ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 45, 1966-67

Vydává
ministerstvo školství
ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze
za odborné péče
Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. Dr. MIROSLAV MENŠÍK
nositel vyznamenání Za vynikající práci

VÝKONNÝ REDAKTOR: DOC. OTA SETZER
nositel vyznamenání Za vynikající práci

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, Jaroslav Bejsta, zasloužilý učitel Petr Benda, doc. dr. Josef Dibelka, Stanislav Horák, doc. Jaroslav Chudý, prof. dr. Josef Korous DrSc, prof. Emil Kraemer, dr. Oldřich Lepil, prof. dr. Cyril Palaj, CSc Evžen Říman, dr. Jiří Sedláček, dr. Ladislav Sehnal, inž. dr. Václav Šindelář, prof. dr. Ján Vanovič, František Vencálek.

OBSAH

Matematika

Bartoš Pavel: O jednom zevšeobecnění Pytagorovej vety . 205
Blažek Vladimír: Průsečík přímky s elipsou a hyperbolou 211
Budinský B., Šmakal S.: Moivreova věta 404
Budinský B., Šmakal S.: Některé důsledky Moivreovy věty 453
Cífka Eduard: Dvojstředový čtyřúhelník 209
Čapla Vasil: Vznik a vývoj strojů na zpracování informací 262, 307, 360, 416, 459
Drábek Karel: K zobecnění Pythagorovy věty 110
Drábek Karel: Mocnost bodu ke kružnici 270
Drs Ladislav: Konstrukce čísla π kružítkem a pravítkem . . . 4
Dušek František: Užití dvojkové soustavy při dělení úseček a úhlů 401
Hlaváček Miloslav: O diofantických rovnicích 53
Horák Stanislav: Čtyřstěn 159
Hroník Jaromír: O rekurentních posloupnostech 101
Janeček František: O rozšíření Pythagorovy věty . . 58
Jeništa Oldřich: Geometrická místa 213, 273, 312
Jiránek František: Pojem euklidovské konstrukce 5
Jokl Evžen: Malá čísla 1
Kastl Jan: Věta z geometrie trojúhelníka . 359
Kateřiňák Josef: Nový pohled na geometrii 49, 107
Setzer Ota: Mascheronské konstrukce 153
Skalický Václav: Prostorová analogie některých planimetrických vět 353
Stejskal Jiří: Zjišťování prvočísel a čísel složených . 305
Šedivý Jaroslav: Řešení logických úloh pomocí grafů 408, 449
Šoler Josef: Užití mocnosti bodu ke kružnici k důkazu některých vět 458
Švandrlík Jan: K jednomu tvaru parametrických rovnic přímky . . 257
Šubrt Jiří: O aritmetických posloupnostech, jejímiž členy jsou prvočísla 105

Deskriptivní geometrie

Borecký P. V. (Toronto): Technické užití kruhové kuželové plochy 463
Drábek Karel: Tečna a normála středové kuželosečky . 8
Granát Luděk: Nahrazování křivek kruhovými oblouky . 467
Granát Luděk: Nahrazování křivek lomenými čarami . . . 368, 420
Libicher Jaroslav: Tři konstrukce elipsy odvozené z prostoru 162

Fyzika

Bednařík Milan: Pohybuje se plachetnice proti větru? 378
Blaťák Karel: Bude dnes bouřka? 280
Dibelka Josef: Kerrův jev 117
Dibelka Josef: Kolorimetrie 321
Dragoun Antonín: Přibližný výpočet stáří Země 219
Filka Štefan: Stanovenie Avogadrovho čísla metódou merania rozkladu elektrolytu 372
Franc Ladislav: Přehled elektrických obvodů . . . 324, 382
Kamenčák František: Elektroosmóza a její užití v praxi 66
Kamenčák František: Jak se měří rychlost střel? 167
Klötzler Rolf (Lipsko): Vliv tření při vrstvení válců . 12
Kraus Ivo: Jak se zvukem hledají chyby 286, 319
Kumfalvi Rudolf (Budapešť): Několik řešených příkladů 21, 70, 120, 176
Macek Bohumil: K výkladu základních fyzikálních pojmů . 384, 426
Martoch Antonín: Vláknová optika . . . 61, 113, 172
Pospíšil Zdeněk: Čerenkovův-Vavilovův jev 316
Procházka Vladislav: Reversní kyvadlo 227
Santholzer Vilém: Jak se u nás projevily atomové výbuchy v ČLR . 18
Smrž Ladislav: Přesnost a citlivost výchylkových měřicích přístrojů 431
Stehlík Milan: Zajímavý dokaz 1. Keplerovho zákona 475
Šindelář Václav: Pístový manometr 424
Vašek Lubomír: Lom světla kulovým prostředím 276

Astronomie

Kabeláč Josef: Geometrické místo elogancí 24

Matematické zábavy

Hejný Milan: Kto porazil mužstvo E? . 95
Horák Stanislav: Kloubový čtyřúhelník 349
Kodym Adolf: Geometrie fotbalového míče 295
Koman Milan: Hra se dvěma prstenci . . 238
Kropiláková K., Voda P.: Úloha o čokoláde 7
Mladým matematikům 112
Řešení zábavných úloh . . , , 481
Setzer Ota: A přece neodolalo 198
Šedivý Jaroslav: Detektivní pětiboj . 199, 239, 298, 479
Šedivý Jaroslav: Jedna užitečná nerovnost 129
Špačková Miloslava: Kolik střelců? . 97
Zemánek Jaroslav: Úloha z kombinatoriky 350

Fyzikální zajímavosti

Kašpar Emil: O mořské vodě, o vejci a o Archimédově zákonu 194, 242

MO

Macháček Vlastimil: Závěr XV. ročníku MO . . 247
První výsledky konkursu na návrhy úloh pro MO . 247
Řešení přípravných úloh 1. kola XVI. ročníku MO 345, 433
Soutěžní úkoly I. kola XVI. ročníku MO 83
XVI. ročník Matematické olympiády 29
Vyšín Jan: Zúčastnili jsme se VIII. MMO v Sofii 148, 188, 247, 289
XVII. ročník Matematické olympiády 491

FO

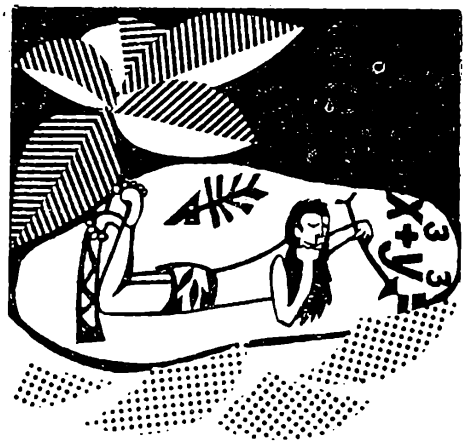
Doležel Miloš: Dopplerův princip 86
Rádl Milan: Potenciál v gravitačním a elektrickém poli 31
Tesař Jan: Moment síly a momentová věta 130
Úlohy pro 1. kolo Fyzikální olympiády 472

Úlohy

Řešení úloh loňské soutěže 44, 74, 127, 150, 182, 230, 397, 437
Úlohy k řešení 42, 73, 125

Různé

Drahokoupilová A., Kašpar I.: Informace o přijímacích zkouškách z fyziky na stavební fakultu ČVUT 332, 445
Golab F., Kamenčák F.: Motor Wankel 446
Hampl J.: Píše ředitel SVVŠ 487
Hofmanovi Josef a Helena: Junge Mathematiker . . 202
Chudý Jaroslav: Přijímací řízení na strojní fakultě ČVUT 442
Jeništa Oldřich: Josef Maximilian Petzval 486
Kejla František: Jak to opravdu bylo 253
Kepr Bořivoj: Přijímací zkoušky z deskr. geometrie na technice 327
Kolomý Rudolf: Pražský pobyt Alberta Einsteina . . 98
Kořínková Hana: Opakujte si matematiku 203, 336, 387
Kotyk Josef: Auguste Jean Fresnel . 393
Kotyk Josef: Rozhledy pomáhají škole 302
Lepilová Květa: Slovníček fyzikálních výrazů obálka č. 1—10
Růžha Zdeněk: Vznášedla 299
Veselý František: Gottfried Wilhelm Leibniz 340
Recenze . 46, 100, 201, 256, 303, 350, 399, 489



MATEMATIKA

Malá čísla

EVŽEN JOKL, ČVUT, Praha

Často porovnáváme navzájem různá čísla a přitom označujeme některá slovem „velká", některá slovem „malá". Říci o některém čísle, že je velké nebo malé, můžeme však jen relativně. Tak můžeme 1000 pokládat za velké proti 10, ale 10 může být velké proti 0,1. Setkáváme se také s čísly tak malými proti jiným, že je můžeme při výpočtu zanedbat. Tak třeba vzdálenosti mezi městy udáváme v kilometrech a zanedbáváme zlomky kilometrů, teplotu vzduchu udáváme běžně ve stupních a zanedbáváme zlomky stupňů apod. Také při výpočtech zaokrouhlujeme výpočty na tolik cifer, kolik má praktický význam. Tak třeba při výpočtu plochy obdélníkového pole 137 m × 76 m vychází 10 412 m², ale stačí říci 104 arů, protože rozměry 137 m a 76 m nejsou přesné, ale jen zaokrouhlené.

Kromě čísel zanedbatelně malých se setkáváme s čísly „malými", která sice nemůžeme zanedbat, ale nemusíme s nimi počítat podle přesných pravidel, nýbrž zjednodušeně. Ukážeme dva příklady.

Při měření se připouští tzv. *chyba měřené hodnoty* (např. poloměr kružnice $r = 15{,}3 \pm 0{,}1$ cm), nebo norma se udává s tolerancí (např. napětí v elektrické síti je 220 ± 10 V). Tyto chyby (tolerance) jsou malé ve srovnání s rozměrem. Mějme nyní třeba obdélník o stranách $26{,}3 \pm 0{,}2$ a $16{,}2 \pm 0{,}1$ a počítejme jeho obsah. Správně bychom měli udat

$$426{,}06 \pm (3{,}24 + 2{,}63 + 0{,}02) = 426{,}06 \pm 5{,}89$$

Avšak praktický význam mají jen první tři číslice výsledku, protože činitelé měli také jen tři číslice. Stačí tedy zaokrouhlit na 426 ± 6.

Z tohoto hlediska byl zcela zanedbatelný třetí člen 0,02 (součin malých čísel 0,2 a 0,1) při výpočtu chyby součinu. Tento fakt se vyslovuje větou, že

součiny malých veličin (tzv. *malé veličiny druhého řádu*) *jsou zanedbatelné.*

Dosud ovšem nevíme, která čísla můžeme považovat za malá v tomto smyslu.

Další příklad je výpočet výrazu $(1 + x)^n$ pro malá x. Podle binomické věty platí pro n přirozené

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \left(\frac{n}{2}\right) x^2 + \left(\frac{n}{3}\right) x^3 + \quad + \left(\frac{n}{n}\right) x^n$$

Je-li však x v mezích 0 až 0,1 (tedy dosti malé), je x^2 ještě menší a další mocniny jsou ještě mnohem menší. Můžeme pak klást přibližně

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx .$$

Tak např. pro $x = 0{,}03$, $n = 3$ máme $1{,}03^3 = 1{,}092\,727$, podle přibližného vzorce 1,09. Oba výsledky souhlasí na dvě desetinná místa, která mají praktický význam, jestliže 1,03 bylo zaokrouhlené. Uvedený přibližný vzorec má význam jednak proto, že jej lze zobecnit i pro n reálné (mnohočlen se stane součtem nekonečné řady), jednak proto, že se jej dá použít i když první člen není jednička, neboť je

$$(a + b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$$

Počítejme např.

$$\sqrt{67} = (64 + 3)^{\frac{1}{2}} = 8 \left(1 + \frac{3}{64}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 8 \left(1 + \frac{3}{128}\right) = 8{,}187$$

Přesným výpočtem bychom dostali 8,185.

Dříve než přistoupíme k precizování pojmu „malého" čísla, poznamenejme, že pojem nekonečně malých čísel, kterého se používá v infinitezimálním počtu, nelze s tímto směšovat. Podstatný rozdíl je v tom, že tzv. n e k o n e č n ě m a l á č í s l a jsou proměnné veličiny, sloužící především k výpočtu limit, kdežto my se omezujeme na algebraické operace.

Náš pojem „malého" čísla bude podstatně záviset na faktu, že při numerických výpočtech pracujeme výhradně s čísly o konečném počtu číslic. Všechna čísla, ať racionální nebo iracionální, musíme omezit (zaokrouhlit) na nějaký konečný počet číslic. Je to způsobeno omezenými možnostmi počítacích prostředků.

Označme tedy n řád čísla, k řád poslední číslice, h počet číslic. Platí zřejmě $h = n - k + 1$. Např. pro číslo 72,315 je $n = 1$, $k = -3$, $h = 5$.

Nazveme nyní číslo Dx malé ve srovnání s x, jestliže je řád čísla Dx roven nejvýše

$$\tfrac{1}{2}(n + k - 1)$$

Jestliže tedy mají x i Dx poslední číslici stejného řádu k, pak má Dx nejvýše polovinu číslic proti x, neboť je

$$\tfrac{1}{2}(n + k - 1) - k + 1 = \tfrac{1}{2}(n - k + 1)$$

Počet číslic Dx je v tom případě nejvýše $\frac{h}{2}$ a řád Dx je nejvýše $n - \frac{h}{2}$.

Mějme nyní dvě čísla Dx, Dy, jež jsou malá ve srovnání s x, resp. y. Říkáme, že součin $Dx \,.\, Dy$ je číslo malé 2. řádu ve srovnání se součinem $x \,.\, y$. Ukážeme, že tento součin je tak malý, že jej můžeme zanedbávat. Řád čísla $Dx \,.\, Dy$ je zřejmě

$$\tfrac{1}{2}[n(x) + k(x) + n(y) + k(y) - 2]$$

V součinu $x \,.\, y$ má smysl uvažovat jen tolik míst, kolik jich má činitel s menším počtem míst, tedy min $[h(x), h(y)]$ míst.

Nechť tedy je např.

$$h(xy) = h(x)$$

Pak řád poslední číslice součinu xy je

$$n(x) + n(y) - n(x) + k(x) = n(y) + k(x)$$

Na druhé straně, jak hned uvidíme, řád čísla $Dx \,.\, Dy$ je menší než

$$n(y) + k(x)$$

Z nerovnosti

$$h(x) \leqq h(y)$$

plyne

$$n(x) + k(y) \leqq n(y) + k(x)$$

a odtud

$$\tfrac{1}{2}[n(x) + k(x) + n(y) + k(y) - 2] < n(y) + k(x)$$

Na levé straně je právě řád čísla $D_x \,.\, D_y$, a tím je tedy tvrzení dokázáno pro případ $h(x) \leqq h(y)$. V opačném případě by však vyšel výsledek stejný, jak se může čtenář snadno přesvědčit.

Mohli bychom zavést také malá čísla 3. řádu i vyšších řádů jako součiny malých čísel menších řádů. Vždy ovšem je nutno uvést příslušná „velká“ čísla, s nimiž se srovnává. Malá čísla, zavedená předtím, se také nazývají malá čísla 1. řádu.

Naše definice se může zdát při povrchním pohledu protismyslná. Nelze podle ní rozhodnout, je-li třeba 0,01 malé proti 10, jsou-li obě čísla přesná, protože nemůžeme udat horní hranici pro počet platných číslic. Avšak je-li 0,01 zaokrouhlené, pak nutně je 1 poslední platná číslice, $k = -2$, a i kdyby 10 bylo přesné, můžeme pro ně také položit

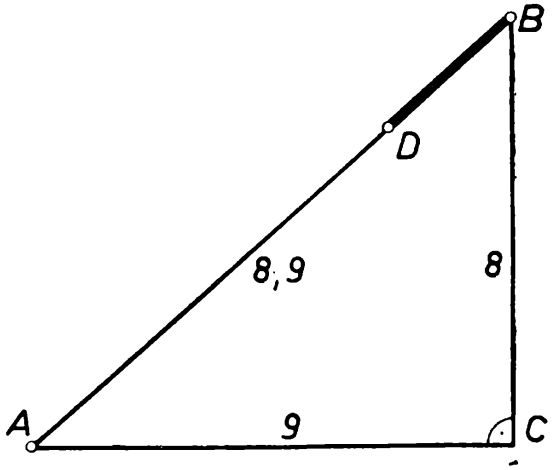
$k = -2$ (nebo menší, aby úvaha měla smysl) a je pak 0,01 malé proti 10.

Naproti tomu číslo 0,009 632 5 není malé proti 10, protože je $k = -7$, u čísla 10 jsou za desetinnou čárkou na prvých sedmi místech nuly. Číslo „malé" by muselo mít první nenulovou číslici až na 4. desetinném místě.

Naše definice ovšem nemá udávat nějaký poměr mezi velkými a malými čísly, ale slouží praktickému účelu, totiž získání jistoty, že můžeme bez nebezpečí zanedbávat malá čísla vyšších řádů. Tak počítáme-li podle vzorce $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ a je-li $x = 0{,}01$ a $n = 2$, je $1{,}01^2 = 1{,}020\,1 \approx 1{,}02$, ale při $x = 0{,}009\,632\,5$ je $1{,}009\,632\,5^2 = 1{,}019\,377\,2$ a ne podle přibližného vzorce 1,019 265 0. V takovém případě nemůžeme zanedbat členy binomického rozvoje druhým počínaje, ale teprve počínaje třetím, nebo až čtvrtým atd.

Konstrukce čísla Л kružítkem a pravítkem?

DOC. INŽ. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT, Praha



Sestrojte pravoúhlý trojúhelník $\triangle ABC$ s odvěsnami 8 a 9. Délka přepony

$$AC = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145} = 12{,}041\,59$$

Podle připojeného obr. 1 sestrojte na přeponě AC bod D tak, aby délka $AD = 8{,}9$. Pak je

$$DB = 12{,}041\,59 - 8{,}9 = 3{,}141\,59$$

a tato úsečka se při teoreticky přesné konstrukci liší od čísla π jen v miliónтinách zvolené jednotky!

Pojem euklidovské konstrukce

FRANTIŠEK JIRÁSEK, ČVUT, Praha

Nejprve si ujasníme pojem euklidovské konstrukce. Staří Řekové dávali přednost těm konstrukcím, při nichž se používalo pouze kružnic a přímek. To však neznamená, že by nepoužívali jiných křivek při konstrukcích. Víme, že používali parabol, rovnoosých hyperbol i složitějších křivek. *Euklidovskými konstrukcemi budeme rozumět takové konstrukce, při nichž se používá jen přímek a kružnic.* Vystačíme tedy s pravítkem a kružítkem, jichž používáme obvyklým způsobem, tj. pravítka ke spojnici dvou (různých) bodů a kružítka k opsání kružnice libovolného poloměru kolem daného bodu. Euklidovské konstrukce se pak skládají z těchto šesti základních konstrukcí:

1. Dva různé body spojit přímkou.
2. Kolem daného bodu (jakožto středu) opsat kružnici daného poloměru.
3. Zjistit průsečík dvou (různoběžných) přímek.
4. Určit průsečík přímky a kružnice.
5. Zjistit společné body dvou různých kružnic.
6. Daným bodem vést k dané přímce rovnoběžnou přímku.

Budeme-li řešit úlohu užitím analytické geometrie, zavedeme v rovině pravoúhlou soustavu souřadnic. Ze souřadnic známých bodů sestavíme rovnice, jejichž koeficienty závisí na souřadnicích daných bodů a řešením sestavené rovnice nebo sestavené soustavy rovnic dostaneme souřadnice hledaných bodů.

Věta 1. *Jestliže lze danou úlohu řešit euklidovsky, pak lze souřadnice hledaných bodů vypočítat ze souřadnic daných bodů pomocí základních početních operací, tj. užitím sčítání, odčítání, násobení, dělení a druhých odmocnin v konečném počtu.*

D ů k a z provedeme tak, že analyticky provedeme všech šest uvedených základních konstrukcí.

1. Máme napsat rovnici přímky procházející dvěma různými body $A(x_1, y_2)$, $B(x_2, y_2)$.

Je známo, že rovnice této přímky se dá napsat v tvaru

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

Položíme-li

$$y_2 - y_1 = A, \quad x_2 - x_1 = -B, \quad x_2 y_1 - x_1 y_2 = C,$$

dostaneme známý tvar rovnice přímky

$$Ax + By + C = 0$$

Je-li $x_1 = x_2$, dostaneme rovnici

$$Ax + C = 0\,,$$

což představuje přímku rovnoběžnou s osou y. Je-li $y_1 = y_2$, rovnice nabude tvaru

$$By + C = 0,$$

a to je rovnice přímky rovnoběžné s osou x.

2. Kružnice se středem $S\,(x_0, y_0)$ a poloměru r má rovnici

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\,.$$

3. Jde-li o konstrukci 3, znamená to řešit soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0\,,$$

to jsou rovnice daných přímek. Máme-li najít průsečík, považujeme proměnné za neznámé a soustavu řešíme. Za předpokladu $A_1A_2 \neq 0$, můžeme psát

$$x = \frac{-B_1y - C_1}{A_1} = \frac{-B_2y - C_2}{A_2}$$

a řešením

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\,, \qquad y = \frac{A_2C_1 - B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Tím je tvrzení věty 1. dokázáno i v tomto případě. Diskusi zavádět nebudeme, to není předpokladem této stati.

4. V tomto případě vede základní úloha k řešení soustavy dvou rovnic, z nichž jedna je lineární a druhá kvadratická

$$Ax - By - C = 0$$
$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Vyloučením neznámé x dojdeme k rovnici kvadratické

$(B^2 + A^2)\,y^2 + 2\,(BC - mAB - nA^2)\,y + C^2 - 2\,mAC + A^2(m^2 +$
$+ n^2 - r^2) = 0$

Kořeny této rovnice se dají vypočítat užitím jedné druhé odmocniny (tedy užitím konečného počtu druhých odmocnin).

5. Nechť kružnice mají rovnice

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$$
$$(x - m_2)^2 + (y - y_1)^2 = r_2^2\,,$$

pak jde o řešení této soustavy. Řešení této soustavy provádět nebudeme, ale provedeme si je na konkrétním případě

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9,$$
$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$2x - 2y = 5.$$

Z této rovnice vyjádříme y a dosadíme do některé z daných rovnic. Po úpravě dostaneme

$$8x^2 - 44x + 49 = 0,$$

Řešením obdržíme

$$x_1 = 3{,}9\,, \qquad x_2 = 1{,}5,$$
$$y_1 = 1{,}4, \qquad y_2 = -1$$

Nejvyšší početní výkon, jehož jsme při řešení použili, bylo odmocňování dvěma, a to pouze jednou.

6. Dana přímka má rovnici

$$Ax - By - C = 0$$

a daný bod je $M\,(m_1, m_2)$. Hledaná přímka, která prochází bodem M a je s danou rovnoběžná, má rovnici

$$A\,(x - m_1) + B\,(y - m_1) = 0.$$

Zde jsme potřebovali k řešení jen čtyři základní početní výkony.

Závěr. Znovu si uvědomíme, že každá euklidovská konstrukce se dá rozložit na určitý počet nejjednodušších konstrukcí (základních). Tomu v analytické geometrii odpovídá sečítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování čísel dvěma v konečném počtu.

Cvičení

1. Početně ukažte, že dvě paraboly o společné ose mají průsečíky, které lze určit euklidovsky.
2. Totéž ukažte pro elipsu a přímku.

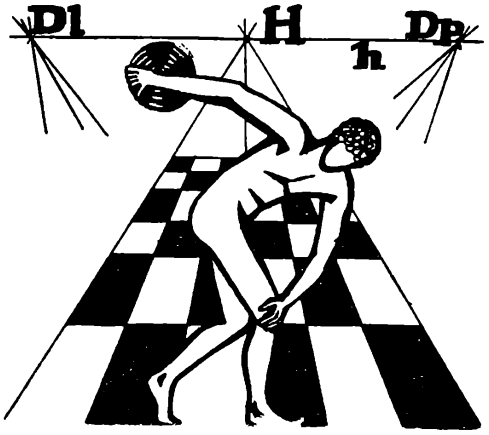
Úloha o čokoláde

Pred časom bola v Matematickej olympiáde jedna úloha o koláčoch. Dnes predkladáme analogickú úlohu o čokoláde.

Niekto má p kusov čokolád. V každej z nich je pribalený 1 kupón. Za každých k kupónov dostaneme zdarma jednu čokoládu, ktorá tiež obsahuje jeden taký kupón. Vyjadrite počet všetkých čokolád, ktoré máme a ktoré možeme získať z kupónov pomocou čísel p, k (k, p sú prirodzené čísla $1 < k \leqq p$).

Najlepšie z došlých riešení uverejníme.

K. Kropiláková - P. Voda



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Tečna a normála středové kuželosečky

KAREL DRÁBEK, ČVUT, Praha

Při nejjednodušších konstrukcích středových kuželoseček používáme nejčastěji tzv. o h n i s k o v ý c h v l a s t n o s t í. V těchto případech bývá kuželosečka určena aspoň jedním ohniskem a dalšími body a tečnami (v potřebném počtu). Pomocí ohniskových vlastností lze řešit též úlohy, kdy místo jednoho bodu nebo tečny při daném ohnisku je známa velikost hlavní poloosy, nebo kdy místo dvou bodů nebo tečen (nebo tečny s bodem dotyku) je dána velikost jedné poloosy a excentricita, popřip. velikost obou poloos.

Určujícími prvky pro kuželosečku mohou být také její normály. Řešení těchto úloh není však zpravidla jednoduché.

V tomto článku si všimneme konstrukce středové kuželosečky, která je dána polohou svých os, normálou nebo tečnou a velikostí excentricity.

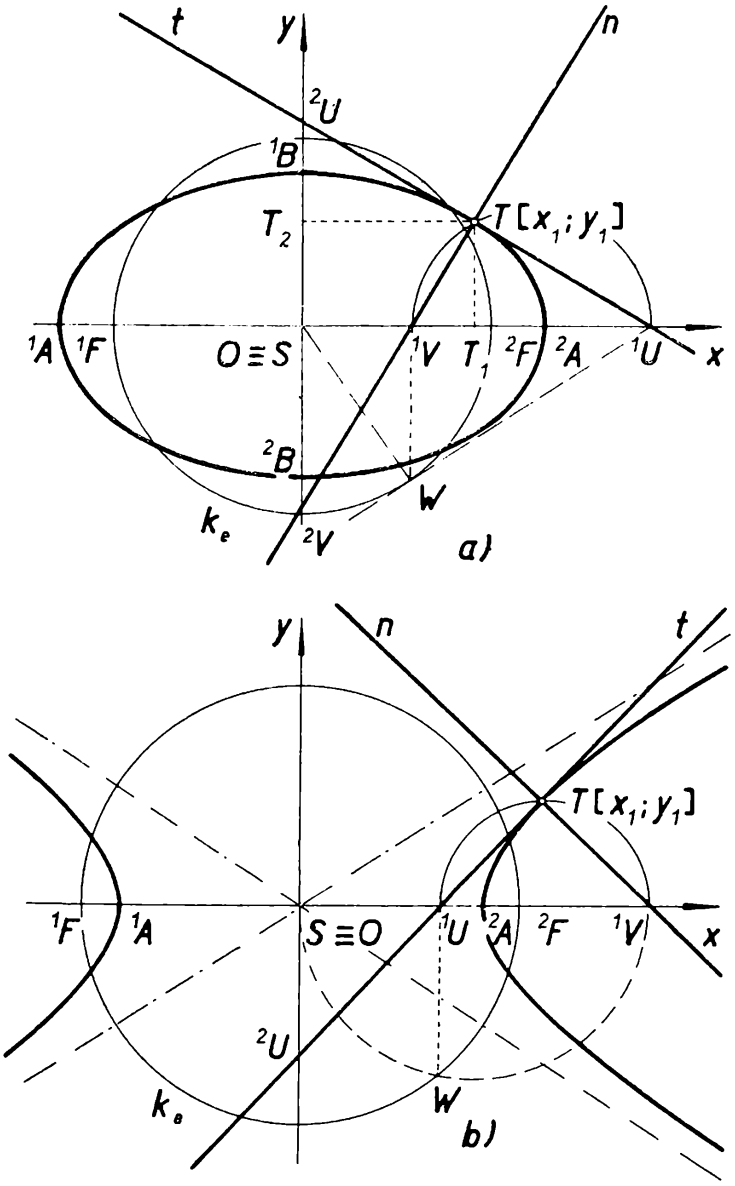
K tomu použijeme věty:

Součin orientovaných vzdáleností středu kuželosečky od průsečíků tečny a normály, které jsou sestrojené v témž bodě kuželosečky, *s hlavní, popřip. vedlejší osou kuželosečky, je konstantní a roven* e^2, *popřip.* $-e^2$.

D ů k a z provedeme užitím analytické geometrie současně pro elipsu i hyperbolu (obr. 1). Rovnici elipsy, popřip. hyperboly, napišme ve středovém tvaru (kdy tedy střed kuželosečky je v počátku O souřadnic, hlavní osa potom v ose x)

$$b^2x^2 + \varepsilon\, a^2y^2 = a^2b^2\,, \tag{1}$$

kde $\varepsilon = 1$ v případě elipsy, $\varepsilon = -1$ v případě hyperboly.



Obr. 1a, 1b

V bodě $T\,[x_1;\ y_1]$ kuželosečky (1) sestrojme tečnu. Její rovniče je[1])

$$b^2xx_1 + \varepsilon\, a^2yy_1 = a^2b^2 \tag{2}$$

Odvození rovnice probíhá za předpokladu, že $y_1 \neq 0$, tj. že zvolený bod T není hlavním vrcholem. V případě, že $y_1 = 0$ lze napsat rovnici tečny ihned a není třeba ji odvozovat.

Průsečík ^1U, popřip. ^2U tečny (2) s osou x, popřip. y, má souřadnice

[1]) Odvození této rovnice je obdobné k odvození rovnice tečny v bodě kružnice, viz např. Karel Drábek, Konstrukce druhého ohniska kuželosečky. Rozhledy (42), 1963—64, str. 400—404.

$$\left[\frac{a^2}{x_1}\,;\,0\right], \text{ popřip. } \left[0\,;\,\frac{\varepsilon\, b^2}{y_1}\right]. \tag{3}$$

Normála n v bodě $[x_1; y_1]$ má pak rovnici

$$y - y_1 = \frac{\varepsilon\, a^2 y_1}{b^2 x_1}\,(x - x_1) \tag{4}$$

a protíná osu x, popřip. y v bodě ${}^1V$, popřip. ${}^2V$, který má souřadnice

$$\left[\frac{e^2}{a^2}\,x_1\,;\,0\right], \text{ popřip. } \left[0\,;\,-\frac{\varepsilon\, e^2}{b^2}\,y_1\right], \tag{5}$$

kde

$$e^2 = a^2 - \varepsilon\, b^2\,.$$

Potom nenulové souřadnice bodů ${}^1U$, ${}^1V$, popřip. ${}^2U$, ${}^2V$, jsou zároveň orientované vzdálenosti příslušných průsečíků od středu S kuželosečky. Pro jejich součin dostaneme

$$\overrightarrow{S^1U}\,.\,\overrightarrow{S^1V} = \frac{a^2}{x_1}\,.\,\frac{e^2}{a^2}\,x_1 = e^2\,,$$

popřip.

$$\overrightarrow{S^2U}\,.\,\overrightarrow{S^2V} = \frac{\varepsilon\, b^2}{y_1}\left(-\frac{\varepsilon\, e^2}{b^2}\,y_1\right) = -\,e^2\,,$$

čímž je proveden důkaz věty.

Je-li tedy středová kuželosečka dána ohnisky ${}^1F$, ${}^2F$, tečnou t, popřip. normálou n, lze pomocí uvedené věty sestrojit normálu n, popřip. tečnu t, a tím získáme bod T kuželosečky, jejíž další konstrukce je již jednoduchá.

Velikost úsečky SV můžeme však vypočítat i pro případ, kdy bod T se stane hlavním vrcholem ${}^2A$, což zatím bylo v předchozím vyloučeno. V tomto případě použijeme limitního přechodu pro $x_1 \to a$ a z (3) pak pro úsečku SV dostaneme

$$SV = \frac{e^2}{a}\,.$$

Potom vzdálenost získaného bodu V od vrcholu ${}^2A$ je

$$\varepsilon\left(a - \frac{e^2}{a}\right) = \frac{\varepsilon\,(a^2 - e^2)}{a} = \frac{b^2}{a}\,.$$

Hodnota $\frac{b^2}{a}$ je rovna poloměru ϱ_A oskulační kružnice kuželosečky v jejím hlavním vrcholu[2]).

Je-li T_1 průsečík kolmice sestrojené bodem T na hlavní osu kuželosečky (provedeno pouze v obr. 1a), plyne pro součin $\overrightarrow{ST_1} \,.\, \overrightarrow{S^1U}$ v důsledku $ST_1 = T_2T = x_1$ vztah

$$\overrightarrow{ST_1} \,.\, \overrightarrow{S^1U} = a^2 \,.$$

Podle dokázané věty platí pro hlavní osu

$$\overrightarrow{S^1V} \,.\, \overrightarrow{S^1U} = e^2 \,,$$

a tedy

$$\overrightarrow{S^1V} : \overrightarrow{ST_1} = e^2 : a^2 = \text{konst.} = \frac{e^2}{a} : a = \varrho_A : a \,.$$

Platí tedy věta:

Podíl orientovaných vzdáleností bodu kuželosečky od její vedlejší osy a průsečíku normály sestrojené v tomto bodě s hlavní osou od středu kuželosečky je konstantní. Konstanta je rovna podílu poloměru ϱ_A oskulační kružnice v hlavním vrcholu a hlavní poloosy a.

Této věty používáme při konstrukci normál v bodech středové kuželosečky.[3])

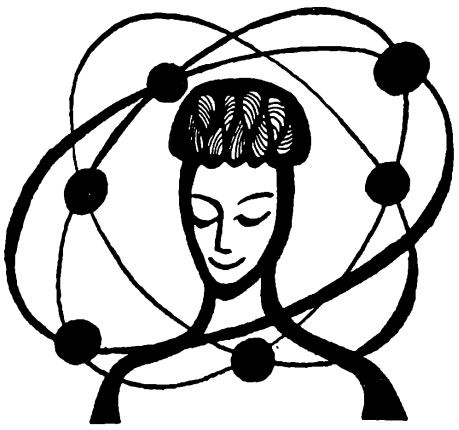
Stejným postupem najdeme, že také pro orientované vzdálenosti bodu kuželosečky od její hlavní osy a průsečíku normály sestrojené v tomto bodě s vedlejší osou platí, že tyto vzdálenosti jsou v konstantním poměru. Konstanta je rovna $-\varepsilon e^2 : b^2$.

V případě elipsy je tato konstanta rovna záporně vzatému podílu poloměru ϱ_B oskulační kružnice ve vedlejším vrcholu a vedlejší poloosy b.

---

[2]) Viz např. prof. dr. Alois Urban, Hyperoskulační kružnice elipsy. Rozhledy (39), 1960—61, str. 256—261, 306—311, nebo Prostorová konstrukce hyperoskulačních kružnic kuželoseček. Rozhledy (40), 1961—62, str. 65—71, 110—114.

[3]) Viz např. prof. inž. dr. František Kadeřávek, Příspěvek k normálám kuželoseček a ploch druhého stupně. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky (73), 1949, str. 46—49.



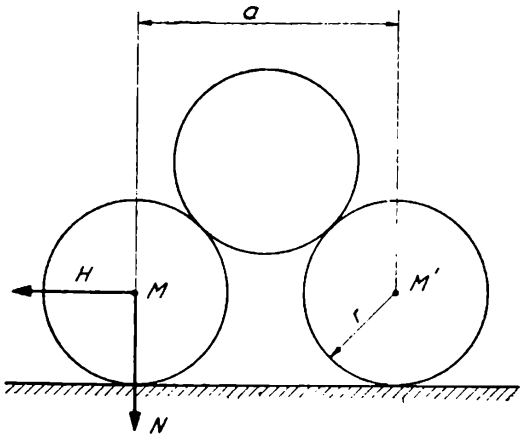
FYZIKA

Vliv tření při vrstvení válců

PROF. Dr. R. KLÖTZLER, Lipsko, NDR

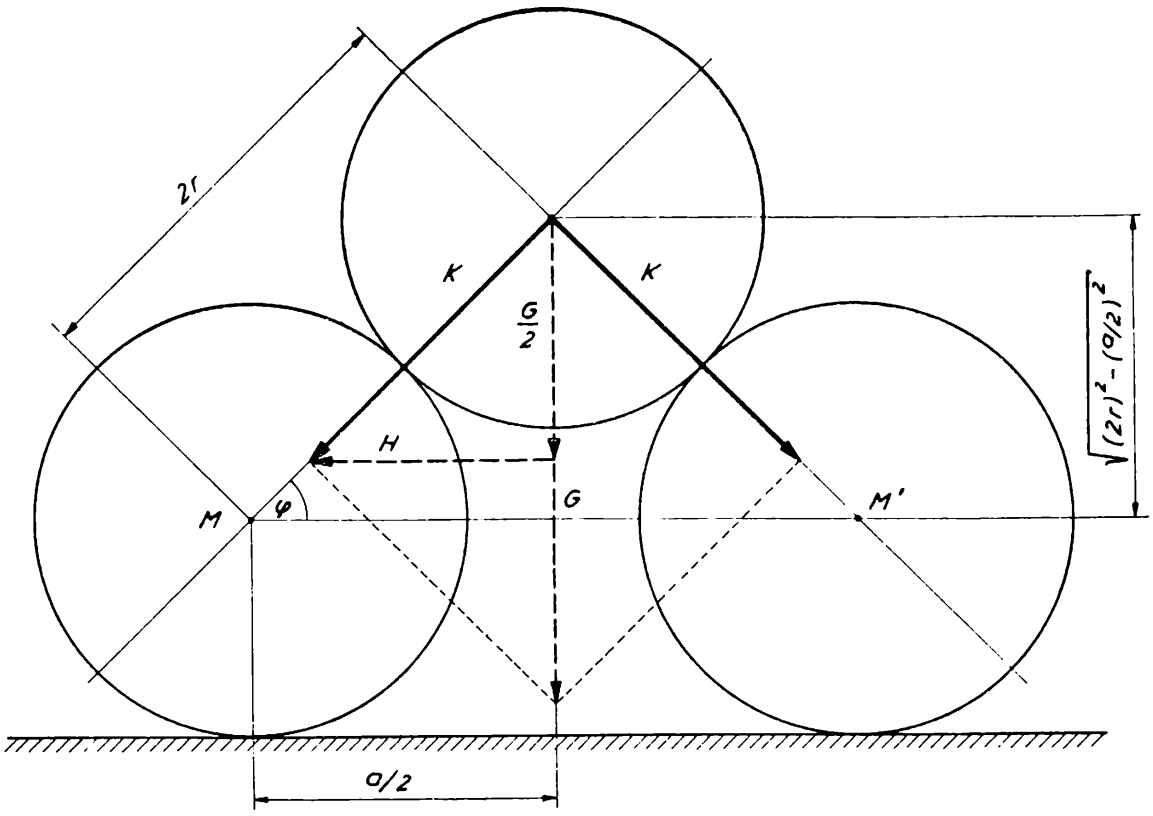
Psáno pro Rozhledy

Na vodorovnou rovinu položme dvě stejná tělesa tvaru rotačních válců, např. dvě trubky tak, aby jejich podélné osy byly navzájem rovnoběžné a přitom, aby se tato rotační tělesa vzájemně nedotýkala. Položíme-li nyní na tato dvě tělesa další těleso stejného tvaru tak, aby to odpovídalo schematickému obr. 1, nemusí toto třetí těleso zachovat vždy svou počáteční polohu, kterou má po položení. Je-li totiž klidové tření mezi spodními válci a podložkou malé, posunou se tyto působením tíhy horního válce napravo, resp. nalevo, a tak se sesune toto nejjednodušší navrstvení trubek. Kromě toho závisí možnost propadnutí horního tělesa také na tom, jak velké zvolíme a (v mezích $2r < a < 4r$).



Obr. 1

Nebudeme-li přihlížet ke tření válců mezi sebou, pak podle zákona o klidovém tření zůstanou tři na sebe navrstvené válce ve vzájemně nezměněné poloze tehdy, a jen tehdy, jestliže výsledné síly působící na



Obr. 2

spodní válce v jejich těžištích (M, resp. M') mají takové svislé (H) a vodorovné složky (N), které vyhovují tomuto vztahu

$$H \leqq \mu N$$

Přitom značí μ součinitele smykového tření mezi válci a podložnou rovinou, tedy konstantu, která závisí na materiálech a na poloměru r.

Podle pravidla rovnoběžníka sil působí na M v důsledku tíhy G navrchu položené trubky síla K, jejíž svislá složka (podle obr. 2) se rovná $\frac{G}{2}$ a vodorovná složka je rovna

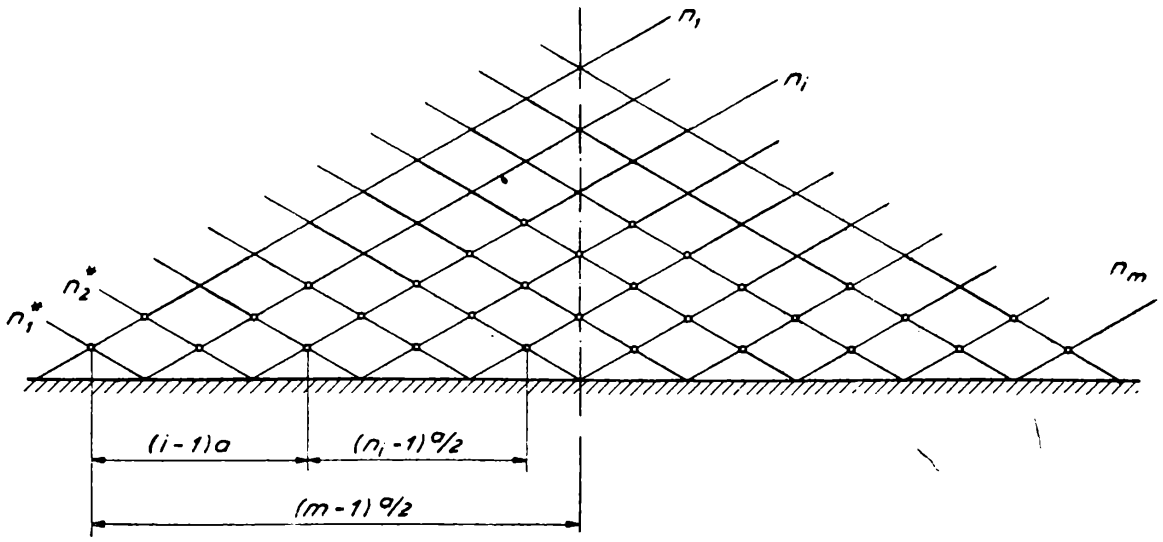
$$H = \frac{G}{2} \operatorname{cotg} \varphi ,$$

přičemž zřejmě

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{(2r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{16 r^2 - a^2}}$$

Uvažujeme-li také vlastní tíhu G spodní trubky, působí v místě M celková svislá síla

$$N = G + \frac{G}{2}$$



Obr. 3

a celková vodorovná síla

$$H = \frac{G}{2} \,.\, \operatorname{cotg} \varphi \,.$$

Popsané volné navrstvení trubek je možné jen tehdy, jestliže

$$H \leqq \mu N$$

tedy jestliže platí, že

$$\frac{G}{2} \,.\, \operatorname{cotg}\, \varphi \leqq \frac{3\,G}{2} \mu \,,$$

respektive platí-li

$$\operatorname{cotg} \varphi \leqq 3\,\mu \,.$$

V tom případě je volné navrstvení stabilní.

Protože platí nerovnost

$$2\,r < a \,,$$

a tedy platí, že

$$\operatorname{cotg} \varphi > \frac{2\,r}{\sqrt{16\,r^2 - 4\,r^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \,,$$

musí pro stabilitu za předpokladu, že se spodní trubky vzájemně nedotýkají, platit pro μ

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < 3\,\mu \,.$$

Uvedený problém nyní zobecněme a snažme se zodpovědět otázku, za jakých podmínek docílíme maximálního navrstvení vzájemně stejných válců, skládá-li se spodní vrstva z řady m navzájem se nedotýkajících válců položených ve stejných roztečích. Pro názornost se omezujeme na symetrické pyramidální uspořádání, u něhož od roviny souměrnosti klesá výška na obě strany. V obr. 3 je zjednodušené takové uspořádání nakresleno, a to pouze pomocí bočních průmětů os válců

(pomocí středů jejich příčných řezů). Počet válců v i-té vrstvě probíhající od levé strany dole vzhůru na pravou stranu (tedy ve vrstvě rovnoběžné s levou boční povrchovou vrstvou) si označme n_i a podobně si označme n_i^* počet válců v i-té příčné vrstvě rovnoběžné s pravou boční povrchovou vrstvou. K úplnému vyřešení otázky navrstvení podle schematického obr. 3 zřejmě postačí omezit se v dalším jen na n_i těch příčných vrstev, které obsahují válce ležící na jednu stranu od roviny souměrnosti (např. nalevo od této roviny), nebo jejichž osy leží v této rovině. Pro tato n_i platí, že

$$(m-1)\frac{a}{2} \geqq (i-1)\,a + (n_i - 1)\,.\,\frac{a}{2}\,;$$

tento vztah můžeme zjednodušit ve tvar

$$n_i \leqq m - 2\,i + 2 \tag{1}$$

Omezíme se tedy jen na zmíněné boční vrstvy a označme maximální počty válců ve vrstvách (jež vycházejí z prvního až k-tého nejspodnějšího válce) $n_{1\,\max}$ $n_{(k-1)\,\max}$. Pak vypočtěme $n_{k\,\max}$, tedy největší hodnotu n_k.

Abychom nyní našli řešení, musíme konstatovat, že proti prvnímu jednoduchému případu, který jsme uvedli na počátku, působí na těžiště k-tého válce ve spodní řadě $(n_k - 1)$ násobná síla ve směru levé boční vrstvy a $(n_k^* - 1)$ násobná síla ve směru pravé boční vrstvy. Takto bude vodorovná složka celkové síly působící na k-tý spodní válec rovna

$$H_k = (n_k - 1)\frac{G}{2}\operatorname{cotg}\varphi - (n_k^* - 1)\frac{G}{2}\operatorname{cotg}\varphi$$

a celková svislá složka se rovná

$$N_k = G + (n_k - 1)\frac{G}{2} + (n_k^* - 1)\frac{G}{2}$$

Z podmínky stability

$$H_k \leqq \mu\, N_k$$

a z nerovnosti

$$\operatorname{cotg}\varphi > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

dostaneme jednoduchý výsledek ve tvaru nerovnosti

$$n_k\,(1 - \mu\sqrt{3}) < n_k^*\,(1 + \mu\sqrt{3}) \tag{2}$$

a) Uvažujme případ, že $1 - \mu\sqrt{3} \leqq 0$. Pak neplyne z podmínky (2) žádné omezení pro n_k. V tomto případě může mít n_1 maximální hodnotu $n_{1\,\max} = m$. Tím je pro dané m stanoveno maximální navrstvení válců.

b) V případě, že $1 - \mu \sqrt{3} > 0$, plyne z podmínky (1) a (2), že $n_{k\,\max}$ může mít maximální hodnotu danou nerovností

$$n_{k\,\max} < n_k^* \frac{(1 + \mu \sqrt{3})}{(1 - \mu \sqrt{3})},$$

a tedy

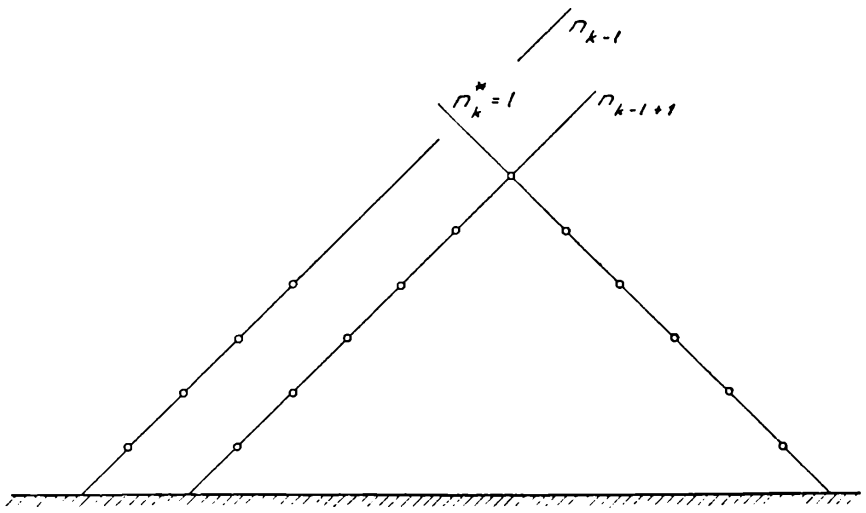
$$n_{k\,\max} \leqq m - 2k + 2$$

Do tohoto vztahu dosazované n_k^* určíme číselně snadno již ze známých hodnot $n_{1\,\max}$ až $n_{(k-1)\,\max}$, když nepřihlížíme k n_1^*, které je zřejmě rovno jedné. Je-li $n_{k\,\max} = 1$ ($\leqq k$), pak musí podle obr. 4 platit jednak

$$n_{(k-l+1)\,\max} \geqq l,$$

jednak

$$n_{(k-l)\,\max} < l + 1$$



Obr. 4

To však znamená, uvážíme-li, že s klesajícím indexem $n_{1\,\max}$ nikdy neporoste, že $n_k^* = 1$ je největší ze všech přirozených čísel, pro něž platí

$$n_{(k-z+1)\,\max} \geqq z$$

Tím je dán pro náš druhý případ (b) obecný předpis, jak postupně vypočítat maximální počet $n_{i\,\max}$ všech válců v jednotlivých šikmých řadách. Jakmile se při našem výpočtu v podmínce (1) objeví rovnítko, pak výpočet ukončíme.

Příklad. Je dáno $m = 9$ a $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Pak platí, že

$$1 - \mu\sqrt{3} = \tfrac{1}{2} > 0\,,$$

a tedy se bude jednat o řešení podle druhého případu (b). Protože je $n_1^* = 1$, platí pro největší přirozené číslo $n_{1\,\max}$

$$n_{1\,\max} < n_1^* \frac{(1 + \mu\sqrt{3})}{(1 - \mu\sqrt{3})} = 3$$

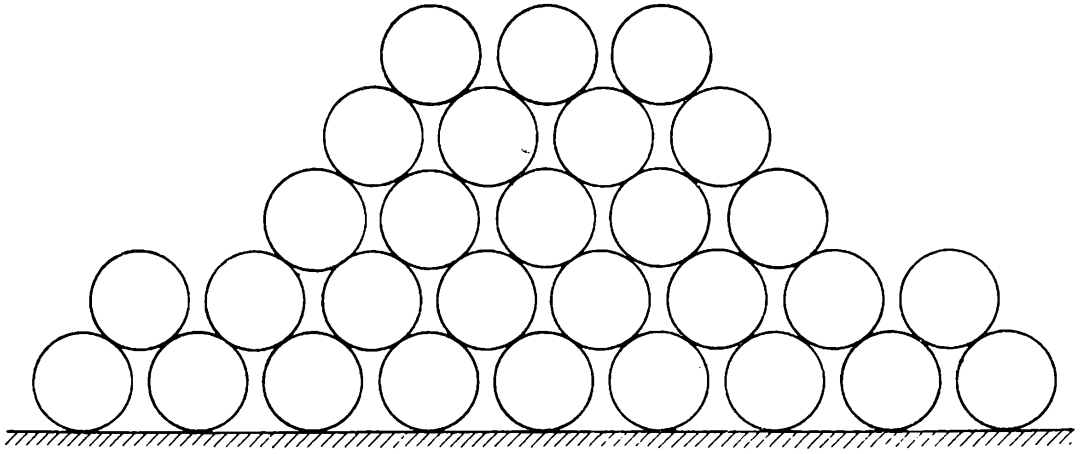
a podle (1)

$$n_{1\,\max} \leqq m = 9\,;$$

z toho plyne, že

$$n_{1\,\max} = 2\,.$$

Dále určíme n_2^* ze vztahu $n_{(2+1-z)\,\max} \geqq z$, z něhož plyne, že $n_2^* = 2$, protože pro $z = 2$ je $n_{1\,\max} \geqq 2$. Budeme-li takto dále pokračovat, dostaneme postupně $n_{2\,\max} = 5$, $n_3^* = 2$ a $n_{3\,\max} = 5$. Poslední číslo splňuje podmínku (1), čímž můžeme výpočet ukončit. Takto vypočtené vrstvení válců je zachyceno ve schematickém obr. 5.



Obr. 5

Přeložil a upravil inž. dr. Václav Šindelář

MILÍ ČTENÁŘI

přejeme Vám mnoho úspěchů v novém školním roce. Kteří z Vás chtějí v příštím roce studovat na stavebních fakultách, ať nezapomenou, že budou dělat přijímací zkoušku nejen z matematiky a fyziky, ale i z deskriptivní geometrie. Požadovaná látka se přesně kryje s obsahem učiva SVVŠ. Žáci odborných škol si musí podle toho doplnit své znalosti. S přípravou začněte ihned! Ukázkové příklady otiskneme v některém z příštích čísel.

Redakce

Jak se u nás projevily atomové výbuchy v ČLR

PROF. Dr. VILÉM SANTHOLZER, DrSc., KU, Hradec Králové

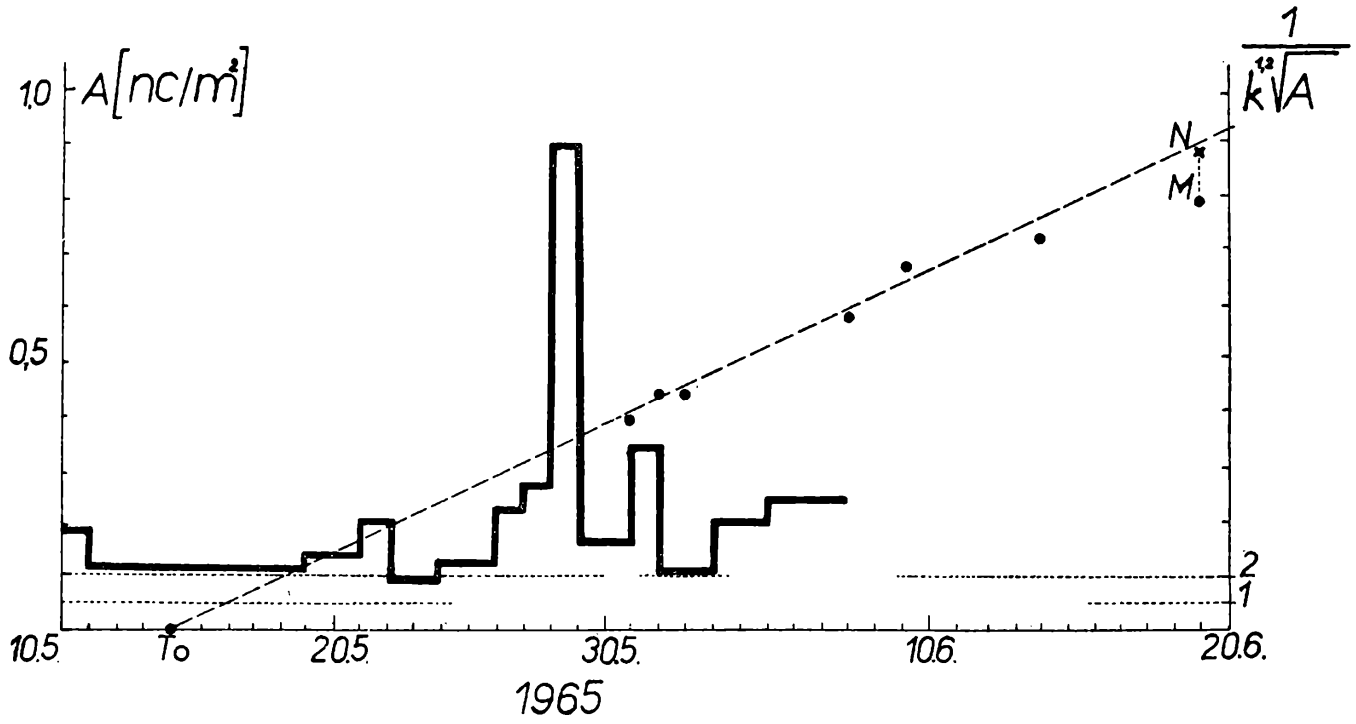
Na podzim 1964 a na jaře 1965 byly v ČLR provedeny dva pokusné atomové výbuchy, v západní provincii Sinkiang poblíže jezera Lop-nor. Asi za dva týdny po výbuchu se také u nás objevilo slabé zvýšení radioaktivity a čerstvé produkty štěpení, tj. radionuklidy (radioisotopy) vznikající štěpením uranu. Na podzim 1964 bylo zvýšení slabé a spolehlivě prokazatelné jen důkazem čerstvých radionuklidů metodou spektrometrie gama. Ve vzorcích spadu (radioaktivního prachu) z té doby se nám podařilo dokázat radionuklid *zirkon 95* a jeho dceřinnou látku *niob 96*. V té době dopadaly na zemský povrch ještě zbytky radioaktivního prachu ze stratosféry, kam byly vymrštěny následkem velkých výbuchů prováděných v letech 1961 až 1962 v USA a SSSR. Tyto zbytky jsou složeny z radionuklidů dlouhých poločasů (řádově léta), neboť jen takové nuklidy ještě nevymizely rozpadem. V současné době se v nukleárním spadu vyskytuje hlavně ještě stroncium 90 (poločas 28 let), cesium 137 (30 let), ruthenium 106 (1 rok) a cer 144 (0,8 roku). Jestliže se ve spadu náhle objeví nuklid s krátkým poločasem, je to důkazem, že se vyskytují čerstvé produkty štěpení, a tudíž byl proveden nový nukleární výbuch.

Poločas zirkonu 95 je asi 2 měsíce, takže jeho výskyt je důkazem čerstvosti produktů. Koncem roku 1964, ani letos se již radioaktivní zirkon z dřívějších výbuchů prakticky nevyskytoval, neboť se již úplně rozpadl. V NSR byl v nukleárním spadu po čínských explozích dokázán také *radioaktivní jód*, který má poločas jen 8 dnů, takže jeho výskyt je zejména přesvědčivým důkazem čerstvosti produktů.

Na obr. 1 je důkaz čerstvých produktů provedený jednoduchým měřením aktivity beta a sledováním časového poklesu aktivity vzorku získaného 29. května 1965. Osa x je datová, na osy y na jedné straně je (měrná) aktivita A v nanocurie na 1 m² (nc/m²), neboť vzorek byl získán ze sběrné nádoby plochy 1 m². Dne 29. 5. se projevilo náhlé zvýšení aktivity. Aby zvýšení bylo průkazné, jsou na obr. dvě rovnoběžky s osou x. Rovnoběžka označená „1" je průměrná radioaktivita spadu od 1. ledna 1965 až do konce května; rovnoběžka „2" je průměrná aktivita od 1. dubna do konce května, neboť v dubnu a květnu se každoročně projevuje jarní zvýšení aktivity způsobené ryze meteorologickými činiteli: poklesem vzduchových hmot ze stratosféry (kde je dosud určitá „zásoba" štěpných

produktů z dřívějších explosí) a hlavně turbulentní výměnou mezi troposférou a nízkou stratosférou, která je zásobována radioaktivním prachem z vysoké stratosféry.

Na obr. 1 vpravo je druhá osa y, kde jsou naneseny hodnoty úměrné zlomku $1 : \sqrt[1,2]{A}$, kde A je aktivita vzorku z 29. května. Aktivita vzorku klesala s časem, zlomek tedy vzrůstal. Jednotlivé body určují přímku, která časovou osu protíná v bodě T_0, který je datem provedení atomového výbuchu. Musí to tak být, neboť pro časový pokles aktivity produktů štěpení platí vzorec $A = A_0 t^{-1,2}$, kde A_0 je aktivita pro jednotkový čas t.



Obr. 1. Zvýšení radioaktivity nukleárního spadu koncem května 1965, způsobené nukleárním výbuchem v ČLR.

Platí samozřejmý vztah:

datum měření = datum výbuchu + počet dnů uplynulých od výbuchu,

$$T = T_0 + t\,.$$

Za čas t dosadíme z uvedeného vzorce

$$t = \frac{k}{\sqrt[1,2]{A}},$$

kde

$$k = \sqrt[1,2]{A_0}$$

a dostaneme

$$T - T_0 = \frac{k}{\sqrt[1,2]{A}}.$$

Označíme-li

$$\frac{1}{\sqrt[1,2]{A}} = y,$$

obdržíme lineární závislost

$$y = \frac{1}{k}(T - T_0).$$

Pro $T = T_0$ je $y = 0$, v průsečíku přímky s časovou osou je datum nukleární zkoušky. Obr. 1 je naopak také důkazem, že uvedený vzorec pro časový pokles aktivity beta (podle objevitelů zvaný *vzorec Wayové-Wignera*) má i u nás platnost, v obrovské vzdálenosti od místa výbuchu.

Na obr. 1 vpravo je bod *M* získaný měřením, který se již velmi značně odchyluje od přímky. Když aktivita vzorku slábne, začíná se poměrně více uplatňovat příměs starého radioaktivního prachu, který aktivitu zvětšuje. Převratná hodnota aktivity je tudíž menší, bod M je pod přímkou. Jestliže však odečteme průměrné pozadí staré aktivity v době získání vzorku, tedy obdržíme bod *N*, který je opět na přímce.

Uvedený jednoduchý důkaz čerstvých produktů štěpení jsme na naší katedře fyziky doplnili ještě spektrometrickým rozborem a měřeními absorpce (pohlcování paprsků beta, které u čerstvých produktů nemají takovou pronikavost jako u starších.)

Třetí čínský výbuch byl proveden 9. května 1966. Zvýšená radioaktivita nukleárního spadu se u nás projevila kolem 26. května, tedy za 17 dnů, což odpovídá přibližné rychlosti radioaktivního mraku asi 100 km/h. Mrak se pohyboval východním směrem, USA přešel ve větších výškách, kdežto v Evropě patrně následkem poklesu chladnějších vzduchových hmot dostala se zvýšená radioaktivita až na zemský povrch. U nás byla do 25. května průměrná denní aktivita 0,06 nanocurie/m², kdežto kolem 26. května vzrostla na 0,78 nCi/m². Je to zvětšení přibližně třináctinásobné. S hlediska zdravotnického je toto zvětšení neškodné, neboť absolutní aktivita je nepatrná. Přesný důkaz čerstvých štěpných zplodin krátkého poločasu provádíme spektrometrií gama.

Několik řešených příkladů

PROF. R. KUNFALVI, Budapešť

Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální

V Maďarsku vychází desetkrát ročně časopis Középiskolai Matematikai Lapok (Časopis pro matematiku na středních školách), který je určen žákům středních škol, tj. gymnasií a průmyslových škol. Tento časopis přináší, podobně jako naše Rozhledy matematicko-fyzikální, matematické a fyzikální příklady. V tomto článku se seznámíme s výběrem těchto příkladů. Některé z nich možná již naši čtenáři znají, třeba v poněkud obměněné formě, přesto však pokládáme za vhodné seznámit naše čtenáře s problematikou fyzikálních příkladů, jak je řešena v jiném socialistickém státě.

Nejprve něco k organizační stránce publikování zadaných příkladů a jejich řešení. Podobně jako je tomu v Rozhledech matematicko-fyzikálních, uvádí i časopis Középiskolai Matematikai Lapok u všech zadaných příkladů, jež si činí nárok na původnost, jména jejich autorů. V každém čísle zmíněného maďarského časopisu jsou vždy zadány tři příklady, a to ve čtyřech kategoriích. Tyto kategorie jsou určeny 1. až 4. třídě maďarských středních škol, jež odpovídají 9. až 12. třídě našich dvanáctiletých středních všeobecně vzdělávacích škol. Řešení úloh mají být zaslána redakci do 4 týdnů po vyjití příslušného čísla časopisu. Nejlepší řešení jsou v časopise uveřejňována s jménem jejich řešitele. Podle obtížnosti příkladů řídí se ovšem zpravidla počet řešitelů, který se pohybuje v mezích 20 až 300. Řešení se bodují (bodování je pětistupňové), body se jednou ročně sčítají, celkové výsledky soutěže se uveřejňují v časopise a nejlepší z řešitelů jsou odměňováni.

Nejprve si uveďme několik příkladů pro 1. třídu (naši 9. třídu).

1. Dvě auta startují v témže okamžiku ve stejném smyslu z protilehlých míst kruhové dráhy o průměru 1000 m. První vůz se po krátkém zrychlení pohybuje rychlostí 60 km . h^{-1}, druhý vůz rychlostí 50 km . h^{-1}. Jak dlouho bude trvat, nežli první vůz dojede vůz druhý a kolik přitom vykoná oběhů? Doby potřebné ke zrychlení vozů můžeme přitom zanedbat.

Řešení. Počáteční vzdálenost obou vozů, měřená po kruhové dráze, je rovna polovině této dráhy, činí tedy $500\,\pi$ m $\doteq$ 1571 m.

Tato vzdálenost má být projeta relativní rychlostí 10 km . h^{-1}. Pro hledanou dobu, po níž se oba vozy poprvé setkají, dostáváme

$$1{,}571 \text{ km} \quad 10 \text{ km} \,.\, h^{-1} \doteq 0{,}157 \text{ h} \,.$$

Při relativní rychlosti 10 km . h^{-1} projede vůz právě polovinu kruhové dráhy. Má-li první, rychlejší vůz, rychlost 60 km . h^{-1}, vykoná tedy plné tři objížďky, nežli dostihne druhý, pomalejší vůz.

2. Poloměr kruhové olověné desky je při teplotě 20 °C roven 15 cm. Jak velký je kruhový průřez desky při 60 °C? Součinitel teplotní délkové roztažnosti je u olova roven 0,000 028 5 deg^{-1}.

Řešení. Poloměr kruhové plochy bude při 60 °C větší nežli při základní teplotě 20 °C. Roztažení bude rovno

$$15 \text{ cm} \,.\, 40 \text{ deg} \;\; 0{,}000\,028\,5 \text{ deg}^{-1} = 0{,}017\,1 \text{ cm}$$

Hledaná velikost plochy je rovna

$$15{,}017\,1^2 \,.\, \pi \text{ cm}^2 = 708{,}5 \text{ cm}^2$$

3. Válcová nádržka o průměru 30 cm obsahuje při 0 °C 40 litrů vody. Na vodě plave kus ledu (těžký 5 kp). O kolik stoupne vodní hladina v nádržce, když celý kus ledu roztaje. Měrná tíha ledu je rovna 0,92 kp . dm^{-3}.

Řešení. Hladina se nezmění, protože kus ledu o tíži 5 kp vytlačuje 5 kp vody, a voda o tíze 5 kp má objem 5 dm^3. Když roztaje led, dostaneme 5 kp vody teplé 0 °C, tedy právě týž objem. Je zřejmé, že všechny údaje v zadání příkladu (vyjma teploty) jsou zbytečné.

Několik příkladů pro II. třídu (naši 10. třídu).

1. Na vrcholu dvojitého žebříku (délky 13 m) stojí muž těžký 60 kp. Spodní konce žebříku jsou opatřeny kolečky, které se po zemi pohybují bez tření. Konce obou ramen žebříku jsou od sebe vzdáleny 10 m. Obě ramena žebříku jsou v poloviční výšce vzájemně svázána provazem. Máme určit sílu, kterou je provaz napínán.

I. Řešení. Vzhledem k symetrickému uspořádání působí kolečka na spodku žebříku na každé jeho straně silou 30 kp kolmou k zemi. V obr. 1 je to názorně naznačeno. Pro rovnováhu systému jsou dvě podmínky. Podle první jsou výslednice svislých sil rovny nule. Podle druhé působí také vzájemně vyrovnané vodorovné složky sil ve spojovacím provaze a v obou ramenech žebříku. Sílu F v provaze můžeme vypočítat z momentové věty.

Dvě svislé a dvě vodorovné síly vytvářejí vzájemně protisměrné momenty

$$F \,.\, 6 \text{ m} = 30 \text{ kp} \,.\, 5 \text{ m} \,,$$

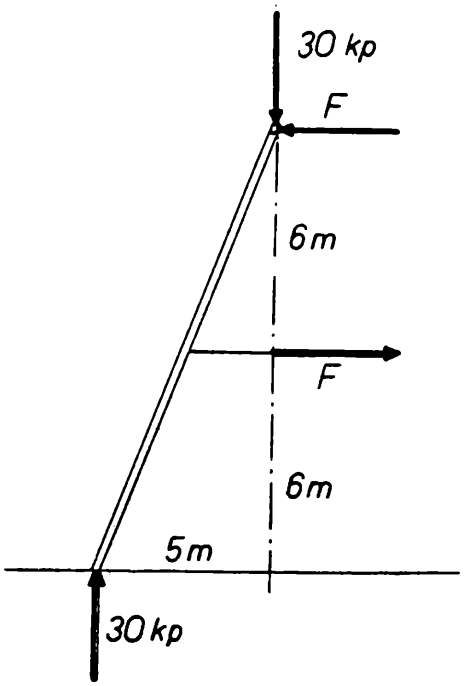
z čehož pro hledanou sílu plyne

$$F = 25 \text{ kp} \,.$$

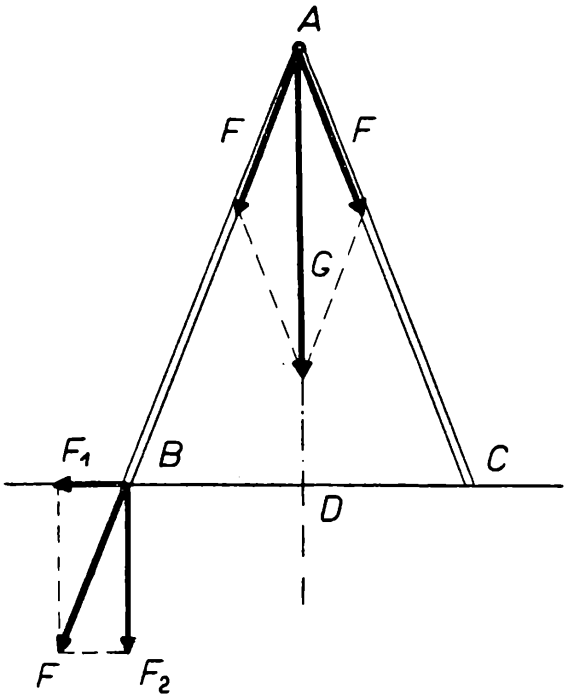
II. řešení. Tíhu 60 kp můžeme rozložit do dvou stejně velkých složek působících ve směrech ramen žebříku (obr. 2). Pro tyto složky platí

$$\frac{G}{2} : F = AD : AB \,.$$

Z Pythagorovy věty vychází, že $AD = 12$ m, a tedy $F = 32{,}5$ kp. Sílu F můžeme opět rozložit do dvou složek, do svislé složky F_2,



Obr. 1



Obr. 2

kterou každé z ramen žebříku tlačí na podlahu a vodorovnou F_1. Protože je

$$F_2 = \frac{G}{2} = 30 \text{ kp} ,$$

plyne z podobnosti trojúhelníků, že

$$F_1 : F = BD : AB ,$$

a tedy

$$F_1 = 12{,}5 \text{ kp}$$

Kdyby byl provaz upevněn v úrovni podlahy, působila by v provazu síla F_1 (a v rameni žebříku reakce $-F_1$).

Podle momentové věty (věty o páce) musí být v poloviční výšce dvojnásobná síla, tedy rovná 25 kp.

S jinou variantou tohoto příkladu se setkáme ještě dále.

(Pokračování)

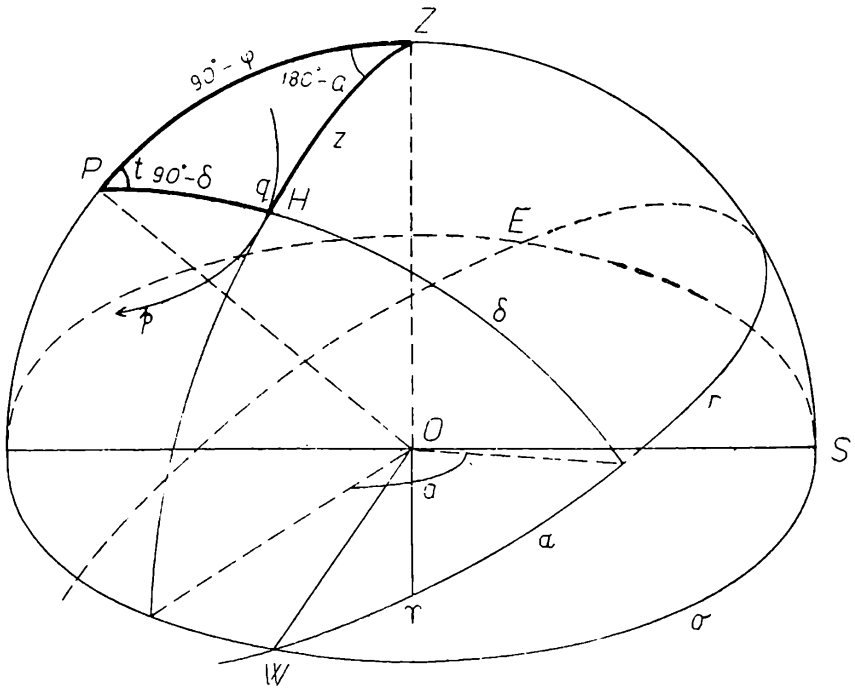
ASTRONOMIE

Geometrické místo elongací

JOSEF KABELÁČ, ČVUT, Praha

Dříve než přistoupíme k řešení vlastní úlohy, tj. k určení geometrického místa elongací, je nutno vysvětlit či zopakovat některé základní pojmy sférické astronomie.

Definujme nejprve souřadnicové soustavy. *Obzorníková soustava* má za základní rovinu rovinu obzorníku o (obr. 1) a základním směrem této roviny je směr na jih S. Poloha nebeského tělesa H (např. hvězdy) je určena azimutem a a zenitovou vzdáleností z.



Obr. 1

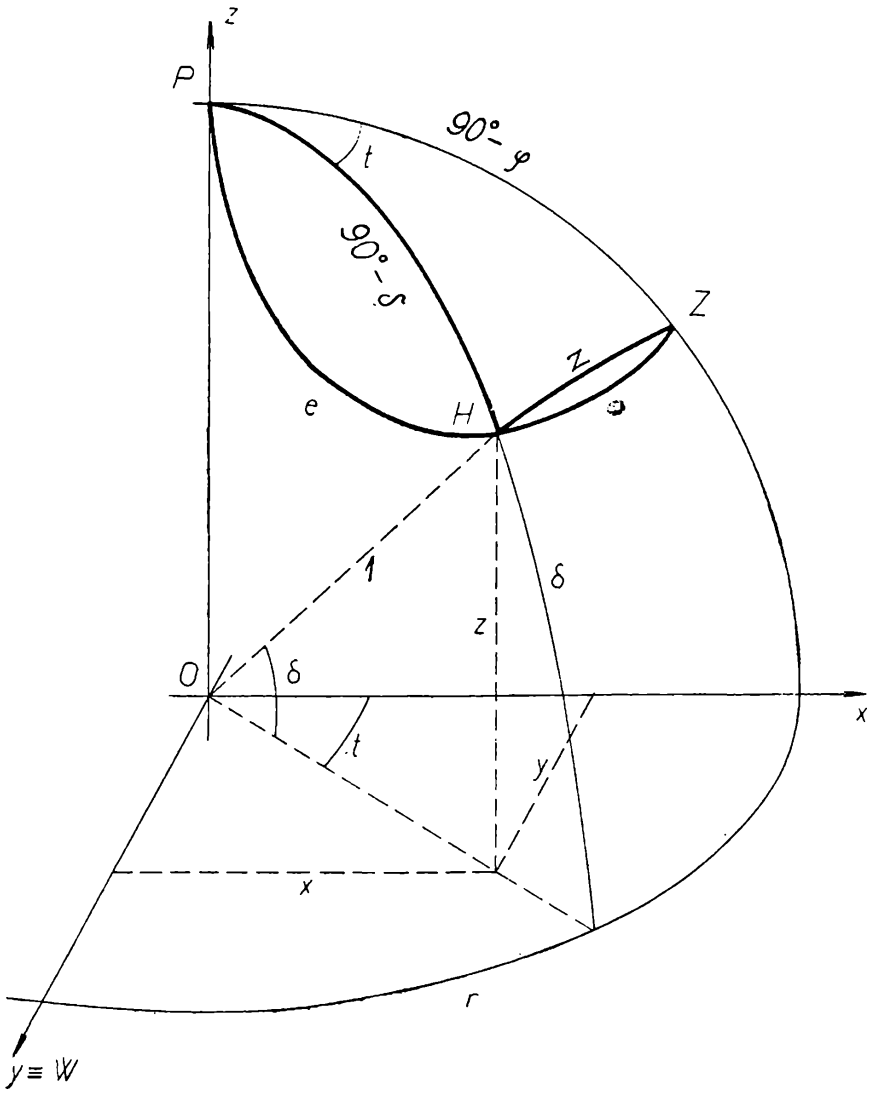
Azimut a je vlastně směr, který svírá výšková kružnice procházející zenitem Z a bodem H s rovinou tzv. místního poledníku, tj. s rovinou procházející opět zenitem Z a jižním směrem S. Počítá se kladně od jihu směrem na západ W Zenitová vzdálenost je úhel mezi směrem k zenitu Z a k bodu H a počítáme ji kladně od Z do 180°. I když se vlastně jedná o definici polohy bodu v prostoru, není třeba uvádět tři souřadnice, protože považujeme body jako průměty na nebeskou kouli o jednotkovém poloměru se středem v pozorovacím místě (stanoviště) O. Druhou soustavou je *rovníková soustava* jejíž základní rovinou je rovina světového rovníku r a základním směrem v této rovině je směr na jarní bod ♈, který je dán průsečnicí roviny rovníku a ekliptiky (tj. roviny, v níž se Země pohybuje kolem Slunce). Severním světovým pólem P a bodem H vedeme hlavní rovinu, tzv. deklinační kružnici, která svírá se směrem k jarnímu bodu úhel α, který nazýváme rektascenší. Druhou souřadnicí tohoto systému je deklinace hvězdy δ, kterou počítáme od rovníku r kladně k severnímu světovému pólu P a záporně na stranu druhou. Místo rektascense se často uvažuje, a v našem případě právě tak bude, hodinový úhel t, počítaný od jižní větve místního poledníku kladně na západ. Středem rovníkového systému je opět stanoviště O. Sférický trojúhelník: nebeské těleso H, zenit Z a pól P nazýváme nautický trojúhelník a doplňme v něm označení. Strana PZ je rovna rozdílu 90° — φ, kde φ je zeměpisná šířka stanoviště. Strana HP je doplňkem deklinace δ do 90°, tj. 90° — δ, a úhel při Z je doplňkem azimutu a do 180° jak vyplývá z obr. 1[1]).

Nyní již můžeme přejít k objasnění a k řešení našeho úkolu, tj. k určení geometrického místa elongací. Při zdánlivém denním pohybu nebeského tělesa H, který se děje po rovnoběžce p ve směru šipky od východu na západ, prochází toto různými rovinami a tu je možno mluvit např. o východu a západu nebeského tělesa při jeho průchodu rovinou obzorníku o na východě (E) nebo na západě (W). Při průchodu místním poledníkem jižně (S) či severně (N) od severního světového pólu P mluvíme o horní či o dolní kulminaci. Úhel q při vrcholu H, zvaný paralaktický, nabývá různých hodnot závisejících jak na deklinaci δ, tak na hodinovém úhlu t. Např. pro průchod nebeského tělesa místním poledníkem severně od bodu P nebo jižně od bodu Z nabývá hodnoty 0° a pro průchod mezi body P a Z hodnoty 180°. V případě, že $q = 90°$ říkáme, že nebeské těleso je *v elongaci* (též v maximální digresi), a to na západě. Pro $q = 270°$ jde o elongaci na východě. Je možno dokázat, že k elongaci dochází jen u těch hvězd, jejichž deklinace je větší než zeměpisná šířka stanoviska, tj. $\delta > \varphi$. Obr. 1 ukazuje vzájemnou polohu výškové kružnice (prochází body P

[1]) Bližší najde čtenář např. v skriptech E. Buchara, Geodetická astronomie I, SNTL, Praha 1963.

a H) a zdánlivé dráhy hvězdy (rovnoběžka p): jsou vzhledem k sobě tečné. Znamená to, že zdánlivá dráha hvězdy ve velmi blízkém okolí bodu H se ztotožňuje s výškovou kružnicí, procházející tímto bodem H. Z toho vyplývá, že změna v zenitové vzdálenosti je pro elongaci na západě maximální a na východě minimální. Změna v azimutu je nulová, neboť veškerý zdánlivý pohyb se děje jen po výškové kružnici. Azimut sám zde nabývá extrémních hodnot.

Přistupme nyní již k řešení daného úkolu, tj. k určení geometrického místa elongací e, když předem si stanovíme, že budeme uvažovat jen západní nebeskou polokouli. Položme do stanoviště O (totožné s bodem O na obr. 1) počátek souřadnicového, pravoúhlého systému x, y, z (obr. 2). Osa z je totožná se severní větví světové rotační osy Země, osa y je totožná se směrem západním W a osa x má hodinový úhel $t = 0°$. Rovina xy je tudíž totožná s rovinou rovníku r. Na křivce e, jejíž průběh máme vyšetřit, zvolme obecný bod H a proložme jím a pólem P deklinační kružnici. Podle předchozího výkladu (při obr. 1) vyznačme v obr. 2 deklinaci δ a hodinový úhel t. Dále určeme pravoúhlé souřadnice x, y a z bodu H. Z obr. 2 je zřejmé, že platí



Obr. 2

$$x = \cos\delta \cos t\,, \tag{1,1}$$

$$y = \cos\delta \sin t\,, \tag{1,2}$$

$$z = \sin\delta \tag{1,3}$$

pro $SH = 1$. Ze sférického pravoúhlého trojúhelníku H, Z, P v obr. 2 můžeme pomocí Neperových pravidel[2]) jednoduše odvodit rovnice

$$\cos t = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{cotg}\delta\,, \tag{2,1}$$

$$\sin t \cos\varphi = \left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2,2}$$

kde poslední rovnice byla odvozena ze vztahů $\sin t \cos\varphi = \sin z$ a $\sin\varphi = \cos z \sin\delta$. Nyní dosaďme za $\cos t$ z rovnice (1,1) do rovnice (2,1) a dostaneme

$$\frac{x}{\cos\delta} = \frac{\operatorname{tg}\varphi \cos\delta}{\sin\delta}$$

Pomocí rovnice (1,3) můžeme po jednoduché úpravě dostat

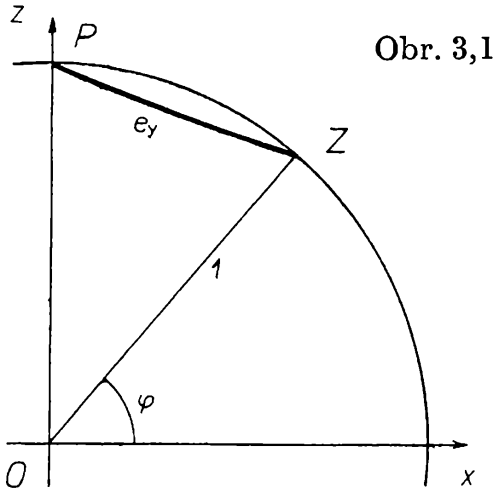
$$z^2 \operatorname{tg}\varphi + x z - \operatorname{tg}\varphi - 0 \tag{3,1}$$

Rovnice (3,1) nám udává závislost souřadnic x a z hledaného geometrického místa elongací e. Geometricky je znázorněna na obr. 3,1 křivkou e_y zobrazující část elipsy, která leží mezi body P a Z. Nepředstavuje nic jiného než průmět křivky e do roviny xz.

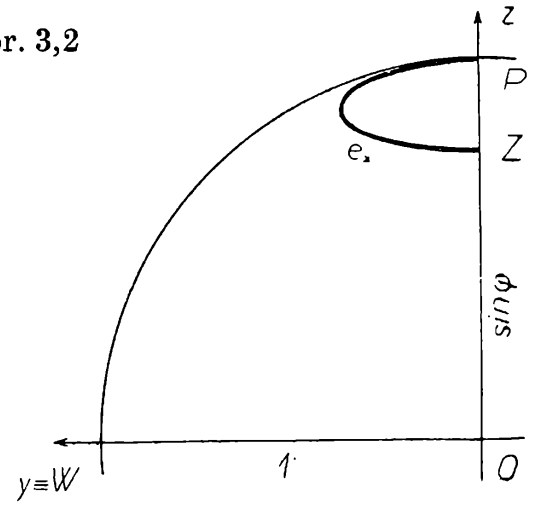
Podobně můžeme dosadit do rovnice (2,2) za $\sin t = y\,(\cos\delta)$ a výrazy obsahující δ nahradit souřadnicí z z rovnice (1,3). Po úpravě dostaneme

$$z^4 + y^2 z^2 \cos^2\varphi - z^2\,(1 + \sin^2\varphi) + \sin^2\varphi = 0\,. \tag{3,2}$$

Rovnice (3,2) je rovnicí 4. stupně a udává závislost souřadnic y a z. Geometricky je znázorněna na obr. 3,2 jako křivka e_x a představuje průmět křivky e do roviny yz.



Obr. 3,1



Obr. 3,2

[2]) Viz M. Menšík, Sférická trigonometrie; Rozhledy m.-f., 1964—65, č. 10, str. 433.

Pro vyjádření závislosti mezi souřadnicemi x a y uvažme, že hledané geometrické místo e leží na kouli o jednotkovém poloměru (obr. 2), která je definována rovnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Je pak

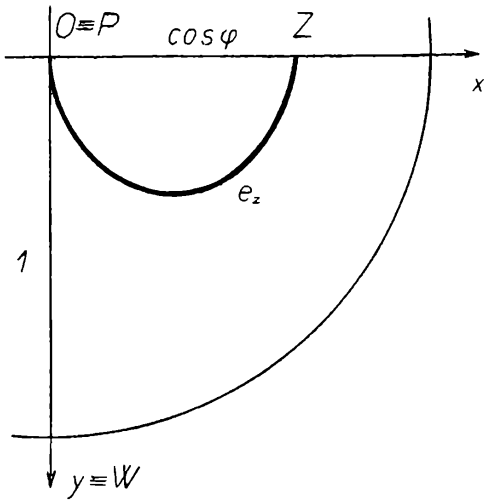
$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

a tento výraz dosadíme do rovnice (3,1) nebo do (3,2).

Dostaneme potom

$$x^4 - x^2y^2(1 + \sin^2\varphi) + y^4 \sin^2\varphi - x^2\cos^2\varphi = 0 \qquad (3,3)$$

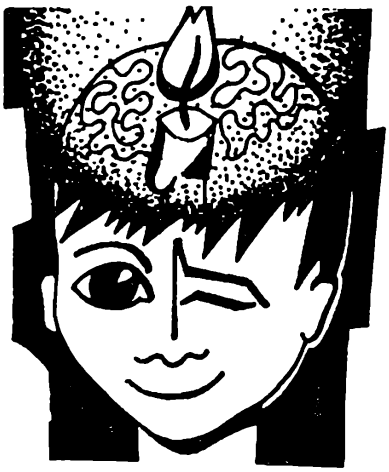
Rovnice (3,3) je rovnicí 4. stupně a udává závislost mezi souřadnicemi x a y. Geometricky je znázorněna tato závislost na obr. 3,3 jako křivka e_z a představuje průmět křivky e do roviny xy.



Obr. 3,3

Obrázky 3,1, 3,2 a 3,3 odpovídají zeměpisné šířce $\varphi = 50°$. Bylo by zajímavé znázornit geometrická místa elongací a jejich průměty pro různé zeměpisné šířky.

Zobrazíme-li, což zde již provádět nebudeme, křivku e do roviny kolmé k rovině místního poledníku (totožná s rovinou xz) a procházející body P a Z (obr. 2) dostaneme křivku e vyššího řádu, velmi blízkou kružnici, opsané nad průměrem PZ. Jejími průměty do souřadných rovin xy, xz a yz jsou křivky e_z, e_y a e_x, které jsou znázorněny v obr. 3,3, 3,1 a 3,2.



MO

XVI. ročník Matematické olympiády

V č. 10 loňského ročníku *Rozhledů matematicko-fyzikálních* byly uveřejněny pokyny pro organizaci XVI. ročníku MO. V letácích, které budou vydány odděleně pro kategorie A, B, C a pro kategorii D, jsou další podrobnější údaje.

V tomto čísle jsou uvedeny *přípravné úlohy I. kola* kategorií A, B, C. Řešení těchto úloh odevzdejte svému učiteli matematiky *do 30. listopadu 1966*. Tato řešení přípravných úloh Váš učitel *opraví, ale neklasifikuje*.

Pro účast v soutěžní části I. kola *není podmínkou* odevzdání řešení všech přípravných úloh a správné vyřešení většiny z nich jako tomu bývalo v předešlých ročnících. Jistě však každý účastník I. kola bude ve vlastním zájmu řešit *přípravné úlohy:*

Kategorie A

1. Jsou-li d_1, d_2, d_3 kladná čísla taková, že $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$, pak pro libovolná nezáporná čísla c_1, c_2, c_3 platí

$$(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right) \leqq (c_1 + c_2 + c_3)^2 \, \frac{(d_1 + d_3)^2}{4d_1d_3} .$$

Dokažte!

N á v o d. Dokažte nejprve, že

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} + \frac{\dfrac{1}{d_2}}{\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_3}} \leqq 1 .$$

2. Rovnice $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

s reálnými koeficienty a, b, c má jeden reálný kořen a dva ryze imaginární kořeny právě tehdy, platí-li

$$c = ab \, , \; b > 0 .$$

3. Ve třídě je 15 dvousedadlových lavic a 27 žáků. Určití dva žáci mají sedět (z výchovných důvodů) vedle sebe v téže lavici a žádná lavice nemá zůstat prázdná. Kolika způsoby lze žáky rozsadit?

4. Je dáno n bodů ($n \geqq 3$), z nichž žádné tři neleží v přímce a množina **U** skládající se z n úseček, které spojují vždy dva z daných bodů.

Pak lze z daných n bodů vybrat k bodů $A_1, \ldots, A_k$ ($k \geqq 3$) tak, že všechny úsečky A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{k-1}A_k$, A_kA_1 náležejí množině **U**. Dokažte!

N á v o d. Důkaz lze provést *matematickou indukcí*, o této metodě se dočtete ve svazečku č. 6 z edice Š k o l a m l a d ý c h m a t e m a t i k ů. Autorem svazku je R u d o l f V ý b o r n ý a jmenuje se *Matematická indukce.*

Kategorie B

1. Funkce proměnné x

$$y = a\,|x| + b\,|x - k| \tag{1}$$

nabývá hodnoty 0 pro $x = -1$ a $x = 3$; největší hodnota, které nabývá, je $y = 2$. Určete konstanty a, b, k a nakreslete graf funkce (1).

2. Určete všechna přirozená čísla x, která vyhovují rovnici

$$4^{x-1} + 7 \,.\, 2^x + 48 = x\,(x - 1) \qquad 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.$$

3. Je dána kružnice $k \equiv (S;\ r)$, bod A, pro který platí $AS = d > r$ a kladné číslo $\varrho > r$. Sestrojte kružnici o poloměru ϱ, která prochází bodem A a dělí kružnici k ve dvě polokružnice. Určete podmínku řešitelnosti.

4. Krychle o hraně délky 6 je rozdělena v $6^3 = 216$ jednotkových krychlí. Krychli je vepsaná koule o průměru 6. Zjistěte, kolik jednotkových krychlí leží v kouli a kolik jich neobsahuje žádný vnitřní bod koule.

Kategorie C

1. Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x\,(x + y) + z\,(x - y) &= 6\,, \\ y\,(y + z) + x\,(y - z) &= -2\,, \\ z\,(z + x) + y\,(z - x) &= 3\,. \end{aligned}$$

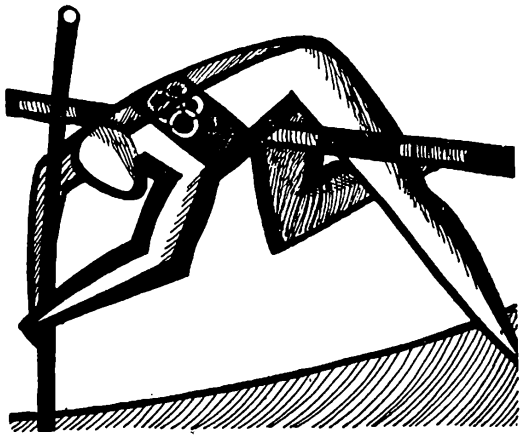
2. Nechť prvočísla p_1, p_2 jsou různá od čísel 3 a 5, pak číslo $p_1^4 - p_2^4$ je násobkem patnácti. Dokažte!

3. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB, je-li dán součet s výšek na základnu a na rameno a druhý úhel proti základně.

4. Je dána kružnice $k \equiv (S;\ r)$, bod A jejího vnitřku a kladné číslo d. Bodem A je vedena tětiva kružnice, která je rozdělena tímto bodem ve dvě úsečky, jejichž délky mají rozdíl d.

a) Vyjádřete délku t této tětivy a její vzdálenost od středu S pomocí parametrů r, d, $v = SA$.

b) Sestrojte pomocí výsledku z úlohy a) všechny tětivy dané vlastnosti.



FO

Potenciál v gravitačním a elektrickém poli

MILAN RÁDL, Plzeň

Téma k prostudování pro první kolo osmého ročníku FO v kategorii A.

V tomto studijním textu porovnáme některé obdobné i odlišné vlastnosti gravitačního a elektrického pole.

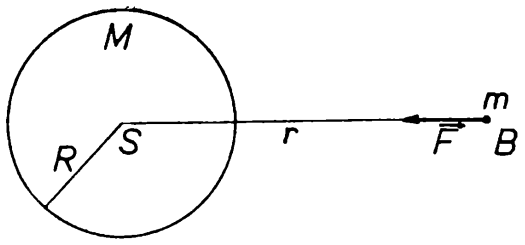
Kolem tělesa o hmotnosti M je gravitační pole. Každé jiné těleso o hmotnosti m podléhá v tomto poli jisté síle $\vec{F}$[1]. Při přemísťování tělesa v gravitačním poli mohou síly gravitačního pole konat práci A a tudíž se může měnit potenciální energie gravitační W tělesa.

Obdobně kolem elektrického náboje Q je elektrické pole. Na každý jiný náboj q nacházející se v tomto poli působí pole silou $\vec{F}$. I zde se při přemísťování náboje q obvykle koná práce A a náboj q může tudíž v různých bodech pole mít různou potenciální energii W.

Z výkladu je zřejmé, že pro popis obou polí nám mohou právě posloužit jejich silové účinky na těleso o hmotnosti m či na náboj q, popřípadě energetické změny při přemísťování tělesa nebo náboje v příslušném poli. Pomocí silových účinků pole definujeme intenzitu gravitačního nebo elektrického pole, pomocí energetických změn pak gravitační či elektrický potenciál v určitém bodě pole.

Uvažujme gravitační pole naší Země (obr. 1). Předpokládáme-li, že Země je homogenní koule o poloměru R a má hmotnost M, je gravitační pole Země na jejím povrchu a v jejím okolí takové, jaké by

[1]) Pro označení vektorů v tomto článku se používá v textu i v obrázcích písmen se šipkou; obvyklejší je označovat vektory písmeny tištěnými půltučně. Označení $\vec{F}$ a **F** jsou tedy rovnocenná.



Obr. 1

vzniklo kolem hmotného bodu o hmotnosti M, nacházejícího se ve středu Země. Přitažlivá síla působící na těleso o hmotnosti m, které je vzdálenosti $r \geqq R$ od středu Země, je určena gravitačním zákonem

$$F = \varkappa \frac{M\,m}{r^2}, \qquad (1)$$

$\varkappa = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}}$ (gravitační konstanta).

Nyní můžeme již zavést intenzitu gravitačního pole $\vec{E}$ touto definicí

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad [E] = \mathrm{N\,kg^{-1}} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,kg^{-1}} = \mathrm{m\,s^{-2}}. \qquad (2)$$

Intenzita gravitačního pole v daném bodě udává sílu, která by v tomto bodě působila na hmotný bod o jednotkové hmotnosti.

Z definice a ze vztahu (1) ihned odvodíme, že velikost intenzity $\vec{E}$ ve vzdálenosti $r \geqq R$ od středu Země je dána vztahem

$$E = \varkappa \frac{M}{r^2} \qquad (3)$$

a má směr do středu Země. Vzhledem k tomu, že síla $\vec{F} = m\vec{a}$, zjišťujeme ze vztahů (2) a (3), že nově zavedená veličina $\vec{E}$ je vlastně totožná s gravitačním zrychlením $\vec{a}$

$$E = a = \varkappa \frac{M}{r^2}, \qquad (4)$$

jak konečně vyplývá i z rozboru rozměrů ve vztahu (2). Dosadíme-li do vztahu (4) za $r = R = 6{,}37 \;\; 10^6$ m (poloměr Země) a $M = 5{,}97 \,.\, 10^{24}$ kg (hmotnost Země), dostáváme pro hodnotu intenzity gravitačního pole při povrchu Země

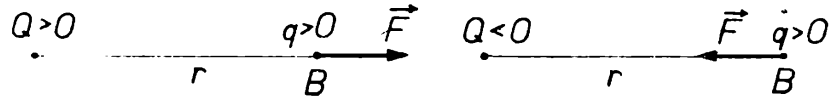
$$E = 9{,}81\ \mathrm{N\,kg^{-1}} = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Je to přibližná hodnota normálního tíhového zrychlení g.

Obraťme nyní pozornost k elektrickému poli bodového náboje Q ve vakuu. Náboj Q může být jak kladný, tak i záporný. Na náboj q, který se dostal do bodu B ve vzdálenosti r od náboje Q působí elektrické pole silou $\vec{F}$, jejíž velikost je dána Coulombovým zákonem

$$F = k \frac{Q\,q}{r^2}, \quad k = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \doteq 9 \,.\, 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}. \qquad (5)$$

Dohodneme-li se, že vložený náboj q je kladný ($q > 0$), pak orientace této síly závisí pouze na znaménku náboje Q (obr. 2).



Obr. 2

Veličinu

$$\vec{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{F}}{q}, \quad [E] = \mathrm{N\,C^{-1}} \tag{6}$$

nazýváme *intenzita elektrického pole v daném bodě B*. Udává sílu, která by v daném bodě působila na kladný jednotkový náboj tam umístěný. Později ukážeme, že její jednotku $\mathrm{N\,C^{-1}}$ je možno nahradit vhodnější jednotkou $\mathrm{V\,m^{-1}}$. Z definice a ze vzorce (5) obdržíme pro velikost intenzity ve vzdálenosti r od bodového náboje Q vztah

$$E = k\frac{Q}{r^2} \tag{7}$$

Vektor $\vec{\mathrm{E}}$ je orientován buď od náboje Q či k němu podle znaménka náboje Q. Na náboj q v poli působí pak podle (6) pole silou

$$\vec{\mathrm{F}} = \vec{\mathrm{E}}\,q\,. \tag{8}$$

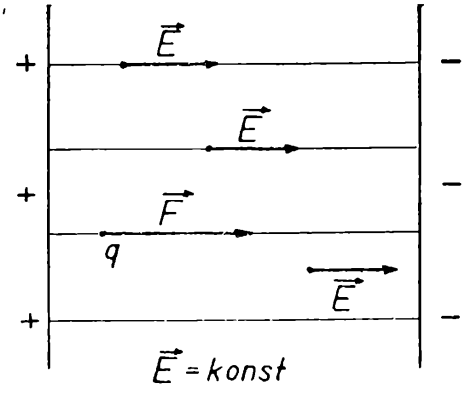
Pro $q > 0$, jak bylo dohodnuto, je síla $\vec{\mathrm{F}}$ souhlasně orientována s intenzitou $\vec{\mathrm{E}}$. Vzorec lze zřejmě použít i pro $q < 0$, síla $\vec{\mathrm{F}}$ je pak opačně orientována, orientace intenzity se tím samozřejmě nezměnila.

Důležitými případy obou polí jsou tzv. *pole homogenní*. Jsou to taková pole, v jejichž každém bodě vektory $\vec{\mathrm{E}}$ jsou konstantní. Zvolíme-li malou oblast zemského gravitačního pole (např. gravitační pole v prostoru třídy), jde o pole homogenní. Intenzita $\vec{\mathrm{E}}$ je stejná co do velikosti i směru ve všech bodech třídy.

Má v nich hodnotu

$$E = 9{,}81\ \mathrm{N\,kg^{-1}} = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

a míří svisle dolů. Homogenní elektrické pole (obr. 3) vzniká mezi dvěma rovnoběžnými, nesouhlasně nabitými vodivými deskami. Graficky se homogenita pole znázorňuje stejnou hustotou rovnoběžných elektrických siločar. V takovém poli lze snadno vypočítat práci, kterou vykonají síly elektrického pole při přemístění náboje q po dráze s ve směru siločáry, ne-



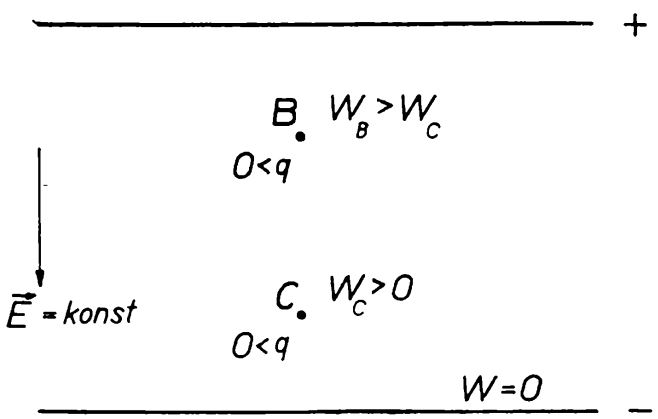
Obr. 3

boť podle (8) síla $\vec{F} = \vec{E}\,q$ zůstává konstantní. Je-li d vzdálenost desek, pak pro práci při přechodu náboje q z jedné desky na druhou dostáváme

$$A = F\,d = E\,q\,d\,. \tag{9}$$

Povšimněme si nyní energetických změn a práce při přemísťování tělesa o hmotnosti m v gravitačním poli.

Potenciální energie gravitační W hmotného bodu o hmotnosti m je určena prací, kterou nutno vykonat, abychom jej dopravili z místa nulové potenciální energie do daného bodu. Pro určení velikosti potenciální energie je tedy nutno nejprve dohodnout, ve kterých bodech bude mít libovolné těleso nulovou potenciální energii. Souhrn těchto bodů nazýváme *hladinou nulové potenciální energie* (hladinou nulového potenciálu). Podle volby této hladiny může potenciální energie nabývat hodnot kladných i záporných. Na obr. 4 je znázorněna nulová hladina ($W = 0$) a hmotný bod umístěný v bodech B, C, D homogenního gravitačního pole. Příslušné potenciální energie jsou W_B, W_C, W_D a zřejmě je při označeném směru a orientaci intenzity gravitačního pole



Obr. 4

$$W_B > W_C > 0\,, \quad W_D < 0\,.$$

Poměr

$$\varphi = \frac{W}{m}\,, \quad [\varphi] = \mathrm{J\,kg^{-1}} \tag{10}$$

nazýváme *potenciálem v určitém bodě gravitačního pole.* Udává potenciální energii, kterou má hmotný bod o jednotkové hmotnosti umístěný v daném bodě a rovná se zřejmě práci, kterou je nutno vykonat při přemístění hmotného bodu o jednotkové hmotnosti z hladiny nulového potenciálu do daného bodu. Souhrn bodů jednoho a téhož potenciálu nazýváme *hladinou (ekvipotenciální plochou).* V homogenním gravitačním poli jsou to vodorovné roviny.

Potenciály v bodech B a C jsou podle definice

$$\varphi_B = \frac{W_B}{m} = \frac{A_B}{m}\,, \qquad \varphi_C = \frac{W_C}{m} = \frac{A_C}{m}\,,$$

kde A_B znamená práci vykonanou při přenesení hmotného bodu o hmotnosti m z hladiny nulového potenciálu do bodu B a A_C práci vykonanou při přenesení téhož hmotného bodu z hladiny nulového potenciálu do bodu C. Přenášíme-li hmotný bod do bodu B z bodu C, pak potřebná

práce A se rovná rozdílu obou prací

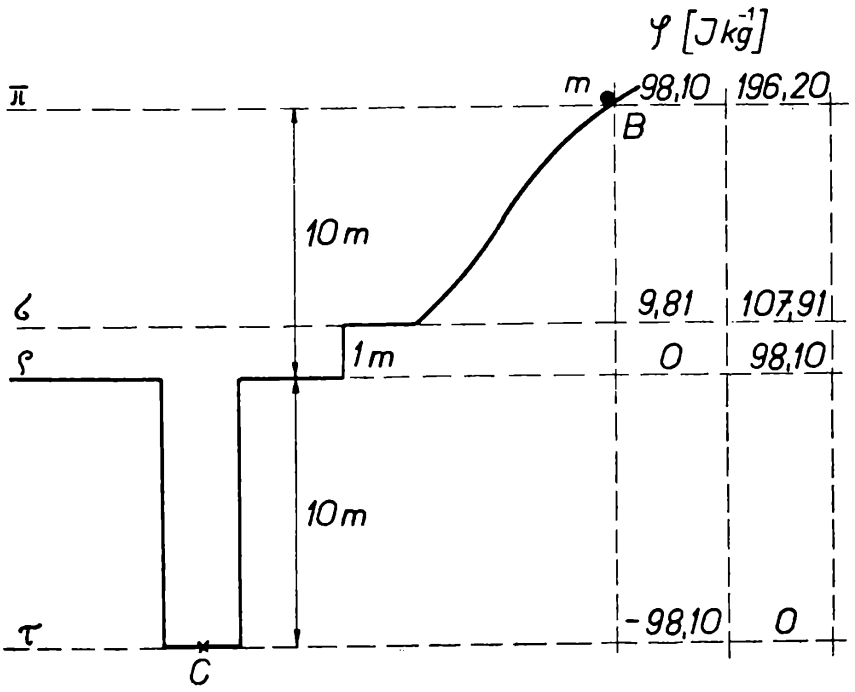
$$A = A_B - A_C = m\,\varphi_B - m\,\varphi_C\,,$$

$$A = m\,(\varphi_B - \varphi_C)\,. \tag{11}$$

Tutéž práci vykonají síly gravitačního pole, přemísťuje-li se jejich působením hmotný bod z bodu B do bodu C. Poněvadž potenciální rozdíl $\varphi_B - \varphi_C$ ve vzorci (11) nezávisí na volbě hladiny nulového potenciálu, můžeme vyslovit na základě vzorce (11) tuto poučku:

Volně pohyblivé těleso v gravitačním poli přechází působením pole z hladiny vyššího potenciálu do hladiny nižšího potenciálu. Přitom síly pole konají práci. Velikost vykonané práce závisí pouze na hmotnosti tělesa a na potenciálním rozdílu. Nezávisí na tvaru a délce dráhy a na volbě hladiny nulového potenciálu.

Obr. 5 představuje vodorovnou rovinu ϱ, výkop hloubky 10 m, vy-

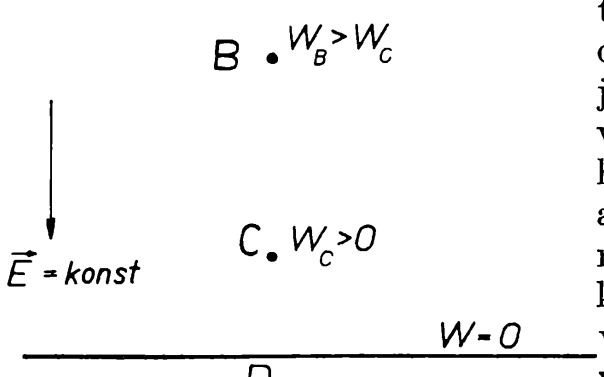


Obr. 5

výšeninu výšky 1 m a kopec. Potenciály hladin jsou uvedeny vzhledem ke dvěma různým nulovým hladinám. Při přechodu tělesa o hmotnosti $m = 10$ kg z bodu B do bodu C bude vykonána silami pole práce

$$A = m\,(\varphi_B - \varphi_C) = 10\ \text{kg}\ .\ 196{,}2\ \text{J kg}^{-1} = 1\ 962\ \text{J}$$

Definujme nyní obdobnou veličinu i pro pole elektrické — takzvaný *elektrický potenciál* φ. Pro jednoduchost volme homogenní elektrické pole mezi dvěma vodivými deskami (obr. 6). Elektrický náboj q umís-



Obr. 6

těný mezi deskami má v daném bodě pole jistou potenciální energii W, jejíž velikost podobně jako v gravitačním poli závisí na dohodnuté hladině nulové potenciální energie a kromě toho též na velikosti a znaménku náboje q. Zvolme náboj q kladný a definujme potenciál φ v daném bodě elektrického pole vztahem

$$\varphi = \frac{W}{q}, \quad [\varphi] = \mathrm{J\,C^{-1}} = \mathrm{V} \tag{12}$$

Elektrický potenciál tedy udává potenciální energii, kterou v daném bodě má *kladný* jednotkový náboj tam umístěný.

Pro celkovou potenciální energii náboje q pak vyplývá vztah

$$W = \varphi\, q \tag{13}$$

Záporný náboj q v témže místě elektrického pole má energii W opačného znaménka, zatímco znaménko potenciálu se samozřejmě nezměnilo. Elektrometrem lze ukázat, že vodič, na němž jsou elektrické náboje v klidu, je vždy ekvipotenciální hladinou.

Pro elektrické pole na obr. 6, v němž za hladinu nulového potenciálu byla zvolena deska se záporným nábojem, platí podle definice

$$\varphi_B = \frac{W_B}{q} = \frac{A_B}{q}, \quad \varphi_C = \frac{W_C}{q} = \frac{A_C}{q},$$

kde A_B je práce vykonaná při přenosu bodového náboje q z hladiny nulového potenciálu do B a A_C je práce vykonaná při přenosu téhož náboje z hladiny nulového potenciálu do bodu C. Dále již stejnou úvahou jako v gravitačním poli obdržíme pro práci A vykonanou silami elektrického pole při přenosu kladného náboje q z bodu B do bodu C (tj. z místa vyššího potenciálu do místa nižšího potenciálu) vztah

$$A = q\,(\varphi_B - \varphi_C) \tag{14}$$

Potenciální rozdíl $\varphi_B - \varphi_C$ nazýváme *napětím* mezi body B a C a značíme je U_{BC}

$$U_{BC} = \varphi_B - \varphi_C, \quad [U] = \mathrm{V} = \mathrm{J\,C^{-1}} \tag{15}$$

Vztah (14) zapisujeme pak ve tvaru

$$A = q\, U \tag{16}$$

Vzorec platí zřejmě i pro záporný náboj q s tím rozdílem, že na náboj $q < 0$ působí síly elektrického pole silou opačně orientovanou a tedy volně pohyblivý záporný náboj převádějí z místa nižšího potenciálu do

míst vyššího potenciálu a konají přitom práci. Můžeme tedy vyslovit poučku zcela obdobnou poučce pro gravitační pole:

Volně pohyblivý kladný náboj q v elektrickém poli přechází působením pole z místa vyššího potenciálu do míst nižšího potenciálu (záporný obráceně). Přitom síly pole konají práci. Velikost vykonané práce závisí pouze na velikosti přeneseného náboje a na napětí. Nezávisí na tvaru a délce dráhy a na volbě hladiny nulového potenciálu.

Je-li mezi oběma deskami homogenního pole vzdálenost d a napětí U, pak práci vykonanou při přechodu náboje q z jedné desky na druhou vyjádříme dvěma různými vztahy.

Podle (16)

$$A = q\,U$$

a podle (9)

$$A = E\,q\,d\,.$$

Jejich porovnáním obdržíme pro homogenní pole důležité vztahy

$$U = E\,d\,, \quad E = \frac{U}{d}\,, \quad [E] = \mathrm{V\,m^{-1}} \tag{17}$$

Poměr $\frac{U}{d}$ udává napětí připadající na jednotku délky dráhy ve směru intenzity elektrického pole a nazýváme jej *spád napětí*. Jednotka spádu napětí $\mathrm{V\,m^{-1}}$ je tedy současně i jednotkou intenzity elektrického pole a ze vztahu (17) plyne, že je totožná s dříve již zavedenou jednotkou intenzity $\mathrm{N\,C^{-1}}$.

Ověřte, že platí

$$\mathrm{V\,m^{-1}} = \mathrm{N\,C^{-1}}$$

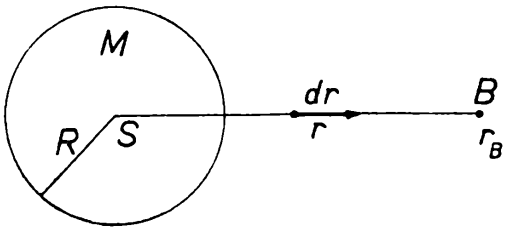
Zbývá nám vyšetřit průběh potenciálu v některých nehomogenních polích, a to v gravitačním poli Země a v elektrickém poli bodového náboje Q. K vyšetřování nám poslouží dříve odvozené vztahy pro intenzity E ve vzdálenosti r

$$E = \varkappa \frac{M}{r^2}\,, \qquad E = k\,\frac{Q}{r^2}$$

Gravitační potenciál v bodě B ve vzdálenosti r_B od středu Země určíme podle definice jako podíl

$$\varphi_B = \frac{W_B}{m} = \frac{A_B}{m}\,,$$

kde W_B je potenciální energie hmotného bodu o hmotnosti m v bodě B, která se rovná práci A_B vykonané při přenosu hmotného bodu z hladiny nulové potenciální energie (zvolme povrch Země) do bodu B (**obr. 7**). Označme na úsečce SB ve vzdálenosti r od bodu S ($R \leqq r \leqq r_B$)



Obr. 7

tak malý úsek dr, že sílu, která posouvá hmotný bod po tomto úseku lze považovat za stálou. Je to síla

$$F = \varkappa \frac{Mm}{r^2} = E\,m\,,$$

neboť při posouvání hmotného bodu přemáháme gravitační sílu danou gravitačním zákonem. Na dráze dr vykonáme tedy elementární práci

$$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}r = E\,m\,\mathrm{d}r \tag{18}$$

Tato síla působí ve směru dráhy a koná tedy práci, potenciální energie tělesa roste. Představíme-li si celou dráhu od povrchu Země až do bodu B rozdělenou na velký počet stejných elementů dr, bude práce při posouvání hmotného bodu po jednotlivých těchto elementech různá, neboť síla F postupně klesá se slábnoucí intenzitou pole

$$\left(E = \varkappa \frac{M}{r^2}\right).$$

Celková práce A je dána součtem všech elementárních prací dA, a to od povrchu Země ($r = R$) až do daného bodu B ($r = r_B$).

Matematicky se tento součet vyjádří integrálem

$$W_B = A = \int_R^{r_B} F\,\mathrm{d}r = \int_R^{r_B} E\,m\,\mathrm{d}r \tag{19}$$

a potenciál v bodu B

$$\varphi_B = \frac{W_B}{m} = \int_R^{r_B} E\,\mathrm{d}r\,. \tag{20}$$

Po dosazení za E dostáváme

$$\varphi_B = \int_R^{r_B} \frac{\varkappa M}{r^2}\,\mathrm{d}r = M\varkappa \int_R^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\,. \tag{21}$$

V matematice si odvodíte, že hodnota tohoto integrálu je

$$\varphi_B = \frac{\varkappa M}{R} - \frac{\varkappa M}{r_B}\,.$$

Ve vzdálenosti $r \geqq R$ je tedy potenciál

$$\varphi = \frac{\varkappa M}{R} - \frac{\varkappa M}{r}\,. \tag{21}$$

Ve shodě se zvolenou hladinou nulového potenciálu dostáváme pro $r = R$ hodnotu $\varphi = 0$. S rostoucí vzdáleností od Země potenciál (a tedy

i potenciální energie tělesa) roste a maxima nabývá pro $r \to \infty$; pro jeho potenciál vychází

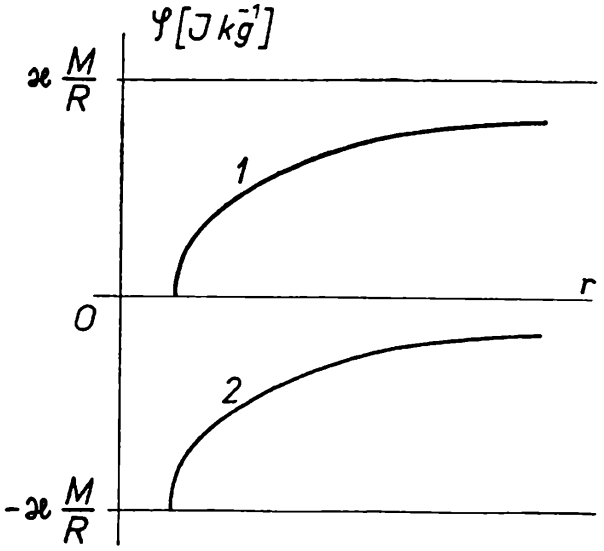
$$\varphi_\infty = \frac{\varkappa M}{R} = 6{,}25 \cdot 10^7 \text{ J kg}^{-1}$$

Průběh φ v závislosti na r ukazuje křivka 1 (obr. 8).

Pro zjednodušení vztahu (21) se někdy volí hladina nulového potenciálu v nekonečnu ($\varphi_\infty = 0$). Toho dosáhneme, snížíme-li všechny potenciály dané vzorcem (21) o hodnotu $\varkappa \frac{M}{R}$. Při této volbě je pak potenciál dán vztahem

$$\varphi = -\frac{\varkappa M}{r} \tag{22}$$

a je ovšem v libovolném bodě pole záporný. Jeho průběh udává křivka 2 (obr. 8). Potenciální rozdíly mezi body pole se tím nezměnily.



Obr. 8

Otázky k procvičení:

1. Jaké práce je zapotřebí ke zdvižení tělesa o hmotnosti $m = 1000$ kg do vzdálenosti $h = 1000$ km od povrchu Země?

$$\left[A = \varkappa M m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right);\ r = 7{,}370 \cdot 10^6 \text{ m}\right]$$

2. Jakou potenciální energii má těleso o hmotnosti m v nekonečnu a jakou nejmenší rychlostí by tedy muselo být z povrchu Země vrženo, aby se již k Zemi nevrátilo? (Tzv. 2. kosmická rychlost.)

$$\left[v = \sqrt{\frac{2\varkappa M}{R}} = \sqrt{2}\, R \sqrt{\frac{\varkappa M}{R^2}} = \sqrt{2}\, R\, g\right]$$

3. Odvoďte, že pro přemístění tělesa o hmotnosti m ze vzdálenosti r_1 do vzdálenosti r_2 ($r_2 > r_1 > R$, měřeno od středu Země) je třeba vykonat práci

$$A = m \varkappa M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

4. Označte hmotnost Slunce M_S a vzdálenost Země od Slunce a. Uvažte, že $\varkappa$ je univerzální konstanta platící pro všechna gravitační pole a určete na základě vzorce z otázky 3. nejmenší rychlost, kterou by musilo mít těleso vzdálené od Slunce jako naše Země, aby se trvale od Slunce vzdalovalo.

$$\left[v = \sqrt{\frac{2 \varkappa M_S}{a}} = 42{,}1 \quad 10^3 \text{ m s}^{-1} \text{ vzhledem ke Slunci} \right]$$

Vrháme-li těleso z naší Země a využijeme-li rychlosti jejího oběhu kolem Slunce, možno uvedenou rychlost snížit vůči Zemi na hodnotu 16,5 km s^{-1} (3. kosmická rychlost).

Dobré porozumění průběhu potenciálu v gravitačním poli poslouží nám i při studiu potenciálu v poli elektrickém. Aby analogie byla úplnější, studujme nejprve potenciál v elektrickém poli záporného bodového náboje Q ($Q < 0$).

Vzhledem k tomu, že potenciál udává potenciální energii *kladného* jednotkového náboje, můžeme použít obr. 7 i vztahů z něho odvozených. Představme si v bodě S bodový náboj $Q < 0$ vytvářející elektrické pole a v bodě B pak zkušební náboj $q > 0$, který je silami elektrického pole přitahován k náboji Q. Intenzitu gravitačního pole nahradíme intenzitou pole elektrického $E = k \frac{Q}{r^2}$ síla $\vec{\mathrm{F}} = \vec{\mathrm{E}}\, q$ a elektrický potenciál $\varphi = \frac{W}{q}$

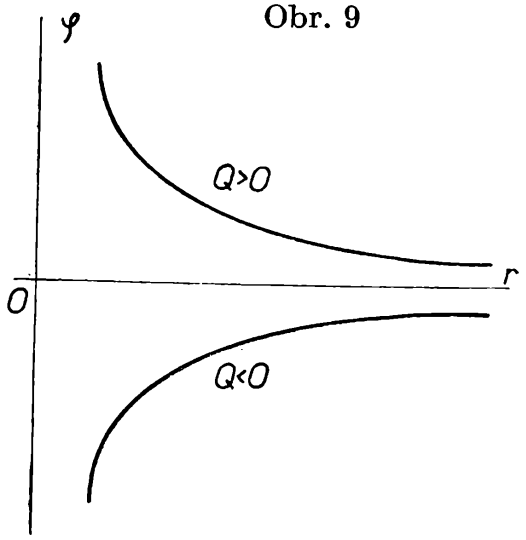
Poloměr R zde ztrácí smysl a proto zvolíme hladinu nulového potenciálu v nekonečnu a ve shodě se vzorcem (22) dostáváme pro potenciál ve vzdálenosti r od bodového náboje Q ve vakuu vztah

$$\varphi = k \frac{Q}{r}, \qquad k = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \doteq 9 \quad 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \tag{23}$$

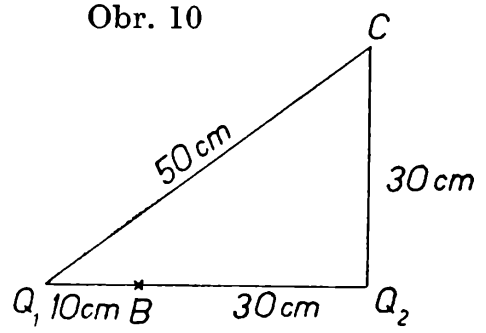
Znaménko minus ze vzorce (22) odpadá, neboť je obsaženo již ve znaménku náboje $Q < 0$. Vzorec (23) však zřejmě platí i pro náboj $Q > 0$, neboť změnou znaménka náboje se změní pouze orientace sil, které v jednotlivých bodech pole působí na kladný náboj q, a nikoli jejich velikost.

Liší se tedy potenciály pole kladného nebo záporného náboje Q ve stejných vzdálenostech r pouze znaménkem. Průběh potenciálu v závislosti na vzdálenosti r od bodového náboje Q je znázorněn pro nulovou hladinu v nekonečnu na obr. 9.

Obr. 9



Obr. 10



Pro $Q > 0$ s klesající vzdáleností od náboje Q potenciál elektrického pole roste, pro $Q < 0$ klesá; v obou případech podle vzorce

$$\varphi = k\frac{Q}{r}.$$

Otázky k procvičení:

1. Jaká síla F působí na α částici, která vnikla do homogenního elektrického pole mezi vodivými deskami, je-li vzdálenost desek d a napětí mezi nimi U. Náboj částice je $q = 2e$ (kde e je velikost elementárního náboje).

$$\left[F = \frac{2eU}{d}\right]$$

2. Předpokládejte, že elektron obíhá kolem vodíkového jádra po kružnici o poloměru r_2 (dvoukvantová dráha) a přeskočí na dráhu o poloměru r_1 (jednokvantová dráha) $r_1 < r_2$. Náboj jádra je $+e$, elektronu $-e$ (elementární náboj), klidová hmotnost elektronu m.

a) Určete změnu potenciální energie $\Delta W_p = W_{p1} - W_{p2}$ elektronu při tomto přeskoku.

$$\left[\Delta W_p = -ke^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) < 0\right]$$

b) Dostředivou silou při uvedených kruhových pohybech je zřejmě přitažlivá síla elektrického pole jádra. Z její velikosti a hmotnosti elektronu určete druhé mocniny rychlostí (v_1^2, v_2^2), kterými se elektron pohyboval na uvedených drahách, a změnu kinetické energie $\Delta W_k = W_{k_1} - W_{k_2}$ při přeskoku.

$$\left[\Delta W_k = \frac{1}{2}ke^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) > 0\right]$$

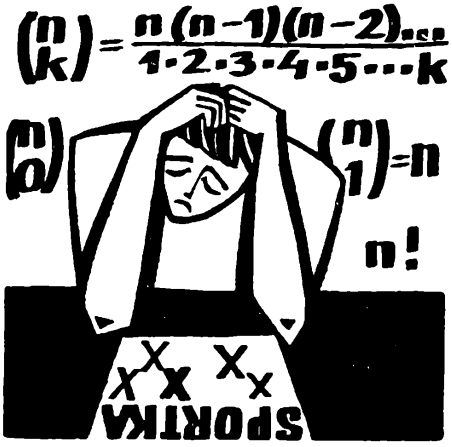
c) Sečtením obou změn stanovte celkovou změnu energie ΔW při přeskoku elektronu a rozhodněte, zda přitom atom energii uvolnil či přijal.

$$\left[\Delta W = \Delta W_p + \Delta W_k = -\frac{1}{2}ke^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) < 0\ ;\ \text{atom energii uvolnil}\right]$$

3. Dva bodové náboje ve vakuu $Q_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ C, $Q_2 = -10^{-5}$ C jsou umístěny podle obr. 10. Určete v bodech B a C velikost intenzity výsledného elektrického pole. Jaké napětí je mezi body B a C a jakou práci vykonají síly elektrického pole, jestliže převedou α částici z bodu B do C. Náboj α částice je $q = 2e$.

$$\left[E_B = 23{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{V\,m^{-1}}\ ;\ E_C = 8{,}5 \cdot 10^5\ \mathrm{V\,m^{-1}}\ ;\ U_{BC} = 1{,}8 \cdot 10^6\ \mathrm{V}\ ;\ A = 5{,}8 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}\right]$$

Úlohy



k řešení

Každoročně vypisuje náš časopis soutěž v řešení úloh z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Mnozí nynější vysokoškolští učitelé a akademici se v minulých letech úspěšně účastnili této tradiční soutěže.

Letošním řešitelům patří těchto několik pokynů Řešení je třeba provádět samostatně, tj. bez pomoci učitele. Postup má být logicky správný, přitom účelně věcný bez rozvleklých frází s užíváním pojmů a označení podle norem. Nejdelší řešení není cílem a nebývá také obyčejně nejlepší. Je nutno psát čitelně perem nebo strojem po jedné straně formátu A4, každou úlohu na zvláštní list. V pravém dolním rohu každého listu se uvede plné řešitelovo jméno, třída a druh i místo školy, podrobná žákova adresa. Na poslední odevzdanou úlohu se připíše jméno učitele příslušného předmětu.

Po skončení a zhodnocení soutěže otiskneme jména všech správných řešitelů. Nejlepší řešitele odměníme knižními cenami podle jejich vlastní volby. Vítáme i ojedinělá řešení žáků nižších tříd. Graficky kvalitním řešením dáváme přednost před nečitelnými mazanicemi.

Naše soutěž nesouvisí s Matematickou a Fyzikální olympiádou ani s nimi nekonkuruje.

Řešení úloh otištěných v tomto čísle zašlete do 15. února 1967 na adresu výkonného redaktora: *doc. Ota Setzer*, Praha 2, Trojanova 13.

Matematika

1. Paty kolmic spuštěných z libovolného bodu (různého od vrcholu) kružnice opsané pravidelnému šestiúhelníku na jeho strany tvoří nekonvexní šestiúhelník s úhly vesměs pravými (vnitřními nebo vnějšími). Dokažte!

Josef Brejcha

2. Budiž v_1 výška na základnu rovnoramenného trojúhelníka $\triangle_1$, v_2 výška příslušná k jeho rameni, ϱ poloměr vepsané kružnice. Při konstantním ϱ sestrojujeme další rovnoramenné trojúhelníky $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_n$ podle schématu

Trojúhelník	Poloměr vepsané kružnice	Výška na základnu	Výška na rameno
$\triangle_1$	ϱ	v_1	v_2
$\triangle_2$	ϱ	v_2	v_3
$\triangle_3$	ϱ	v_3	v_4
.			
$\triangle_n$	ϱ		v_{n+1}

Dokažte, že pro $n \to \infty$ přecházejí trojúhelníky $\triangle_n$ v trojúhelník rovnostranný, opsaný kružnici poloměru ϱ.

Josef Brejcha

3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Úhly při základně AB měří 80°. Ve vrcholu A sestrojíme úhel 50°, ve vrcholu B úhel 60°. Ramena těchto úhlů protnou ramena daného trojúhelníka v bodech K, L. Určete úhel KLB.

Josef Dibelka

4. Určete součet nekonečné řady

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4\ 5} + \frac{1}{3.4\ 5.6} + \quad + \quad + \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} +$$

Jan Fráňa

5. V rovnici

$$x^5 - 11\,x^3 + 4\,x^2 + k\,x - 36 = 0$$

určete k tak, aby platilo $x_1 + x_2 = 0$. Řešte rovnici.

Jan Fráňa

6. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány poloměry ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 kružnic vně vepsaných. (Užijte vztahů odvozených v autorově článku v 8. čísle loňských Rozhledů.)

Josef Glivický

7. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} (x + y + z)(x + y - z) &= 15\,, \\ (x + y - z)(x - y - z) &= 1\,, \\ x - y + z &= 4\,. \end{aligned}$$

Stanislav Horák

8. V intervalu $< 0°, 360° >$ najděte všechny úhly vyhovující rovnici

$$\frac{\operatorname{tg} 3\alpha \,.\, \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{cotg} 3\alpha \,.\, \operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{cotg} 3\alpha + \operatorname{cotg} \alpha} = 1\,.$$

Stanislav Horák

9. V rovnoramenném lichoběžníku o základnách $2a$, $2b$ a výšce v ($v > a + b$) protíná příčka vedená ze středu jednoho ramene kolmo k druhému rameni osu souměrnosti lichoběžníka v bodě, z něhož tečny, vedené ke kružnicím nad základnami jako průměry, mají stejnou délku.

Ota Setzer

10. Danému čtverci $ABCD$ ($AB = a$) opište čtyřúhelník tak, aby trojúhelníky vzniklé nad stranami čtverce měly obsahy v poměru $1 : 2 : 3 : 4$ a součet jejich obsahů byl roven obsahu čtverce.

Ota Setzer

11. Která přirozená čísla splňují rovnici

$$|3^x - 2^y| = 7 \ ?$$

Ota Setzer

12. Sestrojte trojúhelník, znáte-li jeho úhel γ a $a + c$, $b + c$.

Karel Špaček

Řešení úloh loňské soutěže

Matematika:

1. Určete strany a úhly trojúhelníka, je-li dáno

$$P = 2\sqrt{7}, \quad s = 2 + 3\sqrt{2}, \quad r = \frac{8\sqrt{7}}{7}\ \text{cm},$$

$$(a < b < c).$$

(Došlo 22 řešení) *Jan Fráňa*

Řešila Věra Jaroňová, 2. roč. SVVŠ, N. Bohumín:

Součet stran v trojúhelníku

$$a + b + c = 2s = 4 + 6\sqrt{2}.$$

Poloměr kružnice opsané trojúhelníku se vypočte ze vzorce

$$r = \frac{abc}{4P};$$

tedy

$$abc = 4Pr = 64.$$

Podle Heronova vzorce je obsah trojúhelníka

$$P = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}.$$

Umocněním a úpravou dostáváme

$$P^2 = s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c) =$$
$$= s^4 - s^3\,(a + b + c) + s^2\,(ab + ac + bc) - abc.$$

Z tohoto vztahu vychází po dosazení za P, s, $a + b + c$, abc

$$ab + ac + bc = 16 + 24\sqrt{2}\,.$$

Máme tedy tři rovnice o třech neznámých a, b, c

$$a + b + c = 4 + 6\sqrt{2}\,,$$
$$ab + ac + bc = 16 + 24\sqrt{2}\,,$$
$$abc = 64\,.$$

Strany a, b, c jsou kořeny rovnice třetího stupně

$$y^3 - (a + b + c)\,y^2 + (ab + ac + bc)\,y - abc = 0\,,$$
$$y^3 - 2\,(2 + 3\sqrt{2})\,y^2 + 8\,(2 + 3\sqrt{2})\,y - 64 = 0\,.$$

Po úpravě

$$y^3 - 64 - 2y\,(2 + 3\sqrt{2})\,(y - 4) = 0\,,$$
$$(y - 4)\,(y^2 - 6y\sqrt{2} + 16) = 0$$

Kořeny rovnice jsou

$$y_1 = 4\,,\ y_2 = 2\sqrt{2}\,,\ y_3 = 4\sqrt{2}$$

Má-li platit $a < b < c$, musí

$$a = 2\sqrt{2}\,,\ b = 4\,,\ c = 4\sqrt{2}\,.$$

Velikosti úhlů trojúhelníka vypočítáme ze vztahů

$$a = 2r\,.\,\sin\alpha\ ;\ \sin\alpha = \frac{a}{2r} = \frac{\sqrt{14}}{8} \doteq 0{,}467\,7\ ;\ \alpha \doteq 27°53'$$

$$b = 2r\,.\,\sin\beta\ ;\ \sin\beta = \frac{b}{2r} = \frac{\sqrt{7}}{4} \doteq 0{,}661\,4\ ;\ \beta \doteq 41°25'$$

$$c = 2r\,.\,\sin\gamma\ ;\ \sin\gamma = \frac{c}{2r} = \frac{\sqrt{14}}{4} \doteq$$
$$\doteq 0{,}935\,4\ ;\ \gamma' = 69°18'\,,\ \gamma = 110°42'$$

Poněvadž součet úhlů v trojúhelníku je 180° a největší úhel leží proti nejdelší straně, bude

$$\gamma = 180° - \gamma' = 110°42'$$

Úhel γ můžeme určit také z kosinové věty

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{4}\,,$$

z toho

$$\gamma = 110°42'$$

(Pokračování)

RECENZE

Znova vyšel Diferenciální počet pro začátečníky

Poptávka čtenářů si na sklonku roku 1965 vynutila druhé vydání zajímavé knížky, jejímž autorem je doc. dr. Karel Havlíček. Jeho *Diferenciální počet pro začátečníky* je určen zejména mládeži, které má umožnit přechod ze střední školy na školu vysokou. Knížka je psána přístupně, srozumitelně a přitom přesně. Autor neklame čtenáře tím, že by vydával za důkaz nějakou úvahu, která matematickým důkazem není, což nelze vždy říci o některých starších knížkách věnovaných diferenciálnímu počtu. Počet diferenciální má spolu s integrálním široké uplatnění v mnoha technických oborech a v přírodních vědách, a proto je studium matematické analýzy (jak bývá tato část matematiky souborně nazývána) součástí programu mnoha vysokých škol. Studenti při tom potřebují řadu věcí, o nichž se učili na střední škole. Havlíčkova knížka jim v tomto směru vychází vstříc, neboť začíná stručným zopakováním učiva o reálných číslech, nerovnostech, o absolutní hodnotě reálného čísla a o matematické čili úplné indukci. Pojem funkce čtenáři také znají ze školy. Zde se dovědí více o funkcích racionálních, goniometrických a o spojitosti funkcí. Hlavními pojmy knížky jsou ovšem limita funkce a derivace funkce. Dovíte se tam též, jaký význam má derivace v geometrii a ve fyzice.

Nebudu zde dále zevrubně rozbírat obsah Havlíčkova spisu, protože čtenáři, kteří o derivacích zatím nic nevědí, by prostému výčtu pojmů nerozuměli. Neuškodí však připomenout, že v knížce je řada příkladů vypočtených přímo v textu; kromě toho je v závěru paragrafu vždy několik cvičení pro čtenáře a jejich řešení je připojeno v závěru knihy. A ještě jednu důležitou připomínku. Doc. dr. K. Havlíček je též auto-

rem knížky Integrální počet pro začátečníky, která vyšla r. 1963 a volně navazuje na jeho počet diferenciální. Ten, kdo prostuduje obě knížky, bude mít již slušnou představu o matematické analýze.

Zbývá dodat, že obě Havlíčkovy knihy vyšly v Polytechnické knižnici, kterou vydává Státní nakladatelství technické literatury v Praze. Diferenciální počet stojí 10 Kčs, počet integrální je za 9,50 Kčs. Doporučujeme všem zájemcům o matematiku.

Jiří Sedláček

Zdokonalte se v deskriptivní geometrii!

DOC. OTA SETZER, ČVUT, Praha

V minulém školním roce se objevily na knihkupeckém trhu dvě kvalitní učebnice deskriptivní geometrie, které obě mají stejný titul *Deskriptivní geometrie I.*

Ačkoli jsou určeny posluchačům vysokých škol, budou četné jejich partie výborným prohloubením a doplňkem látky vykládané žákům středních škol, kteří si v nich zkvalitní své vědomosti deskriptivní geometrie. Z tohoto hlediska je psána tato informativní zpráva středoškolským čtenářům Rozhledů.

Autorem první z nich je prof. RNDr. Alois Urban, který ji napsal pro studenty fakult strojního inženýrství a fakult elektrotechnických. Učebnici vydalo SNTL v Praze a vázaná je za Kčs 29,—.

Po krátkém úvodu probírá autor planimetrii jako doplněk středoškolské látky (příbuznosti) a základní vlastnosti kuželoseček. Další kapitola je věnována prostorové geometrii (základní pojmy a úlohy); potom jsou vysvětleny obecně principy promítání. Jednotlivé projekce jsou probírány v tomto pořadí a rozsahu: a) kótované promítání (24 stran), b) Mongeovo promítání včetně průmětů kružnice a výklad afinity (98 stran), c) kosoúhlé promítání (25 stran), d) pravoúhlá axonometrie (34 stran), e) středové promítání i s kolineací a lineární perspektivou (52 stran), f) přehled zobrazovacích metod (11 stran).

Středoškolský čtenář se tu podrobně seznámí s poznatky, které mnohdy bez důkazu byly vyklá-

dány na střední škole. Urbanova forma výkladu je přesná, velmi srozumitelná, logicky uspořádaná. Pro středoškoláka se mi jeví tato učebnice velmi cenná pro velké množství příkladů, které jsou zde úplně řešeny v textu nebo zadány k procvičení. Nejjednodušší polohové úlohy, např. určit průsečnici různoběžných rovin, jsou zde vyobrazeny v různých variantách a žák nemusí tápat, když mu učitel zadá úlohu v nezvyklé poloze.

Většina látky z prvé části knihy je alespoň v hlavních rysech vyžadována při přijímacích zkouškách na vysoké školy technického směru.

Autory druhé učebnice jsou prof. dr. Rudolf Piska z Brna a prof. RNDr. Václav Medek z Bratislavy, kteří svou učebnici věnovali posluchačům stavebních fakult. Kniha vydaná SNTL a SVTL, stojí vázaná 23, 50 Kčs.

Autoři psali učebnici dvojjazyčně, česky a slovensky, podle své národnosti. Látku rozvrhli do čtyř částí. V první části (152 stran) opakují a doplňují středoškolskou látku z planimetrie a stereometrie; teorii kuželoseček zde budují hned na podkladě projektivity i polarity. Druhá část (96 stran) je věnována Mongeově projekci základních útvarů i těles, doplněné nejjednodušími konstrukcemi rovnoběžného osvětlení. Třetí část (34 stran) vysvětluje čtenáři axonometrii, nejprve kosoúhlou, pak pravoúhlou.

V poměrně krátké čtvrté části (50 stran) je budoucí stavitel seznamován se základy středového promítání a s lineární perspektivou.

Také v této druhé učebnici nalezne středoškolský čtenář četné doplňky k dosud probírané látce na středních školách. Kniha je více zaměřena na užití deskriptivní geometrie v technické praxi, i když v teoretických výkladech jde do hloubky. Příklady k procvičení jsou zde zadávány bez kót.

Obě učebnice užívají pravotočivého souřadnicového systému na rozdíl od středoškolských zvyklostí. Obrázky v obou knihách jsou vyrýsovány různým stylem, ale vždy velmi pečlivě a jsou popsány normalizovaným písmem.

Pro budoucí posluchače vysokých škol technického směru jsou obě učebnice výbornou pomůckou ke studiu. Omezený týdenní počet hodin deskriptivní geometrie způsobuje, že počáteční tempo výkladu na vysoké škole je nezvykle rychlé; avšak posluchač, který se předem seznámí alespoň s podstatnou částí uvedených učebnic, pochopí mnohem snáze přednášenou látku a bude také přicházet s větší důvěrou nejen k přijímací zkoušce, nýbrž později i k prospěchovým zkouškám z deskriptivní geometrie.

Pro učitele středních škol budou *Deskriptivní geometrie I* výborným prostředkem k znovuoživení vědomostí a k modernějšímu způsobu výuky.

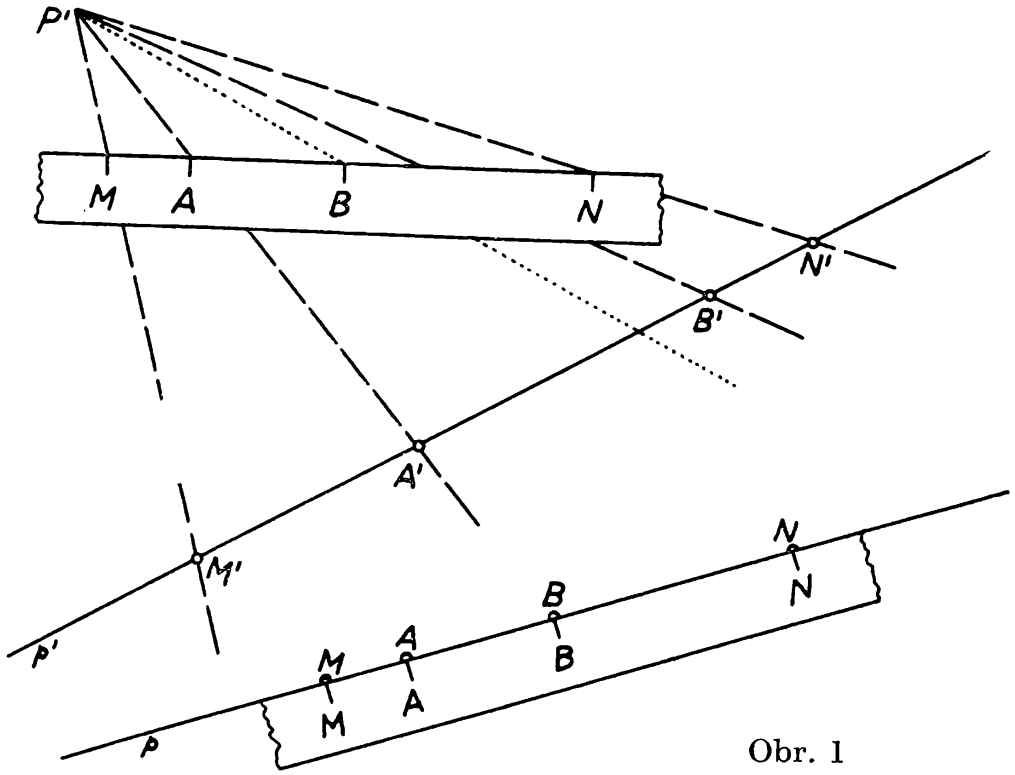
Nový pohled na geometrii

JOSEF KATEŘIŇÁK, VŠD, ŽILINA

Před 140 léty (r. 1826) ruský matematik Lobačevskij objevil novou geometrii, která byla později nazvána na jeho počest geometrie Lobačevského. Tato geometrie se značně liší od dosud běžně užívané geometrie Euklidovy (kolem r. 300 před n. l.) a její objev způsobil revoluční změnu geometrických představ a pojmů a vedl později k objevům dalších, tzv. neeuklidových geometrií (Riemannovy, Minkowského, Hilbertovy, atd.). Pokusíme se zde názorně vysvětlit tento nový pohled na geometrii. Nejdříve však provedeme přípravnou úvahu.

Narýsujte si dvě libovolné přímky p a p' a mimo p' libovolný bod P'. Zvolíme-li nyní na p libovolně tři různé body v pořadí M, A, N a na p' libovolně tři různé body v pořadí M', A', N', potom *vždy je možné přemístit* M, A, N pomocí proužku papíru tak, aby ležely na spojnicích (polopřímkách) $P'M'$, $P'A'$, $P'N'$ (obr. 1). Zvolíme-li si však na p libovolně čtyři různé body v pořadí M, A, B, N a na p' libovolně čtyři různé body v pořadí M', A', B', N', potom už *není vždy možné* přemístit M, A, B, N pomocí proužku papíru tak, aby ležely na spojnicích $P'M'$, $P'A'$, $P'B'$, $P'N'$ Chceme-li, aby též přemístěný B ležel na spojnici $P'B'$, nemůžeme si bod B' volit libovolně, protože už je jednoznačně určen: je to společný bod přímky p' a spojnice bodu P' s přemístěným B (na obr. 1 narýsována tečkovaně).

Vysvětlíme nyní nový pohled na geometrii. V geometrii vycházíme z malého počtu základních neboli *nedefinovaných pojmů* a základních vět neboli *axiomů*. Všechny ostatní pojmy pak definujeme pomocí nedefinovaných pojmů a všechny ostatní věty logicky odvozujeme z axiomů. Podle toho, jak volíme nedefinované pojmy a axiomy, můžeme



Obr. 1

dostat různé druhy geometrií. Ukážeme si to na příkladě rovinné geometrie neboli planimetrie Euklidovy a Lobačevského.

Obě planimetrie mají čtyři společné *nedefinované pojmy:*

1. *Bod* (značíme A, B, C, atd.). Přitom množinu všech bodů nazýváme rovinou. Odtud název r o v i n n á g e o m e t r i e neboli p l a n i m e t r i e.

2. *Přímka* jakožto množina bodů (značíme a, b, c, atd.).

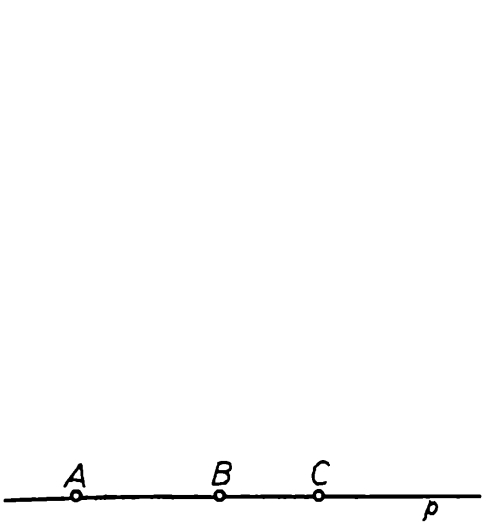
3. *Bod B mezi body A, C* (značíme $B\mu A, C$).

4. *Úsečka AB shodná s úsečkou A'B'* (značíme $AB \cong A'B'$). Přitom pojem *úsečka AB* je definován pomocí nedefinovaných pojmů 1 a 3: Je to množina bodů obsahující body A, B a všechny body X mezi A, B. Nedefinovaným pojmem je jen pojem *shodnost úseček.*

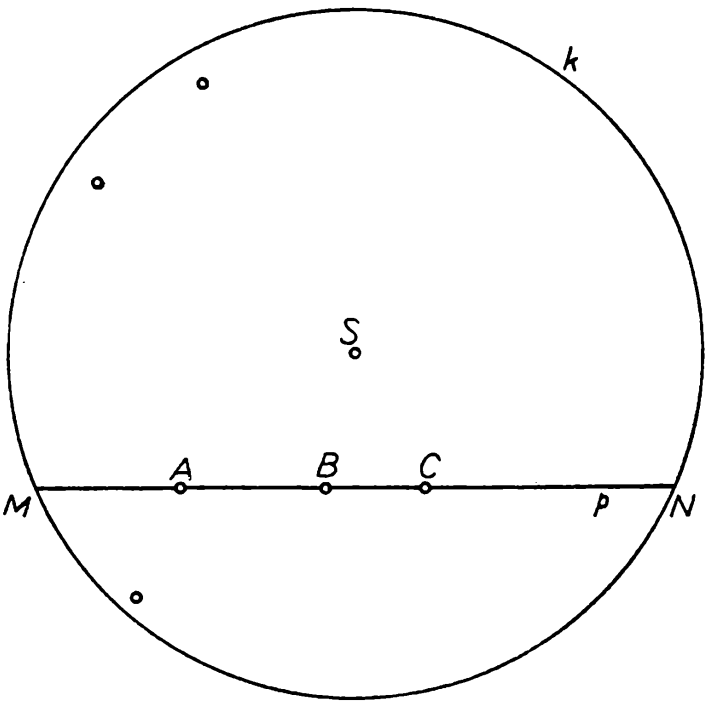
Znázorníme si nyní graficky nedefinované pojmy v obou planimetriích. Doporučuji čtenáři, aby si sám obojí rýsoval na dvě čtvrtky papíru.

1. Euklidův bod si představíme jako malý kroužek narýsovaný kdekoliv na první čtvrtce papíru, která nám představuje Euklidovu rovinu (obr. 2a). Na druhou čtvrtku papíru narýsujeme nejdříve libovolnou kružnici k o středu S. Lobačevského bod si představíme jako malý kroužek narýsovaný kdekoliv u v n i t ř kružnice k, takže Lobačevského rovinu nám představuje pouze v n i t ř e k kružnice k (obr. 2b).

2. Euklidovu přímku p si představíme jako čáru narýsovanou podle



Obr. 2a



Obr. 2b

pravítka na první čtvrtce papíru (obr. 2a). Lobačevského přímku p si představíme jako *vnitřek* tětivy MN kružnice k, narýsovaný podle pravítka na druhé čtvrtce papíru (obr. 2b).

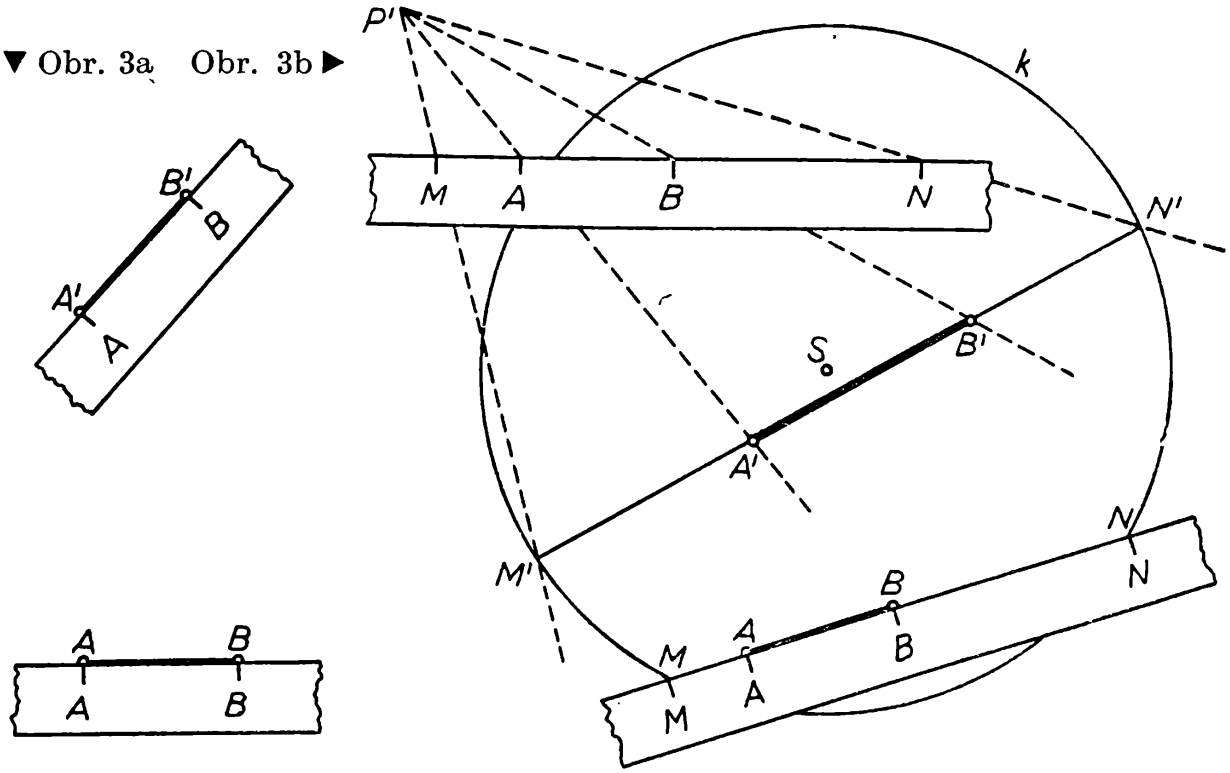
3. Bod B mezi body A, C si představíme v obou planimetriích stejně: Jsou to tři různé body na jedné přímce p, že při rýsování přímky p podle pravítka od bodu A k bodu C proběhne hrot tužky bodem B (obr. 2a, b).

4. Euklidovu shodnost úsečky AB s úsečkou $A'B'$ si představíme takto: Přeneseme-li body A, B na proužek papíru, potom tento proužek papíru lze položit tak, že A, B splynou s A', B' (obr. 3a). Lobačevského shodnost úsečky AB s úsečkou $A'B'$ si představíme takto: Konce tětiv obsahujících body A, B a A', B' označíme M, N a M', N' v pořadí M, A, B, N a M', A', B', N' Mimo spojnici $M'A'B'N'$ zvolíme pomocný P' a narýsujeme spojnice $P'M'$, $P'A'$, $P'B'$, $P'N'$. Přeneseme-li M, A, B, N na proužek papíru, pak tento proužek papíru lze položit tak, že M, A, B, N leží na spojnicích $P'M'$, $P'A'$, $P'B'$, $P'N'$ (obr. 3b).

Axiomy společné oběma planimetriím nebudeme uvádět (je jich 14). Odlišný je v obou planimetriích jedině axiom o neprotínajících se přímkách.

Euklidův axiom. Je-li dána přímka p a mimo ni bod Q, potom bodem Q prochází jediná přímka q, která nemá s přímkou p žádný společný bod (obr. 4a).

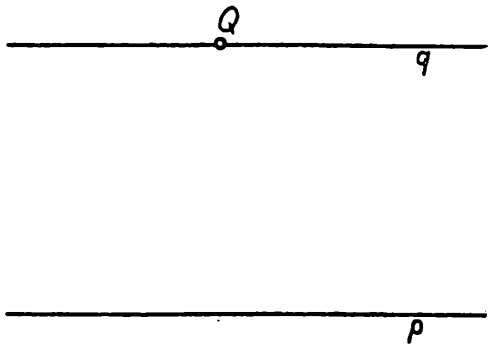
▼ Obr. 3a Obr. 3b ▶



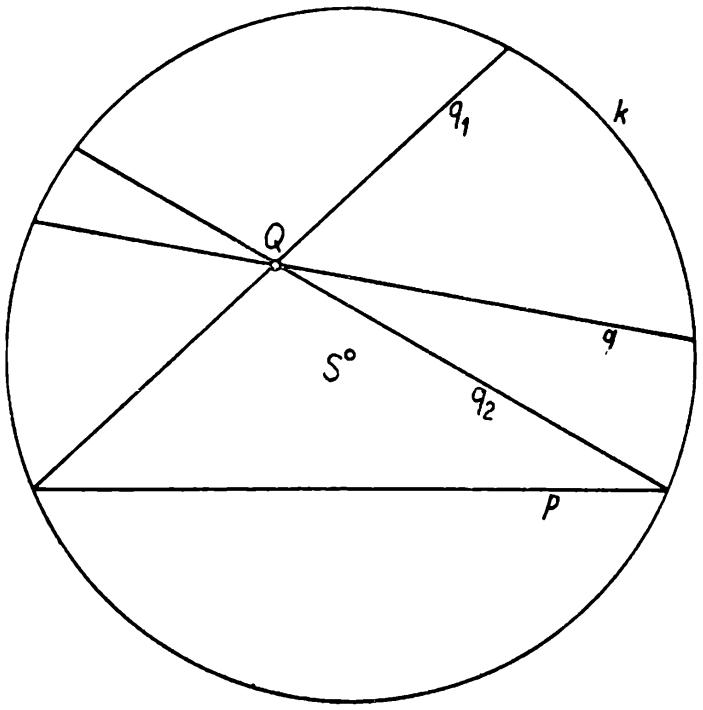
Lobačevského axiom. Je-li dána přímka p a mimo ni bod Q, potom bodem Q procházejí nejméně dvě různé přímky q, které nemají s přímkou p žádný společný bod. Na obr. 4b to jsou q_1, q_2 a všechny q procházející jedním z úhlů q_1q_2.

Čtenáři se jistě vzdají neobvyklé představy pojmů Lobačevského, zejména shodnosti úseček, protože je navyklý jen na představy pojmů Euklidových. Doporučuji proto, aby si znovu pozorně pročetl příslušné úvahy a narýsoval si několik Lobačevského shodných úseček podle obr. 3b.

(Pokračování)



Obr. 4a



Obr. 4b

O diofantických rovnicích

Dr. MILOSLAV HLAVÁČEK, Praha

Již v začátcích číselné teorie se vyskytují rovnice tzv. d i o f a n t i c k é. Rovnici nazýváme diofantickou (podle starověkého řeckého matematika Diofanta), obsahuje-li dvě nebo více neznámých. Naším úkolem je nalézt její c e l o č í s e l n á, nebo aspoň r a c i o n á l n í ř e š e n í.

Z obsáhlé nauky o těchto rovnicích uvedeme několik příkladů.

Ze starověku pochází rovnice tzv. p y t h a g o r s k á

$$x^2 + y^2 = z^2 . \tag{1}$$

Je aritmetickým vyjádřením geometrické úlohy najít všechny pravoúhlé trojúhelníky, jichž délky stran jsou dány celými čísly.

Jde nám tudíž o řešení netriviální, tj. takové, že žádné z čísel x, y, z není rovno nule.

Předpokládejme tedy, že x, y, z jsou celá kladná čísla, která splňují danou rovnici. Můžeme dále předpokládat, že jsou spolu nesoudělná. Kdyby totiž měla společného dělitele d, bylo by možno celou rovnici krátit číslem d^2 a vznikla by rovnice téhož tvaru. Pak ani žádná dvě z nich nejsou spolu soudělná, neboť kdyby např. čísla x, y měla společného dělitele, byl by obsažen i v z proti předpokladu o nesoudělnosti té trojice. Dále nemohou být všechna tři lichá, poněvadž součet dvou lichých čísel není lichý. Musí tedy být jedno z nich sudé (dvě být nemohou vzhledem k nesoudělnosti celé trojice). Dejme tomu, že by čísla x, y byla lichá, tedy

$$x = 2a + 1 , \; y = 2b + 1 ,$$

z pak sudé, $z = 2c$. Bylo by pak

$$(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = 4c^2 ,$$

čili

$$4a^2 + 4a + 4b^2 + 4b + 2 = 4c^2$$

To je však nemožné, ježto pravá strana je dělitelná čtyřmi, levá však toliko dvěma. Musí tedy být buď x nebo y sudé.

Budiž x liché, y sudé. Převeďme člen x^2 na druhou stranu a tuto rozložme

$$y^2 = (z + x)(z - x)$$

Čísla $z + x$, $z - x$ jsou sudá. Lze tedy psát

$$\begin{aligned} z + x &= 2M , \\ z - x &= 2N \end{aligned} \tag{2}$$

kde M, N jsou celá kladná čísla. Z této soustavy plyne

$$\begin{aligned} z &= M + N\,, \\ x &= M - N \end{aligned} \tag{3}$$

Součin pravých stran v (2) má dát y^2. Číslo y je sudé, tedy $y^2 = 4\,y_1^2$, kde y_1 je celé. Po dosazení a krácení vyjde

$$MN = y_1^2 \tag{4}$$

Kdyby čísla M, N měla společného dělitele, byl by obsažen vzhledem k (3) i v z a x, což je vyloučeno. Jsou tedy čísla M, N nesoudělná a z (4) plyne $M = m^2$, $N = n^2$, kde m, n jsou celá kladná nesoudělná čísla. Dosazením do (3) obdržíme

$$\begin{aligned} z &= m^2 + n^2\,, \\ x &= m^2 - n^2 \end{aligned}$$

Čísla z, x jsou lichá, proto m, n musí být různé parity, tj. jedno z nich musí být liché, druhé sudé.

Dosadíme-li za z a x do (1), vypočteme

$$y = 2\,mn\,.$$

Provedená úvaha platí zřejmě pro *každou* trojici celých kladných čísel nesoudělných, splňujících danou rovnici. Obdržíme tudíž *všechna* hledaná řešení dané rovnice celými kladnými nesoudělnými čísly, dosazujeme-li za m, n všechna možná celá kladná nesoudělná čísla, různé parity, přičemž $m > n$ (aby x vyšlo kladné).

Úplné řešení rovnice (1) tedy zní

$$x = \varrho\,(m^2 - n^2)\,,\ y = 2\,\varrho\,mn\,,\ z = \varrho\,(m^2 + n^2)\,,$$

kde ϱ je libovolné celé kladné číslo.

Pro $\varrho = 1$, $m = 2$, $n = 1$ dostaneme $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

Provazce, rozděleného uzly na tři díly o délkách 3, 4, 5 jednotek, se prý užívalo ve starém Egyptě ke konstrukci pravého úhlu.

Pythagorská rovnice má tedy *nekonečně mnoho* celočíselných řešení.

Naproti tomu rovnice

$$3\,x^2 + y^2 = 2\,z^2$$

není řešitelná kladnými celými čísly.

D ů k a z. Předpokládejme, že existují celá čísla x, y, z, která danou rovnici splňují. Připusťme, že y obsahuje činitele 3. Potom celá levá strana obsahuje činitele 3, a tedy musí jej obsahovat i pravá strana, tedy z. Členy y^2 a $2\,z^2$ jsou pak dělitelny číslem 3^2, musí tedy jím být dělitelný i člen $3\,x^2$, tj. x obsahuje činitele 3. Celou rovnici lze pak krátit číslem 3^2 a obdržíme rovnici téhož tvaru (jako daná)

$$3\,x_1^2 + y_1^2 = 2\,z_1^2$$

Tento postup lze popř. opakovat tolikrát, až vyjdou y, a tedy i z jako čísla nedělitelná třemi. Je tedy y tvaru buď $3k + 1$, nebo $3k + 2$, rovněž z tvaru $3l + 1$, nebo $3l + 2$. Avšak dvojmoc

$$y^2 = 9k^2 + 6k + 1 ,$$

nebo

$$y^2 = 9k^2 + 12k + 4$$

by byla v obou případech tvaru $3K + 1$, rovněž tak dvojmoc z^2 by byla tvaru $3L + 1$. Levá strana rovnice by pak měla tvar

$$3x^2 + 3K + 1 = 3M + 1 ,$$

kdežto pravá strana by měla tvar

$$2(3L + 1) = 6L + 2 = 3N + 2 ,$$

což je sporné.

Dokážeme si dále neřešitelnost rovnice

$$x^4 + y^4 = z^2$$

kladnými celými čísly, a to zvláštním, zajímavým způsobem.

D ů k a z. Předpokládejme, že existují celá čísla x, y, z, která vyhovují dané rovnici. Můžeme je zase považovat za nesoudělná (případný společný dělitel by se vykrátil a vznikla by rovnice téhož tvaru).

Danou rovnici lze psát

$$(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$$

a užít pak výsledku odvozeného pro rovnici pythagorskou.

Je tedy

$$x^2 = m^2 - n^2 , \; y^2 = 2mn , \; z = m^2 + n^2 ,$$

kde m, n jsou celá, kladná, nesoudělná čísla různé parity, $m > n$. Ježto dvojmoc lichého čísla x je tvaru $4k + 1$ a nikoli tvaru $4k + 3$, musí být m liché, n pak sudé.

Dosaďme tedy do rovnice

$$y^2 = 2mn , \; n = 2n_1$$

a také

$$y = 2y_1 ,$$

ježto y je sudé. Po krácení obdržíme

$$y_1^2 = mn_1$$

Čísla m, n_1 jsou nesoudělná, proto platí

$$m = \mu^2 , \; n_1 = \nu^2 ,$$

kde μ, ν jsou celá nesoudělná čísla. Do rovnice

$$x^2 = m^2 - n^2 ,$$

čili

$$n^2 + x^2 = m^2$$

dosaďme

$$n = 2\,n_1 = 2\,\nu^2\,,\ m = \mu^2$$

Vyjde

$$4\,\nu^4 + x^2 = \mu^4$$

Z tvaru

$$(2\,\nu^2)^2 + x^2 = (\mu^2)^2$$

je patrno, že platí

$$2\,\nu^2 = 2\,pq\,,\ \mu^2 = p^2 + q^2\,,$$

kde p, q jsou celá kladná nesoudělná čísla. Z rovnice $\nu^2 = pq$ plyne

$$p = p_1^2\,,\ q = q_1^2\,,$$

kde p_1, q_1 jsou zase nesoudělná celá čísla. Po dosazení vychází

$$\mu^2 = p_1^4 + q_1^4 \qquad (5)$$

Dospěli jsme tak k rovnici téhož tvaru jako je původní rovnice, splnitelné však *menšími* celými kladnými čísly. Je totiž

$$\mu = \sqrt{m} < m^2 + n^2 = z\,,$$

tedy

$$\mu < z$$

Na rovnici (5) bychom mohli užít zase úvahy právě provedené a dojít tak k další rovnici téhož tvaru, ale splnitelné *ještě menšími* celými kladnými čísly atd. bez omezení. To ovšem není možné — jde přece o čísla celá kladná. Náš předpoklad tedy, že existují celá čísla splňující danou rovnici, vede ke sporu a je tudíž nesprávný (neodpovídá skutečnosti).

Tento postup při důkazu, že některá diofantická rovnice nemá řešení, nazývá se „descente infinie“, tj. „neomezený sestup“

Vyskytuje se i třetí možnost, že totiž diofantická rovnice má jen konečný počet celočíselných řešení.

Např. rovnice

$$x^2 - y^2 = 5$$

je splněna toliko čísly

$$x = \pm 3\,,\ y = \pm 2\,,$$

jak lze snadno určit z jejího tvaru

$$(x + y)\,(x - y) = 5$$

Uvedená rovnice je zvláštní případ obecné rovnice

$$a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1}\,y + a_2\,x^{n-2}\,y^2 + \quad + a_n\,y^n = c$$

O této rovnici byla dokázána věta[1]):

[1]) Viz např. Dickson-Bodewig, Einführung in die Zahlentheorie, vydání z r. 1931, str. 161.

Jestliže rovnice

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \quad + a_n = 0 ,$$

kde $n \geqq 3$, a_i *jsou celá čísla, nemá vícenásobné kořeny, pak rovnice*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \quad + a_n y^n = c ,$$

kde $c \neq 0$ *je celé číslo, může mít toliko konečný počet celočíselných řešení.*

Tato věta je jedním z nejhlubších výzkumů v oblasti diofantických rovnic.

Vraťme se nyní k rovnici pythagorské. Je to zvláštní případ rovnice s obecným mocnitelem

$$x^n + y^n = z^n$$

O této rovnici napsal francouzský matematik F e r m a t (1601 až 1665), že pro $n \geqq 3$ nemá celočíselných řešení (netriviálních). Tvrdil, že našel podivuhodný důkaz toho, avšak neuveřejnil jej. Jeho tvrzení se nazývá velká věta Fermatova. Dosud však nebyla — přes úsilí četných i tak velkých matematiků jako byli Euler, Gauss, Abel, Cauchy, jako jsou v přítomné době Vandiver a jiní — pro obecné n ani dokázána, ani vyvrácena. Je proto velmi pravděpodobné, že se Fermat mýlil, že jeho důkaz obsahoval chybu.

Podařilo se dokázat platnost Fermatovy věty jen pro některé mocnitele. Tak např. hned pro $n = 3$. Stačí ovšem zabývat se toliko prvočíselnými mocniteli (kromě $n = 4$). Kdyby totiž existovala celá čísla splňující např. rovnici

$$x^{15} + y^{15} = z^{15} ,$$

čili

$$(x^5)^3 + (y^5)^3 = (z^5)^3 ,$$

pak by existovala celá čísla

$$a = x^5 , b = y^5 , c = z^5$$

splňující rovnici

$$a^3 + b^3 = c^3$$

Jestliže však je dokázána neřešitelnost rovnice s mocnitelem 3, nemůže být řešitelná ani rovnice s mocnitelem 15 a vůbec s mocnitelem rovným libovolnému násobku čísla 3.

Do konce první poloviny 20. století podařilo se dokázat Fermatovo tvrzení, zejména užitím tzv. i d e á l ů (zvláštních množin číselných) pro všechna prvočísla > 619.[2])

Roku 1908 způsobila mocný ohlas zpráva v denním tisku snad celého světa, že německý matematik Wolfskehl složil 100 000 marek u Akademie v Göttinkách jako cenu pro toho, kdo první podá úplný důkaz pro Fermatovo tvrzení. Tehdy se i mnoho neodborníků pokusilo získat

[2]) Viz knihu Š t e f a n a S c h w a r z e, A l g e b r a i c k á č í s l a, kde Fermatovu problému je věnována celá kapitola.

tuto cenu a slávu s tím spojenou, ovšem bez úspěchu. Je třeba však poznamenat, že těch 100 000 marek ztratilo na ceně několika valutovými změnami.

Fermatův problém pronikl i do beletrie. Karel Čapek-Chod napsal totiž povídku s názvem: $x^n + y^n = z^n$.

Lhůta pro získání Wolfskehlovy ceny byla stanovena do roku 2008 — na celých 100 let. Ještě tedy stále trvá.

Úloha a. Dokažte, že rovnice

$$x^4 + x^2 + px + q = y^2 ,$$

kde p, q jsou libovolně zvolená celá čísla, může mít toliko konečný počet celočíselných řešení.

O rozšíření Pythagorovy věty

FRANTIŠEK JANEČEK, SVVŠ, Broumov:

Ze středoškolské geometrie znáte větu Pythagorovu, která udává vztah mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka, v tomto znění:

Je-li c velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, a, b velikosti jeho odvěsen, je

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jinak vyslovujeme větu Pythagorovu takto:

Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak obsah čtverce sestrojeného nad jeho přeponou, se rovná součtu obsahů obou čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami.

Pro další úvahy si zopakujeme definici podobných geometrických útvarů:

Dva geometrické útvary jsou podobné, jestliže

a) poměry velikostí sobě odpovídajících úseček jsou rovny témuž číslu k (tzv. *poměru podobnosti*);

b) úhly sobě odpovídající jsou shodné.

Pro obsahy podobných mnohoúhelníků dokážeme pomocnou větu:

Obsahy podobných mnohoúhelníků jsou ve stejném poměru jako druhé mocniny sobě odpovídajících stran nebo příček.

Je tedy

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2B_2^2}{A_1B_1^2} = \frac{B_2C_2^2}{B_1C_1^2} = \frac{C_2D_2^2}{C_1D_1^2} = \qquad = k^2 ,$$

kde A_1, B_1, C_1, D_1, a A_2, B_2, C_2, D_2, ... jsou vrcholy prvního a druhého mnohoúhelníka a P_1, P_2 jsou jejich obsahy.

Důkaz provedeme po částech. Nejprve dokážeme tvrzení věty pro dva podobné trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$.

Obsah trojúhelníku $A_1B_1C_1$ je

$$P_1 = \tfrac{1}{2} a_1 v_1 ,$$

kde v_1 je výška příslušná ke straně a_1. Obsah podobného trojúhelníku $A_2B_2C_2$ je

$$P_2 = \tfrac{1}{2} a_2 v_2 ,$$

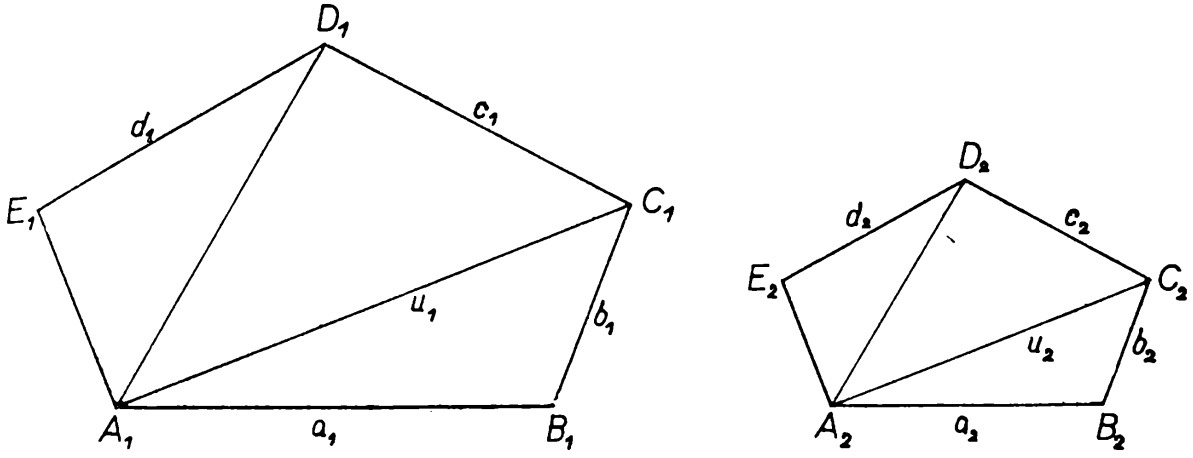
kde v_2 je výška příslušná ke straně a_2. Z vlastnosti podobných trojúhelníků plyne

$$a_2 : a_1 = v_2 \quad v_1 = k .$$

Pro poměr obsahů trojúhelníků platí odtud dále

$$P_2 : P_1 = \tfrac{1}{2} a_2 v_2 : \tfrac{1}{2} a_1 v_1 = a_2^2 : a_1^2 = v_2^2 : v_1^2 = k^2$$

Nyní dokážeme tvrzení věty pro dva libovolné podobné n-úhelníky. Každé dva podobné n-úhelníky s poměrem podobnosti k můžeme rozložit na podobné trojúhelníky s týmž poměrem podobnosti k (viz obr. 1, kde $n = 5$).



Obr. 1

Označme obsahy trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$ a $A_1D_1E_1$ po řadě P_{11}, P_{12}, P_{13} a obsahy trojúhelníků $A_2B_2C_2$, $A_2C_2D_2$ a $A_2D_2E_2$ po řadě P_{21}, P_{22}, P_{23}. Potom platí

$$P_{21} : P_{11} = a_2^2 : a_1^2 = u_2^2 \quad u_1^2 ,$$
$$P_{22} \quad P_{12} = c_2^2 \quad c_1^2 = a_2^2 \quad a_1^2 ,$$
$$P_{23} \quad P_{13} = d_2^2 \quad d_1^2 = a_2^2 : a_1^2$$

Odtud dále plyne

$$P_{21} = \frac{a_2^2}{a_1^2} P_{11} , \quad P_{22} = \frac{a_2^2}{a_1^2} P_{12} , \quad P_{23} = \frac{a_2^2}{a_1^2} P_{13} .$$

Sečtením dostáváme

$$P_{21} + P_{22} + P_{23} = \frac{a_2^2}{a_1^2}\,(P_{11} + P_{12} + P_{13})\,,$$

a odtud konečně

$$(P_{21} + P_{22} + P_{23})\;\;(P_{11} + P_{12} + P_{13}) = P_2 : P_1 = \\ = a_2^2\;\;a_1^2 = u_2^2 : u_1^2\,,$$

kde P_1, P_2 jsou obsahy uvažovaných mnohoúhelníků. Tím je věta dokázána.

Nyní již snadno dokážeme větu:

V ě t a 1. (R o z š í ř e n í v ě t y P y t h a g o r o v y.) *Jsou-li strany pravoúhlého trojúhelníka sobě odpovídajícími stranami tří podobných n-úhelníků, pak obsah n-úhelníka sestrojeného nad jeho přeponou se rovná součtu obsahů obou n-úhelníků nad jeho odvěsnami.*

D ů k a z. Nad odvěsnami a, b a přeponou c jako sobě odpovídajícími stranami sestrojme tři podobné n-úhelníky (obr. 2), jejichž obsahy označme po řadě P_a, P_b, P_c.

Podle pomocné věty je

$$P_a : P_b : P_c = a^2 : b^2 : c^2$$

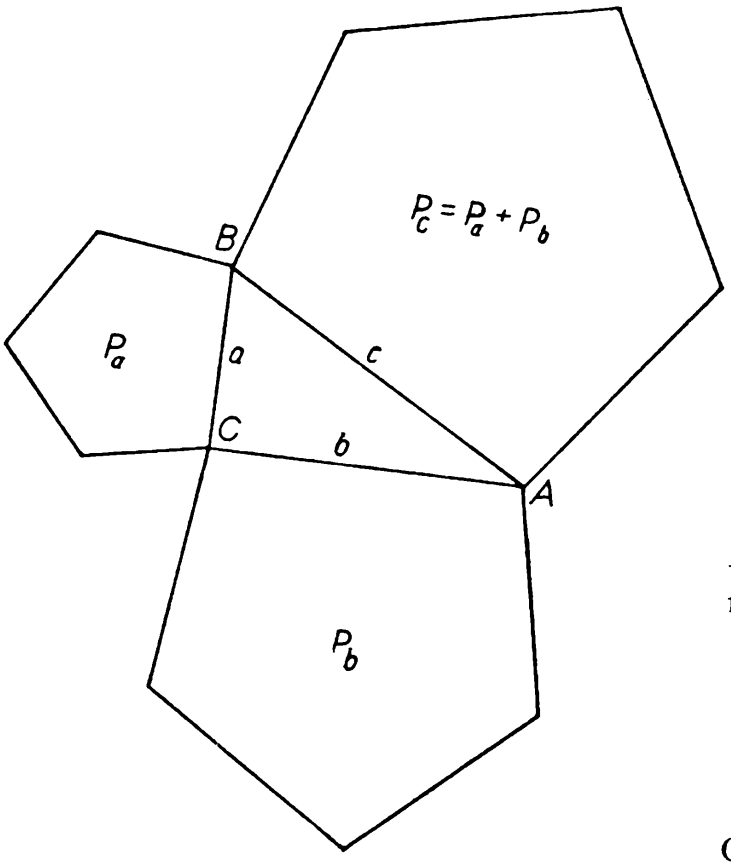
a odtud

$$(P_a + P_b)\;\;P_c = (a^2 + b^2)\;\;c^2$$

Protože však $a^2 + b^2 = c^2$, je také

$$P_a + P_b = P_c\,,$$

což jsme měli dokázat.

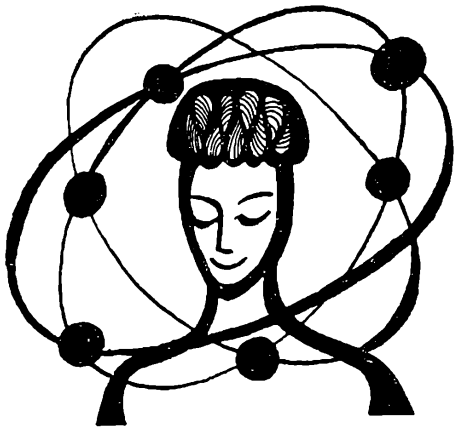


Obr. 2

Dalším zobecněním věty 1 si čtenář snadno dokáže sám další tvrzení:

V ě t a 2. *Obsah kruhu sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka jako nad průměrem je roven součtu obsahů kruhů podobně sestrojených nad oběma odvěsnami.*

P o z n á m k a. Lze dokázat, že věta 1 platí pro kterékoli podobné figury.



FYZIKA

Vláknová optika

ANTONÍN MARTOCH, UP, Olomouc

I. *Světlovodivá tyč*

Jistě mnoho čtenářů již přišlo do styku s nějakou průhlednou tyčinkou ze skla nebo z jiného materiálu, např. se skleněnou tyčinkou na míchání chemikálií v kádince. Všimněte si, že tato tyčinka propouští světlo nejen napříč, ale i na délku, a to ne zrovna málo, ačkoliv je někdy značně dlouhá. Světlo prochází i tyčinkami ohnutými a jinak zakřivenými. Tohoto jevu se využívá k optickému zobrazování v novém oboru optiky, tzv. *vláknové optice*.

Vláknová optika se tedy zabývá použitím skleněných tyčinek kruhového průřezu v optickém zobrazení. Tyto tyčinky mají průměr řádově setiny milimetru, takže běžně mluvíme o v l á k n e c h. Vlákna o stejné délce a průměru jsou rovnoběžně uspořádána v soubory, jež nazýváme v l á k n o v é s v a z k y nebo též *vláknová optika*. Světlo prochází vlákny ve směru jejich podélných os.

Pro vysvětlení zobrazení si představme předmět jako by složený z jednotlivých bodů. Tyto body jsou bílé, světlé, tmavší, tmavé a černé. Podobně svazek vláken je složen z bodů, kde každý bod je vlastně jedno vlákno. Přitisknutím předmětu na svazek se ztotožní body předmětu s vlákny. Vlákna převedou světlo z bodů na svůj druhý konec, kde vznikne obraz podobný předmětu. Při použití velmi tenkých vláken, kdy oko již jejich průměr nerozlišuje, tj. při průměru vláken menším než je rozlišovací mez oka (0,1 mm), dostaneme docela dobrý, jasný a zřetelný obraz. Jinak je obraz „zrníčkovitý“ Ukazuje se, že zobrazení

vláknovou optikou je v mnoha případech dokonalejší a levnější než zobrazení čočkami.

Než přistoupíme k podrobnějšímu vysvětlení principu zobrazení vláknovými svazky, řekneme si něco o vedení světla optickým prostředím a hlavně skleněnou tyčí kruhového průřezu. Zavedeme si pojem světelný paprsek, který nám bude určovat směr šíření světla a zopakujeme si základní zákony, jimiž se řídí světelné paprsky:

a) Ve stejnorodém a izotropním prostředí se šíří světlo formou světelných paprsků.

b) Ve světelném toku jsou jednotlivé svazky paprsků na sobě nezávislé a šíří se tak, jako kdyby ostatní svazky nebyly.

c) Na rozhraní dvou stejnorodých a izotropních prostředí platí pro světelné paprsky zákon lomu a odrazu.

Správnost prvého zákona potvrzuje např. tvoření stínů. O správnosti druhého zákona se přesvědčíme tak, že zkřížíme kužele světla ze dvou kapesních svítilen.

Na třetí zákon se podíváme poněkud důkladněji. Uvažujme rozhraní mezi dvěma prostředími o indexech lomu n_1 a n_2 (obr. 1). Světelný paprsek AS dopadá na rozhraní v bodě S. Část světla prochází do druhého prostředí jako paprsek SB a část se odráží zpět jako paprsek SC. Jednotlivé paprsky svírají s kolmicí dopadu k postupně úhly α (úhel dopadu), α' (úhel lomu), α'' (úhel odrazu). Úhly měříme od paprsku ke kolmici. Ve směru pohybu hodinových ručiček jsou úhly kladné.

Dá se ukázat, že směr světelného paprsku lomeného je určen zákonem lomu (Snellovým)

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \alpha' \tag{1}$$

$$\alpha' = \arcsin \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha \,.^{1})$$

Směr světelného paprsku odraženého je určen zákonem odrazu

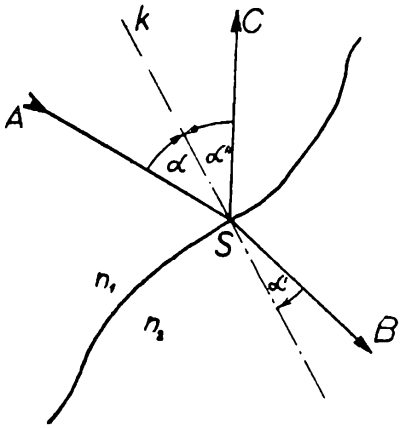
$$\alpha'' = -\alpha \,. \tag{2}$$

Postačí nám, budeme-li vědět, že úhel dopadu a úhel odrazu jsou co do absolutní hodnoty stejné.

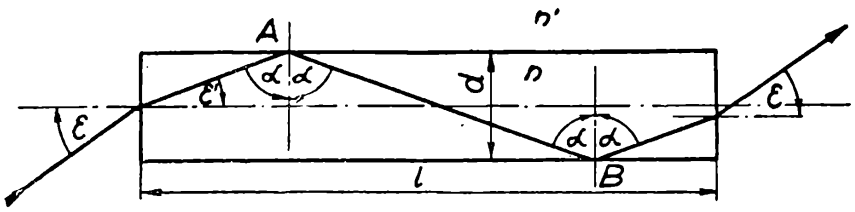
Ze zákona lomu vyplývá pro $n_1 < n_2$ (přechod z prostředí opticky řidšího do hustšího), že $\sin \alpha > \sin \alpha'$, tedy $\alpha > \alpha'$, tzv. lomke

---

[1]) Výrazem arcsin a (čti arkus sinus a) rozumíme úhel α (v obloukové míře), pro nějž $\sin \alpha = a$; např. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ nebo $\sin x = \frac{1}{2}$, odkud $x = \arcsin \frac{1}{2}$ *Red.*



◀ Obr. 1



Obr. 2 ▲

k o l m i c i. Při zvětšování úhlu dopadu α až do $\alpha = 90°$, dostaneme pro úhel lomu hodnotu

$$\sin \alpha'_m = \frac{n_1}{n_2}, \tag{3}$$

úhel α'_m se nazývá ú h e l m e z n ý.

