, s jakou jsme určili hodnotu etalonu R_x , závisí v první řadě na přesnosti, s jakou je definován substituční odpor R_n . Všechny vlivy, vyplývající z nepřesnosti vyrovnaní odporových hodnot můstkových větví, odporu přívodů, teplotě okolí (pokud se během měření nemění) aj. jsou zde eliminovány a nemohou působit na výsledek měření.

Odvození momentu setrvačnosti těles elementárními prostředky

ZDENĚK UNGERMANN, Hradec Králové

(Dokončení)

3. *Moment setrvačnosti homogenní kruhové desky k ose procházející středem kolmo na rovinu desky. Tloušťku desky zanedbáme.*

Rozdělme si poloměr kruhu na n stejně velkých částí. Dělicími body vedme soustředné kružnice. Tím se nám kruh rozdělí na n mezikruží (obr. 4).

Platí

$$\mu_k = \pi (r_k^2 - r_{k-1}^2) \gamma,$$

kde γ je plošná hustota, tj. hmotnost plošné jednotky, μ_k hmotnost k -tého mezikruží a r_i poloměr i -té soustředné kružnice.

Jelikož n je velké číslo, můžeme každé mezikružší pokládat za hmotnou kružnici s poloměrem rovným aritmetickému průměru krajních poloměrů.

Označíme-li

$$r_k = \frac{r}{n} k ,$$

$$r_{k-1} = \frac{r}{n} (k - 1) ,$$

pak pro k -té mezikružší platí

$$J_k = \pi (r_k^2 - r_{k-1}^2) \gamma \left(\frac{r_k + r_{k-1}}{2} \right)^2 = \frac{\pi \gamma r^4}{4n^4} (2k - 1)^3 .$$

Obr. 4

Sečtením momentů J_k , dostaneme celkový moment setrvačnosti kruhové desky

$$J = \frac{\pi \gamma r^4}{4n^4} [1 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + (2n - 1)^3] .$$

Výraz v závorce je S_3 , který zanedbáním jedničky proti násobku n nabývá hodnoty $2n^4$. Tedy

$$J = \frac{\pi \gamma r^4}{4n^4} 2n^4 = \frac{\pi \gamma r^4}{2} .$$

Dosazením za γ dostáváme konečně pro moment setrvačnosti kruhové desky

$$J = \frac{mr^2}{2} . \quad (10)$$

Poznámka. Stejný výsledek dostaneme u plného homogenního válce poloměru r a hmotnosti m , je-li osa rotace totožná s podélnou osou válce. Dokažte.

4. *Moment setrvačnosti plné koule* vzhledem k ose jdoucí středem koule.

Poloměr koule $SO = r$ rozdělíme opět na n stejně malých dílů ($n \rightarrow \infty$). Dělicími body vedme kolmé řezy k tomuto poloměru. Tím dostaneme n vrstev tvaru kruhových desek (obr. 5). Má-li k -tá vrstva hmotnost μ_k , pak celková hmotnost koule je

$$m = 2 \sum_{k=1}^n \mu_k . \quad (11)$$

Je-li hustota materiálu koule ϱ , pak poměr hmotností dvou vrstev je

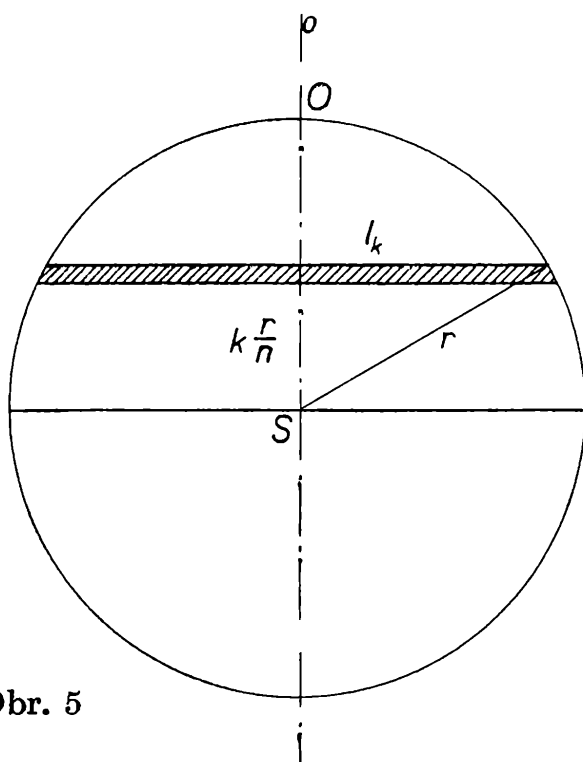
$$\mu_1 : \mu_k = \pi l_1^2 \frac{r}{n} \varrho g : \pi l_k^2 \frac{r}{n} \varrho g, \quad \mu_k = \frac{l_k^2}{l_1^2} \mu_1 \quad (12)$$

Dosadíme (12) do (11)

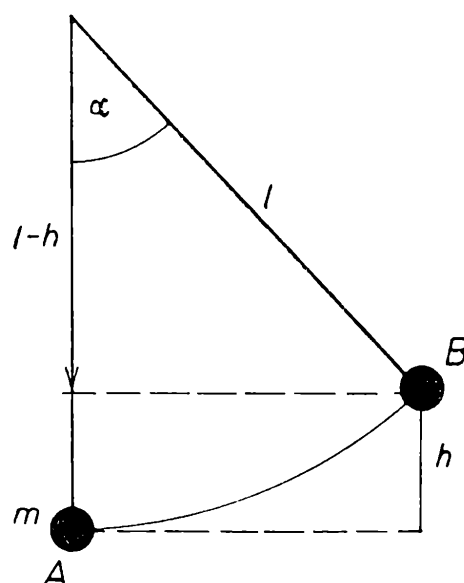
$$m = 2 \frac{\mu_1}{l_1^2} \sum_{k=1}^n l_k^2.$$

Platí (obr. 5)

$$l_k^2 = r^2 \left(l - \frac{k^2}{n^2} \right). \quad (13)$$



Obr. 5



Obr. 6

Je-li $k = l$, pak $l_1^2 = r^2$, tedy

$$m = 2 \frac{\mu_1}{l_1^2} r^2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{n^2} \right) = 2\mu_1 \left(n - \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^2} \right).$$

Použitím S_1 a zanedbáním jedničky proti násobku n je

$$m = \frac{4}{3} \mu_1 n \quad (14)$$

Jelikož jsme polokouli rozdělili na n kruhových desek poloměru l_k , dostáváme pro moment setrvačnosti koule

$$J = 2 \sum_{k=1}^n J_k = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \mu_k l_k^2 = \sum_{k=1}^n \mu_k l_k^2. \quad (15)$$

Podle (12) a (14) je

$$\mu_k = \frac{3}{4} m \frac{l_k^2}{nr^2}.$$

Dosadíme do (15)

$$J = \frac{3m}{4r^2n} \sum_{k=1}^n l_k^2$$

Dále použijeme (13) a vztahů pro S_4 a S_1

$$J = \frac{3m}{4r^2n} \sum_{k=1}^n \left(r^2 - \frac{r^2 k^2}{n^2} \right)^2 = \frac{3m}{4r^2n} \left(nr^4 - \frac{2}{3} nr^4 - \frac{1}{5} nr^4 \right).$$

Po úpravě dostáváme konečně pro moment setrvačnosti homogenní koule vzhledem k ose jdoucí středem koule vztah

$$J = \frac{2}{5} mr^2. \quad (16)$$

Příklady.

1. Jak velká je kinetická energie obruče průměru 1 m a vážící 5 kg, otáčí-li se po horizontální rovině postupnou rychlostí středu 12 km/h⁻¹?

O z n a č e n í v e l i č i n a d a n é h o d n o t y : Hmotnost obruče $m = 5$ kg, poloměr obruče $r = 0,5$ m, postupná rychlost

$$v = 12 \text{ km/h}^{-1} = \frac{10}{3} \text{ m/s}^{-1},$$

moment setrvačnosti obruče $J = mr^2$, pro úhlovou rychlost obruče platí

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Řešení. Celková energie W se skládá z energie pohybu postupného a z energie pohybu otáčivého, tedy platí

$$W = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} mr^2 \frac{v^2}{r^2}. \quad (1)$$

Úpravou (1) obdržíme

$$W = m v^2 \quad (2)$$

Z výsledku (2) je vidět, že výsledná energie nezávisí na poloměru obruče. Energie obou částí — postupné i otáčivé — jsou stejné.

Numericky

$$W = 5 \left(\frac{10}{3} \right)^2 [\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}] = 55,5 \text{ J}$$

2. Malá těžká kulička (hmotný bod) tíhy G je zavěšena na niti a vychýlena ze svislé polohy o úhel α . Pustíme-li kuličku, určete napětí nitě v nejnižším bodě trajektorie.

Řešení. Označíme-li hmotnost kuličky m , délku nitě l , úhlovou rychlost ω , výšku kuličky h (obr. 6) a moment setrvačnosti $J = ml^2$, platí podle zákona zachování energie

$$mgh = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

odtud dostáváme

$$\omega^2 = \frac{2gh}{l^2}. \quad (1)$$

V nejnižším bodě dráhy napíná nit jednak tíha kuličky a jednak reakce na sílu dostředivou, tj. pro napětí dostáváme

$$F = mg + ml\omega^2 = mg \left(1 + \frac{2h}{l} \right). \quad (2)$$

Dále platí

$$\cos \alpha = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l}, \quad \text{odtud} \quad \frac{h}{l} = 1 - \cos \alpha. \quad (3)$$

Dále platí

Použijeme-li (3), můžeme (2) upravit na konečný tvar

$$F = G(3 - 2 \cos \alpha).$$

3. Určete zrychlení a dráhu plné koule poloměru r v čase t , která se bez smyku valí po nakloněné rovině s úhlem α (Galileův padostroj). Počáteční rychlost je nulová (obr. 7).

Řešení. Označíme postupnou rychlost těžiště v čase t písmenem v a úhlovou rychlost $\omega = \frac{v}{r}$.

Kinetická energie postupného pohybu je

$$W_1 = \frac{1}{2} mv^2$$

Rotační energie je

$$W_2 = \frac{1}{2} mR^2 \frac{v^2}{r^2},$$

kde R je poloměr setrvačnosti.

Celková energie bude

$$W = \frac{1}{2} mv^2 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right).$$

Tuto energii těleso získalo na úkor potenciální energie $mgs \sin \alpha$ (obr. 7). Podle zákona zachování energie

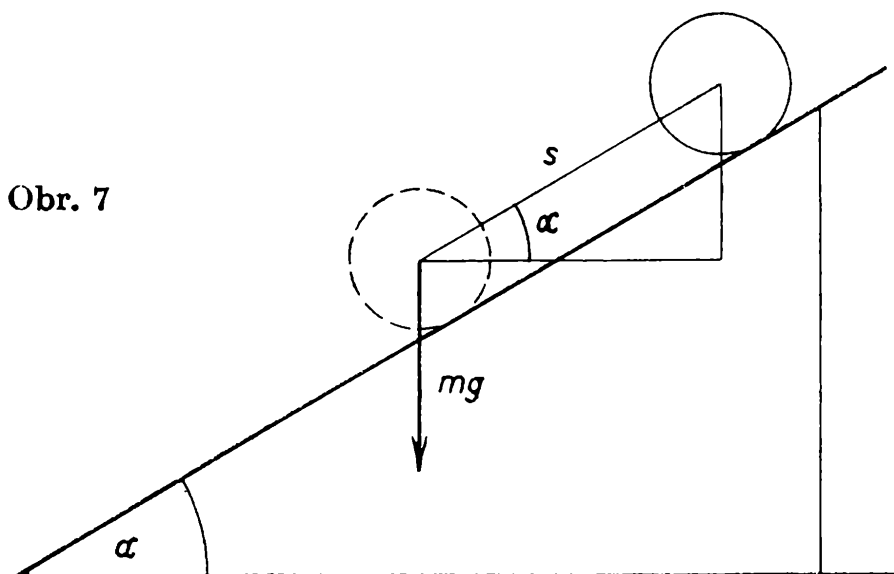
$$mgs \sin \alpha = \frac{1}{2} mv^2 \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right], \quad (1)$$

s je dráha uražená za dobu t .

Označme s_1 dráhu uraženou za dobu t_1 a s_2 dráhu uraženou za dobu t_2 . Odpovídající rychlosti jsou v_1, v_2 . Je-li $s_2 > s_1$, platí

$$s_2 - s_1 = \bar{v} (t_2 - t_1), \quad (2)$$

kde $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ je průměrná rychlost na dráhovém úseku $s_2 - s_1$.



Podle (1) je

$$s_2 = \frac{v_2^2 A}{2g \sin \alpha}, \quad (3)$$

$$s_1 = \frac{v_1^2 A}{2g \sin \alpha}, \quad A = 1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2$$

Odečtením rovnic (2) dostáváme

$$s_2 - s_1 = \frac{A}{2g \sin \alpha} (v_2 - v_1) (v_2 + v_1). \quad (3')$$

Pro hledané zrychlení $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ bude platit, použijeme-li (2) a (3')

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2}. \quad (4)$$

Dráha za čas t je dána známým vztahem

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{g \sin \alpha}{1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2} t^2. \quad (5)$$

Vztahy (4) a (5) platí pro libovolné valčí se těleso, jehož poloměr setrvačnosti je R .

V případě plné koule $\left(R^2 = \frac{2}{5} r^2\right)$ je

$$a = \frac{5}{7} g \sin \alpha,$$

$$s = \frac{5}{14} g t^2 \sin \alpha.$$

Srovnajte výsledek s klouzavým pohybem tělesa po nakloněné rovině. Jak poznáte, která koule je při stejném r a stejné hmotnosti dutá?

Cvičení.

1. Odvoďte moment setrvačnosti homogenní obdélníkové desky o rozměrech a , b . Osa rotace prochází středem a její směr je dán střední příčkou.

$$\left(\text{Výsledek: } J_1 = \frac{1}{12} m a^2, \quad J_2 = \frac{1}{12} m b^2. \right)$$

2. Určete moment setrvačnosti krychle hrany a , zhotovené z tenkého plechu, prochází-li osa rotace středy protějších stěn.

$$\left(\text{Výsledek: } J = \frac{5}{18} m a^2. \right)$$

3. Homogenní tyč hmotnosti m a délky l je zavěšena na jednom konci. Pustíme-li ji z polohy horizontální, začne kývat ve vertikální rovině. Určete její úhlovou rychlost ve vertikální poloze.

$$\left(\text{Výsledek: } \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}. \right)$$

4. Homogenní kruhový kotouč poloměru r a hmotnosti m_1 je ve svislé rovině otočný kolem horizontální osy procházející těžištěm. Kolem kotouče je ovinuta nit zanedbatelné hmotnosti, na níž je zavěšeno těleso hmotnosti m_2 . Jakou úhlovou rychlost získá kotouč, klesne-li závaží po uvolnění o výšku h ?

$$\left(\text{Výsledek: } \omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{m_2 h g}{m_1 + 2m_2}}. \right)$$

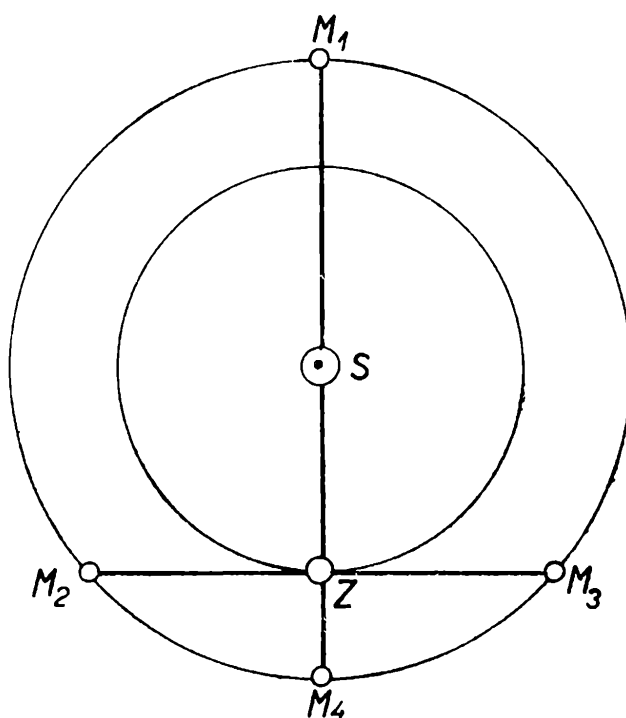


Zdánlivá klička planety Marsu

Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ, UP Olomouc

Planeta Mars je první z řady tzv. vnějších planet, protože obíhá kolem Slunce za dráhou Země. Velká poloosa, dráhy Marsu je $a = 1,524$ astronomických jednotek (a. j.). Protože však má poměrně velkou excentricitu $e = 0,0934$, může se jeho vzdálenost od Slunce měnit v rozmezí od 1,382 a. j. do 1,666 a. j.

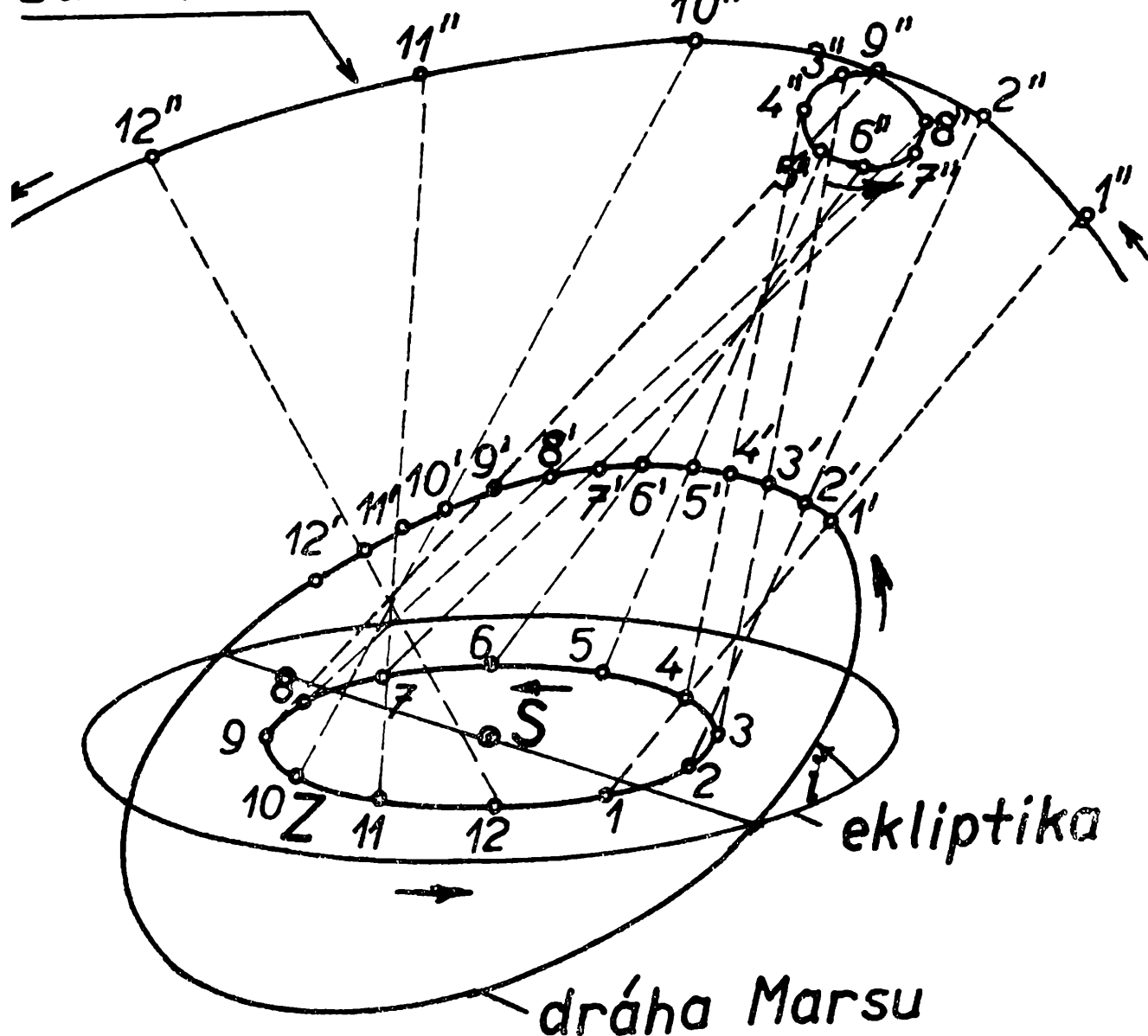
Jako vnější planeta může Mars zaujímat vzhledem ke Slunci a k Zemi tyto význačné polohy, nazývané *aspekty* (obr. 1): V poloze M_1 je Mars v *konjunkci* se Sluncem. Je-li planeta v konjunkci se Sluncem, pak vychází i zapadá současně se Sluncem a není proto pozorovatelná. V poloze M_2 a M_3 je planeta v *kvadratuře*; směr ke Slunci svírá se směrem k Marsu úhel 90° . Při východní kvadratuře (M_2) vychází Mars kolem poledne, vrcholí kolem 18^h a zapadá kolem půlnoci, takže je pozorovatelný v časných večerních hodinách. Při západní kvadratuře (M_3) vychází Mars kolem půlnoci, vrcholí v 6^h a zapadá v poledne; je tedy pozorovatelný v časných ranních hodinách.



Obr. 1. Aspekty vnější planety.

