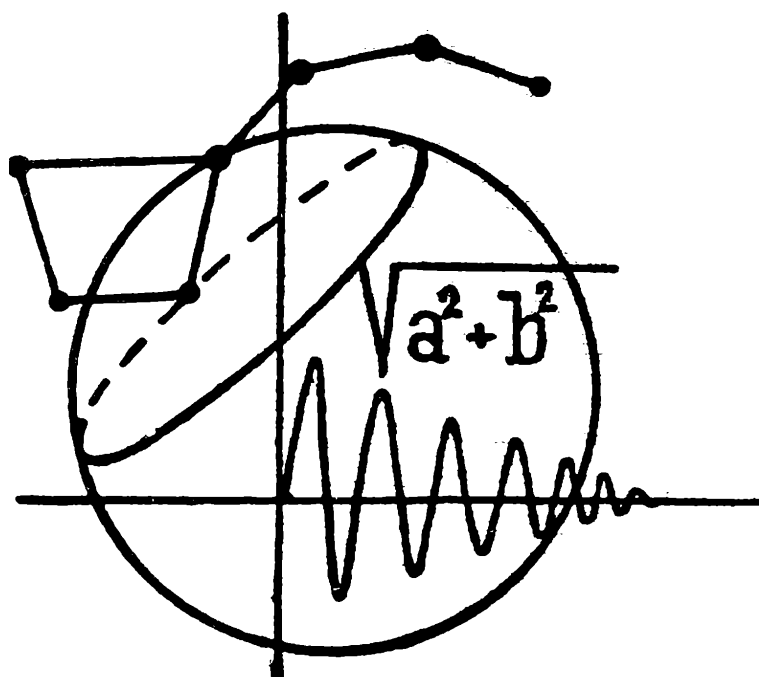


rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



1

ROČ. 42

1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Září 1963

Číslo 1

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VŠT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

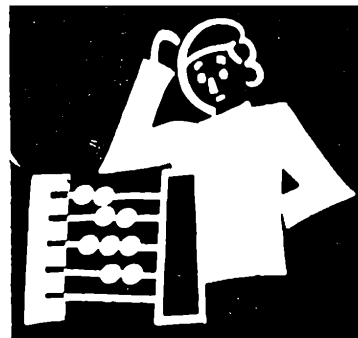
Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

J. Straka: Proměny mnohoúhelníků	1
F. Hradecký: Úloha týkající se obsahu rovinného obrazce	6
F. Hradecký: O jedné stereometrické úloze a jejím zobecnění	10
J. Pospíšil: Náboj elektronu a jeho měření	14
CSc. L. Sehnal: Byl jsem na odpalovací raketové základně	18
Úlohy k řešení.	23
Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů	25
Dr. M. Hlaváček: Zajímavé těleso	28
Z. B.: Kterak jsem zanevřela na matematiku	31
Matematická olympiáda	32
Fyzikální olympiáda	34
Recenze	42
Inž. D. Říman: Paprsky smrti a paprsky naděje	45
J. Hořejš: JČMF a Brno	47
J. D.: Kam po maturitě	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS-ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. A-09*31468 Jazyková úprava: dr. O. Hönl. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.



Josef Straka, PI, Praha:

Proměny mnohoúhelníků

Všimneme si úlohy, ve které máme k danému vypuklému mnohoúhelníku¹⁾ sestavit čtverec téhož obsahu.

Nejprve zopakujeme a doplníme znalosti z deváté třídy o podobných trojúhelnících. Jednou z důležitých vlastností je věta:

Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují ve dvou vnitřních úhlech.

Podle této věty se nejčastěji rozhodne, zda jsou dvě dané trojúhelníky podobné. Zjistíme-li, že dva vnitřní úhly v jednom trojúhelníku jsou shodné s odpovídajícími úhly v druhém trojúhelníku, jsou tyto trojúhelníky podobné, tj. velikosti stran jednoho z nich jsou k -násobky (kde k je kladné číslo) velikostí stran druhého. Pro $k = 1$ by šlo ovšem o dva shodné trojúhelníky.

Z vlastností podobných trojúhelníků lze snadno odvodit o pravoúhlém trojúhelníku dvě věty, které se nazývají *věty Euklidovy*.

Abychom mohli obě věty stručněji vyslovit, zavedeme nové názvy. Na obr. 1 je pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou $BC = a$ a odvěsnami $AB = c$, $AC = b$ a jeho výška na přeponu $AD = v$. Úsečky $BD = c_1$, $CD = b_1$ nazveme úseky přepony přilehlé po řadě k odvěsnám AB , AC .

Je-li a velikost přepony pravoúhlého trojúhelníka, b , c velikosti jeho odvěsen, v velikost výšky a b_1 , c_1 velikosti úseků přilehlých k odvěsnám b , c , platí

$$v^2 = b_1 c_1 \quad (1)$$

(Euklidova věta o výšce),

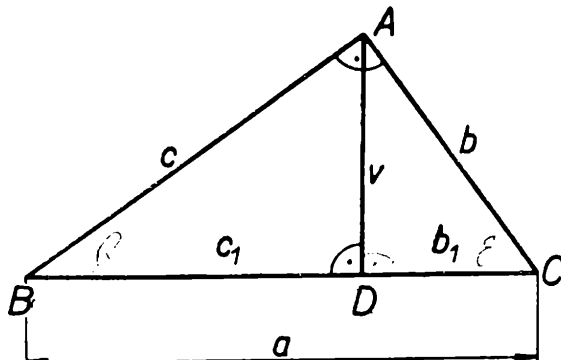
$$b^2 = ab_1, \quad c^2 = ac_1 \quad (2)$$

(Euklidova věta o odvěsně).

¹⁾ Mnohoúhelník A_1, A_2, \dots, A_t nazýváme vypuklým, jestliže přímka spojující libovolné dva sousední vrcholy rozděljuje rovinu na dvě poloviny tak, že všechny vrcholy A_1, A_2, \dots, A_t leží v jedné z těchto polorovin.

Protože v^2 je obsah čtverce o straně v a $b_1 c_1$ je obsah obdélníka o rozměrech b_1, c_1 , je možno obě Euklidovy věty vyslovit takto:

Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravouhlého trojúhelníka je roven obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků přepony (věta o výšce).



Obr. 1

Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravouhlého trojúhelníka je roven obsahu obdélníka sestrojeného z celé přepony a z přilehlého úseku přepony (věta o odvěsně).

Důkaz (obr. 1). Protože $\sphericalangle ABD + \sphericalangle BAD = 90^\circ$ a $\sphericalangle CAD + \sphericalangle BAD = 90^\circ$, vyplývá odtud, že $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CAD$. Nyní platí, že

$$\triangle ABD \sim \triangle CAD,$$

neboť $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDA = 90^\circ$, takže oba trojúhelníky se shodují ve dvou vnitřních úhlech a jsou tedy podobné. Proto existuje kladné číslo k tak, že platí

$$\begin{aligned} AD &= k \cdot CD, \\ BD &= k \cdot AD \end{aligned}$$

a po dosazení

$$\begin{aligned} v &= k \cdot b_1, \\ c_1 &= k \cdot v. \end{aligned}$$

Vyjádříme-li např. z první rovnosti číslo k a dosadíme do druhé rovnosti, dostaneme po úpravě

$$v^2 = b_1 \cdot c_1.$$

Dále platí, že

$$\triangle ABD \sim \triangle CBA,$$

neboť $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBA$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CAB = 90^\circ$, takže oba trojúhelníky se shodují ve dvou vnitřních úhlech a jsou tedy podobné. Proto existuje kladné číslo m tak, že platí

$$\begin{aligned} AB &= m \cdot CB, \\ BD &= m \cdot BA \end{aligned}$$

a po dosazení

$$c = m \cdot a ,$$

$$c_1 = m \cdot c .$$

Vyjádríme-li např. z první rovnosti číslo m a dosadíme do druhé, dostaneme po úpravě

$$c^2 = a \cdot c_1 .$$

Konečně platí, že

$$\triangle ACD \sim \triangle BCA ,$$

neboť $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCA$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAC = 90^\circ$, takže i zde se oba trojúhelníky shodují ve dvou vnitřních úhlech a jsou tedy podobné. Proto existuje kladné číslo p tak, že je

$$AC = p \cdot BC ,$$

$$CD = p \cdot CA .$$

Po dosazení a obdobné úpravě vyjde

$$b^2 = a \cdot b_1 .$$

Tím jsou věty dokázány.

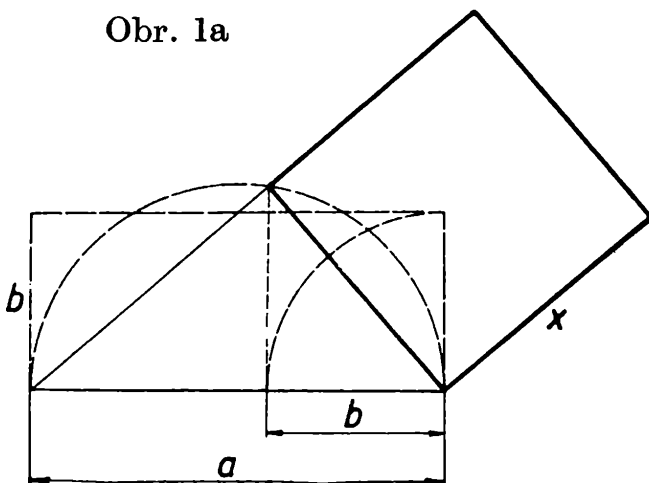
Poznámka. Sečteme-li obě rovnosti ze vztahu (2), tj. matematické zápisy pro Euklidovu větu pro obě odvěsny, dostaneme

$$b^2 + c^2 = a \cdot (b_1 + c_1) = a \cdot a = a^2 ,$$

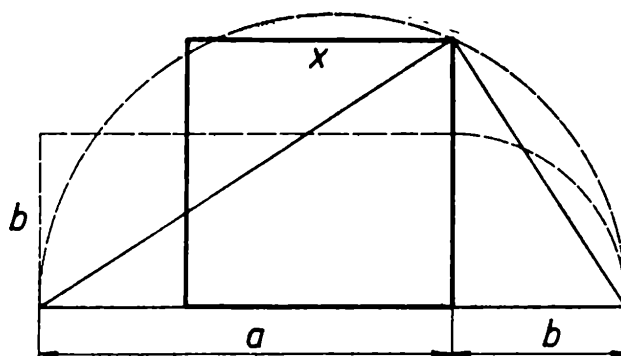
což je známá *věta Pythagorova*, kde a je velikost přepony, b , c jsou velikosti odvěsen.

Euklidových vět se užívá při různých početních úlohách o pravoúhlém trojúhelníku. My si povšimneme jejich konstruktivního využití.

Obr. 1a



Obr. 1b



Základem bude známá úloha proměny daného obdélníka na čtverec o stejném obsahu. Označíme-li písmeny a , b velikosti stran obdélníka a písmenem x velikost strany hledaného čtverce, potom platí

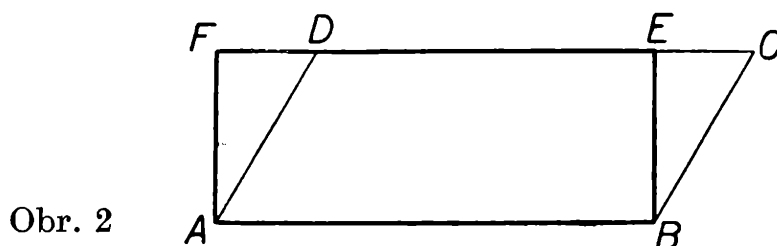
$$x^2 = a \cdot b .$$

Konstrukci můžeme provést dvojím způsobem.

1. Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník, jehož úseky přepony budou mít velikosti a , b , podle Euklidovy věty o výšce bude mít výška velikost x . Provedení (s užitím Thaletovy věty) ukazuje obr. 1a.

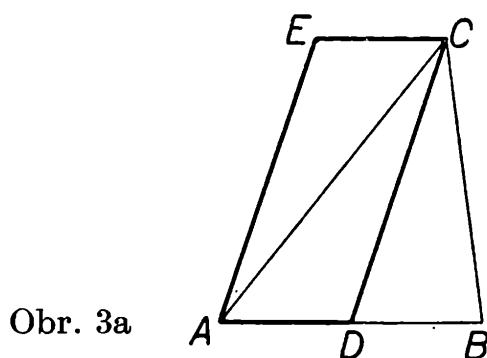
2. Sestrojíme-li pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona bude mít velikost a a jeden úsek přepony velikost b , bude mít přilehlá odvěsna velikost x . Provedení (opět s užitím Thaletovy věty) ukazuje obr. 1b.

V obr. 2 je vidět, jak lze rovnoběžník $ABCD$ proměnit v obdélník $ABEF$. Obdélník má též obsah jako rovnoběžník, protože oba obrazce mají společnou stranu AB a obě protější strany CD , EF leží v téže přímce, tj. výšky obou obrazců jsou shodné.

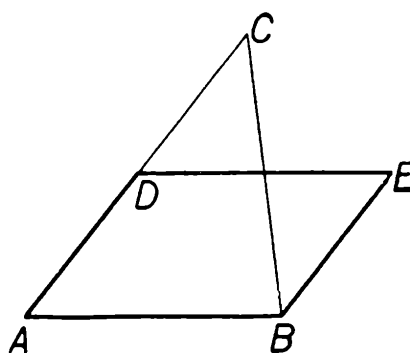


Obr. 2

V obr. 3a, 3b jsou naznačeny způsoby proměny trojúhelníka ABC na rovnoběžník $ADCE$, resp. $ABED$. V obr. 3a zjistíme střed D strany AB . Trojúhelník ADC je polovinou rovnoběžníka $ADCE$. Avšak trojúhelníky ADC , DBC mají stejný obsah, neboť mají shodnou základnu $AD = DB$ a shodnou výšku, takže trojúhelník ADC je také polovinou trojúhelníka ABC . Potom daný trojúhelník ABC má též obsah jako rovnoběžník $ADCE$. Považujeme-li stranu AD za základnu rovnoběžníka, můžeme říci:



Obr. 3a



Obr. 3b

Trojúhelník má též obsah jako rovnoběžník o poloviční základně a shodné výšce.

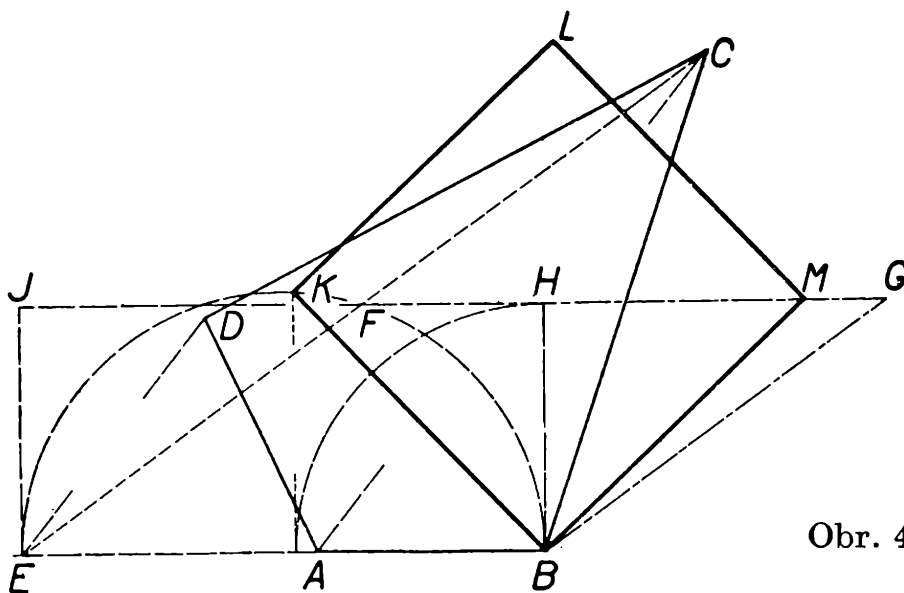
Trojúhelník můžeme proměnit v rovnoběžník i jinak. V obr. 3b je D střed strany AC . Trojúhelník BAD doplníme na rovnoběžník $ABED$. Potom je trojúhelník ABD polovinou rovnoběžníka $ABED$, neboť vznikl rozdělením rovnoběžníka úhlopříčkou a zároveň je polovinou daného

trojúhelníka ABC , neboť má poloviční základnu ($AD = DC$) a shodnou výšku. Proto má trojúhelník ABC týž obsah jako rovnoběžník $ABED$. Můžeme tedy říci:

Trojúhelník má týž obsah jako rovnoběžník o shodné základně a poloviční výšce.

Příklad 1. Proměňte čtyřúhelník na čtverec o téměř obsahu.

V obr. 4 je narýsován čtyřúhelník $ABCD$. Bodem D vedeme rovnoběžku s uhlopříčkou AC čtyřúhelníka. Bod E je průsečík této rovnoběžky s prodlouženou úsečkou AB za bod A . Trojúhelníky ACD , ACE mají společnou stranu AC a protější vrcholy D , E leží na rovnoběžce s touto společnou stranou AC . Proto tyto trojúhelníky mají týž obsah. Připojíme-li k trojúhelníku ABC trojúhelník ACD (oba trojúhelníky se nepřekrývají), dostaneme daný čtyřúhelník. Připojíme-li k témuž trojúhelníku ABC trojúhelník ACE (opět se nepřekrývají), který má týž obsah jako trojúhelník ACD , dostaneme trojúhelník EBC . Z předešlého je zřejmé, že obsah trojúhelníka EBC je týž jako obsah čtyřúhelníka $ABCD$. Trojúhelník EBC proměníme na rovnoběžník $EBGF$ (viz obr. 3b), tento na obdélník $EBHJ$ (viz obr. 2) a ten na čtverec $BMLK$ (viz obr. 1b).

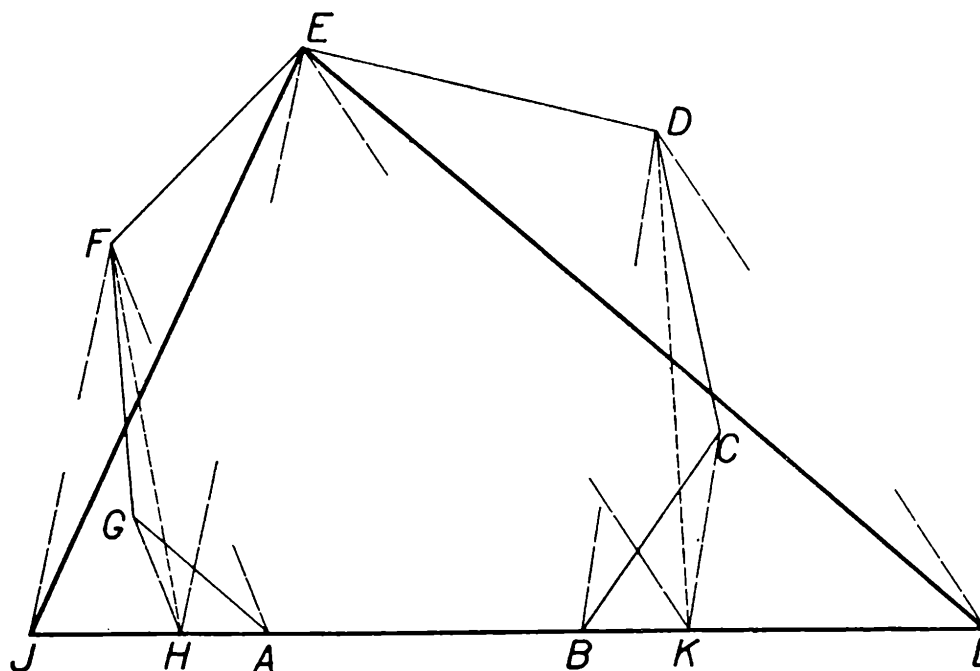


Obr. 4

Příklad 2. V obr. 5 je obdobně daný sedmiúhelník proměněn na trojúhelník o téměř obsahu. Postupujeme tak, že daný sedmiúhelník proměníme postupně na šestiúhelník, pětiúhelník, čtyřúhelník a ten na trojúhelník. Čtenář si jistě sám dokončí proměnu trojúhelníka na čtverec.

Na ZDŠ jste se naučili vypočítat obsah mnohoúhelníka tak, že jste jej rozložili vhodným způsobem na nepřekrývající se trojúhelníky a určili jste obsahy všech těchto trojúhelníků. Součet obsahů všech trojúhelníků byl roven obsahu daného mnohoúhelníka. Tento postup vyžaduje

řadu měření příslušných základů a výšek trojúhelníků. Proměníme-li však daný mnohoúhelník na čtverec, stačí změřit stranu výsledného čtverce a obsah mnohoúhelníka je roven obsahu čtverce. Oba postupy



Obr. 5

jsou ovšem přibližné. Čím lépe budeme měřit, resp. čím přesněji budeme provádět jednotlivé proměny, tím více se přiblížíme správnému výsledku.

František Hradecký, Praha:

Úloha týkající se obsahu rovinného obrazce

V tomto článku se chci zabývat jistou úlohou týkající se obsahu trojúhelníku a podobnými úlohami vztahujícími se k obsahu rovnoběžníku a pravidelných mnohoúhelníků. Jde o tuto úlohu:

1. Je dán trojúhelník ABC o obsahu \mathbf{P} , na jehož stranách jsou dány body M, N, P tak, že $BM = \frac{1}{k} BC$, $CN = \frac{1}{k} CA$, $AP = \frac{1}{k} AB$, kde číslo $k > 1$. Přímky AM, BN, CP omezují trojúhelník HKL , jehož obsah máme určit (obr. 1).

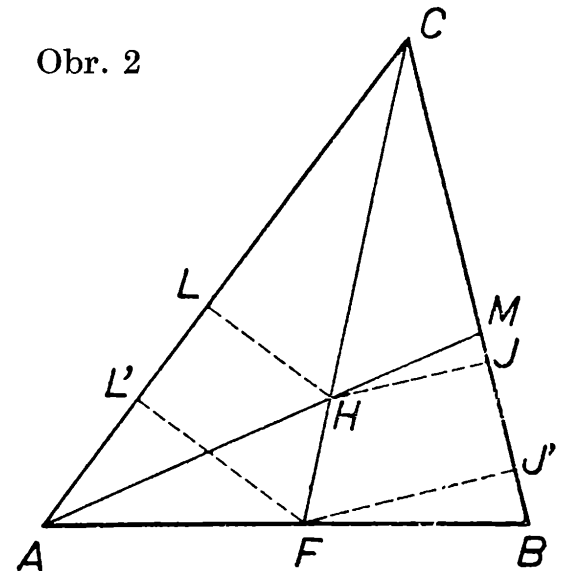
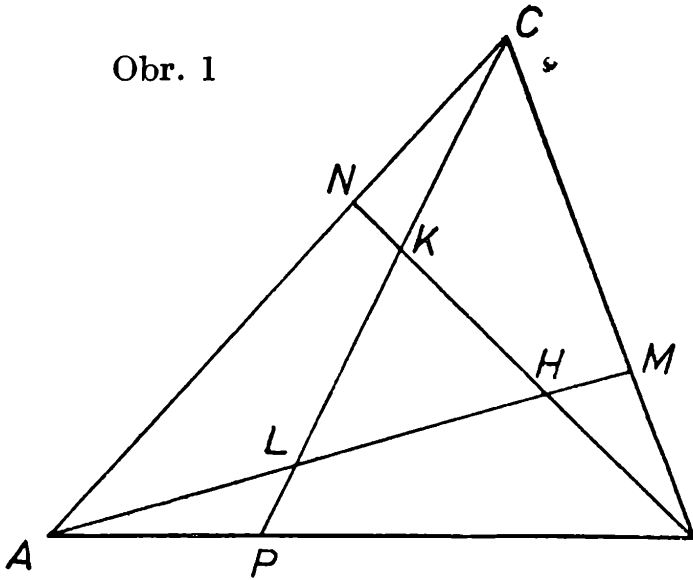
Než přikročíme k řešení této úlohy, dokážeme pomocnou větou, které při řešení použijeme.

V 1. Protínají-li se příčky AM a CF trojúhelníka ABC v bodě H (bod M je vnitřním bodem úsečky BC

a bod F vnitřním bodem úsečky AB), pak platí vztah (obr. 2)

$$\frac{AH}{HM} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{CB}{CM}.$$

Důkaz. Sestrojme (obr. 2) z bodu H a z bodu F kolmice na strany BC a AC a označme paty těchto kolmic J, J', L, L' . Poněvadž poměr



úseček AH, HM se rovná poměru obsahů trojúhelníků AHC, HMC , můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{AH}{HM} &= \frac{\text{obsah } \triangle AHC}{\text{obsah } \triangle HMC} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot LH}{\frac{1}{2} CM \cdot HJ} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot FL' \cdot CB}{\frac{1}{2} CM \cdot FJ' \cdot CB} = \\ &= \frac{CB \cdot \text{obsah } \triangle AFC}{CM \cdot \text{obsah } \triangle FBC} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{CB}{CM}. \end{aligned}$$

A nyní můžeme přikročit k řešení úlohy 1.

Obsah trojúhelníku $ABM = \frac{1}{k} \cdot \mathbf{P}$, kde \mathbf{P} je obsah trojúhelníku ABC . Chceme-li určit obsah trojúhelníku ALC , musíme napřed určit obsah trojúhelníku AMC , který je zřejmě $\mathbf{P} - \frac{1}{k} \cdot \mathbf{P} = \frac{k-1}{k} \cdot \mathbf{P}$ a obsah trojúhelníku ALC je pak $\frac{AL}{AM} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \mathbf{P}$.

Podle pomocné věty V 1. je

$$\frac{AL}{LM} = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{CB}{CM} = \frac{\frac{c}{k}}{\frac{k-1}{k} \cdot c} \cdot \frac{a}{\frac{k-1}{k} \cdot a} = \frac{k}{(k-1)^2}$$

Dále platí

$$\frac{AL}{AM} = \frac{AL}{AL + LM} = \frac{k}{k^2 - k + 1}$$

Obsah trojúhelníku ALC je pak

$$\mathbf{P}_1 = \frac{k - 1}{k^2 - k + 1} \cdot \mathbf{P}$$

Z nalezeného vztahu je zřejmé, že výraz \mathbf{P}_1 závisí jen na čísle k a na obsahu celého trojúhelníku ABC . Poněvadž číslo k je pro všechny body M, N, P totéž, dojdeme k témuž výsledku, když počítáme obsahy trojúhelníků AHB a trojúhelníku BKC . Je tudíž

$$\text{obsah } \triangle ALC = \text{obsahu } \triangle AHB = \text{obsahu } \triangle BKC$$

Označíme-li \mathbf{P}' obsah hledaného trojúhelníku HKL , platí

$$3 \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}' = \mathbf{P},$$

tj.

$$\frac{3(k - 1)}{k^2 - k + 1} \mathbf{P} + \mathbf{P}' = \mathbf{P},$$

odtud po jednoduché úpravě dostaneme

$$\mathbf{P}' = \frac{(k - 2)^2}{k^2 - k + 1} \mathbf{P}$$

Pro $k = 2$ je $\mathbf{P}' = 0$ (těžnice se protínají v jednom bodě a neomezuji žádný trojúhelník); pro $k = 3$ je $\mathbf{P}' = \frac{1}{7} \mathbf{P}$; pro $k = 4$ je $\mathbf{P}' = \frac{4}{13} \mathbf{P}$, atd.

P o z n á m k a 1. Úlohu bylo možno řešit nejprve pro rovnostranný trojúhelník a pak provést úvahu vztahující se k libovolnému trojúhelníku, který můžeme považovat za pravoúhlý průmět rovnostranného trojúhelníka. Poněvadž poměry obsahů při pravoúhlém promítání se zachovávají, bude platit odvozený vztah i pro libovolný trojúhelník. Že libovolný trojúhelník lze považovat za pravoúhlý průmět rovnostranného trojúhelníku, bylo dokázáno v článku: **O j e d n é s t e r e o m e t r i c k é ú l o z e a j e j í m z o b e c n ě n í**, uveřejněném v tomto čísle.

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$ o obsahu \mathbf{P} a na jeho stranách body M, N, P, Q , pro které platí $AM = \frac{1}{k} AB$, $BN = \frac{1}{k} BC$, $CP = \frac{1}{k} CD$, $DQ = \frac{1}{k} AD$. Přímky AN, BP, CQ, DM omezují rovnoběžník $EFGH$, jehož obsah máme určit (obr. 3).

Vedme bodem M rovnoběžku $MK \parallel BC$; zřejmě je

$$MK = \frac{1}{k^2} \cdot BC$$

a odtud po jednoduché úpravě dostaneme

$$\mathbf{P}' = \frac{(k-1)^2}{1+k^2} \cdot \mathbf{P}$$

Pro

$$k = 2$$

je

$$\mathbf{P}' = \frac{1}{5} \mathbf{P},$$

pro

$$k = 3$$

je

$$\mathbf{P}' = \frac{2}{5} \mathbf{P}$$

atd.

P o z n á m k a 2. Úlohu 2. jsme mohli opět rozřešit nejprve pro čtverec. Poněvadž podle uvedeného článku v poznámce 1 můžeme libovolný rovnoběžník pokládat za pravouhlý průmět čtverce a poněvadž poměry obsahů se při pravouhlém promítání zachovávají, platí věta i pro libovolný rovnoběžník.

