



rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

ROČNÍK 44, 1965-66

Vydává

Státní pedagogické nakladatelství v Praze

z pověření ministerstva školství a kultury

za odborné péče

Jednoty československých matematiků a fyziků

VEDOUCÍ REDAKTOR: DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK

VÝKONNÝ REDAKTOR: DOC. O T A S E T Z E R

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, Jaroslav Bejsta, Petr Benda, doc. dr. Josef Dibelka, Stanislav Horák, doc. Jaroslav Chudý, prof. dr. Josef. Korous, prof. Emil Kraemer, Oldřich Lepil, prof. dr. Cyril Palaj, CSc Evžen Říman, CSc Jiří Sedláček, CSc Ladislav Sehnal, inž. dr. Václav Šindelář, prof. dr. Ján Vanovič, František Vencálek.

OBSAH

Matematika:

Denk Franz, Fürth: Jak daleko lze dohlédnout na moři?	241
Drábek Karel: Konstrukce trojúhelníka	4, 49
Drábek Karel: Použití komplexních čísel v geometrii	289, 348
Duby Tomáš: Rozklad prirodzených čísel na součet alebo rozdiel štvorcov dvoch prirodzených čísel	433
Dušek František: Číselné soustavy o záporném základu	151
Glivický Josef: Některé vztahy mezi prvky trojúhelníka	293, 334
Hájek Jiří: Některé zajímavé vlastnosti nože Archimédova	385, 437
Chudý Jaroslav: Determinanty	1, 52, 105
Janeček František: Vlastnosti tětivového čtyřúhelníka	244, 297
Kejla František: Zopakujte si matematiku k přijímací zkoušce na techniku!	304
Kuřina František: Co je to grupa?	154
Lacina Otakar: Praktická řešení algebraických rovnic vyšších stupňů	97
Lacina Otakar: Řešení rovnic integrací	337
Lacina Otakar: Řešení soustav lineárních rovnic	391
Mráz Vlastimil: Číselné soustavy	145
Půlpán Jan, Szarowski Jan: Přirozená čísla	345
Reich Emil: Poznámka	396
Setzer Ota: Lineární programování	193, 254
Trávníček Stanislav: Rovnice pravidelného mnohoúhelníka	208
Valešová Marie: Numerická řešení rovnic	201, 248

Deskriptivní geometrie:

Cívka Eduard: Ohniska parabol dotýkajících se tří přímek	212
Danielowski Franz — Výmar: „Sekio aurea“ — zlatý řez	8, 58
Drs Ladislav: Kolmé volné průměty	353
Drs Ladislav: Konstrukce názorného průmětu (axonometrie) z volných průmětů	441
Granát Luděk: Geometrické úlohy při prostorovém obrábění	109
Hofmanová Helena: Některá shodná vyobrazení v prostoru	400
Jeništa Oldřich: Otáčení	398
Kepr Bořivoj: O některých křivkách	13, 65, 113, 161, 216, 263, 308, 356
Menšík Miroslav: Přijímací zkoušky z deskř. geometrie na ČVUT	257

Fyzika:

Bednařík Milan: Tíhové zrychlení a světové rekordy v lehké atletice	166
Blaták Karel: Nakreslete si povětrnostní mapu!	327
Bodó Zoltán, Budapešť: Ťažisko, momenty prvního a druhého stupně	361, 408, 450
Dibelka Josef: Elektrická a tepelná vodivost	312
Dibelka Josef: Fotoluminiscence	417
Dibelka Josef: Průběh přijímacích zkoušek z fyziky	371
Dragoun Antonín: O přílivu a odlivu	116
Havlíček Stanislav: Dualismus vln a částic	224
Kos Zdeněk: Vodní stavby a průtoky	20
Kraus Ivo; Maršálek Zlatěk: Krystalická struktura kovů	69
Macek Bohumil: Základy kvantové fyziky	319
Matoulek Josef: Experimentální určování vztahů mezi fyzikálními veličinami	220, 272
Mída Jiří: Kvantová teorie světla a Dopplerův jev	412
Santholzer Vilém: Umělé radionuklidy v ovzduší	268
Skyva Alois: Od teploty 0 °C k teplotě 0 °K	402, 457
Šindelář Václav: Vnitřní a vnější makromechanická energie	18
Zeman Jiří: Komplexní čísla ve fyzice na střední škole	444

Astronomie:

Lála Petr: Umělé družice a kosmické rakety	420
Vašek Lubomír: Odvození 1. a 3. Keplerova zákona z gravitačního zákona	173, 228

R ů z n ě :

Budinská Věra: Z dějin SPN	430
Dibelka Josef: Proč jaderné elektrárny	430
Drábek Karel: Vzpomínka na prof. Kadeřávka	286
Kotyk Josef: Dík šťastné náhodě	382
Kotyk Josef: Prokop Diviš	139
Lepilová Květuše: Slovníček fyzikálních výrazů	obálka č. 8—10
Machalický Jiří: Jan Marek	47
Menšík Miroslav: Kursy výpočetní techniky ČVTS	48
Santholzer Vilém: Prof. Joliot-Curie	236
Sedláček Jiří: Devadesát ročníků	285
Zelenka Miloslav: Slovníček matematických výrazů	obálka č. 1—8

Matematické zábavy:

Bartoš Pavel: Kolko rokov?	74
Hofmanová Helena: Úloha s číslicemi	7, 352
Horák Stanislav: Kdo vysvětlí tuto záhadu?	267
Horák Stanislav: Jak to nést?	282
Horák Stanislav: Nejmladším čtenářům	30, 75, 192, 377
Kodým Adolf: Poznámka o mocninách čísla 5	29
Říman Evžen: Matematický problém	426, 462
Řešení hádanek	467
Setzer Ota: Nejmladším čtenářům	336, 260, 380
Setzer Ota: Problém dvou svíček	44, 191
Setzer Ota: U knihkupce	12
Vencálek František: Nejmladším čtenářům	119
Zítek František: Kombinatorická úloha	429
Záková Helena: Identita	378

Fyzikálně zaujímavosti:

Kašpar Emil: O elektrickém proudu, který nepracuje	186
Kašpar Emil: Potřel jsem zákon zachování energie	45, 77
Lepil Oldřich: Znáte Archimedův zákon?	143

Matematická olympiáda:

Macháček Vlastimil: VII. mezinárodní matematická olympiáda	80, 121
XV. ročník Matematické olympiády — přípravné úlohy	32
XVI. ročník Matematické olympiády	472

Fyzikální olympiáda:

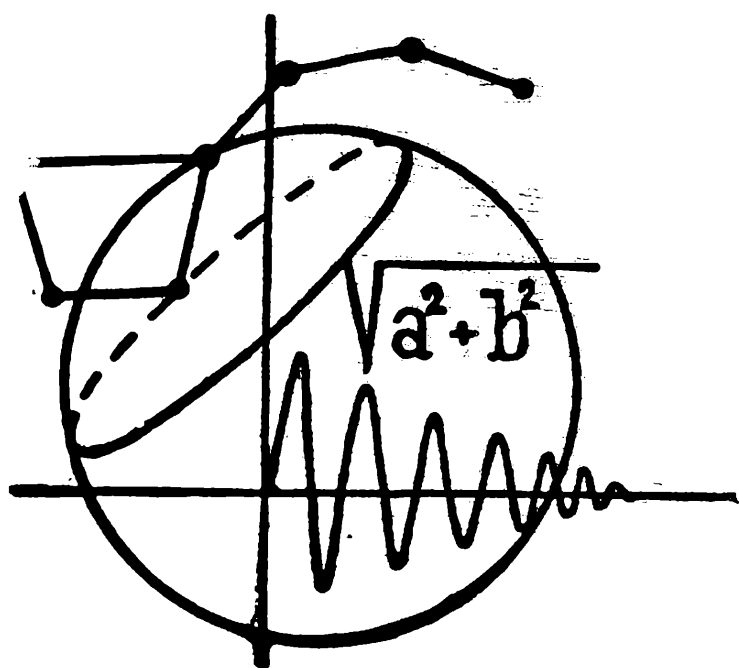
Rádl Milan: Použití transfigurace odporového trojúhelníka na hvězdu při řešení elektrických obvodů	38
Sedmý ročník soutěže FO	33
Tesař Jan: Otáčivý pohyb	84
Volf Ivo; Chytilová Marta: Pohyb družice v gravitačním poli	131

Recenze:

Drábek Karel: V. Bruthaus, A. Kejzlar — Matematika	335
Dubský Jaromír: Třináctý ročník Matematické olympiády	431
Komínek Karel: V. Štěpánský — Nomogramy	475
Kučerová Jitka: Znáte školu mladých matematiků?	474
Sedláček Jiří: K. Havlíček — Prostory o čtyřech a více rozměrech	283
Sedláček Jiří: P. Sgal — Cesta moderní jazykovědy	381
Sedláček Jiří: V. B. Lidskij — Úlohy z elementární matematiky	95
Streiblová Jitka: J. Sedláček — Co víme o přirozených číslech	284
Valešová Marie: Kolektiv — Matematika I.	475
Úlohy k řešení, řešení úloh	31, 93, 120, 179, 230 277, 332, 423
Redakční sdělení	96, 144

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



1

ROČ. 44
1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Září 1965

Číslo 1

Vedoucí redaktor doc. dr. Miroslav Menšík, ČVUT - Praha

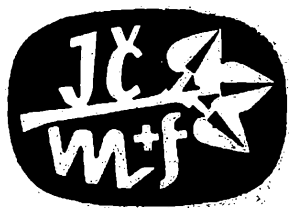
Výkonný redaktor doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

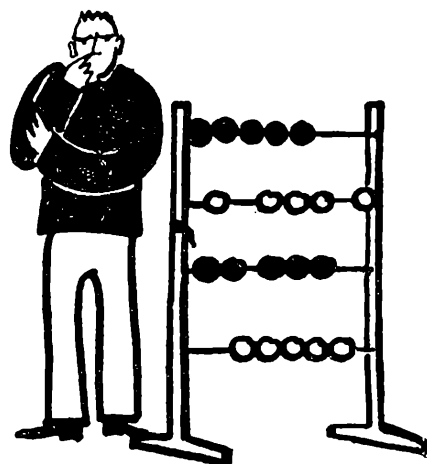
doc. J. Chudý: Determinanty	1
doc. K. Drábek: Konstrukce trojúhelníka daného stranou, příslušnou výškou a poloměrem vepsané kružnice	4
dr. inž. F. Danielowski, Výmar NDR: Sectio aurea — Zlatý řez	8
doc. B. Kepr: O některých křivkách [Pokračování]	13
inž. dr. V. Šindelář: Vnitřní a vnější makromechanická energie	18
inž. Z. Kos: Vodní stavy a průtoky — jejich určování a zpracování	20
I. Kraus, Z. Maršák: Krystalická struktura kovů	27
Nejmladším čtenářům	30
Úlohy k řešení	31
XV. ročník matematické olympiády	33
Sedmý ročník Fyzikální olympiády	38
M. Rádl: Použití transfigurace odporového trojúhelníka na hvězdu při řešení elektrických obvodů	38
E. K.: Potřel jsem zákon zachování energie	45
inž. J. Machalický: Jan Marek (1595—1667)	47



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mir, novín. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Kořář, studující FS.

A-16*51512

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1965.



MATEMATIKA

Determinanty

DOC. JAROSLAV CHUDÝ, ČVUT, Praha

Ve škole jste se již učili řešit soustavu dvou, tří a více lineárních rovnic o shodném počtu neznámých. Všichni jistě znáte metodu dosazovací (substituční), vylučovací (eliminační, sčítací), srovnávací (komparační) a někteří možná znáte metodu Bezoutovu využívající svazku přímek. V tomto článku vás chci seznámit s další metodou, která užívá jistých schémat, tzv. *determinantů*. Tyto determinanty jsou užitečné nejen proto, že umožňují řešit obecně soustavu n lineárních rovnic o n neznámých, že toto řešení do jisté míry mechanizují, ale i pro četná použití v různých partiích matematiky.

V článku nebudu vykládat obecnou teorii determinantů, ale zůstanu jen u nejjednodušších determinantů 2. a 3. stupně, ukážeme si jejich použití pro řešení soustavy dvou a tří lineárních rovnic o dvou a třech neznámých i některou aplikaci v analytické geometrii. Použiji při tom způsobu, který lze zobecnit i pro determinanty libovolného stupně. Proto také všechny vlastnosti (až na jedinou), které si odvodíme, platí i obecně.

Článek doporučuji zejména všem z vás, kteří chtějí studovat na některé z technických fakult; tam se tato partie, ovšem obecnějším způsobem, vykládá v prvních přednáškách.

1. *Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých*
Determinanty 2. stupně

Mějme danu soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= c_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Neznámé označujeme týmž písmem x a rozlišujeme je indexy. Toto označování je běžné při obecné teorii soustavy lineárních rovnic. Jedna z výhod je i v tom, že není třeba při větším počtu neznámých vymýšlet písmena pro označení jednotlivých neznámých. Samozřejmě při dvou nebo třech neznámých užijeme také tradičního označení x, y, z .

Rovněž koeficienty při neznámých označujeme týmž písmenem a , rozlišujeme je pak dvojími indexy. První index udává pořadí rovnice v soustavě, druhý index souhlasí s indexem příslušné neznámé. Obecně koeficient označíme a_{ik} , kde $i = 1, 2$; $k = 1, 2$. Např. a_{21} čteme a dva jedna.

Pravé strany rovnic označujeme písmenem c_i , kde index i označuje pořadí rovnice v soustavě.

Napište si v této symbolice soustavu 4 nebo 5 lineárních rovnic o příslušném počtu neznámých. Jaké je umístění členskoefficientem na př. a_{23} ?

Řešme soustavu (1) metodou sčítací. Násobme nejdříve první rovnici číslem a_{22} , druhou číslem $(-a_{12})$ a sečtěme. Dostaneme (provedte si)

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = c_1a_{22} - a_{12}c_2. \quad (2)$$

Násobme nyní první rovnici (1) číslem $(-a_{21})$, druhou číslem a_{11} a sečtěme (zase si provedte)

$$x_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{11}c_2 - c_1a_{21}. \quad (3)$$

Bude-li nyní výraz

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0. \quad (4)$$

lze ze (2) a (3) vypočíst neznámé x_1, x_2 , jež jsou v tomto případě jednoznačně určeny

$$x_1 = \frac{c_1a_{22} - a_{12}c_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \quad x_2 = \frac{a_{11}c_2 - c_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (5)$$

Pozorujeme-li čitatele i jmenovatele (všimněte si, že jmenovatelé jsou stejné), vidíme, že jsou složeny podobným způsobem; jsou totiž utvořeny jako rozdíly součinů vždy dvou činitelů. Ukazuje se výhodné zavést pro takto složené výrazy zvláštní symbol. Označme výraz

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (6)$$

symbolem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (7)$$

a nazveme jej *determinantem druhého stupně*. Je složen ze dvou řádků a dvou sloupců (všimněte si indexů), číslo a_{ik} nazýváme jeho *prvkem*, index i nazýváme *řádkový*, index k *sloupcový*. Takovým determinantem rozumíme pak číslo, které dostaneme podle předpisu (6) tak, že od součinu prvků v *hlavní úhlopříčce* (zleva doprava dolů $\searrow$) odečteme součin prvků *ve vedlejší úhlopříčce* (zprava doleva dolů $\swarrow$). Tak např.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 18; \quad \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-4) - 5 \cdot (-3) = 23.$$

Vraťme se k řešení (5) soustavy (1). Jmenovatele v obou zlomcích lze nyní napsat determinantem (7), který je složen z koeficientů při neznámých v soustavě (1). Nazveme jej proto *determinantem soustavy* (1) a označíme D .

Čitatele při neznámé x_1 lze také zapsat determinantem

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

který označme D_{x_1}

a čitatele při neznámé x_2 determinantem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix},$$

který označme D_{x_2} .

Všimněme si, jak jsou utvořeny tyto determinanty. Stačí nahradit v determinantu soustavy první sloupec, příp. druhý sloupec, pravými stranami rovnic (1).

Odvodili jsme tak pravidlo pro řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých (které platí i obecně pro n rovnic o n neznámých):

Pravidlo Kramerovo: Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých má právě jedno řešení (jedinou dvojici x_1, x_2) tehdy, je-li determinant soustavy různý od nuly. Každá neznámá je rovna zlomku, jehož jmenovatel je determinant D soustavy a čítecitel je determinant vzniklý z determinantu soustavy nahražením koeficientů počítané neznámé pravými stranami rovnic.

Tímto pravidlem nelze řešit soustavu, kdy determinant soustavy je rovný nule. Tento případ nastane tehdy, nemá-li soustava buď žádné řešení (sporné rovnice), nebo má-li soustava nekonečně mnoho řešení (závislé rovnice).

Příklady

$$1. \left. \begin{array}{l} 5x_1 - 6x_2 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 = 7 \end{array} \right\} D = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 9; \quad D_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 33$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 22; x_1 = \frac{D_{x_1}}{D} = \frac{11}{3}; x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} = \frac{23}{9}$$

$$2. \quad \begin{cases} 3x - 11y = -2 \\ -5x - 7y = 0 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -76; \quad D_x = \begin{vmatrix} -2 & -11 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -10; x = -\frac{7}{38}; y = \frac{5}{38}.$$

$$3. \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = -10 \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{soustava nemá jediné řešení. Jaké jsou tyto rovnice?}$$

V závěru tohoto odstavce upozorňuji na jednu vlastnost determinantu (ověřte si ji přímým výpočtem):

Věta 1. Determinant, jehož jedna řádka je násobkem řádku druhého (totéž pro sloupce), je rovná nule.

V příštím čísle užijeme těchto výsledků k zavedení determinantů 3. stupně a ukážeme jejich použití pro řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých.

(Pokračování)

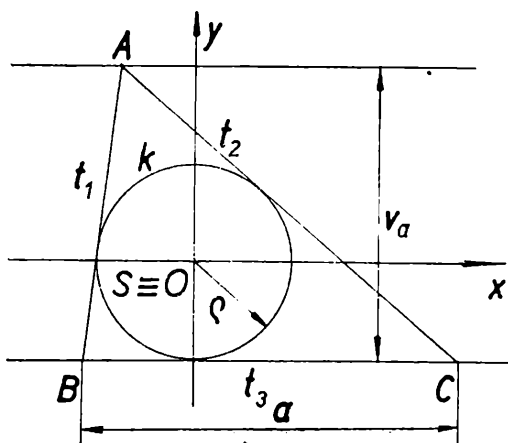
Konstrukce trojúhelníka

daného stranou, příslušnou výškou a poloměrem vepsané kružnice

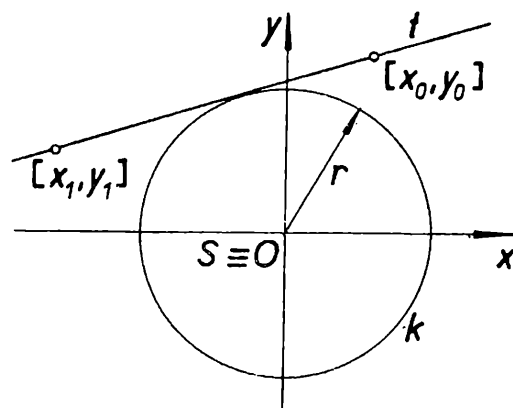
DOC. KAREL DRÁBEK, ČVUT, Praha

Geometrické konstrukce je možno provádět pomocí různých metod. Nejznámější je metoda geometrických míst, velmi častá je metoda, která používá analytické geometrie, ostatní metody¹⁾, např. převedení dané úlohy pomocí příbuzností (shodnosti, otáčení apod.) na jednodušší, nejsou tak běžné. Je zřejmé, že některé úlohy lze řešit stejně snadno několika různými metodami, někdy je však výhodnější řešení pomocí jedné

¹⁾ Viz např. knihu: Ján Š t a l m a š e k, Geometrické konstrukce, SVTL, Bratislava 1959. Článek je též odpovědí na dotazy několika čtenářů.



Obr. 1



Obr. 2

metody než pomocí některé jiné metody. Kladem metody používající analytické geometrie, při které převedeme řešení geometrické úlohy na řešení rovnic je, že zjistíme nejen počet řešení a podmínky řešitelnosti, ale také, zda daná úloha je řešitelná euklidovsky, tj. kružítkem a pravítkem.

V úloze: sestrojiti trojúhelník, který je dán stranou a , výškou v_a a poloměrem ρ vepsané kružnice k (obr. 1), použijeme k řešení analytické geometrie, i když je možno postupovat pomocí metody, která používá geometrických míst a konstrukcí, jak ukážeme dále.

Z obr. 1 je patrné, že pro řešení úlohy je třeba určit vrchol A hledaného trojúhelníka tak, aby z něho sestrojené tečny t_1, t_2 ke kružnici $k(S; \rho)$ byly prořaty třetí tečnou kružnice k , na které má být strana a v bodech B, C tak, aby $a = BC$. Přitom vrchol A musí být ve vzdálenosti v_a od této třetí tečny.

Ukažme si nejdříve, jak stanovíme rovnice tečen t_1, t_2 daným bodem $[x_0; y_0]$ ke kružnici $k(S; r)$ o rovnici

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad (1)$$

K tomuto účelu zvolme na tečně t procházející bodem $[x_0; y_0]$ ke kružnici (1) libovolně další bod $[x_1; y_1]$ (obr. 2). Potom parametrické rovnice této přímky jsou²⁾

$$x = \frac{x_0 - kx_1}{1 - k}, \quad y = \frac{y_0 - ky_1}{1 - k}, \quad k \neq 1. \quad (2)$$

Bod dotyku přímky (2) s kružnicí (1) je určitý bod $[x; y]$, jehož souřadnice vyhovují rovnici kružnice (1). Po dosazení z rovnic (2) do rovnice (1) a po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro parametr k

$$k^2(x_1^2 + y_1^2 - r^2) - 2k(x_0x_1 + y_0y_1 - r^2) + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0. \quad (3)$$

²⁾ Co jsou parametrické rovnice přímky viz poznámku ³⁾ v článku K. Drábka: Pól a polára kružnice, Rozhledy (42), 1963 - 64, str. 304.

Protože přímka (2) má být podle předpokladu tečnou kružnice (1), musí mít kvadratická rovnice (3) pro parametr k hledaného bodu dotyku dvojnásobný kořen, a proto je diskriminant rovnice (3) roven nule, tj.

$$(x_0^2 + y_0^2 - r^2)(x_1^2 + y_1^2 - r^2) - (x_0x_1 + y_0y_1 - r^2)^2 = 0 \quad (4)$$

Bod $[x_1; y_1]$ na tečně (2) ke kružnici (1) byl však zvolen zcela libovolně, proto vztah (4) platí pro každý bod tečny, takže rovnicí

$$(x^2 + y^2 - r^2)(x_0^2 + y_0^2 - r^2) - (xx_0 + yy_0 - r^2)^2 = 0 \quad (5)$$

je dána dvojice tečen sestrojených z daného bodu $[x_0; y_0]$ ke kružnici (1).

Tohoto výsledku použijeme pro řešení naší úlohy. Souřadnicový systém volme tak, aby strana a ležela na rovnoběžce s osou x ve vzdálenosti ϱ (tj. na přímce $y = -\varrho$) a aby kružnice k (nyní o poloměru ϱ) vepsaná trojúhelníku měla střed v počátku O .

Podle provedeného rozboru je vrchol A na rovnoběžce s osou x ve vzdálenosti $v_a - \varrho$. Pro tečny z tohoto bodu $A [x_0; v_a - \varrho]$ ke kružnici k dostaneme

$$(x^2 + y^2 - \varrho^2)[x_0^2 + (v_a - \varrho)^2 - \varrho^2] - [xx_0 + y(v_a - \varrho) - \varrho^2]^2 = 0$$

Pro průsečíky B, C těchto tečen s přímkou $y = -\varrho$ dostaneme (po úpravě a za samozřejmého předpokladu $v_a > 0$) kvadratickou rovnici

$$x^2(v_a - 2\varrho) + 2\varrho xx_0 - \varrho^2 v_a = 0, \quad (6)$$

která má řešení (za předpokladu $v_a > 2\varrho$)

$$x_{1,2} = \frac{-\varrho [x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + (v_a - 2\varrho)v_a}]}{v_a - 2\varrho}. \quad (7)$$

Podle našeho požadavku je

$$a = BC = x_1 - x_2 = \frac{2\varrho \sqrt{x_0^2 + (v_a - 2\varrho)v_a}}{v_a - 2\varrho}.$$

Odtud určíme dosud neznámou souřadnici x_0 bodu A , takže máme

$$x_0^2 = \left[\frac{a(v_a - 2\varrho)}{2\varrho} \right]^2 - (v_a - 2\varrho)v_a. \quad (8)$$

Tato rovnice pro souřadnice x_0 hledaných vrcholů A trojúhelníků splňujících dané podmínky dává také podmínky řešitelnosti úlohy.

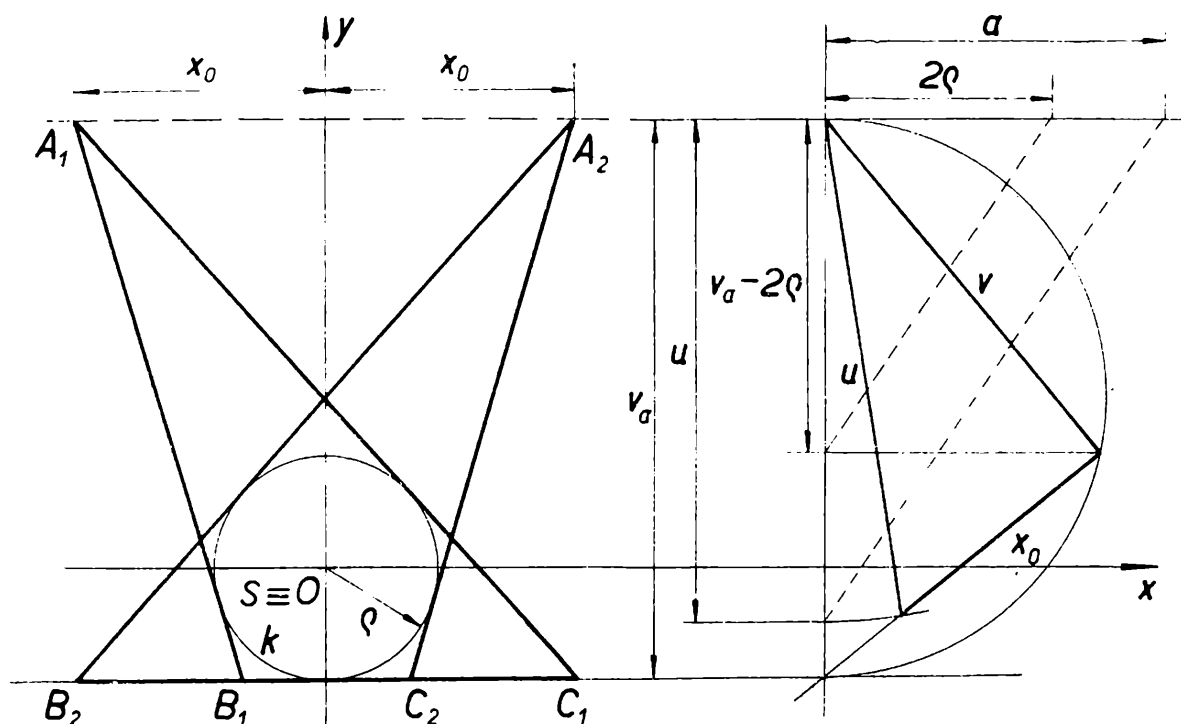
Poněvadž (pro reálné řešení) musí být $x_0^2 \geq 0$, dostaneme z (8) další podmínku řešitelnosti (jednou je $v_a > 2\varrho$) ve tvaru

$$v_a \geq \frac{2a^2\varrho}{a^2 - 4\varrho^2} > 0 \quad (9)$$

a zároveň

$$a^2 > 4\varrho^2, \text{ tj. } a > 2\varrho. \quad (10)$$

Jestliže tedy v podmínce řešitelnosti (9) platí znaménko rovnosti, je $x_0 = 0$ a úloha má pouze jedno řešení (a hledaný trojúhelník je rovno-



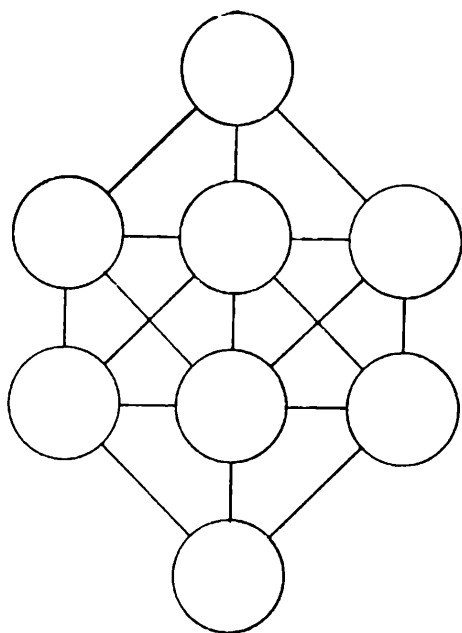
Obr. 3

ramenný); je-li $x_0^2 > 0$, jsou vždy dvě (různá) řešení (souměrná podle osy jdoucí středem vepsané kružnice kolmo ke straně $a \equiv BC$) a v případě, že $x_0^2 < 0$, kdy tedy neplatí podmínka řešitelnosti (9), není řešení žádné.

Rovnice (8) ukazuje, že pro grafické určení velikosti souřadnice $x_0 > 0$ (druhé řešení dostaneme ihned pro opačnou hodnotu) je třeba určit úsečku $u = a(v_a - 2\rho) : 2\rho$, dále stanovit stranu v čtverce, jehož obsah je rovný obsahu obdélníka o stranách $v_a - 2\rho$ a v_a a konečně sestavit druhou odvěsnu (která je hledanou délkou x_0) v pravoúhlém trojúhelníku, v němž je známa přepona délky u a odvěsna délky v (viz konstrukci v obr. 3, kde $\rho = 1$, $v_a = 5$, $a = 3$).

(Pokračování)

ÚLOHA S ČÍSLICEMI



Na obrázku 1 budeme sousedními kruhy rozumět ty, které jsou spojeny úsečkou. Vaším úkolem je rozhodnout, zda se dají do osmi kruhů umístit číslce od 1 do 8, aby žádné dvě po sobě jdoucí číslce nebyly v sousedních kruzích. Umístíte-li tedy do horního levého kruhu číslci 7, nesmíte umístit 6 a 8 do levého a dvou prostředních kruhů v druhé řadě, ani do zbývajících kruhů v první řadě. (Podle M. Gardenera.)

H. Hofmanová



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

„Sectio aurea“ - Zlatý řez

DR. ING. FRANZ DANIELOWSKI, Vysoká školy architektury a stavební,
Výmar, NDR.

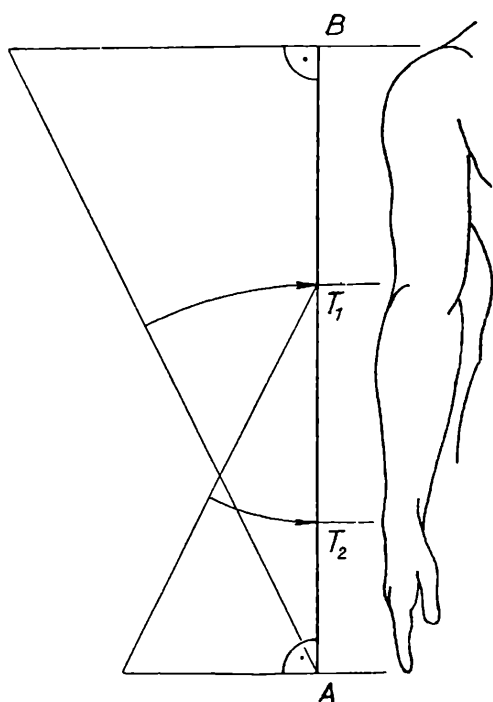
(Psáno pro Rozhledy)

Pro vystižení estetického dojmu určitých geometrických útvarů, pro přirovnání rozměrů lidského těla, těl zvířat a rostlin, byly prováděny pokusy vysvětlit tyto tvary pomocí zlatého řezu, a tím odvodit určitá pravidla úměrnosti.

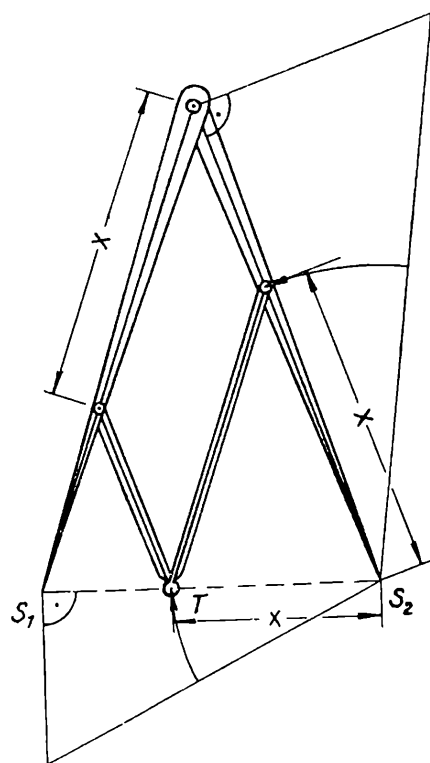
Pozorujeme-li např. lidskou paži jako celek od tzv. akromionu až ke špičce středního prstu, tj. úsečku AB , pak bod T_1 — nejužší místo nadloktí, odkud vedou svaly k předloktí, dělí úsečku AB v poměru zlatého řezu (obr. 1).

Dělíme-li předloktí s rukou, tj. úsečku AT_1 , dostaneme podle zlatého řezu dělicí bod T_2 v zápěstí. V určitých dobách se projevovaly snahy zkoumat všechny možné rozměry z hlediska jejich dělicích poměrů, z čehož vyplynulo tzv. *zlaté kružidlo*, které v podstatě odpovídá starořímskému redukčnímu kružidlu, jak je znázorněno na schematickém nákresu (obr. 2). Při tom se x označuje větší část úseku, který se dělí v poměru zlatého řezu.

Již v roce 1509 vyšel traktát od Luca Pacioliho (~ 1445 až 1509) s názvem *De divina proportione*. Veliký astronom



Obr. 1



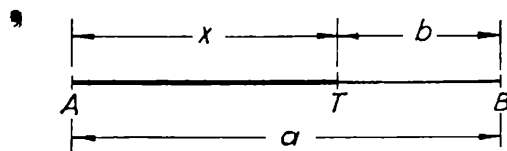
Obr. 2

J a n K e p l e r (1571-1630), který v letech 1600-1612 působil v Praze u dvora císaře Rudolfa II., zabýval se ve svých spisech božskou proporcí.

Snahy po dosažení uspokojivého estetického účinku použitím zlatého řezu se projevovaly především u staveb. Tyto snahy sahají od Egyptanů, Řeků, Římanů a celý středověk až po naše časy.

Co rozumíme nyní pod pojmem *zlatý řez*?

Úsečka AB je rozdělena bodem T zlatým řezem, má-li se celá úsečka $AB = a$ k většímu dílu $AT = x$ jako větší díl k menšímu dílu $TB = b = a - x$ (obr. 3).



Obr. 3

Tuto definici lze vyjádřit úměrou

$$a : x = x : (a - x)$$

z toho plyne

$$x^2 = a(a - x) \quad (1)$$

Dosadíme-li za $a = 1$, dostaneme

$$x^2 + x = 1 \quad (2)$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

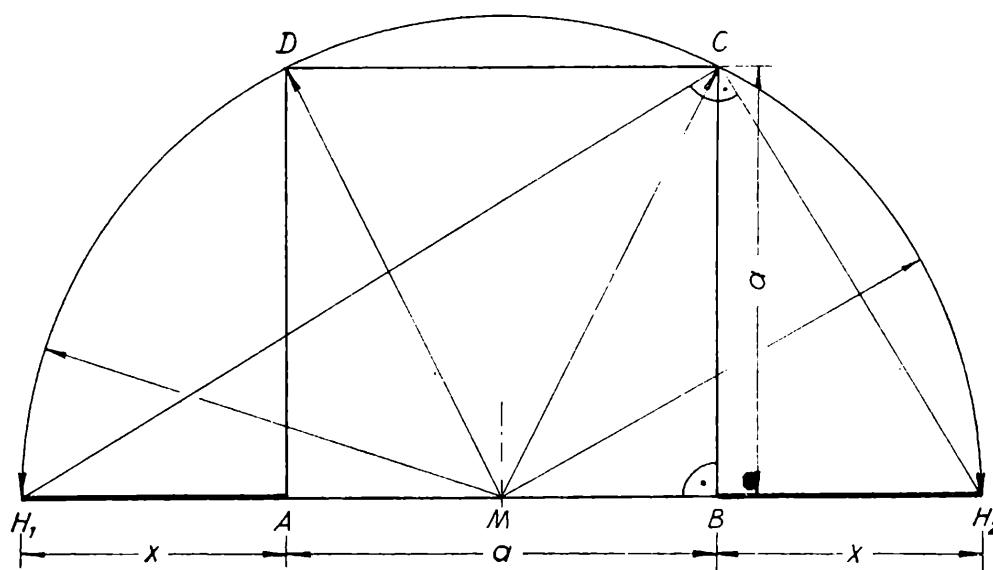
$$x_1 = 0,618\,033\,98\dots$$

Kořen x_1 rovnice (2) má zajímavou vlastnost. Jeho reciprokou hodnotou $\frac{1}{x_1}$ je číslo $\frac{1}{0,618\,03\dots} = 1,618\,03\dots = 1 + x_1$, což odpovídá rovnici (2)

Rovnici (1) můžeme dát též tento tvar

$$a^2 = x(x + a) \quad (1')$$

Z tohoto vztahu lze odvodit geometrickou konstrukci zlatého řezu určité dané úsečky a . Čtverec, jehož délka stran se rovná úsečce a , má být rovnoplochy s obdélníkem, jehož jedna strana x se rovná větší části úsečky a , rozdělené zlatým řezem; druhá strana se rovná úsečce a zvětšené o její větší část x , totiž $x + a$ (obr. 4). Pro konstruktivní pro-



Obr. 4

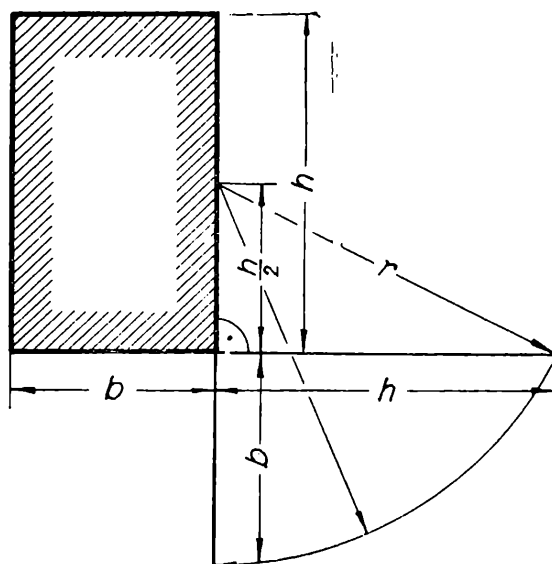
vedení to znamená, že strana čtverce BC se stane výškou v pravoúhlém trojúhelníku H_1CH_2 , ve kterém úseky na přeponě jsou $H_1B = a + x$ a $BH_2 = x$. Tento trojúhelník má pravý úhel u bodu C , ležícího na kružnici o průměru H_1H_2 (Thaletova věta). Střed této kružnice je v bodě M , středu úsečky AB . Proto lze střed M kružnice ihned nalézt (úsečka $AB = a$ je dána); poloměr kružnice MC zjistíme, vztyčíme-li v B kolmici k AB a na ni nanese úsečku $BC = a$. Pak na přímkce AB vytíná kru-

hový oblouk H_1A a BH_2 , které odpovídají větší části úsečky AB , rozdělené zlatým řezem.

Úloha může být též dána v této formulaci:

Otvor nějaké stavby, např. okno, dveře, výklenek apod., má se při dané výšce provést tak, aby obdélník otvoru měl délky stran v poměru zlatého řezu.

Budiž dána výška h , hledejme šířku b , (obr. 5). Konstrukci samotnou



Obr. 5

nemusíme vysvětlovat, neboť se podobá konstrukci právě popsané. Důkaz správnosti

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \quad (\text{Pythagorova věta})$$

$$b = r - \frac{h}{2}$$

$$r^2 = \frac{5}{4} h^2$$

$$r = \frac{h}{2} \sqrt{5}$$

je-li $h = 1$

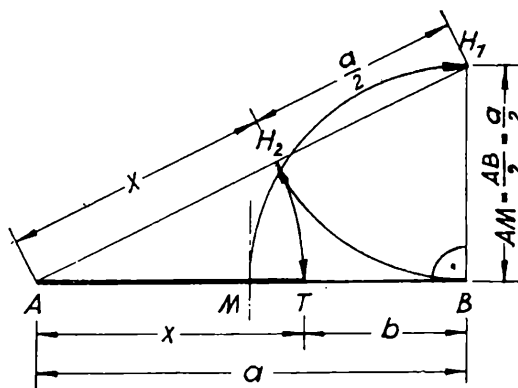
$$b = \frac{1}{2} \sqrt{5} - \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

$$b = 0,618\,033\,98$$

což je ve shodě s výsledkem rovnice (2).

Běžná je ještě jiná geometrická konstrukce (obr. 6). Na dané úsečce AB se v bodě B vztyčí kolmice a na ni se z bodu B nanáší poloviční délka dané úsečky $AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2} = BH_1$. Na úsečce AH_1 určíme bod H_2 tak, aby $H_1H_2 = \frac{a}{2}$. Kruhový oblouk $AH_2 = AT$ určuje již na dané úsečce AB bod T , který ji dělí v poměru zlatého řezu.



Obr. 6

Při důkazu uvažujeme pravoúhlý trojúhelník ABH_1 s pravým úhlem při B . Z Pythagorovy věty plyne

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Z této rovnice postupně dostaneme

$$x^2 + ax = a^2$$

$$x^2 = a(a - x)$$

Výsledek odpovídá definici i rovnici (1).

Přeložil a upravil O. S.
(Pokračování)

U KNIHKUPCE

Za měsíc bylo nakoupeno 109 knih za 2845 Kčs. Byly kupovány tři druhy: po 34 Kčs, po 17,50 Kčs a po 27,50 Kčs. Kolik bylo kterých, víme-li, že se jejich počty od sebe lišily jen nepatrně?

O.S.

0 některých křivkách

DOC. BOŘIVOJ KEPR, ČVUT, Praha

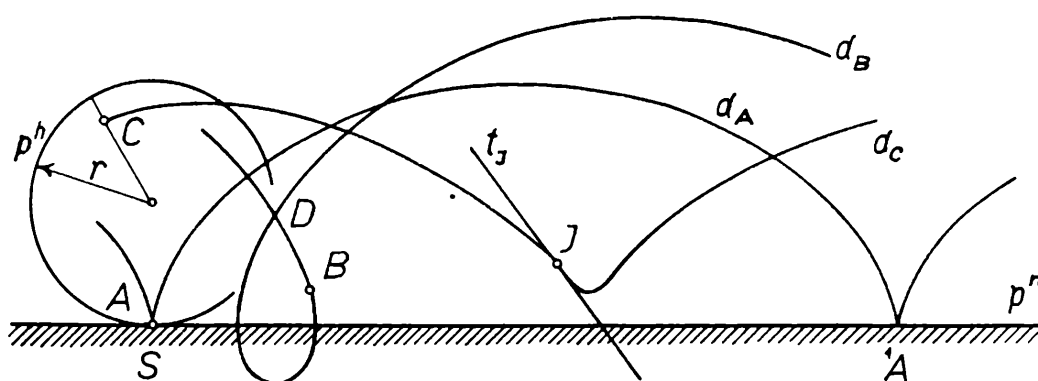
(Pokračování)

4. Příklady křivek

Vezmeme-li za polhodie speciální křivky, získáme i příslušné speciální pohyby a také příslušné speciální křivky jako dráhy nebo obálky, vznikající při takových zvolených pohybech a na základě dříve odvozených obecných pouček. Pak můžeme studovat charakteristické vlastnosti těchto křivek.

Zvolíme-li za jednu z polhoid např. přímku a za druhou kružnici, nebo zvolíme-li za obě polhodie kružnice, získáme pohyby, kterým říkáme *cykloidální*; příslušné dráhy bodů nazýváme *cykloidami*.

1. Kutálí-li se kružnice (polhodie hybná) p^h po pevné přímce (polhoidii nehybné) p^n (obr. 20), opisuje bod A na této kružnici křivku d_A ,

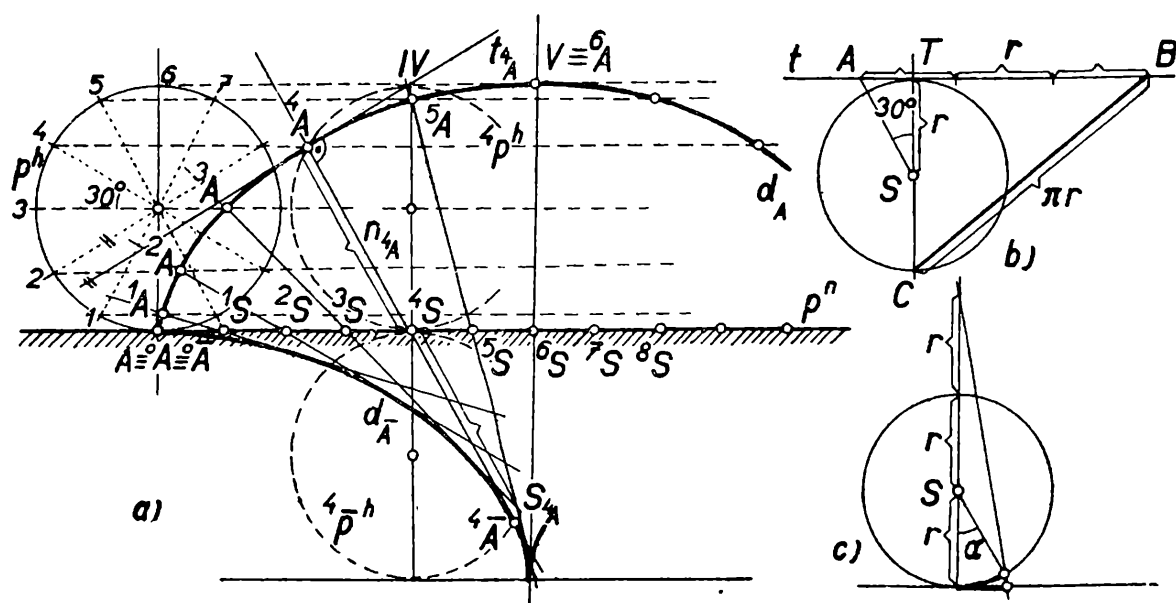


Obr. 20

jíž nazýváme *cykloidou prostou*, bod B pevně spojený s kružnicí p^h a ležící vně této kružnice, probíhá křivku d_B , jíž říkáme *cykloida prodloužená* a konečně bod C , pevně spojený s valící se kružnicí p^h ale ležící uvnitř této kružnice, vytváří dráhu d_C , nazývanou *cykloidou zkrácenou*. Z obr. 20 je ihned patrné, že tyto křivky nikde „nekončí“, neboť kutálející se (vytvorující, tvořící) kružnice p^h se může po dané pevné přímce (základní) p^n valit neomezeně. Každá z těchto křivek se skládá z neomezeně mnoha navzájem stejných částí, tzv. *větvi*. Každá taková větev odpovídá právě jednomu odvalení kružnice p^h po přímce p^n . Na obr. 20 je vyznačena celá jedna větev prosté cykloidy d_A mezi body A a A' , v nichž se kružnice p^h dotkla svým bodem A , přímky p^n právě po jed-

nom odvalení. Prostá cykloida d_A má v těchto svých bodech $A, {}^1A, \dots$ na základní přímce p^n singulární body, tzv. *body vratu* neboli *hroty*. Cykloida prodloužená d_B má singulární body, tzv. *dvojnásobné body*, neboli *uzly*, (na obr. 20 je to bod D), tj. body, kterými prochází tato křivka vždy dvakrát. K těmto singulárním bodům na d_B dochází při vzniku křivky opět postupně vždy po jednom odvalení kružnice p^h po přímce p^n . Cykloida zkrácená d_c nemá takové singulární body. Vyskytují se na ní pravidelně jen tzv. *body inflexní* (neboli *obratu*), v nichž prochází dráha d_c z jedné strany příslušné tečny na druhou. Na obr. 20 je to bod J .

Ukažme si nyní konstrukci prosté cykloidy, která je provedena na obr. 21a.



Obr. 21

Pro konstrukce cykloid je často nutno provést tzv. *rektifikaci kružnice* nebo *rektifikaci kruhového oblouku*, tj. sestavit úsečku, jejíž délka se rovná obvodu dané kružnice, nebo délce daného kruhového oblouku. Je známo již dávno, že vzhledem k transcendentnosti čísla $\pi = 3,141\,59\dots$ není možno provést rektifikaci kružnice nebo jejího oblouku pravítkem a kružítkem zcela přesně. Existuje však mnoho přibližných konstrukcí. Na obr. 21b je uvedena jedna z nich, nazvaná konstrukce *Kochaňského*. Obrázek je natolik přehledný, že není třeba k němu žádného podrobného komentáře a čtenář hned pozná úsečku BC , znázorňující přibližně polovinu rektifikované kružnice. Doporučuji čtenáři, aby si k procvičení spočítal sám skutečnou délku této úsečky BC (nejlépe pro $r = 1$) a zjistil, že k odchylkám od tabelové hodnoty π dochází až na pátém desetinném místě. Z hlediska potřeb praktického rýsování, můžeme tedy považovat Kochaňského konstrukci prakticky za přesnou.

Na obr. 21c je provedena přibližná konstrukce rektifikace kruhového oblouku dané kružnice, příslušného ke středovému úhlu α . Tato konstrukce je tím přesnější, čím je oblouk menší. Nedoporučuje se však ji používat pro

oblouky příslušné středovému úhlu α většímu než 30° . Je-li právě $\alpha = 30^\circ$, je chyba vzniklá rektifikací příslušného oblouku menší než tři desetitisíciny poloměru. Tato chyba, ještě jistě zcela zanedbatelná, však dost rychle vzrůstá pro středové úhly rostoucí nad 30° .

Nyní se však vraťme ke konstrukci prosté cykloidy. Abychom sestrojili jednotlivé body této křivky, rozdělme danou tvořící kružnici p^h (polhodii hybnou) dělicími body $1, 2, \dots$ od bodu dotyku A s přímkou p^n na oblouky stejné délky, (pro konstrukci prosté cykloidy není tento požadavek podstatný, ale konstruktivně výhodný), patřící např. středovým úhlům 30° , neboť takové rozdělení se dá provést téměř ihned. Od dotykového bodu A kružnice p^h se základní přímkou p^n (polhodii pevnou) nanese na tuto přímku úsečku délky $2\pi r$ (r je poloměr kružnice p^h) třeba na základě konstrukce z obr. 21b. Tuto úsečku rozdělme dělicími body $^1S, ^2S, ^3S, \dots$ na 12 stejných dílů, neboť i kružnici p^h jsme vlastně rozdělili na 12 stejně dlouhých oblouků. Dělicí body $^1S, ^2S, \dots$ určují tedy na p^n úsečky, rovnající se svojí délkou uvedeným obloukům na p^h ¹⁶⁾.

Dělicí body na p^h a dělicí body $^1S, ^2S, \dots$ na p^n byly sestrojeny tedy tak, že při kutálení kružnice p^h po přímce p^n přicházejí dělicí body na p^h postupně do dělicích bodů $^1S, ^2S, \dots$ na p^n . Abychom sestrojili jednotlivé body prosté cykloidy, není třeba sestrojovat jednotlivé polohy kutálející se kružnice p^h po p^n , ale stačí postupovat tímto způsobem (čtenář nechť si rozmyslí jednoduchou úvahou oprávněnost následující konstrukce): Dělicími body $1, 2, \dots$ kružnice p^h vedeme rovnoběžky s přímkou p^n a nanášíme na ně ve stejném směru úsečky $A^1S = 1^1A, A^2S = = 2^2A, A^3S = 3^3A, \dots$ Body $^1A, ^2A, \dots$ takto získané leží pak na prosté cykloidě d_A , tj. na dráze bodu $A \equiv {}^0A \in p^h$, kterou opisuje bod A kutálející se kružnice při výchozí poloze A_0 , v níž je právě dotykovým bodem tvořící kružnice p^h se základní přímkou p^n . Okolnost, že jsme zvolili bod $A \equiv A_0$ právě v bodě dotyku kružnice p^h s přímkou p^n není podstatná, pouze usnadňuje provedení konstrukce prosté cykloidy. Kdyby totiž bod $A \in p^h$ nebyl zvolen v bodě dotyku s přímkou p^n , mohli bychom kružnici p^h po přímce p^n odvalit tak, aby se tento bod stal právě tímto bodem dotyku a na tvaru prosté cykloidy by se tím nic nezměnilo.

Právě popsanou konstrukcí lze sestrojit body jedné větve prosté cykloidy. Tato větev se pak stále znovu a znovu reprodukuje, takže tímto způsobem je vlastně sestrojena prostá cykloida „celá“. Pro čtenáře

¹⁶⁾ Úsečky $A^1S, ^1S^2S, \dots$ mohli jsme tedy sestrojit i pomocí konstrukce, uvedené v obr. 21c. Při praktickém rýsování je však vhodnější ten postup, kterého jsme právě použili. Teoreticky bychom jistě dospěli k témuž výsledku. Při grafickém provádění se však stálým nanášením úsečky $A^1S = = ^1S^2S = \dots$ může znásobovat (tedy zvětšovat) eventuální chyba z nepřesnosti praktického rýsování, kterou nemůžeme nikdy absolutně vyloučit.

tohoto článku bude velmi užitečné, když si na základě právě předvedené konstrukce prosté cykloidy promyslí analogickou konstrukci cykloidy prodloužené a cykloidy zkrácené.

Body $^1S, ^2S, \dots$ na p^n jsou příslušnými okamžitými středy otáčení, jak bylo vyloženo v předcházejícím odstavci. Z toho plyne, že spojnice $^1A^1S, ^2A^2S, \dots$ jsou *normálami* cykloidy d_A a kolmice v bodech $^1A, ^2A$ cykloidy na příslušné normály jsou pak tečnami této křivky v jejích bodech. Na obr. 21a je vyznačena řada těchto normál. Tečna je na tomto obrázku sestrojena pouze v bodě 4A jako přímka $t_{4A} \perp n_{4A}$. Podle Thaletovy věty o pravém úhlu nad průměrem kružnice, mohli bychom sestrojovat tečny v bodech prosté cykloidy rovnou, bez použití normály. Na obr. 21a je tato konstrukce tečny uvedena v bodě 4A prosté cykloidy. Spojíme-li totiž bod 4A prosté cykloidy s bodem IV , který je na průměru příslušné polohy kutálející se kružnice bodem protilehlým k bodu 4S , získáme *přímo* tečnu t_{4A} v bodě 4A prosté cykloidy. Tímto způsobem lze u prosté cykloidy sestrojit tečnu v každém jejím bodě přímo, bez použití příslušné normály. Při sestrojování *cykloidy zkrácené* nebo *prodloužené* tato *přímá* konstrukce tečny neplatí. Bude velmi užitečné, když čtenář sám uváží, proč.

Stanovme si nyní ke každé poloze polhodie hybné (tj. kružnice p^h) kružnici $\bar{p}^h$ souměrně položenou vzhledem k polhodii nehybné (tj. vzhledem k základní přímce) p^n . V obrázku 21a je tak učiněno pro polohu $^4p^h$ kružnicí $^4\bar{p}^h$. Normála $n_{4A} = (^4A, ^4S)$ vytvořené prosté (obecné cykloidy) d_A protne kružnici $^4\bar{p}^h$ v bodě $^4\bar{A}$. Rozmyslí-li si čtenář dobře tuto skutečnost, přijde brzy na to, že bod $^4\bar{A}$, jakož i body $^i\bar{A}$, kde $i = 0, 1, 2, \dots$ sestrojené stejným způsobem, vytvoří rovněž prostou cykloidu $d_{\bar{A}}$. Ta je shodná s původní prostou cykloidou d_A , ale je „vysunuta“ o $2r$ pod danou cykloidou d_A (t. pod přímku p^n) a současně „posunuta“ ve směru přímky p^n o polovinu obvodu πr kružnice p^h . Doufám, že nyní čtenář přišel již na to, že *normály cykloidy* d_A jsou *tečnami cykloidy* $D_{\bar{A}}$. Je tedy prostá cykloida $d_{\bar{A}}$ *evoloutou* dané prosté cykloidy d_A , tj. prostá cykloida $d_{\bar{A}}$ je tzv. geometrickým místem středů křivosti pro danou prostou cykloidu d_A . Tento fakt byl obecně ukázán a odvozen v textu k obr. 4 a 9 a nyní byl konkrétně předveden pro zcela určitou křivku, cykloidu prostou. Z toho plyne velmi snadno věta:

Poloměr kružnice křivosti (oskulační) prosté cykloidy v jejím daném bodě je rovný dvojnásobné délce příslušné normály.

Na obr. 21a byl podle toho vyhledán střed křivosti S_{4A} pro bod 4A prosté cykloidy d_A , a tím i příslušný poloměr křivosti tak, že bylo učiněno $^4A^4S = ^4SS_{4A}$. Je tedy $^4\bar{A} \equiv S_{4A}$ a příslušný poloměr křivosti (poloměr příslušné oskulační kružnice) $^4r = ^4AS_{4A} = ^4A^4S + ^4SS_{4A} =$

. ($^4A^4S$) na příslušné normále n_{4A} . Stejnou konstrukci bychom mohli uplatnit ve všech regulárních bodech prosté cykloidy. Pro cykloidu prodlouženou nebo zkrácenou, uvedené konstrukce, týkající se oskulační kružnice, ovšem neplatí. Pro tyto křivky je celá tato záležitost komplikovanější a nebudeme se jí proto zabývat.

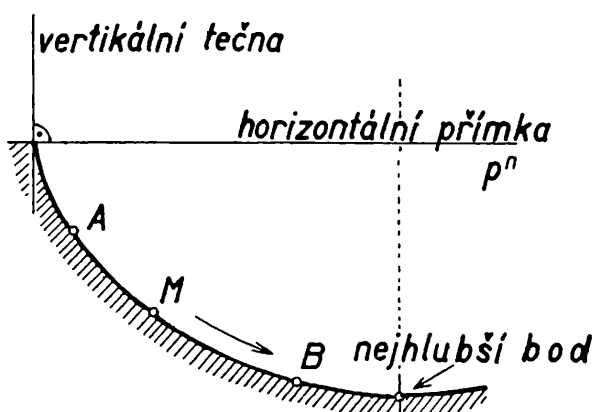
Prostá cykloida má mnoho dalších, vskutku překrásných vlastností, zejména i ve vztahu k problémům fyzikálním. Není však bohužel možno o všem zde hovořit, neboť jinak by časopis *R o z h l e d y* musel této problematice věnovat na pokračování několik let. Přece však nemůže autor bez zmínky vynechat ještě následující dvě vlastnosti prosté (obecné) cykloidy. Jsou to vlastnosti, které pokládá osobně za nejkrásnější, neboť se touto problematikou zabývali, kromě jiných, badatelé nejslavnějších jmen klasické fyziky a základů tzv. vyšší matematiky, a to *H u y g e n s* (autor slavné vlnové teorie světla), *J o h a n a J a k o b B e r n o u l l i o v é* (objevitelé zákonů pro proudící kapaliny), *L é i b n i t z* a *N e w t o n* (oba zakladatelé tzv. infinitesimálního počtu, tj. počtu diferenciálního a integrálního, při čemž Newton je dále autorem principů mechanické fyziky). Huygens např. dokázal (příslušný důkaz tu ovšem nelze provádět vzhledem k znalostem čtenáře) toto:

Křivka, která má tu vlastnost, že její hmotný bod M , klesající po ní vlastní tíží dosáhne vždy v témž čase jejího „nejhlubšího“ bodu bez ohledu na to, z které výchozí polohy na křivce vyšel, je prostou (obecnou) cykloidou.

Obecná cykloida, o níž hovoří předchozí věta, je vyznačena na obr. 22. Vzhledem k problému, který je touto křivkou řešen, je prostá cykloida na obr. 22 vyznačena v té poloze, která odpovídá řešení úlohy, tj. v poloze tzv. zrcadlového obrazu k prosté cykloidě d_A z obr. 21a vzhledem k základní přímce p^n , v tzv. „horizontální“ (tj. „vodorovné“) poloze. Johan Bernoulli vyslovil v roce 1663 následující problém (obr. 22):

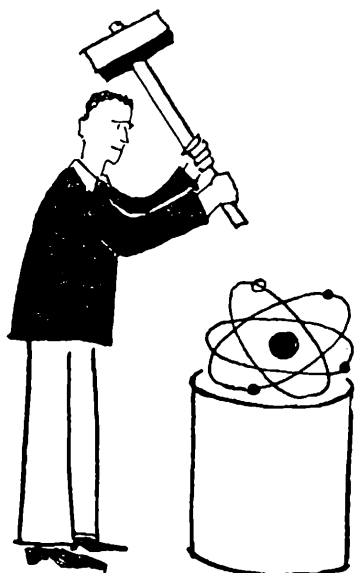
Nechť jsou dány ve svislé rovině dva různé body A a B (nikoliv na svislé přímce).

Určete dráhu $\widehat{AMB}$ pohyblivého hmotného bodu M , který po ní vlastní vahou klesá z výchozí polohy A do konečné polohy B v nejkratším čase.



Křivka, kterou je tento problém řešen, je opět prostá cykloida a nikoliv kruhový oblouk, jak myslil původně Galillei. Důkaz, který tu opět vzhledem k předchozím znalostem nemůžeme podat, provedli nezávisle na sobě Leibnitz, Jakob Bernoulli, Newton a další.

(Pokračování)



F Y Z I K A

Vnitřní a vnější makromechanická energie

Inž. dr. Václav Šindelář. ÚNM, Praha

Sledujeme-li nějaký mechanický systém (např. systém dvou nebo více těles) a vyšetřujeme jeho pohybový stav, můžeme jeho jednotlivým členům přiřadit určitou mechanickou energii. Omezím se zde na takové systémy, které jsou ideální, to znamená, že se u jednotlivých členů systémů nemění jejich mechanická energie v teplo (tedy v energii mikro-mechanickou), ať již vzájemným nárazem členů nebo třením, ani v jiné formy energie. Budeme se zde tedy zabývat pouze *energií makromechanickou*, jež může být buď kinetická, nebo potenciální. Kdybychom pokládali systémy za izolované, tj. takové, jimž se zevnějšku žádná energie ani nepřivádí, ani neodvádí, byla by makromechanická energie takových systémů (braná ovšem vzhledem k nějaké základní vztažné souřadnicové soustavě) časově stálá. Pro takové systémy, ať jsou mechanické děje, které uvnitř probíhají, jakékoliv, musel by platit **z á k o n z a c h o v á n í m a k r o m e c h a n i c k é e n e r g i e**, který by se jistě zúžil v případě, že by se v systému nevyskytovala potenciální energie v **z á k o n z a c h o v á n í k i n e t i c k é e n e r g i e**. Oba zmíněné zákony jsou ovšem pouze užšími formulacemi **o b e c n é h o z á k o n a z a c h o v á n í e n e r g i e**.

Kinetická energie pohybujícího se tělesa je podobně jako rychlost veličinou relativní, tj. závislou na vztažné souřadnicové soustavě. Při vyšetřování a řešení mechanických systémů, které mají dva nebo více členů, je velmi výhodné rozdělit si celkovou makromechanickou energii (${}_cW$) na dvě části: na vnitřní (${}_2W$) a vnější (${}_1W$) makromechanickou energii, přičemž u systému izolovaného a pro touž souřadnicovou soustavu zřejmě platí, že

$${}_cW = {}_1W + {}_2W \quad (1)$$

Známe-li střed hmotnosti (těžiště) systému a jemu příslušející pohybový stav, potom si nazveme vnější makromechanickou energii (${}_1W$) veličinu danou vztahem

$${}_1W = \frac{1}{2} m v^2, \quad (2)$$

kde m je celková hmotnost systému ($m = \sum_{i=1}^n m_i$, kde n je počet členů systému) a v je rychlost příslušející středu hmotnosti systému. Protože v závisí na volbě souřadnicové soustavy, je zřejmé, že vnější makromechanická energie je veličinou relativní.

Vztahujeme-li nyní pohyby jednotlivých členů (a tedy i jejich rychlosti) ke společnému středu hmotnosti, určíme si také energii jednotlivých členů vzhledem k němu. Součet všech makromechanických energií jednotlivých členů (${}_2W_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$) je potom vnitřní makromechanickou energií systému (${}_2W$)

$${}_2W = \sum_{i=1}^n {}_2W_i. \quad (3)$$

Tvoří-li systém pouze jediné těleso, pak jeho vnitřní makromechanická energie je nulová tehdy, neobsahuje-li toto těleso nějakou potenciální energii (takovým tělesem může být válcová pružina, udržovaná ve stlačeném stavu, např. kovovým pláštěm apod.). Vnitřní makromechanická energie systému není již závislá na souřadnicové soustavě (čili je invariantní vůči vztažné soustavě). Pokud jde o potenciální energii volného izolovaného systému, to je vždy invariantní vůči vztažné soustavě.

Pomocí vnější makromechanické energie můžeme také formulovat první Newtonův dynamický princip asi takto:

Těleso zachovává pohyb rovnoměrný přímočarý, pokud se jeho vnější makromechanická energie nemění, tedy pokud platí

$${}_1W = \text{konst} \quad (4)$$

Aby se změnila vnější pohybová energie systému, a tedy i jeho celkový pohybový stav, je nutno vnější makromechanickou energii

změnit (přivést energii z vnějšku nebo naopak energii systému odebrat). U izolovaného systému ovšem styk s vnějškem není, a tedy musí platit princip setrvačnosti s tou výjimkou, že by se snad vnější energie systému změnila v důsledku současné změny energie vnitřní¹⁾. V takovém případě, který je z hlediska klasické mechaniky nereálný, zůstala by zachována ${}_eW$ a vzájemné změny vnitřní a vnější makromechanické energie by byly vázány vztahem (1).

V předchozích odstavcích jsme hovořili o souřadnicové soustavě spojené se středem hmotnosti (těžištěm) systému a pohybující se společně s ním rovnoměrně přímočaře. V ní jsme vyšetřovali vnitřní makromechanickou energii (${}_2W$). Protože jí budeme používat při některých úvahách v dalších pojednáních, zvolme si pro ni kratší název *soustavy středu hmotnosti systému*.

Vodní stavby a průtoky

jejich určování a zpracování

INŽ. ZDENĚK KOS, Praha

Množství vody, kterého je každoročně třeba pro národní hospodářství ČSSR, je obrovské a měří se miliardami kubických metrů. Jediným zdrojem této vody, když neuvažujeme sporný příspěvek vod, které se tvoří v nitru země, jsou atmosférické srážky, které spadnou jako déšť, sníh apod. na území našeho státu, kromě vod Dunaje, který přivádí vodu hlavně z Alp.

Je třeba aby vodní hospodářství zabezpečilo odběr vody pro potřeby národního hospodářství. Výchozím podkladem pro zjištění možností odběru vody z povrchových toků je určování výšky hladiny v řekách a její změny. Při tomto hledisku jsou rozhodující minimální výšky hladin a jejich trvání. Voda však není jen pomocníkem člověka, ale i nebez-

¹⁾ Kdyby se snad podařilo prokázat, že taková změna vnitřní energie ve vnější a naopak je možná, znamenalo by to ovšem převrat v pojetí mechaniky. Neplatila by pak obecně např. věta o zachování hybnosti a jejího momentu (což jsou výchozí veličiny pro definici síly a silového momentu), musel by být obecněji formulován druhý a třetí dynamický princip apod.

pečným živlem, a to tehdy, když za povodní hladina v řece stoupá více, než je koryto řeky schopno pojmout, jak jsme letos názorně viděli. Tyto vysoké hladiny je třeba znát například při návrhu mostních konstrukcí, při návrhu ochranných hrází, při stavbě silnic a železnic podél řek atd. Nízké hladiny je třeba znát při návrhu energetických děl, při zásobování vodou a zejména při plavbě.

Proto se již po dlouhou dobu — na Nilu např. již tři tisíce let před naším letopočtem — pozorují výšky vodních hladin, tzv. v o d n í s t a v y.

Výška vodní hladiny se měří na tzv. v o d o č t u. Je to většinou pevná lať, zabudovaná v břehu nebo v mostním pilíři, dělená po centimetrech (obr. 1). V případě, že je lať umístěna šikmo, je třeba délku jednoho dílku zvětšit tak, aby stoupnutí hladiny o jeden centimetr odpovídalo jednomu dílku. Toho dosáhneme při sklonu latě od vodorovné roviny v úhlu α tak, že délka jednoho dílku latě bude

$$l = \frac{1}{\sin \alpha} \quad (1)$$

Výška hladiny na vodočtu se odečítá na větších stanicích třikrát denně podle potřeby i častěji (zejména při povodních), na menších jednou denně.

Chceme-li zachytit plynulou změnu hladiny, je třeba použít tzv. l i m n i g r a f u, který zaznamenává změnu hladiny se změnou výšky plováku, která se přenáší pákovým ústrojím na registrační pásku. Místo, kde je umístěn vodočet nebo limnigraf, se nazývá vodočetní stanice.

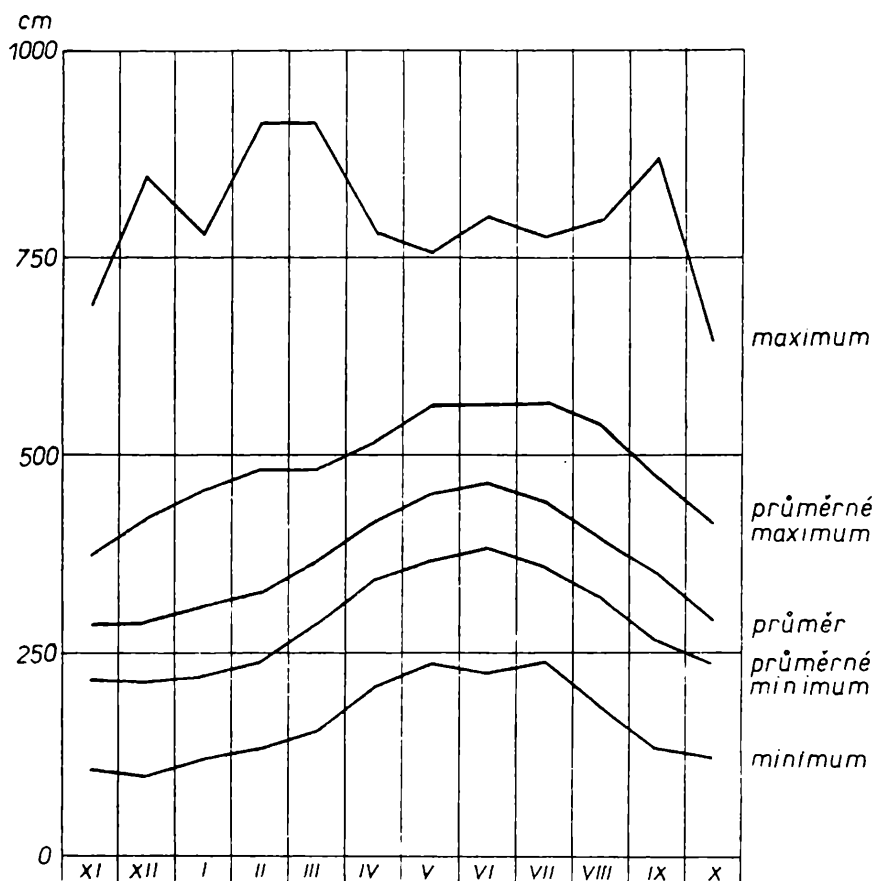
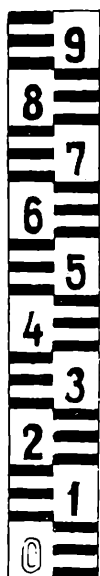
Výsledkem pozorování na vodočtu je chronologická řada údajů — výšek hladin. Abychom mohli této řady použít pro h y d r o l o g i c k é (hydrologie je věda o zákonech výskytu a oběhu vody v přírodě) a vodo-hospodářské výpočty, je třeba je zpracovat. Jedním z takových údajů, který z řady snadno dostaneme zjištěním minimální $H_{\min}$ a maximální $H_{\max}$ hladiny vody, je tzv. h y d r o m o d u l D , tj.

$$D = H_{\max} - H_{\min} \quad (2)$$

Dalšími důležitými charakteristikami jsou průměrné měsíční a roční stavy. Při těchto veličinách, které jsou statistického charakteru, je nutno uvádět, za které období jsme tyto hodnoty získali, protože zejména délka období, jak dále uvidíme, má podstatný vliv na spolehlivost tohoto údaje.

Pro výpočet m ě s í č n í h o p r ů m ě r u můžeme místo všech hodnot uvažovat pouze extrémní hodnoty v každém měsíci v jednotlivých letech a tyto hodnoty zprůměrovat za dlouholetá období. Dostáváme tak m ě s í č n í p r ů m ě r n é m a x i m u m nebo p r ů m ě r n é m i n i m u m.

Konečně je možno též zachytit největší a nejmenší hodnoty, které se vůbec v pozorované řadě v uvažovaném měsíci vyskytly. Dostáváme



Obr. 1. Vodočetní lať.

Obr. 2. Charakteristické měsíční vodní stavy na Dunaji v Bratislavě.

tak měsíční maximum či minimum. Pro srovnání jsou uvedeny tyto charakteristické měsíční vodní stavy na Dunaji v Bratislavě na obr. 2.

Často při vodohospodářských studiích potřebujeme znát, jak často se vyskytuje hladina v určitých mezích nebo jak dlouho bývá určitý vodní stav vyšší než určitá hodnota, čili jak dlouho bývá určitý vodní stav překročen. To zjistíme z čar četností (odpověď na otázku, jak často se vyskytuje hladina v určitých mezích) a čar překročení čili trvání vodních stavů (odpověď na otázku, jak dlouho bude určitý vodní stav překročen). Matematicky spolu tyto čáry souvisejí tak, že čára překročení je součtovou čarou čar četností. Konstrukce čar četností a čar překročení bude uvedena dále při zpracování průtoků, protože je shodná pro oba tyto jevy.

Když známe průběh hladin řeky a jsou zpracovány výsledky měření, můžeme řešit jen poměrně úzký okruh otázek vodního hospodářství. Pro řadu dalších otázek musíme znát průtok vody v řece, tj. průtočný objem, který obvykle vyjadřujeme v m^3/s nebo u menších toků v l/s .

Abychom si názorně představili, co je to objemový průtok (též průtočný objem) myslíme si v měrném profilu (čili v ploše, vedené kolmo na osu řeky) sestrojeny vektory rychlostí kolmo na

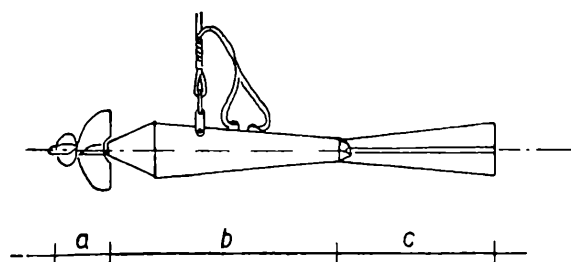
tento profil. Koncové body těchto vektorů vytvoří plochu, kam by voda dotekla za jednotku času (např. za jednu sekundu). Potom tato plocha měrného profilu (rovina), plocha omočeného dna a břehů vytvářejí dohromady těleso, jehož objem dává průtočný objem, čili jak jsme zvyklí jej v hydrologii nazývat objemový průtok Q_V za uvažovanou časovou jednotku. Když tento průtok vyjádříme jako násobek měrného profilu F , čili

$$Q_V = S \cdot v, \quad (3)$$

dostáváme tzv. *p r ů m ě r n o u p r o f i l o v o u r y c h l o s t* v .

Je celá řada způsobů, jak měříme průtoky. Například je možno změřit rychlosti v určitých bodech, sestavit přibližně výše zmíněnou plochu konců vektorů rychlostí a vypočítat tak objem proteklý za jednotku časovou Q_V , čili vlastně zjistit objemový průtok.

Nejvíce používaného přístroje při tomto bodovém zjišťování rychlostí je tzv. *h y d r o m e t r i c k é k ř í d l o* neboli *v r t u l e*. Toto zařízení se skládá z vrtule (a), počítačího a kontaktního zařízení, vedení, signálního zařízení (b) a kormidla (c). Vrtule je část zakřivené plochy na způsob lodního šroubu. Její otáčení se přenáší většinou pomocí šnekového soukolí na počítač otáček. Určitý počet otočení vytvoří v kontaktním zařízení kontakt, který se vede k signálnímu zařízení. Kormidlo udržuje směr křídla rovnoběžný se směrem proudu měřeného toku. Křídlo je upevněno buď na tyči, nebo na laně (obr. 3). Měření provádíme podle určitého plánu v řadě míst v měřeném profilu a snažíme se je provést pokud možno při stálé hladině v toku.



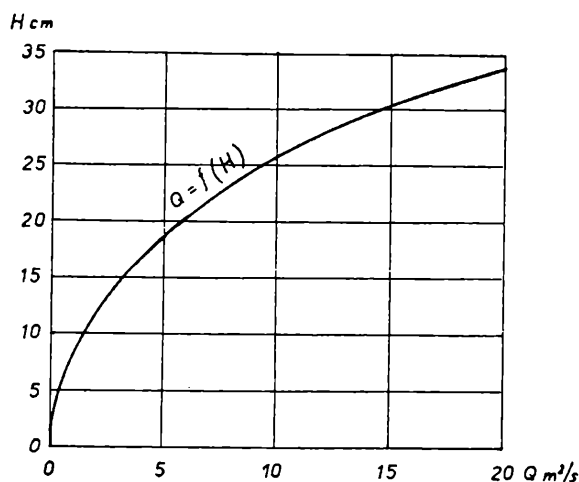
Obr. 3. Hydrometrické křídlo.

Jakmile se nám změní hladina, změní se nám také nejen plocha měrného profilu, ale i rychlost a měření bychom museli opakovat znova. V praxi však měření provedeme jen pro několik výšek H a určíme vztah mezi objemovými průtoky Q_V a výškami H , čili čáru

$$Q_V = f(H), \quad (4)$$

což je tzv. *k o n z u m ě n í k ř í v k a p r ů t o k ů*. Pak při určování průtoků měříme pouze výšku H a průtok Q_V určíme pomocí konzumční

křivky. Na obr. 4 je uveden typický tvar této křivky. Tyto křivky je však třeba čas od času kontrolovat, protože se při řadě vlivů mění; má na ni vliv tendence vodních stavů (zda stoupají nebo klesají), změny ve vodočetním profilu a v přilehlém korytu řeky (např. nánosy), změny drsnosti koryta (např. úpravou toku), výskyt ledu vzdutí nebo snížení hladiny.



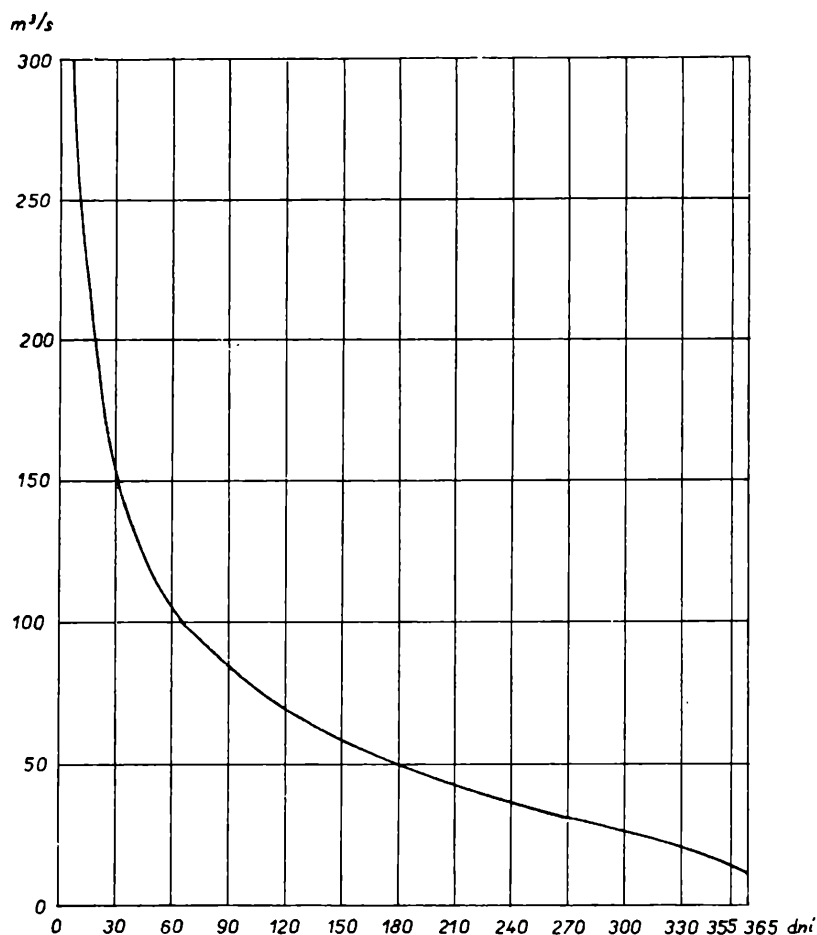
Obr. 4. Konzumční křivka.

Když jsme tedy sestrojili konzumční křivky, o nichž víme, v jakém období platí, můžeme pomocí nich vyčíslit z měřených vodních stavů průtoky. Základní veličinou, které většinou používáme v hydrologii, jsou denní průtoky. Z těchto průtoků získáme zprůměrováním měsíční průtoky. Když máme k dispozici pozorování za větší počet let, můžeme vypočítat dlouholetý průměr průtoků v jednotlivých měsících a podobně při průměrech za celý rok — ročních průměrných průtocích. Dostáváme tak důležité hodnoty, které stručnou formou charakterizují vodnost zkoumaného profilu na řece.

Další důležitou charakteristikou jsou čáry, které vyjadřují, kolik dní (většinou z roku) byly průtoky v určitých mezích. Jsou to tzv. čáry četností, obdobné těm, o kterých jsme se již zmínili při zpracovávání vodních stavů. Čáry četností zjistíme takto: Celý statistický soubor (denní průtoky za rok nebo za několik let) rozdělíme na několik (zhruba 15 až 20) tříd například tak, že zvolíme hranice třídních intervalů (1, 2, 3, 4,...) m³/s, nebo (10, 20, 30, 50,...) m³/s atd, a to podle toho, jak velké průtoky se vyskytují ve zkoumaném profilu. Zjišťujeme pak, kolik pozorování padlo do určité třídy. Tento počet se potom vyznačí do středu každého třídního intervalu. Dostaneme tak stupňovitou čáru četností (šířka stupně se rovná délce třídního intervalu).

Další významnou čáru překročení čili trvání průto-

k ů zkonstruujeme z této stupňovité čáry četností tak, že sčítáme jednotlivé úseky četností postupně od nejvyšších hodnot k nejnižším a tyto součtové hodnoty vyneseme ke spodním mezím třídních intervalů. Tuto čáru překročení neboli trvání průtoků můžeme však získat také tak, že seřadíme celý statistický soubor podle velikosti od nejvyšších hodnot



Obr. 5. Čára překročení čili trvání průtoků.

k nejmenším a vynásobíme je jako pořadnice pro počet dní v roce (obr. 5). Pro více hodnot, než je rok, by byla tato metoda příliš těžkopádná, a proto používáme raději metody první.

Tyto čáry překročení denních průtoků jsou pro vodohospodářské výpočty velmi důležitým podkladem, který je pro průměry za poměrně dlouhá období poměrně stálým údajem pro učitý profil na toku. Když potřebujeme vytvořit seznam těchto čar pro více profilů a více toků, bylo by grafické vyjádření dosti nepohodlné a nepřehledné. Použijeme pak tabelárního vyjádření, a to tak, že udáváme průtoky překročené po určitý počet dní v roce, čili tzv. *n*-denní vodu. Jsou to například vody 30, 90, 180, 270, 355 a 364denní.

Důležitou charakteristikou, o které jsme se již zmínili, je dlouholetý průměrný roční průtok. Tato hodnota se určuje jako aritmetický průměr průměrných ročních průtoků jednotlivých let. Při

navrhování nádrží jsou průměrné roční průtoky jednotlivých let důležitým statistickým souborem, ze kterého se vychází při řadě rozborů. Z počtu prvků tohoto souboru n a ze směrodatné odchylky tohoto souboru σ usuzujeme na spolehlivost dlouholetého průměrného ročního průtoku.

Směrodatná odchylka tohoto souboru je určena vzorcem¹⁾

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (Q_{v_i} - \bar{Q}_v)^2}{n - 1}}, \quad (5)$$

kde n je počet prvků posloupnosti, čili počet let pozorování, Q_{v_i} jsou střední roční průtoky jednotlivých let, $\bar{Q}_v$ je dlouholetý průměrný roční průtok.

Spolehlivost dlouholetého průměrného ročního průtoku $\bar{Q}_v$ určujeme pomocí směrodatné odchylky této hodnoty, tj. pomocí $\bar{\sigma}$, které se rovná¹⁾

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (6)$$

kde σ je určeno rovnicí (5), n je počet let pozorování.

Abychom z těchto absolutních hodnot získali poměrné hodnoty (jednotkou $\bar{\sigma}$ i σ je totiž m^3/s nebo l/s), dělíme je hodnotou $\bar{Q}_v$, která má stejný rozměr jako směrodatná odchylka σ , a dostáváme

$$C_v = \frac{\sigma}{\bar{Q}_v}. \quad (7)$$

Hodnota C_v se nazývá k o e f i c i e n t v a r i a c e středních ročních průtoků. Když dělíme hodnotu $\bar{\sigma}$ hodnotou $\bar{Q}_v$, dostáváme

$$\bar{C}_v = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{Q}_v} = \frac{C_v}{\sqrt{n}}. \quad (8)$$

Čím je $\bar{C}_v$ nižší, tím spolehlivěji byla určena hodnota dlouholetého průměrného ročního objemového průtoku $\bar{Q}_v$.

V tomto článku jsme se seznámili s pojmy v o d n í s t a v, o b j e m o v ý p r ů t o k, a se způsoby, jak se tyto hodnoty měří a zpracovávají v dalších rozborech. Budou vám snad tyto pojmy bližší, až uslyšíte v rozhlase hlášení o stavu vody na tocích, nebo budete číst článek o přehradách nebo vodních elektrárnách, kde se tyto údaje často vyskytují. Pak si uděláte o těchto suchých číslech lepší představu.

¹⁾ Vzorce (5) a (6) vyplývají z teorie chyb a teorie přesnosti aritmetického průměru. Viz např. J. H o r á k, P r a k t i c k á f y z i k a

Krystalická struktura kovů

IVO KRAUS, ZLATĚK MARŠÁK, FTJF, Praha

1. Prostorová mřížka kovů

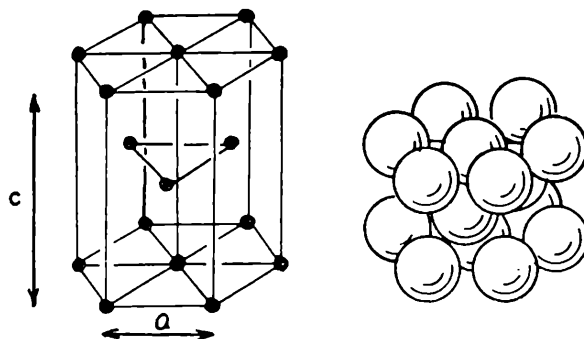
Ačkoliv je neobyčejný rozvoj plastických hmot, zůstávají nejdůležitějším technickým materiálem prakticky ve všech oborech lidské činnosti stále ještě kovy. Základní poznatky o stavbě těchto látek jsou nezbytné pro každého, kdo se na vědeckém základě zabývá jejich vlastnostmi a využitím. O zákonitostech mezi strukturou kovů a jejich vlastnostmi pojednává *metalografie*. Tato věda studuje v dialektické jednotě (ve vzájemných souvislostech) složení, stavbu i vlastnosti kovů a slitin a jejich změny působením tepelných, chemických a mechanických vlivů.

Všechny kovy a slitiny jsou látkami krystalickými. Jejich mřížka má vysokou souměrnost a husté uspořádání atomů. U kovů se nejčastěji setkáváme s těmito typy prostorových mřížek: kubická mřížka prostorově centrovaná, kubická mřížka plošně centrovaná a hexagonální mřížka s nejsměstnanějším uspořádáním atomů.

V kubické mřížce prostorově centrované¹⁾ krystaluje např. Li, Na, K, Ba, V, Nb, Ta, Mo, Fe_α.

Kubická mřížka plošně centrovaná¹⁾ je charakteristická pro Cu, Ag, Au, Sr, Al, Pb, Fe_γ, Rh, Pd, Ir, Pt a další.

Hexagonální mřížka s nejsměstnanějším uspořádáním atomů (obr. 1) se vyskytuje např. u Be, Mg, Zn, Cd.



Obr. 1. Hexagonální mřížka s nejsměstnanějším uspořádáním atomů.

¹⁾ Vyobrazení viz v článku *Krystalická stavba pevných látek*, uveřejněném v 9, 10 č. Rozhledů matematicko-fyzikálních.

Pro představu velikosti základních buněk kovů uvedeme si číselné hodnoty některých mřížkových parametrů. Mřížková konstanta a kovů krystalujících v kubické soustavě se vyskytuje v rozmezí od 2,86 Å do 6,07 Å. V hexagonální soustavě je a rovno 2,28 Å až 3,98 Å a c 3,57 Å až 6,51 Å.²⁾

Některé kovy mají mřížky složitější než ty, o nichž jsme právě diskutovali. Vzhledem k rozsahu našeho článku není však možné se o nich blíže zmínit.

2. Kovová vazba

Vlastnosti látek jsou určeny vzájemným působením atomů v uzlových bodech krystalické mřížky, tzv. *s i l a m i m e z i a t o m o v é v a z b y*. Pro kovy je charakteristický typ vazby nazývaný *k o v o v á v a z b a*. Zmíníme se stručně o její podstatě. Víme, že atom, který je složen z kladně nabitého jádra a záporně nabitých elektronů, je v ustáleném stavu elektricky neutrální. Elektrony náležející atomu můžeme rozdělit na *v n ě j š í* (valenční) a *v n i t ř n í*. U valenčních elektronů je vazba s jádrem ve srovnání s vazbou vnitřních elektronů velmi malá. Podle současné teorie stavby kovů jsou valenční elektrony v atomech vázány k jádru jen velmi slabě, tvoří tzv. *e l e k t r o n o v ý p l y n*. Na krystal kovu se budeme proto dívat tak, jako by se skládal z kladných iontů umístěných v uzlech prostorové mřížky, obklopených elektronovým plynem. Kovová vazba se uskutečňuje vzájemným působením (interakcí) iontů a elektronů. Volné elektrony jsou přitahovány současně k několika kladně nabitým iontům, a tím uskutečňují jejich vazbu.

Uspořádání, při němž jsou ionty rozloženy zákonitě a vytvářejí pravidelnou krystalickou mřížku, je však možné pouze v ideálním stavu. V prostorové mřížce reálných krystalů se vyskytuje celá řada poruch. S nejdůležitějšími z nich se seznámíme v samostatném článku.

3. Polymorfismus kovů

P o l y m o r f i s m e m se nazývá existence jedné látky ve dvou nebo více krystalických formách (modifikacích). Přeměna krystalické mřížky z jednoho typu v typ jiný se nazývá *a l o t r o p i c k á t r a n s f o r m a c e*. Dochází k ní většinou při změně teploty látky, působením velkých tlaků, nebo při neobvyklém tepelném nebo mechanickém zpracování. Tu modifikaci látky, která je stabilní při nízkých teplotách, označujeme indexem α , modifikaci stabilní při vyšších teplotách β , γ atd.

²⁾ Délky se v krystalografii vyjadřují v angströmech Å, $1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$, nebo v jednotkách kX, $1\text{kX} = 1,002\,02 \cdot 10^{-10}\text{m}$.

Největší praktický význam má polymorfismus železa. Železo existuje ve dvou modifikacích: při teplotě do 910°C a nad 1401°C má železo kubickou mřížku prostorově centrovanou (Fe_α), při teplotě 910° až 1401°C je stabilní Fe_γ s kubickou mřížkou plošně centrovanou.

Polymorfismus je dnes známý u celé řady kovových i nekovových prvků, např. Mn, Co, Sn, Ti, Zr, Te, P, C. Zajímavé je chování nízko-templotní allotropické modifikace cínu. Při teplotách pod 18°C tzv. „bílý cín“ mění v cín „šedý“. Tato nízko-templotní změna se nazývá „cínový mor“, který napadá některé cínové předměty, jsou-li vystaveny chladu. Jelikož se polymorfní formy liší vnitřní strukturou, liší se i svými fyzikálními a mechanickými vlastnostmi, např. elektrickým odporem, tepelnou kapacitou, tvrdostí, mezí pevnosti a plastičností. Transformace „bílého“ cínu v „šedý“ je doprovázena velkým zvětšením křehkosti a objemu. To vede ke vzniku charakteristických „výrůstků“, někdy dokonce k rozpadu v šedý prášek. Dokud nebylo známo, že příčina tohoto chování spočívá ve změně struktury, vysvětlovala se křehkost a rozpad v prášek tajemnou vnitřní nemocí cínu. Tento uvedený příklad názorně ukazuje, jak je pro pochopení vnějších projevů hmoty důležité znát její atomovou a mikroskopickou strukturu.

V příštím čísle Rozhledů budeme v otázkách krystalické stavby kovů pokračovat v článku *P o r u c h y k r y s t a l i c k é m ř í ž e k o v ů*.

● Poznámka o mocninách čísla 5

V knížce J. Sedláčka *N e b o j t e s e m a t e m a t i k y*¹⁾ je na str. 59 uvedena úloha 3, 6, která zní takto: Číslo 5^{100} je nepředstavitelně velké, přesto však je možno bez použití počítačích strojů získat o něm bližší údaje. Vypočtete, kolik číslic má 5^{100} při zápisu v desítkové soustavě; určete několik prvních a několik posledních číslic v tomto zápisu.

Zabýval jsem se touto úlohou podrobněji a našel jsem úplné vyjádření čísla 5^{100} v desítkové soustavě. Platí

$$5^{100} = 7\ 888\ 609\ 052\ 210\ 118\ 054\ 117\ 293\ 565\ 327\ 862\ 296\ 732\ 064\ 351\ 090 \\ 230\ 047\ 702\ 789\ 306\ 640\ 625.$$

Při studiu mocnin 5^n najdete ještě řadu dalších zajímavostí.

A. K.

¹⁾ Knížka vyšla r. 1963 slovensky a r. 1965 německy. (Poznámka redakce)

V minulém ročníku jsme zjistili, že **R o z h l e d y** odbírají i žáci ZDŠ. Někteří z nich dokonce řešili úspěšně soutěžní příklady. Tyto nejmladší matematiky srdečně vítáme v naší desetitisícové čtenářské obci **R o z h l e d ů**. Abychom jim zpřístupnili čtení našeho časopisu, budeme na ně pamatovat v každém čísle několika stránkami snadnější matematické četby. Na těchto stránkách najdete krátké články o životě mate-

matiků i fyziků, s jejichž jmény se setkáte při vyučování, dále poučné články; zábavné úlohy i soutěžní příklady, přiměřené vašim vědomostem. Uvítali bychom také dotazy a přání jak vaše, tak i vašich učitelů, týkající se náplně těchto stránek.

Tento váš koutek bude řídit člen redakční rady s. Stanislav Horák. Všechnu korespondenci proto zasílejte na adresu redakce: Praha 2, Trojanova 13.

• Řekli vám ve škole pravdu?

Napište si rovnici

$$2x - \{3x - [4x - (5x - 1) + 3x - 1] - 4x + 3\} = 5x - 3.$$

Na první pohled vidíte, že je prvního stupně a má mít tedy jediné řešení. Zkuste však do ní za neznámou dosadit např. $x = 0$, nebo 1, nebo 2, -1 , -2 atd. Zjistíte, že všechny tyto kořeny vyhovují; právě tak by vyhovovalo každé jiné číslo. Jak je to možné?

• Víte, jak jsou staré základní vzorce?

Se vzorečky je v matematice velká potíž. Profesoři se zlobí, že je studenti neznají a studenti jsou celí utrápení, že si je pletou a zapomínají.

Podívejme se nyní, jak jsou takové základní vzorce „staré“ Tak např. vzorec

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

byl znám s největší pravděpodobností ve staré Babylónii kolem r.1700 př. n. l.

Téhož stáří jsou i vzorce

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Domníváme se, že je vyvodili z geometrie asi tak, jak jsou dosud v našich školách ověřovány na základě obsahů obdélníků a čtverců.

V téže době uměli Babylóňané řešit i kvadratickou rovnici

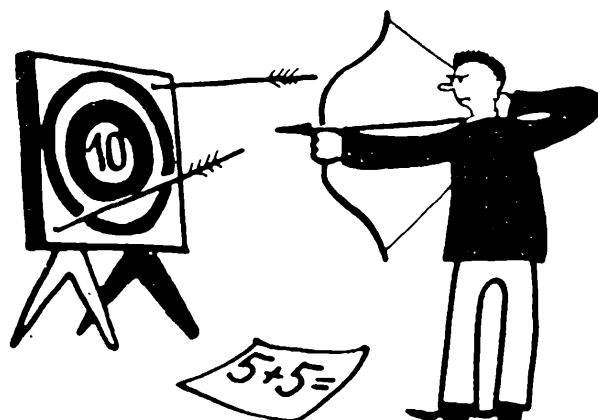
$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad \text{kde } abc \neq 0,$$

neboť znali vzorec pro kořeny této rovnice.

A co víc, znali v té době (prosím, 1000 let před Pythagorem) i Pythagorovu větu a řadu dalších věcí, které nás uvádějí v oprávněný úžas.

S. H.

Úlohy



k řešení

Jako každoročně vypisujeme soutěž v řešení úloh z matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie, která má dlouholetou tradici a mezi úspěšnými řešiteli měla v minulých letech většinu nynějších vysokoškolských učitelů i akademiků.

Pokyny řešitelům: Při řešení pracujte samostatně, postupujte logicky správně, účelně věcně, vyhýbejte se rozvleklým frázím, užívejte jen zavedených termínů a označení. Nejdelší řešení nebývá vždy nejlepší. Pište čitelně perem nebo strojem, po *jedné* straně formátu A4, každou úlohu na *zvláštní* list. V pravém dolním rohu každého listu uveďte své plné jméno, třídu i druh školy, svou podrobnou adresu. Na poslední odvedenou úlohu napište také jméno svého učitele příslušného předmětu.

Jména všech správných řešitelů budou otištěna po skončení a zhodnocení soutěže. Nejlepší řešitelé budou odměněni knižními cenami podle vlastní volby. Vítejme též ojedinělá řešení žáků nižších tříd. Čtenáři — nestudenti mohou zasílat řešení bez nároku na cenu.

Proti dřívějšímu se zdvojnásobil počet řešitelů i zaslaných řešení, při poměrně nezměněné kvalitě řešení poklesla grafická úprava místy až k doktorské nečitelnosti.

Upozorňujeme, že naše soutěž nekonkuruje Matematické ani Fyzikální olympiádě.

Řešení úloh otištěných v tomto čísle zašlete do 15. března 1966 na adresu výkonného redaktora: *doc. Ota Setzer, Praha 2, Trojanova 13.*

• Matematika

1. Určete strany a úhly trojúhelníka, je-li dáno

$$P = 2\sqrt{7}, s = 2 + 3\sqrt{2}, r = \frac{8\sqrt{7}}{7} \text{ cm } (a < b < c)$$

Jan Fráňa

2. Je dána kvadratická rovnice $x^2 + px + 1 = 0$, jejímiž kořeny jsou $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$, kde α je ostrý úhel. Napište kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.

Stanislav Horák

3. Číslo napsané v desítkové soustavě je $abcba$. Určete jeho jednotlivé cifry, víte-li, že je násobkem 396.

Stanislav Horák

4. Jestliže v rovnoramenném trojúhelníku ABC je střed vepsané kružnice souměrně sdružený se středem opsané kružnice podle základny AB , pak úhel při základně je 36° . Tuto větu lze obrátit. Obě věty dokažte!

Stanislav Horák

5. Na rohové parcele tvaru kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $2\alpha \leq \pi$ vymezte pro plánovanou stavbu obdélníkový půdorys o největším plošném obsahu tak, aby jeho střední příčka splývala s osou výseče!

Jaromír Hroník

6. Necht' $p \geq 0$ je reálné číslo; a, b jsou komplexní čísla. Dokažte, že platí

$$|a + b|^p = 2^p (|a|^p + |b|^p)$$

Ivo Rosenberg

7. Řešte rovnici

$$\sin \frac{a + bx}{1 + x} = c \sin \frac{b + ax}{1 + x}$$

kde a, b, c jsou reálná čísla.

Ivo Rosenberg

8. Určete všechna přirozená čísla x , pro něž platí $s(x) = 2x - 41$, kde $s(x)$ značí ciferný součet čísla x .

Jiří Sedláček

9. V rovině je dán konvexní n -úhelník $A_1A_2\dots A_n$. Určete počet konvexních čtyřúhelníků $A_iA_jA_kA_l$, jejichž všechny strany jsou úhlopříčky daného n -úhelníka.

Jiří Sedláček

10. Určete množinu všech bodů roviny, pro něž platí současně všechny nerovnosti

$$\begin{aligned} y &\leq |x + an|, \\ y &\geq -|x + an|, \end{aligned}$$

kde $a > 0$ je konst., n je celé.

Alois Urban

11. Z posloupnosti čísel $s_1, s_2, \dots, s_e$ je sestaveno pět posloupností $P_1 \equiv \{n_\alpha\}$, $P_2 \equiv \{n_\beta\}$, $P_3 \equiv \{n_\gamma\}$, $P_4 \equiv \{n_\delta\}$, $P_5 \equiv \{n_\varepsilon\}$, jejichž členy jsou skupiny čísel s_i

$n_\alpha \equiv (s_\alpha, s_{\alpha+1}, \dots, s_{\alpha+4})$, $n_\beta \equiv (s_\beta, s_{\beta+1}, \dots, s_{\beta+3})$, $n_\gamma \equiv (s_\gamma, s_{\gamma+1}, s_{\gamma+2})$, $n_\delta \equiv (s_\delta, s_{\delta+1})$, $n_\varepsilon \equiv (s_\varepsilon)$. Přitom $\alpha = 1, 6, 11, \dots, a$; $\beta = a + 5, a + 9, \dots, b$; $\gamma = b + 4, b + 7, \dots, c$; $\delta = c + 3, c + 5, \dots, d$; $\varepsilon = d + 2, d + 3, \dots, e$. Počet členů první až i -té posloupnosti P_i označme p_i . Určete součet $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$

Alois Urban

12. Jsou dány různoběžné přímky m, n a kladné číslo a . Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům, jejichž vrcholy leží na daných přímkách; jeden vrchol je průsečík daných přímek, protější strana k němu má velikost a .

Alois Urban



MO

XV. ročník Matematické olympiády

Ve školním roce 1965/66 bude probíhat XV. ročník soutěže *Matematická olympiáda*; jeho organizace bude táž jako v ročníku XIV. Podrobnosti soutěže jsou uvedeny v letáku, který vydá SPN.

I. kolo všech čtyř kategorií MO má charakter studijní, tj. řešení úloh má být pro účastníky podnětem, aby si doplnili své mezery ve školské matematice, zvláště aby si zpřesnili matematické pojmy a aby si *pozorně všímali metod*, jimiž se řeší úlohy určitých typů.

Úlohy I. kola tvoří dvě šestice: prvních 6 úloh jsou tzv. *úlohy přípravné*, druhých šest úloh jsou *úlohy soutěžní*. V dřívějších ročnících byly přípravné úlohy v podstatě běžné úlohy školské matematiky; byly podstatně snazší než úlohy soutěžní.

V letošním ročníku zkoušíme jistou změnu: přípravné úlohy se svou náročností celkem vyrovnají úlohám soutěžním; jsou k nim však připojeny návody a pokyny, které mají řešiteli usnadnit práci. V návodu je zpravidla klíč k řešení úlohy nebo impuls, jak překonat obtížné místo, na které při řešení pravděpodobně narazíte. Připomínáme však důrazně, že postup řešení naznačený návodem, není pro řešitele závazný; má mu být jen ku pomoci, nebude-li si jinak s úlohou vědět rady. Pro nastávající novou úpravu organizace Matematické olympiády, potřebuje ÚVMO informace, jak se letošní pozměněné pojetí přípravných úloh osvědčí; proto prosíme pracovníky MO, učitele i žáky, aby posílali své připomínky a náměty *Ústřednímu výboru na adresu: Praha 1 — Nové Město, Žitná 25.*

V tomto čísle uveřejňujeme texty všech šesti přípravných úloh pro kategorie A, B, C, D s příslušnými pokyny a poznámkami. Připomínáme, že *přihlášený účastník musí rozřešit všech šest úloh své kategorie, z toho aspoň čtyři správně*, má-li v soutěži pokračovat. Řešení *první trojice přípravných úloh* je třeba odevzdat učiteli do 15. XI. 1965, řešení *druhé trojice* do 15. XII. 1965.

• Přípravné úlohy

Kategorie A

1. Z jistého množství rozváleného těsta se vykrájí p koláčů; po novém rozválení stačí průměrně těsto z okrajků k koláčů na vykrojení jednoho dalšího koláče.

Odvoďte vzorec pro celkový počet koláčů, které lze z tohoto těsta vyrobit za předpokladu, že $p < k^k$.

(P o z n á m k a. Využijte rozkladu čísla p na mnohočlen v mocninách čísla k :

$$p = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \dots + a_1 k + a_0.)$$

2. Funkce proměnné x je pro $x > 0$ dána předpisem

$$y = \sqrt{\frac{3x - 4 \cdot C(x)}{2x - C(x)}},$$

kde $C(x)$ znamená největší celé číslo nepřevyšující x ; je tedy $C(x)$ celé číslo, pro které platí

$$C(x) \leq x < C(x) + 1$$

Vyšetřete definiční obor této funkce a načrtněte její graf.

P o z n á m k a. Vyšetřujte danou funkci postupně v intervalech $(0; 1 >$, $(1; 2 >$, atd.

3. Je dána kvadratická rovnice

$$az^2 + (b - \bar{b})z - \bar{a} = 0, \quad (1)$$

kde a, b jsou komplexní čísla, $a \neq 0$, $\bar{a}, \bar{b}$ čísla komplexně sdružená k číslům a, b . Tato rovnice má za kořeny dvě komplexní jednotky právě tehdy, je-li

$$(b - \bar{b})^2 + 4a\bar{a} \geq 0. \quad (2)$$

Dokažte.

(P o z n á m k a. Pro rovnice typu (1) s komplexními koeficienty platí tytéž věty o vlastnostech kořenů jako u rovnic s reálnými koeficienty. Číslo z je komplexní jednotkou právě tehdy, platí-li

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = 1.$$

V důkazu použijte nerovnosti

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.)$$

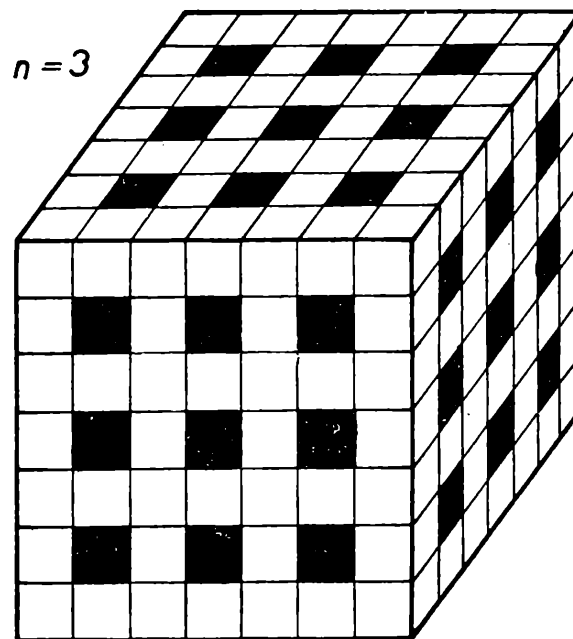
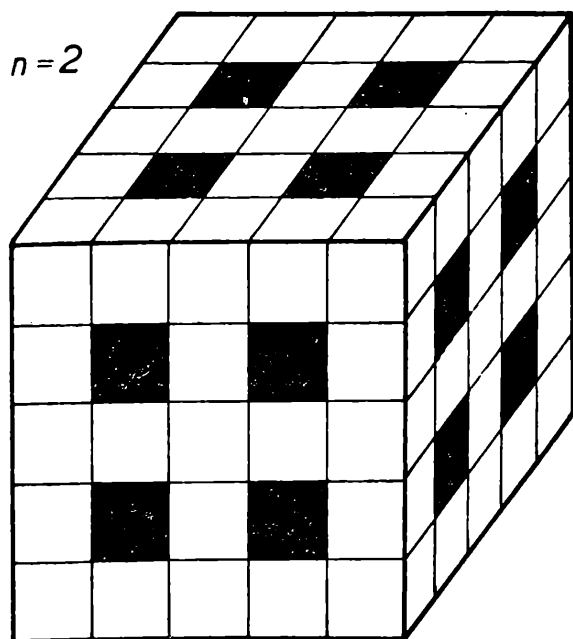
4. Je dán trojúhelník ABC a záporné číslo κ . Vyšetřete množinu všech bodů X v rovině ABC , které mají tyto vlastnosti:

a) každý z bodů X leží uvnitř trojúhelníka ABC ;

b) stejnolehlost se středem X a koeficientem κ převádí vrcholy A, B v body ležící uvnitř trojúhelníka ABC a vrchol C v bod ležící vně trojúhelníka ABC .

(P o z n á m k a. Experimentujte pro různá κ , například pro $\kappa = -\frac{2}{3}$. Úvahy lze zjednodušit tím, že např. střed X stejnolehlosti s koeficientem κ která převádí vrchol A v bod A' vnitřku úsečky BC , lze sestavit pomocí stejnolehlosti se středem A a s koeficientem $\frac{1}{1-\kappa}$ jako obraz bodu A' . Dokažte tuto větu.)!

5. Je dána krychle o hraně délky 1. Každá její stěna je rozdělena v $(2n+1)^2$ shodných čtverců podle obr. 1 (kde $n=2$ a $n=3$). Vnitřními n^2 čtverci každé stěny (na obr. 1 černými) jsou vedeny celým tělesem kolmo ke stěně „kanály“ ve tvaru pravidelných čtyřbokých hranolů.



Obr. 1

- a) Vypočítejte objem V_n a povrch S_n zbylého tělesa.
 b) Zjistěte zda lze zvolit n tak, aby bylo $V_n \leq \frac{1}{8}$.
 c) Zjistěte zda lze zvolit n tak, aby bylo $S_n > 100$.
 (Poznamka. V případě b) vyšetřujte výraz $2 \cdot V_n$.)

6. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod R té vlastnosti, že $\angle RAB = \angle RBC = \angle RCA = \varphi$.

Jsou-li α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníka ABC , platí

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma};$$

dokažte.

(Poznamka. Obsah trojúhelníka ABC vyjádřete jako součet obsahů trojúhelníků ABR, BCR a CAR .)

Kategorie B

1. Najděte všechna reálná čísla x , pro která platí

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 1.$$

2. Dekadický zápis právě jednoho z čísel

$$a_n = 72n + 2 \cdot 7^n + 2, \quad b_n = 72n - 2 \cdot 7^n + 2,$$

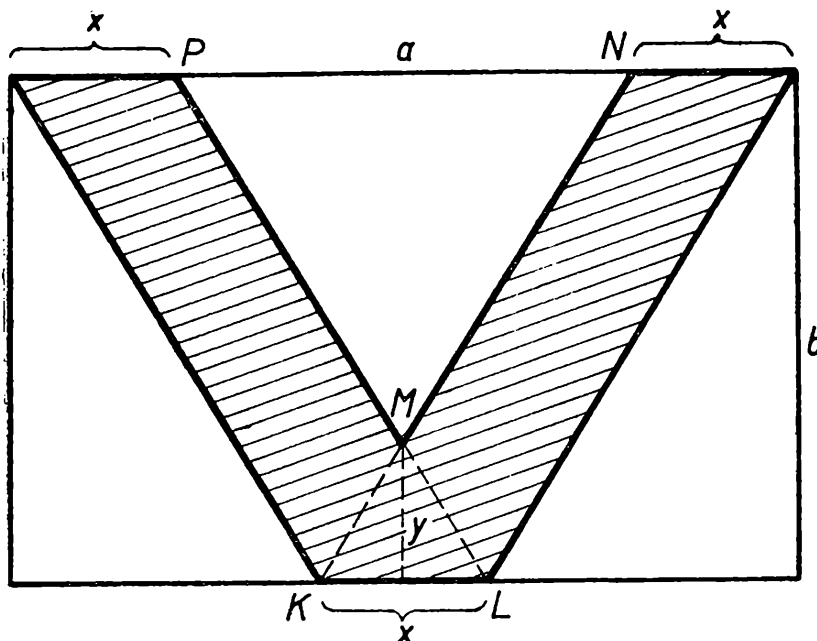
kde n je přirozené číslo, má na místě jednotek číslici 5. Dokažte.

3. Pravoúhlý trojúhelník má tuto vlastnost: Z jeho odvěsen a z výšky na přeponu lze sestavit opět pravoúhlý trojúhelník.

- a) Vypočítejte poměr odvěsny a přepony.
 b) Sestrojte aspoň jeden trojúhelník uvedené vlastnosti.

4. Je dán obdélník o rozměrech a, b . Do něho je vepsáno písmeno „V“

podle obr. 2. Vyjádřete obsah plochy písmena „V“ pomocí délky x a rozměrů a, b . Pro kterou délku x je obsah plochy „V“ polovinou obsahu obdélníka?



Obr. 2

5. Je dán kvádr o rozměrech a, b, c , který není krychle. Součet objemů krychlí o hranách a, b, c je větší než trojnásobný objem daného kvádru; dokažte.

(P o z n á m k a. Použijte výrazu $(a + b + c)^3$.)

6. V rovině leží sedm různých přímek, jejichž vzájemná poloha je popsána takto:

a) z daných přímek lze vybrat právě čtyři dvojice rovnoběžek*);

b) v rovině je 11 různých bodů, z nichž každý je průsečíkem právě dvou přímek.

Zjistěte, zda některým bodem roviny prochází více než dvě z daných přímek.

Úloha má dva typy řešení; načrtněte je!

(P o z n á m k a*.) Počítáme všechny možné sestavitelné dvojice rovnoběžek, např. tři různé rovnoběžky představují tři dvojice rovnoběžek.

Kategorie C

1. Tři navzájem různá přirozená čísla a, b, c mají tuto vlastnost: součet každých dvou z nich je dělitelný třetím číslem. Vyjádřete všechna čísla takové trojice pomocí nejmenšího z nich.

2. O daných kladných číslech a, b, c, d platí

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Pak pro každou dvojici kladných čísel x, y platí nerovnosti

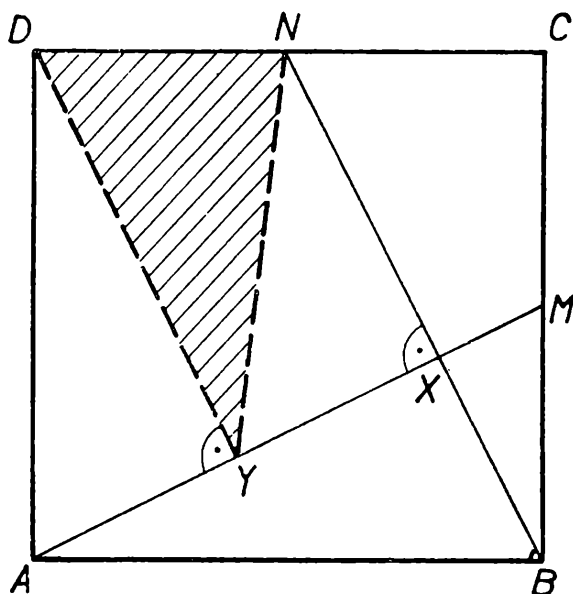
$$\frac{a}{b} < \frac{ax + cy}{bx + dy} < \frac{c}{d};$$

dokažte!

3. Škola o n žácích měla pochodové cvičení; sraz byl na konečné stanici elektrické dráhy. Tramvají přijelo $p\%$ ze všech žáků, $p\%$ ze zbytku přišlo pěšky. Při kontrole se ukázalo, že chybí jediný žák. Vyjádřete p pomocí n a vypočtěte pro $n = 400$.

(P o z n á m k a. Při úpravě rovnice pro p vytkněte n .)

4. Narýsujte obrazec podle připojeného obr. 3; $ABCD$ je čtverec o straně délky 6 cm, bod M je středem strany BC ($BN \perp AM \perp DY$). Vypočtěte vzdálenost NY a zjistěte výpočtem, zda trojúhelník DNY je pravoúhlý.



Obr. 3

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a bod A jejího vnějšku.

a) Bodem A sestrojte přímku, která protíná kružnici k v bodech B, C tak, že B je středem úsečky AC (úloha Catalanova). Proveďte diskusi.

b) Vyjádřete délku tětiny BC pomocí délek $r, v = AS$,

6. Dokažte: Osa strany BC trojúhelníka ABC protne stranu AB ve vnitřním bodě právě tehdy, platí-li pro úhly trojúhelníka vztah

$$\alpha + 2\beta < 180^\circ.$$

(P o z n á m k a. Při obrácení vyjděte ze situace, kdy osa úsečky BC neprotne úsečku AB .)

Kategorie D

1. Žák dostal za úkol umocnit trojčlen $(a + 2b - 3)^2$. Vyšel mu výsledek $a^2 + 4b^2 - 9$. „Ale to přece není správně, namítal učitel, dosad si na zkoušku za a, b nějaká určitá přirozená čísla.“ Žák uposlechl a zkouška mu vyšla. Která čísla dosadil? Jak správně zní vzorec pro druhou mocninu daného trojčlenu?

2. Je dáno prvočíslo p . Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y , které vyhovují rovnici

$$\frac{1}{p+x} + \frac{1}{p+y} = \frac{1}{p}.$$

3. Písmeno a označuje přirozené číslo, jehož dekadický zápis má více než 6 cifer, písmeno b označuje číslo, jehož dekadický zápis tvoří posledních šest cifer čísla a . Dokažte: Je-li a násobkem čísla 2^6 , je také b násobkem čísla 2^6 a obráceně.

4. Vrcholy, středy stran a průsečík úhlopříček čtverce tvoří skupinu devíti bodů. Kolik trojúhelníků má vrcholy v těchto devíti bodech?

Je osm typů (neshodných z trojúhelníků. Zakreslete je a udejte kolik je trojúhelníků každého typu.

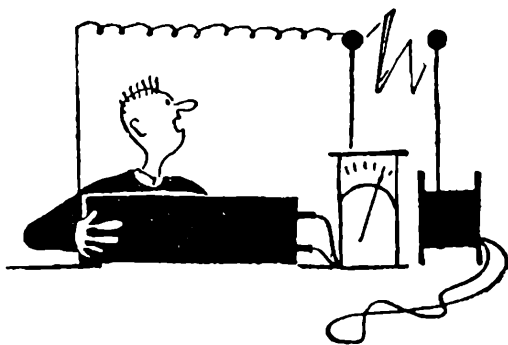
(P o z n á m k a. Všech trojic různých bodů je 84.)

5. Body A, B, C, D dělí kružnici $k \equiv (S, r)$ na čtyři oblouky, jejichž délky jsou v poměru

$$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} : \widehat{DA} = 1 : 2 : 4 : 5.$$

Přímky AD, BC se protnou v bodě Q . Vypočtěte vzdálenost QB a QD .

6. Lichoběžník $ABCD$ má úhlopříčky AC, BD , které mají tutéž délku a půlí úhly při základně AB . Dokažte, že platí $BC = CD = DA$ a sestrojte tento lichoběžník, je-li dáno $AB = a, \sphericalangle ACB = 90^\circ$.



FO

Sedmý ročník soutěže Fyzikální olympiády

Žákům středních všeobecně vzdělávacích a odborných škol.

Ministerstvo školství a kultury pořádá ve školním roce 1965/66 s Jednotou československých matematiků a fyziků a s Československým svazem mládeže sedmý ročník soutěže Fyzikální olympiády (FO).

Pokyny pro žáky soutěžící ve čtyřech kategoriích budou obsaženy ve dvou letácích, pro kategorie A, B, C a pro kategorii D, jež vydá na počátku školního roku Státní pedagogické nakladatelství a které budou rozeslány na školy.

Řešené úlohy prvního kola odevdají soutěžící žáci svému učiteli fyziky v těchto termínech:

1. V kategorii A, B, C: úlohu první až třetí do 30. listopadu 1965, úlohu čtvrtou až šestou do 10. ledna 1966 a úlohu sedmou až devátou nejpozději do 15. února 1966.

2. V kategorii D: úlohu první až třetí do 30. listopadu 1965, úlohu čtvrtou až šestou do 31. ledna 1966 a úlohu sedmou až devátou nejpozději do 31. března 1966.

Ústřední výbor Fyzikální olympiády přeje všem soutěžícím žákům hodně zdaru v soutěži.

Použití transfigurace odporového trojúhelníka na hvězdu při řešení elektrických obvodů

MILAN RÁDL, Plzeň

Téma k prostudování pro první kolo sedmého ročníku FO v kategorii A

Řešením elektrického obvodu rozumíme obvykle úlohu určit z daných hodnot odporů a napětí v obvodu velikosti a směry proudů v jednotlivých větvích. Při řešení úlohy používáme Kirchhoffových zákonů (viz brožura III. ročník fyzikální olympiády, studijní text pro kat. A). U složitějších obvodů je výpočet někdy zdouhavý, a proto bývá

výhodné zjednodušit úlohu tím, že postupně nahrazujeme jisté části obvodu neobsahující zdroj útvary jednoduššími. Mezi takové úpravy patří např. náhrady sériově, či paralelně zapojených odporů odporem výsledným, při nichž používáme těchto známých pouček:

a) Dva sériově zapojené odpory R_1, R_2 lze nahradit výsledným odporem

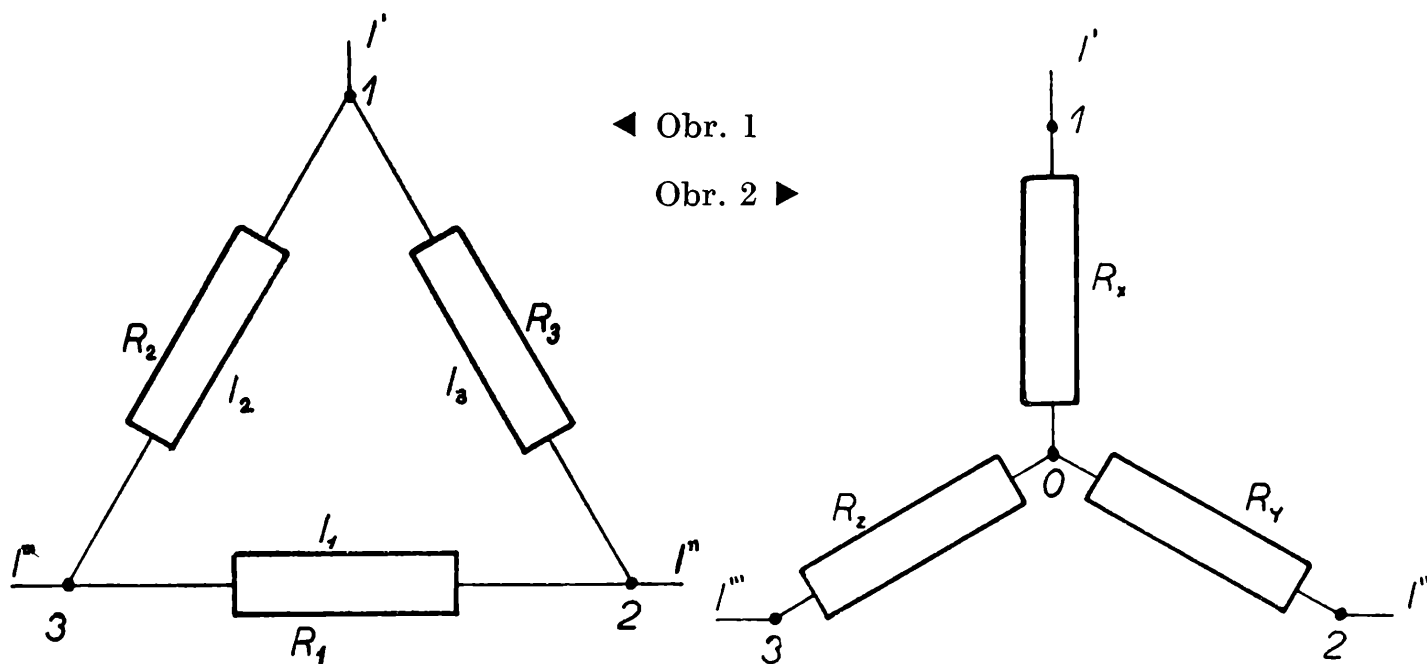
$$R = R_1 + R_2. \quad (1)$$

b) Dva paralelně zapojené odpory R_1, R_2 nahradíme výsledným odporem

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2)$$

Poslední vztah vyplývá z poučky o sčítání vodivostí paralelně zapojených odporů, tj. z rovnice

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$



K dalším zjednodušujícím úpravám patří nahrazení odporového trojúhelníka hvězdou. Úpravy používáme tam, kde skupina odporů tvoří trojúhelník, který nelze předchozími úpravami převést na jednodušší útvar. Problém ukazuje obr. 1.

Do uzlů 1, 2, 3 přitékají (případně odtékají) proudy I', I'', I''' , které se v uzlech větví tak, že v odporovém trojúhelníku tvořeném odpory R_1, R_2, R_3 tekou příslušnými větvemi proudy I_1, I_2, I_3 podle obrázku.

(Je vhodné označit odpory a uzly tak, aby proti každému odporu ležel stejně označený uzel.)

Dejme si úkol nalézt takové odpory R_x, R_y, R_z , které spojeny na jedné straně do uzlu O a zbývajícími konci připojeny k původním uzlům 1, 2, 3, a h r a d í odpory R_1, R_2, R_3 . Odpory R_x, R_y, R_z jsou podle obr. 2 spojeny do hvězdy $\star$.

Slovem n a h r a d í označujeme, že proudové a napěťové poměry v ostatních částech obvodu (kromě části přeměněné z $\triangle$ na $\star$) zůstanou nezměněny. To znamená, že body 1, 2, 3 protékají stejné proudy I', I'', I''' jako dříve, a i napětí U_{12}, U_{23}, U_{31} mezi uzly zůstanou nezměněna. Všechny tyto podmínky budou splněny, nalezneme-li takové hodnoty odporů R_x, R_y, R_z , že výsledné odpory mezi body 12, 23, 31 (označíme je R_{12}, R_{23}, R_{31}) zůstanou po přeměně trojúhelníka na hvězdu nezměněny.

V zapojení do hvězdy jsou R_x a R_y spolu spojeny v sérii, a proto platí podle vztahu (1)

$$R_{12} = R_x + R_y.$$

V původním zapojení byl mezi body 1 a 2 zařazen v jedné větvi odpor R_3 a v paralelní větvi ještě odpor $R_1 + R_2$. Výsledný odpor tedy podle vztahu (2) byl

$$R_{12} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Z podmínky rovnosti odporů vychází

$$R_x + R_y = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3)$$

a analogicky

$$R_y + R_z = \frac{(R_2 + R_3) R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4)$$

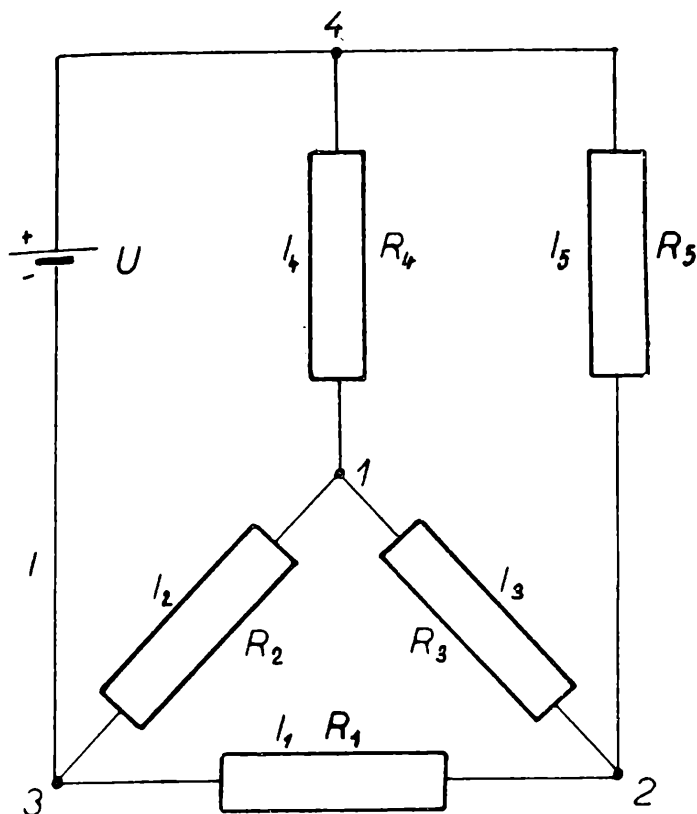
$$R_z + R_x = \frac{(R_3 + R_1) R_2}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (5)$$

Sečteme-li levé i pravé strany rovnic (3), (4), (5) a výslednou rovnici dělíme 2, dostaneme po úpravě

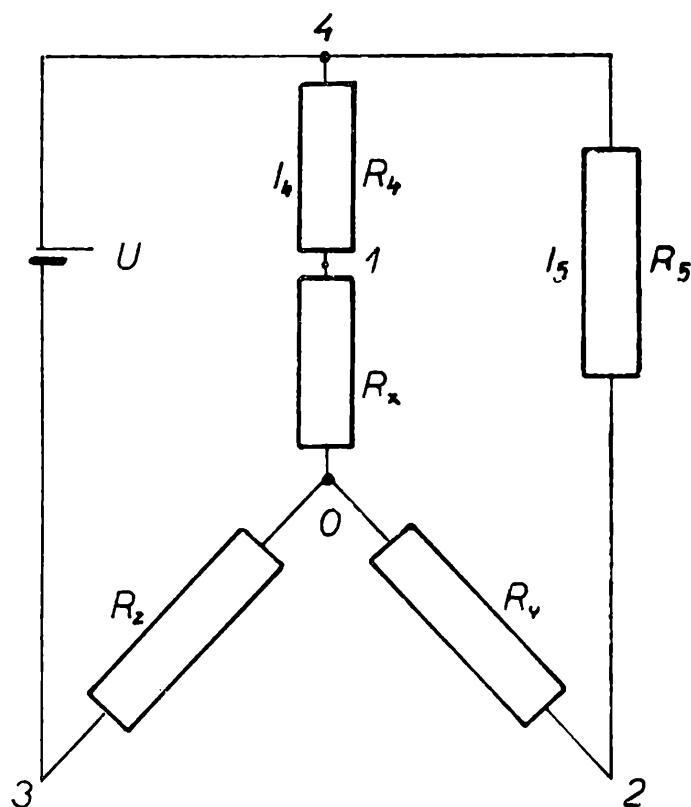
$$R_x + R_y + R_z = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (6)$$

Dosadíme-li do rovnice (6) postupně hodnoty odporů $R_x + R_y, R_y + R_z, R_z + R_x$ ze vztahů (3), (4), (5) dostaneme po úpravě hledané hodnoty náhradních odporů

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, R_y = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}, R_z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (7)$$



Obr. 3



Obr. 4

Ukážeme si užití odvozených vztahů na úlohách:

1. V obvodu naznačeném na obr. 3 je svorkové napětí zdroje $U = 26 \text{ V}$ a jednotlivé odpory jsou $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 17 \Omega$, $R_5 = 3 \Omega$. Určíme velikosti a směry proudů tekoucích jednotlivými odpory, napětí na odporech a celkový proud I odebíraný ze zdroje. Řešení úlohy pomocí Kirchhoffových zákonů by vedlo k soustavě šesti rovnic o šesti neznámých. Vyřešíme úlohu postupným zjednodušováním obvodu.

Trojúhelník odporů R_1 , R_2 , R_3 , jehož vrcholy tvoří uzly 1, 2, 3, nahradíme hvězdou R_x , R_y , R_z podle obr. 4. Z odvozených vztahů (7) obdržíme

$$R_x = 3 \Omega, \quad R_y = 2 \Omega, \quad R_z = 1,2 \Omega.$$

Z obr. 4 je zřejmé, že lze provést další zjednodušení, a to podle obr. 5, přičemž náhradní odpory jsou

$$R_6 = R_x + R_4 = 20 \Omega, \quad R_7 = R_y + R_5 = 5 \Omega.$$

Paralelně zapojené odpory R_6 , R_7 můžeme nahradit podle vztahu (2) odporem $R_8 = 4 \Omega$, který spolu s odporem R_z dá nakonec výsledný náhradní odpor celého obvodu $R = R_8 + R_z = 5,2 \Omega$.

Proud I odebíraný ze zdroje je tedy $I = \frac{U}{R} = 5 \text{ A}$.

Nyní již snadno postupně získáme opakovaným použitím Ohmova zákona všechna napětí a proudy. Postupujeme opačně, tj. od schémat jednodušších zpět ke schématu původnímu.

Napětí U_z na odporu R_z je $U_z = R_z I = 6 \text{ V}$. Na paralelních odporech R_6 , R_7 je napětí $U_6 = U_7 = U - U_z = 20 \text{ V}$. Příslušné proudy jimi tekoucí jsou

$$I_6 = \frac{U_6}{R_6} = 1 \text{ A}, \quad I_7 = \frac{U_7}{R_7} = 4 \text{ A}.$$

Tím jsme vypočítali i proudy I_4 , I_x , I_5 , I_y tekoucí odpory R_4 , R_x , R_5 , R_y .

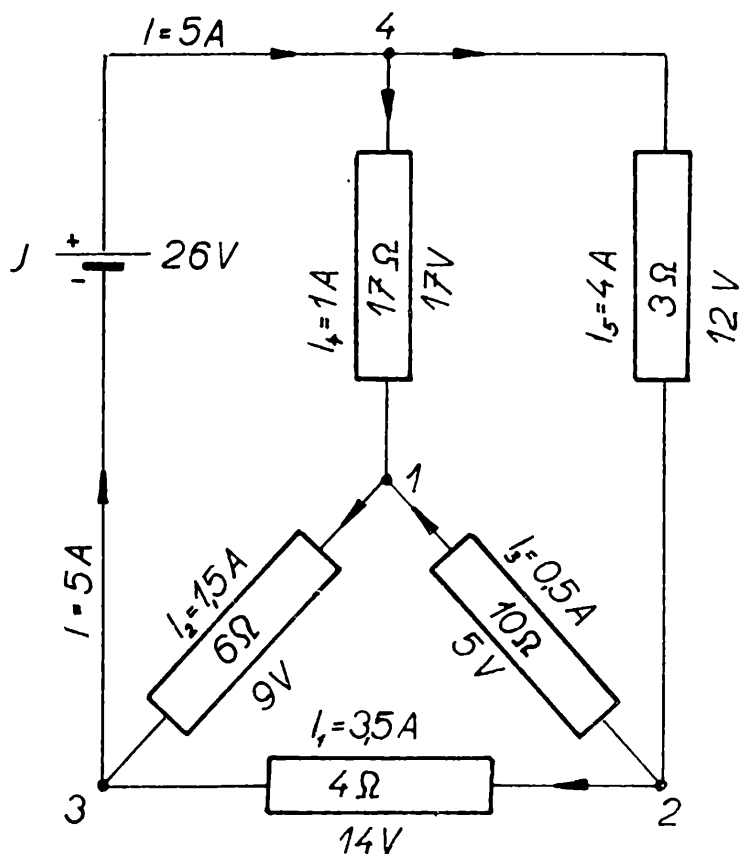
Porovnáme-li obr. 4 a 5 dostáváme $I_4 = I_x = I_6 = 1 \text{ A}$, $I_5 = I_y = I_7 = 4 \text{ A}$. Napětí $U_4 = R_4 I_4 = 17 \text{ V}$, $U_5 = R_5 I_5 = 12 \text{ V}$.

Použitím dvou posledních výpočtů zjistíme z obr. 3, že postoupíme-li z bodu 4 před odpor R_4 do bodu 1, klesne potenciál o 17 V , postoupíme-li z téhož bodu 4 přes odpor R_5 do bodu 2, klesne potenciál pouze o 12 V . Bod 2 má tedy o 5 V vyšší potenciál než bod 1 ($U_3 = 5 \text{ V}$) a odporem

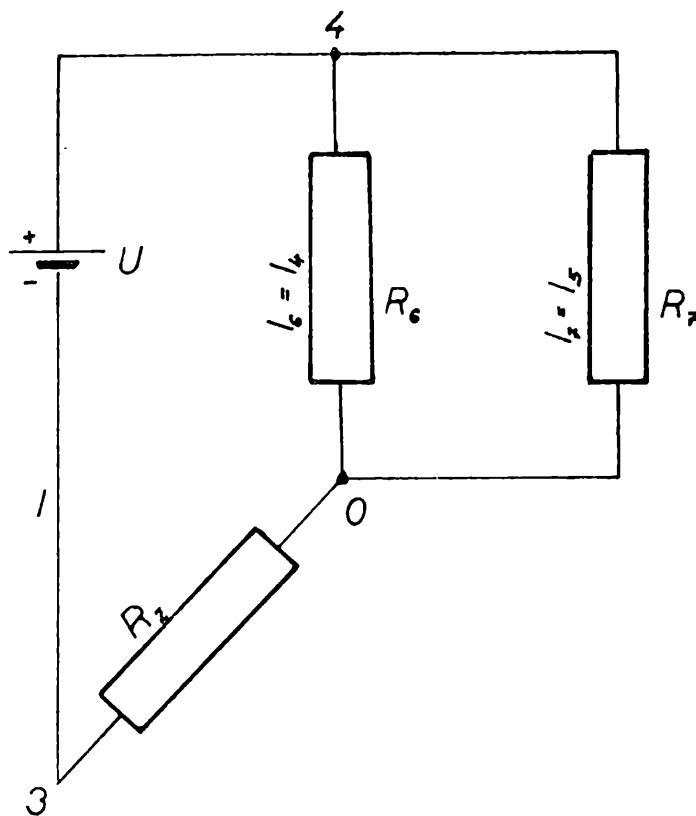
R_3 teče proud $I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 0,5 \text{ A}$ směrem od bodu 2 k bodu 1.

Podobnými úvahami určíme na odporu R_2 napětí $U_2 = 9 \text{ V}$ a na odporu R_1 napětí $U_1 = 14 \text{ V}$. Příslušné proudy jsou $I_2 = 1,5 \text{ A}$, $I_1 = 3,5 \text{ A}$.

Obr. 5



Obr. 6



Úplné řešení dává obr. 6.

Ukážeme ještě, jak by se úloha řešila užitím Kirchhoffových zákonů. Při označení proudů a jejich směrů podle obr. 6 dostáváme soustavu rovnic

$$\left. \begin{array}{l} I_4 + I_3 - I_2 = 0 \\ I_5 - I_1 - I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 - I = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} R_4 I_4 + R_2 I_2 = U \\ R_5 I_5 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0 \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \end{array} \quad (8)$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že vypočítané proudy této soustavy vyhovují.

K soustavě rovnic (8) je ještě nutno dodat, že směry proudů (označené šipkami), potřebné k sestavení rovnic (8), je možno volit libovolně. Volba směru má vliv na znaménka v soustavě rovnic. Vyjde-li při výpočtu pro některý z proudů záporná hodnota, pak teče tento proud opačným směrem, než je označeno na obrázku.

2. Metodou transfigurace můžeme zjednodušovat i obvody střídavého proudu, v nichž kromě odporů jsou indukance a kapacitance. Výpočty bývají ovšem značně komplikovanější, neboť je nutno pracovat s komplexními čísly. Tato tzv. metoda symbolického počtu byla vyložena ve studijních textech pro kategorii A v šestém ročníku FO v časopise Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 43, 1964/65, čís. 2 a 3.

Při této symbolické metodě se odpory vyjadřují číslem reálným (např. $R = R = 4\Omega$), zatím co indukance X_L a kapacitance X_C čísla ryze imaginárními $X_L = L\omega j$, $X_C = \frac{1}{C\omega j} = -\frac{j}{C\omega}$, kde j značí imaginární jednotku, pro kterou platí $j^2 = -1$, L je vlastní indukčnost cívky, C kapacita kondenzátoru a ω je úhlový kmitočet střídavého proudu. S takto zavedenými odpory pracujeme podle dříve uvedených pravidel. Postup při řešení úlohy ukážeme opět na obvodu sestaveném podle obr. 3, v němž však budeme předpokládat zdroj střídavého napětí $U = 26 \text{ V}$. Místo odporu R_1 je zařazena indukance $X_L = 4j\Omega$, místo odporu R_3 je kapacitance $X_C = -10j\Omega$. Ostatní odpory jsou stejné jako v původní úloze. Je tedy celkem dáno

$$U = 26 \text{ V}, X_L = 4j\Omega, R_2 = R_2 = 6\Omega, X_C = -10j\Omega, \\ R_4 = R_4 = 17\Omega, R_5 = R_5 = 3\Omega.$$

Máme stanovit impedanci Z obvodu a proud I . Postupovat budeme stejně jako v úloze 1., tj. nahradíme trojúhelník X_L, R_2, X_C hvězdou Z_x, Z_y, Z_z .

$$Z_x = \frac{R_2 X_C}{X_L + R_2 + X_C} = \frac{-60j}{6 - 6j} \Omega = -\frac{10j}{1 - j} \Omega = \\ = \frac{10j(1 + j)}{2} \Omega = (5 - 5j) \Omega.$$

Obdobně obdržíme po úpravách

$$\mathbf{Z}_y = \frac{\mathbf{X}_L \mathbf{X}_C}{\mathbf{X}_L + \mathbf{X}_C + \mathbf{R}_2} = \left(\frac{10}{3} + \frac{10}{3} j \right) \Omega$$

Další náhradní odpory jsou

$$\mathbf{Z}_z = \frac{\mathbf{X}_L \mathbf{R}_2}{\mathbf{X}_L + \mathbf{R}_2 + \mathbf{X}_C} = (-2 + 2 j) \Omega$$

$$\mathbf{Z}_6 = \mathbf{Z}_x + \mathbf{R}_4 = (22 - 5 j) \Omega; \quad \mathbf{Z}_7 = \mathbf{Z}_y + \mathbf{R}_5 = \left(\frac{19}{3} + \frac{10}{3} j \right) \Omega;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_8 &= \frac{\mathbf{Z}_6 \mathbf{Z}_7}{\mathbf{Z}_6 + \mathbf{Z}_7} = \frac{(22 - 5 j) \frac{1}{3} (19 + 10 j)}{\frac{1}{3} (85 - 5 j)} \Omega = \frac{468 + 125 j}{85 - 5 j} \Omega = \\ &= \frac{(468 + 125 j) (85 + 5 j)}{7225 + 25} \Omega = (5,4 + 1,8 j) \Omega; \end{aligned}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_8 + \mathbf{Z}_z = (3,4 + 3,8 j) \Omega$$

Absolutní hodnota výsledného odporu udává velikost impedance obvodu, takže

$$Z = |\mathbf{Z}| = \sqrt{3,4^2 + 3,8^2} \Omega = 5,1 \Omega.$$

Proud

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{26}{5,1} \text{ A} = 5,1 \text{ A}.$$

Fázový posun φ mezi proudem a napětím je dán vztahem $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3,8}{3,4} = 1,1176$. Proud se opožďuje za napětím o $\varphi = 48^\circ 10' = 0,84 \text{ rad}$.

PROBLÉM DVOU SVÍČEK

Dvě svíčky téže délky mají tu vlastnost, že první shoří celá za 3 hodiny, druhá za 5 hodin.

a) Za jakou dobu po jejich současném zapálení byly pořízeny jejich fotografie, na nichž se jeví délky svíček v poměru 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4?

b) Jestliže první z obou svíček byla zapálena půl hodiny po druhé

svíčke, kdy budou délky svíček v poměru 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4?

Podle maďarského časopisu
Középiskolai Matematikai Lapok
upravil O. S.

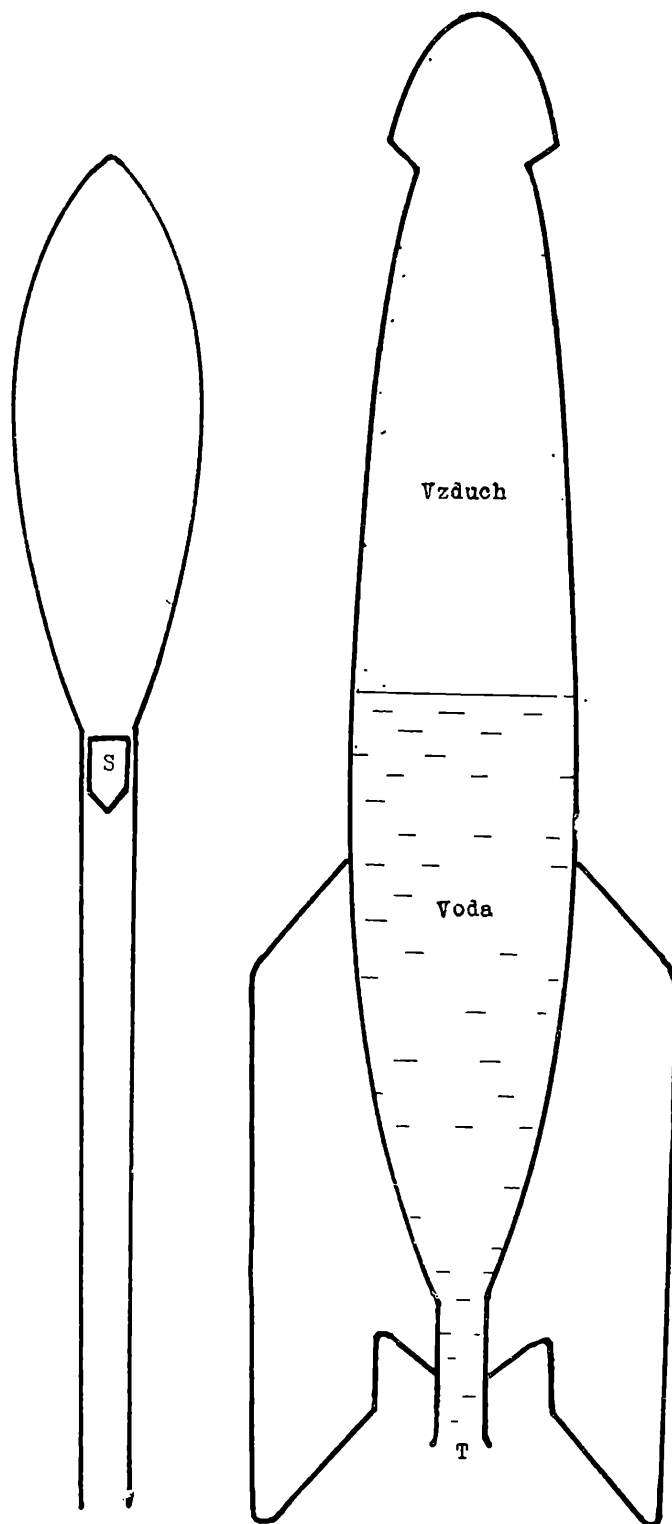
Řešení mladých řešitelů přijímá redakce do 6 týdnů po vyjití tohoto čísla.



Potřel jsem zákon zachování energie



řekl Jirka a předvedl mi to. Vzal model rakety, který se prodává jako hračka a provedl s ním dva pokusy. Jednou naplnil jeho dutinu z poloviny vodou a nad vodu nahustil hustilkou vzduch (obr. 1). Po uvolnění rakety voda prudce vystříkla tryskou *T* a raketa vylétla do výše asi 20 až 30 m. Podruhé nahustil do prázdné rakety jen vzduch na přibližně stejný tlak jako v předešlém případě. Raketa však nevylétla ani do výše 1 m. „Tak prosím,“ Jirka na mne vítězo-slavně pohlédl. „Když tam byla voda, bylo tam vzduchu jen polovina a protože byl vzduch stlačen stejně jako v druhém případě, byla jeho potenciální tlaková energie poloviční. A přesto raketa vyletěla snad 30krát výše a měla v prvním případě v nejvyšší poloze 30krát větší polohovou energii než při druhém pokuse, ne?“ A když jsem vyslovil souhlas, pokračoval: „Kam se tedy poděla energie stlačeného vzduchu v druhém případě?“



Uznal jsem, že případ zaslouží trochu úvahy. Jirka uvažoval takto: Potenciální energie stlačeného vzduchu je rovna $W_p = p \cdot V$, kde p je přetlak vzduchu a V jeho objem v nádrži rakety. Tuto energii jsme dodali hmotě vzduchu při stlačování pomocí hustilky. Při otevření trysky přechází tato potenciální energie na kinetickou energii tělesa rakety a pohonných látek, proudících tryskou. Proudí-li z rakety voda, odnáší s sebou velký podíl celkové energie, neboť její hmota je s hrubým přiblížením stejná jako hmota tělesa rakety. Proudí-li z naší rakety pouze vzduch, přechází na vzduch jen malý podíl z celkové energie, protože hmota vzduchu je napatrná vzhledem k hmotě rakety. A protože potenciální energie stlačeného vzduchu je v tomto případě dvakrát větší než při pokusu s vodou (neboť vzduch má dvojnásobný objem a tlak p je přibližně stejný), měla by raketa vzlétnout v tomto druhém případě mnohem výše. Ale raketa zůstala téměř při zemi. Potenciální energie stlačeného vzduchu kamsi záhadně zmizela.

Naším úkolem je rozhodnout, zda tato Jirkova úvaha je správná. Úkol přenecháme zatím našim čtenářům. Řešení však by bylo dosti obtížné, kdybychom je prováděli za přirozených podmínek děje. Při činnosti „raketového motoru“ se totiž mění tlak vzduchu, a tím se mění i rychlost unikající tekutiny z trysky. Proto si úkol zjednodušíme. Nahradíme si naši raketu jinou, která má místo trysky hlaveň, po celé délce stejného průřezu (obr. 2). Proudící tekutinu nahradíme střelou S , která má v prvním případě hmotu rovnou

hmotě vody, ve druhém případě hmotě vzduchu, který vyproudí z rakety. Přitom budeme počítat jen se vzájemnou akcí a reakcí střely a tělesa rakety a zanedbáme vlastní účinek vzduchu, jehož tlak způsobí vystřelení náboje z rakety. Dalším důležitým předpokladem bude, že všechna tlaková energie stlačeného vzduchu se přenese na střelu a raketu. Počítáme s těmito hodnotami: objem dutiny rakety $V = 0,2 \text{ dm}^3$; hmotnost tělesa rakety $m_1 = 0,05 \text{ kg}$; hmotnost střely v 1. případě $m'_2 = 0,1 \text{ kg}$ (tj. je rovna hmotnosti vody v raketě při skutečném pokuse); hmotnost střely v 2. případě $m''_2 = 0,0005 \text{ kg}$ (tedy je rovna zhruba hmotnosti vzduchu objemu $0,2 \text{ dm}^3$ stlačeného na 2 atmosféry). Určíme tyto hodnoty:

1. rychlost tělesa rakety a rychlost střely v obou případech v okamžiku, kdy náboj S opouští hlaveň;

2. kinetickou energii tělesa rakety a střely v obou případech;

3. výšku výstupu rakety v obou případech.

Pokyn k řešení. Užijte se zákona zachování hybnosti $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$ a zákona zachování energie $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = 2 W_p$, kde $W_p = p V$ je potenciální energie stlačeného vzduchu pro $p = 2 \text{ at}$. Výšku výstupu rakety počítáme jako výšku výstupu tělesa při svislém vrhu vzhůru, tj. ze vztahu $h = \frac{v^2}{2g}$, kde

v je počáteční rychlost tělesa a g tíhové zrychlení ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

V příštím čísle uvedeme řešení a čtenáři si mohou s ním srovnat svou úvahu.

E. K.

Inž. Jiří Machalický, ČVUT, Praha

J A N M A R E K

(Joanes Marcus Marci)

(1595 — 1667)

Jan Marek patří k těm velkým českým mužům, jejichž život a dílo není všeobecně známo. Jeho význam pro českou vědu nebyl zatím dostatečně zhodnocen a zveřejněn. Svědčí o tom i ta skutečnost, že až na některé výjimky¹⁾ nedostala se do našich učebnic fyziky ani životopisná data a stručný nástin nejdůležitějších výsledků jeho práce z oboru mechaniky a optiky.

Jan Marek se narodil 13. června 1595 v Lanškrouně. Školu navštěvoval v Litomyšli, jezuitské gymnasium v Jindřichově Hradci a jako výborný student byl přijat na jezuitskou kolej v Olomouci, kde studoval nejprve filosofii a teologii; zde nabyl důkladného školení v dialektice. Vzhledem k trvalé oční chorobě přerušil theologická studia a odebral se na pražskou universitu, kde se s podporou hraběte Zdeňka Vojtěcha z Lobkovic věnoval studiu přírodních věd a medicíny. Současně studoval matematiku, zvláště geometrii, v níž dokonce samostatně pracoval. Studoval také cizí řeči, z nichž ovládl ve značné míře jazyk francouzský, italský, španělský, arabský, a hebrejský. Tato rozsáhlá studia ukončil ve svých třiceti letech, dosáhnuv nejprve hodnosti magistra věd a filosofie a na základě disertace vydané tiskem doktorátu lékařství. Jeho mimořádné schopnosti a hluboké vzdělání předurčily jej pro vynikající postavení. Již v r.

1626 se stal „fyzikem království českého“ a v několika letech mimořádným a řádným profesorem na lékařské fakultě. Byl také osobním lékařem císaře Ferdinanda III., kterému věnoval své první velké dílo „De proportionibus motus“. Kromě toho se osvědčil jako praktický lékař zvláště za svého pravidelného působení v Karlových Varech.

Za své zásluhy, hlavně za organizování a vedení studentské legie při obraně Prahy proti Švédům, byl později odměněn dalšími poctami. Byl jmenován císařským radou, povýšen do stavu vladyckého a zemanského s přídomkem z Lanškrouna. Roku 1662 byl zvolen rektorem pražské university a děkanem lékařské fakulty.

Z oboru fyziky jsou nejcennější dvě práce, a to studie o rázu těles z r. 1639, a výklad rozkladu bílého světla hranolem, uveřejněný r. 1648 ve spise „De arcu coelesti“ (O nebeském oblouku). Newton popsal rozklad světla ve své optice, která vyšla až r. 1666, tedy o 18 let později.

V sedmdesáti letech opouští Jan Marek svou veřejnou činnost hlavně pro slábnoucí zrak. Jeho život naplněný vynikající prací skončil 10. dubna 1667.

Podrobný seznam publikací Jana Marka lze najít např. v monografii J. Smolíka „Jan Marek Marci a jeho spisy“, Praha 1871, nebo ve vydaném slavnostním projevu J. Studničky „Joanes Marcus Marci a Cronland, sein Leben und gelehrtes Wirken, Praha 1891. Modernější jsou práce Baumanovy a Jiřího Marka.

¹⁾ viz např. Záviška: Mechanika, JČMF Praha 1933, str. 345; Horák, Krupka, Šindelář: Technická fyzika, str. 350, 341, 1235

Kursy výpočetní techniky Čs. vědecko-technické společnosti

Aby bylo možno vyhovět stále vzrůstajícímu zájmu pracovníků nejrůznějších oborů o školení ve výpočetní technice, zavádí ÚR ČSVTS tento stavebnicový systém kursů:

Dálkové kursy. Poskytují přehlednou formou ucelenou znalost ve třech základních směrech výpočetní techniky, a to formou poštou zasílaných učebních textů a pomůcek; formou kontrolních úloh a opravovaných odpovědí a pomocí široké sítě zajímavých exkursí v celé ČSSR.

Směr M — Mechanizace administrativních prací stroji na děrné štítky. Vhodný pro ekonomy všech druhů — předběžné vzdělání se nevyžaduje.

Směr A — Automatizace technických výpočtů analogovými počítači. Vhodný pro techniky všeho druhu. Předpokládá se střední nebo vysoká škola technického směru.

Směr D — Číslíkové samočinné počítače. Vhodný pro ekonomy a techniky všeho druhů, zejména pro absolventy směru M nebo A, kterým poskytne ucelený přehled. Předpokládá se středoškolské vzdělání. Přihlášky ze všech míst ČSSR přijímá (jen písemně) komise pro automatizaci ÚR ČSVTS, Praha 1, Široká 5.

Pokračovací kursy (docházkové). Navazují na jednotlivé směry dálkových kursů; absolvent se stane programátorem příslušného druhu počítačů. Při ukončení kursu je možno složit kvalifikační zkoušku, při níž se požaduje látka z dálkového i pokračovacího kursu n a j e d n o u. Úspěšným složením zkoušky získává absolvent kvalifikační osvědčení opravňující k výkonu příslušných funkcí:

z kursu MEPRO (64 hod.) „O r g a n i z á t o r a p r o j e k t a n t m e c h a n i z o v a n é e v i d e n c e“,

z kursu ANAL (32 hod.) „P r o g r a m á t o r a n a l o g o v ý c h p o č í t a č ů“,

z kursu DIPRO (64 hod.) „P r o g r a m á t o r č í s l í c o v ý c h s a m o č i n n ý c h p o č í t a č ů“.

Přihlášky přijímají pořádající orgány v jednotlivých krajích:

D o m y t e c h n i k y Č S T V S:

Praha I, Gorkého 23;

Ústí n. L., Velká Hradební 2;

Pardubice, Nábř. čs. armády 1556;

Brno, Výstaviště BVV 1;

Ostrava, Revoluční 18;

Bratislava, Kocelova 17;

Žilina, Hliny;

Košice, Gen. Petrova 1.

K r a j s k é r a d y Č S V T S:

Č. Budějovice, Nám. 1. máje;

Plzeň, Nádražní 28.

Plánované zahájení jednotlivých běhů

M (dálkový)	1. 3. 66	MEPRO	1. 10. 65 a 1. 10. 66
A (dálkový)	1. 3. 66	ANAL	1. 2. 66 a 1. 10. 66
D (dálkový)	1. 3. 66	DIPRO	1. 10. 66 a 1. 10. 67.

Při korespondenci se odvolejte na toto oznámení v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

M. M.

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

nepřesnost
nepřímo úměrně
nepřítomnost
nerovnost
nerozložitelný
neřešitelná soustava
nesmysl
nesouměřitelné veličiny
nesprávně
nevlastní

nevyskytnutí se
nezávislost
nezávislý
nezkratitelný zlomek
neznámá x
několikrát
nikdy
normála
normální
normální tvar kvadratické rovnice
 n -stěn
nula
numerický
nutné a stačí
nutně
 n -úhelník

неточность, погрешность
обратно пропорционально
отсутствие
неравенство
неприводимый
несовместная система
абсурд
несоизмеримые величины
неверно, неправильно, ошибочно
несобственный, бесконечно удален-
ный
отсутствие
независимость
независимый
несократимая дробь
неизвестная x
целое число раз
никогда
нормаль, $\hat{z}$.
нормальный, перпендикулярный
приведенное квадратное уравнение
 n -гранник
нуль, $\hat{z}$.
вычислительный
необходимо и достаточно
обязательно
 n -угольник

○

obálka (soustavy křivek)
obdélník
obdržet

огибающая
прямоугольник, прямоугольный па-
раллелограм
получить?

obecně
 obecnost
 obecný
 objem
 objevit
 oblast
 oblouk
 oblouk kruhový
 oblý
 obrat
 obratitelný
 obraz

 obrazec
 obrázek
 obrys
 obsah
 (být) obsažen
 obvod
 očíslovat
 oddělit
 oddíl
 odečítání, odečítat
 odhad
 odhadovat
 odhalit
 odchylka
 odkrýt
 odmocněnec
 odmocnina druhá, třetí, n -tá

 odmocnit, odmocňovat

 odmocnitel
 odmocnitko
 odpovídání si
 odpovídat si
 odstranit závorky
 odvěsna
 odvodit, odvozovat
 odvození
 ohnisko
 ohyb
 okolí bodu
 okrouhlý
 omezit se, omezovat se
 opačný
 operace
 oprava
 orientovaný
 orientovat
 osa x , y , z
 osa úhlu, kvadrantu

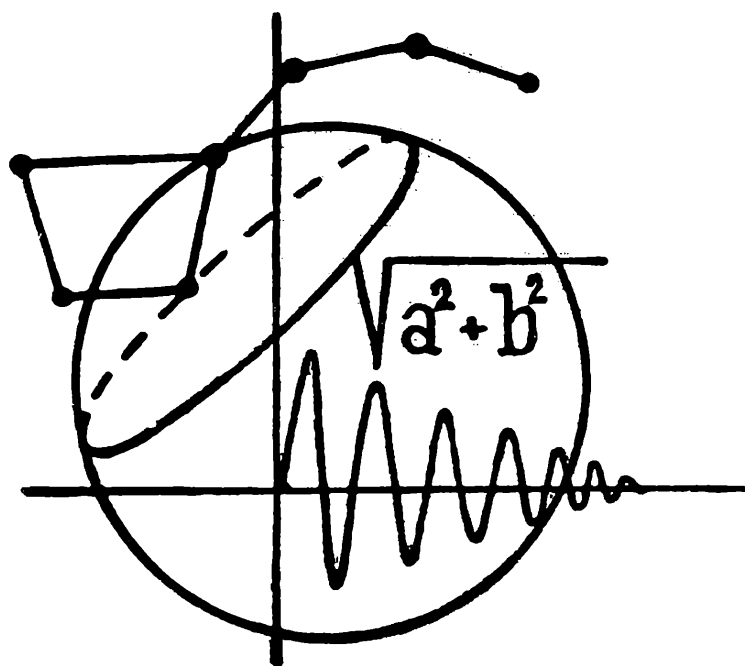
вообще, в общности
 общность
 общий
 объем
 обнаружить
 область
 дуга, аркус
 дуга круга
 круглый
 оборот
 обратимый
 изображение, образ (при геом. изображении)
 фигура, чертеж, картина
 картинка
 очертание
 площадь
 содержаться, заключаться
 периметр
 перенумеровать
 выцелять
 выделять
 раздел
 вычитание, вычитать
 оценка
 оценивать
 обнаружить
 отклонение
 обнаружить
 подкоренное выражение, подкоренное число
 корень квадратный, кубический, n -ой степени
 извлечь, извлекать корень
 показатель корня
 знак радикала
 соответствие
 соответствовать
 раскрыть скобки
 катет
 вывести, выводить
 вывод
 фокус
 изгиб
 окрестность точки
 круглый
 ограничиться, ограничиваться
 противоположный
 действие, операция
 поправка
 направленный, ориентированный
 направить
 ось абсцисс, ординат, аппликат
 биссектриса

(Pokračování)

(Продолжение)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



2

ROČ. 44

1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Říjen 1965

Číslo 2

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PÚ, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

doc. K. Drábek: Konstrukce trojúhelníka daného stranou, příslušnou výškou a poměrem vepsané kružnice (Dokončení)	49
doc. J. Chudý: Determinanty (Pokračování)	52
dr. inž. F. Danielowski, Výmar, NDR: „Sectio aurea“ — Zlatý řez (Dokončení)	58
doc. B. Kepr: O některých křivkách (Pokračování)	65
I. Kraus, Z. Maršák: Poruchy krystalické mříže kovů	69
S. Horák: Co prosíval Eratosthenes Kyrenský na svém sítu	75
S. Horák: Zajímavé součty	76
prof. dr. E. Kašpar: Potřel jsem zákon zachování energie (Dokončení)	77
J. Macháček: VII. mezinárodní matematická olympiáda	80
J. Tesar: Otáčivý pohyb	84
Úlohy k řešení	93
Recenze	95
Redakce hovoří	96
M. Zelenka: Česko-ruský slovník	

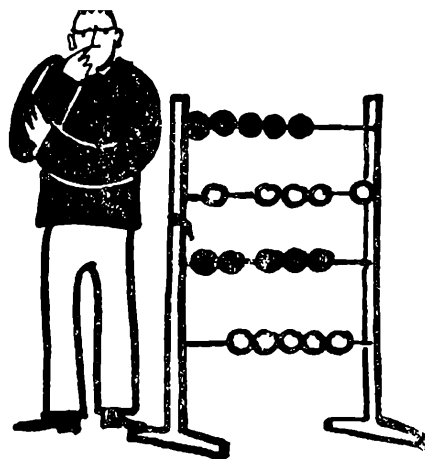
3. a 4. stránka obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Kořal, studující FS.

A-11*51631

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1965.



Konstrukce trojúhelníka

daného stranou, příslušnou výškou a poloměrem vepsané kružnice

DOC. KAREL DRÁBEK, ČVUT, Praha

(Dokončení)

Řešení předložené úlohy provedeme nyní pomocí geometrické metody, tj. vztahy, kterých při sestrojování hledaného trojúhelníka použijeme, budou důsledky určitých geometrických vlastností.

R o z b o r. Pro obsah trojúhelníka platí vzorec

$$P_A = \frac{1}{2} a v_a = \frac{1}{2} \varrho (a + b + c),$$

odkud

$$b + c = \frac{a (v_a - \varrho)}{\varrho} \quad (11)$$

Naši úlohu převedeme tedy na konstrukci trojúhelníka daného stranou a , součtem $b + c$ druhých dvou stran a výškou v_a (obr. 4).

Ke konstrukci provedeme tuto úvahu:

Ve vrcholu B sestrojme polopřímku kolmou na stranu BC (a ležící v polorovině, ve které je náš trojúhelník ABC). Potom na ní stanovme bod D tak, že $BD = 2v_a$. Kružnice opsaná kolem vrcholu A poloměrem $c = AB$ prochází také bodem D a protne polopřímku CA v bodě E .

Označíme-li F průsečík přímky DE s přímkou BC , pak

$$\begin{aligned} \triangle BCE &\sim \triangle ECF \\ \sphericalangle BCE &= \sphericalangle FCE = \gamma, \\ \sphericalangle BEC &= \sphericalangle CFE = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

neboť

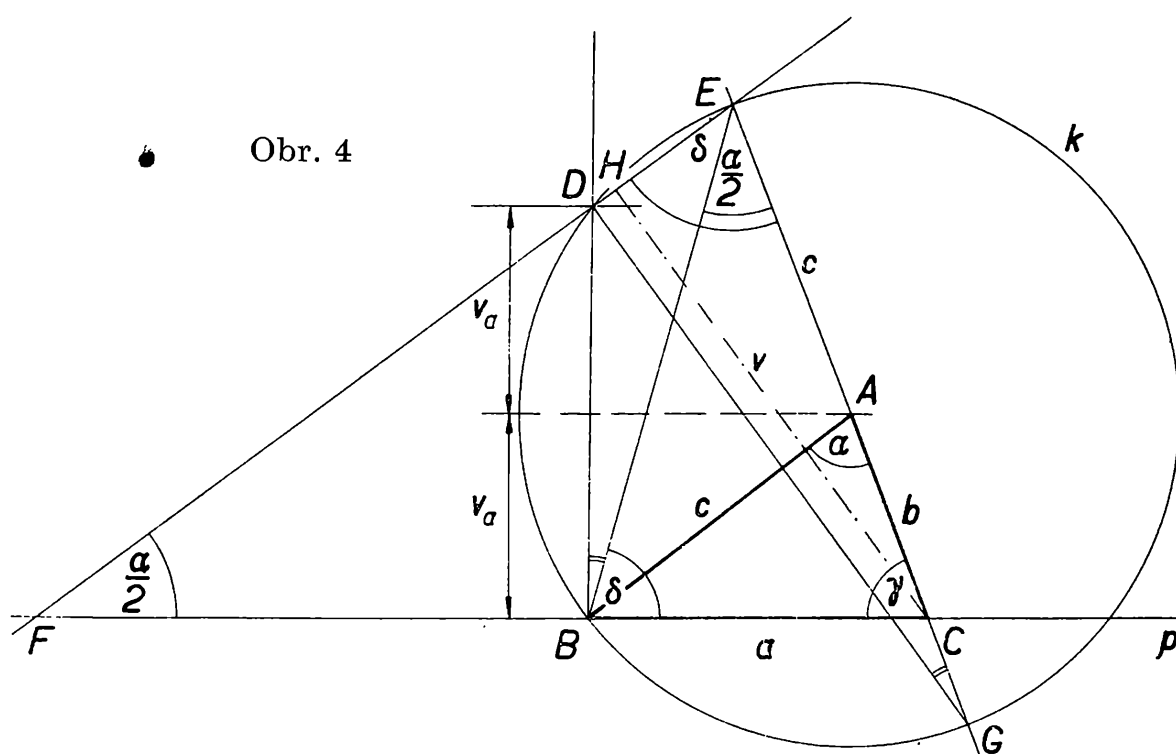
$$\text{Je-li } \delta = \nless CEF, \text{ je}$$

přičemž

kde G je druhý průsečík přímky CE s kružnicí $k(A; c)$, neboť $DG \perp EF$. Protože

je

$$\delta = 180^\circ - \left(\gamma + \frac{\alpha}{2} \right) = \sphericalangle CBE$$



Odtud plyne, že

$$\angle CFE = \frac{\alpha}{2} (= \angle BEC)$$

Z určené podobnosti dostaneme:

$$CF \quad CE = CE \quad BC, \text{ tj. } CF \quad (b + c) = (b + c) \quad a,$$

takže

$$CF = \frac{(b+c)^2}{a} = \frac{a(v_a - \varrho)^2}{\rho^2} \quad (12)$$

K o n s t r u k c e. Na přímce p zvolíme úsečku $a = BC$ a podle (12) určíme úsečku CF $\left[\text{např. tak, že } CF = \frac{au}{\rho}, \text{ kde } u = \frac{(v_a - \varrho)^2}{\rho} \right]$. Při

tom bod F je na polopřímce CB . Pak bod D na kolmici ve vrcholu B , pro který $BD = 2v_a$ spojíme s určeným bodem F a na přímce DF stanovíme bod E tak, že $CE = b + c$ [přičemž $b + c$ je dáno podle (1)].

Potom střed kružnice opsané trojúhelníku BDE je třetím vrcholem sestrojovaného trojúhelníku ABC .

Důkaz plyne z konstrukce, protože sestrojený trojúhelník má požadované určující prvky.

Diskuse. Z podmínky $b + c > a$ plyne ihned po dosazení z (11), že

$$v_a > 2\rho \quad (13)$$

Řešení existuje, je-li $v \leq b + c$ (kde $v = CH$ je vzdálenost vrcholu C od přímky EF), tj. je-li

$$\frac{v}{b + c} = \sin \delta \leq 1$$

Podle sinové věty platí pro trojúhelník BCE

$$\frac{b + c}{a} = \frac{\sin \delta}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

takže po dosazení z (1) a úpravě je

$$\sin \delta = \frac{v_a - \rho}{\rho} \sin \frac{\alpha}{2} \leq 1$$

Z pravoúhlého trojúhelníku BDF dostaneme

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BD}{DF},$$

kde $BD = 2v_a$, $DF = \sqrt{BF^2 + BD^2}$, přičemž

$$BF = CF - BC = \frac{av_a(v_a - 2\rho)}{\rho^2}$$

takže

$$\frac{BD^2}{DF^2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\rho^2}{(v_a - \rho)^2}.$$

Po dosazení za hodnoty BD a DF a úpravě, obdržíme

$$v_a \geq \frac{2a^2\rho}{a^2 - 4\rho^2} \quad (14)$$

s vedlejší podmínkou

$$a^2 > 4\rho^2, \quad \text{tj.} \quad a > 2\rho \quad (15)$$

tj. stejné podmínky jako při použití analytické metody.

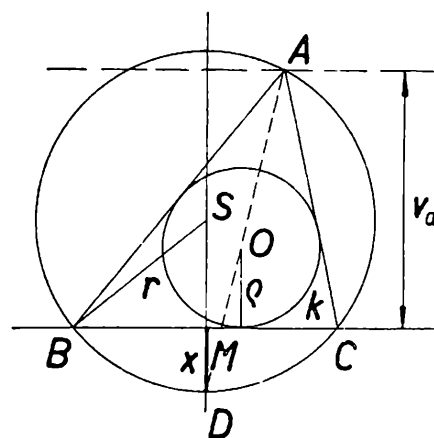
Platí-li tedy ve (14) znaménko nerovnosti, pak $\sin \delta < 1$ ($\alpha < 90^\circ$)

a $v_a < b + c$. Úloha má pak dvě různá řešení, která jsou souměrná podle osy strany BC .

Platí-li tedy ve (14) znaménko rovnosti, je $E \equiv D$, $b = c$ a jediné řešení úlohy je rovnoramenný trojúhelník.

Neplatí-li však vztah (14), pak neexistuje žádné řešení předložené úlohy [neboť neexistuje také (reálný) úhel δ takový, aby jeho sinus byl větší než 1].

Řešení této úlohy lze provést také tak, že stanovíme (obr. 5) bod D kružnice opsané hledanému trojúhelníku. Bod D je na ose souměrnosti strany BC a na opsané kružnici v polorovině určené přímkou BC a ne-



Obr. 5

obsahující vrchol A trojúhelníka. Pak je $DM = x = \frac{\rho^2}{v_a - 2\rho}$, kde M je střed strany BC (viz článek K. Drábka a J. B. Pavlíčka, Řešení úlohy z konstrukcí trojúhelníka. Rozhledy (41), 1962—63, str. 104—107). Tím dostaneme pro opsanou kružnici její třetí bod D . Další postup je již zřejmý z obr. 3. Při určování podmínek řešitelnosti dostaneme ze vztahu $r + MS \geq v_a$, kde S je střed opsané kružnice, a tedy $MS = r - x$, tytéž podmínky jako dříve při použití analytické geometrie, nebo při výše uvedené konstrukci.

Determinanty (Pokračování)

DOC. JAROSLAV CHUDÝ, ČVUT, Praha

2. Determinant 3. stupně

Pomocí determinantu 2. stupně budeme nyní definovat determinant 3. stupně. Uvažujme schéma složené z 9 ($= 3^2$) prvků a_{ik} , $i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$, napsaných do tří řádků a tří sloupců, které nazveme determinantem 3. stupně

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Před vlastní definicí zavedeme ještě dva pojmy:

Subdeterminantem D_{ik} v determinantu (7), přidruženým k prvku a_{ik} nazveme determinant (2. stupně) vzniklý z daného determinantu (8) vynecháním i -tého řádku a k -tého sloupce (těch řad, které se kříží v prvku a_{ik}).

Doplňkem A_{ik} přidruženým k prvku a_{ik} v determinantu (8) nazveme subdeterminant D_{ik} opatřený znaménkem $(-1)^{i+k}$, tj. $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$.

Tak např.

$$D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; \quad D_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31} = D_{31}, \text{ atd.}$$

Nyní lze již vyslovit definici.

Definice 1. Determinantem 3. stupně, vyjádřeným symbolem (8), rozumíme číslo rovné součtu tří součinů vzniklých tak, že prvky jedné libovolně vybrané, řady (řádku či sloupce), znásobíme jejich doplňky.

Tomuto vyjádření determinantu 3. stupně pomocí determinantů 2. stupně říkáme *rozvoj determinantu podle zvolené řady*.

Vyslovenou definici je ovšem třeba doplnit v tom smyslu, že musíme ukázat nezávislost výsledku na volbě řady. Ukážeme to jen třeba pro první řádek a druhý sloupec (pro zbývající čtyři řady ukažte sami). Tak rozvojem podle 1. řádku dostáváme

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Rozvoj podle druhého sloupce dává

$$\begin{aligned} D &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{32}a_{11}a_{23} + a_{32}a_{12}a_{21}, \end{aligned}$$

tedy týž výsledek (až na pořadí) jako dříve.

Všimněte si ještě, jak lze mechanicky určovat znaménka doplňků. Začneme-li od prvku a_{11} , k němuž doplněk je opatřen znaménkem $+$, znaménka se střídají

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Úplně analogicky bychom mohli pomocí determinantů 3. stupně definovat determinant 4. stupně, pomocí jich determinant 5. stupně atd., až pomocí determinantu $(n-1)$ stupně definovat determinant n -tého stupně. Potíž by spočívala v důkazu nezávislosti na volbě řady, podle níž determinant rozvinujeme.

Jako příklad spočtěme

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

Rozvojem třeba podle třetího řádku dostáváme

$$D = 5 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 100$$

Rozvojem podle třetího sloupce dostáváme též výsledek

$$D = -5 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 100$$

Pro výpočet determinantů třetího stupně užíváme často *Sarrusova pravidla*, které spočívá v tom, že pod daný determinant sepíšeme ještě znovu jeho první a druhý řádek

$$\begin{array}{ccccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ - & a_{31} & a_{32} & a_{33} & + \\ - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \end{array}$$

nyní sestrojíme součiny prvků na spojnicích zleva doprava dolů a opatříme znaménkem +, pak součiny prvků na spojnicích zprava dolů a opatříme znaménkem -; součet těchto součinů je rovný danému determinantu. Odůvodnění plyne ihned srovnáním získaného výrazu

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

s rozvojem podle některé řady.

Tak např. pro determinant již počítaný máme

$$D = 3 \cdot (-3) \cdot (-3) + 4 \cdot (-4) \cdot (-5) + 5 \cdot 2 \cdot 2 - (-5) \cdot (-3) \cdot 5 - 2 \cdot (-4) \cdot 3 - (-3) \cdot 2 \cdot 4 = 27 + 80 + 20 - 75 + 24 + 24 = 100.$$

Zdůrazňuji skutečnost, že toto pravidlo je jediná vlastnost z vlastností determinantu 3. stupně, v tomto článku vyslovených, která neplatí pro determinanty vyšších řádů.

Pro determinanty platí celá řada vlastností. Uvedme a odůvodněme jen některé z nich, totiž ty, které budeme v dalším bezprostředně potřebovat.

Věta 2. Determinant se nezmění, zaměníme-li řádky za sloupce při nezměněném pořadí a naopak — překlopení determinantu kolem hlavní úhlopříčky.

Správnost věty ihned nahlédneme, rozvineme-li původní determinant třeba podle první řádky a překlopený determinant (napište si jej) podle prvního sloupce. Příslušné doplňky jsou tvořeny determinanty 2. stupně překlopené kolem hlavní úhlopříčky a pro ně je věta, jak plyne z komutativního zákona pro násobení, evidentní.

Význam této věty je v tom, že každá vlastnost dokázaná pro řádky,

platí pak i pro sloupce. Proto místo řádků a sloupců užíváme jednotně název *řada determinantu*.

Věta 3. Determinant, jehož dvě rovnoběžné řady jsou stejné (nebo úměrné) je roven nule.

Důkaz. Nechť je to třeba druhý a třetí řádek. V rozvoji determinantu podle prvního řádku budou se jako činitelé vyskytovat determinanty 2. stupně, v nichž oba řádky jsou stejné nebo úměrné a z nichž tedy každý je podle věty 1. roven nule; proto také součet příslušných součinů je roven nule, cbd. K témuž závěru dospějeme i při rovnosti, resp. úměrnosti jiných dvou rovnoběžných řad, rozvedeme-li determinant podle další s nimi rovnoběžné řady.

Věta 4. Součet součinů vzniklých tak, že prvky libovolné řady násobíme doplňky prvků jiné s ní rovnoběžné řady, je roven nule.

Důkaz neprovedeme obecně, avšak jen pro některou řadu determinantu. Vyberme třeba druhou řádku determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a za jinou rovnoběžnou řadu vezmeme třeba třetí řádek. Doplňky k jeho prvkům jsou

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; A_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Pak uvažovaný součet součinů bude

$$a_{21} A_{31} + a_{22} A_{32} + a_{23} A_{33},$$

což lze zapsat ve tvaru determinantu 3. stupně (jde o rozvoj podle 3. řádku)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

v němž druhý a třetí řádek jsou stejné a je tudíž tento determinant, představující uvažovaný součet součinů, podle věty 3. roven nule.

Objasněme si tuto větu, o kterou se opírá řešení soustavy lineárních rovnic, na příkladě. Uvažujme již počítaný determinant

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

Najdeme doplňky k prvkům 1. a 3. sloupce

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 17; A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 26; A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -1; A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 22; A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -17$$

Utvoříme-li součet součinů těchto doplňků s prvky druhého sloupce, dostaneme skutečně

$$2 \cdot 17 - 3 \cdot 26 - 4 \cdot (-11) = 0,$$

popřípadě

$$2 \cdot (-1) - 3 \cdot 22 - 3 \cdot (-17) = 0$$

Kdybychom utvořili součty součinů těchto doplňků s prvky příslušných řad, tj. prvního, popřípadě třetího sloupce, dostáváme ovšem hodnotu daného determinantu D

$$3 \cdot 17 + 4 \cdot 26 + 5 \cdot (-11) = 100,$$

popřípadě

$$-5 \cdot (-1) + 2 \cdot 22 - 3 \cdot (-17) = 100.$$

Naposled uvedenou větu i s definicí determinantu rozvojem s výhodou zapisujeme užitím sumačního symbolu

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} D & \text{pro } j = i \text{ (rozvoj podle } i\text{-tého řádku),} \\ 0 & \text{pro } j \neq i, \end{cases}$$

resp.

$$\sum_{i=1}^3 a_{ik} A_{ir} = \begin{cases} D & \text{pro } r = k \text{ (rozvoj podle } k\text{-tého sloupce)} \\ 0 & \text{pro } r \neq k. \end{cases}$$

Promyslete si dobře zápis sumačním symbolem. Těm, kteří se dosud s tímto symbolem nesetkali, doporučuji rozpis pro konkrétně zvolené indexy i, j, k, r některým z čísel 1, 2, 3. Těchto symbolů použijeme pro stručnost zápisu v dalším odstavci.

3. Řešení soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme danu soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = c_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = c_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = c_3 \end{cases} \quad (9)$$

Předpokládejme, že determinant této soustavy, složený z koeficientů při neznámých, je různý od nuly, tj.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (10)$$

Určeme v tomto determinantu doplňky A_{1k}, A_{2k}, A_{3k} k prvkům k -tého sloupce, kde $k = 1, 2, 3$, násobme těmito doplňky po řadě rovnice soustavy (9) a sečteme je. Po vytknutí příslušných neznámých a užitím sumačních symbolů (činí-li vám ještě potíže, rozepište si je), dostaneme:

$$x_1 \sum_{i=1}^3 a_{i1} A_{ik} + x_2 \sum_{i=1}^3 a_{i2} A_{ik} + x_3 \sum_{i=1}^3 a_{i3} A_{ik} = \sum_{i=1}^3 c_i A_{ik}$$

Vzhledem k větě 4. zůstane na levé straně ze tří členů jen jediný (ostatní dva jsou rovny nule) totiž ten, v němž index u neznámé se shoduje s indexem k . Lze tedy poslední rovnost zapsat ve tvaru

$$x_k \sum_{i=1}^3 a_{ik} A_{ik} = \sum_{i=1}^3 c_i A_{ik}, \text{ kde } k = 1, 2, 3$$

Koeficient při x_k na levé straně je však právě determinant D (je to jeho rozvoj podle prvků k -tého sloupce). Pravou stranu lze však napsat také jako determinant, který se liší od determinantu soustavy jenom tím, že jsou v něm prvky a_{1k} , a_{2k} , a_{3k} , tj. koeficienty při neznámé x_k soustavy (9) nahrazeny čísly c_1 , c_2 , c_3 , tj. pravými stranami rovnic. Tento determinant označme Dx_k .