Velmi významnou polohou planety je *opozice* (M_4), kdy je planeta na spojnici Slunce a Země, v bodě protilehlém Slunci. V době opozice planeta vychází při západu Slunce, vrcholí o půlnoci a zapadá při východu Slunce, takže je pozorovatelná po celou noc. V opozici se Mars přibližuje k Zemi na nejmenší možnou vzdálenost. Kdyby byly dráhy Marsu i Země přesně kruhové, pak by tato vzdálenost činila

zdánlivá dráha Marsu



Obr. 2. Vznik zdánlivé kličky na dráze planety Marsu. Číslice značí vzájemně si odpovídající polohy.

při každé opozici 0,524 a. j., tj. asi 78 miliónů km. Vzhledem k poměrně velké excentricitě dráhy Marsu se vzdálenost od Země při opozicích mění od 56 miliónů km, je-li Mars v perihéliu, do 99 miliónů km, je-li Mars v aféliu. Nejlepší podmínky k pozorování povrchu planety jsou při perihéliových opozicích, kdy zdánlivý průměr Marsova ko-

toučku dosahuje až 26" (při afélieové opozici je to pouze 14"). Připomeňme, že při perihélieové opozici dosahuje zdánlivá hvězdná velikost Marsu $-2,8^{\text{m}1}$.

Stejné polohy Marsu vzhledem ke Slunci a k Zemi se opakují po uplynutí synodické oběžné doby. Tuto oběžnou dobu můžeme snadno vypočítat, známe-li siderickou oběžnou dobu — je to doba, za kterou průvodič planety opíše úhel 360° . Označme T siderickou oběžnou dobu Marsu ($T = 687$ dní), T_0 oběžnou dobu Země ($T_0 = 365,25$ dní). Za jeden den opíše průvodič Země úhel $\frac{360^\circ}{T_0}$, průvodič Marsu úhel $\frac{360^\circ}{T}$, Země tedy předběhne Mars o úhel

$$\varphi = \frac{360^\circ}{T_0} - \frac{360^\circ}{T}$$

Po uplynutí synodické oběžné doby P jsou Země, Mars a Slunce opět ve stejné konfiguraci; Země předběhla Mars o 360° a platí

$$\varphi \cdot P = 360^\circ,$$

čili

$$\frac{360^\circ}{T_0} - \frac{360^\circ}{T} \cdot P = 360^\circ$$

a odtud synodická oběžná doba

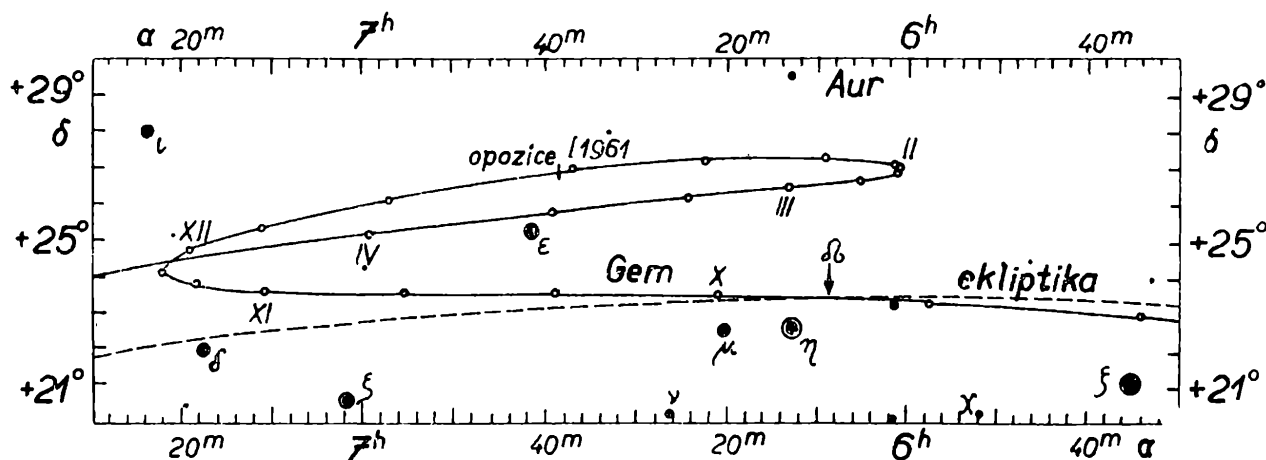
$$P = \frac{T_0 \cdot T}{T - T_0}$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme pro Mars synodickou oběžnou dobu $P = 780$ dní, tj. 2 roky 49 dní. Protože rychlost obou planet po dráze kolem Slunce není konstantní, může synodická oběžná doba nabývat hodnot od 2 roků 14 dnů do 2 roků 80 dnů.

Sledujeme-li zdánlivý pohyb Marsu mezi hvězdami na obloze, můžeme pozorovat, že v době kolem opozice vytváří zdánlivou kličku. Vznik této kličky (smyčky) je patrný z obr. 2 (připomeňme, že na obrázku je sklon dráhy Marsu vzhledem k rovině ekliptiky pro názornost zvětšen; ve skutečnosti je $i = 1^\circ 51'$). Pozorujeme-li pohyb Marsu na obloze, vidíme, že zprvu probíhá v témž směru, v jakém se pohybuje planeta (od západu k východu, ačkoliv při otáčení hvězdné oblohy se pohybuje spolu s hvězdami od východu k západu); říkáme, že se pohybuje v přímém směru. Po určité době se planeta zastaví (v bodě 4"), pak se zdánlivě pohybuje zpětným směrem, tj. ve směru

¹⁾ Příští opozice Marsu bude 29. května 1969; úhlový průměr Marsu bude 19,1". Následující opozice, 6. srpna 1971, bude perihélieová; úhlový průměr Marsu dosáhne 25,0".

otáčení sféry. V bodě 7" se znovu zastaví a pak se znovu pohybuje mezi hvězdami přímým směrem. Na obr. 3 je nakreslena zdánlivá dráha Marsu od září 1960 do dubna 1961 (opozice nastala 29. prosince 1960).



Obr. 3. Dráha Marsu mezi hvězdami v souhvězdí Blíženců (Gem = Gemini) kolem opozice 1960/61.

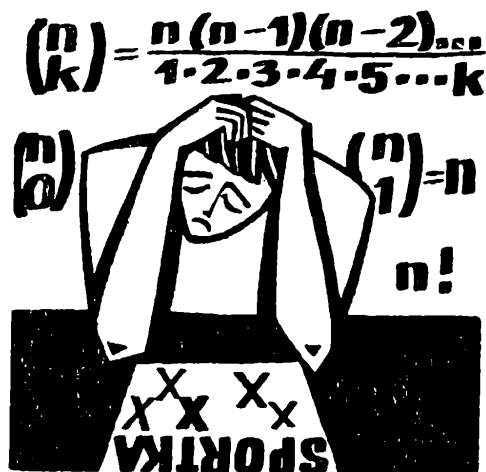
Podobné kličky můžeme pozorovat také u ostatních vnějších planet. Průměr kličky (vzdálenost jednoho bodu obratu od druhého) závisí na vzdálenosti planety od Země. Čím je tato vzdálenost větší, tím je průměr kličky menší. Klička přitom může být uzavřená nebo otevřená; závisí to na vzájemné poloze Země a planety.

Literatura

- [1] Barabašov, N. P. - Široký, J.- Mars. SPN, Praha 1965. 15 s.
- [2] Voroncov - Veljaminov, B. A.- Astronomie pro jedenáctý ročník. SPN, Praha 1959. 150 s.
- [3] Kolektiv: Astronomie für die Hand des Lehrers. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960. 160 s.

Vážení čtenáři,

chcete-li, aby vám Rozhledy matematicko-fyzikální byly po prázdninách doručovány pravidelně již od prvního čísla, objednejte si je u svého poštovního úřadu (Poštovní novinové služby) již nyní.



Jak si n -dívek hrálo s míčem

STANISLAV TRÁVNÍČEK, Olomouc

V zajímavé knize B. A. Korděmského [1] (nedávno vyšla ve 2. vydání) je uvedena úloha „Jak si 12 dívek hrálo s míčem“. Její (poněkud zkrácené) znění je toto:

Dvanáct dívek se postavilo do kruhu a začalo si hrát s míčem. Každá z dívek hodila míč své sousedce vlevo. Když míč obešel celý kruh, házely jej dívky zase opačným směrem. Za nějakou chvíli se jedna dívka ozvala:

„Házejme raději míč přes jednu!“

„Ale vždyť je nás dvanáct, to pak bude polovina děvčat ze hry vyřazena,“ namítla jiná.

„Pak budeme házet přes dvě!“ (Míč chytí až každá třetí.)

„To je ještě horší, budou hrát jen čtyři... Jestli chcete, abychom hrály všechny, musíme házet přes čtyři, (pátá chytá), a to na jednu stranu nebo na druhou. Jinak to nejde.

Dívky si nakreslily schémata všech možných způsobů hry a opravdu, jen celkem při čtyřech (uvedených) způsobech hry se jí zúčastnily všechny.

Co kdyby bylo dívek třináct? — ptá se ještě uvedená úloha a my dodejme: Co kdyby bylo dívek n ? Kolik existuje způsobů hry takových, aby si hrály všechny dívky? Za jakých podmínek se hry nezúčastní všech n dívek, kolik z nich ano a kolik ne?

Uvidíme, že řešení dané úlohy dostaneme jako jednoduchý důsledek určitých matematických vztahů, o nichž nyní stručně pojednáme.

Ukážeme si souvislost dané úlohy s vlastnostmi komplexních jednotek, jež jsou řešením binomické rovnice

$$z^n - 1 = 0 \quad (1)$$

O přirozeném čísle n předpokládejme $n \geq 2$ a dále se dohodneme, že v celém tomto článku bude k prvkem množiny $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Ze střední školy víte, že rovnice (1) má n navzájem různých kořenů α_k , které lze vyjádřit v goniometrickém tvaru

$$\alpha_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (2)$$

Příklad 1.

Pro $n = 4$ je

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = i, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -i.$$

Pro $n = 6$ je

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, & \alpha_1 &= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, & \alpha_2 &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \alpha_3 &= -1, & \alpha_4 &= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, & \alpha_5 &= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Čísla α_k se nazývají *n -té odmocniny z jedné*. Označme dále množinu všech n -tých odmocnin z jedné M_n ; množina M_n má tedy n prvků. Proměnnou na množině M_n budeme dále označovat zpravidla ε . Pro všechny hodnoty ε zřejmě platí $|\varepsilon| = 1$. Z geometrického významu komplexních čísel vidíme, že obrazy komplexních čísel α_k (stručně: body α_k) tvoří v komplexní rovině vrcholy pravidelného n -úhelníka vepsaného do jednotkové kružnice, přičemž jeden vrchol leží pro všechna n vždy v bodě $\alpha_0 = 1$ (obr. 1).

Tyto n -té odmocniny z jedné mají řadu zajímavých vlastností, z nichž si některé dále uvedeme a dokážeme. Při důkazech budeme využívat základní vlastnosti dané definicí, tj. $\varepsilon^n = 1$, nebo vyjádření (2). Věty budeme zapisovat ve stručném symbolickém tvaru, ale po jejich přečtení si vždy formulujte jejich slovní vyjádření.

Věta 1. Jestliže $\varepsilon_1 \in M_n$, $\varepsilon_2 \in M_n$, pak $(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \in M_n$.

D ů k a z. Ježto $\varepsilon_1^n = \varepsilon_2^n = 1$, platí $(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^n = \varepsilon_1^n \cdot \varepsilon_2^n = 1$, tedy $(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \in M_n$.

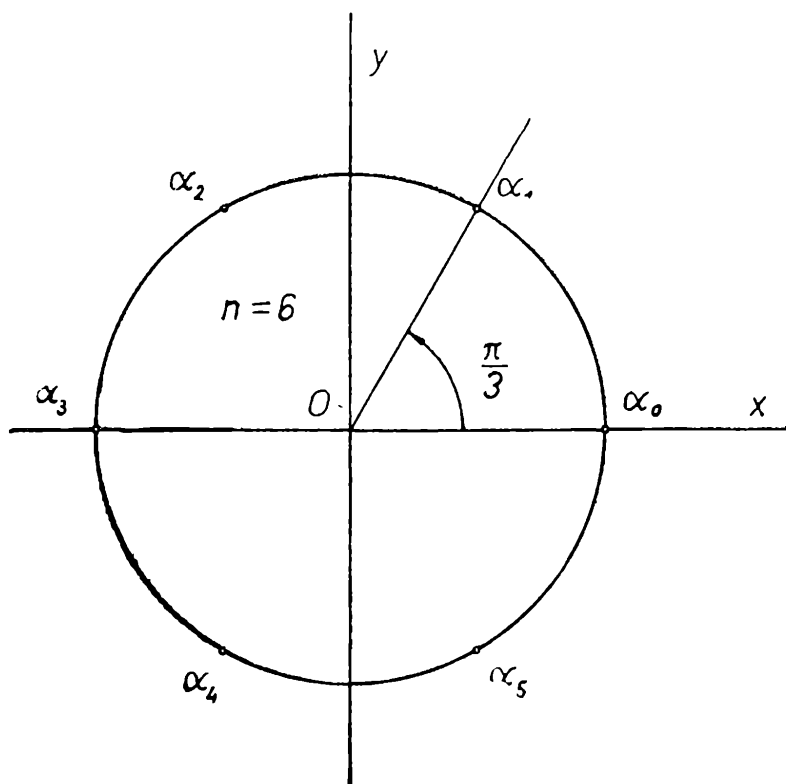
Věta 2. Je-li $\varepsilon \in M_n$, pak pro libovolné přirozené číslo m je $\varepsilon^m \in M_n$.

D ů k a z. $(\varepsilon^m)^n = (\varepsilon^n)^m = 1^m = 1$, tedy $\varepsilon^m \in M_n$.

Než uvedeme další věty, připomeňme si tyto pojmy:

Prvočíslo — přirozené číslo, větší než 1 dělitelné jen samo sebou a číslem 1; např. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 jsou prvočísla.

Složené číslo — přirozené číslo větší než 1, které není prvočíslem. Složená čísla lze vyjádřit ve tvaru součinu alespoň dvou činitelů, kteří nejsou rovni jedné ani danému číslu. Tyto činitele nazýváme *dělitelé daného čísla*; např. 4 ($= 2 \cdot 2$), 6 ($= 2 \cdot 3$), 8 ($= 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2$), 9 ($= 3 \cdot 3$), 10 ($= 2 \cdot 5$) jsou čísla složená.



Obr. 1

Věta 3. Je-li přirozené číslo d dělitelem čísla n , pak $M_d \subset M_n$.

D ů k a z. Podle předpokladu lze číslo n vyjádřit ve tvaru součinu $n = d \cdot m$, kde m je vhodné přirozené číslo. Zvolme libovolné $\varepsilon \in M_d$, tedy $\varepsilon^d = 1$. Máme $\varepsilon^n = \varepsilon^{dm} = (\varepsilon^d)^m = 1^m = 1$, takže $\varepsilon \in M_n$. Tím jsme dokázali, že každý prvek množiny M_d je rovněž prvkem množiny M_n , tj. $M_d \subset M_n$.

Příklad 2. Nechť $n = 6$. Uvažujme všechny j -té mocniny ($j = 1, 2, \dots, 6$) všech prvků $\varepsilon \in M_6$, tj. α_k^j . Zapišme je do tabulky, v níž pro přehlednost místo α_0 píšeme 1.

Tabulka 1

$\alpha_k \backslash j$	1	2	3	4	5	6
$\alpha_0 = 1$	1	1	1	1	1	1
α_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	1
α_2	α_2	α_4	1	α_2	α_4	1
α_3	α_3	1	α_3	1	α_3	1
α_4	α_4	α_2	1	α_4	α_2	1
α_5	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	1

Vidíme, že ovšem pro všechna α_k je $\alpha_k^6 = 1$, ale též to, že pro některá k existuje exponent $h < 6$ tak, že $\alpha_k^h = 1$; např. pro $k = 2$ je $h = 3$, neboť $\alpha_2^3 = 1$, pro $k = 3$ je $h = 2$ nebo 4 , neboť $\alpha_3^2 = \alpha_3^4 = 1$. Je to samozřejmě zcela ve shodě s větou 3, neboť $\{1, \alpha_2, \alpha_4\} = M_3 \subset M_6$, $\{1, \alpha_3\} = M_2 \subset M_6$.

Jestliže pro dané $\varepsilon \in M_n$ je $\varepsilon^j \neq 1$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, n-1$, pak se číslo ε nazývá *primitivní n -tá odmocnina z jedné* (dále budeme též stručně říkat jen „primitivní odmocnina“). V příkladě 2 jsou primitivními odmocninami čísla α_1 a α_5 .

Věta 4. Dané $\alpha_k \in M_n$ je primitivní n -tou odmocninou z jedné právě tehdy, když čísla k, n jsou nesoudělná.

D ů k a z : a) Nechť jsou čísla k, n nesoudělná a přirozené číslo h ($1 \leq h \leq n$) má tu vlastnost, že $\alpha_k^h = 1$. Vzhledem k (2) a podle Moivreovy věty je

$$1 = \alpha_k^h = \cos \frac{2hk\pi}{n} + i \sin \frac{2hk\pi}{n}$$

Musí tedy platit, že

$$\frac{2hk\pi}{n} = \frac{hk}{n} (2\pi)$$

je celý násobek čísla 2π , tj. že $\frac{hk}{n}$ je číslo celé. Ježto jsou ale k, n nesoudělná, je nutně h násobkem čísla n . Z nerovnosti $h \leq n$ pak máme $h = n$, takže číslo α_k je primitivní odmocninou.

b) Nechť nyní naopak jsou čísla k, n soudělná; jejich největší společný dělitel označme d . Pak čísla k, n lze psát ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} k &= d \cdot l \\ n &= d \cdot m \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

kde l, m jsou vhodná přirozená čísla. Přitom je $d > 1$, $l < k$, $m < n$, $l < m$. Jestliže do (2) dosadíme za k, n a zkrátíme d , máme

$$\alpha_k = \cos \frac{2l\pi}{m} + i \sin \frac{2l\pi}{m}. \quad (4)$$

Z posledního vztahu plyne, že $\alpha_k \in M_m$, tj. $\alpha_k^m = 1$ a že tedy α_k není primitivní n -tou odmocninou z jedné.

Poznámka 1. Jsou-li čísla k, n soudělná a platí (3), kde d je jejich největší společný dělitel, pak z vyjádření (4) plyne ($l < m$ jsou čísla nesoudělná), že α_k je primitivní m -tou odmocninou z jedné, přičemž ovšem v množině M_m má index l .

Věta 5. Je-li $\varepsilon \in M_n$ libovolně daná primitivní odmocnina, pak

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^n (= 1) \quad (5)$$

jsou právě všechny prvky množiny M_n .

D ů k a z. Podle věty 2 jsou všechna čísla (5) prvky M_n . Stačí ukázat, že jsou všechna vzájemně různá, tj. že pro libovolná r, s , kde $1 \leq r, s \leq n$, platí $\varepsilon^r \neq \varepsilon^s$. Užijeme metody důkazu sporem. Nechť např. $1 \leq s < r \leq n$ (tedy $1 \leq r - s < n$) a platí $\varepsilon^r = \varepsilon^s$. Po vynásobení této rovnosti číslem ε^{-s} máme $\varepsilon^{r-s} = 1$, což je ve sporu s předpokladem, že ε je primitivní odmocnina. Všechna čísla (5) jsou tedy navzájem různá, a ježto je jich n , jsou to právě všechny prvky množiny M_n .

Věta 6. Je-li $\alpha \in M_n$ libovolně daný prvek a $\varepsilon \in M_n$ libovolně daná primitivní odmocnina, pak

$$\alpha\varepsilon, \alpha\varepsilon^2, \alpha\varepsilon^3, \dots, \alpha\varepsilon^n (= \alpha) \quad (6)$$

jsou právě všechny prvky množiny M_n .

D ů k a z. Podle vět 1 a 2 jsou všechna čísla (6) prvky M_n . Další postup je analogický jako u důkazu předchozí věty.

Vraťme se nyní k původnímu problému hry n dívek s míčem. Umístíme tyto dívky do komplexní roviny na místa prvků množiny M_n .

Pravidla hry. Každé číslo $\alpha_k \in M_n$ určuje jedno pravidlo, a to takto: Násobit libovolné číslo $\alpha \in M_n$ číslem $\alpha_k \in M_n$ znamená otočit bod α kolem počátku (tj. po jednotkové kružnici) o úhel $\frac{2k\pi}{n}$ v kladném smyslu. Toto otočení realizujeme tak, že dívka α hodí míč dívce $\alpha\alpha_k$. Je-li $k = 0$, pak dívka α hodí míč sobě (tento případ nazveme *triviální*), je-li $k = 1$, hodí jej své sousedce vpravo, tj. pro $k \geq 1$ háže dívka α míč v kladném smyslu „přes $k - 1$ dívek“. Přitom ovšem „v kladném smyslu přes $k - 1$ dívek“ značí přesně totéž jak „v záporném smyslu přes $n - k - 1$ dívek“. Pravidlo takto definované číslem α_k dále nazýváme *pravidlo α_k* . Jestliže se tedy hra řídí pravidlem α_{n-1} , hodí každá dívka míč své sousedce vlevo.

Průběh hry. Nechť hru zahájí libovolně daná dívka α a nechť platí netriviální pravidlo α_k . Pak účastníci prvních n hodů jsou

$$\alpha, \alpha\alpha_k, \alpha\alpha_k^2, \alpha\alpha_k^3, \dots, \alpha\alpha_k^n (= \alpha); \quad (7)$$

vidíme, že další hra je už jen opakováním cyklu (7), neboť po n -tém hodu dostane opět míč dívka α . Jsou-li čísla k, n nesoudělná, pak podle věty 4 a 7 je prvních n čísel v (7) vzájemně různých a zahrají si tedy všechny dívky. Jsou-li k, n čísla soudělná a d je jejich největší společný dělitel, pak podle poznámky 1 a věty 7 si zahraje pouze $m = \frac{n}{d}$

dívek

$$\alpha, \alpha\alpha_k, \alpha\alpha_k^2, \dots, \alpha\alpha_k^{m-1},$$

zatímco ostatních $n - m$ dívek (jichž je $d - 1$ krát tolik) nečinně jejich hře přihlíží.