Podobně pro $n_1 > n_2$ (přechod z prostředí opticky hustšího do prostředí řidšího) platí $\alpha < \alpha'$, tzv. l o m o d k o l m i c e. Při zvětšování úhlu dopadu α roste i úhel lomu α', avšak o něco rychleji, takže brzy dosáhne hodnoty 90° Pak platí pro úhel dopadu podle (1)

$$\sin \alpha_m = \frac{n_2}{n_1}, \tag{4}$$

úhel α_m nazýváme m e z n ý (nebo také kritický) ú h e l d o p a d u.

Dá se ukázat, že pro úhly dopadu $\alpha \geqq \alpha_m$ nenastává lom a všechno světlo se odráží. Tento jev nazýváme *úplný* (totální) *odraz.*

Právě tento jev úplného odrazu nastává při průchodu světla kruhovou skleněnou tyčí ve směru její podélné osy. Vyšetříme případ, kdy všechny světelné paprsky se budou odrážet od vnitřních stěn tyče, tzv. *úplný vnitřní odraz* (viz obr. 2).

Nechť má tyč délku l a průměr d, index lomu n a je umístěna ve vzduchu o indexu $n' = 1$. Plášť tyče budeme nazývat obal a konce tyče čela.

Uvažujme nyní světelný paprsek dopadající do středu vstupního čela pod úhlem ε. Část světla se odrazí, ale většina vstoupí do tyče pod úhlem ε' určeným zákonem lomu (1)

$$\sin \varepsilon' = \frac{1}{n} \sin \varepsilon \tag{5}$$

Paprsek dopadá na vnitřní stěnu obalu pod úhlem

$$\alpha = 90° - \varepsilon' \tag{6}$$

v bodě A. Aby zde nastal úplný odraz musí být splněna podmínka

$$\alpha \geqq \alpha_m \,, \tag{7}$$

kde α_m je mezní úhel určený zákonem lomu pro $\alpha' = 90°$

$$\sin \alpha_m = \frac{1}{n} \,,$$

$$\alpha_m = \arcsin \frac{1}{n} \tag{8}$$

Platí-li tedy podmínka $\alpha \geqq \arcsin \frac{1}{n}$, odrazí se v bodě A všechno světlo a odejde do bodu B, kde zase nastane úplný odraz.

Použitím vztahů (5), (6), (7), (8) dostaneme podmínku pro velikost dopadového úhlu ε na čelo tyče, kdy všechno světlo projde tyčí na její druhý konec. Píšeme

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon &= n \sin \varepsilon' \\ \sin \varepsilon &= n \cos \alpha \,, \\ \sin \varepsilon &= n \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \,, \\ \sin \varepsilon &\leqq n \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_m} \,, \\ \sin \varepsilon &\leqq \sqrt{n^2 - 1} \,, \\ \varepsilon &\leqq \arcsin \sqrt{n^2 - 1} \end{aligned} \tag{9}$$

Z posledního vztahu vyplývá, že pro větší index lomu tyče n můžeme připustit i větší úhel dopadu ε. Úhel ε určuje tzv. *číselnou aperturu* A tyče, která charakterizuje množství světla prošlého tyčí

$$\begin{aligned} A &= n' \sin \varepsilon \,, \\ A &= \sqrt{n^2 - 1} \end{aligned} \tag{10}$$

Kromě aperturního úhlu ε můžeme určit ještě délku světelného paprsku L a počet odrazů m od vnitřních stěn tyče.

Podle obr. 2 můžeme psát, že

$$\cos \varepsilon' = \frac{l}{L}$$

a z toho

$$L = \frac{l}{\cos \varepsilon'} = \frac{l}{\sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon'}} \,,$$

$$L = \frac{l}{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 \varepsilon}{n^2}}} \tag{11}$$

Dosazením (9) do (11) dostaneme maximální délku světelného paprsku v tyči

$$L_m = n \,.\, l \,. \tag{12}$$

Vzorce (12) se používá k výpočtu ztrát světla při průchodu tyčí.

Označíme-li délku paprsku mezi dvěma po sobě následujícími odrazy

$$L' = \frac{d}{\cos \alpha},$$

můžeme psát vztah pro počet odrazů

$$m = \frac{L}{L'},$$

$$m = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \varepsilon'}}{\frac{d}{\cos \alpha}},$$

$$m = \frac{l \sin \varepsilon'}{d \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \varepsilon}},$$

$$m = \frac{l \sin \varepsilon}{d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon}} \tag{13}$$

Dosazením z (9) do (13) dostaneme vztah pro maximální počet odrazů

$$m_m = \frac{l \sqrt{n^2 - 1}}{d \sqrt{n^2 - n^2 + 1}},$$

$$m_m = \frac{l}{d} \sqrt{n^2 - 1} \tag{14}$$

Také vztahu (14) se používá při výpočtu ztrát světla. Protože nelze absolutně vyleštit povrch tyče, dochází při každém odrazu k určité ztrátě světla.

Tak např. zvolíme největší přípustný úhel dopadu ε. K němu náleží nejdelší světelný paprsek a maximální počet odrazů. Tento světelný paprsek bude mít při průchodu tyčí největší ztráty.

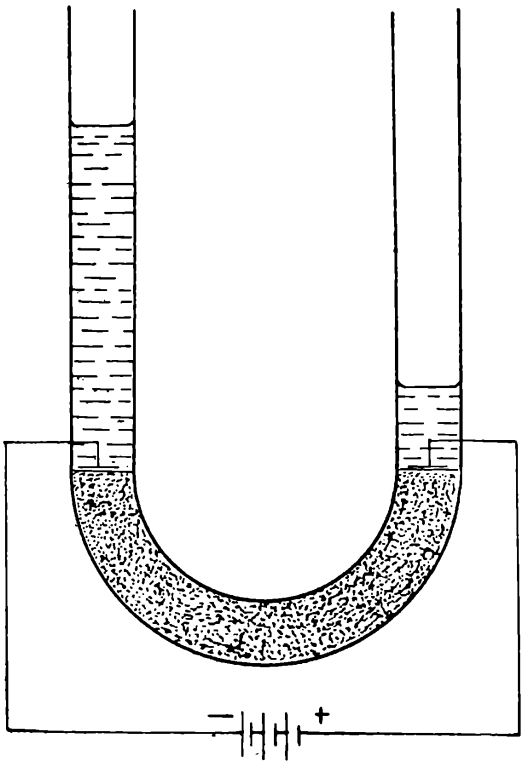
Viděli jsme, že světlo uzavřené v kuželi o středovém úhlu ε, dopadající na přední čelo kruhové skleněné tyče, projde na její druhý konec a vystoupí z tyče ven. Jak lze tohoto poznatku využít prakticky, ukáži v dalších článcích.

(Pokračování)

Elektroosmóza a její užití v praxi

FRANTIŠEK KAMENČÁK, Ostrava

Již 150 let je znám jev, že při průchodu proudu průlinčitou látkou, umístěnou v ohbí U-trubice, stojí voda v jednom rameni výše (obr. 1). Tento zajímavý jev objevil v roce 1807 profesor Moskevské university *F. F. Reuss*. Ověřoval si opakovanými pokusy zákonitosti rozkladu vody elektrickým proudem a rozdíl hladin mu nastal, když měl v ohbí U-trubice vrstvu křemenného prachu. Pozorovaný jev nazval elektroosmózou. Teoretické vysvětlení jevu podalo mnoho vědců. Ze známých jmen uvádíme: Helmholz, Smoluchowski i náš Velíšek.



Obr. 1

Elektroosmózou nazýváme pohyb kapaliny porézní látkou v elektrickém poli. Směr a rychlost pohybu kapaliny v kapiláře závisí na mnoha činitelích, hlavně však na materiálu porézní látky (kapiláry), chemickém složení kapaliny, napětí a vzdálenosti elektrod.

V praxi našel uplatnění i opačný jev k elektroosmóze. Spočívá v tom, že pohybem kapaliny v kapiláře vzniká elektrické napětí.

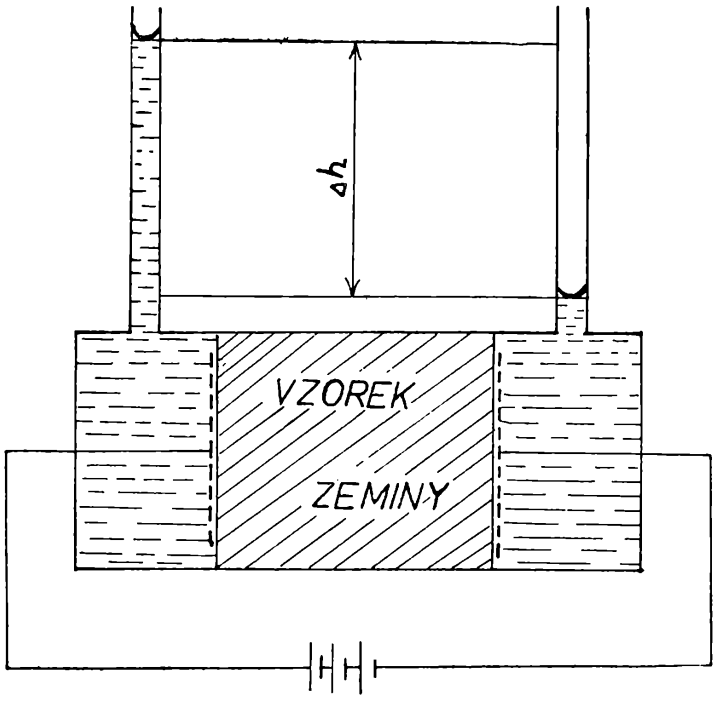
Podle nejnovějších výzkumů, které u nás provádí hlavně inž. dr. Jos. Havlíček z Ústavu teoretické a aplikované mechaniky ČSAV, můžeme si elektroosmotický pohyb kapaliny porézní látkou představit jako pohyb dvou mechanicky nespojených polepů kondenzátoru stálé tloušťky dielektrika. Jedním polepem tohoto myšleného kondenzátoru je blanka kapaliny, dotýkající se zevnitř kapiláry. Tato blanka pevně lpí na povrchu kapiláry a pohybovat se může jen společně s kapilárou. Proto se nazývá pevně vázaná k povrchu kapiláry. Druhý polep kondenzátoru tvoří další vrstva molekul kapaliny při stěně kapiláry. Tato vrstva již není ke stěně kapiláry poutána tak velkými silami, takže její název volně vázaná dobře vystihuje situaci. Obě vrstvy tvoří dohromady takzvanou elektrickou dvojvrstvu, což je důležitý pojem při stanovení podmínek elektroosmotického pohybu

kapaliny v kapilárách. Náboje na deskách tohoto myšleného kondenzátoru působí na sebe silami stejně velkými, opačného směru. Síla, působící prostřednictvím „pevně vázané" kapaliny na molekuly kapiláry se nazývá kataforetická, opačně působí na „volně vázanou" kapalinu síla elektroosmotická. Působením této síly se volně vázaná kapalina uvede do pohybu. V literatuře je uváděno experimentálně ověřené pravidlo Fajans-Hahnovo, jímž lze určit směr pohybu kapaliny v kapiláře:

Na styku dvou látek různých permitivit[1]) *vzniká elektrická dvojvrstva, přičemž látka s vyšší relativní permitivitou má na styku zpravidla náboj kladný.*

Uvažujeme-li pohyb vody v zemině nebo zdivu, pak platí: voda má relativní permitivitu 81, zemina nebo zdivo podle složení 5 až 16. Voda se proto na styku s kapilárou nabije kladně a po zapojení vnějšího zdroje se bude pohybovat ke katodě.

Laboratorní ověření existence elektroosmotických sil se provádí v přístroji, zvaném elektroosmometr (obr. 2). Je to trubice z izo-



Obr. 2

lantu, v níž je mezi elektrodami zkoumaná zemina. Prostory za elektrodami jsou uzavřeny a opatřeny manometrickými trubicemi. Rozdíl výšek Δh mezi katodou a anodou určuje velikost elektroosmotické síly.

Dlouho trvalo, než se elektroosmózy začalo užívat v praxi. Poprvé

[1]) Permitivita je dielektrická propustnost.

v roce 1912 k odvodňování rašeliny, později k čištění kaolinu, glycerinu, klihu, želatiny. Výsledky nebyly pro průmyslové využití příliš přesvědčivé. Teprve v poslední době nastal zásadní obrat. Zasloužilo se o to vyřešení způsobu odvodňování nepropustných půd, ale nejvíce užití elektroosmózy k vysoušení vlhkých budov. Tuto metodu pantentovali v roce 1960 maďarští inženýři Biczók, Lipczney a Horwath. Během několika let se použití rozšířilo téměř do všech evropských zemí.

Při odvodňování nepropustných jílových půd, které jinak odvodnit nelze, narazí se po obvodu vysoušeného objektu řada navzájem spojených anod a v určité vzdálenosti od nich katody. Po zapojení proudu nastává elektroosmotický pohyb vody jemnými póry zeminy kapilárami ke katodám, odkud se odčerpává. Výsledek této metody je 20 až 100krát větší než při dříve užívaném odvodňování samospádem do vykopaných studní. Odstraněním vody z pórů zeminy se tato zpevní, neboť se póry zmenší. V některých případech je sice třeba zpevnit zeminu, ale přitom se nesmí zmenšit póry, aby neklesal povrch. Užije se též elektroosmózy, ale jinak. Kolem anod se nalije zpevňující roztok — obyčejně vodní sklo s přísadami. Po zapojení proudu postupují částice vodního skla póry zeminy, odkud vytěsní vodu a postupně zaplní kapiláry v půdě. Tato metoda se nazývá cebertizace podle polského profesora Cebertowicze, který mimo jiných objektů takto zachránil vzácnou kulturní památku — kostelík v Kórniku u Varšavy, který stál na rozbahnělém jílovém svahu. Odvodnění jílu elektroosmózou bez vytěsnění vody by mělo za následek pokles povrchu a tím zničení stavby. Podle zpráv z tisku z minulého roku je i mezi návrhy na zabezpečení šikmé věže v Pise proti nežádoucímu naklánění jeden, který řeší úkol zpevněním půdy v okolí věže cebertizací.

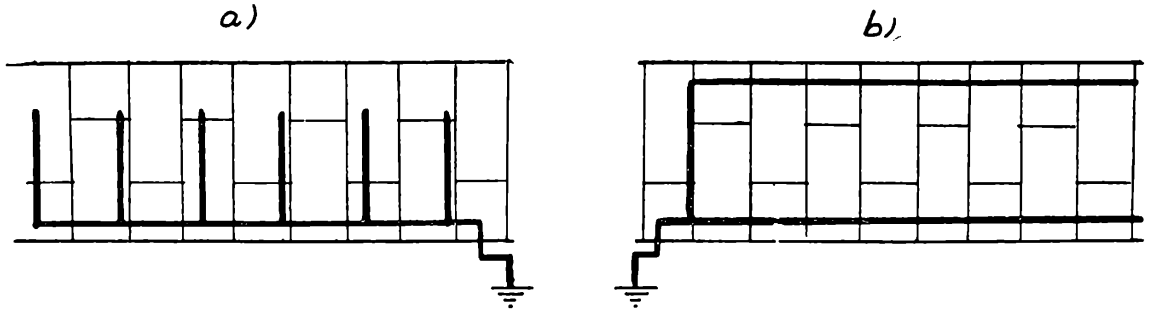
Nejrozšířenější aplikací elektroosmózy je v současné době vysoušení vlhkých stěn. Podle odhadu odborníků trpí 50 až 70 % starších budov vlhkostí. Izolační vrstvy buď chybějí, nebo jsou zničeny stářím, povětrnostními vlivy nebo otřesy půdy. V důsledku kapilární elevace stoupá spodní voda kapilárami v půdě a ve zdech do výše h, určené známým vztahem, odvozovaným v učebnicích fyziky na školách II. cyklu

$$h = \frac{2\,\sigma}{r\,\varrho\,g},$$

kde h je kapilární zvýšení, σ je povrchové napětí, ϱ je hustota kapaliny, g je tíhové zrychlení. Uvádí-li se pro starší cihelné zdivo průměr pórů asi 0,01 mm, vychází výpočtem výška h asi 3 m, v praxi je měřeno o něco méně.

Dosavadní způsoby ochrany proti vlhkosti — navrtání děr nebo vyjmutí vrstvy zdiva a vložení nového izolačního pásu, jsou velmi pracné. Fyzikální podstatou elektroosmotického vysoušení je použití opačného jevu k elektroosmóze. Kapilárním pohybem vody v pórech

zdiva vzniká elektrická dvojvrstva, v níž voda, protože má větší relativní permitivitu, má kladný náboj. Velikost náboje a tím i potenciál je v různých částech vlhké stěny různý. Obecně platí, že s výškou vlhkosti (a tím i napětí) ubývá. Chceme-li vzlínání vody zastavit, stačí vytvořit v horním pásu vlhkosti vyšší kladné napětí. Dostaneme je například spojením libovolného místa poblíž základů budovy (uzemnění) s kovovými elektrodami v horním pásu vlhkosti. Elektrické pole kolem elektrod ve zdi zabrání molekulám vody další postup vzhůru — popřípadě tento postup změní v opačný. V praxi se provádí v určité výšce vlhké zdi — obyčejně těsně nad podlahou přízemí instalace elektrod, zvaná u z á v ě r a (obr. 3). Podle tvaru elektrod rozeznáváme uzávěru buď m ř í ž o v o u (obr. 3a) nebo p á s o v o u (obr. 3b). Chceme-li proces vysoušení urychlit, zapojíme na uzávěru kladný pól stejnosměrného zdroje. Okresní stavební podniky, které instalace provádějí, musí napřed dobře proměřit elektrické poměry ve zdivu budovy, výšku hladiny spodní vody a její chemické složení. Uvádí se, že přes 90 % prováděných instalací je úspěšných.



Obr. 3a, 3b

Literatura:

Výzkumné zprávy Ústavu teoretické a aplikované mechaniky ČSAV:

Dr. inž Jos. Havlíček, Elektroosmotické upevňování zemin, 1956.
Dr. inž. Jos. Havlíček, Zpevňování a odvodňování zemin elektroosmózou, 1959.
Dr. inž. Jos. Havlíček, Elektrické náboje zeminách jejich vztah k elektroosmóze, 1960.
Josef Velíšek, Elektroforéza, elektroosmóza a zjevy verzní, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

Časopisecké články:

Ziehen J. H., Elektroosmotische Mauerwerkstrokung, 1963, Bauzeitung, str. 646—648.
Schaad V., Praktische Anwendung der Elektro-Osmose im Gebiete des Grundbaues, 1958, Bautechnik č. 6, str. 210—216.
J. Kos, Elektroosmotická metoda vysušení vlhkého zdiva, 1964, Technickoekonomické informace ministerstva stavebnictví, č. 37.
Kraus J. Výzkum odvodňování a zpevňování zemin železniční pláně elektroosmózou, 1959, Železniční dopr. a techn., č. 3, str. 74—80, 1960, Železniční dopr. a techn., č. 7, str. 203—207.
G. M. Lomize-A. V. Netušil, Primenenija elektroosmosa pri vodoponiženii, 1956, Gidrotecshn., stroitělstvo, č. 3, str. 26—31.

Několik řešených příkladů

PROF. R. KUNFALVI, Budapešť

Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální (Pokračování)

2. Síly $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ působí v bodě M, který leží v rovině trojúhelníka $\triangle ABC$. Máme dokázat, že výslednice těchto tří sil prochází těžištěm S trojúhelníka $\triangle ABC$ a že její velikost je rovna $3\vec{MS}$.

I. řešení. Vektory $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ mohou být rozloženy do těchto složek (viz též obr. 3)

$$\vec{MA} = \vec{MS} + \vec{SA}$$

$$\vec{MB} = \vec{MS} + \vec{SB},$$

$$\vec{MC} = \vec{MS} + \vec{SC}$$

Sečteme-li tyto tři rovnice, dostáváme

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MS} + \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}$$

Máme dokázat, že

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MS},$$

což dále značí, že musí platit

$$\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 0$$

Postačí tedy dokázat pouze poslední rovnici.

Výslednice sil $\vec{SB}$ a $\vec{SC}$ je $\vec{SE}$ (obr. 4). Protože se úhlopříčky rovnoběžníku půlí, je zřejmé, že bod D půlí jak $\vec{SE}$, tak i $\vec{BC}$. Přitom $\vec{SE}$ leží na stejném paprsku jako $\vec{SA}$, protože $\vec{AB}$ je těžnicí (strany) $\vec{BC}$. Těžiště dělí těžnici v poměru 2 1, takže dostáváme

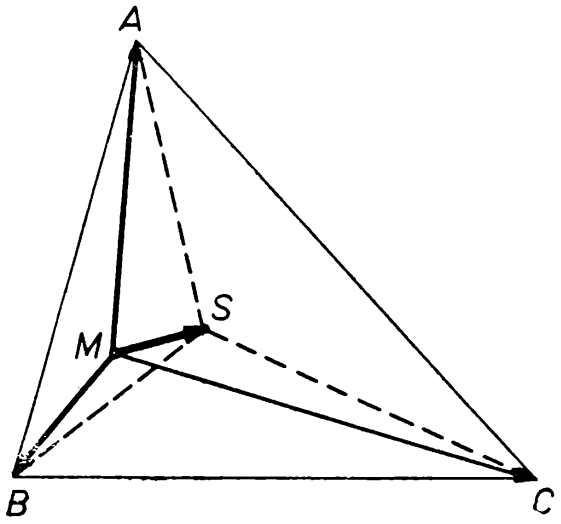
$$\vec{SA} = -2\vec{SD} = -\vec{SE} = -(\vec{SB} + \vec{SC})$$

Po úpravě dostáváme

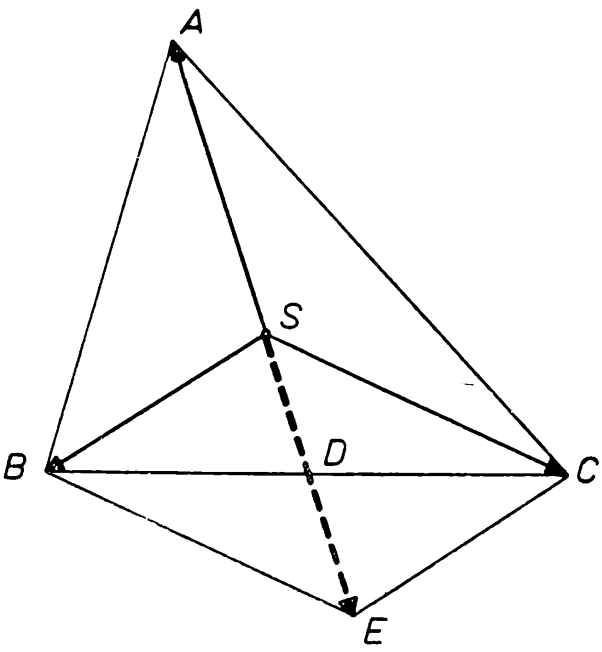
$$\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 0,$$

a tedy

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MS}$$



▲ Obr. 3



Obr. 4 ▶

Je jistě zřejmé, že bod M nemusí ležet v rovině daného trojúhelníka.

II. řešení. Provedeme následující součty pomocí rovnoběžníka (obr. 5)

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD},$$

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ME}$$

Strana CA trojúhelníka ABC a úsečka MD se vzájemně půlí, protože jsou úhlopříčkami rovnoběžníka $AMCD$. Protínají se v bodě F_1. Spojíme body D a B, čímž dostaneme trojúhelník $\Delta\, MDB$. Přitom BF_1 je současně těžnicí obou trojúhelníků $\Delta\, ABC$ a $\Delta\, MDB$, protože platí

$$CF_1 = F_1A$$

a dále

$$MF_1 = F_1D$$

Označme si G průsečík ME a BD. Je zřejmé, že MG je současně těžnicí trojúhelníka MDB, protože

$$BG = GD$$

Průsečík MG a BF_1, který si označme S, je tak těžištěm trojúhelníka $\Delta\, MDB$. Dále BF_1 je těžnicí trojúhelníka $\Delta\, ABC$. Protože S dělí úsečku BF_1 v poměru 2 1, je S také těžištěm trojúhelníka $\Delta\, ABC$. Tím také úsečka ME, která je prodloužením úsečky MG, prochází těžištěm S trojúhelníka $\Delta\, ABC$.

Z toho co bylo řečeno, je také zřejmé, že výslednice $\overrightarrow{ME}$ je trojnásobkem vektoru $\overrightarrow{MS}$.

3. Šířka ulice budiž d. Uprostřed ulice se pohybuje vůz rychlostí c_1. Délka vozu je a, šířku vozu zanedbejme. Chceme přejít ulici kolmo. S chodníku sestupujeme v okamžiku, kdy je proti nám právě předek vozu. Jakou rychlostí c_2 musíme přecházet, aniž bychom se střetli s jedoucím vozem. [Číselné hodnoty jsou $a = 5$ m, $d = 20$ m, $c_1 = 2$ m . s^{-1}.]

Řešení. K tomu, aby vůz minul chodce, je zapotřebí času rovného $\frac{a}{c_1}$. Chodec může klidně přecházet, když do středu ulice dorazí později než jedoucí vůz. Matematicky to můžeme vyjádřit takto

$$\frac{d}{2\,c_2} \geqq \frac{a}{c_1}\,.$$

Rovnost platí v případě, že rozměry chodce jsou vzhledem k rozměrům vozu zanedbatelné.

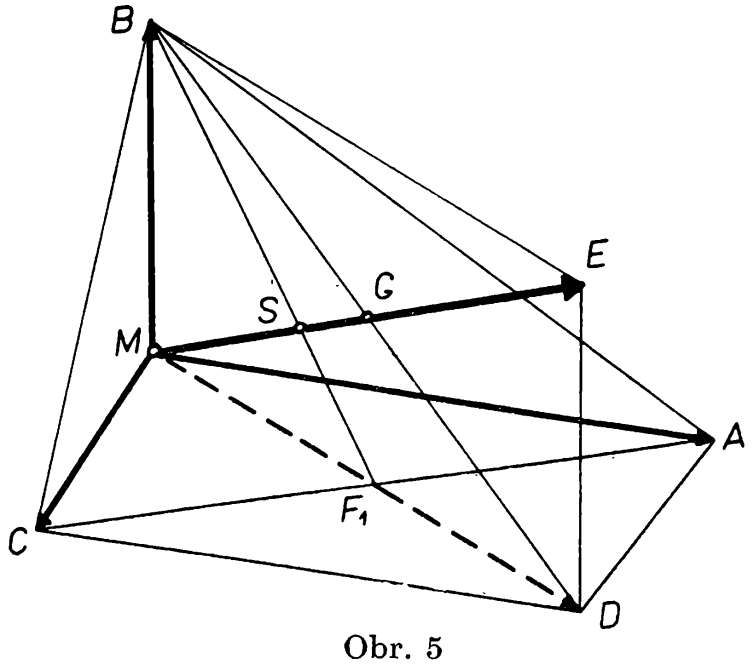
Pro rychlost chodce dostáváme

$$c_2 \leqq c_1 \frac{d}{2\,a}\,,$$

a pro zadané číselné hodnoty plyne, že

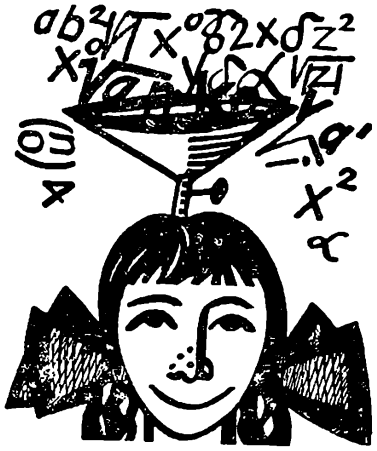
$$c_2 \leqq 4 \text{ m} \,.\, \text{s}^{-1}$$

To odpovídá rychlosti 14,4 km . h^{-1}. Chodec, který jde zpravidla rychlostí 4 až 5 km . h^{-1}, nemusí tedy při přecházení čekat až přejede vůz.



Obr. 5

(Pokračování)



Úlohy k řešení

Řešení úloh otištěných v tomto čísle zašlete do 28. února 1967 na adresu doc. Ota Setzer, Praha 2, Trojanova 13.

● *Konstruktivní geometrie*

1. Dokažte, že společné tečny paraboly dané ohniskem F a řídicí přímkou d a kružnice opsané z ohniska poloměrem rovným parametru paraboly, protínají osu paraboly v bodě souměrném s ohniskem F podle přímky d. Určete velikost úhlu obou tečen.

Josef Glivický

2. Jsou dány tři přímky a, b, c tak, že každé dvě z nich jsou mimoběžné. Najděte takový směr kosoúhlého promítání, aby průmětem přímek byly dvě rovnoběžky a přímka k těmto rovnoběžkám kolmá.

Stanislav Horák

3. Jsou dány dva různé body A, B a úsečka d. Sestrojte přímku, která má stejně velkou první i druhou odchylku, prochází bodem A a od bodu B má vzdálenost d. Proveďte diskusi.

Stanislav Horák

4. V Mongeově promítání zobrazte rotační válec, jehož jedna kruhová hrana se dotýká půdorysny π v bodě P $(-3{,}5;\ 5;\ 0)$, nárysny ν v bodě N $(-5;\ 0;\ 4)$, druhá hrana se dotýká roviny ϱ $(5;\ \infty;\ \infty)$. Příklad vyrýsujte tuší a popište normalizovaným písmem 5 mm.

Ota Setzer

● *Fyzika*

1. Dutá koule (poloměry: vnější $R_1 = 0{,}1$ m, vnitřní $R_2 = 0{,}08$ m) je do poloviny naplněna kapalinou. Hustota materiálu koule je

$$\varrho_1 = 7{,}8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

hustota kapaliny

$$\varrho_2 = 1{,}26 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

Kouli valíme po vodorovné rovině tak, že její maximální obvodová rychlost je rovna $v_0 = 0{,}2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Máme vypočítat celkovou kinetickou energii W_k koule s kapalinou pro případ, že neuvažujeme vliv vnitřního tření kapaliny při pohybu koule. Napište také z jakého materiálu je koule a o jakou čistou kapalinu se jedná. Objemový moment setrvačnosti plné koule vzhledem k libovolné ose procházející jejím středem je roven

$$J_V = \tfrac{4}{3}\,\pi\, r^5\,,$$

kde r je poloměr koule.

Václav Šindelář

2. Vrata propustě na řece jsou 9 m vysoká a 10 m široká. Spodní hladina dosahuje do výšky 3 m vrat. Při jejich uzavření je rozdíl výšek hladin 4 m. Máme vypočítat: *a)* jaká celková síla působí na zavřená vrata propustě, *b)* kde leží působiště výslednice, *c)* jaký je střední tlak na vrata. Sílu vypočtěte v jednotkách N a kp, tlak v jednotkách $\mathrm{N\,m^{-2}}$ a $\mathrm{kp\,cm^{-2}}$. Hustotu vody volíme $\varrho = 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$, tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

Václav Šindelář

(Pokračování)

Řešení úloh z minulého ročníku (Pokračování)

● *Matematika*

2. Je daná kvadratická rovnica $x^2 + px + 1 = 0$, ktorej korene sú $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$, kde α je ostrý uhol. Napíšte kvadratickú rovnicu, ktorej korene sú $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

(Došlo 33 řešení) *Stanislav Horák*

Riešil Milan Stehlík, III.Z SPŠS-E, Košice:

Z vlastností koreňov kvadratickej rovnice plyne, že

$$p = -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha - = -\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

Nech má hladaná kvadratická rovnica tvar

$$x^2 + Px + Q = 0$$

Potom musí platiť

$$Q = \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{p} \tag{1}$$

$$P = -(\sin\alpha + \cos\alpha) = -\sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} =$$

$$= -\sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{2}{p}} \tag{2}$$

Záver. Hľadaná rovnica má tvar

$$x^2 - x\sqrt{1 - \frac{2}{p}} - \frac{1}{p} = 0$$

3. Číslo napsané v desítkové soustavě je *abcba*. Určete jeho jednotlivé cifry, víte-li, že je násobkem čísla 396.

(Došlo 39 řešení) *Stanislav Horák*

Upravené řešení Štěpána Matěny, III.A SVVŠ, Praha-Michle:

Nejprve si uvědomíme, že

$$0 < a \leqq 8\,,\ 0 \leqq b \leqq 9\,,\ 0 \leqq c \leqq 9\,. \tag{1}$$

Poněvadž $396 = 4\,.\,9\ \ 11$, musí být hledané číslo dělitelné čísly 4, 9, 11. Aby bylo dělitelné devíti, musí platit

$$2a + 2b + c$$

je rovno některému z čísel 9, 18, 27, 36, 45.

Aby bylo dělitelné číslem 11, musí

$$2a - 2b + c$$

být rovno některému z čísel -11, 0, 11, 22.

Stručně to zapíšeme takto

$$2a + 2b + c = 9\,,\ 18\,,\ 27\,,\ 36\,,\ 45\,, \tag{2}$$

$$2a - 2b + c = -11\,,\ 0\,,\ 11\,,\ 22\,. \tag{3}$$

Odečteme-li levé strany rovnic (2), (3), obdržíme rovnici, v níž na levé straně bude $4b$ a na pravé straně musí pak být buď nula nebo číslo dělitelné čtyřmi. To znamená, že na pravých stranách rovnic (2) a (3) musíme vzít po jednom čísle tak, aby rozdíl těchto vybraných čísel byl dělitelný čtyřmi. Takové dvojice jsou

$$-11\,,\ 9\ ;\ -11\,,\ 45\ ;\ 0\,,\ 36\ ;\ 11\,,\ 27\ ;\ 22\,,\ 18\,.$$

Odtud pak dostáváme pět různých případů.

1. $$\begin{aligned} 2a - 2b + c &= -11\,, \\ 2a + 2b + c &= \ \ 9 \end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic obdržíme

$$4a + 2c = -2\,,$$

což je nemožné, neboť čísla a, b, c jsou nezáporná.

2. $$\begin{aligned} 2a - 2b + c &= -11\,, \\ 2a + 2b + c &= \ \ 45\,. \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic dostaneme $b = 14$, a to je vzhledem k (1) nemožné.

3. $$\begin{aligned} 2a - 2b + c &= \ \ 0\,, \\ 2a + 2b + c &= 36\,. \end{aligned}$$

Odtud $b = 9$. Vzhledem k tomu, že hledané číslo je dělitelné čtyřmi, je číslo a rovno buď dvěma nebo šesti. Snadno se zjistí, že $a = 6$. Potom i $c = 6$. Hledané číslo je 69 696.

4. $$2a - 2b + c = 11\,,$$
$$2a + 2b + c = 27$$

Odtud dostaneme $b = 4$. Potom

$$2a - c = 19$$

Poněvadž hledané číslo je dělitelné čtyřmi, musí být číslo a rovno buď 4 nebo 8. První případ není možný a zbývá $a = 8$, z čehož $c = 3$. Hledané číslo je 84 348.

5. $$2a - 2b + c = 22\,,$$
$$2a + 2b + c = 18$$

Snadno zjistíme, že vzhledem na omezující podmínky (1) neexistuje v tomto případě řešení.

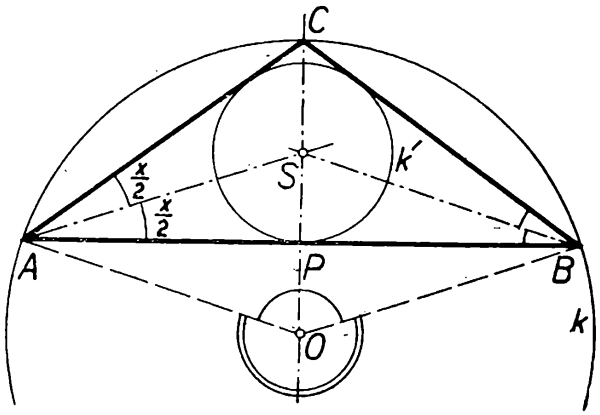
Závěr. Úloze vyhovují pouze dvě čísla, a to 69 696 a 84 348.

4. Ak v rovnoramennom trojuholníku ABC je stred vpísanej kružnice súmerne združený so stredom opísanej kružnice podľa základne AB, potom uhol pri základne je 36°. Túto vetu možno obrátiť. Obe vety dokážte!

(Došlo 32 řešení) *Stanislav Horák*

Riešila Mária Jankovičová, 9. tr. ZDŠ, Chtelnice:

Celé riešenie sa vzťahuje na priložený obrázok:



Obr. 1

a) Z osovej súmernosti vyplýva

$$SO \perp AB\,,\ SP = PO$$

Zaviedla som označenie

$$\sphericalangle BAC = x\,.$$

Trojuholník ABS je rovnoramenný, jeho uhly pri základni AB majú veľkosť $\frac{x}{2}$. Preto

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle AOB = 180° - x$$

V trojuholníku ABC je

$$ACB = 180° - 2x$$

Stredový uhol, príslušný k obvodovému uhlu ACB, je nekonvexný uhol AOB. Jeho veľkosť je

$$\sphericalangle AOB = 360° - (180° - x) = 180° + x$$

Teraz som zostavila rovnicu

$$180 - 2x = \tfrac{1}{2}(180 + x)$$

a riešením som dostala

$$x = 36°$$

b) Predpoklad je

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 36°$$

Ľahko sa dá vypočítať

$$\sphericalangle ACB = 108°$$

Príslušný stredový uhol je 216°. V trojuholníku AOB je

$$\sphericalangle AOB = 360° - 216° = 144°$$

Pretože tento trojuholník je rovnoramenný, je

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 18°$$

Tiež v trojuholníku ABC je

$$\sphericalangle ABS = \sphericalangle BAS = 18°$$

a preto:

Stred S vpísanej kružnice je súmerne združený so stredom O opísanej kružnice podľa základne AB.

5. Na rohové parcele tvaru kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $2\alpha \leqq \pi$ vymezte pro plánovanou stavbu obdélníkový půdorys o největším plošném obsahu tak, aby jeho střední příčka splývala s osou výseče.
(Došlo 24 řešení) *Jaromír Hroník*

Řešil Zdeněk Slanina, III.a SPŠCh, Brno:

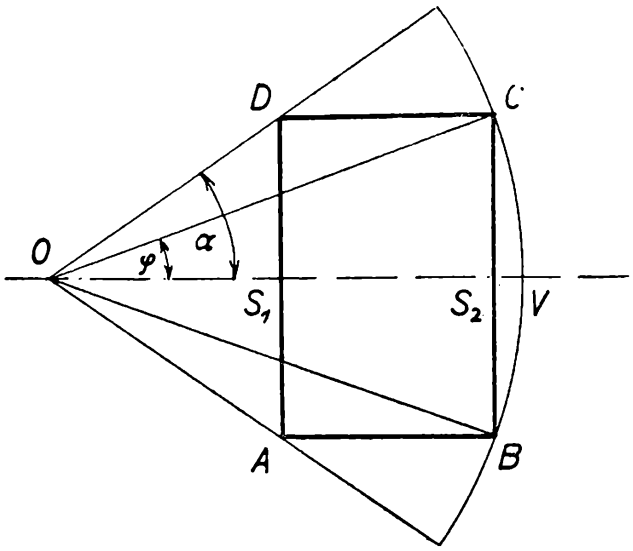
Zaveďme označení podle obr. 1: O značí střed kružnice určující uvažovanou kruhovou výseč: A, B, C, D jsou vrcholy vepsaného obdélníka, jež splňuje podmínky úlohy. S_1, resp. S_2 jsou středy stran AD, resp. BC. Označme dále délky stran obdélníka $a = AB$, $b = BC$, φ velikost úhlu $\sphericalangle COS_2$.

Z pravoúhlého trojúhelníka OS_2C plyne

$$OS_2 = a + OS_1\,, \tag{1}$$

$$OS_2 = r \,.\, \cos\varphi\,, \tag{2}$$

$$CS_2 = \frac{b}{2} = r \,.\, \sin\varphi\,. \tag{3}$$



Obr. 1

Z pravoúhlého trojúhelníka OS_1D obdržíme

$$OS_1 = \frac{b}{2} \operatorname{cotg} \alpha \tag{4}$$

Ze vztahu (3) plyne

$$b = 2r \,.\, \sin \varphi \,. \tag{5}$$

Srovnáním vztahů (1), (2) a užitím vztahů (4), (5) dostaneme po úpravě

$$a = r \,.\, \cos \varphi - r \,.\, \sin \varphi \,.\, \operatorname{cotg} \alpha \,. \tag{6}$$

Obsah P obdélníka $ABCD$ je tedy dán na základě vztahů (4), (5) rovnicí:

$$P = 2r^2 [\sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi \,.\, \operatorname{cotg} \alpha] \tag{7}$$

Užitím vzorců pro sinus a kosinus dvojnásobného úhlu můžeme postupně upravovat

$$P = r^2 [\sin 2\varphi - 2 \sin^2 \varphi \,.\, \operatorname{cotg} \alpha] \,,$$
$$P = r^2 [\sin 2\varphi - (1 - \cos 2\varphi) \,.\, \operatorname{cotg} \alpha] \,,$$
$$P = r^2 [\sin 2\varphi + \cos 2\varphi \operatorname{cotg} \alpha] - r^2 \,.\, \operatorname{cotg} \alpha \,,$$
$$P = \frac{r^2}{\sin \alpha} [\sin 2\varphi \sin \alpha + \cos 2\varphi \,.\, \cos \alpha] - r^2 \,.\, \operatorname{cotg} \alpha \,,$$

$$P = \frac{r^2}{\sin \alpha} \,.\, \cos (2\varphi - \alpha) - r^2 \,.\, \operatorname{cotg} \alpha \,. \tag{8}$$

Je zřejmé, že funkce (8) nabývá maxima v bodě, kde nabývá maxima výraz $\cos (2\varphi - \alpha)$, tj. pro

$$\cos (2\varphi - \alpha) = 1 \,,$$

čili

$$2\varphi - \alpha = 2k\pi \,, \; k = 0 \,, \pm 1 \,, \pm 2 \,, \tag{9}$$

Vzhledem k tomu, že je $2\alpha \leqq \pi$, $2\varphi < \pi$, musí být $k = 0$, tj.

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} \tag{10}$$

Potom rozměry obdélníka $ABCD$ jsou podle vztahů (6), (5)

$$a = r \left[\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \alpha \right] = \frac{r}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \,, \tag{11}$$

$$b = 2r \sin \frac{\alpha}{2} \tag{12}$$

Obsah P nabývá maximální hodnoty

$$P_{\max} = r^2 \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} . \tag{13}$$

Z á v ě r. Z množiny obdélníků vepsaných do dané kruhové výseče má maximální plošný obsah obdélník, jehož rozměry jsou dány vztahy (11), (12), tj. obdélník, jehož vrcholy B, C společně se středem V oblouku příslušného k dané výseči, dělí tento oblouk na čtyři shodné části.

7. Řešte rovnici

$$\sin \frac{a + bx}{1 + x} = c \sin \frac{b + ax}{1 + x} \tag{1}$$

kde a, b, c jsou reálná čísla.
(Došlo 22 řešení) *Ivo Rosenberg*

Řešil Zdeněk Slanina, III.a SPŠCh, Brno:
Když x splňuje rovnici (1), pak také splňuje postupně

$$\sin \left[a + b - \frac{b + ax}{1 + x} \right] = c \sin \frac{b + ax}{1 + x} ,$$

$$\sin (a + b) \cos \frac{b + ax}{1 + x} - \cos (a + b) \sin \frac{b + ax}{1 + x} = c \sin \frac{b + ax}{1 + x} ,$$

$$\sin (a + b) \cos \frac{b + ax}{1 + x} = [c + \cos (a + b)] \sin \frac{b + ax}{1 + x} \tag{2}$$

Zřejmě jsou rovnice (1) a (2) ekvivalentní.
V dalším rozlišujeme dva případy:
I. $\cos (a + b) = - c$; II. $\cos (a + b) \neq c$.
P ř í p a d I. $\cos (a + b) = - c$ a tedy levá strana (2) je rovna 0. Pak nutně platí alespoň jedna z rovnic: 1°. $\sin (a + b) = 0$ (tj. $a + b = k \pi$, kde k stejně jako v dalším značí celé číslo), 2°. $\cos \frac{b + ax}{1 + x} = 0$.
1°. Z $\cos (a + b) = - c$ a $a + b = k \pi$ vyplývá, že $c = (- 1)^{k-1}$. Rovnice (1) je pak splněna pro libovolné reálné číslo $x \neq - 1$.
2°. $\cos \frac{b + ax}{1 + x} = 0$ a tedy je

$$\frac{b + ax}{1 + x} = \frac{\pi}{2} (2 k + 1)$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$x \left[a - \frac{\pi}{2} (2 k + 1) \right] = \frac{\pi}{2} (2 k + 1) - b \tag{3}$$

Mohou nastat tyto případy:

a) $a = b = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$. Pak rovnice (2) a tedy i (1) má řešení pro každé $x \neq -1$ (jde o zvláštní případ 1).

b) $a \neq \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $a \neq b$. Pak

$$x = \frac{2b - \pi(2k + 1)}{\pi(2k + 1) - 2a} \neq -1$$

je řešením (2) a tedy (1).

c) V ostatních případech

$$a = b \neq \frac{\pi}{2}(2k + 1)$$

a

$$b \neq a = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$$

rovnice (2) a tedy (1) nemá řešení různé od -1.

P ř í p a d I I. Podle předpokladu je

$$\cos(a + b) \neq -c\,.$$

Kdyby byl

$$\cos\frac{b + ax}{1 + x} = 0\,,$$

byl by

$$\sin\frac{b + ax}{1 + x} = \pm 1$$

a (2) by neplatilo. Můžeme tedy (2) upravit

$$\operatorname{tg}\frac{b + ax}{1 + x} = \frac{\sin(a + b)}{c + \cos(a + b)} \tag{4}$$

Označme z ten úhel mezi $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ pro nějž je

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin(a + b)}{c + \cos(a + b)} \tag{5}$$

Je tedy

$$\frac{b + ax}{1 + x} = z + k\pi\,,$$

tj.

$$x(z + k\pi - a) = b - z - k\pi \tag{6}$$

Mohou nastat tyto případy:

$\alpha)$ $a = b = h\,\pi$, kde h je celé číslo. Přímo z (1) vyplývá, že pro libovolné c je každé $x \neq -1$ řešením (1).

$\beta)$ $a = b \neq h\,\pi$. Přímo z (1) vyplývá, že (1) má řešení právě tehdy, když $c = 1$. V tom případě je každé $x \neq -1$ řešením 1.

$\gamma)$ $a \neq b$, $a = z + k\,\pi$. Rovnice (6) a tedy (1) nemají řešení.

$\delta)$ $a = b$, $a \neq z + k\,\pi$. Řešení rovnice (6) a tedy (1) je

$$x = \frac{b - z - k\,\pi}{z + k\,\pi - a} \tag{7}$$

Výsledek shrneme do tabulky

a, b, c	Řešení
$a + b = k\,\pi$, $c = (-1)^{k-1}$	každé $x \neq -1$
$a \neq b$, $a \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$,	$x = \frac{2b - \pi(2k+1)}{\pi(2k+1) - 2a}$
$\cos(a+b) = -c$	
$a \neq b$, $a \neq z + k\,\pi$, $\cos(a+b) \neq -c$	$x - \frac{b - z - k}{z + k - a}$
$a = b = k\,\pi$, c lib.	každé $x \neq -1$
$a = b \neq k\,\pi$, $c = 1$	každé $x \neq -1$

6. Nechť $p \geqq 0$ je reálné číslo; a, b jsou komplexní čísla. Dokažte, že platí

$$|a + b|^p \leqq 2^p\,(|a|^p + |b|^p) \tag{1}$$

(Došlo 16 řešení) *Ivo Rosenberg*

Řešil František Tomášek, III.b SVVŠ, Litovel:

Máme-li dvě komplexní čísla, můžeme to číslo, které má největší absolutní hodnotu označit a a druhé b. Pak je

$$|a| \geqq |b|$$

a tedy podle známé věty platí

$$|a + b| \leqq |a| + |b| \leqq 2\,|a|\,,$$

tj.

$$|a + b| \leqq 2\,|a| \tag{2}$$

Jelikož nerovnost (2) je nerovnost mezi nezápornými reálnými čísly,

nezmění se tato nerovnost, když obě její strany umocníme reálným nezáporným číslem p

$$|a + b|^p \leqq 2^p |a|^p \tag{3}$$

Nerovnost (3) se nezmění, když k její pravé straně přičteme nezáporné reálné číslo $2^p |b|^p$. Dostáváme tak hledanou nerovnost (1).

● *Konstruktivní geometrie*

1. Jsou dány různoběžné roviny ϱ, τ a přímka p, která obě protíná. Sestrojte kulovou plochu daného poloměru r tak, aby a) na přímce p vytínala tětivu dané délky $d < 2r$, b) rovinou ϱ byla proťata v kružnici poloměru $r' \leqq r$, c) dotýkala se roviny τ.

(Došlo 11 řešení) *Stanislav Horák*

Řešil Stanislav Slouka, M3a SPŠE, Brno:

a) R o z b o r. Geometrickým místem středů všech kulových ploch, které mají daný poloměr r a dotýkají se přitom dané roviny τ, jsou dvě roviny τ_1, τ_2 rovnoběžné s rovinou τ ve vzdálenosti r. Geometrickým místem středů všech kulových ploch, které mají daný poloměr r a protínají přitom danou rovinu ϱ v kružnici daného poloměru

$$r' < r\,,$$

jsou dvě roviny ϱ_1, ϱ_2 rovnoběžné s rovinou ϱ ve vzdálenosti

$$\sqrt{r^2 - r'^2}\,.$$

Geometrickým místem středů všech kulových ploch, které mají daný poloměr r a přitom na dané přímce p vytínají tětivu dané délky

$$d < 2r\,,$$

je rotační válcová plocha s poloměrem

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}\,,$$

jejíž osou je přímka p. Společné body všech tří geometrických míst jsou středy žádaných kulových ploch.

b) K o n s t r u k c e. Sestrojíme roviny τ_1, τ_2 a roviny ϱ_1, ϱ_2 a jejich průsečnice

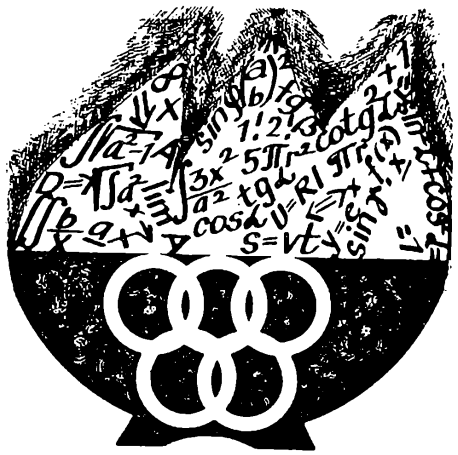
$$o_{11} \equiv \tau_1 \cdot \varrho_1\,,\ o_{12} \equiv \tau_1 \cdot \varrho_2\,,\ o_{21} \equiv \tau_2 \cdot \varrho_1\,,\ o_{22} \equiv \tau_2 \cdot \varrho_2\,.$$

Známým způsobem najdeme průsečíky těchto čtyř přímek s uvedenou rotační válcovou plochou.

c) D ů k a z správnosti konstrukce vyplývá z rozboru.

d) Úloha může mít nejvýše osm různých řešení. Dotýká-li se některá z přímek o válcové plochy nebo nemá-li s válcovou plochou žádný společný bod, počet řešení se zmenší o jedno, resp. o dvě. Takže počet řešení může být také sedm, šest, jedno nebo nemusí být žádné.

(Pokračování)



MO

Soutěžní úlohy I. kola XVI. ročníku MO

Kategorie A

1. Čísla a, b jsou přirozená lichá čísla, $a < b$. Součet všech přirozených čísel větších než a a menších než b je roven 1000. Určete čísla a, b.

2. V prostoru je dáno n rovin, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné, žádné tři nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou a žádné čtyři neprocházejí týmž bodem. Určete, na kolik oblastí dělí tyto roviny prostor.

Návod. Předpokládáme znalost této věty: n přímek roviny, z nichž každé dvě jsou různoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, dělí rovinu na

$$\tfrac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

oblastí.

3. Část přímé hráze rybníka lze považovat za odvěsnu QM pravoúhlého trojúhelníka PQM o přeponě PM. Plavec se má dostat z místa P v rybníce co nejdříve do místa M na hrázi. Známou rychlostí v_1 bude plavat přímo do jistého místa X ležícího na hrázi mezi Q a M a pak rovněž známou rychlostí v_2 poběží z místa X do M. Vypočtěte velikost $\sphericalangle QPX$.

4. Čtyřstěn $ABCD$ má vlastnost, že

$$AB = BC = CD = DA = 1$$

Dokažte, že jeho objem je nejvýše

$$\frac{2}{27}\sqrt{3}$$

Může nastat rovnost?

Kategorie B

1. Vyšetřete průběh funkce

$$y = \sqrt{|1 - x| + 1} - 1$$

a načrtněte její graf. Výpočtem rozhodněte, ve kterých intervalech je funkce rostoucí a ve kterých klesající. Dále rozhodněte, pro která x nepřekračují funkční hodnoty číslo 2.

P o z n á m k a. Bližší vysvětlení týkající se vyšetřování průběhu funkcí naleznete ve svazečku č. 4 z edice „Škola mladých matematiků" od *Šislera* a *Jarníka: O funkcích.*

2. Určete nejmenší přirozené číslo N, které má právě 15 dělitelů. Určete všechna přirozená čísla menší než N, která mají více než 15 dělitelů.

3. Je dána soustava rovnic o třech neznámých x, y, z s parametry a, b. Určete všechny takové hodnoty parametrů a, b, pro které má daná soustava nekonečně mnoho řešení

$$x + ay = b\,,$$
$$y - a^2 z = 1\,,$$
$$az + x = b + 1$$

4. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1. Určete na jejím povrchu všechny body X, pro něž platí $DX = \frac{3}{2}$ a jejichž nejkratší vzdálenost od středu S stěny $BCC'B'$ měřená po povrchu krychle, je rovna jedné. Zakreslete řešení úlohy ve volném zobrazení.

Kategorie C

1. Osobní vlak jedoucí rychlostí v_1 (m/s) byl předjížděn po vedlejší koleji rychlostí v_2 (m/s). Cestující osobního vlaku naměřil dobu t_1 vteřin, kterou trvalo předjetí rychlíku. Pozorovatel na trati naměřil t_2 vteřin, než jej minul osobní vlak a t_3 vteřin od okamžiku, kdy dostihla lokomotiva rychlíku poslední vůz osobního vlaku až po okamžik, kdy minul poslední vůz rychlíku lokomotivu osobního vlaku.

Vyjádřete poměr rychlosti $v_1 : v_2$ pomocí t_1, t_2, t_3.

2. Zvolte si libovolné trojciferné číslo (např. 638). V zápise tohoto čísla obraťte pořadí číslic a z těchto čísel vypočítejte nezáporný rozdíl (např. 836 − 638 = 198). V zápise rozdílu opět obraťte pořadí číslic a tato dvě čísla sečtěte (např. 198 + 891 = 1089). Vyšetřete, jaká čísla vycházejí. Svou domněnku přesně vyslovte a dokažte.

3. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice

$$k_1 = (S_1\,;\, r_1)\,,\ k_2 = (S\,;\, r_2)$$

a kladné číslo ϱ. Sestrojte kružnici $\varkappa$ o poloměru ϱ, která dělí kružnici k_1 ve dvě polokružnice a je dělena kružnicí k_2 ve dvě polokružnice.

4. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1; M je střed hrany $A'B'$. Přímkou $C'M$ je vedena rovina ϱ, která rozdělí krychli na dvě tělesa; těleso obsahující vrchol B má objem $\frac{1}{3}$. Určete, v jaké vzdálenosti od vrcholu B protíná rovina ϱ hranu AB.

Kategorie D

1. Když jsem vkročil na náměstí, odbíjely právě hodiny na radnici 8 hodin, kostelní hodiny však už ukazovaly 8^{02}. Když jsem přešel náměstí a dorazil k zámku, bylo na zámeckých hodinách teprve 8^{01}, ale na kostelních hodinách už 8^{06}. Mám však už s hodinami v našem městě své zkušenosti: zámecké nikdy nejdou napřed, radniční zato vždycky jdou napřed a čas na kostelních hodinách se neliší od správného času nikdy o víc než o 3 minuty. Určete (na minuty), jaký byl správný čas, když jsem vkročil na náměstí.

2. Olda si kontroloval po hodině úlohu z písemky: „Měli jsme upravit výraz

$$\frac{x^2 - 3}{x + 1} + \frac{6x - 7}{2x - 1};$$

v čitateli mi vyšel nějaký mnohočlen

$$ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

koeficienty si již nepamatuji; ve jmenovateli bylo

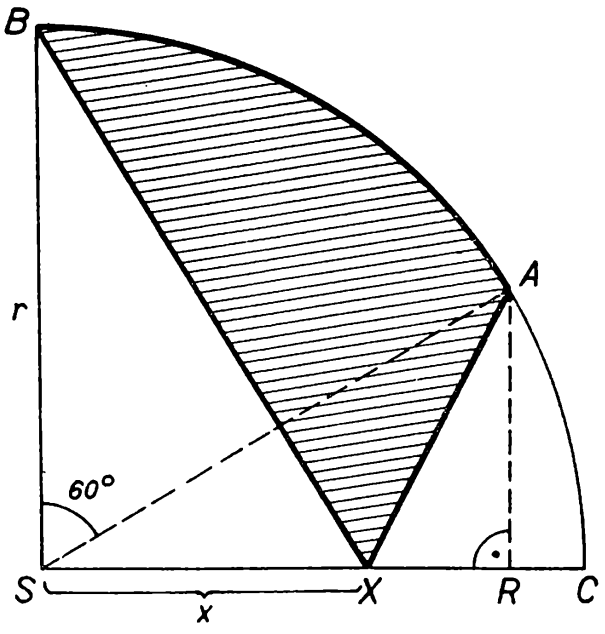
$$2x^2 + x - 1.$$

Vyšla mi dobře zkouška pro $x = 0$, 1 a 2, ale pro $x = 3$ už ne: to vyšlo na levé straně 3,7 a na pravé 4.“

Dovedete z těchto údajů zjistit koeficienty a, b, c, d a rozhodnout, zda Oldovo řešení bylo správné?

3. Je dán trojúhelník ABC. Vyšetřte geometrické místo bodů X tohoto trojúhelníka, pro něž platí

$$AX \geqq BX \geqq CX.$$



Obr. 1

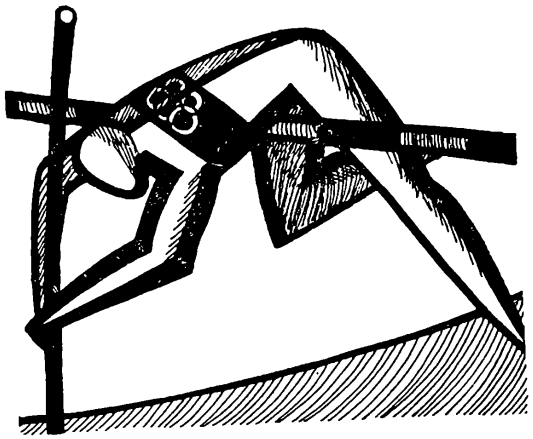
Pomocí velikostí stran a úhlů trojúhelníka ABC vyjádřete podmínky pro to, aby

a) geometrickým místem bodů X byl pětiúhelník;
b) geometrickým místem bodů X byl šestiúhelník;
c) geometrické místo bodů X obsahovalo právě jeden bod;
d) geometrické místo bodů X neobsahovalo žádný bod.

4. Je dán čtvrtkruh SBC s poloměrem $SB = SC = r$; A je takový bod oblouku BC, pro který platí $\sphericalangle ASB = 60°$; X je libovolný bod úsečky SC (obr. 1).

a) Vyjádřete obsah plochy omezené úsečkami BX, AX a obloukem AB pomocí délky $x = SX$.

b) Zjistěte, pro kterou hodnotu x je obsah P roven polovině čtvrtkruhu SBC a porovnejte tuto hodnotu x s délkou oblouku BC.



FO

Dopplerův princip

DOC. Dr. MILOŠ DOLEŽEL, Brno

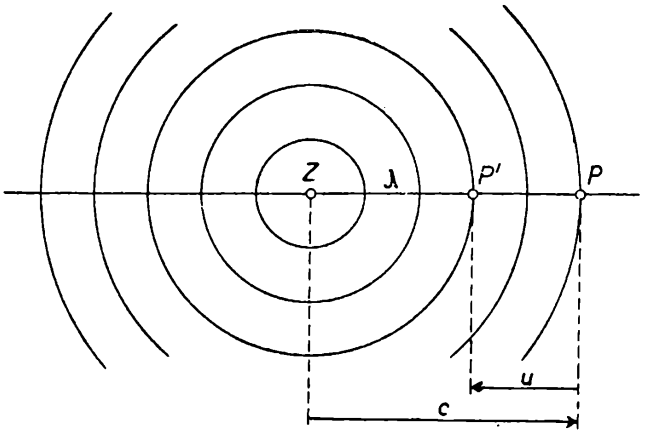
Téma k prostudování pro první kolo osmého ročníku FO v kategorii *A*

Christian Doppler (1803—1853) působil jako profesor na technice v Praze a později na universitě ve Vídni. V roce 1842, v době svého působení na pražské technice, objevil důležitý zákon, který se nazývá Dopplerův princip. Tento zákon vysvětluje jevy, které nastávají při vzájemném pohybu zdroje vlnění a pozorovatele. Platí nejen pro vlny akustické, nýbrž pro všechny druhy vlnění (vlny světelné, vlny rozhlasové).

I. Dopplerův princip si vysvětlíme na vlnění zvukovém, a to nejprve na případě, že pohyb zdroje nebo pozorovatele se děje po spojnici zdroj—pozorovatel. Budeme rozlišovat tři případy:

1. *Pozorovatel je v klidu, zdroj zvuku se pohybuje.*

Pokud zdroj zvuku Z o kmitočtu (výšce tónu) f je v klidu, šíří se zvukové vlny o vlnové délce λ od zdroje rychlostí c (fázová rychlost vlnění) ve stejnorodém prostředí rovnoměrně na všechny strany v soustředných kulových vlnoplochách (obr. 1). Zdroj vyšle za sekundu $\{f\}$



Obr. 1. Vlnoplochy vysílané klidným zdrojem.

vln a pozorovatel, který je v bodě P v klidu, přijme v každé sekundě $\{f\}$ kmitů, slyší tedy tón, jehož výška se rovná výšce tónu vydávaného zdrojem. Délka vlny λ je vázána s kmitočtem f a fázovou rychlostí vlnění c známým vztahem

$$c = f \,.\, \lambda \,,$$

který udává, že na dráze číselně rovné velikosti fázové rychlosti vlnění c se vytvoří $\{f\}$ vln. Klidný pozorovatel zachytí tedy za sekundu tolik kmitů, kolik vln se vytvoří na délce číselně rovné c, tj.

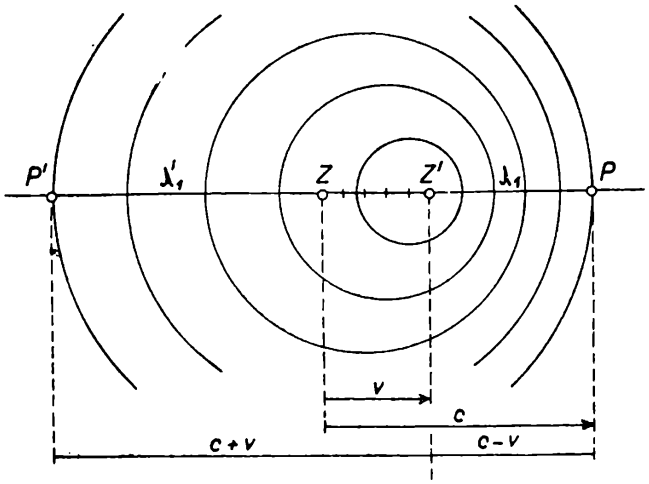
$$f = \frac{c}{\lambda} \,.$$

V obr. 1 jsou vyznačeny vlnoplochy vyslané klidným zdrojem v časových intervalech rovných době kmitu T. Vzdálenost dvou sousedních vlnoploch pak udává délku vlny λ.

Pohybuje-li se zdroj zvuku k pozorovateli rychlostí v (nejprve předpokládáme $v < c$), pak každá následující vlna je vyslána k pozorovateli ze vzdálenosti kratší než vlna předcházející. Vlny vysílané pohybujícím se zdrojem se šíří týmž prostředím stejnou rychlostí jako při klidném zdroji, protože fázová rychlost vlnění závisí jen na vlastnostech prostředí, nikoli na druhu a vlastnostech zdroje. Pohybující se zdroj vyšle za sekundu stejný počet $\{f\}$ vln jako zdroj klidný, protože však postoupil za sekundu o dráhu číselně rovnou v, je těchto $\{f\}$ vln, vyslaných ve směru pohybu zdroje za vteřinu, rozloženo na dráze číselně rovné

$c - v$. Délka vlny λ_1 ve směru pohybu zdroje je kratší (obr. 2, klidný pozorovatel se nachází v bodě P), neboť platí

$$\lambda_1 = \frac{c - v}{f}$$



Obr. 2. Vlnoplochy vysílané pohybujícím se zdrojem ($v < c$).

Protože při pohybujícím se zdroji se fázová rychlost vlnění nezměnila, bude pozorovatel vnímat při přibližování zdroje zvuk o kmitočtu f_1, pro který platí

$$c = f_1 \quad \lambda_1$$

Tón o kmitočtu f_1 zachycený pozorovatelem je určen počtem vln, které jsou rozloženy na dráze číselně rovné c. Pro tento kmitočet platí

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{c - v} f \tag{1}$$

Vzdaluje-li se zdroj od pozorovatele rychlostí v, pak $\{f\}$ vln je rozloženo na dráze číselně rovné $c + v$. Tím se délka vlny prodlouží (obr. 2, klidný pozorovatel se nachází v bodě P') na

$$\lambda_1' = \frac{c + v}{f},$$

takže kmitočet zvuku zachyceného klidným pozorovatelem je

$$f_1' = \frac{c}{\lambda_1'} = \frac{c}{c + v} f \tag{1'}$$

Docházíme k výsledku, že při přibližování zdroje zvuku ke klidnému pozorovateli vnímá pozorovatel tón o kmitočtu vyšším, při vzdalování

zdroje vnímá pozorovatel tón o kmitočtu nižším než je skutečný kmitočet zdroje.

Tento jev můžeme pozorovat u tónů vydávaných jedoucími vozidly, jako je pískající lokomotiva, houkající automobil, zvonící tramvaj, nízko letící letadlo. V okamžiku, kdy nás pohybující se zdroj zvuku míjí, klesne zřetelně výška vnímaného tónu.

Změna kmitočtu tónu při pohybu zdroje je změna objektivní, neboť je způsobena objektivní změnou vlnové délky.

2. *Zdroj zvuku je v klidu, pozorovatel se pohybuje.*

Klidný zdroj zvuku o kmitočtu f vysílá zvukové vlny rychlostí c na všechny strany. Klidný pozorovatel by přijal za sekundu tolik kmitů, kolik vln se vytvoří na dráze číselně rovné velikosti c, tj.

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Pohybuje-li se pozorovatel ke klidnému zdroji rychlostí $u < c$, pak vlny mají vůči pozorovateli relativní rychlost $c + u$, což je totéž, jako by vlnění postupovalo vzhledem ke klidnému pozorovateli rychlostí $c + u$. Pozorovatel zachytí tedy za sekundu tolik kmitů, kolik vln by se vytvořilo na dráze číselně rovné $c + u$. Vnímá tedy tón o kmitočtu

$$f_2 = \frac{c + u}{\lambda} = \frac{c + u}{c} f \tag{2}$$

Vzdaluje-li se pozorovatel od zdroje zvuku touž rychlostí u, pak vlny mají vůči pozorovateli relativní rychlost $c - u$ a pozorovatel vnímá tón o kmitočtu

$$f_2' = \frac{c - u}{\lambda} = \frac{c - u}{c} f \tag{2'}$$

Docházíme k podobnému výsledku jako v případě prvním. Přibližuje-li se pozorovatel ke klidnému zdroji zvuku, vnímá tón o kmitočtu vyšším, při vzdalování vnímá tón o kmitočtu nižším než je skutečný kmitočet zdroje.

V tomto případě se délka vlny nemění (obr. 1, zdroj klidný, pozorovatel se pohybuje rychlostí u směrem ke zdroji) a proto změna kmitočtu tónu vnímaného pozorovatelem je změnou subjektivní.

Ze vztahů (1) a (2) plyne, že pozorovatel vnímá tón o vyšším kmitočtu než je vlastní kmitočet zdroje, jestliže se buď přibližuje zdroj ke klidnému pozorovateli nebo pozorovatel ke klidnému zdroji. Po úpravě uvedených vztahů obdržíme

$$f_1 = \frac{c}{c - v} f = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} f = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} f ,$$

$$f_2 = \frac{c + u}{c} f = \left(1 + \frac{u}{c}\right) f$$

Ukazuje se, že pro zvýšení tónu není lhostejné, pohybuje-li se zdroj nebo pozorovatel. Frekvence f_1 tónu přijímaného klidným pozorovatelem při pohybu zdroje rychlostí v směrem k pozorovateli je vyšší než frekvence f_2 tónu, jejž vnímá pozorovatel pohybující se rychlostí $u = v$ směrem ke klidnému zdroji, neboť

$$\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} > 1 + \frac{v}{c}$$

Jen tehdy, je-li rychlost $u = v$ velmi malá vzhledem k fázové rychlosti akustických vln ($v = u \ll c$), dávají oba výrazy prakticky stejné výsledky. Podobně bychom mohli porovnat vztahy (1′) a (2′).

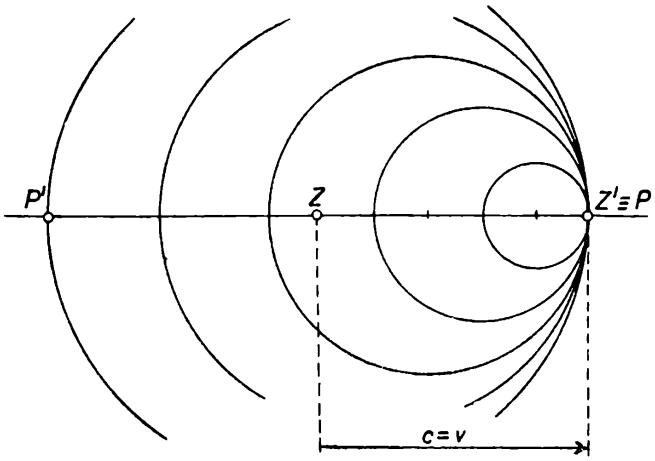
Při větších rychlostech zdroje nebo pozorovatele se objevuje podstatný rozdíl mezi oběma případy. Jako příklad uvažujme, že

$$v = u = c .$$

Pohybuje-li se zdroj ke klidnému pozorovateli rychlostí v, kterou budeme postupně zvyšovat, pak se kmitočet tónu vnímaný pozorovatelem zvyšuje, jak plyne ze vztahu (1). Při určité rychlosti zdroje dosáhne kmitočet přijímaný pozorovatelem hranice slyšitelnosti (20 kHz). Při vyšších rychlostech nebude už pozorovatel vnímat zvuk. V mezním případě $v = c$ pozorovatel tedy nemůže slyšet zvuk, neboť jak plyne ze vztahu (1), je $f_1 = \infty$. V tomto případě se všechny vlnoplochy dotýkají v bodě P (obr. 3), procházejí tedy místem pozorovatele všechny současně. Pozorovatel uslyší zvuk až při vzdalování zdroje; ze vztahu (1′) plyne pro kmitočet vnímaného tónu

$$f_1' = \frac{1}{2} f$$

Kdyby se pozorovatel přibližoval ke zdroji rychlostí $u = c$, vnímal by tón o kmitočtu $f_2 = 2 f$, jak plyne ze vztahu (2). Vzdaluje-li se pozorovatel od klidného zdroje rychlostí $u = c$, nevnímá zvuk, neboť podle vztahu (2′) je $f_2' = 0$. Tento poznatek lze odvodit také přímo úvahou. Jestliže se totiž pozorovatel vzdaluje od zdroje vlnění stejnou rychlostí, jakou se vlnění šíří, je mezi pozorovatelem a čelem vlnění vysílaného klidným zdrojem stále stejná vzdálenost. Proto vlnění k pozorovateli nedospěje.



Obr. 3. Vlnoplochy vysílané pohybujícím se zdrojem ($c = v$).

3. *Zdroj zvuku i pozorovatel se pohybují.*

Z možných případů uvažujme nejprve, že zdroj i pozorovatel se pohybují týmž směrem, tj. zdroj se pohybuje např. směrem k pozorovateli rychlostí v a pozorovatel směrem od zdroje rychlostí u. Kmitočet tónu přijímaného pozorovatelem je pak dán vztahem

$$f_3 = \frac{c}{c - v} f_2' = \frac{c}{c - v} \frac{c - u}{c} f = \frac{c - u}{c - v} f \tag{3}$$

Je-li $c - u = c - v$, je $u = v$ a $f_3 = f$. Docházíme tedy k zajímavému výsledku, že pozorovatel vnímá vlnění téže frekvence, kterou zdroj skutečně vysílá, jestliže se zdroj i pozorovatel pohybují stejným směrem a stejně velikou rychlostí vzhledem k prostředí. Z toho vyplývá, že frekvence se nemění ani v opačném případě, kdy se pohybuje prostředí vzhledem ke klidnému zdroji a klidnému pozorovateli, že tedy pohyb prostředí nemá vliv na frekvenci tónu. Proto např. větrem se nemění výška tónů klidných zdrojů zvuku, pokud je také pozorovatel v klidu.

Obdobně bychom odvodili vztah pro výšku tónu vnímaného pozorovatelem, kdyby se zdroj i pozorovatel pohybovali proti sobě (f_3') a kdyby se pohybovali od sebe (f_3''). Pak platí

$$f_3' = \frac{c + u}{c - v} f \tag{4}$$

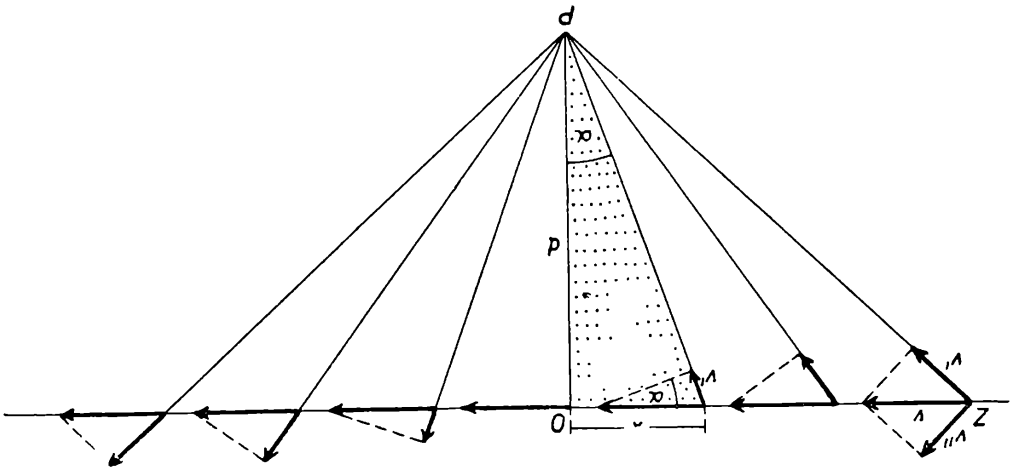
$$f_3'' = \frac{c - u}{c + v} f, \tag{5}$$

kde v je rychlost zdroje, u rychlost pozorovatele.

II. Zabývejme se nyní obecnějším případem, že zdroj zvuku se nepohybuje po spojnici zdroj—pozorovatel, nýbrž po přímce, od níž je klidný pozorovatel vzdálen o délku d.

Uvažujme nejprve, že zdroj se pohybuje kolem pozorovatele po kružnici o poloměru d. V tomto případě se relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli nemění, a proto nedochází ke změně kmitočtu vnímaného tónu.

Pohybuje-li se zdroj zvuku po přímce, od níž má klidný pozorovatel vzdálenost d, můžeme vektor rychlosti v rozložit na dvě složky na sebe kolmé, na složku v' do směru spojnice zdroj—pozorovatel a na složku v'' k ní kolmou (obr. 4). Z předcházející úvahy vyplývá, že složka v'' nemá



Obr. 4. Pohyb zdroje zvuku po přímce ve vzdálenosti d od pozorovatele.

vliv na změnu výšky tónu vnímaného pozorovatelem, musíme tedy uvažovat jen vliv složky v', což je relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli. Pro výšku tónu přijímaného pozorovatelem platí opět vztahy (1) a (1′), v nichž však místo skutečné rychlosti zdroje je třeba dosadit relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli

$$v' = v \,.\, \sin \alpha \,,$$

kde

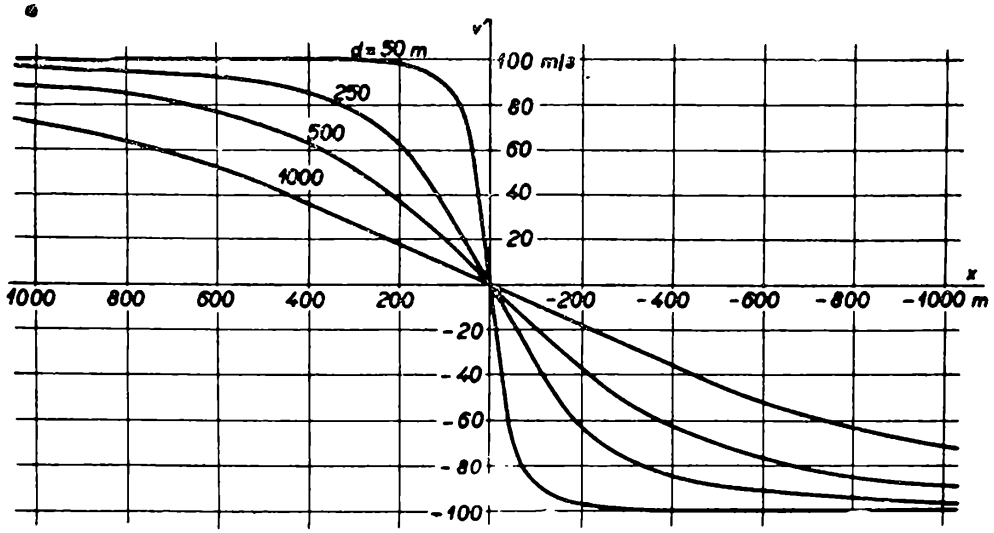
$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

Při přibližování zdroje zvuku úhel α klesá od $\frac{\pi}{2}$ do 0, při vzdalování se mění od 0 do $-\frac{\pi}{2}$ Pro výšku tónu přijímaného pozorovatelem při přibližování a vzdalování zdroje platí vztah

$$f_4 = \frac{c}{c - v'} f = \frac{c}{c - v \,.\, \sin \alpha} f \,, \tag{6}$$

přitom rychlost v' při přibližování zdroje k pozorovateli označujeme kladně, při vzdalování zdroje od pozorovatele záporně.

Relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli se plynule mění. Největší hodnoty nabývá pro $\alpha = \pm 90°$, kdy $v' = \pm v$, nejmenší hodnoty nabývá pro $\alpha = 0°$, kdy $v' = 0$. To je patrno také z obr. 5, na němž je znázorněno, jak se mění relativní rychlost zdroje pro různé d ($d = 50$, 250, 500, 1000 m, $f = 500$ Hz, $v = 100$ m . s^{-1}).



Obr. 5. Závislost relativní rychlosti zdroje na vzdálenosti x pro různá d.

V důsledku změny relativní rychlosti zdroje vůči pozorovateli klesá výška přijímaného tónu plynule z hodnoty maximální (pro $\alpha = 90°$ je $f_4 = f_1$) na hodnotu minimální (pro $\alpha = -90°$ je $f_4 = f_1'$), jak plyne ze vztahu (6) a jak je patrno také z obr. 6. Prochází-li pohybující se zdroj zvuku bodem nejbližším pozorovateli ($\alpha = 0°$, $v' = 0$), vnímá pozorovatel vlnění o kmitočtu, který je zdrojem skutečně vysílán.

Tento jev můžeme pozorovat, když např. letí nad námi letadlo ve velké výšce. Zvláště u tryskových letadel zřetelně slyšíme postupné snižování tónu vydávaného letadlem.

Nebudeme se zabývat opačným případem, kdy by se pozorovatel pohyboval a klidný zdroj by se nacházel ve velké vzdálenosti d od dráhy pozorovatele; tento případ by se těžko realizoval.

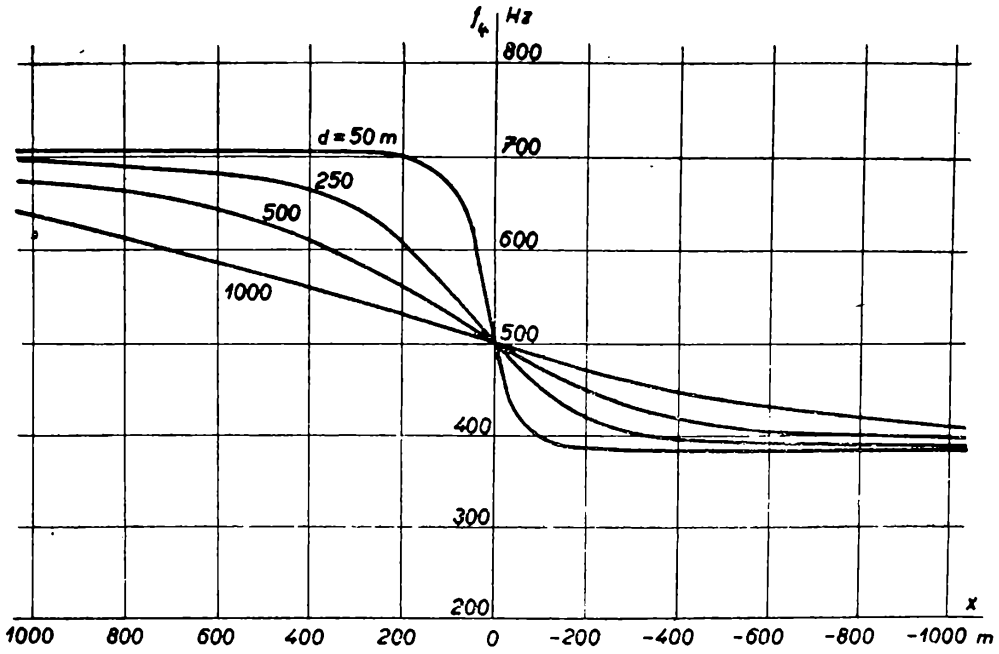
Souhrn

Dopplerův princip bývá zpravidla uváděn jen pro případ, kdy se pohybuje zdroj zvuku (vlnění) nebo pozorovatel po přímce zdroj—pozorovatel. V tomto případě můžeme Dopplerův princip formulovat na základě dříve uvedeného takto:

Pohybuje-li se zdroj zvuku a pozorovatel relativně k sobě nebo od sebe, pak pozorovatel při vzájemném přibližování přijímá tón o vyšším kmitočtu a při vzájemném vzdalování přijímá tón o nižším kmitočtu než je vlastní kmitočet zdroje.

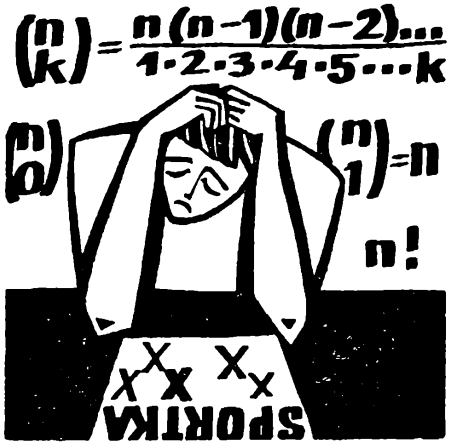
Výška tónu vnímaného pozorovatelem závisí na rychlosti zdroje nebo pozorovatele. Pokud se zdroj a pozorovatel pohybují vůči sobě stálou rychlostí, vnímá pozorovatel tón o konstantní výšce, a to při vzájemném přibližování vyšší, při vzdalování nižší než je skutečný kmitočet zdroje, a ke změně výšky vnímaného tónu dochází jen v okamžiku, kdy pohybující se zdroj míjí klidného pozorovatele nebo pohybující se pozorovatel míjí klidný zdroj.

V obecném případě, kdy pozorovatel je v určité vzdálenosti od dráhy zdroje, se výška tónu vnímaného pozorovatelem snižuje plynule, poněvadž relativní rychlost zdroje vůči pozorovateli se plynule mění.



Obr. 6. Závislost výšky tónu vnímaného pozorovatelem na vzdálenosti x pro různá d.

V Památníku národního písemnictví v Praze byla slavnostně zahájena výstava „Sto devadesát let Státního pedagogického nakladatelství". Ukazuje v historickém vývoji činnost SPN a jeho podíl na rozvoji výchovy a vzdělání našich národů. Výstava potrvá čtyři týdny.



Kto porazil mužstvo E?

MILAN HEJNÝ, VŠD, ŽILINA

Hokejový turnaj hrá 6 mužstiev: A, B, C, D, E a F. Hrá sa systémom „každý s každým jednokolove". Každý deň odohrá každé mužstvo práve jeden zápas, tj. denne tri zápasy. Turnaj bude ukončený behom piatich dní a celkove bude odohratých 15 zápasov. Po každom dni robia novinári tabulku turnaja, v ktorej sú zachytené následovné údaje charakterizujúce postavenie toho ktorého mužstva: body b, skóre s, miesto v tabulke m. Okrem uvedených troch pojmov sú niekedy velmi dôležité ešte tieto dva, a to rozdiel skóre r, tj. počet daných gólov mínus počet obdržaných gólov a podiel skóre p, tj. počet daných gólov delený počtom obdržaných gólov. Preto, aby podiel skóre bolo možné uvažovať za každých okolností, dodefinujeme (výlučne pre potreby uvedeného počítania!)

$$\frac{0}{0} = 1 \text{ a } \frac{n}{0} = \infty$$

pre každé prirodzené n. O symbole ∞ vieme, okrem definičného vzťahu, jedine to, že $\infty > n$, pre každé prirodzené n. Pomocou zavedených symbolov budeme výraz „mužstvo X má 4 body a delí sa o 2. a 3. miesto" písať stručne $b\,(X) = 4$ a $m\,(X) = 2-3$. Treba podotknúť, že podobné výroky musia byť viazané ešte na časový údaj, tj. musí byť buď povedané, alebo z kontextu naprosto jasné, po ktorom hracom dni táto situácia nastala. Upozornime ešte na trochu nezvyčajné užitie výrazu „nižšie a vyššie umiestenie". Ak je $m\,(X) = 1$, znamená to, že mužstvo X je najlepšie, lebo obsadilo prvé miesto, tj. najnižšie miesto. Záverom

pravidlá, podla ktorých sa umiestenie mužstiev prevádza. O mieste mužstva rozhoduje po rade: a) počet bodov, b) rozdiel skóre, c) podiel skóre. Presne povedané (v symbolickom zápise)

$$[b\,(X) > b\,(Y)]$$

alebo

$$[b\,(X) = b\,(Y) \text{ a } r\,(X) > r\,(Y)]$$

alebo

$$[b\,(X) = b\,(Y) \text{ a } r\,(X) = r\,(Y) \text{ a } p\,(X) > p\,(Y)] \Rightarrow m\,(X) < m\,(Y)$$

Ak dve a iba dve mužstvá majú rovnaký počet bodov, rozdiel i podiel skóre a ak naviac hrali už spoločný zápas a ten neskončil nerozhodne, potom lepšie (nižšie) miesto náleží tomu mužstvu, ktoré tento zápas vyhralo. V ostatných prípadoch, kde podla uvedených kritérií neni možné rozhodnúť o poradí mužstiev čo do miesta, delia sa tieto o príslušný počet miest v tabulke. Výslovne poznamenáme, že fakt

$$m\,(X) = 2\text{—}3\text{—}4$$

neslobodno zamieňať s faktom

$$m\,(X) = 3$$

alebo podobne.

Predpokladáme, že čitateľ je oboznámený s pojmami, ktorými sme tu operovali a že má základné znalosti o tvorení športových tabuliek.

Po prvých dvoch dňoch turnaja si chceme urobiť vlastnú tabuľku, pretože novinári ju ešte neuviedli. Potrebujeme teda vedieť, ktoré zápasy sa hrali v I. a II. deň a s akým výsledkom. Ku tomu máme iba kusé informácie:

1. Po prvom dni bolo mužstvo C na štvrtom mieste.
2. Po druhom dni bolo

	b	s	m
A		3 5	5
B		3 : 6	
C		3 y	4
D		6 3	
E	1	x 5	
F	4	6 0	

Úlohu sa nám podarilo rozriešiť a dokonca sme dokázali, že riešenie je jediné. Ak nájdete správnu odpoveď na otázku v nadpise, máte úlohu skoro úplne rozriešenú. Komu by sa zdala úloha príliš náročná, nájde radu na strane 97.

Kolik střelců?

INŽ. MILOSLAVA ŠPAČKOVÁ, Praha

Jako průměrný je označen střelec, který z 10 výstřelů pětkrát zasáhne cíl, dobrým střelcem je ten, který zasáhne cíl v 7 případech z 10 a za výborného platí střelec, který z 10 výstřelů pouze jednou minul cíl. Utvoříme skupiny takové, že v jedné budou pouze střelci průměrní, ve druhé pouze dobří a třetí skupinu budou tvořit výborní střelci. Vaším úkolem je stanovit velikost všech tří skupin, jestliže požadujeme, aby pravděpodobnost zasažení cíle alespoň jedním výstřelem byla nejméně 0,999, tzn., že připustíme pouze v jednom případě z 1000 neúspěch.

Jména správných řešitelů otiskneme.

N á v o d Použijte binomického rozdělení pravděpodobností

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

a platnosti vztahu

$$P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + \quad + P(\xi = n) = 1 ,$$

Rozhledy m.-f., č. 6 a 7, r. 1963/64, str. 258 a 296.

Sčítání, odčítání, násobení, dělení

INŽ. MILOSLAVA ŠPAČKOVÁ, Praha

Sečtením dvou celých kladných čísel dostaneme číslo celé, kladné; odečtením těchto dvou čísel číslo celé, nezáporné. Výsledkem znásobení i vydělení jsou opět čísla celá kladná. Sečteme-li nyní všechny čtyři výsledky, dostaneme číslo 3600, tzn.

součet + rozdíl + součin + podíl = 3600

Dovedete určit taková čísla a zjistit, kolik dvojic vyhovuje těmto podmínkám?

Kto porazil mužstvo E? Rady pre riešiteľa.

Postupujte tak, že budete postupne riešiť úlohy v tomto poradí:

Úloha 1. Určite umiestenie mužstva E po druhom dni.

Úloha 2. Určite umiestenie mužstiev B, D a F po druhom dni.

Úloha 3. Určite počet bodov, ktoré majú mužstvá A, B, C a D po druhom dni; zistite, čomu je rovné x a y.

Úloha 4. Zistite rozlohu bodov po prvom dni.

Úloha 5. Zistite, ktoré zápasy sa hrali v prvom dni.

Úloha 6. Vyriešte príklad do konca.

Pražský pobyt Alberta Einsteina

RUDOLF KOLOMÝ,
Moravská Třebová

V loňském roce 18. dubna jsme vzpomínali 10. výročí úmrtí jednoho z nejslavnějších fyziků všech dob, zakladatele moderních fyzikálních disciplín, tvůrce speciální a obecné teorie relativity, Alberta Einsteina (1879—1955), o němž Lenin psal jako „o velkém přetvořiteli přírodních věd". A vloni v září uplynulo 60 let od vyjití jeho slavné práce K elektrodynamice pohybujících se těles, vyšlé v r. 1905 v 5. sešitě 17. svazku německého vědeckého časopisu Annalen der Physik, která právě dala základ speciální teorii relativity.

Tato rozsahem nevelká práce, čítající všehovšudy 30 stránek textu změnila naprosto naše představy o prostoru a čase, neboť nepovažovala tyto fyzikální veličiny za absolutní jako Newtonova fyzika, ale závislé na rychlosti pohybu. Einsteinova teorie relativizuje nejenom prostorovou a časovou délku, ale i hmotnost. V září 1905 Einstein napsal nevelkou stať, doplnění k první práci o speciální teorii relativity, kde na dvou stranách odvodil známý relativistický vztah mezi hmotou a energií

$$E = mc^2$$

(Ann. d. Phys. 18.639.1905). Vztah mezi hmotností a energií se jeví jedním z důležitých důsledků teorie relativity prověřený s velkou přesností v současné fyzice atomového jádra a elementárních částic.

Tento velký fyzik působil také určitou dobu v Praze.

Pražská universita byla v roce 1882 rozdělena na část českou a německou. Teoretická fyzika koncem 19. století a počátkem 20. století byla na mnoha vysokých školách v Evropě na dosti vysoké úrovni, ale na pražské německé filosofické fakultě — kde se studovaly i přírodní vědy — byla málo pěstována. Proto na počátku ledna 1910 se profesorský sbor jmenované fakulty rozhodl provést některé změny, kterými by se zvýšila úroveň teoretické fyziky. Uchazečů o místo profesora bylo dost, ale vědecká komise se vyslovila pro mimořádného profesora polytechniky v Curychu A. Einsteina. 6. ledna 1911 byl Einstein jmenován profesorem teoretické fyziky německé university v Praze a zároveň vedoucím ústavu teoretické fyziky. Ze Švýcarska odjel koncem března r. 1911 a již v prvním týdnu v dubnu nastoupil místo. Přednášel tři hodiny v Klementinu o mechanice, termodynamice a molekulární teorii. Seminární cvičení konal v ústavu teoretické fyziky ve Viničné ulici v místech dnešního zoologického ústavu KU. Bydlel na Smíchově v tehdejší Třebízského ulici č. 3.

Einstein v té době pracoval na zobecnění teorie relativity — na vytvoření teorie gravitace, která jej zajímala od r. 1906. 10. října 1911 psal svému kolegovi Laubovi:

„Pracuji velmi horlivě, ale bez většího úspěchu, jsem nucen odhazovat téměř vše, co mi přichází do hlavy. Studium gravitace z pozic teorie relativity vyvolává značné obtíže." Rovněž v té době Einstein vytvořil hypotézu, podle které je světelný paprsek v gravitačním poli nucen odchylovat se od přímé dráhy. Požádal astronomy, aby experimentálně prověřili přesným pozorováním vzorec odklonu v době úplného slunečního zatmění. Za tím účelem přijel z Berlína do Prahy prof. Freundlich a nedlouho před začátkem I. světové války odjela do Ruska — kde byly tehdy nejlepší podmínky pro pozorování zatmění — německá vědecká expedice, aby se přesvědčila o správnosti Einsteinova předpokladu. Ale účastníci expedice upadli do zajetí a vrátili se zpět do vlasti bez splněného úkolu. Experimentální prověření uskutečnila s úspěchem anglická expedice v r. 1919.

V době pražského pobytu se Einstein zabýval také výkladem fotoelektrického jevu pozorovaným již koncem 19. století A. G. Stoletovem a odvodil známou fotoelektrickou rovnici.

Jako jinde v Evropě i v Praze byli zuřiví protivníci nových fyzikálních teorií, zejména teorie relativity, jako např. filosof Oscar Kraus, který nejednou podnikl novinářské diskuse o teorii relativity — „cirkusová představení", jak je Einstein nazýval. Jednou koncem ledna 1912 si Einstein postěžoval: „Dnes zase do mne stříleli jako z děla a já jenom drobounké pískové zrno v lidském moři."

Einsteinovy přednášky a semináře byly pro svou vědeckou zajímavost hodně navštěvovány nejen studenty z německé, ale i z české university. Polský matematik Kowalevski vzpomíná, jakým nezapomenutelným dojmem na něho zapůsobila vstupní přednáška A. Einsteina: „Všechna pražská inteligence, jevící zájem o přírodní vědy, se shromáždila a zaplnila největší přednáškovou síň, jaká na filosofické fakultě byla. Einstein působil neobyčejně skromně, a tím si podmanil srdce všech. Hovořil živě, jasně, prostě, přirozeně a s určitou dávkou humoru."

Ve volných chvílích Einstein docházel často do filosofických kroužků. Sem přicházeli též spisovatelé Franz Kafka a Max Brod a hovořilo se o filosofických problémech, rozebírala se Kantova, Hegelova a další filosofická díla nebo se hrály komorní skladby. Na Maxe Broda, pozdějšího biografa Franze Kafky, tato setkání značně zapůsobila, takže Einsteina učinil předlohou hrdinů svých dvou románů.

Za svého působení v Praze, kde tenkrát nebyly nejpříznivější podmínky pro vědeckou práci, Einstein dostal celou řadu pozvání přednášet na zahraničních universitách, např. ve Vídni nebo New Yorku. Rozhodl se pro dřívější působiště Curych, kam se vrátil v srpnu 1912. I když u nás nepobyl dlouho, často později na Prahu a hlavně její studenty rád vzpomínal.

DOC. Dr. M. MENŠÍK

Geometrické základy fotogrammetrie

V matematické knižnici *Pomocné knihy pro žáky* vydalo letos Státní pedagogické nakladatelství *Geometrické základy fotogrammetrie* doc. dr. Menšíka. Tato vkusně vybavená knížka má 152 stran, 89 vzorně provedených obrázků, 2 přílohy (brýle a anaglyf leteckého snímku krajiny) a stojí 9,50 Kčs.

Autor — dlouholetý pracovník ve fotogrammetrii — vysvětluje v úvodu podstatu a vývoj fotogrammetrie, jakožto nauku zjišťující z fotografických snímků tvar, rozměr i polohu určitého objektu v prostoru. Další dvě kapitoly věnuje základům projektivní geometrie a středového promítání, jimž musí čtenář rozumět, aby pochopil podstatu vykládaných metod, ať již jednosnímkové nebo vícesnímkové.

V hlavní stati seznamuje autor v kapitole o jednosnímkových metodách čtenáře, po vysvětlení prvků vnitřní i vnější orientace snímku, s principem fototheodolitu, provádí rekonstrukci vodorovného a později i šikmého snímku, popisuje a vysvětluje vkreslení plánovaného objektu do fotografického snímku. V dalších odstavcích mluví o leteckých snímcích, svislých i šikmých, s praktickým využitím sítí. Pak jsou popisovány inverzory, překreslovač i obkreslovač. Při vícesnímkových metodách je vyložena metoda průseková, vysvětleno stereoskopické vidění, anaglyfy, stereoskop, stereokomparátor a nakonec i stereoautograf.

Všechny výklady jsou provedeny logicky i odborně přesně, matematicky i geometricky, přitom velmi srozumitelně, střízlivě věcně a jejich pochopení je usnadněno vhodnými snímky. Osvěžením při četbě jsou ukázkové příklady, někdy i se špionážní příchutí (str. 68), jindy opět z dalekých krajin egyptských velechrámů nebo sovětských velehorských ledovců.

Pro středoškolského učitele i jeho žáky má Menšíkova knížka dvojí užitek. Jednak se zde seznámí s moderními geometrickými metodami prováděnými strojově, hlavně však si tu zopakuje, resp. osvojí základní poznatky perspektivy.

Z uvedených důvodů doporučuji Menšíkovu knížku učitelům SVVŠ, zájmovým kroužkům na středních školách i jejich knihovnám a všem, kdo se zajímají o tuto moderní geometrickou disciplínu.

Doc. Ota Setzer

MATEMATIKA

O rekurentních posloupnostech

INŽ. JAROMÍR HRONÍK, VUT, Brno

Základy teorie rekurentních posloupností byly položeny v 18. století Moivrem, Danielem Bernoullim a zvláště Eulerem, který věnoval tomuto tématu jednu kapitolu svého díla *Úvod do analýzy nekonečně malých veličin*. V dnešní době tvoří toto téma důležitou součást diferenčního počtu, který zaujímá významnou úlohu v teorii a praxi numerického počítání.

Co je to *rekurentní posloupnost?* Tímto názvem rozumíme posloupnost, kde n-tý člen se dá vyjádřit jako lineární kombinace členů předcházejících. To znamená, že od určitého indexu $n > k$ je libovolný člen posloupnosti určen vztahem

$$a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \ldots + p_k a_{n-k}\,, \qquad (1)$$

kde p_1, p_2, p_k jsou určité konstanty. Z toho je patrné, že u rekurentní posloupnosti se n-tý člen dá vždy vyčíslit pomocí k známých předcházejících členů. Odtud též název „rekurentní" (z franc. récurrent — vracející se).

Dá-li se n-tý člen posloupnosti vyjádřit jako nějaký násobek jediného těsně předcházejícího členu, mluvíme o *rekurentní posloupnosti prvního řádu*. Je-li n-tý člen posloupnosti lineárně závislý na dvou bezprostředně předcházejících členech, hovoříme o *rekurentní posloupnosti druhého řádu* atd.

Příklad na rekurentní posloupnost prvního řádu je známá posloupnost geometrická. O ní víme, že každý její člen je konstantním násobkem členu předcházejícího, tedy

$$a_n = q \cdot a_{n-1} .$$

Rekurentní posloupnost druhého řádu je posloupnost aritmetická. Z její vlastnosti vyplývá, že rozdíl dvou bezprostředně po sobě následujících členů je stále konstantní a rovná se diferenci, tj.

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} .$$

Z této rovnice vychází ihned pro $n > 2$ rekurentní vztah

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} .$$

Podobně posloupnost Fibonacciových čísel, o které bylo již podrobněji pojednáno v Rozhledech (roč. 43), patří mezi *rekurentní posloupnosti druhého řádu.*

Jako další příklad probereme si posloupnost druhých mocnin přirozených čísel

$$1, 4, 9, 16, 15, 36, 49,$$

Je to *rekurentní posloupnost třetího řádu,* neboť se dá (pro $n > 3$) vyjádřit vztahem

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} .$$

Důkaz

$$a_n = n^2 ,$$

$$a_{n-1} = (n-1)^2 = a_n - 2n + 1 \qquad (2)$$

Snížíme-li index o jedničku, obdržíme

$$a_{n-2} = a_{n-1} - 2(n-1) + 1 = a_{n-1} - 2n + 3 . \qquad (3)$$

Odečteme-li od rovnice (3) rovnici (2), dostáváme

$$a_{n-2} - a_{n-1} = a_{n-1} - a_n + 2 ,$$

čili

$$a_{n-2} = 2a_{n-1} - a_n + 2 \qquad (4)$$

Snížíme-li n opět o jedničku, budeme mít

$$a_{n-3} = 2a_{n-2} - a_{n-1} + 2 \qquad (5)$$

Odečteme-li od rovnice (5) vztah (4), získáme

$$a_{n-3} - a_{n-2} = 2a_{n-2} - 3a_{n-1} + a_n .$$

Z toho

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} ,$$

čímž je důkaz proveden.

Je třeba zdůraznit, že tímto rekurentním vztahem není určena jen uvažovaná posloupnost čtverců přirozených čísel, ale nekonečně mnoho posloupností. Abychom obdrželi právě naši žádanou posloupnost, mu-

síme zvolit první tři členy: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$. Všechny další členy vyplynou již z odvozené rekurentní rovnice.

Jako další příklad probereme si posloupnost sestavenou z čísel vyjadřujících počet úhlopříček v mnohoúhelnících. Je to posloupnost

$$2, 5, 9, 14, 20, 27, 35,$$

která je dána obecným vzorcem

$$a_n = \binom{n}{2} - n = \frac{n\,(n-3)}{2} \quad (\text{pro } n > 3)$$

Je

$$a_n = \frac{n^2 - 3n}{2}, \tag{6}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)\,.\,(n-2)}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}, \tag{7}$$

$$a_{n+2} = \frac{(n+2)\,.\,(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n - 2}{2}, \tag{8}$$

$$a_{n+3} = \frac{(n+3)\;\;n}{2} = \frac{n^2 + 3n}{2} \tag{9}$$

Sečteme-li rovnice (6) a (9) a rovněž rovnice (7) a (8), obdržíme

$$a_n + a_{n+3} = n^2,$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} = n^2 - 2$$

Po odečtení těchto rovnic dostáváme

$$a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 2 \tag{10}$$

Zvětšíme-li v této rovnici index o jedničku, obdržíme

$$a_{n+4} - a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+1} = 2 \tag{11}$$

Konečně odečteme od rovnice (11) rovnici (10) a získáme

$$a_{n+4} - 2a_{n+3} + 2a_{n+1} - a_n = 0,$$

neboli

$$a_{n-4} = 2a_{n+3} - 2a_{n+1} + a_n \tag{12}$$

Uvažovaná posloupnost se dá rovněž vyjádřit rovnocenným rekurentním předpisem [jestliže ve vztahu (12) píšeme n místo $n + 4$]

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-3} + a_{n-4}\,.$$

Vidíme, že je to rekurentní posloupnost čtvrtého řádu. Koeficient u $(n - 2)$-hého členu je roven nule.

Zabývejme se dále posloupnostmi, utvořenými z částečných součtů libovolných rekurentních posloupností. Dá se snadno ukázat, že po-

sloupnost utvořená z částečných součtů nějaké rekurentní posloupnosti k-tého řádu je opět rekurentní, a to řádu $(k + 1)$-ního. Přesvědčme se o tom v následujících úvahách:

Mějme posloupnost

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n ,$$

která vyhovuje rekurentní rovnici k-tého řádu

$$a_n = p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-2} + \quad + p_k a_{n-k} \tag{1}$$

Sestavme posloupnost částečných součtů

$$S_1 = a_1 ,$$
$$S_2 = a_1 + a_2 ,$$

$$\vdots$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \quad + a_{n-1} ,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \quad + a_{n-1} + a_n$$

Z předchozích rovnic vyplývá, že

$$a_1 = S_1 ,$$
$$a_2 = S_2 - S_1 ,$$

$$a_{n-1} = S_{n-1} - S_{n-2} ,$$
$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do rekurentní rovnice (1), dostáváme

$$S_n - S_{n-1} = p_1 (S_{n-1} - S_{n-2}) + \quad + p_{k-1} (S_{n-k+1} - S_{n-k}) + \\ + p_k (S_{n-k} - S_{n-k-1})$$

Z toho

$$S_n = (1 + p_1) S_{n-1} + (p_2 - p_1) S_{n-2} + \quad + (p_k - p_{k-1}) \cdot S_{n-k} - \\ - p_k \cdot S_{n-k-1} ,$$

což je rekurentní rovnice $(k + 1)$-ního řádu.

Podle tohoto vztahu můžeme rekurentně vyjádřit posloupnost částečných součtů geometrické, aritmetické, popřípadě i dalších posloupností.

Poněvadž geometrická posloupnost vyhovuje rekurentní rovnici

$$a_n = q a_{n-1} ,$$

musí posloupnost částečných součtů vyhovovat rovnici

$$S_n = (1 + q) S_{n-1} - q \cdot S_{n-2} \tag{13}$$

U aritmetické posloupnosti, která vyhovuje rekurentnímu vztahu

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} ,$$

je posloupnost částečných součtů vyjádřena rovnicí

$$S_n = 3S_{n-1} - 3S_{n-2} + S_{n-3} \tag{14}$$

Posloupnost částečných součtů čtverců přirozených čísel je určena rekurentně vztahem

$$S_n = 4S_{n-1} - 6S_{n-2} + 4S_{n-3} - S_{n-4} \tag{15}$$

Posloupnost částečných součtů utvořená z posloupnosti, vyjadřující počet úhlopříček v mnohoúhelnících, je dána rekurentním vztahem pátého řádu

$$S_n = 3S_{n-1} - 2S_{n-2} - 2S_{n-3} + 3S_{n-4} - S_{n-5} \tag{16}$$

[Vztahy (13) až (16) nechť se čtenář pokusí dokázat sám!]

Závěrem je třeba připomenout, že každou posloupnost nemůžeme zařadit mezi rekurentní. Rekurentní není např. posloupnost převratných hodnot celých čísel, posloupnost druhých odmocnin přirozených čísel nebo posloupnost prvočísel, která se svými hluboce složitými vlastnostmi je dodnes předmětem studií v teorii čísel.

Literatura: A. I. Markuševič, Rekurentní posloupnosti.

Oprava. V č. 1 na str. 2, 10. řádka, budiž $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, $\binom{n}{4}$; na str. 3, 2. řádka místo „roven nejvýše“ budiž „menší než“ (což platí až do konce článku).

O aritmetických posloupnostech, jejímiž členy jsou prvočísla

JIŘÍ ŠUBRT, KU, Praha

Položme si otázku, zda existuje aritmetická posloupnost o libovolném konečném počtu k členů, z nichž každý je prvočíslo.

Předpokládejme, že existuje aspoň jedna posloupnost, mající tuto vlastnost. Dokážeme, že diference d této konečné posloupnosti o k členech je dělitelna součinem všech prvočísel menších než k.

Důkaz. Členy této posloupnosti označme $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (k - 1)d$, kde d je diference.

Zvolme libovolné prvočíslo p, vyhovující podmínkám:

1. $p \leqq a$,
2. $p > k$, čili $p \leqq k - 1$.

Posloupnost má tedy nejméně $p + 1$ členů.

Jestliže každý člen z prvních p členů dělíme číslem p, dostaneme zbytky $r_1, r_2, \ldots, r_p$, přičemž platí

$$0 \leqq r_i \leqq p - 1$$

kde $i = 1, 2, \ldots, p$.

Podle podmínek jsou všechny členy posloupnosti prvočísla různá od p, jedině první člen posloupnosti by mohl být roven p. Kdyby však první člen posloupnosti byl roven p, pak by $(p + 1)$-ní člen a_{p+1} byl složeným číslem, neboť

$$a_{p+1} = a + pd = a + ad = a(d + 1) .$$

Proto $r_i \neq 0$ pro všechna i $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Poněvadž tedy $1 \leqq r_i \leqq p - 1$ a všech zbytků je p, musí aspoň dva zbytky být stejné.

Nechť tedy

$$r_m = r_n = r ,$$

kde $m < n$.

Pak platí

$$a_m = a + (m - 1)\, d\,,\ a + (m - 1)\, d = sp + r\,, \tag{1}$$

$$a_n = a + (n - 1)\, d\,,\ a + (n - 1)\, d = tp + r \tag{2}$$

Odečteme-li první rovnici od druhé, obdržíme

$$(n - m)\, d = (t - s)\, p\,. \tag{3}$$

Pravá strana rovnice (3) je dělitelna číslem p; musí tedy číslem p být dělitelna i strana levá. Poněvadž číslo $n - m$ je přirozené číslo menší než p, nemůže být dělitelno číslem p; číslem p musí být dělitelno číslo d. Poněvadž však číslo p je libovolné prvočíslo menší než k, musí být číslo d dělitelno všemi prvočísly menšími než k, čili jejich součinem. Tím je důkaz proveden.

Posloupnost uvedených vlastností existuje. Je jí např. posloupnost o šesti členech, z nichž každé je prvočíslo: 23, 263, 503, 743, 983, 1223. Jak patrno, $d = 240$. Musí tedy d být dělitelno číslem $2 . 3 . 5 = 30$.

Ačkoli nebylo dokázáno, že existují posloupnosti uvedených vlastností o libovolném konečném počtu k členů, přece můžeme uvést několik dalších příkladů takových posloupností.

Posloupnost o členech 13, 43, 73, 103 má 4 členy, z nichž každý je prvočíslo. Její diference d musí být dělitelna součinem všech prvočísel menších než 4, tj. číslem $2 . 3 = 6$, $d = 30 = 6 . 5$.

Posloupnost o členech 10 651, 10 711, 10 771, 10 831, 10 891 má $d = 60$, $k = 5$; d je dělitelno číslem $2 . 3$.

Posloupnost o členech 13, 103, 193, 283, 373, 463 má $d = 90$, $k = 6$; $90 = 2 . 3 . 5 . 3$.

Nejvíce členů z dosud známých aritmetických posloupností složených ze samých prvočísel má 12členná posloupnost s prvním členem $a = 23\,143$ a diferencí $d = 30\,030$.

Je to posloupnost těchto čísel: 23 143, 53 173, 83 203, 113 233, 143 263, 173 293, 203 323, 233,353, 263 383, 293 413, 323 443, 353 473.

Diference $d = 30\,030 = 2\ 3\ 5\ 7 . 11\ 13$. Poněvadž posloupnost má 12 členů, musí být diference d dělitelna číslem $2 . 3 . 5\ 7 . 11 = 2310$; $d = 2310 . 13$.

Pro zajímavost ještě uveďme. Kdybychom chtěli utvořit aritmetickou posloupnost o 100 členech, jejímiž členy by byla vesměs prvočísla, pak diference této posloupnosti, existuje-li ovšem, by byla násobkem součinu všech prvočísel menších než 100. Součin všech prvočísel menších než 100, označme P. Pak

$$P = 2\ 3 . 5\ 7\ 11\ 13\ 17\ 19 . 23 . 29\ 31 . 37 . 41$$
$$43 . 47 . 53 . 59\ 61\ 67\ 71\ 73 . 79\ 83 . 89\ 97$$

Označme součin prvočísel větších než 10 a menších než 100 písmenem Q. Dostáváme

$$P = 210\ Q$$

Prvočísel větších než 10 a menších než 100 je 21.

Platí proto

$$Q > 10^{21} \text{ a } P > 210\ 10^{21} > 10^{23}$$

Diference by byla dělitelna číslem, které by mělo nejméně 24 číslic. Číslo samo by také mělo nejméně 24 číslic.

Závěrem upozorňuji čtenáře, kteří se zajímají o podobné otázky, na knížku *W. Sierpińského:* O stu prostych, ale trudnych zagadnieniach arytmetyki, Warszawa 1959.

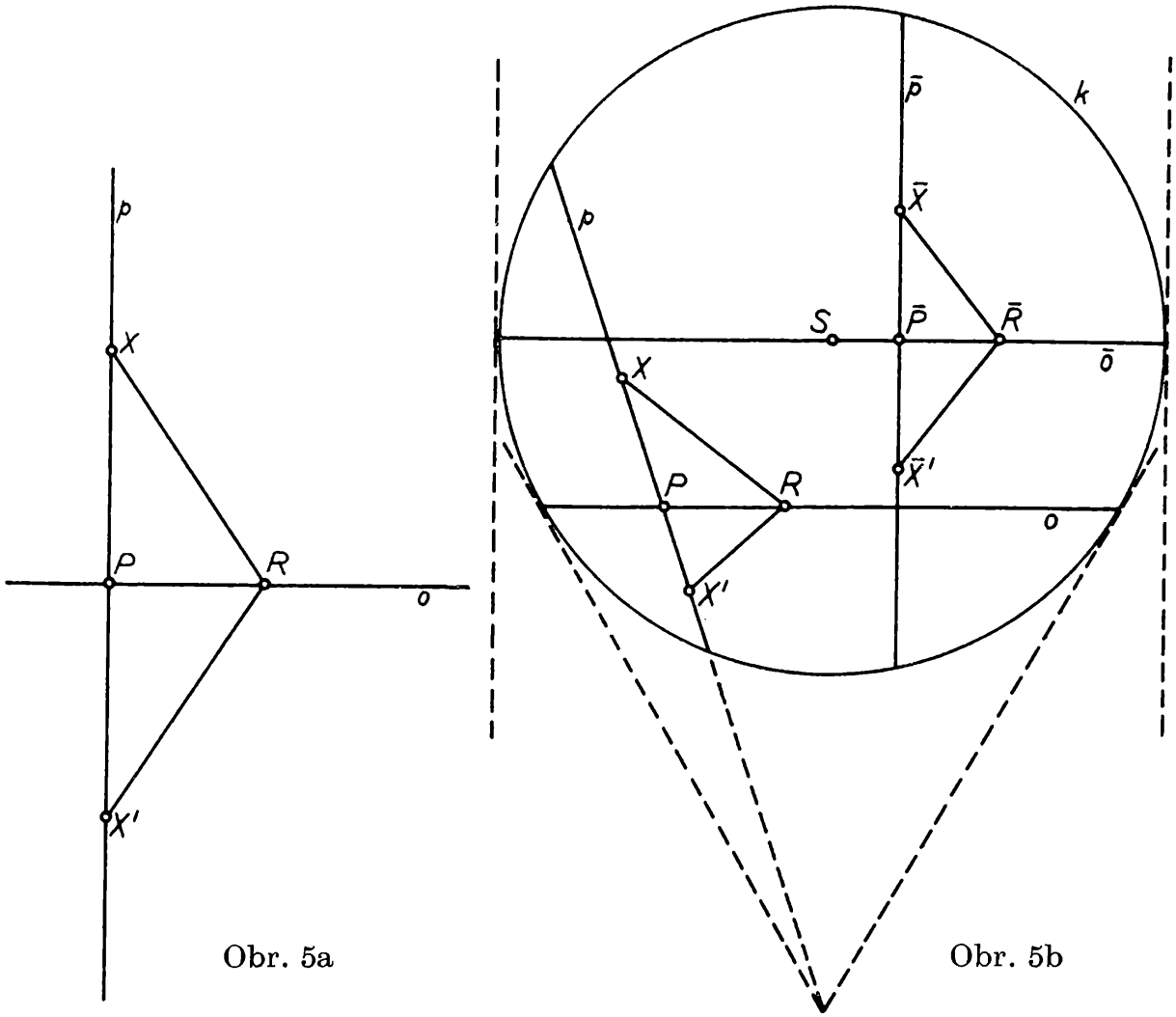
Nový pohled na geometrii

JOSEF KATEŘIŇÁK, VŠD, ŽILINA (Dokončení)

Všimneme si ještě pojmů kolmosti přímek a shodnosti útvarů v obou planimetriích. Budeme přitom vycházet ze známých názorných představ pojmů planimetrie Euklidovy, vyslovíme definice těchto pojmů pomocí nedefinovaných pojmů, a ukážeme jejich názornou představu v planimetrii Lobačevského.

Na obr. 5a je v planimetrii Euklidově narýsována přímka p kolmá k přímce o. Podle této názorné představy pojmu kolmosti přímek vyslovíme jeho definici.

D e f i n i c e 1. Přímka *p kolmá k přímce o* (značíme $p \perp o$) je přímka mající s o jediný společný bod P, pro kterou platí: Existuje bod $R \neq P$ na o a body X, X' na p tak, že je mezi X, X' a úsečky PX, RX jsou shodné s úsečkami PX', RX'



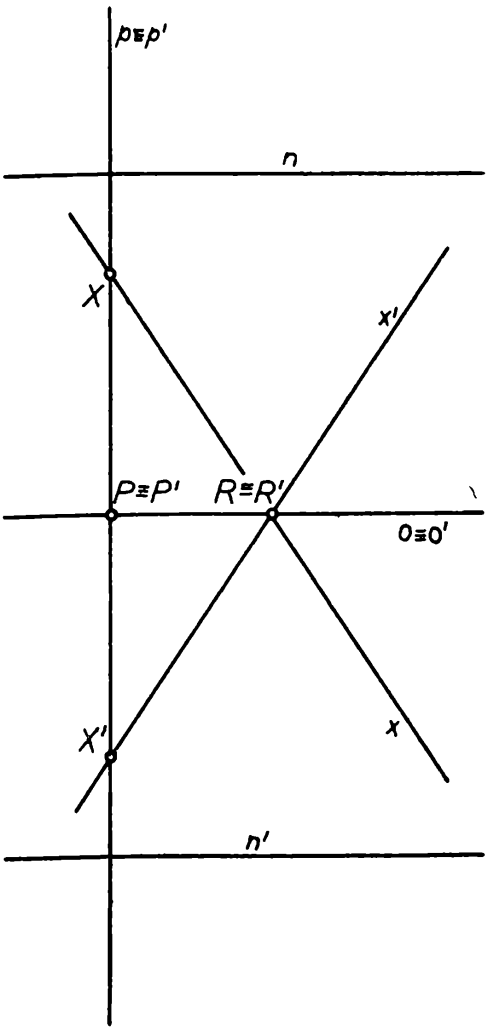
Obr. 5a

Obr. 5b

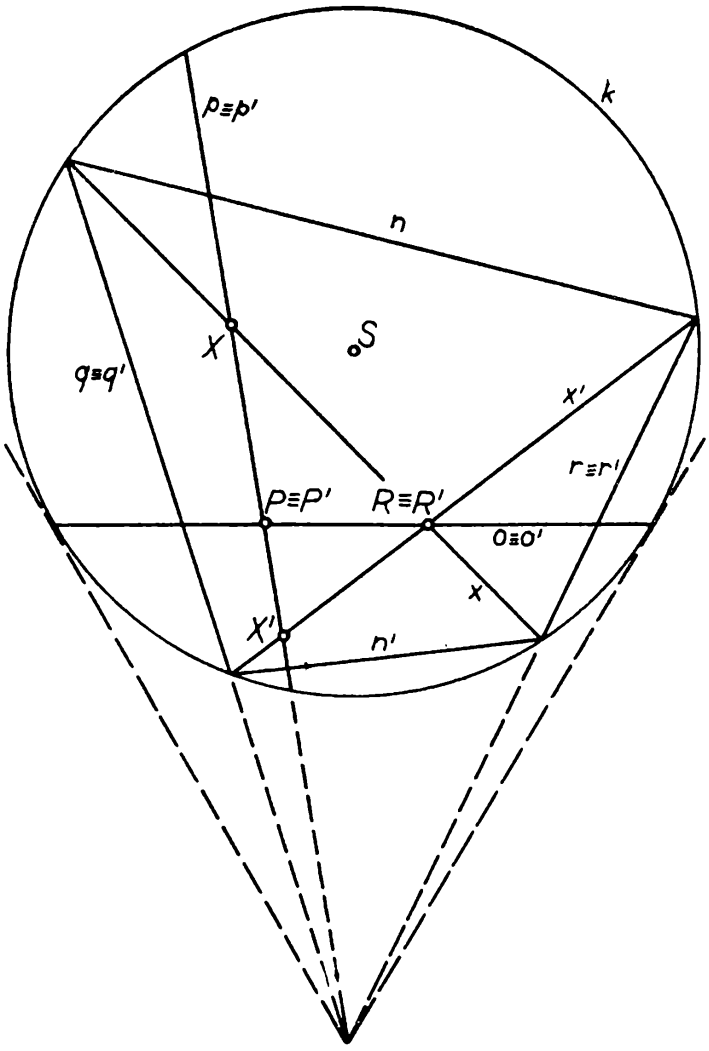
Na obr. 5b jsou v planimetrii Lobačevského narýsovány přímky $p \perp o$ a $\bar{p} \perp \bar{o}$ ($\bar{o}$ obsahuje S, kdežto o nikoliv). Nebudeme zde dokazovat, že tato názorná představa vyhovuje definici 1. Doporučuji však čtenáři, aby si sám podle obr. 5b a 3b ověřil, že narýsované body P, R, X, X' (resp. $\bar{P}$, $\bar{R}$, $\bar{X}$, $\bar{X}'$) splňují definici 1.

Útvarem budeme rozumět každou množinu bodů, která obsahuje aspoň dva různé body. V planimetrii Euklidově si útvar **U** shodný s útvarem **U'** názorně představujeme takto: Přeneseme-li **U** na průsvitný papír, potom tento průsvitný papír lze položit tak, že **U** splyne s **U'** Popsaným způsobem jsme bodům X útvaru **U** vzájemně jednoznačně přiřadili body X' útvaru **U'** Přitom pro každé dva různé body X, Y útvaru **U** a jim přiřazené různé body X', Y' útvaru **U'** je úsečka XY shodná s úsečkou $X'Y'$ Podle této názorné představy pojmů shodnosti dvou útvarů vyslovíme jeho definici.

D e f i n i c e 2. *Útvar* **U** *je shodný s útvarem* **U'** (značíme $\mathbf{U} \cong \mathbf{U}'$), když existuje zobrazení útvaru **U** *na* útvar **U'**, které každým dvěma



Obr. 6a



Obr. 6b

různým bodům X, Y útvaru **U** přiřazuje dva různé body X', Y' útvaru **U'** tak, že úsečka XY je shodná s úsečkou $X'Y'$ Takové zobrazení nazýváme *shodné zobrazení útvaru* **U** *na útvar* **U'**

Připomínám čtenáři, že pojem zobrazení množiny *na* množinu je vysvětlen v učebnici Matematika pro II. ročník SVVŠ, vydané SPN v Praze, r. 1964, str. 23—25.

Abychom si dovedli názorně představit shodné útvary, ukážeme si jednoduchý příklad shodného zobrazení roviny *na* rovinu, které nazýváme *souměrnost podle osy.* Při shodném zobrazení roviny *na* rovinu pak kterýkoliv útvar **U** je shodný se svým obrazem **U'** (**U'** je množina obrazů všech bodů útvaru **U.**)

Pojem souměrnosti podle osy v planimetrii Euklidově je vysvětlen v učebnici Matematika pro I. ročník SVVŠ, vydané SPN v Praze r. 1964, str. 188—193. Osová souměrnost má tyto vlastnosti (obr. 6a):

a) Osová souměrnost je určená osou souměrnosti. Je-li dána osa souměrnosti o, potom k libovolnému bodu X (vzoru) umíme sestrojit souměrně sdružený bod X' (obraz bodu X).

b) Body na ose jsou samodružné, tj. obrazem každého bodu R na přímce o je bod $R' \equiv R$.

c) Úsečka spojující dva souměrně sdružené body (neležící na ose souměrnosti) je na osu kolmá a je osou rozpůlena, tj. obrazem každého bodu X neležícího na přímce o je bod $X' \neq X$ a oba body leží na jedné přímce p kolmé k o. Přitom společný bod P přímek p a o je mezi body X, X' a úsečka PX je shodná s úsečkou PX'

d) Souměrně sdružené přímky se na ose protínají, nebo nemají s osou společné body, nebo splývají, tj. obrazem každé přímky je vždy přímka.

Užitím vlastností a), b), c), d) a obr. 5b jsou v planimetrii Lobačevského na obr. 6b narýsovány obrazy jednotlivých bodů a útvarů při souměrnosti podle přímky o neobsahující S. Případ, kdy o obsahuje S, přenechávám čtenáři.

Čtenáři snad napadá otázka, které geometrie se má užívat v praxi. Současná praxe ukazuje, že při řešení některých úkolů, zejména ve fyzice, je výhodnější užívat jiné geometrie než Euklidovy.

K zobecnění Pythagorovy věty

KAREL DRÁBEK, ČVUT, Praha

Pro libovolný obecný trojúhelník můžeme dokázat větu obdobnou Pythagorově větě pro pravoúhlý trojúhelník.

Strany daného trojúhelníka označme tak, že pro ně platí

$$c \geqq a\,,\ c \geqq b$$

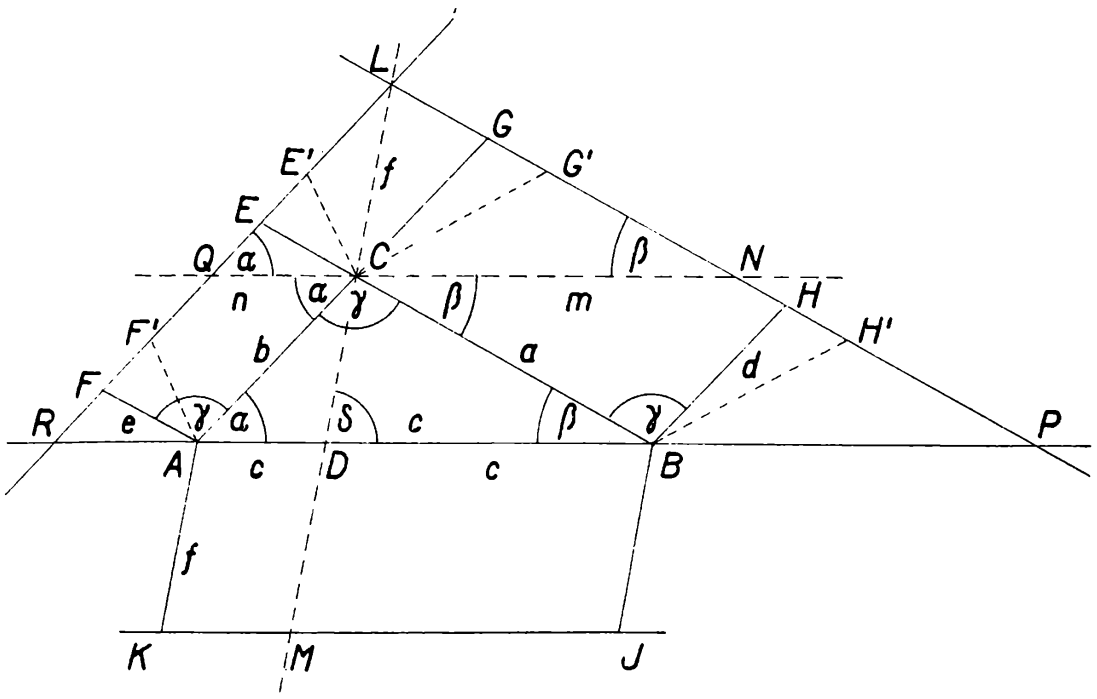
a sestrojme pak nad stranami a, b rovnoběžníky $ACEF$, $BCGH$ tak, že CE je v prodloužení strany BC a CG v prodloužení strany AC. Nad stranou c určeme rovnoběžník $AKJB$ (obr. 1) podle této konstrukce:

Je-li L průsečík stran (popřípadě prodloužených) EF, GH, pak přímka LC protíná stranu AB v bodě D.

Označíme-li nyní ještě

$$d = BH = CG\,,\ e = AF = CE\,,\ f = CL\,,$$

pak rovnoběžník $ABJK$ nad stranou $c = AB$ má stranu $AK \parallel CL \parallel BJ$, přičemž $AK = BJ = f$.



Obr. 1 ($AD = c_2$, $BD = c_1$ místo c)

Stanovme ještě na přímce CL bod M v průsečíku se stranou KJ sestrojeného rovnoběžníka a označme

$$AD = KM = c_2\,,\ BD = JM = c_1$$

Potom platí:

Součet obsahů zvolených rovnoběžníků nad stranami a, b daného trojúhelníka ABC je rovný obsahu rovnoběžníka sestrojeného (výše popsaným způsobem) *nad stranou c.*

D ů k a z. Pro obsah P_1 rovnoběžníka $BCGH$ nad stranou a máme

$$P_1 = ad \sin \gamma$$

Je-li m délka úsečky na přímce vedené bodem C rovnoběžně se stranou AB naměřená od bodu C k průsečíku N se stranou GH (popřípadě prodlouženou), pak obsah rovnoběžníka $BCNP$ je roven obsahu P_1 rovnoběžníka $BCGH$. Pro vyjádření obsahu P_1 máme tedy také

$$P_1 = am \sin \beta\,.$$

Z podobných trojúhelníků LCN a CDB obdržíme úměru

$$m \quad f = c_1 \quad CD\,,$$

odtud vypočteme

$$m = \frac{fc_1}{CD}$$

Protože pro obsah výsledného rovnoběžníka máme

$$P_3 = cf \sin \delta\,,$$

kde δ je úhel přímky LC s přímkou AB, získáme použitím sinové věty pro trojúhelník BCD

$$a \sin \beta = CD \sin \delta$$

Pro obsah P_1 rovnoběžníka $BCGH$ máme tedy postupně

$$P_1 = ad \sin \gamma = am \sin \beta = a \frac{fc_1}{CD} \sin \beta = fc_1 \sin \delta$$

Podobně pro obsah P_2 rovnoběžníka $ACEF$ dostaneme stejným postupem, že

$$P_2 = fc_2 \sin \delta$$

Sečtením obsahů P_1, P_2 obou rovnoběžníků obdržíme

$$P_1 + P_2 = f(c_1 + c_2) \sin \delta = cf \sin \delta = P_3,$$

čímž je důkaz proveden.

Z prováděného důkazu je zároveň vidět, že obsah P_1 rovnoběžníka $BCGH$ je rovný obsahu rovnoběžníka $BDJM$ a podobně obsah rovnoběžníka $ACEF$ je rovný obsahu rovnoběžníka $ADMK$.

Z důkazu je dále zřejmo, že jsme mohli uvažovat nad stranami AC, BC zcela libovolné rovnoběžníky (v obr. 1 označené $ACE'F'$ a $BCG'H'$), proto můžeme nad stranami AC, BC sestrojit také obdélníky. Rovnoběžník nad stranou AB o obsahu rovném součtu těchto obdélníků lze převést na obdélník nad stranou AB o stejném obsahu. Proto je také možné sestrojit nad stranami AC, BC čtverce a stanovit nad stranou AC obdélník s obsahem rovným součtu obsahů čtverců nad těmito stranami.

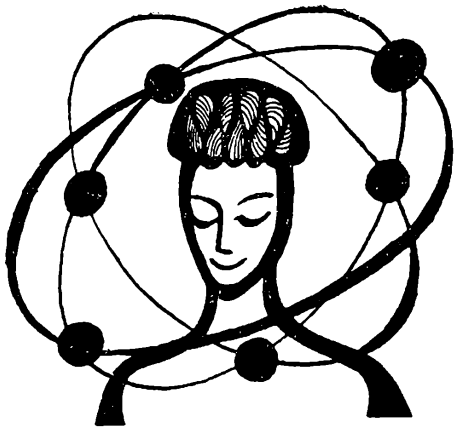
Pro pravoúhlý trojúhelník při volbě čtverců nad stranami a, b dostáváme při popsané konstrukci právě Pythagorovu větu.

JAK NA TO?

Frantík Snaživý, takto studující SVVŠ v Praze, byl o prázdninách na brigádě u pražského Dopravního podniku. Za peníze, které získal prodejem jízdenek, musel každý den kupovat jízdenky nové. A tak jednou koupil lístky za 270 Kčs a platil jen papírovými penězi. Byly to bankovky čtyř různých hodnot, ale vždy stejný počet od každého druhu. Dovedli byste říci, jakými bankovkami platil?

S. H.

MLADÝM MATEMATIKŮM



FYZIKA

Zobrazení svazkem vláken

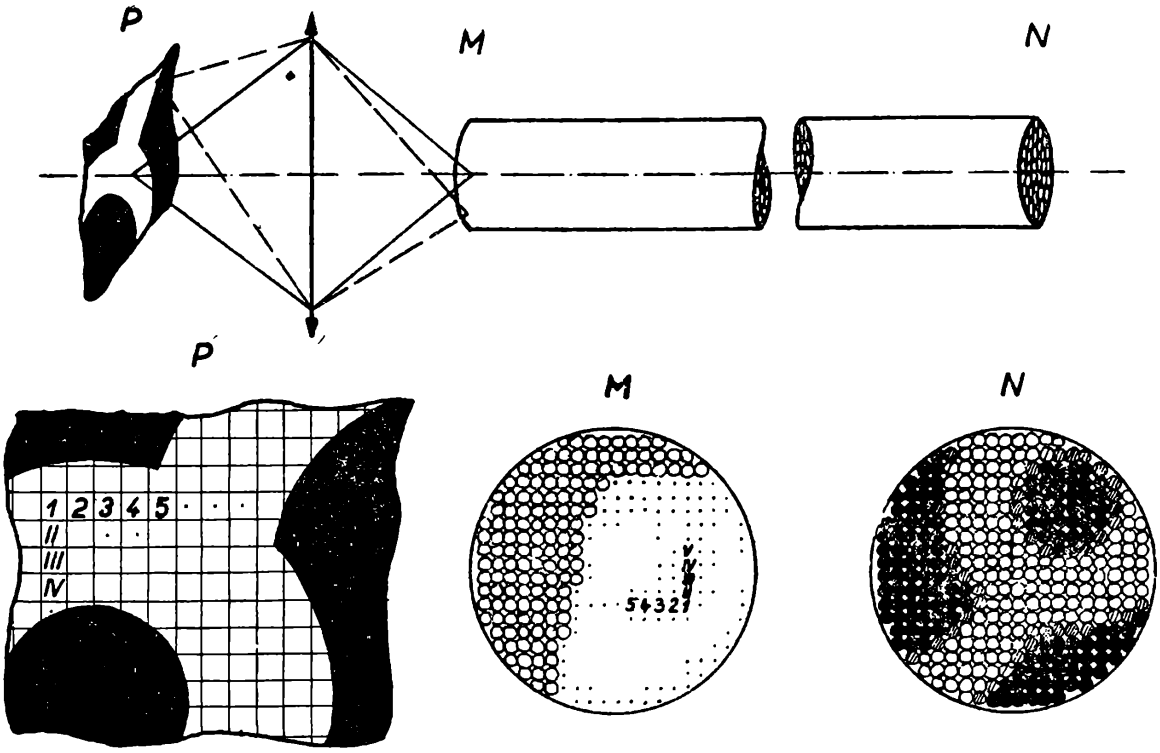
ANTONÍN MARTOCH, UP, Olomouc

(Pokračování)

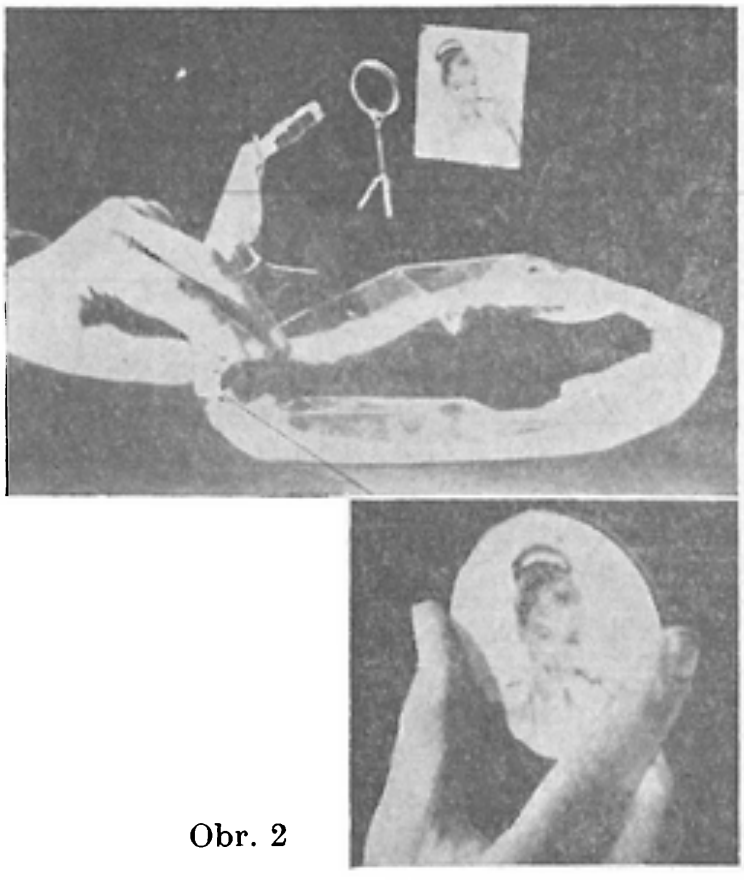
V článku Vláknová optika I. Světlovodivá tyč v minulém čísle Rozhledů autor ukázal, jakým způsobem a jakými zákony se řídí průchod světla kruhovou skleněnou tyčí v jejím podélném směru. Připomeňme, že světelný paprsek dopadající na přední čelo tyče prochází touto tyčí a druhým čelem vychází ven. Tato vlastnost zůstává zachována také pro tyče o velmi malém průměru, řádově setiny milimetru (několikrát tenších než vlas), jimž říkáme *vlákna*.

Probereme si podrobně princip vytváření optického obrazu pomocí svazků vláken (tj. souborů rovnoběžně uspořádaných vláken stejné délky). Nejprve si pro názornost upravíme zobrazovaný předmět. Představme si, že je rozdělen svislými a vodorovnými přímkami na čtverečky tak malé, že je oko už nerozezná. Ačkoliv v každém čtverečku jsou zpravidla místa světlá i tmavá, oko vnímá jen jejich průměr (směs). Světelný průměr každého čtverečku je jakýmkoliv způsobem (kontaktem, čočkou) přenášen na jednotlivá čela vláken. Vlákna jej převedou na druhý konec, kde se vytvoří obraz.

V horní části obr. 1 je schematicky podán princip přenosu obrazu svazkem vláken. Ve spodní části je jednoduchý předmět P rozdělený na čtverečky, jež obsahují plošky světlé i tmavé. Každý čtvereček je jednoznačně určen dvěma čísly. Podobně každé vlákno vstupního čela svazku M je určeno dvěma čísly. Zobrazení je tedy přesně definováno. Na výstupním čele svazku N je vidět obraz



Obr. 1



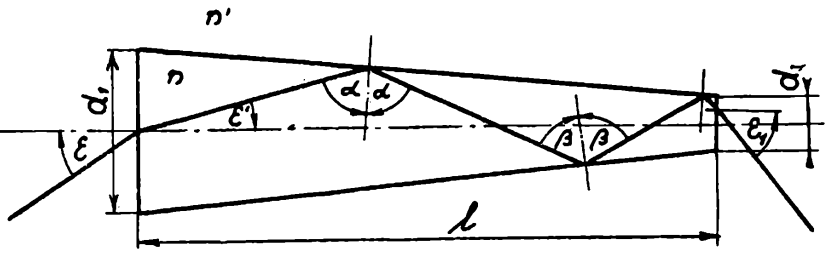
Obr. 2

předmětu, přenesený svazkem vláken. Obraz je mnohonásobně zvětšen, proto vidíme zrníčkovou strukturu, kterou normálně oko nerozezná.

Zpravidla rozměr předmětu a průměr svazku nebývají stejné a zobrazovací čočka buď zvětšuje nebo zmenšuje. Je-li rozměr předmětu a průměr svazku přibližně stejný, můžeme průhledný předmět přitisknout přímo na čelo svazku vláken (kontakt). Zobrazení je kvalitnější, poněvadž do zobrazení nejsou zaváděny čočkou žádné optické vady (např. otvorová vada).

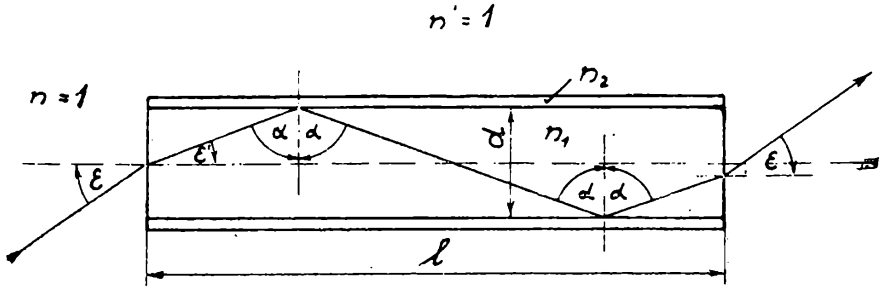
Světlo prochází nejen vláknem přímým, ale i ohnutým, čehož se využívá pro pozorování dějů „za rohem“ Proto jsou

Obr. 3



Obr. 4

Obr. 5



vlákna chráněna gumovým obalem (hadičkou) a lze je nejen ohýbat, ale i zauzlovat. Obr. 2 ukazuje svazek vláken v silonovém pytlíku přenášející portrét ženy. Diapozitiv je zobrazován čočkou na vstupní čelo svazku a na jeho druhém konci pozorujeme zvětšený obraz. Vlastnosti vedení světla ohebným svazkem využívají např. lékaři při prohlížení tělních dutin člověka (žaludku, střev, ledvin, srdce).

Kromě vláken ve tvaru válce existují i vlákna ve tvaru komolého kužele. Obr. 3 ukazuje vlákno délky l, které je zakončeno na jednom konci čelem o průměru d_1 a na druhém konci čelem o průměru d_2. Snadno se lze přesvědčit, že světlo může procházet oběma směry. Většímu průměru d_1 přísluší menší dopadový úhel ε a naopak. Z tvaru tohoto vlákna vysvítá, že jej můžeme použít ke zvětšování nebo zmenšování světelných plošek, tedy ke zvětšování nebo zmenšování obrazů.

Svazky komolých vláken se nazývají *fokony* a slouží jako objektivy se zvětšením rovným poměru obou čel

$$\Gamma = \frac{d_1}{d_2}$$

Zobrazení pomocí fokonů je v mnoha případech lepší než čočkovými objektivy. Obr. 4 ukazuje použití fokonu pro zobrazení písma.

Závěrem nutno ještě připojit důležitou poznámku. Víme, že vlákna ve svazku jsou k sobě přitisknuta. Dopadne-li světelný paprsek zrovna na hranici mezi dvěma vlákny, nenastane úplný odraz, ale paprsek přejde do druhého vlákna. Tím se poškodí zřetelnost a kontrast obrazu. Tento nepříjemný zjev vedl k tomu, že vlákna při výrobě jsou opatřována na svém povrchu vrstvičkou o nižším indexu lomu než má samotné vlákno. Na hranici vlákno—vrstva vzniká úplný odraz a paprsky se vracejí do vlákna. Je zřejmé, že pak se také poněkud změní vzorec pro maximální dopadový úhel ε.

Uvažujme vlákno o indexu lomu n_1 obalené vrstvičkou o indexu lomu n_2. Toto obalené vlákno je umístěno ve vzduchu o indexu lomu $n' = 1$ (obr. 5). Pro lom na vstupním čele vlákna platí

$$\sin \varepsilon = n_1 \sin \varepsilon'$$

Podobný vztah platí i pro lom na stěně vlákna

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \alpha'$$

Aby vznikl na stěně úplný odraz, musí být $\alpha' = 90°$, potom

$$n_1 \sin \alpha \geqq n_2 ,$$

$$\sin \alpha \geqq \frac{n_2}{n_1}$$

Protože dále platí

$$\sin \varepsilon' = \cos \alpha ,$$

dostaneme pro dopadový úhel ε vztah

$$\sin \varepsilon = n_1 \cos \alpha ,$$

$$\sin \varepsilon = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} ,$$

$$\sin \varepsilon \leqq n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} ,$$

$$\varepsilon \leqq \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Z posledního vztahu vyplývá, že čím větší bude rozdíl indexů lomu, tím větší může být dopadový úhel ε; tzn., že bude větší apretura a vláknem projde více světla.

Praktické použití vláknových svazků bude probráno v článku *Použití vláknových svazků* v dalším čísle Rozhledů m.-f.

Kerrův jev

DOC. Dr. JOSEF DIBELKA, ČVUT, Praha

Světlo je příčné elektromagnetické vlnění charakterizované vektorem intenzity elektrického pole E a vektorem intenzity magnetického pole H. Obě veličiny jsou na sobě kolmé a současně kolmé na směr šíření elektromagnetického vlnění. Elektromagnetické vlnění vysílá do okolního prostoru, např. elektrický dipól (široce otevřený oscilační obvod). V tomto případě intenzita elektrického pole E má stále stejný směr, rovnoběžný se směrem dipólu a intenzita magnetického pole H má směr stále kolmý k vektoru E. Takové elektromagnetické vlnění, jehož vektory E, H kmitají stále v jednom směru se nazývá lineárně polarizované.

Zdroji světla jsou nejčastěji rozžhavené látky. Světlo je vysíláno z určitého atomu tehdy, přejde-li elektron v atomu z vyšší energetické hladiny (kam se dostal, např. vlivem tepelné energie) na nižší hladinu. Rozdíl obou hladin energie elektronu je vyslán jako elektromagnetické vlnění. Rozžhavená látka představuje tedy velký soubor elektrických dipólů, vysílajících elektromagnetické vlnění, přičemž jsou tyto oscilátory zcela náhodně rozloženy, takže i směry kmitů vektoru E jsou rozloženy zcela náhodně ve všech směrech. Takový zdroj světla vysílá světlo nepolarizované, které nazýváme také někdy světlem přirozeným. Mnoho základních pokusů z polarizace světla ukazuje, že za nositele optických vlastností světla, jakožto elektromagnetického vlnění, je nutné pokládat vektor intenzity elektrického pole.

Lineárně polarizované světlo dostaneme tím, že z přirozeného světla vybereme světlo (vektor intenzity elektrického pole) kmitající jenom v určitém směru. Polarizované světlo dostaneme např. odrazem, lomem, dvojlomem apod. Zařízení, kterým získáme polarizované světlo je polarizátor. Polarizátor propouští jen to světlo, které má směr kmitů v jediném určitém směru. Naše oko neumí rozlišit světlo nepolarizované od polarizovaného. K rozhodnutí, zda je světlo polarizované či nikoli, použijeme podobného zařízení jako je polarizátor, kterému v této funkci říkáme analyzátor. Analyzátor propouští světelné kmity opětně jen v jednom směru.

Nejznámějším, ale poměrně dosti drahým polarizátorem, je Nikolův hranol. Skládá se ze dvou pravoúhlých hranolů z islandského vápence, které jsou slepeny kanadským balzámem. Dopadající paprsek v prvém hranolu se rozdělí ve dva polarizované paprsky. Řádný paprsek dopadá na vrstvu kanadského balzámu pod úhlem, který je větší

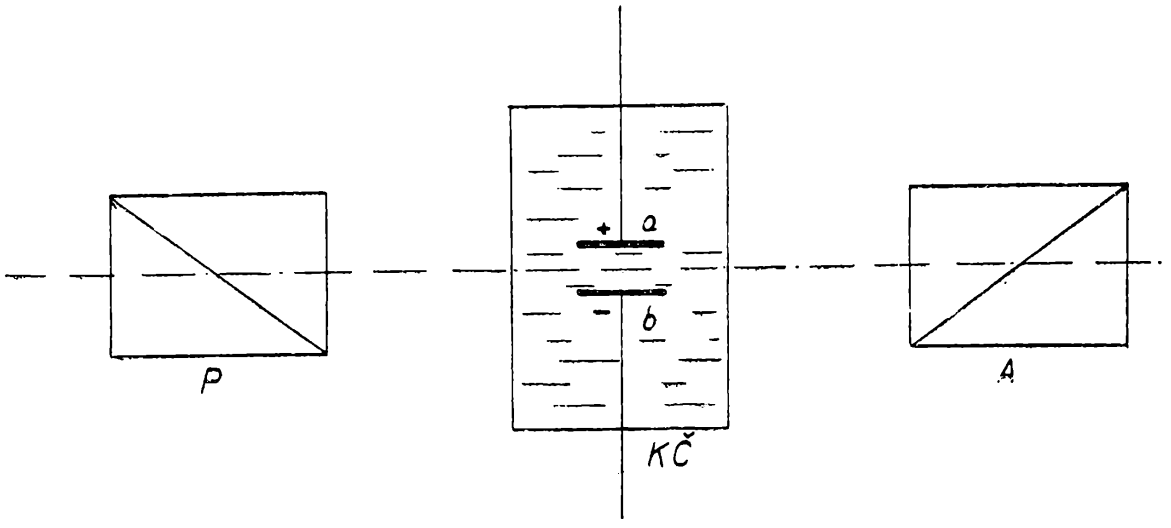
než mezní úhel balzámu, a proto se úplně odrazí a je pohlcen obrubou hranolu. Mimořádný paprsek hranolem projde.

Jiným polarizátorem může být krystal turmalínu. Dopadá-li světelný paprsek na turmalín (dvojlomý minerál), rozštěpí se na dva paprsky, řádný a mimořádný, oba jsou lineárně polarizované. Řádný paprsek je však v turmalínu úplně absorbován a mimořádný prochází dál.

Podobný jev byl pozorován u řady jiných látek, vyrobených umělou cestou. Je to např. síran chininojodný (herapatit), kterého se nyní užívá k výrobě umělých polaroidů. Jemné krystaly síranu chininojodného se uloží v tekutém izotropním prostředí naneseném na skleněnou nebo celuloidovou desku a tuhnoucím po určité době. Krystalky se v tmelícím prostředí, pokud je ještě tekuté, usměrňují buď mechanicky nebo elektricky tak, aby optické osy všech jednotlivých krystalů byly rovnoběžné. Tak je možno vyrobit značně velké polarizátory — p o l a r o i d y. Polaroidů tohoto druhu se také užívá v technické fotografii k ztlumení příliš intenzívních reflexů na lesklých plochách, nebo pro brýle sloužící proti oslnění odraženým světlem od vozovky (asfaltu), nebo také ke chránění zraku při opalování.

Kromě dvojlomu na přirozených nebo umělých krystalech možno v některých látkách vyvolat dvojlom (umělý dvojlom) buď mechanickou silou, nebo účinkem elektrického nebo magnetického pole.

V tomto článku si všimneme jenom vzniku umělého dvojlomu účinkem elektrického pole. Tento jev objevil r. 1875 K e r r (dvojlom způsobený elektrickým polem marně hledal již Faraday) a po něm se nazývá *elektroskopickým jevem Kerrovým*. Do kyvety, která je naplněna vhodnou kapalinou, např. nitrobenzenem, vložíme dvě kovové elektrody. Světlo necháme procházet nitrobenzenem rovnoběžně s plochami elektrod, na které vložíme elektrické napětí (K e r r ů v č l á n e k). Kerrův jev pak můžeme pozorovat, např. mezi dvěma skříženými nikoly *P*, *A* (obr. 1).



Obr. 1

Pokud není na destičkách a, b elektrické napětí, světlo analyzátorem neprochází a pole analyzátoru zůstává tmavé. Připneme-li destičky ke zdroji elektrického napětí, pak se stoupajícím napětím se pole analyzátoru rozjasňuje. Kapalina mezi destičkami a, b se stává působením elektrického pole dvojlomnou, a to tak, že se chová jako opticky jednoosý krystal.

Z pokusů vyplývá, že rozdíl indexů lomu paprsku mimořádného (n_e) a paprsku řádného (n_o) je vyjádřen vztahem

$$n_e - n_o = B \lambda . E^2 = B \lambda \left(\frac{V}{d}\right)^2$$

Rychlost řádného paprsku v_o je větší než rychlost mimořádného paprsku v_e. B je Kerrova konstanta, E intenzita elektrického pole, $\frac{V}{d}$ spád elektrického napětí, λ vlnová délka užitého světla. Největší hodnotu má Kerrova konstanta pro nitrobenzen.

Kerrův jev se vysvětluje tak, že vlivem vnějšího elektrického pole se izotropní[1]) látka stává opticky anizotropní.

Doba, během níž se molekuly stačí ve vnějším elektrickém poli orientovat, nepřevyšuje 10^{-9} s; za stejný čas se stačí molekuly dezorientovat při přerušení působení elektrického pole, čímž dvojlom zmizí. Vidíme, že změny světla sledují prakticky bez setrvačnosti změny elektrického pole. Pro tuto vlastnost se Kerrova článku užívá jako uzávěrky bez setrvačnosti pro různé praktické a laboratorní účely.

Velmi se užívá Kerrova článku ve zvukovém filmu a v televizi. Záznam zvuku pomocí Kerrova článku se provádí tak, že monochromatické světlo polarizátorem lineárně polarizované, prochází mezi destičkami Kerrova článku. Na destičky Kerrova článku přivádíme modulované mikrofonní napětí. Vlivem tohoto střídavého napětí vznikají změny ve světelném toku, který vychází z analyzátoru a jsou snímány citlivým filmem, který se posouvá rovnoměrně za analyzátorem. Vzniklý záznam zvuku se pak překopíruje na okraj filmu vedle obrazu. Takový záznam se skládá z řady příčných čárek různé hustoty. Při reprodukci zvuku se proužek zvukového záznamu prosvětluje světlem z prosvětlovací lampy. Prošlé světlo mění svoji intenzitu podle propustnosti záznamu a dopadá na fotonku, a tím moduluje proud ve stejné frekvenci, jaký měl mikrofonní proud.

---

[1]) Izotropní prostředí je takové, kde rychlost světla ve všech směrech je stejná.

Několik řešených příkladů

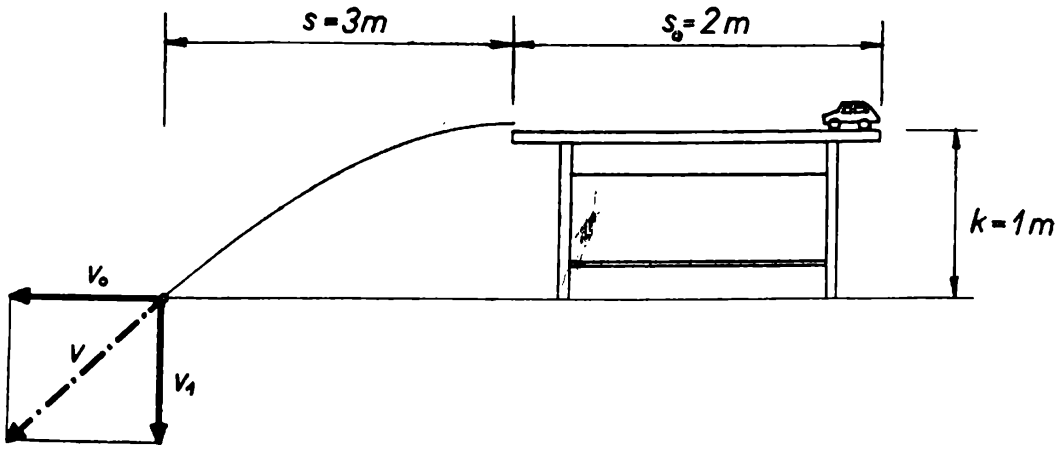
PROF. R. KUNFALVI, Budapešť

Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální (Pokračování)

(Přeložil a upravil Ing. Dr. V. Šindelář)

Příklady pro III. třídu (naši 11. třídu).

1. Malý vozík (hračka), (obr. 6) jede se stálým zrychlením po vodorovné desce lavice, dlouhé $s_0 = 2$ m, umístěné ve výšce $h = 1$ m nad podlahou. Vozík přejede kraj desky a dopadne na podlahu ve vzdálenosti $s = 3$ m od kolmého průmětu okraje desky na podlahu. Máme vypočítat rychlost v_0



Obr. 6

vozíku v okamžiku, kdy opustil okraj desky, vodorovné zrychlení a, dobu celého pohybu, minimální hodnotu součinitele tření.

L. Holics

Řešení. Dobu pádu vypočítáme z volného pádu z výšky h

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 0{,}447 \text{ s} .$$

Vodorovná rychlost při dopadu vozíku na zemi je stejná jako rychlost v_0, s jakou vozík opustil desku lavice (neuvažuje se ovšem odpor vzduchu při pádu).

Protože známe s, což je vodorovný průmět parabolické dráhy při pádu (obr. 6), vypočteme v_0 ze vztahu

$$v_0 = \frac{s}{t'} = s\sqrt{\frac{g}{2h}} \doteq 6{,}71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vertikální složka rychlosti v okamžiku dopadu na podlahu je rovna

$$v_1 = gt' = \sqrt{2gh} \doteq 4{,}43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Vektorovým součtem obdržíme hledanou celkovou rychlost v v okamžiku dopadu

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} = \sqrt{\frac{s^2 g}{2h} + 2gh} \doteq 8{,}05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Protože se vozík pohybuje po lavici rovnoměrně zrychleně, platí pro uraženou dráhu s_0 vztah

$$s_0 = \frac{a}{2} t_0^2 = \frac{v_0 t_0}{2},$$

kde t_0 je doba pohybu po lavici. Z uvedeného vztahu dostaneme

$$t_0 = \frac{2 s_0}{v_0} = \frac{2 s_0}{s} \sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 0{,}596 \text{ s}$$

a dále zrychlení a

$$a = \frac{v_0}{t_0} = \frac{s^2 g}{4 s_0 h} \doteq 11{,}25 \text{ m} \quad \text{s}^{-2}$$

Dobu celého děje vypočteme z rovnice

$$t = t_0 + t' \doteq 1{,}043 \text{ s}$$

Síla, kterou potřebujeme ke zrychlení vozíku, je $F = m \cdot a$. Přitom musí být třecí síla mezi koly vozíku a deskou větší než F, aby kolečka neprokluzovala. Tím dostáváme tuto podmínku pro třecí sílu

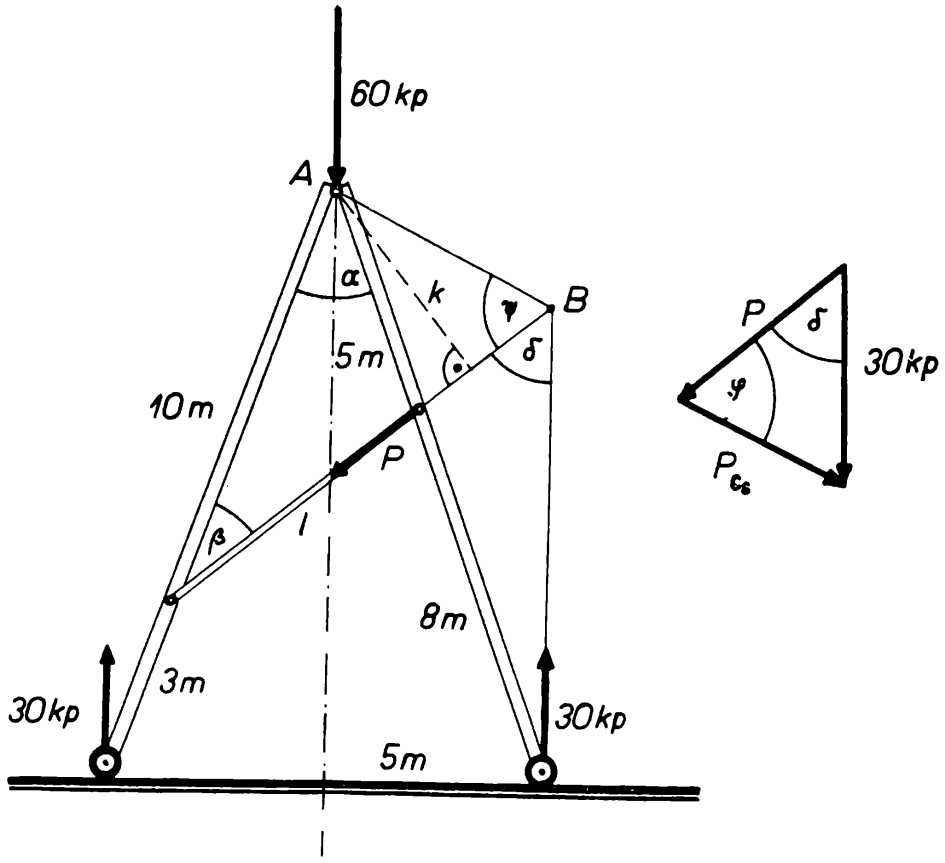
$$\mu \cdot m \cdot g \geqq m \cdot a,$$

z čehož

$$\mu \geqq \frac{a}{g} \doteq 1{,}2 .$$

2. Člověk o tíze 60 kp stojí na horní příčce dvojitého žebříku. Ramena žebříku jsou 13 m dlouhá, délka jejich rozevření na podlaze je 10 m. Na spodní části jsou ramena opatřena kolečky, u nichž zanedbáváme tření. Obě ramena jsou zajištěna v rozevřeném stavu provazem, který je na jednom z ramen upevněn ve vzdálenosti 3 m od jeho spodního konce, na druhém podobně ve vzdálenosti 8 m (obr. 7). Vypočteme sílu, kterou je spojovací provaz napínán.

I. řešení. Vyšetřeme si poměry na pravém z obou ramen (obr. 7). Podle podmínky rovnováhy musí být výsledné silové momenty v každém místě rovny nule. Které síly působí na ramena? Ramena spočívají na kolečkách, takže podlaha na ně působí pouze vertikálními, reakčními silami, jejichž součet musí být roven tíži člověka, který na žebříku stojí (je zřejmé, že přitom zanedbáváme vlastní tíhu žebříku). Vzhledem



Obr. 7

k symetrickému uspořádání je reakce podlahy na každé z obou ramen rovna 30 kp a směřuje svisle vzhůru. Dále působí v místě A horní příčky žebříku síla 60 kp (tíha člověka) a kromě toho působí na ramena neznámá síla F, kterou je napínán provaz. Vypočteme výsledný silový moment vzhledem k bodu A a položíme jej podle dříve uvedené podmínky rovnováhy rovný

$$30 \text{ kp} \cdot 5 \text{ m} = F \cdot k ,$$

z čehož

$$F = \frac{150 \text{ kp} \cdot m}{k} .$$

Rameno k naznačené v obr. 7 můžeme určit různým způsobem. Můžeme psát např. rovnici

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{13} ,$$

z čehož

$$\alpha = 45{,}2°$$

Z kosinové věty plyne

$$l = \sqrt{10^2 + 5^2 - 2 \quad 10 \cdot 5 \cdot \sin 45{,}2°} = 7{,}38 \text{ m}$$

Podle sinové věty platí, že

$$\sin \beta = \frac{5}{7{,}38} \cdot \sin 45{,}2°$$

a konečně

$$k = 10 \cdot \sin \beta = \frac{10 \cdot 5 \cdot \sin 45{,}2°}{7{,}38} = 4{,}82 \text{ m} .$$

Hledaná síla je tedy rovna

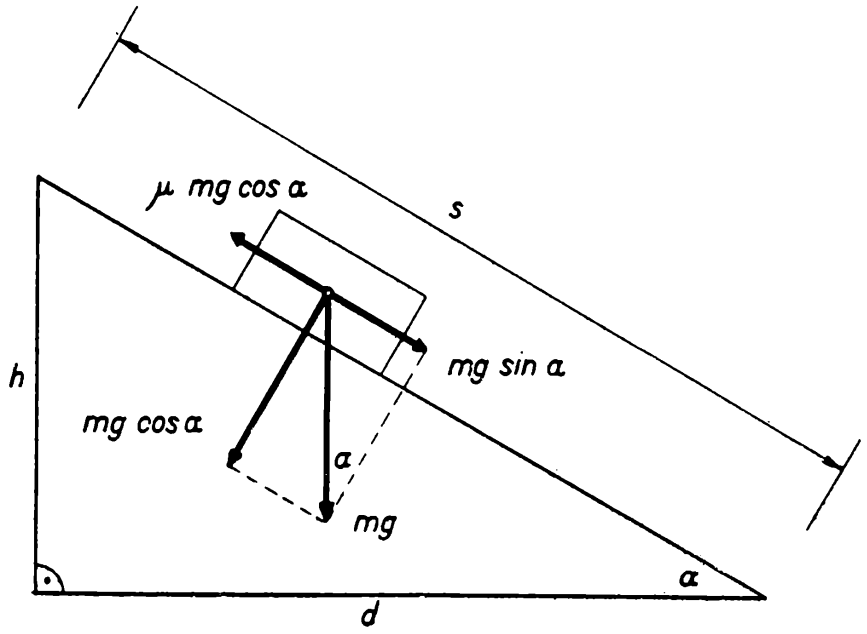
$$F = \frac{150}{4{,}82} = 31{,}2 \text{ kp}$$

II. řešení. Prodloužené paprsky napínací síly a té, která působí na spodní část ramene (která se rovná 30 kp), protínají se v bodě B. Vyšetřeme silové momenty k tomuto bodu. Protože moment reakce podlahy i moment síly F vzhledem k bodu B jsou zřejmě nulové, musí být nulový i moment síly, působící na horní příčku žebříku, a to opět vzhledem k bodu B. Přesněji, moment průmětu síly rovné 60 kp do směru AB. Protože je rameno žebříku v rovnováze, musí všechny tři síly tvořit uzavřený vektorový trojúhelník s nulovou rezultantou. Trojúhelník je naznačen na obr. 7. Všechny jeho úhly známe, jedna jeho strana je také známá (odpovídá v měřítku 30 kp). Takto trigonometricky vypočteme, nebo graficky určíme hledanou sílu F.

3. Bedna se smyká po nakloněné rovině svírající s vodorovnou rovinou úhel 30°. Horní hrana nakloněné roviny je 5 m nad zemí (obr. 8). Součinitel tření je roven 0,2. Jakou rychlostí dosáhne bedna spodní hrany roviny?

N. Vermes

I. řešení. Tíha bedny má jednu složku rovnoběžnou s nakloněnou rovinou: $m \cdot g \cdot \sin \alpha$ (obr. 8). Druhá složka $m \cdot g \cos \alpha$ je kolmá na



Obr. 8

rovinu a tlačí na ni. Pohyb bedny je tedy brzděn třecí silou $\mu \, . \, m \, . \, g \, . \cos \alpha$. Výslednice dvou sil

$$ma = mg \, (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

zrychluje bednu.

Dráha, kterou bedna při svém pohybu urazí, je $s = \frac{h}{\sin \alpha}$ a konečná rychlost, kterou bude mít na konci svého pohybu

$$v = \sqrt{2 \, as} = \sqrt{2 \, gh \, (1 - \mu \operatorname{cotg} \alpha)} \qquad (1)$$

Dosadíme-li dané hodnoty $g = 9{,}81$ m s^{-2}, $h = 5$ m, $\mu = 0{,}2$ a $\alpha = 30°$, dostaneme $v = 8$ m . s^{-1}.

II. řešení. Práce vykonaná třecí silou je

$$\mu \, mg \quad \cos \alpha \, . \, s = \mu \, mg \quad d \, ,$$

kde d je horizontální průmět délky nakloněné roviny.

Počáteční potenciální energie bedny (vztažená k ekvipotenciální ploše, v níž leží spodní strana nakloněné roviny) změní se zčásti v kinetickou energii, zčásti v práci, kterou je nutno vykonat proti třecí síle. Bude tedy

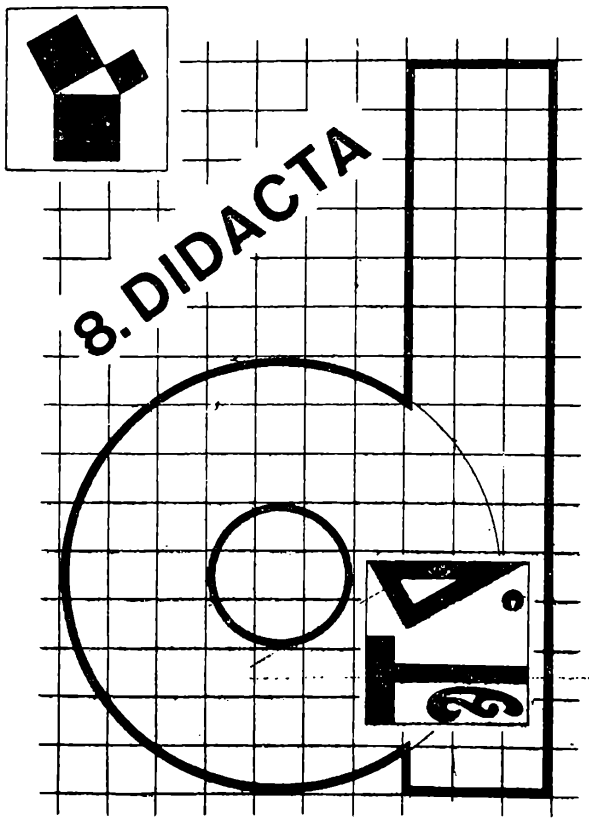
$$mgh = \tfrac{1}{2} \, mv^2 + \mu \, mgd \, ,$$

z čehož

$$v = \sqrt{2 \, g(h - \mu \, d)} \qquad (2)$$

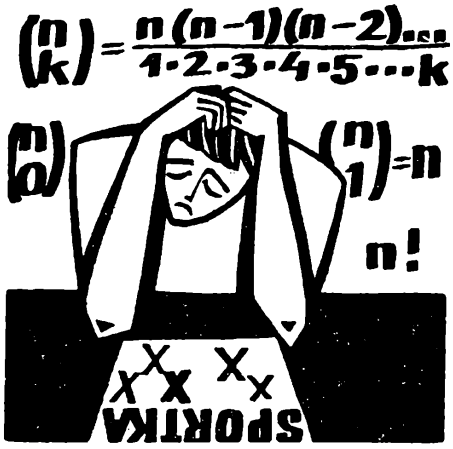
Dosadíme-li do vztahu (1) $d = h \operatorname{cotg} \alpha$, dostáváme opět vztah (1).

(Pokračování)



Pět dní v červnu trval 8. evropský veletrh „*8. Didacta*“ ve švýcarské Basileji. Jeho značku vedle otiskujeme. Je to jediný trh mezinárodního měřítka věnovaný pouze učebním prostředkům všeho druhu. Průměrná denní návštěva činila více než 9 tisíc zájemců. Z 61 zemí (včetně Československa) přijelo přes 4 tisíce hostí. Vystavovalo více než 500 firem ze 16 zemí. Doufejme, že na příštím takovém veletrhu „*9 Didacta*“, který se bude v r. 1968 konat v Hanoveru (NSR) budeme i my vystavovat.

M. M.

Úlohy  k řešení

Otiskujeme poslední příklady naší soutěže; řešení zašlete nejpozději do 28. února 1967 na adresu: doc. Ota Setzer, Praha 2, Trojanova 13.

● *Fyzika:*

3. Kometa má postupnou rychlost v odsluní 4krát menší než v přísluní. Jak veliká je její numerická výstřednost ε?

V přísluní má tato kometa od středu Slunce vzdálenost $r_p = 1{,}465$ planetárních jednotek; stanovte její střední vzdálenost (a) od Slunce, délkovou výstřednost (e) a vzdálenost odsluní (r_a). Jak veliká je její oběžná doba (hvězdná) T? Porovnáním výsledků s hodnotami v astronomických tabulkách (Některé občasné komety) zjistěte, o kterou kometu jde.

Pokyn: Střední vzdálenost komety od slunečního středu je rovna délce hlavní poloosy (a) eliptické dráhy; délková (čili lineární) výstřednost (e) je vzdálenost ohniska od středu elipsy; numerická (čili číselná) výstřednost (ε) je poměr lineární excentricity (e) a hlavní poloosy (a), tedy

$$\varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Planetární jednotka (R) je střední vzdálenost Země od Slunce, tj.

$$R = 149{,}5 \cdot 10^6 \text{ [km]}.$$

Použijete třetího zákona Keplerova pro dvojici Kometa—Země a druhého Keplerova zákona. (Planetární jednotka *(R)* se nazývá též astronomická jednotka *(AU)*.)

Otakar Jilák

4. První umělá družice Měsíce, nazvaná Luna 10, byla vypuštěna v SSSR dne 31. III. 1966. Její nejmenší výška nad povrchem Měsíce byla $h_p = 350$ [km] (v pericentru, tj. v nejbližším bodě své eliptické dráhy od středu Měsíce) a největší výška nad povrchem Měsíce (v apocentru, tj. v nejvzdálenějším místě dráhy od Měsíčního středu) byla

$$h_a = 1000 \text{ [km]}.$$

Hmotnost Měsíce je

$$m_0 = 7{,}347 \cdot 10^{22} \text{ [kg]},$$

jeho poloměr je

$$r_0 = 1738 \text{ [km]};$$

gravitační konstanta má hodnotu

$$\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ [m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}\text{]}.$$

Pro družici Luna 10 určete: numerickou výstřednost (ε), velkou poloosu (a) eliptické dráhy, kruhovou rychlost (tj. střední dráhovou rychlost) v_k a dobu oběhu T.

Jak veliký (ve stupních) by se jevil zdánlivý poloměr Měsíce pozorovateli z této družice Luna 10 v nejmenší vzdálenosti od měsíčního povrchu a kolikrát by pozorovaný poloměr měsíčního kotouče se jevil větší než zdánlivý poloměr Měsíce pozorovaný se Země?

P o k y n Postup obdobný jako v předcházejícím příkladě; kruhová rychlost se určuje z rovnosti odstředivé a gravitační síly.

Otakar Julák

5. V jak veliké vzdálenosti (h) od povrchu Země, jejíž rovníkový poloměr

$$R = 6378 \text{ [km]}$$

by musel obíhat po kruhové dráze Sputnik, aby se trvale nehnutě vznášel nad týmž bodem Zemského rovníku, tj. aby měl oběžnou dobu

$$T_2 = 23 \text{ [h] } 45 \text{ [min] } 4 \text{ [s]}.$$

Řešte pomocí třetího Keplerova zákona, víte-li, že oběžná doba Měsíce je

$$T_1 = 27{,}3 \text{ dne} \doteq 2{,}36 \cdot 10^6 \text{ [s]}$$

a jeho střední vzdálenost od středu Země je

$$r_1 = 3{,}84 \cdot 10^5 \text{ [km]}.$$

Dokažte, že postupnou rychlost tohoto (tzv. stacionárního čili „stojícího") Sputnika lze určit vzorcem

$$v_2 = \frac{2\pi r_1}{\sqrt[3]{T_1^2 T_2}}.$$

Řešte nejprve obecně a potom vyčíslete dosazením daných hodnot. Počítejte jen na 3 platná místa.

Otakar Julák

6. Matematické kyvadlo délky l, hmoty m kývá s maximální úhlovou výchylkou φ_0. Určete energii (W) tohoto kyvadla a dokažte, že postupná rychlost (v), s jakou projde nejnižším bodem, je dána vztahem

$$v = \sqrt{2\,g\,l\,(1 - \cos\varphi_0)}.$$

P o k y n : Určete výšku nejvyššího bodu dráhy (h) a jeho polohovou energii; v nejnižším bodě se veškerá energie mění v kinetickou.

Otakar Julák

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Skončila loňská soutěž Rozhledů matematicko-fyzikálních v řešení úloh z matematiky, konstruktivní geometrie a fyziky. Autoři jednotlivých úloh zaslaná řešení prohlédli, klasifikovali a redakci navrhli — někdy po menší opravě — k otištění. Otištěná řešení byla již zčásti uveřejněna, zbývající řešení najdete v příštích číslech.

Dnes uveřejňujeme abecední seznam úspěšných řešitelů. Za jménem každého řešitele jsou uvedena čísla správně vyřešených příkladů z příslušného oboru, v závorce pak čísla úloh, řešených s menšími nedostatky. Nesprávná řešení neuvádíme vůbec.

František Allmer, SVVŠ, Strakonice — F 1, 2, 4—6; *Vlastimil Bartoš*, SVVŠ, Holešov (2. tř.) — M 4—6, 8, 9, 11, 12, (2, 3, 7, 10); *Juraj Černák*, SVŠ, Trenč. Teplice (1. tř.) — M 1, 3, 4, 8, 10, (2, 12), F 6; *František Černý*, SVVŠ, Blovice (1. tř.) — M (3); *Milan Čmelík*, SVVŠ, Liberec — M 2, 8; *Marian Fúrik*, SVŠ, Zvolen (2. tř.) — M 2—10, 12, F 1, 3, 4, 6; *Karel Hodan*, SVVŠ, Blovice (1. tř.) — M (3); *Jaroslav Hořínka*, SVVŠ, Praha 8 — F 1—6; *Josef Hrdlička*, VUT, Brno — M 2, 5, 8, (7); *Jiří Chlad*, SVVŠ, Blovice (1. tř.) — M (3); *Kristián Chovanec*, SVŠ, Trenč. Teplice — M 1, 3, 4, 8, (2, 12); *Zdeněk Chvoj*, SVVŠ, Praha 2 — M 2—4, 6, 8, 10—12, (5, 7), F 3, 4, 6, (1, 2, 5), G 1, 3, 4, (2); *Miloslav Jakubčík*, SVVŠ, Blovice (1. tř.) — M (3); *Mária Jankovičová*, ZDŠ, Chtelnice (9. tř.) — M 4, 8; *Věra Jaroňová*, SVVŠ, Nový Bohumín (2. tř.) — M 1, 2, 4, 8, 11, 12, (3); *Jarmila Jirková*, SVVŠ, Blovice (1. tř.) — M (3); *Václav Karkoš*, SVVŠ, Blovice (1. tř.) — M (3); *Jan Kastl*, SVVŠ, Plzeň (2. tř.) — M 3, 4, 6, 8—12, (1, 2, 5, 7), F 1, 2, 4, (3, 5, 6), G 1, 2, 4, (3); *Miroslav Kolář*, SPŠE, Pardubice — M 2—5, 8, 11, 12, (9), F 1, 2, 4—6, (5); *Pavel Kovařík*, SPŠ, Praha 5 — F 1—5, (6); *Eva Kubištová*, SVVŠ, Nový Bohumín (2. tř.) — M 2, 4, 8, 11, 12, (1, 3, 6, 7); *Petr Kůrka*, SVVŠ, Praha 2 (2. tř.) — M 2—12, (1); *Jiří Leicman*, SPŠ, Brno — F 1—4, 6, (5); *Jan Louda*, SVVŠ, Plzeň (2. tř.) — M 3, 4, 8, 10, 12, (2, 5), F 1—4, 6, (5), G 1—4; *Tomáš Maixner*, SVVŠ, Plzeň (2. tř.) — F 1—4, 6, (5); *Štěpán Matěna*, SVVŠ, Praha—Michle — M 2, 3, 10, (1, 7, 8, 12); *Peter Mederly*, SVŠ, Prievidza — M 1—12, F 1, 3—6, (2), G 1—4; *Jiří Mls*, SVVŠ, Strakonice — F 1, 2, 4, 6, (5); *Jan Nauš*, SVVŠ, Praha 2 — M 3, 4, 8—12, (7); *Pavel Novotný*, SVVŠ, Olomouc — M 1—10, 12, F 1—4, 6, (5), G 1—4; *Stanislav Palúch*, SVŠ, Prešov (2. tř.) — M 3—5, 8, 12, F 3—6, G (2); *Alica Pirická*, SVŠ, Košice (2. tř.) — M 8; *Petr Podlešák*, SPŠ, Písek — M 4, 8, (1—3, 7, 12); *Pavel Polcar*, SVVŠ, Velké Meziříčí (1. tř.) — M 1, 2, 4, 7—9, 11, 12, (3, 5, 6), F 1, 5; *Štefan Porubský*, SPŠ, Zvolen — M 1, 2, 4, 5, 8, (3); *Jaroslav Prokůpek*, SVVŠ, Telč — M (4, 5, 7, 8,

12), F 1, 2, 4—6; *Milana Říhová*, SVVŠ, Praha 2 — M 2—5, 8, (1); *Marie Samková*, SVVŠ, Praha 2 — M 3, 4, 11, (2, 5, 8); *Jan Sedláček*, SVVŠ, Hradec Králové (2. tř.) — F 1—4, 6, (5); *Bohuš Sivák*, ZDŠ, Zvolen (9. tř.) — M 2, 4, 8, 10, 12, (3, 5—7, 9), G 2—4, (1); *Zdeněk Slanina*, SPŠCh, Brno — M 1—9, 11, 12, F 1, 2, 5, (3, 4, 6), G 1—4; *Stanislav Slouka*, SPŠE, Brno — M 1, 4, 6, 8—10, (2, 3, 5, 7, 12), F 1, 2, 4, 6, (3, 5), G 1—4; *Milan Stehlík*, SPŠS, Košice — M 2, 8, (4), F 1, 2, 4, 6, (3, 5); *Josef Sutnar*, SVVŠ, Blovice (1. tř.) — M (3); *Martin Šolc*, SVVŠ, Praha 2 (2. tř.) — F 2, 4, 6, (1, 3, 5); *Jana Štěpánková*, SVVŠ, Brno — M 2—4, 8, 10, (1, 5, 12), F 1—3, (5, 6); *František Tomášek*, SVVŠ, Litovel — M 3—6, 8, 9, 11, 12, (1, 2, 7); *Pavel Vejvoda*, SVVŠ, Praha 2 (2. tř.) — M 1, 4, 6—8, 10, 11, (2, 3, 5, 9), G 1, 2, 4, (3); *Ivan Vlček*, SVVŠ, Praha 3 — F 1—6; *Ľubomír Vlček*, SVŠ, Brezno — M 1, 2, 8, (3—7, 12), F 1, 2, 4, (5, 6), G 1, 4, (2, 3); *Tomáš Wichs*, SVVŠ, Praha 2 — M 1—4, 6, 8—12, (5, 7), G 1, 2, 4, (3); *Marie Zedníčková*, SVVŠ, Třebíč — M 4.

Vítězové

Redakce přihlédla k počtu i k jakosti zaslaných řešení a stanovila v jednotlivých disciplínách toto pořadí:

Matematika:

I. Peter Mederly, 3.d SVŠ, Prievidza	71 bodů
II. Petr Kůrka, 2.g SVVŠ, Praha 2	70 bodů
III. Tomáš Wichs, 3.f SVVŠ, Praha 2	68 bodů

Fyzika:

I.—II. Jaroslav Hořínka, 3. tř. SVVŠ, Praha 8	36 bodů
I.—II. Ivan Vlček, 3.c SVVŠ, Praha 3	
dalších 8 řešitelů má pořadí 3. až 10. a získalo	34 bodů

Konstruktivní geometrie (abecedně):

I.—V. Jan Louda, 2.f SVVŠ, Plzeň	24 bodů
I.—V. Peter Mederly, 3.d SVŠ, Prievidza	
I.—V. Pavel Novotný, 3.e SVVŠ, Olomouc	
I.—V. Zdeněk Slanina, 3.a SPŠCh, Brno	
I.—V. Stanislav Slouka, 3.a SPŠE, Brno	

Absolutními vítězi se stali:

1.	Peter Mederly, 3.d SVŠ, Prievidza	129 bodů
2.	Pavel Novotný, 3.e SVVŠ, Olomouc	125 bodů
3.	Zdeněk Slanina, 3.a SPŠCh, Brno	121 bodů
4.	Jan Kastl, 2.f SVVŠ, Plzeň	117 bodů
5.	Stanislav Slouka, 3.a SPŠE, Brno	113 bodů
6.	Zdeněk Chvoj, 3.f SVVŠ, Praha 2	110 bodů
7.	Jan Louda, 2.f SVVŠ, Plzeň	96 bodů
8.—9.	Ľubomír Vlček, 3.b SVŠ, Brezno	91 bodů
8.—9.	Tomáš Wichs, 3.f SVVŠ, Praha 2	
10.	Marian Fúrik, 2.c SVŠ, Zvolen	89 bodů

Redakce blahopřeje vítězům!

Jedna užitečná nerovnost

Ze školy možná znáte nerovnost

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \quad a_n},$$

která platí pro každou n-tici nezáporných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Slovy ji můžeme vyjádřit takto:

Aritmetický průměr n-tice nezáporných čísel je vždy větší nebo roven jejímu geometrickému průměru.