(Pokračování)



Deskriptivní geometrie

František Hradecký, Praha:

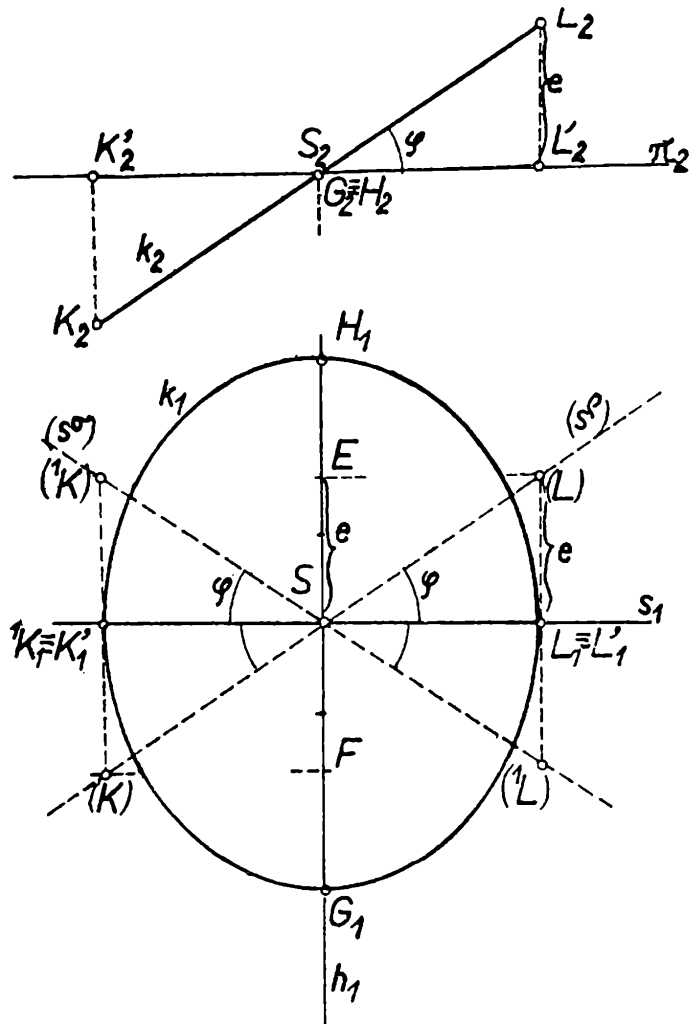
O jedné stereometrické úloze a jejím zobecnění

V brožuře Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, která vyšla v knižnici Škola mladých matematiků, vydané ÚVMO a ÚV ČSM v nakladatelství Mladá fronta pro účastníky MO, se řeší na str. 40 tato úloha:

Kolmý trojboký hranol, jehož podstavou je pravouhlý trojúhelník $A_1B_1C_1$ s přeponou B_1C_1 , protně

te v rovnostranném trojúhelníku, jehož jeden vrchol je A .

Řešení tam uvedené užívá algebraického výpočtu. V tomto článku uvedeme přímé řešení, které se opírá o některé vám jistě známé vlastnosti pravouhého promítání. Jde o tyto věty:



Obr. 1

V.1. Pravoúhlý průmět kružnice $k \equiv (S; r)$, jejíž rovina ρ není k průmětně π kolmá a není s ní rovnoběžná, je elipsa, jejíž hlavní osa leží na průmětu hlavní přímky roviny jdoucí středem S a vedlejší osa leží na průmětu spádové přímky jdoucí středem S ; hlavní poloosa $a = r$, vedlejší poloosa $b = r \cdot \cos \varphi$, kde φ je odchylka roviny ρ od průmětny π .

Excentricita e této elipsy udává vzdálenost nejvyššího (nejnižšího) bodu kružnice od roviny ${}^1\pi \parallel \pi$ procházející středem S .

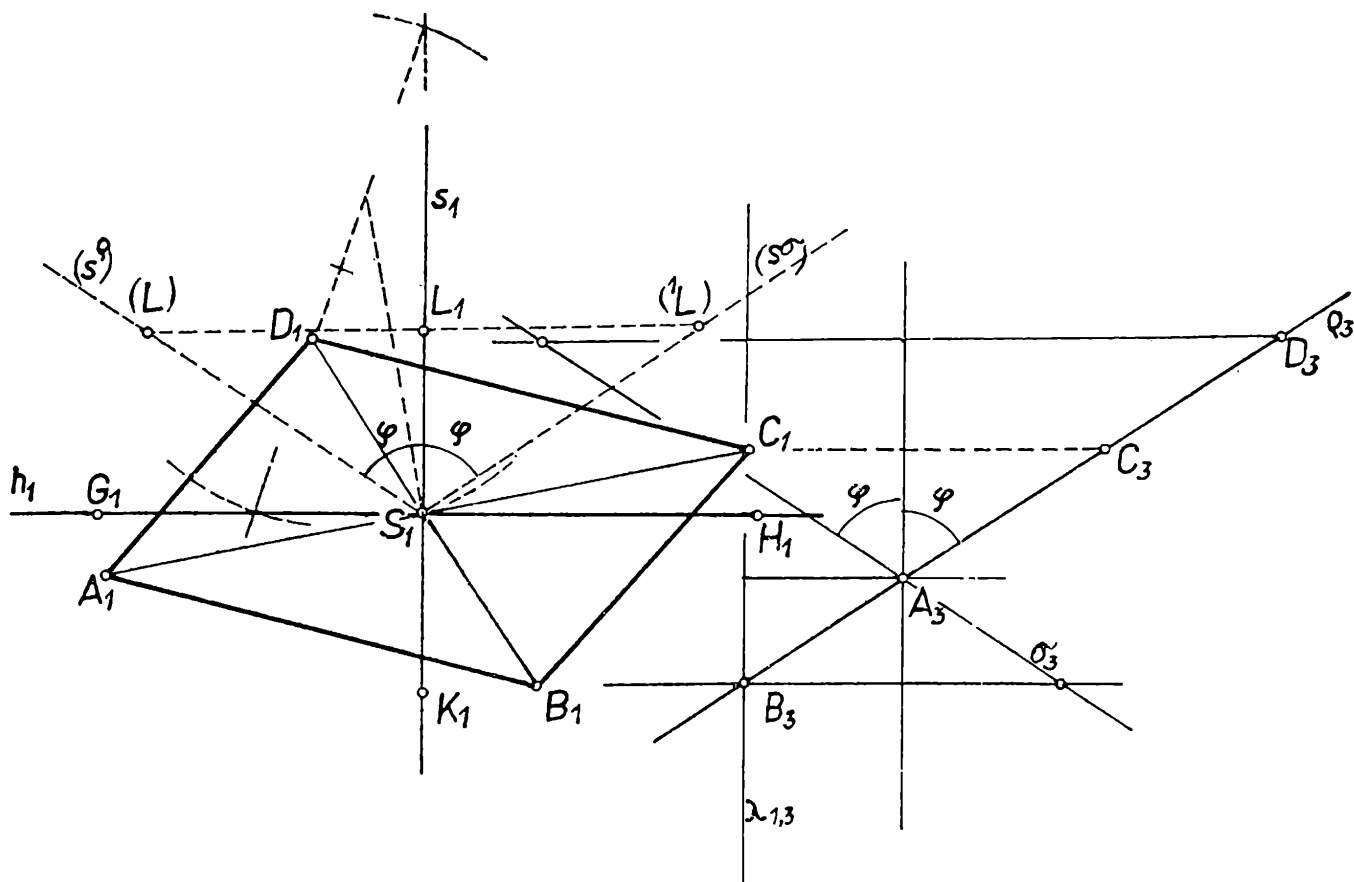
Je-li v rovině π dána elipsa k_1 o osách $G_1H_1 = 2a$, $K_1L_1 = 2b$ (obr. 1)

tak, že $G_1H_1 \perp \nu$, je druhým průmětem kružnice k úsečka K_2L_2 svírající s ${}^1\pi_2$ úhel φ . $S_1L_1 = b = r \cdot \cos \varphi$. Pro excentricitu e elipsy platí

$$e^2 = a^2 - b^2 = r^2 - r^2 \cdot \cos^2 \varphi = r^2 \cdot \sin^2 \varphi$$

Ale $r \cdot \sin \varphi$ je velikost úsečky $L_2'L_2 = L_1(L)$, což je vzdálenost bodu L od roviny ${}^1\pi$.

Elipsu k_1 můžeme považovat za řídicí křivku válcové plochy, jejíž přímky jsou kolmé k průmětně π . Roviny ρ a σ , procházející osou GH elipsy a mající od průmětny π odchylku φ , protínají tuto válcovou plochu v kružnicích k a 1k , které se promítají do průmětny π do elipsy k_1 . Ve sklopení promítací roviny τ spádové přímky s^ρ resp. s^σ kolem s_1 do roviny π , je $\varphi = \sphericalangle(L) S_1L_1 = \sphericalangle({}^1K)S_1{}^1K_1$; $S_1(L) = (s^\rho)$, $S_1({}^1K) = (s^\sigma)$.



Obr. 2

Je zřejmé, že všechny roviny, které jsou rovnoběžné s rovinami ρ nebo σ , protínají uvedenou válcovou plochu v kružnicích. Roviny ρ a σ jsou souměrné podle roviny π .

V.2. Každé dva průměry kružnice, které jsou k sobě kolmé, se promítají do sdružených průměrů elipsy.

V.3. Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B , které leží na přímce, která není k průmětně kol-

má, se rovná dělicímu poměru jejich rovnoběžných (tedy i pravoúhlých) průmětů

$$(ABC) = (A_1B_1C_1)$$

tj.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}$$

Nejprve rozřešíme úlohu jednodušší.

Úloha 1. V rovině π je dán rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$, který je podstavou kolmého rovnoběžnostěnu o dostatečně veliké výšce. Tento rovnoběžnostěn protněte ve čtverci, aby jeden vrchol A byl na hraně pobočné, procházející bodem A_1 .

Řešení. Opíšeme-li hledanému čtverci $ABCD$ (obr. 2) kružnici k , je jejím pravoúhlým průmětem do roviny π elipsa k_1 , která je opsána rovnoběžníku $A_1B_1C_1D_1$; přitom jsou A_1C_1 , B_1D_1 sdružené průměry elipsy k_1 .

Jestliže určíme osy elipsy G_1H_1 , K_1L_1 ze sdružených průměrů A_1C_1 , B_1D_1 (např. Rytzovou konstrukcí), můžeme snadno určit polohu roviny ρ , resp. σ , s níž je rovina hledaného řezu rovnoběžná. Naneseme-li ve vedlejších vrcholech K_1 , L_1 elipsy k_1 na kolmice k průmětně π v témže smyslu excentricitu e elipsy k_1 , dostaneme body 1K a L (${}^1KK_1 = LL_1 = e$). Body G_1 , H_1 , L , G_1 , H_1 , 1K jsou určeny roviny ρ a σ . Roviny ρ' a σ' , které procházejí bodem A a jsou se sestrojennými rovinami rovnoběžné ($\rho' \parallel \rho$; $\sigma' \parallel \sigma$), protínají daný rovnoběžnostěn (rovnoběžnostěnový prostor) ve čtvercích.

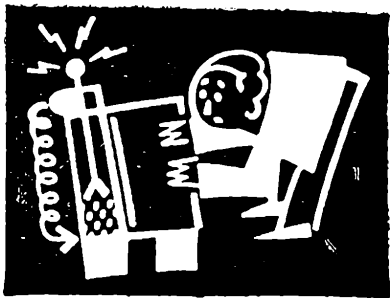
Každá rovina, která není rovnoběžná s hranami rovnoběžnostěnového prostoru, protíná jej v rovnoběžníku, což vyplývá ze známé stereometrické věty. Je třeba dokázat, že v daném případě je tento rovnoběžník čtverec. Jestliže rovnoběžník $ABCD$ otočíme kolem přímky $h = GH$ do roviny ${}^1\pi$, bude elipse k_1 odpovídat kružnici k a sdruženým průměrům A_1C_1 , B_1D_1 elipsy budou odpovídat kolmé průměry kružnice. Je tudíž rovnoběžník $ABCD$ čtvercem.

Z provedeného řešení plyne, že existují dvě roviny procházející bodem A , které protínají ve čtvercích rovnoběžnostěnový prostor mající obrazec $A_1B_1C_1D_1$ za svůj normální (kolmý) řez. Oba tyto čtverce jsou souměrně sdruženy podle roviny ${}^1\pi \parallel \pi$ procházející bodem A .

V obr. 2 je narýsován jen půdorys a třetí pomocný průmět; třetí průmětna je kolmá na přímkou $h = GH$, takže průmětem hledaných čtverců jsou úsečky. Jak sestrojíte nárys tohoto čtverce?

Nyní můžeme podat řešení úlohy, kterou jsme uvedli na začátku, a to v poněkud obecnějším znění.

(Pokračování)



Jaroslav Pospíšil, Olomouc:

Náboj elektronu a jeho měření

Elektron je elementární elektrická částice, charakterizovaná záporným elektrickým nábojem e a hmotou m .

Elektron má náboj $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$ C a ostatní elektrické náboje jsou celistvým násobkem tohoto elementárního náboje.

K představě elektronu jakožto „atomu elektřiny“, to znamená částice s nejmenším elektrickým nábojem, dospěli kolem roku 1881 nezávisle na sobě H. Helmholtz, J. Stoney¹⁾ a jiní fyzikové na základě Faradayových zákonů o elektrolýze. Z Faradayových zákonů²⁾ plyne, že ion libovolného prvku nese při elektrolýze elektrický náboj Q , který je přímo úměrný jeho valenci (čili mocenství) v . Jednomocný ion ($v = 1$) nese náboj e , dvojmocný ion ($v = 2$) nese náboj $2e$, trojmocný ion ($v = 3$) nese náboj $3e$ atd. Je tedy náboj Q přenášený libovolným iontem vždy celistvým násobkem elementárního náboje e . Elektrický náboj má tedy diskrétní, tzn. nespojitou strukturu.

Velký význam pro poznání diskrétního charakteru elektřiny mělo zkoumání průchodu elektrických nábojů plyny, zejména zkoumání výboje ve zředěných plynech a studium vlastností katodových paprsků (tj. studium volných elektronů vystupujících z katody a šířících se ve vakuu nebo v plynu, jehož tlak je velmi malý). Ukázalo se, že lze snadno získat elektrony ve volném stavu, nevázané na atomy látek.

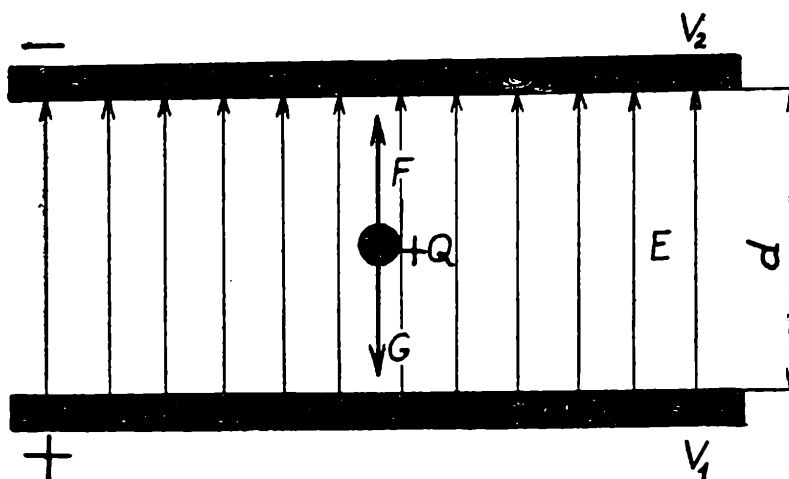
Nejstarším způsobem získání elektronů ve volném stavu je jejich uvolňování ze studené katody působením silného elektrického pole. Tento způsob, zvaný *emise (výron) elektronů ze studené katody*, byl již v roce 1869 proveden J. W. Hittorfem. V roce 1883 T. A. Edison objevil tzv. *termionickou (termoelektronovou) emisi* ze žhavé katody, umožněný vysokou teplotou kovu katody. Později H. Hertz v roce 1887 a W. Hallwachs v roce 1888 zjistili, že uvolňování elektronů z kovu je též možno absorpcí viditelného světla nebo krátkovlnného záření. Tento tzv. *fotoelektrický efekt*, zvláště názorně svými pokusy

¹⁾ J. Stoney zavedl r. 1900 pro nositele záporného elektrického náboje název *elektron*.

²⁾ Faradayovy zákony a jejich vysvětlení jsou uvedeny např. v knize Z. Horáka a kol., *Technická fyzika* (SNTL Praha, 1961) na str. 979.

ukázal A. G. S t o l e t o v. Elektrony lze též uvolňovat ostřelováním katody rychlými kladnými ionty, elektrony, neutrony nebo jinými částicemi. Také některé radioaktivní látky vysílají přímo z jádra atomu elektrony zvané částice β .

Pozoruhodnými měřeními r. 1897 J. J. T h o m s o n dokázal, že elektrony jakýmkoliv způsobem získané mají tutéž hmotu i elektrický náboj. Diskrétnost elektrických nábojů dokázal a přesné zjištění velikosti elektrického náboje elektronu měřením nábojů jednotlivých částic (kapek) provedl v letech 1900 až 1913 R. A. M i l l i k a n metodou navrženou v roce 1907 F. A. E h r e n h a f t e m. Později byla tato metoda zdokonalena.



Obr. 1

Princip Millikanovy metody spočívá v následujícím: Mezi dvěma opačně nabitými deskami kondenzátoru je mikroskopická kapička s kladným elektrickým nábojem $+Q$ (obr. 1). Na kapičku působí elektrické pole, vytvořené mezi deskami, silou

$$F = Q \cdot E, \quad (1)$$

kde E je velikost intenzity elektrického pole mezi deskami. Je-li horní deska nabitá záporně a dolní kladně, působí na kapičku elektrická síla F směřující nahoru. Tato síla působí ve směru opačném než váha G kapičky.

Jsou-li obě síly stejně velké ($F = G$), pak se nabitá kapička nehybně vznáší mezi oběma deskami.

Vyjádríme-li intenzitu E elektrického pole pomocí rozdílu potenciálů desek $V_1 - V_2$ a vzdálenosti d mezi nimi, dostaneme

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}. \quad (2)$$

Vztah $F = G$ lze rozepsat použitím výrazů (1) a (2) takto:

$$Q \cdot \frac{V_1 - V_2}{d} = G$$

a odtud

$$Q = G \frac{d}{V_1 - V_2} \quad (3)$$

Známe-li váhu kuličky G , vzdálenost mezi deskami d a rozdíl potenciálů $V_1 - V_2$, který je nutno dát mezi desky kondenzátoru, aby se kapička mezi nimi volně vznášela, můžeme podle vztahu (3) vypočítat velikost náboje kapičky Q .

Vzdálenost d a napětí $U = V_1 - V_2$ lze přímo změřit. Váha G kapičky se zjistí nepřímou. Vážením by to nebylo možné.

Předpokládáme-li, že kapička má tvar koule o poloměru r a je-li její hustota ρ , pak platí, že

$$G = \frac{4}{3} \pi r^3 g \rho \quad (4)$$

kde $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ je objem kapičky a g je tíhové zrychlení na daném místě.

Hodnota veličin ρ a g je známá; pro výpočet váhy G je třeba ještě určit poloměr r kapičky.

Poloměr r kapičky lze stanovit z rychlosti jejího pádu působením tíže zemské, bez vlivu elektrického pole. Na padající kapičku působí směrem dolů její váha G a směrem nahoru síla F_1 , zvaná vztlak (kapička je prostředím nadlehčována). Proti pohybu kapičky působí dále odpor R prostředí, jehož velikost závisí na rychlosti v padající kuličky, jejím poloměru r a na koeficientu vnitřního tření (koeficientu viskozity) η (to je charakteristická veličina prostředí z hlediska vnitřního tření mezi vzájemně se pohybujícími vrstvami).

Odpor R je vyjádřen tzv. Stokesovým vzorcem

$$R = 6 \pi \eta r v . \quad (5)$$

Kapka bude v prostředí padat nejdříve rovnoměrně zrychleně a po dosažení určité rychlosti rovnoměrně. To nastane v okamžiku, kdy

$$R = G - F_1 \quad (6)$$

Dosadíme-li do vztahu (6) výraz (4) za G , a výraz (5) za R , a za sílu F_1 vztah

$$F_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \sigma g ,$$

daný Archimédovým zákonem, dostaneme:

$$6 \pi \eta r v = \frac{4}{3} \pi (\rho - \sigma) r^3 g , \quad (7)$$

kde σ je hustota prostředí, ve kterém se kapička nachází.

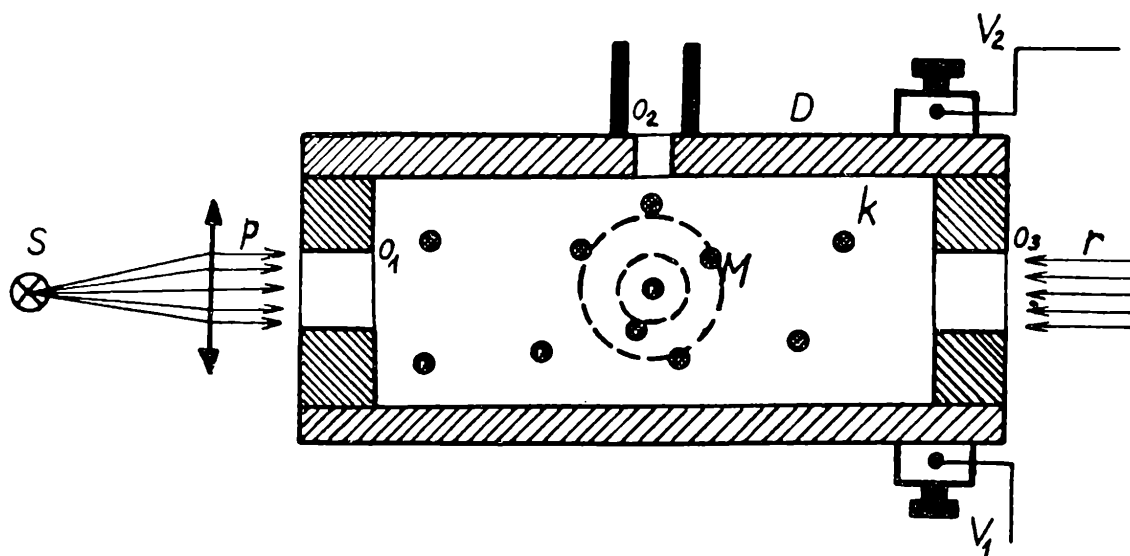
Z rovnice (7) plyne pro poloměr kapičky

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta}{2(\rho - \sigma)g} v} \quad (8)$$

K určení r je třeba znát rychlost v pádu kapičky (účinkem její váhy, bez působení elektrického pole.) Tuto rychlost lze zjistit a poloměr r podle vztahu (8) vypočítat.

Dosažením za poloměr r do vzorce (4) vypočteme váhu G kapičky a ze vztahu (3) můžeme pak při známých veličinách d a $V_1 - V_2$ elektrický náboj Q kapičky vypočítat.

Uvedená metoda dovoluje měření velmi malých nábojů, a touto metodou R. A. Millikan náboj elektronu změřil.



Obr. 2

Do prostoru mezi desky kondenzátoru D (obr. 2) byly vháněny mikroskopické olejové kapičky k otvorem o_2 , které se přitom nabíjely třením o vzduch. Kapičky byly ze strany osvětleny světelnými paprsky p ze zdroje S , procházejícími okénkem o_1 , a pozorovány mikroskopem M . Nastavením vhodného rozdílu potenciálů mezi deskami kondenzátoru dalo se dosáhnout toho, že se některé kapičky pro něž platila podmínka (6) nehybně vznášely v prostoru. Potom byl vzduch mezi deskami kondenzátoru ozářen rentgenovými paprsky r , vniklými do prostoru kondenzátoru okénkem o_3 . Tyto paprsky svými účinky ionizovaly vzduch; ve vzduchu se vytvořily ionty a volné elektrony. Jakmile kapička zachytila ion nebo elektron, změnila svůj náboj. Změna náboje způsobila porušení rovnováhy kapičky (tj. porušení jejího pohybového stavu), kapička se začala pohybovat. Pak se změřila její rychlost pohybu a ze známé rychlosti v bylo možno ze vztahu (8) vypočítat její poloměr r , ze vzorce (4) její váhu a ze vztahu (3) hledaný elektrický náboj Q .

Měření prováděná Millikanem a později dalšími fyziky ukázala, že náboje Q kapiček jsou vždy celistvým násobkem nejmenšího náboje e elektronu, tj., že platí

$$Q = n e ,$$

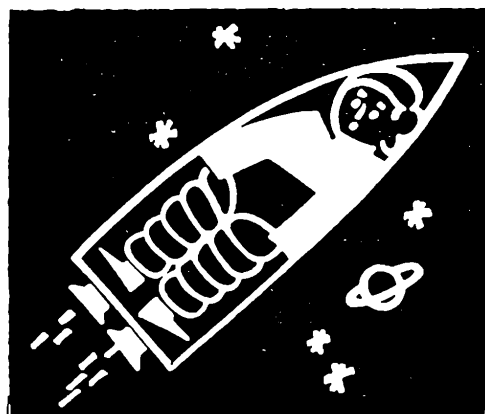
kde n je celé kladné číslo.

Z uvedeného tedy vyplývá, že **e l e k t r o v á n í t ě l e s** - tj. získávání elektrického náboje se neděje spojitě, ale po malých skocích, které nejsou normálně pozorovatelné, neboť náboj elektronu je malý. V Millikanově pokusu však kapičky byly tak malé, že náboje jimi nesené byly rovny nábojům několika elektronů a nespojitá změna nábojů se stala přitom přímo pozorovatelnou.

Měření elektrického náboje malých částic je obtížné a vyžaduje velké experimentální zručnosti.

Literatura:

- J. Fuka, B. Havelka, **E l e k t r o m a g n e t i c k é p o l e** (SPN Praha, 1958);
S. E. Friš, A. V. Timoreva, **K u r s f y z i k y I I** (NČSAV Praha, 1953);
Z. Horák, **Ú v o d d o m o l e k u l o v é a a t o m o v é f y z i k y** (SNTL Praha, 1955);
Z. Horák a kol., **T e c h n i c k á f y z i k a** (SNTL Praha, 1961);
M. v. Laue, **D ě j i n y f y z i k y** (Orbis Praha, 1959);
E. V. Špolskij, **A t o m o v á f y s i k a I** (SNTL Praha, 1957);
W. Weizel, **E l e k t r o n e n , A t o m e , M o l e k ü l e** (Berlin, Leipzig, 1950).



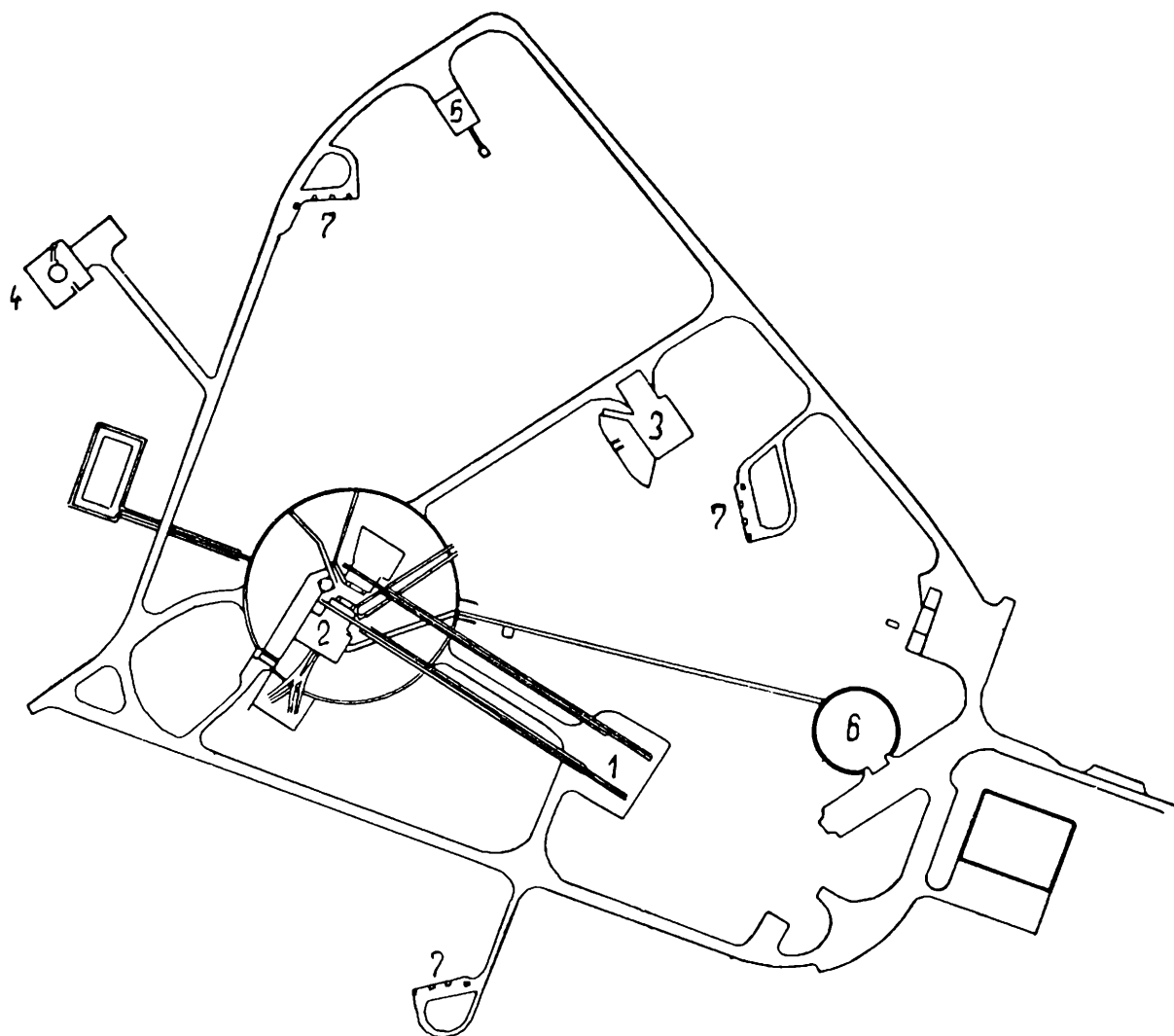
Astronomie

Ladislav Sehnal, CSc., Ondřejov:

Byl jsem na odpalovací raketové základně

Umělé družice a kosmické rakety jsou právem považovány za vrchol nejnovější techniky a jejich vývoj spěje ke stále dokonalejším a spolehlivějším typům. Vždyť vypuštění nějaké družice vyžaduje nejen velkých finančních nákladů, ale i velmi složitý, přesný a především spolehlivý technický aparát. A tak je jistě velmi zajímavé, podívat se přímo na místa, kde se vlastně výsledky celého technického snažení soustřeďují, totiž na odpalovací základnu pro vypouštění kosmických těles.