Uvažme nyní ještě otázku, jak souvisí počet dívek s počtem pravidel, za nichž si zahrají všechny.

Pro každé číslo n označme $\varphi(n)$ počet všech přirozených čísel menších než n a nesoudělných s n . Pro funkci $\varphi(n)$ (zvanou Eulerova funkce) lze sestavit tabulku:

Tabulka 2

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varphi(n)$	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12

(doplňte ji ještě pro několik dalšího hodnot n). Je-li p prvočíslo, pak zřejmě všechna čísla $k < p$ jsou s p nesoudělná, tedy $\varphi(p) = p - 1$. Pro $n \geq 3$ je $\varphi(n) \geq 2$, neboť s číslem n jsou vždy nesoudělná čísla 1 a $n - 1$.

Jestliže si tedy hraje n dívek, existuje $\varphi(n)$ pravidel α_k , za nichž si zahrají všechny, $n - \varphi(n) - 1$ pravidel, za nichž si nezahrají všechny, ale aspoň dvě z nich, a jedno triviální pravidlo 1, za jehož platnosti si hraje jedna z dívek sama. Je-li p prvočíslo, je $p - \varphi(p) - 1 = 0$, a neexistuje tedy netriviální pravidlo α_k , tak, že by si hrály jen některé z dívek.

Poznámka 2. Vrátime-li se k původní úloze, kde $n = 12$, pak lze na základě předchozích úvah říci toto: Ježto $\varphi(12) = 4$, existují 4 pravidla α_k , za nichž si zahrají všechny; dostaneme je pro $k = 1, 5, 7$ a 11 . Největší společný dělitel čísel 2 a 12 a též čísel 10 a 12 je roven dvěma, takže pro $k = 2$ a 10 si zahraje celkem $\frac{12}{2} = 6$ dívek. Podobně pro $k = 3$ a 9 si zahrají 4 dívky, pro $k = 4$ a 8 si zahrají 3 dívky a pro $k = 6$ pouze dvě. Pro $n = 13$ je odpověď zřejmá, neboť jde o prvočíslo.

Úloha. Rozeberte další případy, např. pro $n = 18, 20, 22$.

Literatura

[1] Korděmskij, B. A.- Matematické prostocviky, MF, Praha 1957.

Pět čtenářů

Pět chlapců — Bohouš, Karel, Milan,¹ Pavel a Standa — si z knihovny vypůjčili pět knížek. Byly to: Poklad od Jiráska, Krakatit od Čapka, Majerové Přehrada, Raisův Západ a Fimfárum od Wericha. Byly to knížky, které dosud nikdo z nich nečetl. Během týdne každý chlapec přečetl jednu knížku, pak se sešli, vyměnili si knížky a po dalším týdnu se opět sešli, aby si knížky vyměnili. Před výměnou se o knížkách bavili. Z jejich rozhovoru jsme zachytili těchto několik vět:

1. Milan vykládal veselé příběhy z knihy Fimfárum a vřele ji doporučoval Standovi.

2. Při té příležitosti Standa s Milanem přebalili knížku, kterou oba přečetli.

3. Poklad nečetl dosud ani Karel ani Standa.

4. Na Pavla hluboce zapůsobil tklivě psaný Západ; na Bohouše tolik nezapůsobil.

5. Karel a Standa si libovali, jaké pěkné chvílky prožívali při četbě Přehrad.

To je vše. A věříte, že tyto úryvky stačí k tomu, abyste zjistili, které knížky každý z nich přečetl? Je to snadné a my se těšíme, že nám brzy pošlete rozluštění.

S. H.

Mladí fotografové

Karel s Petrem si o prázdninách prohlížel výlohy s fotografickými aparáty. U jedné výkladní skříně najednou Petr povídal: „Podívej se, Kájo, tamty tři aparáty Praktina, Kodak a Mikroma jsou pěkně vedle sebe jako tomu bylo v těch dvou výlohách před tím.“ Karel se na chvíli zamyslel a pak odvětil: „Máš pravdu, ale v každé výloze je jiné pořadí, v jakém jsou aparáty umístěny. V žádné výloze ani jeden aparát není na tomtéž místě. Zde je např. Kodak napravo od Praktiny, v první výloze byla Praktina uprostřed a v druhé výloze byla Mikroma vlevo od Praktiny.“

A pro naše nejmenší čtenáře máme úlohu: Napište nám, v jakém pořadí byly umístěny fotografické aparáty v první výloze, v druhé a v třetí.

S. H.

Řešení úloh IX. Mezinárodní matematické olympiády ve dnech 3. až 12. července 1967 v Jugoslávii

DOC. JAN VYŠÍN, Praha

(Dokončení)

5. Budiž dána posloupnost

$$c_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_8,$$

$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2$$

$$c_n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_8^n,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_8$ jsou reálná čísla, ne všechna rovná nule. Necht' dále nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{c_n\}$ je rovno nule. Určete všechna přirozená čísla n , pro která je $c_n = 0$.

Ř e š e n í. a) Nejprve odvodíme tuto pomocnou větu **P**: Bud'te $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \beta$ ($\nu \geq 1$) taková kladná čísla, že $\alpha_1 < \beta, \alpha_2 < \beta, \dots, \alpha_\nu < \beta$. Pak pro všechna přirozená čísla n od určitého počínaje platí

$$\alpha_1^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_\nu^n < \beta^n \quad (14)$$

Skutečně, podle předpokladu jsou všechna čísla

$$\frac{\alpha_1}{\beta}, \frac{\alpha_2}{\beta}, \dots, \frac{\alpha_\nu}{\beta},$$

kladná a menší než 1. Podle známé vlastnosti exponenciální funkce existují tedy přirozená čísla $n_1, n_2, \dots, n_\nu$ tak, že platí pro všechna $n \geq n_1$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right)^n < \frac{1}{\nu} \quad (15)$$

pro všechna $n \geq n_2$

$$\left(\frac{\alpha_2}{\beta}\right)^n < \frac{1}{\nu}, \quad (15)$$

atd.; pro všechna $n \geq n_\nu$

$$\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta}\right)^n < \frac{1}{\nu}. \quad (15)$$

Sečtením nerovností (15) dostaneme nerovnost

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right)^n + \left(\frac{\alpha_2}{\beta}\right)^n + \dots + \left(\frac{\alpha_\nu}{\beta}\right)^n < \frac{\nu}{\nu} = 1,$$

neboli po znásobení číslem β^n nerovnost (14). Ta platí pro všechna $n \geq n_0$, kde n_0 je největší z čísel $n_1, n_2, \dots, n_\nu$.

b) Z předpokladu úlohy 5 ($a_1, a_2, \dots, a_s$ nejsou vesměs rovna nule) vyplývá, že $c_n > 0$ pro všechna *sudá* n . Dokážeme, že $c_n = 0$ pro všechna *lichá* n .

Nejprve vynecháme z čísel $a_1, a_2, \dots, a_s$ ta, která jsou rovna nule. Zbývající rozdělíme do dvou skupin: kladná označíme $p_1, p_2, \dots, p_r$, záporná — $q_1, -q_2, \dots, -q_s$. Podle podmínky úlohy platí

$$p_1^n + p_2^n + \dots + p_r^n - q_1^n - q_2^n - \dots - q_s^n = 0,$$

neboli

$$p_1^n + p_2^n + \dots + p_r^n = q_1^n + q_2^n + \dots + q_s^n \quad (16)$$

pro nekonečně mnoho lichých exponentů n .

Čísla $p_1, p_2, \dots, p_r$ i $q_1, q_2, \dots, q_s$ jsou kladná a můžeme předpokládat, že jsou uspořádána sestupně, tj. že platí

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r; \quad q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_s. \quad (17)$$

Kdyby bylo $p_1 > q_1$, bylo by podle (17) $p_1 > q_2, \dots, p_1 > q_s$. Podle pomocné věty **P** by pak platilo od určitého exponentu n

$$p_1^n > q_1^n + q_2^n + \dots + q_s^n,$$

a tím spíše

$$p_1^n + p_2^n + \dots + p_r^n > q_1^n + q_2^n + \dots + q_s^n$$

To znamená, že rovnost (16) by nemohla být splněna pro nekonečně mnoho lichých exponentů n .

Stejně jako jsme vyvrátili nerovnost $p_1 > q_1$, vyvrátíme i nerovnost $q_1 > p_1$; je tedy $p_1 = q_1$. Obdobně dokážeme dále, že je $p_2 = q_2, \dots, p_r = q_s$ ($r = s$). Rovnost (16) pak platí pro všechny liché exponenty n , tj. $c_n = 0$ pro všechna lichá n .

6. Při sportovní soutěži bylo rozděleno v n po sobě jdoucích dnech ($n > 1$) celkem m medailí. Prvního dne byla udělena 1 medaile a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících $m - 1$ medailí. Druhého dne byly uděleny 2 medaile

a $\frac{1}{7}$ ze zbývajících, atd. Posledního dne bylo uděleno posledních n medailí. Kolik dní trvala soutěž a kolik medailí bylo celkem rozděleno?

Ř e š e n í. Označme z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) počet medailí, které zbyly k -tého dne po udělení k medailí. Pak je

$$z_{k+1} = z_k - \frac{1}{7} z_k - k - 1 ,$$

neboli po úpravě

$$\frac{6}{7} z_k = z_{k+1} + k + 1 \quad (18)$$

Označme a_k počet medailí vydaných k -tého dne; pak je

$$a_k = k + \frac{1}{7} z_k . \quad (19)$$

Ze vzorců (18), (19) dostaneme snadno rekurentní vzorec pro a_k ; stačí napsat (19) pro $k + 1$

$$a_{k+1} = k + 1 + \frac{1}{7} z_{k+1} \quad (20)$$

a ze vzorců (19), (20), (18) vyloučit z_k, z_{k+1} ; vyjde po snadné úpravě

$$a_k = \frac{7}{6} a_{k+1} - 1 \quad (21)$$

Rozpíšeme-li rovnost (21) pro $k = 1, 2, \dots, n - 1$, dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{7}{6} a_2 - 1 , \\ a_2 &= \frac{7}{6} a_3 - 1 , \end{aligned} \quad (22)$$

$$a_{n-1} = \frac{7}{6} a_n - 1 .$$

Znásobíme-li rovnosti (22) po řadě čísla

$$1, \frac{7}{6}, \left(\frac{7}{6}\right)^2, \dots, \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}$$

a sečteme, dostaneme vzorec

$$a_1 = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} a_n - \left[1 + \frac{7}{6} + \dots + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}\right] ,$$

který po úpravě a po dosazení $a_n = n$ nabude tvaru

$$a_1 = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} (n - 6) + 6 \quad (23)$$

Vzorec (23) lze dokázat matematickou indukcí z rekurentní formule (21).

Protože je $n > 1$, plyne z (23), že číslo n je násobek šesti. Jedno řešení je $n = 6$, $a_1 = a_2 = \dots = a_6 = 6$, $m = 36$ [vypočteme z (22)].

Je-li $n > 6$, položíme $n = 6k$, kde k je přirozené číslo větší než 1. Pak koeficient $n - 6 = 6(k - 1)$ v (23) je dělitelný mocninou $6^{n-1} = 6^{6k-1}$. Protože pro každé $k > 1$ platí

$$6k - 1 > k - 1 ,$$

není koeficient $6(k - 1)$ dělitelný mocninou 6^{6k-1} .

Úloha má tedy jediné řešení $n = 6$, $m = 36$.

Klub mladých matematiků v Ostravě

Ve školním roce 1963/64 byl při Městském pedagogickém středisku v Ostravě ustaven „Klub mladých matematiků“. Jeho zřízení bylo motivováno snahou podchytit a zvýšit zájem o matematiku u žáků poslední třídy ZDŠ a pomoci řešitelům MO kategorie D.

Jeho členy se stávají žáci ZDŠ na návrh učitelů matematiky, a to nejčastěji po jednom žáku z každé deváté třídy v okrese Ostrava. Klub má zpravidla 60 členů. Po dobrých zkušenostech je od školního roku 1966/67 utvořen rovněž klub pro žáky 8. tříd ZDŠ.

Organizační stránku obstarává Městské pedagogické středisko ve spolupráci se členy pracovní skupiny pro matematiku. Náplň práce a její plnění obstarávají dva členové JČMF, přičemž jeden z nich se specializuje na aritmetiku a algebru, druhý na geometrii. V aritmetice a algebře se probírá v 8. třídě: číselné soustavy, dělitelnost, rovnice, nerovnosti, absolutní hodnota, číselné obory. V 9. třídě: rovnice s parametrem, rozklady polynomů, kvadratické rovnice. V geometrii se prohlubuje a rozšiřuje látka probíraná ve škole, a to hlavně po konstruktivní stránce. Zdůrazňuje se správné vyjadřování po stránce odborné i jazykové. V 8. třídě se probírá: Pythagorova věta, shodnost, geometrické místo bodů, konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků, pravidelné mnohoúhelníky, parabola jako g. m. b., některé úlohy z MO kat. D. V 9. třídě: podobnost jako zobrazení, stejnolehlost, základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi, stereometrické úlohy.

Schůzky klubu se konají pravidelně, a to jednou za měsíc. Při práci jsou žáci rozděleni do dvou skupin. Navíc se organizuje každoročně o pololetních prázdninách — letos též o jarních prázdninách — týdenní soustředění všech účastníků klubu ve škole v přírodě v Beskydech. Na tomto soustředění je dopoledne věnováno matematice, odpoledne sportovnímu vyžití žáků — lyžování, sáňkování, hry — za odborného pedagogického vedení. Večer se obvykle promítají filmy a konají přednášky se sportovní tematikou. Rovněž se zde tradičně pořádá soutěž v řešení příkladů z probrané látky a nejúspěšnější řešitelé jsou odměňováni matematickou literaturou přiměřenou jejich věku.

Tato soustředění jsou financována odborem školství a kultury MěstNV v Ostravě za přispění SRPŠ příslušných ZDŠ.

O členství v klubu je veliký zájem nejen ze strany žáků a učitelů, ale hlavně ze strany rodičů, kteří oceňují rozšiřování a prohlubování znalostí v matematice jako dobrou přípravu pro další studium na

středních školách. Důkazem zájmu je např. v letošním roce dvojnásobný počet přihlášených žáků, takže musel být proveden užší výběr, což navíc přispělo ke zvýšení úrovně práce a znalostí.

Na základě zkušeností a výsledků z pětileté činnosti lze konstatovat, že tento klub přispívá k rozšíření a prohloubení zájmu o matematiku u žáků ZDŠ a ovlivňuje i jejich volbu a zájem o technické studium na středních i vysokých školách.

Dobré výsledky práce ostravského klubu podnítily rovněž zájem o zřízení podobného klubu v okrese Karviná ve školním roce 1966/67.

O. L.

RECENZE

Trojuholník

DUBEC ANTON

Klúč na riešenie geometrických úloh. Bratislava: SPN 1967. 231 strán, cena Kčs 7,50, brož.

Z pera skúseného metodika matematiky vychádza v edícii „Knižnica všeobecného vzdelania“ knižka, ktorá iste zaujme mnohých čitateľov a uvedie ich do praxe tvorivého používania trojuholníka pri riešení rôznych geometrických úloh.

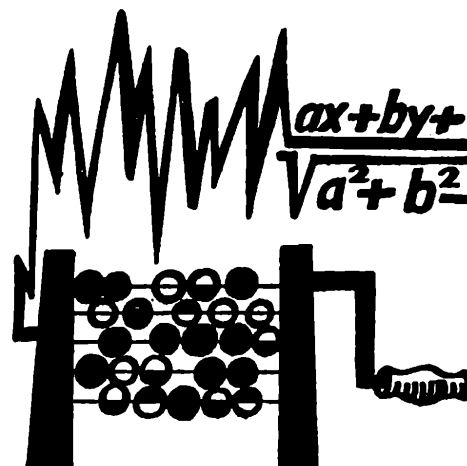
Autor neopakuje teóriu, ktorá sa preberá na hodinách geometrie, ale len úvodom k jednotlivým kapitolám uvádza najdôležitejšie poučky a vzorce. Potom uvádza príklady na typické použitie poučiek a vzorcov a po nich nasledujú metodicky usporiadané cvičenia, na ktorých každý čitateľ môže si brúsiť úsudok a zdokonaľovať sa v metódach riešenia úloh rôznych typov.

Autor v knižke sa zameria na tieto problémy z geometrie: zhodnosť trojuholníkov, použitie trojuholníka na výpočty a konštrukcie v stereometrii, trojuholníkové nerovnosti, počítanie s uhlami, podobnosť, pričky v trojuholníku, množiny bodov s danou vlastnosťou, riešenie úloh s výpočtom, úlohy o čiarach prechádzajúcich jedným bodom, niekoľko zvláštnych úloh. Na konci knihy sú uvedené výsledky, poprípade stručné riešenie cvičení.

Knižka je vhodnou pomôckou pre všetkých záujemcov o stredoškolskú geometriu. Dobré môže poslúžiť pri opakovaní geometrie pred maturitnou skúškou, poprípade pri iných príležitostiach, pretože obsahuje veľké množstvo príkladov a cvičení.

Vrele ju mladým čitateľom doporučujeme.

O. Š.



0 jednom grafickém řešení kvadratické rovnice

DOC. VÍTĚZSLAV JOZÍFEK, ČVUT Praha

Kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ pro $a > 0$ řešíme na střední škole graficky zřídka. To proto, že bychom museli rýsovat parabolu o rovnici $y = ax^2 + bx + c$ a určovat její průsečíky s osou x . Ale grafické určení průsečíku přímky s parabolou je přesné jen užitím fokálních vlastností paraboly.

Již od dob Descartesových se hledaly možnosti upravit grafické řešení této rovnice tak, aby bylo převedeno na určení průsečíku přímky s kružnicí. Jedno z takových řešení je uvedeno v Přehledu elementární matematiky (Hruša a kolektiv, SNTL, 1957, str. 321).

Provedme diskusi řešení při jiné volbě pomocné kružnice, než se uvádí v citovaném Přehledu.

I postup při naší volbě kružnice může být různý, podle toho, jaké znalosti z geometrie předpokládáme. Pokusím se ukázat více možností, z čeho vycházet a jak uvažovat.

A. Je dána rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ pro $a > 0$ a hledejme podmínky pro koeficienty b, c , aby daná rovnice měla dva kladné různé kořeny.

Umluvme si, že pomocná kružnice bude vždy obsahovat bod $A \equiv (0, 1)$.

Kružnice obr. 1 protíná osu x ve dvou různých bodech $X_1 \equiv (x_1, 0)$, $X_2 \equiv (x_2, 0)$ na téže kladné poloose x . Kořeny x_1, x_2 rovnice splňují danou podmínku, platí $x_1 > 0, x_2 > 0$.

Z trojúhelníku SAM plyne

$$r^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + (y_s - 1)^2,$$

kde y_s je délka úsečky SK .

Z trojúhelníku SKX_1 plyne

$$r^2 = \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)^2 + y_s^2;$$

odečtením obou rovnic a po úpravě

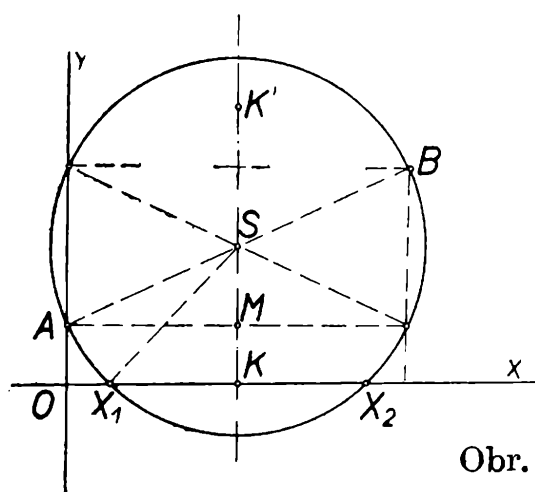
$$2y_s = x_1x_2 + 1$$

Z obr. 1

$$2y_s = y_A + y_B,$$

tj.

$$y_B = 2y_s - 1 = x_1x_2.$$



Obr. 1

Tudíž

$$B \equiv (x_1 + x_2, x_1x_2)$$

a

$$S \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1x_2 + 1}{2} \right)$$

Budeme dále předpokládat znalosti vlastností kořenových činitelů

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

a ze srovnání s tvarem rovnice

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

vyplnou rovnosti

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Potom

$$B \equiv \left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right), \quad S \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{a+c}{2a} \right)$$

Aby protála kladná poloosa x kružnici v obr. 1 ve dvou různých bodech, musí být vzdálenost středu S kružnice od osy x menší než poloměr, tj. musí

$$|y_s| < r, \text{ neboli } \left| \frac{x_1 x_2 + 1}{2} \right| = \frac{x_1 x_2 + 1}{2} < r$$

Je

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + (|y_s| - 1)^2 = \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\frac{c - a}{2a} \right)^2 = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}{4a^2} \end{aligned}$$

a podmínka $|y_s| < r$ vede po úpravě k nerovnosti

$$b^2 - 4ac > 0$$

Máme výsledek: Existují-li různé kladné kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a > 0$, potom platí $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ a $b^2 - 4ac > 0$. Podmínku pro koeficienty téže kvadratické rovnice, má-li tato rovnice dva různé záporné kořeny, si čtenář odvodí sám.

Je otázka, zda platí také obráceně: Jestliže v kvadratické rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, je $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ a $b^2 - 4ac > 0$, má rovnice dva různé kladné kořeny.