Lze dokázat, že rovnost platí právě tehdy, když jsou si všechna daná čísla rovna, tj.

$$a_1 = a_2 = \quad = a_n$$

Při vhodné volbě kladných čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

dostaneme z uvedené nerovnosti další platné nerovnosti. Tak již při volbě

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = n$$

dostaneme nerovnost, která „spoutává" i tak nezkrotnou funkci, jakou je faktoriál. Vypočítejte si tuto nerovnost.

Může vám výše uvedená nerovnost pomoci při důkazu nerovnosti

$$(a + b + c + d)^4 \geqq 256\, abcd$$

pro kladná čísla a, b, c, d?

Výsledky zašlete co nejdříve redakci. Autoři správných řešení budou uvedeni v některém z dalších čísel.

J. Š.

FO

JAN TESAŘ, Praha

Moment síly a momentová věta

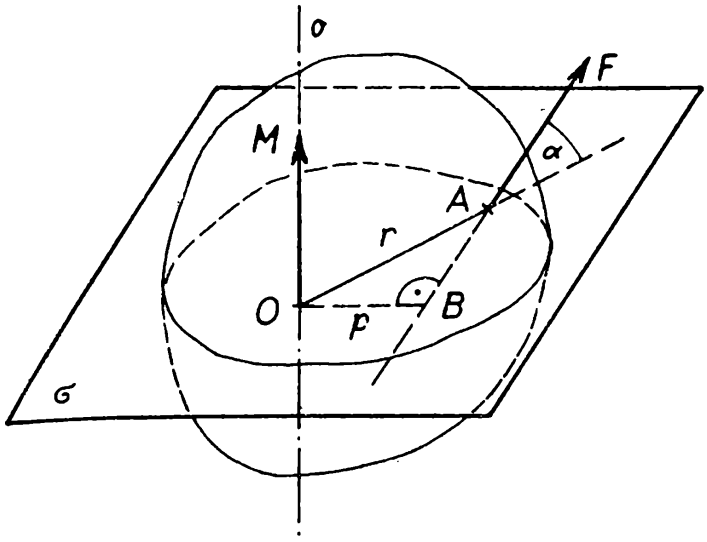
Téma k prostudování pro kategorii C fyzikální olympiády

1. *Moment síly*

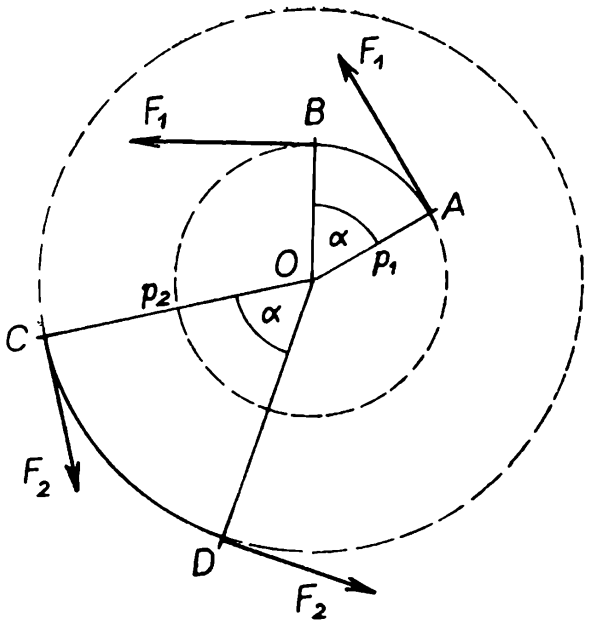
Dokonale tuhé těleso nemění působením vnější síly ani svůj tvar, ani objem. Vnější síla má na ně jen pohybové účinky. Koná-li těleso posuvný pohyb, mění se působením vnější síly rychlost v jeho posuvného pohybu (síla mu uděluje zrychlení a), otáčí-li se těleso, mění se jeho úhlová rychlost ω (síla mu uděluje úhlové zrychlení ε). Závislost zrychlení na síle je v prvním případě vyjádřena zákonem síly $F = m\,a$, kde m značí hmotnost tělesa konajícího posuvný pohyb.

V této stati se budeme zabývat otáčivými účinky vnější síly, působící na tuhé těleso.

Jestliže na klidné tuhé těleso, které má jeden pevný bod O, působí v určitém místě A síla **F**, jejíž vektorová přímka neprochází bodem O, uvede se těleso do otáčivého pohybu kolem osy o procházející bodem O kolmo k rovině σ, určené bodem O a vektorovou přímkou síly F (obr. 1). Orientovaná úsečka **OA** = **r** určuje polohu A působiště síly **F** a nazývá se *polohový vektor* působiště síly **F** vzhledem k pevnému bodu O tuhého tělesa. Protože účinek síly na dokonale tuhé těleso se nemění, posuneme-li její působiště do kteréhokoli bodu tělesa ležícího na vektorové přímce síly **F** (Fyzika pro I. roč. SVVŠ, čl. 47), nezávisí otáčivý účinek



Obr. 1



Obr. 2

síly **F** na poloze bodu A, pokud leží na vektorové přímce síly **F**. Proto můžeme posunout působiště síly **F** do bodu B, který je patou kolmice spuštěné z bodu O na vektorovou přímku síly **F**. Orientovaná úsečka **OB** = **p** se nazývá *rameno síly* **F**.

Otáčivý účinek síly **F** na tuhé těleso závisí jednak na velikosti F síly **F**, jednak na velikosti p jejího ramena **p**.

Velikost tohoto pohybového účinku vyjadřuje fyzikální veličina **M**, jejíž velikost $M = p\,F$ Veličina **M** se nazývá *moment síly* **F** *vzhledem k bodu O*.

Z pravoúhlého trojúhelníka OAB (obr. 1) je patrno, že $p = r \sin \alpha$, kde α značí úhel, který svírá vektorová přímka síly **F** se směrem vektoru **r**. Proto je velikost momentu síly vzhledem k bodu O určena vztahem

$$M = p\,F = r\,F \sin \alpha\,. \qquad (1)$$

Jednotkou momentu síly v soustavě SI je $[M] = 1$ N m. Tato veličina má stejný rozměr jako veličina práce. Protože však moment síly a práce jsou dva různé fyzikální pojmy, užívá se pro jednotku práce název joule (J), pro jednotku momentu síly název newtonmetr (N m).

Ze vztahu (1) je zřejmé, že velikost momentu síly vzhledem k bodu Q je číselně rovna obsahu obdélníka, jehož strany mají stejnou velikost jako síla **F** a její rameno **p**.

Otáčivý účinek síly není však zcela určen velikostí momentu síly, neboť tato velikost neurčuje rovinu, v níž leží vektor **r**, vektorová přímka síly **F** a také rovina kružnice, po které se pohybuje kolem

pevného bodu O působiště A síly $\mathbf{F}$. Protože poloha roviny je jednoznačně určena směrem její normály (přímka kolmá k rovině), je účelné považovat moment $\mathbf{M}$ síly za vektor, který má počátek v bodě O, je kolmý k rovině σ určené bodem O a vektorovou přímkou síly $\mathbf{F}$, a má velikost $M = p\,F = r\,F \sin \alpha$. *Vektorová přímka momentu síly určuje při této volbě zároveň osu, okolo které se těleso otáčí.*

Orientace vektoru $\mathbf{M}$ se určuje pravidlem pravé ruky (obr. 1): Položíme-li na těleso pravou ruku obrácenou dlaní k ose rotace tak, aby ohnuté prsty ukazovaly smysl otáčení tělesa, ukazuje vztyčený palec orientaci momentu síly vzhledem k bodu O. Moment síly je tedy kolmý k rovině určené vektory $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$ a směřuje do poloprostoru, z něhož se otáčení tělesa pozoruje jako rotace ve smyslu kladném (proti smyslu otáčení hodinových ručiček).

Podle smyslu otáčení tělesa kolem osy o přiřazujeme velikosti momentu síly vzhledem k bodu O znaménko kladné nebo záporné. Díváme-li se na otáčející se těleso proti orientaci vektoru $\mathbf{M}$ (na obr. 1 na rovinu σ shora), a síla $\mathbf{F}$ uvede těleso z klidu do otáčivého pohybu v kladném smyslu, přiřadíme momentu síly znaménko kladné, v opačném případě záporné. Prochází-li vektorová přímka síly $\mathbf{F}$ bodem O, je $p = 0$, a proto má i moment síly vzhledem k bodu O hodnotu $M = 0$.

Působí-li na klidné dokonale tuhé těleso upevněné v bodě O po oblouku $\overset{\frown}{AB}$ se středovým úhlem α stálá síla $\mathbf{F}_1$, která při rotaci nemění vzhledem k tělesu svou polohu, vykoná práci A_1 (obr. 2). Rozdělme oblouk $\overset{\frown}{AB}$ na veliký počet n velmi krátkých stejných úseků délky Δs tak malých, že je můžeme považovat za úsečky. Na každém z těchto úseků vykoná síla $\mathbf{F}_1$ velmi malou práci $\Delta A = F_1\,\Delta s$, neboť na každém z nich má síla směr dráhy. Celková práce A_1 vykonaná silou po oblouku $\overset{\frown}{AB}$ je rovna součtu všech těchto velmi malých prací ΔA. Platí tedy rovnice

$$A_1 = F_1\, n\, \Delta s = F_1 \overset{\frown}{AB} = F_1\, p_1\, \alpha = M_1\, \alpha\,, \qquad (2)$$

kde p_1 značí rameno síly $\mathbf{F}_1$ a M_1 velikost jejího momentu vzhledem k bodu O. Rameno p_1 je zároveň poloměrem kruhové dráhy bodu A, ve kterém se vektorová přímka síly $\mathbf{F}_1$ dotýká kružnice o středu O a o poloměru p_1.

Tentýž účinek na těleso, jaký měla síla $\mathbf{F}_1$, má síla $\mathbf{F}_2$ obdobných vlastností jako síla $\mathbf{F}_1$, která má působiště v určitém bodě C, ležícím v rovině σ proložené body O, A, B, jestliže otočí těleso o úhel $\alpha' = \alpha$. Síla $\mathbf{F}_2$ přitom působí po oblouku $\overset{\frown}{CD}$ a vykoná práci $A_2 = A_1$. Práce $A_2 = F_2\, p_2\, \alpha = M_2\, \alpha$, kde $\mathbf{p}_2$ je rameno a $\mathbf{M}_2$ moment síly $\mathbf{F}_2$.

Má-li tedy mít síla $\mathbf{F}_2$ na těleso stejný otáčivý účinek jako síla $\mathbf{F}_1$, musí platit rovnice $F_1\, p_1\, \alpha = F_2\, p_2\, \alpha$, z níž vychází $F_1\, p_1 = F_2\, p_2$ a dále

$M_1 = M_2$, neboť $F_1 p_1$ a $F_2 p_2$ určují velikosti momentů sil $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ vzhledem k bodu O. Vektorové přímky těchto momentů sil na obr. 2 jsou totožné, procházejí bodem O kolmo k nákresně a momenty jsou souhlasně orientovány do poloprostoru před nákresnu.

Moment síly vzhledem k bodu je tedy mírou otáčivého účinku síly na těleso. Síly, jejichž momenty mají stejnou velikost, stejnou vektorovou přímku i orientaci, mají na těleso stejné otáčivé účinky.

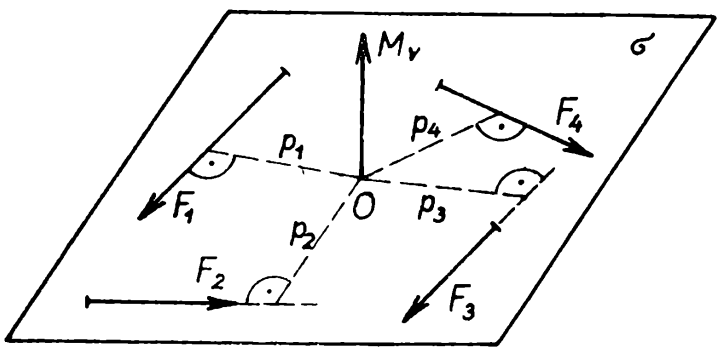
Obdobně lze dokázat, že se ruší otáčivé účinky dvou sil, jejichž momenty mají společnou vektorovou přímku a stejnou velikost, jsou však opačně orientovány.

2. *Skládání momentů sil a momentová věta*

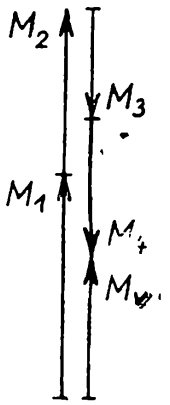
Působí-li na těleso více sil $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, jejichž momenty vzhledem k témuž bodu O jsou po řadě $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$, je celkový otáčivý účinek všech těchto sil vzhledem k bodu O určen momentem $\mathbf{M}_v$, který je roven vektorovému součtu momentů sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_n$. Platí tedy vektorová rovnice

$$\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \quad + \mathbf{M}_n . \tag{3}$$

Protože se momenty $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ vztahují k bodu O, mají v bodě O počátek. Pak platí pro vektorové sčítání (skládání) momentů sil stejná pravidla jako pro skládání sil, které působí v jednom bodě (Fyzika pro I. roč. SVVŠ, str. 42, čl. 16). V dalších úvahách se budeme zabývat jen vyšetřováním otáčivého účinku sil, jejichž vektorové přímky leží v jedné rovině.



Obr. 3



Obr. 4

Celkový otáčivý účinek sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, jejichž vektorové přímky leží v rovině σ (na obr. 3 vodorovné), je určen podle vztahu (3) momentem $\mathbf{M}_v$. Z obr. 3 je patrno, že momenty všech těchto sil mají společný počátek v bodě O a společnou vektorovou přímku kolmou k rovině σ. Momenty $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ jsou orientovány směrem vzhůru, momenty $\mathbf{M}_3$ a $\mathbf{M}_4$ směrem dolů. Na obr. 4 je naznačeno, jak se určí vektor $\mathbf{M}_v$ graficky.

Chceme-li určit velikost vektoru $\mathbf{M}_v$ algebraicky, použijeme místo vektorové rovnice (3) rovnice s algebraickým součtem momentů

$$M_v = M_1 + M_2 + \quad + M_n , \qquad (4)$$

v níž momentům sil přiřadíme příslušná znaménka. Výsledný moment sil na obr. 3 a 4 má hodnotu

$$M_v = p_1 F_1 + p_2 F_2 - p_3 F_3 - p_4 F_4$$

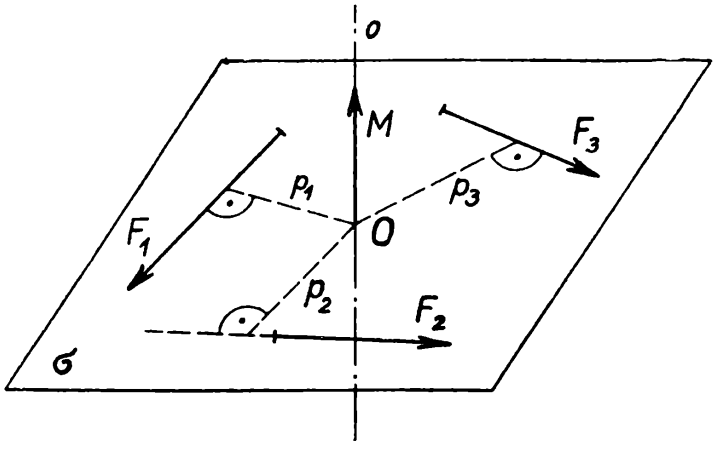
Úloha 1. Na přímý kruhový válec působí tři síly $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, jejichž vektorové přímky leží v rovině σ horní podstavy válce a mají od jejího pevného středu O po řadě vzdálenosti p_1, p_2, p_3.

a) Jak velikou vzdálenost p_v od bodu O musí mít vektorová přímka síly $\mathbf{F}_v$ ležící v rovině σ, aby síla $\mathbf{F}_v$ měla na válec vzhledem k bodu O stejný otáčivý účinek jako síly $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$?

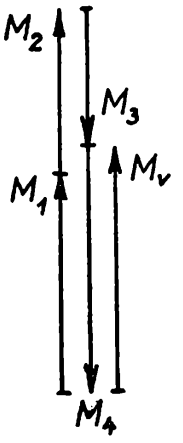
b) Jakou velikost by měla síla $\mathbf{F}_4$, jejíž vektorová přímka by ležela v rovině σ a měla od bodu O vzdálenost p_4, kdyby se jejím působením zrušil otáčivý účinek sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$?

Velikosti sil a jejich ramen jsou $F_1 = 40$ N, $F_2 = 30$ N, $F_3 = 10$ N, $F_v = 20$ N, $p_1 = 0{,}1$ m, $p_2 = 0{,}2$ m, $p_3 = 0{,}4$ m, $p_4 = 0{,}6$ m.

Řešení. a) Momenty $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ a $\mathbf{M}_3$ sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ a $\mathbf{F}_3$ (obr. 5) mají společný počátek v bodě O a jejich společná vektorová přímka je svislá. Výsledný moment $\mathbf{M}_v$ má společnou vektorovou přímku s momenty $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$. Velikost M_v je graficky určena na obr. 6. Početně ji určíme podle rovnice (4)



Obr. 5



Obr. 6

$$M_v = F_1 p_1 + F_2 p_2 - F_3 p_3 = (4 + 6 - 4)\,\mathrm{N\,m} = 6\,\mathrm{N\,m}\,.$$

Vektor $\mathbf{M}_v$ je tedy orientován svisle vzhůru. Protože $M_v = F_v p_v$,

je
$$p_v = \frac{M_v}{F_v} = \frac{6}{20}\,\mathrm{m} = 0{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

Vektorová přímka síly $\mathbf{F}_v$ má od bodu O vzdálenost 0,3 m.

b) Má-li síla $\mathbf{F}_4$ svým působením zrušit otáčivý účinek sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, musí mít její moment $\mathbf{M}_4$ stejnou velikost, ale opačnou orientaci než moment $\mathbf{M}_v$. Platí tedy vektorově $\mathbf{M}_4 = -\mathbf{M}_v$, pro velikosti však platí $M_4 = M_v$, takže

$$F_4 = \frac{M_v}{p_4} = 10\,\mathrm{N}\,.$$

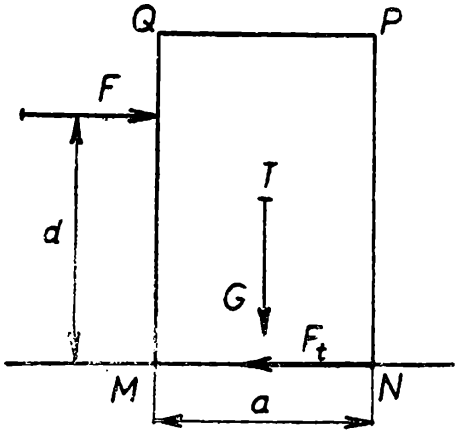
Hledaná síla má velikost 10 N a působí otáčení válce v záporném smyslu.

Při řešení části b) úlohy 1 jsme poznali, že moment $\mathbf{M}_4$ ruší otáčivé účinky momentu $\mathbf{M}_v$ na těleso a že tedy platí $\mathbf{M}_v = -\mathbf{M}_4$, což je dobře vidět na obr. 6. Z něho je také zřejmé, že platí rovnice $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 = 0$, jestliže otáčivé účinky sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ a $\mathbf{F}_4$ na těleso se ruší.

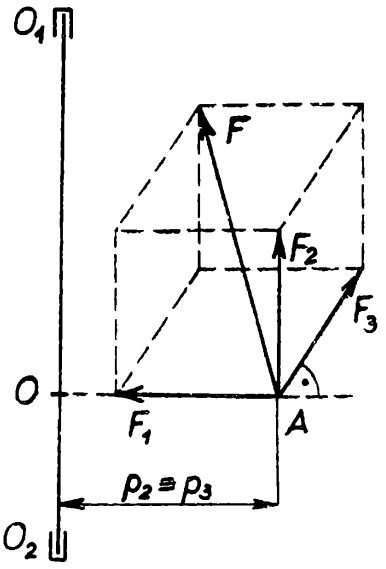
Z obr. 5 a 6 je dále patrno, že platnost rovnice $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_4 = 0$ lze rozšířit obecně pro libovolný počet n sil, jejichž vektorové přímky leží v téže rovině σ. Platí-li tedy vektorová rovnice

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \quad + \mathbf{M}_n = 0\,, \tag{5}$$

v níž značí $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ momenty sil $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ vzhledem k bodu O, je těleso upevněné v bodě O buď v klidu nebo se otáčí rovnoměrně kolem osy o procházející bodem O kolmo k rovině σ.



Obr. 7



Obr. 8

Rovnici (5) lze upravit také na tvar

$$M_1 + M_2 + M_3 + \quad + M_n = 0\,, \tag{6}$$

v níž přiřadíme momentům sil M_1, M_2, M_n příslušná znaménka.

Tato rovnice se nazývá *momentová věta.*

Úloha 2. Na vodorovné desce spočívá kvádr. Vodorovnou tyčinkou tlačíme kolmo na svislou stěnu kvádru na její svislé střední příčce. Jakou největší možnou vzdálenost d od vodorovné desky může mít tyčinka, aby se její tlakovou silou kvádr pouze posouval, nikoliv však odklápěl?

Hrana kvádru rovnoběžná s tyčinkou je $a = 18$ cm, součinitel smykového tření mezi kvádrem a deskou je $f = 0{,}3$.

Označení veličin. Na obr. 7 značí obdélník $MNPQ$ řez kvádru rovinou vedenou středními příčkami protilehlých bočných stěn kvádru, v němž tlačíme na jeho boční stěnu tlakovou silou F. Vektorová přímka této síly leží v rovině středního řezu a je kolmá k jeho straně MQ. Tíhová síla G působí rovněž v rovině středního řezu v těžišti T kvádru, třecí síla $F_t = f\,G$ v podstavě kvádru směrem naznačeným na obr. 7. Rameno síly **F** vzhledem k bodu N je $d' \leqq d$, neboť d je největší možná vzdálenost vektorové přímky síly **F** od podstavy kvádru.

Řešení. Má-li se kvádr po podložce posouvat, musí být síla F větší nebo rovna třecí síle, takže platí $F \geqq F_t$, jestliže se však kvádr při posouvání nepřeklápí, nezvedá se jeho těžiště a proto se nezvětšuje jeho potenciální energie tíhová. Síla F tedy vykonává při posouvání kvádru rovnoměrným pohybem po dráze s práci $A = F\,s$ potřebnou na překonání třecí síly. Proto platí $F\,s = F_t\,s$, takže $F = F_t = f\,G$.

Při překlápění se kvádr otáčí kolem osy kolmé k rovině obdélníka $MNPQ$ a procházející bodem N. Proto uvažujeme momenty sil F, G, F_t vzhledem k bodu N

$$M_1 \leqq F\,d\,,$$

$$M_2 = G\,\frac{a}{2} \quad \text{a} \quad M_3 = 0\,,$$

kde d je největší možná vzdálenost, při které se kvádr ještě nepřeklápí.

Protože vektorové přímky sil F a G leží v jedné rovině, procházející bodem N, musí platit $M_1 \leqq M_2$. Po dosazení vyjde

$$f\,G\,d' \leqq G\,\frac{a}{2}\,,$$

takže

$$d' \leqq \frac{a}{2f}\,.$$

Pro dané hodnoty je $\quad d' \leqq \dfrac{18}{2\,.\,0{,}3}\ \text{cm} = 30\ \text{cm}\,.$

Vzdálenost tyčinky od vodorovné desky $d' \leqq 30$ cm.

3. *Moment síly vzhledem k pevné ose*

Těleso upevněné v jednom bodě koná účinkem síly otáčivý pohyb kolem osy, která je vektorovou přímkou momentu působící síly. Směr této osy je určen normálou roviny σ, proložené vektorem **r** a vektorovou přímkou síly **F**. Změna směru kteréhokoli z těchto vektorů má za

následek změnu polohy osy rotace. Osa rotace tělesa, které má jeden pevný bod, může mít tedy v prostoru jakýkoliv směr.

Těleso upevněné ve dvou bodech O_1 a O_2 (obr. 8) může konat otáčivý pohyb jen kolem osy o procházející body O_1 a O_2. Tato osa nemůže měnit svou polohu a nazývá se *pevná osa*.

Při řešení úloh na otáčení těles okolo pevné osy rozložíme sílu $\mathbf{F}$ působící v určitém bodě A tuhého tělesa na tři k sobě kolmé složky $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$. Síla $\mathbf{F}_1$ je k rotační ose kolmá a její vektorová přímka protíná osu v bodě O. Proto nemá síla $\mathbf{F}_1$ na těleso otáčivé účinky, neboť její rameno je rovno nule. Druhá složka $\mathbf{F}_2$ je rovnoběžná s osou rotace. Také tato síla nemá na těleso otáčivé účinky, přestože má vzhledem k bodům O_1, O_2 a O momenty různé od nuly. Otáčivý účinek této síly se ruší otáčivými účinky reakčních sil na těleso v bodech O_1 a O_2. Otáčivé účinky má jen třetí složka $\mathbf{F}_3$, jejíž vektorová přímka leží v rovině σ proložené bodem A kolmo k ose rotace a je také kolmá k rovině τ, určené působištěm A síly $\mathbf{F}$ a osou rotace.

Velikost otáčivých účinků síly $\mathbf{F}$ vzhledem k pevné ose je určena veličinou nazvanou *moment síly vzhledem k ose*. Je to vektor, který má směr osy rotace. Jeho velikost je definována jako součin velikosti složky F_3 síly $\mathbf{F}$ a kolmé vzdálenosti p_3 vektorové přímky síly $\mathbf{F}_3$ od osy rotace. Orientace momentu síly vzhledem k ose se určuje obdobně jako orientace momentu síly vzhledem k bodu. Platí tedy i zde vztah

$$M = p_3 F_3 ,$$

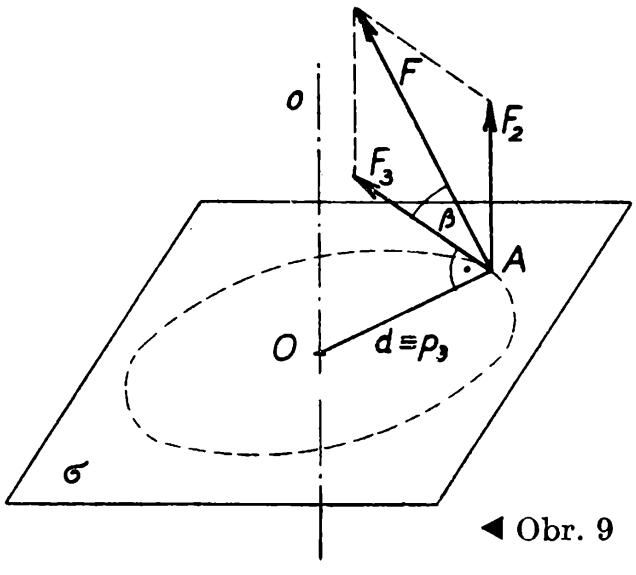
obdobný vztahu (1).

Úloha 3. Na dokonale tuhé těleso, jehož pevná osa o rotace je svislá, působí v bodě A síla o stálé velikosti F. Její vektorová přímka se otáčí spolu s tělesem, při rotaci nemění vzhledem k tělesu svou polohu, svírá s vodorovnou rovinou úhel β a má od osy rotace (kolmou) vzdálenost d.

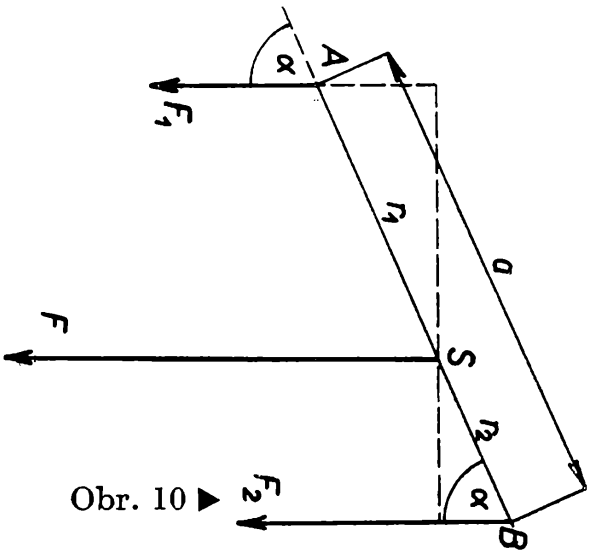
a) Jak velikým momentem vzhledem k ose o působí síla $\mathbf{F}$ na těleso?

b) Jak veliká práce se vykoná při jednom otočení tělesa kolem osy?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $F = 20$ N, $\beta = 60°$, $d = 0{,}4$ m.



◀ Obr. 9



Obr. 10 ▶

Označení veličin. Sílu **F** rozložíme na dvě složky $\mathbf{F}_2$ a $\mathbf{F}_3$ (obr. 9). Složka $\mathbf{F}_2$ je rovnoběžná s osou rotace a nemá tedy na těleso otáčivé účinky. Totéž platí o tíhové síle **G**, která je také s osou rotace rovnoběžná. Otáčení tělesa působí jen složka $\mathbf{F}_3$. Jejím ramenem vzhledem k ose o je d.

Řešení. a) Otáčivý účinek síly **F** je určen momentem $M = F_3 d$. Proto platí $M = p_3 F_3 = d\,F \cos\beta = 20\,.\,0{,}4\,.\,0{,}5$ N m $= 4$ N m.

Síla **F** působí na těleso momentem 4 N m.

b) Při otáčení tělesa kolem osy rotace koná práci jen složka F_3. Hodnota této práce je $A = M\,\alpha = 2\,\pi\,M = 2\,\pi\,d\,F \cos\beta = 2\ \ 3{,}14\,.\,4$ N m $=$ $= 25{,}12$ J.

4. *Otáčení tělesa kolem pevné osy*

Rotaci tělesa kolem pevné osy mohou působit podle čl. 3 jen síly **F** nebo složky těchto sil, jejichž vektorové přímky leží v rovinách σ kolmých k ose rotace, a to jen tehdy, pokud tuto osu neprotínají.

Označíme-li O průsečík osy o s rovinou σ, je kolmá vzdálenost p bodu O od vektorové přímky síly **F** ramenem této síly. Otáčí-li se těleso působením síly **F** kolem osy o, konají všechny hmotné body tělesa o hmotnostech $m_1, m_2, \ldots, m_n$, jejichž vzdálenosti od osy rotace označíme po řadě $r_1, r_2, \ldots, r_n$, pohyby po kružnicích, jejichž středy leží na ose otáčení. Přitom působí na hmotné body $m_1, m_2, \ldots, m_n$ po řadě síly $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$. Momenty všech těchto sil $\mathbf{F}_k$ i moment síly **F** mají stejný počátek a jsou souhlasně orientovány. Proto platí rovnice

$$F\,p = F_1\,r_1 + F_2\,r_2 + \qquad + F_n\,r_n \tag{7}$$

Každá ze sil $\mathbf{F}_k$ uděluje příslušnému hmotnému bodu m_k zrychlení $\mathbf{a}_k$, které má v každém místě směr tečny (tečnové zrychlení) ke kruhové dráze pohybujícího se hmotného bodu. Protože body m_k mají od osy rotace různé vzdálenosti, nemají jejich tečnová zrychlení stejné velikosti, nejmenší hodnoty mají zrychlení hmotných bodů nejbližších k ose otáčení. Označíme-li ε zrychlení hmotných bodů nacházejících se v jednotkové vzdálenosti od osy otáčení (úhlové zrychlení), platí pro tečnová zrychlení jednotlivých bodů vztah $a_k = r_k\,\varepsilon$ a podle zákona síly $F_k = m_k\,a_k = m_k\,r_k\,\varepsilon$. Po dosazení do rovnice (7) vyjde

$$M = p\,F = (m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + \qquad + m_n\,r_n^2)\,\varepsilon = J\,\varepsilon\,, \tag{8}$$

kde výraz

$$J = m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + \qquad + m_n\,r_n^2 \tag{9}$$

se nazývá *moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose o.*

Rovnice (8) $M = J\,\varepsilon$ má pro otáčivé pohyby tělesa stejný význam jako zákon síly $F = m\,a$ pro pohyby posuvné. Vektorové veličiny **M** a úhlové zrychlení ε mají pro otáčivý pohyb tělesa stejný význam jako vektor **F** síly a vektor **a** zrychlení při pohybech posuvných a skalární veličina moment setrvačnosti J při otáčivých pohybech odpovídá hmotnosti m při pohybech posuvných.

Je-li $\varepsilon = 0$, pak těleso koná buď rovnoměrný otáčivý pohyb s konstantní úhlovou rychlostí ω nebo se neotáčí. Je-li $\varepsilon > 0$, otáčí se těleso zrychleně, je-li $\varepsilon < 0$, koná otáčivý pohyb zpomalený. Má-li ε konstantní hodnotu, otáčí se těleso rovnoměrně zrychleně nebo rovnoměrně zpomaleně, podle toho, zda je $\varepsilon > 0$ nebo $\varepsilon < 0$.

Úloha 4. V úloze 3 se těleso otáčí kolem pevné osy rotace s úhlovým zrychlením $\varepsilon = 0{,}5$ rad s^{-2}. Jak veliký má moment setrvačnosti?

Řešení. Podle vztahu (8) je

$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{d\,F \cos\beta}{\varepsilon} = \frac{20\,.\,0{,}4\,.\,0{,}5}{0{,}5}\ \mathrm{N\ m\ s^2} = 8\ \mathrm{kg\ m^2}$$

Moment setrvačnosti tělesa má hodnotu 8 kg m^2.

5. *Skládání rovnoběžných sil působících v různých bodech dokonale tuhého tělesa*

Momentová věta má základní význam nejen pro vyšetřování otáčivých účinků sil působících na tuhé těleso, uplatňuje se také při určování výslednice sil, které působí v různých bodech tuhého tělesa, tj. při skládání a rozkládání sil.

V učebnici Fyzika pro I. roč. SVVŠ na str. 112 je vysvětlen význam momentové věty pro skládání různoběžných sil působících v různých bodech tuhého tělesa. V tomto studijním textu vysvětlíme význam momentové věty při skládání rovnoběžných sil.

Máme-li složit více než dvě síly, najdeme nejprve výslednici libovolných dvou z nich. Potom složíme nalezenou výslednici s libovolnou silou třetí a vyjde nám výslednice tří sil, kterou složíme se silou čtvrtou. Pokračujeme-li tímto způsobem dále, najdeme nakonec výslednici všech sil působících na těleso. Stačí tedy nalézt způsob, jak se složí dvě rovnoběžné síly, tj. zjistit, jak se najde poloha působiště, velikost, směr a orientace dvou rovnoběžných sil.

Ze zkušenosti víme, že výslednice dvou rovnoběžných sil leží v rovině určené vektorovými přímkami obou daných sil a je s nimi rovnoběžná.

Nechť působí na volně pohyblivé těleso ve dvou různých bodech A, B, jejichž vzdálenost je a, dvě rovnoběžné síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ (obr. 10). Jejich výslednice $\mathbf{F}$ musí mít na těleso stejné účinky posuvné i otáčivé jako síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$. Protože je možno posunout působiště síly do libovolného místa na její vektorové přímce, zvolíme za působiště výslednice bod S, ve kterém se protíná vektorová přímka výslednice s přímkou procházející body A, B. Vzdálenosti $SA = r_1$ a $SB = r_2$ jsou velikosti polohových vektorů sil $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$. Upevníme-li těleso v bodě S nebo umístíme-li v něm pevnou osu kolmou k AB, vyvolá síla $\mathbf{F}$ tlakovou sílu tělesa na osu; stejně velikou reakční silou $\mathbf{F}'$ tlačí osa na těleso, takže na těleso působí tři síly $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ a $\mathbf{F}'$, jejichž momenty vzhledem k bodu S mají podle vztahu (1) hodnoty $M_1 = r_1 F_1 \sin\alpha$ a $M_2 = r_2 F_2 \sin\alpha$.

Moment síly $\mathbf{F}'$ je roven nule, neboť její vektorová přímka prochází bodem S. Protože síla $\mathbf{F}'$ je reakcí síly $\mathbf{F}$, musí být síly $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ a $\mathbf{F}'$ v rovnováze. Platí tedy podle momentové věty $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0$. Aby tato rovnice mohla být splněna, musí jedna ze sil $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ působit rotaci v kladném smyslu, druhá ve smyslu záporném. Proto se dá rovnice $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0$ psát ve tvaru $r_1 F_1 \sin \alpha - r_2 F_2 \sin \alpha = 0$, z níž vychází vztah

$$r_1 F_1 - r_2 F_2 = 0 \text{ a po úpravě } \frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{F_1} \tag{10}$$

Jsou-li síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ souhlasně orientovány, musí bod S ležet podle vztahu (10) uvnitř úsečky AB, blíže k síle větší (obr. 10), jsou-li opačně orientovány, musí být bod S vně úsečky AB na straně větší síly (obr. 11).

Jsou-li síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ souhlasně orientovány, je podle obr. 10 $r_2 = a - r_1$. Po dosazení za r_2 do vztahu (10) vyjde $r_1 F_1 - a F_2 + r_1 F_2 = 0$, takže

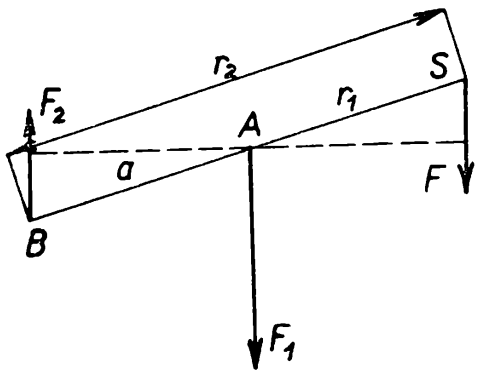
$$r_1 = \frac{F_2}{F_1 + F_2} a \quad \text{a} \quad r_2 = \frac{F_1}{F_1 + F_2} a . \tag{11}$$

Mají-li síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ opačnou orientaci, vypočítáme obdobným způsobem podle obr. 11

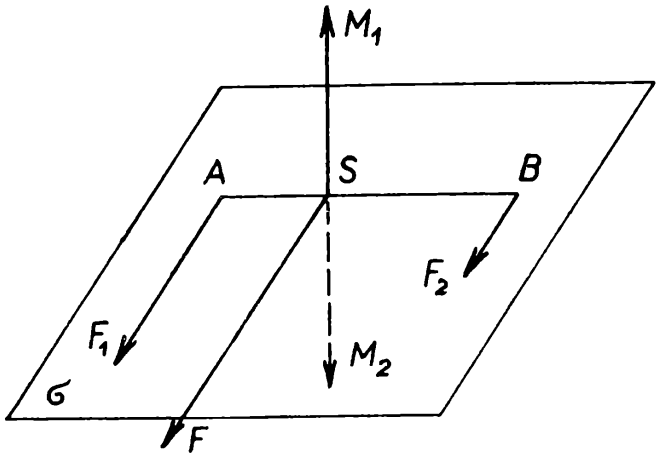
$$r_1 = \frac{F_2}{F_1 - F_2} a \quad \text{a} \quad r_2 = \frac{F_1}{F_1 - F_2} a \tag{12}$$

Výslednice $\mathbf{F}$ musí nahradit síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ v každém případě, tedy i tehdy, upevníme-li těleso v bodě A. Pak se ruší pevností bodu A účinek síly $\mathbf{F}_1$ a výslednice $\mathbf{F}$ musí nahradit jen účinky síly $\mathbf{F}_2$, takže platí

$$a F_2 = r_1 F \quad \text{a} \quad F = \frac{a}{r_1} F_2$$



Obr. 11



Obr. 12

Po dosazení ze vztahu (11) za r_1 vyjde pro souhlasně orientované síly

$$F = a\frac{F_1 + F_2}{a F_2} F_2 = F_1 + F_2 \qquad (13)$$

Obdobně určíme velikost výslednice rovnoběžných opačně orientovaných sil. Vyjde

$$F = F_1 - F_2 . \qquad (14)$$

Vztahy (13) a (14) můžeme vyjádřit jedinou vektorovou rovnicí

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 . \qquad (15)$$

Velikost i orientaci dvou souhlasně i opačně orientovaných sil určuje rovnice (15) a polohu jejich působiště vztah (10).

Pravidla pro skládání rovnoběžných sil působících v různých bodech dokonale tuhého tělesa, vyjádřená rovnicí (15) a (10), můžeme vyjádřit slovně:

Výslednice dvou rovnoběžných sil souhlasně orientovaných se rovná jejich součtu a je s nimi souhlasně orientována. Její působiště dělí vzdálenost působišť obou sil v obráceném poměru jejich velikostí.

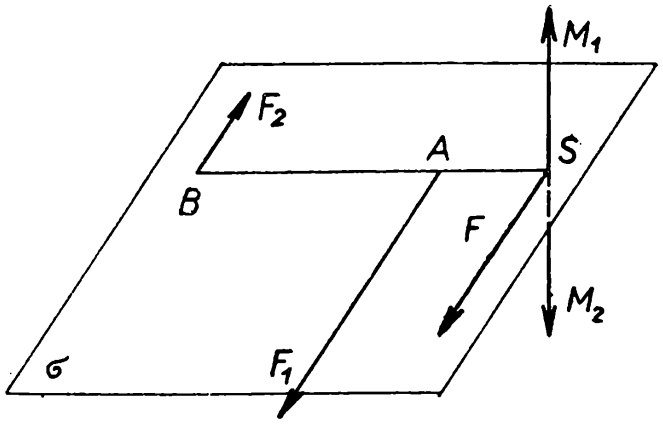
Výslednice dvou rovnoběžných nesouhlasně orientovaných sil se rovná jejich rozdílu a je souhlasně orientována se silou větší. Její působiště je na prodloužené spojnici působišť obou sil na straně síly větší.

Vektorově je skládání sil souhlasně orientovaných naznačeno na obr. 12 a skládání sil nesouhlasně orientovaných na obr. 13.

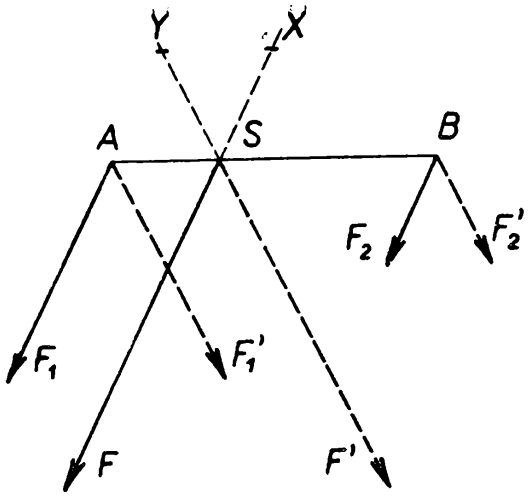
Poloha působiště S výslednice dvou rovnoběžných sil je podle vztahu (10) závislá jen na velikosti sil $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ a nikoliv na jejich směru. Nahradíme-li tedy síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$ jinými spolu rovnoběžnými silami $\mathbf{F}_1'$ a $\mathbf{F}_2'$ jakéhokoliv směru, které mají velikosti $F_1' = F_1$ a $F_2' = F_2$ a stejná působiště jako síly $\mathbf{F}_1$ a $\mathbf{F}_2$, má výslednice $\mathbf{F}'$ sil $\mathbf{F}_1'$ a $\mathbf{F}_2'$ působiště také v bodě S. Z obr. 14 je patrno, že za působiště výslednice $\mathbf{F}$ můžeme volit např. bod X, za působiště výslednice $\mathbf{F}'$ např. bod Y Bod S je však jediným bodem, ve kterém působí výslednice všech rovnoběžných sil dané velikosti, ať mají jakýkoliv směr. Proto *se bod S nazývá střed rovnoběžných sil.*

V úvahách o skládání rovnoběžných sil působících na klidné dokonale tuhé těleso jsme poznali, že platí-li vzhledem k určitému bodu tělesa momentová věta, těleso se neotáčí. Umístíme-li do tohoto bodu pevnou osu kolmou k rovině určené vektorovými přímkami daných sil, prochází vektorová přímka jejich výslednice touto osou a pevností osy se ruší. Těleso pak nekoná ani posuvný pohyb. Odstraníme-li osu, uvede se těleso působením výslednice daných sil do posuvného pohybu, neotáčí se však.

Úloha 5. Stejnorodá tyč hmotnosti $m = 4$ kg, délky $d = 1$ m má ve všech místech stejný průřez. Je zavěšena na obou koncích na svislých nitích vedených přes kladky a zatížených závažími o hmotnostech $m_1 = 3$ kg a $m_2 = 5$ kg.



Obr. 13



Obr. 14

Určete velikost, směr, orientaci a působiště síly **F**, která by udržela v rovnováze soustavu sil působících na těleso.

Označení veličin a dané hodnoty. Na zavěšenou tyč působí na obou koncích napjaté nitě silami $F_1 = 3$ kp a $F_2 = 5$ kp, které jsou orientovány svisle vzhůru (obr. 15). Tíhová síla $G = 4$ kp je orientována svisle dolů. Vektorové přímky sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ a **G** jsou rovnoběžné. Výslednice $\mathbf{F}'$ těchto sil má působiště v jistém bodě S, který má od bodu A vzdálenost x. Síla $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$ působící v bodě S je se silami $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, **G** v rovnováze. Označíme-li momenty sil $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, **G**, **F** po řadě $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, **M**, určíme velikost i orientaci síly **F** z vektorové rovnice $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{G} + \mathbf{F} = 0$, polohu působiště z momentové věty $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M} = 0$.

Jestliže numerická hodnota síly **F** vyjde záporná, značí záporné znaménko jen její zápornou orientaci, kterou má také síla **G**. Protože však orientace síly se bere v úvahu v jejím momentu, dosazuje se při numerickém výpočtu jen její velikost bez ohledu na orientaci, právě tak jako u síly **G**.

Jsou-li síly $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, **G**, **F** v rovnováze, můžeme kteroukoli z nich volit za sílu, jež je reakcí osy na výslednici zbývajících tří sil. Proto můžeme zvolit za vztažný bod libovolný z bodů A, B, S, O.

Řešení. Převedeme-li vektorovou rovnici vyjadřující podmínku rovnováhy sil do skalárního tvaru, vyjde $F = -F_1 - F_2 + G = -4$ kp.

Soustava sil F_1, F_2, G je udržována v rovnováze silou $F = 4$ kp, orientovanou svisle dolů.

Polohu bodu S určíme z momentové věty. Za vztažný bod volíme

a) bod A: Pak platí

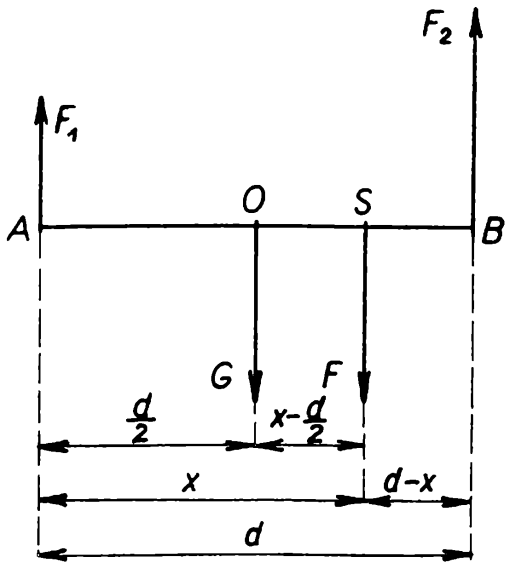
$$F_1 \,.\, 0 - G\frac{d}{2} - |F|\,x + F_2 d = 0,$$

odkud vyjde

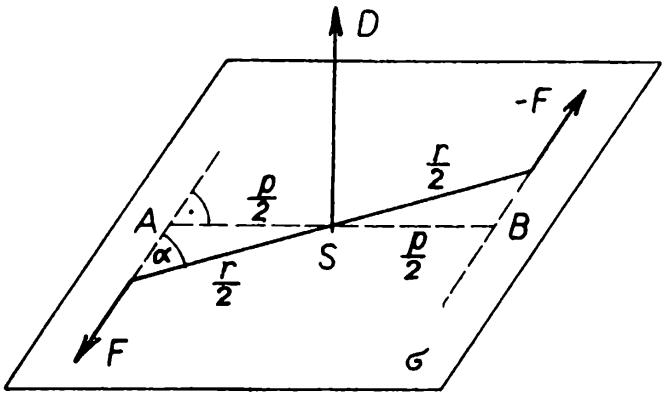
$$x = \frac{2F_2 - G}{2|F|}d = \frac{2F_2 - G}{2(F_1 + F_2 - G)}d = \frac{10 - 4}{2(5 + 3 - 4)}\ \text{m} = 0{,}75\ \text{m},$$

b) bod O:

$$F_1\frac{d}{2} - |F|\left(x - \frac{d}{2}\right) + F_2\frac{d}{2} = 0,$$



◀ Obr. 15



Obr. 16 ▲

odkud vyjde

$$x = \frac{-F_1 + F_2 + |F|}{2\,|F|}\,d = \frac{-F_1 + F_2 + F_1 + F_2 - G}{2\,(F_1 + F_2 - G)}\,d =$$

$$= \frac{2\,F_2 - G}{2\,(F_1 + F_2 - G)}\,d\,,$$

c) bod S: $$-F_1 x + G\left(x - \frac{d}{2}\right) + F_2\,(d - x) = 0\,,$$

odkud vyjde

$$2\,(-F_1 + G - F_2)\,x = G\,d - 2\,F_2\,d$$

takže $$x = \frac{2\,F_2 - G}{2\,(F_1 + F_2 - G)}\,d\,,$$

d) bod B: $$-F_1 d + G\frac{d}{2} + |F|\,(d - x) = 0\,,$$

odkud vyjde

$$2\,|F|\,x = (-2\,F_1 + G + 2\,|F|)\,d\,,$$

takže $$x = \frac{2\,F_2 - G}{2\,(F_1 + F_2 - G)}\,d$$

Působiště síly **F** je vzdáleno 0,75 m od levého konce tyče.

6. *Dvojice sil*

Soustava dvou stejně velikých rovnoběžných opačně orientovaných sil **F** a $-$ **F** se nazývá dvojice sil. Jejich výslednice **F** $+$ ($-$ **F**) $= 0$. Dvojice sil nepůsobí tedy posuvný pohyb tělesa, má však na ně otáčivý

účinek. Velikost otáčivého účinku dvojice sil na těleso měříme jejím momentem **D**, který nazýváme moment dvojice sil. Vzhledem ke středu S úsečky AB, spojující působiště sil **F** a — **F**, který je také středem úsečky $A'B' = p$, kolmé k vektorovým přímkám těchto sil, má moment dvojice sil velikost $\mathbf{D} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, kde $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ značí momenty sil **F** a — **F**. Protože momenty $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ jsou souhlasně orientovány, je

$$D = \frac{p}{2} F + \frac{p}{2} F = p F = r F \sin \alpha . \tag{16}$$

Orientovaná úsečka $\mathbf{A'B'} = \mathbf{p}$, kolmá k vektorovým přímkám obou sil **F** a — **F**, se nazývá *rameno dvojice sil.*

Moment dvojice sil je vektor, jehož počátek je ve středu úsečky spojující působiště sil **F** *a* — **F** *a má velikost rovnou součinu ramena dvojice sil a velikosti jedné ze sil.*

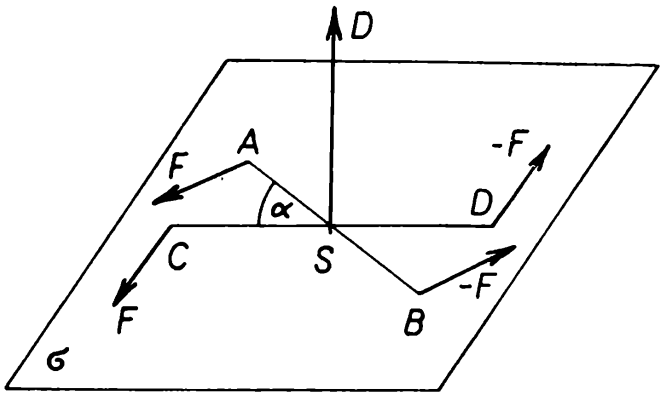
Jeho vektorová přímka je kolmá k rovině σ proložené vektorovými přímkami těchto sil (obr. 16). Orientace vektoru momentu sil se určí pravidlem pravé ruky obdobně jako orientace momentu síly vzhledem k bodu.

Vlastnosti momentu dvojice sil

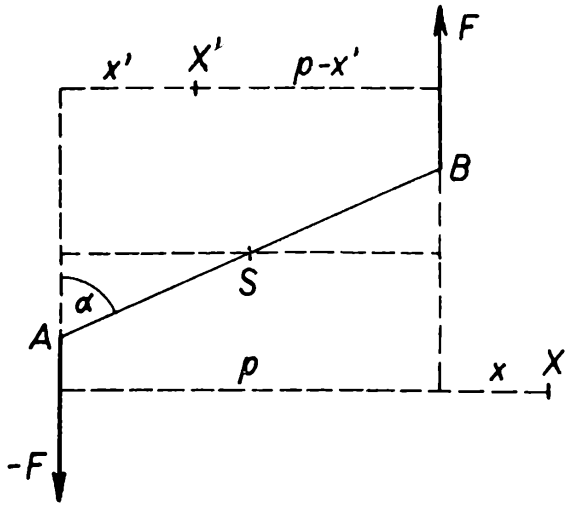
a) Otočíme-li danou dvojici sil kolem bodu S o libovolný úhel α, má stočená dvojice sil na tuhé těleso vzhledem k bodu S stejně veliký otáčivý účinek jako původní dvojice (obr. 17). Moment obou dvojic je totožný.

b) Moment $\mathbf{D}_x$ dvojice sil vzhledem k libovolnému bodu X nacházejícímu se v rovině σ určené silami **F** a — **F** určíme užitím vztahu (3), podle něhož je $\mathbf{D}_x = \mathbf{M}_x + \mathbf{M}'_x$, kde $\mathbf{M}_x$ a $\mathbf{M}'_x$ značí momenty sil **F** a — **F** vzhledem k bodu X. Nachází-li se bod X mimo pás roviny σ mezi vektorovými přímkami sil **F** a — **F**, platí podle obr. 18 vztah

$$D = (x + p) F - x F = p F$$



Obr. 17



Obr. 18

Moment dvojice sil vzhledem k libovolnému bodu X' nacházejícímu se uvnitř pásu roviny σ mezi vektorovými přímkami sil $\mathbf{F}$ a $-\mathbf{F}$ má podle obr. 18 velikost

$$D = x' F + (p - x') F = p F$$

tedy stejnou, jako má moment téže dvojice vzhledem k bodu X a k bodu S. Stejnou velikost má moment dvojice také vzhledem ke všem bodům nacházejícím se na vektorových přímkách sil $\mathbf{F}$ a $-\mathbf{F}$.

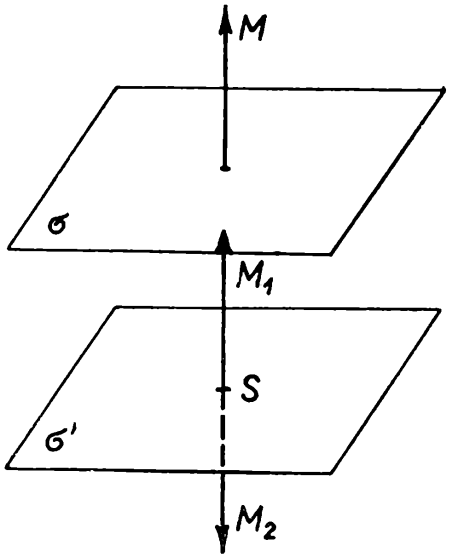
Otáčivý účinek dvojice sil, ležících v rovině σ, na tuhé těleso se nemění, jestliže dvojici sil v rovině σ libovolně posuneme a stočíme. Počátek vektoru momentu dvojice sil se při tomto přemístění dvojice sil posune v rovině σ, aniž by její moment změnil směr a orientaci.

c) Nechť působí na těleso v rovině σ dvojice sil, jejíž moment je $\mathbf{M}$. Veďme tělesem rovinu σ' rovnoběžnou s rovinou σ (obr. 19). Dvě dvojice sil, působící v rovině σ', jejichž opačně orientované momenty $\mathbf{M}_1$ a $\mathbf{M}_2$ o stejné velikosti $M_1 = M_2 = M$ mají stejný počátek S, nepůsobí na těleso otáčivým účinkem. Posuneme-li je tak, že bod S se přemístí do průsečíku vektorové přímky momentu $\mathbf{M}$ s rovinou σ', ruší se v tuhém tělese účinky stejně velikých momentů $\mathbf{M}_2$ a $\mathbf{M}$ a na těleso působí v rovině σ' moment $\mathbf{M}_1$, který nahradí otáčivé účinky momentu $\mathbf{M}$.

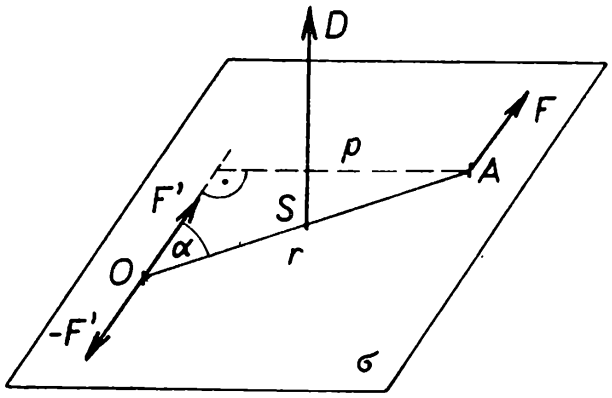
Účinek dvojice sil, ležící v rovině σ, na těleso se nezmění, přemístíme-li ji do libovolného bodu kterékoli roviny σ' rovnoběžné s rovinou σ.

Dvě dvojice sil ležící v rovnoběžných rovinách, které mají stejně veliké momenty, působí na dokonale tuhé těleso otáčivými účinky, jež jsou stejné, mají-li momenty dvojic stejnou orientaci, a ruší se, jsou-li tyto momenty orientovány opačně.

Působiště momentu dvojice sil lze tedy v dokonale tuhém tělese



Obr. 19



Obr. 20

posunout do libovolného bodu. Otáčivý účinek dvojice sil na těleso se tím nezmění. *Moment dvojice sil je volným vektorem.*

Avšak i sílu **F** působící v bodě A dokonalé tuhého tělesa můžeme posunout v tělese do libovolného bodu O. Přiřadíme k ní v bodě O dvě stejně veliké protisměrné síly $\mathbf{F}'$ a $-\mathbf{F}'$, které jsou v rovnováze a jsou stejně veliké jako síla **F**. Síla $-\mathbf{F}'$ vytvoří se silou **F** dvojici sil o momentu $M = p\,F = r\,F \sin\alpha$, který se rovná momentu síly **F** vzhledem k bodu O (obr. 20). Dvojice sil **F**, $-\mathbf{F}'$ se nazývá *doplňkovou dvojicí sil.* Síla $\mathbf{F}'$ je síla vzniklá přenesením síly **F**. Každé přenesení síly do libovolného bodu dokonale tuhého tělesa je spojeno se vznikem doplňkové dvojice sil, která působí otáčení tělesa.

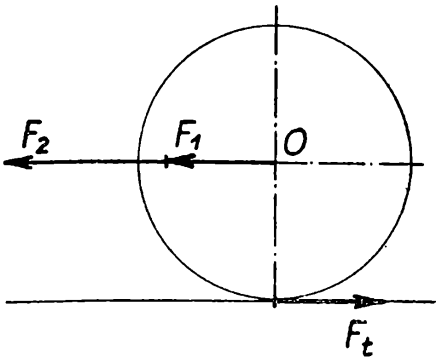
V dokonale tuhém tělese můžeme sílu posunout do libovolného bodu O, připojíme-li k ní doplňkovou dvojici sil. Moment doplňkové dvojice sil je stejně veliký a má stejnou orientaci jako moment původní síly vzhledem k novému působišti.

Dokonale tuhé těleso může být uvedeno v otáčivý pohyb jen působením dvojice sil, i když se zdá, že otáčení tělesa může působit jen jedna síla. Vysvětlíme to na otáčení kola valícího se po rovině. Síla **F** na obr. 21 je tažná síla, která uvede kolo do pohybu. Vedle síly **F** působí na těleso ještě třecí síla $\mathbf{F}_t$. Síla **F** se rozloží na dvě složky $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_t$ a $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1$. Síla $\mathbf{F}_1$ spolu se silou $\mathbf{F}_t$ vytvoří silovou dvojici o momentu $D = r\,F_t$, která působí otáčení kola, síla F_2 působí posuvný pohyb tělesa. Obdobně se vysvětlí i otáčení volantu auta, otáčí-li jím řidič jednou rukou.

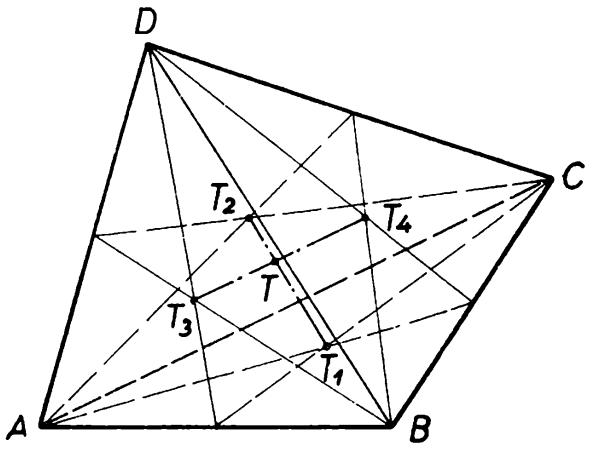
7. *Hmotný střed (těžiště) tuhého tělesa*

V prostoru, ve kterém působí na hmotné body nebo na tělesa síly, existuje silové pole. Silové pole je např. v okolí elektricky nabitých těles nebo kolem magnetů, silové pole je také v okolí Země, která k sobě přitahuje všechna tělesa nacházející se na jejím povrchu a nad jejím povrchem. Toto pole se nazývá tíhovým polem zemským. Jestliže silové pole uděluje všem tělesům, v něm se nacházejícím, ve všech místech stejně veliká zrychlení stejného směru a stejné orientace, nazýváme je polem stejnorodým (homogenním). Každé tuhé těleso si můžeme představit jako soustavu částic (hmotných bodů), jejichž vzájemná poloha se v tělese nemění. Jestliže těleso je ve stejnorodém silovém poli, působí na všechny jeho hmotné body, jejichž počet označíme n, síly, které budeme značit postupně $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Tyto síly udělují všem hmotným bodům tělesa stejně veliká zrychlení a, takže

$$F_1 = m_1 a\,,\ F_2 = m_2 a\,,\ \ldots,\ F_n = m_n a\,,$$



Obr. 21



Obr. 22

kde m_1, m_2, ..., m_n značí hmotnosti jednotlivých bodů, z nichž se těleso skládá. Součet

$$m = m_1 + m_2 + \quad + m_n , \tag{17}$$

značí hmotnost celého tělesa.

Síly F_1, F_2, ..., F_n jsou rovnoběžné a souhlasně orientované. Velikost F jejich výslednice je určena rovnicí

$$F = F_1 + F_2 + \quad + F_n = (m_1 + m_2 + \quad + m_n)\, a = m\, a . \tag{18}$$

Její směr a orientace jsou stejné jako u sil F_1, F_2, ..., F_n. Působiště S_m výslednice najdeme postupným skládáním sil F_1, F_2, ..., F_n. Bod S_m je středem rovnoběžných sil F_1, F_2, ..., F_n a nazývá se *hmotný střed tělesa*, neboť podle vztahu (17) a (18) se působením rovnoběžných sil F_1, F_2, ..., F_n silového pole pohybuje hmotný střed tělesa tak, jako by v něm byla soustředěna hmotnost celé soustavy a jako by na něj působila výslednice všech vnějších sil, které působí na celou soustavu hmotných bodů. Posuvný pohyb tělesa je tedy určen pohybem jeho hmotného středu. Hmotný střed má tyto důležité vlastnosti:

a) Hmotný střed tělesa je totožný se středem rovnoběžných sil, kterými působí silové pole na všechny hmotné body tělesa. Proto není jeho poloha závislá na směru, kterým síly homogenního pole působí, takže těleso má jen jeden hmotný střed, který je stejný, ať těleso zaujímá vzhledem k silám pole jakoukoli polohu.

b) Podle vztahu (17) a (18) *můžeme těleso v silovém poli nahradit jeho hmotným středem, ve kterém by byla soustředěna celková hmotnost tělesa.* Proto leží hmotný střed soustavy dvou těles na spojnici jejich hmotných středů a dělí ji na dvě části v obráceném poměru jejich hmotností.

V tíhovém poli zemském je hmotný střed tělesa totožný se středem tíhových sil působící na všechny hmotné body tělesa. Protože střed tíhových sil působících na těleso se nazývá těžiště tělesa, *je těžiště totožné s hmotným středem.*

Úloha 6. Najděte polohu těžiště desky z homogenního materiálu tvaru obecného čtyřúhelníka, která má tloušťku d.

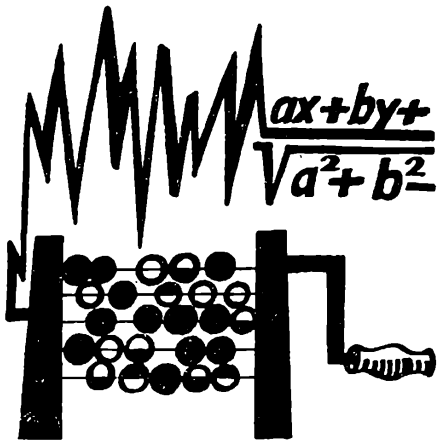
Označení veličin. Těžiště T desky se nachází v rovině σ, která půlí hrany d desky a je k nim kolmá. Řez této roviny s deskou je čtyřúhelník $ABCD$.

Řešení. Těžiště dvou těles leží na spojnici jejich těžišť. Rozdělíme-li tedy čtyřúhelníkovou desku řezem vedeným kolmo k rovině σ úhlopříčkou AC na dvě trojúhelníkové desky ABC a ADC a sestrojíme těžiště T_1 a T_2 těchto trojúhelníkových desek jako průsečíky jejich těžnic; těžiště celé desky leží na přímce T_1T_2, která je jednou těžnicí čtyřúhelníkové desky.

Druhou těžnici T_3T_4 najdeme obdobně jako těžnici T_1T_2, jestliže desku rozdělíme řezem vedeným úhlopříčkou DB kolmo k rovině σ na dvě trojúhelníkové desky DBA a DBC. Touto druhou těžnicí je přímka procházející těžišti T_3 a T_4 těchto trojúhelníkových desek.

V průsečíku těžnic T_1T_2 a T_3T_4 je těžiště T čtyřúhelníkové desky.

MMO



DOC. JAN VYŠÍN, MFF, Praha

Zúčastnili jsme se VIII. mezinárodní matematické olympiády v Sofii

1.

Řekněme hned na začátku: Zúčastnili jsme se s výsledkem neslavným. V tabulkách družstev jednotlivých zemí sestavených podle počtu dosažených bodů a podle počtu získaných cen jsme na předposledním místě před Mongolskem. Podle statutu jsou sice mezinárodní matematické olympiády (MMO) soutěžemi jednotlivců, nedá se však nic dělat

proti praxi, že se sestavuje pořadí družstev a umístění v této tabulce je jakousi vizitkou připravenosti každé země.

Prosíme však hned na začátku naše čtenáře, aby se nedali cestou nekritických sportovních fanoušků, kteří při našem neúspěchu zpravidla hrubě napadají vlastní reprezentanty. Počkejte s kritikou, až si přečtete závěrečné hodnocení našich reprezentantů.

Nyní snad začneme s tím, co vás asi nejvíce zajímá, a to s úlohami. Celkem lze říci, že letošní olympiáda byla „lehká" a mohla být ještě lehčí, kdyby byly zůstaly úlohy podle původního návrhu; to ostatně poznáte sami z textů úloh a z jejich řešení.

Jako loni bylo i letos šest soutěžních úloh, rozdělených do dvou trojic. Každá trojice tvořila jednu práci a účastníci měli 4 hodiny čistého času na její vypracování. Uvedeme nyní texty úloh a jejich řešení. U každého textu je v závorce země, která úlohu navrhla, a největší počet bodů, které bylo možno za ni získat. Jak je vidět, maximální dosažitelný počet bodů v celé soutěži byl 40. Řekněme hned, že tohoto počtu dosáhlo 11 žáků, tj. asi 17 % všech účastníků (nepočítaje v to Mongoly). Sama tato skutečnost svědčí o tom, že soutěžní práce jednak byly opravdu snadné, jednak reprezentanti většiny zemí mají v průměru vysokou úroveň.

2.

1. soutěžní práce (5. 7. 1966)

1. *V matematické soutěži byly dány tři úlohy* A, B, C. *Mezi účastníky bylo* 25 *žáků, z nichž každý rozřešil aspoň jednu úlohu. Ze všech účastníků, kteří nerozřešili úlohu* A, *byl počet těch, kteří rozřešili úlohu* B, *dvojnásobkem počtu těch, kteří rozřešili úlohu* C. *Počet těch žáků, kteří rozřešili jen úlohu* A, *byl o* 1 *větší než počet ostatních žáků, kteří rozřešili úlohu* A. *Ze všech žáků, kteří rozřešili jedinou úlohu, právě polovina nerozřešila úlohu* A.

Kolik žáků rozřešilo jen úlohu B*?*

(SSSR, 6 bodů)

2. *Označme po řadě* a, b, c *délky stran trojúhelníka a* α, β, γ *velikosti protějších úhlů. Platí-li rovnost*

$$a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta) ,$$

pak je tento trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.

(Maďarsko, 7 bodů)

3. *Součet vzdáleností vrcholů pravidelného čtyřstěnu od středu kulové plochy jemu opsané je menší než součet vzdáleností těchto vrcholů od kteréhokoli jiného bodu prostoru. Dokažte.*

(Bulharsko, 7 bodů)

II. den (6. 7. 1966)

4. *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro každé reálné číslo*

$$x \neq \frac{\lambda\pi}{2k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n, \ \lambda \text{ celé})$$

platí

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin (2^n x)} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} (2^n x) .$$

(Jugoslávie, 5 bodů)

Řešte soustavu

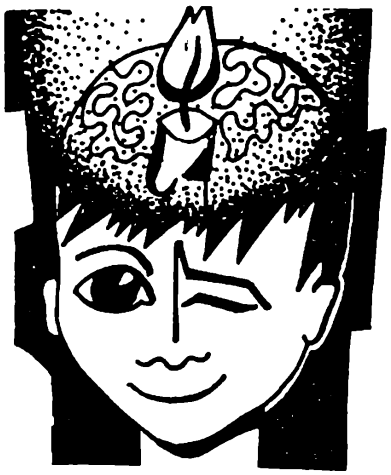
$$\begin{aligned}
|a_1 - a_2|\, x_2 + |a_1 - a_3|\, x_3 + |a_1 - a_4|\, x_4 &= 1 , \\
|a_1 - a_2|\, x_1 + |a_2 - a_3|\, x_3 + |a_2 - a_4|\, x_4 &= 1 , \\
|a_1 - a_3|\, x_1 + |a_2 - a_3|\, x_2 + |a_3 - a_4|\, x_4 &= 1 , \\
|a_1 - a_4|\, x_1 + |a_2 - a_4|\, x_2 + |a_3 - a_4|\, x_3 &= 1 ,
\end{aligned}$$

kde a_1, a_2, a_3, a_4 jsou čtyři daná navzájem různá reálná čísla.

(ČSSR, 7 bodů)

6. *Uvnitř stran AB, BC, CA trojúhelníka ABC zvolíme po řadě libovolné body K, L, M. Dokažte, že obsah aspoň jednoho z trojúhelníků MAK, KBL, LCM je menší nebo rovný čtvrtině obsahu trojúhelníka ABC.*

(Polsko, 8 bodů)



Řešení úloh z minulého ročníku

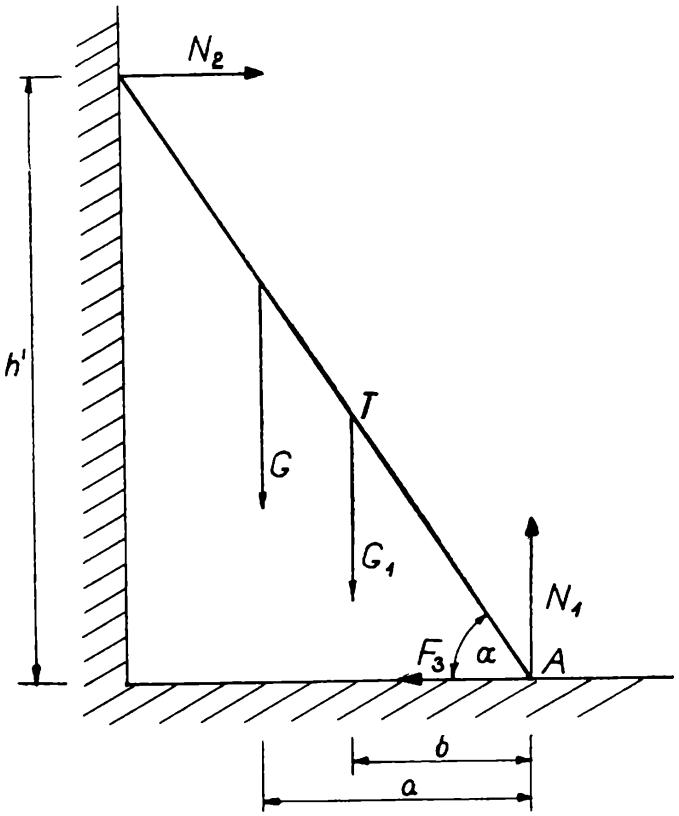
(Pokračování)

● Fyzika

3. Ke svislé stěně je přistaven žebřík délky l tak, že svírá s podlahou úhel α. Maximální síla mezi žebříkem a podlahou je F_1. Ve styčné ploše mezi žebříkem a podlahou je třecí síla $F_2 = 0$. Jak vysoko smí po žebříku vystoupit člověk tíhy G než začne žebřík klouzat

a) zanedbáme-li tíhu žebříku;

b) je-li tíha žebříku G_1?



Obr. 1

Jak velká smí být nejvýš hmotnost m žebříku, nemá-li klesat vlastní tíhou?

Úlohu řešte nejdřív obecně, potom pro hodnoty $l = 4$ m, $\alpha = 60°$, $F_1 = 200\ N$, $G = 600\ N$ a $G_1 = 150\ N$.

(Došlo 23 řešení) *František Vencálek*

Řešil Jaroslav Hořínka, 3.c SVVŠ, Praha 8:

Předpokládáme, že žebřík je homogenní. Pak je jeho těžiště T ve středu žebříku (obr. 1).

Uvažme situaci, kdy člověk vystoupí do výšky h, aniž přitom nastal skluz žebříku. Kromě sil G a G_1 působí na žebřík ještě svislá složka N_1 reakce podlahy, vodorovná složka F_3 této reakce a vodorovná složka N_2 reakce stěny. Tato rovinná soustava sil je v rovnováze. Z podmínky rovnováhy sil dostáváme

$$N_2 = F_3\,,\ N_1 = G + G_1\,.$$

Zvolíme-li momentový bod v bodě A, je $h' = l \sin\alpha$ rameno síly N_2, $a = h \operatorname{cotg}\alpha$ rameno síly G a $b = \frac{l}{2}\cos\alpha$ rameno síly G_1.

Z rovnováhy momentů k bodu A dostáváme vztah

$$N_2 h' = a\,.\,G + b\,.\,G_1\,,$$

tj.

$$(N_2 = F_3)\,,$$

$$F_3\,.\,l \sin\alpha = G\,.\,h\,.\,\operatorname{cotg}\alpha + G_1\,.\,\frac{l}{2}\cos\alpha$$

a $$F_3 = \frac{G}{l} \cdot h \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{G_1}{2} \operatorname{cotg}\alpha \,.$$

Aby žebřík neklouzal musí $F_3 \leqq F_1$, tj.

$$\frac{G}{l} \quad \frac{h \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{G_1}{2} \cdot \operatorname{cotg}\alpha \leqq F_1 \,, \tag{1}$$

takže

$$h \leqq \frac{F_1}{G} \quad l \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{G_1}{2G} l \sin\alpha \tag{2}$$

Tím je dána odpověď na otázku b). Zanedbáme-li tíhu žebříku, volíme $G_1 = 0$, takže

$$h \leqq \frac{F_1}{G} l \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{F_1}{G} \cdot l \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha \tag{3}$$

Volíme-li v rovnosti (1) $G = 0$, dostáváme

$$\frac{G_1}{2} \quad \operatorname{cotg}\alpha \leqq F_1 \tag{4}$$

což je podmínka pro to, aby žebřík neklouzal vlastní tíhou G_1. Z této podmínky vyplývá, že hmotnost žebříku

$$m = \frac{G_1}{g} \leqq \frac{2F_1}{g} \operatorname{tg}\alpha$$

Pro číselné hodnoty, udané v textu, dostáváme

a) $h \leqq \dfrac{200\ N}{600\ N} \cdot 4\ \mathrm{m} \cdot \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\ \mathrm{m}$;

b) $h \leqq 2\ \mathrm{m} - \dfrac{150\ N}{2 \cdot 600\ N} \quad 4\ \mathrm{m} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\ \mathrm{m} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{m} \doteq 1{,}567\ \mathrm{m}$;

c) pro $g \doteq 10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ je $\mathrm{m} = \dfrac{2 \cdot 200\ N}{10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}} \quad \sqrt{3} = 68{,}4\ \mathrm{kg}$.

P o z n á m k a. V textu byl předpoklad, že síla F_1 nezávisí na zatížení žebříku. Ve skutečnosti však je $F_1 = G_1 \cdot \mu$, kde μ je součinitel smykového tření ve styčné ploše mezi podlahou a žebříkem. Pak podmínka (4) nabude tvar

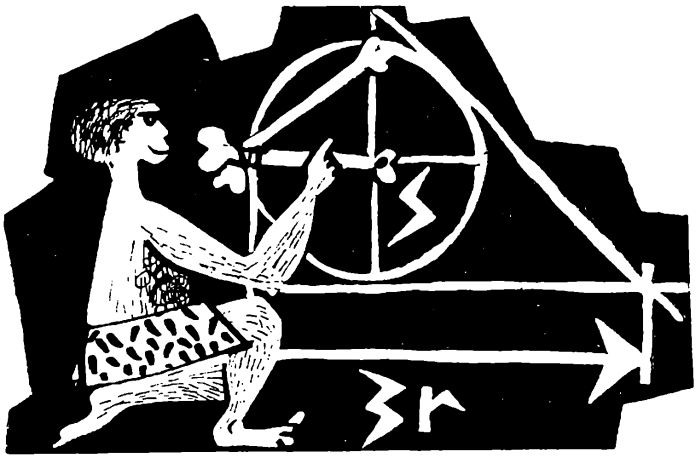
$$\frac{G_1}{2} \cdot \operatorname{cotg}\alpha \leqq G_1 \cdot \mu \,, \text{ tj. } \operatorname{cotg}\alpha \leqq 2\mu \,.$$

Podmínka, aby žebřík nezačal klouzat vlastní tíhou, nezávisí vůbec na jeho hmotnosti, ale na úhlu α, který svírá žebřík s podlahou. Pokud bude

$$\operatorname{arccotg} 2\mu < \alpha < \frac{\pi}{2} \,.$$

nebude žebřík klouzat v žádném případě.

(Pokračování)



Mascheronské konstrukce

DOC. OTA SETZER, ČVUT, Praha

Většinu geometrických konstrukcí provádíme nyní zpravidla užitím pravítka a kružítka, tj. euklidovsky. Avšak již v 17. století Dán Georg Mohr (1640—1697) a nezávisle na něm v 18. století Ital Lorenzo Mascheroni (1750—1800) zabývali se problémem, jak všechny tyto konstrukce provádět jen kružítkem, tedy bez použití pravítka.

Mohr vydal o tom v Amsterodamu v roce 1672 knihu „Euklides danicus" která však zůstala po 250 let celkem neznáma. Díky šťastné náhodě byl jeden exemplář této knihy nalezen kodaňským studentem, v roce 1928 znovu vytištěn a přeložen do němčiny

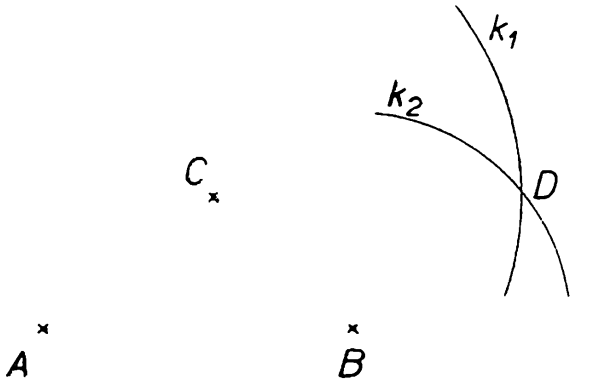
Mascheroni vydal roku 1797 v Pavii knihu „Geometrica del compasso" a věnoval ji Bonapartovi. Kniha se rychle rozšířila, byla r. 1798 přeložena do francouzštiny a v r. 1825 i do němčiny. Proto bývají konstrukce prováděné jen kružítkem někdy zvány mascheronskými, ačkoli oba autoři používají v podstatě podobných myšlenek. Mascheroni neznal dílo Mohrovo.

Ukážeme si nyní několik základních mascheronských konstrukcí, které označíme K_1—K_7.

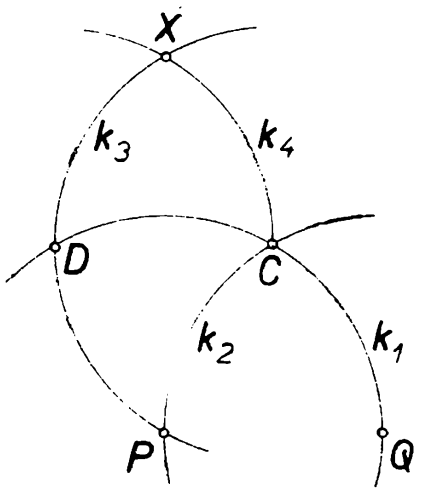
K_1. *Bodem C vést k přímce $p \equiv AB$ rovnoběžku q.*

Další bod D rovnoběžky q leží v průsečíku D kružnic k_1 $(C; AB)$, k_2 $(B; AC)$ (obr. 1),[1]) neboť čtyřúhelník $ABDC$ je rovnoběžníkem.

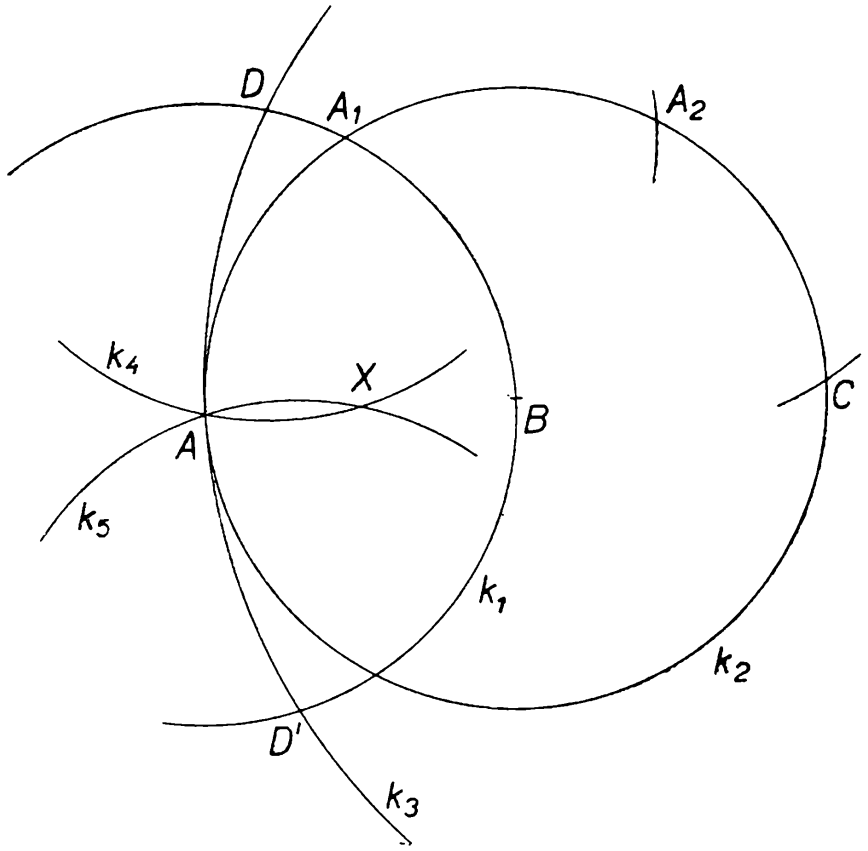
[1]) Znakem k $(S; r)$ označujeme kružnici o středu S a poloměr



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr.

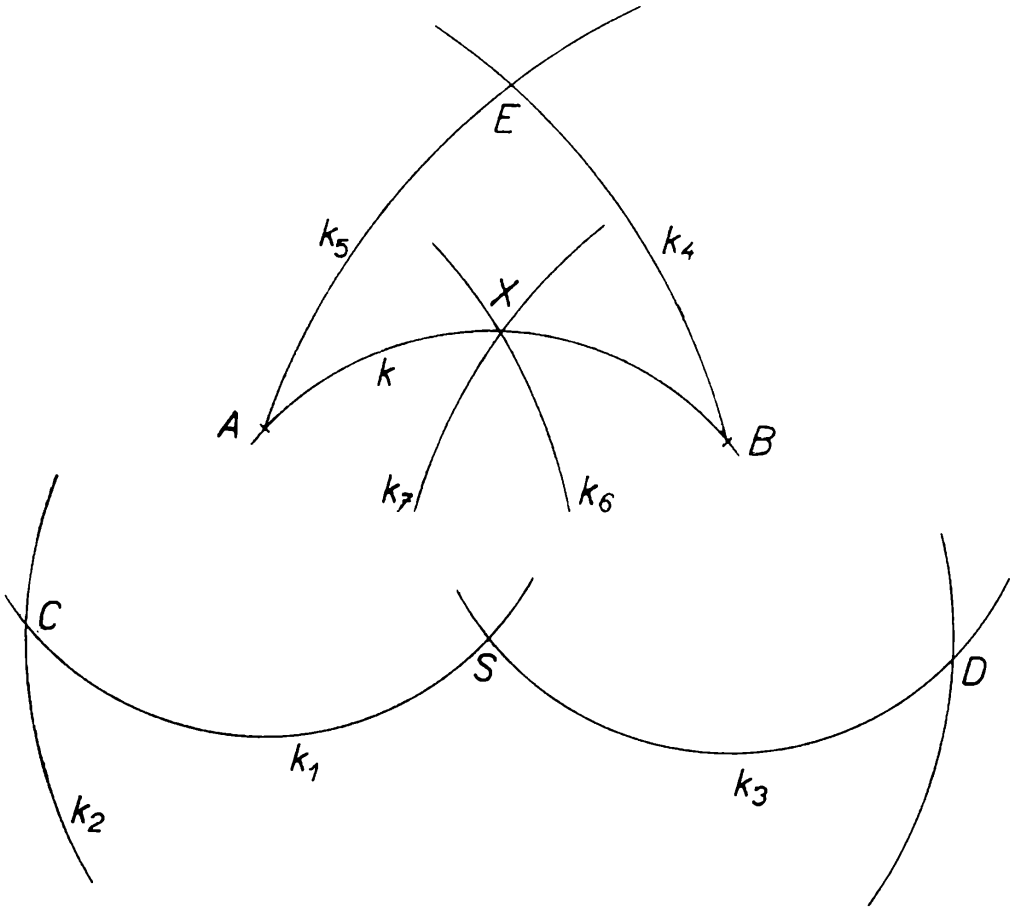
K$_2$. *V bodě P přímky PQ sestrojte k ní kolmici* (obr. 2).
Postupně sestrojujeme kruhové oblouky

$$k_1\,(P;\,r) \quad k_2\,(Q;\,r) \equiv C\,,$$

kde $r = PQ$;

$$k_3\,(C;\,r)\,,$$

$$PD = DX = r$$



Obr. 4.

bod X je bodem hledané kolmice XP, jak se snadno přesvědčíme z Thaletovy věty.

K_3. *Najít střed X úsečky AB.*
Podle obr. 3 sestrojujeme

$$k_1\,(A;\,AB)\,,$$

$$k_2\,(B;\,AB)\,,$$

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2C\,,$$

takže

$$AC = 2\,.\,AB\,;$$

dále

$$k_3\,(C;\,CA)\,.\,k_1 \equiv D,\,D'$$

$$k_4\,(D;\,DA)\,.\,k_5\,(D';\,D'A) \equiv X$$

Důkaz plyne z podobnosti trojúhelníků CAD, DAX, kde $CA : AD = AD : AX$; $2r : r = r : AX$

K_4. *Najít střed X kruhového oblouku $k \equiv AB$ o daném středu S.*

Postup je zřejmý z obr. 4

$$k_1\,(A;\,AS)\,.\,k_2\,(S;\,AB) \equiv C\,;$$

$$k_3\,(B;\,BS)\,.\,k_2 \equiv D\,;$$

$$k_4\,(C;\,CB)\,.\,k_5\,(D;\,DA) \equiv E$$

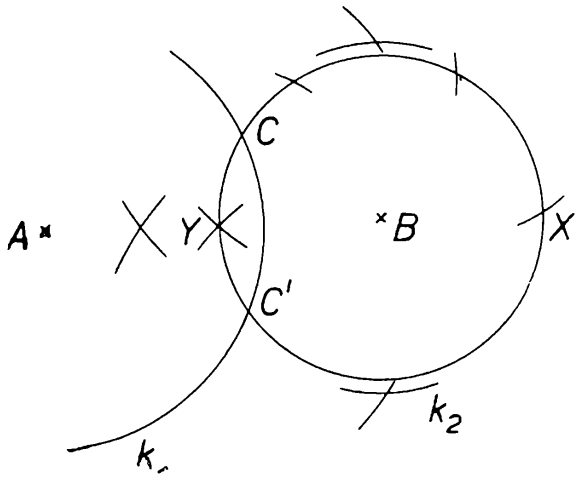
$$k_6\,(C;\,ES)\,.\,k_7\,(D;\,ES) \equiv X$$

Důkaz. V každém rovnoběžníku je součet čtverců nad úhlopříčkami roven dvojnásobnému součtu čtverců nad oběma stranami, proto i v rovnoběžníku $CSBA$

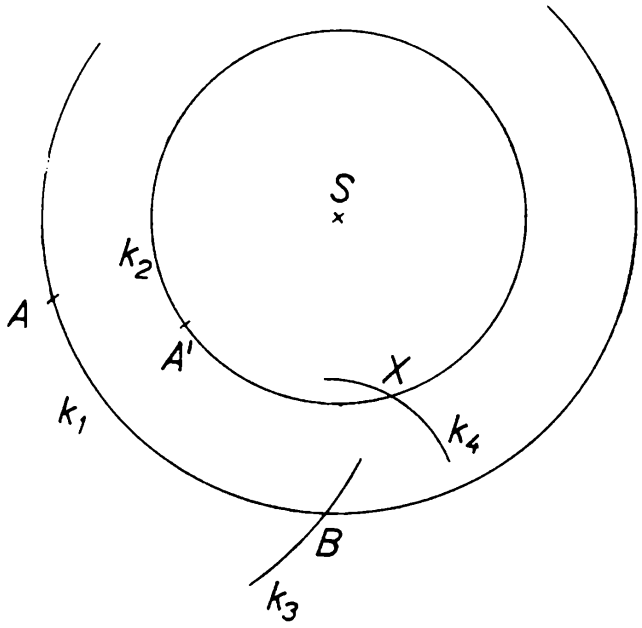
$$\overline{CB}^2 = 2\ \overline{CS}^2 + 2\,.\,\overline{SB}^2 - \overline{AS}^2$$

z obr. 4 odvodíme dále

$$\overline{SX}^2 = \overline{CX}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{ES}^2 - \overline{CS}^2 = \overline{CE}^2 - \overline{CS}^2 - \overline{CS}^2 =$$
$$= \overline{CB}^2 - 2\ \overline{CS}^2 = 2\,.\,\overline{SB}^2 - \overline{AS}^2 = \overline{AS}^2$$



Obr.



Obr. 6.

proto

$$SX = AS\,.$$

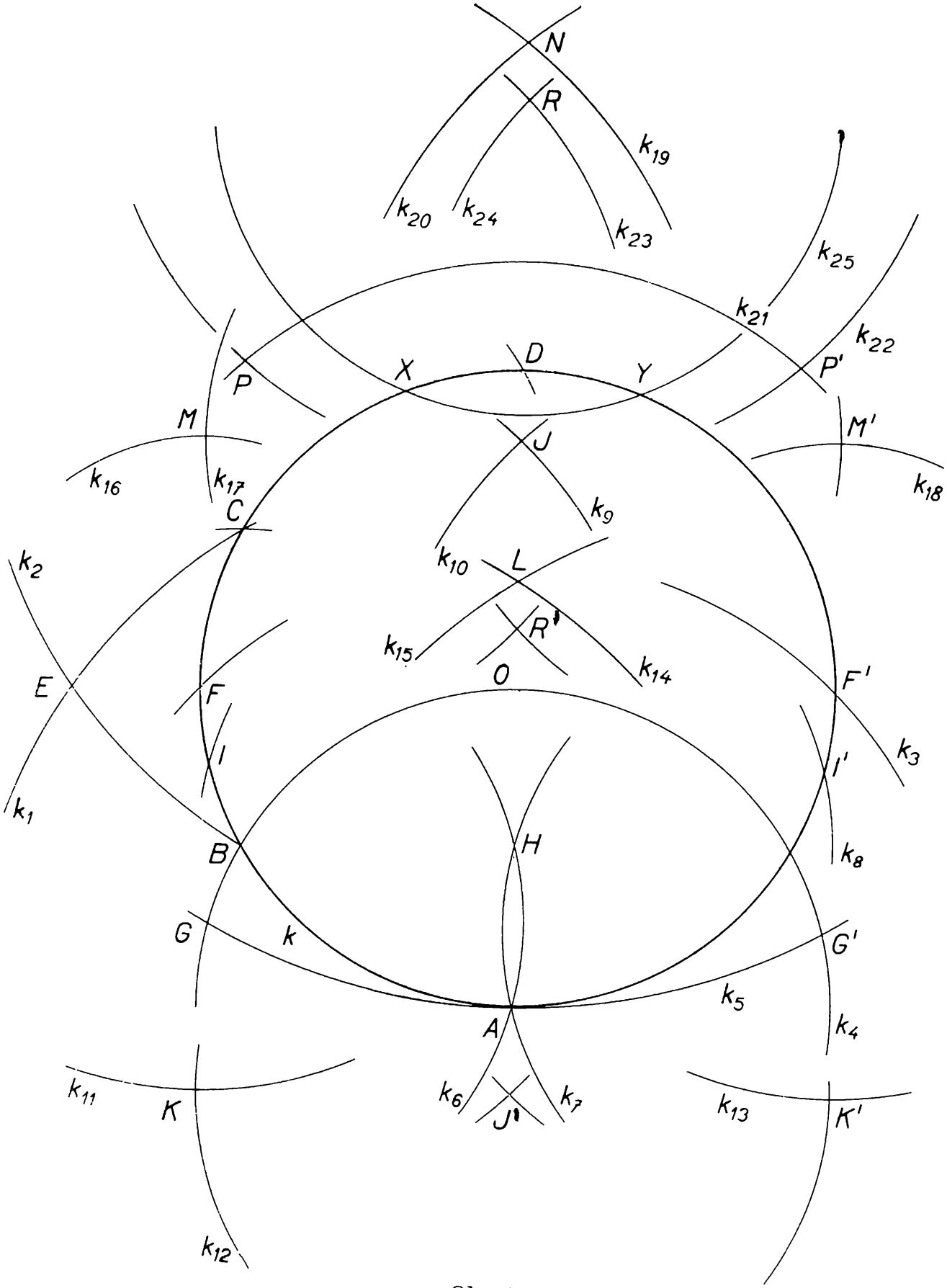
K$_5$. *Sestrojit součet* $a + b$ *a rozdíl* $a - b$ *úseček* a, b *za předpokladu, že* $a > b$ (obr. 5).

Dané úsečky jsou $AB = a$, $BC = b$. Sestrojíme

$$k_1\,(A;\,r)\,.\,k_2\,(B;\,b) \equiv C,\,C'$$

přičemž r je libovolný poloměr. Podle konstrukce **K**$_4$ zjistíme střed Y oblouku CC'. Pak již

$$AY = a - b\,,\ AX = a + b\,.$$


N
R
k_{19}
k_{20}
k_{24}
k_{23}
k_{25}
k_{21}
k_{22}
P
X
D
Y
P'
M
M'
J
k_{16}
k_{17}
k_{18}
C
k_9
k_{10}
L
k_2
k_{15}
R'
k_{14}
O
E
F
F'
k_3
I
I'
k_1
H
B
k_8
G
k
G'
k_5
A
k_4
k_{11}
K
k_6
k_7
J'
k_{13}
K'
k_{12}

Obr. 7.

K$_6$. *K daným úsečkám a, b, c sestrojit čtvrtou geometricky úměrnou úsečku d, tj. takovou, aby platilo* (obr. 6)

$$a : b = c : d .$$

Z libovolného středu S opíšeme kružnice k_1 $(S; a)$, k_2 $(S; b)$; na k_1 zvolíme libovolný bod A a na k_2 bod A' tak, aby body A, A', S neležely v přímce. Dále sestrojíme kružnice k_3 $(A; c)$ a k_4 $(B; AA')$, kde $B \equiv$ $\equiv k_1 . k_3$. Průsečík $X \equiv k_2 . k_4$ určuje s bodem A' hledanou úsečku

$$d \equiv A'X .$$

Důkaz. Trojúhelníky ABS a $A'XS$ jsou podobné, proto

$$AS : A'S = AB : A'X ,$$

odtud

$$A'X = \frac{A'S . AB}{AS} = \frac{b . c}{a} = d .$$

K$_7$. Pro zajímavost uvedu nakonec bez důkazu mascheronskou konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníka[2]) vepsaného do kružnice k o středu O a poloměru r (obr. 7) podle L. Gérarda (1897).[3]) Postupně sestrojujeme tyto kružnice

$k\,(O; r)$; $AB = BC = CD = r$; $\quad k_1\,(A; AC) . k_2\,(D; DB) \equiv E$;

$k_3\,(A; OE) . k \equiv F, F'$; $\quad k_4\,(A; r) . k_5\,(D; DA) \equiv G, G'$

$k_6\,(G; GA) . k_7\,(G'; G'A) \equiv H$; $\quad k_8\,(H; r) . k \equiv I, I'$;

$k_9\,(I; OE) . k_{10}\,(I'; OE) \equiv J, J'$ $\quad k_{11}\,(F; J'O) . k_{12}\,(J'; r) \equiv K$;

$k_{13}\,(F', J'O) . k_{12} \equiv K'$; $\quad k_{14}\,(K; EJ') . k_{15}\,(K'; EJ) \equiv L$;

$k_{16}\,(F; JO) . k_{17}\,(J; r) \equiv M$; $\quad k_{18}\,(F'; JO) . k_{17} \equiv M'$;

$k_{19}\,(M; EJ) . k_{20}\,(M'; EJ) \equiv N$; $\quad k_{21}\,(O; AL) . k_{22}\,(N; AL) \equiv P, P'$

$k_{23}\,(P; BL) . k_{24}\,(P'; BL) \equiv R, R'$ $\quad k_{25}\,(R; r) . k \equiv X, Y$

Body X, Y jsou další vrcholy pravidelného sedmnáctiúhelníka, sousední k vrcholu D.

DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK A DOC. OTA SETZER DĚKUJÍ VŠEM ZA BLAHOPŘÁNÍ K SVÝM ŠEDESÁTINÁM.

---

[2]) Možnost euklidovského řešení této úlohy dokázal německý matematik C. F. Gauss (1777—1855).

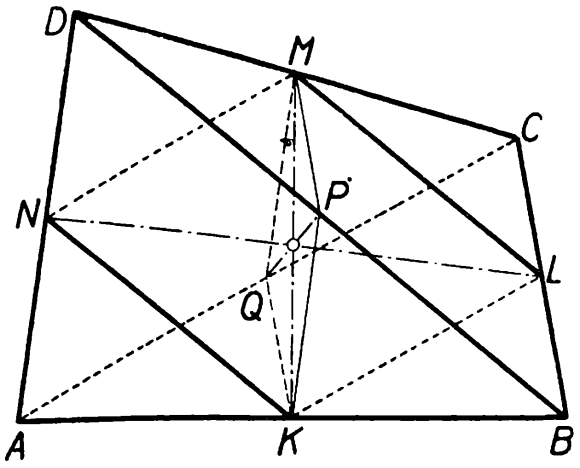
[3]) Viz Handbuch der Schulmathematik (Dr. Georg Wolff), svazek 5, str. 55.

Čtyřstěn

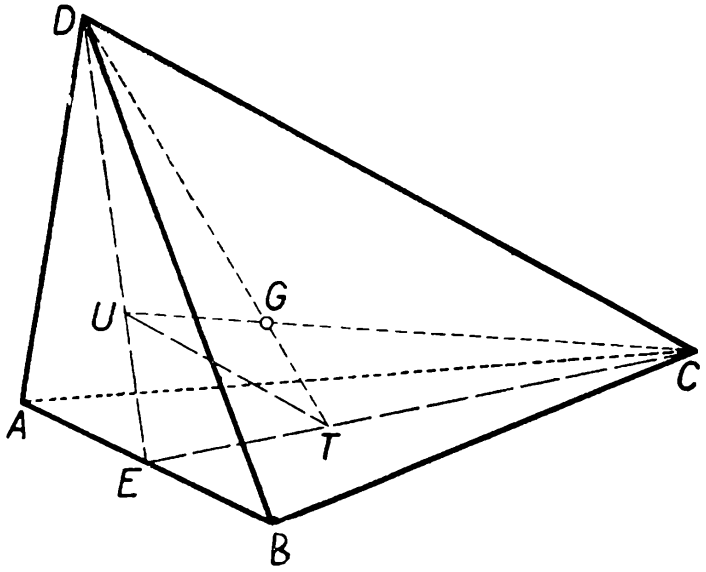
STANISLAV HORÁK st., ČVUT, Praha

Tak jako je trojúhelník v rovině nejjednodušší mnohoúhelník, je čtyřstěn nejjednodušší mnohostěn v prostoru. V průběhu posledních sta let se vlastnosti trojúhelníka prostudovaly velmi podrobně, nedá se však totéž říci o čtyřstěnu, i když i zde je známa řada pěkných vlastností. Některé z těch nejjednodušších uvedeme v tomto článku.

V ě t a 1. *Úsečky, které spojují středy protějších hran (můžeme také říci mimoběžných hran), se vzájemně půlí.*



Obr. 1.



Obr. 2.

D ů k a z (obr. 1). V obr. 1 je znázorněn čtyřstěn $ABCD$ a body K, L, M, N, jež postupně půlí hrany AB, BC, CD, DA. Úsečka KL je střední příčka v trojúhelníku ABC, a tudíž o ní platí

$$KL = \tfrac{1}{2} AC\,,\ KL \parallel AC \tag{1}$$

Úsečka MN je opět střední příčka v trojúhelníku ACD, a proto

$$MN = \tfrac{1}{2} AC\,,\ MN \parallel AC\,. \tag{2}$$

Spojením vztahů (1), (2) poznáváme, že čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník. Jeho úhlopříčky KM, LN, tj. úsečky spojující středy hran AB, CD; AD, BC, se vzájemně půlí. Totéž se dá dokázat i pro čtyřúhelník $NPLQ$, v němž se vzájemně půlí úsečky NL, PQ. Poněvadž však úsečka NL má jediný střed, máme tím dokázáno, že všechny tři úsečky KM, LN, PQ se navzájem půlí.

Jaký je rovnoběžník $KLMN$ v pravidelném čtyřstěnu?

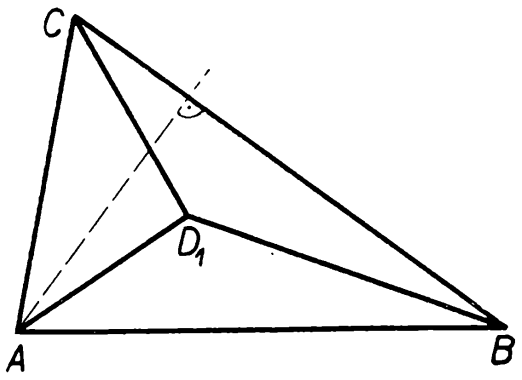
Sami si již dokažte tuto větu:

V ě t a 2. *Středy hran čtyřstěnu jsou vrcholy osmistěnu, jenž má vždy*

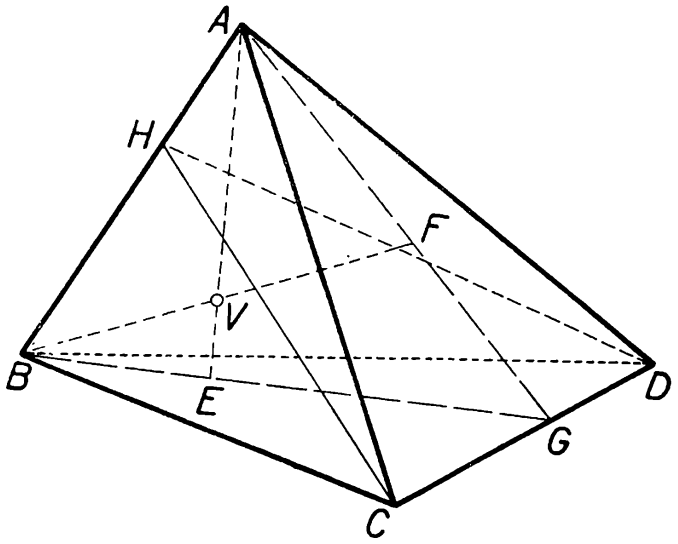
dvě hrany navzájem rovnoběžné a shodné. — Objem tohoto osmistěnu je roven polovině objemu čtyřstěnu.

V ě t a 3. *Spojnice každého vrcholu s těžištěm protější stěny čtyřstěnu procházejí jediným bodem, který každou tuto spojnici dělí v poměru 3 : 1, přičemž větší díl je při vrcholu.*

D ů k a z (obr. 2). Je dán čtyřstěn $ABCD$. T je těžiště stěny ABC, U těžiště stěny ABD. Těžnice CE, DE určují rovinu a v ní nutně leží přímky CU, DT, neboť každá tato přímka má s uvažovanou rovinou společné dva různé body. Tím jsme však dokázali, že přímky CU, DT jsou různoběžné. Případ, že by totiž byly rovnoběžné, je vyloučen, neboť úsečka CU obsahuje vesměs vnitřní body čtyřstěnu (s výjimkou bodů C, U) a odděluje proto vrchol D a body úsečky EC.



Obr. 3.



Obr. 4.

Přímky CU, DT jsou tedy různoběžné a protínají se v bodě G. Dále úsečka $UT \parallel DC$, neboť platí

$$EU = \tfrac{1}{3} ED\,, \quad ET = \tfrac{1}{3} EC$$

a z toho plyne správnost uvedeného tvrzení.

Všimněme si nyní, že trojúhelníky GUT a GCD jsou stejnolehlé podle středu stejnolehlosti G. Proto

$$\frac{GU}{GC} = \frac{GT}{GD} = \frac{UT}{CD}$$

Ale i trojúhelníky EUT a EDC jsou stejnolehlé podle středu stejnolehlosti E, a proto získaný poměr $\dfrac{UT}{CD}$ můžeme dál upravovat

$$\frac{UT}{CD} = \frac{ET}{EC} = \frac{EU}{ED} = \tfrac{1}{3}\,.$$

Podle toho $\dfrac{GU}{GC} = \tfrac{1}{3}$ a také $\dfrac{GT}{GD} = \tfrac{1}{3}$

Kdybychom vzali v úvahu úsečky CU a BV, kde V je těžiště stěny ACD, dokázali bychom, že obě tyto úsečky mají společný bod G', o němž platí

$$\frac{G'U}{G'C} = \frac{1}{3}, \quad \frac{G'V}{G'B} = \frac{1}{3}$$

Poněvadž současně má platit $\frac{GU}{GC} = \frac{1}{3}$ i $\frac{G'U}{G'C} = \frac{1}{3}$,

plyne z toho, že $G' \equiv G$.

Poněvadž podobná úvaha se dá provést také pro úsečku AW (W je těžiště stěny BCD), dokázali jsme:

a) úsečky AW, BV, CU, DT procházejí jediným bodem G a

b) $\frac{GW}{GA} = \frac{GV}{GB} = \frac{GU}{GC} = \frac{GT}{GD} = \frac{1}{3}$.

Tím jsme však s důkazem hotovi.

P o z n á m k a. Bod G je těžiště čtyřstěnu $ABCD$ i ve smyslu fyzikálním.

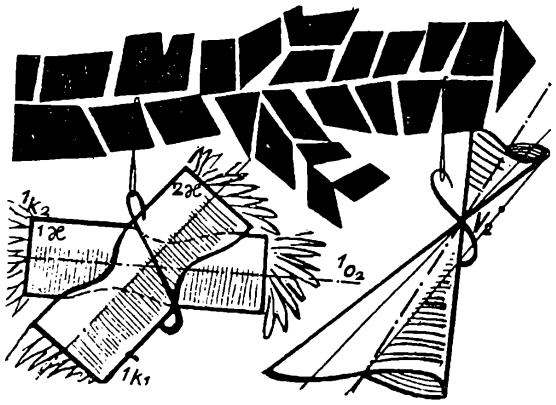
A posléze ještě jednu větu. V trojúhelníku vždy platí, že všechny tři výšky procházejí jediným bodem. Ve čtyřstěnu tomu tak nemusí být. V obr. 3 je půdorys čtyřstěnu, jehož stěna ABC leží v půdorysně. Průmět výšky jdoucí vrcholem D je bod D_1. Výška jdoucí vrcholem A se promítá jako kolmice na půdorys hrany BC. (Hrana BC je totiž stopa roviny BCD.) Platí však tato věta:

V ě t a 4. *Jestliže se protínají dvě výšky čtyřstěnu, protínají se i druhé dvě.*

D ů k a z (obr. 4). Paty výšek z vrcholů A, B označme postupně E, F. Tyto dvě výšky se podle předpokladu protínají. Jejich průsečík označíme V. Obě uvažované výšky leží v rovině, která protíná hranu CD kolmo v bodě G. (Hrana CD je totiž kolmá ke dvěma různoběžkám roviny výšek.) Hranou CD proložme nyní rovinu σ kolmou k hraně AB. Ta protne hranu AB v bodě H. Hrana AB je kolmá ke všem přímkám roviny σ, tedy i k přímkám HC, HD, a proto tyto dvě přímky jsou výškami v trojúhelnících ABC, ABD. V rovině σ pak nutně leží i tělesové výšky daného čtyřstěnu, procházející vrcholy C, D. A poněvadž tyto dvě tělesové výšky leží v rovině σ, jsou různoběžné. Rovnoběžnost je totiž vyloučena.

A ještě připojíme několik připomínek. V rovině máme trojúhelníky rovnoramenné, rovnostranné, pravoúhlé a každý z nich má svoje charakteristické vlastnosti. Podobně jsou různé druhy čtyřstěnů. Existují čtyřstěny, jejichž každé dvě protější hrany jsou shodné. Takový čtyřstěn je omezen vesměs shodnými trojúhelníky. Jsou také čtyřstěny, které mají protější hrany k sobě kolmé. Jsou i čtyřstěny, jejichž hrany vycházející z určitého vrcholu jsou k sobě kolmé. Jiný je pravidelný trojboký jehlan atd. Každý takový čtyřstěn má pak své zvláštní vlastnosti.

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE



Tři konstrukce elipsy odvozené z prostoru

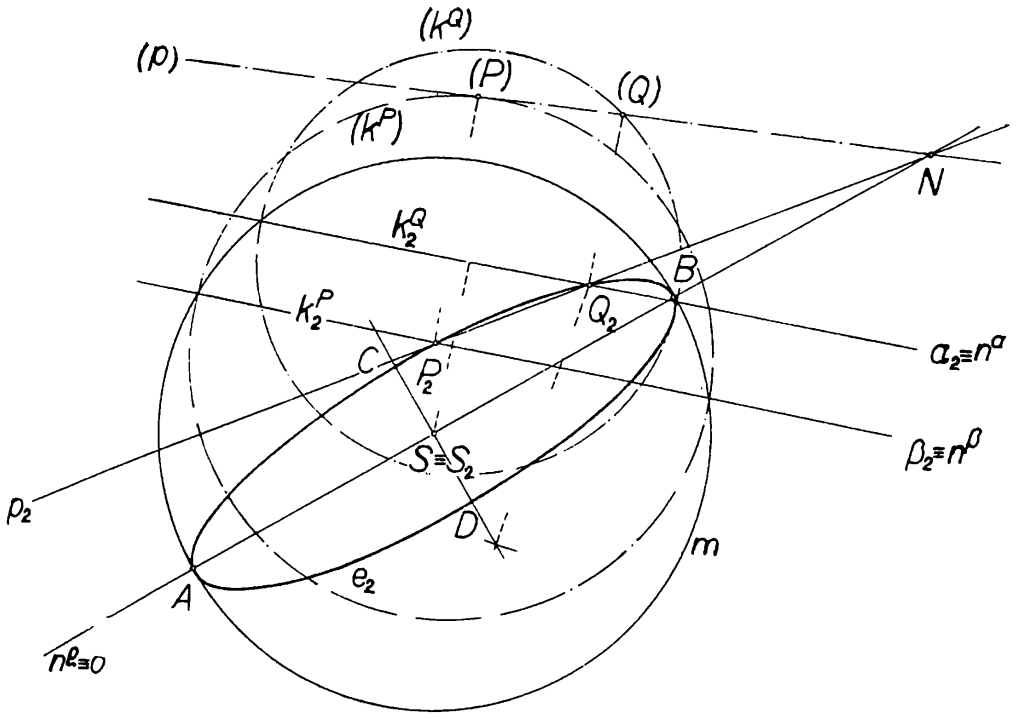
JAROSLAV LIBICHER, Havířov 1

V tomto článku jsou řešeny tři konstruktivní úlohy o elipse, a to nikoliv metodou planimetrickou, nýbrž pomocí jednoduchých konstrukcí odvozených z prostoru. Podstatou řešení všech tří úloh je velmi jednoduchý obrat. Hledanou elipsu považujeme za nárys (obecněji za pravoúhlý průmět) hlavní kružnice na jisté ploše kulové. Body a tečny elipsy pak přejdou tímto obratem v body, resp. tečny této plochy kulové. V důsledku toho pak planimetrické vztahy týkající se elipsy přejdou ve vztahy prostorové, týkající se bodů, tečen a kružnic na ploše kulové. Z těchto prostorových vztahů jsou pak odvozena řešení daných úloh.

K porozumění těmto konstrukcím je třeba znát pravoúhlé průměty plochy kulové a kružnic na ploše kulové, dále pak řez roviny plochou kulovou. Z konstrukcí elipsy je nutno připomenout zejména proužkovou konstrukci a z ní vyplývající úlohu: omezit vedlejší osu elipsy, je-li dána hlavní osou a bodem.

Úloha 1. Sestrojte elipsu e_2, která prochází body P_2, Q_2, má střed v bodě S a hlavní poloosu a (obr. 1).

Prostorové řešení. Kružnici m se středem S a poloměrem $r = a$ budeme pokládat za obrysovou kružnici kulové plochy $\varkappa$, jejíž střed S leží v nárysně. Body P_2, Q_2 budeme považovat za nárysy bodů P, Q, ležících na této ploše. Hledaná elipsa e_2 bude pak nárysem hlavní kružnice e, ve které protíná plochu kulovou rovina $\varrho \equiv (P, Q, S)$.



Obr. 1.

K o n s t r u k c e. 1. Body P a Q proložíme nárysně promítací roviny $\alpha \parallel \beta$, které protínají plochu kulovou v kružnicích k^P a k^Q. Sklopením těchto promítacích rovin do nárysny určíme pak kružnice (k^P) a (k^Q) a na nich vyznačíme sklopené body (P) a (Q). Spojnice $(p) \equiv (P)\,(Q)$ je sklopená přímka $p \equiv PQ$ a průsečík N přímek p a (p) je nárysný stopník přímky p. Spojnice $n^\varrho \equiv SN$ je potom nárysná stopa roviny $\varrho \equiv (P, Q, S)$.

2. Stopa n^ϱ je zároveň hlavní osou a její průsečíky A, B s kružnicí m jsou hlavními vrcholy hledané elipsy. Užitím proužkové konstrukce omezíme vedlejší osu, a tím je úloha řešena.

D i s k u s e. Aby měla úloha řešení, je nutné, aby jeden z bodů P_2, Q_2 ležel uvnitř kružnice m a zbývající pak uvnitř kružnice nebo na této kružnici.

1. Bod P_2 leží uvnitř, bod Q_2 na kružnici m. Potom bod Q_2 je zároveň hlavním vrcholem hledané elipsy a úloha má jediné řešení.

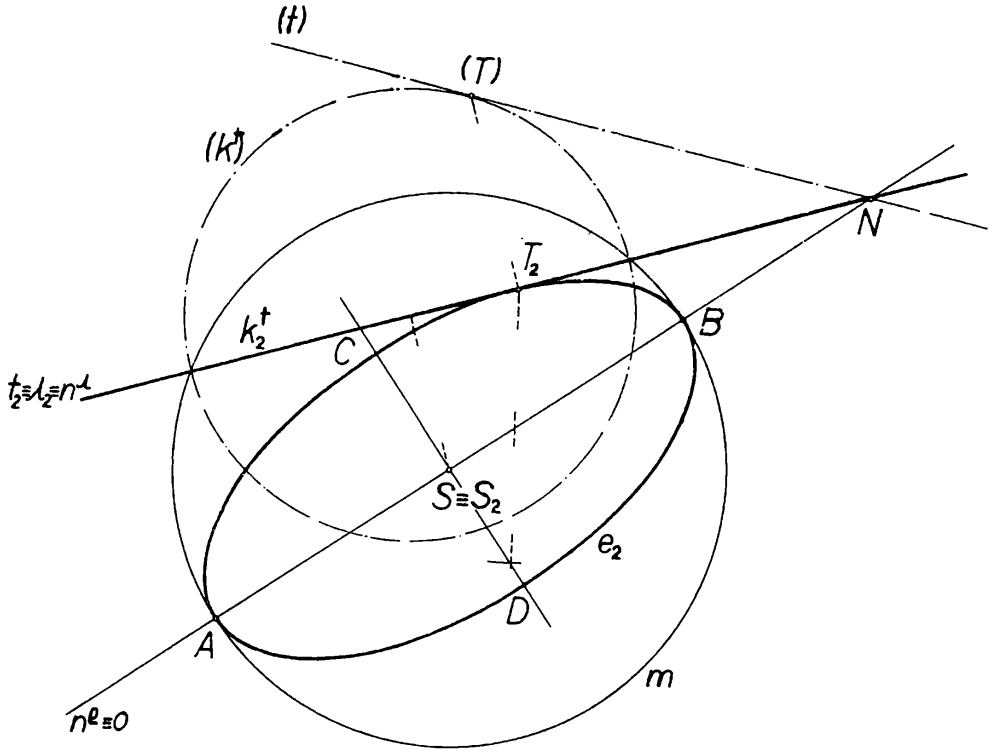
2. Body P_2, Q_2 leží uvnitř kružnice m. Přiřadíme-li bodům před nárysnou znaménko $+$ a bodům za nárysnou znaménko $-$, mohou mít body P a Q na ploše kulové tyto čtyři polohy

a) $+\ +$, b) $-\ -$, c) $+\ -$, d) $-\ +$.

Ze souměrnosti podle nárysny však vyplývá, že případy a), b), resp. c), d) vedou vždy k témuž řešení, neboť roviny určené body P, Q a bodem S jsou souměrně sdružené podle nárysny, takže hlavní kruž-

nice v nich ležící mají týž nárys. Úloha má v tomto případě tedy dvě řešení. Na obr. 1 je řešen případ a).

Úloha 2. Sestrojte elipsu e_2, která se dotýká přímky t_2 v bodě T_2, má střed v bodě S a hlavní poloosu a (obr. 2).



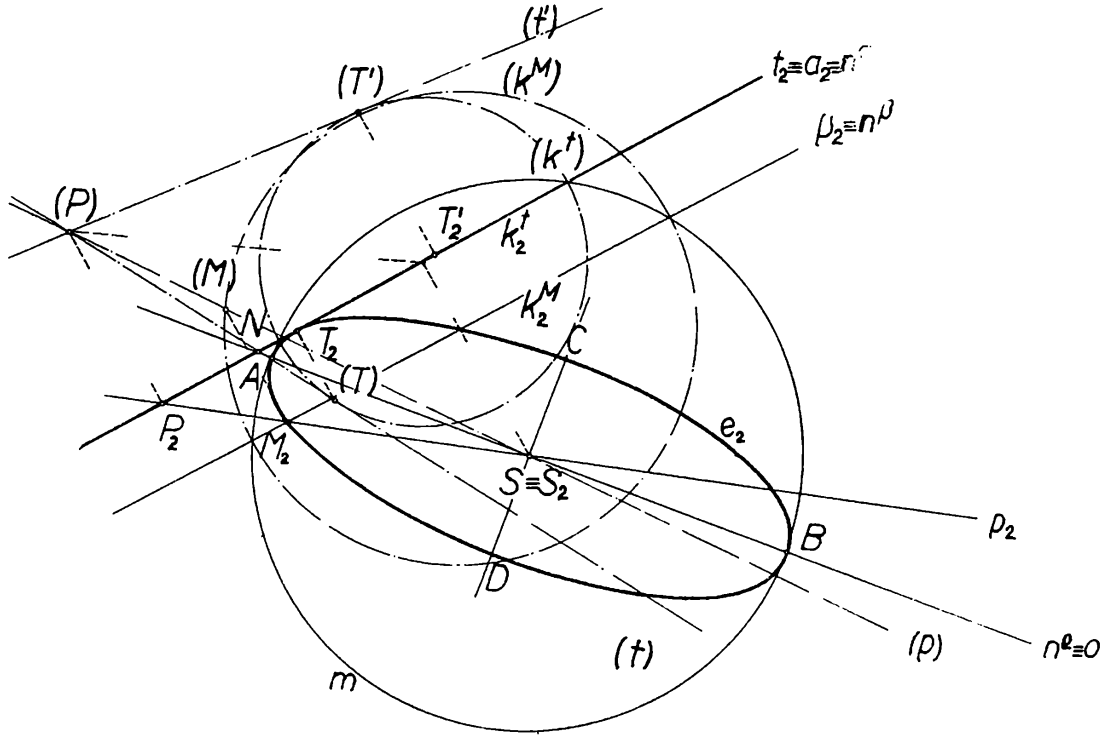
Obr. 2.

P r o s t o r o v é ř e š e n í. Kružnici m se středem S a poloměrem $r = a$ opět pokládejme za obrysovou kružnici kulové plochy $\varkappa$, jejíž střed S leží v nárysně. Přímku t_2 s bodem T_2 považujme za nárys tečny t, která se kulové plochy dotýká v bodě T. Hledaná elipsa e_2 bude pak nárysem hlavní kružnice e, ve které protíná kulovou plochu rovina $\varrho \equiv (t, S)$.

K o n s t r u k c e. 1. Přímkou t proložíme nárysně promítací rovinu λ, která protíná plochu kulovou v kružnici k^t. Sklopením této promítací roviny kolem její stopy n^λ do nárysny obdržíme kružnici (k^t) a na ní vyznačíme bod (T). Tečna (t) sestrojená v bodě (T) ke kružnici (k^t) je sklopenou přímkou t; průsečík N přímek t a (t) je nárysný stopník přímky t. Spojnice $n^\varrho \equiv NS$ je nárysná stopa roviny $\varrho \equiv (t, S)$.

2. Stopa n^ϱ je zároveň hlavní osou a body A, B hlavními vrcholy hledané elipsy e_2. Elipsu sestrojíme stejně jako v předchozím případě užitím proužkové konstrukce.

Diskuse. Aby měla úloha řešení, je nutné, aby přímka t_2 byla sečnou kružnice m a bod T_2 jejím bodem vnitřním. V tom případě má úloha jediné řešení, neboť přímku t_2 lze sice považovat za nárys dvou různých tečen plochy kulové (jedna z nich se dotýká v bodě T před



Obr. 3.

nárysnou a druhá v bodě T' za nárysnou), ale roviny určené těmito tečnami a bodem S jsou souměrně sdružené podle nárysny, takže hlavní kružnice v těchto rovinách ležící mají týž nárys.

Úloha 3. Sestrojte elipsu e_2, která se dotýká tečny t_2, prochází bodem M_2, má střed S a hlavní poloosu a (obr. 3).

Prostorové řešení. Kružnici m se středem S a poloměrem $r = a$ pokládejme za obrysovou kružnici kulové plochy $\varkappa$, jejíž střed S leží v nárysně. Přímku t_2 považujme za nárys tečny t a bod M_2 za nárys bodu M této plochy kulové. Hledaná elipsa e_2 bude pak nárysem hlavní kružnice e, ve které protíná plochu kulovou rovina $\varrho \equiv p, t$, kde $p \equiv SM$.

Konstrukce. 1. Přímky p a t jsou různoběžné (nebo ve zvláštním případě rovnoběžné), neboť leží v rovině hlavní kružnice. Jsou-li různoběžné, pak se protínají v bodě P, jehož nárysem je bod $P_2 \equiv t_2 \times p_2$. Určíme jeho sklopenou polohu (P). Proložíme přímkou t nárysně promítací rovinu α, která protne plochu kulovou v kružnici k^t. Sklopením roviny α kolem její stopy n^α do nárysny obdržíme (k^t). Podobně bodem M

proložíme nárysně promítací rovinu $\beta \parallel \alpha$, která protne plochu kulovou v kružnici k^M. Sklopením roviny β do nárysny dostaneme (k^M) a na ní vyznačíme bod (M). Na přímce $(p) \equiv S\,(M)$ pak určíme bod (P).

2. Sestrojíme body dotyku (T) a (T') tečen z bodu (P) ke kružnici (k^t). Sklopením promítací roviny α do původní polohy obdržíme jejich nárysy T_2 a T_2', a to jsou body dotyku dvou elips e_2 a e_2', které splňují zadání úlohy. Dále můžeme pokračovat jako v předchozí úloze, neboť jsme určili bod dotyku na tečně.

3. Lze ovšem s výhodou postupovat takto: Průsečík N přímek t_2 a $(t) \equiv (P)\,(T)$ je nárysný stopník přímky t. Spojnice $n^\varrho \equiv NS$ je potom nárysnou stopou roviny $\varrho \equiv p \times t$ a zároveň osou hledané elipsy.

D i s k u s e. Aby byla úloha řešitelná, je třeba, aby tečna t_2 byla sečnou kružnice m a bod M_2 ležel uvnitř kružnice nebo na této kružnici.

1. Bod M_2 leží na kružnici m. Potom je zároveň hlavním vrcholem hledané elipsy a úloha má jediné řešení.

2. Bod M_2 leží uvnitř kružnice m. Užijeme-li označení z diskuse první úlohy a označíme-li dále tečnu t znaménkem + nebo — podle toho, je-li její bod dotyku + nebo —, můžeme vzájemnou polohu tečny t a bodu M schematicky vyjádřit takto

a) + +, b) — —, c) + —, d) — +.

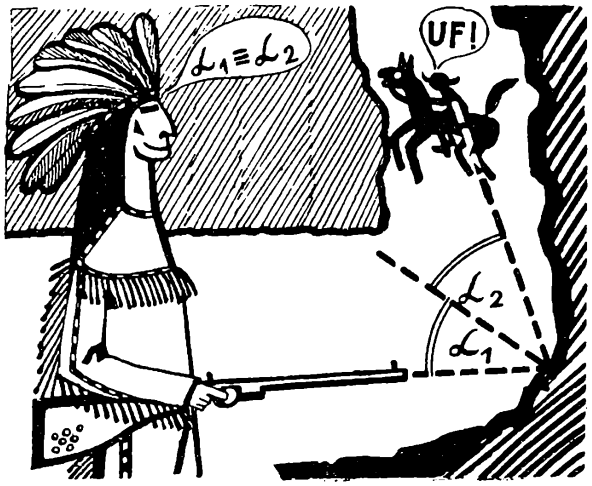
Ze souměrnosti podle nárysny však opět vyplývá, že případy a), b), resp. c), d) vedou k témuž řešení, neboť sečné roviny jsou v těchto případech souměrně sdružené podle nárysny a hlavní kružnice v nich ležící mají týž nárys. Úloha má tedy dvě řešení. Na obr. 3 je sestrojen případ a). Řešení úlohy v případě, že přímky p a t jsou rovnoběžné, je velmi podobné a přenechávám je čtenáři.

Literatura

Sborník Vysoké školy pedagogické v Olomouci, přírodní vědy IV, vydalo SPN, Praha 1958.

JEŠTĚ JE ČAS

abyste si u poštovního doručovatele nebo na vašem poštovním úřadě objednali předplatné Rozhledů matematicko-fyzikálních na tento školní rok 1966/67. Budete kromě zajímavých odborných článků informováni též o matematické a fyzikální olympiádě. Otiskneme také ukázkové příklady, jaké jsou dávány při přijímacích zkouškách na vysoké školy technického směru.



FYZIKA

Jak se měří rychlosti střel?

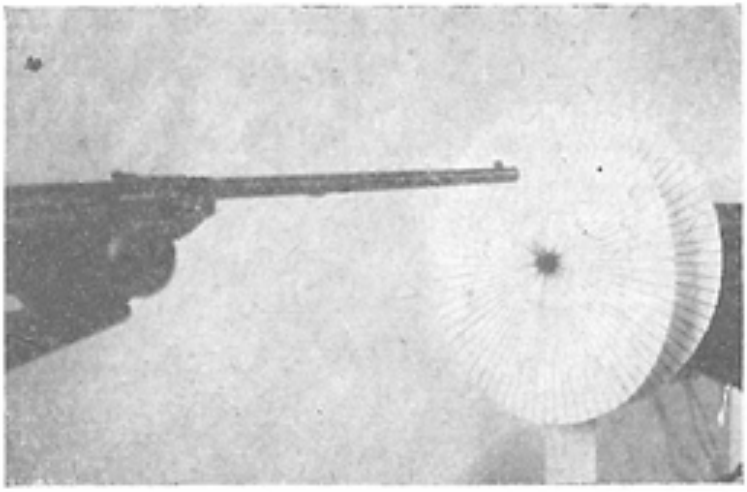
FRANTIŠEK KAMENČÁK, Ostrava

Až na dvě výjimky neexistuje prakticky zařízení, které by dovolovalo určovat přímo rychlost střely. Výjimky jsou u staršího, Robinsova balistického kyvadla a nejnovější, u tzv. sledovacího chronografu, což je v principu radar s použitím Dopplerova efektu. Jinak se pomocí speciálně konstruovaných chronografů měří doba letu t na určité základně délky s. Odtud se vypočte střední rychlost $v = \frac{s}{t}$. Dopouštíme se tím chyby, neboť pohyb střely je nerovnoměrně zpožděný Použijeme-li však chronografů s velikou přesností, můžeme základnu natolik zkrátit, že prakticky měříme okamžitou rychlost v požadovaném místě.

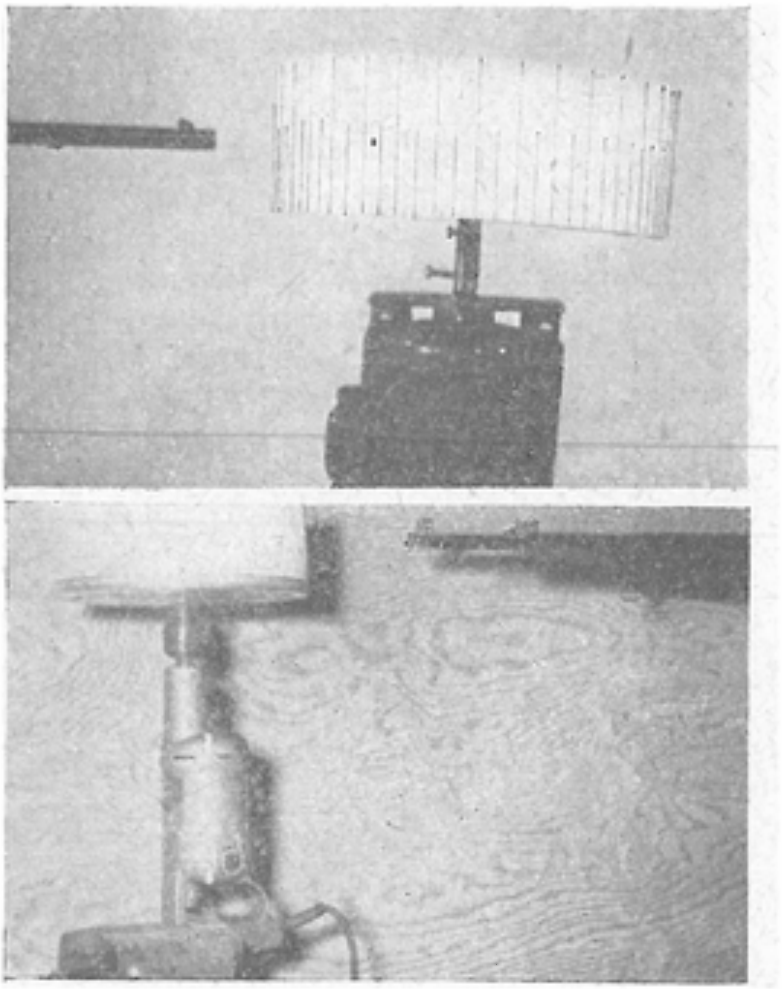
Vzniklo mnoho různých konstrukcí chronografů za 200 let jejich vývoje. Všimneme si těch, které jsou po fyzikální stránce zajímavé a dají se lehce zhotovit.

Mezi nejstarší patří chronografy Matheyův a Grobertův. Stačí-li menší přesnost, jsou vhodné pro svoji jednoduchost.

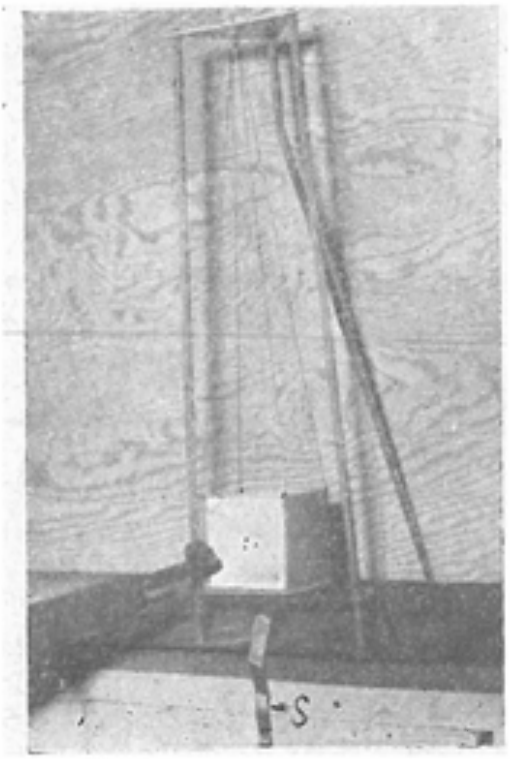
Chronograf Matheyův je na obr. 1. Kotouče prostřelíme rovnoběžně s osou. Druhý průstřel je vůči prvému posunut. Považujeme-li pohyb vzhledem k malé dráze za rovnoměrný, postačí, když zjistíme čas t a dosadíme jej do vztahu $v = \frac{s}{t}$. Čas určíme ze známého



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

počtu otáček f a z úhlu α posunutí jednotlivých průstřelů. Platí rovnice

$$t = \frac{T}{360} .$$

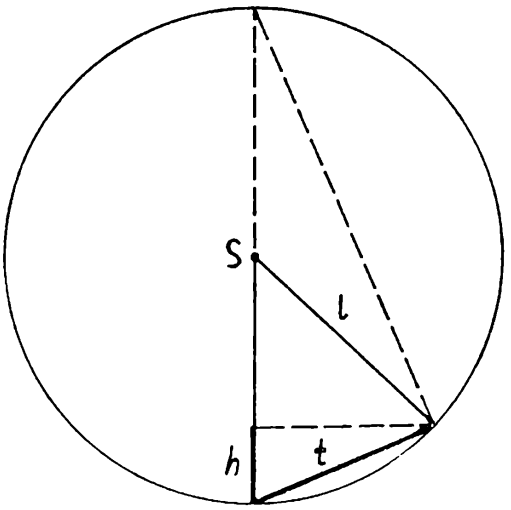
Po dosazení do rovnice pro rychlost v střely, dostaneme

$$v = \frac{360\, fs}{\alpha} , \qquad T = \frac{1}{f} .$$

Chronograf Grobertův je obdobný (obr. 2). Místo dvou kotoučů rotuje papírový válec, jehož plášť prostřelíme kolmo k ose rotace. Početní zpracování je stejné jako u přístroje Matheyova.

Třetím jednoduchým přístrojem pro měření rychlosti střel je balistické kyvadlo (obr. 3). Je založeno na platnosti zákona zachování energie a hybnosti. Střela hmoty m letící rychlostí v narazí na kyvadlo hmoty M a uvízne v něm. Předá kyvadlu svoji hybnost mv. Kyvadlo se začne pohybovat rychlostí V. Platí

$$mv = (m + M)\, V \qquad (1)$$



Obr. 4.

Protože rychlost kyvadla V se nedá měřit, vyloučíme ji ze vzorce touto úvahou: Pohybová energie kyvadla po nárazu letícího náboje se změní v polohovou energii kyvadla, které vystoupilo do výše h.

Tedy

$$\tfrac{1}{2}\,(m + M)\, V^2 = (m + M)\, gh ,$$

odtud

$$V = \sqrt{2\, gh} .$$

Po úpravě a dosazení za V z rovnice (1) dostaneme

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2\, gh} = \frac{M}{m} \sqrt{2\, gh} .$$

Ani h se však nedá vzhledem k malým hodnotám spolehlivě měřit. Proto jsem provedl úpravu kyvadla podle návrhu L. Eulera v knize Issledovanija po ballistike. Vespod kyvadla jsem připevnil stuhu S a pomocné zařízení tak, aby se stuha po vytažení sama nevrátila zpět. Po vychýlení kyvadla nárazem střely lze určit přesně délku tětivy oblouku, který kyvadlo opsalo. Výška výstupu h se pak

snadno určí, např. z Euklidovy věty (obr. 4)

$$t^2 = 2\,l\,h\,,$$

odtud

$$h = \frac{t^2}{2\,l}\,,$$

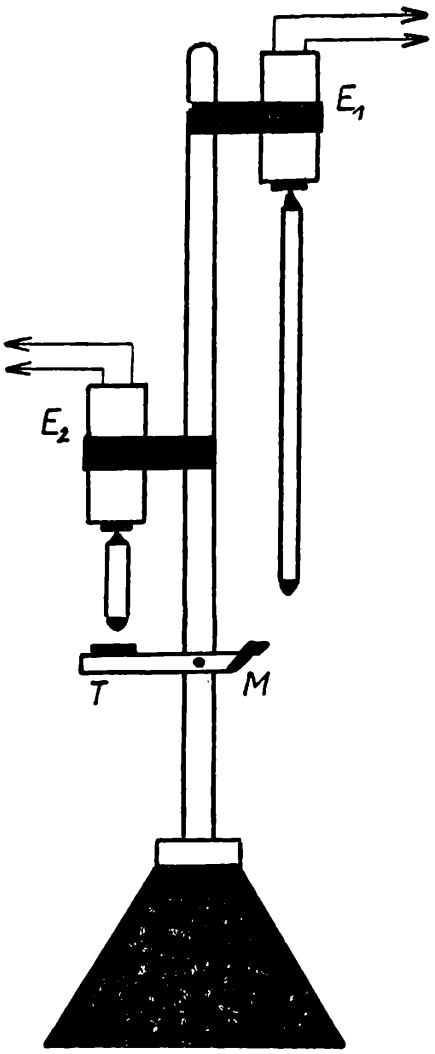
kde l je délka kyvadla, t je délka tětivy, h je výška výstupu kyvadla.

Určité menší chyby se dopouštíme tím, že místo těžiště bereme spodní okraj kyvadla. Naměřenou hodnotu můžeme převést na pohyb těžiště výpočtem.

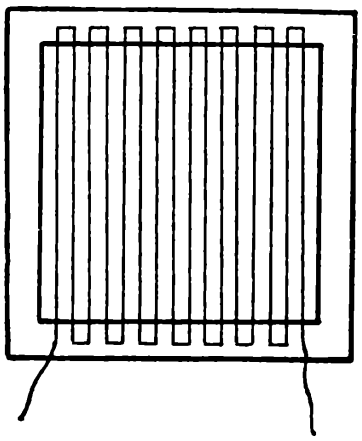
Ve zkušebnách zbraní se u nás používají většinou dva chronografy: elektronický, tzv. čítačový a La Boulangův, tzv. pádový.

Zmíníme se jen o jednodušším z nich o chronografu pádovém. K měření se používá zákonitostí volného pádu těles. Na stojanu (obr. 5) jsou dva elektromagnety E_1 a E_2, které drží dvě tyče, a to jednu dlouhou, zvanou chronometr, druhou krátkou, zvanou závaží. V obvodu elektromagnetů, napájených akumulátory, jsou zapojeny rámové terče. Jsou to rámy, vypletené řadami tenkého drátu. Vzdálenost mezi dráty se rovná obvykle $\frac{1}{4}$ ráže střely, takže letící střela přeruší obvod elektromagnetu. Při průletu střely prvním rámem se přeruší obvod elektromagnetu E_1 chronometru, který počne padat. Při průletu střely druhým rámem počne padat závaží, které stlačí páku T a uvolní nůž M, který vysekne na chronometru značku. Zanedbáme-li odpor vzduchu, platí

$$t = \frac{2\,h}{g}$$



Obr. 5.



Obr. 6.

Od takto určené doby se odečte tzv. dijonkce, tj. doba, která uplyne od uvolnění závaží až do vyseknutí značky na chronometru. Přesnost měření je až 0,1 %. Rychle však klesá při měření menších časových intervalů než 0,05 sekundy.

Příklad. Měření rychlosti střely ze vzduchovky. Druh nábojů — broky.

a) Chronograf Matheyův.

Kotouče nasazeny na elektrické brusce; $f = 2800$ otáček za minutu. Vzdálenost kotoučů $s = 7$ cm.

Naměřené odchylky α průstřelů (ve stupních)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{\alpha}°$
6,5	6,5	6,0	7,0	7,0	6,5	6,5	7,0	7,0	6,5	6,65

$$v = \frac{360\, fs}{\alpha} = \frac{360 \,.\, 46{,}6 \,.\, 0{,}07}{6{,}65} \doteq 176 \text{ m s}^{-1}$$

b) Balistické kyvadlo.

Hmota kyvadla $M = 276$ g; hmota broku $m = 0{,}52$ g; délka kyvadla $l = 61$ cm.

Naměřené hodnoty délky tětivy t [cm]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{t}$ (cm)
7,5	6,9	8,0	7,5	7,2	8,5	8,5	7,0	7,3	8,5	7,69

$$h = \frac{t^2}{2\,l} = 0{,}004\,85 \text{ m},$$

$$v = \frac{M}{m}\sqrt{2\,gh} \doteq 164 \text{ ms}^{-1}.$$

Přesnost měření je ovlivňována různými velikostmi broků a malou spolehlivostí měření počtu otáček. Pokus si můžete ve škole snadno provést.

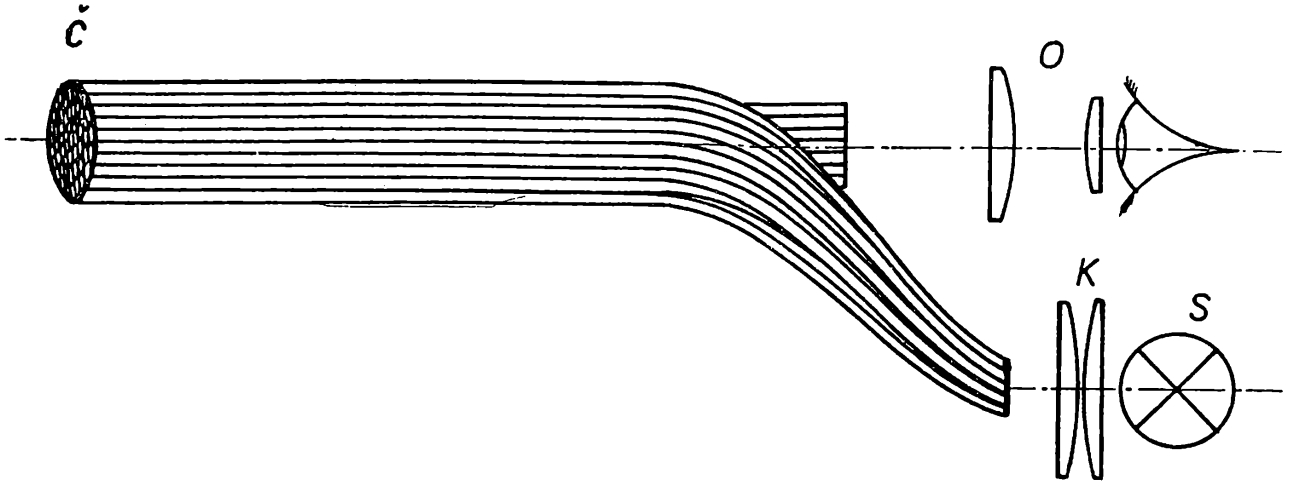
Vláknová optika

ANTONÍN MARTOCH, UP, Olomouc

Použití vláknových svazků

V předcházejících článcích byl objasněn vznik vláknové optiky a vysvětlen princip vytváření optického obrazu pomocí svazku vláken. Tento článek pojedná o využití dosavadních poznatků.

Ukazuje se, že vláknové svazky lze použít téměř ve všech oborech optiky. Používá se jich v přístrojích lékařských, fotografických, elektronických, televizních apod. Ukážeme si některá hlavní použití.



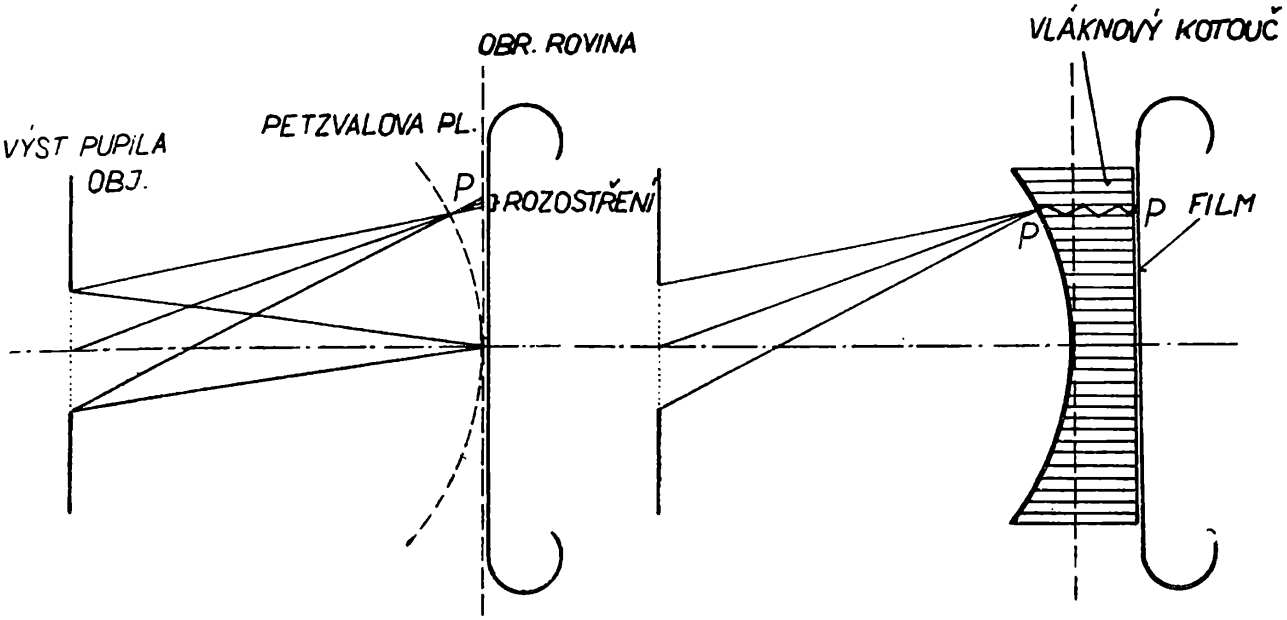
Obr. 1.

Začneme nejdůležitějším oborem, lékařstvím. Chce-li lékař-internista vidět, jak vypadá např. vnitřní stěna žaludku, musí použít optického zařízení, nazývaného endoskop. Je to v podstatě tenká, málo ohebná trubička, v níž je uložena drahá a složitá optická soustava, skládající se z 15 a více tmelených čoček o průměru 1,5 ÷ 3,6 mm. Vzdálenosti čoček jsou vymezeny přesně zhotovenými distančními trubičkami. Na konci endoskopu je umístěna žárovička, která osvětluje pozorovaný předmět (stěnu žaludku).

Jednodušší a levnější je endoskop vláknový. Skládá se ze dvou základních částí. Pozorovací část je kruhový svazek vláken sloužící k vedení obrazu předmětu. Osvětlovací část ve tvaru mezikruží je tvořena vlákny, která obklopují pozorovací část a slouží k osvětlování pozorovaného předmětu. Schéma takového endoskopu ukazuje obr. 1. Světlo

silného zdroje S je kondenzorem K soustředěno na čela zvlášť vyvedených osvětlovacích vláken. Obraz vznikající na výstupním konci svazku je pozorován kvalitním okulárem O. Na konci svazku bývá natmelena čočka $Č$, která jednak soustřeďuje světlo na pozorovaný detail a jednak tento detail zobrazuje na vstupní čelo pozorovací části. Celé toto zařízení je obaleno umělou hmotou, která dovoluje značné ohýbání svazku. Endoskopy se zhotovují v různých průměrech. Proto je možné pozorovat i střeva, ledviny, srdce apod.

Zvlášť upravených svazků vláken se používá ve fotografii a elektronice. Vlákna jsou rovnoběžně uspořádána do tvaru kotouče, jehož osa je rovnoběžná s osami vláken. Čela kotoučů jsou tedy tvořena čely vláken. Kotouče se zpravidla upravují tak, že jedno čelo zůstává rovinné a do druhého se vybrousí kulová nebo jiná zakřivená plocha.

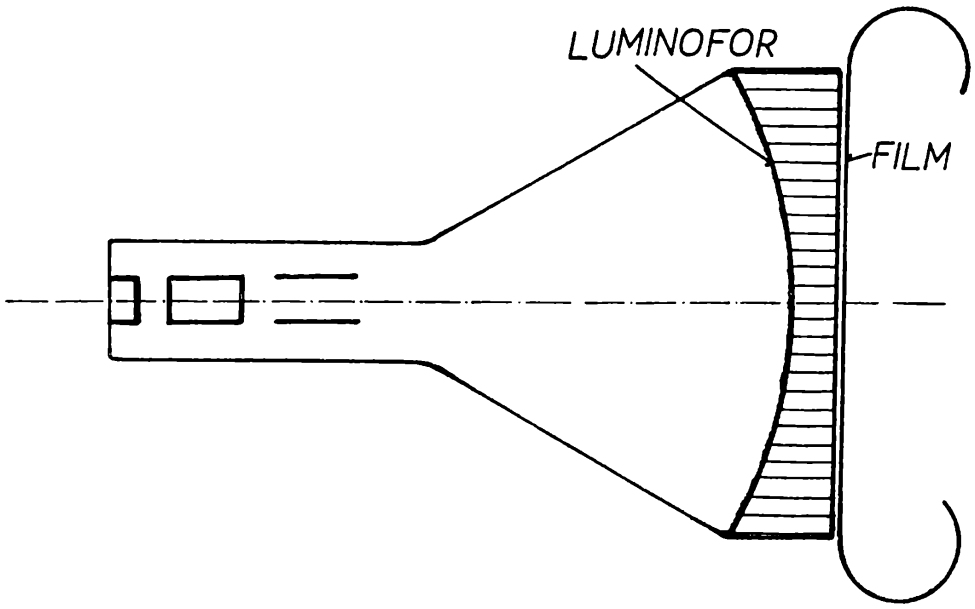


Obr. 2.

Těchto kotoučů se používá např. při širokoúhlém fotografování, kdy nevzniká obraz na rovinné obrazové ploše, ale obecně na ploše zakřivené, jejíž rovnici poprvé vypočítal Petzval. Tato Petzvalova plocha se dotýká obrazové roviny pouze na optické ose. Na filmu, který je v obrazové rovině, se vytvoří obraz, jehož ostrost rychle klesá se vzdáleností od optické osy (viz obr. 2). Vložme nyní do obrazové roviny vydutou plochu vláknového kotouče, jejíž křivost je rovna křivosti Petzvalovy plochy (viz obr. 2). V tomto případě je vytvořen na vstupních čelech vláken ostrý obraz, který je vlákny převeden na rovinnou plochu kotouče. Zde je umístěn film. Výsledkem je dokonale ostrý širokoúhlý snímek. Nanesením luminiscenčních látek na čela vláken se značně zvýší světelnost, takže je možné snímat i velmi rychlé pohyby.

Podobným způsobem je vláknových kotoučů využito u obrazovek osciloskopů, katodových trubic apod. Protože jsou trubice evakuovány, musí být stěny obrazovek tlusté, takže světelné paprsky jsou při průchodu tlustým sklem rozptylovány. Také zakřivení stínítek u větších průměrů obrazovek působí nepříznivě při fotografování na rovinný film. Proto se s výhodou používá vláknových kotoučů. Vydutá strana kotouče tvoří stínítko obrazovky (obr. 3). Je pokryta luminiscenční látkou, na níž vytváří elektronový paprsek obraz. Takové obrazovky umožňují přesnější odečítání velikosti signálů na stupnici, nebo exponování věrnějších snímků.

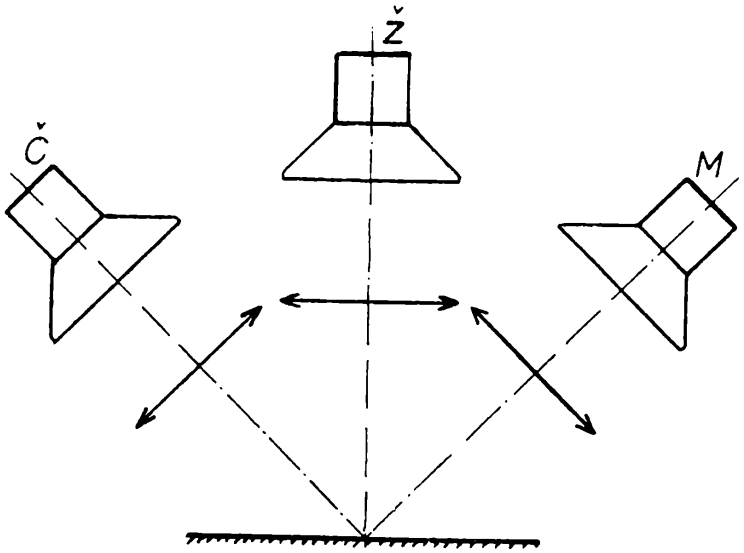
Velké uplatnění nachází vláknová optika v barevné televizi. Je známo, že pro vytvoření barevného obrazu je zapotřebí tří základních spektrálních barev (červená, žlutá, modrá), jejichž kombinací vznikají barvy ostatní.



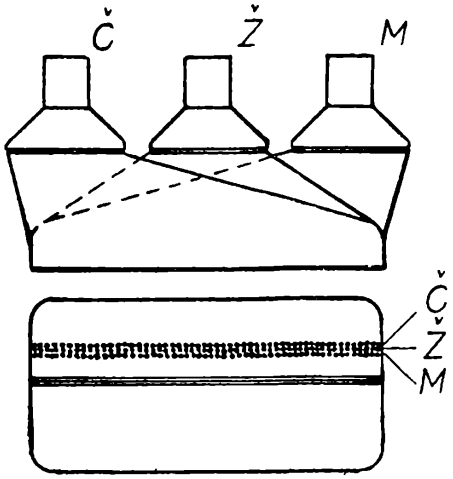
Obr. 3.

Princip barevné televize spočívá v tom, že se předmět snímá přes tři základní filtry. Barevné obrazy se pak jednotlivě vysílají. Pro příjem je zapotřebí tří televizních přijímačů, kineskopů. Všechny tři obrazy jsou potom zobrazovány na společné stínítko. Obrazy na malých obrazovkách kineskopů jsou dokonalé. Potíž však nastává při jejich zobrazování na společné stínítko (obr. 4). Jde o zobrazení na plochu (stínítko), která není kolmá k optickým osám zobrazovacích objektivů. Tím jsou zaváděny značné vady do zobrazení.

Zjednodušení se dosáhne použitím „vláknové optiky". Obrazovka je tvořena čely vláken uspořádaných do řádků. Vlákna každého třetího řádku, tvořící samostatnou skupinu, jsou přiváděna od jednoho kineskopu (obr. 5). Na obrazovce každého kineskopu kreslí elektronový pa-



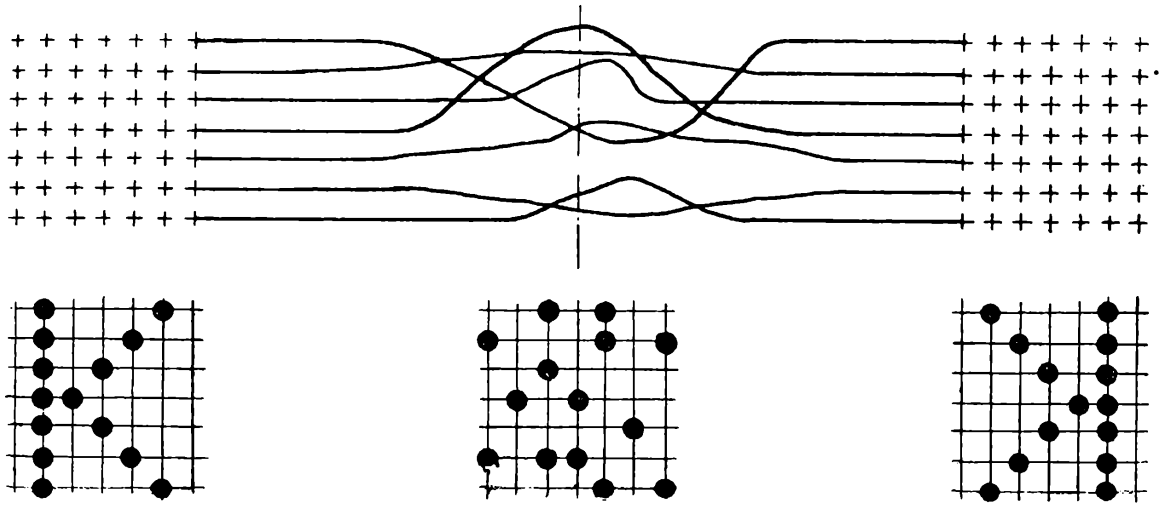
Obr. 4.



Obr. 5.

prsek 625 řádků. Existuje tedy také 625 řádků v každé skupině vláken, tvořících obrazovku kineskopu. Hlavní obrazovka musí mít potom 1875 řádků vláken. Každý řádek vláken od jednoho kineskopu je obklopen odpovídajícími si řádky od druhých dvou kineskopů. Např. desátý žlutý řádek se dotýká shora desátého červeného řádku a zdola desátého modrého řádku. Protože průměr vláken je malý, všechny tři řádky v lidském oku splývají a oko vidí řádek obrazu ve skutečných barvách. K dosažení větších rozměrů obrazů se používá vláken kuželových.

Velmi zajímavé je zařízení pro šifrování zpráv (obrazů). Představme si obyčejný svazek rovnoběžných vláken. Vlákna ve střední části svazku různě zpřeházíme a propleteme. Pak svazek v tomto místě rozpůlíme. Vzniklé dva kusy jsou šifrovací elementy. Prvním kusem je vytvářen



Obr. 6.

„obraz", což je jen jakési více nebo méně chaotické seskupení světelných bodů. Tento zašifrovaný obraz rozřeší jedině majitel druhé půlky svazku. Obr. 6 schematicky ukazuje vznik šifrovacích elementů.

V tomto článku jsme zdaleka nemohli podat úplný výčet použití skleněných vláken. Z optických laboratoří, zabývajících se vláknovou optikou, přicházejí stále nové a nové zprávy o dalším využití průhledných vláken. Ukazuje se, že skleněná vlákna lze s výhodou nahrazovat vlákny z umělých hmot. Tato vlákna mají tu výhodu, že nejsou křehká, jsou dokonale průhledná a jejich výroba je mnohem levnější. Proto v příštích letech můžeme očekávat ještě větší rozmach výzkumu a použití světlovodivých vláken.

Několik řešených příkladů

PROF. R. KUNFALVI, Budapešť

Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální

(Dokončení)

Příklady pro IV. třídu (naši 12. třídu).

1. Deskový kondenzátor je připojen na napětí. Desky kondenzátoru jsou čtvercové, délka hrany je a. Vzájemná vzdálenost obou desek je b. Délka b je malá vzhledem k a. Mezi desky kondenzátoru zasuneme stálou rychlostí v další desku, jejíž dielektrická konstanta je ε. Máme stanovit intenzitu proudu!

Příklad ze sovětské olympiády

Řešení. Celková kapacita při zasouvání třetí desky je rovna součtu kapacit dvou kondenzátorů. Mezi plochami prvého z kondenzátorů je vakuum, mezi plochami druhého kondenzátoru, je dané dielektrikum. Daný systém sestává v okamžiku t ze dvou kondenzátorů, jejichž desky mají délku vt, respektive $(a - vt)$; (šířka desek je a). Celková kapacita bude

$$C = \varepsilon_0 \frac{a\,(a - vt)}{b} + \varepsilon_0\, \varepsilon \frac{abt}{b} = \varepsilon_0 \frac{a}{b}\,(a - vt + \varepsilon vt) =$$

$$= \varepsilon_0 \frac{a}{b}\,[a + (\varepsilon - 1)\,.\,vt]\,.$$

Je-li napětí U na deskách konstantní, bude náboj Q vyjádřený jako funkce času roven

$$Q = C\ \ U = \varepsilon_0 \frac{a}{b}\, U\,[a + (\varepsilon - 1)\, vt]\,.$$

Náboj Q je tedy lineární funkcí času. Daným elektrickým obvodem musí tedy protékat časově stálý elektrický proud

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \varepsilon_0 \frac{a}{b} U (\varepsilon - 1) v$$

V daném případě představuje kondenzátor odpor velikosti

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)} \frac{b}{a} \frac{1}{v} .$$

Kdybychom pohybovali dielektrikem v opačném směru, byl by odpor záporný. Proud má směr opačný nežli má napětí do obvodu zapjaté baterie.

2. Baterii připojíme nejprve na odpor 4,3 ohmu, později na odpor 5,2 ohmu. V obou odporech je přitom stejný tepelný výkon. Stanovte vnitřní odpor baterie.

Paní Z. Bodó

Řešení. V obou případech je stejné elektromotorické napětí

$$E = I_i (R_{ai} + R_i) ,$$

kde značí R_{ai} odpor příslušného odporu a R_i odpor baterie; I_i je protékající proud. Platí tedy

$$E_1 = E_2$$

a dále

$$I_1 (R_{a1} + R_i = I_2 (R_{a2} + R_i) ,$$

z čehož

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_{a2} + R_i}{R_{a1} + R_i} .$$

Tepelné výkony jsou rovněž stejné v obou případech

$$I_1^2 R_{a1} = I_2^2 R_{a2} ,$$

z čehož

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{R_{a2}}{R_{a1}}} .$$

Porovnáním obou rovnic dostáváme

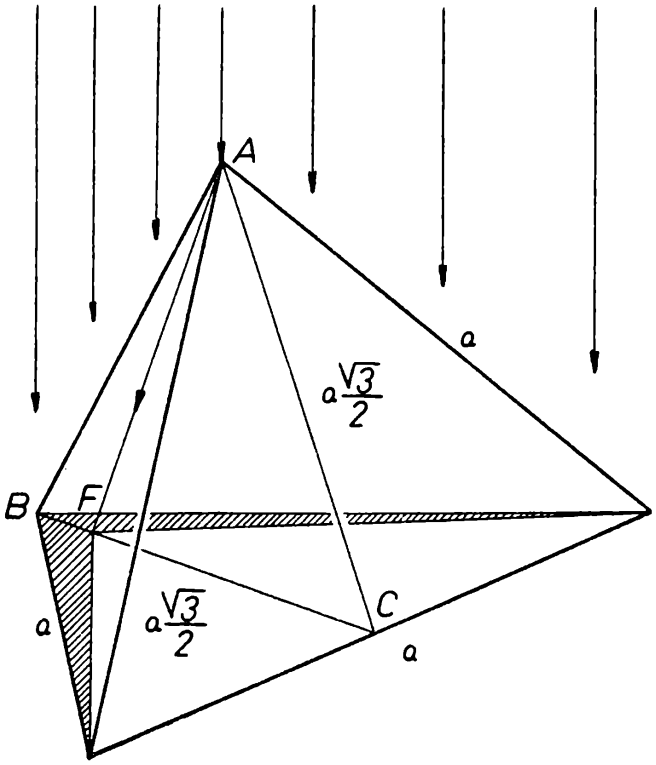
$$\frac{(R_{a2} + R_i)^2}{(R_{a1} + R_i)^2} = \frac{R_{a2}}{R_{a1}}$$

a po úpravě

$$R_{a1} . R_{a2} (R_{a2} - R_{a1}) = R_2^2 (R_{a2} - R_{a1}) .$$

Protože v našem případě platí, že $R_{a1} = R_{a2}$, dostáváme jako výsledný vztah

$$R_i = \sqrt{R_{a1} + R_{a2}} ,$$



Obr. 9.

z něhož po dosazení plyne, že

$$R_i = 4{,}73 \text{ ohmu} .$$

3. Pravidelný čtyřstěn (obr. 9) s délkou hrany rovnou 100 mm, z plného skla s indexem lomu $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$, je volně zavěšen za jeden z vrcholů. Na čtyřstěn dopadá vertikálně rovnoběžný svazek paprsků. Jaký obraz uvidíme na rovinném stínítku, jež je vodorovné a jež je od spodní stěny čtyřstěnu vzdáleno 100 mm?

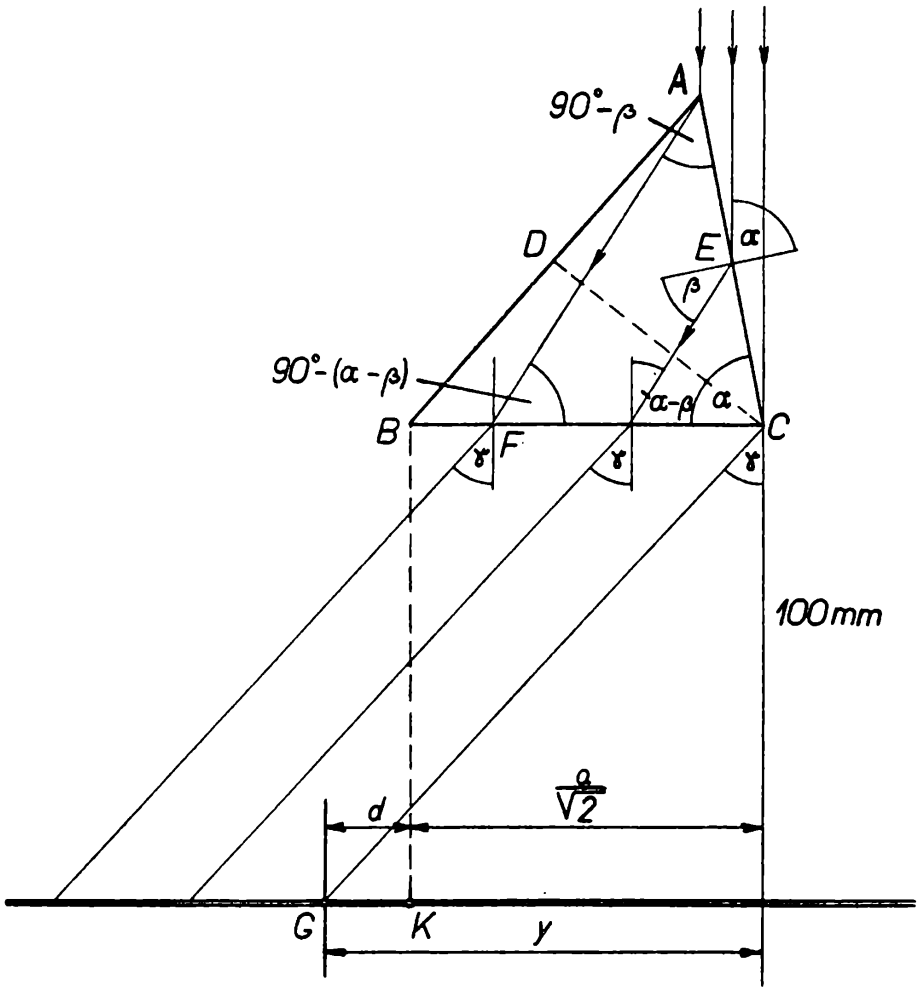
N. Vermes

Řešení. Spodní podstava čtyřstěnu zaujme po zavěšení vodorovnou polohu. Budeme tedy vyšetřovat pouze dráhu světelných paprsků po jejich dopadu na jednom z bočních ploch. Vzhledem k osové symetrii bude výsledek platit i pro zbývající dvě boční plochy. Při prvním lomu leží každý dopadající a lámaný paprsek ve svislé rovině kolmé na příslušnou boční plochu čtyřstěnu. V této rovině paprsek zůstane i po druhém lomu, který se uskuteční při průchodu paprsku spodní plochou čtyřstěnu. Proto postačí vyšetřit dráhu paprsku v jediné takové vertikální rovině kolmé na jednu z bočních ploch.

Zvolme si takovou rovinu, jež je současně rovinou souměrnosti čtyřstěnu. Na obr. 9 je naznačen řez čtyřstěnu takovou rovinou.

Označíme-li a délku hrany čtyřstěnu, pak platí, že

$$AC = BC = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$



Obr. 10.

Z trojúhelného ΔABC (obr. 10) plyne, že

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

a

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Pomocí známých trigonometrických vztahů dostáváme

$$\sin\alpha = 2\,\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

a podobně

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \frac{1}{3}.$$

Úhel dopadu paprsku v bodě E je roven α, protože jeho ramena jsou kolmá na AC a BC. Úhel lomu si označíme β. Podle Snelliova -

Descartesova zákona platí, že

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3},$$

z čehož plyne dále, že

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Kterým místem základny budou prvním lomem usměrněné paprsky procházet? Právě tím místem základny, do něhož boční plocha osvětlená ze stejného směru (jako mají lomené paprsky) bude vrhat stín. Stín má tvar rovnoramenného trojúhelníka, jehož základnou je spodní hrana boční plochy čtyřstěnu a jehož vrchol leží na jedné z výšek podstavy čtyřstěnu. Vypočtěme výšku tohoto stínového trojúhelníka. Je-li menší nežli výška podstavy, to znamená menší nežli

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} \doteq 0{,}866\,0\,a,$$

pak se paprsky lámou po druhé na rovinné podstavě. Podle obr. 10 je výška stínového trojúhelníka $x = FC$.

Podle sinové věty platí, pro $\triangle AFC$

$$\frac{x}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sin(90 - \beta)}{\sin[90 - (\alpha - \beta)]},$$

z čehož

$$x = a\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin(90 - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta} =$$

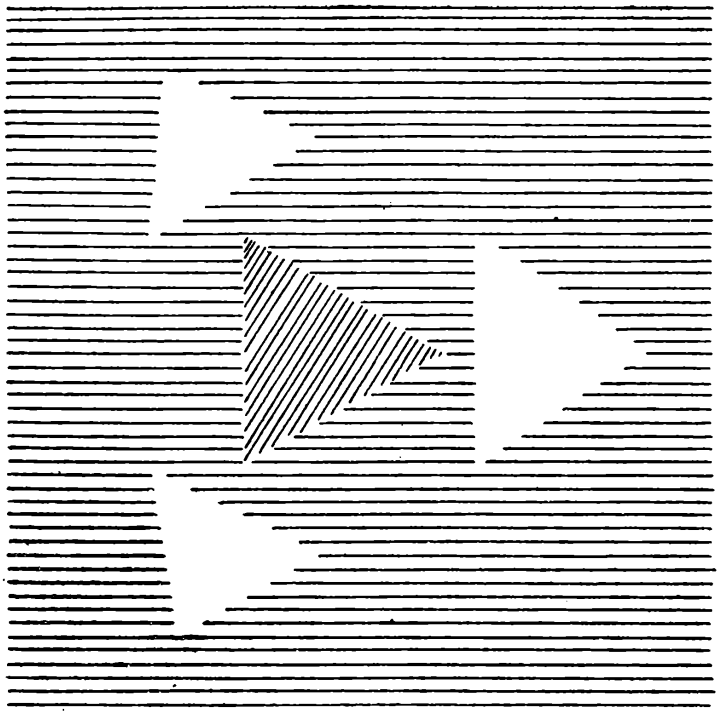
$$= \frac{\sqrt{135}\,(\sqrt{128} - \sqrt{20})}{108} \cdot a \doteq 0{,}736\,0\,a < 0{,}866\,0\,a.$$

V našem případě je splněna výše daná podmínka. Paprsky dopadají (zvnitřku čtyřstěnu) pod úhlem $(\alpha - \beta)$ na rovinu postavy. Lámavý úhel si označme γ. Podle zákona lomu platí

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\sin(\alpha - \beta) = \left(\frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)\sqrt{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{80} - \sqrt{8}}{9}$$

Jaký obraz se vytvoří na vodorovném stínítku? Rozumí se ovšem obraz od jediné boční plochy. Je jistě zřejmé, že to bude trojúhelník shodný se stínovým trojúhelníkem. Obraz vytvoří paprsky po dvojnásobném lomu na čtyřstěnu. Vypočteme si velikost posunutí y.



Obr. 11.

Z $\triangle CGH$ plyne pro zadané hodnoty

$$y = 100 \,.\, \mathrm{tg}\,\gamma = 100\,\frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}} = \frac{\sqrt{80}-\sqrt{8}}{\sqrt{16}\,.\,\sqrt{10-7}}\;100 \doteq$$

$$\doteq 92{,}63 \text{ mm}\,.$$

Celkový obraz na stínítku je zřejmý z obr. 11, kde jsou zachyceny tři stejné trojúhelníky vytvořené paprsky dvojnásob lomenými ve čtyřstěnu. Protože vyšetřujeme případ, kdy světlo přichází svisle shora, je jednak osvětleno stínítko (viz řídce šrafovaná plocha) vyjma místa pod čtyřstěnem (hustě šrafovaná plocha), navíc jsou na stínítku osvětleny tři trojúhelníkové plochy (světlá místa v obrázku). Každý z těchto trojúhelníků, jejichž základna je rovna a a výška x, je svou základnou vzdálen od příslušného vrcholu vlastního stínu čtyřstěnu o d rovné

$$d = GK = y - \frac{\sqrt{3}}{2}\,a \doteq 92{,}63 - 86{,}60 = 6{,}03 \text{ mm}\,.$$

Další hledaná veličina x je rovna (podle zadání)

$$x = 73{,}60 \text{ mm}\,.$$

Podrobné vyšetření ukazuje, že část dopadajících světelných paprsků je odrážena. Paprsky odražené od bočních ploch čtyřstěnu a od rovinné podstavy dávají další obraz rovněž trojúhelníkových tvarů, jež však jsou tak málo patrné, že jejich existenci lze pominout.

Upravil a přeložil inž. dr. V. Šindelář

Řešení úloh

(Pokračování)

● Deskriptivní geometrie

2. Do dané kružnice k o středu O vepište rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby jeho ramena procházela danými body M, N uvnitř kružnice, leží-li body M, N, O v přímce.

(Došlo 12 řešení) *Ota Setzer*

Řešil Stanislav Slouka, M3a, SPŠE, Brno:

Rozbor. Trojúhelník ABC je rovnoramenný, proto střed O opsané kružnice k leží na ose úhlu γ proti základně AB; úhly MCO a NCO jsou stejně velké. V trojúhelníku MCN osa CO úhlu MCN dělí stranu MN v poměru stran úhel svírajících. Je tedy

$$\frac{MO}{NO} = \frac{MC}{NC}.$$

Vrchol C leží jednak na kružnici k, jednak na množině bodů X takových, že

$$\frac{MX}{NX} = \frac{MO}{NO} = \lambda.$$

Touto množinou je Apolloniova kružnice l.

Konstrukce. 1. Sestrojíme kružnici l takto:

a) V téže polorovině vytčené přímkou MN sestrojíme úsečky $MO' \parallel NO''$ tak, že $MO' = MO$ a $NO'' = NO$.

b) Sestrojíme průsečík O_1 přímek MN a $O'O''$.

c) Nad průměrem OO_1 opíšeme kružnici l.

2. Sestrojíme společný bod C kružnic k a l.

3. Sestrojíme body A a B ($A \equiv CM \cdot k$, $B \equiv CN \cdot k$).

Důkaz. Z konstrukcí 1a, b plyne

$$MO' : NO'' = MO_1 : NO_1,$$

protože

$$\frac{MO}{NO} = \lambda = \frac{MO'}{NO''},$$

je také

$$\frac{MO_1}{NO_1} = \lambda .$$

Dále je $OC \perp O_1C$. Veďme bodem N rovnoběžky s přímkami CO, CO_1 a sestrojme po řadě jejich průsečíky E, F s přímkou MC, které vždy existují. Protože je

$$\frac{MO}{NO} = \lambda ,$$

platí též

$$\frac{MC}{EC} = \lambda .$$

Obdobně z rovnosti

$$\frac{MO_1}{NO_1} = \lambda ,$$

plyne

$$\frac{MC}{FC} = \lambda .$$

Přirovnáním dostaneme $CF = CE$.

Pro vrchol N pravého úhlu nad průměrem EF platí

$$NC = CF = CE .$$

Dosazením do některé rovnice obdržíme

$$\frac{MC}{NC} = \frac{MC}{EC} = \lambda = \frac{MO}{NO}$$

Je tedy $\sphericalangle MCO = \sphericalangle NCO$ a trojúhelník ABC je rovnoramenný.

Diskuse. 1. Leží-li střed O vně úsečky MN nemá úloha řešení, neboť bod O musí ležet uvnitř úhlu MCN.

2. Body M, N leží po různých stranách od středu O; pak mohou nastat případy:

a) $MO = NO$; konstrukce 1b) nemá sice řešení, avšak vrchol C leží v tomto případě na kolmici k přímce MN v bodě O a úloha má 2 řešení.

b) $MO > NO$; konstrukce 2 je řešitelná tehdy, je-li $OO_1 > r$.

Platí

$$OO_1 = MO_1 - MO \tag{1}$$

Avšak

$$\frac{MO_1}{MO} = \frac{NO_1}{NO} ,$$

kde

$$NO_1 = MO_1 - MO - NO ,$$

čili po dosazení a úpravě je

$$MO_1 = MO \,.\, \frac{MO + NO}{MO - NO}$$

Dosadíme do (1) a po menší úpravě vyjde

$$OO_1 = 2 \,.\, \frac{MO \,.\, NO}{MO - NO} > r\,,$$

což je podmínka pro to, aby úloha měla dvě řešení.

c) $MO < NO$; analogickými úvahami jako v případě 2b) dojdeme k podmínce pro druhé řešení souměrné podle MN

$$\frac{MO \,.\, NO}{NO - MO} > \frac{r}{2}\,.$$

Poznámka. *Pavel Novotný* z Olomouce řešil úlohu správně analyticky: *Peter Mederly* z Prievidzy velmi vtipně inverzí.

3. Zostrojte guľu, ak poznáte jej tri dotyčnice a, b, c, ktoré ležia v tej istej rovine ϱ a dotyčnicu d, ktorá pretína rovinu ϱ.
(Došlo 11 riešení) *Ota Setzer*

Riešil Peter Mederly, III.d SVŠ, Prievidza:

Rozbor. Stred hľadanej gule nech je S; nech je T_1 dotykový bod gule a priamky d. Spoločná časť gule a roviny ϱ je alebo bod M alebo kruh k, ktorého dotyčnicami sú dané priamky a, b, c. (Ak je spoločnou časťou bod M, potom tento nutne musí byť spoločným bodom všetkých troch priamok.) Podľa textu pretína dotyčnica d našej gule rovinu ϱ. Označme $N \equiv \varrho \,.\, d$. Zostrojme dotyčnicu NT_2 ku kruhu k (T_2 je dotykový bod) alebo, ak existuje M, priamku MN. Táto priamka NT_2, resp. NM je tiež aj dotyčnicou našej gule. Pretože je $d \equiv NT_1$ tiež dotyčnicou, platí podľa známej vety $NT_1 = NT_2$ alebo $NT_1 = NM$. Ak označíme stred kruhu k ako O, potom z predošlého plynie, že bod S je spoločný bod priamky $p \perp \varrho$ idúcej bodom O a roviny $\pi \perp d$ idúcou bodom T_1. Odtiaľ *konštrukcia.* Ak je možné zostrojme v rovine ϱ kružnicu k_1, ktorá sa dotýka priamok a, b, c a je hraničnou kružnicou kruhu k. Ak majú a, b, c spoločný bod, označme ho M. Zostrojme dotyčnicu NT_2 kruhu k s bodom dotyku T_2, alebo priamku NM (ak $N \neq M$). Na d zostrojme bod T_1 tak, že $NT_2 = NT_1$ alebo $NM = NT_1$. Bodom T_1 vedieme rovinu $\pi \perp d$. Veďme ďalej stredom O alebo bodom M priamku $p \perp \varrho$. Stred je potom určený ako $S \equiv p \times \pi$. Potom guľa o strede S a polomere ST_1 je riešením našej úlohy.

Diskusia. I. Nech a, b, c sú navzájom rôzne:

1. $a \parallel b \parallel c$ — neexistuje ani k ani M — úloha nemá riešenie.
2. Nech majú a, b, c spoločný bod M — neexistuje žiadny k;

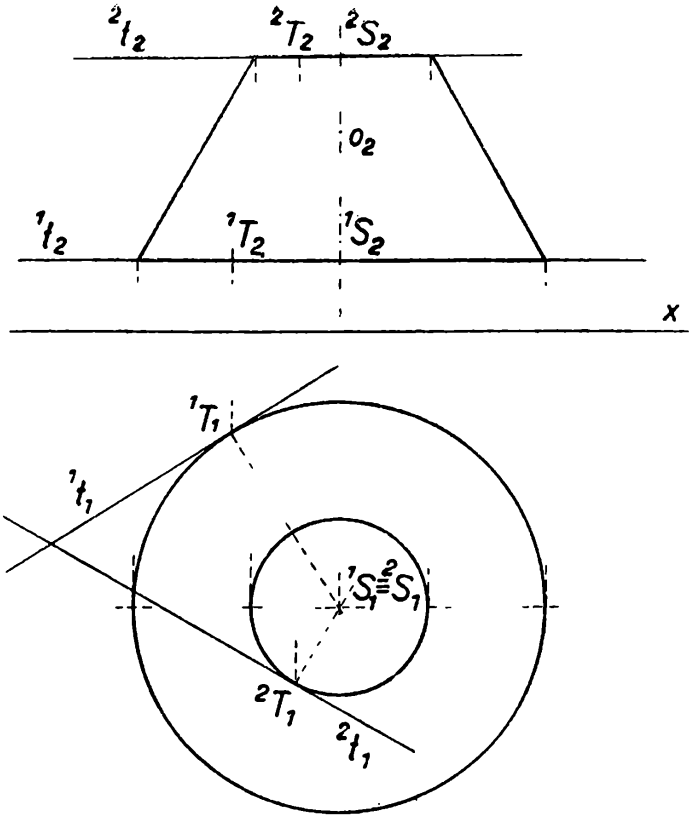
α) ak $N \equiv M$ nie je riešenie,

β) ak $N \neq M$ práve dve rôzne riešenie.

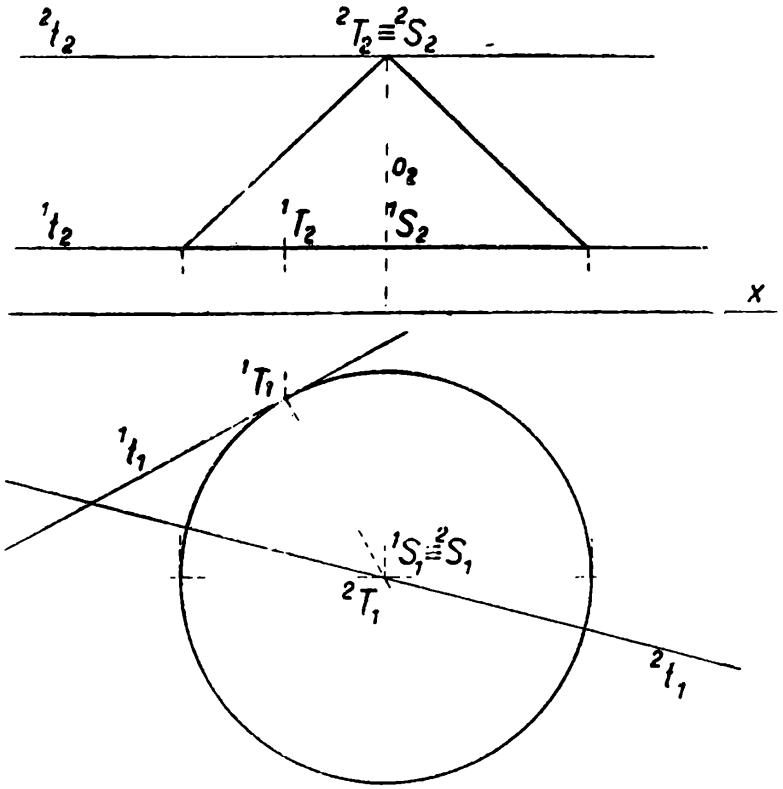
3. Ak sú dve z priamok a, b, c rovnobežné a tretia s nimi rôznobežná, existujú práve dva kruhy k, ktoré nemajú žiadny vnútorny spoločný bod; podľa toho, akú polohu má vzhľadom na tieto kruhy bod N, má úloha 2, 3 alebo 4 riešenie.