Dokázali jsme tak platnost Kramerova pravidla pro soustavu tří rovnic o třech neznámých. Je tedy

$$x_k = \frac{Dx_k}{D}, \quad k = 1, 2, 3$$

Dokázaného pravidla nelze ovšem užít v tom případě, kdy determinant soustavy je roven nule. V takovém případě nemá soustava buď žádné řešení (rovnice jsou ve sporu), nebo má nekonečně mnoho řešení (rovnice jsou závislé).

Příklad. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 5x - 7y + 3z &= 9, \\ 9x + 4y + 11z &= 5, \\ 3x - 2y - 5z &= 19, \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 9 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -626;$$

$$\begin{aligned} Dx &= \begin{vmatrix} 9 & -7 & 3 \\ 5 & 4 & 11 \\ 19 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 9 \cdot 4 \cdot (-5) + 5 \cdot (-2) \cdot 3 + 19 \cdot (-7) \cdot 11 - \\ &\quad - 3 \cdot 4 \cdot 19 - 11 \cdot (-2) \cdot 9 - (-5) \cdot (-7) \cdot 5 = \\ &= -180 - 30 - 1463 - 228 + 198 - 175 = \\ &= -1878, \end{aligned}$$

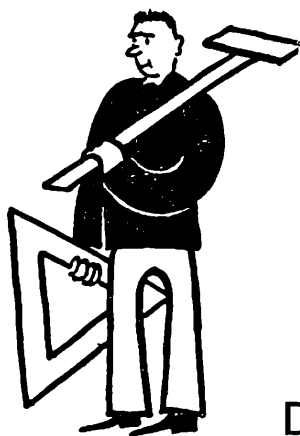
$$Dy = \begin{vmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 11 \\ 3 & 19 & -5 \end{vmatrix} = -125 + 513 + 297 - 45 - 1045 + 405 = 0,$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 9 \\ 9 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 19 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 19 \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1252$$

Protože $D = -626 \neq 0$, má soustava právě jedno řešení, a to

$$x = 3; y = 0; z = -2$$

(Dokončení)



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

„Sectio aurea“ - Zlatý řez (Dokončení)

DR. ING. FRANZ DANIELOWSKI, Vysoká školy architektury a stavební,
Výmar, NDR.

(Psáno pro Rozhledy)

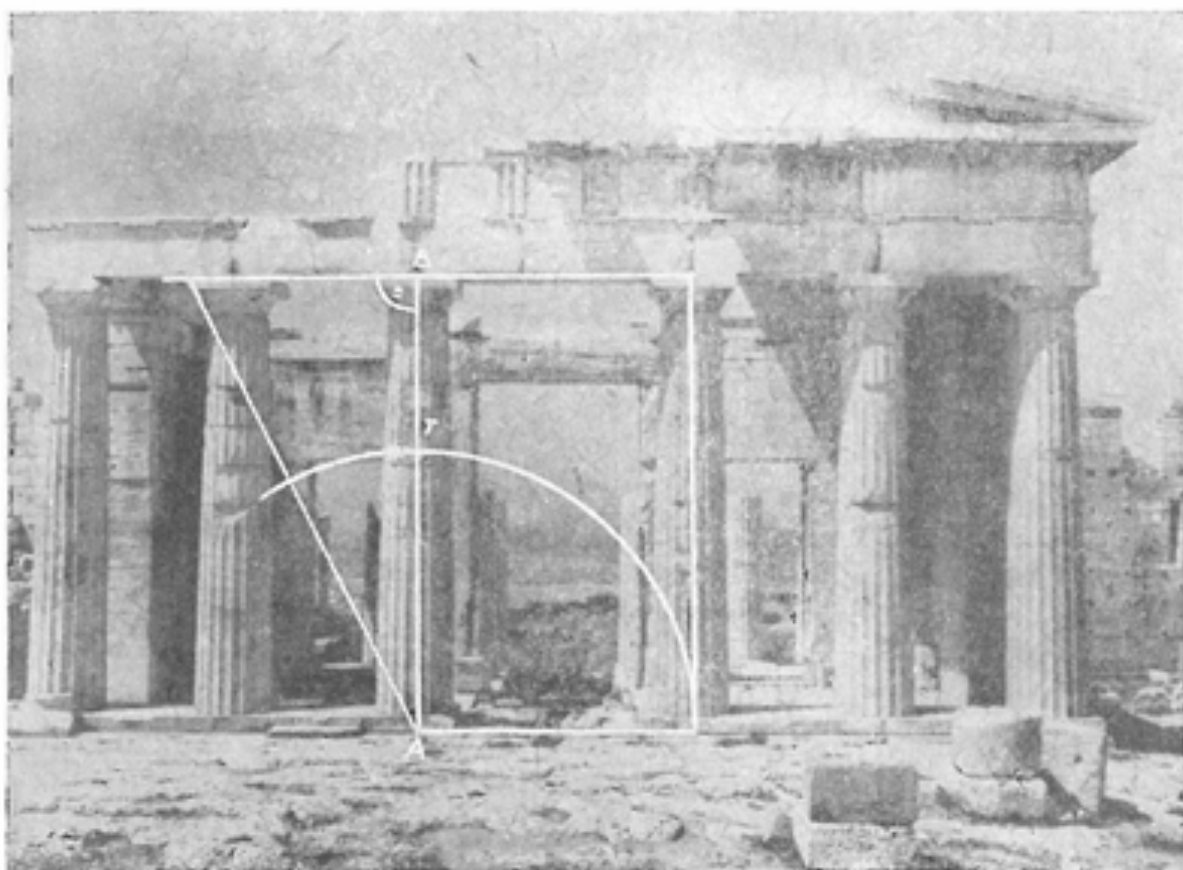
Jak již bylo uvedeno, je znalost dělení úsečky v poměru zlatého řezu velmi stará. K tomuto názoru nás vede nejen poznané dělení staveb (obr. 7), ale též možnost empirického řešení.

Nejprve několik slov k obr. 7, který představuje východní průčelí propylejí chrámu Akropolis v Athénách, jehož stavba začala v roce 438 před naším letopočtem a byla dokončena na počátku peloponeské války v roce 431. Pod názvem propyleje se všeobecně rozumí monumentální predsál, tj. prostor mezi vnitřkem chrámu a vnějším znesvěcujícím světem. Bránu nese šest sloupů tvořících pět otvorů, jejichž šířky jsou od středu do stran odstupňovány. Různými šířkami se má vyjádřit vyšší důležitost středního otvoru, který je hlavním vchodem a jeho poměr délky k šířce přesně odpovídá pravidlům zlatého řezu (vzdálenosti mezi středy sloupů činí 5,43 m, výška sloupů je 8,81 m).

Sledujeme-li vývoj kreslení geometrických tvarů, pak k nejstarším konstrukcím patří rozdělení kruhu na šest stejných dílů. Egyptské kresby, např. Výjev z lovu, Tutanchamon na lovu

1 v ů, z roku 1353 před naším letopočtem, ukazují rozdělení kola loveckého vozu šesti paprsky, a tím tedy šíří znalost o šestinásobném nanášení poloměru na obvod kruhu.

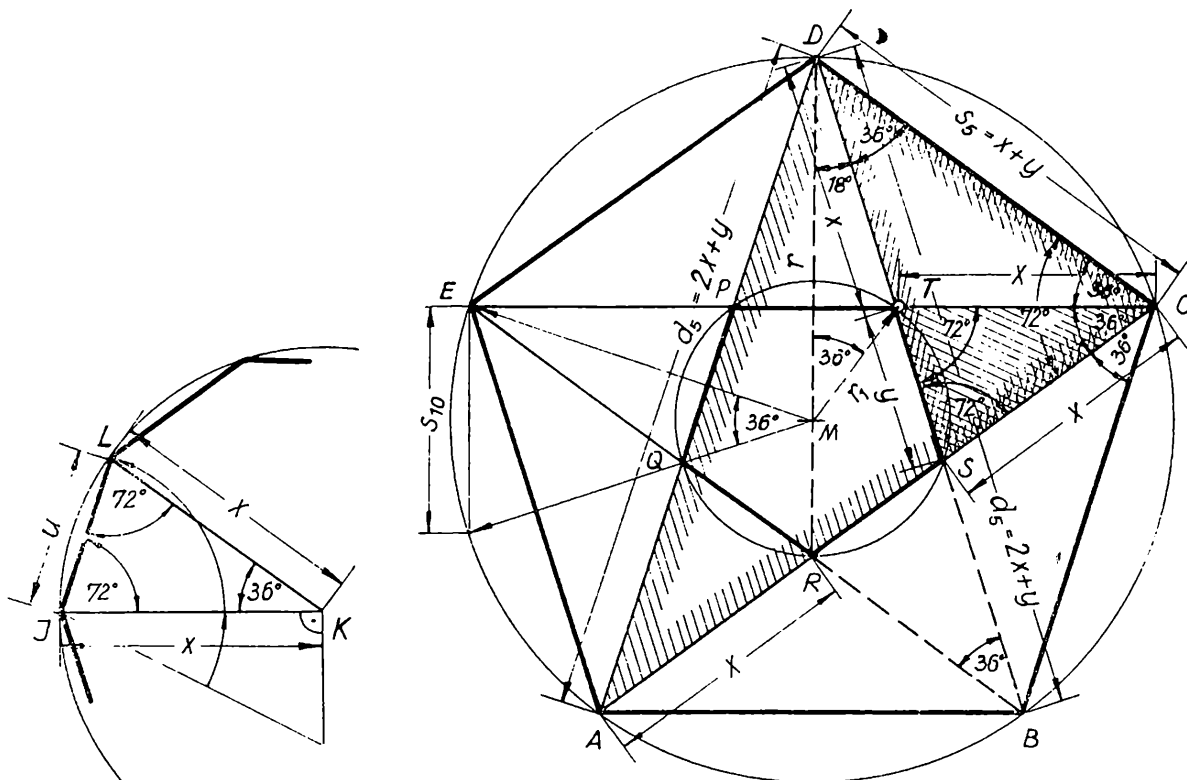
Lze se domnívat, že rozdělení obvodu kruhu na pět stejných dílů se dosáhlo nejprve zkusmo. Snad potom byly navzájem spojovány všechny vrcholy A až E . Je nasnadě, že se vnitřní plocha takto vzniklého pětiúhelníka oživovala kresbou, a dokonce se přímo nabízelo takové spojení vrcholů, aby vždy jeden vrchol byl vynechán. Tak se začaly zakreslovat úhlopříčky a vzniklý obrazec byl označen jako hvězdicový pětiúhelník (obr. 8). Každá strana hvězdicového pětiúhelníku je protínána dvěma jinými stranami. Průsečíky P až T tvoří opět vrcholy menšího pravidelného pětiúhelníka.



Obr. 7

Podíváme-li se na strany AC hvězdicového pětiúhelníka, odvodíme ze souměrnosti, že úsečka AR se rovná úsečce $SC = x$. Úsečku ST označme y . Trojúhelník SCT je rovnoramenný. Jeho úhel při vrcholu C je obvodovým úhlem opsané kružnice. Příslušný kruhový oblouk je pětina obvodu celé kružnice, odpovídající středový úhel je 72° , obvodový

úhel je poloviční a měří tedy 36° . Úhly při základně TS jsou stejně velké, a proto rovné $\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. V rovnoramenném trojúhelníku SCT jsou úhly při základně dvojnásobkem úhlu při vrcholu, rameno měří



Obr. 8

x a základna y . Rameno SC našeho trojúhelníku zvolme za základnu podobného trojúhelníku CDS . Protože SD rovná se $ST + TD = x + y$, musí i druhé rameno $CD = x + y$.

Také trojúhelník DAC je rovnoramenný a podobný trojúhelníkům SCT a CDS . Jeho ramena jsou $2x + y$ a jeho základna $x + y$. Z poměrů stran těchto tří podobných trojúhelníků plyne

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{x + y} = \frac{x + y}{2x + y} = \tau, \quad (3)$$

kde τ je poměr základny k ramenu. Z rovnice (3) vidíme, že se vždy celá úsečka má k větší části, jako se má větší část k menší části.

Z rovnice dále plyne, že strana pravidelného pětiúhelníku $x + y$ se má ke straně hvězdicového pětiúhelníku $2x + y$, jako větší část x úsečky $DS = x + y$, rozdělené zlatým řezem, k celé úsečce.

Máme-li nyní do kružnice o poloměru x vepsat pravidelný desetiúhelník (obr. 8 vlevo), bude délka strany desetiúhelníku $IL = u$. Spojíme-li dva sousední vrcholy desetiúhelníku se středem K opsané kružnice,

dostaneme rovnoramenný trojúhelník o délce ramene rovné x . Úhel při vrcholu činí desetinu plného úhlu, tedy $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Na základě těchto vlastností je trojúhelník IKL podobný s dříve uvažovaným trojúhelníkem SCT . Podle toho je poměr strany U desetiúhelníku k poloměru x roven τ .

Abychom zjistili souvislost mezi poloměrem r kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$ a stranou pětiúhelníku, všimněme si poměru mezi r a r_1 (obr. 8)

$$r_1 : r = y : (x + y) = ST : CD$$

Podle (3) je

$$\frac{y}{x} = \tau \quad \text{a} \quad \frac{x}{x + y} = \tau.$$

Vynásobením obou rovnic dostaneme

$$\frac{y}{x + y} = \tau^2,$$

čili též

$$\frac{r_1}{r} = \tau^2 \tag{4}$$

Trojúhelníky DRB a DTM jsou navzájem podobné, mají u D stejný úhel 18° a $\sphericalangle DRB = \sphericalangle DMT = 36^\circ$. To znamená, že odpovídající si strany jsou úměrné

$$DR : DB = DT : DM,$$

což po dosazení dává

$$(r + r_1) : (2x + y) = x : r$$

Z toho

$$r(r + r_1) = x(2x + y).$$

Dosadíme-li z (4) za r_1 , dostaneme

$$r^2(1 + \tau^2) = x(2x + y) \tag{5}$$

Pro pravou stranu rovnice platí podle (3)

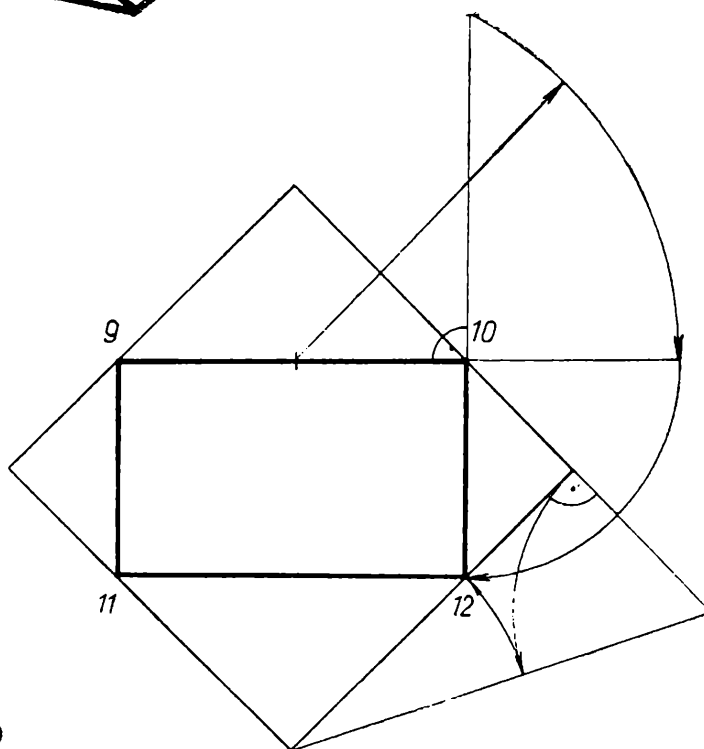
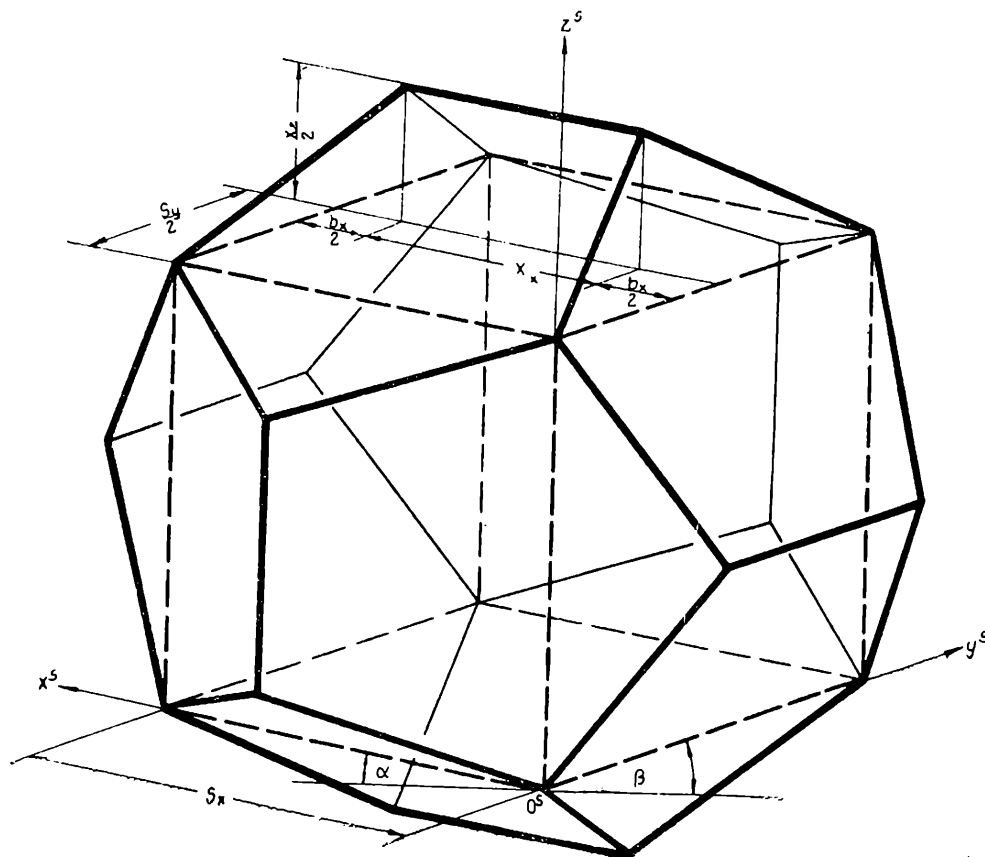
$$x(2x + y) = (x + y)^2,$$

což dosazeno do (5)

$$r^2 + r^2\tau^2 = (x + y)^2. \tag{6}$$

V této rovnici je r poloměr kružnice opsané pětiúhelníku $ABCDE$, $r\tau$ je délka strany desetiúhelníku a $x + y$ délka strany pětiúhelníka vepsaného do téže kružnice. Podle rovnice (6) je tedy součet čtverců nad poloměrem r a nad stranou desetiúhelníka roven čtverci nad stranou pětiúhelníka (Pythagoras) nebo podle jiné formulace, která pravděpodobně pochází od řeckého matematika Eudoxa (408-355?):

Obr. 9



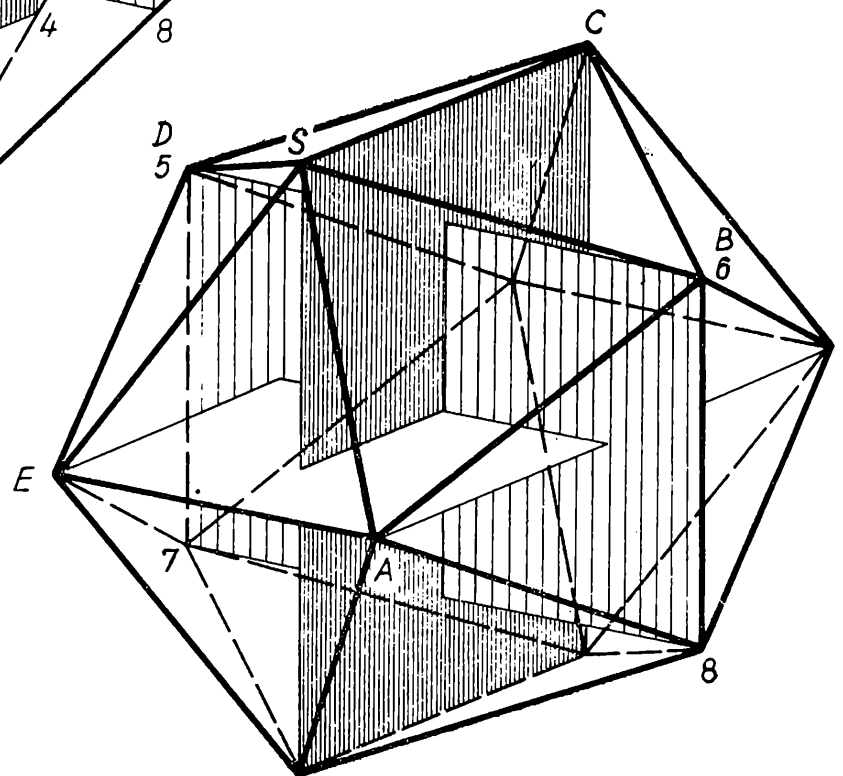
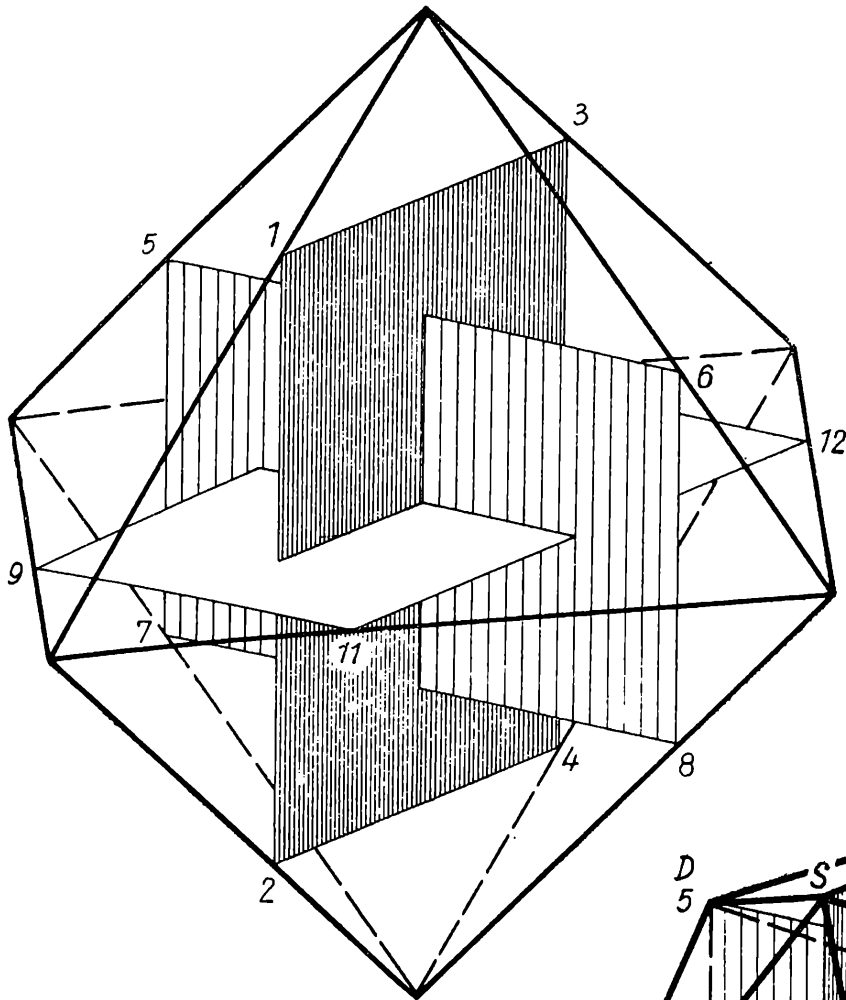
Obr. 10

Délky stran pravidelného šestiúhelníku, pětiúhelníku a desetiúhelníku, vepsaných do téže kružnice, tvoří pravoúhlý trojúhelník, v němž je strana pětiúhelníku přeponou.

Pro pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ jsme dostali tyto věty:

1. Dvě úhlopříčky ($d = 2x + y$) pravidelného pětiúhelníku, které nemají společný vrchol, se vzájemně dělí podle zlatého řezu (např. BD dělí EC v bodě T).

Obr. 11



Obr. 12

2. Strana pětiúhelníku ($s_5 = x + y$) je větším úsekem úhlopříček d , rozdělených zlatým řezem.

3. Strana desetiúhelníku ($s_{10} = r\tau$) je větším úsekem poloměru opsané kružnice r , rozděleného zlatým řezem.

Uvedených vlastností pravidelného pětiúhelníku, resp. desetiúhelníku, lze použít k zobrazení dvanáctistěnu pětiúhelníkového a dvacetistěnu. Obě tělesa patří k pravidelným mnohostěnům, jež se též nazývají Platónovými tělesy.

Dvanáctistěn pětiúhelníkový (dodekaedr) je tvořen 12 pravidelnými pětiúhelníky; má 20 vrcholů a 30 hran (obr. 9). Konstrukce tělesa je jednoduchá; nad každou stěnou vepsané krychle (o hraně s) leží hrana dvanáctistěnu. Tato hrana se rovná většímu úseku hrany krychle s , rozdělené zlatým řezem a její vzdálenost od stěny krychle se rovná polovině většího úseku hrany krychle rozdělené zlatým řezem. Krychle je zakreslena v axonometrii při poměru zkrácení $x : y : z = 7 : 6 : 8$, $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 20^\circ$.

Pravidelný dvacetistěn (ikosaedr) je tvořen 20 shodnými rovnostrannými trojúhelníky, má 12 vrcholů a 30 hran. Při konstrukci tělesa použijeme opět zlatého řezu. Do čtverce vepíšeme obdélník, jehož strany jsou v poměru zlatého řezu a jehož vrcholy dělí strany čtverce v poměru zlatého řezu (obr. 10). Tento čtverec považujeme za úhlopříčný řez osmistěnu. Pak lze dvacetistěn vepsat do osmistěnu tak, aby každý vrchol dvacetistěnu dělil hranu osmistěnu v poměru zlatého řezu (obr. 11). Body 1 až 12 jsou vrcholy dvacetistěnu, bod 10 je neviditelný. V obr. 12 byly navzájem spojeny vrcholy dvacetistěnu (body 1 až 12 přenesené z obr. 11). Při tom je třeba si zvláště všimnout tělesa u vrcholu dvacetistěnu. Kolem vrcholu S vzniká jehlan, jehož podstavou je pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Dvě protilehlé hrany dvacetistěnu (např. BD , 78) tvoří protější strany obdélníku a jsou úhlopříčkami pětiúhelníku. Jelikož úhlopříčka pětiúhelníka je zlatým řezem rozdělena tak, že její větší úsek odpovídá straně pětiúhelníku (viz větu 2), je tento obdélník (např. 5-7-8-6 na obr. 11, příp. 12) dělen v poměru zlatého řezu. Pak 12 vrcholů dvacetistěnu jsou vrcholy tří obdélníků rozdělených zlatým řezem a stojících po dvou na sobě kolmo. Tyto vlastnosti vedou k jednoduché konstrukci dvacetistěnu.

Další skutečností je, že středy stěn dvanáctistěnu tvoří vrcholy dvacetistěnu. Zainteresovaný čtenář může tento obrazec sám zkonstruovat. Doporučujeme, aby jej znázorňoval axonometricky co v největším měřítku, a tím dosáhl přehlednosti.

Přeložil a upravil O. S.

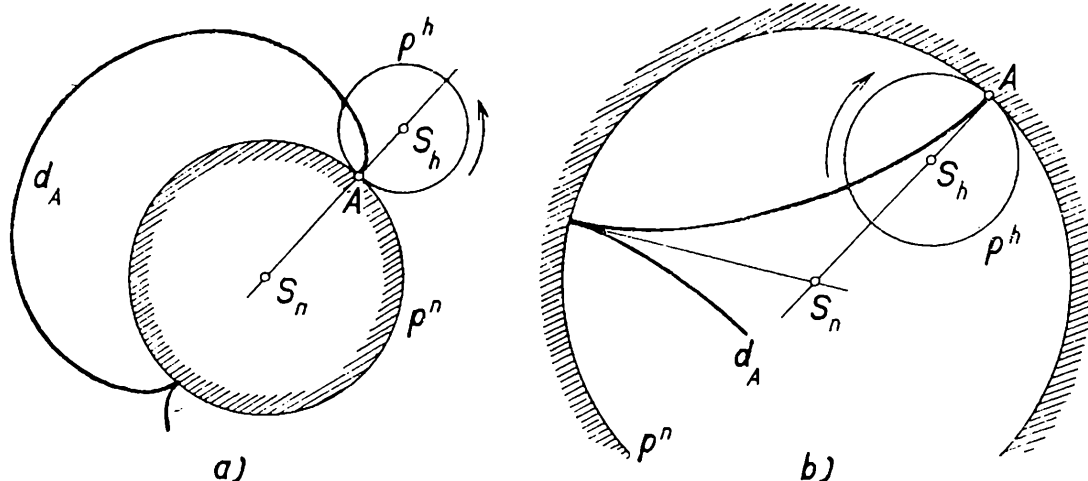
Literatura

- Coxeter H. S. M. *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser, Basel u. Stuttgart 1963, str. 202.
 Goeringer A., *Der goldene Schnitt*, München 1893, str. 8, 17, obr. 6.
 Timerding H. E., *Der goldene Schnitt*, Teubner, Leipzig u. Berlin 191, str. 7-12.
 Důkaz k obr. 7. Rodenwaldt G., *Akropolis* podle snímku W. Hege, obr. 59, Deutscher Kunstverlag München Berlin o. J.

0 některých křivkách (Pokračování)

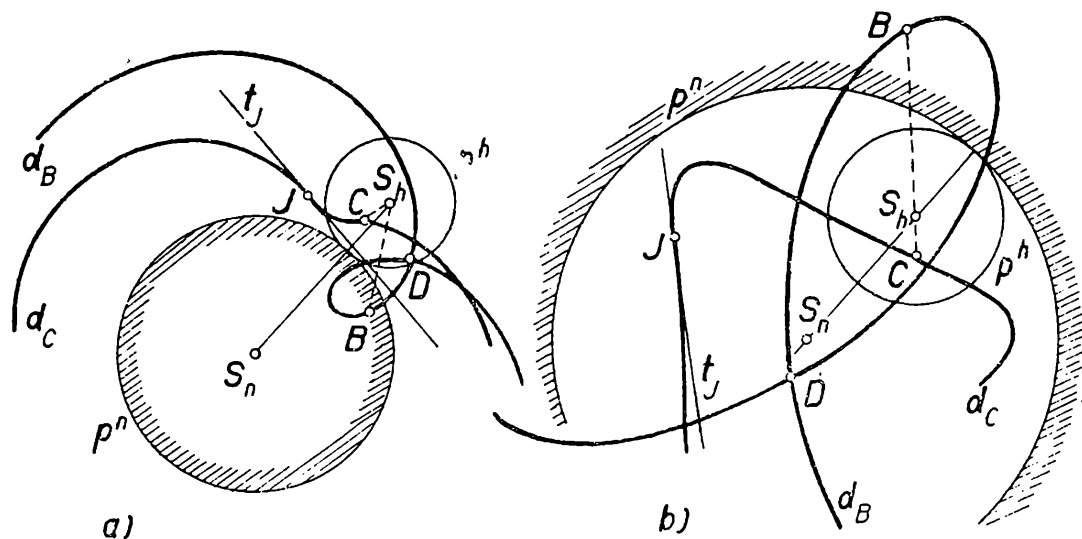
DOC. BOŘIVOJ KEPR, ČVUT, Praha

2. Kutálí-li se kružnice (polhodie hybná) p^h po pevné kružnici (polhodie nehybné) p^n tak, jak to ukazuje obr. 23a, opisují body pevně spojené s kutálející se kružnicí křivky, nazývané *epicykloidami*. Kutálí-li se kružnice p^h po pevné kružnici p^n tak, jak to znázorňuje obr. 23b, opisují body pevně spojené s kutálející se kružnicí křivky, nazývané *hypocykloidami*. Bod A , kutálející se kružnice probíhá dráhu d_A , kterou v případě znázorněném na obr. 23a nazýváme *prostou (obecnou, obyčejnou) epicykloidou*, v případě znázorněném na obr. 23b *prostou (obecnou, obyčejnou) hypocykloidou*. Prostá epicykloida nebo hypocykloida d_A má na pevné kružnici p^n *singulární body, body vratu (hroty)*, a to vždy v těch polohách pohybujícího se bodu A kutálející se kružnice p^h , v nichž se bod A postupně stává dotykovým bodem obou kružnic p^n a p^h . Je-li bod B pevně spojen s kutálející se kružnicí p^h , jejím bodem *vnějším* vytvoří při pohybu, znázorněném v obr. 23a dráhu (trajektorii) d_B , již nazýváme *epicykloidou prodlouženou* (obr. 24a). Při pohybu zakresleném v obr. 23b vytvoří dráhu d_B , která se nazývá *hypocykloidou prodlouženou* (obr. 24b). Je-li bod C pevně spojen s kutálející se kružnicí p^h jejím bodem *vnitřním*, vytvoří při pohybu, znázorněném v obr. 23a, případně 23b, dráhu d_C , již nazýváme *epicykloidou*, případně *hypocykloidou zkrácenou* (obr. 24a, případně 24b). Epicykloida nebo hypocykloida prodloužená má uzlové body (obr. 24, bod D). Epicykloida nebo hypocykloida zkrácená nemá singulární body ani *hrot*, ani *uzel*, ale má *bodů inflexní*, tj. body, v nichž křivka přechází z jedné strany tečny na druhou její stranu. Máme ovšem



Obr. 23a, b

na myslí tečnu t_J křivky, sestrojenou právě v jejím inflexním bodě J (obr. 24). Každé části epicykloidy nebo hypocykloidy, která odpovídá právě jednomu odvalení kružnice p^h po kružnici p^n , a to vždy mezi jejími sousedními singulárními body v případě, že reálně existují), říkáme *větev* této křivky. (Otázka pro čtenáře: Jakou epicykloidu nebo hypocykloidu vytvoří střed kružnice p^h ?)



Obr. 24a, b

Pozorný čtenář si jistě povšiml úzké podobnosti v terminologii a základních vlastnostech, týkající se epicykloid a hypocykloid a již probraných cykloid (v obr. 20 a 21). To je zcela pochopitelné již z tohoto důvodu: Bude-li se poloměr kružnice p^n zvětšovat nad všechny meze tak, až se stane nekonečně velikým, přejde kružnice p^n v základní přímku p^n z příkladu 1. a epicykloidy nebo hypocykloidy přejdou v cykloidy.

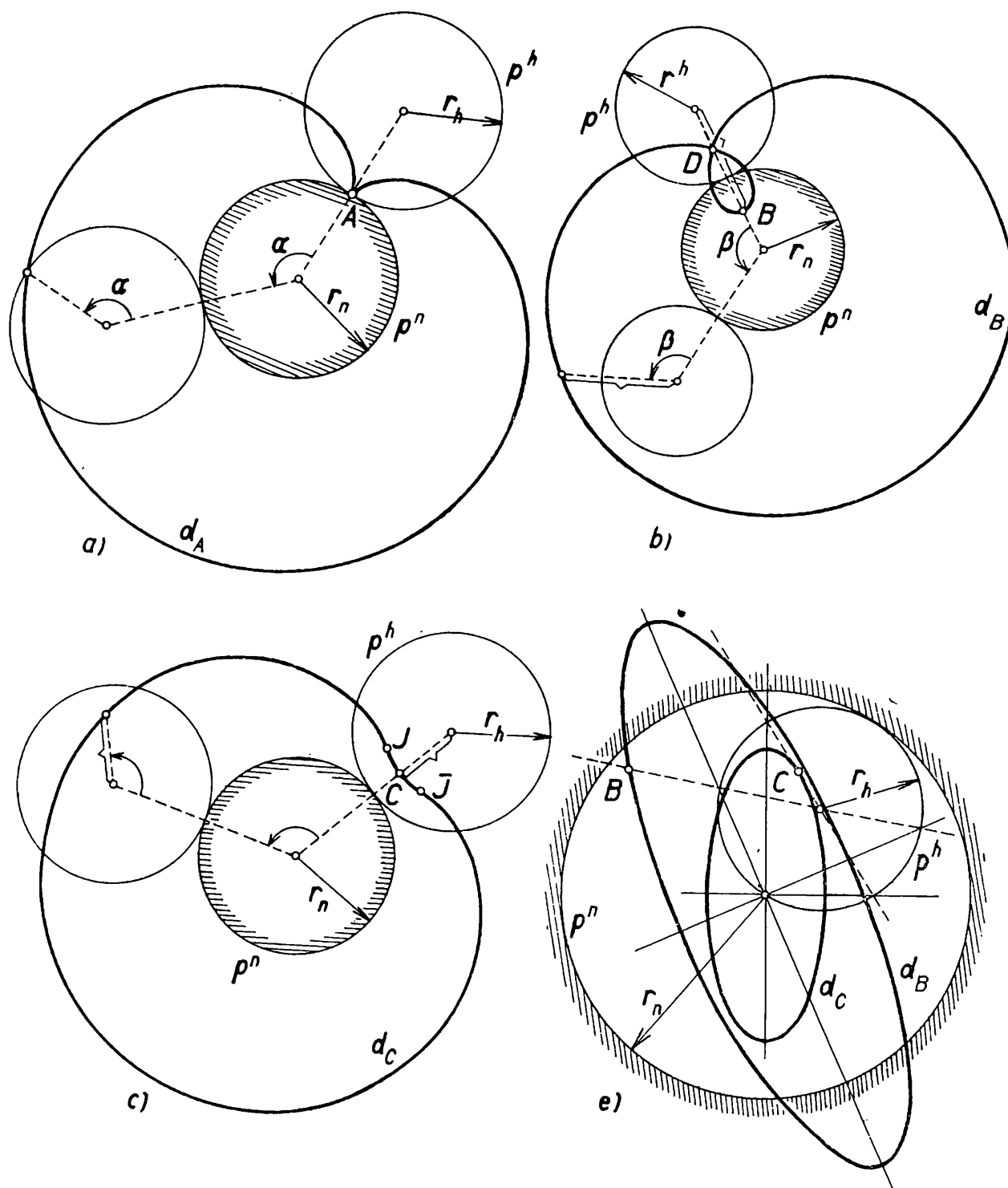
Autor článku by byl spokojen, kdyby se mu jeho výkladem podařilo natolik zaujmout a poučit čtenáře, aby se mezi nimi našlo alespoň několik, kteří by vyřešili tento úkol:

Sestrojte body epicykloidy nebo hypocykloidy, a to prosté (obecné, obyčejné), nebo prodloužené, nebo zkrácené. V těchto bodech sestrojte tečny křivek.

Návodem lze říci pouze toto: V obr. 21 byly tyto konstrukce podrobně provedeny pro prostou (obecnou) cykloidu. Bystrý čtenář bude jistě po zapřemýšlení umět aplikovat příslušné konstrukce na epicykloidy nebo hypocykloidy. (Ale pozor: konstrukce oskulačních kružnic takto jednoduše převádět nelze!)

Než půjdeme dále, je nutno uvést jedno důležité a všeobecné ponaučení čtenáři začátečníkovi v odborné literatuře. Nejdůležitější částí tohoto článku je odstavec 3. Chce-li mít čtenář radost z úspěchu, je nutno, aby porozuměl tomuto odstavci, aby tak zcela bezpečně ovládl látku tam obsaženou. Tento odstavec obsahuje totiž nejnutnější základy. Teprve po jejich zvládnutí a samozřejmě po určité praxi v zacházení s jejich obsahem, lze řešit celou spoustu jednotlivých úloh o nejrůznějších křivkách. Toto pravidlo platí pro všechny odborné disciplíny.

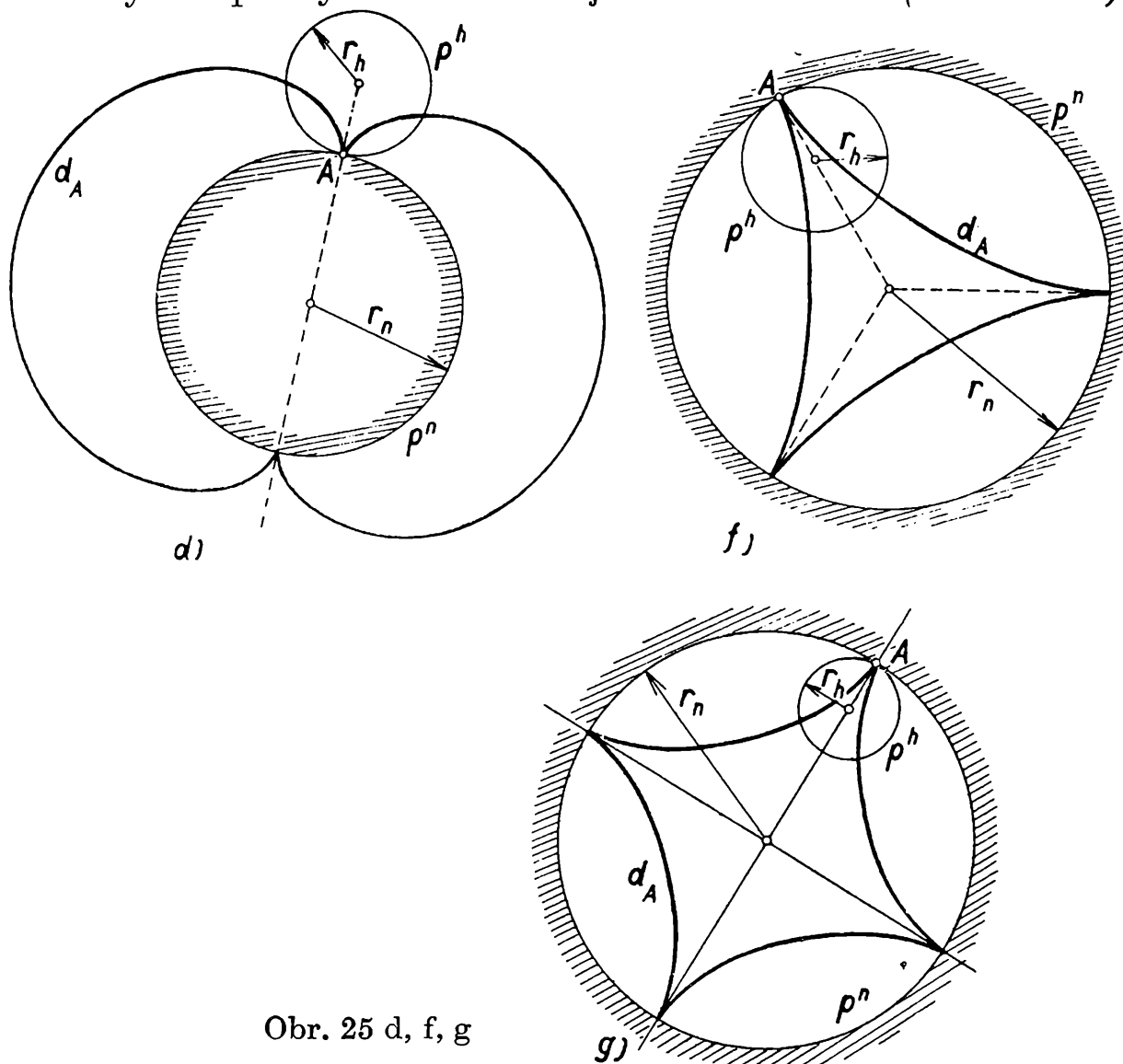
Je-li poloměr r_h kutálející se kružnice m -násobkem poloměru r_n pevné kružnice, kde m je racionální číslo, pak bod pevně spojený s kutálející se kružnicí přejde po $\frac{1}{m}$ odkutáleních znovu do své výchozí polohy.



Obr. 25 a, b, c, e

Takových odkutálení je v případě racionálnosti čísla m vždy konečný počet. Říkáme, že příslušná epicykloida nebo hypocykloida je křivkou uzavřenou. Je-li m číslo iracionální, pak daný bod, vytvářející tímto

pohybem epicykloidu nebo hypocykloidu po jakémkoliv konečném počtu odvalení kutálející se kružnice, s níž je pevně spojen, se již nikdy nevrátí do své výchozí polohy. Taková křivka je křivkou *otevřenou* (*neuzavřenou*).

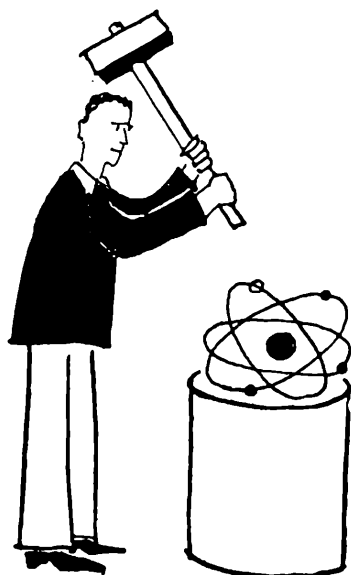


Obr. 25 d, f, g

Uzavřeným křivkám, které se skládají z určitého konečného počtu shodných větví, říkáme křivky *periodické*.

Je-li např. speciálně $r_h = r_n$ (tj. $m = 1$), dostáváme jako epicykloidy tzv. *Pascalovy závitnice* (obr. 25a, b, c). Pascalovu závitnici d_A s bodem vratu (nod A , probíhající dráhu d_A je bodem kutálející se kružnice p^h) nazýváme též *kardioidou*. (K této křivce se ještě vrátíme). Pro $r_h = \frac{1}{2} r_n$ dostáváme jako prostou epicykloidu tzv. *dvoulíst* (neboli *nefroidu*) (obr. 25d). V případě prodloužené nebo zkrácené hypocykloidy však kupodivu dostáváme *elipsu* (k tomuto případu se též později vrátíme) (obr. 25e). Pro $r_h = \frac{1}{3} r_n$ se nazývá příslušná prostá hypocykloida *Steinerovou hypocykloidou* (obr. 25f) a pro $r_h = \frac{1}{4} r_n$ je příslušná prostá hypocykloida, tzv. *asteroidou* (obr. 25g). Rovněž k tomuto případu se ještě jednou vrátíme.

(Pokračování)



F Y Z I K A

IVO KRAUS, ZLATĚK MARŠÁK, FTJF, Praha

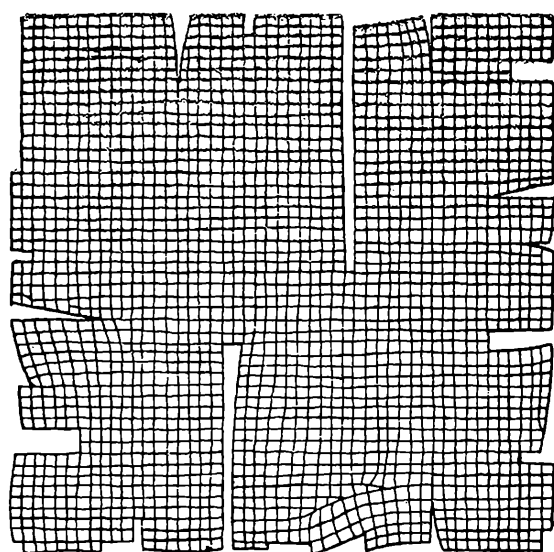
Poruchy krystalické mříže kovů

1. Mozaiková struktura kovů

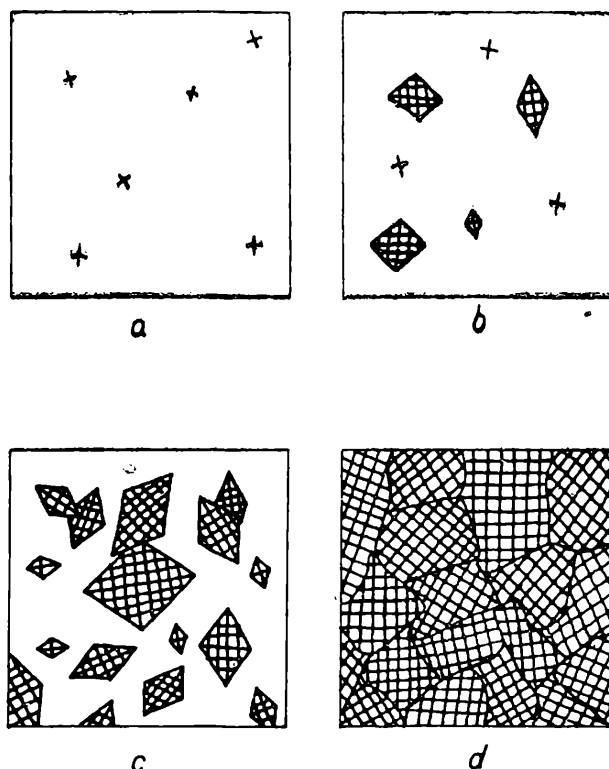
V článku „Krystalická struktura kovů¹⁾ jsme uvažovali, že atomy jsou v krystalické mříži rozloženy pravidelným periodickým způsobem. Takový stav je však pouze ideální a neodpovídá skutečným poměrům v reálných krystalech. Uspořádání skutečných krystalů odhalily rozsáhlé výzkumy pomocí rentgenové strukturní analýzy a elektronové mikroskopie.

Ukázalo se, že každý reálný krystal je složen z jednotlivých bloků, nazývaných *bloky mozaikové struktury*, jež bývají vzájemně otočeny o úhel několika minut. Rozměry těchto bloků se pohybují od 10^{-7} až 10^{-5} m až do 10^{-3} m. Příčiny existence mozaikové struktury nejsou prozatím ještě zcela objasněny, bezpochyby však souvisí s charakterem krystalizace kovu. Protože rozměry bloků podstatně ovlivňují vlastnosti kovů, má studium mozaikové (blokové) struktury velký význam.

¹⁾ Rozhledy matematicko-fyzikální, č. 9, 10; roč. 1964—65.



Obr. 1.
Schéma mozaikové struktury.



Obr. 2. Schéma průběhu krystalizace rovnoměrně ochlazovaného čistého kovu.

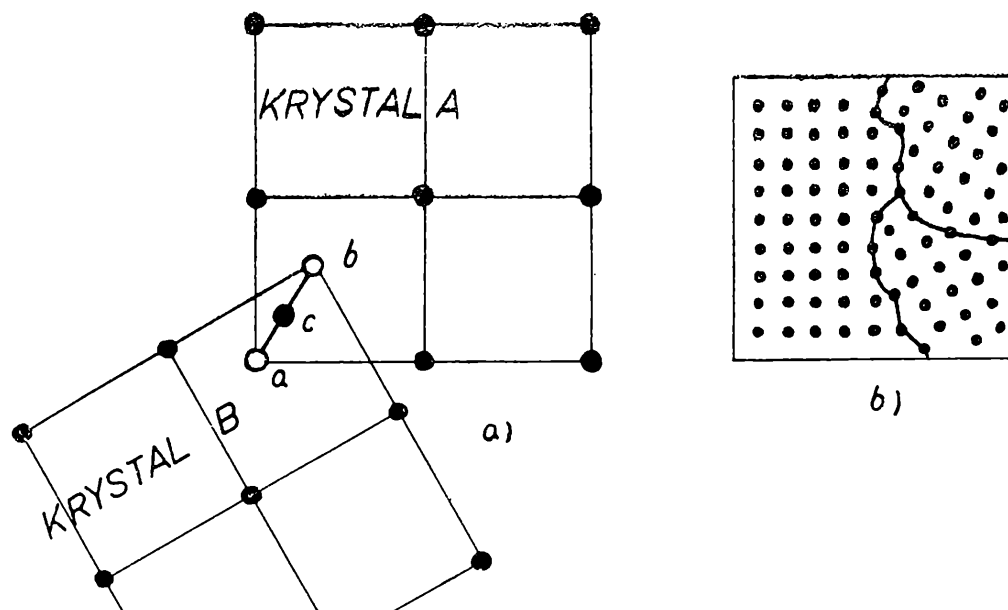
2. Průběh krystalizace kovů

Povšimněme si nyní podrobněji průběhu krystalizace kovů. Krystalizací rozumíme děj, který začíná v tekutém kovu vytvořením krystalizačních zárodků (center) a pokračuje růstem jednotlivých krystalků až do konečného ztuhnutí kovu.

Na obr. 2a je znázorněn vznik krystalizačních center, která se vytvoří v tekutém kovu v určitém stadiu ochlazování. Z těchto zárodků pak začínají růst jednotlivé monokrystaly kovu. Současně pokračuje vznik dalších center (obr. 2b). Dokud mohou krystalky růst volně, je jejich tvar geometricky pravidelný. Jakmile se však začnou vzájemně dotýkat, pravidelný tvar se porušuje. Další růst pokračuje jen v těch směrech, v nichž není ničím omezován (obr. 2c). Výsledkem krystalizace po ztuhnutí kovu je konglomerát (shluk) jednotlivých krystalků, které mají sice pravidelné vnitřní rozložení atomů, avšak jejich vnější tvar je nepravidelný (obr. 2d). Kov se tedy skládá z velkého množství náhodně orientovaných monokrystalků nepravidelné formy. Nazýváme je krystality nebo také zrna.

Uvedli jsme, že krystality mají pravidelnou vnitřní atomovou stavbu. Tak je tomu však pouze uvnitř objemu zrn. Na hranicích krystalitů

bude uspořádání působením atomů v okolních zrnech nepravidelné. Tato porucha je jasně vidět na obr. 3.



Obr. 3. a - poruchy vznikající v poslední fázi tuhnutí vzájemným působením rostoucích krystalů;
b - výsledný tvar hranic krystalitů.

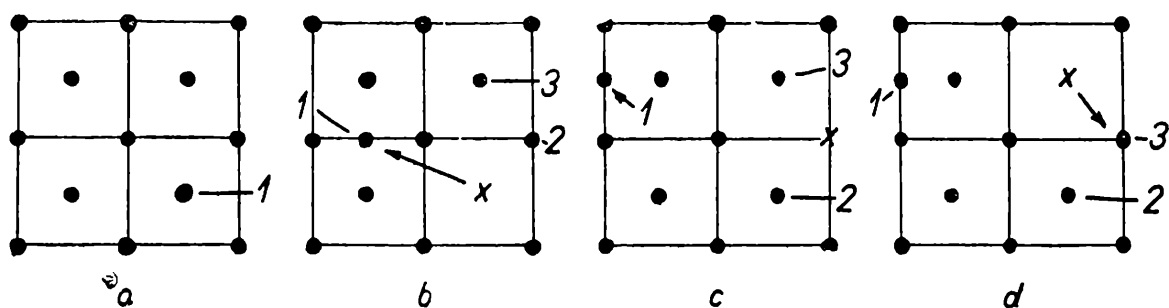
Atom na rozhraní dvou zrn nezaujme ani polohu *a* v uzlovém bodě krystalu *A*, ani polohu *b* v mříži krystalu *B*, nýbrž jistou střední polohu *c*.

3. Difúze atomů

Nyní si důkladněji probereme nejdůležitější typy poruch krystalické mřížky. V první řadě vysvětlíme pojem *v a k a n c e* (vakantního místa) uvnitř krystalu. Nachází-li se ztuhlý kov v prostředí, které má konstantní teplotu, potom má tutéž teplotu nejen každý krystal tohoto kovu, ale i každá jeho mikroskopicky rozlišitelná část. U jednotlivých atomů jsou však poměry jiné. Při každé teplotě je sice střední kinetická energie $\bar{E}_k$ atomů, které kmitají kolem jistých rovnovážných poloh v mřížce, konstantní, avšak energie jednotlivých druhů atomů jsou různé. (Kinetická energie atomů je přímo úměrná teplotě). Hodnoty kinetické energie atomů jsou rozloženy podle zákonů pravděpodobnosti v určitém intervalu, jehož středem je $\bar{E}_k$. Rychlost odpovídající středu intervalu $\bar{E}_k$ označme v_s . Co je příčinou tohoto jevu? U každého kmitajícího atomu dochází k řadě srážek s okolními atomy. Vzhledem k velkému počtu atomů tvořících krystal kovu je pravděpodobné, že některé atomy nabudou po srážce vysokých rychlostí. Většina atomů se však po srážkách pohybuje s rychlostmi v jistém intervalu kolem v_s .

Pro vysvětlení původu vakantních (prázdných) uzlů nás budou zajímat atomy, jež nabývají anomálně vysokých rychlostí. Kinetická energie takových atomů odpovídá teplotě vyšší než je bod tání kovu, případně vyšší než teplota potřebná k jeho vypařování. V takových případech se atom osvobodí od vazbového působení sousedních atomů a do té doby, dokud srážkami s jinými atomy svou energii opět neztratí, se volně pohybuje mřížkou. Po ztrátě své energie setrvá buď v poloze mezi uzlovými body (takový atom se nazývá atomem v i n t e r s t i c i á l n í p o l o z e nebo také i n t e r s t i c i á l n í a t o m), nebo bude zachycen neobsazeným (vakantním) uzlem uprázdněným jiným atomem. Atom pohybující se velikou rychlostí v blízkosti povrchu kovu může dokonce přejít i do okolního prostředí. Tento případ je dokázán sublimací tuhých kovů.

Atomy obklopující intersticiální atom musí být poněkud rozestoupeny, neboť průměr atomu je vždycky větší než prostor mezi uzly; u atomů obklopujících vakantní uzel nastává naopak jisté shluknutí. Vakantní uzly v krystalu nezůstávají nepohyblivé, nýbrž se neustále posunují. Dříve či později některý z atomů obklopujících vakanci, např. atom 2 na obr. 4. tuto „díru“ zaplní. Místo po něm uvolněné může pak obsadit atom 3 atd. Vakance se tedy v krystalu neustále přemísťují — d i f u n d u j í.



Obr. 4. Schéma difúze v krystalické látce (X - vakance).

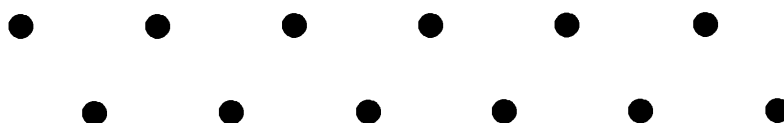
Výpočty založené na rozdělení atomů kovu podle energií při různých teplotách ukazují, že vakancí musí existovat uvnitř mřížky velký počet. Přestože je jejich životnost nepatrná, nepřetržitým uprázdněním nových uzlů se jejich počet zachovává. Jelikož kinetická energie kmitání atomů vzrůstá s teplotou látky, bude i počet vakancí růst s teplotou. Jejich množství však není neomezené. Ani při teplotě blízké k bodu tání nečiní více než 2 % celkového počtu atomů.

Přechod atomů do intersticiálních poloh, vznik a přemísťování vakancí i deformace mřížky kolem nich je jednou z hlavních příčin porušení geometrické pravidelnosti stavby krystalu.

4. Dislokace

Vysvětlením této poruchy krystalické mříže si současně objasníme otázku mechanismu plastické deformace.

Budeme předpokládat, že se krystal člení na jednotlivé skupiny vrstev, v jejichž mezích se každá atomová rovina posunuje vzhledem k předešlé rovině o hodnotu meziatomové vzdálenosti, to znamená, že přechází z výchozí polohy do nejbližší polohy ekvivalentní. Tyto pohyblivé svazky atomových rovin se vzájemně střídají s nepohyblivými, jež se přitom přemísťují jako jeden celek. Uvnitř každého pohyblivého svazku rovin je tedy plastická deformace deformací smykovou (obr. 5).

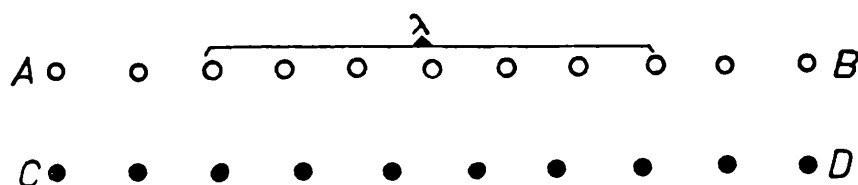


Obr. 5. Smyk atomových rovin.

Zjednodušíme nyní své úvahy tak, že místo atomových rovin budeme uvažovat atomové řady-uzlové přímky. Vzniká otázka, můžeme-li si představit, že se každá horní řada atomů posunuje vzhledem ke spodní jako celek, tj. jako pevné těleso.

Reálnější se ukázal názor, že posun každé atomové řady se neděje na jednou, ale postupným přemísťováním jednotlivých atomů.

Protilehlé úseky dvou sousedních atomových řad vytvářejí v každém okamžiku „nonius“ charakterizovaný tím, že na n atomů jedné řady připadá $n + 1$ nebo $n - 1$ atomů v řadě sousední. Takové uspořádání však existuje pouze v určitém intervalu λ , zatímco za jeho hranicemi stojí atomy opět jeden proti druhému (obr. 6).



Obr. 6. Kladná dislokace

Přednost tohoto mechanismu deformace je v tom, že vyžaduje podstatně menší energii než ten, při němž je potřebná energie úměrná celkovému počtu současně posunovaných atomů, tj. v případě, že by se řada

atomů posunula jako celek. Vzájemné rozložení atomů v obou řadách, spodní (nepohyblivé) a horní (pohyblivé), je vidět na obr. 6. Atomy horní řady, jež se nacházejí nalevo od intervalu λ , jsou již posunuté vzhledem k nepohyblivým atomům spodní řady, zatímco napravo od λ zůstávají atomy v původních polohách. Oblast λ vytvářející „nonius“ se nazývá *dislokace*, a to *kladná*, jsou-li v ní pohyblivé atomy zhuštěny a *záporná* v opačném případě.

Dislokace se může rovnoměrně posunovat o libovolně velkou vzdálenost. Ani rychlost jejího šíření není principiálně ničím omezena. Tepelným pohybem atomů nebo deformací může dojít k vzájemnému zrušení dislokací, případně k tomu, že dislokace vystupují na povrch krystalu.

V reálných krystalech s trojrozměrnou krystalickou mřížkou bude charakter dislokace přirozeně složitější než stav zobrazený na obr. 6.

Nedokonalosti a odchylky od absolutně pravidelné stavby krystalů, o nichž jsme se v našem článku zmínili, se projevují i ve vlastnostech kovů. Je to např. jejich chování při působení vnějších sil, za vyšších teplot, v prostředích způsobujících korozi, při zpracování atd. Je zřejmé, že i fyzikální vlastnosti, např. tvrdost, elektrická a tepelná vodivost, budou závislé na nedokonalostech krystalické mříže.

Uvedli jsme si ve stručnosti některé základní pojmy z fyziky kovů, které nám umožňují pochopit vnitřní stavbu kovových materiálů. V některém dalším čísle Rozhledů se seznámíme s nejrozšířenější metodou výzkumu vlastností struktur, a to s rentgenovou difrakční analýzou.

KOLKO ROKOV?

Pán X stretne na ulici pána Y, s ktorým sa viac rokov nevideli. Počas rozhovoru sa Y dozvedel, že X má troch synov, ktoré všetci majú práve toho dňa narodeniny. X nechce prezradiť ich vek a chce, aby to Y uhádol. Jediná informácia, ktorú mu na ten cieľ dáva, je to, že súčin ich rokov činí 36. Pánu Y to na uhádnutie nestačí, načo X povie, že súčet rokov jeho synov sa rovná počtu okien v budove, naproti ktorej práve stoja. Po chvíľke uvažovania Y nemôže určiť odpoveď a X dodáva, že jeho najstarší syn je škulavý. (tj. šilhavý). Tento údaj už umožnil pánu Y uhádnuť vek synov pána X. Kolko rokov majú synovia pána X?

P. Bartoš

Co prosíval Eratosthenes Kyrenský na svém sítu

Přirozená čísla dělíme do dvou skupin podle toho, čím jsou dělitelná. V první skupině jsou čísla

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,

a v druhé jsou ta zbývající. Napsaná čísla jsou dělitelná jen dvěma přirozenými čísly: jedničkou a sama sebou. Ta druhá čísla jsou dělitelná také jedničkou a sama sebou, ale potom ještě jinými čísly. Např.

číslo 4 je dělitelné čísly 1, 4, 2;

číslo 12 je dělitelné čísly 1, 12, 2, 3, 4, 6.

Toto vše věděli lidé hezkých pár století před námi a vynalezli dokonce způsob, jak prvočísla vynajít. Ten způsob si ukážeme. Napišme přirozená čísla pěkně tak, jak jdou po sobě:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
<u>11,</u>	12,	<u>13,</u>	14,	15,	16,	<u>17,</u>	18,	19,	20,

Číslo 2 je prvočíslo, podtrhneme je a každé druhé číslo od čísla 2 počínaje, škrtneme. Tím se zbavíme všech čísel dělitelných dvěma. Číslo 3 škrtnuté není; je to prvočíslo, podtrhneme je a v dalších číslech každé třetí škrtneme. Další neškrtnuté je číslo 5; je to prvočíslo a v dalších číslech škrtneme každé páté. Nevyškrtnutá čísla jsou prvočísla.

Zlepšováky však nejsou výmysl 20. st. n. l. Dávno a dávno před námi přišly vtipné hlavy na to, že je zbytečné psát sudá čísla. A psala se jen lichá

1,	3,	5,	7,	9,	<u>11,</u>	13,	15,	<u>17,</u>	19,
21,	<u>23,</u>	25,	27,	<u>29,</u>	<u>31,</u>	33,	35,	<u>37,</u>	39,

Způsob vyškrtávání zůstává stejný. Tomuto způsobu vyhledávání prvočísel se říká po objeviteli E r a t o s t h e n o v o s í t o. A kdo to byl Eratosthenes? Na to vám odpovídají tyto řádky:

E r a t o s t h e n e s K y r e n s k ý (žil asi od r. 276 do 194 př. n. l.) pocházel z Kyreny na severním africkém pobřeží. Kolem r. 260 př. n. l. odešel do Athén studovat filosofii. Ve věku asi 50 let se stal knihovníkem na slavné alexandrijské knihovně (obsahovala několik set tisíc svazků) a zároveň se stal vychovatelem syna tehdejšího egyptského faraóna.

(Tento faraón byl původem Řek.) V stáří oslepl a později skončil smrtí filosofů — sebevraždou.

Eratosthenes byl člověk velmi schopný a všestranně nadaný. Vynikal nejen v matematice, ale i v astronomii (tvrdil, že Země je kulatá a na základě toho určil vzdálenost Země od Slunce), v zeměpise (navrhl novou mapu světa), v historii, ve filosofii, a byl dokonce i úspěšným básníkem. Jeho přátelé jej nazývali „Beta“ ve významu druhý. Tím naznačovali, že prvenství v jednotlivých vědeckých disciplínách náleží, navzdor jeho znalostem, přece jen někomu jinému. V matematice byl rozhodně lepší jeho vrstevník Archimedes (žil 287—212 př. n. l.).

S. Horák

Zajímavé součty

Lidé již dávno poznali, že součet některých přirozených čísel poskytuje zajímavé výsledky. Několik jich tu pro zajímavost uvedeme

$$\begin{aligned} 1. \quad & 1 = 1^3 \\ & 3 + 5 = 2^3 \\ & 7 + 9 + 11 = 3^3 \\ & \text{atd.} \end{aligned}$$

Jde tu na levé straně o čísla lichá, lišící se od sebe o 2. V prvním řádku je pouze jednička, v 2. řádku je součet dalších dvou lichých čísel, v 3. řádku součet dalších tří atd.

$$\begin{aligned} 2. \quad & 1 = 1^3 \\ & 5 + 9 + 13 = 3^3 \\ & 17 + 21 + 25 + 29 + \\ & + 33 = 5^3 \\ & \text{atd.} \end{aligned}$$

Zase se tu vyskytují lichá čísla, lišící se od sebe o 4, přičemž se začíná číslem 1. V prvním řádku je zase jen číslo 1, v 2. řádku je součet dalších tří lichých čísel, v 3. řádku je součet dalších pěti atd.

A teď něco pro vás, milí čtenáři. Z lichých čísel si vyberte ta, která se od sebe liší o 6 (začínáme přirozeně číslem 1). Do 1. řádku napište číslo 1, do 2. řádku napište součet dalších čtyř lichých čísel, do 3. řádku součet dalších sedmi atd. Jaké jsou součty v jednotlivých řádcích?

Sestavili byste sami něco podobného, např. s lichými čísly, která se od sebe liší o 8 nebo o 10? Pošlete nám své výsledky.

S. H.

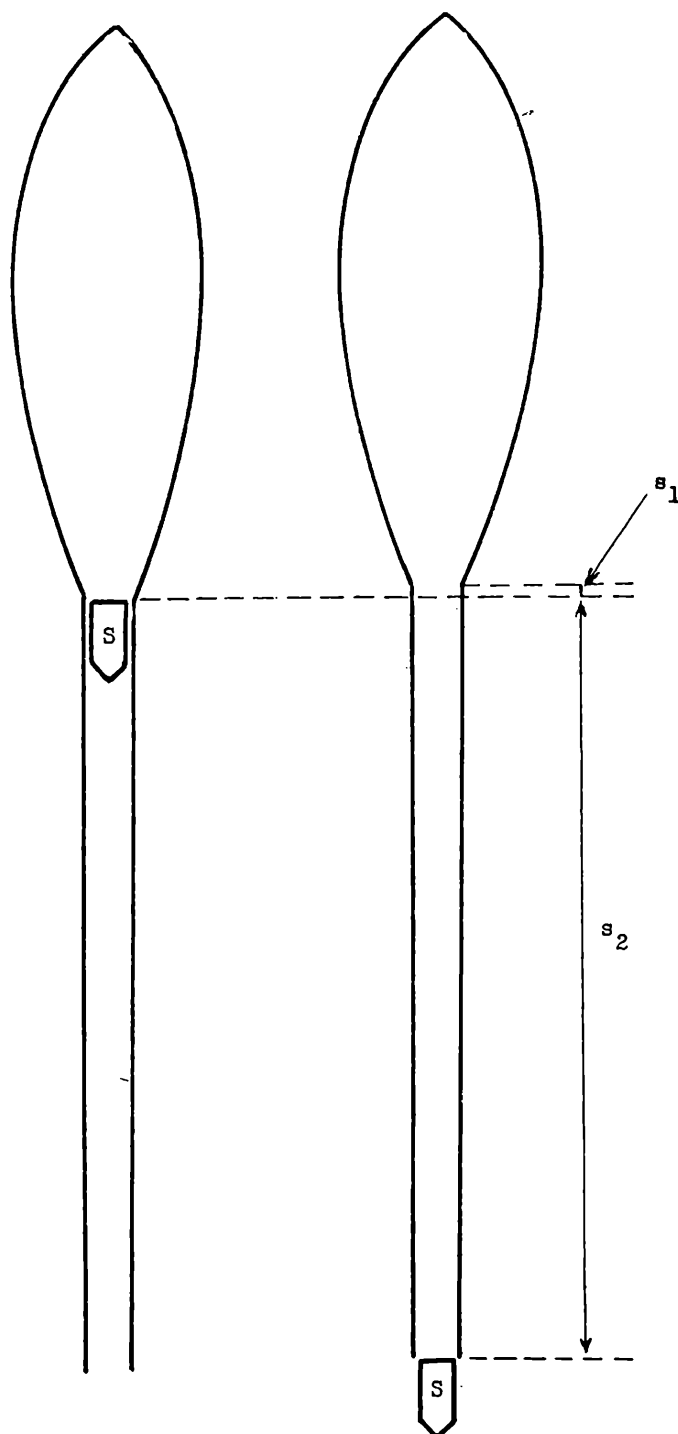


Potřel jsem zákon zachování energie

■ (Dokončení)

Jirka se dopustil ve své úvaze chyby tím, že při odhadu velikosti kinetické energie uvažoval pouze hmotu pohonných látek a tělesa rakety a nevzal v úvahu jejich rychlost. Ve skutečnosti závisí velikost kinetické energie i na rychlosti tělesa. Vzroste-li rychlost tělesa, projeví se velmi podstatně zvětšení kinetické energie, jak to plyne ze vztahu $W_k = \frac{1}{2} mv^2$, a jak to poznáme z tohoto příkladu: Kinetická energie tělesa, které má hmotu $m_1 = 1 \text{ kg}$ a rych-

Obr. 3. Vpravo je vyznačena poloha rakety a střely S před startem, vpravo polohy obou těles v okamžiku, kdy střela opustila hlaveň. Dráha rakety s_1 je proti dráze střely s_2 nepatrná. Velikosti drah jsou v opačném poměru k hmotám obou těles.



lost $v_1 = 1 \text{ m/s}$ je $W'_k = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 \text{ J} = 0,5 \text{ J}$. Těleso však, které má desetkrát menší hmotu ($m_2 = 0,1 \text{ kg}$) a desetkrát větší rychlost ($v_2 = 10 \text{ m/s}$) má kinetickou energii $W''_k = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 10^2 \text{ J} = 5 \text{ J}$. Ačkoliv se rychlost zvětšila tolikrát, kolikrát se hmota zmenšila, je kinetická energie 10krát větší.

Naším úkolem je zdůvodnit výpočtem, proč model rakety, u něhož je pohonnou látkou voda, kterou z trysky vyhání stlačený vzduch, vystoupí mnohem výše než model, z něhož proudí pouze stlačený vzduch. Podle pokynů, uvedených v první části tohoto článku, nahradíme skutečnou raketu modelem, u něhož je z rakety vystřelen náboj působením stlačeného vzduchu. V jednom případě má střela hmotu rovnou hmotě vody a v druhém hmotě vytlačeného vzduchu. Máme dány tedy tyto hodnoty

hmota tělesa rakety	$m_1 = 0,05 \text{ kg}$
přetlak vzduchu	$p = 2 \text{ at}$

V 1. případě

hmota střely	$m'_2 = 0,1 \text{ kg}$
objem vzduchu	$V = 0,1 \text{ dm}^3$
energie stlačeného vzduchu	$W_p = pV = 2 \cdot 0,1 \text{ litratmosféry} = 20,2 \text{ J}$

V 2. případě

hmota střely	$m''_2 = 0,0005 \text{ kg}$
objem vzduchu	$V = 0,2 \text{ dm}^3$
energie stlačeného vzduchu	$W_p = pV = 2 \cdot 0,2 \text{ litratmosféry} = 40,4 \text{ J}$

V obou případech počítáme rychlost a kinetickou energii rakety a střely z rovnic

$$m_1(v_1) = m_2(v_2) \quad (\text{zákon zachování hybnosti}),$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = W \quad (\text{zákon zachování energie}).$$

Výšku výstupu rakety počítáme ze vztahu pro svislý vrh vzhůru

$$h = \frac{v_1^2}{2g},$$

kde je v_1 rychlost rakety v okamžiku, kdy střela opouští hlaveň a g ($= 10 \text{ m/s}^2$) tíhové zrychlení. Tak dostaneme v 1. případě

$$0,05 \cdot |v_1| = 0,1 \cdot |v_2|$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot v_2^2 = 20,2$$

Odtud

$$v_2 = 0,5 v_1 ;$$

po dosazení do 2. rovnice a po úpravě

$$v_1^2 = 538,6 ,$$

dále postupně

$$v_1 = 23,2 \text{ m/s}, v_2 = 11,6 \text{ m/s}, W_k^1 = 13,46 \text{ J}, W_k^2 = 6,74 \text{ J}; h = \frac{v_1^2}{2g} = 26,9 \text{ m}.$$

Raketa vyletí téměř do výše 27 m. Ve skutečnosti by byla dosažená výška menší vlivem odporu vzduchu a jiných příčin ztrát energie.

V 2. případě

$$0,05 \cdot |v_1| = 0,0005 |v_2| \\ \frac{1}{2} 0,05 v_1^2 + \frac{1}{2} 0,0005 v_2^2 = 40,4$$

Odtud

$$v_2 = 100 v_1 ;$$

po dosazení do 2. rovnice a po úpravě je

$$v_1^2 = 16 ,$$

dále postupně

$$v_1 = 4 \text{ m/s}, v_2 = 400 \text{ m/s}, W_k^1 = 0,4 \text{ J}, W_k^2 = 40 \text{ J}; h = 0,8 \text{ m}.$$

Raketa vyletí do výše více než 30krát menší než v 1. případě.

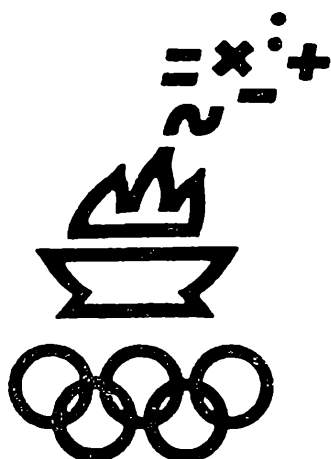
P o z n á m k a. Je zajímavé uvážit, z jakého fyzikálního důvodu raketa získá v tomto druhém případě mnohem menší podíl z energie stlačeného vzduchu než střela. Přejdeme na to touto úvahou: Při pohybu střely hlavní koná stlačený vzduch práci, jednak na těleso rakety, jednak na střelu S . Podle principu akce a reakce působí na střelu S i na těleso rakety **s t e j n á** síla F , která je rovna tlakové síle na podstavu střely. Z toho plyne, že práce, kterou vykoná stlačený vzduch na raketu, popř. na střelu, je přímo úměrná dráze, po které síla na těleso působí. (Předpokládáme pro jednoduchost, že síla F zůstává během pohybu střely stálá.)

Za předpokladu, že je síla stálá, konají obě tělesa pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychleními $a_1 = \frac{F}{m_1}$, $a_2'' = \frac{F}{m_2''}$ Příslušné dráhy ($s = \frac{1}{2} at^2$) pak jsou: rakety $s_1 = \frac{1}{2} \frac{F}{m_1} \cdot t^2$, střely $s_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m_2''} \cdot t^2$. Jejich poměr je (obr. 3)

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{0,0005}{0,05} = \frac{1}{100}$$

V tomto poměru jsou též kinetické energie rakety a střely.

E. K.



MMO

VII. Mezinárodní matematická olympiáda

I. Průběh olympiády. VII. MMO měla ze všech dosavadních mezinárodních olympiád největší počet účastnických zemí — totiž deset. Pozoruhodné je, že se letos olympiády účastnilo Finsko jako první stát, který nepatří k socialistickému táboru. Soutěže se zúčastnily tyto státy: Bulharsko, Československo, Finsko, Jugoslávie, Maďarsko, Mongolsko, Německá demokratická republika, Polsko, Rumunsko a Sovětský svaz. Každý stát vyslal osmičlenné družstvo

pod vedením delegáta a jeho zástupce (pedagogického průvodce).

Program soutěže byl velmi pečlivě připraven do nejmenších podrobností. Byl skutečně bohatý a časově i pracovně velmi náročný. VII. MMO se konala za velké morální a finanční podpory strany a vlády NDR a těšila se velké pozornosti zejména tisku; deset časopisů — mezi nimi i *Neues Deutschland* — věnovalo na svých stránkách mnoho místa reportážím a zprávám; v příštím čísle přineseme překlad reportáže z deníku *Neues Deutschland* o naší delegaci. Časopis *Junge Welt* uspořádal pro účastníky MMO na zakončení soutěže opravdu zdařilý slavnostní večer.

Během 3. července dorazila do Berlína všechna družstva pod vedením pedagogických průvodců a byla ubytována v internátu *Jugendhochschule Wil-*

helma Piecka v Bogensee, pěkné lesnaté a jezernaté krajině, vzdálené asi 30 km od středu Berlína. V Bogensee byla také dne 5. července zahájena první část soutěže. Úvodem promluvil krátce předseda Mezinárodní komise profesor Wolfgang Engel, na to zástupce strany přečetl pozdravný dopis Waltera Ulbrichta adresovaný účastníkům VII. mezinárodní olympiády, a v 9.30 hod. začli žáci pracovat na prvních třech úlohách. Druhou trojici úloh řešili žáci v úterý 6. července. V průběhu soutěže a 7. července byl prováděno korigování úloh.

Dny 8.-11. července byly vyplněny okružní cestou po NDR, kterou v autobusech absolvovaly všechny delegace se svými vedoucími i jejich zástupci. Po celou cestu byly delegace doprovázeny prof. W. Englem a neúnavnými organizátory: hlavním

sekretářem Oberstudienratem H. Tietzem a F. Weissem z Technické stanice. Většina cesty se jela po výborných dálnicích. 8. července byla polední zastávka v Naumburku s prohlídkou dómu, večer dorazila výprava přes Jenu a Weimar do Ettersbergu (Buchenwaldu), kde byla ubytována v tamějším hotelu. Dopoledne 9. července byla prohlídka bývalého koncentračního tábora a po ní následoval pietní akt; vedoucí delegací v průvodu všech účastníků VII. MMO položili kytice k pylonům národů, za znění buchenwaldského zvonu byl položen věnec v památníku obětí nacismu a delegáti podepsali společný zápis v pamětní knize. Odpoledne následovala prohlídka Weimaru, zejména Schillerova a Goethova domu. Ostrý kontrast mezi kolébkou německého humanismu a mezi blízkým památníkem připomínajícím hrůzu fašismu zapůsobily hlu-



*D. Preis
při práci*

Otištěno z
VII. Internationale
Mathematik-
Olympiade

boce na všechny účastníky; tento den zanechal zejména v myslích žáků nesmazatelný dojem. Večer se účastnili delegáti recepce, kterou pro ně uspořádal rektor Vysoké školy pro architekturu a stavitelství ve Weimaru prof. dr. Matzke.

Po druhém noclehu v Ettersbergu se vypravili účastníci VII. MMO dne 10. července na další cestu přes Karl-Marx-Stadt (polední zastávka) do Drážďan, kam dorazili o 15. hodině. Ihned po příjezdu následovala prohlídka Galerie a večere v Italienisches Dörfchen. Večer byl volný s možností navštívit slavnost Dne tisku (Pressefest), která se právě v městě konala. Ráno dne 11. července byla na programu prohlídka Zwingeru, po ní volný čas k prohlídce města. Snídaně i oběd toho dne byly podávány v příjemném prostředí Luisenhofu s krásnou vyhlídkou na město. Odpoledne asi v 16 hod. se nastoupila zpáteční cesta do Berlína.

V pondělí dne 12. července v 10 hodin byla ve Sjezdové dvoraně (Kongreshalle) na Alexandrovově náměstí v Berlíně uspořádána závěrečná slavnost s udělením cen a pochval. Promluvili prof. Engel, státní sekretář Werner Lorenz a nakonec profesor Mateev, který oficiálně pozval jménem bulharského ministerstva školství všechny účastníky na VIII. MMO do Sofie. Následovalo udělení cen a pochval. Za žáky poděkovala

rumunská účastnice Liliána Bucur. Význam slavnosti byl zvýšen i účastí četných vynikajících hostů, např. rektora Humboldtovy university profesora Schrödera, mongolského vyslance aj. Slavnost byla zahájena i ukončena komorní hudbou. Po ukončení následovaly interviewy rozhlasu a televize s některými účastníky. Společný oběd pro všechny účastníky VII. MMO se konal v berlínském Radničním sklípku (Ratskelleru). Večer téhož dne uspořádal časopis *Junge Welt* přátelskou besedu v sále Sjezdové dvorany, která byla dovršením pozornosti věnované tiskem VII. MMO. Každá z delegací měla svého hosta z řad domácích prominentů. Hostem československé delegace byl rektor Humboldtovy university prof. Schröder. Večer byl doplněn řadou programových čísel - např. zpěvním číslem mongolské delegace, předvedením lidového finského tance aj. — a vyzněl v opravdové přátelské sblížení všech účastníků soutěže.

Během 13. července se rozjížděly delegace do svých domovů.

II. Soutěžní úlohy VII. MMO. Soutěžní úlohy byly rozděleny do dvou trojic: 5. července byly řešeny úlohy 1 až 3, dne 6. července úlohy 4 až 6. Na každou Klausurní práci byly stanoveny čtyři hodiny čistého času. Uvedeme texty úloh; v závorce je uveden stát, který úlohu navrhl a maximální počet bodů, které mohl řešitel úlohy získat.

1. Určete všechna čísla x z intervalu $0 \leq x \leq 2\pi$, která vyhovují nerovnosti

$$2 \cos x = \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leq \sqrt{2}.$$

(Jugoslávie, 4 body)

2. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

s neznámými x_1, x_2, x_3 . Její koeficienty splňují tyto podmínky:

- a) a_{11}, a_{22}, a_{33} jsou kladná čísla;
 - b) všechny ostatní koeficienty jsou záporná čísla;
 - c) v každé z daných rovnic je součet všech tří koeficientů kladné číslo.
- Dokažte, že daná soustava má jediné řešení $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(Polsko, 6 bodů)

3. Je dán čtyřstěn $ABCD$ jehož hrany AB, CD mají po řadě délky a, b . Vzdálenost mimoběžek AB, CD je d , jejich odchylka je ω . Čtyřstěn $ABCD$ je rozdělen ve dvě tělesa rovinou ε rovnoběžnou s přímkou AB i s přímkou CD ; poměr vzdáleností roviny ε od přímky AB a od přímky CD je roven k . Vypočítejte poměr objemů obou vzniklých těles.

(Československo, 8 bodů)

4. Vypočítejte všechny čtveřice reálných čísel x_1, x_2, x_3, x_4 , pro něž platí, že součet každého z těchto čísel se součinem tří zbývajících je roven dvěma.

(SSSR, 6 bodů)

5. Je dán trojúhelník OAB , jehož úhel $\sphericalangle AOB$ je ostrý. Bodem $M \neq O$ trojúhelníka OAB jsou vedeny kolmice k přímkám OA, OB a jejich paty jsou označeny po řadě P, Q ; průsečík výšek trojúhelníka OPQ je označen H . Zjistěte, jaký útvar je geometrickým místem bodů H , probíhá-li bod M

- a) stranu AB ,
- b) vnitřek trojúhelníka OAB .

(Rumunsko, 8 bodů)

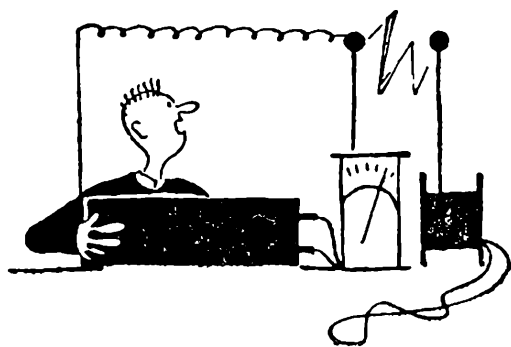
6. V rovině je dána množina n bodů ($n \geq 3$), každé dva z nich jsou spojeny úsečkou. Označme d délku nejdelší z těchto úseček. Průměrem dané množiny nazveme každou z těchto úseček, která má délku d . Dokažte, že počet průměrů dané množiny je roven nejvýše n .

(Polsko, 9 bodů)

Úlohy jsme vám uvedli proto, abyste se seznámili s náročností Mezinárodní matematické olympiády. V příštím čísle podáme zprávu o výsledcích soutěže a umístění československého družstva.

(Pokračování)

Josef Macháček



FO

JAN TESAŘ, Praha

Otáčivý pohyb

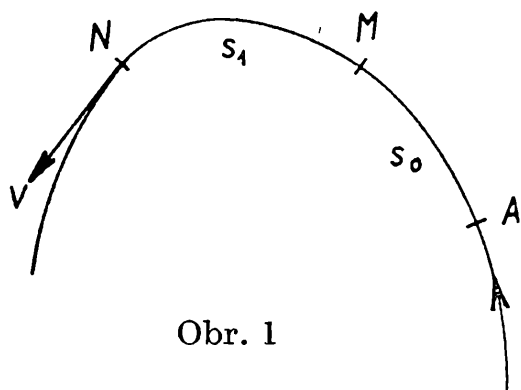
*Téma k prostudování pro první kolo sedmého ročníku FO v kategorii B.
1. Pohyb hmotného bodu po kružnici*

Koná-li hmotný bod pohyb po jakékoliv křivce (obr. 1), má vektor $\mathbf{v}$ jeho rychlosti v kterémkoli místě (např. N) směr tečny k dráze pohybujícího se bodu v uvažovaném místě. Má-li $\mathbf{v}$ stálou hodnotu $v = |\mathbf{v}| = \text{konst.}$, nazýváme pohyb hmotného bodu pohybem rovnoměrným. V tomto případě platí pro délku dráhy $\widehat{MN} = s_1$ hmotného bodu vztah $s_1 = vt$. Veličinu v nazýváme rychlostí hmotného bodu pohybujícího se rovnoměrně po uvažované křivce.

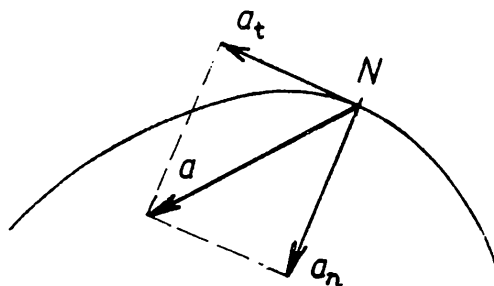
Měříme-li (po oblouku křivky) vzdálenost hmotného bodu nacházejícího se v místě N od určité základní polohy A , a označíme ji s , pak platí $s = s_1 + s_0$, kde $s = \widehat{AN}$ a $s_0 = \widehat{AM}$, takže

$$s = s_0 + vt \quad \text{a} \quad v = \text{konst.} \quad (1)$$

Působí-li na pohybující se hmotný bod v místě N jeho dráhy síla F , uděluje mu zrychlení a ve směru své vektorové přímky, která nemá obecně směr tečny (obr. 2). Rozložíme-li je na složky a_t ve směru tečny



Obr. 1



Obr. 2

(t e č n é z r y c h l e n í) a a_n ve směru normály (n o r m á l o v é neboli d o s t ř e d i v é z r y c h l e n í), platí pro velikost $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Vektor dostředivého zrychlení určuje časovou změnu směru vektoru rychlosti, vektor tečného zrychlení zvětšuje nebo zmenšuje hodnotu v rychlosti hmotného bodu podle toho, zda je orientován souhlasně ($a_t > 0$) s vektorem v nebo nesouhlasně ($a_t < 0$).

Má-li zrychlení a_t konstantní velikost, mění se rychlost pohybujícího se bodu rovnoměrně s časem a bod koná pohyb rovnoměrně zrychlený nebo rovnoměrně zpomalený.

Proto platí pro rychlost a dráhu rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného pohybu bodu po jakékoli křivce vztahy $v_1 = a_t t$ a $s_1 = \frac{1}{2} a_t t^2$, jestliže měříme čas od okamžiku, kdy byl pohybující se bod uveden z klidu do rovnoměrně zrychleného pohybu.

Jestliže však začneme měřit čas v okamžiku, kdy hmotný bod prochází místem M , kde již má rychlost v_0 a označíme-li délku oblouku $\widehat{AM} = s_0$, pak platí pro pohybový stav hmotného bodu v místě N rovnice

$$a_t = \text{konst.}, \quad v = v_0 + a_t t, \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad (2)$$

Je-li $a_t > 0$, pohybuje se hmotný bod rovnoměrně zrychleně, je-li $a_t < 0$, je tento pohyb rovnoměrně zpomalený.

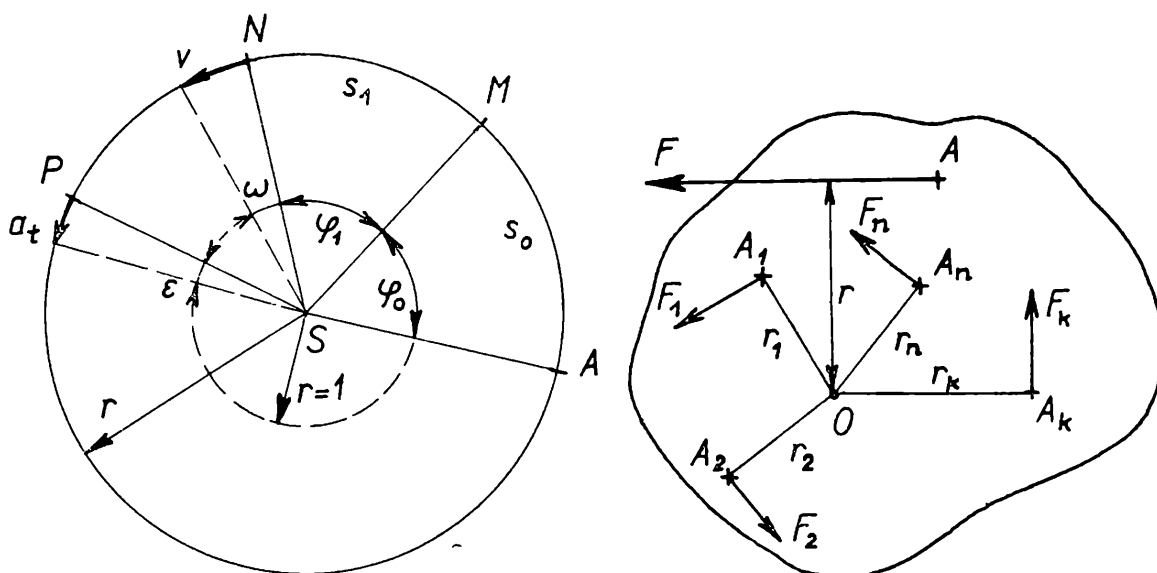
Vztah (1) platí obecně pro rovnoměrný pohyb a vztahy (2) pro rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený pohyb hmotného bodu po jakékoliv křivce, tedy i pro pohyby přímočaré a pohyby po kružnici. Protože však je postupný pohyb tělesa úplně vyšetřen, známe-li zákony pro pohyb jednoho z jeho bodů (obvykle hmotného středu), platí vztahy (1) také pro rovnoměrný a vztahy (2) pro rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený postupný pohyb tělesa.

Jestliže uvažovanou křivkou, po které se hmotný bod pohybuje, je kružnice, pak můžeme pohyb hmotného bodu po kružnici popsat také zavedením úhlového zrychlení ϵ , úhlové rychlosti ω a úhlové dráhy φ (obr. 3). Z obr. 3 je patrné, že $s_0 = \widehat{AM} = r\varphi_0$, $s_1 = \widehat{MN} = r\varphi_1$, $s = \widehat{AN} = r\varphi$, $v = r\omega$, $a_t = r\epsilon$. Dosadíme-li za tyto hodnoty do vztahů (1) a (2), označíme úhlovou rychlost v bodě M písmenem ω_0 a vzniklou rovnici vynásobíme výrazem $\frac{1}{r}$, dostaneme pro rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici vztahy

$$\omega = \text{konst.}, \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (1a)$$

pro rovnoměrně zrychlený pohyb hmotného bodu po kružnici vztahy $\epsilon = \text{konst.}, \quad \omega = \omega_0 + \epsilon t \quad \text{a} \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \epsilon t^2 \quad (2a)$

Při rovnoměrném pohybu hmotného bodu po kružnici je $\epsilon = 0$. Velikost úhlů měříme v radiánech (rad). Protože úhel je veličinou bezrozměrnou, je rozměr úhlové dráhy $[\varphi] = 1$, úhlová rychlost má jednotku



Obr. 3, 4

rad s^{-1} a rozměr $[\omega] = s^{-1}$, úhlové zrychlení má jednotku rad s^{-2} a rozměr $[\varepsilon] = s^{-2}$.

2. Otáčení dokonale tuhého tělesa kolem pevné osy

Vedeme-li v dokonale tuhém tělese přímku o dvěma zvolenými pevnými body, mohou konat všechny hmotné body tělesa kromě těch, které se nacházejí na přímce o , jen pohyby po kružnicích, jejichž středy se nacházejí na ose o (osa rotace). Roviny těchto drah jsou spolu rovnoběžné a kolmé k ose otáčení. Tento pohyb celého tělesa nazýváme *rotací dokonale tuhého tělesa kolem pevné osy*.

Tečné zrychlení, rychlost a dráha jednotlivých hmotných bodů tvořících těleso jsou různé, protože se hmotné body pohybují po kružnicích různých poloměrů. Otáčí-li se těleso rovnoměrně kolem osy o platí, pro pohyb každého hmotného bodu rovnice (1) a (1a), odvozené v předcházejícím odstavci tohoto článku, koná-li těleso otáčivý pohyb rovnoměrně zrychlený nebo rovnoměrně zpomalený kolem osy o , platí pro pohyb každého hmotného bodu rovnice (2) a (2a). Protože ve vztazích (1a) a (2a) se nevyskytují vzdálenosti hmotných bodů, pohybujících se po kružnicích se středy na ose otáčení, od této osy, mají všechny hmotné body při rotaci tělesa stejně veliká úhlová zrychlení ε , v daném okamžiku mají stejné úhlové rychlosti ω a za stejnou dobu vykonají stejně veliké úhlové dráhy φ .

Proto je rovnoměrný otáčivý pohyb tělesa úplně popsán rovnicemi (1a), rovnoměrně zrychlený nebo zpomalený rovnicemi (2a). Veličiny úhlové zrychlení, úhlová rychlost a úhlová dráha jsou charakteristické pro otáčivé pohyby tělesa a odpovídají tečnému zrychlení, rychlosti a dráze při postupném pohybu tělesa, jak je patrné ze srovnání vztahů (1a) se vztahy (1) a vztahů (2a) se vztahy (2).

Rotaci tělesa okolo pevné osy může způsobit jen taková síla F , nebo složka síly, nebo složka výslednice vnějších sil, jejíž vektorová přímka

leží v rovině kolmé k ose rotace, tuto osu neprotíná a nemění vzhledem k rotujícímu tělesu ani svou polohu, ani orientaci.

Na obr. 4 je naznačen řez tělesa rovinou kolmou k ose rotace, která prochází bodem O kolmo k nákresně. Hmotné body o hmotnostech $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots, m_n$, ležící v řezu, označíme $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$. Vektorová přímka síly F je od bodu O vzdálena r a její otáčivý účinek je určen velikostí M jejího momentu. Pohyb jednotlivých bodů $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$ způsobují síly $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots, F_n$. Protože tyto síly udělují jednotlivým bodům na jejich drahách tečná zrychlení, mají směr tečen ke kruhovým drahám pohybujících se hmotných bodů, jak je naznačeno na obr. 4 a nemění vzhledem k rotujícímu tělesu ani polohu, ani orientaci.

Označíme-li $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_n$ vzdálenosti vektorových přímků těchto sil od osy rotace a jejich momenty $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots, M_n$, platí podle momentové věty

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_k + \dots + M_n$$

a po úpravě

$$M = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \dots + F_k r_k + \dots + F_n r_n.$$

Protože všechny síly F_k působí rotaci hmotných bodů A_k v souhlasném smyslu, přisuzujeme momentům M_k stejná znaménka, souhlasící se znaménkem momentu M síly F , jejíž otáčivý účinek nahrazují.

Jednotkou momentu síly je N m.

Síly $F_1, F_2, \dots, F_k, \dots, F_n$ udělují jednotlivým bodům tečná zrychlení $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$, takže platí

$$M = m_1 a_1 r_1 + m_2 a_2 r_2 + \dots + m_k a_k r_k + \dots + m_n a_n r_n$$

Protože kruhové pohyby všech hmotných bodů mají v témže okamžiku stejná úhlová zrychlení, můžeme po použití vzorce $a_k = r_k \varepsilon$ upravit poslední rovnici na tvar

$$M = \varepsilon (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_k r_k^2 + \dots + m_n r_n^2) \quad (3)$$

Uvedená rovnice byla odvozena obecně pro všechny hmotné body ležící v libovolném řezu tělesa rovinou kolmou k ose rotace tělesa. Proto platí obecně pro všechny hmotné body tělesa, a tedy pro celé těleso. Výraz

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_k r_k^2 + \dots + m_n r_n^2 \quad (4)$$

se nazývá m o m e n t s e t r v a č n o s t i r o t u j í c í h o t ě l e s a v z h l e d e m k o s e o.

Moment setrvačnosti má jednotku i rozměr m^2kg .

$$\text{Rovnice} \quad M = J\varepsilon \quad (5)$$

platí pro rotaci tělesa kolem pevné osy. Upomíná na analogickou rovnici $F = ma$ platnou při pohybech hmotných bodů, nebo při postupných pohybech tělesa. Moment síly M a moment setrvačnosti J jsou tedy

veličiny charakteristické pro otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy a jsou analogické síle F a hmotnosti m tělesa, popisujeme-li jeho postupný pohyb.

Rotuje-li tuhé těleso kolem pevné osy, je jeho kinetická energie W_k rovna součtu kinetických energií všech hmotných bodů tělesa. Je tedy

$$W_k = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots + m_k v_k^2 + \dots + m_n v_n^2)$$

Protože úhlová rychlost ω všech hmotných bodů je v daném okamžiku stejná, platí po užití vztahu $v_k = r_k \omega$

$$W_k = \frac{1}{2} \omega^2 (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_k r_k^2 + \dots + m_n r_n^2) = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (6)$$

Obdobný vzorec $W_k = \frac{1}{2} m v^2$ určuje velikost kinetické energie tělesa konajícího postupný pohyb rychlostí v . I z tohoto vztahu je patrné, že moment setrvačnosti tělesa má při rotačním pohybu tentýž význam jako hmotnost při pohybu postupném.

3. Úlohy

1. Setrvačné kolo o poloměru r , jehož moment setrvačnosti je J , je rotováno z klidu otáčivým momentem M síly.

a) Jakou hodnotu bude mít úhlové zrychlení ϵ , úhlová rychlost ω_1 a úhlová dráha φ_1 na konci doby t_1 ?

b) Jak veliký počet n otoček vykoná kolo za dobu t_1 a jakou frekvenci f bude mít na konci doby t_1 ?

c) Jak velkou dráhu s_1 vykoná za dobu t_1 bod A na obvodu kola a jak velká je jeho rychlost v_1 v tomto okamžiku?

d) Určete velikost tečného a odstředivého zrychlení bodu A .

Řešte nejprve obecně, potom číselně pro hodnoty $J = 9 \text{ m}^2\text{kg}$, $M = 125,6 \text{ N m}$, $r = 0,3 \text{ m}$, $t_1 = 5 \text{ s}$.

Označení veličin. Tečné zrychlení označíme a_t , dostředivé a_n .

Řešení. a) Ze vztahu $M = J\epsilon$ určíme

$$\epsilon = \frac{M}{J} \quad (1)$$

Protože ϵ má konstantní hodnotu, otáčí se kolo rovnoměrně zrychleně.

Úhlová rychlost a úhlová dráha mají hodnotu

$$\omega_1 = \epsilon t_1 = \frac{M}{J} t_1 \quad \text{a} \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} \epsilon t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{J} t_1^2 \quad (2)$$

$$\text{Číselně } \epsilon = \frac{125,6}{9} \frac{\text{kg ms}^{-2}\text{m}}{\text{m}^2\text{kg}} = 13,96 \text{ s}^{-2},$$

$$\omega_1 = 5 \cdot 13,96 \text{ s}^{-2}\text{s} = 69,8 \text{ s}^{-1}, \quad \varphi_1 = 25 \cdot 0,5 \cdot 13,96 \text{ s}^{-2} \text{s}^2 = 174.$$

Úhlové zrychlení, úhlová rychlost a úhlová dráha na konci doby t_1 jsou obecně určeny vztahy (1) a (2), číselně je $\epsilon \doteq 13,96 \text{ rad s}^{-2}$, $\omega_1 \doteq 69,8 \text{ rad s}^{-1}$ a $\varphi_1 \doteq 174 \text{ rad}$.

b) Počet otočení n a frekvence f se určí ze vztahů

$$n = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{M t_1^2}{4\pi J} \quad \text{a} \quad f = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{M t_1}{2\pi J}. \quad (3)$$

Číselně

$$n = \frac{174}{2 \cdot 3,14} \doteq 27,7, \quad f = \frac{69,8}{2 \cdot 3,14} \text{ s}^{-1} \doteq 11,1 \text{ s}^{-1}$$

Počet otočení, které setrvačné kolo vykoná za dobu t_1 a frekvenci na konci doby t_1 , určují obecně vztahy (3). Číselné hodnoty mají $n = 27,7$, $f = 11,1 \text{ s}^{-1}$.

c) Bod A vykoná za dobu t_1 dráhu

$$s_1 = r\varphi_1 = \frac{Mrt_1^2}{2J} \quad (4)$$

a na konci této doby má rychlost

$$v_1 = r\omega_1 = \frac{Mrt_1}{J}. \quad (5)$$

Číselně

$$s_1 = 0,3 \cdot 174 \text{ m} = 52,2 \text{ m}, \quad v_1 = 0,3 \cdot 69,8 \text{ m s}^{-1} \doteq 20,94 \text{ ms}^{-1}$$

Dráhu vykonanou bodem A za čas t_1 určuje vztah (4) a rychlost tohoto bodu na konci doby t_1 vztah (5). Číselně je $s_1 = 52,2 \text{ m}$ a $v_1 = 20,94 \text{ ms}^{-1}$.

d) Hodnoty tečného zrychlení a_t a normálového zrychlení a_n určují výrazy

$$a_t = r\varepsilon = \frac{rM}{J} \quad \text{a} \quad a_n = \frac{v_1^2}{r} = \frac{M^2 t_1^2 r}{J^2} \quad (6)$$

Číselně

$$a_t = 0,3 \cdot 13,96 \text{ m s}^{-2} \doteq 4,2 \text{ m s}^{-2}, \quad a_n = \frac{20,94^2}{0,3} \text{ m s}^{-2} \doteq 1\,460 \text{ m s}^{-2}$$

Hodnoty tečného a dostředivého zrychlení udávají vztahy (6).

Číselné hodnoty těchto veličin jsou $a_t = 4,2 \text{ m s}^{-2}$, $a_n = 1\,460 \text{ m s}^{-2}$.

2. Po vypnutí proudu se otáčela kotva elektromotoru rovnoměrně zpomalně a za čas t_1 vykonala n_1 otáček. Po vykonání n_2 otáček se zastavila v čase t_2 . Čas měříme od okamžiku ($t_0 = 0$), kdy byl vypnut proud.

Určete

a) Úhlové zrychlení tohoto zpomaleného pohybu a úhlovou rychlost ω_0 , kterou měla kotva při vypnutí proudu;

b) okamžité rychlosti v_0 a v_1 , které měl v časech t_0 a t_1 bod A na obvodu kotvy, vzdálený od osy otáčení o r a velikost jeho tečného zrychlení a_t při zpomaleném pohybu;

c) jak změnil vektor rychlosti bodu A svou velikost a směr v časovém intervalu t_1 až t_2 ?

Řešte nejprve obecně, potom číselně pro hodnoty $t_1 = 9 \text{ s}$, $t_2 = 15 \text{ s}$, $n_1 = 11$, $n_2 = 13$, $r = 0,3 \text{ m}$.

Označení veličin. Úhel otočení v okamžiku vypnutí proudu označíme φ_0 . V čase t_1 je úhlová rychlost ω_1 a úhlová dráha φ_1 . v čase t_2 označíme tyto veličiny ω_2 a φ_2 . Úhlovou rychlost v proměnném čase budeme značit ω .

Řešení. a) Při zastavení kotvy je $\omega_2 = 0$, takže platí $\omega_0 + \varepsilon t_2 = 0$
a $\omega_0 = -\varepsilon t_2$ (1)

V čase t_1 je úhlová dráha $\varphi_1 = \varphi_0 + \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \varepsilon t_1^2$, v čase t_2
$$\varphi_2 = \varphi_0 + \omega_0 t_2 + \frac{1}{2} \varepsilon t_2^2$$

Násobíme-li první z těchto rovnic číslem -1 a levé a pravé strany rovnic sečteme, dostaneme $\varphi_2 - \varphi_1 = \omega_0 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \varepsilon (t_2^2 - t_1^2)$. Dosadíme-li za ω_0 ze vztahu (1), získáme po úpravě

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\varepsilon (t_2 - t_1) [t_2 + \frac{1}{2} (t_2 - t_1)] = -\frac{1}{2} (t_2 - t_1)^2 \varepsilon, \quad (2)$$

ze které určíme velikost konstantního úhlového zrychlení

$$\varepsilon = -\frac{2(\varphi_2 - \varphi_1)}{(t_2 - t_1)^2} = -\frac{4\pi(n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2} \quad (3)$$

Záporná hodnota úhlového zrychlení vyjadřuje, že uvažovaný pohyb je zpomalený. Ze vztahu (1) vychází

$$\omega_0 = \frac{4\pi t_2 (n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2} \quad (4)$$

Číselně

$$\varepsilon = -\frac{4\pi(13 - 11)}{(15 - 9)^2} \text{ s}^{-2} = -\frac{2\pi}{9} \text{ s}^{-2}, \quad \omega_0 = -\varepsilon t_2 = \frac{10\pi}{3} \text{ s}^{-1}$$

Úhlová rychlost kotvy při vypnutí proudu a úhlové zrychlení rovnoměrně zpomaleného pohybu kotvy jsou určeny vztahy (4) a (3). Číselné hodnoty těchto veličin jsou $\omega_0 = \frac{10\pi}{3} \text{ s}^{-1}$ a $\varepsilon = -\frac{2\pi}{9} \text{ s}^{-2}$

b) Úhlová rychlost v čase t_1 má hodnotu

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1 = \frac{4\pi(n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2} (t_2 - t_1) = \frac{4\pi(n_2 - n_1)}{t_2 - t_1},$$

takže

$$v_1 = r\omega_1 = \frac{4\pi(n_2 - n_1)r}{t_2 - t_1} \quad \text{a} \quad v_0 = r\omega_0 = \frac{4\pi t_2 r (n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2}; \quad (5)$$

$$a_t = r\varepsilon = -\frac{4\pi r (n_2 - n_1)}{(t_2 - t_1)^2}. \quad (6)$$

Číselně

$$v_0 = r\omega_0 = 0,3 \frac{10\pi}{3} \text{ ms}^{-1} = \pi \text{ ms}^{-1}; \quad v_1 = \frac{4\pi \cdot 0,3 \cdot 2}{6} \text{ ms}^{-1} = 0,4 \pi \text{ ms}^{-1},$$

$$a_t = r\varepsilon = -0,3 \frac{2\pi}{9} \text{ ms}^{-2} = -\frac{\pi}{15} \text{ ms}^{-2}$$

Rychlosti bodu A v časech $t_0 = 0$ s a $t_1 = 9$ s jsou obecně určeny vztahy (5), tečné zrychlení při zpožděném pohybu vyjadřuje výraz (6).

Číselně je $v_0 = \pi \text{ ms}^{-1}$, $v_1 = 0,4\pi \text{ ms}^{-1}$, $a_t = -\frac{\pi}{15} \text{ ms}^{-2}$

c) Vektory rychlostí v_1 a v_2 svírají spolu stejně veliký úhel α jako poloměry spojující střed S kruhové dráhy s bodem A v časech t_2 a t_1 . Proto platí podle vztahu (2)

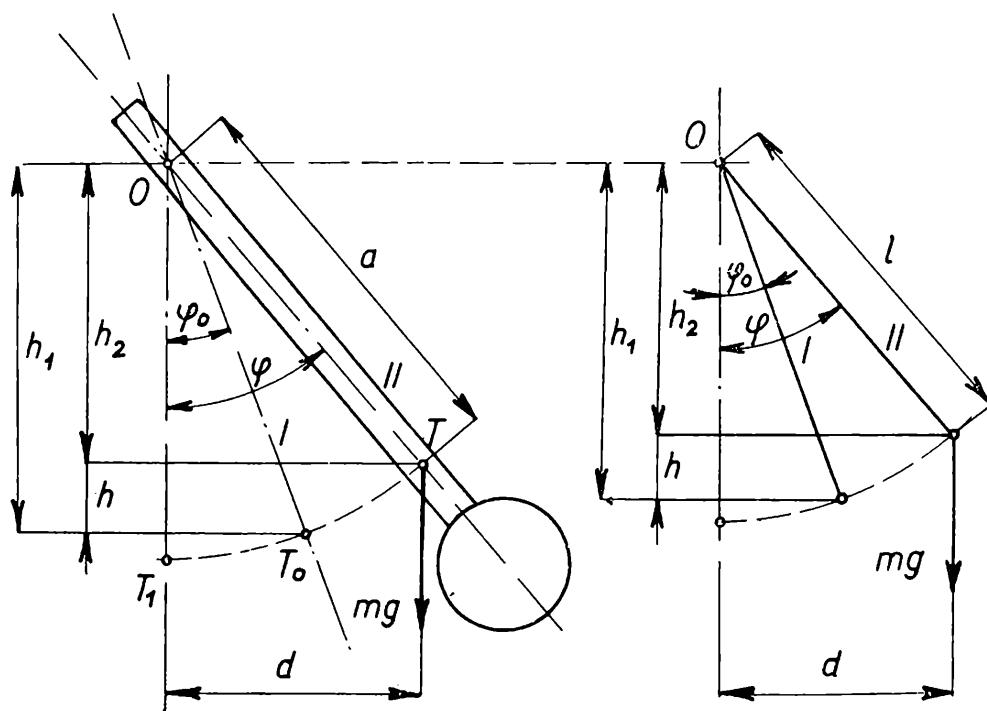
$$\alpha = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon (t_2 - t_1)^2 = 2\pi (n_2 - n_1). \quad (7)$$

Číselně $\alpha = 2\pi (13 - 11) \text{ rad} = 4\pi \text{ rad}$.

Vektor rychlosti změnil v časovém intervalu od t_1 do t_2 svou velikost z hodnoty $v_1 = 0,4\pi \text{ ms}^{-1}$, určené obecně vztahem (5), na nulu. Směry obou rychlostí svírají spolu úhel $4\pi \text{ rad}$, který je obecně vyjádřen výrazem (7).

3. Určete dobu kyvu fyzického kyvadla.

Na obr. 5 je zobrazeno fyzické kyvadlo, otáčivé kolem osy O procházející bodem O kolmo k nákresně. Jeho těžiště T je od osy rotace vzdáleno



Obr. 5

$OT = a$. Vychylujeme-li kyvadlo z rovnovážné polohy, roste jeho potenciální energie tíhová, protože se zvyšuje poloha jeho těžiště. Při přechodu z polohy I , otočené od rovnovážné polohy o φ^2 , do krajní polohy II , svírající s rovnovážnou polohou úhel φ , se zvětší potenciální energie tíhová kyvadla o

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= mgh = mg(h_1 - h_2) = mga \cos \varphi_0 - mga \cos \varphi = \\ &= mga (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

Po uvolnění koná kyvadlo zrychlený otáčivý pohyb a v poloze I nabude kinetickou energii $W_k = \frac{1}{2} J \omega^2$, kde J značí moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose o a ω jeho úhlovou rychlost v poloze I .

Podle zákona zachování energie platí

$$mga (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) = \frac{1}{2} J \omega^2$$

a

$$\omega^2 = \frac{2 mga (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{J} \quad (1)$$

Vychylujeme-li při napnuté niti z rovnovážné polohy kuličku matematického kyvadla o délce l , zvětší se potenciální energie tíhová tohoto kyvadla. Při přechodu z polohy I , odchýlené o úhel φ_0 z rovnovážné polohy, do krajní polohy II , která je odchýlena od rovnovážné polohy o úhel φ , vzroste potenciální energie tíhová kyvadla o hodnotu $\Delta W_p' = mgl (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$. Při průchodu polohou I má kulička kyvadla kinetickou energii $W_k' = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} ml^2 \omega'^2$, kde m značí hmotnost kuličky a ω' její úhlovou rychlost v poloze I .

Ze zákona zachování energie plyne $\Delta W_p' = W_k'$. Z této rovnice po úpravě vychází

$$\omega'^2 = \frac{2g (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{l} \quad (2)$$

Má-li mít uvažované matematické kyvadlo stejnou dobu kyvu jako uvažované kyvadlo fyzické, vypočítáme z rovnice $\omega'^2 = \omega^2$ pro délku matematického kyvadla výraz

$$l = \frac{J}{ma} \quad (3)$$

Výraz (3) má rozměr délky a udává délku matematického kyvadla, které má s uvažovaným fyzickým kyvadlem stejnou dobu kyvu. Značíme ho $l^\times$.

Doba kyvu fyzického kyvadla se dá tedy vypočítat ze vzorce

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l^\times}{g}} = \pi \sqrt{\frac{J}{mga}} \quad (4)$$

Pohyb kývajícího kyvadla je obdobný harmonickému pohybu. Dokážeme, že ze vzorce pro dobu kmitu harmonického pohybu vychází

vztah (4), jestliže ve vztahu $T = 2\pi \sqrt{\frac{mu}{|F|}}$, kde T značí dobu kmitu harmonického pohybu, m hmotnost kmitajícího bodu, u elongaci a F sílu příslušnou této elongaci, nahradíme odpovídajícími veličinami charakteristickými pro otáčivé pohyby veličiny m , u , F , kterými jsou charakterizovány pohyby hmotných bodů, nebo postupné pohyby tělesa. Hmotnosti odpovídá při otáčivých pohybech tělesa moment setrvačnosti J , elongaci u úhlová dráha φ a síle F moment síly M .

Vzorci pro dobu kmitu harmonického pohybu odpovídá pro dobu kmitu fyzického kyvadla vztah

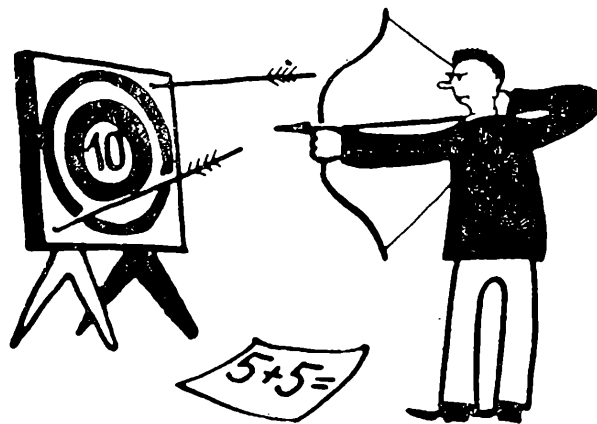
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J\varphi}{M}} = 2\pi \sqrt{\frac{J\varphi}{Fd}} = 2\pi \sqrt{\frac{J\varphi}{mga \sin \varphi}}$$

Pro malé úhly je $\sin \varphi \doteq \varphi$, takže

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J\varphi}{mga\varphi}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}},$$

což souhlasí se vztahem (4).

Vzorec (4) platí jen pro malé úhly φ .



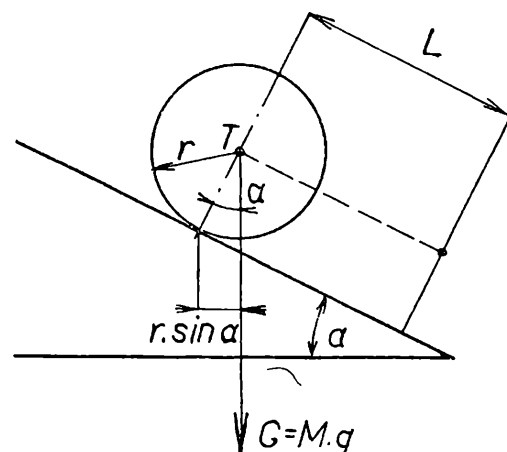
Úlohy

k řešení

● Fyzika

1. Na nakloněné rovině necháme postupně valit dva válce stejné hmotnosti M a stejných vnějších rozměrů (poloměru r a délky l). Jeden z válců je dutý (hustoty ρ_2) druhý je plný (hustoty ρ_1). Z podmínky stejné hmotnosti M obou válců plyne, že $\rho_2 < \rho_1$. Který z obou válců při valení ze stejné počáteční klidové polohy se odvalí na stejnou dráhu L v kratším čase? Vypočtete poměr dob, za které urazí oba válce stejnou dráhu na téže nakloněné rovině, začal-li pohyb obou válců z klidu a je-li v obou případech pohyb způsoben jen účinky tíhového pole Země. Vnější poloměr obou válců je $r = 2$ cm, jejich délka $l = 5$ cm.

Vnitřní poloměr dutého válce je $r_d = 1$ cm.



Objemový moment setrvačnosti plného válce (vzhledem k jeho podélné ose) je roven $J_V = \frac{\pi}{2} \cdot l \cdot r^4$.

Objemový moment setrvačnosti dutého válce k téže ose se rovná

$$J_V = \frac{\pi}{2} \cdot l \cdot (r^4 - r_d^4).$$

Hmotnostní moment setrvačnosti je určen vztahem $J = J_V \cdot \rho$. Vypočtete též hustoty ρ_1 a ρ_2 obou válců, je-li hmotnost každého z nich rovna $M = 0,49 \text{ kg}$.

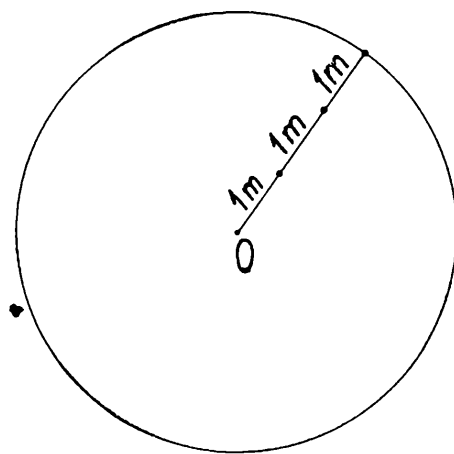
Václav Šindelář

2. Nádoba zčásti naplněná rtutí se otáčí kolem vertikální osy stálou úhlovou rychlostí $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Povrch rtuti vytváří přitom konkávní parabolické zrcadlo. Máme určit ohniskovou dálku tohoto zrcadla. Hodnotu tíhového zrychlení volte $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Václav Šindelář

3. Ke svislé stěně je přistaven žebřík délky l tak, že svírá s podlahou úhel α . Maximální třecí síla ve styčné ploše mezi žebříkem a podlahou je F_1 , ve styčné ploše mezi stěnou a žebříkem je třecí síla $F_2 = 0$. Jak vysoko smí vystoupit po žebříku člověk tíhy G , než začne žebřík klouzat a) zanedbáme-li tíhu žebříku, b) je-li tíha žebříku G_1 ? Jak velká může být nanejvýš hmotnost žebříku, nemá-li klouzat vlastní tíhou? Úlohu řešte nejdříve obecně, potom pro hodnoty $l = 4 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$, $F_1 = 200 \text{ N}$, $G = 600 \text{ N}$, $G_1 = 150 \text{ N}$.

František Vencálek



4. Chlapec otáčí tři koule téže hmotnosti $m = 0,1 \text{ kg}$ ve vodorovné rovině. Koule jsou upevněny na stejném vlákně. Jakou silou bude napínán každý ze tří úseků vlákna, jestliže je obvodová rychlost vnější koule $v = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$? V které části se vlákno pravděpodobně nejdříve přetrhne, zvětšujeme-li rychlost otáčení (vlákno je po celé délce homogenní, téhož průřezu).

František Vencálek

5. Za rovnovážného stavu je vzdálenost obou protonů v molekule vodíku $u = 7 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Zvětší-li se nebo zmenší-li se tato vzdálenost, vznikne vratná síla, přímo úměrná výchylce. Při výchylce každého protonu o 10^{-11} m je vratná síla $1,1 \cdot 10^{-8} \text{ N}$. Najděte kmitočet kmitu molekuly, je-li hmotnost protonu $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

František Vencálek

6. Střela s hmotností $m_1 = 0,5 \text{ kg}$ letící vodorovnou rychlostí $v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dopadne na dřevěný blok hmotnosti $m_2 = 2 \text{ kg}$ a uváže v něm. Blok leží na vodorovné rovině. Jakou rychlostí se začne pohybovat blok i se střelou? Jakou dráhu urazí, je-li součinitel smykového tření $\mu = 0,1$. Jaká část kinetické energie se ztratí při srážce střely s blokem?

František Vencálek

Řešení fyzikálních příkladů

zašlete redakci

do konce března 1966.



Sbírka úloh z elementární matematiky

Při studiu matematiky se neobejdeme bez nutnosti, abychom si průběžně sami řešili jednodušší nebo složitější příklady z probírané partie. Proto je na knižním trhu stále poptávka po vhodných sbírkách úloh s různým zaměřením. Na jednu takovou sbírku chceme dnes upozornit čtenáře Rozhledů. Knížka má název *Úlohy z elementární matematiky* a jejím autorem je V. B. Lidskij s třemi spolupracovníky. Je to překlad z ruštiny. V knize je shrnut materiál, který autoři nasbírali za dvanáct let, kdy zkoušeli při přijímacích zkouškách na vysokou školu. Z toho vyplývá i pojetí celého svazku. Nejsou to úlohy zcela jednoduché a řada příkladů vyžaduje při řešení určité dávky důvtipu. Řešení všech úloh je ovšem uvedeno v závěru knížky, takže se tento svazek může stát dobrou učební pomůckou.

Všimněme si trochu tematiky této sbírky. Knížka je rozdělena do tří kapitol. První část s názvem *Algebra* obsahuje úlohy o aritmetických a geometrických

posloupnostech, o algebraických rovnicích a jejich soustavách, o algebraických nerovnostech, o rovnicích logaritmických a exponenciálních, příklady z kombinatoriky a slovní úlohy. Druhá kapitola má název *Geometrie*. Jsou v ní různé početní, konstruktivní a důkazové úlohy z planimetrie a stereometrie, vyšetřují se geometrická místa bodů apod. Ve třetí kapitole s názvem „Trigonometrie“ najdete jednak úpravy výrazů obsahujících goniometrické funkce, jednak goniometrické rovnice a nerovnosti. Z osnov naší střední školy trochu vybočuje partie o funkcích cyklometrických, ale tato část knížky nebude jistě čtenářům dělat potíže, neboť všechny potřebné pojmy jsou tu vysvětleny. Ostatně znalost cyklometrických funkcí bude mnoho čtenářů potřebovat při pozdějším studiu matematiky, např. až budou probírat integrální počet.

Knížka, kterou vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze, má 464 stránky, 230 obr. a stojí 19,50 Kčs. Přeložil ji Rudolf Zelinka se čtyřmi spolupracovníky. Věříme, že bude vítanou pomůckou nejen pro řešitele Matematické

olympiády, ale poskytne i dobrou přípravu pro přijímací zkoušky na vysoké školy.

Závěrem neškodí malá ukázka z knížky. Vybíráme úlohu, jejíž řešení se nedá opřít o žádnou školskou poučku a řešitel si tedy na ní může ověřit svůj důvtip:

Jistá abeceda se skládá ze šesti písmen, která jsou pro telegrafický

přenos vyjádřena těmito znaky:

.;-;...;-;-;-;-.

Při telegrafickém přenosu jistého slova neudělali mezi jednotlivými písmeny patřičné mezery, čímž vznikl řetězec teček a čárek, který se skládal ze 12 značek (tj. teček a čárek).

Kolika způsoby je možno přechíst přenášené slovo?

J. S.



REDAKCE HOVOŘÍ

Žádáme své čtenáře, aby věnovali pozornost několika sdělením redakce:

Redakce nemá na starosti doručování Rozhledů matematicko-fyzikálních; to provádí výhradně Poštovní novinová služba (poštovní úřad) v místě bydliště čtenáře. Nemůže proto ani čtenářům zasílat jednotlivé výtisky, které novinová služba nedodá. Pouze v jednotlivých případech, pokud takový výtisk sami máme, rádi tak učiníme. Je-li nesrovnalost v doručování větších rozměrů, nebo odmítne-li novinová služba dokonce přijmout předplatné, žádáme, aby nám byla taková závada oznámena písemně, abychom mohli zjednat nápravu.

Soutěžící Matematické olympiády v Praze, pokud byli odměněni předplatným Rozhledů na rok 1965/66 a náš časopis ještě nedostali, nechť nám to ihned oznámí.

Redakce je zahrnuta rukopisy, které pojednávají o vlastnostech

trojúhelníka, bylo by vhodné, aby se autoři zabývali jinou tematikou. Každý rukopis projde recenzním řízením a je buď vrácen nebo případně zaslán autorovi k opravě a pak příležitostně otištěn; to může trvat delší dobu a urgencye jsou bezúčelné. Přednost dáváme krátkým zajímavým rukopisům psaným na stroji srozumitelně a „čtivě“ z oboru matematiky, geometrie, astronomie a fyziky. Obrázky jsou při reprodukci vždy dvakrát zmenšeny, proto je bezpodmínečně nutné provádět popis šablonou 5 mm. Případně může redakce vytažení tuší a popisu sama obstarat.

Náš tiskárenský šotek na str. 17 v 1. čísle Rozhledů prodloužil život slavnému matematikovi Bernoulli-mu, který - tam citovanou větu pronесl roku 1693 a nikoliv předloni v r. 1963.

M. M.

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

oscilace
oskulační kružnice
osmička
osmina
osmistěn
ostroúhlý
ostrý
osvětlení, osvětlovat
otáčení
otáčet
otočení
označení všeobecně užívané
označovat

колебание
соприкасающаяся окружность
восьмерка
восьмая часть
октаэдр
остроугольный
острый
освещение, освещать
вращение
поворачивать
поворот, оборот
общепринятое обозначение
означать, обозначать

P

pak, potom
paprsek, hlavní paprsek
parabola
parabolický
paraboloid, rotační paraboloid
parametr
pata kolmice
pás
perióda
periodický
permutace z n prvků
perspektiva, žabí perspektiva
perspektivita
pevný, nepohyblivý
pětimístný
planimetrie
plášť
plocha

затем
луч, главный луч
парабола
параболический
параболоид, параболоид вращения
параметр
основание перпендикуляра
полоса, пояс
период
периодический
перестановка из n элементов
перспектива, лягушачья перспектива
перспективное подобие
неподвижный
пятизначной
планиметрия
боковая поверхность
поверхность

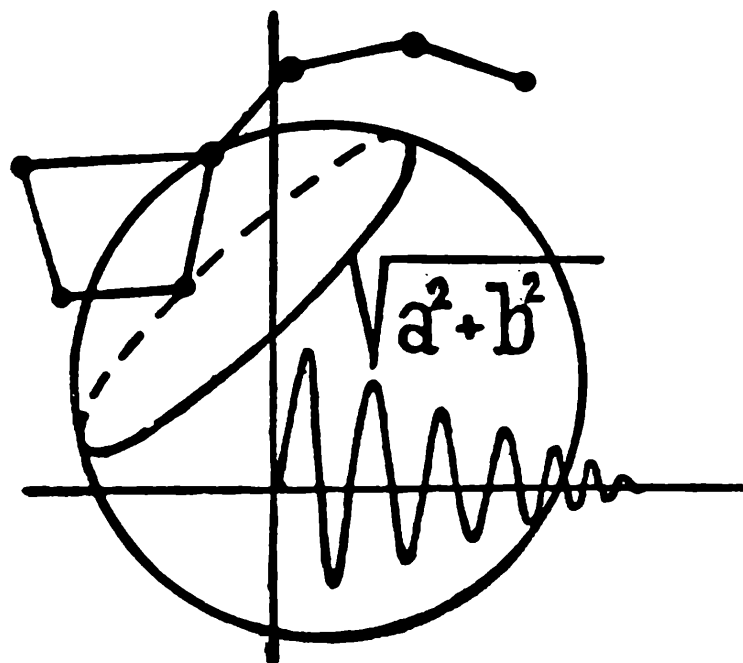
plocha hranolová, jehlanová, kulo-
vá, kuželová, rotační, rozvinutel-
ná, šroubová, válcová

plošný
plynout
pobočná stěna
počáteční
počátek
počet
počet, počítání
početní (stroj)
počítání, počítání z paměti
počítat
podíl
podmíněný
podmínka, nutná a postačující
podobné trojúhelníky
podobnost
podobný
podrobit (podmínce)
podržet (vlastnost)
podstatný
podstava dolní, horní
pohyb
pohyblivý
pojem
pokračování
pokus
pokyn (návod)
pól
poledník
poloha, vzájemná poloha
polokoule
poloměr
poloprostor
polopřímka
polorovina
polovina
položít rovně nule
polynom
poměr
poměr podobnosti
pomocný
pootočení
pootočený
pootočit
porovnání, porovnat
pořadí
posloupnost
postačující
postupně
posunovat
posunutí

поверхность призматическая, пирами-
дальная, шаровая, коническая, вра-
щения, развертывающаяся, винтовая,
цилиндрическая
поверхностный
вытекать
боковая грань
начальный, исходный
начало
число, исчисление
счисление
вычислительный
исчисление, устный счет
подсчитывать
доля, частное
условный
условие, необходимое и достаточное
подобные треугольники
подобие
подобный, аналогичный
подчинить (условию)
сохранить (свойство)
существенный
основание нижнее, верхнее
движение, смещение
подвижной, подвижный
понятие
продолжение
опыт
указание
полюс
меридиан
взаимное положение
полушарие
радиус
полупространство
полупрямая
полуплоскость
половина
приравнять нулю
полином, многочлен
соотношение, отношение
коэффициент подобия
вспомогательный
вращение
повернутый
повернуть
сопоставление, сопоставить
последовательность
последовательность, прогрессия
достаточный
последовательно
перемещать
перемещение, трансляция, перенос,
сдвиг, смещение

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



3

ROČ. 44

1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Listopad 1965

Číslo 3

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PÚ, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

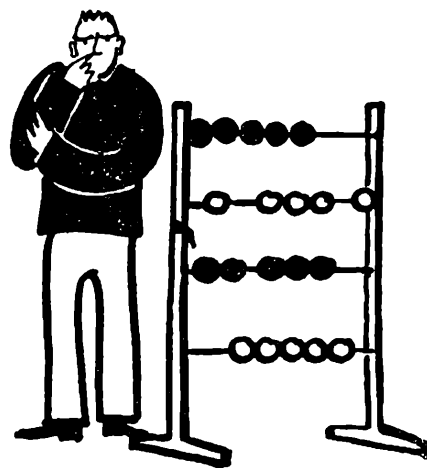
Inž. O. Lacina: Praktické řešení algebraických rovnic vyšších stupňů	97
Doc. J. Chudý: Determinanty [Dokončení]	105
L. Granát: Geometrické úkoly při prostorovém obrábění	109
Doc. B. Kepr: O některých křivkách [Pokračování]	113
A. Dragoun: O přílivu a odlivu	116
Řešení úloh	120
XV. ročník Matematické olympiády	123
VII. Mezinárodní matematická olympiáda [Dokončení]	127
I. Volf - Dr. M. Chytilová: Pohyb družice v gravitačním poli	131
J. Kotyk: Prokop Diviš	139
O. Lepil: Znáte Archimédův zákon?	143
Redakce hovoří	144
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novín. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Kořál, studující FS.

A-04*51506

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1965.



Praktická řešení algebraických rovnic vyšších stupňů

INŽ. OTAKAR LACINA. ČKD, Praha

*V letošním ročníku Rozhledů zařazujeme několik článků o řešení rovnic. Do-
víte se tam o přibližných metodách, které vesměs nejsou v osnovách středních
škol, kterým však můžete bez velkých obtíží porozumět. Většiny z nich se užívá
při práci s matematickými stroji.*

*Napište nám potom, jak se vám tyto „pohledy do předsíně matematické labo-
ratoře“ líbily.*

Redakce

Úvod

V Rozhledech matematicko-fyzikálních, roč. 43, č. 6 jsme si jednak ujasnili základní požadavky na metody praktického řešení rovnic z hlediska přesnosti i z hlediska provádění vlastního řešení, jednak jsme uvedli způsob řešení kubických rovnic, který těmto požadavkům vyhovuje.

Při řešení problémů technické praxe dospíváme často, zvláště v elektrotechnice při rozborech vlastností elektrických obvodů i k algebraickým rovnicím vyššího stupně než je třetí. Potřebujeme tyto rovnice řešit opět metodou, která je jednoduchá, přehledná, neobsahující složitějších početních úkonů. Takovou je metoda Shih-Nge Lin-ova, uveřejněná v *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 20, 1941, str. 231—242.

1. Obecný postup řešení

Každou algebraickou rovnici n -tého stupně můžeme převést na tvar

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou konstanty a x je neznámá. Postup řešení takové rovnice záleží na tom, je-li nejvyšší exponent n u neznámé x sudý nebo lichý.

1a) Postup řešení, je-li stupeň rovnice lichý. Je-li stupeň dané rovnice lichý, provedeme nejprve dělení polynomu dvoučlenem $x + {}^1b$, kde

$${}^1b = \frac{a_n}{a_{n-1}} \text{ (horní index značí číslo přiblížení)}$$

$$\begin{array}{r} (x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n) : (x + {}^1b) = x^{n-1} + \\ + {}^1s_1 x^{n-2} + {}^1s_2 x^{n-3} + \dots + {}^1s_{n-1} \\ - x^n \pm {}^1b x^{n-1} \\ \hline {}^1s_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \\ - {}^1s_1 x^{n-1} \pm {}^1b {}^1s_1 x^{n-2} \\ \hline {}^1s_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cdot \\ \hline {}^1s_{n-1} x + a_n \\ - {}^1s_{n-1} x \pm {}^1b {}^1s_{n-1} \\ \hline {}^1s_n \end{array}$$

Další dělení daného polynomu provedeme dvoučlenem $x + {}^2b$, kde

$${}^2b = \frac{a_n}{{}^1s_{n-1}} \text{ provedeme tedy dělení}$$

$$\begin{array}{r} (x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n) (x + {}^2b) = \\ = x^{n-1} + {}^2s_1 x^{n-2} + {}^2s_2 x^{n-3} + \dots + {}^2s_{n-1} ; \\ - x^n \pm {}^2b x^{n-1} \\ \hline {}^2s_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \\ - {}^2s_1 x^{n-1} \pm {}^2s_1 {}^2b x^{n-2} \\ \hline {}^2s_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cdot \\ \hline {}^2s_{n-1} x + a_n \\ - {}^2s_{n-1} x \pm {}^2s_{n-1} {}^2b \\ \hline {}^2s_n \end{array}$$

Další dělení daného mnohočlenu provedeme dvoučlenem $x + {}^3b$, kde

$${}^3b = \frac{a_n}{{}^2s_{n-1}} \text{ a uvedený postup provedeme tolikrát, až zbytek } {}^ms_n \text{ po}$$

m -tém dělení je zanedbatelný, tj. $ms_n \ll a_n$. Tím jsme rozložili daný polynom lichého stupně na dvoučlen a polynom sudého stupně

$$(x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n) \doteq \\ \doteq (x + {}^mb)(x^{n-1} + {}^ms_1 x^{n-2} + {}^ms_2 x^{n-3} + \dots + {}^ms_{n-1}) ,$$

čímž jsme získali jeden z kořenů dané rovnice, a to $x_1 = -{}^mb$ a dále polynom sudého stupně o jeden stupeň nižší než polynom daný, který budeme dále řešit.

1b) Postup řešení, je-li stupeň rovnice sudý. Je-li stupeň dané rovnice nebo rovnice získané snížením stupně dané rovnice sudý, provedeme nejprve dělení polynomu mnohočlenem $x^2 + {}^1c x + {}^1d$, kde ${}^1c = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

a ${}^1d = \frac{a_n}{a_{n-2}}$. Provedeme tedy dělení

$$\begin{array}{r} (x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n) \\ : (x^2 + {}^1c x + {}^1d) = x^{n-2} + {}^1u_1 x^{n-3} + {}^1u_2 x^{n-4} + \dots + {}^1u_{n-2} \\ - x^n \pm {}^1c x^{n-1} \pm {}^1d x^{n-2} \\ \hline {}^1u_1 x^{n-1} + {}^1v_1 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \\ - {}^1u_1 x^{n-1} \pm {}^1c {}^1u_1 x^{n-2} \pm {}^1d {}^1u_1 x^{n-3} \\ \hline {}^1u_2 x^{n-2} + {}^1v_2 x^{n-3} + a_4 x^{n-4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^1u_{n-2} x^2 + {}^1v_{n-2} x + a_n \\ - {}^1u_{n-2} x^2 \pm {}^1c {}^1u_{n-2} x + \\ \quad + {}^1d {}^1u_{n-2} \\ \hline {}^1u_{n-1} x + {}^1v_{n-1} \end{array}$$

Další dělení daného polynomu provedeme mnohočlenem $x^2 + {}^2c x + {}^2d$, kde ${}^2c = \frac{{}^1v_{n-2}}{{}^1u_{n-2}}$ a ${}^2d = \frac{a_n}{{}^1u_{n-2}}$. Dělením získáme opět kvadratický a lineární zbytek. Další dělení provedeme opět mnohočlenem $x^2 + {}^3c x + {}^3d$, kde ${}^3c = \frac{{}^2v_{n-2}}{{}^2u_{n-2}}$ a ${}^3d = \frac{a_n}{{}^2u_{n-2}}$. Uvedený postup opakujeme m' -krát, tj. tolikrát, až zbytek ${}^{m'}u_{n-1} x + {}^{m'}v_{n-1}$ je zanedbatelný, tj. ${}^{m'}u_{n-1} \ll a_{n-1}$ a ${}^{m'}v_{n-1} \ll a_n$. Uvedeným postupem jsme sudý polynom rozložili na polynom druhého stupně a sudý polynom o dva stupně nižší než je polynom daný

$$(x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n) \doteq \\ \doteq (x^2 + {}^{m'}c x + {}^{m'}d) (x^{n-2} + {}^{m'}u_1 x^{n-3} + {}^{m'}u_2 x^{n-4} + \dots + {}^{m'}u_{n-2}) .$$

Řešením polynomu druhého stupně získáme dva kořeny rovnice. Pokud polynom $(x^{n-2} + {}^{m'}u_1 x^{n-3} + \dots + {}^{m'}u_{n-2})$ je vyššího stupně než druhého, opakujeme uvedený postup řešení.

2. Praktické provádění dělení v tabulce

Dělení jak dvoučlenem, tak i kvadratickým mnohočlenem provedeme v tabulkách, které nám podstatně zjednoduší zápis a sníží i pravděpodobnost omylu.

Pro dělení dvoučlenem použijeme tabulky

	a_1	a_2	a_3	a_4		a_{n-1}	a_n
$b =$	$-b$	$-bs_1$	$-bs_2$	$-bs_3$	$\dots$	$-bs_{n-2}$	$-bs_{n-1}$
	s_1	s_2	s_3	s_4		s_{n-1}	s_n

V tabulce získáme třetí řádek každého sloupce sloučením prvního a druhého řádku. Z tabulky odečteme všechny potřebné hodnoty, a to s_n pro zjištění přesnosti řešení, s_{n-1} pro případné další dělení, tak i koeficienty o stupeň nižšího polynomu $s_1; s_2; \dots; s_{n-1}$.

Pro dělení kvadratickým mnohočlenem použijeme tabulky

	a_1	a_2	a_3	a_4		a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
$d =$		$-d$	$-du_1$	$-du_2$		$-du_{n-4}$	$-du_{n-3}$	$-du_{n-2}$
		v_1	v_2	v_3		v_{n-3}	v_{n-2}	v_{n-1}
$c =$	$-c$	$-cu_1$	$-cu_2$	$-cu_3$		$-cu_{n-3}$	$-cu_{n-2}$	
	u_1	u_2	u_3	u_4		u_{n-2}	u_{n-1}	

Protože členy v nás nezajímají, kromě členů v_{n-1} a v_{n-2} je nepotřebujeme, budeme vyplňovat tabulku

	a_1	a_2	a_3	a_4
$d =$		$-d$	$-du_1$	$-du_2$
$c =$	$-c$	$-cu_1$	$-cu_2$	$-cu_3$
	u_1	u_2	u_3	u_4

a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
$-du_{n-4}$	$-du_{n-3}$	$-du_{n-2}$
	v_{n-2}	v_{n-1}
$-cu_{n-3}$	$-cu_{n-2}$	
u_{n-2}	u_{n-1}	

V tabulce získáme třetí řádek každého sloupce sloučením prvního a druhého řádku, pátý řádek sloučením prvního, druhého a čtvrtého řádku, popřípadě sloučením třetího a čtvrtého řádku. Z tabulky odečteme všechny potřebné hodnoty, a to u_{n-1} a v_{n-1} pro zjištění přesnosti výpočtu, u_{n-2} a v_{n-2} pro případné další dělení, tak i koeficienty o dva stupně nižšího polynomu $u_1; u_2; u_3; \dots; u_{n-2}$.

P ř í k l a d. Je dána rovnice

$$x^5 + 8,63 x^4 + 246 x^3 + 735 x^2 + 2960 x + 1647 = 0 .$$

$${}^1b = \frac{1647}{2960} = 0,556$$

	8,63	246	735	2960	1647
0,556	-0,556	-4,49	-134,2	-334	-1460
	8,074	241,5	600,8	2626	187

$${}^2b = \frac{1647}{2626} = 0,626$$

	8,63	246	735	2960	1647
0,626	−0,626	−5	−151	−366	−1625
	8,004	241	584	2594	22

$${}^3b = \frac{1647}{2594} = 0,635$$

	8,63	246	735	2960	1647
0,635	−0,635	−5,1	−153	−370	−1645
	7,995	240,9	582	2590	2

Člen 3s_n je zanedbatelný proti a_n . Polynom pátého stupně můžeme rozložit na

$$x^5 + 8,64x^4 + 246x^3 + 735x^2 + 2960x + 1647 \doteq \\ \doteq (x + 0,635)(x^4 + 8x^3 + 240,9x^2 + 582x + 2590).$$

Dále řešíme rovnici čtvrtého stupně

$$x^4 + 8x^3 + 240,9x^2 + 582x + 2590 = 0$$

$${}^1c = \frac{582}{240,9} = 2,42, \quad {}^1d = \frac{2590}{240,9} = 10,75$$

	8,0	240,9	582	2590
10,75		−10,75	−60	−2330
			522	260
2,42	−2,42	−13,5	−525	
	5,58	216,6	−3	

$${}^2c = \frac{522}{216,6} = 2,41 ,$$

$${}^2d = \frac{2590}{216,6} = 11,95$$

	8,0	240,9	582	2590
11,95		-11,95	-66,8	-2570
			515,2	20
2,41	-2,41	-13,49	-519	
	5,59	215,5	-3,8	

$${}^3c = \frac{515,2}{215,5} = 2,39 ,$$

$${}^3d = \frac{2590}{215,5} = 12,02$$

	8,0	240,9	582	2590
12,02		-12,02	-67,5	-2590
			514,5	0
2,39	-2,39	-13,41	-515	
	5,61	215,5	-0,5	

Členy ${}^3u_{n-1}$ a ${}^3v_{n-1}$ jsou zanedbatelné proti a_{n-1} a a_n . Polynom pátého stupně můžeme rozložit na

$$\begin{aligned} & x^5 + 8,63 x^4 + 246 x^3 + 735 x^2 + 2960 x + 1647 \doteq \\ & \doteq (x + 0,635) (x^2 + 2,39 x + 12,02) (x^2 + 5,61 x + 215,5) \end{aligned}$$

První kořen rovnice pátého stupně je

$$x_1 = -0,635$$

Druhý a třetí kořen získáme řešením kvadratické rovnice ($j = \sqrt{-1}$)

$$\begin{aligned}x^2 + 2,39x + 12,02 &= 0, \\x_{2,3} &= -1,195 \pm 3,26j\end{aligned}$$

Čtvrtý a pátý kořen řešením rovnice

$$\begin{aligned}x^2 + 5,61x + 215,5 &= 0, \\x_{4,5} &= -2,805 \pm 14,4j.\end{aligned}$$

3. Kontrola výsledků

Po vyřešení všech reálných a komplexních kořenů dané rovnice provedeme kontrolu vypočtených hodnot. Označíme-li kořen rovnice x_i , pak platí

$$\sum_{i=1}^n x_i = -a_1,$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = (-1)^n \cdot a_n.$$

Mezi kořeny a koeficienty rovnice n -tého stupně platí n vztahů. Prakticky však uvedená kontrola výpočtu je postačující.

4. Kontrola výsledku našeho příkladu

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= -8,635, \\x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 &= -1643.\end{aligned}$$

Z výsledku kontroly plyne, že rovnice byla vyřešena správně s přesností danou logaritmickým pravítkem, kterého bylo pro výpočet použito.

Důkaz správnosti této metody je podán v knize В. Л. ЗЛГУСКИН: СПРАВОЧНИК ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, str. 114 (ФИЗМАТГИЗ—1960).

Red.

Determinanty (Dokončení)

DOC. JAROSLAV CHUDÝ, ČVUT, Praha

4. Některá užití determinantů v analytické geometrii

a) Rozšířme nejdříve nám již známé vlastnosti determinantů o další dvě.

Věta 5. Vyměníme-li v determinantu dvě rovnoběžné řady, změní determinant své znaménko.

Důkaz. Věta platí pro determinant 2. stupně (ověřte si přímým výpočtem). Označme nyní daný determinant 3. stupně D , a necht' D' je determinant s vyměněnými dvěma řádky. Rozvedeme-li D , D' podle řádku, který se nezměnil, budou v obou rozvoích determinanty 2. stupně s vyměněnými řádky a budou se proto všechny členy rozvoje determinantů D a D' lišit znaménky, a tedy i $D = -D'$.

Věta 6. Determinant se nezmění, přičteme-li k jedné jeho řadě libovolné násobky řad s ní rovnoběžných.

Důkaz provedeme třeba pro třetí řádek, k němuž přičteme první řádek znásobený číslem λ_1 a druhý řádek znásobený číslem λ_2 (říkáme, že k třetímu řádku přičítáme lineární kombinaci prvních dvou řádků). Označíme-li daný determinant D , uvedenou operací získaný determinant D' , je

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$
$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} & a_{32} + \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} & a_{33} + \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} \end{vmatrix}$$

Rozvoj determinantu D' podle 3. řádku je

$$D' = \sum_{i=1}^3 (a_{3i} + \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i}) A_{i3} = \sum_{i=1}^3 a_{3i} A_{i3} + \lambda_1 \sum_{i=1}^3 a_{1i} A_{i3} + \lambda_2 \sum_{i=1}^3 a_{2i} A_{i3}.$$

Avšak podle věty 4. je druhý a třetí sčítanec rovný nule a první je právě D (je to jeho rozvoj podle 3. řádku). Je tedy $D = D'$, což jsme měli dokázat.

Právě uvedené věty užíváme s výhodou pro výpočet determinantů zejména vyšších stupňů, pro něž věta také platí. Cílem naší snahy je užitím této věty upravit determinant tak, abychom v jedné jeho řadě

získali až na jeden (obecně nenulový) prvek vesměs nuly a pak podle této řady rozvineme náš determinant. Tím vlastně převádíme výpočet daného determinantu na výpočet determinantu o jeden stupeň nižšího (ostatní členy v rozvoji jsou rovny nule).

Ukážeme užití této věty pro počítaný již determinant

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix}.$$

Opatřme si nejdříve prvek rovný 1 (nebo -1) třeba tak, že od třetího řádku odečteme druhý ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix};$$

přičteme nyní první sloupec k druhému a pětinasobek prvního sloupce k třetímu; dostáváme

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 4 & 1 & 22 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

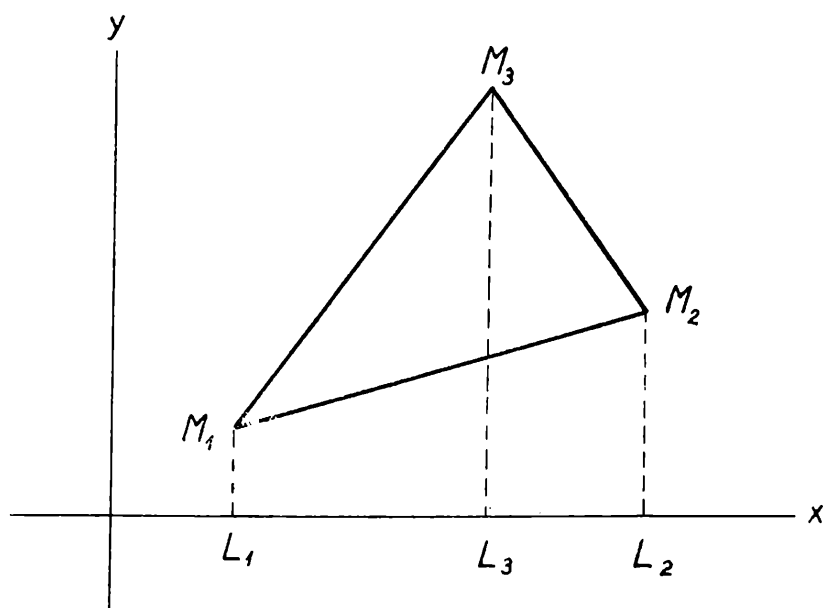
rozvoj podle třetího řádku dává

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 22 \end{vmatrix} = 100.$$

Spočtete si tímto způsobem všechny determinanty v příkladu při řešení soustavy tří lineárních rovnic.

b) Užijeme nyní determinantu 3. stupně pro výpočet obsahu trojúhelníka daného třemi body $M_i(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Odvodíme tento obsah jednoduše a názorně užitím minimálních prostředků¹⁾

Označme průměty vrcholů M_i do osy x písmeny L_i . Pak obsah P trojúhelníka vyjádříme pomocí obsahů tří lichoběžníků $L_1L_3M_3M_1$, $L_3L_2M_2M_3$, $L_1L_2M_2M_1$:



Obr. 1

¹⁾ Při tom speciální volba vrcholů, výhodná pro názornost odvození, nemá vliv na obecnost výsledku (11), protože je zřejmé, že obsah trojúhelníka je nezávislý na volbě souřadnicového systému.

$P = \frac{1}{2} [(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) - (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)] =$
 $= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)]$,
 což lze zapsat determinantem třetího stupně (jde o rozvoj podle 1. sloupce)

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Kdybychom vyměnili označení vrcholů M_2, M_3 , vymění se v determinantu druhý a třetí řádek a změní se tudíž podle věty 5. znaménko determinantu. Lze ukázat, že odpovídá-li pořadí vrcholů M_1, M_2, M_3 kladnému oběhu trojúhelníka (proti pohybu hod. ručiček), bude znaménko determinantu kladné, a tedy i $P > 0$, v opačném případě záporné. Protože nám jde o velikost obsahu, budeme uvažovat absolutní hodnotu determinantu na pravé straně. Je tedy hledaný vzorec pro obsah trojúhelníka

$$P = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 1 \\ 2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| \quad (11)$$

Příklad. Jsou dány dva vrcholy $A(-2; 5)$, $B(7; 3)$ trojúhelníka. Určete jeho třetí vrchol C , leží-li na ose y a má-li trojúhelník obsah $P = 29$.

Nechť $C(0; y)$; pak podle (11) je

$$29 = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \\ 0 & y & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |9y - 41|, \text{ tj. } 9y - 41 = \pm 58;$$

odtud $y_1 = 11$; $y_2 = -\frac{17}{9}$. Úloze vyhovují dva body $C_1(0; 11)$, $C_2(0; -\frac{17}{9})$.

Budou-li tři navzájem různé body ležet v téže přímce, bude zřejmě obsah jimi tvořeného trojúhelníka roven nule. Odtud:

Podmínka, aby trojice bodů $M_i(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, 3$, ležela v přímce, je

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Jako příklad hledíme rovnici přímky dané dvěma body $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Je-li $M(x; y)$ libovolný proměnný bod této přímky, musí

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

to je již rovnice hledané přímky.

Upravme determinant tak, že odečteme druhý řádek od prvního a třetího řádku

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

a rozvedme podle třetího sloupce

tj. (při $x_2 - x_1 \neq 0$) $-(x - x_1)(y_2 - y_1) + (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

v čemž jistě poznáváte známý tvar rovnice přímky dané dvěma body.

c) Trojice přímek procházejících týmž bodem. Mějme dány tři navzájem nerovnoběžné přímky

$$a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

a hledejme podmínku pro to, aby všechny tři procházely týmž bodem. Provedeme to tak, že zaručíme, aby průsečík třeba prvních dvou ležel na přímce třetí. Průsečík prvních dvou přímek má souřadnice

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D},$$

$$\text{kde } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

což je (přesvědčte se) podmínka řešitelnosti prvních dvou rovnic a zároveň podmínka nerovnoběžnosti příslušných přímek, a dále

$$D_x = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad D_y = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Má-li tento bod být bodem třetí přímky, musí jeho souřadnice vyhovovat rovnici této třetí přímky, tj. musí platit

$$a_3 \frac{D_x}{D} + b_3 \frac{D_y}{D} + c_3 = 0, \quad \text{tj. } a_3 D_x + b_3 D_y + c_3 D = 0;$$

to lze zapsat ve tvaru determinantu (jde o rozvoj podle třetí řádky)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

což je podmínka pro to, aby tři nerovnoběžné přímky procházely týmž bodem.

Přesvědčte se

1. Který z bodů $C(10; -8)$, $D(13; -11)$, $E(45; -47)$ leží na spojnici bodů $A(5; -2)$, $B(-3; 7)$.

2. Která z přímek $c \equiv 16x + y + 11 = 0$, $d \equiv 7x + 2y - 8 = 0$, $e \equiv 10x - 23y + 34 = 0$ prochází průsečíkem přímek $a \equiv 6x - 3y + 8 = 0$, $b \equiv 4x + 7y - 5 = 0$.

Při výpočtu determinantů užívejte střídavě rozvoje, Sarrusova pravidla a zejména věty 6.



DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Geometrické úlohy při prostorovém obrábění

LUDEK GRANÁT, Praha

V dnešní době stále více proniká užití matematiky do technických oborů. V tomto článku chci uvést některé geometrické úlohy, které je třeba řešit v souvislosti s obráběním, speciálně s frézováním elementárních ploch.

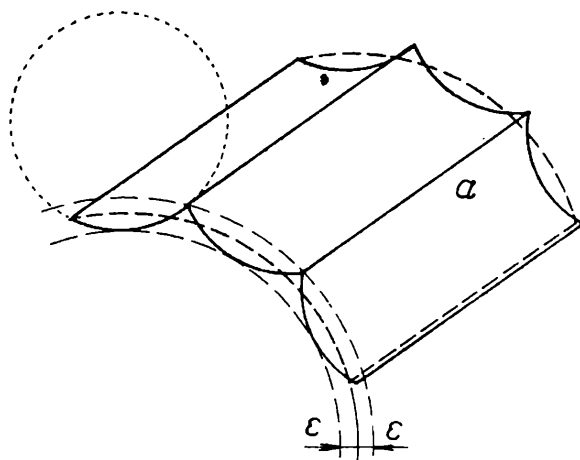
Jako obráběcí nástroj uvažujme frézu F , při čemž pro jednoduchost úvah budeme předpokládat, že její tvar je koule. Její střed označme S a poloměr r .

Obráběním pak rozumíme pohyb obráběcího nástroje F , při čemž ze součástky, kterou obrábíme, odebíráme část, kterou při obrábění zaujímá daný nástroj.

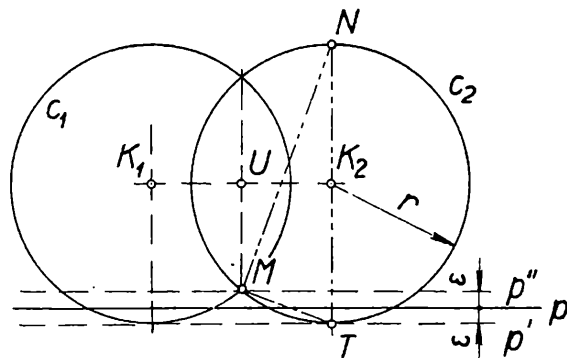
Tak vzniká obrobek, který (resp. jeho část) je ohraničen plochou vzniklou při frézování. Tuto plochu nazveme vyfrézovanou plochou obrobku při daném pohybu frézy F . Jestliže se např. při obrábění pohybuje střed S frézy po přímce p , pak body vyfrézované plochy leží na válcové ploše α o ose p a poloměru r .

Při frézování nebývá dána dráha středu frézy a nehledáme, jak bude vypadat příslušná vyfrézovaná plocha α . Naopak, je dána plocha π a my máme určit dráhu středu frézy tak, aby vyfrézovaná plocha, která při obrábění vznikne, byla daná plocha π , nebo se od ní lišila jen o dovolenou odchylku ε (obr. 1), kde π je znázorněna silně čárkovaně a α silně plně.) Nelze samozřejmě vyfrézovat při skutečném obrábění např. celou válcovou plochu, nýbrž jen její část.

Přesnější formulace našeho úkolu bude tato: Mějme danou plochu π . Úkolem je stanovit křivky k , po nichž se bude pohybovat střed frézy tak, aby byly splněny následující podmínky:



Obr. 1



Obr. 2

a) Všechny body vyfrézované plochy α , která vznikne při pohybu středu frézy po křivkách k , kterou nahrazujeme (aproximujeme) danou plochou π , jsou od dané plochy π vzdáleny méně, než připouští dovolená odchylka ε ;

b) Křivky k jsou pokud možno jednoduché křivky.

Při tom se snažíme, aby délka dráhy středu frézy při obrábění určité části dané plochy při splnění předchozích podmínek byla co nejkratší.

Jako nejjednodušší případ probereme nejprve obrábění roviny π . Pohyb středu frézy se zde bude dít po přímkách vzájemně rovnoběžných a od sebe stejně vzdálených. Celá dráha středu frézy bude ležet v rovině vzdálené od dané roviny o $r - \varepsilon$, kde r je poloměr frézy a ε dovolená odchylka. Náš úkol se zde v podstatě redukuje na zjištění vzdálenosti sousedních přímek k_1, k_2 po nichž se má pohybovat střed frézy.

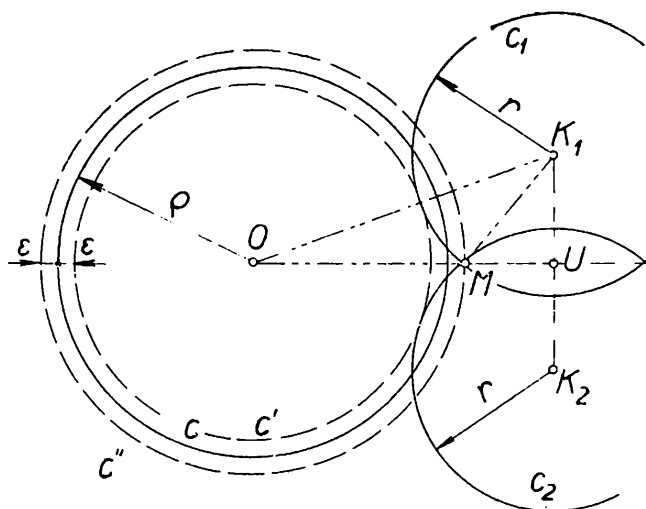
Uvažujme rovinu ν kolmou na tyto přímky. Rovina ν protne rovinu π v přímce p (obr. 2, kde jsou zobrazeny útvary v rovině ν), roviny od ní vzdálené o ε v přímkách p' a p'' a přímky k_1, k_2 v bodech K_1, K_2 .

Vyfrézovaná plocha v případě, že střed uvažované frézy se pohybuje po přímkách k_1, k_2 se skládá z částí válcových ploch. Jejich řez rovinou ν jsou kružnice c_1, c_2 . Tyto kružnice se mají dotýkat přímky p' a mají se protínat na přímce p'' , aby bylo vyhověno podmínkám naší úlohy. Vzdálenost sousedních přímek k_1 a k_2 bude tudíž

$$d = 2 \sqrt{2\varepsilon(2r - 2\varepsilon)} = 4 \sqrt{\varepsilon(r - \varepsilon)},$$

jak vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka TNM , užijeme-li Euklidovy věty o čtverci výšky.

Jako další případ uvažujme rotační plochu válcovou o ose o a poloměru ϱ . Zde křivkami k mohou být buď kružnice o prostorové ose o , nebo rovnoběžky s osou o .



Obr. 3

Pokud křivkami k jsou kružnice, pak jejich poloměr je $\varrho + r - \varepsilon$ a vzdálenost sousedních rovin těchto kružnic dostaneme analogicky jako jsme dostali vzdálenost přímek při obrábění roviny: $d = 4 \sqrt{\varepsilon (r - \varepsilon)}$

Dáme-li přednost pohybu středu frézy po přímkách, pak budou tyto ležet na válcové ploše souosé s danou o poloměru $\varrho^* = \varrho + r - \varepsilon$. Musíme ještě stanovit vztah pro vzdálenost těchto přímek. Uvažujme rovinu ν kolmou na osu o (obr. 3). Rovina ν protne danou válcovou plochu v kružnici c o středu O v průsečíku osy o s touto rovinou, válcové plochy souosé s danou válcovou plochou a vzdálené od ní o ε v kružnicích c' a c'' , dvě sousední přímky k_1, k_2 , po nichž se bude pohybovat střed frézy, v bodech K_1, K_2 . Vyfrézovaná plocha v případě, že střed uvažované frézy se pohybuje po přímkách k_1, k_2 , se skládá z částí válcových ploch, které protne rovina ν v kružnicích c_1, c_2 . Aby bylo vyhověno uvedeným podmínkám, mají se tyto kružnice dotýkat kružnice c' a protínat se na kružnici c'' .

Z trojúhelníka K_1MO dostaneme

$$OK_1 = r + \varrho - \varepsilon, \quad OM = \varrho + \varepsilon, \quad K_1M = r,$$

pro poloviční délku s obvodu trojúhelníka K_1MO platí

$$s = r + \varrho, \quad s - OK_1 = \varepsilon, \quad s - OM = r - \varepsilon, \quad s - K_1M = \varrho,$$

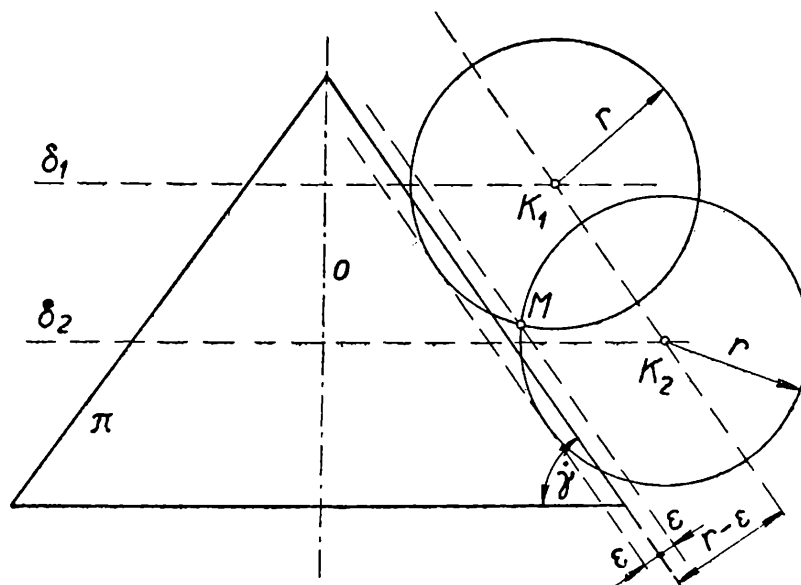
a z Heronova vzorce pro obsah trojúhelníka K_1MO

$$P = \sqrt{(r + \varrho)(r - \varepsilon)\varepsilon\varrho}$$

Odtud plyne

$$K_1K_2 = 2 \cdot K_1U = 2 \cdot \frac{2P}{OM} = \frac{4 \sqrt{(r + \varrho)(r - \varepsilon)\varepsilon\varrho}}{\varrho + \varepsilon}.$$

U kuželové plochy budou tyto kružnice ležet v rovnoběžných rovinách na kuželové ploše souosé s danou, jejíž povrchy budou od povrchů dané plochy vzdáleny o $r - \varepsilon$. Tyto povrchy budou protínat kružnice, po nichž se bude pohybovat střed nástroje v bodech, jejichž vzdálenosti dostaneme stejným způsobem, jako jsme je dostali u obrábění roviny. Vzdálenosti (obr. 4) rovin δ_1, δ_2 sousedních kružnic pak jsou $4 \sqrt{\varepsilon (r - \varepsilon)} \cdot \sin \gamma$, kde γ je úhel povrchů kužele s rovinami kružnic.



U kulové plochy o poloměru ϱ budou kružnice, po nichž se bude pohybovat střed frézy, ležet v rovnoběžných rovinách na kulové ploše soustředné s danou o poloměru $r^* = r + \varrho - \varepsilon$. Rovina procházející středem kulové plochy a kolmá na roviny kružnic je protíná v bodech, jejichž vzdálenosti dostaneme stejným způsobem, jako jsme dostali při obrábění válcové plochy vzdálenosti přímkových trajektorií dráhy středu frézy. Vzdálenosti rovin sousedních kružnic pak jsou

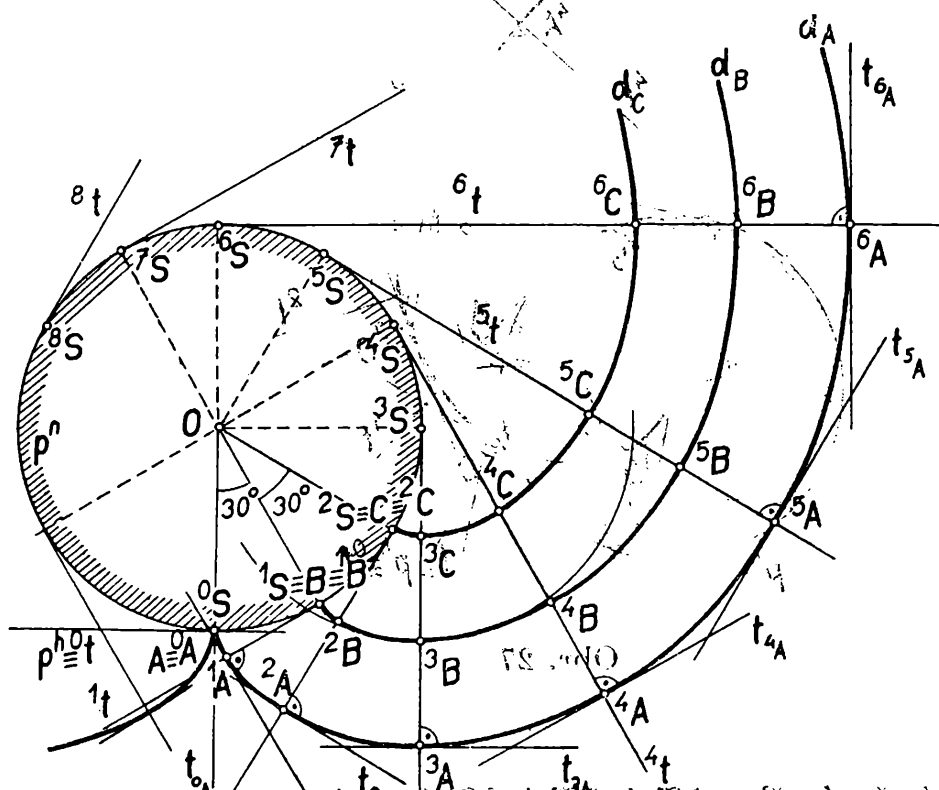
$$d = \frac{4 \sqrt{(r + \varrho)(r - \varepsilon) \varepsilon \varrho} \cdot \sin \gamma}{\varrho + \varepsilon},$$

Autor doporučuje čtenáři provedení podobných úvah pro případ, že se dovolená odchylka může nanášet jen na jednu stranu od dané plochy.

O některých křivkách (Pokračování)

D.Č. B.Ř. V. O. J. K. E. P. R. Č. V. U. T. Praha

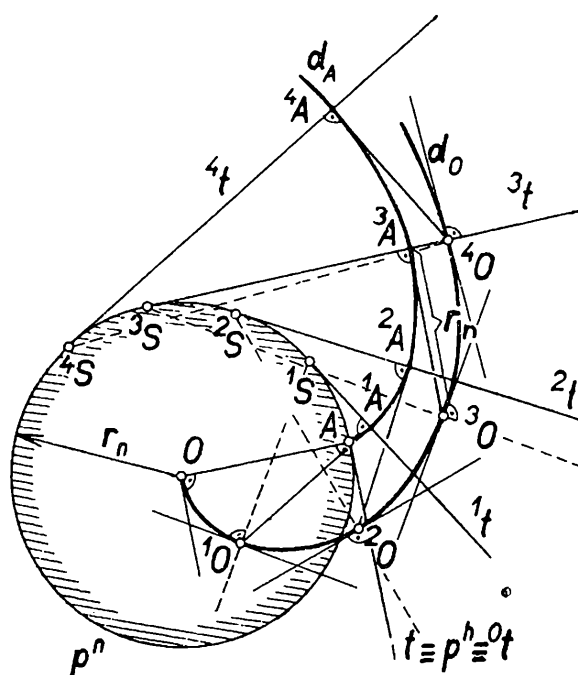
3. Zaměňme nyní úlohu polhodit z příkladu 1. (Bude se tedy jednat o tzv. pohyb vratný. Viz konec odstavce 3.). Znamená to, že nyní po pevně kružnici p (polhodit pevně, nehybně) se bude „kutálet“ její tečna p^* (polhodit hybně), jak znázorňuje obr. 26. Označme jednotlivé polohy této kutálející se tečny t (tzv. počáteční, výchozí poloha), $1t, 2t, \dots$. Na obr. 26 jsou příslušné dotykové body $^0S, ^1S, ^2S, \dots$ pro polohu a názornost zvoleny na kružnici p tak, že na ní vymezují stejné oblouky, patřící středovému úhlu 30° . Zvolíme-li bod A tak, že jeho výchozí poloha je $A \equiv ^0A \equiv ^0S$ a pak jeho dráhu d_A , vznikající při pohybu určeném „kutálením“ tečny $t \equiv p^*$ po kružnici p takto: Od bodů $^1S, ^2S, \dots$ nanese na tečny $1t, 2t, \dots$ ve stejném smyslu úsečky $^1S^1A = ^0S^1S$, $^2S^2A = ^0S^2S = 2 \cdot ^0S^1S, \dots$, tj. délku (tečnou odvaleného) oblouku kružnice od výchozího bodu 0S k příslušnému dotykovému bodu iS ($i = 0, 1, \dots$).



Obr. 26

To znamená, že úsečky $^1S^1A, ^2S^2A, \dots$ jsou rovné úsečce $^0S^1S$. Na základě toho lze z hlediska praktického provedení konstrukce (viz 2.,...): Můžeme při tom s výhodou použít rektifikační konstrukce, znázorněné na obr. 21c. Koncové body $^1A, ^2A, \dots$ úseček takto sestrojených na tečnách $1t, 2t, \dots$ kružnice p , jsou body hledané trajektorie d_A bodu

$A = {}^{\circ}A$. Křivku d_A nazýváme *evolventou kružnice*. Kdybychom změnili smysl kutálení tečny p^h po kružnici p^n , získali bychom druhou větev evolventy kružnice, která je k její první větvi, jejíž konstrukci jsme právě popsali, souměrně sdružená vzhledem k přímce $O {}^{\circ}S$, kde O je střed kružnice p^n . Na obr. 26 je vyznačen kousek této druhé větve. Bod na kružnici p^n , v němž se obě větve evolventy stýkají singulárním bodem křivky d_A , a to jejím *bodem vratu* (hrotem). Obě větve se v tomto bodě (na obr. 26 je to bod $A \equiv {}^{\circ}A \equiv {}^{\circ}S$) dotýkají přímky $O {}^{\circ}S$. Podle základní věty 6. a 7., odstavce 3, jsou body ${}^{\circ}S, {}^1S, {}^2S, \dots$ okamžitými středy otáčení, a proto podle 3. základní věty téhož odstavce jsou tečny ${}^{\circ}t, {}^1t, {}^2t, \dots$ kružnice p^n normálami evolventy d_A této kružnice. Proto přímky $t_{0A}, t_{1A}, t_{2A}, \dots$ kolmé v bodech ${}^{\circ}A, {}^1A, {}^2A, \dots$ dráhy d_A na přímky ${}^{\circ}t, {}^1t, {}^2t, \dots$, jsou tečnami této evolventy. Normály ${}^{\circ}t, {}^1t, {}^2t, \dots$ zkoumané evolventy obalují tedy jako tečny danou kružnici p^n . Z toho důvodu, podle textu k obr. 9, je kružnice p^n *evolutou* dráhy d_A bodu A a body ${}^1S, {}^2S, {}^3S, \dots$ kružnice p^n jsou středy křivosti křivky d_A v jejích bodech ${}^1A, {}^2A, {}^3A, \dots$



Obr. 27

To znamená, že úsečky ${}^1S^1A, {}^2S^2A, {}^3S^3A, \dots$ jsou postupně poloměry oskulačních kružnic (kružnic křivosti) v bodech ${}^1A, {}^2A, {}^3A, \dots$ křivky d_A . Na základě toho lze z hlediska praktického provedení konstrukce vyrýsovat evolventu kružnice poměrně velmi přesně. Doporučuji čtenáři, aby si na tomto příkladě ověřil platnost obecné věty, uvedené v textu k obr. 10.

Sestrojíme-li evolventy $d_B, d_C, \dots$ téže kružnice p^n , jakožto dráhy bodů $B, C, \dots$ (obr. 26, kde výchozí polohy jsou $B \equiv {}^1B \equiv {}^1S, C \equiv {}^2C \equiv {}^2S, \dots$), snadno zjistíme, že všechny evolventy téže kružnice jsou křivky navzájem shodné. Libovolné dvě různé evolventy téže kružnice mají společné normály (v tečnách této kružnice) a vytínají na nich úsečky téže délky, jak je patrné z konstrukce. Každé dvě křivky, které mají tuto vlastnost se nazývají *křivkami rovnoběžnými* (*paralelními, ekvidistantními*, křivkami *Bertrandova páru*¹⁷⁾).

V příkladu 2, na obr. 23a je naznačen pohyb epicykloidální. Bude-li se poloměr r_h kutálející se kružnice p^h zvětšovat nad všechny meze, bude se tato kružnice stále „narovnávat“ až v případě, který zapisujeme $r_h \rightarrow \infty$ (tj. znak „nekonečno“), přejde do tečny pevné kružnice p^n . Příslušná prostá epicykloida d_A (obr. 23a) při tomto procesu pak přejde v evolventu pevné kružnice p^n . Provedeme-li tutéž úvahu na případ znázorněný v obr. 24a, přijdeme analogicky ke křivkám, které můžeme nazvat *evolventami prodlouženými* (pro případ, kdy $r_h \rightarrow \infty$ pro dráhu d_B z obr. 24a), nebo *evolventami zkrácenými* (pro případ, kdy $r_h \rightarrow \infty$ pro dráhu d_C z obr. 24a). Doporučuji čtenáři, aby si k procvičení tyto evolventy sestrojil, tj. aby sestrojil některé jejich body a v nich příslušné tečny. Použije k tomu konstrukce z obr. 26. Upozorňuji však, že body ${}^1S, {}^2S, \dots$ pro *tyto* evolventy nejsou již středy kružnic křivosti. Proč?

Na obr. 27 je jako příklad uvedena konstrukce prodloužené evolventy d_0 kružnice p^n , jako dráhy bodu O , který je ve své výchozí poloze středem této kružnice. Střed O nehybné polhodie p^n je tedy v tomto případě pevně spojen s „kutálející“ se tečnou $t \equiv p^h$ (její výchozí poloha je na obr. 27 označena znakem 0t) polhodie pevné po této kružnici. Tak vzniklá speciální prodloužená evolventa d_0 kružnice p^n se nazývá *Archimedova spirála*. Jednotlivé body, kromě již známého bodu $O, {}^1O, {}^2O, {}^3O, \dots$ této spirály sestrojíme tedy tak, že v bodech ${}^1A, {}^2A, {}^3A, \dots$ na jednotlivých polohách ${}^1t, {}^2t, {}^3t, \dots$ „kutálející“ se tečny t (tedy v bodech příslušné evolventy d_A kružnice p^n) vztyčíme kolmice, což jsou tečny křivky d_A . Na ně od bodů ${}^1A, {}^2A, {}^3A, \dots$ nanese v příslušném smyslu vždy úsečku, jejíž délka se rovná r_n . Spojnice $({}^1O{}^1S), ({}^2O{}^2S), ({}^3O{}^3S), \dots$ jsou pak (podle 3. základní věty z odst. 3) normálami Archimedovy spirály v jejích bodech ${}^1O, {}^2O, {}^3O, \dots$ a kolmice na tyto normály v bodech ${}^1O, {}^2O, {}^3O, \dots$ jsou pak tečnami této křivky v těchto bodech.

(Pokračování)

¹⁷⁾ Je možno ukázat, že ke každé rovinné křivce existuje křivka s ní rovnoběžná v tom smyslu, jak o tom bylo právě hovořeno. Je však zajímavé, že pro křivky prostorové tomu tak není. K libovolné prostorové křivce nemusí existovat rovnoběžná křivka. Prostorové křivky, které připouštějí existenci křivky rovnoběžné, musí vyhovovat ještě určitým podmínkám.

Na bod A působí gravitační síla Slunce F_1 , která podle Newtonova gravitačního zákona je rovna

$$F_1 = \kappa \frac{Mm}{r_1^2} \quad (1)$$

kde M je hmota Slunce, κ gravitační konstanta, r_1 vzdálenost bodu A od Slunce. Na stejný bod působí ještě bod B silou F prostřednictvím vlákna. Je to vlastně napětí vlákna. Podle druhého pohybového zákona Newtonova platí pro zrychlení a bodu A

$$F_1 - F = ma \quad (2)$$

Napětí vlákna má opačný směr než gravitační síla, proto před F musí být záporné znaménko.

Podobně pro bod B můžeme napsat rovnici

$$F + F_2 = ma \quad (3)$$

F_2 je gravit. síla Slunce, která je rovna

$$F_2 = \kappa \frac{Mm}{r_2^2} \quad (4)$$

r_2 značí vzdálenost bodu B od Slunce. Z obr. 1 je vidět, že F a F_2 mají stejný směr. Podle principů akce a reakce oba body na sebe působí stejně velikými silami, ale opačnými směry. V (2) a (3) to vyjadřují znaménka před F .

Odečteme-li (2) od (3), obdržíme

$$F = \frac{F_1 - F_2}{2} \quad (5)$$

Dosadíme-li za F_1 a F_2 z (1) a (4) dostaneme

$$F = \frac{\kappa m M}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \quad (6)$$

Podle obr. 1 platí

$$d = r_2 - r_1 \quad (7)$$

Dosadíme-li do (6), vychází

$$F = \frac{\kappa m M}{2} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{(r_1 + d)^2} \right) \quad (8)$$

a po jednoduchých úpravách

$$F = \frac{\kappa m M}{2} \frac{2r_1 d}{r_1^2 (r_1 + d)^2} \quad (9)$$

Nyní zavedeme předpoklad, že vzdálenosti bodů A a B od S (Slunce) jsou značně větší než jejich relativní vzdálenost d , tj. $r_1 \gg d$ a $r_2 \gg d$. Pak v (9) můžeme zanedbat d^2 vzhledem k $2r_1 d$ a d vzhledem k r_1 . Dostáváme

$$F = \frac{\kappa m M}{r_1^3} d \quad (10)$$

Označíme-li ještě vzdálenost soustavy bodů od S písmenem R a $konst. = kmMd$, je pro $r_1 \approx r_2 = R \gg d$

$$F = \frac{konst.}{R^3}. \quad (11)$$

Vidíme, že oba body působí na sebe silou, která je nepřímo úměrná *třetí* mocnině jejich vzdálenosti od Slunce. Tato síla napíná vlákno a je možno ji změřit siloměrem. Nazývá se *síla slapová*. Snaží se oddělit částice od sebe, tj. roztrhat těleso na kusy. (V případě tělesa myslíme si těleso složeno z částic a vlákno nahrazují vazební síly mezi částicemi.) Kdybychom považovali gravitační pole v okolí obou bodů A a B za homogenní, vychází z (5) pro $F_1 = F_2$ $F = 0$, tj. slapová síla nevzniká. Pokud rozměry tělesa jsou tak veliké, že v jeho objemu nelze pole považovat za homogenní, pak při volném pádu vzniká slapová síla, která působí proti vazebním silám a snaží se těleso roztrhat na částice.