O tom by bylo možno se přesvědčit zpětným postupem k předchozímu postupu a k tomu příslušnou úvahou, ale také ze vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jestliže $b^2 - 4ac > 0$, jsou kořeny reálné. Přitom $b^2 - 4ac < b^2$, neboť $4ac > 0$ a je tedy

$$\sqrt{b^2 - 4ac} < |b|$$

Poněvadž $b < 0$, je $-b > 0$. Kořen

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

je bezesporu kladný. Ale je také

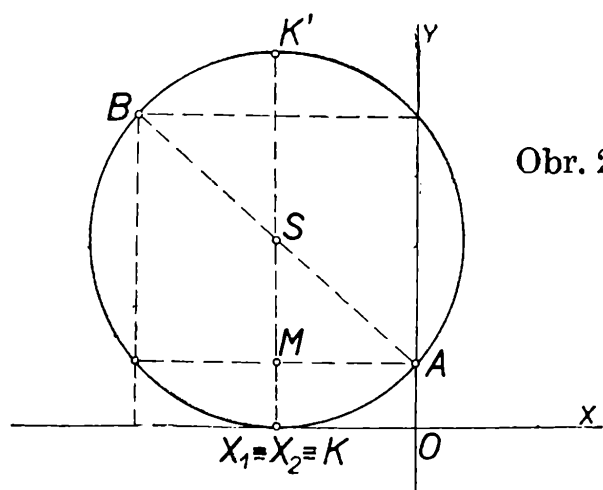
$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0,$$

jak plyne ze shora odvozených nerovností, neboť odčítáme od kladného čísla $-b$ kladné číslo menší. Můžeme tedy říci: Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má dva různé kladné kořeny právě tehdy (tehdy a jen tehdy), když platí $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac > 0$.

Čtenář si odvodí sám také platnosti obrácené věty pro případ dvou záporných různých kořenů.

B. Předpokládejme nyní, že oba kořeny jsou sobě rovny a že jsou pro změnu záporné.

Platí: $x_1 = x_2$, $x_1 < 0$. Potom průsečíky kružnice s osou x jsou $X_1 = X_2$, kde $X_1 \equiv (x_1, 0)$.



Z trojúhelníku SAM (obr. 2) plyne

Obr. 2. $r^2 = x_1^2 + (r - 1)^2,$

z toho

$$2r = x_1^2 + 1,$$

$$y_B = 2r - 1 = x_1^2,$$

$$x_B = 2x_1, \quad B \equiv \left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right), \quad S \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{a+c}{2a}\right).$$

Je tedy

$$x_1^2 = x_2^2 = \frac{c}{a} > 0,$$

neboť je $x_1^2 > 0$, a tedy $c > 0$, $a > 0$

$$x_s = \frac{1}{2} x_B = \frac{-b}{2a} < 0,$$

neboť je $x_s < 0$ a tedy také $-b < 0$, neboli $b > 0$.

Dále platí $x_1 = x_s$, neboť kružnice se dotýká osy x a tedy plyne z $|y_B| = x_1^2$ rovnost

$$\frac{c}{a} = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2$$

neboli

$$b^2 - 4ac = 0$$

Poslední vztah se dá odvodit i z rovnosti $|y_s| = r$, do níž bychom dosadili již známý vzorec pro

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}{4a^2}$$

Pro $x_1 = x_2 > 0$ platí $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac = 0$. Zbývá otázka, zda každá rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde je $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$,

$b^2 - 4ac = 0$ má dva záporné stejné kořeny $x_1 = x_2$. Že platí obrácená věta: Rovnice $ax^2 = bx + c = 0$ má dva stejné záporné kořeny, jestliže $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ a $b^2 - 4ac = 0$, odvodíme, sledujeme-li předchozí úvahu v obráceném směru, nebo z úvahy: Je-li $b^2 - 4ac = 0$ potom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}.$$

Poněvadž je $b > 0$, platí $x_1 = x_2$, $x_1 < 0$.

Podobně by se odvodila obrácená věta pro kořeny $x_1 = x_2$, $x_1 > 0$ naší rovnice.

C. Další případ jsou dva různé reálné kořeny, jeden kladný a druhý záporný.

V obr. 3 jsme volili případ $x_1 > |x_2|$, kde $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. Postup odvození by byl obdobný jako v předchozích dvou případech.

Z trojúhelníků

$$SAM : r^2 = \left(\frac{x_1 - |x_2|}{2} \right)^2 + (|y_s| + 1)^2$$

$$SKX_1 : r^2 = \left(\frac{x_1 + |x_2|}{2} \right)^2 + |y_s|^2,$$

kde $|x_2| = -x_2$, neboť $x_2 < 0$.

Odečtením obou rovnic a úpravou máme

$$B \equiv (x_1 + x_2, x_1 x_2), \quad B \equiv \left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right)$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0,$$

tj.

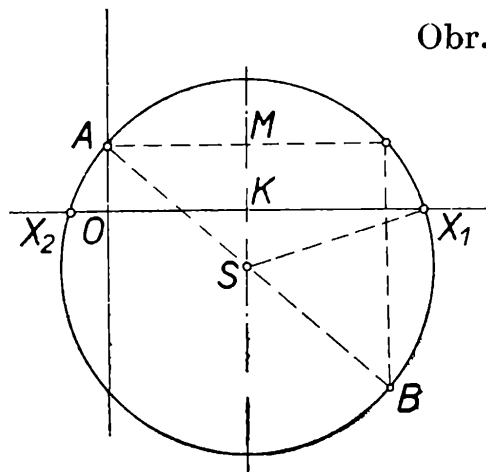
$$b < 0, a > 0,$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0,$$

tj.

$$c < 0, a > 0.$$

Z podmínky, že kružnice protíná osu x ve dvou různých bodech, plyne $b^2 - 4ac > 0$. Pro náš případ $x_1 > |x_2|$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ platí: v rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ bude $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $b^2 - 4ac > 0$. Platí rovněž obrácená věta, jak si čtenář sám odvodí.



Obr. 3

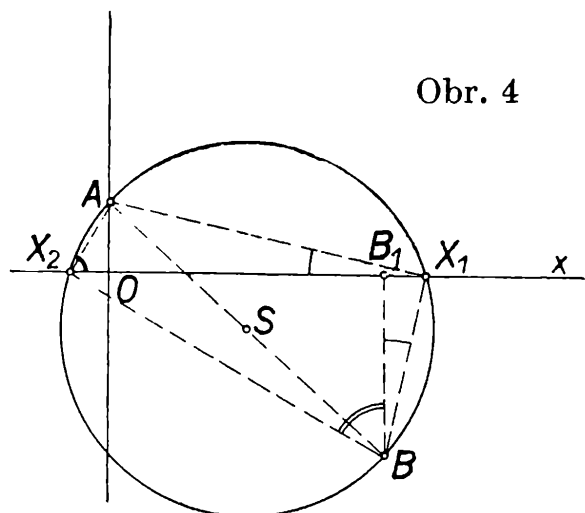
Právě tak je možno si odvodit pro případ $x_1 < |x_2|$ platnost $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $b^2 - 4ac > 0$ v rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ a také obráceně.

Bylo by možno odvodit tyto a všechny zde uváděné případy bez znalostí vlastností kořenových činitelů, jen užitím vlastností podobnosti trojúhelníků.

Z obr. 4 plyne

$$\sphericalangle OX_1A = \sphericalangle B_1BX_1$$

(úhly ostré s rameny k sobě kolmými).



Obr. 4

Platí dále

$$B_1X_1 = OX_1 - OB_1,$$

$$\triangle OX_1A \sim \triangle B_1BX_1;$$

odtud

$$OX_1 : OA = B_1B : (OX_1 - OB_1),$$

neboli

$$OX_1^2 - OB_1 \cdot OX_1 = OA \cdot B_1B$$

Položíme-li

$$OX_1 = x_1, B_1B = |y_B| = -y_B, \quad OA = 1, OB_1 = x_B$$

a dosadíme do předchozí rovnosti, dostaneme

$$x_1^2 - x_B x_1 + y_B = 0$$

Dále platí z obr. 4

$$\triangle OX_2A \sim \triangle B_1BX_2$$

a odtud obdobně po úpravě

$$x_2^2 - x_B x_2 + y_B = 0$$

Čísla x_1, x_2 jsou kořeny rovnice

$$x^2 - x_B x + y_B = 0$$

a srovnáním s rovnicí

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad B \equiv \left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right)$$

Další postup by byl shodný s postupem naznačeným v případě C.

D. Neprotne-li kružnice osu x , nemá rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ reálné kořeny. Podmínky pro koeficienty odvodíme z obr. 5.

Je-li opět

$$A \equiv (0, 1), \quad B \equiv \left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$$

je rovněž*

$$S \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{a+c}{2a}\right)$$

Potom je $r < |y_S|$ a tedy

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}{4a^2}} < \left|\frac{a+c}{2a}\right|,$$

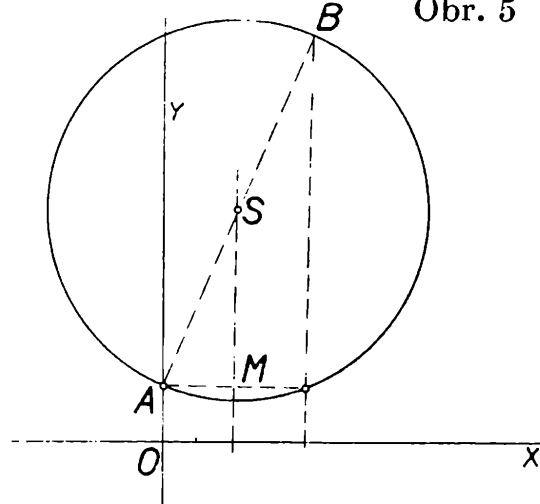
neboli po úpravě $b^2 - 4ac < 0$.

Pro případ v obr. 5 platí: v rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ je $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

Obráceně je podmínka $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ pro neplatnost reálných kořenů očividná.

Úvahy v článku postupovaly obráceně, než bývá při výkladu kvadratické rovnice. Přitom jsme každou větu obraceli. Cílem článku bylo řešit graficky rovnici jednoduše a přesně, dovedeme-li sestrojiti přesně průsečíky přímky s kružnicí a také zopakovat vlastnosti kvadratické rovnice podrobnějším rozhořem.

Obr. 5



Praktické užití Bernoulli-Whittakerovy metody při řešení algebraických rovnic vyšších stupňů

IVAN CHAJDA, studující PU, Olomouc

Úvod

Tímto článkem navazují na články o numerických metodách řešení algebraických rovnic vyšších stupňů, uveřejněné v loňských Rozhledech matematicko-fyzikálních.

Bernoulli-Whittakerova metoda patří mezi numerické metody řešení rovnic. Zatímco algebraické metody dávají vzorec, podle něhož můžeme

určit kořeny, metody numerické ve většině případů určují algoritmus, kterým nezjistíme sice přesnou hodnotu kořenů, ale dovedeme kořeny určit s danou přesností (tj. na určený počet desetinných míst).

Tato metoda, na rozdíl od metody regula falsi a Newtonovy (Rozhledy, roč. 44, č. 6) nevyžaduje separaci (oddělení) kořenů, a proti metodě Shinh-Nge Linově (Rozhledy, roč. 44, č. 3) je podstatně jednodušší.

Užitím Bernoulli-Whittakerovy metody ovšem vypočítáme co do absolutní hodnoty největší kořen rovnice

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 = 0, \quad (1)$$

a to jen v případě, že je „dostatečně vzdálen“ od ostatních a není vícenásobný nebo imaginární. Ovšem, užijeme-li substituce $x = \frac{1}{y}$

kde x byla neznámá v rovnici (1), určíme kořen s nejmenší absolutní hodnotou. Známe-li již jeden kořen, můžeme snížit stupeň rovnice, dělíme-li k ní příslušný polynom činitelem $(x - x_1)$, kde x_1 je známý kořen. Pak buď dospějeme k rovnici, kterou umíme algebraicky řešit (je-li stupně nižšího než pátého), nebo dále užijeme jiných numerických metod, popřípadě opakujeme Bernoulli-Whittakerovu metodu.

Předností následující metody je její jednoduchost, takže ji lze schematizovat a výhodně použít například při uplatnění samočinných počítačů.

Obecný postup řešení

Bernoulli-Whittakerova metoda je zvláště výhodná při užití tzv. pohyblivého proužku.

Nechť je dána algebraická rovnice n -tého stupně (1), kde $b_n \neq 0$. Normováním dostáváme

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (2)$$

$-a_0$	$-a_0$	y_{-n+1}
$-a_1$	$-a_1$	y_{-n+2}
$-a_2$	$-a_2$	y_{-n+3}
	$\vdots$	
$-a_{n-2}$	$-a_{n-2}$	y_{-1}
$-a_{n-1}$	$-a_{n-1}$	y_0

Obr. 1

Obr. 2

Nyní na svislý proužek papíru napíšeme shora dolů koeficienty rovnice (2) v pořadí $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ a s obrácenými znaménky. Viz obr. 1. Pak na list papíru napíšeme pod sebe do svislého sloupce n libovolných čísel. Označme tato čísla

$$y_{-n+1}, y_{-n+2}, y_{-n+3}, \dots, y_{-1}, y_0.$$

Zleva k tomuto sloupci přiložíme svislý proužek tak, aby první z těchto čísel leželo vedle koeficientu $-a_0$ na proužku, druhé číslo vedle $-a_1$ atd. Viz obr. 2.

Nyní vynásobíme každé z čísel y koeficientem stojícím vlevo od něho na pohyblivém proužku a všechny součiny sečteme.

Označme součet y_1 . Pak zřejmě platí

$$y_1 = -a_0 y_{-n+1} - a_1 y_{-n+2} - \dots - a_{n-2} y_{-1} - a_{n-1} y_0.$$

Toto číslo y_1 napíšeme do svislého sloupce pod číslo y_0 . Pak posuneme pohyblivý proužek o jeden řádek dolů a celý postup opakujeme. Vždy násobíme veličiny

$$y_k \quad (k = -n+1, -n+2, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

s koeficienty, které stojí na pohyblivém proužku vedle vlevo, součiny sečteme a výsledek napíšeme pod číslo y_k . Platí tedy

$$y_{i+1} = -a_0 y_{i-n+1} - a_1 y_{i-n+2} - \dots - a_{n-2} y_{i-1} - a_{n-1} y_i$$

pro $i = 0, 1, 2$

Takto dostáváme sloupec veličin y_k . Odtud již snadno určíme kořen x_1 . Platí totiž

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{y_{i+1}}{y_i} = x_1 \quad (3)$$

Utvořme podíly $\frac{y_{i+1}}{y_i}$ po sobě následujících čísel y_{i+1} a y_i . Do vedlejšího svislého sloupce zapisujeme tyto údaje.

Po určitém počtu takto vykonaných kroků zjišťujeme, že čísla

$$x_{1i} = \frac{y_{i+1}}{y_i}$$

se od sebe liší jen nepatrně. Stanovíme, s jakou přesností potřebujeme znát kořen x_1 , například na 4 desetinná místa. Pak hodnoty x_{1i} zaokrouhlíme na daný počet desetinných míst (v našem případě na 4) a když zjišťujeme, že po sobě následující čísla x_{1i} se již po zaokrouhlení od sebe neliší, stanovíme x_{1j} kořenem x_1 naší rovnice.

Poznámka 1. Čísla $y_{-n}, y_{-n+1}, \dots, y_0$ můžeme sice volit libovolně, ale přesto mohou někdy ovlivnit výsledek, a to tak, že nezjistíme největší (v absolutní hodnotě) kořen, ale až další kořen x_2 , nebo x_3 atd. Abychom se této nepříjemné situaci vyhnuli, je výhodná tzv. modifikace Hildebrandova. Položíme

$$y_{-n} = y_{-n+1} = \dots = y_{-1} = 0 \text{ a } y_0 = m,$$

kde m je při prvním kroku 1, při druhém 2 atd. Tato modifikace zaručuje, že popsaná metoda vždy vede k cíli.

Poznámka 2. Ukáže-li se v průběhu výpočtu, že podíl $\frac{y_{i+1}}{y_i}$ neustále

osciluje, aniž by se blížil k nějaké hodnotě x_{1j} , pak lze očekávat, že kořen s největší absolutní hodnotou je imaginární, a tudíž je porušen jeden z předpokladů naší metody.

Poznámka 3. Správnost tvrzení (3) nelze prokázat zcela elementární cestou. Důkaz lze najít například v knize Děmidoviče-Marona: Základy numerické matematiky, SNTL, Praha 1966, s. 211.

Příklad. Užitím metody Bernoulli-Whittakerovy řešte rovnici

$$3x^3 - 12x^2 + 6x - 24 = 0$$

s přesností na 4 desetinná místa.

Řešení. Rovnici normujeme na tvar

8
-2
4

Obr. 3 $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = 0$

a zhotovíme pohyblivý proužek (viz obr. 3) s následující tabulkou. Pak počítáme Hildebrandovou modifikací

y_i	x_{1i}	x_{1i}
0		zaokrouhleno
0		na 4 desetinná
m		místa
4		
12		
64		
264	4,125	
1 024	3,878 7	
4 080	3,984 375	3,9844
16 384	4,015 682 74	4,0157
65 568	4,001 953 125	4,0020
262 144	3,998 047 828	3,9980
1 048 512	3,997 558 590	3,9976
4 194 304	4,000 244 125	4,0002
16 777 344	4,000 030 517	4,0000
67 108 864	3,999 969 482	4,0000

Tedy největší kořen je $x_1 = 4,0000$.

Dělením příslušného polynomu dostáváme

$$(x^3 - 4x^2 + 2x - 8) : (x - 4) = x^2 + 2.$$

Z rovnice $x^2 + 2 = 0$ určíme zbývající kořeny

$$x_2 = i\sqrt{2}, x_3 = -i\sqrt{2}.$$

Tím je naše úloha rozřešena.

Upravíme

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) = 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + n.$$

Použijeme-li S_2 a (1), dostaneme výsledek

$$S'_2 = \frac{1}{3} n \cdot (4n^2 - 1)$$

3. Podobně dostaneme

$$\begin{aligned} S''_2 &= \sum_{k=1}^n (2k)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \\ &= \frac{2}{3} n (n+1) (2n+1) \end{aligned}$$

4.

$$S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Podle (2) platí

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 \quad (3)$$

Z (3) dostaneme postupným dosazováním za a rovnosti

$$\begin{aligned} 1^4 &= 1, \\ 2^4 &= 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1, \\ 3^4 &= 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1, \\ 4^4 &= 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1, \\ &\dots\dots\dots \\ (n+1)^4 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \end{aligned} \quad (II)$$

Porovnáme-li součet pravých stran se součtem levých stran (II), dostaneme

$$\sum_{k=1}^n k^4 + (n+1)^4 = 1 + \sum_{k=1}^n k^4 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n. \quad (4)$$

Použijeme-li S_1 , S_2 , obdržíme z rovnice (4)

$$S_3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

5.

$$S'_2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$$

Platí podle (2)

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = \sum_{k=1}^n (8k^3 - 12k^2 + 6k - 1) = 8S_3 - 12S_2 + 6S_1 - n.$$

Tedy

$$S'_2 = 2n^2 (n+1)^2 - 2n (n+1) (2n+1) + 3n (n+1) - n.$$

Odstraněním závorek a sloučením vychází

$$S'_3 = n^2 (2n^2 - 1)$$

6. Použijeme-li vztahu

$$(a + 1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$$

dostaneme obdobně

$$S_4 = \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30} n (n + 1) (2n + 1) (3n^2 + 3n - 1)$$

Mohli bychom pokračovat dále. Dostali bychom tak vztahy pro S_5 , S_6 , Platnost všech uvedených vztahů se dá dokázat matematickou indukcí.

P o z n á m k a. Součty S_i patří mezi aritmetické řady vyššího stupně. Všimneme-li si výsledků pro S_i , vidíme, že součet S_i je mnohočlenem stupně $(i + 1)$ -ho. Můžeme tedy psát

$$S_i = a_{i+1} n^{i+1} + a_i n^i + a_{i-1} n^{i-1} + \dots + a_1 n.$$

Absolutní člen a_0 je rovný nule, jelikož pro $n = 0$ je $S_i = 0$.

K výpočtu S_i stačí určit koeficienty a_{i+1} , a_i , ..., a_1 . Např. pro S_2 dostáváme

$$S_2 = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n \tag{5}$$

Pro

$$n = 1: S_2 = 1 = a_3 + a_2 + a_1,$$

$$n = 2: S_2 = 5 = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1, \tag{6}$$

$$n = 3: S_2 = 14 = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1.$$

Řešením soustavy (6) určíme a_1 , a_2 , a_3 a dosazením do (5) dostaneme

$$S_2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$$

Podrobněji se o této metodě dočtete v článku Karla Kunce „Součty mocnin přirozených čísel, Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 39, č. 9, nebo v brožuře A. I. Markuševiče, Rekurentní posloupnosti.

Dělení tabulkami

VLASTIMIL MRÁZ, VÚOŠ Praha

Moderní život nutí k zjednodušování výpočtářské praxe, zvláště tam, kde jde o časté počítání. Některé často se vyskytující hodnoty jsou sestaveny v tabulkách, např. druhé a třetí mocniny nebo odmocniny, tabelovány jsou obvody a obsahy kruhu, převrácené hodnoty čísel atd. Však jste s některými tabulkami i sami pracovali. K numerickým výpočtům se v praxi používá logaritmických pravítek, počítacích strojů a jiných prostředků. K často se opakujícím zvláště rozsáhlým výpočtům jednotvárného charakteru, se konstruují kótované výpočtové grafy, zvané nomogramy. V tomto článku chceme čtenáře seznámit s tabulkou, která umožní nahradit obtížnější algoritmus dělení pouhým sečtením tabulkových hodnot.