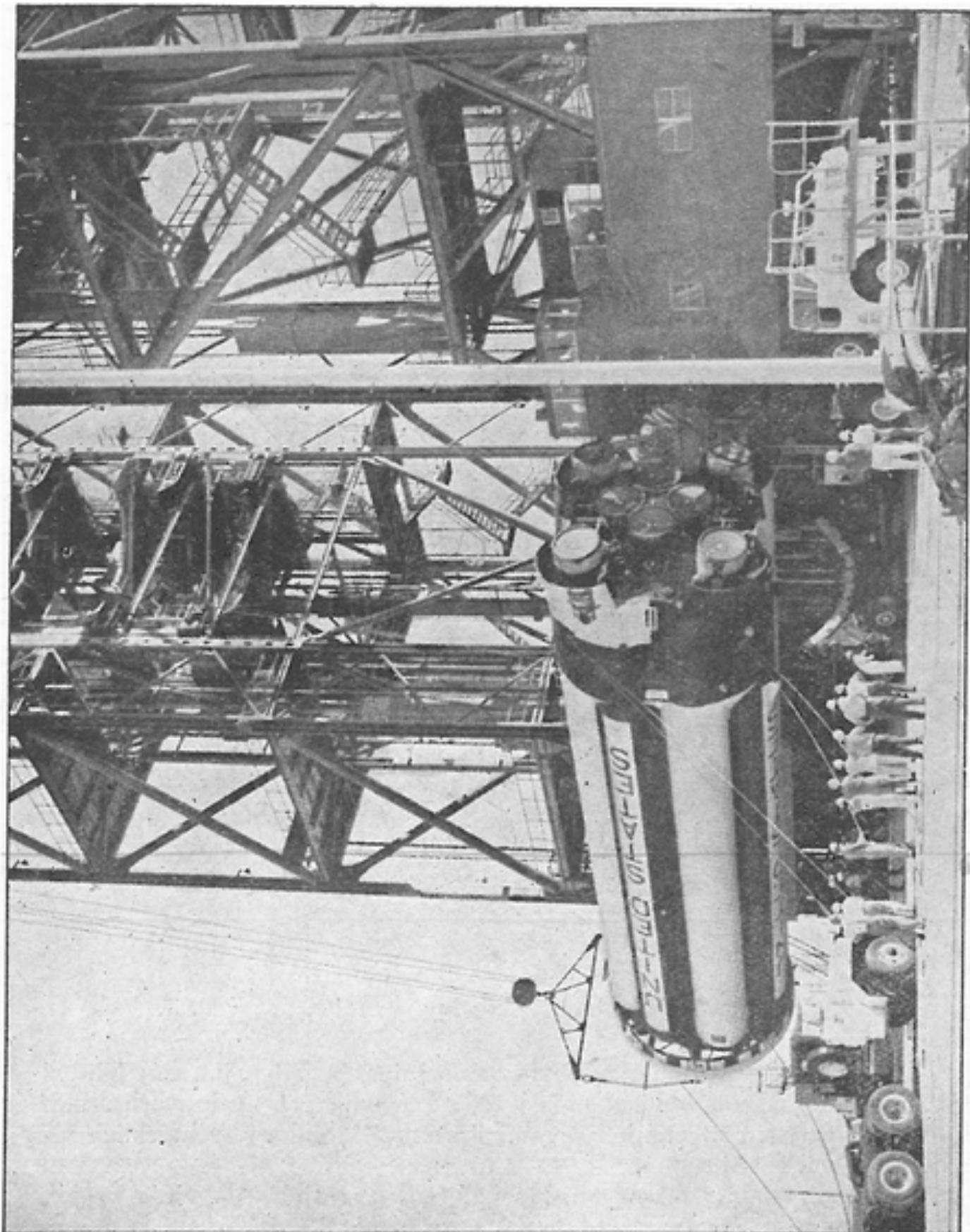
Na jaře loňského roku se ve Washingtonu konalo zasedání organizace COSPAR (Comittee for Space Research), která se zabývá výzkumem mimozemského prostoru pomocí umělých družic a raket. Při této příležitosti byla také uspořádána exkurse na americkou raketovou základnu na mysu Canaveral; této exkurse jsem se také jako člen naší delegace zúčastnil a tak mohu podat malou informaci o zařízeních, sloužících k vypouštění umělých družic.



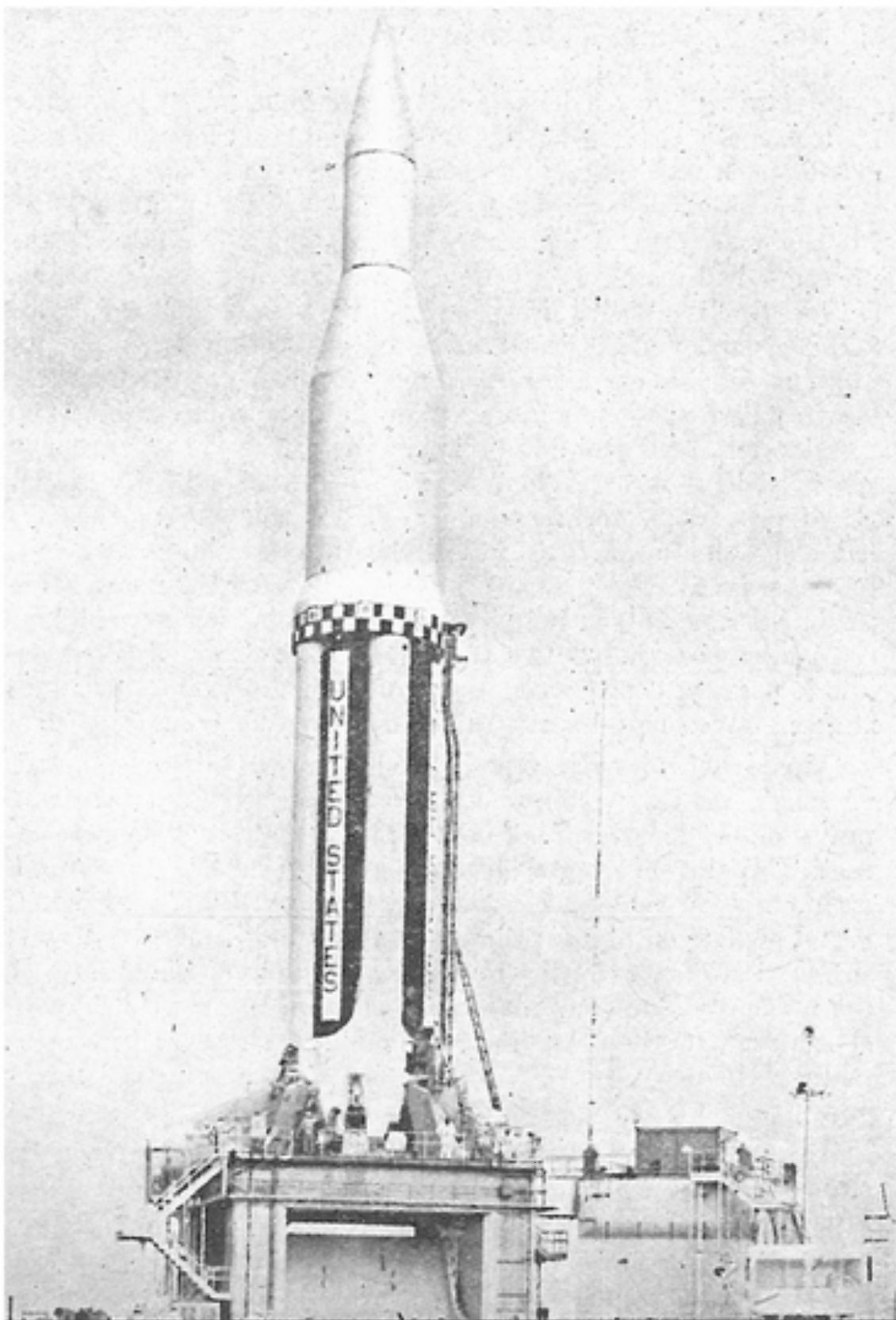
Obr. 1. Plán odpalovací základny pro rakety S a t u r n.

Návštěva těchto zařízení byla samozřejmě velmi zajímavá; i když Američané nejsou vedoucí silou v těchto kosmických výzkumech, vidět taková zařízení zblízka je rozhodně i pro neodborníka v technických záležitostech velmi cenné.

Základna na mysu Canaveral je rozložena na trojúhelníkovitém území, odděleném od vlastní pevniny Banánovou řekou - celé území je ovšem značně velké a vlastní mys je jen malým výběžkem tohoto území do Atlantického oceánu, signalizujícím svým majákem cestu lodím. Základna představuje hlavní americké zařízení pro vypouštění kosmických těles a jediné, na němž je plněn program letů člověka do vesmíru. Podél



Obr. 2. Zvedání rakety S a t u r n do konstrukční věže.



Obr. 3. Raketa S a t u r n na odpalovací rampě.

atlantického pobřeží je umístěna řada odpalovacích základen pro nej-různější účely, uvnitř území jsou většinou laboratorní a průmyslové objekty.

Odpalovací základny jsou v podstatě stejného rázu a každé takové zařízení tvoří vždy jeden celek, tzv. komplex. Měli jsme možnost prohlédnout si podrobně jeden takový komplex, který slouží k vypouštění nejsilnějších amerických raket typu S a t u r n. Tyto rakety jsou zatím ještě vývojovými typy, s nimiž se v budoucnu počítá pro lety na Měsíc. Pokusy jsou prováděny zatím pouze s prvním stupněm této rakety, při čemž druhý a třetí stupeň sice na raketě nasazen je, ale jen jako model bez funkce. Poslední úspěšný pokus, v pořadí čtvrtý, byl s touto raketou proveden 29. března t. r. Raketa má osm motorů, poháněných kerosenem a tekutým kyslíkem. Motory jsou v provozu po dvě minuty, než je palivo spotřebováno a výkon každého motoru je 80 000 kg tahu.

Základna, z níž jsou tyto rakety vypouštěny, je znázorněna na našem schematickém obr. 1. Raketa se přiveze ke konstrukční věži (1), kde jsou na ní prováděny technické úpravy, dokončovací práce a sestavování jednotlivých stupňů. Tato věž je vlastně velkou dílnou ve vertikální poloze, v případě rakety Saturn je její výška přes 100 metrů a tato dílna je navíc ještě pojízdná. Pohybuje se na kolejnicích a po dokončení konstrukčních prací je raketa v této věži převezena na odpalovací rampu (2), kde je usazena a připravena k vypuštění. Věž je po usazení rakety před startem odvezena, aby nebyla při startu poškozena.

Odpalovací rampa je v podstatě betonový podstavec, na němž spočívá raketa před vypuštěním a na němž jsou prováděny poslední fáze přípravy rakety ke startu, jako např. plnění nádrží rakety pohonnými hmotami. Odpalovací rampa obsahuje zvláštní ocelové pásy, umístěné pod ústím motorů rakety, nazývané deflektory, které slouží k tomu, aby proud spálených plynů při startu rakety byl usměrněn do vodorovného směru. Tyto ocelové pásy musí odolat vysokým teplotám a tlakům výfukových plynů a jsou proto velmi pasivní. Přesto však bývají často poškozeny a jsou též na kolejkách, aby mohly být odsunuty a opraveny, případně vyměněny.

Pohonné hmoty jsou do rakety napouštěny z připravených nádrží, které jsou umístěny ve vzdálenosti asi 200 m od odpalovací rampy a jsou s ní spojeny potrubím. V případě rakety Saturn se jedná o nádrže na tekutý kyslík (3), vodík (4) a kerosen (5).

Odpálení rakety a její start je řízen z kontrolního stanoviště, umístěného v podzemním bunkru (6), vystupujícím nad zem jen vrchní betonovou částí, z níž vyčnívají dva periskopy pro přímé pozorování rampy. Uvnitř jsou všechny potřebné přístroje na sledování jak letu rakety, tak i pochodů při spalování pohonných látek, jejich mísení, spotřeby a p. Základním přístrojem je zde ovšem elektronický počítač, který samočinně kontroluje a řídí většinu procesů podle předem stanoveného programu.

Údaje o letu rakety jsou do řídicí budovy předávány z pozorovacích stanovišť, umístěných i mimo odpalovací základnu. Uvnitř základny jsou též stanoviště s fotografickými a filmovými komorami (7) pro sledování počátečních fází letu rakety.

Základna pro vypouštění raket, nesoucích kabinu s člověkem, je však ještě složitější. Je zde ještě jedna věž pro přípravu a usazení kosmické kabiny a dále samozřejmě zařízení, sloužící k zajištění bezpečnosti kosmonauta při případné havárii na startu. Zvláštní budova slouží též sledování letu kabiny kolem Země a rádiovému spojení pilota s pozemskými stanicemi a řídicím stanovištěm.

Z rozsahu a vybavení odpalovacích základen je možno si dobře představit, jaké finanční prostředky musí být vynaloženy na vypuštění jedné umělé družice nebo kabiny s lidskou posádkou. Přitom se zde rakety nevyrábějí, jsou na základnu přiváženy buď po souši nebo po vodě a zde se provádějí jen konečné úpravy. Pro mírové využití umělých družic však rozhodně těchto peněz není škoda a soutěžení na tomto poli je pro celé lidstvo velmi potřebné a užitečné.



Řešení úloh

Řešitelům soutěže Rozhledů

Redakce Rozhledů matematicko-fyzikálních vypisuje tradiční soutěž v řešení úloh z matematiky, fyziky a deskr. geometrie.

P o k y n y ř e š i t e l ů m Úlohy řešte samostatně, logicky správně, věcně, vyhněte se zbytečným frázím, užívejte jen zavedených termínů a označení. Pište čitelně perem nebo strojem po jedné straně papíru formátu A4, každou úlohu na zvláštní list. V pravém dolním rohu každého listu uveďte své plné jméno, jméno školy i třídu a svou podrobnou adresu. Na poslední odvedenou úlohu napište i jméno svého učitele příslušného předmětu.

Úlohy z fyziky a deskr. geometrie budou otištěny v druhém čísle.

Po skončení a zhodnocení soutěže otiskneme jména všech správných řešitelů. Nejlepší z nich odměníme knižními cenami, eventuálně otiskneme jejich fotografie. Vítejte ovšem i ojedinělá řešení žáků nižších tříd.

Mimo soutěž nám mohou zaslat řešení též čtenáři - nestudenti, ovšem bez nároku na některou z odměn.

Proti minulým létům se loni zvýšil počet slovenských řešitelů i počet řešitelek, v což doufáme i letos. Naše soutěž nijak nesouvisí s matematickou nebo fyzikální olympiádou.

Řešení matematických úloh zašlete do 31. prosince 1963 na adresu: doc. O t a S e t z e r, Praha 2, Trojanova 13.

Matematika:

1. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB , je-li dán poloměr ρ vepsané kružnice a výška v vedená bodem A .

Svatopluk Fučík

2. Matematickou indukcí dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí

$$\frac{4n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Svatopluk Fučík

3. Vypočtete velikost poloměru kulové plochy, která se dotýká hran granátotvaru, tj. dvanáctistěnu kosočtverečného, je-li dána hrana granátotvaru o velikosti h .

Dokažte, že velikost vnitřního úhlu sousedních stěn granátotvaru se rovná 120° .

(Viz autorův článek *Některé geometrické vlastnosti granátotvaru*, *Rozhledy m. f.*, roč. 41, str. 255.)

Josef Holubář

4. Stranami a, c ($c > a$) a úhlem α jsou za jisté podmínky určeny dva různé trojúhelníky ABC_1, ABC_2 . Je dáno c, α ; jak je nutno zvolit a , aby trojúhelníky ABC_1, ABC_2 měly obsahy v poměru $m : n$ ($m < n$)?

Stanislav Horák

5. Jsou dány dvě kvadratické rovnice

$$\begin{aligned}x^2 + px + q &= 0, \\x^2 + rx + s &= 0.\end{aligned}$$

Kořeny první rovnice jsou $\sin \alpha, \sin \beta$, kde α, β jsou dva ostré úhly a kořeny druhé rovnice jsou kosiny těchto dvou úhlů. Ukažte, že koeficienty těchto dvou rovnic splňují rovnice

- $p^2 + r^2 = 2(q + s + 1)$,
- $q^2 + r^2 = (s + 1)^2$,
- $s^2 + p^2 = (q + 1)^2$.

Jsou tyto rovnice nezávislé?

Stanislav Horák

6. Je dána obdélníková mřížka $ABCD$, obsahující $n \cdot k$ jednotkových čtverečků ($AB = n$, $BC = k$). Kolikerym způsobem lze dospět z bodu A do bodu C po mřížce, aby délka každé „větve“ byla $n + k$? (Větvi se zde nazývá každá lomená čára, označující dráhu z A do C po mřížce.)

Robert Karpe

7. Rovnice $(12m^2 - 4m + 21)x^2 - (144m^2 - 48m + 54)x + (432m^2 - 144m - 36) = 0$ s reálným parametrem m má pro některá m stejné kořeny. Určete je!

Josef Kotyč

8. Určete všechna prvočísla, která mají v desítkové soustavě ciferný součet 8, přičemž se v prvočíslu neopakuje žádná číslice.

Jiří Sedláček

9. Určete sedm po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součet je roven čtvrté mocnině jistého prvočísla.

Jiří Sedláček

10. Je dána krychle $ABCD A'B'C'D'$ o hraně délky 1. Bod X probíhá rovnoměrným pohybem obvod čtverce $ABCD$ (v tomto smyslu); výchozí poloha je bod A . Bod X' probíhá rovnoměrným pohybem a dvojnásobnou rychlostí obvod čtverce $A'B'C'D'$ (v tomto smyslu); výchozí poloha je bod A' . a) Sestrojte dráhu, kterou opíše střed Y úsečky XX' a vypočtete její délku. b) Na úsečce XX' leží bod Z tak, že $XZ : ZX' = k$, kde k je kladné číslo. Určete k tak, aby dráha bodu Z měla délku 6.

Jan Vyšín

(Pokračování)

Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů

Matematika:

4. V intervalu od 0° do 360° najděte všechny úhly, které vyhovují rovnici

$$\sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi = \frac{1}{4}.$$

Stanislav Horák

(Došlo 28 řešení.)

Řešila Jana Dejčmarová, 3. c SPŠS, Most.

Víme, že platí

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$$

a do dané rovnice dosadíme

$$\sin^6 \varphi + (1 - \sin^2 \varphi)^3 = \frac{1}{4}$$

Po úpravě

$$\sin^4 \varphi - \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} = 0$$

Řešením této rovnice je

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\sin \varphi = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

Tomu v intervalu od 0° do 360° přísluší úhly 45° , 135° , 225° , 315°

5. Sú dané 4 rôzne kružnice $k_i \equiv (S_i; r_i)$ a bod U . Zostrojte rovnobežník $A_1A_2A_3A_4$ tak, aby bod U bol jeho stredom a vrcholy A_n ležali na kružniciach k_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Stanislav Horák

(Došlo 20 riešení.)

Riešila Darina Hovorková, 3. b SVVŠ, Zvolen.

Vieme, že uhlopriečky rovnobežníka sa rozpolujú, teda $AU = CU$, $BU = DU$. Body A, C (a tiež body B, D) sú súmerne združené podľa stredu U . Každému bodu kružnice k_1 nájdeme súmerne združený podľa U ; tieto body vytvoria kružnicu k'_1 súmerne združenú s kružnicou k_1 podľa stredu U . Priesečky kružníc k'_1, k_3 sú bodmi $C \equiv A'$ a $C_1 \equiv A'_1$. Body A a A_1 dostaneme prevedením späť na kružnicu k_1 .

Táto istá konštrukcia sa prevádza aj s kružnicami k_2 a k_4 .

Dostaneme takto body B, D a body B_1, D_1 .

V oboch prípadoch môžu mať kružnice dva spoločné body (rôzne), 1 spoločný bod alebo nemajú žiadny spoločný bod.

Keď obe dvojice kružníc majú len po jednom spoločnom bode, dá sa zostrojiť len jeden rovnobežník. Keď jedna z oboch dvojíc má len jeden spoločný bod a druhá 2 spoločné body, vtedy sa dajú zostrojiť len 2 rôzne rovnobežníky. Keď obe dvojice kružníc (k_1 a k_3 ; k_2 a k_4), majú po 2 spoločné body, dostaneme kombináciou uhlopriečiek 4 rôzne rovnobežníky. Keď niektorá z oboch dvojíc nemá ani jeden spoločný bod, vtedy sa nedá zostrojiť ani jeden rovnobežník. Keď jedna dvojica kružníc (na príklad k'_1, k_3) splyva, vtedy jestuje nekonečne mnoho riešení.

8. Je dán čtyřčlen $16x^3 + 20x^2 + 16x + 1$. Ukažte, že lze najít nekonečně mnoho přirozených čísel x takových, že funkční hodnota našeho čtyřčlenu pro tato čísla x je číslo dělitelné jedenácti.

Jiří Sedláček

(Došlo 20 řešení.)

Řešil Jaroslav Zemánek, 2. c SVVŠ, Praha 5.

Uvažujme o přirozeném čísle x tvaru

$$x = 11a - 1,$$

kde a je libovolné přirozené číslo. Potom

$$x^3 = 11A - 1, \quad x^2 = 11A' + 1,$$

kde A, A' jsou přirozená čísla. Pro toto x je tedy čtyřčlen

$$16x^3 + 20x^2 + 16x + 1 = 11(16A + 20A' + 16a) - 16 + 20 - 16 + 1 = 11(16A + 20A' + 16a - 1).$$

Existuje nekonečně mnoho přirozených čísel x , která při dělení jedenácti dávají zbytek 10. Pro každé takové číslo x je funkční hodnota daného čtyřčlenu přirozené číslo dělitelné jedenácti.

P o z n á m k a a u t o r a : Mnohočlen $16x^3 + 20x^2 + 16x + 1$ má ještě jednu zajímavou vlastnost. Čtenáři, kteří se zajímají o číselnou teorii mohou se o ní informovat v krátkém článku V. A. Goluběva, K u b i c k ý polynom, který nabývá mnoha bezčtvercových hodnot. Článek vyšel v Časopise pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), str. 496.

Deskriptivní geometrie:

3. Jsou dány tři přímky a, b, c , z nichž každé dvě jsou mimoběžné. Sestrojte kvádr $ABCD A'B'C'D'$ tak, aby vrchol A ležel na přímce a , vrchol B na přímce b , hrana $A'B'$ na c a aby podstava $ABCD$ byla čtverec.

Stanislav Horák

(Došlo 14 řešení.)

Řešil Jiří Vocílka, 3. d SVVŠ, Znojmo.

Označme d přímkou, v níž leží hrana AB . Poněvadž $d \parallel c$, je patrné, že d je příčka mimoběžek a, b rovnoběžná s přímkou c . Její průsečíky s přímkami a, b jsou vrcholy A, B . V rovině $\rho \equiv cd$ se dá již sestavit obdélník $ABA'B'$ tak, aby body A', B' ležely na přímce c .

V bodech A, B, A', B' vztyčíme kolmice k rovině ρ a nanese na ně délku hrany AB podstavného čtverce $ABCD$.





Matematické zábavy

Dr. Miloslav Hlaváček, Praha:

Zajímavé těleso

V matematickém smyslu existují, tj. dají se vymyslet tělesa, která mají konečný objem, ale nekonečně veliký povrch. Uvedeme si jednoduchý příklad.

Těleso necht' se skládá ze samých kvádrů na sebe postavených, vesměs 1 m vysokých, se čtvercovou podstavou. Podstavná hrana nejspodnějšího kvádrů měří 1 m, na něj postaveného kvádrů $\frac{1}{2}$ m, dalšího $\frac{1}{3}$ m atd. do nekonečna (obr. 1). Dokážeme, že objem tohoto tělesa je konečný, povrch však nekonečně veliký.

Objem jeho je dán řadou (vynecháváme označení)

$$s = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} +$$

Jde o důkaz, že tato řada konverguje. K tomu účelu uvažujeme pomocnou řadu

$$s' = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} +$$

V součtu prvních n členů

$$s'_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

dosadíme $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, pak $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, dále $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$,

$$\text{atd., až } \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Dostaneme

$$s'_n = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

čili

$$s'_n = 2 - \frac{1}{n}$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s' = 2.$$

Pomocná řada s' je tedy konvergentní.

Napišme nyní s_n pod s'_n

$$s'_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Členy dolního součtu $\frac{1}{k^2}$, $k = 2, 3, \dots, n$

jsou menší než stejnohlé členy $\frac{1}{(k-1)k}$ součtu horního, tedy $s_n < s'_n$ pro všechna n ; proto

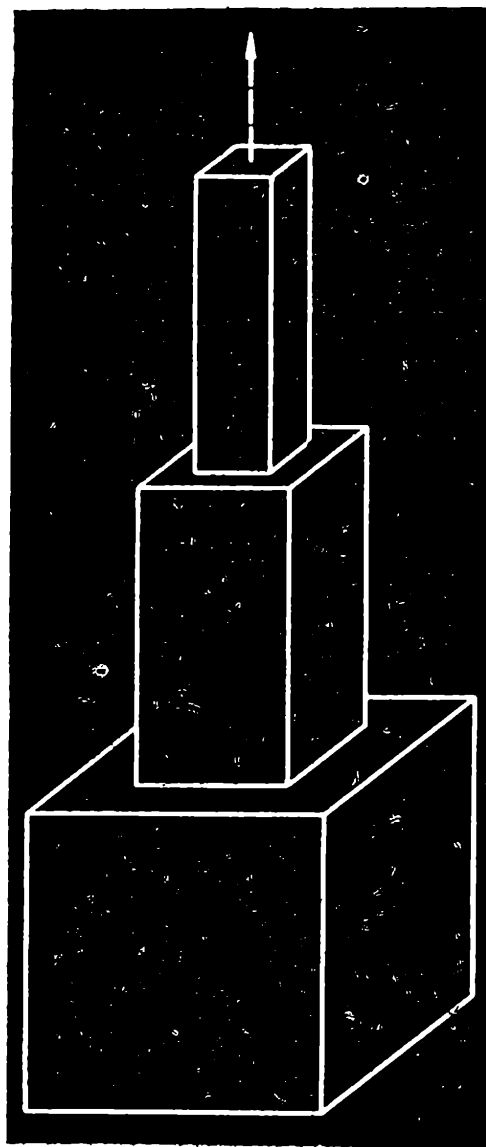
$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n < \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s' = 2. \text{)}$$

Řada pro objem je tedy také konvergentní. To znamená, že objem našeho tělesa je konečný; neměří ani celé 2 m^3 .

Abychom dokázali, že povrch jeho je nekonečně veliký, k tomu stačí započítat toliko jednu pobočnou stěnu každého kvádrů. Vyjde řada

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

1) Obecně platí: Je-li $a_n < b_n$ pro všechna n , pak, existuje-li $\lim a_n$ a $\lim b_n$, platí $\lim a_n \leq \lim b_n$. V našem případě však rovnítko zřejmě odpadá. $\lim s_n$ existuje, ježto $\{s_n\}$ je posloupnost rostoucí a ohraničená [$s_n < s'_n < 2$ pro všechna n].



Obr. 1

Je to důležitá, tzv. h a r m o n i c k á ř a d a. Dokážeme, že součet jejích prvních 2^k členů s rostoucím k roste nade všechny meze. To na první pohled překvapuje; vždyť hodnoty jejích členů s rostoucím n klesají neomezeně k nule.

Je

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k-1} + 1} + \frac{1}{2^{k-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^k} &> \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} = \\ &= \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Tedy pro $m = 2^k$ máme sečtením levých i pravých stran

$$S_m > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}k.$$

S rostoucím k roste pravá, a proto i levá strana nade všechny meze. Tudíž posloupnost $\{S_n\}$ není ohraničená a nemá tedy limitu. Řada harmonická tedy diverguje. Ježto má vesměs kladné členy, píšeme $S_n \rightarrow +\infty$ pro $n \rightarrow \infty$. A to jsme sečítali jen jednu pobočnou stěnu u každého kvádrů. Povrch našeho tělesa je tedy nekonečně veliký.

Skutečnost, že první řada (pro objem) konverguje, kdežto druhá řada diverguje, zakládá se na tom, že členy první řady $\frac{1}{n^2}$ s rostoucím n „rychleji“, jak říkáme, se blíží k nule nežli členy druhé řady $\frac{1}{n}$. Souvisí to s tím, že u objemů jednotlivých kvádrů zmenšují se *dva* rozměry, u povrchů však jen *jeden*.



Kterak jsem zanevřela na matematiku

Z matematiky se mi nejvíce zalíbily mocniny. S radostí jsem jmenovala jejich řadu: 0, 1, 4, 9, 16... a tu mě něco zarazilo. Všimla jsem si jakési zákonitosti v této řadě. Mezi nulou a jedničkou je rozdíl jedna, mezi jedničkou a čtyřkou tři, to je minulý rozdíl plus dvě. Tak to pokračovalo i dále

$$\begin{aligned}2^2 &= 4 \\3^2 &= 9 \\9 - 4 &= 5 \\5 + 2 &= 7 \\9 + 7 &= 16 \\4^2 &= 16\end{aligned}$$

„Vida,“ zaradovala jsme se, „tedy zákonitost tu opravdu je. Ale,“ napadlo mě dále, „kde je zákonitost, musí být i vzorec pro její vyjádření!“

V deseti minutách jsem vzorec objevila. Byl, jak vidno, nesmírně jednoduchý:

Považujeme-li n za libovolné celé kladné číslo, pak

$$\begin{aligned}n^2 &= (n - 1)^2 + (n - 1)^2 - (n - 2)^2 + 2 \\n^2 &= 2(n - 1)^2 - (n - 2)^2 + 2\end{aligned}$$

Několik dosazení za číslo n ukázalo, že formulka pro tato jednotlivá n platí, např.

$$\begin{aligned}7^2 &= 2(7 - 1)^2 - (7 - 2)^2 + 2 \\49 &= 2 \cdot 36 - 25 + 2 \\49 &= 49\end{aligned}$$

„Nyní zbývá jen vzorec dokázat,“ těšila jsem se ve své mysli, „domnívám se, že k tomuto účelu nejzpůsobilejší bude matematická indukce!“ — Hlavou se mi honily vidiny slávy. „Vida!“ budu říkat bývalým spolužákům z jedenáctiletky, „co vy jste dokázali? Nic! Ha, ha—to já jsem už objevila matematický vzorec!“

Pohlédla jsem opět radostně na formulku. „Snad bych to měla před důkazem trochu upravit.“ I začaly úpravy, hbitě, rychle, jedna vyplývala z druhé:

$$\begin{aligned}n^2 &= 2(n - 1)^2 - (n - 2)^2 + 2 \\n^2 &= 2(n^2 - 2n + 1) - (n^2 - 4n + 4) + 2 \\n^2 &= 2n^2 - 4n + 2 - n^2 + 4n - 4 + 2 \\n^2 &= n^2 - 4n + 4n + 4 - 4.\end{aligned}$$

Začala jsem mít prevelikou radost a nebývalé potěšení, neboť jsem viděla poslední úpravu. Po ní vypadal můj objev takto:

$$n^2 = n^2$$

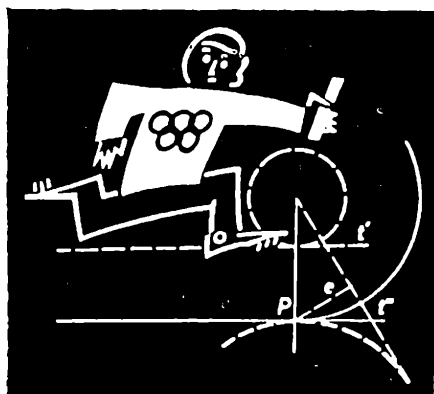
„Hle!“ pronesla ironicky kamarádka, která mé matematické snažení od počátku sledovala, „jak snadno a svižně se ti podařilo dokázat, že n^2 rovná se n^2 !“

A tak jsem zanevřela na matematiku. Neboť, jak sami vidíte, matematika je přespříliš logická! A přespříliš přísná!