Použití v astronomii

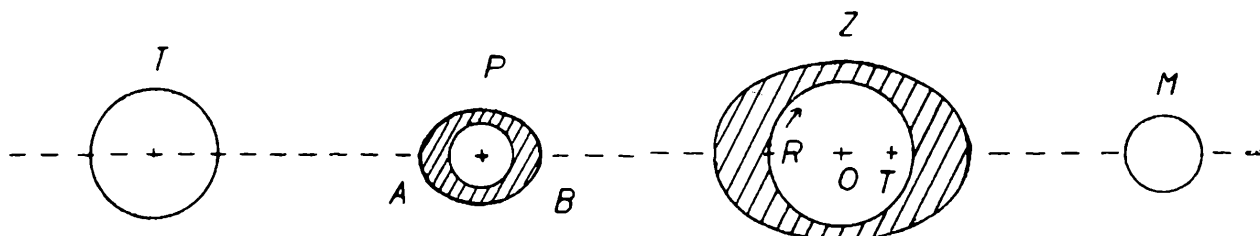
Předpokládejme, že kolem centrálního tělesa T o značné hmotě obíhá po kruhové dráze menší těleso P (Měsíc), které má malou hmotu (obr. 2). Z mechaniky víme, že pohyb po kružnici se děje s dostředivým zrychlením a

$$a = \frac{v^2}{r}, \quad (12)$$

které míří do středu kružnice, přitom v je obvodová rychlost a r poloměr dráhy. Rovnoměrný pohyb po kružnici si také můžeme představit jako neustálý *pád* tělesa k centrálnímu tělesu. Protože gravitační pole centrálního tělesa je nehomogenní, musí na obíhající těleso působit slapové síly, které působí proti vazebním silám a snaží se toto těleso roztrhat na kusy. Přiblíží-li se obíhající těleso k centrálnímu dvakrát, vzrostou slapové síly podle (11) osmkrát. Z této kvalitativní úvahy plyne; že při dostatečném přiblížení mohou snad i slapové síly překonat síly vazební a dojde k roztrhání Měsíce na menší části. Podrobnější teorie tento závěr potvrzuje. Existují teorie, která takto vykládá vznik známého Saturnova prstence, který není souvislý, ale skládá se ze značného počtu menších těles.

Kdyby Měsíc byl obalený kapalinou, pak v obr. 1 body A a B odpovídají částicím kapaliny na přivrácené a odvrácené straně kapalino-vého obalu. Protože A a B v obr. 1 se snaží od sebe vzdálit (napínají vlákno), musí působením slapových sil povrch kapalino-vého obalu nabýt protáhlého tvaru (obr. 2). Na *přivrácené* a *odvrácené* straně Měsíce dojde tedy ke *zvýšení* hladiny, v *kolmém* směru ke *snižení* hladiny.

Poněkud složitější jsou poměry, jestliže nechceme zanedbat hmotu Měsíce vzhledem k hmotě centrálního tělesa, nebo obě tělesa mají zhruba stejnou hmotu. Zde nelze rozhodnout, „které těleso obíhá kolem kterého“, protože obě tělesa obíhají okolo společného těžiště. Na obr. 3 je soustava Země-Měsíc a jejich těžiště T . Slapové síly působí na obě tělesa. Vodní obal Země nabude opět protáhlého tvaru, na *přivrácené* a *odvrácené* straně hladina stoupne, ve směru *kolmém* klesne. Protože



Obr. 2

Obr. 3

Země se za 24 hod. otočí kolem osy σ , musí pozorovatel na stejném místě R za 24 hod. dvakrát pozorovat stoupnutí a dvakrát klesnutí hladiny. V praxi rozdíly činí maximálně 2 m. Kde však vody narazí na odpor sbíhajících se pevnin, jako např. v zálivu Fundyském, vzroste (stoupne) vodní příboj do výše i 15 m.

Podobné účinky jako Měsíc má na vodní obal Země také Slunce. Sluneční účinek je však menší. Je-li Slunce, Měsíc a Země na jedné přímce, to nastává tehdy, když je úplňk a nov, pak účinky Měsíce a Slunce se zesilují a pozorujeme největší stoupnutí mořské hladiny. Mluvíme o přílivu *náhlém*. V první a poslední měsíční čtvrti hladina stoupá a klesá nejméně. Mluvíme o *nízkém* přílivu, protože účinky obou těles se zeslabují.

Poznámka. V obr. 1 (příslušný příklad) pro jednoduchost zanedbáváme vzájemné gravitační působení bodů A a B .

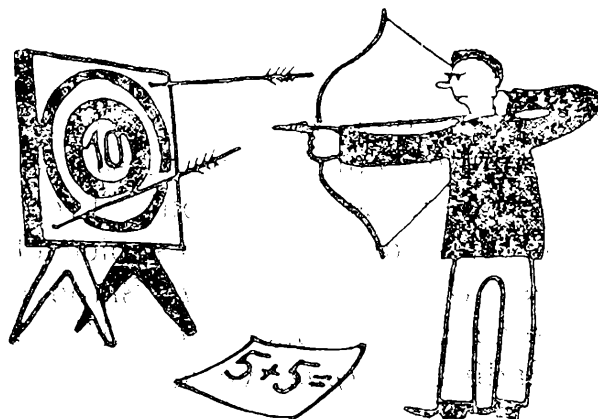
NEJMLADŠÍM
ČTENÁŘŮM

V nádobě s vodou plave led. Jak se mění výška vody v nádobě a) během tání, b) jestliže led roztál (a ostatní podmínky, např. teplota, tlak vzduchu apod. se nezměnily)?

Vzpomeňte si na zákon Archimédův a na zákon plování těles.

František Vencálek

Řešení



Úloh

● Matematika

1. Jano praví Paľovi: „Keby som mal trikrát tolko peňazí, ako skutočne mám a vydal by som 55 Kčs, zostalo by mi menej, ak keď takto utratím 15 Kčs. Prezradím ti, že drobných nemám. Uhádni, koľko mám peňazí!“
(Došlo 56 řešení.) Pavel Bartoš

Řešil Karel Henc, IIIB SVVŠ, Brno, Koněvova:

Protože Jano nemůže vydat více peněz než má, musí především platit tyto nerovnosti

$$x \geq 15 \quad 3x \geq 55 \Rightarrow x \geq 18\frac{1}{3}$$

kde x je počet korun, které Jano má. Jestliže však nějaké x splňuje 2. rovnost, splňuje také 1. nerovnost, takže obě nerovnosti lze shrnout v jedinou

$$x \geq 18\frac{1}{3}$$

Podmínkami úlohy je dále stanoveno

$$\begin{aligned} 3x - 55 &< x - 15; \\ \text{odtud plyne} \quad 2x &< 40 \\ x &< 20. \end{aligned}$$

Nyní zjišťujeme, že podmínky úlohy vyhovují pouze x , pro něž platí

$$18\frac{1}{3} \leq x < 20$$

a jsou celá. Jano má tedy 19 Kčs.

P o z n á m k a, Niektorí riešitelia opomenuli konštatovať, že riešenie vyhovuje aj podmienke $x \geq 15$.

2. Sestrojte trojúhelník, který je určen těžnicemi t_a , t_b a úhlem γ .

(Došlo 45 řešení.)

Karel Drábek

Řešil Karel Henc, IIIB, SVVŠ, Brno:

R o z b o r. V hledaném trojúhelníku ABC (obrázek si kreslete sami) označme S_1 půlicí bod strany BC a S_2 půlicí bod strany AC , takže $t_a = AS_1$, $t_b = BS_2$. Vedme v odem A rovnoběžku s těžnicí t_b a její průsečík prodlouženou stranou BC označme D . Potom trojúhelníky BCS_2 a DCA jsou stejnohlelé se středem stejnolehlosti C a koeficientem stejnolehlosti 2. Pro konstrukci trojúhelníka ABC je třeba sestrojit trojúhelník ADC , ve kterém známe stranu $AD = 2t_b$, k ní protilehlý úhel γ a příčku AS_1 , která dělí stranu CD v poměru $CS_1 : S_1D = 1 : 3$.

K o n s t r u k c e. Narýsujeme úsečku AD a kružnici k , která je geometrickým místem vrcholů C hledaného trojúhelníka pro daný úhel γ . Bod S_1

je pak na kružnici k' stejnoolehle ke kružnici k pro střed stejnoolehlosti D a koeficient stejnoolehlosti $\frac{3}{4}$. Průsečík kružnice k' a kružnice l o středu v bodě A a poloměru t_a určí bod S_1 . Spojnice DS_1 protne kružnici k v hledaném vrcholu C , čímž je sestrojen trojúhelník ADC a také trojúhelník AS_1C , ze kterého již získáme hledaný trojúhelník ABC .

Důkaz správnosti vyplývá z konstrukce, neboť sestrojený trojúhelník ABC má požadované délky, těžnice, a při vrcholu C má úhel danou velikost.

Diskusi rozdělíme na dvě části, a to

1. Úhel $\gamma < 90^\circ$.

Označme S střed kružnice k , S' střed kružnice k' , dále F a G průsečíky přímky AS' s kružnicí k' , a to tak, že $AF < AS' < AG$.

Vyjádříme vztah mezi t_a , t_b a úhlem γ . Určíme velikost úsečky $AF = AS' - r'$ (kde r' je poloměr kružnice k' , $r' = \frac{3}{4}r$). Výpočtem plyne

$$AF = \frac{t_b}{4 \sin \gamma} (\sqrt{16 \sin^2 \gamma + 9} - 3).$$

Odtud

a) je-li $t_a < AF$, pak úloha nemá řešení,

b) je-li $t_a = AF$ je jedno řešení,

c) je-li $AF < t_a < \frac{t_b}{2}$ má úloha dvě řešení

Jediné řešení existuje také v případě, že

$$t_b \leq 2t_a \leq 4t_b$$

neboť v tomto případě kružnice l a kružnice k' se protínají ve dvou bodech, z nichž však pouze jeden je v polovině vyřezané přímkou AD , v níž je též hledaný vrchol C .

Uvažujme dále vztahy mezi t_a a úsečkou AG .

Obdobně jako předtím vypočteme

$$AG = AF + 2r' = \frac{t_b}{4 \sin \gamma} (\sqrt{16 \sin^2 \gamma + 9} + 3)$$

takže

a) je-li $t_a > AG$, nemá úloha řešení (kružnice k' leží uvnitř kružnice l),

b) je-li $t_a = AG$, je jediné řešení (kružnice k' a l se dotýkají uvnitř),

c) je-li $2t_b < t_a < AG$, pak má úloha opět dvě řešení,

Tím jsou vyčerpány možnosti pro $0^\circ < \gamma < 90^\circ$.

2. Úhel γ splňuje podmínku $90^\circ \leq \gamma < 180^\circ$.

V tomto případě, když

a) $2t_a \leq t_b$, nemá řešení úloha, protože kružnice l neprotne kružnici k v bodě, který by ležel v polovině vyřezané přímkou AD , kde také mají být vrcholy C trojúhelníka ABC ,

b) $t_b < 2t_a < 4t_b$ je jediné řešení,

c) $2t_b \leq t_a$, pak jsou dvě řešení.

Tím je diskuse provedena.

$$3. \text{ Rovnice } 2x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 36x - 27 = 0$$

$$2x^3 + x^2 - 22x + 24 = 0$$

mají jeden společný kořen. Určete jej i zbývající kořeny kubické rovnice. (Došlo 40 řešení.)

Jan Fráňa

Řeší P. Kohoutek IIIb SVVŠ, Ledeč nad Sázavou

Mějme dva polynomy $f_1(x)$, $f_2(x)$ stupňů m , n a předpokládejme $m > n$. Dělíme-li polynom $f_1(x)$ polynomem $f_2(x)$, dostaneme podíl $Q_1(x)$ a zbytek $f_3(x)$, jehož stupeň je nižší než stupeň polynomu $f_2(x)$. Můžeme psát

$$f_1(x) = f_2(x) \cdot Q_1(x) + f_3(x)$$

Je-li zbytek $f_3(x) \neq 0$, pak pokračujeme v dělení a dostáváme postupně

$$f_2(x) = f_3(x) \cdot Q_2(x) + f_4(x),$$

$$f_3(x) = f_4(x) \cdot Q_3(x) + f_5(x)$$

a konečně

$$f_{k-2}(x) = f_{k-1}(x) \cdot Q_{k-2}(x) + f_k(x).$$

Je-li zbytek $f_k(x) = 0$, pak zřejmě polynom $f_{k-2}(x)$ je dělitelný polynomem $f_{k-1}(x)$ a postupně polynomy $f_3(x), f_2(x), f_1(x)$ jsou také dělitelné polynomem $f_{k-1}(x)$. Poslední dělitel při dělení, které má nulový zbytek, je společným dělitelem obou polynomů a dává společný kořen obou rovnic.

Uvedené kroky budeme aplikovat na dané polynomy $f_1(x), f_2(x)$:

$$f_1(x) : f_2(x) = (2x^5 - 7x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 36x - 27) : (2x^3 + x^2 - 22x + 24) = x^2 - 4x + 14,$$

$$\text{zbytek } f_3(x) = -11(12x^2 - 40x + 33);$$

$$f_2(x) : f_3(x) = (2x^3 + x^2 - 22x + 24) : (12x^2 - 40x + 33) = \frac{x}{6} + \frac{23}{36},$$

$$\text{zbytek } f_4(x) = -\frac{35}{18}(x - \frac{3}{2});$$

$$f_3(x) : f_4(x) = (12x^2 - 40x + 33) : (x - \frac{3}{2}) = 12x - 22, \text{ zbytek } f_5(x) = 0.$$

Z toho vyplývá, že oba dané polynomy jsou dělitelné dvojčlenem $x - \frac{3}{2}$. Proto mají obě rovnice společný kořen $x_1 = \frac{3}{2}$. Dělíme-li kubickou rovnici činitelem $x - \frac{3}{2}$, dostaneme rovnici $2x^2 + 4x - 16 = 0$, jejíž kořeny jsou zbývající kořeny kubické rovnice: $x_2 = 2, x_3 = -4$.

Kubická rovnice má tedy kořeny $\frac{3}{2}, 2, -4$, z nichž první je společným kořenem i rovnice 5. stupně.

4. Nechť je $n \geq 3$ přirozené. V rovině buďte dané body $A_1, A_2, \dots, A_n$, z kterých žádné tři neleží na přímce. Potom existuje kružnice k takovýchto vlastností:

a) aspoň tři z bodů $A_1, A_2, \dots, A_n$ leží na kružnici k ;

b) žádný z bodů $A_1, A_2, \dots, A_n$ neleží zvonka kružnice k .

Dokažte!

(Došlo 27 řešení.)

Milan Hejný

Upravené řešení žiaka Ľudka Zajíčka, 3. tr. SVVŠ, Ostrava 4.

V dané rovině zvolme libovolnou přímku p a na ní bod O . Kolmé průměty bodů

$$A_1, A_2, \dots, A_n \tag{1}$$

na přímku p označme po řadě $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. Nechť d_1 je vzdálenost bodu A'_i ($i = 1, \dots, n$) od bodu O . Nechť d_k je největší z čísel $d_1, \dots, d_n$, tj. platí nerovnost $d_k \geq d_i$ pro $i = 1, \dots, n$. Na kolmici q vedené bodem A_k k přímce p zvolme bod Z různý od bodu A_k . Z konstrukce přímky q plyne, že všechny body (1) leží buď v polorovině qO , nebo na přímce q . Nechť A_j je takový z bodů (1), různý od A_k , pro nějž platí nerovnost

$$\sphericalangle ZA_k A_j \leq \sphericalangle ZA_k A_i \text{ pro všechna } i = 1, \dots, n; i \neq k. \tag{2}$$

Spojnici bodů $A_k A_j$ označme t . Nechť A_i je některý z bodů (1) různý od A_k i A_j . Vzhledem k nerovnosti (2) protíná přímka t úsečku ZA_i ve vnitřním nebo krajním bodě. Náleží tedy všechny body (1) do poloroviny opačné k tZ nebo leží na přímce t .

Buď dále A_h ten z bodů (1) různý od A_k i A_j , pro který platí

$$\sphericalangle A_j A_h A_k \leq \sphericalangle A_j A_i A_k \text{ pro všechna } i = 1, \dots, n; k \neq i \neq j.$$

Potom kružnice k , opsaná trojúhelníku $A_h A_j A_k$ má požadované vlastnosti, neboť pro všechny body X , ležící současně v polorovině tA_h a vně kružnice k platí $A_j X A_k < A_j A_h A_k$. (Pokračování)



MO

XV. ročník Matematické olympiády

V tomto čísle uveřejňujeme texty všech soutěžních úloh s příslušnými poznámkami.

Řešení první trojice soutěžních úloh odevzdejte svému učiteli matematiky do 15. 1. 1966 a řešení druhé trojice do 28. 2. 1966. Tímto dnem končí první kolo soutěže. Ze šesti soutěžních úloh musíte rozřešit aspoň čtyři správně, aby vás mohl váš učitel doporučit k postupu do II. kola soutěže.

Uvedené termíny musíte dodržet, protože váš učitel po zhodnocení vašich řešení je musí zaslat příslušnému výboru Matematické olympiády k rozhodnutí, zda budete pozváni do II. kola soutěže.

Soutěžní úlohy I. kola MO

Kategorie A

1. Určete nejmenší kladný zlomek, jehož součet s jeho druhou mocninou je větší než šest a jehož číselník a jmenovatel mají součet menší než 100.

Poznámka. Ze všech zlomků s daným jmenovatelem v a větších než číslo 2 vyberte nejmenší zlomek.

2. V rovině je dáno pět bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Každé dva z těchto bodů jsou spojeny úsečkou červenou nebo modrou tak, že žádné tři z těchto úseček nevytvoří trojúhelník téže barvy.

a) Dokažte, že z každého z daných pěti bodů vycházejí dvě úsečky červené a dvě modré.

b) Dokažte, že existuje uzavřená lomená čára složená z pěti červených úseček a uzavřená lomená čára složená z pěti modrých úseček, z nichž každá obsahuje všech pět daných bodů.

c) Zjistěte, kolika způsoby lze dané body spojit červenými a modrými úsečkami tak, aby byla splněna podmínka úlohy.
P o z n á m k a. Řešte jen úvahami, nikoliv výpočty. V případě a) uvažte, zda je možné, aby z jednoho vrcholu vycházely tři úsečky téže barvy, tj. proveďte tzv. *nepřímý důkaz*.

3. Do jednotkové kružnice se středem S je vepsán pravidelný n -úhelník $A_0A_1 \dots A_{n-1}$. Body S, A_0, A_1 jsou po řadě obrazy komplexních čísel $0, 1, t$.

- Vyjádřete vzdálenost A_0A_k ($k = 1, 2, \dots, k-1$) pomocí t .
- Vypočtete součet $A_0A_1^2 + A_0A_2^2 + \dots + A_0A_{n-1}^2$.

4. V rovině je dána úsečka AM , dále je dán dutý úhel α a kladné číslo k .
 a) Sestrojte ramenný trojúhelník ABC , který má vnitřní úhel $\angle BAC = \omega$ a jehož základna BC je bodem M dělena v poměru $BM : CM = k$.
 b) Vyšetřte geometrické místo středů základů BC všech takových trojúhelníků, nabývá-li poměr k všech kladných hodnot.

2. Vyšetřte množinu všech bodů v rovině, pro jejichž kartézské souřadnice $[x, y]$ platí nerovnost

$$|x| + |y| < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

6. Zjistěte, pro které ostré úhly α platí nerovnost

V. ročník Matematické olympiády

Dokažte, že rovnost ve vztahu (1) nastane jen pro $\alpha = 30^\circ$.

Poznámka. Znáte-li jeden kořen polynomu jedné proměnné třetího stupně, lze tento polynom rozložit pomocí dělení kořenovým činitelem v součin polynomů nižších stupňů.

Kategorie B Tato kategorie obsahuje úlohy, které jsou určeny pro žáky 8. a 9. třídy. Úlohy jsou rozděleny do dvou skupin: úlohy, které lze řešit pomocí znalostí z matematiky, a úlohy, které vyžadují znalosti z fyziky a chemie. Úlohy jsou označeny jako "Kategorie B" a jsou určeny pro žáky, kteří mají zájem o matematiku a přírodní vědy.

1. „Vzorec pro umocňování třemi“

Uveďte termín $a^{\frac{1}{3}}$ jako $\sqrt[3]{a}$. Dokažte, že pro každé reálné číslo a platí $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$. Najděte všechna reálná čísla a , pro která platí $a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$. Dokažte, že pro každé reálné číslo a platí $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$.

Poznámka. Kořen polynomu lze někdy bez řešení příslušné rovnice najít zkusmo. Budete-li znát jeden z kořenů polynomu vyššího stupně, lze tento polynom rozložit pomocí dělení kořenovým činitelem v součin polynomů nižších stupňů.

2. Znáznorněte graficky průběh funkce:

$$y = \frac{1}{2} (\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x})$$

Poznámka. Vyjádření funkce nejprve vhodně upravte tak, aby výraz na pravé straně obsahoval goniometrické funkce argumentu x .

3. Čtverec $ABCD$ je rozdělen čtyřmi příčkami v devět shodných čtverců. Každé z těchto polí má být natřeno jednou ze čtyř daných barev tak, aby žádná dvě sousední pole nebyla téže barvy. Za sousední pole považujeme čtverce, které mají společnou buď stranu, nebo vrchol.

Zvolte pevně barvy středního a levého dolního čtverce a zjistěte počet různých možností zbarvení ostatních polí.

4. Je dána kružnice k a dva její různé průměry AB , CD . Vyšetřete geometrické místo středů všech úseček XY , které mají tyto vlastnosti:

a) $XY \parallel CD$;

b) $XY \perp CD$;

c) body A , B , X , Y leží na kružnici.

5. Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány délky těžnice ta a výšek va , vb . Proveďte diskusi řešitelnosti.

6. Označme strany rovnoběžníka $ABCD$ $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ a jeho úhlopříčky $AC = c$, $BD = d$.

a) Dokažte, že o velikostech stran a úhlopříček libovolného rovnoběžníka $ABCD$ platí rovnost

$$(c^2 + d^2)^2 = 2(a^2 + b^2)^2$$

b) Použijte této rovnosti a vyjádřete vzdálenost středů hran AB , CD čtyřstěnu $ABCD$ pomocí délek všech jeho hran.

Kategorie C

1. Určete všechny zlomky $\frac{a}{b}$ (a , b jsou přirozená čísla), které mají tyto vlastnosti:

$$90 < a + b < 100; \quad (1)$$

$$0,9 < \frac{a}{b} < 0,91 \quad (2)$$

2. Udejte všechny dvojice přirozených čísel p , q , pro něž je číslo

$$N = 7p - 3q$$

násobkem deseti.

Úlohu řešte nejprve pro přirozená čísla p , q , která jsou vázána podmínkami

$$1001 \leq p \leq 1005 \text{ a } 2002 \leq q \leq 2006.$$

3. Větší počet provozoven se podílel stejným dílem na výrobním plánu. Vzhledem k zahraničním objednávkám bylo třeba zvýšit plán na 108 %. Shodou okolností $p\%$ zúčastněných provozoven splnilo svůj plán jen na 90 %. O jaký počet $q\%$ musela zvýšit každá ze zbývajících provozoven svůj plán, aby byl celkový zvýšený výrobní plán splněn?

Vyjádřete q pomocí p a sestrojte graf této funkce pro $0 \leq p < 100$.

4. Lichoběžník $ABCD$ má úhlopříčky AC , BD , které jsou též délky a půlí úhly při základně AB .

a) Dokažte, že platí $BC = CD = DA$.

b) Sestrojte tento lichoběžník, je-li dáno $AB = AC = a$.

5. Je dán trojúhelník ABC s vnitřními úhly α , β , γ . Označme O_1 , O_2 , O_3 body, které jsou souměrně sdružené se středem O vepsané kružnice podle přímk BC , CA , AB .

Udejte všechny možnosti poloh bodů O_1 , O_2 , O_3 vzhledem ke kružnici k opsané trojúhelníku ABC (v závislosti na velikostech úhlů α , β , γ).

6. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB . Ze středů D úsečky AB je spuštěna kolmice na přímku BC , její pata je označena E , střed úsečky DE je označen F . Dokažte, že přímky AE , CF jsou navzájem kolmé.

Kategorie D

1. Najděte všechna čísla x , která splňují rovnici

$$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}.$$

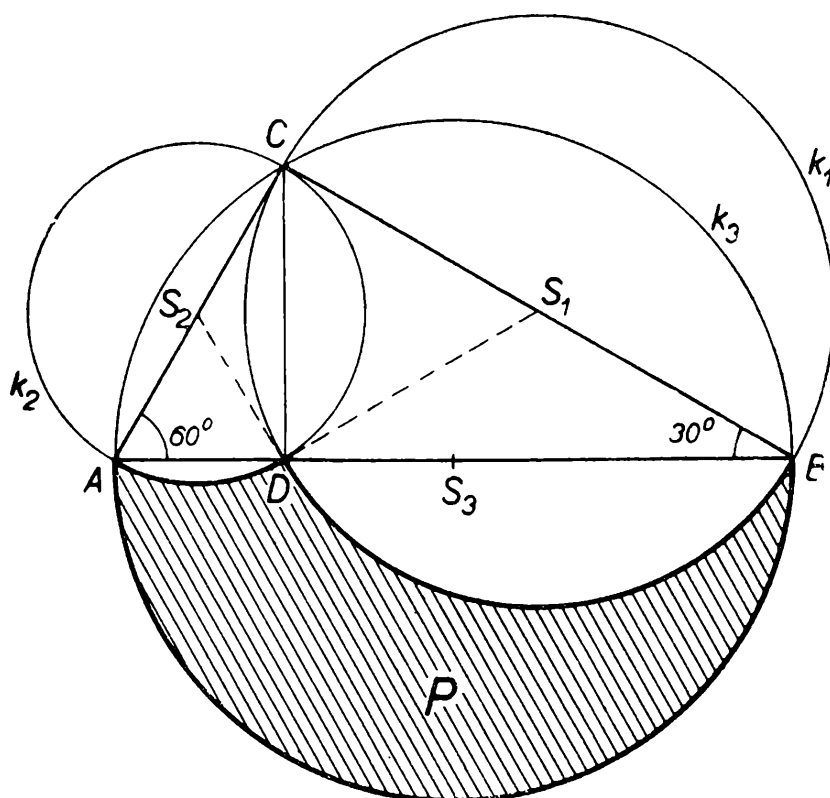
Proveďte zkoušku a diskusi řešitelnosti vzhledem k číslům a, b, c .

2. Určete všechna dvojčíselná čísla x té vlastnosti, že každé z čísel $2x, 3x, 4x, 5x, 6x, 7x, 8x$ a $9x$ má týž ciferný součet jako číslo x .

3. Čtyřciferné číslo N je dělitelné osmnácti, má vesměs různé číslice a dá se napsat jako součet tří čísel: první je dvojčíselné, druhé je jeho desetinásobek a třetí je jeho stonásobek. Najděte všechna čísla N těchto vlastností.

4. Je dán trojúhelník ABC , jehož úhly mají velikost $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ a strana AC má velikost 1.

Vypočítejte obsah vyšrafované plochy, která je omezena (obr. 1) kružnicemi sestrojenými nad průměry AB, BC, CA (na dvě decimály).



Obr. 1

5. Je dán poloměr ϱ kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku a délka $d = \frac{7}{4} \varrho$ úsečky, kterou vytíná vepsaná kružnice na jeho výšce v spuštěné na přeponu.

a) Vyjádřete délku výšky v pomocí poloměru ϱ .

b) Sestrojte pravoúhlý trojúhelník pro $\varrho = 2$ cm.

6. Osový řez rotačního kužele je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník VAB o přeponě AB délky d . Přímkou AV je vedena rovina, která protne kužel v rovnostranném trojúhelníku VAC . Vyjádřete pomocí proměnné d

a) objem jehlanu $ABCV$;

b) povrch jehlanu $ABCV$.



MMO

VII. Mezinárodní matematická olympiáda

v Berlíně ve dnech

3. — 13. července 1965

(Dokončení)

III. Československé družstvo a výsledky soutěže. Československé družstvo tvořili tito žáci: *Jan Brodský* z Brna, *Jura Charvát* z Příboru, *Tamara Marcisová* z Bratislavy, *Pavel Novotný* z Olomouce, *David Preiss* z Jindřichova Hradce, *Miroslav Řezníček* z Hradce Králové, *Bohuš Sivák* ze Zvole a *Milan Štědrý* z Chotěboře. *Pavel Novotný* je absolventem 2. ročníku SVVŠ, *Bohuš Sivák* 8. ročníku ZDŠ (!) a všichni ostatní jsou žáky 3. ročníku SVVŠ.

Československé družstvo bylo na berlínské olympiádě velmi populární. Těšilo se velké pozornosti novinářů. O československém družstvu přinesl např. ústřední orgán Jednotné socialistické strany Německa *Neues Deutschland* dne 9. července 1965 tuto reportáž:

„*Malý Einstein*“, *Tamara a ti druzí*

Malé epizody na okraji VII. mezinárodní matematické olympiády

Již několik dní je velkou senzací, že se VII. mezinárodní matematické olympiády účastní třináctiletý žák. Lidé, kteří o tom četli nebo slyšeli, se tomu velmi divili. Je totiž známo, že při této mezinárodní soutěži jsou zadávány úlohy určené v nejlepším případě sedmnácti-osmnáctiletým žákům, kteří jsou velmi nadaní k matematice. Je přirozené, že třináctiletý *Bohuš Sivák* z ČSSR působil na novináře všech zaměření jako magnet. Mladý chlapec se proto necítil dobře a byl by se nejraději někam ukryl. Těžko se

však může zachránit před cvakotem závěrů kamer a před cílevědomými, a přece stále stejnými otázkami novinářů.

Dva dny to Bohuš s nechtutí snáší, od třetího dne se brání prostředky, které má tento matematicky nadaný, přece však normálně reagující chlapec k dispozici: vymkne se reportérům nebo zakryje čochu nebo si dá obě ruce před obličej.

Nepomáhá ani, když tlumočník Werner Schneider, se postaví před něho, aby chlapce chránil, a říká: „Nechte přece chlapce na pokoji, a chcete-li něco vědět, zeptejte se mne, a vůbec — jsou zde ještě Jan, Jura, Pavel, David, Miroslav, Milan a Tamara. Oni a všichni ostatní účastníci si zaslouží, aby jim byla věnována pozornost a aby byla uváděna jejich jména.“

Ohleduplní reportéři nechají tedy Bohuše na pokoji a obrátí se proto, neboť hledají vždy nějakou zvláštní oběť — k jedinému děvčeti z československého mužstva — k Tamarce.

Avšak Tamara dává najevo, že nemá chuť ani čas odpovídat na otázky reportérů. Raději hraje se třemi chlapci mariáš! Ostatně jsou to stále tytéž otázky. Proto se reportér obrátí opět na tlumočníka, který odpovídá, jako by byl Tamariným osobním tajemníkem. Protože Tamaru za několik málo dní dobře poznal, prozradí mimochodem, že mluví plyně rusky a umí výborně německy, ráda trpělivě spravuje elektrické přístroje a — nač se pohoršovat nad touto talentovanou dívkou, — přichází vždy a všude pozdě.

Reportér slyší strašně rád, že matematicky talentovaní lidé jsou také jen lidé a ne vždy dokonalí. Proto řekne dostatečně nahlas, že to musí Tamara slyšet: „Ach, pane, chození pozdě je také moje nemoc. Je to jako začarované, já jsem také stále a šude poslední!“ Tamara poslouchá, nechá mariáš mariášem a potěšeně praví dobrou němčinou: „Takoví lidé jsou mi velmi sympatičtí!“ Rozhovor je s ní tedy rafinova-

ně navázán, protože lidé s týmiž chybami jsou si vždy blízcí.

Jeden chlapec ze skupiny však neříká naprosto nic: je to David s mírně „beatlesovským“ účesem, dlouhý sympatický mladík. Také karikaturista Leo Haas poznává Davidův odpor k publicistům. Chce ho jako mnohé jiné ze skupiny nakreslit, avšak David se před ním schovává. Snad pro ten účes se cítí nesvůj? Pane Bože, u nás pobíhají mnohem divočejší beatles, jen s tím rozdílem, že znají možná právě tak ještě malou násobilku, zatím co David patří mezi nejlepší osm matematiků své vlasti.

Reportéři upozorují možná ještě s úžasem, že se žádný z účastníků soutěže během písemné práce nedotkl své snídaně. Napíší i o čtyřech finských děvčatech, protože do žádné jiné delegace nebylo zařazeno tolik děvčat. Prorokují sovětským, maďarským a rumunským účastníkům nejlepší místa, protože je obsadili téměř na všech olympiádách. Avšak ze všeho nejvíce se vrhají na senzací MMO, na malého Bohuše. Bohuš však reportéry odmítá, a tak jsou rádi, že si smějí zaznamenat aspoň jeho přezdívku „Little Einstein“.

To napsal reportér o našem družstvu a VII. MMO; v příštím čísle „Rozhledů“ uvedeme ještě výběr z osobních zážitků a vzpomínek účastníků.

Proroctví reportérů o umístění družstev se splnilo. Z tabulky 1 je vidět jak umístění družstev, tak i počet bodů, který jednotlivá družstva získala. Např. v úloze č. 2 získalo naše družstvo jen 17 ze 48 možných bodů. To je do určité míry i odrazem toho, jak malou pozornost věnujeme ve školských osnovách matematice i v mimoškolní zájmové matematické činnosti řešení soustav rovnic. Ne-

Tabulka 1. Přehled počtu bodů, jež získala družstva v jednotlivých úlohách

Úloha č. Stát	1	2	3	4	5	6	Sou- čet bodů	Pořadí družstev
Sovětský svaz	25	46	64	43	42	61	281	1
Maďarsko	29	36	50	38	45	46	244	2
Rumunsko	27	32	50	39	53	21	222	3
Polsko	28	25	33	44	40	8	178	4
Něm. dem. republika	23	17	42	34	37	22	175	5
Československo	28	17	29	37	33	15	159	6
Jugoslávie I	26	20	15	33	18	25	137	7
Bulharsko	12	6	36	21	10	8	93	8
Mongolsko	8	8	6	22	8	11	63	9
Finsko	12	6	0	24	17	3	62	10
Maximálně do- sažitelný počet bodů družstvem	32	48	64	48	56	72	320	—

Tabulka 2. Přehled udělených cen a pochvalných uznání

Počet cen Stát	I.	II.	III.	Počet po- chvalných uznání
SSSR	5	2	—	—
Maďarsko	3	2	2	2
Rumunsko	—	4	3	1
Něm. dem. republika	—	2	3	—
Polsko	—	1	3	1
Československo	—	1	3	—
Jugoslávie	—	—	2	—
Bulharsko	—	—	1	—
Mongolsko	—	—	—	1
Finsko	—	—	—	1
Celkem uděleno	8	12	17	6
Potřebný počet bodů	37 až 42	39 až 36	20 až 29	—

potěšující je i výsledek, kterého jsme dosáhli ve třetí úloze — stereometrické, kterou zadalo právě Československo. Také celkem tradiční planimetrická úloha č. 5, v níž bylo třeba použít dvou zobrazení — osově souměrnosti a stejno-
lehlosti — nepřinesla našim reprezentantům úspěch. Naproti tomu neúspěch v úloze č. 6 není třeba brát příliš tragicky; svědčí jen o tom, že nikdo z našeho družstva neměl matematický trénink „vyššího řádu“. Celkem dobrý výsledek v úloze č. 1 je bezpochyby příkladem toho, jak péče věnovaná řešení nerovností a trigonometrii ve škole přináší ovoce.

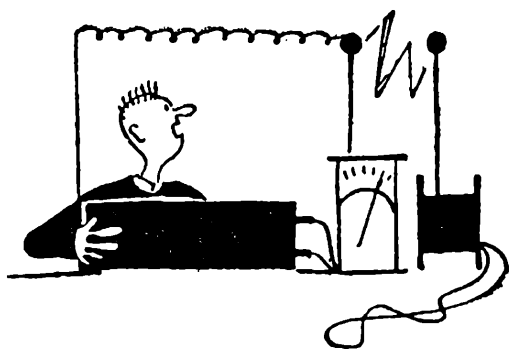
Poučná je i tabulka č. 2. Ukazuje, jak vynikající družstva postavily první tři státy: SSSR, Maďarsko a Rumunsko. Jen jedna druhá cena Davida Preisse a tři třetí ceny Tamarý Marcisové, Bohuše Siváka (!) a Miroslava Řezníčka nejsou právě nejlepším vysvědčením úrovně výuky matematice na našich školách. Umístění ČSSR až na 6. místě v pořadí družstev nutí k přemýšlení a k iniciativní činnosti při mimoškolní zájmové matematické činnosti, jejíž výsledky posoudí příští VIII. mezinárodní matematická olympiáda v roce 1966 v Sofii.

Vlastimil Macháček

Chcete na vysokou školu ?

Pamatujte již nyní na to, že na některých fakultách vysokých škol, např. na fakultách stavebních (architektura pozemní stavitelství, inženýrské stavitelství, zeměměřictví a stavební ekonomie), se u přijímacích zkoušek bude mimo matematiku a fyziku též zkoušet - letoškem počínaje - deskriptivní geometrie. Proto v některém z příštích čísel otiskneme pro vaši informaci řadu ukázkových příkladů z deskriptivní geometrie. Nejsou to ovšem příklady, které budou u zkoušky dávány, ale příklady jim dosti podobné, abyste byli seznámeni s tím, co na vás bude asi požadováno.

M.



FO

Pohyb družice v gravitačním poli

IVO VOLF — DR. MARTA CHYTILOVÁ, Hradec Králové — Praha

Téma k prostudování pro první kolo sedmého ročníku FO v kategorii C

Na umělou družici ve vzdálenosti r od středu Země působí Země gravitační silou

$$F = \kappa \frac{mM}{r^2}, \quad (1)$$

kde κ je Newtonova gravitační konstanta, $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, m je hmotnost družice a $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnost Země.

Tato síla je pro pohyb umělé družice po kružnici dostředivou silou, pro kterou platí

$$F = mr\omega^2 = 4\pi^2 f^2 rm = \frac{4\pi^2}{T^2} rm = m \frac{v^2}{r}, \quad (2)$$

kde ω je úhlová rychlost, v je dráhová rychlost, T je oběžná doba a f je frekvence pohybu družice.

Ve skutečnosti se družice nepohybují po kružnicích, ale po elipsách. Elipsa je rovinná křivka; je to geometrické místo bodů, pro které je součet vzdáleností od dvou daných bodů 1F , 2F konstantní. Pro libovolný bod elipsy X platí

$$^1FX + ^2FX = 2a;$$

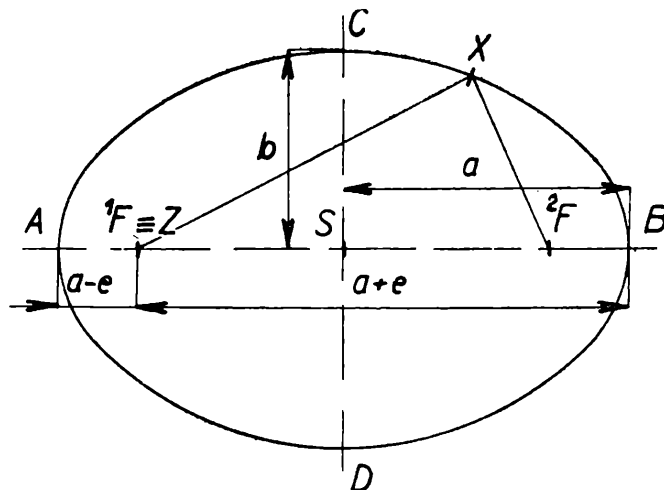
body 1F , 2F jsou ohniska elipsy, $AB = 2a$ je délka hlavní osy, $CD = 2b$ je délka vedlejší osy elipsy; S je střed elipsy (obr. 1); $^1FS = ^2FS = e$ je výstřednost elipsy. Platí

$$a^2 = e^2 + b^2.$$

Střed Země je v ohnisku eliptické dráhy družice. Vzdálenost r družice od středu Země se mění v mezích

$$a - e \leq r \leq a + e ; \quad (3)$$

pro $r = a - e$ je družice v perigeu, pro $r = a + e$ je družice v apogeu.



Obr. 1

Naším úkolem je stanovit velikost rychlosti družice v libovolném bodě její eliptické dráhy.

Vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie při pohybu družice v gravitačním poli Země.

$$W_k + W_p = \text{konst.}$$

W_k je velikost kinetické energie, W_p je potenciální energie gravitační družice vzhledem k Zemi.

Velikost kinetické energie družice vzhledem k Zemi je

$$W_k = \frac{mv^2}{2} .$$

Potenciální energie tělesa v homogenním gravitačním poli Země ve vzdálenosti h od povrchu Země je

$$W_p = mgh .$$

Umělá družice se však pohybuje v nehomogenním gravitačním poli. Abychom mohli určit její potenciální energii gravitační, rozdělíme vzdá-

lenost h na n stejných dílů $\Delta r = \frac{h}{n}$ tak, abychom mohli pokládat velikost

gravitační síly na úseku Δr přibližně za konstantní. Označme F_0 velikost gravitační síly při povrchu Země a F_1 velikost gravitační síly ve vzdálenosti $r_1 = R + \Delta r$ od středu Země; pak platí

$$F_0 = \kappa \frac{mM}{R^2} , \quad F_1 = \kappa \frac{mM}{r_1^2} .$$

Jako konstantní hodnotu gravitační síly v prvním úseku Δr volíme aritmetický průměr $\bar{F}_1$ velikostí sil F_0 a F_1 . Tato hodnota je jen přibližná, protože gravitační síla se nemění podle lineární funkce se vzdáleností od středu Země.

Tak nahradíme skutečné gravitační pole Země, ve kterém se gravitační síla působící na družici mění se vzdáleností od povrchu Země spojitě, jistým modelem, ve kterém se tato síla mění skokem.

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= \frac{1}{2} (F_0 + F_1) = \frac{1}{2} \kappa m M \left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r_1^2} \right] = \frac{1}{2} \kappa M m \cdot \frac{r_1^2 + R^2}{R^2 r_1^2} = \\ &= \frac{1}{2} \kappa m M \frac{R^2 + 2R \Delta r + (\Delta r)^2 + R^2}{R^2 (R + \Delta r)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \kappa m M \frac{2R^2 + 2R \Delta r + (\Delta r)^2}{R^2 (R + \Delta r)^2}.\end{aligned}$$

Protože $(\Delta r)^2 \ll R^2$, můžeme $(\Delta r)^2$ zanedbat vzhledem k R^2

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= \kappa m M \frac{R^2 + R \Delta r}{R^2 (R + \Delta r)^2} = \kappa m M \frac{(R + \Delta r) R}{(R + \Delta r)^2 R^2} = \frac{\kappa m M}{R (R + \Delta r)} = \\ &= \frac{\kappa m M}{R r_1}.\end{aligned}$$

Analogicky pro další úseky

$$\bar{F}_2 = \frac{\kappa m M}{r_1 r_2}, \quad \bar{F}_3 = \frac{\kappa m M}{r_2 r_3}, \quad \dots, \quad \bar{F}_n = \frac{\kappa m M}{r_{n-1} r_n},$$

kde $r_n = r$.

Určíme velikost práce vykonané při zvedání tělesa hmotnosti m rovnoměrným pohybem v jednotlivých úsecích Δr

$$A_1 = \bar{F}_1 \Delta r = \frac{\kappa m M}{R r_1} (r_1 - R) = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$A_2 = \kappa m M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$A_3 = \kappa m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right)$$

$$A_n = \kappa m M \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right)$$

Celková práce

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \dots + A_n$$

$$A = \kappa m M \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right) \right]$$

$$A = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_n} \right)$$

závisí pouze na počáteční a koncové poloze tělesa. Celková práce je tedy

$$A = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

Z důvodů, které budou patrný později, upravíme poslední vztah na

$$A = - \frac{\kappa m M}{r} + \frac{\kappa m M}{R}$$

Vykonáním této práce při působení vnější síly na těleso získá těleso potenciální energii gravitační

$$\Delta W_p = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \quad (4)$$

Stejným postupem určíme změnu potenciální energie gravitační tělesa o hmotnosti m při přenesení ze vzdálenosti r_0 od středu Země do vzdálenosti r

$$\Delta W_p = - \kappa m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (5)$$

Kdy vede vztah (4) k dříve uvedenému vyjádření potenciální energie gravitační pro homogenní pole?

Rovnici (4) upravíme takto

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) = \frac{\kappa m M (r - R)}{r R} = \\ &= \frac{\kappa m M h}{R (R + h)} = \frac{\kappa m M h}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R} \right)} \end{aligned}$$

Protože $\frac{\kappa M}{R^2} \doteq g$ je tíhové zrychlení na povrchu Země, platí

$$\Delta W_p = \frac{mgh}{1 + \frac{h}{R}}.$$

Pro $h \ll R$, tj. pro výšku h malou vzhledem k poloměru R Země, je

$$\Delta W_p = mgh.$$

Již tento vztah udává, že velikost potenciální energie tíhové je nutno uvažovat vzhledem ke zvolené hladině nulové potenciální energie, která může být buďto na povrchu Země, nebo v některé výšce nad ním.

V rovnici (5) však můžeme též volit

$$\frac{\kappa m M}{r_0} = 0 ,$$

což je možno obecně splnit za předpokladu, že $r_0 \rightarrow \infty$. Potom těleso o hmotnosti m nacházející se ve vzdálenosti r od středu Země má potenciální energii gravitační vzhledem k nulové hladině umístěné v nekonečnu

$$W_p = - \frac{\kappa m M}{r} . \quad (6)$$

Zákon zachování mechanické energie pro družici ve vzdálenosti r od středu Země lze pak psát

$$W_k + W_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa m M}{r} = \text{konst.} \quad (7)$$

Tento vztah platí v libovolném bodě dráhy družice, tedy i v perigeu a v apogeu

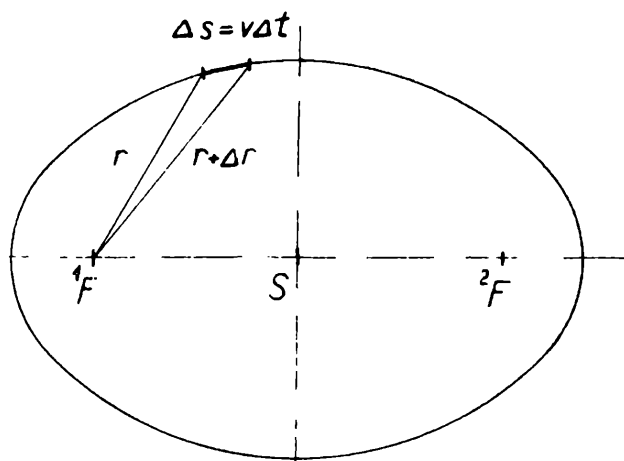
$$\frac{mv_a^2}{2} - \frac{\kappa m M}{a + e} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{\kappa m M}{a - e} \quad (8a)$$

$$\frac{mv_a^2}{2} - \frac{\kappa m M}{a + e} = \frac{mv^2}{2} - \frac{\kappa m M}{r} \quad (8b)$$

kde v_a je rychlost družice v apogeu, v_p rychlost v perigeu, v rychlost v libovolné vzdálenosti r od středu Země, v mezích daných vztahem (3).

Podle druhého Keplerova zákona jsou plochy opsané průvodičem za stejný čas stejné.

Velikost plochy opsané za velmi krátký časový interval Δt vypočítáme přibližně jako obsah trojúhelníka $S = \frac{1}{2} v \Delta t \cdot r$ (obr. 2)



Obr. 2

Pro družici v apogeu a v perigeu tedy platí

$$\frac{1}{2} v_a \Delta t (a + e) = \frac{1}{2} v_p \Delta t (a - e)$$

$$v_p = v_a \frac{a + e}{a - e}. \quad (9)$$

Dosadíme za v_p do vztahu (8a)

$$\frac{mv_a^2}{2} - \frac{\kappa m M}{a + e} = \frac{mv_a^2}{2} \cdot \frac{(a + e)^2}{(a - e)^2} - \frac{\kappa m M}{a - e}$$

Po úpravě rovnice dostaneme

$$v_a^2 \left[1 - \left(\frac{a + e}{a - e} \right)^2 \right] = 2\kappa M \left(\frac{1}{a + e} - \frac{1}{a - e} \right). \quad (10)$$

Výsledný vztah nezávisí na hmotnosti družice. Podmínka omezující platnost Keplerových zákonů $m \ll M$ však zůstává v platnosti.

Ze vztahu (10) vypočítáme

$$v_a^2 = \frac{\kappa m M (a - e)}{a (a + e)}$$

a dosadíme do rovnice (8b)

$$\frac{\kappa M}{2a} \cdot \frac{a - e}{a + e} - \frac{\kappa M}{a + e} = \frac{v^2}{2} - \frac{\kappa M}{r}$$

$$v = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (11)$$

Diskuse rovnice (11):

a) Pro $a = b = r$ koná družice rovnoměrný pohyb po kružnici s rychlostí

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}}; \quad (12)$$

b) Pro $a \neq b$ je dráha elipsa a rychlost v libovolné vzdálenosti r v mezích daných vztahem (3), je vyjádřena rovnicí (11).

c) Jestliže $a \rightarrow \infty$, pak $\frac{1}{a} \rightarrow 0$; družice se po parabole trvale vzdaluje od Země, její rychlost v libovolné vzdálenosti r od středu Země je

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}} \quad (13)$$

d) Pro $a < 0$ je dráha družice hyperbola a rychlost ve vzdálenosti r od středu Země je

$$v = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{|a|} \right)}.$$

Grafické vyjádření tvarů těchto drah je v učebnici *F y z i k a p r o 1. r o č. S V V Š* (SPN, Praha 1964), str. 149, obr. 159.

Aby se těleso dostalo z povrchu Země do výšky h , musí mu být při startu udělena taková rychlost v_0 , aby jeho kinetická energie $W_k = \frac{mv_0^2}{2}$ se rovnala potenciální energii gravitační W_p ve výšce $h = r - R$. Podle vztahu (4) tedy platí za předpokladu, že nenastanou jiné přeměny energie,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right),$$

odtud určíme

$$v_0 = \sqrt{2\kappa M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)} \quad (14)$$

Velikost rychlosti pro kruhovou dráhu družice při povrchu Země, tj. pro $r = R$, je podle vztahu (12)

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{R}} \doteq 7,9 \text{ km/s}$$

a nazývá se *první kosmická rychlost*.

Velikost rychlosti únikové pro parabolickou dráhu při povrchu Země, tj. pro $r = R$, je podle vztahu (13)

$$v_u = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}} \doteq 11,2 \text{ km/s}$$

a nazývá se *druhá kosmická rychlost*.

■ Úlohy ■

1. Raketa startuje vertikálně rychlostí $v_0 = 3 \text{ km/s}$. Do jaké maximální výšky nad povrch Země se dostane? Odpor prostředí zanedbejte.

Řešení. Podle vztahu (14) určíme

$$r_{\max} = \frac{2\kappa M R}{2\kappa M - R v_0^2} = \frac{R}{1 - \frac{R v_0^2}{2\kappa M}}.$$

Dosadíme $R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$, $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$,

$$M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg};$$

$$r_{\max} = 6,88 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$h_{\max} = r_{\max} - R \doteq 500 \text{ km}.$$

2. Jak velkou rychlostí se pohybovala v apogeu a perigeu na své eliptické dráze jedna z prvních sovětských družic Sputnik II, u níž jsme v tabulkách našli $h_a = 1671 \text{ km}$, $h_p = 225 \text{ km}$?

Řešení. Stanovíme nejprve příslušné vzdálenosti a i r , potom dosadíme do (11).

$$a = R + \frac{h_a + h_p}{2} = \left(6378 + \frac{1896}{2} \right) \text{ km} = 7326 \text{ km},$$

$$a \doteq 7,33 \cdot 10^6 \text{ m};$$

$$r_a = a + e = R + h_a = (6378 + 1671) \text{ km} = 8049 \text{ km},$$

$$r_a \doteq 8,05 \cdot 10^6 \text{ m};$$

$$r_p = a - e = R + h_p = (6378 + 225) \text{ km} = 6603 \text{ km},$$

$$r_p \doteq 6,60 \cdot 10^6 \text{ m};$$

$$v_a = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{M_a} - \frac{1}{a} \right)} \doteq 6,73 \text{ km/s}.$$

$$v_p = \sqrt{\kappa M \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} \doteq 8,16 \text{ km/s};$$

Kdyby se družice pohybovala rovnoměrným pohybem po kružnici, byla by její rychlost

$$v_k = \sqrt{\frac{\kappa M}{r}} \doteq 7,36 \text{ km/s}.$$

3. Určete velikost dodané energie na 1 kg užitečné hmotnosti, byla-li družice uvažovaná v úloze 2. dopravena z povrchu Země do perigea a srovnajte s energií v apogeu.

Řešení

$$W = W_p + W_k.$$

1. V perigeu:

$$m = 1 \text{ kg}, v = 8,16 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \doteq 33,4 \cdot 10^6 \text{ J},$$

$$W_p = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_p} \right) = \kappa m M \cdot \frac{r_p - R}{R \cdot r_p} \doteq 2,44 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$W = W_p + W_k \doteq 35,8 \text{ MJ}.$$

2. V apogeu:

$$m = 1 \text{ kg}, v = 6,73 \text{ km/s}.$$

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \doteq 22,6 \cdot 10^6 \text{ J},$$

$$W_p = \kappa m M \frac{r_a - R}{R \cdot r_a} \doteq 13,2 \cdot 10^6 \text{ J},$$

$$W \doteq 35,8 \text{ MJ}$$



• R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě

Prokop Diviš

JOSEF KOTYK, Pardubice

Mezi nejvýraznější postavy kulturních dějin patří přímětický farář Prokop Diviš, známý všem našim čtenářům jako vynálezce bleskosvodu.

Výstava, která byla v Příměticích otevřena v roce 1964 před blížícím se dvoustým výročím badatelova úmrtí, ukazuje však Diviše nejen jako vynikajícího fyzika, nýbrž i jako všestranného učenice, jehož bohaté životní dílo není dodnes plně známo, a proto není ani náležitě doceněno.

Prokop Diviš se narodil dne 1. srpna 1696 v Žamberku. Mimořádným nadáním, které projevoval již v mládí, upozornil na sebe záhy P. Jindřicha Dušíka, rektora gymnasia při jesuitské koleji ve Znojmě, jenž při zájízdkách



(1696—1765)

do rodného Žamberka chlapce pilně v jeho vývoji sledoval a nakonec se ho zcela ujal. Diviš studoval nejprve u něho ve Znojmě, později na premonstrátském gymnasiu v blízké Louce. Tam vstoupil roku 1720 do řádu bílých¹⁾ řeholníků sv. Norberta a přijal místo svého dosavadního jména Václav jméno Prokop, pod nímž je jedině znám, neboť je potom výhradně užíval. Když dokončil studia, byl roku 1726 vysvěcen na kněze a roku 1729 jmenován pro-

¹⁾ Premonstráti byli tak zvaní podle barvy svého oděvu. V Praze sídlili v památném klášteře na Strahově.

fosorem filosofie v Louce. Tam působil několik let a vyučoval i přírodním vědám. Roku 1733 dosáhl na universitě v Salcburku doktorátu. Roku 1736 se stal farářem ve vesnici Příměticích u Znojma. Za války s Němci byl v roce 1741 pověřen správou kláštera v Louce, avšak již roku 1745 se vrátil opět do Přímětic, kde působil až do své smrti dne 21. prosince 1765.

Diviš se již v mládí velmi zajímal o fyziku, zvláště o elektrostatiku. Své přednášky na gymnasiu v Louce činil žákům poutavějšími tím, že výklady o fyzice doprovázel četnými pokusy. Také jako farář věnoval všechen volný čas experimentům s „elektrickým ohněm“. Pro ně si vybudoval v Příměticích laboratoř, v níž si sám sestrojil třecí elektriku - nazval ji *electrum* - skleněnou kouli, kterou otáčel a přitom třel koženým natěradlem; elektřinu odváděl řetízkem do kovové desky. Sestrojil si též leydenské láhve. Dokonce se pokoušel i o léčení elektřinou. Zprávy o jeho pokusech pronikly záhy k císařskému dvoru. Slavný badatel byl roku 1750 pozván do Vídně, kde předváděl své pokusy císařovně Marii Terezii a jejímu manželu Františkovi I. Lotrinskému s takovými úspěchy, že byl odměněn pamětními zlatými medaillemi.

Vypravuje se, že za svého pobytu u dvora byl Diviš jednou přítomen také elektrickým pokusům, jež četnému posluchačstvu předváděl učený jezuita P. Josef Franz. Se zájmem pozoroval Diviš, skloněn nad stolem, jeho přístroje, pokusy se však ne-

dařily. Přednášející nevěděl, co je toho příčinou, byl proto neobyčejně udiven a posluchači byli zklamáni. Jen Diviš zůstal klidný. Nakonec uvedl všechny přítomné v úžas, když jim sám vše vysvětlil. S úsměvem vyzradil, že si do paruky nastrkal hřebíky a špendlíky a když se nad nabitě přístroje skláněl, elektřinu z nich tajně odváděl. Chtěl tím prý vídeňského učenice jen poškádlit... Věděl, že kovové hroty elektrické náboje z přístrojů vysají.

Pokusy s elektřinou vzbudily v Divišovi myšlenku, že také blesk je vlastně mohutná elektrická jiskra. Přemýšlel tedy o tom, jak by zabránil škodlivým účinkům blesku. Záhada blesku zaměstnávala však v době, o níž píšeme, také již jiné badatele: B. Franklin²⁾ v Americe, G. W. Richmann³⁾ v Rusku a zlákal je k výzkumům elektřiny atmosférické pomocí draků, jež

²⁾ Benjamin Franklin (1706–1790), slavný politik, jenž organizoval odpor britských osad v Severní Americe proti Anglii, vedoucí roku 1776 k prohlášení jejich úplné nezávislosti a vzniku USA. Vynalezl typ bleskosvodu (první zřízen roku 1760 ve Filadelfii), který se pro technickou jednoduchost a účelnost záhy velice rozšířil. O Franklinovi platí často citovaná slova: *Vyrval nebesům blesk a žezlo tyranům.*

³⁾ Georg Wilhelm Richmann (1711–1753), profesor fyziky na universitě v Petrohradě, pracoval také v termice, zvláště v kalorimetrii; směšovací pravidlo bývalo dříve začasť označováno jeho jménem (Richmannovo pravidlo).



opatřili hrotem a vypouštěli na vodivých provazcích, připevněných k izolovaným kovovým předmětům, do vzduchu. Hrot nabývá, jak známo, téhož potenciálu, jaký má elektrostatické pole zemské na jeho místě. Týž potenciál má pak ovšem také izolovaný vodič, takže mezi ním a Zemí je veliký rozdíl potenciální. Při podobném pokuse byl dne 26. července 1753 člen ruské Akademie věd v Petrohradě Richmann elektrickým výbojem zabit. Diviš, zvěděv o jeho tragickém konci, napsal pojednání, v němž vylíčil, že pokusy, které Richmann prováděl, jsou životu nebezpečné a neužitečné. Neváhal

a již v následujícím roce postavil u své fary v Příměticích památného dne 15. června 1754 bezpečný „meteorologický stroj“ - první bleskosvod.

Na myšlenku bleskosvodu přivedlo Diviše působení hrotů (sání elektřiny). Domníval se, že by bylo snad možno elektřinu mračen množstvím hrotů zcela vysát a blesk vůbec znemožnit. Divišův bleskosvod rekonstruovaný neda-leko fary v Příměticích roku 1936 sestával z dvou vodorovných k sobě kolmých železných tyčí; středem každého ramene tohoto kříže procházela napříč další kratší tyč. Tímto rozvětvením vzniklo celkem 12 ramének, která nesla na koncích plechové krabice, opatřené dřevěným víkem, jehož otvory procházely ve třech řadách svislé kovové, jemně zahrocené (zaostřené) roubíky, dotýkající se dna krabice. Takto upravený kříž nasadil Diviš na vysokou železnou tyč a poblíže jejího horního konce upevnil třináctou krabici. Dna krabic posypal železnými pilinami. Ze železného podstavce bleskosvodu vedl do země dva řetězy, které spojil pod upěchovanou hlínou se železným kuželem. Přístroj upevnil pak na vysokém sloupu.

Jako Divišův bleskosvod působí např. mnoho stromů (zvláště jehličnatých), nebo velký počet dnešních (v podstatě Franklinových) bleskosvodů v městech. Jediný Divišův bleskosvod nestačil ovšem vysát velký elektrický náboj mračna. Diviš pozoroval, že z mračna, jež právě táhlo nad jeho bleskosvodem, létaly tenounké bělavé

proužky k hrotům přístroje a bouře slábla. Přesvědčen o blahodárném působení svého vynálezu, obrátil se na císaře Františka a doporučoval stavět bleskosvody na domy, věže a lodi. Avšak nejen ve Vídni, ani v nejbližším svém okolí se nedočkal uznání. Když jednoho roku nastalo veliké sucho, venkované se domnívali, že je způsobeno jeho vynálezem a žádali, aby „meteorologický stroj“ byl odstraněn. Poněvadž jim nebylo vyhověno, sami jej roku 1760 strhli. Konat s bleskosvodem další pokusy bylo Divišovi nato zakázáno. Trosky jeho přístroje byly uloženy v klášteře v Louce, kde se časem ztratily. Fara, v níž Diviš po dobu tří desetiletí pracoval, později vyhořela. S ní vzaly za své také Divišovy nákresy, písemnosti a jiné dokumenty. Před úplným zapomenutím zachránil Divišův bleskosvod František Martin Pelcl⁴⁾, který jej v Životopisech českých a moravských učenců netoliko popsal, nýbrž i zobrazil.

Podobný osud potkal i další Divišovy práce. V dnešní době se stále více uplatňují elektrofonické hudební nástroje. Málo je však znám popis, který o jednom z nich, rovněž vynálezu Divišově, také dochoval Pelcl. Prokop Diviš, horlivý pěstitel hudby, sestrojil roku 1730 klavírní ná-

stroj, zv. *denisdor*⁵⁾; měl 14 (většinou dvojnásobných) klaviatur, jejichž kombinováním se podařilo dosáhnout 150 různých harmonií od pianissima do fortissima, mezi nimi také zvuků harfy, lesního rohu, klarinetu, fagotu a jiných strunových i dechových hudebních nástrojů. Diviš se domníval, že tóny vydávané strunami, jimiž vedl elektrický proud, jsou čistší. Nástroj denisdor ovládal mistrně rukama i nohama jako varhany. Zvláštním zařízením dovedl prý také dát ránu tomu, kdo na nástroji hrál. O Divišově vynálezu se vypravovalo a psalo hojně doma i v cizině. Byl to však jediný exemplář vzácného nástroje! Po Divišově smrti byl kratší dobu uložen v klášteře v Louce, později odvezen do Vídně (snad i do Maďarska), až zmizel beze stopy...

Diviš vyšetřoval také vliv elektřiny na růst rostlin. Fyziologických účinků elektřiny užíval k léčení revmatismu a ochrnutí. Jeho učenou korespondencí s Akademií věd v Petrohradě a s předními badateli té doby (zejména L. Eulerem⁶⁾) se však teprve v těchto letech zabýval dr. Josef Smolka, pracovník Historického ústavu Čs. akademie věd. Publikoval ji a komentoval ve Sborníku pro dějiny

⁵⁾ Výslovnost: dnýdór; franc. Denis = Diviš, d'or = zlatý.

⁶⁾ Leonhard Euler (1707—1783), největší matematik 18. století; viz článek Frant. Veselého „Leonhard Euler — nejslavnější petrohradský akademik“ v Rozhledech roč. 35, čís. 2 a 3.

⁴⁾ František Martin Pelcl: *Abbildungen böhmischer und mährischer Gelehrten und Künstler*, 4 sv., 1773 až 1782.

přírodních věd a techniky (Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum), NČSAV, Praha 1963, sv. 8, kam zároveň odkazují.

Tak jsme po staletích svědky toho, že docházejí splnění slova

oslavné básně „Applausus“, kterou na Prokopa Diviše napsal P. Christ. Procházka, profesor university ve Varšavě, s přáním, „aby ještě pozdní věky oslavovaly jméno jeho“



FYZIKÁLNÍ ZAJÍMAVOSTI

Znáte Archimedův zákon?

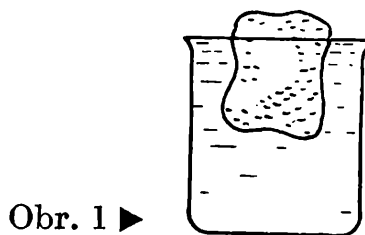
OLDŘICH LEPIL, Olomouc

Samozřejmě, že každý souhlasně přikývne a hned spustí: „Těleso do kapaliny ponořené...“ Jenomže věc není tak jednoduchá. Něco jiného je znalost slovní formulace tohoto zákona a něco jiného je porozumění jeho fyzikálnímu obsahu a schopnost použít jej při řešení praktického úkolu.

Abyste si mohli ověřit, jak rozumíte Archimedovu zákonu a jak dovedete uplatnit některé další poznatky z nauky o staticce kapalin a plynů, přinášíme vám tři zajímavé otázky, které řeší účastníci Fyzikální olympiády v Sovětském svazu.

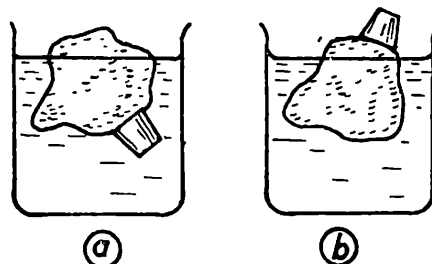
Napište nám nejen odpověď na položené otázky, ale především také jejich fyzikální zdůvodnění. Nejlepší odpovědi uveřejníme.

1. Nádobu je až po okraj naplněna vodou, v níž plove kousek ledu, jehož část ční nad hladinu (obr. 1).



Obr. 1 ►

Obr. 2 ▼



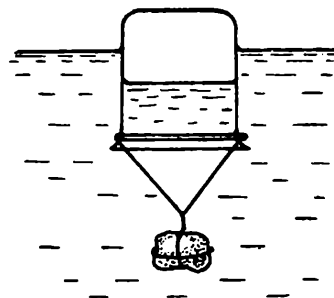
a

b

Přeteče voda v nádobě, když led roztaje nebo ne? Zdůvodněte!

2. V nádobě s vodou plove kousek ledu, k němuž přimrzla zátka. Jak se změní výška vodní hladiny v nádobě, jestliže led roztaje a zátka je buď ponořena pod hladinou (obr. 2a), nebo je celá nad hladinou vody (obr. 2b)? Zdůvodněte!

3. K hrdlu nádoby se zanedbatelně tenkými stěnami je přivázán kámen a nádoba je ponořena dnem vzhůru do vody (obr. 3). Náhle však nastalo ochlazení vzduchu, ale jeho tlak se nezměnil. Jak se změnila poloha dna nádoby a hladina



Obr. 3

na vody uvnitř ve srovnání s hladinou vody vně nádoby? Změny tlaku vodních par neuvažujeme. Zdůvodněte!



REDAKCE HOVOŘÍ

Řešení úloh soutěže Rozhledů

Redakce uveřejňuje na str. 120 řešení některých matematických úloh loňské soutěže Rozhledů. Řešení dalších úloh, abecední seznam všech řešitelů, i jména odměněných vítězů budou otištěna v příštích číslech.

Celkem lze říci, že se v minulém roce počet řešitelů více než zdvojnásobil. Zvětšil se také počet zaslaných řešení celkově i v průměru na jednotlivce. Bohužel, poklesla kvalita některých řešení, hlavně pokud jde o grafickou úpravu. Některá řešení jsou upovídaná, obsahují na

mnoha stránkách snůšku nepodstatných a také nežádoucích odpovědí. Terminologie, hlavně v geometrii, pokulhává (autoři např. píší: ... tam, kde se dané různoběžky setkají; určíme místo, kde se obě kružnice dotknou apod.).

Ekonomicky stručné, avšak logicky správné řešení je nejcennější. Takový řešitel dosáhne jistě i v praktickém životě společensky hodnotnějších výsledků než mnohomluvný pisatel — rádby „vědec“.

Radost nám způsobili řešitelé ze Slovenska, z nich nejvíce B o h u š S i v á k z 8. třídy ZDŠ ve Zvolenu, který byl úspěšný i na Mezinárodní matematické olympiádě v Berlíně, kde mezi mnohem staršími konkurenty z deseti zemí získal jednu z třetích cen.

O. S.

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

pouze
použití
používaný
povrchový
povýšit
poznatek
požadavek
pravděpodobnost, pravděpodobný
právě
pravidelný
pravidlo
pravítko, logaritmické pravítko
pravoúhlý
pravoúhlý trojúhelník
pravý úhel
problém
procento
profil topografické plochy
prodloužení (např. afinní)
prodloužit, prodlužovat
proměnná
proměňovat se
promítání, rovnoběžné promítání
prostor
protilehlý
protínat, protnout
protože platí
proveditelný
prověřit
provést; provádět

prozkoumat
průměr aritmetický, geometrický

лишь
применение, приложение
употребляющийся, употребляемый
поверхностный
повысить
сведение
требование
вероятность, вероятный
именно
правильный
правило
линейка, логарифмическая линейка
прямоугольный, ортогональный
прямоугольный треугольник
прямой угол
задача
процент, m.
разрез топографической поверхности
растяжение
удлинить, удлинять
переменная
обращаться
проектирование, параллельное
пространство
противоположный
пересекать, пересечь
вследствие
выполнимый
проверить
осуществить, выполнить, исполнить,
исполнять
исследовать
среднее арифметическое, геометриче-
ское

průměr kružnice
průmět axonometrický, kosoúhlý,
kótovaný

průsečík; průsečík výšek
trojúhelníka
průsečnice
průsek, průnik
prvek
prvočinitel
prvočíslo
předcházející
předpoklad, předpokládat
přecházet (v něco)
přechod
překlopený
překlopit
přenést
přepočítat
přepona
přesnost, s přesností na dvě
stomiliontiny
převrácená (hodnota, věta)
přibližná hodnota
přibližně, přibližný
přičítat
přidat
příklad
přiléhající
přímka kosá, nevlastní, tvořící

přímočarý
přímo úměrný
případ
připojit
připustit
přiřadit
příslušný
přítomnost
půdorys

диаметр окружности
проекция аксонометрическая, фронтальная кавальерная, с числовыми отметками
точка пересечения, ортоцентр

линия пересечения
пересечение
элемент
простой делитель
простое число
предыдущий
предположение, предполагать
обращаться
переход
повернутый на 180°
повернуть на 180°
перенести
перечислить
гипотенуза
точность, с точностью до двух стомиллионных
обратная (величина, теорема)
аппроксимация
приблизительно, приближенный
прибавлять
добавить
пример
смежный
наклонная, прямая несобственная, прямая образующая
прямолинейный
прямо пропорциональный
случай
добавить
допустить
поставить в соответствие
соответствующий
наличие
горизонтальная проекция

R

radián
realizovat
reálný

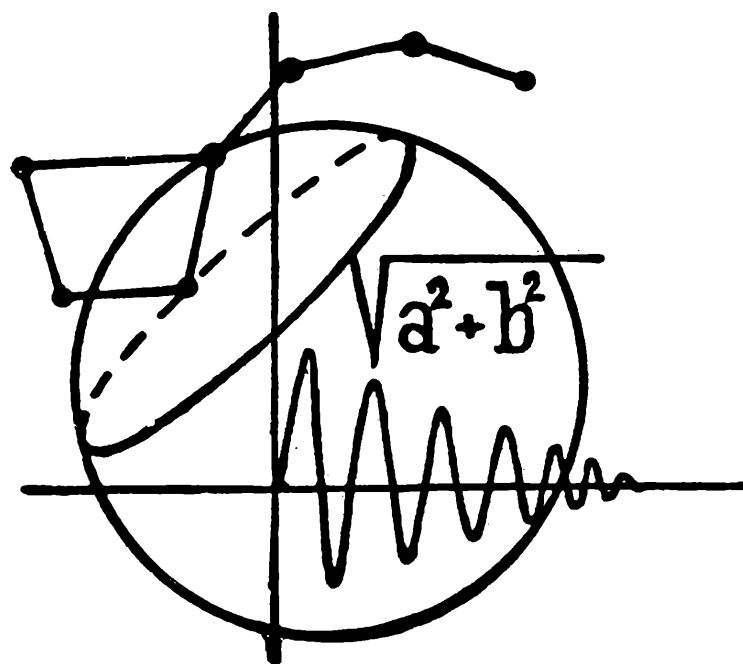
redukce
relativní
respektive
rostoucí
rostoucí mocniny
rotace, rotovat
rovina

радиан
осуществить
вещественный, действительный, реальный
приведение
относительный, условный
соответственно
возрастающий
восходящие степени
вращение, вращаться
плоскость

(Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



4

ROČ. 44

1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Prosinec 1965

Číslo 4

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

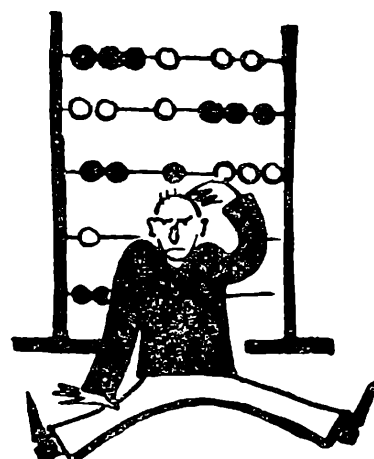
V. Mráz: Číselné soustavy .	145
Doc. F. Dušek: Číselné soustavy o záporném základu	151
F. Kuřina: Co je to grupa?	154
Doc. B. Kepr: O některých křivkách [Pokračování]	161
M. Bednařík: Tíhové zrychlení a světové rekordy v lehké atletice	166
L. Vašek: Odvození 1. a 3. Keplerova zákona z gravitačního zákona	173
Úlohy k řešení	179
Vítězové loňské soutěže Rozhledů	184
Prof. dr. E. Kašpar: O elektrickém proudu, který nepracuje	86
S. Horák: Nejmladším čtenářům	192
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřichská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönl. Titulní obrázky: M. Kořál, studující FS.

A-04*51544

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1965.



Číselné soustavy

VLASTIMIL MRÁZ, Praha

Úvod. Od pradávna člověk počítá a čísla zapisuje, aniž mnoho uvažuje o tom, proč k tomu používá desítkové čili dekadické soustavy. Pravděpodobně za to vděčíme tomu, že člověk má na obou rukou celkem deset prstů. Nebudeme se zabývat historií pozičních soustav, mezi které patří i soustava desítková, jen připomeňme, že označení *poziční* je odvozeno od umístění číslice, čili cifry v čísle. Ze školy víme, že každá číslice v poziční soustavě má jednak svoji vlastní hodnotu, jednak hodnotu poziční, neboli místní podle svého umístění v čísle. Tak třeba číslice 8 má v čísle 832 jinou hodnotu než v čísle 48; zatímco v prvním čísle značí 8 jednotek druhého řádu ($800 = 8 \cdot 10^2$), znamená v druhém čísle 8 jednotek nultého řádu ($8 = 8 \cdot 10^0$). Abychom základ dekadické poziční soustavy ozřejmili, napíšme nynější letopočet takto:

$$1965 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Docela dobře by mohlo být základem číselné soustavy kterékoliv jiné přirozené číslo, třeba 3 nebo 12. Uplatnění samočinných počítačů, o nichž se dnes již hovoří při nejrůznějších příležitostech, je založeno na využití číselné soustavy dvojkové čili diadické, tj. soustavy mající za základ číslo 2. Vyplývá to z toho, že v dvojkové soustavě se k zápisu čísla

užívá dvou číslic, číslice 0 a číslice 1. To dobře odpovídá dvěma elektrickým stavům vodiče (elektronky), totiž buď elektrický proud protéká, to vyznačuje cifra 1, nebo neprotéká, a to vyznačuje cifra 0.

Číselné soustavy. K zápisu každého čísla v desítkové soustavě užíváme deseti znaků. K zápisu čísla 10, které je základem této soustavy používáme dvou znaků 10, jedničky a nuly. Čísla větší než 10 tvoříme tak, že na místě řádu 0 umístíme po řadě cifry 1,2,...,8, 9 až dojdeme k číslu 19. Pak zapíšeme na místě řádu nultého opět 0, ale na místě řádu 1 číslici 2, tedy 20. Dále se postup neustále opakuje, až dospějeme k číslu 99; pak následuje číslo 100 atd.

T a b u l k a

$z=$ $=10$	$z=2$	$z=3$	$z=4$	$z=5$	$z=6$	$z=7$	$z=8$	$z=9$	$z=$ $=11$	$z=$ $=12$	$z=$ $=13$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	11	10	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	100	11	10	4	4	4	4	4	4	4	4
5	101	12	11	10	5	5	5	5	5	5	5
6	110	20	12	11	10	6	6	6	6	6	6
7	111	21	13	12	11	10	7	7	7	7	7
8	1000	22	20	13	12	11	10	8	8	8	8
9	1001	100	21	14	13	12	11	10	9	9	9
10	1010	101	22	20	14	13	12	11	α	α	α
11	1011	102	23	21	15	14	13	12	10	β	β
12	1100	110	30	22	20	15	14	13	11	10	γ
13	1101	111	31	23	21	16	15	14	12	11	10
14	1110	112	32	24	22	20	16	15	13	12	11
15	1111	120	33	30	23	21	17	16	14	13	12
16	10000	121	100	31	24	22	20	17	15	14	13
17	10001	122	101	32	25	23	21	18	16	15	14
18	10010	200	102	33	30	24	22	20	17	16	15
19	10011	201	103	34	31	25	23	21	18	17	16
20	10100	202	110	40	32	26	24	22	19	18	17
21	10101	210	111	41	33	30	25	23	1 α	19	18
22	10110	211	112	42	34	31	26	24	20	1 α	19
23	10111	212	113	43	35	32	27	25	21	1 β	1 α
24	11000	220	120	44	40	33	30	26	22	20	1 β
25	11001	221	121	100	41	34	31	27	23	21	1 γ
26	11010	222	122	101	42	35	32	28	24	22	20
27	11011	1000	123	102	43	36	33	30	25	23	21
28	11100	1001	130	103	44	40	34	31	26	24	22
29	11101	1002	131	104	45	41	35	32	27	25	23
30	11110	1010	132	110	50	42	36	33	28	26	24

atd.

Zcela obdobný je postup, zvolíme-li za základ číselné soustavy jiné libovolné přirozené číslo $z > 1$. Abychom toto tvrzení ilustrovali příkladem, zvolme za základ např. číslo $z = 5$. To znamená, že k zapsání každého čísla v pětkové soustavě vystačíme s pěti číslicemi: 0, 1, 2, 3, 4. Základ bude ovšem zapsán symbolem 10. Další čísla budou po řadě 11 (v desítkové soustavě 6), 12 (sedm), 13 (osm), 14 (devět), 20 (deset), 21, 22, 23, ..., 43, 44, 100 (dvacet pět), atd. Způsob vytváření čísel je zcela jednoduchý a my si podle něho sestavíme tabulku.

Do prvního sloupce napíšeme pod sebe čísla v desítkové soustavě. Do vedlejšího sloupce napíšeme též čísla zapsaná v soustavě o základu 2, do dalšího sloupce též čísla v trojkové soustavě atd., až v základu 9. Zvolíme-li za základ číselné soustavy číslo $z > 10$, např. $z = 11$, pak ovšem tato jedenáctková soustava bude mít 11 cifer a je nutno doplnit kromě běžných číslic ještě další znak pro číslo 10; zvolme třeba znak α . Při základu $z = 12$ připojíme ještě další znak, totiž β , jak je uvedeno v tabulce atd. Tak dostaneme vlastně přepočítávací tabulku, v níž jsou na stejném řádku vedle čísla dekadického uvedena čísla v soustavě, jejíž základ je uveden v záhlaví tabulky.

Z tabulky snadno zjistíme, že např. číslo, které v desítkové soustavě označujeme 7, se v soustavě trojkové zapíše 21, ve čtyřkové 13, v pětkové 12 atd. Tabulka nám umožní i k číslu zapsanému symbolem např. 41 v soustavě $z = 6$ určit příslušné číslo v soustavě dekadické, které je 25, nebo i příslušné číslo např. v soustavě třináctkové, které je 17.

Aby nedocházelo k nedorozumění, píšeme u čísel o jiném základu než 10 příslušný základ jako index u tohoto čísla. Tak např. $(22)_{12} = (35)_7 = 26$, jak se snadno přesvědčíme z tabulky.

Cvičení

S použitím převodní tabulky doplňte výsledky u těchto rovností

1. $(12)_3 + (2)_3 \cdot (11)_3 - (20)_3 = (\quad)_{10}$;

2. $[(2)_9 \quad (13)_5] \quad (10)_4 = (\quad)_3$.

3. $\frac{3^2 + (10)_5}{(2)_7} = (\quad)_4$;

4. $\frac{(1\alpha)_{13} + (10)_5}{2} = (\quad)_{11}$.

5. Kolik jednociferných čísel má číselná soustava o základu 7?

6. Jakou vlastnost musí mít základ číselné soustavy, aby v této soustavě platila obdobná věta pro dělitelnost dvěma, jako platí v dekadické soustavě.

7. Jsou dána čísla $(205)_z$; $(6001)_z$; $(12352)_z$; $(3827)_z$. Rozhodněte, která z těchto čísel nemohou mít za základ z číslo 6.

Převod čísel z jedné soustavy do soustavy jiné pomocí převodní tabulky není pohodlný, zejména kdybychom pracovali s většími čísly. Proto

se naučíme převádět čísla bez tabulky. Podobně jako číslo $530841 = 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$, můžeme zapsat i číslo $(3256)_9$ pomocí mocnin čísla 9 a dostaneme $(3256)_9 = 3 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^1 + 6 \cdot 9^0 = 2187 + 162 + 45 + 6 = 2400$. To spočívá na větě, kterou uvedeme:

Je-li dáno přirozené číslo $z > 1$, pak každé přirozené číslo a můžeme zapsat polynomem

$$a = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0 z^0, \quad (1)$$

kde n je určité přirozené číslo, $a_{n-1}; a_{n-2}; \dots; a_2; a_1; a_0$ jsou přirozená čísla menší než z , nebo 0, a_n je přirozené číslo menší než z .

Obyčejně zapisujeme mnohočlen (1) zkráceně takto

$$a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z. \quad (2)$$

Příklad 1. Převeďme číslo $(5362)_7$ do soustavy desítkové.

Řešení. $(5362)_7 = 5 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 1715 + 147 + 42 + 2 = 1906$.

Převeďme nyní číslo 1906 zpět do soustavy sedmičkové. K tomu nám dobře poslouží mocniny čísla 7. Je

$$\begin{aligned} 7^0 &= 1; \\ 7^1 &= 7; \\ 7^2 &= 49; \\ 7^3 &= 343; \\ 7^4 &= 2401. \end{aligned}$$

Nejvyšší mocnina sedmi, která je menší než 1906, je $7^3 = 343$. Jelikož 343 je v 1906 obsaženo pětkrát se zbytkem 191, můžeme psát

$$1906 = 5 \cdot 7^3 + 191$$

Nejvyšší mocnina sedmi, která je menší než 191, je $7^2 = 49$; platí: $191 = 3 \cdot 49 + 44$. To zapíšeme takto: $191 = 3 \cdot 7^2 + 44$.

Dále již stručněji

$$\begin{aligned} 44 &= 6 \cdot 7^1 + 2, \\ 2 &= 2 \cdot 7^0. \end{aligned}$$

Přehledně píšeme postup takto

$$\begin{array}{r} 1906 = 5 \cdot 7^3 + 191 \\ \quad \quad \quad 3 \cdot 7^2 + 44 \\ \quad \quad \quad \quad 6 \cdot 7^1 + 2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2 \cdot 7^0 \\ \hline 1906 = 5 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = (5362)_7 \end{array}$$

Příklad 2. Převeďte číslo 1996 do soustavy dvojkové.

Řešení. Mocniny čísla 2 jsou

$$\begin{array}{cccccc} 2^0 = 1 & 2^3 = 8 & 2^5 = 32 & 2^7 = 128 & 2^9 = 512 \\ 2^1 = 2 & 2^4 = 16 & 2^6 = 64 & 2^8 = 256 & 2^{10} = 1024. \end{array}$$

Platí $1996 = 2^{10} + 972$, a poněvadž zbytek 972 lze psát $972 = 2^9 + 460$, dostáváme $1996 = 2^{10} + 2^9 + 460$. Obdobně postupujeme dále tak, že vždy zbytek zapíšeme jako vhodnou mocninu 2, takže zápis je

$$\begin{aligned}
1996 &= \\
&= 1 \cdot 2^{10} + 972 \\
&\quad 1 \cdot 2^9 + 460 \\
&\quad 1 \cdot 2^8 + 204 \\
&\quad 1 \cdot 2^7 + 76 \\
&\quad 1 \cdot 2^6 + 12 \\
&\quad 0 \cdot 2^5 + 12 \\
&\quad 0 \cdot 2^4 + 12 \\
&\quad 1 \cdot 2^3 + 4 \\
&\quad 1 \cdot 2^2 + 0 \\
&\quad 0 \cdot 2^1 + 0 \\
&\quad 0 \cdot 2^0 \\
1996 &= \\
&= 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0
\end{aligned}$$

Je tedy $1996 = (11111001100)_2$. Za cvičení si čtenář může aspoň provést převod tohoto diadického čísla do dekadické soustavy.

P ř í k l a d 3. Stanovte číslo x tak, aby platilo

$$(374)_8 - (503)_6 + (123)_7 = (x)_5. \quad (3)$$

Ř e š e n í. Nejprve stanovíme dekadická čísla na levé straně výrazu (3)

$$\begin{aligned}
(374)_8 &= 3 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 4 = 252 \\
(503)_6 &= 5 \cdot 6^2 + 3 = 183 \\
(123)_7 &= 1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 3 = 66.
\end{aligned}$$

Číslo na levé straně výrazu (3) je $252 - 183 + 66 = 135$. Toto číslo 135 máme vyjádřit v číselné soustavě o základu 5

$$\begin{aligned}
135 &= 1 \cdot 5^3 + 10 \\
&\quad 2 \cdot 5^1
\end{aligned}$$

$$135 = 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = (1020)_5.$$

Hledané číslo x , zapsané pětikově je $(1020)_5$.

Cvičení

8. Číslo $(11001110100)_2$ vyjádřete v soustavě o základu 10.
9. Do dvojkové soustavy převedte čísla 909.
10. Proveďte $(345)_8 + (415)_7 + (7005)_8$ a výsledek zapište: a) v dekadické soustavě, b) ve dvojkové soustavě.
11. Číslo $(231)_5$ má v soustavě o základu z zápis $(123)_z$. Určete základ z .

Cvičení

Počítání ve dvojkové číselné soustavě. Provádění početních výkonů v dvojkové soustavě nám nebude dělat obtíže, poněvadž je zcela snadné. Stačí si uvědomit, že při součtu je $1 + 0 = 0 + 1 = 1$, dále $1 + 1 = 10$ (nebudeme v tomto odstavci psát např. $(10)_2$ tam, kde nemůže dojít k nedorozumění). Při násobení je $1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$. Tyto základní početní spoje v dvojkové soustavě zapišme do tabulek

sčítání		
+		0 1
0		0 1
1		1 10

násobení		
.		0 1
0		0 0
1		0 1

Užívání tabulek základních početních spojů v diadické soustavě ukážeme na dalším příkladě. Jednoho sčítance (činitele) vyhledáme v levém sloupci příslušné tabulky a druhého sčítance (činitele) vyhledáme v horním řádku příslušné tabulky. V „průsečíku“ příslušného řádku a sloupce tabulky je součet (součin).

Cvičení

Příklad 1. Sečtěte čísla $(10010)_2$; $(1011)_2$; $(100)_2$.

Řešení.

$$\begin{array}{r} 10010 \\ 1011 \\ 100 \\ \hline 100001 \end{array}$$

Zkoušku nechtě čtenář provede tak, že převede dané tři sčítance i součet do soustavy desítkové a přesvědčí se obvyklým způsobem o správnosti.

Příklad 2. Vynásobte $(10010)_2 \cdot (1011)_2$.

Řešení. Užijeme opět tabulky pro násobení a dostáváme

$$\begin{array}{r} 10010 \\ .1011 \\ \hline 10010 \\ 10010 \\ 00000 \\ 10010 \\ \hline 11000110 \end{array}$$

Zkouška. $(10010)_2 = 18$ a $(1011)_2 = 11$; $18 \cdot 11 = 198$.

$$198 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (11000110)_2.$$

Cvičení

12. Jakou cifrou je zakončeno sudé číslo, které je zapsáno v diadické soustavě?

13. Ze soustavy dvojkové převedte následující čísla do soustavy dekadické: $(100)_2$; $(101100111)_2$; $(101001110)_2$.

14. Zapište čísla 157; 913; 86; 12; 8; 131 ve dvojkové číselné soustavě.

15. Za pomoci základních spojů proveďte: a) $(1011001110)_2 + (1100111)_2$; b) $(1110001)_2 \cdot (1100)_2$ a zkoušky proveďte v desítkové soustavě.



Číselné soustavy o záporném základu

DOC. FRANTIŠEK DUŠEK, PF, Ústí nad Labem

Zvolíme-li za základ číselné soustavy přirozené číslo $z > 1$ a označíme-li jednotlivé číslice $c_k < z$, má za předpokladu $c_n \neq 0$ zápis $(n+1)$ ciferného přirozeného čísla tvar

$$(c_n c_{n-1} c_{n-2} \dots c_2 c_1 c_0)_z = c_n \cdot z^n + c_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + c_2 \cdot z^2 + c_1 \cdot z^1 + c_0 \cdot z^0$$

Nejužívanější je soustava desítková

$$(c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c_0)_{10} = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0$$

Nic nebrání tomu, abychom za základ soustavy položili číslo záporné, třeba -10 . Tedy

$$(c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c_0)_{-10} = c_n \cdot (-10)^n + c_{n-1} \cdot (-10)^{n-1} + \dots + c_2 \cdot (-10)^2 + c_1 \cdot (-10)^1 + c_0 \cdot (-10)^0$$

Např. je

$$365_{-10} = 3 \cdot (-10)^2 + 6 \cdot (-10)^1 + 5 \cdot (-10)^0 = 300 - 60 + 5 = 235,$$

$$2365_{-10} = 2 \cdot (-10)^3 + 3 \cdot (-10)^2 + 6 \cdot (-10)^1 + 5 \cdot (-10)^0 = -2000 + 300 - 60 + 5 = -1735$$

Už z těchto ukázek je vidět, že v soustavě o záporném základu lze zapsat záporná čísla bez použití znaménka minus.

P o z n á m k a. V dalším budeme „číslem“ rozumět „číslo celé“.

C v i č e n í 1. Vysvětlete, proč má zápis kladného čísla v soustavě o záporném základu lichý počet platných číslic a zápis záporného čísla sudý počet platných číslic.

C v i č e n í 2. Vysvětlete, proč je v číselné soustavě o záporném základu součin dvou činitelů, z nichž jeden má sudý počet číslic a druhý lichý počet číslic, zapsán sudým počtem číslic, v ostatních případech lichým počtem číslic.

Jako ukázkou převedme zápisy některých čísel do soustavy o základu -10

$1_{10} = 1_{-10}$	$-1_{10} = 19_{-10}$
$2_{10} = 2_{-10}$	$-2_{10} = 18_{-10}$
$3_{10} = 3_{-10}$	$-3_{10} = 17_{-10}$
$9_{10} = 9_{-10}$	$-9_{10} = 11_{-10}$
$10_{10} = 190_{-10}$	$-10_{10} = 10_{-10}$
$20_{10} = 180_{-10}$	$-20_{10} = 20_{-10}$

$$37_{10} = 177_{-10}$$

$$99_{10} = 119_{-10}$$

$$100_{10} = 100_{-10}$$

$$365_{10} = 445_{-10}$$

$$999_{10} = 19019_{-10}$$

$$-37_{10} = 43_{-10}$$

$$-99_{10} = 1901_{-10}$$

$$-100_{10} = 1900_{-10}$$

$$-365_{10} = 1775_{-10}$$

$$-999_{10} = 1001_{-10}$$

Cvičení 3. V soustavě o základu -10 запиšte všechna (celá) čísla, jejichž zápis v soustavě o základu 10 je trojciferný a má jen číslice 0; 1; 9, které se mohou opakovat.

Pro převod zápisu čísla ze soustavy o základu 10 do soustavy o základu -10 můžeme vyslovit některá pravidla, podle nichž lze převádění provádět mechanicky, např.:

(P) *Nejsou-li na místech lichého řádu (řád je udán příslušným exponentem základu) nuly a na místech sudého řádu kromě nultého řádu devítky, přejdeme od zápisu kladného čísla v soustavě o základu 10 k soustavě o základu -10 tak, že číslice c_k na místech lichého řádu nahradíme číslicemi $(10 - c_k)$ a číslice stojící před nimi zvětšíme o jednu*

$$456789_{10} = 1664829_{-10}.$$

Při výskytu nul na místech lichého řádu a devítek na místech sudého řádu (kromě nultého řádu) je nutno použít doplňujících pravidel:

(P₀) *Nula na místě lichého řádu i číslice stojící před ní se při převodu opíše*

$$456709_{10} = 1664709_{-10}.$$

(P₉) *Je-li na místě sudého řádu (kromě nultého) devítka, za ní číslice c_k různá od nuly a před ní číslice různá od devítky, nahradí se při převádění číslice c_k číslicí $(10 - c_k)$, devítka nulou a číslice stojící před ní se před použitím pravidla (P) zvětší o jednu; slovní obrat „zvětšit číslici o jednu“ není sice správný, ale užíváme ho jako zkratky pro jeho jednoduchost a srozumitelnost.*

$$456989_{10} = 1663029_{-10}.$$

Další komplikaci, např. je-li na místě sudého řádu (kromě nultého) devítka a číslice před ní stojící také devítka, nebudeme zde uvádět a ponecháme ji hloubavému čtenáři.

Cvičení 4. Vyslovte pravidla pro převod zápisu záporných čísel ze soustavy o základu 10 do soustavy o základu -10 .

Cvičení 5. Vyslovte pravidla pro převod zápisu čísel ze soustavy o základu -10 do soustavy o základu 10.

Cvičení 6. Ukažte, že pro čísla, zapsaná v soustavě o základu -10 , platí formálně pravidla o dělitelnosti dvěma, čtyřmi i pěti jako v soustavě o základu 10, ale neplatí pravidla o dělitelnosti třemi, devíti a pětadvaceti.

Při početních výkonech s čísly zapsanými v soustavě o základu -10 se ovšem setkáváme s odchylkami od algoritmů, platných v soustavě o základu 10. Tyto odchylky však nejsou tak značné, jak bychom na první pohled očekávali. Např. algoritmus pro písemné sečítání se mění

jen v tom, že desítkový přenos se v dalším sloupci nepřičítá, ale odčítá, jak si ověříme třeba na součtu

$$\begin{array}{r} 123_{-10} \\ 654_{-10} \\ 789_{-10} \\ \hline 19346_{-10} \end{array}$$

Při troše pozornosti můžeme sečítat sčítance zapsané v obou soustavách a výsledek zapisovat v předem stanovené soustavě, pamatujeme-li na to, že v soustavě o záporném základu znamenají místa lichého řádu záporné hodnoty

$$\begin{array}{r} 123_{10} \\ 654_{-10} \\ 789_{-10} \\ \hline 1306_{10} \end{array} \quad \begin{array}{r} 123_{10} \\ 654_{-10} \\ 789_{-10} \\ \hline 19306_{-10} \end{array}$$

I při rozboru algoritmů ostatních početních výkonů lze objevit mnoho zajímavostí.

Čísla můžeme zapisovat i v soustavě o jiném záporném základu, např. -2 . Pro porovnání uveďme aspoň přepis kladných a záporných čísel první desítky v soustavách o základech 2 a -2 .

základ 10	základ 2	základ -2	základ 10	základ 2	základ -2
1	1	1	-1	-1	11
2	10	110	-2	-10	10
3	11	111	-3	-11	1101
4	100	100	-4	-100	1100
5	101	101	-5	-101	1111
6	110	11010	-6	-110	1110
7	111	11011	-7	-111	1001
8	1000	11000	-8	-1000	1000
9	1001	11001	-9	-1001	1001
10	1010	11110	-10	-1010	1010

Co je to grupa?

FRANTIŠEK KUŘINA, PF, Hradec Králové

V minulých číslech *Rozhledů* (č. 3, 4, roč. 42, č. 2, roč. 43) jste měli možnost seznámit se v několika článcích *Ljubena Galeva* s příklady množin s algebraickými operacemi. V tomto článku se zamyslíme nad několika příklady ze středoškolské látky s cílem poznat poněkud podrobněji jeden z velmi důležitých pojmů matematiky, pojem grupa.

Příklad 1. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ o středu S (obr. 1). Otočíme-li tento pětiúhelník kolem středu S v jistém smyslu, např. o úhel 72° , splyne otočený pětiúhelník s pětiúhelníkem původním. Říkáme, že toto otočení, neboli rotace (označme ji R_{72}), reprodukuje daný pětiúhelník. Spočítejte, že rotací pětiúhelníka $ABCDE$, které mají tuto vlastnost, je právě 5. Označme je R_{72} , R_{144} , R_{216} , R_{288} , R_{360} (index znamená velikost orientovaného úhlu rotace ve stupních); množinu o těchto prvcích označme R . Někdo možná „napočítal“ rotací více. To proto, že jsme dosud nevysvětlili, co znamená, že dvě rotace jsou totožné. Je účelné rozlišovat rotace jen podle „výsledků“, ne podle „cesty“. Tak např. budeme považovat za totožné rotace $R_{72} = R_{-288} = R_{432}$, $R_{360} = R_0$ atp. Rotace můžeme skládat; po provedení jedné rotace můžeme totiž otáčet pětiúhelník kolem středu o další úhel. Přitom se ovšem velikosti úhlů rotace sčítají. Tak např. postupným otočením pětiúhelníku nejdřív o 72° , potom o 144° dostaneme jeho otočení o 216° . Skládání otočení můžeme psát jako násobení rotací $R_{72} \cdot R_{144} = R_{216}$. Tím je definována jistá algebraická operace na množině rotací pravidelného pětiúhelníku. Všimněme si vlastností množiny R . Podobně jako známou tabulku „násobilky“ sestavíme tabulku součinů všech možných dvojic prvků množiny R . Označme sloupce i řádky tabulky pořadě R_0 , R_{72} , R_{144} , R_{216} , R_{288} a např. součin $R_{72} \cdot R_{216}$ pišme do průsečíku řádku označeného R_{72} a sloupce označeného R_{216} . Dostaneme tuto tabulku

	R_0	R_{72}	R_{144}	R_{216}	R_{288}
R_0	R_0	R_{72}	R_{144}	R_{216}	R_{288}
R_{72}	R_{72}	R_{144}	R_{216}	R_{288}	R_0
R_{144}	R_{144}	R_{216}	R_{288}	R_0	R_{72}
R_{216}	R_{216}	R_{288}	R_0	R_{72}	R_{144}
R_{288}	R_{288}	R_0	R_{72}	R_{144}	R_{216}

Na počest anglického matematika A. Cayleyho, který v r. 1854 poprvé takovou tabulku uvedl, ji nazýváme Cayleyho tabulko u. Některé vlastnosti algebraické operace jsou z tabulky hned patrné. Tak např. součin dvou rotací pravidelného pětiúhelníka, které reprodukuje tento pětiúhelník, je opět rotace reprodukující pětiúhelník. To je z geometrického hlediska samozřejmé. Není to však vůbec nutná vlastnost „násobení“. Vždyť např. tabulka „malé násobilky“ obsahuje i čísla větší než 10, součin dvou záporných čísel je číslo kladné (tedy číslo „jiného druhu“ než každý z činitelů) atp. Jaké zákony platí pro násobení rotací?

Označme R_1, R_2, R_3 libovolné tři rotace množiny $\mathbf{R}$. Obraz libovolného bodu X pětiúhelníka $ABCDE$ v rotaci R_1 označme X_1 , obraz bodu X_1 v rotaci R_2 označme X_2 , obraz bodu X_2 v rotaci R_3 označme X_3 . V součinu rotací $R_1 \cdot R_2$ přejde bod X do bodu X_2 , v součinu $(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$ přejde tedy bod X do bodu X_3 . V součinu rotací $R_2 \cdot R_3$ přejde bod X_1 do bodu X_3 , v součinu $R_1 (R_2 \cdot R_3)$ přejde bod X do bodu X_3 . Pro libovolné tři prvky R_1, R_2, R_3 množiny $\mathbf{R}$ tedy platí $(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 = R_1 (R_2 \cdot R_3)$. To znamená, že pro násobení rotací platí asociativní zákon známý z násobení reálných čísel.

Z prvního sloupce tabulky vidíme, že rotace R_0 se chová při násobení neutrálně; hraje tedy touž roli jako číslo 1 při násobení reálných čísel. Rotaci R_0 budeme nazývat jednotkou množiny $\mathbf{R}$. Jednotka R_0 se vyskytuje v každém sloupci Cayleyho tabulky. To znamená, že k libovolnému prvku R_{72j} ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) existuje v množině $\mathbf{R}$ prvek R_{72j}^{-1} , tak, že $R_{72j} \cdot R_{72j}^{-1} = R_0$. Prvek R_{72j}^{-1} se nazývá prvkem inverzním k prvku R_{72j} . K prvku R_0 je inverzním prvkem prvek R_0 , k prvku R_{72} prvek R_{288} atp. Množina prvků s vlastnostmi, které jsme pozorovali na množině $\mathbf{R}$, se nazývá *grupou*.

Formulujme nyní přesněji myšlenky naznačené v příkladu.

Algebraickou operací v množině $\mathbf{G} = \{Z_1, Z_2, \dots\}$ rozumíme předpis, který každé uspořádané dvojici prvků Z_i, Z_j z množiny $\mathbf{G}$ přiřazuje jediný prvek Z_k z množiny $\mathbf{G}$. Přitom algebraickou operaci můžeme označovat libovolně (např. jako násobení, sečítání nebo i jinak). Podle zvoleného označení upravujeme ostatní terminologii a symboliku. Formulujme nyní v multiplikativní (násobící) symbolice definici grupy.

Množina $\mathbf{G} = \{Z_1, Z_2, \dots\}$ se nazývá grupou, jestliže platí

1. V množině $\mathbf{G}$ je definována algebraická operace, tj. k libovolným dvěma prvkům Z_i, Z_j z množiny $\mathbf{G}$ existuje jediný prvek Z_k z množiny $\mathbf{G}$ tak, že platí

$$Z_i \cdot Z_j = Z_k$$

2. Algebraická operace je asociativní, tj. pro libovolné tři prvky Z_k, Z_l, Z_m z množiny $\mathbf{G}$ platí

$$Z_k \cdot (Z_l \cdot Z_m) = (Z_k \cdot Z_l) \cdot Z_m.$$

3. Existuje prvek J z množiny $\mathbf{G}$ takový, že je vzhledem k uvažované algebraické operaci neutrální, tj. pro libovolný prvek Z_i z množiny $\mathbf{G}$ platí

$$Z_i J = Z_i.$$

Prvek J se nazývá jednotkou grupy $\mathbf{G}$. U algebraické operace označované aditivní (sečítací) symbolikou budeme nazývat neutrální element nulou grupy $\mathbf{G}$.

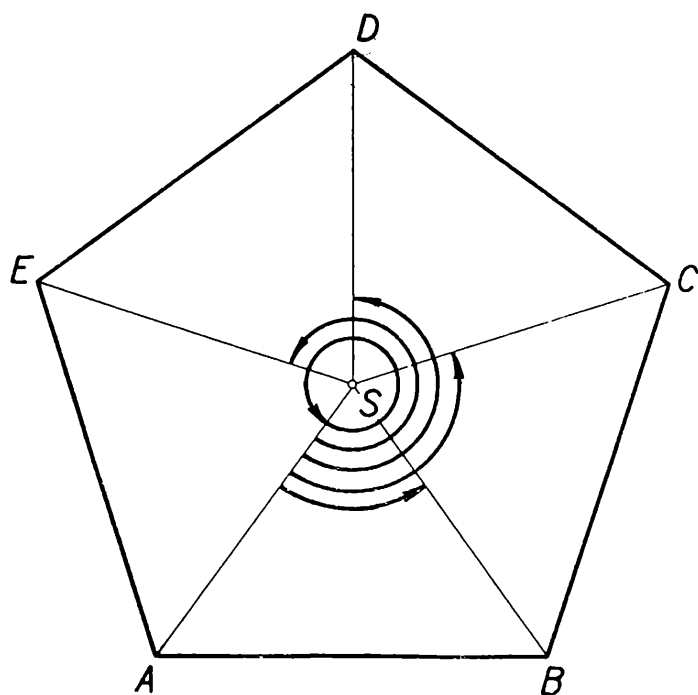
4. K libovolnému prvku Z_i z množiny $\mathbf{G}$ existuje prvek Z_i^{-1} množiny $\mathbf{G}$ tak, že platí

$$Z_i \cdot Z_i^{-1} = J$$

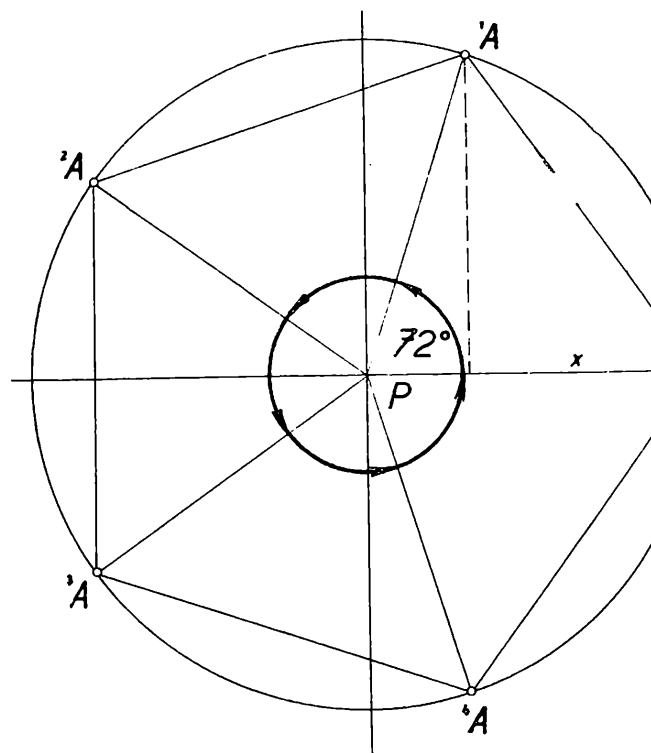
V příkladu 1 jsme uvedli grupu o 5 prvcích $R_0, R_{72}, R_{144}, R_{216}, R_{288}$. Jednotkou této grupy je rotace o 0° .

Příklad 2. Je dáno komplexní číslo $a = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$.

Z Moivreovy věty a z periodičnosti funkcí $\sin x$ a $\cos x$ vyplývá, že existuje právě pět různých mocnin čísla a s přirozenými mocniteli: a, a^2, a^3, a^4, a^5 (mocninu $a^5 = 1$ píšme v dalším ve tvaru a^0). Znázorníme-li komplexní čísla a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 v rovině komplexních čísel, dostaneme body ${}^0A, {}^1A, {}^2A, {}^3A, {}^4A$ jednotkové kružnice, které jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníka (obr. 2). Násobení komplexního čísla a komplexní jednotkou s amplitudou φ znamená totiž, jak známo, otočení obrazu A čísla a o úhel φ kolem počátku. Pro násobení mocnin a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 platí Cayleyho tabulka



Obr. 1



Obr. 2

	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4
a^0	a^0	a^1	a^2	a^3	a^4
a^1	a^1	a^2	a^3	a^4	a^0
a^2	a^2	a^3	a^4	a^0	a^1
a^3	a^3	a^4	a^0	a^1	a^2
a^4	a^4	a^0	a^1	a^2	a^3

Odůvodněte, že množina $\{a^0, a^1, a^2, a^3, a^4\}$ je vzhledem k algebraické operaci násobení mocnin komplexních čísel grupou. Jednotkou této grupy je reálné číslo $a^0 = 1$. Protože pro libovolné $j = 0, 1, 2, 3, 4$ platí $(a^j)^5 = 1$, lze každou mocninu a^j považovat za kořen binomické rovnice $\xi^5 - 1 = 0$. Je možno ukázat, že v oboru komplexních čísel nemá tato rovnice dalších kořenů.

Příklad 3. Při dělení přirozených čísel číslem 5 vyjdou nezáporné zbytky 0, 1, 2, 3, 4. Na množině těchto nezáporných zbytků lze definovat součet zbytků jako „normální“ součet přirozených čísel, pokud je tento součet menší než dělitel, tj. menší než 5, jinak jako „normální“ součet zmenšený o 5. Ověřte, že při takto definované algebraické operaci je množina nezáporných zbytků 0, 1, 2, 3, 4 grupou. Její Cayleyho tabulka zní

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Označme symbolem Z_j (pro $j = 0, 1, 2, 3, 4$)

a) rotaci R_{72j} daného pravidelného pětiúhelníka $ABCDE$ kolem jeho středu;

b) j -tou mocninu komplexního čísla $a = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$;

c) zbytek j při dělení přirozeného čísla číslem 5.

Zapisujeme-li uvažovanou algebraickou operaci vždy jako operaci multiplikativní, platí ve všech případech

$$Z_j \cdot Z_k = Z_{j+k}, \text{ pokud } j+k < 5,$$

$$Z_j \cdot Z_k = Z_{j+k-5}, \text{ pokud } j+k \geq 5.$$

Místo tří tabulek násobení můžeme tak psát tabulku jedinou

	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Z_0	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Z_1	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_0
Z_2	Z_2	Z_3	Z_4	Z_0	Z_1
Z_3	Z_3	Z_4	Z_0	Z_1	Z_2
Z_4	Z_4	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3

Grupy z příkladů 1, 2, 3 se tedy liší jen označením prvků a jejich interpretací. Všechny lze považovat za modely jediné abstraktní grupy $\mathbf{Z} = \{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$.

V matematice se souvislosti mezi grupou $\mathbf{Z}$ a např. grupou $\mathbf{G}$ z příkladu 2 říká **isomorfismus grup**. Přesněji: Lze-li vzájemně jednoznačně přiřadit prvky jedné grupy prvkům druhé grupy tak, že součin libovolných dvou prvků grupy jedné odpovídá součin jim přiřazených prvků grupy druhé, říkáme, že jsou tyto grupy **isomorfní**.

Isomorfismus grup z příkladů 1, 2 je zřejmý i z porovnání obr. 1 a 2.

Počet prvků grupy nemusí samozřejmě být 5 jako v příkladech 1, 2, 3. Sami znáte ze školy příklady množin, které jsou grupami s nekonečným počtem prvků.

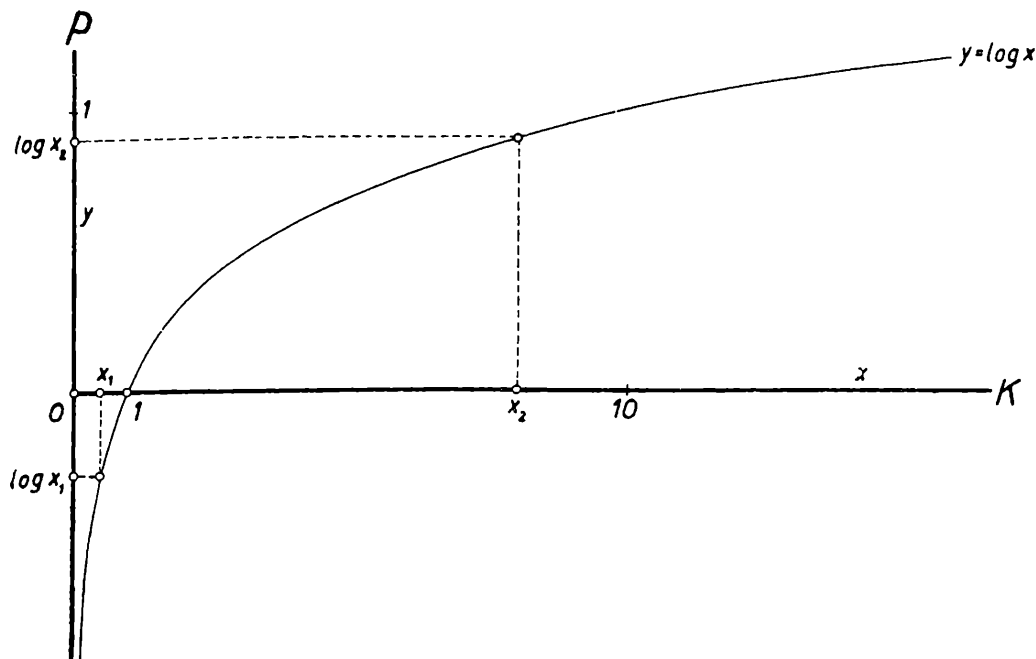
Příklad 4. Množina $\mathbf{K}$ všech kladných čísel je vzhledem k algebraické operaci násobení kladných čísel grupou. Ověřte, že všechny grupové vlastnosti jsou na množině $\mathbf{K}$ splněny.

Je množina všech reálných čísel vzhledem k algebraické operaci násobení reálných čísel grupou? Součin dvou reálných čísel je reálné číslo, asociativní zákon rovněž platí. Číslo 1 je zřejmě jednotkou ve smyslu vlastnosti 3 z definice grupy. Zbývá zjistit, zda ke každému reálnému číslu existuje prvek inverzní. Na první pohled se zdá, že ano. Při pozornějším zkoumání si však uvědomíme, že k nule inverzní prvek neexistuje. Nula je totiž vzhledem k násobení „a g r e s í v n í“; součin nuly a libovolného reálného čísla je 0, a nikdy ne 1. Reálná čísla ne tvoří tedy vzhledem k násobení grupu.

Příklad 5. Množina $\mathbf{P}$ reálných čísel je grupou vzhledem k algebraické operaci sčítání reálných čísel. Platí totiž

1. Součet libovolných dvou reálných čísel je reálné číslo.
2. Pro sčítání platí asociativní zákon.
3. Existuje neutrální prvek množiny $\mathbf{P}$. Je jím číslo 0.
4. Ke každému prvku a množiny $\mathbf{P}$ existuje inverzní prvek a tak, že $a + (-a) = 0$. Inverzní prvek se nazývá **číslem opačným**.

Ukažme, že grupy K a P jsou isomorfní. Přiřaďme libovolnému číslu x z množiny K jeho dekadický logaritmus $\log x$. Ze školy znáte vlastnosti logaritmické funkce $y = \log x$ (obr. 3). Jejím definičním oborem je množina K všech kladných čísel, množinou funkčních hodnot je množina P všech reálných čísel. Protože $y = \log x$ je funkcí rostoucí v celém definičním oboru, vyjadřuje vzájemné jednoznačné přiřazení



Obr. 3

prvků množin K a P . V tomto přiřazení odpovídají číslům x_1, x_2, x_1x_2 množiny K po řadě čísla $\log x_1, \log x_2, \log x_1x_2$ množiny P . Protože však $\log x_1x_2 = \log x_1 + \log x_2$, definuje funkce $y = \log x$ isomorfismus mezi multiplikativní grupou K kladných čísel a aditivní grupou P reálných čísel.

V definici grupy nebyl pro algebraickou operaci požadován komutativní zákon. V příkladech grup, které jsme dosud uvedli, však zřejmě platí. U grup s konečným počtem prvků se komutativnost algebraické operace projevuje v „souměrnosti“ Cayleyho tabulky podle jedné úhlopříčky. Zdálo by se tedy, že komutativní zákony vyplývají z definice grupy. Ukážeme příklad grupy s nekomutativní algebraickou operací, který tuto domněnku vyvrací.

Příklad 6. Jestliže každému z čísel 1, 2, 3 přiřadíme jediné z těchto čísel tak, že různým číslům přiřadíme různá čísla, říkáme, že

tvoříme permutace čísel 1, 2, 3. Tak např. přiřadíme-li číslu 1 číslo 2, číslu 2 číslo 3, číslu 3 číslo 1 tvoříme permutaci, kterou budeme značit symbolem $\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$

Snadno spočteme, že množina všech permutací čísel 1, 2, 3 obsahuje prvky

$$p_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \\ p_6 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}.$$

V množině π všech permutací tří prvků definujeme algebraickou operaci násobení permutací. Součinem $p_i \cdot p_j$, permutací p_i, p_j , rozumíme permutaci s touto vlastností: Jestliže permutace p_i přiřazuje libovolnému prvku a prvek b a permutace p_j přiřazuje prvku b prvek c , přiřazuje permutace $p_i p_j$ prvku a prvek c . Např.

$$p_5 \cdot p_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} = p_3,$$

$$p_2 \cdot p_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = p_6.$$

Součin permutací čísel 1, 2, 3 je tedy permutací těchto čísel a prvá grupová vlastnost je na množině π ověřena. Způsobem stejným jako v příkladu 1 lze odvodit pro násobení permutací platnost asociativního zákona. Neutrálním elementem (jednotkou) je na množině identická permutace $p_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$. K libovolné permutaci p_i množiny π existuje v množině π permutace inverzní p_i^{-1} tak, že $p_i \cdot p_i^{-1} = p_1$. Např. k permutaci $p_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$ je inverzní permutace $p_4^{-1} = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} = p_5$. Ověřte, že skutečně platí $p_4 \cdot p_5 = p_1$. Množina π všech permutací prvků 1, 2, 3 tedy tvoří grupu. Její Cayleyho tabulka má tvar

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_4	p_3	p_6	p_5
p_3	p_3	p_5	p_1	p_6	p_2	p_4
p_4	p_4	p_6	p_2	p_5	p_1	p_3
p_5	p_5	p_3	p_6	p_1	p_4	p_2
p_6	p_6	p_4	p_5	p_2	p_3	p_1

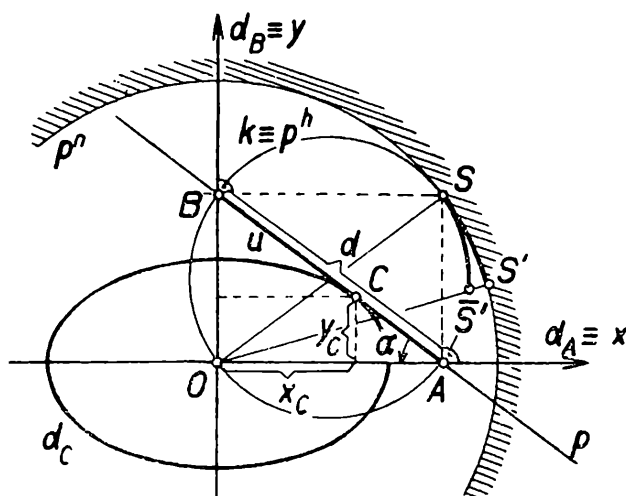
V této grupě neplatí komutativní zákon, neboť např. $p_2 \cdot p_5 \neq p_5 \cdot p_2$.



0 některých křivkách (Pokračování)

DOC. BOŘIVOJ KEPR, ČVUT, Praha

4. Speciálním pohybem cykloidálním je např. tzv. *pohyb eliptický* a *pohyb kardioidický*, jak ještě ukážeme. Podle 1. základní věty z odst. 3 je komplanární pohyb určen dvěma drahami d_A , d_B dvou různých bodů A , B neproměnného rovinného útvaru U . Vezměme speciálně za dráhy d_A a d_B dvě přímky na sebe kolmé (obr. 28). Pohyb neproměnného rovinného útvaru je pak uskutečněn např. tak, když se úsečka $u = AB$ konstantní délky d pohybuje v rovině tím způsobem, že její krajní bod A se posunuje po přímce d_A a její krajní bod B po přímce d_B . Zkoumejme nyní, jakou dráhu bude probíhat bod $C \in p \equiv (A, B)$.



Obr. 28

Předpokládáme, že je $C \neq A$, $C \neq B$. Na obr. 28 je bod C zvolen jako vnitřní bod úsečky AB přičemž $BC \neq CA$. Kdyby byl bod C vně této úsečky na přímce p , na níž úsečka u leží, probíhala by následující úvaha zcela stejně.

Hledáme tedy křivku d_c , kterou ve zmíněném pohybu bude opisovat zvolený bod C . Tuto záležitost nejsnadněji vyřešíme, pomůžeme-li si základními poučkami analytické geometrie. Přímku d_A zvolíme za osu x a přímku d_B za osu y soustavy souřadnic. Měnící se úhel, který svírá pohybující se úsečka $u = AB$ s osou $x \equiv d_A$, označme α . (Na obr. 28 je vyznačeno, který úhel máme na mysli.) Pro souřadnice x_c a y_c bodu C platí zřejmě tyto vztahy

$$\begin{aligned}x_c &= BC \cos \alpha \\y_c &= CA \sin \alpha,\end{aligned}$$

kde znakem BC a CA označujeme délku úsečky určenou body B , C a C , A . Obě uvedené rovnice upravme takto

$$\cos \alpha = \frac{x_c}{BC}, \quad \sin \alpha = \frac{y_c}{CA}$$

Umocníme-li obě strany obou rovnic a rovnice takto získané sečteme, získáme jako výsledek

$$\frac{x_c^2}{BC^2} + \frac{y_c^2}{CA^2} = 1,$$

což je rovnice elipsy, jejíž střed leží v počátku $O \equiv (d_A, d_B)$ soustavy souřadnic a jejíž osy jsou v přímkách d_A a d_B . Vrcholy elipsy, na přímce d_A mají souřadnice $(BC, 0)$, $(-BC, 0)$, na přímce d_B souřadnice $(0, AC)$, $(0, -AC)$. Je tedy drahou d_c daného bodu C elipsa, jejíž poloha vzhledem k daným přímkám d_A a d_B byla právě popsána. K procvičení doporučuji čtenáři, aby si promyslel a pak zkonstruoval příslušnou elipsu d_c pro případ, kdy je bod C vnějším bodem úsečky AB .¹⁸⁾

Sestrojme v bodech A a B úsečky u kolmice na přímky d_A a d_B . Podle 3. základní věty z odstavce 3 protnou se tyto kolmice v okamžitém středu otáčení S , který náleží příslušné poloze této úsečky v jejím pohybu. Obrazec $OASB$ je obdélník. Tento obdélník se při uvedeném pohybu úsečky AB samozřejmě mění. Jedna z jeho úhlopříček, a to úhlopříčka AB , je však při tom stále konstantní délky d . To však znamená, že i druhá jeho úhlopříčka OS je stále téže délky, čili že platí stále $OS = d$. Z toho plyne, že

geometrickým místem okamžitých středů S otáčení při uvedeném pohybu, tj. polhodií nehybnou (pevnou) je kružnice p^n o středu $O \equiv (d_A, d_B)$ a poloměru $r = d = AB$. (Viz základní větu z odst. 3.)

¹⁸⁾ A ještě jedna úloha pro čtenáře. Jakou dráhu při uvedeném pohybu bude opisovat bod C , který pólí úsečku AB ?

Sestrojíme nyní kružnici k , jejímž průměrem je úsečka AB . Tato kružnice jistě prochází stále při pohybu úsečky AB bodem $O \equiv (d_A d_B)$ a dále vždy příslušným, okamžitým středem otáčení S , v němž se *dotýká* polhodie nehybné (tj. tedy kružnice) p^n . Na této kružnici si zvolme libovolně bod $\bar{S}'$ (různý od bodů O , A , B a S) a promítneme ho z bodu O do bodu S' na kružnici p^n . Poloměr kružnice k se rovná stále polovině poloměru kružnice p^n .

Středový úhel SOS' kružnice p^n je tedy roven *obvodovému úhlu* SOS' kružnice k o polovičním poloměru. Každý čtenář, který se ve škole alespoň trochu zajímá o geometrii, dobře ví, že obvodový úhel je poloviční vzhledem k příslušnému úhlu středovému, máme-li na mysli tutéž kružnici. Dále rovněž dobře ví, že téměř středovému úhlu přísluší na kružnici o poloměru r , $2r$... oblouk délky l , $2l$ Autor by byl spokojen, kdyby čtenář na základě připomenutí znalostí, které jistě má, se zřetel k tomu co bylo řečeno, po jistém promyšlení přišel na to, že oblouk $\widehat{SS'}$ na kružnici p^n se rovná oblouku $\widehat{SS'}$ na kružnici k . (Na obr. 28 je tato skutečnost vyznačena plnějším vytažením příslušných oblouků.) Z výsledku předchozí úvahy pak plyne:

a) Každý bod kružnice k při uvedeném pohybu, tj. při kutálení kružnice k po „vnitřním“ obvodu kružnice p^n probíhá úsečku o délce průměru kružnice p^n ; o bodech A a B kružnice k to víme, neboť tak byl tento speciální pohyb zaveden a o libovolném dalším jejím bodu jsme to s přispěním čtenáře prokázali.

b) Každý bod kružnice k při jejím kutálení po „vnitřním“ obvodu kružnice p^n , se stává postupně okamžitým středem otáčení; kružnice k (podle základní věty 6. z odstavce 3) je tedy polhodií hybnou p^h .

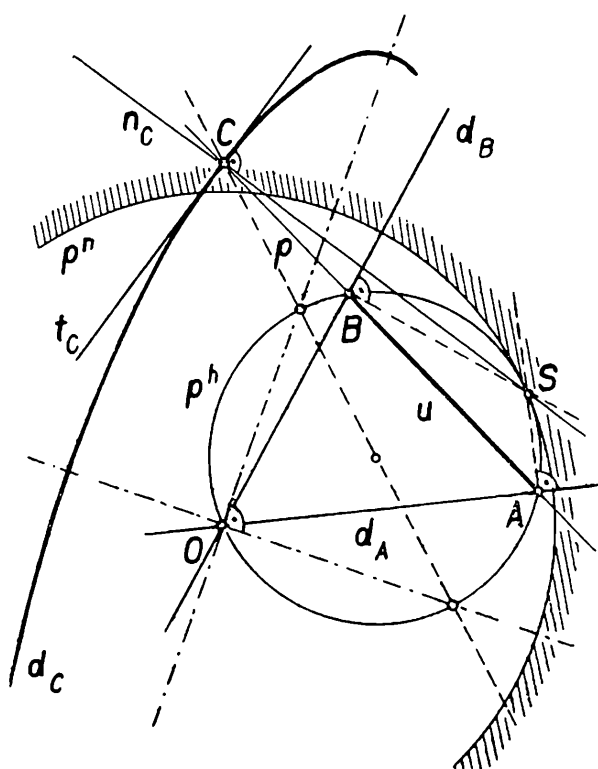
Na základě uvedených výsledků se dá již snadno ukázat, že tento speciální cykloidální pohyb, při kterém se kutálí kružnice p^h po „vnitřním“ obvodě pevné kružnice p^n *dvojnásobného poloměru* je ekvivalentní s pohybem, při kterém se úsečka (neproměnného rovinného útvaru) konstantní délky pohybuje tak, že její krajní body probíhají různé přímkové dráhy, jež nejsou na sebe kolmé. Každý bod přímky, na níž tato úsečka leží, různý od krajních bodů úsečky probíhá při tom eliptické dráhy. Na základě těchto výsledků se dá ukázat, že eliptickou dráhu při takovém pohybu opisuje i každý jiný bod, který neleží na pohybující se přímce p , nesoucí uvažovanou úsečku (a který samozřejmě také neleží na hybné polhodii p^h), který je ovšem při tomto pohybu pevně spojen s pohybující se úsečkou. Autor by byl spokojen, kdyby se našel čtenář, který by na základě předchozích úvah dokázal provést tyto konstrukce:

Jsou dány dvě různé přímkové trajektorie d_A a d_B , které nejsou na sebe kolmé a je dána úsečka $u = AB$ konstantní délky d , která se

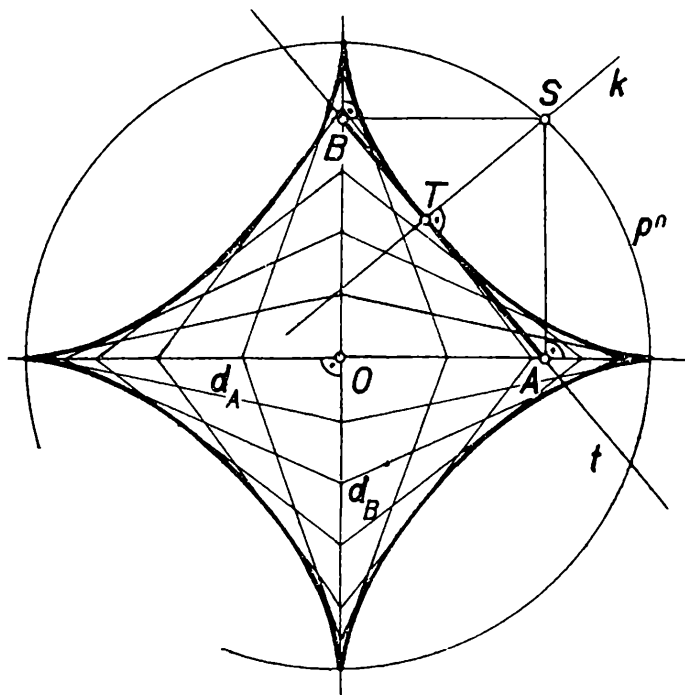
pohybuje tak, že její koncový bod A probíhá úsek d_A a její koncový bod B úsek d_B . Sestrojte: a) polhodu pevnou p^n a polhodu hybnou p^h . b) Pro libovolný bod C , ($C \neq A$, $C \neq B$, který leží na přímce, nesoucí úsečku AB a pak, který neleží na této přímce, $C \notin p^h$, $C \notin p^n$) sestrojte tečnu t_c k jeho dráze d_c (před konstrukcí této křivky), c) dráhu d_c tohoto bodu. Pro kontrolu je konstrukce provedena na obr. 29, pro případ, že bod C není na přímce, nesoucí pohybující se úsečku. Autor by však rád, kdyby se čtenář věnoval tomuto obrázku skutečně až pro případ kontroly výsledku svého vlastního přemýšlení.

Tomuto zvláštnímu cykloidálnímu pohybu říkáme z důvodů nyní zcela pochopitelných *pohyb eliptický*.

Spustíme-li z okamžitého středu S otáčení kolmici na příslušnou polohu přímky (AB) (obr. 30), získáme v patě této kolmice na přímce (AB) dotkový bod T tečny (AB) s křivkou, kterou přímka (AB) při



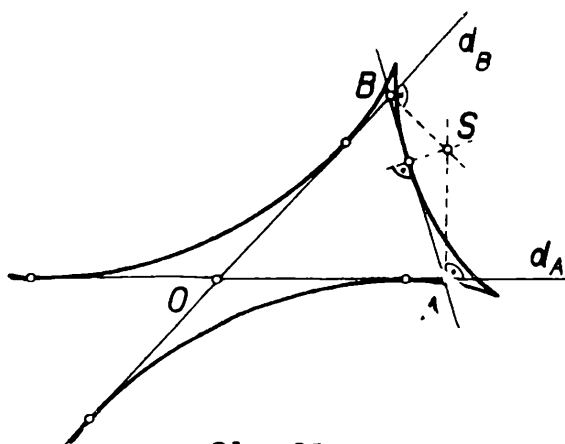
Obr. 29



Obr. 30

pohybu obaluje (viz základní větu 4. z odstavce 3). Jsou-li přímky d_A a d_B na sebe kolmé, je tato obálka, jak se dá prokázat, totožná s hypocykloidou z obr. 25 g, tj. s *asteroidou*. Existuje tedy následující, velmi pohodlná konstrukce bodů a tečen asteroidy. Z bodu S dané kružnice p^n spustíme kolmice na její dva dané navzájem kolmé průměry d_A a d_B . Spojnice t pat A , B těchto kolmic na d_A a d_B je tečnou asteroidy a pata T kolmice k vedené z bodu S na tečnu t je příslušným bodem dotyku. Lze tedy sestrojit pro tuto křivku libovolně mnoho tečen s dotkovými

bod y . V bodech, v nichž průměry d_A a d_B protínají danou kružnici p^n , má asteroida své čtyři singulární body (body vratu, hroty). Doporučujeme čtenáři, aby si stejnou konstrukci provedl i pro případ, kdy d_A a d_B jsou dvě různé přímky, nikoliv na sebe kolmé. Výsledná křivka se nazývá *kosoúhlá asteroida* a její tvar (nikoliv konstrukci) ukazuje obr. 31.



Obr. 31

Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že kosoúhlá asteroida nemá své body vratu na přímkách d_A , d_B .

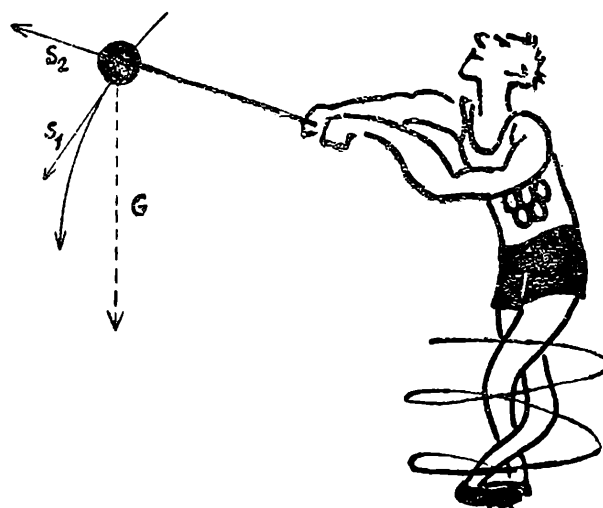
Jak získáme body, v nichž se tato asteroida dotýká přímek d_A a d_B ?¹⁹⁾



Oprava. V příkladě 6 na str. 32 v prvním čísle Rozhledů (autor Ivo Rosenberg) opravte znaménko $=$ na $\leq$.

¹⁹⁾ Jestliže se kutálí kružnice p^h po „vnitřním“ obvodu kružnice p^n dvojnásobného poloměru, opisují všechny body, pevně spojené s kružnicí p^h a neleží na ní elipsy, jak bylo ukázáno. Čím blíže ke kružnici p^h bude zvolený bod C (pevně spojený s kružnicí p^h), tím „užší“ bude jeho příslušná eliptická dráha d_c , tj. tím menší bude délka příslušné vedlejší osy elipsy d_c . V okamžiku, kdy bod C se stane právě bodem kružnice p^h , bude mít příslušná „elipsa“ d_c „nulovou délku“ své vedlejší osy a „přejde“ do úsečky d_c o délce průměru kružnice p^n . Této skutečnosti se v aplikacích na strojní mechanismy využívá pro tzv. *přímovody*.

(Pokračování)



FYZIKA

Tíhové zrychlení a světové rekordy v lehké atletice

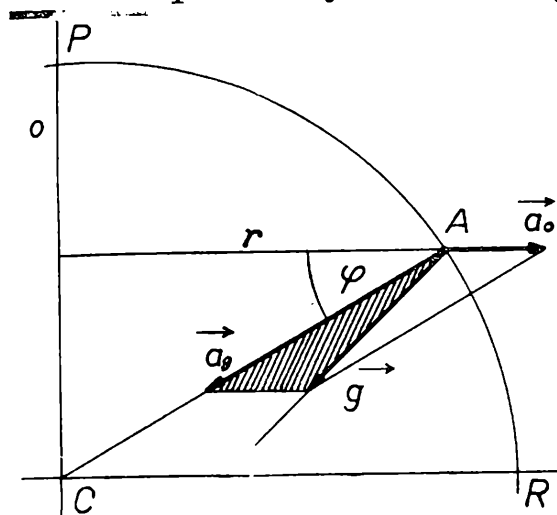
MILAN BEDNAŘÍK, PU, Olomouc

Na posledních olympijských hrách v Tokiu v roce 1964 překonal Američan Long vlastní světový rekord ve vrhu koulí výkonem 20,33 m. Položme si otázku, jaké vzdálenosti by musel závodník při vrhu stejně těžké koule dosáhnout v Praze, aby byl Longův světový rekord znova překonán. Každý sportovec vám pohotově odpoví, že by muselo být dosaženo vzdálenosti alespoň o 1 cm větší, to je nejméně 20,34 m. Velmi byste však tohoto sportovce udivili, kdybyste tvrdili, že k překonání světového rekordu v Praze stačí pouze vzdálenost 20,32 m, to je vzdálenost právě o 1 cm kratší než v Tokiu.

Je pochopitelné, že z hlediska lehkootletických předpisů by bylo vaše tvrzení naprosto nesprávné. Jinak však tomu může být z hlediska fyzikálního. Jistě tušíte, že při srovnávání sportovních výkonů na dvou různých místech zemského povrchu by měly být zajištěny naprosto stejné podmínky. Ty ovšem v našem případě zajištěny nejsou. Nemáme zde na mysli některé okamžité podmínky povětrnostní, jako např. směr a sílu větru, vodní srážky, ani případné změny fyzické nebo duševní kondice závodníka, ale pouze ty podmínky, které jsou určeny polohou daného místa. Přírodní podmínky pro závodníka v Praze jsou totiž o něco horší než pro závodníka v Tokiu. A příčina těchto různých podmínek je různé tíhové zrychlení. Vysvětleme si celý případ pomocí několika našich znalostí z fyziky.

Je známo, že všechna tělesa padají na určitém místě Země se stejným zrychlením. Toto zrychlení volně padajících těles nazýváme *tíhovým zrychlením* a označujeme je písmenem g . Tíhové zrychlení není však veličinou stálou. Bylo zjištěno, že jeho velikost se mění v závislosti na řadě činitelů, např. na zeměpisné šířce daného místa, na jeho nadmořské výšce, na složení vrchních i hlubších vrstev zemské kůry; bylo změřeno i nepatrné kolísání jeho hodnot působením gravitačních polí Měsíce a Slunce. Můžeme tedy říci, že tíhové zrychlení na povrchu naší Země je funkcí podmínek místních a časových. Vliv vyjmenovaných podmínek není však stejný. Podstatně větší vliv mají podmínky místní a z nich pak vliv rozhodující (zvláště pro náš případ) má zeměpisná šířka místa.

Na obr. 1 je znázorněna část povrchu Země. Na těleso umístěné v bodu A působí zejména dvě síly:



Obr. 1

a) gravitační síla Země, která udílí tělesu gravitační zrychlení a_g ,

b) odstředivá síla, která mu současně udílí odstředivé zrychlení a_0 .

Vektor gravitačního zrychlení a_g má směr do hmotného středu Země, vektor odstředivého zrychlení a_0 je kolmý na osu zemské rotace. Vektorovým součtem obou těchto vektorů je vektor zrychlení tíhového g . Vektorový součet zapisujeme $g = a_g + a_0$.

Určíme nyní velikost odstředivého zrychlení a_0 . Označme úhel, který svírá vektor odstředivého zrychlení s vektorem zrychlení dostředivého písmenem φ . Tento úhel je prakticky roven zeměpisné šířce daného místa. Kdybychom těleso posunovali od rovníku (bod R) k zeměpisnému pólu (bod P), měnil by se úhel φ od 0° do 90° . Dále označíme vzdálenost bodu A od osy rotace o písmenem r , což je poloměr kružnice, kterou bod A opisuje při otáčení Země. Pro velikost odstředivého zrychlení pak platí

$$a_0 = r \omega^2, \quad (1)$$

kde ω je úhlová rychlost zemské rotace. Dosadíme-li ještě $r = R \cos \varphi$, kde R je poloměr Země, dostaneme

$$a_0 = R \omega^2 \cos \varphi. \quad (2)$$

Pro místa na rovníku, kde $\varphi = 0^\circ$ ($\cos \varphi = 1$), dosahuje odstředivé zrychlení nejvyšší hodnoty a má směr proti zrychlení gravitačnímu. Pro zeměpisný pól, kde $\varphi = 90^\circ$ ($\cos \varphi = 0$), je odstředivé zrychlení rovno nule. Proto je velikost výsledného tíhového zrychlení pro místa

ležící na rovníku minimální a dá se vyjádřit vztahem $g = a_g - a_0$, pro zeměpisné póly je pak jeho velikost maximální a platí $g = a_g$, to znamená, že tíhové zrychlení je rovno přesně zrychlení gravitačnímu. Pro ostatní místa povrchu zemského, tj. pro zeměpisné šířky $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, leží hodnoty tíhového zrychlení mezi uvedenými hodnotami extrémními a jejich vektory nesměřují přesně do zemského středu, nýbrž jsou odchýleny pro severní polokouli směrem na jih. Tento odklon výsledného tíhového zrychlení kdysi způsobil, že Země nabyla přibližně tvaru rotačního elipsoidu. Povrch Země se totiž změnil tak, aby byl v každém místě kolmý k výslednému tíhovému zrychlení.

V následující tabulce uvádíme hodnoty tíhového zrychlení několika známých míst zemského povrchu:

Místo:	Zeměpisná šířka	Tíhové zrychlení (m s ⁻²)
Rovník	0°	9,780 49
Tokio	35°43'	9,798 01
Řím	41°54'	9,803 67
Praha	50°05'	9,810 40
Moskva	55°46'	9,815 64
Oslo	59°55'	9,819 27
Zeměpisný pól	90°	9,832 16

Pro úplnost ještě dodáváme, že výpočet tíhového zrychlení pro libovolné zeměpisné šířky již není tak jednoduchý. Teoreticky by se dal výpočet provést, např. z vyčárkovaného trojúhelníka na obr. 1, a to kosinovou větou, podle níž je

$$g^2 = a_g^2 + a_0^2 - 2a_g a_0 \cos \varphi.$$

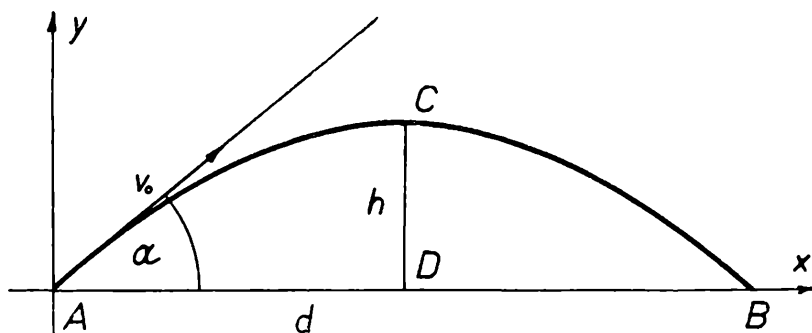
Při praktických měřeních v gravimetrii¹⁾ se však používá poněkud složitějšího vztahu

$$g = g_0 (1 + 0,005\,288 \sin^2 \varphi - 0,000\,005\,9 \sin^2 2\varphi),$$

kde g_0 je tíhové zrychlení na rovníku. V dalších úvahách se však uvedenými vzorci zabývat nebudeme.

¹⁾ Gravimetrie - nauka o tíhovém poli Země a o měření tíhového zrychlení

Vraťme se k našemu úvodnímu případu světového rekordu ve vrhu koulí. Vrh koulí je možný za určitých předpokladů, např. zanedbáme-li odpor prostředí nebo nepočítáme-li se vztlakem vzduchu, pokládat za známý případ šikmého vrhu těles. Na obr. 2 je zakreslena dráha šikmého vrhu v rovině xy . Víme, že vrh šikmý je pohyb složený z pohybu rovnoměrného přímočarého ve směru počáteční rychlosti v_0 a z volného pádu.



Obr. 2

Výslednou dráhou tohoto složeného pohybu je parabola, která prochází místem vrhu A , a jejíž vrchol C leží v nejvyšším bodě dráhy tělesa. Vzdálenost AB se nazývá **d á l k a v r h u d** (při střelbě **d o s t ř e l**) a úsečka CD **v ý š k a v r h u h** . Poloha vrženého tělesa v určitém časovém okamžiku t je dána souřadnicemi

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (3)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad (4)$$

kde β je **e l e v a č n í ú h e l** a g tíhové zrychlení. Uvedené souřadnice vyjadřují vlastně velikost dráhy, kterou těleso vykoná za dobu t jednak ve směru vodorovném (ve směru osy x), jednak ve směru svislém (ve směru osy y). Abychom určili **d á l k u v r h u d** , potřebujeme znát čas t_d , za který těleso dopadne na vodorovnou rovinu do bodu B . Pro tento bod ležící na ose x je souřadnice y rovna nule. Dosadíme-li tedy $y = 0$ do vztahu (4), dostáváme rovnici

$$v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0,$$

jejímž řešením je jednak $t_d = 0$, což pro nás nemá význam, neboť jde o okamžik, kdy se těleso nachází ještě v místě vrhu A , a jednak

$$t_d = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Dosazením této hodnoty do rovnice (3) pro souřadnici x obdržíme postupně

$$\begin{aligned} d &= v_0 \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \cos \alpha, \\ d &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \end{aligned} \quad (5)$$

☛ Z tohoto vztahu je patrné, že délka vrhu je při konstantní počáteční rychlosti v_0 a při stálém elevačním úhlu β nepřímo úměrná tíhovému zrychlení g .

Uvažujme nyní dvě místa s různými zeměpisnými šířkami φ a φ' , kterým odpovídají určité hodnoty tíhového zrychlení g a g' . Podle rovnice (5) budou příslušné délky vrhu

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{a} \quad d' = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g'}$$

Dělením obou rovnic obdržíme vztah

$$\frac{d'}{d} = \frac{g}{g'},$$

z něhož opět vidíme, jak jsme konečně mohli očekávat, že délky vrhu jsou v opačném poměru než příslušná tíhová zrychlení. Známe-li délku vrhu d v místě původním a známe-li tíhová zrychlení v obou místech, lze určit délku vrhu d' v místě novém

$$d' = \frac{g}{g'} d.$$

Pro numerické výpočty je však výhodnější poslední vztah ještě upravit takto

$$d' - d = \frac{g}{g'} d - d = \frac{g - g'}{g'} d.$$

Označíme-li rozdíl délek vrhu na obou místech $d' - d = \Delta d$ a rozdíl tíhových zrychlení $g - g' = \Delta g$, dostaneme vztah

$$\Delta d = \frac{\Delta g}{g'} d, \tag{6}$$

což slovy znamená, že změna délky vrhu je přímo úměrná relativní (poměrné) změně tíhového zrychlení

$$\frac{\Delta g}{g'}.$$

Použijme nyní vztahu (6) k řešení našeho případu. Z tabulky zjistíme, že tíhové zrychlení v Tokiu, kde bylo dosaženo ve vrhu koulí rekordu 20,33 m, je $g = 9,798\,01 \text{ ms}^{-2}$, a tíhové zrychlení v Praze $g' = 9,810\,40 \text{ ms}^{-2}$. Máme vypočítat, o jakou vzdálenost se změní délka vrhu v Praze při stejném výkonu sportovce a při jinak zcela stejných ostatních podmínkách.

Dosazením číselných hodnot do vzorce (6) vychází

$$\begin{aligned} \Delta d &= \frac{9,798\,01 - 9,810\,40}{9,810\,40} \cdot 20,33 \text{ m} = \\ &= -0,001\,26 \cdot 20,33 \text{ m} \doteq -0,026 \text{ m}. \end{aligned}$$

Záporné znaménko vyjadřuje, že dálka vrhu se zmenšila. K dosažení světového rekordu v Praze by stačilo dosáhnout vzdálenosti o 2,6 cm menší než v Tokiu, tj. stačilo by kouli vrhnout do dálky 20,33 m — 0,026 m = 20,304 m. Poněvadž se vzdálenosti v lehké atletice měří s maximální přesností pouze na cm, zaokrouhlíme výsledek na 20,30 m. Kdybyste tedy dosáhli v Praze ve vrhu koulí 20,32 m, pak byste Longův světový rekord již opravdu překonali. Je však nutno dodat, že ve skutečnosti by nebyl uvedený rozdíl v dálkách vrhu tak značný, poněvadž jsme celý výpočet zidealizovali předpokladem, že se vržené těleso pohybovalo ve vzduchoprázdnu.

Všechny předešlé úvahy, týkající se šikmého vrhu těles, lze nejen použít pro vrh koulí, ale též pro některé další lehkootletické disciplíny. Dráhu šikmého vrhu opisuje přibližně také hozený disk, oštěp, kladivo nebo dokonce i tělo sportovce při skoku do dálky nebo při trojskoku. Použijeme-li vzorce (6) pro některé další výkony z olympijských her v Tokiu²⁾, můžeme např. prohlásit,

že D a v i e s z Anglie, který dosáhl ve skoku do dálky vzdálenosti 807 cm, by skočil v Praze do vzdálenosti asi o 1 cm kratší;

že P o l á k S c h m i d t, který závodil v trojskoku s výkonem 16,85 m, by při stejném zápolení v Praze doskočil o 2 cm méně;

že K l i m ze Sovětského svazu s výkonem 69,74 m v hodů kladivem by hodil skoro o 9 cm méně;

že I t a l N e v a l a s výkonem 82,66 m při hodů oštěpem by v Praze dosáhl vzdálenosti o něco více než 10 cm kratší.

Ještě větší rozdíly v teoretické dálce vrhu bychom zjistili, kdybychom uvažovali dvě jiná vzhledem k zeměpisné šířce odlehlejší místa. Např. vzdálenost 55,03 m naměřená při hodů diskem na olympijských hrách v roce 1952 v Helsinkách, kde tíhové zrychlení činí $9,819\,27\text{ ms}^{-2}$, by se při stejném výkonu sportovce zvětšila v Tokiu o hodnotu

$$\Delta d = \frac{9,819\,27 - 9,798\,01}{9,798\,01} \cdot 55,03\text{ m} \doteq 0,002\,18 \cdot 55,03\text{ m} \doteq 12\text{ cm}.$$

Další příklady, které je možno snadno vytvořit s použitím tabulky tíhových zrychlení a rekordů poslední doby, přenecháváme již čtenáři.

Závěrem ještě jedna poznámka. Zatím jsme uvažovali, jak na tíhovém zrychlení závisela dálka vrhu. Dá se však snadno odvodit, že také výška vrhu je funkcí tíhového zrychlení podle vzorce

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (7)$$

V tom případě také výkony závodníků ve skoku do výšky nebo ve skoku o tyči musí být do jisté míry ovlivňovány tím, na které zeměpisné šířce svůj cvik provádějí. Je dosti pravděpodobné, že např. světový

²⁾ Uvedené výkony nejsou světovými rekordy.

rekord ve skoku o tyči 520 cm dosažený v roce 1964 Hansenem v USA by byl o něco nižší, kdyby byl realizován v Helsinkách, nebo o něco vyšší, kdyby Hansen závodil v dalším známém olympijském městě v Melbournu v Austrálii. Je možné ovšem namítnout, že u těchto výkonů, zvláště u skoku do výšky (bez tyče), jsou dosažené výšky poměrně malé, než aby se u nich mohly projevit případné změny způsobené tíhovým zrychlením. Na druhé straně však právě zde úspěch či neúspěch závodníka záleží na tom, zda se mu podaří minout často jen o vlasek horní hranu výškové laťky.

Vzhledem k tomu, že se v budoucnosti světové rekordy všech disciplín budou jistě dále zvyšovat, neobejdou se organizátoři budoucích olympijských her, závodů a sportovních soutěží bez stále přesnějších a objektivnějších metod měření a hodnocení dosahovaných výkonů. Snad by nebylo na škodu, kdyby se pak přestal zanedbávat vliv tíhového zrychlení na různých místech Země. Tento vliv je sice malý, ale přesto, jak jsme si mohli v tomto článku všimnout, zcela jasný a přesně prokazatelný.

Literatura:

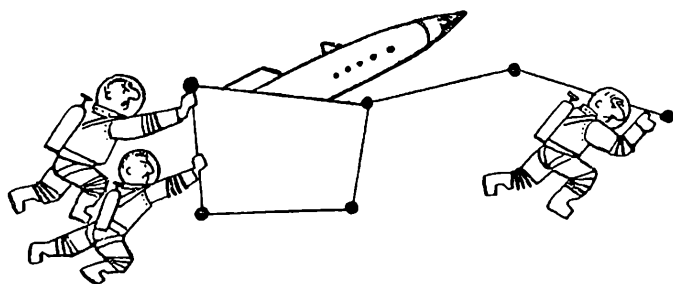
Pícha: Gravimetrie.

Horák-Kupka-Šindelář: Technická fyzika.

Časopis Lehká atletika, roč. 1964.



Oprava. V článku J. Tesaře pro FO v druhém čísle Rozhledů na str. 85 (3. řádka zdola) místo $\varphi_0 \omega t$ budiž $\varphi_0 + \omega t$; na str. 91 (3. řádka shora) místo $a t$ budiž $a t$; (5. řádka zdola) místo φ^2 budiž φ_0 .



Odvození 1. a 3. Keplerova zákona z gravitačního zákona

LUBOMÍR VAŠEK, Praha

Pokud je mi známo, v žádné elementární učebnici fyziky se neuvádí odvození 1. Keplerova zákona z Newtonova gravitačního zákona, ani zdůvodnění 3. Keplerova zákona pro případ, že planeta se pohybuje po eliptické dráze. To má svůj důvod v tom, že obvyklý způsob při tomto odvozování je pro žáky střední školy příliš obtížný.

V článku proto ukazuji jednoduchý způsob odvození obou zákonů, srozumitelný i pro žáky SVVŠ.

I. Je všeobecně známá definice elipsy jako geometrického místa bodů, které mají od dvou daných bodů (ohnisek) stálý součet vzdáleností, rovný délce hlavní osy. Nejprve si ukážeme, jaký vztah platí mezi délkou průvodiče a úhlem, který oba průvodiče svírají, za předpokladu, že a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa elipsy a

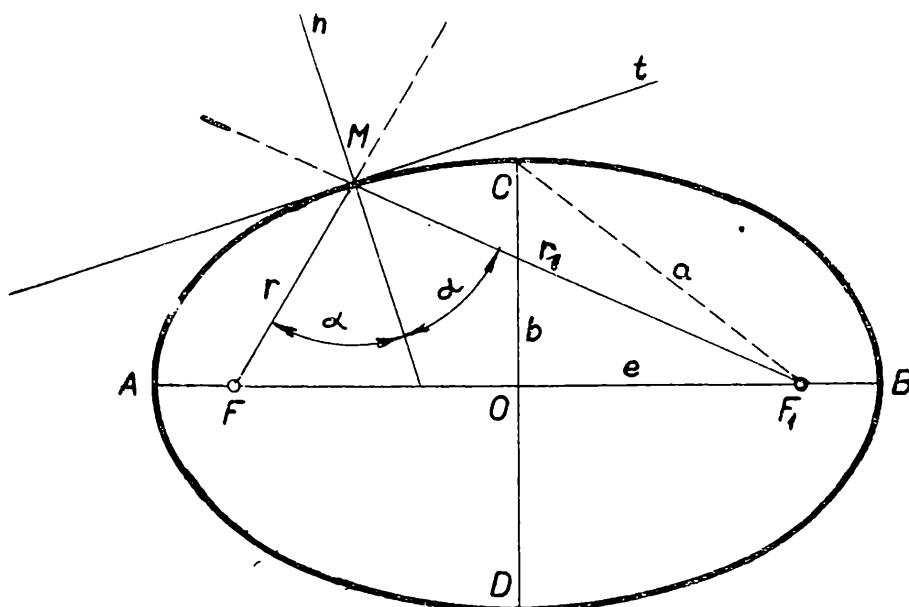
$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (1)$$

je číselná výstřednost elipsy.

Zvolme na elipse libovolný bod M a spojme jej s ohnisky F , F_1 . Dostaneme tak průvodiče r , r_1 (obr. 1). Vnitřní úhel průvodičů označme 2α . V bodě M sestrojme normálu n , o níž je známo, že pólí vnitřní úhel průvodičů.

Uvažujme nyní trojúhelník $F F_1 M$. Podle kosinové věty platí

$$\begin{aligned} (2e)^2 &= r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos 2\alpha, \\ 4e^2 &= r^2 + r_1^2 + 2rr_1 - 2rr_1 - 2rr_1 \cos 2\alpha, \\ 4e^2 &= (r + r_1)^2 - 2rr_1 (1 + \cos 2\alpha). \end{aligned}$$



Obr. 1

Poněvadž

$$1 + \cos 2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2 \cos^2\alpha$$

a

$$r + r_1 = 2a,$$

dostaneme s přihlédnutím ke vztahu (1)

$$b^2 = r r_1 \cos^2\alpha$$

a dosadíme-li za

$$r_1 = 2a - r,$$

obdržíme rovnici

$$b^2 = (2a - r) r \cos^2\alpha,$$

kterou píšeme ve tvaru

$$r^2 - 2ar = - \frac{b^2}{\cos^2\alpha} \quad (2)$$

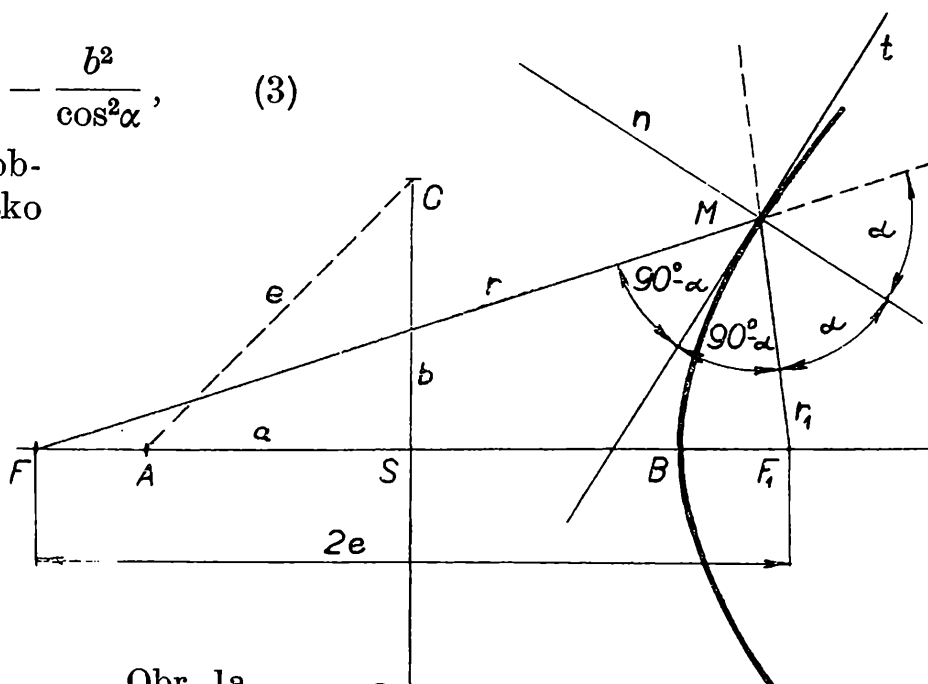
Tento vztah mezi r , α , a , b je charakteristický pro elipsu.

P o z n á m k a. 1. Analogicky se dá odvodit pro hyperbolu vztah

$$r^2 - 2ar = - \frac{b^2}{\cos^2\alpha}, \quad (3)$$

kde r , α , a , b mají obdobný význam jako u elipsy.¹⁾

¹⁾ Normála hyperboly v libovolném bodě půlí vnější úhel průvodičů, tečna půlí vnitřní úhel průvodičů. Sestrojíme v bodě M tečnu a normálu.



Obr. 1a.

2. Dělíme-li rovnici (2) číslem a (a je vždy různé od nuly), dostaneme

$$\frac{r^2}{a} - 2r = -\frac{b^2}{a} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Označíme-li

$$\frac{b^2}{a} = p,$$

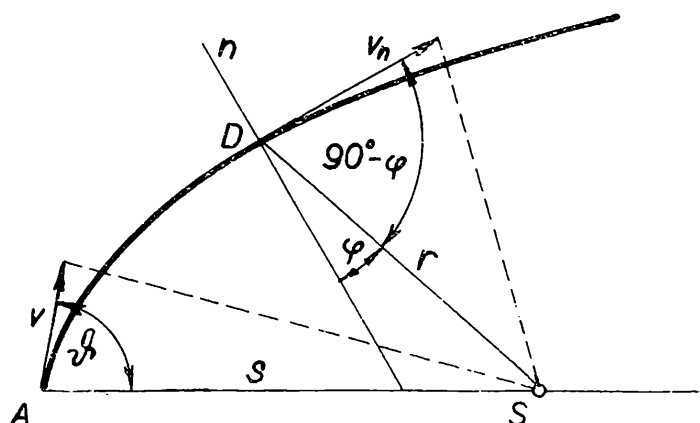
obdržíme

$$\frac{r^2}{a} - 2r = -\frac{p}{\cos^2 \alpha}$$

Je-li $a \rightarrow \infty$, dostaneme charakteristický vztah pro parabolu ve tvaru

$$2r = \frac{p}{\cos^2 \alpha} \quad (4)$$

II. Předpokládejme nyní, že Slunce redukované na hmotný bod, se nachází v bodě S , planeta rovněž redukovaná na hmotný bod, je v bodě A a pohybuje se rychlostí v , jejíž vektor svírá se spojnicí AS úhel ϑ



Obr. 2

Z trojúhelníka $F F_1 M$ (obr. 1a) plyne

$$\begin{aligned} (2e)^2 &= r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos 2(90^\circ - \alpha), \\ &= r^2 + r_1^2 + 2rr_1 \cos 2\alpha, \\ 4e^2 &= (r - r_1)^2 + 2rr_1(1 + \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

Poněvadž

$$e^2 = a^2 + b^2$$

a

$$r - r_1 = 2a,$$

je

$$4a^2 + 4b^2 = 4a^2 + 4r(r - 2a) \cos^2 \alpha,$$

a odtud

$$r^2 - 2ar = \frac{b^2}{\cos^2 \alpha}.$$

(obr. 2). Předpokládejme dále, že planeta se přibližuje k Slunci a v bodě D má rychlost v_n . Normála v bodě D svírá s polohovým vektorem vzhledem ke Slunci úhel φ .

Mysleme si nyní kolem Slunce (S) jako středu opsány kulové plochy o poloměrech $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots, \varrho_n$, pro které platí

$$\varrho_k = \varrho_{k-1} + h,$$

kde $k = 1, 2, \dots, n$.

Všechny tyto kulové plochy představují tzv. *e k v i p o t e n c i á l n í* p l o c h y, neboli hladiny vzhledem k přitažlivé síle sluneční. To znamená, že pohybuje-li se planeta po některé z těchto ploch, její rychlost má stále stejnou velikost. Přibližuje-li se však planeta k Slunci (jak předpokládáme), protíná jednotlivé kulové plochy. Přitom roste její rychlost v každé vrstvě podle téhož zákona, podle něhož se zvětšuje rychlost vrženého tělesa, které v sestupné větvi své dráhy protíná vodorovné vrstvy. Jestliže těleso (hmotný bod) vstoupí do vrstvy rychlostí v a vystoupí-li z ní rychlostí v_1 , platí za předpokladu, že vrstva má tloušťku h ,

$$v_1^2 - v^2 = 2gh,$$

kde g je gravitační zrychlení.

Protne-li planeta vrstvu mezi dvěma sousedními hladinami, změní se čtverec její rychlosti o $2g_1h$, kde h je tloušťka vrstvy a g_1 příslušné dostředivé zrychlení v uvažované vrstvě.

Protne-li tedy planeta na dráze AD celkem k kulových ploch a je-li tloušťka každé vrstvy h , bude změna čtverce rychlosti

$$\begin{aligned} v_n^2 - v^2 &= 2hg_1 + 2hg_2 + 2hg_3 + \dots + 2hg_k = \\ &= 2h \cdot (g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_k). \end{aligned} \quad (5)$$

Podle Newtonova gravitačního zákona je známo, že zrychlení se zmenšuje se čtvercem vzdálenosti. Označíme-li tedy zrychlení planety způsobované Sluncem v jednotkové vzdálenosti γ , bude ve vzdálenosti s zrychlení

$$\frac{\gamma}{s^2},$$

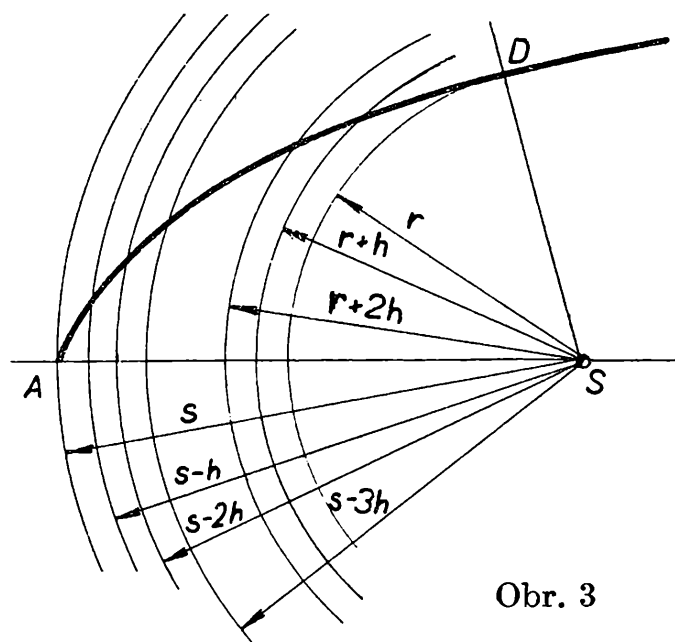
ve vzdálenosti $s - h$ bude zrychlení

$$\frac{\gamma}{(s - h)^2}$$

atd.

Zrychlení uvnitř jednotlivých vrstev určíme jako geometrický průměr zrychlení na hraničních plochách vrstvy (obr. 3).

Tedy zrychlení v první vrstvě



Obr. 3

$$g_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{s^2} \cdot \frac{\gamma}{(s-h)^2}} = \frac{\gamma}{s \cdot (s-h)}.$$

Podobně určíme zrychlení v 2. vrstvě

$$g_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{(s-h)^2} \cdot \frac{\gamma}{(s-2h)^2}} = \frac{\gamma}{(s-h)(s-2h)},$$

ve 3. vrstvě

$$g_3 = \frac{\gamma}{(s-2h)(s-3h)} \text{ atd.}$$

V předposlední vrstvě před bodem D bude zrychlení

$$g_{n-1} = \frac{\gamma}{(r+2h)(r+h)}$$

a v poslední vrstvě

$$g_n = \frac{\gamma}{(r+h) \cdot r}.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do rovnice (5), dostaneme

$$v_n^2 - v^2 = 2h\gamma \cdot \left[\frac{1}{s(s-h)} + \frac{1}{(s-h)(s-2h)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{(r+2h)(r+h)} + \frac{1}{(r+h) \cdot r} \right]. \quad (6)$$

Dá se dokázat, že výraz v hranaté závorce je rovný

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right)^2.$$

Rovnice (6) nabude pak tvaru

$$v_n^2 - v^2 = 2\gamma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right).$$

Zavedeme-li místo zrychlení γ v jednotkové vzdálenosti od Slunce zrychlení γ_s ve vzdálenosti s od Slunce, pro které platí

$$\gamma_s = \frac{\gamma}{s^2}, \quad (7)$$

dostaneme konečný tvar rovnice (6)

$$v_n^2 - v^2 = 2\gamma_s \cdot s^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) \quad (8)$$

2) Uvažujme řadu

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s-h} + \frac{1}{s-2h} + \frac{1}{s-3h} + \dots + \frac{1}{r+2h} + \frac{1}{r+h} + \frac{1}{r}$$

Napišme nyní tutéž řadu pod uvažovanou řadu o jedno místo vlevo a obě řady odečteme tak, že odečteme vždy dva pod sebou napsané členy. Obdržíme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} + \frac{1}{s-h} + \frac{1}{s-2h} + \frac{1}{s-3h} + \dots + \frac{1}{r+2h} + \frac{1}{r+h} + \frac{1}{r} \\ & \frac{1}{s} + \frac{1}{s-h} + \frac{1}{s-2h} + \frac{1}{s-3h} + \dots + \frac{1}{r+h} + \frac{1}{r} \\ & - \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-h} \right) + \left(\frac{1}{s-h} - \frac{1}{s-2h} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r+2h} - \frac{1}{r+h} \right) + \\ & \quad + \left(\frac{1}{r+h} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = 0. \end{aligned}$$

Sloučením výrazů v závorkách dostaneme

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{s} - \frac{h}{s(s-h)} - \frac{h}{(s-h)(s-2h)} - \dots - \frac{h}{(r+2h)(r+h)} - \\ & \quad + \frac{h}{(r+h)r} + \frac{1}{r} = 0 \end{aligned}$$

a další úpravou bude

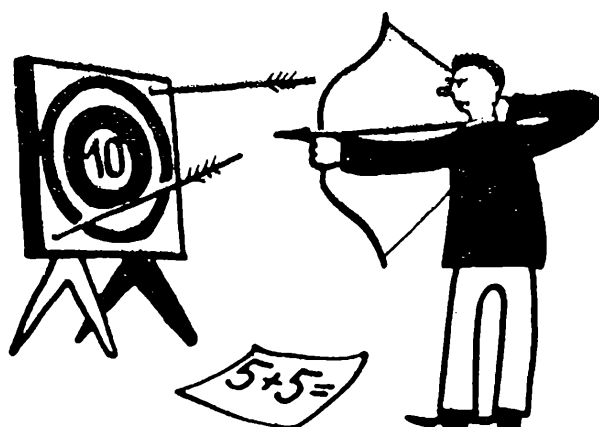
$$\begin{aligned} & h \cdot \left[\frac{1}{s(s-h)} + \frac{1}{(s-h)(s-2h)} + \dots + \frac{1}{(r+2h)(r+h)} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(r+h)r} \right] = \frac{1}{r} - \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s(s-h)} + \frac{1}{(s-h)(s-2h)} + \dots + \frac{1}{(r+2h)(r+h)} + \\ & \quad + \frac{1}{(r+h)r} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right). \end{aligned}$$

(Dokončení)

Úlohy



k řešení

Konstruktivní geometrie:

1. Jsou dány různoběžné roviny ϱ a τ a přímka p , která obě protíná. Sestrojte kulovou plochu daného poloměru r tak, aby a) vytínala na přímce p tětivu dané délky $d < 2r$, b) rovinou ϱ byla prořazena v kružnici poloměru $r' \leq r$, c) dotýkala se roviny τ .

Stanislav Horák

2. Do dané kružnice o středu O vepište rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby jeho ramena procházela danými body M, N uvnitř kružnice, leželi-li body M, N, O v přímce.

Ota Setzer

3. Sestrojte kouli, znáte-li její tři tečny a, b, c , ležící v téže rovině ϱ a tečnu d , která protíná rovinu ϱ .

Ota Setzer

4. Sestrojte rotační komolý kužel, je-li dána tečna t_1 s bodem dotyku T_1 jedné a tečna t_2 s bodem dotyku T_2 druhé podstavné hrany.

Ota Setzer

Řešení loňských úloh

● Matematika

6. Nutná a postačující podmienka pre to, aby korene kvadratickej rovnice

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

boli funkcie $\sin$ a $\cos$ toho istého uhla α je

$$p^2 = 1 + 2q. \quad (2)$$

Dokážte!

(Došlo 56 řešení)

Stanislav Horák

P o z n á m k a. V textu príkladu se mlčky predpokládalo, že koeficienty p, q i kořeny dané rovnice jsou čísla reálná. Četní řešitelé na to také upozornili. Následující vzorné řešení uvádí podmínky pro reálnost koeficientů p, q .

Riešili Peter Mederly, II.d SVŠ, Prievidza a Tamara Marcisová, III.D SVŠ, Bratislava:

Rovnica (1) musí mať korene reálne, a preto

$$D \geq 0 \Rightarrow p^2 - 4q \geq 0.$$

Podľa (2)

$$1 + 2q - 4q \geq 0 \Rightarrow q \leq \frac{1}{2}.$$

Číslo p^2 musí byť nezáporné, tj.

$$p^2 \geq 0, q \geq -\frac{1}{2}.$$

Pre číslo q máme toto ohraničenie

$$-\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Platnosť vzťahu (3) budeme v ďalšom predpokladať.

a) Korene rovnice (1) sú $\sin \alpha, \cos \alpha$. O nich platí

$$\sin \alpha + \cos \alpha = -p,$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = q.$$

Odtiaľ

$$p^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2q.$$

Platnosť rovnice (2) je teda nutnou podmienkou.

b) Za predpokladu, že platí rovnica (3), je rovnica (2) i podmienkou postačujúcou.

Dôkaz: Nechť platí (2) a (3) a potom (x_1, x_2) sú korene danej rovnice)

$$p^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2,$$

$$1 + 2q = 1 + 2x_1x_2.$$

S ohľadom na rovnicu (2) máme

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Korene x_1, x_2 môžeme teda považovať za $\sin$ a $\cos$ toho istého uhla.

7. Najdite päť najmenších prvočísel $p > 2$, pre ktoré je neurčitá rovnica

$$x^3 - y^3 = p$$

riešiteľná prirodzenými číslami.

(Došlo 51 řešení)

Stanislav Horák

Riešil Ján Tokár, II. SVŠ, Michalovce:

Túto rovnicu môžeme napísať vo tvaru

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = p.$$

Jeden z činiteľov na ľavej strane rovnice sa musí rovnať 1, lebo prvočíslo má deliteľa seba sameho a jednotku. Preto

a)

$$x - y = p,$$

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

Tento prípad je nemožný, lebo

$$x^2 + xy + y^2 > 1$$

pre prirodzené čísla x, y .

b) $x - y = 1,$

$$x^2 + xy + y^2 = p.$$

Z obidvoch rovníc vylúčime x a dostaneme

$$3y^2 + 3y + 1 - p = 0$$

a odtiaľ

$$y = \frac{-3 + \sqrt{12p - 3}}{6}.$$

Diskriminant musí byť deliteľný číslom 3 a musí sa dať odmocniť. Preto

$$12p - 3 = 9a^2,$$

$$p = \frac{3a^2 + 1}{4}.$$

Číslo a musí byť nepárne (liché). Sostavíme tabuľku

a	1	3	5	7	9	11	13
p	1	7	19	37	61	91	127
x	—	2	3	4	5	—	7
y	—	1	2	3	4	—	6

Päť najmenších prvočísel, ktoré vyhovujú danej rovnici, sú

$$7, 19, 37, 61, 127$$

8. Je dán čtverec $ABCD$ a bod X , který je vnitřním bodem trojúhelníka ABC a od stran AB, BC, AC má poměr vzdáleností $m : n : p$. Zjistěte vzdálenost bodu X od vrcholu D .

Stanislav Horák

(Došlo 43 řešení)

Řešil Josef Mlček, III.b SVVŠ, Příbor:

Vzdálenosti bodu X od stran AB, BC, AC trojúhelníka ABC označíme po řadě mx, nx, px . Pro obsah trojúhelníka ABC platí

$$ABC = ABX + BCX + ACX \quad (1)$$

Ale

$$ABC = \frac{1}{2} a^2, ABX = \frac{1}{2} max, BCX = \frac{1}{2} nax, ACX = \frac{1}{2} pax \sqrt{2}.$$

Po dosazení do (1) a po menší úpravě dostaneme rovnici

$$a = x(m + n + p\sqrt{2}).$$

Odtud se dá vypočítat x

$$x = \frac{a}{m + n + p\sqrt{2}}.$$

Úsečka DX je přepona v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsny mají délky $a - mx$, $a - nx$. Platí tedy

$$\overline{DX}^2 = d^2 = (a - mx)^2 + (a - nx)^2.$$

Po dosazení za x a po úpravě dojdeme k výsledku

$$d = a \sqrt{1 + \frac{2(p^2 - mn)}{(m + n + p\sqrt{2})^2}}.$$

● Deskriptivní geometrie:

2. Jsou dány tři přímky a , b , c , z nichž každé dvě jsou spolu mimoběžné. Sestrojte kvádr $ABCD A'B'C'D'$ tak, aby vrchol A ležel na přímce a , vrchol B na přímce b , hrana $A'B'$ na c a aby podstava $ABCD$ byla čtverec.

Stanislav Horák

(Došlo 18 řešení)

Řešil Radovan Straka, III.b SVVŠ, Krnov:

Hrana AB je rovnoběžná s $A'B'$. Proto k mimoběžkám a , b vedme příčku p rovnoběžnou s přímkou c . Ta protne mimoběžky a , b po řadě v bodech A , B , což jsou dva vrcholy hledaného kváдру. Body A , B promítneme kolmo do přímky c . Dostaneme tak další dva vrcholy A' , B' kváдру. Ve vrcholech A , B , A' , B' vztyčíme kolmice k rovině ABA' . Na ně nanese délku AB a získáme tak zbývající čtyři vrcholy kváдру.

Úloha nemá řešení, jestliže mimoběžky a , b , c jsou rovnoběžné s touž rovinou, neboť v tomto případě neexistuje příčka mimoběžek a , b . Jestliže tomu tak není, úloha má dvě různá řešení.

3. Jsou dány tři přímky a , b , c , navzájem rovnoběžné, ale neležící v téže rovině, a rovina τ s danými přímkami různoběžná. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká daných přímek i dané roviny.

Stanislav Horák

(Došlo 17 řešení)

Řešil Radovan Straka, III.b SVVŠ, Krnov:

Přímky a , b , c jsou povrchovými přímkami rotační válcové plochy, která je opsána hledané kulové ploše. Osa této válcové plochy je geometrickým místem středů všech kulových ploch, které se dotýkají přímek a , b , c . Poloměr r této válcové plochy je roven poloměru hledané kulové plochy. Geometrické místo středů všech kulových ploch, které mají daný poloměr r a dotýkají se přitom roviny τ , jsou dvě roviny σ , σ' rovno-

běžné s rovinou τ ve vzdálenosti r . Obě geometrická místa se protínají ve dvou bodech, jež jsou středy žádaných kulových ploch.

Úloha má při daných prvcích vždy dvě různá řešení.

Výsledky loňské soutěže Rozhledů

Uveřejňujeme abecední seznam našich čtenářů, kteří se úspěšně zúčastnili soutěže Rozhledů v řešení úloh z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky, uveřejněných v 43. ročníku tohoto časopisu. Autoři jednotlivých úloh včas zaslaná řešení prohlédli, ocenili a navrhli redakci vhodná řešení — někdy po menší úpravě — k otištění. Otištěná řešení byla zčásti již uveřejněna, zbývající řešení najdete v příštích číslech.

Za jménem každého řešitele jsou uvedena čísla správně vyřešených příkladů z příslušného oboru, v závorce pak čísla úloh, řešených s menšími nedostatky. Nesprávná řešení neuvádíme vůbec.

Jiří Anděl, SVVŠ, Znojmo — M 2, 6-8, 12, (1, 3, 5, 10), G 3, (1, 2, 4), F 5, 6, (1-3); *Jindřich Bečvář*, SVVŠ, Praha 2 — M 1-3, 6-8, 10, 11, (4, 5, 9, 12); *Zdeněk Boháč*, SVVŠ, Prostějov (2. tř.) — M 7, (1, 2, 9, 10); *Jiří Ciprys*, SVVŠ, Břeclav — F 4-6, (1-3); *Václav Červ*, SVVŠ, Votice — M 2, 3, 7, 10, 12, (1); *Tomáš Duby*, SPŠ, Bratislava (2. tř.) — M 1, 3, 6-10, (2, 12), G (1, 2), F 3, 5, 6, (1); *Miloš Fink*, SVVŠ, Praha 6 — M 1-3, 10, (7, 9, 12), G (4), F 4, 5, (1,3); *Miroslav Frencl*, SVVŠ, Kladno — M 1, (7), G 4, (3), F 2, (4); *František Hajnovič*, SVŠ, Bratislava (1. tř.) — M 1, 7, 8; *Jiří Halla*, SVVŠ, Rožnov p. R. — M 3, 6, 7, (1), G 4, (1, 3); *Jiří Handlíř*, SPŠ, Brno — M 2, 3, 6-8, 10, 11, (1, 5, 9, 12), G 3, (1, 2, 4), F 2-6, (1); *Karel Henc*, SVVŠ Brno — M 1, 2, 6-8, 10, (4, 12), F 3-6, (1, 2); *Jiří Hlaváček*, SVVŠ, Praha 6 — M 1, 3, 6-8, (2, 4, 9, 12); *Jaroslav Hořinka*, SVVŠ, Praha 8 (2. tř.) — M (6), F 3-6, (2); *Josef Hrdlička*, VUT, Brno — M 3, 7, (1, 2, 4, 10); *Ivan Chajda*, SVVŠ, Přerov — M 1, 8, (3, 7, 9, 12), G 3, (2, 4), F 3, 5, (6); *Jura Charvát*, SVVŠ, Příbor — M 1-3, 6-11, (4, 5, 12), G 4, (2, 3), F 1-6; *Jiří Jekerle*, SVVŠ, Č. Těšín — M 6, (1-3, 5, 7, 9, 10); *Rudolf Jisl*, SPŠ, Praha 1 — M 1, 6, 8, (2-4, 7, 10, 11), G 2, (3), F 3-5, (1, 2, 6); *Bohuslav Kohoutek*, SVVŠ Ledec n. S. — M 3, (1, 2, 7); *Miroslav Kolář*, SPŠ, Pardubice (2. tř.) — F 2-6, (1); *Pavel Kovařík*, SPŠ, Praha 5 — M 1-3, 6, 10 (7, 11); *Vladimír Klos*, SVVŠ, Jičín — M 1, 3, 7, 8, (5, 9-11), G (1-4), F 3-6, (2); *Petr Kůrka*, SPŠ, Praha 1 (1. tř.) — M 2, 3, 6, 7, (1, 9, 10), F (2, 5); *Jiří*

Leicman, SPŠ, Brno (1. tř.) — M 1; *Pavel Leischner*, SVVŠ, Znojmo (2. tř.) — F 4-6, (1, 2); *Petr Ludvík*, SVVŠ, Praha 2 — M 1, 2, 6; *Zdeněk Manoušek*, SPŠ, Brno (2. tř.) — M 8, (1, 6, 7); *Tamara Marcisová*, SVŠ, Bratislava — M 1, 2, 5-8, 10-12, (3, 4, 9); *Jiří Mlček*, SVVŠ, Příbor — M 2-4, 6-9, (1, 5, 10-12), G 3, (1, 2, 4), F 2-6, (1); *Zuzana Mrázová*, SVŠ, Ružomberok — M 1; *Helena Munzarová*, SVVŠ, Karlovy Vary — M 7, (1, 6, 10, 12), G 2-4, F 3-6; *Peter Mederly*, SVŠ, Prievdza (2. tř.) — M 2, 3, 6-8, (1, 4, 9-12), F 3, 5, 6, (2, 4); *Jaroslav Macháně*, SVVŠ, Hradec Králové — M 7, 8, (1, 10); *Peter Patek*, SVŠ, Šala (2. tř.) — F (5); *Milan Pavel*, SVVŠ, Rychnov n. K. — M 1, 6, G 2, 3; *Jaroslav Pazdiora*, SVVŠ, Karviná — M 1, 3, 6-8, (2, 10), G 1-4; *Jiří Pechouš*, SVVŠ, Písek — M 1, 2, 6, (7, 10), G 2, 4, F 3-5, (1, 6); *Petr Podlešák*, SPŠ, Písek (2. tř.) — M 1, 3, 8, (7, 9); *Pavel Polcar*, ZDŠ, Velké Meziříčí (9. třída!) M 2, 7, (1, 12); *Jaroslav Prokůpek*, SVVŠ, Telč (2. tř.) — M 1, 7, (9), G 2, 4, (3), F 3, 6, (5); *Pavel Pták*, SVVŠ, Písek — M 2, 7-10, (1, 3, 11, 12); *Jan Rauch*, SVVŠ, Hradec Králové (2. tř.) — M 1-3, 6-8, 10, 12, (9); *Milan Richter*, SVVŠ, Louny — F 5, (3, 4, 6); *Milo Roth*, SVŠ, Ružomberok — M 1; *Miroslav Řezníček*, SVVŠ, Hradec Králové — M 1-3, 6-8, 11, 12, (5, 9, 10), G 2, 3, (1, 4), F 2-6, (1); *Marie Samková*, SVVŠ, Blovice (2. tř.) — M 7, (9), F 3, (2, 4); *Bohuš Sivák*, ZDŠ, Zvolen (8. třída!) — M 1, 2, 5-7, 10, 12, (8, 9), G 4; *Zdeněk Slanina*, SPŠ, Brno (2. tř.) — M 1-3, 6-8, 10, (5, 9, 11, 12), G 2, 4, (1, 3), F 3-6, (1, 2); *Stanislav Slouka*, SPŠ, Brno (2. tř.) — M 2, 3, 8-11, (1, 5, 7, 12), G (2-4), F 2-6, (1); *Radovan Straka*, SVVŠ, Krnov — M 1-3, 7, 8, (6, 10), G 2, 3, (4); *Richard Špišek*, SVVŠ, Brno — M 1, 3, 8, 10, 11, (2, 4, 7, 9), F 1-5, (6); *Jan Štěpánek*, SVVŠ, Pardubice — M 1-3, 7, 9, (5, 6, 10, 11), G (2-4), F 2-6, (1); *Jana Štěpánková*, SVVŠ, Brno (2. tř.) — F 2-6, (1); *František Tesař*, SVVŠ, Pardubice (2. tř.) — F 2-6, (1); *Ján Tokár*, SVŠ, Michalovce (2. tř.) — M 1, 7, (2, 6); *Gai Tonkara*, Mali, SPŠ, Č. Třebová — F 3-5; *Karel Trnovský*, SVŠ, Ružomberok — M 7, (1, 3, 8-11), G 2, (3, 4); *Michal Tvrdoň*, SVŠ, Bratislava (1. tř.) — M 1, 3, 7; *Jiří Tůma*, SVVŠ, Příbor — M 2, (1, 12), G 2-4, (1), F 1-6; *Ladislav Vikisály*, SVŠ, Ružomberok — M 1; *Jaroslav Vlček*, SVVŠ, Havlíčkův Brod — M 1-3, (7, 12); *Miroslav Vodsoň*, SVVŠ, Praha 2 (2. tř.) — M 3, (1, 9), F 4; *Luděk Zajíček*, SVVŠ, Ostrava — M 1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 12, (3, 8, 11); *František Zatloukal*, SVVŠ, Přerov — M 1, 7, 8, (9), G 4, F 2, 5, 6, (1, 3); *František Žalda*, SVVŠ, Praha 2 — M (7). Mimo soutěž zaslal všechny úlohy z M, G, F *Jaroslav Příhoda*, SVVŠ, Čakovice.