Tabulka násobků převrácených čili reciprokých čísel, která je dále uvedena, obsahuje k číslům $x = 11, 12, 13, \dots, 98, 99$ násobky jejich převrácených čísel $y = \frac{a}{x}$ pro $a = 10, 20, 30, \dots, 80, 90$ vypočtené na desetitisíciny. K těmto hodnotám v tabulce uvedeným ještě poznamenejme: pruh nad pětkou ($\bar{5}$) značí, že vznikla zaokrouhlením nahoru, a tedy se z ní nebere oprava; tečka nad pětkou ($\dot{5}$) označuje, že za touto pětkou následují jen nuly. Vyhledávání v tabulkách je jednoduché; např. číselnou hodnotu zlomku $\frac{70}{47} \doteq 1,4894$ vyhledáme na řádku, vlevo označeném dělitelem 47, ve sloupci, který je v záhlaví nadešpsán $\frac{70}{x}$

Nyní přistupme k výkladu o tom, jak používat tabulky násobků převrácených čili reciprokých čísel. Učiníme tak na tomto příkladu:

Stanovte podíl $843,9 : 47$.

Zapíšeme-li dělence a dělitele zlomkem, můžeme onen zlomek napsat jako součet čtyř zlomků se jmenovatelem 47, kde v čitateli jsou mocniny deseti

$$\frac{843,9}{47} = \frac{800}{47} + \frac{40}{47} + \frac{3}{47} + \frac{0,9}{47}$$

čili

$$\frac{843,9}{47} = 10 \cdot \frac{80}{47} + 1 \cdot \frac{40}{47} + 0,1 \cdot \frac{30}{47} + 0,01 \cdot \frac{90}{47} \quad (\text{a})$$

Čísla

$$\frac{80}{47} \doteq 1,7021, \frac{40}{47} \doteq 0,8511, \frac{30}{47} \doteq 0,6383 \text{ a } \frac{90}{47} \doteq 1,9149$$

vyhledáme v uvedené tabulce na jediném řádku, a to v průsečíku řádku 47 a sloupců po řadě

$$\frac{80}{x}, \frac{40}{x}, \frac{30}{x} \text{ a } \frac{90}{x}$$

Vzhledem k mocninám deseti, které jsou koeficienty u jednotlivých zlomků na pravé straně vztahu (a), píšeme tabulkové hodnoty pod sebe, vždy o jedno místo vpravo. Uvádí to oba následující zápisy

$$\begin{array}{r} 843,9 \quad 47 \\ \hline 17,021 \\ 0851 \\ 064 \\ 19 \\ \hline 17955 \end{array}$$

nebo

$$\begin{array}{r} 843,9 \\ : 47 \\ \hline 17,021 \\ 0,851 \\ 064 \\ 19 \\ \hline 17,955 \end{array}$$

provedeme-li algoritmem

$$843,9 \quad 47 = 17,9551.$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ 449 \\ 260 \\ 250 \\ 50 \\ 3 \end{array} \quad (b)$$

Povšimněte si, že částečné podíly, psané vždy o řádku níže, stojí o jedno místo dále vpravo. Poslední číslice těchto podílů, které jsou na místě nižších řádů než má částečný podíl (sčítanec) na prvním řádku, nepíšeme, popř. z těchto vynechaných číslic bereme opravu. Desetinnou čárku stačí napsat jen v prvním částečném podílu a z toho je patrné i umístění desetinné čárky v součtu. Tento součet je hledaným podílem čísel $843,9 : 47 = 17,955$. Stanovení desetinné čárky je snadné, uvědomíme-li si, že hodnota zlomku $\frac{800}{47}$ je desetkrát větší

než hodnota zlomku $\frac{80}{47} = 1,7021$, kterou uvádí tabulka. Snad někomu bude lépe vyhovovat, uvedeme-li desetinnou čárku v částečném podílu, u kterého je koeficient ve vztahu (a) číslo 1; v našem příkladě

v podílu $\frac{40}{47}$, tedy ve druhém řádku, jak je shora uvedeno vprostřed u (b).

Porovnáme-li podíl, který jsme získali sečtením tabulkových hodnot s podílem získaným užitím algoritmu dělení, jak je uvedeno na pravé straně u (b), shledáme, že prvních pět cifer podílu se shoduje. Pro běžné výpočty to je přesnost zcela postačující. Tato přesnost je dokonce větší než při stanovení podílu logaritmickým pravítkem o modulu 25 cm. Při užívání tohoto způsobu dělení (sčítání tabulkových čísel zapisovaných pod sebe vždy o jedno místo vpravo) můžeme zapisovat dělence a dělitele pod sebe, podobně jako při sčítání, odčítání a násobení, jak jsme tohoto způsobu již výše užili. [Viz u (b).]

Pro cvičení připojujeme několik příkladů, abychom na nich současně ukázali některé obraty, které popř. ještě a) zvýší přesnost, b) zjednoduší výpočet, c) umožní vyčíslit součet několika zlomků o různém jmenovateli jediným zápisem.

Proveďte:

a) $936,85 : 32 =$,

b) $3998 : 67 =$,

c) $\frac{220}{57} + \frac{571}{78} + \frac{93,1}{29} =$

Řešení (doporučujeme, abyste si výpočty skutečně provedli):

a) $936,85$
 $: 32$

$$\begin{array}{r} 28,125 \\ 0\ 9375 \\ 1875 \\ 250 \\ 15625 \\ \hline 29,2765625 \end{array}$$

b) 3998
 67

$$\begin{array}{r} 05970 \\ -0,03 \\ \hline 59,67 \end{array}$$

c) $\frac{230}{57} + \frac{571}{78} + \frac{93,1}{29}$

$$\begin{array}{r} 03\ 509 \\ 0,526 \\ 06,410 \\ 0\ 897 \\ 013 \\ 3,103 \\ 03 \\ \hline 14,564 . \end{array}$$

Zjistili jsme, že v příkladu a) jsme určili zcela přesný podíl, který je zapsán devíti ciframi. V příkladě b) jsme vystačili se dvěma částečnými podíly, ač dělenec je čtyřciferný. Příklad c) ukazuje, že je možno, nezajímají-li nás částečné hodnoty jednotlivých zlomků, získat výsledek jako součet jediného sloupce číselných hodnot.

Čtenář si jistě všiml, že tabulka je sestavena jen pro stanovení podílu, je-li dělitel dvojciferný, popř. i víceciferný a jde krácením na dělitele dvojciferného převést, jak je tomu třeba v tomto příkladě

$$\frac{4962}{174} = \frac{2481}{87}$$

Trojciferný dělitel by vyžadoval tabulky převrácených čísel $y = \frac{a}{x}$

pro $x = 101, 102, 103, \dots, 998, 999$ a pro $a = 10, 20, 30, \dots, 80, 90$.

Mnohý z vás si jistě povšiml tabulek převrácených čísel $y = \frac{1}{x}$

kde x je trojciferné číslo (bývají v některých početních tabulkách). Tyto tabulky umožňují obtížnější dělení přenést na snazší násobení, jak vyplývá z posledního příkladu.

Stanovte podíl $\frac{373}{237}$

Ř e š e n í. Podíl můžeme zapsat jako součin takto

$$\frac{1}{273} \cdot 373.$$

V tabulkách vyhledáme k číslu 273 jeho reciprokou hodnotu, která je zaokrouhlena na pět platných cifer 0,0042194. Nyní provedme výpočet

$ \begin{array}{r} 0,0042194 \\ \cdot 373 \\ \hline 126582 \\ 295358 \\ 126582 \\ \hline 1,5738362, \text{ tj. } 1,5738; \end{array} $	$ \begin{array}{r} 0,422 \\ \cdot 373 \\ \hline 1266 \\ 2954 \\ 1266 \\ \hline 1,57406, \text{ tj. } 1,57 \end{array} $
---	--

(c)

Většinou vystačíme s výsledkem zapsaným na menší počet platných cifer, třeba na tři. Pak bychom postupovali tak, jak je uvedeno v (c) na pravé straně. V obou případech jsme násobili se zaokrouhleným (neúplným) číslem 0,0042. ., a proto jsme museli tuto skutečnost respektovat při určování počtu platných cifer ve výsledku. O počítání s neúplnými čísly si povíme někdy jindy.

Tabulka násobků převrácených čísel $y = \frac{a}{x}$ Většinu x odpovídá menší y

x	$\frac{10}{x}$	$\frac{20}{x}$	$\frac{30}{x}$	$\frac{40}{x}$	$\frac{50}{x}$	$\frac{60}{x}$	$\frac{70}{x}$	$\frac{80}{x}$	$\frac{90}{x}$
11	0,9091	1,8182	2,7273	3,6364	4,5455	5,4545	6,3636	7,2727	8,1818
12	0,8333	1,6667	2,5000	3,3333	4,1667	5,0000	5,8333	6,6667	7,5000
13	0,7692	1,5385	2,3077	3,0769	3,8462	4,6154	5,3846	6,1538	6,9231
14	0,7143	1,4286	2,1429	2,8571	3,5714	4,2857	5,0000	5,7143	6,4286
15	0,6667	1,3333	2,0000	2,6667	3,3333	4,0000	4,6667	5,3333	6,0000
16	0,6250	1,2500	1,8750	2,5000	3,1250	3,7500	4,3750	5,0000	5,6250
17	0,5882	1,1765	1,7647	2,3529	2,9412	3,5294	4,1176	4,7059	5,2941
18	0,5556	1,1111	1,6667	2,2222	2,7778	3,3333	3,8889	4,4444	5,0000
19	0,5263	1,0526	1,5789	2,1053	2,6316	3,1579	3,6842	4,2105	4,7369
20	0,5000	1,0000	1,5000	2,0000	2,5000	3,0000	3,5000	4,0000	4,5000
21	0,4762	0,9524	1,4286	1,9048	2,3810	2,8571	3,3333	3,8095	4,2857
22	0,4545	0,9091	1,3636	1,8182	2,2636	2,7273	3,1819	3,6364	4,0909
23	0,4348	0,8696	1,3043	1,7391	2,1739	2,6087	3,0434	3,4783	3,9130
24	0,4167	0,8333	1,2500	1,6667	2,0833	2,5000	2,9167	3,3333	3,7500
25	0,4000	0,8000	1,2000	1,6000	2,0000	2,4000	2,8000	3,2000	3,6000
26	0,3846	0,7692	1,1538	1,5385	1,9231	2,3077	2,6923	3,0769	3,4615
27	0,3704	0,7407	1,1111	1,4815	1,8519	2,2222	2,5926	2,9630	3,3333
28	0,3571	0,7143	1,0714	1,4286	1,7857	2,1429	2,5000	2,8571	3,2143
29	0,3448	0,6897	1,0345	1,3793	1,7207	2,0690	2,4138	2,7586	3,1034
30	0,3333	0,6667	1,0000	1,3333	1,6667	2,0000	2,3333	2,6667	3,0000
31	0,3226	0,6452	0,9677	1,2903	1,6129	1,9355	2,2581	2,5806	2,9032
32	0,3125	0,6250	0,9375	1,2500	1,5625	1,8750	2,1875	2,5000	2,8125
33	0,3030	0,6061	0,9091	1,2121	1,5152	1,8273	2,1212	2,4242	2,7273
34	0,2941	0,5882	0,8824	1,1765	1,4706	1,7647	2,0588	2,3529	2,6471
35	0,2857	0,5714	0,8571	1,1429	1,4286	1,7143	2,0000	2,2857	2,5714
36	0,2778	0,5556	0,8333	1,1111	1,3889	1,6667	1,9444	2,2222	2,5000
37	0,2703	0,5405	0,8108	1,0811	1,3514	1,6216	1,8919	2,1622	2,4324
38	0,2632	0,5263	0,7900	1,0526	1,3158	1,5789	1,8421	2,1053	2,3684
39	0,2564	0,5130	0,7692	1,0259	1,2820	1,5385	1,7949	2,0513	2,3077
40	0,2500	0,5000	0,7500	1,0000	1,2500	1,5000	1,7500	2,0000	2,2500
41	0,2439	0,4878	0,7317	0,9756	1,2198	1,4654	1,7073	1,9512	2,1951
42	0,2381	0,4762	0,7143	0,9524	1,1905	1,4286	1,6667	1,9048	2,1429
43	0,2326	0,4651	0,6977	0,9302	1,1628	1,3954	1,6279	1,8605	2,0930

x	$\frac{10}{x}$	$\frac{20}{x}$	$\frac{30}{x}$	$\frac{40}{x}$	$\frac{50}{x}$	$\frac{60}{x}$	$\frac{70}{x}$	$\frac{80}{x}$	$\frac{90}{x}$
44	0,2273	0,4545	0,6819	0,9091	1,1364	1,3636	1,5910	1,8173	2,0455
45	0,2222	0,4444	0,6667	0,8889	1,1111	1,3333	1,5556	1,7778	2,0000
46	0,2174	0,4348	0,6522	0,8696	1,0870	1,3043	1,5217	1,7391	1,9565
47	0,2128	0,4255	0,6383	0,8511	1,0638	1,2766	1,4894	1,7021	1,9149
48	0,2083	0,4167	0,6250	0,8333	1,0417	1,2500	1,4583	1,6667	1,8750
49	0,2041	0,4082	0,6123	0,8163	1,0204	1,2245	1,4286	1,6327	1,8367
50	0,2000	0,4000	0,6000	0,8000	1,0000	1,2000	1,4000	1,6000	1,8000
51	0,1961	0,3922	0,5882	0,7843	0,9804	1,1765	1,3725	1,5688	1,7647
52	0,1923	0,3846	0,5769	0,7692	0,9615	1,1539	1,3462	1,5385	1,7308
53	0,1887	0,3774	0,5660	0,7547	0,9436	1,1321	1,3208	1,5094	1,6981
54	0,1852	0,3704	0,5556	0,7407	0,9259	1,1111	1,2963	1,4815	1,6667
55	0,1818	0,3636	0,5455	0,7273	0,9091	1,0909	1,2727	1,4545	1,6364
56	0,1786	0,3571	0,5357	0,7143	0,8929	1,0714	1,2500	1,4286	1,6071
57	0,1754	0,3509	0,5263	0,7018	0,8772	1,0526	1,2281	1,4035	1,5789
58	0,1724	0,3448	0,5172	0,6897	0,8621	1,0345	1,2069	1,3793	1,5517
59	0,1695	0,3390	0,5085	0,6780	0,8475	1,0169	1,1865	1,3559	1,5254
60	0,1667	0,3333	0,5000	0,6667	0,8333	1,0000	1,1667	1,3333	1,5000
61	0,1639	0,3246	0,4918	0,6557	0,8197	0,9836	1,1475	1,3115	1,4754
62	0,1613	0,3226	0,4839	0,6452	0,8065	0,9677	1,1290	1,2903	1,4516
63	0,1587	0,3175	0,4742	0,6349	0,7937	0,9524	1,1111	1,2698	1,4286
64	0,1563	0,3125	0,4688	0,6250	0,7813	0,9375	1,0906	1,2500	1,4063
65	0,1538	0,3077	0,4615	0,6154	0,7692	0,9231	1,0769	1,2308	1,3846
66	0,1515	0,3030	0,4545	0,6061	0,7576	0,9091	1,0606	1,2121	1,3636
67	0,1493	0,2964	0,4478	0,5970	0,7463	0,8955	1,0448	1,1940	1,3433
68	0,1471	0,2941	0,4412	0,5882	0,7353	0,8824	1,0294	1,1765	1,3247
69	0,1449	0,2899	0,4348	0,5797	0,7246	0,8696	1,0145	1,1594	1,3043
70	0,1429	0,2857	0,4286	0,5714	0,7143	0,8571	1,0000	1,1429	1,2857
71	0,1408	0,2817	0,4225	0,5634	0,7042	0,8451	0,9859	1,1268	1,2676
72	0,1389	0,2778	0,4167	0,5556	0,6944	0,8333	0,9722	1,1111	1,2500
73	0,1370	0,2740	0,4110	0,5479	0,6849	0,8219	0,9589	1,0959	1,2329
74	0,1351	0,2703	0,4054	0,5405	0,6758	0,8108	0,9189	1,0811	1,2162
75	0,1333	0,2667	0,4000	0,5333	0,6667	0,8000	0,9333	1,0667	1,2000
76	0,1316	0,2632	0,3945	0,5263	0,6579	0,7900	0,9211	1,0526	1,1842

x	$\frac{10}{x}$	$\frac{20}{x}$	$\frac{30}{x}$	$\frac{40}{x}$	$\frac{50}{x}$	$\frac{60}{x}$	$\frac{70}{x}$	$\frac{80}{x}$	$\frac{90}{x}$
77	0,1299	0,2585	0,3896	0,5195	0,6494	0,7792	0,9091	1,0390	1,167
78	0,1282	0,2564	0,3846	0,5130	0,6410	0,7692	0,8974	1,0259	1,1538
79	0,1266	0,2532	0,3797	0,5063	0,6329	0,7595	0,8861	1,0127	1,1392
80	0,1250	0,2500	0,3750	0,5000	0,6250	0,7500	0,8750	1,0000	1,1250
81	0,1235	0,2469	0,3704	0,4938	0,6173	0,7407	0,8642	0,9877	1,1111
82	0,1220	0,2439	0,3659	0,4878	0,6098	0,7317	0,8537	0,9756	1,097
83	0,1205	0,2410	0,3614	0,4819	0,6024	0,7229	0,8434	0,9639	1,0807
84	0,1190	0,2381	0,3571	0,4762	0,5952	0,7143	0,8333	0,9524	1,0714
85	0,1176	0,2353	0,3529	0,4706	0,5882	0,7059	0,8235	0,9471	1,0588
86	0,1163	0,2326	0,3488	0,4651	0,5814	0,6977	0,8140	0,9302	1,0465
87	0,1149	0,2299	0,3448	0,4598	0,5747	0,6897	0,8046	0,9195	1,0345
88	0,1136	0,2273	0,3409	0,4545	0,5556	0,6819	0,7955	0,9091	1,0227
89	0,1124	0,2247	0,3371	0,4494	0,5618	0,6742	0,7865	0,8989	1,0112
90	0,1111	0,2222	0,3333	0,4444	0,5556	0,6667	0,7778	0,8889	1,0000
91	0,1099	0,2198	0,3297	0,4396	0,5495	0,6593	0,7692	0,8791	0,9890
92	0,1087	0,2174	0,3260	0,4348	0,5434	0,6522	0,7609	0,8696	0,9785
93	0,1075	0,2151	0,3226	0,4301	0,5376	0,6452	0,7527	0,8602	0,9677
94	0,1064	0,2128	0,3191	0,4255	0,5319	0,6383	0,7447	0,8511	0,9574
95	0,1053	0,2105	0,3158	0,4211	0,5263	0,6316	0,7368	0,8421	0,9474
96	0,1042	0,2083	0,3125	0,4167	0,5202	0,6250	0,7292	0,8333	0,9375
97	0,1031	0,2062	0,3093	0,4124	0,5154	0,6186	0,7216	0,8247	0,9278
98	0,1020	0,2041	0,3061	0,4082	0,5102	0,6123	0,7143	0,8163	0,9184
99	0,1010	0,2020	0,3030	0,4040	0,5051	0,6061	0,7071	0,8081	0,9091



Rentgenové záření a fyzika pevných látek

RNDr. JAROMÍR HRDÝ, CSc. ČSAV

Snad každý čtenář tohoto časopisu si dovede představit, jak se pomocí rentgenového záření (nazývaného též paprsky X) zjistí zlomená kost, poloha cizího předmětu v lidském těle, nebo makroskopické vady výrobků. V tomto článku bych chtěl naznačit, jak je možné zkoumat pomocí rtg záření mikrofyzikální vlastnosti látek v pevném skupenství.

Tento výzkum mikrofyzikálních vlastností pevných látek lze rozdělit zhruba do tří skupin:

a) Studium elektronové struktury¹⁾ pevných látek na základě zkoumání rtg záření, které studovaná látka vyzařuje nebo absorbuje.

b) Studium uspořádání atomů v pevné látce na základě zkoumání interakce²⁾ rtg záření se studovanou látkou, sledování poruch krystalové mřížky apod.

c) Kontrolované vytváření krystalografických poruch ozařováním rentgenovým zářením.

V dalším se pokusím stručně vyložit jednotlivé body.

a) Problematikou studia elektronové struktury se zabývá spektroskopie rtg záření. V této souvislosti je vhodné připomenout, jak vzniká rtg záření. (Zde mám na mysli tzv. charakteristické záření.)

¹⁾ Pod pojmem studium elektronové struktury zde rozumíme především hledání hodnot energií, které mohou nabýt elektrony ve zkoumaném objektu.

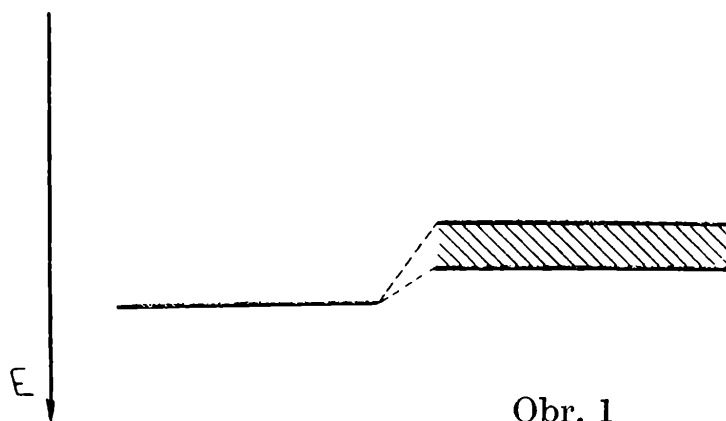
²⁾ Interakce = vzájemné působení.