Tento čistě ženský spor se rozhodla redakce (rovněž rodu ženského) dát rozsoudit ženě - matematicce. Její doslov k veselé příhodě zní:

Čtenáři jistě nahlédnou, že zneuznaná objevitelka mohla snadno potřít svou ironickou odpůrkyni touto stručnou odpovědí: „Konečná rovnost je přece právě důkazem správnosti mé identity!“ (Vzpomínáte jistě na důkazy nejrůznějších identit ze školy, kde se správnost ukáže tím, že se jedna strana uvede na týž tvar, jaký má strana druhá.)

M. Valešová



Matematická olympiáda

Přípravné úlohy I. kola XIII. ročníku MO

(Řešení první trojice úloh se odevzdá učiteli matematiky do 20. 11. 1963.)

Kategorie A.

1. Najděte nutné a postačující podmínky mezi reálnými koeficienty p , q rovnice $x^2 + px + q = 0$ k tomu, aby měla kladné kořeny x_1 , x_2 o nichž platí $x_1 = 2x_2$.

2. Vypočítejte délku středné dvou kružnic o daných poloměrech R , r , které mají tu vlastnost, že úsek společné vnitřní tečny těchto kružnic, obsažený mezi jejich společnými tečnami vnějšími, má délku p , kde p je dané kladné číslo.

Proveďte konstrukci a diskusi řešitelnosti úlohy.

3. Je dán kvádr $ABCD A'B'C'D'$ (kde $ABCD$ je obdélník a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) o rozměrech $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$.

Na přímkce BB' najděte bod X a na přímkce CA' bod Y tak, aby platilo $XY \perp BB'$, $XY \perp CA'$. Vypočítejte velikosti úseček XY , BX , CY .

Kategorie B.

1. V rovině pravouhlých souřadnic x, y zobrazte funkci:

a) $y = x + 3$;

b) $y = |x + 3|$;

c) $y = |x| + 3$;

d) $y = \frac{x^2 + 3x}{|x|}$;

e) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$;

f) $y = \frac{(x + 3)^2}{x + 3}$;

g) $y = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$;

h) $y = \frac{1}{2} (|x - 3| + |x + 3|) + 3$.

2. Jsou dány rovnoběžky m, n a uvnitř pásu jimi určeného je dán bod C , který má od nich po řadě vzdálenosti p, q .

Sestrojte trojúhelník ABC , v němž je $CA = CB$, $\sphericalangle BCA = 90^\circ$ a body A, B leží pořadě na přímkách m, n . Vypočtěte obvod a obsah tohoto trojúhelníka.

Pokyn. Lze užít otočení.

3. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1.

Sestrojte v něm tři shodné kružnice, z nichž každé dvě se navzájem dotýkají vně, přičemž první se dotýká přímkou AB, AD , druhá přímkou BC, AC a třetí CA, CD . Vypočtěte velikost poloměrů těchto kružnic.

Kategorie C.

1. Uvnitř stran BC, CA, AB daného rovnostranného trojúhelníka ABC sestrojte po řadě body X, Y, Z tak, aby platilo $XY \perp BC, YZ \perp CA, ZX \perp AB$ a vypočtěte délky stran trojúhelníka XYZ pomocí délky $d = AB$.

2. Vypočtěte nejmenší přirozená čísla p, x , pro která je výraz

$$V = \frac{x^2 + 2px + p^2 - 16}{p^2 + px - 4x - 16}$$

roven číslu 1,05.

3. Je dán trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ .

Aniž narýsujete střed kružnice k tomuto trojúhelníku opsané, sestrojte k ní v bodech A, B, C tečny.

Poznámka. Lze užít úsekového úhlu.

Kategorie D.

1. Napište všechny dvojice nesoudělných přirozených čísel x, y (bez ohledu na pořádek čísel dvojice), jejichž součin je roven číslu 415 800.

2. Narýsujte čtverec $MNPQ$ o stranách délky d a dále trojúhelník ABC o stranách délek a, b, c .

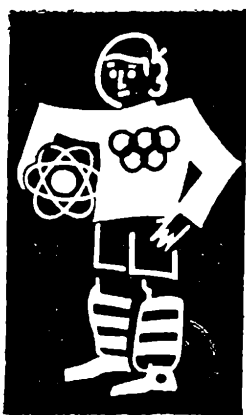
Sestrojte trojúhelník XYZ těchto vlastností:

1) Platí $\triangle XYZ \cong \triangle ABC$.

2) Body X, Y, Z padnou po řadě na přímky MQ, MN, NP .

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

3. Továrna splnila plán výroby na 108 %. Považujeme-li toto skutečné plnění výroby za základ, vypočtete, kolik procent představovala původně plánovaná výroba.



Fyzikální olympiáda

V. ročník soutěže fyzikální olympiády

Žákům středních všeobecně vzdělávacích a odborných škol!

Ministerstvo školství a kultury spolu s Jednotou československých matematiků a fyziků a Československým svazem mládeže pořádá ve školním roce 1963/64 pátý ročník soutěže Fyzikální olympiáda (FO).

Organizace soutěže

Soutěž FO je řízena celostátně ústředním výborem fyzikální olympiády (ÚVFO) se sídlem Praha 1 - Malá Strana, Maltézské nám. 1 (Jednota československých matematiků a fyziků) a Olomouc, Leninova 26 (Katedra fyziky Palackého university). V každém kraji je řízena krajským výborem fyzikální olympiády (KVFO).

Soutěž je dobrovolná a je určena pro žáky výběrových škol 2. cyklu a devátého ročníku základních devítiletých škol. Bude probíhat ve čtyřech kategoriích. Kategorie A je určena pro žáky III. ročníku středních všeobecně vzdělávacích škol, III. a IV. ročníku středních odborných škol. Kategorie B je určena pro žáky II. ročníku a kategorie C pro žáky I. ročníků všech středních výběrových škol.

Účast v kategorii pro vyšší třídu může žáku z nižší třídy povolit vyučující učitel s referentem pro FO na škole. Tyto mimořádné případy ohlásí referent krajskému výboru FO.

Soutěž v kategorii B a C probíhá ve dvou kolech, v kategorii A ve třech kolech.

V *prvém kole* mají soutěžící za úkol do 15. února 1964 řešit 9 úloh a prostudovat samostatně fyzikální téma. Tato témata pro všechny tři kategorie najdete otištěna ve druhém a třetím čísle tohoto časopisu.

Řešené úlohy odevzdají soutěžící svému učiteli fyziky v těchto termínech:

Úlohu prvou až třetí nejpozději do 30. listopadu 1963,

úlohu čtvrtou až šestou nejpozději do 4. ledna 1964,

úlohu sedmou až devátou nejpozději do 15. února 1964.

Řešení úloh se klasifikuje takto:

1. *Výborně*, jestliže je úloha rozřešena správně, nebo řešení má nejvýš formální chyby, nebo jen menší odbornou závadu.

2. *Dobře*, jestliže řešení vystihuje úkol, který měl řešitel podat, ale má přitom větší odborné nedostatky. Dobře je hodnoceno i správné řešení, vyskytují-li se v něm závažné formální nedostatky.

3. *Nevyhovující*, jestliže nedostatky odborného rázu jsou závažné, nebo podané řešení je z větší části neúplné. Řešení je nevyhovující, když výklad chybí nebo je neúplný, takže z něho nelze soudit na myšlenkový postup podaného řešení.

Řešené úlohy prvního kola opraví učitel vyučující ve třídě fyzice spolu s referentem FO na škole. Po ukončení prvního kola, tj. po 15. únoru 1964, navrhne referent FO na škole úspěšné řešitele do druhého kola soutěže a odešle opravené úlohy všech řešitelů (i neúspěšných) současně s návrhem příslušnému KVFO. Po kontrole úloh rozhodne KVFO o zařazení řešitelů do druhého kola. KVFO si může dát předložit opravené řešení úlohy již po ukončení jednotlivých termínů.

Za úspěšného řešitele prvního kola bude považován ten žák, který úspěšně (tj. s klasifikací 1. nebo 2. stupně) rozřeší aspoň 6 úloh. Experimentální úlohu, která je v každé kategorii uvedena pod číslem 9, musí řešit každý soutěžící, má-li se stát úspěšným řešitelem.

Pozvání na druhé kolo dostane řešitel od KVFO prostřednictvím ředitelství své školy.

Druhé kolo proběhne ve dvou půldnech za dozoru učitele. V jednom půldni bude úkolem rozřešit tři teoretické úlohy v době tří hodin. V druhém půldni bude úloha experimentální. Jedna z úloh, teoretická nebo experimentální, bude z fyzikálního tématu zadaného k prostudování.

Účastník druhého kola, který rozřeší úspěšně aspoň dva příklady, bude úspěšným řešitelem.

Z nejúspěšnějších účastníků druhého kola kategorie A vybere ÚVFO na návrh jednotlivých KVFO nejvýš 80 soutěžících ze všech krajů k účasti na třetím kole soutěže.

Pokyny pro soutěžící

Prvý list řešení každé úlohy opatřte záhlavím podle tohoto vzoru:

Jméno a příjmení:

Třída:

Škola:

Místo:

Kraj:

Kategorie:

Školní rok:

I. kolo

Úloha č.

Nechat prázdné místo

Posudek:

Posuzovali:

Text úlohy

Řešení úlohy

Na každý další list napište své jméno, školu, číslo úlohy a stránku.

Řešení úloh pište čitelně a v úhledné úpravě na listy formátu A4. Každou úlohu vypracujte na samostatném listu papíru, pomocné obrázky nebo náčrtky schémat k řešení úloze proveďte tužkou.

Řešení úloh doprovodte vždy slovním výkladem tak, aby každý porozuměl vašemu myšlenkovému postupu. Úloha bez slovního výkladu se hodnotí jako nevyhovující.

V obecném řešení provádějte rozměrové zkoušky, při numerickém řešení uvádějte jednotky.

Při řešení úloh se opírejte především o učebnici fyziky. Váš učitel fyziky nebo referent FO vám poradí i jiné vhodné studijní pomůcky.

Úlohy pro 1. kolo V. ročníku FO

Všechny úlohy řešte nejprve pokud možno obecně, pak teprve číselně.

Kategorie A

1. Drevený kužel pláva v kvapaline s hustotou ρ tak, že jeho os je zvislá, podstava hore a je ponorený do kvapaliny troma štvrtinami svojej výšky h . Polomer jeho podstavy je r .

Vypočítajte, aká práca je potrebná na zdvihnutie kužela

a) nad hladinu kvapaliny tak, aby sa jeho vrchol dotýkal hladiny;

b) do ľubovoľnej výšky $y < \frac{3}{4}h$.

Pri dvíhaní kužela hladina kvapaliny prakticky neklesne.

2. Rovinný platňový¹⁾ kondenzátor má štvorcové platne so stranou a oddelené vzduchovou medzerou hrúbky²⁾ h . Kondenzátor je pripojený k batérii s konštantným elektromotorickým napätím E . Pomedzi platne kondenzátoru presunujeme konštantnou rýchlosťou v desku z izolačného materiálu rovnakých rozměrov ako platne kondenzátora a hrúbky h .

Relatívna permitivita materiálu izolačnej desky je ϵ_r .

Vypočítajte

a) aký prúd tečie spojovacími vodičmi od batérie a aký je jeho smer;

b) aká aspoň musí byť rýchlosť posunu izolačnej desky, aby sme tento prúd mohli merať ampérmetrom s citlivosťou 0,01 A/dielok.

3. Pás transportéra, ktorým sa premiestňuje piesok v pieskovišti na vodorovnom teréne, má dĺžku d . Ak bol transportér postavený tak, že výškový rozdiel medzi jeho začiatkom a koncom bol h_1 , mohli sme ním premiestňovať piesok za čas t_1 . Práve za tento čas dosiahol vrchol kuželovej hromady piesku pod transportérom jeho horný okraj, teda výšku h_1 . Súčiniteľ trenia pri klzaní pieskových zrníek po pieskovom kuželi pod transportérom je f , priemerná hustota piesku je ρ .

Vypočítajte

a) aký je výkon motora poháňajúceho pás transportéra;

¹⁾ Deskový.

²⁾ Tloušťky.

b) na akú najväšciu vzdialenosť môžeme premiestňovať piesok týmto transportérom, ak ho počas jednej pracovnej smeny (za čas t_2) nechceme prestavovať.

Číselne riešte pre hodnoty: $d = 10$ m, $h_1 = 2$ m, $t_1 = 2$ h, $t_2 = 8$ h, $f = 0,15$, $\rho = 2000$ kgm⁻³.

4. Kuželový lievik³⁾ sa otáča okolo zvislej osi s frekvenciou f . Jeho vrcholový uhol je 2α . V akej vzdialenosti d meranej od vrcholu po povrchovej priamke lievika môžeme položiť malý hranolček na vnútornú plochu lievika, aby neklzal po povrchovej priamke, ak súčiniteľ statického trenia je μ . Predpokladáme, že sa hranolček otáča s lievikom.

5. Železničný vozeň je osvetľovaný n žiarovkami, ktoré sú spojené paralelne; odpor každej žiarovky je R ohmov. Žiarovky sú napájané z dynamu, ktorého vnútorný odpor je r_1 ohmov, a z akumulátorovej batérie s elektromotorickým napätím E_2 a vnútorným odporom r_2 ohmov; batéria je pripojená paralelne k dynamu. Elektromotorické napätie E_1 dynamu závisí od rýchlosti pohybu vozňa.

Pre hodnoty $n = 30$, $R = 30$ Ω , $r_1 = 0,04$ Ω , $E_2 = 24$ V, $r_2 = 0,02$ Ω zistite:

a) či batéria dodáva prúd do žiaroviek, ak je $E_1 = 24,2$ V;

b) pri akom najmenšom elektromotorickom napätí dynamu nečerpajú už žiarovky prúd z batérie;

c) ak automatický spínač odpojí dynamo pri poklese jeho elektromotorického napätia na hodnotu 22,5 V, aký prúd tečie dynamom v okamihu jeho odpojenia.

6. Do zvislej steny je vmurovaný⁴⁾ otáčavý kĺb⁵⁾ a naň je nasadený pevný nosník dĺžky d a váhy G , ktorý sa môže otáčať v zvislej rovine kolmej na stenu (okolo vodorovnej osi). Na konci nosníka je zavesené bremeno váhy G_1 . Nosník je udržiavaný vo vodorovnej polohe drôtom o priemere $2r$, ktorého jeden koniec je pevne vsadený do steny vo výške h nad kĺbom nosníka. Modul pružnosti v ťahu drôtu je E .

Vypočítajte

a) v akej vzdialenosti od kĺbu treba upevniť drôt na nosník, aby predĺženie drôtu bolo najmenšie;

b) aké je toto minimálne predĺženie a akou silou je drôt napínaný.

Číselne riešte pre hodnoty: $d = 0,5$ m, $G = 5$ kp, $G_1 = 15$ kp, $r = 0,1$ cm, $h = 30$ cm, $E = 2 \cdot 10^6$ kp cm⁻².

7. Elektrická žiarovka je na napätí U_1 voltov a má výkon⁶⁾ P_1 wattov. Ohmmetrom meraný jej odpor za studena je R_0 ohmov.

Aký bude výkon tejto žiarovky po jej pripojení na sieť napätia U_2 , ak sa odpor žiarovky mení v závislosti od jej výkonu lineárne?

Číselne riešte pre hodnoty: $U_1 = 220$ V, $P_1 = 60$ W, $R_0 = 40$ Ω , $U_2 = 110$ V.

8. Na vnútornej stene sklenej valcovej trubice sú vyryté dve rýhy rovnobežné s osou trubice. V trubici je kvapalina neznámeho indexu lomu n . Skutočná vzdialenosť rýh je y , zdanlivá vzdialenosť meraná z protilahlej

³⁾ Nálevka.

⁴⁾ Zazdžený.

⁵⁾ Kloub.

⁶⁾ Příkon.

strany trubice je y_1 . Ak index lomu vzduchu je n_1 , a index lomu skla n_2 , dokážte, že index lomu kvapaliny možno vypočítat zo vzťahu

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n_1} \left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{y}{y_1} \right) + \frac{1}{n_2} \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \right) \right],$$

kde r_1 je vonkajší, r_2 vnútorný polomer trubice.

(Vid' Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 42, čís. 3.)

9. Experimentálna úloha pre I. kolo.

Meraním anódového prúdu pri rastúcom anódovom napätí určite anódové charakteristiky triódy pre niekoľko hodnôt mriežkového napätia (voľte aspoň 5 rôznych hodnôt mriežkového napätia). Rozsah zmien anódového napätia voľte vhodne podľa typu triódy, ktorú máte k dispozícii.

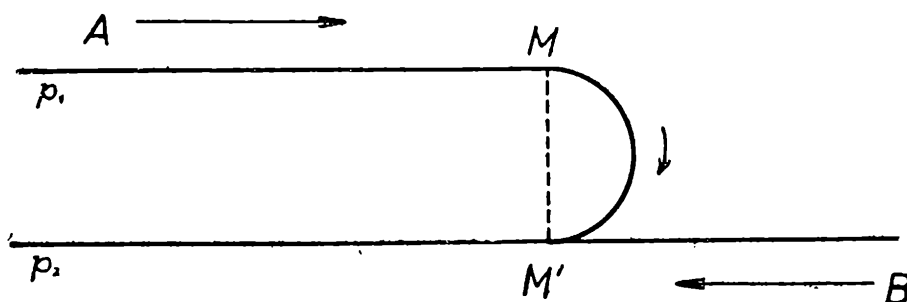
Z grafu anódových charakteristík určite mriežkovú charakteristiku pre vhodné anódové napätie, vyneste ju graficky a preverte meraním.

V protokole merania uveďte:

- a) schéma zapojenia;
- b) výklad postupu;
- c) použité pomôcky (anódový zdroj, typ použitej elektrónky, typ a rozsah meriacich prístrojov atd.);
- d) tabuľky nameraných hodnôt;
- e) príslušné grafy.

Z grafu mriežkovej charakteristiky určite strmú, zosilovací súčiniteľ a vnútorný odpor elektrónky.

Text k prostudovaniu viz príští číslo **R o z h l e d ť m a t e m a t i c k o - f y z i k á l n í c h**.



Obr. 1

Kategorie B

Všetchny úlohy řešte pokud možno nejprve obecně, pak teprve číselně.

1. Dvě letadla A a B se pohybují proti sobě po rovnoběžných drahách p_1 a p_2 (obr. 1), první rychlostí v_1 , druhý rychlostí $v_2 < v_1$. V okamžiku setkání (na přímce MM') začne rychlejší letadlo A zatáčet o 180° a pronásledovat letadlo B . Minimální poloměr zatáčky je omezen podmínkou, že dostředivé zrychlení nesmí přesáhnout hodnotu a . Jakou dráhu uletí letadlo B do okamžiku, kdy by ho letadlo A dohonilo?

Číselně řešte pro hodnoty: $v_1 = 1080 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 900 \text{ km h}^{-1}$, $a = 5g$.

2. Na nakloněné rovině jsou dva na sebe navazující úseky, každý o délce s . Kulička pohybující se po nakloněné rovině proběhla první úsek za dobu t_1 , druhý úsek za dobu t_2 ($t_2 \leq t_1$). Určete úhel sklonu nakloněné roviny. Tření a odpor prostředí zanedbejte.

Číselně řešte pro hodnoty: $s = 3\text{m}$, $t_1 = 0,6 \text{ s}$, $t_2 = 0,4 \text{ s}$, $g = 10\text{m s}^{-2}$.

3. Dutá koule o poloměru r je zcela naplněna vodou. Plnicí otvor v nejvyšším bodě A je otevřen. Další malý otvor je v bodě B v horní polokouli.

Úhel, který svírá poloměr BS , kde S je střed koule, s vodorovnou rovinou τ , procházející středem koule, je α .

Otevřeme-li otvor v bodě B , vystříkne vodní paprsek ve směru poloměru SB ; při výtoku je kapalina doplňována otvorem v bodě A , takže nádoba je stále plná. Určete:

- rychlost v , jakou vodní paprsek vystřikuje z otvoru B ;
- maximální výšku, které paprsek dosáhne nad rovinou τ ;
- v jaké vzdálenosti od středu S koule protne tento paprsek rovinu τ .

Vnitřní tření kapaliny, tření o okraje otvoru, jakož i odpor prostředí zanedbejte.

Proveďte rozbor pro různé úhly α .

Číselně řešte pro $r = 1\text{m}$, $\alpha = 45^\circ$.

4. Dřevěná deska o délce l a o váze G je podepřena v bodech A , B , (obr. 2); platí $BC : DA : AB = 1 : 3 : 6$. Určete:



Obr. 2

a) jak velká síla F_A působí na podpěru v bodě A a jak velká síla F_B na podpěru v bodě B ;

b) jak se změní tyto síly, postaví-li se na desku člověk o váze G' do bodu C ;

c) jak se mění tyto síly, přechází-li člověk po desce směrem k bodu A ;

d) jak daleko smí člověk přejít za bod A , nemá-li se deska překlomit kolem bodu A .

Číselně řešte pro hodnoty: $l = 5\text{m}$; $G = 36\text{kp}$, $G' = 72\text{kp}$.

5. Po ztrátě orientace bylo letadlo nuceno přistát na moři ve večerních hodinách dne 30. září. Pro určení zeměpisné polohy měla posádka k použití seznam některých jasných hvězd se známou rektascenzí a deklinací, dále sextant na měření výšky hvězdy nad obzorem a palubní hodiny s časem τ_0 greenwichského poledníku (světový čas). V čase $\tau_0 = 10\text{h } 30\text{min}$ byla při průchodu hvězdy β v souhvězdí Pegasa místním poledníkem změřena její výška nad obzorem $h = 69^\circ 35'$; rektascenze hvězdy $\alpha = 23\text{h } 01\text{min}$, deklinace $\delta = 27^\circ 49'$. Určete zeměpisnou šířku φ a zeměpisnou délku λ místa přistání. Načrtněte polohu přistání vzhledem k nejbližší pevnině; udejte přibližně měřítko zvoleného náčrtku mapy.

6. Náramek ze zlata o hustotě ρ_1 a platiny o hustotě ρ_2 má celkovou hmotu m_1 . Byla zhotovena napodobenina z pozlacené mosazi (o hustotě ρ_3) a stříbra (o hustotě ρ_4) o celkové hmotě m_2 .

Určete:

a) hmotu zlata a hmotu platiny v náramku;

b) podmínky pro m_1 a m_2 , aby úloha byla řešitelná.

Číselně řešte pro hodnoty: $m_1 = 220\text{g}$, $m_2 = 100\text{g}$, $\rho_1 = 19,20\text{g cm}^{-3}$, $\rho_2 = 21,4\text{g cm}^{-3}$, $\rho_3 = 8,4\text{g cm}^{-3}$, $\rho_4 = 10,5\text{g cm}^{-3}$.

7. Těleso je vrženo jednou vzhůru po nakloněné rovině o délce d a úhlu sklonu α takovou rychlostí, že na horní hraně nakloněné roviny se zastaví a přepadne volným pádem na horizontální rovinu, z níž bylo vrženo. Podruhé je vrženo touž rychlostí (i co do směru) šikmým vrhem. Určete poměr horizontálních vzdáleností od místa vrhu k místu dopadu a stanovte, pro který úhel α jsou si obě vzdálenosti rovny. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

(Viz Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 42, č. 3.)

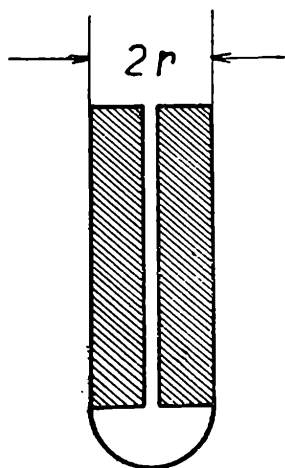
8. Skleněná trubice o délce l a průřezu S je na jednom konci otevřená, na druhém je rozšířena v kouli o objemu V a je naplněna vzduchem o barometrickém tlaku b . Trubice je obrácena tak, že se otevřeným koncem dotýká hladiny rtuti.

a) Určete hmotu vzduchu, který z trubice takto upravené unikne, zvýší-li se teplota z 0°C na $t^\circ\text{C}$.

b) Do jaké výše vystoupí rtuť v trubici, uvedeme-li vše zase na 0°C ? Roztažnost skla zanedbejte.

Číselně řešte pro hodnoty: $l = 1\text{ m}$, $S = 2\text{ cm}^2$, $V = 25\text{ l}$, $b = 760\text{ mm Hg}$, $t = 100^\circ\text{C}$, hustota vzduchu při 0°C a normálním tlaku $\rho_0 = 1,293\text{ kg m}^{-3}$.

9. Určete povrchové napětí vody metodou vážení kapek.



Obr. 3

P o m ů c k y: Kapilární trubička, nejlépe tlustostěnná, jejíž spodní konec je rovně zabroušen (obr. 3), nebo pipeta, gumová hadička s tlačkou a náustkem, dvě kádinky, dotykové měřítko.

N á v o d: Dotykovým měřítkem změříte vnější průměr d kapilární trubice nebo spodního konce pipety; měření provedete desetkrát a veličinu d stanovíte jako aritmetický průměr.

Na horní konec trubice nasunete hadičku s tlačkou a náustkem. Tlačku uvolníte a nasajete náustkem do kapiláry vodu a tlačku upevníte. Pak upevníte kapiláru ve svislé poloze nad kádinkou a uvolníte tlačku tak, aby voda odkapávala velmi zvolna z kapiláry. Po úpravě odkapávání postavíte pod kapiláru prázdnou suchou kádinku, kterou jste předem zvážili (M) a počítáte kapky, které odkapávají do kádinky. Po zachycení n kapek kádinku s vodou zvážíte (M'). Z naměřených hodnot vypočítáte hmotu jedné kapky (m). V okamžiku před odkápnutím je váha kapky $m\text{ g}$ v rovnováze se silou $F = \pi d \sigma$, kde σ je povrchové napětí vody. Z podmínky rovnováhy sil vypočítejte velikost povrchového napětí v jednotkách Nm^{-1} . Opakujte měření několikrát pro různý počet kapek a určete hodnotu σ jako aritmetický průměr veličin vypočítaných z jednotlivých měření.

Text k prostudování viz příští číslo.

Kategorie C

Všechny úlohy řešte pokud možno nejprve obecně, pak teprve číselně.

1. Dvě sousední stanice trolejbusu jsou od sebe vzdáleny přibližně 471 m. Trolejbus se rozjíždí po dráze $83\frac{1}{3}\text{ m}$ pohybem rovnoměrně zrychleným, pak

projíždí dráhu 325 m průměrnou rychlostí $8\frac{1}{3}\text{ m}$, načež rovnoměrně brzdí.

a) Určete, jak dlouho trvá jízda z jedné stanice do druhé.

b) Nakreslete graf závislosti rychlosti trolejbusu na čase.

c) Nakreslete graf závislosti dráhy trolejbusu na čase.

2. Vodní kapky odpadávají z ústí svislé trubičky ve stejných časových intervalech Δt . Stanovte, jaká je vzdálenost mezi k -tou a další kapkou za čas t od okamžiku, kdy se první kapka odtrhla od trubičky.

Číselně řešte pro hodnoty: $\Delta t = 0,15\text{ s}$; $t = 2\text{ s}$; $k = 5$.

3. Chlapci hráli stolní kopanou na stole 80 cm vysokém s míčkem o hmotě 4 g. Míč při střelení pokutového kopu minul branku a spadl na zem ve vzdálenosti 1,62 m od kraje stolu (měřeno od paty kolmice spuštěné z okraje stolu).

Určete:

- jakou rychlostí míč opustil stůl;
- jakou rychlostí dopadl míč na zem;
- jak dlouho trvalo silové působení hráče na míč, byla-li síla úderu 1,6 N.

Tření a odpor prostředí zanedbejte.

4. Vzdušná vzdálenost z Prahy do Brna je 200 km. Letadlo letící po větru proletělo tuto trať za 32 minuty, proti větru potřebovalo na tutéž trať 37 minut. Přitom průměrná vlastní rychlost letadla je v obou směrech stejná.

Určete:

- jaká je průměrná rychlost letadla za bezvětří;
- jaká je průměrná rychlost větru.

5. Lokomotiva, táhne vlak o hmotě 800 t.

a) Jak velikou práci vykoná motor lokomotivy, zvětší-li se rychlost vlaku z 36 km/hod na 54 km/h?

b) Jak velké práce je třeba k zastavení vlaku z rychlosti 72 km/h?

c) V jaké vzdálenosti od stanice musí strojvedoucí začít brzdit, aby se vlak zastavil za půl minuty ve stanici, předpokládáme-li, že brzdící síla je stálá a že rychlost vlaku před brzděním byla 72 km/h. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

6. Motor malého soustruhu má výkon 0,1 kW. Na soustruhu se otáčí dřevěný válec o průměru 6 cm s frekvencí 600 otáček za minutu.

a) Určete průměrnou sílu, kterou působí nůž na obráběný předmět, je-li užitečný výkon 80 % výkonu motoru.

b) Jak veliký je tlak na nůž, je-li obsah jeho hrotu 0,5 mm²?

7. Z dolu hlubokého 864 m se dopravuje ruda výtahem, jehož váha i s nákladem je 5000 kp. Výtah stoupá z nejnižší polohy po dráze 192 m rovnoměrně zrychleným pohybem, přitom působí na něj tažná síla lana 5750 kp. Na dalším úseku dráhy o délce 480 m se pohybuje pohybem rovnoměrným a na zbývajícím úseku dráhy koná pohyb rovnoměrně zpožděný tak, že se dostane na povrch země s nulovou rychlostí. Vypočítejte celkovou dobu trvání výstupu a tažnou sílu lana na druhém a na třetím úseku dráhy.

8. Malá kulička o hmotě m je zavěšena na niti délky l . Při napjaté niti je vychýlena z rovnovážné polohy a nárazem uvedena do rovnoměrného pohybu po kružnici ve vodorovné rovině. Vzdálenost roviny od pevného bodu závěsu je h .

a) Určete velikost dostředivé síly, která působí na kuličku.

b) Určete počet otáček kuličky za minutu.