V Í T Ě Z O V É

Přihlížejíc k počtu zaslaných řešení a k jejich jakosti, určila redakce v jednotlivých oborech toto pořadí vítězů:

<i>Matematika:</i>	I. Jura Charvát, 3. b SVVŠ, Příbor Tamara Marcisová, 3. d SVŠ, Bratislava	} 66 bodů
	II. Jindřich Bečvář, 3. g SVVŠ, Praha 2	63 bodů
	III. Jiří Mlček, 3. b SVVŠ, Příbor	62 bodů
<i>Deskr. geometrie:</i>	I. Jaroslav Pardiora, 3. c SVVŠ, Karviná	24 bodů
	II. Jiří Tůma, 3. b SVVŠ, Příbor	22 bodů
	III. Miroslav Řezníček, 3. d SVVŠ, Hradec Králové	20 bodů
<i>Fyzika:</i>	I. Jura Charvát, 3. b SVVŠ, Příbor Jiří Tůma, 3. b SVVŠ, Příbor	} 36 bodů
	II. Miroslav Kolář, 2. d SPŠE, Pardubice Miroslav Řezníček, 3. d SVVŠ, Hr. Král. Stanislav Slouka, 2. a SPŠE, Brno Richard Špíšek, SVVŠ, Brno	} 34 bodů
<i>Absolutními vítězi se stali:</i>		
1.	Jura Charvát, 3. b SVVŠ, Příbor	117 bodů
2.	Miroslav Řezníček, 3. d SVVŠ, Hradec Králové	115 bodů
3.	Jiří Mlček 3. b SVVŠ, Příbor	113 bodů
4.-5.	Jiří Handlír, 3. a SPŠE, Brno	} 110 bodů
4.-5.	Zdeněk Slanina, 2. a SPŠCh, Brno	
6.	Stanislav Slouka, 2. a SPŠE, Brno	98 bodů
7.	Jan Štěpánek, 3. a SVVŠ, Pardubice	95 bodů
8.	Vladimír Klos, 3. b SVVŠ, Jičín	88 bodů
9.	Jiří Anděl, 3. a SVVŠ, Znojmo	86 bodů
10.	Rudolf Jisl, 4. a SPŠE, Praha 1	85 bodů

R E D A K C E B L A H O P Ř E J E
V Í T Ě Z Ů M !

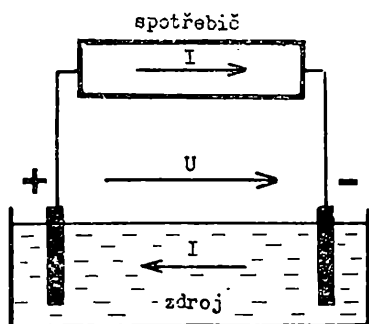


0 elektrickém proudu, který nepracuje

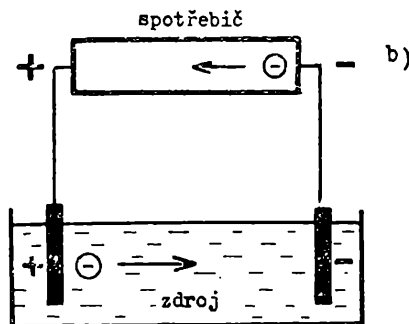
PROF. DR. EMIL KAŠPAR, KU, Praha

Přiznám se, že mně jako žáku na střední škole dalo dost námahy, než jsem přišel na podstatu záhady, jak je možné, že u tzv. j a l o v ý c h p r o u d ů může velikost napětí a proudu dosahovat velikých hodnot, a přesto je jejich výkon velmi malý, teoreticky dokonce nulový. Proto nebude na škodu, jestliže se trochu podíváme na poměry v zařízeních, která tyto jalové proudy umožňují.

Zdroj a spotřebič. Ze školské fyziky víme, že elektrický proud vzniká, je-li obvod uzavřen a je-li ovšem do obvodu zapojen zdroj. Je-li obvod jednoduchý, je proud stejně veliký v každém jeho místě, a to jak ve vnější části obvodu, tak uvnitř zdroje (obr. 1a). Pro jednoduchost se zatím omezíme na stejnosměrný proud a budeme předpokládat, že je zprostředkován jen elektrony, které se ve vodiči uspořádaně pohybují. Víme, že takové poměry jsou v kovových vodičích. Ve vnější části vedení (ve spotřebiči, obr. 1b) se záporně elektrické elektrony pohybují od



Obr. 1a

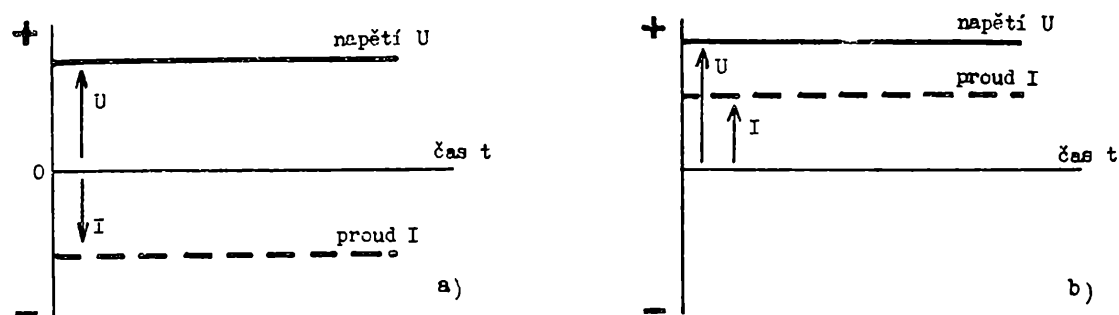


Obr. 1b

záporného pólu ke kladnému. To je v soulase s Coulombovým zákonem, podle něhož jsou záporné náboje od záporného pólu odpuzovány a kladným polem jsou přitahovány.

Ale uvnitř článku se elektrony a záporné ionty pohybují od kladné elektrody k záporné, tedy proti směru elektrických sil, které na elektrony v roztoku působí. Kladné ionty se v roztoku článku pohybují opačně, tj. také proti směru elektrických sil. Otázku, které síly pohybují náboji uvnitř zdroje, nebudeme v tomto článku podrobně probírat. Jen si připomeneme, že v galvanickém článku mají původ v chemické energii, v elektromagnetických generátorech mají původ v mechanické energii, dodávané zvnějška turbínou. Turbína otáčí rotorem generátoru a vzájemným působením magnetického pole a elektronů, které se relativně pohybují vzhledem k magnetickému poli, jsou elektrony uváděny do pohybu proti směru elektrické síly, která vzniká ve vinutí působením, nahromaděných elektrických nábojů na pólech. Pro svou potřebu si budeme z této úvahy pamatovat:

Ve zdroji elektrického proudu má napětí U v elektrickém poli opačný směr než je směr proudu I (grafické znázornění v obr. 2a). Ve spotřebiči je směr napětí U a směr proudu I stejný (obr. 2b). Jak-



Obr. 2. Závislost napětí U a proudu I na čase t u stejnosměrných proudů. a) Ve zdroji má proud I trvale opačný směr, než jaký by odpovídal svorkovému napětí U .

b) Ve spotřebiči má proud I směr, který je v soulase s napětím U na svorkách spotřebiče.

mile tedy zjistíme, že v nějakém elektrickém zařízení mají napětí na svorkách a proud opačný směr, chová se toto zařízení jako zdroj, který elektrickou energii dodává. Má-li u zařízení napětí na svorkách a proud stejný směr, chová se zařízení jako spotřebič, který spotřebuje elektrickou energii, dodávanou zvnějška.

Velikost dodané nebo spotřebované elektrické energie. V předešlém odstavci jsme si ukázali, že každé zařízení, jímž prochází stejnosměrný elektrický proud se chová buď jako zdroj nebo jako spotřebič elektrické energie. Velikost elektrické energie, kterou zařízení spotřebuje nebo dodá

v časovém intervalu Δt je podle známého zákona dáno vztahem

$$W = UI\Delta t \quad (1)$$

V tomto vztahu je U napětí na svorkách zařízení, I proud ve vinutí tohoto zařízení. Omezíme-li se, jak již bylo uvedeno, na stejnosměrný proud (a vyloučíme-li ze svých úvah supravodivý stav), nemůže nastat případ, že by na svorkách zařízení bylo nulové napětí a nenulový proud ve vedení, nebo nenulové napětí a současně ve vedení nulový proud. Z toho plyne, že nulový proud $P = UI$ může u zařízení být jen v případě, že je současně $U = 0$, $I = 0$. V tom případě je i energie spotřebovaná nebo poskytnutá zařízením rovna nule.

Výkon střídavého proudu. Už na střední škole se dovídáme, že u střídavého proudu může být výkon nulový, i když napětí a proud nejsou rovny nule. Výkon střídavého proudu je totiž dán vztahem

$$P = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi, \quad (2)$$

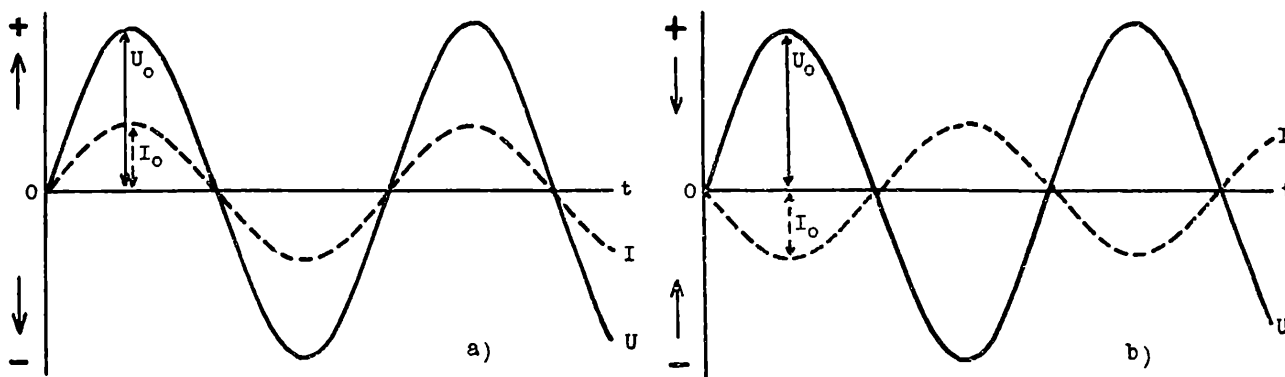
kde tzv. účinník $\cos \varphi$ je dán fázovým posuvem φ mezi napětím a proudem. Tu mohou nastat tyto význačné případy:

Je-li napětí U a proud I v e f á z i (obr. 3a), tj. platí-li pro jejich okamžité hodnoty vztahy

$$U = U_0 \cos \omega t, \quad I = I_0 \cos \omega t,$$

je $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ a výkon zařízení je

$$P = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}}.$$



Obr. 3. Závislost napětí U a proudu I na čase t u střídavých proudů v zařízeních s čistou rezistancí (ohmickým odporem) R .

a) Ve spotřebiči má proud I v každém okamžiku směr, který je v souhlase s napětím U na svorkách spotřebiče (proud je ve fázi s napětím).

b) Ve zdroji má proud I v každém okamžiku opačný směr, než jaký by odpovídal napětí U na svorkách zařízení (proud má stále opačnou fázi proti napětí).

Zařízení se chová jako s p o t ř e b i ě.

Je-li mezi napětím U a proudem I f á z o v ý r o z d í l π , tj. platí-li

$$U = U_0 \cos \omega t, \quad I = I_0 \cos (\omega t - \pi),$$

pak je $\cos \varphi = -1$ a výkon zařízení

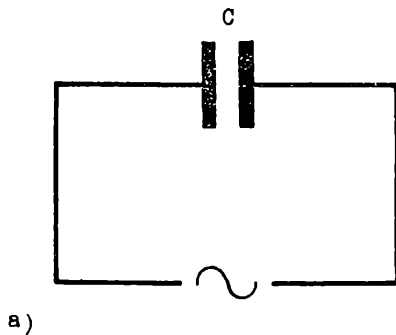
$$P = -U_{\text{ef}} I_{\text{ef}}.$$

V tomto případě se zařízení chová trvale jako zdroj (obr. 3b).

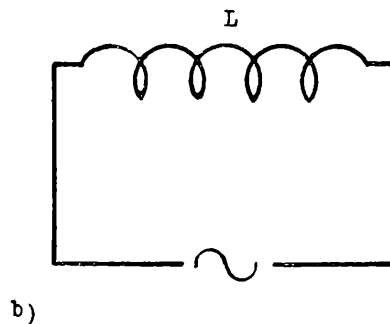
Poznámka red. Indexem *ef* jsou označeny efektivní veličiny, které jsou s příslušnými amplitudami (značenými indexem nula) vázány tímto vztahem: např. u napětí

$$U_{\text{ef}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}.$$

Jalový výkon. Výraz (2) však může být roven nule i pro případ, že $U \neq 0$, $I \neq 0$, ale když $\cos \varphi = 0$. To nastává pro případy, že fázový rozdíl mezi napětím a proudem je $\varphi = \pi/2$, nebo $\varphi = -\pi/2$. V obou případech je $\cos \varphi = 0$. Je známo, že takový případ např. nastane, když do obvodu zapojíme buď čistou kapacitu (obr. 4a; proud I předchází napětí o $1/4$ periody), nebo čistou samoindukci (obr. 4b; proud je zpož-



Obr. 4a



Obr. 4b

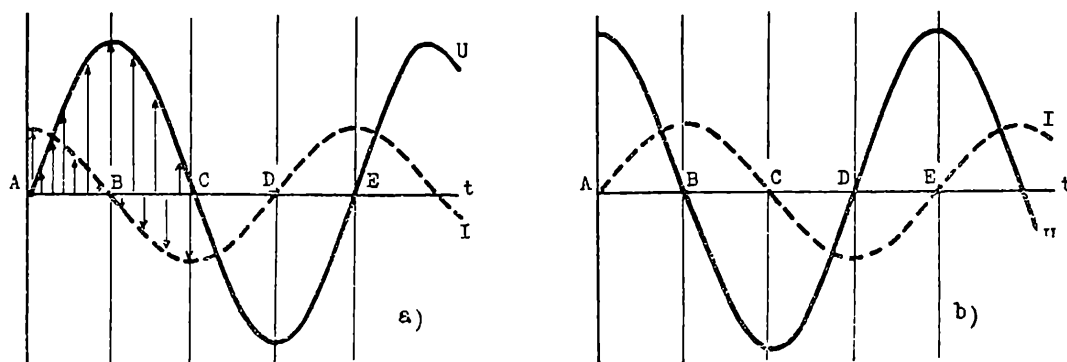
děn proti napětí o $1/4$ periody). Graficky je průběh proudu a napětí na kapacitě a samoindukci znázorněn na obr. 5ab.

A nyní jak je to s výkonem. Podle vztahu (2) platí pro tyto případy

$$P = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cdot 0 = 0.$$

Mohlo by se zdát (a ne dost jasný a podrobný výklad k tomu názoru také vede), že výkon jalového proudu je stále roven nule. Ale tomu tak není. Výkon nemůže být roven nule (kromě okamžiků, kdy je buď $U = 0$, nebo $I = 0$). Problému přijdeme na podstatu, podíváme-li se podrobněji např. na graf 5a. V časovém intervalu AB má napětí U a proud I stejný směr. V tomto časovém intervalu se kondenzátor chová jako spotřebič. Ale v úseku BC jsou napětí a proud opačné, kondenzátor se chová jako zdroj. Je možno dokázat, že energie přijatá v úseku AB je rovna energii, kterou kondenzátor v úseku BC vydá jako zdroj.

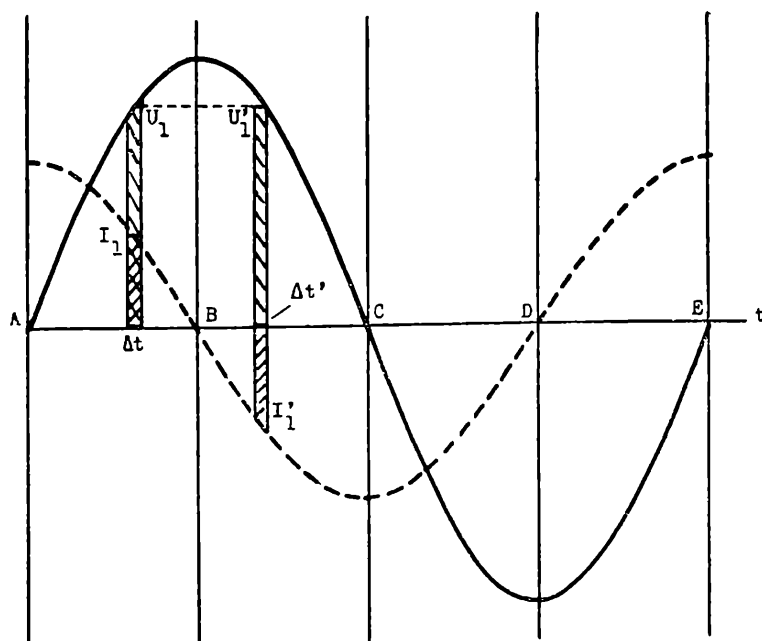
Důkaz: V úseku AB zvolíme malý časový interval $\varphi \Delta t$ (obr. 6, detail z obr. 5a). V něm je vykonaná práce (energie spotřebovaná v kondenzátoru) rovna $\Delta W = U_1 I_1 \Delta t$. K tomuto intervalu je možno nalézt symetrický interval $\Delta t'$, v úseku BC , v němž je napětí $U'_1 = U_1$, proud



Obr. 5. Závislost napětí U a proudu I na čase t u střídavých proudů v zařízeních a) s čistou kapacitou C , b) s čistou samoindukčností L .

a) Střídavý proud I v kondenzátoru s čistou kapacitou C předchází o $\frac{1}{4}$ periody $\left(AB = \frac{T}{4}\right)$ napětí U na deskách kondenzátoru. V časových intervalech AB a CD je proud I ve fázi s napětím U , kondenzátor se chová jako spotřebič elektrické energie; v intervalech BC a DE mají proud I a napětí U na deskách kondenzátoru opačnou fázi, kondenzátor se chová jako zdroj elektrické energie.

b) Střídavý proud I ve vinutí cívky s čistou samoindukčností L je zpožděn o $\frac{1}{4}$ periody $\left(AB = \frac{T}{4}\right)$ proti napětí U na svorkách cívky. V časových intervalech AB a CD je proud I ve fázi s napětím U , cívka se chová jako spotřebič elektrické energie. V intervalech BC a DE má proud I opačný směr, než jaký by odpovídal napětí U na svorkách, cívka se chová jako zdroj elektrické energie.



Obr. 6. Časové intervaly Δt a $\Delta t'$ jsou symetricky položeny vzhledem k okamžiku zobrazenému bodem B . V těchto intervalech se napětí a proud prakticky nezmění. Pro výkon proudu je možno psát $P_1 = U_1 I_1$, popř. $P'_1 = U'_1 I'_1$. Příslušné elektrické energie jsou $\Delta W = U_1 I_1 \Delta t$, popř. $\Delta W' = U'_1 I'_1 \Delta t'$. Platí $\Delta W + \Delta W' = 0$.

$I_1' = -I_1$. Vydaná energie v úseku $\Delta t'$ je

$$W' = U_1 I_1' \Delta t' = -U_1 I_1 \Delta t = -\Delta W,$$

je tedy stejná jako energie ΔW , ale má opačné znaménko. Jejich součet $\Delta W + \Delta W'$ je roven nule. Je možno pak intervaly AB a BC rozdělit na stejné malé elementy Δt , v nichž je možno považovat napětí a proud za konstantní. Pak ke každému elementu v úseku AB je možno nalézt symetrický element v úseku BC tak, že součet příslušných energií je roven nule.

Podobnou úvahu je možno provést pro dvojici intervalů CD a DE atd. Z toho plyne, že u jalového proudu není rovna nule energie v každém časovém intervalu, nýbrž nule je rovna úhrnná energie v každé půlperiodě, nebo v celistvém násobku půlperiody. Protože frekvence síťového proudu je 50 Hz, je rovna nule celková energie v každém intervalu rovnajícím se 1/100 sekundy. Proto je možno průměrný výkon v libovolném časovém intervalu považovat na těchto zařízeních za nulový. A to též platí pro každé zařízení, u něhož je účinník $\cos \varphi = 0$.

Ponecháváme čtenáři, aby si provedl podobnou úvahu pro samoindukci, jakou jsme uvedli pro kondenzátor. Užije k tomu obr. 5g.



Problém dvou svíček - řešení



(Text úlohy viz na str. číslo 1. Rozhledů)

Z první svíčky uhoří za 1 hod. $\frac{1}{3}$, ze druhé $\frac{1}{5}$, po x hodinách hoření je délka 1. svíčky $1 - \frac{x}{3}$, délka 2. svíčky $1 - \frac{x}{5}$.

Z podmínky a) plyne

$$\left(1 - \frac{x}{3}\right) : \left(1 - \frac{x}{5}\right) = 1 : 2,$$

odtud $x_1 = 2\frac{1}{7}$ hod., pro poměr 1 : 3 jest $x_2 = 2\frac{1}{2}$ hod., pro 1 : 4 $x_3 = 2\frac{1}{17}$ hod.

Z podmínky b) dostaneme

$$\left(1 - \frac{x - \frac{1}{2}}{3}\right) : \left(1 - \frac{x}{5}\right) = 1 : 2,$$

kde x je počet hodin po zapálení 2. svíčky; od tud $x_1 = 2\frac{6}{7}$ hod., pro poměr 1 : 3 je $x_2 = 3\frac{1}{8}$ hod., pro poměr 1 : 4 je $x_3 = 3\frac{4}{17}$ hod.

O. S.

Jaké bylo pořadí?

Na dostizích, které jsem navštívil, mě zajímalo umístění tří koní. Jejich jména byla Rapid, Skok a Viola. Tito koně dojeli do cíle jako první tři, ostatní byli několik metrů za nimi. Přesné pořadí jsem však nepostřehl ani já, ani moji sousedé. Byly proneseny tyto úsudky

Rapid je první,
Viola není první,
Skok není třetí.

Jak se brzy na to ukázalo, byl právě jeden z těchto výroků pravdivý, zatímco druhé dva tvrdily opak pravdy. Dovedli byste určit pořadí koní v cíli?

S. H.

Stanislav Horák, ČVUT

První řecký matematik, Thales Milétský

Thales Milétský žil asi v letech 630 až 550 př. n. l. Byl to původně obchodník s olejem a se solí. Říká se o něm, že v Egyptě vypočetl výšku pyramidy z délky jejího stínu. V r. 585 př. n. l. předpověděl ve svém rodišti zatmění Slunce. Oba tyto výkony vzbudily tenkrát velký obdiv a získaly mu nesmrtelnou slávu a všeobecnou úctu. Předpovídat zatmění Slunce nebo Měsíce je pro současné astronomy věc naprosto běžná, neboť se mohou opřít o mnohaletá pozorování Slunce i Měsíce.



Taková pozorování musel mít k dispozici i Thales. V Řecku však nebyla, ale byla zcela určitě v Babylónii. Tam předpovíдали zatmění Slunce i Měsíce asi 700 let př. n. l. Z toho usuzujeme, že Thales byl určitě v Babylónii.

A teď ještě něco o matematických vědomostech Thaletových. Přisuzují se mu hlavně tyto čtyři věci:

1. Byl první, kdo dokázal, že kružnice je půlena svým průměrem.

2. Byl první, kdo dokázal, že v rovnoramenném trojúhelníku proti ramenům leží shodné úhly.

3. Dokázal, že vrcholové úhly jsou shodné.

4. Dokázal větu *usu* o shodnosti dvou trojúhelníků.

Jak vidíte, jsou to věty, které se nám zdají být samozřejmé a učí se jim žáci ZDŠ. Nesmíme však zapomínat, že matematika v Řecku začínala právě Thaletem z Milétu a jeho zásluha tkví v tom (a je to charakteristické pro celou starořeckou matematiku), že každou větu, každé tvrzení se snažil dokázat.

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

rovina komplexní, normálová, obzoro-
rová, opěrná, orientovaná, promí-
tací, sečná, souměrnosti, tečná,
zobrazovací

rovinný

rovná se

rovnice

rovnice lineární, kvadratická, n -té-
ho stupně

rovník

rovnítko

rovnoběžka

rovnoběžník

rovnoběžnostěn

rovnoběžný

rovnoramenný trojúhelník

rovnost

rovnostanný trojúhelník

rozbor

rozdělit

rozdíl

rozhodnout se

rozhodnutí

rozložit

rozložitelný

rozměr

rozpadnout se

rozvinout

rozvinout plochu na plochu

rozvinutelný

rozvinutí plochy

ručička hodinová

rušit se navzájem

плоскость комплексная, нормальная,
горизонта, опорная, ориентирован-
ная, проекций, секущая, симметрии,
касательная, изображения

плоский

равняется

уравнение

уравнение линейное, квадратное,
 n -ой степени

экватор

знак равенства

параллельная прямая, параллель,

параллелограм

параллелепипед

параллельный

равнобедренный треугольник

равенство

равносторонний треугольник

анализ, дискуссия

разбить

разность

решить

решение

разбить, разложить

приводимый

размер, измерение

вырождаться

развернуть, наложить

наложить поверхность на поверх-
ность

развертывающийся

наложение поверхности

часовая стрелка

уничтожаться взаимно

růst
různoběžky
rys
rýsovat, rýsování

возрастать
пересекающиеся прямые
чертеж
чертить, черчение

Ř

řada, po řadě
řád
řád číslice
řádek
řešení, řešit
řešitelná soustava
řešitelný
řez; rovinný řez

ряд, *т.*, соответственно
порядок
разряд
строка
решение, решить
совместная система
разрешимый
сечение, пересечение; плоское
сечение

S

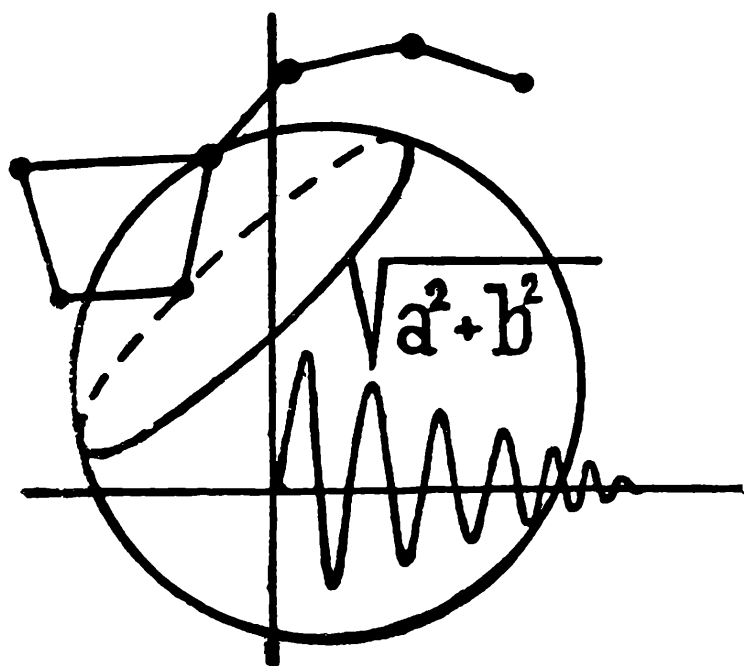
sbírka úloh
sčítanec
sčítání
sčítat
sdružený
sečna
sekans
sestavovat
sestrojit
setina, šest setin
shoda
shodnost
shrnout
singularita, singulární
sinus
síť
sjednocení
skalár
skica
skládat
skládat se
sklopený
sklopit
skutečný
sloupec
směr
mysl, proti smyslu pohybu hodinových ručiček, ve smyslu pohybu hodinových ručiček
soubor
součet
součin
součinitel
souhlas

сборник задач
слагаемое
сложение, подсчет
слагать, складывать
сопряженный
секущая
секанс
составлять
построить
сотая, шесть сотых
сходство
равенство
подвести итог
особенность, особенный
синус
сеть, развертка
соединение
скаляр
эскиз
составлять
состоять
повернутый
повернуть
действительный
столбец, столбик
направление
смысл, против часовой стрелке, по часовой стрелке
семейство
сумма
произведение
сомножитель, коэффициент
соответствие

(Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



5

ROČ. 44
1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Leden 1966

Číslo 5

Vedoucí redaktor doc. dr. Miroslav Menšík, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. Ota Setzer, ČVUT - Praha

Redakční rada: *zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PÜ, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.*

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

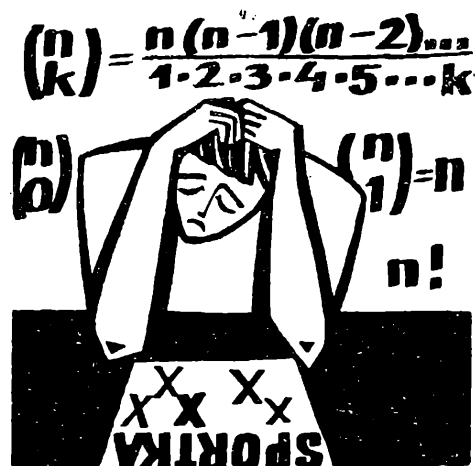
Doc. O. Setzer: Lineární programování	193
M. Valešová: Numerické řešení rovnic	201
S. Trávníček: Rovnice pravidelného mnohoúhelníka	208
E. Cífká: Ohniska parabol dotýkajících se tří přímek	212
Doc. B. Kepr: O některých křivkách [Pokračování]	216
J. Matoulek: Experimentální určování vztahů mezi fyzikálními veličinami pomocí π teorému	220
S. Havlíček: Dualismus vln a částic	224
L. Vašek: Odvození 1. a 3. Keplerova zákona z gravitačního zákona [Dokončení]	228
Řešení úloh	230
Prof. dr. V. Santholzer: Profesor Joliot-Curie	238
Doc. dr. J. Dibelka: Proč jaderné elektrárny	240
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: V. Vaňková, studující FS.

A-04*51588

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1966.



Lineární programování

DOC. OTA SETZER, ČVUT, Praha

V běžném životě se čím dále tím více setkáváme s pojmem *lineární programování*.

Protože jde o moderní část matematiky, která začíná pronikat do nejrůznějších oborů hospodářské praxe (např. do průmyslové výroby, obchodu, dopravy, plánování atd.), seznámíme se na nejjednodušších příkladech s jejími principy.

V podstatě jde o určování většího počtu nezáporných veličin, v našem školském výkladu je ukázka jen na dvou nebo třech veličinách, např. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, které jsou vázány m lineárními nerovnostmi

$$\left. \begin{array}{l} a_1 x + a_2 y + a_3 z \leq a_4 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z \leq b_4 \\ \\ m_1 x + m_2 y + m_3 z \leq m_4, \end{array} \right\} \quad (1)$$

kde $a_i, b_i, \dots, m_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) jsou reálná čísla.

Naším úkolem je nalézt takovou skupinu hodnot (x, y, z) , vyhovujících soustavě (1), pro něž daná funkce

$$F(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad (2)$$

nabývá extrémní hodnoty, tj. buď maxima nebo minima.¹⁾

¹⁾ Uváděné příklady jsou určeny jen pro školskou potřebu, aby je bylo možno řešit bez počítačích strojů. V praxi jde o velký počet neznámých a tu je třeba používat samočinných počítačů.

I. Zabývejme se nejprve první částí úlohy, tj. řešením soustavy lineárních nerovností (1) se zvláštními koeficienty.

Příklad 1. Hledejme dvojice nezáporných čísel (x, y) , pro něž platí tyto nerovnosti

$$\left. \begin{aligned} x + 2y &\leq 4 \\ 3x + 2y &\leq 6 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Mají-li být čísla x, y nezáporná, musí odpovídající body v pravouhlé souřadné soustavě ležet v p r a v o od osy y ($x \geq 0$) a n a d osou x ($y \geq 0$), tedy v 1. kvadrantu včetně hraničních polopřímek $+x, +y$.

Rovnice $x + 2y = 4$ je rovnicí přímky, která protíná osy x a y v bodech $A(4; 0)$, $B(0; 2)$; přímka $3x + 2y = 6$ seče souřadné osy v bodech $C(2; 0)$, $D(0; 3)$, (obr. 1).

První z nerovností (3) splňují body uvnitř, nebo na obvodu trojúhelníka OAB , druhé nerovnosti vyhovují body v trojúhelníku OCD , nebo na jeho obvodu.

Mají-li být s o u č a s n ě splněny obě nerovnosti (3), pak hledanými dvojicemi (x, y) jsou souřadnice bodů uvnitř čtyřúhelníka $OCEB$ nebo na jeho obvodě, přičemž bod $E(1; 1,5)$ je průsečíkem přímek AB a CD .

Příklad 2. V 1. kvadrantu určete všechny body, pro jejichž souřadnice x a y platí nerovnosti

$$\left. \begin{aligned} 3x + 4y &\leq 24 \\ x + y &\leq 3 \\ x - 2y &\leq 2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Obdobně jako v 1. příkladě znázorníme graficky přímky $AB \equiv x - 2y = 2$; $BC \equiv 3x + 4y = 24$; $AD \equiv x + y = 3$ (obr. 2). Průsečíky přímek AD a BC s přímkou AB jsou body $A(\frac{8}{3}; \frac{1}{3})$, $B(\frac{28}{5}; \frac{9}{5})$; jejich průsečíky s osou y jsou body $C(0; 6)$, $D(0; 3)$.

Body vyhovující nerovnostem (4) vyplňují vnitřek čtyřúhelníka $ABCD$, nebo leží na jeho obvodu.

Příklad 3. Určete trojice nezáporných čísel (x, y, z) , pro něž

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y + z &\leq 6 \\ 3x + 6y + 4z &\leq 12 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

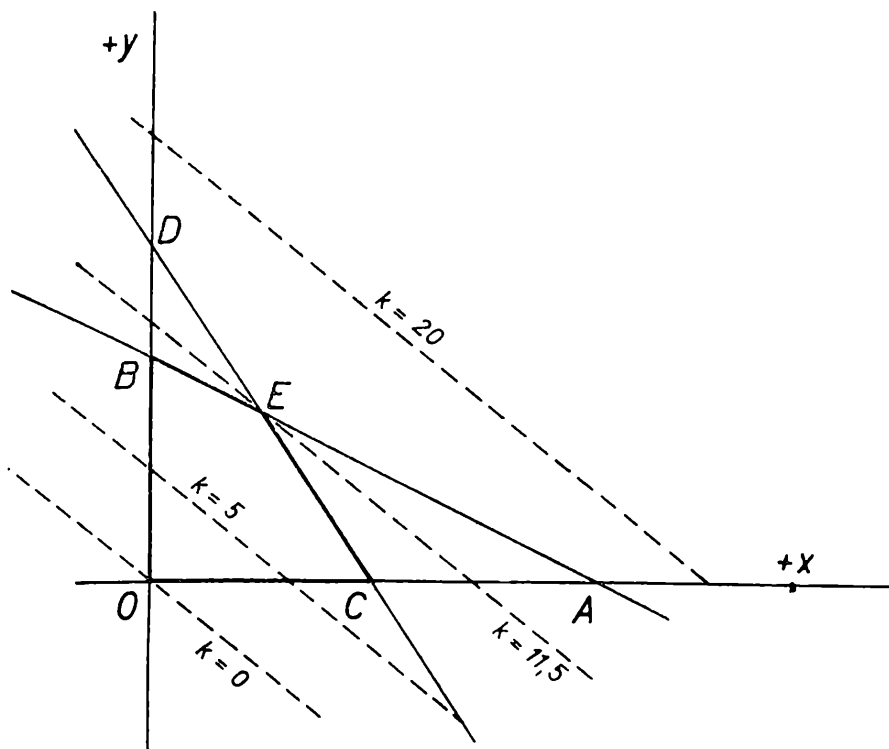
Rovnice $3x + 2y + z = 6$ je rovnicí roviny, která seče osy souřadnic v bodech $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$; rovina $3x + 6y + 4z = 12$ protíná osy x, y, z v bodech $D(4; 0; 0)$, $E(0; 2; 0)$, $F(0; 0; 3)$, (obr. 3).

První nerovnost (5) platí pro body uvnitř, nebo na povrchu čtyřstěnu $OABC$. Druhou nerovnost (5) splňují všechny body poloprostoru omezeného rovinou DEF , které leží v prvním oktantu — včetně hraničního trojúhelníka DEF — a neobsahují počátek O .

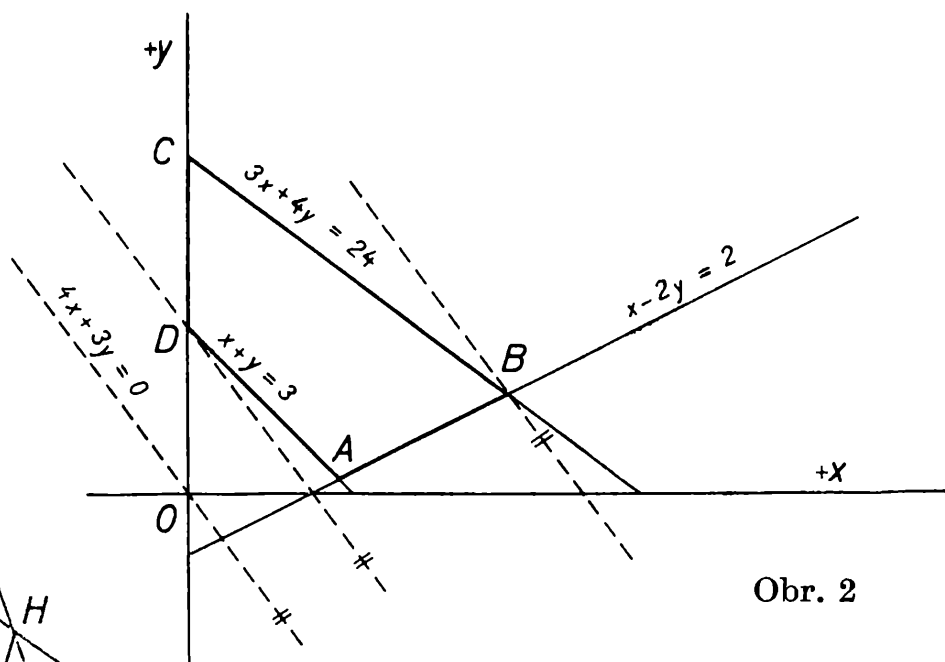
Roviny ABC a DEF se protínají v přímce GH : $G(1; 1,5; 0)$, $H(\frac{4}{3}; 0; 2)$.

Oběma nerovnostem (5) vyhovují současně body uvnitř nebo na povrchu mnohostěnu $BEFCGH$.

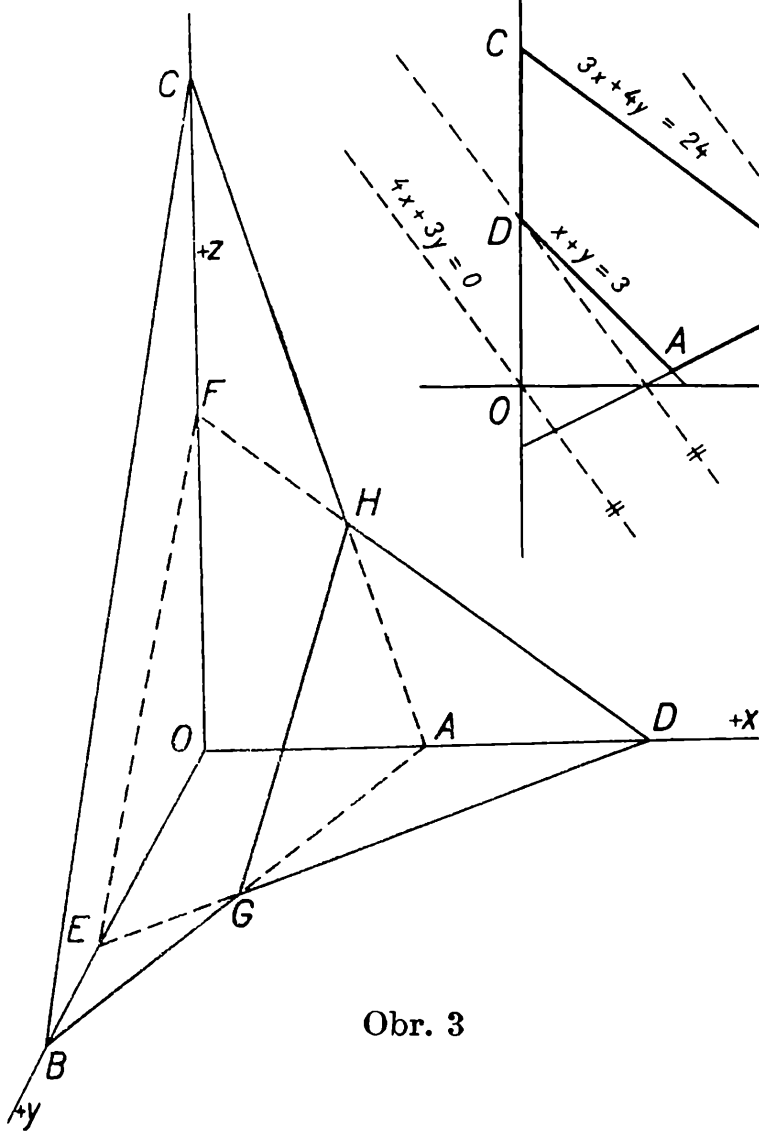
Z uvedených příkladů plyne, že při dvou proměnných x, y vyhovují soustavě lineárních nerovností body uvnitř (při jiné volbě znamének



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

koeficientů vně), nebo na obvodu určitého mnohoúhelníka, při třech proměnných x, y, z jsou řešením body uvnitř (popř. vně), nebo na povrchu určitého mnohostěnu.

II. Nyní připojme druhou podmínku naší úlohy. Hledejme — za předpokladu, že existují — dvojice hodnot (x, y) , které nejen vyhovují daným nerovnostem, pro něž však daná funkce $F(x, y) = \alpha x + \beta y$ nabývá extrémní hodnoty.²⁾

Rovnice $\alpha x + \beta y = k$ představuje pro různá k osnovu rovnoběžných přímk. Tak např. na obr. 1 jsou zobrazeny rovnoběžné přímky

$$4x + 5y = k \quad (6)$$

pro $k = 0, 5, 20$. Ze všech těchto rovnoběžek vybereme dvě hraniční, které ještě protínají čtyřúhelník $OCEB$. První je pro minimální $k = 0$ a jde bodem O , druhá pro maximální $k = 11,5$ a prochází bodem E .

Tím jsme současně našli maximum ($k = 11,5$) a minimum ($k = 0$) funkce $F(x, y) = 4x + 5y$, pro kterou jsou splněny nerovnosti (3). Názorně jsme si ověřili větu

Lineární funkce nabývá nad mnohoúhelníkem svého maxima nebo minima vždy v některém jeho vrcholu³⁾.

Při třech proměnných x, y, z představuje rovnice $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ pro různá k osnovu rovnoběžných rovin. Zvolíme-li z nich dvě hraniční, tj. takové, které ještě protínají daný mnohostěn v jednom bodě, určíli jsme extrémy dané funkce nad daným tělesem.

Lineární funkce nad daným tělesem nabývá svého maxima nebo minima v některém jeho vrcholu⁴⁾.

Příklad 4. Určete maximum i minimum funkce $4x + 3y$, jestliže pro x a y platí nerovnosti (4).

Z osnovy rovnoběžných přímk $4x + 3y = k$ vybereme hraniční přímky, jež jdou body D a B čtyřúhelníka $ABCD$ (obr. 2). Minimum naší funkce nastává v bodě $D(0;3)$, pro nějž $k = 9$; maximum pro bod $B(\frac{28}{5}; \frac{9}{5})$, kde $k = \frac{139}{5}$.

Příklad 5. Určete maximum a minimum funkce $3x + y + 2z$, jsou-li pro x, y, z splněny nerovnosti (5).

V příkladě 3 jsme určili vrcholy příslušného mnohostěnu. V nich může daná funkce nabýt extrémní hodnoty. Pro jednotlivé vrcholy sestavíme tabulku 1.

²⁾ V literatuře bývá tato funkce, pro níž se hledají optimální hodnoty, nazývána někdy *účelová*, nebo *objektivní*, nebo *cílová funkce*.

³⁾ Jsou-li hraniční přímky rovnoběžné s některou stranou mnohoúhelníka, jsou řešením všechny body příslušné strany.

⁴⁾ Jsou-li hraniční roviny rovnoběžné s některou hranou nebo stěnou mnohostěnu, tvoří řešení všechny body této hrany nebo stěny.

Tabulka 1

Bod	x	y	z	$3x + y + 2z$
A	2	0	0	6
B	0	3	0	3
C	0	0	6	12
D	4	0	0	12
E	0	2	0	2
F	0	0	3	6
G	1	1,5	0	4,5
H	$\frac{4}{3}$	0	2	8

Z tabulky 1 je zřejmé, že maximum funkce je v bodech C, D , totiž 12; minimum v bodě E má hodnotu 2.

III. V další části článku užijeme uvedených způsobů řešení — grafického (polygónem) nebo numerického (tabulkou) — ve slovních příkladech.

Příklad 6. Během dovolené, na níž může zaměstnanec utratit mezi 1300 Kčs až 1500 Kčs, chce navštívit města A a B . Délku své dovolené plánuje alespoň na 10 dní, nanejvýš však na 14 dní. V městě A utratí denně 140 Kčs, v B jen 100 Kčs. Den pobytu v městě A si cení 10 body, v městě B 9 body. Jak musí rozdělit svou dovolenou, aby získal nejvyšší možný počet bodů?

Ř e š e n í. x je počet dní pobytu v A , y dní v B . Dané podmínky vedou k nerovnostem

$$\left. \begin{array}{l} 10 \leq x + y \leq 14 \\ 1300 \leq 140x + 100y \leq 1600 \end{array} \right\} \quad (7)$$

přičemž funkce $10x + 9y$ má nabýt maximální hodnoty.

Body, které vyhovují prvním dvěma nerovnostem, leží v pásu mezi rovnoběžnými přímkami

$$\begin{aligned} p_1 &\equiv x + y = 10 \\ p_2 &\equiv x + y = 14. \end{aligned}$$

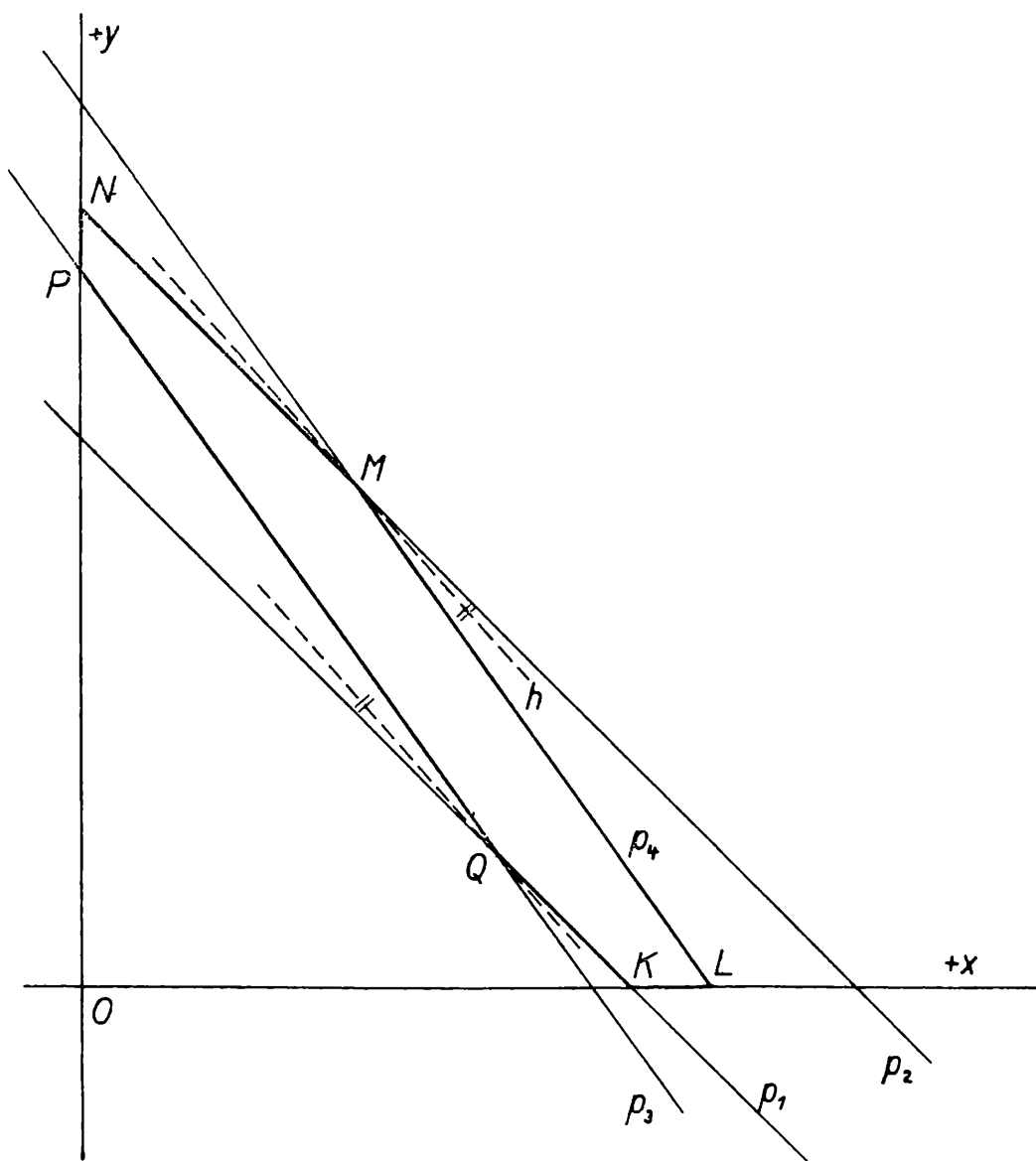
Druhé dvě nerovnosti splňují body uvnitř pásu mezi rovnoběžkami

$$\begin{aligned} p_3 &\equiv 7x + 5y = 65 \\ p_4 &\equiv 7x + 5y = 80. \end{aligned}$$

Vrcholy mnohoúhelníka $KLMNPQ$ určíme v průsečících přímek p_1, p_2, p_3, p_4, x, y (obr. 4)

$$\begin{aligned} p_1 \cdot x &\equiv K(10; 0), & p_4 \cdot x &\equiv L\left(\frac{80}{7}; 0\right), & p_2 \cdot p_4 &\equiv M(5; 9), \\ p_2 \cdot y &\equiv N(0; 14), & p_3 \cdot y &\equiv P(0; 13), & p_1 \cdot p_3 &\equiv Q\left(\frac{15}{2}; \frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

Hraniční přímky v osnově rovnoběžek $10x + 9y = k$ jdou body Q a M . Protože hledáme maximum dané funkce, přichází v úvahu jen bod M , pro nějž $x = 5, y = 9, k_{\max} = 131$.

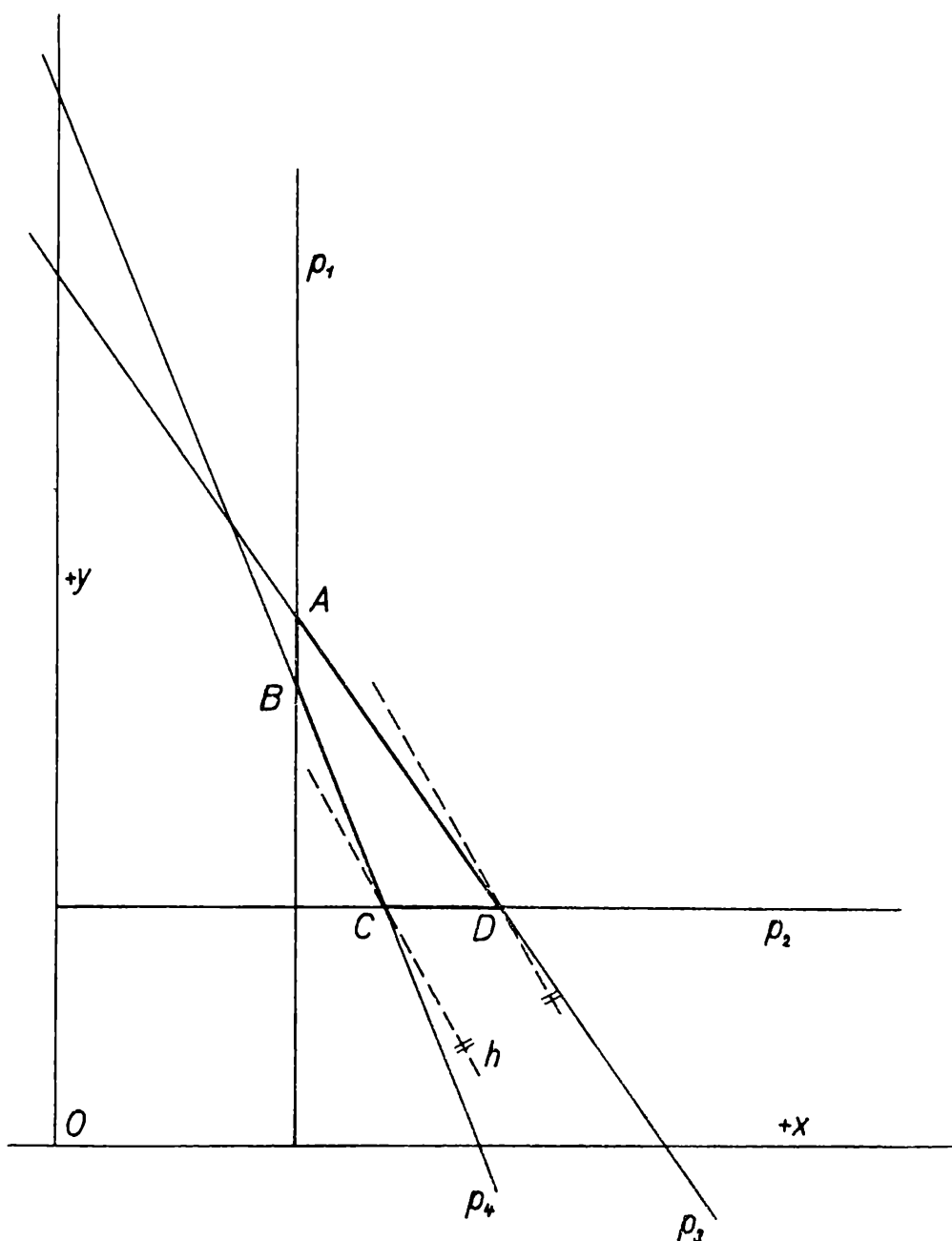


Obr. 4

Délka pobytu v *A* činí tedy 5 dní, v *B* 9 dní, počet bodů je 131, celková útrata se rovná 1 600 Kčs.

Příklad 7. Vedoucí prodejny nápojů má na skladě 3 druhy vín:

Velikost lahve	Nákupní cena	Prodejní cena	Zisk
1,0 l	28,00 Kčs	38,00 Kčs	10,00 Kčs
0,7 l	20,00 Kčs	28,00 Kčs	8,00 Kčs
0,5 l	12,40 Kčs	21,00 Kčs	8,60 Kčs



Obr. 5

Chce skladovat 1 400 l vína, avšak ne více než 2 000 lahví. Přitom má být alespoň 450 lahví litrových, alespoň 450 lahví po 0,7 l a 500 lahví půllitrových. Celková nákupní cena se může pohybovat mezi 36 000 Kčs a 39 600 Kčs. Kolik lahví jednotlivých druhů nakoupí a prodá, aby jeho zisk byl co největší?

Ř e š e n í. Bylo nakoupeno x lahví po 1 l, y lahví po 0,7 l a z lahví po 0,5 l. Z daných podmínek plyne

$$\left. \begin{aligned} x + 0,7y + 0,5z &= 1\,400 \\ x + y + z &\leq 2\,000 \\ x &\geq 450, \quad y \geq 450, \quad z \geq 500 \\ 36\,000 &\leq 28x + 20y + 12,4z \leq 39\,600 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

přitom nechť funkce $10x + 8y + 8,6z$ nabude maximální hodnoty.

Z první rovnice vyjádříme z pomocí x a y

$$z = 2\,800 - 2x - 1,4y, \quad (8)$$

dosadíme do dalších nerovností a po menší úpravě dostaneme

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} \quad 800 \leq x + 0,4y \\ \text{b)} \quad x \geq 450, \quad y \geq 450, \quad 2\,300 \geq 2x + 1,4y \\ \text{c)} \quad 16\,000 \leq 40x + 33y \leq 61\,000 \end{array} \right\} \quad (9)$$

d) Funkce $180x + 101y$ má nabýt minimální hodnoty.

Snadno nahlédneme, že při splnění nerovností (9ab) jsou splněny současně i obě nerovnosti (9c).

K určení vrcholů čtyřúhelníka $ABCD$, omezujícího oblast možných řešení, použijeme proto jen přímek (obr. 5)

$$p_1 \equiv x = 450, \quad p_2 \equiv y = 450$$

$$p_3 \equiv 2x + 1,4y = 2\,300$$

$$p_4 \equiv x + 0,4y = 800$$

$$A \equiv p_1 \cdot p_3, \quad B \equiv p_1 \cdot p_4, \quad C \equiv p_2 \cdot p_4, \quad D \equiv p_2 \cdot p_3;$$

$$A \quad (450; 1000), \quad B \quad (450; 875), \quad C \quad (620; 450), \quad D \quad (840; 450).$$

Pro tyto vrcholy sestavíme tabulku 2.

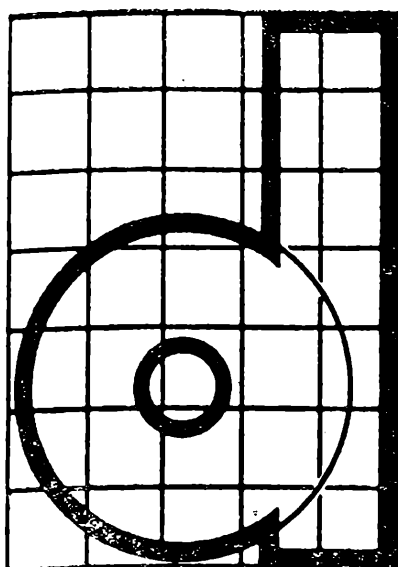
Tabulka 2

Bod	x	y	(z)	$180x + 101y$	$(10x + 8y + 8,6z)$
A	450	1 000	500	182 000	16 800
B	450	875	675	169 375	17 305
C	620	450	930	157 050 min.	17 798 max.
D	840	450	490	196 650	16 214

Z tabulky 2 je zřejmé, že funkce $180x + 101y$ nabývá svého minima v bodě C . Pro kontrolu byly do tab. 2 přidány i hodnoty (z) podle rovnice (8') a k nim funkce $(10x + 8y + 8,6z)$, která dosahuje maxima opět v bodě C , jehož souřadnice jsou řešením naší úlohy.

Podle toho bude pro vedoucího nejvýhodnější, objedná-li 620 lahví litrových, 450 lahví po 0,7 litru a 930 lahví půllitrových. Maximální zisk činí 17 798 Kčs při celkové nákupní ceně 37 892 Kčs.

(Dokončení)



Malé „d“ znamená velký podnik

Nyní můžeme tvrdit, že i školy mají svůj vlastní veletrh. Bude jím v Basileji ve Švýcarsku od 24. do 28. června 1966 pořádaný osmý mezinárodní, dosud největší evropský veletrh, „8. DIDACTA“, věnovaný potřebám vyučování. Na ploše 32 000 m² bude vystavovat přes 500 výrobců učebních pomůcek z 15 zemí. Učebný proces bude zastoupen od mateřských škol až po university, uvidíme „stroje na učení“ i jazykové laboratoře. Že také matematika a fyzika tam budou velmi dobře zastoupeny, je samozřejmé.

M. Menšík

Numerické řešení rovnic

MARIE VALEŠOVÁ, ČVUT, Praha

Jistě se již mnohým čtenářům Rozhledů stalo, že při nějaké matematické úloze dospěli k rovnici, s jejímž řešením si nevěděli rady. Mohlo tomu tak být samozřejmě proto, že neznali některé nutné vzorce nebo úpravu příslušné rovnice, ale mohlo se tak stát také proto, že tuto rovnici vzorcem nebo pomocí jakékoliv úpravy nelze řešit.

S rovnicemi, které neumíme řešit přesně, se v užité matematice setkáváme mnohem častěji než s těmi, pro které se dá přesné řešení najít, ať už příslušný předpis pro výpočet řešení je nám znám, či ne. A jsou to rovnice jak *algebraické*¹⁾, tak *transcendentní*²⁾. Dá se ukázat, že z algebraických rovnic neumíme obecně řešit rovnice vyššího stupně než čtvrtého. Při tom ovšem je třeba poznamenat, že obecné vzorce pro řešení rovnic 3. a 4. stupně jsou značně složité a často nedávají vhodný tvar řešení. Rovnice vyššího stupně se dají snadno řešit, pokud příslušný mnoho-

¹⁾ *Algebraická rovnice* má tvar $P(x) = 0$, kde $P(x)$ je mnohočlen n -tého stupně, tj. $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

²⁾ *Transcendentní* jsou nealgebraické rovnice, např. goniometrické, logaritmické aj.

člen na levé straně rovnice má některý speciální tvar, např. je-li rovnice *binomická*, *reciproká*, *bikvadratická* ³⁾ apod.

Rovněž malé procento transcendentních rovnic dovedeme řešit přesně, a to většinou tak, že je převedeme na některý ze zvláštních algebraických typů (např. jestliže rovnici iracionální vhodně umocníme, v logaritmické rovnici z rovnosti logaritmů dvou výrazů usoudíme na rovnost příslušných argumentů apod.).

Vidíme však, že obecně nebudeme moci spoléhat na příliš jednoduchá a snadná řešení předložených rovnic, a proto bude velmi často nutné řešení „uhádnout“, lépe řečeno *o d h a d n o u t* a příslušný odhad co nejvíce upřesnit. Řešení takto získanému, které danou rovnici splňuje s jistou malou nepřesností, říkáme *přibližné řešení*. Metody, jimiž takové přibližné řešení dané rovnice získáváme, nazýváme *numerické metody* řešení rovnic. Budeme se nyní snažit na příkladech proniknout k podstatě takového řešení rovnic a ukážeme si několik nejužívanějších metod.

Řekněme, že rovnice, s níž si zatím nevíme rady, má tvar

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Dosazením „zkusmo“ např. $x = 1$ zjistíme, že toto číslo rovnici vyhovuje, čili je jejím řešením. Rovnice 3. stupně má však další dva kořeny⁴⁾ (ať už reálné nebo imaginární).

Kdybychom se však pokoušeli „uhodnout“ je zcela náhodně, s velkou pravděpodobností by se nám to nepodařilo. Jestliže se nám však poštěstí najít jeden kořen rovnice, úloha se značně zjednoduší. Vzpomeňte si na kvadratickou rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Známe-li jeden její kořen x_1 , můžeme levou stranu rozložit na součin kořenových činitelů

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Podobně, známe-li kořen x_1 algebraické rovnice vyššího stupně $P(x) = 0$, můžeme tuto rovnici psát ve tvaru

$$(x - x_1)P_1(x) = 0,$$

kde stupeň mnohočlenu $P_1(x)$ je o jedničku menší než stupeň $P(x)$. Po tomto rozkladu se můžeme věnovat jen hledání kořenů mnohočlenu $P_1(x)$.

V našem příkladě se tedy situace skutečně velmi zjednoduší, neboť rovnici

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$$

³⁾ Rovnice *binomická* má tvar $x^n \pm a^n = 0$, rovnice *bikvadratická* $Ax^4 + Bx^2 + C = 0$, rovnice *reciproké* jsou např. $Ax^3 + Bx^2 + Bx + A = 0$, $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0$.

⁴⁾ Podle tzv. základní věty algebry má každá algebraická rovnice $P(x) = 0$ právě tolik kořenů, kolikátého stupně je mnohočlen $P(x)$.

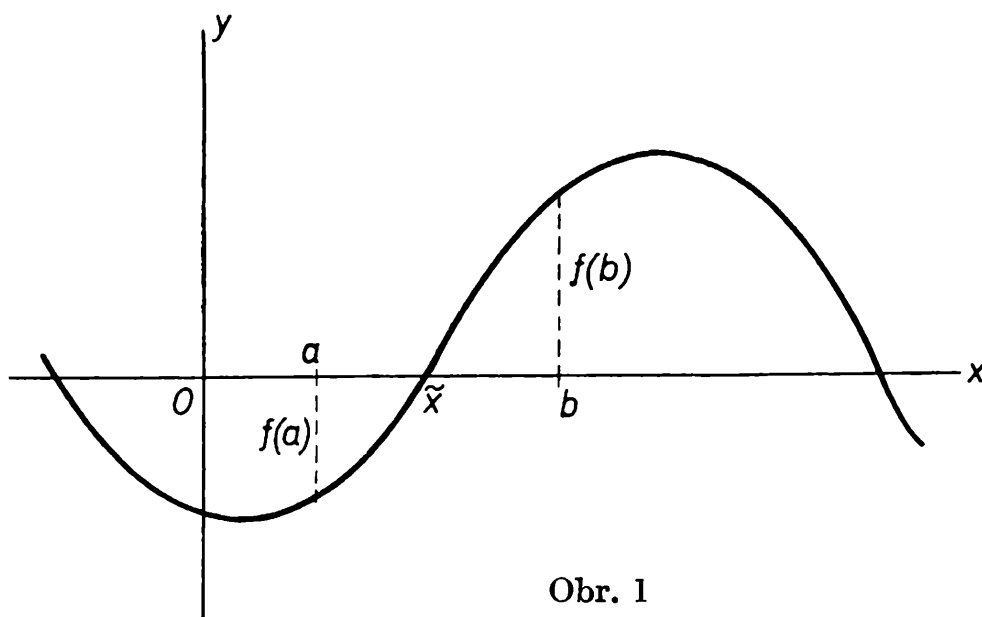
lze napsat ve tvaru

$$(x - 1)(x^2 - x - 4) = 0.$$

Položíme-li druhou závorku rovnou nule, vypočteme snadno podle vzorce pro řešení kvadratické rovnice $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$. Vidíme, že kořeny této rovnice bylo možno stanovit přesně, když se nám podařilo jeden kořen „uhodnout“.

Obecně však nebude tak jednoduché jeden z kořenů najít (nebude-li jím např. některé malé celé číslo), a proto nebudeme spoléhat na náhodu. Odhady kořenů budeme provádět systematicky, abychom bezúčelným dosazováním libovolných čísel neztráceli čas.

Uvažujme nyní na chvíli abstraktně. Nechť je dána nějaká rovnice $f(x) = 0$. Najít všechny její kořeny znamená totéž jako najít všechny průsečíky křivky, znázorňující funkci $y = f(x)$, s osou x . Abychom mohli hledat přibližná řešení dané rovnice, musíme se nejprve zhruba orientovat o průběhu funkce $y = f(x)$ a zjistit alespoň, v kterém intervalu máme průsečík křivky s osou x hledat. Interval může být pro začátek dosti velký. Stačí např. zjistit, mezi kterými celými čísly leží kořen rovnice. Odborně říkáme, že je nutno kořeny rovnice *separovat* (oddělit), čímž rozumíme najít takové intervaly, v nichž je již jen po jednom kořenu. Existuje řada vět, které umožňují provést separaci kořenů rovnice, nám však postačí prozatím to, co je patrné z obr. 1: Pokud



Obr. 1

křivka osu x protíná např. v bodě $\tilde{x}$ (tj. nedotýká se jí), je zřejmé, že funkční hodnoty v bodech nalevo a napravo od průsečíku $\tilde{x}$ se liší znaménky.

Vezměme nyní jako příklad rovnici

$$x^3 - 6x + 3 = 0.$$

Na ní ukážeme jak separaci kořenů, tak i různé metody vyčíslení kořenů. Nejprve zjistíme hodnoty funkce

$$f(x) = x^3 - 6x + 3$$

v bodech o celistvých souřadnicích x ; $f(0) = 3$, $f(1) = -2$, $f(3) = 12$ (pro čísla větší než 3 jsou již hodnoty $f(x)$ stále kladné); $f(-1) = 8$, $f(-2) = 7$, $f(-3) = -6$. Ze znaménkových změn je vidět, že pro kořen $\tilde{x}_1$ platí $0 < \tilde{x}_1 < 1$, dále je $2 < \tilde{x}_2 < 3$ a $-3 < \tilde{x}_3 < -2$. Tyto nerovnosti dávají jistý odhad velikosti kořenů, ovšem velice hrubý.

Dále si vyložíme tři nejzákladnější metody, jichž se užívá k přibližným výpočtům kořenů rovnic: *metodu iterační*, *metodu regula falsi* a *metodu Newtonovu*.

Metoda iterační

Jistě se většina čtenářů pamatuje na tzv. grafické řešení kvadratické rovnice. Princip spočívá v podstatě v tom, že se rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

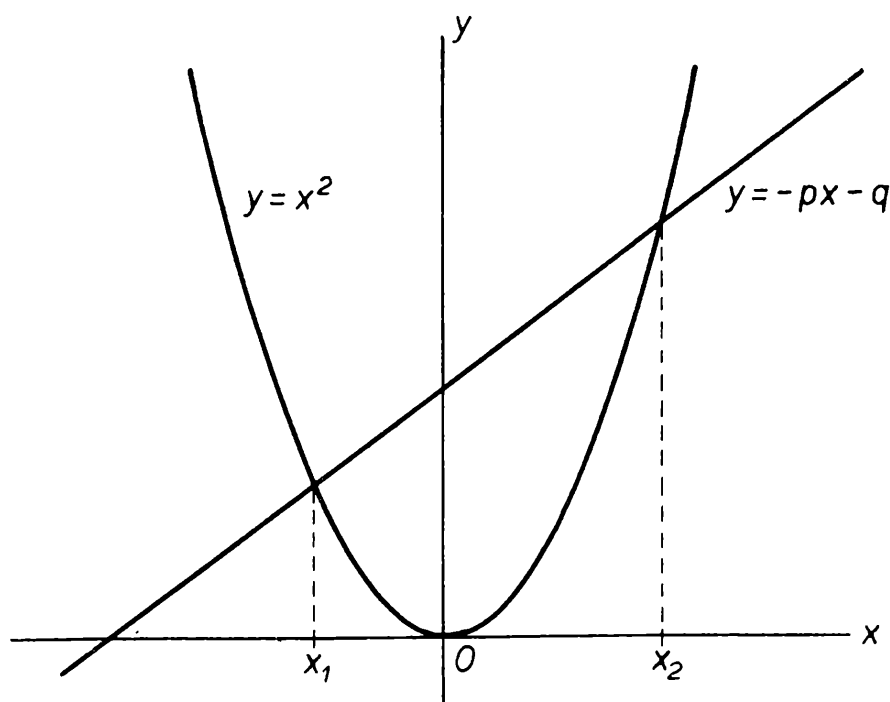
převeďte na tvar

$$x^2 = -px - q$$

a místo stanovení průsečíků paraboly

$$y = x^2 + px + q$$

s osou x hledají se průsečíky pevné paraboly $y = x^2$ s přímkou $y = -px - q$, což se graficky snadněji provede (pro narýsování pevné paraboly $y = x^2$ můžeme např. užít šablony (obr. 2).



Obr. 2

Podobná myšlenka nás přivede k metodě iterační. Rovnici $f(x) = 0$ upravme na tvar $x = \varphi(x)$. (Je možno rovnici upravit ještě obecněji na tvar $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, ale tím se zabývat nebudeme.) Graficky bychom řešení rovnice původní našli jako souřadnici x průsečíku přímky $y = x$ s křivkou $y = \varphi(x)$. Z obrázku bychom pak mohli stanovit příslušnou souřadnici odměřením, ovšem s omezenou přesností.

Pro numerický výpočet uvažme to, že kdybychom do rovnice $x = \varphi(x)$ dosadili za x správný kořen $\tilde{x}$, bude rovnice splněna. Jestliže však do funkce $\varphi(x)$ dosadíme číslo $x_0 \neq \tilde{x}$, rovnice splněna nebude. Výsledek dosazení označme např. x_1 , tj. $x_1 = \varphi(x_0)$. Nové x_1 vezměme znovu za přibližnou hodnotu kořene x , opět dosadíme do funkce $\varphi(x)$ a dostaneme $x_2 = \varphi(x_1)$. Tento postup můžeme libovolně opakovat. Obecně bude

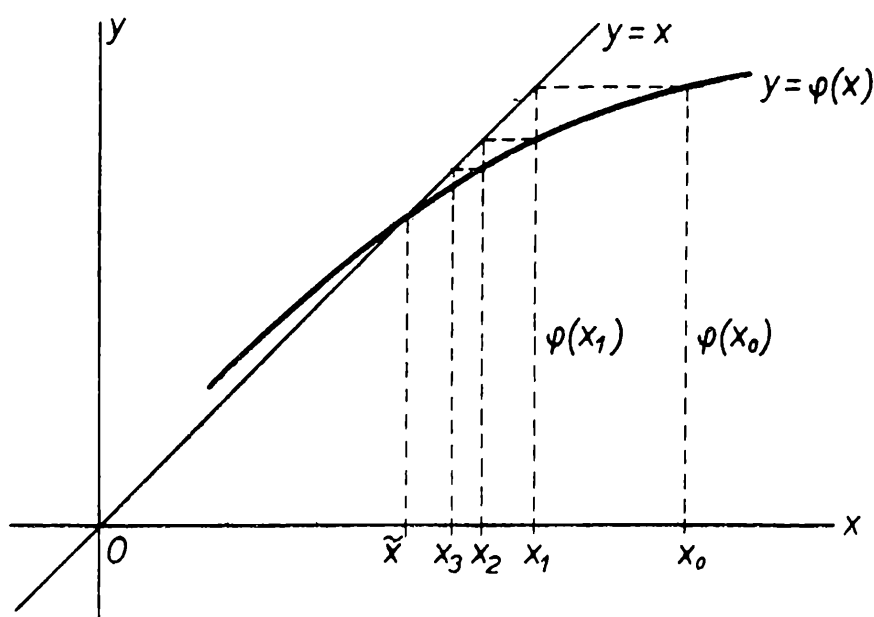
$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Všimněme si však (obr. 3a, b a 4) výsledků tohoto dosazování. Zatím co na obr. 3a, b je vidět, že čísla

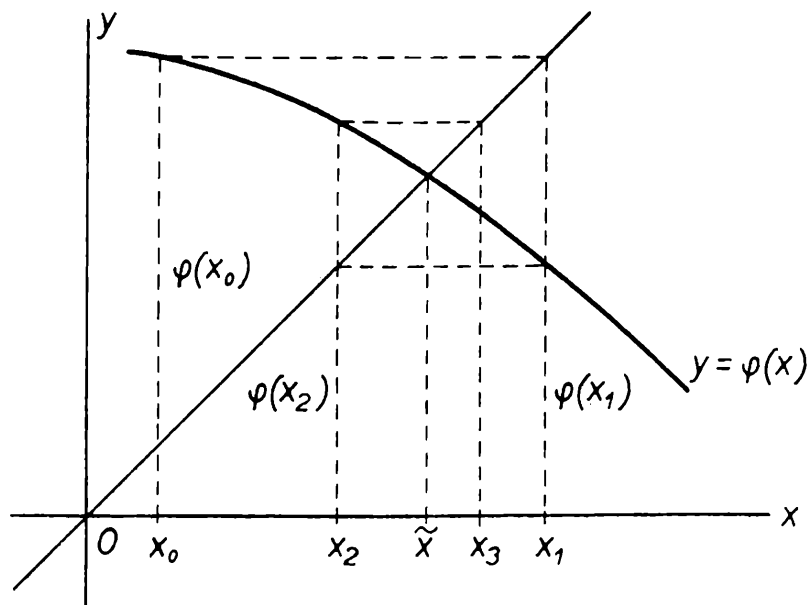
$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

se postupně ke kořenu $\tilde{x}$ přibližují (neboli *konvergují*), je tomu na obr. 4 naopak: čísla $x_1, x_2, \dots$ jsou stále vzdálenější od kořene x , než byl první hrubý odhad x_0 (říkáme, že posloupnost čísel x_n *diverguje*).

K tomu, abychom dosazováním do rovnice $x = \varphi(x)$ získávali vždy lepší přibližné hodnoty neboli *aproximace*, je zapotřebí a stačí, aby úhel α tečny ke křivce $y = \varphi(x)$ a osou x byl $0 < \alpha < 45^\circ$ anebo $135^\circ < \alpha < 180^\circ$, tj. aby jeho tangenta byla v absolutní hodnotě menší než 1. Není-li tato podmínka splněna, metody se nedá užít. Podmínka, aby



Obr. 3a



Obr. 3b

$|\operatorname{tg} \alpha| < 1$ se dá zapsat pomocí pojmu 1. derivace ⁵⁾ funkce $\varphi(x)$ takto: $|\varphi'(x)| < 1$ pro všechna x z blízkého okolí kořene $\tilde{x}$, tj. pro všechna x z intervalu (a, b) , uvnitř kterého leží kořen $\tilde{x}$ (který byl zjištěn při separaci).

A nyní se vraťme k našemu příkladu. Rovnici

$$x^3 - 6x + 3 = 0$$

můžeme přepsat ve tvaru

$$x = \frac{x^3 + 3}{6},$$

takže zde je

$$\varphi(x) = \frac{x^3 + 3}{6}.$$

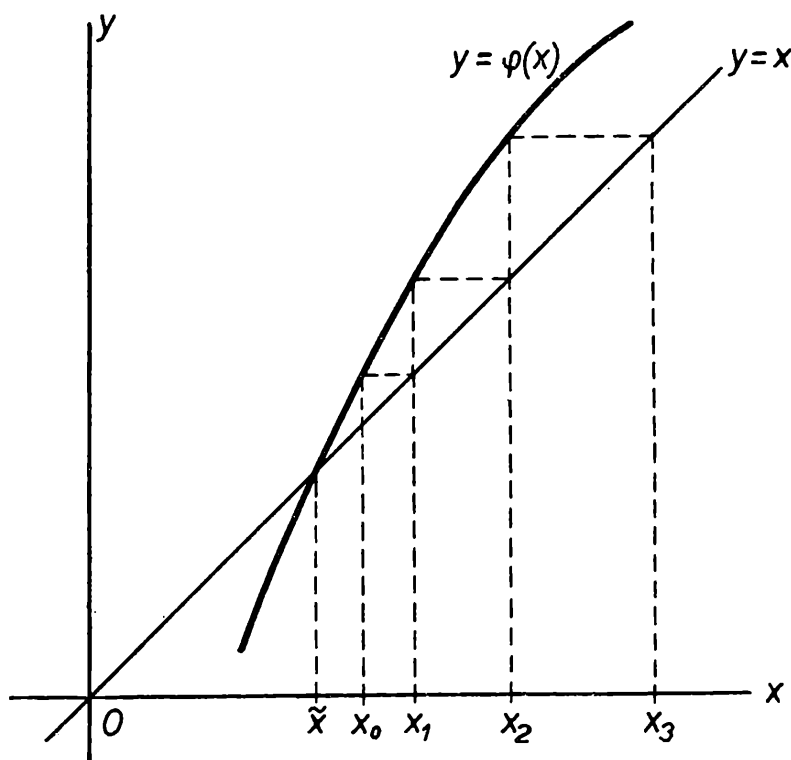
Určíme $\varphi'(x) = \frac{x^2}{2}$. Ukazuje se, že pro $x \in (0, 1)$ je $0 < \varphi'(x) < \frac{1}{2}$, pro $x \in (2, 3)$ je $2 < \varphi'(x) < \frac{9}{2}$, rovněž tak pro $x \in (-3, -2)$. Iterační metody při tomto rozkladu se tedy dá použít jenom pro hledání prvního kladného kořene.

Jako prvního přiblížení můžeme užít např. hodnoty $x_0 = 0$. Je $x_1 = \varphi(0) = \frac{1}{2} = 0,5$. Hodnotu $x_1 = 0,5$ dosadíme opět do předpisu $\varphi(x)$

⁵⁾ Viz např. článek inž. E. Kriegelsteina, *Z á k l a d y d i f e r e n c i á l n í h o p o č t u*, Rozhledy č. 9, 10, roč. 39. Směrnice tečny ke křivce $y = \varphi(x)$ v bodě x_0 je rovna limitě směrnice sečny, spojující body o souřadnicích x_0 a $x_0 + h$ při $h \rightarrow 0$, tj.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h},$$

kterou nazýváme *derivace funkce* $\varphi(x)$ v bodě x_0 a označujeme $\varphi'(x_0)$.



Obr. 4

a obdržíme $x_2 = \frac{1}{6} (0,5^3 + 3) = 0,5208$. Pro přehlednost sestavujeme obvykle dílčí výsledky do tabulky (tab. 1). Postup opakujeme tak dlouho, až se x_n a x_{n+1} shoduje na žádaný počet desetinných míst.

Tabulka 1

x_n	x_n^3	$\frac{1}{6} x_n^3$	$\frac{1}{6} x_n^3 + 0,5$
0	0	0	0,5
0,5	0,125	0,0208	0,5208
0,52	0,1406	0,0234	0,5234
0,523	0,1431	0,0238	0,5238
0,524	0,1439	0,0239	0,5239

Žádáme-li tedy v našem příkladě výpočet kořene s přesností na tři desetinná místa, shodují se po zaokrouhlení hodnoty x_4 a x_5 a tedy je $\tilde{x} \doteq 0,524$. Při tomto výpočtu jsme vystačili jen s tabulkami třetích mocnin.

Všimněme si ještě na obr. 3a,b, že při $\operatorname{tg} \alpha > 0$ se posloupnost čísel x_n přibližuje ke kořenu $\tilde{x}$ z jedné strany, kdežto při $\operatorname{tg} \alpha < 0$ se hodnoty x_n objevují střídavě vlevo a vpravo od $\tilde{x}$ — říkáme, že posloupnost *osciluje*. Těchto vlastností lze při podrobnějším rozboru rovněž využít (zejména při zaokrouhlování hodnot x_n) ke zrychlení konvergence iterační posloupnosti. Nebudeme se tím však nyní zabývat.

(Pokračování)

Rovnice pravidelného mnohoúhelníka

STANISLAV TRÁVNÍČEK, Olomouc

Víme, že

$$|y| = \begin{cases} y & \text{pro } y \geq 0 \\ -y & \text{pro } y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

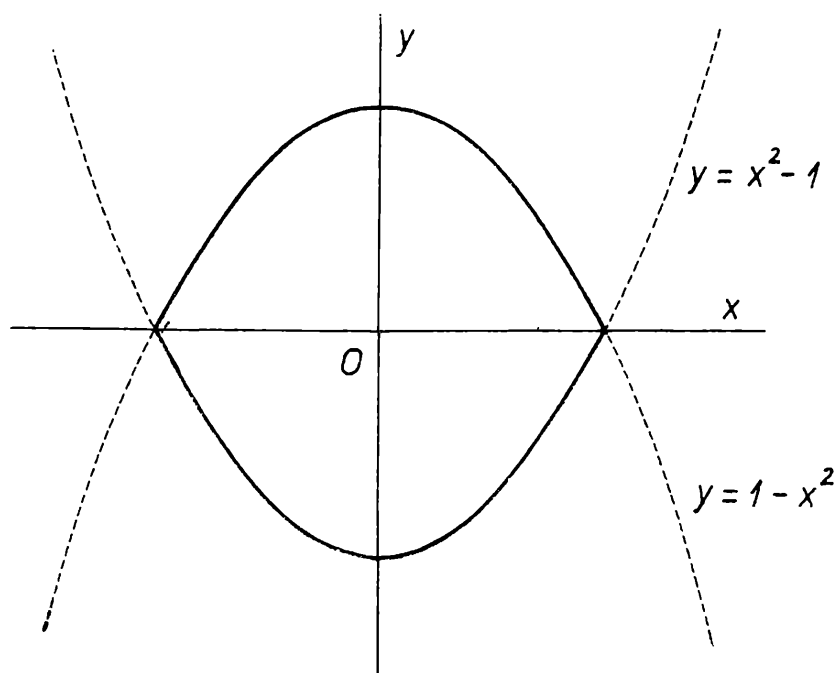
Tato definice absolutní hodnoty má zajímavý grafický důsledek, o němž dále pojednáme.

Mějme dán nějaký osově souměrný obrazec; v tomto článku budeme pod pojmem obrazec rozumět jen jeho obrysovou čáru. Umístíme jej tak, aby jeho osou souměrnosti byla osa x pravoúhlé soustavy souřadnic. Jestliže část obrazce, nacházející se nad osou x , je grafem funkce $y = f(x)$ pro $y \geq 0$, pak z osově souměrnosti plyne, že část obrazce, nacházející se pod osou x , je grafem funkce $y = -f(x)$ pro $y \leq 0$ (obr. 1). Rovnice daného obrazce pak je

$$|y| = f(x) \quad (2)$$

Je totiž skutečně pro $y \geq 0$ podle (1) $|y| = y$ a podle (2) je $|y| = f(x)$, tj. $y = f(x)$ a pro $y \leq 0$ je podle (1) $|y| = -y$ a podle (2) je $|y| = f(x)$, tj. $-y = f(x)$ tedy $y = -f(x)$. Vzhledem k souměrnosti obrazce podle osy x je lhostejné, že případ $y = 0$ uvažujeme dvakrát.

Příklad 1. Obrazec je vytvořen parabolami $y = 1 - x^2$ pro $y \geq 0$, $y = x^2 - 1$ pro $y \leq 0$ (obr. 1). Jeho rovnice je $|y| = 1 - x^2$.

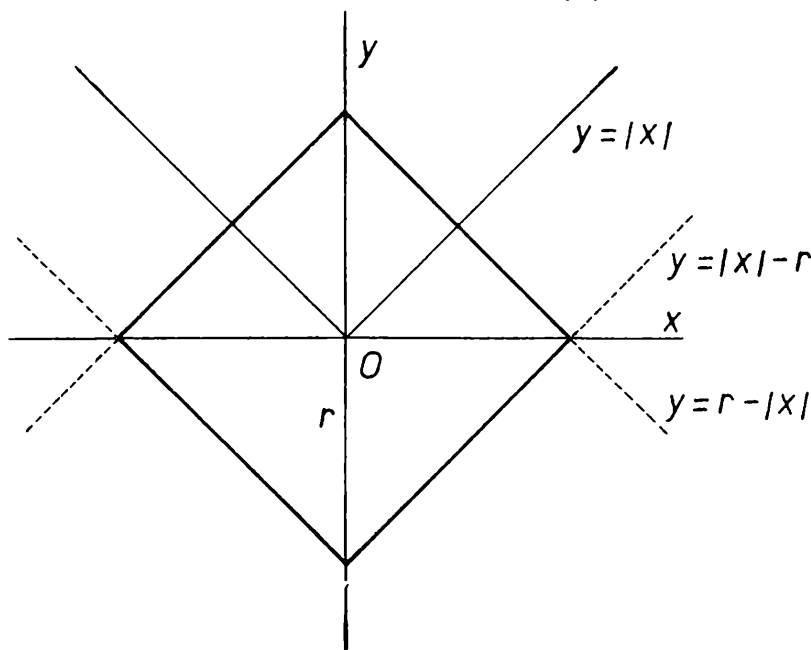


Obr. 1

Budeme se nyní zabývat speciálními osově souměrnými obrazci, pravidelnými n -úhelníky.

Nechť je n sudé číslo. Pravidelný n -úhelník má pak n os souměrnosti. Umístíme jej pro jednoduchost tak, aby se střed kružnice opsané (o poloměru r) nacházel v počátku soustavy souřadnic a osa x byla jeho osou souměrnosti procházející protějšími vrcholy, které pak mají souřadnice $(-r; 0)$, $(r; 0)$. Dále budeme uvažovat mnohoúhelníky jen v této základní poloze.

Pro větší názornost dalších úvah hledejme nejprve rovnici čtverce (obr. 2). Vyjdeme ze znalosti grafu funkce $y = |x|$. Část čtverce pod osou



Obr. 2

x je zřejmě grafem funkce $y = |x| - r$ pro $y \leq 0$. Ze souměrnosti čtverce podle osy x plyne, že část čtverce nad osou x je grafem funkce $y = r - |x|$ pro $y \geq 0$. Podle (2) má pak čtverec rovnici $|y| = r - |x|$, tj.

$$|x| + |y| = r. \quad (3)$$

Jak vidíme, je hlavním problémem najít vyjádření horní (nebo dolní) části mnohoúhelníka (tj. jisté lomené čáry) rovnicí tvaru $y = f(x)$. Tato úloha byla řešena v článku [1] 41. ročníku Rozhledů matematicko-fyzikálních. Podle tohoto článku platí:

Máme-li lomenou čáru, jejíž strany leží postupně na přímkách $p_1, p_2, \dots, p_m$ se směrnici $k_1, k_2, \dots, k_m$, rovnice přímky p_1 je $y = k_1x + q_1$, rovnice přímky p_m je $y = k_mx + q_m$ a souřadnice x vrcholů lomené čáry jsou postupně $x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1}$ (proč nelze předepsat též $q_2, q_3, \dots, q_{m-1}$?), pak rovnice této lomené čáry je

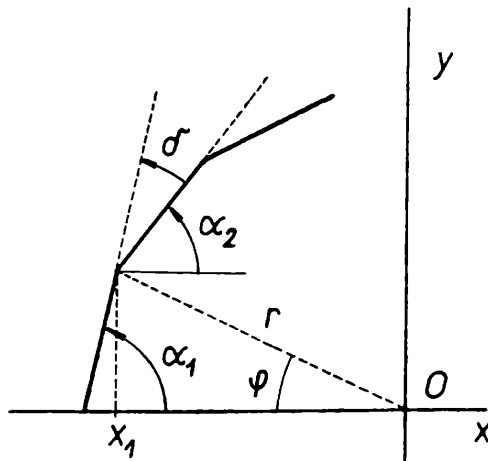
$$y = \frac{1}{2} [(k_1 + k_m)x + q_1 + q_m - (k_1 - k_2)|x - x_1| - (k_2 - k_3)|x - x_2| - \dots - (k_{m-1} - k_1)|x - x_{m-1}|],$$

kterou lze stručněji zapsat

$$y = \frac{1}{2} [(k_1 + k_m)x + q_1 + q_m] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} (k_i - k_{i+1}) |x - x_i|. \quad (4)$$

kde i je tzv. sčítací index.

Uvažujme nyní pravidelný $2m$ -úhelník v základní poloze. Stanovíme údaje, potřebné k vyjádření horní části $2m$ -úhelníka rovnicí (4) (obr. 4). Úhly budeme pro stručnost zapisovat v obloukové míře.



Obr. 3

Najdeme postupně $\varphi = \frac{\pi}{m}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\pi - \varphi) = \pi \frac{m-1}{2m}$,

$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \pi \frac{m-1}{2m}$. Dále je $\alpha_2 = \alpha_1 - \delta$, $\alpha_3 = \alpha_2 - \delta, \dots$, kde

$\delta = \pi - 2\alpha_1 = \frac{\pi}{m}$. Je tedy $\alpha_2 = \pi \frac{m-3}{2m}$, $\alpha_3 = \pi \frac{m-5}{2m}$, obecně

$\alpha_i = \pi \frac{m+1-2i}{2m}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Odtud

$$k_i = \operatorname{tg} \pi \frac{m+1-2i}{2m} \quad (5)$$

Dosazením lehce zjistíme, že $\alpha_{m+1-i} = -\alpha_i$, tj. též

$$k_{m+1-i} = -k_i, \text{ tedy též } k_m = -k_1 \quad (6)$$

Odtud plyne, že $q_1 = q_m$. Z podobnosti trojúhelníků máme

$$\frac{q_1}{r} = k_1, \text{ takže platí}$$

$$q_m = q_1 = r \operatorname{tg} \pi \frac{m-1}{2m} \quad (7)$$

Body x_i ($i = 1, 2, \dots, m-1$) dostáváme podle obr. 3 takto:

$x_1 = -r \cos \varphi$, $x_2 = -r \cos 2\varphi$, ..., obecně

$$x_i = -r \cos \frac{\pi i}{m}. \quad (8)$$

Dosadíme-li ze vzorců (5), (6), (7), (8) do rovnice (4), má podle (2) pravidelný $2m$ -úhelník v základní poloze rovnici

$$|y| = r \operatorname{tg} \pi \frac{m-1}{2m} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} \left(\operatorname{tg} \pi \frac{m+1-2i}{2m} - \operatorname{tg} \pi \frac{m-1-2i}{2m} \right) \left| x + r \cos \frac{\pi i}{m} \right| \quad (9)$$

Ovšem tuto rovnici by bylo možno ještě různě upravovat použitím vzorců pro goniometrické funkce, což ponechávám čtenáři.

Příklad 2. Najdeme znovu rovnici čtverce. Je tedy $m = 2$, takže podle (9) má tato rovnice tvar

$$|y| = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^1 \left(\operatorname{tg} \pi \frac{3-2i}{4} - \operatorname{tg} \pi \frac{1-2i}{4} \right) \left| x + r \cos \frac{\pi i}{3} \right|$$

a po úpravě máme $|y| = r - |x|$, což je opět rovnice (3).

Příklad 3. Najdeme rovnici pravidelného šestiúhelníka. Ježto $m = 3$, má podle (9) hledaná rovnice tvar

$$|y| = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\operatorname{tg} \pi \frac{2-i}{3} - \operatorname{tg} \pi \frac{1-i}{3} \right) \left| x + r \cos \frac{\pi i}{3} \right|,$$

tedy po dosazení máme

$$|y| = r \sqrt{3} - \frac{1}{2} \left[(\sqrt{3} - 0) \left| x + \frac{r}{2} \right| + (0 + \sqrt{3}) \left| x - \frac{r}{2} \right| \right]$$

a po úpravě dostáváme rovnici pravidelného šestiúhelníka, např. ve tvaru

$$|2x + r| + |2x - r| + \frac{4\sqrt{3}}{3} |y| = 4r.$$

Je-li n liché, má pravidelný n -úhelník n os souměrnosti, z nichž každá prochází jedním vrcholem a je osou protější strany. Jestliže osa x bude opět osou souměrnosti, pak stranu, která je k ní kolmá, nelze vyjádřit rovnicí tvaru $y = kx + q$ a popsaná metoda není použitelná.

Jestliže v rovnici (9) nahradíme znaménko rovnosti znaménkem $<$, dostaneme nerovnost, která nám vyjadřuje vnitřek pravidelného $2m$ -úhelníka. Podobnou nerovnost pak lze obdržet i pro vnitřek pravidelného n -úhelníka, kde n je liché.

Literatura

[1] Stanislav Trávníček, O jednom způsobu definice funkce, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 41 (1962-63), č. 3-4.



Ohniska parabol

dotýkajících se tří přímek

EDVARD CÍFKA, Praha

Z ohniskových vlastností paraboly vyplývá, že ji můžeme určit, např. dvěma tečnami t_1, t_2 a ohniskem F . Další třetí tečna t_3 již musí splňovat podmínky o souměrně sdruženém bodu Q k ohnisku F a o patě P kolmice sestrojené z ohniska na tuto tečnu. Proto při daných třech tečnách t_1, t_2, t_3 nelze ohnisko F volit libovolně. Ukážeme, že platí věta:

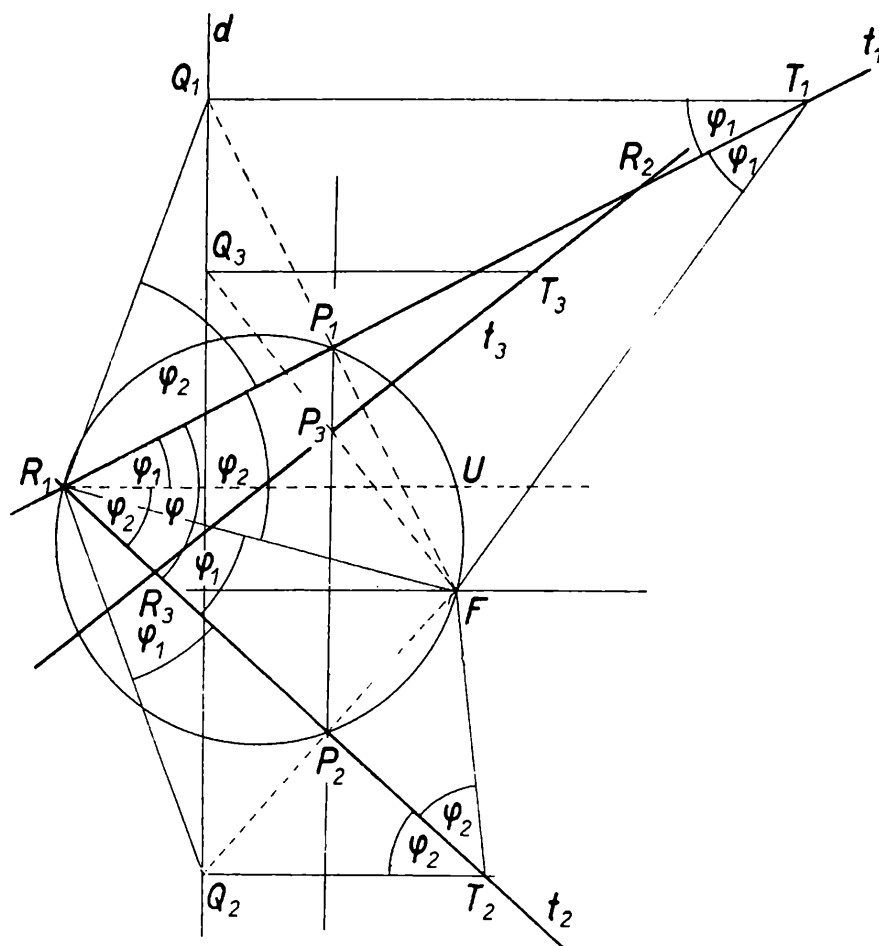
Geometrické místo ohnisek parabol dotýkajících se tří přímek t_1, t_2, t_3 neprocházejících týmž bodem a navzájem různoběžných je kružnice opsaná trojúhelníku jimi tvořenému.

D ů k a z (obr. 1). Uvažujme parabolu danou ohniskem F a řídicí přímkou d . Sestrojme z bodu R_1 tečny t_1, t_2 s body dotyku T_1, T_2 k této parabole. Jsou-li Q_1, Q_2 příslušné souměrně sdružené body k ohnisku F podle tečen t_1, t_2 , jsou čtyřúhelníky $R_1FT_1Q_1, R_1FT_2Q_2$ deltoidy, které jsou podobné. Označíme-li

$$\sphericalangle FT_1R_1 = \sphericalangle Q_1T_1R_1 = \varphi_1, \quad \sphericalangle FR_1T_2 = \sphericalangle Q_2T_2R_1 = \varphi_2,$$

je

$$\sphericalangle T_2R_1F = \varphi_1, \quad \sphericalangle T_1R_1F = \varphi_2,$$



Obr. 1

neboť v kružnici nad průměrem R_1F je oblouk UP_1 rovný oblouku P_2F , je-li U průsečík rovnoběžky s osou paraboly bodem R_1 s určenou kružnicí a P_1, P_2 paty kolmic sestrojených z ohniska F na tečny t_1, t_2 .

Označíme-li $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ je

$$\sphericalangle R_1FT_1 = \sphericalangle R_1FT_2 = 180^\circ - \varphi.^1)$$

Buď nyní t_3 další tečna paraboly. Její průsečíky s tečnami t_1, t_2 jsou

$$R_2 \equiv t_1 \cdot t_3, R_3 \equiv t_2 \cdot t_3.$$

Potom

$$\sphericalangle T_3FR_2 = \sphericalangle T_1FR_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle T_1FT_3,$$

$$\sphericalangle T_3FR_3 = \sphericalangle T_2FR_3 = \frac{1}{2} \sphericalangle T_2FT_3.$$

Sečtením obou řádků dostaneme

$$\sphericalangle R_2FR_3 = \frac{1}{2} \sphericalangle T_1FT_2 = 180^\circ - \varphi.$$

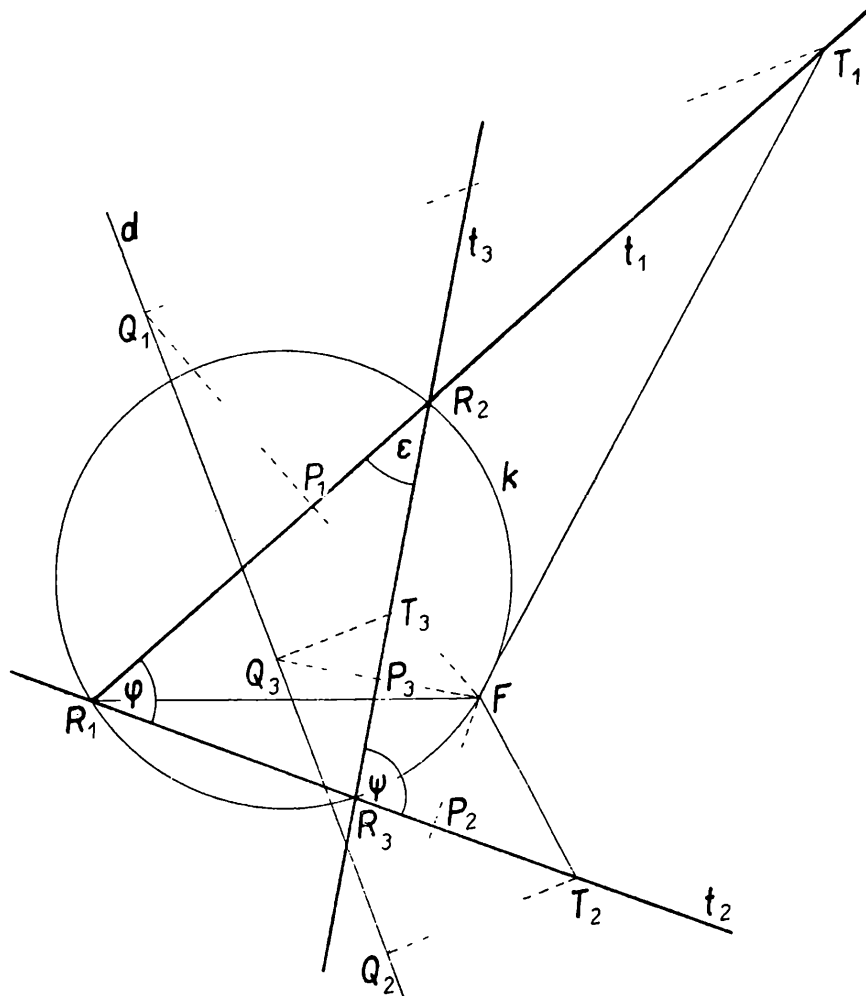
To však znamená, že čtyřúhelník $R_1R_2FR_3$ je tětíkový a tedy:

¹⁾ Výsledek můžeme vyslovit větou: Úhel spojnic ohniska paraboly s dotyčnými body dvou tečen je půlen spojnici ohniska s jejich průsečíkem a je rovný dvojnásobku výplňkového úhlu k úhlu tečen.

Z této věty plyne jako zvláštní případ: Spojnice dotykových bodů tečen sestrojených z bodu na přímce řídící k parabole prochází jejím ohniskem.

Kružnice opsaná trojúhelníku tří tečen paraboly prochází jejím ohniskem.²⁾

V druhé části důkazu věty zvolíme na kružnici opsané danému trojúhelníku $R_1R_2R_3$ libovolně bod F různý od vrcholů trojúhelníka a ukážeme, že tento bod je ohniskem paraboly, která se dotýká přímek t_1, t_2, t_3 , na nichž leží strany trojúhelníka (obr. 2).



Obr. 2

Sestrojíme souměrně sdružené body Q_1, Q_2, Q_3 k bodu F podle přímek t_1, t_2, t_3 . Je-li věta správná, musí bod Q_3 ležet na přímce $d \equiv Q_1Q_2$, která bude řídicí přímkou příslušné paraboly.

K tomu účelu označme $\varphi = \sphericalangle R_2R_1R_3$, $\psi = 180^\circ - \sphericalangle R_1R_3R_2$, $\varepsilon = \sphericalangle R_1R_2R_3$.

Na přímkách t_1, t_2 stanovme body T_1, T_2 tak, že

$$\sphericalangle R_1FT_1 = \sphericalangle R_1FT_2 = 180^\circ - \varphi$$

Body T_1, T_2 jsou na přímkách vedených body Q_1, Q_2 a kolmých k přímce Q_1Q_2 , neboť ze vztahů

²⁾ Jiný důkaz této věty viz např. v knize K o u n o v s k ý - V y č i c h l o, Deskriptivní geometrie, ČSAV Praha, 1958, 5. vyd., str. 289.

$$\sphericalangle R_1Q_1T_1 = \sphericalangle R_1Q_2T_2 = 180^\circ - \varphi, \quad \sphericalangle Q_1R_1Q_2 = 2\varphi, \\ \sphericalangle R_1Q_1Q_2 = \sphericalangle R_1Q_2Q_1 = 90^\circ - \varphi$$

plyne, že

$$\sphericalangle T_1Q_1Q_2 = \sphericalangle T_2Q_2Q_1 = 90^\circ$$

Provedme touž úvahu pro dvojici přímek t_2, t_3 . Jsou-li T'_2, T_3 body získané předešlou konstrukcí, tj. takové, že

$$\sphericalangle R_3FT'_2 = \sphericalangle R_3FT_3 = 180^\circ - \psi,$$

pak

$$\sphericalangle R_3FT_2 = \sphericalangle R_1FT_2 - \sphericalangle R_1FR_3 = 180^\circ - (\varphi + \varepsilon),$$

neboť

$$\sphericalangle R_1R_2R_3 = \sphericalangle R_1FR_3 = \varepsilon$$

v důsledku obloukových úhlů v kružnici nad touž tětivou.

Protože však $\psi = \varphi + \varepsilon$ je

$$\sphericalangle R_3FT_2 = \sphericalangle R_3FT'_2,$$

a tedy $T_2 \equiv T'_2$.

Potom zřejmě také $\sphericalangle R_3FT_3 = 180^\circ - \psi$

Nyní je $T_2Q_2 \perp Q_1Q_2$, $T_2Q_2 \perp Q_2Q_3$, a tedy bod Q_3 leží na přímce Q_1Q_2 a přímky t_1, t_2, t_3 jsou tečnami paraboly s ohniskem F , čímž je důkaz proveden.³⁾

Uvedená věta platí i v tom případě, kdy je pro parabolu dána tečna t_1 s bodem dotyku T_1 a další tečna t_2 . Potom geometrické místo ohnisek parabol je kružnice, která prochází bodem T_1 a dotýká se tečny t_2 v jejím průsečíku R s tečnou t_1 .

Cvičení.

1. Určete geometrické místo bodů, z nichž kolmice vedené na strany trojúhelníka mají na těchto stranách paty ležící na přímce.

2. Sestrojte parabolu určenou

- čtyřmi tečnami (z nichž žádné tři nemohou procházet jedním bodem),
- tečnou s bodem dotyku a dalšími dvěma tečnami,
- dvěma tečnami s příslušnými body dotyku.

3. Dokažte!

Dvě kružnice, které procházejí bodem kružnice opsané trojúhelníku, z nichž jedna se dotýká v bodě A strany b a druhá v bodě B strany a , mají svůj druhý průsečík na straně c daného trojúhelníka.

³⁾ Z důkazu plynou ihned tyto věty:

Body souměrně sdružené podle stran trojúhelníka k bodu na kružnici opsané tomuto trojúhelníku leží na přímce.

Paty kolmic na strany trojúhelníka sestavené bodem na kružnici opsané tomuto trojúhelníku leží na přímce (tzv. Simsonově).

0 některých křivkách (Pokračování)

DOC. BOŘIVOJ KEPR, ČVUT, Praha

Mějme nyní dva různé body D_a a D_b a uvažujme úhel φ konstantní velikosti (stačí se omezit na $\varphi < 90^\circ$) o vrcholu V , sevřený přímkami a a b (obr. 32). Zavedme speciální komplanární pohyb takto:

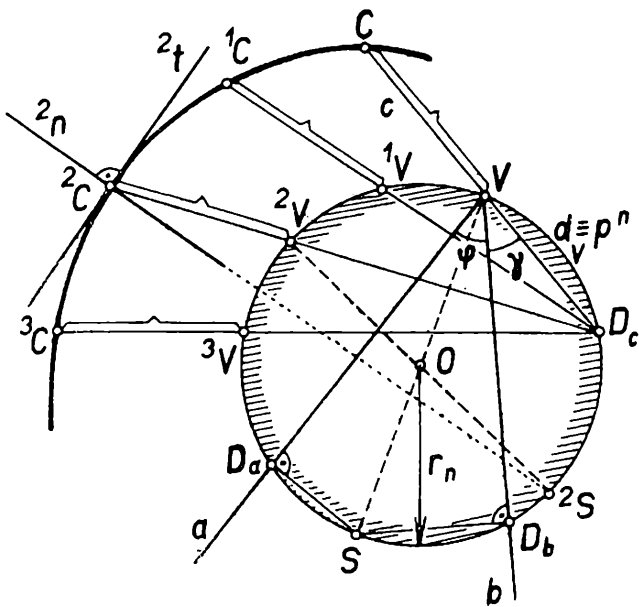
Úhel φ konstantní velikosti se pohybuje tak, že jeho rameno a prochází stále bodem D_a a jeho rameno b stále bodem D_b . Nechť si čtenář uvědomí, že tento zvláštní pohyb svým zavedením je zcela v souhlasu s tvrzením 1. základní věty z odst. 3. Vrchol V úhlu φ bude opisovat při tomto pohybu kružnici d_V , jak plyne ihned ze známé věty o obvodových úhlech. Sestrojíme-li v bodě D_a kolmici na a a v bodě D_b kolmici na b , získáme v průsečíku těchto kolmic příslušný okamžitý střed S otáčení. Podle věty o pravých úhlech nad průměrem kružnice (věta Thaletova) musí okamžitý střed S otáčení, takto sestrojený, být rovněž bodem kružnice d_V . Je tedy kruhová dráha d_V vrcholu V úhlu φ současně polhodií nehybnou (pevnou) p^n , tj. $d_V \equiv p^n$. Úsečka VS je průměrem kružnice p^n .

Zvolme si nyní libovolný bod $C \neq V$, pevně spojený s daným pohybujícím se úhlem. Spojnice $c \equiv (CV)$ protne kružnici $d_V \equiv p^n$ kromě bodu V ještě v dalším bodě D_c . (Abychom si zbytečně nekomplikovali situaci, můžeme předpokládat, že přímka c se v bodě V nedotýká kružnice $d_V \equiv p^n$, tj. můžeme předpokládat, že platí $D_c \neq V$.) Přímka c nechť svírá s přímkou b úhel γ . Protože se jedná o komplanární pohyb neproměnného útvaru, bude úhel γ v průběhu pohybu stále téže velikosti. Z toho plyne podle věty o obvodových úhlech (vrchol úhlu γ je bod V , který probíhá kružnicí d_V), že spojnice (CV) při pohybu prochází stále bodem D_c , který je přitom p e v n ý. Protože i úsečka CV má při pohybu stálou délku, sestrojíme dráhu d_c bodu C velmi rychle a pohodlně takto: Pevným bodem D_c na dané kružnici p^n vedeme paprsky $c, {}^1c, {}^2c, \dots$, což jsou jednotlivé polohy pohybujícího se paprsku c . Od průsečíků $V, {}^1V, {}^2V, \dots$ těchto paprsků s kružnicí p^n , různých od D_c (jsou to jednotlivé polohy pohybujícího se bodu V) nanese na ně v příslušném smyslu úsečku dané délky $VC = {}^1V {}^1C = {}^2V {}^2C = \dots$. Body $C, {}^1C, {}^2C, \dots$, které jsou jednotlivými polohami pohybujícího se bodu C , leží na hledané křivce d_c . Tečnu v bodě iC ($i = 1, 2, \dots$) křivky d_c sestrojíme na základě dřívějších úvah takto: Spojnice bodu iV se středem O kružnice p^n protíná tuto kružnici v příslušném okamžitém středu otáčení iS , kde iV a iS jsou krajní body průměru kružnice p^n . Přímka $({}^iC {}^iS)$ je tedy normálou in křivky d_c v jejím bodě iC a přímka ${}^it \perp {}^in$ v bodě iC je tečnou křivky d_c v tomto

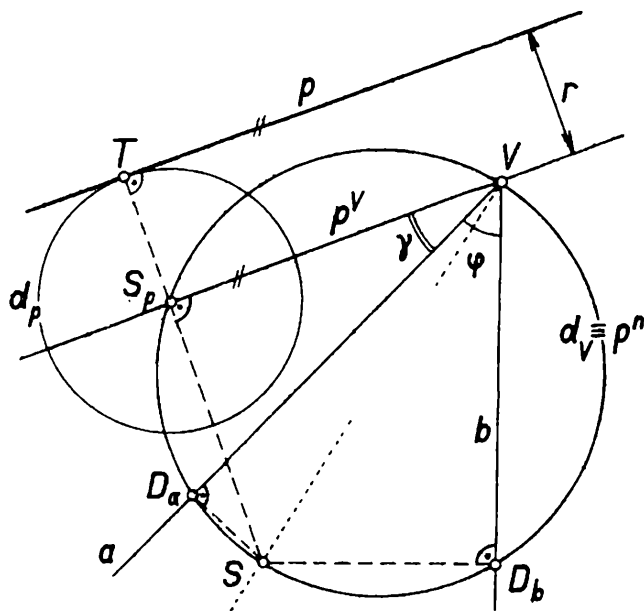
bodě. Na obr. 32 byla provedena tato konstrukce tečny 2t křivky d_c v jejím bodě 2C .

Zkoumejme nyní křivku, kterou bude jako obálku při tomto pohybu obalovat daná přímka p . Příslušný rozbor je znázorněn na obr. 33. Neproměnný rovinný útvar je tedy dán rameny a a b konstantního úhlu φ o vrcholu $V \equiv (a, b)$, který se pohybuje tak, že rameno a prochází stále pevným bodem D_a a rameno b stále pevným bodem D_b ($D_a \neq D_b$). Jak bylo již konstatováno, vrchol V úhlu přitom opisuje kružnici d_V , procházející oběma body D_a a D_b . O dané přímce p předpokládejme, že neprochází vrcholem V a že je pevně spojena s pohybujícím se daným úhlem. Sestrojme bodem V přímku $p^V \parallel p$.

Pro lepší názornost můžeme předpokládat, že tato přímka p^V není tečnou kružnice $d_V \equiv p^n$ v jejím bodě V . Na podstatu výkladu, který bude následovat, nemá tento předpoklad vliv. Příslušná úvaha znázorněná obrázkem 33 bude však srozumitelnější.



Obz. 32



Obr. 33

Přímka p^V svírá s přímkou a úhel γ s vrcholem rovněž v bodu V . Protože úhel γ nebude při pohybu měnit svoji velikost, bude přímka p^V při tomto pohybu procházet neustále bodem S_p , v němž (kromě bodu V) protíná kružnici $d_V \equiv p^n$. Protože vzdálenost r obou přímek p a p^V zůstane při pohybu rovněž stále nezměněná, bude přímka p , jakožto tečna, svými jednotlivými polohami, jichž při pohybu nabývá, obalovat kružnici d_p o středu $S_p \in d_V$ a o poloměru $r = p \perp p^V$. Dotykový bod T přímky p s kružnicí d_p je v průsečíku příslušného průměru této kružnice, kolmého na p . Podle Thaletovy věty prochází přímka (TS_p) bodem S , příslušným okamžitým středem otáčení na $d_V \equiv p^n$,

což je jistě v souhlasu s tvrzením 4. základní věty z odst. 3. Pohybu, který právě vyšetřujeme, říkáme *pohyb kardioidický*. Pro tento pohyb můžeme tedy vyslovit následující zajímavý výsledek:

Každá přímka při kardioidickém pohybu obalí kružnici, která se zredukuje v bod jedině tehdy, když přímka prochází vrcholem pohyblivého úhlu. Středy všech kružnic takto vytvořených leží na kružnici, kterou při pohybu vytvoří vrchol úhlu.

Hledejme hybnou polhodi kardioidického pohybu. Na obr. 18 v odst. 3 je ukázána a v textu k tomuto obrázku i popsána obecná konstrukce bodů polhodie hybné. V případě našeho pohybu (obr. 34) leží příslušný okamžitý střed otáčení $S, S', S'', \dots$ na polhodii nehybné (kružnici) p^n vždy jako diametrálně protilehlý k odpovídající poloze $V, V', V'', \dots$ vrcholu pohybujícího se pevného úhlu φ , který opisuje tutéž kružnici $d_V \equiv p^n$. Je tedy $VS = V'S' = V''J'' = \dots = 2r^n = \text{konst.}$, kde r^n je poloměr polhodie nehybné. Vzhledem k této skutečnosti a vzhledem k citované obecné konstrukci provedené v odst. 3 a znázorněné na obr. 18, dospíváme k výsledku, že polhodi hybnou p^h je rovněž kružnice, jejíž poloměr r^h se rovná průměru $2r^n$ polhodie nehybné (obr. 34).

Kardioidický pohyb lze tedy realizovat kutálením kružnice p^h jejím „vnitřním“ obvodem po „vnějším“ obvodu kružnice p^n o polovičním poloměru.²⁰⁾

Z toho plyne konečně dále, že

pohyb kardioidický a pohyb eliptický jsou dva pohyby navzájem vratné. (Viz závěr odstavce 3.)

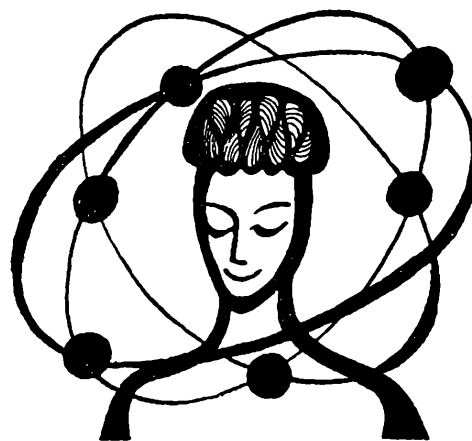
Dalo by se ukázat, že speciální epicykloidy z obr. 25a, b, c, které jsme nazvali *Pascalovými závitnicemi*, jsou totožné s drahami d_c bodu C , který je podroben kardioidickému pohybu.

Podrobněji je to takto:

a) Je-li úsečka CV z obr. 32 menší než průměr $2r^n$ kružnice p^n , je příslušná křivka d_c totožná s Pascalovou závitnicí z obr. 25b, která má dvojnásobný bod D (tzv. *uzel*) jako svůj jediný bod singulární. V případě pohybu kardioidického leží tento dvojnásobný bod D na kružnici p_n (z obr. 32) v bodě D_c .

V zájmu solidního porozumění věci doporučuji čtenáři, aby si zkonstruoval celou Pascalovu závitnici s dvojnásobným (singulárním) bodem D podle konstrukce naznačené v obr. 32. V singulárním bodě D křivky k , který je jejím (obyčejným) *uzlem* (tj. křivka k takovým bodem prochází dvakrát, viz obr. 35), existují dvě její tečny 1t a 2t . Každá z těchto tečen je tečnou této křivky vždy k jedné její „větvi“ jdoucí bodem D v tomto bodě. Autor článku bude velmi spokojen s tím čtenářem, který jako cvičení vyřeší tuto úlohu: Ve dvojnásobném bodě D Pascalovy závitnice sestojte pří-

²⁰⁾ Výraz „vnější“ nebo „vnitřní“ obvod kružnice je dáván do uvozovek proto, že má pro účely našeho článku pouze vystihující význam, při kterém se nám jedná v první řadě o názornost. Z hlediska naprosto přesné formulace by to bylo pro našeho čtenáře málo srozumitelné.



FYZIKA

Experimentální určování vztahů mezi fyzikálními veličinami pomocí Π -teorému

JOSEF MATOULEK, studující ČVUT, Praha

Základem fyziky, jako exaktní přírodní vědy, mohou být jediné kvantitativní vztahy mezi fyzikálními veličinami. Tyto kvantitativní vztahy určujeme buď pozorováním fyzikálních dějů v přírodě, tj. dějů, jež probíhají samovolně a jsou značně složité, nebo studiem uměle přivolených dějů — fyzikálních pokusů. Přestože fyzikální pokusy jsou děje značně zjednodušené, vyžaduje odvození kvantitativních vztahů mezi fyzikálními veličinami značných matematických znalostí. Nároky na matematické znalosti se značně snižují, použijeme-li některých obecných vývodů *teorie rozměrnosti*, známých pod jménem Π -*teorém*.

Předpokládejme, že hledaná fyzikální veličina a závisí na n fyzikálních veličinách $a_1, a_2, \dots, a_n$. Máme určit tuto závislost, tj. funkci f

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (1)$$

v které předpokládáme, že je nezávislá na soustavě jednotek měření. Vztahem (1) je hledaná veličina a určena explicitně, může však být také určena implicitně, tj. vztahem

$$\varphi(a, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0. \quad (2)$$

Nyní je třeba zavést pojem *rozměrové nezávislosti veličin*.

Definice 1. n fyzikálních veličin $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazýváme rozměrově nezávislými, pokud nelze rozměr žádné z nich vyjádřit pomocí součinu z rozměrů ostatních veličin v různém stupni.

Např. veličiny délka, zrychlení a hybnost jsou rozměrově nezávislé, protože jejich rozměry L , LT^{-2} a MLT^{-1} vyhovují podmínkám definice

1. Naopak veličiny délka, čas a zrychlení jsou rozměrově závislé, protože rozměr zrychlení LT^{-2} je tvořen rozměry délky L a času T .

Nechť je mezi n veličinami $a_1, a_2, \dots, a_n$ ve vztahu (1) právě prvních k rozměrově nezávislých. Zřejmě je $k \leq n$. Označíme-li jejich rozměry $[a_1] = A_1$, $[a_2] = A_2, \dots$, $[a_k] = A_k$, lze pak rozměry ostatních veličin $a, a_{k+1}, \dots, a_n$ vyjádřit pomocí rozměrů veličin $a_1, a_2, \dots, a_k$, jež nazýváme základními veličinami. Je tedy

$$[a] = A_1^{a(1)} \cdot A_2^{a(2)} \cdot \dots \cdot A_k^{a(k)},$$

$$[a_{k+1}] = A_1^{a_{k+1}(1)} \cdot A_2^{a_{k+1}(2)} \cdot \dots \cdot A_k^{a_{k+1}(k)},$$

$$[a_n] = A_1^{a_n(1)} \cdot A_2^{a_n(2)} \cdot \dots \cdot A_k^{a_n(k)}.$$

Zvolme nyní za soustavu jednotek měření právě hodnoty prvních k veličin. Hodnoty veličin $a_1, a_2, \dots, a_n$ v nové soustavě jednotek označme $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$. Platí tedy

$$a'_1 = 1, a'_2 = 1, \dots, a'_k = 1.$$

Jednotky ostatních veličin pak jsou

$$(a') = a_1^{a(1)} \cdot a_2^{a(2)} \cdot \dots \cdot a_k^{a(k)},$$

$$(a'_{k+1}) = a_1^{a_{k+1}(1)} \cdot a_2^{a_{k+1}(2)} \cdot \dots \cdot a_k^{a_{k+1}(k)},$$

$$(a'_n) = a_1^{a_n(1)} \cdot a_2^{a_n(2)} \cdot \dots \cdot a_k^{a_n(k)}$$

a tedy jejich hodnoty v nové soustavě jednotek

$$a' = \frac{a}{(a')} = \frac{a}{a_1^{a(1)} \cdot \dots \cdot a_k^{a(k)}},$$

$$a'_n = \frac{a_n}{(a'_n)} = \frac{a_n}{a_1^{a_n(1)} \cdot \dots \cdot a_k^{a_n(k)}},$$

lze tedy přepsat vztah (1) na

$$a' = f(1, 1, \dots, 1, a'_{k+1}, \dots, a'_n)$$

Je zvykem označovat $a' = \Pi$, $a'_{k+1} = \Pi_1, \dots, a'_n = \Pi_{n-k}$

Všimněme si, že argumenty $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ vznikly dělením hodnot $a, a_{k+1}, \dots, a_n$, jejich rozměry. Jsou to proto bezrozměrné argumenty. Použitím vývodů teorie rozměrovosti dosáhli jsme tedy toho, že vztah (1) mezi $n + 1$ rozměrovými veličinami lze psát ve tvaru

$$\Pi = f(1, 1, 1, \dots, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}), \quad (4)$$

tj. jako vztah mezi $n - k + 1$ bezrozměrnými veličinami. Výhoda spočívá v tom, že u funkce s menším počtem proměnných lze snáze určit její tvar, jak ostatně bude zřejmé z příkladů.

Poznamenejme, že vztah (1) lze přepsat ve vztah (4) jen tehdy, splňuje-li funkce f jisté podmínky vzhledem k proměnným $a_1, a_2, \dots, a_k$. Uvedme však také, že tyto podmínky jsou v praxi většinou splněny.

Rozebereme nyní některé zvláštní případy vztahu (4) a ukážeme si, kdy se prakticky vyskytují

$$a, n = k$$

V tomto případě je

$$\Pi = f(1, 1, \dots, 1) = \text{konst.}, \quad (5)$$

a tedy vztah (1) lze psát ve tvaru

$$a = \text{konst. } a_1^{a(1)} \cdot a_2^{a(2)} \cdot \dots \cdot a_k^{a(k)}$$

přičemž hodnotu bezrozměrné konstanty lze určit jediným, resp. opakovaným měřením jedné veličiny. Tento případ se vyskytuje při zkoumání volného pádu. Máme určit závislost doby volného pádu hmotného bodu na výšce h (obr. 1). Zřejmě je

$$t = f(h, g, m).$$

Veličiny h, g, m jsou ve smyslu definice 1 rozměrově nezávislé.

Určeme nyní bezrozměrnou veličinu

$$\Pi = \frac{t}{h^a \cdot g^b \cdot m^c}. \quad (6)$$

Označíme-li rozměry $[h] = L$; $[g] = LT^{-2}$; $[m] = M$; $[t] = T$ a uvědomíme-li si, že $[\Pi] = 1$, lze psát

$$L^0 \cdot M^0 \cdot T^0 = \frac{T}{L^a \cdot (LT^{-2})^b \cdot M^c}, \quad (7)$$

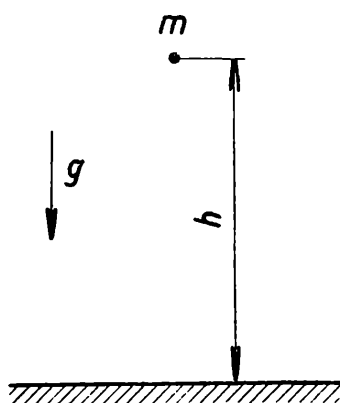
neboť vztah (6) musí být též rozměrově správný.

Z porovnání exponentů ve vztahu (7) vyplývá

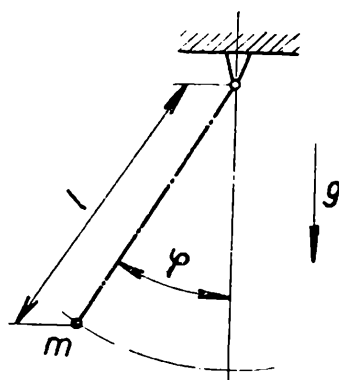
$$\begin{aligned} 0 &= -a - b, \\ 0 &= -c, \\ 0 &= 1 + 2b. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnice dostáváme $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 0$ a tudíž bezrozměrný argument Π je

$$\Pi = \frac{t}{h^{\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}} \cdot m^0} = t \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}. \quad (8)$$



Obr. 1



Obr. 2

Podle vztahu (5) je však $\Pi = \text{konst.}$ Provedme nyní určení této konstanty měřením. Realizujme hmotný bod ocelovou kuličkou a určíme hodnoty Π pro různé hodnoty h . Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce 1. Z výsledků měření vyplývá, že $\Pi_{\text{stř.}} \doteq 1,41$, předpokládáme-li, že $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Pak je

$$t \doteq 1,41 \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} \doteq \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Tento vztah je v souladu s příslušnou teorií

$$b, n = k + 1$$

V tomto případě je

$$\Pi = f(1, 1, \dots, 1, \Pi_1) = \Phi(\Pi_1) \quad (9)$$

Vztah (9) určíme nejlépe tím způsobem, že jej zobrazíme graficky a podle tvaru křivky usuzujeme na příslušnou závislost.

Tento typ závislosti se vyskytuje při zkoumání pohybu matematického kyvadla, což je hmotný bod zavěšený na nehmotném vlákně (obr. 2). Předpokládejme, že doba kyvu je

$$t = f(l, m, g, \varphi)$$

Veličiny l, m, g jsou rozměrově nezávislé, φ je bezrozměrný argument $\varphi = \Pi_1$. Zbývá určit druhý

$$\Pi = \frac{t}{l^a \cdot g^b \cdot m^c}$$

Tento bezrozměrný argument je tedy stejný jako v předešlém případě

$$\Pi = t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (10)$$

(Dokončení)

Dualismus vln a částic

STANISLAV HAVLÍČEK, Karlovy Vary

Koncem minulého století bylo známo, že pod vlivem světla velmi krátké vlnové délky, se vytrhují z některých kovů elektrony a kov se stává kladně elektricky nabitým, nastává tzv. *fotoefekt*. Ruský fyzik S t o l e t o v zjistil, že energie vyletujících elektronů závisí lineárně na kmitočtu ν použitého záření. Bylo zjištěno, že je třeba jisté minimální frekvence ν , aby elektron mohl být z kovu vůbec vytržen. Podle Planckovy domněnky to znamená, že je třeba dodat jistou minimální energii ve formě záření, abychom narušili vazbu elektronu v kovu: $\varepsilon_0 = h\nu_0$. Tato energie se označuje zpravidla A a nazývá se v ý s t u p n í p r a c í. Zbývající energie záření $h\nu - h\nu_0$ se pak přemění na kinetickou energii $\frac{1}{2}mv^2$ vytrženého elektronu. Přicházíme tak k této rovnici (tzv. rovnici Einsteinově)

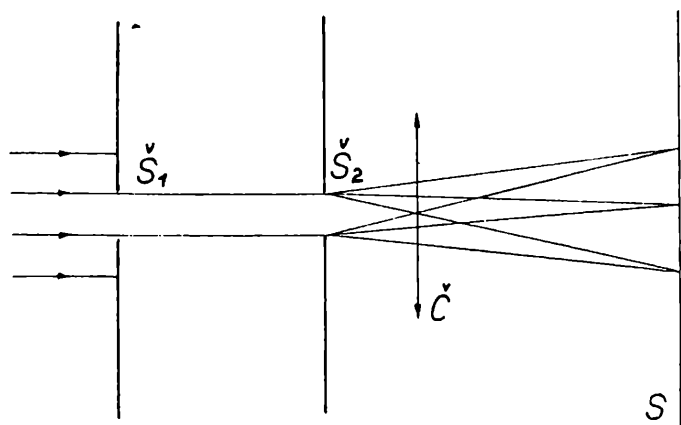
$$h\nu - h\nu_0 = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1)$$

resp.

$$h\nu = A + \frac{1}{2}mv^2. \quad (2)$$

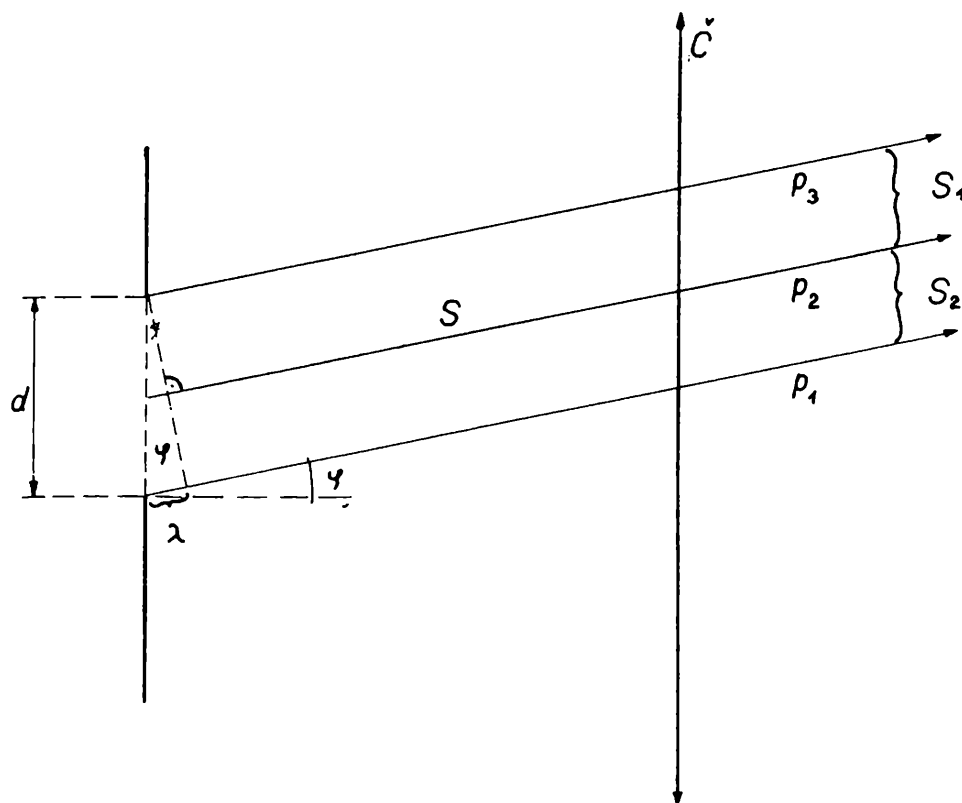
Provedme rozbor této rovnice. Na její levé straně stojí energie záření $h\nu$ a na pravé straně je energie vyraženého elektronu $\frac{1}{2}mv^2$, zvětšená o výstupní práci. Jinými slovy, rovnice (2) vyjadřuje zákon zachování energie systému atom + záření. Kvantum energie $h\nu$ vystupuje v rovnici (2) tak, jakoby příslušelo částici s energií $h\nu$. Tím lze dát Planckovu kvantu energie jasný fyzikální smysl. Elektromagnetické záření se chová tak, jako kdyby se skládalo z částic, z nichž každá nese energii $h\nu$. Těmto částicím (korpuskulím) světla říkáme f o t o n y. Einsteinův předpoklad, že elektromagnetické záření se skládá z fotonů o energii $\varepsilon = h\nu$, byl skvěle potvrzen i na řadě dalších jevů, o nichž se zde nebudeme zmiňovat.

Na druhé straně lze ukázat, že světlo za jistých okolností projevuje ohyb, který je však charakteristickým znakem vlnění. Uvedeme pokus, kterým lze pozorovat ohyb světla štěrbínou.



Obr. 1

Osvětlíme stínítko s úzkou štěrbinou silným jednobarevným světelným zdrojem (obr. 1). Štěrba se sama stane světelným zdrojem. Zobrazme ji spojnou čočkou na vzdálené stínítko a vložme mezi ni a čočku druhou štěrbinu, jejíž šířku lze jemným šroubkem měnit.



Obr. 2

Na stínítku v ohniskové rovině čočky se objeví ohybový jev. Jasný střední pruh je vrouben několika proužky střídavě tmavými a světlými.

Ohyb světla lze vysvětlit podle Huygensova principu. Každý bod štěrby se stává zdrojem nového elementárního vlnění. Světelné paprsky postupují od štěrby na všechny strany. Vyberme z nich svazek S navzájem rovnoběžných paprsků, které svírají s paprsky dopadajícími kolmo na štěrbinu úhel φ (obr. 2). Jednotlivé paprsky tohoto svazku nejsou ve stejné fázi, neboť se navzájem liší dráhovým rozdílem. Je-li d šířka štěrby, je dráhový rozdíl krajních paprsků svazku $\delta = d \sin \varphi$.

Uvažujme případ, kdy $\delta = \lambda$. Rozdělme v tomto případě svazek paprsků S ve dvě stejné části (S_1 , S_2 v obr. 2). Každému paprsku v jedné polovině svazku S odpovídá v druhé polovině paprsek s rozdílem $\frac{\lambda}{2}$, tedy s opačnou fází, takže se oba navzájem ruší. Poněvadž i ve svazku S' souměrném se svazkem S probíhá stejný děj, vzniknou po obou stranách středního světelného proužku první tmavé proužky.

Obecně ve všech směrech, pro něž se dráhový rozdíl krajních paprsků rovná celému počtu vln, tj.

$$\delta = d \sin \varphi = k,$$

kde $k = 1, 2, 3, \dots$, vznikají temné proužky. Ve směrech, pro něž

$$\delta = d \sin \varphi = (2k + 1) \lambda, \text{ pro } k = 1, 2, 3, \dots,$$

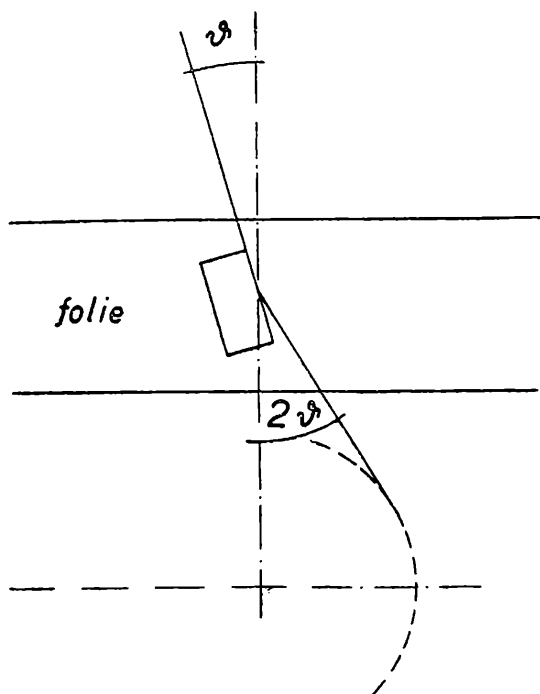
vznikají světlé proužky.

Přicházíme tak k paradoxnímu výsledku. Některé jevy totiž jako ohyb interference apod. svědčí o tom, že elektromagnetické záření je vlnové povahy a jak bylo uvedeno v prvním odstavci, lze fotoelektrický jev uspokojivě vysvětlit, připustíme-li korpuskulární podstatu elektromagnetického záření.

V nové formě se tak objevuje starý spor: je světlo vlnění, nebo se skládá z částic?

Tento dvojaký charakter „vlny-částice“ byl zjištěn především při studiu povahy světla. Ve snaze překonat obtíže spojené s tímto „dualismem“, Louis de Broglie¹⁾ navrhl r. 1924 odvážnou hypotézu, že dualismus není jen zvláštností optických jevů, ale že má platnost všeobecnou. Louis de Broglie praví: V optice se po celé století příliš uplatňoval korpuskulární způsob rozboru ve srovnání s vlnovým způsobem; nečinila se v teorii hmoty opačná chyba? Nepřemýšleli jsme příliš mnoho o představě „částice“ a nezanedbávali jsem přehnaně představu vln? To byla otázka položená de Brogliem.

De Broglie tedy připustil, že hmotné „částice“ mají vedle korpuskulárních vlastností rovněž vlastnosti vlnové.



Obr. 3

Uvedené myšlenky byly ihned experimentálně zkoumány. Ohyb elektronů je možno pozorovat na velmi tenkém lístku (fólii) různých kovů (Au, Ag, Al), tloušťky 10^{-8} až 10^{-9} m, jak ukázal r. 1927 G. P. Thomson²⁾. Na fotografické desce postavené kolmo ke směru katodových paprsků vzniknou vyvoláním koncentrické kruhy, odpovídající ohybu elektronů na mikroskopických krystalcích fólie, které mají všechny polohy a sklony. Zesílení nastává podle obr. 3 ve směrech odchýlených o úhly rovné dvojnásobkům úhlu φ . Tak bylo prokázáno, že elektrony se skutečně

¹⁾ Louis princ de Broglie (vyslov Lujd Broy, *1892) francouzský fyzik, nositel Nobelovy ceny (1929). Red.

²⁾ Sir George Paget Thomson (*1892), anglický fyzik, nositel Nobelovy ceny (1937). Red.

chovají v tomto případě jako vlnění a v jiných případech jako částice.

Vzniká tedy otázka, jakou vlnovou délku přiřadit částicím, které se pohybují danou rychlostí. K nalezení této veličiny postupoval de Broglie podle této úvahy:

V rovnici

$$\varepsilon = h\nu \quad (3)$$

použil vztahu $\nu = \frac{c}{\lambda}$, kde λ značí vlnovou délku elektromagnetického záření. Pro energii ε fotonu tak dostaneme vztah

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}, \text{ resp. } \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (4)$$

Veličina $\frac{\varepsilon}{c} = p$ však představuje v Maxwellově teorii impuls p elektromagnetické vlny, tudíž

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (5)$$

Poslední rovnici lze vyložit takto:

Elektromagnetické vlně s vlnovou délkou λ lze přiřadit částici (foton), jejíž impuls p je dán rovnicí (5). Vlnová délka je však historicky spojená pouze s pojmem vlnění a impuls se původně připisoval jen částicím. Jinými slovy, rovnice (5) určuje hledaný „přepočítávací“ vztah mezi vlnovými a korpuskulárními vlastnostmi, tj. vztah mezi vlnovou délkou a impulsem. Korpuskulární a vlnové vlastnosti elektromagnetického záření jsou tak spojeny jednoduchou rovnicí, která vyjadřuje vzájemnou neoddělitelnost obou vlastností.

Pro částici s hmotností m a rychlostí v je impuls p dán vztahem

$$p = mv, \quad (6)$$

dosadíme-li tento vztah do rovnice (5), dostaneme tzv. *de Broglieovu rovnici*

$$mv = \frac{h}{\lambda}, \text{ resp. } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}. \quad (7)$$

Na pravé straně této rovnice stojí rychlost, resp. impuls částice a na levé straně vlnová délka, příslušná této částici. Jinými slovy, rovnice (7) udává, jakou vlnovou délku máme přiřadit částici, která se pohybuje rychlostí v . Tato vlnová délka, zvaná *de Broglieova vlnová délka*, určuje např. velikost a tvar difrakčních obrázků, které vzniknou po průchodu částic krystalem. Experimenty mluví zcela jednoznačně ve prospěch de Broglieovy rovnice.

Dualismus vln a částic je objektivní fakt, jasně ukazující, že vžitě dělení matérie na vlny a částice platí pouze přibližně a v obecném případě nutno obě vlastnosti uvažovat současně.



Odvození 1. a 3. Keplerova zákona z gravitačního zákona (Dokončení)

LUBOMÍR VAŠEK, Gottwaldov

Podle 2. zákona Keplerova (zákon ploch) jsou plochy opsané průvodičem planety ve stejných dobách stejné. Proto podle obr. 2 můžeme psát

$$\frac{1}{2} v \cdot s \cdot \sin \vartheta = \frac{1}{2} v_n \cdot r \cdot \sin (90^\circ - \varphi),$$

čili

$$v \cdot s \cdot \sin \vartheta = v_n \cdot r \cdot \cos \varphi.$$

Odtud

$$v_n = \frac{v \cdot s \cdot \sin \vartheta}{r \cdot \cos \varphi}. \quad (9)$$

Dosazením z (9) do (8) dostaneme

$$\frac{v^2 \cdot s^2 \cdot \sin^2 \vartheta}{r^2 \cdot \cos^2 \varphi} - v^2 = 2\gamma_s \cdot s^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right).$$

Jednoduchou úpravou obdržíme vztah

$$r^2 - 2 \cdot \frac{\gamma_s \cdot s^2}{2\gamma_s \cdot s - v^2} \cdot r = - \frac{v^2 \cdot s^2 \cdot \sin^2 \vartheta}{2\gamma_s \cdot s - v^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi}. \quad (10)$$

Srovnáním rovnice (10) s rovnicí (2) vychází, že drahou planety je elipsa, jejíž poloosy jsou

$$a = \frac{\gamma_s \cdot s^2}{2\gamma_s \cdot s - v^2}, \quad b = \frac{v \cdot s \cdot \sin \vartheta}{\sqrt{2\gamma_s \cdot s - v^2}}. \quad (11)$$

Z uvedeného vyplývají tyto důsledky:

$$1. \text{ Je-li } v^2 \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 2\gamma_s \cdot s, \text{ je hlavní osa } \begin{cases} \text{kladná} \\ \text{nekonečně dlouhá} \\ \text{záporná} \end{cases},$$

$$\text{vedlejší osa } \begin{cases} \text{konečná, kladná} \\ \text{nekonečně dlouhá} \\ \text{imaginární} \end{cases}$$

$$\text{to znamená, že dráhou planety je } \begin{cases} \text{elipsa} \\ \text{parabola} \\ \text{hyperbola} \end{cases}$$

2. Délka hlavní osy není závislá na úhlu ϑ , tedy nezávisí na směru počáteční rychlosti. Naproti tomu délka vedlejší osy se mění úměrně se sinem úhlu ϑ .

3. Vznikne-li elipsa (viz důsledek 1), je její obsah

$$S = \pi a \cdot b = \pi \frac{\gamma_s \cdot v \cdot s^3 \cdot \sin \vartheta}{\sqrt{(2\gamma_s \cdot s - v^2)^3}}.$$

V první časové jednotce opíše průvodič plochu

$$S_1 = \frac{1}{2} s \cdot v \cdot \sin \vartheta.$$

Poněvadž podle 2. Keplerova zákona musí být v každé další časové jednotce opsána průvodičem stejně veliká plocha, je doba oběžná

$$T = \frac{S}{S_1} = \frac{\pi \cdot \frac{\gamma_s v s^3 \cdot \sin \vartheta}{\sqrt{(2\gamma_s \cdot s - v^2)^3}}}{\frac{1}{2} \cdot s \cdot v \cdot \sin \vartheta} = \frac{2\pi \gamma \cdot s^2}{\sqrt{(2\gamma_s \cdot s - v^2)^3}};$$

což znamená, že

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \gamma_s^2 s^4}{(2\gamma_s \cdot s - v^2)^3} = \left(\frac{\gamma_s \cdot s^2}{2\gamma_s \cdot s - v^2} \right)^3 \cdot \frac{4\pi^2}{\gamma_s \cdot s^2}.$$

S přihlédnutím ke vztahům (11) a (7) obdržíme

$$T^2 = a^3 \cdot \frac{4\pi^2}{\gamma},$$

kde γ je opět zrychlení dostředivé v jednotkové vzdálenosti od Slunce, které je konstantní.

Proto rovnici (12) můžeme psát ve tvaru

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} = \text{konstanta},$$

což není nic jiného než 3. zákon Keplerův.

jsou shodné; pro úhlopříčky AD , NS z toho plyne, že $AD \parallel NS$. Z této rovnoběžnosti dále vyplývá: $S_A S_D \perp SN$.

K o n s t r u k c e Předchozího vztahu využijeme ke konstrukci vrcholu elipsy. Ze středu S (průsečíku úhlopříček $S_A S_B$, $S_C S_D$) vedeme kolmici na $S_A S_D$. V jejím průsečíku s přímkou $S_A S_C$ je bod N . Paty kolmic z bodu N na osy elipsy jsou vrcholy A , C hledané elipsy.

D i s k u s e: Všechny uvedené konstrukce jsou jednoznačné a vždy možné. Úloha má jediné řešení.

P o z n á m k a: Řada řešitelů užila při řešení výpočtů, a tím převedla úlohu na konstrukci algebraických výrazů.

● Fyzika

1. Anténa televizního přijímače může kromě přímých signálů vysílačky zachytit i vlny odražené od okolních předmětů (tovární hala, plynojem). Jejich zachycení se projeví vznikem slabšího obrazu, který je na obrazovce vzhledem k základnímu obrazu vodorovně posunut.

Z velikosti posunutí je možno zjistit — obdobně jako u radaru — vzdálenost předmětu. Naše televize vysílá za sekundu 50 půlobrazů (střídavě jsou kresleny liché a sudé řádky), tedy 25 úplných obrazů o 625 řádcích. Na jeden obraz však nepřipadá celá pětadvacetina sekundy. 24 % tohoto časového úseku připadá na pomocné signály a teprve ve zbývajícím čase se paprsek pohybuje po obrazovce při kreslení obrazu.

Na základě těchto údajů vypočtete vzdálenost mezi anténou přijímače a odrážejícím předmětem, je-li šířka obrazovky 30 cm a posunutí obrazu 5 cm. Předpokládejte, že elektronový paprsek se pohybuje po obrazovce vodorovně.

(Došlo 25 řešení)

František Janáček

Řešil Richard Špišek, 4b, SVVŠ, Brno, Koněvova:

Časové zpoždění Δt odraženého signálu za signálem přímým je

$$\Delta t = \frac{d}{v}, \quad (1)$$

kde d je velikost posunutí slabšího obrazu vzhledem k základnímu a v je rychlost pohybu elektronového paprsku po obrazovce.

Odražený signál přichází k anténě přijímače o dobu Δt později než přímý signál z vysílače. Tomuto zpoždění odpovídá rozdíl drah přímého a odraženého signálu

$$\Delta s = c \cdot \Delta t,$$

kde c je rychlost šíření elektromagnetických vln ($\doteq 3 \cdot 10^8$ m/s)

Po dosazení z rovnice (1) je

$$\Delta s = \frac{cd}{v}. \quad (2)$$

Ze vztahu $v = \frac{s_1}{t}$, kde $s_1 = 25.625.0,3$ m a $t = \frac{76}{100}$ s dostáváme $v = 6\,167,8$ m/s a $\Delta s = 2\,432$ m.

Je-li $2s$ vzdálenost přijímače od vysílače, je součet vzdáleností odražejícího předmětu od vysílače (r_1) a přijímače (r_2)

$$r_1 + r_2 = 2s + \Delta s,$$

takže předmět leží na elipse, která má ohniska v místě vysílače a přijímače a délku hlavní osy $2a = 2s + \Delta s$. Úloha má nekonečně mnoho řešení. Protože však je anténa přijímače směrová, budou odražené signály nejsilnější od předmětů, které leží na spojnici míst vysílače a přijímače (za televizní anténou vzhledem k přijímači) ve vzdálenosti $\frac{\Delta s}{2} = 1\,216$ m.

● Matematika

10. Vyšetrite, ktorou číslicou v desiatkovej sústave môže končiť kombinačné číslo $\binom{n}{4}$ pro $n = 4, 5, 6, 7, \dots$.
(Došlo 35 řešení)

Jiří Sedláček

Riešila Tamara Marcisová, 3.d SVŠ, Bratislava:

Vieme, že $\binom{n}{4}$ pre $n = 4, 5, 6, 7, \dots$ je vždy prirodzené číslo, pričom platí

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \quad (1)$$

Číslo n môžeme vždy napísať práve jedným z týchto 5 spôsobov:

$$\left. \begin{array}{l} n = 5k \\ n = 5k + 1 \\ n = 5k + 2 \\ n = 5k + 3 \\ n = 5k + 4, \end{array} \right\} \begin{array}{l} k \text{ je vhodné prirodzené číslo} \\ k \text{ je vhodné celé nezáporné číslo.} \end{array} \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \\ (e) \end{array}$$

V prípadoch (a), (b), (c), (d) dosadením do (1) ľahko zistíme, že čitateľ zlomku je násobok 5; keďže menovateľ nie je deliteľný 5, číslo $\binom{n}{4}$ pre takéto n je násobkom 5 a musí preto končiť vždy na jednu z číslic 0,5.

V prípade (e) dosadením do (1) dostaneme

$$\binom{n}{4} = \frac{(5k+4)(5k+3)(5k+2)(5k+1)}{4!}, \text{ tj.}$$

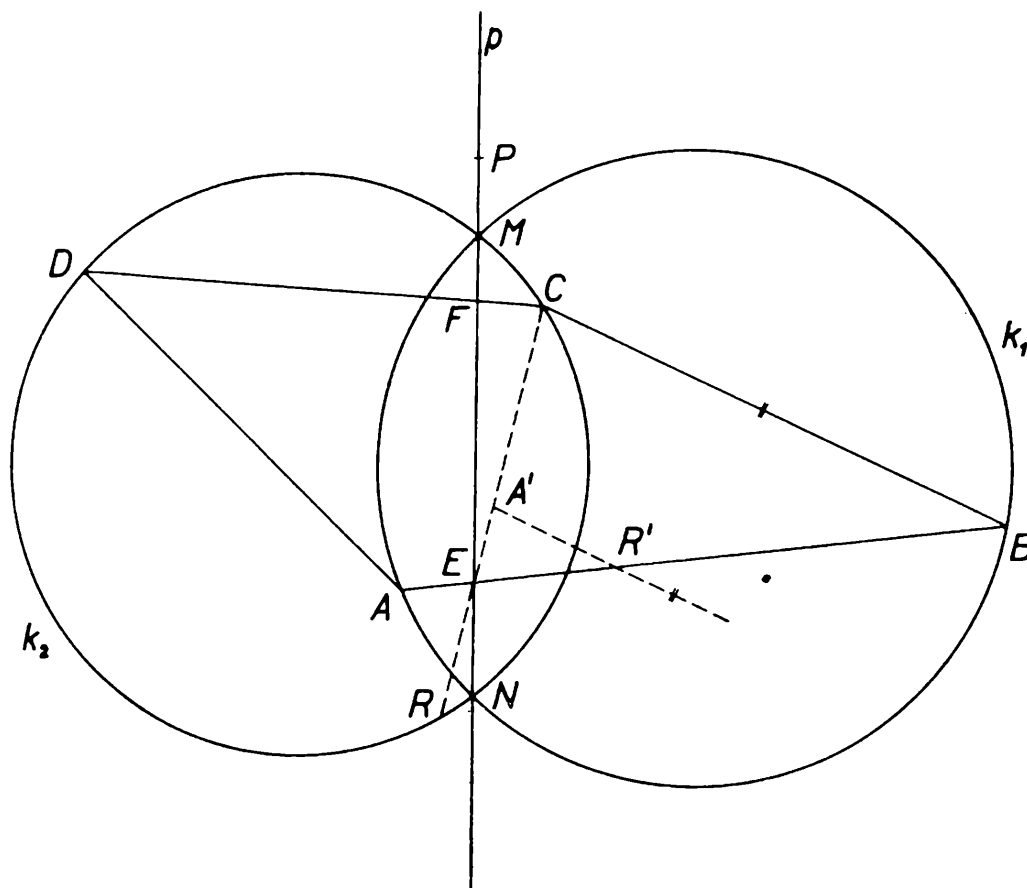
$$\binom{n}{4} = \frac{5K + 4!}{4!} = \frac{5K}{4!} + 1, \quad (2)$$

K je vhodné celé nezáporné číslo. Z (2) vidíme, že pre n z možnosti (e) musí číslo $\binom{n}{4}$ vždy končiť jednou z číslic 1, 6, lebo číslo $\frac{5K}{4!}$ je celé nezáporné číslo a keďže 5 nedelí $4!$, musí byť deliteľné 5 a teda končiť jednou z číslic 0, 5.

Zistili sme, že číslo $\binom{n}{4}$ pre $n = 4, 5, 6, 7, \dots$ musí vždy končiť na jednu, z číslic 0, 1, 5, 6. Lahko sa presvedčíme, že na každú z týchto 4 číslic kombinačné číslo $\binom{n}{4}$ pre $n = 4, 5, 6, 7, \dots$ končiť môže, lebo napr. *

$$\binom{8}{4} = 70, \quad \binom{4}{4} = 1, \quad \binom{5}{4} = 5, \quad \binom{9}{4} = 126.$$

Zhrnutie: kombinačné číslo $\binom{n}{4}$ pre $n = 4, 5, 6, 7, \dots$ môže končiť vždy jednou z číslic 0, 1, 5, 6, a žiadnou inou.



11. Je dán obecný čtyřúhelník $ABCD$ a přímka p , která protíná strany AB , CD ve vnitřních bodech E , F . Body A , B vedte kružnici k_1 a body C , D kružnici k_2 ; ták, aby průsečky M , N kružnic k_1 , k_2 ležely na přímce p . (Došlo 18 řešení)

Ota Setzer

Řešil Richard Spíšek, III.b SVVŠ, Brno, Koněvova:

R o z b o r: Předpokládejme, že jsme úlohu již vyřešili (obr. 1). Kružnice k_1, k_2 se protínají v bodech M, N , jež leží na přímce p , která je tedy chordálou obou kružnic. Pro každý bod P přímky p pak platí

$$m_{k_1} = m_{k_2} \quad (1)$$

kde m_{k_1} je mocnost bodu P ke k_1 a m_{k_2} mocnost bodu P ke k_2 .

Pro bod E je pak podle (1)

$$EA \cdot EB = EC \cdot ER, \quad (2)$$

kde R je průsečík přímky CE s kružnicí k_2 .

Na polopřímkách EC, EB sestrojíme nyní pořadě body A', R' tak, aby $EA' = EA, ER' = ER$.

Vzhledem ke (2) pak platí

$$\frac{EC}{EA} = \frac{EB}{ER}, \quad \text{neboli} \quad \frac{EC}{EA'} = \frac{EB}{ER'}. \quad (3)$$

Z rovnice (3) plyne, že úsečky BC a $R'A'$ jsou stejnohlé podle středu E , proto $R'A' \parallel BC$.

K o n s t r u k c e: V rovině narýsujeme obecný čtyřúhelník $ABCD$ a přímku p , která protíná strany AB, CD ve vnitřních bodech E, F . Na polopřímce EC najdeme bod A' tak, aby $A'E = AE$. Bodem A' vedeme rovnoběžku s přímkou BC . Tato rovnoběžka protne polopřímku EB v bodě R' . Na opačné polopřímce EC pak sestrojíme bod R tak, aby platilo $ER = ER'$.

Hledaná kružnice k_2 je opsána trojúhelníku RCD , hledaná kružnice k_1 je určena svými třemi body A, B, M kde M je průsečík kružnice k_2 s přímkou p .

D ů k a z správnosti konstrukce se provede, když dokážeme, že přímka p je skutečně chordálou takto sestrojených kružnic k_1, k_2 . Kružnice k_2 byla sestrojena tak, aby bod E měl touž mocnost ke kružnicím k_1, k_2 , přičemž jsme využili známých bodů A, B kružnice k_1 . Je tedy bod E bodem chordály kružnic k_1, k_2 . Kružnice k_1 byla sestrojena tak, aby šla bodem M . Pro něj je zřejmě $m_{k_1} = m_{k_2} = 0$ (průsečík kružnic), je tedy bod M bodem chordály k_1, k_2 . Chordála kružnic k_1, k_2 tedy prochází body E, M , jež však patří přímce p , čímž důkaz proveden.

D i s k u s e: Pro jakoukoli polohu bodů A, B, C, D lze vždy vést přímku CE a na ní nalézt právě jeden bod R . Jedinému bodu R odpovídá jediná kružnice k_2 a tím i jediná kružnice k_1 . Naše úloha má vždy jediné řešení.

12. Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y , které splňují soustavu rovnic

$$\cos x + \cos y = \cos(x + y) \quad (1)$$

$$\sin x + \sin y = \sin(x + y) \quad (2)$$

(Došlo 42 řešení)

Jaroslav Zemánek

Riešila Tamara Marcisová, 3.d SVŠ, Bratislava:

Upravujeme rovnicu (2); na ľavej strane prevedieme súčet funkcií, na pravej nahradíme polovičným uhlom.

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2},$$

tj.
$$\sin \frac{x+y}{2} \cdot \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = 0.$$

Nahradíme rozdiel funkcií; po úprave dostaneme

$$\sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{y}{2} = 0.$$

Súčin je rovný 0 práve vtedy, ak aspoň jeden z jeho činiteľov je 0. Musí byť teda splnený aspoň jeden zo vzťahov I, II, III, kde

$$\text{I} \equiv \sin \frac{x+y}{2} = 0, \Rightarrow \frac{x+y}{2} = k\pi, x+y = 2k\pi, y = -x + 2k\pi$$

$$\text{II} \equiv \sin \frac{x}{2} = 0, \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi, x = 2k\pi,$$

$$\text{III} \equiv \sin \frac{y}{2} = 0, \Rightarrow \frac{y}{2} = k\pi, y = 2k\pi,$$

všade k je celé číslo. Každú z týchto možností dosadíme do (1):

$$\cos x + \cos(-x + 2k\pi) = \cos 2k\pi,$$

$$2 \cos x = 1, \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

podľa I potom $y_{1,2} = \mp \frac{\pi}{3} + 2k'\pi$; k, k' sú celá čísla.

Skúškou — dosadením do (1), (2) — sa presvedčíme, že obe dvojice koreňov, (x_1, y_1) i (x_2, y_2) splňujú danú sústavu rovníc.

Z II plyne $\cos 2k\pi + \cos y = \cos(y + 2k\pi)$, $1 + \cos y = \cos y$, $1 = 0$, čo nie je možné. Pretože v rovniciach (1), (2) sú neznáme x, y rovnocenné, nemôže vyhovovať ani možnosť III.

Zhrnutie: Danú sústavu rovníc riešia reálne x, y , pre ktoré platí

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, y = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi;$$

alebo
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, y = \frac{\pi}{3} + 2k'\pi,$$

kde k, k' sú celé čísla, a žiadne iné.

Riešení úloh z konštruktívnej geometrie zašlete redakcii najpozdšie do 15. dubna 1966.



R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě

Profesor Joliot-Curie

PROF. DR. VILÉM SANTHOLZER, Dr. Sc., KU, Hradec Králové

O Joliotovi-Curie (čti žolijo-kyry) bylo vydáno asi 40 prací různého rozsahu, jejichž autoři většinou čerpali jeden od druhého a převážně se zaměřili jen na životopis a politickou činnost. Pouze dvě publikace se aspoň částečně zabývají Joliotovou vědeckou činností. Je to především monografie Joliotova spolužáka a fyzika Biquarda, který však pracuje v jiném oboru a brožura, kterou napsal žurnalista Rouzé, vydaná r. 1950; tato však nezachycuje posledních osm let velmi pohnutého Joliotova života.

Čs. společnost pro šíření politických a vědeckých znalostí vydala r. 1965 knihu *Frédéric Joliot-Curie*, od akademika F r. B ě h o u n k a, který na rozdíl od všech ostatních autorů věnuje zvýšenou pozornost také vědecké práci Joliot a jeho choti Ireny Joliotové-Curie. Akademik Běhounek je k tomu autorem nad jiné povolaným, neboť v ústavě paní Curieové pracoval a s prof. Joliotem-Curie jej pojilo osobní přátelství. Ještě za svého života Joliot mu poskytl některé fotografické snímky a některé informace mu dala i Joliotova dcera Helena Langevinová (čti lánžvenová) (provdaná za syna známého pařížského fyzika Langevina), prof. M. Haissinski aj.

Frédéric Joliot původně byl inženýrem, absolventem Průmyslové školy fyziky a chemie (Ecole de Physique et de Chimie industrielles) v Paříži. Je to městský ústav, který přijímá absolventy střední školy a ve tříletém studiu je vyškolí na inženýry fyziky a chemie pro soukro-

mé podniky. Škola měla vždy vynikající profesory, působil zde i Pierre Curie. Inženýru Joliotovi jako jednomu ze svých nejlepších žáků dal doporučení sám ředitel školy fyzik Paul Langevin. A to Joliotovi dopomohlo k místu soukromého asistenta u paní Curieové. Plat byl 540 franků měsíčně, asi třikrát méně než v průmyslu, avšak Joliot toužil po vědecké experimentální práci. Tak se roku 1925 stal vědeckým pracovníkem v Institut du Radium, Pavillon Curie. Při pavilónu byl ještě oddělený, malý pavilónek, zvaný „aktivní“, neboť zde byl trezor s roztokem půl druhého gramu rádia. (Paní Curieová dostala od amerických žen darem dvakrát po gramu rádia, které dala k dispozici léčebným a vědeckým účelům.) Radon hromadící se v roztoku byl odčerpáván a koncentrován do skleněných kapilár. V sousedním ústavě, zv. Pavillon Pasteur, používalo se jich k léčebným účelům. Ozařování se provádělo také pomocí radiových solí uzavřených v radioforech. Pavilón tenkrát vedl významný chirurg prof. Regaud (čti regó) se svým asistentem Lacassagnem (čti lakasaň-). Kapiláry po vymření radonu dostával Pavillon Curie k extrakci polonia, které je dceřinnou látkou radonu. Silně aktivní poloniové preparáty umožnily manželům Joliotovým později objev umělé radioaktivity.

Za necelý rok po příchodu do laboratoře Curie uzavřel Joliot sňatek s Irenou Curie, dcerou paní Curieové, která v této laboratoři pracovala v otázkách radiochemie i radiologické fyziky. Joliot nebyl kariéristou a vbrzku si našel jiné místo. Stal se profesorem na Průmyslové škole elektrotechnické (Ecole d'Electricité industrielle Charliat), kde přednášel o měření elektřiny. Nebyl už odkázán na 540 franků paní Curieové, avšak i nadále v laboratoři Curie vědecky pracoval. R. 1927 narodila se manželům Joliotovým dcera Helena. Syn Pierre se narodil až v r. 1932.

První vědecký úkol, který Joliot řešil a jež později rozpracoval na doktorskou dizertační práci, byla elektrochemie polonia, vylučování tohoto přírodního radioaktivního prvku z roztoku na kovových elektrodách. Joliot postupně vybavil laboratoř Curie také Wilsonovou mlžnou komorou, vhodnou k fotografování drah ionizujících částic a elektromagnetem k zakřivování těchto drah a určování jejich energie.

Koncem roku 1930 němečtí fyzikové Bothe a Becker vyvolávali sekundární záření bombardováním hmoty částicemi alfa. Používali terčů z lehkých prvků lithia, berylia a bóru. Domnívali se, že vznikající druhotné záření jsou neobyčejně pronikavé paprsky gama. Manželé Joliotovi tyto pokusy opakovali a potvrdili výsledky Němců. Měli sice mnohem silnější poloniový zdroj, avšak výklad jejich pokusu byl stejně chybný, i když se jim podařilo prokázat, že nové „záření gama“ je s to vyrážet z látek obsahujících vodík atomová jádra vodíku protony. To byl pozoruhodný objev, o němž Joliotovi předložili zprávu Akademii věd dne 11. ledna 1932. Avšak 27. února 1932 uveřejnil prof. Chadwick

(čti čedvik) v anglickém časopisu Nature (čti nejčr) krátký článek s nadpisem *Možnost existence neutronů*. Obdržel za něj později Nobelovu cenu, neboť objevil druhou základní částici hmoty *neutron*.

Manželům Joliotovým unikla Nobelova cena i podruhé, aniž si to uvědomili. Na některých svých snímcích, získaných Wilsonovou komorou umístěnou v magnetickém poli, objevili stopy elektronů zakřivené opačným směrem. Domnívali se, že jde o následek silného rozptylu paprsků gama, které uvádějí elektrony do pohybu v nejrůznějších směrech. Ve skutečnosti to byly snímky první objevené antičástice *positronu*, kladného elektronu předpověděného Diracem (čti dyrak-). Stopa positronu byla fotografována dne 2. srpna 1932 Andersonem v Kalifornii pomocí Wilsonovy komory při podrobném výzkumu kosmického záření.

Bombardováním lehkých prvků, zejména berylia částicemi alfa, uvolňují se neutrony i paprsky gama, takže Joliotovi byli na stopě objevu neutronu i positronu. Positrony vznikaly přeměnou fotonů, hmoty ve formě pole na hmotu ve formě látkové, na negatrony a positrony.

Joliotovi pak pokračovali ve studiu záření, které vzniká odstřelováním různých prvků částicemi alfa. Začátkem roku 1933 se jim podařilo zjistit, že v některých případech, když je např. terčem bór nebo hliník, jsou neutrony doprovázeny i positrony. Později se jim podařilo dokázat, že positrony jsou vymršťovány i po odnesení zdroje částic alfa do vedlejší místnosti a že množství positronů vyzařované hliníkem pak ubývá podle zákona, jímž se řídí radioaktivní prvky. Nebylo jiného vysvětlení, než že poprvé v dějinách fyziky se podařilo člověku vyrobit umělý radioaktivní prvek. Jiní fyzikové, např. Rutherford a Meitnerová, kteří prováděli stejné pokusy, positronové záření nezjistili, neboť používali mnohem slabších zdrojů záření alfa než Joliotovi.

Objev byl dne 15. ledna 1934 předložen pařížské Akademii věd a současně byla zaslána zpráva do Nature. Koncem r. 1934 obdrželi manželé Joliotovi za objev umělé radioaktivity Nobelovu cenu. Joliot se stal docentem Sorbonny a o dva roky později profesorem slavné vysoké školy Collège de France, která svými výběrovými přednáškami je vlastně doplňkem university. Zde dostal za úkol zřídit laboratoř jaderné chemie, jejímž úkolem by bylo studium jaderných reakcí a umělé radioaktivity. Cyklotron, jímž měla být laboratoř vybavena, byl dostavěn až těsně před vypuknutím války. Joliot a jeho spolupracovníci Halban a Kowarski začali mezitím experimentovat se štěpením atomového jádra, které roku 1938 objevili Hahn a Strassmann, což vzbudilo neobyčejnou pozornost v laboratořích celého světa.

Joliot se spolupracovníky dokázal v dubnu r. 1939, že při každém jednotlivém štěpení uranového jádra se uvolní $3,5 \pm 0,7$ neutronu, takže

je možnost vzniku řetězové reakce. Ve skutečnosti přesné číslo pro uran 235 — dlouho utajované ve vojenských trezorech — je 2,6 neutronu. V další práci v červnu r. 1939 Joliot určil hranice, mezi nimiž je energie těchto neutronů.

Dne 3. září r. 1939 vstoupila Francie do války s hitlerovským Německem. V knize akademika Běhounka je podrobně vyličen, jak Joliot ukryval celou tehdejší zásobu těžké vody, kterou získala Francie a jak ji v červnu r. 1940 Halban a Kowarski zcela zbytečně převáželi do Anglie, neboť uvolnění atomové energie se podařilo bez těžké vody jinou cestou, a to pomocí moderátoru tuhového.

Nacistům se nepodařilo zmocnit se výsledků vědecké práce francouzských badatelů, které by se jim hodily k hledání cesty k uvolnění atomové energie s konečným cílem výroby atomové pumy. Joliot se brzy zapojil do hnutí odporu proti okupantům. Velmi aktivním členem odbojového hnutí byl i jeho kolega fyzik Jacques Solomon, zeť profesora Langevina, později zastřelený hitlerovci na smutně proslulém popravišti Mont-Valérien.

Jako důsledek objevu uvolnění atomové energie byl francouzskou vládou po válce zřízen Komisariát pro atomovou energii, jehož „vysokým komisařem“ byl jmenován Joliot-Curie. Joliotovou zásluhou byl roku 1948 uveden do provozu první francouzský reaktor, zv. ZOE. Joliot později vybudoval také Laboratoř jaderné fyziky přírodovědecké fakulty pařížské Sorbonny. Její stavba byla zahájena v Orsey u Paříže r. 1955. Joliot tam začal již v roce 1957 stěhovat zařízení své laboratoře z Collège de France a fyzikální zařízení z laboratoře Curie, kde po smrti své choti byl jmenován ředitelem. Irena Joliotová-Curieová zemřela roku 1956 na následky své dlouholeté práce s radioaktivními látkami. Joliot převzal po ní i profesuru na Sorbonně a působil na dvou pracovištích, kde zatím zahájila nástup již třetí generace — Joliotova dcera Helena, provdaná za Langevinova syna, pracovala u svého otce v laboratoři Curie.

V knize akademika Běhounka je podrobně vyličen střetnutí Joliot s francouzskými vládními činiteli, které vyvrcholilo sesazením Joliot z místa „vysokého komisaře“. Joliot byl vždycky pro mírové využití atomové energie a nesouhlasil s vojenským atomovým programem. Jako odborník dobře věděl, kam by lidstvo zavedla nukleární válka. Francouzská vláda na druhé straně chtěla vytvořit vlastní force de frappe, atomovou údernou sílu. První francouzská atomová puma byla odpálena na Sahaře až dvě léta po smrti Joliot-Curie, který zemřel roku 1958 ve věku padesáti osmi let. (V současné době francouzská armáda připravuje odpálení první vodíkové pumy v Polynésii. V Komisariátu pro atomovou energii je nyní zaměstnáno přes 20 tisíc pracovníků. Ve Francii je 17 výzkumných reaktorů a několik velkých reaktorů vojenských v Marcoule (čti markul) u Avignonu (čti aviňon) na řece Rhóně, jejichž

účelem je vyrábět plutonium pro jaderné pumpy. Několik dalších reaktorů je ve stavbě.)

Zvláštní kapitolou by byla neúnavná práce Joliotova ve Světové radě míru a jeho neohrožený boj za nukleární odzbrojení. Za ně bojoval zvláště v posledních letech svého života a do posledních svých sil. Jeho smrt byla nesmírnou ztrátou pro lidstvo. Profesora Joliot-Curie právem řadíme mezi velikány našeho století a věříme, že jeho ušlechtilé úsilí nebylo marné.

Proč jaderné elektrárny

DOC. DR. JOSEF DIBELKA, ČVUT, Praha

Snahou všech průmyslově vyspělých států je osvobodit lidstvo od únavné fyzické práce a tím zvýšit produktivitu výroby. Je patrné, že zvýšení produktivity je odvislé od získání levných energetických zdrojů. V dnešní době je na celém světě asi 50 % celkové energie získáváno z uhlí, druhá polovina je kryta ropou, zemními plyny, vodními toky a jadernými palivy. Avšak situace v zásobách uhlí není růžová. Podle některých statistik se udává celková zásoba černého uhlí na $3600 \cdot 10^9$ tun, hnědého uhlí na $1200 \cdot 10^9$ tun. Za předpokladu, že růst potřeby energie bude mít dosavadní (ne však vyšší) vzrůstající tendenci, odhaduje se, že tyto zdroje energie budou vyčerpány za 90-120 let. Z toho je patrné, proč v celém světě již dnes se hledají stále nové zdroje energie.

I u nás je trvale stoupající tendence ve spotřebě energie. Do roku 1970 bude možno objem domácích zdrojů energie zvýšit asi o 40 % proti roku 1960, ale s dalším zvyšováním klasických zdrojů energie je již konec. Takže po roce 1975 bude naše celková energetická bilance deficitní. Abychom tomu zabránili, bude nutno energii „dovážet“. Dovedeme-li v roce 1980 již 25 % potřebné energie, budeme mít ještě značný neuhrazený schodek mezi

spotřebou a výrobou energie. Aby byla kryta zvýšená spotřeba energie, bylo by nutno vybudovat ještě několik klasických elektráren, a to přímo u dolů (dálková doprava uhlí je neekonomická). Ale výstavba nových tepelných elektráren přináší velké nároky jednak na spotřebu vody, jednak na dálkový rozvod elektrické energie. K tomu však přistupuje i další nepříjemná okolnost. Naše hnědé uhlí má značný obsah síry (černé uhlí bude nutno uchovávat pro metalurgii), takže spalováním tohoto uhlí uniká do vzduchu velké množství kyslíčnicku siřičitého, které jednak značně zamořuje okolí, jednak má velmi nepříznivý vliv na vegetaci. Dosavadní zařízení na likvidaci tohoto kyslíčnicku je velmi nákladné a podstatně zdražuje výrobu energie. Krýt schodek energie z vodních toků je již v dnešní době podstatně omezeno pro nedostatek vody a perspektivně význam hydroelektráren pro energetiku bude klesat.

Z toho je patrné, že u nás jeden z hlavních zdrojů energie budou jaderná paliva spalovaná v jaderných elektrárnách. Po dobudování naší první jaderné elektrárny v Bohunicích, která má do značné míry ještě charakter experimentální, bude přikročeno k budování dalších jaderných energetických zařízení.

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

souhrn
souměrně, souměrný
souměrnost osová, středová
souměrný podle osy
souřadnice
souřadnice x , y , z
sousedící, sousední
soustava
soustředný
souvislost, souvislý
speciální případ
spirála
splňovat (podmínky)
splynout, splývat
spočítat
spojení
spojitý
společný
spor, důkaz sporem

správný
spustit (kolmici)
srovnávat
stále
stanovit
stejný
stěna
stereometrie
stín vlastní, vržený
stopa, stopník
strana trojúhelníka
strana lomené čáry
strana rovnice
střed
střed podobnosti
střední, střední příčka
středový
střídat se
studovat

совокупность
симметрично, симметричный
симметрия осевая, центральная
осесимметричный
координата
абсцисса, ордината, аппликата
смежный
семейство, система
концентрический
связь, ж., связный
частный случай
спираль, ж.
выполнять
совместиться, совпадать, совпасть
подсчитать
соединение
непрерывный
общий
противоречие, доказательство от
противного
правильный
вести, опускать, опустить
сопоставлять
постоянно
установить
одинаковый
грань
стереометрия
тень собственная, падающая
след
сторона треугольника
звено
часть уравнения
центр, середина
центр подобия
средний, средняя линия
центральный
чередоваться
заниматься (чем то), изучать (что то)

stupeň
 stupnice, reciproká
 stý, stá
 styk
 subnormála
 substituce
 substituovat, provést substituci
 subtangenta
 sudý
 svazek (přímek, rovin)
 svislice
 svislý
 svírat stejné úhly
 symbol
 symetrie
 systém, soustava

šířka

tabulka
 takto, takovýmto způsobem
 tangens
 tečna
 tedy
 tehdy a jen tehdy
 těleso rotační
 tětíva
 těžiště
 těžnice
 trajektorie
 transformace
 translace
 trigonometrický
 trigonometrie
 trimetrie
 trisekce
 trojhran
 trojhranný
 trojúhelník opsaný, ostroúhlý, Pascálův, pravoúhlý, pravoúhlý rovnoramenný, pytagorejský, rovnoramenný, rovnostranný, tupoúhlý, vepsaný

trojúhelníkový
 trs (přímek, rovin)
 tudíž
 tuna
 tvar
 tvořit
 tvrdit, tvrzení

týkat se
 tíž

степень, градус, порядок
 шкала, обратная шкала
 сотый, сотая
 касание
 поднормаль, субнормаль, ж.
 подстановка, замена
 подставить, подставлять
 подкасательная
 четный
 связка, пучок
 вертикаль, ж.
 вертикальный
 заключать равные углы
 символ
 симметрия
 семейство, система

Š

ширина, широта

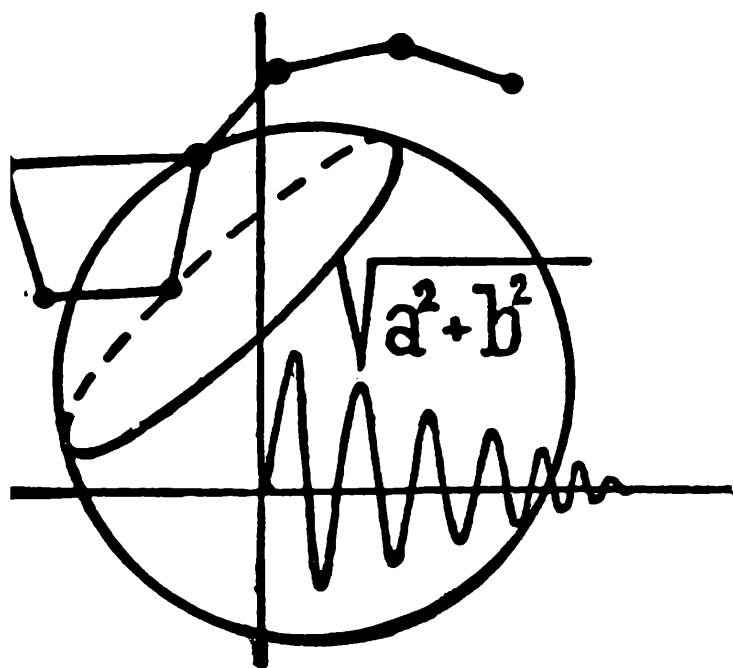
T

таблица
 таким образом
 тангенс
 касательная
 значит, следовательно
 тогда и только тогда
 тело вращения
 хорда
 центр тяжести
 медиана
 траектория
 преобразование
 трансляция, перенос, перемещение
 тригонометрический
 тригонометрия
 триметрическая проекция
 трисекция
 трехгранник, трехгранный угол
 трехгранный
 треугольник описанный, остроугольный, Паскаля, прямоугольный, прямоугольный равнобедренный, пифагорейский, равнобедренный, равносторонний, тупоугольный вписанный
 треугольный
 связка, пучок
 следовательно
 тонна
 форма, вид
 порождать, образовать, составлять
 утверждать; утверждение, предложение
 касаться
 одинаковый

{ Pokračování }

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



6

ROČ. 44
1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamení Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Únor 1966

Číslo 6

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PÚ, Olomouc; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSo. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, MÚ ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

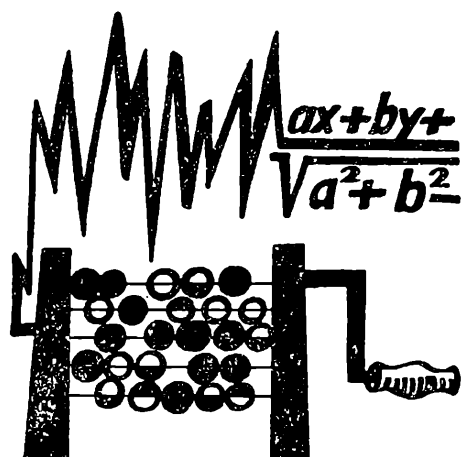
F. Denk: Jak daleko lze dohlédnout na moři?	241
F. Janeček: Vlastnosti tětiového čtyřúhelníka . . .	244
M. Valešová: Numerické řešení rovnic (Dokončení).	248
Doc. O. Setzer: Lineární programování (Dokončení).	254
Doc. dr. M. Menšík a kol.: Příjímací zkoušky z deskriptivní geometrie na ČVUT	257
Doc. B. Kepr: O některých křivkách (Pokračování).	263
S. H.: Kdo vysvětlí tuto záhadu . . .	267
Prof. dr. V. Santholzer, DrCs.: Umělé radionuklidy v ovzduší . . .	268
J. Matoulek: Experimentální určování vztahů mezi fyzikálními veličinami pomocí π -teorému (Dokončení).	272
Řešení úloh . . .	277
S. H.: Jak to nést? . . .	282
Recenze . . .	283
Různé . . .	285
Doc. K. Drábek: Vzpomínka na prof. F. Kadeřávka . . .	286
Úspěšní matematici . . .	288
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů . . .	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: V. Vaňková, studující FS.