Jak je známo, mohou mít elektrony v atomu jen zcela určité hodnoty energie, přičemž počet elektronů, které mohou mít tutéž hodnotu energie, je omezen. V atomech mluvíme o tzv. energetických slupkách, které značíme $K, L, M, \dots$ (elektrony ve slupce K jsou nejbližší k jádru). Tak např. slupka K obsahuje maximálně 2 elektrony (s opačným spínem), slupka L maximálně osm atd. Představme si nyní, že např. ze slupky K vyrazíme elektron mimo atom. (Toho lze docílit např. bombardováním elektrony, urychlenými na dostatečnou hodnotu energie vysokým napětím mezi katodou a anodou rtg trubice.) Pak může dojít k přeskoku elektronu ze slupky L do uprázdněného místa ve slupce K . Jestliže energii počátečního stavu atomu, ve kterém chyběl elektron ve slupce K označíme E_1 a konečného stavu, kde chyběl elektron ve slupce L označíme E_2 , pak se přeskokem elektronu ze slupky L do K změní energie atomu o $\Delta E = E_1 - E_2$ (říkáme, že dochází k přechodu atomu ze stavu o energii E_1 do stavu o energii E_2) a dojde k vyzaření určitého množství (kvanta) rentgenového záření o frekvenci

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}$$

kde h je Planckova konstanta. Na uvolněné místo po elektronu ve slupce L může přeskočit elektron ze slupky M atd. Tyto elektronové přeskoky se však řídí jistými tzv. výběrovými pravidly, které zakazují přechody atomu mezi některými stavy.

Za těchto podmínek atomy určitého prvku vyzařují určitý systém spektrálních čar o frekvencích ν odpovídajících přechodům, dovoleným výběrovými pravidly.



Obr. 1

Energie elektronových slupek atomů, které jsou spolu chemicky vázány v pevné látce, se obecně liší od energie slupek volných atomů. Největší odchylku doznávají slupky valenční, jejichž hodnota energie je vzhledem k příslušné energii u volných atomů poněkud posunuta a současně rozštěpena do velkého množství navzájem se poněkud lišících hodnot, takže zde již vlastně nemluvíme o energetické hladině, nýbrž o energetickém pásu (obr. 1). Všechny tyto změny se pak pro-



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 46, 1967-68

Vydává

ministerstvo školství

ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. OTA S E T Z E R

nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR: STANISLAV H O R Á K

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, Jaroslav Bejsta, zasloužilý učitel Petr Benda, doc. dr. Josef Dibelka, doc. Jaroslav Chudý, prof. dr. Josef Korous, DrSc., dr. Oldřich Lepil, prof. dr. Cyril Palaj, Evžen Říman, CSc., nositel vyznamenání Za vynikající práci, dr. Jiří Sedláček, dr. Ladislav Sehnal, Jaroslav Šedivý, ing. dr. Václav Šindelář, CSc., prof. dr. Ján Vanovič, František Vencálek.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, tel. 24 45 29.

MATEMATIKA

Benešová Eva: Obsah tětívového a tečnového čtyřúhelníka	166, 214
Dušek František: Problémy z teorie čísel v různých číselných oborech	1
Fiala Jiří: Magická metoda pro převod čísel z jedné soustavy do druhé	162
Hošek Josef: Cauchyova nerovnost	353, 411
Chajda Ivan: Praktické užití Bernoulli-Whittakerovy metody při řešení algebraických rovnic vyšších stupňů	439
Chudý Jaroslav: Trisekce úhlu	209, 266
Janeček František: O některých vztazích v trojúhelníku	115
Jozífek Vítězslav: O jednom grafickém řešení kvadratické rovnice	449
Kolář Jiří: Metoda nejmenších čtverců a vyrovnávání hodnot některých veličin	270
Kuřina František: Metrické prostory	53, 111
Litomiský Miroslav: Jak Archimedes určil těžiště lichoběžníka	217
Marek Jiří: Grafické odvození součtu nekonečné geometrické řady	273
Matula Miloš: Zlatý slávek a matematika	56, 119
Mráz Vlastimil: Dělení tabulkami	462
Mudrák Zdeněk: Některá zajímavá pozorování v lichoběžníku	7
Nedbal Klement: Zdvojení krychle	409
Petrásek Jan: Řešení kubické rovnice pomocí stupnice	401
Sedlák Jan: Automatické programování na samočinných počítačích	258, 305
Skalický Václav: Pravidelný dvanáctiúhelník	405
Trávníček Stanislav: Směrové pole	157
Ungermann Zdeněk: Součty mocnin přirozených čísel	459
Zapletal Ivo: K logice	63, 105

FYZIKA

Golab František Kamenčák František: Termoelektrické jevy	473
Horák Zdeněk: O původu setrvačných sil	281, 315
Hrdý Jaromír: Rentgenové záření a fyzika pevných látek	469
Jánoš Štefan: Použití obálek k řešení některých extrémálních úloh	72
Kodeš Jiří: Supratekutost	292
Machalický Jiří: O měření gravitační konstanty	421
Pazderák Jiří: Barevná televize	285, 319, 387
Pivnička Oldřich: Energie soustavy pružina — tuhé těleso	127
Samek Otakar: Brzdil včas?	231
Santholzer Vilém: Fyzikální zjišťování radioaktivity celého lidského těla	415
Smrž Ladislav: Vznik střídavého proudu a jeho důležité hodnoty	67
Smrž Ladislav: Grafické zobrazování veličin střídavého proudu	131
Smrž Ladislav: Výkon sinusového střídavého proudu	181
Smrž Ladislav: Přesné měření elektrického napětí	224
Smrž Ladislav: Substituce jako prostředek ke zvýšení přesnosti měření	425
Steskal Jiří: Pohybová neostrost	9
Ungermann Zdeněk: Odvození momentu setrvačnosti těles elementárními prostředky	363, 426
Vašek Lubomír: Barometrické měření výšek	14

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Drábek Karel: Svazky kružnic	123
Drábek Karel: Kuželosečky vytvořené ve svazcích kružnic	175
Filip Josef: Použití deskriptivní geometrie v kryštalografii	219, 277, 310, 357
Horák Stanislav st.: Úloha z deskriptivní geometrie	275
Kuniak Matúš: Niektoré dotyčnicové vlastnosti paraboly	172

ASTRONOMIE

Sehnal Ladislav: Umělé družice v r. 1966	18
Sehnal Ladislav: Snímky Měsíce	21
Široký Jaromír: Jak lze určit vzdálenost Měsíce od Země	235
Široký Jaromír Široká Miroslava: Deset Měsíců planety Saturna	372
Široký Jaromír Široká Miroslava: Zdánlivá klíčka planety Marsu	433
Široká Miroslava Široký Jaromír: Významné polohy planety Venuše	479
Soler Josef: Kosmické rychlosti	76
Soler Josef: Nejjednodušší výpočet dráhy umělých satelitů Země	235

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

Macháček Vlastimil: IX. mezinárodní matematická olympiáda	103, 144
ÚV MO: XVII. ročník matematické olympiády	23
ÚV MO: Seznam vítězů a úspěšných řešitelů III. kola MO v XVI. íku kate- gorie A	26
Vejvoda Pavel: Projev při předávání cen za II. kolo XVI. ročníku MO v Praze	249
Vyšín Jan: Tři listy účastníkům matematické olympiády	204, 296, 388
Vyšín Jan: Řešení MMO konané v červenci 1967 v Jugoslávii	334, 383, 444

FYZIKÁLNÍ OLYMPIÁDA

Černický František: Hudební akustika	85
Hofman Konrád: Magnetické obvody. Točivé magnetické pole	32
Menšík Miroslav: Mezinárodní fyzikální olympiáda	329
Náter Ivan: Vnútorné trenie v kvapalinách	138
ÚV FO: IX. ročník fyzikální olympiády	28, 95
Vybíral Bohumil: ČSM nejúspěšnějším řešitelům ve fyzikální olympiádě	298

NAŠE SOUTĚŽ

Soutěžní příklady	80, 134, 186
Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů	82, 188, 190, 239, 304, 327, 375

RŮZNÉ

Bartůněk Josef: Písemná maturitní zkouška z matematiky	346
Jozífek Vítězslav: O Euklidovi	341
Kašpar Emil: K přijímacím zkouškám z fyziky na MFF KU v Praze ve školním roce 1966—1967	397
Klivanec Daniel: Fyzika rekreačně	154
Kořínková Hana: Před zahájením zajímavého kursu	204
Kořínková Hana: Opakujte si matematiku	302, 344
Kotyk Josef: Siemensův princip dynamoelektrický	48
Kotyk Josef: Josef Božek	152
Kotyk Josef: Hrst vzpomínek	200
Kotyk Josef: Fresnel a princip relativnosti v optice	245
Kupková Jarmila: Marie Curie Skłodowská	99
Lanta Oldřich: Klub mladých matematiků v Ostravě	447
Machalický Jiří: Vzpomínka na Michaela Faradaye	150
Marek Jiří: O přijímacích zkouškách z matematiky na MFF KU v Praze ve škol- ním roce 1966—67	348
Menšík Miroslav: Kam po maturitě?	300
Setzer Ota: Doc. RNDr. Miroslav Menšík zemřel	257
Vlach Milan: K přijímacím zkouškám z matematiky na MFF KU v Praze	393

MATEMATICKÉ ZÁBAVY

Boryslawská Zuzana: S matematikou nejdál dojdeš	197
Machán Ján: Od podávania rúk ku geometrii	251
Porubský Štefan: Hra aritmomachia	253
Říman Evžen: Orišek	255
Setzer Ota: Mnemotechnická pomůcka pro trigonometrii	198
Šedivý Jaroslav: Proč to vždycky nejde vypočítat?	340
Trávníček Stanislav: Jak si π dívek hrálo s míčem	437
Zítek František: O jedné kombinatorické úloze	146
Zábavné úlohy nejmladším matematikům	207, 256, 294, 390, 391, 443, 489
Rebusy	66, 143, 155

RECENZE

Dubský Jaromír: Patnáctý ročník matematické olympiády	351
Havlíček Karel: Populárne o počte pravdepodobnosti	391
Horák Stanislav: Sbírka úloh z matematiky	156
Lepil Oldřich: Pokusy z radiotechniky	206
Setzer Ota: Technické kreslení	51
Zemánek Jaroslav: Teória čísel, základné pojmy a zbierka úloh	50
Zemánek Jaroslav: Analytická geometrie a nerovnosti	350

jevují posuvem, resp. rozšířením spektrální čáry. Takto je možno sledovat změny elektronové struktury určitých prvků v závislosti na typu chemické vazby s okolními atomy, v závislosti na krystalické struktuře atd.

Znalost elektronové struktury je totiž pro fyziku pevných látek nesmírně důležitá, neboť na této struktuře závisí řada důležitých fyzikálních vlastností pevných látek, zejména elektrické, optické aj.

Podobný význam jako má spektroskopie emisní, tj. o které jsme nyní mluvili, má i spektroskopie absorpční. Zde ozařujeme tenkou fólii zkoumané látky spojitým³⁾ rtg zářením a zkoumáme, jak se která vlnová délka záření absorbuje. Absorbované kvantum záření o vhodné frekvenci ν , tj. o energii $h\nu$, vyrazí z atomu elektron do některé slupky či pásu, který není plně obsazen elektrony a zvětší tím původní energii E_0 atomu o $\Delta E = h\nu$, tzn. na $E' = E_0 + \Delta E$. Podmínkou však je, aby atom mohl této energii nabýt a aby přechod do tohoto stavu o energii E' byl výběrovými pravidly dovolen. V opačném případě se totiž záření o frekvenci ν absorbovat nemůže. Vidíme tedy, že průběh absorpčního spektra se bude skládat z řady maxim a minim, podle jejichž rozložení lze činit určité závěry o elektronové struktuře pevných látek.

Zatím jsme však hovořili o rentgenových spektrech atomů a jejich změnách při vstupu atomů do chemické vazby v pevné látce. V rentgenových spektrech pevných látek, a to emisních i absorpčních, lze však pozorovat i jevy, které ve volných atomech neexistují, a které mají svůj původ v tak zvaných kolektivních vlastnostech elektronů v pevné látce. Víme např., že na elektrony v kovu lze nahlížet v jistém smyslu jako na plyn, v kterém se mohou šířit vlny, podobně jako se šíří třeba zvukové vlny ve vzduchu. Vybuzení nebo ztlumení těchto vln představuje změnu v energii elektronového plynu, která se v kombinaci s výše popsány přechody atomu může podílet na energii vyzářeného, či pohlceného kvanta záření, a tedy na jeho frekvenci.

Spektrálním rozбором emisního rentgenového záření je též možné určit prvky, ze kterých se vyzařující látka skládá. Podle intenzity spektrálních čar, které těmto prvkům odpovídají, je možné určit i jejich koncentraci.

Pro úplnost se jen velice stručně zmíním o tom, jak lze takové rentgenové spektrum změřit. Z optiky je znám spektrální rozklad na hranolu. I když by v oboru rentgenového záření bylo možno principiálně použít tohoto způsobu, neužívá se pro malou disperzi, neboť index lomu se pro rentgenové záření jen nepatrně liší od 1. Dále se užívá k spektrálnímu rozkladu světla hustě narytých mřížek. Pro rentge-

³⁾ Spojité záření, na rozdíl od charakteristického, obsahuje všechny frekvence γ v určitém intervalu od 0 do $\gamma_{\max}$, kde $\gamma_{\max}$ závisí na napětí rentgenové lampy.

nové záření je vhodné použít místo ryté mřížky (i když té se v určitém oboru vlnových délek také užívá) monokrystalu některé látky, neboť systém atomových rovin v krystalu tvoří prostorovou mříž, na které může dojít k difrakci (ohybu) záření. To se však již dostáváme k otázkám, které souvisejí s dalším.

b) Otázkami určování krystalové struktury pomocí rentgenového záření se zabývá rentgenová strukturní analýza, jejíž princip lze objasnit takto:

Nechť dopadá na krystal zkoumané látky svazek rentgenového záření. Ze všech paprsků se budou na meziatomových rovinách, jejichž vzdálenost je d , odrážet jen ty, pro které je splněn tzv. Braggův zákon, tj.

$$2d \sin \Theta = n\lambda,$$

kde Θ je úhel, který svírá paprsek s meziatomovými rovinami, λ je vlnová délka záření a n je celé číslo. (Braggův zákon lze odvodit jako interferenční podmínku na dvojvrstvě o tloušťce d . Tento pohled, ač vede k správnému výsledku, je však značně zjednodušený.) Známe-li d , které lze u některých jednoduchých látek spočítat, je možno změřením úhlu Θ spočítat λ , což má význam pro měření vlnových délek v rentgenové spektroskopii. Naopak, známe-li λ , pak pro různé systémy atomových rovin je možno nalézt příslušné úhly Θ , z nichž lze spočítat příslušné hodnoty d . Tak je možno zjistit vzájemné polohy atomových rovin a jejich vzdálenosti. Je vyvinuta celá řada metod jak lze pomocí Braggova zákona získat informace o uspořádání atomů v pevné látce, a to jak u látek monokrystalických, tak i polykrystalických, přičemž se bere v úvahu nejen směr, ve kterém se paprsek odráží, ale i intenzita s jakou se odráží. Tyto metody, které jsou velice pracné, dovolují určit struktury, tj. uspořádání atomů i řady velice složitých organických látek a jejich význam tak výrazně přesáhl hranice fyziky.

Zákonitostí odrazu rentgenového záření na krystalech je též možno použít ke studiu povrchové dokonalosti monokrystalů. Představme si například, že svazek paralelního a monochromatického záření dopadá na krystal pod úhlem, při kterém nastává reflexe podle Braggova zákona. Fotografujeme-li odražený svazek záření, dostaneme v případě ideálního krystalu homogenní obraz. Bude-li však část krystalu od ostatního celku odlišná, např. atomové roviny, budou poněkud odkloněny, pak nebude v této oblasti splněn Braggův zákon a toto místo reflektovat nebude. Na fotografickém snímku zjistíme neosvícené místo, které bude svým tvarem odpovídat tvaru místa s krystalografickou odchylkou (pokud svazek záření je širší než toto místo).

Prakticky se zjišťování krystalografických odchylek monokrystalů provádí poněkud jinak, neboť záření není nikdy přesně paralelní a monochromatické, ale z uvedeného výkladu je možné aspoň pochopit základní myšlenku těchto metod, tj. využití změny reflexe rentgenového záření v místech, která se krystalograficky liší.

V poslední době je velmi významné použití rentgenových paprsků pro zobrazování mřížkových poruch krystalů, využívající tzv. anomálního rozptylu rentgenových paprsků na poruchách.

c) Definované vytváření poruch krystalové mříže je pro studium vlastností pevných látek značně důležité. V řadě případů to jsou právě poruchy krystalové mříže, jež určují vlastnosti, které nacházíme u pevných látek, např. zbarvení, magnetická hysteréze atd. Aby bylo možno vliv jednotlivých druhů krystalografických poruch na vlastnosti pevných látek sledovat, je třeba umět tyto poruchy též ve vhodném množství vytvářet. To lze ovšem provádět různým způsobem, podle toho, jaký typ poruch chceme vytvořit. Jedním ze způsobů je ozařování vzorků rentgenovým zářením, které může např. u iontových krystalů vést ke vzniku tzv. barevných center, ovlivňujících zbarvení krystalu.

V tomto článku bylo možno jen velice stručně naznačit nejdůležitější fakta, která se týkají aplikace fyziky rentgenového záření ve fyzice pevných látek. Přesto však, i když byl výklad značně zjednodušen, je snad možné si učinit aspoň hrubou představu o významu a aplikacích tohoto zajímavého oboru fyziky.

Termoelektrické jevy

FRANT. GOLAB, FRANT. KAMENČÁK Pedagogická fakulta Ostrava

Termoelektrickými nazýváme takové fyzikální jevy, při nichž teplotní rozdíly dávají v uzavřeném obvodu, který je složen z různých kovových vodičů, vznik elektrickým proudům, nebo průchodem proudu takovým složeným i homogenním obvodem se v něm uvolňuje nebo pohlcuje teplo, takže se na jednotlivých spojích složeného obvodu ustaví různé teploty.

Objev termoelektrických jevů není nový. Nové je však jejich široké využití v technice. Až do nedávné doby se nevěřilo v jejich praktické užití a využívalo se jich jen u termočlánků v měřicí technice. Avšak období po druhé světové válce přineslo i v oblasti termoelektřiny prudký rozmach, který souvisí do značné míry s rozvojem fyziky a techniky polovodičů, z nichž některé se ukázaly pro využití termoelektrických jevů technicky i ekonomicky výhodné.

Již r. 1885 lord Reyleigh a r. 1909 Altenkirch se zabývali termoelektrickými generátory elektrické energie. O rok později pracoval Altenkirch i na problému termoelektrického chlazení. Účinnost navrhovaných zařízení však mnohdy nedosahovala ani 0,1 %. Teprve objevy v oblasti polovodičů přivodily změnu situace. Roku 1925 navrhl sovětský fyzik A. F. Ioffe konstrukci termoelektrického polovodičového

generátoru s účinností až 4 %. Dnes se v celém světě intenzívně pracuje na termogenerátorech pro průmyslovou výrobu elektrické energie a na přímou přeměnu sluneční energie v energii elektrickou. Tato potřeba byla vyvolána i rozvojem kosmonautiky.

Rovněž v konstrukci chladicích zařízení bylo dosaženo ve světě značných úspěchů. Vyrábějí se zařízení, která mohou snížit teplotu o 50 i více stupňů.

I u nás pokračuje úspěšně výzkum a vývoj zařízení využívajících termoelektrických jevů.

Termoelektrické jevy můžeme rozdělit takto:

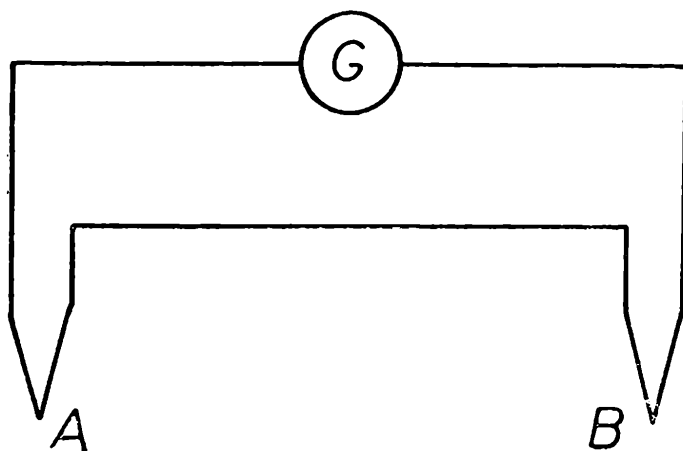
1. Seebeckův jev.
2. Peltierův jev.
3. Thomsonův jev.
4. Benedicksův jev.

Postupně probereme jednotlivé jevy.

1. Seebeckův jev

Víme, že v uzavřeném obvodu sestaveném z různých kovových vodičů navzájem spájených nevznikají elektrická napětí, obvodem bez zdroje napětí neprotéká proud. Již roku 1821 zjistil Seebeck, že tomu tak je jen tehdy, je-li teplota v celém obvodu stejná. Je-li teplota spájených míst různá, pozorujeme, že obvodem teče slabý, ale měřitelný proud. V obvodu se objevil zdroj napětí.

Abychom si ověřili správnost tohoto tvrzení, sestavme obvod ze dvou různých kovových vodičů (např. Cu-Fe, Fe-konstantan, Cu-konstantan) podle obr. 1. V místech *A* a *B* oba vodiče spájíme (jiskrou, obloukem). Jeden vodič asi uprostřed přerušíme a vzniklými konci připojíme k citlivému galvanometru.



Obr. 1

Pokud budou teploty obou spájených míst *A*, *B* stejné, v souladu s tím, co bylo řečeno, neukáže ručka galvanometru žádnou výchylku. Stačí však, abychom jeden spoj uchopili do prstů. Ručka galvanometru se vychýlí, obvodem protéká proud — v obvodu se objevil zdroj

elektrického napětí. Výchylka ručky galvanometru bude tím větší, čím větší bude rozdíl teplot obou spojů ΔT . Tento rozdíl teplot spájených míst je tedy příčinou vzniku napětí a proudu, kterým říkáme termoelektrické. Uvedenému spojení dvou různých vodičů říkáme termočlánek.