Číselně řešte pro $m = 50$ g, $h = 1,5$ m, $l = 1,6$ m.

9. Stanovte hustotu dané kapaliny

a) použitím pyknometru,

b) podle Archimédova zákona.

Viz Rozhledy m.-f. roč. 41, č. 4, str. 183 nebo leták pro IV ročník soutěže FO 1962/63, str. 23. Text k prostudování bude v č. 3. letošního ročníku Rozhledů.

Pořadí vítězů 3. kola IV. ročníku FO 1962/63

1.	Jan Skula	SVVŠ Uherské Hradiště;
2.–3.	Václav Drchal	SVVŠ Praha 7, Holešovice, Dimitrovovo;
2.–3.	Luděk Kučera	SPŠJT Praha 1, Nové Město, Ječná;
4.	Ivan Berka	SVVŠ Prostějov, Kollárova;
5.–6.	Ladislav Kocbach	SVVŠ Praha 7, Holešovice, Dimitrovovo;
5.–6.	Jaroslav Zemánek	SVVŠ Praha 5, Smíchov, Na Zatlance;
7.	Lubomír Vašek	SVVŠ Gottwaldov, nám. Rudé armády;
8.	Igor Pokorný	SVVŠ Brno, Husovice, Elgartova;
9.	Pavel Rehák	SPŠJT, Praha 1, Nové Město, Ječná;
10.–11.	Pavel Exner	SPŠJT, Praha 1, Nové Město, Ječná;
10.–11.	Ivan Gregora	SVVŠ Slaný;
12.	Oto Kopál	SVVŠ Partizánské, okr. Topolčany;
13.–14.	Zdeněk Ambrož	SVVŠ Praha 7, Holešovice, Dimitrovovo;
13.–14.	Zdeněk Jirák	SVVŠ Hradec Králové;
15.	Ondřej Martinec	SVVŠ Praha 9, nám. Lidových milicí;
16.	Josef Daneš	SVVŠ Praha 9, Vysočany, nám. Lidových milicí;
17.–18.	František Hloušek	SVVŠ Brno, Husovice, Elgartova;
17.–18.	Tomáš Komárek	SVVŠ Praha 10, Vršovice, Přípotoční;
19.	Jiří Kostecký	SVVŠ Praha 7, Holešovice, Dimitrovovo 3;
20.	František Dubský	SVVŠ Praha 5, Hlubočepy, Pod Žvahovem.

Ústřední výbor fyzikální olympiády



Recenze

Rudolf Pruner:

Anaglyfy k deskriptivní geometrii pro střední školy pro pracující

Zpívat se nikdo nenaučí přečtením příslušné učebnice. Také cizí řeči se sice můžeme učit z knížky a lze pak rozumět psanému textu v tomto jazyku, avšak budeme asi velmi překvapeni, dostaneme-li se do země, kde se touto řečí mluví, protože nebudeme rozumět tomu, co slyšíme. Správné výslovnosti se totiž ze sebelepší učebnice naučíme pouze přibližně. V tomto případě je učitel nepostradatelný. V dnešní době studium řeči ulehčí gramofonové desky, magnetofonové pásky, film, rozhlas či televize. Modernizace způsobu učení a studium pomůcek, které ulehčují práci a šetří čas studujících, je nyní na celém světě předmětem velkého zájmu.

Speciální předměty vyžadují ovšem zvláštních učebních postupů i učebních pomůcek, neboť studium takových předmětů klade různé nároky na mozkovou činnost žákovi. Některé předměty namáhají a cvičí paměť, jiné logické uvažování a podobně.

Zajímavá je po této stránce výuka deskriptivní geometrie. V ní se sice cvičí též paměť a grafický projev, ale těžiště vlastní práce je zcela jinde. Jde o výcvik prostorové představivosti, nezbytné u každého technika i u mnoha jiných pracovníků, kteří se zabývají prostorovými problémy a musí je většinou nejdříve zobrazit graficky na papíře, tj. v rovině. Výcvik prostorové představivosti a nesnadná kontrola do jaké míry byla tato složitá mozková činnost zvládnuta, děje se většinou na geometrickém podkladu. Přesné a logicky pevně vedené postupy geometrie tvoří kostru, z níž vycházíme při výcviku prostorové představy, nutné ke grafickému zvládnutí prostorových úkolů. Všichni však víte, jak je zejména pro začátečníka nesnadný právě tento pochod, který můžeme nazvat „z prostoru na papír“ a opačně „z papíru do prostoru“.

Zde narazí žák na mnoho nesnází, ježto nacvičení postupu a porozumění vyžaduje zcela odlišného způsobu studia ve srovnání s většinou ostatních předmětů, kde dobrá paměť hraje velkou úlohu. Zvláště mladší, nepozorní žáci tu snadno zabřednou, neboť ztrácejí souvislost a pilnější z nich se začnou učit částem deskriptivní geometrie zpaměti, čímž nevyhnutelně ztroskotají.

Dobrého učitele, pracujícího s vhodnými modely, nenahradí v deskriptivní geometrii ani nejlepší učebnice. Zavádí-li se nyní hromadně studium při zaměstnání, je nutno podrobně se zabývat řešením uvedených nesnází. Zaměstnanému studentu chybí většinou častý osobní styk s učitelem, nemá modely a je odkázán více na sebe a na svoji knihu než normální žák. Zvláště dobrou pomůckou, která doplňuje učebnici i učitele a zcela při soukromém studiu nahrazuje modely, jsou anaglyfy.

Řekněme si o nich několik slov. Díváme-li se na nějaký předmět, vznikají v našich očích dva jeho obrazy, na sítnici levého oka obraz „trochu zleva“ a v pravém oku druhý obraz „trochu zprava“. Dojmy se složitým způsobem přenesou ze sítnice do příslušného mozkového centra, kde vyvolají dojem prostorově viděného předmětu. Provedeme-li např. dva snímky téhož předmětu ze dvou různých stanovisek tak, že osy záběrů jsou rovnoběžné nebo mírně sbíhavé, obdržíme dva vzájemně se trochu lišící snímky. Pozorujeme-li je tak, abychom levým okem viděli levý snímek a pravým okem pouze pravý snímek, vznikne v našem mozku takový dojem, jako bychom pozorovali zobrazený předmět přímo, bude se nám jevit plasticky. Ostatně podstatu tohoto tzv. stereoskopického vidění znáte z fyziky. Abychom nemuseli mít k pozorování těchto stereoskopických dvojic nákladný stereoskop, můžeme užít tzv. anaglyfů.

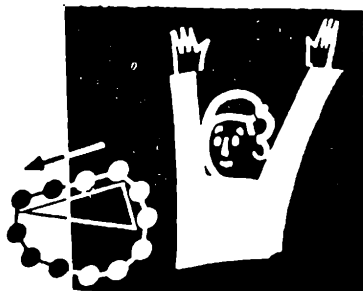
U anaglyfů je jeden snímek předmětu natištěn červeně, druhý snímek téhož předmětu z trochu jiného stanoviska zelenomodře. Díváme-li se na ně barevnými brýlemi, majícími vlevo filtr červený, vpravo modrozelený, uvidíme levým okem pouze obrázek tištěný zelenomodře, neboť červený vymizí (vyfiltruje se) a pravým okem uvidíme obrázek tištěný červeně. Tak každé oko pozoruje pouze jediný obrázek a v mozku nám vznikne dojem prostorového vidění zobrazeného předmětu.

Státní pedagogické nakladatelství vydalo letos *Anaglyfy k deskriptivní geometrii pro střední školy pro pracující*, obsahující krátký návod k použití a 75 tištěných volných listů, které představují anaglyfy vybraných obrázků z uvedené učebnice, cena je 18 Kčs. Autor *Rudolf Pruner* byl prvním, kdo u nás ve větší míře užil již v dřívějších letech k výuce anaglyfů. Obrázky jsou vhodně vybrány z *Jalůvkovy učebnice deskriptivní geometrie pro střední školy pro pracující* a jsou pečlivě narýsovány. Při tomto dvoubarevném provedení to znamená pro autora přímo mravenčí práci, neboť musí nakreslit dvojnásobný počet obrázků a každý z nich zvláště konstruovat podle zásad středového promítání.

Má-li čtenář tyto anaglyfy při studiu uvedené učebnice, nepotřebuje vůbec žádných modelů a může pokračovat velmi rychle, a to i bez učitele. Tato pomocná kniha, schválená ministerstvem školství a kultury, je dobrým přínosem v oboru moderních učebních pomůcek a Státní pedagogické nakladatelství jejím vydáním usnadnilo studium deskriptivní geometrie. Závadou, na které ovšem nenese vinu autor, je to, že obě užité barvy nejsou brýlemi zcela beze zbytku filtrovány, což u některých obrázků trochu ruší prostorový dojem. Jinak *Anaglyfy Rudolfa Prunera* našim čtenářům plně doporučujeme, i když třeba nemají současně učebnici deskriptivní geometrie pro pracující. Bylo by vhodné vydat anaglyfy obrázků i u jiných učebnic deskriptivní geometrie.

Závěrem malou poznámku na vaši adresu, mladí čtenáři. Pořádali jsme v *Rozhledech Soutěž o nejlepší rys*, její výsledek byl otištěn v č. 10 loňského ročníku. Inž. *Josef Kochman*, profesor Českého vysokého učení technického v Praze, autor známých učebnic technického kreslení, byl jedním z posuzovatelů došlých rysů a velmi nepříznivě posoudil jejich grafickou úroveň. Vy všichni, kteří se hodláte věnovat technickým povoláním, musíte dobře ovládat grafický projev, kterému se lze při trochu větší péči zcela dobře naučit. Nesvádějte neúspěchy v rýsování na nervozitu, chvějící se ruce apod. Uvažte, že autor této knížky *R. Pruner* slavil letos své 83. (osmdesáté třetí) narozeniny a všechny konstrukce i obrázky si sám úspěšně provedl a tuší narýsoval!

E 1
Doc. dr. Miroslav Menšík



Fyzikální zajímavosti

Inž. Dušan Říman, Praha:

Paprsky smrti a paprsky naděje

Po velkých objevech Becquerelových, Curieových, Popovových, Roentgenových a Teslových stalo se na úsvitu atomového věku slovo „paprsky“ módním. Anglický spisovatel H. G. Wells v románu *Válka světů* byl prvním, kdo vyzbrojil marťanské dobyvatele proniknuvší na Zemi všeničícími žhavými paprsky, proti kterým byly pozemské armády bezmocné. Celá plejáda jeho následovníků v dobrodružných románech omílala do omrzení týž námět, kdy hrdina stisknutím knoflíku na ohromnou vzdálenost hubil celá vojska atd. Není divu, že v letech třicátých, v době růstu zbrojařských akcí, stalo se toto téma vítaným prostředkem podněcování válečné psychózy. Denní tisk přinášel sensační zprávy o magnetických paprscích, které prý zmagnetováním leteckých bomb zabrání jejich svržení, o antiexplosivním záření, které prý může zastavit činnost všech motorů do stakilometrové vzdálenosti a paprscích smrti schopných zničit vše živé.

Tato soustavná propaganda znepokojila i střízlivé odborníky. Koncem r. 1934, kdy britské vládní kruhy byly znepokojeny předstihem kontinentálních velmocí ve

válečných přípravách, byl požádán Robert Watson-Watt, odborník v oboru šíření rádiových vln, o zjištění, zda by se nějak dalo využít paprsků ke zničení nepřátelského letectva.

Jediný druh paprsků, které dovedeme vyrobit a vysílat do větších vzdáleností, jsou elektromagnetické vlny, které však nemají - kromě oteplení (diathermie) - pro organismus žádných zhoubných následků. Kdyby se měl účinek vystupňovat až k smrtelné mezi na větší vzdálenost, vyžadovalo by to výkonu přesahujícího všechny tehdy známé energetické zdroje, neboť k vyslání energie určitým směrem v úzkém svazku je třeba, aby elektromagnetická vlna měla tak malou vlnovou délku, jakou na počátku let třicátých věda nedovedla vyrobit. Watson-Watt tehdy vypočetl, že k oteplení lidského těla ze 36 °C na 38 °C do vzdálenosti 500 metrů by musela anténa (půlvlnný dipól) vyzářit výkon asi 5 miliónů kilowattů; použitím směrových antén by se tento požadovaný výkon sice mohl o něco snížit, ale to bylo tehdy neproveditelné. Proto Watson-Watt musel podaný námět jako absurdní odmítnout, ale v závěru zprávy nazna-

čil, že by místo metod *d e s t r u k c e* (ničení) bylo možno zkoumat dosud neprobádaný způsob *d e t e k c e* (zjišťování polohy) objektů na vzdálenost a bez ohledu na viditelnost.

Již r. 1886 zkoumal německý fyzik *Heinrich Hertz* rádiové vlny a ukázal pokusně, že jsou vodivými předměty odráženy. *Nikola Tesla* prováděl koncem minulého století pokusy s přenosem vysokofrekvenční energie a za první světové války navrhoval použít odrazu vln vysoké frekvence ke zjišťování nepřátelských ponorek. *A. S. Popov* již v r. 1897 při pokusech s rádiovým spojením na Baltickém moři zjistil, že při průjezdu křižníku *Poručík Iljin* mezi koráby *Evropa* a *Afrika* se rádiové spojení přerušilo, a správně vysvětlil, že nastal odraz rádiových vln, čehož by bylo lze užít k účelům navigačním a zaměřovacím. Později podařilo se vysokofrekvenčními pulsy zjistit výšku ionosféry a také skupina sovětských vědců v čele s *Osěnkovem*, *Korosinem* a *Šembelem* zkoumala odraz velmi krátkých vln. *Watson-Watt* však skloubil všechny tyto objevy a již r. 1938 měla Británie první použitelné *radiolokátory*, takže v letecké bitvě o Anglii mohla plně využít možnosti *radiolokace*¹⁾. Za druhé světové války vybudovaly všechny válčící mocnosti své radiolokační systémy s větším nebo menším zpožděním. V Sovětském svazu postavili první radiolokační stanice v r. 1939. Američané, využívající britských

zkušeností, vypracovali pak *radarovou*²⁾ techniku k vysoké dokonalosti a spolehlivosti. Vojenský význam radaru byl obrovský a tragické omyly - nejznámější je útok japonského letectva na *Pearl Harbour* - dokazují spíše omylnost lidskou než nedostatky radarové techniky.

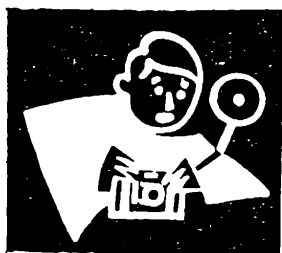
Po válce nastala éra mírového využití radiolokace. Zdokonalení techniky velmi krátkých vln pomohlo vydatně prudkému rozvoji *televize* a *radioastronomie*.

(Pokračování)

1) *Rádiová lokace* (radiolokace) je způsob zjišťování vodivých předmětů (letadel, lodí, raket, řízených střel, umělých družic) do značné vzdálenosti pomocí odražených elektromagnetických vln. Provádí se *radiolokátorem* (radarem), tj. přístrojem, který vysílá v krátkých impulsích (trvajících jen po dobu asi 1 mikrosekundy) úzký svazek elektromagnetické energie ultravysokých kmitočtů, obvykle více než $10^9 \cdot s^{-1} = 1\,000\text{ MHz}$, což odpovídá vlnovým délkám od 10 cm níže.

Dopadne-li elektromagnetické vlnění na vodivý cíl, nastává odraz a nepatrný zlomek vyslané energie dopadá zpět na anténu radiolokátoru a je zaznamenán citlivým přijímačem na obrazové elektronce. Z rozdílu doby, která uplyne mezi vysláním a návratem impulsu, se určí vzdálenost cíle; podle směru antény v okamžiku příjmu se zjišťuje poloha cíle v prostoru.

2) Populární zkratka *radar* je odvozena z počátečních slov názvu *Radio Detection and Ranging* (Rádiové zjišťování a určování vzdálenosti).



J i ř í H o ř e j š, Brno:

JČMF a Brno

Podivná záležitost je tahle matematika. Už tím, že nemá ráda polovičatost. Buď se ti zdá moudrá, zajímavá a přitažlivá, nebo ji nemůžeš ani vystát. Tvé sympatie k ní mohou zvítězit, v opačném případě však zcela zaniknou. Zkrátka, lidé tvoří dvě skupiny: jedni jsou z matematiky šťastní, druzí nešťastní. A jak to už bývá, lidé se stejnými názory zakládají spolky. Nevím, zda byl kdy založen spolek proti matematice (ani bych se nedivil), jisto však je, že ti, kteří poznali chvíle vzrušení při objevování (třebas i již sta let starých) duchaplných vztahů mezi matematickými pojmy, založili na celém světě již nespočet různých institucí, škol a svazů, aby se mohli snadněji stýkat, pracovat a získávat nové zájemce. A podobné lze konstatovat o nerozlučné družce matematiky, vědě o základních zákonech a tajemstvích vesmíru, vědě strhující svou teorií a nadmíru užitečné svou praxí, o fyzice.

Tak již před více než sto lety vznikla také J e d n o t a č e s k o s l o v e n s k ý c h m a t e m a t i k ů a f y z i k ů—byť ne hned s dnešním názvem a posláním— a tak také vznikla před padesáti lety i druhá z jejích největších poboček, p o b o č k a v B r n ě.

A doba trvání pobočky - přesto, že toho času tvoří jen polovinu bytí celé Jednoty—je do té míry naplněna její plodnou prací, že zajisté stojí za to, několika slovy se o ní zmínit. Ustanovena 10. března 1913, podporována vysokoškolskými i středoškolskými učiteli matematiky a fyziky a živena—dnes bohužel již ne vždy tak průbojným—nadšením studentů české techniky a po roce 1919 i nově zřízené university v Brně, vykonala až do dnešní doby příkladné a těžko ocenitelné služby jak matematice a fyzice, tak i představitelům těchto věd samým. Dala základ plodné spolupráci vysokých a středních škol. Umožnila, aby vědecké kapacity, jakými byli v období mezi oběma světovými válkami matematikové M a t y á š L e r c h a E d u a r d Č e c h, fyzikové B o h u s l a v H o s t i n s k ý, F r a n t i š e k N a c h t i k a l a jiní známí i méně známí, nacházeli vděčné a učenlivé posluchačstvo a spolupracovníky z Brna i odjinud; za zmínku stojí zejména čilé styky s Bratislavou a Prahou. Umožnila, aby reprezentovali naši vědu za hranicemi vlasti a zahraniční vědu představili nám. Umožnila účinnou propagaci fyzikálně - matematických věd svými časopisy, výstav-

kami (1923, 1936), soutěžemi — např. *N o v á k o v a c e n a* založená dlouholetým předsedou pobočky — a sítí jednatelů na školách. Ani v období nacistické okupace neustala pobočka ve své činnosti. Je obdivuhodné, že v těžkém ovzduší neustálého nebezpečí se uskutečnilo kolem padesáti ilegálních schůzek, že řada významných pracovníků riskovala své životy, aby uzavření českých vysokých škol neznamenaló též zastavení vědecké práce.

Vzpomeňme i těch, jejichž rozlet byl navždy zastaven zlovůli esesáckých „nadlidí“: *B o h u m i l K l a d i v o*, *J o s e f S a h á n e k*, nadějný *B e d ř i c h P o s p í š i l* — to byla krutá daň pobočky válce.

Po osvobození pokračovala činnost pobočky v širokém měřítku jak v pořádání odborných a vědeckých přednášek, tak v činnosti pedagogické a popularizační. Na ukázkou její bohaté a rozmanité činnosti v poválečném období bych uvedl namátkou oslavy 100. výročí narozenin Matyáše Lercha, které proběhly v plném lesku za účasti široké veřejnosti i závodů brněnského kraje, oblíbené kurzy matematiky a fyziky pro středoškolské učitele a úspěšný přístup k fyzikální olympiádě, kterou naše pobočka postavila na roveň olympiádě matematické. Je tedy u příležitosti padesátého výročí co oslavovat.

Kvartet lesních rohů zahájil slavnostní schůzi pobočky, která se pod vedením jejího předsedy, prof. *K. K o u t s k é h o*, konala 24. dubna t. r. za účasti vzácných hostí

z ústředního výboru a hojně účasti členstva. Historii a fakta vývoje pobočky připomenul obsírný referát prof. *R. K o š ť á l a*; na významné události v jejím životě vzpomínal jeden z nejpovolanějších, bývalý asistent a spolupracovník *Lerchův*, prof. *O t. B o r ů v k a*. Pozdravnými projevy četných hostí byla zakončena schůze, nikoliv však oslavy pobočky. Ty našly své důstojné pokračování ve vědecké konferenci o optice; na podzim t. r. pak proběhne v Brně konference o uspořádaných množinách s významnou zahraniční účastí. Celá organizace počila Brno v jubilejním roce tím, že sem přenesla jarní zasedání ústředního výboru i tím — což mnozí naši mladí přátelé jistě již vědí — že se v Brně tentokrát konalo i závěrečné celostátní kolo matematické olympiády.

Byl bych rád, kdyby vás tento malý článek pomohl přesvědčit, že brněnská pobočka stojí na svém místě v práci celé Jednoty, že pomáhá podle svých sil plnit základní úkol vědy, který přílehavě shrnul Jan Ev. Purkyně (jehož jméno nyní nese i brněnská univerzita) vřelými slovy:

K a ů d ý j e s t v o l á n d o b o j e p r o t i s i l á m , k t e r é z a t e m ň u j í l i d s k é h o d u c h a k t e r é m o h o u b ý t p ř e m o ů e n y j e n s v ě t l e m v ě d y . A t a k v z k v ě t á v y u ů ž i t í m p ř í r o d n í c h s i l — c o ů j e s t h l a v n í m c í l e m n a š í d o b y — b l a ů e n ě j š í ů i v o t p o v š e c h o b y d l í c h v z d ě l a n ě h o l i d s t v a .

nejbližší době mnozí z vás budete podávat přihlášku ke studiu na vysoké škole a budete stát tak před rozhodnutím, na kterých fakultách můžete studovat svůj oblíbený předmět matematiku a fyziku. Abychom vám v tomto rozhodování, někdy i obtížném, alespoň částečně pomohli, chceme vás upozornit na jednu z fakult, jejímž úkolem je připravit všestranně kvalifikované kádry v moderních oborech technické fyziky pro náš průmysl a vývojové a výzkumné ústavy, na fakultu technické a jaderné fyziky v Praze 1, Břehová ul. 7.

Cílem této fakulty je dát posluchačům během studia hluboké teoretické základy fyziky i matematiky, jakož i experimentální zručnost, aby potom absolventi této fakulty mohli samostatně řešit problémy dnešní moderní

Kam po maturitě?

techniky. Absolvent dostává titul „inženýr technické fyziky“. Po společném studiu v prvních dvou semestrech se výuka rozděluje na několik oborů technické fyziky. Tyto širší obory technické fyziky jsou:

1. jaderná fyzika včetně fyziky teoretické,
2. fyzika pevných látek,
3. fyzikální elektronika,
4. fyzika a technika jaderně energetických zařízení,
5. jaderná chemie.

Obor jaderná fyzika školí a připravuje absolventy pro základní výzkum v jaderné fyzice i v aplikované fyzice.

Obor fyzika pevných látek vychovává pracovníky pro základní výzkum i pro aplikovanou fyziku pevných látek, zvláště pak polovodičů.

Absolventi obou těchto oborů se uplatňují jak v základním, tak i aplikovaném výzkumu, případně v praxi.

Cílem *oboru fyzikální elektronika* je vychovávat inženýry pro řešení problémů přístrojové a regulační techniky v oboru jaderných věd ve fyzice plazmatu apod.

Cílem *oboru fyzika a technika* jaderně energetických zařízení je vychovat pracovníky v jaderné inženýry, kteří by měli dostatečně hluboké znalosti z jaderných oborů, aby úspěšně mohli provádět teoretické studie a výpočty reaktorů a atomových elektráren. Část studentů se zaměřuje k řešení výrobních a vývojových úkolů v oboru mechaniky pevných těles (fyzikální pružnost a pevnost).

Obor jaderná chemie. Zájemci o studium tohoto oboru budou přijímáni na přírodovědeckou fakultu Karlovy university a po úspěšném absolvování základního dvouročního studia budou pokračovat ve studiu na fakultě technické a jaderné fyziky. Cílem tohoto studia je vychovat pracovníky v oborech jaderné chemie, radiochemie, radiační chemie, chemie stabilních izotopů, dosimetrie a užití radioizotopů.

Obor není zaměřen na chemickou technologii reaktorových materiálů a jaderných paliv v továrním měřítku.

Do učebního plánu všech oborů je zařazena vojenská příprava. Absolventům této školy je pak prezenční vojenská služba zkrácena. Směrné číslo se na této fakultě každoročně zvětšuje, poněvadž náš výzkum i průmysl potřebuje velké množství dobře kvalifikovaných inženýrů technické fyziky. V nejbližší době se počítá perspektivně i se zavedením dalších užších specializací jako např. termodynamika, akustika atd.

J. D.

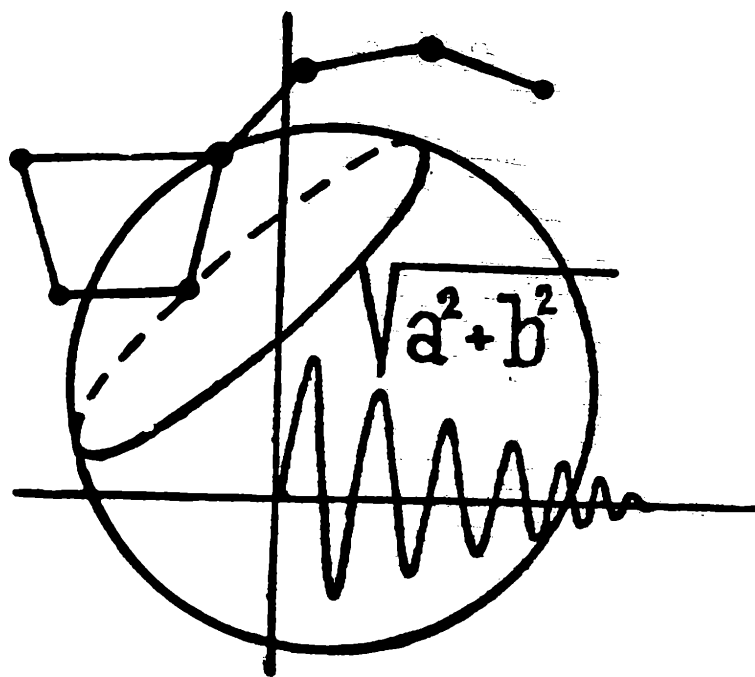
Anglicko-ruský slovník matematických termínů

Při speciálnějším studiu matematiky se neobejdeme bez znalostí cizích jazyků. Matematická terminologie je však v každé řeči trochu odlišná od běžné slovní zásoby, jak je uvedena ve školních slovnících, a proto jsou občas vydávány slovníky speciální pro matematiku (popřípadě pro obory příbuzné). Na jeden takový slovník chceme upozornit. Slovník vyšel v Moskvě r. 1962 pod názvem *Англо-русский математических терминов* a na našem knižním trhu se objevil počátkem roku 1963. Předsedou redakčního kolegia, které slovník připravovalo, byl známý matematik P. S. Alexandrov. Knížka, která se může stát dobrou pomůckou i pro naše studenty, má 370 stran a stojí 21,50 Kčs.

J. S.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



2

ROČ. 42

1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Říjen 1963

Číslo 2

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, MŠK, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

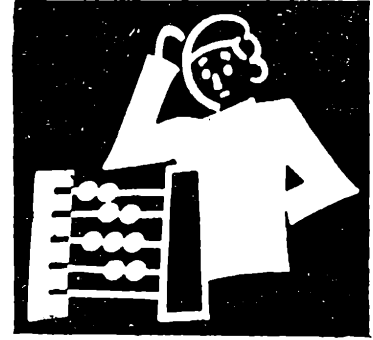
F. Hradecký: Úloha týkající se obsahu rovinného obrazce (Dokončení)	
J. Klimčík: Středová kolneácia v rovine	53
F. Hradecký: O jedné stereometrické úloze a jejím zobecnění (Dokončení)	58
Doc. V. Rudolf: Základní rovnice kinetické teorie plynů a některé její důsledky	60
Dr. I. Náter: Tlak pod zakřiveným povrchem kvapali	71
Řešení úloh	78
Matematická olympiáda	87
Inž. D. Říman: Paprsky smrti a paprsky naděje (Dokončení)	90
K. Drábek: K výročí smrti prof. Rudolfa Skuherského	92
J. Daneš: Pátá mezinárodní matematická olympiáda	94
M. K.: Chcete rozumět staroměstskému orloji?	3. str. obálky
J. S.: Matematika a fyzika v Čs. televizi	3. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. A-09*31525. Jazyková úprava: dr. O. Hönl. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1963.

Matematika

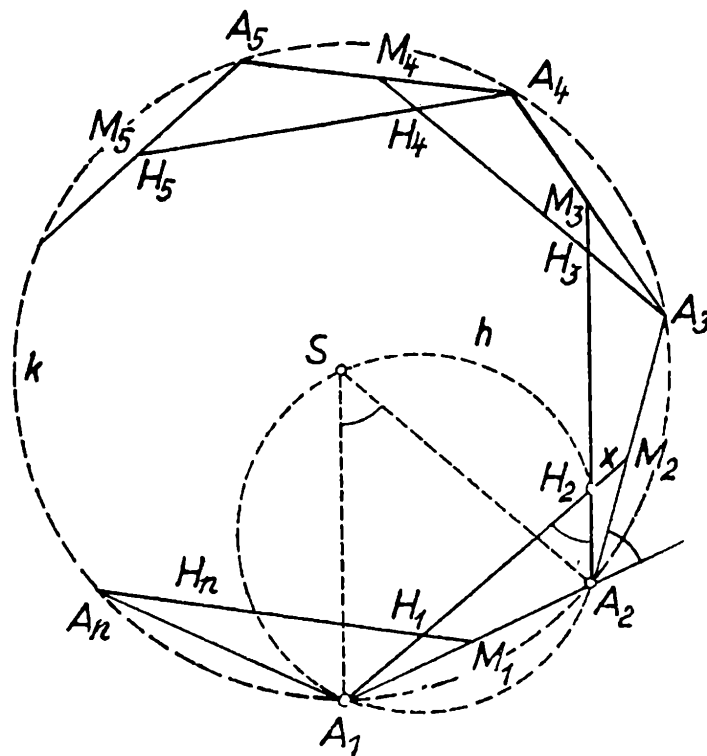


František Hradecký, Praha:

Úloha týkající se obsahu rovinného obrazce

(Dokončení)

3. Je dán pravidelný n -úhelník $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ a na jeho stranách jsou dány body M_i tak, že $A_i M_i = \frac{1}{k} A_i A_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n$). Přímky $A_i M_{i+1}$



Obr. 4

omezují pravidelný n -úhelník, jehož obsah máme určit (obr. 4).