A-04*61051

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1966.



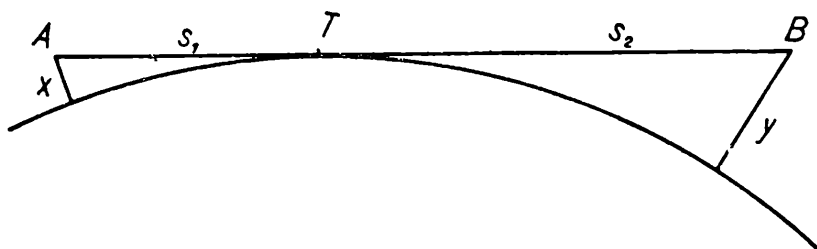
Jak daleko lze dohlédnout na moři?

FRANZ DENK, Fürth, Bavorsko, NSR

(Psáno pro Rozhledy)

Kdosi mi vyprávěl, že při velmi dobrém počasí je možno z italské Riviéry spatřit hory na Korsice. Je to možné?

Rozbor úlohy: Je-li pozorovatel x metrů nad mořskou hladinou v bodě A a má-li vrchol B pozorované hory výšku y metrů, musí přímka AB - má-li pozorovatel A právě ještě spatřit vrchol hory B - být tečnou zeměkoule, která se jí dotýká v bodě T (obr. 1).



Obr. 1.

Budiž $s_1 = AT$, $s_2 = BT$, R zemský poloměr (vše v metrech); pak platí rovnice

$$\begin{aligned}s_1 &= \sqrt{(x+R)^2 - R^2} = \sqrt{x(x+2R)}, \\s_2 &= \sqrt{(y+R)^2 - R^2} = \sqrt{y(y+2R)}, \\s_1 + s_2 &= a\end{aligned}$$

je daná vzdálenost AB .

Z předpokladu, že x a y jsou nepatrné vzhledem k zemskému průměru $2R$, plyne

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{a}{\sqrt{2R}}. \quad (1)$$

Jsou-li x a y pravoúhlé souřadnice bodu křivky k , vyplývá ze vztahu (1) ihned, že tato křivka je souměrná podle osy 1. kvadrantu. Dvojím zdvojnásobněním dostaneme křivku 2. stupně, o níž po kratší diskusi můžeme zjistit, že je parabolou.

Grafické řešení: V rovnici (1) nepřicházejí veličiny a a $2R$ samostatně, nýbrž jen ve výrazu

$$k = \frac{a}{\sqrt{2R}} \quad (2)$$

Protože veličiny x a y jsou k vzhledem k $2R$ velmi malé, bude rovnice (1) platit pro táž x a y i na jiných nebeských tělesech, pokud vzdálenost a a průměr $2R$ tohoto tělesa budou podle (2) v témž poměru k .

Vezmeme-li tedy např. desetkrát menší vzdálenost a , pak musíme průměr $2R$ brát stokrát menší, aby veličiny x a y zůstaly stejné.

Při této transformaci

$$a' = \frac{a}{n}, \quad 2r = \frac{2R}{n^2} \quad (T_1)$$

zůstaly x a y stejné, zatímco poloměr uvažované koule je podstatně menší. Použijeme-li ještě zmenšeného měřítka - transformace T_2 - můžeme vztah (1) dobře graficky vyjádřit.

Odhad chyb: Je-li

$$x \cdot 2r = s_1^2 = X(2r + X),$$

můžeme chybu $x - X$ mezi přibližnou hodnotou x a přesnou hodnotou X vyjádřit

$$(x - X) \cdot 2r = X^2$$

Relativní chyba činí

$$\frac{x - X}{X} = \frac{X}{2r}.$$

Spokojíme-li se s chybou menší než 1 %, pak smí být

$$\frac{X}{2r} \leq 0,01.$$

Protože výšky X (nebo x nebo y) nad 5 000 m nepřicházejí v úvahu, může být

$$\frac{5\,000}{2r} \leq 0,01,$$

neboli

$$2r \geq 500\,000 \text{ m}.$$

Takový průměr by byl 26krát menší než zemský průměr. Lze tedy transformaci T_1 provést pro $n = 5$:

$$a' = \frac{a}{5}, \quad r = \frac{R}{25}.$$

Numerické výpočty: Zemský průměr $2R \doteq 12\,740\text{ km} = 12,74 \cdot 10^6\text{ m}$.
Největší vzdálenost $AB = 250\text{ km} = 0,25 \cdot 10^6\text{ m}$.

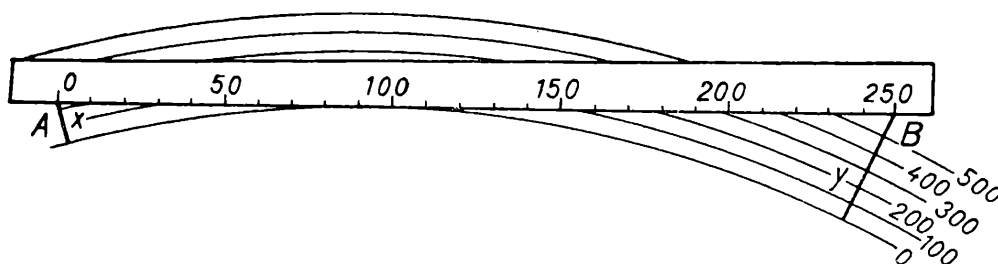
Po transformaci T_1 dostaneme

$$2r = \frac{2R}{25} = 0,51 \cdot 10^6\text{ m}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{5} = 0,5 \cdot 10^5\text{ m}.$$

Provedeme-li zmenšení T_2 v měřítku 1 : 100 000, dostaneme

	ve skutečnosti	v obraze
pro x a y	1 000 m	1 cm
pro $2R$	12 740 km	510 cm
pro α	250 km	50 cm
	1 km	2 mm ¹⁾

Technické provedení: Vezměme za základ kruhový oblouk o průměru 5,1 m, tj. o poloměru 2,55 m. Přikresleme k němu zevnějšku soustředné kruhové oblouky o poloměrech rostoucích po 1 mm. Šířka vzniklých mezikruží odpovídá ve skutečnosti 100 metrům. Na proužek papíru o délce asi 50 cm vyznačme stupnici po 2 mm, což odpovídá skutečným vzdálenostem po 1 km. Přiložíme-li pro určitou vzdálenost AB proužek papíru tak, aby se svým okrajem dotýkal vnitřní kružnice, obdržíme na obou krajích výšky x a y , z nichž je možno se v bodech A a B vzájemně spatřit (obr. 2).



Obr. 2.

Hora Monte Cinto na Korsice měří 2 700 m ($= y$). Vzdálenost od pobřeží obnáší asi 200 km ($= a$); odtud najdeme *numericky* podle (1) pro x hodnotu $x = 16\text{ m}$.

Z němčiny přeložil a upravil O. S.

¹⁾ Pro $n = 20$ a měřítko $T_2 = 1 : 20\,000$ byl by ve zobrazení poloměr $r = 75\text{ cm}$ a vzdálenost $a = 62,5\text{ cm}$.

Vlastnosti tětivového čtyřúhelníka

FRANTIŠEK JANEČEK, Broumov

Z obecných čtyřúhelníků (tzv. různoběžníků) mají zvláštní význam čtyřúhelníky tečnové a tětivové. V následujícím článku budeme zkoumat vlastnosti čtyřúhelníka tětivového.

Určíme si nejprve jeho definici:

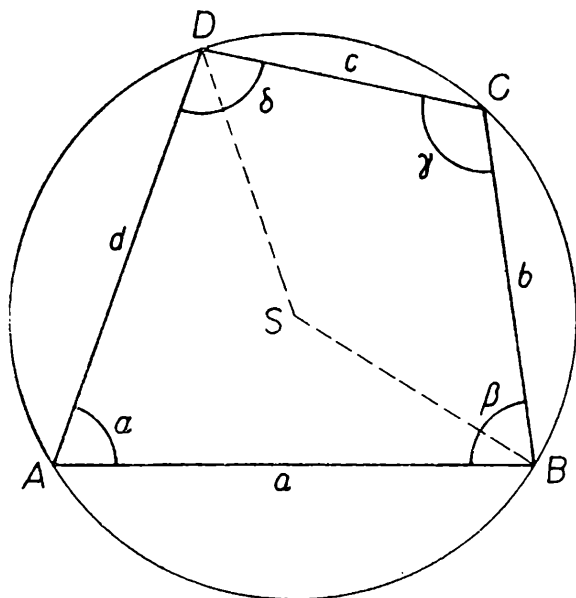
Čtyřúhelník $ABCD$ nazýváme tětivovým, když jeho vrcholy leží na určité kružnici; tato kružnice je tomuto čtyřúhelníku opsána.

Speciálními případy tětivového čtyřúhelníka jsou tedy čtverec, obdélník a rovnoramenný lichoběžník.

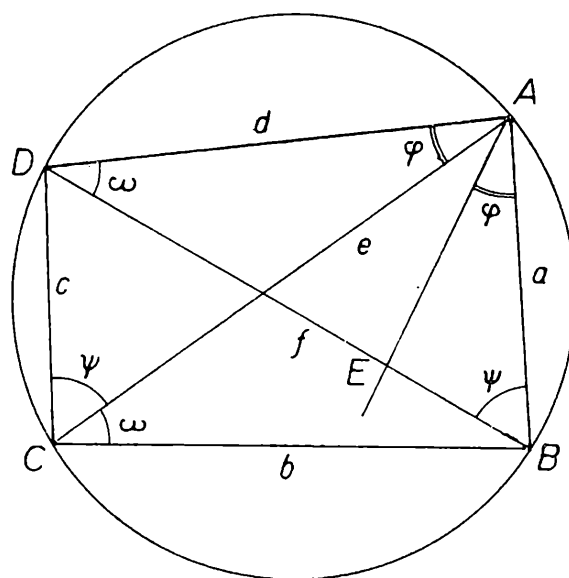
Věta 1. V tětivovém čtyřúhelníku je součet každých dvou protějších úhlů roven $2R$, tj. protější úhly jsou výplňkové a platí

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 2R. \quad (1)$$

Důkaz. Úhel $\sphericalangle DAB$ je obvodový úhel příslušný oblouku $\widehat{BCD}$ (obr. 1),



Obr. 1.



Obr. 2.

úhel $\sphericalangle BCD$ je obvodový úhel příslušného oblouku $\widehat{DAB}$. Poněvadž součet příslušných středových úhlů je $4R$, je podle věty o obvodových úhlech $\alpha + \gamma = 2R$. Podobně platí $\beta + \delta = 2R$. Tím je důkaz proveden.

Platí také obráceně:

Věta 2. Jestliže ve čtyřúhelníku je součet jedné dvojice protějších úhlů roven $2R$, potom je to čtyřúhelník tětívový.

D ů k a z. Předpokládáme, že ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 2R$; potom je též $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 2R$. Trojúhelníku ABD lze jistě opsat kružnici k ; úhlopříčka BD rozdělí rovinu na poloroviny BDA , BDC . Z vlastností obvodového úhlu víme, že pro bod X uvnitř poloroviny BDC platí $\sphericalangle BXD = 2R - \sphericalangle BAD$ tehdy a jen tehdy, jestliže X leží na kružnici k . Z toho plyne, že C leží na kružnici k , která je tudíž kružnicí opsanou čtyřúhelníku $ABCD$, a tedy čtyřúhelník $ABCD$ je tětívový.

Věta 3. (Věta Ptolemaiova.) Jestliže $ABCD$ je tětívový čtyřúhelník, potom platí

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA. \quad (2)$$

D ů k a z. Budiž $ABCD$ tětívový čtyřúhelník. Označme velikosti jeho stran $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ a velikosti jeho úhlopříček $AC = e$, $BD = f$. Sestrojme polopřímku AE tak, aby $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAE = \varphi$, kde E je bod polopřímky DB (obr. 2). Podle věty o obvodových úhlech je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ (obvodové úhly příslušné k oblouku $\widehat{AB}$).

Trojúhelníky ACD a ABE jsou podobné (podle věty uu). Z toho vyplývá

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD},$$

čili

$$AC \cdot BE = AB \cdot CD. \quad (3)$$

Také trojúhelníky ADE , ABC jsou podobné, z čehož plyne

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB},$$

čili

$$AC \cdot DE = BC \cdot AD. \quad (4)$$

Sečtením rovností (3) a (4) dostáváme postupně

$$\begin{aligned} AC(BE + DE) &= AB \cdot CD + BC \cdot AD, \\ AC \cdot BD &= AB \cdot CD + BC \cdot AD. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení věty Ptolemaiovy dokázáno.

P o z n á m k y. 1. Podle zavedeného označení pro tětívový čtyřúhelník tedy platí

$$e \cdot f = ac + bd, \quad (5)$$

tj. součin uhlopříček je roven součtu součinů protějších stran.

2. Z věty Ptolemaiovy jako důsledek plyne: V obdélníku, jehož rozměry jsou a , b a uhlopříčka e , je $a^2 + b^2 = e^2$ (srovnej s větou Pythagorovou).

Postup důkazů věty 3 lze „obrátit“.

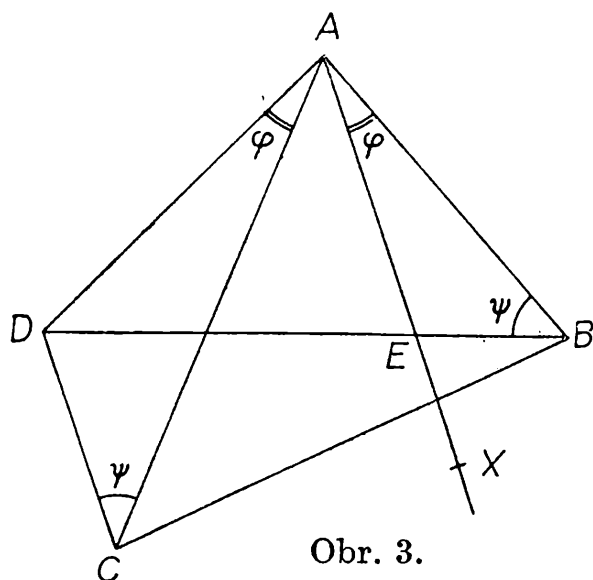
Věta 4. (Obrácení věty Ptolemaiovy.) Jestliže ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí vztah (2), potom je to čtyřúhelník tětiový.

Důkaz. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník, pro který platí vztah

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. \quad (6)$$

Sestrojme v polorovině ABC polopřímku AX tak, že $\sphericalangle BAX = \sphericalangle DAC = \varphi$ (označení volme tak, aby AX nebyla uvnitř úhlu DAC).

Na polopřímce AX sestrojme bod E tak, aby platilo (obr. 3)



Obr. 3.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}.$$

Platí tedy

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AE}$$

a vzhledem ke konstrukci polopřímky AX je

$$\triangle ADC \sim \triangle AEB$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ACB.$$

Z podobnosti těchto trojúhelníků plynou vztahy

$$AB \cdot DC = AC \cdot BE,$$

$$AD \cdot BC = AC \cdot DE,$$

které po dosazení do vztahu (6) dají

$$BE + ED = DB,$$

tj. body D , E , B jsou kolineární (leží na téže přímce). Polopřímka BE prochází tedy bodem D a ze shodnosti $\sphericalangle DCA = \sphericalangle EBA = \psi$ a z poučky o obvodovém úhlu vyplývá, že body A , B , C , D leží na téže kružnici. Čtyřúhelník $ABCD$ je tedy tětiový.

P o z n á m k a. Pro čtyřúhelník, který není tětiový, lze dokázat větu:

Ve čtyřúhelníku $ABCD$, který není tětiový, platí.

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD > AC \cdot BD$$

Tuto větu uvádíme b e z d ů k a z u

Věta 5. Budiž $ABCD$ tětíový čtyřúhelník se stranami a, b, c, d a s úhlopříčkami e, f , Potom platí vztah

$$e : f = (ad + bc) : (ab + cd) . \quad (7)$$

D ů k a z. Budiž r poloměr kružnice opsané tětíovému čtyřúhelníku. Úhlopříčka e dělí čtyřúhelník $ABCD$ ve dva nepřekrývající se trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle ACD$ (obr. 2). Označme po řadě P_1, P_2 obsahy těchto trojúhelníků.

Pro obsah trojúhelníka, jak známo, platí vzorec

$$P = \frac{abc}{4r}$$

Pro obsah čtyřúhelníka $ABCD$ tedy platí

$$P = P_1 + P_2 = \frac{abe}{4r} + \frac{cde}{4r} = \frac{e}{4r} (ab + cd) \quad (8)$$

Vezmeme-li v úvahu úhlopříčku f , je podobně

$$P = \frac{adf}{4r} + \frac{bcf}{4r} = \frac{f}{4r} (ad + bc) \quad (9)$$

Porovnáním rovnic (8) a (9) dostaneme postupně

$$e (ab + cd) = f (ad + bc) ,$$

takže

$$e : f = (ad + bc) : (ab + cd)$$

Tím je věta 5 úplně dokázána.

(Pokračování)

KURSY VÝPOČETNÍ TECHNIKY

„M“ o mechanizaci administrativy strojů na dřné štítky a „T“ o výpočetní technice pro pracovníky VTEI a knihovny (novinka),

zahajují další běh dne 1. března 1966. Jde o dálkové kursy, doprovázené četnými exkurzemi podle vlastního výběru v celé republice, vhodné pro každého, kdo se chce systematicky seznámit při minimálních časových finančních nákladech s uvedenými obory. Předběžné přihlášky ze všech míst ČSSR na zbývající místa přijímá ve formě dopisu:

Rada kursů výpočetní techniky ÚR Čs. vědeckotechnické společnosti, Praha 1, Široká 5.

V přihlášce se odvolejte na tuto zprávu v Rozhledech matematicko-fyzikálních.

M. M.

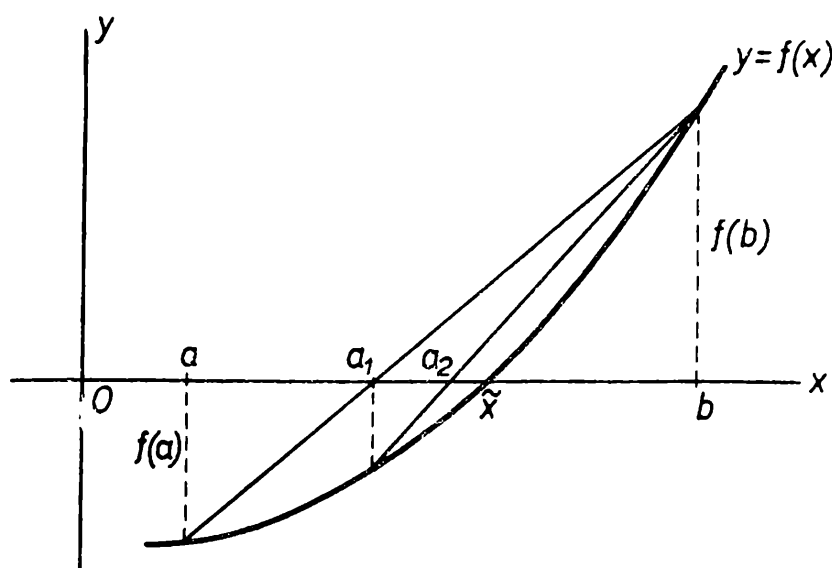
Numerické řešení rovnic

(Dokončení)

MARIE VALEŠOVÁ, ČVUT, Praha

Metoda „regula falsi“

Česky tuto metodu nazýváme *metodou sečen*. Spočívá v podstatě v tom, že část křivky $y = f(x)$ v intervalu (a, b) , v němž leží kořen $\tilde{x}$, nahradíme sečnou, spojující body $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$ na křivce (obr. 5). Podmínkou



Obr. 5.

ovšem je, aby znaménko $f(a)$ bylo opačné než $f(b)$. Spojnice dvou bodů se v analytické geometrii vyjadřuje rovnicí

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

kde x_1, y_1 a x_2, y_2 jsou souřadnice daných bodů. Dosadíme-li do tohoto vzorce souřadnice bodů A, B , dostaneme rovnici sečny

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a), \quad (1)$$

popřípadě

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - b). \quad (2)$$

Nyní místo průsečíku křivky $y = f(x)$ s osou x stanovíme průsečík příslušné sečny s osou x . Tím se dostaneme blíže ke kořenu $\tilde{x}$. Z našeho obr. 5 je např. patrné, že místo nerovnosti $a < \tilde{x} < b$ můžeme omezit x ostřeji nerovnostmi $a_1 < \tilde{x} < b$.

Početně se průsečík křivky s osou x najde tak, že položíme $y = 0$. Provedeme-li to v rovnici sečny, dostaneme z (1) po úpravě

$$x = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \quad (3)$$

Analogicky je z (2)

$$x = b - f(b) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \quad (4)$$

Takto vypočtenou souřadnici x můžeme vzít za nový krajní bod zúženého intervalu, v němž leží $\tilde{x}$ a opakovat znovu celý postup, tj. nahradit křivku sečnou a zjistit její průsečík s osou x , čímž se opět posuneme blíže k přesnému řešení. Pro přehlednost opět zapisujeme dílčí výpočty do tabulky (tab. 2).

Posloupnost hodnot x_n se přibližuje k hledanému $\tilde{x}$ vždy jen z jedné strany. Při zaokrouhlování dáváme pozor na to, abychom hledané $\tilde{x}$ „nepřekročili“, tj. aby $\tilde{x}$ stále zůstávalo uvnitř zúženého intervalu, aby tedy bylo stále $f(a)$ opačného znamení než $f(b)$. Výpočet hodnot x_n provádíme tak dlouho, až se x_n a x_{n+1} shodují na předepsaném počtu desetinných míst.

Jako příklad uveďme výpočet druhého kladného kořene rovnice

$$x^3 - 6x + 3 = 0$$

s přesností na tři desetinná místa. Separací jsme již dříve zjistili, že je $2 < \tilde{x} < 3$. Je $f(2) = -1$, $f(3) = 12$, a tedy po dosazení těchto hodnot do vzorce (3) dostáváme $x_1 = 2 + \frac{3 - 2}{12 + 1} = 2,0769$. Vypočtené hodnoty zapíšeme do 1. řádku tabulky a zaokrouhlíme x_1 na hodnotu 2,1. Zjistíme si $f(2,1) = 2,1^3 - 6 \cdot 2,1 + 3 = -0,339$. Je tedy $2,1 < \tilde{x}_2 < 3$, a proto můžeme uvedenou metodu aplikovat na interval $(2,1; 3)$. Výpočty provádíme tak dlouho, až se hodnoty x_n a x_{n+1} shodnou na 3 desetinná místa.

a	b	$f(a)$	$f(b)$	$\frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a)$	$x_n = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a)$
2	3	-1	12	-0,076 9	2,076 9
2,1	3	-0,339	12	-0,024 73	2,124 73
2,12	3	-0,192	12	-0,011 39	2,131 39
2,13	3	-0,116	12	-0,008 33	2,138 33
2,14	3	-0,04	12	-0,002 86	2,142 86
2,143	3	-0,016	12	-0,001 14	2,144 14
2,144	3	-0,009	12	-0,000 64	2,144 64
2,145	3	-0,000 6	12	-0,000 04	2,145 04

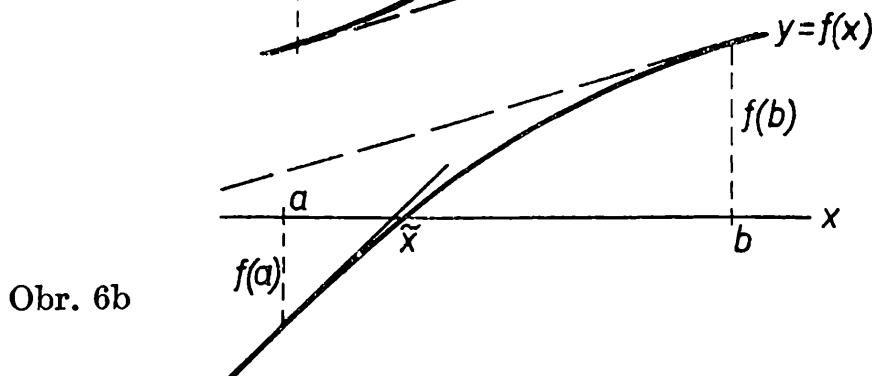
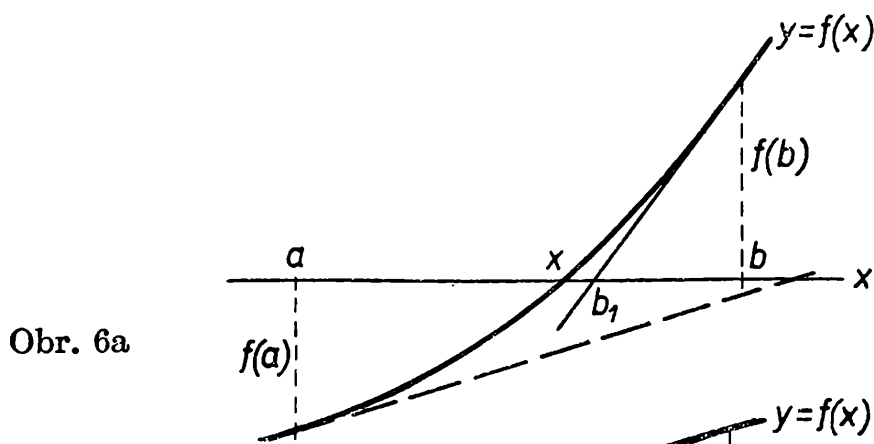
Je tedy druhým kladným kořenem dané rovnice číslo $\tilde{x} = 2,145$ s přesností na tři desetinná místa.

Metoda Newtonova

Tuto metodu k přibližnému řešení rovnice $f(x) = 0$ nazýváme také *metodou tečen*. Její princip je obdobný jako u metody předchozí; křivku $y = f(x)$ v intervalu (a, b) nahradíme tečnou ve vhodném bodě a místo průsečíku dané křivky s osou x hledáme průsečík příslušné tečny s osou x .

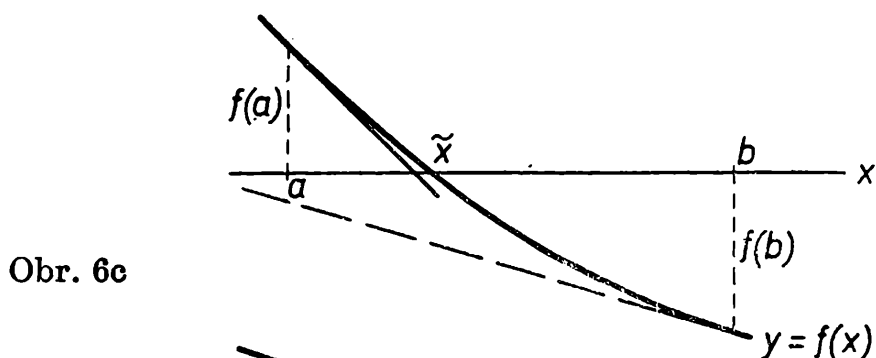
Jestliže např. podle obr. 6a vedeme v intervalu (a, b) ke křivce $y = f(x)$ tečnu v bodě b , získáme v jejím průsečíku s osou x nový bod b_1 , který je hledanému kořenu blíže než bod b . Vedeme-li v bodě b_1 novou tečnu a nalezneme její průsečík b_2 s osou x , přiblížíme se opět ke kořenu $\tilde{x}$.

Otázkou ještě zůstává, v kterém bodě je třeba vést tečnu. Metoda totiž bude účelná jedině tehdy, jestliže průsečík tečny s osou x padne dovnitř intervalu (a, b) . Všimněte si nyní na chvíli obr. 6a, b, c, d. Na obr. 6a, b jsou znázorněny funkce *rostoucí* (tj. k většímu x přísluší větší funkční hodnota), na obr. 6c, d funkce *klesající* (tj. k většímu x přísluší menší funkční hodnota) v intervalu (a, b) . Všimněte si rovněž tvaru oblouků křivek v jednotlivých případech. Na obr. 6a, c leží křivka nad tečnou (říkáme, že je *konvexní*), na obr. 6b, d, leží křivka pod tečnou

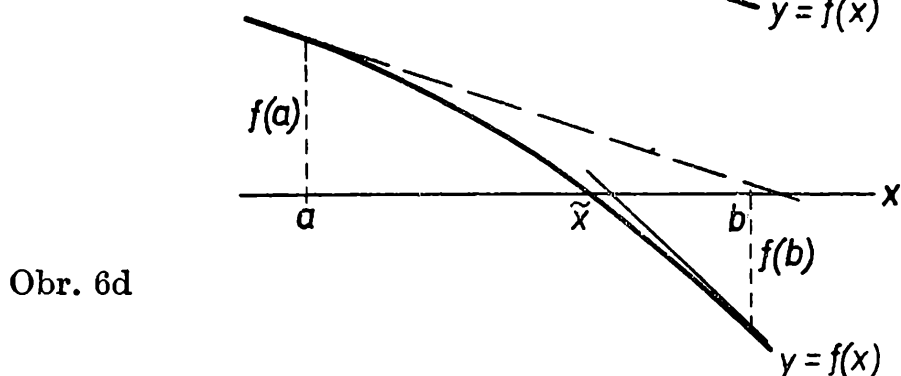


(nazýváme ji *konkávni*). V diferenciálním počtu se dokazuje, že křivka konvexní v daném intervalu má 2. derivaci kladnou, křivka konkávni má 2. derivaci zápornou. Ze všech čtyř obrázků je patrné, že tečnu nutno

vést v tom bodě, v němž znaménko 2. derivace je stejné jako znaménko funkční hodnoty, např. v obr. 6a u rostoucí konvexní funkce je $f(b) > 0$, $f''(b) > 0$, takže tečnu vedeme bodem B $[b, f(b)]$. Podobně sami zdůvodněte případy 6b, c, d.



Obr. 6c



Obr. 6d

Když jsme určili výchozí bod, v němž vedeme první tečnu, stanovme její rovnici. Směrnice tečny ke křivce $y = f(x)$ v daném bodě a je hodnota 1. derivace $f'(a)$, a tedy tečna, vedená bodem A $[a, f(a)]$ má rovnici

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \quad (5)$$

tečna v bodě B $[b, f(b)]$ je

$$y - f(b) = f'(b)(x - b). \quad (6)$$

Chceme-li získat průsečík tečny s osou x , položíme $y = 0$, takže po úpravě dostaneme souřadnici průsečíku

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad (7)$$

resp.

$$x = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \quad (8)$$

Odtud také vyplývá důležitá podmínka pro užití této metody; derivace $f'(x)$ nesmí se v žádném bodě intervalu (a, b) rovnat nule!

A nyní si uveďme jako příklad opět výpočet kořene rovnice

$$x^3 - 6x + 3 = 0,$$

ležícího v intervalu (2,3), a to např. s přesností na 4 desetinná místa. Je $f'(x) = 3x^2 - 6$, $f''(x) = 6x$, $f(2) = -1$, $f(3) = 12$, a proto první tečnu povedeme bodem $x = 3$, kde je $f''(3) > 0$ a také $f(3) > 0$. Podle vzorce (8) pak vypočteme průsečík tečny s osou x , tj. $x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - 0,5714 = 2,4286$. V tomto bodě opět vedeme tečnu a zjistíme její průsečík s osou x , čili opět dosadíme do vzorce (8) atd. Částečné výpočty i výsledky opět zapisujeme do přehledné tabulky.

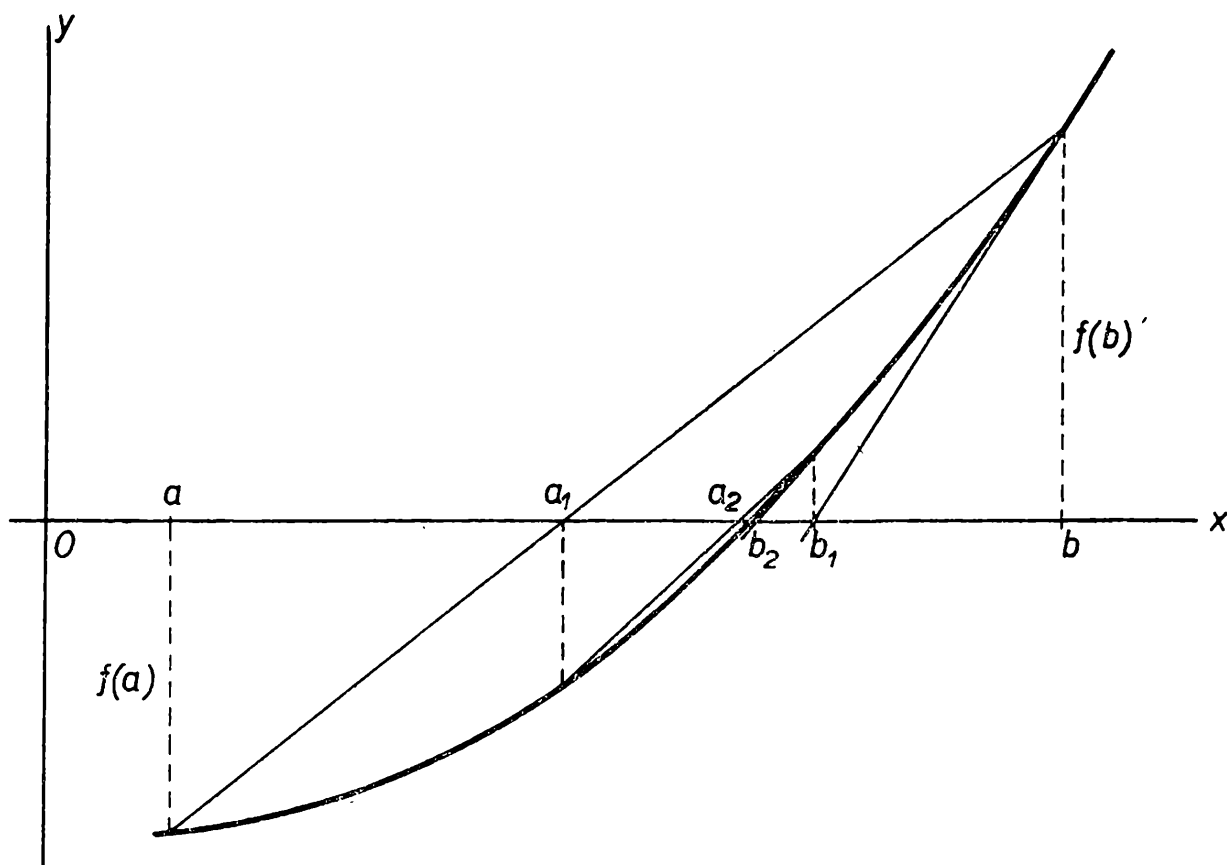
b	$f(b)$	$f'(b)$	$\frac{f(b)}{f'(b)}$	$x_n = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$
3	12	21	0,571 4	2,428 6
2,43	2,768,9	11,714 7	0,236 4	2,193 6
2,19	0,363 46	8,388 3	0,043 33	2,146 67
2,147	0,014 8	7,828 5	0,001 89	2,145 11
2,145 1	0,000 2	7,804 5	0,000 03	2,145 07

Z tabulky vyplývá, že kořen je $\tilde{x} = 2,1451$ (vzorec (8) byl aplikován pětkrát).

Konečně si ještě všimněme obr. 7. Průsečík sečny křivky $y = f(x)$, vedené body $A[a, f(a)]$ a $B[b, f(b)]$ leží vlevo od kořene $\tilde{x}$, kdežto tečna, vedená v pravém krajním bodě daného intervalu, protíná osu x vpravo od $\tilde{x}$. Mohli bychom takto promyslet všechny případy oblouků křivek, které se objevily na obr. a, b, c, d a na všech zjistíme, že posloupnost čísel, získaných pomocí metody regula falsi, konverguje ke kořenu $\tilde{x}$ právě z opačné strany než posloupnost, získaná metodou Newtonovou. Tím jsme vedeni k myšlence kombinovat obě metody výpočtu v témž příkladě, takže (viz obr. 7) je-li na počátku kořen x omezen nerovností $a < \tilde{x} < b$, je po 1. užití metody regula falsi a Newtonovy (říkáme *po 1. kroku* těchto metod) omezen daleko přesněji $a_1 < \tilde{x} < b_1$. Pro výpočet další aproximace kořene $\tilde{x}$ metodou regula falsi i Newtonovou můžeme vzít zúžený interval (a_1, b_1) .

Porovnejme nyní ještě v tabulce rychlost výpočtu kořene $\tilde{x}$ při současném užití obou metod na témž příkladě jako v předchozím textu.

	b	$f(a)$	$f(b)$	$f'(b)$	$f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$	$\frac{f(b)}{f'(b)}$	x_{RF}	x_N
2	3	-1	12	21	-0,076 9	0,571 4	2,076 9	2,428 6
2,1	2,43	-0,339	2,768 9	11,714 7	-0,035 95	0,236 4	2,135 95	2,193 6
2,14	2,19	-0,04	0,363 46	8,388 3	-0,004 96	0,043 33	2,144 96	2,146 67
2,145	2,147	-0,000 6	0,014 8	7,828 5	-0,000 08	0,001 89	2,145 08	2,145 11



Obr. 7.

Je tedy již po 4 krocích kombinované metody dosaženo kořene $\tilde{x} = 2,1451$ s přesností na 4 desetinná místa. Zaokrouhlování hodnot a_n i b_n je třeba provádět velmi pozorně tak, aby hodnoty $f(a_n)$ měly stále stejné znamení a hodnoty $f(b_n)$ rovněž, tj. aby body a_n a b_n se přibližovaly kořenu $\tilde{x}$ stále z téže strany.

Nakonec doporučuji čtenářům, aby si sami některou z vyložených metod (nejlépe kombinovanou) vypočítali zbývající záporný kořen uvedené rovnice. Víme již o něm, že je $-3 < \tilde{x} < -2$. Abyste si mohli zkontrolovat správnost svého výpočtu, uvádím jeho hodnotu s přesností na 4 desetinná místa: $\tilde{x} = -2,6691$.

Lineární programování

(Dokončení)

DOC. OTA SETZER, ČVUT, Praha

IV. Cvičení.

¶ Aby si mohl čtenář ověřit, jak rozumí textu článku, připojuji několik příkladů k procvičení podle západoněmeckého časopisu *Archimedes*. Ve všech příkladech jsou hledané veličiny x , y , resp. t nezáporné, tj. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

1. $x + y \geq 5$, $x - 2y \geq -1$, $2x - y \leq 7$;
určete a) maximum funkce $4x + y$; b) minimum funkce $x + 3y$.
2. $x + y \geq 4$, $-1 \leq 2y - x \leq 2$, $2x - y \leq 8$;
vypočtěte a) maximum funkce $2x + y$; b) minimum funkce $x + 2y$.
3. $x + y + 2z \leq 6$, $2x + 3y - z \geq 4$, $x - 2y \leq 0$;
stanovte a) max. x ; b) max. y ; c) max. z ; d) extrémy funkce $7x + y + 3z$.
4. Nově zřizovaná prádelna může volit ze tří druhů praček tyto druhy

Typ	Cena Kčs	Výkon kg/hod.	Roční amortizace Kčs
<i>A</i>	6 750	25	500,—
<i>B</i>	5 400	30	750,—
<i>C</i>	10 200	40	1 000,—

Celkový výkon všech praček má být aspoň 600 kg suchého prádla za hodinu, avšak pořizovací náklady nesmějí překročit 135 000 Kčs. Jak to zařídí vedoucí prádelny, aby a) počet praček byl minimální, nebo b) roční amortizace byla co nejmenší?

5. K financování novostavby je třeba 500 000 Kčs. Byly předloženy tři nabídky úvěru: ústav *A* žádá 5 % úroku, 2 % úmoru; *B* chce 4 % úroku a 5 % úmoru; *C* nabízí 2 % úroku a 8 % úmoru. Roční splátky nemají přesáhnout celkem 42 000 Kčs. Je však třeba si vypůjčit od *B* aspoň 50 000 Kčs. Při kterém rozvržení úvěrů je v 1. roce úrokovací složka nejmenší?

6. K vybavení kanceláře bude zapotřebí 20 psacích strojů, pro jejichž nákup je k dispozici 45 000 Kčs. Jsou nabízeny tři typy strojů, a to po 2 000 Kčs, 2 250 Kčs a 2 500 Kčs. Počítá se s ročními udržovacími náklady 20 Kčs, 16 Kčs a 10 Kčs za jednotlivé stroje. Nákup je nutno zařídit tak, aby celkové očekávané udržovací náklady byly co nejmenší. a) Kolik strojů jednotlivých typů se zakoupí? b) Jak se změní počet jednotlivých typů, nemá-li počet nejlevnějšího druhu přesáhnout 5 kusů?

7. Nakladatelství vydává dva odborné časopisy *A* a *B*, které mají 3 000 čtenářů. Časopisy se neliší ani tak svým obsahem jako spíše rozsahem. *A* vychází čtvrtletně a stojí ročně 12 Kčs, *B* je měsíčník a je za 30 Kčs ročně.

Nakladatelský zisk činí 4 Kčs, resp. 6 Kčs za jednoho ročního předplatitele. Dotazem mezi čtenáři bylo zjištěno, že jsou ochotni věnovat ročně průměrně 18 Kčs za své odborné časopisy, tj. že celková prodejní cena za *A* i *B* nepřesáhne ročně 54 000 Kčs. Jaký náklad pro oba časopisy je nejvýhodnější?

8. Dům s konfekčním zbožím potřebuje pro příští sezónu alespoň 1 200 dámských plášťů. Na výběr má k dispozici 3 druhy plášťů, a to

Druh	Nákupní cena Kčs	Prodejní cena Kčs
Anita	480	600
Brigita	600	760
Carmen	720	940

Plášťů smí být nakoupeno nanejvýš za 720 000 Kčs. Jak se musí plánovat nákup, aby bylo na skladě aspoň 200 plášťů vzoru Brigita a přitom zisk byl maximální?

9. K užívání vitamínu A jsou k dispozici tři přípravky, které však obsahují také vitamín B (j/g = počet jednotek na gram):

Přípravek	P_1	P_2	P_3
Obsah vitamínu A	2 j/g	5 j/g	8 j/g
Obsah vitamínu B	5 j/g	3 j/g	10 j/g
Cena přípravku	0,50 Kčs	1,50 Kčs	2,50 Kčs

Pacient má užívat denně alespoň 10 jednotek vitamínu A a nanejvýš 31 jednotek vitamínu B. Při kterém dávkování jsou výdaje na léky nejmenší?

10. V knihovně potřebují 120 knih téhož titulu. Existují tři druhy této knihy: *A* brožovaná za 12 Kčs, *B* poloplátěná za 18 Kčs a *C* plátěná za 24 Kčs. Počítá se s tím, že *A* vydrží 2 roky, *B* 4 roky a *C* 7 let. Jak je třeba provést nejlacinější nákup, aby průměrná doba používání všech knih byla mezi 3,5 a 5,5 roku?

Výsledky cvičení:

- a) $x = 5$, $y = 3$, max. = 23; b) $x = 4$, $y = 1$, min. = 7.
- a) $x = 6$, $y = 4$, max. = 16; b) $x = 3$, $y = 1$, min. = 5.
- a) $x_{\max.} = 4$; b) $y_{\max.} = 6$; c) $z_{\max.} = 2$, d) max. (4; 2; 0) = 30,
min (0; $\frac{4}{3}$; 0) = $\frac{4}{3}$.
- a) Typ *B* 8 kusů, typ *C* 9 kusů; b) typ *A* 12 kusů, typ *B* 10 kusů, amortizace 13 500 Kčs.
- A* 250 000 Kčs, *B* 50 000 Kčs, *C* 200 000 Kčs, v 1. roce 18 500 Kčs úroků.

6. a) 10 strojů po 2000 Kčs, 10 strojů po 2500 Kčs, náklady 300 Kčs ročně; b) 5 strojů po 2000 Kčs, 10 strojů po 2250 Kčs, 5 strojů po 2500 Kčs, roční náklady 310 Kčs.

7. A 2 000 výtisků, B 1 000 výtisků, maxim. zisk 14 000 Kčs.

8. 500 Anita, 200 Brigit, 500 Carmen, zisk 202 000 Kčs.

9. 5 g P_1 , 2 g P_2 cena 5,50 Kčs.

10. 84 knih brož., 36 knih plátěných, cena 1 872 Kčs.

V. *Historická poznámka a literatura.* V oblasti ekonomie se užívalo matematiky již v dávných dobách. Avšak teprve rozvoj samočinných počítačů způsobil, že při hospodářském rozhodování se mohlo začít s řešením velmi složitých problémů užitím nových matematických metod, k nimž patří i lineární programování.

Hospodářská jednotka, plánující svůj výrobní program, musí rozhodovat, kolik výrobků a jakého druhu tyto výrobky má produkovat. Obvykle existuje podle daných podmínek (kapacita závodu, množství surovin, počet strojů, poptávka po jednotlivých druzích zboží, výrobní náklady apod.). Řada variant a plánovač se musí rozhodnout pro nejvýhodnější z nich. Zpravidla jsou uvedené podmínky výroby a také optimální cíl (maximální zisk, minimum vynaložené práce, minimální odpad apod.) vyjádřeny — aspoň přibližně lineárními rovnicemi nebo lineárními nerovnostmi, odtud je také jméno tohoto oboru matematiky. K velkému rozšíření lineárního programování přispívá okolnost, že vyžaduje poměrně jednoduchý matematický aparát, který lze snadno zmechanizovat.

První souborné práce z oboru lineárního programování se objevily před čtvrt stoletím. Byly to práce sovětského matematika L. V. Kantoroviče (1939), F. L. Hitchcocka (1941), později T. C. Koopmanse (1945) a G. B. Dantziga (1947), jehož metody, tzv. *simplexové*, se užívá dosud nejčastěji.

Dnes má lineární programování již bohatou literaturu, např.

Korda Benedikt: Učebnice lineárního programování, Praha, SNTL, 1962, Kčs 17,30, česky;

Kantorovič L. V.: Hospodářský propočet nejlepšího využití zdrojů, Moskva, Akademie věd SSSR, 1959, rusky;

Hitchcock F. L.: Doprava výrobku z několika zdrojů do mnoha míst, 1941, anglicky;

Koopmans F. C.: Rozbor činnosti ve výrobě a rozmístění, N. York a Londýn, 1951, anglicky;

Krekó B.: Učebnice lineárního programování, Berlín, 1964, německy;

Krekó B.: O dopravním problému, Budapest 1958, maďarsky;

Habr J.: Lineární programování, Praha, SNTL 1960, česky.



Oprava. V č. 5 na str. 194 má znít druhá z nerovností (5)

$$3x + 6y + 5z \geq 12$$

Na str. 197 pod tabulkou 1 budiž: . . . maximum funkce je v bodě C, totiž 12 ; . . .



Přijímací zkoušky z deskriptivní geometrie na ČVUT

DOC. DR. MIROSLAV MENŠÍK a kolektiv, ČVUT, Praha

Studenti, kteří hodlají vstoupit na některé fakulty vysoké školy technické (např. na stavební fakultu, tj. architekturu, pozemní stavitelství, inženýrské stavitelství, zeměměřictví, stavební ekonomii) budou - tímto školním rokem počínaje - při přijímací zkoušce zkoušeni písemně též z deskriptivní geometrie.

Žáci ze všeobecně vzdělávacích škol, pokud měli deskriptivní geometrii řádně vyučovanou, nebudou mít při této zkoušce obtíží. Také absolventi stavebních průmyslových škol jsou z deskriptivní geometrie dostatečně připraveni. Protože však tento předmět pod názvem technické kreslení byl již v 1. a 2. ročníku, musí si znalosti ke zkoušce náležitě opakovat.

1. Jako planimetrický konstruktivní podklad je nutno umět základní konstrukce o trojúhelníku a kružnici plynoucí zejména z podobnosti, Pythagorovy věty a vět Euklidových.

Vlastním předmětem přijímací zkoušky z deskriptivní geometrie budou:

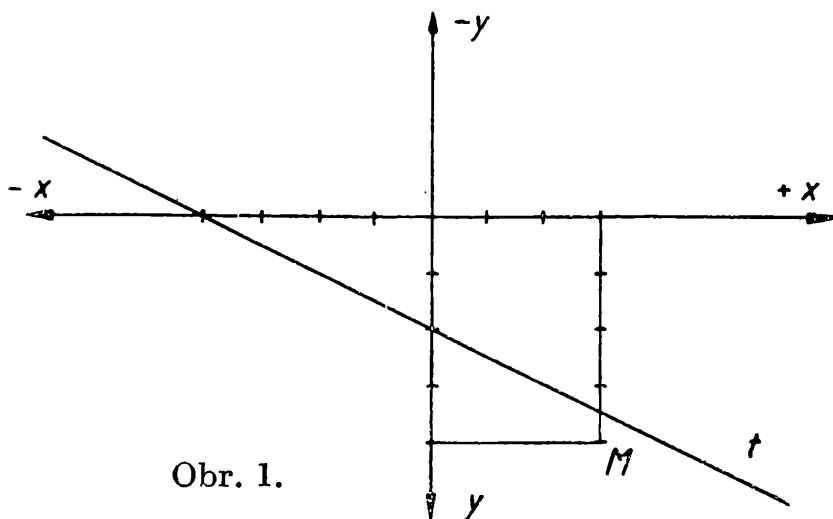
2. základní konstrukce kuželoseček,
3. základy kótovaného promítání,
4. úvod do pravoúhlého promítání na dvě průmětny (Mongeova projekce),
5. zobrazení hranatého tělesa v axonometrii a v kosoúhlém promítání.

Aby si naši čtenáři alespoň částečně mohli opakovat a nacvičit uvedenou látku a aby se mohli přesvědčit, jsou-li na zkoušku připraveni, otiskujeme z uvedené látky *informativní příklady*. Neznašená to tedy, že tyto příklady dostanou u zkoušky.

I. Konstrukce kuželoseček

Jsou-li v příkladech číselné údaje souřadnice, pracuje se s nimi takto:

Např. bod $M(3; 4)$ se vynese tak (obr. 1), že na vodorovnou osu x se od počátku nanesou 3 dílky a ve směru osy $y \perp x$ 4 dílky; (osy x a y se protínají v počátku O). Na obr. 1 je vyznačen také smysl pro



vynášení kladných a záporných souřadnic. Dále např. přímka $t(-4; 2)$ se vynese tak, že na osu x od počátku O vyneseme doleva 4 dílky a na osu y 2 dílky. Spojnice obou bodů takto získaných na ose x a y je požadovaná přímka t .

1. Sestrojte elipsu určenou třemi tečnami a ohniskem [$^1t \equiv x$; $^2t \equiv y$; $^3t \equiv PN$; $P(8; 0)$, $N(0; 5)$, $^1F(5; 1)$].
2. Sestrojte elipsu, která je určena ohniskem 1F , tečnami 1t , 2t a dotykovým bodem 2T na tečně 2t [$^1F(-4; 0)$, $^1t(-9; 6)$, $^2t(-6,5; -11,5)$, $^2T(-5,5; ?)$].
3. Narýsujte elipsu, znáte-li hlavní vrchol A , ohnisko 1F ($A^1F = 2$ cm) a délku vedlejší poloosy $b = 4$ cm.
4. Elipse ($a = 5$, $e = 4$) opište čtverec $KLMN$, jehož vrcholy leží na osách elipsy.
5. Sestrojte elipsu, je-li dáno ohnisko 1F , dvě tečny 1t , 2t a bod V na vedlejší poloose (V není vrchol).

6. Sestrojte elipsu, v níž je dáno ohnisko 1F , bod E na elipse, délka vedlejší poloosy b a délková excentrita e .
7. V trojúhelníku $^1F\ ^1H\ ^2H$ ($^1F\ ^1H = 6$, $^1F\ ^2H = 9,5$, $^1H\ ^2H = 11$) je vrchol 1F ohniskem a vrcholy 1H , 2H body hyperboly o hlavní poloosy $a = 2,5$. Narýsujte hyperbolu!
8. Narýsujte hyperbolu, v níž znáte ohnisko 1F , asymptotu m a tečnu t .
9. Sestrojte parabolu o známém ohnisku F a tečnách t_1 , t_2 ! K parabole vedte tečnu, která svírá s její osou úhel 60° .
10. Parabola je určena řídící přímkou d a dvěma body B_1 , B_2 . Sestrojte v nich tečny paraboly a potom i parabolu.
11. Sestrojte parabolu, je-li dáno:
 - a) řídící přímka d , tečna 1t a její bod 2T (2T není na 1t);
 - b) řídící přímka d , tečna 1t a tečna 2t ;
 - c) řídící přímka d , tečna t s dotykovým bodem T ;
 - d) tečna t , ohnisko F a bod paraboly T' (T' není na t);
 - e) osa o , vrchol V a její bod T ;
 - f) osa o , vrchol V a její tečna t .

II. Kótované promítání

V následujících příkladech proveďte vždy nejdříve tzv. *p r o s t o r o v é ř e š e n í* se zápisem postupu práce (ve značkách, tj. např. skutečnost, že dvě přímky a a b se protínají v bodě C , vyznačíme znakem $C \equiv [a, b]$ apod.). Vynášení bodů se děje způsobem již dříve vyličeným. Třetí údaj v závorce je příslušná kóta bodu. Tedy např. bod A (-2 ; $7,5$; 6) zakreslíme tak, že vyneseme A_1 (-2 ; $7,5$) podle návodu dříve vyloženého a k průmětu A_1 bodu A přepíšeme do závorky příslušnou kótu, tedy A_1 (6).

12. Sestrojte průsečík přímky $q \equiv QR$ [Q (-3 ; 2 ; 3), R (3 ; -1 ; -2)] s rovinou určenou dvěma rovnoběžkami $a \equiv AC$ a $b \in B$ [A (-1 ; 2 ; 2), B (2 ; 5 ; 0), C (-3 ; 1 ; 0)].
13. Přímkou $a \equiv AB$ [A (0 ; 0 ; 15), B (-5 ; 5 ; 12)] proložte roviny o spádu $\text{tg } \alpha = 1 : 1,25$.
14. Sestrojte skutečnou velikost úhlu přímky $a \equiv AB$ s rovinou ρ danou spádovým měřítkem $s^\rho \equiv CD$ [A (-6 ; 2 ; 0), B (6 ; 8 ; 8), C (0 ; 6 ; 0), D (6 ; 0 ; 8)].
15. Sestrojte čtverec o vrcholu A (6 ; -4 ; 8) a o straně BC na přímce $m \equiv MN$ [M (-8 ; -2 ; 4), N (10 ; 4 ; 12)].
16. Sestrojte čtverec, který má vrchol A (4 ; 3 ; $?$) a stranu AB , popř. AD na přímce, jdoucí bodem P (-12 ; 5 ; 0), popř. bodem Q (12 ; 11 ; 0).

17. Sestrojte krychli, která má daný střed $S(0; 6; 6)$ a stěnu $ABCD$ v rovině ϱ [$s^e \equiv NP$, $N(4; 0; 12)$, $P(0; 6; 0)$, s^e je spádová přímka roviny ϱ]; její stěnová úhlopříčka AC svírá s průmětnou úhel 45° .
18. Určete průsek roviny trojúhelníku ABC [$A(-6; 2; 12)$, $B(3; 18; 18)$, $C(6; 8; 1)$] s rovinou rovnoběžníka $MNPQ$ [$M(-9; 17; 3)$, $N(0; 15; 0)$, $P(8; 0; 13)$].
19. Určete průsek dvou trojúhelníků ABC a EFG [$A(0; 2; 0)$, $B(-4; 8; 12)$, $C(6; 12; 10)$, $E(-8; 8; 8)$, $F(6; 1; 12)$, $G(9; 12; 6)$].
20. Sestrojte průsek $\triangle MNP$ s rovnoběžníkem $ABCD$ [$M(-5; -4; -6)$, $N(3; -1; 2)$, $P(-1; 5; 6)$, $A(-2; -2; 3)$, $B(-3; 5; -3)$, $C(3; 3; 0)$] a vyznačte viditelnost.

III. Kolmé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (Mongeova projekce)

V následujících příkladech proveďte vždy nejdříve tzv. prostorové řešení se zápisem postupu práce.

Úlohy na zobrazení bodů, přímek a rovin

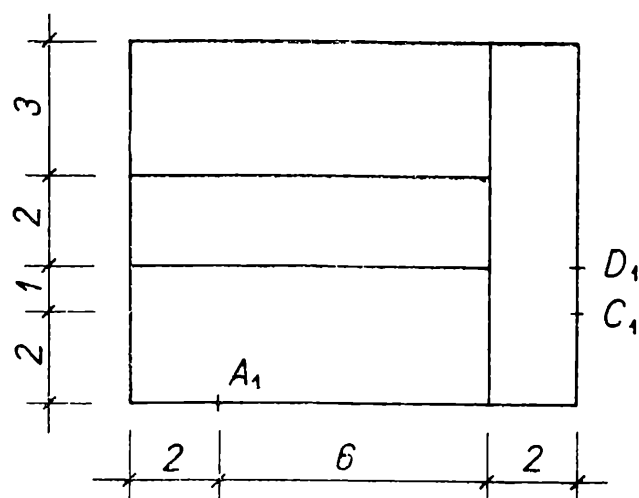
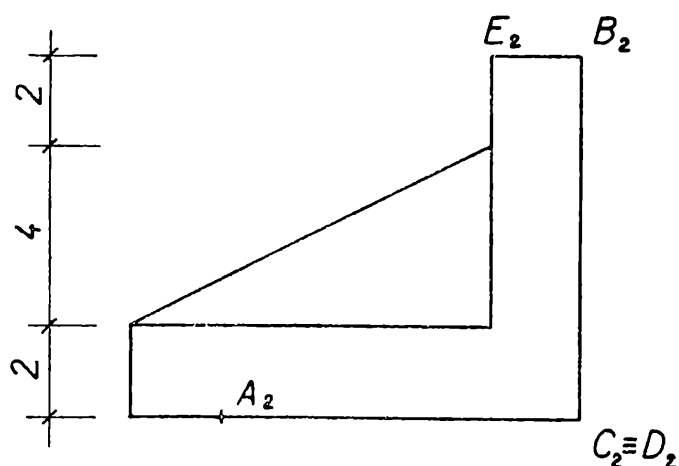
21. Zobraďte přímku $g \equiv LM$ [$L(3; 5,5; 4)$, $M(-2; 1; -2)$], její stopníky P a N , určete její odchylky α a β od průměten π a ν . Dále zobraďte bod $Q \in g$, $z_Q = 3$ a bod $R \in g$, $y_R = -2$.
22. Zobraďte kosočtverec o straně $a = 5$, jehož střední příčky leží na přímkách SM a SK [$S(-4; 3; 3)$, $M(3; -1; 8)$, $K(2; 9; 0)$].
23. Přímkou $a \equiv AB$ [$A(-3; 5; 1)$, $B(4; 1; 6)$] vedte rovinu $\varrho \parallel x$ a určete její odchylky od průměten.
24. Bodem $M(0; 1; 2)$ vedte přímku rovnoběžnou s rovinami $\alpha(-6; 6; 10)$ a $\beta(6; 8; 6)$.
25. Zobraďte průsek rovnoběžníka $ABCD$ [$A(1; 0,5; 7,5)$, $B(4; 5,5; 5)$, $C(0; 8,5; 2)$] s trojúhelníkem MNP [$M(-1,5; 1; 8,5)$, $N(-3; 8,5; 2,5)$, $P(4; 6; 3)$].
26. Ke dvěma mimoběžkám $k \equiv AL$, $m \equiv BM$ [$A(4; 0; 8)$, $L(0; 1,5; 5)$, $B(0; 0; 5)$, $M(5; 4; 1)$] vedte příčku
a) $\perp \pi$, b) $\perp \nu$, c) $\parallel x$, d) $\parallel s \equiv EF$, $E(6,5; 5; 0)$, $F(2,5; 2,5; 3)$.
27. Sestrojte bodem M kolmici k rovině $\varrho \equiv ABC$ [$M(4; 8; 2,5)$, $A(-5; 4; 0)$, $B(5; 3; 4,5)$, $C(-1; 8; 7)$] a vyhledejte patu kolmice na rovině ϱ .
28. Sestrojte geometrické místo bodů v prostoru, které mají stejnou vzdálenost od bodů $A(-3; 4; 5)$ a $B(2; 1; 3)$.
29. V rovině $\varrho(-6; 6; 4)$ sestrojte kružnici o středu $S(1; 3; ?)$ a poloměru $r = 3$.

Tělesa v obecné poloze

30. Sestrojte pravidelný šestiboký jehlan, jehož podstava je v rovině ϱ , má střed S a vrchol A ; výška jehlanu je v [ϱ $(-7; 6; 4,5)$, S $(2; ?; 3)$, A $(4; 8; ?)$, $v = 9$].
31. Sestrojte pravoúhlé průměty duté krychle s podstavou $ABCD$ v rovině ϱ [ϱ $(-3; \infty; 2)$, A $(-1; 4; ?)$, B $(3; 1; ?)$, $y_C > y_B$].
32. Sestrojte pravoúhlé průměty pravidelného čtyřbokého jehlanu o výšce $v = 6,5$, stojícího na rovině ϱ $(-7; 8; 7)$. Dva protější vrcholy podstavy jsou A $(-3; 2; ?)$, C $(4; 6; ?)$.
33. Zobrazte dva průměty rotačního válce o středu podstavy S $(-3; 4; ?)$ v rovině ϱ $(7; 6; 7)$, $r = 5$, $v = 8$. Polovinu válce (jednu z obou) oddělenou rovinou jdoucí jeho osou rovnoběžně s první stopou roviny ϱ odejměte.
34. Sestrojte průměty rotačního válce o ose $o \equiv MN$ [M $(3; 7; 1)$, N $(-3; 1; 5)$] $r = 3$, jehož podstavná kružnice k se dotýká π a podstavná kružnice k' průmětny v .
35. Sestrojte pravidelný kolmý hranol šestiboký s podstavou v rovině σ $(5; 5; 6)$. Střed podstavy S $(0; 3; ?)$. Vrchol podstavy A leží na půdorysné stopě roviny σ , úsečka $SA = 3$ cm, $x_A > 1$ cm. Výška hranolu $v = 6$, $x_{1S} > x_S$.

Rovinné řezy tělesy a sítě těles

36. Sestrojte řez trojbokého kolmého hranolu s podstavou ABC [A $(1,5; 1,5; 0)$, B $(3; 6; 0)$, C $(5,5; 4,5; 0)$] rovinou jdoucí počátkem O a svírající s π úhel 45° . Sestrojte síť seříznutého hranolu.
37. Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou v π rovinou ϱ $(-6; 9,5; 3)$. Jeden vrchol podstavy je A $(-1; 6,5; 0)$, vrchol V $(0,5; 3,5; 7)$. Sestrojte síť vzniklého komolce.
38. Pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v π [S $(3; 4; 0)$, A $(5,5; 4,5; 0)$, $v = 5$] seřízněte rovinou σ $(-3; 4,5; 1,5)$. Sestrojte síť vzniklého komolce.
39. Provedte řez rotačního válce [S $(0; 0; 6)$, $r = 6$, $v = 12$, $o \perp v$] rovinou ϱ $(-9; 6; \infty)$ a síť seříznutého válce.
40. Rotační válec s podstavou v π [S $(2; 4; 0)$, $r = 3$, $v = 6$] seřízněte rovinou σ $(-5; 7; 4)$ a sestrojte síť seříznutého válce.
41. Odlitek daných rozměrů řízněte rovinou jdoucí body (obráz. 2) a) ABC , b) ABD , c) ACE .
42. Sestrojte řez rotačního kužele [S $(0; 5; 0)$, $r = 4$, $v = 8$] rovinou ϱ $(-9; 14; 4)$. Sestrojte síť komolého kužele.
43. Provedte parabolický řez rotačního kužele [S $(0; 5; 0)$, $r = 4$, $v = 10$] rovinou ϱ $(-1; ?; ?)$ kolmou k nárysně.



Obr. 2.

- k osám x a y je jako v příkladu 46.
48. V izometrii sestrojte pravidelný šestiboký jehlan s podstavou v π , je-li dán střed podstavy S (6; 4; 0), vrchol podstavy A (6; 1; 0) a výška jehlanu $v = 8$.

44. Sestrojte řez rotačního „dvojkužele“ ($o \perp \pi$), omezeného půdorysnou a rovinou souměrnou k π podle vrcholu V (3; 9; 5), rovinou ϱ (−4; ∞ ; 4), $r = 9$.
45. Sestrojte řez koule [S (0; 5; 4), $r = 4$] rovinou ϱ (−8; 10; 6).

IV. Kolmá axonometrie

46. Řešení příkladu 41 zobrazte v pravoúhlé axonometrii [obraz osy x nechť svírá s obrazem osy y úhel 135° , obraz osy y s obrazem osy z úhel 120°]. Podstavné hrany odlitku umístěte do osy x a y jak ukazuje obr. 2.
47. Řešení příkladu 41 zobrazte v izometrii. Umístění odlitku vzhledem



Obdrželi-li redakce informativní příklady i z jiných vysokých škol, ihned je otiskne. Příště uveřejníme příklady z matematiky.

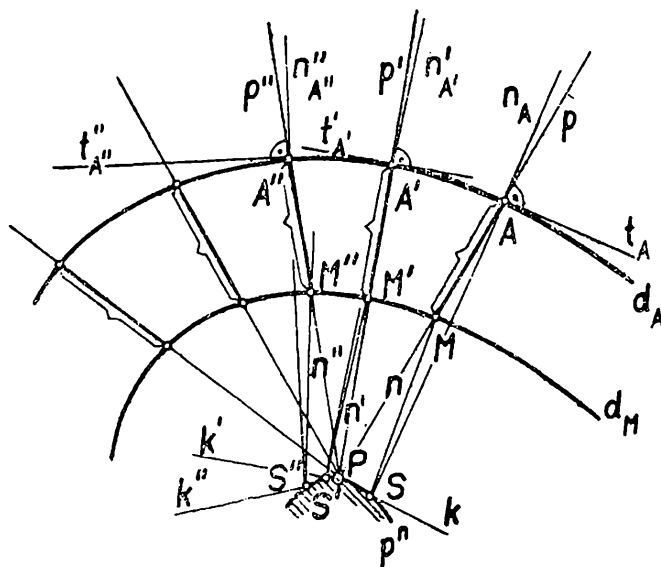
0 některých křivkách

(Pokračování)

DOC. BOŘIVOJ KEPR, ČVUT, Praha

5. Nechť je dána křivka d_M a bod P (obr. 37). Je-li komplanární pohyb neproměnného rovinného útvaru určen tak, že pohybující se jeho přímka p prochází přitom stále daným pevným bodem P (pólem), zatím co její bod M probíhá danou křivku d_M , pak hovoříme o tzv. *pohybu konchoidálním*. Křivky, které jsou přitom opsány jednotlivými body neproměnného rovinného útvaru, nazýváme *konchoidami*.

Dráhu d_A bodu $A \in p$ sestrojíme tedy takto: Na jednotlivých polohách p' , p'' , ... pohybující se přímky p (je ovšem $P \in p'$, $P \in p''$, ...) sestrojíme body A' , A'' , ... tak, aby bylo $MA = M'A' = M''A''$ (i vzhledem k orientaci). Je ovšem $M' \equiv (p', d_M)$, $M'' \equiv (p'', d_M)$, ... Body A' , A'' , ... jsou pak jednotlivými polohami pohybujícího se zvoleného bodu A a leží tedy na hledané konchoidě d_A . Sestrojíme-li v bodě M , M' , M'' ... křivky d_M normálu n , n' , n'' , této křivky a sestrojíme-li v pólu P kol-



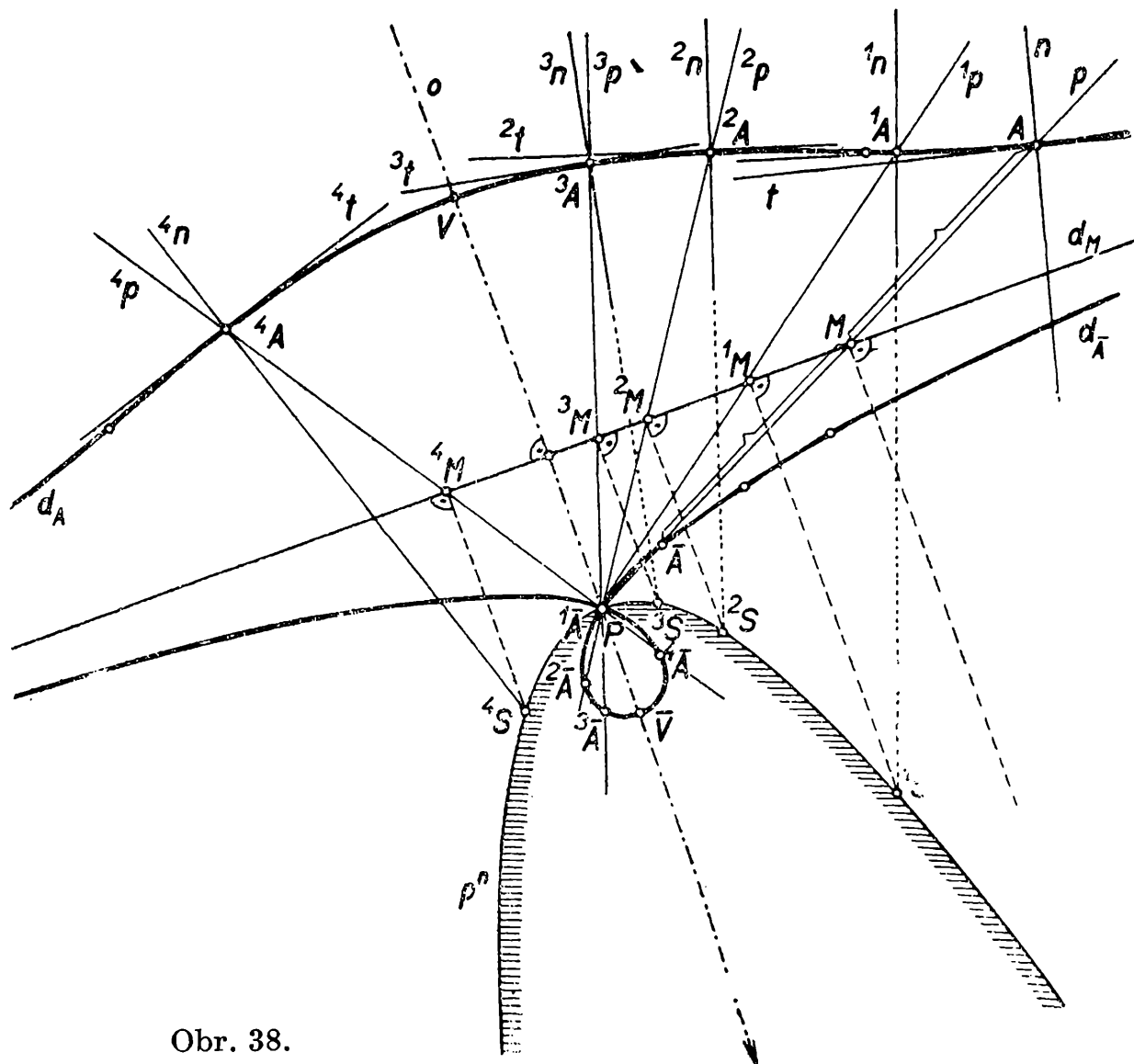
Obr. 37.

mici k , k' , k'' , na přímku p , p' , p'' , ..., dostaneme v průsečíku $(n, k) \equiv S$, $(n', k') \equiv S'$, $(n'', k'') \equiv S''$, ... příslušný okamžitý střed otáčení. Přímka $(S, A) \equiv n_A$ ($S', A') \equiv n'_A$, $(S'', A'') \equiv n''_A$, ... je normálou konchoidy d_A v jejím bodě A , A' , A'' , ... a přímka t_A , t'_A , t''_A , ... kolmá v bodě A , A' , A'' , ... na přímku n_A , n'_A , n''_A , je pak tečnou konchoidy d_A v tomto jejím bodě.

Zvolíme-li speciálně za křivku d_M *kružnici* a pól P zvolíme na této kružnici, získáme speciální konchoidální pohyb, který je totožný (jak jistě pozornému čtenáři neuniklo) již s poznaným pohybem kardioidickým. Je tedy dráha d_C bodu C (tj. Pascalova závitnice) z obr. 32 současně konchoidou kružnice p^n pro pól D_C .

Zvolme nyní za křivku d_M speciálně *přímku*. Bod P , který zvolíme za příslušný pól, nemůže být zvolen na přímce d_M , neboť v tomto případě by příslušný pohyb (tak, jak byl zaveden) neměl smysl. (Prosím čtenáře, aby si tuto věc sám promyslel.) Zvolíme tedy za pól P pevný bod, který neleží na zvolené pevné přímce d_M (obr. 38). Dráhy bodů v tomto zvláštním případě nazýváme *konchoidami Nikomédovými*. Přímka p se

tedy pohybuje tak, že prochází stále pólem P a její bod M , pevný na p , probíhá přímkou d_M . Označme jednotlivé polohy přímky p znaky $^1p, ^2p, \dots$, příslušné polohy bodu M pak znaky $^1M, ^2M, \dots$. Dráhu d_A bodu A pevného na p sestojíme z jednotlivých jeho poloh 1A,



Obr. 38.

$^2A, \dots$ tak, že učiníme $MA = ^1M^1A = ^2M^2A = \dots$, přičemž tyto úsečky nanášíme na přímky $^1p, ^2p, \dots$ do téže poloroviny ohraničené přímkou d_M , v níž leží bod A . Naneseme-li úsečky téže velikosti na jednotlivé polohy $^1p, ^2p, \dots$ pohybující se přímky p do opačné poloroviny, obdržíme body $\bar{A}, ^1\bar{A}, ^2\bar{A}, \dots$ druhé větve téže Nikomédovy konchoidy. Z konstrukce bodů této křivky je patrné, že obě její větve se stále neomezeně přibližují k přímce d_M , když se bod M po ní vzdaluje, a to v obou směrech přímky d_M . Je tedy přímka d_M asymptotou křivky d_A . Celá křivka je souměrná podle osy o vedené

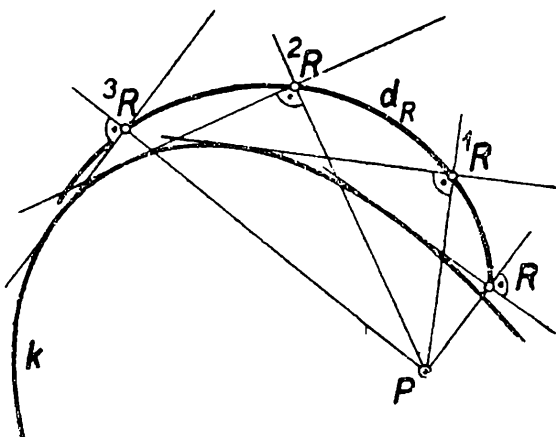
pólem P kolmo na přímkou d_M . Body křivky d_A na této ose (které jsou různé od P) jsou jejími *vrcholy*.

Je-li úsečka AM větší než vzdálenost pólu P od přímky d_M , prochází křivka d_A dvakrát pólem P , který je tedy jejím *dvojnásobným bodem* (*uzlem*) (jak je znázorněno na obr. 38). Je-li úsečka AM rovna právě vzdálenosti pólu P od přímky d_M , získáme takovou Nikomédovu konchoidu, která má v pólu P svůj *bod vratu* (*hrot*). Doporučuji čtenáři, aby si sestrojil sám tuto křivku.

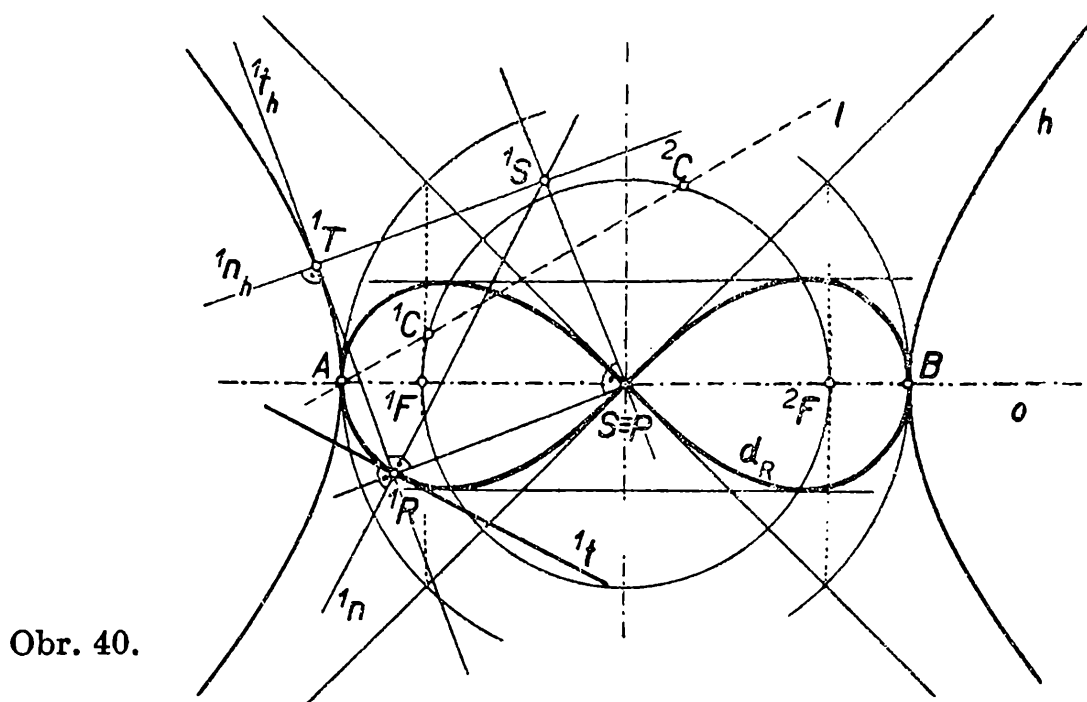
Je-li konečně úsečka AM menší než vzdálenost pólu P od přímky d_M , pak příslušná křivka d_A z hlediska konstruktivního provedení pólem P neprochází. (Pól P je však jejím *bodem izolovaným*.) Na větvi Nikomédovy konchoidy, která leží v opačné polorovině vyřazené přímkou d_M k polorovině Pd_M , jsou vždy dva inflexní body této křivky, a to kolmo souměrně sdružené podle osy o . Na druhé větvi křivky d_A (tj. na větvi, která s pólem P leží v téže polorovině ohraničené přímkou d_M) jsou dva její inflexní body (opět souměrně sdružené podle osy o) jenom v tom případě, když pól P je izolovaným bodem dráhy d_A . Kolmice vztyčená v bodě iM ($i = 1, 2, \dots$) na d_M a kolmice vztyčená v pólu P na ip se protínají v bodě iS , který je tedy příslušným okamžitým středem otáčení. Přímka $^in \equiv (^iS, ^iA)$ je normálou dráhy d_A v jejím bodě iA a přímka $^it \perp ^in$ v iA je příslušnou tečnou křivky d_A v tomto bodě. Lze ukázat, že geometrickým místem bodů iS , tj. polhodií nehybnou p^n , je v případě tohoto speciálního konchoidálního pohybu *parabola*, s osou v ose o konchoidy a s vrcholem v pólu P . Dá se konečně ukázat, že pro ohnisko F paraboly p^n platí $PF = \frac{1}{4}$ vzdálenosti pólu P od přímky d_M .

6. Sledujme nyní dráhu d_R vrcholu R pravého úhlu při pohybu, při němž jedno rameno je stále tečnou dané pevné křivky k a druhé rameno stále prochází daným pevným bodem P (pólem), jak ukazuje obr. 39. Dráhu d_R , spoující body $R, ^1R, ^2R, \dots$ (jednotlivé polohy bodu R) takto sestrojené, nazýváme *úpatnicí* dané křivky k . Je tedy např. úpatnicí elipsy, nebo hyperboly, pro pól ležící v ohnisku této křivky příslušná hlavní vrcholová kružnice, úpatnicí paraboly pro pól v jejím ohnisku je řídicí přímka paraboly.

Sestrojme úpatnici d_R rovnoosé hyperboly pro pól P v jejím středu S (obr. 40). Stačí ukázat konstrukci jednoho bodu této úpatnice. Na obr. 40 byla sestrojena tečna 1t_h dané rovnoosé hyperboly h v jejím bodě 1T zvoleném na h zcela libovolně. Patá 1R kolmice spuštěné ze středu S



Obr. 39.



hyperboly jakožto pólu P na tuto tečnu je již bodem hledané úpatnice d_R . Bod 1R je jednou z poloh vrcholu R daného pohybujícího se pravého úhlu. Tímto způsobem bychom mohli sestavit libovolné množství bodů hledané úpatnice d_R . Křivka, která tvoří tuto úpatnici dané rovnoosé hyperboly pro její střed jakožto pól, je tzv. *Bernoulliiovou lemniskatou*. Tato lemniskata prochází středem dané hyperboly dvakrát a má v něm tedy svůj singulární bod (dvojnásobný). Asymptoty dané hyperboly jsou tečnami lemniskaty v jejím dvojnásobném bodě. Tento bod je pak pro každou z větví křivky současně bodem inflexním, neboť v něm větev lemniskaty přechází z jedné strany tečny (asymptoty hyperboly) na její druhou stranu.

Normála 1n_h dané hyperboly v jejím bodě 1T a kolmice vztyčená ve středu S hyperboly na spojnici ($S {}^1R$) se protnou v bodě 1S , okamžitému středu otáčení, který přísluší poloze 1R pohybujícího se vrcholu R pravého úhlu. Spojnice (${}^1S {}^1R$) je pak normálou 1n lemniskaty v jejím bodě 1R a přímka ${}^1t \perp {}^1n$ v bodě 1R je tečnou této křivky v jejím bodě 1R .

Bernoulliova lemniskata se dá rovněž definovat jako rovinná křivka, jejíž všechny body mají od dvou různých daných bodů 1F , 2F (ohnisek) stálý *součin* vzdáleností, rovný výrazu $\frac{{}^1F {}^2F}{2} \sqrt{2}$. Sestrojíme-li tedy průsečíky asymptot rovnoosé hyperboly s její vrcholovou kružnicí a promítneme je kolmo do hlavní osy hyperboly, získáme tak na ní právě ohniska 1F a 2F Bernoulliovy lemniskaty, která je současně úpatnicí dané rovnoosé hyperboly pro pól v jejím středu. Dají se odvodit ještě tyto vlastnosti Bernoulliovy lemniskaty:

Kružnice se středem ve dvojnásobném bodě lemniskaty, procházející jejími ohnisky 1F a 2F , protíná lemniskatu v bodech, které jsou nejvíce vzdáleny od osy $o \equiv (^1F, ^2F)$ lemniskaty. Tečny v těchto bodech k lemniskatě jsou rovnoběžné s její osou o , jsou celkem dvě a každá z nich se lemniskatou dotýká dvakrát (v bodech, které jsme právě našli).

Pro poloměr r kružnice křivosti ve vrcholech A a B lemniskaty platí výraz $r = \frac{1}{3} a$, (kde $a = AS = SB$ je délka hlavní poloosy dané hyperboly).

Vedme vrcholem (např. A) lemniskaty libovolnou přímku l tak, aby protála kružnici nad průměrem $^1F, ^2F$ ve dvou bodech $^1C, ^2C$.

Opíšeme-li kolem 1F (2F) kružnici poloměrem 1CA a kolem 2F (1F) kružnici poloměrem 2CA , protnou se tyto kružnice v bodě lemniskaty. Jsou tedy úsečky A^1C a A^2C průvodiče bodů této křivky pro její ohniska.

(Pokračování)

? Kdo vysvětlí tuto záhadu ?

Obrázek 1 představuje kolo automobilu o poloměru R , které se dotýká země v bodě A . Jestliže se automobil uvede do pohybu a kolo se přitom otočí právě jednou, urazí střed kola (bod S) a celé auto stejnou dráhu, jakou vykonal bod A , tj. $2\pi R$.

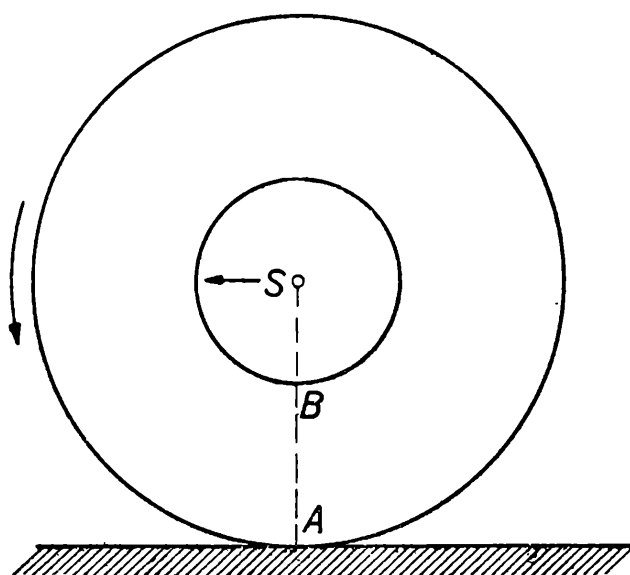
Jestliže všechny body auta ujely dráhu $2\pi R$, musel tutéž dráhu urazit také bod B , ležící mezi body S , A . Bod B se však otočil jako bod A právě jednou. Urazil tudíž dráhu $2\pi r$, kde $r = SB$.

Potom

$$2\pi R = 2\pi r,$$

z čehož by plynulo

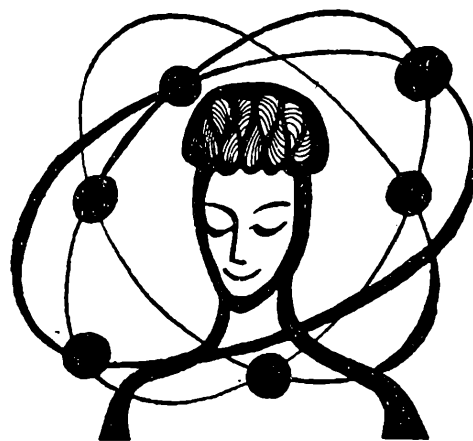
$$R = r.$$



Víme však, že $r < R$, což je v rozporu s předcházející rovnicí.

Kde je chyba?

S. H.



F Y Z I K A

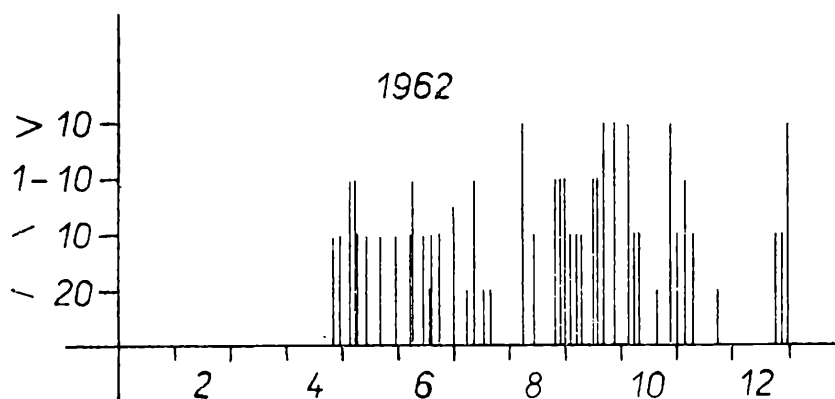
Umělé radionuklidy v ovzduší

PROF. RNDr. VILÉM SANTHOLZER, DrSc., KU Hradec Králové

Radionuklid je nové pojmenování pro radioizotop. „Nuklid“ je druh atomového jádra charakterizovaný určitým atomovým číslem Z a určitým hmotovým číslem M . V současné době je známo asi 1 700 druhů nuklidů. Z toho je asi 270 nuklidů stabilních, ostatní jsou nestabilní, radioaktivní. Z nich jen poměrně malá část se vyskytuje v přírodě jako *přirozené prvky radioaktivní*, většina jsou *umělé radioaktivní prvky*, vznikající různými způsoby přeměn stabilních nuklidů, *jadernými reakcemi*.

Jednou z takových reakcí, která je zdrojem několika set uměle radioaktivních prvků, je štěpení nejtěžších jader, thoria, uranu, transuranu plutonia i ostatních transuranů. Radionuklidy vzniklé štěpením se nazývají *štěpné produkty*. V atomových reaktorech se odehrává kontrolovaná, řízená štěpná reakce a je dokonale postaráno o to, aby štěpné produkty neunikaly.

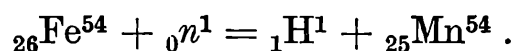
Ve větších množstvích se štěpné produkty dostávají do ovzduší následkem pokusných výbuchů nukleárních zbraní. Moskevskou dohodou z r. 1963 byly zakázány pokusné výbuchy v ovzduší, pod vodou a v kosmickém prostoru. Poslední nukleární výbuchy byly provedeny koncem r. 1962. Z nich některé měly celkový energetický výtěžek větší než 10 megatun TNT (trinitrotoluenu), takže byly zdrojem obrovského množství neutronů (obr. 1). V r. 1964 byl proveden ojedinělý pokusný výbuch čínské atomové pumy menšího kalibru, který ve střední Evropě způsobil jen malé a krátkodobé zvýšení radioaktivity. Na naší pozorovací stanici se jeho vliv prakticky ani neprojevil.



Obr. 1. Přehled nukleárních výbuchů v roce 1962. Na ose časové jsou měsíce, pořadnice jsou úměrné uvolněným energiím. Od shora dolů jsou uvedeny výbuchy, jejichž energie byla větší než energie obsažená v deseti megatunách tritolu (trinitrotoluenu), dále v rozsahu 1 až 10 megatun, menší než 10 megatun a menší než deset kilotun. Byly to poslední pokusné výbuchy atomových a vodíkových pum v ovzduší. V letech 1963–64 nebyly již pokusné výbuchy v ovzduší prováděny, neboť byla uzavřena moskevská dohoda o zastavení nukleárních zkoušek v ovzduší, pod vodou a v kosmickém prostoru. Čínský atomový výbuch provedený 16. 10. 1964 se u nás znatelně neuplatnil.

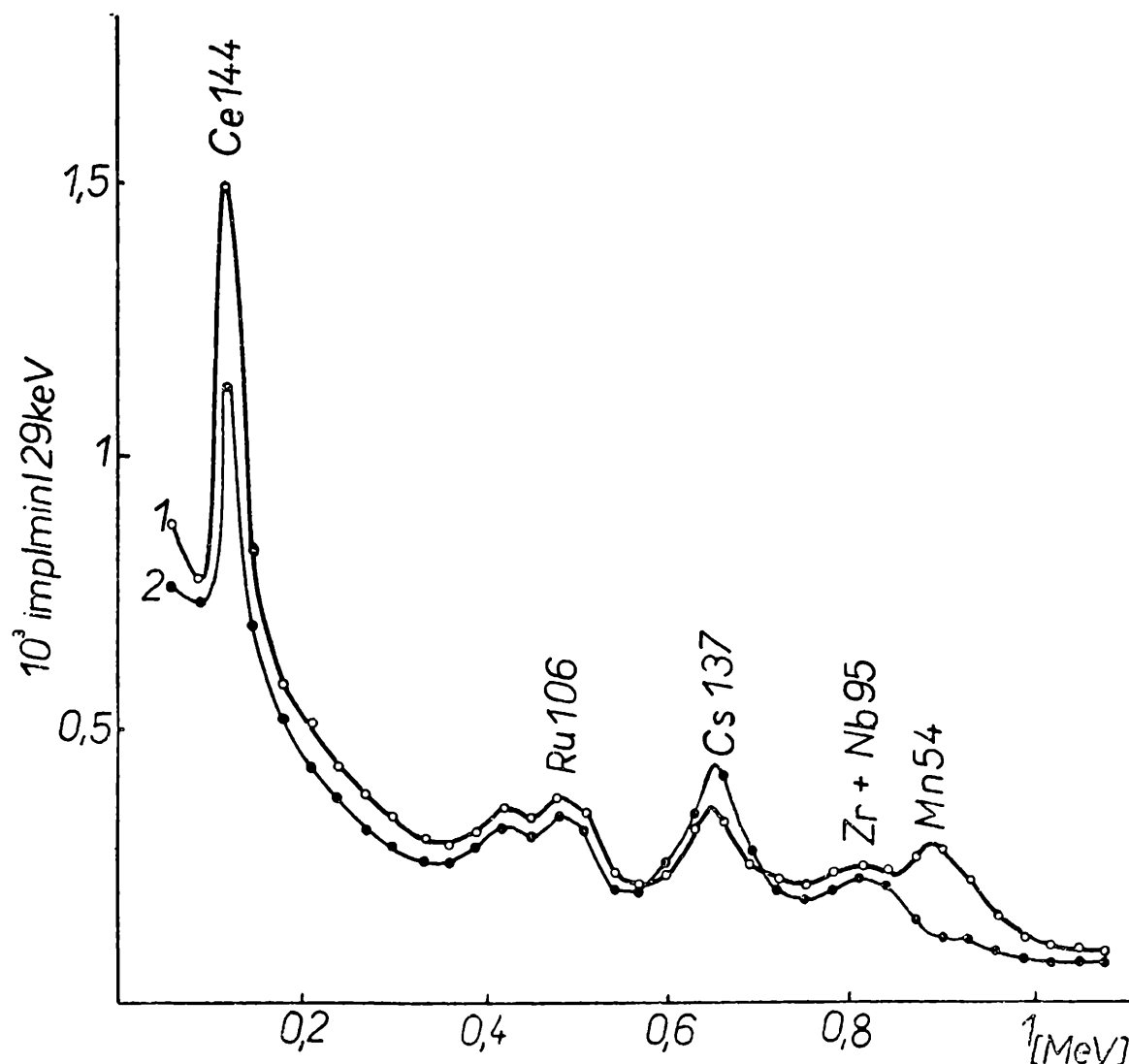
Štěpné produkty vznikají při zkouškách atomových pum, ale také termonukleárních (vodíkových) pum, neboť jejich roznětky jsou z uranu 235 nebo plutonia 239. Roznětka dodá potřebnou teplotu pro zahájení termonukleární reakce. Uvolněné neutrony mohou působit nejen na jádra atomů z konstrukčních materiálů pum, ale i na jádra atomů vzdušného dusíku a mohou vyvolávat různé jaderné reakce. Tak vznikají *aktivační produkty*, které se vyskytují v ovzduší.

Na obr. 2, kde jsou dvě spektra gama nukleárního spadu získaná po uplynutí různých dob od zastavení pokusných nukleárních výbuchů, je patrný vrchol, který přísluší jedné takové aktivační zplodině, a to manganu 54. Vzniká působením neutronů na jeden ze stabilních izotopů železa Fe 54 jadernou reakcí



Mangan 54 má poločas 291 dnů a byl dokázán v posledních letech i v rostlinách, mořské vodě aj.

Ostatní radionuklidy na obr. 2, který byl zhotoven naším pracovištěm, jsou štěpné produkty: cer 144, ruthenium 106 s dceřinnou látkou rhodiem 106, cesium 137 a zirkon 95 s dceřinnou látkou niobem 95. Na jedné ose na obr. 2 jsou energie paprsků gama v MeV, podle nichž se dá příslušný radionuklid rozpoznat. Např. pro mangan 54 je jasně patrný vrchol odpovídající energii jím vysílaných paprsků gama = 0,84 MeV. Na ose y je uveden příslušný počet impulsů za min. pro šíři kanálu 29 keV. Určitým radionuklidům odpovídají určité vrcholy ve spektru, tzv. *píky*. Je-li na obr. 2 šíře kanálu 29 keV, tedy pro energii 1 MeV = 10^6 eV, bylo postupně použito $10^6 : 2,9 \times 10^4 = 34$ kanálů.



Obr. 2. Pokles množství některých radionuklidů v ovzduší během r. 1964, jak se projevil ve dvou spektrech gama. Zřetelný je zejména pokles aktivity ceru 144. (Aktivita je přímo úměrná množství radionuklidu.) Spektra byla snímána v časovém rozmezí 10 měsíců.

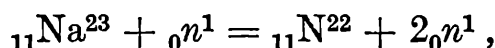
Z obr. 2 je patrné, jak ubylo množství aktivačního produktu Mn 54. Je to následek dvou dějů, radioaktivního rozpadu a postupného ubývání ve stratosféře. Rychlost vypadávání radioaktivního prachu ze stratosférické zásobárny je přímo úměrná celkové zásobě radionuklidu a se zmenšováním jeho množství se tedy zmenšuje.

Velmi dokonalou spektrometrickou technikou (spektrometrem mnohokanálovým v kombinaci se speciálním uspořádáním počítačů paprsků) bylo možno ještě v roce 1964 stanovit 5 aktivačních produktů ve vzduchu. Tyto práce prováděli Perkins, Nielsen a Thomas v laboratořích v Hanfordu (stát Washington). Jsou pozoruhodné proto, že v blízkosti fungují veliké reaktory, které by mohly být zdrojem radionuklidů, kdyby nebyly dokonale utěsněny. Ve skutečnosti radionuklidy zjištěné ve vzduchu (zachycené na filtrech) byly štěpné a aktivační zplodiny z nukleárních výbuchů. Ze štěpných zplodin byly v r. 1964 přítomny ještě radionuklidy, jejichž poločasy jsou dostatečně dlouhé,

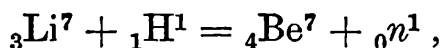
aby se ještě úplně nerozpadly. Byly to cer 144 (poločas 285 dnů), cesium 137 (30 let), ruthenium 106 (1 rok), antimon 125 (2 roky) a zirkon 95 + niob 95. Oba poslední radionuklidy jsou přítomny ve směsi, která se po uplynutí asi půl roku rozpadá s poločasem zirkonu 95, tj. 65 dnů. Je to proti poločasům ostatních uvedených produktů poločas poměrně krátký. Vskutku za rok 1963 poklesla aktivita směsi Zr 95 + Nb 95 na nepatrný zlomek původní aktivity, byla však ještě v roce 1964 měřitelná.

Na našem pracovišti mohli jsme Zr 95 + Nb 95 spektrometricky stanovit ještě začátkem léta 1964, pak již citlivost naší metodiky nebyla dostatečná.

Z aktivačních produktů byly zjištěny ještě tyto radionuklidy: kobalt 60 (poločas 5,2 roku), yttrium 88 (105 dnů), antimon 124 (61 dnů), cesium 134 (2,1 roku), berylium 7 (54 dnů) a sodík 22 (2,6 roku). Oba poslední radionuklidy sice trvale vznikají v ovzduší účinkem kosmických paprsků na lithium a sodík (které jsou v nepatrných množstvích obsaženy ve vzduchu), avšak sodík 22 vzniká i při zkouškách termionukleárních pum. V letech 1963–64 se množství sodíku 22 nápadně zvýšilo jako následek nukleárních zkoušek provedených v roce 1961–62. Radiosodík Na^{22} vzniká z přírodního sodíku reakcí



kdežto radioberylium Be^7 vzniká z lithia působením protonů v kosmických paprscích



pravděpodobně však i tříštěním těžších jader kosmickými paprsky, např. tříštěním argonu. Radioaktivní Be^7 nejeví sezónní variace, zejména jarní zvýšení, které je charakteristické pro štěpné zplodiny i aktivační produkty nahromaděné ve stratosféře. V pozdní zimě a zejména na jaře následkem poklesu vzduchových hmot ze stratosféry do troposféry nastává každoročně zvýšení aktivity souběžně se zvýšením obsahu ozónu. Tento jev je způsoben ryze meteorologickými činiteli. Protože aktivita Be^7 nejeví sezónní variace, Be^7 patrně je obsaženo jen v troposféře, kde vzniká účinkem kosmických paprsků.

Množství aktivačních produktů Y^{88} a Sb^{124} v roce 1964 znatelně nekleslo. Můžeme se domnívat, že tyto produkty jsou obsaženy ve vysoké stratosféře, kde je doba prodlevu radioaktivního prachu podstatně delší. Poločas prodlevu v nízké stratosféře je asi 5 až 6 měsíců, ve vysoké větší než 12 měsíců.

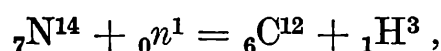
‡ Aktivační produkt cesium 134 vzniká ze stabilního cesia 133 reakcí $\text{Cs}^{133} (n, \gamma) \text{Cs}^{134}$. V ovzduší může být však (z menší části) i štěpným produktem.

Kobalt 60 vzniká neutronovou aktivací stabilního kobaltu 59 nebo stabilního niklu 60.

Různí pracovníci dokázali v radioaktivním prachu po nukleárních explozích také radioaktivní kobalt 58 s poločasem asi 70 dnů, který vznikl působením neutronů na nikl a radioaktivní železo 55 poločasu asi 3 roky, vzniklé aktivací obyčejného železa. Některé aktivační produkty vznikly zřejmě účinkem neutronů z termonukleárních výbuchů na konstrukční materiály pum.

Uvedené radionuklidy byly stanoveny spektrometrií gama, neboť vysílají paprsky beta i gama. Mezi štěpné produkty patří však i známé radioaktivní stroncium 90, které vysílá pouze paprsky beta a má poločas 28 let. Vyskytuje se tedy i nyní v našem životním prostředí, i když ve zcela nepatrném množství. Další nukleární zkoušky by jeho množství postupně zvyšovaly, a to je nežádoucí.

Termonukleární výbuchy vytvořily také určité množství radiouhlíku C^{14} , jehož poločas je 5600 let. Tento zářič beta se tvoří účinkem neutronů na vzdušný dusík reakcí $N^{14} (n, p) C^{14}$, kde p značí proton. Účinkem neutronů na dusík může vznikat i další zářič beta *tritium* podle reakce



kde H^3 je radionuklid vodíku poločasu asi 12 let, zv. tritium, pro nějž se často používá značky T^3 .

Experimentální určování vztahů mezi fyzikálními veličinami pomocí Π -teorému

(Dokončení)

JOSEF MATOULEK, studující ČVUT, Praha

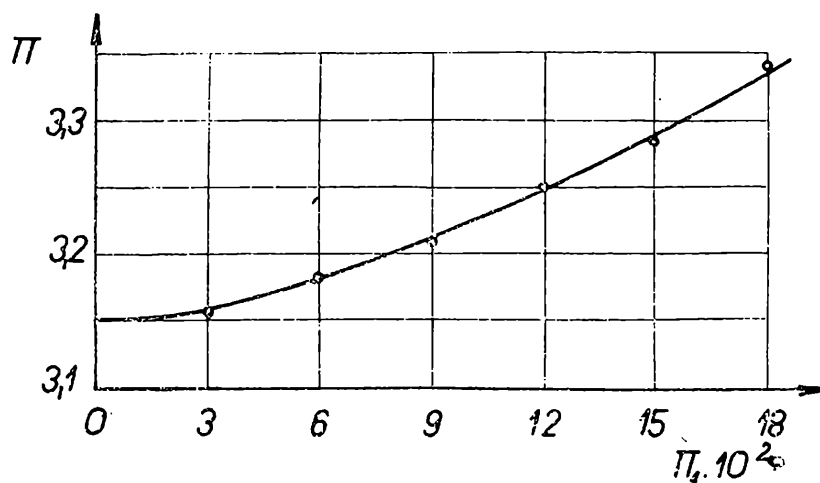
Realizujme matematické kyvadlo kovovou kuličkou na tenké niti délky $l = 1,5$ m a měřme dobu kyvu pro různé hodnoty φ . Aby nebylo měření příliš ovlivněno ztrátami v závěsu a odporem vzduchu, provedeme měření pouze pro malá φ . Poznamenejme jen, že dobou kyvu nazýváme čas uplynulý mezi dvěma po sobě následujícími průchody hmotného bodu rovnovážnou polohou. Výsledky měření jsou vyneseny v tabulce 2. Údaj φ_0 je jen informativní. Vyneseme-li v obr. 3 hodnoty závislosti $\Pi = \Phi(\Pi_1)$, pak vidíme, že tyto body leží na křivce parabolického typu. Předpokládejme, že její rovnice je

$$\Pi = a_0 + a_1 \cdot \Pi_1^2 + a_2 \cdot \Pi_1^4 + \quad (11)$$

Tab. 2.

$\varphi = \Pi_1$	φ°	t_s	$\Pi = t \sqrt{\frac{g}{l}}$
0,03	1°43'	1,235	3,16
0,06	3°26'	1,245	3,18
0,09	5°09'	1,255	3,21
0,12	6°52'	1,27	3,25
0,15	8°36'	1,285	3,28
0,18	10°18'	1,305	3,34

Pro malé hodnoty Π_1 jsou Π_1^2 , Π_1^4 , zanedbatelné, a tudíž pro malé hodnoty Π_1 (teoreticky pro nulový rozkvyv $\Pi_1 = 0$) lze psát $\Pi = a_0$. Z obr. 1 vidíme, že křivka protíná osu Π v bodě $\Pi = a_0 \doteq 3,15$. Kdyby-



Obr. 3.

chom dokázali provést měření beze ztrát, bylo by $a_0 = \pi$. Pro malé rozkvyvy je tedy podle vztahu (10)

$$t \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \pi,$$

a tedy doba kyvu matematického kyvadla

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (12)$$

$c, n > k + 1$.

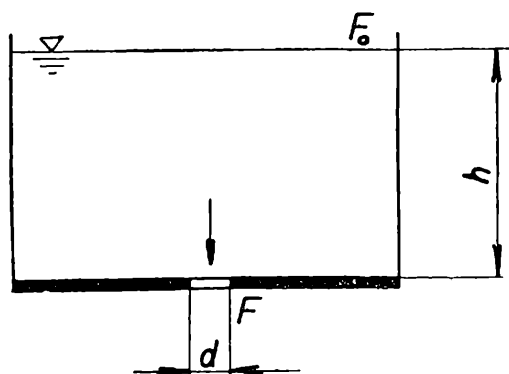
Počet nezávisle proměnných bezrozměrných argumentů může být 2, 3, ... Ukážeme si, jak se vyšetřuje případ $n = k + 2$. Vztah (4) má pak tvar

$$\Pi = f(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2) = \Phi(\Pi_1, \Pi_2). \quad (13)$$

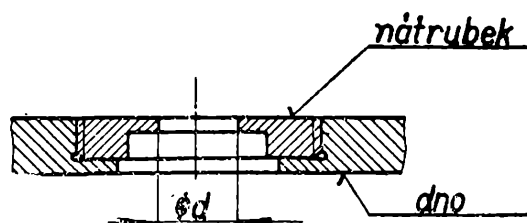
Při určování této závislosti lze postupovat např. tak, že se graficky vynesou závislosti $\Pi - \Pi_1$ pro různé hodnoty Π_2 .

Určeme dobu potřebnou k výtoku vody z nádoby podle obr. 4. Předpokládejme, že je

$$t = f(g, F_0, h, F). \quad (14)$$



Obr. 4.



Obr. 5.

Veličiny g , F_0 jsou rozměrově nezávislé. Stejně jako v případě a určíme

$$\Pi = \frac{t}{g^{-\frac{1}{2}} \cdot F_0^{\frac{1}{4}}} = t \cdot \sqrt[4]{\frac{g^2}{F_0}}, \quad \Pi_1 = \frac{h}{\sqrt{F_0}}; \quad \Pi_2 = \frac{F}{F_0}. \quad (15)$$

Měření provedeme na nádobě s vyměnitelným, tvarově podobným nátrubkem (obr. 5). Rozměry nádoby $F_0 = 100 \text{ cm}^2$. Otvory v nátrubkách jsou provedeny tak, aby $F : F_0 = 10^{-2}$; $6 \cdot 10^{-3}$; $3 \cdot 10^{-3}$ a 10^{-3} , tj. $d = 11,3$; $8,7$; $6,2$ a $3,6 \text{ mm}$. Výsledky jsou vyznačeny v tabulce 3.

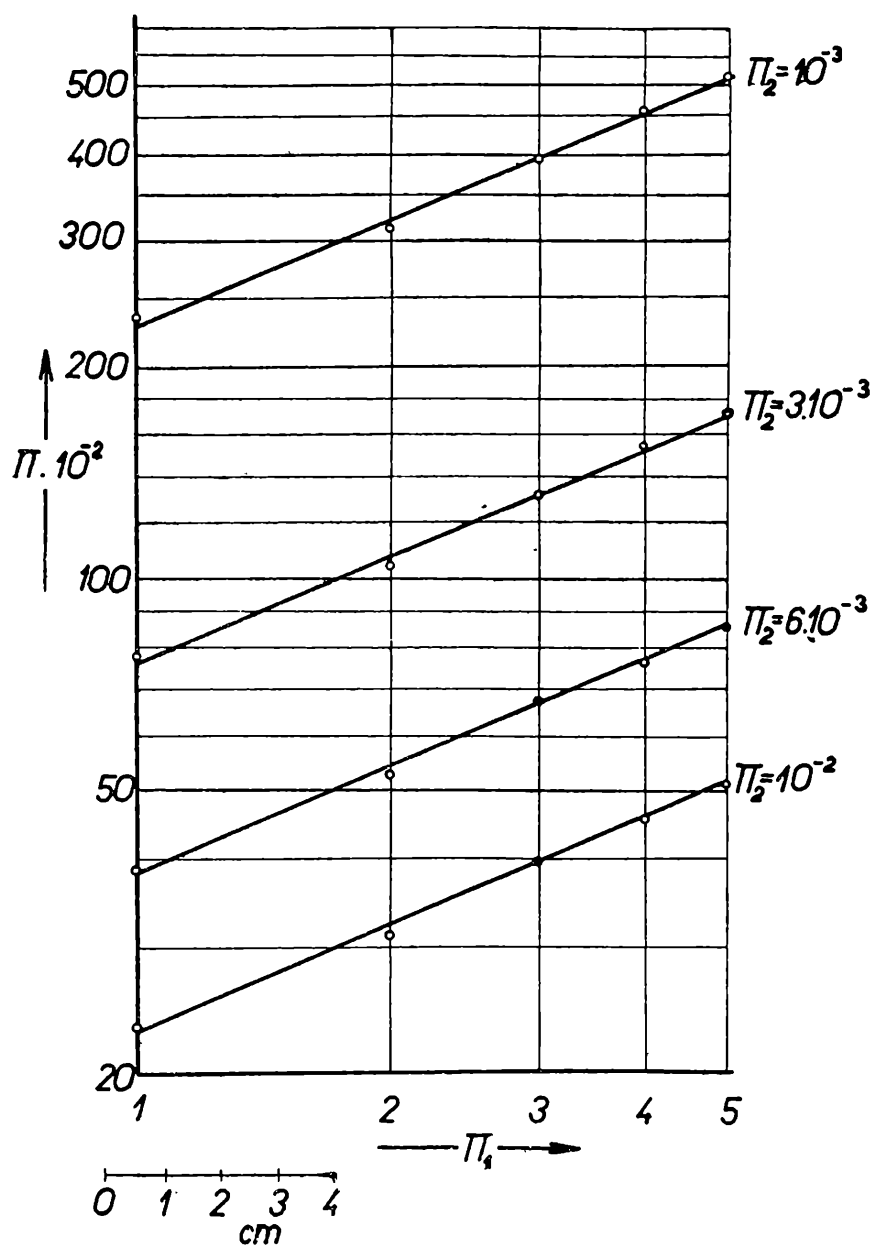
h_m	Π_1	$\Pi_2 = \frac{F}{F_0} = 10^{-2}$		$\Pi_2 = 6 \cdot 10^{-3}$		$\Pi_2 = 3 \cdot 10^{-3}$		$\Pi_2 = 10^{-3}$	
		t_s	Π	t_s	Π	t_s	Π	t_s	Π
0,1	1	23,2	$23,0 \cdot 10^2$	39,0	$38,6 \cdot 10^2$	78,2	$77,5 \cdot 10^2$	234	$232 \cdot 10^2$
0,2	2	31,7	$31,4 \cdot 10^2$	53,1	$52,6 \cdot 10^2$	105,0	$104,0 \cdot 10^2$	315	$312 \cdot 10^2$
0,3	3	40,0	$39,6 \cdot 10^2$	67,1	$66,5 \cdot 10^2$	133,0	$131,5 \cdot 10^2$	398	$394 \cdot 10^2$
0,4	4	46,0	$45,5 \cdot 10^2$	76,5	$75,7 \cdot 10^2$	155,0	$153,5 \cdot 10^2$	458	$453 \cdot 10^2$
0,5	5	51,5	$51,0 \cdot 10^2$	86,5	$85,6 \cdot 10^2$	172,0	$170,0 \cdot 10^2$	516	$511 \cdot 10^2$

Zobrazme je nyní graficky (obr. 6). Použijeme k tomu log. papíru, jehož zobrazovací rovnice jsou $\xi = \alpha \cdot \log \Pi_1$; $\eta = \beta \cdot \log \Pi$. Zvolíme $\alpha = 15 \text{ cm}$; $\beta = 12,5 \text{ cm}$ a na stupnici ξ zobrazíme interval $\langle 1; 5 \rangle$ na stupnici η interval $\langle 20 \cdot 10^2; 600 \cdot 10^2 \rangle$. Vidíme, že výsledky měření lze zobrazit čtyřmi rovnoběžnými přímkami. Z analytické geometrie je známo, že rovnice přímky v souřadnicích ξ , η zní

$$\eta = \xi \cdot \text{tg } \varphi + q \quad (16)$$

Dosadme nyní za ξ , η ze zobrazovacích rovnic

$$\beta \cdot \log \Pi = \alpha \cdot \text{tg } \varphi \cdot \log \Pi_1 + \beta \log p \quad (17)$$



Obr. 6.

a za q jsme zavedli novou neznámou p vztahem $q = \beta \cdot \log p$. Upravme nyní vztah (17)

$$\log \Pi = \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} \varphi \log \Pi_1 + \log p,$$

$$\Pi = p \cdot \Pi_1^{\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} \varphi}, \quad (18)$$

p zřejmě závisí na Π_2 , neboť pro každou přímku je jiné q , avšak exponent u Π_1 je na Π_2 nezávislý, neboť přímky jsou rovnoběžné. Odměření dostáváme $\operatorname{tg} \varphi = 0,41$, a tedy hodnota exponentu

$$n = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{15}{12,5} \cdot 0,41 = 0,492 \doteq 0,5;$$

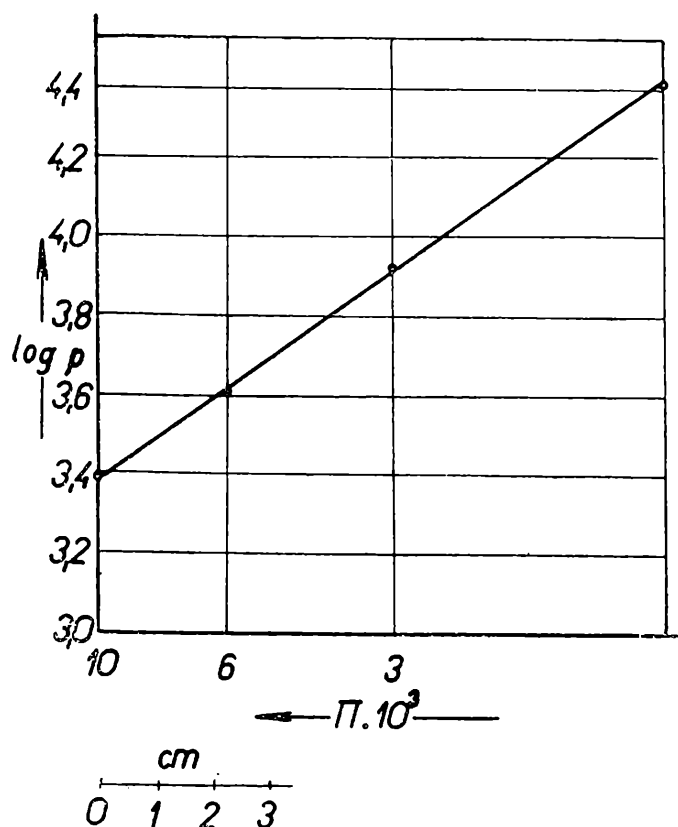
lze tedy vztah (18) přepsat ve tvaru

$$\Pi = p \cdot \sqrt[3]{\Pi_1}, \quad (19)$$

kde $p = f(\Pi_2)$. Stanovíme nyní tuto závislost. Je si třeba uvědomit, že úseky na ose η je třeba měřit od skutečného počátku. Posunutému počátku, jenž je kótován kótou $20 \cdot 10^2$, přísluší souřadnice $q_0 = \beta \cdot \log 20 \cdot 10^2 = 12,5 \cdot 3,30 = 41,7$ cm. Odměříme nyní úseky q' pro jednotlivé přímky, což jsou úseky měřené od posunutého počátku. Po řadě dostáváme $q' = 0,7; 3,5; 7,2; 13,2$ cm. Těmto hodnotám odpovídají hodnoty $q = q_0 + q' = 42,4; 45,2; 48,9; 54,9$ cm. Ze vztahu, kterým jsme zavedli p , vyplývá

$$\log p = q : \beta = 3,39; 3,61; 3,92; 4,39.$$

Zobrazme nyní graficky vztah $p = f(\Pi_2)$ (obr. 7). Použijeme opět



Obr. 7.

logaritmického papíru, daného rovnicemi $\xi = \alpha \cdot \log \Pi_2$, $\eta = \beta \log p$. Zvolíme $\alpha = -10$ cm, $\beta = 7$ cm, neboť $\log \Pi_2$ leží v intervalu $\langle -2, -3 \rangle$ a $\log p$ v intervalu $\langle 3; 4,5 \rangle$ a zobrazíme pouze tyto intervaly. Vidíme, že hledaná závislost se dá přibližně zobrazit přímkou. Na základě toho nalezneme stejným postupem jako prve, že platí $p = 2,3 \Pi_2$. Po dosazení do vztahu (19) dostáváme

$$\Pi = 2,3 \cdot \Pi_2 \sqrt[3]{\Pi_1}. \quad (20)$$

Dosadme nyní ze vztahu (15) do (20). Dostáváme po úpravě hledanou

závislost pro t

$$t = \frac{2,3 \cdot F \cdot h}{\sqrt{gh} \cdot F_0} \quad (21)$$

Je zvykem tento vztah dále upravovat tak, aby t závisel na $\sqrt{2gh}$

$$t = \frac{2Fh}{0,62 \sqrt{2gh} \cdot F_0} \quad (22)$$

Ukazuje se, že koeficient 0,62 vyjadřuje tvar nátrubku. U tvarově podobných nátrubků je stejný. Označuje se μ . Lze tedy psát

$$t = \frac{2Fh}{\mu \sqrt{2gh} \cdot F_0} \quad (23)$$

Případy, kdy $n > k + 2$, lze jen velmi obtížně vyšetřovat metodou Π -teorému. Lze tedy na závěr říci, že vyšetřování fyzikálních vztahů metodou Π -teorému je výhodné tam, kde se vyskytuje velký počet rozměrově nezávislých veličin a počet rozměrově závislých veličin je menší, nebo nanejvýše roven dvěma.

Literatura

[1] Z. Horák, F. Krupka, V. Šindelář, Technická fyzika, Praha 1961, [2] O. Maštovský, Hydromechanika pro strojní inženýry, Praha, [3] A. J. Sedov, Metody podobnosti a rozměrovosti v mechanice.

Řešení



úloh

● Fyzika

2. Vypočtete: a) Na jakou vzdálenost by se musel přiblížit k Zemi Měsíc, aby se jeho oběžná doba zrychlila na dva dny? (Oběžná doba Měsíce $T = 27,3$ dne; střední vzdálenost Měsíce $a = 384\,400$ km.)

b) Tíhové zrychlení na povrchu Měsíce. Poměr hmot Měsíce a Země je $m : M = 1 : 81$, poměr poloměrů $r_M : R_Z = 0,27$, tíhové zrychlení na zemském povrchu je $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

(Došlo 30 řešení)

Otakar Julák

Řešil František Zatloukal, 3.d SVVŠ, Přerov:

Úlohu a) řešíme podle 3. Keplerova zákona

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3},$$

$$a_1 = \sqrt[3]{a_2^3 \cdot \frac{T_1^2}{T_2^2}},$$

číselně

$$a_1 = \sqrt[3]{3,844^3 \cdot 10^{15} \cdot \frac{2^2}{27,3^2}},$$

$$a = 67\,300 \text{ km}.$$

Měsíc by se musel přiblížit na vzdálenost 67 300 km.

Úlohu b) řešíme podle Newtonova gravitačního zákona. Hmota jednoho kilogramu je k povrchu Měsíce přitahována silou:

a) podle 2. pohybového zákona Newtonova

$$F = m \cdot a,$$

b) podle gravitačního zákona

$$F = \kappa \cdot \frac{m \cdot M_M}{r_M^2}.$$

Obě síly jsou stejné, tedy

$$m \cdot a = \kappa \cdot \frac{m \cdot M_M}{r_M^2}.$$

Podobně je tomu u Země

$$m \cdot g = \kappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{R_Z^2}.$$

Rovnice vydělíme a dostáváme

$$\frac{a}{g} = \frac{M_M}{M_Z} \cdot \frac{R_Z^2}{r_M^2}.$$

Z toho

$$a = g \cdot \frac{M_M}{M_Z} \cdot \frac{R_Z^2}{r_M^2}$$

a číselně

$$a = 9,81 \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{100^2}{27^2},$$

$$a = 1,6616 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Na povrchu Měsíce je gravitační zrychlení $a = 1,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3. Je dáno kyvadlo naznačené na obr. 1, jež můžeme zhruba pokládat za kyvadlo matematické. Délka závěsu kyvadla je $l = 1,5 \text{ m}$, výšková odlehlost hrany, jež při výkyvu nalevo zkrátí závěs, je od místa závěsu $d = 0,54 \text{ m}$. Máme vypočítat periodu (dobu dvoukyvu) daného kyvadla. Kývání uvažujeme v malých úhlových výchylkách kolem klidové rovnovážné polohy. Odpory neuvažujeme. Tíhové zrychlení volíme $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. (Obr. 1 na str. 77 ročníku 1964/65).

(Došlo 26 řešení)

Václav Šindelář

Řešil Miroslav Řezníček, 3.d SVVŠ, Hradec Králové:

První polovinu kyvu se kyvadlo pohybuje z krajní polohy A do rovnovážné polohy B . Délka kyvadla je zde l a proto, použijeme-li známého vzorce pro dobu kyvu

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

je doba pohybu koncového bodu kyvadla z polohy A do polohy B

$$T_1 = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Pohyb z bodu B do bodu C je polovinou kyvu kyvadla o délce $(l - d)$, a proto doba pohybu z bodu B do C je

$$T_2 = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{l-d}{g}}.$$

Zřejmě pak pro pohyb z bodu C do bodu B

$$T_3 = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{l-d}{g}}$$

a pro pohyb z bodu B do A

$$T_4 = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Celková doba dvojkyvu z bodu A do C a zpět je

$$T' = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

a tedy

$$T' = \pi \cdot \left(\sqrt{\frac{l}{g}} + \sqrt{\frac{l-d}{g}} \right).$$

Rozměrově: $[T'] = \left(\sqrt{\frac{\text{m}}{\text{m s}^{-2}}} + \sqrt{\frac{\text{m}}{\text{m s}^{-2}}} \right) = \text{s}.$

Číselně: Pro číselné zadání $l = 1,5 \text{ m}$, $d = 0,54 \text{ m}$, $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ je

$$T' = \pi \left(\sqrt{\frac{1,5}{9,81}} + \sqrt{\frac{0,96}{9,81}} \right) \doteq 2,21 ;$$

$$T' = 2,21 \text{ s}.$$

Závěr: Doba dvojkyvu kyvadla je

$$T' = \pi \left(\sqrt{\frac{l}{g}} + \sqrt{\frac{l-d}{g}} \right), \text{ tj. asi } 2,21 \text{ s}.$$

4. Víme, že valení rotačního (obecně libovolného) válce po rovině můžeme považovat za rotaci okolo okamžitých os o , jimiž jsou povrchové přímky, v nichž se válec dotýká roviny. Ověřte si správnost tvrzení vypočtením celkové kinetické energie valícího se válce pouze z okamžité rotace. Moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho podélné rotační ose je roven $J_0 = \frac{1}{8} md^2$. K řešení použijeme Steinerovu větu $J_i = J_0 + ma_i^2$, podle níž vypočteme moment setrvačnosti J_i vzhledem k rovnoběžné ose vzdálené o a_i (vůči rotační ose). Přitom m značí hmotu tělesa (válce).

(Došlo 26 řešení)

Václav Šindelář

Řešil Zdeněk Slanina, 2.a SPŠCH, Brno:

I. Nejprve se zabývejme valením rotačního válce po vodorovné rovině. Tento pohyb můžeme nahradit dvěma pohyby: Pohybem posuvným (translačním) rychlostí v a pohybem otáčivým okolo podélné rotační osy válce. Všechny body válce, vyjma bodů ležících na podélné rotační ose, opisují křivky, zvané cykloidy. Kinetická energie E_1 posuvného pohybu válce po rovině rychlostí v , jelikož všechny body tělesa mají v tomto případě stejné rychlosti co do velikosti i směru, je dána vztahem

$$E_1 = \frac{1}{2} m v^2. \quad (1)$$

Otáčivý pohyb válce kolem podélné rotační osy válce se děje s úhlovou rychlostí

$$\omega_1 = \frac{2v}{d}. \quad (2)$$

Kinetická energie E_2 tohoto pohybu rotačního s úhlovou rychlostí ω_1 je dána vztahem

$$E_2 = \frac{1}{2} J_0 \omega_1^2. \quad (3)$$

Dosazením za moment setrvačnosti J_0 plného válce vzhledem k jeho podélné rotační ose a za úhlovou rychlost ω_1 ze vztahu (2) dostáváme po úpravě

$$E_2 = \frac{1}{4} m v^2. \quad (4)$$

Celková kinetická energie E válce valícího se po vodorovné rovině rychlostí v je pak dána součtem energie translačního pohybu a energie rotačního pohybu kolem rotační podélné osy

$$E = E_1 + E_2. \quad (5)$$

Dosazením do vztahu (5) za E_1 a E_2 dostáváme pro celkovou kinetickou energii válce výraz

$$E = \frac{3}{16} m d^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v^2. \quad (6)$$

Dimenzionální správnost vztahu (6) je zřejmá.

II. Nyní se zabývejme z dynamického hlediska oním valením, jestliže je budeme pokládat za rotaci okolo okamžité osy o , jíž je povrchová přímka, v které se válec právě dotýká roviny. Těžiště, resp. všechny body na podélné rotační ose válce, se v tomto případě pohybují obvodovou rychlostí v , touž, jakou se dál pohyb translační v oddíle I.

Je tedy úhlová rychlost ω_2 tohoto rotačního pohybu dána vztahem

$$\omega_2 = \frac{2v}{d}. \quad (7)$$

Okamžitá osa rotace o , rovnoběžná s osou válce, je od ní vzdálena o $a = \frac{d}{2}$. Dostáváme tedy ze Steinerovy věty pro celkovou kinetickou energii E' válce v tomto případě výraz

$$E' = \frac{1}{2} \omega_2^2 \left(\frac{1}{8} m d^2 + \frac{m d^2}{4} \right). \quad (8)$$

Dosazením za ω_2 ze vztahu (7), dostáváme po úpravě

$$E' = \frac{3}{16} m d^2 \omega^2 = \frac{3}{4} m v^2 . \quad (9)$$

Dimenzionální správnost vztahu (9) je zřejmá.

Srovnáním vztahů (6) a (9) pro kinetickou energii válce valícího se po vodorovné rovině, dostáváme

$$E = E' \quad (10)$$

Závěr: Právě provedeným výpočtem bylo ověřeno, že z hlediska dynamického, resp. energetického, je valení rotačního válce po vodorovné rovině ekvivalentní s rotací válce okolo okamžité osy, kterou je přímka, v níž se válec dotýká v daném okamžiku roviny.

Tím je řešení úlohy provedeno.

5. Ve dvou nádobách vzájemně od sebe oddělených jsou uzavřeny dva různé plyny při téže teplotě T . V jedné nádobě je 8 gramů kyslíku (molekulová hmotnost $\mu_1 = 32$), ve druhé je 8 gramů kysličníku uhličitýho (molekulová hmotnost $\mu_2 = 44$). Tlak kyslíku je roven $p_1 = 1,1$ at, tlak kysličníku uhličitýho je $p_2 = 1,5$ at.

Máme vypočítat, jaký bude výsledný společný tlak p směsi obou plynů v nádobách, spojíme-li obě nádoby. Oba plyny přitom pokládáme za dokonalé.

(Došlo 26 řešení)

Václav Šindelář

Řešil Jura Charvát, 3.b SVVŠ, Příbor:

O b e c n é ř e š e n í. Nechť V_1, V_2 jsou po řadě objemy nádob, v nichž je kyslík a kysličník uhličitý. Pak, označíme-li hmotu kyslíku m_1 a hmotu CO_2 m_2 , musí pro oba platit stavová rovnice

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot R \cdot T ,$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \cdot R \cdot T .$$

Odtud vypočteme objemy V_1, V_2 .

$$V_1 = \frac{m_1 \cdot R \cdot T}{p_1 \mu_1} ,$$

$$V_2 = \frac{m_2 \cdot R \cdot T}{p_2 \mu_2} .$$

Jestliže obě nádoby spojíme, zaplní oba plyny objem $V_1 + V_2$ a označíme-li jejich tlaky v tomto případě p'_1, p'_2 , bude výsledný tlak $p = p'_1 + p'_2$.

Zkoumaný děj považujeme za izotermický.

Bude tedy teplota obou plynů po spojení nádob opět T . Pro každý z nich musí platit zase stavová rovnice

$$p'_1 (V_1 + V_2) = \frac{m_1}{\mu_1} \cdot R \cdot T ,$$

$$p'_2 (V_1 + V_2) = \frac{m_2}{\mu_2} \cdot R \cdot T .$$

Zde dosadíme za V_1 a V_2

$$p'_1 \cdot R \cdot T \left(\frac{m_1}{\mu_1 p_1} + \frac{m_2}{\mu_2 p_2} \right) = R \cdot T \frac{m_1}{\mu_1},$$

$$p'_2 \cdot R \cdot T \left(\frac{m_1}{\mu_1 p_1} + \frac{m_2}{\mu_2 p_2} \right) = R \cdot T \frac{m_2}{\mu_2}.$$

Odtud

$$p'_1 = \frac{p_1 p_2 m_1 \mu_2}{m_1 \mu_2 p_2 + m_2 \mu_1 p_1},$$

$$p'_2 = \frac{p_1 p_2 m_2 \mu_1}{m_1 \mu_2 p_2 + m_2 \mu_1 p_1}.$$

Odtud za p'_1 a p'_2 dosadíme do vztahu $p = p'_1 + p'_2$

$$p = \frac{p_1 p_2 (m_1 \mu_2 + m_2 \mu_1)}{m_1 \mu_2 p_2 + m_2 \mu_1 p_1}.$$

R o z m ě r o v á z k o u š k a. Výsledek rozměrově souhlasí, neboť je

$$(p) = \frac{\text{at at } g}{\text{at } g} = \text{at}.$$

Č í s e l n é ř e š e n í. Do vztahu pro p dosadíme číselné hodnoty ze zadání

$$p = \frac{1,1 \cdot 1,5 (8 \cdot 44 + 8 \cdot 32)}{8 \cdot 44 \cdot 1,5 + 8 \cdot 32 \cdot 1,1} \doteq 1,24 \text{ [at]}.$$

Výsledný tlak směs obou plynů bude tedy asi 1,24 at.

P o z n á m k a a u t o r o v a : Někteří z řešitelů, např. K a r e l H e n c z Brna, uvedli výsledek kromě v atmosférách také v hlavní jednotce tlaku v soustavě SI. V této jednotce je výsledná hodnota

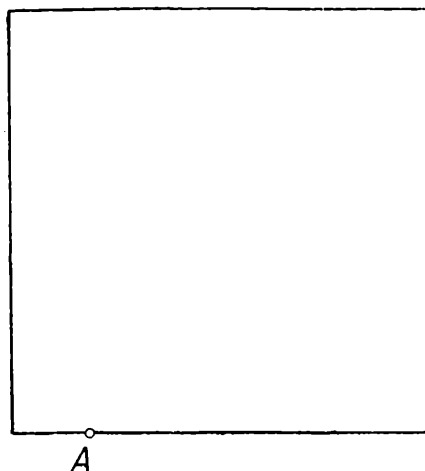
$$p \doteq 12,15 \cdot 10^4 \text{ [N} \cdot \text{m}^{-2} \text{]}.$$

(Pokračování)

Jak to nést?

Tři dělníci měli odnést plech z homogenního kovu tvaru čtverce (obr. 2). Jeden z nich uchopil plech v místě A vyznačeném kroužkem. Kde museli uchopit plech druzí dva, aby každý z nich nesl jednu třetinu váhy plechu?

St. Horák



Obr. 1.



RECENZE

Prostory o čtyřech a více rozměrech

To je název knížky, kterou v říjnu 1965 vydalo nakladatelství Mladá fronta v edici Škola mladých matematiků. Je to již 12. svazek této edice a napsal jej známý matematik doc. dr. Karel Havlíček. Těm, kteří znají předcházející Havlíčkovy knihy nebo kteří navštěvují jeho přednášky, nemusíme jistě příliš zdůrazňovat, že i v této nové knížce je výklad dokonale pedagogicky promyšlen a podán. Svazek se trochu odlišuje od předcházejících brožur, jež zatím vyšly ve Škole mladých matematiků. Vybočuje totiž tematicky ze středoškolské matematiky. Čtenáři se však nemusejí obávat, že by při studiu ztroskotali. Je tu totiž dobře navázáno na matematiku středoškolskou, najdete tu řadu příkladů a také na cvičeních si můžete ověřit, jak jste látce porozuměli.

Knížka obsahuje sedm kapitol; v první se shrnují známé věci o přímce a zavádějí se na ní sou-

řadnice. Rovině je věnována kapitola druhá a trojrozměrnému prostoru kapitola třetí. Pro středoškolské studenty bude novinkou asi až kapitola čtvrtá a následující. Zde se totiž setkají s euklidovským prostorem E_4 a v páté kapitole s obecným prostorem E_n . Zvláštní postavení má kapitola šestá, kde se pojednává o krychli v euklidovském prostoru. Čtenář uvidí, že úsečka, čtverec a krychle v tradičním slova smyslu jsou jen zvláštním případem obecnějšího pojmu. V poslední kapitole si autor podrobněji všímá významu vícerozměrných prostorů a ukazuje, že toto studium není jen samoučelným hrou. V závěru najdete ještě výsledky cvičení a seznam literatury, do které se může pustit čtenář, jenž si přeje podrobnější znalosti.

Brožura je vhodná jako podklad k samostatnému studiu a uplatní se jistě i v žákovských kroužcích. Můžeme ji doporučit nejen řešitelům Matematické olympiády, nýbrž i dalším zájemcům o tento přitažlivý námět. Knížka má 88 stran, 10 obrázků a stojí 3 Kčs.

J. S.

J I Ř Í S E D L Á Č E K

Co víme

o přirozených číslech

V knižnici Š k o l a m l a d ý c h m a t e m a t i k ů vyšlo již druhé vydání knížky J i ř í h o S e d l á č k a : *Co víme o přirozených číslech*. Knižka má 6 kapitol. V prvních dvou kapitolách pod názvy *Z o p a k u j m e s i z á k l a d n í p o j m y* a *D ě l e n í s e z b y t k e m a b e z e z b y t k u* uvádí autor vlastnosti přirozených čísel vyplývající jednak z vyjádření v desítkové soustavě, jednak z definice dělení dvou přirozených čísel. Třetí kapitola *P r v o č í s l a a č í s l a s l o ž e n á* je samostatnějším celkem uvádějícím současné znalosti teorie čísel o prvočíslech a číslech složených a řadu zajímavých poznatků (Fermatova a Mersenneova prvočísla, čísla dokonalá). Prvočísel je dále užito v kapitole čtvrté, která jedná o největším společném děliteli a nejmenším společném násobku přirozených čísel a jejich vzájemném vztahu. V závěrečné kapitole *N e u r č i t é r o v n i c e* probírá autor řadu příkladů na neurčité rovnice, které vzhledem k charakteru probírané látky mají řešení v oboru celých, nezáporných čísel. Látka celé knížky je probí-

rána se zřetelem k čtenáři znalému středoškolské matematiky a výklad je veden vždy na řadě příkladů. Obdobné příklady těm, které byly v textu vyřešeny, jsou dány na konci každé kapitoly za cvičení. Výsledky a návody k řešení jsou uvedeny v závěru knížky.

Knižka je určena k prohloubení znalostí středoškolské matematiky v oboru přirozených čísel, a bude proto sloužit hlavně studentům zájímajícím se hlouběji o matematiku a účastníkům Matematické olympiády. Protože mimo uvedené statě obsahuje několik zcela nových údajů, k nimž došlo v současné době bádání o prvočíslech, a řadu historických poznámek týkajících se probírané látky, stane se knížka Jiřího Sedláčka v neposlední řadě i vítanou pomůckou učitelů matematiky SVVŠ a ostatních jim na úroveň postavených škol.

Vydal Matematický ústav ČSAV (ÚV Matematické olympiády) a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta; cena brožovaného výtisku je 2 Kčs.

Jitka Streiblová

Devadešát ročníků

Tak bohatou tradici má náš Časopis pro pěstování matematiky, který koncem roku 1965 uzavřel již svůj 90. ročník. Význam tohoto vědeckého časopisu se hodnotil již před třemi roky, když Jednota čs. matematiků a fyziků slavila své stoleté jubileum. Starší generace jej zná pod názvem Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, neboť dříve se na jeho stránkách objevovaly i příspěvky fyzikální. Rozvoj vědy v posledních letech si však vynutil, aby se matematika a fyzika od sebe oddělily a aby se vytvořily samostatné časopisy pro obě vědy.

Časopis pro pěstování matematiky, který nyní vychází v Nakladatelství ČSAV, přináší původní vědecké práce v češtině, slovenštině i v cizích řečech. Kromě toho se v něm referuje o našich i zahraničních matematických knihách, jsou tu zprávy o návštěvách zahraničních matematiků u nás a našich matematiků v zahraničí, o vědeckých kongresech a konferencích apod. Mladší čtenáře může zajímat rubrika Úlohy a problémy, která čas od času přináší původní matematické úlohy k řešení. Přejeme Časopisu pro pěstování matematiky do další desítky ročníků mnoho čtenářů i autorů - zvláště z mladší generace našich matematiků.

J. S.

Matematický kroužek v Chtelnici u Trnavy

Může matematický kroužek na základní devítileté škole používat Rozhledů matematicko-fyzikálních? Může! Je-li iniciativní učitel (s. V. Potočný) a ovšem schopní žáci nebo žačky (M. Jankovičová, A. Pospíchalová, A. Ištvaníčová), pak použijí z našeho časopisu všeho, na co jim stačí jejich vědomosti. V té cestě budou jistě pokračovat i v dalších ročnících.

M. M.

Vzpomínka na prof. Kadeřávka

DOC. KAREL DRÁBEK, ČVUT, Praha

Dne 9. února tomu bylo pět let, co se mezi českými a slovenskými geometry a přáteli prof. Kadeřávka rozšířila smutná zpráva o jeho smrti.

Připomeňme si dnes činnost tohoto vzácného člověka, který všechno své snažení věnoval rozkvětu pražské techniky, výchově stavebních inženýrů a učitelů deskriptivní geometrie.

Narodil se 26. června 1885 v Praze, o jejíž historii i současnost se pak po celý život zajímal. Po absolvování První české reálky v Praze v Ječné ulici¹⁾ studoval na strojním oboru pražské techniky a deskriptivní geometrii s matematikou. Výsledkem jeho zájmu o deskriptivní geometrii je jeho první práce o Pelzově rozřešení Dandelinovy věty.²⁾ Stal se asistentem u prof. Pelze, po doktorátu a habilitaci byl v roce 1917 jmenován mimořádným a v roce 1921 řádným, v pořadí již šestým profesorem deskriptivní geometrie a stereotomie na pražské vysoké technické škole,

¹⁾ Dnes je v této budově střední průmyslová škola elektrotechnická a jaderné fyziky.

²⁾ Seznam prací a podrobnější životopis je v článku Bořivoje Kepra: Sedmdesát let prof. inž. dr. Františka Kadeřávka, Časopis pro pěstování matematiky, 1955, (80), str. 375 až 382.

kde působil až do svého odchodu do důchodu v roce 1957.

Prof. Kadeřávek se zajímal vedle svého učitelského a vědeckého povolání také o umění a jiné vědní obory (lékařství, psychologii aj.), znal sloven i písmem mnoho jazyků a velmi činně se účastnil veřejného života zvláště v Pražském Sokole a Umělecké besedě. Aby podpořil smysl pro dobrý grafický projev u studentů prvních ročníků vysoké školy (později fakulty) inženýrského stavitelství, vypisoval od stud. roku 1923/24 ceny za nejlepší rysy z deskriptivní geometrie, které uhrazoval z vlastních prostředků. K tomu byly připojeny odměny za vypracované sádrové reliéfy a později za modely různých technických ploch. Od roku 1947 byly tyto odměny udělovány při výročí 17. listopadu 1939 a spojeny s uctěním památky inž. in memoriam Václava Šafránka, tehdy studenta 1. ročníku inženýrského stavitelství, který byl jako funkcionář Svazu vysokoškolského studentstva tohoto dne v Ruzyni okupanty bez soudu zastřelen.

Není jistě bez zajímavosti, že většina odměněných studentů zaujímá dnes přední místa v našem hospodářství jako profesori

vysokých škol, výzkumníci, malíři a sochaři.

V době okupace, kdy byl pro své smýšlení pozorován a bylo mu z řad kolaborantů několikrát vyhrožováno, pomáhal k obnovení naší samostatnosti. Po celou dobu pracoval také ve Studentském zdravotním ústavu, který se mu podařilo pomocí přátel zachovat pro potřeby studentstva. Za všechnu tuto činnost byl po válce vyznamenán Řádem čs. válečného kříže 1939.

Proto také byl 9. května 1945 opět mezi těmi, kteří znovu otevírali české vysoké školy v Praze a jako rektor Českého vysokého učení technického slavnostně zahájil 4. června výuku na celé technice. V té době vážně onemocněl, ale po svém uzdravení se dále věnoval veřejné činnosti, byl hlavním organizátorem při dvoustém výročí narozenin Gasparda Monge a působil rovněž při oslavách šesti set let Karlovy university.

Proto také mu byl k sedmdesátinám v roce 1955 udělen Řád republiky.

Rovněž zdařilý průběh oslav dvě stě padesáti let pražského technického školství v roce 1957 je jeho hlavní zásluhou.

Vedle řady vědeckých a odbor-

ných prací uveřejnil prof. Kadeřávek mnoho pojednání o významných představitelích české geometrie a veřejného života. Své knihy, do kterých uložil výsledky cest po zemích s památkami na starověkou civilizaci, i ostatní své práce psal tak, aby je mohl sledovat velmi široký okruh čtenářů.

Ani po odchodu z činné služby se nepřestal zajímat o práci a životní osudy svých spolupracovníků, kterým zasílal nebo při návštěvě sděloval „lašky pro potěchu lidu geometrického“, tj. problémy a úlohy, pro něž případně nadhodil řešení nebo způsob, jak by bylo možno problém řešit.³⁾ Krátce před svou smrtí dokončil práci na historii svého milovaného Českého učení technického v Praze, bohužel se zatím neví, kde je tento rukopis i s připravenými přílohami, fotografiemi a kresbami malíře Kozáka.

Po kremaci byla urna s popelem prof. Kadeřávka uložena na vršovickém hřbitově v Praze, oddělení 7, hrob C 9.

³⁾ Některé geometrické práce doc. dr. V. Havla z brněnské techniky jsou výsledkem řešení takových problémů. Škoda jen, že mnoho z nich, sdělovaných hlavně ústně, asi upadlo pro nedostatek času v zapomenutí.



A black and white portrait of a young man with dark, short hair. He is wearing a light-colored shirt with a dark checkered or plaid pattern. He is looking slightly to his right with a neutral expression. The background is dark and textured.

288

Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

U

úběžnice, úběžník

udat, zadat

úhel obvodový, orientovaný, ostrý,
plný, pravý, protější, přilehlý,
přímý, tupý, vnější, vnitřní

úhloměr

úhlopříčka

úhrn

uchovávat

úloha

úměra

úměrnost, úměrný

umocnit

umocňovat

úplně

úprava

určení

určit, určovat

určitý

úseč kruhová, kulová

úsečka

úsek

uskutečnit

uspořádat

útvár

úvaha

uvezení

úvod

прямая схода, точка схода

зadatъ

угол вписанный, направленный, о-
стрый, полный, прямой, противо-
лежащий, прилежащий, разверну-
тый, тупой, внешний, внутренний

угломер

диагональ, ж.

итог

сохранять

задача

пропорция, сложное отношение

пропорциональность, пропорцио-
нальный

повысить, возвести в степень

возводить в степень

полностью, целиком

преобразование

определение

определить, определять

определенный

сегмент

отрезок

участок

осуществить

упорядочить

фигура

рассуждение

приведение

введение

V

váha

válec, válcový

variace k-té třídy z n prvků

včetně

вес

цилиндр, цилиндрический

перестановка из n элементов по k

включительно

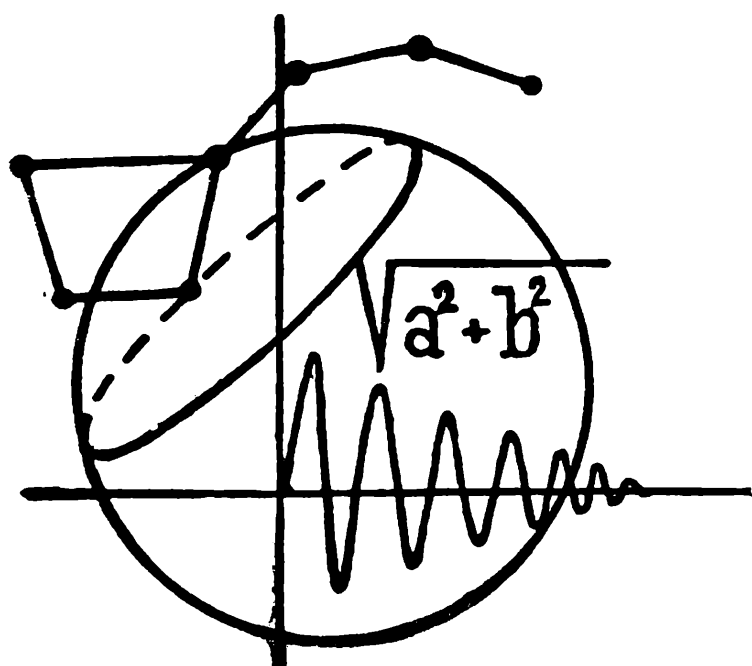
vektor
veličina
velikost
vepsaný
verifikovat
vést
věta
věta pomocná
věta kosinová, sinová
větev
(je) vhodné, užitečné
vhodný
více než
vlastní
vlastnost
vnější
vnitřek
vnitřní
vodorovný
vojenská perspektiva
volba
volit
volit jednotku
vrhat hrací kostkou
vrchlík
vrchol
vrcholové úhly
vrstevnice
vrstva, vrstva kulová
všechn
vteřina
vůbec
vybrat
vyčíslovat
vydělit
vyhledat
vyhnout se (chybě, omylu)
vyhovovat
vyjádřený, vyjadřovat
vykládat, vyložit
vyloučení
vyloučit
vyměřování, vyměřovat
vynásobení
vynásobit, vynásobovat
vyplývat
vypočítat
vyřešení
vyšetřit, vyšetřovat
vyšetřování
vyšetřovaný
vyškrtnout
vyšrafovaný
vyšší algebra

вектор
величина
величина
вписанный
проверить
вести, восстановить, опустить
теорема
лемма
теорема косинусов, синусов
ветвь
целесообразно
удобный, целесообразный
свыше, больше чем
собственный
свойство, качество
внешний
внутренность
внутренний
горизонтальный
военная перспектива
выбор, выборка, подбор
подобрать
выбирать единицу
бросать игральную кость
сегментная поверхность
вершина
вершинные углы
линия уровня
слой, м., шаровой слой
весь
секунда
вообще
подобрать
высчитывать
выделять, поделить
отыскать
избегать, избежать
удовлетворять
выраженный, выражать
излагать, изложить
исключение
исключить
мерение, вымеривать
перемножение, умножение
перемножить, перемножать, умножить
следовать, вытекать
исчислить, вычислить
решение
исследовать, рассматривать
рассмотрение
исследуемый
вычеркнуть
заштрихованный
высшая алгебра

{Dokončení}

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



7

ROČ. 44

1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Březen 1966

Číslo 7

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník *Josef Bartůněk*, ústřed. insp. MŠK; *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VUT, Brno; doc. dr. *Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; prof. dr. *Josef Korous*, VŠD, Žilina; prof. *Emil Kraemer*, KU, Praha; *Oldřich Lepil*, PU, Olomouc; prof. dr. *Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; CSc. *Evžen Říman*, ČVUT, Praha; CSc. *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; CSc. *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. *Václav Šindelář*, MÚ ÚNM, Praha; prof. dr. *Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

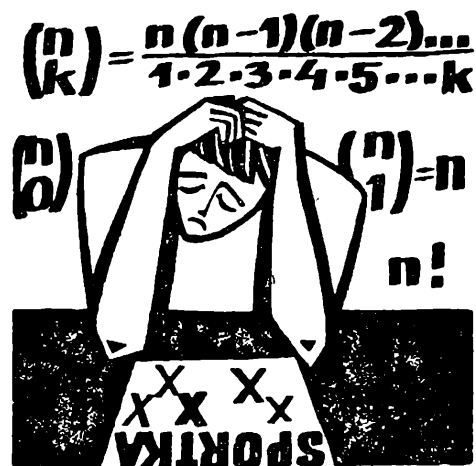
OBSAH

Doc. K. Drábek: Použití komplexních čísel v geometrii	289
J. Glivický: Některé vztahy mezi prvky trojúhelníka a poloměry kružnic vepsané a vně vepsaných	293
F. Janeček: Vlastnosti tětivového čtyřúhelníka (Dokončení)	297
Doc. Fr. Kejla: Zopakujte si matematiku k přijímací zkoušce na techniku	304
Doc. B. Kepr: O některých křivkách (Pokračování)	308
Doc. dr. J. Dibelka: Elektrická a tepelná vodivost	312
B. Macek: Základy kvantové fyziky	319
K. Blafák: Nakreslete si povětrnostní mapu	327
Řešení úloh	332
Recenze	335
Nejmladším čtenářům	336
M. Zelenka: Rusko-český slovník	3. a 4. stránka obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Höhnig. Titulní obrázky: V. Vaňková, studující FS.
A-09*61090

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1966.



Použití komplexních čísel v geometrii

DOC. KAREL DRÁBEK, ČVUT, Praha

Na komplexní čísla se často pohlíží jako na něco neskutečného, vymyšleného, např. proto, abychom mohli při řešení algebraických rovnic vyslovit jednoduše větu o počtu kořenů předložené rovnice. Tento názor je zřejmě úzce spojen s historickým původem komplexních čísel a zvláště s názvem tzv. *imaginární jednotky* $i = \sqrt{-1}$ (ve fyzice bývá značena j).

Již však samotné znázornění komplexních čísel v Gaussově rovině ukazuje, že tento názor je nesprávný, neboť reálné body této roviny jsou reprezentovány komplexními čísly a také obráceně, komplexní čísla lze realizovat reálnými body Gaussovy roviny. Přitom každému komplexnímu číslu je přiřazen jediný bod Gaussovy roviny a také každému bodu Gaussovy roviny je přiřazeno jediné komplexní číslo.

Než přistoupíme k použití komplexních čísel v analytické geometrii (Gaussovy roviny) uvedeme nejdříve několik základních pojmů o těchto číslech.

Komplexní číslo

$$z = a + bi$$

můžeme si představit také jako vektor (obr. 1) o počátečním bodě v počátku O zvoleného systému souřadnic. Z toho plyne pro délku tohoto vektoru (tj. pro délku průvodiče bodu z), neboli pro *modul komplexního čísla* z

$$r = \text{mod } z = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

kde $\bar{z} = a - bi$ je komplexně sdružené číslo k číslu z .

Z obr. 1 plyne také ihned tzv. goniometrický tvar komplexního čísla, tj.

$$z = a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kde r je už známý modul komplexního čísla z a úhel φ je tzv. *argument komplexního čísla* z ; píšeme

$$\arg z = \varphi.$$

Úhel φ je tedy úhel sevřený kladným směrem osy x a průvodičem bodu z . Tento úhel je proto určen až na celistvý násobek 2π . Tuto okolnost nebudeme v dalším výslovně zdůrazňovat.

Pro úhel φ z obr. 1 dostaneme, že

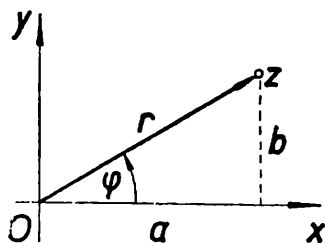
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \text{ tj. } \sin \varphi = \frac{b}{r} \text{ a zároveň } \cos \varphi = \frac{a}{r}.$$

Při násobení dvou komplexních čísel z_1, z_2 daných v goniometrickém tvaru dostaneme

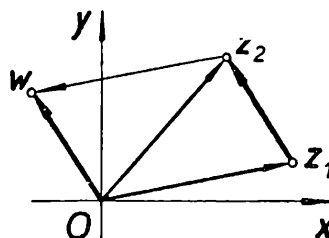
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Obdobně při dělení dvou takových komplexních čísel z_1, z_2 máme

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$$



Obr. 1



Obr. 2

Z toho plyne pro modul a argument součinu, popřípadě podílu dvou komplexních čísel z_1, z_2

$$\operatorname{mod} z_1 z_2 = \operatorname{mod} z_1 \operatorname{mod} z_2, \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$

$$\operatorname{mod} \frac{z_1}{z_2} = \frac{\operatorname{mod} z_1}{\operatorname{mod} z_2}, \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Ukážeme nyní, jak reálné geometrické útvary lze popsat a vyšetřovat pomocí zápisu reálných bodů jako komplexních čísel. Uvidíme, že analytická geometrie v komplexní symbolice je svým zápisem často výhodnější a jednodušší než použití analytické geometrie v obvyklém způsobu.

1. Délka úsečky s krajními body z_1, z_2 je

$$d = |z_2 - z_1|, \text{ tj. } d^2 = (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1).$$

D ů k a z (obr. 2) plyne z toho, že rozdíl $z_2 - z_1$ dvou komplexních čísel z_1, z_2 je komplexní číslo w určené průvodičem stejně velkým a rovnoběžným s rozdílem vektorů z_2, z_1 .

2. Orientovaný obsah trojúhelníka¹⁾ s vrcholy z_1, z_2, z_3 je

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4i} [z_1(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) + z_2(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) + z_3(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)] = \\ &= \frac{i}{4} [\bar{z}_1(z_2 - z_3) + \bar{z}_2(z_3 - z_1) + \bar{z}_3(z_1 - z_2)]. \end{aligned}$$

D ů k a z. Orientovaný obsah trojúhelníka $z_1 z_2 z_3$ dostaneme (obr. 3) součtem orientovaných obsahů tří trojúhelníků $Oz_1 z_2, Oz_2 z_3, Oz_3 z_1$. Z těchto tří orientovaných obsahů uvažovaných trojúhelníků mají vždy dva stejné znaménko, třetí pak má opačné znaménko.

Označme tyto obsahy (v dalším už vynecháme vždy označení orientovaný) postupně P_1, P_2, P_3 , takže

$$P = P_1 + P_2 + P_3.$$

Pro obsah P_1 prvního trojúhelníka tedy dostaneme

$$P_1 = \frac{1}{2} |z_1| |z_2| \sin \varphi_{21}, \text{ kde } \varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1.$$

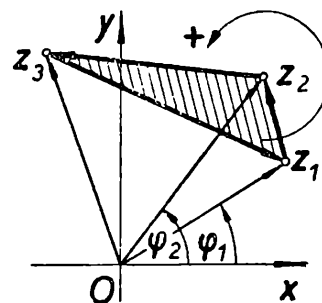
Je-li

$$z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i,$$

je

$$\sin \varphi_1 = \frac{y_1}{|z_1|}, \sin \varphi_2 = \frac{y_2}{|z_2|},$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{x_1}{|z_1|}, \cos \varphi_2 = \frac{x_2}{|z_2|}.$$



Obr. 3

Protože

$$\sin \varphi_{21} = \sin (\varphi_2 - \varphi_1) = \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

je

$$P_1 = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (1)$$

Provedeme nyní následující úpravu. V závorce na pravé straně rovnice (1) násobme souřadnice y_1, y_2 imaginární jednotkou a zároveň dělme touto jednotkou, takže

$$P_1 = \frac{1}{2i} (x_1 y_2 i - x_2 y_1 i). \quad (2)$$

¹⁾ Tím rozumíme, že číslo, které vyjadřuje obsah trojúhelníka, je opatřeno znaménkem, že tudíž záleží na tom, v jakém smyslu (vzhledem ke kladnému smyslu otáčení) je obíhán daný trojúhelník. Obsah trojúhelníka v obr. 3 bude tedy opatřen kladným znaménkem.

Dále použijeme tohoto obratu velmi často užívaného při důkazech v matematice, a to, že nejdříve v závorce výrazu (2) přičteme a ihned odečteme x_1x_2 ; takže po úpravě

$$P_1 = \frac{1}{2i} [x_1(x_2 + y_2i) - x_2(x_1 + y_2i)] . \quad (3)$$

Potom v závorce výrazu (2) přičteme a odečteme y_1y_2i a po úpravě máme

$$P_1 = \frac{1}{2i} [y_2i(x_1 + y_1i) - y_1i(x_2 + y_2i)] . \quad (4)$$

Sečtením (3) a (4) dostaneme

$$2P_1 = \frac{1}{2i} [(x_1 - y_1i)(x_2 + y_2i) - (x_2 - y_2i)(x_1 + y_1i)] ,$$

a tedy

$$P_1 = \frac{1}{4i} (\bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2) \quad (5a)$$

Podobně

$$P_2 = \frac{1}{4i} (\bar{z}_2z_3 - z_2\bar{z}_3) , \quad P_3 = \frac{1}{4i} (\bar{z}_3z_1 - z_3\bar{z}_1) . \quad (5b, c)$$

Výrazy v závorkách pro obsahy P_1, P_2, P_3 jsou ryze imaginární čísla, neboť obsahují rozdíl dvou komplexně sdružených čísel, a proto také

$$P_1 = \frac{i}{4} (z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2) , \quad P_2 = \frac{i}{4} (z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3) , \quad (6a, b, c)$$

$$P_3 = \frac{i}{4} (z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_3z_1) .$$

Sečtením výrazů (5), popř. (6) a úpravou plyne náš vzorec pro (orientovaný) obsah trojúhelníka.

3. *Rovnice (reálné) přímky v komplexních souřadnicích je*

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + a = 0 , \quad (7)$$

kde α je komplexní číslo, a je reálné.

D ů k a z. Jestliže tři body z, z_1, z_2 leží na přímce, pak trojúhelník jimi určený má obsah rovný nule. Proto rovnice přímky dvěma body $z_1 \neq z_2$, přičemž žádný z obou bodů není v počátku O , je

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - \bar{z}(z_1 - z_2) + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = 0 , \quad (8)$$

tj.

$$\beta z - \bar{\beta}z + ai = 0 . \quad (7a)$$

Protože $ai = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2$ je ryze imaginární číslo, dostaneme z rovnice (7a) po vynásobení imaginární jednotkou právě rovnici (7).

Rovnice přímky procházející počátkem O je

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 0,$$

rovnice reálné, popřípadě imaginární osy je

$$z - \bar{z} = 0, \text{ popřípadě } z + \bar{z} = 0.$$

S přímkami určenými v Gaussově rovině rovnicemi tvaru (7) lze provádět obdobné úvahy jako s přímkami danými v Euklidově rovině obvyklým způsobem. Tak např. lze stanovit vzájemný vztah dvou přímek, jejich úhel apod.

(Pokračování)

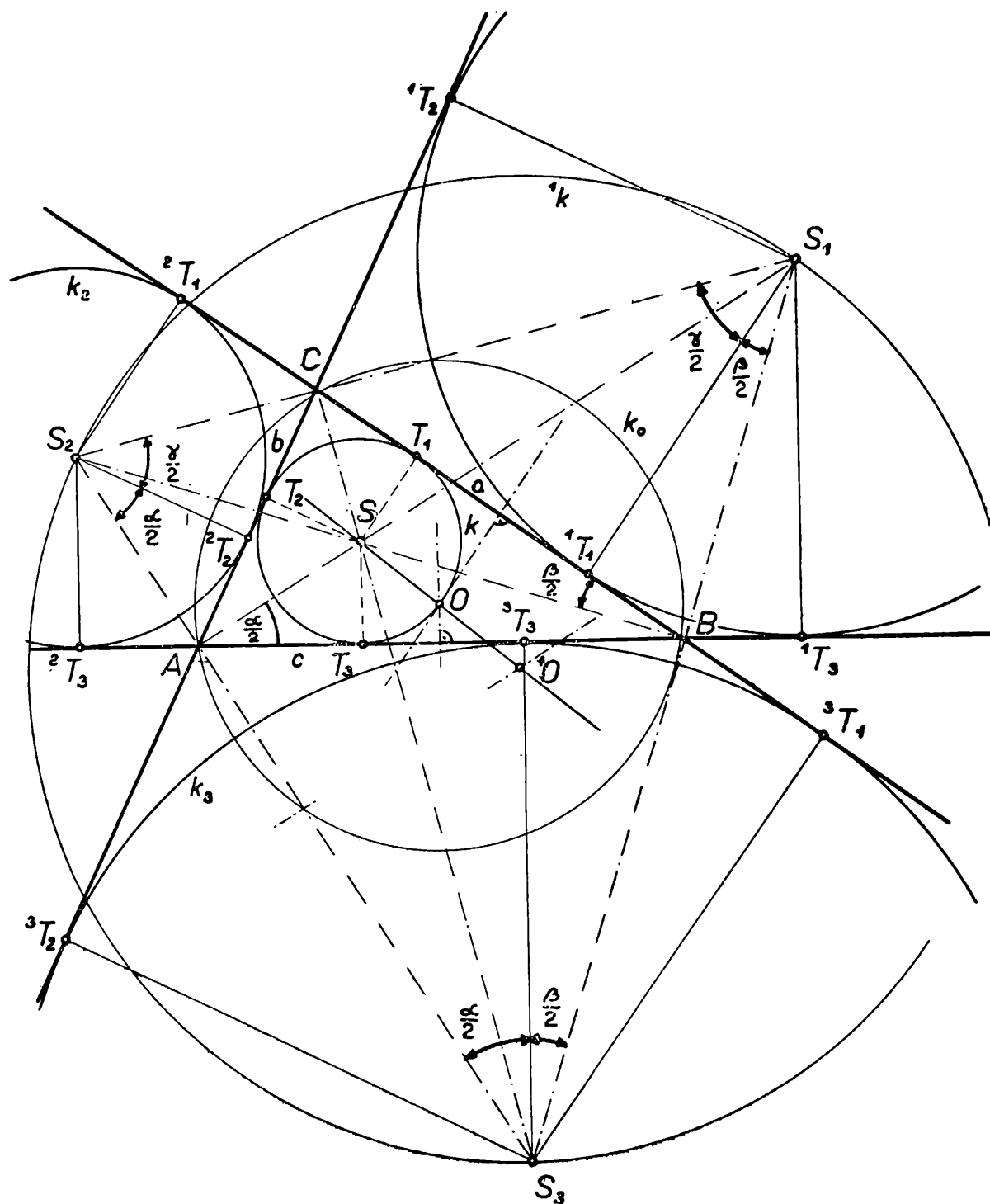
Některé vztahy mezi prvky trojúhelníka a poloměry kružnic vepsané a vně vepsaných

JOSEF GLIVICKÝ, Olomouc

Osy vnitřních úhlů trojúhelníka ABC (o stranách a, b, c) se protínají ve středu S kružnice trojúhelníku vepsané o poloměru $ST_1 = ST_2 = ST_3 = \rho$ (obr. 1). Osy vnitřního úhlu a dvou vnějších zbývajících úhlů trojúhelníka se protínají ve středu kružnice vně vepsané danému trojúhelníku, ležícího v opačné polorovině než vepsaná kružnice. Hranicí obou polorovin je spojnice dvou vrcholů trojúhelníka, v nichž jsou vedeny osy vnějších úhlů. Celkem jsou tři kružnice danému trojúhelníku vně vepsané. Jejich středy označíme S_1, S_2, S_3 a poloměry vně vepsaných kružnic příslušné po řadě ke stranám a, b, c označíme ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Body dotyku příslušející např. kružnici o středu S_1 jsou označeny 1T_1 , další ${}^1T_2, {}^1T_3$.

Středy kružnic vně vepsaných S_1, S_2, S_3 tvoří trojúhelník, jehož výškami jsou osy vnitřních úhlů původního trojúhelníka ABC . Osy vnitřních a vnějších úhlů v trojúhelníku jsou k sobě kolmé. Vrcholy A, B, C jsou patami výšek trojúhelníka $S_1S_2S_3$. Takový trojúhelník se nazývá *ortický*. V našem případě je trojúhelník ABC ortickým k trojúhelníku $S_1S_2S_3$. Střed 1O kružnice opsané trojúhelníku $S_1S_2S_3$ leží s průsečíkem výšek tohoto trojúhelníka (v tomto případě s bodem S) na *Eulerově přímce* trojúhelníka $S_1S_2S_3$. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC ze středu O je

vlastně *Eulerovou kružnici (kružnici devíti bodů)* vzhledem k trojúhelníku $S_1S_2S_3$ ¹⁾. Prochází patami výšek v trojúhelníku $S_1S_2S_3$.



Obr. 1

¹⁾ O kružnici devíti bodů píše O. Lanta ve 4. čísle 41. ročníku *Rozhledů matematicko-fyzikálních*, o přímce Eulerově článek téhož autora v 7. čísle 42. ročníku *Rozhledů*.

Pak $SO = O^1O$ a poloměr 1r kružnice opsané trojúhelníku $S_1S_2S_3$ je dvojnásobkem poloměru r kružnice opsané trojúhelníku ABC , to je

$${}^1r = 2r$$

Odvodíme některé vztahy mezi poloměry kružnice vepsané a kružnic vně vepsaných a ostatními prvky trojúhelníka, popřípadě vyjádříme obsah trojúhelníka ABC pomocí těchto poloměrů a jiných prvků trojúhelníka.

Označme poloviční obvod trojúhelníka o stranách a, b, c

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

pak

$$s - a = \frac{b + c - a}{2}$$

$$s - b = \frac{a + c - b}{2},$$

$$s - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

Předpokládejme znalost několika rovností z geometrie trojúhelníka, které budeme potřebovat k odvození zmíněných vztahů²⁾.

Obsah trojúhelníka z daných tří stran je vyjádřen Heronovým vzorcem

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

obsah trojúhelníka z obvodu a poloměru kružnice vepsané

$$P = sq,$$

obsah z poloměrů kružnic vně vepsaných

$$P = \varrho_1(s-a) = \varrho_2(s-b) = \varrho_3(s-c),$$

velikost obsahu z poloměrů kružnic vepsané a vně vepsaných

$$P = \sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}.$$

Velikost poloměru kružnice opsané

$$r = \frac{abc}{4P},$$

obsah trojúhelníka ze dvou stran a sinu úhlu jimi sevřeného

$$P = \frac{1}{2} \cdot ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \beta,$$

vyjádření stran větou sinovou

$$a = 2r \sin \alpha, b = 2r \sin \beta, c = 2r \sin \gamma.$$

²⁾ Odvozené jsou v článku Kružnice vepsaná trojúhelníku a kružnice vně vepsané, v 6. čísle 33. roč. Matematicko-přírodovědeckých rozhledů.

Dosadíme-li do rovnosti

$$P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

za b, c , pak

$$P = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad (1)$$

V citovaném článku byly dokázány též rovnosti pro délky

$$\begin{aligned} AT_3 &= AT_2 = s - a, \\ BT_3 &= BT_1 = s - b, \\ CT_1 &= CT_2 = s - c \end{aligned}$$

(obr. 1).

Podobně

$$\begin{aligned} B^1T_3 &= B^1T_1 = s - b, \\ C^1T_1 &= C^1T_2 = s - b, \end{aligned}$$

a pak též např.

$$A^1T_3 = a + B^1T_3 = s.$$

V pravoúhlém trojúhelníku AT_3S je

$$AT_3 = AT_2 = s - a$$

přilehlou odvěsnou úhlu

$$\frac{\alpha}{2}.$$

Podobně v pravoúhlých trojúhelnících BT_3S, CT_1S jsou strany

$$BT_3 = s - b, CT_1 = s - c$$

odvěsnami přilehlými k úhlům

$$\frac{\beta}{2}; \frac{\gamma}{2}.$$

Bude pak

$$\begin{aligned} s - a &= \varrho \cotg \frac{\alpha}{2}, \\ s - b &= \varrho \cotg \frac{\beta}{2}, \\ s - c &= \varrho \cotg \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

(Pokračování)

Vlastnosti tětívového čtyřúhelníka

FRANTIŠEK JANEČEK, Broumov

(Dokončení)

Věta 6. Pro velikost úhlopříček e, f v tětívovém čtyřúhelníku se stranami a, b, c, d platí vzorce

$$e = \sqrt{\frac{(ad + bc) \cdot (ac + bd)}{ab + cd}}, \quad (10)$$

$$f = \sqrt{\frac{(ab + cd) \cdot (ac + bd)}{ad + bc}}. \quad (11)$$

a) Planimetrický důkaz. Podle věty Ptolemaiovy platí

$$e \cdot f = ac + bd \quad (12)$$

a podle věty 5 je

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}. \quad (13)$$

Z rovnosti (12) dostáváme

$$f = \frac{ac + bd}{e} \quad (12')$$

Dosazením do vztahu (13) obdržíme

$$\frac{e^2}{ac + bd} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

a odtud

$$e = \sqrt{\frac{(ad + bc) \cdot (ac + bd)}{ab + cd}}.$$

Vzorec (11) odvodíme dosazením do (12').

T r i g o n o m e t r i c k ý d ů k a z (obr. 4). Podle kosinové věty je pro trojúhelníky ABC, ACD je

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos (180^\circ - \beta) = \\ &= c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta. \end{aligned} \quad (14b)$$

Ze (14a) plyne

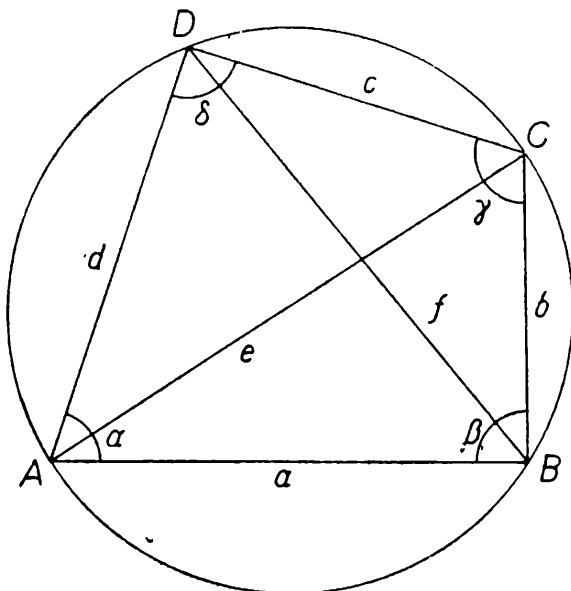
$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$$

a dosazením do vztahu (14b)

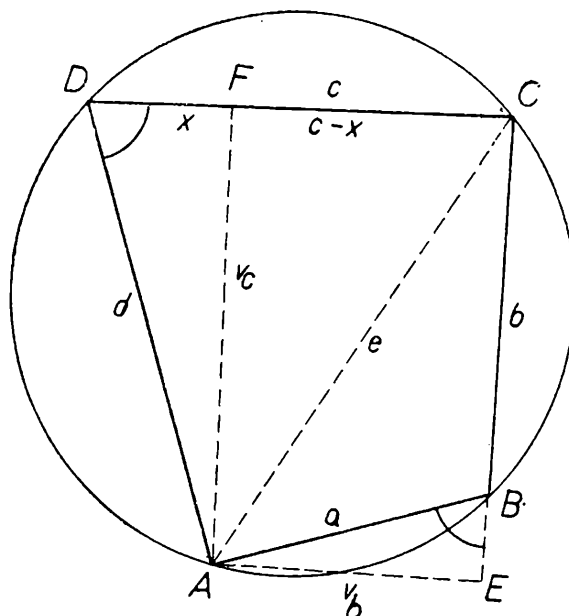
$$e^2 = c^2 + d^2 + \frac{cd(a^2 + b^2 - e^2)}{ab}.$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} e^2(ab + cd) &= ac(ad + bc) + bd(ad + bc) = \\ &= (ad + bc) \cdot (ac + bd). \end{aligned} \quad (15a)$$



Obr. 4



Obr. 5

Odtud již snadno dostaneme vztah (10).

Podobným způsobem z trojúhelníků ABD , BCD dostaneme

$$\begin{aligned} f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha \\ f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma = \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

Vyloučením $\cos \alpha$ z obou těchto rovnic obdržíme po menší úpravě $f^2(ad + bc) = ad(b^2 + c^2) + bc(a^2 + d^2) = (ab + cd)(ac + bd)$, (15b) a odtud již plyne vzorec (11).

P o z n á m k a . Vynásobením rovnic (15a), (15b) obdržíme:

$$e^2 f^2 (ab + cd)(ad + bc) = (ac + bd)^2 (ad + bc)(ab + cd).$$

Odtud po zkrácení vychází věta Ptolemaiova.

Věta 7. (Vzorec Brahmaguptův). Pro obsah tětívého čtyřúhelníka se stranami a, b, c, d platí

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad (16)$$

kde

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$

a) **P l a n i m e t r i c k ý d ů k a z.** Budiž $ABCD$ tětívový čtyřúhel-
ník, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ jeho strany a $2s$ jeho obvod
(obr. 5).

Úhlopříčka e dělí daný čtyřúhelník ve dva nepřekrývající se trojúhel-
níky $\triangle ABC$ a $\triangle ACD$ s obsahy P_1 a P_2 . Pro obsah P čtyřúhelníka
 $ABCD$ potom platí

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} (bv_b + cv_c). \quad (17)$$

Pravoúhlé trojúhelníky $\triangle AFD$ a $\triangle AED$ se shodují v jednom os-
trém úhlu a jsou tedy podobné. Z věty 1 plyne totiž, že vnější úhel tě-
tívového čtyřúhelníka je shodný s vnitřním úhlem u protilehlého vr-
cholu.

Z podobnosti těchto trojúhelníků vyplývá

$$v_b : a = v_c : d,$$

$$v_b = \frac{av_c}{d},$$

takže dosazením do (17) je

$$P = \frac{v_c}{2d} (ab + cd).$$

Podle věty Pythagorovy je

$$v_c^2 = d^2 - x^2, \quad (18)$$

$$v_c^2 = e^2 - (c - x)^2 \quad (19)$$

Porovnáním vztahů (18) a (19) vychází

$$d^2 - x^2 = e^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

a odtud

$$x = \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2c}.$$

Dosadíme-li tento výsledek do rovnice (18), dostáváme

$$\begin{aligned} v_c^2 &= d^2 - x^2 = (d + x)(d - x) = \\ &= \left(d + \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2c} \right) \left(d - \frac{c^2 + d^2 - e^2}{2c} \right) = \\ &= \frac{c^2 + 2cd + d^2 - e^2}{2c} \cdot \frac{e^2 - c^2 + 2cd - d^2}{2c} = \\ &= \frac{(c + d)^2 - e^2}{2c} \cdot \frac{e^2 - (c - d)^2}{2c} \end{aligned}$$

Podle věty 6 je

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd},$$

takže

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \frac{(c + d)^2 - e^2}{2c} \cdot \frac{e^2 - (c - d)^2}{2c} = \\ &= \frac{1}{4c^2} [(c + d)^2 - e^2] \cdot [e^2 - (c - d)^2] = \\ &= \frac{1}{4c^2} \left[(c + d)^2 - \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \right] \left[\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} - (c - d)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4c^2 (ab + cd)^2} [(ab + cd)(c + d)^2 - (ad + bc)(ac + bd)] \cdot \\ &\quad \cdot [(ad + bc)(ac + bd) - (ab + cd)(c - d)^2] = \\ &= \frac{1}{4c^2 (ab + cd)^2} \cdot [ab(c + d)^2 + cd(c + d)^2 - ab(c^2 + d^2) - cd(a^2 + b^2)] \\ &\quad \cdot [ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) - ab(c - d)^2 - cd(c - d)^2]. \end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \frac{(cd)^2}{4c^2 (ab + cd)^2} [(c + d)^2 - (a - b)^2] [(a + b)^2 - (c - d)^2] = \\ &= \frac{(cd)^2}{4c^2 (ab + cd)^2} [(a - b + c + d)(-a + b + c + d)] \cdot \\ &\quad \cdot [(a + b + c - d)(a + b - c + d)]. \end{aligned}$$

Zavedeme-li označení

$$a + b + c + d = 2s,$$

kde písmeno s znamená poloviční obvod čtyřúhelníka, je

$$\begin{aligned} -a + b + c + d &= 2(s - a), \\ a - b + c + d &= 2(s - b), \\ a + b - c + d &= 2(s - c), \\ a + b + c - d &= 2(s - d), \end{aligned}$$

takže dostaneme

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \frac{(cd)^2}{4c^2 (ab + cd)^2} \cdot 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) = \\ &= \frac{4d^2}{(ab + cd)^2} \cdot (s - a)(s - b)(s - c)(s - d). \end{aligned}$$

Odtud již snadno

$$v_c = \frac{2d}{ab + cd} \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Poněvadž je $P = \frac{v_c}{2d} (ab + cd)$, je konečně

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

b) **T r i g o n o m e t r i c k ý d ů k a z** (obr. 4). Užitím vzorce $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ pro obsah trojúhelníka dostáváme pro obsah tětíkového čtyřúhelníka

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} ad \sin \alpha + \frac{1}{2} bc \sin (180^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} (ad + bc) \sin \alpha = (ad + bc) \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Podle kosinové věty je

$$\begin{aligned} f^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha, \\ f^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos (180^\circ - \alpha) = \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)}. \quad (21)$$

Přičteme-li k oběma stranám rovnice (21) jedničku, je

$$\begin{aligned} 1 + \cos \alpha &= \frac{(a^2 + 2d + d^2) - (b^2 - 2bc + c^2)}{2(ad + bc)} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} = \\ &= \frac{(a + b - c + d)(a - b + c + d)}{2(ad + bc)}. \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme

$$\begin{aligned} 1 - \cos \alpha &= \frac{(b^2 + 2bc + c^2) - (a^2 - 2ad + d^2)}{2(ad + bc)} = \\ &= \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + b + c - d)(-a + b + c + d)}{2(ad + bc)}. \end{aligned}$$

Nazveme-li $a + b + c + d = 2s$, je dále tedy podle vzorců pro poloviční úhel (protože je $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, je $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$)

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a + b - c + d)(a - b + c + d)}{4(ad + bc)}} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{ad + bc}}, \quad (22)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)}{4(ad+bc)}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}. \quad (22')$$

Dosazením do (20) tak konečně je

$$P = (ad+bc) \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}} \cdot \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}$$

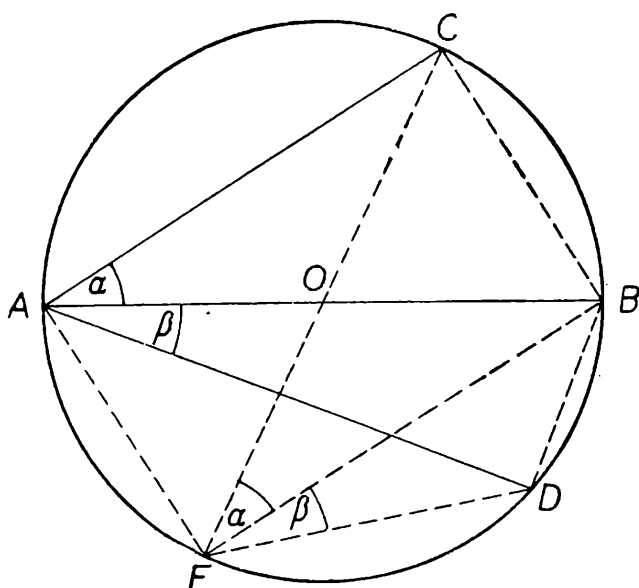
a odtud již

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

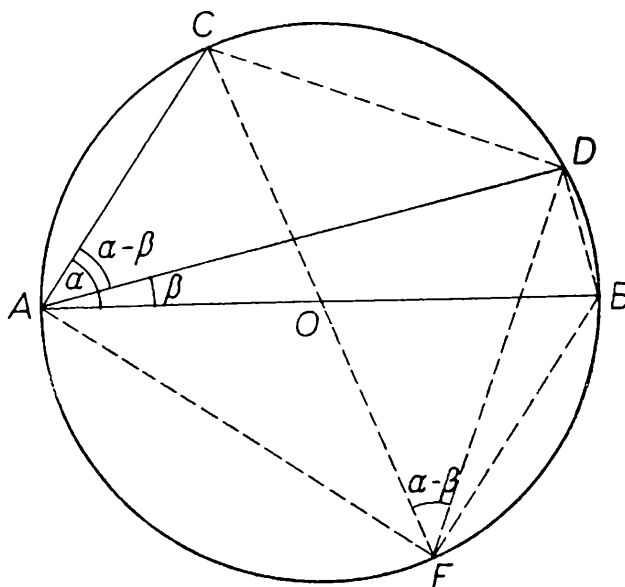
Tento vzorec, který se podobá Heronovu vzorci pro obsah trojúhelníka, pochází od indického matematika Bráhmagupty (r. 598 n. l.).

Věta 8. Pro poloměr r kružnice opsané tětíkovému čtyřúhelníku platí

$$r = \frac{1}{4P} \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)} \quad (23)$$



Obr. 6



Obr. 7

D ů k a z. Podle věty 5 platí pro obsah tětíkového čtyřúhelníka vzorec

$$P = \frac{e}{4r} (ab + cd);$$

odtud

$$r = \frac{e(ab+cd)}{4P}. \quad (24)$$

Podle věty 6 pro úhlopříčku e platí

$$e = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}.$$

Dosazením do (24) dostaneme tak vzorec (23), který lze užitím věty 7 zapsat ve tvaru

$$r = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Jiný způsob důkazu: Pro poloměr r kružnice opsané tětiovému čtyřúhelníku platí

$$2r = \frac{f}{\sin \alpha}.$$

Užitím vzorce (11) a postupu v důkazu věty 7 dostaneme rovněž vztah (23). Podrobný postup přenechávám již čtenáři.

Historické poznámky. S Ptolemaiovou větou se po první setkáváme ve spise *Almagest*, který napsal řecký učenec *Claudius Ptolemaios* (žil v Alexandrii kolem r. 150 n. l.). *Almagest* bylo velmi dokonalé dílo, které nebylo po tisíciletí předstiženo. Ve třinácti knihách obsahuje kromě trigonometrie i celou Ptolemaiovu astronomickou soustavu. Věta, kterou dnes nazýváme větou Ptolemaiovou, se stala základem Ptolemaiových výpočtů. Na jejím základě vypočítal Ptolemaios ze známých tětiv dvou úhlů tětivu součtu, polovičního rozdílu a dvojnásobku těchto úhlů.