4. Nech a, b, c sú navzájom rôznobežné a nemajú spoločný bod. Existujú zrejme štyri kruhy k, ktoré nemajú navzájom žiadne spoločné vnútorné body. Naša úloha má teda 6, 7 alebo 8 riešení.

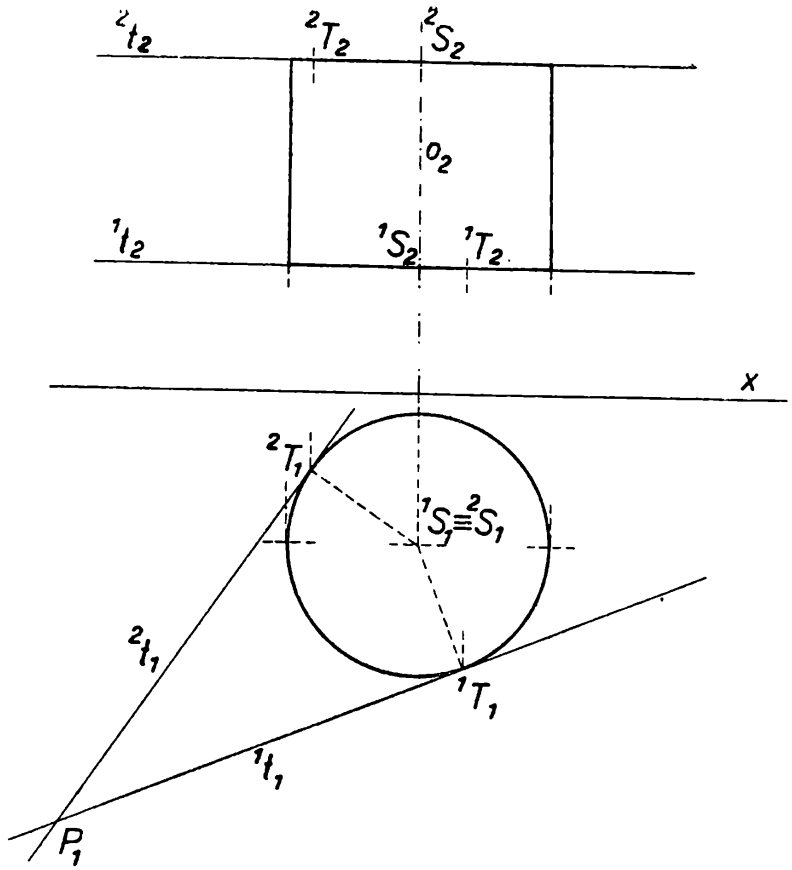
II. Ak aspoň dve z daných priamok a, b, c splynú, úloha má nekonečne mnoho riešení.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

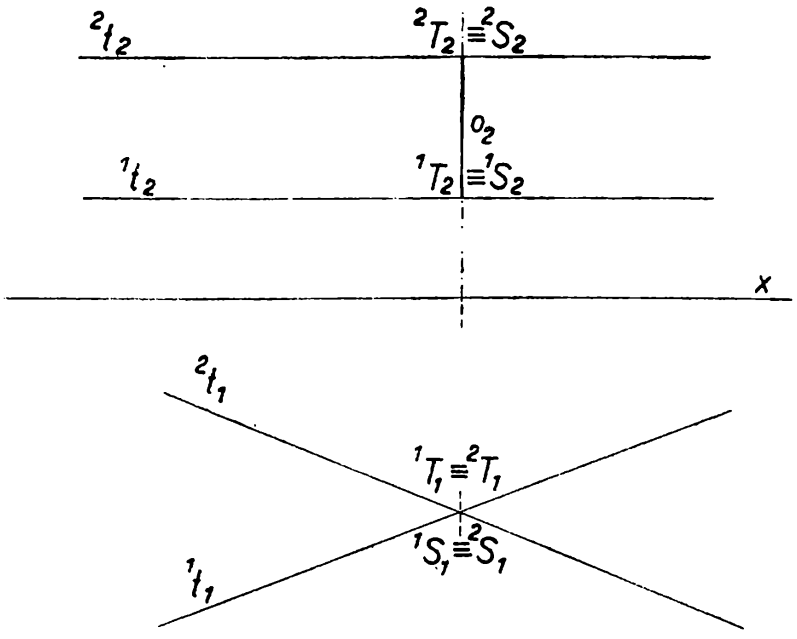
4. Zostrojte rotačný zrezaný kužeľ, ak je daná dotyčnica ^1t s bodom dotyku ^1T jednej a dotyčnica ^2t s bodom dotyku ^2T druhej podstavy.

(Došlo 11 riešení) *Ota Setzer*

Riešil Bohuš Sivák, IX. tr. ZDŠ, Zvolen:

Predpokladajme, že ^1t, ^2t sú mimobežky. Potom existuje rovina $\varrho \parallel {}^1t, {}^2t$. Túto rovinu zvolíme za pôdorysňu.

Rozbor. Predpokladajme, že sme kužeľ už zostrojili. Jeho prvý priemet budú 2 sústredné kružnice $^1k_1$ ($^1S_1$, ^1r), $^2k_1$ ($^2S_1$, ^2r) s dotyčnicami $^1t_1$, $^2t_1$ a bodmi dotyku $^1T_1$, $^2T_1$, Potom bude platit



Obr. 4.

$$^1T_1\,{}^1S_1 \perp {}^1t_1\,,\ {}^2T_1\,{}^2S_1 \perp {}^2t_1\,,\ {}^1S_1 \equiv {}^2S_1\,.$$

Konštrukcia. V bodoch ${}^1T_1$, ${}^2T_1$ zostrojíme kolmice na ${}^1t_1$, ${}^2t_1$, ktoré sa pretínajú v bodoch ${}^1S_1 \equiv {}^2S_1$. Doplníme priemety podstáv a ľahko zostrojíme aj 2. priemet.

Dôkaz plynie z rozboru.

Diskusia. Priamky ${}^1t_1$, ${}^2t_1$ a body ${}^1T_1$, ${}^2T_1$ môžu mať tieto vzájomné polohy:

1. obecnú (obr. 1) — konštrukcia;
2. kolmica k ${}^1t_1$ bodom ${}^1T_1$ pretína ${}^2t_1$ v bode ${}^2T_1$ (obr. 2) alebo ${}^1T_1\,{}^2T_1 \perp {}^2t_1$ — rotačný kužeľ;
3. ${}^1P_1\,{}^1T_1 = {}^2P_1\,{}^2T_1$, kde ${}^1P_1 \equiv {}^2P_1 \equiv P_1 \equiv {}^1t_1 \,.\, {}^2t_1$ (obr. 3) — rotačný valec;
4. ${}^1T_1 \equiv {}^2T_1$ (obr. 4) — úsečka.

V prípade ${}^1t \parallel {}^2t$ môže byť:

5. ${}^1T_1\,{}^2T_1 \perp {}^1t_1 \parallel {}^2t_1$ — nekonečne mnoho riešení;
6. ${}^1T_1\,{}^2T_1$ není kolmé k ${}^1t_1$ — žiadne riešenie.

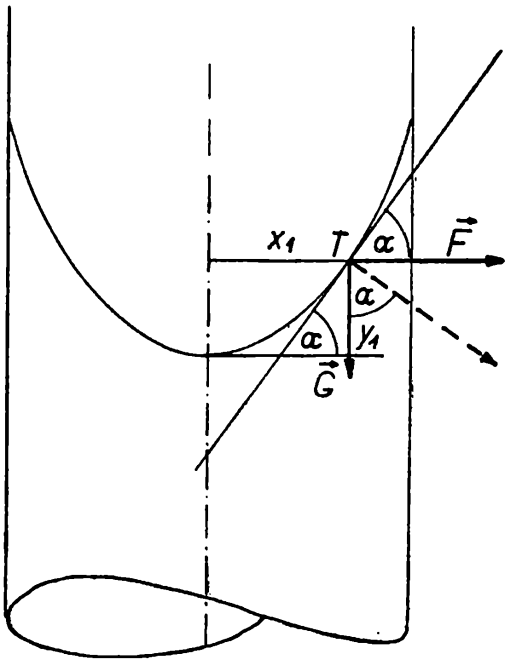
• Fyzika

2. Nádoba zčásti naplněná rtutí se otáčí kolem vertikální osy stálou úhlovou rychlostí $\omega = 1$ rad . s^{-1}. Povrch rtuti vytváří přitom konkávní parabolické zrcadlo. Máme určit ohniskovou dálku tohoto zrcadla. Hodnotu tíhového zrychlení volte $g = 9{,}81$ m . s^{-2}.

(Došlo 21 řešení) *Václav Šindelář*

Řešil František Allmer, III.a SVVŠ, Strakonice:

Na částečku kapaliny v bodě T působí dvě síly: její tíha $\vec{G}$ a odstředivá síla $\vec{F}$. Vektor tíhy $\vec{G}$ svírá s vektorem výslednice $\vec{R}$ úhel α. Povrch kapaliny je vždy kolmý na směr intenzity silového pole, proto také ve velmi blízkém okolí bodu T bude povrch kapaliny kolmý k výsledné síle $\vec{R}$. Úhel α je pak také směrovým úhlem tečny k osovému řezu povrchu kapaliny (což je podle zadání parabola) v bodě T, jak je vidno z obrázku.



Obr. 1.

Směrnice této tečny je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{G}|} = \frac{\omega^2 x_1}{g}.$$

Analyticky má tato tečna rovnici

$$x_1 x = p\,(y + y_1),$$
$$py - x_1 x + py_1 = 0,$$

ve tvaru směrnicovém

$$y = \frac{x_1}{p} x - y_1 ,$$

kde $\frac{x_1}{p}$ je směrnice. Srovnáním obdržíme

$$\frac{x_1}{p} = \frac{\omega^2 x_1}{g} ,$$

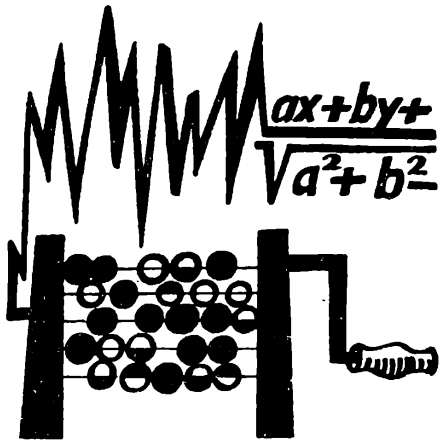
$$g = \omega^2 p ,$$

$$p = \frac{g}{\omega^2} ,$$

kde p je parametr paraboly; ohnisková vzdálenost

$$f = \frac{p}{2} = \frac{g}{2\omega^2} = \frac{9{,}81}{2} = 4{,}905 \text{ [m]}$$

MMO



Zúčastnili jsme se VIII. mezinárodní matematické olympiády v Sofii

DOC. JAN VYŠÍN, MFF, Praha

(Pokračování)

3.

Řešení úlohy 1. Označme po řadě x_A, x_B, x_C počty žáků, kteří rozřešili jen úlohu A, B, C, x_{BC}, počet žáků, kteří rozřešili jen úlohy BC, x_A počet žáků, kteří rozřešili úlohu A, a aspoň ještě jednu další úlohu.

Podle podmínek úlohy je pak

$$x_A + x_B + x_C + x'_A + x_{BC} = 25\,, \tag{1}$$

$$x_B + x_{BC} = 2\,(x_C + x_{BC})\,, \tag{2}$$

$$x_A = x'_A + 1\,, \tag{3}$$

$$\tfrac{1}{3}\,(x_A + x_B + x_C) = x_B + x_C\,. \tag{4}$$

Z (2) plyne

$$x_{BC} = x_B - 2x_C\,. \tag{5}$$

Z (4) plyne

$$x_A = x_B + x_C\,. \tag{6}$$

Dosadíme-li z (3), (5) do (1), dostaneme

$$2x_A + 2x_B - x_C = 26\,. \tag{7}$$

Dosadíme-li z (6) do (7), vyjde

$$4x_B + x_C = 26\,. \tag{8}$$

Z (5) vyplývá $x_B - 2x_C \geqq 0$, tj.

$$x_B \geqq 2x_C\,. \tag{9}$$

Spojením (8), (9) dostaneme

$$x_C \leqq \frac{26}{9}\,.$$

Protože podle (8) je x_C sudé, je $x_C = 0$, nebo $x_C = 2$. Pro $x_C = 0$ však nevyjde z (8) celé x_B. Je tedy $x_C = 2$ a $x_B = 6$, z (6) a (5) plyne $x_A = 8$, $x_{BC} = 2$, z (3) plyne $x'_A = 7$.

Zkouškou se přesvědčíme, že jediné možné řešení $x_B = 6$ je skutečně řešením úlohy.

Řešení úlohy 2. Danou rovnost upravíme na tvar

$$(a + b)\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\gamma}{2} = a\sin\alpha\cos\beta\sin\frac{\gamma}{2} +$$

$$+ b\sin\beta\cos\alpha\sin\frac{\gamma}{2}\,,$$

neboli

$$a\cos\beta\left(\cos\alpha\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\alpha\sin\frac{\gamma}{2}\right) +$$

$$+ b\cos\alpha\left(\cos\beta\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\beta\sin\frac{\gamma}{2}\right) = 0\,,$$

neboli

$$a\cos\beta\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) + b\cos\alpha\cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = 0\,. \tag{10}$$

Pro úhly trojúhelníka platí

$$\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right), \tag{11}$$

neboť je

$$\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) + \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = \pi\,. \tag{12}$$

Buď je

$$\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = 0\,,$$

pak je

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}\,,$$

tj. $\alpha = \beta$ a věta je dokázána, nebo je

$$\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = -\cos\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \neq 0\,;$$

pak dělíme rovnost (10) číslem

$$\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$$

a dostaneme

$$a\cos\beta - b\cos\alpha = 0\,. \tag{13}$$

Připojíme-li k rovnosti (13) rovnost

$$a\sin\beta - b\sin\alpha = 0$$

(sinová věta), vyjde

$$ab\,(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = 0\,,$$

neboli

$$\sin(\alpha - \beta) = 0\,,\ \text{tj.}\ \alpha = \beta\,.$$

Tento druhý případ však nemůže nastat, neboť pro $\alpha = \beta$ vyjde z (12)

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} = \beta + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}\,,$$

tj.

$$\cos\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = 0\,.$$

Řešení úlohy 3. Použijeme pomocné věty P:

Budiž AB úsečka, p přímka s ní rovnoběžná. Nechť bod X probíhá přímku p. Pak součet vzdáleností $AX + BX$ je minimální právě tehdy, leží-li bod X na ose úsečky AB. Důkaz věty P. Obsahuje-li přímka p úsečku AB, je věta P zřejmá. Neobsahuje-li přímka p úsečku AB, označíme X_0 průsečík osy o úsečky AB s přímkou p, $X \neq X_0$ bod přímky p, B' bod souměrně sdružený s bodem B podle přímky p (obr. 1). Pak je

$$BX_0 = B'X_0\,, \qquad BX = B'X\,. \tag{14}$$

Body A, B' jsou zřejmě souměrně sdruženy podle středu X_0, proto bod X_0 leží mezi body A, B'. Je tedy podle (14) a podle trojúhelníkové nerovnosti

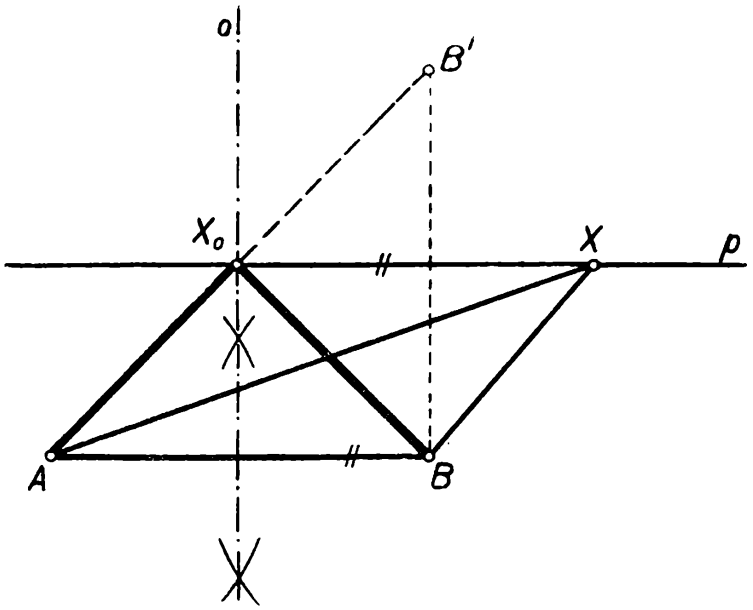
$$AX_0 + BX_0 = AX_0 + B'X_0 = AB' < AX + B'X = AX + BX\,.$$

Tím je pomocná věta P dokázána.

Budiž nyní $ABCD$ pravidelný čtyřstěn a nechť bod X neleží v rovině souměrnosti σ hrany AB (obr. 2). Rovina σ obsahuje vrcholy C, D, neboť platí

$$AC = BC\,,\ AD = BD\,.$$

Bodem X vedeme přímku $p \parallel AB$ a označíme X_0 její průsečík s rovinou σ. Protože CX_0 a DX_0 jsou pravoúhlé průměty úseček CX a DX do roviny



Obr. 1.

σ, je

$$CX_0 < CX\,,\ DX_0 < DX\,. \tag{15}$$

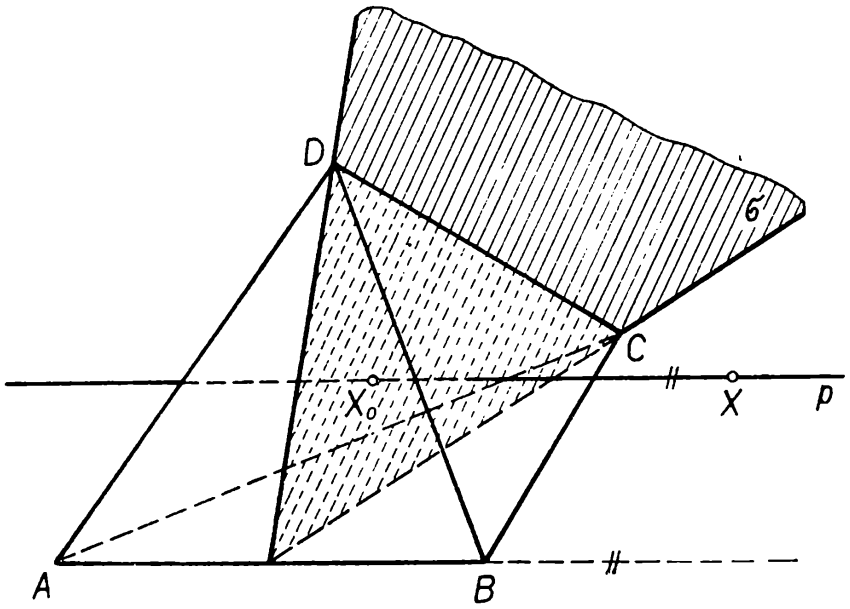
Podle pomocné věty P je

$$AX_0 + BX_0 \leqq AX + BX\,. \tag{16}$$

Spojením (15), (16) dostaneme

$$AX_0 + BX_0 + CX_0 + DX_0 < AX + BX + CX + DX\,. \tag{17}$$

Tím je dokázáno: Neleží-li bod X v rovině souměrnosti *některé* hrany čtyřstěnu $ABCD$, lze nalézt takový bod X_0, že platí (17). Bod X, pro který je součet $AX + BX + CX + DX$ minimální, musí tedy ležet v rovinách souměrnosti všech šesti hran čtyřstěnu. Je to tedy střed kulové plochy čtyřstěnu $ABCD$.



Obr. 2.

Řešení úlohy 4. Pro $n = 1$ se redukuje daná rovnost na rovnost

$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x};$$

z ní plyne rovnost

$$1 = 2\cos^2 x - \cos 2x,$$

která platí pro všechna x. Pro $x \neq \frac{\lambda\pi}{2}$

lze postup obrátit. Je tedy daná rovnost dokázána pro $n = 1$.

Indukční krok z n na $n + 1$: Předpokládáme, že

$$x \neq \frac{\lambda\pi}{2k} \quad (k = 0, 1, \quad ., n, n + 1)$$

a označíme L_n levou stranu dokazované rovnosti. Pak je

$$L_{n+1} = L_n + \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(2^n x) + \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} =$$

$$= \operatorname{cotg} x - \frac{(\cos 2^n x)}{(\sin 2^n x)} + \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)} =$$

$$= \operatorname{cotg} x - \frac{1}{\sin(2^{n+1}x)}\,[2\cos^2(2^n x) - 1].$$

Protože výraz v lomených závorkách je roven $\cos(2^{n+1}x)$, je

$$L_{n+1} = \operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg}(2^{n+1}x).$$

Tím je dokázán indukční krok a je dokázána i daná formule.

Řešení úlohy 5. Při současné výměně parametrů a_i, a_k a neznámých x_i, x_k se soustava nezmění. Zvolíme-li tedy vhodné označení, je

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4. \tag{17}$$

Pak lze každou absolutní hodnotu $|a_i - a_k|$ $(i < k)$ nahradit rozdílem $a_i - a_k$. Odečteme-li druhou rovnici od první, vyjde

$$(a_1 - a_2)(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 0. \tag{18}$$

Podobně odečtením třetí rovnice od druhé dostaneme

$$(a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0. \tag{19}$$

Konečně odečtením čtvrté rovnice od třetí dostaneme

$$(a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0. \tag{20}$$

Rovnice (18), (19), (20) dělíme nenulovými koeficienty $(a_1 - a_2)$, $(a_2 - a_3)$, $(a_3 - a_4)$. Takto upravené rovnice (18) a (20) sečteme. Vyjde $x_1 = x_4$. Odečtením upravených rovnic (18) a (19) vyjde $x_2 = 0$, z (18) pak $x_3 = 0$.

Z původních rovnic dostaneme

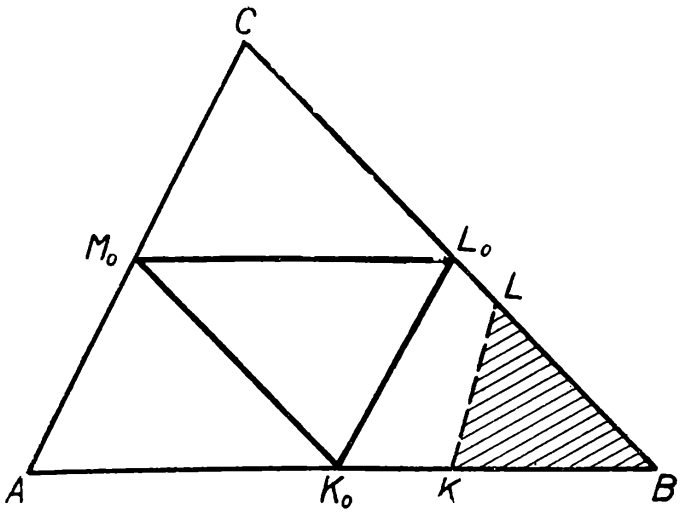
$$x_1 = x_4 = \frac{1}{|a_1 - a_4|}.$$

Za předpokladu (17) má tedy daná soustava jediné *možné* řešení

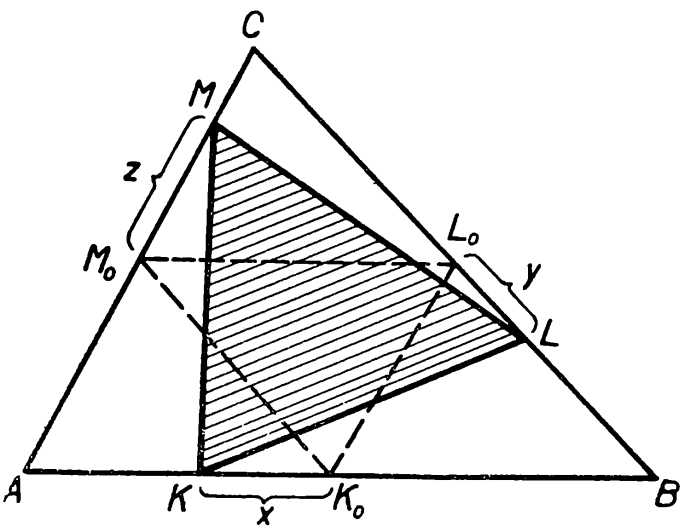
$$x_1 = x_4 = \frac{1}{|a_1 - a_4|}, \qquad x_2 = x_3 = 0.$$

Zkouškou se přesvědčíme, že to je skutečně řešení dané soustavy.

Řešení úlohy 6. Označíme K_0, L_0, M_0 po řadě středy AB, BC, CA (obr. 3). Pak úsečky K_0L_0, L_0M_0, M_0K_0 rozdělí trojúhelník ABC ve čtyři části téhož obsahu $\frac{1}{4} \triangle ABC$.



Obr. 3.



Obr. 4.

Leží-li dva z bodů K, L, M na obvodu některého z „rohových" trojúhelníků AK_0M_0, L_0BK_0, CM_0L_0, např. K, L na úsečkách BK_0, BL_0 (viz obr. 3), pak je $\triangle BKL \leqq \triangle BK_0L_0 \leqq \frac{1}{4} \triangle ABC$.

Stačí tedy zabývat se případem, kdy žádné dva z bodů K, L, M nemají od téhož vrcholu trojúhelníka ABC vzdálenosti menší nebo rovné polovinám délek příslušných stran.

Nechť např. K leží mezi A, K_0, L mezi B, L_0, M mezi C, M_0 (obr. 4). Označme $KK_0 = x$, $LL_0 = y$, $MM_0 = z$.

Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že je

$$\triangle AKM > \tfrac{1}{4} \triangle ABC\,, \quad \triangle BLK > \tfrac{1}{4} \triangle ABC\,, \quad \triangle CML > \tfrac{1}{4} \triangle ABC$$

Pak je $\triangle AKM + \triangle BLK + \triangle CML > \frac{3}{4} \triangle ABC$,

neboli

$$4\,\frac{\triangle AKM}{\triangle ABC} + 4\,\frac{\triangle BLK}{\triangle ABC} + 4\,\frac{\triangle CML}{\triangle ABC} > 3\,. \tag{21}$$

Poměry obsahů trojúhelníků v nerovnosti (21) vyjádříme pomocí délek a, b, c, x, y, z. Při obvyklém označení úhlů platí

$$\triangle AKM = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b}{2} + z\right)\left(\frac{c}{2} - x\right).\sin\alpha\,, \qquad \triangle ABC = \tfrac{1}{2}\,bc\sin\alpha\,,$$

tj.

$$\frac{\triangle AKM}{\triangle ABC} = \frac{\left(\frac{b}{2} + z\right)\left(\frac{c}{2} - x\right)}{bc}\,. \tag{22}$$

Cyklickou záměnou dostaneme z (22) další dva poměry obsahů; po dosazení do (21) a úpravě vyjde

$$a\,(b + 2z)\,(c - 2x) + b\,(c + 2x)\,(a - 2y) + \\ + c\,(a + 2y)\,(b - 2z) > 3abc\,.$$

Tuto nerovnost zjednodušíme po vynásobení na tvar

$$axz + byx + czy < 0\,,$$

což je ve sporu s podmínkami $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Tím je věta úplně dokázána.

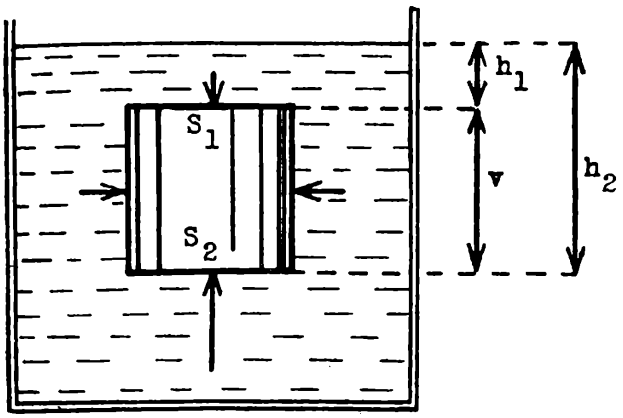
(Pokračování)

O mořské vodě, o vejci a o Archimédově zákonu

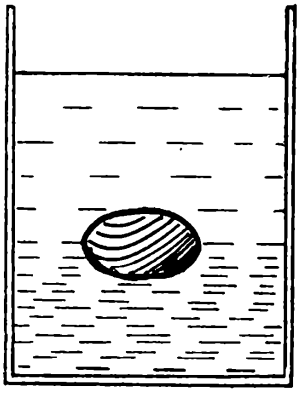
Mnoho našich rekreantů má již po několik let příležitost užívat mořských koupelí na březích Černého nebo Jaderského moře, nebo i jinde. U moře si libují zejména neplavci, jak je příjemné nepohnutě ležet na hladině a nechat se houpat vlnami slané vody, aniž se tělo potopí. Průměrná hustota lidského těla je menší než hustota mořské vody, a proto nemusíme vyvíjet žádné úsilí, abychom se udrželi na hladině. Také doma si můžeme provést zajímavý pokus o tom, jak potápění, vznášení nebo plování tělesa závisí na vzájemné hustotě ponořovaného tělesa a kapaliny. Připravíme si k tomu do jedné nádoby čistou vodu a do druhé silný roztok kuchyňské soli. Vhodíme-li vejce do čisté vody, klesne ke dnu. Přilévame-li opatrně solný roztok, dosáhneme při určité hustotě roztoku toho, že se vejce v kapalině vznáší, tj. zůstane v klidné kapalině v té hloubce, do které je vnoříme. Připravíme-li roztok o ještě větší hustotě, vejce se vynoří částečně nad hladinu, plove.

Podle Archimédova zákona je vztlaková síla u úplně ponořeného tělesa rovna tíze kapaliny stejného objemu, jaký má těleso. Původ této vztlakové síly je v hydrostatickém tlaku. Hydrostatický tlak je totiž ve větší hloubce větší, a proto tlaková síla na určitou plochu v dolní části povrchu tělesa je větší než na stejně velikou plochu na horní části tělesa (obr. 1). Podle obrázku 1 se také ve škole vysvětluje vznik vztlakové síly podle Archimédova zákona. Zopakujeme si tento důkaz, neboť ho v dalším upotřebíme.

Myslíme si např. válcové těleso ponořené do kapaliny, horní podstavou do hloubky h_1, dolní do hloubky h_2. Výška válce je $v = h_2 - h_1$. Dále uvážíme, že svislá složka tlakových sil na plášť válce je rovna



Obr. 1.



Obr. 2.

nule, takže na svislou vztlakovou sílu mají vliv jen tlakové síly na podstavy S_1 a S_2. Tyto síly jsou

$$F_1 = S_1 h_1 \varrho g \,, \quad F_2 = s_2 h_2 \varrho g \,. \tag{1}$$

Přitom platí $S_1 = S_2 = S$. Pro vztlakovou sílu F dostaneme

$$F = F_2 - F_1 = S\,(h_2 - h_1)\,\varrho g = Sv\varrho g \,. \tag{2}$$

Výraz $Sv = V$ udává objem tělesa, ϱg je měrná tíha kapaliny, a proto $Sv\varrho g = G$ je tíha kapaliny stejného objemu, jaký má těleso.

Ve škole se zpravidla nevěnuje pozornost některým zajímavým jevům a problémům, které souvisí se silovými účinky na těleso, ponořené do kapaliny. Uveďme si některé:

1. Proč je velikost vztlakové síly nezávislá na hloubce, do které se těleso ponoří, když přece hydrostatický tlak p je ve větší hloubce h větší ($p = h\varrho g$).

2. Proč např. vejce, vznášející se v kapalině, se otočí vždy do určité polohy, a to tak, že určité místo skořápky je vždycky v nejvyšším místě.

3. Proč je výslednice vodorovných složek tlakových sil působících na povrch tělesa rovna nule, i když stěny nejsou svislé.

4. Jaký je dynamický původ tlakových sil na těleso, které je ponořeno do klidné tekutiny.

K těmto čtyřem otázkám si něco řekneme.

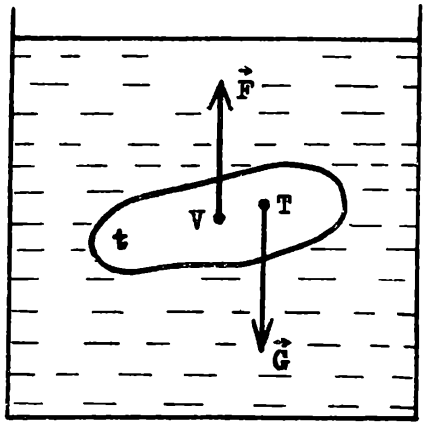
Otázku č. 1 rozřešíme snadno, vrátíme-li se ke vztahům (1) a (2). Ponoříme těleso do hloubky o délku h větší. Potom je horní podstava v hloubce $h_1 + h$ a dolní $h_2 + h$. Tlakové síly na podstavy jsou nyní

$$F_1' = S\,(h_1 + h)\,\varrho g \,, \quad F_2' = S\,(h_2 + h)\,\varrho g$$

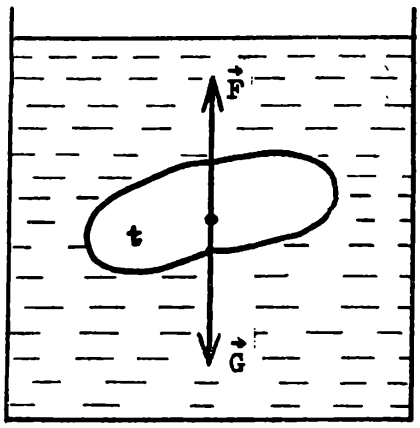
a výsledná vztlaková síla je nyní

$$F' = F_2' - F_1' = S/(h_2 + h) - h_1 + h)/\varrho g = S\,(h_2 - h_1)\,\varrho g = Sv\varrho g \,, \tag{3}$$

tj. má původní velikost F, když bylo těleso v hloubce o h menší. To zjistíme, když náš výsledek srovnáme se vzorcem (2).



Obr. 3.



Obr. 4.

Skutečnost, že vztlaková síla na těleso je ve všech hloubkách stejná, platí jen pro kapalinu, která má všude stejnou hustotu. Kdyby byla např. ve větší hloubce hustota větší, byla by vztlaková síla závislá na hloubce. Tak např. kdybychom na vodu v kádince opatrně nalili líh a stejně opatrně pustili do nádoby kuličku oleje, který má větší hustotu než líh a menší než voda, olej by klesal a zůstal by na rozhraní vody a líhu. Kulička se zdánlivě v kapalině vznáší. Ve skutečnosti plove na vodní hladině, kterou tvoří rozhraní vody a líhu (obr. 2).

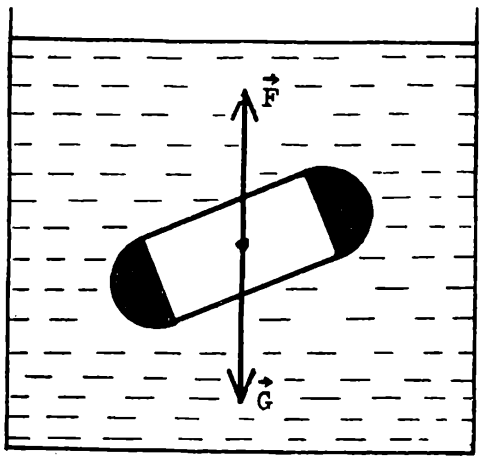
Problém č. 2 bychom také mohli vyjádřit otázkou, zda na těleso, které je ponořené do kapaliny, kromě vztlakové síly, která může způsobit pohyb tělesa ve svislém směru, nepůsobí také silová dvojice, která by sice neměla vliv na tíhu tělesa, ale za to by způsobila otáčivý pohyb tělesa, např. v tom případě, že by se v kapalině vznášelo. Uvidíme v dalším, že takové případy skutečně nastávají. Při našich úvahách užijeme představy, o které se opíral *Stevin* při svém důkazu platnosti Archimédova zákona.[1])

Nechť má těleso t (obr. 3) těžiště v bodě T. Těleso ponoříme úplně do kapaliny. Vztlaková síla F, působící na těleso, má působiště v bodě V. Bod V je ve hmotném středu (v těžišti) tělesa, které má tentýž tvar a objem jako těleso t, ale je z homogenní látky. Jestliže jsou body T a V v témže bodě tělesa t, nebo v téže svislé přímce, pak tíha tělesa G a vztlaková síla F nemají na těleso otáčivý účinek (obr. 4). Jestliže však spojnice bodu T a V je nenulová a má jiný směr než svislý, způ-

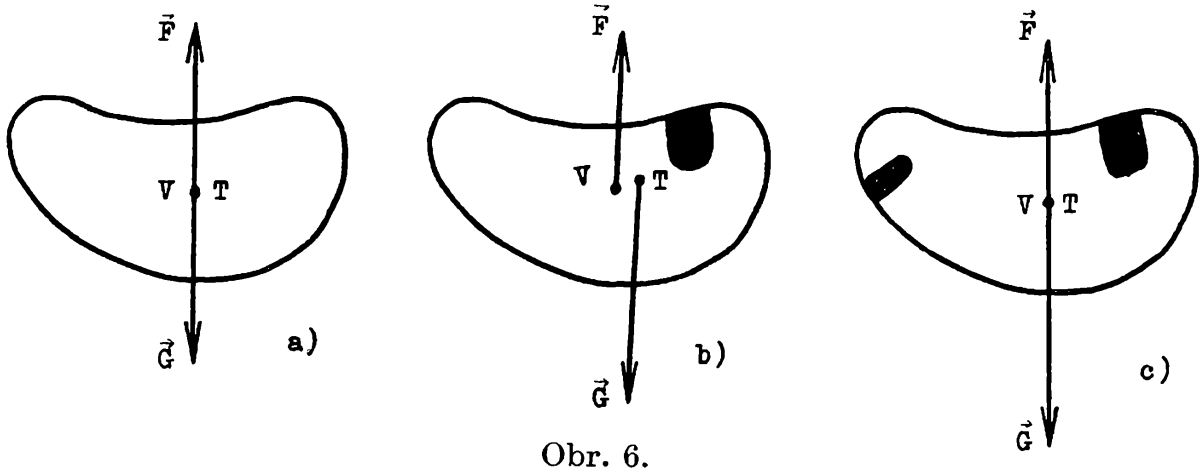
[1]) *Simon Stevin (Stevens)*, holandský vodní stavitel (žil r. 1548 – 1620), se proslavil např. teorií nakloněné roviny. Jeho důkaz platnosti Archimédova zákona je založen na této úvaze: Mysleme si, že těleso ponořené do kapaliny nahradíme jiným tělesem téhož tvaru a objemu, jaké má naše těleso, ale které by mělo stejnou hustotu jako kapalina. Pak by bylo toto těleso účinkem tlakových sil na jeho povrch v rovnováze stejně, jako je kapalina na jeho místě, tj. nepůsobila by výsledná síla ani směrem nahoru, ani dolů. To znamená, že těleso je nadlehčováno silou rovnou právě tíze kapaliny téhož objemu, jaké má těleso.

sobuje dvojice sil G, F otáčení tělesa, a to do polohy, v níž je působiště V svisle nad těžištěm tělesa T.[2])

Uvažme, v kterých případech mohou body T a V splývat. Zcela jistě splývají, je-li těleso t homogenní. Ale i v případě, že těleso není homogenní, mohou oba body T a V splývat, jak vidíme z jednoduchého příkladu tělesa, které se např. skládá z homogenního dřevěného válce, k jehož podstavám jsou připevněny dvě stejné olověné polokoule (obr. 5). Je možno si představit



Obr. 5.



Obr. 6.

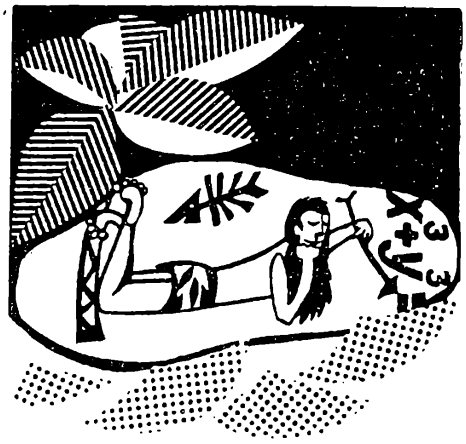
i nesymetrické těleso, v němž je hmota rozložena tak, že působiště tíhy tělesa a působiště vztlakové síly splývají (viz obr. 6a, b, c). V těchto případech se těleso z polohy, kterou mu v kapalině dáme, nestáčí do jiné polohy.

To ovšem platí, je-li těleso v klidu. Pohybuje-li se směrem nahoru nebo dolů spolupůsobením tíhy a vztlakové síly, vzniknou vlivem odporu prostředí síly, které u nepravidelného tělesa zpravidla způsobí otáčivý pohyb tělesa. Tyto případy však neuvažujeme, neboť v našich úvahách jde o hydrostatiku, tj. o podmínky rovnováhy za klidu.

Vejce, které se vznáší ve vodě tak, že se vždy otočí do určité polohy, je příkladem nehomogenního tělesa, u něhož působiště tíhy a vztlakové síly nesplývají. Zejména vejce, které není čerstvé a má pod skořápkou bublinu vzduchu, se při vznášení v kapalině otočí vždy tak, že bublina je v nejvyšším místě.

(Pokračování)

[2]) Je-li působiště V svisle pod těžištěm T, má těleso labilní polohu: i při nepatrném pootočení vznikne silová dvojice, která otočí těleso do polohy, ve které je působiště V svisle nad těžištěm T.



A přece neodolalo

Před 15 lety jsem v 30. ročníku Rozhledů upozornil na úlohu:

Najděte největší prvočíslo napsané různými ciframi.

Když nedocházela řešení, vyslovil jsem domněnku, že hledaným prvočíslem je číslo

$$987\,654\,301\,,$$

neboť odolalo veškeré mé snaze, rozložit je v součin.

Teprve nedávno mne upozornil inž. Evžen Mandler z Prahy 3, že podle jeho metody rozložil p. dr. Hans Huber, profesor v Innsbrucku, naše číslo v součin

$$486\,769 \cdot 2029$$

Původní úloha zůstává ovšem dále nerozřešena.

V číselné teorii se častěji setkáváme se zajímavými problémy podobného druhu. Uvedu jeden z nich:

Napište prvočísla napsaná samými jedničkami.

Každý ví, že prvním prvočíslem, které vyhovuje naší podmínce, je 11. Dále snadno zjistíme, že počet jedniček v hledaném prvočísle musí být prvočíselný. Tato podmínka však nestačí, neboť např.

$$111 = 3 \cdot 37\,,\ 11\,111 = 41 \cdot 271\,,\ 1\,111\,111 = 239 \cdot 4649\,,$$

nebo dokonce

$$1\,111\,111\,111\,111 = 53 \cdot 79 \cdot 265\,371\,653\,.$$

Podle upozornění CSc. Jiřího Sedláčka se v knize W. Sierpińského „Co wiemy a czego nie wiemy o liczbach pierwszkych“ dočteme, že číslo

napsané 37 jedničkami, je složené. Zato číslo

11 111 111 111 111 111 111 111 ,

napsané 23 jedničkami, je prvočíslo, jak dokázal M. Kraitchik. Nerozřešeno zůstalo, zdali prvočísel hledané vlastnosti je nekonečně mnoho.

Nakonec předkládám čtenáři úlohu, kterou lze vyřešit, máme-li po ruce vhodné tabulky:

Číslice *a, b, c, d, e* jsou liché a od sebe různé. K složenému číslu *abcde* určete cyklickou záměnou čísla *bcdea, cdeab, deabc, eabcd* tak, aby to byla vesměs prvočísla.

Ota Setzer

Detektivní pětiboj

Ve třech po sobě následujících číslech Rozhledů uveřejníme texty pěti úloh pro milovníky hlavolamů a detektivních příběhů. Půjde o úlohy různých logických typů seřazených podle obtížnosti. Za úplné řešení první úlohy získáte dva body, za úplné řešení druhé úlohy tři body. Maximální bodový zisk v tomto pětiboji je stanoven na dvacet bodů. Snažte se najít všechna řešení úlohy nebo dokázat, že existuje jediné řešení. Popište vždy stručně postup svých úvah, bez něho nebude možno považovat řešení za úplné. V posledním čísle letošního ročníku uveřejníme jména nejúspěšnějších řešitelů a správná řešení úloh. Svá řešení posílejte co nejdříve na adresu redakce Rozhledů do konce března 1967. Mnoho úspěchu při řešení; nejlepší z nich odměníme.

Jaroslav Šedivý

1 Problém s fanoušky

S fanoušky fotbalových klubů jsou všelijaké problémy, ten náš však rozhodně nepatří do kompetence fotbalové sekce. Potíže v něm nedělají fanoušci, ale *implikace* — výroky mající známou formu „*Jestliže..., pak...*“.

Představte si čtyři pražské kluky — Jirku, Karla, Milana a Petra z nichž každý „fandí“ právě jednomu z klubů Bohemians, Slavia, Sparta, Viktoria Žižkov a přitom každý z nich jinému. Znáte o nich tyto údaje:

1. *Je-li Jirka sparťan, pak je Milan přívržencem Viktorie Žižkov.*
2. *Nefandí-li Karel Bohemians, pak není Milan slávista.*
3. *Je-li Petr slávista, pak Jirka nefandí Bohemians.*

4. *Je-li Karel slávista, pak Petr fandí Viktorii.*
5. *Je-li Milan sparťan, pak je Jirka přívržencem Bohemians.*
6. *Není-li Karel sparťan, pak je Jirka slávista.*
7. *Je-li Petr fanouškem Bohemians, pak je Karel přívržencem Viktorie.*
8. *Není-li Karel slávista, pak není Petr sparťan.*
9. *Není-li Petr slávista, pak Milan nefandí Viktorii.*

Máte zjistit, kterému klubu fandí každý z jmenovaných hochů. Pokud nebudete moci dát jednoznačnou odpověď, vypište všechny přípustné možnosti.

2 Silvestrovský problém

Manželé Novákovi pozvali písemně své příbuzné a známé na silvestrovský večírek. Z písemných odpovědí byli však smutní, někteří pozvaní nežili zřejmě ve vzájemné shodě, jiní měli rodinné starosti atd. Stručně bylo možno vyjádřit obsah dopisů takto:

Manželé Arnošt a Ema psali, že aspoň jeden z nich bude muset zůstat doma u malého dítěte. Věra odpověděla, že se domluví s Emou, aspoň jedna z nich určitě přijede. Manželé Hanka a Karel roztrpčeně sdělili, že přijdou buď oba, nebo žádný z nich a že Hanka nepojede, když pojede Ema. Lída byla ve zvlášť komplikované situaci — nepojede, vypraví-li se Karel, bez ní však nepojede ani Věra. Současně Lída ujistila Novákovy, že přijede její bratr Jirka a jeho žena Pavla, kdyby ona sama nemohla jet. Jirka slíbil, že určitě přijede, pojede-li Arnošt. Mirek nepřijede bez Jirky. Pavla nepojede, vypraví-li se Mirek, ale přijede prý určitě, nebude-li moci jet její bratr Ruda. Ten však oznámil, že nepojede, vypraví-li se Lída, ale domluví se prý s Arnoštem a aspoň jeden z nich přijede.

Novákovi seděli chvíli bezradní, jak to všechno dopadne. Pak si však srovnali odpovědi a zamysleli se nad všemi možnostmi, které mohou nastat za předpokladu, že všichni pozvaní dodrží své sliby. Zjistili dokonce, kolik budou mít hostů v jednotlivých případech, kdo zaručeně nepřijede a kdo zaručeně přijede, i o kom nelze s určitostí tvrdit, že přijede. Pokuste se vypátrat tyto poznatky hostitelů vlastní úvahou a popište jak svou úvahu, tak její výsledky. Vyřešili-li jste úspěšně první úlohu, můžete použít obdobné metody i při řešení druhé úlohy, musíte si ovšem vyjádřit její podmínky ve tvaru implikací.

(Pokračování)

Oprava pro Fyzikální olympiádu. V č. 1. v článku M. Rádla zaměňte obr. 4 a 6. Na str. 39 v poslední řádce má být správně $= \sqrt{2Rg}$. V č. 2. je článek Dopplerův princip určen kategorii *B*.

RECENZE

O. LEPIL

Kvanta a vlny

Zajímá vás odpověď na otázku, co je to vlastně světlo a jak vzniká? Hledání odpovědi na tuto otázku vás zavede v této knížce, kterou vydalo Státní pedagogické nakladatelství v září 1966 jako 2. svazek edice Maják, do světa převratných objevů ve fyzice v druhé polovině minulého a v začátku tohoto století. Setkáte se zde se jmény Newtona, Huygense, Maxwella, Plancka, Comptona, Einsteina, Bohra, Schrödingera a celé řady význačných fyziků, jejichž práce vedly k vytvoření jedné z nejdůležitějších teorií moderní fyziky — kvantové teorie. Zajímavou formou se zde dovíte, co je to absolutně černé těleso a jaké záření vyzařuje, má-li pohybující se částice také vlnovou délku, jak by se choval elektron, který bychom vystřelovali na terč v „elektronové střelnici", co je to vztah neurčitosti i podle jakých zákonitostí jsou vlastně uspořádány elektrony v atomu.

Text navazuje na učivo SVVŠ. Je psán přístupnou srozumitelnou formou a obsahuje velké množství názorných obrázků. Knihu můžeme plně doporučit pro všechny, které zajímají problémy moderní fyziky i jako doplňkovou četbu při samostatném studiu a v žákovských kroužcích.

Knihu *Kvanta a vlny* napsal *Oldřich Lepil* a má 96 stran. Cena 4 Kčs.

Zdeněk Kupka

RŮZNÉ • RŮZNÉ

JOSEF a HELENA HOFMANOVI, Praha

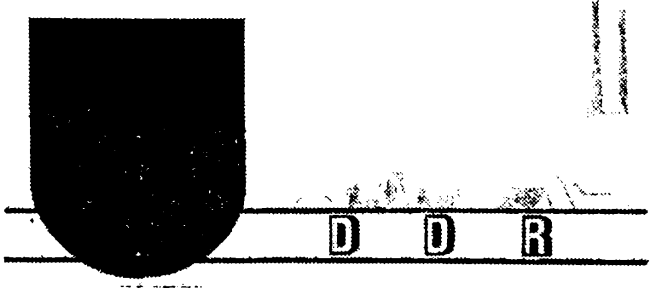
Junge Mathematiker

Německý časopis *Mladý matematik*, jehož titulní stránku otiskujeme, vydává správní rada města Lipska, oddělení všeobecného vzdělání, krajský pedagogický kabinet, uspořádali a zpracovali J. Lehmann a W. Unze.

JUNGE MATHEMATIKER

Mathematischer Lesebogen, herausgegeben vom Rat der Stadt Leipzig, Abteilung Volksbildung, Pädagogisches Kreiskabinett und dem Kreisvorstand der Gewerkschaft Unterricht und Erziehung Leipzig-Stadt, zusammengestellt und bearbeitet von Johannes Lehmann

Heft 17



V Německé demokratické republice vychází časopis, jehož jednotlivá čísla jsou tematicky zaměřena. V sešitě č. 14 je např. shrnuta celá dokumentace matematických olympiád v NDR. Jiné číslo je věnováno sportu. Johanes Lehmann, který v prosinci loňského roku navštívil v Praze redakci našeho časopisu, uveřejnil v loňském roce v dalším čísle historii matematiky ve vztahu k městu Lipsku. Je to historická monografie k příležitosti 800. výročí města Lipska a žáci, kteří se zajímají o matematiku, se v ní seznámí se jmény vědců, kteří se v Lipsku narodili nebo žili a zasloužili se o rozvoj matematiky nebo jiných přírodních věd.

Sešit č. 14, jak bylo řečeno, je věnován matematickým olympiádám v NDR. V úvodní části jsou zajímavé fotografie ze III. MO, která se konala v Berlíně-Bodensee v roce 1963. Pak následují příklady ze všech tří olympiád (první MO byla v roce 1962, loni byla v NDR čtvrtá olympiáda). Je zde zpracováno celkem 573 příkladů, které jsou rozděleny podle tříd od 2. do 10. Pro druhou třídu jsou sice uvedeny pouze čtyři příklady, ale je vidět, že v NDR podchycují zájem žáků o matematiku již v tomto věku.

Opakujte si matematiku

(K televiznímu kursu)

Ústav pro studium na vysokých školách technických při ČVUT za spolupráce s Čs. televizí připravil televizní kurs matematiky pro uchazeče ke studiu na vysokých školách:

„Opakujte si s námi matematiku.

Přípravou tohoto kursu se zabýval kolektiv matematiků z různých typů vysokých škol a z ČSAV kteří se o problematiku přípravy k vysokoškolskému studiu již po několik let zajímali.

Kurs je především určen pro absolventy středních škol, a to i s odstupem od absolvování, pro studenty I. roč. vysokých škol všech směrů, kde je matematika základním předmětem, pro účastníky předstudijní přípravy pořádané vysokými školami nebo jinými zařízeními, pro učitele matematiky škol II. a III. stupně a i pro studenty těchto škol, kteří se připravují ke vstupu na vysokou školu.

Celý kurs obsahuje 20 půlhodinových lekcí, vysílání začalo 21. září letošního roku a pokračuje každou středu v 17.15 hod.; opakování lekce je v pátek v 9.05 hod.

Účastníci televizního kursu matematiky si jistě budou chtít ověřit čemu se naučili. Pro kontrolu práce proto bude několikrát během celého kursu účastníkům uloženo při vysílání několik úkolů. Po 5. a 6. lekci měli účastníci vyřešit tento úkol:

1. Sestrojte trojúhelník o straně c a výškách v_a: v_c.
2. Rychlík vyjíždí z Prahy v 16 hod. 59 min. a přijíždí do Kolína (61 km) v 17 hod. 51 min. Proti němu jede druhý rychlík, který vyjíždí z Kolína v 17 hod. 05 min. a přijíždí do Prahy v 17 hod. 59 min. Předpokládejte, že rychlíky jedou stále stejně rychle a vypočtěte, kdy a kde se tyto rychlíky potkají.

Další úkol byl uveřejněn v 47. týdnu týdeníku Televize a vysílán v televizi při 9. lekci, tj. 16. a 18. listopadu:

1. Vyjádřete jako úměrnost funkce

$$y = 3x - 2 \qquad y = \frac{x + 1}{x - 1}$$

2. Vypočtěte všechny kořeny rovnice

$$(a^2 - b^2)\, x^2 - 4\, abx - (a^2 - b^2) = 0\,,$$

kde a, b jsou daná čísla a x je neznámá.

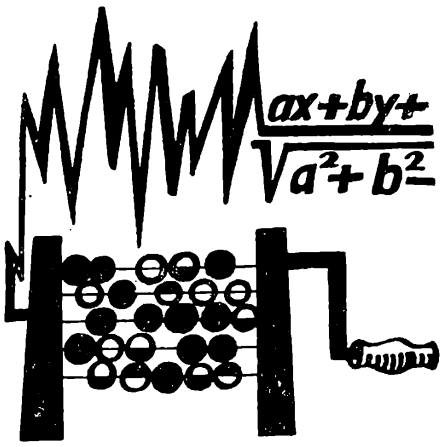
3. Daný trojúhelník ABC rozdělte na dvě části o stejném obsahu i obvodu.

Úlohy mají být vyřešeny a do týdne zaslány (celé řešení, nikoliv tedy jen výsledky) pouze na adresu *Čs. televize, Praha 1, Jindřišská 16, Kurs matematiky*, která řešené příklady předá matematikům ke kontrole. O správnosti řešení bude každý účastník vyrozuměn písemně. Není nutno vyřešit všechny příklady. Budete-li mít při řešení nějaké potíže, uveďte to u jednotlivých úloh. Vaše sdělení zároveň pomůže pracovníkům, kteří kurs připravili, zjistit účinnost této formy výuky. Proto uvítají, když k řešení připojíte i své vyjádření k dosud vysílaným lekcím.

V příštím čísle otiskneme řešení daných úloh a texty dalších, které budou ještě při 11. a 18. lekci, tj. 30. listopadu, 2. prosince a 18. ledna 1967, 20. ledna 1967.

Vysílání skončí pravděpodobně začátkem února; repríza bude v roce 1968.

K.



O jednom zovšeobecnení Pytagorovej vety

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Každý trojuholník, v ktorom pri veľkosti a, b, c jeho strán platí

$$c^2 = k\,(a^2 + b^2)\,, \tag{1}$$

kde k je konštanta, budeme nazývať (k, c)-trojuholníkom. Vzťah (1) môžeme potom považovať za zovšeobecnenú Pytagorovu vetu, platnú v (k, c)-trojuholníkoch. O konštante k platí:

V e t a I. (k, c)-trojuholníky existujú len vtedy, keď $0 < k < 2$.

D ô k a z. Keďže $k = \dfrac{c^2}{a^2 + b^2}$ a $c < a + b$, je

$$0 < k < \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} = 1 + \frac{2ab}{a^2+b^2} \leqq 2, \text{ lebo } 2ab \leqq a^2 + b^2.$$

To sme chceli dokázať.

Vieme, že $(1, c)$-trojuholníky sú podľa obrátenej Pytagorovej vety pravouhlé s preponou c $(c^2 = a^2 + b^2)$. Pri $0 < k < 1$ majú (k, c)-trojuholníky ostrý uhol γ $(c^2 < a^2 + b^2)$ a pri $1 < k < 2$ tupý uhol

$$\gamma\ (c^2 > a^2 + b^2)\,.$$

Teraz zodpovieme otázku, či (k, c)-trojuholníky skutočne existujú pre každé k, ktoré spĺňuje nutnú podmienku podľa vety I. O tom platí:

V e t a I I. Nech AB je pevná úsečka veľkosti c a k konštanta, $0 < k < 2$. Geometrickým miestom vrcholov C (k, c)-trojuholníkov ABC je kružnica, ktorej stred leží v strede S úsečky AB a ktorej polomer má veľkosť

$$t = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2}{k} - 1}$$

(okrem priesečníkov tejto kružnice s priamkou AB).

D ô k a z. a) Nech ABC je (k, c)-trojuholník, takže

$$c^2 = k\,(a^2 + b^2)\,.$$

Pre veľkosť ťažnice SC trojuholníka ABC platí

$$SC = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(a^2 + b^2) - c^2}\,,^1)$$

a teda

$$SC = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2c^2}{k} - c^2} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2}{k} - 1} = \text{konšt.}$$

To značí, že bod C leží na kružnici so stredom S a polomerom

$$t = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2}{k} - 1}$$

(okrem jej priesečníkov s priamkou AB).

b) Nech bod C leží na kružnici so stredom S a s polomerom

$$t = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2}{k} - 1}$$

(okrem jej priesečníkov s priamkou AB), takže

$$t = SC = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2}{k} - 1}$$

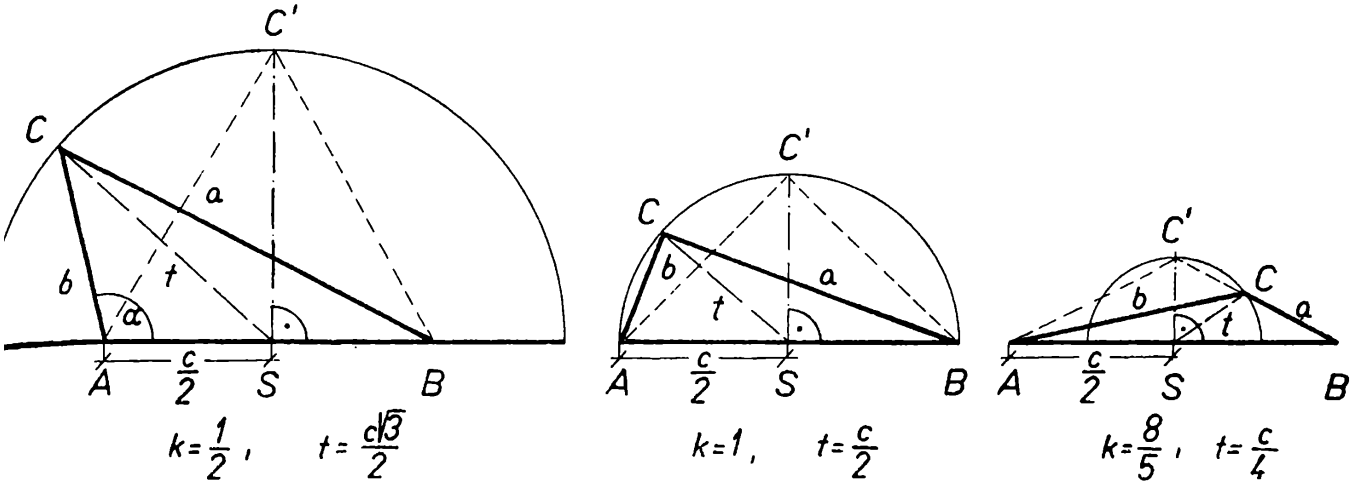
ABC je trojuholník a SC je jeho ťažnica príslušná k strane AB a preto

$$SC = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2}{k} - 1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,(a^2 + b^2) - c^2}\,,$$

odkiaľ po umocnení a úprave dostaneme $c^2 = k\,(a^2 + b^2)$. Teda ABC je (k, c)-trojuholník. Tým je veta II. dokázaná.

Túto vetu môžeme považovať za zovšeobecnenú vetu Talesovu pre (k, c)-trojuholníky. Pre $k = 1$ je polomer Talesovej kružnice $t = \frac{c}{2}$, pre $0 < k < 1$ je $t > \frac{c}{2}$ a pre $1 < k < 2$ je $t < \frac{c}{2}$ (obr. 1).

[1]) Tento vzťah sa dokáže napr. tak, že určíme cos α pomocou vety kosínusovej jednak z trojuholníka ASC, jednak z trojuholníka ABC



Obr. 1.

Ešte vyšetríme podmienky, pri splnení ktorých možno z úsečiek veľkostí a, b, c zostrojiť (k, c)-trojuholník. O tom platí:

V e t a I I I. Nech a, b, c, k sú ľubovoľné kladné čísla, $0 < k < 2$, ktoré spĺňajú vzťah $c^2 = k(a^2 + b^2)$. Z úsečiek veľkosti a, b, c možno zostrojiť (k, c)-trojuholník vtedy a len vtedy, keď buďto 1) $k = 1$, alebo 2) $k \neq 1$ a súčasne $a < k_1 b$ (alebo $b < k_1 a$), kde

$$k_1 = \frac{1}{|k-1|} + \sqrt{\frac{1}{(k-1)^2} - 1}$$

D ô k a z. 1. Ak je $k = 1$, teda $c^2 = a^2 + b^2$, plynie z nerovnosti

$$a^2 - 2ab + b^2 < a^2 + b^2 < a^2 + 2ab + b^2$$

správnej pre kladné čísla a, b nerovnosť $(a-b)^2 < c^2 < (a+b)^2$, čiže

$$|a - b| < c < a + b\,,$$

tj. trojuholníková nerovnosť je splnená, z úsečiek a, b, c možno zostrojiť (k, c)-trojuholník.

2. Ak je $k \neq 1$, rozlíšme dva prípady: a) $0 < k < 1$, b) $1 < k < 2$.

a) Nech $0 < k < 1$. Vtedy

$$|k-1| = 1 - k\,,\ 0 < 1 - k < 1\,,\ \frac{1}{1-k} > 1\,,\ \frac{1}{(1-k)^2} - 1 > 0\,.$$

Nech $a < k_1 b$. Potom

$$a - \frac{b}{1-k} < b\sqrt{\frac{1}{(k-1)^2} - 1}\,,$$

odkiaľ po umocnení a úprave dostaneme

$$(a-b)^2 < k(a^2 + b^2)\,.$$

Teda $|a - b| < c$. Ďalej

$$c^2 = k(a^2 + b^2) < a^2 + b^2 < a^2 + 2ab + b^2$$

a teda $c < a + b$. Trojuholníková nerovnosť $|a - b| < c < a + b$ je

splnená, z úsečiek a, b, c možno zostrojiť (k, c)-trojuholník. Obdobne sa postupuje, keď $b < k_1 a$ a dôjde sa k tomu istému výsledku.

Ak je však $a \geqq k_1 b$, potom

$$a - \frac{b}{1-k} \geqq b \sqrt{\frac{1}{(1-k)^2} - 1},$$

odkiaľ vyplýva $(a-b)^2 \geqq k\,(a^2 + b^2)$, teda $|a-b| \geqq c$, čo značí, že trojuholníková nerovnosť nie je splnená, z úsečiek a, b, c nemožno zostrojiť trojuholník. Obdobne sa postupuje, keď $b \geqq k_1 a$ a dostaneme ten istý výsledok.

Tým je tvrdenie vety dokázané pre $0 < k < 1$.

b) Tvrdenie vety v prípade $1 < k < 2$ sa dokáže obdobne ako v prípade $0 < k < 1$, urobte to sami.

Veta III. ukazuje výnimočné postavenie pravouhlého trojuholníka medzi (k, c)-trojuholníkmi.

Aj rovnoramenné trojuholníky majú význačné postavenie. Z úsečiek a, a, c spĺňajúcich vzťah $c^2 = 2ka^2$ pri ľubovolnom $0 < k < 2$ možno zostrojiť (k, c)-trojuholník. Podľa vety III. je to zrejmé pri $k = 1$ a pri $k \neq 1$ je $0 < |k-1| < 1$, takže $k_1 > 1$ a podmienka $a < k_1 b$ je preto vzťahom $a = b$ pre všetky prípustné k splnená. Táto skutočnosť je podľa obr. 1 aj z názoru zrejmá.

Cvičenie.

1. Zostrojte pomocou zovšeobecnej Talesovej vety (k, c)-trojuholník, keď je daná: a) $k = \frac{2}{5}$, $c = 5$ cm, $\alpha = 30°$; b) k, c, r; c) k, c, v_a.

2. Zostrojte (k, c)-trojuholník, ak je dané k, c, a a na základe diskusie o riešiteľnosti úlohy dokážte vetu III.

3. Nech $1 < k < 2$. Určte najväčšiu hodnotu uhla α v (k, c)-trojuholníku pri konštantnom k. (Číselne pre $k = \frac{8}{5}$.)

4. Nech $0 < k < 2$ je ľubovolné konštantné číslo a a, c ľubovolné kladné čísla spĺňajúce vzťah $c^2 = 2ka^2$. Existuje rovnoramenný (k, c)-trojuholník, ktorého základňa má veľkosť c. Dokážte bez použitia vety III.

5. Určte všetky $(\frac{1}{2}, z)$-trojuholníky, ktorých strany majú celočíselné veľkosti [pytagorejské (k, z)-trojuholníky].[2])

6. Sú dané úsečky a, c,

$$a < c \sqrt{\tfrac{5}{8}}.$$

Pomocou vety II zostrojte úsečku

$$b = \sqrt{\tfrac{5}{8} c^2 - a^2}$$

ako stranu $(\frac{8}{5}, c)$-trojuholníka.

7. Hľadajte iné vlastnosti (k, c)-trojuholníkov (napr. zovšeobecnené Euklidove vety, minimum polomeru opísanej, maximum polomeru vpísanej kružnice, geometrické miesto ťažísk, stredov opísaných a vpísaných kružníc atď.).

---

[2]) Pozri článok Stanislava Horáka na str. 294, ročníka 1962/63 tohto časopisu.

Dvojstředový čtyřúhelník

EDUARD CÍFKA, Praha

I. V trojúhelníku platí tyto tři věty:

1. Vzdálenost d středu kružnice vepsané a opsané je dána vzorcem

$$d^2 = r^2 - 2r\varrho\,, \qquad \text{(a)}$$

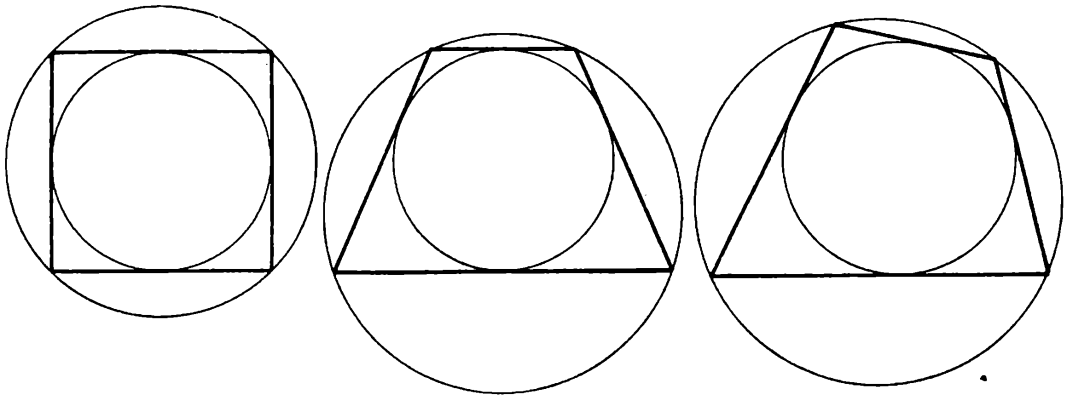
kde r a ϱ mají známý význam.

2. Jestliže mezi veličinami d, r, ϱ platí vztah (a), je možné sestrojit nesčíslně mnoho trojúhelníků, které jsou menší kružnici opsány a větší vepsány.

3. Jsou dány dvě kružnice. Jestliže existuje aspoň jeden trojúhelník, který je jedné opsán a druhé vepsán, potom existuje nesčíslně mnoho trojúhelníků této vlastnosti.

Tyto věty se vyskytly již několikrát v článcích Rozhledů, a proto se jimi nebudeme zabývat. Předmětem tohoto článku bude odvození vzorce obdobného vzorci (a) pro čtyřúhelník středový.

II. Čtyřúhelník středový je každý čtyřúhelník, jemuž je možné kružnici vepsat i opsat. Zvláštní případ je čtverec, nebo některý rovnoramenný lichoběžník (obr. 1a, b) a obecný případ je v obr. 1c. V *dvoj-*



Obr. 1.

středovém čtyřúhelníku (tj. majícím střed kružnice vepsané netotožný se středem kružnice opsané) platí:

a) Součet protějších stran je roven polovičnímu obvodu.

b) Součet protějších úhlů je roven 180°.

Platí tu i věta 3:

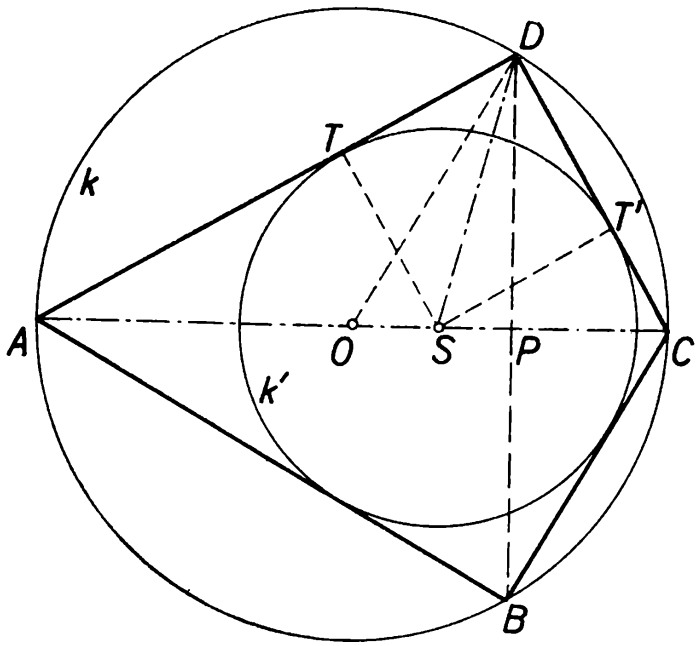
Jsou dány dvě kružnice. Jestliže existuje aspoň jeden čtyřúhelník, který je jedné vepsán a druhé opsán, existuje potom nekonečně mnoho čtyřúhelníků této vlastnosti.

Tuto větu dokazovat nebudeme, ale v článku jí použijeme. Její důsledek je, že v množině středových čtyřúhelníků, které jsou jedné kružnici opsány a jiné vepsány, je také jeden deltoid a jeden rovnoramenný lichoběžník. Této okolnosti použijeme k tomu, abychom dokázali následující větu:

Mezi poloměrem r kružnice opsané dvojstředovému čtyřúhelníku, poloměrem ϱ vepsané kružnice a vzdáleností d středů obou uvažovaných kružnic platí vztah

$$d^4 - 2d^2(r^2 + \varrho^2) + r^2(r^2 - 2\varrho^2) = 0\,. \qquad (z)$$

D ů k a z (obr. 2). Nechť kružnice $k \equiv (O; r)$, $k' \equiv (S; \varrho)$ jsou v takové poloze, že lze sestrojit čtyřúhelník kružnici k vepsaný a kružnici k'



Obr. 2.

opsaný. Potom existuje nesčíslně mnoho čtyřúhelníků této vlastnosti a my z této množiny čtyřúhelníků vezmeme pravoúhlý deltoid, který označíme $ABCD$. Pro stručnější zápis zavedeme toto označení délek

$$AB = AD = a\,,$$
$$BC = CD = c\,,$$
$$OA = OB = OC = OD = r\,,$$
$$ST \perp AD\,,\ ST' \perp CD\,,$$
$$ST = ST' = \varrho\,,$$
$$SD = u\,;$$

u je délka osy vnitřního úhlu $\sphericalangle ADC = 90°$ v trojúhelníku ACD. Podle toho

$$\sphericalangle ADS = \sphericalangle CDS = 45°$$

$$BD \perp AC\,,\ DP = BP = v\,,$$

$$OS = d\,.$$

Naší snahou bude vyjádřit strany a, c pomocí (jako funkce) veličin r, ϱ, d.

Především je patrno, že

$$\triangle ASD + \triangle CSD = \triangle ACD\,,$$

tj.

$$\tfrac{1}{2}a\varrho + \tfrac{1}{2}c\varrho = \tfrac{1}{2}ac\,,$$

a to po zkrácení dá

$$a\varrho + c\varrho = ac\,. \tag{1}$$

Dále

$$\triangle ASD : \triangle CSD = \tfrac{1}{2}au\sin 45° : \tfrac{1}{2}cu\sin 45° = a : c\,. \tag{2a}$$

Platí však také

$$\triangle ASD : \triangle CSD = \tfrac{1}{2}AS\,.\,v : \tfrac{1}{2}CS\,.\,v = AS : CS = \\ = (r + d) : (r - d)\,. \tag{2b}$$

Spojením rovnic (2a), (2b) máme rovnici

$$a : c = (r + d) : (r - d)\,. \tag{2}$$

Považujeme-li a, c za neznámé, pak řešením soustavy rovnic (1), (2) obdržíme

$$a = \frac{2r\varrho}{r - d}\,, \qquad c = \frac{2r\varrho}{r + d}\,.$$

V pravoúhlém trojúhelníku ACD je

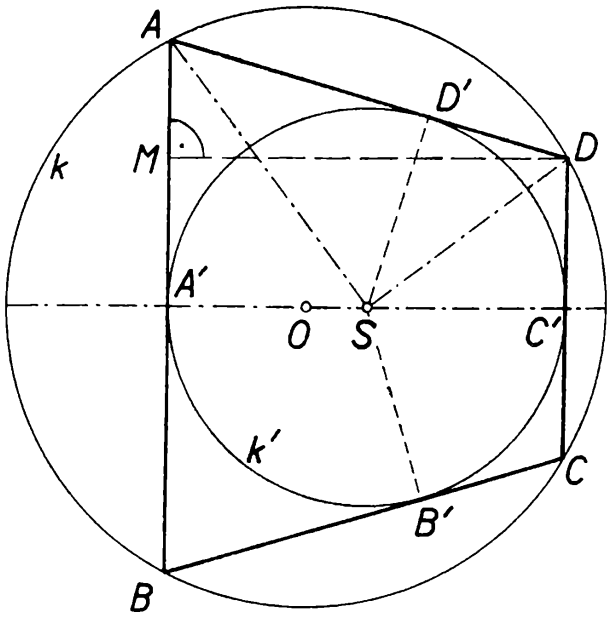
$$AC = 2r\,,\ AD = a\,,\ CD = c\,.$$

Použijeme-li Pythagorovy věty, dostaneme relaci (z). Dodejme, že odvozený vztah je možné napsat i v těchto tvarech

$$\frac{1}{(r + d)^2} + \frac{1}{(r - d)^2} = \frac{1}{\varrho^2}\,,$$

$$\varrho^2 = \frac{(r^2 - d^2)^2}{2\,(r^2 + d^2)}\,.$$

III. K témuž výsledku bychom dospěli, kdybychom z množiny uvažovaných dvojstředových čtyřúhelníků vybrali rovnoramenný lichoběžník. To provedeme nyní.



Obr. 3.

V obr. 3 je $ABCD$ lichoběžník, jemuž lze kružnici vepsat i opsat. Body dotyku stran AB, BC, CD, AD s vepsanou kružnicí jsou po řadě A', B', C', D'. Zaveďme ještě označení

$$AA' = BA' = x\,,\ CC' = DC' = y\,.$$

Je patrno, že

$$AD = x + y\,.$$

Z pravoúhlého trojúhelníka ADM (pravý úhel při vrcholu M) dostaneme

$$\overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{DM}^2\,.$$

Do této rovnice dosadíme

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4\varrho^2\,,$$

a to po zjednodušení dá

$$xy = \varrho^2\,. \tag{3}$$

Výsledek není překvapující, neboť to je Euklidova věta o výšce v trojúhelníku ADS. Nyní strany x, y vyjádříme pomocí r, ϱ, d. Z pravoúhlého trojúhelníka OAA' máme

$$\overline{OA}^2 = \overline{A'O}^2 + \overline{A'A}^2\,,\ \text{tj.}\ r^2 = (\varrho - d)^2 + x^2$$

a odtud

$$x = \sqrt{r^2 - (\varrho - d)^2}\,. \tag{4a}$$

Podobně z pravoúhlého trojúhelníka ODC' máme

$$\overline{OD}^2 = \overline{C'O}^2 + \overline{C'D}^2 \text{ čili } r^2 = (\varrho + d)^2 + y^2\,,$$

z čehož

$$y = \sqrt{r^2 - (\varrho + d)^2}\,. \tag{4b}$$

Po dosazení do (3) a po umocnění dostaneme

$$\varrho^2 = [r^2 - (\varrho + d)^2]\ \ [r^2 - (\varrho - d)^2]\,, \tag{4}$$

a to je vztah (z).

Příklady na procvičení.

1. Rovnici (4) je možné dát tvar

$$\varrho = \sqrt{(r + \varrho + d)\,(r - \varrho - d)\,(r + \varrho - d)\,(r - \varrho + d)}\,.$$

Proveďte!

2. Sestrojte ϱ, je-li dáno $r = 5$, $d = 1$. (Ke konstrukci využijte toho, že $\sphericalangle\, ADS = 45°$.)

3. Sestrojte dvojstředový čtyřúhelník, je-li dáno $AB = 7$, $\sphericalangle\, DAB = 75°$, $\sphericalangle\, CBA = 60°$.

4. Sestrojte konvexní dvojstředový čtyřúhelník, jsou-li dány tři jeho vrcholy A, B, C.

Geometrická místa

OLDŘICH JENIŠTA, ČVUT, Praha

V geometrii často slýcháme o „geometrických místech bodů“ Stále se setkáváme s tím, že někdo nemá jasnou představu o významu uvedeného pojmu. Bylo by proto užitečné, abychom si o tom něco řekli.

Geometrické místo znamená souhrn všech prvků geometrických (např. bodů, přímek apod.), které mají určitou společnou vlastnost, resp. které splňují určitou danou podmínku. Obráceně každý prvek, který vyhovuje určité předem stanovené podmínce, náleží do určitého souhrnu prvků, kterému říkáme geometrické místo.

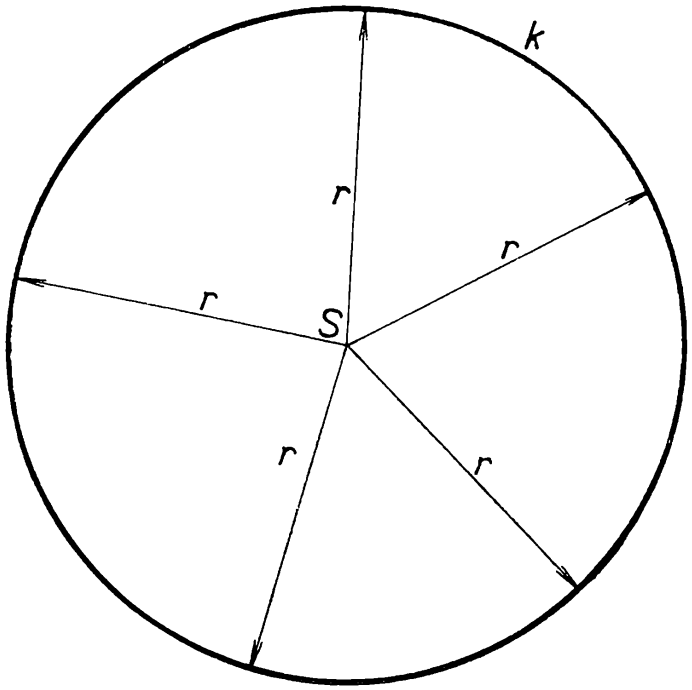
Geometrickým místem může být jakýkoliv geometrický útvar. Jestliže se omezíme jen na úvahy o útvarech v rovině, může být geometrickým místem třeba jen jediný bod, přímka, úsečka, kružnice, nebo kterákoliv jiná křivka či pouze její část (oblouk křivky), může to být celá rovina nebo jen její část, obecně může to být jakýkoliv útvar v té rovině ležící.

Ukážeme si to na několika příkladech.

Vhodným geometrickým útvarem, na němž si můžeme objasnit pojem geometrického místa, je kružnice. Jistě je známo, že kružnice je křivka a že termín kružnice nesmí být zaměňován pojmem kruh. Kruh je totiž část roviny omezená kružnicí. Víme, že každý bod kružnice je

stejně vzdálen od jejího středu. Tuto všeobecně známou vlastnost kružnice můžeme však vyslovit také takto:

Kružnice k je geometrické místo bodů (obr. 1), které mají od určitého bodu S (středu kružnice) danou vzdálenost r (poloměr kružnice).

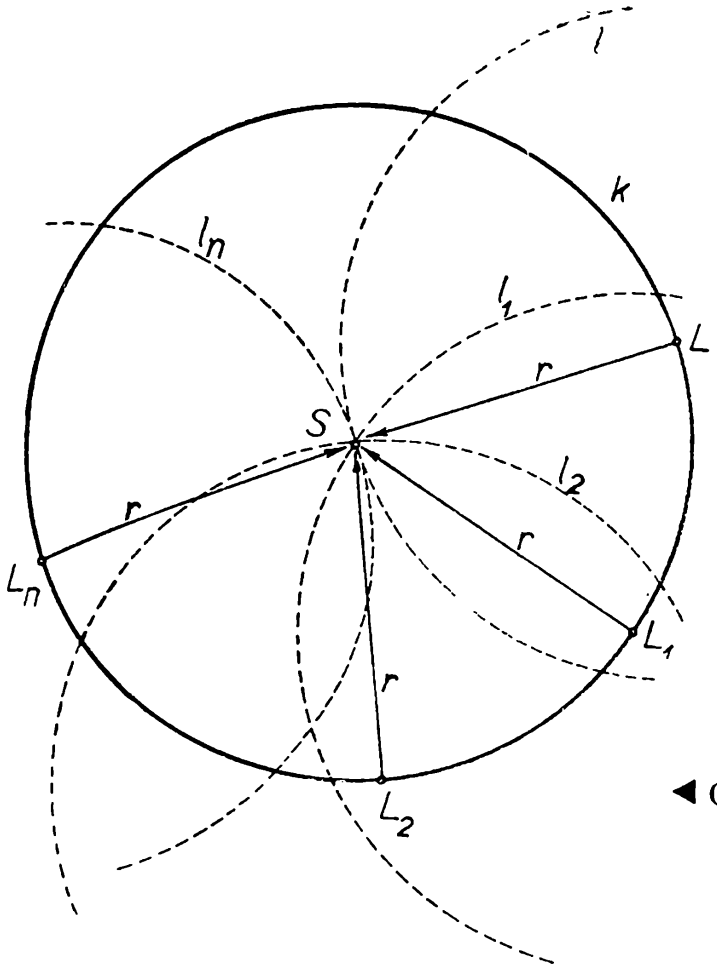


Obr. 1.

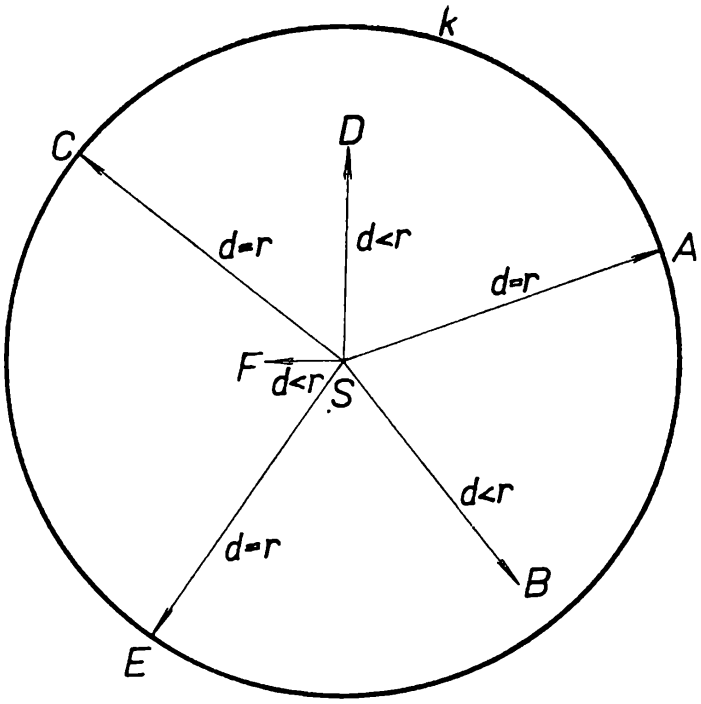
Kdyby nyní byla opačná úloha a my bychom měli určit geometrické místo bodů, které mají od každého bodu dané kružnice vzdálenost rovnou právě jejímu poloměru, postupovali bychom tak, že bychom si zvolili na dané kružnici k o poloměru r libovolný bod L. Geometrické místo bodů vzdálených r od bodu L je kružnice l o středu L a poloměru r. Pro každý další jiný libovolně zvolený bod L_1, L_2, ... jsou pak geometrická místa bodů vzdálených r od těchto bodů L_1, L_2, ... kružnice l_1, l_2, ... o středech L_1, L_2, ... a poloměru r. Geometrické místo bodů, které mají ode všech bodů L, L_1, L_2, ... kružnice k vzdálenost r, musí ležet zároveň na všech kružnicích l, l_1, l_2, ... Snadno nahlédneme, že je jen jediný bod, který zároveň leží na všech těchto kružnicích (bod, kterým všechny tyto kružnice procházejí), a to je střed S dané kružnice k. Mohli bychom proto tento vztah vyjádřit takto:

Geometrické místo bodů majících od všech bodů kružnice k o poloměru r právě vzdálenost r je střed S dané kružnice k (obr. 2).

Takovéto věty však v geometrii neužíváme, poněvadž nezní dosta-



◀ Obr. 2.



▲ Obr. 3.

tečně logicky, řekneme-li, že geometrické místo *bodů* (gramatické množné číslo) je pouhý *bod* (gramatické jednotné číslo). Ovšem ukázali jsme si na této úvaze, že i bod může být geometrickým místem.

Ukážeme, že geometrickým místem bodů může být i rovina. Každý bod kruhu o středu S a poloměru r má od bodu S vzdálenost, jejíž velikost se pohybuje v mezích od 0 do r. Je-li tato vzdálenost rovna 0, je takovým bodem právě střed S daného kruhu, je-li tato vzdálenost rovna r, je takovýmto bodem každý bod kružnice k o středu S, která omezuje daný kruh. Můžeme proto říci:

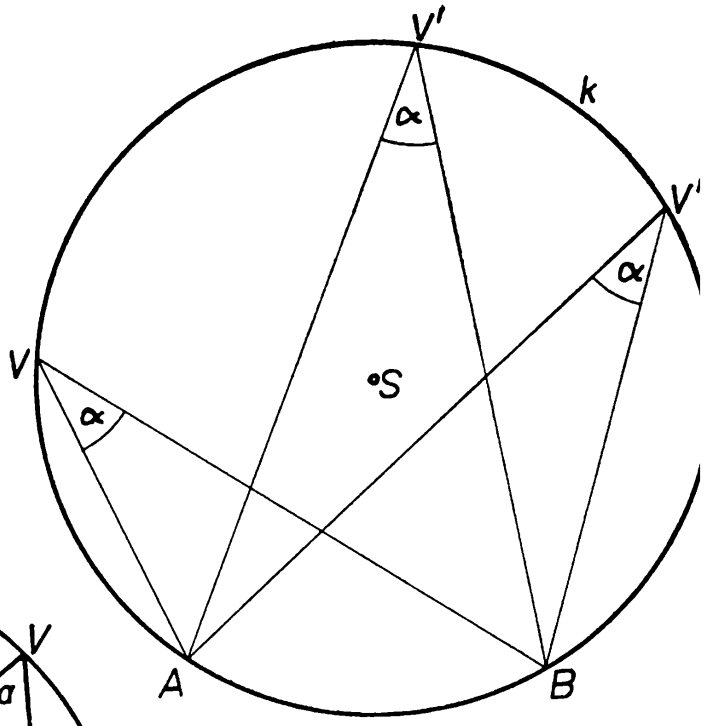
Geometrické místo bodů, jejichž vzdálenost od daného bodu S je menší nebo rovna r, je kruh o středu S a poloměru r (obr. 3).

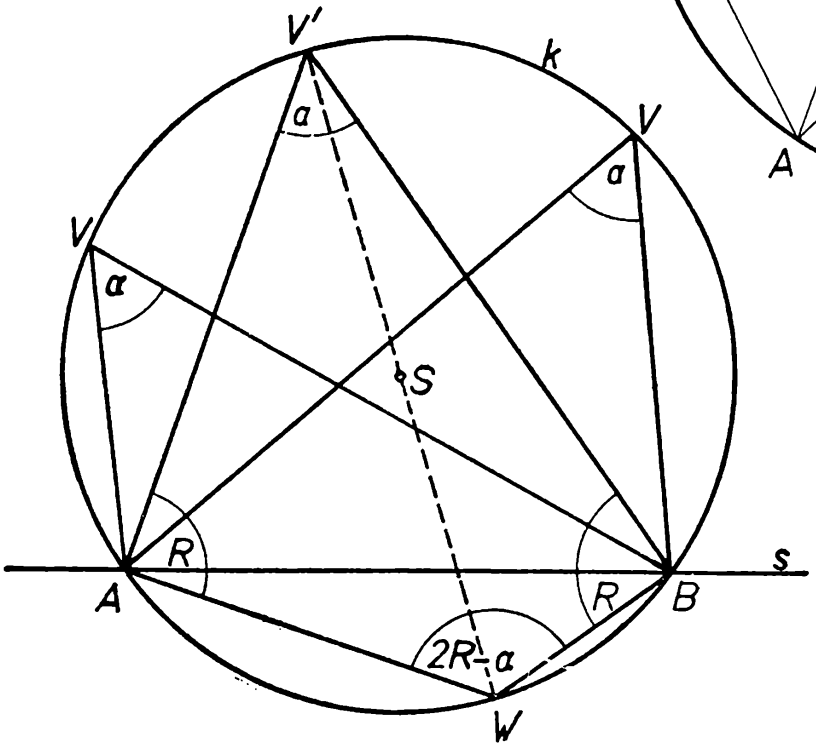
Věta vyhovuje i pro bod S, jehož vzdálenost od S je rovna 0 a je tedy menší než r. Tento střed S patří k uvedenému geometrickému místu, neboť leží uvnitř daného kruhu.

Ukázali jsme si, že u kružnice a u kruhu, který je onou kružnicí omezen, můžeme vyslovit tři různé věty o geometrických místech bodů a v každém případě je geometrickým místem bodů jiný geometrický útvar, a to křivka (kružnice), nebo bod (střed kružnice), nebo část roviny (kruh).

Avšak u kružnice můžeme vyslovit ještě další věty o geometrických místech bodů. Zvolíme-li si na dané kružnici k o středu S a poloměru r

Obr. 4.





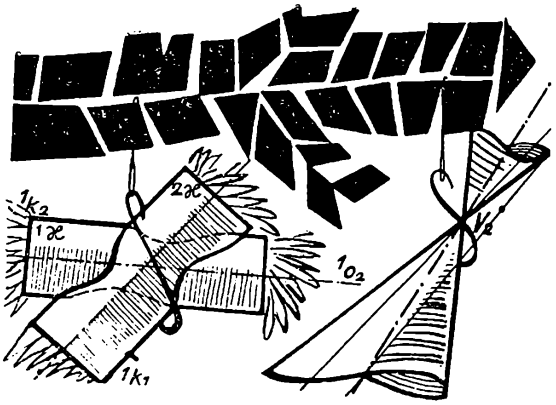
Obr. 5.

libovolné dva body A, B a spojíme-li je s kterýmkoli bodem V kružnice k, obdržíme obvodový úhel AVB. Víme, že všechny obvodové úhly nad kruhovým obloukem $\overset{\frown}{AB}$ dané kružnice k jsou si rovny, tedy úhly AVB, $AV'B$, $AV''B$, ... se navzájem rovnají (obr. 4).

Ke kruhovému oblouku $\overset{\frown}{AB}$ dané kružnice k přísluší tětiva AB, která je spojnicí krajních bodů uvedeného oblouku. Spojíme-li body A a B s kterýmkoli bodem V kružnice k, obdržíme opět obvodový úhel AVB. Tu platí, že všechny obvodové úhly nad tětivou AB dané kružnice k jsou si rovny za předpokladu, že vrcholy V těchto úhlů jsou v jedné polorovině, ohraničené přímkou s, procházející body A a B. Kdybychom totiž spojili body A a B s kterýmkoliv bodem W kružnice k, ležícím v druhé polorovině, omezené přímkou s, obdrželi bychom obvodový úhel AWB, který je výplňkovým k úhlu AVB (obr. 5), jak ještě dokážeme.

(Pokračování)

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE



Průsečík přímky s elipsou a hyperbolou

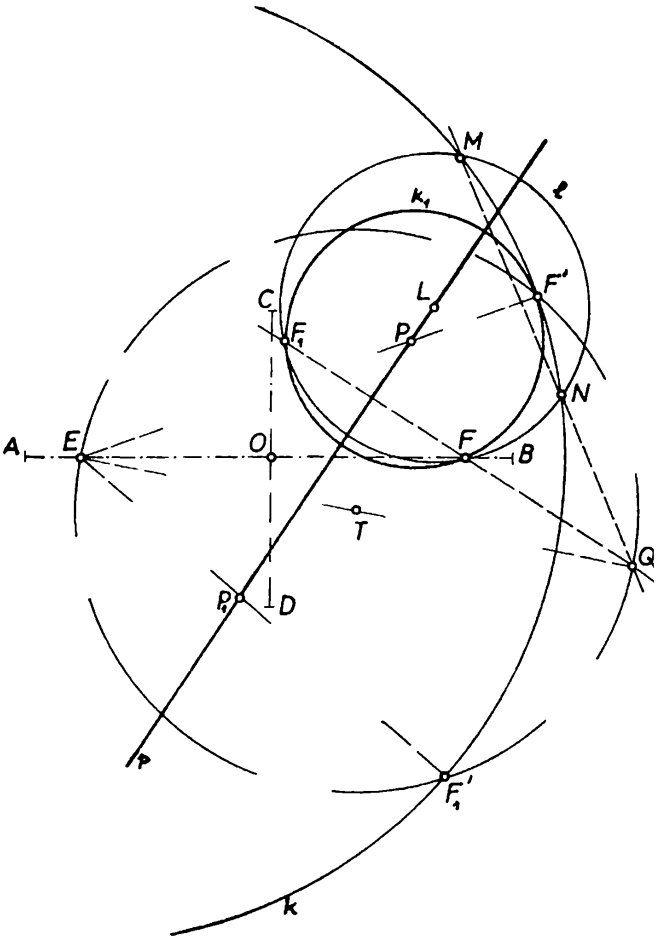
VLADIMÍR BLAŽEK, P. F., Ústí nad Labem

Vyšetříme průsečíky přímky se středovou kuželosečkou. K tomu užijeme ohniskových vlastností kuželosečky a některých dalších poznatků z elementární geometrie. Tyto vlastnosti si připomeneme na vhodném místě. Úlohu rozřešíme pro elipsu; pro hyperbolu se řeší obdobně.

Úloha. Je dána elipsa omezenými osami AB, CD a přímka p. Vyšetřete vzájemnou polohu elipsy a přímky.

Předpokládejme, že přímka p protne elipsu v bodě P. Jak známo, geometrickým místem bodů souměrně sdružených k ohnisku F elipsy podle všech jejích tečen je řídicí kružnice $k \equiv (E, 2a)$, kde E je druhé ohnisko a $2a$ velikost hlavní osy AB. Opíšeme-li z bodu P kružnici k_1 o poloměru $r = PF$, potom tato kružnice má s kružnicí k vnitřní dotyk v bodě F', který je průsečíkem přímky EP a kružnice k, neboť EP je středná obou kružnic a $PF = PF'$ Je tedy bod P středem kružnice, která se dotýká kružnice k, prochází bodem F a má střed na přímce p v hledaném průsečíku P. Sestrojíme tedy střed P této kružnice. Protože přímka p prochází středem P kružnice k_1, prochází k_1 též bodem F_1 souměrně sdruženým k ohnisku F podle osy p. Najdeme dotykový bod F' obou kružnic k, k_1. Sestrojíme-li body F, F_1 libovolnou kružnici l, protínající kružnici k v bodech M, N, potom bod Q, který je

průsečíkem přímek MN a FF_1, pokud ovšem existuje, má ke kružnicím k, l stejnou mocnost, tj. $QM \,.\, QN = QF \,.\, QF_1$. Protože hledaná kružnice k_1 prochází také body F, F_1, má bod Q stejnou mocnost i ke kružnici k_1. Sestrojíme-li z bodu Q tečny ke kružnici k, pokud existují, dostaneme dotykové body F', resp. F_1' hledané kružnice k_1 s řídicí kružnicí k. Bod P, resp. P_1 (druhý průsečík přímky p s elipsou), sestrojíme jako průsečík přímek EF', resp. EF_1'. Jestliže bod Q neexistuje, tj. jestliže $FF_1 \parallel MN$, rozřešíme úlohu velmi snadno. Dokážeme, že tento případ nastane, když přímka p prochází ohniskem E. Jestliže přímka p ohniskem prochází, tj. $p \equiv EP$, potom středy všech tří kružnic k, k_1, l leží v přímce a jsou tedy jejich společné tětivy rovnoběžné. Obráceně, jestliže $FF_1 \parallel MN$, tj. jsou-li tětivy tří protínajících se kružnic rovnoběžné, leží jejich středy v přímce a tedy je $p \equiv EP$.



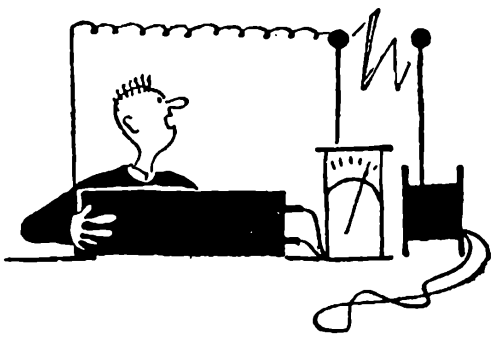
Obr. 1.

Odtud vyplývá, že v tomto případě body F' a F_1' sestrojíme jako průsečíky kružnice k a přímky p. V tomto případě přímka p protíná elipsu ve dvou různých bodech, neboť body F' a F_1' jsou různé, přímka je sečnou elipsy.

Je třeba probrat ještě řešitelnost pro $MN \nparallel FF_1$, tj. když bod Q existuje. Jestliže bod Q je bodem řídicí kružnice k, má úloha jediné řešení. Potom je $Q \equiv F' \equiv F_1'$ a přímka p je tečnou dané elipsy. Jestliže Q je vnějším bodem kružnice k, má úloha dvě řešení, neboť z bodu Q lze sestrojit dvě tečny. Dostaneme dva dotykové body F', F_1'. Body F, F_1, F' neleží v přímce, neboť Q leží na FF_1 a $Q \neq F'$, protože Q není na k. Potom je p sečnou elipsy. Je-li Q vnitřním bodem, nemá úloha řešení, přímka p elipsu neprotíná.

Zbývá dokázat, že bod sestrojený uvedenou konstrukcí splňuje podmínky úlohy. Především je zřejmé, že leží na přímce p. Je tedy třeba dokázat, že je bodem elipsy. To je však pravda, neboť $EF' = 2a = EP + F'P$, a protože kružnice k_1 prochází body F, F', je $PF = PF'$, a proto $EP + PF' = 2a$, a tedy bod P leží na elipse.

Cvičení. Vyšetřete vzájemnou polohu hyperboly a přímky.



FYZIKA

Přibližný výpočet stáří Země

ANTONÍN DRAGOUN, Ostrava

Přesnější metoda pro určení stáří Země se zakládá na rychlosti radioaktivního rozpadu a množství radioaktivních látek nebo jejich zplodin v kůře zemské. Výpočty jsou dosti složité. Přibližnou hodnotu stáří Země můžeme obdržet i jednoduchými výpočty. V novější době bylo zjištěno, že vzájemným působením těles ve sluneční soustavě, také působením přílivu a odlivu, vznikají síly, které zpomalují rotaci Země okolo své osy. Toto zpomalení je ovšem velmi malé, protože doba otočení Země okolo své osy se prodlouží asi o 0,001 vteřiny za 100 roků. Než z této hodnoty vypočteme stáří Země, zopakujeme si potřebné veličiny a poznatky z teorie pole.

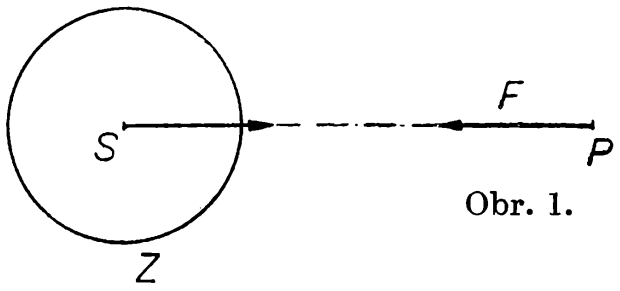
a) Obecné gravitační pole Země

Do gravitačního pole Země vložíme v bodě P zkušební hmotný bod hmotnosti m (obr. 1). Země a hmotný bod se vzájemně přitahují podle Newtonova gravitačního zákona silou

$$F = \varkappa \frac{m\,M}{r^2}, \tag{1}$$

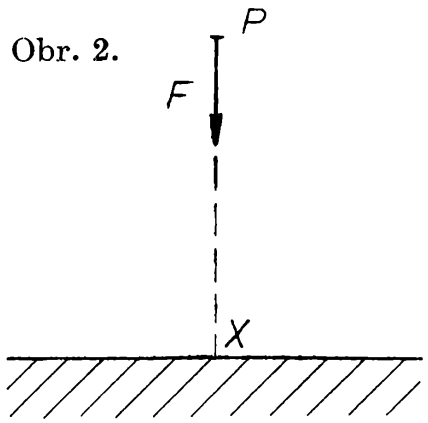
kde M je hmotnost Země, $\varkappa$ gravitační konstanta, r vzdálenost bodu od středu Země. Síla, která působí v bodě P na hmotný bod o jednotkové hmotnosti, se nazývá *intenzita* E gravitačního pole v bodě P. Platí

$$E = \frac{F}{m} = \varkappa \frac{M}{r^2}. \tag{2}$$



Obr. 1.

Obr. 2.



Intenzita gravitačního pole je určena velikostí a směrem (v našem případě směřuje do středu Země); je to vektor.

Práce, kterou spotřebují síly pole při přemístění hmotného bodu o hmotnosti m z bodu P do nekonečna, se nazývá *potenciální energie* W hmotného bodu v bodě P vzhledem na nekonečno. Stejnou práci musí vykonat vnější síla, která přenese tentýž hmotný bod z nekonečna do bodu P. Tato práce nezávisí na dráze, po které se hmotný bod přenáší. Potenciální energie je rovna (viz Rozhledy mat.-fyz., ročník 44, č. 3, str. 135)

$$W = -\frac{m M}{r} \varkappa . \tag{3}$$

Znaménko minus značí spotřebovanou práci.

Práce, kterou vykonají síly pole při přemístění hmotného bodu o jednotkové hmotnosti z bodu P do nekonečna, má v soustavě SI stejnou číselnou hodnotu jako *potenciál* V v bodě P vzhledem na nekonečno. Zřejmě platí

$$V = \frac{W}{m} = -\frac{\varkappa M}{r} . \tag{4}$$

Potenciální energie a potenciál jsou skaláry.

Body o stejném potenciálu tvoří *ekvipotenciální hladinu.* Položíme-li $V = \text{konst.}$, je podle (4) $r = \text{konst.}$ Ekvipotenciální hladiny jsou kulové plochy, jejichž střed je totožný se středem Země S. Přenášíme-li hmotný bod po ekvipotenciální ploše, nekonají síly pole práci, protože intenzita je všude k ní kolmá, tj. síla a dráha v každém bodě svírají pravý úhel.

b) Gravitační pole v malých výškách nad povrchem Země

Zkušební hmotný bod hmotnosti m v bodě P (obr. 2) je přitahován do středu Země silou

$$F = m g , \tag{5}$$

kde g značí gravitační zrychlení, které považujeme za konstantní. Pro intenzitu vychází

$$E = \frac{F}{m} = g . \tag{6}$$

Její vektor směřuje do středu Země.

Práce při přenesení hmotného bodu hmotnosti m z povrchu Země do bodu P po úsečce XP představuje potenciální energii hmotného bodu v bodě P vzhledem k povrchu Země. Protože síla je po celé dráze konstantní, vypočteme práci vnější síly znásobením síly a dráhy. Vychází

$$W = m g h , \tag{7}$$

kde h značí výšku bodu P nad povrchem Země. Narýsujeme-li graficky závislost síly, která přenáší hmotný bod na dráze, rovná se tato práce číselně *ploše* obdélníka o stranách F a h (obr. 3). Z rovnice (4) vyplývá, že se tato práce rovná $m\,(V_0 - V)^0$, kde pro potenciál v bodě P bude

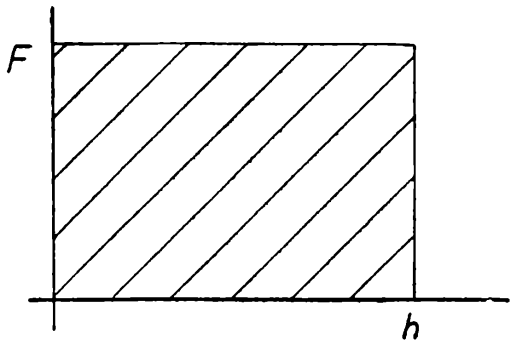
$$V = \frac{W}{m} = g h . \tag{8}$$

c) Pole odstředivé síly

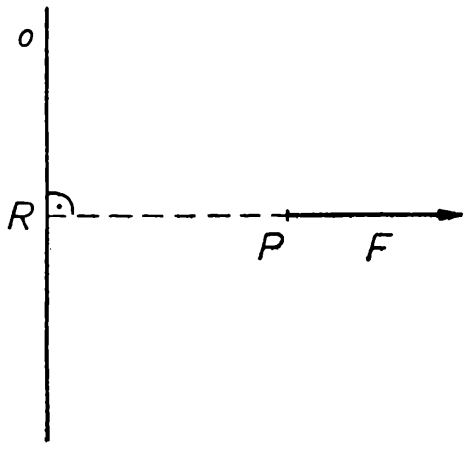
Hmotný bod hmotnosti m se ve vzdálenosti $x = RP$ otáčí rovnoměrně okolo osy o úhlovou rychlostí ω (obr. 4). Na hmotný bod působí odstředivá síla, která má velikost

$$F = m \omega^2 x . \tag{9}$$

Potenciální energie hmotného bodu v bodě P vzhledem k ose otáčení je rovna práci, kterou musí vykonat vnější síla při přenesení hmotného bodu z bodu R do bodu P po úsečce RP. Tato práce bude záporná, protože jde o práci spotřebovanou. Nelze ji ovšem vypočítat znásobením



Obr. 3.



Obr. 4.

síly a dráhy, protože síla se po dráze mění. Narýsujeme-li graficky závislost síly F na dráze, je hledaná práce číselně rovna *ploše* pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách F a x (obr. 5). Tímto způsobem obdržíme pro potenciální energii výraz

$$W = -\tfrac{1}{2} m \omega^2 x^2 . \tag{10}$$

Pro potenciál

$$V = \frac{W}{m} = -\tfrac{1}{2} \omega^2 x^2 . \tag{11}$$

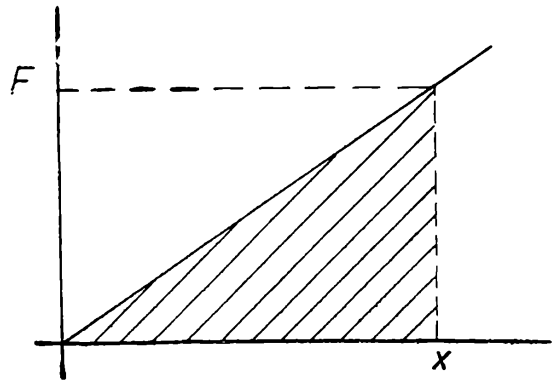
d) Neproudící kapalina v silovém poli

Povrch kapaliny, která neproudí a nachází se v časově neproměnném silovém poli, tvoří vždy ekvipotenciální plochu. Vektor intenzity je v každém bodě k ní kolmý.

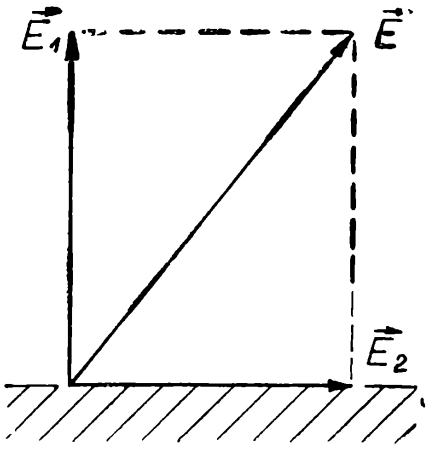
Toto tvrzení můžeme takto zdůvodnit: Předpokládejme, že vektor intenzity je v nějakém bodě K šikmý k povrchu kapaliny (obr. 6). Rozložíme vektor intenzity $\vec{E}$ na složku $\vec{E}_1$ kolmou k povrchu kapaliny a složku $\vec{E}_2$ rovnoběžnou s povrchem kapaliny. Složka $\vec{E}_2$ by způsobila proudění kapaliny. Aby nenastalo proudění kapaliny, musí složka $\vec{E}_2$ být v každém bodě rovna nule. Vektor intenzity $\vec{E}$ je pak kolmý k povrchu kapaliny. Povrch kapaliny tedy zaujme plochu, k níž je $\vec{E}$ všude kolmý, tj. právě ekvipotenciální plochu.

Příklad 1. Jakou plochu tvoří povrch kapaliny ve válci, který rotuje kolem svislé osy konstantní úhlovou rychlotí ω?

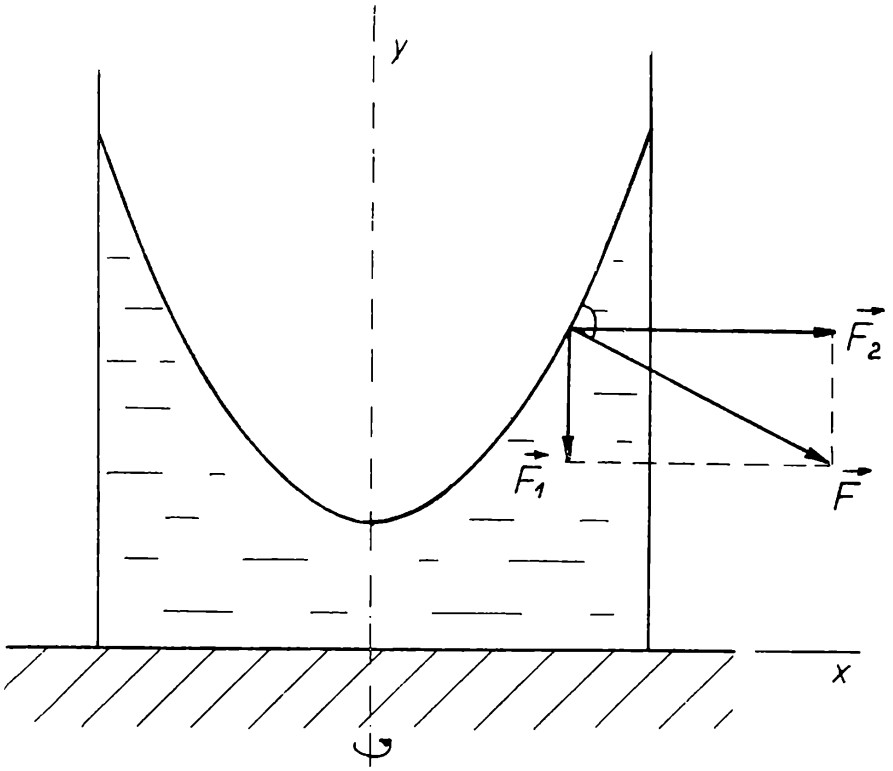
Úlohu řešíme zavedením souřadnicového systému v rovinném řezu, který prochází osou válce (obr. 7). Na částici na povrchu rotující kapa-



Obr. 5.



Obr. 6.



Obr. 7.

liny působí dvě síly. Gravitační $\vec{F}_1$ a odstředivá $\vec{F}_2$. Obě síly se skládají ve výslednici $\vec{F}$. Povrch kapaliny je v každém bodě k této výslednici kolmý. Potenciál gravitační síly je podle (8)

$$V_1 = g\,y \tag{12}$$

a potenciál odstředivé síly je podle (11)

$$V_2 = -\tfrac{1}{2}\,\omega^2\,x^2\,. \tag{13}$$

Celkový potenciál V je

$$V = V_1 + V_2 = g\,y - \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,x^2\,. \tag{14}$$

Povrch kapaliny zaujme ekvipotenciální plochu, tj. $V = \text{konst.}$ Dosazením do (14)

$$\text{konst.} = g\,y - \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,x^2\,. \tag{15}$$

Z této rovnice vypočteme

$$y = \frac{\omega^2}{2g}\,x^2 + \frac{\text{konst.}}{g} \tag{16}$$

Položíme-li ještě

$$y_0 = \frac{\text{konst.}}{g}\,,$$

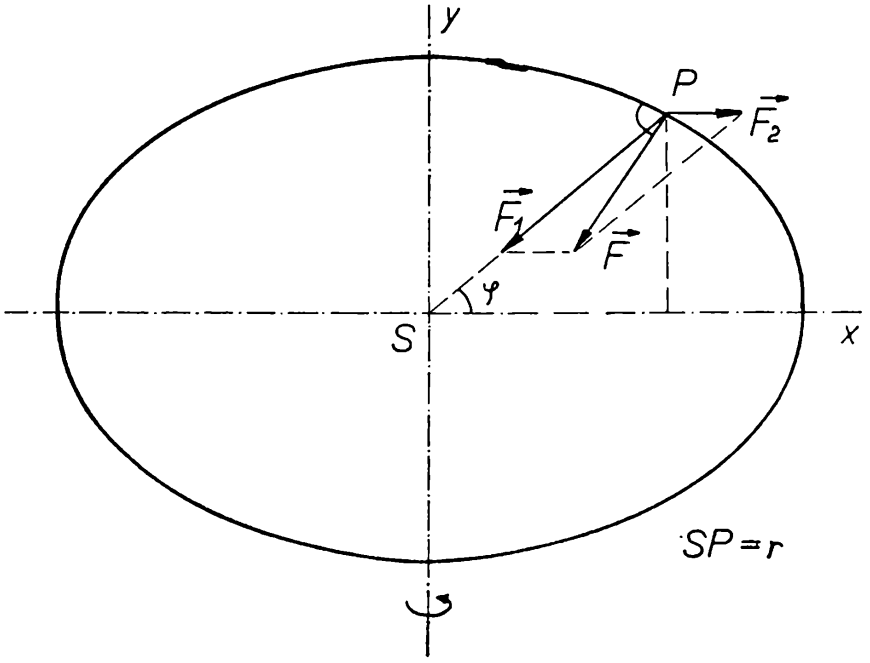
dostáváme rovnici

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + y_0 . \tag{17}$$

Osovým řezem povrchu kapaliny je tedy parabola a povrch kapaliny tvoří *rotační paraboloid.*

Příklad 2. Stanovte stáří Země, pokládáme-li ji za zploštěný elipsoid o „rovníkovém poloměru" a a „pólovém poloměru" b. Rozdíl $a - b = 21$ km. Měřením bylo zjištěno, že doba otočení Země okolo své osy se prodlouží o 0,001 vteřiny za 100 let.

Úlohu řešíme v rovinném řezu, který prochází osou Země (obr. 8).



Obr. 8.

Předpokládáme, že Země v dávných dobách byla tekutá a její povrch ztuhl podle ekvipotenciální plochy. Na částici na povrchu Země působí síla gravitační $\vec{F}_1$ a síla odstředivá $\vec{F}_2$. Obě síly se skládají ve výslednici $\vec{F}$, která je všude kolmá k povrchu Země. Protože zploštění Země je malé, můžeme pro gravitační potenciál použít výraz (4). Pro potenciál odstředivé síly výraz (11). Pro celkový potenciál dostáváme

$$V = -\varkappa \frac{M}{r} - \tfrac{1}{2} \omega^2 x^2 , \tag{18}$$

kde $\varkappa$ značí gravitační konstantu, M hmotu Země, r vzdálenost od středu Země, ω úhlovou rychlost otáčení Země v době jejího vzniku, protože tehdy povrch ztuhl podle ekvipotenciální plochy, x je vzdálenost

bodu od osy Země. Zavedeme geocentrickou zeměpisnou šířku φ (obr. 8) vztahem

$$x = r \cos \varphi ,$$

a (18) upravíme na

$$V = - \varkappa \frac{M}{r} - \tfrac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi . \tag{19}$$

Protože povrch zaujme ekvipotenciální plochu, je $V = \text{konst.}$ a

$$\text{konst.} = - \varkappa \frac{M}{r} - \tfrac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi . \tag{20}$$

Pro pól je $\varphi = 90°$ a z (20) vychází pro $r = b$

$$\text{konst.} = - \varkappa \frac{M}{b} . \tag{21}$$

Pro rovník je $\varphi = 0°$ a z (20) vychází pro $r = a$

$$\text{konst.} = - \varkappa \frac{M}{a} - \tfrac{1}{2} \omega^2 a^2 \tag{22}$$

Spojením (21) a (22)

$$\varkappa \frac{M}{b} = \varkappa \frac{M}{a} + \tfrac{1}{2} \omega^2 a^2 \tag{23}$$

Tuto rovnici řešíme vzhledem k ω. Vychází

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \varkappa M (a - b)}{a^3 b}} . \tag{24}$$

Protože je $a \approx b$, můžeme (24) upravit na

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \varkappa M (a - b)}{a^2 . a^2}} = \frac{\sqrt{2 \varkappa M (a - b)}}{a^2} . \tag{25}$$

Rozdíl $a - b$ je třeba ovšem ponechat. Dále platí

$$\omega = \frac{2 \pi}{T} , \tag{26}$$

kde T značí dobu otočení okolo své osy. Dosadíme-li do (25) za ω, je

$$T = 2 \pi \frac{a^2}{\sqrt{2 \varkappa M (a - b)}} . \tag{27}$$

Tento vzorec určuje dobu otočení Země okolo osy v dobách svého vzniku. Dosadíme-li číselně

$$a = 6{,}38 . 10^6 \text{ m} , \qquad M = 6 \quad 10^{24} \text{ kg} ,$$
$$a - b = 2{,}1 . 10^4 \text{ m} , \qquad \varkappa = 6{,}67 \quad 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} ,$$

vychází po snadných úpravách $T \doteq 17$ h.

Předpokládáme-li brzdný moment na Zemi konstantní, můžeme rotační pohyb Země považovat za rovnoměrně zpomalený. Pro takový pohyb platí

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t\,, \tag{28}$$

kde ω značí úhlovou rychlost otáčení Země v současné době, ω_0 stejnou veličinu, ale v dobách vzniku Země, t čas počítaný od okamžiku vzniku Země a ε je zpomalení. Použijeme-li (26), zavedeme do (28) odpovídající doby otočení k úhlovým rychlostem ω a ω_0

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0} - \varepsilon t\,. \tag{29}$$

Tento výraz udává závislost doby otočení Země na čase.

Označíme-li nyní T_1 dobu otočení Země okolo své osy v současné době a t_1 stáří Země v současné době, dále T_2 a t_2 stejné veličiny, ale za 100 let, obdržíme rovnice

$$\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{T_0} - \varepsilon t_1 \tag{30}$$

a

$$\frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{T_0} - \varepsilon t_2\,. \tag{31}$$

Odečteme-li (31) od (30), vypočteme zpomalení

$$\varepsilon = \frac{2\pi\,(T_2 - T_1)}{T_1 T_2\,(t_2 - t_1)}\,. \tag{32}$$

Z (30) plyne

$$t_1 = \frac{2\pi\,(T_1 - T_0)}{\varepsilon\quad T_0\,T_1} \tag{33}$$

a dosazením za ε z (32) dostáváme stáří Země

$$t_1 = \frac{T_1 - T_0}{T_0} \cdot \frac{T_2}{T_2 - T_1}\,(t_2 - t_1)\,. \tag{34}$$

Číselně dosadíme takto

$$T_1 - T_0 = 7 \text{ hod.}\,, \qquad T_2 = 24 \text{ hod.} = 24 \,.\, 3600 \text{ s}\,,$$

$$T_0 = 17 \text{ hod.}\,, \qquad T_2 - T_1 = 0{,}001 \text{ s}\,, \qquad t_2 - t_1 = 100 \text{ let}\,.$$

Vychází

$$t_1 = \frac{7 \text{ hod.}}{17 \text{ hod.}} \cdot \frac{24 \,.\, 3600 \text{ s}}{0{,}001 \text{ s}} \,.\, 100 \text{ let} \doteq 3{,}5 \,.\, 10^9 \text{ let}\,.$$

P o z n á m k a. Potenciál je obecně určen až na aditivní konstantu. Ve všech výrazech pro potenciál je možno připsat + konst.

Reversní kyvadlo

VLADISLAV PROCHÁZKA, SVVŠ, Plasy

Ve druhém ročníku SVVŠ se studenti učí o matematickém a fyzickém kyvadle a odvozují si také vztahy pro výpočet doby kyvu nebo kmitu.

Všichni víme, že fyzického kyvadla je např. využito v hodinách, kde energie je neustále dodávána klesajícím závažím nebo uvolňováním pružiny. V našem článku se budeme zabývat jiným kyvadlem, kyvadlem reversním, jehož se užívá k měření tíhového zrychlení. Nejprve si však musíme vysvětlit pojem *reversní kyvadlo*. Mějme fyzické kyvadlo v rovnovážné poloze, jak je naznačeno na obr. 1. Od osy o, která se nám v průmětu jeví jako bod O, ve vzdálenosti l leží střed kyvu O'. Tento bod O' by kýval sám o sobě stejně jako dané kyvadlo. Nyní zavěsme kyvadlo do středu kyvu O', jak ukazuje obr. 2. Doba kyvu takto zavěšeného kyvadla se nezmění oproti původnímu zavěšení.

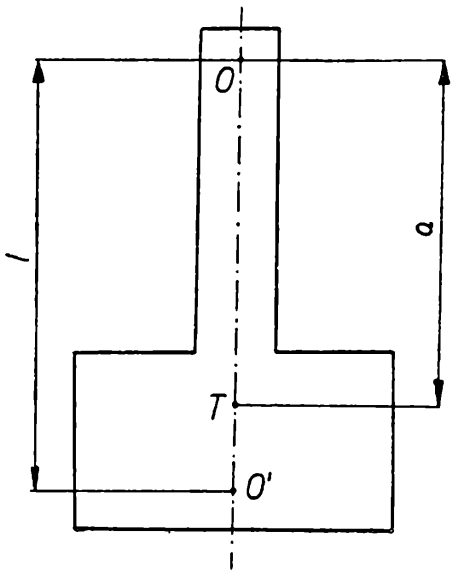
Nechť je J_0 moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé k nákresně a jdoucí těžištěm T. Pak jsou momenty setrvačnosti J a J' vzhledem k rovnoběžným osám o (obr. 1) a O' (obr. 2) dány vztahy, které plynou z tzv. Steinerovy věty.

Podle Steinerovy věty je moment setrvačnosti k některé ose dán součtem momentu setrvačnosti (J_0) tělesa k rovnoběžné ose procházející těžištěm a druhého momentu hmotnosti tělesa soustředěné v těžišti k této nové ose ($m \cdot a^2$).

$$J = J_0 + ma^2 \qquad (1)$$

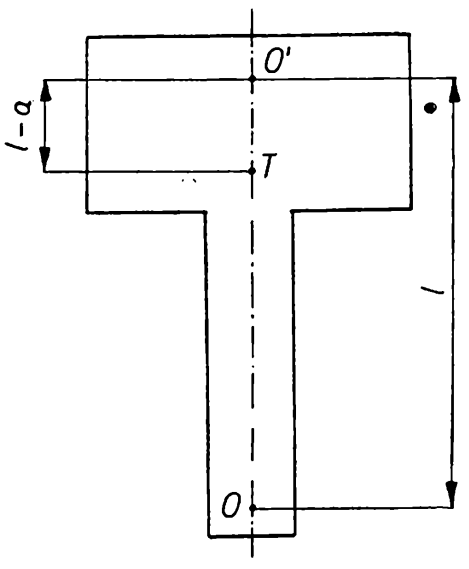
$$J' = J_0 + m(l - a)^2, \qquad (2)$$

kde m značí hmotnost kyvadla.



◀ Obr. 1.

Obr. 2. ▶



Redukovaná délka l kyvadla v původní poloze jest dána vztahem

$$l = \frac{J}{ma}.$$

Dosadíme za J ze vztahu (1), takže dostáváme

$$l = \frac{J_0 + ma^2}{ma} = \frac{J_0}{ma} + a,$$

čili

$$\frac{J_0}{m} = a(l - a) \tag{3}$$

Pro redukovanou délku l' vzhledem k ose O' platí

$$l' = \frac{J'}{m(l - a)}$$

Po úpravě dostáváme výraz

$$l' = \frac{J_0}{m(l - a)} + (l - a),$$

jenž pro názornost můžeme psát ve tvaru

$$l' = \frac{J_0}{m} \cdot \frac{1}{l - a} + (l - a).$$

Nyní dosaďme za $\frac{J_0}{m}$ z výrazu (3).

Platí

$$l' = a(l - a) \cdot \frac{1}{l - a} + (l - a)$$

a po úpravě

$$l' = l. \tag{4}$$

Rovnost (4) dokazuje, že doby kyvu kyvadla v obou polohách jsou stejné. Vyplývá to ze známého vzorce pro dobu kyvu

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde nezávislou proměnnou je právě redukovaná délka kyvadla, π a g jsou konstanty.

Jestliže tedy najdeme takové dvě osy, které jsou rovnoběžné, v nichž kyvadlo kýve se stejnou dobou kyvu T, jest jejich vzdálenost redukovaná délka kyvadla. Na tomto poznatku je založeno absolutní měření tíhového zrychlení g reversním kyvadlem.

Ze vzorce

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

můžeme počítat tíhové zrychlení

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}.$$

Takto se stanoví absolutní hodnota tíhového zrychlení. Jakmile známe tuto hodnotu určité základní stanice, můžeme zjistit tíhové zrychlení na kterémkoli jiném místě tím, že změříme dobu kyvu téhož kyvadla v obou místech.

Doba kyvu v základní stanici (ve střední Evropě je to Postupim) nechť je T_0, v srovnávacím místě T.

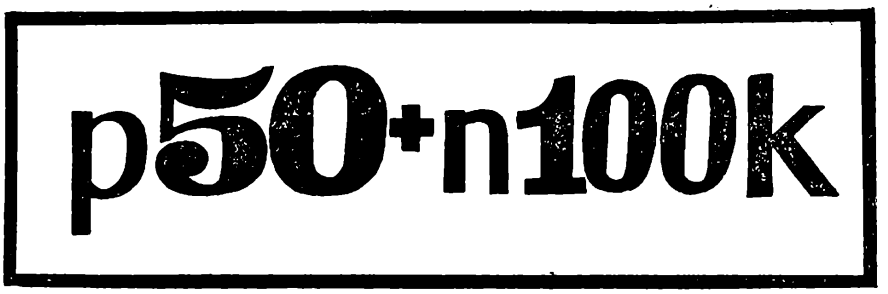
Pak ze vztahů $g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$ a $g_0 = \frac{\pi^2 l}{T_0^2}$

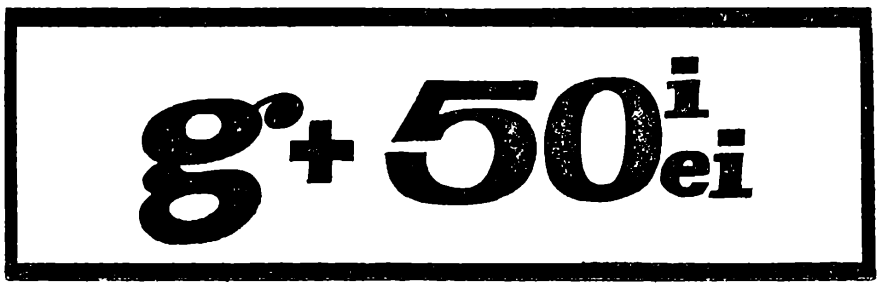
plyne pro tíhové zrychlení g vztah

$$g = g_0 \frac{T_0^2}{T^2}.$$

REBUSY

(Slavná fyzici)





Řešení úloh loňské soutěže

● Matematika

10. Určete množinu všech bodů roviny, pro něž platí současně všechny nerovnosti

$$y \leqq |x + an| ,$$

$$y \geqq - |x + an| ,$$

kde $a > 0$ je konst., n je celé.

(Došlo 28 řešení) *Alois Urban*

Řešil Tomáš Wichs, 3.f SVVŠ, Praha 2, tř. W. Piecka 2:

Nejprve vyšetříme množinu všech bodů roviny, pro něž platí dané nerovnosti při pevném n.

Je-li $x \geqq - an$, daná soustava je ekvivalentní se soustavou

$$- x - an \leqq y \leqq x + an .$$

Všechny body poloroviny $x \geqq - an$, které vyhovují těmto nerovnostem, vyplňují pravý úhel A_n s vrcholem $V_n \equiv [- an; 0]$, jehož ramena leží na přímkách

$$p_n \equiv y = x + an$$

a

$$q_n \equiv y = - x - an$$

a který obsahuje polopřímku

$$y = 0 , x \geqq - an$$

(obr. 1a).

Je-li $x \leqq - an$, daná soustava je ekvivalentní se soustavou

$$x + an \leqq y \leqq - x - an .$$

Všechny body poloroviny $x \leqq - an$ vyhovující oběma nerovnostem, vyplňují pravý úhel B_n opět s vrcholem V_n, s rameny zase na přímkách p_n a q_n, ale který nyní obsahuje polopřímku $y = 0$, $x \leqq - an$ (obr. 1b).

Hledaná množina M všech bodů, pro něž platí dané nerovnosti pro

všechna celá n, je množinou všech bodů, které pro každé n náležejí do A_n nebo do B_n.

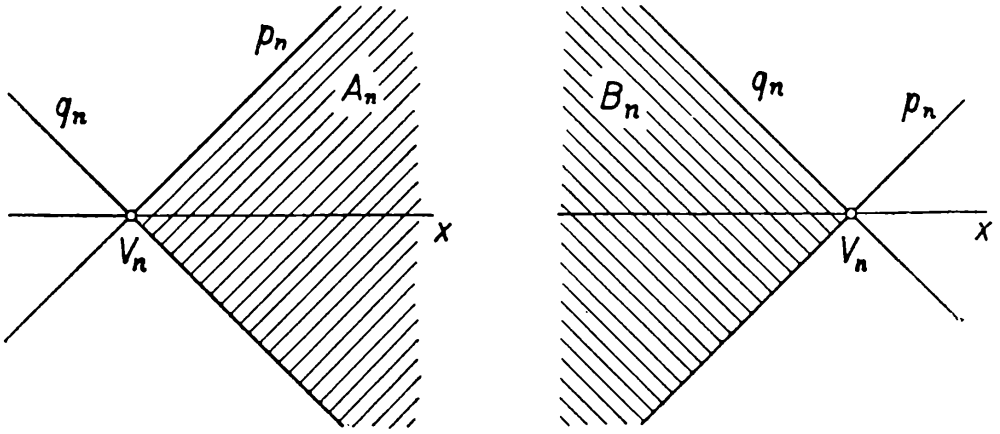
Množina M je tedy množinou bodů všech čtverců

$$C_n \equiv V_{n+1} P_n V_n Q_n ,$$

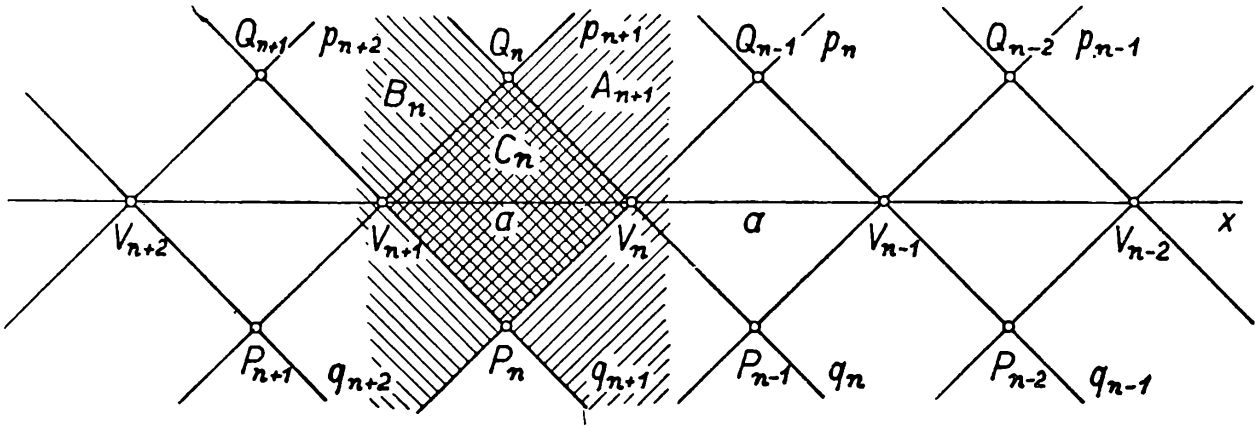
které jsou průnikem úhlů A_{n+1} a B_n (n celé), kde

$$P_n \equiv p_n \cdot q_{n+1} , \quad Q_n \equiv q_n \cdot p_{n+1}$$

(obr. 2).



Obr. 1.



Obr. 2.

Velikost úhlopříčky čtverce C_n se zřejmě rovná vzdálenosti

$$V_n V_{n+1}$$

vrcholů V_n, V_{n+1}, tj. $|-an + a(n+1)| = a$. Pro souřadnice vrcholů P_n a Q_n po krátkém výpočtu dostáváme

$$P_n \equiv \left[-\frac{a}{2}(2n+1) ; -\frac{a}{2} \right], \quad Q_n \equiv \left[-\frac{a}{2}(2n+1) ; \frac{a}{2} \right].$$

11. Z posloupnosti čísel $s_1, s_2, \ldots, s_e$ je sestaveno pět posloupností

$$P_1 \equiv \{n_\alpha\}\ ,\ P_2 \equiv \{n_\beta\}\ ,\ P_3 \equiv \{n_\gamma\}\ ,\ P_4 \equiv \{n_\delta\}\ ,\ P_5 \equiv \{n_\varepsilon\}\ ,$$

jejichž členy jsou skupiny čísel s_i

$$n_\alpha \equiv (s_\alpha\ ,\ s_{\alpha+1}\ ,\ \ldots\ ,\ s_{\alpha+4})\ ,\ n_\beta \equiv (s_\beta\ ,\ s_{\beta+1},\ \ldots\ ,\ s_{\beta+3})\ ,$$

$$n_\gamma \equiv (s_\gamma,\ s_{\gamma+1},\ s_{\gamma+2})\ ,\ n_\delta \equiv (s_\delta\ ,\ s_{\delta+1})\ ,\ n_\varepsilon \equiv (s_\varepsilon)\ .$$

Přitom

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1, 6, 11, \ldots, a\ ;\\
\beta &= a+5\ ,\ a+9\ ,\ \ldots\ ,\ b\ ;\\
\gamma &= b+4\ ,\ b+7\ ,\ \ldots\ ,\ c\ ;\\
\delta &= c+3\ ,\ c+5\ ,\ \ldots\ ,\ d\ ;\\
\varepsilon &= d+2\ ,\ d+3\ ,\ \ldots\ ,\ e
\end{aligned}$$

Počet členů prvé až i-té posloupnosti P_i označme p_i. Určete součet

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5\ .$$

(Došlo 22 řešení) *Alois Urban*

Řešil Pavel Vejvoda, 2.g SVVŠ, Praha 2, tř. W. Piecka 2.

Označme po řadě k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 počet členů posloupnosti $P_1, P_2, \ldots, P_5$. Indexy členů posloupnosti P_1 tvoří aritmetickou posloupnost přirozených čísel s diferencí 5, jejímž prvým členem je 1 a k_1-tým členem a. Je proto

$$a = 1 + (k_1 - 1)\,5\ ,$$

a tedy

$$k_1 = \tfrac{1}{5}\,(a+4)\ .$$

Obdobně indexy členů posloupností P_2, P_3, P_4, P_5 tvoří aritmetické posloupnosti, jejichž diference jsou postupně 4, 3, 2, 1, prvé členy po řadě $a+5$, $b+4$, $c+3$, $d+2$ a poslední členy po řadě b, c, d, e. Z těchto podmínek najdeme

$$\begin{aligned}
k_2 &= \tfrac{1}{4}\,(b-a-1)\ ,\\
k_3 &= \tfrac{1}{3}\,(c-b-1)\ ,\\
k_4 &= \tfrac{1}{2}\,(d-c-1)\ ,\\
k_5 &= e-d-1\ .
\end{aligned}$$

Jelikož

$$p_i = k_1 + k_2 + \ldots + k_i\ (i = 1, 2, \ldots, 5)\ ,$$

je

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 &=\\
&= 5k_1 + 4k_2 + 3k_3 + 2k_4 + k_5 =\\
&= a + 4 + b - a - 1 + c - b - 1 + d - c - 1 +\\
&\quad + e - d - 1 = e\ .
\end{aligned}$$

12. Jsou dány různoběžné přímky m, n a kladné číslo a. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům, jejichž vrcholy leží na daných přímkách; jeden vrchol je průsečík daných přímek, protější strana k němu má velikost a.

(Došlo 28 řešení) *Alois Urban*

Řešila Eva Kubišťová, 2.b SVVŠ, Nový Bohumín:

Je-li S střed kružnice opsané trojúhelníku $\triangle PMN$, kde $P \equiv m \,.\, n$, $M \in m$, $N \in n$ a $MN = a$, pak její poloměr je

$$r = PS = \frac{a}{2 \sin \alpha} .$$

Přitom $0 < \alpha \leqq R$ je úhel daných přímek m, n. Protože a a α je konstantní, je i r konstantní, a tedy středy S trojúhelníků $\triangle PMN$ leží na kružnici $k \equiv (P; r)$.

Musíme ještě rozhodnout, zda obráceně každý bod S kružnice k je středem kružnice opsané některému trojúhelníku $\triangle PMN$, kde $P \equiv m \,.\, n$, $M \in m$, $N \in n$ a $MN = a$.

Neleží-li bod $S \in k$ na kolmici $m' \perp m$ $(P \in m')$, popř. na kolmici $n' \perp n$ $(P \in n')$, pak vzdálenost bodu S od přímky m, popř. n je menší než r, a tedy kružnice $l \equiv (S; r)$ má s přímkou m (n) společný jednak bod P, jednak další bod, který označíme M (N). Protože

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} ,$$

je $MN = a$, a tedy existuje $\triangle PMN$, který vyhovuje daným podmínkám a pro nějž zvolený bod S kružnice k je středem kružnice opsané.

Jestliže však zvolíme bod $S' \in k$ na přímce $m' \perp m$ $(P \in m')$, popř. na $n' \perp n$ $(P \in n')$, pak kružnice $l \equiv (S'; r)$ se dotýká přímky m, popř. n v bodě P, a tedy neexistuje žádný trojúhelník $\triangle PMN$, který by vyhovoval daným podmínkám a pro který by bod S' byl středem kružnice opsané.

Jako výsledek dostáváme:

Množinu středů kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle PMN$ $(P \equiv m \,.\, n, M \in m, N \in n, MN = a)$ tvoří všechny body kružnice

$$k \equiv \left(P; \frac{a}{2 \sin \alpha}\right)$$

s výjimkou čtyř jejích bodů, které leží na $m' \perp m$ $(P \in m')$ a na $n' \perp n$ $(P \in n')$. Přitom α je úhel přímek m, n $(0 < \alpha \leqq R)$.

● Fyzika

4. Chlapec otáčí tři koule téže hmotnosti $m = 0{,}1$ kg ve vodorovné rovině. Koule jsou upevněny na stejném vlákně. Jakou silou bude napínán každý ze tří úseků vlákna, jestliže je obvodová rychlost vnější koule $v = 6 \text{ m} \,.\, \text{s}^{-1}$? V které části se vlákno pravděpodobně nejdřív přetrhne, zvětšujeme-li rychlost otáčení?

(Došlo 24 řešení) *František Vencálek*

Řešil Stanislav Slouka, M3a SPŠE, Brno:

Poněvadž koule obíhají ve vodorovné rovině, je tu předpoklad, že zanedbáváme jejich tíhu.

Předpokládejme, že na vlákně obíhá n koulí téže hmotnosti m ve vzdálenostech r, $2r$, $3r$, ..., nr. Všechny koule obíhají stejnou úhlovou rychlostí, rovnou úhlové rychlosti

$$\omega = \frac{v}{n \,.\, r}$$

n-té koule. i-tá koule působí na vlákno odstředivou silou

$$F_i' = m \,.\, i \,.\, r \,.\, \omega^2 = m \,.\, i \,.\, r \,.\, \frac{v^2}{n^2 r^2} = \frac{m}{n^2} \,.\, \frac{v^2}{r} \,.\, i \,.$$

Vlákno mezi $(i-1)$-vou koulí a i-tou koulí je napínáno silou

$$F_i \neq \sum_i^n F_i = \sum_i^n \frac{m}{n^2} \,.\, \frac{v^2}{r} \,.\, i = \frac{m}{n^2} \,.\, \frac{v^2}{r} \,.\, \sum_i^n i \,.$$

Užitím vzorce pro součet členů aritmetické posloupnosti dostáváme, že

$$\sum_i^n i = \tfrac{1}{2} \,.\, (n - i + 1)\,(n + i)\,,$$

takže je

$$F_i = \frac{m \,.\, v^2}{2n^2 \,.\, r} \,.\, (n + i)\,(n - i + 1)$$

Síla F_i závisí na i. Poněvadž součin

$$(n + i)\,(n - i + 1) = n^2 + n - i^2 + i = n^2 + n - i\,(i - 1)$$

má maximální hodnotu pro $i = 1$ (i je přirozené číslo!), je síla F_1 maximální, tj. vlákno se přetrhne pravděpodobně nejdříve mezi závěsem a první koulí.

Pro $n = 3$ a hodnoty veličin, udané v textu, dostáváme

$$F_1 = \frac{0{,}1 \,.\, 6^2}{2 \,.\, 3^2 \,.\, 1} \,.\, 4 \,.\, 3 = 0{,}2 \,.\, 12 = 2{,}4\ N\,,$$

$$F_2 = 0{,}2 \,.\, 5 \,.\, 2 = 2\ N\,,$$

$$F_3 = 0{,}2 \,.\, 6 \,.\, 1 = 1{,}2\ N$$

5. Za rovnovážného stavu je vzdálenost obou protónů v molekule vodíku $u = 7 \,.\, 10^{-11}$ m. Zvětší-li se nebo zmenší-li se tato vzdálenost, vznikne vratná síla přímo úměrná výchylce. Při výchylce každého protonu o 10^{-11} m je vratná síla $1{,}1 \,.\, 10^{-8}$ N.

Najděte kmitočet kmitu molekuly, je-li hmotnost protonu

$$m = 1{,}67 \,.\, 10^{-27}\ \text{kg}\,.$$

(Došlo 23 řešení) *František Vencálek*

Řešil Stanislav Palúch, II.c SVVŠ, Prešov:

Oba protóny si můžeme představit jako dvě kuličky (každá z nich je na jednom konci téže pružiny) kmitající se stejným kmitočtem, ale s opačnou fází. Pak je střed pružiny v klidu. Poněvadž je vratná síla přímo úměrná výchylce, je pohyb protónu pohybem harmonickým s kmitočtem

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}},$$

kde $K = \frac{F}{y}$ (F je vratná síla, která působí při výchylce y).

Pro hodnoty udané v textu dostáváme

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{F}{m\,.\,y}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1{,}1\,.\,10^{-8}}{1{,}67\,.\,10^{-27}\,.\,10^{-11}}} = 1{,}291\,.\,10^{14}\ \mathrm{Hz}\,.$$

6. Střela s hmotností $m_1 = 0{,}5$ kg, letící vodorovnou rychlostí $v_1 = 5\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ dopadne na dřevěný hranol hmotnosti $m_2 = 2$ kg a uvázne v něm. Blok leží na vodorovné rovině. Jakou rychlostí se začne pohybovat blok i se střelou? Jakou dráhu urazí, je-li součinitel smykového tření $\mu = 0{,}1$? Jaká část kinetické energie se ztratí při srážce střely s blokem? (Došlo 25 řešení) *František Vencálek*

Řešil Pavel Novotný, III.c SVVŠ, Olomouc:

Blok se střelou se začne pohybovat rychlostí v_2. Poněvadž při rázu působily jen vnitřní síly, platí zákon zachování hybnosti soustavy

$$m_1 v_1 + m_2\,.\,0 = (m_1 + m_2)\,.\,v_2\,.$$

Z rovnice dostáváme

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,.\,v_1\,.$$

Proti pohybu bloku působí třecí síla

$$F = \mu\,.\,(m_1 + m_2)\,.\,g$$

jako síla brzdicí. Práce $A = F\,.\,s$ (s je celková dráha bloku) spotřebovaná třecí silou se rovná počáteční kinetické energii bloku. Platí tedy vztah

$$\mu\,(m_1 + m_2)\,g\,.\,s = \tfrac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v_2^2\,,$$

z kterého plyne, že

$$s = \frac{1}{2g\,.\,\mu}\,v_2^2 = \frac{m_1^2\,v_1^2}{2\,(m_1 + m_2)^2\,\mu\,.\,g}\,.$$

Poněvadž je počáteční kinetická energie střely

$$W_1 = \tfrac{1}{2}\,m_1 v_1^2\,,$$

počáteční kinetická energie bloku

$$W_2 = \tfrac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\;\; v_2^2 = \tfrac{1}{2}\;\; \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\,.\,v_1^2\,,$$

ztratí se při srážce část kinetické energie

$$\Delta W = W_1 - W_2 = \tfrac{1}{2}\,m_1 v_1^2 - \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\;\; v_1^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,.\,v_1^2$$

Ztráta energie vyjádřená v procentech

$$p = \frac{\Delta W}{W_1}\,.\,100 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\;\; 100$$

Pro hodnoty udané v textu dostáváme

$$v_2 = \frac{0{,}5}{2{,}5}\,.\,5 = 1\ \mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-1}$$

Pro $g \doteq 10\ \mathrm{m}\,.\,\mathrm{s}^{-2}$ je

$$s = \frac{0{,}5^2\,.\,5^2}{2\,.\,2{,}5^2\,.\,0{,}1\,.\,10} = 0{,}5\ \mathrm{m}\ ;$$

$$\Delta W = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{0{,}5\,.\,2}{2{,}5}\,.\,5^2 = 5\ \mathrm{J}$$

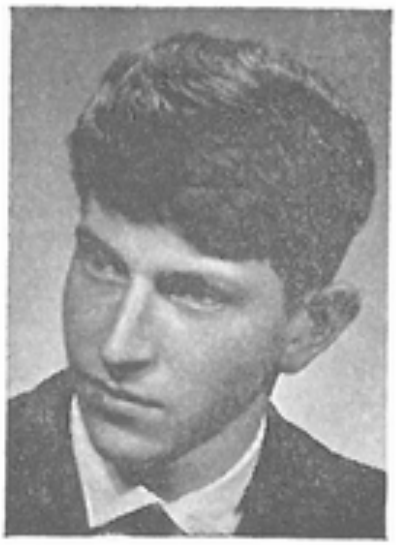
$$p = \frac{2}{2{,}5}\,.\,100 = 80\ \%$$

Vítězové loňské soutěže Rozhledů

ABSOLUTNÍ VÍTĚZ

1. cena: PETER MEDERLY

SVŠ — Prievidza



Absolutní vítězové:

2. cena: Pavel Novotný
SVVŠ—Olomouc

3. cena: Zdeněk Slanina
SPŠCh—Brno

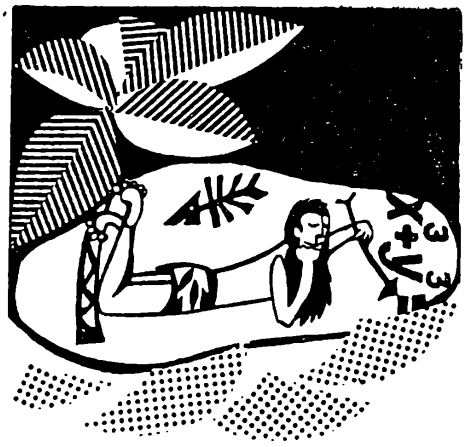
Jaroslav Hořínka
SVVŠ—Praha 8
1.—2. cena z fyziky

Ivan Vlček
SVVŠ—Praha 3
1.—2. cena z fyziky

Jan Louda
SVVŠ—Plzeň

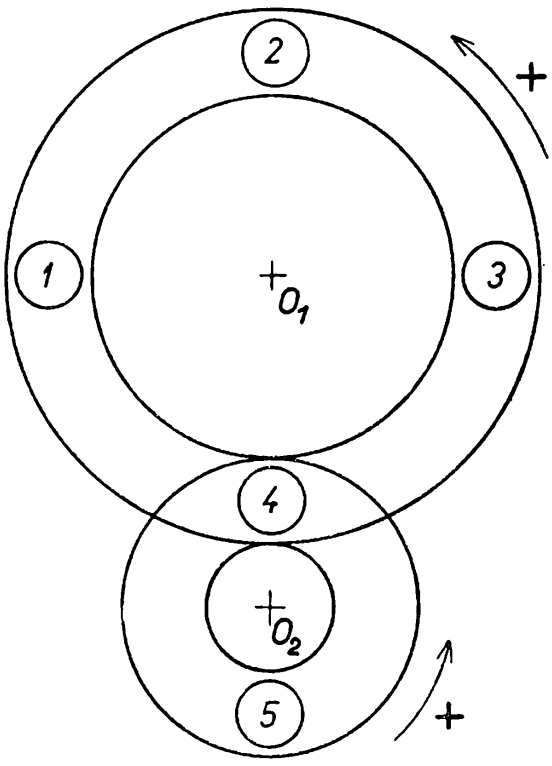
Stanislav Slouka
SPŠE—Brno
1.—5. cena z konstruktivní geometrie

Oprava na str. 129: Marian Fúrik—SVŠ—Zvolen se dělí v celkové klasifikaci o 6. místo.

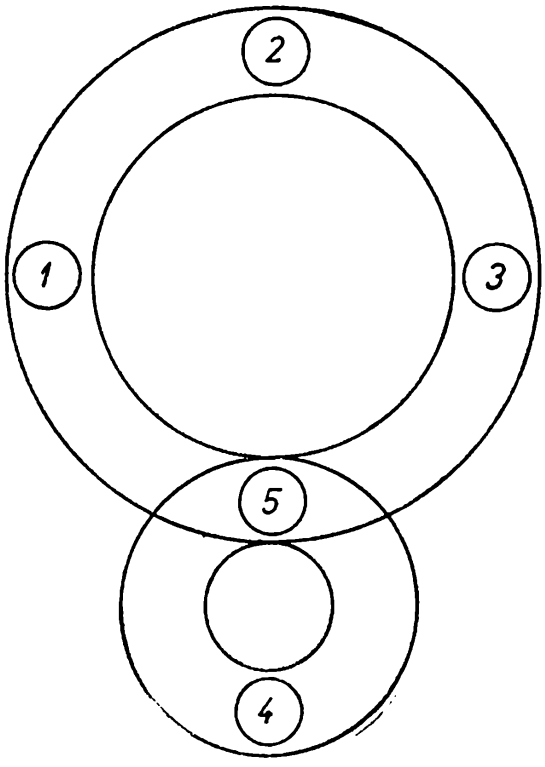


Hra se dvěma prstenci

Hrací plocha se skládá ze dvou prstenců, většího se čtyřmi výřezy a menšího se dvěma výřezy, umístěnými podle obrázku 1. Ve výřezech je umístěno pět hracích známek, označených čísly 1 až 5. S prstenci můžeme střídavě otáčet, a to s velkým prstencem kolem středu O_1 o celé násobky 90° a s malým prstencem kolem bodu O_2 o celistvé násobky 180°. S kotoučem, který se otáčí, se samozřejmě zároveň pohybují i hrací známky, které na něm leží. Tím můžeme z původního rozmístění hracích známek postupně získávat nové situace.



Obr. 1.



Obr. 2.

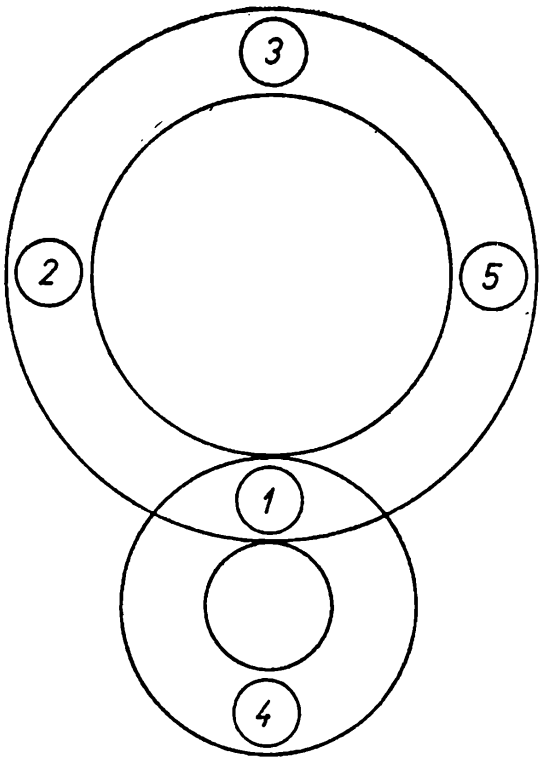
Tak například, otočíme-li nejdříve malým prstencem v kladném smyslu o 180° [tuto operaci označíme M (180°)], dostaneme situaci na obrázku 2. Jestliže dále otočíme velkým prstencem v kladném smyslu o 90° [tuto operaci označíme V (90°)], vznikne postavení na obrázku 3. Takovým postupem v postavení na obrázku 1 pěti operacemi

M (180°), V (90°), M (180°),
V (−90°), M (180°)

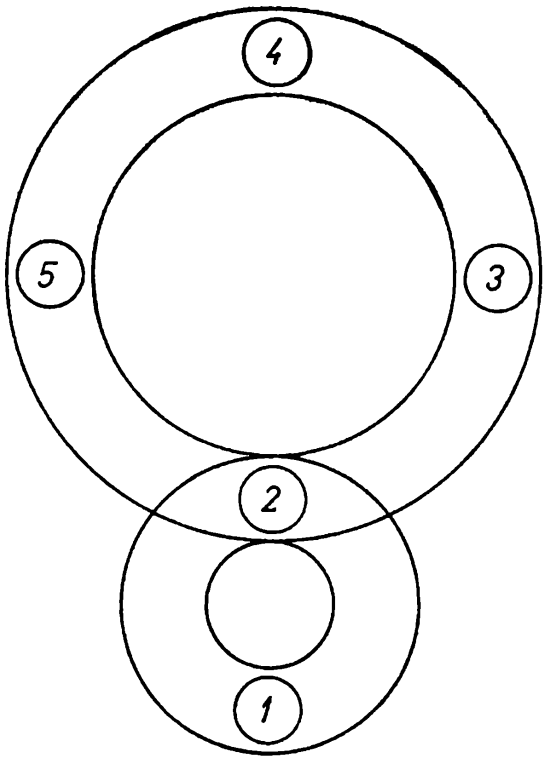
můžeme vyměnit polohu hracích známek 1 a 4. Ostatní známky přitom zůstanou na svém původním místě (přesvědčte se!).

Vaším úkolem je nalézt postup, jak z postavení na obrázku 1 lze získat situaci na obrázku 4. Nám se to podařilo méně než 10 operacemi. Jsme zvědavi, kolika operacemi se to podaří vám. Nejlepší řešení otiskneme.

Milan Koman



Obr. 3.



Obr. 4.

Detektivní pětiboj

(Pokračování)

Další dvě úlohy pětiboje mají náměty skutečně detektivní, jak poznáte. Za úplné řešení třetí úlohy získáte čtyři body, čtvrtá úloha je dotována pěti body. Nezapomeňte na stručný, třeba i schematický popis svých úvah, na základě nichž jste došli k výsledku.

3 Objevíte viníka?

V době, kdy bylo ve třídě devět žáků, rozbil někdo vázu, která stála na stolku. Při vyšetřování svalovali někteří vinu na druhé, Blanka zase podezřele ochotně brala vinu na sebe atd. Posuďte sami výpovědi devíti podezřelých.

Aleš: *Já ji nerozbil, udělala to Blanka.*
Blanka: *Já ji rozbila, prosím, opravdu.*
Dáša: *Blanka to bere na sebe, ale vázu rozbil Jirka.*
Emil: *Dáša neřekla pravdu, ale já také nerozbil tu vázu.*
Hanka: *Rozbil ji Aleš nebo Emil.*
Jirka: *Milan ji rozbil.*
Květa: *Jirka neřekl pravdu.*
Milan: *Vázu nerozbil Olda ani já.*
Olda: *Milan má pravdu, udělala to Květa.*

Prostudujte výpovědi a odhalte viníka za předpokladu, že byl pouze jeden (jedna) a že ze všech výpovědí jsou právě dvě pravdivé. Neunáhlete se však s úsudkem, kdoví, zda uvedené podmínky postačí k jednoznačným odpovědím. Všimněte si také toho, že někteří žáci a žákyně vyslovili ve svých výpovědích dva výroky, jejich výpověď lze proto považovat za pravdivou právě tehdy, jsou-li *oba* jimi vyslovené výroky pravdivé.

4 Zjistíte pachatele?

Scotland Yard pátrá po pachatelích rafinovaného vloupání do klenotnictví ve středu Londýna. Podle „stylu práce" přichází v úvahu osm podezřelých, kteří nemají prokazatelné alibi. Protože se na činu musela podílet aspoň tříčlenná parta, shromažďují detektivové zprávy o vzájemných vztazích mezi podezřelými, které by mohly mít vliv na vytváření party. Zatím jsou k dispozici tyto údaje o podezřelých *A, B, C, D, E, F, G, H*:

Je vyloučena spolupráce F a G i to, že by C podnikl něco bez A. Podle použitého nářadí je patrno, že v partě musel být aspoň jeden ze „specialistů" B, F, C. V partě, kde je E, nechybějí nikdy A ani F. Bez D se nepouští do žádné akce ani A, ani E. Pokud spolupracuje D s F, pak je s nimi vždycky také H. Jestliže se H akce nezúčastnil, potom musel vůdce party přibrat E a vyloučit G. Po několika předchozích neúspěších odmítá F účast tam, kde je H a není C. Jsou-li v partě pohromadě A a H, potom v ní není místo pro B ani pro E. Je-li v ní však B a H, potom se neobejde bez účasti G. Kdyby nastala situace, že by se akce zúčastnil H

bez D, pak by si určitě vynutil, že se jí zúčastní C bez B. Obdobně by si vynutil A, že E nesmí přibrat D, kdyby on sám nemohl přibrat F.

Pokuste se o vyvození co největšího počtu závěrů, zejména o zjištění, kdo z podezřelých se určitě akce zúčastnil, kdo nikoliv a jaké jsou možnosti pro složení party, která provedla vloupání. *J. Š.*

?

Účastníci jednej schôdzky sedia pri troch stoloch, pri každom stole sedí aspoň jeden muž a aspoň jedna žena a pri každom stole je mužov viac ako žien. Účastníci sediaci pri tomže stole sa pri príchode vítajú podaním ruky. Niekto spočítal, že všetkých stiskov ruky dvoch účastníkov tohože pohlavia bolo 12 a rôzneho pohlavia 16. Koľko mužov a koľko žien sedelo pri jednotlivých stoloch? *Pavel Bartoš*

JZD

V JZD přikrmovali obilím jednak slepice, jednak několik kusů dobytka. „Karle, oslovil jednoho dne předseda účetního, máme tam, hádám, ještě 20 metráků obilí. Jak dlouho nám to ještě vydrží?“ „No, podívej se, předsedo. Polovina slepic a polovina dobytka, který přikrmujeme, spotřebuje za půl dne půl metráku. Tak to bychom jako měli...“ Ne, nebudeme dál sledovat vývody účetního, spočítáte si to jistě sami a výsledek i s příslušnou úvahou nám pošlete. *S. Horák*

Otec a syn

Otec se synem šli navštívit příbuzné do obce vzdálené 12 km. Otec šel vycházkovým krokem a ušel 4 km za hodinu. Syn jako sportovec několik kroků šel a několik běžel; dosáhl tak rychlosti 6 km za hodinu. Za jak dlouho měl před sebou otec cestu 2krát delší než syn?

S. Horák

REBUS

Slavný fyzik

Německy:

1 ST 1

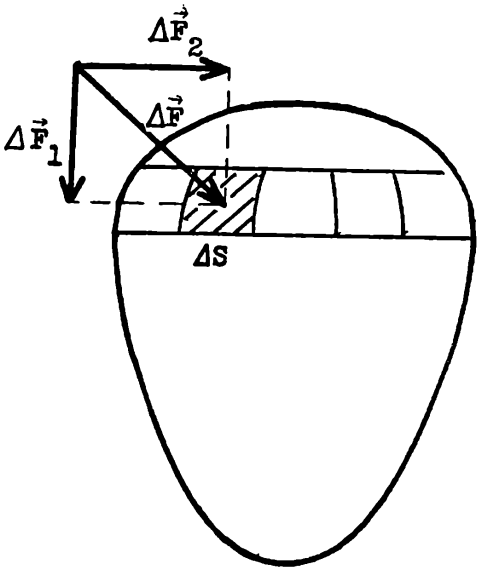
O mořské vodě, o vejci a o Archimédově zákonu

(Dokončení)

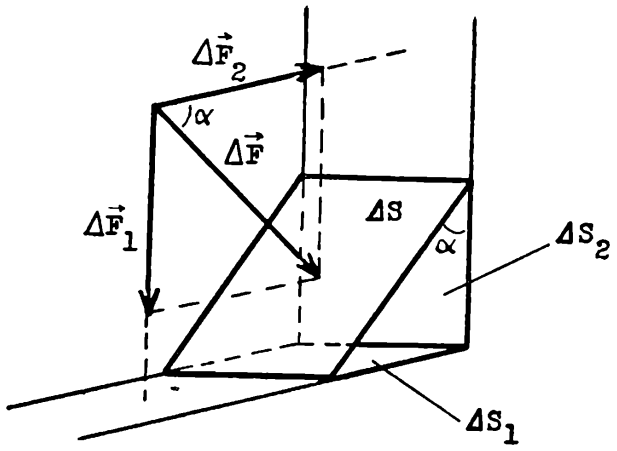
Problém č. 3 vede k otázce, zda by nebylo možno upravit tvar boků plavidla tak, aby bylo poháněno ve vodorovném směru účinkem vodorovné složky výslednice tlakových sil na těleso. Z praxe je známo, že takové řešení tvaru lodi se nikdy nepodařilo. Důležité však je, zda lze teoreticky dokázat, že není možno upravit profil plavidla tak, aby výslednice sil působících na jeho boky nebyla rovna nule. Ukážeme, že takový důkaz lze provést a přitom se podíváme na tlakové poměry v kapalině trochu obecněji. Vrátíme se k příkladu s vejcem, které je úplně ponořeno do solného roztoku, v němž se vznáší. Budeme pro jednoduchost předpokládat, že vejce zaujme v kapalině polohu podle obr. 7.

Nechť na malou plošku ΔS působí tlaková síla ΔF. Síla má obecně šikmý směr. K výsledné vztlakové síle přispívá pouze její svislá složka ΔF_1. Vodorovný pohybový účinek by měla vodorovná složka ΔF_2. Víme, že tlakové síly, které působí na stejně veliké plošky ve stejné hloubce, jsou stejné. Jestliže z povrchu tělesa oddělíme dvěma vodorovnými rovinami velmi úzký pás (obr. 7), pak tlaková síla na dvě stejně veliké plošky v pásu je stejná. Zvolíme šířku pásu tak malou a pás rozdělíme svislými rovinami na tak velký počet dílů, že každý dílek je možno považovat za rovinný. Nyní ukážeme, že součin vodorovné složky ΔF_2 tlakové síly a plošky ΔS je roven součinu tlakové síly ΔF a kolmého průmětu ΔS_2 plošky ΔS do svislé roviny (obr. 8). Platí totiž

$$\Delta S_2 = \Delta S \cos \alpha \,; \quad \Delta F_2 = \Delta F \cos \alpha \,,$$



Obr. 7.



Obr. 8.

a tedy

$$\Delta F \,.\, \Delta S_2 = \Delta F \,.\, \Delta S \cos\alpha\,,$$

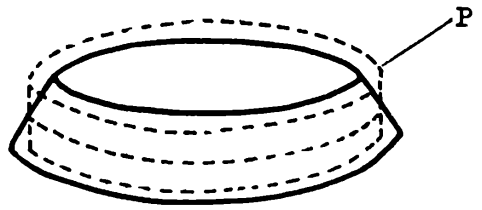
$$\Delta F_2 \,.\, \Delta S = \Delta F \cos\alpha \,.\, \Delta S = \Delta F \,.\, \Delta S \cos\alpha\,.$$

Odtud plyne, že vodorovnou složku výslednice tlakových sil na vyznačený pás můžeme vypočítat tak, že šikmý pás vejcové plochy nahradíme pláštěm válce P (obr. 9). Tento plášť protíná pás v kružnici, jejíž rovina půlí vzdálenost obou podstav pásu. Při výpočtu výslednice tlakových sil na tento plášť musíme uvážit, že tlaková síla na libovolnou část pláště ΔP má velikost

$$\Delta F = p\,\Delta P\,,$$

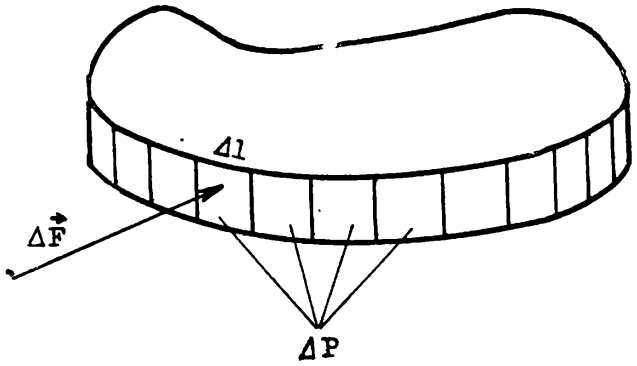
kde p je hydrostatický tlak v místě střední kružnice pláště.

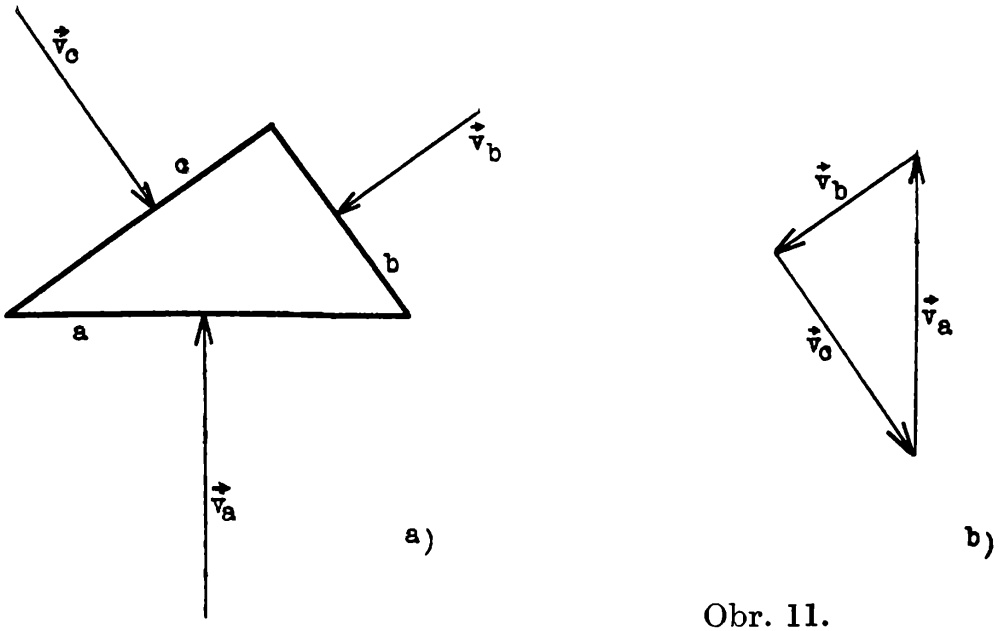
Ukážeme si obecněji, že výslednice vodorovných složek tlakových sil na plášť válce libovolného řezu, který je omezen dvěma vodorovnými rovinami, je rovna nule. K tomu účelu rozdělíme plášť válce svislými úsečkami na malé dílky ΔP tak, že každý dílek je možno považovat za rovinný (obr. 10). (Plošné elementy ΔP nemusí být stejně veliké.) Na každou plošku ΔP působí tlaková síla velikosti $\Delta F = p \,.\, \Delta P$. Tyto



▲ Obr. 9.

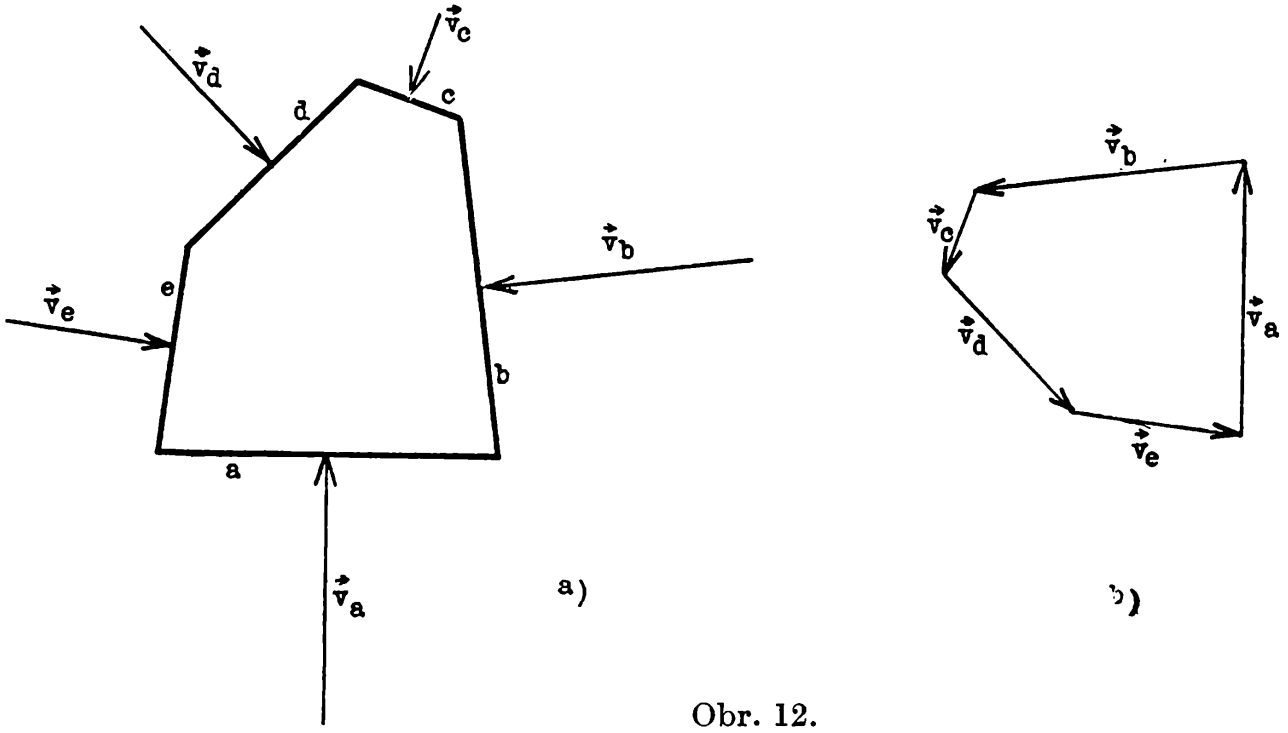
Obr. 10. ▶





Obr. 11.

síly ΔF jsou kolmé na příslušné plošky ΔP. Kdybychom síly ΔF postupně sčítali jako vektory, budou tvořit uzavřený mnohoúhelník. Důkaz o tom provedeme postupně. Nejprve ukážeme, že je roven nule součet vektorů $\vec{\mathbf{v}}_a$, $\vec{\mathbf{v}}_b$, $\vec{\mathbf{v}}_c$, které jsou kolmé ke stranám a, b, c trojúhelníka a jejichž velikosti jsou přímo úměrné délkám stran (obr. 11). Plyne to z této úvahy: Přeneseme vektory $\vec{\mathbf{v}}_a$, $\vec{\mathbf{v}}_b$, $\vec{\mathbf{v}}_c$ tak, jak je vyznačeno v obr. 11b. Vytvoříme tím vektorový mnohoúhelník. Je bezprostředně vidět, že vznikne trojúhelník, který je podobný trojúhelníku abc v obr. 11a [podle věty (*uu*)]. Podobnou úvahu lze pak učinit pro libovolný mnohoúhelník, platí-li pro vektory a strany vztah (obr. 12a, b)



Obr. 12.

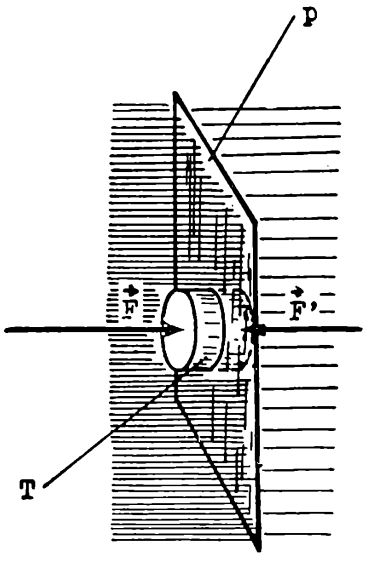
$$|\vec{\mathbf{v}}_a| : |\vec{\mathbf{v}}_b| \quad |\vec{\mathbf{v}}_c| : \text{atd.} = a : b : c : \text{atd.}$$

Vektorový mnohoúhelník vektorů $\vec{\mathbf{v}}_a$, $\vec{\mathbf{v}}_b$, $\vec{\mathbf{v}}_c$ atd. je uzavřený, tj. součet vektorů je roven nule.

Podle obr. 10 vidíme, že tlaková síla na rovinnou plošku ΔP, která je přímo úměrná velikosti plošky, je také přímo úměrná základně Δl, neboť výšky všech plošek jsou stejně veliké. Proto výpočet výslednice tlakových sil na plášť v obr. 10 můžeme převést na součet vektorů ΔF, které působí na mnohoúhelník složený z délkových elementů Δl, přičemž síly jsou kolmé k těmto elementům a jsou přímo úměrné jejich délkám. Vektorový mnohoúhelník těchto sil je roven nule, jak plyne z úvahy v předešlém odstavci. Závěrem můžeme tedy říci, že výslednice vodorovných tlakových sil na pás vejce (obr. 7) je rovna nule.

Závěr, který jsme právě vyjádřili, platí pro celý povrch vejce, neboť celý povrch vejce můžeme rozdělit vodorovnými rovinami na pásy, a pro každý pás platí stejná úvaha. Je-li výslednice vodorovných složek tlakových sil rovna nule pro každý pás, je roven nule také jejich součet. Odtud plyne, že hydrostatický tlak nemůže způsobit v homogenní kapalině pohyb vejce ve vodorovném směru. A totéž platí pro těleso libovolného tvaru, neboť povrch každého tělesa lze vodorovnými rovinami rozdělit na pásy, pro něž platí podobná úvaha jako pro povrch vejce.

Předešlá úvaha platí pro kapalinu v klidu, která má všude stejnou hustotu. Bylo by však možno provést pokus, při němž bychom do nádoby nalili vedle sebe dvě kapaliny nestejné hustoty tak, že rozhraní je svislé. Takový pokus by bylo možno uspořádat podle obr. 13. Při něm je dutina nádoby přepažena tuhým papírem p s otvorem, jímž proniká válcové těleso. Sahají-li kapaliny v obou částech nádoby do stejné výše, působí na válec větší tlaková síla ze strany kapaliny o větší hustotě. Tento výsledek je opět samozřejmý, protože hydrostatický tlak závisí na hustotě kapaliny. V kapalině větší hustoty je tlak v téže hloubce větší. Bez přepážky by se náš pokus nezdařil, neboť po jejím odstranění by nastal pohyb a smíšení kapalin. Kdyby se kapaliny nemísily, rozvrstvily by se nad sebou.



Obr. 13.

Problém č. 4, který pátrá po původu tlaku v kapalině, vede až ke složení látek, a to k mikrostruktuře. Tlak na stěnu nádoby nebo na povrch tělesa, které ponořeno do plynu, je následek chaotického pohybu molekul plynu. Molekuly narážejí na stěnu, při odrazu se mění

hybnost molekuly. Při tom vzniká silový impuls podle vztahu

$$m \,.\, \mathrm{d}v = F \,.\, \mathrm{d}t\,,$$

kde m je hmotnost, $\mathrm{d}v$ změna rychlosti molekuly při odraze, $\mathrm{d}t$ doba, po kterou se rychlost mění. F je průměrná síla, která působí změnu hybnosti molekuly. V určitém časovém intervalu se uskuteční nesmírně veliký počet odrazů molekul, takže pozorujeme jen jejich úhrnný účinek jako měřitelnou tlakovou sílu.

V kapalinách jsou poměry složitější, neboť vedle sil od nárazů molekul kapaliny se uplatňují také jiné mezimolekulární síly, které značně závisí na stlačení kapaliny. Je to způsobeno tím, že v kapalině jsou vzdálenosti molekul podstatně menší než v plynu a odpudivé síly jsou proto v kapalině již při malém zmenšení objemu stlačením nesrovnatelně větší než v plynech.

Vztlaková síla na těleso, které je ponořeno do tekutiny, je ovšem podmíněna existencí tíhového pole. Kdybychom ponořili těleso do plynu v nádobě na zemském povrchu (za atmosférického tlaku), pak nádobu hermeticky uzavřeli a uvedli do beztížného stavu, byl by pak tlak na povrchu tělesa všude stejný (rovný původnímu atmosférickému tlaku), ale vztlaková síla na těleso by byla rovna nule.

Kdybychom podobný pokus provedli s tělesem, které bychom za atmosférického tlaku na povrchu zemském ponořili do kapaliny v nádobě, pak nádobu hermeticky uzavřeli a nádobu uvedli do beztížného stavu, vztlaková síla by opět byla rovna nule. Všude na povrchu tělesa by tlak byl stejný a rovný velmi přibližně původnímu atm. tlaku.

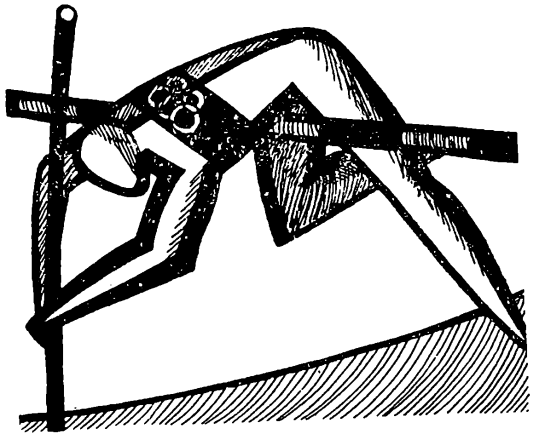
Tento výsledek lze snadno vysvětlit. Vztlaková síla na těleso je způsobena, jak jsme viděli při diskusi otázky č. 1, tím, že na povrch tělesa působí v různých hloubkách různý hydrostatický tlak. U tělesa se svislými bočními stěnami byla vztlaková síla rovna rozdílu tlakových sil na podstavy, nezávisle na tom, v jaké hloubce bylo těleso ponořeno. Tento rozdíl tlakových sil zmizí, je-li soustava uvedena do beztížného stavu. (Čtenář si snadno rozváží, proč by na těleso působil obrovský, na celém povrchu stejný tlak, a zmizel vztlak, kdybychom těleso umístili v ocelové nádobě a otevřenou nádobu ponořili na dno oceánu do hloubky např. 10 km, tam nádobu hermeticky uzavřeli a nádobu uvedli, např. v družici do beztížného stavu.)

E. K.

Text k obr. 6 v čís. 4:

a) V homogenním
b) V nehomogenním
c) V nehomogenním

} tělese { splývají / obecně nesplývají / mohou splynout } působiště T tíhy tělesa G a působiště V výslednice F vztlakových sil.



MO

První výsledky konkursu na návrhy úloh pro MO

Konkurs byl vyhlášen JČMF na jaře roku 1966. Jeho podmínky byly uveřejněny v *Rozhledech matematicko-fyzikálních*, a to v 9. čísle minulého ročníku.

Do 1. listopadu 1966 došlo 132 úloh od 34 autorů, mezi nimiž je řada současných i bývalých účastníků Matematické olympiády. Již v 1. kole letošního 16. ročníku MO účastníci olympiády řeší úlohy, které byly získány na základě konkursu. Přijaté úlohy se odměňují.

Úlohy se postupně recenzují. Návrhy dále zasílejte na adresu

ÚV Matematické olympiády
Praha 1 - Nové Město, Žitná 25

Závěr XV. ročníku MO

VLASTIMIL MACHÁČEK, PF, Praha

Dne 14. května 1966 se konalo v Žilině celostátní závěrečné III. kolo A kategorie XV. ročníku MO. Celkem 57 vybraných úspěšných řešitelů II. kola kategorie A ze všech krajů republiky zde řešilo 4 úlohy v časovém úseku čtyř hodin. Vyhlášeno bylo 20 vítězů a ještě dalších 17 účastníků vyřešilo úspěšně aspoň dvě ze zadaných úloh. Vítězové obdrželi od MŠK hodnotné ceny a diplomy.

Uvedeme jména těchto 20 vítězů; hvězdičkou * označujeme řešitele úloh „Rozhledů matematicko-fyzikálních“:

* 1. *Peter Mederly*, 3d. SVŠ Prievidza,
2. *Jiří Šmerk*, 3c, SVVŠ Kyjov,
* 3. *Pavel Vejvoda*, 2g, SVVŠ W. Piecka, Praha 2,
4. *Miroslav Kosina*, 3a, SVVŠ U balvanu, Jablonec n. N.,
5. *Jiří Rott*, 4b, SPŠ hutnická, Kladno,
* 6. *Petr Kůrka*, 2g, SVVŠ W. Piecka, Praha 2,
7. *Petr Němec*, 3d, SVVŠ Dlouhý lán, Praha,
*až *Pavel Novotný*, 3c. SVVŠ Olomouc - Hejčín,
* 9. *Pavel Polcar*, 1b, SVVŠ Velké Meziříčí,
10. *Bohumil Čapek*, 2g, SVVŠ W Piecka, Praha 2,
*až *Jan Kastl*, 2f, SVVŠ J. Fučíka, Plzeň,
*12. *Miroslav Kolář*, 3d, SPŠ elektro Pardubice, Smetanovo n.,
13. *Václav Koubek*, 2e, SVVŠ Sladkovského, Praha 3,
až *Pavel Novák*, 2c, SVVŠ Štěpánská, Praha 2,
*15. *Zdeněk Slanina*, 3a, SPŠ chem. Brno, Vranovská ul.,
16. *František Hajnovič*, 2a, SVŠ Novohradská, Bratislava,
17. *Vladislav Hyšman*, 3b, SVVŠ Havlíčkova ul., Roudnice n. L.,
18. *Miroslav Sedláček*, 4a, SPŠ elektro Brno,
*až *Jana Štěpánková*, 3d. SVVŠ Slovanské n., Brno,
20. *Jiří Svoboda*, 3a, SVVŠ Voděradská ul., Praha - Strašnice.