Na základě pokusů sestavil Seebeck kovy v tuto řadu

Sb , Fe , Zn , Ag , Au , Sn , Pb , Hg , Cu , Pt , Bi

Termočlánkem vytvořeným z kterýchkoliv dvou z uvedených kovů prochází podle Seebecka ve spoji s vyšší teplotou proud směrem od následujícího k předcházejícímu kovu uvedené řady. (Další pokusy to však plně nepotvrdily.)

Z rozboru uvedené řady plyne, že termoelektrické napětí mezi dvěma různými kovy je tím větší, čím jsou kovy v řadě od sebe vzdálenější. Skutečně, největší napětí přísluší, jak bylo i experimentálně dokázáno, dvojici Sb-Bi (asi $100 \mu\text{V}$ na stupeň Celsia).

V této řadě jsou uvedeny jen čisté kovy. Ke zhotovení termočlánku můžeme však použít i různých slitin (např. konstantan, chromnikl, platinarhodium aj.). Seebeckův jev můžeme pozorovat i mezi různými polovodiči.

Matematicky můžeme přibližně vyjádřit velikost termoelektrického napětí E v obvodu tvořeném dvěma různými vodiči, mezi jejichž spoji A a B je rozdíl teplot ΔT vztahem

$$E = \alpha \cdot \Delta T, \quad (1)$$

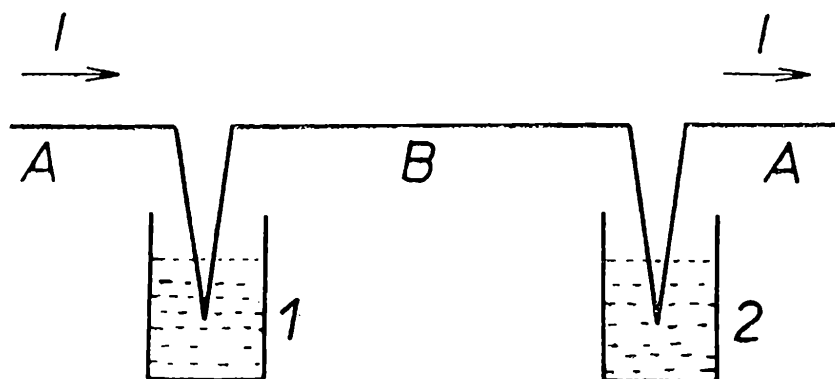
kde α je součinitel termoelektrického napětí; udává napětí příslušné teplotnímu rozdílu 1°C v $\mu\text{V deg}^{-1}$. Tak např. termočlánek Fe-konstantan má v teplotním intervalu (-200 až $+400$) $^\circ\text{C}$, α rovno $53 \mu\text{V deg}^{-1}$. Hodnota α je však poněkud závislá na teplotě. Pro uvedený termočlánek má α v intervalu teplot (800 až 900) $^\circ\text{C}$ hodnotu $69 \mu\text{V deg}^{-1}$.

Změny napětí termočlánku s rozdílem teplot ΔT obou jeho spojů se využívá v praxi k měření teploty. Pro každý druh termočlánků se sestavují cejchovní tabulky nebo se cejchují přímo galvanometry (voltmetry) v teplotních stupních. Podle druhu vodičů použitých ke zhotovení termočlánku můžeme měřit teploty v různých teplotních intervalech. Tak např. termočlánky Cu-konstantan se používají maximálně do teplot 600°C , Fe-konstantan do 900°C , PtRh-Pt až do 1600°C . Užijeme-li k měření teploty kompenzační metody, můžeme měřit s přesností na $0,01^\circ\text{C}$.

2. Peltierův jev

Peltierův jev, objevený r. 1834, je v jistém smyslu jevem opačným k předcházejícímu. Spočívá v tom, že při průchodu proudu spojem dvou různých vodičů se v tomto místě, kromě obyčejného tepla Jou-

leova; uvolňuje, nebo pohlcuje určité další množství tepla; spoj se tedy buď ohřívá nebo ochlazuje. Při změně směru proudu se změní i znaménko tepla; ochlazoval-li se spoj, bude se po změně směru proudu zahřívat a obráceně.



Obr. 2

Peltierův jev můžeme pozorovat na pokuse uspořádaném podle obr. 2. Mějme spojeny vodiče A , B , A a proud necht' prochází směrem šipky na obrázku. Necht' se spoj 1 proudem ohřívá a spoj 2 ochlazuje. To znamená, že se v místě 1 teplo uvolňuje, v místě 2 se naopak pohlcuje. Současně však v obou místech vzniká Jouleovo teplo Q . Peltierovo teplo má v obou místech stejnou velikost Q_p , ale opačná znaménka, v místě 1 je teplo kladné, v místě 2 záporné.

Vypočítejme nyní uvolněné teplo Peltierovo Q_p .

V místě 1 se uvolní celkem teplo

$$Q_1 = Q + Q_p. \quad (2a)$$

V místě 2 bude uvolněné teplo

$$Q_2 = Q - Q_p. \quad (2b)$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$Q_1 - Q_2 = 2Q_p$$

a odtud pro Peltierovo teplo vychází

$$Q_p = \frac{Q_1 - Q_2}{2} \quad (3)$$

Změříme-li Q_1 a Q_2 (např. tím, že spoje 1 a 2 vložíme do kalorimetrů s malým množstvím kapaliny malého měrného tepla, jak je naznačeno na obr. 2), můžeme přímo určit velikost Peltierova tepla Q_p . Toto teplo, které je celkem malé u kovů, je úměrné proudu I procházejícímu vodičem a času t , po který proud vodičem procházel; můžeme tuto úměrnost vyjádřit matematicky vztahem

$$Q_p = \pi I \cdot t, \quad (4)$$

kde π je tzv. Peltierův koeficient. Ten souvisí se součinitelem termoelektrického napětí α vztahem

$$\pi = \alpha \cdot T, \quad (5)$$

kde T je absolutní teplota místa spoje. Peltierův koeficient π můžeme podle (4) definovat jako množství tepla, které se uvolní (nebo pohltí) na styku dvou vodičů proudem 1 A za 1 s (nebo nábojem 1 C).

Spojením vztahů (4) a (5) obdržíme pro Peltierovo teplo výraz

$$Q_p = \alpha \cdot T \cdot I \cdot t. \quad (4a)$$

Vztah (5) vyslovil r. 1856 Thomson, když na vysvětlení termoelektrických jevů užil zákonů termodynamiky.

Dlouhou dobu se soudilo, že Peltierův jev nemá praktický význam, protože teplo Q_p je u kovů zanedbatelně malé. Značné Peltierovo teplo bylo však zjištěno u polovodičů, jichž se v poslední době používá ke konstrukci chladicích zařízení pro různé účely.

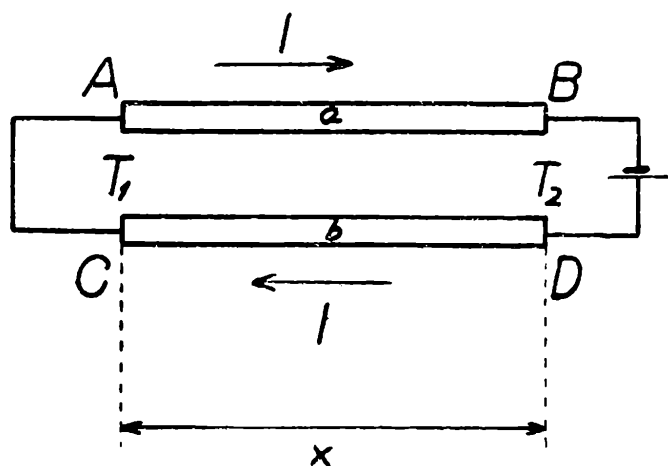
3. Thomsonův jev

Tento jev, popsáný teoreticky Thomsonem r. 1857 a dlouho předtím experimentálně zjištěný Seebeckem, spočívá v tom, že v homogenním vodiči, jehož teplota není všude stejná (ve vodiči existuje tzv. gradient teploty), vzniká elektrické napětí. Účinkem tohoto napětí se při průchodu nestejnoměrně zahřátým vodičem uvolňuje nebo pohlcuje kromě Jouleova tepla ještě další množství tepla. Toto množství tepla, zvané Thomsonovo, je úměrné procházejícímu proudu I , času t , po který proud vodičem prochází a gradientu teploty dT/dx , kde x je délka vodiče. (Gradient teploty udává změnu teploty připadající na jednotku délky vodiče.) Matematicky zapíšeme tuto úměrnost ve tvaru

$$Q_T = \tau \cdot I \cdot \frac{dT}{dx} \cdot t \quad (6)$$

Koeficient úměrnosti τ se nazývá Thomsonův koeficient a souvisí s koeficienty α i π . Thomsonův koeficient můžeme definovat jako množství tepla, které vznikne (pohltí se) průchodem proudu 1 A za 1 s vodičem, v němž se mění teplota o 1 °C na jednotku délky.

Experimentální zařízení k pozorování Thomsonova jevu je velmi jednoduché. Dvě homogenní tyče AB a CD ze stejného materiálu, stejné délky x a stejného průřezu, spojíme vodičivě podle obr. 3. Konce A , C udržujeme na vyšší teplotě T_1 , druhé konce na nižší teplotě T_2 . Pokud nezavedeme do obvodu proud, je teplota středů obou tyčí (body a , b na obr.) stejná. Po zapnutí proudu se bod a ohřeje, bod b ochladí.



Obr. 3

4. Benedicksův jev

V letech 1920 až 1921 oznámil Benedicks objev ještě dvou dalších termoelektrických jevů. Ty nejsou určovány rozdílem teplot mezi konci vodiče, ale jen hodnotou gradientu teploty při stejné teplotě obou konců. Jsou-li teploty konců vodiče stejné, ale mezi oběma konci je ohřátá, nebo ochlazená část nesymetricky položená blíže k jednomu konci vodiče, pak se mezi jeho konci objeví rozdíl potenciálů.

Tento jev, nazvaný po svém objeviteli jevem Benedicksovým, byl pečlivě zkoumán mnoha dalšími vědci, ale jeho existence nebyla dosud experimentálně potvrzena. Lze proto soudit, že existuje-li Benedicksův jev vůbec, je vzniklý rozdíl potenciálů neměřitelně malý.

Literatura

- [1] Dragoun, Z. - Šmirous, K.: Polovodiče, 2. vyd. SNTL, Praha 1962.
- [2] Friš - Timoreva: Kurs fyziky II, NČSAV, Praha 1953.
- [3] Ilkovič, D.: Fyzika, SVTL - SNTL, Bratislava - Praha 1959.
- [4] Ioffe, A. O.: Fyzika polovodičů, NČSAV, Praha 1959.
- [5] Ioffe, A. F.: Poluprovodnikovye termoelementy, IAN SSSR, Moskva - Leningrad 1960.



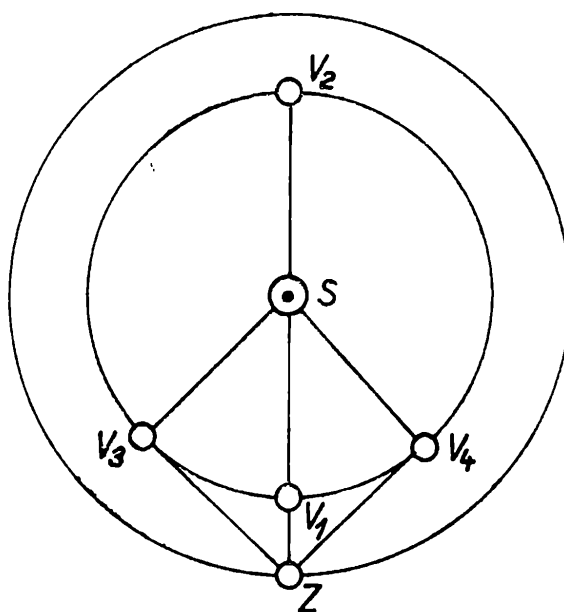
Význačné polohy planety Venuše

Dr. MIROSLAVA ŠIROKÁ — Dr. JAROMÍR ŠIROKÝ, UP Olomouc

Druhá Slunci nejbližší planeta — *Venuše* — obíhá kolem Slunce ve střední vzdálenosti 0,723 astronomických jednotek (a. j.). Excentricita její dráhy je nejmenší ze všech planet sluneční soustavy, $e = 0,0068$ (excentricita dráhy Země je $e = 0,0167$); proto se vzdálenost Venuše od Slunce mění v poměrně malém intervalu — od 0,718 a. j. do 0,728 a. j.

Protože Venuše obíhá uvnitř dráhy Země, rozlišujeme u ní tyto význačné polohy vzhledem ke Slunci a k Zemi (obr. 1).

1. *Dolní konjunkce* (V_1), kdy je Venuše mezi Sluncem a Zemí. V dolní konjunkci se Venuše přibližuje k Zemi na nejmenší vzdálenost. Je-li Země v přísluní, je tato vzdálenost 0,26 a. j. V této poloze má Venuše úhlový průměr větší než $1'$, není však přístupná pozorování, neboť je k nám obrácena neosvětlenou polokoulí a je na obloze v blízkosti Slunce. Kdyby byla rovina dráhy Venuše totožná s rovinou dráhy Země, mohli bychom při každé dolní konjunkci pozorovat *přechod* Venuše přes Slunce. Protože však sklon roviny dráhy Venuše je $3^\circ 24'$



Obr. 1

(po Plutovi a Merkurovi největší ze všech planet), je přechod Venuše přes Slunce poměrně vzácný úkaz — může nastat jen čtyřikrát v průběhu 240 roků¹⁾.

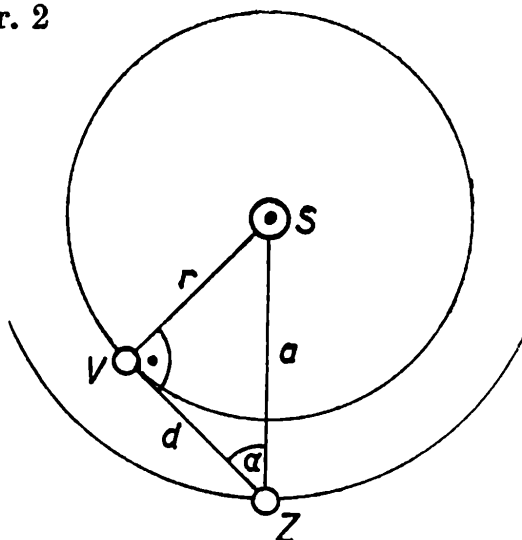
2. *Horní konjunkce* (V_2). Venuše leží opět v jedné přímce se Sluncem a Zemí, ale Slunce je nyní mezi Venuší a Zemí. V horní konjunkci je Venuše v největší vzdálenosti od Země, 1,74 a. j. a její úhlový průměr je pouze 10". Je-li v poloze V_2 , je k nám obrácena osvětlenou polokoulí a vychází i zapadá současně se Sluncem (jako při dolní konjunkci).

3. Není-li Venuše v konjunkci se Sluncem, pak směr ke Slunci svírá se směrem k Venuši určitý úhel, který se nazývá *elongace*. Tento úhel se může měnit jen v určitých mezích. Největší hodnoty nabývá, je-li Venuše v bodech V_3 a V_4 ; mluvíme pak o *maximální elongaci*, která je buď východní anebo západní. Hodnota maximální elongace u Venuše je mezi 45°54' a 46°44' (dráhy Venuše a Země nejsou přesně kruhové).

Při západní elongaci vychází Venuše před východem Slunce a můžeme ji na obloze pozorovat jako jitřenku, při východní elongaci zapadá Venuše po západu Slunce a pozorujeme ji jako večernici. Maximální elongace nastávají 71 až 72 dnů před dolní konjunkcí anebo po ní. V blízkosti maximálních elongací vychází nebo zapadá Venuše až čtyři hodiny před východem nebo po západu Slunce a její zdánlivá hvězdná velikost je asi $-3,2^m$. Největší zdánlivé hvězdné velikosti ($-4,3^m$) dosáhne Venuše v době asi 30 dnů před dolní konjunkcí anebo po ní.

Známe-li maximální elongaci Venuše, můžeme stanovit její vzdálenost od Slunce v astronomických jednotkách geometrickou úvahou. Označíme maximální elongaci α , vzdálenost Venuše od Slunce r , vzdálenost Země od Slunce a (obr. 2). V okamžiku maximální elongace je v trojúhelníku SVZ úhel při vrcholu V rovný 90° a platí

Obr. 2



$$\frac{r}{a} = \sin \alpha$$

a odtud

$$r = a \sin \alpha .$$

Dosadíme-li $a = 1$ a. j., $\alpha = 46,3^\circ$, je $r = 0,723$ a. j. Z trojúhelníka SVZ můžeme také vypočítat vzdálenost d Venuše od Země při maximální elongaci, neboť platí

¹⁾ Nejbližší přechody Venuše budou 8. června 2004 a 6. června 2012.

$$\frac{d}{a} = \cos \alpha, \quad d = a \cos \alpha$$

a číselně je $d = 0,691$ a. j.

Doba, která uplyne mezi dvěma po sobě následujícími stejnými polohami planety vzhledem ke Slunci a k Zemi (např. mezi dvěma dolními konjunkcemi) se nazývá *synodická oběžná doba*. Tuto dobu musíme odlišit od skutečné oběžné doby (*siderické*), za kterou opíše planeta úhel 360° na dráze kolem Slunce.

Ukažme nyní, jak vzájemně souvisí synodická a siderická oběžná doba. V okamžiku dolní konjunkce jsou Slunce, Venuše a Země v jedné přímce. Označíme-li T_0 oběžnou dobu Země ($T_0 = 365,25$ dní), pak za 1 den opíše průvodič Země úhel $\frac{360^\circ}{T_0}$. Je-li T siderické oběžná doba

Venuše, pak průvodič Venuše za jeden den opíše úhel $\frac{360^\circ}{T}$ a rozdíl úhlů průvodičů Venuše a Země vzroste za den o hodnotu

$$\varphi = \frac{360^\circ}{T} - \frac{360^\circ}{T_0}$$

Po uplynutí synodické oběžné doby P bude Venuše opět v dolní konjunkci, rozdíl úhlů tedy nabude hodnoty 360° a platí

$$\varphi \cdot P = 360^\circ,$$

a tedy

$$360^\circ = \frac{360^\circ}{T} - \frac{360^\circ}{T_0} \cdot P$$

a odtud pro synodickou oběžnou dobu máme

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}$$

Pro Venuši, jejíž siderická oběžná doba $T = 224,7$ dní, je tedy synodická oběžná doba $P = 583,9$ dní.

Tabulka 1. Polohy planety Venuše v letech 1968 až 1970

	1968	1969	1970
Horní konjunkce	20. 6.	—	24. 1.
Největší východní elongance	—	26. 1.	1. 9.
Dolní konjunkce	—	8. 4.	10. 11.
Největší západní elongance	—	17. 6.	—

X. ročník fyzikální olympiády

Ve školním roce 1968/69 proběhne již X. ročník fyzikální olympiády. Soutěž FO nabývá stále většího významu pro lepší přípravu žáků středních škol ke studiu na vysokých školách.

Poněvadž chceme, aby žáci středních škol znali aspoň první příklady soutěže FO včas (dříve, než dostanou do rukou leták FO), uveřejňujeme první trojici příkladů pro kategorie A, B a C.

Kategorie A

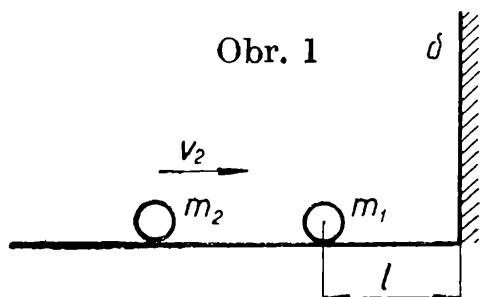
1. Pred pevnou zvislou pružnou rovinnou doskou σ stojí na vodorovnej hladkej podložke v mieste A, ktoré je od dosky σ vzdialené o dĺžku l , pružná guľôčka hmotnosti m_1 . Na túto guľôčku narazí centrálné druhá, rovnako veľká pružná guľôčka o hmotnosti m_2 rýchlosťou v_2 , orientovanou kolmo na dosku σ .

Vypočítajte:

a) v akom pomere musia byť hmotnosti guľôčiek, ak sa majú znova zraziť

1. vnútri dĺžky l , smerujúcej z bodu A kolmo na dosku σ ,

2. na priamke, ktorá obsahuje úsečku l , ale mimo tejto úsečky, tj. vľavo od bodu A (viď obr. 1),



b) aký musí byť pomer hmotností guľôčiek, aby k ďalšej zrážke nedošlo,

c) pri akom pomere hmotností sa obidve guľôčky znova zrazia v strede úsečky l ?

Trenie a rotačný pohyb guľôčiek neuvažujte. Polomery guľôčiek sú (vôči dĺžke l) zanedbatelné.

2. Střední rychlost neuspořádaného pohybu volných elektronů v kovech závisí na vlastnostech krystalové mřížky kovu a na teplotě. Při průtoku elektrického proudu přistupuje k tomuto pohybu ještě usměrněný pohyb elektronů o střední rychlosti v , pro niž platí $v \ll u$.