Užitím Ptolemaiovy věty na závěr odvodíme známé součtové (a rozdílové) vzorce pro sinus a kosinus. Při odvození se omezíme na ostré úhly α, β , pro které platí $\alpha + \beta < 90^\circ$.

1. V libovolné kružnici zvolme průměr AB (obr. 6). V opačných polorovinách s hranicí AB sestrojíme úhly $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle BAD = \beta$; potom $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CFD = \alpha + \beta$.

Jestliže zvolíme $AB = 1$, potom ze vzniklých pravoúhlých trojúhelníků CFB , ABD , CFD najdeme

$$BC = AF = \sin \alpha, AC = BF = \cos \alpha, BD = \sin \beta, AD = \cos \beta, \quad (25)$$

$$CD = \sin(\alpha + \beta), DF = \cos(\alpha + \beta). \quad (26)$$

Podle věty Ptolemaiovy platí pro tětiový čtyřúhelník $ADBC$ vztah

$$AB \cdot CD = BC \cdot AD + AC \cdot BD.$$

Po dosazení z (25) a (26) dostáváme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta. \quad (27)$$

Podobně v tětiovém čtyřúhelníku $ABCF$ je

$$BF \cdot AD = AF \cdot BD + AB \cdot FD,$$

takže

$$AB \cdot FD = BF \cdot AD - AF \cdot FD.$$

Po dosazení z (25) a (26) najdeme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (28)$$

2. Obdobně odvodíme rozdílové vzorce $\sin (\alpha - \beta)$, $\cos (\alpha - \beta)$. V téže polovině s hranicí AB (obr. 7) sestrojme v libovolné kružnici úhly $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle BAD = \beta$; potom $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CFD = \alpha - \beta$.

Snadno ověříme platnost vztahů (25) i v tomto případě; dále je

$$CD = \sin (\alpha - \beta), \quad DF = \cos (\alpha - \beta)$$

Podle věty Ptolemaiovy, aplikované na vřetivové čtyřúhelníky $ABDC$, $ADBF$, plynou pak vzorce

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad (29)$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (30)$$

Zopakujte si matematiku k přijímací zkoušce na techniku!

DOC. FRANTIŠEK KEJLA, ČVUT, Praha

Pro zájemce o studium na vysokých školách technického směru uvádíme opět výběr typových příkladů s výsledky. Další vhodné příklady pro opakování středoškolské látky najdete v učebnici matematiky pro III. ročník SVVŠ (str. 255 — 271). Je samozřejmé, že nestačí znát pouze řešení uvedených příkladů. Tento výběr má poskytnout jenom informaci o tom, jakého druhu jsou příklady, s nimiž se setkáte u zkoušky např. na stavební fakultu ČVUT. Zvláště zdůrazňujeme, že v matematice je nutné vědět nejen JAK se úloha řeší, ale také — a to je často mnohem důležitější — PROČ se tak řeší. Důkladná zběhllost v numerickém počítání a zběhllost v používání tabulek je ovšem samozřejmým předpokladem.

I. Aritmetika

1. Vypočtete:

$$a) \quad \frac{1,4 \cdot 0,15}{\frac{3}{4} - 0,012 : 0,02} - \left(\frac{1}{15} + \frac{3}{8} + 0,725 \right) : 1 \frac{1}{8};$$

$$b) \quad \frac{3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{3} - 6\frac{1}{8} : 3\frac{1}{2}}{55 : 1\frac{2}{3}} + \frac{6\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2}}{26 : 3\frac{5}{7}}.$$

[a) 0,4; b) 2]

2. Turista došel z místa A do místa B za $5\frac{1}{4}$ hodiny. 62,5 % celé vzdálenosti šel po silnici, zbytek polní cestou. Polní cestou šel rychlostí 3,6 km/hod., po silnici šel o $\frac{1}{3}$ doby déle než polní cestou. Jakou rychlostí šel po silnici?

[4,5 km/hod.]

3. Zjednodušte (odstraňte odmocninu ze jmenovatele):

$$\text{a) } \frac{24 - 7\sqrt{10}}{2 + 3\sqrt{10}}; \quad \text{b) } \frac{2 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}}{2 - \sqrt[3]{3}}.$$

[a) $\sqrt{10} - 3$; b) $1 + \sqrt[3]{3}$]

4. Dokažte, že pro všechna nezáporná $x \neq 1$ je hodnota výrazu

$$V = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - \frac{5 + \sqrt{x}}{1 - x}$$

celé číslo.

[$V = -4$]

5. Pro která reálná čísla x, y platí

$$\frac{x(2 - i) + y(3 + i)}{ix - y - 2} = i - 3.$$

($x = 2$; $y = -3$)

6. Určete všechna čísla x , pro která platí:

$$\text{a) } |x - 1| < x; \quad \text{b) } \frac{2x + 3}{3 - x} > 7; \quad \text{c) } 4x - 3 > 7x + 6 > 3(x - 6).$$

[a) $x > \frac{1}{2}$; b) $2 < x < 3$; c) $-6 < x < -3$]

7. Pro které x platí

$$\frac{7}{2x + 1} + \frac{8}{2ax + a} = \frac{1}{x + 2}.$$

Udejte také podmínky pro parametr a .

$$\left[x = -\frac{13a + 16}{5a + 8}; a \neq -\frac{8}{5}; a \neq -\frac{8}{7}; a \neq 0 \right]$$

8. Která kvadratická rovnice má kořeny $5 \pm 3i$?

$$[x^2 - 10x + 34 = 0]$$

9. Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou druhé mocniny kořenů rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, aniž danou rovnici řešíte!

$$[a^2x^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0]$$

10. Řešte iracionální rovnici $\sqrt{4x + 37} - \sqrt{2x + 22} = 1$.

[Vyhovuje jen $x = -3$]

11. Řešte soustavy rovnic:

$$\text{a) } x^2 - y^2 = 60; xy = 224;$$

$$\text{b) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 53;$$

$$\text{c) } x(y + z) = 5; y(z + x) = 8; z(x + y) = 9.$$

[a) (16; 14); (-16; -14); (14; 16); (-14; -16); b) $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{7})$; $(\frac{1}{7}; -\frac{1}{2})$; c) (1; 2; 3); (-1; -2; -3)]

12. Nádržka se naplní dvěma kohoutky za 2 hodiny. Prvním kohoutkem se naplní za dobu o 44 minut větší než druhým. Za jakou dobu se naplní každým kohoutkem zvlášť?

[264 min.; 220 min.]

13. Užití součtu konvergentní geometrické řady k převodu periodického zlomku na zlomek obecný: $0,5\overline{90}$.

$$\left[\frac{13}{22} \right]$$

14. Určete součet prvních dvaceti členů aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \dots$, je-li $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

$$[s_{20} = 100]$$

15. Užitím vět o kombinačních číslech vypočítejte co nejjednodušeji (převedením na jediné kombinační číslo)

$$\binom{13}{2} + \binom{13}{10}.$$

$$\left[\binom{14}{3} = 364 \right]$$

16. Určete koeficient při x^4 ve výrazu

$$V = x(1-x)^4 + x^2(1+2x)^8 + x^3(1+3x)^{12},$$

aniž počítáte ostatní členy.

$$[144]$$

17. Pro která reálná x platí:

a) $(\log_x \sqrt[5]{5})^2 - \log_x 5 \sqrt[5]{5} + 1,25 = 0$;

b) $3 \sqrt[5]{\log x} + 2 \log \sqrt[5]{\frac{1}{x}} = 2$.

$$[a) 5; \sqrt[5]{5}; b) 10; 10^4]$$

18. Řešte soustavu rovnic exponenciálních:

$$2^x \cdot 3^y = 12 ; 2^y \cdot 3^x = 18 .$$

$[x = 2 ; y = 1$. N á v o d : Obě rovnice jednou spolu násobte, podruhé jednu druhou dělte!]

II. Geometrie

19. Úseky vyřezané výškou na přeponě pravoúhlého trojúhelníka jsou 25 cm a 2 cm. Vypočítejte délku odvěsen.

$$[a = 15 \sqrt{3} \text{ cm}; b = 3 \sqrt{6} \text{ cm}]$$

20. Délka výšky a rovnoběžných stran lichoběžníka jsou v poměru 2 : 3 : 5, jeho obsah je 512 cm². Vypočítejte délku výšky a obou rovnoběžných stran.

$$[v = 16 \text{ cm}; a = 24 \text{ cm}; b = 40 \text{ cm}]$$

21. Drát délky 1 m je ohnut do tvaru čtvrtkružnice s oběma omezujícími poloměry. Vypočítejte délku poloměru.

$$\left[r = \frac{2}{\pi + 4} m \doteq 28 \text{ cm} \right]$$

22. Dokažte, že pro všechna reálná x, y platí:

a) $\cos^2 x + \cos^2 y - 2 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x+y) = \sin^2(x+y)$;

b) $\cos^2(x+y) + \cos^2(x-y) - \cos 2x \cdot \cos 2y = 1$.

23. Pro která x platí:

$$4\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x.$$

[Pro všechna x]

24. Dokažte: $16\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = 1$.

25. Jsou-li α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníka, pak platí:
 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2$. Dokažte.

26. Řešte goniometrické rovnice:

a) $1 + \sin 3x = 2(\sin x + \cos 2x)$

b) $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}.$

$$\left[\text{a) } (4k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}; k\pi \pm \frac{\pi}{6}; \text{ b) } 2k\pi; (4k - 1) \cdot \frac{\pi}{4}; (4k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}; k \text{ celé} \right]$$

27. S vrcholu kopce, který je 75 m nad hladinou jezera, je vidět přesně za sebou dvě lodky: první v hloubkovém úhlu 64° , druhá 48° . Vypočtete vzdálenost obou loďek.

[Asi 29 m]

28. Vypočtete strany a úhly rovnoběžníka, jsou-li dány délky jeho úhlopříček a úhel jimi sevřený: $e = 24$ cm, $f = 38$ cm, $\omega = 67^\circ 15'$.

$$[a \doteq 26,1 \text{ cm}; b \doteq 18,1 \text{ cm}; \alpha \doteq 62^\circ 34']$$

29. Dva rovnostranné válce mají objemy v poměru 8 : 27. Porovnejte jejich povrchy!

[4 : 9]

30. Ze tří kovových koulí s objemy V_1, V_2, V_3 byla ulita jediná koule. Jak velký je její povrch?

$$[\sqrt[3]{36\pi(V_1 + V_2 + V_3)^2}]$$

31. Vypočtete objem rotačního kužele, jehož osový řez má obsah 288 cm² a jehož strana svírá s podstavou úhel $53^\circ 07'$.

$$[V = 4\,434 \text{ cm}^3]$$

32. Napište rovnici přímky procházející bodem (2; 3) kolmo ke spojnici bodů (4; 3), (−2; 1).

$$[3x + y = 9]$$

33. Napište rovnice přímk, které procházejí bodem (3; 3) a svírají s přímkou $5x - 4y - 1 = 0$ úhel 45° .

$$[9x + y - 30 = 0; x - 9y + 24 = 0]$$

34. Bod (−1; 0) je středem čtverce, jehož jedna strana leží v přímce $x + 3y = 5$. Napište rovnice zbývajících stran čtverce.

$$[x + 3y + 7 = 0; 3x - y + 9 = 0; 3x - y - 3 = 0]$$

35. Kružnice má střed (4; 7) a dotýká se přímky $3x - 4y + 1 = 0$. Napište její rovnici.

$$[(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 9]$$

36. Napište rovnice tečen kružnice $x^2 + y^2 + 5x = 0$, které jsou kolmé ku přímce $4x - 3y + 7 = 0$.

$$[3x + 4y + 20 = 0; 3x + 4y - 5 = 0]$$



0 některých křivkách

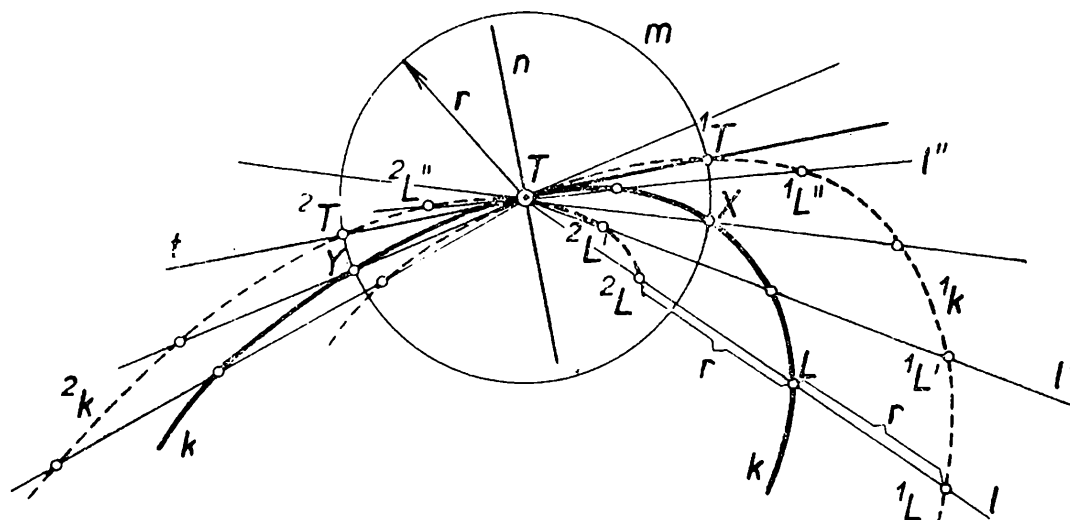
(Pokračování)

DOC. BOŘIVOJ KEPR, ČVUT, Praha

5. Některé přibližné konstrukce

Jak bylo slíbeno v úvodní části článku, ukážeme si nyní ve stručnosti některé konstrukce tečen a kružnic křivosti v případě tzv. *empirických křivek*, vytvořených spojitě, pro něž však *neznáme* jejich tzv. *výtvarný zákon*.

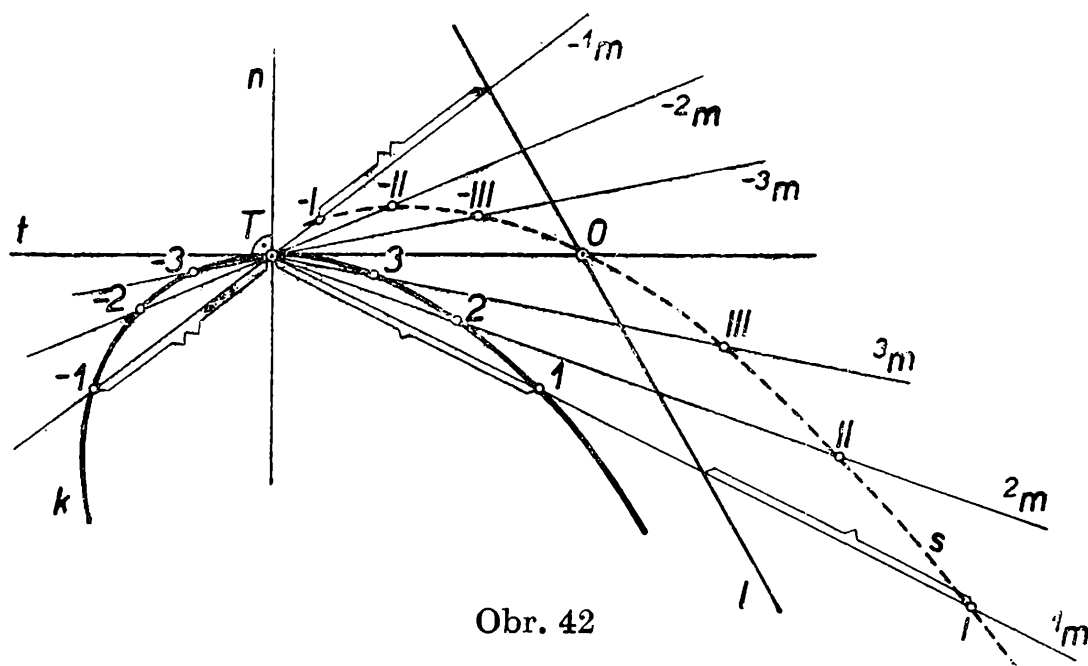
V obr. 41 je dána empirická křivka k svým grafickým obrazem. Naším úkolem pak bude *sestavit tečnu t v jejím daném regulárním bodě T* . Konstrukci provedeme pomocí tzv. (pomocné) *křivky strojné*. Opišme ze středu T pomocnou kružnici m o libovolném poloměru r , ale voleném vhodně tak, aby protínala danou křivku pouze ve dvou bodech X a Y . Bodem T vedme libovolnou přímku l tak, aby protínala danou křivku k



Obr. 41

(kromě bodu T) ještě v bodě L . nanесme na přímku l od bodu L na obě její strany úsečku o délce r (poloměr pomocné kružnice m). Získáme tak na přímce l dva body 1L a 2L . Průvedeme-li tutéž konstrukci pro další přímky $l', l'', \dots$, vedené bodem T křivky k (za týchž předpokladů), získáme na nich postupně dvojice bodů $^1L', ^2L', ^1L'', ^2L'', \dots$ (na obr. 41 nejsou už vyznačeny). Spojme nyní spojitě body $^1L, ^1L', ^1L'', \dots$ jednou křivkou 1k a body $^2L, ^2L', ^2L'', \dots$ druhou křivkou 2k . Obě tyto křivky (na obr. 41 jsou narýsovány čárkovaně) jsou těmi křivkami strojnými. Obě procházejí bodem T a dotýkají se v něm přímek (TX) a (TY) , a to strojná křivka 1k přímky (TY) a strojná křivka 2k přímky (TX) . Hledaná tečna t prochází zřejmě průsečíky 1T a 2T strojných křivek s pomocnou kružnicí m . Je ihned vidět, že ke konstrukci hledané tečny t dané empirické křivky k v jejím daném bodě T stačí pouze jedna z pomocných křivek strojných. Druhá slouží pro kontrolu správnosti této přibližné konstrukce.

Řešme *tutéž* úlohu jiným způsobem. V obr. 42 je dána opět empirická křivka k svým grafem a hledáme její tečnu t ve zvoleném bodě dotyku T této křivky. Konstrukci, kterou nyní uvedeme, není vhodné provádět v takovém bodě T křivky k , v jehož okolí je křivka k „málo zakřivená“. (Vtipný čtenář za chvíli přijde na to, proč.) Vedme bodem T přímku 1m tak, aby protla danou křivku k ještě v dalším bodě I . Zvolme si nyní libovolnou přímku l tak, jak ukazuje obr. 42 a od průsečíku přímek 1m a l nanесme na přímku 1m úsečku rovnající se těživě TI v témž smyslu. Získáme tak na přímce 1m bod I . Tutéž konstrukci bychom provedli pro další přímky $^2m, \dots$ vedené bodem T dané křivky k a získali bychom tak body $II, \dots$. Přímka ^{-1}m , vedená libovolně bodem T , nechť protíná křivku k ještě v dalším bodě — I , který je vzhledem k bodu I na opačné straně oblouku křivky k , pokládáme-li bod T za dělicí bod uvažovaného oblouku. Úsečku $T-I$ tětivy nanесme opět od průsečíku přímky ^{-1}m s přímkou



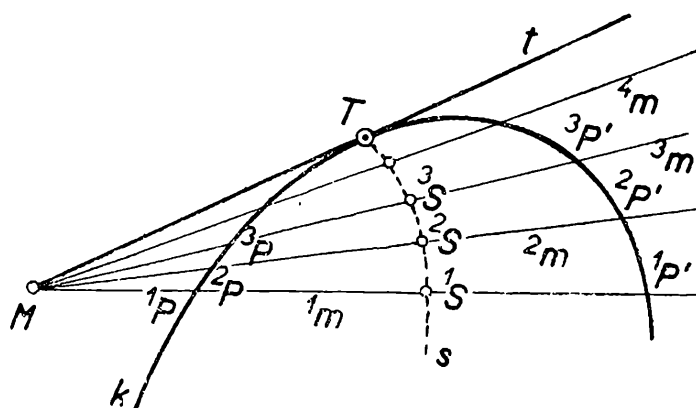
Obr. 42

l na přímku ^{-1}m v témž smyslu. Získáme tak na přímce ^{-1}m bod $-I$. (Body I a $-I$, leží tedy v opačných polorovinách, ohraničených přímkou l .) Tutéž konstrukci bychom provedli pro další přímky $^{-2}m, \dots$ vedené bodem T dané křivky k a získali bychom tak body $-II, \dots$ (Body $II, -II, \dots$ leží rovněž v opačných polorovinách, ohraničených přímkou l .) Spojíme-li spojitě body $I, II, \dots -II - I$ na přímkách $^1m, ^2m, \dots -^2m, -^1m$ tak, jak přímka 1m při otáčení kolem bodu T postupně nabyla těchto poloh, obdržíme *strojnou křivku* s (na obr. 42 je narýsována čárkovaně.) Tato křivka protíná přímkou l v bodě O . Vzhledem k tomu, jak byla strojná křivka s sestrojena, je přímka (TO) již hledanou tečnou t křivky k v jejím daném bodě T .

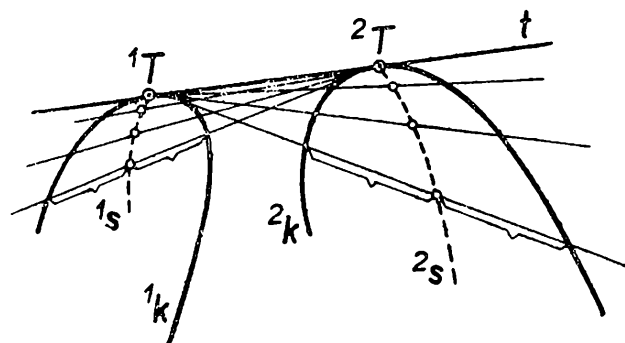
Je-li zkonstruována tečna t v bodě T dané křivky k , lze již okamžitě sestrojit i příslušnou normálu n .

V obr. 43 je dána empirická křivka k opět svým grafem. Naším úkolem nyní bude *sestrojit tečnu t této křivky, procházející daným bodem M , ležícím mimo křivku k* . Vedme daným bodem M sečny $^1m, ^2m, \dots$ tak, aby postupně protínaly oblouk dané křivky k vždy ve dvou bodech $^1P, ^1P'; ^2P, ^2P', \dots$

Sestrojíme středy $^1S, ^2S, \dots$ tětiv $^1P^1P', ^2P, ^2P', \dots$. Křivka strojná s , která spojitě spojuje body $^1S, ^2S, \dots$ protíná danou křivku k v dotykovém bodě T hledané tečny t . Spojnice (MT) je tedy hledanou tečnou t .



Obr. 43

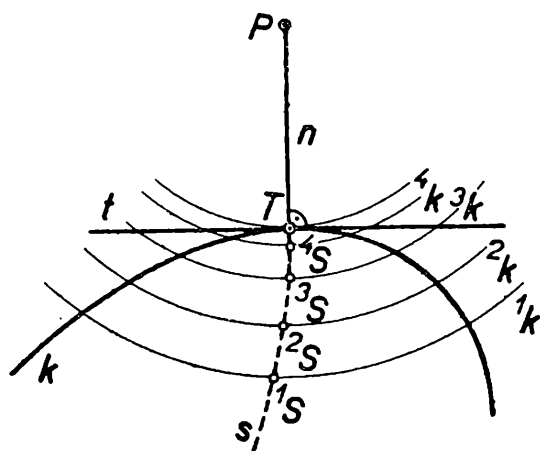


Obr. 44

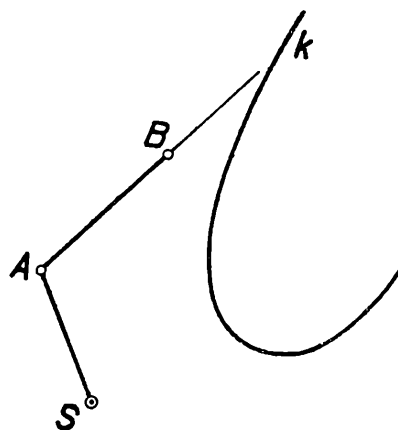
Z hlediska přesnosti při praktickém rýsování lze říci, že tečnu z daného bodu M k dané (tj. narýsované) křivce k lze sestrojit „prakticky přesně“ pouhým přiložením pravítka. Příslušný dotykový bod je však nutno *sestrojit* v každém případě. Konstrukce, předvedená v obr. 43, ukazuje, jak tento dotykový bod T v tomto případě získáme. Autor je přesvědčen o tom, že čtenář by již sám uměl na základě předchozí konstrukce vyřešit tuto úlohu: K narýsované křivce k vedte tečnu, rovnoběžnou s daným směrem a sestrojte její bod dotyku.

V obr. 44 je řešena úloha, *vést společnou tečnu t ke dvěma obloukům $^1k, ^2k$ daných empirických křivek*. Podle předchozí úvahy lze tuto tečnu prakticky přesně sestrojit pouhým přiložením pravítka. Dotykové body

1T a 2T tečny t s obloukem křivky 1k a 2k je nutno však sestrojít, třeba jen přibližně, jak ukazuje obr. 44. Pouhým přiložením pravítka sestrojíme řadu tečen k oblouku křivky 1k tak, aby tyto tečny protínaly daný oblouk křivky 2k vždy pouze ve dvou bodech. Spojíme-li spojitě středy příslušných tětiv na těchto sečnách oblouku křivky 2k , získáme oblouk strojné křivky 2s , který protíná oblouk dané křivky 2k patrně v hledaném dotykovém bodě 2T tečny t s křivkou 2k . Sestrojíme-li nyní obráceně pouhým přiložením pravítka řadu tečen k oblouku křivky 2k tak, aby tyto tečny protínaly daný oblouk křivky 1k opět pouze ve dvou bodech, pak stejnou úvahou získáme oblouk strojné křivky 1s , který protíná oblouk dané křivky 1k zřejmě v hledaném dotykovém bodě 1T tečny t s křivkou 1k .



Obr. 45

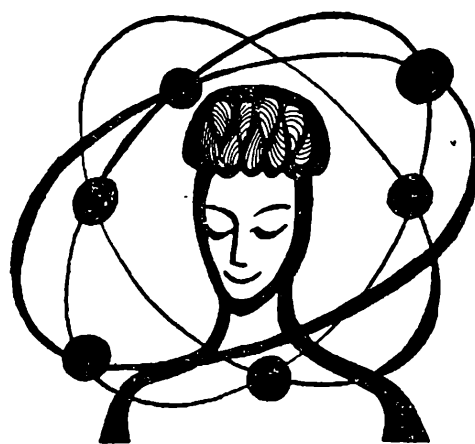


Obr. 46

V obr. 45 je řešena úloha, vést k dané empirické křivce k její normálu n , procházející daným bodem P , který neleží na této křivce. Sestrojíme řadu soustředných kružnic $^1k, ^2k, \dots$ o středu v daném bodě P tak, aby protínaly danou křivku k ve vhodně odhadnutém okolí paty T hledané normály vždy pouze ve dvou bodech. Strojná křivka s , spojující spojitě středy $^1S, ^2S, \dots$ oblouků kružnic $^1k, ^2k, \dots$, vyřatých na nich daným obloukem křivky k , protíná danou křivku k v hledané patě T žádané normály n . Pro tečnu t v bodě T dané křivky k platí samozřejmě $t \perp n$.

Vzhledem k předchozím úvahám, je možno předložit čtenáři tuto jednoduchou úlohu: Dvojice navzájem pevně spojených úseček SA, AB se otáčí kolem bodu S (obr. 46). Uvedte tuto dvojici do takové polohy, aby se přímka, na níž leží úsečka AB , dotýkala dané křivky k . Křivka k je dána svým grafem. Předcházející úloha patří k nejjednodušším základním úlohám, které úzce souvisejí s principy strojních mechanismů.

(Dokončení)



F Y Z I K A

Elektrická a tepelná vodivost

DOC. Dr. JOSEF DIBELKA, ČVUT, Praha

V tomto článku si ukážeme, jak na první pohled dva odlišné fyzikální jevy mají těsnou fyzikální souvislost, a jak je možno z kvantitativního pozorování jednoho děje kvantitativně popsat děj druhý. Máme na mysli vedení elektrického proudu a vedení tepla kovu.

Zkušenost ukazuje, že látky, které vedou dobře elektrický proud, jsou i dobrými vodiči tepla. Z tohoto poznatku se usoudilo, že vedení tepla v kovech je zesilováno pohybem tzv. volných elektronů, které také zprostředkují vedení elektrického proudu. Měřením se skutečně ukázalo, že tepelná i elektrická vodivost ryzích kovů je úměrná hustotě volných elektronů v kovech. Z toho lze soudit, že poměr obou vodivostí bude u všech kovů stejný, což je v souladu s experimentálním *zákonem Wiedemannovým-Franzovým*, podle něhož je při nepříliš nízkých teplotách poměr měrné tepelné vodivosti λ a měrné elektrické vodivosti σ přímo úměrný absolutní teplotě kovu

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \text{konst.} \cdot T \quad (1)$$

Wiedemann a Franz vyslovili tento zákon jen na základě měření a je nasnadě otázka, zda tento zákon vyhovuje i *elektronové teorii* vypracované *Lorentzem-Lorenzem*; a to si chceme dokázat.

Elektronová teorie vodivosti elektrického proudu vychází ze známého předpokladu, že podstatou elektrické vodivosti jsou volné elektrony. V krystalové mříži kovů jsou vedle vázaných elektronů, které nejsou

schopny pohybu v krystalové mříži a které jsou k jádru atomu poutány značnými vazebními silami, ještě elektrony ve valenční slupce, vázány k jádru jen slabými silami. To jsou takzvané volné elektrony. Tyto volné elektrony jsou souhrnně nazývány *elektronovým plynem*. Tento název dostaly proto, že je možno na ně aplikovat zákony, které vyplývají z kinetické teorie plynů¹⁾).

Pro další odvození elektrické vodivosti udělejme ještě zjednodušující předpoklad, a to ten, že všechny elektrony se pohybují stejnou rychlostí; ve skutečnosti dnes víme, že rychlost elektronů leží v širokém intervalu hodnot. Druhý předpoklad, který učiníme bude, že elektrony vlivem elektrického pole se urychlují jen do takových hodnot, že nerozkmitají mříž.

Označme průměrnou rychlost elektronů v přímočarém neuspořádaném, tepelném pohybu $\bar{u}$, průměrnou volnou dráhu elektronu (dráhu mezi dvěma srážkami) $\bar{s}$ a střední dobu mezi dvěma následujícími srážkami $\bar{\tau}$, přičemž platí

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{s}}{\bar{u}}$$

Udržíme-li na koncích vodiče délky l potenciálový rozdíl U , vznikne uvnitř vodiče elektrické pole intenzity

$$E = \frac{U}{l}$$

a na každý elektron působí síla $F = e \cdot E$, která uděluje elektronu zrychlení

$$a = \frac{F}{m} = \frac{e \cdot E}{m}.$$

Přitom m značí hmotnost elektronu.

Za dobu $\bar{\tau} = \bar{s}/\bar{u}$ získá elektron ke své neuspořádané rychlosti $\bar{u}$ přídavnou rychlost $\bar{v}_1$

$$\bar{v}_1 = a \cdot \bar{\tau} = \frac{e \cdot E \cdot \bar{s}}{m \cdot \bar{u}},$$

která má opačný směr než intenzita pole E . Elektron vlivem stálé síly se pohybuje rovnoměrně zrychleně. S ohledem však na velmi krátkou volnou dráhu $\bar{s}$ (řádově $10 \times \text{m}$) můžeme tento pohyb pokládat za rovnoměrný s rychlostí $\bar{v}$, která je rovna $1/2 \bar{v}_1$, kde rychlost $\bar{v}$ je rychlost na konci dráhy $\bar{s}$, pak

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \bar{v}_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot E \cdot \bar{s}}{m \cdot \bar{u}}. \quad (2)$$

¹⁾ Podle kvantové fyziky však není ostrá hranice mezi volnými a vázanými elektrony.

Vlivem elektrického pole se přidává tedy k neuspořádanému pohybu elektronů pohyb usměrněný, jehož střední rychlost je úměrná intenzitě pole E .

Označme n_0 počet elektronů v objemové jednotce. Potom jednotkovou plochou postavenou kolmo ke směru rychlosti projde za jednotku času $n_0 \cdot \bar{v}$ elektronů a každý elektron má náboj e . Označíme-li poměr proudu a plochy postavené kolmo ve směru proudu písmenem J (hustota proudu), pak je hustota proudu J rovna náboji prošlému jednotkou plochy za jednotku času

$$J = n_0 \cdot e \cdot \bar{v}$$

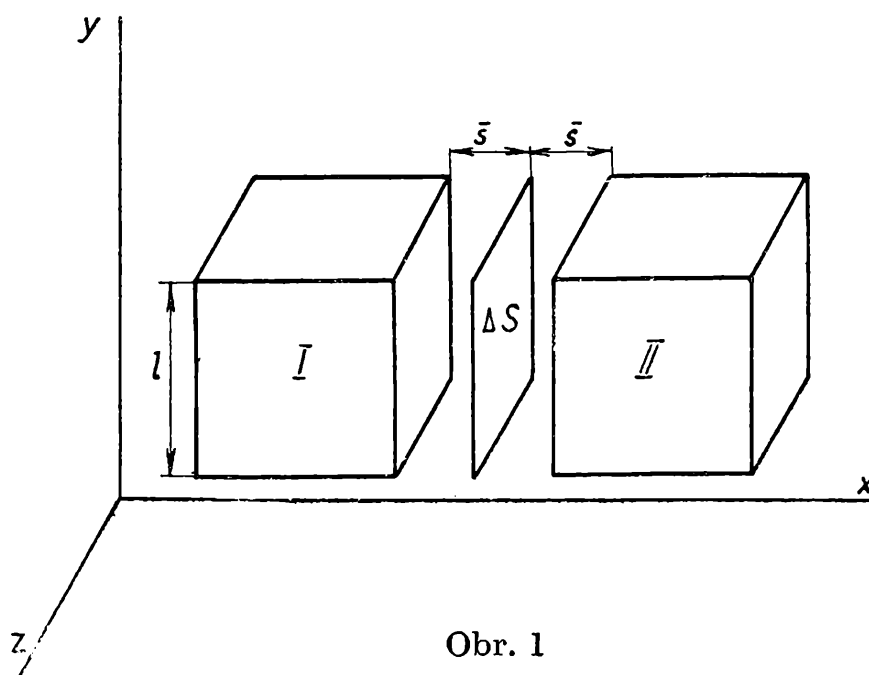
Dosadíme-li do tohoto výrazu vypočtenou hodnotu rychlost (2), dostaneme

$$J = \frac{1}{2} \cdot \frac{n_0 e^2 \cdot \bar{s}}{m \bar{u}} \cdot E, \quad (3)$$

což je vlastně Ohmův zákon pro proudovou hustotu $J = \sigma \cdot E$. Proudová hustota je úměrná intenzitě elektrického pole.

Konstanta úměrnosti σ je měrná vodivost kovů a je rovna

$$\sigma = \frac{n_0 e^2 \bar{s}}{2 m \bar{u}}. \quad (4)$$



Obr. 1

Odvoďme si nyní vztahy pro vedení tepla. Podobně jako u vedení elektrického proudu budeme tepelnou vodivostí rozumět v nejširším slova smyslu schopnost látky převádět teplo ve směru teplotního spádu.

Mějme válcovou tyč průřezu S a délky l (obr. 1). Jeden konec tyče je ve styku s lázní stálé teploty t_1 , druhý konec tyče je v lázni stálé

teploty t_2 , přičemž $t_1 > t_2$. Experimentálně bylo změřeno, že množství tepla Q , které projde tyčí za dobu τ z teplejší lázně do studenější, je dáno výrazem

$$Q = \lambda \cdot S \cdot \tau \frac{t_1 - t_2}{l} \quad (5)$$

Výraz $\frac{t_1 - t_2}{l}$ představuje pokles teploty připadající na jednotku délky, čili teplotní spád, což možno také psát $\frac{\Delta t}{l}$.

Podobně jako u elektrického proudu označme množství tepla, které projde za jednotku času plochou postavenou kolmo na směr proudu jako hustotu tepelného proudu, nebo jako tepelný tok i ; pak platí

$$i = \frac{Q}{\tau \cdot S}.$$

Po dosazení do rovnice (5) máme

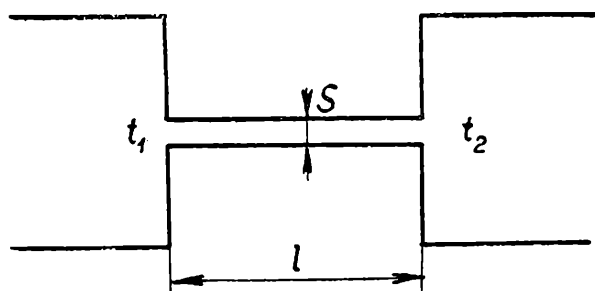
$$i = \lambda \frac{\Delta t}{l}.$$

Tento výraz připomíná Ohmův zákon a součinitel λ označujeme obdobně jako u Ohmova zákona součinitelem měrné tepelné vodivosti příslušné látky. Reciproká hodnota $1/\lambda$ se nazývá *měrným tepelným odporem*. U ryzích kovů je koeficient tepelné vodivosti daleko větší než u jiných látek, což si vysvětlujeme tím, že tepelná vodivost je úměrná hustotě volných elektronů, čili hustotě elektronového plynu.

Velikost koeficientu λ můžeme proto určit z molekulárně kinetické teorie plynů. Z hlediska této teorie podstata vedení tepla v plynech spočívá v tom, že molekuly z teplejší vrstvy, v níž mají velkou kinetickou energii E_k , pronikají do vrstvy studenější a molekulám této vrstvy odevzdají část své energie. Naopak molekuly z chladnější vrstvy vnikají do teplejší vrstvy a dostávají jisté množství kinetické energie. Teplejší vrstva se tím ochlazuje, studenější otepluje. Podle této teorie znamená tedy přenos tepla ΔQ přenos jistého množství kinetické energie plochou ΔS .

Představme si, že máme dvě krychle I, II a mezi bočními stěnami krychle, ve vzdálenosti rovné střední volné dráze molekul $\bar{s}$, plošku velikosti ΔS , rovnoběžnou se stěnami krychle (obr. 2). Délku hrany krychle označme l ; pak $l^2 = \Delta S$.

Počet molekul v krychli I označme n_I , v krychli II n_{II} . Poněvadž



Obr. 2

tepelný chaotický pohyb molekul je neuspořádaný, molekuly se pohybují všemi směry a žádný směr není preferovaný, můžeme předpokládat, že se molekuly pohybují jen ve směru předozadním (ve směru osy z ,) pravolevém (ve směru osy x a ve směru osy y). Na každý směr připadá jen jedna třetina všech molekul, z nich se pak pohybuje jedna polovina (tedy jedna šestina všech molekul) kladným směrem a druhá polovina záporným směrem. Proto $\frac{1}{6} n_I$ molekul, které se nacházejí v krychli I, letí v kladném směru osy x k plošce ΔS a všechny molekuly touto ploškou proletí, aniž dojde ke srážce (ploška ΔS je ve vzdálenosti střední volné dráhy molekul). Potřebná doba, aby tato šestina molekul proletěla plochou ΔS , je rovna době, o kterou poslední molekuly opustí krychli I později než molekuly první. Je tedy $\tau = \frac{l}{\bar{u}}$, kde $\bar{u}$ je střední aritmetická rychlost všech molekul.

Počet molekul, který projde ploškou ΔS z krychle I za jednotku času je

$$\Delta n_I = \frac{\frac{1}{6} n_I}{\Delta \tau} = \frac{1}{6} n_I \cdot \frac{\bar{u}}{l}.$$

Jestliže je v objemové jednotce v místě, kde je krychle I obsaženo n'_0 molekul, potom v krychli I je $n_I = n'_0 \cdot l^3$ molekul, po dosazení do posledního výrazu dostaneme

$$\Delta n_I = \frac{1}{6} n'_0 l^3 \frac{\bar{u}}{l} = \frac{1}{6} n'_0 \bar{u} \cdot \Delta S$$

a za čas $\Delta \tau$ proletí molekul

$$\Delta n_I = \frac{1}{6} n'_0 \bar{u} \cdot \Delta S \cdot \Delta \tau.$$

Ale každá molekula přenáší při průletu ploškou ΔS tu kinetickou energii, kterou měla v místě I.

Podle molekulárně kinetické teorie plynů je střední hodnota kinetické energie postupného i otáčivého pohybu molekul dána výrazem

$$E_h = \frac{i}{2} k \cdot T_1,$$

kde i je počet platných stupňů volnosti molekuly, k Boltzmannova konstanta, T_1 absolutní teplota v tom místě, kde je krychle I.

Počtem stupňů volnosti molekuly rozumíme tolik nezávislých parametrů, které určují jednoznačně její polohu v prostoru. Např. poloha hmotného bodu v rovině je určena dvěma souřadnicemi — má dva stupně volnosti, poloha hmotného bodu v prostoru je určena třemi souřadnicemi — má tři stupně volnosti.

Naproti tomu *počtem platných stupňů volnosti* rozumíme počet nezávislých parametrů, které určují energii soustavy.

Boltzmannova konstanta je dána poměrem plynové konstanty R a Avogadrova čísla L (Avogadrovo číslo udává počet molekul v 1 kilomolu)

$$k = \frac{R}{L}. \quad (6)$$

Přenesená kinetická energie ploškou ΔS představuje přenesené teplo ΔQ_1

$$\Delta Q_1 = \frac{1}{6} n'_0 \bar{u}_1 \Delta S \Delta \tau \cdot \frac{i}{2} k \cdot T_1.$$

Obdobně množství tepla přeneseného z krychle II za dobu $\Delta \tau$ je dáno výrazem

$$\Delta Q_2 = \frac{1}{6} n''_0 \bar{u}_2 \Delta S \cdot \Delta \tau \cdot \frac{i}{2} k T_2,$$

kde n''_0 je počet molekul v objemové jednotce v místě, kde je krychle II, T_2 je absolutní teplota v tom místě.

Oběma těmito protisměrnými přenosy tepla se přenese ploškou ΔS teplo

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta Q_1 - \Delta Q_2, \\ \Delta Q &= \frac{1}{6} \cdot \frac{i}{2} k \Delta S \Delta \tau (n'_0 \bar{u}_1 T_1 - n''_0 \bar{u}_2 T_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Při malém rozdílu teplot $T_1 - T_2$ se součiny $n'_0 \cdot \bar{u}_1$ a $n''_0 \cdot \bar{u}_2$ od sebe jenom velmi málo liší, a proto se nedopustíme chyby, budeme-li předpokládat, že

$$n'_0 \cdot \bar{u}_1 = n''_0 \cdot \bar{u}_2 = n_0 \cdot \bar{u}$$

a dostaneme

$$\Delta Q = \frac{1}{6} n_0 \bar{u} \frac{i}{2} k (T_1 - T_2) \cdot \Delta S \cdot \Delta \tau.$$

Rozdíl teplot $T_1 - T_2$ můžeme vyjádřit jako tepelný spád připadající na jednotku délky (ve směru souřadné osy x) násobené vzdáleností, tedy

$$T_1 - T_2 = \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot 2\bar{s}.$$

Po dosazení do rovnice (7) dostaneme

$$\Delta Q = \frac{1}{3} n_0 \bar{u} \cdot \bar{s} \cdot \frac{i}{2} k \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta \tau$$

Srovnáme-li tento výraz s rovnicí (5), kterou můžeme také přepsat do tvaru

$$\Delta Q = \lambda \cdot \Delta S \cdot \Delta \tau \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

vidíme, že výraz

$$\frac{1}{3} n_0 \bar{u} \bar{s} \cdot \frac{i}{2} k$$

je roven součiniteli tepelné vodivosti λ .

Pro elektron, u kterého budeme předpokládat jen postupný pohyb, je $i = 3$ (při postupném pohybu má elektron tři platné stupně volnosti), vychází

$$\lambda = \frac{1}{2} n_0 \bar{u} \bar{s} \cdot k.$$

Utvoříme-li nyní poměr měrné tepelné vodivosti λ a měrné elektrické vodivosti σ , dostaneme

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{n_0 \bar{u} \cdot \bar{s} \cdot m \cdot \bar{u}}{n_0 e^2 \cdot \bar{s}} \cdot k = \frac{m \bar{u}^2}{e^2} \cdot k.$$

Výraz $\frac{m \bar{u}^2}{2}$ představuje kinetickou energii elektronu při téže teplotě;

tato energie pro elektron (tři platné stupně volnosti) je rovna $\frac{3}{2} k T$, tedy

$$\frac{m \bar{u}^2}{2} = \frac{3}{2} k T,$$

$$\frac{\lambda}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 \cdot T$$

Poměr tepelné a elektrické vodivosti je přímo úměrný absolutní teplotě, což je již vzpomenutý zákon Wiedemannův-Franzův. Z posledního výrazu je možno určit velikost konstanty úměrnosti. Pro náboj elektronu vyplývá z Faradayova zákona $e = \frac{F}{L}$, kde F je Faradayův

náboj, L Avogadrovo číslo, $k = \frac{R}{L}$, tedy

$$\frac{\lambda}{\sigma} = 3 \left(\frac{R}{F} \right)^2 \cdot T$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu hodnoty konstant R a F , dostaneme velikost konstanty úměrnosti

$$3 \left(\frac{R}{F} \right)^2 = 2,22 \cdot 10^{-8} \text{ J}^2 \text{ A}^{-2} \text{ s}^{-2} \text{ deg}^{-2}.$$

Tato konstanta je někdy nazývána také *Lorenzovým číslem*.

Vztah mezi elektrickou a tepelnou vodivostí, vyslovený na základě experimentálního měření, byl potvrzen klasickou teorií. Tento zákon platí jen tehdy, je-li teplota vyšší než 0°C . Je tedy možno ze známé elektrické vodivosti ryzího kovu vypočítat i tepelnou vodivost a také je možno vypočítat i opak.

Základy kvantové fyziky

BOHUMIL MACEK, PF, Hradec Králové

1. Úvod

Zamyslíme-li se nad historickým vývojem fyziky jako přírodní vědy, jistě upoutají naši pozornost dva revoluční zvraty v metodě poznávání, výkladu i chápání fyzikálních jevů. První zlom bychom mohli časově umístit do 17. století a druhý na začátek 20. století. Fyziku mezi prvním a druhým zlomem nazýváme *klasickou* (rozhodující význam zde patří *Isaaku Newtonovi*), fyziku dvacátého století označujeme často jako fyziku *moderní* (je spjata zvláště se jmény *Alberta Einsteina* a *Maxe Plancka*).

Klasická Newtonova fyzika se stala jakýmsi nástrojem, který poprvé umožnil člověku studovat jevy ve světě kolem nás (tzv. makrosvěta), zasahovat do nich a ovlivňovat jejich průběh k prospěchu lidské společnosti. Nebudeme se zde blíže zabývat klasickou fyzikou. Řekněme jen, že studovala přírodní jevy převážně z hlediska pozorovatele, že pracovala s pojmy, které měly mít absolutní platnost (čas, prostor). Ve své době měla klasická fyzika veliké úspěchy. Newtonovo dílo *Philosophiae naturalis principia mathematica* bylo téměř po tři staletí nedostižným vzorem, a to nejen ve fyzice, ale ve všech přírodních vědách.

Avšak přes všechnu tuto zdánlivou dokonalost nepodařilo se nikdy klasické fyzice skloubit fyzikální poznatky v jednotný logický celek. Naopak, s rozvojem vědy rostly i nesrovnalosti a rozpory, které se nedaly dosavadní teorií žádným způsobem vyložit. Nezbylo nic jiného, než vzdát se marné snahy předepisovat přírodě zákony, přijmout výsledky důmyslných pokusů a pozorování tak, jak jsou a podle nich opravit naše vlastní názory na fyziku.

Z obtíží klasické elektrodynamiky při zkoumání optických jevů v pohybujících se soustavách vyrostla *Einsteinova teorie relativity*. Ta popisuje skutečnost lépe než klasická fyzika, zvláště, jde-li o velké prostory, tzv. megasvět, případně velmi rychlé děje. Klasická fyzika se stala jen určitým limitním případem, který má omezenou platnost¹⁾.

Měření intenzity tepelného záření položilo přibližně v téže době základ ke druhému oboru oderní fyziky, a to k fyzice *kvantové*. Velká zásluha zde patří německému fyziku *Maxu Planckovi*,

¹⁾ Viz *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 42, číslo 3 až 7: *J. Horský*, *Základy teorie relativity*.

který poprvé vyslovil teorii, že atomy emitují a absorbují zářivou energii nikoliv spojitě, ale v určitých velmi malých, od sebe oddělených dávkách — kvantech energie. Energie jednoho kvanta je dána vzorcem

$$W = h \cdot \nu,$$

kde h je Planckova konstanta = účinkové kvantum = $6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s, ν je frekvence záření.

Einstein nazval později součin $h \cdot \nu$ fotone m a rozšířil kvantování i na tepelné kmity atomů pevných látek. Kvanta tepelné energie se nazývají fonony. Jak fotony, tak i fonony jsou tedy jakési „atomy“ energie a jejich velikost závisí jedině na frekvenci ν .

Podobně jako teorie relativity, vedla i kvantová fyzika k novým názorům na některé pojmy a jevy, k názorům, které se přiči našim tradičním vžitým představám. Velmi výstižně znázornil opravdu neobvyklé a nečekané výsledky některých pokusů kvantové fyziky William Bragg tímto přirovnáním: „Je tomu tak, jako by někdo hodil z výše 100 m na hladinu moře prkno. Vlny, šířící se po dopadu, by se sice nedaly ve vzdálenosti 1 000 km zjistit, aby působily by na loď v tom místě tak, že by z ní vytrhly prkno a vymršily je do výše 100 m.“ V klasické fyzice bychom jistě podobný jev nenašli.

Zásadní rozdíl je právě v tom, že svět atomů, tzv. mikrosvět, není v žádném případě zmenšeným modelem makrosvěta. Při přechodu od jednoho světa do druhého se mění kvalita jevů, platí jiné zákony.

2. Vlnová povaha mikročástic

Kvantová fyzika je teorie pohybu mikročástic, tj. částic, které mají malou neb nulovou klidovou hmotnost. Jsou to jednak elementární částice, jako elektrony, protony, neutrony, mezony, pozitrony aj., jednak částice, které se z nich skládají, jako jádra, atomy i molekuly. Kritériem, podle kterého se dá určit chování částice, je Planckova konstanta. Je-li energie částice řádově mnohem větší než h , můžeme pro její popis použít zákonů klasické fyziky. V opačném případě však platí zákony kvantové fyziky, podle kterých má nepřetržitě se pohybující mikročástice nejen korpuskulární, ale vlnové vlastnosti. K pochopení pozorovaných jevů je potom nutné respektovat obojí její povahu.

Připomeňme si ještě, že naše představy mikročástic nejsou správné, jsou vlastně naší čistě subjektivní pomůckou. Nemůžeme na ně aplikovat vžitou představu hmoty, která má určitou velikost, tvar, barvu aj. Nelze si je ani představit jako pouhé body v prostoru obklopené určitým systémem silových polí. K správnému výkladu pozorovaných faktů musíme často použít dvou i více představ, které nejen že nemají mezi sebou logickou souvislost, ale navzájem se i vylučují. Naopak zase teorie, které souhlasí s pozorováním, jsou pro nás nenázorné, nebo jsou to pouhé matematické fikce, pro které nemáme konkrétní představu.

Naše smyslové orgány vznikly při vývoji živé hmoty a zdokonalovaly se působením podnětů makrosvěta. I když některé z nich dovedou registrovat údaje mikroskopické povahy, přece jen v celém vývojovém procesu naučili jsme se myslet v dimenzích makrosvěta. Jemu odpovídají naše výchozí pojmy; naše předpoklady a naše představy. Naše smyslové orgány se prakticky staly makroskopickými přístroji, a proto nás nemohou o mikrosvětě informovat jinak než jednostranně, mohou nám předávat jen omezený rozsah a jen určité druhy impulsů. Nezbyvá nám potom nic jiného, než skládat si z těchto dílčích informací mozaikovitý obraz mikrosvěta. Poznání mikrosvěta je tímto faktem pro člověka podstatně ztíženo, ale není v žádném případě znemožněno. Naopak, celý vývoj kvantové fyziky dokazuje, že mezi makrosvětlem a mikrosvětlem není nepřekročitelná hranice.

Ve dvacátých letech našeho století srovnává francouzský fyzik Louis de Broglie zákony mechaniky a zákony nauky o světle. Pohyb hmotné částice v poli o potenciálu V a pohyb světelných paprsků v nehomogenním prostředí o indexu lomu n se dá vyjádřit v matematicky totožném tvaru. To znamená, že mezi oběma disciplínami — mechanikou a optikou — existuje blízký vztah. Jestliže paprsková optika je zvláštním případem optiky vlnové platí v oblasti velmi krátkých vlnových délek, potom v analogii s optikou i Newtonova klasická mechanika může být jen zvláštním případem obecnější mechaniky vlnové, které by bylo možné použít pro pohyby mikročástic. Každou mikročástici charakterizuje její energie

$$W = h \cdot \nu$$

a hybnost

$$p = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad ^2)$$

²⁾ Podle teorie relativity i podle výsledků ověřených praxí je pro každý hmotný objekt poměr energie W a hmotnosti m konstantní a rovná se druhé mocnině rychlosti světla

$$\frac{W}{m} = c^2,$$

což je Einsteinův vztah mezi hmotností a energií.

Roste-li energie objektu, musí růst i hmotnost a naopak.

Porovnáním rovnic

$$W = m \cdot c^2,$$

$$W = h \cdot \nu.$$

dostáváme

$$m \cdot c = p = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Z poslední rovnice dostaneme de Broglieův vztah

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Pro částice s klidovou hmotností různou od nuly je hybnost

$$p = m \cdot v,$$

a tedy vlnová délka, která přísluší pohybující se mikročástici,

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}.$$

Elektromagnetické pole, které klasická fyzika považovala za spojité, se stalo prostředím, které v sobě sdružuje spojitě i nespojitě formy; na druhé straně mikročástice, které až dosud byly považovány za diskrétní hmotné útvary, se stávají objekty se spojitými i nespojitými projevy své existence.

Teorie de Broglieova byla brzy potvrzena experimentálně. Davisson a Germer studovali odrazy elektronového paprsku na krystalu niklu a zjistili, že v odraženém paprsku vznikají určité privilegované směry, které se nedají vysvětlit podle mechanických zákonů. Poloha maxim přitom závisela na rychlosti elektronů a vypočtená vlnová délka byla zcela ve shodě de Broglieovou rovnicí. Později byly pozorovány ohybové jevy při průchodu svazku elektronů tenkou kovovou fólií i ohybové jevy na přímé hraně, která nepropouštěla elektrony.

Abychom vypočetli vlnovou délku, která je přiřazena pohybující se mikročástici, vyjdeme z de Broglieovy rovnice

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}.$$

Pro výpočet rychlosti v použijeme vztahu mezi kinetickou energií nabitě částice (např. elektronu) a urychlujícím napětím

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Pro elektron tedy dostaneme

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot U}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{U}} 10^{-10} [\text{m}],$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{U}} [\text{\AA}].$$

³⁾ $10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA} = 1 \text{ \AA}.$

Např. při urychlovacím napětí $U = 15 \text{ kV}$ je $\lambda = 0,1 \text{ \AA}$. Pro velké rychlosti bychom však museli použít relativistických vztahů.

Vlnových vlastností elektronového svazku se dnes prakticky využívá v elektronovém mikroskopu. Nejmenší vzdálenost dvou bodů, které můžeme optickým mikroskopem rozlišit, je dána podle *E r n s t a A b b e h o* vztahem

$$x = \frac{0,61 \cdot \lambda}{A},$$

kde λ je vlnová délka použitého světla k pozorování, A je numerická apertura $= n \cdot \sin \alpha$; α je úhel určený optickou osou a stranou kužele světelných paprsků, které vstupují do objektivu; n je index lomu prostředí mezi objektivem a předmětem.

Použijeme-li místo viditelného světla svazku elektronů, zkrátí se vlnová délka více než 10 000krát, a tím se podstatně zvýší rozlišovací schopnost mikroskopu. K lomu elektronového paprsku dochází při průchodu elektrostatickým nebo elektromagnetickým polem.

V prvních letech rozvoje kvantové fyziky vedla snaha po spojení vlnových a korpuskulárních vlastností mikročástic k lákavé představě považovat samotné částice za svazky vln. Podle principu superpozice se měly tyto vlny skládat a vytvářet v prostoru vlnové útvary, v jakási klubíčka. Třebaže vlastní myšlenka nelze upřít originalitu, ukázala se brzy nesprávnou. Vlnové klubko není stabilním útvarem, rozplývá se, protože vlny, které je tvoří, se šíří různou rychlostí. Poznalo se také, že *vlnově korpuskulární dualismus není jen zvláštností optických jevů, ale má všeobecnou platnost.*

Charakteristickým znakem elementárních částic je jejich nedělitelnost. Vlny tuto vlastnost nemají. Na rozhraní dvou prostředí se může vlna spojitě dělit, zatím co částice se buď odráží, nebo prochází. Souvislost mezi vlnami a částicemi si proto můžeme vysvětlit pouze statisticky. Při studiu ohybových jevů u svazku elektronů bylo prokázáno, že nejvíce elektronů dopadá do míst, kde se doprovodné vlny zesilují (do tzv. interferenčních maxim), zatímco v interferenčních minimech nebyly elektrony zjištěny. Hustota elektronů je vždy úměrná intenzitě vlny, resp. čtverci její amplitudy. Docházíme tak k důležitému závěru: *Zákony kvantové fyziky neurčují jednoznačně okamžitou polohu každé jednotlivé mikročástice, stanoví jen míru pravděpodobnosti, že se částice vyskytne v daném místě.*

3. Heisenbergova relace neurčitosti

Ze základních pohybových zákonů kvantové mechaniky se dá odvodit *H e i s e n b e r g o v a r e l a c e n e u r č i t o s t i*, podle které je mož-

né měřit jednotlivé stavy neb vlastnosti mikročástice pouze s omezenou přesností. Relace se zpravidla udává ve tvaru

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h,$$

kde Δx je odchylka souřadnice (polohy) částice od střední hodnoty; Δp je odchylka hybnosti od střední hodnoty.

Slovy bychom mohli říci

Součin chyb, kterých se dopouštíme při současném měření polohy a hybnosti částice, je vždy větší než Planckova konstanta h .

Pro maximálně dosažitelnou přesnost platí znaménko rovná se.

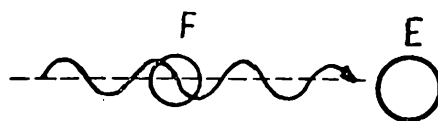
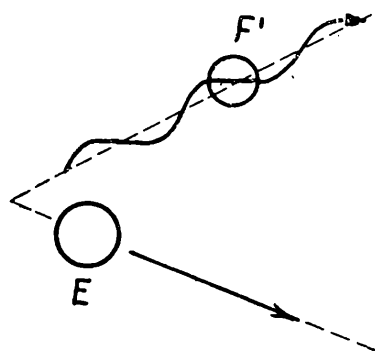
Relaci dostaneme také z de Broglieova vztahu

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

jestliže položíme $\lambda = x$ a zavedeme změny obou veličin. Místo rovnosti píšeme znak nerovnosti. Chceme-li tedy popsat pohyb mikročástice veličinami klasické fyziky, potom při současném měření polohy a hybnosti dopouštíme se určité chyby. Vrátime se ještě jednou k vzorci pro nejmenší vzdálenost dvou bodů, které můžeme mikroskopem rozlišit. V důsledku vlnové povahy světla platí

$$x = \frac{0,61 \cdot \lambda}{A}.$$

Polohu částice můžeme určit tím přesněji, čím kratší bude vlnová délka použitého světla. Přejdeme-li však k mikročásticím, dochází při krátkovlnném záření ke **C o m p t o n o v ě j e v u**. Při dostatečně velké energii záření chová se foton a elektron (mikročástice) jako mechanicky pružné koule a hybnost částice se zkreslí.



Obr. 1. Před srážkou elektronu a fotonu; F = foton, E = elektron. Energie fotonu $W = h \cdot \nu$.

Obr. 2. Po srážce fotonu s elektronem; F' = foton s menší energií; E = elektron. Energie fotonu $W' = h \cdot \nu'$, $\nu' < \nu$; $\lambda' > \lambda$.

V opačném případě, použijeme-li dlouhovlnného záření (fotonů s malou energií), ke Comptonově jevu prakticky nedochází. Fotony se odrážejí jako míč od stěny. Hybnost bude možné určit přesně, ale za to bude pro velkou vlnovou délku záření nepřesně určena poloha. Současné zlepšení obou měřených hodnot není prostě možné. Mikročástice jsou v prostoru

více či méně rozmazány a jejich pohyb připomíná jednou pohyb vlny jindy zase pohyb klasické částice.

Uvedme na dvou příkladech, jaké závěry vyplývají z relace neurčitosti při výpočtu rychlosti mikročástice.

1. Při fotoelektrickém jevu vylétají z povrchu cézia elektrony rychlostí až 10^6 m/s. S jakou přesností můžeme tuto rychlost určit, známe-li jejich polohu s přesností na desetiny mm?

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h,$$

$$\Delta v \geq \frac{h}{\Delta x \cdot m},$$

$$\Delta v \geq \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{10^{-4} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \doteq 7,3 \text{ m/s}.$$

Rychlost elektronů je možno stanovit s přesností na 0,001 %.

2. S jakou přesností můžeme stanovit rychlost elektronu v atomu, jehož průměr je 10^{-10} m?

$$\Delta v \geq \frac{h}{\Delta x \cdot m},$$

$$\Delta v \geq \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{10^{-10} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \doteq 7,3 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

Neurčitost je zde větší než sama měřená rychlost ($v \doteq 2 \cdot 10^6$ m/s). Výsledek ukazuje, že metody klasické fyziky musíme brát v atomových rozměrech se značnou rezervou.

Přestože Heisenbergova relace je pravdivým zobrazením skutečnosti, bývá její fyzikální smysl často nesprávně vykládán. Někdy se v ní i vidí hranice lidského poznání. Správná analýza relace však naprosto odporuje podobným idealistickým závěrům a nevhodným interpretacím. Relace nepředstavuje nic jiného než míru použitelnosti klasických pojmů a metod v mikrosvětě.

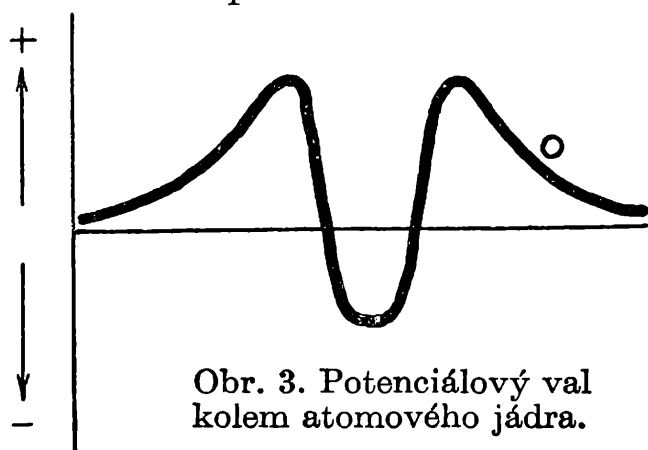
4. Schrödingerova rovnice a její užití.

Základem vlastní kvantové fyziky je tzv. vlnová rovnice, kterou odvodil v r. 1926 německý fyzik Erwin Schrödinger. Rovnice umožňuje studovat pohyb mikročástic v různých silových polích. Nejen její odvození a aplikace, ale již pouhé vyjádření je po matematické stránce velmi náročné, a proto nebudeme ani uvádět její tvar.

Z velikého počtu aplikací Schrödingerovy rovnice na problémy velmi obecného významu se krátce zmíníme alespoň o jednom kvantovém jevu, který umožňuje rentabilní uvolňování jaderné energie, o tzv. t u n e l o v é m e f e k t u.

Má-li vniknout kladně nabitá částice do jádra atomu, musí překonávat silné odpudivé síly. Představujeme si, že jádro je obklopeno potenciálním valem, který směrem k jádru roste. V těsné blízkosti jádra však musí přejít síly odpudivé a síly přitažlivé, jaderné. Experimentálně se zjistilo, že kvalita sil se mění ve vzdálenosti řádu 10^{-14} m, což je tzv.

p o l o m ě r j á d r a. Pro jádro uranu je hodnota valu větší než 30 MeV. Podle klasické fyziky musela by energie částice, která má vniknout do jádra, tuto hodnotu ještě převyšovat. Rovněž částice, která při radioaktivním rozpadu vyletuje z jádra, musela by mít energii vyšší než určuje potenciální val. Ve skutečnosti pronikají do jádra, resp. se uvolňují z jádra při radoaktivním rozpadu částice o energii několika málo MeV. Podle kvantové fyziky existuje totiž pro každou částici (i když její energie je nižší než energie potenciálního valu) určitá pravděpodobnost, že valem pronikne.



Obr. 3. Potenciálový val kolem atomového jádra.

Jestliže energie částice se rovná energii valu, neměla by podle klasické fyziky projít. Podle kvantové fyziky však v tomto případě prochází vždy. Přitom částice nevystupuje na vrchol valu, neztrácí energii, ale prochází valem jako tunelem, proto název t u n e l o v ý e f e k t.

5. Závěr

Kvantová fyzika tvoří dnes uzavřený vědní celek, který má široké uplatnění nejen v atomistice, ale i v teorii pevné fáze, při výkladu polovodičů, vlastností kovů, magnetických látek. Mnohých závěrů kvantové fyziky se využívá také v jiných oborech, jako v chemii (zkoumání struktury a vlastností molekul), v biologii, v technologii a dalších technických disciplínách.

a) Zákony kvantové fyziky mají statistický charakter. Stavy mikročástic se udávají s jistou pravděpodobností a výsledkem je opět pravděpodobnost určitého jevu. *Pravděpodobnost se zde stává základním pojmem a má i jistý fyzikální obsah.*

b) Zatímco v klasické fyzice nemá způsob pozorování prakticky žádný vliv na průběh jevu, *v kvantové fyzice je každé pozorování rušivým zásahem a ovlivněním fyzikálního chování mikročástice.* Celý proces je proto vždy velmi složitý a nelze např. hovořit o poloze mikročástice v klasickém slova smyslu.

c) Okolnost, že *zákony kvantové fyziky se nedají názorně vysvětlit, že chování mikročástic neodpovídá našim logickým rozumovým úvahám,* je důsledkem našich subjektivních představ spojených s makrosvětem.

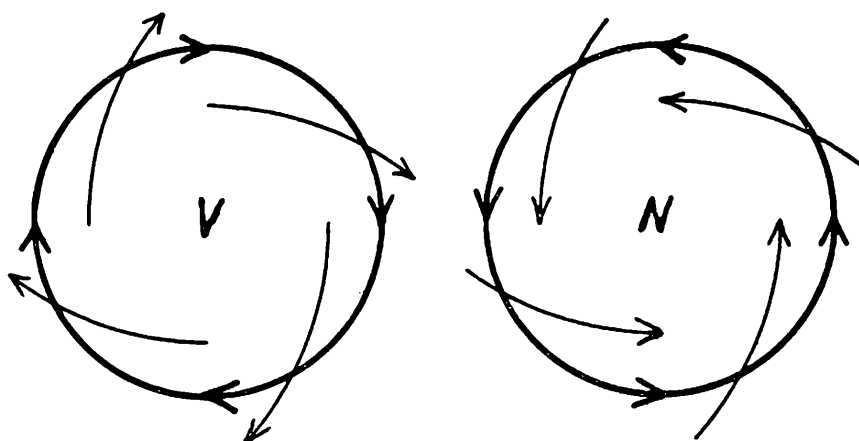
d) *Popis mikročástice jako vlny a jindy zase jako částice musíme chápat jen jako symbolické spojení dvou pojmů, které jsou právě vhodné pro vysvětlení jedné a téže fyzikální skutečnosti.*

Nakreslete si povětrnostní mapu!

KAREL BLAŽÁK, UP, Olomouc

Úvodem několik stručných poznámek. Předně předpokládám, že víte něco o tom, co je tlaková výše, tlaková níže, co jsou to fronty, izobary a ještě nějaké drobnosti z meteorologie. Bude dobře, když si prohlédnete své učebnice fyziky, popřípadě nahlédnete do učebnice fyziky pro 8. tř. ZDŠ. Tam najdete poučení o tlaku vzduchu, teplotě, rosném bodu a o měření těchto veličin. Kromě toho je tam několik fotografií různých druhů mraků, a konečně je tam i ukázka povětrnostní mapy.

A nyní ještě několik slov na vysvětlenou. Je snad pochopitelné, že vzduch proudí z tlakové výše do tlakové níže. Méně je známo to, že neproudí tou nejkratší cestou, ale jde poněkud oklikou. Tento jev je způsoben otáčením Země kolem své osy (obr. 1).

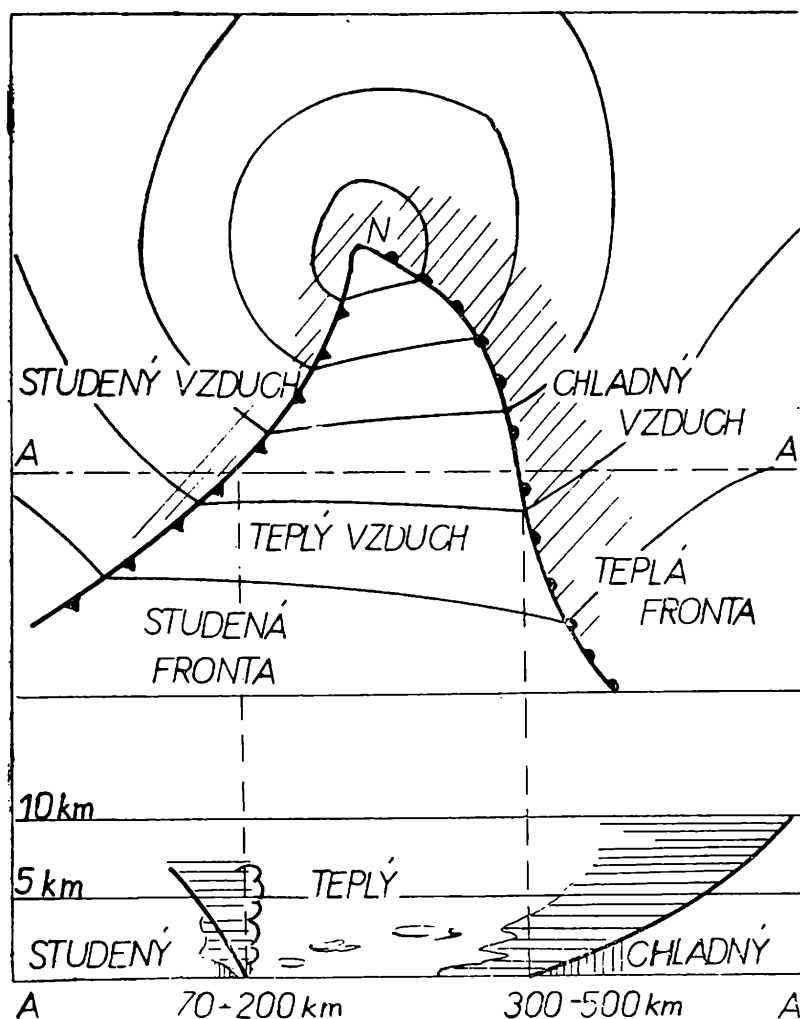


Obr. 1. Silněji vytažené kruhy se šipkami znázorňují smysl proudění vzdušných mas a jsou zhruba totožné s izobarami. Slabší šipky jsou totožné s výsledným prouděním vzdušných mas (se směrem větru).

Dále uvažte, že proudí-li vzduch do tlakové níže, pak jednotlivé masy vzduchu se budou od sebe lišit podle svého původu aspoň teplotou a relativní vlhkostí. Uvažte například vzduch, který k nám přichází odněkud z Grónska a proti tomu vzduch, který přichází ze Středozevního moře. Mezi takovými vzduchovými masami se nutně vytvoří rozhraní, kterému říkáme *fronta*. Na tomto rozhraní se teplé vzduchové hmoty mísí se studenými, teplé jsou lehčí a stoupají nahoru, cestou se rozpínají a ochlazují až na rosný bod, tj. na teplotu, kdy již nastává kondenzace vodních par vždy ve vzduchu obsažených. Tvoří se mlhy, mraky, prší nebo sněží, jindy je bouřka a padají kroupy. Krátce řečeno,

na frontách většinou bývá špatné počasí, a až o prázdninách budete plánovat výlet, tak si dobře dáte pozor na fronty, které mají přecházet přes naše území. To je také první důvod, proč budete kreslit povětrnostní mapu. A další důvody si řekneme na konci článku.

Takový systém tlakové níže s příslušnými frontami má svůj název - *cyklóna*. Cyklóny se většinou pohybují od západu k východu, po určité době se rozpadají, ale stává se také, že se cyklóna zastaví, nebo se rozpadající cyklóna obnovuje. V tom jsou někdy cyklóny nevypočítatelné a dělají meteorologům těžkou hlavu. Na obr. 2 najdete schéma



Obr. 2. Schéma cyklóny na mapě a kolmý řez cyklónou.

cyklóny na mapě a kolmý řez cyklónou. Všimněte si způsobu zakreslování front! Jak jsme již řekli, fronty se pohybují, ba dokonce studená fronta na zadní straně cyklóny se pohybuje rychleji než teplá na přední straně. Tak se stane, že studená a teplá fronta se setkají (nejprve při zemi) a vznikne fronta okluzní - *okluze*. Také tato fronta přináší zhoršené počasí.

Přistupme nyní k hlavnímu úkolu. Připravte si tužku a papír, mapku Evropy se zakreslenými zeměpisnými souřadnicemi a rozhlasový přijímač! Čs. rozhlas vysílá denně před 8. hod. ranní na stanici Československo I povětrnostní zprávu, sestavenou ústředím povětrnostní služby. Zapněte tedy přijímač a запиšte, co vám hlasatel hlásí o počasí!

Zde je povětrnostní zpráva ze dne 23. 3. 1965 v 01.00 hod. SEČ.

Tlaková níže	995 mb	04723
tlaková níže	990 mb	05009
tlaková níže	995 mb	36608
tlaková níže	995 mb	37034
tlaková níže	1005 mb	33638
tlaková výše	1015 mb	34921
studená fronta	03930	04724
okluzní fronta	04724	05227 05430
teplá fronta	04724	03728
studená zvlněná fronta	03614	04102 34604 35104
okluzní fronta	35104	05303 05109
teplá fronta	35104	34810 34717
studená fronta	34717	34726 35133 35935
teplá fronta	35935	36240 36350

Izobary:

1025 mb 07015 06630
 1010 mb 07002 06707 06105 05910 06030
 1005 mb 37018 36915 06900 06604 36103 36012 36525 36535 36345 36651
 995 mb 05310 05019 04710
 1000 mb 04631 04526 04513 04610 05300 05509 05419 05830
 1005 mb 04506 34905 35005 35603 05718 05930
 1010 mb 04305 04102 34306 34607 35509 35820 35435 36046
 1015 mb 34548 35241 36050
 1015 mb 36420 34521 34419 34514 34714 35014 35520 35129 34826 34620
 1010 mb 33944 34639 34526 34425 34129 33526 33035
 1015 mb 03930 04023 03906 03605 33401 33707 33519 33026
 1020 mb 03730 03620 03020

Zpráva sice pokračuje dále a obsahuje hlášení o výstupu v Praze a Popradě, potom předpověď výškového větru a konečně je tam v otevřené řeči popsán vývoj počasí. Pro naši mapku má význam jen první polovina hlášení, a proto zbytek zprávy neuvádím. O jeho využití pohovořím v jiném článku.

Na první pohled je patrné, že zpráva obsahuje samá čísla. A prozradím předem, že většina čísel jsou zeměpisné souřadnice bodů, které určují polohu tlakové výše, níže, nebo průběh fronty atd. Příklad:

Tlaková níže 995 mb 04723 - značí, že poloha uvedené tlakové níže je přibližně určena průsečíkem 47. rovnoběžky severní šířky (s. š.) a 23. poledníku západní délky (z. d.). V případě, že pětimístné číslo začíná číslicí 3, pak půjde o délku východní (v. d.). Tedy: „Tlaková výše 1015 mb 34921“ leží na 49. s. š. a na 21. v. d. Takto zakreslíme všechny tlakové útvary, o nichž je ve zprávě řeč. Způsob kreslení poznáte z ukázky zpracované mapky.

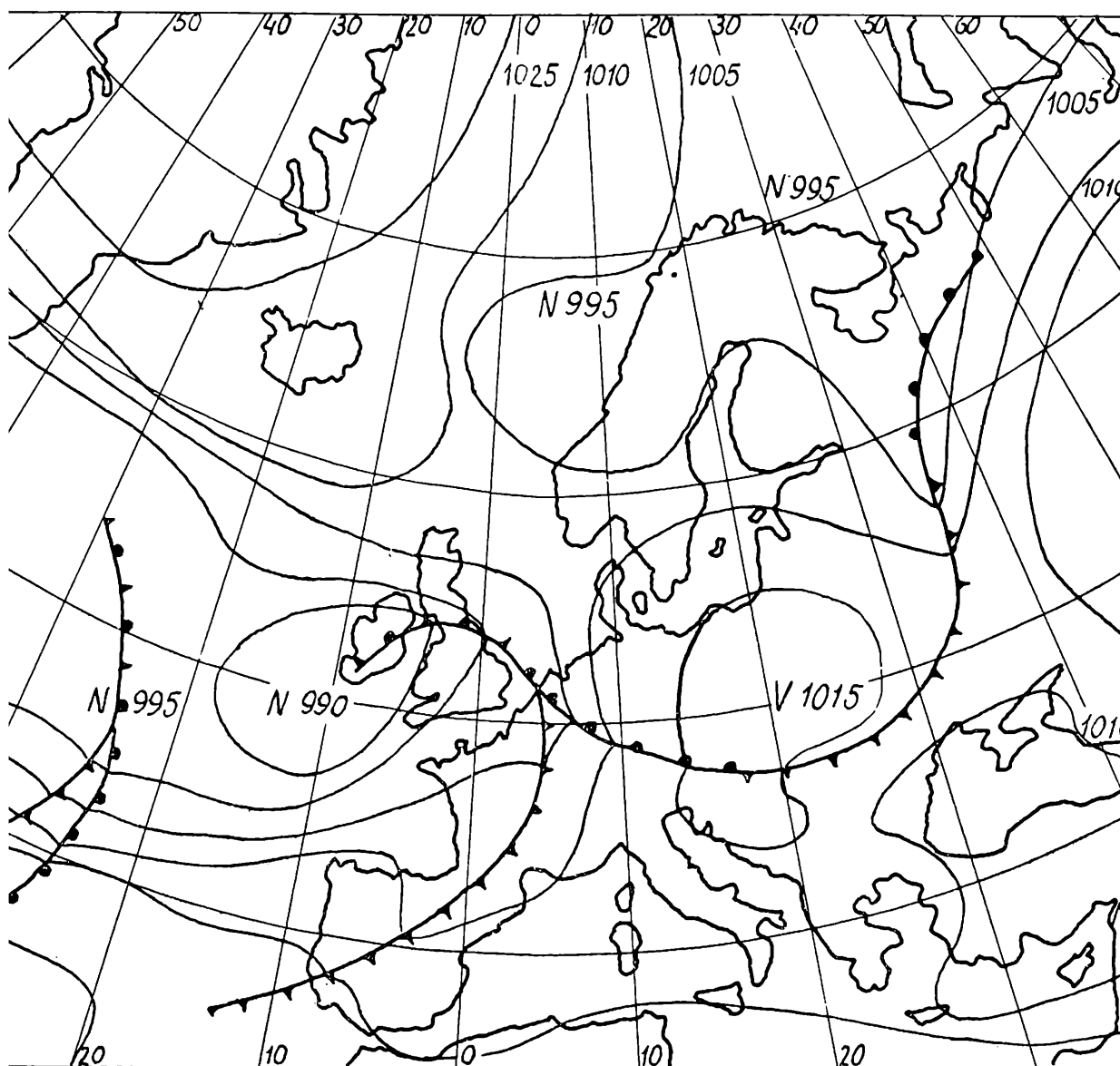
Podobně se zakresluje průběh front. Údaj „Teplá fronta 35935 36240 36350“ značí tři body určené zeměpisnými souřadnicemi a jejich spojnice na mapě znázorňuje polohu teplé fronty v 01.00 hod. SEČ.

Stejně dešifrujeme polohu hlavních izobar. Údaj 995 mb značí hodnotu izobary, která prochází body o souřadnicích 05310 05019 04710.

Zakreslením šifrované části zprávy uvedeným způsobem získáme přízemní povětrnostní mapu pro den 23. 3. 1965, 01.00 hod. SEČ.

Zde ještě několik rad pro snazší zakreslení zprávy:

a) Hlášení probíhá dosti rychle, a proto při jeho zápisu hojně používáme zkratk. Tak například místo „Tlaková níže 995 mb“ označíme jen N 995. „Tlaková výše 1015 mb“ píšeme V 15. Místo „Teplá fronta“ značíme „T“ apod.



Obr. 3. Povětrnostní mapka ze dne 23. 3. 1965 v 01.00 hod. SEČ.

b) Teplou frontu zakreslete na mapě červenou tužkou, studenou frontu modrou tužkou. Okluzi červenou a modrou čarou vedle sebe. V černo-bílém tisku je ovšem nutno užívat ustálených značek, těch, co vidíte na obr. 2 nebo na mapce.

c) Mapku Evropy si pořídte ve více exemplářích. Je dobře kreslit mapu každý den po delší období. Lépe tak poznáte pohyb a změny tlakových útvarů. Potíže ovšem činí nevhodná doba hlášení. Je však možno hlášení natočit na školní magnetofon a pak ve volné chvílce zprávu vyhodnotit. Časem nabudete takové zručnosti, že budete kreslit mapku rovnou při hlášení.

Nyní je na řadě otázka, co teď s mapou. Každému je celkem jasné, že povětrnostní mapa, pokud jí aspoň trochu rozumíme, podává názornější obraz o povětrnostní situaci, než slyšená zpráva z rozhlasu nebo i tištěná zpráva v novinách. Rozhodně nám dobře poslouží k tomu, abychom si aspoň dodatečně uměli vysvětlit, proč například v sobotu 20. 3. 1965 bylo hezké, teplé, skoro jarní počasí a proč ke zklamání mnoha mladých lidí na první jarní den (neděle) přšlo. Následující den přišlo vyjasnění a citelné ochlazení, což si vysvětlujeme přechodem studené fronty přes naše území. Na mapce ze dne 23. 3. 1965 (úterý) ji vidíte (studenou frontu) již na území Sovětského svazu.

Nu a z toho plyne poučení. Sledovat denně počasí, poslouchat předpovědi, konfrontovat předpověď se skutečným průběhem a srovnávat vše s povětrnostní mapou. A na základě povětrnostní mapy si vysvětlit vývoj počasí a konstatovat, co se z předpovědi uskutečnilo a co ne.

Budete-li kreslit mapku pravidelně, poznáte lépe souvislosti mezi polohami tlakových útvarů a pohybem front, poznáte typické situace a jejich přestavby. Bude jistě třeba, abyste prostudovali odbornou literaturu a prohlédli si atlas mraků a pak můžete sledovat vývoj oblačnosti, změny tvarů mraků a srovnávat je s tím, co se dovíte o přechodu teplé, či studené fronty. Prostě budete mít plno možností, jak udělat z meteorologie svého koníčka. A k tomu vám přeji mnoho zdaru.

L i t e r a t u r a :

Šebek-Černava: Co nevíte o meteorologii. Praha 1961.

Prokop a kol.: Meteorologie pro sportovní letce, 1960.

S. Hanzlík: Základy meteorologie a klimatologie, 1956.

R. Schneider: Pozorujeme počasí, 1947.

Řešení



úloh

● Fyzika

6. Koule poloměru $r = 0,2 \text{ m}$ valí se rychlostí $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ po vodorovné rovině kolem pevné vertikální osy. Vzdálenost středu koule od této osy je $R = 0,5 \text{ m}$ (obr. 2). Materiálem koule je ocel ($\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

V y p o č t ě t e : a) celkovou kinetickou energii koule (přitom zanedbáváme hmotu ramene, jímž je koule vázána k vertikální ose),
b) celkovou úhlovou rychlost koule co do velikosti i směru.

P o z n á m k a : Moment setrvačnosti J koule vzhledem k libovolné ose procházející jejím středem (těžištěm) je roven

$$J = \frac{2}{5} mr^2,$$

kde m je hmota koule a r její poloměr.

(Došlo 26 řešení)

Václav Šindelář

Řešil Miroslav Řezníček, 3.d SVVŠ, Hradec Králové:

a) Při pohybu vykonává valící se koule dva rotační pohyby:

1. Rotaci úhlovou rychlostí

$$\omega_1 = \frac{v}{R}$$

kolem pevné svislé osy vzdálené od těžiště koule o délku R .

2. Rotaci kolem otáčivé vodorovné osy procházející těžištěm úhlovou rychlostí

$$\omega_2 = \frac{v}{r}.$$

Při obou z těchto pohybů přísluší kouli kinetická energie. Úhrnná kinetická energie koule je rovna součtu jednotlivých složkových energií:

První složka je rovna

$$W_{k_1} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2,$$

kde

$$J_1 = J_0 + mR^2, \quad (1)$$

a

$$\omega_1 = \frac{v}{R}. \quad (2)$$

Druhá složka se rovná

$$W_{k_2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2, \quad (3)$$

kde

$$\begin{aligned} J_2 &= J_0, \\ \omega_2 &= \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Celková energie je rovna

$$W_k = W_{k_1} + W_{k_2}.$$

Po dosazení

$$W_k = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

a podle (1), (2), (3) a (4) je pak

$$W_k = \frac{1}{2} J_0 + m R^2) \cdot \frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2} J_0 \cdot \frac{v^2}{r^2}.$$

Pro moment setrvačnosti vůči ose procházející středem koule platí

$$J_0 = \frac{2}{5} m r^2,$$

a proto je

$$W_k = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} m r^2 + m R^2 \right) \frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2},$$

$$W_k = \frac{2}{10} m v^2 \cdot \frac{r^2}{R^2} + \frac{7}{10} m v^2,$$

$$W_k = \frac{1}{10} m v^2 \left(7 + \frac{2 r^2}{R^2} \right).$$

Hmota koule o poloměru r a hustotě ϱ je

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho.$$

Dosadíme-li do předešlého vztahu

$$W_k = \frac{2}{15} \pi r^3 \varrho v^2 \left(\frac{2 r^2}{R^2} + 7 \right)$$

R o z m ě r o v á k o n t r o l a

$$[W_k] = \text{m}^3 \cdot \text{kg m}^{-3} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-2} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} = \text{J}$$

Č í s e l n ě :

$$r = 0,2 \text{ m}; v = 1 \text{ m s}^{-1}; R = 0,5 \text{ m};$$

$$\varrho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

$$(W_k) = \frac{2}{15} \cdot \pi (0,2)^3 \cdot 7,8 \cdot 10^3 \cdot 1 \left[\frac{2 \cdot (0,2)^2}{(0,5)^2} + 7 \right],$$

$$W_k \doteq 192 \text{ J}$$

Z á v ě r Koule má celkovou kinetickou energii

$$W_k = \frac{2}{15} \pi r^3 \varrho v^2 \left(\frac{2 r^2}{R^2} + 7 \right),$$

tj. zhruba 192 J.

b) Úhlová rychlost rotace koule kolem svislé osy je podle (2)

$$\omega_1 = \frac{v}{R},$$

úhlová rychlost rotace koule podle vodorovné osy je podle (4)

$$\omega_2 = \frac{v}{r}.$$

Obvodová rychlost je v obou případech zmíněných rotací skutečně stejná, protože těžiště i libovolný bod obvodové kružnice, ve které se dotýká koule horizontální roviny, urazí za stejný čas stejnou vzdálenost.

Úhlové rychlosti ω_1 a ω_2 jsou navzájem kolmé, takže výslednou úhlovou rychlost stanovíme ze vztahu

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

a úhel φ , který svírá výsledná rychlost ω s vodorovnou rovinou, stanovíme ze vztahu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_1}{\omega_2},$$

dosadíme za

$$\omega_1 = \frac{v}{R} \qquad \omega_2 = \frac{v}{r},$$

dostáváme

$$\omega = \sqrt{\frac{v^2}{R^2} + \frac{v^2}{r^2}}$$

a odtud

$$\omega = v \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}}$$

Rozměrová kontrola:

$$(\omega) = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \sqrt{\text{m}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{s}^{-1},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{v}{R}}{\frac{v}{r}}$$

a odtud

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{R}.$$

Rozměrová kontrola:

$$(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{m}{m} = 1.$$

Číselně:

$$r = 0,2 \text{ m}; v = 1 \text{ m s}^{-1};$$

$$R = 0,5 \text{ m}; \varrho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\omega = 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{0,25} + \frac{1}{0,04}} = 10 \cdot \sqrt{0,29} = 5,39,$$

$$\omega = 5,39 \text{ s}^{-1},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{0,2}{0,5} = 0,4,$$

$$\varphi = 21^{\circ} 48'$$

Z á v ě r : Výsledná úhlová rychlost má velikost

$$\omega = v \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}}$$

tj. $5,39 \text{ s}^{-1}$, úhel, který svírá její směr s horizontální rovinou je roven

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{R},$$

odkud

$$\varphi = 21^{\circ} 48'$$



RECENZE

V. Bruthans, A. Kejzlar:

Matematika

Kniha má podtitulek *Příručka pro přípravu na vysokou školu* a v tom už je také dán celkový výběr látky a jejího zpracování podle důležitosti. Nejsou v ní proto zastoupeny všechny části matematiky, probírané na středních školách. Ve vykládaných partiích, které jsou rozděleny do osmi kapitol (čísla a početní výkony, rovnice, nerovnosti, funkce, komplexní čísla, plani-

metrie, stereometrie a analytická geometrie), je i v řešených příkladech naznačen myšlenkový postup. Kniha tak není učebnicí, ale nestala se také pouhou snůškou vzorců, a proto je při jejím studiu třeba nejen prostudovat jednotlivé řešené příklady, které v každém odstavci jsou postupně složitější a obtížnější, nýbrž se také snažit o jejich samostatné řešení. Na konci každé kapitoly jsou pak uvedeny příklady pro cvičení (celkem 187), na nichž je možno si ověřit, do jaké míry bylo porozuměno vyložené části, protože ke

všem příkladům jsou uvedeny výsledky a v obtížnějších případech i návody k jejich řešení.

Příručka je velmi vhodná pro zopakování nejdůležitějších částí z matematiky, které jsou téměř na všech vysokých školách technických předmětem přijímací zkoušky. Vzhledem k tomu, že sice látku vykládá na poměrně málo stranách, ale dostatečně vyčerpávajícím způsobem, bude tato kniha jistě vyhledávána studenty pro

rychlé opakování zkoušené látky před přijímacími zkouškami.

Několik málo tiskových chyb, které nejsou uvedeny na opravném lístku, si čtenář snadno sám opraví.

Knihu vydalo Státní nakladatelství technické literatury v Praze, 1965, jako 41. svazek II. řady polytechnické knihnice; má 164 stran, 78 obrázků a prodává se brožovaná za Kčs 8,50.

Karel Drábek

NEJMLADŠÍM ČTENÁŘŮM

?

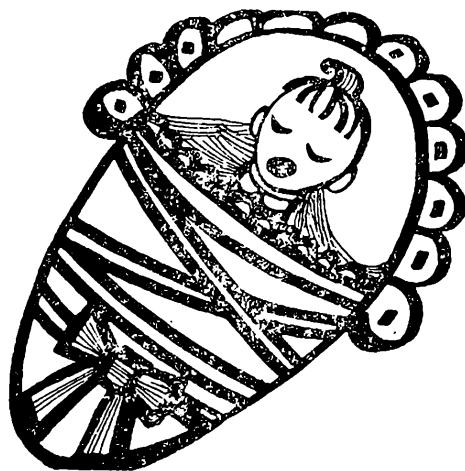
Ve společnosti osmi osob jsou:
Holandan H, který mluví také anglicky a francouzsky;
Madar M, který hovoří též dánsky a polsky;
Portugalec P mluvící též maďarsky, rusky a švédsky;
Angličan A, který dovede také italsky a německy;
Čech Č hovořící také polsky a švédsky;
Francouz F ovládající též portugalštinu, italštinu a španělštinu;
Němec N, který mluví také holandsky a španělsky;
Rus R, který hovoří též česky a dánsky.

Jak nejjednodušeji se v této společnosti (tj. s nejmenším počtem tlumočnicků) dohovří Holandan s Rusem?

Řešení zašlete redakci nejpozději do 30. IV. 1966.

Z holandského časopisu „Pythagoras“ přeložil a upravil

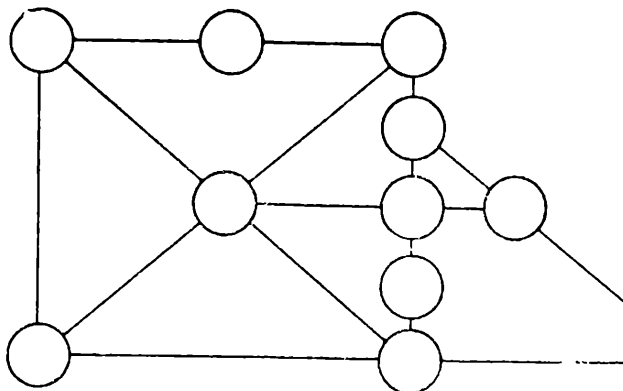
O. S.



Do kroužků napište čísla 3, 4, 5, 13 tak, aby součty čísel v kroužcích spojených úsečkou daly vždy 25.

Řešení úlohy zašlete redakci nejpozději do 30. IV. 1966.

Z bulharského časopisu přeložil a upravil
O. S.



Slovníček

matematických výrazů

(Pokračování)

vytínající
vytknout
vytvářet
vyznačit
výběr
výchozí
výjimka
výjimečně
výklad
výkon
výpočet
výpočtový
výraz
výseč kruhová, kulová
výskyt
výsledek
výška
výška bočné stěny pravidelného
jehlanu
význam
vzájemně, vzájemný
vzdálenost
vzdálený
vzhledem
vzor (při zobrazení)
vzor
vzorec
vztah
vztahující se
vztyčit

отсекающий
вывести за скобки
порождать
выделить
выбор, выборка, подбор
исходный
исключение
исключительно
изложение
операция
вычисление, подсчет, расчет
вычислительный
выражение
сектор круговой, шаровой
наличие
результат, исход
высота
апофема

значение
взаимно, взаимный
относительно, по отношению
расстояние
удаленный
оригинал
образец, модель, ž.
формула
отношение
относящийся
восстановить

Z

zabývat se
zadání (formulace) úlohy
zadání
zadat
zacházet (něčím)

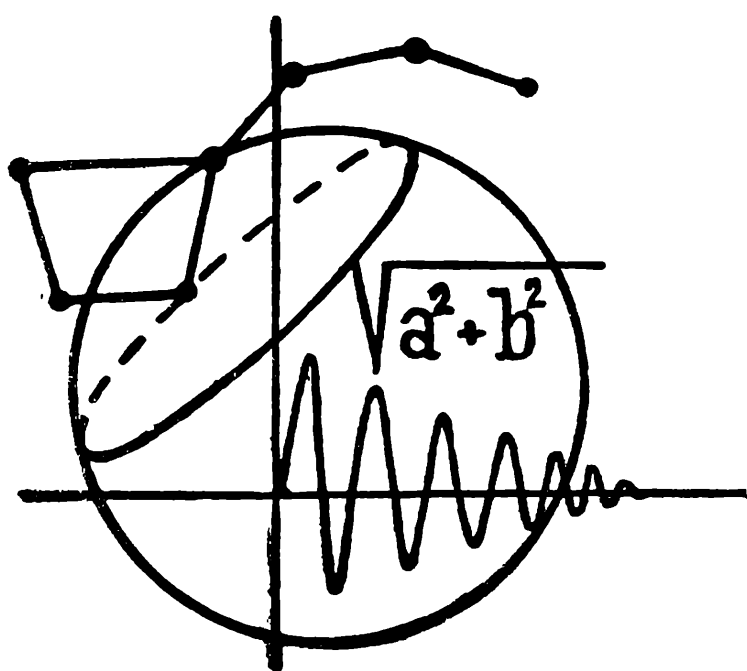
заниматься
постановка задачи
задание
задать
обращаться

základ	основа, основание, база
základna	основание
základna dolní, horní	основание нижнее, верхнее
základní	основной
záměna	замена, подстановка
záměna členů	перестановка членов
zaměřit	направить
zanedbat, zanedbávat	пренебречь, пренебрегать
zaokrouhlení, zaokrouhlovat	округление, округлять
záporný	отрицательный
zaujímat (prostor)	занимать
zavedení	введение
závěr	заключение, вывод
záviset	зависеть
závislost matematická, přímá, nepřímá	зависимость математическая, прямая, обратная
závit	винт
závorky lomené, okrouhlé, složené	скобки квадратные, круглые, фигурные
(dát do) závorek	заклечь в скобки
zbytek	остаток, избыток
zcela	полностью, целиком
zdůvodnění	обоснование
zejména	в частности, особенно
zeměměřictví	землемерие
získávat	получать
zjednodušení	упрощение
zkontrolovat	проверить
zkoumání	испытание, рассмотрение
zkoumaný	исследуемый
zkoumat	рассматривать, изучать, исследовать
zkouška	испытание
zkrácení (afinní)	сжатие
zkreslení	искажение
zlomek desetinný, periodický, řetězový	дробь десятичная, периодическая, цепная (непрерывная)
zlomková čára	черта дроби
změna	изменение
zmenšovat se	убывать
změření	измерение
zmizení	исчезновение
znak	знак, признак
znalost	знание
znamení	знак
známý	знакомый, известный
znázornění, znázorňovat	изображение, изображать
zobecnění	обобщение
zobrazení	преобразование, отображение
zobrazovat	изображать
způsob	вид, прием
zrušit	аннулировать
zřejmé	по видимому

(Dokončení)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



8

ROČ. 44

1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Duben 1966

Číslo 8

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; prof. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, MÚ UNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

Inž. O. Lacina: Řešení rovnic iterací	337
J. Glivický: Některé vztahy mezi prvky trojúhelníka a poloměry kružnic vepsané a vně vepsaných (Dokončení)	342
Z. Pálpán, J. Szarowski: Přirozená čísla	345
Doc. K. Drábek: Použití komplexních čísel v geometrii (Dokončení)	348
Doc. inž. L. Drs, CSc: Kolmé volné průměty	353
Doc. B. Kepr: O některých křivkách (Dokončení)	356
Prof. dr. Z. Bodó, Budapešť: Ťažisko, momenty prvního a druhého stupně	361
Doc. dr. J. Dibelka: Průběh přijímacích zkoušek z fyziky na fakultě technické a jaderné fyziky v Praze	371
S. Horák st.: Vodovodní tunel na ostrově Samos	377
H. Žáková: Identita	378
M. M.: Pythagoras	380
O. S.: Svítil nebo nesvítil	380
J. S.: Tehdy a jen tehdy	380
Recenze	381
J. Kotyk: Dík šťastné náhodě	382
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. str. obálky
K. Lepilová: Slovníček fyzikálních výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: V. Vaňková, studující FS.

A-09*61145

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1966.



MATEMATIKA

Řešení rovnic iterací

ING. OTAKAR LACINA, ČKD-Praha

Úvod

Při řešení fyzikálních problémů i při technických výpočtech dospíváme často k rovnicím, jejichž obecné řešení neznáme, nebo jejichž obecné řešení má příliš složitý tvar. V řadě případů není ani třeba znát všechna řešení dané rovnice, protože některá z nich nemají fyzikální nebo technický význam. Například ve fyzikálních případech nemá význam záporný čas. Často jsou bez významu komplexní kořeny rovnice. V některých případech se po splnění prvního řešení mění podmínky jevu. Například při výpočtu obvodu s usměrňovači obsahuje rovnice proudu ventilem trigonometrickou funkci a má řadu řešení. Význam má však pouze první řešení, protože po prvním poklesu proudu k nule přestávají platit dosud platné vztahy. Při zkratu na elektrickém obvodu vzniká přechodný stav, u kterého z hlediska dynamického namáhání nás zajímá pouze první extrém, který je největší ve své absolutní hodnotě. Vyhoví-li zařízení prvnímu extrému, není již třeba kontrolovat následující menší hodnoty. Konečně je nutno si uvědomit, že zvláště při technických výpočtech žádáme většinou přibližný výsledek. Například rozměry součástí musíme zaokrouhlit na doporučené rozměry, prvky elektrických obvodů se dodávají pouze v určitých hodnotách se značnou tolerancí atp.

Zvláště v těchto případech je vhodné pro řešení rovnice volit některou z přibližných metod, kterými se k řešení postupně přibližujeme, které však vedou rychleji k cíli než řešení obecné. Jednou z těchto metod je *metoda iterační*, které se v učebnicích nevěnuje patřičná pozornost, přestože je většinou pro řešení výhodnější než běžně uváděná *regula falsi* a *Newtonova metoda*.

1. Princip iterační metody

Je dána rovnice

$$f(x) = 0.$$

Máme tedy najít tzv. nulové body funkce $f(x)$, tj. vypočítat souřadnice x těch bodů, v nichž graf funkce $y = f(x)$ protíná osu x . Při řešení iterační metodou rozložíme danou funkci na dvě funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ takové, že pro hodnoty x , kde $f(x) = 0$, platí $f_1(x) = f_2(x)$ a hledáme jejich průsečík. Při řešení postupujeme tak, že první přibližnou hodnotu x , kterou označíme x_1 , dosadíme do funkce $f_1(x)$ a vypočteme její hodnotu $y_1 = f_1(x_1)$. Položíme $y_1 = f_2(x_2)$. Z tohoto vztahu vypočteme hodnotu x_2 , která je druhým přibližným řešením. Druhé přiblížení x_2 dosadíme opět do funkce $f_1(x)$ a vypočteme její hodnotu $y_2 = f_1(x_2)$. Položíme $y_2 = f_2(x_3)$. Z tohoto vztahu vypočteme hodnotu x_3 , která je třetím přiblížením. Výpočet opakujeme tolikrát, až dostaneme výsledek s požadovanou přesností.

2. Podmínka rozkladu

Rozklad dané funkce na funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ je vázán základní podmínkou, aby druhé přiblížení bylo blíže k řešení dané rovnice než první přiblížení. Tento požadavek je splněn tehdy, má-li funkce $f_1(x)$ v okolí průsečíku s funkcí $f_2(x)$ menší absolutní hodnotu směrnice tečny než funkce $f_2(x)$, tj. je-li tangenta úhlu tečny k $f_1(x)$ s osou x ve své absolutní hodnotě menší než tangenta úhlu tečny k $f_2(x)$ s osou x . Pokud známe základy diferenciálního počtu, lze tuto podmínku vyjádřit pomocí prvních derivací

$$|f_1'(x)| < |f_2'(x)|$$

v daném intervalu. Derivace funkcí většinou nemusíme počítat, protože jsou patrný i z hrubého náčrtu, který je vhodný vždy udělat, nebo vyplývají z fyzikální podstaty řešení. Pokud bychom uvedenou podmínku nesplnili, pak bude druhé přiblížení dále od řešení rovnice než první přiblížení. Dalším, již praktickým požadavkem rozkladu je to, aby nové funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ byly formálně jednodušší než daná funkce $f(x)$.

Rozklad funkce a postup řešení si ukážeme na dvou příkladech, ze

kterých plyne další poznatek. Jsou-li obě funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ v okolí svého průsečíku rostoucí nebo obě klesající, pak se k řešení blížíme z jedné strany. Je-li jedna z funkcí rostoucí a druhá klesající, pak se k řešení blížíme z obou stran.

Příklad 1. Je dána rovnice

$$\cos(x + 105^\circ) - 0,1x + 0,9 = 0.$$

Máme určit nejmenší kladné x , pro které je tato rovnice splněna.

Volíme rozklad

$$f_1(x) = 0,1x - 0,9, \quad f_2(x) = \cos(x + 105^\circ)$$

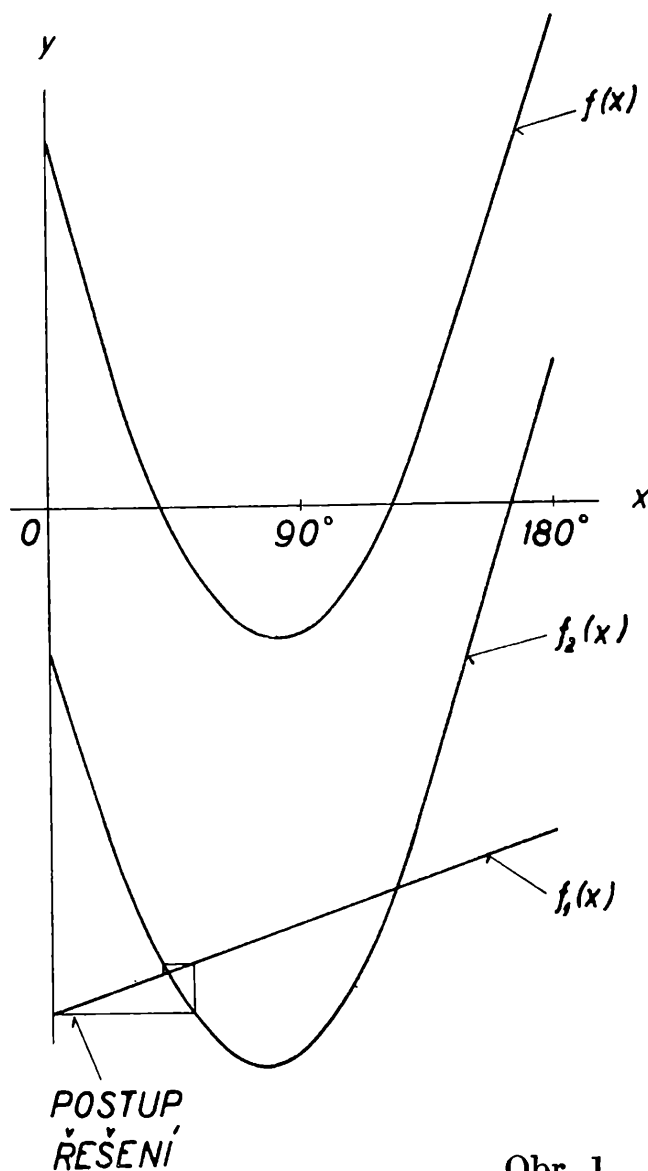
Náčrt dané funkce $f(x)$ a volených funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ provedeme tak, že nejprve volíme měřítko. Ze známých hodnot $\cos 0^\circ = 1$; $\cos 30^\circ = 0,867$; $\cos 60^\circ = 0,5$; $\cos 90^\circ = 0$; $\cos 120^\circ = -0,5$; $\cos 150^\circ = -0,867$; $\cos 180^\circ = -1$ načrtneme průběh kosinusoidy. Počátek náčrtu, tj. osu y položíme do úhlu 105° kosinusoidy, kde má hodnotu $-0,258$. Tím máme hotov náčrt funkce $f_2(x)$. Přímku, která znázorňuje funkci $f_1(x)$, sestrojíme ze dvou bodů, a to nejlépe pro $x = 0$, $f_1(x) = -0,9$ a $x = 2,89$, kde kosinusoida protíná osu x . Tato hodnota x vyplývá z toho, že kosinus má nulovou hodnotu v úhlu 270° . Pro tuto hodnotu $x = 270^\circ - 105^\circ = 165^\circ \doteq 2,89$ rad. Pro hodnotu $x = 2,89$ je $f_1(x) = -0,611$. Graf dané funkce $f(x)$ dostaneme odečtením souřadnic $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Z náčrtu (obr. 1) plyne:

daná funkce prochází nulou pro $x \doteq 41^\circ$;

tečna grafu funkce $f_1(x)$ svírá s osou x menší úhel než $f_2(x)$, je tedy volený rozklad správný;

jedna z funkcí je stoupající a druhá klesající. K řešení se budeme blížit ze dvou stran.

Aby byl jasný způsob přibližování k výsledku, volíme vědomě první přiblížení dosti vzdálené od řešení, a to $x_1 = 0$. Dosadíme do funkce $f_1(x)$ a dostáváme $y_1 = -0,9$. Druhé přiblížení dostáváme z rovnice pro



Obr. 1

$f_2(x)$, tj. $\cos(x + 105^\circ) = -0,9$. Z toho plyne $x_2 = 48^\circ 56' 19''$, které je druhým přiblížením. Úhel převedeme na obloukovou míru $x_2 = 0,840\ 51$ a dosadíme do rovnice pro $f_1(x)$, $y_2 = 0,1 \cdot 0,840\ 51 - 0,9 = -0,815\ 95$. Z rovnice pro $f_2(x)$, tj. $\cos(x + 105^\circ) = -0,815\ 95$ dostáváme třetí přiblížení $x_3 = 39^\circ 40' 54''$. Úhel předvedme opět na obloukovou míru a dosadíme do rovnice pro $f_1(x)$ a pokračujeme ve výpočtu. Při praktickém výpočtu napíšeme výpočtovou tabulku, která zaručuje přehlednost výpočtu.

x°	x_{rad}	$0,1\ x$	$f_1(x)$	$x + 105^\circ$	x
0	0	0	-0,9	$153^\circ\ 9'28''$	$48^\circ\ 9'28''$
$48^\circ\ 9'28''$	0,840 51	0,084 05	-0,815 95	$144^\circ 40'54''$	$39^\circ 40'54''$
$39^\circ 40'54''$	0,692 58	0,069 26	-0,830 74	$146^\circ 10'30''$	$41^\circ 10'30''$
$41^\circ 10'30''$	0,718 64	0,071 86	-0,828 14	$145^\circ 54'29''$	$40^\circ 54'29''$
$40^\circ 54'29''$	0,713 98	0,071 40	-0,828 60	$145^\circ 57'18''$	$40^\circ 57'18''$
$40^\circ 57'18''$	0,714 80	0,071 48	-0,828 52	$145^\circ 56'49''$	$40^\circ 56'49''$
$40^\circ 56'49''$	0,714 66	0,071 47	-0,828 53	$145^\circ 56'52''$	$40^\circ 56'52''$
$40^\circ 56'52''$	0,714 67	0,071 47	-0,828 53	$145^\circ 56'52''$	$40^\circ 56'52''$

Z tabulky plyne výsledek s přesností pětimístných tabulek $x = 40^\circ 56' 52''$

Zároveň je z tabulky patrné, že kdybychom výpočet začali s hodnotou odečtenou z náčrtu, dospěli bychom k výsledku asi na čtyřech řádcích výpočtové tabulky.

P ř í k l a d 2. Je dána rovnice

$$\sin x - 1,4 \cdot \sin 1,2x = 0$$

a máme opět určit nejmenší kladné x , pro které je tato rovnice splněna. Volíme rozklad

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = 1,4 \sin 1,2x.$$

Graf dané funkce $f(x)$ a volených funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ provedeme tak, že nejprve volíme měřítko proměnných. Ze známých hodnot $\sin 0^\circ = 0$; $\sin 30^\circ = 0,5$; $\sin 60^\circ = 0,867$; $\sin 90^\circ = 1$; $\sin 120^\circ = 0,867$; $\sin 150^\circ = 0,5$; $\sin 180^\circ = 0$ sestrojíme sinusoidu. Tím máme hotov náčrt funkce $f_1(x)$. Sinusoida znázorňující $f_2(x)$ má amplitudu 1,4krát větší než $f_1(x)$ a délka její půlperiody je 1,2krát menší. Volíme-li např. délku půlperiody, znázorňující $f_1(x)$ 4,5 cm, pak délka půlperiody sinusoidy, znázorňující $f_2(x)$, bude 3,75 cm. Tuto délku rozdělíme opět na šest dílů a nanese v příslušném měřítku hodnoty funkce $f_2(x)$. Graf dané funkce dostáváme odečtením souřadnic $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Z náčrtu plyne (obr. 2):

daná funkce prochází nulou pro $x \doteq 116^\circ$;

tečna ke grafu funkce $f_1(x)$ v okolí hledaného průsečíku má směrnici v absolutní hodnotě menší než tečna ke grafu $f_2(x)$, je tedy zvolený rozklad správný;

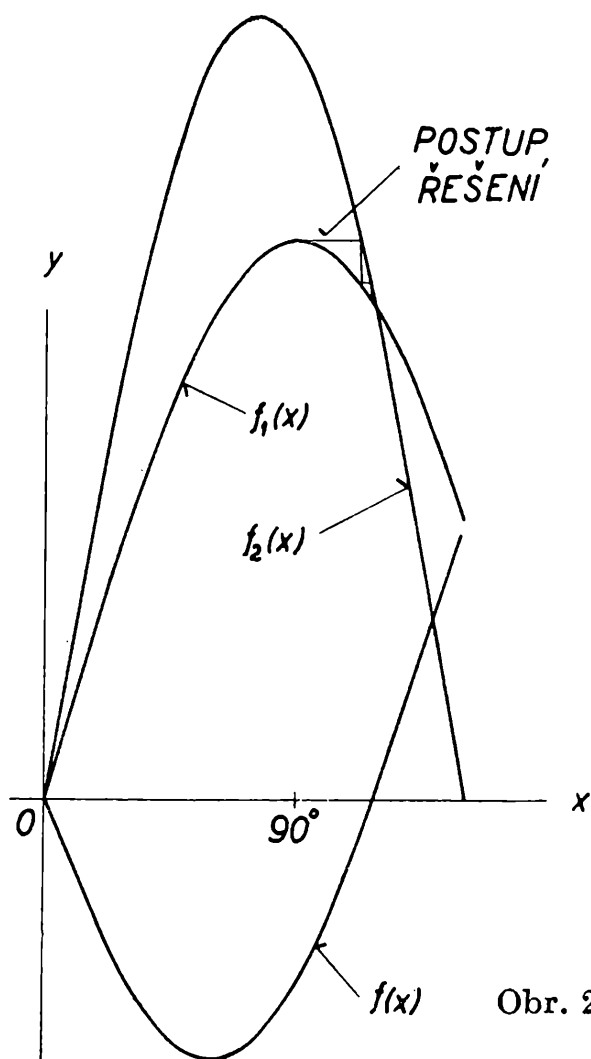
obě funkce jsou klesající. K řešení se budeme blížit z jedné strany.

Aby byl jasně patrný postup, jak se přibližujeme k řešení, budeme volit vědomě první přiblížení dosti vzdálené od řešení, a to $x_1 = 90^\circ$. Po dosazení do vztahu pro $f_1(x)$ dostáváme $y_1 = 1$. Pomocí vztahu pro $f_2(x)$ vypočteme $\sin 1,2x =$

$= \frac{1}{1,4} \sin x$. Pro druhé přiblížení

$\sin 1,2x_2 = 0,714\ 29$, z toho $1,2x_2 = 134^\circ 24' 54''$, z toho druhé přiblížení $x_2 = 112^\circ 45''$. Druhé přiblížení dosadíme opět do $f_1(x)$ a dostáváme $y_2 = 0,927\ 10$, $\sin 1,2x_3 = 0,662\ 21$, $1,2x_3 = 138^\circ 31' 52''$, $x_3 = 115^\circ 26' 34''$.

Výpočty provádíme tak dlouho, až je řešení určeno s žádanou přesností. Výpočet uspořádáme opět do výpočtové tabulky.



Obr. 2

x	$\sin x$	$\frac{1}{1,4} \cdot \sin x$	$1,2 \alpha$	α
90°	1,0	0,714 29	$134^\circ 24' 54''$	$112^\circ 45''$
$112^\circ 45''$	0,927 10	0,662 21	$138^\circ 31' 52''$	$115^\circ 26' 34''$
$115^\circ 26' 34''$	0,902 61	0,644 72	$139^\circ 51' 12''$	$116^\circ 32' 40''$
$116^\circ 32' 40''$	0,894 58	0,638 99	$140^\circ 17' 1''$	$116^\circ 54' 10''$
$116^\circ 54' 10''$	0,891 77	0,636 98	$140^\circ 25' 58''$	$117^\circ 1' 38''$
$117^\circ 1' 38''$	0,890 79	0,636 28	$140^\circ 29' 6''$	$117^\circ 4' 15''$
$117^\circ 4' 15''$	0,890 44	0,636 03	$140^\circ 30' 13''$	$117^\circ 5' 11''$
$117^\circ 5' 11''$	0,890 32	0,635 94	$140^\circ 30' 37''$	$117^\circ 5' 31''$

Z tabulky plyne výsledek $117^\circ 5' 31''$ s přesností desítek vteřin. Dále je z tabulky patrné, že kdybychom začali výpočet s hodnotou získanou z náčrtu, dostali bychom se k tomuto výsledku asi na čtyřech řádcích výpočtové tabulky.

Některé vztahy mezi prvky trojúhelníka a poloměry kružnic vepsané a vně vepsaných

(Dokončení)

JOSEF GLIVICKÝ, Olomouc

Dosadíme-li do Heronova vzorce za

$$s = \frac{P}{\varrho}$$

a z (2), pak obdržíme

$$P = \varrho^2 \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} \quad (3)$$

Z trojúhelníka $A^1T_3S_1$, kde $A^1T_3 = s$, bude

$$\varrho_1 = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

a stejně též

$$\varrho_2 = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad \varrho_3 = s \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \quad (3a)$$

K tomu

$$\varrho = \frac{P}{s}.$$

Po dosazení do vzorce pro obsah trojúhelníka

$$P = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3}$$

bude

$$P = s^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \quad (4)$$

Z trojúhelníka $B^1T_3S_1$ je

$$B^1T_3 = \varrho_1 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

nebo

$$s - c = \varrho_1 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2},$$

a dosadíme-li za

$$\varrho_1 = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{bude} \quad s - c = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \\ \text{a podobně} \quad s - a = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \quad s - b = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Spojíme-li výsledky (1), (3), (4)

$$\begin{aligned} P &= 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \varrho^2 \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} = \\ &= s^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Jednoduchými početními výkony možno určit

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\varrho}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{s}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}, \\ \varrho &= 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}, \\ s &= 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \varrho \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dosadíme-li do vzorců (5) za

$$s = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

pak

$$\left. \begin{aligned} s - c &= 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ s - a &= 4r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\ s - b &= 4r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Položíme-li za s do vzorců (3a), bude

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= 4r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ \varrho_2 &= 4r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\ \varrho_3 &= 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dosadíme-li do výrazu $s = \frac{a + b + c}{2}$

za $a = 2r \sin \alpha$, $b = 2r \sin \beta$, $c = 2r \sin \gamma$ z věty sinové, pak obdržíme

$$s = r (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$$

Podle (6) je $s = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

Porovnáme-li obě poslední rovnosti, je

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad (9)$$

což je známý vztah o součtu sinů z goniometrie obecného trojúhelníka.

Sečteme-li rovnosti (5), pak

$$s - a + s - b + s - c = s \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right)$$

čili
$$1 = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

Dosadíme-li za $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$

z (3a), dostaneme
$$1 = \frac{\varrho_2 \varrho_3}{s^2} + \frac{\varrho_1 \varrho_3}{s^2} + \frac{\varrho_1 \varrho_2}{s^2},$$

nebo
$$s^2 = \varrho_1 \varrho_2 + \varrho_1 \varrho_3 + \varrho_2 \varrho_3. \quad (10)$$

Nakonec odvodíme vzorec pro obsah trojúhelníka $S_1 S_2 S_3$, jehož vrcholy jsou středy kružnic vně vepsaných danému trojúhelníku ABC . Označme strany $S_1 S_2 = {}^1c$, $S_2 S_3 = {}^1a$, $S_1 S_3 = {}^1b$. Vnitřní úhly trojúhelníka $S_1 S_2 S_3$, jak lze snadno dokázat z obr. 1, jsou

$$\frac{\beta + \gamma}{2}, \frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Podle věty sinové bude

$${}^1a = 2 {}^1r \sin \frac{\beta + \gamma}{2} = 2 {}^1r \sin \left(R - \frac{\alpha}{2} \right) = 2 {}^1r \cos \frac{\alpha}{2},$$

podobně
$${}^1b = 2 {}^1r \cos \frac{\beta}{2}, {}^1c = 2 {}^1r \cos \frac{\gamma}{2}$$

Užijme pro obsah trojúhelníka vzorec $P = \frac{abc}{4r}$,

pak
$${}^1P = \frac{{}^1a {}^1b {}^1c}{4 {}^1r} = \frac{2 {}^1r \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 {}^1r \cos \frac{\beta}{2} \cdot 2 {}^1r \cos \frac{\gamma}{2}}{4 r} =$$

$$= 2 \, {}^1r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

Poněvadž ${}^1r = 2r$, je

$${}^1P = 8r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

Podle (6) je $4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = s$,

a pak

$${}^1P = 2rs \quad (11)$$

Shrňme nyní přehledně odvozené výrazy pro obsah trojúhelníka ABC , pro poloměry kružnice vepsané a kružnic vně vepsaných a pro výrazy s , $s - a$, $s - b$, $s - c$

$$P = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$P = \varrho^2 \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}, \quad P = s^2 \tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2} \tg \frac{\gamma}{2},$$

$$s = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$s - a = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad s - b = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2},$$

$$s - c = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\varrho = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad \varrho_1 = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\varrho_2 = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \varrho_3 = 4r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Přirozená čísla

ZDENĚK PŮLPÁN, JAN SZAROWSKI, Český Těšín

Jak důležitou úlohu přikládali různí vědci přirozeným číslům, plyne např. z citátu Leopolda Kroneckera (1823–1891): Přirozená čísla jsou od Boha, všechno ostatní v matematice je dílem lidským ...

Ze školy známe čísla přirozená, kladná, záporná, čísla celá, čísla racionální, iracionální, reálná, čísla komplexní. Všechny tyto pojmy se

dají v matematice přesně definovat. Definice, které v matematice zavádějí tyto pojmy, se neobjevily nějak uměle.

Každý z těch druhů čísel má jisté vlastnosti, pro které právě byl zaveden; tak čísla komplexní právě proto, aby každá kvadratická rovnice s reálnými koeficienty měla řešení (řešením je pak komplexní číslo), čísla reálná proto, aby každé úsečce bylo možno podle jistých pravidel přiřadit číslo (to bude reálné číslo), jež bude její velikostí (při jisté volbě jednotkové úsečky), čísla racionální proto, aby každá lineární rovnice s celočíselnými koeficienty měla řešení (řešením je pak racionální číslo), čísla celá, aby každá rovnice tvaru $x + a = b$, kde a, b jsou přirozená čísla, měla řešení (řešením je pak celé číslo).

Proč byla zavedena čísla přirozená? Ta jsou jakýmsi základem pro tvoření a definice čísel celých, racionálních, iracionálních, komplexních. Aby tyto pojmy byly přesně zavedeny, je třeba ujasnit si vznik přirozeného čísla. Pojem přirozeného čísla byl určitě jednou z prvních abstrakcí, kterou člověk udělal. Vznikla na základě přiřazování. Člověk si chtěl nějakým způsobem zapsat, třeba „kolik“ zvíře ulovil. Udělal to např. tak, že každému ulovenému zvířeti přiřadil jeden zářez na kosti (viz vykopávky prof. Absolona). Každému zářezu na kosti muselo odpovídat jedno ulovené zvíře. Tak bylo dáno vzájemně jednoznačné přiřazování mezi ulovenými zvířaty a zářezy na kosti. Obě byly různé množiny nějakých prvků, tam zvířata, tam zářezy, a přesto stačilo, aby se člověk díval jen na zářezy a měl jakousi představu „kolik“ ulovil. Někdy tuto kost potřeboval na něco jiného a to, „kolik“, ulovil, potřeboval vědět dále. Musel provést zase totéž vzájemně jednoznačné přiřazení těch vrypů na množinu jiných prvků. Přesto i při pohledu na tu jinou množinu měl stejnou představu, „kolik“ ulovil. Je vidět, že zde nezáleželo na tom, jak byly záznamy udělány. Každá z těch množin, kterou dostanu vzájemně jednoznačným zobrazením jedné na druhou, říká totéž: „Kolik“ jsem ulovil. To je společné všem takovým množinám.

Často se stávalo, že každý den, když si lovec zapisoval, „kolik“ ulovil (prováděl vzájemně jednoznačné přiřazování), byla množina vrypů z předcházejících dní vzájemně jednoznačně zobrazitelná na množinu vrypů z toho dne. Aby nemusel provádět stále stejný zápis, označil si tu množinu vrypů nějakým znakem. Tento znak pak zastupoval tu společnou vlastnost všech množin, které se dají na sebe vzájemně jednoznačně zobrazit. Stykem s jinými lidskými kmeny se postupně tyto znaky měnily a zdokonalovaly. Dnes jsou to 1, 2, 3 ... V počátečním stupni vývoje člověk potřeboval omezené množství těchto znaků (stejně jako malé dítě). Nejdříve vznikly znaky pro množinu jednoprvkovou, pak pro dvouprvkovou atd. Vznikl vždycky nový znak pro množinu, která má o jeden prvek více, než označuje poslední známý znak. Tak se vytvářelo uspořádání těchto znaků.

Současně s tvorbou znaků souviselo počítání s těmito znaky. Součtem dvou znaků se rozuměl znak, který příslušel množině, která se skládala z prvků obou množin (přičemž se předpokládalo, že obě množiny nemají žádný prvek společný). Takto zavedené sčítání je algebraickou operací, která je komutativní a asociativní. Součinem znaků A_z množiny A a znaků B_z množiny B se rozuměl znak příslušný množině C , jejíž prvky jsou uspořádané dvojice prvků a množiny A a b množiny B : $\{a, b\}$. Je vidět, že znak množiny C bude stejný, i když její prvky budeme vytvářet jako uspořádané dvojice $\{b, a\}$. Tedy tato algebraická operace je komutativní.

Asociativita je patrna z toho, že stejným znakem bude označena množina prvků tvaru $(a; \{b, c\})$ a množina prvků tvaru $(\{a, b\}; c)$.

Znak pro množinu skládající se z jednoho prvku (budiž to např. 1) má důležité vlastnosti. Je-li A_z znak nějaké libovolné množiny A , je součet znaku A_z a znaku 1 znak množiny, která má o jeden prvek víc než A , tedy znak v tom našem uspořádání hned následující za znakem množiny A . (Protože množinu dvojic $\{1, a\}$, kde a jsou postupně všechny prvky množiny A , lze vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu A ; stačí přiřadit $\{1, a\}$ prvku a z A .)

Pro tyto znaky platí ta důležitá okolnost, že vyslovíme-li o nich nějaké tvrzení, které platí pro znak 1 a plyne-li z platnosti tvrzení pro znak A_z , i jeho platnost pro znak $A_z + 1$, platí tvrzení potom pro všechny znaky (tzv. princip matematické indukce). Pripomeňme, že tyto znaky máme uspořádané. Když by totiž tento princip neplatil, dal by se v uspořádané množině znaků nalézt největší (to je poslední), pro který naše tvrzení ještě platí, a pro další již by tvrzení neplatilo, což vede ke sporu, že s platností pro znak A_z plyne platnost i pro $A_z + 1$.

Obě operace, sčítání a násobení, jsou spojeny distributivním zákonem

$$(A_z + 1) \cdot C_z = A_z C_z + C_z.$$

Důkaz si čtenář provede snadno sám.

Nyní již zavedeme pro tyto znaky „nové“ označení *přirozená čísla*. Pro ně ještě platí toto důležité tvrzení, uváděné často pod jménem *Archimédova věta* (důležitá pak pro měření velikosti úseček):

Jsou-li n a k libovolná různá přirozená čísla a platí-li, že n je větší než k , pak existuje přirozené číslo r takové, že $kr \geq n$.

Použití komplexních čísel v geometrii

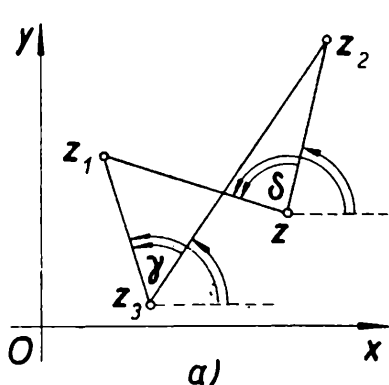
DOC. KAREL DRÁBEK, ČVUT, Praha

(Dokončení)

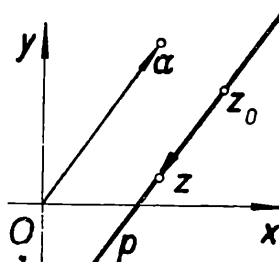
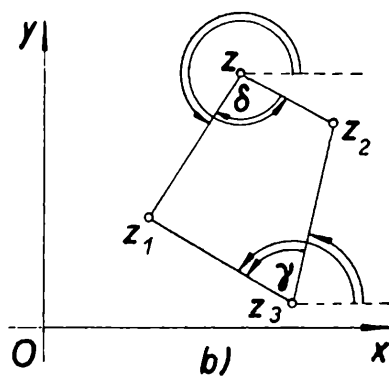
4. Orientovaný úhel o vrcholu z , jehož ramena procházejí body z_1, z_2 je dán argumentem komplexního čísla

$$V = \frac{z_1 - z}{z_2 - z}.$$

Důkaz. Úhel α orientované přímky zz_1 s osou x je určen argumentem komplexního čísla $z_1 - z$, úhel β orientované přímky zz_2 s osou x pak argumentem komplexního čísla $z_2 - z$ (obr. 4a, b).



Obr. 4.



Obr. 5

Proto orientovaný úhel $\gamma = \sphericalangle z_2 z z_1$ (obr. 4a) je dán vztahem

$$\gamma = \alpha - \beta,$$

tj.

$$\arg V = \arg (z_1 - z) - \arg (z_2 - z),$$

a tedy

$$V = \frac{z_1 - z}{z_2 - z}.$$

Číslo V nazýváme *komplexním dělicím poměrem* bodů z_1, z_2, z v tomto pořadí.

Je-li $\alpha - \beta = \gamma' < 0$, je orientovaný úhel $\gamma = 360^\circ - |\gamma'|$ (obr. 4b).

P o z n á m k a. Je-li $\alpha - \beta = 0$, nebo $\alpha - \beta = 180^\circ$, pak tři body z_1, z_2, z leží na přímce a číslo V musí být reálné. Z toho plyne

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}}{\bar{z}_2 - \bar{z}}$$

a odtud dostaneme úpravou opět rovnici přímky ve tvaru (7).

Příklad 1. Určete rovnici přímky p , která prochází bodem z_0 a je rovnoběžná s průvodičem komplexního bodu α (obr. 5).

Platí v důsledku rovnoběžnosti vektorů

$$z - z_0 = k\alpha$$

a také

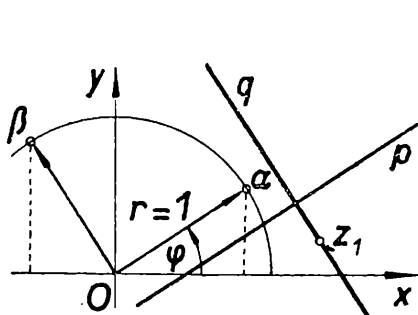
$$\bar{z} - \bar{z}_0 = k\bar{\alpha},$$

kde $k \neq 0$ je reálný parametr. Tento parametr vyloučíme z obou rovnic a dostaneme

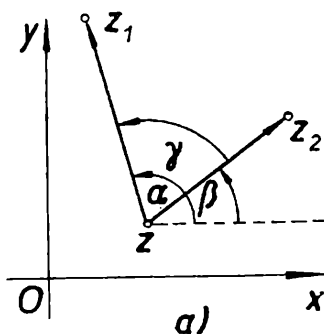
$$\frac{z - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}, \text{ tj. } \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{z}_0 - \bar{\alpha}z_0 = 0, \quad (10)$$

což je rovnice tvaru (7a), kterou můžeme opět upravit na tvar (7).

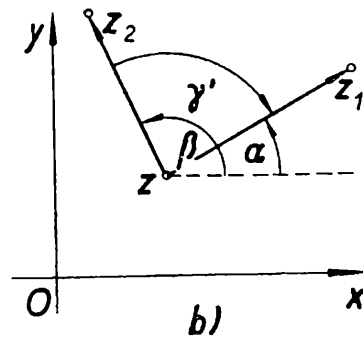
Příklad 2. Určete rovnici přímky q , která prochází bodem z_1 a je kolmá na přímku (10) (obr. 6).



Obr. 6



Obr. 7



Určíme nejdříve průvodič β kolmý na průvodič α . Za průvodič bodu α lze vzít průvodič o modulu rovném jedné, takže

$$\alpha = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Potom

$$\beta = \cos(\varphi + 90^\circ) + i \sin(\varphi + 90^\circ) = -\sin \varphi + i \cos \varphi = \alpha i,$$

takže podle příkladu 1 je rovnice hledané přímky q

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} - (\bar{\alpha}z_1 + \alpha\bar{z}_1) = 0.$$

Tato rovnice má přímo tvar (7).

Příklad 3. Vzdálenost d bodu z_1 od přímky dané rovnicí (7) je dána vztahem

$$d = \frac{1}{2|\alpha|} |\bar{\alpha}z_1 + \alpha\bar{z}_1 + a|$$

Označme z_0 průsečík kolmice bodem z_1 na přímku (7). Protože směr kolmý na tuto přímku je podle příkl. 2 dán právě komplexním číslem α , musí být

$$z_1 - z_0 = k\alpha, \quad \bar{z}_1 - \bar{z}_0 = k\bar{\alpha}, \quad k \text{ reálné číslo}$$

Odtud

$$z_0 = z_1 - k\alpha, \quad \bar{z}_0 = \bar{z}_1 - k\bar{\alpha}$$

a po dosazení do (7)

$$\bar{\alpha}(z_1 - k\alpha) + \alpha(\bar{z}_1 - k\bar{\alpha}) + a = 0,$$

tudíž

$$k = \frac{\bar{\alpha}z_1 + \alpha\bar{z}_1 + a}{2\alpha\bar{\alpha}}.$$

Pro vzdálenost bodů z_0, z_1 pak platí

$$d = |z_1 - z_0| = |k\alpha|,$$

a proto (poněvadž $|\alpha| = |\bar{\alpha}|$),

$$d = \frac{1}{2|\alpha|} |\bar{\alpha}z_1 + \alpha\bar{z}_1 + a|.$$

5. Rovnice reálné kružnice o středu S v bodě z_0 a poloměru R je

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2. \quad (11)$$

Důkaz plyne ze vzorce pro vzdálenost bodu z kružnice od jejího středu z_0 .

Úpravou rovnice (11) dostaneme

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 - R^2 = 0,$$

takže rovnici (11) lze psát ve tvaru

$$Az\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + C = 0, \quad (12)$$

když položíme $z_0 = -\frac{\alpha}{A}$, $R^2 = \frac{\alpha\bar{\alpha} - AC}{A^2}$, přičemž $A \neq 0$, C jsou reálná čísla, α je komplexní.

Obráceně rovnicí (12) je určena reálná kružnice o středu $z_0 = -\frac{\alpha}{A}$

a poloměru $R = \frac{\sqrt{\alpha\bar{\alpha} - AC}}{A}$, je-li $\alpha\bar{\alpha} < AC$

Příklad 4. Určete rovnici kružnice, která prochází třemi různými body z_1, z_2, z_3 .

Podle odst. 4 orientovaný úhel $z_2z_3z_1$ je dán argumentem komplexního čísla (obr. 7a, b)

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}, \text{ tj. } \gamma = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}.$$

Podobně orientovaný úhel $z_2z_1z_3$ je dán argumentem komplexního čísla

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z}, \text{ tj. } \delta = \arg \frac{z_1 - z}{z_2 - z}.$$

Mají-li podle předpokladu být dané čtyři body z_1, z_2, z_3, z na kružnici, je buď $\gamma - \delta = 0$, jsou-li body z_3, z v téže polorovině určené přímkou z_1z_2 (obr. 7a), nebo $\gamma - \delta' = 180^\circ$, jsou-li body z_3, z v opačných polorovinách (obr. 7b). Proto musí být číslo

$$W = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z}$$

reálné.

Číslo W bylo vytvořeno jako poměr dvou dělicích komplexních poměrů, a proto je budeme nazývat *komplexním dvojpoměrem čtyř bodů* z_1, z_2, z_3, z v tomto pořadí.

Z reálnosti čísla W plyne rovnice kružnice třemi různými body z_1, z_2, z_3 ve tvaru

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} : \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}}{\bar{z}_2 - \bar{z}},$$

odkud po úpravě dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} & z\bar{z} [(z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) - (\bar{z}_1 - \bar{z}_3)(z_1 - z_2)] + \\ & + z [\bar{z}_2(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) - z_3(z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)] + \\ & + \bar{z} [\bar{z}_3(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) - z_2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_3)] + \\ & + z_2\bar{z}_3(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 - z_3) - \bar{z}_2z_3(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) = 0 \end{aligned}$$

Tuto rovnici můžeme proto napsat ve tvaru

$$Aiz\bar{z} + \beta z - \bar{\beta}\bar{z} + C = 0,$$

ke $A \neq 0$, C jsou reálná čísla, β je komplexní. Upravíme-li získanou rovnici na tvar (12), můžeme z ní určit střed z_0 a poloměr R kružnice, která je dána třemi různými body z_1, z_2, z_3 .

Prochází-li kružnice počátkem O , je vždy $C = 0$.

Kružnice o středu v bodě z_0 na ose y , která se v počátku dotýká osy x má rovnici

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 0.$$

Kružnice o středu $z_0 = \bar{z}_0$ na ose x , která se v počátku dotýká osy y , má rovnici

$$z\bar{z} + a(z + \bar{z}) = 0, \quad a = -z_0 \text{ reálné číslo.}$$

6. Rovnice tečny v bodě z_1 kružnice

$$z\bar{z} = R^2 \tag{13}$$

je

$$z\bar{z}_1 + \bar{z}z_1 - 2R^2 = 0. \tag{14}$$

Důkaz plyne z podmínky kolmosti tečny v bodě z_1 kružnice (13) na průvodič bodu z_1 (viz příkl. 2), jestliže použijeme ještě vztah $z_1\bar{z}_1 = R^2$.

Poznámka. Rovnice tečny v bodě z_1 kružnice (11) je

$$(z - z_0)(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0)(z_1 - z_0) - 2R^2 = 0, \tag{14a}$$

což se ukáže užitím podmínky kolmosti tečny v daném bodě z_1 kružnice (11) na přímkou určenou body z_1, z_0 .

Z rovnice (14a) plyne dosazením $z_0 = -\frac{\alpha}{A}$, $R^2 = \frac{\alpha\bar{\alpha} - AC}{A^2}$ rovnice tečny v bodě z_1 kružnice dané rovnicí (12) ve tvaru

$$A(z\bar{z}_1 + \bar{z}z_1) + \bar{\alpha}(z + z_1) + \alpha(\bar{z} + \bar{z}_1) + C = 0. \tag{14b}$$

7. Dvojice tečen z bodu z_0 ke kružnici (13) je dána rovnicí

$$(z\bar{z}_0 + \bar{z}z_0 - 2R^2)^2 - 4(z\bar{z} - R^2)(z_0\bar{z}_0 - R^2) = 0 \tag{15}$$

Důkaz. Pro body přímky určené bodem z_0 a libovolným bodem z_1 na tečně z bodu z_0 ke kružnici (13) platí

$$\frac{z - z_0}{z - z_1} = k, \quad k \text{ reálné, } k \neq 1$$

Bod z , pro který

$$z = \frac{z_0 - kz_1}{1 - k},$$

má být bodem kružnice (13); proto po dosazení do této rovnice a úpravou dostaneme pro parametr k kvadratickou rovnici

$$k^2 (z_1 \bar{z}_1 - R^2) - k (z_1 \bar{z}_0 + \bar{z}_1 z_0 - 2R^2) + z_0 \bar{z}_0 - R^2 = 0 \quad (16)$$

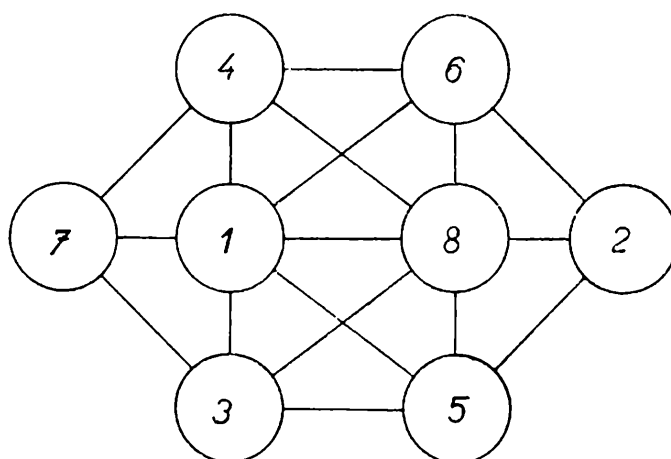
Rovnice (16) pro parametr průsečíku přímky s kružnicí (13) musí mít dvojnásobný kořen, tedy její diskriminant

$$D = (z_1 \bar{z}_0 + \bar{z}_1 z_0 - 2R^2)^2 - 4 (z_1 \bar{z}_1 - R^2) (z_0 \bar{z}_0 - R^2) = 0$$

Bod z_1 byl však zvolen na tečně libovolně, proto rovnice (15) určuje dvojici tečen sestrojených z daného bodu z_0 ke kružnici (13).

Úloha s číslicemi — řešení

V č. 1 na str. 7 byla otištěna úloha,
jejíž řešení je toto:



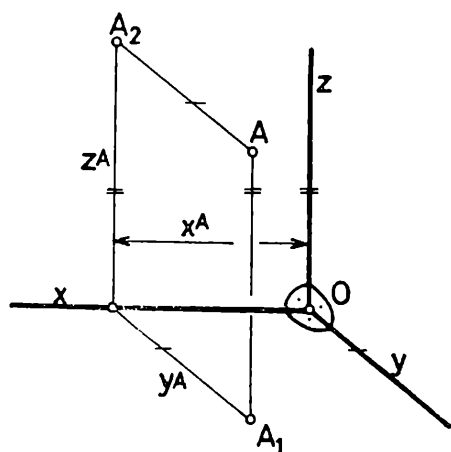
H. Hofmanová



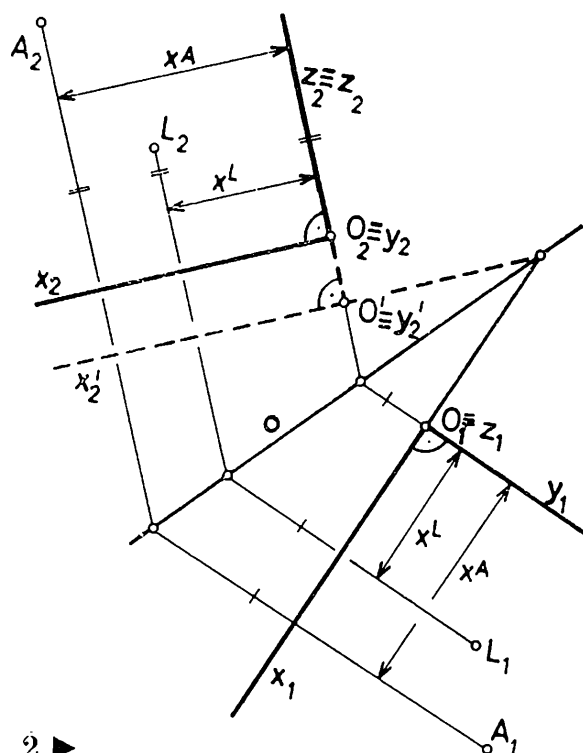
Kolmé volné průměty

DOC. INŽ. LADISLAV DRS, CSc, ČVUT, Praha

Uvažujeme pravoúhlou pravotočivou soustavu souřadnic s počátkem O , osami x, y, z (názorný obr. 1), libovolný bod A prostoru, jeho půdorys A_1 a jeho nárys A_2 . Je-li U útvar složený z bodů $A, B, \dots$ získáme tímto způsobem jeho půdorys U_1 složený z bodů $A_1, B_1, \dots$ a jeho nárys U_2 , složený z bodů $A_2, B_2, \dots$. Tyto dva průměty přemístíme libovolně do nákresny.



Obr. 1 ▲



Obr. 2 ►

Přemístěné útvary označíme — pro jednoduchost, a protože to v textu nepovede k omylu — stejně jako před přemístěním. Získáme tak např. přemístěním půdorysny xy osy $x_1 \perp y_1$, $z_1 \equiv O_1$, a průměty $A_1, \dots$ bodů útvaru U_1 a podobně přemístěním nárysny xz osy $x_2 \perp z_2$, $y_2 \equiv O_2$ a průměty $A_2, \dots$ bodů útvaru U_2 . V nákrese tak získáme *volné* kolmé průměty $A_1, A_2, \dots$ bodů $A, \dots$ útvaru U (obr. 2).

Volné kolmé průměty A_1, A_2 bodu A jsou vázány jednoduchým vztahem, který nyní odvodíme. Za tím účelem zobecníme pojem ordinály známý z Mongeova promítání. *Ordinála* bodu A_1 (nebo bodu A_2) je kolmice vedená bodem A_1 (nebo A_2) na osu x_1 (nebo x_2). Ordinály jsou tedy rovnoběžky s osami y_1 a z_2 a mají od nich stejnou vzdálenost, rovnou souřadnici x bodu A . V případě, že půdorys a nárys přemístíme tak, aby platilo $x_1 \equiv x_2$, $O_1 \equiv O_2$, splynou obě ordinály v kolmici k $x_1 \equiv x_2$, v ordinálu v obvyklém slova smyslu a z volných průmětů získáme sdružené průměty. Mongeovo promítání je tedy speciálním případem uvažované promítací metody.

Toto zobecnění Mongeova promítání není samoúčelné a umělé. Při rýsování dílenských výkresů apod. v praxi se často kreslí „pohledy“ na zobrazovaný útvar a umísťují se na výkres tam, kde je právě místo, a to někdy i v jiném měřítku (např. některé detaily se rýsují zvětšeně).

Ordinály bodů $A_1, A_2, \dots$ ve volné projekci se protínají na přímce.

K důkazu tohoto tvrzení sestrojme průsečíky ordinál bodů $O_1, O_2; A_1, A_2$. Dokážeme, že na jejich spojnici o se protínají i ordinály libovolného páru volných průmětů L_1, L_2 bodu L . Posuňme (podle obr. 2) přemístěný nárys ve směru osy z_2 do nové polohy tak, aby posunutá osa $x'_2 \parallel x_2$ procházela průsečíkem přímek o, x_1 . Tím se nezmění ordinály a přímka o . Ordinály bodů O, A, L jsou rovnoběžky, které vytínají na různoběžkách x_1, x'_2 úměrné (dokonce shodné) úseky. Protínají se tedy na přímce o . Způsob důkazu dokonce připouští, aby měřítka na obou osách x_1, x'_2 (a tedy měřítka půdorysu a nárysu) byla různá. Tedy:

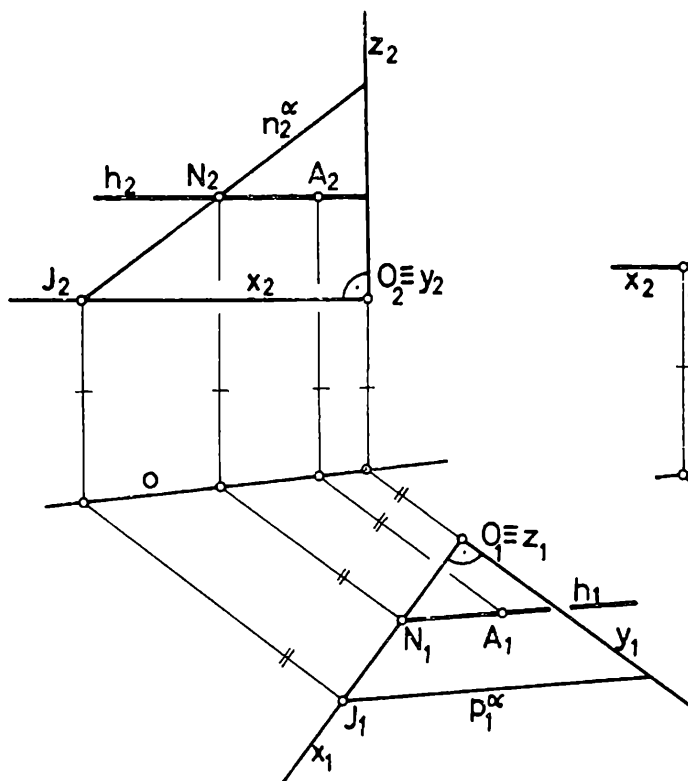
Na přímce o se protínají ordinály volných průmětů bodů, i když přemístěný půdorys a nárys jsou sestrojeny v různých měřítkách.

Volné průměty jsou tedy určeny osami $x_1, y_1; x_2, z_2$ a průměty J_1, J_2 jednotkového bodu J osy x , které nám udávají měřítka (je-li $O_1J_1 = O_2J_2$ jsou měřítka stejná).

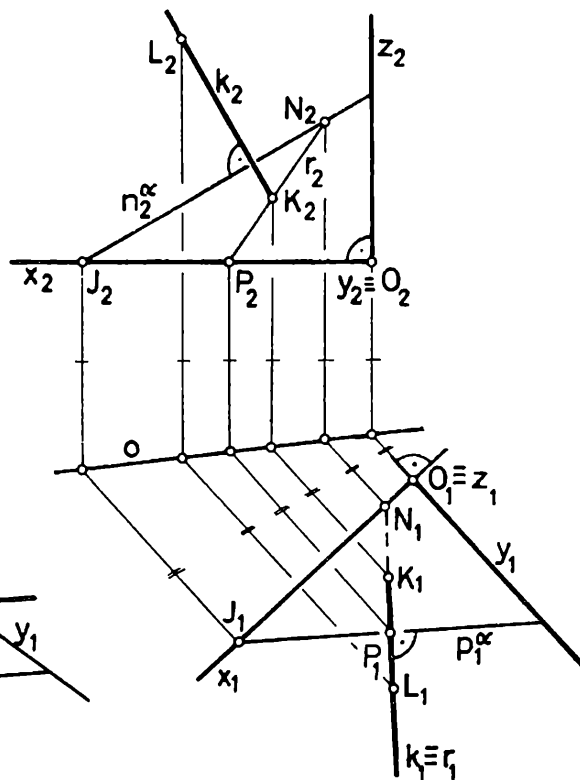
Ukážeme na dvou příkladech řešení úloh ve volných průmětech.

1. *Bod a přímka v rovině* (obr. 3). Volné průměty jsou určeny osami $x_1, y_1; x_2, z_2$ a průměty J_1, J_2 jednotkového bodu osy x , kterými jsou určena měřítka; $O_1J_1 \neq O_2J_2$, měřítka jsou různá. Rovina α je určena stopami

p^α, n^α , které se protínají v bodě J . Dále je dán průmět A_2 bodu A roviny α . Nejprve určíme přímku o , která prochází průsečíky ordinál bodů $O_1, O_2; J_1, J_2$. Bodem A_2 vedme nárys h_2 hlavní přímky h roviny α . Pak je $h_2 \parallel x_2$. Průmětem N_2 nárysného stopníku N přímky h vedme ordinálu. Jejím průsečíkem s o prochází ordinála bodu N_1 , který leží na x_1 . Bodem N_1 vedeme



Obr. 3



Obr. 4

půdorys h_1 hlavní přímky, $h_1 \parallel p_1^\alpha$. Na přímce h_1 a na ordinále příslušné k ordinále bodu A_2 je hledaný bod A_1 .

2. *Kolmice k rovině* (obr. 4). Volné průměty a rovina α jsou určeny jako v 1. příkladě. Dále jsou dány průměty L_1, L_2 bodu L . Jak známo, jsou průměty k_1, k_2 kolmice k k rovině α bodem L kolmé k přímkám p_1^α, n_2^α . Patu této kolmice vyšetříme užitím krycí přímky r . Položme $k_1 \equiv r_1$. Podle obr. 4 určíme r_2 tak, že na r_1 zvolíme průměty P_1, N_1 stopníků P, N a určíme body $P_2, N_2, P_2N_2 \equiv r_2$. Pata K kolmice k k rovině α má nárys $K_2 \equiv k_2 \cdot r_2$ a půdorys K_1 na ordinále příslušející k ordinále bodu K_2 .

Volné průměty jsou základem k jednoduchému sestavení názorného průmětu útvaru (axonometrie). Tuto metodu si vysvětlíme v dalším článku.



Oprava pro č. 6: Na str. 257 v odstavci 5. vypusťte „a v kosoúhlém promítání“. Na str. 262 v obr. 2. chybějící body E_1, B_1 , leží na vodorovné hraně tělesa nejbližší k nárysně.

0 některých křivkách

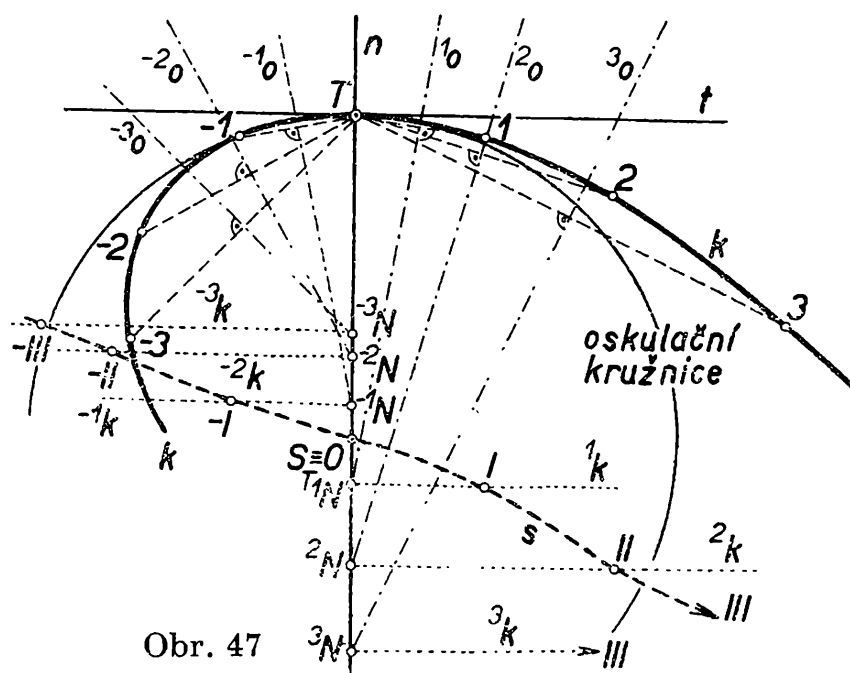
(Dokončení)

DOC. BOŘIVOJ KEPR, ČVUT, Praha

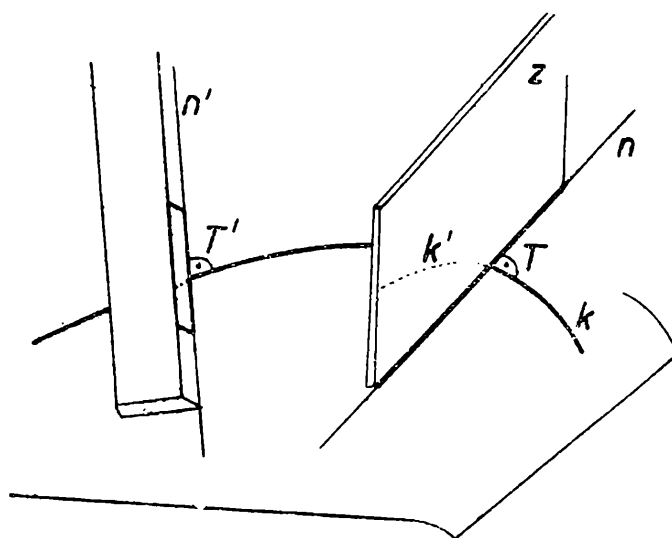
Pro přibližné určení středu kružnice křivosti (oskulační) v bodě dané empirické křivky existuje celá řada konstrukcí. Jak bylo slíbeno v úvodu tohoto článku, uvedeme alespoň dvě z těchto konstrukcí. První z nich je znázorněna v obr. 47.

Je dán oblouk empirické křivky k , na něm je zvolen bod T . V něm je sestrojena tečna t a normála n křivky k . Bod T dělí daný oblouk na dvě části. Na jedné části tohoto oblouku zvolme řadu bodů $1, 2, 3, \dots$. Na druhé části oblouku zvolme řadu bodů $-1, -2, -3, \dots$. Sestrojme dále osy souměrnosti úseček (tětiv) $T1, T2, T3, \dots, T-1, T-2, T-3, \dots$. Tyto osy souměrnosti $^1o, ^2o, ^3o, \dots, ^{-1}o, ^{-2}o, ^{-3}o, \dots$ protínají normálu n v bodě T dané křivky k po řadě v bodech $^1N, ^2N, \dots; ^{-1}N, ^{-2}N, \dots$. Sestrojme v bodech $^1N, ^2N, \dots, ^{-1}N, ^{-2}N, \dots$ kolmice $^1k, ^2k, \dots; ^{-1}k, ^{-2}k, \dots$ na normálu n . Tato normála dělí rovinu, v níž provádíme konstrukci, na dvě poloroviny. Na kolmice $^1k, ^2k, \dots$ nanесme od bodů $^1N, ^2N, \dots$ úsečky délek $T1, T2, \dots$ směrem do jedné z těchto polorovin, na kolmice $^{-1}k, ^{-2}k, \dots$ nanесme od bodů $^{-1}N, ^{-2}N, \dots$ úsečky délek $T-1, T-2, \dots$ směrem do druhé (opačné) z těchto polorovin. Na kolmicích $^1k, ^2k, \dots$ získáme tak body $I, II, \dots$, na kolmicích $^{-1}k, ^{-2}k, \dots$ získáme stejným způsobem body $-I, -II, \dots$ (obr. 47). Spojíme-li spojitě body $\dots II, I, -I, -II, \dots$ strojnou křivkou s , protne tato křivka normálu n v bodě T dané empirické křivky k v bodě O , který je zřejmě totožný s hledaným bodem S_T , středem oskulační kružnice dané křivky k v jejím bodě T .

Druhá z celé řady přibližných konstrukcí oskulační kružnice dané empirické křivky k v jejím bodě T je znázorněna v obr. 48, kde je dána křivka k svým grafem. Vytkněme si na této křivce jeden z obou jejích smyslů (na obr. 48 je vyznačen šipkou). Zvolme na dané křivce k řadu bodů $^1T, ^2T, ^3T, \dots$, sestrojme v těchto bodech tečny $^1t, ^2t, ^3t, \dots$ křivky k a nanесme na ně od bodů dotyku $^1T, ^2T, \dots$ vždy v témž smyslu, který v bodech dotyku souhlasí se zvoleným smyslem na křivce, úsečku téže zvolené délky d . Získáme tak na tečnách $^1t, ^2t, \dots$ body $^1T', ^2T', \dots$, které spojitě spojíme křivkou k' . Křivku k' nazýváme tzv. *ekvitangenciálou* dané křivky k . Budeme říkat, že bodu $^iT \in k$ odpovídá bod $^iT' \in k'$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Dá se pak ukázat, že průsečík S_{iT} normály in křivky k v jejím bodě iT s normálou $^in'$ křivky k' v odpovídajícím bodě $^iT'$, je hledaným středem křivosti v bodě $^iT \in k$. V obr. 48 je provedena příslušná konstrukce středu křivosti S_T pro daný bod $T (\equiv ^4T)$ křivky k .



Jak bylo již řečeno, lze tečnu t k naryšované křivce k sestrojit prakticky přesně pouhým přiložením pravítka (analogicky k tomu, že na naryšované křivce k můžeme libovolně vyznačit některý její bod). Příslušný dotykový bod T nutno však vždy sestrojit, třeba i jenom přibližnou konstrukcí. Vyznačíme-li na tečně t dané křivky k její dotykový bod T pouze odhadem, tak říkájíc „od oka“, dopouštíme se v každém případě přestupku proti přesnému rýsování, i když tomu slovu „přesnému“ je nutno často rozumět — zejména v přibližných konstrukcích — ve smyslu prakticky nutné přesnosti. Stejně tak, je-li na dané křivce k vyznačen předem její daný bod T , nelze nikdy v tomto bodě sestrojit příslušnou tečnu t pouhým přiložením pravítka, abychom se nedopustili stejného přestupku, o němž byla právě zmínka. Tečnu t v předem daném bodě T křivky k k této křivce je tedy nutno vždy zkonstruovat, byť i jenom přibližnou konstrukcí.



Z předcházející úvahy však plyne tato skutečnost: V daném bodě T dané křivky k nelze sestrojit „beztrestně“ normálu n třeba tak, že bychom učinili $T \in n \perp t$, kde ovšem přímka t by byla tečnou křivky k v jejím bodě T sestrojená pouhým přiložením pravítka. Normálu n v daném bodě T dané křivky k je tedy nutno vždy zkonstruovat, třeba i pouze přibližnou konstrukcí.

Někdy však potřebujeme sestrojit celou řadu normál $n, n', \dots$ v daných bodech $T, T', \dots$ dané křivky k . Je zřejmé, že splnění tohoto úkolu vzhledem k předcházejícím konstrukcím by vyžadovalo poměrně dost času a hlavně poměrně mnoho konstrukčních čar. Tato skutečnost je při konstruktivním řešení nepříjemná, a proto se vždy při provádění konstrukcí snažíme, pokud to lze, šetřit na počtu pomocných konstrukčních čar.²¹⁾

Obr. 49 ukazuje, jak zejména u empirické křivky k , dané svým grafem, lze poměrně přesně (vzhledem k praktickému provádění konstrukcí) sestrojit normálu n v jejím bodě T bez jakékoliv pomocné konstrukce. Předpokládáme, že křivka k je v nějakém vhodném okolí daného bodu T „hladká“. To znamená, že v každém bodě křivky tohoto okolí a rovněž i v bodě T existuje vždy jen jedna její tečna s bodem dotyku v tomto bodě. Vyjádřeno jinými slovy to znamená, že poloha tečny křivky k v bodech tohoto okolí se bude *spojitě* měnit, bude-li příslušný bod dotyku *spojitě* probíhat uvedené okolí daného bodu T na křivce k , bod T nevyjímaje. Přiložme nyní v bodě $T \in k$ zrcátko Z tak, jak ukazuje obr. 49, tj. tak, aby pro pozorovatele viditelná část křivky k a její obraz k' (na obr. je vyčárkován) v zrcadle na sebe *plynule* (tj. *hladce*) navazovaly. Hrana zrcátka, procházející bodem $T \in k$ v rovině dané křivky, určuje pak hledanou normálu n . K tomuto sestrojení normály lze použít i pravítka, do jehož stěny, procházející hranou sloužící k rýsování přímek, je zamontována zrcadlová ploška. (Viz konstrukci normály n' v bodě T' dané křivky k na obr. 49.)

Vzhledem k celému, poměrně teoretickému pojednání, které předcházelo, zdá se jistě čtenáři konstrukce normály pomocí „zrcátkové metody“ asi nějak zábavná. Z hlediska praktického provádění konstrukce tomu tak zdaleka není. Je-li daná křivka k , křivkou nikoliv empirickou, pak se jistě vždy snažíme — zejména v případech velmi složitých už jenom z důvodů prestižních — o exaktní, tj. přesné konstrukce. V případě křivek empirických (kde o exaktnost v pravém smyslu slova nemůže jít) a i v případě křivek nikoliv empirických — kde by přesná konstrukce byla časově příliš náročná — je „zrcátková metoda“ prakticky poměrně přesná, i když „nikoliv vědecká“. Je to tím, že lidské (normální) oko je velmi citlivé na hladký průběh křivky. Čtenář R o z h l e d ů v tomto smyslu jistě již dávno přišel z vlastní zkušenosti k poznání, že např. při vytahování rysu tuší, kde byl

²¹⁾ Čím větší je počet pomocných konstruktivních čar, tím větší je vždy možnost dopustit se chyby, o ztrátě přehlednosti konstrukce — což je velmi důležité — ani nemluvíme.

nucen vytáhnout, např. některou z kuželoseček, se mu zejména z počátku — kde byl v této činnosti ještě začátečnický nešikovný — přihodilo to, že v tužce měl příslušnou křivku vyrýsovanou poměrně tak pěkně na pohled, že se mu líbila. Když však tuto křivku vytahoval tuší, sem tam někde — jako začátečník v této práci — zakolísal v plynulosti vedení vytahovacího pera. A jaký byl výsledek? I když vytahovací pero v rozsahu tloušťky vytahované čáry nevybočilo ze směru, byla tuší vytažená křivka na pohled „hrbatá“. A to je právě tím, že normální lidské oko je velmi, velmi (až někdy nepříjemně, zejména ve školních úkolech) citlivé na „hladký“ průběh křivky.

Tím vším se autor snažil odůvodnit fakt, že „zrcátková metoda“ konstrukce normály n křivky k v jejím bodě T je z hlediska praktického rýsování poměrně dosti přesná. Normální oko velmi dobře postihne okamžik, kdy část křivky k „před“ bodem T a část jejího zrcadlového obrazu „za“ bodem T na sebe *hladce* naváže. V tomto okamžiku ukazuje pak příslušná hrana zrcátka poměrně velmi přesně hledanou normálu n . Máme-li však možnost provést nepřilíš komplikovanou konstrukci normály přesnými metodami, jistě dáme v každém případě přednost těmto metodám.

6. Z á v ě r

Závěrem ještě několik slov. Teorie křivek je velmi krásná a po stránce technických aplikací velmi důležitá. Autor již v úvodu a v poznámkách k odst. 3 upozornil na některou důležitou a užitečnou literaturu. Čtenář, kterého by zaujala teorie křivek do budoucna natolik, že by se sám chtěl dozvědět mnohem více o této disciplíně, by si jistě s velikým zájmem prostudoval tato naše díla: Kadeřávek-Klíma-Kounovský, *Deskriptivní geometrie I.* (Nakladatelství ČSAV, Praha 1954), kapitola II, *Základy kinematické geometrie* a některé partie z II. dílu téhož díla. Celé toto dílo je kompendium světové úrovně.

Mezi všemi křivkami mají technicky i fyzikálně význačné postavení kuželosečky. Teorií kuželoseček se zabývá podstatně jedna z obecnějších disciplín geometrie, tzv. *projektivní geometrie*, zasahující svými důsledky i do Einsteinovy teorie relativity. Z hlediska konstruktivní teorie kuželoseček může autor čtenáři doporučit krásnou knížku doc. dr. Karla Havlíčka, *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček* (SNTL, Praha 1956). Metodami početními, tj. metodami tzv. *analytické geometrie*, zpracovává teorii kuželoseček akademik B. Bydžovský ve svém díle, *Úvod do analytické geometrie* (JČMF, Praha 1946) a kromě kuželoseček i jiné další křivky (o nichž tu z malé části byla řeč) vyšetřuje rovněž metodami analytické geometrie dílo prof. dr. Jiřího Klapky, *Analytická geometrie*

(SNTL, Praha 1960). Obě naposled jmenované knihy jsou od autorů, jejichž vědecká a pedagogická úroveň je příkladná. Metodami *analytické projektivní geometrie* studuje algebraické křivky překrásné a unikátní dílo akademika Bydžovského, *Úvod do algebraické geometrie* (JČMF, Praha 1948). Je to vrcholné učebnicové dílo jednoho z našich nejlepších vědců v tomto oboru a současně jednoho z nejlepších našich učitelů na staroslavné Karlově universitě.

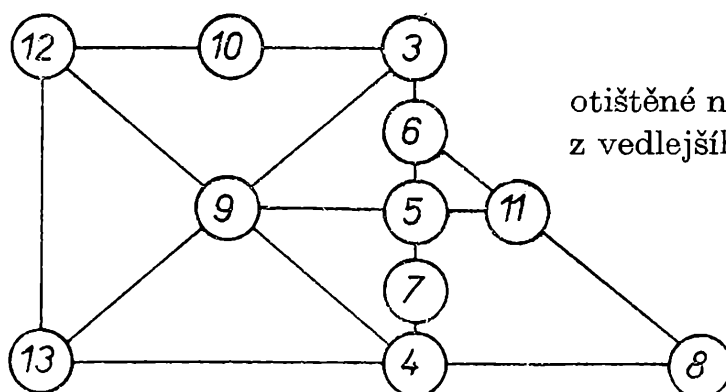
Autor tu vyjmenoval pouze některá naše díla, a to ještě díla pouze z poslední doby, tj. poměrně dostupná. Je mnoho prací tohoto druhu, ale již starších, a tudíž těžko dostupných. O zahraničních publikacích je vždy obšírná zmínka v dílech našich, a proto je tu neuvádím. Aby nenastalo nedorozumění, všechna uvedená díla by mohl čtenář s úspěchem studovat až po zvládnutí celé řady matematických a geometrických disciplín. Problematika však za to stojí a těm čtenářům, kteří jsou pro ni zaníceni, ji autor vřele doporučuje. Kromě pochopitelného užitku pro potřeby technického rozvoje přináší studium i pocit osobního štěstí, je-li ovšem konáno s vnitřním zájmem.

Jako poslední informaci čtenáři by rád autor sdělil, že mohutným nástrojem pro zkoumání křivek, které vznikly jako dráhy bodů, nebo jako obálky přímk, nebo křivek při komplanním pohybu, je analytická (tj. početní) metoda v tzv. Gaussově rovině komplexních čísel. Je to současná moderní metoda, pěstovaná u nás i v zahraničí.

Byl bych rád, kdyby se našel alespoň jeden čtenář **R o z h l e d ů**, který by tento seriál článků o křivkách absolvoval s takovou chutí, s jakou jsem celou práci pro ně psal.

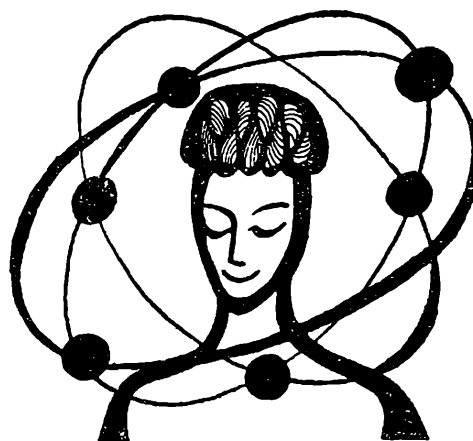


Řešení úlohy z č. 7



otištěné na str. 336 je zřejmé
z vedlejšího obrázku.

O. S.



F Y Z I K A

Tažisko, momenty prvého a druhého stupňa

PROF. DR. ZALÁN BODÓ, Budapešť

(Psáno pro Rozhledy)

I. Momenty prvého stupňa a ťažisko

Nech je daná sústava n hmotných bodov ľubovoľným priestorovým usporiadaním. Nech hmoty jednotlivých hmotných bodov sú m_1, m_2, m_i, m_n . Označme hmotu celej sústavy

$$\sum_{i=1}^n m_i = M$$

Zvolme si ľubovoľným spôsobom pravouhlý súradnicový systém x, y, z , v ktorom súradnice i -tého hmotného bodu označme x_i, y_i, z_i (obr. 1).

Pomocou hmot a súradníc hmotných bodov definujeme veličiny

$$N_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad N_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad N_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad (1)$$

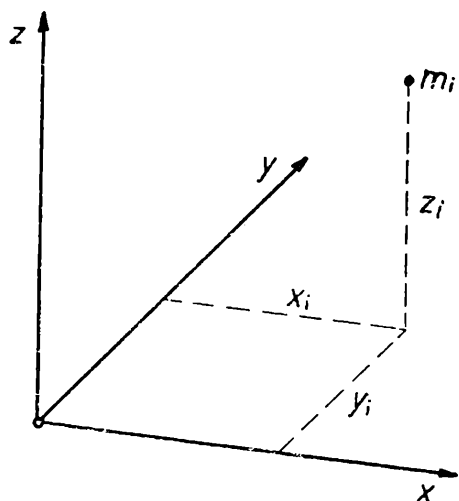
ktoré nazývame *momentami prvého stupňa* vzhľadom na súradnicové roviny yz, zx a xy . Pre tieto momenty platí tato zaujímavá veta:

V priestore existuje jeden a len jeden taký bod, do ktorého keď umiestníme počiatok ľubovoľne orientovaného pravouhlého súradnicového systému, všetky tri momenty prvého stupňa budú rovné nule.

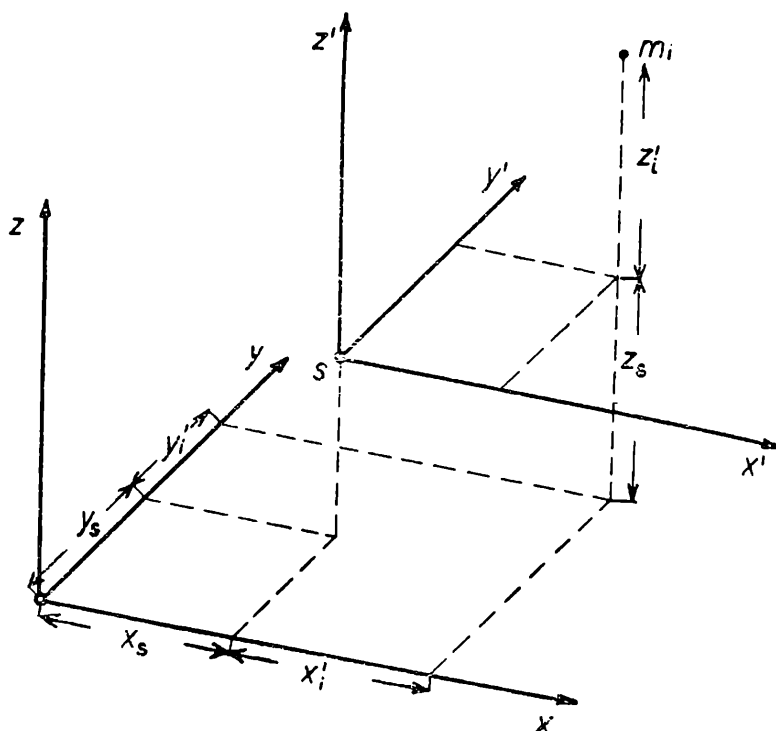
Dokážeme, že súradnice tohto bodu (označeného S) sú nasledovné

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{N_{yz}}{M}; \quad y_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{N_{zx}}{M}; \quad z_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{N_{xy}}{M} \quad (2)$$

Zvolme nový súradnicový systém s počiatkom v bode S tak, aby osi x' , y' , z' zvoleného systému boli rovnobežné s osami x , y , z (obr. 1, 2).



Obr. 1



Obr. 2

Potom $x'_i = x_i - x_S$, $y'_i = y_i - y_S$, $z'_i = z_i - z_S$ (3)

a momenty prvého stupňa vzhľadom na súradnicové roviny nového systému sa rovnajú nule. Napríklad v dôsledku (3) vzhľadom na rovinu $y'z'$

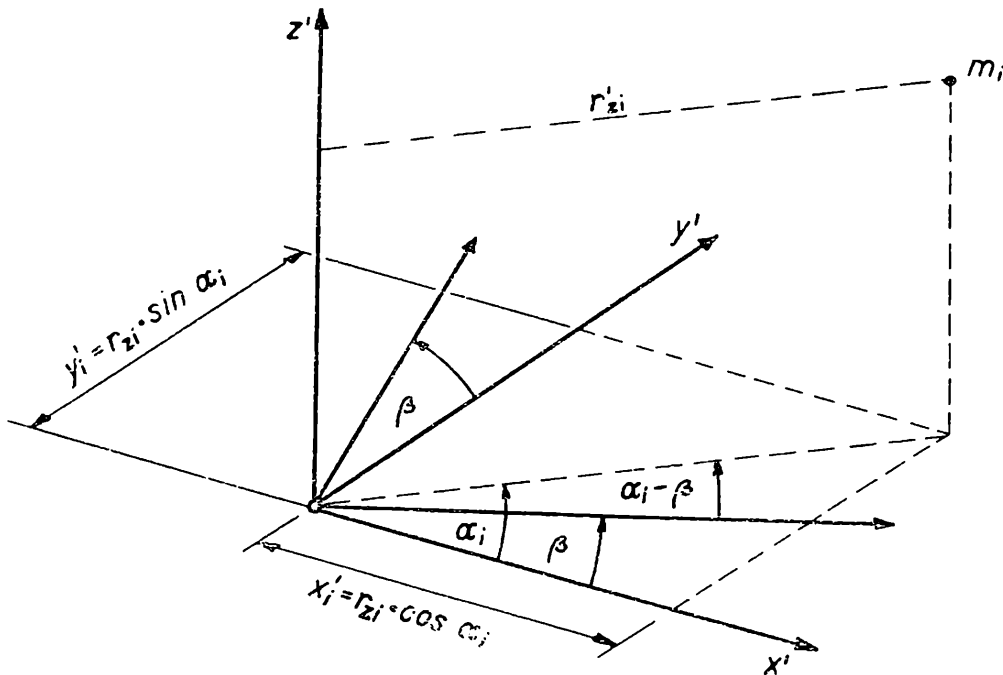
$$\begin{aligned} N'_{yz} &= \sum_{i=1}^n m_i x'_i = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_S) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i x_i - \sum_{i=1}^n m_i x_S = \sum_{i=1}^n m_i x_i - x_S \sum_{i=1}^n m_i. \end{aligned}$$

Vzhľadom na (1) a (2)

$$N'_{yx} = N_{yz} - x_S M = N_{yz} - N_{yz} = 0$$

Analogickým spôsobom možno dokázať, že aj momenty vzhľadom k ostatným dvom súradnicovým rovinám sa stávajú nulovými.

Pri pootočení nového súradnicového systému okolo voľaktorej súradnicovej osi momenty prvého stupňa budú naďalej rovné nule. Dokážeme to v prípade pootočenia systému okolo osi z' o uhol β . Tvrdenie je zrejmé pre moment N'_{xy} . Treba ho dokázať len pre momenty N'_{yz} a N'_{zx} . Za tým účelom vyjadríme N'_{yz} a N'_{zx} pomocou vzdialenosti r'_{zi} hmotných bodov od osi z' a ich uhlov α_i s osou x' (obr. 1 a 3).



Obr. 3

$$N'_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x'_i = \sum_{i=1}^n m_i r'_{zi} \cos \alpha_i = 0 ,$$

$$N'_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i y'_i = \sum_{i=1}^n m_i r'_{zi} \sin \alpha_i = 0$$

Po pootočení o uhol β v týchto výrazoch sa zmenia len uhly α ; každý je zmenšený o β . Nové momenty budú

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i r'_{zi} \cos (\alpha_i - \beta) &= \sum_{i=1}^n m_i r'_{zi} (\cos \alpha_i \cos \beta + \sin \alpha_i \sin \beta) = \\ &= \cos \beta N'_{yz} + \sin \beta N'_{zx} = 0 , \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i r'_{zi} \sin(\alpha_i - \beta) = \sum_{i=1}^n m_i r'_{zi} (\sin \alpha_i \cos \beta - \cos \alpha_i \sin \beta) = \\ \cos \beta N'_{zx} - \sin \beta N'_{yz} = 0 .$$

Podobným spôsobom možno previesť dôkaz v prípade pootočenia systému okolo osi x' a y' . Nakoľko pootočením okolo troch kolmých os možno previesť ľubovoľné priestorové pootočenie súradnicového systému, dokázali sme, že

moment prvého stupňa vzhľadom na ľubovoľne orientovanú rovinu prechádzajúcu bodom S sa rovná nule.

Z rovníc (2) je aj to vidno, že pri posunutí počiatku ľubovoľne orientovaného súradnicového systému $x'y'z'$ z bodu S aspoň jedna zo súradníc x_S, y_S, z_S sa stáva nenulovou. A tak aspoň jeden z momentov prvého stupňa sa stáva nenulovým. Teda bod S , ktorý má vyššie uvedené vlastnosti, je jediný.

Bod S nazývame *hmotným stredom sústavy*, alebo *ťažiskom*. Posledné pomenovanie pochádza z toho, že pri zachovaní vzájomných polôh hmotných bodov, tj. pri „ztuhnutí“ sústavy, výslednica váh pôsobiacich na hmotné body v homogennom gravitačnom poli leží na zvislej priamke, ktorá prechádza hmotným stredom, a to pri ľubovoľnom pootočení sústavy. Aby sme sa o tom presvedčili, stanovme polohu výslednice svislých (s osou z' rovnobežných) váh $g m_i$ v usporiadaní podľa obr. 2, kde rovina $x'y'$ je vodorovná. Súčet momentov váh vzhľadom na os y' sa musí rovnať momentu ich výslednice, vzhľadom na tú istú os. Rameno váhy $g m_i$ vzhľadom na os y' je zrejme x'_i , teda celkový moment je

$$\sum_{i=1}^n g m_i x'_i = g \sum_{i=1}^n m_i x'_i = g N'_{yz} = 0 ,$$

z čoho vyplýva, že výslednica leží v rovine $y'z'$. Podobným spôsobom vypočítaný moment vzhľadom na os x' je tiež nulový, teda výslednica musí ležať na priesečníci týchto dvoch rovín na osi z' , t. j. na zvislej priamke, ktorá prechádza ťažiskom.

Priamku, ktorá prechádza ťažiskom, nazývame *ťažnicou*. Pri zisťovaní polohy ťažiska často hrá dôležitú rolu aj rovina, prechádzajúca ťažiskom.

Momenty prvého stupňa (delením M aj polohy rovín, ktoré prechádzajú ťažiskom) sú určené rovnicami (1). Pri praktickom výpočte, keď je priestor spojite vyplnený hmotou, súčty vystupujúce v rovniciach (1) majú nekonečný počet členov a prechádzajú v integrály. Výpočet spomenutých integrálov v niektorých prípadoch nie je možný. Kto nie je zbehlý v integrovaní, nevie si rady ani s jednoduchými prípadmi. Značné zjednodušenie nastáva, ak sústava hmotných bodov (alebo homogenné teleso) má rovinu,

os alebo stred súmernosti. Ťažisko totiž na nich leží, t. j. rovina symetrie prechádza ťažiskom — os symetrie je ťažnicou a stred symetrie je totožný s ťažiskom.

Je to zrejmé, lebo moment prvého stupňa vzhľadom na rovinu symetrie homogenného telesa je nulový, pretože v súčtoch (1) vystupujú vždy samé dvojice členov, ktoré sú až na znamienko rovné.

Ďalším dôsledkom toho je, že ťažisko hmotných bodov ležiacich v jednej rovine je v tej istej rovine. Okrem týchto všeobecne známych poučiek oboznámime čitateľa s ďalšími tromi vetami. Pomocou nich možno určiť bez integrovania momenty vo väčšine prípadoch, vyskytujúcich sa v praxi aj pri spojitom rozložení hmoty.

Z rovníc (2) vyjadríme momenty

$$N_{yz} = M x_S; N_{zx} = M y_S; N_{xy} = M z_S \quad (4)$$

Obsah týchto rovníc vyjadríme nasledovou vetou:

§ I. *Moment vzhľadom na ľubovoľnú rovinu dostaneme tak, že k momentu vzhľadom na rovinu prechádzajúcu ťažiskom rovnobežne s danou rovinou (ktorý je teraz nulový) pripočítame moment jedného bodu hmoty M umiestneného v ťažisku.*

Ako neskoršie uvidíme, tá veta platí aj pre momenty druhého stupňa. Ak sústava hmotných bodov, alebo teleso pozostáva z viac menších sústav (telies), ktorých ťažiská sú známe, ťažisko celej sústavy najdeme podľa vety I. tak, že jednotlivé podsústavy nahradíme hmotnými bodmi, ktorých hmota sa rovná hmote celej podsústavy a sú v mieste ťažiska podsústavy.