P o z n á m k a. Společná místa uvádíme v abecedním pořádku.

Ministerstvo školství a kultury odměnilo vítěze hodnotnými cenami podle jejich vlastního výběru a dále jim poskytlo poukázky na nákup odborné studijní literatury v úhrnné ceně přes 13 000 Kčs. Každý z vítězů obdržel čestný diplom podepsaný prvním náměstkem ministra školství a kultury a předsedou ústředního výboru Matematické olympiády.

U příležitosti III. kola byla v Žilině uspořádána 14. května 1966 odpoledne pro účastníky beseda, kde mimo jiné přednášel prof. dr. M. Harant. V neděli 15. května dopoledne před návratem byl výlet na horu Polom, kde ke konci druhé světové války byla svedena velká bitva.

Krajské a okresní výbory matematické olympiády za spolupráce poboček JČMF organizovaly přípravné přednášky a semináře pro účastníky MO; v některých krajích byla tato činnost velmi rozsáhlá, např. v kraji Severomoravském, Západočeském a Jihomoravském.

Při přednáškách bylo též používáno svazků z edice *Škola mladých matematiků*. Těchto svazků vyšlo již 14 a tři další jsou v tisku. Některé svazky už mají druhá vydání; z nich např. *Výborného: Matematická indukce* bude v XVI. ročníku použita jako pomocná literatura.

V Banské Bystrici se ve dnech 20. června až 9. července konalo celostátní soustředění 91 úspěšných řešitelů MO a FO kategorie B. Dopoledne byly vždy 4 hodiny výuky a většinou i večer dvouhodinová

beseda s odborným námětem z M nebo F. Odpoledne bylo věnováno rekreaci. Žáci byli rozděleni do tří tříd; dvě z nich měly polovinu programu matematickou a polovinu fyzikální. Jedna třída měla program pouze matematický se zaměřením na přípravu k MMO a na výběr mimořádných talentů. Tato „matematická třída" bude zřejmě i v budoucnu zřizována, aby byla rozšířena a prohloubena příprava pro Mezinárodní matematickou olympiádu (MMO). S vybranými účastníky bude ÚVMO v písemném i osobním odborném styku.

Před VIII. MMO se konalo v Štiříně ve dnech 28. 6. až 3. 7. 1966 soustředění 10 žáků, z nichž pak 8 vytvořilo naše reprezentační družstvo pro Sofii. Toto soustředění, i když nemohlo podstatně ovlivnit odbornou připravenost jednotlivců, velmi přispělo k vytvoření dobrého kolektivu družstva.

O výsledku VIII. MMO se dočtete podrobnosti v článku doc. J. Vyšína. Doufejme, že příští ročník Matematické olympiády bude úspěšnější; to v mnohém směru je i v rukou čtenářů Rozhledů!

MMO

Zúčastnili jsme se VIII. Mezinárodní matematické olympiády v Sofii

DOC. JAN VYŠÍN, MFF, Praha

(Pokračování)

4.

Pro zajímavost uvedeme první a třetí úlohu původního návrhu, které byly pro snadnost nahrazeny jinými úlohami.

Místo sovětské úlohy 1 byla původně navržena tato bulharská úloha:

1′. *Žáci jedné třídy uspořádali tři exkurze; každé z nich se zúčastnilo 15 žáků. Sedm účastníků I. exkurze se zúčastnilo také II. exkurze, osm účastníků I. exkurze se účastnilo také III. exkurze. Pět účastníků II. exkurze se zúčastnilo také III. exkurze. Čtyři žáci se zúčastnili všech tří exkurzí.*

a) *Kolik žáků se zúčastnilo jen I., kolik jen II., kolik jen III. exkurze?*
b) *Kolik žáků se zúčastnilo aspoň jedné z těchto tří exkurzí?*

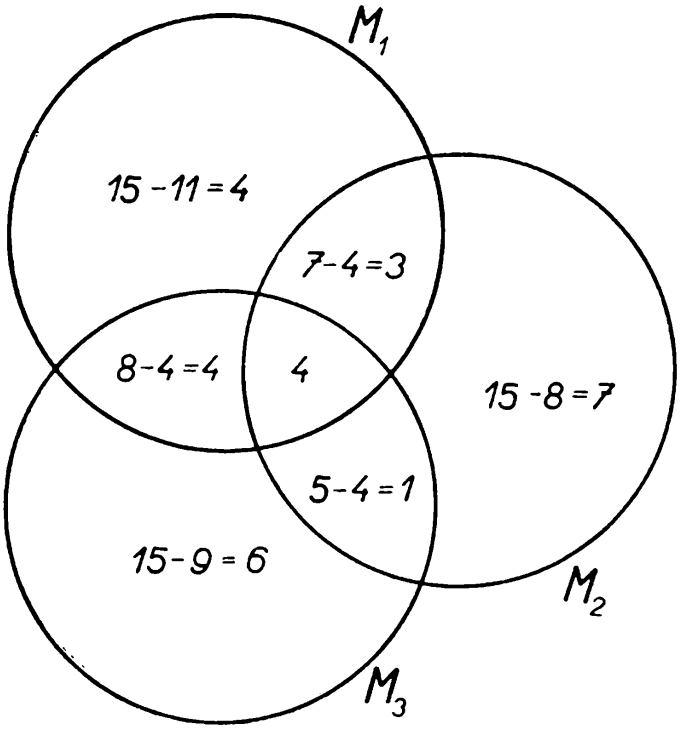
Řešení úlohy lze podat velmi jednoduše bez výpočtů, pomocí Vennových diagramů. Stačí podle textu úlohy vepsat počty žáků do průniků tří množin $\mathbf{M}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Přitom $\mathbf{M}_i$ znamená množinu všech žáků, kteří se zúčastnili i-té exkurze (obr. 5).

Odpověď. a) Jen I. exkurze se zúčastnili 4 žáci, jen II. exkurze 7 žáků, jen III. exkurze 6 žáků. b) Aspoň jedné exkurze se zúčastnilo 29 žáků (počet prvků sjednocení množin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$). Připomínám, že takové úlohy se dávají u nás v pokusném vyučování na experimentálních ZDŠ v Praze, v Brně a v Bratislavě žákům 6. ročníku.

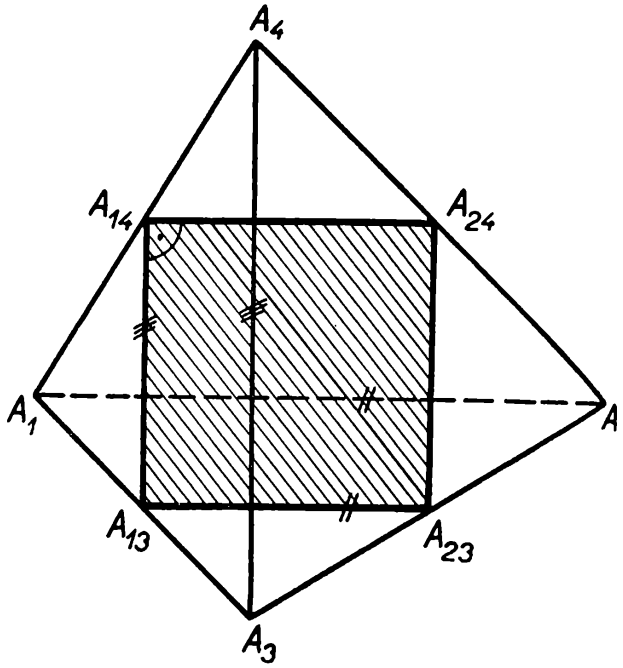
Místo bulharské úlohy 3 byla původně navržena sovětská úloha:

3′. *Každé dvě protější hrany čtyřstěnu jsou navzájem kolmé. Dokažte, že všech šest středů jeho hran leží na kulové ploše.*

Řešení (obr. 6). Budiž $A_1A_2A_3A_4$ daný čtyřstěn. Označme středy hran podle obr. 6. Pak je $A_{23}A_{14} \,//\, A_3A_4 \,//\, A_{23}A_{24}$, $A_{13}A_{23} \,//\, A_1A_2 \,//\, A_{14}A_{24}$. Obrazec $A_{13}A_{23}A_{24}A_{14}$ je tedy rovnoběžník. Protože je $A_1A_2 \perp A_3A_4$, je $A_{13}A_{23} \perp \perp A_{13}A_{14}$, tj. obrazec $A_{13}A_{23}A_{24}A_{14}$ je obdélník. Jeho úhlopříčky jsou shodné a navzájem se půlí. Proto kulová plocha Σ sestrojená nad průměrem $A_{13}A_{24}$ má za průměr i úsečku $A_{14}A_{23}$. Vyměníme-li indexy 2, 4 (1, 3 ponecháme), vidíme, že kulová plocha Σ má za průměr i úsečku $A_{12}A_{34}$. Tím je věta dokázána.



Obr. 5.



Obr. 6.

5.

Složení čs. družstva je patrně z přílohy 1, výsledky, kterých dosáhlo, z přílohy 2. Jak jsme již řekli, seřadíme-li všechna družstva podle počtů dosažených bodů, je ČSSR na osmém, tj. na předposledním

místě. Také podle udělených cen je na předposledním místě: má tři ceny, z toho jednu druhou a dvě třetí (Jugoslávie má také tři ceny, ale dvě druhé a jednu třetí); to je zřejmé z tabulky v příloze 3. Je to bilance na první pohled žalostná, která svědčí, že naše družstvo relativně vzhledem k jiným družstvům má tendenci sestupnou, i když snad naši letošní reprezentanti byli vcelku lepší než loňští. Ale nestačíme rychle se zvyšující úrovni reprezentantů ostatních států (překvapující je např. vzestup NDR). Naproti tomu je třeba uvážit, že náš nejlepší reprezentant Sivák by byl získal se ztrátou jen dvou bodů na každé z předchozích olympiád I. cenu. Dále je nutno uvážit, že bodové rozpětí mezi námi a nejlepším družstvem SSSR bylo loni více než 130 bodů, letos ani ne 80 bodů. Také rozdíly v počtu bodů mezi 6., 7. a 8. družstvem jsou celkem malé. Je vhodné na tomto místě ukázat, čím jsou způsobeny. Na letošní olympiádě vzhledem k poměrně snadným soutěžním úlohám byl žák, který nedosáhl ani 25 bodů, vysloveným outsiderem. Z přílohy 4 je patrné, že my jsme měli takové účastníky tři; naproti tomu Jugoslávie měla jen dva takové žáky, Bulharsko jen jednoho. Zde se již částečně ukazuje jedna z příčin našeho neúspěchu, a to nedobrý výběr reprezentantů.

Chceme-li se dále účastnit mezinárodních MO, a to ne jako podřadné družstvo, musíme vybírat své reprezentanty z žáků, které budeme individuálně a systematicky připravovat. Musíme se zaměřit na žáky mladší, popřát jim možnost získat zkušenosti v mezinárodních soutěžích, tj. dát jim i psychologickou přípravu. I letos se totiž ukázalo jako v minulých letech, že našim reprezentantům *chybějí dobré nervy*, tj. jakýsi klid pro práci, který vyplývá z jistoty, ze znalosti prostředí a ze zkušeností.

Jistě všech našich osm reprezentantů jsou žáci matematicky nadaní. O v š e m t a l e n t s á m b e z d o b r é h o v e d e n í a b e z h o u ž e v n a t é c í l e v ě d o m é p r á c e j e m á l o p l a t n ý, jak ukazují výsledky. To je to, co našim reprezentantům chybí proti žákům z řad jiných zemí. V odborné přípravě se, bohužel, nemůžeme spolehnout na školu. Příprava reprezentantů musí být mnohem náročnější než nynější naše vyučování matematice na středních školách, které mimo jiné je dosti zastaralé a vede žáky často k různým zlozvykům. Tak např. naši žáci hovoří často o tzv. „ekvivalentních úpravách". Z toho se stala už bezobsažná fráze právě tak jako z rčení „důkaz vyplývá z obrácení rozboru", které se s oblibou užívá při řešení konstrukčních úloh. Máme sice definováno, co jsou dvě ekvivalentní rovnice, nerovnosti, soustavy, ale trochu horší je to s „úpravami"; úprava totiž není matematický pojem.

Jiný nešvar, který si žáci přinášejí pravděpodobně ze škol a který se projevuje nepříznivě v MMO je jakási *„bezuzdná psavost"* — *„počtářství"* v špatném slova smyslu. P o č í t a j í č a s t o c e l k e m b e z-

hlavě, popíší spoustu papíru, ale bez výsledku. Stále opakujeme, že matematika je věcí uvažování kombinovaného s experimentováním (to je našim žákům také cizí!). Začneme-li se topit např. při řešení soutěžní úlohy v složitých výpočtech, ukazuje to, že nastoupená cesta asi není vhodná a vyplatí se uvažovat o jiné možnosti postupu.

Vrátíme se však ještě stručně k nedostatkům našich řešení soutěžních úloh VIII. MMO. Je opravdu neodpustitelné, že naši žáci chybují v důkazu matematickou indukcí. Vždyť jde o matematické „řemeslo", které by měl ovládat každý průměrný středoškolák.

Z řešení našich žáků je dále zřejmé, že i logická stránka výuky se zanedbává. Je to vidět i na jejich vyjadřování, které je nedbalé, často nesprávné — zřejmý to odraz toho, jak se mluví ve školách v hodinách matematiky. Mnohá zla působí fráze o „ekvivalentních úpravách", o které jsme se už zmínili. Našim reprezentantům lze také těžko odpustit jejich nedostatky v stereometrii (ani jeden z našich osmi žáků nerozřešil úlohu 3 zcela správně).

Žáci nadaní v matematice se často pachtí za studiem tzv. vyšší matematiky, jejího aparátu pak užívají nevhodně, nebo dokonce nesprávně, ale středoškolskou látku do hloubky neznají. Přitom „středoškolská matematika" v pojetí mezinárodních olympiád je užší než v pojetí našich osnov. Nepřicházejí tu úlohy z analytické geometrie, z aritmetiky komplexních čísel (tato témata nejsou v osnovách řady zúčastněných zemí), málo se vyskytují i úlohy z teorie čísel, zato se věnuje dosti pozornosti *kombinatorice, kombinatorické geometrii, stereometrii*, kde je často třeba celkem jen skrovného aparátu, zato tím více zkušenosti, logického výcviku a experimentálně analytického přístupu k řešení úlohy.

Abychom však nehromadili jen výtky. Musíme přiznat, že naši žáci mají často dobré nápady, bohužel, je nedovedou propracovat a přivést k úspěšnému konci. Můžeme říci bez nadsázky, že čest našeho družstva zachránil letos náš nejmladší účastník *Bohuš Sivák*. Právě on ukázal řadu dobrých nápadů a jeho řešení jsou přes jeho mládí velmi dobře propracována a formulována. To bylo také oficiálně oceněno zvláštním uznáním.

(Pokračování)

Řešení rebusů. Str. 225: Planck, Pascal, Galilei; str. 241: Einstein.

Oprava. Ředitelství MO opravuje: na str. 191 v č. 4 má nerovnost (15) znít $CX_0 < CX$, $DX_0 < DX$. — V pomocné větě P na str. 190 vypusťte slovo „právě".

RŮZNÉ

Jak to opravdu bylo

u přijímacích zkoušek z matematiky na stavební fakultě ČVUT

FRANTIŠEK KEJLA, ČVUT, Praha

V minulém ročníku byly v Rozhledech uveřejněny typy úloh, jaké asi bylo možno očekávat v písemné části přijímacích zkoušek z matematiky na stavební fakultě ČVUT. Pro porovnání přinášíme dnes úlohy, které byly skutečně u těchto zkoušek zadány. Jak studenti, tak i učitelé mohou si tak nejlépe udělat představu o tom, co se při vstupu na techniku od uchazečů vyžaduje.

Písemná zkouška obsahovala zpravidla čtyři úlohy, z nichž jedna byla vždycky slovní, jedna z analytické geometrie a jedna na použití trigonometrie a logaritmů. Nejhorší zkušenosti jsme měli se slovními úlohami, přestože většina z nich byla z látky probírané už na devítiletce. Či snad ty špatné zkušenosti byly právě proto?

Každou z níže uvedených úloh řešilo zhruba 200 uchazečů. Katastrofální výsledky slovních úloh nejlépe dokumentuje fakt, že úlohu o lihu (úloha č. 1) vyřešilo správně 11, tj. slovy jedenáct uchazečů!! Jen o málo lépe dopadla úloha č. 3 a úloha č. 5 (jen 14, resp. 15 správných řešení). Skoro bych nejraději zvolal s Hamletem „. . . je něco shnilého. . .“

Vezměte si z toho ponaučení a uvědomte si, že matematika není jen bezduché počítání, dření vzorců zpaměti a dosazování do nich.

A teď už si zkuste vypracovat písemku z matematiky: Z každé ze skupin A, B, C, D si zvolte po jedné úloze a pusťte se do práce.

A. *Slovní úlohy*

1. V jakém poměru je třeba smísit 40procentní líh s lihem 80procentním, aby směs obsahovala 52 procent čistého lihu?

[7 : 3]

2. V kterém okamžiku mezi 12. a 13. hodinou svírají spolu hodinové ručičky pravý úhel? Výpočet proveďte s přesností na sekundy!

[Dvě řešení: a) $12^{h}16^{min}22^{s}$; b) $12^{h}49^{min}05^{s}$]

3. Z místa A vyjel první cyklista do B. Současně s ním vyjel druhý cyklista z místa B do A. Setkali se za 20 minut a stejnými rychlostmi pokračovali dále. Druhý cyklista dorazil pak do A o 9 minut později než první cyklista do B. Jak dlouho trvala každému z nich celá jízda?

[36 min., resp. 45 min.]

4. Výroba určitého druhu zboží se zvyšuje každý rok o $\frac{1}{8}$ proti výrobě téhož druhu zboží v předcházejícím roce. Ve kterém roce dosáhne výroba tohoto druhu zboží poprvé alespoň dvojnásobku výroby z roku 1960?

[V roce 1966]

5. Dva vlaky jedou proti sobě po rovnoběžných kolejích, jeden rychlostí 40 km/hod., druhý rychlostí 50 km/hod. Cestující ve druhém vlaku si všiml, že první vlak projel kolem něho za 7 vteřin. Vypočtěte, jak dlouhý je první vlak.

[175 m]

B. *Úlohy z trigonometrie*

6. Vypočtěte obsah trojúhelníka, je-li dáno (při obvyklém označení) $v_c = 37{,}54$, $\alpha = 47°36'$, $\beta = 58°45'$. Výsledný vzorec pro obsah upravte na tvar vhodný k logaritmování.

$$\left(P = \frac{v^2 \,.\, \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha \sin\beta} \doteq 1071\right)$$

7. Do koule o poloměru r je vepsán rotační kužel, jehož osový řez má při vrcholu úhel α. Vypočtěte objem kužele. Výsledný vzorec upravte k logaritmování!

$$\left(V = \tfrac{2}{3}\pi r^3 \,.\, \sin^2\alpha \,.\, \cos^2\frac{\alpha}{2} = \tfrac{8}{3}\pi r^3 \,.\, \sin^2\frac{\alpha}{2} \,.\, \cos^4\frac{\alpha}{2}\right)$$

8. Průměr podstavy kosého kruhového kužele je $d = 10{,}5$ cm, jeho nejdelší površka $a = 12{,}1$ cm, nejkratší površka $b = 8{,}9$ cm. Vypočtěte objem kužele. S použitím logaritmických tabulek!

[$V \doteq 250$ cm^3]

9. S vrcholu hory je vidět na jezeře člun v hloubkovém úhlu $\alpha = 47°27'$ a s vrcholu televizní vysílačky, která je na vrcholu hory a je 200 m ($= v$) vysoká, je vidět týž člun v hloubkovém úhlu $\beta = 59°13'$. Vypočítejte, jak vysoko je temeno hory nad hladinou jezera.

$$\left(x = \frac{v \,.\, \sin\alpha\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \doteq 370 \text{ m}\right)$$

C. *Úlohy z analytické geometrie*

10. Napište rovnici kružnice o poloměru $r = 2$, která má střed na přímce $4x + 3y = 2$ a dotýká se osy x.

[Dvě řešení: a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$; b) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$]

11. Určete souřadnice bodu M, který leží na přímce $x - 3y = 1$ a má od bodů $A\ (-3; 7)$, $B\ (2; -6)$ stejnou vzdálenost.

[$M\ (-20; -7)$]

12. Čtverec má úhlopříčku AC, $A\ (10; -2)$, $C\ (0; -4)$. Vypočtěte souřadnice zbývajících vrcholků čtverce.

[$B\ (4; 2)$, $D\ (6; -8)$]

13. Je dána křivka $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$ a přímka $y = -2x$. Napište rovnice tečen dané křivky, které jsou rovnoběžné s danou přímkou.

[a) $y = -2x + 5$; b) $y = -2x - 15$]

14. Trojúhelník má vrcholy $A\ (-2; 5)$, $B\ (4; -9)$, průsečík jeho výšek je v bodě $V\ (1; -1)$. Určete souřadnice třetího vrcholu.

[$C\ (134; 56)$]

D. *Doplňkové úlohy*

15. Pro která reálná čísla x platí

$$\log (5 + 3\sqrt{x}) + \log (2\sqrt{x} - 1) = 1 + \log (\sqrt{x} + 2{,}5)\,.$$

[$x = 6{,}25$]

16. Logaritmicky vypočtěte x z rovnice

$$10{,}2x = 2{,}47\,.\,0{,}645\,.\,x^{-2}\,.\,\sin 5°45'$$

[$x \doteq 0{,}25$]

17. Určete všechny úhly, které vyhovují rovnici

$$\cos 2x - 2\cos x = 0{,}5\,.$$

Výsledek vyjádřete v obloukové míře.

$$\left(x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\,,\ k \text{ celé}\right)$$

18. Bez tabulek vypočtěte $\sin 2\alpha$, je-li $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

[$\frac{4}{5}$]

19. Upravte na zlomek s reálným jmenovatelem

$$\frac{3 + 2i}{12 - 5i} - \frac{1 - i}{1 + 5i}\,.$$

$$\left[\frac{4 + 6i}{13}\right]$$

20. Pro která reálná čísla x platí

$$\sqrt{5x + 1} - \sqrt{2x + 3} = 1\,.$$

[$x = 3$]

V dalším čísle otiskneme ukázkové příklady u přijímacích zkoušek na stavební fakultu z fyziky a deskriptivní geometrie.

RECENZE

Živný Fr., Lepil Oldř., Praktická cvičení z fyziky

Praha, SPN 1966, 267 stran, cena vázaného výtisku Kčs 10,40.

Kniha, jež je učebnicí pro střední všeobecně vzdělávací školy, je vhodnou příručkou pro vedoucí a účastníky fyzikálních laboratorních cvičení.

Po stručném úvodu o organizaci práce, bezpečnosti a zpracování výsledků získaných měřením je výklad o zkráceném počítání s úplnými a neúplnými čísly, načež jsou vhodným způsobem objasňovány chyby měření, určování možné a střední chyby aritmetického průměru a stanovení relativní chyby veličin získaných výpočtem z veličin měřených. V závěru prvé části jsou uvedeny požadavky na zpracování protokolu a připojeno pět podrobných vzorových protokolů měření.

Část druhá obsahuje podrobné návody k fyzikálním měřením z různých oborů fyziky, sestavené podle schématu: 1. Potřeby, 2. Výklad a postup měření, 3. Záznam písemný (zpravidla ve formě tabulky), 4. Poznámky, upozornění a diskuse, resp. kritika metody.

Je zde celkem asi 50 pečlivě volených úloh (z mechaniky a akustiky 25, z termiky 12, nauky o elektřině 23 a optiky 7) vybraných z moderního hlediska.

Část třetí obsahuje velmi prospěšné a pěkné uvedení do práce s audiovizuálními pomůckami (dia- a epiprojektory, filmový promítací přístroj, gramofon a magnetofon), v němž se žáci nejen seznamují s principem a konstrukcí těchto pomůcek, nýbrž i s jejich obsluhou a údržbou. Následuje výklad o fotografické technice (pozitiv, negativ, zvětšenina) a konstrukční práce z elektroniky (usměrňovač, přijímač elektronkový a tranzistorový s přímým zesílením, fotografické a časové relé). Závěrem je uvedena řada návodů k pozorováním astronomickým a meteorologickým.

Kniha je opatřena 165 názornými obrázky, schématy a mnoha tabulkami, jež vhodně doplňují a objasňují ucelený a metodicky správný výklad.

Doporučujeme vřele tuto knížku všem zájemcům o praktickou fyziku, žákům a knihovnám učitelským i žákovským.

E. Ř.

K jednomu tvaru parametrických rovnic přímky

JAN ŠVANDRLÍK, Hořovice

Úkol článku lze stručně charakterizovat asi takto: Je třeba seznámit čtenáře s jedním tvarem parametrických rovnic přímky, vyložit jejich význam a ukázat, jak jich lze s výhodou použít při důkazu jedné důležité planimetrické věty týkající se vlastnosti kružnice.

Celý výklad je veden za předpokladu, že v rovině je zvolena soustava pravoúhlých kartézských souřadnic a opírá se o minimální znalosti z analytické geometrie v rovině, jako je vzdálenost dvou bodů v rovině, rovnice přímky v obecném a směrnicovém tvaru a konečně rovnice kružnice v tzv. středovém tvaru. Pro přesnost vyjadřování připomínám jednu definici.

Definice 1. Analytickým vyjádřením geometrického útvaru v rovině nazýváme rovnici (popř. soustavu rovnic a nerovností) obsahující proměnné (neznámé) x a y, kterou splňují souřadnice x, y všech bodů tohoto útvaru, a jen těchto bodů.

Poznámka 1. Lze-li udat dvě rovnice $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, z nichž první vyjadřuje souřadnici x libovolného bodu rovinného geometrického útvaru U jako funkci jiné (pomocné) proměnné, např. t a druhá totéž pro souřadnici y, říkáme, že jsme útvar U vyjádřili parametricky. Proměnnou t v obou zmíněných (tzv. parametrických) rovnicích nazýváme *parametrem*. Je to obvyklý způsob analytického vyjadřování křivek v technické praxi, zejména tam, kde by snaha vyjádřit jedinou rovnicí vztah mezi oběma souřadnicemi x, y libovolného bodu křivky vedla k rovnicím příliš složitým, např. u cykloidy nebo evolventy kružnice apod.

Zkoumejme nyní geometrický význam soustavy rovnic

$$x = \varphi(t) = x_0 + t \,.\, \cos\alpha\,, \qquad (I)$$
$$y = \psi(t) = y_0 + t \,.\, \sin\alpha\,,$$

kde x_0, y_0 jsou daná reálná čísla, α libovolný orientovaný úhel takový, že

$$\alpha \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}\,,$$

m celé číslo a kde t může nabývat všech reálných hodnot.

Jednoduchými úpravami rovnic (I) nejprve ukážeme, splňují-li čísla x, y rovnice (I), splňují také rovnici

$$y = k \,.\, x + q\,,\ k = \operatorname{tg}\alpha\,, \qquad (II)$$

kde q je reálné číslo. Z prvé rovnice vyjádříme parametr

$$t = \frac{x - x_0}{\cos\alpha}$$

a dosadíme do druhé. Dostaneme

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{\cos\alpha} \,.\, \sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \,.\, x + y_0 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\, x_0\,.$$

Označíme-li konečně

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = k\,,\ y_0 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\, x_0 = q\,,$$

je skutečně

$$y = k \,.\, x + q\,,$$

jak jsme chtěli dokázat.

Vzhledem k hodnotě koeficientů k, q v předcházející rovnici máme dokázáno, že každý bod $Q\ [x, y]$, jehož souřadnice splňují rovnice (I), je také bodem přímky, jejíž směrový úhel je α a která prochází bodem $P\ [x_0, y_0]$.

Dále dokážeme následující tvrzení: splňuje-li dvojice čísel x, y rovnici přímky o směrovém úhlu α,

$$\alpha \neq (2m+1)\frac{\pi}{2}\,,$$

m celé číslo a procházející bodem $P\ [x_0, y_0]$, tj. rovnici tvaru

$$y = k \,.\, x + q\,,$$

splňují čísla x, y rovnice soustavy (I).

Protože přímka $y = k \,.\, x + q$ prochází podle předpokladu bodem $P\ [x_0, y_0]$, musí platit $y_0 = k \,.\, x_0 + q$. Odečtením obou rovnic dostaneme

$$y - y_0 = k\,(x - x_0)\,. \qquad (III)$$

Uvážíme-li, že

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

dostaneme po úpravě

$$(y - y_0) \cos \alpha = (x - x_0) \sin \alpha . \qquad \text{(IV)}$$

Rovnici (IV) však splňují každá dvě čísla x, y, pro něž platí

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t \,.\, \cos \alpha \text{ a tedy } x = x_0 + t \,.\, \cos \alpha , \\ y - y_0 &= t \,.\, \sin \alpha \text{ a tedy } y = y_0 + t \,.\, \sin \alpha , \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

kde t je libovolné reálné číslo.

Shrneme-li předcházející úvahy, můžeme vyslovit větu:

Věta 1. Analytickým vyjádřením přímky, která má směrový úhel α a která prochází bodem $P\,[x_0, y_0]$, jsou rovnice

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \,.\, \cos \alpha , \\ y &= y_0 + t \,.\, \sin \alpha , \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

kde t probíhá všechna reálná čísla.

Poznámka 2. V předpokladu věty 1 úmyslně nevylučujeme možnost

$$\alpha = (2m + 1) \frac{\pi}{2},$$

m celé číslo, neboť rovnice (I) mají v takovém případě tvar

$$x = x_0 ,$$

$$y = y_0 + t \text{, resp. } y = y_0 - t$$

a představují přímku procházející bodem $P\,[x_0, y_0]$, rovnoběžnou s osou y, která nemá směrnici, a proto ji nelze vyjádřit ve směrnicovým tvaru (II).

Poznámka 3. Geometrický význam parametru t v rovnicích (I) určíme jejich jednoduchými úpravami. Uvedeme je nejprve na tvar

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t \,.\, \cos \alpha , \\ y - y_0 &= t \,.\, \sin \alpha . \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

Jejich umocněním na druhou a sečtením dostaneme

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = t^2 \,.\, (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) . \qquad \text{(VI)}$$

Užitím známého vztahu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ dostáváme konečně

$$|t| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \qquad \text{(VII)}$$

což znamená, že absolutní hodnota parametru t libovolného bodu $Q\,[x, y]$ je číselně rovna vzdálenosti bodů $P\,[x_0, y_0]$ a $Q\,[x, y]$. Říkáme proto stručně, že v parametrických rovnicích přímky (I) je parametrem délka (velikost) úsečky. Toho lze s výhodou použít při řešení úloh týkajících se velikosti úsečky, dělícího poměru bodů na přímce, nebo k analytickému vyjádření úsečky (resp. polopřímky), doplněním rovnic (I) podmínkou, aby t nabývalo všech reálných hodnot určitého číselného intervalu.

Poznámka 4. O znaménku parametru t bodu Q přímky rozhoduje to, na které z obou polopřímek se společným počátkem v bodě $P\,[x_0, y_0]$ bod Q

leží. Leží-li dva body $Q_1 \neq P$, $Q_2 \neq P$ na opačných polopřímkách, mají jejich parametry t_1, t_2 opačná znaménka, leží-li na téže polopřímce, mají stejná znaménka. Jejich vzdálenost je však v obou případech dána výrazem $d = |t_2 - t_1|$.

Příklad 1. Určete velikost d úsečky, kterou vytínají osy souřadné na přímce q, jejíž směrový úhel je $\alpha = 120°$ a která prochází bodem

$$P\,[-2;\,4]\,.$$

Řešení. Přímku q vyjádříme parametricky ve tvaru (I), určíme parametry t_1, t_2 jejích společných bodů Q_1, Q_2 s osami souřadnými a podle poznámky 4 určíme vzdálenost d.

Parametrické rovnice přímky jsou

$$x = -2 - \tfrac{1}{2}t\,,$$

$$y = 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\,.$$

Parametr t_1 společného bodu Q_1 přímky s osou x určíme z podmínky $y = 0$, odkud

$$t_1 = -\frac{8}{\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{3}}{3}\,.$$

Podobně z podmínky $x = 0$ určíme parametr t_2 společného bodu Q_2 přímky s osou y. Dostaneme $t_2 = -4$.

Hledaná velikost pak je

$$d = |t_1 - t_2| = \left|-\frac{8\sqrt{3}}{3} + 4\right| = \tfrac{4}{3}(2\sqrt{3} - 3)\,.$$

Příklad 2. Vypočtěte vzdálenost d bodu $P\,[3;\,1]$ od přímky p, jejíž rovnice ve směrnicovém tvaru je

$$y = -\tfrac{3}{4}x - 3\,.$$

Řešení. Vyjádříme parametricky přímku q, procházející bodem P a kolmou na přímku p. Absolutní hodnota parametru t, příslušného k patě Q této kolmice, bude již hledanou vzdáleností.

Z podmínky kolmosti přímek p, q dostáváme pro přímku q

$$\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{4}{3} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,,$$

odkud snadno určíme

$$\sin\alpha = \tfrac{4}{5}\,,\quad \cos\alpha = \tfrac{3}{5}\,.$$

Přímka q má pak analytické vyjádření

$$x = 3 + \tfrac{3}{5}t\,,$$

$$y = 1 + \tfrac{4}{5}t\,.$$

Pro společný bod Q přímek p, q musí platit

$$1 + \tfrac{4}{5}t = -\tfrac{3}{4}(3 + \tfrac{3}{5}t) - 3\,.$$

Řešením této rovnice dostaneme $t = -5$, a tedy

$$d = |t| = |-5| = 5\,.$$

Předcházejících výkladů využijeme k důkazu jedné vlastnosti kružnice. Zmíněnou vlastnost vyjádříme větou, jejíž důkaz provedeme metodou souřadnic.

Věta 2. V rovině nechť je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a dále pevný bod P. Vedeme-li bodem P libovolnou sečnu q kružnice k, protínající tuto kružnici v bodech Q_1, Q_2, je hodnota součinu $PQ_1 \,.\, PQ_2$ pro každou takovou sečnu konstantní.

Důkaz. Body S, P, Q_1, Q_2 nechť mají souřadnice

$$S\,[x_s, y_s]\,,\ P\,[x_0, y_0]\,,\ Q_1\,[x_1, y_1]\,,\ Q_2\,[x_2, y_2]\,.$$

Analytickým vyjádřením kružnice $k \equiv (S, r)$ je potom rovnice

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2\,.$$

Sečnu q lze analyticky vyjádřit rovnicemi

$$x = x_0 + t \,.\, \cos\alpha\,,$$
$$y = y_0 + t \,.\, \sin\alpha\,.$$

Tvrzení věty lze pokládat za správné, dokážeme-li, že nezávisle na α pro parametry t_1, t_2 bodů Q_1, Q_2 přímky q platí $t_1 \,.\, t_2 = m$, kde m je konstanta. Čísla t_1, t_2 vyjadřují totiž v absolutní hodnotě velikosti úseček PQ_1, PQ_2. Podaří-li se nám dokázat, že je konstantní hodnota součinu $t_1 \,.\, t_2$, bude tím současně dokázáno, že také součin

$$|t_1 \,.\, t_2| = |t_1| \,.\, |t_2| = PQ_1 \,.\, PQ_2$$

je konstantní.

Parametry t_1, t_2 bodů Q_1, Q_2 sečny q určíme z podmínky, že jsou to současně také body kružnice k, tzn., že musí platit

$$[(x_0 + t \,.\, \cos\alpha) - x_s]^2 + [(y_0 + t \,.\, \sin\alpha) - y_s]^2 = r^2\,,$$

což lze přepsat

$$[(x_0 - x_s) + t \,.\, \cos\alpha]^2 + [(y_0 - y_s) + t \,.\, \sin\alpha]^2 = r^2$$

a odtud po úpravě

$$t^2\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2t\,[(x_0 - x_s)\cos\alpha + (y_0 - y_s)\sin\alpha] + \\ + (x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2 - r^2 = 0\,, \qquad \text{(VIII)}$$

což je kvadratická rovnice pro t. Použijeme-li dále vztahů, že

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,,\ (x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2 = d^2\,,$$

kde d je vzdálenost PS, lze rovnici (VIII) přepsat do tvaru

$$t^2 + 2t\,[(x_0 - x_s)\cos\alpha + (y_0 - y_s)\sin\alpha] + d^2 - r^2 = 0\,. \qquad \text{(IX)}$$

Označíme-li konečně $m = d^2 - r^2$, plyne z vlastností kořenů t_1, t_2 kvadratické rovnice (IX) v normovaném tvaru vztah

$$t_1 \,.\, t_2 = d^2 - r^2 = m = \text{konst.}$$

Tím je důkaz věty 2. proveden.

Definice 2. Číslo $m = d^2 - r^2$ nazýváme *mocností bodu* P ke kružnici $k \equiv (S, r)$, kde d je vzdálenost bodu P od středu S kružnice k a r je poloměr této kružnice.

Poznámka 5. Je-li $d > r$, tzn. je-li P vnějším bodem kružnice k, je z definice 2 ihned vidět geometrický význam čísla m. V takovém případě je $m = \overline{PT}^2$, kde T je dotykový bod tečny vedené z bodu P ke kružnici k.

Cvičení.

Dokažte následující větu: Pro mocnost $m = d^2 - r^2$ bodu P ke kružnici $k \equiv (S, r)$ platí:

a) je-li $PS > r$, pak $PQ_1 . PQ_2 = m > 0$, kde Q_1, Q_2 jsou společné body kružnice k s libovolnou sečnou procházející bodem P,

b) je-li $PS = r$, pak $PQ_1 . PQ_2 = m = 0$,

c) je-li $PS < r$, pak $-PQ_1 . PQ_2 = m < 0$.

Přesvědčte se, že tvrzení a), b), c) lze obrátit.

Vznik a vývoj strojů na zpracování informací

INŽ. VASILIJ ČAPLA, Praha

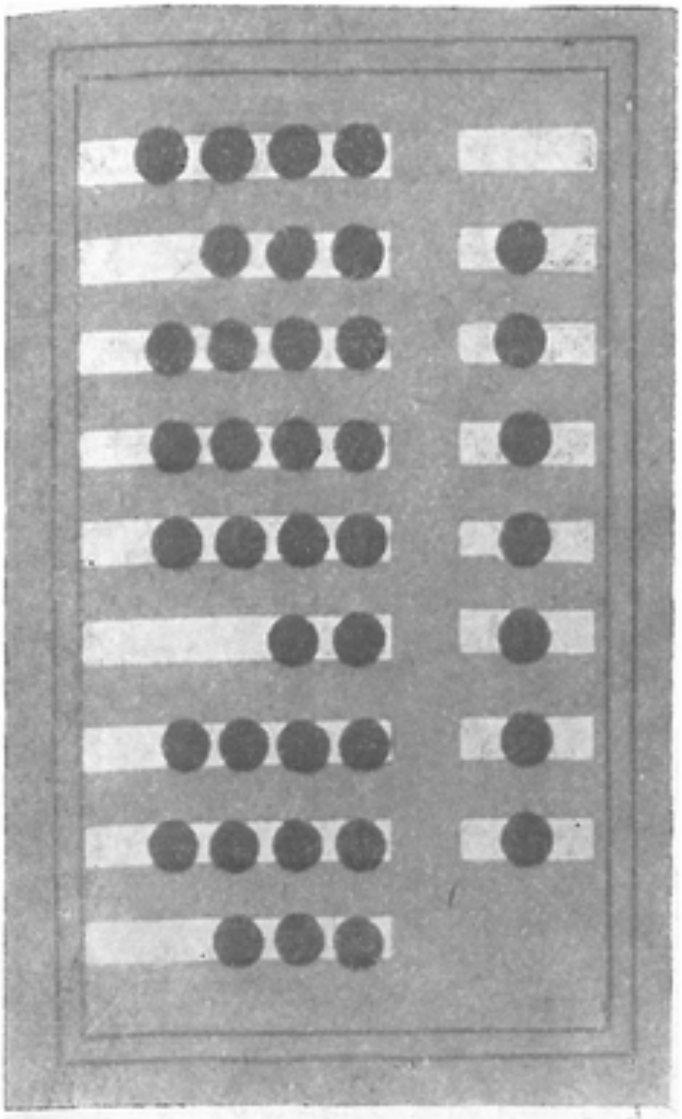
Část prvá

Počitadla, stolní počítací stroje, děrnoštítkové stroje

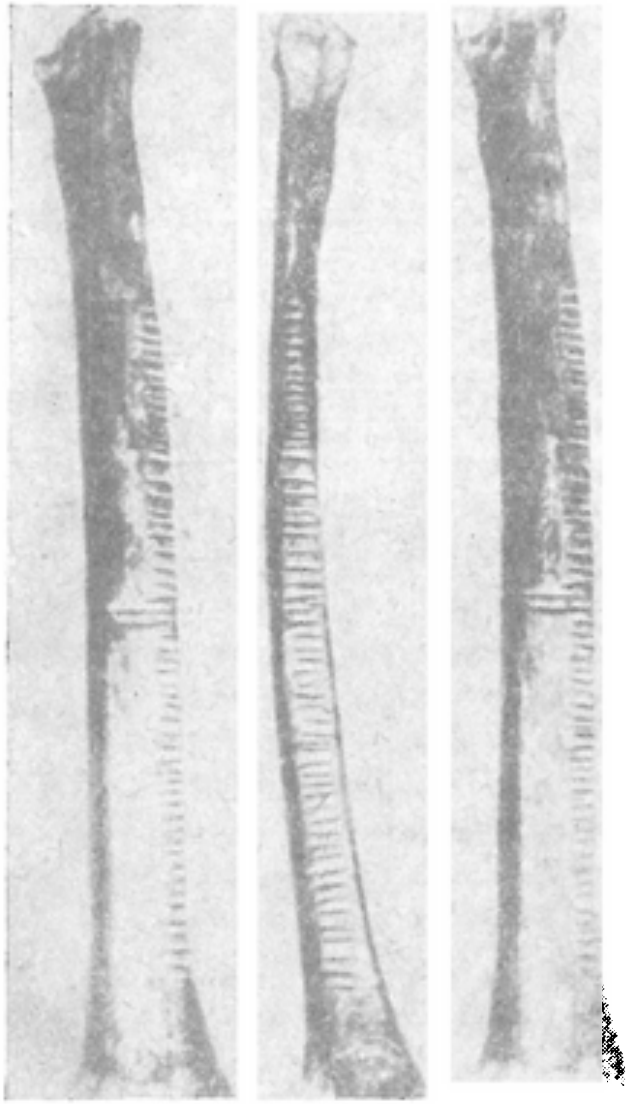
Počítání zpaměti bylo vždy spojeno s určitou námahou v myšlení a představivosti. Proto se člověk snažil pomoci si zhmotněním početního výkonu např. tím, že při sčítání používal prstů na rukou i na nohou, nebo řadil kamének ke kaménku, až si konečně sestavil první technickou pomůcku — počitadlo. S takovým počitadlem setkáváme se již asi 3000 let před n. l. v Číně. Bylo to počitadlo *suán-pân* a podobné japonské *soroban*. Počítací známky byly ve tvaru kotouče z kosti nebo ze slonoviny a pohybovaly se na tenké bambusové tyči nebo na drátě. Na podobném principu byl sestrojen *abakus* (obr. 1), kterého používali staří Řekové a Římané. Protože kořen slova abak-us je arabského původu, lze předpokládat, že toto počitadlo je též arabského původu. Do stejné skupiny počitadel patří i *ruské ščoty*, používané dodnes v Sovětském svazu vedle kalkulačních strojů. Na těchto ščotech lze sčítat, odečítat, násobit i dělit, a to vše dokáže sovětský účetní i obyčejný pracovník v obchodě s velkým mistrovstvím.

Ve Věstonicích na Moravě byl nalezen r. 1937 záznam z paleolitu, tj. ze starší doby kamenné, asi na 18 cm dlouhé kosti mladého vlka, na níž je vyříznuto 55 hlubokých zářezů (vrubů) (obr. 2).

V sedmnáctém století se objevují první sčítací a kalkulační stroje. Název *kalkulační stroj* pochází od latinského slova kalkulus = kamének; je to totiž první pomůcka při počítání. Do r. 1958 panoval názor,



Obr. 1. Obrázek počítací pomůcky ABAKUS.

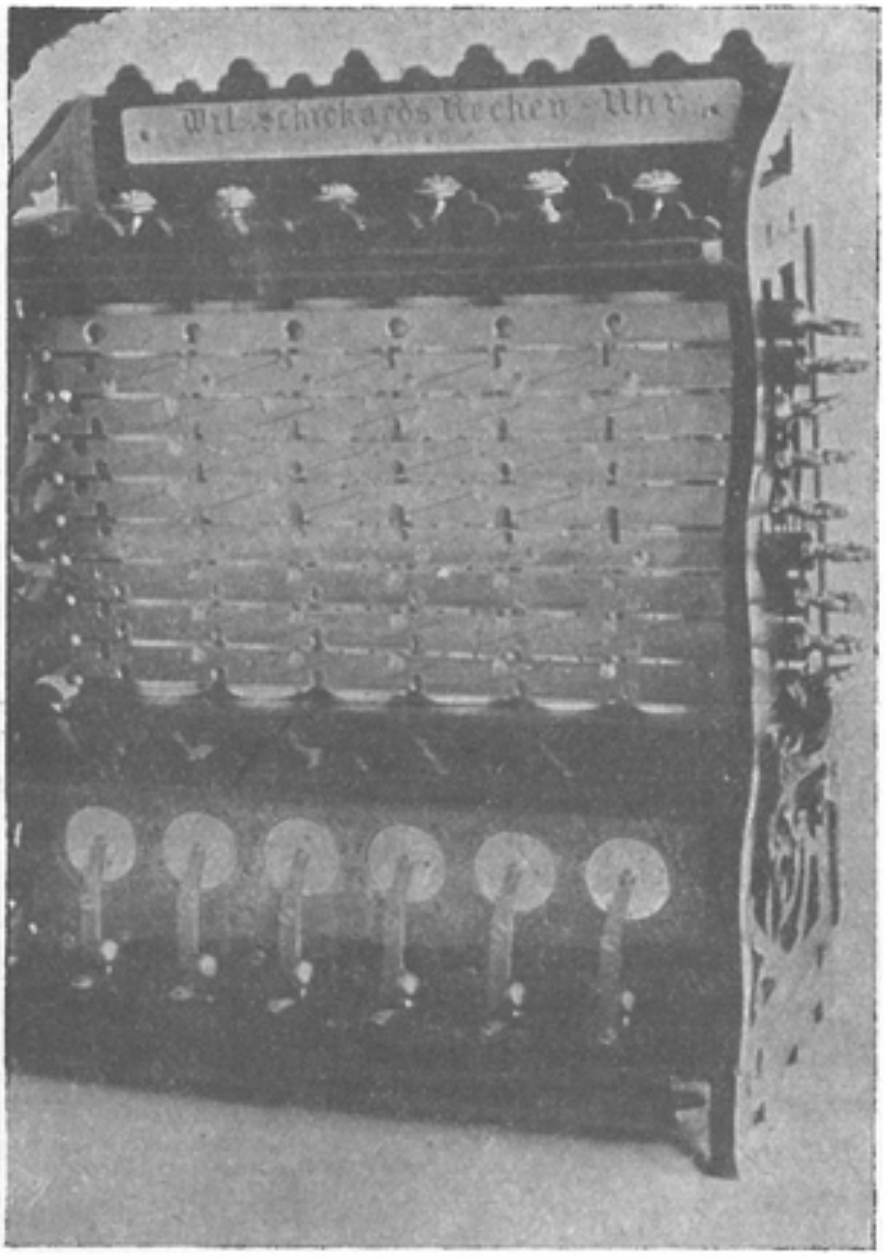


Obr. 2. Kosti mladého vlka s 55 zářezy.

že Blaise Pascal sestrojil v r. 1642 ve svých devatenácti letech „první" sčítací stroj na principu ozubených koleček, používaných v té době u hodinových mechanismů. Různí mechanici vyrobili asi 50 takových sčítacích strojů, které zevnějškem se někdy liší, neboť každý mistr chtěl dát svému výrobku jiný vzhled.

V r. 1958 byla prozkoumána Keplerova pozůstalost. V písemnostech, v nichž byla nalezena perokresba a dopis Keplerova přítele Wilhelma Schickarda, profesora matematiky a astronomie na universitě v Tubinkách (Tübingen) u Stuttgartu jsme se dozvěděli, že „první" dokonalý kalkulační stroj sestrojil Schickard v r. 1623, kdy se

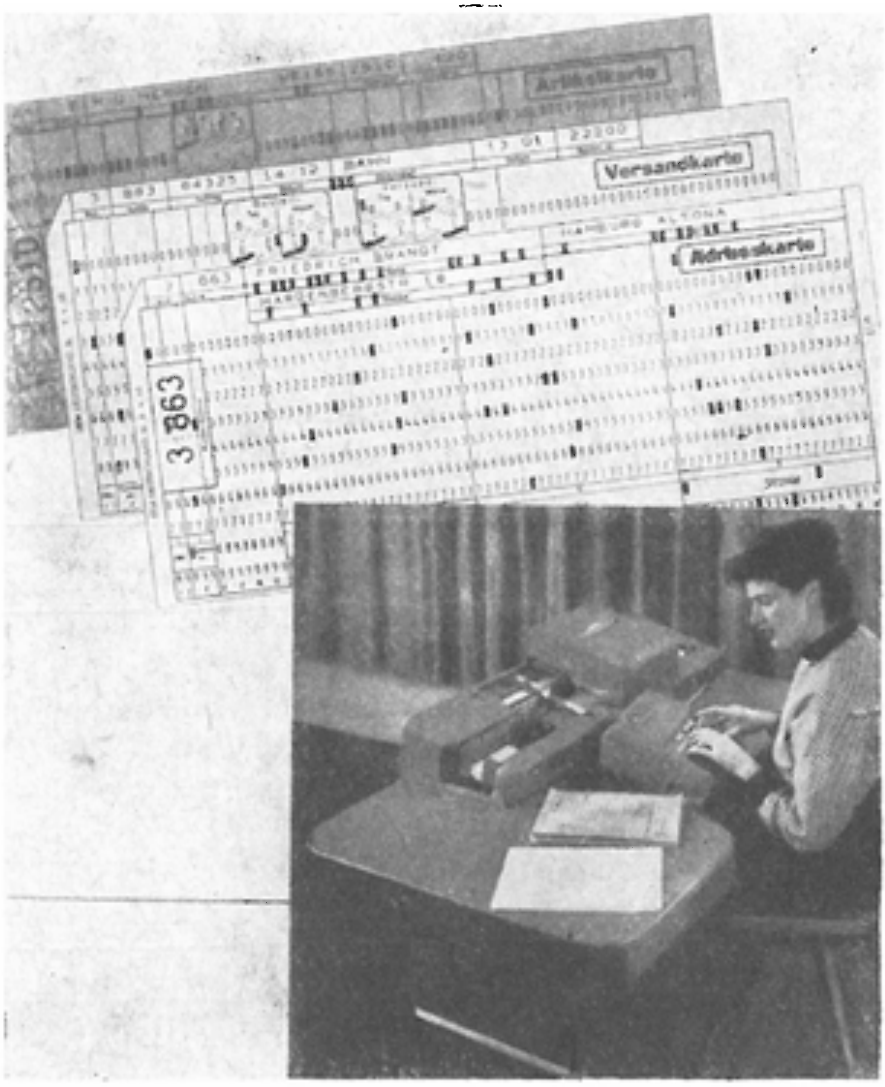
také narodil Pascal. Schickard pojmenoval svůj stroj *počítací hodiny* (obr. 3), čímž naznačil vztah svého stroje k hodinám. Asi r. 1675 byl sestrojen kalkulační stroj, jehož navrhovatelem byl L e i b n i z, který však pro malé konstrukční závady správně nefungoval. Zdálo by se, že počítací stroje, sestrojené v 17. století, byly „prvními" tohoto druhu. Avšak nález počítacího stroje ve vraku lodí z 1. stol. před n. l. svědčí o něčem jiném. Byl to stroj na principu ozubených koleček, sestrojený v Řecku, určený pro výpočty spojené s astronomií. Další překvapení nejsou vyloučená. Lovci mořských hub nalezli tento počítač r. 1901 u ostrova Antikythera v Řecku.



Obr. 3. Schickardův počítací stroj, „počítací hodiny".

Na vývoji sčítacích a kalkulačních strojů se podílelo mnoho zlepšovatelů a vynálezců. Z nich velkých úspěchů dosáhl kalkulační stroj vyrobený Odhnerem v Petrohradě v r. 1874. Princip počítání záleží v ozubených kolečkách s proměnným počtem zubů, který se stal základem konstrukce mnoha malých páčkových strojů. V dnešní době známe asi 720 značek počítacích strojů.

Pracovník statistického úřadu USA (Bureau of Census) Hermann Hollerith sestrojil soustavu strojů na zpracování materiálu sčítání lidu USA, která byla vyzkoušena v r. 1887 při zpracování materiálu statistiky úmrtnosti v Baltimore. Sčítání lidu v USA r. 1890 bylo na nich zpracováno asi za dva a půl roku. V r. 1897 byla vyvinuta druhá soustava děrnoštítkových strojů Jamesem Powersem na mechanickém principu, zatímco Hollerithova byla na principu elektromagnetickém, kterého se dnes nejvíce používá (obr. 4).



Obr. 4. Vyhotovení děrných štítků soustavy IBM, pomocí ručního děrovače.

Pojem samočinného počítače. Samočinné počítače považujeme, i když se tak děje jinými prostředky, za pokračovatele dosavadní techniky řešení stavby počítacích strojů stolních, tj. sčítacích a kalkulačních strojů, jakož i strojů na děrné štítky. Rozdíl je v tom, že u kalkulačního stroje musí být operátor. Ten vkládá do stroje čísla, aby stroj provedl určitý úkon, např. sčítání, odečítání, násobení a dělení. Tento úkon se provede pomocí páky a výsledek je vytištěn na proužku papíru, nebo vizuálním způsobem se zjistí v okénku stroje. U samočinných počítačů provádí stroj celý sled úkonů samočinně podle programu.

Již kolem roku 1842 se pokusil anglický matematik Charles Babbage sestrojit počítač, který by byl s to, na základě do stroje vloženého programu, samočinně zpracovat informace vstupní na informace výstupní.

I když Babbage se plně věnoval konstrukci svého počítače, nepodařilo se mu dílo dokončit, neboť tento velmi složitý počítač byl stavěn na mechanickém principu. Teprve ve 20. století se mohly realizovat myšlenky Charlese Babbage. V Evropě začal r. 1935 na projektu stavby samočinného počítače pracovat inž. Konrád Zuse v Berlíně. Ve Spojených státech amerických řešením stavby samočinného počítače se zabýval od r. 1937 prof. Aiken ve spolupráci s podnikem I. B. M., vyrábějícím stroje na děrné štítky. Jak Zuse, tak i Aiken o sobě nevěděli a problémy stavby řešili podle svého uvážení. I když šli různými cestami, řešili jen stavbu samočinných počítačů na mechanickém principu. Aiken měl větší možnosti na úspěch, neboť mu pomáhala kapitálově silná firma I. B. M. Zuse pracoval v bytě svých rodičů bez veškeré pomoci. Jeho otec byl malým úředníkem. Zatímco Zuse sestrojil pokusný počítač v r. 1938, potřeboval Aiken více času, neboť jeho počítač postavený v podniku I. B. M. byl dokončen 7. srpna 1944 a zapojen do vojenských výpočtů.

Reléové samočinné počítače. Zuse postavil v r. 1941 první dokonalý reléový samočinný počítač, a tím překonal Aikenův úspěch. Dodatečně se svět dozvěděl, že v Japonsku byl sestrojen malý reléový počítač už r. 1935, kdy Zuse teprve začal řešit stavbu samočinného počítače. Byla to japonská firma FUJI, zabývající se řešením stavby zařízení a přístrojů spojené s provozem telefonní ústředny. Přesný popis tohoto reléového počítače nám schází. Nutno však uvést, že v USA obdobný reléový počítač postavila pro své vnitřní výpočty firma Bell Telephon v r. 1940 a r. 1944 byl tam postaven už velký reléový samočinný počítač.

Elektronické samočinné počítače. Velkým nedostatkem reléových počítačů je jejich malá pracovní rychlost. Již na začátku druhé světové války se vyskytly návrhy na stavbu elektronických počítačů. Takové návrhy byly od Norberta Wienera a A. M. Turinga, známých teoretiků samočinných počítačů. Americký matematik John

von Neumann, původem z Maďarska, formuloval v r. 1941 základní rysy elektronických samočinných počítačů takto:

1. Stroj provádí a řadí operace samočinně.
2. Stroj si přetváří výpočtový program do něho vložený.

Aby bylo možno zvládnout rozsáhlé výpočty, zejména balistické, za druhé světové války, dalo ministerstvo obrany Spojených států v r. 1943 příkaz ke stavbě elektronického počítače. Projekt vypracovali J. Prosper Eckert mladší a John W. Mauchly. Stroj byl postaven v Moore School elektronické fakulty Pennsylvanské university, na jehož stavbě se podíleli posluchači této fakulty. Počítač byl dokončen za tři roky, tj. r. 1946, rok po ukončení druhé světové války. Tento počítač pojmenovaný ENIAC obsahoval až 18 000 elektronek, 1500 relé, 70 tisíc odporů, 10 tisíc kondenzátorů a 500 tisíc přepínacích spojů. Vážil 30 tun. Dnes se díváme na tento počítač v muzeu jako na monstrum, neboť nové stroje jsou mnohem menší, až mikrominiaturní.

Na základě zkušeností s řešením stavby počítače ENIAC řešili Eckert a Mauchly pro firmu Remington Rand, která dostává velké státní subvence, stavbu velkého samočinného počítače UNIVAC a pak stavbu dalších strojů této firmy (obr. 5). Záhy se této příležitosti řešení stavby elektronických samočinných počítačů ujala i firma I. B. M. a postavila velké samočinné počítače IBM 701 a IBM 702, a pak další stroje třídy 7, IBM 305 atd. Myšlenky řešení stavby elektronických samočinných počítačů se chopily i jiné podniky v USA. Bylo jich přes sto, ale v novější době jejich počet klesá, neboť jde o velmi nákladné stroje a odbyt není zajištěn.

V Sovětském svazu, v Polsku a v jiných státech socialistického tábora začali v r. 1948 uvažovat o řešení stavby samočinných počítačů. Sovětský svaz, jako jeden z největších států, měl větší možnosti řešit ihned stavbu elektronických samočinných počítačů. První malý elektronický samočinný počítač v Sovětském svazu byl postaven v r. 1951 v Akademii věd Ukrajinské SSR v Kyjevě a rok na to velký stroj v Akademii věd SSSR v Moskvě. Pak následovaly velký stroj STRELA, malé — URAL-1, M-3 atd.

Část druhá

Stavební prvky elektronických samočinných počítačů

Elektronka. K prvním stavebním prvkům stavby moderních samočinných počítačů patří elektronka. Předpoklady pro stavbu elektronkového samočinného počítače byly dány již dříve, ale nikdo se

nenašel, aby ihned použil existujících poznatků ke stavbě elektronického počítače. Je třeba se zde zmínit zejména o elektronických obvodech, které tvoří nejdůležitější stavební prvek samočinných počítačů. Objevili ho dva vědci, Eccles a Jordan, už v r. 1919, když ukázali, že dvojice triod může být zapojena do obvodu, který dává dva stabilní stavy. Těchto poznatků použil i spolupracovník Zuseho Schreyer, který se zabýval použitím elektronek jako stavebních prvků v obvodech již v letech 1938 až 1944 a postavil zkušební model, který však z válečných důvodů nebyl využit.

Oberlin Smith navrhl v r. 1888 magnetickou paměť a Poulsen navrhl ve třicátých letech magnetické záznamové zařízení.

Po elektronkách se brzy objejily *polovodičové* stavební prvky, zejména germaniové a křemíkové diody, které mají proti elektronkám mnoho výhod, např. větší životnost, malé rozměry, malou spotřebu energie a jejich výborné spínací vlastnosti.

Tunelové diody objevil v r. 1957 japonský fyzik dr. Esaki, který pracuje nyní v USA u firmy I. B. M. Ty se považují za výhledové polovodičové prvky. Jsou to v podstatě tzv. *degenerované polovodiče*, u nichž při použití přímého napětí se uskutečňuje tunelový přechod elektronů z *n*- v *p*-oblast.

Parametron je stavební prvek, jenž využívá tzv. parametrických kmitů. Patent na parametrony byl udělen jednak japonským vynálezcům, jednak Johnu von Neumannovi v USA. Tyto stavební prvky jsou poněkud pomalé.

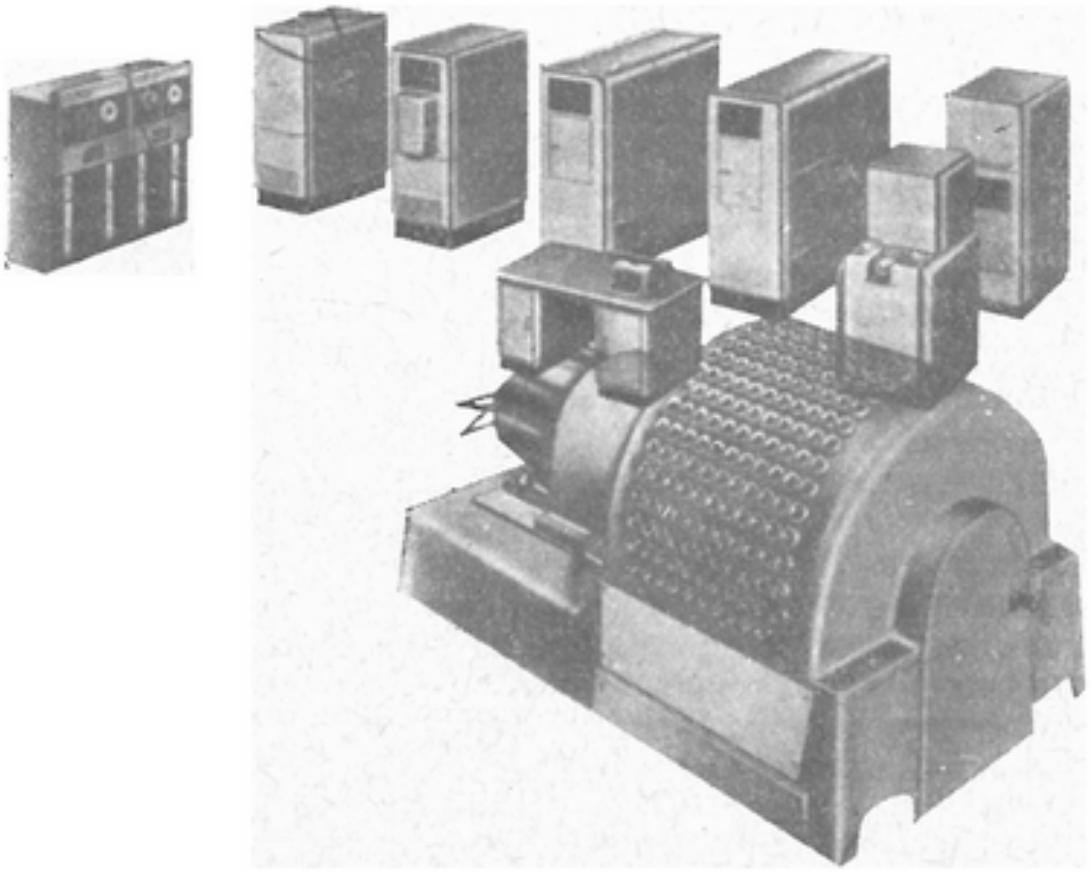
Kryotrony. Řecké slovo kryos — znamená mráz. Kryotron se skládá z jádra, kolem kterého je položeno vinutí. Jádro ochlazené na teplotu blízkou absolutní nule se stává supravodivým, neboť skokem ztrácí elektrický odpor. Zavedeme-li do vinutí elektrické napětí, utvoří se magnetické pole, které uvede jádro do normálně vodivého stavu.

Místo jádra s vinutím se používá tenkých napařovaných vrstev, vykazující tloušťku tisíciny milimetru. Na malém prostoru lze umístit tisíce takových stavebních prvků. Impulsní frekvence těchto prvků činí 10 nanosekund, tj. miliardtin vteřiny. Avšak to není největší impulsní frekvence, neboť fyzikové z Watsonova výzkumného střediska IBM vyvinuli polovodičovou diodu s impulsní rychlostí řádu picosekundy, tj. biliontiny vteřiny.

Tranzistory. Jsou to součástky, které pracují na podkladě zesilovacího jevu na germaniu, objeveného r. 1948 dvěma americkými fyziky Brattainem a Bardeenem. Název tranzistor vznikl spojením slov „Transfer-resistor (resistance)“, což znamená přechodový odpor. Je to aktivní prvek pracující jako vakuová elektronka, např. jako spínací prvek v elektronickém obvodu.

Ferritových jader se používá zejména ke konstrukci rychlých pamětí, logických obvodů a rychlých spínacích prvků. Jádra jsou nejčastěji

ve tvaru prstence, toroidu. Mají velkou životnost a malé rozměry. Jádro může být magnetizováno buď ve smyslu otáčení hodinových ručiček nebo ve směru opačném. Každému z těchto dvou fyzikálních stavů můžeme přisoudit hodnotu *O* a *I* a tak dostaneme paměťové vlastnosti. K vytváření logických obvodů (vztahů Booleovy algebry) se používá jader s více vstupními vinutími.



Obr. 5. Samočinný počítač UNIVAC File-Computer.

Ferrity jsou sloučeniny dvou valenčních kovů s kysličníkem železitým $Me^{II} . Fe_2O_3$, přičemž Me je libovolný dvojmocný kov a Fe trojmocné železo. Ferrity jsou pozoruhodné tím, že na rozdíl od všech dřívějších magnetických materiálů, nejsou kovy a patří ke skupině keramických materiálů. Ferrity jsou v porovnání s kovy tvrdé a neobyčejně houževnaté.

(Pokračování)

Mocnost bodu ke kružnici

KAREL DRÁBEK CSc, ČVUT, Praha

Při některých konstrukcích kuželoseček daných ohniskem a dalšími body, popřípadě tečnami (v celkovém počtu tří prvků), je třeba sestrojit řídicí kružnici z podmínek odvozených z dané úlohy. Tak např. při konstrukci hyperboly dané ohniskem F_1, směrem asymptoty m' a dvěma tečnami t_1, t_2, dojdeme k úloze sestrojit kružnici procházející dvěma body Q_1, Q_2 souměrně sdruženými k ohnisku F_1 podle tečen t_1, t_2 a dotýkající se přímky p, která jde ohniskem F_1 kolmo na směr asymptoty m'. Tuto úlohu lze také řešit pomocí tzv. *mocnosti bodu ke kružnici.*

Zvolme (obr. 1a, b) bod M neležící na kružnici $k\,(S; r)$ a sestrojme jím dvě různé sečny tak, aby první protala kružnici k v bodech A, B, druhá v bodech C, D. Pak platí pro jakoukoliv sečnu bodem M

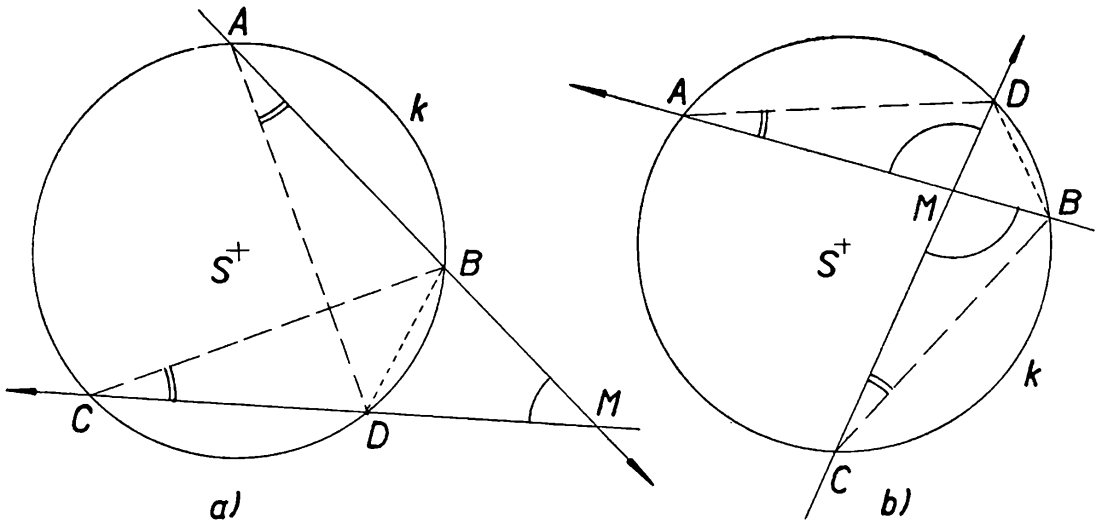
$$MA \,.\, MB = MC \,.\, MD = \quad = \text{konst.} \tag{1}$$

D ů k a z. Spojme bod A s bodem D, bod B s bodem C a uvažujme trojúhelníky ADM, BCM. Tyto trojúhelníky mají stejný (nebo společný) úhel při vrcholu M a také $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, neboť jde o obvodové úhly v kružnici k nad tětivou BD. Proto

$$\triangle ADM \sim \triangle BCM\,,$$

z čehož plyne úměrnost stran těchto trojúhelníků, takže

$$MA : MD = MC : MB\,,$$



Obr. 1a, b.

neboli

$$MA \,.\, MB = MC \,.\, MD\,,$$

čímž je důkaz proveden.

Abychom v určené konstantě rozlišili, zda se jedná o bod vně či uvnitř kružnice, zaveďme na zvolených sečnách orientaci (takové orientace sečen jsou vyznačeny v obr. 1a, b). Potom se výraz (1) změní na součin orientovaných úseček, takže platí

$$\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \,.\, \overrightarrow{MD} = \quad = k^2\,, \tag{2}$$

kde k^2 je hodnota příslušné konstanty.

Pro určení velikosti této konstanty v případě, že bod M je vnějším bodem kružnice k (obr. 2a), sestrojme z něho tečnu t ke kružnici k s bodem dotyku T. Pak platí

$$\triangle\, MTB \sim \triangle\, MAT\,,$$

a tedy

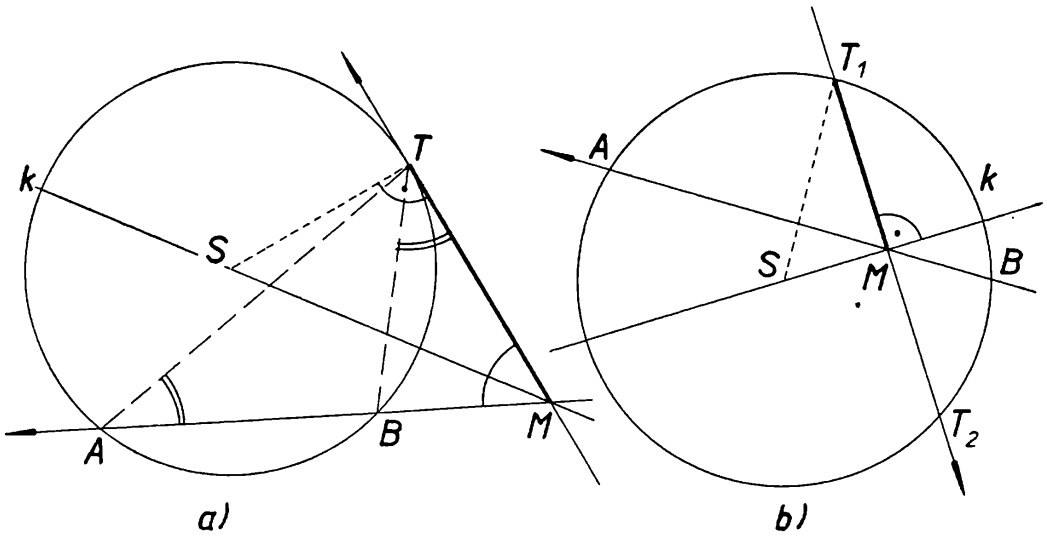
$$k^2 = \overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MT}^2 > 0\,. \tag{3}$$

V případě, že bod M je vnitřním bodem kružnice k (obr. 2b), sestrojme jím v kružnici k nejkratší tětivu T_1T_2; pak

$$k^2 = \overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MT_1} \,.\, \overrightarrow{MT_2} < 0\,,$$

takže

$$|k^2| = \left(\frac{T_1T_2}{2}\right)^2$$



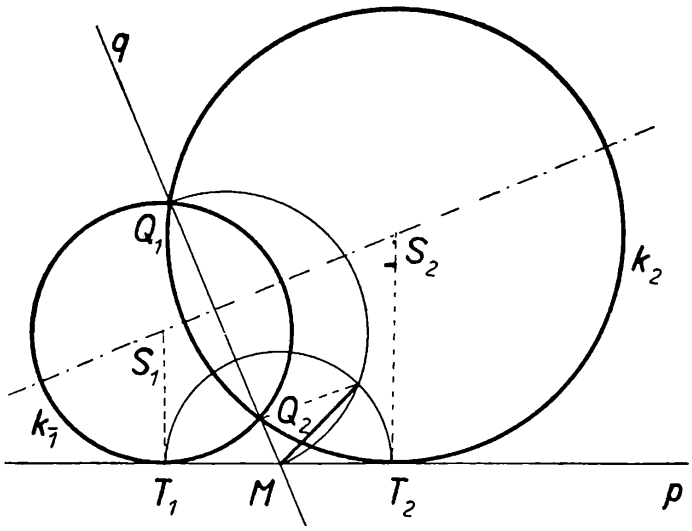
Obr. 2a, b.

Jestliže pro bod M na kružnici k položíme $k^2 = 0$, pak platí:

Součin orientovaných vzdáleností na sečnách kružnice k, procházejících daným bodem M, je konstantní a nazývá se mocností bodu M ke kružnici k.

Je-li bod M vnějším bodem kružnice k, je jeho mocnost kladná a rovná se čtverci délky tečny sestrojené z tohoto bodu ke kružnici. Je-li bod M vnitřním bodem kružnice k, je jeho mocnost záporná a rovná se v absolutní hodnotě čtverci poloviny nejkratší tětivy ke kružnici sestrojené tímto bodem. Je-li bod M na kružnici, je jeho mocnost rovna nule.

P ř í k l a d. *Sestrojte kružnici, která prochází dvěma body Q_1, Q_2 a dotýká se přímky p* (viz úvodní odstavec).



Obr. 3

Předpokládejme (obr. 3), že existuje průsečík M přímky p a spojnice q obou bodů Q_1, Q_2. Pak platí

$$\overrightarrow{MQ_1} \cdot \overrightarrow{MQ_2} = k^2$$

a v případě, že $k^2 > 0$, což nastane tehdy, když oba body Q_1, Q_2 jsou v téže polorovině určené přímkou p, je

$$k = MT_1 = MT_2 = \sqrt{\overrightarrow{MQ_1} \cdot \overrightarrow{MQ_2}},$$

takže pomocí Eukleidovy věty najdeme na přímce p body dotyku T_1, T_2 dvou kružnic, které jsou řešením naší úlohy.

Je-li $k^2 < 0$, tj. oba body Q_1, Q_2 jsou v různých polorovinách určených přímkou p, řešení v tomto případě neexistuje; je-li jeden z bodů Q na přímce p, pak máme jediné řešení.

Také v případě, že spojnice q bodů Q_1, Q_2 je rovnoběžná s přímkou p, dostaneme pouze jedno řešení.

Cvičení.

1. Ukažte, že pouze body na soustředné kružnici s danou kružnicí k $(S; r)$ mají k ní touž mocnost.

2. Sestrojte kružnici o poloměru r, která prochází bodem A a má vzhledem k danému bodu $M \neq A$ předem stanovenou mocnost (kladnou nebo zápornou).

3. Dokažte, že mocnost bodu M ke kružnici k $(S; r)$ je rovna $d^2 - r^2$, je-li d vzdálenost bodu M od středu S dané kružnice k.

4. Sestrojte průsečíky přímky p s parabolou určenou ohniskem F a přímkou řídicí d.

Návod. Použijte definici paraboly jako geometrického místa kružnic, které procházejí ohniskem F a dotýkají se řídicí přímky d dané paraboly.[1])

5. Je-li H průsečíkem výšek v_a, v_b, v_c v trojúhelníku ABC a D, E, F paty těchto výšek na stranách a, b, c, pak platí

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$$

Dokažte!

Návod. Použijte kružnic nad stranami a, b, c trojúhelníka ABC jako průměry.

---

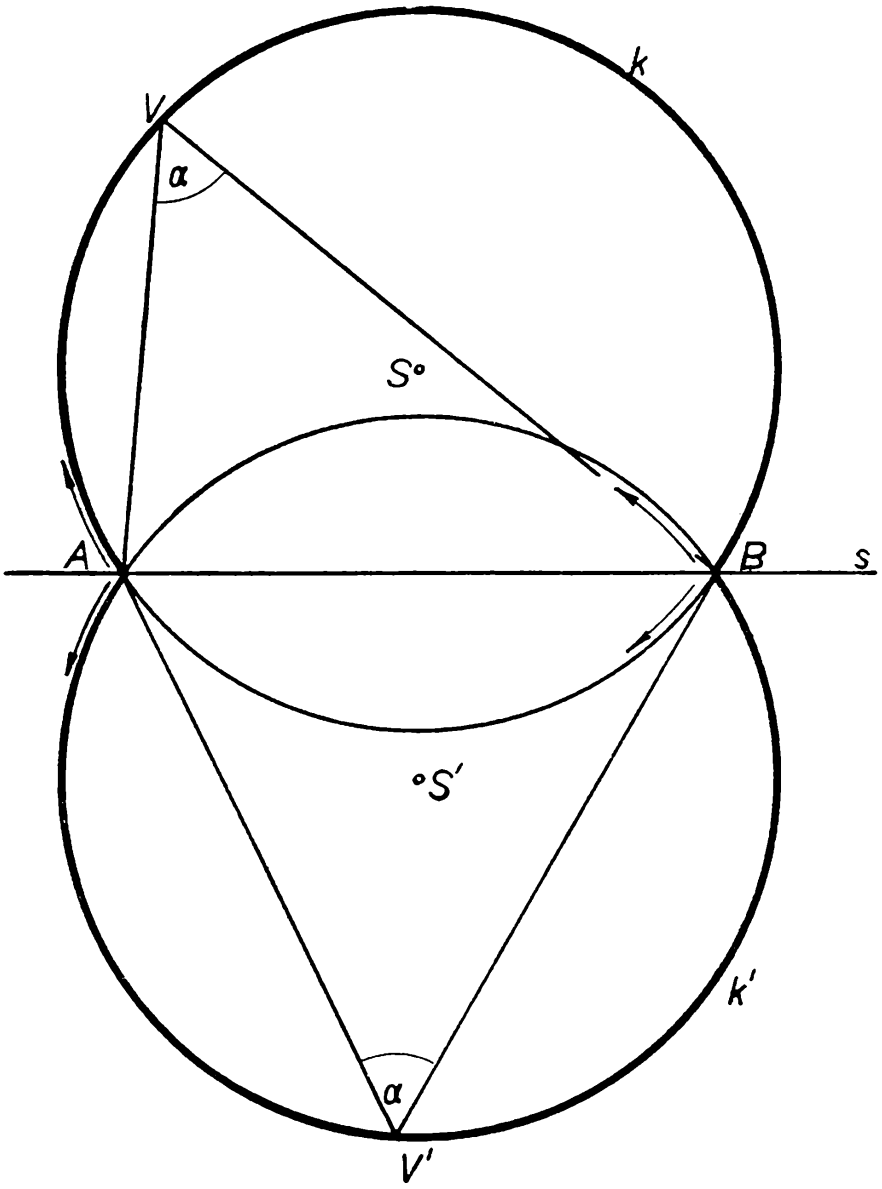
[1]) Viz také článek E. Cífky, P r ů s e č í k y p ř í m k y s p a r a b o l o u. Rozhledy 42, 1963—64, str. 354—356.

Geometrická místa (Pokračování)

OLDŘICH JENIŠTA, ČVUT, Praha

Sestrojíme-li k bodu S bod S' souměrně sdružený podle přímky s a opíšeme-li z bodu S' jako středu kružnici k', procházející body A a B, vzniknou na kružnici k oblouky AB a BA, které jsou souměrně sdružené podle přímky s s oblouky AB a BA na kružnici k' (obr. 6). Spojíme-li libovolný bod V oblouku AB kružnice k s libovolným bodem V' oblouku AB kružnice k', dostaneme obvodové úhly AVB a $AV'B$, jež jsou si rovny, jak plyne ze vzniklé osové souměrnosti.

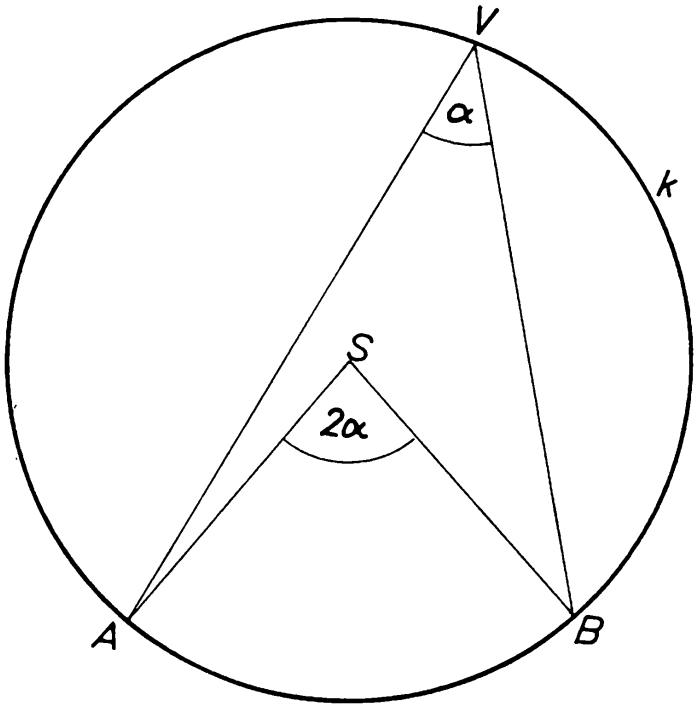
Můžeme pak vyslovit větu:



Obr. 6.

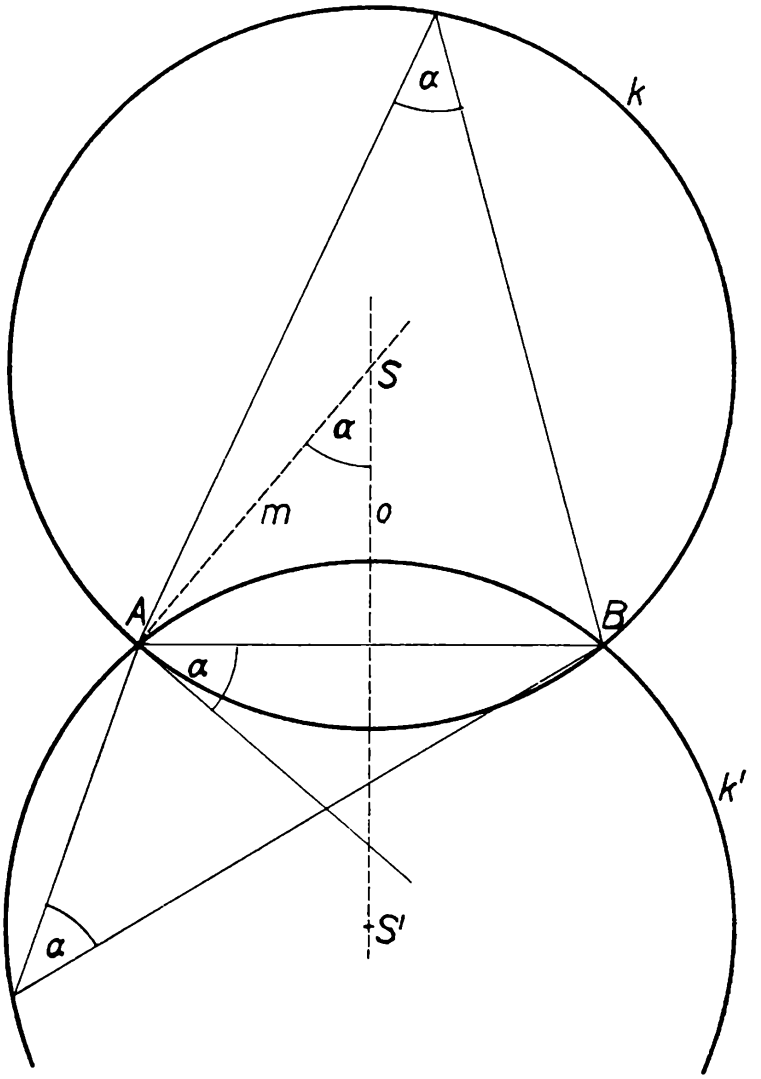
Geometrické místo vrcholů daných stejných úhlů α nad úsečkou AB jsou dva oblouky kruhové, souměrné podle úsečky AB, kružnic k a k', jejichž společnou tětivou je úsečka AB a dané úhly jsou úhly obvodovými; body A a B k tomuto geometrickému místu bodů nenáleží (srovnejte s obr. 8).

Spojíme-li krajní body A a B kruhového oblouku $\overset{\frown}{AB}$ kružnice k se středem S, vznikne středový úhel ASB, o němž víme, že je dvojnásobkem obvodového úhlu AVB nad týmž kruhovým obloukem $\overset{\frown}{AB}$ dané kružnice k (obr. 7). Tato věc nám pomůže vyřešit úlohu: Nalézt geometrické místo bodů, z nichž se nám jeví daná úsečka AB pod daným zorným úhlem α. Znamená to vlastně najít geometrické místo vrcholů úhlů α nad úsečkou AB. Tímto geometrickým místem budou

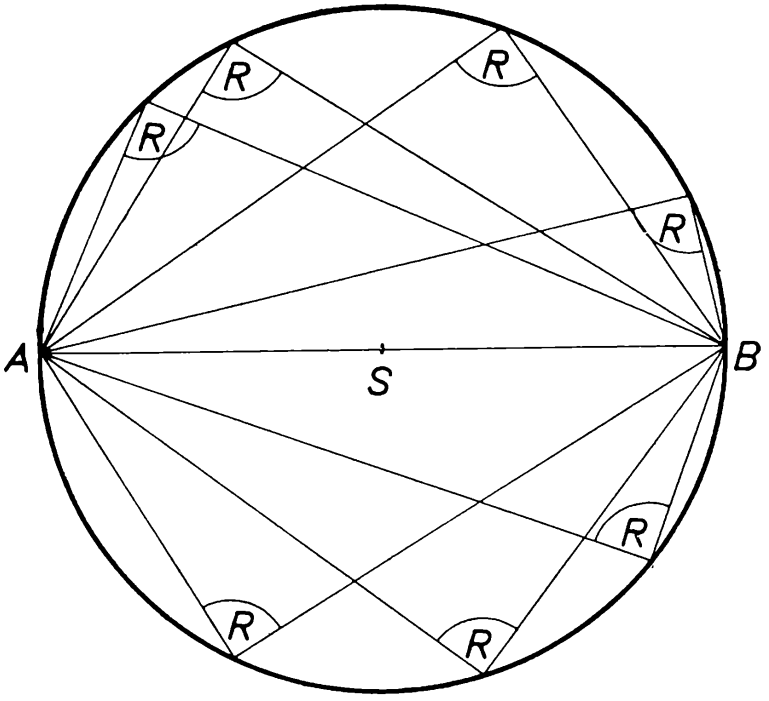


Obr. 7.

opět dva oblouky kruhové $\overset{\frown}{AB}$, navzájem souměrné podle úsečky AB, která je společnou tětivou kružnic k a k'. Střed S kružnice k již snadno sestrojíme, víme-li, že středový úhel nad touž tětivou $\overline{AB}$ bude roven 2α. Konstrukce se provede takto: Hledaná kružnice k bude mít střed S na ose o úsečky AB (obr. 8). Daný úhel α naneseme tak, že bude mít vrchol v bodu A, jedno rameno v úsečce AB. Sestrojíme-li k jeho druhému ramenu v bodu A kolmici m, protne tato kolmice m osu o úsečky AB ve středu S hledané kružnice k, jejíž poloměr $r = SA = SB$. Správnost této konstrukce si snadno čtenář již sám dokáže. Střed S' kružnice k' je ovšem souměrně sdružený se středem S kružnice k podle úsečky AB.



Obr. 8.



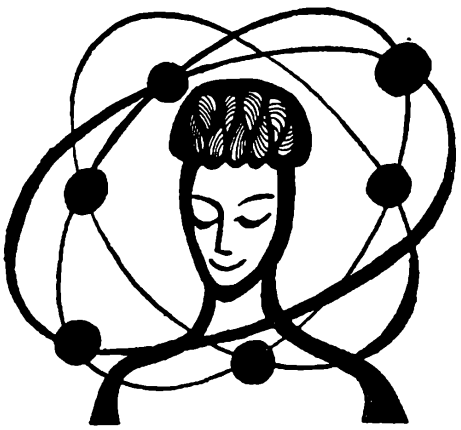
Obr. 9.

Kdyby obvodový úhel byl roven 90°, pak k němu příslušný středový úhel by se rovnal 180°, takže jeho ramena AS a BS by svírala přímý úhel a tětiva AB by se stala průměrem. Výše uvedená věta o geometrickém místě vrcholů obvodových úhlů by pak nabyla tohoto tvaru:

Geometrické místo vrcholů pravých úhlů, jichž ramena procházejí různými body A, B, je kružnice k o průměru AB, ovšem s výjimkou bodů A a B (obr. 9). Je to velmi známá a důležitá věta Thaletova.

Pomocí Thaletovy věty můžeme dokázat, že úhly AVB a AWB, použité v obr. 5, jsou výplňkové. Sestrojme bod V' kružnice k jako krajní bod průměru, jdoucího bodem W. Pak platí, že úhel $AV'B$ je roven úhlu AVB. Body A, V', B, W tvoří čtyřúhelník tětivový (jeho strany jsou tětivami dané kružnice k). Poněvadž součet vnitřních úhlů v čtyřúhelníku je 360° a protože úhly $V'AW$ a $V'BW$ jsou pravé (jsou to obvodové úhly nad průměrem $V'W$ kružnice k), zbývá na součet dalších dvou úhlů $AV'B$ a AWB 180°, takže jsou tyto dva úhly výplňkové.

(Pokračování)



FYZIKA

Lom světla kulovým prostředím

LUBOMÍR VAŠEK, Gottwaldov

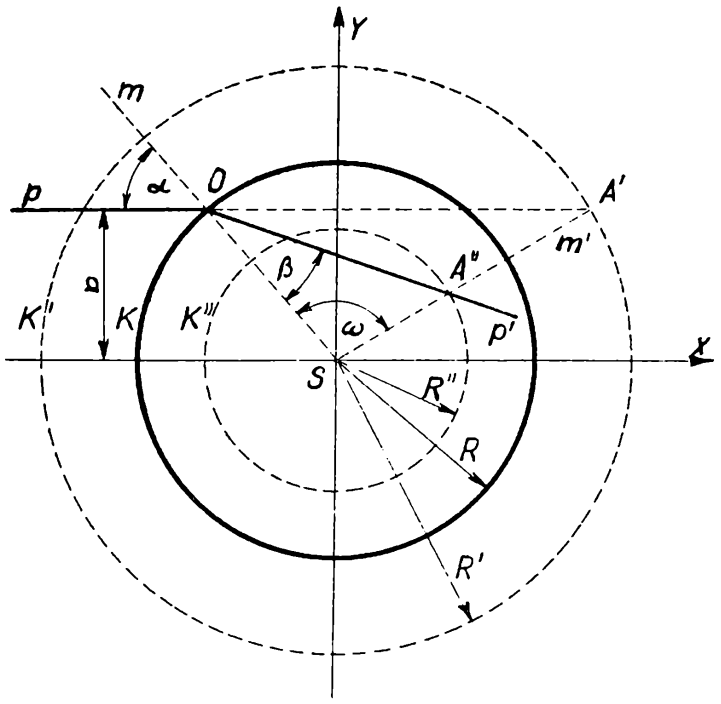
Žáci na SVVŠ se ve fyzice seznamují se zákony lomu světla, které jsou formulovány takto [1]:

1. *Paprsek lomený zůstává v rovině dopadu.*

2. *Poměr sinu úhlu dopadu a sinu úhlu lomu je pro daná dvě prostředí veličina stálá a nazývá se index lomu druhého prostředí vzhledem k prostředí prvnímu* (zákon Snelliův).

V tomto příspěvku chci aplikovat zákony lomu na stejnorodé kulové prostředí, do něhož vchází světlo ze vzduchu obklopujícího kulové prostředí a ukázat jednoduchou konstrukci lomeného paprsku.

Uvažujme stejnorodou kouli K o poloměru R (obr. 1). Index lomu skla vzhledem ke vzduchu buď n. Zvolme na kouli libovolný bod O. Jeho spojnice se středem koule S určuje kolmici dopadu m, neboť normála sestrojená v libovolném bodě kulové plochy prochází vždy středem kulové plochy.



Obr. 1.

Předpokládejme, že v bodě O dopadá libovolný světelný paprsek p, který svírá s kolmicí dopadu m úhel dopadu α. Kolmice dopadu m s paprskem p určuje rovinu dopadu, která vždy bude obsahovat střed kulové plochy, a proto bude vždy rovinou hlavního řezu kulové plochy. Podle 1. zákona lomu musí v rovině dopadu ležet také lomený paprsek, a proto celá konstrukce lomeného paprsku je rovinná. Lomený paprsek svírá s kolmicí dopadu m úhel lomu β, který máme určit.

Mysleme si, že dané kouli K opíšeme soustřednou kouli K' o poloměru $R' = n \,.\, R$ a podobně jí vepíšeme soustřednou kouli K'' o poloměru $R'' = \frac{R}{n}$. Hlavní řezy těchto koulí budou soustředné kružnice o středu S a poloměrech R, R' a R''. Viz obr. 1, kde bylo zvoleno $n = \frac{3}{2}$.

T v r z e n í. *Dopadá-li v bodě O světelný paprsek p pod úhlem α, postupuje v kulovém prostředí lomený paprsek směrem OA''; světelný paprsek se tedy láme pod úhlem β.*

1. Správnost tohoto tvrzení plyne z podobnosti trojúhelníků OSA'

a $A''SO$, které jsou podobné proto, že se shodují v úhlu ω a v poměru dvou odpovídajících si stran

$$SO : SA'' = SA' : SO . \tag{1}$$

Je totiž

$$SO = R , \qquad SA'' = R'' = \frac{R}{n} , \qquad SA' = R' = n . R ,$$

takže dosazením do (1) dostaneme

$$R : \frac{R}{n} = n . R : R .$$

Proto musí být $\sphericalangle SA''O = \alpha$ a $\sphericalangle SA'O = \beta$.

Pak plyne z trojúhelníka $SA''O$ podle sinové věty

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{SO}{SA''} = \frac{R}{\frac{R}{n}} = n , \tag{2}$$

a obdobně z trojúhelníka $SA'O$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{SA'}{SO} = \frac{n . R}{R} = n . \tag{2a}$$

Rovnice (2) a (2a) však vyjadřují Snelliův zákon, takže uvedenou konstrukcí je skutečně přiřazen úhlu dopadu α úhel lomu β.

2. Poněvadž se ve III. ročníku SVVŠ seznamujete v matematice se základy analytické geometrie, uvedu ještě, jak lze správnost tvrzení ověřit pomocí analytické geometrie.

Zvolme pravoúhlou souřadnicovou soustavu tak, aby její počátek splýval se středem koule a aby osa x byla rovnoběžná s dopadajícím paprskem p. Tím se řešení zjednoduší, ne však na újmu obecnosti.

Označíme-li souřadnici y bodu O $(y = a)$, má paprsek p rovnici

$$p \equiv y = a \tag{3}$$

a jeho směrnice je

$$s_p = 0 . \tag{4}$$

Rovnice kružnic K, K' a K'' jsou postupně

$$K \equiv x^2 + y^2 = R^2 , \tag{5}$$

$$K' \equiv x^2 + y^2 = n^2 R^2 , \tag{6}$$

$$K'' \equiv x^2 + y^2 = \frac{R^2}{n^2} . \tag{7}$$

Z rovnic (3), (5) a (6) určíme souřadnice bodů O a A'

$$O \, (- \sqrt{R^2 - a^2} \, ; \, a) , \; A' \, (\sqrt{n^2 R^2 - a^2} \, ; \, a) .$$

Spojnice $A'S = m'$ má rovnici

$$y = \frac{a}{\sqrt{n^2R^2 - a^2}} \cdot x \,. \tag{8}$$

Řešením rovnic (7) a (8) získáme souřadnice bodu A''

$$A''\left(\frac{\sqrt{n^2R^2 - a^2}}{n^2}\,;\,\frac{a}{n^2}\right).$$

Směrnice lomeného paprsku OA'' (tj. přímky procházející body O a A'') je

$$s_{p'} = \frac{\frac{a}{n^2} - a}{\frac{\sqrt{n^2R^2 - a^2}}{n^2} + \sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{a\,(1 - n^2)}{\sqrt{n^2R^2 - a^2} + n^2\sqrt{R^2 - a^2}} \tag{9}$$

a směrnice kolmice dopadu m v bodě O je

$$s_m = -\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} \,. \tag{10}$$

Ze známých směrnic dopadajícího a lomeného paprsku s_p a $s_{p'}$ a ze směrnice kolmice dopadu s_m můžeme určit úhly α a β ze vztahů

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s_m - s_p}{1 + s_m \cdot s_p}\,, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{s_m - s_{p'}}{1 + s_m \cdot s_{p'}}\,. \tag{11}$$

Dosadíme-li do rovnic (11) ze vztahů (4), (9) a (10), obdržíme po úpravě

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}\,, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a\,(\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{n^2R^2 - a^2})}{n^2R^2 - a^2 + \sqrt{(n^2R^2 - a^2)\,(R^2 - a^2)}}\,.$$

Užitím známých goniometrických vztahů

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}\,, \quad \sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

dostaneme po dosazení z rovnic (12)

$$\sin\alpha = \frac{a}{R}\,, \quad \sin\beta = \frac{a}{nR}\,,$$

odkud ihned plyne Snelliův zákon

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \,.$$

Literatura

[1] Krmešský a kolektiv, Fyzika pro 10. ročník JSŠ, Praha, SPN, 1961, str. 147.

Bude dnes bouřka?

KAREL BLAŤÁK, UP, Olomouc

V tomto článku se budu snažit najít některé podmínky pro vznik bouřky a na základě rozpoznání těchto podmínek podat návod, jak je možné — s jistými výhradami — předpovědět vznik bouřky.

Úvodem podám definici: Bouřkou budeme rozumět souhrn povětrnostních jevů, jako např. vítr, déšť, kroupy, za současného vzniku velkých napětí v ovzduší a jejich vyrovnání výboji (blesk).

Dále se s důvěrou obrátím na čtenářovu zkušenost a ujistíme se navzájem, že bouřka není možná bez mraku, tedy bez kondenzace vodních par. Sídlem bouřky je tedy bouřkový mrak. Zpravidla to bývá cumulonimbus (Cb). Je to mohutná hradba oblaků se silným vertikálním vývojem, kde kupovité části připomínají horské štíty, hřebeny a věže. Nejvyšší část mraku bývá vláknitá a rozšiřuje se někdy do tvaru kovadliny. Takto ovšem uvidíme bouřkový mrak z boku. Pokud je bouřka nad námi, nemůžeme vidět jmenované tvary mraku, ale vidí je dobře například letec. A právě zkušenosti letců nás informují o některých důležitých skutečnostech.

Zde jsou:

1. Pod bouřkovým mrakem a hlavně v něm jsou silné vertikální pohyby vzduchových mas s rychlostmi desítky metrů za sekundu. Základna mraku, tj. jeho dolní okraj, bývá ve výškách kolem 1 km a vrchol mraku sahá až do výšek asi 10 km. Vertikální rozměr bouřkového mraku je 6 až 12 km.

2. V bouřkovém mraku je obsažena voda ve všech fázích (pára, voda, led), neboť nulová izoterma je zhruba ve výškách 3 až 4 km. Ledové krystalky rychle narůstají na úkor vodních kapiček. Je to následkem většího tlaku par nad povrchem ledových částeček. Během pádu teplejšími vrstvami ledové částečky na povrchu tají, při opětovném výstupu znovu narůstají. Tak vznikají kroupy. Liják o velkých kapičkách není nic jiného, než pád roztátých krup.

3. Při leteckém průzkumu bylo dále zjištěno, že je přímá souvislost mezi výškou bouřkového mraku a největším počtem blesků. Vrchol bouřkového mraku byl vždy výše než 8 km, kde také byla teplota —21 °C, než byl zpozorován blesk. Ukázalo se, že je třeba těchto nízkých teplot, má-li dojít k blesku. Podrobnosti o vzniku blesku viz [7]. Shrneme-li tyto poznatky, dojdeme k závěru: Aby vznikla bouřka se všemi průvodními jevy, jsou nutné intenzívní výstupné proudy sahající do velkých výšek. Najdeme-li podmínky vzniku takových výstupných proudů, známe podmínky pro vznik bouřky a můžeme bouřku předpovědět.

Kdy tedy vzduchová hmota vystupuje?

1. Je-li pod vlivem tlakových útvarů hnána přes horský hřeben.

2. Vykluzuje-li na frontální ploše nad jinou vzduchovou hmotu, nebo je jí sama vytlačována do výše. O meteorologických frontách viz [1].

3. Vzduchová hmota je teplejší a tudíž lehčí, a pak stoupá jako balón obsahující ohřátý vzduch.

Při každém z vyjmenovaných druhů výstupu může vzniknout bouřka a tudíž rozeznáváme bouřky 1. orografické, 2. frontální, 3. bouřky z tepla, zvané tropické.

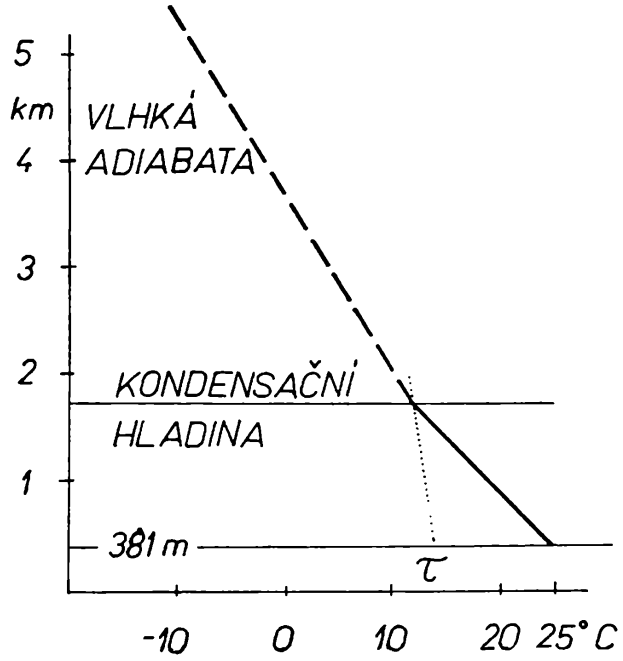
Budu se zabývat bouřkami z tepla, které vznikají následkem silného ohřátí přízemních vzduchových vrstev, přičemž jejich vodorovný pohyb je malý a jsou proto obvykle místního rázu. Také mají název místní. Bouřky frontální nejsou místního rázu, souvisí totiž s frontou, která se táhne třeba přes celou Evropu a pohybuje se rychlostí někdy až 50 km/h. Ale mnohé, co si řekneme o bouřkách místních platí i o frontálních a také o přechodných typech.

Nyní si představte, že nějaké množství vzduchu, jako např. balón o průměru 100 m, začne stoupat nahoru. Stoupá do oblastí s nižším tlakem, rozpíná se, adiabaticky se ochlazuje. Velikost ochlazení činí 1 °C/100 m. Vystoupí-li vzduchová hmota o 1200 m, pak bez ohledu na to jakou teplotu má okolí, se ochladí o 12 °C. Vzduchová hmota, která měla při zemi teplotu 25 °C, bude mít ve výšce 1200 m teplotu 13 °C, a to jedině proto, že přišla do míst o nižším tlaku. Není to proto, jak bychom se mylně domnívali, že se naše vystupující vzduchová hmota ochladila od studeného okolí. Za prvé ve výšce může být často i vyšší teplota než dole při zemi (viz dále o inverzi) a za druhé sled dějů a příčin je právě opačný. Ve výšce bývá chladnější vzduch právě proto, že existují vertikální pohyby vzduchu a tudíž také adiabatické ochlazování.

Vzduch vždy obsahuje nějaké množství vodních par. Stupeň nasycení parami je vyjádřen tzv. rosným bodem. Je to teplota, při níž je vzduch parami úplně nasycen a každé další ochlazení způsobí přeměnu vodních par v kapičky vody. Předpokládejme na chvíli, že naše vzduchová hmota měla při zemi rosný bod 13 °C. Pak tedy ve výšce přibližně 1200 m nad místem, odkud vzduch začal stoupat, kondenzuje jistá část vodních par, vytvoří se bílý, nakypřený oblak, kterému říkáme cumulus (Cu). Je jich několik druhů a nejmohutnější z této rodiny přerůstají v cumulonimbus (Cb). Výšku, v níž začíná kondenzace, nazýváme kondenzační hladinou a tato je pro všechny kumuly v dané oblasti přibližně stejná. Až budete někdy ve vysokých horách a náhodou se ocitnete v takové výšce, tak můžete spatřit, jak všechny kumuly jsou zespodu jakoby uříznuty.

Kondenzací vodních par se uvolní jisté množství tepla a toto teplo způsobí, že od kondenzační hladiny neklesá teplota o 1 °C/100 m, ale

jen o 0,6 °C/100 m. Změnu teploty o 0,6 °C/100 m nazýváme vlhkoadiabatický gradient na rozdíl od suchoadiabatického. K vůli přehlednosti je možno obě tyto adiabatické změny graficky znázornit (obr. 1). Změna suchoadiabatická je znázorněna plnou čarou, změna vlhkoadiabatická čárkovaně. Kromě těchto čar, je tam ještě čára tečkovaná. Tato znázorňuje změnu rosného bodu (τ) vystupujícího vzduchu s výškou. Velikost této změny je 0,16 °C/100 m. Výška kondenzační hladiny je asi 1750 m, ale musíme počítat s chybou ± 200 m. Kromě toho se výška kondenzační hladiny během dne mění, jak vám ostatně potvrdí každý plachtař.



Obr. 1.

Dosud jsme uvažovali, že vzduch z nějakého důvodu vystupuje. Nyní je důležitá otázka, za jakých okolností bude v tomto výstupu pokračovat. Odpověď je celkem snadná. Pokud okolní vzduch bude chladnější, než je náš vystupující, pak výstup bude pokračovat, není-li tomu tak, pak se výstup v krátké době zabrzdí. To je celkem pochopitelné, když si uvědomíme, že je to způsobeno rozdílem hustot teplejší a studenější hmoty a celý jev je důsledkem Archimédova zákona. Tedy rozhodující pro vertikální čili svislý pohyb vzduchu je teplota, kterou mají vrstvy vzduchu nad námi v různých výškách.

Tuto teplotu nutno nějak změřit. Dříve se taková měření prováděla letecky, nyní převážně pomocí radiosondy. Je to souprava přístrojů na měření teploty, vlhkosti a tlaku vzduchu a je opatřena vysílačem. Celek je zavěšen na balón s určitým objemem vodíku, čímž je předem dána určitá výstupní rychlost. Vysílač pak předává výše uvedené údaje pozemní stanici pomocí systému značek. Výsledkem hlášení je pak

tabulka nebo graf, který udává rozdělení tlaku a teploty vzduchu s výškou. Čtenář má možnost sestavit si takovou tabulku podle hlášení na stanici Československo I. Doba vysílání denně od 7.55 do 8.00 h. Viz též článek Sestrojte si povětrnostní mapu v 7. č. Rozhledů, roč. 44, 1965—66. Uvedu příklad té části hlášení, která se týká našeho problému.

Zpráva je ze dne 7. 6. 1966. „Výstup Praha ve výšce 381 metrů je tlak 974 mb, teplota 15,8 °C, rosný bod 13,5 °C, vítr při zemi 250°, 2 m/s."

Výška (m)	Tlak (mb)	Teplota (°C)	Rosný bod (°C)
620	948	18,2	16,2
3121	700	— 0,8	— 3,5
5730	500	—16,8	—20,2

Další hlášení se týká předpovědi výškového větru. Pak následuje v otevřené řeči popis celkové povětrnostní situace. Tedy: „Střední Evropu zasahuje od západu hřeben vyššího tlaku. V Čechách bude oblačno, na Moravě a Slovensku polojasno, odpoledne přeháňky a bouřky. Odpolední teploty kolem 25 °C." Potud zpráva.

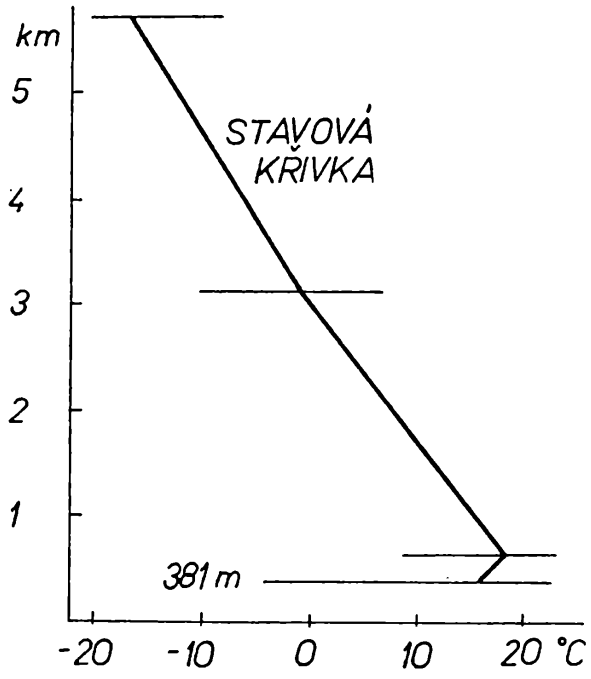
Nyní její využití pro naše účely. Pro větší přehlednost znázorníme tabulku graficky. Na osu úseček nanášíme teploty, na osu pořadnic výšky. Ostatní veličiny pro zjednodušení nezakreslujeme. Dostaneme několik bodů, jejichž spojením vznikne klikatá čára, tzv. stavová křivka. Tato křivka nám udává rozdělení teploty vzduchu s výškou až do hladiny, kde výstup skončil (obr. 2).

Rozbor stavové křivky. Z grafu je především vidět, že teplota vzduchu nejprve stoupá, a to z 15,8 °C ve výšce 381 m do 18,2 °C ve výšce 620 m. To je jev celkem běžný. Nočním vyzařováním se povrch zemský ochladí a od něj se ochladí přízemní vrstvy vzduchu. Takovým denním změnám teploty podléhají vrstvy nejvýše do 1000 m za předpokladu, že se nemění celková povětrnostní situace. Jev, že teplota vzduchu s výškou stoupá, nazýváme inverzí. Tato se převážně vyskytuje k ránu jako přízemní inverze. Přes den se vzduch opět prohřeje a inverze zmizí. Od výšky 620 m teplota silně klesá, a to až na —2,2 °C. Gradient této vrstvy je

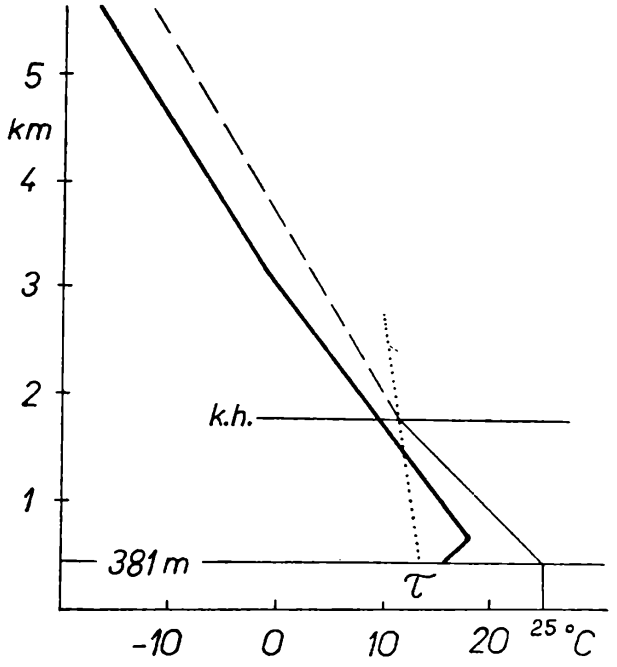
$$\frac{18{,}2 - (-0{,}8)}{31{,}21 - 6{,}20} = 0{,}76 \text{ deg/100 m}.$$

Je sice menší než suchoadiabatický, ale větší než vlhkoadiabatický. Vrstva od 3121 m do 5730 m má gradient

$$\frac{-0{,}8 - (-16{,}8)}{57{,}30 - 31{,}21} = 0{,}62 \text{ deg/100 m}.$$



Obr. 2.



Obr. 3.

Z toho tedy plyne, že ovzduší je labilně zvrstveno. Uvažme, že dá-li se vzduch v hladině 620 m do pohybu směrem vzhůru, pak stačí, aby vystoupil o 200 m výše a již je nasycen, protože dosáhl rosného bodu (viz tabulku rosných bodů). Pak se ochlazuje o pouhých 0,6 °C/100 m, což je méně, než gradient vrstvy ve které stoupá. To značí, že každý pohyb vzduchu ve vertikálním směru se bude zesilovat nebo aspoň udržovat. Vznikne-li výstupný proud vlivem silného přehřátí přízemního vzduchu (viz předpověď odpolední teploty +25 °C), pak tento proud se ve výšce ještě zesílí a zmohutní o masu vzduchu labilně zvrstveného, který byl při výstupu nasát do vystupující vzduchové bubliny. Proto ta předpověď odpoledních bouřek.

Pro větší názornost ověříme si to graficky. Spojíme grafy na obr. 1 a 2 a dostaneme obr. 3. Z něho vidíme, že čára, která znázorňuje vystupující vzduch, je stále vpravo od stavové křivky, což značí, že vystupující vzduchová hmota je stále teplejší, než její okolí, a to až do výše 5 km. To také znamená, že její výstup nebude brzděn, ale naopak podporován a množství vystupující hmoty bude ještě narůstat. Hladina výstupu bude výše než 5 km. Podmínky pro vznik bouřky z tepla jsou splněny a je tedy možno odpolední bouřku předpokládat. Potud se tedy shodujeme s předpovědí meteorologů.

A nyní výsledky pozorování. Pozorovací místo Přerov, dne 7. 6. 1966. Asi v 9 hod. byly pozorovány první mraky typu cumulus congestus (Cu con) nad Oderskými vrchy. Tyto mraky brzy zmohut-

něly v cumulonimbus (Cb) a kolem 11. h. bylo slyšet z této strany poprvé hřmění. Kromě toho bylo možno v tu dobu pozorovat mraky (Cb) ve směru na Hostýnské hory a jiné ve směru na Drahanskou vysočinu. Pozorovací místo Olomouc téhož dne ve 13.00 h. Bouřka nad rozsáhlou oblastí západně od Olomouce. Nad Olomoucí okraj bouřky s menšími přeháňkami. K 15. h. známky rozpadu bouřky. K večeru pozvolné vyjasňování. V Přerově bouřka nebyla.

Závěr. Základní podmínky pro vznik bouřky představuje 1. labilní zvrstvení ovzduší v silné vrstvě (> 5 km), 2. dostatečná vlhkost vzduchu, 3. dostatečná zásoba teplého vzduchu při zemi. Tyto podmínky můžeme rozpoznat jednak z hlášení čs. rozhlasu, jednak na základě vlastního pozorování vývoje počasí. Je snad zbytečné poukazovat na výhody včasného rozpoznání bouřkových podmínek a raději přeji čtenáři mnoho úspěchu v této činnosti.

Literatura:

[1] Förchgott Jiří, Letecká meteorologie, SNTL, Praha 1953.
[2] Gregor Alois, Úvahy o počasí pro rolníky, Brázda, Praha 1950.
[3] Hanzlík S., Základy meteorologie a klimatologie, ČSAV, Praha 1956.
[4] Israël H., Das Gewitter, Akademische Verlangsgesellschaft Geest u. Portig, Leipzig 1950.
[5] Konček Mikuláš, Predpovidanie počasia, Tatran, Bratislava 1949.
[6] Křivský Ladislav, Bouře, hrom a blesk, Osvěta, Praha 1952.
[7] Říhánek V. — Postránecký J., Bouřka a ochrana před bleskem, ČSAV, Praha 1957.
[8] Šiškin N. S., Oblaka, osadki i grozovoe električestvo, GOS. IZ. techniko-teoretičeskich liter., Moskva 1954.
[9] Háza a kol., Meteorologie pro sportovní letce, Naše vojsko, Praha 1960.

REBUS

Jak se zvukem hledají chyby

IVO KRAUS, ČVUT, Praha

V tomto článku seznámíme čtenáře s fyzikální podstatou důležité průmyslové kontrolní metody, která s pomocí zvukových vln velmi vysokých frekvencí odhaluje skryté závady v nejrůznějších materiálech, přístrojích a strojích a tak zachraňuje nejen nesmírné společenské hodnoty, ale i lidské životy. Tento způsob vyhledávání chyb (defektů) se nazývá *ultrazvuková defektoskopie.*

1. *Ultrazvuk*

Podstatou akustických vln jsou (elastické) kmity látky (mechanické kmity), které se šíří od místa k místu rychlostí závislou na mechanických vlastnostech prostředí. Podle kmitočtu (frekvence) můžeme mechanické kmity a vlny rozdělit na tři kategorie:

1. 0 — 16 Hz
2. 16 Hz — 20 kHz,
3. 20 kHz — vyšší.

Kategorie 16 Hz až 20 kHz se nazývá obor slyšitelných frekvencí. Mají-li kmity a vlny jimi vzbuzené v okolním prostředí kmitočet nižší než slyšitelné zvuky, mluvíme o infrazvuku. Takové podzvukové vlny se šíří půdou a zdivem v okolí běžících strojů a jedoucích vozidel, mohou být způsobeny i nárazy větru na budovy a různá zařízení. Vznikají též otřesy půdy a zemětřesením a postupují zemskou půdou do velkých vzdáleností.
Studiem těchto vln se zabývá zvláštní obor geofyziky — seismika.

Je-li frekvence vln vyšší než 20 kHz, označujeme je jako ultrazvukové (nadzvukové).

S obecnými vlastnostmi zvukových vln jako je např. šíření, lom a odraz, je čtenář již seznámen z výkladu akustiky na ZDŠ a SVVŠ. Protože je ultrazvuk pouze speciální kategorií mechanických kmitů a platí pro něj tedy stejné zákony jako pro vlny slyšitelných frekvencí, povšimneme si zde jen těch jeho vlastností, které jsou důležité s defektoskopického hlediska.

Frekvence a délka vlny jsou mezi sebou spojeny vztahem

$$\lambda = \frac{v}{f},$$

kde λ je délka vlny, v = rychlost, f = frekvence.

Při jedné a téže frekvenci ultrazvuku se tedy délka jeho vlny v růz-

ných prostředích liší podle rychlosti šíření. Pro ilustraci si uvedeme několik příkladů (tab. I).

Tabulka I.

Látka	Délka vlny v cm při různých frekvencích	
	500 kHz	2,5 MHz
Vzduch	0,174	0,039
Transformátorový olej	0,703	0,156
Voda	0,732	0,163
Měď	2,317	0,521
Sklo	2,631	0,594
Ocel	2,938	0,655
Hliník	3,347	0,700

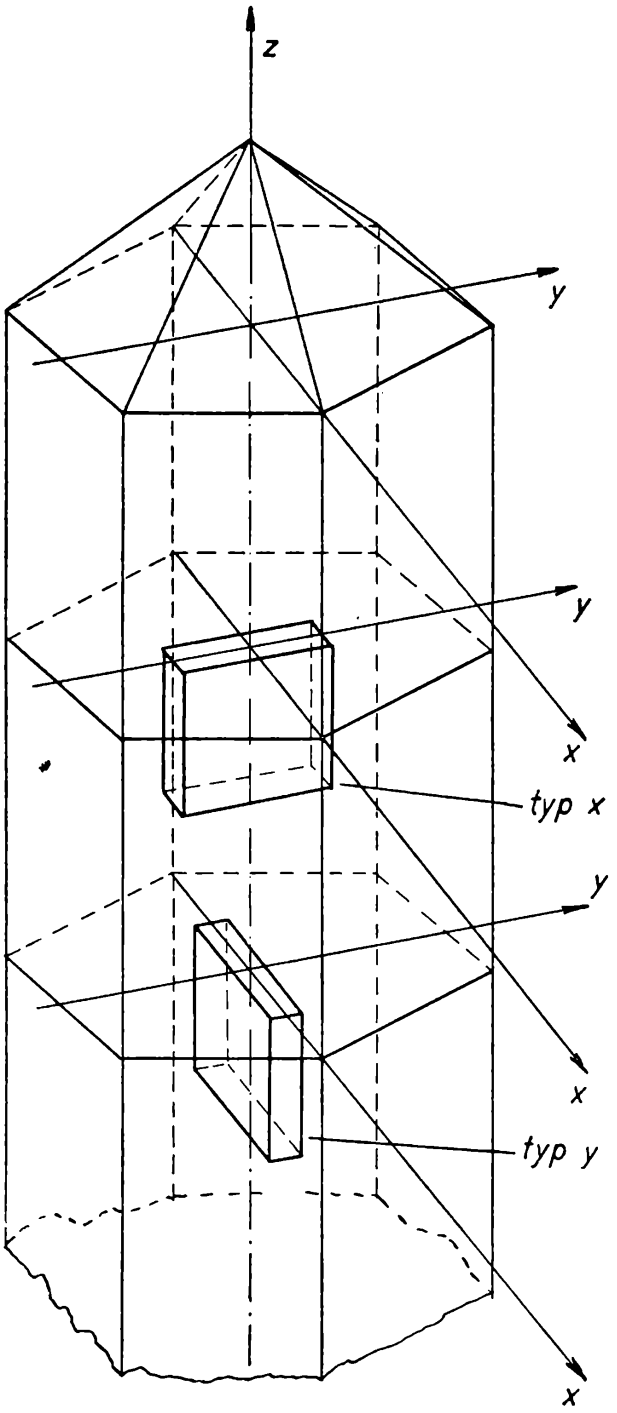
Dopadá-li ultrazvuková vlna na rozhraní dvou prostředí, částečně se odráží. Při dopadu ze vzduchu na povrch pevné látky, např. na ocelový výrobek, se odráží prakticky úplně. Stačí však, aby se tento kovový povrch pokryl tenkou vrstvou kapaliny a odražená energie činí již jen 88 % energie dopadajícího vlnění. Proto se při přenosu ultrazvuku do kovu používá tenkých kapalinových vrstviček tvořících mezi zdrojem vlnění a prozařovaným — vlastně „prozvučovaným" — kovem spojovací prostředí (médium).

Jestliže se ultrazvuková vlna setká na své cestě při průchodu kovem s nějakými překážkami, kterými mohou být např. trhliny, bublinky plynů, jež při tuhnutí z kovu neunikly, nebo příměsi (vměstky) cizích látek, dojde také k jejímu částečnému odrazu. Je zřejmé, že koeficient odrazu zvukové vlny bude v takových případech záviset na druhu prozařovaného materiálu, na charakteru a rozměrech překážek a na vlnové délce ultrazvuku.

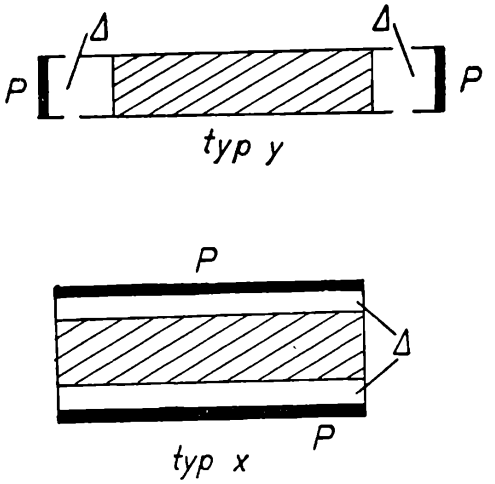
Jako zdroje ultrazvuku se dosud nejčastěji užívá piezokřemenných destiček. Krystal přírodního křemene má, jak je vidět z obr. 1, tvar šestibokého hranolu zakončeného šestibokým jehlanem. Jeho hlavní krystalografická osa *z* je totožná s osou hranolu.

Destičky vyříznuté z krystalu křemene určitým způsobem mají řadu pozoruhodných vlastností mezi nimiž hraje zvláště důležitou úlohu piezoelektrický efekt. Jeho podstata spočívá v tom, že vložením elektrického náboje na povrch křemenné destičky dochází k její deformaci a naopak — při mechanickém tlaku na plochu destičky se destička elektrisuje.

Vznik náboje na krystalech působením mechanického tlaku se nazývá přímý piezoelektrický efekt (jev), změna rozměrů



Obr. 1. Krystal křemene a základní řezy destiček



Obr. 2. Deformace křemenných destiček při vloženém rozdílu potenciálů. Δ je deformace, P jsou polepy.

destičky vyvolaná elektrickým polem je inversní piezoelektrický efekt.

U destiček křemene vznikají piezoelektrické efekty v tom případě, jsou-li vyříznuty z krystalu tak, jak ukazuje obr. 1. V závislosti na způsobu, jakým byla destička zhotovena, se bude lišit charakter jejích deformací (obr. 2).

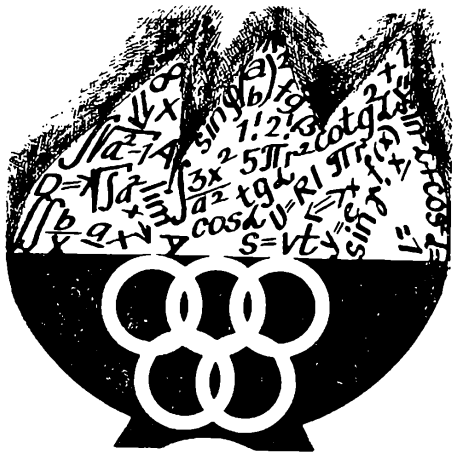
V praxi se křemenná destička opatřuje na svých dvou protilehlých stěnách vodivými (kovovými) elektrodami (polepy); na obr. 2 jsou označeny P. Stlačíme-li destičku, vznikne na elektrodách elektrické napětí, napínáme-li ji kolmo k polepům, vznikne napětí opačného směru. Obráceně při vložení napětí na polepy se destička buď roztáhne nebo smršťí — podle směru napětí. Koná-li tedy destička pružné mechanické kmity, vzniká na polepech střídavé napětí v rytmu jejích kmitů; spojí-

me-li polepy se zdrojem střídavého napětí, bude destička mechanicky kmitat kmitočtem tohoto napětí. Tak může být křemenná destička použita jako zdroj ultrazvukových kmitů v hmotném prostředí, kterým je obklopena nebo kterého se dotýká.

Vedle křemenných destiček se v přístrojích ultrazvukové defektoskopie užívá v poslední době titanatu baria; jeho předností proti křemenu je především nižší cena, neboť zhotovení dokonalých a dostatečně velkých destiček z přírodního křemene je stále ještě značně nákladné.

Nyní, když jsme se seznámili s některými obecnými vlastnostmi ultrazvuku, můžeme přejít k otázkám týkajícím se jeho využití pro defektoskopické účely.

Dovedli byste na základě toho, co jsme si o ultrazvuku řekli, fysikálně zdůvodnit význam „média" mezi křemennou destičkou a prozařovaným materiálem?



MMO

Zúčastnili jsme se VIII. Mezinárodní matematické olympiády v Sofii

DOC. JAN VYŠÍN, MFF, Praha

(Pokračování)

Na závěr vylíčíme aspoň stručně průběh VIII. MMO. Pro většinu našich účastníků byla to v jejich životě událost, neboť všichni letěli poprvé letadlem, většina viděla poprvé Bulharsko a Černé moře. Ostatně sama účast na mezinárodní soutěži je pro každého mladého člověka cenný zážitek.

Letošní VIII. MMO se proti loňskému roku účastnilo o jednu zemi

méně. Bylo tu 9 států, a to Bulharsko, Československo, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, Německá demokratická republika, Polsko, Rumunsko a Sovětský svaz. Finové nepřijeli, také Kuba, Vietnam, Korea, ač byly pozvány, se nedostavily. Jména vedoucích delegací i pedagogických průvodců jsou uvedena v příloze 4. Předsedou mezinárodní komise (jury) i předsedou přípravného výboru VIII. MMO byl děkan matematické fakulty sofijské university prof. Alippi Mateev, generálním sekretářem přípravného výboru inspektor Stojan Budurov.

Vedoucí delegací se sjeli dne 1. července 1966 v Sofii. Ve 20 hod. se konala v hotelu Slavie večeře na uvítanou, které se zúčastnil náměstek ministra kultury inž. Černiev.

Dne 2. 7. po celý den a 3. 7. dopoledne zasedala jury a vybírala soutěžní úlohy.

Po dlouhém jednání byly vybrány dvě trojice úloh: pro první den slovní úloha (bulharská), úloha z trigonometrie (maďarská) a ze stereometrie (sovětská); pro druhý den úloha z goniometrie (jugoslávská), soustava rovnic (československá) a úloha z početní geometrie (polská).

Dne 3. 7. 1966 ve 12 hodin byli delegáti přijati ministrem národní osvěty BLR s. Gončevem. Při besedě se ministr Gončev zajímal o stav vyučování v jednotlivých zúčastněných zemích a vyslovil návrh, aby se při mezinárodních matematických olympiádách pořádalo vždy jakési sympozium o školské matematice. Odpoledne 4. 7. 1966 bylo volno. V 16 hod. byl uspořádán pro delegáty výlet autobusy na horu Vitošu k Zlatým mostům, což je oblíbené rekreační místo obyvatel Sofie. Večer byla společná večeře ve vyhlídkové restauraci na Kopitoto ve výši přes 1000 m, odkud je po setmění nádherný pohled na osvětlenou Sofii. Výletu se zúčastnili i členové bulharského přípravného výboru v čele s prof. Mateevem a někteří pedagogičtí průvodci, jejichž družstva již dojela do Sofie.

Na zasedání jury 4. 7. v 9 hodin bylo rozhodnuto nahradit první soutěžní úlohu sovětskou slovní úlohou a třetí soutěžní úlohu bulharskou úlohou stereometrickou. I po této úpravě tvořil komplex všech šesti úloh celek ne příliš náročný, což se ukázalo při soutěži. Pak byly formulovány texty úloh v světových jazycích (rusky, německy a francouzsky) a stanoven počet bodů. Odpoledne přeložili delegáti texty úloh do národních jazyků, rozmnožili je pro oba dny soutěže a připravili zalepené obálky pro svá družstva.

Žáci a jejich průvodci si toho dne prohlédli Sofii a měli možnost se osvěžit koupáním.

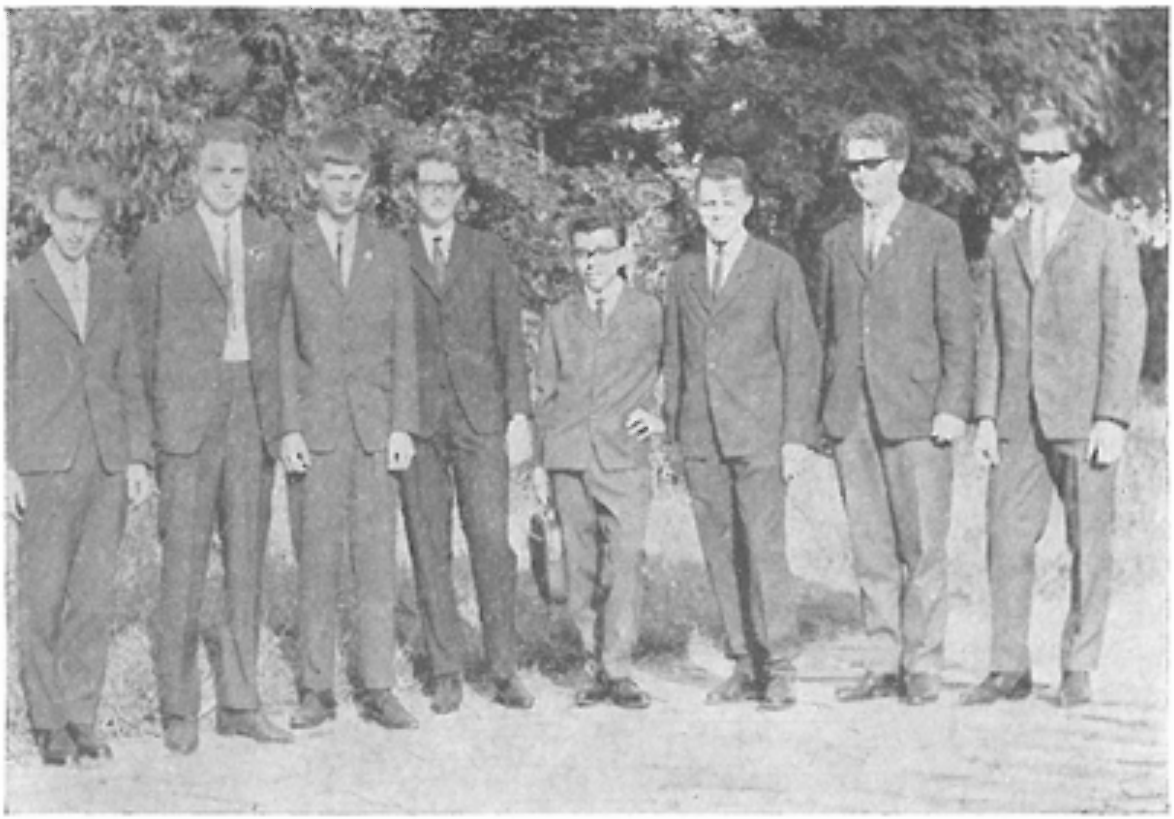
Dne 5. 7. 1966 byla v 8.30 zahájena v aule university soutěž bulharským proslovem prof. Mateeva, který delegáti přetlumočili do všech osmi jazyků. Prof. Mateev zdůraznil ve svém projevu důležitost matematiky pro výstavbu socialismu, význam mezinárodních olympiád pro vyhledávání a vzdělávání matematických talentů i pro výměnu zku-

šeností na poli školské matematiky. Po oficiálním zahájení byly žákům rozdány obálky s texty prvních tří soutěžních úloh. Práce byla zahájena v 9.30 a ukončena v 13.30. Delegáti si mezitím prohlédli Sofii. V 15 hodin se začalo s korekturou první práce. Žáci měli odpoledne volno.

Dne 6. 7. v 9 hodin zahájila v budově university druhá soutěžní práce, která skončila ve 13 hodin. Dopoledne dokončovali vedoucí delegací s pedagogickými průvodci korekturu první práce, ale s koordinací se ještě nezačalo. Od 15 do 17.30 hodin se opravovala druhá práce a začalo se s koordinováním. Pro každou úlohu stanovila bulharská strana jednoho koordinátora z domácích pracovníků, který koordinoval práce žáků všech devíti zemí. V 19 hodin se zúčastnily všechny delegace i s žáky představení starého polského vaudevillu Dámy a husaři od Alexandra Fredra, které se konalo v Hudebním divadle.

Dne 7. 7. a dopoledne 8. 7. se pokračovalo v opravování druhé soutěžní práce (úlohy 4.—6.) a v koordinování. Ihned po ukončení koordinace dne 8. 7. ve 12.40 hodin se zahájilo závěrečné zasedání jury, které pokračovalo po polední přestávce v 15 hodin. Zde byly stanoveny počty bodů pro jednotlivé ceny:

I. cenu získali žáci, kteří dosáhli 39—40 bodů (40 bodů bylo ma-



Obr. 1. Naše družstvo na VIII. mezinárodní matematické olympiádě v Sofii. Zleva: *Jiří Šmerk*, *Pavel Vejvoda*, *Petr Kůrka*, *Petr Němec*, *Bohuš Sivák*, *Jiří Rott*, *Miroslav Kosina* a *Peter Mederly*, autor tohoto snímku.

ximum), II. cenu žáci s 35—38 body a III. cenu žáci s 31—34 body. Schůze skončila v 21 hodin.

Žáci se setkali ve dnech 7. 7. a 8. 7. s komsomolci-matematiky, podnikli výlet na jezero Pančarevo a na Vitošu s večeří v restauraci Kopitoto.

7.

Dne 9. 7. ráno v 6.30 hodin nastoupily všechny delegace (žáci, ped. průvodci i vedoucí delegací) s organizačním výborem VIII. mezinárodní matematické olympiády i s přítomnými novináři (NDR a BLR) a tlumočníky (každé družstvo mělo svého tlumočníka) 4denní okružní cestu po Bulharsku. Jeli jsme třemi autobusy a dvěma osobními auty přes Loveč, Staro Tirnovo, Varnu, Nesebar, Burgas, Sliven, Staru Zagoru a Plovdiv zpět do Sofie. Ujeli jsme více než 1000 km s jednodenní zastávkou a dvěma noclehy ve Varně, s půldenní zastávkou a jedním noclehem v Plovdivě. I když cesta byla namáhavá a sled dojmů překotný, podařilo se hostitelům podat všem účastníkům pohled v kostce na staré i nové Bulharsko a poskytnout jim zážitky, na které jistě nezapomenou. Cesta Mizií, krásným podhůřím Balkánu, letmá prohlídka starého stoličního města Tirnova, kouzelné Černé moře, koupání v Zlatých Pískách i na Slunečním pobřeží, jízda po moři do Varny, návštěva památníku Vladislava Varnenčika, zhlédnutí přístavu Burgasu, prohlídka Plovdivu — staré Filippopole, mnoho dojmů z krásné balkánské přírody, z památek starých zašlých kultur i výstavby nového socialistického Bulharska a všude, ve Varně, v Plovdivu, v Tirnovu a v Tergovišti vřelé vítání pionýry i zástupci měst — to je stručné nastínění popisu naší cesty.

Bohužel, čs. delegace měla cestu ztrpčenu nejistotou o svém odletu. Zahraniční oddělení ministerstva školství a kultury nezajistilo včas cestu letadlem do Sofie a zpět a tak se vyvinula situace, že čs. delegace měla odletět již 13. 7. ráno před oficiálním ukončením soutěže. Jen po soukromém zákroku a po dlouhém jednání se podařilo dosáhnout přesunutí odletu na neděli 17. 7. 1966. To však ještě nebylo známo v Plovdivu a tak čs. delegace musila dne 12. 7. 1966 urychleně odjet do Sofie, aby tam byla co nejdříve a žáci si mohli obstarat nákupy. Nakonec se ukázal tento spěch zbytečný.

Dne 12. 7. 1966 večer se všechny delegace sešly v Sofii. Dopoledne 13. 7. 1966 bylo volné a bylo věnováno nákupům. V 16 hodin byla závěrečná slavnost v aule university za přítomnosti ministra s. Gončeva. Zasedání zahájil prof. Mateev, pak promluvil s. Gončev o významu matematiky v období technické revoluce a výstavby socialismu. Nato rozdal prof. Mateev diplomy a dárky vítězům a uznání i diplomy ostatním účastníkům. Zvláštní uznání dostal nejlepší mongolský žák, který

Příloha 1.

Poř. č.	Jméno	Škola — třída	Rok narození
1.	Kosina Miroslav	3.a, SVVŠ, U balvanu, Jablonec n. Nisou	1948
2.	Kůrka Petr*)	2. g, SVVŠ, W. Piecka, Praha 2	1949
3.	Mederly Peter*)	3.d, SVVŠ, Prievidza	1948
4.	Němec Petr	3.d, SVVŠ, Dlouhý lán, Praha	1948
5.	Rott Jiří	4.b, SPŠ, hutnická, Kladno	1947
6.	Sivák Bohuš*)	9. tř., ZDŠ, Zvolen	1951 (!)
7.	Šmerk Jiří	3.c, SVVŠ, Kyjov	1948
8.	Vejvoda Pavel*)	2.g, SVVŠ, W. Piecka, Praha 2	1947

*) Tito soutěžící jsou řešiteli Rozhledů mat.-fyz.

Příloha 2.

Výsledky čs. družstva v jednotlivých úlohách.

Žák	Počet bodů						Celkem
	úl. 1	úl. 2	úl. 3	úl. 4	úl. 5	úl. 6	
Sivák	6	7	5	5	7	8	38 II. cena
Mederly	6	7	3	5	3	8	32 III. cena
Kůrka	0	7	4	5	7	8	31 III. cena
Šmerk	6	7	2	4	2	8	29
Vejvoda	6	1	3	5	7	5	27
Rott	6	0	4	4	2	6	22
Kosina	4	7	0	5	0	4	20
Němec	6	0	1	4	1	4	16
Celkem	40 max 48	36 max 56	22 max 56	37 max 40	29 max 56	51 max 64	215

Poznámka. Průměrný počet bodů připadající na jednoho žáka je (nepočítáme-li Mongoly) 32.

Příloha 3.

Počty udělených cen a celkové počty dosažených bodů.

Stát	Počet dosažených bodů	Počet cen			Celkem
		I.	II.	III.	
SSSR	293	5	1	1	7
Maďarsko	281	3	1	2	6
NDR	280	3	3	0	6
Polsko	269	1	4	1	6
Rumunsko	257	1	2	2	5
Bulharsko	236	0	1	3	4
Jugoslávie	224	0	2	1	3
ČSSR	215	0	1	2	3
Mongolsko	90	0	0	0	0
Celkem		13	15	12	40

dosáhl 18 bodů. Mezi žáky, kteří získali uznání za originální řešení, zobecnění úloh apod., byl — jak již jsme uvedli — i čs. reprezentant Bohuš Sivák. Jménem žáků pak poděkoval hostitelům německý žák a jménem delegátů vedoucí čs. delegace. Projevy byly tlumočeny do všech jazyků zúčastněných zemí.

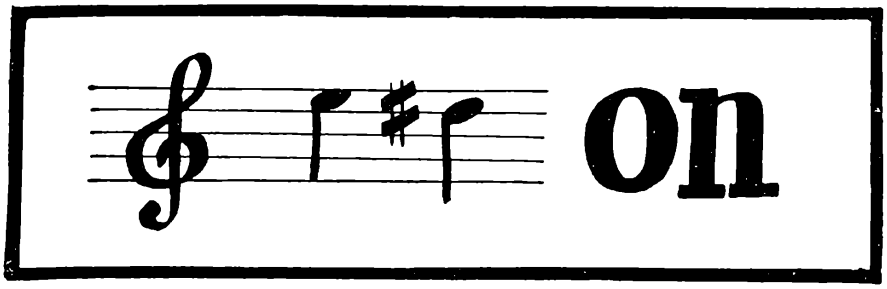
Po zakončení slavnosti byla ve 20 hodin v internátě Obščežitie společná večeře pro všechny účastníky, které se zúčastnil také s. ministr. Při večeři si vyměnily delegace mezi sebou tradiční dárky.

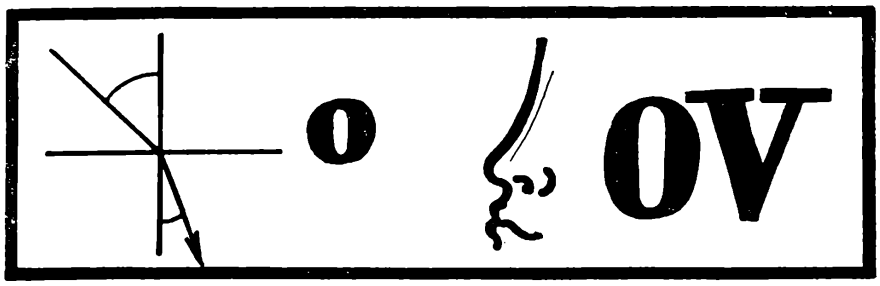
To je pohled na VIII. mezinárodní matematickou olympiádu očima vedoucího delegace. Bylo by jistě zajímavé, kdyby některý z žáků vylíčil olympiádu tak, jak ji viděl on.

Je třeba ocenit práci i velký finanční náklad, které bulharský stát věnoval této soutěži. Dostalo se nám všude opravdu přátelského bratrského přijetí, za které Bulharům srdečně děkujeme. Společensko-politická stránka matematických olympiád, tradiční setkání mladých lidí stejného zájmu, je jistě významným příspěvkem k mírové spolupráci národů.

Rebusy: Ohm, Edison, Lomonosov.

Náš čtenář J. Fidler, Praha 7, Haškova 2, nabízí tyto kompletní svazky Rozhledů matematicko-fyzikálních: roč. 38 (1959—60), 39 (1960—61), 43 (1964—65) a 44 (1965—66).





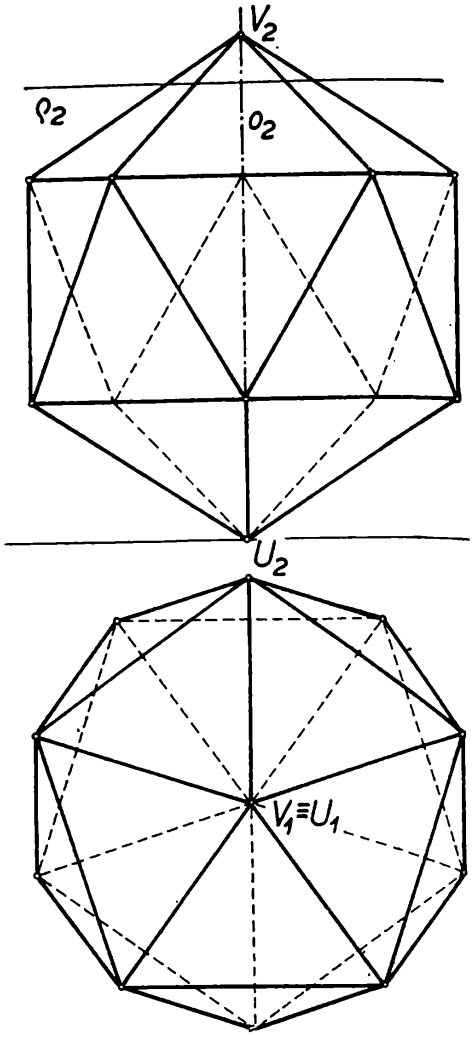
MATEMATICKÉ ZÁBAVY

Geometrie fotbalového míče

ADOLF KODYM, Praha

Úvodní obr. 1 K. Nováka je z podzimního ligového utkání Slavia - Bohemians a vidíte na něm „sešívané“ pravé křídlo Františka Veselého, jak uniká svému strážci. Čtenáře, dychtícího po reportáži, však zarmoutím, nic takového se zde nedočte. Takovou práci bych asi nezvládl a proto se čtenář musí spokojit sportovními rubrikami v denním tisku.

Obr. 1.



Obr. 2.

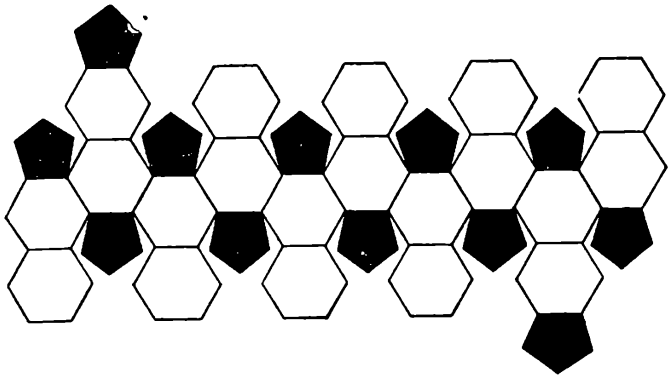
Obrázek tu je proto, abyste si trochu důkladněji všimli míče (je to prý dovoz z Jugoslávie), kterému chceme věnovat pozornost v tomto článku.

Na první pohled vidíme, že je složen z částí tvaru pravidelných sférických[1]) pětiúhelníků a šestiúhelníků o společných stranách. A nyní si povíme, kolik je těch pětiúhelníků, kolik šestiúhelníků a jak vůbec vznikl. Za tím účelem podnikneme malou exkursi do geometrie.

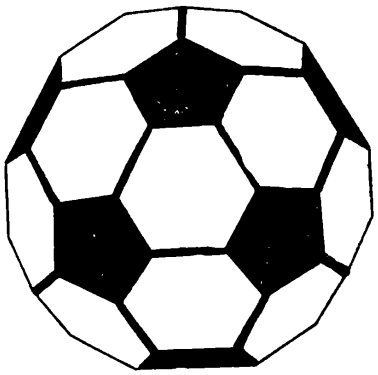
Již Pythagoras (6. st. př. n. l.) znal s největší pravděpodobností tři pravidelná tělesa: pravidelný čtyřstěn, krychli a pravidelný dvanáctistěn (pětiúhelníkový). Další dvě tělesa —

[1]) Sférický trojúhelník je trojúhelník na kulové ploše (tj. na sféře), jehož strany jsou oblouky hlavních kružnic kulové plochy. Sférický pětiúhelník je pětiúhelník na kulové ploše, jehož strany leží na hlavních kružnicích této kulové plochy. Stejně je definován sférický šestiúhelník.

a tím byl počet pravidelných těles uzavřen — objevil asi Theaitetos[2]). Ta dvě pravidelná tělesa byla: pravidelný osmistěn a pravidelný dvacetistěn. A východiskem k zhotovení našeho míče je pravidelný dvacetistěn. Jeho první a druhý průmět vidíte na obr. 2. Jak název sám říká, má 20 stěn (rovnostranné trojúhelníky), 12 vrcholů a 30 hran. Z každého vrcholu vychází 5 hran. Má také 6 os, které spojují vždy dva protější vrcholy. Na obr. 2 je vyznačena osa o, spojující vrcholy U, V.



Obr. 3.



Obr. 4.

Sestrojme nyní rovinu ρ kolmou k ose o tak, aby hrany vycházející z vrcholu V byly rozděleny v poměru 1 : 2, přičemž kratší díly jsou při vrcholu V. Rovina ρ protne pravidelný dvacetistěn v pravidelném pětiúhelníku. Sestrojíme-li takovéto roviny u všech dvanácti vrcholů a odstraníme-li tak vzniklé pravidelné pětiboké jehlany (např. jehlan mezi rovinou ρ a vrcholem V), dostaneme nové těleso, které bude mít $20 + 12 = 32$ stěn. Z toho je 12 pravidelných pětiúhelníků a 20 pravidelných šestiúhelníků. A nyní si představte, že takové těleso zhotovíme. Z kůže nařežeme 12 pravidelných pětiúhelníků a 20 pravidelných šestiúhelníků (o téže straně) a sešijeme. Dovnitř dáme „duši" a nafoukneme. Kůže tlaku uprostřed mnohoúhelníků poněkud povolí (ve švech nikoliv) a máme takřka ideální kouli. No a do ní se pak na hřišti kope.

Uvedené těleso je polopravidelný dvaatřicetistěn. Má 60 vrcholů a 90 hran. Bylo by jistě zajímavé vypočítat jeho objem a povrch. Můžete si též zkusit sestrojit přesně síť (obr. 3) tohoto tělesa, popřípadě ze sítě sestavit model tělesa (obr. 4).

Upravil S. H.

---

[2]) *Theaitetos Athénský* (žil ve 4. st. př. n. l.), byl jedním z nejnadanějších starořeckých matematiků. Zemřel poměrně mlád na zranění utrpěná při válce proti Korintu, když se ke zraněním přidala ještě dyzenterie. Na vysvětlenou podotýkám, že Korint byl z důvodů konkurenčních odvěkým nepřítelem Athén a stál vždy na straně Sparty.

Detektivní pětiboj (Dokončení)

Uveřejňujeme poslední úlohu pětiboje, za jejíž úplné vyřešení získáte šest bodů. Jde o jeden z případů doktora Mejzlíka, známé postavy z povídek Karla Čapka. Zašlete své odpovědi co nejdříve, nejpozději však do 20. 3. 1967.

5 Napište zatykač

Majitel jedné restaurace přivolal policii, protože zjistil, že jeden muž z pětičlenné skupiny platil vrchnímu padělanou stokorunou. Doktor Mejzlík zjistil, že je falešná i dvacetikoruna, kterou platil další člen skupiny. Desetikoruna, kterou platil poslední z nich, pocházela ze série uloupené v bance. Bylo pravděpodobné, že se zde sešli lidé, kteří neměli před zákonem čisté svědomí. Nikdo nedovedl spolehlivě popsat pět podezřelých mužů. Ze všech odpovědí personálu i hostů považoval doktor Mejzlík za spolehlivé pouze tyto údaje:

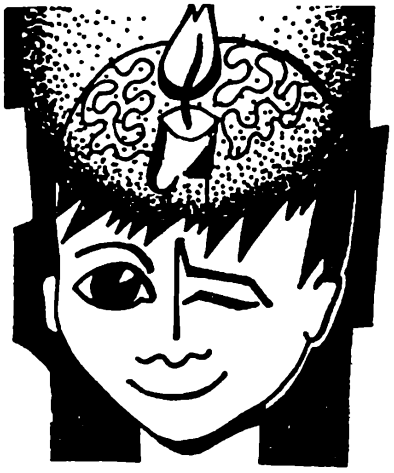
Vrchnímu platil padesátikorunou ten, který pil kávu. Černovlasý muž neplatil, neboť jeho útratu uhradil jiný muž z party. Číšník přinesl objednané nápoje najednou, jako první servíroval čaj, během další obsluhy po řadě kolem stolu podával bezprostředně za sebou červené a bílé víno. Vrchní inkasoval od mužů ve stejném pořadí, v jakém číšník servíroval nápoje. První muž určitě platil, ale ne stokorunou. Jeden host sdělil, že holohlavý muž seděl proti blondýnovi, že jeden muž měl ryšavé vlasy a v čele stolu seděl ten, který odkládal v šatně modrý kabát. Doktor Mejzlík se zajímal o obsazení stolu. Dozvěděl se, že pět podezřelých mužů sedělo u stolu se šesti židlemi, po dvou podél delších stran a po jedné u kratších stran stolu. Volné zůstalo jedno místo u kratší strany, číšník začal servírovat jednomu z těch, kteří měli po jedné ruce volné místo a skončil u druhého.

Při příchodu podezřelých byl u šatny host, který slyšel, že se muž s baretem těšil na pivo, šedovlasý muž na červené víno a ten, který odkládal černý kabát, si chtěl dát bílé víno. Jiný host byl u šatny při odchodu podezřelé pětice a zaslechl, jak si muž s hnědým kabátem liboval, že rozměnil. Šatnářka uvedla, že muž s čepicí měl béžový kabát a jeden muž z pětice odkládal přepychový zelený kabát. Doktor Mejzlík se zajímal o barevné kombinace klobouků a kabátů podezřelých osob. Vyšlo najevo, že kromě hnědého klobouku blondýnova ukládala šatnářka na věšák ještě zelený a černý klobouk a stejnobarevné věci nepatřily jednomu muži. Nevyskytla se také kombinace černé barvy s hnědou barvou.

Doktor Mejzlík se ujistil, že každý z podezřelých mužů platil nejvýše jednou bankovkou a každý pil pouze jeden nápoj. Potom se zamyslil a sestavil popis všech pěti podezřelých. Uvedl v něm barvu vlasů a barvu kabátu každého z nich, pokrývku hlavy (u klobouků i barvu), oblíbený nápoj i to, jakými bankovkami platili čtyři z nich. Zjistil také, na kterých místech u stolu každý z nich seděl.

Dokážete to i vy za předpokladu, že každý muž pil ten nápoj, na který měl chuť? Nakreslete schéma rozsazení podezřelých kolem stolu a pořadí, v jakém byli obsluhováni. Napište výsledek a popište stručně a výstižně úvahy, které jste provedli.

J. Š.



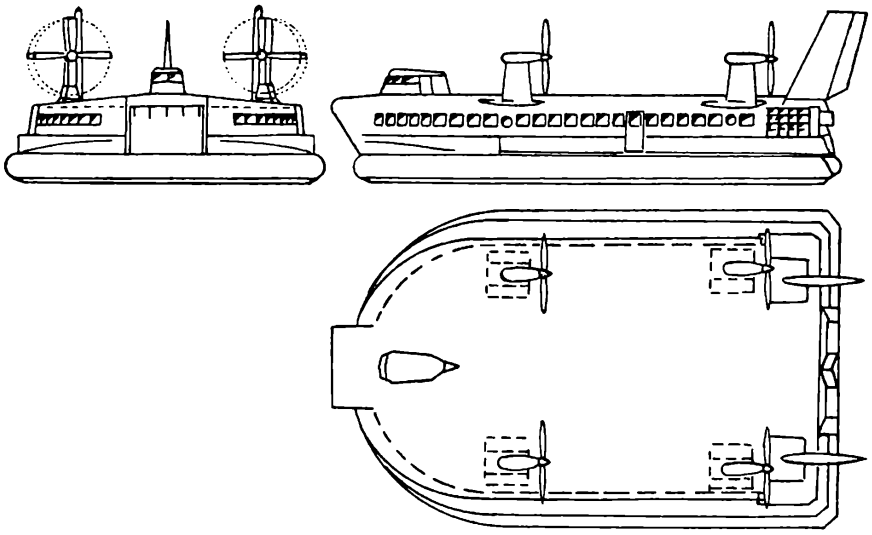
RŮZNÉ • RŮZNÉ

Vznášedla

INŽ. ZDENĚK RŮŽHA, Praha

V sedmém čísle tohoto časopisu z r. 1960/61 byla na str. 316 vysvětlena fyzikální podstata létajících strojů využívajících vzduchového polštáře k vznášení se nad zemí či vodní hladinou v nepatrné výši. Dále bylo uvedeno, jaké různé úpravy trysek pro vzduch a dna stroje mohou přispět k zvýšení tlaku ve vzdušném polštáři, a tím i únosnosti stroje. Dnes tyto stroje dostaly název *vznášedla.*

Odstupem několika let je dnes možné říci, jak se uplatnila a dále rozvinula myšlenka Christopher Cockerella, kterou uskutečnil a veřejnosti předvedl v r. 1956 při zkouškách na svém modelu vznášedla. S původním provedením a jeho obměnami, které měly mnoho konstrukčních složitostí, bylo by nemožné dosáhnout u vznášedel toho rozšíření, jak je vidíme dnes. Již v r. 1959, v době, kdy bylo „zalétá-



Obr. 1. Vznášedlo SR.N4. Je určeno pro 500 osob a přepravu přes otevřené moře do výše vln 3 m.

Pohon:
4 spalovací turbíny Marine Proteus o 3400 k. Čtyřlisté stavitelné vrtule o průměru 5,79 m. Odstředivé dmychadlo Westland o průměru 5,5 m. Nádrže na palivo pro 20 456 l.

Rozměry:

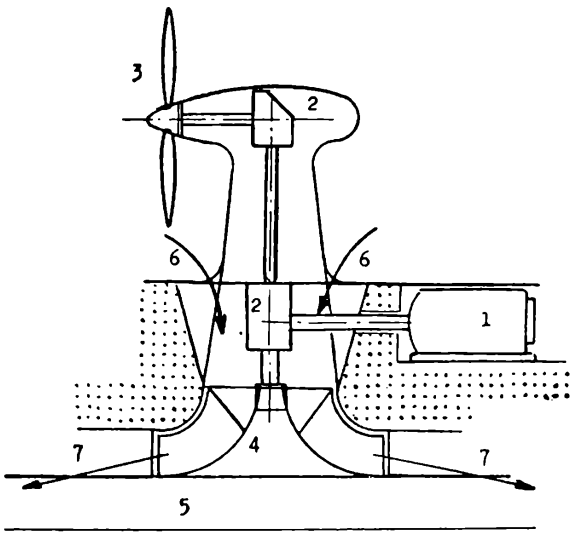
Celková délka	39,20 m	Zatížení	67 000 kp
Celková šířka	22,80 m	Normální hmotnost	162 500 kg
Celková výška	11,16 m	Maximální hmotnost	183 000 kg

Výkony:

Maximální rychlost při bezvětří a max. výkonu motorů		148 km/h
Maximální rychlost při bezvětří a trvalém zatížení motorů		133 km/h
Rychlost při vlnách výšky	1,2 až 1,5 m	102 až 120 km/h
Rychlost při vlnách výšky	2,5 až 3,5 m	37 až 56 km/h
Dojezd za bezvětří		540 km

váno“ první skutečné provedení pokusného vznášedla označeného SR.N1 (počáteční písmena výrobního závodu Saunders-Roe, vyobrazení viz obr. 8 shora citovaného článku) přihlásil vynálezce patentovou ochranu pružné zábrany odtoku vzduchu z polštáře, která je umístěna po obvodu dna vznášedla. Jde v podstatě o jakési polotuhé „záclony“, které se mohou deformovat vnější silou, ale vlastní pružností se vracejí do původního tvaru.

Dík této zácloně se podařilo zvýšit vzdálenost „dna“ vznášedla od země, a tedy i výšku překážek povrchu země či vodní hladiny, která u prvních typů činila pouze několik cm na 1 až 3 m. To je zásadní rozdíl mezi dřívějšími a dnešními vznášedly, s jejichž stavbou bylo započato též v SSSR, USA, Francii, Japonsku aj. Rozdílů v úpravě dmychadla, ve vrtulích a provedení kormidel je mnoho, nejsou však podstatné.



Obr. 2. Jeden ze způsobů provedení pohonu. 1. Spalovací turbína. 2. Převodovky. 3. Hnací vrtule. 4. Dmychadlo. 5. Záclona. 6. Vstup vzduchu k dmychadlu. 7. Výstup vzduchu do vzduchového polštáře.

První prototyp vznášedla objednalo ministerstvo zásobování (letectví) v Anglii od fy Saunders-Roe. Dík úspěšným výsledkům zkoušek byly v Anglii objednány další stroje i u jiných firem s využitím základního patentu. Později byla výroba sjednocena u společnosti British Hovercraft. Během 7 let bylo vyrobeno 42 vznášedel, z toho některé v menších sériích. Se všemi bylo „nalétáno" více než 20 000 hodin, přičemž bylo přepraveno více než 400 000 cestujících. První dopravní linka byla zřízena v r. 1962 v ústí řeky Dee vznášedlem fy Vickers pro 24 cestujících. Nejvyšší rychlost při klidném moři činila 110 km/h.

V r. 1965 byla zřízena pravidelná celoroční linka mezi ostrovem Isle of Wight a Anglií, na níž až dosud bylo přepraveno 220 000 osob. Použitím vznášedel bylo dosaženo zkrácení vlastní přepravní doby ze 40 minut při použití lodi na pouhých 7 minut.

Pro nejbližší dobu se připravuje přeprava cestujících přes kanál La Manche. Již v letošním roce byla zavedena pokusná přeprava se dvěma vznášedly. Od r. 1968 má být mezi Anglií (Ramsgate) a Evropou (Calais) zavedena pravidelná přeprava vznášedly o hmotnosti 162,5 tuny. Přeprava má trvat pouhých 22 minut.

Dosud jsou sériově vyráběny dva typy. Celkem bylo vyrobeno 40 kusů. Typ SR.N5 je menší, pro 18 osob nebo 2,5 t nákladu. Může dosáhnout max. rychlosti 115 km/h a dojezd je 380 km. Typ SR.N6 má sice pohon turbínou o stejném výkonu 900 k, avšak jeho celková váha činí 10 500 kg, přičemž může nést 38 osob nebo náklad 3 t. Jeho rychlost je však jen 105 km/h. Na obrázku je náčrtek vznášedla SR.N4, určeného pro do-

pravu přes kanál. Může nést 600 osob, nebo v další úpravě 30 osobních aut a 228 osob. Vznášedlo pohánějí čtyři spalovací turbíny o výkonu 3400 k (každá). Zábrana unikání vzduchu je vysoká 1,8 m, což umožňuje plout i při vlnách do výšky 3 m, ovšem při snížené rychlosti.

Rozmach tohoto dopravního prostředku vděčí dvěma hlavním důvodům. Je to vysoká rychlost, kterou žádný parník, kromě parníku s vodním ponorným křídlem, není schopen dosáhnout. Dále je to možnost pohybu na suchu i na vodě, ale zejména v bahnitých a močálovitých terénech porostlých i hustou travou.

Jak vyplývá z dnešního stavu vývoje vznášedel, jejich konstrukce se podstatně zjednodušila a dosáhla v krátké době životaschopnosti. Na tomto příkladu jsem chtěl dokumentovat, jakými složitými cestami, které byly uvedeny v článku, se ubírá vývoj při hledání optimálního řešení, než se podaří nalézt vhodný způsob, který využije původní myšlenku.

Rozhledy pomáhají škole

JOSEF KOTYK, prof. SVVŠ, Pardubice

Na toto téma vypracoval jsem již v 41. ročníku našeho časopisu (číslo 1, str. 44 až 47) článek, v němž jsem vylíčil, jak mohou ve vyučovací hodině vzniknout situace, při nichž jsou *Rozhledy* učiteli vítaným pomocníkem. Podobných příležitostí je ovšem mnoho. Žákům přinášejí pěkné zpestření hodiny a zájem, jednou vzbuzený, vzrůstá, souhlasíme-li s tím, že mohou i mimo vyučování bez rozpaků přicházet s případnými problémy, pozveme-li je k účasti na besedách s čtenáři *Rozhledů* nebo jim starší ročníky časopisu či některá jednotlivá čísla, jež žádají, zapůjčíme.

Nábor předplatitelů pro nový školní rok provádím u postupujících žáků *již v červnu*, u žáků nově přijatých v prvním týdnu měsíce září. V 15 třídách zdejší školy bylo ve školním roce 1964/65 134, v roce 1965/66 128, v roce 1966/67 132 předplatitelů. Na jednu třídu přírodovědné větve připadá průměrně 12, na třídu humanitní větve průměrně 5 předplatitelů. Číselný pohyb v tomto počtu je od roku k roku zcela malý a při naprosté dobrovolnosti přihlášek také přirozený. O pevný kádr spolehlivých a věrných čtenářů mají tedy Rozhledy na zdejší škole dobře postaráno.

A výsledky?

Jestliže Rozhledy skutečně a vážně plní své poslání, musí jejich pomoc, kterou škole, učitelům a žactvu poskytují, přinášet také dobré

výsledky. Toto tvrzení doložím opět číselnou ilustrací: Ve školním roce 1965/66 maturovala na zdejší škole třída III.B přírodovědné větve, v níž bylo 22 předplatitelů Rozhledů; z nich 17 složilo s úspěchem přijímací zkoušku na vysokou školu a studuje vědy matematické a fyzikální či různé obory technické. Do dalšího studia nastupují vybaveni knihovničkou, jejíž přední ozdobou je 30 sešitů 42., 43. a 44. ročníku Rozhledů, a bohatými vědomostmi, které jejich četbou získali. Slíbili také, že zůstanou i dále našemu časopisu věrni a vděčni za dobré služby, které jim již na střední škole prokázal.

Jaké je to na vaší škole?

RECENZE

Druhé vydání Matematické indukce

Na podzim roku 1966 se na našem knižním trhu objevilo již druhé vydání knížky dr. Rudolfa Výborného: *Matematická indukce.* O této úspěšné brožuře, která byla jako 6. svazek zařazena do edice Škola mladých matematiků, jsme již v Rozhledech psali při příležitosti jejího prvního vydání. Knížka byla brzy vyprodána a tak můžeme nyní čtenářům doporučit vydání druhé.

Brožura je rozčleněna do deseti částí a čtenář v ní najde řadu zajímavých příkladů a cvičení. I ti studenti, kteří ve škole matematické indukci dobře porozuměli, najdou ve Výborného knížce mnoho látky k přemýšlení. Dozvědí se o matematické indukci v algebře i geometrii, o definici matematickou indukcí, o dvojité matematické indukci apod. Jsou připojeny i historické poznámky a vysvětleny některé důležité pojmy (prvočísla, množiny, funkce a mnohočleny). Závěr knížky obsahuje výsledky k cvičením a literaturu k dalšímu studiu. Jsme přesvědčeni, že i toto druhé vydání najde mnoho čtenářů zejména mezi řešiteli Matematické olympiády.

Knížka, která má 64 stran a 8 obrázků, stojí 2,50 Kčs.

Jiřina Sedláčková

Vlach M., Kyncl Zd., Numerické výpočty

Praha, SPN 1966, 196 stran, cena vázaného výtisku Kčs 8,—.

Kniha je učebnicí pro učební předmět „Numerické výpočty" na speciální větvi SVVŠ pro přípravu programátorů. Její obsah je tudíž určen osnovou tohoto předmětu. Je rozdělena do šesti kapitol:

V úvodní kapitole Neúplná čísla jsou vyloženy základní vlastnosti těchto čísel, neboť se s nimi pracuje v celé knížce.

Druhá kapitola se zabývá řešením soustav lineárních rovnic o n neznámých. Z různých modifikací Gaussovy eliminační metody je probráno schéma jediného dělení s hlavními prvky, Jordanovo schéma a schéma pro současné řešení několika soustav se stejnou maticí soustavy. Na základě Frobeniovy věty jsou dále diskutovány otázky existence řešení a počtu řešení soustav, přičemž jsou metodicky velmi dobře vyloženy pojmy: vektor n-členný, matice, hodnost matice a základní operace s vektory a maticemi, základní vlastnosti determinantů n-ho stupně a jejich použití k řešení soustav, a konečně iterační metody (Ritzova a Seidelova).

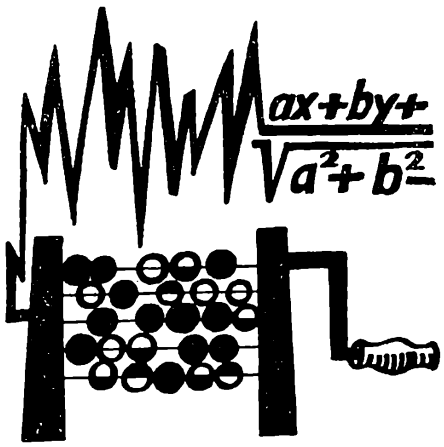
Kapitola třetí (Aproximace funkcí) pojednává o interpolačních mnohočlenech, zejména v Lagrangeově a Newtonově tvaru, a v závěru uvádí metodu nejmenších čtverců.

V kapitole Přibližné metody řešení rovnic o jedné neznámé se nejdříve objasňuje — jako důležitá pomůcka pro další výklad — Hornerovo schéma, načež jsou probírány některé grafické metody pro řešení rovnic a vyložena metoda tětiv (Regula falsi) a metoda tečen.

V předposlední části (Numerická integrace) je vyložena metoda obdélníková, lichoběžníková a Simpsonova pro přibližný výpočet určitých integrálů s odhadem chyby. V kapitole šesté je na příkladech vyloženo násobení, dělení, umocňování, odmocňování a počítání s goniometrickými funkcemi pomocí logaritmického pravítka.

Velikým kladem této příručky je její výborné metodické zpracování. Probíraná látka je vysvětlována na mnoha řešených příkladech a k procvičení jsou ke každé kapitole připojeny úlohy, jichž výsledky jsou uvedeny na konci knihy. Studium knihy nevyžaduje žádné veliké předběžné matematické průpravy: v prvých dvou kapitolách jsou předpokládány pouze matematické znalosti ZDŠ, studium kapitol III. až V. vyžaduje znalost jen nejzákladnějších vět diferenciálního a integrálního počtu.

Knížka je svým obsahem a zpracováním vhodná nejen jako učebnice pro jmenovanou specializaci SVVŠ, ale lze ji vřele doporučit též všem zájemcům o numerické metody, posluchačům kursů pro programátory, Podnikových institutů, posluchačům Lidové university apod. *E. Ř.*



Zjišťování prvočísel a čísel složených

JIŘÍ STEJSKAL, Praha

Nejprve je třeba definovat několik základních pojmů a pak si dokážeme některé jednoduché věty.

D. 1. *Každé přirozené číslo a je d ě l i t e l n é přirozeným číslem b, existuje-li přirozené číslo x takové, že bx = a. Číslo b se nazývá d ě l i t e l čísla a, číslo a se nazývá n á s o b e k čísla b.*

V. 1. *Každé přirozené číslo je dělitelné číslem 1 a samo sebou.*

D ů k a z. Věta platí, protože pro každé přirozené číslo a platí rovnost $a = a \,.\, 1 = 1 \,.\, a$.

D. 2. *Číslo 1 a číslo a se nazývají s a m o z ř e j m í d ě l i t e l é. Ostatní existující dělitelé se nazývají n e s a m o z ř e j m í.*

Některá přirozená čísla mají pouze samozřejmé dělitele (např. 2, 3, 5, 7, 11, ...), některá mají kromě samozřejmých dělitelů aspoň jednoho dalšího (např. 4, 6, 8, 9, 10, ...).

V. 2. *Pro každého nesamozřejmého dělitele d_n přirozeného čísla a platí $a > d_n > 1$.*

D ů k a z. Je-li d_n nesamozřejmým dělitelem přirozeného čísla a, pak existuje přirozené číslo $x > 1$, takže $a = d_n \,.\, x$, protože kdyby $x = 1$, bylo by $a = d_n \,.\, 1 = d_n$ a číslo d_n by bylo samozřejmým dělitelem. Protože $x > 1$ je $d_n \,.\, x > d_n$ a $a > d_n$. Dále $d_n > 1$, kdyby bylo $d_n = 1$, byl by to samozřejmý dělitel.

D. 3. *Prvočíslem nazýváme takové přirozené číslo $p > 1$, které kromě samozřejmých dělitelů nemá žádného jiného dělitele. Má-li přirozené číslo, kromě samozřejmých dělitelů alespoň jednoho nesamozřejmého dělitele, nazývá se číslo složené.*

Prvočíslem je tedy např. číslo 421, neboť kromě dělitelů 1 a 421 nemá žádného jiného dělitele. Např. číslo 938 není prvočíslem, neboť má kromě samozřejmých dělitelů ještě další dělitele nesamozřejmé.

V. 3. *Prvočíslem je nejmenší nesamozřejmý dělitel každého složeného čísla.*

Důkaz. Nechť je a složené číslo. Má tedy kromě samozřejmých dělitelů dělitele nesamozřejmé. Tito dělitelé nesamozřejmí jsou čísla přirozená, proto mezi nimi existuje číslo nejmenší. Platí $a = b \,.\, x$, kde x je číslo přirozené. Kdyby b nebylo prvočíslo, mělo by alespoň jednoho nesamozřejmého dělitele d_n, pro kterého platí $b > d_n > 1$; $b = d_n \,.\, y$, kde y je číslo přirozené. Potom platí $a = d_n \,.\, y \,.\, x = d_n \,.\, y \,.\, x$, kde $y \,.\, x$ je číslo přirozené, tedy d_n je nesamozřejmým dělitelem čísla a. To ovšem není možné, protože jsme učinili předpoklad, že b je nejmenší nesamozřejmý dělitel čísla a. Je tedy číslo b prvočíslo.

V. 4. *Pro nejmenšího nesamozřejmého dělitele d_n složeného čísla a platí $d_n^2 \leqq a$.*

Důkaz. Je-li d_n nejmenší nesamozřejmý dělitel složeného čísla a a $a = d_n \,.\, x$, je i x nesamozřejmý dělitel čísla a. Neplatí tedy $d_n > x$, protože by číslo d_n nemohlo být nejmenším nesamozřejmým dělitelem čísla a. Platí $d_n \leqq x$, tedy $d_n^2 \leqq d_n \,.\, x$ a $d_n^2 \leqq a$.

Nyní si ukážeme, jak rozhodneme o tom, zda dané číslo je prvočíslo nebo číslo složené, přičemž dané číslo je větší než 1.

Nechť je dáno přirozené číslo $a > 1$. Abychom zjistili, zda číslo a je prvočíslem nebo číslem složeným, musíme najít některého nesamozřejmého dělitele.

Podle V. 3 je nejmenší nesamozřejmý dělitel tohoto čísla prvočíslem a podle V. 4 pro něj platí, že jeho druhá mocnina není větší než číslo a. Budeme jej tedy hledat mezi těmi prvočísly, kterých druhá mocnina není větší než číslo a.

Příklad. Zjistěte, zda číslo a) 271, b) 323 je prvočíslem nebo číslem složeným.

Řešení. a) Hledáme některého nesamozřejmého dělitele. Podle V. 3 a V. 4 provedeme dělení

271 : 2, 271 : 3, 271 : 5, 271 : 7, 271 11, 271 : 13.

Žádné z těchto dělení prvočísly nevychází beze zbytku. Dalším prvočíslem je číslo 17.

$17^2 = 289$, $289 > 271$, proto číslo 271 je prvočíslem.

b) Provedeme dělení

323 : 2, 323 : 3, 323 : 5, 323 : 7, 323 : 11, 323 : 13, 323 : 17.

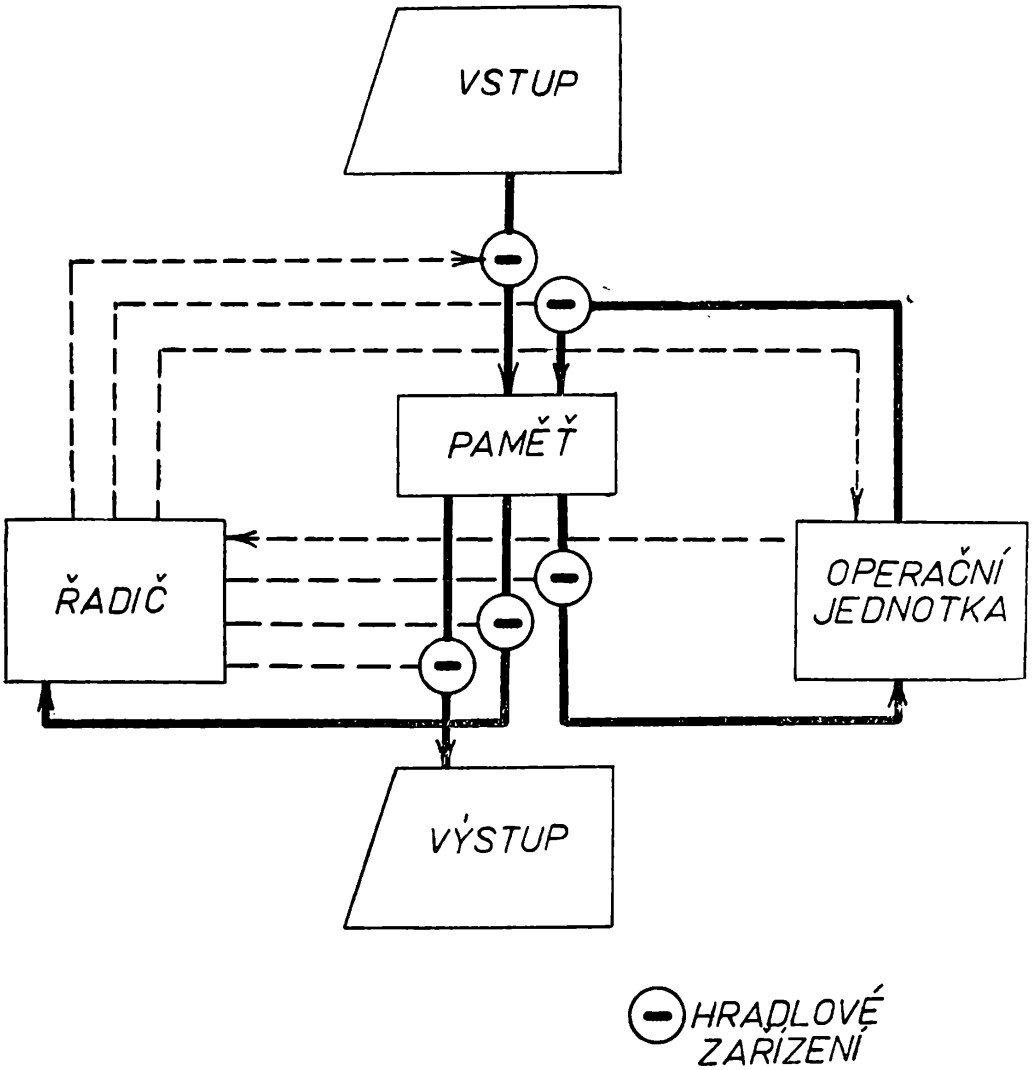
Dělení 323 : 17 vychází beze zbytku, proto číslo 323 je číslem složeným.

Vznik a vývoj strojů na zpracování informací (Pokračování)

ING. VASIL ČAPLA, Praha

Blokové schéma elektronického samočinného počítače

Každý elektronický samočinný počítač se skládá v podstatě ze tří hlavních částí neboli jednotek. Jsou to: paměť, operační jednotka a řadič (schéma).



a) Paměť je zařízení, určené k uchování počátečních hodnot, které se mají zpracovat, konstant a instrukcí, jak se mají počáteční hodnoty zpracovat. Instrukce (tj. předpis, podle něhož stroj pracuje) jsou dány tak, aby výstupní informace dávaly odpověď na položené otázky, představující řešený úkol. Během výpočtu se zazna-

menávají v paměti informace zpracované strojem a výsledek výpočtu, tj. řešení daného úkolu.

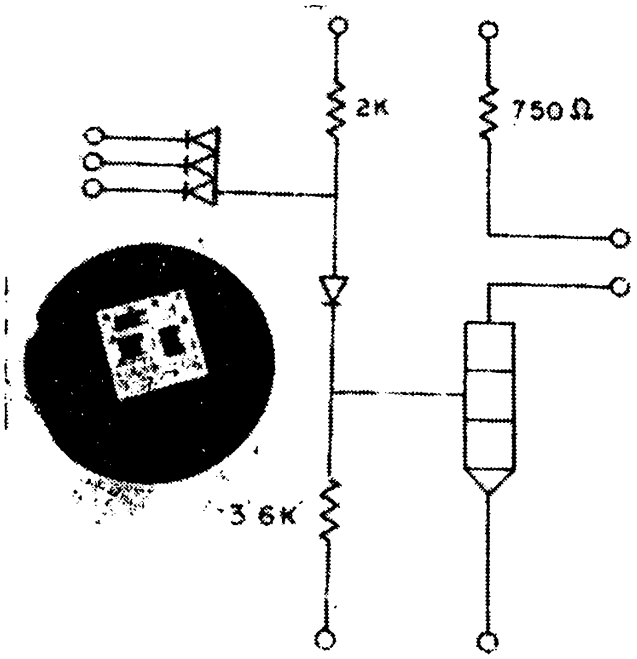
Paměť se dělí na množství paměťových míst, neboli buněk, kterým jsou přiřazena čísla, zvaná a d r e s y, na kterých může být umístěno jedno s l o v o, skládající se z posloupnosti znaků, jako cifer, písmen.

b) O p e r a č n í j e d n o t k a je část stroje, která provádí aritmetické operace na číslech a též nearitmetické operace, např. rozdělování slov na části, změny instrukcí apod. Operační jednotka dokáže provést výkony, které se považují za nejjednodušší prvky myšlení, např. srovnávat, nacházet společné nebo rozdílné znaky, a proto se někdy samočinným počítačům říká „m y s l í c í s t r o j e".

c) Ř a d i č je další z hlavních jednotek samočinného počítače, která zastupuje výpočtáře a řídí chod celého stroje, tj. práci operační jednotky, přísun čísel do ní a odsunutí (záznam) výsledků do paměti, dále přísun dalších instrukcí a činnost výstupu za pomoci hradlového zařízení.

Budoucí rozvoj stavebních prvků. V posledních letech se výzkum zabývá využitím zvláštních záření tuhých látek a plynů, pozorovaným v kvantových generátorech světla (lasery) a mikrovln (masery).

V současné době jsme svědky nástupu m i k r o e l e k t r o n i k y (obr. 6). Již nyní se vyrábějí sdružené obvody, vyplňující funkci 15, 34, 50 a více součástek a jejich počet bude stoupat dále. Takové mikroelektronické obvody si udržují po dobu svého života, který je prakticky neomezený, vynikající vlastnosti. Postup prostorového zhušťování stavebních prvků při uchování a zpracování informace není zdaleka ukončen. V systémech osazených elektronkami bylo možno počítat s hustotou jedné součásti v cm^3, v systémech s tranzistory 10 součástí v cm^3, avšak v monolitických sdružených obvodech lze umístit až 1000 a více součástí v jednom cm^3.



Obr. 6. Ukázka mikroelektronických obvodů.

Výzkum pracuje na možnosti nahradit sdružené obvody molekulárními s hustotou v řádu 10^4 až 10^6 prvků v cm^3.

V dohledné době nahradí funkci jednotlivých součástek, odporů, kondenzátorů, indukčností a aktivních prvků komplexně mikroskopické útvary, člověkem přetvářené hmoty.

Procesy přetržité a pochody plynulé zesilování, pamatování, selekce a snad i vyřazování budou uskutečněny v monolitických blocích, vyráběných fotolitografickými metodami.

Výzkum se zaměřuje tak, aby elektronika (mikroelektronika) blahodárně pronikala do většiny oblastí lidské činnosti.