Předpokládejme, že okamžitá rychlost příslušející tomuto usměrněnému pohybu elektronů roste vlivem sil elektrického pole v době mezi dvěma po sobě následujícími srážkami elektronu s ionty kovu rovnoměrně od nuly do hodnoty v , takže $\bar{v} = \frac{v}{2}$.

a) Stanovte počet volných elektronů n v objemové jednotce mědi, jestliže na každý atom mědi připadá jeden volný elektron a dále stanovte řád vzdálenosti atomů v krystalové mřížce mědi za zjednodušeného předpokladu, že atomy zaujímají objemy tvaru krychlí, jejichž stěny se navzájem dotýkají.

b) Určete střední rychlost $\bar{v}$ usměrněného pohybu volných elektronů v měděném vodiči délky l o průřezu S , na jehož koncích bylo udržováno napětí U .

c) Stanovte dobu τ mezi dvěma po sobě následujícími srážkami elektronu s ionty krystalové mřížky.

Řešte nejprve obecně a potom pouze části a) a b) pro hodnoty $l = 10,0$ m, $S = 1,00$ mm², měrný odpor mědi $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ω m, $U = 1,00$ V, hmotnost elektronu $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, elementární náboj $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, Avogadrovo číslo $N = 6,02 \cdot 10^{26}$ kmol⁻¹, hmotnost kilogramatomu mědi $\alpha = 63,5$ kg, hustota mědi $s = 8900$ kg m⁻³.

3. M ě ř e n í k a p a c i t y m ů s t k o v o u m e t o d o u s t e j n o s m ě r n ý m p r o u d e m

Potřeby: Kondenzátor neznámé kapacity C_x , sada kondenzátorů známých kapacit, Wheatstoneův můstek pro měření odporů, regulační reostat odporu R , citlivý galvanometr G na stejnosměrný proud s nulou uprostřed stupnice, baterie Z , klíč K , spojovací vodiče.

Výklad: Uzavřeme-li klíčem K obvod (viz obr. 2), platí pro napětí mezi body AM' a $M'B$ úměra

$$U_{AM'} : U_{M'B} = C : C_x \quad (1)$$

a pro napětí mezi body AM a MB úměra

$$U_{AM} : U_{MB} = a : b, \quad (2)$$

kde $AM = a$ a $MB = b$, je-li vodič z homogenního materiálu a má všude stejný průřez.

Dokažte vztahy (1) a (2).

Jestliže při střídavém zapínání a vypínání obvodu klíčem K zůstane ukazatel galvanometru v klidu, pak platí

$$C_x = \frac{a}{b} C \quad (3)$$

Dokažte vztah (3).

Postup měření:

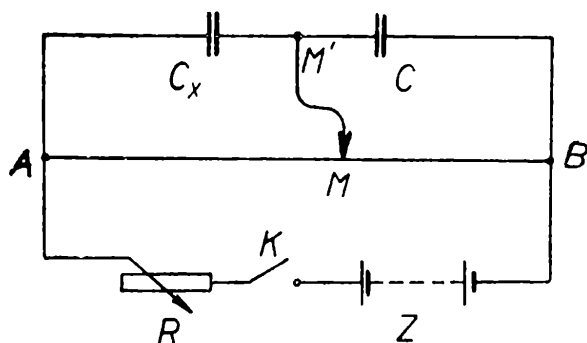
1. Zapojte obvod podle obr. 2. Odpor R slouží jako ochranný odpor. Postavte pohyblivý kontakt M blízko středu vodiče AB , na reostatu R nastavte největší odpor a vyhledejte v sadě kondenzátor takové kapacity C , aby ukazatel galvanometru při přerušování proudu kmital s nejmenšími rozkmity.

2. Najděte takovou polohu kontaktu M , aby ukazatel galvanometru zůstal při střídavém zapínání a vypínání obvodu klíčem K v klidu.

3. Zmenšováním odporu R až po jeho úplné vyřazení zvětšujte citlivost měření. Změřte teď a a b a vypočítejte hodnotu C_x ze vztahu (3). Naměřené hodnoty a a b i vypočítanou hodnotu C_x zaznamenejte do tabulky.

4. Zapněte odpor R znovu na nejvyšší hodnotu a opakujte měření 2. a 3. několikrát.

5. Z hodnot a , b , C_x určených při každém měření vypočítejte aritmetické průměry a absolutní i relativní chyby měření.



Obr. 2

Absolutní chyba ukazatele galvanometru na stupnici se rovná polovině hodnoty nejmenšího dílku měřítka. Absolutní i relativní chybu kapacity C určíte ze záznamu na kondenzátoru.

Kategorie B

1. Válec ze stejnorodé látky o hmotnosti m a o poloměru podstavy r byl uveden do pohybu po nakloněné rovině vzhůru počáteční rychlostí v . Válec koná po nakloněné rovině valivý pohyb bez klouzání

Vypočítejte výšku h nad místem počátku pohybu, do které válec po nakloněné rovině vystoupí, jestliže

a) se pohybuje po nakloněné rovině jen působením tíhové síly, třecí síla je zanedbatelně malá,

b) kromě tíhové síly na něj působí třecí síla, součinitel valivého tření je μ . Nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel α ; moment setrvačnosti válce vzhledem k ose otáčení při valivém pohybu je

$$J = \frac{mr^2}{2}$$

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v = 2,0 \text{ m s}^{-1}$, $r = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0,02$.

2. Dutá bóje kulového tvaru se má při plování ponořit polovinou svého objemu do kapaliny.

a) Určete tloušťku stěny bóje, je-li hustota materiálu stěny ρ_1 , hustota kapaliny ρ_2 , poloměr bóje r .

b) Jak závisí tloušťka stěny bóje na jejím poloměru za jinak stejných podmínek?

c) Použije-li se za jinak stejných podmínek ke konstrukci bóje materiálu o větší hustotě, je nutno tloušťku bóje zvětšit nebo zmenšit?

d) Jakou tloušťku ocelového plechu je nutno volit ke zhotovení bóje o poloměru 1000 mm, aby plovla za daných podmínek?

3. V uzavřené nádobě je směs dvou plynů o hmotnostech m_1 a m_2 , o molekulových hmotnostech μ_1 a μ_2 , o teplotě t a tlaku p . Určete hustotu směsi plynů za daných podmínek. Oba plyny považujeme za plyny dokonalé.

Řešte nejprve obecně a pak pro kyslík a dusík o hmotnostech $m_1 = m_2 = 100 \text{ g}$, $t = 0,0^\circ\text{C}$, $p = 10^5 \text{ N m}^{-2}$.

Kategorie C

1. V mezihvězdném prostoru se pohybují rovnoměrně po přímé dráze proti sobě dvě tělesa, první rychlostí v_1 , druhé rychlostí v_2 . V určitém okamžiku vyšle první těleso krátkovlnný rádiový signál, který se odrazí od druhého tělesa a vrátí se na těleso první, kde je přijat za dobu t po vyslání.

V jaké vzdálenosti byla obě tělesa od sebe

a) v okamžiku vyslání,

b) v okamžiku příjmu signálu?

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $v_1 = 2,0 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 3,0 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$, $t = 2,4 \text{ s}$.

2. Těleso se uvede v místě O z klidu do rovnoměrně zrychleného pohybu a dosáhne v čase t_1 rychlosti v_1 a v čase t_2 rychlosti $v_2 = nv_1$. V časovém intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$ vykoná dráhu s .

a) Určete zrychlení pohybujícího se tělesa.

b) Jaké vzdálenosti od bodu O má těleso v časech t_1 a t_2 ?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $\Delta t = 10,0 \text{ s}$, $s = 30,0 \text{ m}$, $n = 5$,

3. Měření plošného obsahu rovinného obrazce vážením

Potřeby: Kartónový papír, kružidlo, nůžky, laboratorní váhy a sádka závaží, délkové měřítko s milimetrovým dělením.

Návod: Dva přímé hranoly nebo válce z téhož homogenního materiálu hustoty ρ o stejné výšce h , jejichž podstavy mají obsahy S_1 a S , mají hmotnosti m_1 a m . Známe-li velikost podstavy S_1 jednoho z těchto těles, dá se vypočítat velikost S podstavy druhého tělesa ze vztahu

$$S = S_1 \frac{m}{m_1}. \quad (1)$$

Lze tedy velikost libovolné (i zcela nepravidelné) rovinné plochy určit vážením a srovnáním se známým obsahem jiné plochy.

Úkol: Určete vážením obsah kruhu o poloměru r .

Postup práce:

a) Odvoďte vztah (1).

b) Vystříhněte z listu kladívkového papíru kruh o poloměru r (asi 10 cm) a obrazec, jehož obsah se snadno počítá, nejlépe čtverec o straně a . Změřte 10 různých průměrů kruhové desky a vypočítejte její poloměr. Stranu čtverce a určete jako aritmetický průměr z deseti měření vzdáleností protilehlých stran čtvercové desky. Určete absolutní i relativní chyby měření.

c) Vážením na laboratorních vahách určete s dosažitelnou přesností hmotnost obou vystřížených papírových desek. Každou z nich zvažte pětkrát, určete aritmetické průměry naměřených hodnot a absolutní i relativní chyby obou naměřených veličin.

d) Vypočítejte obsah S_1 čtvercové desky.

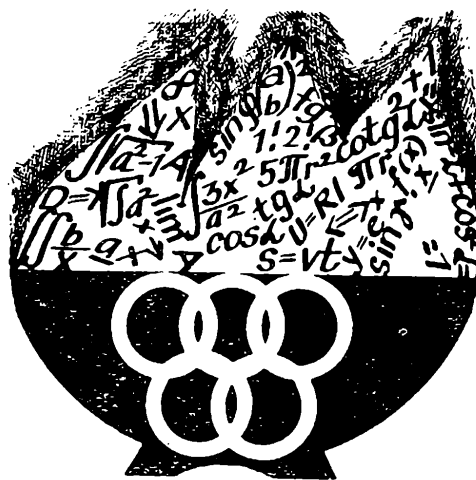
e) Podle vztahu (1) určete obsah S narýsovaného kruhu a vypočítejte absolutní i relativní chybu této veličiny.

Kontrolní úkol:

Ze vztahu $\pi = \frac{S}{r^2}$ určete výpočtem hodnotu Ludolfova čísla a porovnejte ji s hodnotou z tabulek.

Ú V F O

MO



XVIII. ročník matematické olympiády

Pro informaci uvádíme texty přípravných úloh XVIII. roč. MO. Organizace tohoto ročníku nebude se lišit od předcházejících. Podrobnosti budou uvedeny jak v letáku MO, tak při otištění textů úloh I. kola v tomto časopise. Zatím jen upozorňujeme, že termín odevzdání přípravných úloh je 15. listopad 1968.

Kategorie A

1. Buďte a, b, c tři kladná čísla, pro něž platí

$$a^n + b^n = c^n,$$

kde n je přirozené číslo větší než 1. Pak existuje trojúhelník, jehož strany mají délky a, b, c . Dokažte.

2. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = a, AD = b$. Trojúhelník XYZ je vepsán obdélníku $ABCD$ tak, že vrcholy X, Y náležejí straně AB , vrchol Z straně CD .

a) Dokažte, že poloměr r kružnice opsané trojúhelníku XYZ splňuje nerovnosti

$$\frac{b}{2} < r < \frac{a^2 + b^2}{2b}$$

b) Dokažte, že každé číslo r splňující nerovnosti (1) je poloměrem kružnice opsané některému z takových trojúhelníků XYZ .

3. Určete všechna komplexní čísla z , která vyhovují rovnici

$$(1 + i)z^2 - i|z^2| + 1 - i = 0.$$

4. Buďte a, b, c, d délky stran konvexního čtyřúhelníka, u, v délky jeho úhlopříček, P jeho obsah. Pak platí

$$4u^2v^2 = 16P^2 + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2.$$

Dokažte.

Kategorie B

1. a) Najděte všechny dvojice (x, y) celých kladných čísel, pro které platí

$$|2x - 10y| \leq 5.$$

b) Je-li p kladné číslo, pak nerovnost

$$|2x - 10y| \leq p$$

má v oboru dvojic celých kladných čísel (x, y) jen konečně mnoho řešení (nebo žádné). Dokažte.

2. Platí-li zároveň

$$\sin x + \sin y + \sin z = 0,$$

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0,$$

pak je také

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0,$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0.$$

Dokažte.

3. V rovině je dán dutý úhel MON , vnitřní bod P polopřímky opačné k polopřímce OM a vnitřní bod Q dutého úhlu NOP . Dále je dán čtverec se stranou d . Bodem Q vedte přímku p , která protíná polopřímky OM , ON po řadě v bodech X , Y tak, aby trojúhelník $OX Y$ a daný čtverec měly stejný obsah.

4. Jsou dány roviny $\varrho \parallel \varrho'$, jejichž vzdálenost je $v > 0$. V rovině ϱ leží čtverec $ABCD$ o straně d a středu S , v rovině ϱ' s ním shodný čtverec $A'B'C'D'$ o středu S' . Přitom je $SS' \perp \varrho$, odchylka přímek SA , $S'A'$ je α , kde $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, a polopřímka SX souhlasně rovnoběžná s polopřímkou $S'A'$ má s úsečkou AB společný bod. Vypočítejte objem tělesa, které omezují čtverce $ABCD$, $A'B'C'D'$ a trojúhelníky $AA'B$, $A'BB'$, $BB'C$, $B'CC'$, $CC'D$, $C'DD'$, $DD'A$, $D'AA'$.

Kategorie C

1. Dva chodci jdou stálými rychlostmi podél železniční trati v témže směru. V témž směru jede po trati vlak. Lokomotiva předjede prvního chodce τ minut poté, co předjela druhého chodce. Prvního chodce mine vlak za t_1 vteřin, druhého chodce, který jde rychleji, za t_2 vteřin. Za kolik minut dohoní druhý chodec prvního?

2. V rovině je daná priamka p a bod A vzdialený od priamky p o $a > 0$. Ďalej je dané kladné číslo c . Určite geometrické miesto vrcholu D obdlžnikov $ABCD$, ktorých plošný obsah je c a ktorých vrchol B leží na priamke p .

3. Športový krúžok na škole má 79 členov. Fotbal pestuje 45 členov, volejbal 30 členov, basketbal 36 členov, hokej 28 členov, plávanie 25 členov a ľahkú atletiku 35 členov. Každý člen pestuje aspoň dva športy a najväčší počet športov pestuje 40 členov. Koľko členov pestuje práve dva športy, práve tri športy atď.

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé, je-li dána délka jeho ramene $AD = d$, délka jeho úhlopříčky $AC = e$ a poměr obou základů $AB : DC = 5 : 3$.

Kategorie D

1. Rozpočítali, že stavebný materiál odvezie auto za x dní, kde $x > 3$. Keďže bolo treba urýchliť odvoz, na štvrtý deň začali odvážať materiál ešte ďalšími dvoma autami.

Výkon prvého pomocného auta bol $\frac{5}{6}$ výkonu pôvodného auta, výkon druhého pomocného auta bol 1,5 výkonu pôvodného auta. Všetkými tromi autami bol odvoz dokončený za y dní.

a) Vyjadrite y pomocou x .

b) Pre ktoré celé čísla $x < 50$ je y celé číslo?

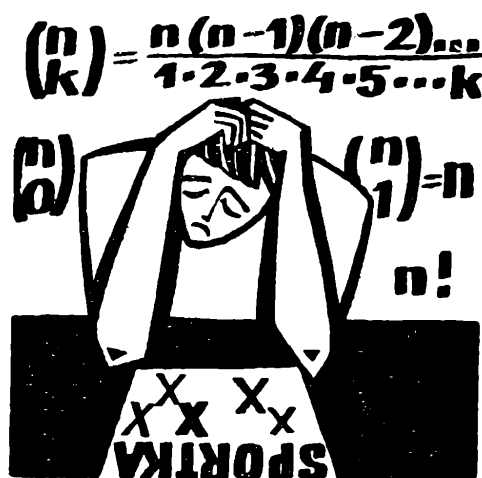
2. Určíte všechny dvojice přirozených čísel x, y , pro které platí

$$8x^3 - y^3 = 387$$

3. Jsou dány body A, B, C, D , z nichž žádné tři neleží v přímce. Sestrojte bod E tak, aby bylo $AE \parallel BD$, $DE \parallel AB$, a bod F tak, aby bylo $AF \parallel CD$, $DF \parallel AC$. Dokažte, že $EF = BC$.

4. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a ; K je střed strany AD , L je bod polopřímky BA , pro který platí $BL = \frac{3}{2}a$. Označme o nějakou takovou přímku procházející bodem D , že úsečka XY souměrně sdružená s KL podle osy o leží celá ve čtverci $ABCD$.

Jaký útvar vyplní všechny takto vytvořené úsečky XY ? Narýsujte obrázek a vyšrafujte tento útvar.



MATEMATICKÉ ZABAVY

Zábavná matematika

1. Maminka rozdělila 96 ořechů do tří nestejných hromádek. Zavolala své tři děti a řekla jim: „Když z první hromádky přeložím do druhé tolik ořechů, kolik jich bylo v této druhé hromádce, potom z druhé do třetí tolik, kolik jich předtím bylo ve třetí, a nakonec ze třetí do první tolik, kolik jich právě bude v první hromádce; pak bude ve všech hromádkách stejně ořechů. Kolik je ořechů v každé hromádce nyní? Kdo to uhádne první, dostane největší hromádku.“ Jistě i pro vás, milý čtenáři, bude zajímavé zjistit, kolik ořechů bylo původně v jednotlivých hromádkách.

2. Vnuk se dotázal dědečka, kolik je mu let. Dědeček odpověděl: „Před 3 roky mi bylo právě $3 \times$ tolik jako tvému otci, když se ženil, který v té době byl $2 \times$ starší než ty nyní a já za 7 let budu $7 \times$ starší než ty nyní.“ Kolik let je dědečkovi?

František Jirásek

Zmoklá rekreace

Rekreace je velmi pěkná věc, ale nesmí přšet. Sedmi přátelům — jejich jména jsou Bohouš, Emil, Fanda, Jenda, Kája, Milan a Standa — se právě přihodilo, že na jejich rekreaci lilo jako z konve. Na štěstí každý z nich si přivezl jednu knížku a tak měli k dispozici tyto knížky: J. Š. Baar: Skřivánek, K. Čapek: Zahradníkův rok, K. M. Čapek-Chod: Turbína, J. Drda: Městečko na dlani, A. Dumas: Tři mušketýři, B. Hrabal: Perlička na dně, E. Vachek: Bidýlko. Každý četl jen knížky svých přátel, nikoliv svoji a tak Bohouš přečetl Tři mušketéry a Zahradníkův rok, Milan Zahradníkův rok a Skřivánka, Standa Tři mušketéry a Turbínu, Fanda Tři mušketéry, Jenda Zahradníkův rok a Kája Turbínu. Ale přelo stále, a proto našich sedm přátel se po kratší přestávce pustilo znovu do čtení. Fanda přečetl Turbínu a Bidýlko, Bohouš, Jenda a Milan přečetli tytéž dvě knížky a Milan s Jendou přečetli Městečko na dlani a Tři mušketéry.

Vaším úkolem nyní je zjistit majitele jednotlivých knížek.

S. H.

Neúplné násobení

V neúplném násobení, které zde čtenářům předkládáme, je v násobenci skryto tajné číslo cizího agenta a v součinu šifrovaný špionážní vzkaz. Dokážete doplnit zbývající cifry v celém násobení a pomoci tak kontrašpionáži?

$$\begin{array}{r} \text{. . . . 4 .} \times 2 \quad 7 \\ \hline \text{.} \\ 6 \quad \quad \quad \text{. 2} \\ \quad \text{. . . . 3 . .} \\ \hline \quad \quad \quad 3 \ 5 \quad \quad 3 \end{array}$$

S. H. ml.



R E C E N Z E

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA XVIII
B R O J 1

Z A G R E B

ŠKOL. GOD.
1967. — 1968.

Jako u nás vychází již 46. ročník *Rozhledů* matematicko-fyzikálních, časopisu pro studující škol všeobecně vzdělávacích a odborných, tak v Jugoslávii je vydáván letos 18. ročník časopisu

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola.

Je také, jak již z názvu vidíte, určen žákům středních škol. Vychází čtyřikrát do roka a jeho vlastníkem je Savez društava matematicara i fizičara SFRJ, vydavatelem Društvo matemati-

čara i fizičara SRH v Zagrebu.

Každé číslo má obvykle 48 stránek a jeho náplň je podobná obsahu našeho časopisu. Časopis řídí společně s redakční radou redaktori dr. Branimir Branković a Stjepan Skreblin, profesori v Zagrebu. Adresa redakce je Zagreb, Ilica 16/III, cena jednotlivého výtisku 1,60 dináru (tj. 4,80 Kčs).

Český nebo slovenský čtenář jen s malou pomocí slovníku může tento časopis dobře číst.

M. M.



REDAKCE HOVŮŘÍ

Připravuje se invaze

ČEHO A KAM?

Redakce připravuje invazi moderní matematiky a logiky na stránky Rozhledů matematicko-fyzikálních. V příštím ročníku najdete řadu článků, které vám přístupnou formou vyloží některé principy moderní matematiky a logiky a ukáží jednoduché prostředky k řešení zajímavých úloh. Půjde o množinové diagramy, o binárních relací, o grafy sloužící k řešení logických úloh (mimo „kulárních zeber“), o tabulkovou metodu při práci s konečnými množinami, o jednoduché výpočty v Booleově algebře atd. Svůj důvtip budete moci osvědčit při řešení úloh zvláštní soutěže.

Zajistěte si odběr Rozhledů matematicko-fyzikálních již od prvního čísla příštího ročníku. Přihlaste se proto k odběru již před prázdninami!

J. Š.

* *

Vzhledem k četným urgencím z řad čtenářů oznamuje redakce, že značné zpoždění při vyjití čísla 8 bylo zaviněno nečekaně zvýšenými požadavky denního tisku, které nemohla naše tiskárna svým vybavením zvládnout. Rukopisy jsou redakcí odevzdávány tiskárně ve stanovených termínech.