Napíšeme teraz moment prvého stupňa vzhľadom na rovinu yz v tvare

$$N_{yz} = M a_x l_x, \quad (5)$$

kde l_x je ľubovoľný charakteristický lineárny rozmer sústavy hmotných bodov v smere osi x (napr. x -ová súradnica voľaktorého bodu neležiaceho v rovine yz , alebo rozdiel x -ových súradníc dvoch bodov atď.) a a_x je bezrozmerné číslo definované rovnicou (5), t. j.

$$a_x = \frac{N_{yz}}{M l_x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{l_x \sum_{i=1}^n m_i} = \frac{x_S}{l_x} \quad (6)$$

Z rovnice (6) vyplývajú ďalšie dve vety:

II. *Keď v rovnakom pomere zväčšíme alebo zmenšíme hmotu všetkých hmotných bodov alebo ich súradnice, číslo a_x zostáva nezmenené.*

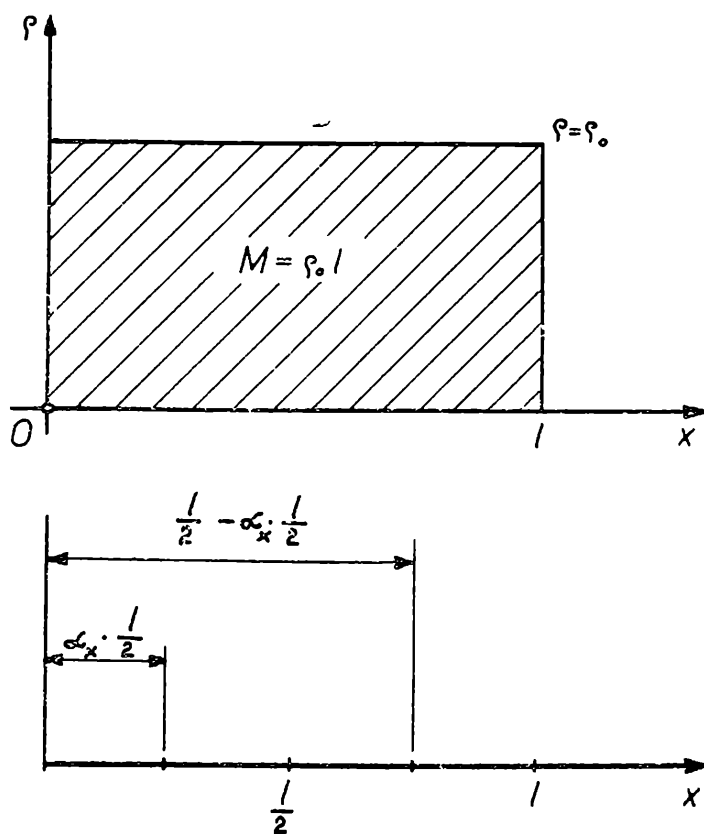
Inak povedané: podobným sústavám hmotných bodov (podobným telesám) prislúcha to isté číslo a_x . Číslo a_x teda nezávisí od veľkosti telies, závisí len od tvaru telies a od rozloženia hmoty v nich.

III. Číslo a_x a moment vzhľadom na rovinu yz sa nezmenia, keď ľubovoľne zmeníme súradnice y_i a z_i .

Z tejto vety vyplýva, že jednotlivé, alebo všetky súradnice y_i a z_i možno ľubovoľným číslom násobiť, t. j. rozmer telesa v smere osi y a z možno ľubovoľne zväčšiť alebo zmenšiť. Dôsledkom toho zmenšenia v krajnom prípade všetky y_i a z_i súradnice môžu nadobudnúť nulovú hodnotu, t. j. všetky hmotné body možno stlačiť do osi x . Tento postup možno samozrejme použiť len pri určení a_x alebo N_{yz} , lebo N_{zx} a N_{xy} pri takej premene nezostávajú konštantné.

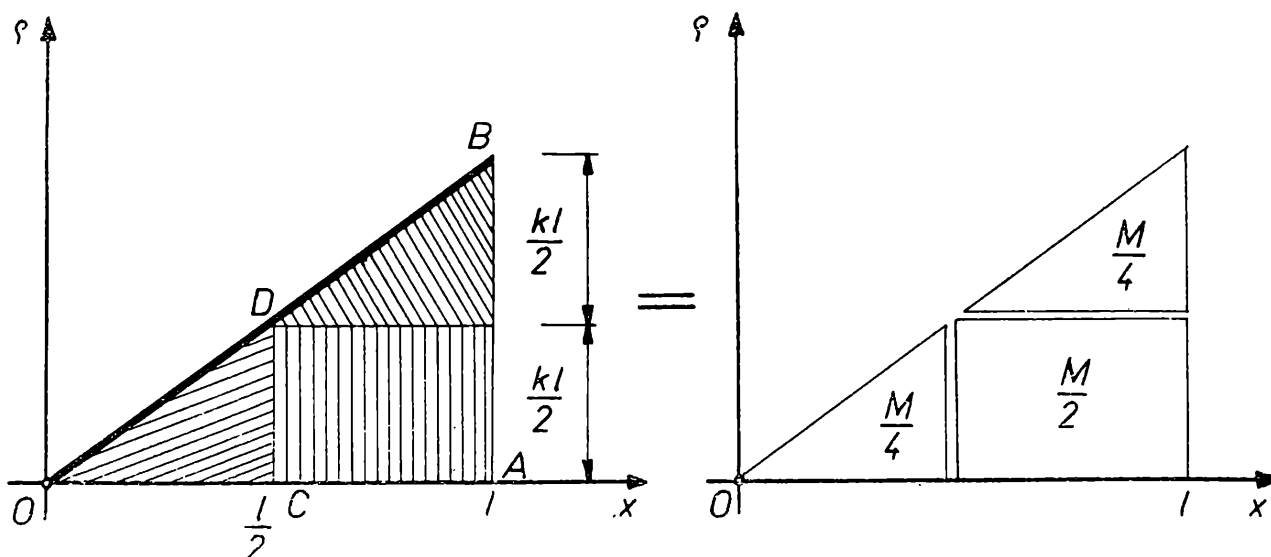
Na nasledujúcich niekoľkých príkladoch ukážeme, jak mnohostranne sa dajú použiť tieto zákony.

1. príklad. Ťažisko hmotnej úsečky dĺžky l pri rovnomernom rozložení hmoty (hmota pripadajúca na jednotku dĺžky je $\varrho_0 = \text{konšt.}$) z dôvodov symetrie je zrejmé v strede úsečky. K tomu istému výsledku vedie naša metóda trochu zložitejšou cestou, ktorú použijeme, aby sme ľahšie pochopili zložitejšie príklady. Určme teraz ťažisko pomocou neznámeho čísla a_x . Na obraze 4 je zobrazené ϱ_0 ako funkcia x . Nakoľko ϱ je konštantné pozdĺž celej úsečky, hmotu celej úsečky udáva súčin $M = \varrho_0 \cdot l$ zobrazený vyšrafovanou plochou. Hodnota a_x závisí len od relatívneho rozloženia hmoty, teda veľkosť ϱ_0 nemá na ňu vplyv.



Obr. 4

Rozložme úsečku na dve rovnaké polovice. Každá polovica má rovnomerne rozdelenú hmotu. x -ové súradnice ľavej polovičky úsečky sú k násobkom ($k = \frac{1}{2}$) súradníc pôvodnej úsečky. Hodnoty a_x počítané vzhľadom na pravé koncové body ľavej polovice úsečky a celej úsečky sa teda na základe vety II. rovnajú. Vyjadríme moment prvého stupňa pravej polovice



Obr. 5

úsečky pomocou momentu vzhľadom na rovinu rovnobežnú idúcu jej ľavým koncovým bodom, použitím vety I. Pretože hmoty a dĺžky každej polovičky je rovná polovičke hmoty a dĺžky pôvodnej úsečky a pretože vzdialenosť ľavého konca pravej polovičky od počiatku je $\frac{l}{2}$ s použitím rovnice (5) dostaneme

$$M a_x l = \frac{M}{2} a_x \frac{l}{2} + \frac{M}{2} \left(\frac{l}{2} + a_x \frac{l}{2} \right)$$

krátením s Ml dostaneme z lineárnej rovnice

$$a_x = \frac{a_x}{4} + \frac{1}{4} + \frac{a_x}{4},$$

z čoho

$$a_x = \frac{1}{2}, \text{ teda } x_S = \frac{1}{2} l.$$

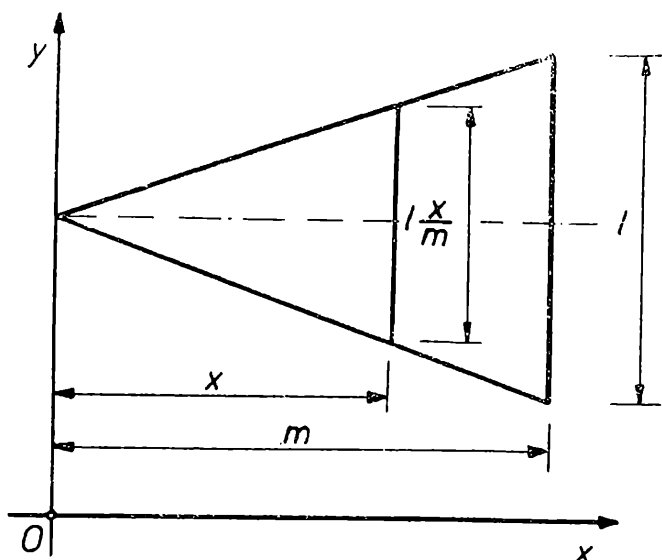
2. príklad. Určme ťažisko úsečky dĺžky l , ktorej dĺžková hustota hmoty lineárne rastie ($\rho = kx$).

Znova rozpoľtíme úsečku, pritom pravú polúsečku možno rozložiť na úsečku s rovnomerne rozloženou hmotou a na úsečku, ktorej rozloženie hmoty súhlasí s rozložením na ľavej polúsečke, ako to vidno z nasledujúceho výrazu

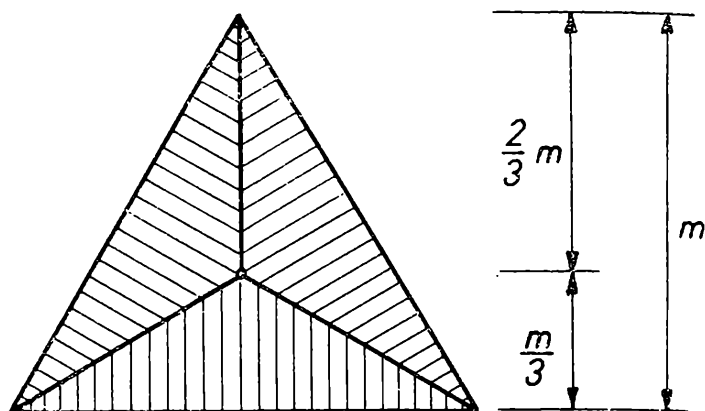
$$\rho = kx = k \frac{l}{2} + k \left(x - \frac{l}{2} \right).$$

Hmoty celej úsečky aj hmoty polúsečiek sú dané vyšrafovanými plochami na obraze 5, podobne ako v predošlej úlohe. Hmoty ľavej polúsečky je $\frac{M}{4}$, úsečky s rovnomerne rozloženou hmotou je $\frac{M}{2}$, ako to z obrazu 5

priamo vyplýva, kde $M = k \frac{l^2}{2}$ je hmoty celej úsečky. Veľkosť čísla a_x aj teraz je rovnaká pre ľavú úsečku aj pre celú úsečku. Vyplýva to z podobnosti trojuholníkov OCD a OAB (obr. 5), lebo podľa vety II. číslo a_x sa



Obr. 6



Obr. 7

nezmení, keď x -ové súradnice a hustotu ρ násobíme konštantou. Podľa úvah v predchádzajúcom príklade dostaneme pre a_x rovnicu

$$Ma_x l = \frac{M}{4} \cdot a_x \frac{l}{2} + \frac{M}{4} \cdot \left(\frac{l}{2} + a_x \frac{l}{2} \right) + \frac{M}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \right),$$

kde posledný člen udáva moment úsečky s rovnomerne rozloženou hmotou. Z tej rovnice $a_x = \frac{2}{3}$ a $x_S = \frac{2}{3} l$.

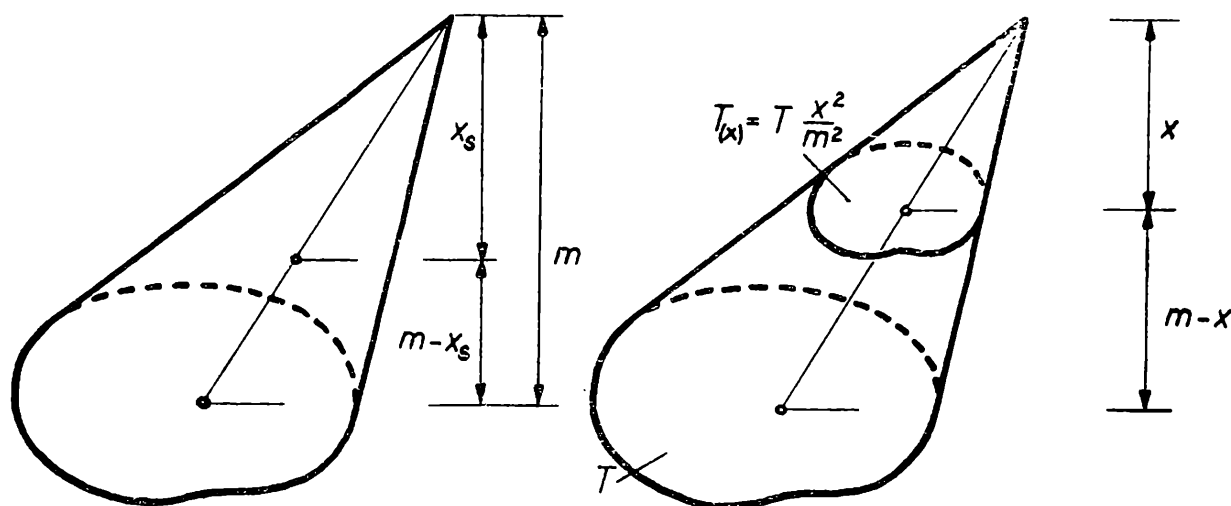
3. príklad. Určenie ťažiska trojuholníka s konštantnou plošnou hustotou hmoty.

Zvolme si súradnicový systém podľa obr. 6. Priečný rozmer trojuholníka rastie lineárne so súradnicou x . Keď v súhlase s vetou III. všetky body trojuholníka s rovnakými x -ovými súradnicami stlačíme do osi x , dostaneme úsečku, ktorej dĺžková hustota hmoty lineárne rastie, tým sa príklad prevedie na predošlý. Ako je všeobecne známe, ťažisko trojuholníka leží na priamke, ktorá je rovnobežná so základňou vo vzdialenosti $\frac{2}{3} m$ od vrcholu trojuholníka.

K tomu istému výsledku dospejeme aj iným spôsobom. Na základe II. a III. vety pre každý trojuholník s rovnakou výškou m vzdialenosť ťažiska od základne je rovnaká. Pomocou transformácií, ktoré sú dovolené dvoma vetami, možno každé dva také trojuholníky transformovať jeden do druhého. Vzdialenosť ťažiska určíme pre najjednoduchší, t. j. pre rovnostranný trojuholník.

Ťažisko leží na osách symetrie, v našom prípade teda je totožné s priesečikom výšok trojuholníka aj so stredom vpísanej kružnici. Možno podľa obr. 7 rozložiť trojuholník na tri zhodné trojuholníky, ktorých plošný obsah sa rovná tretine plošného obsahu pôvodného trojuholníka. Pôvodný a spodný dielči trojuholník majú spoločnú základňu, teda výška dielčieho trojuholníka musí sa rovnať tretine výšok pôvodného trojuholníka. Teda ťažisko je naozaj vo vzdialenosti $\frac{2}{3} m$ od vrcholu trojuholníka.

4. príklad. Stanovenie vzdialenosti ťažiska homogénneho kúžela od základne, ktorá je určená uzavretou rovinnou krivkou ľubovoľného tvaru (obr. 8).



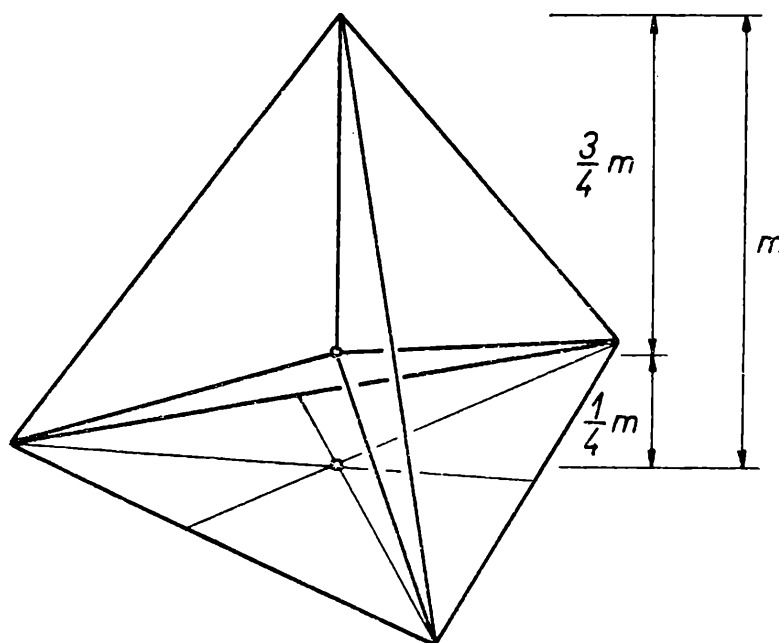
Obr. 8

Spoločná vlastnosť kúžeľov spomenutého tvaru je, že plošné obsahy roviných rezov rovnobežných so základňou, kvadraticky rastú so vzdialenosťou rezu x od vrcholu kúžela. Vzhľadom na a_x tieto kúžele sú transformovateľné jeden do druhého. Preto príslušné a_x shoduje sa s číslom a_x príslúchajúcemu úsečke, ktorej dĺžková hustota hmoty rastie kvadraticky, k čomu sa ešte vrátíme. Veľkosť čísla a_x možno najjednoduchšie určiť pre pravidelný štvorsten (tetraeder), podobne ako v prípade rovnostranného trojuholníka (obr. 9).

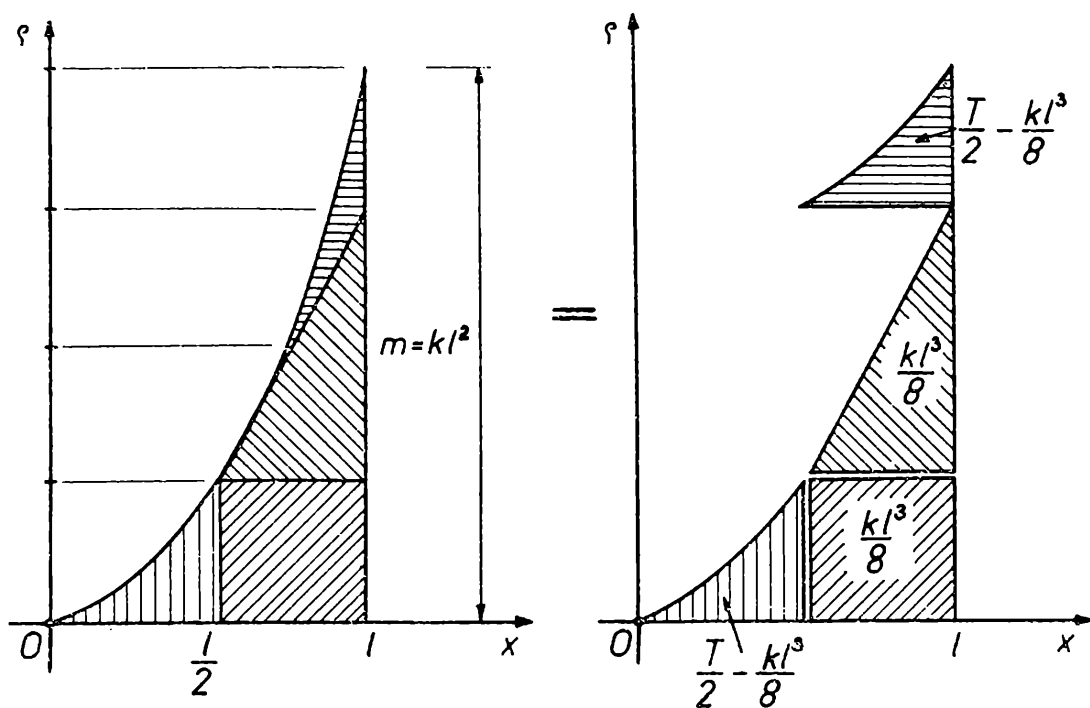
Ťažisko zrejme sa nachádza v priesečníku rovín symetrie. Ak ho spojíme s vrcholmi štvorstena, dostaneme štyri zhodné ihlany. Základňa spodného ihlanu je totožná so základňou štvorstena, teda ťažisko musí byť vo výške $\frac{1}{4}m$ nad základňou, alebo vo vzdialenosti $\frac{3}{4}m$ od vrcholu štvorstena. Je teda

$$a_x = \frac{3}{4}.$$

5. príklad. Ak poznáme výraz pre výpočet plochy pod parabolou (obr. 10), môžeme stanoviť ťažisko úsečky, ktorej dĺžková hustota hmoty kvadraticky rastie. Podobným spôsobom ako v príklade 2 môžeme dostať pre $a_x = \frac{3}{4}$.



Obr. 9

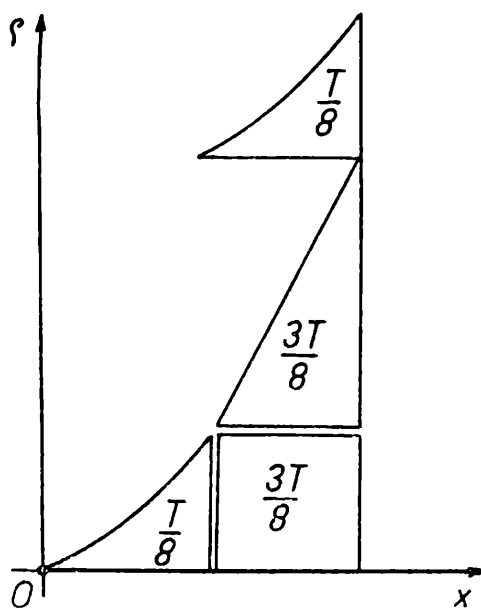


Obr. 10

V ďalšom si zvolíme opačný postup, tj. z predošlého príkladu známe číslo a_x používame pre výpočet plochy medzi x -ovou osou a parabolou $\varrho = kx^2$ (obr. 10). Skúmame teda úsečku, ktorej dĺžková hustota hmoty $\varrho = kx^2$ kvadraticky rastie. Pretože je správne rozloženie

$$kx^2 = k\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + kl\left(x - \frac{l}{2}\right) + k\frac{l^2}{4},$$

aj plochu nad pravou polovicou rozpoltenej úsečky možno rozložiť na obdĺžnik, na trojuholník s rovnakou plochou ako obdĺžnik a na plochu rovnajúcu sa ploche nad ľavou polúsečkou.



Obr. 11

Preto ak označíme znakom T hmotu celej úsečky, t. j. plochu nad úsečkou, vtedy plocha medzi ľavou polúsečkou a krivkou bude $\frac{T}{2} - \frac{k l^3}{8}$. Keďže poznáme číslo a_x pre parabolu $\frac{3}{4}$, pre trojuholník $\frac{2}{3}$ a pre obdĺžník $\frac{1}{2}$, rovnosť momentov je nasledovný

$$T \frac{3}{4} l = \left(\frac{T}{2} - \frac{k l^3}{8} \right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{2} + \frac{k l^3}{8} \left(\frac{1}{2} l + \frac{1}{2} \frac{l}{2} \right) + \frac{k l^3}{8} \left(\frac{1}{2} l + \frac{2}{3} \frac{l}{2} \right) + \left(\frac{T}{2} - \frac{k l^3}{8} \right) \left(\frac{1}{2} l + \frac{3}{4} \frac{l}{2} \right),$$

odkiaľ

$$T = \frac{k l^3}{3} = \frac{l k l^2}{3} = \frac{l m}{3},$$

alebo slovami: Plochu pod parabolou dostaneme tak, že súčin základne a výšky vydelíme tromi. Pri známom T , časti plochy podľa obr. 10 možno vyjadriť zlomkami celej plochy, ako je to vidno na obr. 11.

(Dokončení)

Průběh přijímacích zkoušek z fyziky na fakultě technické a jaderné fyziky v Praze

DOC. DR. JOSEF DIBELKA

Pro šk. rok 1965/66 byli žáci, kteří se přihlásili ke studiu na vysokých školách, přijímání a vybírání na základě přijímacích zkoušek a nikoliv jako doposud na základě přijímacího pohovoru. V tomto článku chci vám, kteří se budete v příštích letech hlásit ke studiu na vysokou školu, ukázat, jak probíhaly zkoušky z fyziky na fakultě technické a jaderné fyziky v Praze.

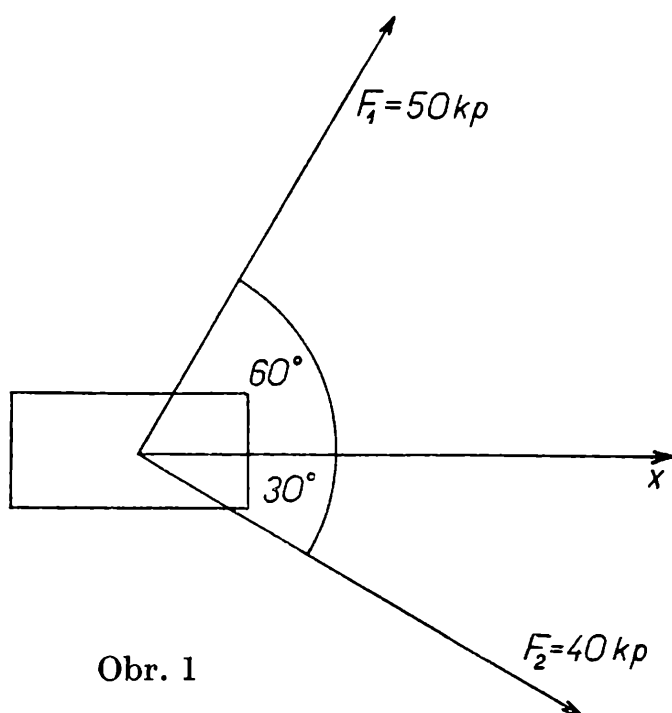
Úvodem připomínám, že při studiu fyziky nestačí jen dané látce se naučit, ale je nutno probírané látce dokonale rozumět. Že jste naučené látce dobře porozuměli, ukáže se nejlépe na tom, jak umíte řešit fyzikální příklady a různé fyzikální problémy, kde aplikujete fyzikální zákony a vztahy. Znamená to tedy vypočítat co nejvíce vhodných příkladů. Řešení fyzikálních příkladů neznamena však jen dosazování do naučených vzorečků, ale je nutno tyto vztahy umět si sám odvodit a dokázat. Velkou příležitostí právě k takovému studiu dává F y z i k á l n í o l y m p i á d a a účast na řešení příkladů, které jsou uveřejňovány v tomto časopise. Obojí vám co nejvřeleji doporučuji.

Ukáži na některých příkladech, které byly letošním uchazečům zadány, jakých základních chyb se uchazeči dopouštěli a vy pak z těchto chyb můžete získat poučení.

Mechanika.

Příklady z mechaniky činily žákům značné potíže. Pravda, byly zadány i příklady na zákon zachování hybnosti, ale žákům, kteří se hlásí ke studiu na fyzikální fakultě, a účastníkům Fyzikální olympiády by takové příklady neměly činit potíže.

1. Dva muži a chlapec chtějí táhnout krabici ve směru určeném na obrázku osou x (obr. 1). Dva muži táhnou silami F_1 a F_2 , jejichž velikost a směr jsou nakresleny na obrázku. Nalezněte velikost a směr nejmenší síly, kterou musí chlapec vyvinout.



Obr. 1

Výslednou resultantu dvou sil F_1 a F_2 žáci většinou uměli vypočítat, ale dále neuvažovali podmínku, že chlapec má vyvinout nejmenší sílu a to že je kolmá na směr daný osou x a tak na příkladu ztroskotali. V tomto příkladu se ukázalo, jak je důležité umět nakreslit správný a přehledný obrázek.

2. Vagón o hmotě $m_1 = 12\,000$ kg, jedoucí rychlostí $v_1 = 1,8$ m s⁻¹ narazil na klidně stojící vagón hmoty $m_2 = 8\,000$ kg. Posunovač přitom oba vagóny spojil, takže jedou dále společnou rychlostí v_2 . Určete tuto rychlost.

Nejčastější chyba byla ta, že bylo počítáno ze zákona zachování energie

a nikoliv ze zákona zachování hybnosti. Zamyslete se nad tímto příkladem a odůvodněte, proč není možno použít zákona zachování energie. Další chyba, která se vyskytovala byla ta, že nebylo bráno v úvahu, že spojením vagónů se pohybuje hmota $m_1 + m_2$ a nikoli jen hmota m_2 .

3. K měření rychlosti střel se užívá zpravidla balistického kyvadla. Je to bedna s pískem zavěšená na laně. Střela, která zasáhne bednu, v ní uvázne, avšak bedna se přitom vychýlí do určité výšky h . Určete rychlost střely, jsou-li známy tyto veličiny

hmota střely $m_1 = 12$ g,

hmota bedny $m_2 = 6$ kg,

výška výstupu bedny $h = 1,6$ cm.

Tento příklad činil značné potíže, hlavně v úsudku. Mnoho žáků jej nezačalo ani počítat a ti, co jej přeci počítali, ukázali, jak špatně umějí uvažovat, když příklad řešili jen na základě zachování energie. Vycházeli

z nesprávného předpokladu, že se bedna po uváznutí střely bude dále pohybovat se stejnou rychlostí jako střela, a tak řešili rovnici

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = (m_1 + m_2) g \cdot h .$$

Protože příklad není v učebnicích fyziky pro SVVŠ, naznačím postup řešení:

Ze zákona zachování hybnosti platí

$$m_1 v_1 + m_2 \cdot v = (m_1 + m_2) v_2 ,$$

kde v je rychlost bedny, která je však před nárazem střely na bednu rovna nule. Platí tedy rovnice

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 .$$

Z principu zachování energie určíme rychlost v_2 (kinetická energie bedny a střely se přeměnila v energii polohy)

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_2^2 = (m_1 + m_2) g \cdot h .$$

4. Jakou rychlost musí mít družice, aby obíhala trvale kolem Země ve vzdálenosti 200 km od zemského povrchu? Zanedbejte brzdění o zbytek atmosféry.

Příklad na gravitační zákon a odstředivé zrychlení. V tomto příkladu základní chybou byla mylná představa, že tíhové zrychlení na povrchu Země je stejné jako ve výši 200 km od povrchu zemského. Touto nesprávnou úvahou vznikla pak situace, že by měla být známa hmota Země a gravitační konstanta. I v tomto příkladě naznačím postup řešení m ... hmota družice, M ... hmota Země, R ... poloměr Země, $r = R + h$ ($h = 200$ km).

$$F = \kappa \frac{m \cdot M}{R^2} = g \cdot m$$

$$F' = \kappa \frac{m \cdot M}{r^2} = g' \cdot m ,$$

$$a = g' = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{g' \cdot r} ,$$

$$g \cdot m = \kappa \frac{m \cdot M}{R^2} ,$$

$$g' \cdot m = \kappa \frac{m \cdot M}{r^2} ,$$

$$\frac{g}{g'} = \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow g' = \frac{R^2}{r^2} \cdot g ,$$

$$v = R \sqrt{\frac{g}{r}} .$$

5. Volně padající těleso má v bodě A rychlost $v_A = 40 \text{ m s}^{-1}$, v bodě B , ležícím blíže k zemi, rychlost $v_B = 150 \text{ m s}^{-1}$. Jaká je vzdálenost AB ?

Hlavní nedostatky při řešení tohoto jednoduchého příkladu 1. špatný úsudek, 2. špatně nakreslený obrázek, 3. počítání okamžitě se zvláštními čísly a pak značné numerické chyby.

Termika

1. V kalorimetru smícháme m gramů ledu 0°C teplého a m_1 gramů vody $t_1^\circ\text{C}$ teplé. Vypočítejte teplotu směsi t , je-li skupenské teplo tání ledu l_t .

2. Do m_1 gramů vody teploty t_1 vložíme m_2 gramů ledu teploty 0°C . Tepelné ztráty neuvažujeme. Popište systém po dosažení rovnovážného stavu. Řešte speciálně pro hodnoty

$$\begin{aligned} \text{a) } m_1 &= 400 \text{ g,} \\ t_1 &= 16^\circ\text{C,} \\ m_2 &= 100 \text{ g;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } m_1 &= 400 \text{ g,} \\ t_1 &= 80^\circ\text{C,} \\ m_2 &= 100 \text{ g.} \end{aligned}$$

Skupenské teplo tání ledu je $l_t = 80 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$.

3. Množství $m_1 = 125 \text{ g}$ ledu teploty $t_1 = -16^\circ\text{C}$ bylo smíšeno s $m_2 = 875 \text{ g}$ vody teploty $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Jakou teplotu má směs? Měrné teplo ledu $c_1 = 0,5 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$, vody $c_2 = 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{deg}^{-1}$, skupenské teplo tání ledu $l_t = 80 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$.

Mnoho nesprávného řešení bylo způsobeno tím, že dané hodnoty byly dosazovány do kalorimetrické rovnice pro směšování dvou kapalin a nebylo vůbec uvažováno o potřebném teple na roztání ledu. U druhého příkladu ani jeden žák nepopsal systém po dosažení rovnovážného stavu a v případě a) vypočítali výslednou teplotu $-3,2^\circ\text{C}$ a dále výsledek nediskutovali. V těchto příkladech se objevovalo i značné množství numerických chyb.

4. Spalné plyny mají u paty komína teplotu 1200°C a opouštějí komín za teploty 250°C . Kolikrát se zmenšil jejich objem při průchodu komínem, jestliže se tlak nezměnil? Předpokládejme, že se spalné plyny chovají jako dokonalý plyn.

I tento jednoduchý příklad byl pro některé žáky velmi obtížný. Obtíž spočívala hlavně v tom, že se snažili vypočítat objem plynu na začátku a na konci a nevšimli si, že mají vypočíst kolikrát se objem zmenšil. Objevily se i takové chyby, že bylo správně počítáno s absolutní teplotou, ale při numerickém výpočtu byla dosazována teplota ve stupních Celsia.

Optika

1. Předmět výšky 10 cm je ve vzdálenosti 45 cm před ploskovypouklou čočkou ($r_1 = 15 \text{ cm}$, $n = 1,5$). Jaký vznikne obraz, kde a jak velký?

2. Obraz předmětu vzdáleného 10 cm od tenké čočky (spojky) je vzpřímený, dvakrát zvětšený. Určete ohniskovou vzdálenost čočky.

3. Uvažte, zda je možno spojnou čočkou zobrazit předmět tak, aby obraz byl stejně velký.

4. Ploskodutá čočka má poloměr křivosti $r = 10 \text{ cm}$. Je zhotovena ze skla o indexu lomu $n = 1,5$. Na plochou stranu čočky dopadá široký svazek

paprsků rovnoběžných s optickou osou čočky. Jaký může být maximální poloměr čočky R , aby paprsky vycházely celou kulovou plochou čočky?

Tyto jednoduché příklady ukázaly, že si žáci z geometrické optiky propočítali velmi málo příkladů, což se projevilo značnými numerickými chybami, nesprávně psanými vztahy, zaměňováním čočky za sférické zrcadlo apod. U 4. příkladu se ukázalo i to, že žáci si nakreslili velmi nepřehledný obrázek, což vedlo k tomu, že příklad řešili špatně. U 3. příkladu bylo také jen napsáno: „Ano, je to možno“. Ve fyzice je ovšem nutno každé tvrzení dokázat.

Elektrina.

1. Voltmetr s rozsahem do 100 V má vnitřní odpor $R_V = 10^4 \Omega$. Jaké maximální napětí můžeme měřit tímto přístrojem, přiřadíme-li k němu předražený odpor $9 \cdot 10^4 \Omega$?

I u takového jednoduchého příkladu nemůžeme se spokojit, že známe z paměti vzoreček platný pro rozšíření měrného rozsahu voltmetru, ale je nutno tento vztah odvodit.

2. Odvoďte výraz pro výslednou kapacitu dvou kondenzátorů zapojených a) za sebou, b) vedle sebe.

Výsledků pak použijte k tomu, abyste určili výslednou kapacitu soustavy tří kondenzátorů zapojených podle obrázku (obr. 2).

Přesto, že v příkladu je výslovně řečeno o d v o d ě výraz pro zapojování kondenzátorů, byl příklad řešen jen dosazováním do vzorečků, které si žáci pamatovali. Jak již na počátku bylo řečeno, řešení fyzikálních příkladů není jen dosazování do vzorečků.

3. Tři kondenzátory jsou zapojeny podle uvedeného schématu, $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = C_3 = 1 \mu\text{F}$ (obr. 4).

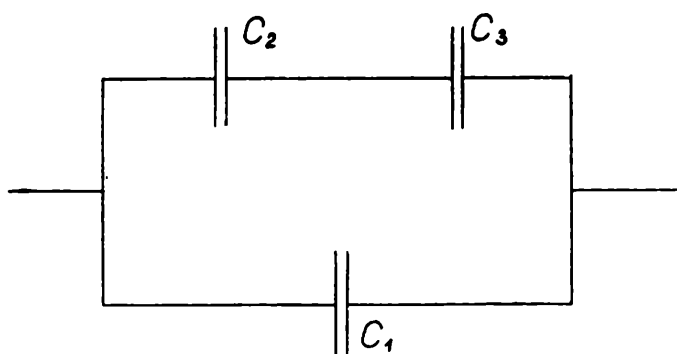
Klíčem K_1 je možno připojit nebo odpojit zdroj napětí, klíčem K_2 je možno zkratovat kondenzátor C_3 , nebo jej připojit paralelně ke kondenzátoru C_2 .

A. Nejprve je zapnut klíč K_1 , takže se C_1 a C_2 nabíjejí z baterie, C_3 je přitom zkratován klíčem K_2 . Jaké je v tomto případě napětí na C_1 , C_2 a C_3 ?

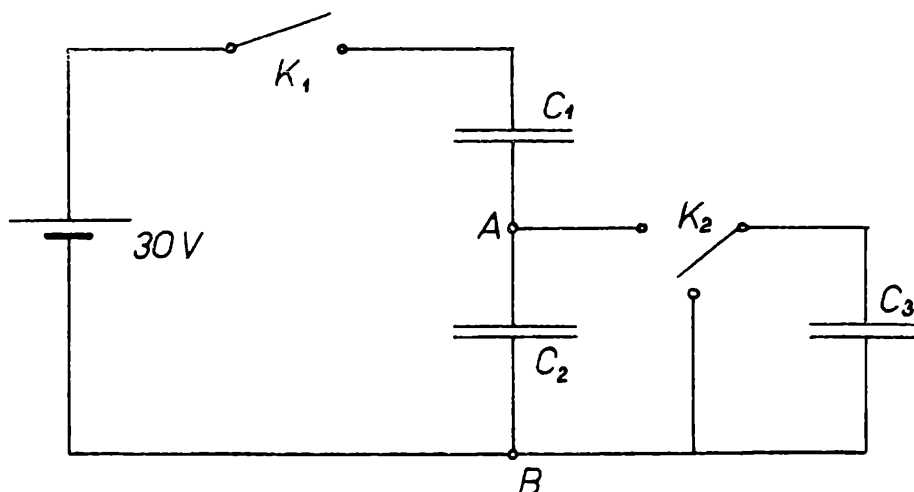
B. Potom vypneme klíč K_1 a pomocí klíče K_2 připojíme C_3 k C_2 . Jaké je napětí mezi body A a B?

Příklad složitější, který nutil k přemýšlení a nejen k dosazování do vzorečku. Zde je nutno umět odvodit vztahy pro zapojování kondenzátorů do série i vedle sebe.

4. Kolik elektrické energie spotřebuje elektrický vaříč za 2 h provozu, když je zapojen na 220 V stejnosměrných a víme, že topná spirála má elektrický odpor 55Ω .



Obr. 2



Obr. 3

5. Jak dlouho musíme zahřívát 15 kg vody z 20 °C na 50 °C vaříčem, který má výkon 1 000 kcal/h? Předpokládejme, že 10 % energie se ztrácí do okolí.

Oba příklady běžné ve všech učebnicích fyziky a celkem velmi lehké.

Atomistika.

1. Elektron obíhá v kruhové dráze kolem protonu. Je-li poloměr dráhy $5,23 \cdot 10^{-19}$ cm, vypočtete

a) kolikrát oběhne elektron kolem jádra za sekundu, b) jaká je jeho postupná rychlost.

Je dán náboj elektronu a jeho hmota.

2. Jak velkou silou se přitahují náboj protonu a elektronu v atomu vodíku, je-li jejich vzdálenost 10^{-10} m? Porovnejte tuto sílu se silou gravitační. Je dána hmota protonu, elektronu, náboj elektronu a gravitační konstanta.

Po stránce fyzikální nečiní takové příklady velkých obtíží. V řešení se objevovalo však velmi mnoho numerických chyb. Je nutno naučit se dobře počítat s mocninami se záporným exponentem.



STANISLAV HORÁK, st.

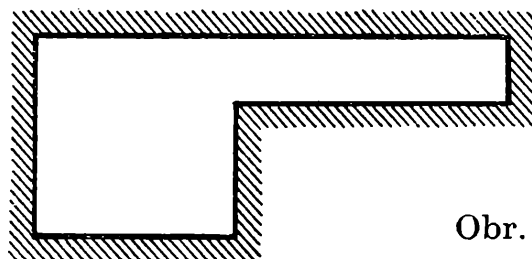
Vodovodní tunel na ostrově Samos

V r. 1882 se vydala vědecká výprava německých archeologů na ostrov Samos, aby pátrala po starých kulturních památkách. Našla tam i starý vodní tunel, který byl prokopán horou Kastro. O tomto tunelu se vědělo, že jej dal postavit kolem r. 530 př. n. l. vládce ostrova *Polykrates*. Vědělo se také, že to bylo dílo na svou dobu vynikající, neboť je velmi zevrubně popsal „otec dějepisu“ *Herodot*, který žil asi v letech 484 až 425 př. n. l. Píše o něm:

Tři díla obyvatelů ostrova Samos jsou největší u Helénů. Předně v kopci výšky 150 sáhů je prokopán tunel. Jeho délka je 7 stadií, výška a šířka měří 8 stop. A tímto tunelem prochází po celé délce příkop, hluboký 20 loktů a široký 3 stopy, jímž je v trubkách vedena voda od studny bohaté na vodu do města. Stavitelem tohoto tunelu byl *Eupalinos*, syn *Naustrofa* z Megary.

To je zpráva Herodotova. Jeho popis souhlasil přesně s tím, co našli němečtí vědci. Zjistili totiž, že tunel je 1 km dlouhý, 2 m vyso-

ký a široký a po jeho celé délce je vykopáno koryto, v němž bylo položeno vodovodní potrubí. Koryto bylo při vchodu do tunelu hluboké asi 2 m a při ústí asi 8 m, aby se tak pro vodu získal náležitý spád. Průřez tohoto tunelu je znázorněn na obr. 1. Tunel byl na



Obr. 1

několika místech opatřen svislými šachtami pro ventilaci a pro odstraňování vykopané horniny. V tunelu byly dokonce i výklenky, do nichž si dělníci při stavbě kladli kahance.

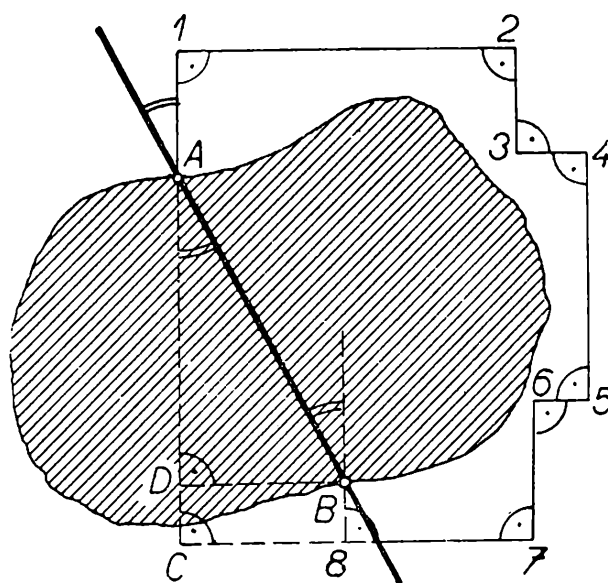
Jedno zjištění však archeology velmi udivilo, tunel byl kopán ze dvou stran proti sobě. Na tehdejší dobu se sešly osy tunelu znamenitě. Rozdíl byl necelých 10 m ve vodorovném směru a 3 m ve svislém směru. Takový výkon nám snad na rtech vyloudí soucitný úsměv,

ale porovnejme toto dílo se stejným dílem v Palestině. Tam kolem r. 700 př. n.l. (jak uvádí B. L. van der Waerden ve své poutavé knize *Erwachende Wissenschaft*) dal král Ezechias prokopat podobný akvadukt. Rozdíl 170 let ve stáří obou tunelů nás nesmí mýlit, neboť tehdy technický pokrok nepostupoval tak rychle jako dnes. V dnešní době technika za jeden rok pokročí mnohem dál než tehdy za jedno století. Král Ezechias dal tedy prokopat vodní tunel v kopci u Jeruzaléma. Aby byl pokud možno přímočarý, prorážely se na několika místech současně svislé šachty. A výsledek? Získal se velmi klikatý tunel dvakrát delší než byla vzdálenost obou ústí.

Řecké dílo bylo na svou dobu velmi mistrné. Přitom přístroje, kterých používali, byly jistě značně jednoduché. Tím se však zabývat nebudeme, vysvětlíme si však postup při přípravných pracích.

V obr. 2 vyšrafovaná plocha představuje půdorys kopce, který se má prokopat tak, aby spojoval místa *A*, *B*. Bodem *A* proložíme

libovolnou přímkou *A1*, v bodě 1 sestrojíme k ní kolmici 1, 2, v bodě 2 sestrojíme zase kolmici 2, 3 atd., až dojdeme ke kolmici 7, 8 a k ní spustíme kolmici z bodu *B*. Potom vypočteme délku úsečky *AD* a délku úsečky *BD*; tím je dán i ostrý úhel v obr. 2 dvakrát



Obr. 2

zatržený. V bodě *A* i v bodě *B* je znám již směr, kterým se má kopat. Je přirozené, že stavitel vodovodu musel mít nejen přístroj k vyměřování pravého úhlu, ale i přístroj, jímž by zjistil sklon půdy.

Identita HELENA ŽÁKOVÁ, Olomouc

Jistě vám již někdo dal tuto matematickou hádanku: „Mysli si číslo (může to být libovolné číslo, pro jednoduchost počítání se obvykle požaduje, aby myšlené číslo bylo přirozené číslo od jedné do deseti), vynásob je třemi, odečti číslo šest, rozdíl vynásob dvěma, k součinu přičti číslo, které sis myslel a číslo dvanáct, řekni mi číslo, které ti vyšlo a já ti

řeknu číslo, které sis myslíš.“ Matematický zápis hádanky je prostý. Označme x myšlené číslo, y číslo, které vyjde a pak můžeme napsat

$$(3x - 6) \cdot 2 + x + 12 = y.$$

Matematickému vyjádření toho, že dvě čísla, třeba různě vyjádřená, nebo dva početní výrazy se sobě rovnají, říkáme *rovnost* nebo *identita*. Například

$$1 = 1, 2 \cdot 3 = 2^2 + 2, (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2, (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

jsou identity. Je zřejmé, že rovnosti s obecnými čísly jsou splněny pro každou hodnotu obecného čísla, má-li ovšem výraz, který je identitou vůbec smysl; například identita

$$\frac{(a + b) \cdot (a - b)}{a - b} = a + b$$

platí pro každé a, b , pro které je $a \neq b$. Této vlastnosti rovnosti je v hádance použito.

Úpravou levé strany zjistíme, že číslo $y = 7x$, můžeme tedy napsat identitu

$$(3x - 6) \cdot 2 + x + 12 = 7x.$$

Z pravé strany rovnosti vidíme, že můžeme z paměti velmi rychle vypočítat, že myšlené číslo x je jedna sedmina čísla y , které vyšlo. Zápis $7x = y$ je rovností jen tehdy, když $x = \frac{y}{7}$.

Matematický zápis úlohy, v níž se má vypočítat určité číslo tak, aby vznikla rovnost, nazýváme *rovnicí*. K určení myšleného čísla x jsme tedy řešili jednoduchou rovnici.

K podobné identitě vede například tato hádanka: Bratr se má s vámi rozdělit o bonbóny, nechce vám však prozradit, kolik bonbónů dostal. Můžete se to dovědět pomocí hádanky, řeknete-li mu, ať si myslí číslo, které udává počet všech bonbónů, vynásobí je dvěma, přičte číslo šest, součet dělí dvěma, od podílu odečte číslo tři a řekne vám číslo, které mu vyšlo. Výsledkem je číslo, které jste chtěli znát, jak vidíte ze zápisu identity

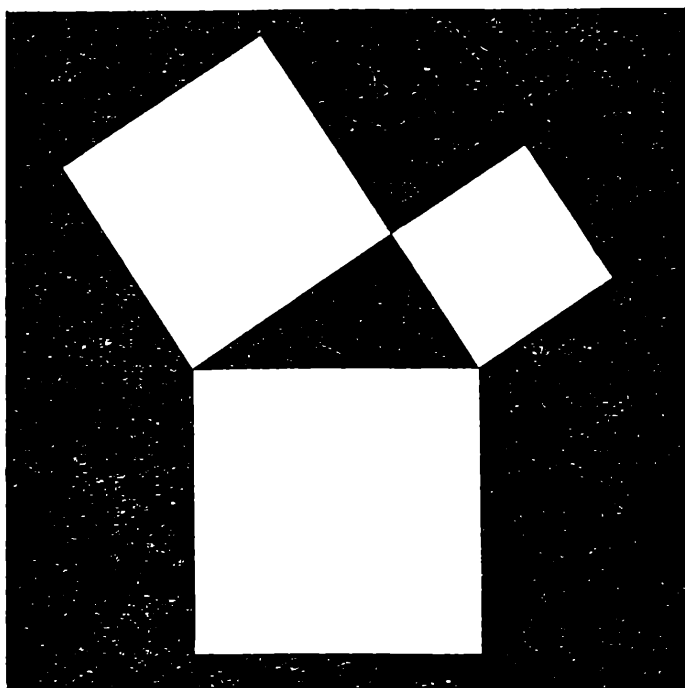
$$(2x + 6) : 2 - 3 = x,$$

která je matematickým vyjádřením vaší hádanky.

A ještě jeden příklad: $(x + 2) \cdot 2 - 1 - 2x = 3$, vyjádřen slovy: „Mysli si číslo, přičti k němu dvě, součet vynásob dvěma, od součinu odečti jedničku a dvojnásobek myšleného čísla a vyšlo ti číslo tři.“

Napište si jiné rovnosti a pokuste se z nich sestavit podobné matematické hádanky.

PYTHAGORAS



Wiskundetijdschrift
voor jongeren

2
vijfde

Obrázek představuje titulní stránku holandského časopisu, jehož název zní Pythagoras, vědecký časopis pro mládež. Jeho úkolem je šíření matematických znalostí zajímavou formou mezi mládeží. Na přání redakce tohoto časopisu jsme navázali spolu přátelský styk a vzájemnou výměnu výtisků.

Současně otiskujeme na ukázkou jednu z hádanek tam uveřejněných.

M. M.

Svítil nebo nesvítil?

Maják je střídavě x minut osvětlený a x minut neosvětlený (x je celé číslo). Právě v poledne začíná signál svítit. Ve 12 hod. 9 minut je neosvětlen, zatímco

ve 12 hod. 17 minut a ve 12 hod. 58 minut svítí. Rozhodněte, zdali je ve 14 hodin osvětlen.

Podle holandského „Pythagora“ upravil

O. S.



Tehdy a jen tehdy

Těmito slovy se v matematice vyjadřuje nutná a postačující podmínka. Říkáme např., že přirozené číslo (zapsané v desítkové soustavě) je dělitelné

třemi *tehdy a jen tehdy*, je-li jeho ciferný součet dělitelný třemi. Slova *tehdy a jen tehdy* zkracují nám vyjadřování, neboť nám umožňují, abychom místo dvou matematic-

kých pouček vyslovili jen poučku jednu. Někdy se tu užívá ještě stručnějšího obratu *právě tehdy*.

Také cizí řeči mají pro vyjádření nutné a postačující podmínky podobné slovní obraty. Tak např. v angličtině odpovídá našemu *tehdy a jen tehdy* slovní obrat *if and only if*. V poslední době lze však v anglicky psané matematice místo *if and only if*

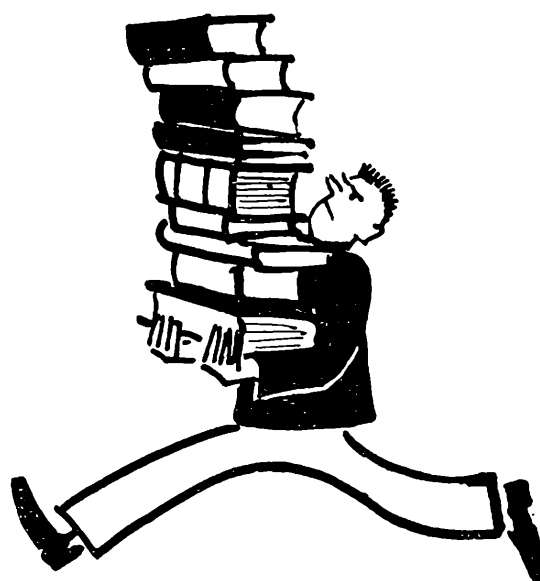
u některých autorů jen zkrácenou formu „*iff*“, kterou by nezasvěcený čtenář mohl pokládat za tiskovou chybu. Není to však práce tiskařského šotka, nýbrž nový důkaz toho, že se matematika stále snaží o co nejstručnější vyjádření — což ovšem nesmí být na úkor přesnosti výkladu.

J. S.

RECENZE

Cesty moderní jazykovědy

Čtenáři, který sleduje na knižním trhu matematické publikace, možná unikla malá knížka, která r. 1964 vyšla v *Malé moderní encyklopedii*. *Cesty moderní jazykovědy* se jmenuje tento svazek, jehož autorem je P. S g a l l se širším kolektivem spolupracovníků. Snad jedním z největších překvapení posledních let je právě to, že exaktní metody stále více pronikají i do jazykovědy, jež byla dříve pokládána za něco velmi vzdáleného od matematiky. Na tom má svůj podíl ovšem i kybernetika, jejímž vlivem se začaly sbližovat i velmi odlehlé vědní disciplíny. Strojový překlad, automatická ukládání a vyhledávání informací, algebraická a kvantitativní lingvistika — to je několik témat z této nové zajímavé knížky.



Najdete tu i ukázkou strojového překladu ruského textu do angličtiny a na řadě cvičení (vedených v závěru kapitol) si můžete ověřit, jak jste porozuměli výkladu.

Knížka je přístupně psána a snad neškodí připomenout, že členem autorského kolektivu byl též F. D a n e š, pisatel oblíbených jazykových koutků v Literárních novinách. Mladým čtenářům tento svazek znovu ukáže, jak silná je nynější matematizace věd a že je proto užitečné věnovat zvýšenou pozornost matematickému vzdělání. Knížka má 196 stran a stojí 8 Kčs.

J. S.



Dík šťastné náhodě

JOSEF KOTYK, Pardubice

„Byly vždycky náhody — a kdyby vesmír trval dost dlouho, staly by se časem asi všechny možné náhody.“¹⁾

V lidské činnosti zní však slovo *štěstí*, *náhoda* apod. „velmi nevědecky“, napsal V. Z a m a r o v s k ý. Dodává však²⁾: „Ale kupodivu právě největší badatelé a objevitelé (o vojevůdcích a umělcích ani nemluvě) tyto výrazy nikdy ze svého slovníku neškrtnuli.“ Také dějiny fyziky vypravují o tom, že mnohé objevy je třeba skutečně připsat (aniž snižujeme zásluhy vědců) — šťastné náhodě. Tato líčení patří k nejpoutavějším ve vývoji vědy. Některá si stručně připomeneme.

A r c h i m é d e s, nejslavnější matematik a fyzik starověku³⁾ (žil v letech 287 až 212 před. n.l. v Syrakusách na Sicílii), objevil zákon po něm nazvaný, když se měl přesvědčit, zdali ze zlata, z něhož si dal král Hiero zhotovit korunu, nenahradil nepoctivý zlatník část stříbrem stejné váhy. Jak mohl však Archimédes poznat, zdali královská koruna je nebo není ze zlata? Vypráví se, že k rozřešení úkolu dospěl — náhodou. Stalo se tak prý v lázni, kde pozoroval, že jeho tělo je nadlehčováno

¹⁾ Astronom sir J. J e a n s, Tajemný vesmír, v českém překladu Zdeňka Kopala, Praha 1936, str. 15.

²⁾ Viz V o j t ě c h Z a m a r o v s k ý, Objevení Tróje, Praha 1962, str. 223.

³⁾ Je však asi pověstí, že za punských válek zapaloval Archimedes lodi Římanů dutými zrcadly a že byl zabit vojákem ve chvíli, když rýsoval do písku obrazce, ač prosil: „Nedotýkej se mých kruhů!“

Hrob Archimédův upadl časem v zapomnutí. Podle nejnovějších zpráv italského archeologa Salvatore Giancia leží před branami Syrakus na cestě do Catanie. Avšak ještě za dob Ciceronových (v 1. stol. před n. l.) jej zdobil náhrobek s obrazem rovnostranného válce a vepsané koule. O těchto tělesech Archimédes potvrdil, že poměr jejich povrchů i objemů je týž, a to 3 : 2.

vodou. Zamýšlel se podrobněji nad tímto jevem a dostal pojednou šťastný nápad. Rozradostněn vyběhl prý ven a volal: „Heuréka!“ (Už to mám! Už jsem na to přišel!) Ponořil pak i královu korunu do vody a stanovil množství kapaliny, kterou vytlačila. Tak určil objem koruny a týmž postupem pak i objemy stejných vah zlata a stříbra. Srovnáním poznal, že zlato je ve vodě nadlehčováno méně než stříbro stejné váhy a dokázal, že královo domnění o zlatníkově podvodu bylo opodstatněno. Královská koruna nebyla skutečně celá z ryzího zlata.

Cvičení. Koruna krále Hierona vážila na vzduchu 10 kp, ve vodě však jen 9,373 kp. Vypočítejte její objem! Kolik měla vážit, kdyby byla z čistého zlata? Jestliže bylo přimíšeno stříbro, kolik ho bylo?

Pokračujme však ve své exkursi do dalších kapitol fyziky!

První dalekohled, složený ze spojky a rozptylky (typ tzv. terrestický, pozemský) byl sestrojen v Holandsku na počátku 17. století. Roku 1608 byly holandské vládě podány od několika brusičů čoček žádosti o patentování tohoto nového optického přístroje⁴). Vynález učinily prý však děti. Při hře s vadnými čočkami do brýlí vytvořily šťastnou náhodou takovou kombinaci čoček, že viděly kohouta na věži mnohem blíže než pouhým okem.

V polovině dalšího století (roku 1746) nabíjel jiný Holanďan jménem C u n a e u s v Leydenu nábojem z elektriky vodu v láhvi. Zátkou procházel do vody hřebík. Cunaeus držel jednou rukou láhev a druhou se náhodou dotkl hřebíku. V té chvíli dostal silnou ránu. Tato náhodná, až poněkud trpká zkušenost vedla k sestrojení k o n d e n z á t o r u, zvaného d o d n e s l e y d e n s k á l á h e v.

Také e l e k t r o m o t o r y byly objeveny šťastnou náhodou. Na výstavě, pořádané ve Vídni roku 1873, se stalo, že selhalo jedno dynamo. Přestalo náhle dodávat proud. Věc vyžadovala naléhavé opravy. Aby se vyšetřilo, není-li snad přerušeno vinutí stroje, zavedli technici do dynamu proud odjinud. K svému velikému překvapení shledali, že se dynamo roztočilo jako motor. Mezi generátory proudu a elektromotory není v konstrukci, jak od té doby víme, skutečně žádného zásadního rozdílu.

V době, o níž právě píšeme, odlétaly ještě vlny tónů nenávratně v zapomnutí. Teprve E d i s o n o v i⁵) se podařilo zachytit a zapsat jejich prchavé chvění čarou proměnné hloubky na plášť voskového válce fono-

⁴) Jako první se zpravidla připomíná J a n L i p p e r s h e y z Middelburku dne 2. října 1608. Priority vynálezu dalekohledu domáhali se však také J a n s Z a c h a r i a s s e n a jeho syn Z a c h a r i a s J a n s e n. G a l i l e i, uslyšev o holandském vynálezu, samostatně také roku 1609 podobný přístroj sestrojil a jej zdokonalil. D a l e k o h l e d h o l a n d s k ý bývá proto často označován jménem d a l e k o h l e d G a l i l e i h o.

⁵) Zásluhami T h o m a s e A l v y E d i s o n a (1847—1931), nejplodnějšího vynálezce všech dob, se zabývá autorův článek „100 let od narození Edisonova“ v Rozhledech, roč. 27, čís. 1, str. 33 až 35.

grafu. Co však Edisona nejvíce proslavilo, to byl objev (1877), že zvuk takto v mrtvé hmotě zakletý můžeme opět vyvolat. Také tu přispěla bez jakékoli další konstruktivní úpravy přístroje náhoda. Stačilo vložit hrot membrány do dříve vyryté stopy a uvést jej v pohyb po této dráze, tj. v pohyb téhož rytmu jako při zapisování; tím se membrána rozechvěje a zapsané zvuky opět vydává (reprodukuje). Slavný vynálezce naučil tak stroj — mluvit a zpívat.

Trubice vhodné ke studiu elektrického výboje ve zředěných plynech zhotovil během 19. století mechanik Geissler⁶⁾; říkáme jim, jak známo, dosud trubice Geisslerovy. Kdo by byl však již tehdy tušil, že Geisslerovy hračky povedou ještě v témž století k sestrojení Roentgenovy lampy, jejíž paprsky pronikají hmotou pro viditelné světlo neprostupnou a zachraňují tak život tisícům lidí?

Také Roentgenův objev, učiněný právě před 70 lety, a to v listopadu roku 1895, je jednou ze šťastných náhod ve vývoji vědy. Při práci se silně evakuovanými výbojovými trubicemi Roentgen⁷⁾ shledal, že z nich vystupuje záření, jsou-li dostatečně vyčerpány. Toto záření způsobuje při procházejícím výboji na papírovém stínítku 3 m vzdáleném, potřeném vrstvou kyanidu platnatobarnatého $\text{BaPt}(\text{CN})_4$, zřetelnou fluorescenci a působí na fotografickou desku i tehdy, když je dobře zabalena v tuhém černém papíře. Podobný účinek nemají ani paprsky ultrafialové, jež stěží procházejí sklem, ani paprsky katodové. Mohlo tedy jít jen o záření nové, dosud neznámé, jehož vznik a podstata zůstala na delší dobu tajemnou; proto bylo pojmenováno paprsky X. Roentgen sám poznal však velmi brzy vlastnosti tehdy tak záhadného záření, které bylo pak nazýváno zářením Roentgenovým.

Není úkolem tohoto článku hodnotit vědecký i praktický význam, jehož nabylo Roentgenovo záření v lékařství (roentgenologie, roentgenografie, roentgenotherapie aj.), v průmyslu (roentgenomateriologie) a všude tam, kde Roentgenův objev tak blahodárně zasáhl.⁸⁾ I když dnes užívání Roentgenova záření někde již ustupuje moderním metodám (např. v průmyslu zkoumáním materiálu pomocí radioizotopů nebo ultrazvuku), bude Roentgen pro všechny časy právem počítán k největším dobrodincům lidstva. Roku 1901 byl odměněn nejvyšším světovým vědeckým vyznamenáním — Nobelovou cenou.

⁶⁾ Heinrich Geissler (1815—1879), výrobce fyzikálních přístrojů ze skla, byl za své zásluhy o experimentální fyziku roku 1868 jmenován universitou v Bonnu čestným doktorem.

⁷⁾ Wilhelm Konrad Roentgen (1845—1923), jeden z předních představitelů moderní vědy, působil jako profesor fyziky ve Würzburgu v Bavorsku.

⁸⁾ O tom viz podrobněji autorův článek *Jubileum W. K. Roentgena a jeho paprsků X*, uveřejněný roku 1945 v *Rozhledech*, roč. 25, č. 1, str. 25—27.

Slovníček

matematických výrazů

(Dokončení)

ztotožnit
zvětšení
zvětšovat se
zvláště, zvláštní
zvláštní případ
zvláštnost

отождествить, совместить
увеличение
возрастать, принимать приращение
особенно, особенный
частный случай
особенность

Ž

žabí perspektiva
žádný

лягушачья перспектива
никакой

Slovníček fyzikálních výrazů

Do slovníčku jsou zahrnuty fyzikální výrazy, které se nejčastěji vyskytují ve středoškolské fyzice. Připojeny jsou také některé ve školské fyzice používané výrazy technické, astronomické a meteorologické. Z cizích slov, odvozených v češtině i ruštině od stejného slovního základu, jsou ve slovníčku zahrnuta jen ta, která se v ruštině píšou odlišně, nebo se používají ve slovních spojeních v češtině neobvyklých. Omezen je také výběr slov, odvozených od společného slovního základu.

Květuše Lepilová

A

абберация
адгезия
аккумулятор; а. железно-никелевый;
а. свинцовый
активность

aberrace, vada [čočky]
adhese, přilnavost, přilínání
akumulátor; а. niklový, železoniklo-
vý; а. olověný
aktivita, účinnost

альфа — лучи
альфа — распад
альфа — частица
ампер — виток

амперметр; а. переменного тока; а. постоянного тока; а. самопишущий; а. с подвижной катушкой; а. тепловой; а. термопарный; а. электромагнитный

аннигиляция

анод

анодный

антенна; а. бегущей волны; а. коротковолновая; а. направленная; а. передающая; а. полуволновая; а. приемная; а. телевизионная

апогей

аппарат

астронавтика

афелий

záření alfa

rozpad alfa

částice alfa

ampérzávit

ampérmetr; а. na střídavý proud; а. na stejnosměrný proud; а. registrační; а. s otáčivou cívkou; а. tepelný; а. termoelektrický; а. elektromagnetický

annihilace

anoda

anodový

anténa; а. s postupnou vlnou; krátkovlnná а.; směrová а.; vysílací а.; půlvlnná а.; přijímací а.; televizní а.

apogeum

aparát

astronautika

afélium, odsluní

Б

база

батарея; б. аккумуляторная; б. анодная; б. гальванических элементов; б. конденсаторов; б. накала; б. солнечная; б. сухая; б. термоэлектрическая

бета — лучи

бета — распад

бетатрон

бета — частица

бинокль

бипризма

бомбардировка частицами

základna

baterie; akumulátorová b.; anodová b.; b. galvanických článků, galvanická b.; b. kondenzátorů; žhavicí b.; sluneční b.; suchá b.; termoelektrická b.

záření beta

rozpad beta

betatron

částice beta

dalekohled, kukátko

dvojhranol

bombardování (ostřelování) částicemi

В

валентность

вектор; в. единичный; в. пары сил; в. свободный; в. связанный

векторный

величина; в. заданная; в. известная; в. искомая; в. конечная; в. критическая; в. неизвестная; в. обратная; в. предельная; в. приближенная; в. производная; в. результирующая; в. скалярная; в. средняя; в. тока, номинальная

вес; в. полный в. собственный; в. удельный

весить

valence, mocenství

vektor; jednotkový v.; v. dvojice sil; volný v.; vázaný v.

vektorový

hodnota, veličina, rozměr, velikost; daná v.; známá v.; hledaná v.; konečná h.; kritická (mezní) h.; neznámá v.; převrácená (převratná, reciproká) h.; mezní h.; přibližná h.; odvozená v.; výsledná h.; skalární v.; průměrná v. (střední h.); jmenovitý proud

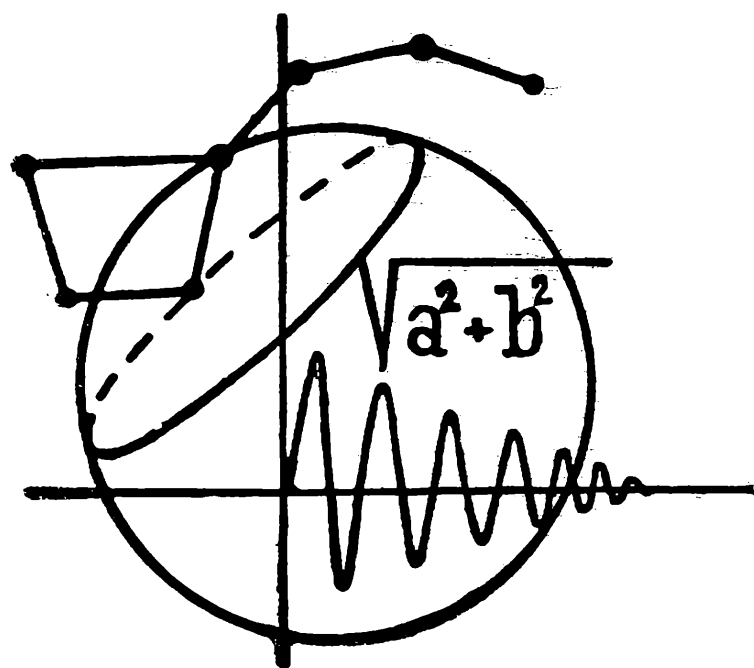
váha; celková v.; vlastní v.; specifická (měrná) v.;

vážit

[Pokračování]

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



9

ROČ. 44

1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Květen 1966

Číslo 9

Vedoucí redaktor doc. dr. Miroslav Menšík, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. Ola Setzer, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník Josef Bartůněk, ústřed. insp. MŠK; Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; Oldřich Lepil, PU, Olomouc; prof. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, MÚ ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

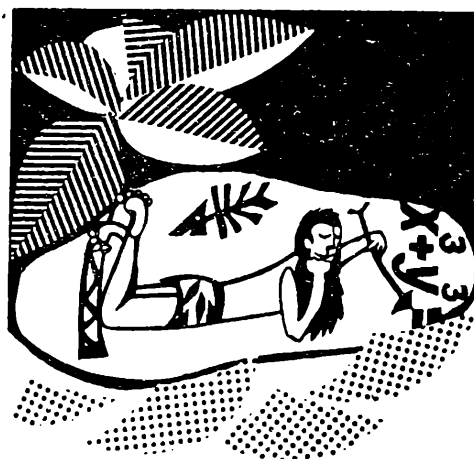
J. Hájek: Některé zajímavosti vlastnosti nože Archimédova	385
inž. O. Lacina: Řešení soustav lineárních rovnic	391
Inž. dr. E. Reich: Poznámka	396
O. Jeništa: Otáčení	398
H. Hofmanová: Některá shodná zobrazení v prostoru	400
A. Skyva: Od teploty 0°C k teplotě 0°K	402
Prof. dr. Z. Bodó, Budapešť: Ťažisko, momenty prvního a druhého stupně (Pokračování)	408
J. Mida: Kvantová teorie světla a Dopplerův jev	412
Doc. dr. J. Dibelka: Fotoluminiscence	417
P. Lála: Umělé družice a kosmické rakety	420
Řešení úloh (Dokončení)	423
E. Říman, CSc.: Matematický problém	426
F. Zítek: Kombinatorická úloha	429
V. Budinská: Z dějin SPN	430
Recenze	431
K. Lepilová: Slovníček fyzikálních výrazů	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jin. dříšská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: V. Vaňková, studující FS.

A-09*61196

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze, 1966.

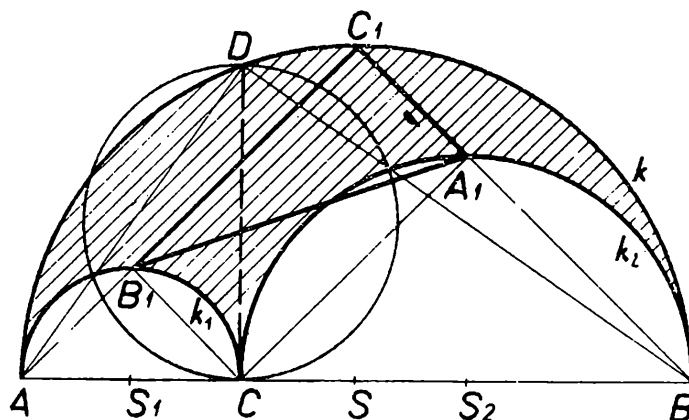


Některé zajímavé vlastnosti nože Archimédova

J I Ř Í H Á J E K, P I, B r n o

Řeční matematikové Hippokrates a Archimédés studovali vlastnosti rovinného obrazce omezeného třemi polokružnicemi, který nazývali arbelos. Připomínal totiž svým tvarem obuvnický nůž, který měl toto jméno. Odvodili, že jeho obsah (viz vyšrafovaná část obr. 1) je roven obsahu kruhu s průměrem rovným úsečce CD .

Důkaz tohoto tvrzení je jednoduchý. Stačí, podíváme-li se pozorně na obr. 1.



Obr. 1

Nad daným průměrem $AB = 2R$ je sestrojena polokružnice k . V téže polorovině vyřáté přímkou AB jsou sestrojeny polokružnice k_1, k_2 nad průměry $AC = 2r_1, BC = 2r_2$, kde C je libovolný bod vnitřku úsečky AB . Označme středy úseček AC, BC, AB písmeny S_1, S_2, S . Obsah nože

$$P_1 = \frac{\pi}{2} (R^2 - r_1^2 - r_2^2) = \frac{\pi}{2} [(r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2] = \pi r_1 r_2,$$

neboť

$$R = r_1 + r_2.$$

Označíme-li písmenem D průsečík kolmice vztyčené v bodě C k přímce AB s polokružnicí k , platí pro pravoúhlý trojúhelník ADB

$$AC \cdot BC = \overline{CD}^2$$

(Euklidova věta)

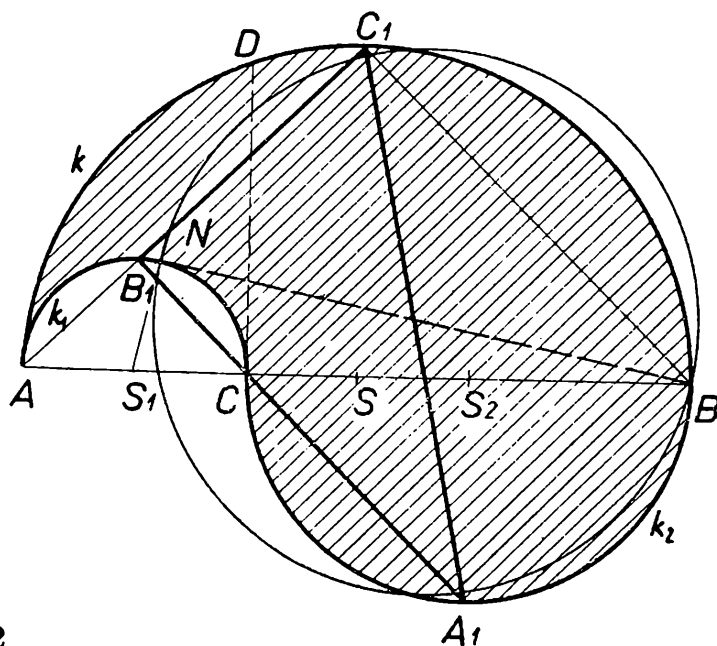
$$(2r_1)(2r_2) = \overline{CD}^2,$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{\overline{CD}^2}{4},$$

tedy

$$P_1 = \pi \frac{\overline{CD}^2}{4} = \pi r_1 \cdot r_2.$$

Úlohu můžeme pozměnit a do jisté míry i zobecnit. V původním obrazci leží všechny uvažované polokružnice v téže polorovině s hraniční přímkou AB . Můžeme však jednu z menších polokružnic, popřípadě i obě, umístit do opačné poloroviny než leží polokružnice opsaná nad průměrem AB . Lze ukázat, že i v těchto případech jsou obsahy vyšrafovaných obrazců rovny obsahům jistých kruhů. 



Obr. 2

Uvažujme nejdříve případ, kdy polokružnice opsané nad průměry AC , BC leží v polorovinách opačných vyřatých přímkou AB . V obr. 2 je naznačen případ, kdy polokružnice k_2 leží v polorovině opačné k polorovině určené přímkou AB a bodem D .

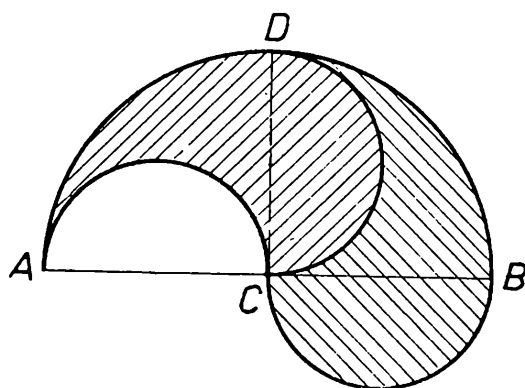
Obsah vyšrafované části za této situace

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{\pi}{2} (R^2 - r_1^2 + r_2^2) = \frac{\pi}{2} [(r_1 + r_2)^2 - r_1^2 + r_2^2] = \\ &= \frac{\pi}{2} (2r_1 r_2 + 2r_2^2) = \pi r_2 (r_1 + r_2) \end{aligned}$$

Lze jej vyjádřit rovněž takto

$$\begin{aligned} P_2 &= \pi (r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi}{4} (r_1^2 + 4r_1 r_2 + 4r_2^2 - r_1^2) = \\ &= \frac{\pi}{4} [(r_1 + 2r_2)^2 - r_1^2] = \frac{\pi}{4} \cdot \overline{BN}^2, \end{aligned}$$

kde N je dotykový bod tečny vedené z bodu B k polokružnici k_1 (podle věty Pythagorovy pro pravoúhlý trojúhelník BNS_1). Obsah obrazce je tedy též jako obsah kruhu, který je sestrojen nad průměrem BN .

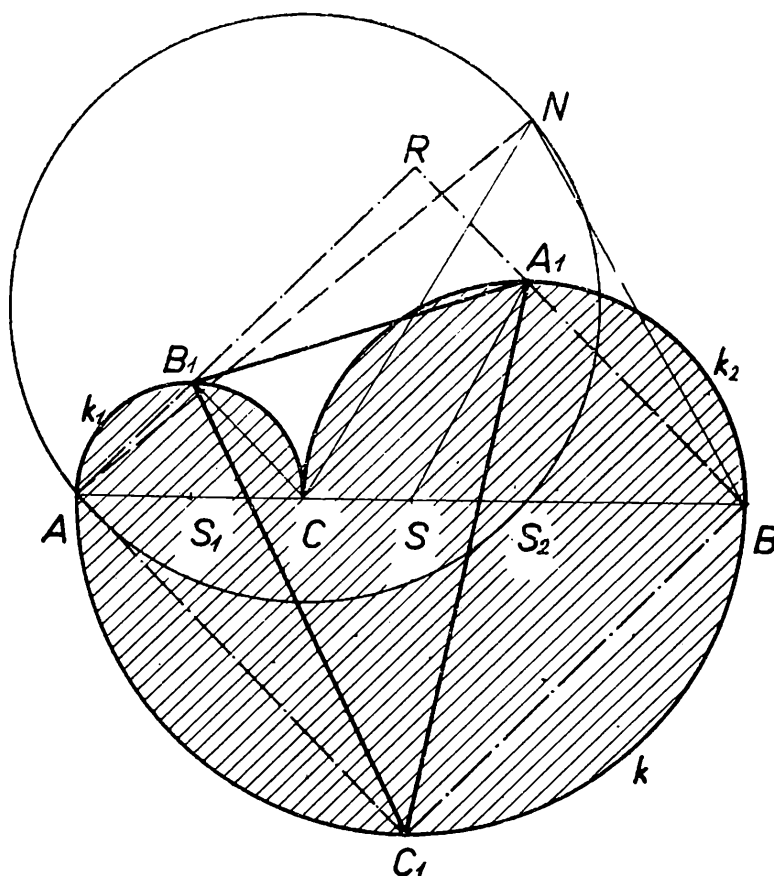


Obr. 2a

Za zmínku stojí tato poznámka. Je-li bod C středem úsečky AB (obr. 2a), dělí polokružnice opsaná nad průměrem CD vyšrafovanou plochu ve dvě shodné části tak, že je lze překrýt pouhým otočením kolem bodu C o úhel $\frac{\pi}{2}$. (Proč?)

Zůstává konečně případ, kdy polokružnice sestavená nad průměrem AB leží v opačné polorovině než polokružnice opsané nad průměry AC , BC (obr. 3). Obsah útvaru omezeného třemi polokružnicemi

$$P_3 = \frac{\pi}{2} (R^2 + r_1^2 + r_2^2).$$



Obr. 3

Poněvadž

$$R = r_1 + r_2$$

platí

$$P_3 = \frac{\pi}{2} [(r_1 + r_2)^2 + r_1^2 + r_2^2] = \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2) = \pi \frac{\overline{AN}^2}{4},$$

kde N je vrchol rovnostranného trojúhelníka o straně velikosti BC . Podle kosinové věty pro trojúhelník ACN totiž platí

$$\overline{AN}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CN}^2 - 2 AC \cdot CN \cdot \cos \frac{2\pi}{3},$$

$$\overline{AN}^2 = (2r_1)^2 + (2r_2)^2 + 4r_1 r_2.$$

Odtud

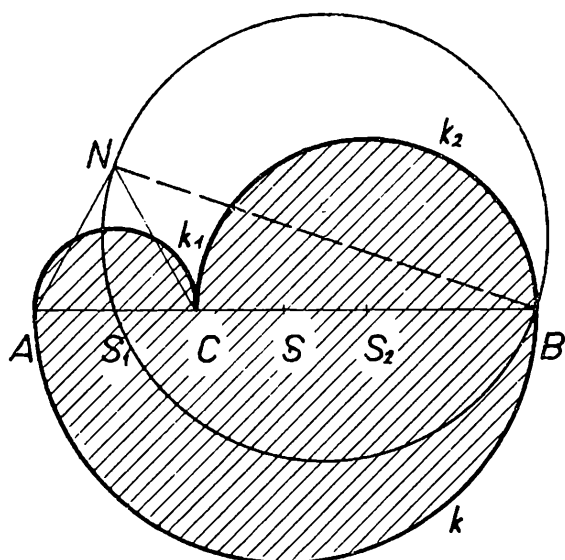
$$r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2 = \frac{\overline{AN}^2}{4},$$

tedy

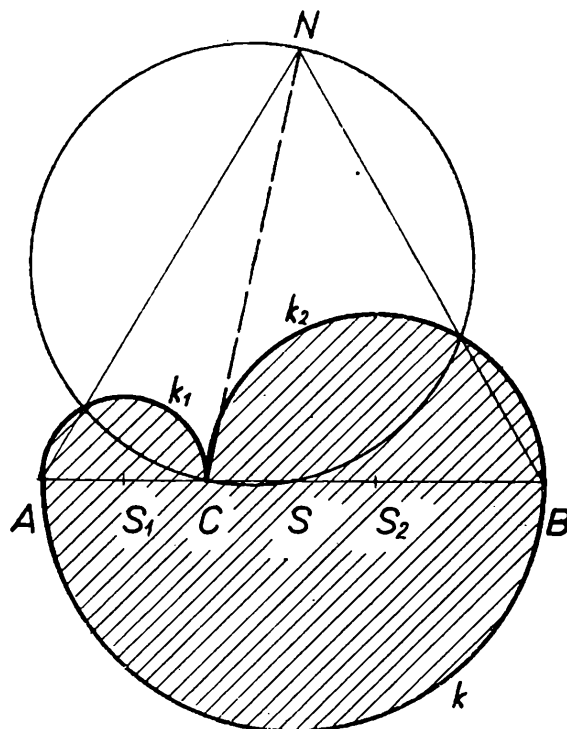
$$P_3 = \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = \pi \frac{\overline{AN}^2}{4},$$

Obsah „nože“ je za této situace roven obsahu kruhu opsaného nad průměrem AN .

Obdobně lze ukázat (obr. 3a, 3b), že obsah P_3 je roven též obsahu kruhu, který je sestrojen nad průměry BN nebo CN , kde N je vrchol rovnostranného trojúhelníka se stranou velikosti AC nebo AB .

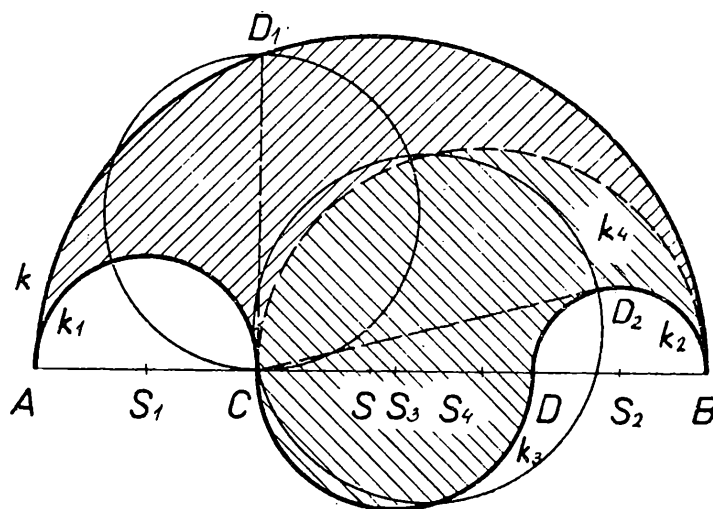


Obr. 3a

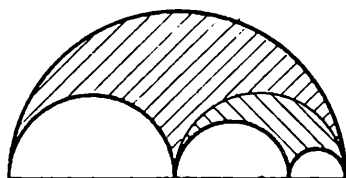


Obr. 3b

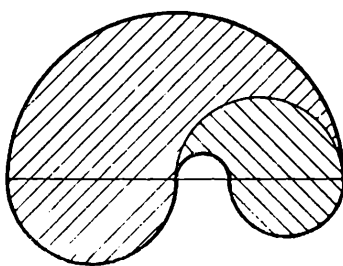
Když místo tří polokružnic se středy na úsečce AB zvolíme polokružnice čtyři (obr. 4a, b, c, d), pak se k výpočtu obsahu vzniklého obrazce dá použít jeho rozklad pomocnou polokružnicí k_4 ve dva obrazce, které jsme již dříve vyšetřovali. Jeho obsah lze pak vyjádřit jako součet obsahů dvou kruhů. Pomocná polokružnice k_4 dělí uvažovanou plochu ve dvě vzájemně se nepřekrývající části, které jsou pro větší názornost odlišně šrafované.



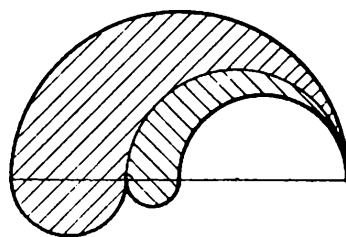
Obr. 4a



Obr. 4b



c



d

V situaci znázorněné na obr. 4a lze obsah vyšrafované části počítat také takto: V polorovině, v níž leží polokružnice k , sestrojme pomocnou polokružnici k_4 nad průměrem BC ; střed úsečky BC označme S_4 . Pomocná polokružnice k_4 dělí uvažovanou plochu obsahu P na dvě vzájemně se nepřekrývající části. Obsah části omezené polokružnicemi k , k_1 , k_4 je roven obsahu kruhu, který je opsán nad průměrem CD_1 , kde D_1 je průsečík kolmice vztyčené v bodě C k přímce AB s polokružnicí k (analogické obr. 1). Zbývající část plochy je omezena polokružnicemi k_2 , k_3 , k_4 a je rovna obsahu kruhu, který je sestrojen nad průměrem CD_2 , kde D_2 je dotykový bod tečny vedené z bodu C k polokružnici k_2 (obdoba obr. 2). Platí tedy

$$P = \frac{\pi}{4} (\overline{CD}_1^2 + \overline{CD}_2^2)$$

Zcela analogicky lze postupovat i v případech znázorněných na obr. 4b, c, d.

Podle Pythagorovy věty je však možné sestrojit kruh, jehož obsah je roven součtu obsahů daných dvou kruhů, takže obrazec omezený čtyřmi polokružnicemi můžeme zaměnit jediným kruhem, který s ním má též obsah.

(Pokračování)

**UPOZORNĚNÍ
ČTENÁŘŮM!**

Chcete-li příští školní rok dostávat pravidelně Rozhledy matematicko-fyzikální, předplatte si je již nyní u své místní Poštovní novinové služby (nebo u poštovního doručovatele).

Současně žádáme s. učitele matematiky a fyziky nebo ředitelství škol, aby provedli laskavě nábor čtenářů Rozhledů mezi svým žactvem ještě před hlavními prázdninami. Zmenší se tak obtíže spojené s doručováním.

Řešení soustav lineárních rovnic

INŽ. OTAKAR LACINA, ČKD-Praha

V elektrotechnické praxi při řešení složitějších obvodů dospíváme k řešení soustav lineárních rovnic o několika neznámých. S počtem neznámých roste při kterékoliv výpočetní metodě množství početních výkonů, nutných k řešení soustavy, a tím i pravděpodobnost chyby během výpočtu, kterou pak zjistíme až při zkoušce. Tuto pravděpodobnost chyby je možno podstatně snížit častou kontrolou během výpočtu a vhodnou grafickou úpravou řešení.

V dalším je uvedena metoda řešení soustavy lineárních rovnic o více neznámých — tzv. *Gaussova eliminační metoda* — která právě častou kontrolou dílčích výpočtů a grafickou úpravou zápisu možnost chyby prakticky vylučuje. Postup řešení i úpravu si ukážeme na soustavě rovnic o čtyřech neznámých, je však samozřejmě obdobný i u soustav o vyšším počtu neznámých.

Je dána soustava rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= A_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= A_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= A_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= A_4 \end{aligned}$$

Danou soustavu přepíšeme do tabulky

Číslo řádku	x_1	x_2	x_3	x_4	Pravá strana	Řádkový součet	Po- známka
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	A_1	S_1	
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	A_2	S_2	
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	A_3	S_3	
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	A_4	S_4	

Řádkový součet dostáváme tak, že v příslušném řádku sečteme koeficienty u neznámých a pravou stranu rovnice, tj. provedeme

$$\begin{aligned} S_1 &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + A_1 \\ S_2 &= a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + A_2 \\ S_3 &= a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + A_3 \\ S_4 &= a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} + A_4 \end{aligned}$$

V pokračování tabulky opíšeme řádek č. 1. Hodnoty druhého řádku

násobíme činitelem $-\frac{a_{11}}{a_{21}}$, hodnoty v třetím řádku činitelem $-\frac{a_{11}}{a_{31}}$, hodnoty ve čtvrtém řádku činitelem $-\frac{a_{11}}{a_{41}}$. Zároveň provedeme první kontrolu řádkovými součty. Musí platit:

$$-\frac{a_{11}}{a_{21}}a_{21} - \frac{a_{11}}{a_{21}}a_{22} - \frac{a_{11}}{a_{21}}a_{23} - \frac{a_{11}}{a_{21}}a_{24} - \frac{a_{11}}{a_{21}}A_2 = -\frac{a_{11}}{a_{21}}S_2.$$

Podobně to platí i o dalších řádcích. Pokračování tabulky, kde využijeme i sloupce „Poznámka“ pro záznam početního úkonu, vypadá takto:

	x_1	x_2	x_3	x_4	Pravá strana	Řádkový součet	Poznámka
5	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	A_1	$S_1 = S_5$	opsán 1. řádek
6	$-\frac{a_{11}}{a_{21}}a_{21}$	$-\frac{a_{11}}{a_{21}}a_{22}$	$-\frac{a_{11}}{a_{21}}a_{23}$	$-\frac{a_{11}}{a_{21}}a_{24}$	$-\frac{a_{11}}{a_{21}}A_2$	$-\frac{a_{11}}{a_{21}}S_2 = S_6$	2. ř. nás. $-\frac{a_{11}}{a_{21}}$
7	$-\frac{a_{11}}{a_{31}}a_{31}$	$-\frac{a_{11}}{a_{31}}a_{32}$	$-\frac{a_{11}}{a_{31}}a_{33}$	$-\frac{a_{11}}{a_{31}}a_{34}$	$-\frac{a_{11}}{a_{31}}A_3$	$-\frac{a_{11}}{a_{31}}S_3 = S_7$	3. ř. nás. $-\frac{a_{11}}{a_{31}}$
8	$-\frac{a_{11}}{a_{41}}a_{41}$	$-\frac{a_{11}}{a_{41}}a_{42}$	$-\frac{a_{11}}{a_{41}}a_{43}$	$-\frac{a_{11}}{a_{41}}a_{44}$	$-\frac{a_{11}}{a_{41}}A_4$	$-\frac{a_{11}}{a_{41}}S_4 = S_8$	4. ř. nás. $-\frac{a_{11}}{a_{41}}$

V dalším sečteme řádek 5 s řádkem 6, řádek 5 s řádkem 7 a řádek 5 s řádkem 8, čímž se vyloučí neznámá x_1 . Současně provedeme kontrolu řádkovými součty. Výsledky píšeme dále do tabulky:

Číslo řádku	x_1	x_2	x_3	x_4	Pravá strana	Řádkový součet	Poznámka
9		b_{12}	b_{13}	b_{14}	B_1	$S_5 + S_6 = S_9$	5. ř. + 6. ř.
10		b_{22}	b_{23}	b_{24}	B_2	$S_5 + S_7 = S_{10}$	5. ř. + 7. ř.
11		b_{32}	b_{33}	b_{34}	B_3	$S_5 + S_8 = S_{11}$	5. ř. + 8. ř.

V pokračování tabulky opíšeme řádek č. 9. Hodnoty desátého řádku násobíme činitelem $-\frac{b_{12}}{b_{22}}$, hodnoty jedenáctého řádku činitelem $-\frac{b_{12}}{b_{32}}$. Zároveň provedeme kontrolu řádkovými součty.

Číslo řádku	x_1	x_2	x_3	x_4	Pravá strana	Řádkový součet	Poznámka
12		b_{12}	b_{13}	b_{14}	B_1	$S_9 = S_{12}$	opsán 9. ř.
13		$-\frac{b_{12}}{b_{22}}b_{22}$	$-\frac{b_{12}}{b_{22}}b_{23}$	$-\frac{b_{12}}{b_{22}}b_{24}$	$-\frac{b_{12}}{b_{22}}B_2$	$-\frac{b_{12}}{b_{22}}S_{10} = S_{13}$	10. ř. nás. $-\frac{b_{12}}{b_{22}}$
14		$-\frac{b_{12}}{b_{32}}b_{32}$	$-\frac{b_{12}}{b_{32}}b_{33}$	$-\frac{b_{12}}{b_{32}}b_{34}$	$-\frac{b_{12}}{b_{32}}B_3$	$-\frac{b_{12}}{b_{32}}S_{11} = S_{14}$	11. ř. nás. $-\frac{b_{12}}{b_{32}}$

V dalším sečteme řádek 12 s řádkem 13 a řádek 12 s řádkem 14, čímž vyloučíme neznámou x_2 . Současně provedeme kontrolu řádkovými součty.

Číslo řádku	x_1	x_2	x_3	x_4	Pravá strana	Řádkový součet	Poznámka
15			c_{13}	c_{14}	C_1	$S_{12} + S_{13} = S_{15}$	12. ř. + 13. ř.
16			c_{23}	c_{24}	C_2	$S_{12} + S_{14} = S_{16}$	12. ř. + 14. ř.

V pokračování tabulky opíšeme řádek 15. Hodnoty šestnáctého řádku násobíme činitelem $-\frac{c_{13}}{c_{23}}$. Zároveň provedeme kontrolu řádkovými součty.

Číslo řádky	x_1	x_2	x_3	x_4	Pravá strana	Řádkový součet	Poznámka
17			c_{13}	c_{14}	C_1	$S_{15} = S_{17}$	opsán 15. řádek
18			$-\frac{c_{13}}{c_{23}}c_{23}$	$-\frac{c_{13}}{c_{23}}c_{24}$	$-\frac{c_{13}}{c_{23}}C_2$	$-\frac{c_{13}}{c_{23}}S_{16} = S_{18}$	16. ř. nás. $-\frac{c_{13}}{c_{23}}$

Sečteme řádek 17 s řádkem 18, a tak vyloučíme neznámou x_3 . Současně provádíme kontrolu řádkovými součty.

Číslo řádky	x_1	x_2	x_3	x_4	Pravá strana	Řádkový součet	Poznámka
19				d_{14}	D_1	$S_{17} + S_{18} = S_{19}$	17. ř. + 18. ř.

Z devatenáctého řádku určíme

$$x_4 = \frac{D_1}{d_{14}} ;$$

zároveň vypočteme $c_{14} x_4$, $b_{14} x_4$, $a_{14} x_4$.

Z patnáctého řádku určíme

$$x_3 = \frac{C_1 - c_{14} x_4}{c_{13}} ;$$

zároveň vypočteme $b_{13} x_3$, $a_{13} x_3$.

Z devátého řádku určíme

$$x_2 = \frac{B_1 - b_{13} x_3 - b_{14} x_4}{b_{12}} ;$$

zároveň vypočteme $a_{12} x_2$.

Z prvního řádku pak je

$$x_1 = \frac{A_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - a_{14} x_4}{a_{11}} .$$

Konečnou zkoušku správnosti řešení provedeme dosazením vypočtených hodnot neznámých do druhé, třetí a čtvrté rovnice.

Uvedeme příklad:

$$\begin{aligned} 3,7 x_1 + 1,8 x_2 + 2,5 x_3 - 5,2 x_4 &= 23,0 , \\ 1,8 x_1 + 2,3 x_2 + 4,2 x_3 + 1,2 x_4 &= 30,8 , \\ - 2,8 x_1 - 1,5 x_2 + 1,8 x_3 - 8,6 x_4 &= - 26,5 , \\ - 6,2 x_1 + 0,5 x_2 - 6,2 x_3 + 7,5 x_4 &= - 24,6 . \end{aligned}$$

Vzhledem k přesnosti zadanych koeficientů provedeme potřebná násobení na logaritmickém pravítku. Přitom samozřejmě dbáme všech zásad počítání na logaritmickém pravítku, abychom zbytečným nastavením a odečítáním hodnot nezpůsobili nepřesnost výpočtu.

Poznámka. Pochopitelně tím, že vypočtené koeficienty a hodnoty neznámých se zaokrouhlují, je narušena přesná rovnost částečných součtů a součtů v konečné zkoušce správnosti řešení (zpravidla na posledním desetinném místě), tabulka na další stránce.

$$x_4 = \frac{463,2}{353,13} = 1,31 ;$$

$$259,13 x_4 = 340$$

$$7,67 x_4 = 10,07$$

$$5,2 x_4 = 6,82$$

$$x_3 = - \frac{152,9 - 340}{84,74} = 2,21 ;$$

$$6,14 x_3 = 13,56$$

$$2,5 x_3 = 5,53$$

Číslo řádku	x_1	x_2	x_3	x_4	Pravá strana	Řádkový součet	Poznámka
1	3,7	1,8	2,5	— 5,2	23,0	25,8	
2	1,8	2,3	4,2	1,2	30,8	40,3	
3	—2,8	—1,5	1,8	— 8,6	—26,5	—37,6	
4	—6,2	0,5	— 6,2	7,5	—24,6	—29,0	
5	3,7	1,8	2,5	— 5,2	23,0	25,8	opsán 1. řádek
6	—3,7	—4,73	— 8,64	— 2,47	—63,3	—82,8 $\doteq$ —82,84	2. ř. nás. $-\frac{3,7}{1,8} \doteq$ $\doteq -2,06$
7	—3,7	—1,982	2,38	—11,37	—35,0	—49,7 $\doteq$ —49,672	3. ř. nás. $-\frac{3,7}{2,8} \doteq$ $\doteq 1,321$
8	—3,7	0,298	— 3,70	4,48	—14,68	—17,31 $\doteq$ —17,302	4. ř. nás. $-\frac{3,7}{6,2} \doteq$ $\doteq 0,597$
9		—2,93	— 6,14	— 7,67	—40,30	—57,04 = —57,04	5. ř. + 6. ř.
10		—0,182	4,88	—16,57	—12,0	—23,872 = —23,872	5. ř. + 7. ř.
11		2,098	— 1,2	— 0,72	8,32	8,498 = 8,498	5. ř. + 8. ř.
12		—2,93	— 6,14	— 7,67	—40,30	—57,04 = —57,04	opsán 9. řádek
13		2,93	—78,60	266,80	193,20	384,30 $\doteq$ 384,33	10. ř. nás. $-\frac{2,93}{0,182} \doteq$ $\doteq -16,1$
14		2,93	— 1,676	— 1,006	11,62	11,87 $\doteq$ 11,868	11. ř. nás. $\frac{2,93}{2,098} =$ $= 1,398$
15			— 84,74	259,13	152,90	327,30 $\doteq$ 327,29	12. ř. + 13. ř.
16			— 7,816	— 8,676	—28,68	—45,172 = —45,172	12. ř. + 14. ř.
17			— 84,74	259,13	152,90	327,30 $\doteq$ 327,29	opsán 15. řádek
18			84,74	94,0	310,30	489,0 $\doteq$ 489,04	16. ř. nás. $-\frac{84,74}{7,816} \doteq$ $\doteq -10,82$
19				353,13	463,20	816,33 = 816,33	17. ř. + 18. ř.

$$x_2 = - \frac{-40,3 + 10,07 + 13,56}{2,93} = 5,69 ;$$

$$1,8 x_2 = 10,22$$

$$x_1 = \frac{23 + 6,82 - 5,53 - 10,22}{3,7} = 3,8 .$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} & 1,8 x_1 + 2,3 x_2 + 4,2 x_3 + 1,2 x_4 = \\ & = 6,84 + 13,09 + 9,28 + 1,57 = 30,78 \doteq 30,8 ; \\ & - 2,8 x_1 - 1,5 x_2 + 1,8 x_3 - 8,6 x_4 = \\ & = - 10,64 - 8,54 + 3,98 - 11,29 = - 26,49 = - 26,5 ; \\ & - 6,2 x_1 + 0,5 x_2 - 6,2 x_3 + 7,5 x_4 = \\ & = - 23,58 + 2,84 - 13,7 + 9,84 = - 24,6 . \end{aligned}$$

Zkouška ukazuje, že vypočtené hodnoty neznámých soustavě rovnic vyhovují.

Poznámka

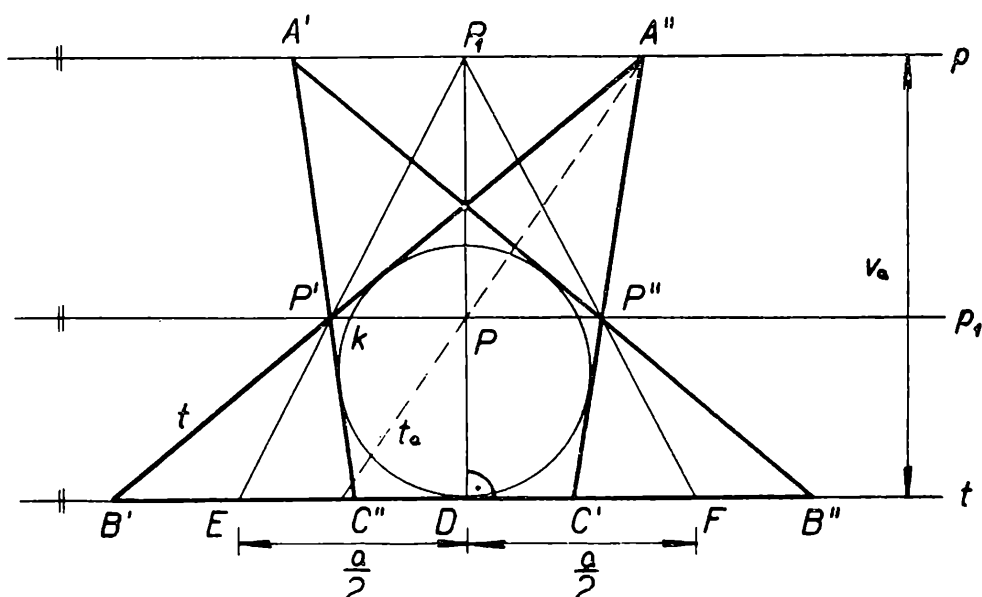
Inž. Dr. EMIL REICH, Praha

K článku doc. K. Drábka *Konstrukce trojúhelníka*, uveřejněnému v *Rozhledech*, roč. 44 (1965—66), č. 1 a 2, připojuji další jednoduché řešení, užívající věty, na kterou jsem v *Rozhledech* upozornil ve svém článku *Řešení trojúhelníka*, a to v roč. 42 (1963—64), č. 4. Tam jsou vyloženy i pomocné pojmy *pól* a *polára* u kružnice. Tato věta zní:

Kružnici vepsanou trojúhelníku ABC označme k a přímku vedenou bodem A rovnoběžně s protější stranou BC označme p ; potom těžnice t_a prochází pólem P přímky p ke kružnici k .

Na základě této věty sestrojíme trojúhelník, je-li dána jeho strana a , k ní příslušná výška v_a a poloměr ϱ kružnice jemu vepsané, takto (viz připojený obrázek):

Sestrojíme nejdříve kružnici k o poloměru ϱ , jež se dotýká tečny t v bodě D . Na přímce t bude ležet daná strana $a \equiv BC$ hledaného trojúhelníka. Ve vzdálenosti v_a vedme přímku p rovnoběžnou s přímkou t , na ní bude zřejmě ležet třetí vrchol našeho trojúhelníka. Pól přímky p ke kružnici k označme P ; jím procházející přímku rovnoběžnou s t i s p označme p_1 ; její pól P_1 ke kružnici k je průsečík přímky P s přímkou PD . Na přímce t nanese na každou stranu od bodu D poloviční délku $\frac{a}{2}$ dané strany našeho trojúhelníka a získané body E, F spojme s bodem P_1 . Přímky EP_1 a FP_1 protínají přímku p_1 v bodech P' a P'' . Úsečka $P'P''$ promítá se ze všech bodů přímky p zřejmě do stejně dlouhých úseček délky a na přímce t . Najdeme-li na přímce p takový bod, aby jeho spojnice s body P' a P'' byly tečny kružnice k , bude tím úloha řešena. Stačí tedy vést např. bodem P' tečnu t' ke kružnici k



a její průsečík s p je vrchol A' hledaného trojúhelníka. Druhá tečna z něho vedená ke kružnici k , prochází totiž nutně bodem P'' , jak plyne z výše uvedené věty, uvážíme-li, že těžnice t_a půlí protější stranu $B'C'$ i úsečku $P'P''$ (takže prochází bodem P). Trojúhelník $A'B'C'$ řeší tedy naši úlohu, v obr. 1 je zakresleno ještě druhé, souměrné řešení $A''B''C''$. Z obr. 1 je také vidět, že musí být $v_a > \rho$, aby úloha byla řešitelná. Zbývající diskusi provede čtenář snadno sám.

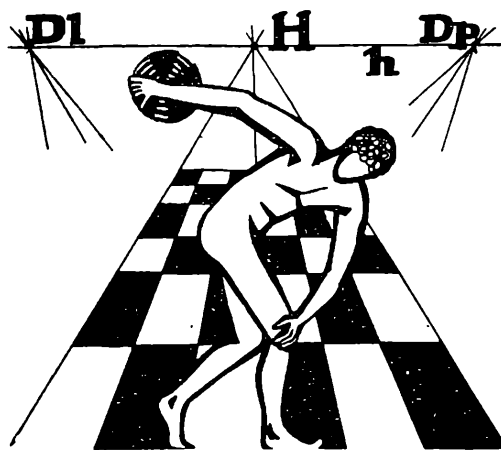
Konkurs na návrhy úloh pro matematickou a fyzikální olympiádu

Jednota čs. matematiků a fyziků vyzývá jako spolupořadatel matematické a fyzikální olympiády (MO, FO) své členy a ostatní zájemce, aby zasílali návrh na přípravné a soutěžní úlohy pro MO na adresu Ústřední výbor matematické olympiády, Praha 1-Nové Město, Žitná 25, pro FO na adresu Ústřední výbor fyzikální olympiády, krukám předsedy prof. dr. R. Košťála, Brno, Čápkova 34.

Text a řešení každé úlohy (originál a jeden opis) je třeba napsat vždy na zvláštní list papíru formát A 4. Došlé návrhy budou recenzovány a za každou přijatou úlohu bude vyplácena odměna ve výši 50 Kčs v kategoriích A, B a C a 30 Kčs v kategorii D. Při recenzii bude přihlédnuto k původnosti úlohy a odměna může být popřípadě zvýšena.

Nepřijaté úlohy budou autorům vráceny. Dispoziční právo s přijatými a odměněnými úlohami i právo úprav pro účely MO nebo FO mají ústřední výbory MO a FO a autor bere na sebe závazek, že tyto úlohy utají, aby správný průběh olympiád nebyl narušen.

Ústřední výbor JČMF



Otáčení

OLDŘICH JENIŠTA, ČVUT, Praha

Mnohé úlohy v deskriptivní geometrii vyžadují, aby určitý geometrický útvar, který je v obecné poloze, byl převeden do polohy zvláštní. Např. má-li se v promítání Mongeově zjistit skutečná velikost úsečky, která je v obecné poloze, musí být tato úsečka uvedena do polohy rovnoběžné s některou průmětnou, nebo přímo převedena do průmětny. Do průmětny úsečku uvedeme tak, že ji otočíme třeba kolem jejího půdorysu do půdorysny. Říkáme také, že úsečku do půdorysny sklopíme. Nebo chceme-li zjistit skutečný tvar a velikost nějakého rovinného útvaru v obecné poloze, musíme otočit rovinu s tímto útvarem třeba do polohy rovnoběžné s nárysnou kolem některé hlavní přímky roviny, a to takové, která je rovnoběžná s nárysnou, tedy kolem některé frontální přímky. Atd.

Abychom mohli útvar otočit co nejsnadněji, třeba vhodně určit jednak osu otáčení, jednak rovinu, do které by bylo vhodné útvar otočit. Při otáčení opisují všechny body otáčeného útvaru kruhové dráhy a středy všech kružnic otáčení leží na ose otáčení. Poloměr otáčení každého otáčeného bodu je roven vzdálenosti toho bodu od osy otáčení, resp. od středu otáčení. Délky kruhových oblouků, které každý otáčený bod opíše, jsou ovšem různé, ale úhel, o který se každý bod daného útvaru otočí, je stejný pro každý otáčený bod.

Zdálo by se, že určit vhodnou osu otáčení není obtížné. Avšak přesvědčíme se, že někdy je nejen určení osy dosti těžká věc, ale dokonce může být i samotné provedení otočení útvarů spojeno s mnohými překážkami.

V tomto článku nehodláme seznamovat čtenáře se všemi obtížemi, které se mohou vyskytnout při některých konstrukcích, nýbrž pone-

cháme jeho vlastnímu důvtipu, aby dokázal najít v různých úlohách nejvhodnější způsob konstrukce. Pro ten účel připojujeme několik příkladů. Nechtě se čtenáři sami pokusí úlohy vyřešit. Do lhůty jednoho měsíce od vydání tohoto čísla Rozhledů mohou čtenáři zaslat redakci řešení s popsáním způsobu řešení a jeho odůvodněním. Jména správných řešitelů budou uveřejněna v některém z příštích čísel. Rovněž budou pak uveřejněna řešení těch příkladů, které se nepodařilo čtenářům vyřešit.

Čtenářům, kteří se vynasnaží o řešení připojených úloh, přejeme hodně úspěchu!

Cvičení

1. Je dána rovina ρ $(-5, 2; 4, 2; 5)$ a úsečka AB [A $(-4; 7, 8; 5, 4)$, B $(1; 0, 5; 2)$]. Najděte přímku $o \perp \pi$, kolem které by se dala úsečka AB otočit do roviny ρ . Určete, kolik řešení má tato úloha a v případě, že je víceznačná, proveďte jen jedno řešení.

2. Je dána úsečka AB [A $(-5, 8; 5, 3; 1, 6)$, B $(1, 6; 8, 6; 6, 8)$], přímka $p \perp \pi$ procházející bodem C $(4, 2; 3, 8; 0)$ a přímka $o \parallel p$, procházející bodem D $(-0, 9; 2, 6; 4)$. Úsečku AB otočte kolem přímky o tak, aby se stala různoběžnou s přímkou p . Určete, kolik řešení má tato úloha a v případě, že je víceznačná, proveďte jen jedno řešení.

3. Úsečku AB [A $(-3, 8; 6; 3, 5)$, B $(4; 1; 6, 2)$] otočte kolem osy $o \perp \pi$ do takové polohy, aby její půdorys a nárys byly navzájem souměrné podle osy x .

4. Je dána přímka $a \equiv AB$ [A $(-4, 7; 4; 5, 6)$, B $(-0, 2; 1; 0, 8)$] a bod C $(3, 6; 4, 2; 3, 6)$. Podle libovolně zvolené osy o otočte přímku a tak, aby $^2\pi$ procházela bodem C .

5. Přímku $a \equiv AB$ [A $(-4; 6, 8; 2, 6)$, B $(2, 4; 0, 6; 5, 4)$] otočte kolem libovolně zvolené osy $o \perp \pi$ tak, aby její nárys byl rovnoběžný s půdorysem.

6. Kolem osy $o \perp \pi$ a procházející bodem A $(0; 1, 5; 0)$ otočte rovinu ρ $(-4, 5; 5; 4, 8)$ do polohy kolmé k nárysně.

7. Otočte rovinu ρ $(-3, 5; 4, 5; 2, 7)$ kolem osy $o \perp \pi$ a procházející bodem A $(0, 2, 3; 0)$ do polohy rovnoběžné s osou x . Určete počet řešení, narýsujte však jen jedno.

8. Rovinu ρ , procházející osou x a bodem A $(-0, 6; 3; 2, 7)$, otočte kolem osy $o \perp \pi$ a procházející bodem B $(0; 3, 9; 0)$ do polohy rovnoběžné s osou x .

9. Je dán trojúhelník ABC [A $(-3; 1; 2)$, B $(0; 6; 6, 5)$, C $(4; 2, 5; 4, 5)$]. Sestrojte jeho skutečnou velikost tím, že jej postupným otáčením kolem libovolně volených os kolmých vždy k některé z průmětů π a ν přivedete do polohy rovnoběžné s nárysnou. Kolik takových otočení je při nejmenším třeba?

10. Otočte rovinu ρ $(-6; 9; 8, 5)$ kolem osy z tak, aby po otočení procházela bodem A $(0, 5; 3; 4, 5)$. Kolik řešení má tato úloha?

11. Je dána rovina ρ $(-4; 4, 5; 4)$ a úsečka AB [A $(-4; 5, 5; 4)$, B $(0; -0, 5; 1, 5)$]. Rovinu ρ otočte kolem libovolně zvolené osy $o \perp \pi$ tak, aby úsečka AB ležela v otočené rovině. Kolikaznačná je tato úloha?

Tyto příklady jsou též vhodné pro přípravu k přijímací zkoušce z deskriptivní geometrie na vysoké školy (např. na stavební fakultu).

Některá shodná zobrazení v prostoru

HELENA HOFMANOVÁ, Praha

V článku předpokládám znalost základních druhů shodných zobrazení v rovině a základů stereometrie. Naším úkolem bude zjistit, co odpovídá známým rovinným shodnostem v prostoru.

Přecházíme-li od rovinné geometrie ke stereometrii, přechází úloha přímky na rovinu. Obdobou osově souměrnosti bude v prostoru zřejmě souměrnost podle roviny. Jako je tomu u osy souměrnosti, budou všechny body roviny souměrnosti totožné se svými obrazy. Není-li bod A bodem roviny souměrnosti σ , je jeho obrazem bod souměrně sdružený k bodu A podle paty kolmice vedené z bodu A k rovině σ .

Nabízí se otázka, zda se v některé rovině projeví toto zobrazení jako osová souměrnost. Zřejmě musí taková rovina obsahovat obrazy všech bodů, které v ní leží. Snadno zjistíme, že to jsou všechny roviny kolmé k rovině souměrnosti. Musí totiž obsahovat dvojice odpovídajících bodů, jejichž spojnice jsou vždy kolmé k rovině souměrnosti.

Všimneme-li si přiřazení bodů v rovině ρ kolmé k rovině souměrnosti σ , zjistíme, že body průsečnice $\rho \cap \sigma \equiv p$ jsou samodružné. Každé dva body A, A' , které si odpovídají a neleží na průsečnici p , jsou podle přímky p souměrné. Říkáme, že souměrnost podle roviny σ indukuje v rovině ρ osovou souměrnost. Lze tedy považovat souměrnost podle roviny za zobecnění osově souměrnosti v rovině na trojrozměrný prostor.

Budeme-li analogicky hledat zobrazení, které v prostoru odpovídá středové souměrnosti, bude to souměrnost podle osy.

Přiřazení bodů se liší od přiřazení v souměrnosti podle roviny jen tím, že pata kolmice vedené obecným bodem k ose souměrnosti zaujme místo paty kolmice vedené tímto bodem k rovině souměrnosti.

Všechny samodružné body vyplní osu souměrnosti, která je samodružnou přímkou. Ostatní samodružné přímky musí kolmo protínat osu souměrnosti. Osová souměrnost na nich indukuje středovou souměrnost (na přímce). Středem je průsečík samodružné přímky s osou souměrnosti.

Napadne vás, že dvě různoběžné samodružné přímky mohou určit samodružnou rovinu. Je-li jednou z těchto přímek osa souměrnosti, potom samodružná rovina obsahuje přímku samodružných bodů. V takové rovině indukuje osová souměrnost v prostoru osovou souměrnost v rovině. Jsou-li obě samodružné přímky kolmé k ose souměrnosti a protínají se, musí jejich průsečík ležet na ose souměrnosti. Získaná samodružná rovina ρ je pak kolmá k ose souměrnosti. V těchto rovinách indukuje prostorová osová souměrnost středovou souměrnost v rovině. Jediným samodružným bodem je průsečík roviny ρ s osou souměrnosti. Tento bod je patou všech kolmic vedených body roviny ρ k ose souměrnosti, a tedy středem souměrnosti v rovině.

Mimo souměrnost podle osy naleznete v prostoru ještě jedno zobrazení, které indukují v samodružných rovinách středovou souměrnost. Je to středová souměrnost v prostoru. Má jediný samodružný bod S (střed souměrnosti). Protože každému bodu $X \neq S$ odpovídá bod X' na polopřímce opačné k SX , musí všechny samodružné přímky a roviny procházet středem souměrnosti.

Protože souměrnost podle roviny je shodným zobrazením, mají každé dva odpovídající body touž vzdálenost od libovolně zvoleného bodu roviny souměrnosti. Geometrickým místem bodů v prostoru, které mají od daných dvou bodů A, B stejnou vzdálenost, je tedy rovina souměrnosti těchto dvou bodů. Této vlastnosti využijeme při konstruktivních úlohách.

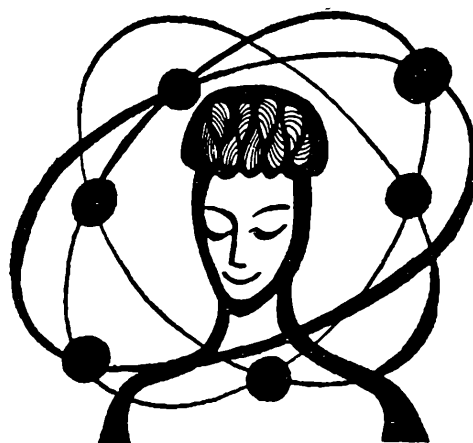
Příklad. Geometrickým místem středů všech koulí, které procházejí danými třemi body A, B, C (které neleží v přímce), je útvar obsahující všechny body, které mají od bodů A, B a C stejné vzdálenosti. Je to průsečnice rovin souměrnosti bodů A, B a A, C . Aby se jejich roviny souměrnosti protínaly, nesmějí body A, B a C ležet v jedné přímce.

Podobně jako v rovině při konstrukcích některých útvarů využíváme jejich souměrnosti podle středu nebo osy, můžeme se v prostorových konstrukcích opírat o souměrnost podle středu, osy nebo roviny. Týká se to především rotačních těles a pravidelných mnohostěnů.

Středovou souměrnost v rovině je možno považovat za zvláštní případ otáčení, kde úhel otáčení je 180° . Chceme-li zavést otáčení (rotaci) v prostoru, bude středu otáčení odpovídat osa otáčení, jejíž všechny body budou samodružné. Každým bodem A , který neleží na ose otáčení, je možno k ní vést kolmou rovinu. Říkejme jí rovina otáčení. Bodu A bude odpovídat bod A' v rovině otáčení tak, že vzdálenost $AS = A'S'$ a velikost úhlu otáčení $\sphericalangle ASA' = \alpha$ je konstantní. S je samodružný bod roviny otáčení, tzv. její průsečík s osou otáčení.

S otáčením kolem osy se velmi často setkáváme v deskriptivní geometrii a rýsování. Při sestavení skutečné velikosti útvaru, který leží v rovině α různoběžné s průmětnou (označíme π), je osou otáčení stopa roviny α daného útvaru. Úhlem otáčení je úhel, který svírají roviny α, π . Při otáčení je možno si představit souvislý pohyb každého bodu po kružnici, jejíž střed je patou kolmice vedené daným bodem k ose otáčení. Prakticky bývá dán průmět útvaru do roviny. Tento průmět a útvar otočený do průmětny si pak odpovídají v osové afinitě. Stojí za povšimnutí, že afinita není shodné ani podobné zobrazení.

Všimneme si ještě posunutí. Stejně jako v rovině je posunutí v prostoru určeno velikostí, směrem a smyslem posunutí (stručně říkáme vektorem posunutí). Úsečky spojující odpovídající body jsou rovnoběžné a shodné. Pokud vektor posunutí je nenulový, neexistují žádné samodružné body. Na všech přímkách a ve všech rovinách patřících směru posunutí indukují posunutí v prostoru posunutí na přímce nebo v rovině. Je pozoruhodné, že tyto přímky a roviny jsou samodružné, ačkoli toto zobrazení nezná samodružných bodů.



FYZIKA

ALOIS SKYVA, Olomouc

Od teploty 0°C k teplotě 0°K

V článku je přehledně shrnuta vývojová cesta získávání stále nižších teplot až po nejnižší dosud získané teploty.

1. Úvod

Fyzika nízkých teplot nachází stále širší uplatnění v tak důležitých oborech jako je radioelektronika, atomová energetika a raketová technika.

Na stránkách odborných časopisů se setkáváme s pojmem záporné absolutní teploty. Vzniká tu nové odvětví moderní fyziky a bude jistě prospěšné podat přehled tohoto vývoje z hlediska dosahování stále nižších teplot. Nebudou proto v tomto článku popisovány jevy supravodivosti a supratekutosti při nízkých teplotách a podobně.

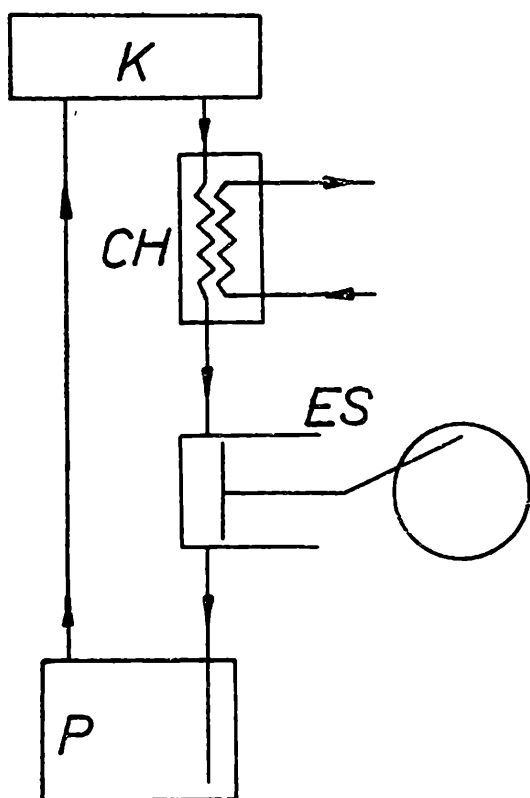
2. Získávání nízkých teplot zkapaňováním plynů

2,1 Plynové chladicí stroje. V plynových chladicích strojích se užívá zpravidla vzduchu jako pracovního plynu. Stroje dělíme na dva druhy:

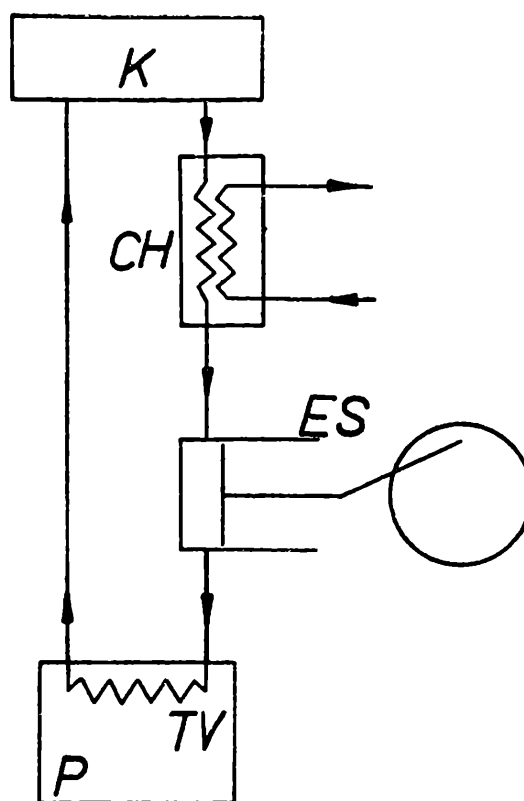
a) Stroje s *n e u z a v ř e n ý m o b ě h e m*. V těchto strojích vzduch obíhá ve vedení nízkého tlaku pod atmosférickým tlakem.

b) Stroje s *u z a v ř e n ý m o b ě h e m*. Jedna a táž hmota plynu zde obíhá v úplně uzavřeném systému pod tlakem v celku větším než je tlak atmosférický.

Na obr. 1 je schéma plynového chladicího stroje s neuzavřeným oběhem. Plyn (vzduch) je nejdříve adiabaticky stlačen v kompresoru K z tlaku p_1 na tlak p_2 a potom ochlazen (v ideálním případě při stejném tlaku) v chladiči CH . Jako chladicí kapaliny můžeme užít vody. Potom



Obr. 1. Schéma plynového chladicího stroje s neuzavřeným oběhem.



Obr. 2. Schéma plynového chladicího stroje s uzavřeným oběhem.

plyn postupuje do expanzního stroje *ES*, kde se adiabaticky rozpíná a koná přitom vnější práci. Mechanická energie takto získaná se obvykle předává kompresoru, který bývá na společné hřídeli s expanzním strojem. Expanzí ochlazený plyn přichází pod nízkým tlakem p_1 do prostoru *P*, který ochlazuje. Z prostoru *P* postupuje potom znova ke kompresoru při teplotě průměrně stejné jako je teplota chlazeného prostoru. Poměr množství tepla pohlceného plynem v ochlazovaném prostoru *P* k rozdílu tepla odevzdaného v chladiči *CH* a pohlceného v prostoru *P* nazýváme chladicím koeficientem.

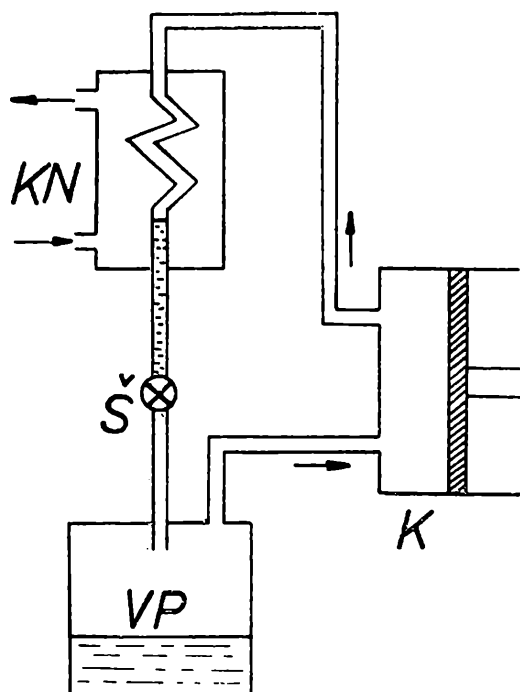
Na obr. 2 je schéma plynového chladicího stroje s uzavřeným oběhem. Schéma je analogické schématu plynového chladicího stroje s neuzavřeným oběhem. Rozdíl je v tom, jak už bylo řečeno výše, že v systému s uzavřeným oběhem nepřetržitě obíhá jedna a táž hmota plynu obvykle při tlaku, převyšujícím atmosférický. Expanzí ochlazený plyn prochází chlazením prostorem *P* přes tepelný výměník *TV*, který je v tepelném kontaktu s tímto prostorem.

Nevýhodou plynových chladicích strojů je malá účinnost. Nízká účinnost popsanych plynových (vzduchových) chladicích strojů vedla k tomu, že byly vytlačeny kompresními chladicími stroji odpařovacími.

Plynových chladicích strojů se užívá jen tam, kde se užívá vzduch jako chladicí látka. Malá účinnost počátečních typů plynových chladicích strojů se vysvětluje hlavně tím, že expanzní stroje v nich pracovali při vysoké teplotě. Možnost práce expanzních strojů při nízkých teplotách stanovil G. Claude roku 1913, tedy mnohem později, než byly popsány plynové chladicí stroje zkonstruovány (1851–1873).

2,2 Kompresní chladicí stroje odpařovací. U kompresních chladicích strojů odpařovacích se odvádí teplo od prostředí s nízkou teplotou pomocí vypařování jakékoli vhodné kapaliny ve výparníku. První chladicí stroj tohoto typu zkonstruoval J. Perkins již v roce 1834.

Jako pracovní látky je možno užít např. čpavku NH_3 (K. Lindé, r. 1876). Schéma kompresního chladicího stroje odpařovacího je na obr. 3.



Obr. 3. Schéma kompresního chladicího stroje odpařovacího.

Chladicí stroj se skládá z těchto částí:

Výparníku VP, ve kterém se pohlcuje teplo z okolního nízkoteplotního prostředí (v domácích ledničkách to bývá soustava trubek, navinutých kolem mrazicího oddělení).

Kompresoru K, který slouží na stlačení páry a k jejímu zkapalnění v kondenzátoru.

Kondenzátoru KN, ve kterém se odvádí teplo stlačené a zajišťují teplotní podmínky pro kondenzaci páry pod tlakem vyvíjeným kompresorem.

Škrtecího ventilu Š, pomocí kterého stlačená kapalina se rozpíná do výparníku při téměř konstantní enthalpii. (Rozpínání při konstant-

ní enthalpii, $H = U + pV = \text{const.}$, budeme nazývat **škrcením**.) Enthalpie H je stavová funkce, rovná energii rozšířené soustavy. energii rozšířené soustavy dostaneme, když k energii pracovní látky U připočteme potenciální energii zařízení, které ji udržuje na tlaku p a v objemu V .

V jednostupňových kompresních chladicích strojích odpařovacích je výhodné, aby teplota, při které se teplo odvádí od pracovní látky v kondenzátoru byla jen o málo vyšší než okolní teplota (20°C) [4]. Pro volbu vhodné pracovní látky platí potom tato kritéria:

a) Teplota okolního prostředí musí být nižší, než je kritická teplota T_{kr} pracovní látky, aby páru bylo možno zkapalnit stlačením; tlak potřebný pro zkapalnění nesmí být přitom příliš vysoký;

b) teplotu ve výparníku je vhodné volit blízkou bodu varu T_v pracovní látky, aby tlak, při kterém dochází k vypařování, byl blízký tlaku

atmosférickému. Tento požadavek však není nutný. Je jen důležité, aby teplota ve výparníku byla vyšší, než je teplota trojného bodu T_{tr} , aby nedošlo k tuhnutí pracovní látky;

c) pracovní látku je třeba vybírat tak, aby byly třeba nevelké stupně stlačení p_2/p_1 , neboť spotřeba energie rychle roste se stupněm stlačení. Je nutno si uvědomovat, že tato podmínka je v těsném spojení s výběrem hodnoty teploty vypařování;

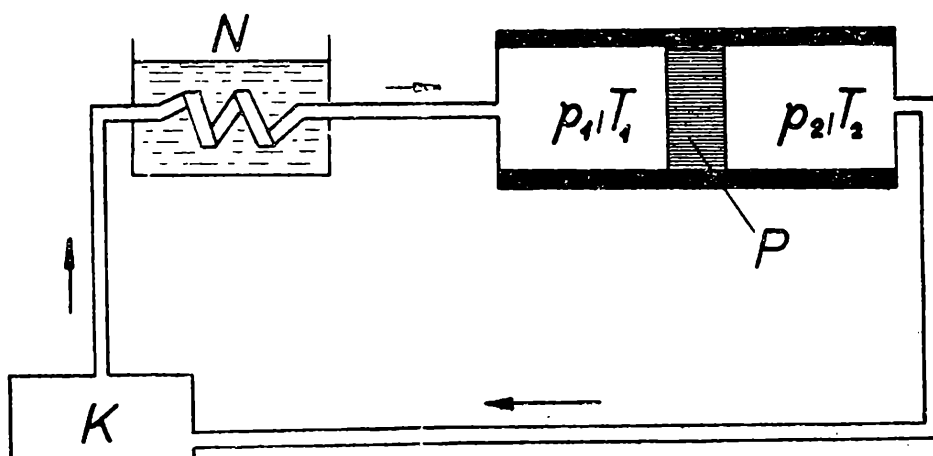
d) konečný výběr pracovní látky je určen srovnáním termodynamických vlastností (tj. hodnoty chladicího koeficientu apod.) a praktickými důvody využití stroje, neboť některé látky s dobrými termodynamickými vlastnostmi mohou být jedovaté nebo vyvolávat silnou korozi aparatury.

Pro stroje, které pracují s teplotami vypařování vyššími než $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$, výše uvedená kritéria vedla k užití takových pracovních látek, jako kysličník uhličitý CO_2 , kysličník siřičitý SO_2 , nebo již dříve uvedený čpavek NH_3 .

K získání teplot $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ a nižších pomocí kompresních chladicích strojů odpařovacích je třeba užít dvou nebo více stupňového uspořádání (kaskádový cyklus). Pro zkapalnění dusíku je možno užít např. čtyřstupňového uspořádání, v němž pracovními látkami jsou po řadě čpavek NH_3 , etylén C_2H_4 , metan CH_4 a dusík N . O propracování této metody se zasloužil zvláště W. H. Keesom v roce 1933. Podle Keesoma [4] teplota kondenzace čpavku je $298\text{ }^{\circ}\text{K}$ při $10,2\text{ kp.cm}^{-2}$, etylénu $242\text{ }^{\circ}\text{K}$ při 19 kp.cm^{-2} metanu $172\text{ }^{\circ}\text{K}$ při $24,7\text{ kp.cm}^{-2}$ a dusíku $114,6\text{ }^{\circ}\text{K}$ při $18,6\text{ kp.cm}^{-2}$.

Bod varu těchto látek při tlaku 1 kp.cm^{-2} je u čpavku $239,8\text{ }^{\circ}\text{K}$, ethylénu $169,3\text{ }^{\circ}\text{K}$, metanu $111,7\text{ }^{\circ}\text{K}$ a u dusíku $77,3\text{ }^{\circ}\text{K}$.

2.3. Ochlazování užitím Jouleova — Thompsonova efektu. V zařízení Joule a Thompsona (obr. 4) kompresor K proháněl plyn nej-



Obr. 4. Schéma zařízení Joule a Thompsona.

dříve nádobou N , chlazenou vodou, kde se plynu odebíralo teplo stlačení. Potom pórovitou přepážkou P , která byla dobře izolována od okolního prostředí tepelnou izolací. Během krátké doby bylo dosaženo stacionárního režimu s tlaky p_1 a p_2 a teplotami T_1 a T_2 . Proces probíhá při konstantní enthalpii, tj.

$$H_1 = U_1 + p_1 v_1 = U_2 + p_2 v_2 = H_2.$$

Uvedené veličiny vztahujeme na 1 mol.

Joule a Thompson zjistili, že u mnohých plynů, jako např. u vzduchu, kyslíčníku uhličitého, kyslíku a dusíku je teplota T_2 po průchodu přepážkou nižší než teplota T_1 na vstupu. Pozdější výzkumy (1902–1933) ukázaly, že všechny plyny se mohou jak ochlazovat, tak ohřívat v závislosti na hodnotě počátečního tlaku a teploty. Teplota T_i pro $p \rightarrow 0$, při níž $Jouleův - Thompsonův$ je v vymizí (kladný efekt se mění v záporný či naopak) se nazývá teplota inverze. Při teplotě větší než je teplota inverze je $Jouleův - Thompsonův$ efekt vždy záporný pro všechny tlaky p , tj. $T_2 > T_1$.

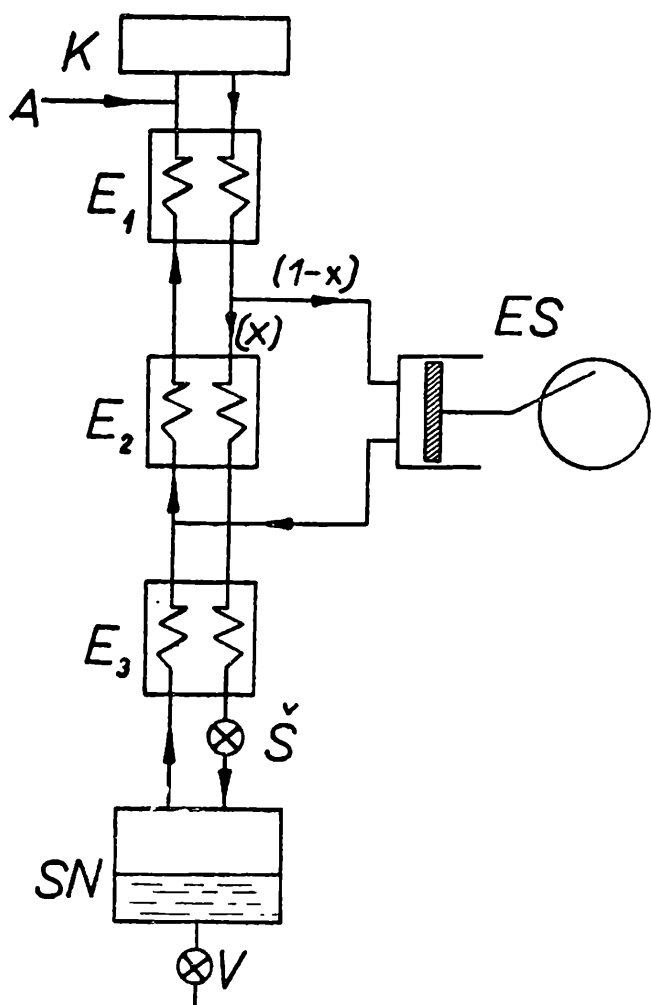
2,4 Metoda Lindeho. K. Linde a Hampson nezávisle na sobě navrhli v roce 1895 metodu zkapalňování, která využívá ochlazení při škrcení stlačeného plynu. Je to v podstatě $Jouleovo - Thompsonovo$ rozšíření při konstantní enthalpii.

Škrcení vyvolává ochlazení plynu, jestliže jeho počáteční teplota je menší než teplota inverze. Poněvadž teplota inverze pro vzduch je $603^\circ K$, tak výchozí teplota $293^\circ K$ je přípustná. Za účelem dosažení vyššího koeficientu zkapalnění (Koeficient zkapalnění je definován jako poměr množství zkapalněného plynu k celkovému množství plynu stlačeného) a tedy zmenšení spotřeby energie na získání jednoho litru kapaliny, začalo se užívat předběžného ochlazení stlačeného plynu.

Schéma jednoduchého zkapalňovače Lindeho s předběžným ochlazením je na obr. 5. Přívod plynu je v místě A . Stlačený plyn jde z kompresoru K přes proti proudový tepelný výměník E_1 . Po předběžném ochlazení ve výparníku VP prochází druhým protiproudovým tepelným výměníkem E_2 a škrticím ventilem $\check{S}$. Zkapalněný plyn se vypouští ventilem V ze shromažďovací nádrže SN . Při zkapalňování vzduchu se pro předběžné ochlazení často užívají čpavkové chladicí stroje, které ochlazují vzduch na teplotu průměrně $-45^\circ C$. Při užití kaskádních kompresních strojů se dosáhne ještě nižší teploty předběžného ochlazení.

Zkapalněný vzduch je slabě modře zbarvená, lehce pohyblivá kapalina hustoty $0,93 \text{ kg/dm}^3$ a s teplotou varu za normálního tlaku 760 torrů $80,1^\circ K$. Odčerpáváním par se dá snížit teplota bodu varu až na $65^\circ K$, při čemž se ovšem poměr mezi N_2 a O_2 posunuje ve prospěch kyslíku.

Pokud zkapalňujeme vodík v zařízeních založených na Lindeho metodě je nutné předběžné ochlazení vždy, neboť vodík má teplotu inverze



Obr. 5. Schéma jednoduchého zkapalňovače Lindeho s předběžným ochlazením.

204,6 °K. Zpravidla provádíme předběžné ochlazení vysoce stlačeného plynu směsí kapalného kyslíku a dusíku vroucí při sníženém tlaku. Nejnižší teplota, které můžeme takovým způsobem dosáhnout, se pohybuje mezi 54,4 °K pro čistý kyslík a 63,1 °K pro čistý dusík. Jsou to teploty trojného bodu kyslíku a dusíku. Aby se zabránilo velkým ztrátám kapalného vodíku, který se normálně skládá ze 75 % ortovodíku a 25 % paravodíku, při jeho přechovávání v Dewarových nádobách (při samovolné přeměně ortovodíku v paravodík dochází k vylučování tepla, a tím ke zvětšování vypařování kapalného vodíku), provádí se přeměna ortovodíku v paravodík při samotném procesu zkapalnění nebo před ním pomocí katalyzátoru. Jako katalyzátoru lze použít např. aktivní uhlí.

2,5 Adiabatické rozeptnutí. Metoda zkapalnění plynu, založená na užití jevu Jouleova—Thompsonova (škrcení), nemůže být v podstatě tak účinná jako metoda adiabatického rozeptnutí (adiabatické expanse).

Příčinou jsou nevyhnutelné termodynamické nevratné ztráty, které jsou vlastní procesu škrcení. Každá nevratnost zavedená do chladicího cyklu snižuje jeho účinnost.

Při isoentropickém (adiabatickém) rozeptnutí, které je doprovázeno tím, že plyn koná vnější práci, entropie neroste. Proto v těch případech, kdy spád tlaku při rozeptnutí je veliký, nebo probíhá od poměrně vysokých teplot, je adiabatické rozeptnutí výhodnější, nehledě na technické složitosti jeho uskutečnění. Entropie S je stavová funkce soustavy, představované pracovní látkou, která je funkcí vnějších parametrů a teploty T .

Při rozeptnutí v oblasti, kde pracovní látka je blízká ke kritickému bodu (nebo při rozpínání kapaliny), nebo při rozeptnutí mezi poměrně vysokými tlaky, je i proces škrcení vysoce účinný a pro jeho jednoduchost je natolik výhodný, jako proces adiabatického rozeptnutí v expanzním stroji [4].

(Dokončení)

Ťažisko, momenty prvého a druhého stupňa

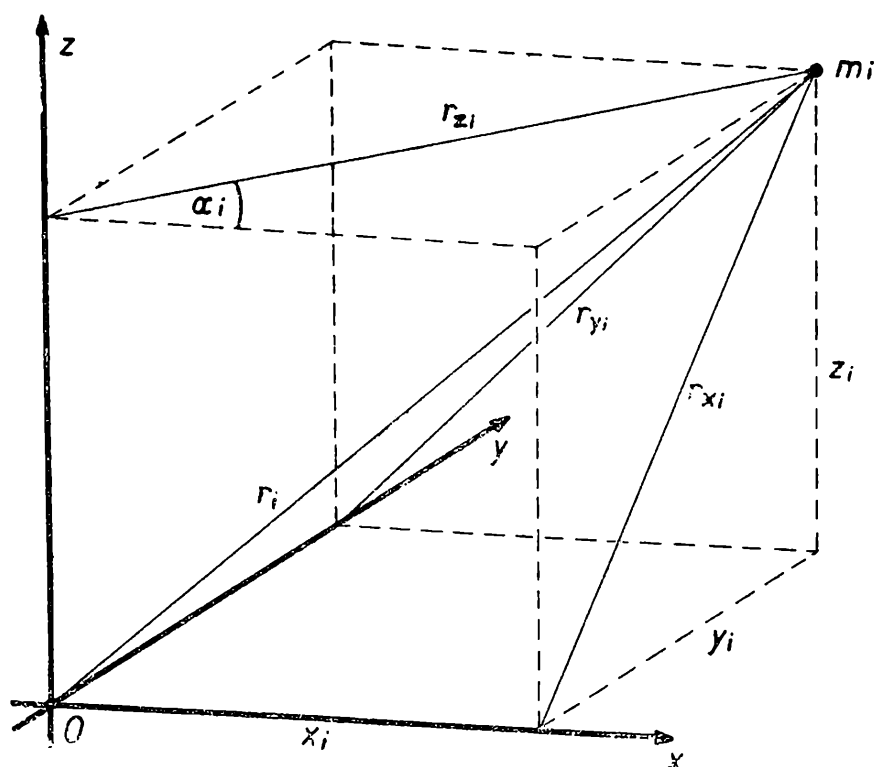
(Pokračovanie)

(Psáno pro Rozhledy)

PROF. DR. ZALÁN BODÓ, Budapešť

II. Momenty druhého stupňa

Vráťme sa k n hmotným bodom, uloženým v ľubovoľnom pravouhlom súradnom systéme xyz . V súhlase s 12. obrázkom označené



Obr. 12

znakmi x_i, y_i, z_i súradnice i -tého bodu, jeho vzdialenosti od súradných osí x, y , resp. z symbolmi r_{xi}, r_{yi} , resp. r_{zi} , a jeho vzdialenosť od počiatku súradného systému r_i . Čísla x_i, y_i, z_i , sú súradnice a teda sú kladné alebo záporné veličiny, veličiny r vyjadrujú vzdialenosti a teda sú kladné čísla. Zrejme platia medzi nimi tieto vzťahy

$$r_{xi}^2 = y_i^2 + z_i^2, r_{yi}^2 = z_i^2 + x_i^2, r_{zi}^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad (7)$$

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (8)$$

Z nich vyplýva

$$r_i^2 = r_{xi}^2 + x_i^2 = r_{yi}^2 + y_i^2 = r_{zi}^2 + z_i^2$$

alebo

$$r_i^2 = \frac{1}{2} (r_{xi}^2 + r_{yi}^2 + r_{zi}^2) \quad (10)$$

Pomocou súradníc a hmôt hmotných bodov definujeme nasledujúce fyzikálne veličiny

$$\Theta_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad \Theta_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \quad \Theta_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \quad (11)$$

ktoré nazveme *momentami druhého stupňa* alebo *momentami zotrvačnosti* *vzhľadom na roviny* yz , zx , resp. xy . Teraz nahliadneme dôvod pomenovania: v súčtoch definujúcich momenty prvého stupňa vystupujú súradnice v prvej mocnine, v súčtoch u momentov druhého stupňa súradnice sú v druhej mocnine.

Keď teraz napr. moment druhého stupňa vzhľadom na rovinu yz napíšeme v tvare

$$\Theta_{yz} = M a_x^2 l_x^2, \quad (12)$$

čiže pomocou momentu druhého stupňa, t. j. rovnicou (12) definujeme a_x , vety I, II a III ostanú v platnosti aj v tomto prípade.

I. Moment vzhľadom na ľubovoľnú rovinu rovná sa momentu vzhľadom na rovnobežnú rovinu idúcu ťažiskom zväčšenému o moment mysleného jediného hmotného bodu hmoty M uloženého v ťažisku.

II. Hodnota čísla a_x sa nezmení, keď hmotu každého hmotného bodu v tom istom pomere zväčšíme alebo zmenšíme alebo keď súradnice každého hmotného bodu v tom istom pomere zväčšíme alebo zmenšíme.

III. Hodnota čísla a_x a momentu vzhľadom na rovinu yz sa nezmení, keď zmeníme ľubovoľne súradnice y_i a z_i .

Z rovnice (12) dá sa vyjadriť

$$a_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2}{l_x^2 \sum_{i=1}^n m_i}}, \quad (13)$$

odkiaľ je zrejmá platnosť vety II a III.

Aby sme dokázali platnosť vety I, vyjadríme moment druhého stupňa vzhľadom na rovinu $y'z'$, idúcu ťažiskom (obr. 1 a 2).

$$\begin{aligned} \Theta'_{yz} &= \sum_{i=1}^n m_i x_i'^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_s)^2 = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 - 2 x_s \sum_{i=1}^n m_i x_i + \\ &\quad + x_s^2 \sum_{i=1}^n m_i. \end{aligned}$$

Pretože podľa (2)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i x_i &= x_s \sum_{i=1}^n m_i, \\ \Theta_{yz} &= \Theta'_{yz} - x_s^2 \sum_{i=1}^n m_i. \end{aligned}$$

Odtiaľ

$$\Theta_{yz} = \Theta'_{yz} + M x_s^2,$$

a úplne podobne platí

$$\Theta_{zx} = \Theta'_{zx} + M y_s^2, \quad (14)$$

$$\Theta_{xy} = \Theta'_{xy} + M z_s^2.$$

Túto vetu nazývame *Steinerovou vetou*. Týmto sme dokázali platnosť vety I aj pre momenty druhého stupňa. Zrejme z momentov zotrvačnosti vzhľadom na rovnobežné roviny je najmenší moment vzhľadom na rovinu idúcu ťažiskom.

Veličiny

$$\Theta_x = \sum_{i=1}^n m_i r_{xi}^2, \quad \Theta_y = \sum_{i=1}^n m_i r_{yi}^2, \quad \Theta_z = \sum_{i=1}^n m_i r_{zi}^2, \quad (15)$$

resp.

$$\Theta_0 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (16)$$

nazývame momentami *druhého stupňa* alebo *momentami zotrvačnosti vzhľadom na osi x, y, z*, resp. *momentom druhého stupňa* alebo *momentom zotrvačnosti vzhľadom na počiatok*.

S ohľadom na vzťahy (7) až (10) platia medzi jednotlivými momentami druhého stupňa tieto relácie

$$\Theta_x = \Theta_{zx} + \Theta_{xy}; \quad \Theta_y = \Theta_{xy} + \Theta_{yz}; \quad \Theta_z = \Theta_{yz} + \Theta_{zx}; \quad (17)$$

$$\Theta_0 = \Theta_{yz} + \Theta_{zx} + \Theta_{xy}; \quad (18)$$

$$\Theta_0 = \Theta_x + \Theta_{yz}; \quad \Theta_0 = \Theta_y + \Theta_{zx}; \quad \Theta_0 = \Theta_z + \Theta_{xy}; \quad (19)$$

$$\Theta_0 = \frac{1}{2} (\Theta_x + \Theta_y + \Theta_z). \quad (20)$$

Vety I až III s malými obmenami platia aj pre momenty zotrvačnosti vzhľadom na osi a vzhľadom na body a dajú sa odvodiť z definícií.

Vety pre momenty zotrvačnosti vzhľadom na os:

I. Pre moment druhého stupňa vzhľadom na os platí z (14) a (17): moment druhého stupňa vzhľadom na ľubovoľnú os rovná sa súčtu momentu druhého stupňa vzhľadom na priamku rovnobežnú s osou, idúcu ťažiskom a momentom druhého stupňa celej hmoty umiestnenej v ťažisku.

II. Napríklad moment druhého stupňa vzhľadom na os x môžeme napísať vo tvare

$$\Theta_x = M \beta_x^2 r_x^2, \quad (21)$$

kde teraz pre r_x volíme ľubovoľný od nuly rôzny, vzhľadom na x-ovú os sa vzťahujúci radiaľny rozmer sústavy bodov.

Napr. vzdialenosť niektorého hmotného bodu od x-ovej osi alebo rozdiel vzdialenosti dvoch hmotných bodov od osi x atď. A tak rovnicou (21) definované β_x zas sa nezmení, keď vynásobíme hmoty alebo súradnice hmotných bodov tou istou konštantou.

III. Hodnota β_x a tak aj Θ_x závisí teraz iba na vzdialenosti jednotlivých hmotných bodov od x -ovej osi. Preto napríklad možno hmotu všetkých hmotných bodov nachádzajúcich sa na plášti valca polomeru r s osou ležiacou v osi x -ovej sústrediť do jediného ľubovoľného bodu plášťa.

Vety pre moment zotrvačnosti vzhľadom na bod:

I. Pre moment druhého stupňa vzhľadom na bod zo (14) a (18) plynie, že moment druhého stupňa vzhľadom na ľubovoľný bod rovná sa súčtu momentu druhého stupňa vzhľadom na ťažisko a moment druhého stupňa celej hmoty uloženej v ťažisku.

Moment druhého stupňa vzhľadom na bod môžeme napísať v tvare

$$\Theta_0 = M \gamma^2 r^2, \quad (22)$$

kde r je ľubovoľný od nuly rôzny, vzhľadom na počiatok sa vzťahujúci radiálny rozmer sústavy bodov (napr. vzdialenosť niektorého hmotného bodu od počiatku, rozdiel vzdialenosti dvoch hmotných bodov od počiatku atď.); vzhľadom na predchádzajúce transformácie γ je tiež konštantné.

III. Hodnota čísla γ a veličiny Θ_0 závisia iba od vzdialenosti hmotných bodov od vzťažného bodu.

Preto napríklad možno všetky hmotné body ležiace na povrchu gule polomeru r so stredom v počiatku sústrediť do ľubovoľného bodu na povrchu.

Zo (17)–(20) vyplýva, že ak napr. všetky hmotné body ležia na x -ovej osi (ide o hmotnú úsečku)

$$\Theta_x = \Theta_{zx} = \Theta_{xy} = 0, \quad (23)$$

$$\Theta_0 = \Theta_z = \Theta_y = \Theta_{yz}. \quad (24)$$

Ak všetky hmotné body ležia v rovine xy (ide o plošný útvar rovinný)

$$\Theta_{xy} = 0, \quad (25)$$

$$\Theta_x = \Theta_{zx}; \quad \Theta_y = \Theta_{yz}, \quad (26)$$

$$\Theta_0 = \Theta_z = \Theta_{yz} + \Theta_{zx} = \Theta_x + \Theta_y. \quad (27)$$

Zas ukážeme na niekoľkých príkladoch, ako môžeme pomocou viet I–III počítať momenty zotrvačnosti bez integrovania.

(Dokončení)

Kvantová teorie světla a Dopplerův jev

J I Ř Í M Í D A, Brandýs n. L.

Profesor pražské techniky H a n s C h r i s t i a n D o p p l e r dospěl roku 1842 na základě vlnové teorie světla k závěru, že přibližováním zdroje světla k pozorovateli se pozorovaný kmitočet světla zvyšuje, a naopak, že při vzdalování světelného zdroje od pozorovatele se pozorovaný kmitočet snižuje.

Tento tzv. *Dopplerův jev* byl sledován nejdříve u pohybujících se mimozemských zdrojů v astronomii. V laboratoři se podařilo Dopplerův jev dokázat roku 1905 J o h a n n u S t a r k o v i u anodových (kanálových) paprsků, tj. u svítících iontů, které dosahují při elektrických výbojích v plynech rychlosti až $10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Roku 1918 ověřil Dopplerův jev Q u i r i n o M a j o r a n a na světelných zdrojích, pohybujících se mechanicky rychlostí kolem $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Dopplerův jev však není jevem ryze optickým. Vyskytuje se u všech druhů vlnění. Snadno jej lze pozorovat u zvukových vln. Projíždí-li například kolem nás pískající lokomotiva, v okamžiku, kdy nás míjí, pozorujeme pokles výšky tónu. Pokud se k nám blíží, vnímáme vyšší frekvenci, než když se od nás vzdaluje. Právě pro akustický Dopplerův jev se na střední škole¹⁾ odvozují i příslušné kvantitativní vztahy, které však platí nejen pro zvukové vlny, ale i jinde. Například pro přijímaný kmitočet f , vzdaluje-li se zdroj vlnění rychlostí v od pozorovatele, který je v klidu vzhledem k prostředí, platí vztah

$$f = \frac{c}{c + v} f_0, \quad (1)$$

kde c je rychlost vlnění v uvažovaném prostředí a f_0 kmitočet, který by přijímal pozorovatel, kdyby byl zdroj vlnění vůči němu v klidu. Zřejmě je frekvence f menší než f_0 . Jestliže se zdroj vlnění pohybuje k pozorovateli rychlostí v , je

$$f = \frac{c}{c - v} f_0, \quad (2)$$

čili frekvence f je větší než f_0 . Dále se ještě uvažují případy, kdy se vzhledem k prostředí pohybuje i pozorovatel.

V tomto článku si ukážeme, že optický Dopplerův jev není spjat jen s vlnovým charakterem světla, nýbrž plyne také z kvantových vlast-

¹⁾ Podle osnov z r. 1961 ve 2. roč. SVVŠ na matematicko-fyzikální větvi.

ností světla. Nejdříve si však připomeňme potřebné pojmy a vztahy kvantové teorie světla.

Základní myšlenka kvantové teorie světla, podle níž není světelná energie pohlcována, ani vyzařována spojitě, pochází od Maxe Plancka z roku 1900. Nejmenší množství světelné energie, které lze vyslat nebo pohltit, závisí na barvě světla; je úměrné frekvenci. Pro světlo o frekvenci f je nejmenší množství energie

$$W = h \cdot f, \quad (3)$$

kde konstanta úměrnosti je tzv. Planckova konstanta $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$. Její hodnota byla určena pokusně nejrůznějšími metodami.²⁾

Podle kvantové teorie každé vyslané nebo pohlcené množství světelné energie, má-li světlo frekvenci f , je celistvým násobkem nejmenšího množství energie daného vztahem (3). Množství energie hf , které nazýváme kvantum energie, je tedy základní nedělitelnou dávkou energie pro světlo o frekvenci f .

V roce 1905 Albert Einstein zveřejnil speciální teorii relativity, která ukázala, že hmotnost a energie téhož útvaru nejsou nezávislé veličiny. Vzroste-li jedna z těchto veličin, zvětší se i druhá. Podobně při úbytku jedné zmenší se také druhá. Tato vzájemná závislost změny energie ΔW a změny hmotnosti Δm je vyjádřena tzv. vztahem ekvivalence

$$\Delta W = \Delta m \cdot c^2,$$

kde $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je rychlost světla ve vakuu. Pro změnu hmotnosti tedy platí

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2}. \quad (4)$$

Vyvstává otázka: Platí zákon zachování hmotnosti, když hmotnost tělesa není veličina stálá? Ve fyzice však máme další zákon zachování energie, jenž platnost zákona zachování hmotnosti potvrzuje. Vzroste-li u některého tělesa v izolované soustavě energie o ΔW , čili hmotnost o hodnotu danou vztahem (4), potom u ostatních těles soustavy se musí zmenšit jejich celková energie o ΔW , čili jejich celková hmotnost o hodnotu danou výrazem (4).

Ještě je třeba připojit jednu poznámku. Těleso, které se pohybuje, má větší energii než totéž těleso, jež je v klidu. Hmotnost tělesa tedy závisí na pohybovém stavu. Tento poznatek vedl k zavedení pojmu klidová hmotnost. Označujeme tak hmotnost tělesa, která mu přísluší, když je v klidu, nebo když se pohybuje velmi pomalu proti rychlosti světla. Ve fyzice probírané na střední škole se předpokládá, a to ob-

²⁾ Např. pomocí fotoelektrického jevu; po změření potřebných veličin se h určí pomocí Einsteinovy fotoelektrické rovnice.

vykle mlčky, že rychlosti těles jsou dostatečně malé, takže pod pojmem hmotnost se na střední škole vždy rozumí klidová hmotnost. Podobně i vzorce a vztahy ze středoškolské fyziky lze většinou používat jen tehdy, pohybují-li se tělesa rychlostí mnohem menší než je rychlost světla. Příkladem takového vzorce je výraz $\frac{1}{2}mv^2$ pro kinetickou energii, druhý pohybový zákon ve tvaru $F = m \cdot a$ apod.

Vyzáří-li atom kvantum energie hf , potom podle vztahu (4) se zmenší jeho hmotnost o

$$\Delta m = \frac{hf}{c^2}.$$

Podle zákona zachování hmotnosti pro soustavu atom a kvantum energie tedy přísluší kvantu energie hf hmotnost

$$m_f = \frac{hf}{c^2}. \quad (5)$$

Lze se tedy postavit na korpuskulární stanovisko — světlo je proud světelných kvant neboli fotonů, tj. částic, které mají hmotnost danu vztahem (5) a energii vzorcem (3). Fotony se od ostatních částic (elektronů, protonů apod.) výrazně liší. Fotony neexistují v klidu, vždy se pohybují, a to rychlostí světla. Jsou-li pohlceny, potom zmizí a jejich hmotnost a energie přejde na atom, který je pohltil. Foton tedy nemá klidovou hmotnost.

Všechny fotony světla téže barvy mají v témž prostředí nejen stejnou rychlost, ale i hybnost, neboť je rovna součinu hmotnosti a rychlosti fotonu. Hybnost fotonu světla o frekvenci f je dána ve vakuu vzhledem k rovnici (5) vztahem

$$p_f = \frac{hf}{c}. \quad (6)$$

Představme si atom v klidu, který vyzáří foton světla o frekvenci f . Hybnost atomu byla před vyzářením fotonu rovna nule. Zákon zachování hybnosti říká, že celková hybnost se nemění, a proto součet hybností atomu $\vec{p}_a$ a emitovaného fotonu $\vec{p}_f$ musí být roven hybnosti atomu, než vyzářil foton, tj. nule. Platí tedy

$$\vec{p}_a + \vec{p}_f = 0,$$

tj.

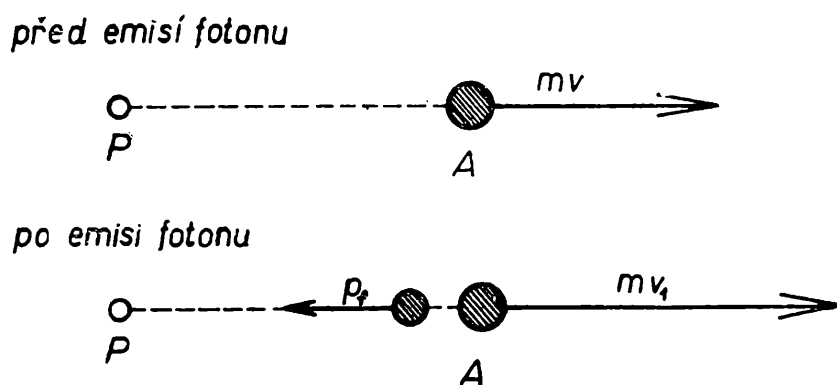
$$\vec{p}_a = -\vec{p}_f.$$

Hybnosti atomu a vyzářeného fotonu jsou opačné vektory, a proto atom po emisi fotonu „odskočí“ v opačném směru, než byl vyzářen foton. Tento jev byl skutečně pozorován.

Reakce atomu při emisi fotonu připomíná zpětný ráz při výstřelu stříelné zbraně. Na probraném jevu se zakládá myšlenka „fotonové rakety“. Pro její realizaci je však nutno vyřešit celou řadu otázek, jako způsob získávání fotonů, jejich směřování apod.

Připomeňme si ještě, jak vykládá emisi fotonu teorie atomu, kterou vypracoval roku 1913 N i e l s B o h r. Elektrony se mohou pohybovat kolem jádra jen po určitých stabilních drahách. Čím je dráha od jádra vzdálenější, tím je energie elektronu vyšší. Přejde-li elektron ze vzdálenější dráhy na některou bližší, ztratí část své energie, přičemž dojde k vyzáření fotonu.

A nyní přistupujeme k výkladu Dopplerova jevu pomocí kvantové teorie světla. V bodě P na obr. 1 je pozorovatel, atom označený A se



Obr. 1

od pozorovatele vzdaluje rychlostí v . Nechť atom vyzáří foton v opačném směru, než se pohybuje, tj. směrem k pozorovateli. Pozorovatel zjistí, že se jedná o foton světla s frekvencí f . Byla-li rychlost atomu v , potom po vyzáření fotonu se změní na hodnotu v_1 , přičemž zřejmě $v_1 > v$. Předpokládejme, že rychlosti v a v_1 jsou dostatečně malé proti rychlosti světla. Klidovou hmotnost atomu před vyzářením fotonu označme m . Změnu hmotnosti atomu při vyzáření fotonu zanedbáme, takže klidová hmotnost atomu po vyzáření fotonu bude v našich úvahách také m . Tento předpoklad je jistě přípustný, neboť hmotnost fotonu viditelného světla je podle vztahu (5) řádově 10^{-36} kg, zatímco klidová hmotnost protonu je $1,672 \cdot 10^{-27}$ kg.

Rychlost v_1 lze určit ze zákona zachování hybnosti

$$mv = mv_1 - \frac{hf}{c}, \quad (7)$$

kde pro hybnost fotonu jsme užili vztahu (6).

Předpokládejme, že elektron při přechodu z dráhy vzdálenější na dráhu bližší ztratil energii ΔW . Podle zákona zachování energie a rovnosti (3) platí

$$\Delta W + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv_1^2 + hf \quad (8)$$

Vyloučíme-li z této rovnice v_1 , obdržíme vztah vyjadřující závislost frekvence světla na rychlosti atomu, a tedy kvantitativně popisující Dopplerův jev. Rovnici (7) nejdříve upravíme na tvar

$$mv_1 = mv + \frac{hf}{c}.$$

Tuto rovnici povýšíme na druhou, dělíme $2m$ a tak dostaneme výraz pro $\frac{1}{2}mv^2$, jenž dosadíme do (8). Po úpravě máme

$$\frac{c+v}{c} f + \frac{h}{2mc^2} f^2 = \frac{\Delta W}{h}. \quad (9)$$

Na pravé straně této rovnice je podíl konstanty ΔW (uvažujeme zcela určitý přechod elektronu z jedné dráhy na druhou) a Planckovy konstanty h . Proto lze psát

$$\frac{c+v}{c} f + \frac{h}{2mc^2} f^2 = \text{konst.} \quad (9a)$$

Jestliže klesne rychlost v atomu, potom se při nezměněné velikosti frekvence f zmenší hodnota levé strany rovnice (9a), což však není možné, protože má mít konstantní velikost. Musí se tedy zvětšit frekvence f . Čím je tedy rychlost atomu menší, tím je frekvence větší; největší je zřejmě pro $v = 0$. Při vzdalujícím se zdroji světla je přijímaný kmitočet vždy nižší, než kdyby byl zdroj vzhledem k pozorovateli v klidu.

Vzorce (9a), resp. (9), jsou tedy vzorce pro Dopplerův jev při vzdalujícím se zdroji, ovšem v kvantovém tvaru, neboť obsahují Planckovu konstantu. Nezvyklé hlavně je, že se v nich nevyskytuje frekvence f_0 , kterou by pozorovatel vnímal, kdyby se zdroj vůči němu nepohyboval. Stačí si však uvědomit, že pro $v = 0$, má rovnice (9a) tvar

$$f_0 + \frac{h}{2mc^2} f_0^2 = \text{konst.},$$

a tedy (9a) lze psát

$$\frac{c+v}{c} f + \frac{h}{2mc^2} f^2 = f_0 + \frac{h}{2mc^2} f_0^2. \quad (9b)$$

Jistě si mnohý řekne, jak spolu souvisí rovnice (1) a (9b), jak přejít od kvantové rovnice (9b) k nekvantové (1). Vraťme se na počátek článku. Podle klasického pojetí³⁾ je světelná energie vyzařována v libovolném množství; v tomto případě je tedy nutno v rovnici (3) předpokládat $h = 0$. Položíme-li v rovnici (9b) $h = 0$, dostaneme po úpravě

$$f = \frac{c}{c+v} f_0,$$

což je rovnice (1).

³⁾ Nekvantovou fyziku označujeme názvem *klasická fyzika*.

V tomto článku jsme si na Dopplerově jevu ukázali, jak se vzájemně prolínají vlnové vlastnosti světla s kvantovými. Čtenář si může snadno odvodit i kvantovou obdobu rovnice (2). Změnit je třeba nepatrně jen rovnici (7), ostatní je zcela stejné jako při odvozování rovnice (9b).

Literatura

E. V. Špolskij, *Atomová fyzika I.*, SNTL 1957.
Max von Laue, *Dějiny fyziky*, Orbis 1963.

Fotoluminiscence

Doc. Dr. JOSEF DIBELKA, Praha

V dubnu loňského roku vzpomněl celý svět 10. výročí úmrtí největšího fyzika dvacátého století — Alberta Einsteina. Při té příležitosti tisk se zmínil o stěžejních pracích Einsteina, hlavně pak o těch, které se týkaly principu relativity a nejvýznamnější a kardinální rovnice, která udává vztah mezi hmotou (hmotností) a energií, rovnice

$$E = m \cdot c^2,$$

která dala základ pro uvolňování jaderné energie. Einstein však svými revolučními pracemi zasáhl téměř do všech odvětví fyziky a je právem označován za zakladatele dnešní moderní fyziky. V tomto článku si chceme ukázat, jakým způsobem přispěl k výkladu jevu, který označujeme *fotoluminiscencí*.

Již roku 1905 poukázal Einstein na to, že celá řada experimentálních faktů a vážných teoretických úvah vede nezbytně k představě o nespojitě povaze záření. Z teoretických úvah dospěl k závěru, že záření pozůstává z jednotlivých „atomů“ energie velikosti $h\nu$, kde h je Planckova konstanta ($h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$), ν je kmitočet záření. Tyto „atomy“ energie byly zpočátku nazývány *světelnými kvanty*, dnes se pro ně ustálil název *fotony*. Vyslovil tedy předpoklad, že záření je proud jednotlivých částíček, fotonů. Energie každého fotonu je $\varepsilon = h \cdot \nu$. Je patrné, že fotony mají různou energii podle frekvence záření. Nejmenší energii mají fotony infračerveného, největší roentgenova a γ záření.

Podle již vzpomenuté rovnice, která vyjadřuje vztah mezi energií a hmotou, dostaneme hmotu fotonu, která je vyjádřena výrazem

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h \cdot \nu}{c^2},$$

kde c je rychlost šíření světla ve vakuu. Z Einsteinovy teorie relativity

vyplývá, že velikost hmoty není veličina konstantní. Roste se vzrůstající rychlostí, s jakou se pohybuje, podle vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

kde v je rychlost pohybujícího se tělesa, c rychlost šíření světla ve vakuu, m hmota (hmotnost) za pohybu, m_0 hmota (hmotnost) za klidu.

Hmotu (hmotnost) tělesa při pohybu s malými rychlostmi je možno pokládat pro první přiblížení za konstantní, blíží-li se rychlost rychlosti světla, je vzrůst hmoty velmi patrný.

Foton se pohybuje však rychlostí světla a přitom má hmotu (hmotnost) konečnou. Nutno tedy předpokládat, že foton má klidovou hmotu (hmotnost) nulovou. Tento předpoklad není paradoxní, když uvážíme, že neexistuje žádný systém, ve kterém by byl foton v klidu.

Zavedením fotonu se dospělo opět k názoru, že záření má povahu korpuskulární. Kvantováním zářivé energie objevuje se tedy v názorech na světlo zvláštní dualismus. Některé světelné jevy můžeme vysvětlit jen tehdy, připustíme-li vlnovou podstatu světla (interference, ohyb, polarizace světla). Jiné jevy možno vysvětlit jen tehdy, připustíme-li korpuskulární podstatu světla. Mezi jevy, které se nedají vysvětlit vlnovou povahou světla, patří např. fotoefekt, *Comptonův jev*¹⁾ a *fotoluminiscence*.

Fotoluminiscence vzniká u některých látek po dopadu záření určitých vlnových délek; po dopadu záření látka emituje (vysílá) nové záření. Pro luminiscenci platí *Stokesovo pravidlo*, podle něhož nemá emitované záření více energie, než je energie budícího záření. Není tedy větší kmitočet ν' emitovaného záření, než je kmitočet dopadajícího záření, a jeho vlnová délka λ' není tedy kratší než vlnová délka dopadajícího záření. Platí

$$\nu' \leq \nu; \quad \lambda' \geq \lambda.$$

Stokesovo pravidlo můžeme odůvodnit jenom tehdy, připustíme-li, že světlo jsou letící fotony. Molekula nebo atom absorbuje energii $h\nu$ a může tedy maximálně vyzářit jen stejné množství energie, zpravidla však je vyzářená energie menší; část A dopadající energie se mění v jiné druhy energie. Platí

$$h\nu = h\nu' + A.$$

Podle kvantové teorie jsou elektrony v normálním stavu na nejnižší

¹⁾ *Comptonův jev*. Dopadá-li roentgenovo záření na hmotu, dochází jednak k fotoelektrickému odštěpení elektronů, jednak k rozptylu. Rozborem frekvence rozptýleného záření se ukázalo, že délka vlny se mění. Změnu vlnové délky je možno vysvětlit jen tehdy, když připustíme korpuskulární charakter záření. Klasická vlnová teorie rozptylu roentgenových paprsků je neuspokojující. Podle vlnové teorie by rozptyl byl způsobem „rozkmitáním“ elektronů elektromagnetickým polem dopadající vlny, ale pak frekvence rozptýleného záření musí souhlasit s frekvencí dopadajícího záření.

energetické hladině. Dopadá-li na těleso záření takové vlnové délky, že energie fotonu se rovná rozdílu mezi energií normální hladiny a vyšších energetických hladin, absorbuje elektron tuto energii a přejde na vyšší hladinu. Elektron se dostal do (opticky) *n a b u z e n é h o* stavu, nebo také, jak se říká, elektron je *e x c i t o v á n*. V excitovaném stavu setrvávají elektrony jen velmi krátkou dobu a vracejí se zpět na hladinu nejnižší energie, přičemž přebytečnou energii vyžáří v podobě fotonů.

Podle doby, která uplyne mezi dopadem budícího záření a emisí, dělíme luminiscenci na *fluorescenci* a *fosforescenci*.

O *fluorescenci* mluvíme tehdy, když emise záření následuje ihned po vzbuzení a trvá jen tak dlouho, pokud na těleso dopadá budící záření. Fluorescenci možno pozorovat především u organických látek, např. u benzínu, organických olejů, roztoků barviv apod.; z pevných látek jsou to hlavně sloučeniny uranu.

Jestliže vyzařování energie doznívá ještě po nějakou dobu (asi 10^{-3} až několik hodin) po tom, co budící záření přestalo působit, mluvíme o *fosforescenci*. Toto dlouhotrvající světélkování závisí na teplotě; při zahřátí látky rychle mizí. Množství světla, které lze při buzení fosforescence „nashromáždit“ ve fosforeskující látce, zvané krátce fosfor, je omezeno a z této příčiny nemůže jasnost fosforescence přesahovat určitou hodnotu ani při sebesilnějším buzení.

Zvláště velkou fosforescenci možno pozorovat u určitých krystalických solí, jako *s i r n í k u z i n e č n á t é h o*, *s i r n í k u z i n e č n á t o - k a d e m n á t é h o*, *s i r n í k u s t r o n t n á t é h o*. V těchto krystalech se může elektron působením budící zářivé energie vzdálit úplně ze svého normálního místa a může se pohybovat poměrně dosti dlouho mezi *i o n t y m ř í ž e*, než se vrátí na původní energetickou hladinu a vyžle foton. Kromě toho se může elektron zachytit na některých poruchách v mříži a tím se vzbuzený stav elektronu ještě více prodlouží.

Kromě fluorescence a fosforescence se může vyskytnout ještě *d o - z a ř o v á n í*, které má jen krátké trvání (10^{-3} až 10^{-1} s). Toto záření dostalo název *dosvit*. Rozdíl mezi fosforescencí a dosvitem je ten, že fosforescenci je možno budit jen poměrně do malé jasnosti, kdežto dosvit je úměrný intenzitě buzení.

Fosforescence a fluorescence má celkem dosti značné využití v technické praxi, hlavně osvětlovací. Vnitřní stěna trubic u zářivek je natírána fluoreskující látkou, čímž se zvyšuje účinnost zářivky, fosforeskující látkou jsou natřena „svítící čísla“ apod. Dosvitu se užívá v katodových trubicích pro oscilografy a televizory, ve štítech roentgenových přístrojů aj., tedy všude tam, kde je třeba velké jasnosti a krátkého dosvitu. V laboratorní praxi je možno užít luminiscence k zjištění ultrafialového nebo roentgenova záření; luminiscencí se přeměnění záření neviditelné na viditelné.



Umělé družice a kosmické rakety

P E T R L Á L A, ČSAV, Ondřejov

Další pokračování našich pravidelných přehledů vypuštěných umělých kosmických těles uvádí objekty, vypuštěné do konce roku 1965. Od 1. září 1964, kdy končil minulý přehled, bylo při 146 startech vypuštěno 189 družic a 13 kosmických raket. Při řadě startů bylo vypuštěno několik družic najednou - maximální počet byl osm. Tak velký počet objektů není samozřejmě možno ve stručném přehledu uvést, a proto připomeňme pouze nejdůležitější. Z amerických družic jsou vynechány všechny vojenské, které mají špionážní, navigační nebo komunikační charakter a o nichž nejsou uveřejňovány téměř žádné podrobnosti. Rovněž neuvádíme různé pokusy s novými nosnými raketami, při kterých nebyly vypuštěny funkční objekty.

V uvedeném období bylo vypuštěno celkem 59 družic typu Kosmos. Pohybovaly se po nízkých drahách ve výši 190 až 2 500 km. Prováděly různá měření kosmického prostoru v okolí Země a zkoušely prvky konstrukce družic a kosmických sond (např. meteorologických, komunikačních a lodí s posádkou). Družice se sklonem 65° a 51° se vesměs po osmi dnech letu vracely na Zemi.

Na celkovém počtu kosmických těles se podílel SSSR asi jednou třetinou. Svou družici vypustila raketou *D i a m a n t* také Francie (26. 11. 1965). Ostatní družice (kanadská *A l o u e t t e*, italská *S a n M a r c o* a druhá francouzská *F r 1 A*) byly vypuštěny americkými raketami.