Trojúhelník $A_1 A_2 A_3$ má obsah

$$\frac{a^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}$$

kde a je velikost strany A_1A_2 .
Trojúhelník $A_1A_2M_2$ má pak obsah

$$\frac{a^2}{2k} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Poněvadž $\sphericalangle A_1H_2A_2 = \sphericalangle A_1SA_2$ (odůvodněte sami!), leží body A_1, A_2, H_2, S na kružnici h , která se v bodě A_2 dotýká přímky A_2A_3 . Je tedy M_2A_2 délkou tečny k této kružnici.

Podle věty o mocnosti bodu M_2 ke kružnici h platí vztah

$$M_2H_2 \cdot M_2A_1 = \overline{M_2A_2^2}. \quad (1)$$

Odtud můžeme určit délku úsečky

$$M_2H_2 = x.$$

Délku úsečky A_1M_2 vypočítáme z trojúhelníku $A_1A_2M_2$ užitím věty kosinové

$$\overline{A_1M_2^2} = a^2 + \frac{a^2}{k^2} + 2 \frac{a^2}{k} \cdot \cos \frac{360^\circ}{n} = \frac{a^2}{k^2} \left(k^2 + 1 + 2k \cos \frac{360^\circ}{n} \right)$$

Ježto je $M_2A_2 = \frac{a}{k}$, dostaneme po dosazení do (1) a po jednoduché úpravě

$$M_2H_2 = x = \frac{a}{k \sqrt{k^2 + 1 + 2k \cos \frac{360^\circ}{n}}}$$

Je tedy

$$\frac{A_1M_2}{H_2M_2} = k^2 + 1 + 2k \cos \frac{360^\circ}{n}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \frac{A_1H_2}{A_1M_2} &= \frac{A_1M_2 - H_2M_2}{A_1M_2} = \frac{k^2 + 2k \cos \frac{360^\circ}{n}}{k^2 + 1 + 2k \cos \frac{360^\circ}{n}} = \\ &= \frac{k \left(k + 2 \cos \frac{360^\circ}{n} \right)}{k^2 + 1 + 2k \cos \frac{360^\circ}{n}} \end{aligned}$$

Obsah $\triangle A_1A_2H_2$ je

$$\mathbf{P}_1 = \frac{k \left(k + 2 \cos \frac{360^\circ}{n} \right)}{k^2 + 1 + 2k \cos \frac{360^\circ}{n}} \cdot \frac{a^2}{2k} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} \quad (2)$$

Poněvadž poloměr kružnice opsané v pravidelném n -úhelníku o straně a je

$$r = \frac{a}{2 \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}},$$

je jeho obsah

$$\mathbf{P} = \frac{nr^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}}{4 \cdot \sin^2 \frac{180^\circ}{n}};$$

odtud vypočítáme

$$\frac{a^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{4\mathbf{P}}{n} \cdot \sin^2 \frac{180^\circ}{n},$$

což dosazeno do (2) dává

$$\mathbf{P}_1 = \frac{4\mathbf{P} \left(k + 2 \cos \frac{360^\circ}{n} \right) \cdot \sin^2 \frac{180^\circ}{n}}{n \left(k^2 + 1 + 2k \cdot \cos \frac{360^\circ}{n} \right)} \quad (3)$$

Označíme-li \mathbf{P}' obsah hledaného pravidelného n -úhelníku, je

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + n \cdot \mathbf{P}_1.$$

Dosadíme-li sem za \mathbf{P}_1 vztah (3) a vypočítáme odtud \mathbf{P}' , dostaneme po úpravě

$$\mathbf{P}' = \frac{k^2 + 2k \left(2 \cos \frac{360^\circ}{n} - 1 \right) + 1 - 8 \cdot \sin^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos \frac{360^\circ}{n}}{k^2 + 2k \cos \frac{360^\circ}{n} + 1} \cdot \mathbf{P} \quad (4)$$

Pro $n = 4$, $k = 1$, je $\mathbf{P}' = 0$ (úhlopříčky ve čtverci neomezují žádný obrazec); je-li

$$n = 6, k = 1,$$

je

$$\mathbf{P}' = \frac{1}{3} \mathbf{P};$$

je-li

$$n = 5, k = 1,$$

je

$$\mathbf{P}' = \frac{1 + 2(2 \cos 72^\circ - 1) + 1 - 8 \sin^2 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{2(1 + \cos 72^\circ)};$$

dosadíme-li sem

$$\sin 36^\circ = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}, \cos 72^\circ = \frac{1}{1 + \sqrt{5}},$$

dostaneme

$$\mathbf{P}' = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \mathbf{P} = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \mathbf{P},$$

což souhlasí s přímým výpočtem.

P o z n á m k a 3. Vzorec (4) platí i pro nepravidelné mnohoúhelníky, které jsou pravoúhlými průměty pravidelných n -úhelníků na základě odůvodnění uvedeného v poznámce 1 a 2.

P ř í k l a d y.

1. Určete, pro která k v úloze 1 je a) obsah $\triangle HKL$ roven polovině obsahu $\triangle ABC$, b) obsah maximální, c) obsah $\triangle HKL$ roven $\frac{1}{k}$ obsahu $\triangle ABC$?

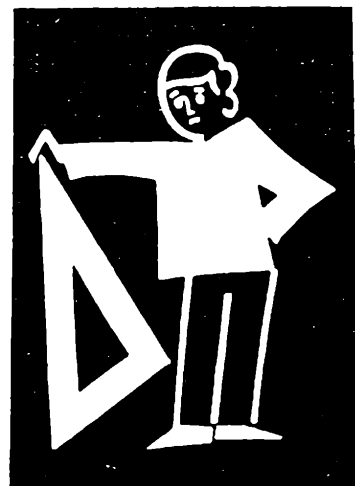
2. Pro které k v úloze 2 je obsah rovnoběžníku $EFGH$ roven $\frac{1}{n}$ obsahu rovnoběžníku $ABCD$. Jak je nutno volit číslo n , aby k bylo číslo racionální?

3. Vypočítejte přímo obsah pravidelného pětiúhelníku, který omezují jeho úhlopříčky.

4. Užitím pomocné věty *V. 1* určete obsahy trojúhelníků ACH , BCH , ABH , je-li \mathbf{P} obsah trojúhelníku ABC a H průsečík jeho výšek. (Je-li \mathbf{P}_1 obsah trojúhelníku ACH a a , b , c , strany trojúhelníku ABC , platí

$\mathbf{P}_1 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)} \cdot \mathbf{P}$, cyklickou záměnou dostaneme vzorce pro obsahy dalších trojúhelníků.)

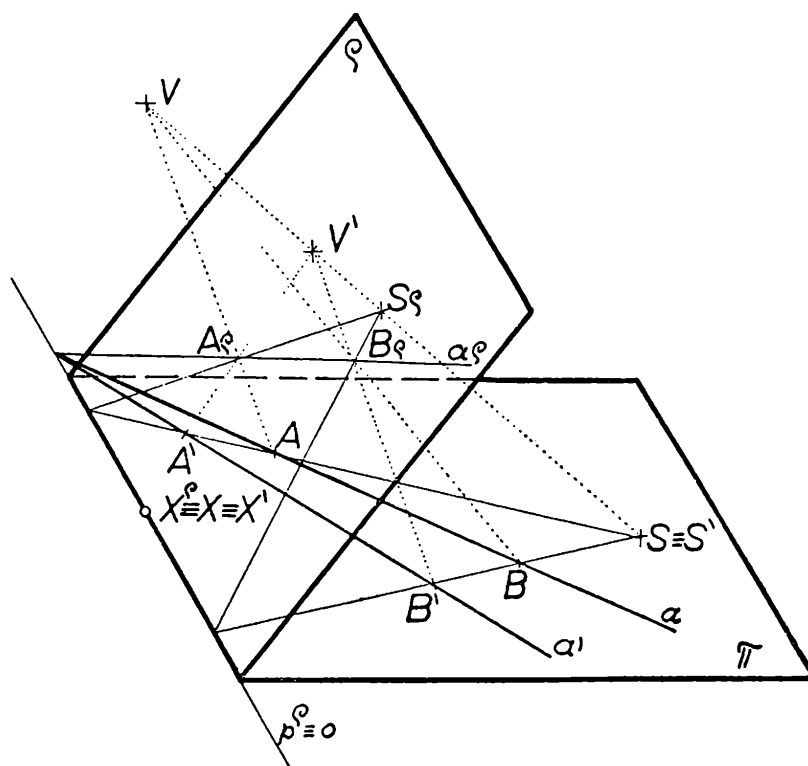
Deskriptivní geometrie



Jozef Klimčík, Košice:

Stredová kolineácia v rovine

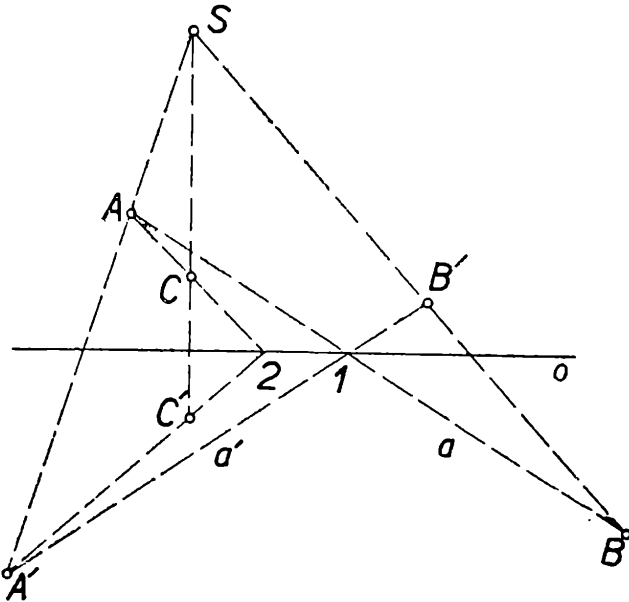
Daná je rovina ρ , nerovnoběžná s priemetňou π (obr. 1). Zvoľme dva ľubovoľné, navzájom rôzne body V a V' v priestore mimo roviny ρ a π . Premietajme z týchto bodov ako stredov premietania body roviny ρ do priemetne π . Nech sú napr. A^e, B^e dva ľubovoľné a rôzne body ležiace v rovine ρ . Premietnime obidva body A^e a B^e do priemetne π zo stredov V a V' . Priemety bodov A^e, B^e zo stredu V označme



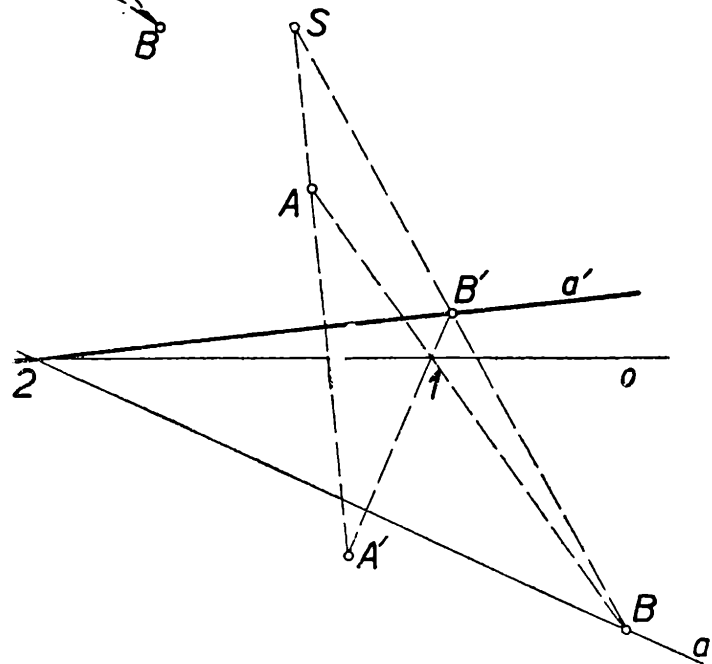
Obr. 1

A, B a priemety bodov A^e, B^e zo stredu V' nech sú A', B' . Vzniká tu určité jednoznačné vzájomné priradenie združenie bodov a priamok v priemetni π : Bod A - priemet bodu A^e zo stredu V je združený s bodom A' - priemetom toho istého bodu A^e zo stredu V' , bod B s bodom B' atď. Spojnica bodov V a V' pretína rovinu ρ v bode S^e . Priemetom

bodu S^e z obidvoch bodov V a V' je ten istý bod: obidva priemety S a S' sú totožné, lebo obidve premietajúce priamky VS^e a $V'S'^e$ splývajú v priamke VV' . Priemety bodov X^e priesečnice p^e rovín ρ a π splývajú: $X^e \equiv X \equiv X'$, body priesečnice p^e sú teda v spomenutom priradení bodov v priemetni samodružnými bodmi. Ľubovoľným bodom roviny ρ a stredmi premietania V, V' (tj. premietajúcimi priamkami prechádzajúcimi bodom roviny ρ a bodmi V a V') je určená rovina,



Obr. 2



Obr. 3

pretínajúca priemetňu π v priamke, na ktorej ležia obidva priemety príslušného bodu (napr. A^e bod roviny, A, A' - priemety) a ktorá zrejme prechádza bodom S (lebo S leží na spojnici VV' a súčasne v rovine π). Spojnice združených bodov v priemetni π (napr. AA', BB', \dots) prechádzajú teda pevným bodom S . Priamka $a^e = A^e B^e$ roviny ρ a jej priemety $a \equiv AB, a' \equiv A'B'$ sa pretínajú v jednom bode na priesečnici p^e (priesečnice troch rovín pretínajú sa v jednom bode). To znamená: Vzájomne združené priamky a a a' v priemetni π sa pretínajú na

pevnej priamke, na stope p^e roviny ρ v priemetni π . Stopa p^e roviny ρ v priemetni π je teda v uvažovanom priradení s a m o d r u ž n o u p r i a m k o u. Z uvedeného vyplýva: ak premietame body roviny z dvoch ľubovoľných stredov V a V' v priestore do priemetne π , dostaneme v tejto priemetni dve rovinné polia (A, B, a, \dots) a $(A', B', \dots a', \dots)$, ktoré sú v určitom vzťahu. Tento vzťah nazývame stredová kolineácia. Stredom kolineácie je stopník S spojnice VV' v priemetni π a osou kolineácie je stopa p^e roviny ρ v priemetni π .

Vlastnosti kolineácie sú:

1. Každému bodu A odpovedá v stredovej kolineácii bod A' , a to tak, že priamka AA' prechádza pevným bodom S (tzv. s t r e d k o l i n e á c i e). Ináč môžeme povedať: Kolineárnym obrazom bodu je bod ...

2. Každšej priamke a v stredovej kolineácii odpovedá priamka a' , a to tak, že ich priesečík leží na pevnej priamke (tzv. o s e k o l i n e á c i e).

3. Obrazom priamky rovnobežnej s osou kolineácie (ale nesplývajúcou s ňou) je zase priamka rovnobežná s osou kolineácie (a nesplývajúca s ňou).

4. Ak bod A leží na priamke a , potom obraz A' leží na obraze a' priamky a .

Kolineácia je určená stredom S , osou o a párom odpovedajúcich si bodov A, A' , ktorých spojnice podľa vlastnosti (1) musia prechádzať bodom S . Výraz kolineácia je určená - znamená, že ku každému bodu B vieme potom určiť jeho obraz B' alebo, že ku každému bodu C vieme určiť jeho vzor C .

Príklady.

Kolineácia je určená stredom S , osou o a párom odpovedajúcich si bodov A, A'

1. K bodu B sestrojte jeho kolineárny obraz B' a k bodu C sestrojte jeho vzor.

R i e š e n i e (obr. 2). Body A, B určujú priamku a . Tej podľa vlastnosti (2) odpovedá v kolineácii priamka a' , ktorá prechádza samodružným bodom l na ose a bodom A' (3. vlastnosť). Bod B' leží ešte na priamke SB (1. vlastnosť).

Podobne sa sestrojí bod C .

2. K priamke a sestrojte jej obraz a' .

Riešenie vidieť z obr. 3 a preto ho tu neuvádzame.

3. K trojuholníku KLM sestrojte jeho obraz $K'L'M'$.

Riešenie je v podstate rovnaké ako v 1. príklade.

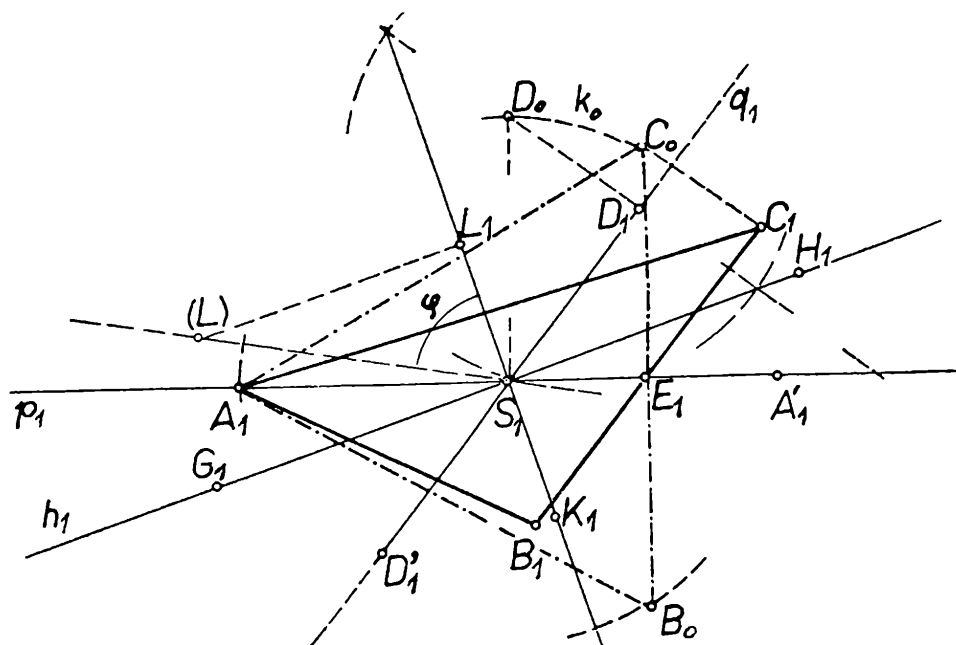
Redakcií upraveno

O jedné stereometrické úloze a jejím zobecnění

(Dokončení)

Úloha 2. V průmětně π je dán trojúhelník $A_1B_1C_1$. Nad tímto trojúhelníkem je sestrojen hranolový prostor kolmý k průmětně π . Protněte jej rovinou v rovnostranném trojúhelníku.

Řešení. Opíšeme-li rovnostrannému trojúhelníku ABC kružnici k , bude jejím pravouhlým průmětem do roviny π elipsa k_1 jdoucí body A_1, B_1, C_1 . Střed S_1 této elipsy je v průsečíku těžnic trojúhelníku $A_1B_1C_1$, neboť přímky, které spojují vrcholy rovnostranného trojúhelníka ABC se středem S jeho opsané kružnice, protínají jeho protější strany ve střede-



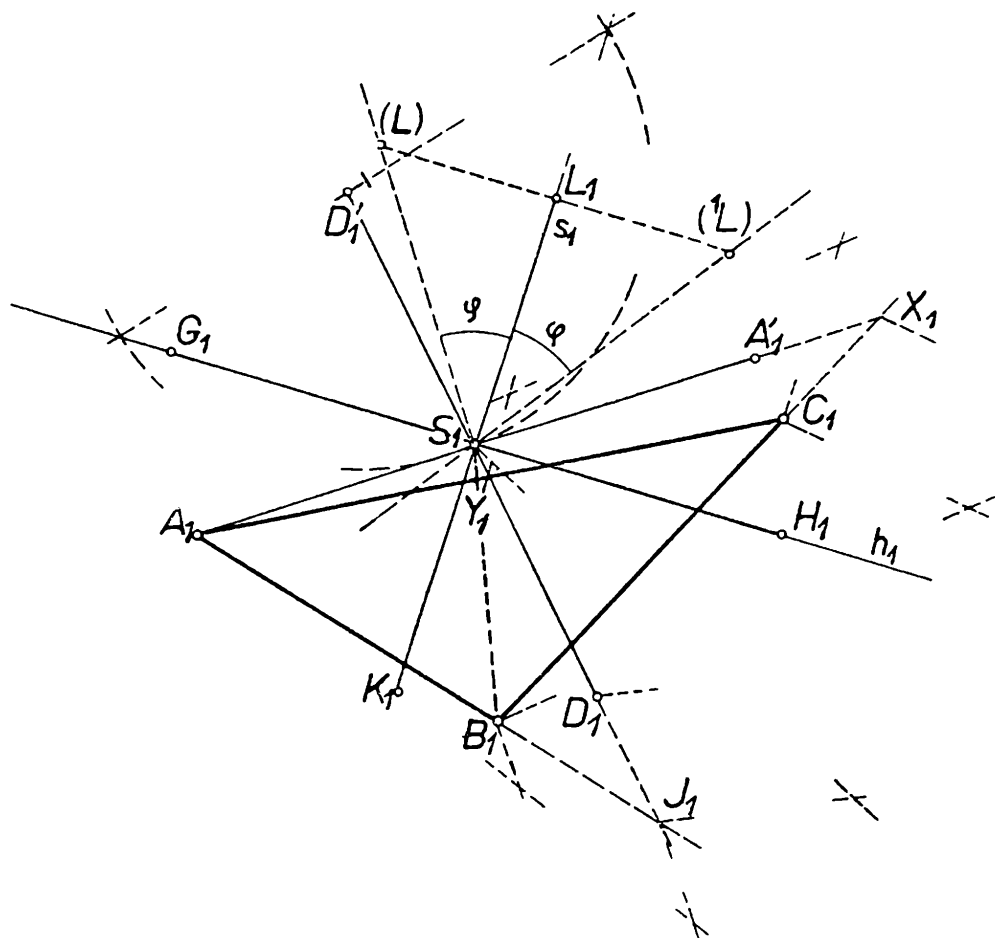
Obr. 3

dech. Podle věty V 3 se promítají tyto body do středů průmětů stran. Uvažované přímky se pak promítají do těžnic trojúhelníka $A_1B_1C_1$. Poněvadž průměr q kružnice k , který je kolmý na přímkou $p \equiv SA$ je rovnoběžný se stranou BC , je průměr q_1 elipsy k_1 sdružený k průměru $p_1 \equiv A_1A_1'$ ($S_1A_1 = S_1A_1'$) rovnoběžný s B_1C_1 .

Průměr q_1 můžeme omezit užitím osově afinity takto: Sestrojíme kružnici $k_0 \equiv (S_1; S_1A_1)$ a uvažujeme o osově afinitě mezi kružnicí k_0 a elipsou k_1 . Osou afinity je přímka p_1 a směr afinity udává přímka C_0C_1 ; $E_1C_0 \perp p_1$. Bodu D_0 na kružnici k_0 odpovídá bod D_1 na přímce q_1 ; $S_1D_0 \perp p_1$; $D_0D_1 \parallel C_0C_1$.

Tím je elipsa k_1 určena sdruženými průměry a další postup je týž jako v předcházejícím případě. Určíme osy G_1H_1 a K_1L_1 této elipsy a její excentricitu e . Pak určíme roviny $\rho = GHL$, $\sigma = GHK$ a bodem A vedeme roviny ρ' a σ' , které jsou s těmito rovinami rovnoběžné.

Důkaz správnosti můžeme provést podobně jako v předešlé úloze tím, že rovinu řezu, procházející přímkou h , otočíme do roviny ${}^1\pi \parallel \pi$ a dokážeme, že trojúhelník $A_0B_0C_0$, který vznikl otočením trojúhelníku ABC , je rovnostranný. Můžeme však uvažovat o vzájemných vztazích útvarů v rovině ρ a jejich pravoúhlých průmětů v rovině π . Elipse k_1 procházející



Obr. 4a

body A_1, B_1, C_1 odpovídá v rovině ρ kružnice k opsaná trojúhelníku ABC . Přímkám p_1 a q_1 , na nichž leží sdružené průměry elipsy k_1 , odpovídají přímky $p \perp q$; přitom je $q \parallel BC$, $AS \perp BC$, $SE = \frac{1}{2} AS$. Trojúhelník o středu S , který je vepsán do kružnice $k \equiv (S; SA)$ a má uvedené vlastnosti, je rovnostranný.

Předcházející úloha nám vnucuje myšlenku, zdali nemůžeme týmž způsobem řešit ještě obecnější úlohu.

Ú l o h a 3. V rovině π je dán trojúhelník $A_1B_1C_1$, který je normálním řezem hranolového prostoru kolmého k průmětně π . Tento hranolový

prostor máme protnout rovinou ϱ' v trojúhelníku podobném danému trojúhelníku $A'B'C'$. Rovina ϱ' prochází bodem A na hraně jdoucí bodem A .

Ř e š e n í. Opíšeme-li hledanému trojúhelníku ABC (obr. 4a) kružnici k , bude jejím pravouhlým průmětem elipsa k_1 jdoucí body A_1, B_1, C_1 . Těmito body není ovšem určena elipsa k_1 . Hledejme střed S_1 této elipsy jako pravouhlý průmět středu S kružnice k .

Za tím účelem opíšeme trojúhelníku $A'B'C'$ ve vedlejším obrázku (obr. 4b) kružnici k' o středu S' a určíme průsečky $X' \equiv A'S' \cdot B'C'$ a $Y' \equiv B'S' \cdot A'C'$. K těmto bodům sestrojíme odpovídající body X_1 a Y_1 na přímkách B_1C_1 a A_1C_1 tak, aby jejich dělicí poměry byly $(B_1C_1X_1) = (B'C'X')$, $(A_1C_1Y_1) = (A'C'Y')$. Průsečík přímků A_1X_1 a B_1Y_1 je bod S_1 . Pomocí vedlejšího obrázku určíme k průměru $A_1A'_1$ ($S_1A_1 = S_1A'_1$) průměr sdružený $D_1D'_1$. Vedeme $S'J' \perp A'S'$ a učiníme $S'D' = S'A'$; k bodu J' určíme v obr. 4a bod J_1 , aby platilo

$$(A_1B_1J_1) = (A'B'J') \text{ a } (S_1J_1D_1) = (S'J'D')$$

Ze sdružených průměrů $A_1A'_1$, $D_1D'_1$ sestrojíme osy G_1H_1 , K_1L_1 elipsy k_1 a její excentricitu e . Dále pak postupujeme jako v předcházejících případech.

Rovina ϱ' protíná hranolový prostor v trojúhelníků ABC , o němž nyní dokážeme, že je podobný trojúhelníku $A'B'C'$.

Elipse k_1 v rovině π odpovídá kružnice k v rovině ϱ' a sdruženým poloměrům S_1A_1 , S_1D_1 elipsy odpovídají k sobě kolmé poloměry SA , SD kružnice k . Poněvadž je (obr. 4b)

$$\operatorname{tg} \alpha'_1 = \frac{S'J'}{S'A'} = \frac{S'J'}{S'D'},$$

je tento poměr podle konstrukce roven poměru úseček (obr. 4a) $\frac{S_1J_1}{S_1D_1}$

a poměru úseček $\frac{SJ}{SD} = \frac{SJ}{SA} = \operatorname{tg} \alpha_1$ v rovině ϱ' ; to znamená, že $\triangle A'S'J' \sim \triangle ASJ$ a $\sphericalangle J'A'S' = \sphericalangle JAS$ (v rovině ϱ'), tj.

$$\alpha'_1 = \alpha_1.$$

Podobně dokážeme, že $\triangle A'I'S' \sim \triangle AIS$ a $\sphericalangle I'A'S' = \sphericalangle IAS$ tj.

$$\alpha'_2 = \alpha_2.$$

Je tedy $\alpha'_1 - \alpha'_2 = \alpha_1 - \alpha_2$, tj.

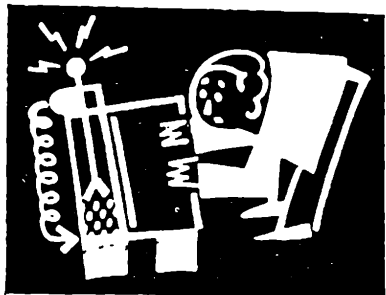
$$\sphericalangle C'A'B' = \sphericalangle CAB.$$

Z podobných rovnoramenných trojúhelníků $\triangle A'S'B'$ (v obr. 4b) a $\triangle ASB$ (v rovině ϱ') plyne rovnost středových úhlů $\sphericalangle A'S'B' = \sphericalangle ASB$

2. V rovině π je dán trojúhelník $A_1B_1C_1$, který je podstavou kolmého hranolového prostoru. Tento hranolový prostor protne rovinou procházející bodem M v rovnoramenném trojúhelníku ABC ($AB = AC$; $\sphericalangle BAC = 45^\circ$). Proveďte v Mongeově projekci. [$A(-2; 2; 0)$, $B(0; 7; 0)$, $C(7; 1; 0)$; $M(1; 4; 4)$].

3. Jsou dány tři rovnoběžky a, b, c , které neleží v téže rovině. Seštrojte rovnostranný trojúhelník ABC , jehož vrcholy leží každý na jedné z daných přímek a jehož střed leží v dané rovině $\mu \perp a$. Zvolte přímky a, b, c rovnoběžné s osou x a $\mu = yz$.

4. V rovině π je dán rovnostranný trojúhelník $A_1B_1C_1$ o straně $A_1B_1 = 5$, který je podstavou kolmého hranolu trojbokého o dostatečně velké výšce. Protne tento hranol rovinou v trojúhelníku ABC , jehož vnitřní úhly jsou v poměru $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 5$, je-li dán vrchol A na hraně jdoucí bodem A_1 .