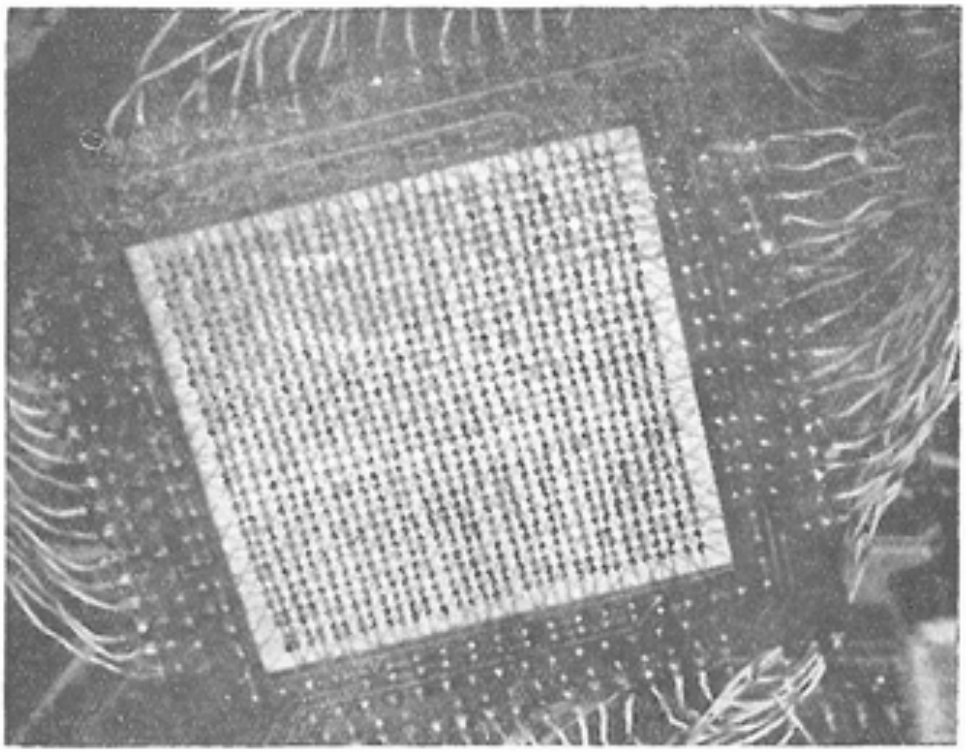
Nejužívanější prvky paměti. Prvky prvních samočinných počítačů (paměť, obvody) tvořily relé. Např. samočinný počítač MARK I měl paměť obsahující 2000 relé, avšak stroj byl elektromechanický.

Rtuťové a niklové zpožďovací linky. S řešením stavby elektronických samočinných počítačů se objevil nový prvek paměti. Jsou to rtuťové zpožďovací linky, které pracují na principu akustického impulsu, jenž se šíří trubicí naplněnou rtutí. Tlakový impuls, jejž můžeme získat přeměnou elektrického impulsu, se šíří trubicí. Jakmile dosáhne druhého konce, snímá se, regeneruje a opět se budí na prvém konci trubice. Tlakový impuls cirkuluje v trubici, odkud jej můžeme odvést. Kapacita bývá 500 až 2000 slov. Vybavovací doba řádově 1 m/sec. Touto pamětí je vybaven např. samočinný počítač EDSAC I, a UNIVAC Factronic, model I. Tento typ paměti je velmi citlivý na změny teploty, proto se přešlo k obměně rtuťových zpožďovacích linek, kterou tvoří niklové zpožďovací linky, použité např. v samočinném počítači ELLIOTT 402.

Existují též elektrické zpožďovací linky. Podobně jako u rtuťových zpožďovacích linek se používá principu oběhu v uzavřeném obvodu z cívek a kondenzátoru. Elektrických zpožďovacích linek se používá též ve spojení s magnetickým bubnem.

Elektrostatická (obrazovková) paměť. Paměťovým elementem je elektrostatický náboj, zachycený na stínítku obrazovky, kde se může udržet po určitou dobu. Vychylovacím zařízením zaměřujeme elektronový paprsek na kterékoliv místo stínítka a zanecháváme tam záznam ve tvaru elektrostatického náboje. Elektronické obvody neustále regenerují nabitá místa. Kapacita bývá 500 až 2000 slov. Je to paměť s libovolným výběrem. Tímto druhem paměti byl vybaven sovětský samočinný počítač BESM-1 (BESM-2 má již ferritovou paměť), STRELA, ORACLE a jiné.

„Obraz", který vzniká na obrazovce, se skládá z teček a čárek, které představují číslice 0, 1, podobně jako políčka u magnetických záznamů. Rychlost záznamu je $^1/_{23}$ miliontiny vteřiny na jedno písmeno. Obrazovková paměť byla vytlačena ferritovou pamětí. O ferritových jádrech jsme pojednali na str. 268. Pro účely paměti jsou ferritová jádra uspořádána v mříži. Je to paměť s libovolným výběrem. Tímto druhem paměti jsou vybaveny moderní střední a rychlé samočinné počítače (obr. 7).



Obr. 7. Matrice feritové paměti velikosti 32×32 samočinného počítače UNIVAC.

Magnetický buben. Magnetický buben patří k prvním druhům pamětí, používaných hned při vzniku samočinných počítačů. Byly vyvinuty skoro zároveň v Anglii a v NSR. Původně to byla vnitřní paměť, nyní se jí používá zejména jako pomocné paměti. Protože čs. první reléový samočinný počítač SAPO byl vybaven touto pamětí, seznámíme čtenáře s tímto zařízením.

Magnetický buben čs. reléového samočinného počítače SAPO je kovový válec, který je na svém plášti pokryt tenkou ferromagnetickou vrstvou. Buben je poháněn samostatným motorem. V těsné blízkosti vrstvy je upevněno dvaatřicet elektromagnetických hlavic, kterými se provádí záznam nebo čtení dvaatřiceti dvojkových číslic slova. Samočinný počítač zpracovává informace po částech tvořících slova.

Slovem je vyjádřeno ve smluvené řeči buď číslo, nebo instrukce. Předpis, podle kterého je číslo nebo instrukce vyjádřena slovem, nazýváme *kód*. Každé slovo se skládá z 32 binárních číslic (bitů), které vyplní právě jedno místo paměti, označené jednou adresou. Z nich 31 číslic je nositelem vlastní informace, zbývající číslice je tzv. parita, která slouží ke kontrole správnosti přenosu slov ve stroji.

Každé hlavici přísluší na povrchu bubnu jedna záznamová dráha. Na jedné záznamové dráze je 1024 záznamových míst. Těmto záznamovým místům jsou přiřazena čísla 0 až 1023 na bubnu. Záznamová místa, kterým je na všech 32 záznamových dráhách bubnu přiřazeno totéž číslo, tvoří jedno paměťové místo. Přiřazené společné číslo nazýváme adresou paměťového místa. Je samozřejmé, že zázna-

mová místa, která tvoří jedno paměťové místo, procházejí při otáčení bubnu pod všemi 32 hlavicemi současně. Při otáčení bubnu projdou během jedné otáčky postupně všechna paměťová místa pod elektromagnetickými hlavicemi. Hlavice nejsou seřaděny podle povrchové přímky bubnu, nýbrž jsou z konstrukčních důvodů rozmístěny kolem bubnu. Každá hlavice má dvě vinutí: záznamové a čtecí.

Ferromagnetická vrstva je předmagnetována jedním směrem. Elektromagnetickou hlavicí je možno na tuto vrstvu provádět záznam buď stejného směru, jako je směr předmagnetizace, což odpovídá číslici 0, nebo opačného směru, což odpovídá číslici 1. Výběr příslušného paměťového místa, do něhož se má slovo zaznamenat nebo z něhož se má přečíst, provádí výběrový obvod podle adresy, přicházející z rozdělovače adres řadiče.

Bubnové paměti některých samočinných počítačů obsahují několik tisíc slov. Některé samočinné počítače jsou vybaveny soustavou bubnových pamětí o velké kapacitě.

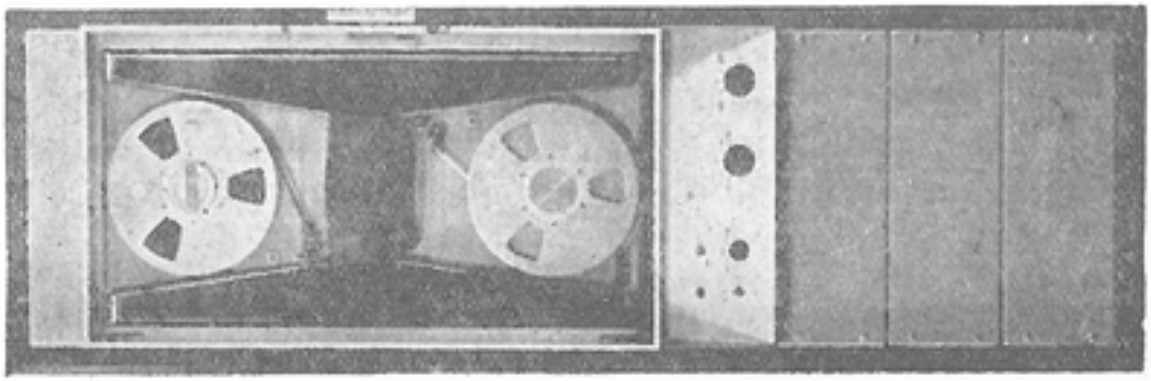
Disková paměť. Paměť na magnetických discích — stručně disková paměť, byla vyvinuta pro některé samočinné počítače firmy IBM, např. pro IBM 305 RAMAC, IBM 650, STRETCH a IBM 7070. U samočinného počítače IBM 305 RAMAC se disková paměť skládá z 50 disků, uložených svisle na společné ose. Průměr disku činí kolem 500 mm a vzdálenost mezi jednotlivými disky je kolem 9 mm. Data se zaznamenávají pomocí rychlého ramene a stejně tak se i vyhledávají.

Diskové paměti byly pak převzaty jinými firmami, neboť umožňují docílit velkých kapacit pamětí, což je důležité pro některé druhy zpracování dat, zejména v administrativě. Snadná úschova diskových pamětí a velká přehlednost, to jsou vlastnosti, které jsou vítány mnohými uživateli samočinných počítačů vybavených diskovou pamětí. Kapacita diskové paměti činí např. u stroje IBM 650 — 6 až 48 miliónů binárních číslic.

Magnetofonová paměť. Rozlišujeme plněnou a vrstvovou magnetofonovou pásku a tzv. blatnerfonovou kovovou pásku. Hmotu vrstvy (ferromagnetický materiál) tvoří kysličníky železa smíchané s organickým tmelem. Přiblížíme-li pásku k elektromagnetu, přenese se magnetizace jádra elektromagnetu do ferromagnetického materiálu pásky, kde se udrží (zapamatuje), i když se v elektromagnetu přeruší proud. Materiál se tedy zmagnetizuje natrvalo.

Magnetofonová páska může obsahovat např. 7 stop, z nichž 4 stopy jsou číselné, 2 abecední a 1 stopa je kontrolní. Kapacita např. magnetofonové pásky stroje BESM-2 činí 30 000 čísel. Počet pásek u stroje BESM-2 je 4, což dává celkovou kapacitu 120 000 čísel. Záznam nebo čtení se provádí rychlostí 400 čísel za vteřinu.

Magnetofonová paměť pro svou velkou kapacitu se hodí zejména pro vnější paměť samočinných počítačů. Ukázka magnetofonové pásky je na obr. 8.



Obr. 8. Jednotka magnetofonové paměti AMPEX.

(Pokračování)

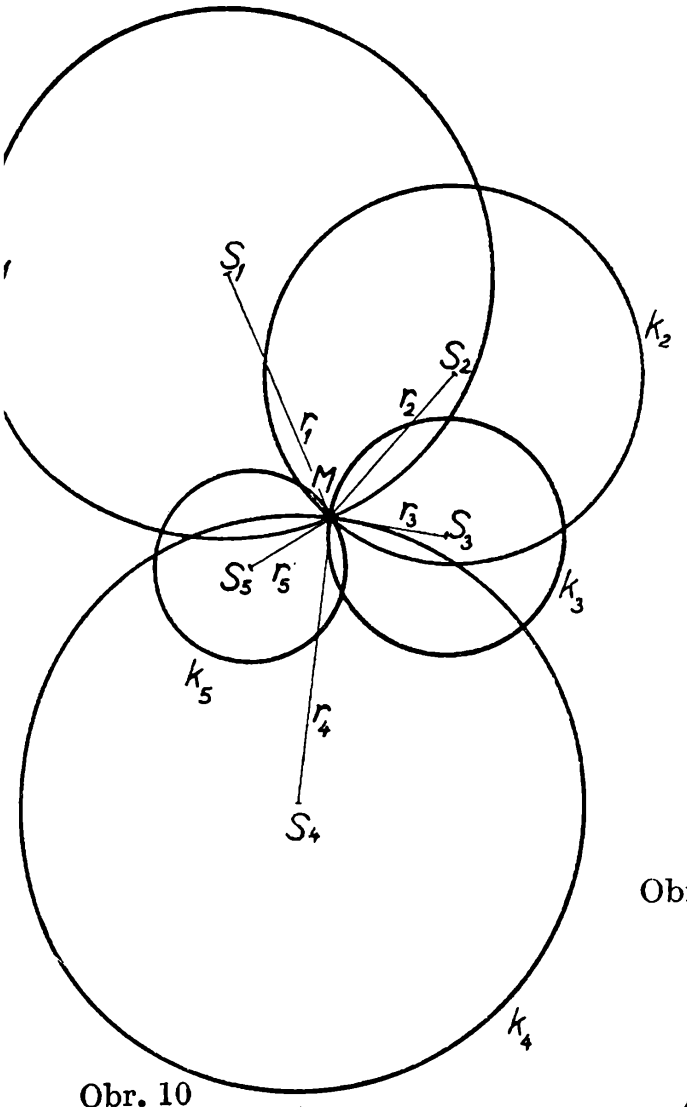
Geometrická místa Dokončení

OLDŘICH JENIŠTA, ČVUT, Praha

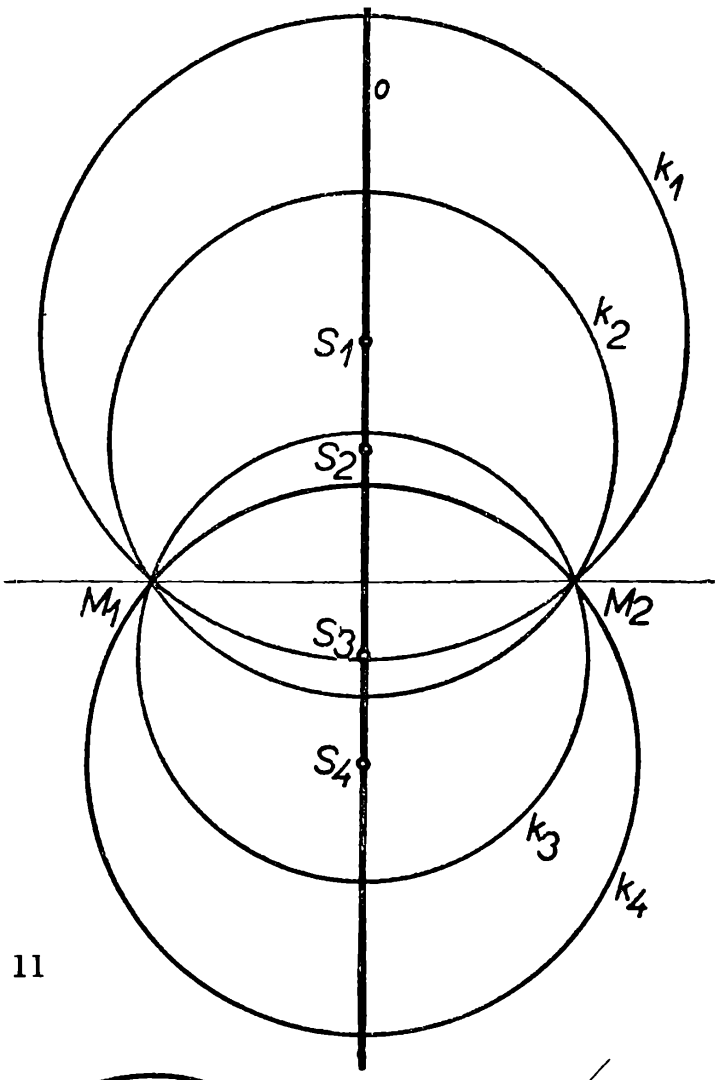
A ještě uvedeme několik jiných geometrických míst. Co je např. geometrickým místem středů S kružnic k procházejících daným bodem M? Snadno si představíme, že tímto geometrickým místem je celá rovina, protože každý její bod S_1, S_2, S_3, ... může být středem kružnice k_1, k_2, k_3, ... procházející bodem M, jestliže jsou sestrojeny poloměrem S_1M, S_2M, S_3M, ... (obr. 10).

Určete geometrické místo středů S kružnic k, procházejících dvěma danými body M_1 a M_2. Protože všechny kružnice k_1, k_2, k_3, ... procházející body M_1 a M_2 musí mít středy S_1, S_2, S_3, ... stejně vzdáleny od obou daných bodů M_1 a M_2, musí tyto středy S_1, S_2, S_3, ležet na ose souměrnosti o úsečky M_1M_2. Hledaným geometrickým místem je tedy osa úsečky, spojující oba dané body (obr. 11). Jinak můžeme říci, že osa úsečky je geometrickým místem bodů stejně vzdálených od koncových bodů dané úsečky.

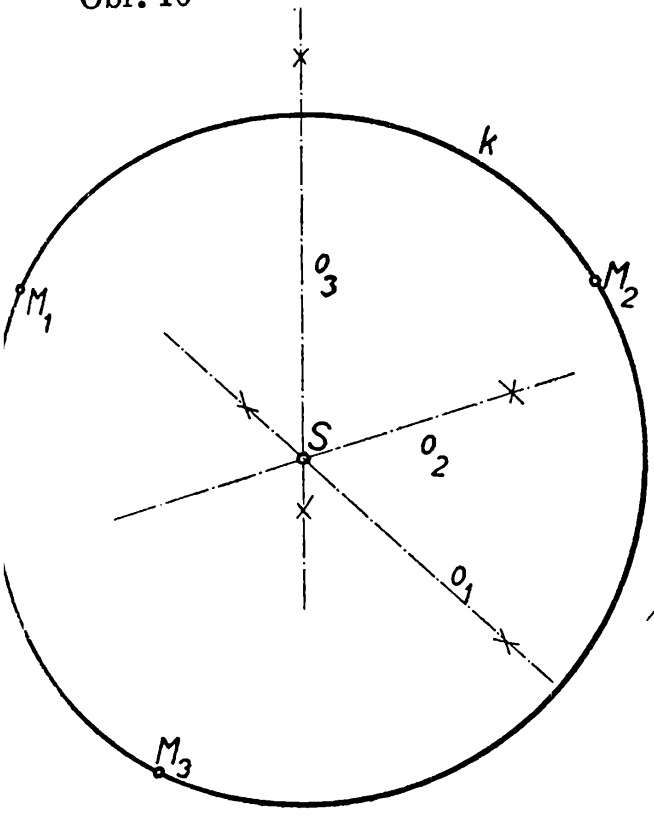
Co je geometrickým místem středů kružnic k, procházejících třemi danými body M_1, M_2 a M_3, neležícími v přímce? Geometrické místo středů kružnic procházejících body M_1 a M_2 je osa o_3 úsečky M_1M_2. Obdobně geometrické místo středů kružnic procházejících body M_2 a M_3 je osa o_1 úsečky M_2M_3 a geometrické místo středů kružnic pro-



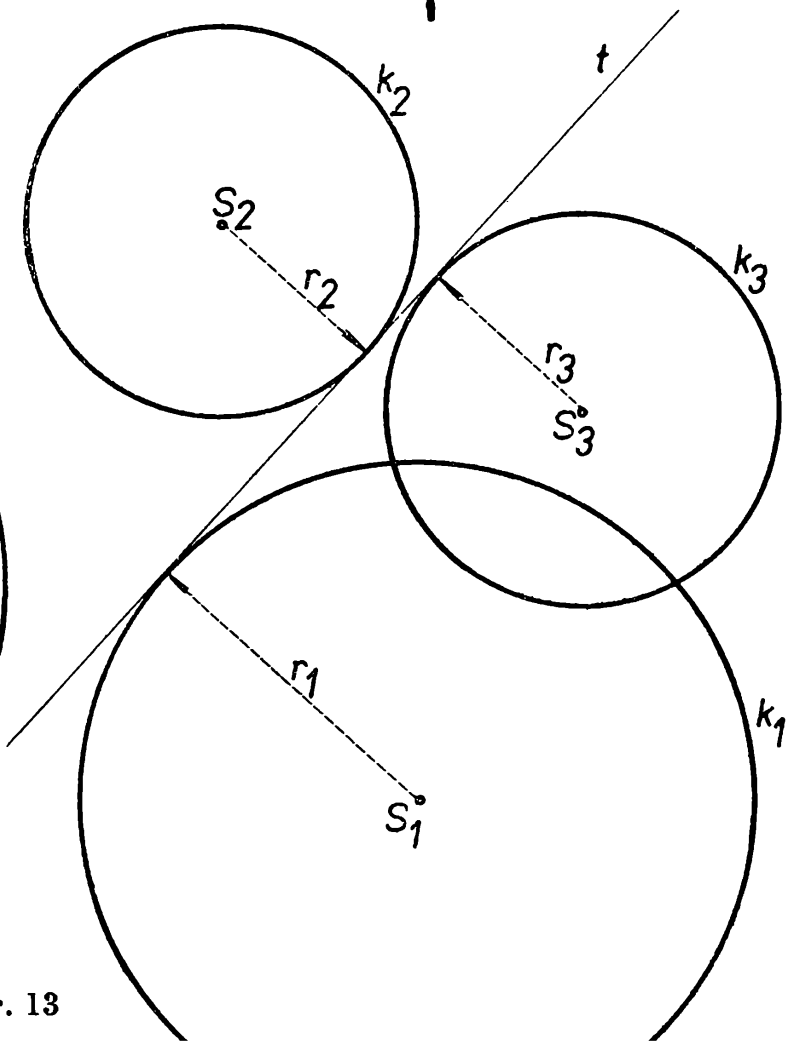
Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

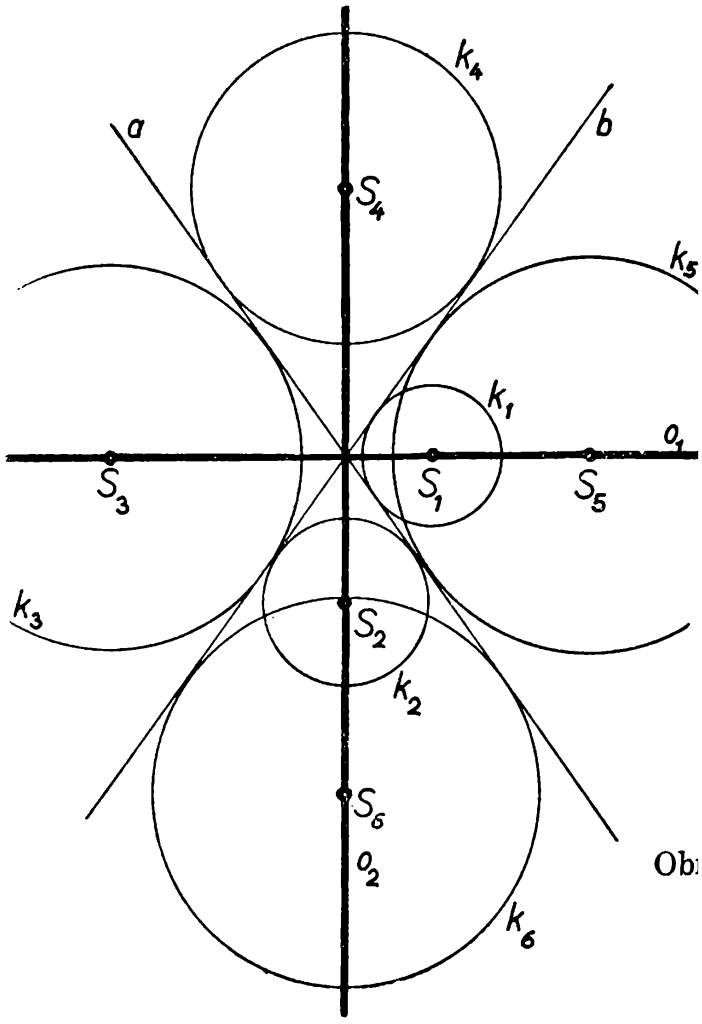
cházejících body M_3 a M_1 je osa o_2 úsečky M_3M_1. Všechny tři osy o_1, o_2, o_3 se musí protnout v jediném bodě S (z jakého důvodu?), který jediný vyhovuje dané úloze (obr. 12). Je samozřejmé, že k jeho sestrojení stačí narýsovat jen dvě ze zmíněných os.

Jaké je geometrické místo středů S kružnic k, dotýkajících se dané přímky t? Je to opět celá rovina, poněvadž kterýkoliv bod S_1, S_2, S_3, roviny může být středem kružnice k_1, k_2, k_3, ..., jejíž poloměr r_1, r_2, r_3, ... je roven kolmé vzdálenosti bodu S_1, S_2, S_3, ... od dané přímky t, tedy $r_1 = S_1 \dashv t$, $r_2 = S_2 \dashv t$, $r_3 = S_3 \dashv t$, (obr. 13).

Co je geometrickým místem středů S kružnic k, dotýkajících se daných dvou různoběžných přímek a a b? Hledané kružnice k_1, k_2, k_3, ... mají středy S_1, S_2, S_3, ..., které musí být stejně vzdáleny od obou daných přímek a a b. Všechny takové body leží na ose souměrnosti o_1 úhlu ab a na ose souměrnosti o_2 úhlu ba. Snadno si dokážeme, že obě tyto osy jsou k sobě kolmé, tedy $o_1 \perp o_2$ (obr. 14). Hledané geometrické místo jsou tudíž osy úhlů daných dvou přímek. Jinak můžeme říci, že osa úhlu dvou přímek je geometrické místo bodů stejně vzdálených od obou daných přímek.

Určete geometrické místo středů kružnic, dotýkajících se tří daných a vzájemně různoběžných přímek a, b, c, neprocházejících týmž bodem. Geometrické místo středů kružnic, dotýkajících se přímek a a b, jsou osy úhlů $\widehat{ab} \equiv o_3$ a $\widehat{ba} \equiv \bar{o}_3$ (obr. 15), geometrické místo středů kružnic, dotýkajících se přímek b a c, jsou osy úhlů $\widehat{bc} \equiv o_1$ a $\widehat{cb} \equiv \bar{o}_1$ a obdobně geometrické místo středů kružnic, dotýkajících se přímek c a a, jsou osy úhlů $ca \equiv o_2$ a $ac \equiv \bar{o}_2$. Těchto šest os úhlů se protíná navzájem v sedmi průsečících, a to

$$I \equiv \bar{o}_2 . \bar{o}_3 \equiv o_1 . \bar{o}_2 \equiv o_1 . \bar{o}_3 ,$$
$$II \equiv \bar{o}_1 . \bar{o}_3 \equiv o_2 . \bar{o}_1 \equiv o_2 . \bar{o}_3 ,$$
$$III \equiv \bar{o}_1 . \bar{o}_2 \equiv o_3 . \bar{o}_1 \equiv o_3 . \bar{o}_2 ,$$
$$IV \equiv o_1 . o_2 \equiv o_2 . o_3 \equiv o_3 . o_1 ,$$
$$V \equiv o_1 . \bar{o}_1 ,$$
$$VI \equiv o_2 . \bar{o}_2 ,$$
$$VII \equiv o_3 . \bar{o}_3 .$$



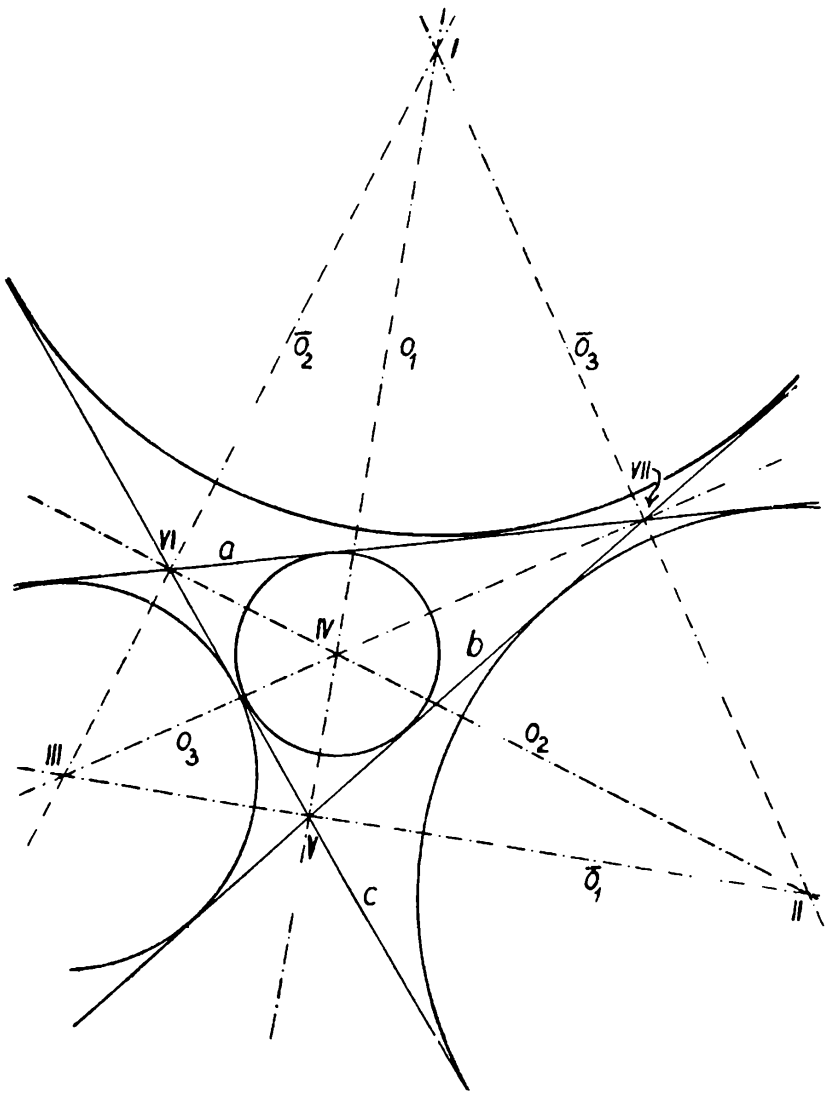
Ob

Body *I*, *II*, *III* a *IV*, ležící vždy v průsečíku os všech tří úhlů přímek *a*, *b* a *c*, jsou od těchto tří přímek stejně vzdáleny, a proto je možno sestrojit z nich jakožto středů kružnice, dotýkající se všech tří přímek. Každý z bodů *V*, *VI* a *VII* leží vždy jen v průsečíku os dvou úhlů přímek *a*, *b* a *c*, proto žádný z těchto bodů nevyhovuje podmínce, že je stejně vzdálen od všech tří daných přímek a tudíž nemůže být ani středem kružnice, dotýkající se všech tří přímek. Geometrickým místem středů kružnic, dotýkajících se tří daných různoběžných přímek, jsou tedy pouhé čtyři body, a to ty, kterými procházejí tři osy.

Podobně jako o geometrických místech v rovině, můžeme hovořit i o geometrických místech v prostoru, avšak o tom si něco řekneme jindy.

Příklady k cvičení.

1. Určete geometrické místo bodů stejně vzdálených od dvou daných rovnoběžek.
2. Co je geometrické místo bodů stejně vzdálených od tří daných přímek *a*, *b*, *c*, z nichž dvě jsou navzájem rovnoběžné ($a \parallel b$) a třetí (c) je k nim různoběžná?
3. Jak by bylo lze jinak vyslovit otázky 1 a 2, aby se docílilo stejných geometrických míst bodů?



Obr. 15

Čerenkovův — Vavilovův jev

ZDENĚK POSPÍŠIL, UP Olomouc

Pohybuje-li se elektron se zrychlením, nebo je-li prudce zabrzděn, vyzařuje elektromagnetické vlny. K vyzařování elektromagnetických vln dochází také v atomech prvků, přechází-li elektron v případě vzbuzeného atomu z vyšších energetických hladin na nižší. Nemění-li se ani velikost rychlosti elektronu, ani její směr, k vyzařování elektromagnetických vln nedochází. To však platí jen pokud rychlost pohybujícího se elektronu v je menší než fázová rychlost světla.

Může vůbec dojít k překročení fázové rychlosti světla? Ve vakuu se šíří světlo s maximální možnou rychlostí c a rychlost elektronu v nemůže nikdy překročit rychlost c. Jinak je tomu při pohybu elektronu v nějakém průhledném prostředí. V průhledném prostředí je fázová rychlost světla rovna $\frac{c}{n}$, kde n je index lomu prostředí. Pro pevné a kapalné látky je n značně větší než jedna a rychlost elektronu může překročit hodnotu $\frac{c}{n}$. V takovém případě elektron září.

K tomuto poznatku dospěli v r. 1934 Čerenkov a Vavilov, kteří pozorovali průchod velmi rychlých elektronů, vzbuzených zářením γ radioaktivních látek kapalinou.

Teorii tohoto jevu, který vychází z představ o světle jako elektromagnetickém vlnění, vypracovali Frank a Tamm r. 1937.

Pohybuje-li se elektron v prostředí o indexu lomu $n > 1$ rychlostí v větší než je v tomto prostředí rychlost světla, předbíhá svoje vlastní elektromagnetické pole a je tímto polem brzděn. Čerenkovovo záření vzniká právě tímto brzděním. V tomto záření převládají krátké vlnové délky, a proto má namodralé zabarvení.

Záření objevené Čerenkovem je jistou analogií nárazové akustické vlny způsobené střelou, letící ve vzduchu nadzvukovou rychlostí.

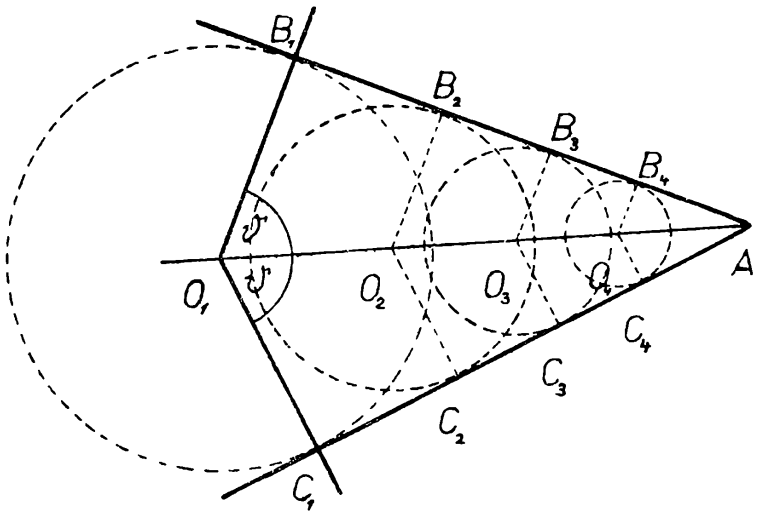
V obou případech, ať jde o akustickou vlnu nebo záření, se vlnění šíří jen nazpět vzhledem ke směru pohybu budícího centra a má tvar kužele, jehož osa je totožná se směrem rychlosti částice.

Vrcholový úhel záření je určen vztahem

$$\cos \vartheta = \frac{c}{vn}, \tag{1}$$

kde v je rychlost elektronu a $\frac{c}{n}$ je fázová rychlost světla.

Tento vztah lze odvodit pro b a l i s t i c k o u v l n u. Zhuštění prostředí se nemůže šířit před pohybujícím se tělesem, protože těleso se pohybuje rychleji než zvuková vlna. Čelo vytvářející se vlny je tedy za pohybujícím se tělesem. Každý bod prostředí, kolem něhož těleso prošlo, lze považovat za zdroj kulových vln, šířících se v daném prostředí rychlostí zvuku (obr. 1).



Obr. 1

Nechť se těleso pohybuje rychlostí v a za čas t proběhne dráhu $O_1 = vt$. V tomto čase se však elementární vlna, vycházející z bodu O_1 může rozšířit jen na vzdálenost $O_1B_1 = O_1C_1 = ut$, kde u je rychlost zvuku.

Je-li $u < v$, potom $O_1B_1 > O_1A$. Elementární vlna vycházející z bodu O_2 se v témže čase posune na vzdálenost

$$O_2B_2 = O_2C_2 = u\,(t - t_1) = u\left(t - \frac{O_1O_2}{v}\right).$$

Vlna vycházející z bodu O_3 dospěje do bodů B_3, C_3 a platí

$$O_3B_3 = O_3C_3 = u\left(t - \frac{O_1O_3}{v}\right),$$

vlna vycházející z bodu O_4 dospěje do míst B_4, C_4, přičemž obdobně platí

$$O_4B_4 = O_4C_4 = u\left(t - \frac{O_1O_4}{v}\right).$$

Obalová plocha všech elementárních vln má tvar povrchu kužele C_1AB_1 s vrcholem v bodě A. Povrch kužele představuje současně **čelo balistické vlny**. Směr postupu vlny je však opačný vzhledem ke směru pohybujícího se centra (střely). V našem případě se bude vlna šířit ve směrech O_4B_4, O_4C_4; O_3B_3, O_3C_3 atd., po povrchu kužele $C_1O_1B_1$, jehož osou je dráha pohybujícího se tělesa O_1A a jeho vrcholový úhel rovná se 2ϑ.

Z trojúhelníku O_1B_1A určíme úhel ϑ, když

$$\cos\vartheta = \frac{O_1B_1}{O_1A} = \frac{u}{v}. \qquad (2)$$

Dosadíme-li za rychlost u fázovou rychlost světla $\frac{c}{n}$ a bude-li dále v rychlost elektronu v daném prostředí, nabude výraz (2) tvaru

$$\cos\vartheta = \frac{c}{vn},$$

což je shodné s výrazem (1). Tento vztah se velmi dobře potvrzuje pokusem.

Tak například pro benzen byla pozorována hodnota $\vartheta = 38°30'$, zatímco ze vzorce vycházelo 38°40'.

Čerenkovo záření vzniká nejen při pohybu elektronu s větší rychlostí, než je fázová rychlost světla v daném prostředí, ale i při pohybu libovolné částice s touto rychlostí. Experimentálně bylo objeveno Čerenkovo záření mezonů a protonů.

Čerenkovova jevu bylo využito i při konstrukci detektorů jaderných záření. Jedním z detektorů je právě *Čerenkovův počítač*. Podstatnou jeho částí je fotonásobič. Světelné záření, na něž reaguje fotokatoda násobiče se získává na základě Čerenkovova jevu, na rozdíl od jiných druhů scintilačních počítačů, kde se světelné záření získává luminiscencí ve vhodné scintilační látce. Čerenkovovo záření je vysíláno pod úhlem ϑ ke směru pohybu částice. Jako vhodného prostředí se používá plexiskla, lucitu, nebo i vody.

Tento detektor má značné výhody při registraci a studiu částic s vysokou energií.

Význam Čerenkovova jevu je velký, nejenže potvrzuje elektromagnetickou povahu světla, ale odhaluje též zvláštnosti optiky, tzv. „nadsvětelné" rychlosti.

Za objevení a přezkoušení Čerenkovova jevu byli sovětští fyzikové **Čerenkov, Tamm a Frank** v r. 1958 poctěni Nobelovou cenou.

Jak se zvukem hledají chyby

IVO KRAUS, ČVUT, Praha (Dokončení)

2. *Ultrazvuková defektoskopie*

Hloubka, do níž ultrazvuk v různých materiálech pronikne, závisí v první řadě na jeho frekvenci. Vedle toho může být však tato hloubka značně ovlivňována i pórovitostí dané látky, případně cizími příměsemi. Pro lepší představu si uvedeme opět několik konkrétních údajů" (tab. II).

Tabulka II.

Materiál	Hloubka v metrech, do níž ultrazvuk pronikne při různých frekvencích		
	0,5 MHz	1 MHz	5 MHz
Ocel:			
litá	4,5—6,0	4,5—6,0	1—3
válcovaná	6,6—7,5	6,6—7,5	6,6—7,5
Litina	0,3—0,6	0,15—0,3	
Hliník:			
litý	3,6—4,5	3,6—4,5	2,4—3,0
válcovaný	6,6—7,5	6,6—7,5	6,6—7,5
Měď válcovaná	0—0,15	0—0,30	

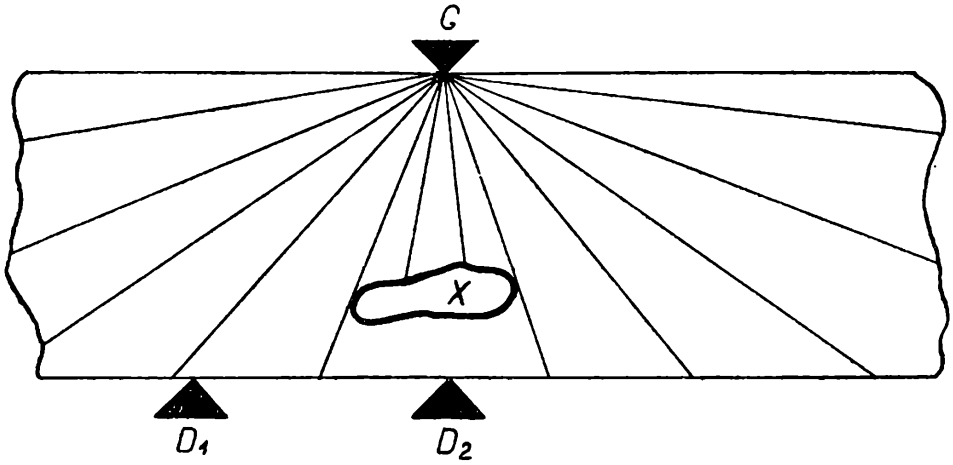
Z tabulky vidíme, že hloubka, do níž ultrazvuk pronikne, je u oceli i hliníku podstatně větší, jedná-li se o materiál válcovaný. U litých materiálů brání snadnějšímu průniku velké množství pórů a jiných nehomogenit, které se válcováním odstraní. Dále je zřejmé, že ultrazvukových vln můžeme — vzhledem k jejich prostupnosti — použít k „prozařování" všech součástek nebo strojů přicházejících v praxi v úvahu.

Jak jsme již uvedli, setká-li se ultrazvuková vlna na své cestě kovem s jakoukoliv nehomogenností struktury, trhlinou nebo jinými defekty, dojde k jejímu částečnému odrazu a tím tedy i ke ztrátě intensity.

Přítomnost a intensitu ultrazvukových vln, které prošly zkoumanou látkou, můžeme vzhledem k existenci přímého piezoelektrického efektu registrovat opět křemennou destičkou. Destičku, která byla zdrojem ultrazvuku, nazýváme g e n e r á t o r e m, destička pracující jako přijímač ultrazvuku, se jmenuje d e t e k t o r. Přístroje pro ultrazvuko-

vou defektoskopii jsou založeny na dvou základních uspořádáních vzájemných poloh generátoru a detektoru:

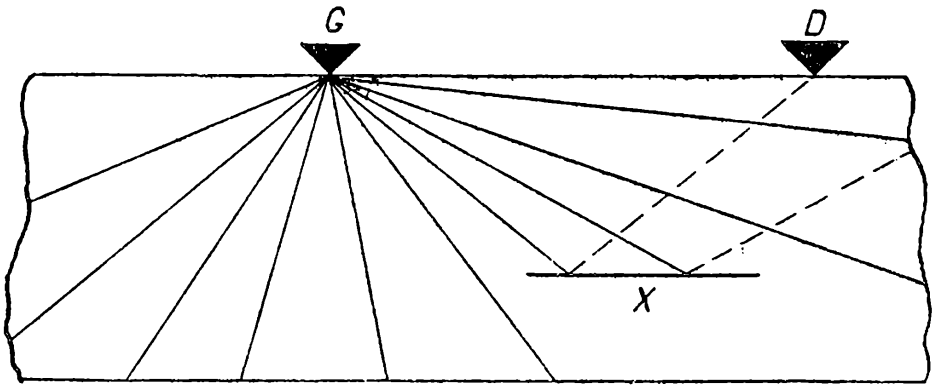
a) *Metoda zvukového stínu* (obr. 3).



Obr. 3. Zjišťování defektů metodou zvukového stínu. *G* — generátor ultrazvukových vln, D_1, D_2 — detektor ultrazvukových vln ve dvou polohách, *X* — defekt ve výrobku.

Generátor je při této metodě umístěn na opačné straně výrobku, v němž provádíme kontrolu, než detektor. Existence a poloha defektu se zjistí měřením intenzity prošlého svazku ultrazvukových vln v různých místech povrchu.

b) *Metoda reflexní* (obr. 4).



Obr. 4. Zjišťování defektů reflexní metodou. *G* — generátor, *D* - detektor, *X* - defekt ve výrobku.

Generátor i detektor jsou umístěny na téže straně kontrolovaného výrobku. Polohu defektu stanovíme měřením intenzity ultrazvukových vln, které se od něho odrážejí.

O tom, které metody je třeba použít v konkrétních případech, bude rozhodovat v první řadě charakter kontrolovaného výrobku. Je zřejmé, že např. při hledání defektu v potrubí, které je položeno, nebudeme užívat metodu zvukového stínu apod.

Velkou předností ultrazvukové defektoskopie je možnost jejího využití přímo v „terénu": při kontrole kvality svárů kotlů, naftovodů, polynovodů, konstrukcí mostů, turbin, letadel, lodí atd., jednoduše všude tam, kde je důležitá součást nějakého zařízení podrobena v provozu velkým namáháním, a proto je nutno se pravidelně přesvědčovat o její neporušenosti a tak včas předcházet případným haváriím a katastrofám.

Na závěr poznamenejme, že praktické užití ultrazvuku, se neomezuje pouze na defektoskopii. Reflexní metoda se např. s úspěchem užívá v oceánografii při mapování oceánu — měřením hloubky mořského dna. Ultrazvukem lze objevit nejen vraky lodí, popřípadě zjistit i větší hejna ryb, ale můžeme jím pod vodní hladinou navazovat na kratší vzdálenost i telefonní a telegrafní spojení (do 15 km).

Řada dalších aplikací vyplývá ze skutečnosti, že ve hmotě, kterou se šíří ultrazvuk, dochází k vibracím hmotných částic, jsou vyvolávány jakési mikroskopické otřesy. U tekutých látek lze těchto otřesů užít k odplyňování, tj. k vypuzení pohlcených plynů z různých kapalin i z roztavených kovů nebo skla. Ultrazvukem můžeme podporovat i dokonalejší rozptýlení drobných částic nějaké látky v kapalině, tedy tvoření velmi jemných dispersních soustav jako jsou suspenze, emulze nebo koloidní roztoky, složené ze submikroskopických shluků molekul rozptýlených v kapalině. To se uplatňuje i při výrobě jemnozrnných fotografických emulzí, když jde o rozptýlení částic chloridu stříbrného v želatině. Ultrazvuku lze užít také naopak ke srážení suspendovaných částic ve větší zrnka, tedy ke koagulaci drobných kapiček nebo částeček vznášejících se v plynech. Tak je možno např. srážet mlhu, odstraňovat prach, kouř apod.

Kolorimetrie

DOC. Dr. JOSEF DIBELKA, ČVUT, Praha

Dopadá-li světlo na rozhraní dvou prostředí, část světla se odráží do prvního prostředí, část se láme do druhého prostředí. Zkoumáme-li energetické poměry lomeného světla, zjistíme, že intenzita světla se zmenšuje, a to tím více, čím projde větší vzdálenost. Prostředí tedy pohltilo, absorbovalo, část energie procházejícího světla. Mění-li se pohlcená energie světelná v energii tepelnou, mluvíme o pravé absorpci. Pro takovou absorpci platí Lambertův zákon odvozený experimentálně

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha x},$$

kde I_0 je počáteční intenzita světla, I intenzita světla po projití prostředí tloušťky x, α koeficient absorpce.

Vidíme, že se intenzita světla při absorpci exponenciálně zmenšuje. Zvětšujeme-li dráhu, blíží se absorpce k nule. Koeficient absorpce α závisí jednak na jakosti absorbujícího prostředí, jednak na vlnové délce dopadajícího světla, tzn., že světlo různé vlnové délky se různě absorbuje (selektivní absorpce).

Výklad absorpce uspokojivě podává elektronová teorie. Procházející světlo rozkmitá elektrony v atomech dané látky, k tomu se spotřebuje část energie procházejícího světla. Elektrony pak konají vynucené kmity, přitom vysílají všemi směry sekundární elektromagnetické vlnění stejného kmitočtu, jaký mělo dopadající světlo. Kmitající elektrony narážejí také na atomy a ionty a těm předávají část své kinetické energie; tím se zvyšuje teplota absorbující látky. Jistá část energie se mění tedy v energii tepelnou.

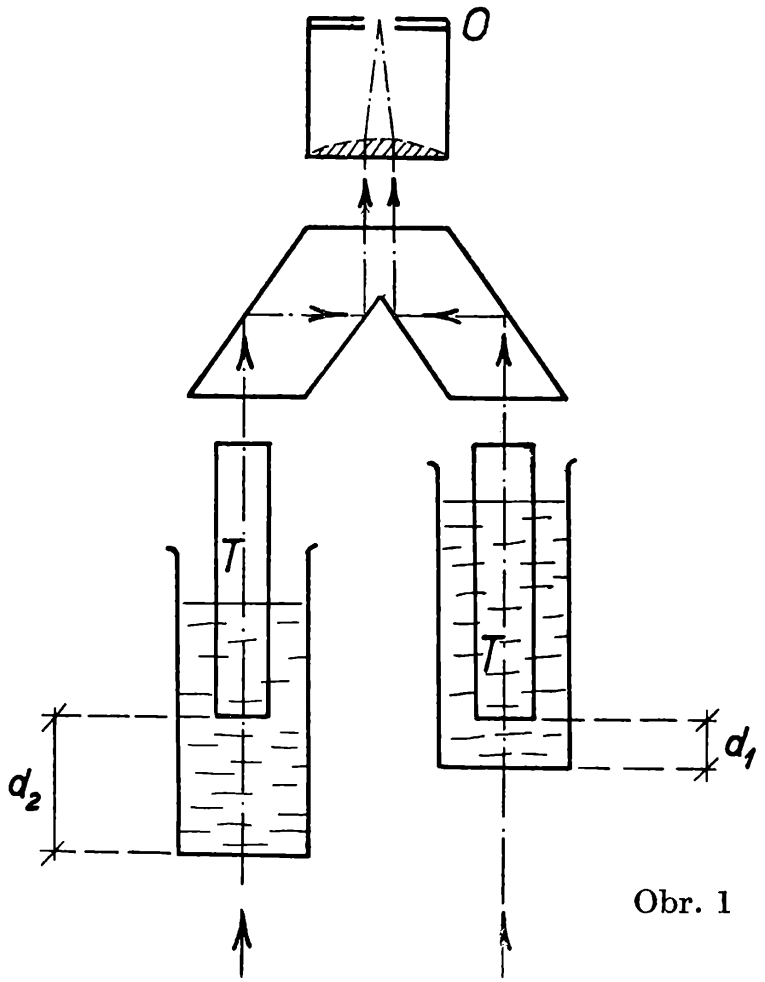
Jak již bylo řečeno, koeficient absorpce závisí na vlnové délce procházejícího světla. Např. prochází-li složené světlo sodíkovými parami, koeficient absorpce je téměř pro všechny vlnové délky roven nule, až na zcela úzký interval vlnových délek, pro který je ostře maximální. Tato maxima jsou velmi přesně na těch vlnových délkách, kde leží čáry emisního spektra sodíku. Z toho je vidět, že kmitající elektron pohlcuje nejvíce světlo té vlnové délky, jaké může samo vysílat. Je to obdobný případ mechanické rezonance, a proto často se hovoří o tom, že absorpce světla je děj rezonanční.

Poněvadž absorpce je vlastností atomů dané látky, je tedy koeficient absorpce α dané látky tím větší, s čím větším počtem atomů se světlo při proběhnutí určité dráhy setká. Tohoto poznatku je možno prakticky užít pro určení hustoty roztoků *metodou kolorimetrickou*. Při této metodě je pozorována intenzita světelných paprsků, které prošly dvěma roztoky téže látky o různé koncentraci a o různé tloušťce vrstvy. Koeficient absorpce je podle Beera přímo úměrný koncentraci roztoku c a platí Beerův zákon

$$\alpha = A \,.\, c \,.$$

Konstanta úměrnosti A charakterizuje rozpuštěnou látku.

Určování hustoty se pak provádí přístroji zvanými *kolorimetry*. Schéma jednoduchého kolorimetru, který navrhl Dubosq, ukazuje obrázek 1. Do válcovité nádoby se zabroušeným skleněným dnem se nalije roztok známé koncentrace c_1, do druhé roztok téže látky neznámé koncentrace c_2. Do obou nádob zasahují stejné skleněné tyčinky T. Denní nebo i umělé světlo se přivádí současně do obou nádob zespoda. Světlo po projití roztoky a skleněnými tyčinkami dopadá na hranol v podobě písmene V, kde se láme do čtecího okuláru O. Světlo prošlé roztokem c_1 osvětluje jednu polovinu a světlo prošlé roztokem c_2 druhou polovinu zorného pole okuláru. Posouváním skleněných nádob



Obr. 1

měníme tloušťky d_1 a d_2 vrstev, kterými prochází světlo, dosáhneme toho, že obě poloviny zorného pole okuláru jsou stejně světlé. To se stane tehdy, když je splněna podmínka

$$I_0 \cdot e^{-\alpha_1 d_1} = I_0 \cdot e^{-\alpha_2 d_2},$$

$$\alpha_1 = A \cdot c_1 \; ; \; a_2 = A \cdot c_2,$$

$$I_0 \cdot e^{-Ac_1 d_1} = I_0 \cdot e^{-Ac_2 d_2},$$

$$c_1 d_1 = c_2 d_2 .$$

Pak hledaná koncentrace

$$c_2 = \frac{d_1}{d_2} \cdot c_1$$

Vzdálenosti d_1 a d_2 čteme na přístroji.

U složitějšího kolorimetru, který přichází na trh pod názvem P u l f r i c h ů v f o t o m e t r, může být respektována i různá vlnová délka užitého světla, a to buď užitím monochromátoru nebo když není nutné, aby spektrální obor užitého světla byl velmi úzký, vhodných filtrů, které jsou vřazeny do revolverové clony před okulárem.

Přehled elektrických obvodů

DOC. ING. LADISLAV FRANC, CSc., Olomouc

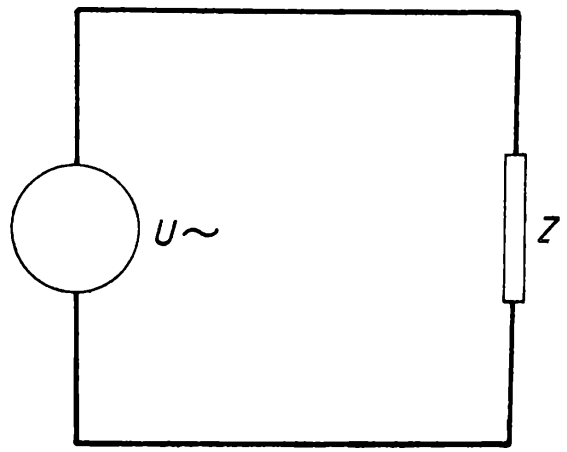
Úvod. V úlohách fyzikální olympiády se často objevují úlohy spojené s řešením elektrických obvodů, pokud jsou tyto probírány v učivu fyziky SVVŠ. Jsou to obvody napájené střídavým proudem, nejčastěji proudem ze světelné sítě, kde odpor R (reostat), indukčnost L (cívka) a kapacita C (kondenzátor) jsou spojeny buďto za sebou (obvody sériové), nebo vedle sebe (obvody paralelní). Tyto obvody nazýváme základní a učivo SVVŠ se omezuje na jejich řešení.

Avšak vedle těchto základních elektrických obvodů vyskytují se v praxi ve všech odvětvích silnoproudé, sdělovací a hlavně regulační techniky obvody jiné, složitější. Proudy, které jimi procházejí, mohou být ustálené, neproměnné, nebo to mohou být proudy přerušované, nebo různé impulsy a signály. Potom nás zajímá nejen ustálený stav obvodu, ale často hlavně stavy přechodné, vznikající vypínáním a zapínáním obvodů nebo jejich částí.

Teorie, zabývající se elektrickými obvody, vyvinula se v průběhu posledních asi dvaceti až třiceti let na samostatné odvětví elektrotechniky, které vyžaduje podporu určitých vyspělých metod matematických a také spolupráci specializovaných fyziků. Na tento vývoj mají vliv hlavně dvě okolnosti, a to na jedné straně požadavky techniky, hlavně techniky sdělovací a regulační, na druhé straně rozvoj užívání číslicových i analogových samočinných počítačů; tyto umožňují matematická řešení úkolů, jež donedávna pro svoji obtížnost nebo pracnost nepřicházely v technické praxi v úvahu.

Rozdělení obvodů. Abychom získali přehled o celé široké problematice, provedeme rozdělení elektrických obvodů podle několika hledisek:

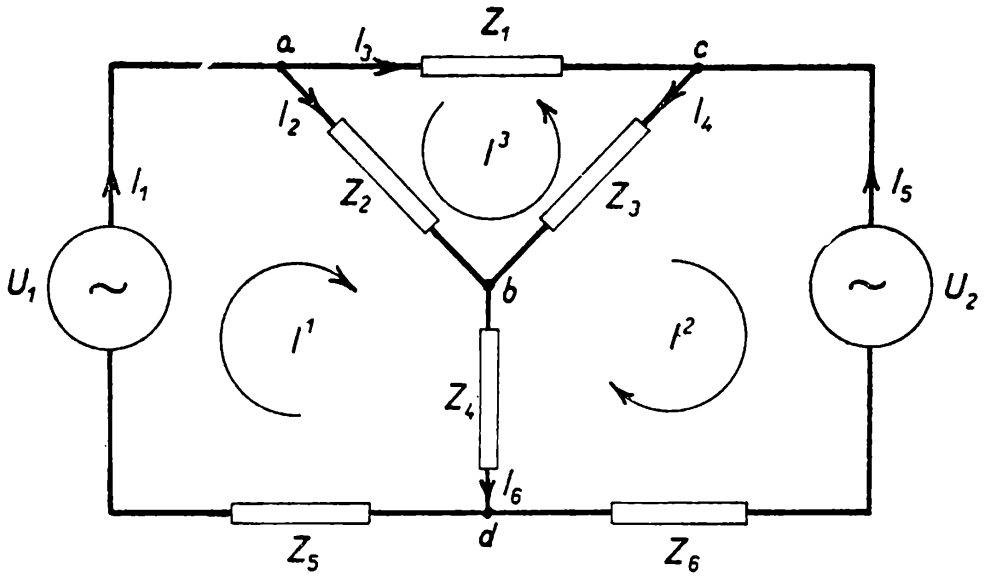
První hledisko rozděluje obvody podle jejich geometrického tvaru, čili podle jejich topologie, a to na obvody jednoduché, které tvoří jedinou smyčku, a na obvody složité, které se skládají z několika proudových smyček. Na obr. 1a je obvod jednoduchý, na obr. 1b obvod složitý.



Obr. 1a

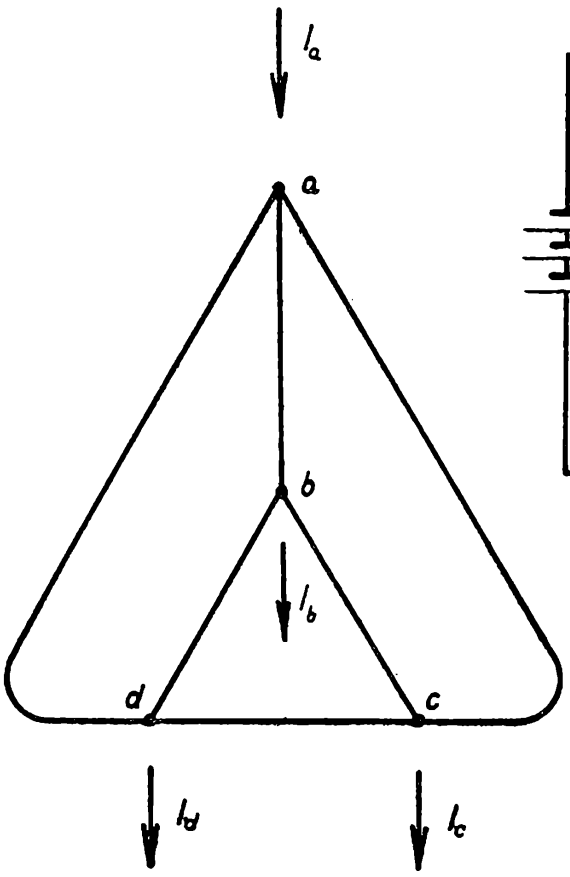
Místa, kde se proudy rozdělují, jsou uzly, spojení mezi uzly tvoří větve.

Elektrické vlastnosti větví, tj. odpor, indukčnost a kapacitu si, vždy myslíme soustředěny do jediného místa a další spojení s uzly si před-

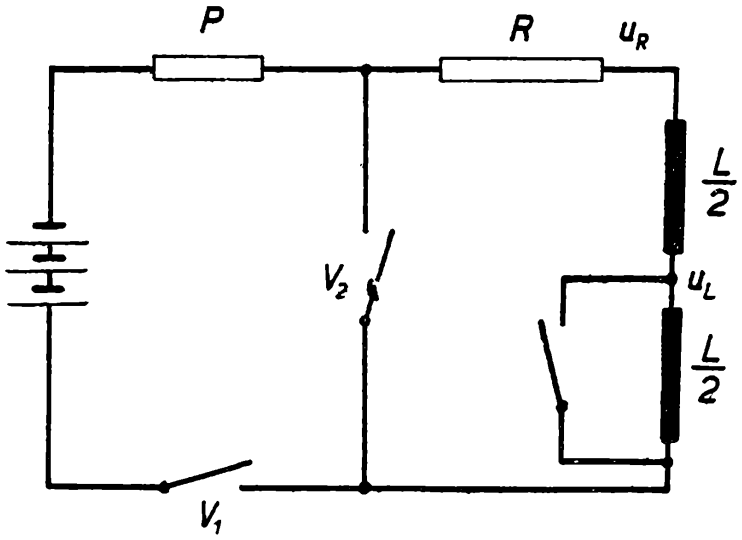


Obr. 1b

stavujeme jako bezodporové. Říkáme, že jsou to obvody se soustředěnými parametry, a tak je také kreslíme. V nakreslených obvodech jsou takto soustředěně zakresleny impedance Z. Střídavé odpory, z nichž se skládá impedance, nazýváme prvky pasívními, zdroje napětí nebo proudu nazýváme prvky aktivními. Obvody, v jejichž větvích není sériově zařazených zdrojů, nazýváme obvody pasívními (obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3a

Jsou to např. elektrické rozvodné sítě 22 kV, které jsou napájeny v některých uzlech transformátory napájecími, kdežto v jiných uzlech jsou zapojeny transformátory odběrové, dodávající energii do sítí nn.[1])

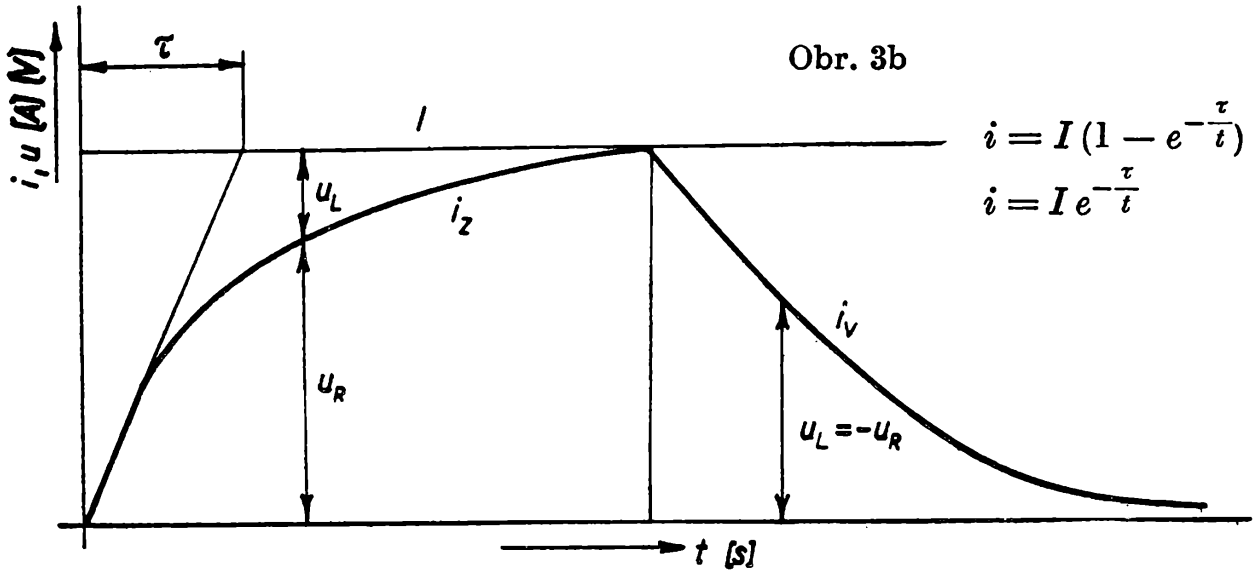
Druhé hledisko pro obvody přihlíží k tomu, zda pasívní prvky jsou lineární nebo nelineární, a podle toho rozděluje i obvody.

Lineární obvody obsahují jen takové pasívní prvky, které se vlivem proudu, napětí nebo frekvence nemění. Dokonalé lineární prvky vlastně neexistují, avšak často jde jimi ustálený proud, neboť jejich změna je jen nepatrná, takže je za lineární můžeme považovat. Mluvíme potom o obvodech quasilineárních. Např. velikost odporu se mění s oteplením, a to opět závisí na velikosti procházejícího proudu. Je tedy i činný odpor vlastně prvkem nelineárním, avšak při ustáleném proudu tuto vlastnost můžeme zanedbat. Je známo, že jak odpor, resp. povrchový jev (skinefekt), tak i indukčnost cívek a kapacita kondenzátorů se mění v závislosti na frekvenci proudu.

Tyto nežádoucí nelineárnosti nazýváme parazitní. Kromě nich však vkládáme mnohdy do větví obvodů nelineárnosti funkční, jejichž charakteristiky odpovídají např. žádanému průběhu regulace. Jsou to např. známé transduktory (magnetické zesilovače), elektronky v různém zapojení, thyritové odpory (jejichž odpor je závislý na připojeném napětí), variátory (jejich odpor je závislý na velikosti proudu), stykové usměrňovače a podobné prvky. Z těchto elementů se pak sestavují v praxi obvody nelineární, u nichž velikost některých pasívních prvků není stálá, ale je funkcí procházejícího proudu.

Třetí hledisko rozděluje obvody podle toho, zda jsou zdroje stále zapojeny a větvemi obvodu prochází ustálený proud (stejnosměrný nebo střídavý), či zda se zdroje zapínají nebo vypínají a proud ve větvích prochází přechodnými stavy. Známý je přechodný stav jednoduchého obvodu, v němž je R a L v sérii podle obr. 3a a 3b

Obr. 3b



[1]) nn = nízké, vn = vysoké napětí.

Zapneme-li vypínač V_1, stoupne proud v obvodu podle exponenciály, jak patrno v obr. 3b. Je to proto, že z počátku vytváří kolem cívky magnetické pole. Zapneme-li později vypínač V_2, spojíme zdroj stejnosměrného proudu nakrátko, pojistka P se přepálí a cívka se vybíjí přes odpor R. Proud klesá opět podle exponenciály, podle toho, jak mizí magnetické pole. Obr. 3b znázorňuje tedy přechodné stavy tohoto základního obvodu.

Obvody mohou být ovšem připojovány jak na zdroje stálého stejnosměrného napětí, tak i na zdroje střídavého napětí, nebo na zdroje impulsové. Přechodné stavy jsou potom jiné a problém je komplikovaný zvláště u obvodů složitých a nelineárních.

Přechodný stav nastává také tehdy, jestliže se změní parametry obvodu. Např. na obr. 3a vidíme, že můžeme spojit polovinu cívky nakrátko, a tím rovněž vyvoláme přechodný stav.

(Pokračování)

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKY

Přijímací zkoušky z deskriptivní geometrie na technice

DOC. BOŘIVOJ KEPR, ČVUT Praha

Studenti, kteří po maturitě budou chtít studovat dále na technice, budou na některých technických směrech při přijímacím řízení podrobeni v tomto školním roce — jako tomu bylo již loni — písemné zkoušce z deskriptivní geometrie. Redakce Rozhledů chce svým čtenářům — zájemcům o další studium na technice usnadnit přijímací zkoušky z deskriptivní geometrie v tom smyslu, že zde uvede řadu tzv. infor-

mativních příkladů. Zdaleka to tedy neznamená, že následující příklady přijdou k přijímací zkoušce. Redakce Rozhledů sleduje tak pouze snahu poskytnout svým čtenářům možnost zopakování a procvičení látky z deskriptivní geometrie probírané na střední škole, aby si studenti sami mohli ověřit vyřešením těchto příkladů, nakolik jsou připraveni ke zdárnému absolvování přijímací zkoušky z deskriptivní geometrie pro potřeby studia na technických fakultách[1]).

Vlastním předmětem přijímací zkoušky z deskriptivní geometrie bude:

I. základní vlastnosti a z toho plynoucí konstrukce kuželoseček;

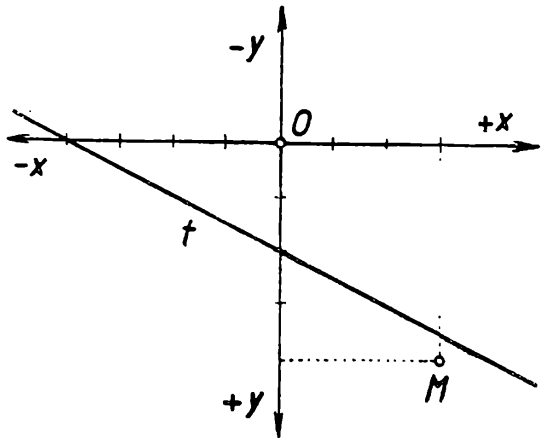
II. základy kótovaného promítání;

III. základy pravoúhlého promítání na dvě vzájemně kolmé průmětny (tzv. Mongeovo promítání);

IV. základy zobrazování v axonometrii.

I. Konstrukce kuželoseček

Jsou-li v následujících příkladech číselné údaje (souřadnice, kóty), pracuje se s nimi takto: Např. bod M (3; 4) se vynese tak (obr. 1),



Obr. 1

že na vodorovnou osu x se od zvoleného počátku O nanesou 3 dílky zvoleného měřítka vpravo a ve směru kladné osy $y \perp x$, která jde počátkem O, se vynesou 4 dílky téhož měřítka v kladném smyslu (tj. dolů). Na obr. 1 je rovněž na osách x a y vyznačen kladný smysl příslušnou šipkou. Souřadnice záporné se na ose x vynášejí doleva, na ose y nahoru. Dále pak např. přímka t (−4; 2) se vynese tak, že na osu x od počátku O naneseme doleva 4 dílky zvoleného měřítka a na osu y naneseme 2 dílky téhož měřítka dolů. Spojnice obou bodů takto získaných na osách x a y je požadovanou přímkou t.

[1]) Přijímací zkoušky z deskriptivní geometrie jsou povinné pro všechny směry stavebních fakult technických vysokých škol.

1. Sestrojte elipsu e, určenou třemi tečnami ${}^1t$, ${}^2t$, ${}^3t$ a ohniskem ${}^1F$ — symbolicky vyznačeno $e\,({}^1t, {}^2t, {}^3t, {}^1F)$; ${}^1t \equiv x$, ${}^2t \equiv y$, ${}^3t \equiv PN$, $P\,(8; 0)$, $N\,(0; 5)$, ${}^1F\,(5; 1)$.

2. Sestrojte elipsu $e\,({}^1F, {}^1t, {}^2t, {}^2T)$, kde ${}^2T$ je dotykovým bodem na tečně ${}^2t$; ${}^1F\,(-4; 0)$, ${}^1t\,(-9; 6)$, ${}^2t\,(-6{,}5; -11{,}5)$, ${}^2T\,(-5{,}5; ?)$.

3. Sestrojte elipsu e, znáte-li hlavní vrchol A, ohnisko ${}^1F$ ($A{}^1F = 2$ cm) a délku b vedlejší poloosy, $b = 4$ cm.

4. Elipse o délce hlavní poloosy $a = 5$ a o délkové výstřednosti

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$$

(kde b je délka vedlejší poloosy) opište čtverec $KLMN$, jehož vrcholy leží na osách elipsy.

5. Sestrojte elipsu e, znáte-li její ohnisko ${}^1F$, její dvě tečny ${}^1t$, ${}^2t$ a bod V na vedlejší poloose (V není bodem elipsy). Proveďte rozbor, kdy úloha má a kdy nemá řešení a kolik řešení může existovat.

6. Sestrojte elipsu, je-li dáno její ohnisko ${}^1F$, její bod T, délka b vedlejší poloosy a délková výstřednost $e = \sqrt{a^2 - b^2} = {}^1FS$ (kde S je středem elipsy).

7. Úlohy 1 až 6 proveďte pro hyperbolu. V příkladech 1 a 2 ovšem nemůžete použít daných kót. V příkladě 4 a 6 platí pro $e = \sqrt{a^2 + b^2}$.

8. Sestrojte hyperbolu, znáte-li její ohnisko ${}^1F$, asymptotu a^{I} a tečnu t.

9. Sestrojte a) elipsu $e\,({}^1F, {}^2F, t)$, $[{}^1F\,(-3; 0)$, ${}^2F\,(3; 0)$, $t\,(-7; 4)]$; b) hyperbolu $h\,({}^1F, {}^2F, t)$, $[{}^1F\,(-4; 0)$, ${}^2F\,(4; 0)$, $t\,(-2; 2)]$.

10. Sestrojte parabolu $p\,(F, {}^1t, {}^2t)$. F je ohnisko, ${}^1t$ a ${}^2t$ tečny paraboly. K parabole p sestrojte tečnu t, která svírá s její osou úhel 60°.

11. Sestrojte parabolu, určenou řídicí přímkou d a dvěma body ${}^1T$ a ${}^2T$. Sestrojte však napřed tečny ${}^1t$ a ${}^2t$ k parabole v těchto bodech. Proveďte rozbor řešení (kolik řešení může existovat a kdy řešení neexistuje).

12. Sestrojte parabolu, je-li dáno:
a) řídicí přímka d, tečna ${}^1t$ a bod ${}^2T$ (${}^2T$ není na ${}^1t$) — proveďte rozbor;
b) řídicí přímka d a tečny ${}^1t$, ${}^2t$ — proveďte rozbor;
c) řídicí přímka d a tečna t s dotykovým bodem T;
d) tečna t, ohnisko F a bod P paraboly (P neleží na t);
e) osa o, vrchol A a bod T paraboly;
f) osa o, vrchol A a tečna t paraboly.

II. Kótované promítání

V následujících příkladech proveďte vždy nejdříve tzv. prostorové řešení se zápisem postupu práce ve značkách (tj. např. zápis $A \in a \parallel b$ znamená: Přímka a jdoucí bodem A je rovnoběžná s přímkou b). Vynášení souřadnic x a y bodů v kótovaných příkladech se děje způsobem již dříve vylíčeným. Třetí údaj v závorce je pak příslušná kóta z uvažovaného bodu. Tedy např. bod $A\,(-2; 7{,}5; 6)$ zakreslíme tak, že vyneseme bod $A_1\,(-2; 7{,}5)$ podle návodu dříve vyloženého a ke kolmému průmětu A_1 bodu A připíšeme do závorky příslušnou kótu z, tedy $A_1\,(6)$.

13. Sestrojte průsečík přímky $q \equiv QR$ $[Q\,(-3; 2; 3)$, $R\,(3; -1; -2)]$ s rovinou určenou dvěma rovnoběžkami $a \equiv AC$ a $b \ni B$ $[A\,(-1; 2; 2)$, $B\,(2; 5; 0)$, $C\,(-3; 1; 0)]$.

14. Přímkou $a \equiv AB$ [A (0; 0; 15), B (−5; 5; 12)] proložte roviny o spádu $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$.

15. Sestrojte čtverec o vrcholu A (6; −4; 8) a o straně BC na přímce $m \equiv MN$ [M (−8; −2; 4), N (10; 4; 12)].

16. Sestrojte čtverec, který má vrchol A (4; 3; ?) stranu AB na přímce jdoucí bodem P (−12; 5; 0) a stranu AD na přímce jdoucí bodem Q (12; 11; 0). Vrchol C čtverce nechť leží v průmětně.

17. Sestrojte krychli, která má daný střed S (0; 6; 6) a stěnu $ABCD$ v rovině ϱ, určené spádovou přímkou $s^{\varrho} \equiv NP$ [N (4; 0; 12), P (0; 6; 0)]. Stěnová úhlopříčka AC krychle svírá s průmětnou úhel 45°.

18. Určete průsek roviny trojúhelníku ABC [A (−6; 2,12), B (3; 18,18), C (6; 8; 1)] s rovinou rovnoběžníka $MNPQ$ [M (−9; 17; 3), N (0; 15; 0), P (8; 0; 13).

19. Určete průsek dvou trojúhelníků ABC a EFG [A (0; 2; 0), B (−4; 8; 12), C (6; 12; 10), E (−8; 8; 8), F (6; 1; 12), G (9; 12; 6)].

20. Sestrojte průsek $\triangle MNP$ s rovnoběžníkem $ABCD$ [M (−5; −4; −6), N (3; −1; 2), P (−1; 5; 6), A (−2; −2; 3), B (−3; 5; −3), C (3; 3; 0)] a vyznačte viditelnost.

III. Kolmé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (Mongeova projekce)

V následujících příkladech proveďte vždy nejdříve tzv. prostorové řešení se stručným zápisem postupu práce. Kladné souřadnice x nanášejte od počátku vpravo, kladné y pod osu x.

a) *Úlohy na zobrazení bodů, přímek a rovin.*

21. Zobrazte přímku $g \equiv LM$ [L (3; 5,5; 4), M (−2; 1; −2)], její stopníky P a N, určete její odchylky α a β od průměten π a ν. Zobrazte bod $Q \in g$, $z_Q = 3$ a bod $R \in g$, $y_R = -2$.

22. Zobrazte kosočtverec o straně $a = 5$, jehož střední příčky leží na přímkách SM a SK [S (−4; 3; 3), M (3; −1; 8), K (2; 9; 0)].

23. Přímkou $a \equiv AB$ [A (−3; 5; 1), B (4; 1; 6)] veďte rovinu $\varrho \parallel x$ a určete její odchylky od průměten.

24. Bodem M (0; 1; 2) veďte přímku rovnoběžnou s rovinami α (−6; 6; 10) a β (6; 8; 6).

25. Zobrazte průsek rovnoběžníka $ABCD$ [A (1; 0,5; 7,5), B (4; 5,5; 5), C (0; 8,5; 2)] s trojúhelníkem MNP [M (−1,5; 1; 8,5), N (−3; 8,5; 2,5), P (4; 6; 3)].

26. Ke dvěma mimoběžkám $k \equiv AL$, $m \equiv BM$ [A (4; 0; 8), L (0; 1,5; 5), B (0; 0; 5), M (5; 4; 1)] veďte příčku a) $\perp \pi$, b) $\perp \nu$, c) $\parallel x$, d) $\parallel s \equiv EF$, [E (6,5; 5; 0), F (2,5; 2,5; 3)].

27. Sestrojte bodem M kolmici k rovině $\varrho \equiv ABC$ [M (4; 8; 2,5), A (−5; 4; 0), B (5; 3; 4,5), C (−1; 8; 7)] a vyhledejte patu S kolmice na rovině ϱ.

28. Sestrojte geometrické místo bodů v prostoru, které mají stejnou vzdálenost od bodů A (−3; 4; 5) a B (2; 1; 3).

29. V rovině ϱ (−6; 6; 4) sestrojte kružnici o středu S (1; 3; ?) a poloměru $r = 3$.

b) *Tělesa v obecné poloze.*

30. Sestrojte pravidelný šestiboký jehlan, jehož podstava je v rovině ϱ, o středu S a vrcholu A. [ϱ (−7; 6; 4,5), S (2; ?; 3), A (4; 8; ?)]. Výška jehlanu je $v = 9$.

31. Sestrojte sdružené průměty duté krychle s podstavou $ABCD$ v rovině ϱ [ϱ $(-3; \infty; 2)$, A $(-1; 4; ?)$, B $(3; 1; ?)$, $y_C > y_B$].

32. Sestrojte pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého jehlanu o výšce $v = 6{,}5$, stojícího na rovině ϱ $(-7; 8; 7)$. Dva protější vrcholy podstavy jsou A $(-3; 2; ?)$, C $(4; 6; ?)$.

33. Sestrojte sdružené průměty rotačního válce o středu podstavy S $(-3; 4; ?)$ v rovině ϱ $(7; 6; 7)$, $r = 5$, $v = 8$.

34. Sestrojte průměty rotačního válce o ose $o \equiv MN$, [M $(3; 7; 1)$, N $(-3; 1; 5)$], $r = 3$, jehož podstavná kružnice k se dotýká π a podstavná kružnice $\overline{k}$ průmětny ν.

35. Sestrojte pravidelný kolmý šestiboký hranol s podstavou v rovině σ $(5; 5; 6)$. Střed podstavy je S $(0; 3; ?)$. Vrchol A podstavy leží na půdorysné stopě roviny σ, úsečka $SA = 3$ cm, $x_A > 1$. Výška hranolu $v = 6$, $x_{\overline{S}} > x_S$.

c) *Rovinné řezy tělesy a sítě těles.*

36. Sestrojte řez trojbokého kolmého hranolu s podstavou ABC [A $(1{,}5; 1{,}5; 0)$, B $(3; 6; 0)$, C $(5{,}5; 4{,}5; 0)$] rovinou $\varrho \perp v$ jdoucí počátkem O a svírající s π úhel 45°. Sestrojte síť seříznutého hranolu.

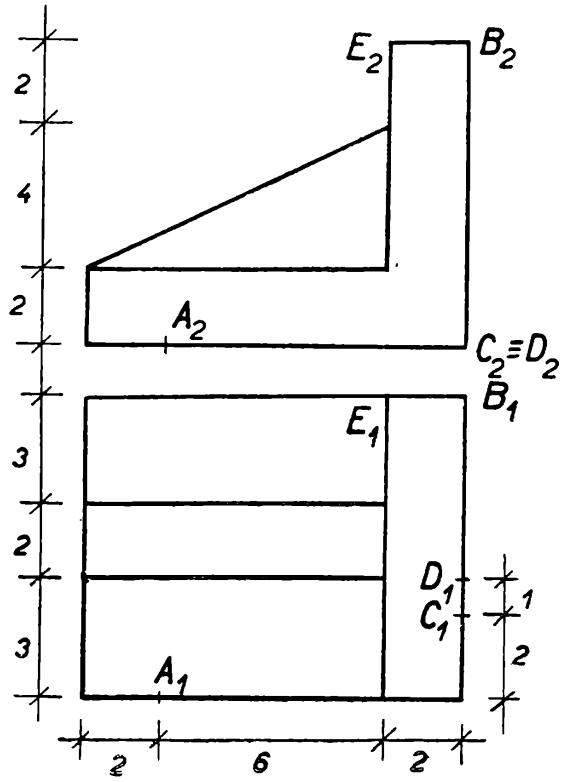
37. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou v π rovinou ϱ $(-6; 9{,}5; 3)$. Jeden vrchol podstavy je A $(-1; 6{,}5; 0)$, vrchol jehlanu je V $(0{,}5; 3{,}5; 7)$. Sestrojte síť vzniklého komolce.

38. Pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v π [S $(3; 4; 0)$, A $(5{,}5; 4{,}5; 0)$, $v = 5$] seříznete rovinou σ $(-3; 4{,}5; 1{,}5)$. Sestrojte síť vzniklého komolce.

39. Proveďte řez rotačního válce [S $(0; 0; 6)$, $r = 6$, $v = 12$, $o \perp \nu$] rovinou ϱ $(-9; 6; \infty)$ a síť seříznutého válce.

40. Rotační válec s podstavou v π [S $(2; 4; 0)$, $r = 3$, $v = 6$] seříznete rovinou σ $(-5; 7; 4)$ a sestrojte síť seříznutého válce.

41. Odlitek daných rozměrů (obr. 2) protněte rovinou, jdoucí body a) ABC, b) ABD, c) ACE.



Obr. 2

42. Sestrojte řez rotačního kužele [S (0; 5; 0), $r = 4$, $v = 8$] rovinou ϱ (−9; 14; 4). Sestrojte síť komolého kužele.

43. Proveďte parabolický řez rotačním kuželem [S (0; 5; 0), $r = 4$, $v = 10$] rovinou ϱ (−1; ?; ?) kolmou k nárysně.

44. Sestrojte řez rotačního „dvojkužele" ($o \perp \pi$), omezeného půdorysnou a rovinou souměrnou k π podle vrcholu V (3; 9; 5) rovinou ϱ (−4; ∞; 4), $r = 9$.

45. Sestrojte řez koule [S (0; 5; 4), $r = 4$] rovinou ϱ (−8; 10; 6).

IV. Kolmá axonometrie

46. Řešení příkladu 41 proveďte v pravoúhlé axonometrii (obraz osy x nechť svírá s obrazem osy y úhel 135°, obraz osy y se svislým obrazem osy z úhel 120°). Podstavné hrany odlitku umístěte do osy x a y.

47. V axonometrii určené stejně jako v příkladu 46 sestrojte pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v π, je-li dán střed S (6; 4; 0) podstavy, vrchol A (6; 1; 0) podstavy a výška jehlanu $v = 8$.

48. V axonometrii z příkladu 46 sestrojte pravidelný čtyřboký hranol s podstavou v π, je-li dán střed S (0,5; 3,5; 0) podstavy, vrchol A (−1; 6,5; 0) podstavy a výška hranolu $v = 7$.

49. V axonometrii z příkladu 46 sestrojte rotační válec o podstavě v π [S (0; 0; 6), $r = 4$, $v = 12$, osa $o \perp \pi$].

50. V axonometrii z příkladu 46 sestrojte rotační kužel o podstavě v π [S (0; 5; 0), $r = 4$, $v = 8$].

Informace o přijímací zkoušce z fyziky na stavební fakultu ČVUT Praha

ALENA DRAHOKOUPILOVÁ, IVAN KAŠPAR, CSc
katedra fyziky FS ČVUT Praha

Zkoušky z fyziky při přijímacích pohovorech na stavební fakultu ČVUT v Praze se konají jednak písemnou, jednak ústní formou. Během padesáti minut má uchazeč vyřešit čtyři příklady, které vždy zahrnují dvakrát mechaniku a dva další obory fyziky. Z mechaniky jsou zadávány dva příklady. Jeden je lehčí a obvykle se řeší vhodným dosazením do některého ze základních vzorců, druhý pak vyžaduje poněkud složitější úvahu a kombinaci několika základních vztahů. Hlavně je třeba dávat pozor na soustavy jednotek, protože veličiny jsou zadávány v různých soustavách jednotek. Podle výsledků této písemné části přijímacích pohovorů jsou pak před jednotlivými komisemi konány ústní pohovory. Při ústní zkoušce jsou nejprve probrány chyby z písemky a pak následuje několik otázek, které mají objasnit znalosti

a fyzikálně technickou představivost uchazeče. Pro celkové hodnocení uchazeče se bere v úvahu jednak celkový výsledek přijímací zkoušky a jednak výsledný prospěch dosažený na středně vzdělávací škole.

Jak ukazuje zkušenost, jsou při těchto zkouškách v nevýhodě absolventi průmyslových škol, kde se fyzika vyučuje pouze v prvním ročníku. Protože výuka fyziky na stavební fakultě začíná na geodetickém a vodohospodářském směru v prvním semestru, na ostatních směrech pak ve druhém, nejpozději ve třetím semestru a protože se předpokládá jistá úroveň znalostí, je pro absolventy průmyslových škol nezbytné doplnit chybějící znalosti ještě před přijímací zkouškou. Pro samotnou zkoušku je nutné bezpečně znát a umět pro výpočet používat jednoduché vztahy, které se uplatňují v ukázkových příkladech následujících typů. Pojem „hmota" nahraďte slovy „hmotnost" v celém článku.

1. Železniční vůz šířky 3,6 m pohybující se rychlostí 60 km/h byl prostřelen nábojem letícím kolmo k trati. Otvor v první stěně byl o 12 cm posunut před otvorem v druhé stěně. Jakou rychlostí se pohyboval náboj a jaká je jeho kinetická energie?

2. Na osobní auto o hmotě $m = 1000$ kg působí síla 200 N, po dobu 5 sekund. Jak veliké je vzniklé zrychlení a, jak veliké rychlosti v dosáhne, a jak velikou dráhu s ujede auto v této době (jestliže na počátku bylo v klidu)?

3. Má se určit výslednice dvou sil $F_1 = 400$ N a $F_2 = 300$ N působících v témže bodě a svírajících spolu úhel 60°. Proveďte graficky.

4. Vlak jedoucí rychlostí 60 km/h zbrzdí na rychlost 50 km/h za 5 sekund. Jak velkou dráhu během tohoto předpokládaného rovnoměrně zpožděného pohybu ujede?

5. Vagón o hmotě $m_1 = 12\,000$ kg jedoucí rychlostí 1 km/h narazil na klidný vagón o hmotě $m_2 = 8000$ kg. Nárazem se oba vagóny spojily, takže jedou dále společnou rychlostí v_2. Určete tuto rychlost.

6. Drát průřezu $S = 5$ mm^2 je zatížen silou $F = 2$ kp. Jak veliký je měrný tlak?

7. Jednozvratná páka je zatížena břemenem $F_1 = 100$ kp zavěšeným ve vzdálenosti $l_1 = 0{,}5$ m od osy. V jak velké vzdálenosti působí síla $F_2 = 30$ kp, aby břemeno bylo v rovnováze?

8. Kolik váží trám z jedlového dřeva hustoty $0{,}5 \cdot 10^3$ kg/m^3, má-li rozměry $a = 2$ m, $b = 30$ cm, $c = 20$ cm?

9. Jak velikou silou vyzdvihneme ve vodě kámen, jehož tíha je na vzduchu 100 kp a má hustotu 2500 kg/m^3?

10. Jak veliké je zatížení těžního lana, jestliže na něm zavěšená klec hmoty 5 tun sjíždí se zrychlením 2 m/s^2?

11. Jak veliká by byla tíha tělesa vážícího na Zemi 1 kg, kdybychom je přenesli na Slunce nebo na Měsíc? Gravitační zrychlení na Slunci činí $g_S = 270$ ms^{-2}, na Měsíci $g_M = 1{,}7$ ms^{-2}.

12. Pro telekomunikační účely se počítá v blízké budoucnosti s využitím umělých družic země. Jako velmi výhodné se jeví takové družice, které budou „viset" nehybně nad daným místem zemského povrchu, tj. takové družice, jejichž doba oběhu je stejná jako doba zemské rotace kolem vlastní osy. V jaké výši nad povrchem Země musí taková družice obíhat?

13. Určete kinetickou energii auta, jehož hmota je 4 tuny a rychlost $v = 50$ km/h.

14. Ze studny hluboké $h = 30$ m se má do výšky $H = 20$ m vyčerpat 5000 litrů vody. K dispozici je pouze čerpadlo s motorem o výkonu $P = 2$ k. Jak dlouhý je čas potřebný k vyčerpání vody, je-li účinnost čerpadla 80 %?

15. Beranidlo k zatloukání pilot má hmotnost 1200 kg. Těsně před úderem je jeho kinetická energie 30 kJ. Vypočtěte výšku, ze které dopadá beranidlo na pilotu.

16. Nákladní auto o tíze 3600 kp jede rychlostí 40 km/h. Jak veliká musí být brzdicí síla, jestliže má auto zastavit během 8 sekund?

17. Ze zaplaveného sklepa o ploše 50 m^2 je třeba vyčerpat vodu na dlažbu. Hloubka vody ve sklepě je 1,5 m. Hladina vody je 5 m pod dlažbou. Vypočtěte práci, kterou musíme vynaložit na vyčerpání vody.

18. Jakou práci vykoná vzpěrač, zvedne-li činku o tíze 110 kp do výšky 2 metrů? Jaký je jeho střední výkon, trvá-li mu zvednutí 4,2 sekundy?

19. Kolik Kčs stojí energie potřebná k zvednutí panelu o hmotnosti $4{,}5 \cdot 10^3$ kg do výšky 6. patra, počítáme-li jednu kilowatthodinu za 70 haléřů? Konstruktivní výška patra je 2,85 m.

20. Oč se prodlouží nosné lano jeřábu dlouhé 30 metrů, průřezu 2,8 cm^2, je-li na něm zavěšen panel o tíze 2400 kp. Modul pružnosti materiálu, ze kterého je zhotoveno lano, je $2{,}15 \cdot 10^6$ kp . cm^{-2}.

21. O kolik se prodlouží ocelový drát délky 10 m, když teplota vzrostla o 20 °C? Koeficient teplotní roztažnosti je $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ deg^{-1}.

22. Spojíme-li nádobu obsahující 10 l plynu při tlaku 2 kp/cm^2 se vzduchoprázdnou nádobou obsahu 15 l, jaký bude výsledný tlak? (Teplota plynu se nemění.)

23. Do vany bylo nalito 200 l vody 10 °C teplé. Kolik vody 80 °C teplé se musí přidat, aby výsledná teplota byla 30 °C? Specifické teplo vody je 1 kcal kg^{-1} deg.

24. Do 1 kg vody 20 °C teplé byl vhozen vzorek látky o teplotě 40 °C a hmotě 0,5 kg a teplota se ustálila na hodnotě 25 °C. Jaké je měrné teplo neznámé látky?

25. Do 2 kg vody 20 °C teplé vhodíme 10 dkg ledu 0 °C teplého. Jaká bude výsledná teplota? Specifické teplo vody je 1 kcal kg^{-1} deg^{-1}; skupenské teplo tání ledu je 80 kcal kg^{-1}.

26. Objem balónu na zemi je $V_1 = 2$ m^3, teplota plynové náplně $t_1 = 20$ °C a tlak $p_1 = 750$ torr. Balón vystoupí do výšky 2 km, kde je teplota $t_2 = 10$ °C a tlak $p_2 = 500$ torr. Jaký bude objem V_2?

27. Napětí na žárovce je 6 V, protékající proud 0,15 A. Určete odpor R a výkon P.

28. Elektromotorické napětí baterie je 6 V. Baterie je zapojena v obvodě, kde teče proud 2 A a jehož odpor je 10 ohmů. Určete svorkové napětí baterie.

29. Dva náboje $Q_1 = 10^{-8}$ As a $Q_2 = 2 \cdot 10^{-8}$ As jsou od sebe vzdáleny o $r = 20$ cm. Jakou silou na sebe působí? Permitivita prostředí je $9 \cdot 10^{-12}$ F . m^{-1}.

Následují příklady na vztah mezi efektivní a maximální hodnotou střídavého proudu a napětí a příklady na řazení odporů a kondenzátorů do série a paralelně. Úkolem je vždy nalézt výslednou náhradní hodnotu odporu nebo kondenzátoru.

30. Jaká je ohnisková dálka čočky, jestliže předmět je $a = 4$ cm před čočkou a ostrý obraz vznikne $b = 8$ cm za čočkou?

31. Paprsek dopadá pod úhlem 30° a láme se pod úhlem 45°. Jak je velký index lomu?

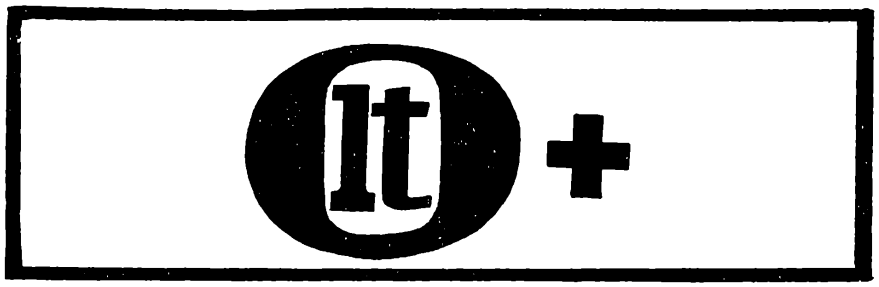
Výsledky příkladů otiskneme v některém z dalších čísel.

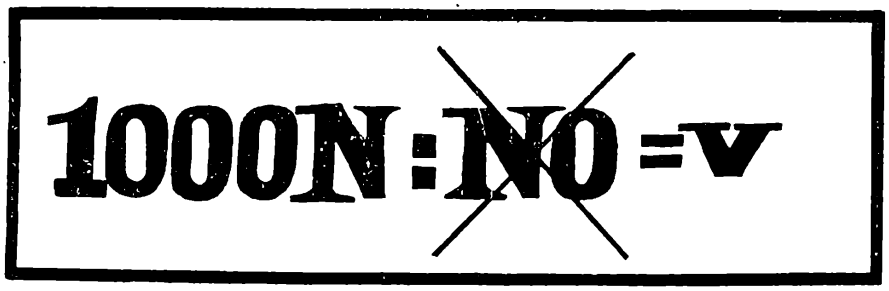
Otázky, které mohou přijít při ústním pohovoru, jsou asi tohoto typu: Jednotky, základní soustavy jednotek. Hmotnost (hmota) a tíha, Newtonovy pohybové zákony. Dráha, rychlost, zrychlení, rozdělení pohybů (definice, vzorce). Síla, práce, výkon. Pohyb po kružnici, odstředivé zrychlení. Volný pád. Otáčivý pohyb, moment síly, dvojice sil. Skládání a rozklad sil. Měrná hmota, způsoby jejího měření. Pružná deformace, Hookův zákon. Jednoduchý kmitavý pohyb (harmonický), matematické a reverzní kyvadlo. Pascalův zákon, Archimédův zákon, hydrostatický tlak. Skupenské teplo, bod tání a tuhnutí. Teplotní roztažnost, teploměry. Vypařování a var, skupenské teplo varu. Měrné teplo, směšovací pravidlo. Zákon odrazu a lomu. Druhy vlnění, vztah mezi délkou vlny, frekvencí a rychlostí šíření. Čočky a zrcadla, zobrazování, čočková rovnice. Mikroskop a dalekohled (princip). Ohmův zákon, jednotky napětí, proudu a odporu. Spojování vodičů za sebou a vedle sebe. Střídavý proud a jeho vlastnosti. Transformátory. Galvanické články, svorkové napětí a elektromotorické napětí. Dioda a trioda. Stavba atomu. Molekula.

U těchto otázek se vyžaduje definice, popřípadě vzorec. Odvození vzorců není třeba uvádět. Pokud se otázky týkají měřicích přístrojů, pak je třeba umět vysvětlit princip.

Jak je vidět z uvedených příkladů a otázek, je rozsah fyziky, požadovaný u přijímací zkoušky značně menší, než je rozsah uvedený v osnovách pro SVVŠ.

REBUSY





RŮZNÉ

Opakujte si matematiku

HANA KOŘÍNKOVÁ, ČVUT, Praha

(K televiznímu kursu)

Ve čtvrtém čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních v článku O p a k u j t e s i m a t e m a t i k u jsme vám slíbili, že otiskneme řešení daných úloh a texty dalších úloh, které byly anebo ještě budou dány televizním divákům během kursu. Jejich řešení uveřejníme v čísle 7.

Dále jsou uvedena řešení příkladů, jejichž texty jsme otiskli v č. 4, str. 204.

1. K o n s t r u k c e. a) Pravoúhlý trojúhelník ABM s přeponou AB a s odvěsnou $AM = v_a$. (Vrchol M na Thaletově kružnici nad průměrem AB.)

b) Geometrické místo vrcholů C, tj. přímka g rovnoběžná s AB ve vzdálenosti v_c.

c) Průsečík přímky BM s g.

D i s k u s e. Úloha je řešitelná, bude-li existovat trojúhelník ABM, tj. bude-li $v_a \leqq c = AB$. Řešení je jediné v dané polorovině.

2. Z Prahy vyjede rychlík v 16 h. 59 min., tj. o 6 min. dříve než z Kolína. Za tuto dobu, tj. do 17 h. 05 min. ujede $6 \,.\, \frac{61}{52}$ km, neboť to je dráha $6\,c_1$ km. Rychlost prvního vlaku (v km/h) označme c_1, druhého c_2.

Potom vyjedou oba rychlíky v tutéž dobu, tj. v 17 h. 05 min. a setkají se za x min. Za x minut ujede rychlík směrem z Prahy $\frac{61}{52}\,x$ km, rychlík z Kolína $\frac{61}{54}\,x$ km a celkem dráha $(61 - 6 \,.\, \frac{61}{52})$ km.

Platí

$$\frac{61}{52} \,.\, x + \frac{61}{54} \,.\, x = 61 - 6\,\frac{61}{52}$$

čili

$$x \doteq 23{,}4\,.$$

Rychlíky se setkají v 17 h. 28 min. 24 s.

Vlak z Prahy ujede $6\,\frac{61}{52} + 23{,}4 \,.\, \frac{61}{52} = 34{,}5$ km. Vlak z Kolína $23{,}4 \,.\, \frac{61}{54} = 26{,}5$ km.

Zkouška řešení vyplývá z postupu a z kontroly.

Oba vlaky za každou hodinu se přiblíží k sobě o $c_1 + c_2$, a to počínajíc od 17 h. 05 min., kdy jsou již oba na cestě. Vypočteme-li jejich vzdálenost v tomto okamžiku, setkají se od tohoto okamžiku za tolik hodin, kolikrát je tato jejich vzdálenost větší než jejich relativní rychlost $c_1 + c_2$.

Nechť se oba rychlíky potkají v okamžiku $17 + \frac{t}{60}$ (v hodinách) ve vzdálenosti s (v km) od Prahy. Jede-li první z nich rychlostí c_1, bude v okamžiku $17 + \frac{t}{60}$ ve vzdálenosti

$$s = c_1\left(\frac{t}{60} + \frac{1}{60}\right)$$

a druhý rychlík, který jede rychlostí c_2, bude v témž okamžiku ve vzdálenosti

$$s = 61 - c_2\left(\frac{t}{60} - \frac{5}{60}\right)$$

od Prahy.

3. a) Funkce $y = 3x - 2$ je definována pro každé x; zvolíme-li např. $x = -1$, stanovíme dosazením příslušné y, v našem případě $y = 3 \cdot (-1) - 2$, tj. $y = -5$. Grafem této funkce je přímka p a bod $A\ (-1; -5)$ je jedním jejím bodem.

Jiné body ležící na přímce p jsou např. $B\ (0; -2)$, $C\ (\frac{2}{3}; 0)$; $B\ (1; 1)$ a vůbec každý bod $P\ (x_0; 3x_0 - 2)$, kde x_0 je libovolné číslo.

Posuneme-li soustavu souřadnic počátkem do bodu $P\ (x_0; 3x_0 - 2)$, dostaneme pro každý bod roviny nové souřadnice X, Y, pro něž platí $X = x - x_0$, $Y = y - (3x_0 - 2)$. Rovnice $y = 3x - 2$ bude mít v nových souřadnicích tvar $Y + (3x_0 - 2) = 3(X + x_0) - 2$ a po úpravě $Y = 3X$.

Tuto přímou úměrnost můžeme získat z dané rovnice krátkou cestou, píšeme-li $y + 2 = 3x$ a položíme-li $y = Y - 2$, $x = X$, nebo píšeme-li $y = 3(x - \frac{2}{3})$ a položíme-li $x = X + \frac{2}{3}$, $y = Y$.

V prvém případě jsme posunuli počátek nové soustavy do bodu $B\ (0; -2)$, v druhém do bodu $C\ (\frac{2}{3}; 0)$.

b) Zlomek $\frac{x+1}{x-1}$ má smysl, pokud není jeho jmenovatel nulou; daná funkce $y = \frac{x+1}{x-1}$ je definována pro každé $x \neq 1$. Vyloučíme-li tedy případ $x = 1$, můžeme psát

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Potom je

$$y = 1 + \frac{2}{x-1},$$

čili

$$y - 1 = \frac{2}{x-1}.$$

Zavedeme-li označení $X = x - 1$, $Y = y - 1$, dostáváme $Y = \frac{2}{X}$, což je

hledaná úměrnost (nepřímá). Grafem je rovnoosá hyperbola souměrná podle bodu o souřadnicích $x = 1$, $y = 1$.

Funkce daná vzorcem

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

kde $c \neq 0$, $ad - bc = 0$; je lineární lomená funkce definovaná pro

$$x = -\frac{d}{c}.$$

Upravíme funkci ve tvar

$$y = \frac{1}{c}\,\frac{ax + b}{x + \frac{d}{c}} = \frac{1}{c}\,\frac{a\left(x + \frac{d}{c}\right) + b - \frac{ad}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{1}{c}\left[a + \frac{bc - ad}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)}\right] =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}};$$

získáme vyjádření

$$y - \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}}.$$

Položíme-li

$$X = x + \frac{d}{c}, \quad Y = y - \frac{a}{c},$$

dostaneme nepřímou úměrnost

$$Y = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{X}.$$

V našem případě je $a = b = c = 1$, $d = -1$, tudíž

$$ad - bc = -2; \quad \frac{a}{c} = 1, \frac{d}{c} = -1, X = x - 1, Y = y - 1,$$

takže nepřímá úměrnost je

$$Y = \frac{2}{X}.$$

4. Je-li $|a| = |b|$ má rovnice dva kořeny

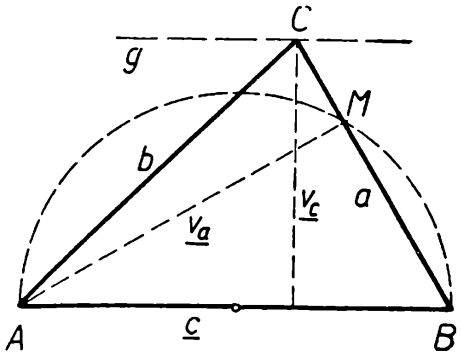
$$x = \frac{a + b}{a - b}; \; x = -\frac{a - b}{a + b}.$$

Je-li $|a| = |b| = 0$, má daná rovnice kořen rovný nule.

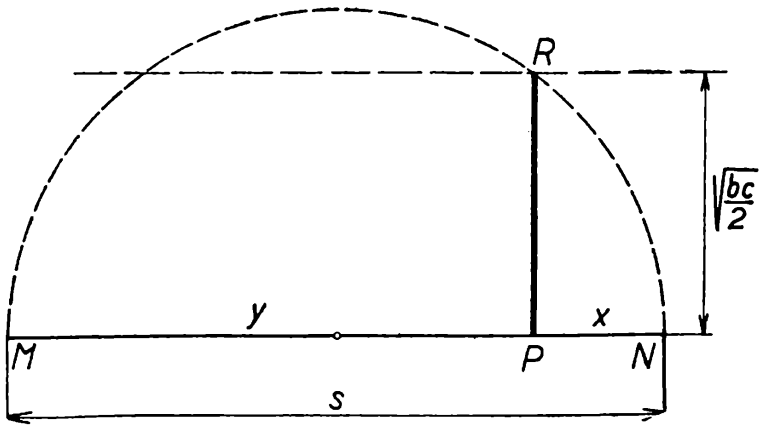
Je-li $a = b = 0$, vyhovuje jí každé x.

5. Řešení. Předpokládejte, že jednou částí je $\triangle AMN$, kde vrchol M leží na straně AB, vrchol N na straně AC. Z podmínky pro rovnost obvodů obou částí plyne $AM + AN = \frac{1}{2}\sigma$, kde σ je obvod trojúhelníka ABC.

Na obr. 2 $MN = s$, z Euklidovy věty plyne $MP \,.\, PN = \overline{PR}^2$, je tedy $MP = y$, $PN = x$. Také $xy = \frac{bc}{2}$ a ovšem i $x + y = s$.



Obr. 1



Obr. 2

D i s k u s e. Jediná podmínka řešení je $s^2 - 2bc \geqq 0$. Oba kořeny x i y jsou kladné, neboť

$$s^2 > s^2 - 2bc\left(\frac{s \pm \sqrt{s^2 - 2bc}}{2}\right).$$

P o z n á m k a. Úsečku velikosti x nanášíme na stranu AB od A. Neuvažujeme podmínky pro to, kdy můžeme i úsečku velikosti většího kořenu nanášet na stranu $AB = o \leqq b$.

V následujících příkladech č. 1 až 8 postupujte obdobně, jak bylo uvedeno v č. 4 na str. 204.

1. Dané číslo $a = 10$ rozdělte na dva sčítance a vyšetřete, jakých hodnot může nabývat součet jejich druhých mocnin.

2. Vypočtěte úhly a odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, daného délkou přepony c a výšky v_c na přeponu, $c = 12$, $v_c = 5$.

3. Které vypuklé mnohoúhelníky mají více úhlopříček než stran?

4. Vypočtěte všechna x, která splňují nerovnost

$$|2x + 3| < x - |5x - 1|.$$

5. Řešte soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\sqrt{2x + y} = 4 - y,$$
$$3x - y = 1$$

v oboru reálných čísel.

6. Vypočítejte délky stran trojúhelníka, je-li dán jeho obvod $2s = 25$, úhel $\alpha = 37°$, úhel $\beta = 76°$.

7. Podstavou jehlanu je pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Pobočná hrana VA je kolmá k rovině podstavy, pobočná hrana VD má od roviny podstavy odchylku $\alpha = 45°$. Vypočítejte odchylky β, γ ostatních pobočných hran od roviny podstavy.

8. Řešte logaritmickou nerovnost

$$\log_z (x^2 - 7x + 10) < 2 \log_z (x + 1).$$

(Rozlište případy: $z > 1$; $z < 1$.)

Rebusy: Volta, Mendělejev, Kepler.

Gottfried Wilhelm Leibniz

(1646—1716)

Vznik a počáteční vývoj některých důležitých oborů dnešní vědy spadá již do starověku. Při stálém rozvoji vědy se její rozsah ustavičně zvětšoval, a proto bylo třeba vědecké poznatky téhož druhu shrnovat do samostatných celků a pořádat je podle určitých zásad. Tak např. řecký filosof Aristoteles (384 až 322 před n. l.) shrnul ve svých spisech veškeré tehdy známé poznatky o formách logického vyjadřování i usuzování a obdobně řecký učenec Euklides (asi 365 až asi 300 před n. l.) uspořádal ve svém díle Stoicheia (lat. Elementa, česky Základy) všechny tehdy známé matematické poučky.

Za dva tisíce let po vzniku spisů Aristotelových a Euklidových bylo ještě možné, aby se nadaný a pilný učenec seznámil s vědeckými poznatky všech vědních oborů. Pro označení učence toho druhu se často užívá názvu polyhistor. Souhrn poznatků v některých vědních oborech má však nyní tak velký rozsah, že není možné, aby se jedinec seznámil se všemi poznatky takových oborů, jakými jsou např. matematika, fyzika, chemie atd. Současní vědečtí pracovníci se musí zpravidla specializovat na práci jen v určitém úseku některé vědy.

K posledním polyhistorům bývá počítán německý učenec *Gottfried Wilhelm Leibniz*[1]) (1646 až 1716), který v druhé polovině 17. století byl nejvýznačnějším učencem Německa, zpustošeného třicetiletou válkou, hospodářsky zubožného a politicky roztříštěného na velký počet malých států. Dne 14. listopadu 1966, na nějž připadlo 250. výročí smrti G. W. Leibnize, byla v Hannoveru zahájena vědecká konference k uctění jeho památky. Úkolem konference, jíž se zúčastnilo také pět československých vědců, bylo z moderního hlediska zhodnotit přínos G. W. Leibnize k rozvoji evropské vzdělanosti v různých oborech společenské činnosti, zejména pak ve filosofii, logice, matematice, fyzice, historii, ve vědách právních aj.

Ve druhé polovině 17. století došlo k prudkému rozvoji matematických a fyzikálních věd, který příznivě působil i na vývoj vědy v jiných oborech, takže toto období vývoje vědy bývá často označováno jako doba vědecké revoluce. K nejznámějším vědeckým osobnostem té doby patří mimo G. W. Leibnize též anglický fyzik a matematik Isaac Newton (1642 až 1727). Na rok 1966 připadlo 300. výročí vzniku nejzávažnějších vědeckých teorií, jimiž

[1]) Vyslov Lajbnyc.

Newton přispěl k pokroku vědy. Zmíním se stručně o těchto objevech, neboť mají vztah k životním osudům i k zaměření vědecké práce G. W. Leibnize.

Isaac Newton začal roku 1660 studovat na universitě v Cambridge. Když tam roku 1665 vypukl mor, opustili universitní učitelé i studenti město. Newton odjel do svého rodiště Wolsthorpe, kde v letech 1665 až 1666 při nedostatku studijních pomůcek samostatně vědecky pracoval. Tam vznikla první zpracování vědeckých pojednání, jimiž Newton položil základy k diferenciálnímu a integrálnímu počtu, které někdy označujeme společným názvem infinitezimální počet. Tam se také zrodily jeho názory o gravitaci a o různé lomivosti světelných paprsků rozličných barev. Propracované názory na základní otázky fyziky shrnul Newton do svého nejvýznamnějšího vědeckého díla Philosophiae naturalis principia mathematica (Matematické základy přírodních věd), které dne 28. dubna 1686 předložil anglické učené společnosti Royal Society.

V něm podal výklad základních otázek teoretické mechaniky, formuloval gravitační zákon, odvodil z něho Keplerovy zákony o pohybu planet Keplerem empiricky nalezené, přesně vyložil pohyb Měsíce a jevy mořského přílivu i odlivu, ukázal základy teorie potenciálu aj. Toto dílo, které bylo po prvé vytištěno roku 1687, příznivě ovlivnilo další vývoj fyzikálních věd, zejména mechaniky a astronomie.

Výsledky své badatelské práce v infinitezimálním počtu sdělil Newton nejprve jen svým přátelům a později jich částečně použil ve svém výše zmíněném životním díle. Jeho vědecká pojednání, jimiž budoval základy diferenciálního a integrálního počtu, byla po prvé vytištěna teprve v 18. století. Newtonova liknavost v publikování vědeckých prací mu později škodila, a to zejména ve sporu o prioritu (prvenství) objevu a vybudování základů diferenciálního a integrálního počtu.

G. W. Leibniz se narodil v Lipsku 21. června 1646 (podle kalendáře juliánského). Jeho otec byl profesorem a zároveň aktuárem lipské university. G. W. Leibniz ztratil brzy oba rodiče, v šesti letech otce, matku pak v osmnácti. Již v dětství projevoval velké nadání. Ve věku 12 let mluvil prý plynně latinsky a učil se řecky. Od r. 1661 studoval na universitě v Lipsku, kterou přechodně opustil, když studoval půl roku na universitě v Jeně. Roku 1664 dosáhl na filosofické fakultě v Lipsku hodnosti magistra a roku 1666 se tam habilitoval předložením vědecké práce Dissertatio de arte combinatoria (Rozprava o umění kombinačním), v níž položil vědecké základy kombinatoriky a vyslovil podnětné myšlenky pro užití nových pracovních metod v logice.

Leibniz studoval v Lipsku též práva, ale udělení hodnosti doktora práv bylo mu tam odmítnuto

pro jeho mladý věk. Proto přešel na universitu do Altdorfu u Norimberka, kde roku 1666 byl prohlášen doktorem práv. Za pobytu v Norimberku se seznámil se vzdělaným šlechticem J. Ch. Boyneburgem, který roku 1667 usnadnil Leibnizovi vstup do služeb mohučského kurfiřta a později i styky s evropskými politiky a učenci.

V březnu r. 1672 byl Leibniz vyslán do Paříže s diplomatickým posláním získat krále Ludvíka XIV. pro vojenskou akci v Egyptě a tím odvrátit jeho pozornost od akcí v Evropě. Leibnizovi se nepodařilo splnit tento úkol, ale jeho pobyt v Paříži do roku 1676 ovlivnil zaměření jeho další vědecké práce. V Paříži se totiž seznámil s četnými francouzskými i cizími učenci. Patřil k nim zejména známý holandský fyzik Christian Huygens (1629 až 1695), který se stal r. 1666 prvním presidentem tehdy založené francouzské učené společnosti Académie des sciences. Huygens dovedl podnítit Leibnize k hlubšímu studiu matematiky a fyziky hlavně svým spisem Horologium oscillatorium (Kyvadlové hodiny), v němž vědecky řešil otázky přesného měření času, důležité pro astronomickou a mořeplaveckou praxi.

Leibnizův zájem o využití vědeckých poznatků v praktickém životě se projevil též snahou zkonstruovat počítací stroj. Zabýval se tímto vědeckotechnickým problémem v letech 1671 až 1673, když se dověděl, že francouzský matematik Blaise Pascal (1623 až 1662) sestrojil již okolo roku 1642 počítací stroj. Leibnizův počítací stroj neměl vady stroje Pascalova, ale měl některé jiné vady. Ani Pascal, ani Leibniz však pravděpodobně nevěděli, že již r. 1619 se značným zdarem zkonstruoval počítací stroj německý matematik Wilhelm Schickhardt, profesor na universitě v Tübingen.

V lednu r. 1673 odjel Leibniz s diplomatickým posláním do Londýna, kde se zdržel sedm týdnů. Seznámil se tu s některými anglickými učenci, jako např. s fyzikem a chemikem Robertem Boylem (1627 až 1691). Nesetkal se tu však se žádným učencem z kruhu těch Newtonových přátel, kteří byli informováni o Newtonově práci v oboru infinitezimálního počtu. Za tohoto pobytu v Londýně předložil Leibniz učené společnosti Royal Society svůj počítací stroj. Royal Society ocenila vědeckotechnickou práci Leibnizovu tím, že jej v dubnu 1673 zvolila za svého člena.

Po návratu do Paříže pohroužil se Leibniz znovu do studia matematických a fyzikálních věd a brzy začal dosahovat dobrých výsledků v samostatné tvůrčí vědecké práci. V září r. 1676 přijal nabídku vévody Johanna Friedricha z Braunschweigu na místo dvorního rady a knihovníka v Hannoveru. V říjnu r. 1676 odjel do Londýna, kde se při svém osmidenním pobytu mohl snad něco dovědět o stavu bádání anglických

učenců o nových metodách infinitezimálního počtu. Z Anglie odjel do Holandska, aby se osobně seznámil s některými holandskými učenci. V prosinci r. 1676 odjel Leibniz do Hannoveru, kde působil 40 let s přestávkami vyvolanými diplomatickými a vědeckými cestami.

V letech 1676 až 1687 žil Leibniz v Hannoveru klidným životem a mohl se hodně věnovat vědecké práci. V té době uveřejnil v lipském vědeckém časopise Acta eruditorum dvě důležitá vědecká pojednání, z nichž první z roku 1684 obsahuje základy počtu diferenciálního a druhé z roku 1686 základy počtu integrálního. Byla to první tištěná vědecká pojednání o nových pracovních metodách matematiky, o jejichž objev se zasloužil Newton i Leibniz. Každý z těchto učenců vycházel z jiných problémů, při jejichž řešení objevoval nové pracovní metody matematické analýzy. Tyto metody se pak osvědčily jako nejúčinnější nástroj matematiky pro řešení důležitých problémů věd přírodních i technických.

V letech 1687 až 1690 podnikl Leibniz cestu po Německu a Itálii, aby v archívech a knihovnách sbíral materiál k rozsáhlé historiografické práci o šlechtickém rodu Welfů. Po této cestě mohl po 10 let klidně vědecky pracovat. Roku 1700 byl povolán do Berlína, aby tam pomáhal řešit problémy souvisící s reformou kalendáře. Při této příležitosti pomáhal připravovat zřízení německé učené společnosti v Berlíně. Když pak tato společnost s názvem Sozietät der Wissenschaften byla 11. července 1700 zřízena dekretem braniborského kurfiřta, byl Leibniz jmenován jejím prvním presidentem. Téhož roku zvolila Leibnize za svého člena pařížská Académie des sciences, čímž vysoce ocenila význam jeho vědecké práce.

V letech 1700 až 1714 Leibniz opět hodně cestoval a v letech 1712 až 1714 strávil dlouhou dobu ve Vídni. Na těchto cestách se setkával s význačnými osobnostmi vědeckými i politickými, mezi nimiž byl i car Petr I. S ním diskutoval o počítacím stroji, o zřizování vědeckých akademií, o šíření vzdělanosti v Rusku apod. Pro zajímavost uvádím, že Leibniz při svých cestách celkem čtyřikrát projel českými zeměmi a že k jednomu setkání s carem Petrem I. došlo v Karlových Varech.

Roku 1697 začal z malicherných příčin spor o prioritu objevu diferenciálního a integrálního počtu, kterou někteří učenci přiznávali Newtonovi, jiní Leibnizovi. Tento spor ztrpčoval poslední dvě desítiletí Leibnizova života, zejména když někteří učenci spatřovali v řešení tohoto sporu otázku národní cti. Když se roku 1714 hannoverský kurfiřt Georg stal anglickým králem, chtěl s ním Leibniz odjet do Londýna, aby osobním stykem s anglickými učenci přispěl k vyjadnění nebo i rozřešení sporné otázky. Z poli-

tických důvodů nebylo mu to však povoleno. Tato událost zvýšila Leibnizovu zatrpklost, k níž přispívala na konci jeho života i jeho nemoc.

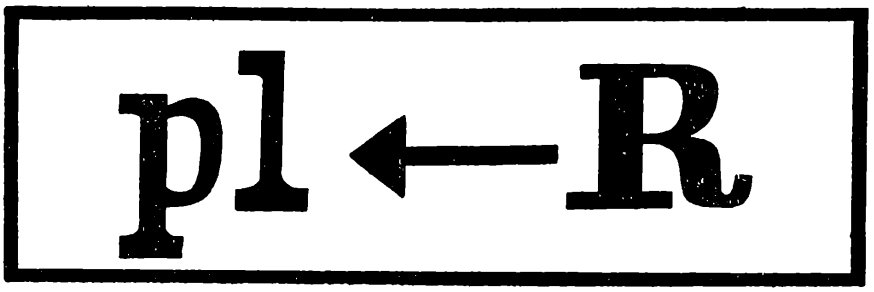
Když Leibniz 14. listopadu 1716 zemřel, konal se jeho pohřeb bez účasti hodnostářů politických i církevních, s nimiž se v posledních letech svého života v názorech neshodoval. Ani berlínská Akademie věd neprojevila tehdy svou úctu k jeho životnímu dílu, ačkoli se o její založení tolik zasloužil. Trvalo několik desítiletí, než byla Leibnizova práce pro rozvoj vědy náležitě uznána v jeho vlasti.

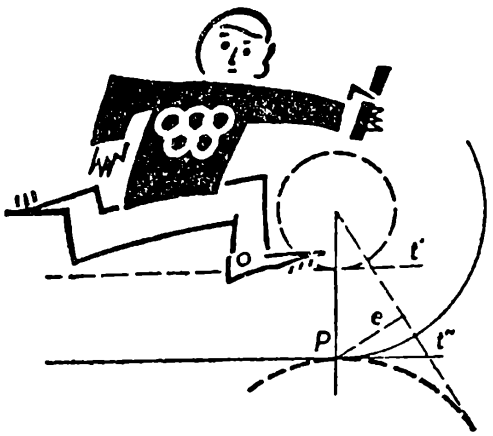
O rozsahu vědecké i společenské činnosti Leibnizovy svědčí, že katalog všech vědeckých spisů, tištěných pojednání, rukopisů i jiných předmětů jeho pozůstalosti, pořízený péčí berlínské a pařížské Akademie věd, má asi 75 000 položek. Již z toho je zřejmé, že nelze v krátkém článku vylíčit nebo i jen naznačit Leibnizovu práci ve všech vědních oborech. Chci zde však ještě připomenout, že Leibniz si byl dobře vědom toho, jak užívání vhodných symbolů přispělo k rozvoji matematiky. Proto chtěl symbolické metody užívat i v logice. Domníval se, že proces logického usuzování lze nahradit početními operacemi podle určitých pravidel. Naznačil též dost jasně cesty k dosažení tohoto cíle. Tyto Leibnizovy ideje zůstaly dlouho nepovšimnuty. Znovu se objevily ve vývoji logiky v uplynulých sto letech, kdy byla budována matematická logika.

Od novodobých poznatků matematické logiky vedla již jen krátká cesta k provádění početních a logických operací pomocí různých mechanismů, které jsou stavebními prvky kybernetických strojů. Proto není divu, že slavný americký matematik Norbert Wiener (1894—1964), který je jedním z prvních budovatelů kybernetiky, napsal o Leibnizovi toto: „*Kdybych měl zvolit někoho za patrona kybernetiky v dějinách vědy, musil bych zvolit Leibnize.*“

František Veselý

REBUS





MO

Řešení přípravných úloh 1. kola XVI. ročníku MO

Podle slibu budou v časopisech Rozhledy matematicko-fyzikální a Matematika ve škole otištěna řešení přípravných úloh I. kola XVI. ročníku. V Rozhledech matematicko-fyzikálních uvedeme nyní řešení úloh algebraického charakteru všech čtyř kategorií. Úlohy geometrické budou uveřejněny v časopise Matematika ve škole.

Ma+Vy

Kategorie A

1. Jsou-li d_1, d_2, d_3 kladná čísla taková, že $d_1 \leqq d_2 \leqq d_3$, pak pro libovolná nezáporná čísla c_1, c_2, c_3 platí

$$(c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2} + \frac{c_3}{d_3}\right) \leqq (c_1 + c_2 + c_3)^2 \frac{(d_1 + d_3)^2}{4d_1d_3}.$$

Dokažte!

Návod. Dokažte nejprve, že

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leqq 1.$$

Řešení. Ukažme nejprve, že platí

$$\frac{d_2}{d_1 + d_3} + \frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_3}} \leqq 1. \tag{1}$$

Protože $(d_3 - d_2)(d_2 - d_1) \geqq 0$, je také

$$d_2(d_1 + d_3) \geqq d_2^2 + d_1d_3.$$

Odtud

$$\frac{d_2^2}{d_2(d_1+d_3)}+\frac{d_1d_3}{d_2(d_1+d_3)}\leqq 1 \qquad \text{čili} \qquad \frac{d_2}{d_1+d_3}+\frac{\frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}}\leqq 1\,.$$

Protože také $d_1 \leqq d_1 \leqq d_3$ a $d_1 \leqq d_3 \leqq d_3$, platí i

$$\frac{d_1}{d_1+d_3}+\frac{\frac{1}{d_1}}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}}\leqq 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{d_3}{d_1+d_3}+\frac{\frac{1}{d_3}}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}}\leqq 1\,. \qquad (2),(3)$$

Nechť nyní c_1, c_2, c_3 jsou nezáporná čísla. Násobením nerovnosti (1) číslem c_1, nerovnosti (2) číslem c_2 a nerovnosti (3) číslem c_3 a sečtením dostaneme

$$\frac{1}{d_1+d_3}(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)+$$
$$+\frac{1}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}}\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right)\leqq c_1+c_2+c_3\,.$$

Protože aritmetický průměr nezáporných čísel

$$\frac{2}{(d_1+d_3)}(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)\,, \qquad \frac{2}{\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}}\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right)$$

je nejvýše roven $c_1+c_2+c_3$, je také jejich geometrický průměr nejvýše roven $c_1+c_2+c_3$, tzn.

$$\sqrt{\frac{4}{(d_1+d_3)\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_3}\right)}(c_1d_1+c_2d_2+c_3d_3)\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{c_2}{d_2}+\frac{c_3}{d_3}\right)}\leqq$$
$$\leqq c_1+c_2+c_3\,.$$

Umocněním a úpravou dostaneme odtud dokazovanou nerovnost.

2. Rovnice

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

s reálnými koeficienty a, b, c má jeden reálný kořen a dva ryze imaginární kořeny právě tehdy, platí-li

$$c=ab,\ b>0\,. \qquad (2)$$

Řešení. 1. Nechť rovnice (1) má reálný kořen α a dva ryze imagi-

nární kořeny; pak jsou tyto kořeny opačná čísla $\pm \mathrm{i}\beta$, kde $\beta \neq 0$ je reálné číslo. Z rovnice (1) plyne

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + b\alpha + c &= -\alpha^3 , \\ -a\beta^2 + b\mathrm{i}\beta + c &= \mathrm{i}\beta^3 , \\ -a\beta^2 - b\mathrm{i}\beta + c &= -\mathrm{i}\beta^3 . \end{aligned} \tag{3}$$

Sečtením druhé a třetí rovnice (3) dostaneme

$$c = a\beta^2 ; \tag{4}$$

odečtením druhé a třetí rovnice (3) vyjde

$$b = \beta^2 . \tag{5}$$

Spojením (4) a (5) vyjde rovnost (2). Ježto je $\beta \neq 0$ reálné, je $b = \beta^2 > 0$, což je nerovnost (2).[1])

2. Nechť platí vztahy (2). Pak lze rovnici (1) napsat ve tvaru

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0 ,$$

neboli

$$x(x^2 + b) + a(x^2 + b) = 0 ,$$

neboli

$$(x + a)(x^2 + b) = 0 . \tag{6}$$

Protože je $b > 0$, má rovnice $x^2 + b = 0$ dva ryze imaginární kořeny $\pm \mathrm{i}\sqrt{b}$. Mimo ně má rovnice (6) ještě reálný kořen $-a$.

3. Ve třídě je 15 dvousedadlových lavic a 27 žáků. Určití dva žáci mají sedět (z výchovných důvodů) vedle sebe v téže lavici a žádná lavice nemá zůstat prázdná. Kolika způsoby lze žáky rozsadit?

Řešení. Nejdříve vybereme místa pro rozsazení žáků. Oba vybraní žáci budou sedět v jedné z 15 lavic; to je 15 možností. Ze zbývajících 14 lavic budou 3 obsazeny jen jedním žákem; v každé z těchto tří lavic bude buď pravé, nebo levé místo prázdné. Pro usazení zbývajících (nevybraných) 25 žáků je tedy

$$\binom{14}{3} . 2 . 2 . 2 = \binom{14}{3} . 2^3 \tag{1}$$

možností. Celkem je tedy podle (1)

$$15 . \binom{14}{3} . 2^3 = n \tag{2}$$

způsobů, jak lze vybrat místa pro rozsazení.

Při každé z těchto n situací lze vybrané žáky usadit dvěma způsoby a mimo to ostatních nevybraných 25 žáků 25! způsoby. Při každé z n situací je tedy

$$2 . 25! \tag{3}$$

---

[1]) Vztahy (2) lze také odvodit ze známých vztahů mezi kořeny a koeficienty

$$\begin{aligned} a &= -(\alpha + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\beta) = -\alpha , \\ b &= (\mathrm{i}\beta)(-\mathrm{i}\beta) + \alpha\mathrm{i}\beta - \alpha\mathrm{i}\beta = \beta^2 > 0 , \\ c &= -\alpha . \mathrm{i}\beta . (-\mathrm{i}\beta) = -\alpha\beta^2 = ab . \end{aligned}$$

rozsazení. Podle (2) a (3) je počet všech možných rozsazení

$$15 \cdot \binom{14}{3} \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 25!,$$

tj.

$$16 \cdot 15 \cdot \binom{14}{3} \cdot 25!$$

4. Je dáno n bodů ($n \geqq 3$), z nichž žádné tři neleží v přímce, a množina $\mathbf{U}$ skládající se z n úseček, které spojují vždy dva z daných bodů. Pak lze z daných n bodů vybrat k bodů $A_1, \ldots, A_k$ ($k \geqq 3$) tak, že všechny úsečky $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k, A_kA_1$ náležejí množině $\mathbf{U}$.

Řešení. Pro $n = 3$ je věta zřejmá. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Předpokládejme, že věta platí pro určité $n \geqq 3$; při indukčním kroku z n na $n + 1$ rozlišíme tyto dva případy:

(1) Mezi $n + 1$ danými body existuje *aspoň jeden* bod, z něhož vychází *nejvýše jedna* úsečka množiny $\mathbf{U}$.

(2) *Z každého* z $n + 1$ daných bodů vycházejí *aspoň dvě* úsečky množiny $\mathbf{U}$.

V případě (1) označíme B bod uvedené vlastnosti. Pak aspoň n úseček množiny $\mathbf{U}$ spojuje dané body s vyloučením bodu B; počet těchto bodů je však n. Podle indukčního předpokladu platí tedy věta i pro daných $n + 1$ bodů.

V případě (2) snadno dokážeme, že z každého daného bodu vycházejí *právě dvě* úsečky množiny $\mathbf{U}$. Jsou-li totiž $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ počty úseček z $\mathbf{U}$, které vycházejí z jednotlivých daných $n + 1$ bodů, platí jednak $p_1 \geqq 2, p_2 \geqq 2, \ldots, p_{n+1} \geqq 2, p_1 + p_2 + \quad + p_{n+1} \geqq 2(n + 1)$, jednak $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n+1} = 2 \cdot (n + 1)$ [množina $\mathbf{U}$ má $n + 1$ úseček, každá je jako spojnice počítána dvakrát]. Odtud vyplývá, že pro žádné p_i nemůže být $p_i > 2$.

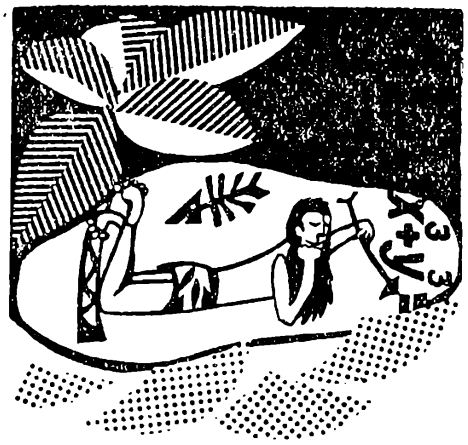
Zvolíme libovolný bod A_1 z daných $n + 1$ bodů; z něho vycházejí dvě úsečky z $\mathbf{U}$, jedna z nich spojuje bod A_1 s jistým bodem, který označíme A_2. Z bodu A_2 opět vycházejí dvě úsečky z $\mathbf{U}$; jedna z nich je úsečka A_2A_1, druhá je jistá úsečka A_2A_3. Z bodu A_3 vycházejí opět dvě úsečky z $\mathbf{U}$; jedna z nich je A_3A_2, druhá je jistá úsečka A_3A_4.

Pak mohou nastat dva případy:

a) Je-li $A_4 \equiv A_1$, je důkaz hotov, neboť jsme nalezli posloupnost bodů A_1, A_2, A_3 tak, že všechny úsečky A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 náleží množině $\mathbf{U}$.

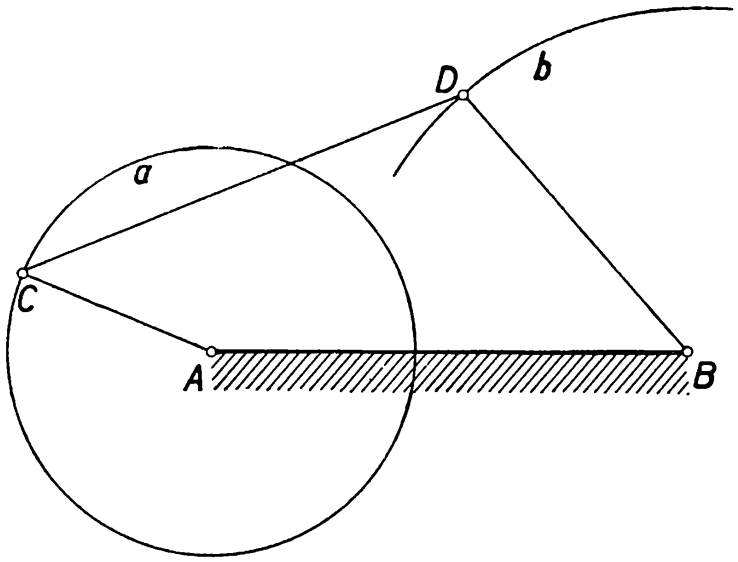
b) Je-li $A_4 \not\equiv A_1$, pak opět z bodu A_4 vycházejí dvě úsečky; jedna z nich je A_4A_3, druhá je A_4A_5. Nyní je zase buď $A_5 \equiv A_1$ (a tvrzení věty je dokázáno) nebo $A_5 \not\equiv A_1$; pak obdobně postupujeme dále. V krajním případě dojdeme až k bodu A_{n+1}. Z něho vychází jednak úsečka $A_{n+1}A_n$, jednak poslední nevyčerpaná úsečka z $\mathbf{U}$, která nemůže spojovat A_{n+1} se žádným z bodů $A_2, \ldots, A_n$ (z každého z nich už vycházejí dvě úsečky, např. A_2A_1, A_2A_3 atd.). Tato poslední úsečka je tedy $A_{n+1}A_1$; tím je nalezena posloupnost bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, jejichž spojnice $A_1A_2, \ldots, A_nA_{n+1}, A_{n+1}A_1$ vyhovují tvrzení věty.

Tím je úloha rozřešena. (Pokračování)



Kloubový čtyřúhelník

Na vedlejším obrázku je schéma jistého mechanismu, který je nazýván *kloubový čtyřúhelník*. V každém jeho vrcholu je totiž kloub. Strana AB je pevná, nehybná. Strana AC se otáčí kolem vrcholu A a strana BD kolem vrcholu B. Strana AC se může otočit o úhel 360°, ale strana BD koná jen kývavý pohyb. (V praxi se toho dá použít např. u elektrických praček.)



A nyní se vás, čtenáři, zeptám na jednu důležitou věc: dovedete (a jak) určit krajní polohy vahadla BD?

S. H.

Úloha z kombinatoriky

Redakci Rozhledů došel dopis. Jeho pisatel už po řadu let pravidelně sleduje tahy Sportky. Přitom si vždy poznamenává mj., do kolika řádků a sloupců známého tiketu 7×7 padlo 7 tažených čísel. Takto zjistil, že poměrně nejčastěji (asi ve 25 % všech tahů) nastává případ 5×5, tj. že 7 taženými čísly je zasaženo právě pět řádků a právě 5 sloupců, zatímco ostatní možnosti nastávají méněkrát — například případ 3×3 nenastal ještě ani jednou v historii Sportky.

Naskýtá se tedy otázka, kolika různými způsoby lze z tiketu 7×7 vybrat 7 čísel tak, aby právě 5 řádků a právě 5 sloupců bylo zasaženo.

Dovedli byste vyřešit tento problém a vysvětlit pozorovaný jev?

Jaroslav Zemánek

RECENZE

Čtrnáctý ročník matematické olympiády

(Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1966, 146 stran.)

Letos vyšla brožura o matematické olympiádě 1965 až v listopadu. Ke zpoždění došlo především proto, že jeden z prvních průkopníků matematické olympiády, první jednatel ÚVMO a spoluautor všech předešlých brožur Rudolf Zelinka, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV v Praze, náhle zemřel několik dní po uzavření III. kola XIV. ročníku soutěže. Byl ve své funkci vystřídán Vlastimilem Macháčkem, odborným asistentem v Praze, který se stal spoluautorem letošní brožury, zatímco druhým autorem zůstává Jan Vyšín, docent KU v Praze.

Pozdní vyjití této aktuality ubírá značně na jejím praktickém významu. Postrádali ji hlavně noví kandidáti MO ve studijním (přípravném) kole, které pravidelně začíná již v říjnu každého roku. Brožury starších ročníků MO jsou vesměs rozebrány a je málo i jiné pomocné literatury, takže ediční zpoždění XIV. ročníku soutěžní brožury řešitelé MO nepříjemně pocítili.

Knížka je rozdělena do pěti samostatných kapitol, z nichž první čtyři zachycují průběh naší domácí soutěže, poslední pak rekapituluje stručně sedmou Mezinárodní matematickou olympiádu, která se konala počátkem července 1965 v Berlíně.

I. kapitola uvádí organizaci, složení ústředního výboru, jeho schůze, průběh jednotlivých kol, pomocné akce a studijní literaturu soutěže.

II. kapitola popisuje přehledně výsledky všech tří kol soutěže, uvádí jmenovitě řešitele druhého kola i seznam dvaceti olympioniků, vítězů III. kola soutěže.

Ve III. kapitole jsou texty přípravných úloh XIV. ročníku soutěže v kategoriích A až D.

Jádrem brožury je kapitola IV., která podává vzorová řešení všech soutěžních úloh v jednotlivých kategoriích a soutěžních kolech. Jako v dřívějších ročnících je i zde třetina úloh převedena Jozefem Moravčíkem do slovenštiny. K řešení geometrických úloh přispívají i instruktivní obrázky, které vzorně narýsoval Vlastimil Macháček.

Třebaže výsledky naší národní soutěže se zdají ve XIV. ročníku příznivější než v minulých dvou ročnících, nemůžeme být spokojeni s prověrkou, kterou pro nás představuje naše umístění v mezinárodní soutěži. Osm kandidátů pro tuto mezinárodní platformu bylo vybráno z prvních osmi vítězů III. kola naší MO. Znovu se tu potvrdila dosavadní špatná zkušenost se speciálními matematickými třídami, které zatím zdaleka nesplnily naděje, kladené na ně při jejich založení.

O sedmé Mezinárodní matematické olympiádě v Berlíně (1965) pojednává V. kapitola brožurky. Mezi deseti zeměmi, které se účastnily sedmého ročníku soutěže, se československé družstvo umístilo až na šestém místě a nedosáhlo ani poloviny dosažitelných bodů. V brožurce je vylíčen stručně průběh vlastní soutěže i akcí s ní spojených, dále jsou tu zachyceny soutěžní úlohy i jejich řešení, jmenovitý seznam našich reprezentantů a kritické zhodnocení výsledků jejich snahy. V příloze je pak v přehledu uvedeno umístění jednotlivých soutěžících zemí, přehled udělených cen a pochvalných uznání i výsledky jednotlivých delegátů naší delegace.

Vkusná tříbarevná obálka brožurky je provedena podle návrhu Jaromíra Jarkovského. Knížka je k dostání v prodejnách n. p. KNIHA za 5 Kčs.

Jaromír Dubský

Nebojte se matematiky

JIŘÍ SEDLÁČEK

(Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava 1966, váz. 10 Kčs.)

Úspěšná knížka Jiřího Sedláčka vyšla v českém znění v roce 1960 (recenze v 39. ročníku Rozhledů, str. 383) byla vydána v SVTL ve spolupráci se Socialistickou akademií jako 18. svazek Polytechnickej knižnice v překladu Juraje Kajana[1]). Slovenské druhé vydání je celkem nezměněné; překladatel cituje mnohdy pod čarou u jednotlivých témat a příkladů údaje o časopiseckých článcích vyšlých v době mezi českým a slovenským vydáním a zaznamenává i knižní prameny (např. u „Dopravního problému" knihu prof. A. Kotziga Matematické metódy v hospodárskej praxi, Bratislava 1961). Ke konci knížky jsou uvedeny bibliografické citace publikací vyšlých slovensky, vztahujících se k popularizaci matematiky a také knížky podobného zaměření, které vyjdou v nejbližší době. Obrazová část byla rozmnožena reprodukcí rytiny portrétu L. Eulera a fotografickým záběrem části včelího plástu.

V přepisu vzorců o kmenných zlomcích zůstala v jednom případě drobná chyba na str. 57. Rovnost má být správně:

$$\overline{101} + \overline{202} + \overline{303} + \overline{606} = \frac{2}{101}.$$

V prvním odstavci kapitoly Názor a klam (str. 34 až 37) ponechal překladatel pro kružnici procházející středy stran trojúhelníka ABC, patami výšek a půlícími body úseček AV, BV, CV název Feuerbachova kružnice devíti bodů, jak ji obyčejně označují němečtí autoři. Feuerbach našel na ní další čtyři body, v nichž se dotýká kružnice vepsané danému trojúhelníku a kružnic vně vepsaných. Čeští autoři zabývající se geometrií trojúhelníka (Jeřábek, Strnad, Tomáš aj.) ji po objeviteli pojmenovali Eulerovou kružnicí, nebo kružnicí devíti bodů. Heslo Eulerova kružnice je uvedeno i v Ottově slovníku naučném nové doby (druhý díl, první svazek, str. 374) a v Technickém slovníku (čtvrtý díl, autor hesla Josef Klíma).

Po stránce technické a tiskařské se zdá být svazek lépe vybaven než v českém vydání, jen obrázek na přebalu stejně jako v českém vydání neodpovídá espritu slovesného podání autorova.

Josef Glivický

[1]) Letos ji vydali podruhé v NDR pod názvem: Keine Angst vor Mathematik (VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1965).

MATEMATIKA

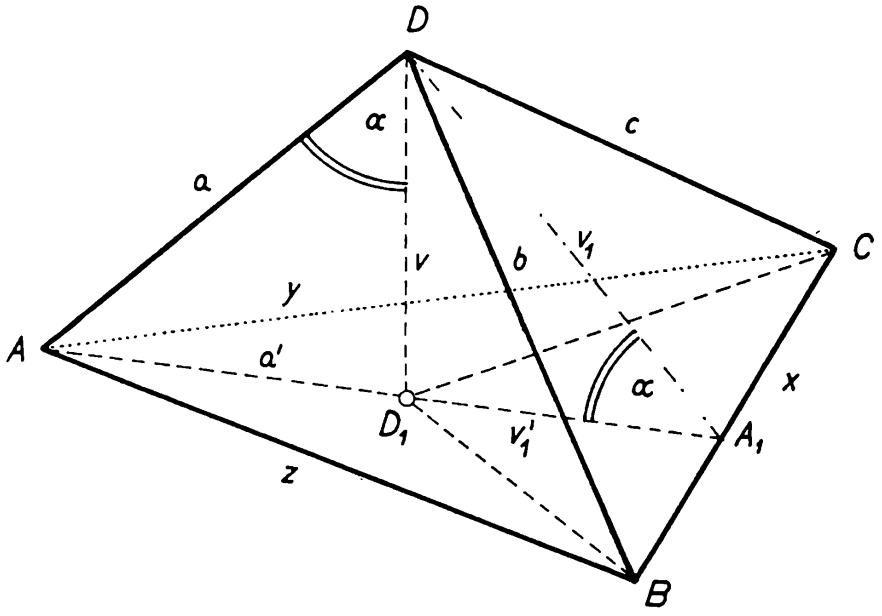
Prostorová analogie některých planimetrických vět

VÁCLAV SKALICKÝ, Pardubice

I.

1. V ročníku 43 (1964—65) Rozhledů matematicko-fyzikálních byl uveřejněn důkaz věty zobecňující známou větu Pythagorovu na prostorové útvary. Zobecnění je tu provedeno pro *pravoúhlý čtyřstěn*, jehož tři stěny jsou po dvou k sobě kolmé. Takovým tělesem je např. část kvádru omezená třemi jeho stěnami vycházejícími z téhož vrcholu a rovinou určenou koncovými body hran z tohoto vrcholu vycházejících.

Označme vrcholy tohoto čtyřstěnu (obr. 1) A, B, C, D, kde $AD \perp BD$,



Obr. 1

$AD \perp CD$, $BD \perp CD$. Nazveme stěny BDC, ADC, ADB pro stručnost stěnami „odvěsnovými", stěnu ABC stěnou „přeponovou". Obsahy těchto stěn buďtež po řadě $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle$. Pak platí:

Součet druhých mocnin obsahů tří stěn odvěsnových rovná se druhé mocnině obsahu stěny přeponové, tedy

$$\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 = \triangle^2 . \tag{1}$$

Je to *prostorová analogie věty Pythagorovy pro pravoúhlý trojúhelník.*

Důkaz této věty viz [1]. Tamtéž je uveden výraz pro obsah stěny $\triangle$. Dostaneme jej dosazením do Heronova vzorce pro obsah trojúhelníka, upraveného na tvar

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{2\,(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) - x^4 - y^4 - z^4}$$

Přitom je

$$\overline{BC}^2 = x^2 = b^2 + c^2 ,$$
$$\overline{AC}^2 = y^2 = a^2 + c^2 ,$$
$$\overline{AB}^2 = z^2 = a^2 + b^2$$

Dosazením dostaneme pro obsah $\triangle$ jednoduchý vzorec

$$\triangle^2 = \tfrac{1}{4}\,(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \tag{2}$$

Tohoto výrazu v dalších výkladech použijeme.

Poznamenávám ještě, že pro větu (1) nám chybí názorná představa pojmu „druhá mocnina obsahu stěny", neboť je to rozměrově čtvrtá mocnina délky. Odpadá tedy názorná představa vyjadřovaná u věty planimetrické zpravidla slovy „čtverec nad odvěsnou" atp.

2. O pravoúhlém čtyřstěnu platí některé další věty, jež jsou prostorovým zobecněním vět odvozených v planimetrii. Uvedeme zde některé z nich a podáme příslušné potřebné důkazy.

Veďme vrcholem D kolmici k rovině trojúhelníka ABC a označme její patu v této rovině D_1. Zaveďme dále označení

$$\triangle_1' = D_1BC , \quad \triangle_2' = D_1AC , \quad \triangle_3' = D_1AB$$

pro obsahy trojúhelníků tvořených bodem D_1 a dvěma z vrcholů A, B, C. Bod D_1 je vnitřním bodem trojúhelníka ABC a $\triangle_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ jsou obsahy průmětů trojúhelníků $\triangle_i$ (odvěsnových) do roviny trojúhelníku $\triangle$ (přeponového).

Položme nyní rovinu úsečkami DA a DD_1. Ta je zřejmě kolmá jak k rovině $\triangle$, tak i k rovině $\triangle_1$. Je proto kolmá i k průsečnici těchto rovin, tedy k úsečce x.

Je-li A_1 průsečík této roviny s x, je $DA_1 = v_1$ výška trojúhelníka $\triangle_1$ příslušná k straně x, a $D_1A_1 = v_1'$ výška trojúhelníka $\triangle_1'$ příslušná k x. Dále je trojúhelník ADA_1 pravoúhlý a platí v něm podle rovinné věty Euklidovy

$$\overline{DA}_1^2 = v_1^2 = v_1' \,.\, AA_1$$

a

$$\triangle_1^2 = \left(\frac{x\, v_1}{2}\right)^2 = \frac{x^2\, v_1'\, AA_1}{4} = \triangle_1'\ \triangle$$

Obdobné vztahy lze odvodit i pro ostatní stěny a platí proto pro ně věta, jež je *prostorovou analogií první věty Euklidovy (věty o odvěsně)*:

$$\triangle_1^2 = \triangle\ \triangle_1',\ \triangle_2^2 = \triangle \cdot \triangle_2',\ \triangle_3^2 = \triangle\ \triangle_3', \qquad (3abc)$$

slovy:

Druhá mocnina obsahu stěny odvěsnové rovná se součinu obsahu stěny přeponové a obsahu pravoúhlého průmětu této odvěsnové stěny do roviny stěny přeponové.

Sečteme-li rovnice (3abc), dostaneme

$$\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 = \triangle\,(\triangle_1' + \triangle_2' + \triangle_3') = \triangle^2,$$

tj. prostorovou analogii věty Pythagorovy (1), dokázanou jiným způsobem, nezávislým na důkaze podaném v cit. článku [1]. I tento důkaz má analogii v planimetrii pravoúhlého trojúhelníka.

3. Pro výšku pravoúhlého trojúhelníka platí

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Analogický vztah lze snadno odvodit pro „přeponovou" výšku našeho pravoúhlého čtyřstěnu. Vyjádřeme jeho objem dvojím způsobem, čímž dostaneme rovnici

$$\frac{v\ \triangle}{3} = \frac{abc}{6}$$

Odtud je

$$v = \frac{abc}{2\triangle},$$

neboli

$$v^2 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2},$$

z čehož

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \qquad (4)$$

V úpravě jsme použili výše uvedeného vzorce pro obsah trojúhelníka přeponového (2). Analogie prostorové i rovinné věty o výšce je zde opět úplná.

4. Pokusíme se ještě odvodit obdobu druhé věty Euklidovy, věty o výšce pravoúhlého trojúhelníka.

Zaveďme označení

$$\alpha = \sphericalangle ADD_1 = \sphericalangle DA_1D_1\,,$$
$$\beta = \sphericalangle BDD_1 = \sphericalangle DB_1D_1\,,$$
$$\gamma = \sphericalangle CDD_1 = \sphericalangle DC_1D_1\,.$$

Máme pak

$$v = \frac{abc}{2\triangle}\,, \qquad \triangle_i' = \frac{\triangle_i^2}{\triangle} \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

tedy

$$\triangle_1'\triangle_2'\triangle_3' = \frac{\triangle_1^2\triangle_2^2\triangle_3^2}{\triangle^3} = \frac{\triangle_1^2\triangle_2^2\triangle_3^2 \cdot 8v^3}{a^3b^3c^3}$$

Odtud je

$$v^3 = \frac{\triangle_1'\triangle_2'\triangle_3' \cdot 8}{abc}\,,$$

a tedy

$$v = 2\sqrt[3]{\frac{\triangle_1'\triangle_2'\triangle_3'}{abc}} \tag{4a}$$

Tento výraz lze upravit různým způsobem. Tak je např.

$$v^2 = \sqrt[3]{\frac{(\triangle_1'\triangle_2'\triangle_3')^2 \cdot 64}{a^2b^2c^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{(\triangle_1'\triangle_2'\triangle_3')^2}{\triangle_1\triangle_2\triangle_3}}$$

a tedy

$$v^2 = 2\sqrt[3]{\triangle_1'\triangle_2'\triangle_3' \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma} \tag{4b}$$

Nebo lze do (4a) zavést místo $\triangle_i'$ výrazy utvořené z a, b, c a z kosinů úhlů α, β, γ, totiž

$$\triangle_1' = \triangle_1 \cos\alpha = \frac{bc\cos\alpha}{2}\,,$$

a obdobně pro $\triangle_2'$, $\triangle_3'$.

Dostaneme

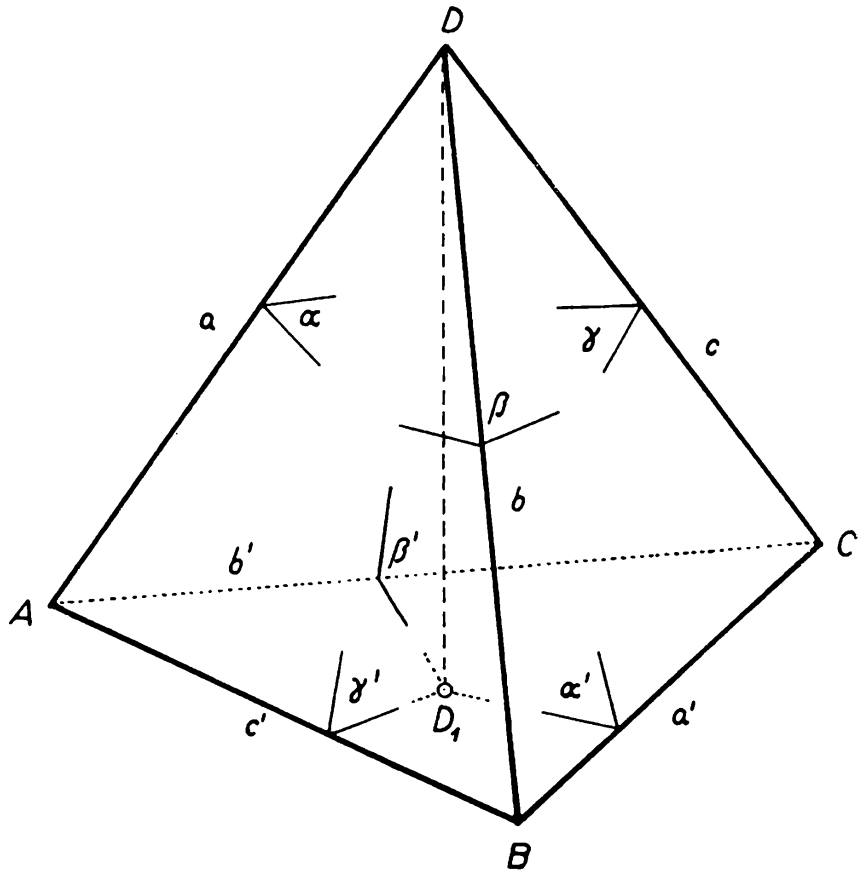
$$v = \sqrt[3]{abc \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma} \tag{4c}$$

Analogie s větou planimetrickou není však v žádném z těchto tvarů výrazně patrná.

II.

5. Obraťme nyní svoji pozornost k obecnému čtyřstěnu s vrcholy A, B, C, D (obr. 2).

Označme obsahy stěn protějších vrcholům A, B, C, D znaky $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$. Úhly stěn při hranách $a = AD$, $b = BD$, $c = CD$ buďtež po řadě α, β, γ, úhly stěn při hranách $a' = BC$, $b' = AC$, $c' = AB$ nechť jsou α', β', γ'.



Obr. 2

Veďme v našem čtyřstěnu výšku vrcholu D. Její pata v stěně ABC je D_1. Trojúhelníky

$$\triangle_1' = BD_1C\,,\ \triangle_2' = CD_1A\,,\ \triangle_3' = AD_1B$$

jsou průměty trojúhelníků

$$\triangle_1 = BDC\,,\ \triangle_2 = CDA\,,\ \triangle_3 = ADB$$

a platí

$$\triangle_1' = \triangle_1 \cos\alpha'$$

a obdobné vztahy pro ostatní průměty.

Pak platí

$$\triangle_4 = \triangle_1 \cdot \cos\alpha' + \triangle_2 \cos\beta' + \triangle_3 \cos\gamma'$$

Obdobně platí

$$\triangle_1 = \triangle_2 \cos\gamma + \triangle_3 \cos\beta + \triangle_4 \cos\alpha'$$
$$\triangle_2 = \triangle_1 \cos\gamma + \triangle_3 \cos\alpha + \triangle_4 \cos\beta'$$
$$\triangle_3 = \triangle_1 \cos\beta + \triangle_2 \cos\alpha + \triangle_4 \cos\gamma'$$

Násobme tyto čtyři rovnice (jež jsou v podstatě prostorovou analogií tzv. vět o průmětech) po řadě čísly $\triangle_4$, $-\triangle_1$, $-\triangle_2$, $-\triangle_3$ a sečtěme je. Dostaneme

$$\triangle_4^2 - \triangle_1^2 - \triangle_2^2 - \triangle_3^2 = -2\triangle_1\triangle_2 \cos\gamma - 2\triangle_1\triangle_3 \cos\beta - 2\triangle_2\triangle_3 \cos\alpha\,,$$

nebo jinak

$$\triangle_4^2 = \triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \triangle_3^2 - 2\triangle_1\triangle_2 \cos\gamma - 2\triangle_1\triangle_3 \cos\beta - 2\triangle_2\triangle_3 \cos\alpha\,. \qquad (5)$$

Další tři obdobné rovnice dostaneme cyklickou záměnou. Celá čtve-

řice pak představuje *prostorovou analogii známé věty z rovinné trigonometrie, věty kosinové.*

Zároveň lze v této větě vidět zobecnění prostorové analogie věty Pythagorovy z čtyřstěnu pravoúhlého na čtyřstěn obecný. Obráceně je věta Pythagorova obsažena ve větě kosinové jako její zvláštní případ. Položíme-li totiž v rovnici (5)

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2},$$

přejde obecný čtyřstěn v pravoúhlý a věta (5) ve větu (1).

Poznámka: V odvození rovnice pro $\triangle_4$ jsme předpokládali, že bod D_1 je vnitřním bodem trojúhelníka ABC. Předpoklad je nepodstatný. Je-li některý z úhlů α_1', β_1', γ_1' tupý, pak je jeho kosinus číslo záporné, rovnice pro $\triangle_4$ platí však i pak, součet obsahů průmětů na pravé straně je však algebraický, některé jeho členy jsou čísla záporná. Obdobnou úvahu lze provést i pro případ, že pro některý z úhlů α_1', β_1', γ_1' je příslušný průmět nulový a v součtu na pravé straně odpadne, platnost rovnice však je neporušena.

Existuje také jisté prostorové zobecnění sinové věty rovinné trigonometrie. Výsledek je sice jednoduchý, ale vyžaduje k odvození i k formulaci zavedení některých pojmů a vzorců z trigonometrie sférické, a proto se tímto problémem zde zabývat nebudeme. Viz ostatně článek [2], jenž je ovšem značně náročnější než zde provedené úvahy.

Literatura

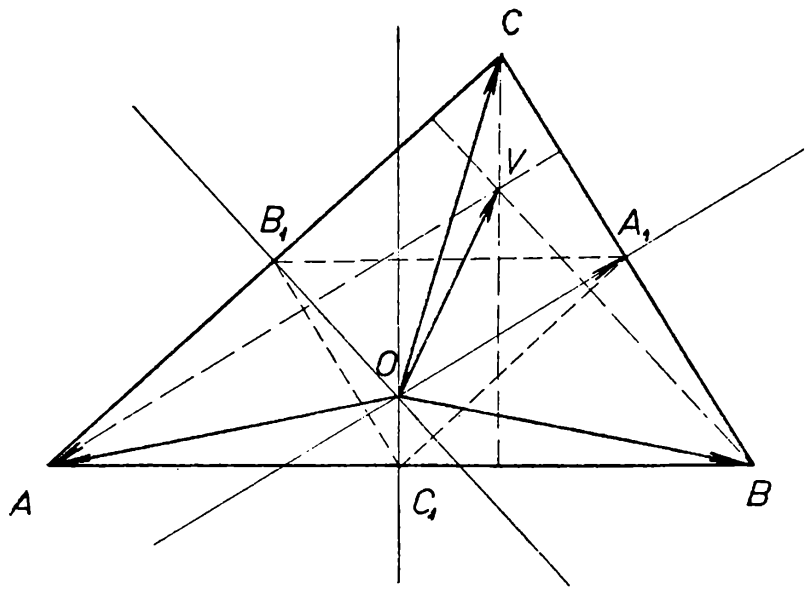
[1] *Náhunková*, Jedna vlastnost pravoúhlého čtyřstěnu. Rozhledy matem.-fyz. 43 (1964—65), s. 148.
[2] *Schuster*, Několik poznámek o čtyřstěnu. Čas. mat.-fyz. 49 (1919—20), s. 54.

Věta z geometrie trojúhelníka

JAN KASTL, 3. a SVVŠ Přeštice

V roč. 1963/4 byl v Rozhledech uveřejněn důkaz věty o jistém vektoru v trojúhelníku, omezeném středem opsané kružnice a průsečíkem výšek. Uvedu zde jiný důkaz.

V trojúhelníku ABC je V průsečík výšek, O střed opsané kružnice a A_1, B_1, C_1 středy stran BC, AC, AB. Bod O je pak v trojúhelníku $A_1B_1C_1$ průsečíkem výšek. Trojúhelníky ABC, $A_1B_1C_1$ jsou vzájemně stejnolehlé; koeficient stejnolehlosti $k = -2$. V této stejnolehlosti si odpovídají průsečíky výšek, tj. body V, O a úsečky AV, A_1O.



Obr. 1

Proto je

$$\overrightarrow{VA} = -2 \cdot \overrightarrow{OA_1} . \tag{1}$$

Pro součet vektorů $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ platí

$$\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA_1} \tag{2}$$

a k tomu připojíme rovnici

$$\overrightarrow{VA} = \overrightarrow{VO} + \overrightarrow{OA} . \tag{3}$$

Rovnici (2) znásobme číslem 2, sečtěme s rovnicí (1) a za VA dosaďme z rovnice (3). Dostaneme

$$\overrightarrow{VO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0},$$

což jinak napsáno, dá

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OV}$$

A tuto rovnici jsme měli dokázat.

Vznik a vývoj strojů na zpracování informací (Pokračování)

ING. VASIL ČAPLA, Praha

Část třetí

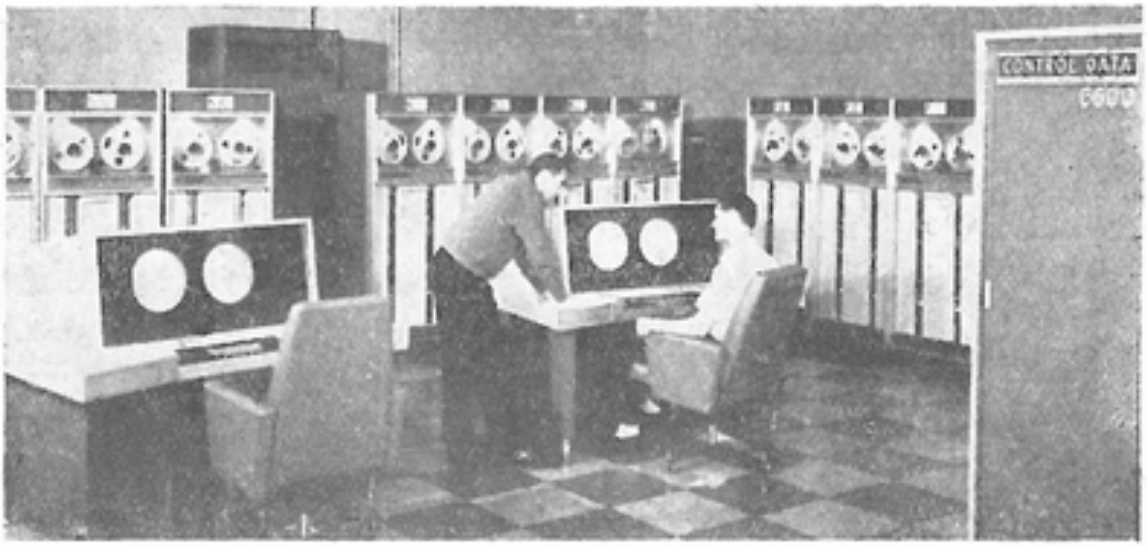
Generace samočinných počítačů. Slovem generace se rozumí pokolení, např. rodiče, děti, vnuci. Rozdíl mezi prvním, druhým a třetím pokolením bývá asi 25 let. „Rodina" samočinných počítačů „žije" teprve dvacet let (od roku 1946, kdy byl dokončen první počítač ENIAC) a má již tři „generace". Z toho je patrno, že rozvoj stavebních prvků a s tím spojená řešení stavby jednotlivých „generací", jde velmi rychlým tempem kupředu, když na jednu „generaci" místo 25 let připadá jen asi 7 let. První samočinné počítače byly buď elektromechanické (např. MARK I, který měl reléovou paměť), nebo reléové, které však byly velmi pomalé, a proto se přešlo k rychlejším stavebním prvkům jako jsou elektronky, které zase byly nahrazeny tranzistory atd. Elektromechanické a reléové samočinné počítače se neberou více v úvahu, a proto nepatří do žádné „generace".

První „generaci" tvoří elektronkové samočinné počítače, nebo samočinné počítače osazené elektronkami a zároveň i tranzistory, diodami apod. K takovým samočinným počítačům patří čs. soustava EPOS-1 na zpracování dat.

Do druhé „generace" patří tranzistorové samočinné počítače, které proti elektronkovým mají menší objem a váhu, menší příkon energie, delší životnost než elektronkové stroje; u nich odpadá i chlazení. To jsou skutečné výhody. Sem patří i EPOS-2.

Třetí „generaci" tvoří zpravidla tranzistorové samočinné počítače, provádějící přes jeden milión operací za vteřinu. Jsou to zpravidla rozsáhlé soustavy, jako je IBM STRETCH, vykonávající asi 2 milióny sčítání za vteřinu, ATLAS-2, asi se stejnou operační dobou jako STRETCH. Pouze soustava CONTROL DATA třídy 6000, např. počítač 6600, má pracovní rychlost tři milióny sčítání za vteřinu (obr. 9). Do této třetí „generace" se počítá též soustava GAMMA 60 firmy BULL v Paříži, ačkoliv provádí jen asi půl miliónu operací za vteřinu.

Soustavy samočinných počítačů třetí generace jsou velmi nákladné a stojí asi 8 až 12 miliónů dolarů. Tak vysokou cenu mohou zaplatit odběratelé jako je stát. Jinak pro stanovení předpovědi počasí zakoupila např. NSR počítač CD 6600. To má za následek, že pro vysoké



Obr. 9. Soustava magnetofonových pamětí samočinného počítače CONTROL DATA 6600, provádějícího 3 milióny sčítání za sekundu.

výrobní náklady počítačů dostaly se do finančních nesnází jak firma BULL, tak i Ferranti v Anglii a byly nuceny přistoupit s jinými výrobci počítačů do soustředění sil.

Rozdělení druhů paměti. Podle kapacity, tj. množství slov, která lze v paměti uchovávat, rozlišujeme paměti velké, střední a malé kapacity.

Podle rychlosti rozlišujeme paměť rychlou, středně rychlou a pomalou.

Vybavovací dobou nazýváme dobu od okamžiku, kdy je známa adresa, do okamžiku, kdy je možno příslušnou informaci z paměti buď číst, nebo ji tam zapsat. Mluvíme o krátké a delší (dlouhé) vybavovací době.

Paměť s libovolným výběrem je taková paměť, kde vybavovací doba pro každou adresu je v každém případě stejná.

Paměť většiny číslicových samočinných počítačů se skládá ze dvou zvláštních zařízení: vnitřního paměťového zařízení (vnitřní paměť) a vnějšího paměťového zařízení (vnější paměť). Kromě těchto dvou paměťových zařízení, jsou některé samočinné počítače vybaveny ještě vyrovnávací pamětí (buffer storage, čti bafe storidž).

Vnitřní neboli operativní paměť je vždy rychlá paměť, zpravidla menší kapacity s krátkou vybavovací dobou. Vnitřní paměť u většiny samočinných počítačů je ferritová, niklová, nebo rtuťová.

Vnější neboli pomalá paměť samočinných počítačů je zpravidla s větší kapacitou s delší vybavovací dobou. Tato paměť je určena k záznamu

operací, na nichž se v průběhu celého výpočtu neoperuje, s výjimkou určitých jeho fází. Je jich tak velké množství, že by je nebylo možno umístit do vnitřní paměti. Proto se přesouvají záznamy z vnější do vnitřní paměti jen tehdy, když je třeba na nich operovat. Po provedení operací jsou zase převedeny do vnější paměti. Vnější paměť může sloužit jako součást vstupního nebo výstupního zařízení. Vnější paměť tvoří zpravidla magnetofonová páska, děrná páska, nebo též magnetický buben.

Vyrovnávací paměť je pomocná paměť, určená k přechodnému záznamu informací při přesunu informací z jedné části stroje do druhé, jestli tyto části pracují s různou rychlostí. Vyrovnávací paměť vyrovnává rozdíl mezi jejich rychlostmi, nebo způsobem záznamu (sériovým nebo paralelním).

Vstupy a výstupy. Dále obsahuje každý moderní číslicový samočinný počítač ještě mechanismy vstupu a výstupu. Prostřednictvím vstupních mechanismů (zařízení) vkládáme do stroje čísla a instrukce, jimž říkáme informace. Výstupní mechanismy (zařízení) převádějí výsledky, získané ve stroji do „řeči" (tvaru), srozumitelné obsluhovateli. Hlavní jednotky, vstupní a výstupní mechanismy (zařízení) jsou logicky spojeny signálními cestami.

Vstupy. Statistika ukazuje, že asi 75 % veškerých chyb ve výpočtech je zaviněno špatnou prací vstupních a výstupních zařízení. Proto se volí takové prostředky pro vstup a výstup, které vykazují co nejméně poruch. Většina číslicových samočinných počítačů má několik (2, 3, 4 a též 5) zařízení vstupu a výstupu, což je patrno z této tabulky:

Název stroje	Vstup	Výstup
Alwac III-E	flexowriter děrný štítek děrná páska magnetofonová páska klávesnice	flexowriter děrný štítek děrná páska magnetofonová páska rychlotiskárna
UNIVAC II	děrná páska děrné štítky psací stroj	děrná páska magnetofonová páska rychlotiskárna psací stroj

Program možno do stroje vkládat přímo nebo nepřímo. U přímého způsobu vkládání informací pomocí klávesnice se mohou vyskytnout chyby, které nelze snadno zjistit a odstranit. Kromě toho ruční vklá-

dání informací by vážně zmenšilo celkovou pracovní rychlost počítače, neboť vkládání informací by trvalo několik hodin. Další nevýhoda ručního vkládání tkví v tom, že máme-li stejný program opakovat, musíme jej znovu vkládat ručně do stroje. Z již uvedených důvodů používá se skoro výhradně nepřímého vkládání informací do stroje, neboť jen tak možno snadno kontrolovat správnost záznamu a opravit jej. Ručně ovládaná klávesnice je velmi pomalá, zatímco snímání je rychlé. Záznam má být jednoduchý.

Většina číslicových samočinných počítačů je vybavena těmito mechanismy vstupu: děrným štítkem, děrnou páskou, magnetofonovou páskou, elektrickým psacím strojem (v novější době flexowriter) aj. Druh mechanismu vstupu záleží často na spolupráci mezi různými stroji a stroji, přenášejícími informace, např. dálnopisem.

Výstupy. Pro výstup se často používá stejných zařízení jako pro vstup. Kromě toho se používá pro výstup tiskárny nebo i rychlotiskárny. Jako u vstupu, tak i u výstupu rozlišujeme přímý a nepřímý výstup. K přímému výstupu náleží elektrický psací stroj, rychlotiskárna. K nepřímému výstupu patří děrný štítek, děrná a magnetofonová páska.

Výstupy číslicových samočinných počítačů, např. vystavovaných na podzimní londýnské výstavě v r. 1958 možno rozdělit do tří skupin:

I. skupina. 1. Dálnopis, kterého se snímačem děrné pásky se používá u malých počítačů. 2. Elektrický psací stroj, např. IBM, jehož klávesnice je ovládaná ze spodu elektromagnety. Tento standardní elektrický psací stroj může být spojen s děrovačem děrné pásky.

II. skupina. Rychlotiskárny se střední rychlostí, např. model 1000, která tiskne znak po znaku asi 1000 slov za minutu, tj. 100 znaků za sekundu a je 15krát rychlejší než normální rychlost dálnopisu. Do této skupiny patří též rychlotiskárna BTM.

III. skupina. K té patří rychlotiskárny s větší rychlostí, např. model 3000, který tiskne 300 znaků za sekundu, nebo 3000 slov za minutu. Sem patří též tabelátor SAMASTRONIC, který tiskne 300 řádků za minutu (každý po 140 znaků), tj. 42 000 znaků za minutu. Pro výstup počítače BTM 1400 se používá tabelátoru BTM 915, který tiskne $2^1/_2$ řádků/s. Do této skupiny patří tiskárna XEROGRAPH, která může natisknout 50 řádků/s.

Jako výstupního zařízení se používá též Coordinatographu (zařízením pro vynášení grafů). Dále 740-CRT (Cathode Ray Tube) je zařízení, obsahující elektronky typu obrazovky, určené k elektrostatickému záznamu výsledků. 780-Display Unit jsou zařízení, obsahující elektronky typu obrazovky, určené pro vizuální vyhodnocení výsledků. Flexowriter je univerzální psací stroj, který může splňovat funkce a) jako normální psací stroj, b) při psaní na stroji se může zároveň zhotovit děrná páska,

c) může psát podle programu, řízeného děrnou páskou, d) může zhotovit děrnou pásku podle programu, řízeného jinou děrnou páskou. Poslední dvě funkce c) a d) může splňovat zároveň. Tiskacího zařízení elektrického psacího stroje, doplněného kombinátorem, lze použít jako záznamového prvku pro výstup ze samočinného počítače.

Přehled rychlostí: a) některých druhů pamětí

Druh paměti	Vybavovací doba v sekundách	Vstupní rychlost v počtu znaků/s
Děrná páska	1—200	500—100 000
Zpožďovací linka	asi 0,005	1000—3000
Katodová lampa	0,001—0,003	10 000—30 000
Magnetofonová páska	100—200 (pro 1 mil. znaků)	prakticky neomezená
Magnetický buben	0,002—0,02	1 milión
Feritová jádra	$(0{,}1—10)\ 10^{-7}$	100 000

b) rychlosti vstupních a výstupních zařízení

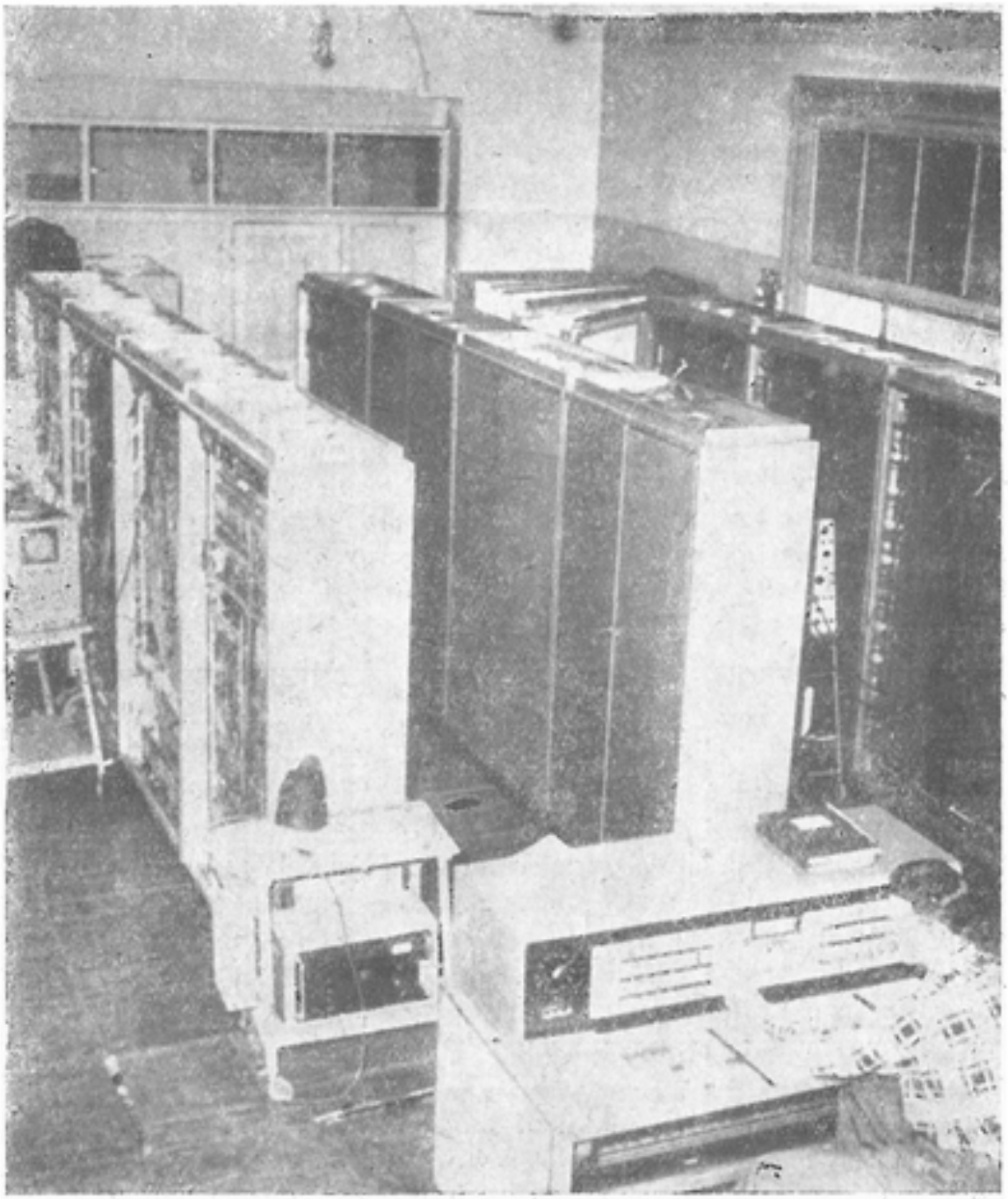
Vstup Výstup

Druh	Vstupní rychlost znaků za sekundu	Druh	Výstupní rychlost znaků za sekundu
Klávesnice	3—10		
Psací stroj elektr.	3—15	Psací stroj elektr.	3—15
Mech. snímač děrné pásky	3—16	Děrovač děrné pásky	7—300
Fotoelektr. snímač děrné pásky	200—1000	Tabelátor	150—300
Snímač děrných štítků	100—600	Děrovač štítků	10—200
Magnetofonová páska	5000—125 000	Magnetofonová páska	5000—125 000

Pojem algoritmu, programu, operace. Algoritmus je množina posloupnosti všech elementárních kroků, zpravidla celé třídy určitého druhu úloh. Program je též množina posloupnosti všech elementárních kroků, avšak určité úlohy. Bývá zpravidla podrobněji propracován (podprogramy atd.) než algoritmus. Operace ve výpočtové technice je souhrnný název pro 80 % slučování, 15 % násobení a 5 % dělení.

Vývoj v Československu. U nás začal doc. dr. inž. A. Svoboda v roce 1949 pracovat na návrhu reléového samočinného počítače SAPO, (neboť jiných stavebních prvků nebylo) a na školení mladých spolupracovníků.

Ke konci roku 1959 vypracoval ve spolupráci s inž. J. Oblonským návrh na řešení stavby elektronického samočinného počítače středního — EPOS — stavebnicového typu. Pomocí přípravného zařízení EPOSEK byla koncem roku 1960 vyzkoušena operační jednotka (aritmetická),



Obr. 10. Obrázek soustavy EPOS-1 na zpracování dat.

která pracovala velmi uspokojivě. Začátkem roku 1961 byla sestavena feritová paměť, skládající se z 65 tisíc malých feritových jader.

Tak postupně byla řešena stavba soustavy EPOS na zpracování dat s vestavěným sdílením času.

Nejjednodušší verzi soustavy EPOS na zpracování dat s vestavěným sdílením času tvoří *základní jednotka* (jádro počítače), která se skládá: 1. z řadiče, jenž ovládá procesy uvnitř stroje a řídí chod celého procesu podle stavu výpočtu, 2. z organizátoru pro sdílení času, 3. z ovládacího stolu, 4. z operativní paměti počítače, kterou tvoří niklové zpožďovací linky pro pět slov a feritové paměti s kapacitou 1000 slov s vybavovací dobou 5 milióntin vteřiny.

Chybí tu operační (aritmetická) jednotka. Tuto jednotku nahrazuje řadič, který provádí sčítání a odčítání. Protože pro násobení a dělení lze sestavit podprogramy, není této jednotky třeba. Tím je tato verze soustavy velmi zjednodušena. Připojíme-li k základní jednotce přídavná zařízení pro vstup a výstup, můžeme takto vybavený stroj EPOS považovat za samostatnou soustavu výpočetní techniky (obr. 10).

K základní jednotce lze připojit různý počet přídavných zařízení podle potřeb řešení jednotlivých úloh. Tím lze vytvářet soustavy, určené pro řešení úloh z oboru řízení a správy, pro provádění vědeckotechnických výpočtů i pro automatizaci výrobních pochodů.

Stroj EPOS je sérioparalelní, to znamená, že se operace na slovech provádějí postupně, jeden znak slova za druhým — sériově. Při paralelním způsobu provádění operací se provede v jednotce času větší počet operací než při sériovém způsobu. Avšak stroje, postavené na základě sériové logiky, jsou levnější, neboť obsahují menší počet zařízení.

Operační rychlost je průměrně kolem 17 000 operací za vteřinu. Vnitřní kód stroje je v kódu „dva z pěti". Je užit jako samoopravný kód, který chybu objeví, identifikuje a opraví.

S vývojem počítače se zjistilo, že jsou ve strojích „šumy", tj. rušivé vlivy a účelem kódu „dva z pěti" je chybu opravit.

Soustava EPOS používá dvou druhů sdílení času: vnějšího a vnitřního. Vnější sdílení času umožňuje zpracovat v počítači až pět programů současně tím, že přídavná zařízení pracují autonomně a základní jednotka propůjčuje svůj čas jednotlivým přídavným zařízením. Je to ekonomie času a energie. Vnitřní sdílení času umožňuje paralelní zpracování několika instrukcí, které jsou částí jednoho a téhož programu.

Organizátor je ve spojení se všemi součástmi soustavy a provádí přepínání řadiče mezi jednotlivými programy. Rozhodnutí organizátoru vycházejí ze současného vyhodnocování okamžitých stavů jednotlivých jednotek s ohledem na jednotlivé programy. Program, který

organizátor spustí, probíhá stejným způsobem, jako by byl jediným zpracovávaným programem. Příkaz ke spuštění programů vykonávají v každém případě logické obvody organizátoru bez jakýchkoliv opatření v programech samých.

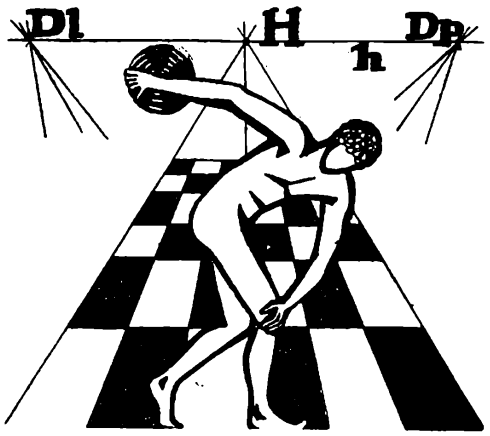
Počítač EPOS je velmi složitý stroj, na jehož stavbě se podílelo mnoho vědeckých pracovníků Výzkumného ústavu matematických strojů, z oboru elektroniky, strojního inženýrství a strojových výpočtových metod. Mnoho patentních přihlášek svědčí o vynálezecké a tvořivé práci kolektivu.

V první fázi vývoje se na základní jednotku připojují tato přídavná zařízení: 1. Snímač štítků s kapacitou 14 štítků za vteřinu. 2. Elektrický psací stroj jako vstupní a výstupní zařízení. 3. Bubnová paměť. 4. Magnetofonová pášková paměť o rychlosti čtení 10 tisíc znaků za sekundu. 5. Řádková tiskárna s libovolnou úpravou formulářů a stránkováním s rychlostí kolem 3 řádků za sekundu při 120 znacích na řádce a 80 typech.

V roce 1965 byl dokončen funkční model tranzistorového počítače EPOS 2, který provádí 40 000 operací za vteřinu a stejně jako EPOS 1 překvapuje zahraniční experty svým dokonalým systémem kontrol a především jedinečně řešenou samoopravností, ve které zatím nebyl dostižen. Na tomto počítači je ceněno plně automatické sdílení času, které umožňuje ojediněle řešeným využitím nejmenších částeček času paralelně zpracovávat nezávisle na sobě až 5 programů.