Kromě vědeckých družic byla vypuštěna řada družic pro praktické účely, např. meteorologické *T i r o s 9—10*, komunikační *M o l n i j a 1*

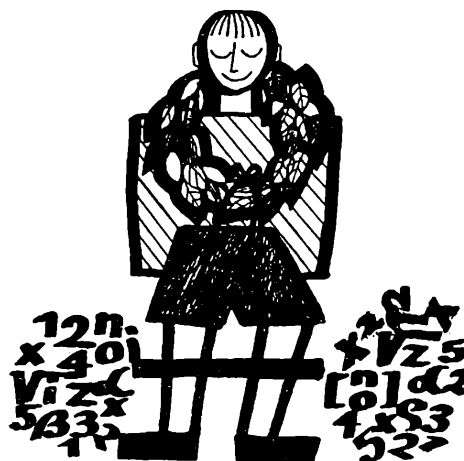
Datum vy- puštění	Název	Stát	Hmot- kg	Výška dráhy km	Sklon °	Poznámka - úkol rakety
1964						
5. 9.	OGO 1	USA	487	281-155 763	31,15	Geofyzikální observatoř
13. 9.	Kosmos 45	SSSR		207- 313	64,89	Výzkum kosmického prostoru
24. 9.	Kosmos 46	SSSR		211- 264	51,25	Výzkum kosmického prostoru
4. 10.	Explorer 21	USA	62	190- 95 595	33,53	Radiační pásy a mag. pole
6. 10.	Kosmos 47	SSSR		174- 413	64,62	Průzkum kos. prostoru
10. 10.	Explorer 22	USA	52	885- 1 077	79,69	Ionosféra; odraz laseru
12. 10.	Voschod 1	SSSR	5 320	178- 409	64,90	První let tříčlenné pos.
14. 10.	Kosmos 48	SSSR		203- 295	65,08	Průzkum kos. prostoru
24. 10.	Kosmos 49	SSSR		264- 466	48,99	Průzkum kos. prostoru
28. 10.	Kosmos 50	SSSR		190- 230	51,23	Průzkum kos. prostoru
5. 11.	Mariner 3	USA	261	obíhá kolem Slunce		Neúspěšná sonda k Mar- su
6. 11.	Explorer 23	USA	134	466- 977	51,95	Registrace mikromete- orů
21. 11.	Explorer 24	USA	9	525- 2 498	81,36	Balón o průměru 3,6 m
21. 11.	Injun 4	USA	40	522- 2 494	81,36	Různé druhy záření
28. 11.	Mariner 4	USA	260	obíhá kolem Slunce		První průzkum Marsu
30. 11.	Zond 2	SSSR	asi 950	obíhá kolem Slunce		Sonda k Marsu - přesta- la předčasně fungovat
9. 12.	Kosmos 51	SSSR		262- 533	48,78	Průzkum kos. prostoru
15. 12.	San Marco 1	I	115	198- 846	37,77	Italská družice
21. 12.	Explorer 26	USA	46	316- 26 191	20,14	Radiační pásy a mag. pole
1965						
11. 1.	Kosmos 52	SSSR		205- 304	65,00	Průzkum kos. prostorů
22. 1.	Tiros 9	USA	138	705- 2 582	95,40	Meteorologická družice
30. 1.	Kosmos 53	SSSR		227- 1 192	48,72	Průzkum kos. prostoru
3. 2.	OSO 2	USA	247	550- 634	32,87	Sluneční observatoř
16. 2.	Pegasus 1	USA	1 452	495- 733	31,73	Registrace mikro- meteorů
17. 2.	Ranger 8	USA	365	Dopadla na Měsíc		Získala 7126 snímků Měsíce
21. 2.	Kosmos 54-56	SSSR		256- 1 729	56,02	Vypuštěny jednou ra- ketou
22. 2.	Kosmos 57	SSSR		165- 427	64,74	Průzkum kos. prostoru
26. 2.	Kosmos 58	SSSR		581- 659	65,00	Průzkum kos. prostoru
7. 3.	Kosmos 59	SSSR		209- 339	64,97	Průzkum kos. prostoru
9. 3.	Sunray 6	USA	23	909- 941	70,08	Krátkovlnné sluneční záření
12. 3.	Kosmos 60	SSSR		201- 287	64,72	Průzkum kos. prostoru
15. 3.	Kosmos 61-63	SSSR		332- 1 840	55,89	Vypuštěny jednou ra- ketou
18. 3.	Voschod 2	SSSR	5 682	173- 495	64,79	První výstup člověka do kosmického prostoru
21. 3.	Ranger 9	USA	365	dopadla na Měsíc		Celkem 5814 snímků Měsíce
23. 3.	Gemini 3	USA	3 175	160- 240	33,00	První manévrování kos- mické lodi
25. 3.	Kosmos 64	SSSR		206- 271	64,98	Průzkum kos. prostoru
6. 4.	Early Bird 1	USA	38	35 003- 36 606	0,13	Aktivní komunikační družice
17. 4.	Kosmos 65	SSSR		210- 342	65,00	Průzkum kos. prostoru
23. 4.	Molniya 1A	SSSR		497- 39 380	65,50	Sovětská komunikační družice
29. 4.	Explorer 27	USA	52	941- 1 317	41,19	Ionosféra; odraz laseru
7. 5.	Kosmos 66	SSSR		197- 291	65,01	Průzkum kos. prostoru
9. 5.	Luna 5	SSSR	1 476	dopadla na Měsíc		Neúspěšný pokus o měkké přistání
25. 5.	Pegasus 2	USA	1 452	502- 740	31,73	Registrace mikro- meteorů
25. 5.	Kosmos 67	SSSR		207- 350	51,81	Průzkum kos. prostoru
29. 5.	Explorer 28	USA	59	190-264 000	34,00	Radiační pásy a mag. pole

Datum vy- puštění	Název	Stát	Hmot- kg	Výška dráhy km	Sklon °	Poznámka - posláni rakety
3. 6.	Gemini 4	USA	3 200	162- 281	32,53	Výstup člověka do pro- storu
8. 6.	Luna 6	SSSR	1 442	minula Měsíc		Neúspěšný pokus o měkké přistání
15. 6.	Kosmos 68	SSSR		205- 334	65,02	Průzkum kos. prostoru
25. 6.	Kosmos 69	SSSR		211- 332	64,89	Průzkum kos. prostoru
2. 7.	Tiros 10	USA	138	751- 837	98,65	Meteorologická družice
2. 7.	Kosmos 70	SSSR		229- 1 154	48,74	Průzkum kos. prostoru
16. 7.	Kosmos 71-75	SSSR		512- 542	56,04	Průzkum kos. prostoru
16. 7.	Proton 1	SSSR	12 200	190- 627	63,44	Kosmické záření s vel- kými energiemi. Nej- těžší družice
18. 7.	Zond 3	SSSR	asi 950	obíhá kolem Slunce		Snímky odvrácené str. Měsíce
20. 7.	Vela 5-6	USA	148	101 859-121 453	34,27	Registrace jaderných pokusů
20. 7.	ORS 3	USA	6	153-112 694	34,39	Kosmické záření
23. 7.	Kosmos 76	SSSR		261- 530	48,78	Průzkum kos. prostoru
30. 7.	Pegasus 3	USA	1 453	535- 567	28,80	Registrace mikromete- orů
3. 8.	Kosmos 77	SSSR		200- 291	51,84	Průzkum kos. prostoru
14. 8.	Kosmos 78	SSSR		206- 329	68,92	Průzkum kos. prostoru
21. 8.	Gemini 5	USA	3 560	197- 303	32,61	Osmidenní let dvou kosmonautů
25. 8.	Kosmos 79	SSSR		211- 359	64,90	Průzkum kos. prostoru
3. 9.	Kosmos 80-84	SSSR		1 357- 1 555	55,98	Průzkum kos. prostoru
9. 9.	Kosmos 85	SSSR		212- 319	64,90	Průzkum kos. prostoru
18. 9.	Kosmos 86-90	SSSR		1 380- 1 690	56,03	Průzkum kos. prostoru
23. 9.	Kosmos 91	SSSR		212- 342	64,98	Průzkum kos. prostoru
4. 10.	Luna 7	SSSR	1 506	dopadla na Měsíc		Neúspěšný pokus o měkké přistání
14. 10.	Molniya 1B	SSSR		491- 39 943	65,19	Sovětská komunikační družice
14. 10.	OGO 2	USA	522	414- 1 510	87,36	Geofyzikál. observatoř
16. 10.	Kosmos 92	SSSR		212- 353	89,86	Průzkum kos. prostoru
19. 10.	Kosmos 93	SSSR		220- 522	48,93	Průzkum kos. prostoru
28. 10.	Kosmos 94	SSSR		211- 293	64,96	Průzkum kos. prostoru
2. 11.	Proton 2	SSSR	12 200	191- 637	63,45	Kosmické záření s vys. energiemi
4. 11.	Kosmos 95	SSSR		207- 521	48,40	Průzkum kos. prostoru
6. 11.	Geos 1	USA	175	1 115- 2 277	59,38	Geodetická družice
12. 11.	Věněra 2	SSSR	963	obíhá kolem Slunce		Sonda k Venuši
16. 11.	Věněra 3	SSSR	960	obíhá kolem Slunce		Sonda k Venuši
19. 11.	Explorer 30	USA	57	704- 891	59,72	Krátkovlnné sluneční záření
23. 11.	Kosmos 96	SSSR		227- 310	51,88	Průzkum kos. prostoru
26. 11.	Kosmos 97	SSSR		213- 2 144	48,42	Průzkum kos. prostoru
26. 11.	Asterix 1	F	39	572- 1 808	34,24	První francouzská dr., vypuštěna vlastní ra- ketou
27. 11.	Kosmos 98	SSSR		216- 570	65,03	Průzkum kos. prostoru
29. 11.	Alouette 2	C	145	505- 2 987	79,82	Kanadská družice
29. 11.	Explorer 31	USA	100	505- 2 978	79,82	Průzkum ionosféry
3. 12.	Luna 8	SSSR	1 552	dopadla na Měsíc		Neúspěšný pokus o měkké přistání
4. 12.	Gemini 7	USA	3 830	161- 330	28,87	Čtrnáctidenní let dvou kosmonautů
6. 12.	FR 1A	F	60	746- 762	75,87	Francouzská družice
10. 12.	Kosmos 99	SSSR		199- 320	64,99	Průzkum kos. prostoru
15. 12.	Gemini 6	USA	3 830	161- 258	28,96	První setkání družic ve vesmíru
16. 12.	Pioneer 6	USA	64	bíhá kolem Slunce		Průzkum meziplane- tárního prostoru
17. 12.	Kosmos 100	SSSR		648- 670	65,03	Průzkum kos. prostoru
21. 12.	Kosmos 101	SSSR		260- 550	48,98	Průzkum kos. prostoru
28. 12.	Kosmos 102	SSSR		218- 278	65,03	Průzkum kos. prostoru
28. 12.	Kosmos 103	SSSR		590- 610	65,03	Průzkum kos. prostoru

atd. V SSSR byly provedeny dva kosmické lety s posádkou; při letu *V o s c h o d u 2* vystoupil člověk do volného prostoru. Při pěti letech *G e m i n i 3–7* bylo dosaženo prvního setkání družic ve vesmíru, čtrnáctidenního letu a výstupu kosmonauta do prostoru. Z kosmických sond jsou nejdůležitější *M a r i n e r 4*, který předal ze vzdálenosti přes 210 miliónů km snímky Marsu a měsíční sondy *R a n g e r 8–9*, jež získaly tisíce snímků Měsíce z bezprostřední blízkosti (podrobnosti až 25 cm). Sovětský *Z o n d 3* vyfotografoval zbývající neznámou část odvrácené strany Měsíce.

Řešení úloh

Z MINULÉHO ROČNÍKU



(Dokončení)

Matematika:

9. Do kruhové výseče o poloměru r a středovém úhlu $2\alpha < \pi$ vepište rovnoramenný trojúhelník s vrcholem ve středu oblouku tak, aby jeho obsah byl největší. Řešte bez diferenciálního počtu.

(Došlo 21 řešení)

Jaromír Hroník

Řešil Luděk Zajíček, 3. tř. SVVŠ, Ostrava 4:

Jsou dva druhy trojúhelníků vepsaných. Trojúhelníky prvního druhu jsou souměrné podle osy SO , na obr. 1 je to $\triangle AOB$. Druhý druh tvoří trojúhelníky AOB' a $A'OB$, kde A' , B' jsou body souměrně sdružené podle K a K' (obr. 2). Tyto trojúhelníky jsou zřejmě souměrné podle osy SO .

Nejprve uvažujme trojúhelníky prvního typu, tj. AOB . Označme D průsečík základny AB s osou OS , úsečka $DS = x$. Pak obsah P_{AOB} je zřejmě

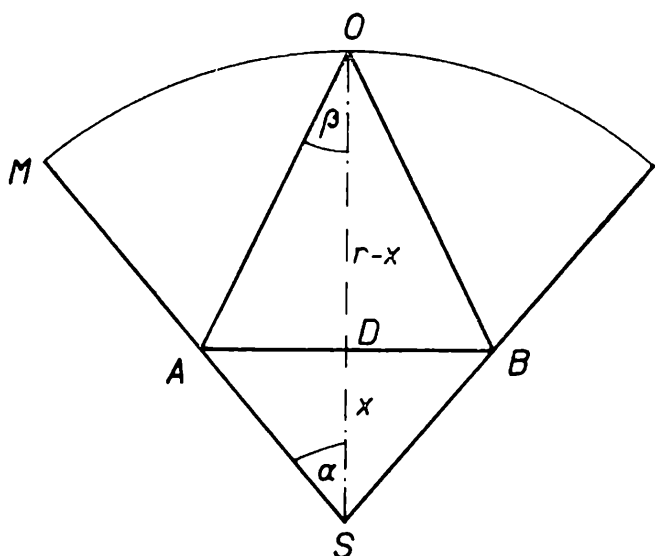
$$P_{AOB} = (r - x) \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

což lze psát

$$P_{AOB} = \left[\left(\frac{r}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{r}{2} \right)^2 \right] \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

P_{AOB} je tedy maximální pro $x = \frac{r}{2}$. V tom případě $\beta = \alpha$. Tento

trojúhelník je vepsaný právě tehdy, když $\alpha \leq 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, tj. $\alpha \leq 60^\circ$.



Obr. 1

Je-li $\alpha > 60^\circ$, bude mít maximální obsah trojúhelník MOL .

O druhém druhu trojúhelníků platí, že vrcholový úhel při O je $180^\circ - 2\alpha$. Z obr. 2 je patrné, že součet úhlů $OB'S$ a OAS je 180° , neboť $\sphericalangle OB'S = \sphericalangle OBL$ a $\sphericalangle OAS = \sphericalangle OBS$. Ze čtyřúhelníka $SAOB'$ plyne, že $\sphericalangle AOB' = 180^\circ - 2\alpha$. Ze vzorce pro obsah rovnoramenného trojúhelníka

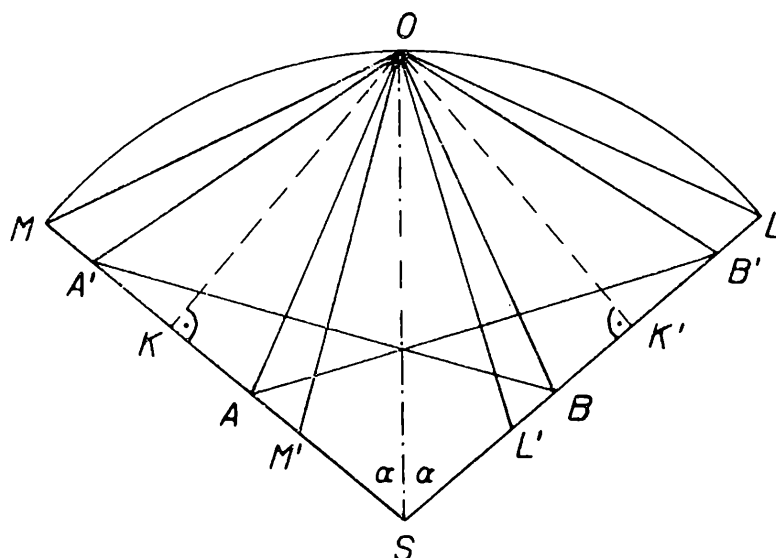
$$P = \frac{1}{2} a^2 \sin \gamma$$

plyne, že obsah trojúhelníka AOB' závisí na velikosti ramen $AO =$

$= OB'$. Protože A leží na úsečce MM' (má-li být $\triangle AOB'$ vepsaný), jsou hledanými trojúhelníky maximálního obsahu $OM'L$ a OML' , sdružené podle osy SO , neboť mají nejdelší ramena (obr. 2). Tyto trojúhelníky jsou vepsané, leží-li M' na úsečce MS , neboli, je-li

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \alpha \geq 0,$$

tj. $\alpha \leq 60^\circ$.

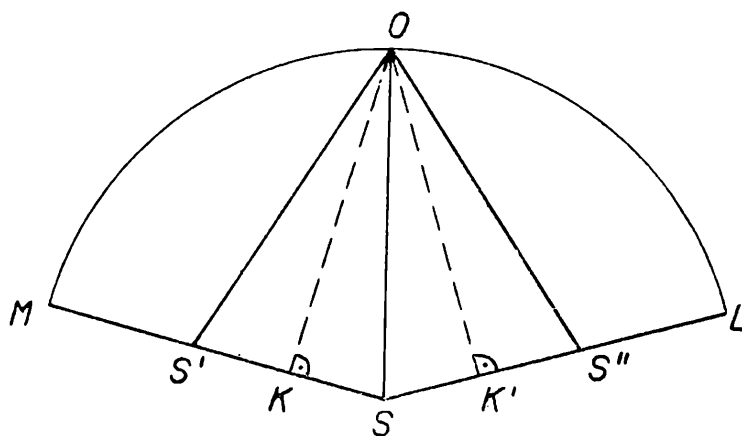


Obr. 2

Bude-li $\alpha \geq 60^\circ$, budou maximální trojúhelníky SOS' a SOS'' , kde S' , resp. S'' je bod souměrně sdružený s S podle K , resp. K' (obr. 3).

Porovnejme maximální trojúhelníky obou druhů!

1. $\alpha < 60^\circ$, pak bod A_1 (obr. 4) úhlu SOA_1 padne na MS právě tak jako bod M' . Protože $\sphericalangle A_1OB_1 = 2\alpha$ a $\sphericalangle M'OL = 180^\circ - 2\alpha$, platí



Obr. 3

$\sin A_1OB_1 = \sin M'OL$. Vzájemná velikost trojúhelníků A_1OB_1 a $M'OL$, resp. MOL' závisí na vzájemné velikosti OA_1 a $OM = OM'$.

Má-li být $OM' > OA_1$, musí $\sphericalangle SM'O > \sphericalangle SA_1O$,

$$\sphericalangle SM'O = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}; \quad \sphericalangle SA_1O = 180^\circ - 2\alpha,$$

proto

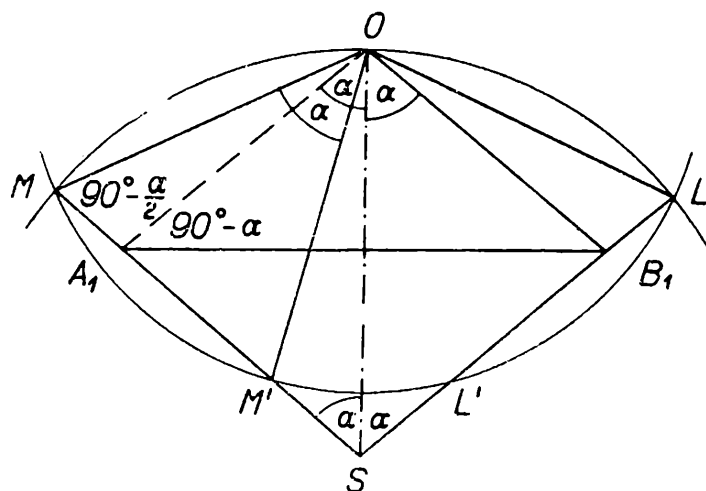
$$\frac{5}{2}\alpha > 90^\circ, \quad \alpha > 36^\circ;$$

jsou tedy pro případ $36^\circ < \alpha < 60^\circ$ hledány trojúhelníky OML' a OLM' .

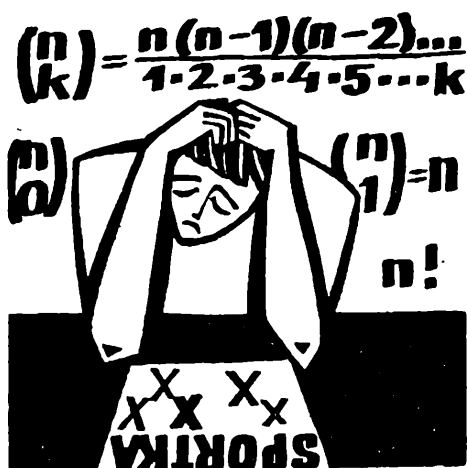
Je-li $\alpha = 36^\circ$, pak $OM = OA_1$, hledány trojúhelníky jsou OML' , $OL'M$, OA_1B_1 .

Je-li $\alpha = 60^\circ$, potom $M' \equiv S$, $L' \equiv S$, $A_1 \equiv M$, $B_1 \equiv L$. Maximální obsah mají tři trojúhelníky: MOS , LOS a MOL .

Je-li $60^\circ < \alpha < 90^\circ$, má $\triangle MOL$ úhel $MOL = 180^\circ - \alpha$, v trojúhelníku $S'OS$ je úhel $S'OS = 180^\circ - 2\alpha$, pak $\sin \sphericalangle MOL > \sin \sphericalangle S'OS$; protože také $MO > S'O$, je maximální obsah trojúhelníka MOL .



Obr. 4



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

Matematický problém

EVŽEN ŘÍMAN, CSc., Praha

V čísle 10 minulého ročníku Rozhledů uveřejnili jsme úkol:

Nájdite všetky čísla, ktoré majú tú vlastnosť, že premiestnením poslednej číslice pred všetky ostatné, vznikne celistvý násobok pôvodného čísla. (Netreba vypisovať čísla líšiace sa od pôvodného len viacnásobným cyklickým opakováním jeho číslic.)

Řešení zaslalo celkem 15 řešitelů, z nich 9 (označených hvězdičkou) oznámilo v š e c h n a vyhovující čísla, jichž bylo 36.

Seznam řešitelů: [1]* Duby Tomáš, 2. roč. SPŠE Bratislava; [2] Dvořáková Milada, Brandýs n/Labem; [3] Dr. Hlaváček Milan, Praha 10, Strašnice; [4]* Horáček Milan, 9. tř. SVVŠ Ledec n. Sázavou; [5]* Jiříčka Josef, 3. roč. SVVŠ Hostinné; [6] Kaňovský Vladimír, 2. roč. SVVŠ Uh. Hradiště; [7] Manoušek Zdeněk, SPŠS Brno; [8] Petroš Jaroslav, 2. tř. SVVŠ Jeseník; [9]* Polcar Pavel, 1. roč. SVVŠ V. Meziříčí; [10]* Porubský Štefan, 3. roč. SPŠ Zvolen; [11]* Příhoda Jaroslav, 3. tř. SVVŠ Čakovice; [12]* Růčka Ján, 2. roč. SPŠE Bratislava; [13]* Saida Václav 2. roč. SPŠE Brno; [14] Slanina Zdeněk, 2. roč. SPŠCh Brno; [15]* Štingl Jaroslav, prom. pedagog SPŠ keram., Karlovy Vary.

Autor článku se pokusí podat kolektivní vzorové řešení s přihlédnutím k postupu jednotlivých řešitelů, kteří tak současně zjistí, která fakta bylo záhodno ještě uvést a odvodit.

1. Označení veličin.

A budiž hledané číslo, mající tu vlastnost, že se přemění v násobek sebe sama, je-li poslední číslice posunuta na první místo;

n je počet číslic čísla A (kdežto řešitelé kladli $n = \text{řád čísla } A$);

a_{n-1} značí první číslici čísla A ; a_0 poslední číslici čísla A ;

B je číslo vzniklé předsunutím číslice a_0 před číslici a_{n-1} ;

k budiž násobící faktor, pro který platí

$$B = kA. \quad (1)$$

2. *Podmínky* pro a_{n-1} , a_0 , k (zpracovali řešitelé [3, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 15]).

Nulou nemůže být ani prvá číslice ($a_{n-1} \neq 0$), ani poslední ($a_0 \neq 0$). Poslední číslice nemůže být menší než prvá (hlásí řešitel [9]), čili musí platit $a_0 \geq a_{n-1}$, neboť po přesunutí by vzniklo číslo menší než původní. Řešitelé [3] a [11] stanoví, že pro násobící faktor platí

$$1 \leq k \leq 9, \quad (2)$$

neboť obě čísla, původní i nové, mají stejný počet číslic.

Případ, že by násobící faktor k byl roven jedné, by vedl k $A = B$, což je triviální případ, který vyloučíme z dalších úvah (navrhli [5], [10], [13]). Kdyby $k = 1$, vyhovovala by všechna čísla mající všechny číslice stejné, tedy nejmenší z nich 11, 22, 33, 99; což vyloučíme. Platí tedy $1 < k \leq 9$, nebo raději

$$2 \leq k \leq 9. \quad (3)$$

Posledná číslice a_0 musí být větší nebo rovna součinu faktoru k a prvej číslice a_{n-1} , čiže musí

$$a_0 \geq k \cdot a_{n-1}, \quad (4)$$

ako hlási s. [12]. Dôkaz vyplýva ihneď z vyjadrenia čísel A , B jak v ďalšom ukážeme.

Najdôležitejšia je pre nás veta: Násobiaci faktor k sa maximálne rovná poslednej číslici a_0 , alebo je menší, čiže

$$k \leq a_0. \quad (5)$$

Dôkaz riešiteľa [12]: Podľa (2) platí $k > 1$; prvá cifra $a_{n-1} \geq 1$. Znásobením obidvoch nerovností máme $k \cdot a_{n-1} > 1$. Užitím (4) dostaneme $a_0 \geq k \cdot a_{n-1} > 1$. No platí tiež

$$\text{čiže} \quad a_0 \geq k \cdot a_{n-1} \geq k \quad a_0 \geq k.$$

Rovnosť môže nastať iba ak prvá číslice $a_{n-1} = 1$.

Spojením s podmínkou (3) dostávame tedy znění v dalším užitě

$$2 \leq k \leq a_0 \leq 9, \quad (5a)$$

které poskytuje všechny dovolené hodnoty dvojic k , a_0 .

3. *Násobící metoda* byla asi u většiny řešitelů východiskem postupu, neboť je nejsnadnější. Řešitel [4] ji popisuje takto: Dejme tomu, že hledané číslo A končí číslicí $a_0 = 6$ a násobící faktor je $k = 4$. Pak nutně musí číslo $4A = B$ končit číslicí 4 (neboť $6 \cdot 4 = 24$). Proto A musí končit dvojčíslím 46. Protože $46 \cdot 4 = 184$, končí 4 A dvojčíslím 84 a číslo A trojčíslím 846. Dále $846 \cdot 4 = 3384$, $\Rightarrow$ 4 A končí trojčíslím 384 a číslo A čtyřčíslím 3846. Ježto $3846 \cdot 4 = 15384 \Rightarrow$ 4 A končí skupinou 5384 a číslo A skupinou 53846. Konečně $53846 \cdot 4 = 215384$, proto 4 A končí skupinou 15384 a číslo A skupinou 153846. Protože

$153\,846 \cdot 4 = 615\,384$, což se liší od čísla $153\,846$ jen přesunutím číslice 6, jsme u konce a hledané číslo $A = 153\,846$. Kontrola: $4A = 615\,384$.

Při skutečném výpočtu není třeba násobit celou skupinu, nýbrž pokaždé jen další číslici, jak ukázal [15]: „Přesunutím poslední číslice 6 na začátek, zvětší se číslo 4krát, tj. na místě desítek (v čísle A) musela být poslední cifra součinu $6 \cdot 4 = 24$, tedy 4. Na místě set pak poslední cifra výsledku $4 \cdot 4 + 2 = 18$, tj. 8, dále poslední číslice $8 \cdot 4 + 1 = 33$, tj. 3 atd.“

4. *Dělicí metoda* je opakem předešlé. Vychází se od čísla $4A = B$, jehož prvou číslicí je a -, které dělíme faktorem k .

Příklad 1. Vezměme $a_0 = 9$, $k = 4$. Postup (podle řešitele [15]): Přesunutím číslice $a_0 = 9$ na začátek nové číslo se zvětší $k = 4$ krát. Musí tedy předchozí číslice čísla $4A$ být $9 : 4 = 2$ (zbytek 1), před ní stojící cifra se tedy dostane dělením $12 : 4 = 3$ (zbytek 0), dále opět $03 : 4 = 0$ (zbytek 3), pak $30 : 4 = 7$ (zbytek 2), potom $27 : 4 = 6$ (zbytek 3), ko-

TABULKA výsledků

k	a_0	A	n	S
2	2	105 263 157 894 736 842	18	81
2	3	157 894 736 842 105 263	18	81
2	4	210 526 315 789 473 684	18	81
2	5	263 157 894 736 842 105	18	81
2	6	315 789 473 684 210 526	18	81
2	7	368 421 052 631 578 947	18	81
2	8	421 052 631 578 947 368	18	81
2	9	473 684 210 526 315 789	18	81
3	3	1 034 482 758 620 689 655 172 413 793	28	126
3	4	1 379 310 344 827 586 206 896 551 724	28	126
3	5	1 724 137 931 034 482 758 620 689 655	28	126
3	6	2 068 965 517 241 379 310 344 827 586	28	126
3	7	2 413 973 103 448 275 862 068 965 517	28	126
3	8	2 758 620 689 655 172 413 793 103 448	28	126
3	9	3 103 448 275 862 068 965 517 241 379	28	126
4	4	102 564	6	18
4	5	128 205	6	18
4	6	153 846	6	27
4	7	179 487	6	36
4	8	205 128	6	18
4	9	230 769	6	27
5	5	102 040 816 326 530 612 244 897 959 183 673 469 387 755	42	189
5	6	122 448 979 591 836 734 693 877 551 020 408 163 265 306	42	189
5	7	142 857	6	27
5	8	163 265 306 122 448 979 591 836 734 693 877 551 020 408	42	189
5	9	183 673 469 387 755 102 040 816 326 530 612 244 897 959	42	189
6	6	1 016 949 152 542 372 881 355 932 203 389 830 508 474	58	261
		576 271 186 440 577 966		
6	7	1 186 440 677 966 101 694 915	58	261
		254 237 288 135 593 220		
6	8	1 355 932 203 389 830 508 474	58	261
		338 983 050 847 457 627		
6	9	1 525 423 728 813 559 322 033	58	261
		576 271 186 440 677 966		
7	7	1 014 492 753 623 188 405 797	22	96
7	8	1 159 420 289 855 072 463 768	22	102
7	9	1 304 347 826 086 956 521 739	22	99
8	8	1 012 658 227 848	13	54
9	9	10 112 359 550 561 797 752 808 988 764 044 943 820	44	198
		224 719		

nečně $36 : 4 = 9$ (zbytek nula). Dospěli jsme k výchozí číslici $a_8 = 9$ a zbytek dělení je nula, proto počet je ukončen. Kurzívové číslice určují hledané číslo A $(4, 9) = 230\,769$.

Znak $A(4,9)$, kterého v dalším budeme užívat, znamená, že nalezené číslo A má násobící faktor $k = 4$ a poslední číslici $a_0 = 9$, čili budeme užívat znaku $A(k, a_0)$ pro hledaná čísla při zvoleném k, a_0 .

5. *Určení celkového počtu řešení.* Dělicí metoda nejlépe ukazuje, že možný a také skutečný počet vyhovujících hledaných čísel A je roven počtu dvojic, které možno utvořit z dovolených hodnot pro a_0 a pro k . Podle podmínky (5a), tj. $2 \leq k \leq a_0 \leq 9$ je totiž patrné, že pro $k = 2$ je možné $a_0 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, tj. celkem 8 případů; pro $k = 3$ je možné $a_0 = 3, 4, 5, \dots, 9$, tj. celkem 7 případů; pro $k = 4$ je možné $a_0 = 4, 5, \dots, 9$, tj. 6 případů, atd. až pro $k = 9$ je možné pouze $a_0 = 9$, tj. 1 případ.

Dohromady tedy textu úlohy bude vyhovovat celkem $8 + 7 + 6 + \dots + 2 + 1 = 36$ hodnot pro hledané číslo A .

Z 15 řešitelů určilo všech 36 hodnot 9 řešitelů, kteří jsou v seznamu označeni hvězdičkou.

Všech 36 hodnot je uvedeno v tabulce na str. 428, kde k je násobící faktor, a_0 je poslední číslice hledaného čísla A ; A je hledané číslo, n je počet číslic čísla A a S značí ciferný součet čísla A .

(Dokončení)

Kombinatorická úloha

Jak ukazují zkušenosti z posledních Mezinárodních matematických olympiád, mívají naši žáci dosti často potíže s řešením kombinatorických úloh, které se v této soutěži téměř pravidelně objevují. Jsou to úlohy rázu spíše zábavného, jako jsou různé oblíbené „zebry“, známé z nedělních příloh novin, ovšem se zajímavým matematickým jádrem. Jejich řešení vyžaduje spíše systematické a organizované provádění jednoduchých úsudků než mechanické použití početních postupů. Tím ovšem nejsou cizí duchu moderní matematiky, ale právě naopak.

Přinášíme zde jednu takovou elementární kombinatorickou úlohu, upravenou podle vzoru z jistého francouzského matematického časopisu. Věříme, že ji naši čtenáři hravě rozřeší. Někteří z nich jistě objeví

i možnosti dalšího zobecnění této úlohy:

K úschově tajné dokumentace si chce ředitelství velkého podniku pořídit zvláštní sejf opatřený větším počtem zámků. Klíče od těchto zámků mají být rozděleny mezi ředitele, jeho tři náměstky a pět dalších úředníků tak, aby se sejf mohl otevřít jedině tehdy, jsou-li přítomni (samozřejmě se svými klíči) buď 1. ředitel a alespoň jeden jeho náměstek, nebo 2. všichni tři náměstci, nebo 3. dva náměstci a aspoň dva z pěti úředníků.

Kolika zámky minimálně bude třeba sejf opatřit, kolik klíčů od jednotlivých zámků bude třeba a jak mají být klíče rozděleny?

Rozbor a řešení úlohy přineseme v některém z příštích čísel. Přijde-li na řešení dříve, pošlete nám je a napište nám i svůj názor na úlohy tohoto typu.

František Zitek



R Ů Z N Ě • R Ů Z N Ě

Z dějin Státního pedagogického nakladatelství

V Ě R A B U D Í N S K Á, Praha:

Rozvoj průmyslové výroby ve druhé polovině 18. století vedl k budování manufaktur a rozvoji dělby práce. S rozvojem hospodářství a s ním spojeným rozvojem kulturního života stoupá potřeba gramotných lidí (umějících číst, psát a počítat). Protože školství a všeobecné vzdělání mělo však nízkou úroveň, rozhodla se r. 1774 vláda provést školskou reformu. Podle ní měla být v každé obci zřízena obecná škola, kde by se učilo číst, psát a počítat, ve větších městech škola hlavní a v Praze a Brně ještě škola pro výchovu učitelů.

Významnou událostí bylo zrušení jezuitského řádu r. 1773, protože vliv tohoto řádu na školství byl dosud značný. Od této doby nabývali na universitě převahy světští pracovníci, začíná se zde vyučovat dříve zakázanému dějepisu a přírodním vědám. Stát převzal dozor

nad vysokými školami a podporoval to, co je prospěšné nové nastupující třídě — buržoazii — rozvoj školství a vzdělanosti lidu. Byla vytvořena zemská školní komise, jejímž úkolem bylo mimo jiné zajistit vydávání učebnic. Aby bylo možno zvládnout tento obtížný úkol, byla zemská školní komise dne 25. 5. 1776 státem darována bývalá jezuitská tiskárna v Klementinu. Z tiskárny pak vznikl zvláštní nakladatelský ústav — dnešní *Státní pedagogické nakladatelství*, jehož 190. výročí vzniku si letos připomínáme.

V tiskárně se tiskly učebnice a levné knihy. Velmi důležité bylo rozhodnutí věnovat z každého 1000 výtisku 250 výtisků zdarma chudé školní mládeži. Byly zde vydávány učebnice pro školy, učebnice řečí, pomocné knihy pro učitele, školní zákony, pedagogické časopisy, in-

strukce, ale také divadelní hry, zpěvníky a později i česká a německá bible a jiná náboženská literatura.

To byl počátek nakladatelské činnosti *Státního nakladatelství* — vydávání čítanek a slabikářů bylo určeno především pro nezamožné vrstvy, které by se byly jinak nenaučily číst. Činnost Státního nakladatelství byla velmi významná pro rozvoj národního života. Vzdělaný národ mohl lépe pochopit snahy buditelů, mohl snáze překonat dobu politického útlaku a tak dokázat, že je silný a schopný vlastní existence.

Po roce 1918 se Státní nakladatelství plně postavilo do služeb nové republiky: nové učebnice, nové mapy, populární poučné sbírky, levná vydání Jiráskových děl, Palackého Dějiny — to je jen letmý pohled do edičního plánu Státního nakladatelství v této době.

Ediční plán Státního pedagogického nakladatelství na letošní rok nás seznamuje s množstvím titulů připravovaných knih. Vyjdou nejrozličnější učebnice, knihy pro rodiče, pomocné knihy pro žáky, jazykové učebnice, slovníky, informace o studiu, mimočítanková četba. Pro mladé matematiky Státní pedagogické nakladatelství připravilo několik velmi zajímavých knih, z nichž uvedme například: Sbíрку řešených příkladů z deskriptivní geometrie — I. a II. díl, Sbíрку úloh z algebry pro I. a III. ročník SVVŠ, Sbíрку maturitních příkladů z matematiky.

Všechny připravované knihy mají usnadnit práci ve škole, ve výchově a rozšířit vaše znalosti. Jsou levné a potřebné. Vidíme tedy, že Státní pedagogické nakladatelství si zachovává tak svou dlouholetou tradici a my mu přejeme do další činnosti mnoho úspěchů.

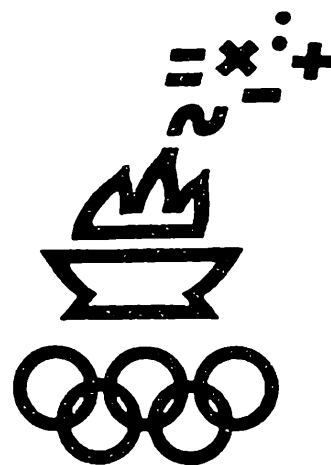
RECENZE

Třináctý ročník matematické olympiády

JAROMÍR DUBSKÝ, Praha

(Vydalo Státní pedagogické nakladatelství v Praze v r. 1965)

Jako v jiných letech vyšla i na podzim roku 1965 knižní aktualita, která má závažný výchovný i kriticky zhodnocující význam pro současný stav rozvoje zájmu naší mládeže o matematiku. Knížka má speciální význam jak pro olympijské nováčky, tak i pro všechny starší řešitele, kteří pokračují ve vyšších kategoriích soutěže.



Letos naposledy je zde kromě docenta Jana Vyšína uvedeno i jméno druhého autora brožurky s. Rudolfa Zelinky, vědeckého pracovníka MÚČSAV. Tento neúnavný matematik a vychovatel zemřel v květnu 1965 uprostřed záslužné práce, a proto tato knížka připojuje na začátku vděčnou vzpomínku.

Posledních dvacet stran (tj. *V kapitola*) je určeno šestému ročníku MMO (Mezinárodní matematické olympiády). K té došlo začátkem července 1964 v jedné z budov Lomonosovovy státní university v Moskvě. Šestého ročníku se účastnila soutěžní družstva celkem z devíti socialistických zemí. V konečném hodnocení mezinárodní matematické soutěže se československé družstvo dostalo mezi nejméně úspěšná družstva. Na prvních místech bylo vedle Sovětského svazu i Maďarsko, zatím co slabší než my bylo jen Mongolsko a Jugoslávie. Tento náš zatím nejhorší výsledek jen podtrhuje a zdůrazňuje neslavné zakončení naší domácí matematické soutěže. Je zřejmé, že dlouhodobou krizi matematického vyučování u nás, jejíž příčiny i důsledky byly již tolikrát rozbírány a kritizovány v odborném tisku, se posud přes všechnu snahu a vynaložené prostředky nepodařilo nejen odstranit, ale ani zastavit.

První čtyři části brožurky se týkají průběhu XIII. ročníku naší domácí matematické olympiády.

I. kapitola podává přehledným způsobem průběh XIII. ročníku naší národní soutěže, metody její organizace a popisuje účastníky, kteří pocházejí ze středních škol a v kategorii D i z devátého ročníku základních devítiletých škol.

II. kapitola je věnována výsledkům jednotlivých kol soutěže ve všech čtyřech kategoriích (D až A). Počet soutěžících se proti dvanáctému ročníku podstatně zvýšil, po kvalitativní stránce se však nezměnilo nic k lepšímu. Výsledky podle jednotlivých krajů a kategorií shrnují čtyři přehledné tabulky a pak jsou tu zařazení úspěšných řešitelé II. kola soutěže (tj. kategorie B a C) podle krajů. Kapitola končí pořadím patnácti vítězných olympioniků XIII. ročníku, kteří jsou současně jedinými úspěšnými řešiteli posledního kola soutěže. Je připojen též kritický rozbor situace matematiky na všech stupních a družích škol u nás.

III. kapitola uvádí texty přípravných olympijských úloh, zatím co *kapitola IV.*, nejobsáhlejší, ukazuje vzorová řešení soutěžních příkladů podle jednotlivých kol a kategorií. Každé řešení je přesné a jsou uvedeny všechny varianty. Současně je i názornou ukázkou vzorného metodického postupu. Jako v jiných ročnících, je i zde asi třetina IV. kapitoly přeložena do slovenštiny. Řešení geometrických úloh jsou doplněna velkými názornými obrázky.

V. kapitolu knížky, tj. MMO a její výsledky, jsme zhodnotili již na začátku.

Kniha se dostane ve všech prodejnách KNIHY po 3,50 Kčs. Má tradiční praktický kapesní formát a celkový rozsah 148 stran.

Slovníček

fyzikálních výrazů

(Pokračování)

весы; в. аналитические; в. гидростатические; в. десятичные; в. неравноплечие; в. равноплечие; в. рычажные

ветвление

ветвь моста

ветромер

ветроуказатель

вещество; в. газообразное; в. твердое

взаимодействие

взаимосвязь

винт

включатель

включать

влага

лагомер

влажность

влияние

возбуждать

возбуждение; колебаний

воздействие

волна; в. гармоническая; в. затухающая; в. звуковая; в. линейно поляризованная; в. модулированная; в. несущая; в. поверхностная; в. поперечная; в. преломленная; в. продольная; в. световая; в. стоячая; в. упругая

волнение

волны; в. гравитационные; в. де Бройля; в. электромагнитные

вольтметр; в. ламповый; в. электростатический; в. вращательный
вращательный

в́а́hy; analytické v.; hydrostatické v.; decimální (desetinné) v.; nerovnoramenné v.; rovnoramenné v.; pákové v.

větvení

větev můstku

anemometr

větrná směrovka

látka; plynná l.; pevná l.

vzájemné působení

vzájemný vztah, poměr, souvislost, vazba

šroub, vrtule

spínač

zapínat, zapojovat

vlhkost

vlhkoměr, hygrometr

vlhkost

vliv, účinek, působení

buditi (např. kmity)

buzení, excitace, vzbuzení (jádra);
b. kmitů (rozkmitání)

působení, účinek, vliv

vlna; harmonická v.; tlumená v.; zvuková v.; lineárně polarizovaná v.; modulovaná v.; nosná v.; povrchová v.; příčná (transverzální) v.; lomená v.; podélná (longitudinální) v.; světelná v.; stojatá v.; elastická, pružná v.

vlnění

vlny; gravitační v.; de Broglieho v.; elektromagnetické v.

voltmetr; elektronkový v.; elektrostatický v.; v. s otáčivou cívkou
otáčivý, točivý, otočný, rotační

Redakci došly tyto knihy ze Státního nakladatelství technické literatury v Praze:

J. P. Leonov, S. J. Rajevskij, N. S. Rajbman, Na pomoc automatizaci (O použití statistické dynamiky v automatizaci.) Přeložil inž. Jan Havel.

Publikace je určena inženýrům a technickým pracovníkům v automatizaci a v hromadné výrobě, zejména strojírenské. Pro studenty středních škol není vhodná. Učitelé najdou v ní dobrá praktická poučení o problému, o němž se často píše, aniž je čtenáři jasné, co se pod tímto označením skrývá.

Vydalo SNTL, Praha 1965, Knížnice automatizace, str. 105, obr. 21, cena 5,50 Kčs.

N. P. Buslenko J. A. Šrejder, Stochastické početní metody (Metody Monte Carlo). Přeložili Stanislav Jílovec, inž. Zbyněk Rejda.

Publikace je určena inženýrům v oborech strojním, stavebním, elektro-technickém a matematikům-konstruktorům počítačích strojů a pracovníkům početních středisek. Knížky mohou využít též posluchači vyšších ročníků vysokých technických škol. Pro studenty středních škol není vhodná.

Vydalo v řadě teoretické literatury SNTL, Praha 1966, str. 796, or. 18, cena 9,— Kčs.

M. M.

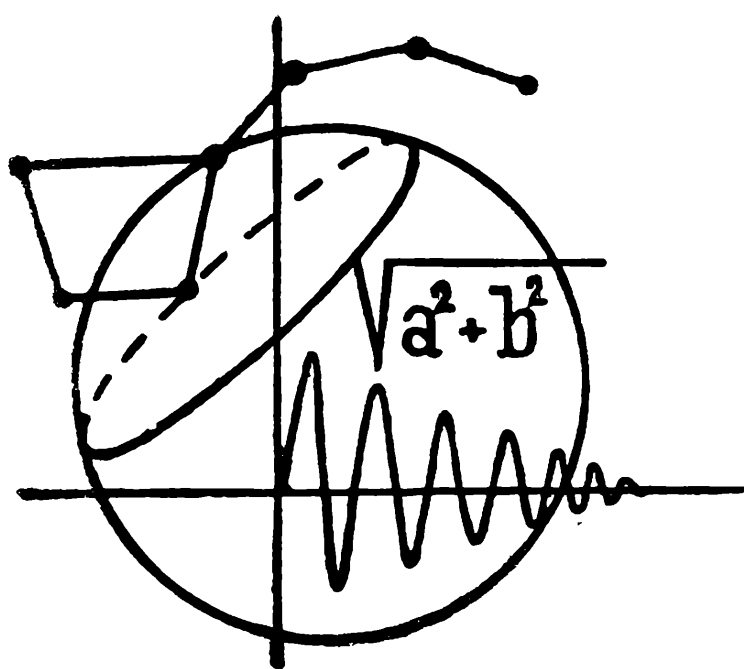
Starší ročníky Rozhledů. Jiří Minařík, Brno 2, Tábor č. 34 A, nabízí kompletní ročníky 41 (1962—63), 42 (1963—64) a prvních 6 čísel roč. 43 (1964—65).

Nepravidelná služba PNS. Josef Tejkl, Červená voda č. 147. Vaší stížnost jsme postoupili vedení PNS v Praze. Je to nedbalost zaviněná vaší místní služebnou.

Redakce

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



10

ROČ. 44

1965-66

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 44

Červen 1966

Číslo 10

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

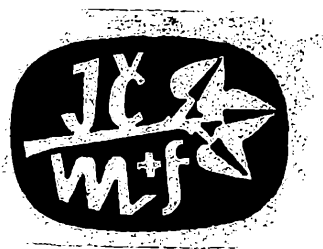
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: zasl. škol. pracovník *Josef Bartůněk*, ústřed. insp. MŠK; *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VUT, Brno; doc. dr. *Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; prof. dr. *Josef Korous*, VŠD, Žilina; prof. *Emil Kraemer*, KU, Praha; *Oldřich Lepil*, PU, Olomouc; prof. dr. *Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; CSc. *Evžen Říman*, ČVUT, Praha; CSc. *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; CSc. *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. *Václav Šindelář*, MÚ ÚNM, Praha; prof. dr. *Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

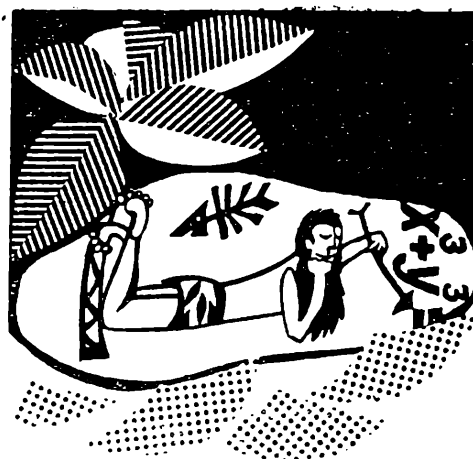
T. Duby: Rozklad prirodzených čísel na súčet alebo rozdiel štvorcov dvoch prirodzených čísel	433
J. Hájek: Některé zajímavé vlastnosti nože Archimédova (Dokončení)	437
Doc. inž. L. Drs, CSc.: Konstrukce názorného průmětu (axonometrie) z volných průmětů	441
J. Zeman: Komplexní čísla ve fyzice na střední škole	444
Prof. dr. Z. Bodó, Budapešť: Ťažisko, momenty prvého a druhého stupňa (Dokončení)	450
A. Skyva: Od teploty 0°C k teplotě 0°K (Dokončení)	457
E. Říman, CSc.: Matematický problém (Dokončení)	462
Řešení hádanek	467
J. Machán: Násobenie spamäti pomocou druhých mocnín	470
XVI. ročník Matematické olympiády	472
Recenze	474
K. Lepilová: Slovníček fyzikálních výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nář. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, lin. dříšská 14, Praha 1. Jazyková úprava zasl. učitel dr. O. Hömig. Titulní obrázky: V. Vaňková studující FS.

A 04*61304

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1966.



MATEMATIKA

Rozklad prirodzených čísiel

na súčet alebo rozdiel štvorcov
dvoch prirodzených čísiel

TOMÁŠ DUBY, SPŠE, Bratislava

Súdruh M. Zelenka vo svojej P o z n á m k e v RMF roč. 43, str. 200 načrtol niekoľko otázok o probléme takéhoto rozkladu, na ktoré teraz zodpoviem.

Ďalej nech je každé ináč neurčené číslo prirodzené.

Najprv zistím množinu prirodzených čísiel, ktorá sa nedajú rozložiť na súčet alebo rozdiel štvorcov dvoch prirodzených čísiel.

a) Čísla nepárne¹⁾ sa dajú rozložiť napr.

$$31 = 16^2 - 15^2$$

$$33 = 7^2 - 4^2 = 17^2 - 16^2$$

$$35 = 6^2 - 1^2 = 18^2 - 17^2$$

$$37 = 6^2 + 1^2 = 19^2 - 18^2$$

$$39 = 8^2 - 5^2 = 20^2 - 19^2.$$

Vzniká hypotéza, že každé nepárne číslo sa rovná rozdielu štvorcov dvoch za sebou idúcich čísiel.

¹⁾ Nepárny = lichý.

Dôkaz:

$$2k + 1 = (a + 1)^2 - a^2$$

$$2k + 1 = 2a + 1$$

$$k = a$$

Rovnosť $k = a$ je splnená pre každé dovolené číslo k, a , preto každé nepárne číslo možno rozložiť na rozdiel štvorcov dvoch čísiel.

Špeciálny prípad tvorí číslo $2k + 1 = 1$

$$2k + 1 = 1$$

$$k = 0, a = 0.$$

$$1 = 1^2 - 0^2.$$

Číslo 1 nevieme v obore prirodzených čísiel rozložiť na rozdiel štvorcov dvoch čísiel.

b) Čísla, ktoré sú štvornásobkom čísla nepárneho, rozkladáme takto:

$$4 \cdot (2k + 1) = 4 \cdot [(a + 1)^2 - a^2].$$

Teraz špeciálny prípad tvorí číslo 4, ktoré nevieme v obore prirodzených čísiel rozložiť.

Doteraz sme vyšetrili tieto čísla: $8k + 1, 8k + 3, 8k + 4, 8k + 5, 8k + 7$. Zostávajú nám ešte čísla $8k, 8k + 2, 8k + 6$.

c) Čísla tvaru $8k$ rozkladáme napr.

$$8 = 3^2 - 1^2 = 2^2 + 2^2$$

$$16 = 5^2 - 3^2$$

$$24 = 5^2 - 1^2 = 7^2 - 5^2$$

$$32 = 4^2 + 4^2 = 6^2 - 2^2 = 9^2 - 7^2$$

$$40 = 2^2 + 6^2 = 7^2 - 3^2 = 11^2 - 9^2.$$

Pre tento rozklad hypotéza znie: Číslo tvaru $8k$ sa dá rozložiť na rozdiel štvorcov dvoch po sebe idúcich nepárnych čísiel.

Dôkaz:

$$8k = (2a + 3)^2 - (2a + 1)^2$$

$$8k = 8a + 8$$

$$k = a + 1.$$

Podmienka $k = a + 1$ je splnená pre každé dovolené číslo a, k , preto môžeme každé číslo tvaru $8k$ rozložiť, číslo a môže sa rovnať aj číslu 0.

d) Čísla tvaru $8k + 2$ sa dajú rozložiť napr.

$$2 = 1^2 + 1^2$$

$$10 = 3^2 + 1^2$$

$$18 = 3^2 + 3^2$$

$$26 = 5^2 + 1^2$$

$$34 = 5^2 + 3^2.$$

Hypotéza znie: Číslo tvaru $8k + 2$ sa rovná súčtu štvorcov dvoch nepárnych čísiel.

Dôkaz:

$$\begin{aligned} 8k + 2 &= (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 \\ 2k &= a(a + 1) + b(b + 1). \end{aligned} \quad (1)$$

Pretože táto identita neplatí pre každé číslo k , zostavím tabuľku 1. hodnôt $8k + 2 \leq 1000$ podľa rovnice (1). V tab. 1. chýbajú niektoré

Tab. 1

a	b	$2k$	a	b	$2k$	a	b	$2k$	a	b	$2k$
0	0	0	6	5	72	9	7	146	12	1	158
1	0	2	6	6	84	9	8	162	12	2	162
1	1	4	7	0	56	9	9	180	12	3	168
2	0	6	7	1	58	10	0	110	12	4	176
2	1	8	7	2	62	10	1	112	12	5	186
2	2	12	7	3	68	10	2	116	12	6	198
3	0	12	7	4	76	10	3	122	12	7	212
3	1	14	7	5	86	10	4	130	12	8	228
3	2	18	7	6	98	10	5	140	12	9	248
3	3	24	7	7	112	10	6	152	13	0	182
4	0	20	8	0	72	10	7	166	13	1	184
4	1	22	8	1	74	10	8	182	13	2	188
4	2	26	8	2	78	10	9	200	13	3	196
4	3	32	8	3	84	10	10	220	13	4	204
4	4	40	8	4	92	11	0	132	13	5	214
5	0	30	8	5	102	11	1	134	13	6	224
5	1	32	8	6	114	11	2	138	13	7	236
5	2	36	8	7	126	11	3	144	14	0	210
5	3	42	8	8	144	11	4	152	14	1	212
5	4	50	9	0	90	11	5	162	14	2	216
5	5	60	9	1	92	11	6	174	14	3	222
6	0	42	9	2	96	11	7	188	14	4	230
6	1	44	9	3	102	11	8	204	14	5	240
6	2	48	9	4	110	11	9	222	15	0	246
6	3	54	9	5	120	11	10	242	15	1	242
6	4	62	9	6	132	12	0	156	15	2	246

hodnoty čísla $2k$, sú to tie, ktoré nie je možné rovnicou (1) v obore celých nezáporných čísiel vyjadriť. Tieto hodnoty $2k$ a k nim prislúchajúce hodnoty $8k + 6$ sú zachytené v tabuľke 2. Hodnoty čísiel $8k + 2$ sú celkom nepravidelné, nedajú sa zostaviť do postupnosti.

e) Čísla tvaru $8k + 6$ sa nedajú žiadnym spôsobom rozložiť. Dôkaz prevedieme nepriamo.

Predpokladajme, že čísla tvaru $8k + 6$ sa dajú rozložiť aspoň jedným spôsobom za nasledujúcich

$$1. (2p)^2 + (2q)^2 = 4(p^2 + q^2) = < \begin{matrix} 8k, \\ 8k + 4, \end{matrix}$$

2. $(2p)^2 - (2q)^2 = 4(p^2 - q^2) = < \frac{8k}{8k+4},$
3. $(2p+1)^2 + (2q)^2 = 4(p^2 + p + q^2) + 1 = < \frac{8k+1}{8k+5},$
4. $(2p+1)^2 - (2q)^2 = 4(p^2 + p - q^2) + 1 = < \frac{8k+1}{8k+5},$
5. $(2p)^2 - (2q+1)^2 = 4(p^2 - q - q^2) - 1 = < \frac{8k+3}{8k+7},$
6. $(2p+1)^2 + (2q+1)^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2 = 8k+2,$
7. $(2p+1)^2 - (2q+1)^2 = 4(p^2 + p - q^2 - q) = 8k.$

Čísla p, q sú celé nezáporné. Pretože viac možností rozkladu neexistuje, nevieme čísla tvaru $8k+6$ rozložiť, preto je náš predpoklad nesprávny.

Záver. Na súčet alebo rozdiel štvorcov dvoch prirodzených čísel, nevieme rozložiť tieto čísla

1. číslo 1,
2. číslo 4,
3. čísla tvaru $8k+6$,
4. niektoré čísla tvaru $8k+2$, viď tab. 2.

Tab. 2

$2k$	$8k+2$	$2k$	$8k+2$	$2k$	$8k+2$	$2k$	$8k+2$
10	42	82	330	142	570	196	786
16	66	88	354	148	594	202	810
28	114	94	378	150	602	206	826
34	138	100	402	154	618	208	834
38	154	104	418	160	642	218	874
46	186	106	426	164	658	226	906
52	210	108	434	170	682	232	936
64	258	118	474	172	690	234	938
66	266	124	498	178	714	238	954
70	282	128	514	190	762	244	978
80	322	136	546	192	770		

Z tezí XIII. sjezdu KSČ

„Spojení intelektuálních tvůrčích sil vědců s kvalifikovanou prací techniků a dělníků přetváří vědu v nejdůležitější výrobní sílu, zabezpečující pokrok a rozvoj celé společnosti. Tento princip platí přesto, že zdaleka ne všechny poznatky vědy ovlivňují rozvoj výroby bezprostředně a rovnoměrně. Ústřední výbor s velkou naléhavostí zdůrazňuje významnou úlohu naší vědy v socialismu, který uvolňuje tvořivé síly člověka, plně otevírá možnosti bádání, výzkumu a teoretické tvůrčí práce.“

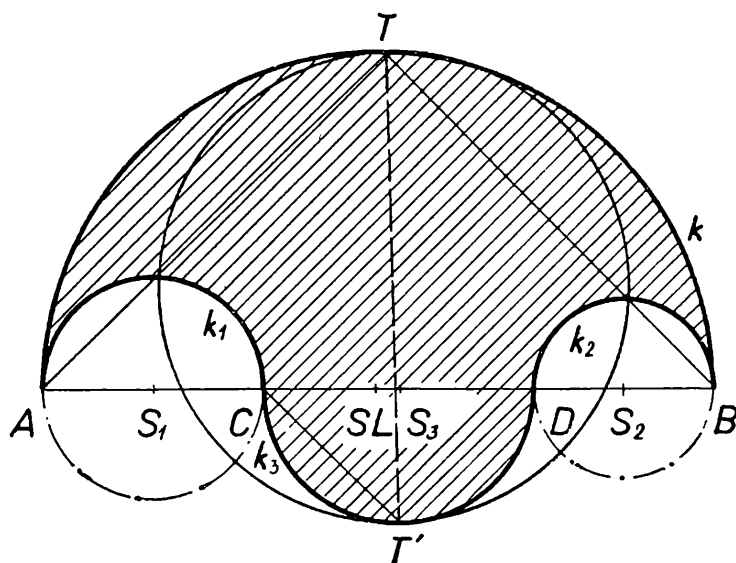
Některé zajímavé vlastnosti nože Archimédova (Dokončení)

J I Ř Í H Á J E K, P I, B r n o

Položme si otázku: Lze průměr tohoto kruhu odvodit konstruktivně z daného obrazce?

Ukažme, že pro situaci na obr. 5 platí, že kruh s průměrem TT' má stejný obsah jako vyšrafovaný obrazec. T, T' jsou průsečíky chordály kružnic o středech S_1, S_2 s polokružnicemi k, k_3 .

P o z n á m k a 1. Chordála je množina všech bodů v rovině, které mají ke dvěma kružnicím touž mocnost. Při tom mocnost bodu P ke kružnici $k \equiv (S, r)$ je číslo $m = v^2 - r^2$, kde $v \geq 0$ je vzdálenost bodu P od středu S kružnice k .



Obr. 5

Na obr. 5 je dána úsečka AB a dva body $C \neq D$, které leží uvnitř úsečky AB . Nad průměry $AB = 2R$, $AC = 2r_1$, $BD = 2r_2$, $CD = 2r_3$ jsou opsány polokružnice k, k_1, k_2, k_3 . Přitom polokružnice k, k_1, k_2 leží v jedné polorovině, polokružnice k_3 v polorovině opačné vymezené přímkou AB . Obsah našeho „nože“ je

$$P = \frac{\pi}{2} (R^2 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2).$$

Poněvadž

$$r_3 = R - r_1 - r_2 ,$$

dostáváme

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi}{2} [R^2 - r_1^2 - r_2^2 + (R - r_1 - r_2)^2] = \\ &= \pi (R^2 - Rr_1 - Rr_2 + r_1 r_2) = \\ &= \pi [R (R - r_1) - r_2 (R - r_1)] = \pi (R - r_1) (R - r_2) . \end{aligned}$$

Dokažme nyní, že obsah „nože“ lze vyjádřit jako obsah kruhu sestaveného nad průměrem TT' , tj., že platí

$$F = \pi (R - r_1) (R - r_2) = \frac{\pi}{4} \overline{TT'}^2 .$$

Chordála kružnic k_1, k_2 prochází bodem L na spojnici AB . Označme $CD = 2r_3 = d$, $LC = x$, $LD = y$. Bod L má stejnou mocnost k oběma kružnicím k_1, k_2 a platí

$$\begin{aligned} x(x + 2r_1) &= (d - x)(d - x + 2r_2) , \\ x^2 + 2r_1 x &= d^2 - dx + 2r_2 \cdot d - dx + x^2 - 2r_2 x , \\ 2(r_1 + r_2 + d)x &= d^2 + 2d r_2 , \\ 2(r_1 + r_2 + d)x &= d(d + 2r_2) , \\ 2(r_1 + r_2 + 2r_3)x &= 4r_3(r_2 + r_3) , \end{aligned}$$

neboť $d = 2r_3$.

S ohledem na vztah

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= R , \\ x &= \frac{2r_3(r_2 + r_3)}{R + r_3} = \frac{2r_3(R - r_1)}{R + r_3} . \end{aligned}$$

Vyměníme r_1 za r_2 a dostaneme y

$$y = \frac{2r_3(R - r_2)}{R + r_3} .$$

Podle Euklidovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky $CT'D$, ATB platí

$$\overline{LT'}^2 = x \cdot y = \frac{4r_3^2 (R - r_1) (R - r_2)}{(R + r_3)^2} ,$$

$$\overline{LT}^2 = (x + 2r_1) (y + 2r_2) .$$

Avšak

$$\begin{aligned} x + 2r_1 &= \frac{2R r_3 - 2r_1 r_3 + 2r_1 R + 2r_1 r_3}{R + r_3} = \\ &= \frac{2R(r_3 + r_1)}{R + r_3} = \frac{2R(R - r_2)}{R + r_3} , \end{aligned}$$

$$y + 2r_2 = \frac{2R r_3 - 2r_2 r_3 + 2r_2 R + 2r_2 r_3}{R + r_3} =$$

$$= \frac{2R (r_3 + r_2)}{R + r_3} = \frac{2R (R - r_1)}{R + r_3},$$

tedy

$$\overline{LT}^2 = \frac{4R^2 (R - r_1) (R - r_2)}{(R + r_3)^2}$$

Pak

$$LT' = \frac{2r_3}{R + r_3} \cdot \sqrt{(R - r_1) (R - r_2)},$$

$$LT = \frac{2R}{R + r_3} \cdot \sqrt{(R - r_1) (R - r_2)},$$

$$TT' = LT + LT' = \sqrt{(R - r_1) (R - r_2)} \cdot \frac{2 (R + r_3)}{R + r_3} =$$

$$= 2 \sqrt{(R - r_1) (R - r_2)}.$$

Tedy

$$\pi \frac{TT'^2}{4} = \pi (R - r_1) (R - r_2),$$

což se mělo dokázat.

Nůž Archimedův má ještě jednu pozoruhodnou vlastnost. Označme v obr. 1, 2, 3 středy oblouků BC , AC , AB postupně písmeny A_1 , B_1 , C_1 a počítejme obsah trojúhelníka $A_1B_1C_1$.

V obr. 1 je trojúhelník $A_1B_1C_1$ pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C_1 . Zřejmě platí

$$\triangle AB_1C \sim \triangle CA_1B \sim \triangle AC_1B,$$

neboť jsou všechny pravoúhlé rovnoramenné.

Obsah pravoúhlého trojúhelníka $A_1B_1C_1$

$$M_1 = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot A_1C_1$$

Avšak

$$B_1C_1 = AC_1 - AB_1 = R \cdot \sqrt{2} - r_1 \sqrt{2} = (R - r_1) \sqrt{2} = r_2 \sqrt{2},$$

$$A_1C_1 = BC_1 - A_1B = R \sqrt{2} - r_2 \sqrt{2} = (R - r_2) \sqrt{2} = r_1 \sqrt{2}$$

neboť

$$R = r_1 + r_2.$$

Je tedy

$$M_1 = r_1 \cdot r_2.$$

V druhém případě (obr. 2) je rovněž trojúhelník $A_1B_1C_1$ pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu B_1 . Opět platí

$$\triangle AB_1C - \triangle CA_1B - \triangle AC_1B.$$

Jde o trojúhelníky pravoúhlé rovnoramenné.

Obsah trojúhelníka $A_1B_1C_1$

$$M_2 = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot B_1A_1.$$

Avšak

$$B_1C_1 = AC_1 - AB_1 = R \sqrt{2} - r_1 \sqrt{2} = (R - r_1) \sqrt{2} = r_1 \sqrt{2},$$

$$A_1B_1 = B_1C + CA_1 = r_1 \sqrt{2} + r_2 \sqrt{2} = (r_1 + r_2) \sqrt{2},$$

tedy

$$M_2 = r_2(r_1 + r_2).$$

Určeme konečně obsah trojúhelníka $A_1B_1C_1$ za situace znázorněné obr. 3. Je-li R průsečík polopřímek AB_1 a BA_1 , je obrazec AC_1BR čtverec. Tvoří jej totiž dva shodné rovnoramenné trojúhelníky pravoúhlé $\triangle AC_1B$ a $\triangle ARB$ se společnou základnou AB . Trojúhelník $A_1B_1C_1$ je částí čtverce AC_1BR .

Pro obsah M_3 trojúhelníka $A_1B_1C_1$ tedy platí

$$M_3 = O_1 - O_2 - O_3 - O_4$$

kde O_1 je obsah čtverce o straně AC_1 , dále jsou O_2, O_3, O_4 obsahy pravoúhlých trojúhelníků $\triangle B_1AC_1, \triangle C_1BA_1, \triangle A_1RB_1$.

Avšak

$$O_1 = (AC_1)^2 = (R \sqrt{2})^2 = 2R^2, \quad O_2 = \frac{1}{2} AB_1 \cdot AC_1 = Rr_1,$$

$$O_3 = \frac{1}{2} BC_1 \cdot A_1B = Rr_2,$$

$$\begin{aligned} O_4 &= \frac{1}{2} A_1R \cdot B_1R = \frac{1}{2} (BR - A_1B) (AR - AB_1) = \\ &= \frac{1}{2} [(R \sqrt{2} - r_2 \sqrt{2}) (R \sqrt{2} - r_1 \sqrt{2})] = (R - r_1) (R - r_2) = r_2 \cdot r_1. \end{aligned}$$

Takže po dosazení

$$\begin{aligned} M_3 &= 2R^2 - Rr_1 - Rr_2 - r_1r_2 = R(2R - r_1 - r_2) - r_1r_2 = \\ &= R[2(r_1 + r_2) - r_1 - r_2 - r_1r_2] = R(r_1 + r_2) - r_1r_2 = (r_1 + r_2)^2 - \\ &\quad - r_1r_2 = r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2. \end{aligned}$$

Abychom dokázali onu pozoruhodnou vlastnost, stačí porovnat právě vypočtené obsahy M_1, M_2, M_3 , s obsahy „nožů“ v těchže situacích, které jsme již řešili.

Obsahy „nože“ v případech vyznačených na obr. 1, 2, 3 jsou

$P_1 = \pi r_1 r_2$, $P_2 = \pi r_2 (r_1 + r_2)$, $P_3 = \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$,
obsahy příslušných trojúhelníků

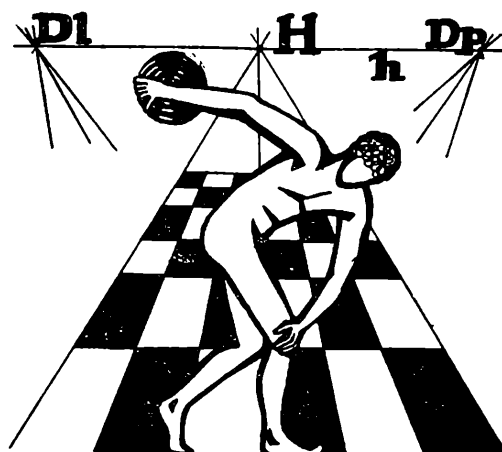
$$M_1 = r_1 \cdot r_2 \quad M_2 = r_2 (r_1 + r_2) \quad M_3 = r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2.$$

Platí jistě pozoruhodný výsledek

$$\frac{P_1}{M_1} = \frac{P_2}{M_2} = \frac{P_3}{M_3} = \pi.$$

Poměr obsahu „nože“ a obsahu odpovídajícího trojúhelníka $A_1 B_1 C_1$ je ve všech třech případech konstantní a roven číslu Ludolfovu.

DESKRIPTIVNÍ
GEOMETRIE



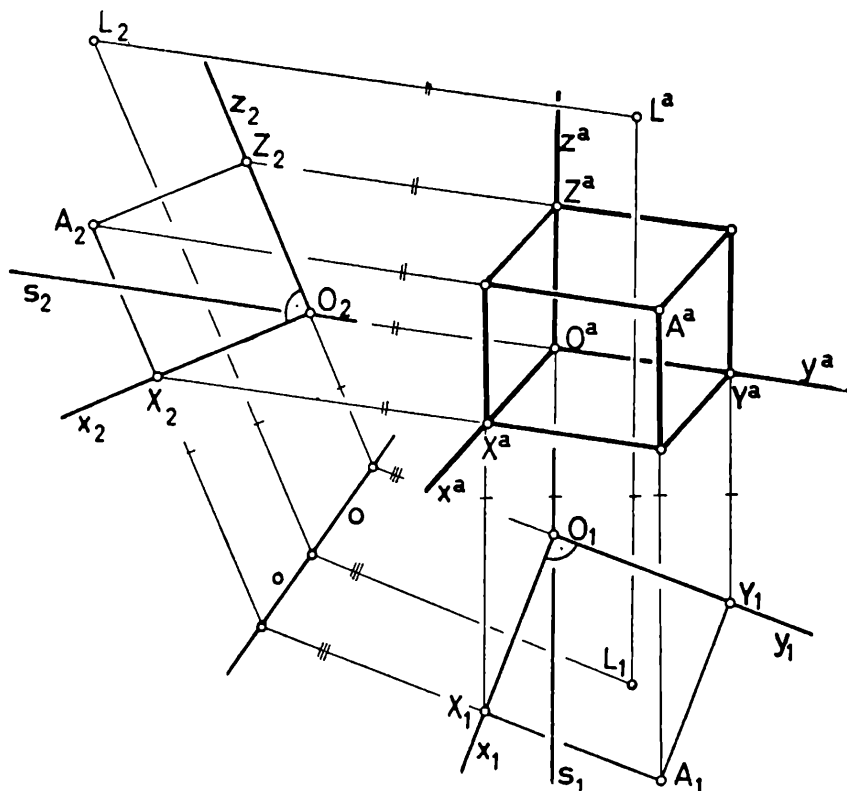
Konstrukce názorného průmětu (axonometrie) z volných průmětů

DOC. INŽ. LADISLAV DRS, CSc., ČVUT, Praha

V předešlém článku jsme si vysvětlili vzájemný vztah kolmých průmětů na dvě kolmé průmětny, které přemístíme do nákresny libovolně do tzv. volných průmětů.

Je jistě známa poučka, že rovnoběžným promítáním se nemění dělicí poměry bodů na přímce. Poučku lze i obrátit. Zobrazení, při němž se nemění dělicí poměry na zobrazených a daných přímkách je rovnoběžné promítání. Této poučky použijeme k odvození naší zobrazovací metody.

Mějme volné průměty určené osami x_1, y_1, x_2, z_2 a průměty $J_1 \equiv X_1, J_2 \equiv X_2$ jednotkového bodu $J \equiv X$ osy x , které udávají měřítka půdorysu a nárysu (obr. 1). Zvolme dva různé směry s_1, s_2 . Půdorysem L_1



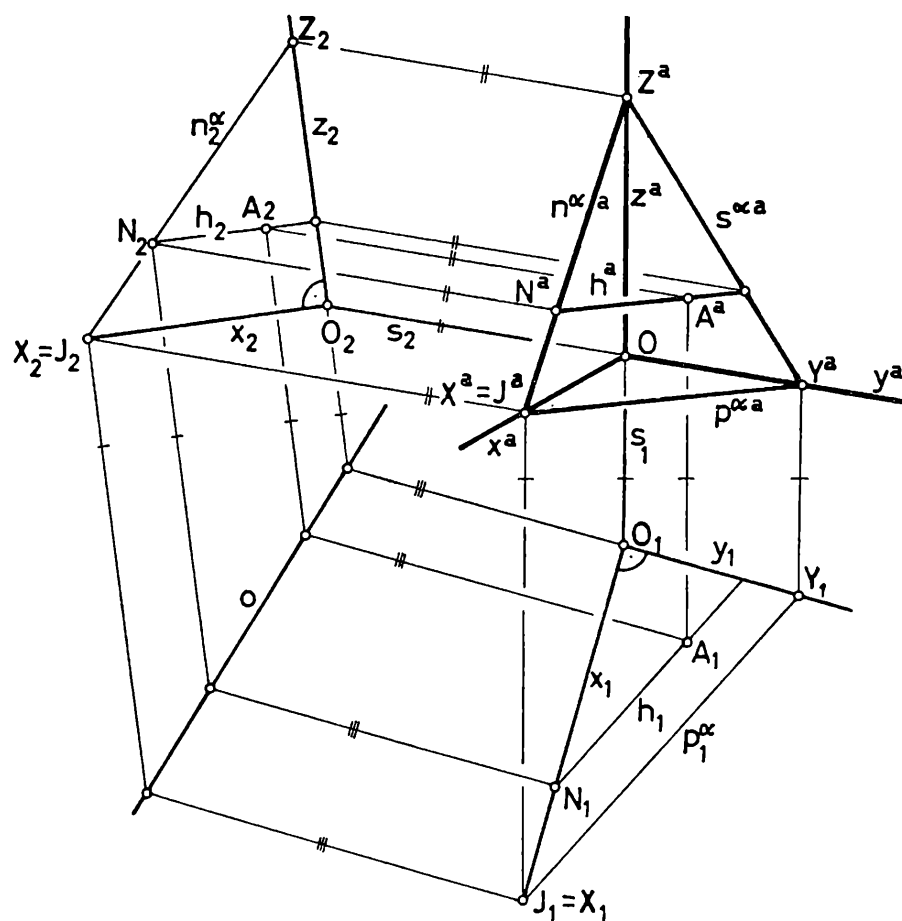
Ob- 1

libovolného bodu L vedme rovnoběžku se směrem s_1 , nárysem L_2 rovnoběžkou se směrem s_2 . Tyto rovnoběžky se protínají v *axonometrii* L^a bodu L . Použijeme-li této konstrukce na body os x, y, z získáme axonometrii x^a, y^a, z^a os souřadnicové soustavy. Osa z^a má směr s_1 a prochází bodem O_1 . Osa y^a má směr s_2 a prochází bodem O_2 . Osa x^a prochází bodem X^a a bodem $O^a = z^a y^a$.

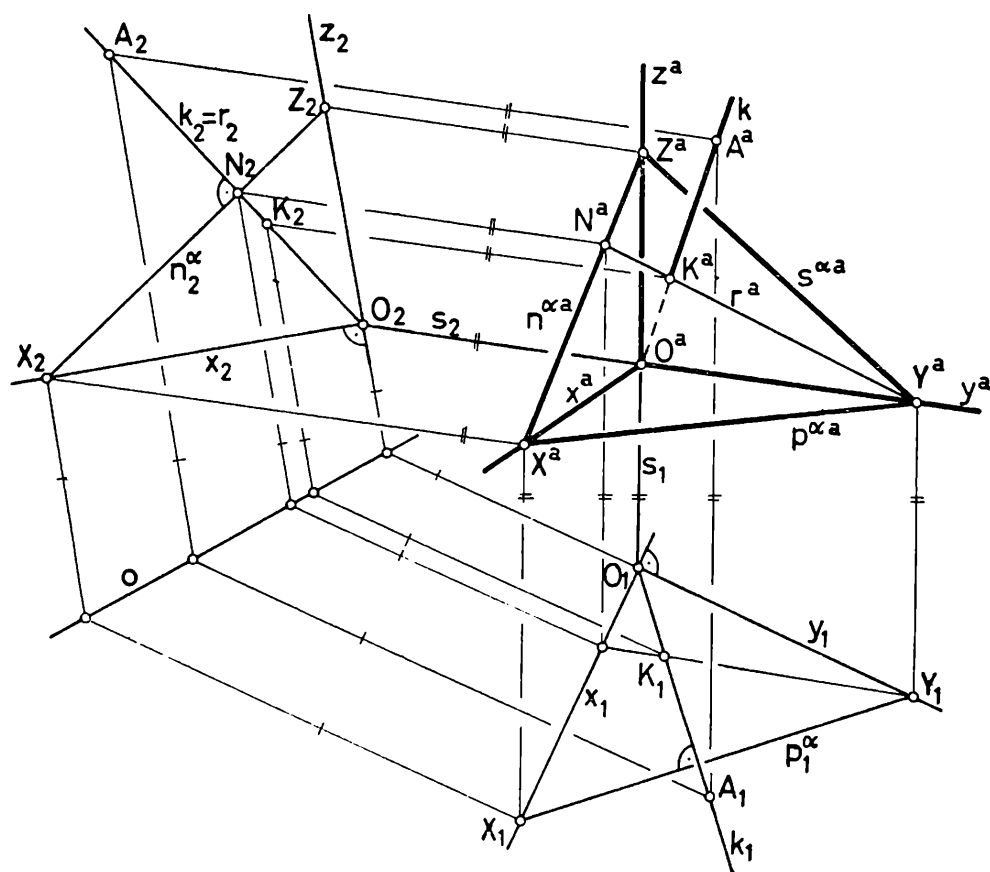
Zobrazme ještě krychli, která má své vrcholy v počátku O a v jednotkových bodech X, Y, Z os x, y, z . Axonometrie této krychle je názorný obraz krychle.

Axonometrie je tedy velmi vhodný zobrazovací způsob, chceme-li získat názorné průměty zobrazovaných útvarů. Tato konstrukce je velmi jednoduchá a rychlá. Protože se touto konstrukcí zřejmě zachovávají dělicí poměry na přímkách a_1, a_2, a_3 , je axonometrie rovnoběžným průmětem. Protože axonometrie přímky s určené průměty s_1, s_2 je bod O^a , je směr s promítací přímkou, a tedy směrem tohoto rovnoběžného promítání. Této metodě říkáme *průsečná metoda* pro konstrukci axonometrie z volných průmětů.

Průsečnou metodou sestojíme z půdorysu a nárysu přemístěného do nákresey v libovolných měřítkách rovnoběžný průmět-axonometrii — směrem s .



Obr. 2



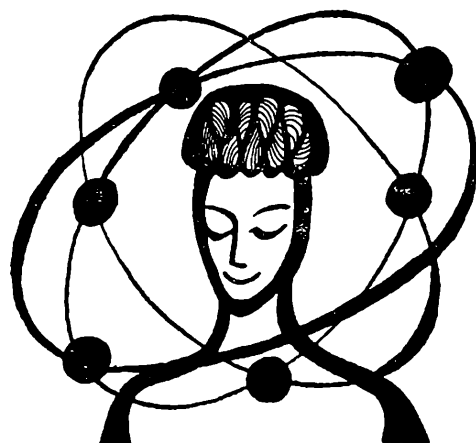
Obr. 3

Opět závěrem dva příklady.

1. *Axonometrie bodu a přímky v rovině.* Obr. 2. Jako v příkladě 1. minulého článku jsou dány průměty $x_1, y_1; x_2, z_2, J_1, J_2, p_1^\alpha, n_2^\alpha, A_2$. Průsečky roviny α s osami y, z označme $Y, Z, Y_1 \equiv p_1^\alpha \cdot y_1, Z_2 \equiv n_2^\alpha \cdot z_2$. Zvolíme směry s_1 a s_2 bodem O_1 a O_2 . Sestrojíme axonometrii os $y^a \equiv s_2, z^a \equiv s_1, O^a \equiv s_1 \cdot s_2, x^a \equiv O^a J^a$ a axonometrie stop $p^{\alpha a} = J^a Y^a, n^{\alpha a} = J^a Z^a, s^{\alpha a} = Y^a Z^a$.

Pro axonometrii přímky h^a nemusíme určovat půdorys. Stačí určit N^a na $n^{\alpha a}$ na rovnoběžce se směrem s_2 bodem N_2 . Pak je $h^a \parallel p^{\alpha a}$. Na h^a leží $A^a, A_2 A^a \parallel s_2$.

2. *Kolmice k rovině α bodem O .* Obr. 3. Určíme jako v příkl. 1. axonometrie os x^a, y^a, z^a a stop $p^{\alpha a}, n^{\alpha a}, s^{\alpha a}$. Kolmice k k rovině α bodem O má průměty $k_1 \perp p_1^\alpha$, procházející bodem O_1 a $k_2 \perp n_2^\alpha$ bodem O_2 . Abychom určili axonometrii k^a zvolíme na k bod $A \neq O, A_1$ na k_1 libovolně, A_2 na k_2 a na příslušné ordinále. Rovnoběžky směrem s_1, s_2 bodem A_1, A_2 se protnou v bodě $A^a, k^a \equiv O^a A^a$. Průsečík K kolmice k s rovinou α určíme na krycí přímce r v rovině α . Položíme $r_2 \equiv k_2$ a r^a můžeme určit bez půdorysu. Pata K kolmice k má pak axonometrii $K^a \equiv r^a \cdot k^a$.



F Y Z I K A

Komplexní čísla ve fyzice

na střední škole

J I Ř Í Z E M A N, Olomouc

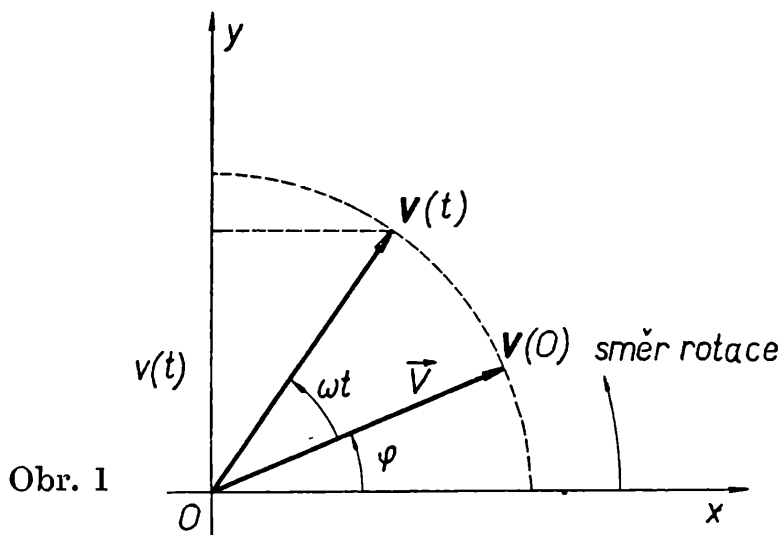
Na střední škole při studiu střídavých proudů se setkáváme s fyzikálními veličinami, které jsou sinusovými funkcemi času, např. proud, magnetický tok, napětí. Jejich obecný tvar je

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

kde $V_m > 0$ je vrcholová hodnota (amplituda), φ konstantní fázový úhel a $(\omega t + \varphi)$ fáze veličiny v .

Počítání s goniometrickými funkcemi je matematicky přesné, ale poměrně pracné, a proto někdy zobrazujeme sinusové veličiny rotujícími vektory. Tento grafický způsob je však mnohdy nepostačující. Byla proto zavedena metoda, spojující přesnost s názorností, tzv. *k o m p l e x - n í m e t o d a* studia obvodů střídavých proudů.

Vyložíme stručně princip této metody. Funkci (1) přiřadíme vektor $\vec{V}$ o délce rovné V_m , který rotuje rovnoměrně v kladném smyslu kolem počátku O s úhlovou rychlostí ω (obr. 1).



Obr. 1

Pokládáme-li rovinu xOy za Gaussovu rovinu, a označíme-li imaginární jednotku j , jak je zvykem v elektrotechnice, lze v každém okamžiku t považovat vektor $\vec{V}$ za polohový vektor komplexního čísla

$$\mathbf{V}(t) = V_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)], \quad (2)$$

jehož modul je V_m a argument je $\omega t + \varphi$. Je tedy rovnicí (2) definována komplexní funkce. Pomocí součtových vzorců snadno ukážeme, že funkci (2) lze psát jako součin

$$\mathbf{V}(t) = V_m [(\cos \varphi + j \sin \varphi) (\cos \omega t + j \sin \omega t)] \quad (3)$$

Činitel $\cos \omega t + j \sin \omega t$ vyjadřuje rotaci konstantního polohového vektoru čísla $\mathbf{V}(0) = V_m (\cos \varphi + j \sin \varphi)$.

Komplexní metoda tak přiřazuje fyzikální veličině (1) symbol, kterým je komplexní funkce ve tvaru (2). Proto se též někdy nazývá *m e t o d o u s y m b o l i c k o u*.

Okamžitou hodnotu zkoumané fyzikální veličiny v okamžiku $t = t_0$ pak udává imaginární část komplexní funkce (2)

$$v(t_0) = V_m \sin(\omega t_0 + \varphi). \quad (4)$$

Uvažovaná komplexní funkce má modul rovný amplitudě V_m veličiny (1). Amplituda má význam především ve slaboproudé technice. O tom nebudeme dále mluvit. V silnoproudé elektrotechnice má však větší

význam tzv. efektivní hodnota V (též V_{ef}) veličiny v , která (u harmonického průběhu) s amplitudou souvisí vztahem

$$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} V_m.$$

Funkce (1) a symbol (2) pak mají tvar

$$v' = V \sin(\omega t + \varphi), \quad \mathbf{V}' = V [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)], \quad (5)$$

kde V je efektivní hodnota. Symbolů typu (5) budeme používat při našem výkladu.

V dalším se budeme zabývat otázkou početních operací se zavedenými symboly a otázkou, zda je možno platnost vztahů mezi fyzikálními veličinami přenést také na jejich symboly.

Početní operace se symboly

Nechť v_1, v_2 jsou funkce tvaru (1), jejichž hodnoty jsou posunuty o fázový úhel φ

$$v_1 = V_1 \sin \omega t, \quad v_2 = V_2 \sin(\omega t + \varphi), \quad \varphi \neq 2k\pi. \quad (6)$$

Bez újmy na obecnosti lze uvažovat $V_1 \leq V_2$. Funkcím v_1, v_2 odpovídají symboly

$$\mathbf{V}_1 = V_1(\cos \omega t + j \sin \omega t), \quad \mathbf{V}_2 = V_2[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \quad (7)$$

a) Komplexní metoda je zvláště vhodná ke sčítání (odčítání) sinusových funkcí tvaru (1), mají-li stejnou periodu. Amplitudy a počáteční fáze mohou být různé. Tyto operace se provádějí často v elektrotechnice (Kirchhoffovy zákony).

Součet (rozdíl) dvou veličin tvaru (1) je opět veličina tvaru (1). Lze se přesvědčit, že sečtením (odečtením) veličin (6) dostáváme veličinu

$$v_3 = V_3 \sin(\omega t + \delta), \text{ kde}$$

$$V_3 = + \sqrt{V_1^2 + V_2^2 \pm 2V_1V_2 \cos \varphi}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{V_2 \sin \varphi}{V_1 \pm V_2 \cos \varphi}. \quad (8)$$

Ukážeme si, že též výsledek dostaneme i použitím komplexní metody.

Je-li $V_1 = V_2$, předpokládejme pro sčítání, že $\varphi \neq (2k + 1)\pi$.

Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 \pm \mathbf{V}_2 &= V_1(\cos \omega t + j \sin \omega t) \pm V_2[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] \\ &= V_1(\cos \omega t + j \sin \omega t) \pm V_2[(\cos \omega t + j \sin \omega t)(\cos \varphi + j \sin \varphi)] = \\ &= [V_1 \pm V_2(\cos \varphi + j \sin \varphi)](\cos \omega t + j \sin \omega t). \end{aligned}$$

Položíme-li

$$\begin{aligned} V_1 \pm V_2 \cos \varphi &= V_3 \cos \delta \\ V_2 \sin \varphi &= V_3 \sin \delta, \end{aligned} \quad (9)$$

pak

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 \pm \mathbf{V}_2 = V_3 (\cos \delta + j \sin \delta) (\cos \omega t + j \sin \omega t) = \\ = V_3 [\cos (\omega t + \delta) + j \sin (\omega t + \delta)] .$$

Součet (rozdíl) symbolů je tvaru (2), a tedy přísluší sinusové funkci (1), jež je jeho imaginární částí

$$v_3 = V_3 \sin (\omega t + \delta) .$$

Efektivní hodnotu V_3 a fázový úhel δ vypočteme ze soustavy rovnic (9). Umocněním a sečtením obou rovnic vypočteme V_3 , dělíme-li druhou rovnici první, vypočteme $\operatorname{tg} \delta$. Protože V_3 je kladné číslo, je

$$V_3 = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 \pm 2 V_1 V_2 \cos \varphi} , \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{V_2 \sin \varphi}{V_1 \pm V_2 \cos \varphi} .$$

Dostáváme tedy i použitím komplexní metody vztahy (8).

b) Stejného postupu nelze užít k odvozování dalších výkonů se symboly (násobení, umocňování, dělení). Komplexní symbolika a rovněž vektorové znázornění zde selhávají. Ukazuje se, že kruhové frekvence vypočítaných veličin jsou různé od ω . Ověříme si tuto skutečnost například na násobení.

Nechť mezi veličinami (6) platí

$$v_1 \cdot v_2 = x .$$

Ptáme se, zda symbol $\mathbf{X}$ součinu x je tvaru (2).

Užijeme-li součtových vzorců, dostáváme

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = V_1 V_2 [\cos (2\omega t + \varphi) + j \sin (2\omega t + \varphi)] .$$

Položíme-li $V_1 V_2 = V_4$, je

$$\mathbf{X} = V_4 [\cos (2\omega t + \varphi) + j \sin (2\omega t + \varphi)] ,$$

a tedy $x = V_4 \sin (2\omega t + \varphi)$. (10)

Vynásobíme-li však veličiny (6) přímo a použijeme goniometrických vzorců, vychází

$$v_1 v_2 = \frac{1}{2} V_1 V_2 [\cos \varphi - \cos (2\omega t + \varphi)] .$$

Ježto $\varphi \neq 2k\pi$, vyplývá srovnáním výsledku s (10), že jde o odlišné výrazy (lze ukázat např. pro $t = 0$).

Ukážeme si, jak je možno tuto skutečnost obejít, tzn., jak lze používat komplexní symboliky k výpočtům podle fyzikálních vztahů, v nichž se vyskytuje součin (podíl) veličin tvaru (1).

1. Výkon střídavého proudu

Pro výkon stejnosměrného proudu platí

$$P = U \cdot I ,$$

kde U a I jsou napětí a proud. Jestliže stejného vzorce užijeme pro výkon střídavého proudu, dostaneme tzv. zdánlivý výkon. Při průchodu stří-

davého proudu obecným obvodem dochází totiž vždy k fázovému posunutí φ mezi proudem a napětím. Skutečný výkon je, jak víme, $U \cdot I \cdot \cos \varphi$. Studujme tuto otázku pomocí komplexní metody.

Nechť symboly střídavého napětí $u = U \sin (\omega t + \varphi)$ a proudu $i = I \sin \omega t$ jsou

$$\mathbf{U} = U [\cos (\omega t + \varphi) + j \sin (\omega t + \varphi)], \quad \mathbf{I} = I (\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

Symbol $\mathbf{P}$ zdánlivého výkonu P definujeme jako součin symbolu $\mathbf{U}$ a symbolu

$$\bar{\mathbf{I}} = I (\cos \omega t - j \sin \omega t),$$

který nazýváme sdruženým k $\mathbf{I}$. Je tedy

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{I}} = UI [\cos (\omega t + \varphi) + j \sin (\omega t + \varphi)] (\cos \omega t - j \sin \omega t) = \\ = UI (\cos \varphi + j \sin \varphi) = P_s + j P_j. \quad (11)$$

Výkonu, který není veličinou tvaru (1), (neboť nezávisí na čase) jsme tak přiřadili symbol (11). Jeho reálná část je skutečný výkon P_s , imaginární část je tzv. jalový výkon $P_j = UI \sin \varphi$, který zůstává nevyužit. Zdánlivý výkon P je pak

$$P = |\mathbf{P}| = \sqrt{P_s^2 + P_j^2}$$

Příklad 1. Stroj vydává proud 100 A při napětí 120 V. Fázový úhel mezi proudem a napětím je 37° . Vypočtěte skutečný, jalový a zdánlivý výkon!

Řešení. Proud $i = 100 \sin \omega t$ a napětí $u = 120 \sin (\omega t + 37^\circ)$ odpovídají symboly

$$\mathbf{I} = 100 (\cos \omega t + j \sin \omega t),$$

$$\mathbf{U} = 120 [\cos (\omega t + 37^\circ) + j \sin (\omega t + 37^\circ)].$$

V okamžiku $t = 0$ je

$$\mathbf{I} = 100,$$

$$\mathbf{U} = 120 (\cos 37^\circ + j \sin 37^\circ),$$

podle (11) platí pro symbol zdánlivého výkonu P

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{I} = 120 (\cos 37^\circ + j \sin 37^\circ) \cdot 100 = 9600 + j 7200.$$

Je tedy $P_s = 9,6 \text{ kW}$, $P_j = 7,2 \text{ kVA}$, $P = |\mathbf{P}| = 12 \text{ kVA}$.

2. Ohmův zákon v symbolickém tvaru

Nechť $u = U \sin (\omega t + \varphi)$ je sinusové napětí na obecném odporu Z (tzv. impedanci), vytvořené proudem $i = I \sin \omega t$. Napětí u a proudu i odpovídají symboly

$$\mathbf{U} = U [\cos (\omega t + \varphi) + j \sin (\omega t + \varphi)], \quad \mathbf{I} = I (\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

Hledejme $\mathbf{Z}$ tak, aby mezi symboly platil Ohmův zákon

$$\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = \mathbf{Z}.$$

Tedy

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = \frac{U [\cos (\omega t + \varphi) + j \sin (\omega t + \varphi)]}{I (\cos \omega t + j \sin \omega t)} =$$

$$= \frac{U}{I} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (12)$$

$\mathbf{Z}$ má rozměr odporu a nazývá se komplexní impedance. Je to komplexní číslo nezávislé na čase. Jeho reálná část $R = \frac{U}{I} \cos \varphi$ je odpor ohmický, imaginární část $X = \frac{U}{I} \sin \varphi$ je odpor nelineárních členů obvodu (cívky, kondenzátoru). Impedance Z není tedy fyzikální veličina tvaru (1), ale zůstává konstantní v čase.

Obsahuje-li impedance např. ohmický odpor R a induktivní odpor X_L v sérii, má symbol $\mathbf{Z}$ tvar

$$\mathbf{Z} = R + jX_L = R + j\omega L, \\ \text{a tedy } Z = |\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

P ř í k l a d 2. Efektivní hodnoty střídavých proudů vyráběných dvěma paralelně zapojenými alternátory jsou $I_1 = 40 \text{ A}$, $I_2 = 100 \text{ A}$. Proudů jsou vzájemně posunuty o $\frac{\pi}{6}$. Určete efektivní hodnoty svorkového napětí a výsledného proudu ve vnějším obvodu, obsahujícím ohmický odpor $R = 170 \Omega$ a induktivní odpor $X_L = 53 \Omega$!

Ř e š e n í

a) Výpočet proudů. Okamžité hodnoty proudů jsou

$$i_1 = 40 \sin \omega t, \quad i_2 = 100 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right)$$

a odpovídající symboly

$$\mathbf{I}_1 = 40 (\cos \omega t + j \sin \omega t), \quad \mathbf{I}_2 = 100 \left[\cos \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) + j \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \right].$$

Podle Kirchhoffova zákona platí mezi proudy

$$i_1 + i_2 = i.$$

Podle a) platí i mezi symboly

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}.$$

Z geometrického významu vyplývá, že $|\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2|$ je konstantní a tudíž lze uvažovat například $t = 0$. Pak

$$\mathbf{I}_{10} = 40, \quad \mathbf{I}_{20} = 100 \left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

a tedy

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_{10} + \mathbf{I}_{20} = 40 + 100 \left(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right) \doteq 86,6 + j 50.$$

Efektivní hodnota výsledného proudu ve vnějším obvodu je pak

$$I = |\mathbf{I}| = \sqrt{86,6^2 + 50^2} \doteq 122,75 \text{ A}.$$

b) Výpočet napětí. Podle (12) je komplexní impedance

$$\mathbf{Z} = 170 + j 53, \text{ a tedy } Z = |\mathbf{Z}| = \sqrt{170^2 + 53^2} \doteq 178,40 \, \Omega.$$

K výpočtu svorkového napětí použijeme Ohmova zákona.

Platí

$$U = |\mathbf{U}| = |\mathbf{I}\mathbf{Z}| = |\mathbf{I}| |\mathbf{Z}| = 122,75 \cdot 178,40 \doteq 21\,898,60 \, \text{V}.$$

Obvodem protéká proud 123 A, svorkové napětí je asi 22 kV.

Tak jsme ukázali, že komplexní metody lze použít i ve vztazích, v nichž se vyskytuje součin nebo podíl fyzikálních veličin tvaru (1). Stačí jen vhodně definovat symboly některých veličin (výkonu, impedance).

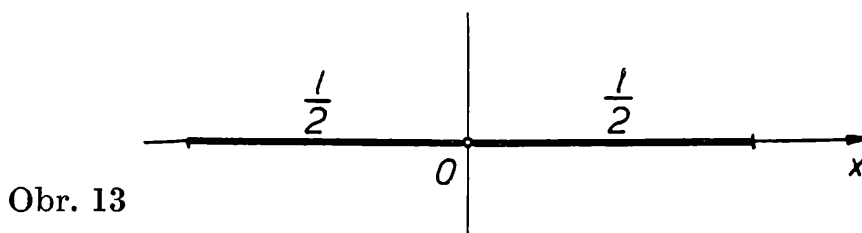
Ťažisko, momenty prvního a druhého stupně

PROF. DR. ZALÁN BODÓ, Budapešť

(Psáno pro Rozhledy)

(Dokončení)

6. příklad. Moment druhého stupně homogennej hmotnej úsečky délky l vzhľadom na ťažisko.



Rozpolme úsečku a použijme vety I a II

$$\Theta_0 = M a_x^2 l^2 = 2 \left[\frac{M}{2} a_x^2 \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{M}{2} \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right],$$

odtiaľ

$$a_x^2 = \frac{1}{12}.$$

Teda podľa (24) vzhľadom na os kolmo k úsečke idúcu ťažiskom

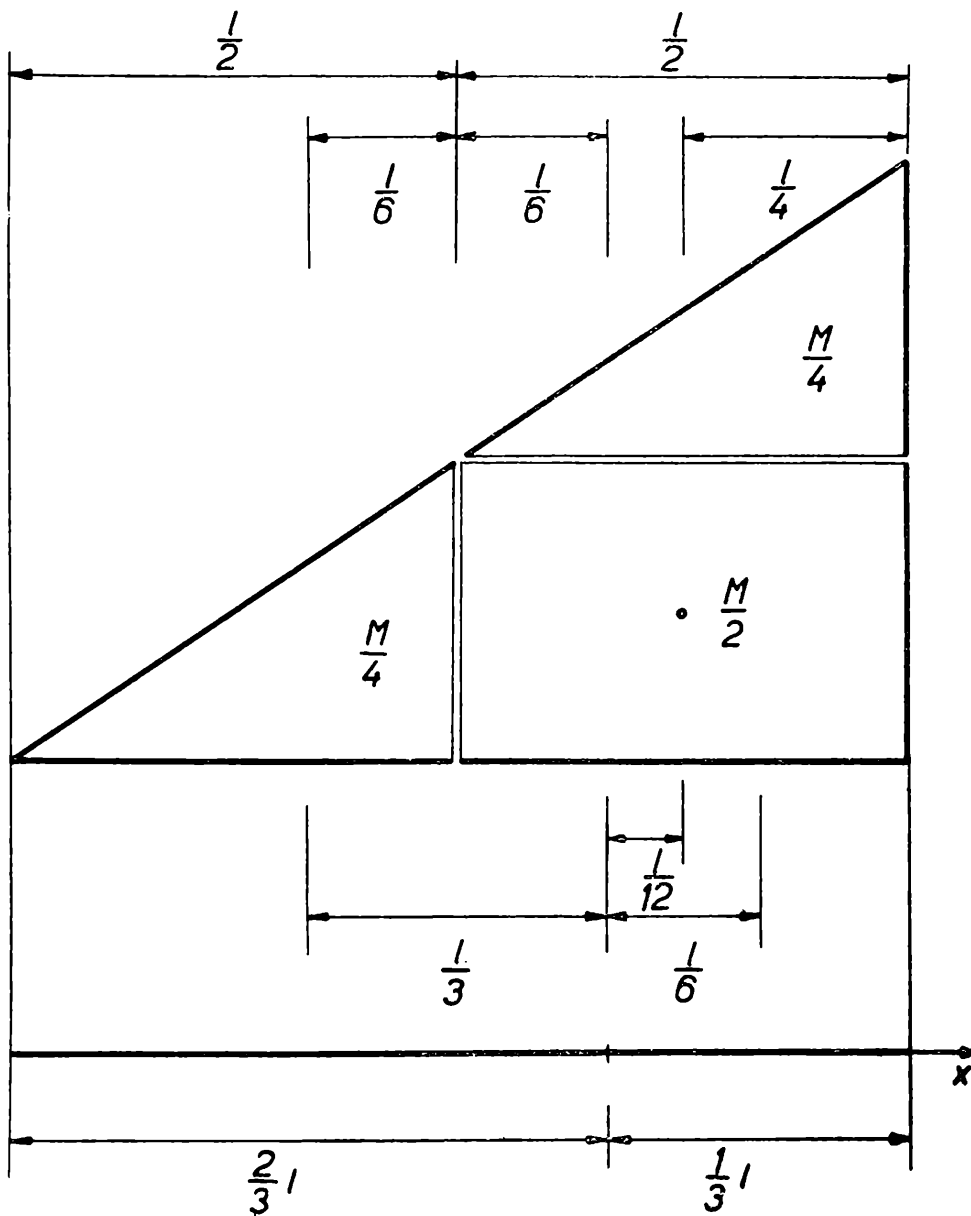
$$\Theta = \frac{1}{12} M l^2.$$

Vypočítajme moment zotrvačnosti aj vzhľadom na koncový bod úsečky. Vzhľadom na koncový bod dľa Steinerovej vety:

$$\Theta_0 = \frac{1}{12} M l^2 + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} M l^2 .$$

7. *príklad.* Moment zotrvačnosti hmotnej úsečky lineárne rastúcej dĺžkovej hustoty hmoty dĺžky l a hmoty M vzhľadom na jej ťažisko.

Rozpolme úsečku; potom dla úvahy v 2. príklade pravá časť se dá zložiť z úsečky konštantnej dĺžkovej hustoty, hmoty $\frac{M}{2}$ a z úsečky, ktorá je totožná s ľavou polúsečkou hmoty $\frac{M}{4}$ a lineárne rastajúcej dĺžkovej hustoty. Vzdialenosti ťažísk jednotlivých častí od ťažiska celej úsečky sú (pozri 1. a 2. príklad a obr. 14) $\frac{l}{3}$, $\frac{l}{6}$ a $\frac{l}{12}$. Na základe I. II. vety a predošlého príkladu môžeme písať



Obr. 14

$$Ma_x^2 l^2 = \frac{M}{4} a_x^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{4} \left(\frac{l}{3}\right)^2 + \frac{M}{4} a_x^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{4} \left(\frac{l}{6}\right)^2 + \\ + \frac{M}{2} \frac{1}{12} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{2} \left(\frac{l}{12}\right)^2$$

z čoho

$$a_x^2 = \frac{1}{18}.$$

Moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmu k úsečke idúcu ťažiskom

$$\Theta = \frac{1}{18} Ml^2.$$

Vzhľadom na ľavý koncový bod bude

$$\Theta_0 = \frac{1}{18} Ml^2 + M \left(\frac{2}{3} l\right)^2 = \frac{1}{2} Ml^2.$$

8. *príklad.* Moment zotrvačnosti hmotnej úsečky dĺžky l s kvadraticky rastúcou dĺžkovou hustotou vzhľadom na jej ťažisko.

Rozpolme úsečku, potom podľa 5. príkladu pravá polovica sa dá rozdeliť na tri časti, jedna je rovná ľavej polovici, druhá je úsečkou s lineárne rastúcou dĺžkovou hustotou a tretia je úsečkou s konštantnou dĺžkovou hustotou. Hmoty a vzdialenosti ťažísk sú známe z 5. príkladu, resp. dajú sa vyrátať (pozri obr. 1. a 15. Platí:

$$Ma_x^2 l^2 = \frac{M}{8} a_x^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{8} \left(\frac{3l}{8}\right)^2 + \frac{M}{8} a_x^2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{M}{8} \left(\frac{l}{8}\right)^2 + \\ + \frac{3M}{8} \cdot \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{3M}{8} \left(\frac{l}{12}\right)^2 + \frac{3M}{8} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Odtiaľ
$$a_x^2 = \frac{3}{80}$$

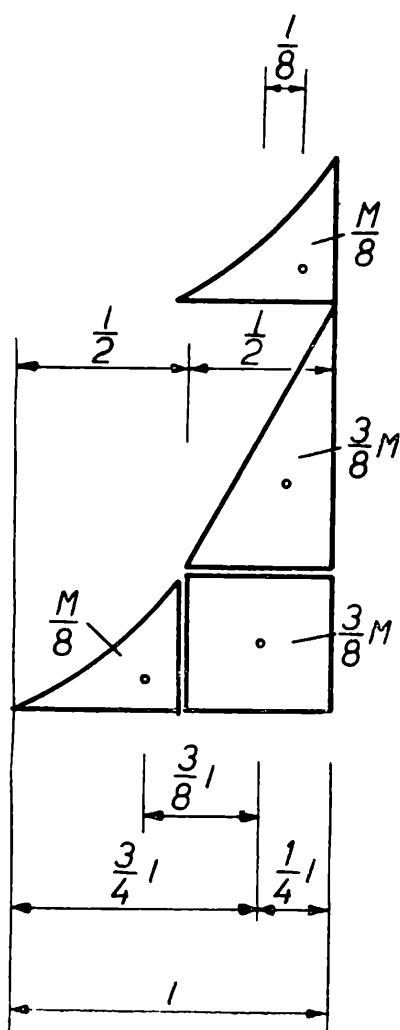
a tak moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmo na úsečku a prechádzajúcu ťažiskom

$$\Theta = \frac{3}{80} Ml^2$$

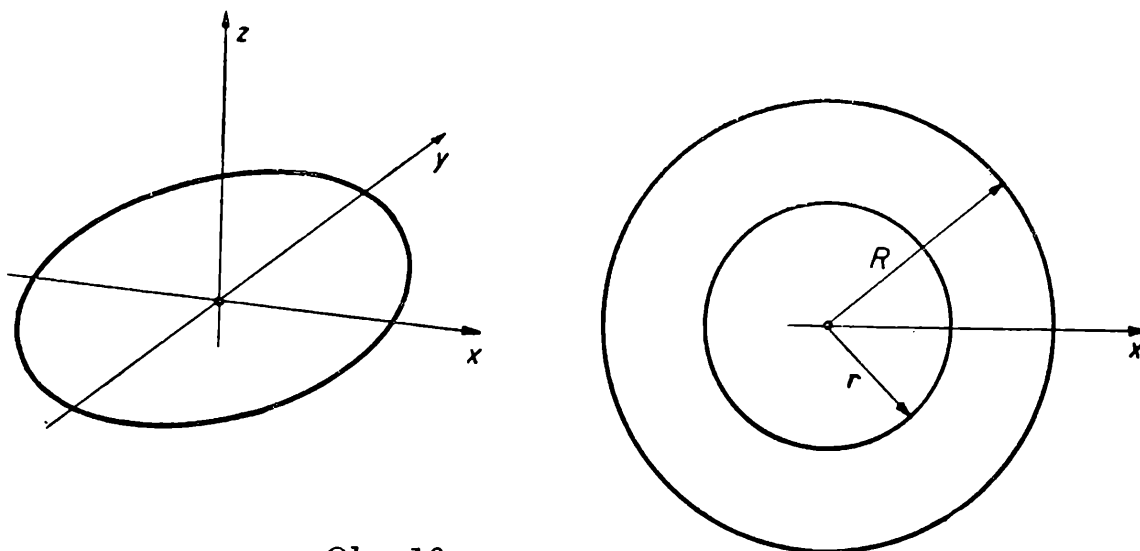
Vzhľadom na ľavý koncový bod však

$$\Theta = \frac{3}{80} Ml^2 + M \left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} Ml^2.$$

9. *príklad.* Momenty zotrvačnosti kruhovej dosky zanedbateľnej hrúbky (pri jej umiestnení podľa obr. 16.)



Obr. 15



Obr. 16

Pri počítaní Θ možno sústrediť hmotné body ležiace na obvode kruhu polomeru r (dĺžka obvodu $2\pi r$) do jedného bodu obvodu na x -ovej osi. Potom kruhovú dosku nahradí hmotná úsečka dĺžky R s lineárne rastúcou dĺžkovou hustotou. Θ bude sa rovnať momentu zotrvačnosti hmotnej úsečky vzhľadom na jej počiatok, čiže podľa 7. príkladu

$$\Theta_0 = \frac{1}{2} MR^2.$$

Pretože z dôvodov súmernosti zrejme $\Theta_x = \Theta_y$, podľa (27)

$$\Theta_x + \Theta_y = \frac{\Theta_0}{2} = \frac{1}{4} MR^2.$$

10. *príklad.* Momenty zotrvačnosti gule umiestnenej v súradnom systéme s počiatkom v ťažisku telesa podľa obr. 16.

Pri počítaní možno sústrediť hmotné body ležiace na povrchu gule polomeru r (plocha povrchu $4\pi r^2$) do jednej osi; potom guľu nahradí tyč dĺžky R s kvadraticky rastúcou dĺžkovou hustotou. Θ_0 sa rovná momentu zotrvačnosti tyče vzhľadom na jej počiatok, čiže podľa 8. príkladu

$$\Theta_0 = \frac{3}{5} MR^2.$$

Podľa (20), pretože z dôvodov súmernosti

$$\Theta_x + \Theta_y = \Theta_z, \quad \Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{zx},$$

$$\Theta_x = \frac{2}{3} \Theta_0 = \frac{2}{5} MR^2,$$

$$\Theta_{xy} = \frac{1}{3} \Theta_0 = \frac{1}{5} MR^2.$$

11. *príklad.* Momenty zotrvačnosti priameho kruhového valca umiestneného podľa obr. 17. v súradnom systéme s počiatkom v ťažisku telesa.

Pri počítaní veličiny Θ_z možno stlačiť valec do roviny xy a dostaneme kruhovú dosku s konštantnou plošnou hustotou. Podtom podľa 9. príkladu

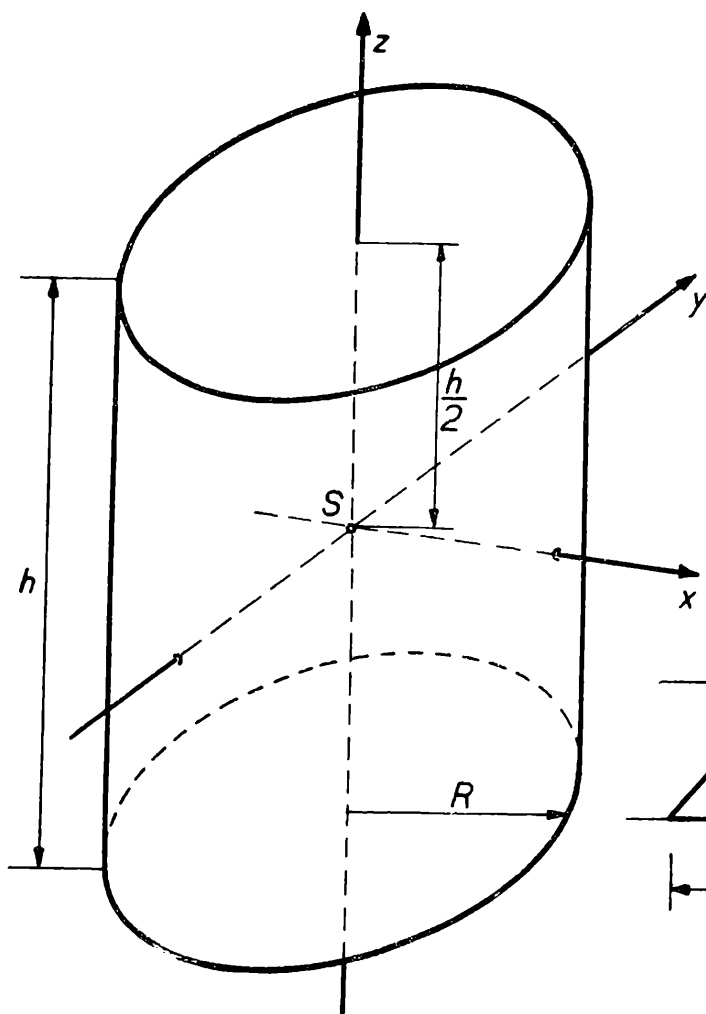
$$\Theta_z = \frac{1}{2} MR^2.$$

Pri počítaní veličiny Θ_{xy} možno stlačiť valec do osi z a dostaneme hmotnú úsečku dĺžky h s konštantnou dĺžkovou hustotou. Potom podľa 6. príkladu

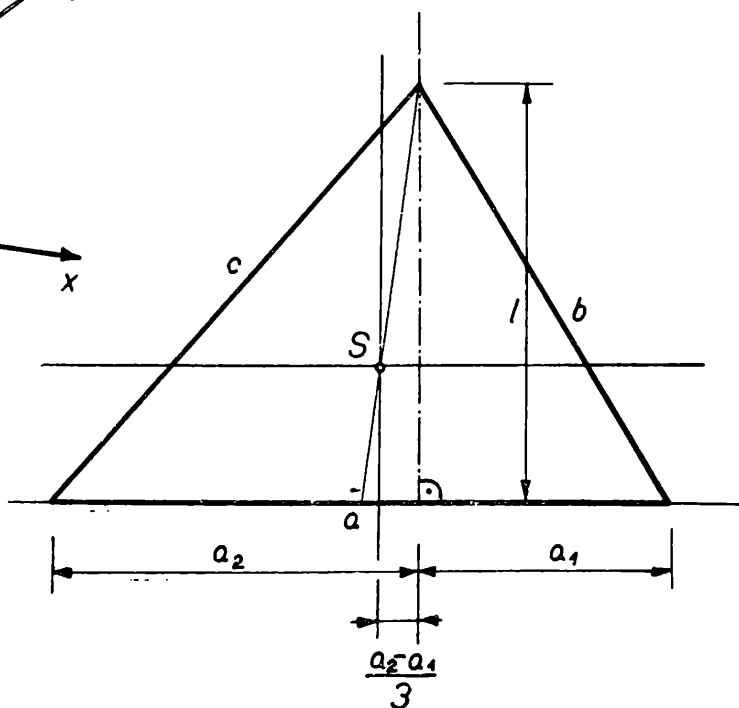
$$\Theta_{xy} = \frac{1}{12} Mh^2.$$

Z posledných dvoch výrazov z dôvodov súmernosti použijúc vzťahy (17) až (20)

$$\Theta_{yz} = \Theta_{zx} = \frac{\Theta_z}{2} = \frac{1}{4} MR^2,$$



Obr. 17



Obr. 18

$$\Theta_0 = \Theta_z + \Theta_{xy} = M \frac{h^2 + 6R^2}{12}$$

$$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_0 - \frac{1}{2} \Theta_z = M \frac{h^2 + 3R^2}{12}$$

12. *príklad.* Aký je moment zotrvačnosti trojuholníka vzhľadom na os idúcu ťažiskom a kolmu k rovine trojuholníka.

Hľadaný moment zotrvačnosti rovná sa súčtu momentu zotrvačnosti vzhľadom na os rovnobežnú s jednou stranou trojuholníka a idúcu jeho ťažiskom Θ_1 a momentom zotrvačnosti Θ_2 vzhľadom na os ležiacu v rovine trojuholníka prechádzajúcu ťažiskom a kolmú na predošlú os (obr. 18). Θ_1 je rovný momentu zotrvačnosti hmotnej úsečky lineárne rastúcej dĺžkovej hustoty dĺžky l a hmoty M , lebo body trojuholníka môžeme stlačiť rovnobežne s osou. Teda $\Theta_1 = \frac{1}{18} Ml^2$. Moment Θ_2 vyjadríme pomocou momentu zotrvačnosti trojuholníka vzhľadom na os rovnobežnú a idúcu tretím vrcholom. Keď stlačíme body trojuholníka rovnobežne s touto osou, dostaneme dve tyče s lineárne rastúcou dĺžkovou hustotou. Máme vyrátať ich momenty zotrvačnosti, vzhľadom na osi k nim kolmé a idúce ich koncovými bodmi. Podľa Steinerovej vety súčet týchto dvoch momentov zotrvačnosti bude

$$\left[\frac{1}{18} M_1 a_1^2 + M_1 \left(\frac{a_1}{3} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{18} M_2 a_2^2 + M_2 \left(\frac{a_2}{3} \right)^2 \right] = \frac{1}{6} (M_1 a_1^2 + M_2 a_2^2) = \\ = \frac{1}{6} \left(M \frac{a_1}{a} a_1^2 + M \frac{a_2}{a} a_2^2 \right) = \frac{M}{6a} (a_1^3 + a_2^3) = \frac{M}{6} (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2).$$

A tak podľa Steinerovej vety moment zotrvačnosti Θ_2 trojuholníka vzhľadom na os idúcu ťažiskom.

$$\Theta_2 = \frac{M}{6} (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2) - M \left(\frac{a_2 - a_1}{3} \right)^2.$$

Keď použijeme vzťahy $l^2 = b^2 - a_1^2$, $l^2 = c^2 - a_2^2$, bude moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmu k rovine trojuholníka a idúcu ťažiskom

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = \frac{1}{18} Ml^2 + \frac{M}{6} (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2) - \frac{M}{9} (a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2) = \\ = \frac{M}{36} (2l^2 + 6a_1^2 - 6a_1 a_2 + 6a_2^2 - 4a_1^2 + 8a_1 a_2 - 4a_2^2) = \\ = \frac{M}{36} (b^2 - a_1^2 + c^2 - a_2^2 + 2a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_1 a_2) = \\ = \frac{M}{36} [b^2 + c^2 + (a_1 + a_2)^2] = \frac{M}{36} (a^2 + b^2 + c^2)$$

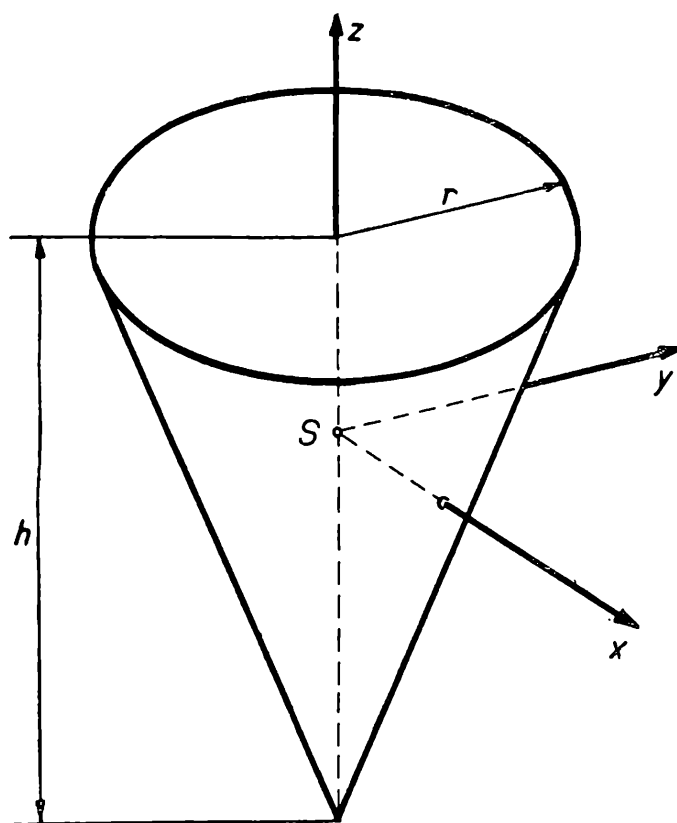
13. *príklad*. Aký je moment zotrvačnosti priameho kúžela s kruhovou základňou polomeru r , výšky h vzhľadom na osi x , y a z (obr. 19.). S je ťažiskom, rovina xy je rovnobežná so základňou.

Hľadáme Θ_x , Θ_y a Θ_z . Lahko vyrátame Θ_{xy} a Θ_z ; pomocou nich vyjadríme hľadané veličiny.

Pri výpočte Θ_{xy} stlačíme kužel do osi z a dostaneme hmotnú úsečku dĺžky h s kvadraticky rastúcou dĺžkovou hustotou Θ_{xy} sa práve rovná momentu zotrvačnosti tejto hmotnej úsečky vzhľadom na jej ťažisko. Teda

$$\Theta_{xy} = \frac{3}{80} Mh^2. \text{ Počítajme teraz } \Theta_z. \text{ Umiestnime kužel do priameho valca}$$

s rovnakou kruhovou základňou a rovnakou výškou. Vyplníme priestor medzi kuželom a plášťom valca lákou, z ktorej je kúžel, potom jeho hmota je dvojnásobkom hmoty kužela (totiž objem valca je trojnásobkom objemu kužela). Moment zotrvačnosti Θ_z dostaneme, keď moment zotrvačnosti



Obr. 19

valca hmoty $3M$ zmenšíme o moment zotrvačnosti telesa, ktorým je kúžel doplnený na valec. Keď toto teleso stlačíme do roviny xy , dostaneme kruhovú dosku, ktorej plošná hustota lineárne rastie od stredu v radialnom smere. Keď otáčaním stlačíme túto kruhovú dosku do osi x , dostaneme hmotnú úsečku s kvadraticky rastúcou dĺžkovou hustotou. Teda

$$\Theta_z = \frac{1}{2} 3Mr^2 - \frac{3}{5} 2 Mr^2 = \frac{3}{10} Mr^2.$$

Z dôvodov súmernosti $\Theta_x = \Theta_y$; použitím vzťahov

$$\Theta_0 = \Theta_z + \Theta_{xy} \quad \text{a} \quad \Theta_0 = \frac{1}{2} (\Theta_x + \Theta_y + \Theta_z)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \Theta_x = \Theta_y = \Theta_0 - \frac{1}{2} \Theta_z &= \Theta_z + \Theta_{xy} - \frac{1}{2} \Theta_z = \frac{1}{2} \Theta_z + \Theta_{xy} = \\ &= \frac{3}{20} Mr^2 + \frac{3}{80} Mh^2. \end{aligned}$$

Teda

$$\Theta_x = \Theta_y = \frac{3}{20} M \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right), \quad \Theta_z = \frac{3}{10} Mr^2.$$

Podobným spôsobom dostaneme

$$\Theta_{zx} = \Theta_{zy} = \frac{3}{20} Mr^2.$$

Přeložili a upravili J. Sivoš, Š. Nehnevajová, SVŠT, Bratislava

Od teploty 0°C k teplotě 0°K

ALOIS SKYVA, Olomouc

(Dokončení)

2,6 Metoda Claudeho. V Claudeho metodě zkapalňování vzduchu se ochlazení dosahuje adiabatickým rozepnutím, doprovázeným konáním vnější práce.

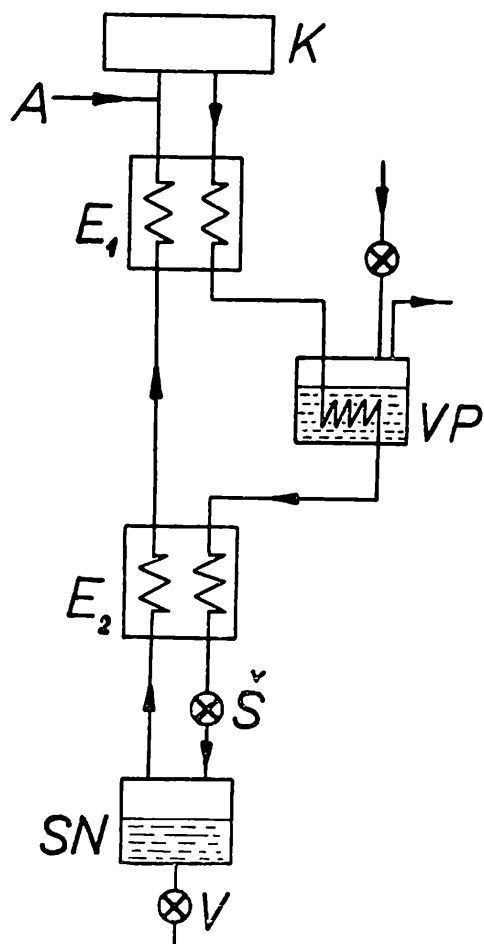
Na obr. 6 je schéma zařízení pro zkapalnění vzduchu, které navrhl roku 1902 Claude. Nejdříve se vzduch stlačuje v kompresoru K při pokojové teplotě. Stlačený vzduch prochází prvním tepelným výměníkem E_1 a potom se rozděluje na dva proudy; část x jde do následujícího tepelného výměníku E_2 a ostatní část $(1 - x)$ do expanzního stroje ES . Jako expanzní stroj může posloužit mazaný pístový stroj nebo turbína. Teoreticky kapalný vzduch můžeme získat přímo v expanzním stroji.

V praxi však je to spojeno s technickými obtížemi a proto se to neužívá. V schématu Claudeho se zkapalnění provádí pomocí rozepnutí ve škrticím ventilu $\check{S}$, který společně s posledním tepelným výměníkem E_3 tvoří jednoduchý zkapalňovací cykl Lindeho. Ochlazení pomocí expanzního stroje v schématu Claudeho můžeme považovat jako záměnu předběžného ochlazení (např. čpavkovým cyklem) ve zkapalňovači Lindeho.

Do Claudeho chladicího cyklu zavedl r. 1939 P. L. Kapica řadu zlepšení. Takto vylepšený cykl bývá nazýván cyklem P. L. Kapicy. [5]

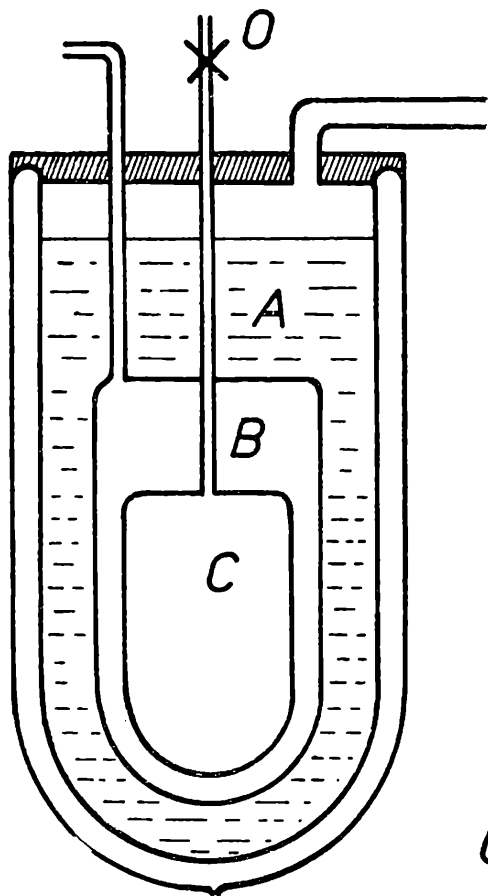
2,7 Zkapalnění vodíku a helia. O možnosti zkapalnění vodíku Lindeho metodou bylo již psáno v části 2,4 tohoto článku.

Ke zkapalnění vodíku nebo helia lze úspěšně použít metody jednorázové adiabatické expanze podle Simona (obr. 7). Touto metodou se podařilo Simonu a jeho spolupracovníkům zkapalnit roku 1932 helium a roku 1935 vodík. Do nádoby C , ochlazené na nízkou teplotu ve vaně A , se umísťuje zkapalňovaný plyn, stlačený

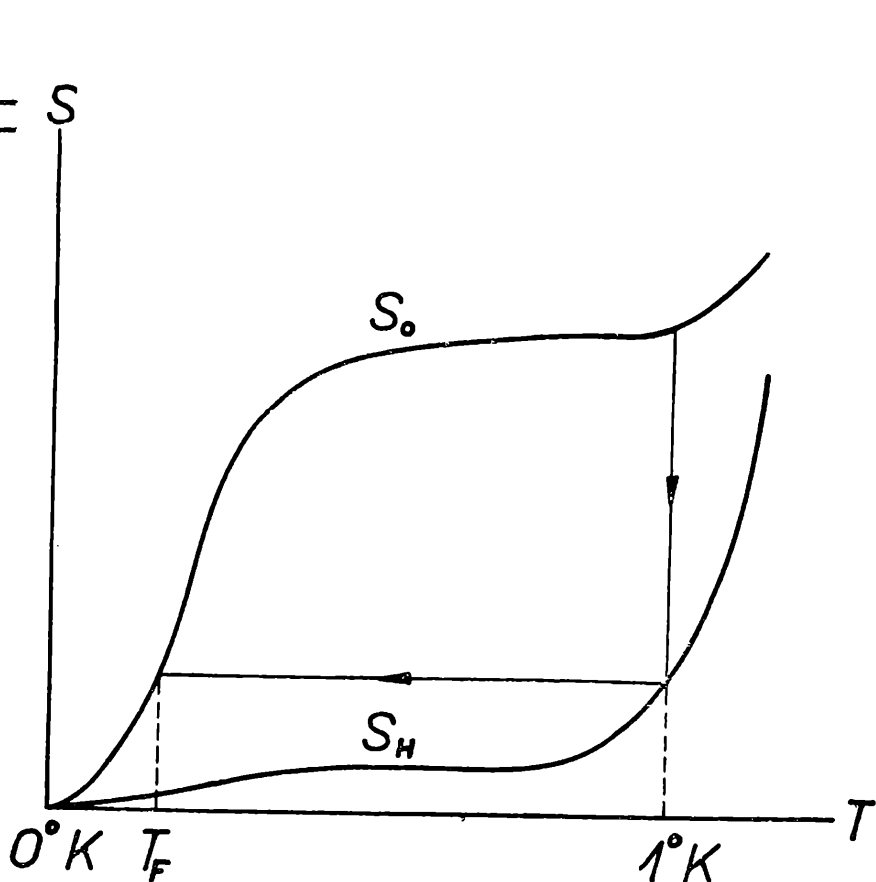


Obr. 6. Schéma zařízení Claudeho pro zkapalnění vzduchu.

izotermicky na tlak $100 - 200 \text{ kp.cm}^{-2}$. Při zkapalňování vodíku se do vany A nalévá kapalný kyslík nebo kapalný vzduch a při zkapalňování helia kapalný vodík. Prostor nad kapalinou ve vaně A je odčerpáván vývěvami. Aby mezi vanou A a nádobou C byl tepelný kontakt, zavádí se do vakuového pláště B plyn, zprostředkující výměnu tepla. Po ochlazení nádoby C se plášť vyčerpá. Potom se otevře expanzní ventil O , který se nachází při pokojové teplotě. Při adiabatic-



Obr. 7. Schéma zkapalňovače pracujícího podle Simonovy metody jednorázové adiabatické expanze.



Obr. 8. Diagram entropie paramagnetické látky, znázorňující proces ochlazení metodou adiabatického odmagnetování.

kém rozeprnutí proti vnějšímu tlaku se plyn v nádobě C ochladí a částečně zkapalní. Vytvořená kapalina zaplní část objemu nádoby C ; bývá to přes 50 % obsahu nádoby C .

Expanzní metoda zkapalnění je výhodná jen v tom případě, když tepelná kapacita nádoby C je menší než tepelná kapacita nacházejícího se v ní plynu. Tato podmínka je splněna jen při velmi nízkých teplotách, když tepelná kapacita pevných látek se stává malou. Proto expanzní metody se užívá prakticky jen pro zkapalnění vodíku a helia.

Pro zkapalnění helia můžeme však užít i zkapalňovače s nepřetržitou činností, a to buď s předběžným ochlazením kapalným vodíkem, nebo s ochlazením pomocí expanzního stroje. První zkapalňovač helia

s expanzním strojem zkonstruoval K a p i c a (1935). Ve zkapalňovači s nepřetržitou činností nepřetržitý proud předběžně ochlazovaného stlačeného helia musí projít protiproudovým tepelným výměníkem nebo výplní regenerátoru (akumulátorovým tepelným výměníkem) a rozeprout se isoenthalpicky ve škrticím ventilu. To platí i tehdy, kdybychom nepoužili způsobu získání teploty nižší než inverzní s pomocí kapalného vodíku, vypařujícího se pod sníženým tlakem, nebo s pomocí chladného plynu z expanzivního stroje.

Metoda jednorázové adiabatické expanze je však velmi výhodná tím, že dává i malým ústavům jednoduchou možnost získat zkapalněné helium.

Kapalný vodík je lehce pohyblivá bezbarvá kapalina s hustotou $0,071 \text{ kg/dm}^3$, která vře za normálního tlaku při $20,2 \text{ °K}$. Snížením tlaku na 54 torr vzniká při 14 °K pevný vodík, který se dá ochladit dalším snížením tlaku až na 12 °K [1].

Helium má kritickou teplotu asi $5,2 \text{ °K}$ a inverzní teplotu, při které je Jouleův—Thompsonův jev roven nule asi 38 °K [1]. Teplota varu kapalného He^4 je $4,2 \text{ °K}$ za normálního tlaku. Pomocí odčerpávání par He^4 vysoce výkonnými difúzními vývěvami můžeme dosáhnout teplot kolem $0,7 \text{ °K}$. Získáme-li umělou cestou za pomoci jaderných reakcí dostatečné množství izotopu He^3 ke zkapalnění, můžeme dosáhnout ještě nižších teplot. Kapalně He^3 má teplotu varu za normálního tlaku $3,2 \text{ °K}$ a při odčerpávání jeho par získáme teploty do $0,3 \text{ °K}$ [3].

3. Magnetické metody ochlazování

3,1 Metoda adiabatické demagnetizace. Jak bylo uvedeno v 2,7, tak nejnižší teplota, které je možno dosáhnout pomocí odčerpávání par He^3 , je asi $0,3 \text{ °K}$. Abychom mohli dosáhnout ještě nižších teplot, musíme sestavit jiný fyzikální systém. Tento systém musí mít ještě dostatečně velkou entropii v oblasti teplot řádu 1 °K a tato entropie musí záviset na parametru, jenž můžeme snadno změnit, při čemž tento parametr musí být jiný než teplota. Za takový systém je možno vzít paramagnetické soli, poněvadž v nich lze spiny elektronů uspořádané chaoticky při teplotách kapalného helia pomocí magnetického pole o intenzitě řádově 10^5 A/m orientovat, tj. uvést do uspořádaného stavu, a tím snížit entropii látky.

Na obr. 8 je diagram entropie paramagnetické látky ($T - S$ diagram), znázorňující proces ochlazení metodou adiabatického odmagnetování. Křivka S_0 představuje entropii systému při nulové intenzitě magnetického pole. Působením silného magnetického pole při teplotách řádu 1 °K orientujeme spiny. Tento proces je ekvivalentní snížení entropie na určitou hodnotu na křivce S_H . Zmagnetování spinů podobně jako stlačení plynu vede k uvolnění tepla, které je nutno odvést, má-li proces probíhat izotermicky. Adiabatické odmagnetování nám představuje izoentropie-

ký proces; jestliže magnetické pole vypneme a nedovolíme přítok tepla k soli, která se snaží nyní pohltit teplotu namagnetování, sůl se bude ochlazovat. Z grafu je zřejmé, že se sůl ochladí právě na teplotu T_F .

Schéma pokusného uspořádání je na obr. 9. Vzorek paramagnetické soli Z bývá upevněn na podstavci o nízké teplotní vodivosti uvnitř nádoby A , která je obklopena kapalným heliem B , majícím teplotu okolo 1°K (odčerpáváme páry). Lázeň s vroucím heliem je tepelně odstíněna lázní D s kapalným vodíkem. Aby byl zajištěn dobrý tepelný kontakt látky Z s heliovou lázní B je nádoba A naplněna heliem o tlaku 10^{-2} torr. Pokusné zařízení je umístěno mezi pólové nástavce M_1 a M_2 velmi silného elektromagnetu. Nejdříve se látka zmagnetizuje a teplo při tom vznikající se odvádí heliovým plynem do lázně. Potom se látka tepelně izoluje odčerpáním heliového plynu asi na tlak 10^{-4} torr. Nakonec se magnet odpojí nebo vzdálí a při této izoentropické demagnetizaci se látka silně ochladí. Toto ochlazení způsobí zároveň velký pokles tlaku v nádobě A , a tím i účinnější tepelnou izolaci vzorku. Již při poklesu teploty na $0,3^\circ\text{K}$ je např. tlak heliových par jen 10^{-11} torr. S paramagnetickou solí kamencem titanitocesným $\text{Cs}_2\text{SO}_4\text{Ti}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 24 \text{H}_2\text{O}$ dosáhli např. Haas a Wiersma roku 1935 teploty $0,0034^\circ\text{K}$ demagnetizací ze $2,4 \text{Wb/m}^2$ na 10^{-4}Wb/m^2 . Pomocí dvoustupňové demagnetizace [3] lze však dosáhnout stejných teplot i použitím podstatně slabších magnetických polí.

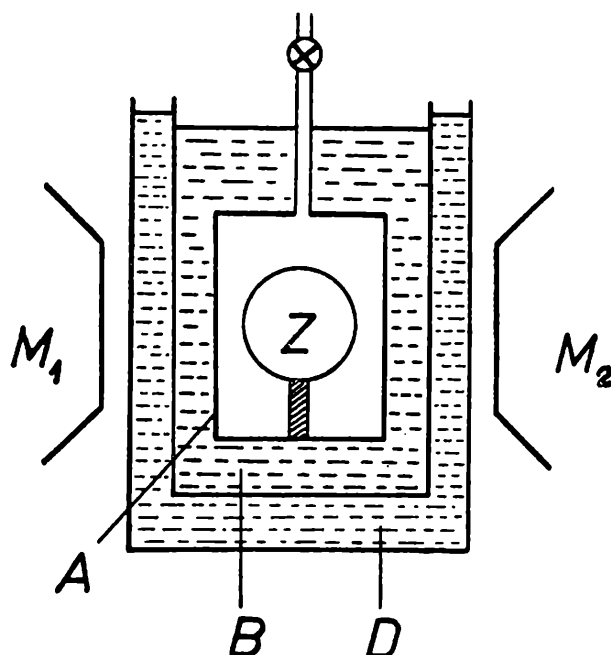
Ještě nižší teploty, řádu 10^{-5}°K byly získány [3] jadernou demagnetizací.

3,2. Metoda adiabatického zmagnetování supravodivého kovu. Při teplotách řádově několik $^\circ\text{K}$ u některých kovů, slitin a sloučenin nastává náhlé nespojité vymizení elektrického odporu na nepatrnou mezní hodnotu. Tento jev se nazývá *supravodivost*.

Adiabatickým zmagnetováním supravodivého kovu je možno dosáhnout jeho dalšího ochlazení na nižší teplotu, než 1°K . Ukazuje se však, že tato metoda je vhodná jen v intervalu mezi $0,3^\circ\text{K}$ a 1°K . Aby se při tom zmenšilo zahřívání vířivými proudy, je vhodné vzorky legovat $0,5 - 1\%$ india [3]. Tato metoda tedy neumožňuje dosažení tak nízkých teplot jako metoda adiabatické demagnetizace.

4. Závěr

Představme si, že jsme provedli orientaci jaderných momentů ve směru magnetického pole a že jsme potom nezrušili magnetické pole, ale změnili okamžitě jeho směr na opačný. V první okamžik všechny magnetické momenty budou orientovány v jednom směru, ale proti směru magnetického pole. Entropie systému je zřejmě minimální při jeho velké energii. Jaderné momenty se po nějaké době začnou opět orientovat do změněného směru vnějšího pole. Jejich magnetická energie



Obr. 9. Schéma aparatury pro ochlazení metodou adiabatické demagnetizace.

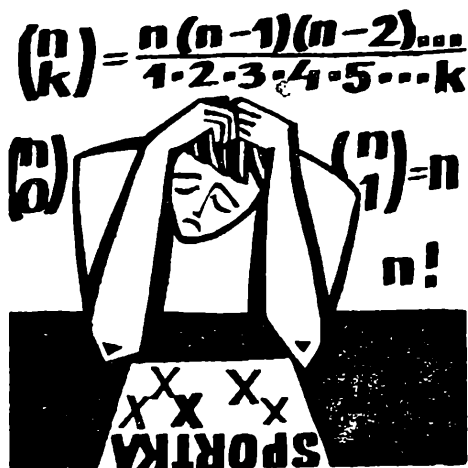
se bude po celou tu dobu zmenšovat, zatímco entropie bude zpočátku růst z minimální hodnoty do maximální (při chaotickém rozložení jaderných momentů) a potom opět klesat k nule. Tento zvláštní stav, při kterém jsou jaderné momenty orientovány proti magnetickému poli, v němž je systém ve stavu minimální entropie a velké energie, kdy zvětšení entropie je doprovázeno zmenšením energie, se nazývá oblastí *záporných absolutních teplot*. Tento stav byl objeven Purcellem a Poundem [6], když studovali relaxační dobu jaderného spinu krystalu LiF v magnetickém poli.

Ve stavu záporných absolutních teplot mají momenty antiparalelní orientaci v poli, každý z nich má tedy maximální energii, které může v poli dosáhnout. Po stránce kvalitativní jsou tedy záporné absolutní teploty vlastně vyšší než kladné absolutní teploty.

Z uvedeného je zřejmé, že teploty blízké 0 °K nejsou tedy pro dnešní fyziku již nedosažitelné.

Literatura

- [1] Franz X. Eder, Úvod do fyziky nízkých teplot, SNTL, Praha 1959 (přel. z něm.).
- [2] Zavarackij N. V., Sverchnizkije temperatury, izd. „Znanie“, Moskva 1959.
- [3] Mendelsohn K., Fyzika nízkých teplot, Izd. inostr. literatury, Moskva 1963 (přel. z angl.).
- [4] Fyzika nízkých teplot, Izd. inostr. literatury, Moskva 1959 (přel. z angl.).
- [5] Scott R. B., Technika nízkých teplot, Izd. inostr. literatury, Moskva 1962 (přel. z angl.).
- [6] Vyšín V., PMFA, číslo 4, 1962, str. 223.



MATEMATICKÉ ZÁBAVY

Matematický problém (Dokončení)

EVŽEN ŘÍMAN, CSc., Praha

Až dosud jsme stále postupovali empiricky, vlastně možno říci, že experimentálně. Zkoušeli jsme, jak najít čísla žádané vlastnosti. Třebas nám obě rychlé a spolehlivé metody, násobící a dělicí, umožnily stanovit přesně, že je 36 „kořenů“ (tj. hodnot hledaných čísel) a určit jejich hodnoty (jak v tabulce uvedeno). Chybí nám *t e o r i e*, tj. algebraické vyjádření problému a vysvětlení mnoha vlastností nalezených čísel. Proč např. všechna čísla o faktoru $k = 2$ mají 18 cifer, čísla o faktoru $k = 4$ jen 6 cifer a čísla o $k = 6$ mají všechna 58 číslic? Proč ta nesymetričnost v počtu cifer u čísel majících $k = 5$, kde $A(5,7)$ má jen 6 cifer a všechna ostatní mají číslic 42? A mnoho jiných.

Musíme si však být vědomi toho, že řešíme vlastně problém jednoho z nejkrásnějších oborů matematiky, totiž *č í s e l n é t e o r i e*, kde se poučky sice snadno objevují, ale těžko dokazují. Ukazuje to řada slavných, ale dosud nedořešených problémů v historii matematiky. S ohledem na obtížnost podáme jen část teorie.

X 5. *Odvození rovnice pro A.* Zpracovali řešitelé [4, 5, 9 a jiní], Řešitel [6] uvádí: Označme $a_0, a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ cifry hledaného čísla A v dekadické soustavě, při čemž index každé cifry nechť určuje její řád. Celkový počet číslic čísla A je tedy n . Přepíšme A dekadickým mnohočlenem; bude

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + 10^{n-3} a_{n-3} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \quad (7)$$

Přemístěním poslední číslice a_0 před všechny ostatní dostáváme číslo $B = 10^{n-1} a_0 + 10^{n-2} a_{n-1} + 10^{n-3} a_{n-2} + \dots + 10 a_2 + a_1$. (8)

Vytkneme činitele 10 ze všech členů mnohočlenu (7) kromě posledního $A = 10 (10^{n-2} a_{n-1} + 10^{n-3} a_{n-2} + 10^{n-4} a_{n-3} + \dots + 10 a_2 + a_1) + a_0$. (9)

Číslo B je podle zadání celistvým násobkem čísla A ; násobící faktor označíme k . Přepíšeme tedy vztah (8) na

$$B = kA = 10^{n-1}a_0 + (10^{n-2}a_{n-1} + 10^{n-3}a_{n-2} + \dots + 10a_2 + a_1). \quad (10)$$

Násobme vztah (9) číslem -1 a vztah (10) číslem 10 , načež obojí sečtíme. Po vyrušení členů v závorce zbude $A(10k - 1) = 10^n a_0 - a_0$, z čehož

$$A = \frac{a_0(10^n - 1)}{10k - 1}, \quad (11)$$

což je hledaná rovnice, vyjadřující číslo A jako funkci poslední číslice a_0 , násobícího faktoru k a počtu číslic n .

P o z n á m k a . Ze vztahu (10) je patrné, že prvou číslicí čísla B je a_0 . Z násobíme-li (7) číslem k , vidíme, že první člen mnohočlenu kA má koeficient ka_{n-1} . Z toho usoudil [7] správně, že maximálně je $a_0 = kA$, resp. že musí být $a_0 \geq ka_{n-1}$, jak uvedeno již dříve ve (4).

Zatím vůbec nevíme, zda (11) má celistvé řešení - čili zda existuje sada celistvých hodnot a_0, k, n, A splňující vztah (11). Soudíme tak ovšem z dřívějších empirických úvah.

X 6. *Zkusme řešení rovnice (11); je ovšem velmi pracné, jak zjistil [9].* Nutno dosadit zvolenou dvojici dovolených hodnot k, a_0 , pro něž platí podmínka [6] a zkoušet pro exponent hodnoty $1, 2, 3, 4, \dots$ tak dlouho, až zlomek vztahu (11) dá číslo celé.

P ř í k l a d 2. Má se určit číslo A pro zvolené $k = 2, a_0 = 2$ zkusmo. Podle (11) bude $A(2,2) = \frac{2 \cdot (10^n - 1)}{19}$, který teprve pro $n = 18$ dá celé

$$\text{číslo } \frac{2 \cdot (10^{18} - 1)}{19} = \frac{2 \cdot 99999\ 999\ 999\ 999\ 999}{19} = 105\ 263\ 157\ 894\ 736\ 842$$

souhlasně jako v tabulce výsledků.

7. *Zjednodušené řešení rovnice (11), kde netřeba znát počet číslic n :* Přepíšeme vztah (11) na 2 zlomky

$$A = \frac{a_0 \cdot 10^n}{10k - 1} - \frac{a_0}{10k - 1}. \quad (12)$$

Vypočtíme (pro zvolená a_0, k) hodnotu druhého zlomku dělením, přičemž zanedbáváme desetinnou čárku, až se objeví a_0 jako zbytek, načež se cifry podílu periodicky opakují. Perioda je rovna hledanému číslu.

D ů v o d . Každý zlomek, který (převeden na tvar, kdy čitatel a jmenovatel nemají společného dělitele) obsahuje ve jmenovateli prvočíslo odlišné od 2 a 5, má nekonečný počet desetinných míst, které se periodicky opakují. Protože jmenovatel $10k - 1$ může nabýt pouze hodnot $19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89$, které vesměs obsahují jiná prvočísla než 2 a 5, a protože jmenovatel je vždy větší než čitatel a_0 , musí být druhý zlomek ve (12) pravý a ryze periodický. Perioda má n číslic. Proto první zlomek ve (12) má hodnotu, jejíž celistvá část je daná perioda a desetinná část je totožná s hodnotou druhého

zlomku ve (12). Odečtením obou zlomků musí proto vzniknout číslo celé. (Vzpomeňme, jak se přeměňuje ryze periodické desetinné číslo na obyčejný zlomek!)

Tím je také podán důkaz, že 1. fundamentální rovnice (11) m u s í mít vždy jedno c e l i s t v é řešení $A(k, a_0)$ pro každou dovolenou dvojici hodnot k, a_0 ; 2. počet n číslic v čísle A je totožný s počtem členů periody.

P ř í k l a d 3. Má se určit číslo A zjednodušenou metodou pro $k = 4, a_0 = 4 : \Rightarrow 10k - 1 = 39$, takže $a_0 : (10k - 1) = 4 : 39 = 0,102\ 564\ 102\ 564$ a proto $A(4,4) = 102\ 564$, jak se snadno přesvědčíme dosazením do (12).

P o z n á m k a. Ke zkoumání periodicity zlomků se také dostali, ovšem jinými úvahami, někteří řešitelé jiní.

Poslední metoda, kterou ještě probereme (a o které se zmiňuje řešitel [9]), používá slavné Fermatovy poučky, kterou si zjednodušeně vyložíme.

8. EULEROVA funkce $\varphi(m)$. V číselné teorii má velkou důležitost tzv. *Eulerova funkce* $\varphi(m)$, která udává p o č e t přirozených čísel menších než přirozené číslo m a s tímto číslem nesoudělných.

P ř í k l a d 4: Stanovme hodnotu funkce $\varphi(m)$ pro několik přirozených

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\varphi(m)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12

čísel neboť např. k číslu $m = 12$ jsou nesoudělná menší čísla 1, 5, 7, 11 a jejich p o č e t je $\varphi(12) = 4$.

V ý p o č e t. 1. Snadno si ověříme, že pro prvočíslo p platí vždy

$$\varphi(p) = p - 1, \quad (13)$$

neboť každé číslo, které je menší než p , je s tímto prvočíslem nesoudělné

2. Je-li m číslem složeným z různých prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_k$, tj. $m = p_1 p_2 p_3 \dots p_k$, pak platí

$$\varphi(m) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \quad (14)$$

P ř í k l a d 5: Určeme Eulerovu funkci pro $m = 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$.

Vyjde $\varphi(120) = 120 \cdot (1 - \frac{1}{2}) (1 - \frac{1}{3}) (1 - \frac{1}{5}) = 120 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{480}{15} = 32$.

Kontrola. Vypíšeme všechna čísla menší než 120, nesoudělná s ním a určíme jejich počet. Je vidět, že vzorec (13) je speciální případ vzorce (14) pro $m = p$ (prvočíslo).

9. Fermatova věta. V číselné teorii je vysoce důležitá poučka *FERMATOVA*, kterou pro snadnější porozumění vyslovíme takto:

Jsou-li přirozená čísla x , m nesoudělná a $\varphi(m)$ značí Eulerovu funkci čísla m , pak výraz

$$\frac{x^{\varphi(m)} - 1}{m} = N, \quad (15)$$

kde N je číslo celé.

Tato věta, které v dalším použijeme k zjištění počtu čísel n hledaných čísel A tvrdí, že dosazením hodnoty Eulerovy funkce $\varphi(m)$ do levé strany vztahu (15), kde x, m jsou vyjde vždy číslo celé. N Tím však není řečeno, že $\varphi(m)$ by musel být nejmenší exponent, který splňuje vztah (15) celistvými čísly.

V číselné teorii¹⁾ se dokazuje, že nejmenší exponent δ , který splňuje vztah (15) pro nesoudělná x, m , musí být některý z dělitelů funkce $\varphi(m)$, tj. $\frac{x^\delta - 1}{m}$ je nejmenší celé číslo (16), kde δ je jeden z dělitelů čísla $\varphi(m)$.

P o z n á m k a. V číselné teorii se užívá tzv. s h o d (kongruencí). Pak Fermatova poučka se vyjádří vztahem $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, což čteme $x^{\varphi(m)}$ je s h o d n o s číslem 1 podle modulu m . Znamená to, že výraz $x^{\varphi(m)}$, dělený číslem (modulem) m , dává zbytek 1. To je také obsahem hořejšího zjednodušeného znění.

P ř í k l a d 6. Má se ověřit Fermatova poučka pro nesoudělná čísla $x = 8$, $m = 5$. Protože m je prvočíslo, pak podle (13) je $\varphi(5) = 5 - 1 = 4$, což dosazeno do (15)

$$\text{dá } \frac{8^4 - 1}{5} = \frac{4096 - 1}{5} = 819.$$

P ř í k l a d 7. Má se určit nejmenší exponent δ , pro který zlomek $\frac{10^\delta - 1}{39}$ dá číslo celé.

Nejdříve užijeme Fermatovy poučky pro $x = 10$, $m = 39$. Jelikož $\varphi(m) = \varphi(3 \cdot 13) = 39 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{13}\right) = 39 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{13} = 24$ musí výraz $(10^{24} - 1) : 39$ dát číslo celé, což ověříme výpočtem $(10^{24} - 1) : 39 = 25\,641\,025\,641\,025\,641\,025\,641$.

Opakování skupiny 025 641 ve výsledku však ukazuje (viz shora), že zde vyhovuje již exponent 6, neboť $(10^6 - 1) : 39 = 25\,641$. Snadno pochopíme příčinu. Rozkladu dvojčlenu $10^{24} - 1 = (10^6 - 1)(10^6 + 1)(10^{12} + 1)$ stačí ke zjištění, že $10^6 - 1$ je dělitelno číslem 39. Je totiž $(10^3 - 1) = 999 = 3 \cdot 333$, kdežto $(10^3 + 1) = 1\,001 = 13 \cdot 77$, a teprve součin obou je dělitelný číslem 39.

P ř í k l a d 8. Má se určit nejmenší exponent δ , který splňuje požadavek (16) pro $x = 10$, m jsou všechna lichá čísla < 50 , nedělitelná pěti a ověřit, že δ je některým z dělitelů čísla $\varphi(m)$.

¹⁾ Čtenářům, kteří se zajímají o problémy číselné teorie, výborně poslouží ruská knížka *O s n o v y t ě o r i i č í s e l*, kterou napsal akademik I. M. VINOGRADOV (Gosudarstvennoje izdatel'stvo tehniko-teoretičeskoj literatury Moskva; stran 180). Při studiu je vhodný slovníček ruských odborných výrazů, právě otiskovaný na obálce Rozhledů. Knížka vyšla též v českém překladu.

Počítá se snadno. Zjistíme, kolik devítek nutno napsat vedle sebe, aby vzniklé číslo bylo dělitelné číslem m . Hodnotu $\varphi(m)$ určíme podle (13), resp. (14)

m	3	7	9	11	31	17	19	21	23	27	29	31	33	37	39	41	43	47	49
$\varphi(m)$	2	6	6	10	12	16	18	12	22	22	28	30	20	36	24	40	42	46	42
δ	1	6	1	2	6	16	18	6	18	3	28	15	2	3	6	5	21	46	42

10. Užití Fermatovy věty ke stanovení počtu číslic (n) čísel A .

Konečně můžeme zodpovědět dříve položené otázky, např. proč čísla s násobícím faktorem $k = 2$ mají všechna 18 cifer.

Základní rovnice (11) pro hledané číslo zní

$$A = a_0 \frac{10^n - 1}{10k - 1},$$

kde exponent n značí počet číslic; a_0 je poslední číslice čísla A , k je násobící faktor. Má-li A být číslem celým, musí hodnota zlomku na pravé straně po případném zkrácení společných dělitelů čísla a_0 a jmenovatele $(10k - 1)$, být celistvá. Jsou dva možné případy:

1. V případě kdy a_0 a jmenovatel $(10k - 1)$ jsou čísla nesoudělná, bude hledaným exponentem n některý z dělitelů čísla $\varphi(m) = \varphi(10k - 1)$.

2. Jestliže lze a_0 vůči jmenovateli $(10k - 1)$ buď úplně nebo částečně krátit a po zkrácení vznikne zlomek s jmenovatelem $m' < 10k - 1$, bude některý z dělitelů čísla $\varphi(m')$ hledaným exponentem n , která najdeme způsobem uvedeným v příkladech 7 a 8.

V číselné teorii se daná úloha může řešit pomocí tzv. indexů, jak se zmínil řešitel [9]. Více o tom poví citovaná Vinogradovova knížka.

Příklad 9. Má se určit počet číslic n čísel A pro $k = 2$!

Ježto $10k - 1 = 19$ je prvočíslo, není možno, aby se a_0 krátilo proti jmenovateli. Hledané n je tedy některým z dělitelů čísla $\varphi(19) = 19 - 1 = 18$. V tabulce výsledků příkladu 8. je již zjištěno, že pro $10k - 1 = m = 19$ je exponentem číslo 18 samo. Proto všechna A pro $k = 2$ musí mít 18 číslic.

Příklad 10. Má se určit počet číslic n čísel A pro ostatní možné hodnoty násobícího faktoru, tj. $k = 3, 4, 5, \dots, 9$.

Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce, kde δ značí nejmenší exponent vyhovující vztahu (15), n je hledaný počet číslic. Porovnejte s příklady 9 a 8. Tabulka na str. 467.

Jediný případ, kdy ve vztahu (15) lze a_0 krátit proti $(10k - 1)$, nastal pro $k = 5$, $a_0 = 7$, neboť (15) dá

$$A(5,7) = \frac{a_0 (10^n - 1)}{10k - 1} = \frac{7 \cdot (10^n - 1)}{49} = \frac{10^n - 1}{7} = 6; \quad n = 6,$$

takže toto číslo $A(5,7)$ je pouze 6ciferné; je vypočteno v tabulce výsledků.

k	$10k - 1$	$\varphi(10k - 1)$	δ	n (je-li poslední číslicí a_0 číslo:)
3	29	28	28	28 pro $a_0 = 3, 4, 5, \dots 9$
4	39	24	6	6 pro $a_0 = 4, 5, 6, \dots 9$
5	49	42	42	42 pro $a_0 = 5, 6, 8, 9$ 6 je-li poslední číslice $a_0 = 7$
6	59	58	58	58 pro $a_0 = 6, 7, 8, 9$
7	69	44	22	22 pro $a_0 = 7, 8, 9$
8	79	78	13	13 pro $a_0 = 8, 9$
9	89	88	44	44 pro $a_0 = 9$

Nastaly ještě tři případy, kdy se dalo a_0 částečně krátit proti $(10k - 1)$, a to $A(4,6)$, $A(4,9)$ a $A(7,9)$; v těchto případech vznikl jmenovatel $m' = 13$ resp. 23; avšak příslušná δ podle tabulky v př. 8 jsou 6 a 22, tedy stejná jako pro $m = 39$ resp. 69. Proto počet cifer zůstal v těchto příkladech stejný, 6 resp. 22.

Závěr. Vyložené řešení mělo ukázat, jak s četnými poučkami a fakty souvisí i tak „jednoduchý“ matematický problém, jenž byl zadán a jakými otázkami se zabývá tak vysoce zajímavá číselná teorie. Řešitelům a všem, kteří se problémem zabývali, patří uznání a pochvala.

Řešení hádanek

Jaké bylo pořadí?

Správná řešení úlohy ze 4. čísla Rozhledů zaslali: Iva Mrázová, III.C SPŠS Karlín, Štefanie Kováčová, IX.C ZDŠ Chtelnice, Jan Wagenknecht, SPŠ chem. Praha. Otiskujeme řešení Ivy Mrázové, které ukazuje přehledně tabulka, v jejíž levé části jsou tři výroky. Tři možnosti jsou vyznačeny v sloupcích I.—III. V levé části sloupců je znakem + označen pravdivý výrok, znakem — výrok nepravdivý. Na pravé straně sloupců je zapsáno pořadí koně, které plyne z předpokladů.

	I.	II.	III.
Rapid je první	+ 1.	– 2. nebo 3.	– 2. nebo 3.
Viola není první	– 1.	+ 2. nebo 3.	– 1.
Skok není třetí	– 3.	– 3.	+ 1. nebo 2.
Řešení	spor	spor	souhlasí

Podrobně popíši jen řešení v prvním sloupci, další pouze naznačím. Výrok „Rapid je první“ předpokládáme jako pravdivý, tedy pořadí Rapida je 1. Výrok „Viola není první“ není pravdivý, z toho plyne, že Viola je první. Již z uvedeného plyne spor, neboť není možné, aby byl Rapid i Viola první. Pro doplnění sloupce I. dokončíme úvahu. Není pravda, že „Skok není třetí“, je tedy třetí.

Připustíme-li pravdivost výroku „Viola není první“, vychází, že je 2. nebo 3. Pak je Rapid také 2. nebo 3. a Skok je 3. Opět spor, neboť 1. pořadí by nevyšlo na žádného koně.

K řešení dojdeme, připustíme-li třetí možnost, tj. pravdivost výroku „Skok není třetí“. Je tedy 1. nebo 2. Z nepravdivosti výroku „Viola není první“ plyne, že je 1. a z nepravdivosti zbývajících výroků usoudíme, že Rapid je 2. nebo 3. Vychází jediné možné pořadí: Viola je první, Skok je druhý, Rapid je třetí.

Zajímavé součty

Tuto úlohu z 2. čísla Rozhledů dobře řešily *Helena Hornová*, VII.B ZDŠ Prostějov a *Anna Pospíchalová*, VIII.B ZDŠ Chtelnice.

Helena Hornová sestavila tyto součty:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & = & 1^3 \\
 7 + 13 + 19 + 25 & = & 4^3 \\
 31 + 37 + & + & 67 = 7^3 \\
 & & 1 = 1^3 \\
 & & 11 + 21 + & + & 61 = 6^3 \\
 & & 71 + 81 + & + & 171 = 11^3.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 1 & = & 1^3 \\
 9 + 17 + & + & 41 = 5^3 \\
 49 + 57 + & + & 113 = 9^3
 \end{array}$$

Úloha s číslicemi

Dobrá řešení úlohy z čísla 1. na str. 7 zaslali: *Alena Ištvanovičová*, VIII.B ZDŠ Chtelnice a *Lubomír Vlček*, III.B SVŠ Brezno.

Správné řešení bylo otištěno na str. 352 letošního ročníku.

Počítala na prstech ...

Tuto úlohu z 9. čísla Rozhledů řešil *Vladimír Dudík*, žák II. roč. SPŠ v Trnavě:

Otec úsudkom prišiel na výsledok takto: Každý násobok 8-mich padne na ukazovák, pričom číslo $a = 8x + 1$ padne na palec. Stačí vydeliť číslo 1 965 ôsmimi a zvyšok rozpočítať na prsty od palca nahor.

$1\,965 : 8 = 245$ a zvyšok je 5, tj. skončí počítanie na prste malíčku.

Úlohu tiež správne rozřešili: *Ján Rúčka*, I. roč. SPŠE Bratislava, *Bohumil Kratochvíl*, I.C SVVŠ Kouřim, *Daniela Svobodová*, II. roč. SVVŠ Praha 5, Na Zatlance, *Josef Jiříčka*, II. roč. SVVŠ Hostinné, *Zdeněk Manoušek*, II. roč. SPŠS Brno, *Lubomír Vlček*, III.B SVŠ Brezno, *J. Krčil*, III.C SPŠ JT Praha, *Ladislav Korán*, *Zdeněk Kaštánek*, Hlučín.

Problém dvou svíček

Úlohu z 1. čísla Rozhledů správne řešili: *Marika Jankovičová*, IX.C ZDŠ Chtelnice, *Jiří Kratochvíl*, I. roč. SVVŠ Veselí n. Mor., *Peter Kožíšek*, II.A SVŠ Bratislava, *Sáva Nováček*, SVVŠ Třebíč.

Správné řešení bylo otištěno na str. 191 letošního ročníku.

U knihkupce ...

Žákyně VIII.B ZDŠ v Chtelnici *Alena Ištvanovičová* řešila úlohu z č. 1, str. 12, takto:

Najprv som počet všetkých nakúpených kníh delila tromi, aby som našla počet každého druhu kníh $109 : 3 = 36$, zvyšok 1.

Potom som spočítala ceny troch druhov kníh:

$$34 \text{ Kčs} + 17,50 \text{ Kčs} + 27,50 \text{ Kčs} = 79 \text{ Kčs}.$$

Vypočítala som, koľko by sa zaplatilo, keby každého druhu kníh bolo 36:

$$79 \text{ Kčs} \times 36 = 2\,844 \text{ Kčs}.$$

Pretože sa u knihkupca zaplatilo 2 845 Kčs, teda o 1 Kčs viac, nemohlo byť z každého druhu kníh 36 kusov. Všimla som si, že 2 knižky po 17,50 Kčs stoja 35 Kčs, čo je o 1 Kčs viac ako 34 Kčs. Preto kníh po 34 Kčs bolo 35, kníh po 17,50 Kčs bolo 38.

Riešením úlohy je: U knihkupca sa nakúpilo 35 kníh po 34 Kčs, 38 kníh po 17,50 Kčs a 36 kníh po 27,50 Kčs.

Použitím neurčité rovnice řešil úlohu *Lubomír Vlček*, III.B SVŠ Brezno a uvedl další dvě řešení (25, 69, 15; 51, 3, 55), která by byla správná, kdyby nebyla dána podmínka, že se počty knih od sebe jen nepatrně liší.

J. Bejsta — S. Horák



Násobenie spamäti pomocou druhých mocnín

JÁN MACHÁN, Košice

U tejto metódy je potrebné vedieť aspoň druhé mocniny čísel do 50. Vychádzame z platnosti vzorca

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2.$$

Odtiaľ platí

$$\begin{aligned} 33 \cdot 13 &= (23 + 10) \cdot (23 - 10) = \\ &= 23^2 - 10^2 = 529 - 100 = 429, \\ 76 \cdot 14 &= (45 + 31) \cdot (45 - 31) = \\ &= 45^2 - 31^2 = 2\,025 - 961 = 1\,064, \\ 61 \cdot 39 &= (50 + 11) \cdot (50 - 11) = \\ &= 50^2 - 11^2 = 2\,500 - 121 = 2\,379 \end{aligned}$$

Odkiaľ sme však čísla nap. 23 a 10 dostali? Tieto čísla si označíme ako x a y . Väčší činiteľ nech je a , a menší nech b . Potom platí

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x - y &= b, \end{aligned}$$

riešením dostaneme

$$x = \frac{a + b}{2},$$

tiež aj

$$y = \frac{a - b}{2}.$$

Z riešenia týchto rovníc vyplýva

1. x je polovicou súčtu činiteľov (teda čísel, ktoré medzi sebou násobíme).

2. y je polovicou rozdielu činiteľov.

Týmto spôsobom boli vlastne určené aj čísla x a y v predošlých príkladoch

$$\text{a) } x = \frac{33 + 13}{2} = 23 \quad y = \frac{33 - 13}{2} = 10 ,$$

$$\text{b) } x = \frac{76 + 14}{2} = 45 \quad y = \frac{76 - 14}{2} = 31 ,$$

$$\text{c) } x = \frac{61 + 39}{2} = 50 \quad y = \frac{61 - 39}{2} = 11 .$$

Aké násobenia môžeme týmto spôsobom prevádzať? Ak poznáme druhé mocniny len do 50 nesmie byť x a y väčším celým číslom než 50! Pretože platí

$$x = \frac{a + b}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{a - b}{2}$$

potom

1. $(a + b)$ tiež aj $(a - b)$ musia byť párne¹⁾ čísla,

2. ani $(a + b)$, ani $(a - b)$ nesmie byť väčšie než 100.

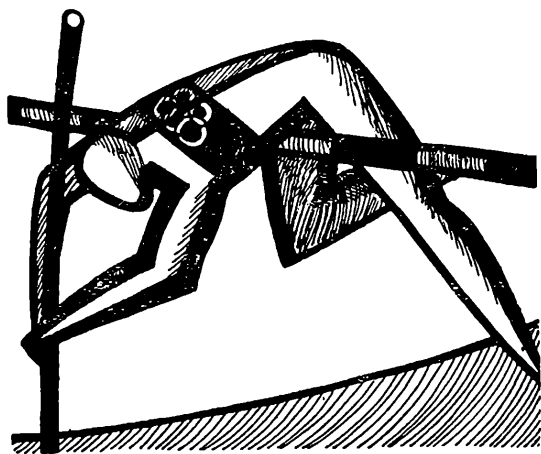
Prvá podmienka sa splní, keď a a b , teda oba súčasne sú párne alebo nepárne čísla. Druhá podmienka sa splní, keď $(a + b)$ nebude väčšie než 100, samozrejme potom ani $(a - b)$. Ak teda poznáme do 50 druhé mocniny čísel, potom podľa tejto metódy môžeme spamäti násobiť ľubovoľné dve párne alebo nepárne čísla, ktorých súčet nie je väčší než 100.

Násobenie čísel medzi 80 a 100

Postup je nasledujúci: Obe čísla sčítame a z ich súčtu posledné dve čísla (dvojicu) opíšeme. K tejto dvojici pripíšeme sprava ďalšiu dvojicu, ktorá vznikla zo súčinu dvoch čísel, ktoré sme získali tým spôsobom, že sme obe naše čísla (ktorých súčin hľadáme) odčítali od 100. Rozsah použitia vyplýva už z vlastnej metódy a dôkaz je tiež jednoduchý. Najlepšie je to vidieť na nasledujúcich príkladoch

$$\begin{array}{rcl} 96 \cdot 94 = 9024 & \leftarrow & \\ \swarrow & & \downarrow \\ 96 + 94 = 190 & & \\ 100 - 96 = 4 & & \\ 100 - 94 = 6 & 4 \cdot 6 = 24 ; & \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 87 \cdot 93 = 8091 & \leftarrow & \\ \swarrow & & \downarrow \\ 87 + 93 = 180 & & \\ 100 - 87 = 13 & & \\ 100 - 93 = 7 & 7 \cdot 13 = 91 . & \end{array}$$

¹⁾ Párny = sudý.



MO

XVI. ročník Matematické olympiády

Ve školním roce 1966—1967 bude XVI. ročník soutěže Matematická olympiáda organizován v poněkud pozměněné formě podle usnesení ústředního výboru matematické olympiády na schůzi dne 9. a 10. listopadu 1965 v Brně. Přitom se hlavní zásady o zaměření soutěže nemění.

Účastníci soutěže jsou rozděleni do čtyř kategorií takto:

Kategorie A	III. ročník střední všeobecně vzdělávací školy	III.—IV. ročník střední odborné školy
Kategorie B	II. ročník střední všeobecně vzdělávací školy	II. ročník střední odborné školy
Kategorie C	I. ročník střední všeobecně vzdělávací školy	I. ročník střední odborné školy
Kategorie D	9. ročník základní devítileté školy	

Žák však může soutěžit i ve vyšší kategorii.

Soutěž má opět tato kola: a) přípravné; b) I. kolo (obě proběhnou na vaší škole); c) II. kolo (v rámci okresu nebo kraje) a d) III. celostátní kolo jen v kategorii A.

Matematická olympiáda je nadále *soutěž výběrová*, při níž bude záležet především na *kvalitě* práce účastníků. Je však třeba zdůraznit, že MO je nadále *soutěží dobrovolnou*.

Nová organizace zdůrazňuje *studijní ráz přípravného kola*. V tomto kole budou předloženy *jen čtyři úlohy*, které váš učitel, popř. referent pro MO *opraví, ale neklasifikuje*. Svá řešení odevzdáte do 30. listopadu 1966. Přípravné úlohy jsou opět poněkud obtížnější než běžné úlohy školské matematiky. Vaším úkolem v přípravném kole není totiž jen úlohy rozřešit, nýbrž se také

něco při jejich řešení naučit i prohloubit a rozšířit své znalosti matematiky. Nejzajímavější a nejpoučnější řešení úloh budou otištěna v Rozhledech matematicko-fyzikálních po 30. listopadu 1966.

V XVI. ročníku MO není však podmínkou postupu do I. kola, abyste odevzdali řešení všech přípravných úloh a správně vyřešili většinu z nich. Tím je zdůrazněn studijní ráz přípravných úloh. Předpokládá se však, že každý účastník I. kola ve vlastním zájmu bude řešit přípravné úlohy.

Rovněž v I. kole MO budou žáci řešit jen 4 úlohy. Úspěšným řešitelem I. kola bude ten žák, který vyřeší správně nebo v podstatě správně (klasifikace 1 nebo 2) *aspoň* 3 úlohy tohoto kola. Lhůta pro odevzdání řešení úloh I. kola končí dnem 15. února 1966.

Termíny II. a III. kola XVI. ročníku MO budou oznámeny později. Další podrobnosti a pokyny budou jako obvykle uvedeny v letáku, který pro kategorii D bude společný s Fyzikální olympiádou. Pro kategorie A, B, C vyjde samostatný leták.

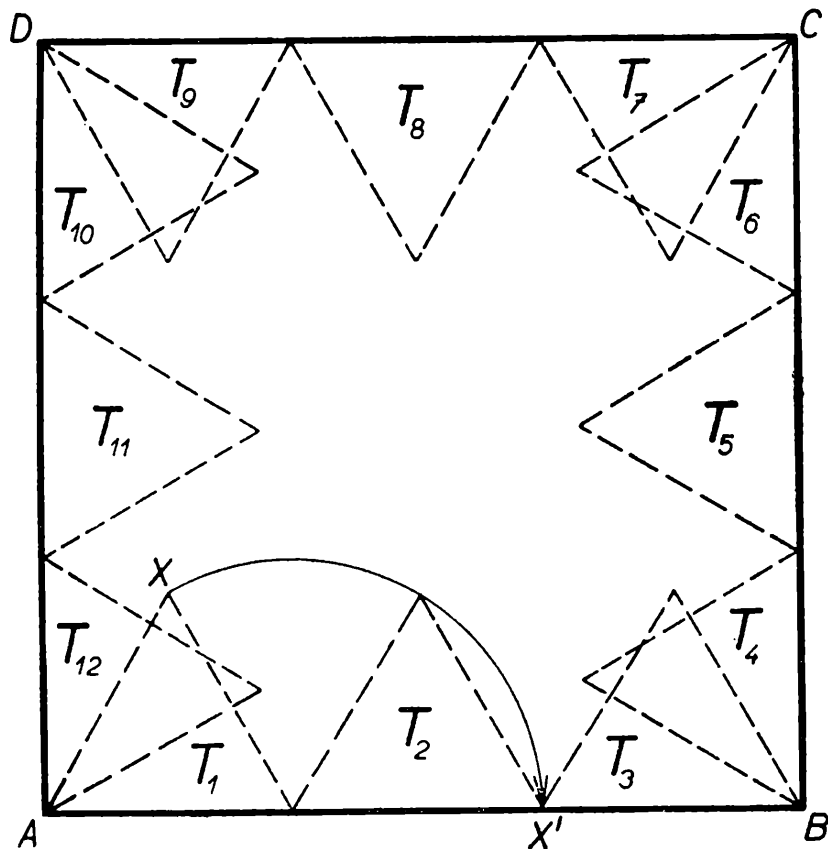
V tomto čísle časopisu uveřejňujeme texty přípravných úloh kategorie D; úlohy kategorií A, B, C budou uveřejněny v prvním čísle příštího ročníku tohoto časopisu.

Přípravné úlohy kategorie D

1. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a . Čtverec $ABCD$ je rozdělen dvěma přímkami rovnoběžnými s AB a BC ve čtyři obdélníky P_A, P_B, P_C, P_D ; přitom $P_A(P_B, P_C, P_D)$ je obdélník, který obsahuje bod $A(B, C, D)$. Pro obsahy obdélníků platí $P_A : P_B : P_C = 2 : 3 : 4$. Vyjádřete jejich rozměry pomocí a a vypočítejte $P_D : P_B$.

2. Autobus projížděl trať skládající se ze tří stejně dlouhých úseků. První úsek projížděl rychlostí v km/hod; v druhém úseku jel rychlostí o 10 km/hod menší, v třetím jel rychlostí o 5 km/hod menší než v druhém.

a) Vyjádřete průměrnou rychlost autobusu na trati pomocí v .



Obr. 1

b) Může být pro některé v průměrná rychlost $\frac{v}{2}$?

3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky a ; S je průsečík jeho úhlopříček, A', B', C', D' jsou po řadě středy úseček AS, BS, CS, DS . Vypočtete obsah části čtverce $ABCD$, která je pokryta trojúhelníky $A'C'B, A'C'D, B'D'A, B'D'C$, i obsah osmiúhelníka, který je společnou částí čtyřúhelníků $AB'CD', BC'DA'$.

4. Na obr. 1 je čtverec $ABCD$ o straně délky 9 cm a dále 12 shodných rovnostranných trojúhelníků $T_1, T_2, \dots, T_{12}$. Převeďme trojúhelník T_1 v T_2 , T_2 v $T_3, \dots, T_{12}$ v T_1 vždy otočením kolem společného vrcholu obou trojúhelníků, provedeným v čtverci $ABCD$.

a) Sestrojte čáru, která je dráhou vrcholu X ve všech těchto otočeních.

b) Vypočtete její délku a porovnejte ji s délkou kružnice opsané i kružnice vepsané čtverci $ABCD$.

ÚVMO



RECENZE

Znáte „Školu mladých matematiků“?

Pod tímto názvem vydává ústřední výbor Matematické olympiády a ústřední výbor ČSM v nakladatelství Mladá fronta brožury určené pro žáky škol II. cyklu, zejména pro řešitele Matematické olympiády. V této knižnici vychází už druhá desítka svazků; o některých z nich vyšly v Rozhledech podrobnější zprávy.

Dostáváme často dotazy po vhodné literatuře, která by prohloubila látku z matematiky probíranou na SVVŠ a SPŠ. Pro tento účel jsou brožury knižnice ŠMM velmi vhodné. Jsou psány přístupně a je v nich hodně příkladů jak vyřešených, tak určených pro samostatnou práci. Dozvíte se v nich podrobněji například o funkcích, matematické indukci, rovnicích s parametrem a o konvexních útvarech. Jiné

řeší zajímavé příklady na shodná zobrazení v prostoru i v rovině, na geometrická místa bodů a podobně.

Některé svazky jsou už rozebrány, ale můžete si je vypůjčit ve školních knihovnách nebo se o nich informovat na Krajském výboru Matematické olympiády, jiné je možno ještě koupit v prodejnách Kniha, n. p. Cena jednoho svazku je velmi nízká, průměrně 2 až 3 Kčs.

Jitka Kučerová

Budete studovat na technice?

Čtenáři, kteří se rozhodli pro studium na některé vysoké škole technického směru, zejména na fakultách stavebních, elektrotechnických, a strojního inženýrství, budou se jistě po úspěšně vykonané přijímací zkoušce zajímat o to, z čeho a jak studovat dále matematiku. Přinášíme proto stručnou informaci o učebnici *M a t e m a t i k a I*, jejímiž autory jsou prof. dr. Vladimír Knichal, DrSc., doc. dr. Alfons Bašta, doc. Milan Pišl, CSc. a prof. dr. Karel Rektorys, DrSc. Dosud vyšel I. díl této učebnice, který obsahuje zhruba látku 1. semestru.

V úvodní kapitole se čtenář seznámí se základními prvky logické výstavby matematiky, které v dalším stále nutně potřebuje, aby porozuměl výkladu.

S látkou, obsaženou v 2. kapitole, jste se setkali již na střední

škole, tj. s nerovnostmi a komplexními čísly. Rovněž 4. kapitola je přístupná čtenáři — středoškolačku. Obsahuje totiž analytickou geometrii v rovině.

Ostatní kapitoly již rozšiřují středoškolský matematický obzor trochu dále — kapitola 3. obsahuje lineární algebru, tj. poučení o maticích, determinantech a řešení rovnic, kapitola 5. pojednává o posloupnostech. V kapitolách 6.—11. jsou probrány základy diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné.

Autoři věnovali velkou péči tomu, aby text byl srozumitelný i posluchačům, kteří studují při zaměstnání. Výklad je podrobný a přesný; studenti zejména uvítají řadu příkladů, podrobně v textu vypočítaných. K jednotlivým kapitolám je vždy připojeno shrnutí a nezbytné minimum příkladů k procvičení vyložené látky.

Učebnice *M a t e m a t i k a I* vyšla koncem r. 1965 ve Státním nakladatelství technické literatury, má 541 stran a stojí vázaná 48,50 Kčs. Postupně vyjdou ještě další tři díly.

M. Valešová

Nomogramy

VÁCLAV ŠTĚPÁNSKÝ

Knížka pojednává o teorii a konstrukci nomogramů průsečíkových a spojnicových většinou pro vztahy o třech proměnných. Je určena zejména studujícím na odborných (průmyslových) a vysokých školách, ale s velkým užit-

kem ji může číst i student SVVŠ, který se chce dovědět, jak lze často účinně odstranit namáhavé, únavné a zdoluhavé vyčíslování různých vztahů z daných vzorců mnohonásobným dosazováním daných veličin apod.

Čtenář Rozhledů se může poučit o základních pojmech nomografie, např. ve článku J. Chudého: *N o m o g r a m y*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 37, 1959, str. 151, 195, 248. 4

Knížka V. Štěpánského uvádí čtenáře do teorie i praxe sestrojování nomogramů lehkou a mladému čtenáři přístupnou formou, přitom natolik přesnou, že po přečtení knížky bude čtenář začátečník velmi dobře připraven k hlubšímu studiu nomografie.

Knížka je rozdělena do dvou kapitol. V první kapitole se postupně na řadě příkladů seznámíme s pojmem nomogramu průsečíkového a spojnicového, s unárním a binárním polem (jakožto

soustavami čar v rovině) a stupnicemi (jakožto soustavami bodů na čáře).

V druhé kapitole jsou probrány konstrukce základních typů průsečíkových a spojnicových nomogramů pro vztahy o třech proměnných na základě tzv. kanonických tvarů (tj. na základě typických vztahů, na něž lze velmi často vzorce z praxe snadno převést). Závěr této kapitoly stručně seznamuje s některými obecnějšími pojmy teoretické nomografie.

V textu je teorie ilustrována více než sedmdesáti podrobně zpracovanými příklady, doplněnými 83 obrázky a pěti tabulkami. Čtenáři je nabídnuto k samostatné práci 70 cvičení.

Knížku vydalo Státní nakladatelství technické literatury v Praze, 1966, jako 43. svazek II. řady polytechnické knihovny; má 188 stran a brožovaná stojí 11,— Kčs.

Karel Kománek



Přejeme svým čtenářům mnoho úspěchů v příštím školním roku a doufáme, že se s nimi opět zde sejdeme. Proto nezapomeňte ještě dnes, nejpozději před prázdninami, si u své Poštovní novinové služby zajistit předplatné na rok 1966/67.

Redakce.

Slovníček

fyzikálních výrazů

(Pokračování)

вращать	otáčet, točit, kroutit
вращение	rotace, točení, otáčení, obracení
время; в. астрономическое; в. года; в. звездное; в. истинное; в. местное; в. мировое; в. обращения; в. поясное; в. солнечное	čas, doba, období; astronomický č.; roční doba; hvězdný č.; pravý č.; místní č.; světový (univerziální) č.; doba oběhu; pásmový č.; sluneční č.
вселенная	vesmír
вторичный	druhotný, sekundární
выведение	odvození (vzorce); přivedení (z rovnováhy)
выделение; в. газа; в. тепла; в. энергии	vydroučení, uvolnění; vylučování (uvolňování) plynu; vyvíjení (uvolňování) tepla; uvolnění energie
выдержка	expozice, doba osvitu
выключатель	vypínač, spínač
выпрямитель; в. высоковольтный; в. двухполупериодный; в. кенотронный; в. контактный; в. ламповый;	usměrňovač; u. na vysoké napětí; dvoucestný (dvoučinný) u.; eliminátor; stykový u.; elektronkový u.;
в. полупроводниковый	polovodičový u.
выпрямлять	usměrňovati
выпуск	vypuštění (umělé družice)
высокочастотный	vysokofrekvenční
высота тона	výška tónu
выталкивать	vytlačovat
выход	výstup
вязкость	viskozita, vazkost

Г

газ; г. жидкий; г. сжатый	идеальный;	plyn; zkapalněný (tekutý) p.; ideální (dokonalý) p.; stlačený p.
газообразность		plynný stav
газообразный		plynný
галактика		galaxie
гальванический		galvanický, elektrolytický
гамма-лучи		záření gama
гашение		tlumení (kmitů, energie)
генератор; г. звуковой; г. переменного тока; г. постоянного тока; г. трехфазный		generátor; oscilátor; tónový g.; g. na střídavý proud (alternátor); g. na stejnosměrný proud (dynamo); trojfázový g.

гидрометр	hydrometr, vlhkoměr
гидравлика	hydraulika
гидропресс	hydraulický lis
градус; г. географической долготы; г. географической широты; г. тем- пературы; г. Цельсия	stupeň; s. zeměpisné délky; s. ze- měpisné šířky; s. teploty, teplotní s.; s. Celsia [Celsiův s.]
грамм	gram
громкоговоритель	reproduktor
громкость	hlasitost
груз	zátěž, závaží, břemeno
грузик	závaží

Д

давление	tlak
данные	údaje, hodnoty, data, podklady
датчик	snímač, čidlo
двигатель	motor
движение; д. беспорядочное; д. броу- новское; д. вращательное; д. вы- нужденное; д. колебательное д. криволинейное; д. относительное; д. по инерции; д. поступательное; д. прямолинейное; д. ускоренное	pohyb, proudění (vody); neuspořá- daný p.; Brownův p.; otáčivý, ro- tační p.; nucený p.; kmitavý p.; křivočarý p.; relativní p.; pohyb setrvačností; postupný p.; přímo- čarý p.; zrychlený p.
двояковогнутый	dvojdutý, bikonkávní
двояковыпуклый	dvojpuhlý, bikonvexní
действие	působení (např. zatížení), účinek, vliv (např. tepla), činnost
действительный	skutečný, reálný
действовать	působit, účinkovat, fungovat
действующий	činný, působící
детектирование	detekce, demodulace
дефект массы	hmotnostní úbytek
диапазон	rozsah, rozmezí, pásmo
динамика	dynamický reproduktor
динамика; д. газов; д. жидких тел; д. материальной точки; д. твердого тела	dynamika; d. plynů; d. kapalin, hy- drodynamika; d. hmotného bodu; d. tuhého tělesa
диод; д. двойной; д. полупроводни- ковый	dioda; duodioda; povodičová dioda
диполь; д. магнитный; д. полуволно- вый	dipól; magnetický d.; půlvlnný d.
диэлектрик	dielektrikum
длина; д. волны; д. свободного пробега	délka; d. vlny, vlnová d.; střední vlnná dráha (částice)
длительность	dobu, trvání
дуга; д. дневная; д. электрическая	oblouk; denní o.; elektrický o.
дырка электронная	díra (v polovodiči)

Е

единица	jednotka
емкость; е. межэлектронная; е. пере- менная; е. связи	kapacita; k. mezi elektrodami; pro- měnná k.; vazební k. {Pokračování}