Fyzika

† Doc. Vladimír Rudolf, Olomouc:

Základní rovnice kinetické teorie plynů a některé její důsledky

Téma k prostudování pro první kolo V. ročníku FO v kategorii A

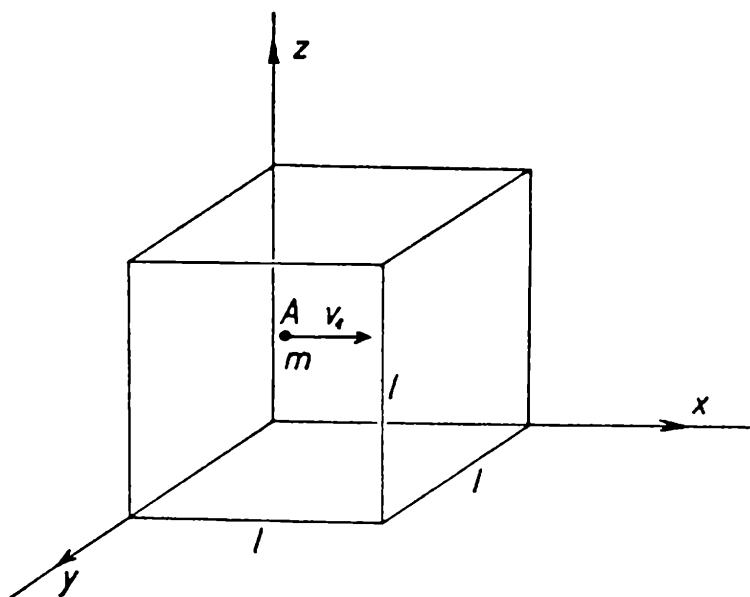
1. *Kinetická teorie látek* a s ní úzce související *kinetická teorie tepla* vznikly sloučením představ o atomickém složení látek a názoru, že teplo je projevem pohybu jejich nejmenších částic. V dalším budeme uvažovat vlastnosti látek jen ve skupenství plynném, jimiž se zabývá *kinetická teorie plynů*.

Nejmenší částice plynu jsou buď atomy (např. He, Ne, Ar, páry Hg aj.) nebo molekuly (např. H₂, O₂, N₂, CO₂, NH₃ aj.). Ačkoliv molekuly jsou složité soustavy atomů, můžeme si je v dalším představovat jako velmi malé kuličky dokonale tuhé a pružné, nebo dokonce jako pouhé hmotné body, k jejichž rozměrům není třeba přihlížet. Molekuly plynu jsou v neustálém chaotickém pohybu. V dalším přihlídneme jen k jejich pohybu postupnému a nebudeme uvažovat jejich eventuální pohyb rotační. Poněvadž za normálních podmínek je vzájemná vzdálenost molekul plynu značná vzhledem k jejich velikosti, můžeme dále před-

pokládat, že molekuly na sebe nepůsobí žádnými silami. Každá molekula se pohybuje přímočaře a rovnoměrně rychlostí, jež za laboratorních teplot má řádově velikost několika set metrů za sekundu, pokud nenarazí na některou molekulu sousední nebo na stěnu nádoby, v níž je plyn uzavřen. Dá se vypočítat, že počet nárazů jedné molekuly plynu na ostatní za normálního tlaku je za sekundu kolem tří miliard.

Švýcarský fyzik Daniel Bernoulli (1700—1782) první vyslovil názor (r. 1738), že

tlak plynu na stěny je působen neustálými nárazy molekul plynu na stěny.



Obr. 1

Vzhledem k nepatrné velikosti molekul a k jejich ohromnému počtu nemůžeme pozorovat náraz každé jednotlivé molekuly zvlášť, nýbrž jen úhrnný účinek nárazů celého souboru molekul plynu v nádobě. Poněvadž pohyb molekul plynu je chaotický a jsou v něm zastoupeny rychlosti všech možných směrů a velikostí, není tlak plynu na stěnu v čase zcela stálý, nýbrž kolísá kolem určité střední hodnoty. Toto kolísání neboli fluktuace se však děje vzhledem k velikému počtu současných nárazů neobyčejně rychle, přičemž odchylky od průměrné hodnoty tlaku jsou celkem jen nepatrné. Nelze tedy uvedené fluktuace přímo pozorovat a pozorujeme jen střední hodnotu tlaku, která je za stálé teploty prakticky stálá. Podobně je tomu i s dalšími veličinami u plynů; např. hustota plynu také není na všech místech stejná a stálá, nýbrž se neustále a velmi rychle mění (fluktuuje) od místa k místu a na témž místě s časem. Pozorovat lze zase jen střední (průměrnou) hodnotu hustoty; ta je za stálé teploty stálá místně i časově.

Základní úlohou kinetické teorie plynů bylo vyšetřit souvislost mezi středními hodnotami (tlaku, teploty, hustoty apod.) přímo neboli *m a k r o s k o p i c k y* - pozorovatelnými nebo měřitelnými a veličinami, které charakterizují odpovídající *m i k r o s k o p i c k é* děje, jež nelze přímo pozorovat. První takový vztah odvodil Bernoulli, a to pro tlak plynu. Tento vztah je pro svoji důležitost označován jako *základní rovnice kinetické teorie plynů*.

2. *Odvození základní rovnice kinetické teorie plynů*. Uvažujme libovolný plyn uzavřený v nádobě, jež má tvar krychle; hrana krychle budiž l (obr. 1). Pro jednoduchost zavedeme nejprve dva předpoklady:

a) budeme předpokládat, že molekuly plynu na sebe nepůsobí žádnými silami a že nedochází k jejich vzájemným srážkám;

b) dále lze předpokládat, že vzhledem k chaotickému pohybu molekul bude výsledný účinek jejich nárazů na stěny týž, jako kdyby se jedna třetina molekul pohybovala rovnoběžně s osou x (mezi levou a pravou stěnou krychle), podobně jedna třetina rovnoběžně s osou y a jedna třetina rovnoběžně s osou z .

Tyto Bernoulliho předpoklady nejsou ovšem přesně splněny. Je však pozoruhodné, že výsledek, k němuž Bernoulli dospěl, je týž, jaký později (r. 1860) dostal anglický fyzik J. C. M a x w e l l z přesných úvah, v nichž přihlédl ke všem možným směrům pohybu molekul a k vzájemným srážkám molekul.

Označíme-li n počet molekul v celé krychli o objemu l^3 a n_0 počet molekul v objemové jednotce, pak bude

$$n = n_0 l^3 \quad (1)$$

Je-li dále m hmota jedné molekuly, pak

$$m \cdot n_0 = \rho, \quad (2)$$

kde ρ je hmota plynu v objemové jednotce, číselně rovná hustotě plynu.

Uvažujme nyní jen ty molekuly v počtu

$$n' = \frac{1}{3} n, \quad (3)$$

kteří se pohybují ve směru osy x mezi levou a pravou stěnou krychle. Pro směry y a z by byla úvaha zcela obdobná.

V obr. 1 je vyznačena molekula A , která se pohybuje právě od levé stěny k pravé vodorovně rychlostí v_1 . Když doletí ke stěně, narazí na ni a podle zákonů pružného rázu se od ní odrazí zpět rychlostí stejně velikou, ale opačného směru; to se pak opakuje střídavě u levé i pravé stěny.

Při každém nárazu působí molekula na stěnu jakousi velmi malou silou ΔF_1 , kterou určíme pomocí druhého a třetího pohybového zákona Newtonova.

Druhý pohybový zákon $F = m \cdot a$ lze užitím vztahu $v = a \cdot t$ psát též ve tvaru $F \cdot t = m \cdot v$, tj. impuls síly $F \cdot t$ rovná se hybnosti hmoty $m \cdot v$. Tato rovnice praví: Působí-li na těleso hmoty m , které bylo původně v klidu, stálá síla F po dobu t , pak po tu dobu koná těleso pohyb rovnoměrně zrychlený a nabude po ní rychlosti v . Jestliže těleso nebylo v klidu, ale pohybovalo se již jakousi rychlostí v_1 , pak nabude účinkem síly F za dobu t rychlosti v_2 , přičemž platí

$$F \cdot t = m \cdot (v_2 - v_1) .$$

Je-li síla F proměnná, myslíme si celkovou dobu jejího působení rozdělenou na kratinké časové úseky Δt , ve kterých lze sílu F považovat prakticky za stálou a rovnou jakési průměrné hodnotě \overline{F} . Pak bude také změna $v_2 - v_1$ rychlosti za dobu Δt velmi malá; označíme ji Δv . Bude tedy

$$\overline{F} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \quad (4)$$

Při dopadu na stěnu působí molekula A na ni jakousi silou ΔF_1 , a to po velice kratinkou dobu Δt . Tuto dobu trvání rázu ovšem neznáme. Avšak podle třetího pohybového zákona, principu akce a reakce, působí při rázu též naopak stěna na molekulu, a to silou stejně velikou, ale opačně orientovanou, a po stejnou dobu Δt . Působením této reakční síly se změní směr rychlosti v_1 v opačný, přičemž velikost v_1 rychlosti se nezmění. Je tedy změna rychlosti

$$\Delta v_1 = v_1 - (-v_1) = 2v_1$$

Proto

$$\Delta F_1 \Delta t = m \cdot 2v_1 ;$$

odtud

$$\Delta F_1 = \frac{2mv_1}{\Delta t} \quad (5)$$

Ovšem sílu ΔF_1 nemůžeme ze vztahu (5) určit, neboť neznáme dobu Δt trvání rázu. Pomůže nám však tato úvaha: Molekula plynu se mezi stěnami pohybuje rovnoměrně, přičemž vzdálenost l mezi stěnami urazí rychlostí v_1 za dobu $\Delta t_1 = \frac{l}{v_1}$. Doba mezi dvěma po sobě jdoucími

nárazy molekuly na tutéž stěnu je tedy $\Delta t' = \frac{2l}{v_1}$. Tato doba $\Delta t'$ je velmi krátká, např. molekuly dusíku mají při 0°C rychlost průměrně $493 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ($\doteq 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), takže při vzdálenosti stěn, např. $l = 10 \text{ cm}$ narazí každá molekula na tutéž stěnu průměrně asi 2500krát za sekundu. I kdybychom mohli náraz jedné jediné molekuly postřehnout svými smysly, nemohli bychom nárazy při tak rychlém jejich sledu od sebe rozlišit a měli bychom dojem, že molekula působí na stěnu trvale.

Proto nahradíme sílu ΔF_1 jednotlivého nárazu jinou průměrnou silou $\overline{\Delta F_1}$, která by působila po celou dobu $\Delta t'$ mezi dvěma po sobě jdoucími rázy a byla se silou ΔF_1 ekvivalentní (rovnomocná). To bude tehdy, bude-li její impuls $\overline{\Delta F_1} \cdot \Delta t'$ stejný, jako je skutečný impuls $\Delta F_1 \cdot \Delta t$.

Z uvedené úvahy tedy plyne

$$\Delta F_1 \cdot \Delta t = \overline{\Delta F_1} \cdot \Delta t' = 2m \cdot v_1,$$

tedy

$$\overline{\Delta F_1} = \frac{2mv_1}{\Delta t'} = \frac{mv_1^2}{l}$$

Rovnoběžně s osou x se pohybuje celkem $n' = \frac{1}{3} n$ molekul s různými rychlostmi $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n'}$. Jejich celkové působení na stěnu krychle se jeví makroskopicky jako síla F , rovná součtu sil od jednotlivých molekul. Tedy

$$\begin{aligned} F &= \frac{mv_1^2}{l} + \frac{mv_2^2}{l} + \frac{mv_3^2}{l} + \dots + \frac{mv_{n'}^2}{l} = \\ &= \frac{m}{l} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{n'}^2) = \\ &= \frac{n'm}{l} \cdot \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_{n'}^2}{n'}. \end{aligned}$$

Položme

$$\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_{n'}^2}{n'} = \overline{v^2} \quad (6)$$

Odmocninu z $\overline{v^2}$, tj. veličinu $v_k = \sqrt{\overline{v^2}}$ nazýváme *střední kvadratickou rychlostí*. Tedy $\overline{v^2}$ je druhá mocnina střední kvadratické rychlosti

$$\overline{v^2} = v_k^2$$

Střední kvadratická rychlost má jednoduchý fyzikální význam. Předpokládejme, že se všechny molekuly pohybují touto rychlostí v_k . Pak by jejich celková kinetická energie byla

$$W_k = n' \cdot \frac{1}{2} m v_k^2$$

Ve skutečnosti mají molekuly rychlosti různé, takže úhrnná kinetická energie W'_k jejich postupného pohybu je

$$W'_k = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \dots + \frac{1}{2} m v_{n'}^2 = \frac{1}{2} m \cdot (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_{n'}^2)$$

Avšak podle (6) je součet v závorce roven $n' \overline{v^2}$, takže

$$W' = \frac{1}{2} m n' \bar{v}^2 = n' \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = n' \cdot \frac{1}{2} m v_k^2 = W_k$$

Je tedy úhrnná kinetická energie W_k souboru n' molekul táž, jako kdyby se všechny molekuly pohybovaly touž střední kvadratickou rychlostí v_k .

Poznámka. Je dobře si uvědomit, že střední rychlost v , daná jako aritmetický střed jednotlivých rychlostí, není totožná se střední kvadratickou rychlostí. Je to zřejmé z konkrétního číselného příkladu: Zvolme $v_1 = 7 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 1 \text{ m s}^{-1}$. Pak $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = 4 \text{ m s}^{-1}$, kdežto $\bar{v}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} = 25 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, takže $v_k = \sqrt{\bar{v}^2} = 5 \text{ m s}^{-1}$. Vždy platí, že $v_k \geq v$.

Je tedy $F = \frac{n' m}{l} v_k^2$ Poněvadž $n' = \frac{1}{3} n$, je dále

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{l} m v_k^2$$

Tlak p plynu se číselně rovná síle působící na jednotku plochy. Poněvadž síla F působí na plochu l^2 stěny krychle, bude

$$p = \frac{F}{l^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{l^3} m v_k^2 = \frac{1}{3} n_0 m v_k^2$$

Tím jsme odvodili *základní rovnici kinetické teorie plynů*

$$p = \frac{1}{3} n_0 m v_k^2 \quad (7)$$

3. *Některé důsledky ze základní rovnice.* Základní rovnici (7) lze různým způsobem obměňovat. Např. podle (2) je $n_0 m = \rho$, takže

$$p = \frac{1}{3} \rho v_k^2 \quad (8)$$

Ve vztahu (8) jsou p a ρ makroskopické veličiny, které lze měřit. Lze tedy z (8) vypočítat veličinu v_k , jež není přístupná přímému měření.

Rozšíříme-li pravou stranu rovnice (7) dvěma, obdržíme

$$p = \frac{2}{3} n_0 \cdot \frac{m v_k^2}{2};$$

výraz $\frac{m v_k^2}{2} = \bar{w}$ značí střední kinetickou energii postupného pohybu jedné molekuly. Tedy

$$p = \frac{2}{3} n_0 \bar{w} \quad (9)$$

Další tvar základní rovnice dostaneme, přibereme-li při uvažování stavovou rovnici plynů

$$pV = BT, \quad (10)$$

v níž p , V a T znamenají tlak, objem a absolutní teplotu plynu. Číselná hodnota konstanty B závisí na hmotě daného plynu a na jednotkách, v nichž vyjadřujeme p , V a T .

Fyzikálně i chemicky významným množstvím plynu je jeden kilomol plynu, neboť obsahuje u všech plynů též počet molekul $N = 6,025 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$, zvaný *Avogadrova konstanta*.

Podle Avogadrova zákona zaujímá 1 kilomol různých plynů při stejném tlaku a stejné teplotě též stejný objem. Při $t = 0^\circ\text{C}$ a při normálním tlaku $p = 760 \text{ torr}$ je tento objem

$$V = 22,4207 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$$

Vztahujeme-li tedy stavovou rovnici (10) nikoliv na libovolné množství plynu, ale na jeden kmol, pak má konstanta B pro všechny plyny touž hodnotu. Ta se značí R a nazývá se *univerzální plynová konstanta*. Stavová rovnice pro jeden kmol plynu má pak zvlášť jednoduchý tvar

$$pV = RT \quad (11)$$

Číselná hodnota konstanty R se určí z (11) z podmínky, že pro $t = 0^\circ\text{C}$, tj. pro $T = 273,15^\circ\text{K}$, a $p = 760 \text{ torr} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$ je $V = 22,4207 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$. Obdržíme

$$R = 8,31696 \cdot 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$$

Nyní ještě zobecníme vzorec (11) pro libovolnou hmotu plynu v kg. Je-li V objem 1 kilomolu plynu za určitého tlaku a teploty, pak 1 kg plynu zaujímá za téhož tlaku a teploty objem $\frac{V}{\mu}$, kde μ je hmota jednoho kilomolu plynu, tj. jeho molekulová hmota vyjádřená v kg.

Pak m kilogramů plynu má objem $m \cdot \frac{V}{\mu}$. Proto bude pro m kilogramů plynu mít výraz $\frac{pV}{T}$ rovněž hodnotu $\frac{m}{\mu}$ krát větší než R , tedy $\frac{pV}{T} = \frac{m}{\mu} R$, neboli

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad (12)$$

Použijeme nyní základní rovnice (9) pro jeden kmol plynu. Znásobme obě strany rovnice objemem V jednoho kilomolu. Obdržíme

$$pV = \frac{2}{3} n_0 V \bar{w} \quad (12a)$$

Avšak $n_0 V$ je počet molekul v jednom kilomolu plynu, tj. Avogadrovo číslo N . Tedy

$$pV = \frac{2}{3} N \bar{w} = RT \quad (13)$$

Odtud

$$\bar{w} = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T \quad (14)$$

Poněvadž R a N jsou univerzální konstanty, je také

$$k = \frac{R}{N}$$

univerzální konstanta, stejná u všech plynů. Nazývá se *Boltzmannova konstanta*. Její hodnota je

$$k = \frac{8,316\ 96 \cdot 10^3}{6,025 \cdot 10^{26}} \frac{\text{J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}}{\text{kmol}^{-1}} = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J deg}^{-1}$$

Vzorec (14) přejde ve tvar

$$\bar{w} = \frac{3}{2} k T \quad (15)$$

Ze vzorce (15) je patrné, že střední kinetická energie postupného pohybu molekul plynu závisí jen na teplotě; je přímo úměrná absolutní teplotě T plynu. Odtud plyne, že pro $T = 0^\circ\text{K}$ je $\bar{w} = 0$, tedy při teplotě absolutní nuly úplně ustane postupný pohyb molekul. Trvá však dál, např. pohyb elektronů kolem jader atomů, z nichž je molekula složena, dále pohyby protonů a neutronů v jádrech apod.

Poněvadž při *stálé teplotě* je podle (15) i \bar{w} stálé, je pravá strana rovnice (12a) též konstantní; dostáváme vztah

$$pV = \text{konst.},$$

což je *Boylův zákon* pro děje izotermické.

Ze vztahu (15) vyjádříme T

$$T = \frac{2}{3} \frac{\bar{w}}{k} \quad (16)$$

Tuto rovnici lze považovat za *definici absolutní teploty* T podle kinetické teorie.

Z rovnice (14)

$$\bar{w} = \frac{1}{2} m v_k^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T$$

plyne dále

$$v_k^2 = \frac{3 RT}{mN} = \frac{3 RT}{\mu},$$

neboť $m \cdot N$ je hmota molekul v jednom kilomolu, neboli molekulová hmota μ vyjádřena v kg. Odtud

$$v_k = \sqrt{\frac{3 RT}{\mu}} \quad (17)$$

Na závěr určíme ještě počet n_0 molekul v objemové jednotce: ze vztahu (9) obdržíme

$$n_0 = \frac{3}{2} \frac{p}{\bar{w}}$$

a po dosazení za \bar{w} z (15) dostaneme

$$n_0 = \frac{p}{kT}. \quad (18)$$

Při *stejném tlaku* a *stejné teplotě* mají tedy všechny plyny v objemové jednotce též počet molekul; to je *Avogadrův zákon*. Za normálních podmínek, tj. při $p = 760$ torr a $T = 273,15$ °K je počet molekul v 1 m^3 kteréhokoliv plynu

$$n_0 = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

molekul. Tento počet se nazývá *Loschmidtovo číslo*. Je to číslo nepředstavitelně velké. Kdybychom mohli do prázdné krychličky o objemu 1 cm^3 vpravit každou sekundu sto miliónů molekul, pak by trvalo přes 7000 let, než by počet molekul v krychličce dosáhl čísla n_0 . Přitom vlastní objem molekul v krychličce je zcela nepatrnou částí jejího prostoru, takže krychlička je prakticky téměř prázdná.

4. *Příklady*. Vzorce a vztahy z kinetické teorie plynů si lépe osvojíme, vypočteme-li několik příkladů.

1. Určete střední kvadratickou rychlost molekul dusíku ($\mu = 28$) při teplotách a) 100 °C, b) 0 °C, c) -100 °C. Počítejte v soustavě SI.

Ř e š e n í.

a) Do vzorce (17) dosadíme

$$R = 8,317 \cdot 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}, \\ \mu = 28 \text{ kg kmol}^{-1}, T = 373 \text{ °K};$$

obdržíme

$$v_k = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,317 \cdot 10^3 \cdot 373}{28}} \text{ m s}^{-1} = 576 \text{ m s}^{-1}.$$

b) Dosadíme $T = 273$ °K; počítáme podobně jako v a). Vyjde $v_k = 493 \text{ m s}^{-1}$.

c) Dosadíme $T = 173 \text{ }^\circ\text{K}$. Dostaneme hodnotu $v_k = 393 \text{ m s}^{-1}$.

Molekulová hmotnost kyslíku je $\mu = 32$, tedy větší než molekulová dusíku, a proto střední kvadratická rychlost molekul kyslíku je za téže teploty menší než střední kvadratická rychlost dusíku. Např. při $0 \text{ }^\circ\text{C}$ je střední kvadratická rychlost molekul kyslíku $v_k = 460 \text{ m s}^{-1}$.

2. Určete střední kvadratickou rychlost molekul vzduchu za normálních poměrů za předpokladu, že vzduch by byl stejnorodým plynem.

Ř e š e n í. Užijeme vzorce (8); z něho plyne

$$v_k = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

Dosadíme $\rho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$, $p = 760 \text{ torr} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$.

Vyjde

$$v_k = 480 \text{ m s}^{-1}$$

Kdybychom počítali ze vzorce (17), museli bychom dosadit za molekulovou hmotnost vzduchu hodnotu $\mu = 28,962$, neboť vzduch je směs přibližně 20 % kyslíku ($\mu_1 = 32$) a 80 % dusíku ($\mu_2 = 28$).

3. V nádobě je plyn, který má tlak 0,01 torr a teplotu $7 \text{ }^\circ\text{C}$. Kolik molekul plynu je v 1 cm^3 ?

Ř e š e n í. Podle vzorce (18) je $n_0 = \frac{p}{kT}$. Dosadíme $p = 1,01325 \cdot$

10^3 N m^{-2} , $k = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J deg}^{-1}$, $T = 280 \text{ }^\circ\text{K}$; obdržíme $n_0 = 2,61 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$.

Ačkoliv je tedy v nádobě prakticky skoro úplné vakuum, je v každém kubickém centimetru ještě asi 0,2 triliónů molekul.

4. Jaká teplota odpovídá střední kvadratické rychlosti $v_k = 720 \text{ km h}^{-1}$ molekul kysličníku uhličitého?

Ř e š e n í. Ze vzorce (17) plyne

$$T = \frac{\mu v_k^2}{3R}$$

Po dosazení vyjde $T = 70 \text{ }^\circ\text{K} = -203 \text{ }^\circ\text{C}$.

5. Jaká je podmínka, aby dva různé plyny měly touž teplotu?

Ř e š e n í. Podle (16) musí být

$$T = \frac{2}{3} \frac{\bar{w}_1}{k} = \frac{2}{3} \frac{\bar{w}_2}{k};$$

odtud $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$. Tedy molekuly obou plynů musí mít stejnou střední kinetickou energii. Z toho plyne dále

$$\frac{1}{2} m_1 v_{k_1}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{k_2}^2,$$

neboli

$$v_{k_1} : v_{k_2} = \sqrt{m_2} : \sqrt{m_1}$$

Střední kvadratické rychlosti jsou v obráceném poměru k druhým odmocninám z hmot molekul.

6. V nádobě o stálém objemu je 1 kmol plynu o teplotě T . Kolik tepelné energie (v joulech) musíme plynu dodat, aby jeho teplota stoupla o 1°C ? Toto teplo se značí C_v a nazývá se *molekulové teplo plynu při konstantním objemu*.

Ř e š e n í. Střední kinetická energie jedné molekuly je při teplotě T podle (15)

$$\bar{w}_1 = \frac{3}{2} kT$$

při teplotě $(T + 1)^\circ\text{K}$ je

$$\bar{w}_2 = \frac{3}{2} k (T + 1)$$

Každé molekule se musí dodat energie

$$\bar{w}_2 - \bar{w}_1 = \frac{3}{2} k \cdot (T + 1) - \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} k$$

V jednom kilomolu plynu je N molekul, jimž je tedy nutno dodat celkem energii

$$N (\bar{w}_2 - \bar{w}_1) = N \cdot \frac{3}{2} k = \frac{3}{2} N \cdot \frac{R}{N} = \frac{3}{2} R$$

Tedy

$$C_v = \frac{3}{2} R.$$

Je tedy molekulové teplo všech plynů stejné a rovné $\frac{3}{2} R$. Číselně

$$C_v = \frac{3}{2} \cdot 8,3169 \cdot 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1} = 12,46 \cdot 10^3 \text{ J deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$$

Užijeme-li vztahu $1 \text{ cal} = 4,182 \text{ J}$, obdržíme pro C_v hodnotu

$$C_v \doteq 3 \text{ kcal deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$$

Naměřené hodnoty souhlasí s touto vypočtenou hodnotou jen u jednoatomových plynů. Např. pro helium je $C_v = 2,98 \text{ kcal deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$, pro argon $C_v = 2,98 \text{ kcal deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$ apod. Pro víceatomové molekuly je C_v větší, a to tím větší, čím je molekula složena z většího počtu atomů. Např. pro dvouatomové molekuly H_2 , O_2 , N_2 apod. je C_v asi $5 \text{ kcal deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$, pro tříatomové (např. H_2O , CO_2 atd.) je asi $6,65 \text{ kcal deg}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$ atd. U složitějších molekul nepřijde všechna dodaná energie jen v kinetickou energii postupného pohybu, ale též v energii dalších druhů pohybů molekuly, k nimž jsme při odvození základní rovnice nepřihlíželi, jako je energie rotačního pohybu molekul, vibrační (kmitavá) energie atomů v molekule, vzájemná potenciální

energie atomů v molekule, jež při zahřívání se též poněkud zvětšuje vzhledem k rostoucí vzdálenosti atomů v molekule.

Přesnou teorii molekulových tepel plynů podala teprve moderní kvantová mechanika.

R N D r. I v a n N á t e r, SVŠT, Bratislava:

Tlak pod zakřiveným povrchem kvapaliny

Téma k prostudování pro první kolo V. ročníku FO v kategorii B

1. *Molekulárny tlak.* Z hľadiska kinetickej teórie vyznačujú sa kvapaliny malými vzájomnými vzdialenosťami molekúl. Medzi molekulami preto pôsobia značné príťažlivé sily. Tieto príťažlivé sily sú príčinou tzv. *molekulárneho tlaku*, ktorým povrchová vrstva molekúl kvapaliny pôsobí na vnútornú časť kvapaliny. Existenciu molekulárneho tlaku odôvodníme nasledujúcou úvahou.

Ak sledujeme v kvapaline ľubovoľnú molekulu, musíme uvažovať, ako na ňu pôsobia všetky ostatné molekuly kvapaliny. Príťažlivé sily, ktorými molekuly kvapaliny navzájom na seba pôsobia, veľmi rýchlo klesajú s ich rastúcou vzájomnou vzdialenosťou. Najmenšiu vzdialenosť d dvoch molekúl, pri ktorej už ich vzájomné príťažlivé sily môžeme zanedbať, nazývame *polomerom molekulárneho pôsobenia*. Guľa polomeru d okolo vybratej molekuly je *guľa (sféra) molekulárneho pôsobenia*.

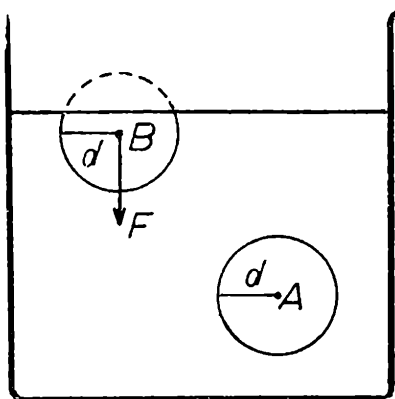
Na molekulu A (obr. 1), ktorá je dosť hlboko pod povrchom kvapaliny, pôsobia ostatné molekuly príťažlivými silami, ktoré majú rozličné smery, ktoré sa však v priemere rušia, pretože molekula A je zo všetkých strán obklopená zhruba rovnakým počtom molekúl okolo nej rovnomerne rozložených. Výslednica síl pôsobiacich na takúto molekulu od ostatných molekúl kvapaliny je teda v priemere rovná nule.

Všimnime si však molekulu B , ktorá leží vo vzdialenosti menšej než d pod povrchom kvapaliny. Jej príslušná guľa molekulárneho pôsobenia leží len čiastočne v kvapaline, druhá jej časť leží nad kvapalinou, kde je látka spravidla v plynnom stave. Pretože koncentrácia molekúl plynu je v porovnaní s koncentráciou molekúl kvapaliny veľmi malá, možno molekulárne pôsobenie molekúl plynu na molekulu B zanedbať. Výslednica medzimolekulárnych síl pôsobiacich na molekulu B nebude teraz rovná nule. Molekula B podlieha zrejme jednostrannému ťahu \mathbf{F} smerujúcemu dovnútra kvapaliny. Takýmto silám podliehajú všetky molekuly v povrchovej vrstve kvapaliny a vytvárajú tak spomínaný molekulárny tlak.

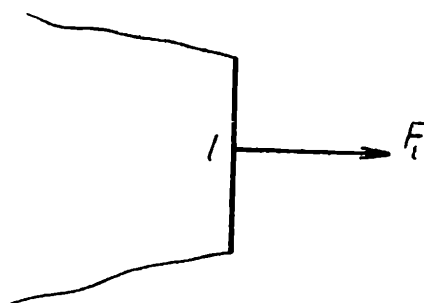
2. *Povrchové napätie.* Javy, ktoré sú podmienené existenciou molekulárneho tlaku povrchovej vrstvy kvapaliny na ostatné vrstvy, môžeme vysvetlovať aj iným spôsobom. Ak chceme z vnútornej časti kvapaliny premiestniť molekulu do povrchovej vrstvy t.j. ak chceme zväčšiť povrchovú plochu kvapaliny, musíme premáhať tlakové sily, príčinou ktorých je molekulárny tlak. To znamená, že zväčšenie povrchu kvapaliny je spojené s prácou, povrchová vrstva kvapaliny sa chová ako napnutá pružná blana.