Kromě středního samočinného počítače EPOS 2 byl vyvinut m a l ý s a m o č i n n ý p o č í t a č, který podle začátečních písmen se označuje jako MSP 2. Provádí 7200 operací za vteřinu. Je zrovna tak jako EPOS dekadický a na vstupu a výstupu je vybaven zařízením vysoké úrovně (snímače a děrovače děrné pásky, elektrický psací stroj a lze připojit i tiskárnu, display a magnetofonovou pásku). V současné době probíhá v Závodech průmyslové automatizace ZPA v Čakovicích kusová výroba. Jak počítač EPOS 2, tak i MSP 2 jsou vybaveny programy, psané v mezinárodní řeči ALGOL 60 ve strojové programy; to znamená, že oba počítače EPOS 2 a MSP 2 jsou vybaveny knihovnou algoritmů, publikovaných ve světové literatuře v řeči ALGOL 60

(Pokračování)



Nahrazování křivek lomenými čarami

LUDĚK GRANÁT, Praha

V posledních letech se stále zvětšuje zájem o číslicově řízené kreslicí a obráběcí stroje. Tato zařízení mají umožňovat provádět podle záznamů, např. na magnetické pásce zamýšlený pohyb pisátka nebo obráběcího nástroje.

Omezíme se na pohyb v jedné rovině. V tomto případě bývají pro určení pohybu na magnetické pásce čtyři stopy. Samotné zařízení pro kreslení nebo obrábění (dále budeme mluvit jen o kreslení) umožňuje jen ty nejjednodušší pohyby, např. pohyby předem dané zvolené délky j po přímkách rovnoběžných s osami kartézské souřadnicové soustavy, a to buď v kladném nebo záporném smyslu. Očíslujeme si na magnetické pásce stopy čísly 0, 1, 2, 3. Objeví-li se informace pro pohyb ve stopě č. 0, pak kreslicí zařízení pohne pisátkem ve směru osy x v kladném smyslu o danou délku j. Objeví-li se informace pro pohyb ve stopě č. 1, resp. č. 2, resp. č. 3, provede pisátko pohyb ve směru osy y v kladném smyslu, resp. ve směru osy x v záporném smyslu, resp. ve směru osy y v záporném smyslu o danou délku j. Je-li délka j dostatečně malá, např. menší než 0,06 mm, člověk bez zvětšovacího skla ani nepozná, že přístroj kreslí místo dané křivky nahrazující lomenou čáru.

Určitým problémem je zachytit a popsat jednoduchým způsobem průběh dané křivky k, kterou máme narýsovat pomocí pohybů realizovatelných přímo kreslicím zařízením. Jde o nahrazení dané křivky schodovitou lomenou čarou. Přitom se dopouštíme určité nepřesnosti.

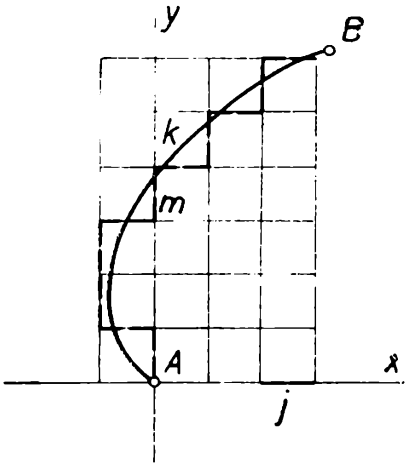
Tato nepřesnost nesmí překročit předem danou hodnotu, která bývá obvykle rovna j.

Mějme křivku k zobrazenou na obr. 1. Tuto křivku můžeme nahradit nakreslenou lomenou čarou a průběh lomené čáry zapsat pomocí posloupnosti čísel 1, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0. Každému číslu odpovídá ve fyzikální interpretaci záznam na magnetické pásce ve stopě, jejíž číslo je shodné s příslušným číslem v posloupnosti.

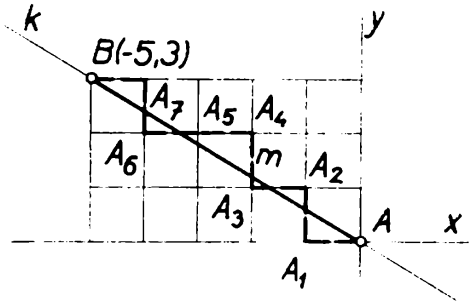
Důležité je najít jednoduchý postup, jak najít k dané křivce k ji aproximující lomenou čáru m. Podívejme se ještě na obr. 1. Lomená čára m má své vrcholy na různých stranách od dané křivky (jen málo vrcholů lomené čáry m může obvykle ležet na dané křivce k). Má-li úsečka lomené čáry spojující dva její sousední vrcholy s křivkou k společný bod, pak žádný z těchto vrcholů nemůže být od k vzdálen o více než o délku j. Tohoto poznatku využijeme v další části článku, kde se budeme zabývat nahrazováním nejjednodušších křivek schodovitými lomenými čarami a jejich zápisy.

A. Jako nejjednodušší křivku k uvažujme přímku. Její úsečku AB máme nahradit schodovitou lomenou čarou m s počátečním bodem A a koncovým bodem B. V tomto případě i v dalších budeme předpokládat, že jednotlivé úseky lomené čáry mají mít délku j a vzdálenost žádného vrcholu lomené čáry od dané křivky nesmí být větší než j.

Zkoumejme konkrétní případ vyobrazený na obr. 2. Počátek souřadnicové soustavy umístíme do bodu A, směry os nechť jsou předem dány. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že souřadnice bodu B mají celočíselné hodnoty, a to v našem konkrétním případě $x_B = -5$, $y_B = 3$.



Obr. 1



Obr. 2

Souřadnice x vrcholů A_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) lomené čáry m budou tvořit posloupnost, jejíž členy musí nabývat všech celočíselných hodnot mezi 0 a -5, souřadnice y posloupnost celých čísel mezi 0 a 3, přičemž

mohou nabývat též krajních hodnot. Přitom následující člen posloupnosti nesmí mít absolutní hodnotu menší než je absolutní hodnota členu před ním. K bodu $A = A_0$ je sousední buď bod A_1 $(-1, 0)$, nebo bod A_1' $(0, 1)$.

Rovnice přímky k je

$$3x + 5y = 0 . \tag{1}$$

Pro jednodušší vyjadřování označme $U = 3x + 5y$. Dosadíme-li do U souřadnice bodů A_1, A_1', dostaneme

$$U_1 = -3 , \; U_1' = 5 .$$

Tyto hodnoty jsou úměrné orientovaným vzdálenostem uvažovaných bodů od přímky k. Absolutní hodnota prvního z těchto výrazů je menší, tento bod je tedy blíže k přímce k, a proto jej zvolíme za vrchol A_1 lomené čáry m. V opačném případě bychom za A_1 volili bod druhý. Ještě si uvědomme, že v obecném případě

$$|U_1| = |y_B| , \; |U_1'| = |x_B|$$

Dále chceme, aby koncový bod A_2 druhého úseku lomené čáry m byl v opačné polorovině vyťaté přímkou k než je bod A_1 (nebo ležel na k). Jinými slovy — poněvadž $U_1 < 0$, musí pro bod A_2 platit

$$U_2 \geqq 0 .$$

Vyšetřme, co působí změna souřadnice x o -1 při dosazení do U. Po dosazení $x = x_i$, $y = y_i$ do U, dostaneme $U_i = 3x_i + 5y_i$. Dosadíme-li $x = x_i - 1$, $y = y_i$, dostaneme $U_{i+1} = 3(x_i - 1) + 5y_i = U_i - 3$. To znamená, že změnou souřadnice x o -1 se po dosazení do U změní jeho hodnota o -3. Podobně změnou y o 1 se změní hodnota U_i o 5. Toho s výhodou můžeme využít v dalším při sestavování tabulky 1.

V našem případě stačí zvětšit y o 1, abychom dostali $U_2 = 2$, tj. opačného znaménka než U_1. Pokračujeme-li tímto způsobem, dojdeme k lomené čáře m, která nahrazuje úsečku AB. Můžeme ji zapsat ve tvaru 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2.

Pro zápis algoritmu pro příklad z obr. 2 si můžeme udělat tabulku 1. Do sloupců pro přírůstky můžeme hned psát čísla odpovídající příslušným pohybům.

Je-li v sloupci přírůstek x napsáno $\left\{\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right\}$, značí to pohyb o délku j ve směru osy x v $\left\{\begin{matrix}\text{záporném}\\\text{kladném}\end{matrix}\right\}$ smyslu. Je-li v sloupci přírůstek y zapsáno $\left\{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right\}$, značí to pohyb o délku j ve směru osy y v $\left\{\begin{matrix}\text{záporném}\\\text{kladném}\end{matrix}\right\}$ smyslu.

Tímto způsobem přímo v tabulce máme zapsánu posloupnost charakterizující lomenou čáru m nahrazující danou křivku k mezi body A a B.

Tabulka 1

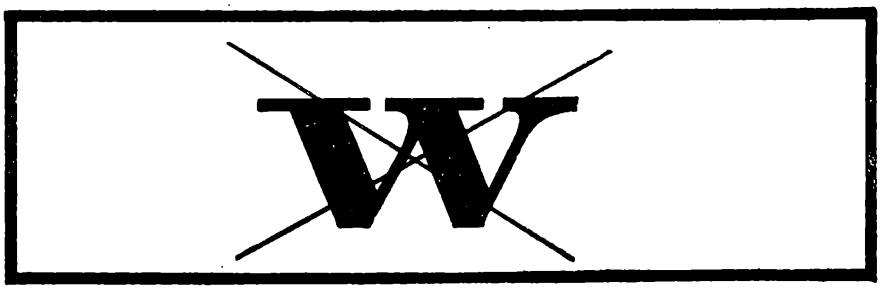
Přírůstek x	Přírůstek y	U	Bod
		0	A
2		−3	A_1
	1	2	A_2
2		−1	A_3
	1	4	A_4
2		1	A_5
2		−2	A_6
	1	3	A_7
2		0	B

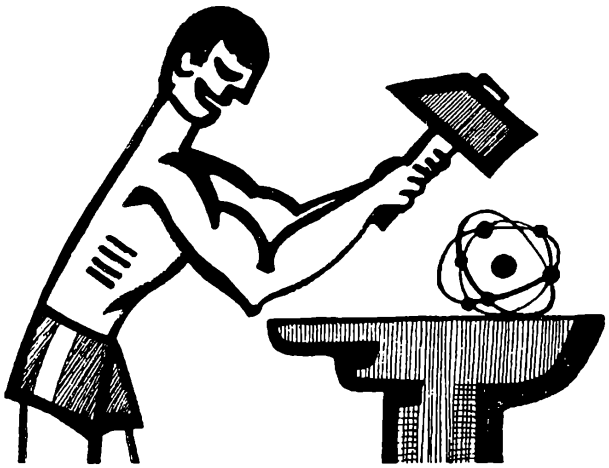
Postup v případě, který vznikne tím, že znaménko u některé ze souřadnic bodu B bude jiné než v uvedeném příkladě, nebo že některá souřadnice bude rovna nule, si čtenář promyslí snadno sám.

(Pokračování)

REBUS

Česky: **:ykcilgnA**





Stanovenie Avogadrovho čísla metódou merania rozkladu elektrolytu

ŠTEFAN FILKA, Košice

Avogadrovo číslo udáva počet molekúl pripadajúcich na kilomol látky. Jeho normovaná hodnota je $6{,}0225 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kmol}^{-1}$.

Keď poznáme Avogadrovo číslo, môžeme si urobiť predstavu o tom, ako jemná je nespojitá štruktúra hmoty, o ktorej pojednáva atómová a molekulová teória, môžeme odhadnúť rozmery molekúl, aj ich skutočnú hmotnosť. Ukážeme na jednoduchom príklade, ako to možno spraviť.

Jeden kilomol vody obsahuje $6{,}0225 \cdot 10^{26}$ molekúl. Je jasné, že v jednom m^3 vody, ktorého hmotnosť je 1000 kg, sa nachádza

$$n_0 = \frac{6{,}0225 \cdot 10^{26}\ \ 10^3}{18} = 3{,}35 \cdot 10^{28}\ \text{molekúl}$$

Molárny objem je

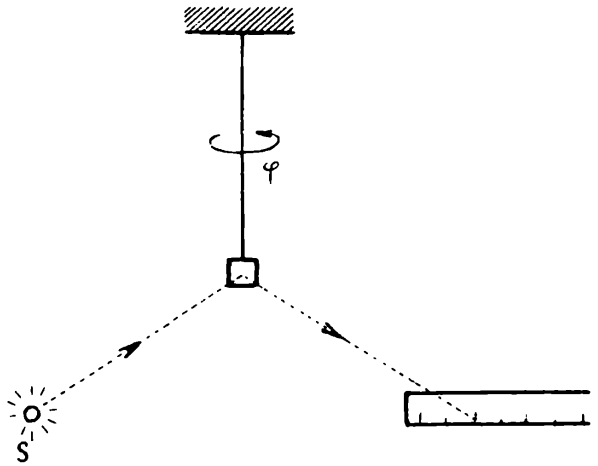
$$v_0 = \frac{1}{3{,}35 \cdot 10^{28}}\ \mathrm{m}^3 = 3 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{m}^3$$

Ak budeme pre jednoduchosť predpokladať, že molekuly sú uložené tesne vedľa seba, dostaneme pre polomer molekuly hodnotu

$$r \doteq 3\ \ 10^{-10}\ \mathrm{m}\ .$$

Aj lineárne rozmery iných atómov a molekúl sú väčšinou tiež rádove rovné 10^{-10} m.

Metód určovania Avogadrovho čísla je mnoho. Prvý raz ho určil roku 1865 Loschmidt. Priama metóda stanovenia Avogadrovho čísla je založená na vyšetrovaní Brownovho pohybu. Meria sa výškové rozloženie častíc emulzie, alebo stredné kvadratické posunutie, ktoré častica koná pri Brownovom pohybe. Presnosť týchto meraní však nie je veľká. Hodnota, ktorú dostal vo svojich meraniach Perrin, sa líši od súčasnej štandardnej hodnoty asi o 25 %. Presnejšie výsledky boli dosiahnuté pri štúdiu otáčavého účinku Brownovho pohybu. Keď zavesíme veľmi ľahké zrkadielko na tenkej kremennej niti a pozorujeme na dostatočne vzdialenej stupnici zrkadlom odrazený lúč (obr. 1), zistí-



Obr. 1. Pozorovanie nestálosti nuly zrkadla vplyvom Brownovho otáčavého pohybu.

me, že jeho stopa koná nepravidelné kmity okolo rovnovážnej polohy. Táto „nestálosť nuly" zavesenej sústavy je následkom otáčavého účinku Brownovho pohybu, účinkom nárazov molekúl vzduchu. Tieto pokusy previedol s veľkou starostlivosťou Kappler. Kmity zrkadla zaznamenával fotograficky na pohybujúci sa film behom 101 hodín. Výsledkom merania bola hodnota $6{,}059 \cdot 10^{26}$ kmol^{-1} stanovená s presnosťou 1 %. Táto presnosť však nesplňuje veľké požiadavky, ktoré sú kladené na hodnoty základných univerzálnych konštánt, medzi ktoré patrí aj Avogadrovo číslo. Presnejšiu hodnotu dostaneme nepriamou cestou. Prv než tu naznačíme myšlienku tejto cesty, spomenieme, že dnes normovaná hodnota Avogadrovho čísla sa zakladá na absolútnych meraniach röntgenových vlnových dĺžok.

Oveľa presnejšiu hodnotu, ktorej chyba určenia je menšia než 1 %, dostaneme metódou nepriamou. Použijeme metódu merania rozkladu elektrolytu. K tomu si potrebujeme objasniť niektoré pojmy súvisiace s elektrolýzou.

Chemické zlúčeniny, ktorých vodné roztoky sú elektricky vodivé, sa nazývajú **elektrolyty**. Vedenie elektriny v elektrolytoch sa deje tzv. **iónovou vodivosťou**. Molekuly elektrolytu sa v elektricky vodivých roztokoch disociujú na kladné a záporné ióny. Rozklad elektrolytov elektrickým prúdom sa nazýva **elektrolýza**. Pre elektrolýzu platia Faradayove zákony. Pred ich vyslovením je nutné spomenúť, že kilogramekvivalent nejakého prvku je kilogramatóm delený mocenstvom. Kilogramatóm prvku je množstvo látky, ktorej množstvo vyjadrené v kilogramoch sa číselne rovná pomernej atómovej hmotnosti prvku.

Ako sme vyššie uviedli, pre elektrolýzu platia dva Faradayove zákony.

1. Množstvo látky m vylúčené na elektródach je úmerné prešlému elektrickému náboju Q.

2. Rovnako veľké náboje vylúčia na elektródach z rôznych elektrolytov rovnako veľký počet kilogramekvivalentov.

Podľa prvého zákona je

$$m = k \,.\, Q\,, \tag{1}$$

kde k je elektrochemický ekvivalent danej látky. Pre ľubovoľné dve vylúčené látky možno v zhode s prvým a druhým Faradayovým zákonom písať, že

$$m_1 = k_1 \,.\, Q = n\ \frac{A_1}{v_1}\,, \tag{2}$$

$$m_2 = k_2 \,.\, Q = n\ \frac{A_2}{v_2}\,,$$

kde A_1, A_2 značia kilogramatómy daných látok, v_1, v_2 ich mocenstvá a n počet súčasne vylúčených kilogramatómov nábojom Q.

Z (2) predelením rovníc dostávame

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{A_1}{v_1} \cdot \frac{v_2}{A_2}\,,$$

z čoho

$$\frac{A_1}{v_1}\ \frac{1}{k_1} = \frac{A_2}{v_2} \cdot \frac{1}{k_2}\,,$$

teda

$$\frac{1}{k_i} \cdot \frac{A_i}{v_i} = \text{konšt} \tag{3}$$

Podľa 1. Faradayovho zákona znamená výraz $\frac{1}{k_i}$ náboj potrebný na vylúčenie hmotnej jednotky danej látky.

Preto konštanta

$$F = \frac{A_i}{v_i} \cdot \frac{1}{k_i} \tag{4}$$

je konštantný náboj potrebný na vylúčenie jedného kilogramekvivalentu ľubovoľnej látky. Tento náboj sa nazýva Faradayov náboj. Podľa Avogadrovho zákona jeden kilogramatóm ľubovoľnej látky obsahuje vždy rovnaký počet častíc N. Môžeme preto celkom oprávnene predpokladať, že celý náboj prenášaný jedným kilogramatómom sa rovnomerne rozdelí do všetkých N častíc. Náboj prenášaný každým jednomocným iónom bude mať potom celkom určitú veľkosť e, pre ktorú platí

$$e = \frac{F}{N},$$

kde F je Faradayov náboj, N je Avogadrovo číslo. Pretože z Millikanových pokusov je náboj jednomocného iónu e považovaný za dostatočne presný, počítame N z údajov e a F podľa vzťahu

$$N = \frac{F}{e} \tag{5}$$

Presnosť určenia N teda závisí od určenia F a e.

Pozoruhodnými meraniami v r. 1897 J. J. Thomson prvý raz zmeral merný náboj elektrónu. Presné zistenie veľkosti elektrického náboja elektrónu previedol v rokoch 1900—1913 R. A. Millikan metódou, ktorú navrhol v r. 1907 F. A. Ehrenhaft.

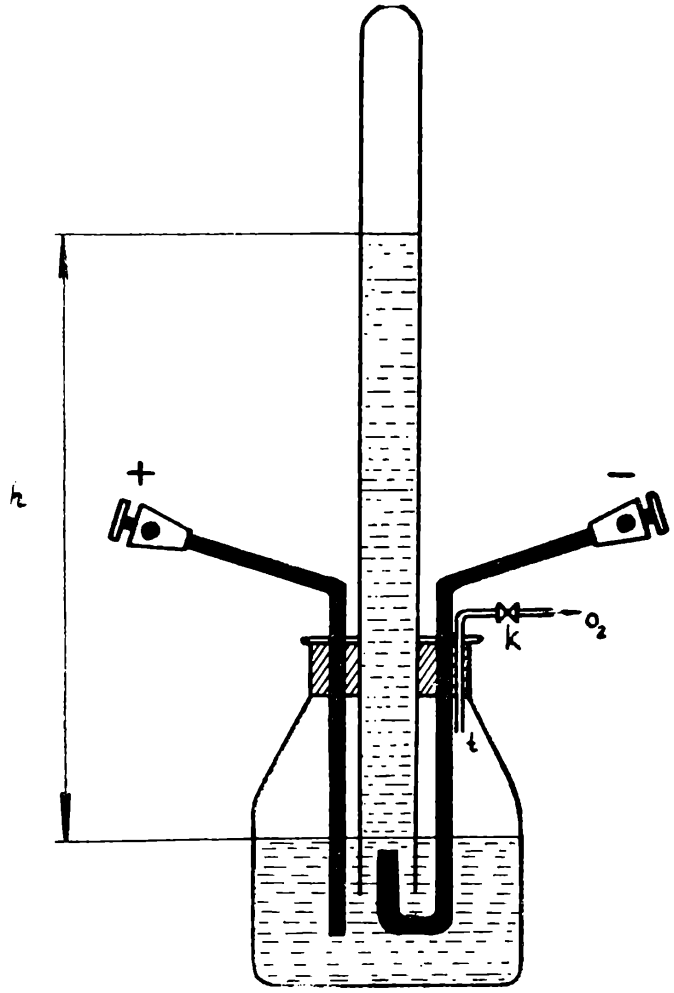
Ukážeme si, ako možno určiť Faradayov náboj F. Meranie Faradayovho náboja prevedieme pomocou coulometrov. Coulometre sú prístroje na meranie prúdu na základe jeho chemických účinkov. Na rýchle meranie sú vhodné coulometre na vodík a na meď.

Coulometer na meď je sklená nádoba s medenými elektródami, naplnená roztokom modrej skalice hustoty asi 1200 $\mathrm{kgm^{-3}}$. Je vhodné použiť dve medené dosky ako elektródy (anóda), medzi ktorými je tretia doska (katóda), takže sa meď vylučuje na oboch jej stranách. Katóda musí byť celá ponorená do roztoku. Ak elektrolýza prebiehala τ sekúnd, v okruhu bol prúd I a poznáme pomernú atómovú hmotnosť medi a jej mocenstvo, potom pre Faradayov náboj dostávame vzťah

$$\frac{A}{v} \cdot \frac{1}{k} = \frac{A}{v} \cdot \frac{Q}{m} = \frac{A}{v} \cdot \frac{\tau \, . \, I}{m},$$

kde m je hmotnosť vylúčenej medi na katóde.

Coulometer na vodík je sklená nádoba so širokým hrdlom, uzavretým zátkou (obr. 2). Zátkou prechádzajú dve trubičky zo skla



Obr. 2. Coulometer na vodík.

so zatavenými platinovými elektródami. Jedna z elektród je ohnutá nahor a spojená so záporným pólom batérie. Pri prechode prúdu 15 až 20% roztokom H_2SO_4, ktorým je naplnený coulometer na vodík, sa vylučuje vodík, ktorý stúpa v bublinkách do mernej trubice, kde sa hromadí. Priestor nádoby nad roztokom súvisí s okolitým vzduchom trubičkou t, ktorou uniká kyslík hromadiaci sa na anóde. Vylúčený vodík nevážime, ale meriame jeho objem, ktorý prepočítame na normálne podmienky. Faradayov náboj určíme zo vzťahu

$$F = \frac{Q}{n} = I\tau \frac{v_0}{V_0} = I\tau \frac{m_0}{m}, \tag{6}$$

kde m_0, v_0 sú hmotnosť, resp. objem kilogramekvivalentu a m, V_0 sú hmotnosť, resp. objem vylúčenej látky za čas τ, keď v okruhu bol prúd I. Objem vylúčeného vodíka V_0 prepočítaný na normálne podmienky, súvisí s objemom vodíka V pri tlaku p a teplote t °C podľa stavovej rovnice vzťahom

$$V_0 = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} \cdot V \tag{7}$$

Teplota vylúčeného vodíka sa v ustálenom stave rovná teplote okolitého vzduchu a tlak, pod ktorým je v trubici uzavretý, je rovný vonkajšiemu (barometrickému) tlaku b, zmenšenému o hydrostatický tlak stĺpca h mernej trubice a o tlak nasýtenej vodnej pary. Hydrostatický tlak je zrejme

$$p' = S \,.\, h \,.\, g \,, \tag{8}$$

kde S je hustota zriedenej kyseliny sírovej (1100 $\mathrm{kgm^{-3}}$), h je výška stĺpca mernej trubice (meranej od hladiny v nádobe), g je normálne gravitačné zrýchlenie. Tlak pár p'' je približne o 10 % menší, ako tlak nasýtených vodných pár E nad destilovanou vodou za rovnakej teploty

$$p'' = 0{,}9\, E \tag{9}$$

Podľa vzťahov (6), (7), (8) a (9) je Faradayov náboj

$$F = \frac{v_0 \cdot p_0}{T_0} \cdot \frac{I \,.\, T}{b - S \,.\, h \,.\, g - 0{,}9 \,.\, E} \cdot \frac{\tau}{V} \,. \tag{10}$$

Ak tento vzťah dosadíme do (5), dostávame pre Avogadrovo číslo N vzťah

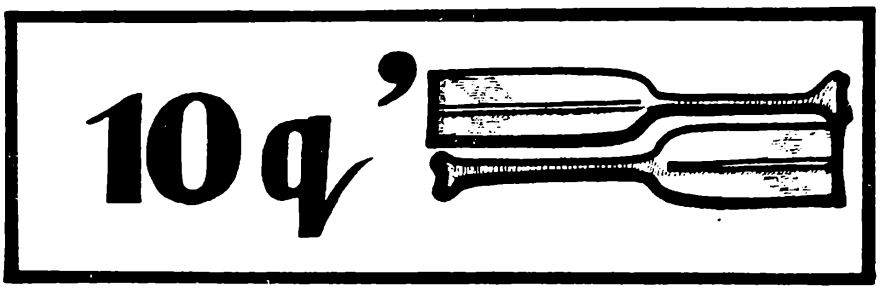
$$N = \frac{v_0 \cdot p_0}{T_0 \,.\, e} \; \frac{I \,.\, T}{b - S \,.\, h \,.\, g - 0{,}9 \,.\, E} \cdot \frac{\tau}{V} \,. \tag{11}$$

Takto určená hodnota Avogadrovho čísla N je určená s chybou menšou ako 1 %.

Literatúra

[1] S. E. Friš, A. V. Timoreva, Kurs fyziky I.
[2] Z. Horák a kol., Technická fyzika.
[3] E. V. Špoľskij, Atómová fyzika I.
[4] J. Vanovič, Kilogram — kilopond? Sústava SI v praxi.
[5] J. Pospíšil, Náboj elektrónu a jeho měření (Rozhl. mat.-fyz., roč. 42, č. 1).

REBUS



Pohybuje se plachetnice proti větru?

MILAN BEDNAŘÍK, PU, Olomouc

Byly doby, kdy veškerá námořní doprava byla odkázána na energii pohybujících se vzdušných mas, na energii větru. Snad jste četli historické příběhy, kdy kapitáni velkých plachetnic netrpělivě vyčkávali příznivý vítr, aby mohli vyplout nebo pokračovat na svých cestách nekonečnými vodami dalekých oceánů. Jistě jste zhlédli řadu dobrodružných filmů, v nichž lodi s vypjatým plachtovím překonávaly ohromné vzdálenosti mezi kontinenty, a to i tehdy, když vítr nedul do plachet přímo zezadu, ale i ze stran. Mohli jste také pozorovat závody sportovních plachetnic, které lehce klouzaly po hladině jezera od jednoho břehu ke druhému nejen v jednom směru, ale i ve směru opačném, třeba i téměř proti větru.

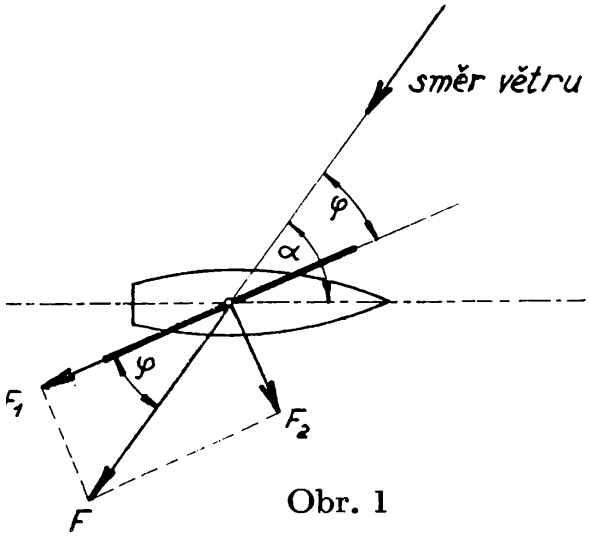
Napadá nás otázka, jak je možné, že plachetnice, která se přece pohybuje pouze působením síly větru, se v některých případech může pohybovat i proti této síle. Není to v rozporu s běžnou zkušeností, že se každé těleso pohybuje vždy ve směru působící síly nebo přesněji řečeno ve směru výslednice sil na těleso působících?

Pokusme se na tyto otázky odpovědět. Především musíme říci, že přímo proti větru se pomocí plachet plout nedá. Vždy totiž musí kormidelník nařídit takový směr pohybu plachetnice, aby svíral se směrem přicházejícího větru určitý úhel. Leží-li cíl plavby, např. určité místo na protějším břehu jezera přesně ve směru proti větru, lze do něho doplout po dráze, která má tvar lomené přímky. Při tomto způsobu plavby, kterému říkají odborníci *lavírování*, je směr pohybu plachetnice stále různoběžný se směrem větru.

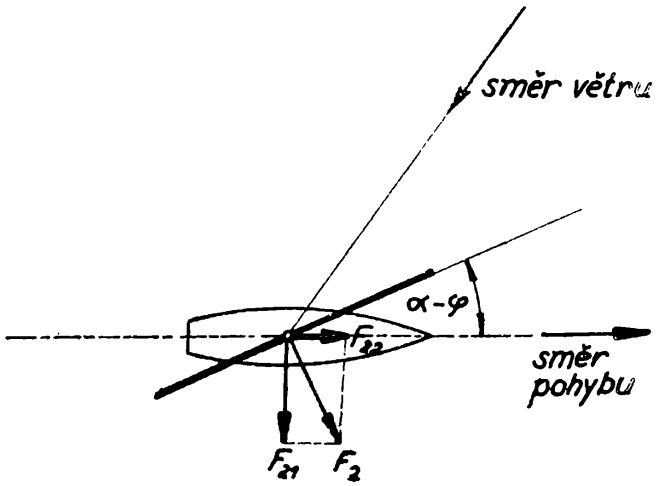
Uvažujme proto případ, kdy podélná osa plachetnice, které se obvykle říká *kýlová čára*, svírá se směrem přicházejícího větru úhel α (obr. 1). Plachta, kterou si pro jednoduchost představíme jako svislou rovinu (i když je to ve skutečnosti více či méně zakřivená plocha), nechť svírá se směrem větru úhel φ. Síla větru F působí na plachtu rovněž pod úhlem φ. Účinek síly F se však může projevit pouze v její složce kolmé na rovinu plachty. Rozložíme proto sílu větru F ve dvě navzájem kolmé složky. Jedna z nich — složka F_1 — nutí vzduch klouzat podél plachty, druhá — kolmá složka F_2 — způsobuje tlak na plachtu a přenáší se prostřednictvím stěžně na celou loď. Z obr. 1 snadno určíme, že velikost této tlakové složky je

$$F_2 = F \sin \varphi \qquad (1)$$

Pohyb plachetnice se však neděje ve směru síly F_2. Z této síly se uplatní opět pouze jedna její složka, a to složka ve směru předpokládaného pohybu plachetnice. Tlakovou sílu F_2 tedy dále rozložíme (obr. 2) ve složku F_{21} kolmou ke kýlové čáře a složku F_{22} působící podél kýlové čáry. Prvá složka F_{21} vyvolává jednak silný odpor vody (i nepatrný



Obr. 1



Obr. 2

pohyb plachetnice do strany vyvolá poměrně velký odpor prostředí) a je současně tímto odporem vyrovnávána, jednak naklonění celé plachetnice; při silném větru může tato složka plachetnici převrhnout (proto se také plachty před očekávanou bouří svinují). Druhá složka F_{22}, která má směr kýlové čáry, uvádí pak plachetnici do pohybu. Aby tedy mohla plachetnice plout vpřed, musí mít tlaková síla F_2 vždy složku kýlové čáry F_{22} směřující dopředu. Velikost této složky je podle obr. 2

$$F_{22} = F_2 \sin (\alpha - \varphi)$$

Dosadíme-li ještě $F_2 = F \sin \varphi$ podle rovnice (1), je

$$F_{22} = F \sin \varphi \sin (\alpha - \varphi) \qquad (2)$$

Abychom určili sílu F_{22}, která žene plachetnici dopředu, museli jsme sílu větru F rozložit dvakrát. Po prvé kolmo a podél plachty, kdy měla význam jen kolmá složka F_2, po druhé tuto sílu F_2 kolmo a podél kýlové čáry, kdy pohybový účinek měla jen podélná složka F_{22}.

Zajímavá je diskuse vztahu (2). Ptejme se nejdříve, *kdy bude síla* F_{22} *rovna nule*. Je zřejmé, že to nastane tehdy,

a) když $\varphi = 0$, tj. když je rovina plachty rovnoběžná se směrem větru. V tomto případě nepůsobí na plachtu žádná tlaková síla, neboť také podle vztahu (1) je $F_2 = 0$;

b) když $\alpha - \varphi = 0$, neboli $\varphi = a$, tj. když má rovina plachty směr kýlové čáry. V tomto případě sice na plachtu tlaková síla působí ($F_2 \neq 0$), ale poněvadž je tato síla kolmá ke kýlové čáře plachetnice, neuvede loď do pohybu;

c) když $\varphi = 0$ a současně $\alpha = 0$, tzn., že přímo proti větru nelze plout ani tehdy, kdybychom plachtu nastavili přesně rovnoběžně se směrem větru. Jestliže bychom při podmínce $\alpha = 0$ zvolili $\varphi \neq 0$, pak by byl $\sin(\alpha - \varphi) = \sin(-\varphi) < 0$, a tím také síla $F_{22} < 0$, tzn. že by plachetnice plula zpět.

Aby naopak byla síla $F_{22} > 0$, tj. aby se plachetnice pohybovala dopředu, musí vzhledem k předchozí úvaze svírat rovina plachty se směrem přicházejícího větru úhel φ, pro nějž platí nerovnost

$$0 < \varphi < \alpha .$$

Položme si nyní druhou otázku. *Za jakých podmínek bude účinek síly F_{22} maximální?* Ze vztahu (2) opět snadno zjistíme, že tento účinek síly nastane tehdy, když $\varphi = 90°$ a současně $\alpha - \varphi = 90°$ neboli $\alpha = 180°$, tzn. když rovinu plachty nastavíme kolmo ke směru větru a zároveň celou plachetnici orientujeme tak, aby nám foukal vítr do zad. Této nejpříznivější situace můžeme však využít jen tehdy, shoduje-li se směr větru s plánovaným směrem plavby. Důležitější je případ, když tomu tak není, tj. když $\alpha \neq 180°$.

Hledejme proto takový úhel φ, aby při daném úhlu $\alpha \neq 180°$ byla síla F_{22} největší. Jestliže např. do vztahu (2) dosadíme $\alpha = 90°$, což znamená, že směr větru je kolmý ke směru plavby, dostaneme postupně

$$F_{22} = F \sin\varphi \sin(90° - \varphi) ,$$

$$F_{22} = F \sin\varphi \cos\varphi ,$$

$$F_{22} = \frac{F}{2} \sin 2\varphi$$

V tomto případě je síla F_{22} maximální, je-li $\sin 2\varphi = 1$ a odtud $\varphi = 45°$ Největšího pohybového účinku se tedy dosáhne, bude-li úhel φ polovinou úhlu α, nebo jinými slovy, b u d e - l i r o v i n a p l a c h t y p r á v ě p ů l i t ú h e l m e z i s m ě r e m v ě t r u a s m ě r e m p o h y b u p l a c h e t n i c e. K témuž závěru bychom dospěli, kdybychom za úhel α dosazovali jiné další hodnoty. Vždy by síla F_{22} byla největší tehdy, kdyby

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} .$$

Pro čtenáře, kteří se již seznámili s matematickým pojmem derivace

a dovedou s derivacemi počítat, uvádíme ještě obecné řešení předchozí úlohy[1]).

Podle rovnice (2) je síla F_{22} pro předem daný úhel α funkcí úhlu φ, což se zapisuje obvykle vztahem $F_{22} = f(\varphi)$. Chceme-li nyní určit velikost úhlu φ, pro který nabude funkce $f(\varphi)$ své maximální hodnoty, vypočítáme její derivaci $f'(\varphi)$ a tu položíme rovnu nule (podmínka pro maximum funkce). Tedy

$$f'(\varphi) = \frac{\mathrm{d}F_{22}}{\mathrm{d}\varphi} = F\left[\cos\varphi \sin(\alpha - \varphi) - \sin\varphi \cos(\alpha - \varphi)\right] = 0$$

Tento výraz je roven nule, jestliže

$$\cos\varphi \sin(\alpha - \varphi) - \sin\varphi \cos(\alpha - \varphi) = 0\,,$$

neboli

$$\sin\left[(\alpha - \varphi) - \varphi\right] = 0$$

a odtud

$$\alpha - 2\varphi = 0\,,$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}$$

Docházíme tedy k obecně platnému závěru, že funkce $F_{22} = f(\varphi)$ nabývá své maximální hodnoty pro úhel $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Síla F_{22}, která uvádí plachetnici do pohybu ve směru její kýlové čáry, je tedy největší tehdy, nastavíme-li plachtu tak, aby její rovina půlila úhel mezi směrem větru a směrem plavby.

Poznámka. Všechny předchozí úvahy platí jen za předpokladu, že jsme vypjatou plachtu považovali za rovinnou plochu. V případě plochy zakřivené by byla situace složitější, neboť bychom museli kromě uvedených sil uvažovat ještě reaktivní síly, které vznikají prouděním vzduchu v duté části zakřivené plochy. Rovněž tak jsme zanedbávali existenci některých dalších sil, jako je např. odpor vzduchu, odpor vody působící proti směru pohybu, popřípadě síly, vznikající prouděním vody nebo nárazy vodních vln na trup lodi.

[1]) O derivování a integrování otiskneme v příštím ročníku řadu článků. Redakce.

REBUS

2V+2T

Přehled elektrických obvodů (Dokončení)

DOC. ING. LADISLAV FRANC, CSc., Olomouc

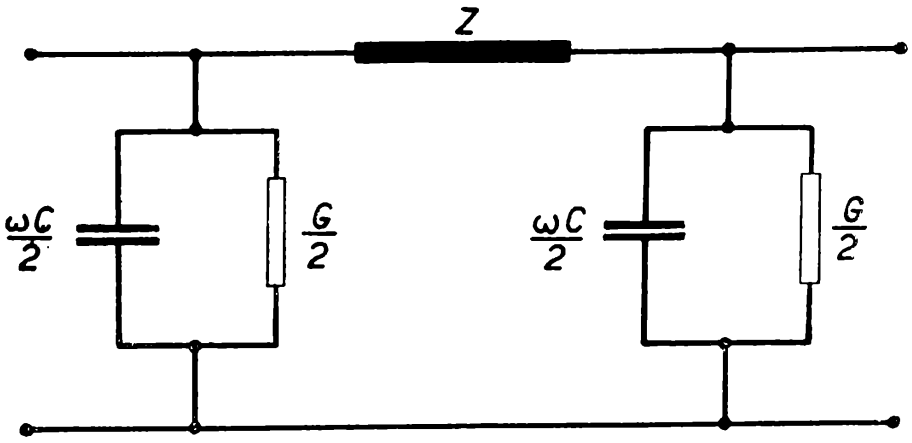
Čtvrté hledisko konečně rozděluje obvody podle toho, oč při jejich řešení jde. Nejčastější je úloha, že v daném obvodě, kde známe jak všechny pasívní, tak i aktivní prvky, máme určit velikost proudů v jednotlivých větvích. Tato úloha se nazývá analýza.

Jiná úloha, obecně složitější, se nazývá syntéza. Zde nám jde o to, abychom pro daný vstupní signál (přiváděný proud) a pro daný výstupní signál (odezvu) našli správný obvod. Tento obvod musí správně transformovat přijímaný vstupní signál na určitou odezvu. Sestavení takového obvodu, což je úkolem syntézy, nebývá jednoznačné (možno sestavit více takových obvodů), vždy je to však úloha obtížná. Přichází často v regulační technice.

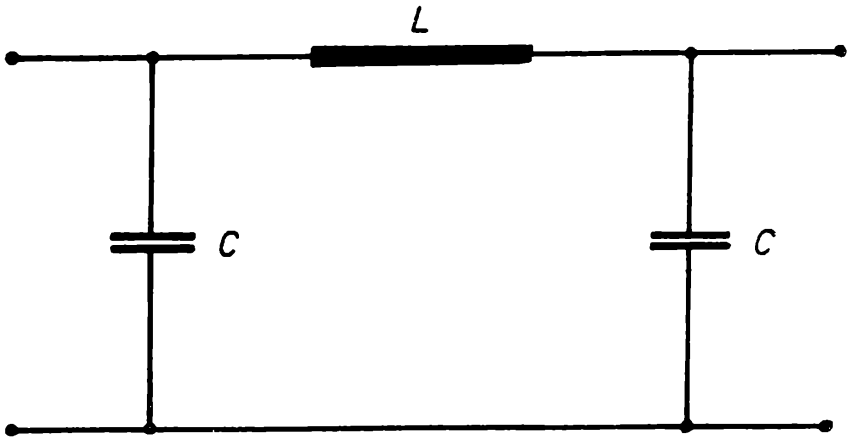
Při klasifikaci obvodu se všechna tato hlediska kombinují. Např. řešíme nějaký složitý lineární obvod v ustáleném stavu z hlediska analýzy, to znamená hledáme rozložení proudů v tomto obvodě.

Zvláštními a často se vyskytujícími obvody jsou čtyřpóly nebo filtry. Např. dlouhá vedení silnoproudá i sdělovací můžeme nahradit tzv. článkem π, což je čtyřpól, neboť má dvě vstupní a dvě výstupní místa. Celou impedanci vedení Z si myslíme soustředěnu uprostřed vedení, kdežto svody činné i kapacitní si myslíme rozděleny do dvou polovin na začátku a na konci vedení (obr. 4).

Na obr. 5 je schéma tzv. vzestupného filtru, který je součástí každého radiopřijímače.



Obr. 4



Obr. 5

Užitá matematika. Matematické metody, užívané pro řešení jednotlivých případů, jsou rozdílné. Jako nové kritérium vystupuje požadavek, aby metoda byla nejen správná nebo matematicky elegantní, ale také vhodná pro číslicové nebo analogové samočinné počítače.

Analýza základních elektrických obvodů se provádí vektorovým nebo tzv. symbolickým počtem s komplexními čísly, kde výsledek analýzy, tj. proudy ve větvích obvodu s paralelními nebo sériovými odpory střídavými, je vyjádřen vztahem $I = a \pm jb$. Reálné (činné) odpovídá a a jb imaginární (jalové) složce proudu. Podobně u sériových obvodů je opět $U = e \pm jf$, kde e odpovídá reálné a jf imaginární složce napětí,

Pro řešení složitých obvodů lineárních ve stavu ustáleném a při stavech přechodných, pro řešení obvodů nelineárních a hlavně pro úlohy syntézy obvodů nutno používat náročných matematických metod z oboru vyšší matematiky, jejichž porozumění se vymyká možnostem žáků středních škol. Je nutno ovládat např. iterační metody řešení soustav lineárních rovnic, maticový počet, Laplaceovu a Carsonovu transformaci, řešení diferenciálních rovnic a Besselovy funkce atd.

Přitom mnohé matematické metody je možno používat i pro analogické obvody mechanické a mechanické kmitavé soustavy.

Mnohé metody jsou použitelné jen s pomocí samočinných počítačů, zejména číslicových.

Teorii obvodů je věnována obsáhlá literatura, avšak rázu monografického. Práce jsou věnovány vždy jen určitému úseku širokého problému, např. pouze lineárním obvodům nebo jen syntéze, jen nelineárním obvodům atp. Encyklopedické učebnice, rázu všeobecných učebnic fyziky nebo elektrotechniky, dosud nejsou. Není dobře možné je zatím zpracovat, neboť problémy stále rostou a látka není uzavřena. Není ukončen ani výzkum metod řešení obvodů, ani sestavování a konstrukce nelineárních prvků.

Literatura

[1] *S. Seshu — N. Balabanian*, Analyz linějnych cepej, Gos. energ. izdat. Moskva—Leningrad 1963 (překlad z angličtiny).
[2] *N. Balabanian*, Syntéza elektrických obvodů, SNTL, Praha 1965 (překlad z angličtiny).
[3] *Z. Kotek — S. Kubík*, Nelineární obvody, SNTL, Praha 1962.
[4] *V. Hlavsa*, Praktické základy teorie elektrických lineárních obvodů, SNTL, Praha 1954.
[5] *J. Schmidtmayer*, Maticový počet a jeho užití v elektrotechnice, SNTL, Praha 1953.
[6] *M. Promberger*, Použití matic a tenzorů v teoretické elektrotechnice, SNTL, Praha 1956.
[7] *J. Kučera — Z. Horák*, Tenzory v elektrotechnice a ve fyzice, ČSAV, Praha 1963.
[8] *D. Mayer*, Analýza elektrických obvodů maticovým počtem, Praha, Academia 1966.

K výkladu základních fyzikálních pojmů

BOHUMIL MACEK, PF, Hradec Králové

Lidské poznání je odrazem materiálního, objektivně existujícího světa v našem vědomí. Odraz zprostředkovávají buďto naše smysly ve formě počitků a vjemů, nebo náš rozum ve formě pojmů, zákonů apod. Mohli bychom říci, že pojmy jsou nejjednodušší prvky našeho myšlení, které odrážejí podstatné vlastnosti určitého jevu. Charakteristickým znakem každého pojmu je jeho materiální obal, určitý slovní výraz, s kterým je pojem nerozlučně spojen, kterým je fixován.

V teoretickém studiu i v praktické činnosti si nejen osvojujeme pojmy nové, ale i upřesňujeme a prohlubujeme ty, které již známe. Nejsou-li naše pojmy dostatečně přesné a jasné, může dojít k jejich záměně, neporozumíme dobře studované látce, popřípadě se dopouštíme chyb ve vlastních úvahách.

Jak se rozšiřuje a prohlubuje naše poznání, jak se mění sama skutečnost kolem nás, tak se vyvíjejí i pojmy. Příkladů najdeme ve fyzice dostatek. Dnešní význam pojmu s v ě t l o je značně odlišný od významu, který měl tento pojem ve vlnové teorii Huygensově či v kor-

puskulární teorii Newtonově. Podobně bychom mohli hovořit o vývoji pojmů atom, teplo, elektřina, magnetismus aj. Ze změny a vývoje pojmů nesmíme je však považovat za něco nepřesného, neurčitého. Vývoj pojmů je proces velmi pomalý — na každém stupni vývoje existují pojmy zcela přesné. První podmínkou pro studium, pro každou vědeckou práci je, abychom své myšlení zbavili překonaných pojmů, abychom si osvojili a vždy vycházeli z pojmů současné vědy.

1. Hmota a hmotnost

Velké požadavky na správný výklad pojmů a jejich přesné používání musíme mít zvláště ve fyzice, dnes jedné z nejrozvinutějších vědeckých disciplín. Současný stav však právě zde není uspokojivý. Již ve výkladu základních pojmů se projevuje nejen velká nejednotnost, ale i nepřesnost.

K označení objektivní reality, kterou poznáváme jednak bezprostředně orgány svých smyslů, jednak tím, že zpracováváme údaje svých smyslů rozumovými úsudky, užíváme vlastně ve fyzice i ve filosofii dvou rovnomocných pojmů *hmota* nebo *matérie*. Oba pojmy patří k nejobecnějším pojmům v našem vědomí, nedají se odvodit z jiných pojmů, nevztahují se ani na některou část či vlastnost objektivního světa, ale na objektivní realitu celkem.

Jádro celého problému je nyní v tom, že pojmu hmota používáme dosud běžně v dalších dvou významech: jednak k označení určité vlastnosti objektivní reality (tzv. hmotnosti neboli masy), jednak ve významu jedné formy existence objektivní reality — látky (např. „umělé hmoty"). Vraťme se podrobněji k prvnímu z těchto dvou významů.

Hmota (matérie) jako objektivní realita má jisté vlastnosti. Některé z nich se dají vyjádřit kvantitativně, mají určitou míru. Veličinu, která charakterizuje setrvačné, resp. gravitační vlastnosti hmotných objektů, ještě dnes mnozí označují rovněž termínem hmota. A právě zde dochází často k nedorozumění i nesprávným závěrům při výkladu fyzikálních jevů. Všechny tyto obtíže se však dají odstranit důsledným užíváním termínu *hmotnost*, popříp. *masa*. Pojem masa má tu přednost, že se s ním setkáváme i v jiných jazycích, například v ruštině, němčině i angličtině. Nový český termín hmotnost, který také doporučuje jednotná měrová soustava vyhlášená zákonem č. 35 Sb. ze dne 29. března 1962, je opravdu obohacením našeho jazyka a má všechny předpoklady pro to, aby se brzy rozšířil tak, jako se například stala zcela běžnou na všech stupních škol jednotka tíhy (dříve váhy) jeden kilopond. Musíme si prostě navyknout nazývat kilogram jednotkou hmotnosti, mluvit o zákonu zachování hmotnosti, o klidové hmotnosti elementárních částic apod. Analogická formulace Einsteinova vztahu

mezi hmotností a energií podstatně přispěje k jeho správnému pochopení. Zvláště píšeme-li jej ve tvaru

$$\frac{W}{m} = c^2$$

vidíme, že podíl energie a hmotnosti určitého hmotného objektu je stálý a rovná se druhé mocnině rychlosti světla. Přitom je hmotnost proměnná veličina a závisí na pohybovém stavu. Zvětšuje-li se energie objektu, musí růst i hmotnost a naopak.

Uvědomme si ještě, že pojem hmotnost se zavádí do fyziky vlastně dvojí cestou. Buď jako veličina, která označuje míru setrvačných účinků hmoty podle Newtonova pohybového zákona

$$a = \frac{F}{m},$$

nebo jako veličina, která charakterizuje míru gravitačních účinků hmoty podle gravitačního zákona

$$F = \varkappa \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

V prvním případě působíme na objekt určitou silou a měříme zrychlení, které se rozloží na jednotlivé částice, ve druhém případě měříme výslednou sílu, která působí dohromady na všechny částice objektu v gravitačním poli. Proto také Newtonova klasická mechanika rozlišovala hmotnost setrvačnou a gravitační, i když všechna měření ukazovala, že u téhož objektu se obě hmotnosti vždy sobě rovnají. Hluboký význam této zdánlivé shody objevila teprve Einsteinova teorie relativity a současně i vysvětlila, proč je zbytečné rozlišovat hmotnost setrvačnou a gravitační.

2. Formy existence hmoty

Hmota jako objektivní realita může existovat ve dvou základních formách, a to jako *látka* nebo jako *pole*.

Fyzikální formu látky představují ty objekty, které se skládají z částic s klidovou hmotností. Patří sem tedy převážná většina elementárních částic (elektrony, pozitrony, protony, neutrony) i složitější útvary, které tyto částice vytvářejí, jako atomy, molekuly i objekty makrosvěta a megasvěta. Kromě klidové hmotnosti je charakteristickým znakem látkové formy její neprostupnost. Každá látka zaujímá určitý prostor, v kterém nemůže být současně látka jiná.

(Pokračování

RŮZNÉ

Opakujte si matematiku (K televiznímu kursu)

HANA KOŘÍNKOVÁ, ČVUT, Praha

V Rozhledech matematicko-fyzikálních v č. 7 na str. 336 jsme Vám otiskli texty úloh, které byly během televizního kursu *Opakujte si matematiku* dány televizním divákům. V tomto čísle najdete jejich řešení, u některých příkladů pouze návody k řešení.

Řešení 1. příkladu. Označme jednoho sčítance písmenem x (kde $0 < x < 10$), druhý sčítanec je potom roven $10 - x$. Označíme-li součet jejich druhých mocnin písmenem y, můžeme psát

$$y = x^2 + (10 - x)^2 .$$

Tuto závislost y na x můžeme vyjádřit pro několik hodnot tabulkou:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	82	68	58	52	50	52	58	68	82

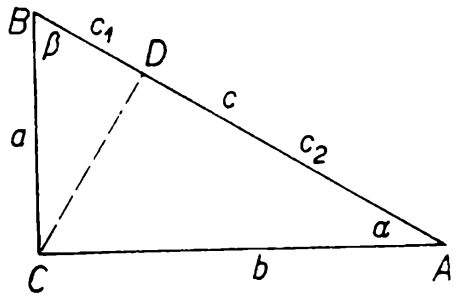
Pomocí této tabulky lze sestrojit graf funkce $y = x^2 + (10 - x)^2$ pro $0 < x < 10$. Bude jím část paraboly. Parabola má osu rovnoběžnou s osou y, vrchol V (5; 50) a rovnici $y - 50 = 2\,(x - 5)^2$.

Řešení 2. příkladu. Podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku BCD platí

$$a^2 = c_1^2 + v^2 , \qquad (1)$$

podle Euklidovy věty o odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku ABC platí

$$a^2 = c \,.\, c_1 . \qquad (2)$$



Obr. 1

Odečtením rovnice (2) od rovnice (1) dojdeme úpravou ke kvadratické rovnici (neznámá je c_1)

$$c_1^2 - c \,.\, c_1 + v^2 = 0 \,,$$

která je splněna pro

$$c_1 = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4v^2}}{2}$$

pro $c \geqq v$.

Odvěsny a, b pravoúhlého trojúhelníka ABC vypočteme pomocí Euklidovy věty o odvěsně

$$a^2 = c \,.\, c_1 = c \,.\, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4v^2}}{2} \,,$$

$$b^2 = c \,.\, c_2 = c \,.\, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4v^2}}{2} \,.$$

Dosadíme-li do vypočtených výrazů $c = 12$, $v = 5$ dostaneme $a \doteq 10{,}6$, $b \doteq 5{,}7$.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC dále platí

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \doteq \frac{10{,}57}{12} \doteq 0{,}8808 \,,$$

takže

$$a \doteq 61°44'$$

a

$$\beta = 90° - a' \doteq 28°16'$$

Řešení 3. příkladu. Počet úhlopříček v n-úhelníku je dán vzorcem $\frac{1}{2} n\,(n - 3)$. Podle daného musí platit

$$\tfrac{1}{2} n\,(n - 3) > n \,,$$

kde n je přirozené číslo větší než 2 (tj. $n \geqq 3$).

Úpravou dojdeme postupně k nerovnostem

$$\tfrac{1}{2} n^2 - \tfrac{3}{2} n > n \,, \; n^2 - 3n - 2n > 0 \,,$$

čili

$$n\,(n - 5) > 0$$

Poslední nerovnost je splněna jednak pro $n > 0$, $n - 5 > 0$, tj. pro $n > 5$ a jednak pro $n < 0$, $n - 5 < 0$, tj. pro $n < 0$. Řekli jsme však, že $n \geqq 3$, a proto řešením nerovnosti jsou přirozená čísla $n > 5$.

O d p o v ě ď : Mnohoúhelníky, jejichž počet stran je větší než 5 mají více úhlopříček než stran.

Řešení 4. příkladu. Nejdříve vypočteme čísla, pro která jsou výrazy v absolutních hodnotách rovny nule, tj. $2x + 3 = 0$, takže $x = -\frac{3}{2}$; $5x - 1 = 0$, takže $x = \frac{1}{5}$.

Danou nerovnost budeme nyní řešit pro čísla splňující nerovnosti

$$\text{a) } x < -\tfrac{3}{2}\,, \quad \text{b) } -\tfrac{3}{2} \leqq x \leqq \tfrac{1}{5}\,, \quad \text{c) } x \geqq \tfrac{1}{5}$$

V p ř í p a d ě a) je

$$2x + 3 < 0\,, \text{ tj. } |2x + 3| = -2x - 3\,,$$
$$5x - 1 < 0\,, \text{ tj. } |5x - 1| = 1 - 5x\,.$$

To znamená, že daná nerovnost bude tvaru

$$-2x - 3 < x - 1 + 5x\,,$$

odkud

$$-4 < 8x\,,$$

tj.

$$-\tfrac{1}{2} < x\,.$$

Protože musí současně platit, že $x < -\frac{3}{2}$; $x > -\frac{1}{2}$, což je nemožné (obr. 2), nemá daná nerovnost v tomto případě (tj. pro $x < -\frac{3}{2}$) řešení.

V p ř í p a d ě b) je

$$2x + 3 \geqq 0\,, \text{ tj. } |2x + 3| = 2x + 3\,,$$
$$5x - 1 \leqq 0\,, \text{ tj. } |5x - 1| = 1 - 5x\,.$$

Daná nerovnost nabude tvaru

$$2x + 3 < x + 5x - 1\,,$$

odkud

$$4 < 4x\,,$$

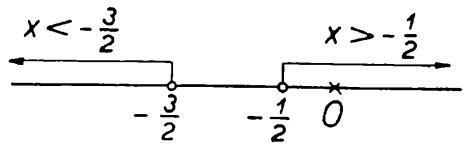
tj.

$$1 < x\,.$$

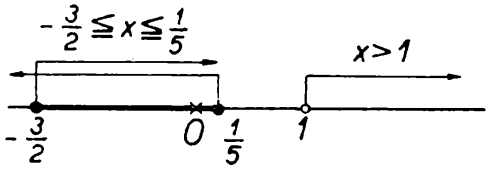
Opět musí současně platit

$$-\tfrac{3}{2} \leqq x \leqq \tfrac{1}{5}\,, \quad x > 1\,.$$

To je nemožné (obr. 3), a proto ani v tomto případě (tj. pro $-\frac{3}{2} \leqq \leqq x \leqq \frac{1}{5}$ nemá nerovnost řešení).



Obr. 2



Obr. 3

V případě c) je

$$2x + 3 > 0\,,\ \text{tj.}\ |2x + 3| = 2x + 3\,,$$
$$5x - 1 > 0\,,\ \text{tj.}\ |5x - 1| = 5x - 1\,.$$

Daná rovnost bude mít tvar

$$2x + 3 < x - 5x + 1\,,$$

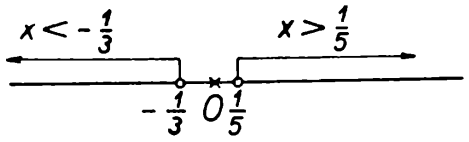
odkud

$$6x < -2\,,$$

tj.

$$x < -\tfrac{1}{3}\,.$$

I v tomto případě nemohou být současně splněny nerovnosti $x > \frac{1}{5}$, $x < -\frac{1}{3}$ (obr. 4). To znamená, že ani pro $x > \frac{1}{5}$ nemá daná nerovnost řešení.



Obr. 4

O d p o v ě ď : Dané nerovnosti nevyhovuje žádné reálné číslo.

Řešení 5. příkladu.

$$\sqrt{2x + y} = 4 - y\,, \qquad (1)$$
$$3x - y = 1\,. \qquad (2)$$

Sečtením rovnice (1) a (2) dostaneme

$$3x + \sqrt{2x + y} = 5\,,$$

upravíme a umocníme

$$\sqrt{2x + y} = 5 - 3x\,,$$

čili

$$2x + y = 25 - 30x + 9x^2 \qquad (3)$$

po přičtení rovnice (2) je

$$5x = 26 - 30x + 9x^2\,,$$

tj.

$$9x^2 = 35x + 26 = 0\,,$$

čili

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm 17}{18} = \begin{cases} \frac{26}{9}, \\ 1\,. \end{cases}$$

Dosazením do rovnice (2) bude

$$y_1 = 3x_1 - 1 = \tfrac{23}{3}\,;\ y_2 = 2\,.$$

Zkouška.

a) L. S.: $\sqrt{\frac{52}{9} + \frac{23}{3}} = \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{11}{3}$; P. S.: $4 - \frac{23}{3} = -\frac{11}{3}$.

Dvojice $(\frac{26}{9}\,;\ \frac{23}{3})$ dané soustavě nevyhovuje.

b) L. S.: $\sqrt{4} = 2$; P. S.: $4 - 2 = 2$.

Dvojice (1; 2) dané soustavě vyhovuje.

O d p o v ě ď : Dvojice 1; 2 je řešení dané rovnice.

Řešení 6. příkladu. $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 67°$.

Ze sinové věty je

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Pro obvod daného trojúhelníka platí

$$2s = a + b + c = a + \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha},$$

$$2s = \frac{a}{\sin \alpha} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma),$$

$$a = \frac{2s \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma},$$

$$b = \frac{2s \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}, \tag{1}$$

$$c = \frac{2s \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$$

Součet $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ upravíme s použitím vztahu

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$$

a součtových vzorců

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};$$

dosadíme do rovnic (1).

Nahradíme-li

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

tak po zkrácení obdržíme

$$a = \frac{s \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}, \quad b = \frac{s \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}, \quad c = \frac{s \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$$

a logaritmujeme

$$\log a = 0{,}7808 \; ; \; \log b = 0{,}9881 \; ; \; \log c = 0{,}9653 \; ;$$
$$a \doteq 6{,}04 \; ; \; b \doteq 9{,}73 \; ; \; c \doteq 9{,}23 .$$

Řešení 7. příkladu. $\alpha = 45°$, $AD = AV = 2r$,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AV}{AB} = \frac{2r}{r} = 2\ ;\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{AV}{AC}\ .$$

$$\sphericalangle ABC = 120°\ ,\ \tfrac{1}{2}\ .\ AC = r\ .\ \sin 60° = \frac{r\sqrt{3}}{2}\ ,$$

čili

$$AC = r\sqrt{3}\ ,$$

takže

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2r}{r\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ .$$

Řešení 8. příkladu.

$$\log_z (x^2 - 7x + 10) < 2\log_z (x + 1)\ ,$$
$$\log_z (x^2 - 7x + 10) < \log_z (x + 1)^2\ ,$$
$$x^2 - 7x + 10 > 0\ ,$$
$$x + 1 > 0$$

Pro $Z > 1$

$$x^2 - 7x + 10 < x^2 + 2x + 1\ ,$$
$$9 < 9x\ ,$$
$$x > 1\ ,$$
$$x^2 - 7x + 10 = (x - 5)\,(x - 2)\ ,$$
$$x^2 - 7x + 10 > 0$$

pro všechna $x > 5$ nebo $x < 2$.

O d p o v ě ď : Všechna x splňující nerovnost $1 < x < 2$ a všechna x, pro něž platí $x > 5$.

Poznámka: Kdybychom v této úloze vzali v úvahu logaritmy o kladném základu ($Z < 1$), byla by daná nerovnost splněna pro všechna x, která splňují nerovnosti $-1 < x < 1$.

AUTORŮM ČLÁNKŮ

Redakce nevyžaduje opisy rukopisů. Pište na stroji nejvíce 30 řádek na stránku a nevynechávejte místa pro případné obrázky. Vzorce je možno vpisovat rukou. Pouze řešení soutěžních příkladů a hádanek lze psát ručně a to bezpodmínečně na jednu stranu papíru. Pamatujte, že obrázky se reprodukcí dvakráte zmenší. Popis musí být proveden šablonou 5 mm. Recenze rukopisů si někdy vyžádá delší doby, proto neurgujte. Redakce

---

Řešení rebusů: Newton, (371), Tesla (377), Watt (381).

Auguste Jean Fresnel (1788—1827)

JOSEF KOTYK, Pardubice

„Vědec musí pracovat s dohady jako detektiv, musí mít i fantazii jako básník — kde však pro básníka začíná práce s formou, nastupuje u vědce a u detektiva nutnost důkazu.“[1])

Správnost tohoto tvrzení osvědčují v dějinách fyziky mj. dlouholeté, avšak velmi plodné spory mezi stoupenci prvních vědeckých a ucelených teorií o podstatě světla: *Newtonovy korpuskulární* neboli *emanační* (výronové) *teorie* a *Huygensovy teorie undulační* (vlnové). Zdálo by se pak rozumné vyhnout se dvojznačnosti, která vyplývá z existence dvou různých teorií týchž jevů, uvážit přednosti i vady obou a rozhodnout se pro jednu z nich. Nebývá to však vždy jednoduché. Rozhodnutí mohlo by tu být někdy spíše „věcí vkusu“;[2]) podle Boltzmanna[3]) je však elegance záležitostí krejčího a obuvníka...

Také v připomenutém případě probíhal vývoj složitěji.[4]) Velká vědecká autorita Newtonova přispívala k tomu, že v době Newtonově (žil v letech 1643 až 1727) a ve století po něm se většina fyziků stavěla k teorii vlnové odmítavě a dávala přednost teorii korpuskulární. Huygens našel proto jen málo přívrženců. Věc dospěla posléze tak daleko, že Newtonova teorie světla došla časem všeobecného uznání, Huygensova upadla pak téměř v zapomenutí. Počátek 19. století přinesl však překvapení: *Huygensova teorie světla byla pojednou vzkříšena k novému životu.* Přičinil se o to mladý francouzský inženýr Fresnel, od jehož úmrtí uplyne letos 140 let.

Auguste Jean Fresnel[5]) narodil se dne 10. května 1788 v městečku Broglie v Normandii. Po absolvování lycea v Caen a vysokoškolského studia na technice v Paříži byl zaměstnán při budování silnic a stavbě mostů. Jak mohla však praxe tohoto druhu přispívat studiu optických jevů a k tomu, aby Fresnel mohl vystoupit před učený svět jako nejhorlivější zastánce a posléze dovršitel vítězství Huygensovy vlnové teorie světla?

Rozhodující obrat přivodily tehdejší pohnuté události politické.

---

[1]) Vojtěch Zamarovský, Za sedmi divy světa, Praha, SNDK 1963, str. 31.

[2]) Einstein - Infeld, Fyzika jako dobrodružství poznání, Družstevní práce v Praze 1945, str. 112.

[3]) Ludwig Boltzmann (1844 až 1906), geniální teoretik, zabýval se studiem zákonitostí tepelného záření, kinetickou teorií hmoty, hlavními větami termodynamiky aj.

[4]) Čtenářům našeho časopisu jsem jej vylíčil v článku Huygensova teorie světla, Rozhledy, roč. 38, čís. 7, str. 327 až 331.

[5]) Čti: Ogyst Žán Frenel.

Francouzský císař Napoleon byl po porážce u Lipska (v říjnu 1813) zbaven trůnu a odebral se do vyhnanství na ostrov Elbu. Avšak již v březnu 1815 se vrátil, přistál v jižní Francii a s armádou, která se k němu přidala, táhl k Paříži. Mladý Fresnel nastoupil jako dobrovolník armády, vyslané králem Ludvíkem XVIII. proti Napoleonovi, upadl však v zajetí, aby brzy nato byl novou vládou zbaven svého úřadu a pod policejním dozorem internován v Nyonsu (v departementu Drôme). Napoleonovo císařství vzalo však bitvou u Waterloo záhy za své. Po restauraci Bourbonů byl Fresnel ovšem znovu přijat v dřívější úřad. Od roku 1818 bydlel pak již trvale v Paříži, pověřen zkoušením na polytechnické škole, vrchním dozorem nad plánovaným vydlažďováním pařížských ulic, řízením služby u francouzských majáků a jinými vyčerpávajícími úkoly. Práce ty podlomily však záhy jeho zdraví. Od roku 1823 člen francouzské Académie des Sciences, od roku 1825 člen anglické Royal Society, zanechal pro nemoc veškeré činnosti a odebral se na venek do Ville d'Avray u Paříže, kde poměrně mlád, 39letý dne 14. července 1827 zemřel.

„Stodenní" císařství Napoleonovo v roce 1815 bylo ve Fresnelově životě právě onou epizódou, jež obrátila pozornost mladého a nadaného inženýra od všedních úkolů k hlubšímu studiu fyzikální optiky[6].) V době nucené nečinnosti zajížděl do Paříže, kde se seznámil s vynikajícím fyzikem Aragem,[7]) jenž se právě zabýval experimentálním i teoretickým výzkumem nejsložitějších optických jevů (roku 1811 objevil úkazy chromatické polarizace, rotační polarizace aj.). Řada vědeckých prací, jež Fresnel uveřejnil v letech 1816 až 1826, svědčí o tom, jak značný je podíl, kterým významně přispěl k prohloubení našeho poznání podstaty světla.

Své práce v optice začal Fresnel studiem interference světla. Pokračuje v pracích anglického lékaře Thomase Younga (1773 až 1829), jenž vysvětlil interferencí vznik barev tenkých vrstev,[8]) Fresnel vyšetřoval také vliv mnohonásobných odrazů, k nimž dochází ve vrstvě. K tomu je třeba znát vztahy mezi intenzitami paprsku dopadajícího, odraženého i lomeného a stavy jejich polarizace. Fresnel rozřešil tento problém úspěšně a stanovil poměr amplitud kmitů v uvedených paprscích výrazy, kterým říkáme dodnes vzorce Fresnelovy. Paprsků, které vycházejí z téhož místa světelného zdroje (tzv. paprsků koherentních), dosáhl Fresnel odrazem na dvou rovinných zrcadlech, jež svírají úhel velmi blízký 180° (Fresnelova zrcadla), nebo lomem na dvou hranolech s velmi malým

[6]) Úspěchy, kterých Fresnel dosáhl v osvětlovací technice majáků, se zde podrobněji zabývat nemohu. Soustavami čoček, které zavedl do praxe (tzv. Fresnelovy čočky zónové), odstranil zejména nebezpečí popraskání vlivem vysoké teploty mohutného světelného zdroje.

lámavým úhlem (Fresnelovo biprisma, Fresnelův dvojhran). Měřil rovněž vzdálenost dvou sousedních interferenčních proužků a první z ní stanovil také vlnovou délku světla.

Svými úvahami Fresnel pomocí interference doplnil a zpřesnil Huygensův princip. Z jednoduchého podání, v němž bývá vyložen v učebnicích,[9]) není zřejmo, proč vlnění nevzniká také mimo vnější obalující plochu. Fresnel dokázal, že v bodech ležících mimo vnější obálku se vlnění, jež tam z různých středů rozruchu přicházejí, interferencí vzájemně ruší.

Ohyb (difrakce) světla byl v té době problémem, na jehož rozřešení byla vypsána cena Akademie. Některé ohybové jevy byly sice popsány již v 17. století, správný jejich výklad, založený na vlnové teorii a interferenci světla, podal však teprve Fresnel v pojednání Mémoire sur la diffraction de la lumière (1818) na základě úspěšných pokusů, jež prováděl s přispěním Aragovým většinou v Paříži, neboť na venkově k nim neměl potřebných pomůcek. Nespokojil se jednoduchými ohybovými jevy (označovanými zpravidla jménem Fraunhoferovým),[10]) jež nastávají ohybem svazku rovnoběžných paprsků, ale Fresnel užíval také blízkých zdrojů a rozbíhavého svazku kuželového, do něhož vkládal přímou hranu, stěnu s kruhovým otvorem nebo štěrbinu. Povaha těchto ohybových jevů i jejich matematická teorie[11]) byla ovšem velmi složitá, cena Akademie byla proto přiznána Fresnelovi.

K vysvětlení polarizace světla Huygensova teorie v tehdejší podobě nestačila. Jako Huygens i Fresnel považoval světlo za mechanický vlnivý pohyb světelného éteru, podmíněný vlastní pružností éteru. Elastická vlnová teorie světla pokládala éter za jemné, nesmírně řídké prostředí, podle představ Huygensových za nevažitelný plyn, jenž vyplňuje celý vesmír a prostupuje všechnu hmotu i vzduchoprázdný prostor. Huygens vyzdvihuje příliš analogie mezi vlněním světelným a zvukovým, předpokládal, že vlnění světelného éteru je jako vlnění každého plynu podélné. Newton se však právem táže:[12]) „Nemá světelný paprsek rozličné strany s rozličnými vlastnostmi?“ Poznáme-

---

[7]) Arago Dominique François (1786 až 1853), profesor polytechnické školy v Paříži, proslul také studiem magnetických účinků elektrického proudu, rotačního magnetismu (Aragův rotační magnetismus) aj.

[8]) Cvičení. Na vrstvách větší tloušťky nepozorujeme vznik interferenčních zjevů. Vysvětlete, proč!

[9]) Viz učebnici fyziky pro 10. ročník (1954), čl. 108.

[10]) Josef Fraunhofer (1787 až 1826) pozoroval roku 1814 tmavé čáry ve slunečním spektru (čáry Fraunhoferovy); vynalezl také ohybovou mřížku a měřil jí délku vlny jednotlivých čar.

nává zároveň, že u podélného vlnění by to nebylo možné. Také Fresnelovi se zdá, že paprsek je pro jisté směry kolmé „vybíravý". V dopise strýci Mériméeovi si Fresnel v roce 1814 stěžuje, že polarizace světla mu podle představ Huygensových zůstává záhadnou, že nechápe, co podivné slovo polarizace může vůbec znamenat. V pojednání Considérations mécaniques sur la polarisation de la lumière (1821) neváhal se proto přiklonit k myšlence, kterou naznačil roku 1817 Young v dopise Aragovi: „Poněvadž polarizovaný paprsek má v různých směrech k němu kolmých různé vlastnosti, může být světlo jen vlněním příčným."

Ačkoliv polarizační úkazy jsou přímým důkazem učiněného závěru, setkal se nový názor nejprve s velkým odporem fyziků, kteří připomínali, že příčné kmity i vlny mohou vznikat jen v látkách tuhých, další práce Fresnelovy potvrdily však jeho správnost. Světelný éter není ovšem „vzduchovitý", jak mínil Huygens, nýbrž spíše „rosolovitý", složený z částic. Představujeme si pak, že v nejjednodušším případě, v tzv. světle lineárně polarizovaném, konají se přímočaré kmity éterových částic v rovnoběžných přímkách kolmo na směr paprsku „učesány" v jediné rovině; v obyčejném světle se směr kmitů neustále, naprosto nepravidelně a tak rychle mění, že paprsek své polární vlastnosti ztrácí. Fresnel objevil však také případy složitější polarizace kruhové a eliptické a vysvětlil pomocí nich jevy polarizace rotační, pozorované Aragem; ve spolupráci s ním vysvětlil i úkazy polarizace chromatické.

Polarizace světla může nastat odrazem, lomem, zvláště dokonale pak dvojlomem v krystalech, jemuž Fresnel věnoval pojednání Mémoire sur la double réfraction (1821), poctěné rovněž cenou Akademie. Aby vyložil úkaz dvojlomu, Fresnel předpokládal, že pružnost světelného éteru je v anizotropních krystalech v různých směrech různá. Okolnost, že optické vlastnosti látky souvisí vskutku s její pružností (optika byla podle tehdejších názorů jako nauka o pružnosti éteru součástí mechaniky), dokládá vlastní zkušeností,[13]) že sklo se tlakem stává dvojlomným. Podrobné (v mnohém směru průkopnické) studium úkazů, které vznikají při průchodu světla dvojlomnými krystaly, vedlo Fresnela k úvahám o geometrii pomocných ploch, jež nesou dodnes jeho jméno, např. Fresnelovy

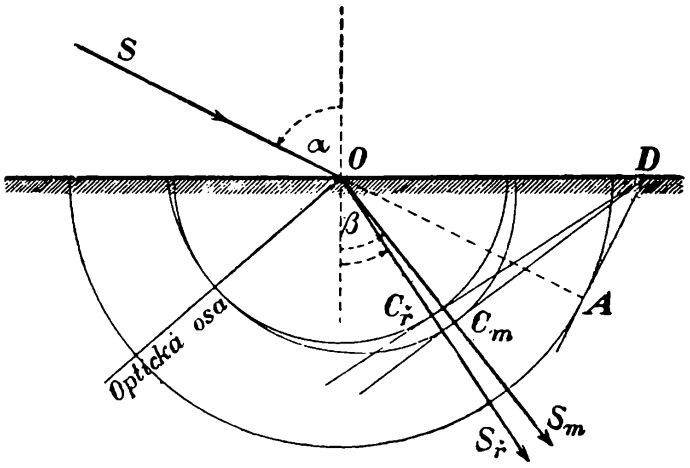
[11]) Čtenáře, kteří znají základy počtu infinitezimálního, bude zajímat, že Fresnel dospěl při této příležitosti k integrálům

$$\int_0^\infty \sin x^2 \,.\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos x^2 \,.\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi},$$

zvaným proto integrály Fresnelovy.

[12]) Viz Newton, Optics (1717), Third Book, Query 26.

vlnoplochy, Fresnelova elipsoidu[14]) aj. Fresnel stal se tím zakladatelem nového vědního oboru — optiky krystalů.



Obr. 1. Huygensova konstrukce řádného a mimořádného paprsku.

Snaha vybudovat z Huygensovy myšlenky, že světlo je vlnění, důslednou teorii optických jevů, příkladná pracovitost a vytrvalost i dosažené úspěchy zajišťují Fresnelovi přes krátkost jeho života v dějinách fyziky čestné místo.

Řešení úloh z minulého ročníku (Pokračování)

● Matematika

8. Určete všechna přirozená čísla x, pro něž platí $s(x) = 2x - 41$, kde $s(x)$ značí ciferný součet čísla x.
(Došlo 35 řešení) *Jiří Sedláček*

Řešil Milan Čmelík, 3.b SVVŠ, Liberec:

Dejme tomu, že x je n-ciferné, kde $n \geqq 3$. Pak je $s(x) \leqq 9n$, $x \geqq 10^{n-1}$, $2x - 41 \geqq 2 \cdot 10^{n-1} - 41$, tedy $2 \cdot 10^{n-1} - 41 \leqq 9n$. To však neplatí, nýbrž pro $n \geqq 3$ platí $2 \cdot 10^{n-1} - 41 > 9n$, jak se můžeme přesvědčit matematickou indukcí.

[13]) Před Fresnelem učinil ji však již David Brewster (1781 až 1868), autor známé závislosti polarizačního úhlu α na relativním indexu lomu n_{12} prostředí (Brewsterův zákon: $\operatorname{tg} \alpha = n_{12}$).

[14]) Užitím vlnoplochy tvaru rotačního elipsoidu lze známou Huygensovu konstrukci (cit. učebnice, str. 149, obr. 105) doplnit a stanovit také směr paprsku mimořádného, jak pro případ negativního krystalu (např. islandského vápence, apatitu, turmalínu aj.) ukazuje připojený obr. 1.

Číslo x tedy zapíšeme ve tvaru

$$x = 10a + b\,,$$

kde a, b jsou celá čísla od 0 až do 9. Podle textu nyní platí

$$a + b = 20a + 2b - 41$$

neboli

$$19a + b = 41\,,$$

tj.

$$b = 41 - 19a\,.$$

Nyní je zřejmé, že a může nabýt nejvýše hodnoty 2, aby totiž platilo $b \geqq 0$. Dále musí platit $41 - 19a \leqq 9$ čili $a \geqq \frac{32}{19}$. Z toho tedy vyplývá, že $a = 2$. Pak podle výše uvedené rovnice platí $b = 3$.

Existuje tedy jediné číslo $x = 23$, které vyhovuje úloze, o čemž se můžeme přesvědčit zkouškou.

Poznámka redakce. Pěkné řešení zaslal Vlastimil Bartoš, SVVŠ, Holešov, který vyřešil naši úlohu v číselné soustavě o základě $m > 4$.

9. V rovině je dán konvexní n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$. Určete počet konvexních čtyřúhelníků $A_iA_jA_kA_l$, jejichž všechny strany jsou úhlopříčky daného n-úhelníka.

(Došlo 20 řešení) *Jiří Sedláček*

Řešil Jan Kastl, SVVŠ JF, Plzeň:

Aby existoval aspoň jeden vyhovující čtyřúhelník, musí zřejmě být $n \geqq 8$. Zvolme pevně vrchol A_1 a zjistěme, kolik existuje vyhovujících čtyřúhelníků $A_1A_jA_kA_l$. Uvažujme $n - 3$ vrcholů (bez A_n, A_1, A_2); body A_j, A_k, A_l jsou některé 3 z těchto $n - 3$ bodů. Počet možných trojic je $\binom{n-3}{3}$. Od tohoto počtu zřejmě musíme odečíst počet těch trojic, kde některé dva body jsou sousedními vrcholy daného n-úhelníka. Mezi uvažovanými vrcholy $n - 4$ dvojic sousedních vrcholů. Ke každé takové dvojici máme $n - 3 - 2 = n - 5$ možností pro třetí vrchol. Odečteme tedy číslo $(n - 4)(n - 5)$. Přitom jsme ale některé trojice odečetli dvakrát; totiž zřejmě trojice po sobě následujících vrcholů (např. $A_3A_4A_5$), je jich $n - 5$. Tedy počet vyhovujících čtyřúhelníků $A_1A_jA_kA_l$ je

$$\binom{n-3}{3} - (n-4)(n-5) + (n-5) = \tfrac{1}{6}(n-7)(n-6)(n-5)$$

Stejný výsledek bychom dostali, kdybychom zvolili místo A_1 pevně vrchol A_2, potom A_3, atd. Uvážíme-li, že při tomto postupu každý čtyřúhelník počítáme čtyřikrát, je zřejmě hledaný počet roven

$$\frac{1}{24}(n-7)(n-6)(n-5)n\,.$$

(Pokračování)

RECENZE

M. Menšík, O. Setzer, K. Špaček:

Deskriptivní geometrie

Příručka pro přípravu na vysokou školu. SNTL, Praha 1966, svazek II/48 Polytechnické knižnice, str. 226, obr. 295, cena brož. 17 Kčs.

Když vezme čtenář do rukou kteroukoliv knihu, padne jeho zrak v prvé řadě na obálku. Ta má být pro čtenáře příslivem obsahu. Obraz na obálce jmenované knížky je dílem Miroslava Housky a chce v uměleckém podání znázornit větu, že elipsa je geometrickým místem středů kružnic, dotýkajících se dvou daných kružnic. Autor obálky byl zřejmě k tomuto obrazu inspirován obrázkem 108 této knížky, avšak podstatu konstrukce asi nepochopil a rovněž svůj návrh nedal autoru textu k posouzení, protože by nemohl autor tento nepodařený umělecký výtvor akceptovat. Tak daleko by nemělo umělecké pojetí zacházet. Podobné závady jsou v poslední době v učebnicích bohužel stále častější.

Podle podtitulu má být knížka příručkou pro přípravu z deskriptivní geometrie na vysokou školu. Obsahuje čtyři kapitoly, a to 53 strany o planimetrii (autor Špaček), 63 strany o kuželosečkách (autor Setzer), 49 stran o stereometrii (autor Špaček) a 49 stran o základech promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (autor Menšík). Obsahuje tedy celkem 77,1 % konstruktivní geometrie a jen 22,9 % vlastní deskriptivní geometrie. Neodpovídá proto název knihy „Deskriptivní geometrie" svému obsahu. Příručka je tedy spíše snesením učiva konstruktivní geometrie ze střední školy. Titul i podtitul knížky uvádějí kupujícího zájemce v omyl, že v knížce najde vše, co bude potřebovat znát z deskriptivní geometrie pro přípravu k přijímací zkoušce na vysokou školu. Příručka však neobsahuje minimum látky, předepsané pro uve-

denou zkoušku. Taková příručka, jak je uvedena v titulu a podtitulu knížky, je skutečně velmi potřebná a přítomná knížka by bývala mohla daný úkol plnit, kdyby rozsah látky z vlastní deskriptivní geometrie byl rozšířen podle dnešního obsahu středoškolských osnov na úkor stereometrie a zejména planimetrie. Rozsah látky o kuželosečkách je přiměřený. Vina na nepoměru v rozsahu jednotlivých kapitol příručky nejde ovšem na vrub autorů.

Velkým kladem příručky mělo být trojbarevné provedení obrázků, které by usnadnilo studium, protože na prvý pohled by byly zřejmé prvky dané (modrý tisk), užité konstrukce (černý tisk) a výsledek (červený tisk). Je třeba litovat, že soutisk barev byl proveden velmi špatně. Jako příklad nejhoršího soutisku je obr. 102. Jedna tečna vyšla jako sečna, druhá tečna jako nesečna a obě tečny se protínají asi 2 mm od bodu, z kterého měly být vedeny. Velmi rušivě působí, jestliže úseky jedné a téže přímky jsou vinou chybného soutisku provedeny jako lomená čára.

Nepřesný soutisk se zvlášť citelně projevuje v úlohách o kuželosečkách. V oddíle o planimetrii jsou některé obrázky vadné, např. obr. 66 (přímá nebo nepřímá shodnost obrazců přece nezávisí na označení vrcholů), obr. 74 (D^1D není rovnoběžné se směrem s) aj.

Na opravence sice nakladatelství omlouvá vadné barevné soutisky sníženou kvalitou papíru, je však věcí tiskárny, aby pro náročný tisk opatřila vhodný papír. Zdá se též, že při zmenšování obrázků štočků pro jednotlivé barvy nebylo zachováno stejné měřítko zmenšení. Čtenář, který se má z příručky učit, nedokáže proto mnohdy posoudit, kde je barevný tisk spolehlivý.

Sloh kapitol o kuželosečkách a o základech Mongeova promítání je jasný a konstrukce jsou srozumitelně podány. V kapitole o planimetrii byl by na mnoha místech potřebný jasnější způsob vyjádření. Počet nedopatření je tam také značný.

Správné je, že jsou ke každé partii připojeny příklady pro procvičení. Zvlášť dobré jsou příklady na kuželosečky a na základy promítání.

Souhrnně lze říci, že vhodná příručka pro přípravu z deskriptivní geometrie na vysokou školu je velmi potřebná, zvlášť pak taková, která by byla vybavena několikabarevnými obrázky. Uvedená knížka tento úkol plní jen zčásti. Příručka je dobrá zejména v ruce učitele, ať již středních všeobecně vzdělávacích škol, či středních odborných škol nebo kursů Socialistické akademie. Samouci musí ovšem dát pozor na vady, které byly vytčeny. Při event. příštím vydání nutno se vyvarovat uvedených, zejména reprodukčních nedopatření.

Oldřich Jeništa

MATEMATIKA

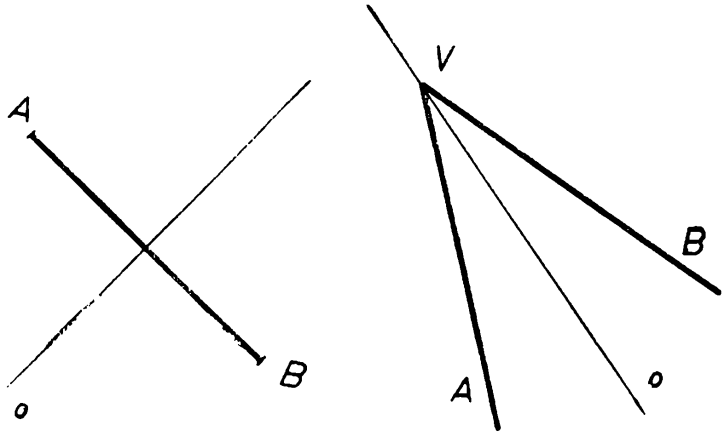
Užití dvojkové soustavy při dělení úseček a úhlů

DOC. FRANTIŠEK DUŠEK, Ústí nad Labem

Číselných soustav lze použít při řešení úloh z různých odvětví matematiky. Jako ukázku uvedeme užití dvojkové soustavy v geometrii při dělení úseček a úhlů na stejné díly.

Rozdělit úsečku nebo úhel na dva stejné díly dovedeme bez rýsovacích pomůcek překládáním papíru, na němž jsou tyto útvary narýsovány. Např. úsečku AB rozpůlíme přeložením papíru tak, aby bod B padl na bod A, podobně rozpůlíme úhel AVB přeložením tak, aby rameno VA přilehlo na rameno VB. Přímka o, podél které se papír přehnul (obr. 1), je osou půleného útvaru.

Dalším postupným překládáním vzniklých polovin lze úsečku nebo



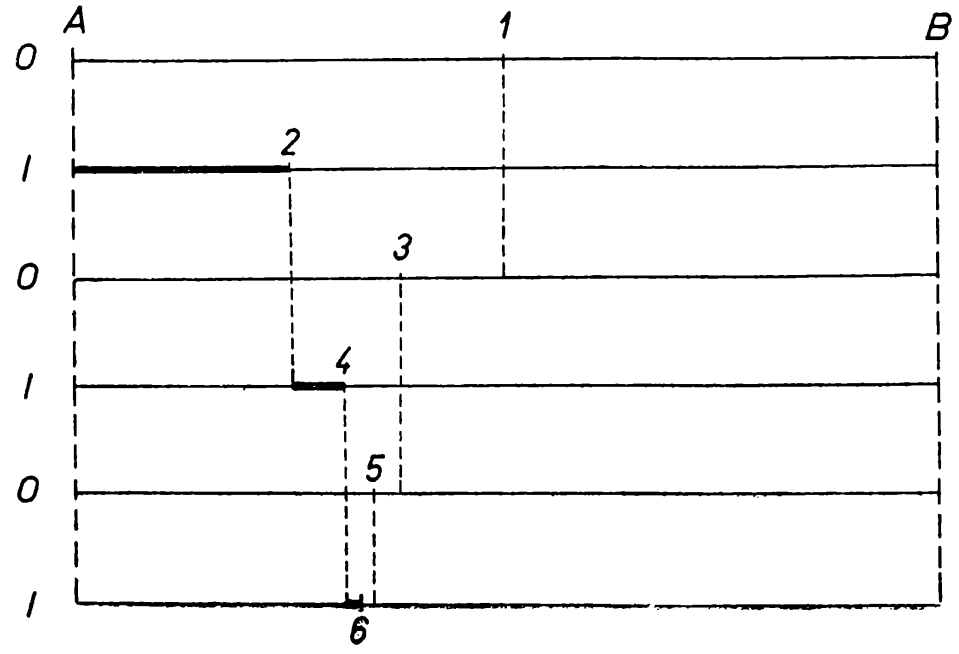
Obr. 1

úhel rozdělit na 2^n stejných dílů, nebo sestrojit $\frac{m}{2^n}$ úsečky či úhlu (m a n jsou přirozená čísla). Této jednoduché operace můžeme použít i při dělení úsečky nebo úhlu na jiný počet stejných dílů než na 2^n. Dejme si za úlohu, např. sestrojení třetiny dané úsečky AB nebo úhlu AVB. Jde tu vlastně o vytvoření třetiny jako součtu poloviny, čtvrtiny, osminy atd. Úlohu můžeme řešit tak, že zlomek $\frac{1}{3}$ vyjádříme ve dvojkové soustavě, kde jednička za čárkou, oddělující jednotky, znamená na prvním místě polovinu, na druhém čtvrtinu, na třetím osminu atd. Protože číslo 3 není mocninou čísla 2, vyjde při převodu periodický zlomek s periodou nejvýše dvojcifernou, neboť při dělení mohou vyjít jen dva různé zbytky, I nebo I0 (pro jednoduchost budeme zapisovat jedničku ve dvojkové soustavě znakem I — římská jednička). Dělení provedeme algoritmem známým z desítkové soustavy

$$1 : 3 = \mathrm{I} : \mathrm{II} = 0{,}0\mathrm{I}0\mathrm{I}0\mathrm{I} \qquad = 0{,}\overline{0\mathrm{I}}\,.$$

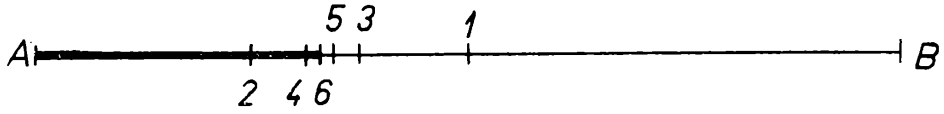
I00
II
I00
II
I00

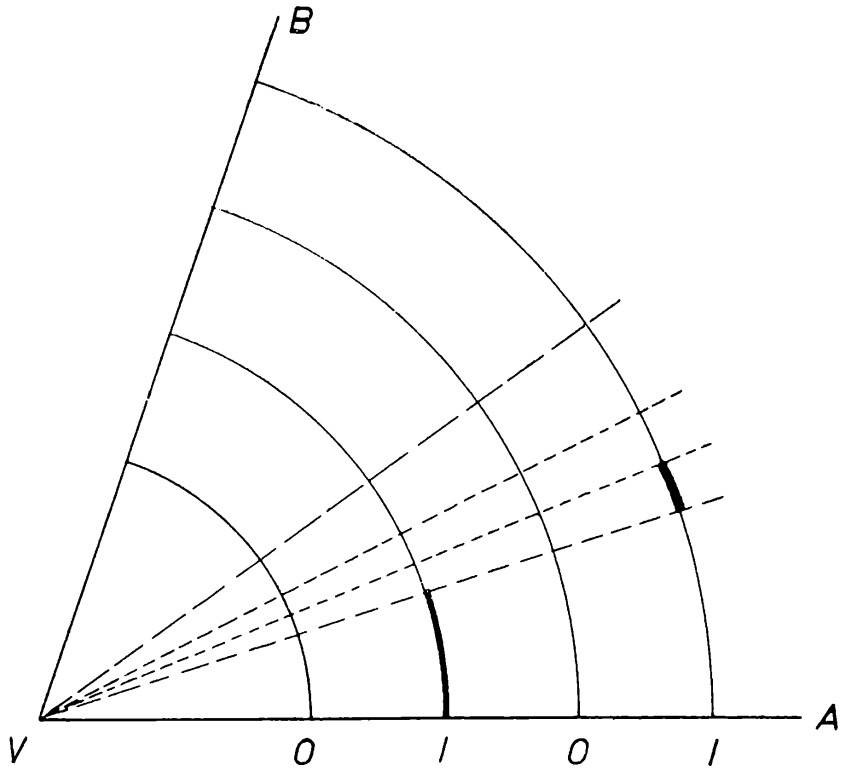
Podíl praví, že třetina je součtem čtvrtiny, šestnáctiny atd., obecně dílů velikosti $\frac{1}{2^{2n}}$ Konstrukce je pouze přibližná, ale s libovolnou přesností v rámci konstruktivních možností. Zápis $\frac{1}{3} = 0{,}0\mathrm{I}0\mathrm{I}0\mathrm{I}\ldots$ znamená, že sčítáme jen zlomky vzniklé při každém druhém půlení (přehýbání), jak je pro úsečku AB vyznačeno na obr. 2 odděleně a na obr. 3 souhrnně.



Obr. 2

Obr. 3





Obr. 4

Pro dělení úsečky má naznačená konstrukce jen teoretický význam, protože rozdělit úsečku na daný počet stejných dílů dovedeme přesnou konstrukcí všeobecně známou. Při dělení úhlů však může mít tato konstrukce praktický význam, protože rozdělit úhel na n stejných dílů umíme přesně jen pro některá n. Např. trisekci čili rozdělení úhlu na tři stejné díly dovedeme přesně jen pro některé úhly, a tu je naznačený způsob jednou z trisekcí přibližných. Postup je obdobný jako při dělení úsečky a je znázorněn na obr. 4.

Zkoušku správnosti uvedené metody lze provést vyjádřením čísla $0{,}\overline{0\mathrm{I}}$ v desítkové numeraci

$$0{,}\overline{0\mathrm{I}} = 0{,}0\mathrm{I}0\mathrm{I}0\mathrm{I} \qquad = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} +$$

Součet této nekonečné konvergentní geometrické řady vypočteme podle vzorce

$$s = \frac{a_1}{1 - q},$$

dosazením $a_1 = q = \frac{1}{4}$ a obdržíme

$$s = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Cvičení. Doporučuji čtenáři, aby si promyslel použití uvedené myšlenky při dělení úsečky nebo úhlu na jiné díly než na třetiny, popř. sestrojení dané části úsečky nebo úhlu, např. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ atd.

Moivreova věta

STANISLAV ŠMAKAL, VŠE, Praha, RNDr. BRUNO BUDINSKÝ, ČVUT

Vznik goniometrických pojmů sahá až do údobí starých Egypťanů, Babylóňanů a Číňanů. Již tato skutečnost sama o sobě svědčí o jejich významu a důležitosti v praxi. Kladnou úlohu zde sehrála především astronomie a rozvoj mořeplavby. Bez goniometrických funkcí si sotva můžeme představit rozvoj takových vědních disciplín jako je geodézie, mechanika apod. Pro každého pracovníka těchto oborů je hlubší znalost goniometrických funkcí naprostou samozřejmostí. Proto také střední škola věnuje jejich výstavbě velkou pozornost.

Základní vlastnosti a vztahy mezi goniometrickými funkcemi znáte ze školy. Nechceme zde opakovat známé věci. Způsob, kterým se zavádějí goniometrické funkce v současné době na střední škole, není jediný. Jiný způsob se opírá o pojem komplexního čísla.

Víte jistě, že každé nenulové komplexní číslo

$$a = a_1 + a_2 \mathrm{i}$$

můžeme zapsat v goniometrickém tvaru

$$a = |a| (\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$$

Přitom

$$|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$

je tzv. *absolutní hodnota* komplexního čísla a φ je *argument*, který má nekonečně mnoho velikostí. Je-li α jedna z těchto velikostí, potom všechny velikosti argumentu φ můžeme zapsat ve tvaru

$$\varphi = \alpha + 2k\pi ,$$

kde k je libovolné číslo celé. Jestliže $|a| = 1$, říkáme takovému komplexnímu číslu *komplexní jednotka*. Každou komplexní jednotku můžeme psát ve tvaru

$$a = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi$$

Není jistě bez zajímavosti, že téměř všechny vztahy mezi goniometric-

kými funkcemi jsou přímým důsledkem poučky, které se v literatuře říká Moivreova věta. Uvádíme ji i s důkazem.

V ě t a. *Součin dvou komplexních jednotek, z nichž první je určena orientovaným úhlem o velikosti* α, *druhá orientovaným úhlem o velikosti* β, *je opět komplexní jednotka, určená orientovaným úhlem o velikosti* $\alpha + \beta$.

Větu zapíšeme takto:

$$(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha + \beta)$$

D ů k a z. Komplexní jednotky s příslušnými úhly α, β označíme r_α, r_β. Budeme tedy psát

$$r_\alpha = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\,,\quad r_\beta = \cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta$$

Výsledek součinu označíme r, tj. $r = r_\alpha r_\beta$.

Chceme dokázat:

1. $r = r_\alpha r_\beta$ je opět komplexní jednotka,
2. jednotka r je určena orientovaným úhlem o velikosti $\alpha + \beta$.

Víme, že absolutní hodnota součinu dvou komplexních čísel je rovna součinu jejich absolutních hodnot. Proto

$$|r| = |r_\alpha r_\beta| = |r_\alpha|\,|r_\beta| = 1 \quad 1 = 1$$

Tím je prvá část tvrzení dokázána. Přistoupíme k důkazu druhé části. Výslednou jednotku r můžeme psát ve tvaru

$$r = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,, \tag{1}$$

kde

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,\\ \sin\varphi &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned} \tag{2}$$

Výsledky (2) snadno dostaneme, jestliže provedeme naznačené násobení na pravé straně rovnosti

$$r = (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$$

a porovnáme reálné a imaginární složky. Chceme dokázat, že φ ze vzorce (1) má velikost $\alpha + \beta$. Hledejme proto složky komplexní jednotky $x = x_1 + x_2\,\mathrm{i}$, která je určena orientovaným úhlem o velikosti $\alpha + \beta$. Budou-li mít tvar (2), potom — vzhledem k určenosti komplexního čísla — budeme s důkazem u konce. Pro velikost neorientovaného úhlu dvou nenulových vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ platí vzorec

$$\cos\omega = \frac{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

Symbol $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}$ nazýváme skalárním součinem vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Hodnota skalárního součinu je definována takto: $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Předpokládáme, že vzorec pro úhel dvou vektorů zná čtenář ze školy. Vektory $\mathbf{r}_\beta$, $\mathbf{x}$ (obr. 1)[1]) svírají neorientovaný úhel o velikosti $\bar{\alpha}$. Snadno by se však ukázalo, že $\cos\bar{\alpha} = \cos\alpha$. Platí proto vztah

$$\cos\alpha = \mathbf{x}\quad\mathbf{r}_\beta\,,$$

[1]) Vektory $\mathbf{r}_\beta$, $\mathbf{x}$ jsou obrazy komplexních čísel r_β, x v Gaussově rovině.

neboť $|\mathbf{r}_\beta| = 1$, $|\mathbf{x}| = 1$. Provedeme-li skalární součin vektorů na pravé straně, dostaneme

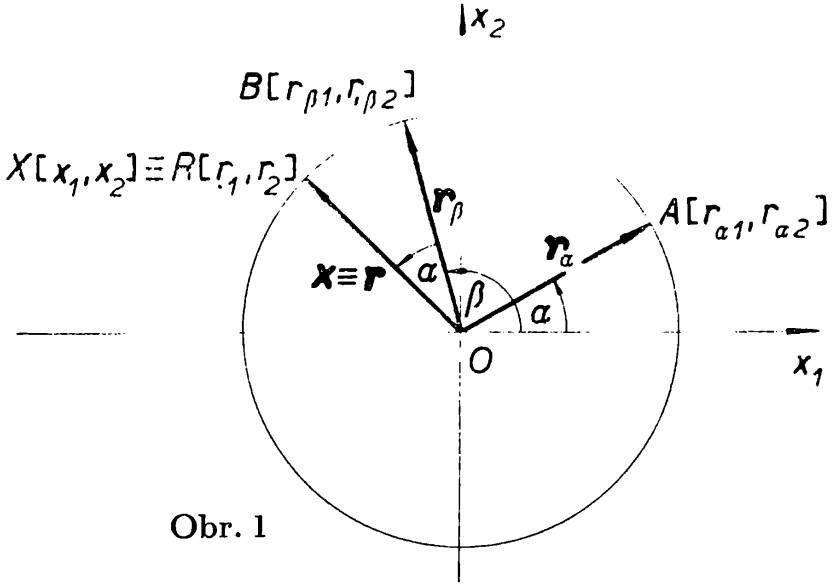
$$\cos\alpha = x_1 \cos\beta + x_2 \sin\beta ,$$

kde složky x_1, x_2 jsou vázány vztahem

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$$

Pro neznámé x_1, x_2 tak získáme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x_1 \cos\beta + x_2 \sin\beta &= \cos\alpha , \\ (x_1)^2 + (x_2)^2 &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$



Obr. 1

Z první rovnice soustavy (3) vyjádříme x_2

$$x_2 = \frac{\cos\alpha - x_1 \cos\beta}{\sin\beta} , \tag{4}$$

kde $\beta \neq k\pi$ (k je libovolné číslo celé). Po dosazení za x_2 do druhé rovnice a snadné úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou x_1

$$(x_1)^2 - 2x_1 \cos\alpha \cos\beta + \cos^2\alpha - \sin^2\beta = 0 \tag{5}$$

Rovnice (5) má vždy řešení, neboť diskriminant $D \geqq 0$. Platí totiž

$$\begin{aligned} D &= 4\cos^2\alpha\cos^2\beta - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\beta = \\ &= -4\cos^2\alpha(1 - \cos^2\beta) + 4\sin^2\beta = \\ &= -4\cos^2\alpha\sin^2\beta + 4\sin^2\beta = \\ &= 4(1 - \cos^2\alpha)\sin^2\beta = \\ &= 4\sin^2\alpha\sin^2\beta \end{aligned}$$

Z posledního výrazu je už vidět, že $D \geqq 0$. Kořeny rovnice (5) označíme x_1, x_1'. Jsou to čísla

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta , \\ x_1' &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Dosadíme-li do (4), získáme x_2, x_2'

$$x_2 = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$x_2' = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

Zapišme přehledně dvojice kořenů, které jsou řešením soustavy (3)

$$x_1 = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,$$
$$x_2 = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\,, \tag{6}$$
$$x_1' = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,,$$
$$x_2' = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \tag{7}$$

Každé komplexní číslo je svými složkami jednoznačně určeno. Jednotka x je proto dána pouze jednou dvojicí čísel, tudíž čísly (6) nebo (7). Snadno se totiž ukáže, že neplatí identicky $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$. Abychom určili jednotku x, stačí aplikovat náš postup na vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{r}_\alpha$ (obr. 1). Tyto vektory svírají neorientovaný úhel o velikosti $\overline{\beta}$. Jelikož $\cos\overline{\beta} = \cos\beta$ obdržíme zcela obdobně jako v prvém případě soustavu

$$\cos\beta = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha\,,$$
$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \tag{8}$$

Soustava (8) má stejný tvar jako soustava (3). Nemusíme ji tedy řešit. Stačí, jestliže ve výsledku zaměníme α a β. Také podmínka ze (4) má tvar $\alpha \neq k\pi$. Řešením jsou proto dvojice čísel

$$x_1 = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,$$
$$x_2 = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, \tag{9}$$
$$x_1'' = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,,$$
$$x_2'' = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \tag{10}$$

Jelikož složky jednotky x musí vyhovovat jak soustavě (3), tak soustavě (8), máme jedinou možnost. Jsou to čísla (6), respektive (9). Srovnáme-li nyní jednotku x s jednotkou r, určenou rovnicemi (1) a (2), vidíme, že $x = r$, tedy $\varphi = \alpha + \beta$. Je tedy jednotka určená orientovaným úhlem $\alpha + \beta$ právě ta jednotka, která je výsledkem součinu jednotek s orientovanými úhly α, β.

Tím je důkaz věty proveden pro $\alpha \neq k\pi$, $\beta \neq k\pi$.

Důkaz zbývá doplnit v případech, že některá z jednotek, které vystupují v součinu, je určena orientovaným úhlem $k\pi$. Jde tedy o jednotky 1, -1. Snadno se ukáže, že podmínka souvisí pouze s početním postupem. Kdybychom v rovnicích (3) a (8) vyjádřili místo x_2 neznámou x_1 a tu dosazovali do rovnice

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1\,,$$

museli bychom vyloučit úhel

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}\,.$$

Jednotku x bychom dostali zřejmě ve stejném tvaru, vyloučené jednotky by však byly i a $-i$, zatímco s jednotkami 1, -1 by bylo všechno

v pořádku. Podrobný výpočet si již čtenář snadno provede sám a tím důkaz Moivreovy věty ukončí.

Větu, kterou jsme dokázali, objevil významný matematik 18. století Abraham de Moivre[2]) (1667—1754). Věta však byla poprvé uveřejněna až v roce 1748 v slavné Eulerově knize Introductio in analysin infinitorum ve tvaru

$$(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi$$

S důsledky Moivreovy věty se seznámíme příště.

Řešení logických úloh pomocí grafů

JAROSLAV ŠEDIVÝ, PF, Praha

Čtenářům Rozhledů je jistě známo, že matematika a logika jsou velmi příbuzné vědy svou podstatou i vnější podobou (užíváním písmen a symbolických zápisů). Základní logickou teorií je *výroková logika*, která pracuje s výroky a s jejich pravdivostními hodnotami „platí", „neplatí" Výrokem se rozumí každá oznamovací věta, které lze jednoznačně přiřadit pravdivostní hodnotu, tj. lze o ní říci, zda platí či neplatí. Slova „lze přiřadit" neznamenají ovšem, že takové přiřazení je okamžitě proveditelné, naznačují spíše, že je myslitelné. Hypotézy jsou také výroky, i když jim v době jejich formulace nedovedeme přiřadit pravdivostní hodnotu.

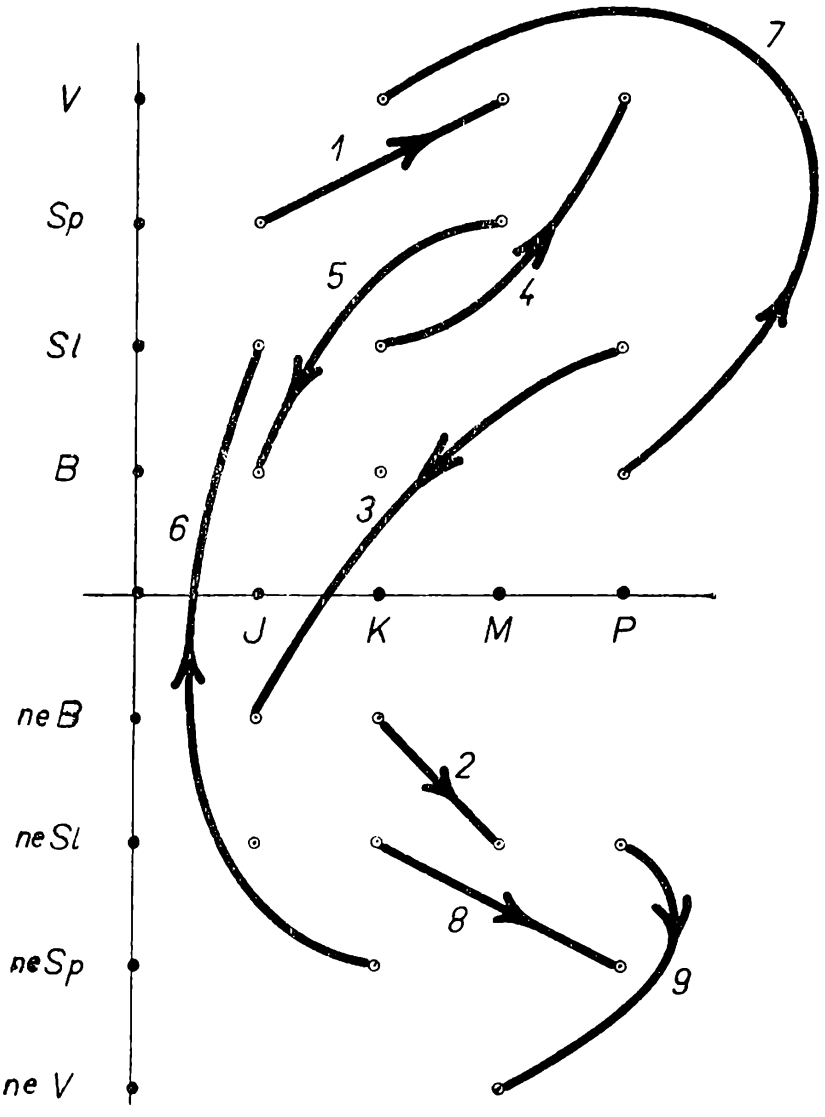
Obdobně jako existují v matematice úlohy, které požadují určení neznámých čísel (např. kořenů rovnic), existují v logice úlohy, které požadují určení pravdivostních hodnot výroků; takové úlohy nazveme stručně *logické úlohy*. Obdobně jako řešíme slovní úlohy vedoucí k matematickým úlohám, řešíme i slovní úlohy, které vedou k logickým úlohám — můžeme je nazvat *slovní logické úlohy*. Pět takových slovních logických úloh představují úlohy detektivního pětiboje uveřejněné ve 4.—6. čísle letošního ročníku Rozhledů. Ve všech těchto úlohách se jednalo o konečnou množinu výroků, jimž bylo třeba přiřadit pravdivostní hodnoty tak, aby byly splněny jisté podmínky obsažené v textu úloh.

Slovní logické úlohy lze řešit rozmanitými způsoby, od „strefování" až po systematický a vyčerpávající postup, který spočívá ve vypsání všech možných kombinací pravdivostních hodnot uvažovaných výroků a vyškrtání těch, které odporují aspoň jedné podmínce úlohy. Lze též

[2]) Vyslov d moávr.

užít různých pomůcek, symboliky, grafů, děrných štítků atd. Příbuznost logických a matematických úloh zdůrazníme, použijeme-li metod typických pro práci s konečnými množinami. Jednou takovou metodou je použití *grafů*, se kterým se seznámíme v tomto článku. Sestrojením grafu, na kterém znázorníme každý výrok kroužkem a každou implikaci $X \to Y$ obloukem se šipkou, získáme přehled o situaci a udržíme si jej i v průběhu řešení. Přesvědčíte se o tom sami; připravte si zatím několik listů papíru a asi 40 čtverečků 1 cm × 1 cm z tužšího papíru (čtvrtky), na polovinu z nich napište výrazně písmeno **P** a na ostatní písmeno **N**.

1. úloha — P r o b l é m s f a n o u š k y — se týká čtyř hochů a čtyř klubů. Jde v ní zřejmě o určení pravdivostních hodnot výroků typu „Hoch X fandí klubu Y“, „Hoch X nefandí klubu Y“, kde $X \in$ {Jirka, Karel, Milan, Petr} a $Y \in$ {Bohemians, Slavia, Sparta, Viktorie} Těchto 32 výroků (X, Y) snadno znázorníme na obr. 1



Obr. 1

„souřadnicovým způsobem", ze kterého je patrno, že kroužek v pravém rohu nahoře představuje výrok „Petr fandí Viktorii" a kroužek v levém rohu dole znázorňuje výrok „Jirka nefandí Viktorii". Čtenář jistě snadno zjistí, který kroužek znázorňuje výrok „Milan fandí Spartě" atd. Šipkami a obloučky znázorníme implikace, jež jsou vyjádřeny podmínkami 1 až 9 v textu úlohy; každý oblouk se šipkou (tzv. *hrana grafu*) vychází z kroužku znázorňujícího předpoklad implikace a směřuje do kroužku znázorňujícího tvrzení implikace. Na obr. 1 jsou připsány k hranám grafu pořadová čísla podmínek úlohy, které jsou jimi znázorněny. Poznamenejme ještě, že v teorii grafů se nazývají kroužky zpravidla *uzly* (někdy též vrcholy) grafu.

Překreslete si na svůj list papíru obr. 1 zvětšený do té míry, že při položení připraveného čtverečku 1 cm × 1 cm na uzel grafu nezakryjete žádný sousední uzel grafu ani šipky na hranách grafu. Položením čtverečku s písmenem **P** na uzel grafu přiřadíme výroku znázorněnému tímto uzlem pravdivostní hodnotu „platí", položením lístku s **N** přiřadíme takovému výroku pravdivostní hodnotu „neplatí". Řešení úlohy se tak stane jistou hrou, jejímž cílem je pokrýt všechny uzly grafu lístky s **P**, resp. **N**. Tato hra, připomínající některé známé zábavné hry, má ovšem závažné poslání a řídí se pravidly, která jsou odrazem logických zákonů a pravidel. Pro všechny logické úlohy jsou závazná tato pravidla (vpravo napíšeme „překlad" každého pravidla do jazyka naší hry na grafu):

(1): Každý výrok má právě jednu pravdivostní hodnotu. — Každý uzel grafu je pokryt jediným lístkem s jedním z písmen **P**, **N**.

(2): Platí-li implikace $X \to Y$ a platí-li výrok X, pak platí i výrok Y. — Je-li počáteční uzel hrany grafu pokryt lístkem s **P**, pak položíme na koncový uzel hrany též lístek s **P**.

(3): Platí-li implikace $X \to Y$ a neplatí-li výrok Y, pak neplatí ani výrok X. — Je-li koncový uzel hrany pokryt lístkem s **N**, pak položíme i na počáteční uzel hrany lístek s **N**.

(4): Jestliže výrok X platí (neplatí), potom jeho negace — výrok non X — neplatí (platí), a obráceně. — Je-li některý uzel pokryt lístkem s **P** (s **N**), pak položíme na uzel představující jeho popření neboli negaci lístek s **N** (s **P**), a obráceně.

Na obr. 1 jsou zobrazeny dvojice výroků „Hoch X fandí klubu Y" a „Hoch X nefandí klubu Y", tj. výrok a jeho negace, jako dvojice uzlů souměrných podle vodorovné osy. V naší úloze je uvedena ještě podmínka, že každý hoch fandí právě jednomu klubu a každému klubu fandí právě jeden hoch. Chceme-li při své hře s pokládáním lístků na uzly grafu vyhovět této podmínce, musíme respektovat další pravidlo hry:

(5): V každém řádku a v každém sloupci horního čtverce grafu je lístek s **P** položen na právě jednom uzlu.

Tohoto pravidla používáme ve dvou situacích: 1. leží-li na některém uzlu v horním čtverci lístek s **P**, položíme na ostatní uzly v jeho sloupci

a řádku lístky s **N**; 2. mají-li tři uzly v jednom řádku nebo sloupci horního čtverce lístky s **N**, pak položíme na čtvrtý uzel lístek s **P**.

Hru s pokládáním lístků lze zahájit, leží-li aspoň na jednom uzlu nějaký lístek. Není-li v podmínkách úlohy řečeno nic, co by nás vedlo k jednoznačnému rozhodnutí, musíme prodiskutovat všechny možnosti. V našem případě musí ležet právě na jednom uzlu v prvním sloupci zleva v horním čtverci lístek s **P**, pokusíme se proto o pokrytí uzlů grafu podle pravidel (1) až (5) celkem čtyřikrát. Nejprve položíme lístek s **P** na uzel (J, B), podruhé na (J, Sl), pak na uzel (J, Sp) a nakonec na uzel (J, V). Protože položením lístku na uzel prohlašujeme příslušný výrok za platný, resp. neplatný, budeme psát přímo slova „platí", „neplatí". Čtenář si může na svém grafu rekonstruovat postup pokládání lístků v prvních dvou případech podle tohoto schematického zápisu:

I. Předpoklad: (J, B) platí.
(5): (K, B), (M, B), (P, B), (J, Sl), (J, Sp), (J, V) neplatí,
(4): (J, ne B) neplatí; (K, ne B), (M, ne B), (P, ne B), (J, ne Sl), (J, ne Sp), (J, ne V) platí,
(3): (K, ne Sp), (P, ne Sl) neplatí,
(2): (K, V), (M, ne Sl) platí,
(4): (K, Sp) platí.

S p o r : Ve druhém sloupci horního čtverce jsou dva uzly s **P**.

II. Předpoklad: (J, Sl) platí.
(5): (K, Sl), (M, Sl), (P, Sl), (J, B), (J, Sp), (J, V) neplatí,
(4): (J, ne Sl) neplatí; (K, ne Sl), (M, ne Sl), (P, ne Sl), (J, ne B), (J, ne Sp), (J, ne V) platí,
(3): (M, Sp) neplatí,
(2): (P, ne Sp), (M, ne V) platí,
(4): (M, V), (P, Sp) neplatí; (M, ne Sp) platí,
(5): (M, B), (K, Sp) platí; (K, B), (P, B), (K, V) neplatí
(5): (P, V) platí,
(4): (M, ne B), (K, ne Sp), (P, ne V) neplatí, (K, ne B), (P, ne B), (K, ne V) platí.

Na všech uzlech grafu leží lístky.

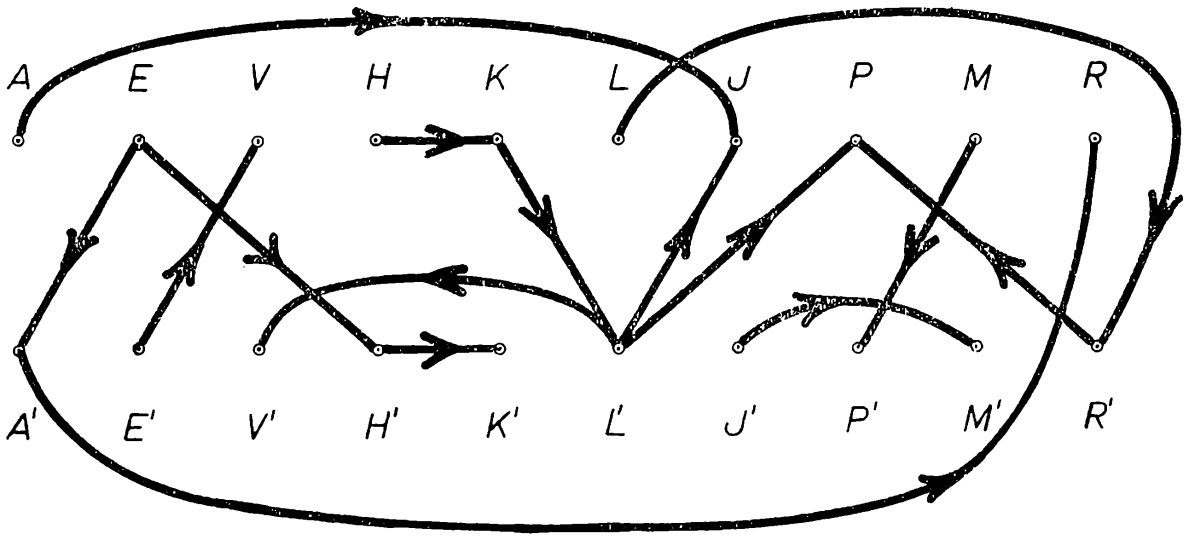
V případě I je zbytečné pokračovat v řešení, jakmile jsme došli ke sporu; v případě II jsme přiřadili během své hry každému ze 32 výroků právě jednu pravdivostní hodnotu. Je nutné provést ještě zkoušku, zda jsou splněny všechny podmínky úlohy; i zde je plná analogie s matematickými úlohami. Pamatujme přitom na to, že *o platnosti implikace nepochybujeme v případech, kdy není splněn její předpoklad!*. Tak chápe implikace výroková logika; při takovém pojetí implikací ověří čtenář snadno, že současná platnost výroků (J, Sl), (K, Sp), (M, B) a (P, V) zajišťuje splnění všech podmínek úlohy. Nalezli jsme tedy při postupu II *jedno možné řešení úlohy*: *Jirka je slávista, Karel sparťan, Milan fandí Bohemians a Petr Viktorii.*

Úplné řešení úlohy získáme obdobným postupem za předpokladů III: (J, Sp) platí a IV: (J, V) platí. Předpoklad III vede ke sporu, předpoklad IV *k druhému možnému řešení úlohy*: *Jirka fandí Viktorii, Karel Spartě, Milan Bohemians a Petr Slávii.* Problém s fanoušky má tedy dvě možná řešení, v každém případě však je Karel sparťan a Milan fandí Bohemians.

2. úloha — S i l v e s t r o v s k ý p r o b l é m — nemá zformulovány podmínky ve tvaru implikací. Vyjádříme-li však všechny podmínky pomocí jednoduchých implikací tvaru $X \to Y$, dostaneme logickou úlohu o něco jednodušší než byla první úloha. Celý silvestrovský problém se „točí" kolem pravdivostních hodnot výroků typu „X přijede", „X nepřijede", kde X je jméno některého z deseti pozvaných. Obsah podmínek úlohy můžeme vyjádřit takto:

1. Ema přijede → Arnošt nepřijede.
2. Ema nepřijede → Věra přijede.
3. Hanka přijede → Karel přijede.
4. Hanka nepřijede → Karel nepřijede.
5. Ema přijede → Hanka nepřijede.
6. Karel přijede → Lída nepřijede.
7. Lída nepřijede → Věra nepřijede.
8. Lída nepřijede → Jirka přijede.
9. Lída nepřijede → Pavla přijede.
10. Arnošt přijede → Jirka přijede.
11. Jirka nepřijede → Mirek nepřijede.
12. Mirek přijede → Pavla nepřijede.
13. Ruda nepřijede → Pavla přijede.
14. Lída přijede → Ruda nepřijede.
15. Arnošt nepřijede → Ruda přijede.

Tento logický rozbor úlohy dovršíme grafickým znázorněním spleti vztahů mezi pravdivostními hodnotami dvaceti výroků. Označíme-li výrok „X přijede" pouze písmenem X a výrok „X nepřijede" symbolem X', můžeme sestrojit přehledný graf, i když tyto symboly připíšeme k jednotlivým uzlům grafu. Na obr. 2 je sestrojen vhodný graf s uzly X na jednom řádku a s uzly X' na rovnoběžném řádku (přitom



Obr. 2

leží X' vždy pod X). Oblouky se šipkami představují 15 implikací zapsaných výše, čtenář jistě pozná i bez očíslování oblouků, kterou implikaci každý z nich představuje.

Pokládání lístků s písmeny **P**, **N** zahájíme po volbě lístku, který položíme na uzel L′ (jde o uzel, který je koncovým nebo počátečním uzlem největšího počtu hran). Naše hra se bude nyní řídit jen pravidly (1) až (4), využijeme ovšem toho, že uzly X, X' leží pod sebou. Čtenář si může přehrát dvě „partie" hry podle následujícího zápisu (nejlépe na svém vlastním, větším grafu):

I. Předpoklad: L′ platí, L neplatí.
(2): J, P, V′ platí; J′, P′, V neplatí,
(3): E′, M neplatí; E, M′ platí,
(2): A′, H′ platí; A, H neplatí,
(2): R, K′ platí; R′, K neplatí.

Na všech uzlech leží lístky.

II. Předpoklad: L′ neplatí, L platí.
(3): K neplatí; K platí,
(2): R′ platí, R neplatí,
(3): A′, H neplatí; A, H′ platí,
(2): J, P platí; J′, P′ neplatí,
(3): E, M neplatí; E′, M′ platí,
(2): V platí; V′ neplatí.

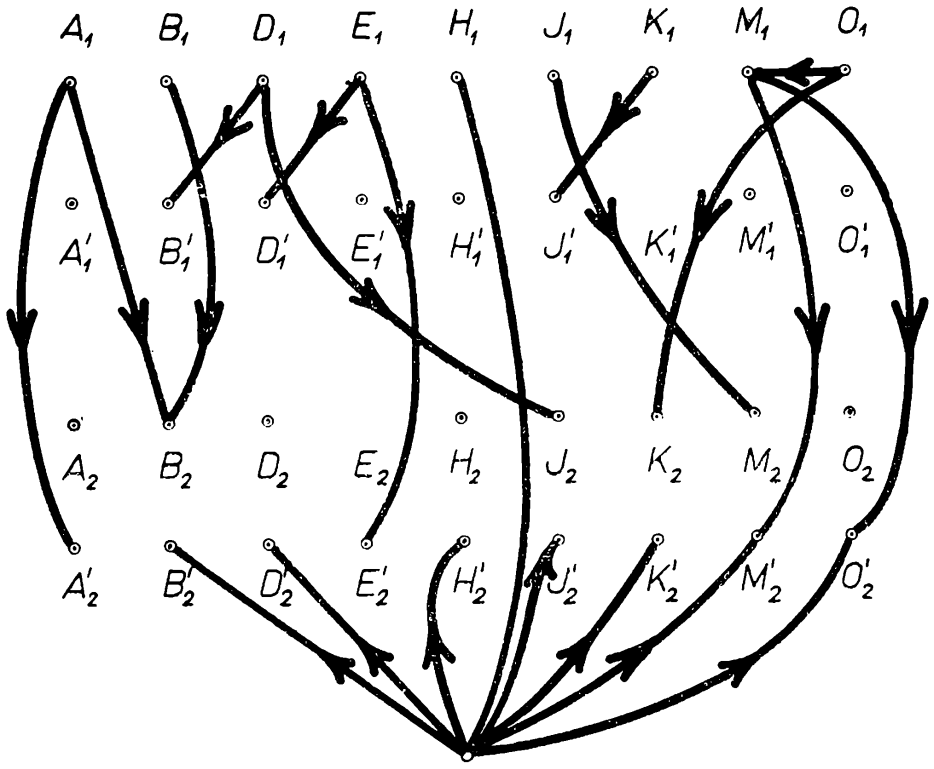
Na všech uzlech leží lístky.

Zkouška ukáže, že v obou případech jsou splněny všechny podmínky úlohy, proto je úloha dvojznačná. *Jednu možnou skupinu hostů tvoří Ema, Jirka, Pavla a Ruda, druhou Arnošt, Věra, Lída, Jirka a Pavla. V každém případě tedy přijede Jirka s Pavlou, určitě nepřijedou Karel, Hanka a Mirek.*

3. úloha — Objevíte viníka? — je proti druhé složitější v tom, že v ní vystupují jednak výroky typu „X je vinen", „X je nevinen", jednak výroky typu „X řekl pravdivý výrok", „X neřekl pravdivý výrok", kde X je jménem jednoho (jedné) z podezřelých žáků (žákyň). Obsah jejich výpovědí lze opět vyjádřit pomocí implikací, nejsložitější je přepis Hančiny výpovědi. Čtenář se snadno přesvědčí, že následující implikace vystihují podmínky úlohy:

Aleš řekl pravdivý výrok → Aleš je nevinen a Blanka je vinna.
Blanka řekla pravdivý výrok → Blanka je vinna.
Dáša řekla pravdivý výrok → Blanka je nevinna a Jirka je vinen.
Emil řekl pravdivý výrok → Dáša neřekla pravdivý výrok a Emil je nevinen.
Hanka řekla pravdivý výrok → Blanka je nevinna, Dáša je nevinna, Hanka je nevinna, Jirka je nevinen, Květa je nevinna, Milan je nevinen, Olda je nevinen.
Jirka řekl pravdivý výrok → Milan je vinen.
Květa řekla pravdivý výrok → Jirka neřekl pravdivý výrok.
Milan řekl pravdivý výrok → Milan je nevinen a Olda je nevinen.
Olda řekl pravdivý výrok → Milan řekl pravdivý výrok a Květa je vinna.

Označme výrok „X řekl(a) pravdivý výrok" symbolem X_1, jeho negaci symbolem X_1' a výrok „X je vinen" symbolem X_2, jeho negaci X_2'. Těchto symbolů můžeme použít k označení uzlů grafu (obr. 3), kde jsou vyznačeny také všechny implikace obsažené v drobně vytištěném



Obr. 3

odstavci; uzel H_1 je „vytažen" pod graf, aby sedm oblouků z něho vycházejících nepůsobilo v grafu rušivě. Oběma uzlům H_1 přiřazujeme ovšem lístek se stejným písmenem. Kladení lístků na uzly grafu se řídí pravidly (1) až (4) a třemi dalšími (6) až (8), která vyjadřují doplňující podmínky o počtu vinných a o počtu těch, kteří řekli pravdivý výrok; poslední pravidlo vystihuje podstatu pravdivosti výpovědi.

(6): Na horním řádku grafu na obr. 3 jsou právě dva uzly označeny lístkem s **P**.
(7): Na třetím řádku shora (na grafu na obr. 3) je právě jeden uzel pokryt lístkem s **P**.
(8): Jsou-li pokryty lístky s **P** všechny uzly, do kterých míří hrany vycházející z jednoho uzlu na horním řádku grafu, pak je nutno položit i na tento uzel lístek s **P**.

Čtenář si může rekonstruovat řešení úlohy na svém grafu podle zápisu, který zachycuje úsporné řešení:

I. Předpoklad: H_1 platí, H_1' neplatí.
(2): B_2', D_2', H_2', J_2', K_2', M_2', O_2' platí, B_2, D_2, H_2, J_2, K_2, M_2, O_2 neplatí.
(3): A_1, B_1, D_1, J_1, O_1 neplatí, A_1', B_1', D_1', J_1', O_1' platí.
(8): K_1, M_1 platí.

II. Zjištěno: H_1 neplatí, H_1' platí.
Předpoklad: M_1 platí, M_1' neplatí.
(2): M_2', O_2' platí, M_2, O_2 neplatí.
(3): J_1 neplatí, J_1' platí.
(8): K_1 platí, K_1' neplatí.
(6): O_1, A_1, C_1, D_1 neplatí, O_1', A_1', C_1', D_1' platí.
(8): E_2' neplatí, E_2 platí.

Spor: Na horním řádku jsou tři uzly s lístky **P**.

Důsledek: Na uzel H_1 je nutno položit lístek s **N**, na H_1' lístek s **P**.

(7): A_2, B_2, D_2, H_2, K_2 neplatí,
A_2', B_2', D_2', H_2', K_2' platí.
(8): H_1 platí — spor (s důsledkem postupu I).
Důsledek: H_1 neplatí, M_1 neplatí; vzhledem k (8) neplatí buď M_2' nebo O_2', tj. platí buď M_2 nebo O_2.

III. Zjištěno: H_1, M_1 neplatí,
H_1', M_1' platí.
Předpoklad: O_2, M_2' platí, O_2', M_2 neplatí.
(7): A_2, B_2, D_2, E_2, H_2, J_2, K_2 neplatí,
A_2', B_2', D_2', E_2', H_2', J_2', K_2' platí.
(3): J_1, O_1, D_1, A_1, B_1 neplatí,
J_1', O_1', D_1', A_1', B_1' platí.
(8): E_1, K_1 platí, E_1', K_1' neplatí.

Na všech uzlech grafu leží lístky.

IV. Zjištěno: H_1, M_1 neplatí,
H_1', M_1' platí.
Předpoklad: M_2, O_2' platí,
M_2', O_2 neplatí.
(7): A_2, B_2, D_2, E_2, H_2, J_2, K_2 neplatí,
A_2', B_2', D_2', E_2', H_2', J_2', K_2' platí.
(3): A_1, B_1, D_1, O_1 neplatí,
A_1', B_1', D_1', O_1' platí.
(8): J_1, E_1 platí, J_1', E_1' neplatí.
(3): K_1 neplatí, K_1' platí.

Na všech uzlech grafu leží lístky.

Úloha je dvojznačná, v každém případě řekl pravdivý výrok Emil. Byl-li druhým, kdo řekl pravdu, Jirka, pak rozbil vázu Milan; řekla-li kromě Emila pravdivý výrok Květa, pak rozbil vázu Olda. Čtenář může dospět k výsledku i jiným způsobem, např. diskusí všech možných předpokladů o vině jednotlivých žáků a žákyň.

Při řešení logických úloh pomocí grafu je nejobtížnějším krokem sestrojení vhodného grafu. Existují různé typy logických úloh a grafy vhodné pro jejich řešení se navzájem liší uspořádáním vrcholů, počtem uzlů atd. Závažné jsou též rozdíly v pravidlech „hry", pro každou úlohu musíme sami zvolit vhodná pravidla. Spokojíme-li se jen se základními pravidly (1) až (4), musíme provádět dlouhé diskuse a často zamítnout nalezené řešení, protože odporuje právě těm podmínkám úlohy, které jsme nevyužili k formulaci speciálních pravidel. Tato rozmanitost logických úloh je ovšem i jejich předností v očích těch, kdož se rádi potýkají s problémy, které nelze řešit rutinním způsobem. Čtenář si jistě najde řadu úloh, které dokáže vyřešit metodou popsanou v tomto článku.

Ve 4., 5. a 6. čísle Rozhledů jsme v zábavné části otiskli J. Šedivého Detektivní pětiboj. Protože však myšlenkový podklad řešení té úlohy má širší význam než pouze u uvedených zábavných úloh, zařadili jsme řešení sem. Doporučujeme, aby všichni čtenáři si tento postup promysleli.

Redakce

Vznik a vývoj strojů na zpracování informací

INŽ. VASIL ČAPLA, Praha (Pokračování)

Umělé řeči (kódy)

Kromě ALGOLU byly vyvinuty ještě další soustavy umělých řečí (kódů), např. PACT (1955), FORTRAN firmy IBM (1956), MATHEMATIC a FLOW-MATIC firmy Remington Rand. Umělou řeč COBOL vyvinula skupina Pennsylvanské university pro obchodní účely.

Operační rychlosti samočinných počítačů se označují v milisekundách (10^{-3} s), mikrosekundách (10^{-6} s), nanosekundách (10^{-9} s), picosekundách (10^{-12} s), femtosekundách (10^{-15} s) a attosekundách (10^{-18} s).

Samočinné počítače plánují, projektují, řídí i vyučují

Sovětský deník Izvěstija uveřejnil článek J. Bazileskiho, konstruktéra samočinného počítače STŘELA. Článek hovoří o možnostech uplatnění elektronických samočinných počítačů v národním hodpodářství SSSR. Přinášíme jej ve zkráceném překladu.

Jedním z charakteristických rysů v rozvoji techniky posledních desetiletí je vzrůstající úloha elektronických samočinných počítačů v automatizaci hromadných pracných procesů a pochodů.

Jsme svědky zrození velkých, obrazně řečeno, mozkových center, vybavených ultrarychlými samočinnými počítači a spojených různými spojovacími kanály s objekty řízení. Tyto samočinné počítače se stávají hlavním článkem soustavy plánování a řízení národního hospodářství. Bez těchto strojů není možno využít na vědeckém podkladě materiálových, ekonomických a lidských zdrojů pro rychlý rozvoj podniku a zvyšování hmotné úrovně lidu.

Avšak technický vzestup, to není jen optimální řízení. To je práce vědců, techniků a konstruktérů, tvůrců nové techniky. Elektronické samočinné počítače mohou podstatně změnit technologii jejich práce. Stroje otvírají cestu k nové formě technické tvořivosti, ke komplexní automatizaci projektování.

Práce v tomto směru povedou k podstatnému zkrácení lhůt sestrojení typů nových strojů, přístrojů a technologických pochodů. Samočinné počítače vyhotoví velké množství variant propočtů nových výrobků, zhodnotí je podle technických ukazatelů očekávané spolehlivosti a hospodárnosti a na základě této analýzy napovědí nejlepší varianty pro experimentální výzkum.

Podobná informačně logická soustava zajistí optimální výběr variant pro umístění a stavbu hydrotechnických zařízení na řekách. Širokého uplatnění výpočtové techniky vyžaduje i dnešní zemědělská velkovýroba.

Elektronická výpočtová technika podává pomocnou ruku specialistům, pracujícím ve všech odvětvích národního hospodářství.

Existuje ještě jedna oblast, ve které jsou elektronické samočinné počítače povinny sehrát revoluční úlohu. Je to proces efektivního předávání znalostí, nebo jednoduše proces vyučování. Již nyní lze si snadno představit samočinný počítač s programovým řízením, určený pro současné vyučování mnoha stovek posluchačů. (Prototypy takových „strojových pedagogů" byly sestrojeny v USA, podle kterých se vyučuje na některých vysokých školách a nyní jsou ve zkušebním provozu i v SSSR. Poznámka překladatele.) Pro výměnu informací se strojem, vybavuje se každý posluchač individuálním zařízením s televizní obrazovkou i zařízením, dovolujícím dávat stroji otázky. Vyučování, prováděné v takové soustavě pod dohledem „živého" pedagoga využije veškerých předností operativní „zpětné vazby" s každým posluchačem. Jak zkušenosti ukazují, tento způsob napomáhá rychlému a trvalému osvojení učební látky.

Lze důvodně předpokládat, že další výzkumy v tomto směru umožní podstatné zvětšení „produktivity" pedagogické práce a pokrok v osvojování nové látky.

Nejdůležitějším rysem dnešní automatizace je komplexní řešení každé úlohy. Nikoli souhrn nejednotných elektronických strojů a přístrojů a jiných prostředků řízení, ale harmonická soustava. V takové soustavě se organicky spojuje pokroková technologie, vhodná organizace a konečně zpracování proudu informací. Jen takové pojetí vedoucí k vytváření nové techniky, lze nazvat moderním a pokrokovým.

Elektronický pedagog. Vědečtí pracovníci leningradské university provedli zajímavé pokusy s využitím elektronického samočinného počítače URAL jako „pedagoga". Sestavili pro zařízení program kursu německé gramatiky a zjistili, že počítač je s to nejen kontrolovat znalosti svých žáků, ale vysvětlovat jim i podstatu chybných odpovědí.

URAL-1 zadává žákům otázky prostřednictvím dálnopisného stroje. Na nejnesmyslnější odpovědi, které by vyvedly z míry nejtrpělivějšího pedagoga, URAL-1 reaguje dalším vysvětlováním a objasňováním, čímž postupně a důsledně vede žáka ke správné odpovědi.

Ředitel universitního výpočtového střediska G. Samosjuk soudí, že hromadné uplatnění této metody umožní přejít od skupinového způsobu průpravy žáků a studentů ke způsobu individuálnímu. Nyní byla dokončena stavba tzv. kybernetického examinátora s programem na děrných štítcích. Studenti budou odpovídat na otázky a sdělovat výsledky řešení úkolů pomocí přepínačů. Na lístku se jménem studenta vyznačí svrchovaně objektivní elektronický „pedagog" správnost odpovědi, dobu, kterou student potřeboval a konečně i známku.

Stav u nás. V Československu je umístěno přes 50 samočinných počítačů (stav v r. 1966), a to v Bratislavě, Brně, Dobrušce, Hradci Králové, Košicích, Ostravě, Olomouci, Pardubicích, Plzni, Praze a Přerově. Jsou to EPOS, Minsk 1, Minsk 2, Minsk 22, Odra 1003, Gamma 30, NE 803 B, Ural 2, Elliott 503, Leo 360, Z 11, Z 22, Z 23, ICT 1905, LGP 30, Sirius Ferranti, Gier, Graphomat Z 64, KDF 7, ZRA 1, NCR 315.

Analogové počítače

Rozdělení analogových počítačů. Vznik a řešení stavby všech druhů počítačů je podmíněno praktickou potřebou. S rozvojem vědy a techniky se objevily takové problémy, které již nebylo lze řešit použitím stolních počítacích strojů a logaritmického pravítka a jiných grafických pomůcek. Proto bylo věnováno velké úsilí řešení stavby takových druhů matematických strojů, které by dokázaly provádět základní početní úkony, k nimž řadíme sčítání, násobení, dělení, integrování atd. a řešit i složitější výpočty, jako jsou algebraické i diferenciální rovnice vyšších řádů rychleji a přesněji.

Mnohaletý vývoj přinesl dva základní druhy matematických strojů — číslicové počítače a počítače analogové. Každý z těchto druhů počítačů má své pole (obory) působnosti, své výhody a nevýhody.

V číslicových samočinných počítačích se vyjadřuje číslo konečným počtem signálů, takže hodnoty proměnných se mění diskrétně — nespojitě.

V analogových počítačích jsou čísla vyjádřena spojitě se měnícími fyzikálními veličinami, např. délkou, napětím, proudem, úhlovým natočením apod., takže hodnoty proměnných se mění spojitě.

K nejstarším a zároveň i velmi jednoduchým analogovým pomůckám patří logaritmické pravítko. První analogové počítače byly mechanické, pak se přešlo k elektromechanickým a dalším rozvojem k elektronickým analogovým počítačům. Mechanické analogové počítače se používaly pro řízení palby v prvé světové válce. Používaly se k výpočtu vaček, převodů, kuličkových integrátorů apod. V době mezi prvou a druhou světovou válkou byly propracovány způsoby řešení stavby elektromechanických analogových počítačů, které byly dále zdokonaleny v době druhé světové války, kdy byly zapojeny do různých vyhodnocovacích a zaměřovacích soustav. Po skončení druhé světové války pod vlivem řešení stavby elektronických číslicových samočinných počítačů, bylo přikročeno k řešení stavby elektronických analogových počítačů.

Obdobně jako číslicové samočinné počítače, které dělíme na univerzální a speciální, rozlišujeme u analogových počítačů typy mnohoúčelové (univerzální) a speciální. Typy analogových počítačů, určené pro řešení diferenciálních rovnic se nazývají diferenciální analyzátory; jiné slouží pro řešení některých výrobních pochodů apod.

Než přikročíme k pojednání o analogových počítačích, provedeme jejich rozdělení podle složitosti konstrukční.

Rozlišujeme analogové pomůcky a přístroje, analogová zařízení a analogové počítače. Představitelem analogových pomůcek, jsou např. logaritmická pravítka, jak již bylo řečeno. U logaritmických pravítek se čísla zobrazují délkami, a proto mluvíme o funkčním vztahu (analogii, obdobě) mezi délkami a čísly. Násobení je sčítání dvou úseček a dělení je odečítání úseček. Kromě násobení a dělení lze pomocí logaritmických pravítek provádět i některé další úkony. Záleží na zručnosti počtáře. Logaritmická pravítka, která vyrábí v ČSSR závod LOGAREX v Českých Budějovicích, dělíme na mnohaúčelová a na jednoúčelová, vztahující se k určitému oboru, např. strojařská, elektro, úkolářská, zeměměřická apod.

Analogová zařízení jsou např. modely elektrárenských sítí. Při stavbě modelů elektrárenských sítí vytváříme takové modely (analogy) zařízení, na nichž elektrické veličiny zobrazují obdobné vztahy, jako zkoumané elektrické veličiny ve skutečných sítích. Zde se mění jen měřítka. Při řešení sítě 100 kV použijeme například těchto procentních měřítek:

Skutečné hodnoty	Model
100 kV = 100 %	100 V = 100 %
100 MVA = 100 %	100 VA = 100 %,

atd.

Parametry skutečné sítě jsme vyjádřili v procentech a také v procentech jsme si nastavili danou síť na modelu. Výsledky v procentech si snadno převedeme na skutečné hodnoty.

Modely sítí se používají především k účelům plánování rozvoje elektrizačních sítí a také jako pomůcek pro praktické programování výroby a přenosu elektřiny. Modely tvoří běžnou pomůcku při práci operativních skupin v energetických dispečinkách, které se používají pro ekonomické rozdělování činného zatížení výkonu a pro rozdělování výkonu na jednotlivé elektrárny.

Analogové počítače jsou v porovnání s modely mnohem všestrannější.

(Dokončení)

Hodláte po maturitě pokračovat ve studiu na vysoké škole technického směru?

Nezapomeňte, že v takovém případě budete muset úspěšně složit přijímací zkoušku z matematiky, fyziky a někde i z deskr. geometrie.

Jako v letošním roce, tak i v příštím ročníku, budou *Rozhledy matematicko-fyzikální* uveřejňovat ukázkové příklady z přijímacích zkoušek některých fakult. Neznamená to ovšem, že takové příklady dostanete u zkoušky, ale pomůže Vám to k orientaci o úrovni a rozsahu zkoušek i k tomu, abyste vyzkoušeli svou připravenost. M.

„Tíží" Vás fyzika nebo Vás baví?

V obou případech by bylo proto velmi vhodné účastnit se Fyzikální olympiády, zvláště chcete-li vstoupit na vysokou školu technického směru nebo případně na medicínu. Všude tam se bez fyziky neobejdete.

V této soutěži v rámci Fyzikální olympiády si procvičíte základy látky; na cvičných tématech se naučíte alespoň trochu samostatně studovat.

Již v zářijovém 1. čísle *Rozhledů matematicko-fyzikálních* najdete příklady pro Fyzikální olympiádu a současně článek, v němž si rozšíříte potřebné znalosti k zpracování dalších příkladů. M.

Nahrazování křivek lomenými čarami

LUDĚK GRANÁT, Praha (Dokončení)

B. Jako další křivku uvažujme parabolu danou rovnicí $y = ax^2$, která prochází bodem o souřadnicích x_n, y_n; přitom předpokládáme, že čísla x_n, y_n jsou celá čísla různá od nuly. Rovnici paraboly můžeme psát ve tvaru

$$y_n x^2 - x_n^2 y = 0 \qquad (2)$$

Hodnotu levé strany rovnice (2) po dosazení $x = x_i$, $y = y_i$ označme

$$U_i \; ; \; U_i = y_n x_i^2 - x_n^2 y_i$$

Změna x_i o 1, resp. -1, a ponechání y_i má za následek

$$U_{i+1} = y_n (x_i + 1)^2 - x_n^2 y_i = U_i + y_n (2x_i + 1) ,$$

resp.

$$U_{i+1} = U_i + y_n (- 2x_i + 1)$$

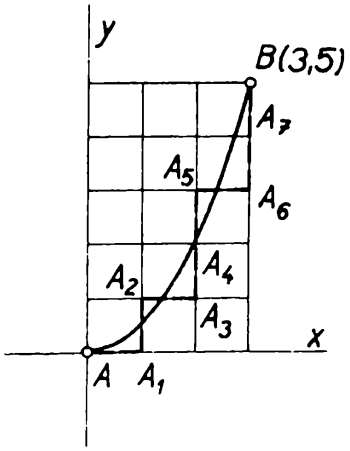
Změníme-li y o 1, resp. -1, pak

$$U_{i+1} = U_i - x_n^2 ,$$

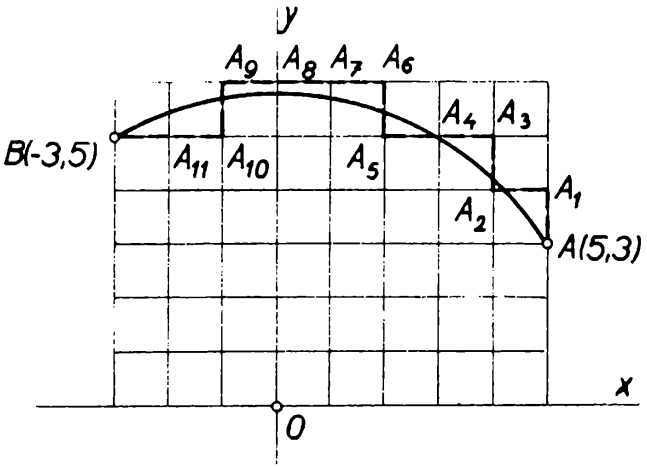
resp.

$$U_{i+1} = U_i + x_n^2 .$$

Uvědomíme-li si, že souřadnice x_i, y_i bodů ležících uvnitř této paraboly, dosazené do levé strany rovnice (2) dávají U_i jednoho znaménka a souřadnice vnějších bodů dosazené do levé strany rovnice (2) dávají U_i opačného znaménka, pak můžeme obdobným způsobem jako pro



Obr. 3



Obr. 4

přímku sestavit tabulku a v ní zachytit posloupnost čísel charakterizující lomenou čáru nahrazující daný oblouk paraboly.

Sestavme si tabulku (tabulka 2) pro oblouk paraboly s počátečním bodem A (0,0) a koncovým bodem B (3,5) (obr. 3).

Rovnice této paraboly je

$$9y - 5x^2 = 0 .$$

Tabulka 2

Přírůstek x	Přírůstek y	U	x_i	Bod
		0	0	A
0		+5	1	A_1
	1	−4	1	A_2
0		+11	2	A_3
	1	+2	2	A_4
	1	−7	2	A_5
0		+18	3	A_6
	1	+9	3	A_7
	1	0	3	B

Zápis lomené čáry m bude 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1.

V případě, že je dán oblouk paraboly, pro který její vrchol A je vnitřním bodem tohoto oblouku, můžeme zvlášť nahrazovat části ležící na opačných stranách od osy dané paraboly.

C. Mějme oblouk kružnice k (obr. 4), který má střed v počátku soustavy souřadnic. Počáteční bod A oblouku kružnice k nechť má souřadnice x_A, y_A, koncový x_B, y_B, přičemž musí platit rovnost $x_B^2 + y_B^2 = x_A^2 + y_A^2$. Předpokládejme, že souřadnice bodu A jsou celá čísla. Orientace oblouku nechť je kladná, tj. proti smyslu pohybu hodinových ručiček.

Rovnici kružnice můžeme psát ve tvaru

$$x^2 + y^2 - (x_A^2 + y_A^2) = 0\,. \tag{3}$$

Hodnotu levé strany rovnice (3) po dosazení $x = x_i$, $y = y_i$ označme U_i. Je-li U_i kladné, leží bod o souřadnicích x_i, y_i vně kružnice k, je-li $U_i < 0$, leží uvnitř. Uvažujeme-li místo x_i, y_i souřadnice $x_{i+1} = x_i + 1$, $y_{i+1} = y_i$, resp. $x_{i+1} = x_i - 1$, $y_{i+1} = y_i$, bude $U_{i+1} = U_i + 2x_i + 1$, resp. $U_i - 2x_i + 1$. Obdobně pro $x_{i+1} = x_i$, $y_{i+1} = y_i \pm 1$ bude $U_{i+1} = U_i \pm 2y_i + 1$.

Sestavme si opět tabulku (tabulka 3) pro případ z obr. 4.

Tabulka 3

Přírůstek x	Přírůstek y	U	x_i	y_i	Bod
		0	5	3	A
	1	7	5	4	A_1
2		−2	4	4	A_2
	1	7	4	5	A_3
2		0	3	5	A_4
2		−5	2	5	A_5
	1	6	2	6	A_6
2		3	1	6	A_7
2		2	0	6	A_8
2		−3	−1	6	A_9
	3	−8	−1	5	A_{10}
2		−5	−2	5	A_{11}
2		0	−3	5	B

Všimněme si, že v každém kvadrantu se při nahrazování kružnice objevuje určitá dvojice čísel v posloupnosti charakterizující lomenou čáru m. Vpředu uvedený postup bez dalšího platí jen pro oblouk kružnice ležící v jednom kvadrantu.

Nemají-li souřadnice koncového bodu B daného oblouku kružnice celočíselné hodnoty, pak skončíme nahrazování kružnice k lomenou čarou v některém bodě, jehož vzdálenost od B je menší než j.

Uvedené postupy mají značnou praktickou cenu. Podle obdobných principů pracují některé speciální počítače, které na základě údajů o typu křivky, počátečním, koncovém bodě oblouku a dalších potřebných údajích provádějí nahrazení daného oblouku křivky schodovitou lomenou čarou. Výstupem těchto počítačů pak jsou např. informace na magnetické pásce — jak vpředu uvedeno.

V případě složitějších křivek by byly obdobné postupy pro jejich nahrazení schodovitou čarou často příliš složité. Proto nahrazování tohoto druhu se provádí jen pro jednodušší případy, např. pro ty, které byly v článku uvedeny. Nazveme je standardními křivkami. Je-li třeba nakreslit nějakou složitější křivku, tato se nahradí nejprve oblouky standardních křivek. K tomuto účelu je možno využít samočinných počítačů.

Nakonec si všimneme, jak se chovají křivky charakterizované uvedeným zápisem při některých transformacích těchto křivek.

a) Zvětšení křivky. Chceme-li zvětšit křivku danou uvedeným zápisem n-krát při zachování základní délkové jednotky j, pak stačí nahradit každé číslo zápisu skupinou n týchž čísel. Tak např. při dvojnásobném zvětšení místo původní křivky 0, 1, 0, 1, 1, 0 budeme mít 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0.

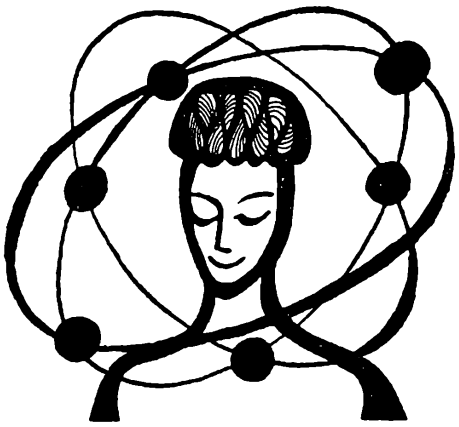
b) Rotace o $k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k = 1, 2, 3$ se dá snadno provést pomocí přičtení k k číslům udávajícím tvar křivky, přičemž místo výsledného součtu s bereme číslo i, pro něž platí $0 \leqq i \leqq 3$, $s = 4m + i$, m celé.

c) Souměrnost podle osy x se dá provést vzájemnou záměnou jedniček za trojky a souměrnost podle osy y záměnou nul a dvojek.

Účastníte se Matematické olympiády?

Každý student a studentka, kteří by chtěli dále studovat kterýkoli směr na technice nebo dokonce přímo matematiku na universitě, se mají účastnit matematické olympiády. Je ve Vašem zájmu procvičit si tímto soutěžním způsobem matematiku, protože Vám to přijde později na vysoké škole velmi vhod a ulehčí Vám studium nejen přímo v matematice, ale i v jiných technických předmětech.

Hned v poprázdninovém 1. čísle *Rozhledů matematicko-fyzikálních* budou otištěny příslušné informace o Matematické olympiádě.

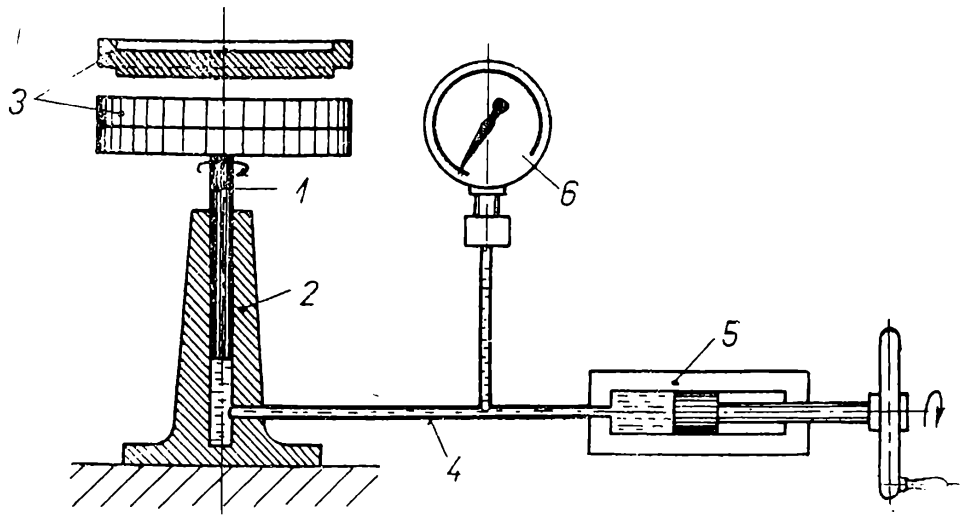


Pístový manometr

ING. Dr. VÁCLAV ŠINDELÁŘ, Praha

V minulých ročnících našeho časopisu byla uveřejněna řada článků týkajících se přístrojů pro měření tlaků — tlakoměrů (manometrů). Nehovořili jsme dosud o zvláštní skupině přístrojů, o barometrech, sloužících k měření barometrického tlaku a o přístrojích, kterými realizujeme jednotku tlaku — tedy o „etalonech" tlaku a kterých také používáme k ověřování jiných tlakoměrů (např. provozních deformačních apod.).

Tyto poslední přístroje nazýváme *pístové tlakoměry*, a to podle jejich zásadního pojetí, podle níž se tlak vyvozuje tíhovým působením na píst. Funkční schéma je nakresleno v obr. 1. V tělese přístroje (2) je verti-



Obr. 1

kální válcová dutina, ve které je uložen píst (1). Horní část pístu je spojena se stolkem rotačního tvaru, na který přikládáme závaží (3), vhodně odstupňovaná. Válec tlakoměru je spojen jednak se zkoušeným a ověřovaným tlakoměrem (6), jednak se zařízením, kterým vtlačujeme kapalinu do válce pod píst a do spojovacího ústrojí (4). Na obrázku je tímto zařízením (5) píst se šroubovým pohybem ve válci.

Průřez pístu (1) určuje plochu, na kterou působí tíha pístu spolu se závažími, která jsou na něj nakladena. Je-li např. průřez pístu 200 mm^2 (= 2 cm^2), hmotnost pístu se stolkem 2 kg a hmotnost každého přidávaného závaží 1 kg, pak v místě normálního tíhového zrychlení ($g_n = 9{,}806\,65$ m s^{-2}) vyvodí pístový tlakoměr minimální tlak (bez přídavných závaží) rovný

$$p_{\min} = 1 \text{ kp cm}^{-2} = 9{,}806\,65 \text{ N cm}^{-2} = 9{,}806\,65 \; 10^4 \text{ N m}^{-2}$$

Přidáním každého ze závaží vzroste tlak pod pístem o hodnotu

$$p_1 = 0{,}5 \text{ kp cm}^{-2} = 4{,}903\,375 \text{ N cm}^{-2} = 4{,}903\,375 \; 10^4 \text{ N m}^{-2}$$

apod.

Takovýmto přístrojem můžeme ověřovat jiné tlakoměry od $p_{\min}$ do $p_{\max}$, jež je dáno konstrukcí a může činit v daném případě při přímém zatížení řádově desítky atmosfér, při nepřímém zatížení (např. s pákovým převodem) řádově stovky atmosfér. Měřicí rozsah je ovšem závislý na volbě rozměrů pístu a ovšem též na konstrukčním provedení celého přístroje.

V místě jiného tíhového zrychlení nežli normálního ($g_m \neq g_n$) je nutno přístrojem realizované tlakové hodnoty uvažovat pro místní podmínky. Byl-li tlak pod pístem v místě normálního tíhového zrychlení g_n (při nějakém zatížení) roven p_{norm}, bude totéž zatížení na stejném přístroji při místním tíhovém zrychlení g_m vyvozovat tlak p_m daný vztahem

$$p_m = p_{\text{norm}} \frac{g_m}{g_n}.$$

Vůle pístu ve válci má být velmi malá (řádu 10^{-3} mm), o vůli se lze přesvědčit rychlostí, kterou píst při určitém zatížení klesá. Tato rychlost bývá předepsána. Tlakovou kapalinou je olej vhodných vlastností. Aby se omezilo tření mezi pístem a válcem, uvede se píst (i se závažími) při měření do otáčení, a to buď ručně, nebo motoricky. Místo kapaliny jako tlakového média se někdy výjimečně používá plynů (např. vzduchu). Tlakoměry na kyslík se nesmějí zkoušet olejem, tam je nutno mezi olej a zkoušený tlakoměr vložit vodní náplň, která je zde tlakovým prostředníkem. Je tomu ovšem zapotřebí vhodně řešené převodní komůrky, do níž se „tlak" přivádí shora a „odvádí" zdola (protože olej má menší hustotu nežli voda).

Pístové tlakoměry se stavějí i na velké tlaky. Setkáme se s přístroji pracujícími až do 2000 kp . cm^{-2}, popřípadě výše (až např. do

10 000 kp . cm^{-2}) ovšem s vhodnými *tlakovými multiplikátory*, které nejsou ničím jiným než oboustranným pístem dvou různých průřezů umístěným ve válcových dutinách příslušných rozměrů v tělese multiplikátoru. Tak např. má-li oboustranný píst na jedné straně průřez pětinásobný nežli na straně druhé, lze multiplikátorem, ve kterém je takový píst umístěn, znásobit tlak pětinásobně.

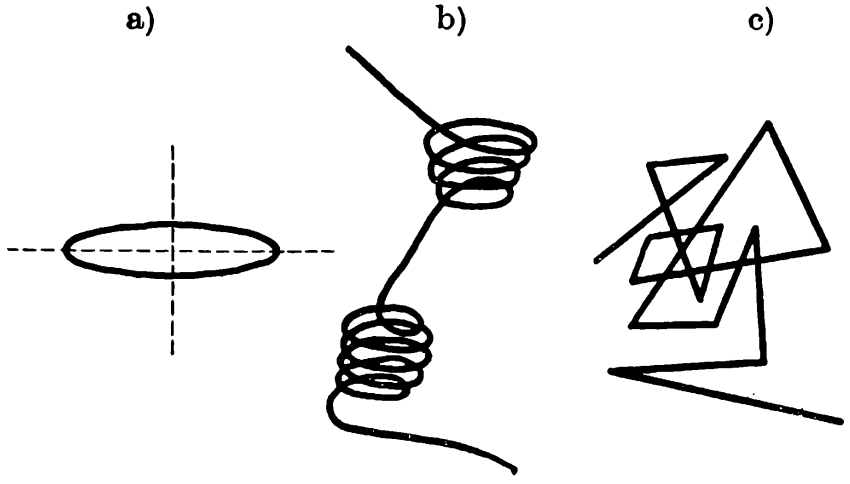
K výkladu základních fyzikálních pojmů

BOHUMIL MACEK, PF, Hradec Králové (Dokončení)

Podle toho, jak jsou v látce atomy nebo molekuly vázány na kolektiv, jaká je jejich vazební energie, rozlišujeme několik skupenství (fází) látky.

a) V pevné fázi konají molekuly pohyb kolem rovnovážné polohy po eliptické dráze. Ve většině případů je však elipsa tak zploštělá, že můžeme mluvit o kmitavém pohybu. Rozkmit (velká poloosa elipsy) závisí na teplotě. Přitom jsou jednotlivé molekuly a atomy stále v oblasti silového působení ostatních částic a mohou vytvářet krystalovou mříž.

b) Kapalina má poměrně složitou strukturu. Předpokládáme, že se skládá z nepatrných skupin molekul, kde jsou molekuly na sebe poměrně pevně vázány a konají kmitavé pohyby kolem určité rovno-



Obr. 1. Pohyb molekul v látce a) pevné, b) kapalné, c) plynné.

vážné polohy. Tato seskupení jsou oddělena oblastmi, v nichž se shluky molekul pohybují neuspořádaně jako v plynech. V kapalině se tedy kombinuje kmitavý pohyb molekuly s pohybem postupným a výsledný pohyb je zhruba šroubový.

c) Ve fázi plynné jsou jednotlivé molekuly na sobě téměř nezávislé. Jejich chaotický pohyb lze přirovnat k pružnému rázu. Za normálních poměrů je např. průměrná rychlost molekul vzduchu 485 m/s a počet nárazů asi 6 miliard za 1 sekundu.

d) V poslední době se dovídáme často o dalších skupenstvích látek, z nichž nejdůležitější je tzv. čtvrté skupenství — plazma. Tato fáze je charakterizována nepružným rázem atomů. Zvýšením teploty nabývají atomy tak velké kinetické energie, že se rozbíjejí při vzájemných srážkách na kladné ionty a elektrony. Vlivem elektrických sil se vytváří nový kolektiv, na který je možné působit elektrickým i magnetickým polem.

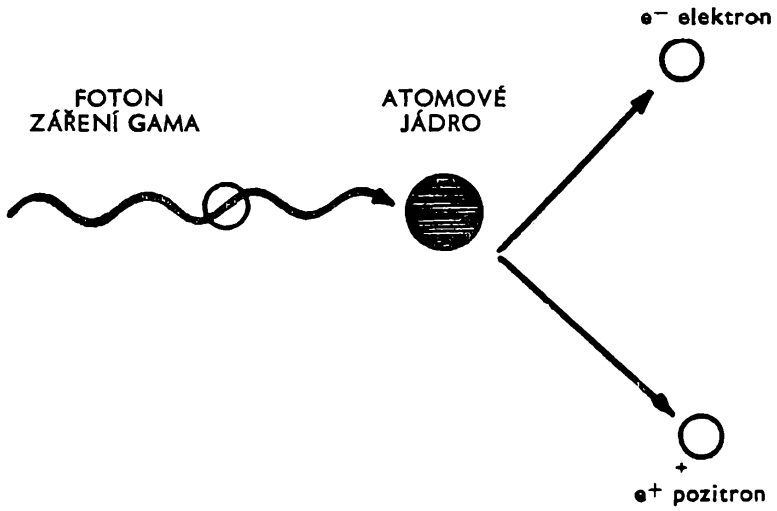
Fyzikální pole je druhou formou hmoty. Pojem pole se tvořil v boji s představami, jaká je podstata sil, kterými na sebe působí hmotné objekty. Pole bylo zpočátku určitou pomocnou pracovní hypotézou, která měla usnadnit vysvětlení tohoto vzájemného působení. Dnes je reálná existence polí dokázána a pole se zkoumají jako konkrétní forma hmoty. Mluvíme o poli gravitačním, elektromagnetickém, elektronpozitronovém, neutronovém, mezonovém aj. Všechna pole se vyznačují některými specifickými vlastnostmi, které se u látkové formy nevyskytují. Pole mění své vlastnosti plynule, proto můžeme předem určit jeho stav v daném okamžiku a v daném místě. V prostoru se šíří rychlostí, která se rovná rychlosti světla. Výjimka je jen u pole mezonového, které má rychlost menší.

Pro úplnost třeba jen dodat, že makroskopické těleso můžeme považovat za hmotný objekt látkové formy jen s určitou výhradou. Ve skutečnosti představuje takové těleso dialektickou jednotu látky a polí, která spojují navzájem jednotlivé mikročástice.

Hranice mezi látkovou formou a formou pole jsou relativní. Existují jevy, při kterých první forma přechází v druhou a naopak. Změna pole na formu látky nastává za určitých podmínek, např. při průchodu záření γ[1]) látkou. Fotony γ záření proniknou až k atomovému jádru a v silném Coulombově poli může dojít ke kvalitativní přeměně: foton γ záření mizí a místo něho se vytváří pár elektron—pozitron.

---

[1]) Záření γ je elektromagnetické (kvantové) záření o kratší vlnové délce než má záření Roentgenovo (řádově $\lambda = 10^{-13}$ m až 10^{-10} m). Vzniká při přirozené nebo umělé radioaktivitě, popřípadě jako sekundární záření v rentgenových lampách, v betatronech a jiných urychlovačích elementárních částic.



Obr. 2. Tvoření párů.

K tvoření párů však může dojít jen tehdy, je-li energie fotonu záření γ větší než 1 MeV[2]). Z Einsteinova vztahu mezi hmotností a energií

$$\frac{W}{m} = c^2$$

totiž plyne, že klidové hmotnosti elektronu ($m = 9{,}1 \ \ 10^{-31}$ kg) odpovídá energie

$$W = m\,c^2 = 9{,}1 \,.\, 10^{-31} \,.\, 9 \,.\, 10^{16} = 8 \,.\, 10^{-14} \ [\mathrm{J}] \,,$$

$$W = \frac{8 \,.\, 10^{-14}}{1{,}6 \,.\, 10^{-19}} \doteq 5 \,.\, 10^{5} \quad [\mathrm{eV}] \,,$$

$$W = 0{,}5 \ \mathrm{MeV}$$

Spotřebuje se proto na vytvoření páru elektron—pozitron energie 1 MeV a případný přebytek energie fotonu přechází v kinetickou energii obou částic. Celý pochod můžeme zapsat

$$\gamma \rightarrow \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+$$

Zatímco elektron může existovat ve volném stavu libovolně dlouho (pokud není zachycen atomem a nezmění se v elektron vázaný), je existence pozitronu pouze přechodná a jeho doba života je asi 10^{-8} až 10^{-6} s. Pozitrony existují jen potud, pokud mají velkou kinetickou energii. Jestliže se zpomalí, popřípadě i zastaví, působí na elektrony té látky, v které se zabrzdily. Pozitron i elektron mizí a místo nich vznikají dva fotony záření γ. Každý foton letí v opačném směru

$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \rightarrow 2\,\gamma$$

Objev přeměny látkové formy hmoty na formu pole a naopak vedl

[2]) 1 MeV (megaelektronvolt) = 10^6 elektronvoltů, 1 eV $\doteq 1{,}6 \,.\, 10^{-19}$ J.

některé fyziky k nesprávným závěrům. Celý proces označovali jako „zánik hmoty", popřip. jako „zhmotnění záření". Jejich omyl spočíval právě v tom, že pracovali s nesprávným obsahem pojmů. Zrod a zánik elektronu a pozitronu rozbil předsudek o neměnnosti elementárních částic a na druhé straně plně potvrdil poučku dialektického materialismu o vzájemné přeměně různých forem hmoty.

3. Pohyb a energie

Fyzikální praxe potvrzuje, že neodlučitelnou vlastností každé hmoty je její *pohyb*. Nikde není a nemůže být hmota bez pohybu, tak jako ani nemůže existovat pohyb bez hmoty. Moderní fyzika nahlédla do stavby atomu i atomového jádra a všude zjistila ustavičný pohyb. *Pohyb je způsob existence hmoty* a svět kolem nás není ničím jiným než stále se měnící a pohybující se hmotou.

Nejjednodušší a nejznámější formou pohybu hmoty je pohyb mechanický (změna polohy tělesa vzhledem k jiným tělesům). Složitější je pohyb fyzikální, pod kterým rozumíme např. teplo, světlo, elektrické jevy. Nejsložitější formou pohybu v přírodě je potom pohyb organický a jeho nejvyšším projevem je lidské myšlení (produkt pohybu hmoty na nejvyšším stupni vývoje — lidského mozku).

Pohyb má mnoho forem a některé z nich mohou navzájem v sebe přecházet. Fyzikální veličinu, kterou označujeme a kvantitativně hodnotíme pohybový stav materiálního objektu, nazýváme *energií*. Můžeme říci, že tak jako hmotnost je mírou setrvačnosti hmoty, je energie spojena s protikladem setrvačnosti hmoty — s jejím pohybem. Každá hmota je „nositelem" jistého množství energie, která je na ni přímo vázána a nedá se od ní oddělit. Nesprávné jsou všechny názory o samostatné existenci energie a například i tvrzení, že těleso vyzařuje energii. Správně bychom měli říkat, že těleso vysílá elektromagnetické záření, tj. formu hmoty (formu pole), která se vyznačuje nejen energií, ale nutně i hmotou.

4. Prostor a čas

Vývoj fyziky na začátku dvacátého století revolučně zasáhl do našich představ o *prostoru* a *čase*. Newtonova klasická fyzika definovala prostor jako absolutní neproměnné prázdno, v kterém se pohybují všechny pozorované hmotné objekty. Prostor měla být jakási do nekonečna prodloužená nádoba, tzv. absolutní prostor, který mohl existovat i kdyby všechna hmota zmizela. V té době vynaložili fyzikové veliké úsilí k tomu, aby změřili pohyb těles vůči této nehybné prázdnotě, aby určili absolutní vztažnou soustavu. Vyřešení tohoto problému se zdálo na první pohled zcela reálné a logicky zdůvodněné.

Einsteinova teorie relativity však dokázala, že všechny představy o absolutním prostoru vycházejí z nesprávných předpokladů, že totiž *prostor bez pohybující se hmoty neexistuje.*

Odstranění chybné hypotézy mělo za následek i další převratné zjištění, že neexistuje ani absolutní neproměnný rozměr hmotných objektů. Snad se zdá protismyslné, že například jedna a tatáž tyč má v různých soustavách, které se vůči sobě pohybují, různou délku. Je to však jen z toho důvodu, že v našich pozemských podmínkách (při rychlostech značně menších než rychlost světla) je změna prostorových rozměrů neměřitelná, a přivykli jsme proto představě, že rozměry tělesa jsou neproměnné pro celý vesmír.

Moderní fyzika odmítá představu prázdného, od hmoty odtrženého prostoru. Tak jako neexistuje hmota bez prostoru, nemůže ani existovat prostor bez hmoty. Přitom vlastnosti prostoru závisí na vzájemném pohybu hmotných objektů a na intenzitě gravitačních polí (prostor je zakřiven).

Také čas považovala klasická fyzika za absolutní neproměnné jsoucno, které plyne stále rovnoměrně jedním směrem, bez jakéhokoliv vztahu k některému hmotnému objektu. Nikdo nepochyboval o tom, že v celém vesmíru platí jediný čas, který by existoval dále, kdyby všechny hmotné procesy zanikly.

Podle teorie relativity *i čas je neoddělitelný od hmoty.*

Každá změna hmotných poměrů (vzájemný pohyb, změna intenzity gravitačního pole) znamená současně změnu času. Pohybují-li se dva systémy vůči sobě, potom jejich časy musí být různé (v pohybující se soustavě plyne čas pomaleji), třebaže prodloužení času by bylo pozorovatelné opět teprve při rychlostech blízkých rychlosti světla.

5. Závěr

K objasnění pojmu nestačí jen jeho definice; je třeba si ujasnit jeho vztah k objektivní skutečnosti i jeho dialektickou povahu. Právě ve vývoji pojmu je často skryta ta zvláštní síla lidské zvídavosti, onoho tvůrčího nepokoje, v němž se rodí nové poznání.

Objektivní realita *hmota* *(materie)*
fyzikální veličina, která charakterizuje setrvačné a gravitační účinky hmotných objektů *hmotnost* *(masa)*

Konkrétní fyzikální formy hmoty	
látka	*pole*
a) pevná, b) kapalná, c) plynná, d) plazma aj.	a) elektromagnetické, b) elektronpozitronové, c) gravitační aj.

Způsob existence hmoty		
pohyb a) mechanický, b) fyzikální, c) organický.	*prostor*	*čas*
veličina, která charakterizuje pohybový stav hmotných objektů *energie*	neexistují bez hmoty, závisí na jejím rozložení jsou objektivní, ne však absolutní	

Přesnost a citlivost výchylkových měřicích přístrojů

ING. LADISLAV SMRŽ, Praha

Přesnost a citlivost výchylkových měřicích přístrojů jsou dva základní parametry, které jsou rozhodující při volbě nejvhodnějšího přístroje pro zamýšlené měření. Zároveň jsou to však pojmy, které se velmi často vzájemně zaměňují.

Přesnost měřicího přístroje je dána velikostí jeho odchylek, plynoucích jednak z jeho principu a konstrukce, jednak z působení různých vnějších vlivů. Proto bylo třeba odstupňovat přesnost různých provedení přístrojů a definovat ji pro předem dané vztažné podmínky (teplota, poloha přístroje, vnější magnetické pole, tvar vlny střídavého proudu, kmitočet apod.). Norma ČSN 35 6201, ve shodě s jinými zahraničními normami, dělí přístroje podle jejich přesnosti do sedmi tříd, označených: 0,1, 0,2, 0,5, 1, 1,5, 2,5, 5. Číslo třídy přesnosti určuje zároveň meze dovolených, maximálních odchylek při dodržení předepsaných vztažných podmínek. Tyto odchylky jsou udány v procentech,

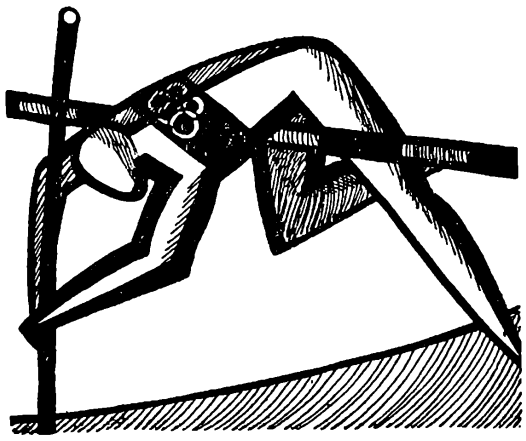
určeny z největší hodnoty měřicího rozsahu a platí pro celou stupnici přístroje. Pro přesné měření vyplývá z toho požadavek použití pouze poslední třetiny nebo nejvýše druhé poloviny stupnice ke čtení výchylek.

Citlivost přístroje dá se obecně definovat jako poměr změny polohy jeho ukazatele k příslušné změně měřené hodnoty. Čím bude tato změna polohy větší pro určitou stálou změnu měřené hodnoty, tím bude přístroj citlivější. Z uvedené definice plyne, že rozměr citlivosti bude: délka/jednotka měřené veličiny. Pojem citlivosti sám o sobě není vždy jednoznačný a je třeba jej zpravidla doplnit bližším označením, např. proudová citlivost, napěťová citlivost, počáteční nebo konečná citlivost apod., vzhledem k tomu, že citlivost není velmi často konstantní v celém měřicím rozsahu. Pak ovšem platí její definice jen pro velmi malé hodnoty a musíme ji vyjádřit jako poměr ve tvaru: $\Delta l/\Delta A$, kde Δl představuje změnu údaje v jednotkách délky, odpovídající změně měřené veličiny A o velmi malou hodnotu ΔA. Má-li přístroj rovnoměrně dělenou stupnici, můžeme jeho citlivost vyjádřit jako poměr celé délky stupnice L (vyjádřené např. i počtem dílků místo v jednotkách délky) k určitému měřicímu rozsahu A, tedy výrazem L/A.

Příkladem přístroje, u něhož se často oba pojmy, přesnost a citlivost zaměňují, je zrcátkový galvanometr pro stejnosměrný proud. Vhodnou konstrukcí docilujeme u něho neobyčejně vysoké citlivosti, ale přitom jeho přesnost je velmi malá. Poněvadž se však nejčastěji používá jako nulový indikátor, nebývá tato okolnost na závadu.

Přesnost a citlivost přístroje doplňuje ještě jeden charakteristický parametr, *přesnost čtení*, jakou provedení přístroje umožňuje. Navazuje bezprostředně na přesnost přístroje, poněvadž u dobrého laboratorního přístroje má být přesnost čtení větší než přesnost měření, nemají-li vznikat další přídavné chyby. Když uvažujeme například přístroj třídy přesnosti 0,2 se stodílkovou stupnicí, je jeho maximální dovolená odchylka $\pm$ 0,2 dílku. Za optimálních podmínek, je-li stupnice lineární s jemně provedeným dělením a je-li také ukazatel vhodně upravený, můžeme celkem spolehlivě odhadovat desetiny dílku. Zřejmě však nevystačíme s normálním provedením stupnice u přístrojů třídy přesnosti 0,1, poněvadž přesnost čtení by byla nejvýše shodná s přesnosti měření. Proto se zde užívá transverzální stupnice se šesti nebo jedenácti soustřednými kružnicemi, umožňující přesné čtení po dvou desetinách nebo i jedné desetině a další odhad setin dílku. V tom právě někteří výrobci měřicích přístrojů v poslední době chybují a vyrábějí přístroje s označením třídy přesnosti 0,1, ale s normálně provedenou stupnicí. Pokud by nebyla délka stupnice prodloužena (např. provedená jako dvojitá, rozdělená na dvě stejné části umístěné nad sebou) a nebylo by použito světelného indexu místo hmotného ukazatele, je tak vysoký údaj přesnosti přístroje naprosto pochybný.

MO



Řešení přípravných úloh 1. kola XVI. roč. MO

(Pokračování)

KATEGORIE B

2. Určete všechna přirozená čísla x, která vyhovují rovnici

$$4^{x-1} + 7 \,.\, 2^x + 48 = x\,(x-1) \qquad 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \,. \tag{1}$$

Řešení. Číslo $x = 1$ zřejmě nevyhovuje. Je-li $x \geqq 2$, je levá strana (1) násobkem čtyř, tj. i součin $x\,(x-1) \qquad 3 \,.\, 2 \,.\, 1$ je násobkem čtyř; proto $x \geqq 4$.

Je-li $x \geqq 4$, je levá strana (1) násobkem šestnácti, proto i číslo

$$x\,(x-1) \qquad 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

je násobkem šestnácti, tj.

$$x \geqq 6 \,. \tag{2}$$

Upravíme (1) pro $x \geqq 6$; dostaneme

$$16 \,.\, 4^{x-3} + 7 \,.\, 16 \,.\, 2^{x-4} + 3 \,.\, 16 =$$
$$= x \,.\, (x-1) \qquad 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \,. \tag{3}$$

Obě strany rovnice (3) dělíme 16

$$4^{x-3} + 7 \,.\, 2^{x-4} + 3 = x\,(x-1) \qquad 8 \,.\, 7 \,.\, 45 \,. \tag{4}$$

Je-li $x > 7$, je pravá strana rovnice (4) násobkem osmi, tedy *sudé* číslo. Naproti tomu je levá strana *liché* číslo. Proto je

$$x \leqq 7 \,. \tag{5}$$

Spojením (2) a (5) dostaneme, že jen čísla $x = 6$, $x = 7$ mohou být řešením rovnice (1).

Zkouškou zjistíme, že $x = 7$ vyhovuje, ale $x = 6$ nevyhovuje.

4. Krychle o hraně délky 6 je rozdělena v $6^3 = 216$ jednotkových krychlí. Krychli je vepsaná koule o průměru 6. Zjistěte, kolik jednotkových krychlí leží v kouli a kolik jich neobsahuje žádný vnitřní bod koule.

Řešení. Označíme S střed vepsané koule a A, B, C její dotykové body s třemi stěnami krychle, které mají společný vrchol. Poloměry SA, SB, SC jsou po dvou navzájem kolmé. Stačí řešit úlohu pro oktant $O = S\,(ABC)$ a výsledky znásobit osmi; to vyplývá ze souměrnosti koule i krychle podle rovin SAB, SBC, SCA.

Označme po řadě x, y, z vzdálenosti toho vrcholu jednotkové krychle, který leží nejblíže bodu S, od rovin SBC, SCA, SAB. Další vrcholy této jednotkové krychle mají od rovin SBC, SCA, SAB vzdálenosti

$$[x+1, y, z]\,,\ [x, y+1, z]\,,\ [x, y, z+1]\,,\ [x+1, y+1, z]\,,\ [x+1, y, z+1]\,,\ [x, y+1, z+1]\,,\ [x+1, y+1, z+1]\,. \tag{1}$$

Z toho plyne, že čísla x, y, z probíhají (navzájem nezávisle) čísla 0, 1, 2; tak dostaneme 27 jednotkových krychlí, které náležejí oktantu O.

Jednotková krychle náleží vepsané kouli právě tehdy, náleží-li jí vrchol nejvzdálenější od bodu S; to je podle (1) vrchol $[x+1, y+1, z+1]$. Jednotková krychle náleží tedy kouli, platí-li

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \leqq 9\,. \tag{2}$$

Nerovnost (2) má tato řešení:

$x+1$	1	2	1	1	1	2	2
$y+1$	1	1	2	1	2	1	2
$z+1$	1	1	1	2	2	2	1

To je 7 jednotkových krychlí v oktantu O; celkem 56 jednotkových krychlí, které leží v kouli.

Jednotková krychle nemá s koulí žádný společný vnitřní bod, jestliže nejbližší vrchol k bodu S leží buď na kouli nebo vně koule, tj. když pro bod $[x, y, z]$ platí

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq 9\,. \tag{3}$$

Nerovnost (3) má tato řešení:

x	1	2	2	2
y	2	1	2	2
z	2	2	1	2

To jsou 4 jednotkové krychle v oktantu O; celkem 32 jednotkových krychlí, které neobsahují žádný vnitřní bod koule.

Zbývajících $216 - (56 + 32) = 128$ jednotkových krychlí obsahuje jak vnitřní, tak vnější body koule.

KATEGORIE C

1. Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x\,(x+y) + z\,(x-y) &= 6\,, \\ y\,(y+z) + x\,(y-z) &= -2\,, \\ z\,(z+x) + y\,(z-x) &= 3\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Řešení. Sečtením první a druhé rovnice (1) dostaneme

$$x^2 + xy + xz - yz + y^2 + yz + xy - xz = 4$$

neboli

$$(x + y)^2 = 4 . \tag{2}$$

Obdobně dostaneme sečtením druhé a třetí rovnice (1)

$$(y + z)^2 = 1 \tag{3}$$

a sečtením třetí a první rovnice (1)

$$(z + x)^2 = 9 . \tag{4}$$

Z (2), (3), (4) plyne

$$\begin{aligned} x + y &= \pm 2 , \\ y + z &= \pm 1 , \\ z + x &= \pm 3 . \end{aligned} \tag{5}$$

Odečtením druhé rovnice (5) od třetí rovnice (5) dostaneme pro $x - y$ čtyři možné hodnoty: ± 2, ± 4.

Další výpočet provedeme pomocí tabulky

$x + y$	2	2	2	2	−2	−2	−2	−2
$x - y$	2	−2	4	−4	2	−2	4	−4
x	2	0	3	−1	0	−2	1	−3
y	0	2	−1	3	−2	0	−3	1
z	1	−3	0	−2	3	−1	2	0

Poslední řádek tabulky byl určen tak, aby byly splněny druhá a třetí rovnice (5).

Soustava má tedy 8 řešení, jak se přesvědčíme zkouškou.

2. Nechť prvočísla p_1, p_2 jsou různá od čísel 3 a 5. Pak číslo $p_1^4 - p_2^4$ je násobkem patnácti. Dokažte!

Řešení. Čísla p_1, p_2 dávají při dělení třemi zbytky buď 1 nebo 2. Proto každé z čísel p_1^2, p_2^2 dává při dělení třemi za zbytek jedině číslo 1. Proto je $p_1^2 - p_2^2$ vždy dělitelné třemi.

Čísla p_1, p_2 dávají při dělení pěti zbytky buď 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4. Proto každé z čísel p_1^2, p_2^2 dává při dělení pěti zbytek buď 1 nebo 4. Je-li totiž např. $p_1 = 5\alpha + 2$, je $p_1^2 = 25\alpha^2 + 20\alpha + 4 = 5\beta + 4$. Jsou-li oba zbytky při dělení p_1^2, p_2^2 pěti sobě rovny, je $p_1^2 - p_2^2$ násobkem pěti. Jsou-li tyto zbytky různé (1 a 4), je $p_1^2 + p_2^2$ násobkem pěti.

Dokázali jsme: číslo $p_1^2 - p_2^2$ je vždy dělitelné třemi; aspoň jedno z čísel $p_1^2 - p_2^2$, $p_1^2 + p_2^2$ je dělitelné pěti.

Protože čísla 3, 5 jsou nesoudělná, je

$$p_1^4 - p_2^4 = (p_1^2 + p_2^2)(p_1^2 - p_2^2)$$

dělitelné patnácti.

2. Autobus projížděl trať skládající se ze tří stejně dlouhých úseků. První úsek projížděl rychlostí v km/h; v druhém úseku jel rychlostí o 10 km/h menší, v třetím jel rychlostí o 5 km/h menší než v druhém.

a) Vyjádřete průměrnou rychlost autobusu na trati pomocí v.

b) Může být pro některé v průměrná rychlost $\frac{v}{2}$?

Řešení. a) Rychlost autobusu v km/h v jednotlivých úsecích byla: v, $v - 10$, $v - 15$. Označme s délku jednoho úseku trati v km a t dobu v hodinách, kterou autobus potřeboval k projetí trati. Průměrná rychlost x (km/h) je taková, kterou by musil jet autobus ve všech třech úsecích, aby projel trať $3s$ v době t. Doby, které autobus potřeboval k projetí jednotlivých úseků, jsou po řadě

$$\frac{s}{v}, \frac{s}{v-10}, \frac{s}{v-15}.$$

Pro celkovou dobu t platí tedy

$$t = \frac{s}{v} + \frac{s}{v-10} + \frac{s}{v-15}. \tag{1}$$

Mimo to však je $3s = xt$, tj.

$$t = \frac{3s}{x}. \tag{2}$$

Spojíme-li (1), (2) dostaneme po úpravě rovnici pro x

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{v} + \frac{1}{v-10} + \frac{1}{v-15}. \tag{3}$$

Odtud

$$\frac{3}{x} = \frac{(v-10)(v-15) + v(v-15) + v(v-10)}{v(v-10)(v-15)}$$

a po úpravě

$$x = \frac{3v(v^2 - 25v + 150)}{3v^2 - 50v + 150}. \tag{4}$$

Vzorec (4) dává řešení úlohy a).

b) Zkusíme, zda pro některé v může být $x = \frac{v}{2}$. Dosadíme $x = \frac{v}{2}$ do (4). Po odstranění zlomků vyjde

$$v(3v^2 - 50v + 150) = 6v(v^2 - 25v + 150) \tag{5}$$

Dělíme kladným číslem v, všecky členy převedeme na pravou stranu a vyměníme obě strany rovnice (5); dostaneme

$$3v^2 - 100v + 750 = 0,$$

neboli

$$v^2 - \tfrac{100}{3}v + 250 = 0.$$

Dále platí

$$(v - \tfrac{50}{3})^2 - \tfrac{2500}{9} + 250 = 0,$$

$$(v - \tfrac{50}{3})^2 = \tfrac{250}{9}.$$

Odtud vyplývá

$$v - \tfrac{50}{3} \doteq \tfrac{16}{3},$$

tj. buď $v = 22$ nebo $v \doteq 11\frac{1}{3}$. Vzhledem k textu úlohy vyhovuje jen $v \doteq 22$ (km/h).

Řešení úloh

MINULÉHO ROČNÍKU

● Fyzika

(Pokračování)

1. Na nakloněné rovině necháme postupně valit dva válce stejné hmotnosti M a stejných vnějších rozměrů (poloměru r a délky l). Jeden z válců je dutý (hustoty ϱ_1), druhý je plný (hustoty ϱ_2). Z podmínky stejné hmotnosti M obou válců plyne, že $\varrho_1 < \varrho_2$. Který z obou válců při valení ze stejné počáteční klidové polohy se odvalí na stejné dráze L v kratším čase? Vypočtěte poměr dob, za které urazí oba válce stejnou dráhu na téže nakloněné rovině, začal-li pohyb obou válců z klidu a je-li v obou případech pohyb způsoben jen účinky tíhového pole Země. Vnější poloměr obou válců je $r = 2$ cm, jejich délka $l = 5$ cm. Vnitřní poloměr dutého válce je $r_d = 1$ cm.

Objemový moment setrvačnosti plného válce (vzhledem k jeho podélné ose) je roven

$$J_V = \frac{\pi}{2} l r^4$$

Objemový moment setrvačnosti dutého válce k téže ose se rovná

$$J_V = \frac{\pi}{2} l (r^4 - r_d^4) .$$

Hmotnostní moment setrvačnosti je určen vztahem $J = J_V \varrho$. Vypočtěte též hustoty ϱ_1 a ϱ_2 obou válců, je-li hmotnost každého z nich rovna $M = 0{,}49$ kg.

(Došlo 23 řešení) *Václav Šindelář*

Řešil Pavel Kovařík, SPŠ, Praha, Zborovská:

Budiž V_1 objem plného válce, V_2 objem dutého válce.

Hustota plného válce je

$$\varrho_1 = \frac{M}{V_1} = \frac{M}{\pi r^2 l} ,$$

hustota dutého válce

$$\varrho_2 = \frac{M}{V_2} = \frac{M}{\pi (r^2 - r_d^2) l}$$

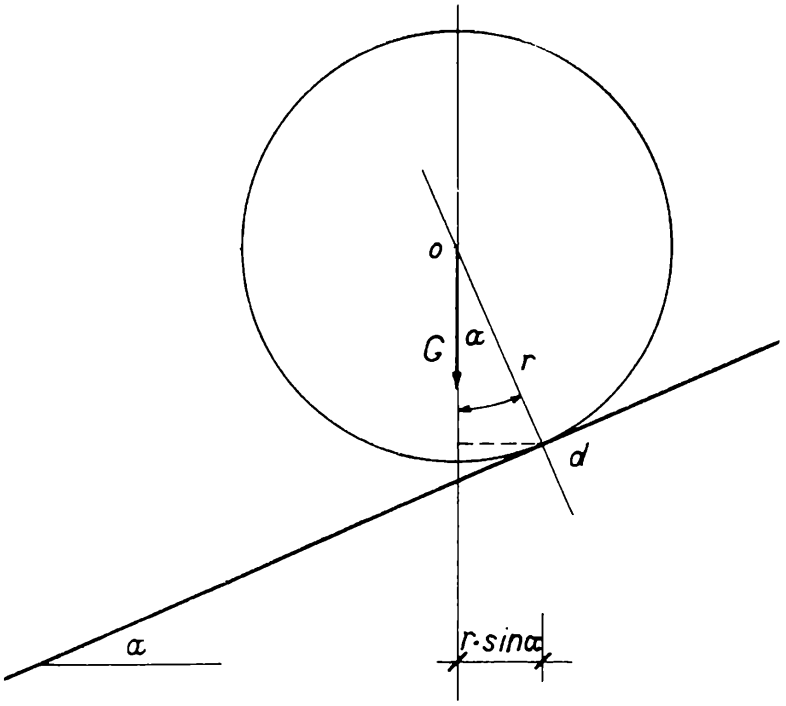
Je tedy vidno, že $\varrho_1 < \varrho_2$. Číselně jsou hustoty rovny

$$\varrho_1 = \frac{0{,}49}{\pi \ 0{,}02^2 \, . \, 0{,}05} \doteq 7{,}8 \, . \, 10^3 \ \mathrm{kg \ m^{-3}} ,$$

$$\varrho_2 = \frac{0{,}48}{\pi \ (0{,}02^2 - 0{,}01^2) \ \ 0{,}05} \doteq 10{,}4 \ \ 10^3 \ \mathrm{kg \ m^{-3}}$$

I. způsob. Při svém pohybu se válec otáčí v každém okamžiku kolem okamžité osy otáčení d (obr. 1), která leží v nakloněné rovině. Užijeme rovnici

$$D = J\varepsilon , \tag{1}$$



Obr. 1

v níž D je silový moment, který na těleso působí, J je jeho hmotnostní moment setrvačnosti tělesa, ε je úhlové zrychlení tohoto pohybu.

Z rovnice (1) plyne

$$\varepsilon = \frac{D}{J} .$$

Na válec působí jeho tíha $G = Mg$, jejíž moment k okamžité ose otáčení d je $D = Mgr \sin \alpha$. Hmotnostní moment setrvačnosti k d je podle Steinerovy věty

$$J_{1d} = (J_1 + V_1 r^2) \, \varrho_1 = \frac{\pi}{2} \, l r^4 \varrho_1 + V_1 r^2 \varrho_1 =$$

$$= \tfrac{1}{2} \, Mr^2 + Mr^2 = \tfrac{3}{2} \, Mr^2 ,$$

$$J_{2d} = (J_2 + V_2 r^2) \, \varrho_2 = \frac{\pi}{2} \, l \, (r^4 - r_d^2) \, \varrho_2 + V_2 r^2 \varrho_2 =$$

$$= \tfrac{1}{2} M (r^2 + r_d^2) + Mr^2 = \tfrac{1}{2} M (3r^2 + r_d^2) .$$

Úhlové zrychlení osy válců je

$$\varepsilon_1 = \frac{Mgr \sin \alpha}{\frac{3}{2} Mr^2} = \frac{2g \sin \alpha}{3r} ,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{Mgr \sin \alpha}{\frac{1}{2} M (3r^2 + r_d^2)} = \frac{2gr \sin \alpha}{3r^2 + r_d^2}$$

Pro zrychlení válce v místě jeho rotační osy platí, že $a = r\varepsilon$

$$a_1 = r\varepsilon_1 = r \frac{2g \sin \alpha}{3r} = \tfrac{2}{3} g \sin \alpha ,$$

$$a_2 = r\varepsilon_2 = r \frac{2gr \sin \alpha}{3r^2 + r_d^2} = \frac{2gr^2 \sin \alpha}{3r^2 + r_d^2}$$

Zrychlení je časově stálé, válec se tedy pohybuje rovnoměrně zrychleně. Rovnice tohoto pohybu je $s = \frac{1}{2} at^2$. Uběhnuté dráhy jsou

$$s_1 = \tfrac{1}{2} \omega_1 t_1^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} g \sin \alpha \, . \, t_1^2 = \frac{g \sin a}{3} t_1^2 ,$$

$$s_2 = \tfrac{1}{2} \omega_2 t_2^2 = \tfrac{1}{2} \frac{2gr^2 \sin \alpha}{3r^2 + r_d^2} t_2^2 = \frac{gr^2 \sin \alpha}{3r^2 + r_d^2} t_2^2$$

Z klidové polohy se odvalí na stejné dráze $s_1 = s_2 = L$ za čas t_1, resp. t_2, který plyne z rovnic

$$L = \frac{g \sin \alpha}{3} t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = \frac{3L}{g \sin a} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{3L}{g \sin \alpha}} , \qquad (2)$$

$$L = \frac{gr^2 \sin \alpha}{3r^2 + r_d^2} t_2^2 \Rightarrow t_2^2 = \frac{L (3r^2 + r_d^2)}{gr^2 \sin a} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{(3r^2 + r_d^2) L}{r^2 g \sin a}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3L}{g \sin a} + \frac{r_d^2 L}{r^2 g \sin \alpha}} = \sqrt{t_1^2 + k} , \; k > 0 , \qquad (3)$$

z čehož plyne, že $t_2 > t_1$.

Plný válec se odvalí z počáteční klidové polohy na stejné dráze v kratším čase nežli válec dutý. Poměr dob, za které urazí oba válce stejnou dráhu, je roven

$$\eta = \frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{\frac{3L}{g \sin \alpha}}}{\sqrt{\frac{(3r^2 + r_d^2) L}{r^2 g \sin a}}} = \sqrt{\frac{3r^2}{3r^2 + r_d^2}} ,$$

číselně, po dosazení zadaných hodnot

$$\eta = \sqrt{\frac{3 \cdot 2^2}{3 \cdot 2^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{12}{13}}$$

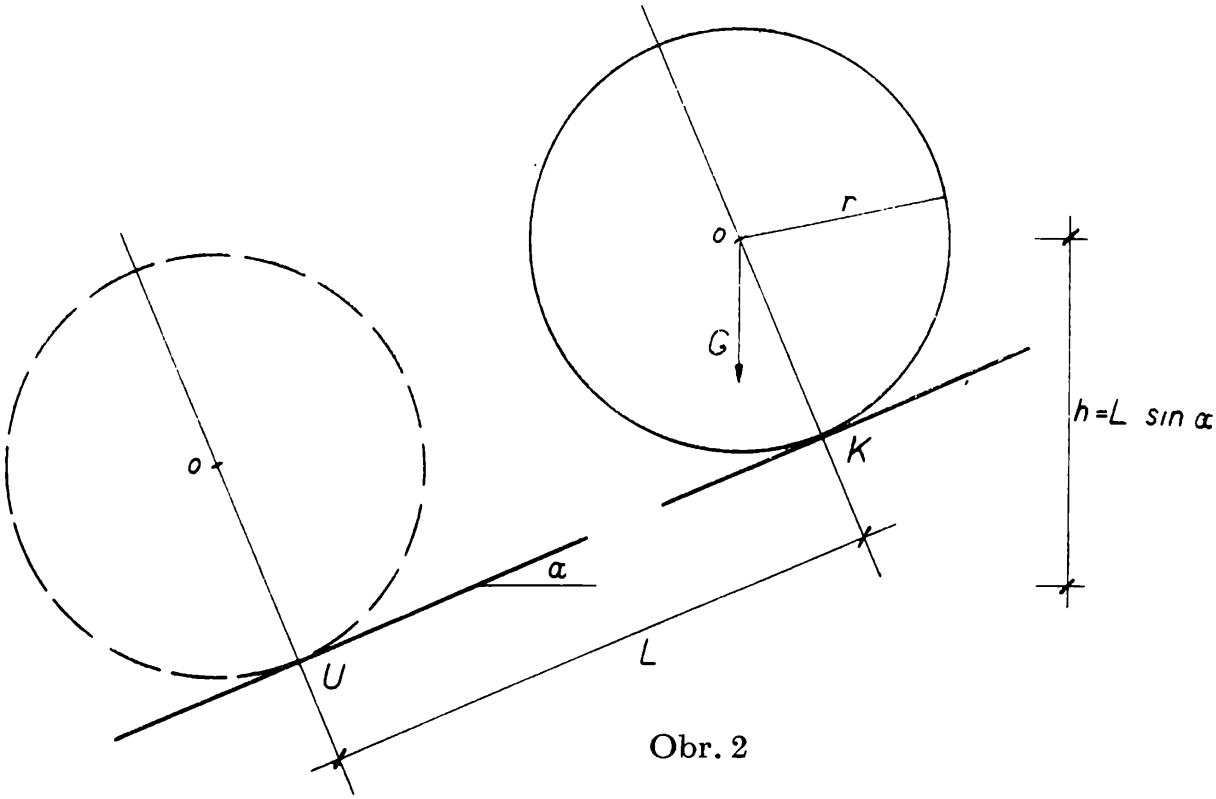
II. způsob. Určíme konečnou rychlost válců po proběhnutí dráhy L. Dále použijeme zákona zachování energie.

Celková energie pohybujícího se tělesa (při translaci i rotaci)

$$W_{kc} = \tfrac{1}{2} M v^2 + \tfrac{1}{2} J \omega^2$$

Těleso ve výši h má tíhovou potenciální energii $W_p = Mgh$. Po proběhnutí dráhy délky L, pro níž platí, že $h = L \sin \alpha$, kde α je úhel sklonu nakloněné roviny, změní se celá potenciální energie, kterou těleso mělo v poloze K, na kinetickou energii (v konečné poloze U, obr. 2). Platí tedy

$$W_{kc} = W_p$$



Obr. 2

Pro plný válec platí $J_1 = \frac{1}{2} Mr^2$,

$$\tfrac{1}{2} M v_1^2 + \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} M r^2 \omega_1^2 = Mgh\,, \tag{4}$$

pro dutý válec $J_2 = \frac{1}{2} M (r^2 + r_d^2)$

$$\tfrac{1}{2} M v_2^2 + \tfrac{1}{2} \tfrac{1}{2} M (r^2 + r_d^2) \omega_2^2 = Mgh \tag{5}$$

Mezi úhlovou rychlostí a postupnou rychlostí platí rovnice

$$v = \omega r \tag{6}$$

Použijeme-li rovnici (4), dostáváme po úpravě

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}},$$

podobně u rovnice (5) plyne

$$\tfrac{1}{2}\omega_2^2 r^2 + \tfrac{1}{4}\omega_2^2 r^2 + \tfrac{1}{4} r_d^2 \omega_2^2 = gh,$$
$$\omega_2^2 \left(\tfrac{3}{4} r^2 + \tfrac{1}{4} r_d^2\right) = gh,$$

dosadíme-li

$$\omega^2 = \frac{v^2}{r^2},$$

dostaneme

$$v_2^2 = r^2 \frac{gh}{\frac{1}{4}(3r^2 + r_d^2)} \Rightarrow v_2 = 2r\sqrt{\frac{gh}{3r^2 + r_d^2}}$$

Je-li střední rychlost u rovnoměrně zrychleného pohybu (začínajícího z klidu) dána vztahem $c = \frac{1}{2} v$, plyne

$$c_1 = \tfrac{1}{2}\, 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = \sqrt{\frac{gh}{3}},$$

$$c_2 = \tfrac{1}{2}\, 2r\sqrt{\frac{gh}{3r^2 + r_d^2}} = r\sqrt{\frac{gh}{3r^2 + r_d^2}}$$

Pohyb rovnoměrný přímočarý, kterým dále lze v našem případě analyzovaný pohyb nahradit, se řídí zákonem $s = ct$. Mezi výškou h a dráhou L platí vztah $h = L \sin a$. Můžeme tedy psát

$$L = \sqrt{\frac{gL \sin \alpha}{3}}\ t_1 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{3L}{g \sin \alpha}},$$

$$L = r\sqrt{\frac{gL \sin \alpha}{3r^2 + r_d^2}}\ t_2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{(3r^2 + r_d^2)\, L}{r^2 g \sin a}},$$

což jsou vztahy shodné se (2) a (3).

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKY
NA VYSOKÉ ŠKOLY

Přijímací řízení na strojní fakultě ČVUT

Na podkladě rozborů, které jsme na fakultě v posledních letech prováděli, ustaluje se metodika přijímacího řízení, která se snaží zachytit v maximální míře ten soubor informací, jež mohou přispět k objektivnímu a vzájemně srovnatelnému rozhodování o přijetí toho či onoho uchazeče.

Získávané informace týkají se těchto pěti základních hledisek:

1. Aktuální vědomosti a znalosti v základních předmětech (matematika, fyzika, geometrie).
2. Celková úroveň inteligence, popřip. struktura nadání.
3. Profil osobnosti - povahové a charakterové vlastnosti.
4. Oblasti zájmů a jejich vyhraněnost.
5. Sociální prostředí a zdravotní stav.

Všechna tato hlediska se snažíme objektivizovat tím, že je získáváme ze dvou pramenů a podrobujeme vzájemné kontrole. Tak například v oblasti vědomostí a znalostí je to jednak středoškolský prospěch v příslušných předmětech, a jednak písemná zkouška z těchto předmětů jako součást přijímacího řízení, v oblasti inteligence, povahových vlastností a zájmů je to jednak komplexní hodnocení vypracovávané třídním učitelem (popřip. přímým nadřízeným) předepsanou formou vázaného dotazníku, jednak sada psychologických testů příslušného zaměření atd.[1])

V dalším se zaměříme pouze na matematicko-fyzikální část zkoušky; pro informaci jak tato zkouška vypadá uveřejňujeme dva test y této zkoušky, jež byly dány studentům při přijímacím řízení pro školní rok 1966/67. Každý student dostal papíry s těmito texty, kde pod každým textem bylo vynecháno místo na počítání příkladu a rámeček, do něhož vepsal výsledek. Pro úsporu místa uvádím jen znění textu bez příslušné úpravy.

Test č. 1

1. Vypočtěte, která celá nezáporná čísla splňují nerovnost

$$\frac{4x - 3}{5} < \frac{5 - x}{3}$$

[1]) Podrobný popis metodiky, použité na fakultě při přijímacím řízení 1966/67 je uveden v časopise Vysoká škola č. 2, roč. 66/67.

2. Proveďte následující úkony (ve v šech případech je $a > 0$):

$a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = ?$ $\qquad (\sqrt{a})^4 =$ $\qquad a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{3}} =$ $\qquad \sqrt{a^{\frac{4}{3}}}$ $\qquad \sqrt[3]{a} =$

Rozložte v součin $(a > 0)$: $a + a^{\frac{1}{2}} = ?$

3. Pomocí prvních dvou vzájemně si odpovídajících údajů v následující tabulce určete základ a uvažovaných logaritmů a doplňte do tabulky chybějící údaje:

x	0,2	-5	5		0,008	
$\log_a x$	-1			0		0,5

4. Řešte následující rovnice:

a) $0{,}4^{2x+1} = 64 \cdot 10^{-3}$,

b) $\log(4x + 6) - \log(2x - 1) = 1$ $\quad (\log x = \log_{10} x)$

Vypočtěte hodnotu $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$, znáte-li vztah:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad \text{pro} \quad 0 \leq \alpha < \pi .$$

Výsledek zjednodušte (úpravou složeného zlomku a usměrněním).

6. Nalezněte všechna x z intervalu $\langle 0; 2\pi$, která splňují goniometrickou rovnici $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$. Výsledek uveďte v obloukové míře.

7. Napište rovnici elipsy, jejíž ohniska jsou body $F_1 (-3; 0)$, $F_2 (3; 0)$, má-li jeden z vrcholů souřadnice $(5; 0)$.

8. Je dána úsečka velikosti a. Sestrojte úsečku XY velikosti $a\sqrt{5}$. Zapište větu, o kterou se opírá řešení úlohy.

9. Na náčrtu krychle $ABCD\,A'B'C'D'$ sestrojte patu P kolmice z bodu B' k rovině $A'BC'$. (Návod: Uvažujte čtyřstěn $A'BC'D'$!) Zapište postup konstrukce.

10. Je dána krychle $ABCD\,A'B'C'D'$ o velikosti hrany $AB = a$. Vypočtěte obsah trojúhelníka $D'OS$, kde O je střed hrany $B'C'$, S střed podstavy $ABCD$.

11. Těleso uvádí do pohybu síla **F**, která svírá se směrem dráhy úhel α. Vyjádřete příslušný výkon P, jestliže za čas t urazí těleso dráhu s.

12. Kmitavý obvod je tvořen kapacitou C a indukčností L. Určete všechny způsoby, jimiž lze zvýšit jeho frekvenci, je-li perioda kmitu T určena vztahem $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Test č. 2

1. Sestavte kvadratickou rovnici, která má tyto kořeny:

$$x_1 = 6 + \sqrt{2}, \; x_2 = 6 - \sqrt{2}.$$

2. Proveďte následující úkony (ve všech případech je $a > 0$):

$a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} =$ $\qquad \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$

$\frac{a^3}{a^{-2}} =$ $\qquad \frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}} =$

Rozložte v součin $(a > 0)$:

$$a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} = ?$$

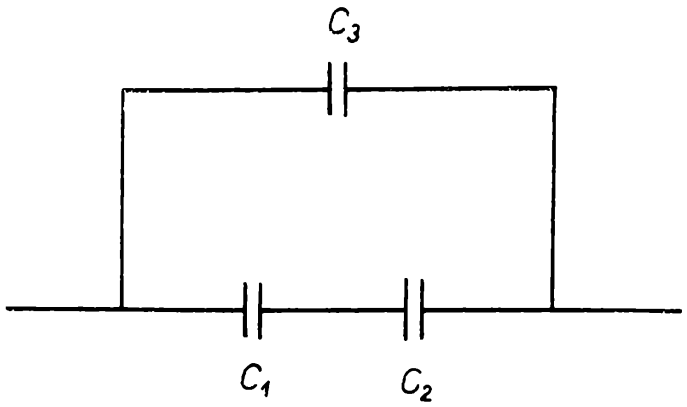
3. Pomocí prvních dvou vzájemně si odpovídajících údajů v následující tabulce určete základ a uvažovaných logaritmů a doplňte do tabulky chybějící údaje:

x	2		-2		1	0,25
$\log_a x$	0,5	-2		1		

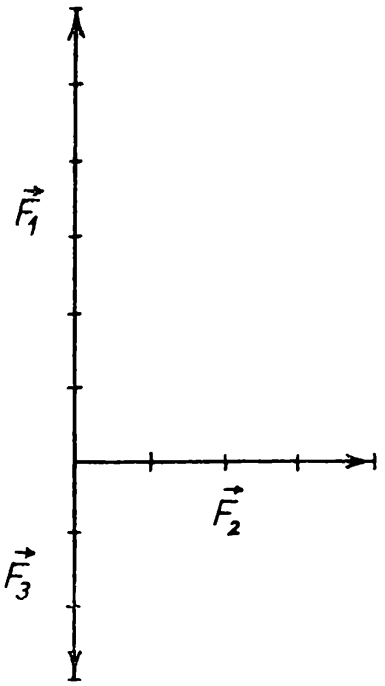
4. Řešte následující rovnice:

a) $\sqrt{3^{x-1}} = 243 \; (= 3 \;\; 81)$

b) $\dfrac{2 + \log x}{3 - \log x} = 4 \quad (\log x = \log_{10} x)$



Obr. 1



Obr. 2

5. Kosočtverec má úhlopříčky délek 3 cm a $\sqrt{3}$ cm. Vypočítejte délku a strany tohoto kosočtverce a velikosti vnitřních úhlů ve stupňové míře.

6. Zatrhněte všechny správné identity z uvedených vztahů ($0° < \alpha < 90°$):

a) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1$,
b) $\operatorname{tg} \alpha \;\; \operatorname{cotg} \alpha = 1$,
c) $\sin \alpha = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cotg} \alpha}$,
d) $\operatorname{tg} \alpha \,.\, \cos \alpha = \sin \alpha$,
e) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,
f) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$,
g) $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$,
h) $\cos 2\alpha \quad \cos^2 \alpha \,.\, \sin^2 \alpha$,

i) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$,

j) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$

7. Určete výpočtem vzájemnou polohu přímky $y = x + 3$ a kuželosečky

$$\frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(x+2)^2}{3} = 1$$

8. Sestrojte trojúhelník ABC o dané straně $AB = c$, výšce v_a a těžnici t_c. Popište postup konstrukce. Kdy je úloha řešitelná?

9. Uvnitř úsečky AB je bod X, přičemž $AX = a$, $BX = b$. Na kolmici bodem X k úsečce AB sestrojte bod Y, aby platilo $XY = \sqrt{ab}$. Určete velikost AY. Zapište větu, o kterou se opírá řešení úlohy.

10. Vypočtěte objem V kvádru, je-li poměr velikostí jeho hran a b $c = 5 : 4 : 3$ a úhlopříčka ve stěně o hranách a, b má velikost $u = 20$.

11. Ke kondenzátorům o kapacitě $C_1 = 2$ μF, $C_2 = 4$ μF připojíme kondenzátor C_3 podle připojeného schématu (obr. 1). Jaká musí být jeho kapacita, aby kapacita celé soustavy byla $C = 1{,}5$ μF, víte-li, že výsledná kapacita celé soustavy je při zapojení za sebou určena vzorcem

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \quad + \frac{1}{C_n},$$

při zapojení vedle sebe $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$.

12. K dané soustavě sil (obr. 2) sestrojte sílu $\mathbf{F}_4$ tak, aby vzniklá soustava sil byla v rovnováze; určete velikost síly $\mathbf{F}_4$ (1 dílek značí 1 N).

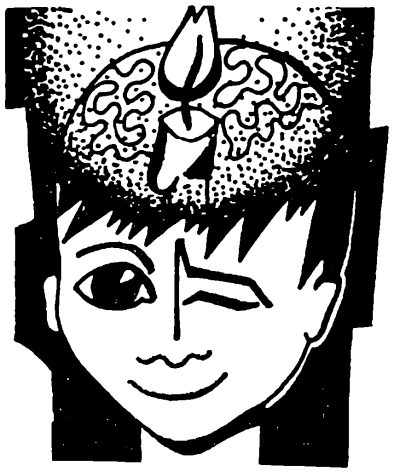
Řešení příkladů

Z článku o přijímacích zkouškách z fyziky na stavební fakultu ČVUT.

Texty příkladů jsou v č. 7 Rozhledů matematicko-fyzikálních, str. 332.

Příklad **1.** $v = 498\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $W_{kin} = 124\,100 \cdot m$ joulů, kde m je hmota střely udaná v kg. **2.** $v = 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $a = 0{,}2\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, $s = 2{,}5$ m. **3.** $F = 601$ N. **4.** $s = 76$ m. **5.** $v = 0{,}0162\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 0{,}58\ \mathrm{km\,h^{-1}}$. **6.** $p = 4 \cdot 10^6\ \mathrm{N\,m^{-2}}$. **7.** $l_2 = 1{,}6$ m. **8.** $F_G = 600$ N. **9.** $F = 400\ \mathrm{N} \doteq 40$ kp. **10.** $F = 3{,}9033 \cdot 10^4$ N. **11.** $F_S = 270\ \mathrm{N} \doteq 27$ kp; $F_M = 1{,}7\ \mathrm{N} \doteq 0{,}17$ kp. **12.** $h = 3{,}5872 \cdot 10^7$ m. **13.** $W \doteq 3{,}81 \cdot 10^5$ J. **14.** $t = 34$ min 43 s. **15.** $h = 2{,}5$ m. **16.** $F_{brzdící} = 5000$ N. **17.** $A = 4{,}31 \cdot 10^6$ J. **18.** $A = 2157{,}4$ J, $P = 513{,}68$ W. **19.** $A = 7{,}6 \cdot 10^5$ J; asi 14 haléřů. **20.** Prodloužení je $1{,}196 \cdot 10^{-2}$ m. **21.** Prodloužení je $2{,}4 \cdot 10^{-3}$ m. **22.** $p_2 = 0{,}8\ \mathrm{kp\,m^{-2}}$. **23.** $V_2 = 80$ l. **24.** Mělo se určit měrné teplo c_2 ($c_2 = 0{,}66\ \mathrm{kcal \cdot kg^{-1}\,deg^{-1}}$). **25.** $t = 18$ °C. **26.** $V_2 = 2{,}9\ \mathrm{m^3}$. **27.** $R = 40\ \Omega$, $P = 0{,}9$ W. **28.** Správné zadání příkladu: Elektromotorické napětí baterie je 6 V. Baterie je zapojena v obvodě, kde teče proud $^1/_2$ A a jehož odpor je 10 Ω. Určete svorkové napětí a vnitřní odpor baterie. Řešení: $U_s = 5$ V, $R_i = 2\ \Omega$. **29.** $F \doteq 4{,}42 \cdot 10^{-5}$ N. **30.** $f = 2{,}66$ cm. **31.** $n_{1,2} \doteq 0{,}7$.

Alena Drahokoupilová, Ivan Kašpar



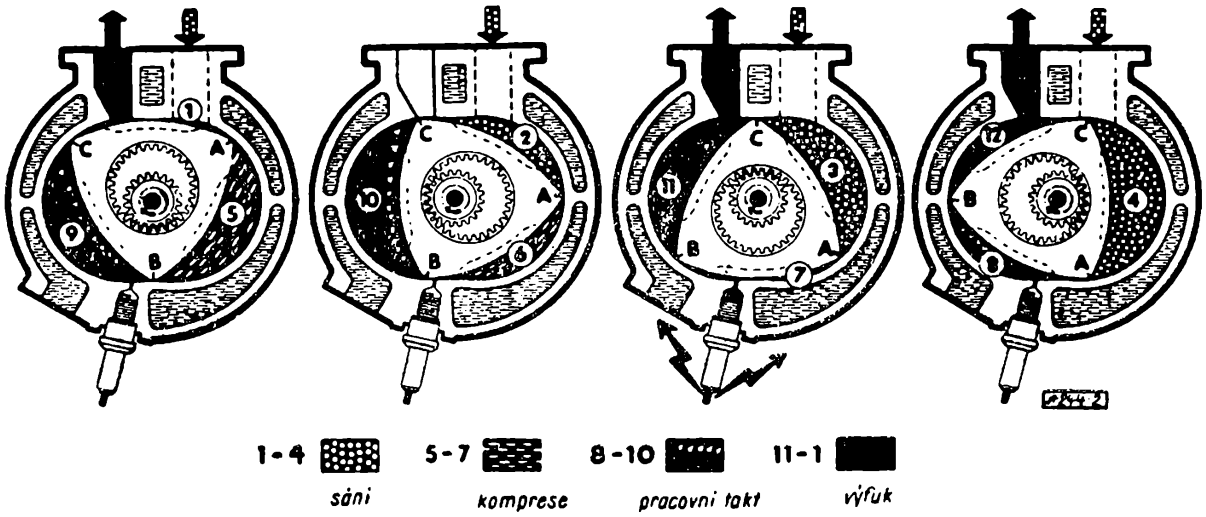
Motor Wankel

FRANTIŠEK GOLAB, FRANTIŠEK KAMENČÁK, PF, Ostrava

Již několik let se objevují v tisku zprávy, z nichž je možno usuzovat na možnost blízké revoluce ve vývoji spalovacích motorů. Důvodem k těmto zprávám je skutečnost, že se již od r. 1926 podávají patentní přihlášky v různých zemích světa na motor, u něhož by byl postupný pohyb pístu nahrazen pohybem rotačním. Většina patentních přihlášek zůstala jen na stolech vynálezců. Několika vynálezcům se podařilo postavit i funkční prototyp — tím všichni skončili až na jednoho, jehož jméno je velmi dobře známé — Felix Wankel.

Začal pracovat na modelu s rotačním pístem r. 1926. Měl k této činnosti velké předpoklady, neboť byl vynikajícím odborníkem v oboru těsnění tradičních pístů motorů a již první pokusy s modely rotačních pístů ukázaly, že úspěch může mít jen ten, kdo vyřeší těsnění rotujícího pístu. Ovšem i pro tak schopného konstruktéra to byl tvrdý oříšek. Po 10 letech práce na modelu pokračoval od r. 1936 v bývalém německém leteckém ústavu a po válce ve vlastním vývojovém středisku. Od r. 1951 spolupracuje s firmou NSU, kde pod jeho vedením pracuje velmi početný štáb konstruktérů. V r. 1954 poprvé navrhl motor na rotačním principu se čtyřdobým pracovním cyklem a šoupátkovým rozvodem, kterého použila firma NSU pro rekordní motocykl NSU 50 cm^3.

Již v dalším roce 1957 zveřejnila firma NSU technické zprávy o novém motoru NSU-Wankel 250 cm^3. U tohoto motoru se pohyboval



píst i skříň — píst rotoval a skříň konala pohyb krouživ ý. Mezi odborníky zavládlo vzrušení. Čekalo se, jak se podaří odstranit některé nedostatky motoru, hlavně poměrně složitou konstrukci. Již za rok — v r. 1958 — ohlásila firma NSU další zkoušky motoru úplně nové koncepce NSU Wankel 250 cm³ s krouživ ým pístem.

Došlo tedy ke změně ve funkci pístu, neboť v původním typu píst rotoval a skříň konala pohyb krouživý, kdežto u nového typu motoru vykonává obě funkce píst sám, takže skříň je v klidu. Touto změnou funkce pístu se motor konstrukčně velmi zjednodušil a získal též provozní spolehlivost.

Na obr. 1 je schematicky znázorněn vertikální řez pístní skříní se čtyřmi polohami pístu během jedné otáčky hřídele. Jak je vidět z obrázku, vykoná rotační píst za tu dobu jen jednu třetinu cyklu. Čísly *1* až *12* a dalšími značkami je znázorněno, která z fází čtyřdobého motoru právě v daném prostoru probíhá. Tři samostatné, od sebe oddělené pracovní prostory vznikají ve válci těsněním v rozích pístu *A*, *B*, *C*, zvaným Wankelovy lišty. Jejich kvalita vzhledem k velkým otáčkám motoru byla největším a nejdéle řešeným vývojovým úkolem.

Plášť motoru je chlazen vodou. Jsou v něm sací a výfukový kanálek a jen jedna svíčka.

Píst má tvar trojbokého hranolu s vypuklými pracovními stěnami. Jeho vnitřní ozubení zapadá do zubů pevného kola, jehož osou prochází hřídel motoru. Na pevném kole je píst uložen excentricky. Hrany pístu opisují dráhu, zvanou dvouoblouková epitrochoida. Tato křivka patří mezi tak zvané křivky cykloidální. Je to ovál, ve svém průměru zúžený, připomínající tvarem fazoli.

Ačkoliv jde o pracovní cyklus čtyřdobý, odkrývá píst postupně sací a výfukový kanálek jako u motoru dvoudobého. Pohybem pístu mění se velikosti jednotlivých pracovních prostorů tak, že po vykonání jednoho cyklu pístu proběhnou v každém pracovním prostoru všechny čtyři pracovní doby čtyřdobého motoru.

Sledujeme-li činnost Wankelova motoru na schematických obrazech 1, znamená tam:

a) čísla *1* až *4* a bílé tečky *sání*,
b) čísla *5* až *7* a bílé čárky *kompresi*,
c) čísla *8* až *10* a šipky *pracovní dobu*,
d) čísla *11* až *12* a černá barva *výfuk*.

Po zveřejnění technických údajů tohoto nového motoru byli pozváni v lednu 1960 odborníci a novináři z mnoha zemí do Mnichova, kde inženýr Wankel a další vedoucí konstruktéři firmy NSU zodpověděli dotazy. Předvedli účastníkům tento nový motor KKM 250 (obsah jedné komory je 250 cm^3) jak při zkoušce na brzdě, tak i v jízdě. K tomuto účelu byl motor namontován do vozu NSU Prinz.

Účastníci vyzvedli hlavně tyto přednosti motoru: Malé rozměry a malou váhu motoru, jednoduchou konstrukci a malé nároky na kvalitu paliva i pravidelný a klidný chod motoru.

Jako nedostatky bylo uváděno: Skříň se chladí vodou a píst olejem, což je složité, spotřeba je vysoká a nejsou zatím pro vyšší obrátky vyvinuty vhodné spojky, převodovky a rozvodovky.

Od tohoto stavu, zjištěného v r. 1960, jde vývoj motoru KKM stále mílovými kroky vpřed.

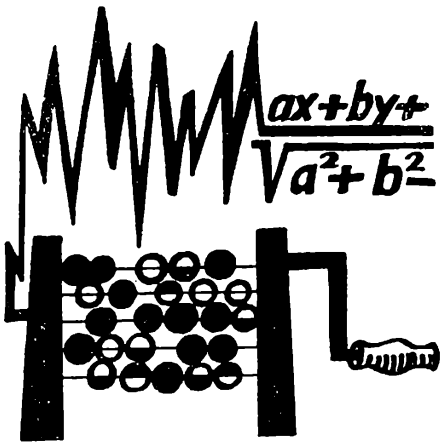
V nejbližších letech budeme jistě svědky velkého náporu motorů s krouživým pístem na dosavadní hegemonii pístových spalovacích motorů.

Potud informace, kterou otiskujeme na přání čtenářů. Redakce.

Ředitel VÝZKUMNÉHO ÚSTAVU KRIMINOLOGICKÉHO při Generální prokuratuře v Praze 4, nám. Hrdinů 1300, **vypisuje KONKURS na funkci vědeckého nebo odborného pracovníka STATISTIKA.**

Náplň práce: Uplatnění matematickostatistických metod v kriminologickém výzkumu, teoretické otázky statistiky kriminality.

Předpoklad: Vysokoškolské vzdělání příslušného směru, pro funkci vědeckého pracovníka, hodnost kandidáta věd. Přihlášky se životopisem a příp. seznamem publikací zašlete na adresu ústavu do 3 týdnů po uveřejnění tohoto oznámení.



Grafická metoda řešení logických úloh

JAROSLAV ŠEDIVÝ, Praha

(Dokončení)

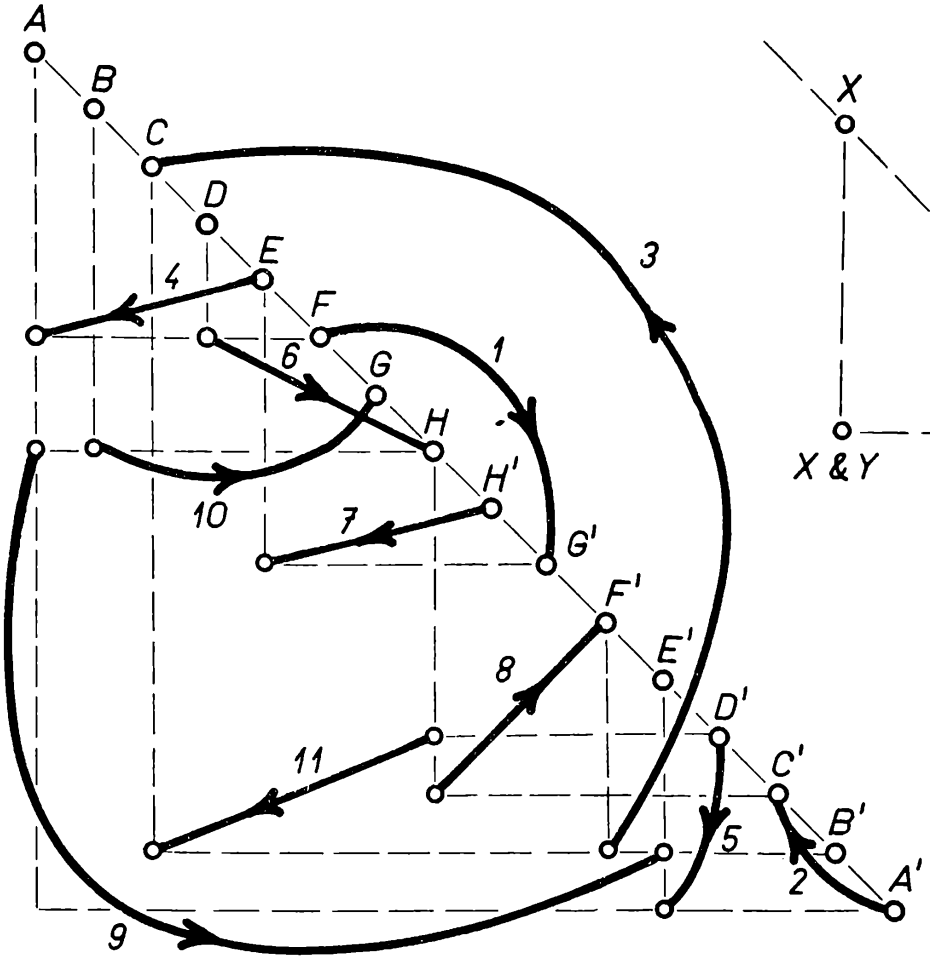
Čtvrtá úloha detektivního pětiboje (Rozhledy m.-f., č. 5) je na první pohled složitější než předcházející tři. Její podmínky nelze vyjádřit tak jednoduchými implikacemi, s jakými jsme vystačili u tří prvních úloh. Použijme výroků typu „*X byl v partě*“, „*X nebyl v partě*“, $X \in \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ a pokusme se zformulovat implikace vyjadřující přesnou logickou formou podmínky úlohy v tom pořadí, jak jsou uvedeny v textu úlohy:

1. Jestliže *F byl v partě*, pak *G nebyl v partě*.
2. Jestliže *A nebyl v partě*, pak *C nebyl v partě*.
3. Jestliže *B nebyl v partě* a *F nebyl v partě*, pak *C byl v partě*.
4. Jestliže *E byl v partě*, pak *A byl v partě* a *F byl v partě*.
5. Jestliže *D nebyl v partě*, pak *A nebyl v partě* a *E nebyl v partě*.
6. Jestliže *D byl v partě* a *F byl v partě*, pak *H byl v partě*.
7. Jestliže *H nebyl v partě*, pak *E byl v partě* a *G nebyl v partě*.
8. Jestliže *H byl v partě* a *C nebyl v partě*, pak *F nebyl v partě*.
9. Jestliže *A byl v partě* a *H byl v partě*, pak *B nebyl v partě a E nebyl v partě*.
10. Jestliže *B byl v partě* a *H byl v partě*, pak *G byl v partě*.
11. Jestliže *H byl v partě* a *D nebyl v partě*, pak *C byl v partě* a *B nebyl v partě*.
12. Jestliže *A byl v partě* a *F nebyl v partě* a *E byl v partě*, pak *D nebyl v partě*.

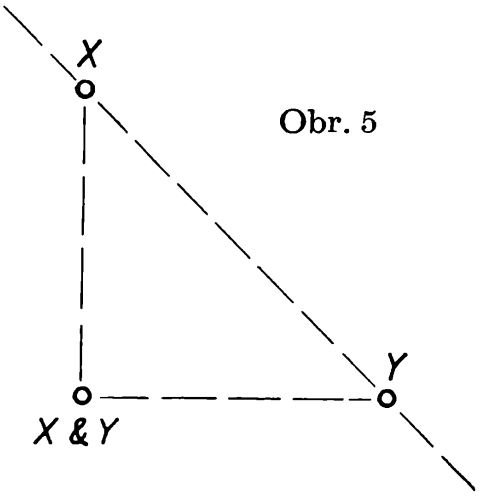
Poslední podmínka je nejsložitější, protože příslušná věta textu neříká, že *A* bez *F* si vynutil účast *E*. Neúčast *D* je jistá pouze v případě,

že E vůbec byl v partě. Podaří-li se nám vyvodit z podmínek 1—11 jednoznačný závěr o účasti E, zjednodušíme na základě toho podmínku 12, jinak budeme muset počítat s oběma možnostmi. Nejprve se tedy budeme zabývat řešením úlohy na základě podmínek 1—11 a použijeme vhodného grafu.

Na grafu potřebujeme znázornit jedním kroužkem jak jednoduché výroky „*X byl v partě*“, „*X nebyl v partě*“, tak složené výroky typu „*X byl v partě* a *Y byl v partě*“, které tvoří předpoklady, resp. tvrzení řady podmínek. Vhodný způsob konstrukce jednoduchého grafu ukazuje obr. 4, kde jsou zakresleny na myšlené přeponě velkého pravo-



Obr. 4



Obr. 5

úhlého rovnoramenného trojúhelníka kroužky označené po řadě písmeny $A, B, \ldots, H, H', \ldots, B', A'$. Tyto kroužky (uzly grafu) představují po řadě výroky „*A byl v partě*“, „*B byl v partě*“, ..., „*H byl v partě*“, „*H nebyl v partě*“, ..., „*B nebyl v partě*“, „*A nebyl v partě*“ Symetrické uspořádání uzlů X, X' není podmínkou, usnadňuje však orientaci v grafu.

Složené výroky typu „*X byl v partě* a *Y byl v partě*“ nazýváme konjunkcemi výroků „*X byl v partě*“, „*Y byl v partě*“; označíme je sym-

bolem X & Y. Při jejich grafickém znázornění je užitečné vyjádřit jejich souvislost s výroky X, Y, na obr. 5 je toho dosaženo pomocí pravoúhlých trojúhelníků s přeponou XY a vrcholem pravého úhlu X & Y. Strany trojúhelníka jsou vytaženy jen slabě čárkovaně, aby nerušily hrany grafu, kterými znázorníme implikace obsažené v podmínkách úlohy. Na obr. 4 jsou hrany očíslovány stejně jako podmínky úlohy. K uzlům označujícím konjunkce není nutno připisovat symboly, protože velmi snadno zjistíme, kterou konjunkci vrchol pravého úhlu představuje.

Kladení lístků s písmeny $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$ se opět řídí pravidly (1)—(4), která vyjadřují vlastnosti implikací a negací. Nově musíme přihlédnout k vlastnostem konjunkcí X & Y, zformulujeme proto další pravidla (9), (10), (11). Vrcholy pravých úhlů uvažovaných trojúhelníků nazveme stručně hlavní vrcholy (uzly) trojúhelníků.

(9) *Konjunkce X & Y platí právě tehdy, když X platí a Y platí.* — *Lístek s P leží na hlavním vrcholu trojúhelníka právě tehdy, když leží lístky s P i na obou ostatních vrcholech trojúhelníka.*

(10) *Neplatí-li výrok X, pak neplatí žádná konjunkce X & Y.* — *Leží-li lístek s N na uzlu přepony, položíme lístky s N na hlavní uzly všech trojúhelníků, které mají jeden vrchol ve zmíněném uzlu přepony.*

(11) *Neplatí-li konjunkce X & Y a platí-li výrok X, pak neplatí výrok Y.* — *Leží-li na hlavním uzlu trojúhelníka lístek s N a na druhém vrcholu lístek s P, pak položíme na třetí vrchol lístek s N.*

Hra s kladením lístků podle pravidel (1)—(4), (9)—(11) umožňuje snadné řešení úlohy. Popíšeme stručně postup hry, čtenář jej může realizovat na svém grafu a doplnit si úvahy (odvolání na jednotlivá pravidla, podmínky úlohy atd.). Nejprve zjistíme, zda E byl v partě.

P ř e d p o k l a d : E platí, E' neplatí. Postupně získáme: A & F platí, A platí, F platí, G' platí, A' & E' neplatí, D' neplatí, D platí, D & F platí, H platí, A & H platí, E' & B' platí, E' platí s p o r s p ř e d p o k l a d e m.

Zjistili jsme, že E v partě nebyl, v důsledku toho není nikdy splněn předpoklad podmínky 12 a ta tím ztrácí význam pro řešení úlohy, je nadbytečná. K řešení úlohy nám postačí podmínky 1—11, které již máme na grafu zachyceny. Nejrychleji vede k cíli diskuse o platnosti A, C, tento postup si popíšeme.

I. *Víme, že E neplatí; předpokládáme, že A neplatí.* Postupně získáme: A' platí, C' platí, C neplatí, E & G' neplatí, H' neplatí, H platí, H & C' platí, F' platí, F neplatí, F' & B' neplatí, B' neplatí, B platí, B & H platí, G platí, C' & B' neplatí, H & D' neplatí, D platí. Všechny uzly na přeponě jsou pokryty lístky s $\mathcal{P}$, resp. $\mathcal{N}$; platí právě jen B, D, G, H. Zkouška ukáže, že jsou splněny všechny podmínky úlohy.

II. *Víme, že E neplatí*; *předpokládáme, že A platí.* Postupně získáme: E' platí, A' neplatí, A' & E' neplatí, D' neplatí, D platí, E & G' neplatí, H' neplatí, H platí, A & H platí, E' & B' platí, B' platí, B neplatí, B & H neplatí, H & D' neplatí. Dále již nelze uplatnit žádné pravidlo pro pokládání lístků, musíme proto učinit další předpoklad.

a) *Předpokládejme, že C neplatí.* Postupně získáme: C' platí, B' & F' neplatí, F' neplatí, H & C' neplatí, C' neplatí - *spor* s předpokladem.

b) *Předpokládejme, že C platí.* Pak víme, že A, C, D, H platí, B, E neplatí; zbývá určit, zda F platí či neplatí, G platí či neplatí. Kromě zjištění, že C' neplatí, nedosáhneme žádného výsledku při pokusech uplatnit některé z výše uvedených pravidel. Dochází však k zajímavé situaci, že všechny podmínky úlohy kromě první jsou splněny nezávisle na tom, jaké pravdivostní hodnoty mají výroky F, G. První podmínka připouští zřejmě tři možnosti: α) F platí, G neplatí, β) F neplatí, G platí, γ) F neplatí, G neplatí. Připojíme-li kteroukoliv z nich k uvedenému částečnému řešení, získáme jedno řešení úlohy.

Úloha „Zjistíte pachatele?“ má celkem čtyři různá řešení; parta se mohla skládat z B, D, G, H nebo z A, C, D, H nebo z A, C, D, F, H nebo z A, C, D, G, H. Určitě se akce zúčastnili podezřelí D, H, určitě se nezúčastnil E.

Popsaný způsob řešení slovních logických úloh může čtenář úspěšně uplatnit u mnoha úloh, se kterými se setká v časopisech. Před konstrukcí grafu musí logicky analyzovat text, vybrat množinu základních výroků a pokusit se o formulaci všech podmínek úlohy pouze pomocí těchto základních výroků a logických spojek „a, nebo, jestliže, pak, právě tehdy, když“. Podaří-li se čtenáři vyjádřit podmínky úlohy ve tvaru implikací, jejichž předpoklady i tvrzení jsou jednoduché výroky nebo konjunkce nejvýše dvou základních výroků, může uplatnit postup popsaný v tomto článku.

Vhodné úlohy obsahuje např. knížka Zich - Kolman: *Zajímavá logika*, Mladá fronta, 1965, kde jsou vyloženy jiné způsoby řešení logických úloh. Pomocí grafu lze vyřešit i poslední úlohu detektivního pětiboje, kterou se již v tomto článku nebudeme zabývat. Metoda řešení úloh tohoto typu je popsána v 5. čísle časopisu Matematika ve škole, roč. 1966/67, který odebírají učitelé matematiky.

Některé důsledky Moivreovy věty

RNDr. BRUNO BUDINSKÝ, CSc., ČVUT, STANISLAV ŠMAKAL, VŠE, Praha

V minulém čísle Rozhledů jsme podali jeden z důkazů Moivreovy věty. Připomeňme si její matematický zápis

$$(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) \qquad (1)$$

Rovnost (1) platí i v případě, že $\beta = \alpha$. Získáme tak vztah

$$(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha\,.$$

Zde se přímo vnucuje otázka, zda neplatí obecně

$$(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha\,, \qquad (2)$$

kde n je libovolné přirozené číslo. Vzorec (2) skutečně platí, jak lze snadno dokázat úplnou indukcí.

Rovnosti (1) a (2) jsou základem pro odvození takřka všech goniometrických vzorců a vztahů mezi goniometrickými funkcemi. Kromě toho rovnost (2) umožňuje úsporný výpočet n-té mocniny komplexního čísla, vede ke vzorci pro n-tou odmocninu, je důležitá při řešení tzv. binomických rovnic a konečně, dovoluje vyjádřit snadno goniometrické funkce vícenásobného argumentu funkcemi jednoduchého argumentu.

Nebudeme v tomto článku odvozovat systematicky všechny hlavní důsledky Moivreovy věty. Všimneme si blíže pouze některých. Čtenáři ukážeme tak cestu, která vede k odvození dalších vztahů, jež z Moivreovy věty vyplývají.

1. Některé vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Vezmeme dvě komplexní jednotky o argumentech α, $-\alpha$ a zapíšeme rovnost (1) ve tvaru

$$[\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha][\cos(-\alpha) + \mathrm{i}\sin(-\alpha)] = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0\,. \qquad (3)$$

Pravá strana rovnosti (3) má hodnotu 1, levá po provedení násobení přejde na tvar

$$[\cos\alpha\cos(-\alpha) - \sin\alpha\sin(-\alpha)] + \mathrm{i}[\sin\alpha\cos(-\alpha) + \cos\alpha\sin(-\alpha)]\,.$$

Rovnost dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1\,\mathrm{i}$, $z_2 = a_2 + b_2\,\mathrm{i}$ je definována požadavkem $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Ze vztahu (3) proto plyne, že

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos(-\alpha) - \sin\alpha\sin(-\alpha) &= 1\,,\\ \sin\alpha\cos(-\alpha) + \cos\alpha\sin(-\alpha) &= 0\,.\end{aligned} \qquad (4)$$

Považujeme-li rovnice (4) za soustavu pro neznámé $\cos(-\alpha)$, $\sin(-\alpha)$, snadno zjistíme, že

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,,\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha\,. \tag{5}$$

Zkouška nás přesvědčí, že nalezená čísla jsou opravdu kořeny soustavy (4).

Vyjádříme-li $\operatorname{tg}\varphi$ a $\operatorname{cotg}\varphi$ pomocí $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ a položíme $\varphi = -\alpha$, obdržíme na základě vztahů (5) analogické vzorce

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha\,,\quad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha\,. \tag{6}$$

Vzorce (5) a (6) vyjadřují vztah mezi goniometrickými funkcemi kladného a záporného argumentu.

Provedeme-li v rovnosti (1) naznačené násobení na levé straně a opřeme se o definici rovnosti dvou komplexních čísel, obdržíme bezprostředně známé součtové vzorce

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, \tag{7}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,. \tag{8}$$

Jestliže ve vzorcích (7), (8) položíme místo β argument $-\beta$ a přihlédneme k výsledkům (5), máme další dva vzorce

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,, \tag{9}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{10}$$

Je jistě zajímavé, že také jedna ze základních goniometrických identit

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

plyne bezprostředně z druhého vztahu (10), položíme-li v něm $\beta = \alpha$.

2. Odvození periody goniometrických funkcí

Funkci nazýváme *periodickou*, jestliže existuje pevné číslo $p \neq 0$ tak, že pro každé x platí

$$\mathrm{f}(x+p) = \mathrm{f}(x) \tag{11}$$

Definiční vztah, který charakterizuje periodickou funkci, říká, že funkční hodnoty v bodech x a $x+p$ jsou si rovny. Nejmenší kladné číslo p, pro které platí rovnice (11), nazýváme obvykle *primitivní* periodou.

Ukážeme si, že goniometrické funkce jsou periodické. Přitom primitivní periodou funkcí $\sin x$ a $\cos x$ je 2π, primitivní periodou funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ je π.

Je-li funkce $\sin x$ periodická, potom existuje pro všechna x číslo p (které nezávisí na x), takže

$$\sin(x+p) = \sin x\,.$$

Jestliže rozvedeme levou stranu poslední rovnosti podle vzorce (7) a upravíme, dostaneme rovnici

$$\sin x\,(1-\cos p) - \cos x\sin p = 0\,,$$

která je splněna pro všechna x tehdy a jen tehdy, jestliže současně

$$\cos p = 1\,,\quad \sin p = 0$$

To si čtenář jistě dovede zdůvodnit sám. Čísla $\cos p$ a $\sin p$ jsou složky téže komplexní jednotky s argumentem $2k\pi$, který nabývá nejmenší kladné hodnoty pro $k = 1$. Funkce $y = \sin x$ je proto periodická a její primitivní periodou je číslo 2π. Důkaz pro funkci $y = \cos x$ by byl zcela obdobný.

Také důkazy pro $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou téměř stejné, omezme se proto pouze na $\operatorname{tg} x$. Ptejme se, zda existuje pro všechna přípustná x takové číslo p, aby platilo

$$\operatorname{tg}(x + p) = \operatorname{tg} x\,, \qquad \left[\text{pro } x \neq (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\right].$$

Rozvedeme-li levou stranu poslední rovnice podle vzorce

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

a upravíme, dospějeme k rovnici

$$\operatorname{tg} p\,(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0\,,$$

která je splněna tehdy a jen tehdy, jestliže $\operatorname{tg} p = 0$, to znamená, jestliže $p = k\pi$ (k je libovolné celé číslo). Číslo p tedy existuje a jeho nejmenší kladná hodnota je π. Funkce $y = \operatorname{tg} x$ je proto periodická s primitivní periodou π.

3. Výpočet mocniny komplexního čísla

Je-li z komplexní číslo, n číslo přirozené, potom symbolem z^n rozumíme součin, který obsahuje n stejných činitelů z. Symbolu z^n říkáme *n-tá mocnina* komplexního čísla.

Komplexní číslo z můžeme psát v algebraickém tvaru $z = a + b\,\mathrm{i}$ a jeho n-tou mocninu vypočítat z rovnosti

$$z^n = (a + b\,\mathrm{i})^n$$

rozvinutím pravé strany podle binomické věty. Tento způsob je však zdlouhavý. Užijeme-li goniometrického tvaru komplexního čísla

$$z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,,$$

potom

$$z^n = |z|^n\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n$$

Odsud a z rovnice (2) získáme výsledek

$$z^n = |z|^n\,(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) \tag{12}$$

P ř í k l a d. *Je dáno komplexní číslo* $z = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, *určete* z^8.

Číslo z převedeme nejprve na goniometrický tvar. Jelikož

$$|z| = 2\,, \quad \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\,, \quad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

leží příslušný vektor, který je obrazem komplexního čísla z ve čtvrtém kvadrantu. Rovnice

$$\cos \varphi = \tfrac{1}{2}$$

má kořeny

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi .$$

Nás zajímají pouze ta řešení, která leží ve čtvrtém kvadrantu. Přitom se můžeme omezit pouze na tu hodnotu argumentu φ, pro niž platí

$$0 \leqq \varphi < 2\pi .$$

To však znamená, že

$$\varphi = \tfrac{5}{3}\pi .$$

Číslo z má tedy goniometrický tvar

$$z = 2\,(\cos \tfrac{5}{3}\pi + \mathrm{i} \sin \tfrac{5}{3}\pi) .$$

Odtud na základě vztahu (12) určíme požadovanou mocninu čísla z

$$z^8 = 2^8\,(\cos \tfrac{40}{3}\pi + \mathrm{i} \sin \tfrac{40}{3}\pi) = 256\,(\cos \tfrac{4}{3}\pi + \mathrm{i} \sin \tfrac{4}{3}\pi) =$$

$$= 256\left(-\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -128 - 128\,\mathrm{i}\,\sqrt{3} .$$

4. Výpočet n-té odmocniny z komplexního čísla

V dalším budeme n-tou odmocninou komplexního čísla

$$z = |z|\,(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$$

nazývat každé komplexní číslo ζ, pro které platí $\zeta^n = z$. Přitom n znamená libovolné přirozené číslo a argument φ má, jak víme, nekonečně mnoho hodnot, které můžeme psát ve tvaru

$$\varphi = \alpha + 2l\pi , \tag{13}$$

kde l je libovolné celé číslo. Jedna hodnota argumentu φ leží v intervalu $< 0,\ 2\pi)$, neboť každé dvě sousední hodnoty se liší o 2π. Mysleme si, že tato hodnota je ve vzorci (13) označena α.

Dokážeme, že ke každému $z \neq 0$ existuje právě n vzájemně různých čísel

$$\zeta_0 , \zeta_1 , \quad , \zeta_{n-1}$$

tak, že platí

$$(\zeta_k)^n = z , (k = 0 , 1 , \quad , n - 1)$$

Napišme hledané číslo ζ v goniometrickém tvaru

$$\zeta = |\zeta|\,(\cos x + \mathrm{i} \sin x) \tag{14}$$

Ze vzorce (12) plyne, že

$$\zeta^n = |\zeta|^n\,(\cos nx + \mathrm{i} \sin nx) .$$

Z definice odmocniny plyne požadavek

$$\zeta^n = z .$$

Dosadíme-li sem za ζ^n a z jejich goniometrický tvar, získáme vztah

$$|\zeta|^n\,(\cos nx + \mathrm{i} \sin nx) = |z|\,(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi) . \tag{15}$$

Z rovnosti (15) plyne v prvé řadě, že

$$|\zeta| = \sqrt[n]{|z|} \tag{16}$$

a dále, že $nx = \varphi$, neboli $x = \frac{\varphi}{n}$. Odsud a ze vzorce (13) dostáváme

$$x = \frac{\alpha + 2l\pi}{n}. \tag{17}$$

O počtu čísel ζ může rozhodnout pouze vztah (17). Jelikož n je pro danou odmocninu pevné přirozené číslo a l libovolné celé číslo, můžeme zajisté číslo l psát ve tvaru

$$l = k + k_1 n,$$

kde k je v daném případě jedno pevné celé číslo z intervalu $< 0, n)$ a k_1 je vhodné číslo celé. Potom vztah (17) můžeme uvést na tvar

$$x = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2k_1\pi. \tag{18}$$

Každé komplexní číslo je jednoznačně určeno absolutní hodnotou a kteroukoliv hodnotou argumentu udanou vzorcem (13). Ve vztahu (18) můžeme proto zanedbat periodu $2k_1\pi$, neboť neurčuje nové komplexní číslo. Za k pak dosadíme postupně čísla 0, 1, ..., $n - 1$. Jelikož hodnoty, které získáme jsou vesměs od sebe různé, existuje n různých čísel ζ, která můžeme zapsat jediným vzorcem

$$\zeta_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \tag{19}$$

kde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

P ř í k l a d. Rovnice

$$x^6 = -1$$

má v oboru komplexních čísel šest různých kořenů

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i},$$

$$x_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$x_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$x_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = -\mathrm{i},$$

$$x_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i},$$

které najdeme jako šesté odmocniny čísla $-1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$.

Užití mocnosti bodu ke kružnici k důkazu některých vět

JOSEF ŠOLER, SVVŠ, Č. Budějovice

Součin úseků, jež kružnice vytíná na svazku přímek se středem v bodu P je stálý, rovný pro v n i t ř n í b o d kružnice zápornému čtverci poloviny nejkratší tětivy kružnice, pro v n ě j š í b o d kružnice čtverci délky tečny, vedené z bodu P (viz K. Drábek, M o c n o s t b o d u k e k r u ž n i c i, Rozhledy m.-f. č. 6, 1966/7).

a) *Vnitřní bod P.* Příslušný průměr je AB, nejkratší tětiva CD. Pak:

1. $AP \,.\, PB = \overline{PC}^2$ je *druhá věta Euklidova* pro trojúhelník ABC.

2. Poloměr $AS = r$ je aritmetickým průměrem úseček AP, PB, jejich geometrickým průměrem je PC. Z názoru je vidět, že $PC \leqq r$, tj. *geometrický průměr dvou kladných čísel je menší než průměr aritmetický*. Je mu roven jen tenkrát, jsou-li obě čísla stejná.

3. Je-li $AP + PB = AB = 2r = \text{konst.}$, plyne ze vztahu $AP \;\; PB = \overline{PC}^2 \leqq r^2$ věta:

Dvě kladná čísla o stálém součtu dávají největší součin, jsou-li stejná. Geometrický důsledek: *Ze všech obdélníků daného obvodu má čtverec největší plochu.*

4. Bodem P prochází nekonečně mnoho tětiv. Nejkratší z nich je ta, která je kolmá k průměru. Jen pro ni je úsek $CP = PD$. Poněvadž platí $AP \,.\, PB = \text{konst.}$, plyne z toho věta:

Dvě kladná čísla o stálém součinu dávají nejmenší součet, jsou-li stejná. Geometrický důsledek: *Ze všech obdélníků o stálém obsahu má čtverec nejmenší obvod.*

Např. pro JZD má tato věta význam ve tvaru: Pole tvaru čtverce má nejkratší meze ze všech obdélníkových polí stejné plochy.

b) *Vnější bod P.* Budiž S střed kružnice, T bod dotyku tečny z bodu P. Pak, označíme-li $SP = s$, $PT = t$, je $AP = s + r$, $BP = s - r$, $AP + BP = 2s$, $AP \,.\, PB = t^2$.

1. Dosadíme-li za $AP = s + r$, $BP = s - r$, dostaneme z posledního vzorce $(s + r) \,.\, (s - r) = s^2 - r^2 = t^2$, tj. $s^2 = r^2 + t^2$, tj. *větu Pythagorovu* pro trojúhelník SPT.

2. SP je aritmetický, $PT = t$ geometrický průměr délek PA, PB. V pravoúhlém trojúhelníku PST je $PS \geqq PT$, tj. *geometrický průměr je menší nebo roven aritmetickému průměru dvou kladných čísel.*

3. Platí: $AP \,.\, BP = t^2$ a $AP + BP = 2s = \text{konst.}$ Poněvadž $s \geqq t$, přičemž rovnost platí jen, je-li $r = 0$, tedy také $2s = 2t$, dostáváme:

Dvě kladná čísla o stálém součtu dávají největší součin, jsou-li stejně velká.

4. Lze sestrojit nekonečně mnoho kružnic, pro které tečna PT z bodu P vedená má stálou délku t. Tyto kružnice mají různě dlouhé vzdálenosti SP. Poněvadž $t = PT$ je odvěsnou, SP přeponou trojúhelníků PTS, lze vztah $PT \leqq SP$ vyslovit větou:

Dvě kladná čísla o stálém součinu dávají nejmenší součet, jsou-li stejně velká.

Při důkazu jsme se opírali o geometrický názor, který ukazuje, že v kružnici odpovídá většímu středovému úhlu, pokud je $\alpha \leqq 180°$, delší tětiva. Nechceme-li být vázáni na pouhý názor, lze naopak z vět: Dvě kladná čísla o stálém součinu dávají nejmenší součet, jsou-li stejně velká, a věty: Dvě kladná čísla o stálém součtu dávají největší součin, jsou-li stejná - dokázat, že ze všech tětiv, jdoucích vnitřním bodem kružnice, je nejdelší průměr a nejkratší ta tětiva, jež je k tomu průměru kolmá. Ryze geometrický důkaz těchto vět se obyčejně neuvádí; obvykle se spokojujeme s názorem.

Důkaz rozborem diskriminantu kvadratické rovnice:

Jsou-li x_1, x_2 ta dvě čísla, pak označme $x_1 + x_2 = 2s$, $x_1 \,.\, x_2 = t^2$ a ona rovnice zní: $x^2 - 2sx + t^2 = 0$. Její diskriminant je $D = s^2 - t^2$. Je-li s = konst., pak největší hodnota t_{max}, má-li řešení být reálné, je $t_{max} = s$. Pak $x_1 = x_2 = s$. Je-li t = konst., pak minimální hodnota s_{min}, pro kterou je řešení reálné, je $t_{min} = s$, přičemž $x_1 = x_2 = t$.

Vznik a vývoj strojů na zpracování informací

(Dokončení)

ING. VASIL ČAPLA, Praha

Diferenciální analyzátory

Neustálé zvyšování nároků na jakosti moderních technických zařízení vyžaduje stále složitějších a kvalitnějších fyzikálních přístrojů. Současně stoupají i nároky na rychlost dosažení řešení různých problémů, které se při konstrukci těchto přístrojů a zařízení vyskytují. Řešení takových zařízení zpravidla obsahuje předběžné výpočty a podrobné rozbory vztahů a představuje velké množství značně namáhavé práce. Výsledkem je obvykle číselná tabulka nebo graf, získané v předepsaném čase. Méně přesné řešení v požadované lhůtě je někdy cennější než přesná odpověď získaná o týden později. Při řešení formuluje technik problém ve tvaru matematických rovnic. K jejich řešení pak používá počítačů. Analogové počítače

jsou levnější než číslicové stroje a též řešení problému je velmi rychlé, neboť programování je velmi jednoduché. Nejdůležitější skupinu analogových počítačů tvoří diferenciální analyzátory, o nichž jsme se již zmínili, že jsou mechanické, elektromechanické a elektronické. Nejužívanější jsou elektronické diferenciální analyzátory. K realizaci matematických úkonů (jako je sčítání, násobení, dělení, integrování apod.) je užito fyzikálních jevů, známých z elektrotechniky. Podle matematických vztahů, platných pro tyto jevy jsou pak konstruovány příslušné počítací jednotky, jako jsou sčítací jednotky, násobící jednotky, integrační jednotky a další. Každý elektronický diferenciální analyzátor obsahuje celou soustavu takových jednotek. Hlavními stavebními prvky těchto počítačů jsou odpory, kondenzátory a elektronky nebo i tranzistory. Vhodným zapojením těchto prvků dostáváme základní část každé počítací jednotky, stejnosměrný zesilovač. Na jeho kvalitě závisí kvalita celého počítače. Podle počtu zesilovačů mluvíme o malém, středním a velkém stroji a podle toho se zpravidla řídí jeho cena.

Pro řešení na analogovém počítači je nutné nejdřív danou úlohu vhodným způsobem upravit, tj. vypracovat program. To obsahuje volbu a způsob propojení počítacích jednotek a výpočet pasívních členů jednotlivých počítacích prvků. Je to nejtěžší etapa při řešení úlohy. Podle tohoto programového schématu se pak zapojí jednotlivé počítací prvky ve stroji. Výsledek se dostane obvykle ve tvaru křivky na obrazovce osciloskopu nebo grafu liniového zapisovače.

Mechanické a elektromechanické diferenciální analyzátory se liší od elektronických tím, že analogickou veličinou vyšetřované proměnné je zde mechanický pohyb, například natočení hřídele. Sčítání se provádí za pomoci mechanického diferenciálu, násobení a integrování pomocí systému třecího převodu tvaru kulové úseče nebo disku. Řešení úlohy se zde provádí podobně jako u elektronických diferenciálních analyzátorů. Výsledek se zpravidla obdrží ve tvaru grafu, nebo jej můžeme postupně číst na vhodných počitadlech.

Kromě diferenciálních analyzátorů se užívá ještě různých jiných jak mnohaúčelových, tak i speciálních jednoúčelových strojů, např. simulátorů apod.

Simulátory. Zatímco dosud popisované stroje řešily problémy formulované ve tvaru matematických rovnic, je možné pomocí simulátorů řešit problémy v tom tvaru, v jakém se odehrávají v přírodě. Navíc se ještě používá simulátorů ve spojení s různými technickými zařízeními pro organizování jejich pracovních procesů, pro jejich řízení, nebo pro vytvoření modelu části tohoto zařízení. Přechod od problému v praxi k řešení tohoto problému pomocí modelu je založen na podobnosti rovnic popisujících jevy a procesy v přírodě a rovnic popisujících jevy probíhající při řešení na simulátorech. Vyšetřujíce rozložení napětí na jednotlivých částech simulátoru a pozorujíce jeho změny v čase, můžeme v laboratorních podmínkách vyšetřovat jevy a pochody probíhající v přírodě, např. podmínky letu letadla nebo rakety, prosakování vody pod vodním dílem, procesy v jaderných reaktorech apod.

Chceme-li provést podrobný rozbor nějakého složitého fyzikálního nebo technického zařízení, nahradíme toto zařízení podle jeho známých vlastností rovnocennými elektrickými obvody. Vytvoříme tak model tohoto zařízení. Rozbor vyšetřovaného jevu pomocí modelu má před přímým zkoumáním skutečného zařízení několik výhod:

a) Změnu každého parametru můžeme provést pohodlně pouhým nastavením potenciometru.

b) Jevy, které probíhají ve skutečném zařízení velmi rychle, můžeme v modelu zpomalit nebo obráceně, můžeme pomalé jevy zrychlit.

c) Při přetížení nedojde k zničení matematického modelu a nezpůsobí se škoda, která by vznikla zničením skutečného zařízení.

d) U složitých zařízení je možné nahradit třeba jen některé části vhodnými modely a podle jejich chování pak tyto části navrhnout a realizovat.

Další druhy analogových počítačů tvoří:

Lineární analyzátory, určené na řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Výzkumný ústav matematických strojů postavil v r. 1950 první československý lineární analyzátor na řešení soustav lineárních rovnic a též i jiných úloh s lineárními formami.

Čs. lineární analyzátor se skládá ze sítě transformátorů proudu tak zapojených, aby vztahy mezi proudy byly vyjádřeny soustavou rovnic analogickou se soustavou danou. Každé rovnici přísluší jeden transformátor a každé neznámé odpovídá jeden proudový obvod. Počty závitů na transformátorech jsou úměrné koeficientům v daných rovnicích.

Harmonické analyzátory na řešení koeficientů Fourierova rozvoje. Harmonických analyzátorů se používá v regulační technice. Po určité úpravě lze použít harmonického analyzátoru k řešení algebraických rovnic a vyčíslení polynomů až do 9. stupně. Harmonický analyzátor, sestrojený pod vedením profesora Trnky na ČVUT v Praze, se skládá z devíti kolektorů pro analýzu do deváté harmonické. Vnitřní kolektor s 24 lamelami lze použít jako generátoru funkce.

Rozdělení analogových počítačů podle využití výsledků. Podle využití výsledků dělíme analogové počítače na všeobecně použitelné neboli mnohaúčelové a speciální neboli jednoúčelové.

Mnohaúčelové analogové počítače jsou zpravidla velké stroje, neboť mají větší množství různých jednotek. Jejich základní jednotkou je počítací zesilovač. Takový stroj může být vybaven až 200 i více počítacími zesilovači, podle kterých se řídí i cena stroje.

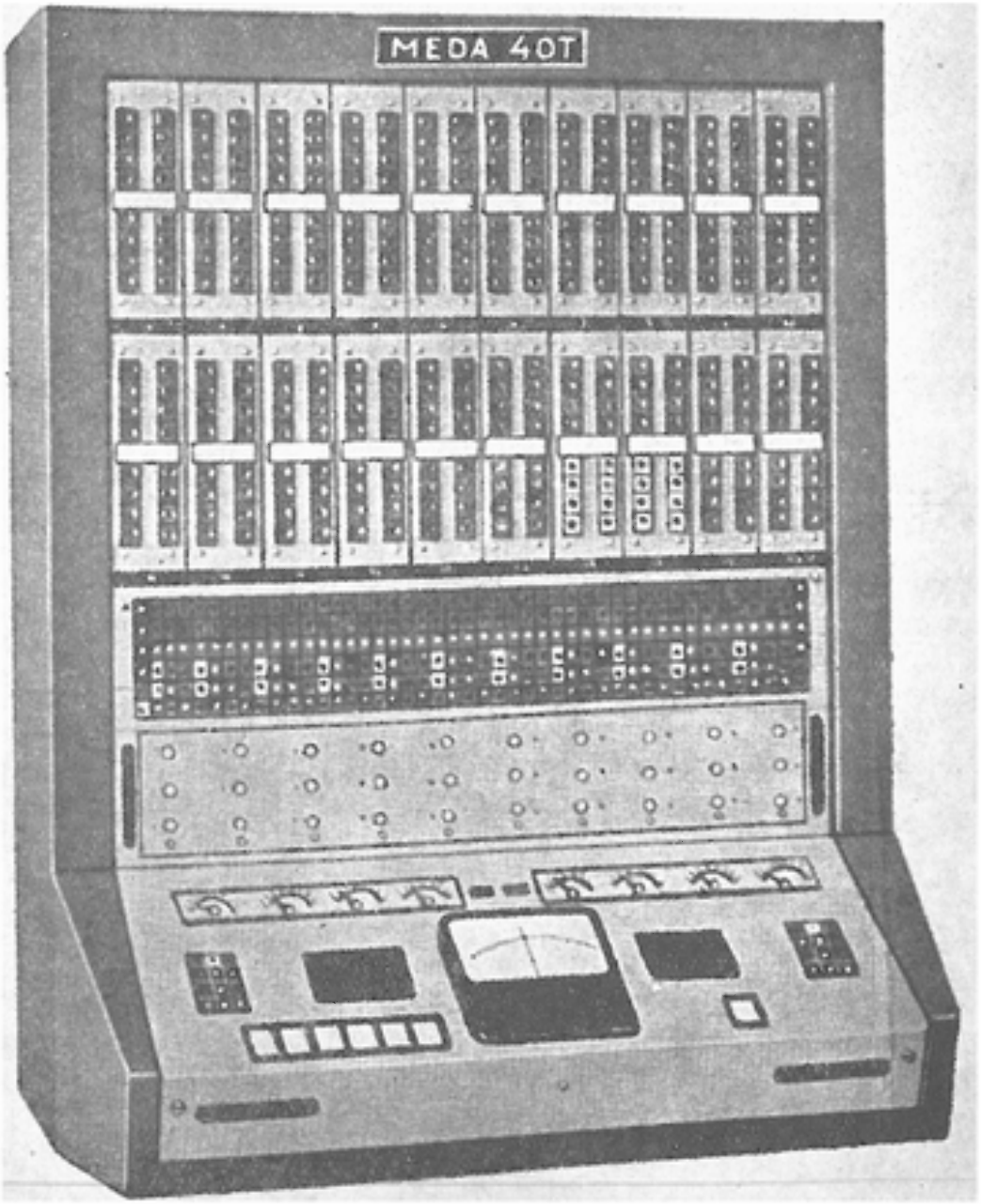
Speciální neboli jednoúčelové analogové počítače se často začleňují do provozního schématu výrobního závodu. Měřicí přístroje, umístěné na příslušných místech provozu, vkládají vstupní informace např. o tlaku, teplotě a jiných veličinách zpravidla do univerzálního regulačního systému (URS) a pomocí analogového počítače se ovládá daný objekt (výrobní pochody).

Analogových počítačů se používá hojnou měrou v chemickém průmyslu, v atomových elektrárnách, v laboratořích, výzkumných a vývojových ústavech.

Stručný vývoj analogových počítačů. Se vznikem různých stolních počítacích strojů se projevila snaha odborníků nalézt vhodný počítač i pro řešení diferenciálních rovnic. Anglický fyzik William Thomson (lord Kelvin) načrtl ve dvou článcích (1876) perspektivu řešení této myšlenky. Z návrhu počítače bylo patrno, že jde o stroj se zpětnou vazbou, pracující na analogovém principu. Thomsonův bratr sestrojil pak k tomu účelu stroj s vhodným spojením integrátorů.

V r. 1904 napsal akademik A. N. Krylov článek o teoretických základech analogového počítače pro řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Krylov rozvinul myšlenku Thomsona a navrhl stavbu jednotlivých jednotek, spojení kterých umožňovalo řešení diferenciálních rovnic do 4. řádu s proměnnými koeficienty. Krylovův návrh se podařilo realizovat R. M. Vetcerovi v Petrohradě, a to v r. 1911. V době první světové války byl tento stroj evakuován a od této doby nebyl nalezen.

V Německu sestrojil v r. 1914 Knorr mechanické integrační zařízení pro sestavení jízdního řádu, kde bylo nutno řešit diferenciální rovnice pohybu jednotlivých tratí.



Obr. 11. Obrázek tranzistorového analogového počítače MEDA 40 T ve dvou verzích.

Ve Spojených státech pracoval na stejné myšlence V. Bush, který sestrojil v r. 1925 tzv. násobící integrátor a v r. 1930 diferenciální analyzátor, který byl mechanický a měl ruční vstupní stoly. Za spolupráce s S. D. Caldwellem byl postaven v době druhé světové války (1942) nový typ diferenciálního analyzátoru Bush-Caldwell, který v principu byl také mechanický, avšak s elektrickým přenosem úhlového natočení mezi jednotkami stroje a s automatickými vstupními stoly (fotoelektrickými sledovači). Tento stroj obsahující 18 integrátorů, tisíce elektronek a relé a kolem 150 elektromotorů, byl vzorem pro stavbu mnohých elektromechanických diferenciálních analyzátorů.

V době druhé světové války byl postaven v Německu také elektromechanický stroj, který byl asi zničen válečnými událostmi.

V r. 1945 sestrojil J. M. Jackson elektronický analogový počítač.

Přehled stavby analogových počítačů ve světě. Velkými výrobci počítačů jsou Sovětský svaz, USA, Velká Británie, Francie, NSR, Švýcarsko a v poslední době též Japonsko.

V ČSSR byla řešena stavba několika analogových počítačů, z nich nejd ůležitější jsou AP 3, AP 4, ANALOGON a MEDA 40 T (obr. 11), MEDA 80 T

a v současné době rozpracovaný velký analogový počítač VEDA, který je určen pro velká výpočetní střediska. Analogové počítače MEDA vyrábí n. p. Aritma, která další vývoj těchto počítačů zajišťuje ve spolupráci s Výzkumným ústavem matematických strojů v Praze.

Počítače MEDA se vyrábějí ve třech verzích:

a) Malý školní nelineární diferenciální analyzátor MEDA 20 T/Š.

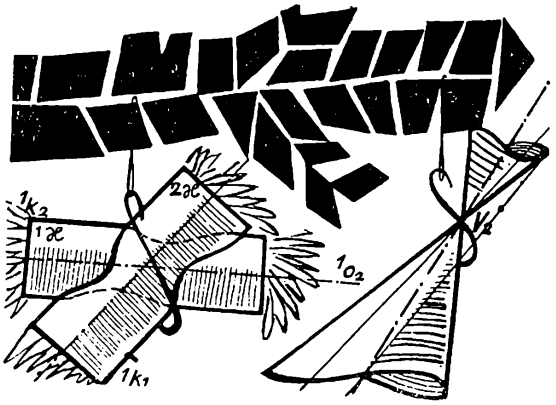
b) Malý univerzální nelineární diferenciální analyzátor MEDA 40 T/A.

c) Univerzální nelineární diferenciální analyzátor pro náročné výpočty MEDA 80 T.

Nová konstrukce počítačů MEDA-T přináší řadu výhod.

Analogové počítače se uplatňují jako nezbytná pomůcka pro řešení vědeckotechnických výzkumných a vývojových problémů, pro vyšetřování složitých soustav regulačních, pro návrh regulátorů, optimalizace parametrů, při analýze a syntéze obvodů elektrických, mechanických, hydraulických apod.

Upravil M. M.



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Technické užití kruhové kuželové plochy

PROF. ING. P. V. BORECKÝ, Toronto, Kanada

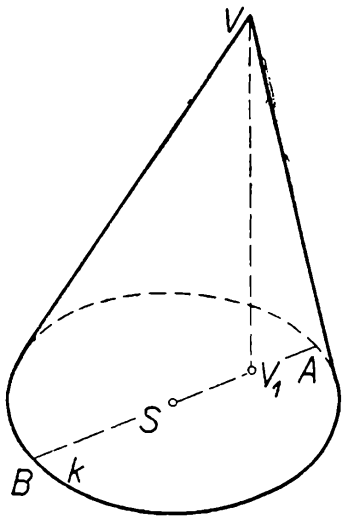
(Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální)

Čtenářům Rozhledů v tomto článku ukážeme praktickou aplikaci deskriptivní geometrie. Chceme-li však něco aplikovat, musíme také něco umět. Zde se spokojíme s málo znalostmi a ty si pro jistotu v úvodu hned řekneme.

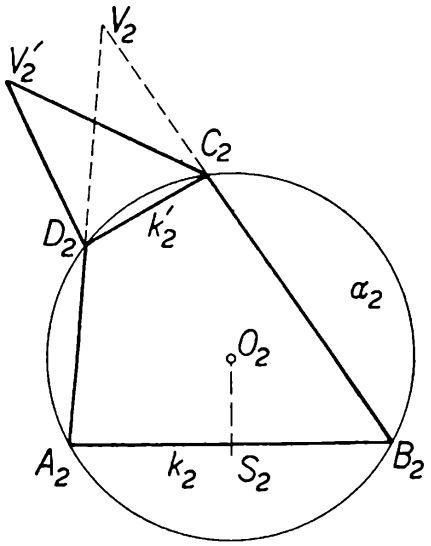
a) Co je rotační kužel a rotační kuželová plocha, jistě všichni víte. Méně je známé, co je to kosý kruhový kužel a kosá kruhová kuželová plocha. Nebudu uvádět definice, pokuste se o ni sami, odkáži vás raději na obr. 1, kde je kosý kruhový kužel znázorněn. Bod V je jeho vrchol, V_1 je pravoúhlý průmět vrcholu do roviny podstavy, řídicí křivka k

je kružnice — takže podstava kužele je kruh — S je střed podstavy. Důležité je, že $S \not\equiv V_1$. Kdyby totiž $S \equiv V_1$, byl by kužel rotační.

V obr. 2 je dán nárys kruhového kužele, jehož podstava se promítá do úsečky $A_2B_2 = k_2$ a vrchol do bodu V_2. Kromě toho je tam narýsována kružnice jdoucí body A_2, B_2, již považujeme za druhý průmět



Obr. 1



Obr. 2

kulové plochy, která obsahuje kruhovou hranu k. Tato kulová plocha — označíme ji α — má s kuželovou plochou společnou jednak kružnici k a pak kružnici k'. Pro rotační kuželovou plochu je toto tvrzení samozřejmé, platí však i pro kruhovou kuželovou plochu. Ještě si všimněme, že čtyřúhelník $A_2B_2C_2D_2$ je tětivový, tj. součet dvou jeho protějších úhlů je roven součtu druhých dvou.

Zopakujeme, co jsme si řekli jako předpoklad pro pochopení dalšího:

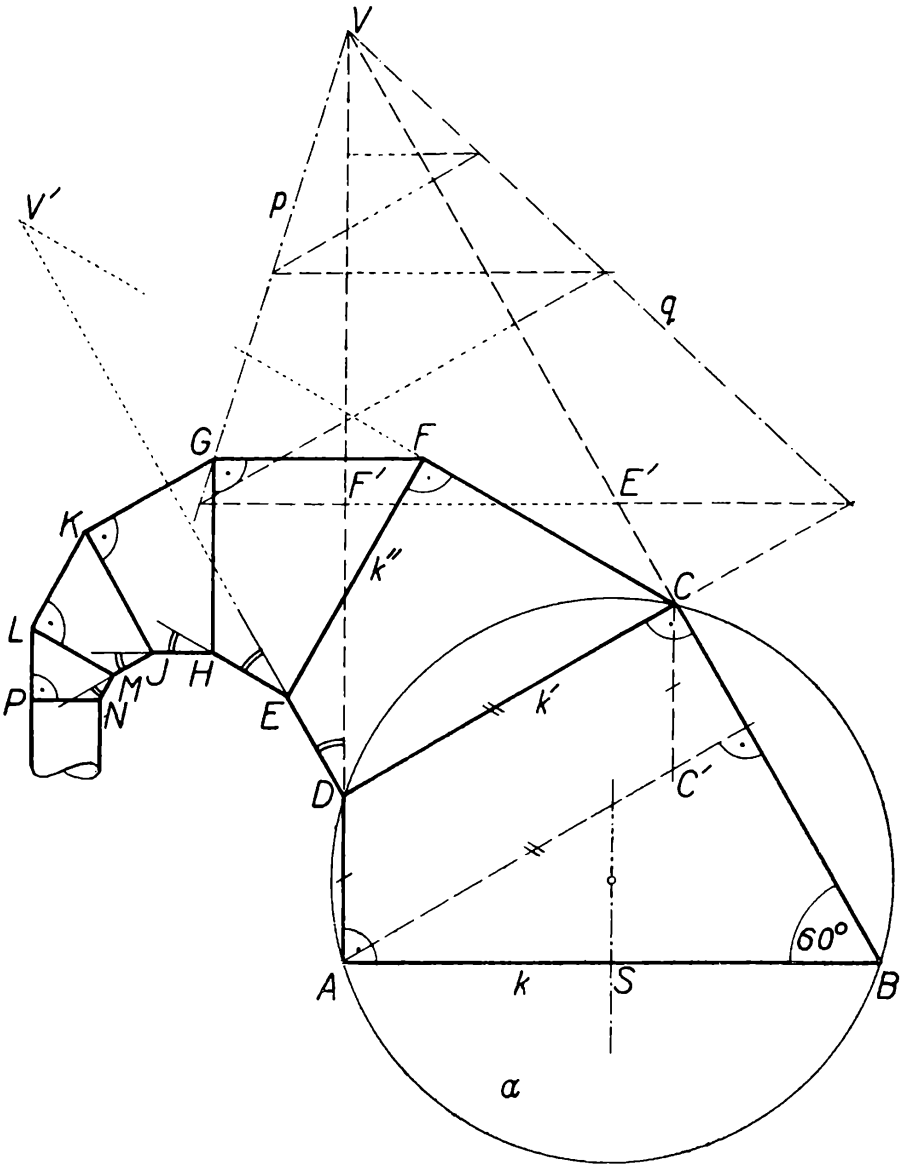
a) Musíme vědět, co je kruhový kužel.

b) Kulová plocha, která neprochází vrcholem V, ale která obsahuje kruhovou hranu kuželové plochy, má s touto kuželovou plochou společnou ještě další kružnici. Tato kružnice neleží v rovině rovnoběžné s rovinou kružnice k.

Tolik úvodem a nyní k vlastnímu textu.

Předpokládejme, že podstava kruhového kužele je kružnice k ležící v první průmětně a že druhá průmětna je rovnoběžná s rovinou SVV_1. Tato rovina je pro daný kužel rovinou souměrnosti a protíná kružnici k v bodech A, B. Strana VA je nejkratší stranou kužele a strana VB nejdelší. Kružnicí k proložme kulovou plochu α tak, aby protala kužel ještě jednou. To víme, že jej po druhé protne opět v kružnici, kterou označíme k'. Jejím druhým průmětem je úsečka $k_2' \equiv C_2D_2$ (obr. 2). Vznikl nám tak menší kužel o vrcholu V a podstavě k'. Kružnici k' otočme samu v sobě o 180°. Tím bod C přejde v bod D a bod D v bod C.

Jestliže se zároveň s kružnicí k' pohybuje menší kužel, dostane se vrchol V do polohy V'. Z daného kužele (kV) — je to kužel o podstavě k a vrcholu V — dostáváme tak těleso složené z části mezi kružnicemi k, k' a z kužele $(k'V')$. Toto nové těleso má s daným kuželem stejný povrch i objem.



Obr. 3

V obr. 3 je provedena konstrukce, k níž tento článek směřuje. Je tam zobrazen kruhový kužel s podstavou k v první průmětně a o vrcholu V (v obr. jsou vynechány indexy 2). Kužel je zvolen tak, aby jeho nejkratší strana VA byla kolmá k podstavě a tedy i k půdorysně, a aby jeho nejdelší strana VB měla půdorysnou odchylku velikosti 60°. Průměr podstavy je 100 mm. Kružnicí k je proložena kulová plocha α, která má s kuželem společnou ještě kružnici k'. A nyní kužel $(k'V)$ přemístíme známým způsobem do polohy $(k'V')$. Tuto konstrukci znovu opakujeme pro kužel $(k'V)$. Kružnicí k' proložíme kulovou plochu (v obr. 3 není narýsována), která kužel $(k'V')$ protne v kružnici k''. A opět

kužel $(k''V')$ přemístíme dříve popsaným způsobem do polohy $(k''V'')$. Tuto konstrukci opakujeme ještě několikrát. Vznikne tak těleso, jehož nárysem je mnohoúhelník *ABCFGKLPNMJHED*. Můžeme také říci, že nárys tělesa je složen z tětivových čtyřúhelníků: *ABCD*, *DCFE*, *HEFG*, *JHGK*, *MJKL*, *NMLP*. Poslední část kužele, která obsahovala vrchol, byla nahrazena rotačním válcem.

Představte si nyní, že daný kužel (kV) byl dutý. Popsanou konstrukcí se nám podařilo z něho vytvořit lomené, zužující se potrubí, kterého se např. používá v dílnách k odsávání prachu a pilin z pracovních stolů.

Aby mezi jednotlivými řezy byla určitá pravidelnost, předepíšeme, že průměr kružnice k' je q-násobkem průměru kružnice k, průměr kružnice k'' je q-násobkem kružnice k' atd. Obecně, průměr každé kružnice je q-násobkem průměru kružnice předcházející. V obr. 3 je zvoleno $q = 1\ \sqrt{2}$. Tedy

$$CD = AB\ \sqrt{2},$$
$$EF = CD\ \sqrt{2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$PN = LM\ \sqrt{2}.$$

Podle toho úsečka *CD* je polovina úhlopříčky čtverce o straně *AB*, *EF* je rovna polovině úhlopříčky čtverce o straně *CD* atd. Úsečku *CD* můžeme tudíž snadno sestrojit buď právě popsaným způsobem nebo užitím redukčního úhlu. Bod *C* pak sestrojíme takto. Délku úsečky *CD* naneseme od bodu *A* na kolmici k *BV* do bodu *C'* Rovnoběžka s *AV* vedená bodem *C'* protne *BV* v bodě *C*. Podobně sestrojíme body *E'* atd.

Je také možné daný kužel (kV) nejdřív „rozřezat" na jednotlivé části a ty potom k sobě náležitě přikládat tak, aby vzniklo žádané potrubí. V obr. 3 jsou jednotlivé řezy daného kužele vyznačeny čárkovaně. Při jejich konstrukci se s výhodou dá použít přímek *p*, *q*. Jak se k nim přijde, ukazuje obr. 3 a zdůvodnění přenechávám již čtenáři.

Upravil *Z. Horák*

PŘEJEME SVÝM ČTENÁŘŮM

ÚSPĚŠNÉ ZAKONČENÍ ŠKOLNÍHO ROKU!

Nahrazování křivek kruhovými oblouky

LUDĚK GRANÁT, Praha

Často se vyskytující úlohou je nahrazování křivky oblouky křivek z určitého hlediska jednodušších. Říkejme těmto „jednodušším" křivkám standardní. Přitom se většinou požaduje, aby v bodech, ve kterých na sebe navazují sousední oblouky standardních křivek, měly tyto standardní křivky společnou tečnu. Důležitý je speciální případ, kdy standardními křivkami jsou kružnice.

Nechť daná křivka — označme ji c — je dána svými body $A, B, \ldots, Q$ a tečnami v nich $a, b, \ldots, q$. Ukážeme jeden způsob[1]) nahrazení oblouku křivky c mezi body A, B. Provedeme-li toto nahrazení pro oblouky křivky c mezi všemi sousedními dvojicemi bodů ji určujících, nahradíme tak kruhovými oblouky křivku c mezi body A a Q.

Vylučme případy, kdy a prochází bodem B a b bodem A, nebo a je rovnoběžné s b. Průsečík přímek a, b označme P. V případě, že bod P je stejně vzdálen od bodů A, B, existuje jediná kružnice, která se dotýká v bodech A, B přímek a, b a příslušný oblouk této kružnice můžeme vzít za náhradu oblouku křivky c mezi body A, B.

Není-li tomu tak, pak nemůžeme provést nahrazení pomocí jediného kruhového oblouku; existuje však nekonečně mnoho dvojic vzájemně se dotýkajících kružnic k_a, k_b takových, že k_a se dotýká přímky a v bodě A a k_b přímky b v bodě B.

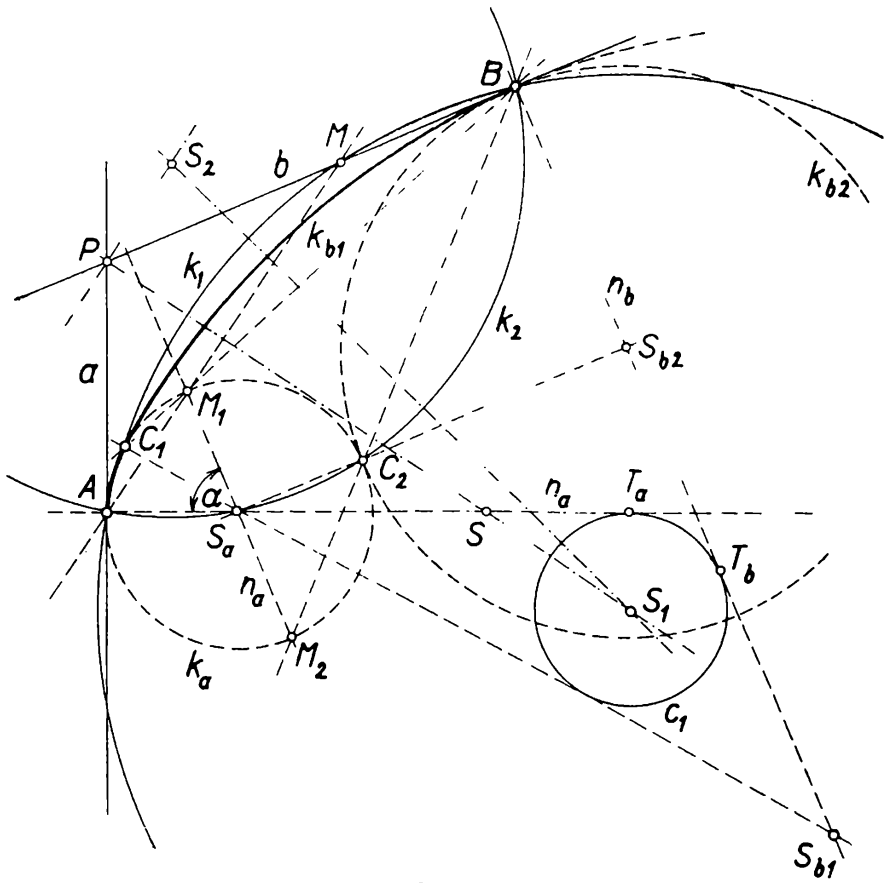
Zvolme libovolnou kružnici k_a (obr. 1), která se dotýká v bodě A přímky a. Její střed označme S_a. Sestrojme kružnici k_b, která se dotýká kružnice k_a a přímky b v bodě B. Tuto úlohu můžeme řešit pomocí stejnolehlosti, ve které kružnici k_a odpovídá kružnice k_b. Střed stejnolehlosti bude bodem dotyku k_a a k_b. Průměru n_b kružnice k_b, který prochází bodem B a je tedy kolmý na přímku b, odpovídá průměr n_a kružnice k_a, který je též kolmý na b. Jeho průsečíky s kružnicí k_a označme M_1, M_2. Jsou to body, které odpovídají v hledaných stejnolehlostech bodu B. Středy těchto stejnolehlostí C_1, resp. C_2 budou dalšími průsečíky kružnice k_a s přímkou BM_1, resp. BM_2. Kružnice k_b se

[1]) Viz G. Sandel, Zur Geometrie der Korbbögen. ZAMM 1937, str. 301—302.

dotýká v bodě B přímky b a prochází bodem C_1, resp. C_2. Úloha má obecně dvě řešení. Označme je k_{b1} a k_{b2}.

Zvolíme-li jinou kružnici k_a, dostaneme jiné body C_1, C_2 a jiné kružnice k_{b1} a k_{b2}. Pokusme se zjistit, co vyplní body C_1, C_2 pro různé volby kružnic k_a. Platí

věta 1. *Body C_1, C_2 leží na dvou kružnicích, které procházejí body A, B a mají svůj střed na osách úhlu přímek a, b.*



Obr. 1

Uvažujme nejprve konstrukci související se sestrojením bodu M_1. Příslušné vztahy můžeme sledovat na obr. 1. Budeme uvažovat jen takovou vzájemnou polohu daných prvků, jaká je narýsována na obr. 1. Ostatní případy si čtenář může probrat sám. Trojúhelník AS_aM_1 je rovnoramenný, jedna jeho strana leží na kolmici n_a k přímce a, procházející bodem A, druhá je kolmá k přímce b. Při libovolné volbě kružnice k_a budou příslušné trojúhelníky AS_aM_1 podobné. Můžeme je považovat za stejnolehlé o středu stejnolehlosti v bodě A. Body M_1 budou ležet na jedné přímce procházející bodem A.

Omezíme-li se na kružnice k_a, jejichž střed S_a leží mezi bodem A a průsečíkem přímek n_a, n_b, platí

$$\sphericalangle AC_1M_1 = \pi - \tfrac{1}{2} \sphericalangle AS_aM_1$$

Protože $\sphericalangle AC_1M_1 \equiv \sphericalangle AC_1B$, leží všechny body C_1 na kružnici — označme ji k_1 — procházející body AB. Podobně i pro ostatní polohy kružnice k_a zjistíme, že příslušné body C_1 leží na kružnici k_1.

Zvolíme-li kružnici k_a tak, že se dotýká přímky b, pak její bod dotyku M na přímce b je zároveň bodem M_1 a C_1. Střed kružnice k_a v této poloze označme S. Kružnice k_{b1} pak degeneruje na přímku b. Platí

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMS + \frac{\pi}{2} = \sphericalangle MAS + \frac{\pi}{2} = \pi - \tfrac{1}{2} \sphericalangle AS_aM_1 .$$

Odtud plyne, že bod M je též bodem kružnice k_1. Protože $AP = PM$, je osa úsečky AM osou úhlu přímek a, b.

Pro body S_2 dostaneme obdobným způsobem kružnici k_2, která prochází též body A, B a střed má na druhé ose úhlu přímek a, b.

Podívejme se ještě, co obalí normály ke kružnicím k_a v bodech C_1, resp. C_2, tj. spojnice těchto bodů s příslušnými body S_a. Platí

věta 2. *Normály ke kružnicím k_a v bodech C_1, resp. C_2, obalí dvě kružnice soustředné s k_1, resp. k_2, které se dotýkají přímek n_a, n_b.*

Platnost věty si ověříme opět jen v případě, že uvažované prvky jsou v poloze, narýsované na obr. 1 a pro normály v bodech C_1. Protože střed S_1 kružnice k_1 leží na ose úsečky AB platí $AS_1 = BS_1$. Protože S_1 leží na ose úhlu přímek a, b, jsou jeho vzdálenosti od těchto přímek stejné a jsou rovny velikostem úseček $AT_a = BT_b$, kde T_a, T_b jsou paty kolmic spuštěných z S_1 na přímky n_a, n_b. Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků $\triangle AT_aS_1$ a $\triangle BT_bS_1$ pak plyne rovnost délek úseček $S_1T_a = S_1T_b$. Bod S_1 je stejně vzdálen od přímek n_a, n_b, leží tedy na ose jejich úhlu. Můžeme sestrojit kružnici c_1 se středem v bodě S_1, která se dotýká obou přímek n_a, n_b.

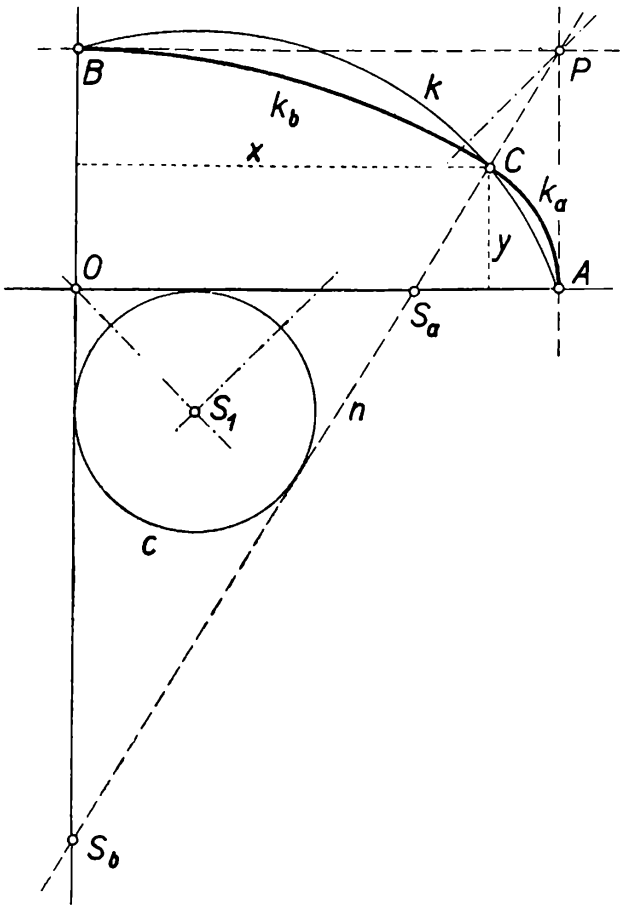
Protože body S_aS_1 leží na ose úsečky AC_1 a normála n_a v bodě A kružnice k_a je tečnou kružnice c_1, musí být i normála kružnice k_a v bodě C_1, tj. přímka C_1S_a tečnou kružnice c_1.

Obdobné vztahy pak platí i pro normály kružnice k_a v bodech C_2 a pro ostatní možné polohy uvažovaných prvků.

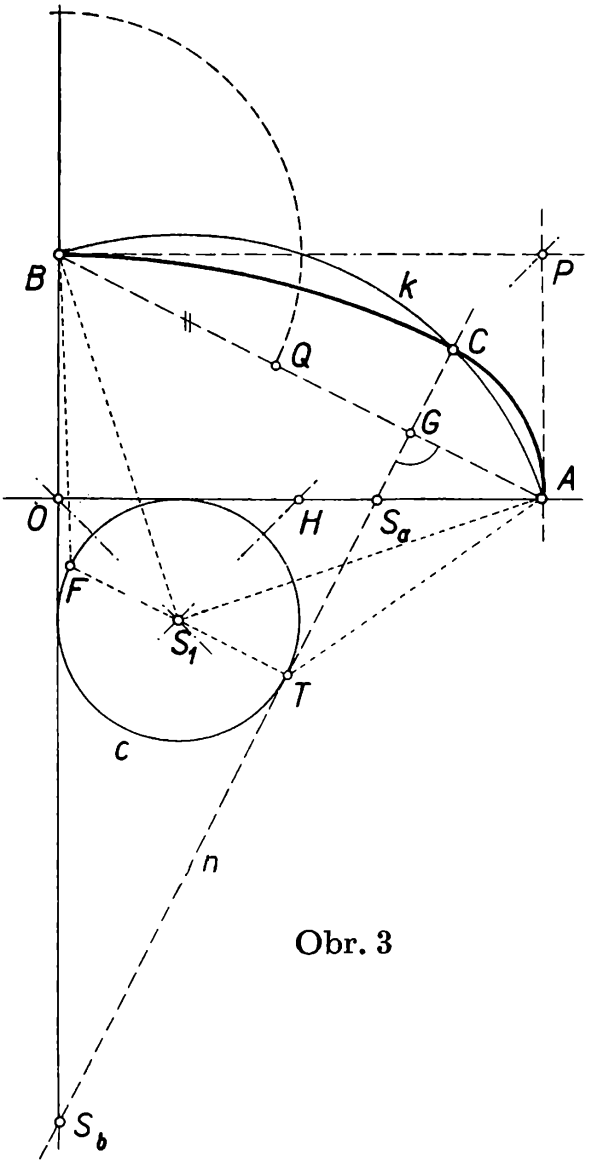
Máme-li nahradit oblouk křivky c o krajních bodech A, B oblouky vzájemně se dotýkajících kružnic, z nichž první se dotýká přímky a v bodě A a poslední v bodě B přímky b, zjistíme nejprve, zda vzdálenosti bodů A, B od průsečíku P přímek a, b nejsou stejné a nelze nahrazení provést obloukem jedné kružnice. Není-li tomu tak, sestrojíme vhodnou z kružnic k_1, k_2 — označíme ji nyní k — která prochází body A, B a má střed na ose úhlu přímek a, b, resp. n_a, n_b. Na této kružnici zvolíme bod C a oblouk křivky c nahradíme dvěma kruhovými oblouky o středech na jedné (ne libovolné) tečně sestrojené z bodu C ke kruž-

nici c soustředné s K a dotýkající se přímek n_a, n_b. Tyto kruhové oblouky na sebe navazují v bodě C, v němž mají společnou tečnu.

Tohoto způsobu nahrazování křivky kruhovými oblouky dá se užít ke konstrukci oválů nahrazujících elipsu. Mějme dány osy elipsy (obr. 2) s jedním vrcholem hlavní osy, který označíme A a jedním vrcholem vedlejší osy, který označíme B. Střed elipsy označíme O. Sestrojíme střed S_1 kružnic c a k jako průsečík, např. os úhlů hlavní a vedlejší



Obr. 2



Obr. 3

osy elipsy a tečen elipsy v bodech A, B. Kružnice c se dotýká os elipsy, kružnice k prochází body A, B. Bod C nechť je průsečík kružnice k s tečnou n ke kružnici c vedenou průsečíkem P tečen elipsy v bodech A, B. Nebudeme zde podrobně rozebírat, kterou z dvou možných tečen a průsečíků máme vybrat. Uvažované prvky jsou pro různá a, b obdobně umístěny. Proto pro naše úvahy stačí provádět volby tak, jak

je tomu na obrázcích. Průsečíky S_a, S_b přímky n s hlavní a vedlejší osou jsou již středy kružnic, jejichž oblouky $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ nahrazují oblouk elipsy $\overset{\frown}{AB}$. Dá se ukázat, že bod C je bodem dané elipsy. Nechť tento bod má souřadnice x, y v pravoúhlé souřadnicové soustavě, jejíž osa x splývá s hlavní osou a osa y s vedlejší osou elipsy. Označme $r = CS_a$, $R = CS_b$ a a, b nechť nyní značí délky hlavní a vedlejší poloosy elipsy. Z podobnosti trojúhelníků dostaneme vztahy

$$\frac{x}{a} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

a odtud

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

což ukazuje, že bod C je bodem dané elipsy.

Předchozí konstrukce má tu výhodu, že zároveň sestrojujeme bod dané elipsy a dokonce ten, v němž kruhové oblouky nahrazující elipsu na sebe navazují. Častěji se však užívá následující konstrukce oválu, která je o něco jednodušší.

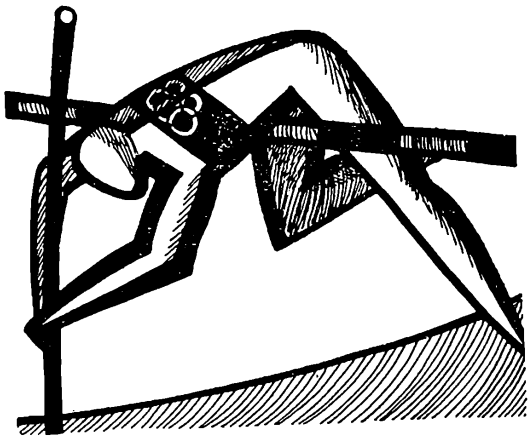
Stejně jako při předchozí konstrukci můžeme sestrojit kružnice k a c. Bod C však zvolíme jako průsečík kružnice k s tečnou n kružnice c (obr. 3), která je kolmá na spojnici AB.

Vzdálenost bodu S_1 od vedlejší osy dané elipsy je rovna polovině rozdílu velikostí jejich poloos $(a - b)$, [2]) jak plyne z pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka $\triangle OS_1H$, kde $OH = a - b$. Průměr kružnice c je $a - b$. Sestrojme bod Q na úsečce BA tak, aby $BQ = a - b$. Dále sestrojme průměr kružnice c rovnoběžný s AB a jeho koncové body označme F, T tak, aby $BFTQ$ byl rovnoběžník. Pak $BF = TQ$. Tečna kružnice c, kolmá na AB, prochází bodem T. Protože kružnice k o středu S_1 prochází body AB, je $S_1A = S_1B$. Protože $FT \parallel BA$, platí $\sphericalangle AS_1T = \sphericalangle BS_1F$. Protože ještě $FS_1 = S_1T$, jsou trojúhelníky $\triangle AS_1T$ a $\triangle BS_1F$ shodné a platí $BF = TA$. Protože $BF = QT$, platí i $QT = TA$, trojúhelník $\triangle ATQ$ je rovnoramenný a přímka n je v něm výškou, a tedy osou úsečky AQ.

Tím jsme dostali konstrukci tohoto oválu, jak se obvykle provádí. Sestrojíme bod Q na úsečce BA tak, aby $BQ = a - b$. Osa úsečky QA protíná osy dané elipsy v bodech S_a, S_b. Tyto body jsou středy kruhových oblouků, kterými nahrazujeme danou elipsu mezi body A, B.

---

[2]) Viz např. Drs, Jeništa, Určité konstrukce elipsy a oválu. Rozhledy 43 (1964—65), str. 155—160.



Úlohy pro první kolo Fyzikální olympiády

(9. ročník 1967/68)

Kategorie A

1. Listovní váhy mají vahadlo tvaru lomené páky, jejíž ramena a, b svírají úhel φ. Kratší rameno b nese můstek o tíze G_2. Na konci delšího ramene a je otáčivě upevněno závaží G_1 tak, že jeho těžiště může zaujmout jednu ze dvou poloh se vzdálenostmi od osy páky buď $d_1 = a + r$ nebo $d_2 = a - r$ (obr. 1).

a) Určete délku a a délku r tak, aby při nezatíženém můstku nastala rovnováha při úhlu α_1 pro d_1 a při úhlu α_2 pro d_2, kde α_1 a α_2 jsou odchylky ramene a od svislého směru. Hmotnosti ramen zanedbáme vzhledem k hmotnostem můstku a závaží.

Řešte nejprve obecně, pak číselně, je-li dáno $G_1 = G_2 \sqrt{3}$, $b = 6 \cdot 10^{-2}$ m, $\varphi = 120°$, $\alpha_1 = 15°$, $\alpha_2 = 30°$.

b) Jak velký bude úhel α_3, resp. α_4 při zatížení můstku závažím $G = \frac{1}{2} G_1$?

2. Dva paralelně spojené stejné kondenzátory, jejichž kapacity lze měnit od hodnoty C_1 do hodnoty C_2 ($C_1 > C_2$), byly nastaveny

1. na hodnoty C_1 a připojeny k baterii o napětí U.

2. Po odpojení baterie byla změněna kapacita jednoho kondenzátoru z C_1 na C_2.

3. Potom byla změněna i kapacita druhého kondenzátoru z C_1 na C_2.

Ve všech třech případech určete:

a) napětí na kondenzátorech,

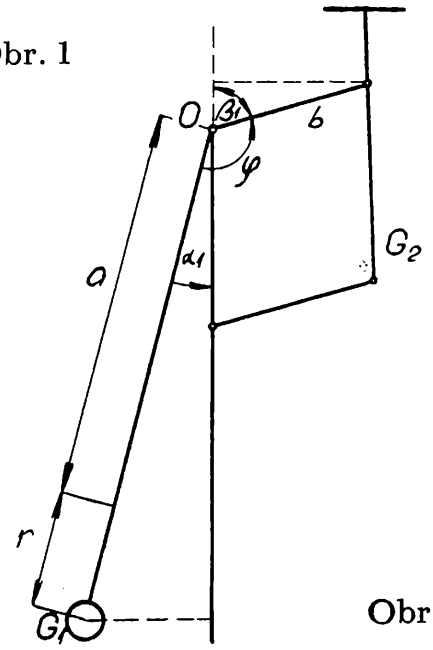
b) náboje na kondenzátorech,

c) energie soustavy W_1, W_2, W_3 a vysvětlete, proč tyto hodnoty jsou různé a odůvodněte to.

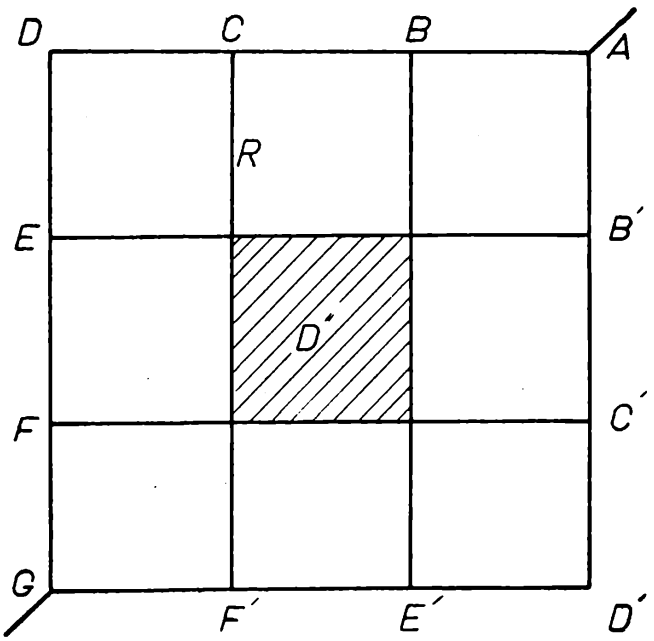
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $C_1 = 950$ pF, $C_2 = 50$ pF, $U = 200$ V.

3. Drôtená sieť pozostáva z deviatich štvorcov, z ktorých prostredný je vyplnený dokonale vodivou platničkou a odpor každej drôtenej strany štvorca je R. Vypočítajte celkový odpor medzi bodmi A a G siete (viď obr. 2).

Obr. 1



Obr. 2



Kategorie B

1. Na horním konci nakloněné roviny délky d a výšky h zadržíme vedle sebe zarážkou válec a kouli ze stejnorodých látek. Válec se dotýká roviny v povrchové přímce, která má vodorovný směr. Uvolníme-li tělesa, konají valivý pohyb bez klouzání.

a) Které těleso se dostane dříve ke spodnímu konci nakloněné roviny, uvolníme-li je současně?

b) Kde se bude v tomto případě nacházet druhé těleso v okamžiku, kdy druhé těleso dorazilo ke spodnímu konci nakloněné roviny?

c) Které těleso a o jakou dobu dříve musíme uvolnit, mají-li obě tělesa dorazit současně ke spodnímu konci nakloněné roviny?

Moment setrvačnosti válce vzhledem k ose, spojující středy kruhových podstav, je $J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$, moment setrvačnosti koule vzhledem k ose, jdoucí jejím středem, je $J_2 = \frac{2}{5} m_2 r_2^2$, kde m_1 je hmotnost válce, m_2 hmotnost koule, r_1 poloměr podstavy válce, r_3 poloměr koule.

Tření a odpor vzduchu zanedbáváme. Valivý pohyb obou těles považujeme za složený z posuvného pohybu a otáčivého pohybu tělesa.

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $d = 2{,}0$ m, $h = 0{,}20$ m, $g \doteq$ $\doteq 10$ m s^{-2}.

2. Velmi tenká tyč o délce h je v rovnovážné poloze podepřena v koncovém bodě o vodorovnou podložku. Na tyči jsou upevněny ve výškách h $\frac{2}{3}h$, $\frac{1}{3}h$ od vodorovné podložky tři hmotné body, z nichž každý má hmotnost m. Hmotnost tyče je vzhledem k hmotnosti bodů zanedbatelná. Při nepatrném vychýlení z rovnovážné polohy se tyč otáčí kolem vodorovné osy procházející opěrným bodem, až dopadne na vodorovnou podložku.

a) Jak velikou rychlostí v dopadne horní koncový bod tyče na podložku?

b) V jaké výši h' nad vodorovnou podložkou leží na tyči bod, který dopadne na podložku stejnou rychlostí, jako kdyby padal ze stejné výšky volným pádem?

3. Uzavřená válcová nádoba o výšce $2h$ je do poloviny naplněna vodou. Tlak vzduchu uvnitř nádoby se rovná atmosférickému tlaku p vně nádoby. Do dna nádoby uděláme velmi malý otvor, kterým začne voda vytékat.

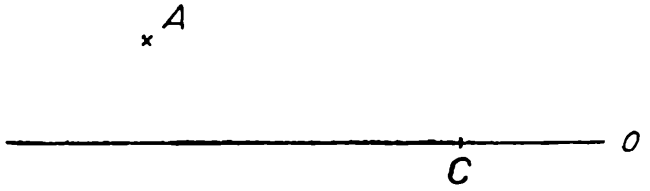
a) Jakou rychlostí vytéká voda otvorem v okamžiku, kdy povrch vody klesl o délku d?

b) Při které poloze povrchu vody přestane voda vytékat?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $2h = 1{,}00$ m, $p = 10^5$ N m^{-2}, hustota vody $\varrho = 10^3$ kg m^{-3}, $g = 9{,}8$ m s^{-2}.

Kategorie C

1. Přímka o na obr. 3 je optickou osou dutého zrcadla, jehož středem křivosti je bod C. Světelný paprsek vycházející z bodu A a dopadající na duté zrcadlo v jeho vrcholu S svírá s optickou osou úhel $\alpha = 15°$.



Obr. 3

a) Sestrojte obraz A_1 bodu A vytvořený tímto zrcadlem, popište postup konstrukce a odůvodněte její správnost.

b) Kolik řešení má daná úloha? Proveďte konstrukce všech řešení.

c) Je obraz A_1 skutečný nebo zdánlivý? Odůvodněte!

2. Automobil se rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením a_1 až dosáhne rychlosti v_1. Potom se pohybuje rovnoměrně rychlostí v_1. V jisté vzdálenosti od cílové stanice začne konat po vypnutí motoru pohyb rovnoměrně zpomalený se záporným zrychlením a_2 a v okamžiku, kdy dosáhne rychlosti v_2 je brzděn až do cílové stanice. Po dobu brzdění má jeho pohyb záporné zrychlení a_3. Cílová stanice má vzdálenost s od místa, ze kterého automobil vyjel.

a) Za jakou dobu t projel automobil dráhu s?

b) Jak velká je průměrná rychlost automobilu na dráze s?

Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $s = 4600$ m, $a_1 = 0{,}7$ m s^{-2}, $a_2 = -0{,}2$ m s^{-2}, $a_3 = -1{,}0$ m s^{-2}, $v_1 = 100$ km h^{-1}, $v_2 = 60$ km h^{-1}.

3. Určení vnitřního průměru kapiláry.

Potřeby: Kapilára délky l (asi 0,2 m), její úlomky (2 až 4) délky asi (2 až 3) . 10^{-2} m, délkové měřítko s milimetrovou stupnicí, laboratorní váhy a sádka závaží, mikrometr, pyknometr.

Návod: Známe-li délku l kapiláry, její hustotu ϱ, hmotnost m a vnější průměr d_1, určíme její vnitřní průměr d podle vztahu

$$d = \sqrt{d_1^2 - 4\frac{m}{\pi \varrho l}}. \qquad (1)$$

Postup práce:

a) Odvoďte vztah (1).

b) Vážením na laboratorních vahách určete z pěti měření s největší možnou přesností hmotnost kapiláry.

c) Užitím pyknometru určete hustotu úlomků kapiláry. Jejich hustota je stejná jako hustota kapiláry.

d) Z deseti měření určete mikrometrem vnější průměr kapiláry.

e) Délku kapiláry zjistěte z deseti měření délkovým měřítkem s milimetrovou stupnicí.

f) Podle vztahu (1) vypočítejte vnitřní průměr kapiláry.

g) Při všech měřeních určujte absolutní a relativní chyby naměřených veličin.

ÚV FO

Zaujímavý dôkaz 1. Keplerovho zákona

MILAN STEHLÍK, Košice

Iste je čitateľovi známy 1. Keplerov zákon, podľa ktorého sa *planéty pohybujú okolo Slnka po eliptickej dráhe, pričom Slnko je jedným z fókusov tejto eliptickej dráhy.*

Tento zákon sa zdá byť naprosto jasný. Avšak v dôkaze tohto zákona sa zvyčajne používa vyššej matematiky. Preto bude iste čitateľa zaujímať matematicky nenáročný a pritom dosť prehľadný dôkaz 1. Keplerovho zákona, pri ktorom sú predpoklady iba stredoškolskej matematiky.

Použitá je polárna sústava súradníc, v ktorej je poloha bodu určená uhlom φ, ktorý zviera sprievodič bodu (tj. spojnica počiatku polárnej sústavy súradníc s daným bodom) s polárnou osou (polpriamkou) a dĺžkou R sprievodiča.

Základná ídea dôkazu 1. Keplerovho zákona je:

Pomocou Newtonovho gravitačného zákona dostaneme jednoduchý pomer medzi smerom vektoru rýchlosti a uhlovou súradnicou planéty vzhľadom k Slnku. Tak, ako je smer rýchlosti planéty vždy totožný s dotyčnicou k obežnej dráhe, tak isto dostaneme jednoznačný vzťah medzi smerom dotyčnice v niektorom bode dráhy a súradnicou tohto bodu. Nakoniec dokážeme, že tento geometrický vzťah platí i pre elipsu, v ktorej je Slnko jedným z fókusov.

Najprv uvažujme prípad, v ktorom sa planéta nachádza v najbližšom bode dráhy k Slnku. Na obr. 1 je tento bod označený P_0; jeho vzdialenosť od Slnka je R_0; rýchlosť planéty v_0 kolmá k R_0. Pri prejdení pla-

néty do bodu P dráhy, je zmena rýchlosti Δv, čo do smeru súhlasná so smerom sily

$$F = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \varkappa\frac{Mm}{R^2},$$

resp.

$$\frac{1}{\varkappa M}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{R^2}, \qquad (1)$$

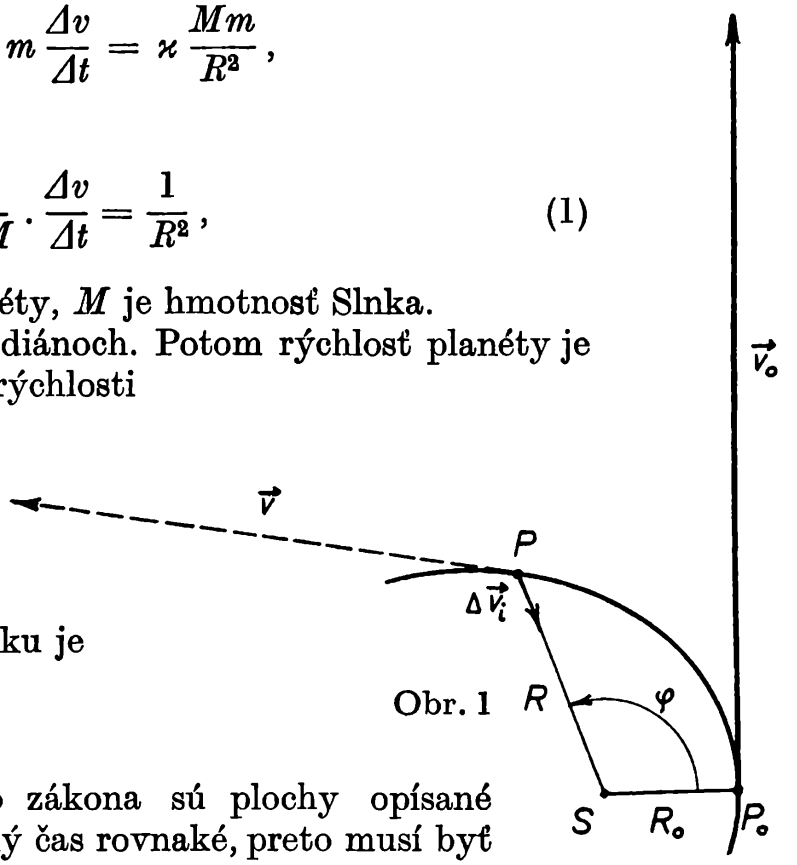
kde m je hmotnosť planéty, M je hmotnosť Slnka.

Uhol φ merajme v radiánoch. Potom rýchlosť planéty je podľa definície uhlovej rýchlosti

$$v = \omega R = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}R,$$

a plocha trojuholníka, ktorý opíše sprievodič planéty vzhladom k Slnku je

$$\tfrac{1}{2}R\left(R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)$$



Obr. 1

Podľa 2. Keplerovho zákona sú plochy opísané sprievodičom za rovnaký čas rovnaké, preto musí byť

$$\tfrac{1}{2}R^2\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}R_0v_0,$$

odtial

$$\frac{1}{R_0v_0}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{R^2}. \qquad (2)$$

Porovnaním vzťahov (1) a (2) dostávame

$$\frac{1}{\varkappa M}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{R_0v_0}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

alebo

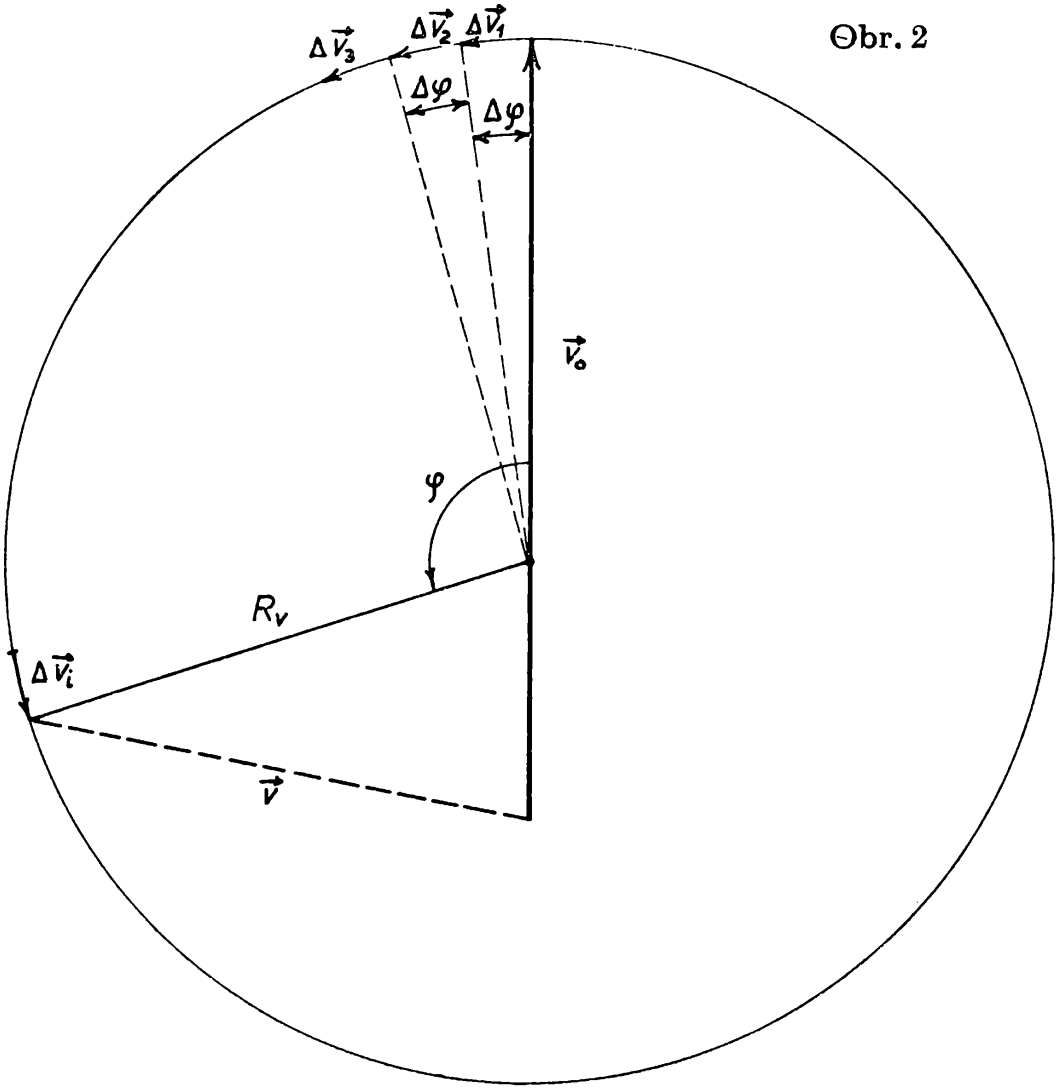
$$\Delta v = \left(\frac{\varkappa M}{R_0v_0}\right)\cdot\Delta\varphi. \qquad (3)$$

Podľa vzťahu (3) je zmena rýchlosti planéty vždy priamo úmerná zmene jej uhlovej súradnice.

Teraz ľahko určíme, ako sa mení veľkosť a smer vektora rýchlosti $\mathbf{v}$ so zmenou súradnice φ planéty.

Nech je $\mathbf{v}_0$ počiatočná rýchlosť planéty. Pripočítame k nej (obr. 2) veličinu $\Delta\mathbf{v}_1$ — zmena rýchlosti odpovedajúca zmene $\Delta\varphi = 1°$, potom $\Delta\mathbf{v}_2$ odpovedajúca zmene φ o 1°. Lenže obe zmeny $\Delta\mathbf{v}_1$ i $\Delta\mathbf{v}_2$ smerujú k Slnku; je medzi nimi tiež uhol $\Delta\varphi = 1°$.

Budeme prevádzať tieto zmeny dovtedy, kým nebude uhol φ taký, ako je na obr. 2. Výsledná rýchlosť **v** zrejme predstavuje vektorový

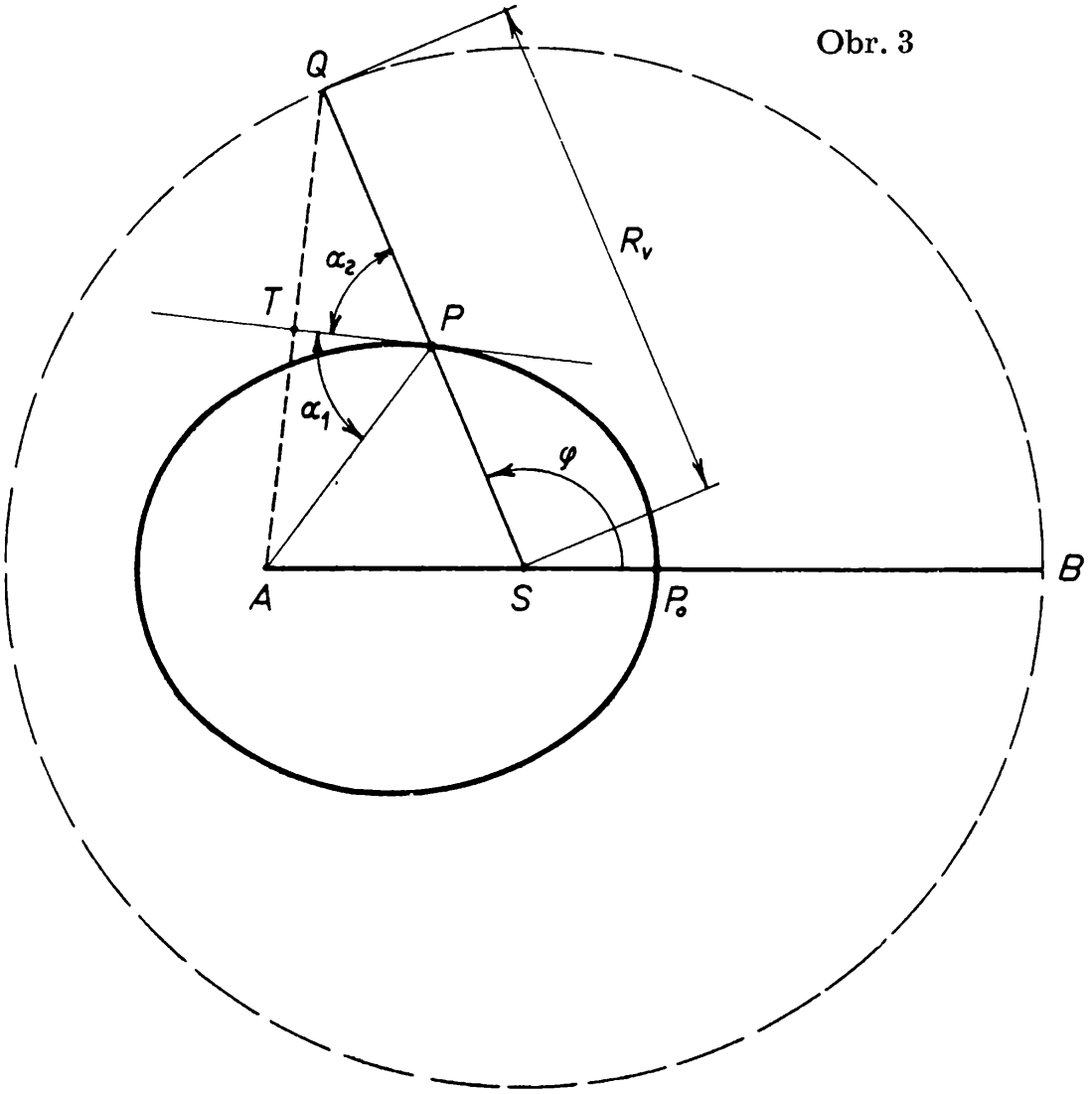


Obr. 2

súčet $\mathbf{v}_0$ a všetkých postupných zmien $\Delta\mathbf{v}_i$. Ak by sme celý proces opakovali ďalej, opísali by sme vektormi $\Delta\mathbf{v}_i$ celú kružnicu a vrátili by sme sa k počiatočnej rýchlosti v_0. Nech je R_v polomer tejto kružnice. Ukazuje sa, že takto zostrojená kružnica má jednu geometrickú vlastnosť: ak je známa uhlová súradnica φ planéty, potom smer jej rýchlosti (resp. smer dotyčnice k dráhe) môžme ľahko zistiť. Stačí zostrojiť uhol φ od smeru $\mathbf{v}_0$ v strede kružnice, na obr. 2. Taký vzťah medzi uhlovou súradnicou a dotyčnicou k dráhe v tomto bode je tiež typický pre elipsu. vlastnosťou elipsy. Ostáva už len dokázať, že elipsa skutočne má túto vlastnosť.

Na obr. 3 je elipsa z obr. 1. Súčet vzdialeností ľubovoľného bodu elipsy od fókusov A, S je R_v, vzdialenosť medzi fókusmi je $|v_0 - R_v|$, je zrejme $AB = |v_0|$.

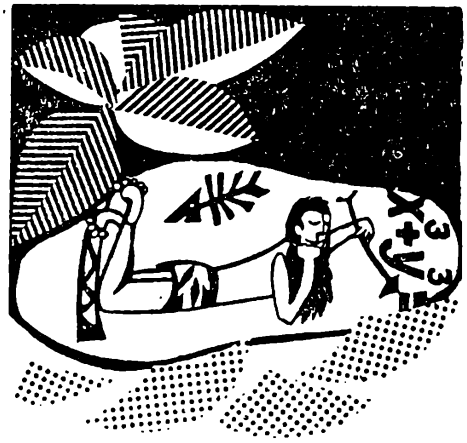
Uvažujme teraz také dva body, ako na predošlých obrazoch (s tou istou uhlovou súradnicou φ). Smer rýchlosti planéty je totožný so smerom dotyčnice PT. V závere dokážeme, že priamka PT je rovnobežná s vektorom **v** na obr. 2. To môžeme previesť, ak zostrojíme z bodu S kružnicu o polomere R_v (na obr. 3 prerušovaná čiara). Nakoniec ukážeme, že tak ako PT, tak i vektor **v** na obr. 2 sú kolmé



Obr. 3

k priamke AQ, preto sú vzájmne rovnobežné. Skutočne vidieť, že trojuholníky APT a QPT sú zhodné. Uhly α_1 a α_2 sú zhodné, pretože sečnice elipsy, prechádzajúce postupne fókusmi a pretínajúce sa v bode elipsy, zvierajú s dotyčnicou v tomto bode rovnaké uhly. Pre stranu AP platí: $AP = R_v - PS$. Ale strana QP je tiež rovná $R_v - PS$. Preto platí $AP = PQ$ a oba trojuholníky sú zhodné (podla dvoch strán a uhla medzi nimi). Nakoniec je tiež vidieť, že vektor **v** na obr. 2 je tiež kolmý na AQ, a to preto, lebo čiarkované úsečky na obr. 2 a obr. 3 sú rovnaké, no pootočené o 90° (AB odpovedá $\mathbf{v}_0$ a AQ odpovedá **v**).

Teraz predkladáme za úlohu čitateľovi zostrojiť elipsu podla obr. 3, položiac $SP_0 = R_0$. Uvidíte, že veličiny v_0 a R_0 plne definujú tvar elipsy.



Detektivní pětiboj

■ JAROSLAV ŠEDIVÝ, Praha

Čtyři úlohy pětiboje byly již řešeny v článku „Grafická metoda řešení logických úloh" uveřejněném v 9. a 10. čísle Rozhledů, uvedeme proto na tomto místě jen správné odpovědi. Podrobněji popíšeme řešení páté úlohy.

[1] *Problém s fanoušky.* Karel je sparťan, Milan fandí Bohemians, nelze však rozhodnout, který ze zbývajících hochů fandí Slavii a který Viktorii.

[2] *Silvestrovský problém.* Jsou dvě možné skupiny hostů, jednu tvoří Arnošt, Věra, Lída, Jirka a Pavla, druhou Ema, Jirka, Pavla a Ruda. V každém případě pojede Jirka s Pavlou, zaručeně nepřijede Karel, Hanka a Mirek.

[3] *Objevíte viníka?* Úloha je dvojznačná, vázu rozbil buď Milan nebo Olda. V prvním případě řekl pravdivý výrok Emil a Jirka, ve druhém Emil a Květa.

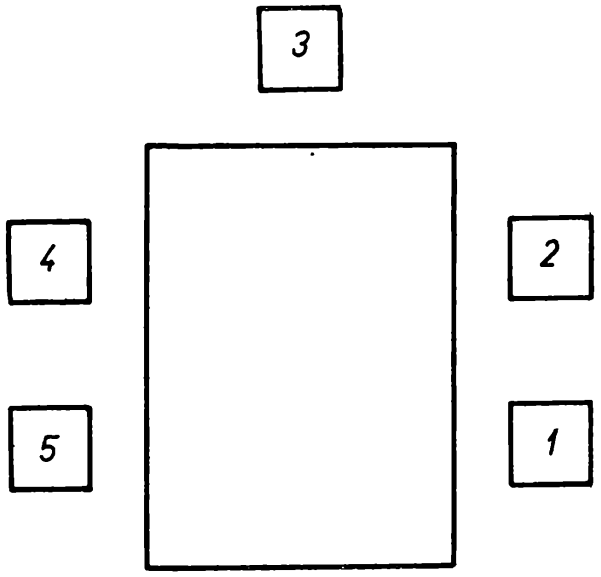
[4] *Zjistíte pachatele?* Jsou čtyři možnosti pro složení party: *B, D, G, H* nebo *A, C, D, H* nebo *A, C, D, F, H* nebo *A, C, D, G, H.* Akce se určitě zúčastnili podezřelí *D, H,* nezúčastnil se *E.*

[5] *Napište zatykač.* Tato úloha patří mezi tzv. zebry, zvláštní typ logických úloh s obvykle velmi početnou množinou výroků. Popíšeme stručně postup řešení naší úlohy.

Židle, na kterých muži seděli, očíslujeme podle údajů textu (obr. 1) a budeme hovořit o prvním, druhém, ..., pátém muži. Z textu úlohy lze „vytáhnout" tyto údaje:

1. *Pátý muž platil desetikorunou.* 2. *Muž, který pil kávu, platil padesátikorunou.* 3. *Černovlasý muž neplatil.* 4. *První muž pil čaj.* 5. *První muž platil.* 6. *První muž neplatil stokorunou.* 7. *Muž s baretem pil pivo.* 8. *Šedovlasý muž pil červené víno.* 9. *Muž v černém kabátě pil bílé víno.* 10. *Muž*

Obr. 1



v hnědém kabátě platil. 11. *Muž v béžovém kabátě měl čepici.* 12. *Blondýn měl hnědý klobouk.* 13. *Žádný muž neměl kabát a klobouk stejné barvy.* 14. *Žádný muž neměl černý kabát a hnědý klobouk ani hnědý kabát a černý klobouk.* 15. *Třetí byl muž v modrém kabátě.* 16. *Muž, který pil bílé víno, následuje v pořadí bezprostředně za mužem, který pil červené víno.* 17. *Blondýn seděl proti holohlavému, žádný z nich nebyl třetí.*

Při popisu řešení uvedeme v závorce za každým výrokem čísla předcházejících výroků, z nichž tento výrok vyplývá jednoduchou úvahou. Jednotlivé body popisu mužů odlišíme od argumentace kurzívním typem tisku. Jeden z možných postupů řešení lze heslovitě popsat takto:

18. *Muž v černém kabátě pil bílé víno* (9), neměl baret (7), čepici (11), černý klobouk (13) ani hnědý klobouk (14), proto *měl zelený klobouk.*

19. *Muž v hnědém kabátě* neměl čepici (11), ani klobouk (13, 14, 18), proto *měl baret a pil pivo* (7).

20. *Blondýn měl hnědý klobouk* (12), neměl hnědý kabát (13), černý kabát (14), modrý kabát (17, 15) ani béžový kabát (11), proto *měl zelený kabát.*

21. *Muž v modrém kabátě měl černý klobouk* (11, 19, 20, 18) a *byl třetí* (15).

22. *První muž pil čaj* (4) a *platil dvacetikorunou* (5, 6, 2, 1).

23. *Šedovlasý muž pil červené víno* (8), platil (3), ne však desetikorunou (16, 1), dvacetikorunou (22), padesátikorunou (2, 8), proto *platil stokorunou.*

24. *Muž v hnědém kabátě* neplatil stokorunou (19, 23), padesátikorunou (2, 19) ani dvacetikorunou, proto *platil desetikorunou* (10).

25. *Muž v černém kabátě* neplatil (9, 2, 22, 23, 24), je *černovlasý* (3), nebyl první (5), druhý (4, 16), třetí (15) ani pátý (1), proto *byl čtvrtý.* Údaji 18, 25 je tento muž plně popsán.

26. *Muž v modrém kabátě byl třetí* (16, 25), údaji 21, 23 a 26 je plně popsán.

27. *Muž, který platil padesátikorunou,* nebyl první (22), třetí (26), čtvrtý (25) ani pátý (1), proto *byl druhý, pil kávu* (2), *byl ryšavý* (26, 25, 17).

28. *Muž, který pil pivo,* nebyl první (4), druhý (27), třetí (26) ani čtvrtý (25), proto *byl pátý.*

29. *Blondýn* nepil červené víno (8), bílé víno (18, 20), kávu (27) ani pivo (12, 7), proto *pil čaj.* Údaji 20, 22, 29 je plně popsán.

30. *Holohlavý byl pátý* (29, 17), údaji 28, 19, 1 je plně popsán.

Úloha má jediné řešení, které můžeme přehledně popsat takto:

první muž - blondýn - zelený kabát hnědý klobouk čaj dvacetikoruna,
druhý muž - ryšavý - béžový kabát čepice - káva padesátikoruna,
třetí muž - šedovlasý - modrý kabát - černý klobouk - červené víno - stokoruna,

čtvrtý muž černovlasý černý kabát zelený klobouk bílé víno neplatil,
pátý muž - holohlavý - hnědý kabát - baret - pivo - desetikoruna.

Detektivní pětiboj měl velký ohlas mezi čtenáři, do redakce došlo mnoho řešení jednotlivých úloh. Někteří řešitelé vyjádřili v dopisech, že se jim tato soutěž velmi líbila a že jim pomohla vytvořit si určitý systematický postup pro řešení logických úloh. První dvě úlohy byly řešeny vesměs úspěšně, ojedinělé chyby se vyskytly v řešení třetí úlohy. „Kamenem úrazu" byla čtvrtá úloha, hlavně přesné logické vyjádření podmínek úlohy. Formulace složitějších podmínek pomocí slov běžného jazyka velmi často skrývá nebezpečí různého výkladu, v daném případě byly různě pojaty zejména poslední dvě věty čtvrté úlohy. Někteří řešitelé uvedli varianty řešení, které odpovídají různému výkladu těchto vět. Je zajímavé, že jsou správná téměř všechna řešení poslední úlohy, je jich ovšem daleko méně. Zřejmě zde hrála roli možnost snadného ověření správnosti řešení.

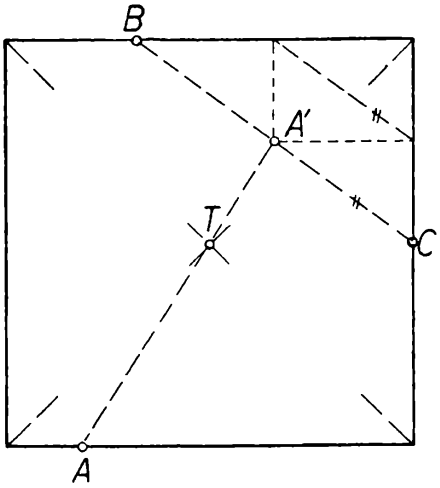
Nejúspěšnějšími řešiteli detektivního pětiboje jsou:
M. Kawalec, 2.b, SVVŠ Havířov, *A. Klossová*, 3.b, SVVŠ Český Brod, *B. Kratochvíl*, Kouřim 94, okr. Kolín, *J. Leicman*, Veverská Bítýška 17, okr. Brno-venkov, *K. Pastor*, 2.b, SVŠ Novohradská, Bratislava, *P. Polcar*, 2.b, SVVŠ Velké Meziříčí, *S. Slouka*, M4.a, SPŠE Brno.
Velmi pěkná řešení zaslali:
Z. Manoušek, 4. r. SPŠS Sokolská, Brno, *V. Pohlová*, 3.g, SVVŠ, W. Piecka, Praha 2, *L. Procházková*, 3.a, SVVŠ Český Brod a *Z. Arnold*, 2.f, SVVŠ, W. Piecka, Praha 2, *J. Louda*, 3.f, SVVŠ Plzeň, *V. Veselý*, Balbínova 4, Brno.
Dále následuje veliká řada řešitelů, kteří správně vyřešili čtyři úlohy, jejich seznam však již nemůžeme otisknout.

Redakce děkuje všem „pětibojařům" za zaslaná řešení a doufá, že se jim a všem ostatním čtenářům bude líbit další soutěž připravovaná pro příští ročník Rozhledů.

Řešení zábavných úloh z minulého ročníku

Kdo vysvětlí tuto záhadu?
(č. 6, str. 267)

Body kružnice $(S; r)$ konají složitější pohyb než je otáčení. Každý bod této kružnice se nejen otáčí, nýbrž i posunuje. Bod B se při každém sebemenším otočení současně posune ve směru pohybu. Při otočení o 360° je délka posunutí rovna $2\pi (R - r)$.



Obr. 1

Jak to nést?
(č. 6, str. 282)

Těžiště plechu je ve středu čtverce a musí splývat s těžištěm trojúhelníka určeného dělníky A, B, C. Tím je dáno konstruktivní řešení vyznačené na obr. 1 ($2 \,.\, TA' = AT$).

?
(č. 7, str. 336)

V spoločnosti osmi osôb sa Holanďan dohovorí s Rusom pomocou dvoch tlumočníkov, z ktorých prvý je Francúz a druhý Portugalec (riešenie *J. Bílikovej* zo ZDŠ Chtelnica).

Řešili: *J. Bíliková*, ZDŠ, Chtelnica; *P. Brunclík*, Znojmo; *P. Černá*, Žďár n. Sáz.; *S. Lhotáková*, ZDŠ, Most; *E. Müllerová*, Galanta; *O. Petlan*, Obytce u Klatov; *E. Procházka*, Nová Včelnice; *M. Sopková*, Vojkovice n. Ohří.

Svítil nebo nesvítil?
(č. 8, str. 380)

Preskúšala som striedanie osvetlenia a neosvetlenia pre $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ a zistila som riešenie $x = 7$. Maják v 14 hodín nesvieti (riešenie *J. Bílikovej*, 8.b ZDŠ, Chtelnica).

Řešili: *J. Bíliková*, ZDŠ, Chtelnica; *E. Procházka*, SVVŠ, J. Hradec.

H. a B.

Kombinatorická úloha
(č. 9, str. 429)

Autorovo řešení. Představme si např. skupinu, složenou ze dvou náměstků a jednoho úředníka. Ta není schopna sejf otevřít. To znamená, že jí chybí klíč alespoň od jednoho zámku. Připojí-li se však k nim libovolná ze zbývajících osob, bude už tato větší skupina schopna sejf otevřít, neboť bude splněna některá ze tří daných podmínek. Z toho však vyplývá, že tato nová osoba nutně má chybějící klíč.

Stejná úvaha platí i pro každou jinou skupinu osob, která sama nemůže sejf otevřít, ale otevře jej pomocí klíče jedné kterékoliv ze zbývajících osob. Vidíme tedy, že sejf je třeba opatřit alespoň tolika zámky, kolik různých skupin osob s uvedenou vlastností lze z daných devíti osob utvořit. Každé takové skupině přiřadíme jeden zámek a klíče od něho dáme právě všem ostatním osobám. Snadno se ověří, že pak jsou podmínky úlohy splněny.

Zbývá tedy určit všechny takové skupiny v našem konkrétním případě. Jsou to právě všechny skupiny složené a) ze dvou náměstků a jednoho úředníka, nebo b) z jednoho náměstka a pěti úředníků, nebo c) z ředitele a pěti úředníků. Z kombinatorických úvah vidíme, že skupin typu a) je celkem patnáct, skupiny typu b) jsou tři a skupina typu c) je jediná. Celkem je tedy potřeba devatenácti zámků. Klíče patnácti zámků budou v šesti exemplářích, klíče zbývajících čtyř zámků vždy ve třech exemplářích. Klíče budou pak (při vhodném očíslování) rozděleny takto:

Osoba	Zámky číslo
ředitel	1 až 18,
1. náměstek	1 až 5, 16, 17, 19,
2. náměstek	6 až 10, 16, 18, 19,
3. náměstek	11 až 15, 17 až 19,
1. úředník	1 až 4, 6 až 9, 11 až 14,
2. úředník	1 až 3, 5 až 8, 10 až 13, 15,
3. úředník	1, 2, 4 až 7, 9 až 12, 14, 15,
4. úředník	1, 3 až 6, 8 až 11, 13 až 15,
5. úředník	2 až 5, 7 až 10, 12 až 15.

František Zítek

Řešení zábavných úloh z letošního ročníku

Sčítání, odečítání, násobení, dělení
(č. 2, str. 97)

Řešení. Neznámá čísla označme x a y tak, že platí $x \geqq y > 0$.
Potom

$$x + y + x - y + x \,.\, y + \frac{x}{y} = 3600\,,$$

$$x\left(2 + y + \frac{1}{y}\right) = 3600\,,$$

$$\frac{x}{y}\,(2y + y^2 + 1) = 3600\,,$$

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{60}{y+1}\right)^2$$

Protože podíl $\frac{x}{y}$ je číslo kladné celé, tedy i číslo $\frac{60}{y+1}$ musí být číslem celým a tedy 60 a $y + 1$ musí být čísla soudělná. Číslo 60 můžeme psát ve tvaru $2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5$. Podmínce soudělnosti budou vyhovovat tedy i čísla, která vzniknou z těchto čtyř součinitelů, a to čísla vzniklá součinem tří součinitelů (jsou 3), dvou součinitelů (existují 4) a jednotlivých součinitelů

(3). Celkem tedy bude existovat 11 takových dvojic. Z podmínky soudělnosti čísel 60; 12, 20, 30; 4, 6, 10, 15; 2, 3, 5 a $y + 1$ vypočteme hodnotu y a k němu příslušné x z nahoře uvedené rovnice.

Řešil: *Zd. Manoušek*, SPŠS, Brno.

Kolik střelců?
(č. 2, str. 97)

Řešení. Uvažujme skupinu výborných střelců, u každého z nichž je pravděpodobnost zasažení (cíle tj. sledovaný jev A) $p = 0{,}9$. Kolik jich musí být, aby se tato pravděpodobnost zvýšila na 0,999? Počet střelců n je zatím neznám. Požadavek zasáhnout cíl alespoň jednou střelou bude splněn tehdy, jestliže cíl zasáhne 1, 2, popřip. všech n střelců. Tedy v binomickém rozdělení pravděpodobností bude x nabývat hodnoty 1, 2, 3, ..., n. Pro pravděpodobnost P sledovaného jevu A dostáváme tak

$$P(A) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + \quad + P(\xi = n),$$

což můžeme psát výhodněji ve tvaru

$$P(A) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1 - p)^{n-0} = 1 - 0{,}1^n .$$

Tato pravděpodobnost má být větší nebo rovná hodnotě 0,999, jedná se tedy o řešení nerovnosti

$$1 - 0{,}1^n \geqq 0{,}999 ,$$
$$0{,}1^n \leqq 0{,}001 ,$$
$$n \geqq \frac{\log 0{,}001}{\log 0{,}1} ,$$
$$n \geqq 3 .$$

Pro skupinu dobrých střelců stanovíme počet řešením nerovnosti

$$1 - 0{,}3^n \geqq 0{,}999 ,$$
$$n \geqq 5{,}7 .$$

Počet průměrných střelců k utvoření skupiny, která zasáhne cíl alespoň jednou s pravděpodobností 0,999 zjistíme řešením

$$1 - 0{,}5^n \geqq 0{,}999 ,$$
$$n \geqq 9{,}9 .$$

Požadované tři skupiny budou tedy tvořeny ze tří výborných střelců, nebo z šesti střelců dobrých; průměrných střelců je ke splnění téhož úkolu třeba deset.

Řešil: *E. Guttek*, SVŠ, Prešov.

Kto porazil mužstvo E?
(č. 2, str. 95)

Riešenie. Budeme postupne riešiť úlohy 1—6, na ktoré sme príklad rozložili. V priebehu riešenia sa niektoré implikácie budú stále vyskytovať, preto ich uvedieme na začiatku a v ďalšom budeme ich platnosť mlčky predpokladať za známu. Platia tieto tvrdenia (skoro evidentné):

Súčet všetkých bodov, ktoré všetky mužstvá za jeden deň získajú, je 6

$$m(X) > m(Y) \text{ a } r(X) > r(Y) \Rightarrow b(X) < b(Y) .$$

Po každom dni platí

$$r(A) + r(B) + r(C) + r(D) + r(E) + r(F) = 0 .$$

Ak je po dvoch dňoch

$$r(X) > 0,$$

potom

$$b(X) \geqq 2.$$

Ak je po dvoch dňoch

$$r(X) < 0,$$

potom

$$b(X) \leqq 2.$$

Pristúpme k vlastnému riešeniu úloh.

Úloha 1. Všetko čo uvedieme sa vzťahuje na dobu po druhom dni. Predpokladajme $m(E) \leqq 3$, prípadne $m(E) = 2$ až 3. Keby $m(E) = 2$, potom by, vzhľadom na $b(E) = 1$ mali mužstvá umiestené na treťom až šiestom mieste maximálne po jednom bode. Súčet bodov všetkých mužstiev by potom bol maximálne 9. To je v spore s faktom, že po dvoch kolách je súčet všetkých bodov 12. Rovnako je nemožné, aby $m(E) = 2-3$. Podobnou úvahou zistíme, že v prípade $m(E) = 3$ majú mužstvá, ktoré sú na 4, 5 a 6 mieste po jednom bode a mužstvo, ktoré je na druhom mieste má 4 body. Vzhľadom na skóre je zrejmé, že po 1 bode majú mužstvá A, B, C a E. Podľa predpokladu je teda $m(E) = 3$, $m(C) = 4$, $m(A) = 5$, $m(B) = 6$. Nakoľko posledné 4 mužstvá majú rovnaký počet bodov, je kritériom pre ich poradie skóre. Je preto $y \leqq 4$ a $x \geqq 4$. Podľa tretieho z horeuvedených tvrdení je celkový súčet daných gólov $(x + 21)$ rovný celkovému súčtu obdržaných gólov $(y + 19)$. Teda $y = x + 2$ čo je v spore s nerovnosťami $x \geqq 4 \geqq y$. Predpoklad bol chybný, a preto je nutne $m(E) = 6$.

Úloha 2. Po druhom dni. Mužstvo F má maximálny možný počet bodov a rozdiel skóre lepší ako B i ako D. Preto $m(F) = 1$. Dalej je $r(D) = 3 > 0 > -3 = r(B)$ odkiaľ $b(D) \geqq 2 \geqq b(B)$. Preto $m(D) < m(B)$, čiže $m(F) = 1$, $m(D) = 2$, $m(B) = 3$.

Úloha 3. Po druhom dni. Súčet všetkých bodov je 12, teda súčet bodov mužstiev A, B, C a D je 7. Vzhľadom na umiestenie nemá žiadne mužstvo menej bodov ako A, preto $b(A) \leqq 1$. Na druhej strane však $b(A) \geqq 1$, pretože posledné mužstvo E má jeden bod. Teda $b(A) = 1$. Mužstvá A a E majú po jednom bode a mužstvo E má horšie umiestenie. Preto je $x \leqq 2$ a potom tiež $y \leqq 4$ podľa vzťahu $y = x + 2$. Je potom $m(C) > m(B)$ a $r(C) > r(B)$. Teda $b(B) > b(C)$. Mužstvá B, C a D sa delia o 6 bodov. Pretože je $1 \leqq b(C) < b(B) \leqq b(D)$, platí $b(C) = 1$, $b(B) = 2$, $b(D) = 3$. Pretože je $b(C) = 1$, je tiež $r(C) < 0$, čiže $y \geqq 4$. Teda, podľa predošlého je $y = 4$ a potom $x = 2$.

Úloha 4. Po prvom dni. Ak v prvý deň turnaja dve mužstvá remizujú, potom sa po prvom dni musia nutne deliť o miesto. Pretože podľa (1) sa mužstvo C o miesto nedelí, neremizovalo v prvom zápase. Keby bolo musztvo C prvý zápas vyhralo, malo by 2 body a rovnaký počet by museli mať i všetky mužstvá s lepším umiestením. To by znamenalo, že prvý deň turnaja bolo rozdelených aspoň 8 bodov, čo je nemožné. Preto mužstvo C prvý zápas prehralo a teda i obe mužstvá, ktoré sú za mužstvom C, museli prvý zápas prehrať. V prvom dni nedošlo k nerozhodnému výsledku. Pretože po druhom dni tri mužstvá A, C a E mali iba jeden bod, nemohli tieto v prvom dni vyhrať. Z toho plynie, že prvý deň vyhrali B, D, F a prehrali A, C, E.

Úloha 5. Porovnaním bodového stavu po prvom a po druhom dni zistíme, že druhý deň hrali nerozhodne mužstvá A, C, D a E a že F porazilo B. Mužstvá, ktoré v druhom dni hrali nerozhodne, mali rozdiel skóre po prvom dni rovnaký ako po druhom dni. Preto po prvom dni bolo $r(A) = -2$,

$r(C) = -1$, $r(E) = -3$, $r(D) = 3$. Odtiaľ plynie, že prvý deň hrali spolu E a D a mužstvo D zvíťazilo rozdielom 3 gólov. Predpokladajme teraz, že v prvom dni sa hral zápas $A-F$. Potom zrejme $F-A = 2:0$ a prvý deň sa hral i zápas $B-C$, ktorý C prehralo o gól. Pretože B hralo druhý deň s F, dalo B všetky tri svoje góly v prvý deň, a preto $B-C = 3:2$. Za uvedených okolností druhý deň hralo mužstvo C pomerom 1 : 1 a mužstvo A pomerom 3 : 3. Pretože E v prvých dvoch dňoch nedalo 3 bránky, bolo druhý deň $A-D = 3:3$ a potom prvý deň $D-E = 3:0$. Druhý deň hrali spolu E a C, pritom C so skóre 1 : 1 a E so skóre 2 : 2, čo je nemožné. Predpoklad bol chybný. Teda prvý deň sa hral zápas $C-F$, ktorý skončil jednogólovým víťazstvom F, pričom F nedostalo ani jednu bránku. Preto $F-C = 1:0$. Priamym dosledkom posledného faktu je, že druhý deň bolo $F-B = 5:0$; $C-? = 3:3$ a prvý deň $B-A = 3:1$.

Úloha 6. Z poslednej rovnice plynie výsledok $A-? = 2:2$ druhého dňa. Dohromady dalo E dva góly, mužstvo C v zápase $C-? = 3:3$, teda nehralo s E, a preto musí byť $A-E = 2:2$. Odtiaľ $C-D = 3:3$ a $D-E = 3:0$. Výsledok znie: Prvý deň sa hrali zápasy $B-A = 3:1$; $F-C = 1:0$; $D-E = 3:0$. Druhý deň sa hrali zápasy $A-E = 2:2$; $C-D = 3:3$; $F-B = 5:0$.

Milan Hejný

RŮZNÉ • RŮZNÉ • RŮZNÉ

Josef Maximilian Petzval

OLDŘICH JENIŠTA, ČVUT, Praha

V lednu 1967 připomenul zahraniční tisk 160. výročí narození Josefa Petzvala. Pokud jsem zjistil, přinesl o tomto výročí náš tisk jen článek slovensky psaný a podepsaný E. V. Tento článek byl uveřejněn ve 4. čísle Zdravotnických novin ze dne 26. ledna 1967.

Kdo byl Josef Maximilian Petzval?

Narodil se 6. ledna 1807 ve Spišské Belé v rodině učitele tamní německé obecné školy. Po vychození obecné školy v rodišti odešel na gymnasium v Levoči. Je zajímavé, že největší potíží tam pro něho byla matematika, z které měl dokonce jednou i opravnou zkoušku. Snad právě tato okolnost ho donutila více se věnovat tomuto předmětu. Nakonec si jej

oblíbil tak, že pak vůbec přilnul k technickým vědám, na něž mohl aplikovat znalosti matematiky.

Když vystudoval v Pešti techniku, byl v roce 1828 jmenován městským inženýrem ve službách hlavního města tehdejších Uher. Již v roce 1835 byl ustanoven vysokoškolským profesorem v Pešti, ale dva roky na to byl povolán jako profesor na vídeňskou techniku, kde působil až do roku 1877.

Vedle matematiky se věnoval technické fyzice, zejména optice. Během svého vídeňského pobytu si zřídil v prostorách bývalého kláštera na Kahlenbergu vlastní laboratoř, kde na základě teoretických výpočtů konstruoval různé optické přístroje, do nichž si vlastníma rukama vybrušoval i čočky. Na podkladě jeho výpočtů zkonstruoval optik Voigtländer trojčlenný objektiv o značné světelnosti, který umožnil zkrátit expoziční dobu z několika minut na pouhé sekundy. Tohoto objektivu se používá dodnes. Voigtländer výrobou tohoto objektivu velmi zbohatl a jeho jméno se až dosud zachovalo v názvu světoznámého německého optického závodu, zatímco jméno Petzvalovo upadlo dnes téměř v zapomenutí. Své doby mělo však světový zvuk. O tom svědčí, že Petzval byl jmenován členem mnoha vědeckých institucí a odborných společností v celé Evropě. Rovněž naše Jednota českých matematiků ho jmenovala v roce 1881 svým čestným členem a Petzval poděkoval za tuto poctu vlastnoručně psaným českým dopisem.

Petzval vzdor svému postavení vysokoškolského profesora a uznávaného odborníka zůstal vždy jen skrovným člověkem, věnujícím se jen vědě a stranícím se všem okázalostem. Zemřel téměř ve věku 85 roků dne 17. září 1891 ve Vídni a byl pohřben na tamním ústředním hřbitově. V blízkosti jeho posledního odpočinku jsou hroby Wolfganga Amadea Mozarta a Ludwiga van Beethovena. V aule vídeňské akademie věd je umístěna Petzvalova busta, v technickém muzeu ve Vídni se uchovávají jeho vlastnoručně vybroušené čočky a jím konstruované fotografické přístroje. Jeho rodiště Spišská Belá zřídilo z jeho rodného domu muzeum na jeho paměť.

Píše ředitel SVVŠ

Josef Hampl, Žamberk

Páté číslo letošního ročníku Rozhledů přineslo článek Františka Kejly, ČVUT, Praha *Jak to opravdu bylo*. Článek mě velmi upoutal, a protože už 11 let připravuji středoškoláky k vysokoškolskému studiu a o podobné problémy uvedené v článku se stále zajímám, rozhodl jsem se provést na své škole malou prověrku. Domnívám se, že výsledky jsou poučné. Pro dokreslení situace uvádím, že od roku 1957,

kdy vyšli naši první maturanti, do roku 1964 statistika ukazuje, že průměrné procento našich maturantů studujících na vysokých školách je 60 %, studijní úmrtnost minimální - pod 3 %, rok 1964 byl zvolen za hranici proto, abychom počítali se studenty, kteří již na vysoké škole několik roků studují.

Vybral jsem dvě slovní úlohy, které dopadaly při přijímacích zkouškách na stavební fakultu katastrofálně: úlohu první „o líhu" a úlohu pátou „o vlacích míjejících se v protisměru". Volil jsem tyto dvě úlohy také z toho důvodu, že jsem chtěl práci zadat též v 9. třídě devítiletky. Práce byla ve všech třídách zadána současně, každý příklad psali zkoušenci na jednu stranu papíru, na vypracování každé úlohy měli 5 minut čistého času. Výsledky ze ZDŠ jsou katastrofální, ale srovnatelné s výsledky uvedenými v Rozhledech. Výsledky na SVVŠ jsou pěkné, vzhledem k tomu, že práci psali všichni studenti od I. do III. ročníku, a to nejen zájemci o technické studium. Kromě toho se ukazuje, že úloha o líhu dopadla u maturantního ročníku nejhůře ze všech studentů.

Třída	Psalo	Úloha o líhu				Úloha o vlaku			
		správně		jen postup	špatně	správně		jen postup	špatně
9.A	31	0		1	30	0		1	30
9.B	24	2		2	20	5		0	19
ZDŠ	55	2		3	50	5		1	49
I. A přír.	25	20	80%	2	3	9	36%	3	13
I. B hum.	18	9	50%	1	8	2	11%	2	14
II. přír.	29	10	34,5%	1	18	14	48,5%	6	9
III. zákl.	30	4	13(!)%	4	22	27	90%	0	3
SVVŠ	102	43	42%	8	51	52	51%	11	59

RECENZE

Knížka o geometrických místech

Napsal ji Milan Koman a má název *Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic.*

Ve škole se geometrická místa vyšetřují v mnoha úlohách, ale zpravidla se používá jen tzv. syntetické metody. Početní řešení metodou souřadnic je vhodné zejména tehdy, když jednodušší postup zklamal. A právě na takové úlohy se autor zaměřil ve své brožuře. Knížka je rozdělena do pěti kapitol. Po úvodních poznámkách přijdou na řadu úlohy, ve kterých se používá vzdálenosti dvou bodů, pak vzdálenosti bodu a přímky a poslední skupinou příkladů jsou geometrická místa, při jejichž vyšetřování se zkoumá vzájemná poloha dvou útvarů. Užitečný je i přehled výsledků z analytické geometrie, kde si čtenář připomene některé pojmy a vzorce o délce úsečky, o vyjádření polopřímky, poloroviny, vnitřku a vnějšku kružnice, o parabole, elipse a hyperbole apod. Ke knížce jsou připojena i cvičení, jejich výsledky najdete v závěru svazku. Doporučujeme vám, abyste si přečetli i autorovu předmluvu, která je zajímavě napsaná a dá vám nahlédnout do zákulisí matematických úloh.

Komanova knížka vyšla jako 15. svazek edice Škola mladých matematiků na sklonku roku 1966 v nakladatelství Mladá fronta. Má 100 stran, 35 obr. a stojí 3,50 Kčs. Můžeme ji doporučit všem zájemcům o matematiku.

Jiřina Sedláčková

Něco pro zájemce o geometrii

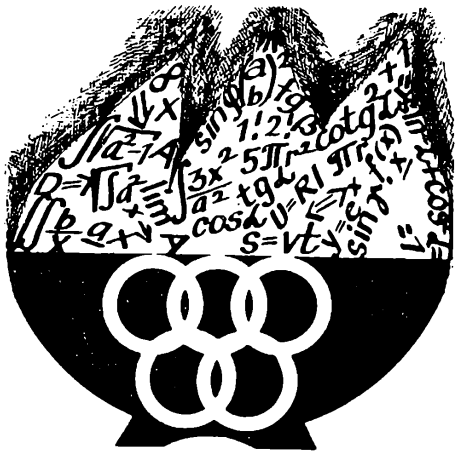
Koncem roku 1966 vyšel v knižnici Škola mladých matematiků již 16. svazek. Knížku napsal Stanislav Horák a jmenuje *Kružnice.* V jejích pěti kapitolách si můžeme zopakovat a utvrdit některé známější věci z planimetrie, které souvisejí s kružnicemi (např. poučky o úhlech v kružnici, Ptolemaiovu větu o tětivovém čtyřúhelníku, mocnost bodu ke kružnici, chordálu, Apolloniovu kružnici, Stewartův vzorec atd.) a uvědomit si, jak se tyto věty dokazují, což se ve školách asi většinou opomíjí. Dále můžeme vidět, jak se tyto poznatky uplatňují při řešení mnoha příkladů, při čemž odvodíme řadu nových zajímavých planimetrických vlastností a souvislostí, geometrická místa bodů atd. Všude se provádějí syntetické úvahy. To se jistě bude čtenářům hodit v Matematické olympiádě. Při řešení geometrických úloh musíme někdy uvažovat zvlášť několik možností (např. zda nějaký úhel je ostrý či tupý apod.), provádět diskusi; na to řešitelé často zapomínají a uvažují jistý speciální případ dané úlohy, takže taková řešení nebývají úplná. V této knížce najdete vzorně provedená řešení úloh. Tím se procvičíte i v tom, aby vaše matematické úlohy byly i po formální a stylistické stránce dobře zpracovány.

Jednotlivé kapitoly se jmenují: Obvodové úhly v kružnici; Tětivový čtyřúhelník; Mocnost bodu ke kružnici; Příklady řešení jinak, zejména stejnolehlostí; Kružnice jako množina bodů. Kromě mnoha vyřešených příkladů najdete v knížce ještě řadu cvičení, která rozvíjejí probíranou látku.

Knížka na 128 stran se 65 obrázky a stojí 4 Kčs. Doporučujeme ji všem zájemcům o Matematickou olympiádu a elementární matematiku.

Jaroslav Zemánek

MO



XVII. ročník Matematické olympiády

V 10. čísle časopisů *Matematika ve škole* a *Rozhledy matematicko-fyzikální* uveřejňuje ÚVMO pro informaci čtenářů *přípravné úlohy* XVII. ročníku MO; soutěžní úlohy a podrobnější organizační pokyny naleznete v 1. čísle příštího ročníku uvedených časopisů.

Přípravné úlohy

Kategorie A

1. Je dána funkce proměnné x

$$y = 2\frac{x^3 + 1}{1 + |x + 1| + x} + 2\frac{2x^3 - 3x^2 + x}{a + |x - a| - x}. \qquad (1)$$

Určete parametr a tak, aby graf dané funkce ležel v jednotkovém kruhu se středem v počátku souřadnic.

2. Množina M se skládá z n prvků 1, 2, ..., n. Utvořte kombinace k-té třídy z prvků množiny M. Sečtěte čísla, která vytvářejí kombinaci k-té třídy. Utvořte součet všech takto získaných součtů a označte jej S_k. Stanovte vzorec

a) pro S_k;

b) pro součet $S = S_1 + S_2 +$ $\quad + S_n$.

3. V rovině je dáno pět bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků jimi určených má vnitřní úhel $\alpha \geqq 108°$.

4. Výšky čtyřstěnu $ABCD$ se protínají v jednom bodě (čtyřstěn $ABCD$ je *ortocentrický*) právě tehdy, platí-li pro délky hran vztahy

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2. \qquad (1)$$

Kategorie B

1. Jsou-li koeficienty kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \tag{1}$$

lichá čísla, nemá tato rovnice racionální kořeny; dokažte.

2. Vyšetřte a načrtněte množinu všech bodů v rovině, jejichž pravoúhlé souřadnice x, y vyhovují nerovnostem

$$1 \leqq \big||x + y| - |x - y|\big| \leqq 2 \, .$$

3. Jsou dána dvě kladná čísla m, s a pravý úhel $\sphericalangle ABC$ tak, že platí $AB = 2m$.
Sestrojte rovnoramenný trojúhelník AXY se základnou AY tak, aby měl obvod $2s$, aby vrchol X ležel na polopřímce AB a vrchol Y na polopřímce BC.

4. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o hranách délek $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Na hraně BB' určete bod, jehož vzdálenosti od hran $A'D'$, CD mají součet a) co nejmenší, b) co největší. Oba tyto extrémní součty vyjádřete pomocí délek a, b, c.

Kategorie C

1. Písmenem N označíme přirozené číslo, jehož zápis v desítkové soustavě obsahuje tři jedničky, z nich jednu na počátku, druhou na konci. Ostatní cifry zápisu mohou být už jen nuly.
Určete všecka tisíciciferná čísla N, která jsou dělitelná sedmi.

2. Řešte soustavu rovnic s neznámými x, y

$$\begin{aligned} ax + |y| &= 1 \, , \\ x + y &= a \, , \end{aligned} \tag{1}$$

kde a je parametr. Diskutujte řešení vzhledem k parametru a.

3. Je dán čtverec $ABCD$, bod X probíhá vnitřek úsečky BC, bod Y náleží úsečce CD a je $XY \perp AX$. Určete všechny body X, pro které platí

$$\sphericalangle BAX < \sphericalangle XAY < 45° \, .$$

4. Je dán obdélník $ABCD$, jeh[illegible] mají délky $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Určete bod U ležící mez[illegible] V mezi body B, C tak, aby trojúhelníky ABV, AUV, ADU [illegible]obě rovné.
a) Vypočtěte délky CU, CV
b) Sestrojte body U, V.

1. Dokažte, že platí

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{15}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) < 2$$

pro všechna přirozená $n > 1$.

(Dokončení na 3. str. obálky)

(Dokončení ze str. 492)

2. Při slavnosti sedí u kulatého stolu 6 hochů H_1, H_2, . . ., H_6 a 6 dívek D_1, D_2, . . ., D_6, kteří jsou rozmístěni střídavě vždy chlapec a dívka (tj. např. za sebou: H_1, D_1, H_2, D_2, . . ., H_6, D_6, H_1 atd.). Před koncem slavnosti odešli 2 chlapci a 2 dívky. Přitom obě místa, která uvolnili chlapci, oddělují obě místa uvolněná děvčaty. (Např. mohli odejít H_1, H_3, D_2, D_5, ale nemohli odejít H_1, H_3, D_4, D_6.)
Zjistěte, kolika způsoby lze vybrat takovou dvojici chlapců a dvojici děvčat.

3. Trojúhelník ABC má velikosti vnitřních úhlů $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.
a) Vyjádřete délky stran b, c pomocí délky strany a.
b) Vyjádřete poměr délek všech tří výšek trojúhelníka ABC.

4. V trojúhelníku ABC jsou těžnice t_a a t_b navzájem kolmé. Dále je dána délka těžnice t_c a poloměr opsané kružnice.
Sestrojte tento trojúhelník a proveďte diskusi řešitelnosti.

Autorům článků

Pisatelé si musí uvědomit, že čtenáři Rozhledů jsou především žáci posledních tříd škol všeobecně vzdělávacích, škol odborných a prvního ročníku vysokých škol technického směru. Ti vyžadují krátké, zajímavé články psané lehce a srozumitelně. Všude, kde obsah článku seznamuje čtenáře s novými pojmy, musí autor vše podrobně a srozumitelně vysvětlit. Úkolem časopisu není uveřejňovat náročná pojednání v nichž přispěvatel staví na odiv své odborné znalosti. Čtenáři mají nejraději článek, kde je autor seznámí s historickým vývojem příslušného problému i s jeho praktickým uplatněním. Stačí k tomu mnohdy několik zajímavě napsaných vět.

Autor píše rukopis [illegible] na stroji po jedné straně papíru, nejvíce 30 řádek na stránku normalizovaného formátu. Matematické a fyzikální vzorce vpisuje případně perem. Rukopisy jsou recenzovány členy redakční rady, což někdy trvá delší [illegible] tudíž zbytečné urgovat. Není-li rukopis přijat, je s odůvodněním autor [illegible] ácen. Je samozřejmé, že musí pisatel zachovávat pravidla pravopisu i [illegible] předepsaného názvosloví.

Obrázky doprovázející t[illegible] ohou být provedeny buď na pauzovacím papíru nebo na kreslicí čtv[illegible] ší nebo přesně tužkou. Reprodukcí se obrázek dvakrát zmenší, takže [illegible] ětší šířka originálu může být 22 cm. Popis vyžaduje bezpodmínečně [illegible] lizovaným písmem šablonou 5 mm. Každý obrázek se provede zvlášť [illegible] tří tužkou psaným číslem i jménem autora. Reprodukujeme i fotografie [illegible] esklém papíru. Opisy rukopisů nevyžadujeme. Uveřejněné články jsou [illegible] rovány podle běžných směrnic, autor obdrží poštou jeden výtisk zdarma.

M. M.

NEBOJTE SE ČÍSEL!

Je to vlastně všechno úplně jasné — ale zpočátku málo komu. Záleží nejvíce na pochopení výkladu ve škole a na tom, jak se kdo umí učit doma. Matematika není zvlášť těžká věda — říkají odborníci — ale nesmí vám utéci začátek, ty první základní kameny, na které potom stavíte nové a nové poznatky jako při stavbě věžáku. A právě u těch základů se zastavíme. Pokud vám něco z nich uteklo nebo si v něčem nejste docela jisti — a být si svými znalostmi jistý, to je u matematiky důležité — poradíme vám. Obstarejte si knihu OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY, kterou napsali zkušení autoři v tomto oboru — dr. Tomáš Gál a Antonín Kamarýt, promovaný pedagog. Že je to kniha dobrá, dokazuje více než přesvědčivě její třetí vydání, když první i druhé vydání si studenti brzy rozebrali (dokazuje to ovšem také to, že s matematikou tvrdě zápolí více studentů, nejen třeba vy sami).

V knize OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY najdete vysvětlení nejrůznějších pojmů, od těch úplně základních až k pojmům dost složitým. Začátek je věnován základním úkonům s čísly, potom přijdou zlomky, odmocňování, slovní úlohy, rovnice a logaritmy — a pak už věci složitější — pojmy posloupnosti, kombinace, variace a permutace, bionomická věta a vysvětlení základů počtu pravděpodobnosti. Z části, věnované geometrii, se můžete doučit planimetrii, trigonometrii a stereometrii, v závěru se seznámíte s geometrickým výkladem komplexních čísel — ke všemu vždy příklady a cvičení, jejichž vlastní řešení si můžete porovnat se správným výsledkem na konci knihy. Autoři znají studenty, pro které své učebnice píší — proto se vyhýbají strohé formě výkladu. Nejste-li zrovna zvyklí na matematické texty, bude vám takový způsob učení matematiky velmi milý. Třetí vydání má proti předcházejícím dvěma rozšířený obsah; autoři přidali pojednání o lineární, celistvé i lomené funkci, některé úvahy o kuželosečkách, výklad o inverzní a logaritmické funkci, kapitolu o množinách, zajímavou stať o matematické logice a matematickém vyjadřování. Nechybí ani důležitý výklad jak zacházet s logaritmickým pravítkem. Jestli jste dočetli až sem, jistě uznáte, že jde o knihu, která vám může hodně pomoci. Věc má jen jeden háček: protože první a druhé vydání se prodalo opravdu rychle, dá se očekávat, že velký zájem bude i o vydání třetí. Jestli tedy budete chtít tuto dobrou učebnici mít, obstarejte si ji co nejdříve. A abychom vám shánění usnadnili, připojujeme objednací ústřižek, který jen pošlete na uvedenou adresu a dostanete knihu poštou na dobírku až domů.

OBJEDNACÍ ÚSTŘIŽEK

(zašlete na adresu Státní zemědělské nakladatelství, oddělení odbytu, Václavské nám. 47, Praha 1)
Objednávám knihu Gál—Kamarýt: Opakování středoškolské matematiky za Kčs 30,—

Jméno
Adresa
Okres

podpis