Aby sme napnutú blanu udržali v rovnováhe (obr. 2), musíme na čiare, ktorá ju ohraničuje, pôsobiť silou \mathbf{F}_t , ktorá leží v dotykovej rovine k povrchu kvapaliny. Táto sila je priamo úmerná dĺžke l ohraničujúcej čiary:

$$\mathbf{F}_t = 2 \sigma l.$$



Obr. 1



Obr. 2

Konštanta úmernosti σ , ktorá má číselnú hodnotu rovnú sile pôso-
biacej na jednotku dĺžky ohraničujúcej čiary povrchovej blany; sa na-
zýva *povrchové napätie* alebo *kapilárna konštanta*. Závisí od akosti kva-
paliny a od jej teploty.

Existencia povrchového napätia vysvetľuje mnohé javy charakteris-
tické pre kvapalnú skupenstvo napr. tvorenie kvapiek pri vytekaní
kvapaliny malým otvorom, tvorenie peny apod. Povrchové napätie spô-
sobuje, že kvapalina nepretečie jemnou sieťou (dáždnik).

Pretože sa povrchová vrstva kvapaliny chová ako napnutá pružná
blana, ak je ohraničená rovinnou krivkou, má tvar rovinnnej plochy.
Ak je však povrch kvapaliny z akéhokolvek dôvodu zakrivený, po-
vrchová vrstva pôsobí na kvapalinu dodatkovým tlakom, ktorý na-
zývame *kapilárnym tlakom*. Ak je povrch kvapaliny vypuklý, kapilárny
tlak je kladný smeruje dovnútra kvapaliny, ak je povrch kvapaliny
vydutý, kapilárny tlak je záporný smeruje von z kvapaliny (obr.
3a, b).

3. *Tlak pod zakriveným povrchom kvapaliny.* Vyšetříme podrobnejšie,
od čoho závisí kapilárny tlak pod zakriveným povrchom kvapaliny.

Nech je povrch kvapaliny časťou guľovej plochy polomeru R (obr. 4). Sily povrchového napätia, pôsobiace na obvode guľového vrchlíka, majú všade smer dotyčnice k povrchu kvapaliny. Myslme si na obvode guľového vrchlíka krátky oblúčik o dĺžke Δl . Na tento element obvodu pôsobí sila $\Delta \mathbf{F}_t = \sigma \cdot \Delta l$. Môžeme ju rozložiť na dve navzájom kolmé zložky. Jedna z nich, $\Delta \mathbf{F}_1$, nech je kolmá na podstavu guľového vrchlíka (rovnobežná s polomerom OS), druhá, $\Delta \mathbf{F}_2$, nech leží v rovine podstavy guľového vrchlíka (je kolmá na polomer OS). Pre veľkosti týchto zložiek platí

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \Delta \mathbf{F}_t \cdot \sin \varphi ,$$

$$\Delta \mathbf{F}_2 = \Delta \mathbf{F}_t \cdot \cos \varphi$$

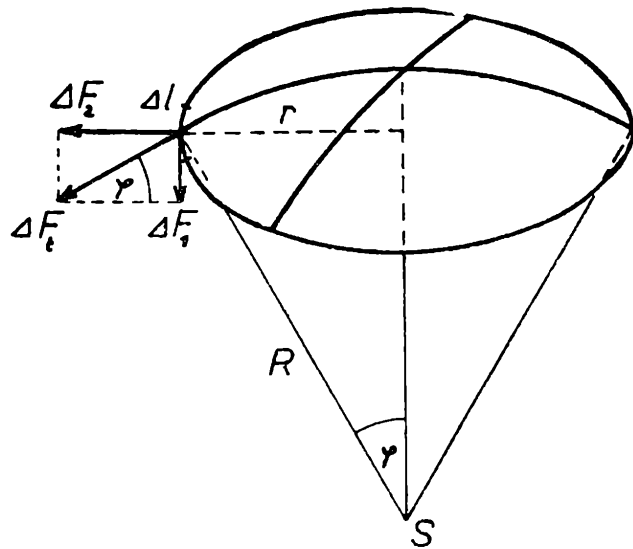
Ak vezmeme do úvahy sily pôsobiace na dĺžkové elementy po celom obvode podstavy guľového vrchlíka, vidíme, že sa po uvedenom roz-



Obr. 3a



Obr. 3b



Obr. 4

klade navzájom rušia zložky $\Delta \mathbf{F}_2$, lebo ku každému vybranému elementu existuje element súmerne položený voči stredu podstavy vrchlíka na druhej strane jeho obvodu a u tohto elementu má zložka sily $\Delta \mathbf{F}_2$ práve opačný smer než u elementu pôvodného. Tieto zložky síl povrchového napätia nemusíme teda brať do úvahy. Naproti tomu zložky $\Delta \mathbf{F}_1$ majú u všetkých elementov obvodu guľového vrchlíka súhlasne rovnobežné smery a ich účinky sa navzájom sčítajú. Dôsledkom existencie týchto zložiek je výsledná tlaková sila \mathbf{F}_1 , ktorou zakrivená povrchová blana pôsobí na vnútornú časť kvapaliny. Táto sila je

$$\mathbf{F}_1 = \Sigma \Delta \mathbf{F}_1 = \Sigma \sigma \Delta l \cdot \sin \varphi = \sigma 2 \pi r \cdot \sin \varphi$$

kde r je polomer podstavy guľového vrchlíka.

Uvedená výsledná tlaková sila \mathbf{F}_1 vyvoláva pod povrchom kvapaliny tlak kapilárny tlak ktorého veľkosť dostaneme, ak silu \mathbf{F}_1 delíme

plochou podstavy guľového vrchlíka. Podľa obrázka je

$$\sin \varphi = \frac{r}{R}$$

a teda

$$F_1 = \frac{2 \pi r^2}{R} \sigma$$

Pre kapilárny tlak p dostaneme hodnotu

$$p = \frac{F_1}{\pi r^2} = \frac{2}{R} \sigma$$

Ako sme už uviedli, tento kapilárny tlak je kladný (smeruje dovnútra kvapaliny) pod vypuklým povrchom, je však záporný (smeruje z kvapaliny von) pod vydutým povrchom.

Výsledný tlak pod zakriveným povrchom kvapaliny sa teda skladá z molekulárneho a kapilárneho tlaku. Pod rovinným povrchom sa uplatňuje len molekulárny tlak.

Kapilárny tlak môžeme počítat podľa odvodeného vzorca len vtedy, ak povrch kvapaliny má tvar guľovej plochy. Úvahy, ktoré sme previedli, možno však zovšeobecniť aj pre zakrivený povrch ľubovoľného tvaru. Za tým účelom sa zoznámime najprv s niekoľkými geometrickými pojmami.

Majme zakrivenú plochu ľubovoľného tvaru. Kolmica na dotykovú rovinu k zakrivenej ploche vedená bodom dotyku je *n o r m á l a* tejto plochy. Ľubovoľná rovina preložená touto normálou pretína zakrivenú plochu v rovinnej krivke, ktorá sa volá *n o r m á l o v ý m r e z o m*. U gule je napr. ľubovoľný normálový rez kružnicou s polomerom rovným polomeru gule. Aj keď má zakrivená plocha iný tvar, možno každému normálovému rezu priradiť tzv. *o s k u l a č n ú k r u ž n i c u* určitého polomeru R . Rôznym rezom odpovedajú, pravda, vo všeobecnosti rozličné polomery krivosti. Veličinu

$$K = \frac{1}{R}$$

nazývame *k r i v o s ť o u* príslušného normálového rezu.

Dá sa dokázať platnosť tejto vety: Ak jedným bodom ľubovoľnej zakrivenej plochy prechádzajú dva navzájom na seba kolmé normálové rezy s polomerami krivosti R_1 a R_2 , potom veličina

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

má rovnakú hodnotu pre ľubovoľnú dvojicu takýchto navzájom kol-

mých normálových rezov. Veličina K sa nazýva **stredná krivosť plochy** v danom bode.

Podobnou úvahou, akou sme odvodili veľkosť kapilárneho tlaku pod guľovým povrchom kvapaliny, by sme našli pre kapilárny tlak pod ľubovoľným zakriveným povrchom hodnotu

$$p = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sigma = K \sigma,$$

kde K je stredná krivosť zakriveného povrchu kvapaliny.

U guľového povrchu je napr. $R_1 = R_2 = R$, kde R je polomer gule. Podľa posledného vzťahu vychádza potom pre kapilárny tlak pod guľovým povrchom kvapaliny hodnota $p = \frac{2\sigma}{R}$, čo je v súhlase s prv odvodeným vzťahom.

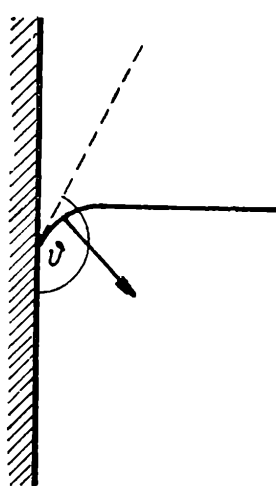
Ako príklad vypočítajme ešte kapilárny tlak pod zakriveným povrchom kvapaliny, ktorý má tvar rotačného valca. Dva navzájom kolmé normálové rezy môžeme voľiť tak, že jeden prechádza povrchovou priamkou valca (je rovnobežný s rotačnou osou valca), druhý je na povrchovú priamku kolmý. Prvý rez je priamka, pre ktorú $R_1 = \infty$, druhý je kružnica s polomerom R_2 rovným polomeru valca R . Kapilárny tlak pod povrchom valca je potom rovný

$$p = \frac{\sigma}{R}$$

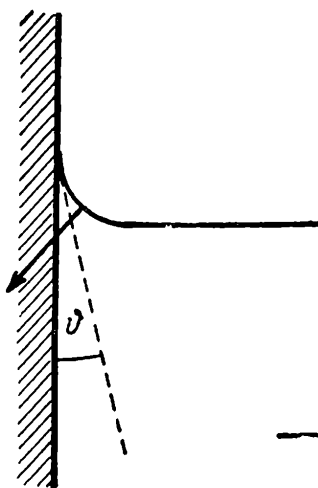
4. *Javy na rozhraní kvapaliny a tuhého telesa.* Príťažlivé sily, o ktorých sme hovorili v predchádzajúcich úvahách a ktoré vyvolávajú molekulárny aj kapilárny tlak pod povrchom kvapaliny, pôsobia nielen medzi dvoma molekulami kvapaliny, ale aj medzi molekulou kvapaliny a molekulou pevnej látky, ak sú takéto dve molekuly v dostatočne malej vzájomnej vzdialenosti. V mieste, v ktorom sa kvapalina stýka s pevným telesom, musíme nutne brať do úvahy jak vzájomné pôsobenie medzi molekulami kvapaliny, tak aj vzájomné pôsobenie medzi molekulami kvapaliny a molekulami pevného telesa. V podstate tu môžu nastať dva prípady: 1. Sily medzi molekulami kvapaliny sú väčšie ako sily medzi molekulami kvapaliny a telesa, 2. sily medzi molekulami kvapaliny sú menšie ako sily medzi molekulami kvapaliny a telesa.

V prvom prípade výsledná sila účinkujúca na okrajovú molekulu kvapaliny smeruje dovnútra kvapaliny a kvapalina **n e z m á č a** teleso. Osobitnú pozornosť musíme venovať zas tým molekulám kvapaliny, ktoré sú pri stene nádoby a súčasne patrija aj do povrchovej

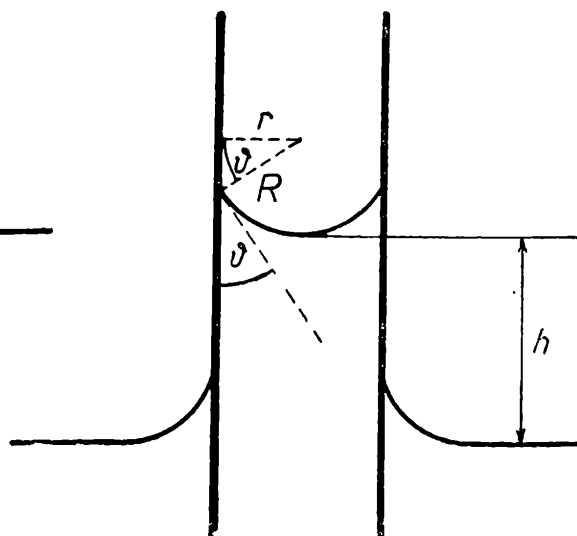
vrstvy kvapaliny. Výsledná sila účinkujúca na takúto molekulu pri zvislej stene nádoby smeruje šikmo dolu dovnútra kvapaliny (obr. 5). Povrch kvapaliny v rovnovážnom stave musí však byť na túto výslednú silu kolmý, preto je povrch kvapaliny pri zvislej stene nádoby, ktorú kvapalina nezmáča, zakrivený podľa obr. 5. Uhol ϑ medzi stenou nádoby a dotykovou rovinou k povrchu kvapaliny, tzv. *krajný uhol*, je tu tupý, väčší ako 90° . Ak je $\vartheta = 180^\circ$, hovoríme, že kvapalina *dokonale nezmáča* stenu nádoby.



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

V druhom prípade, ak sú sily medzi molekulami kvapaliny menšie ako medzi molekulami kvapaliny a telesa, výsledná sila účinkujúca na molekulu kvapaliny pri stene nádoby smeruje von z kvapaliny a kvapalina *zmáča* stenu nádoby. Výsledná sila pôsobiaca na molekulu v povrchovej vrstve kvapaliny pri stene nádoby smeruje šikmo dolu von z kvapaliny, preto je tu povrch kvapaliny zakrivený podľa obr. 6. Krajný uhol ϑ je tu ostrý, menší ako 90° . Ak je $\vartheta = 0$, hovoríme, že kvapalina *dokonale zmáča* stenu nádoby.

5. *Kapilárna depresia a kapilárna elevácia*. So zakrivením povrchu kvapaliny pri stene nádoby a s jeho priamym dôsledkom - kapilárnym tlakom - súvisí zníženie (*kapilárna depresia*) alebo zvýšenie (*kapilárna elevácia*) hladiny kvapaliny v úzkych rúrkach.

Pokiaľ je kvapalina v širokej nádobe, vznikne zakrivenie jej povrchu len v tesnej blízkosti stien nádoby. V prevažnej časti je však povrch kvapaliny vodorovný (rovinný), preto je tu kapilárny tlak nulový. V úzkej valcovej rúrke (kapiláre) dostáva však povrch kvapaliny vypuklý alebo vydutý tvar, podľa toho, či kvapalina nezmáča, alebo zmáča steny kapiláry. Zakrivený povrch kvapaliny v kapiláre, ktorý má tvar časti guľovej plochy, sa nazýva *meniskus*.

Ponorme úzku rúrku jedným koncom do kvapaliny v širokej nádobe. Nech kvapalina zmáča látku, z ktorej je rúrka. Povrch kvapaliny v rúrke je vydutý a pri kruhovom priereze rúrky je časťou guľovej plochy (obr. 7). Pod vydutým povrchom vznikne však záporný kapilárny tlak

$$p = - \frac{2 \sigma}{R}.$$

Pretože pod rovinným povrchom kvapaliny v širokej nádobe sa kapilárny tlak rovná nule, vystúpi v rúrke kvapalina do takej výšky h nad úroveň hladiny v širokej nádobe, že hydrostatický tlak zvýšeného stĺpca sa práve rovná kapilárnemu tlaku p . Podmienka rovnováhy má teda tvar

$$\frac{2 \sigma}{R} = \rho g h,$$

kde ρ je špecifická hmota kvapaliny a g zrýchlenie voľne padajúceho telesa. Ak polomer rúrky označíme r a krajný uhol menisku ϑ , podľa obr. 7 je

$$R = \frac{r}{\cos \vartheta}$$

a teda výška kvapalinového stĺpca v rúrke

$$h = \frac{2 \sigma \cos \vartheta}{r \rho g}$$

Ak kvapalina dokonale zmáča steny nádoby (tak je to napr. medzi vodou a čistým sklom), je $\vartheta = 0$ a

$$h = \frac{2 \sigma}{r \rho g}$$

Posledný vzťah môžeme použiť, napr. na výpočet kapilárnej konštanty σ , ak sme odmerali polomer kapiláry a výšku výstupu kvapaliny v nej (prípadne aj krajový uhol ϑ , ak kvapalina nezmáča dokonale stenu nádoby).

Úplne podobným spôsobom by sme zistili, že v úzkej rúrke, ktorej steny kvapaliny nezmáča (napr. ortuť v sklenej rúrke), bude vypuklý povrch kvapaliny nižšie ako rovinný povrch v širokej nádobe (kapilárna depresia), pretože pod vypuklým povrchom kvapaliny v kapiláre je kapilárny tlak kladný. Zníženie hladiny kvapaliny v kapiláre aj v tomto prípade správne určujú posledné dva vzorce.



Řešení úloh

Soutěž Rozhledů

(Pokračování)

Matematika:

11. Je dán trojúhelník ABC .

a) Určete množinu všech bodů M , které leží uvnitř trojúhelníka ABC a kterými lze vést přímky PQ protínající úsečky AC , BC v bodech P (na AC), Q (na BC) takových, že platí vztahy: $PM = AP$, $QM = BQ$.

b) Dokažte, že přímky PQ se dotýkají jedné kružnice a určete její střed a poloměr.

Josef Holubář

12. Určete všechny řešení rovnice

$$x = \frac{(y + 1)^2}{y^2 - y + 1},$$

v kterých je x celé a y racionálně číslo, a tiež všechny řešení rovnice

$$x = \frac{y^2 - y + 1}{(y + 1)^2}$$

težže vlastnosti.

Pavel Bartoš

Deskriptivní geometrie:

1. Je dána kulová plocha o středu O a poloměru r . Vepište do ní 5 shodných kulových ploch (poloměru ρ), jež se jí dotýkají a z nichž jedna se dotýká ostatních čtyř koulí, z nich pak každá se dotýká tří z ostatních čtyř.

Určete ρ a zobrazte ve sdružených průmětech.

Emma Kasková

2. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká přímk a , b , c , ležících v rovině ρ a přímky d , protínající rovinu ρ .

Ota Setzer

3. Sestrojte kulovou plochu, která se dotýká různoběžek a , b , ležících v rovině ρ a různoběžek c , d , ležících v rovině $\sigma \parallel \rho$.

Ota Setzer

4. Narýsujte elipsu, znáte-li oskulační kružnici k_A v jejím (neznámém) vrcholu A a ohnisko F vně kružnice k_A .

Ota Setzer

Fyzika:

1. Svazek částí nakloněných rovin ($p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ obr. 1) má stejný průmět $a = 0,5$ m do vodorovné roviny. Po rovinách necháme smykat nějaké těleso, přitom smykavý pohyb uvažujeme bez tření. Pohyb děje se ve všech případech z klidu, vždy po celé délce nakloněné roviny, a to pouze tíhovými účinky ($g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

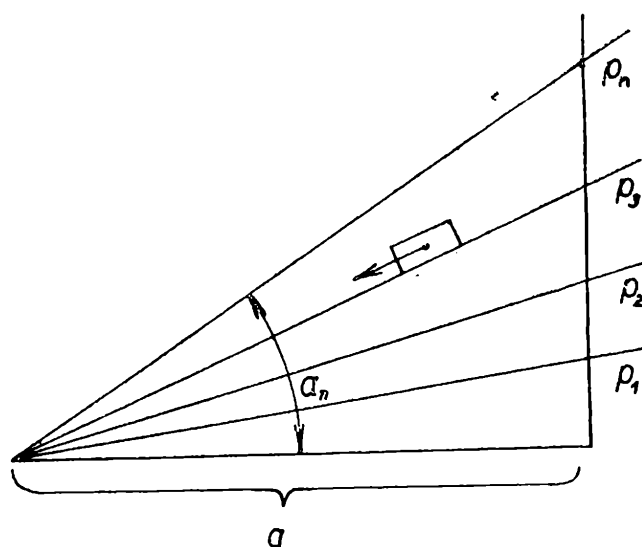
Máme určit:

1. Jaký musí být úhel sklonu (s rovinou horizontální) jedné z rovin, aby doba pohybu tělesa po ní byla rovna $t = 0,6$ s.

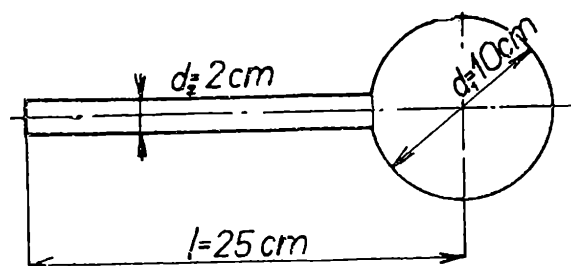
2. Při jakém úhlu α_m byla by doba smykání nejmenší?

P o z n á m k a. Druhá část úlohy je matematicky náročnější a předpokládá základní znalosti derivací funkcí. Pokuste se ji vyřešit.

Václav Šindelář



Obr. 1



Obr. 2

2. Vypočtete momenty setrvačnosti plného válce vzhledem k osám o_i rovnoběžným s podélnou osou válce o . Plný rotační válec je z lehké slitiny hustoty $\rho = 2,69 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, jeho průměr je $d = 5 \text{ cm}$, délka $l = 5 \text{ cm}$. Kolmá vzdálenost $oo_i = a_i$ je 1 cm, 2 cm, 4 cm, 10 cm a 100 cm! Zachyťte graficky na logaritmickém papíře závislost velikosti momentu setrvačnosti daného válce na vzdálenosti a_i . Moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho rotační ose je roven $J_o = \frac{1}{8} m \cdot d^2$. Moment setrvačnosti J_i pro jiné osy, rovnoběžné s rotační (podélnou) osou válce vypočteme pomocí Steinerovy věty $J_i = J_o + ma_i^2$, kde m je hmota tělesa (válce) a a_i kolmá vzdálenost obou os.

Václav Šindelář

3. Plné homogenní těleso nakreslené na obr. 2 (jakési kladivo) uchopíme za držadlo a odhodíme od sebe tak, že se bude při svém pohybu také otáčet kolem nějaké osy, kolmé k podélné ose tělesa.

Určete průsečík této volné osy s podélnou osou tělesa. Celé těleso je z téhož materiálu, např. ze železa.

Václav Šindelář

4. Rychlost střel lze určovat také tzv. balistickým kyvadlem. Je to bedna s pískem, zavěšená na čtyřech dlouhých drátech, vesměs stejné délky. Vstřelíme-li do ní např. kulku z pušky, která v ní uvízne, vykývne bedna ze své klidné, rovnovážné polohy, ve směru přiletěvšího projektilu. Z výkyvu lze jednoduše vypočítat rychlost střely. Náš příklad zaměříme na toto zařízení.

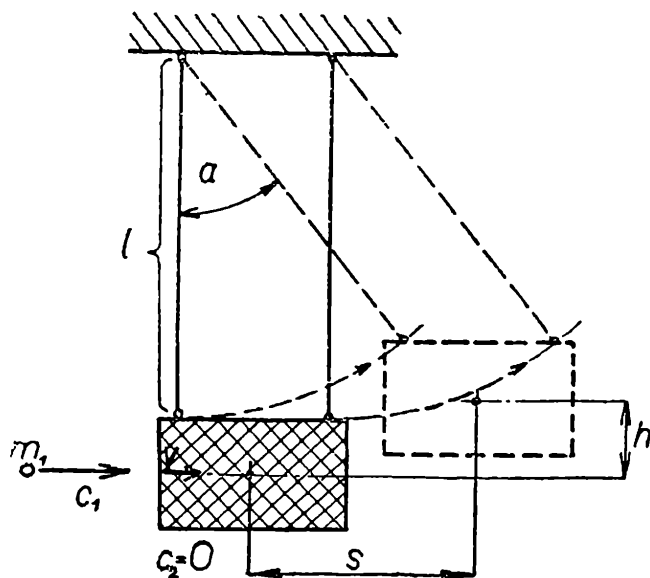
Je dáno balistické kyvadlo (viz obr. 3) s hmotou bedny $m_2 = 250$ kg a délkou závěsů $l = 2$ m. Střela, která vnikne rychlostí c_1 (horizontálního směru) do bedny kyvadla, má hmotu $m_1 = 8$ g. Přitom se bedna vykývne o (horizontálně měřenou) délku $s = 1,38$ m.

Máme vypočítat:

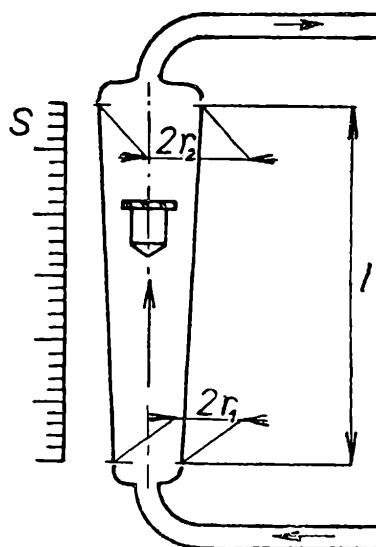
- rychlost střely před nárazem na balistické kyvadlo,
- počáteční rychlost kyvadla, kterou se po vniknutí střely začne vychylovat ze své rovnovážné polohy.

P o z n á m k a. Tíhové zrychlení volíme rovno $g = 9,8$ m . s ⁻². Neuvažujeme nežádoucí pasívní odpory při pohybu kyvadla.

Václav Šindelář



Obr. 3



Obr. 4

5. Ve válcové nádobě je uprostřed dna otvor o průměru $d = 3$ cm. Do nádoby shora počne přitékat voda, stálého, ale neznámého průtokového (výtokového) objemu. Přestože voda, jež je nahoře do nádoby přiváděna, odtéká z ní spodním otvorem, ustálí se hladina v nádobě ve výši $h = 1,25$ m. Máme určit průtokový objem vody přiváděný shora do nádoby, je-li výtokový součinitel pro spodní otvor roven $\mu = 0,8$.

V ý t o k o v ý s o u č i n i t e l u nějakého otvoru je určen poměrem skutečného a teoretického objemu vytékajícího tímto otvorem. Tíhové zrychlení volme přibližně rovno $g = 10$ m . s ⁻².

P o z n á m k a. Podobného uspořádání se používá k měření ustáleného výtoku. Měrná nádoba, v jejímž dnu je různý počet výtokových otvorů s různými průměry, nazývá se d a n a i d a. Počet otvorů a jejich rozměry je zpravidla možno měnit v určitých mezích, aby bylo možno měřit průtokové objemy v různých rozsazích.

Václav Šindelář

6. Malé průtočné objemy kapalin a plynů se často v praxi měří tzv. p l o v á k o v ý m i m ě ř i d l y (průtokoměry). Ty sestávají z vertikální kuželové trubice, mírně se rozšiřující směrem vzhůru, v níž je umístěn kovový plováček rotačního tvaru. Proudí-li tekutina trubicí směrem vzhůru, je plováček nadzdvížen odporem proudění a na příslušný průtočný objem lze usuzovat z výšky, ve které se plováček ustavil v trubici. Princip přístroje je patrný z obr. 4. Aby bylo možno na přístroji z polohy plováčku, který se vznáší v proudu tekutiny, přímo číst okamžitý průtočný objem, je svislá trubice opatřena stupnicí, na které se pak čte v místě, kam až dosahuje horní okraj plováčku. Stupnice se získá experimentálním ověřováním (ocejchováním) přístroje. Je-li zapotřebí na hotovém přístroji určit některé hlavní rozměry svislé měrné kuželové trubice, je zpravidla nutno použít nějaké nepřímé metody, protože vyjma délky l nelze např. průměry $d_1 = 2r_1$, $d_2 = 2r_2$ změřit přímo. U jednoho takového přístroje máme ze změřených hodnot vypočítat:

a) Průměry trubice spodní d_1 a horní d_2 , je-li známa délka trubice $l = 500$ mm, kuželovitost trubice je rovná $k = 0,008$ a činila-li hmota rtuti, kterou byla trubice po celé délce l vyplněna, $m = 9,347$ kg. Hustotu rtuti zde bereme rovnou $\rho = 13,5 \cdot 10^3$ kg \cdot m⁻³. Kuželovitostí rozumíme poměr

$$k = \frac{d_2 - d_1}{l}.$$

b) Jaké relativní chyby bychom se dopustili, kdybychom vnitřní objem kuželové trubice počítali z přibližného vztahu

$$V = \frac{1}{2} \pi l (r_1^2 + r_2^2)$$

Při tomto výpočtu známe $l = 480$ mm, $d_1 = 2r_1 = 6,5$ mm a $d_2 = 2r_2 = 8,0$ mm.

Václav Šindelář

Řešení příkladů otištěných v tomto čísle zašlete nejpozději do 15. února 1964 na adresu: doc. Ota Setzer, Praha 2, Trojanova 13.

Pokyny o úpravě jsou v 1. čísle, str. 23.

Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů

Matematika:

2. Sestrojte tětivový čtyřúhelník (tj. čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici), jsou-li dány délky a , b , c , d jeho stran.

Svatopluk Fučík

(Došlo 20 řešení)

Řešil Jan Veselý, SVVŠ Praha 6, Velvarská:

R o z b o r. Předpokládejme, že jsme úlohu rozřešili, tj., že jsme

nalezli hledaný čtyřúhelník. Úhly β a δ jsou obvodové nad úsečkou AC , platí pro ně vztah

$$\delta = 180^\circ - \beta, \text{ čili } \cos \delta = -\cos \beta \quad (1)$$

Vypočteme velikost úsečky AC kosinovou větou

a) z trojúhelníka ABC : platí $\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$;

b) z trojúhelníka ACD : platí [užitím (1)] $\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta$.

Porovnáním obou výsledků dostáváme

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \beta = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos \beta,$$

čili

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd} \quad (2)$$

($2ab + 2cd$ je vždy různé od nuly).

K o n s t r u k c e. Sestrojme nyní úhel β pomocí $\cos \beta$. Podle Euklidovy a Pythagorovy věty sestrojme $e^2 = a^2 + b^2$, $f^2 = c^2 + d^2$, $g^2 = 2ab$, $h^2 = 2cd$; lze tedy vztah (2) napsat jako

$$\cos \beta = \frac{e^2 - f^2}{g^2 + h^2} = \varepsilon \cdot \frac{k^2}{l^2} = \varepsilon \cdot \frac{k^2}{l} \cdot \frac{1}{l} = \varepsilon \cdot \frac{m}{l},$$

kde $\varepsilon = \pm 1$.

Sestrojíme $k^2 = |e^2 - f^2|$, $l^2 = g^2 + h^2$ podle Pythagorovy věty,

$$m = \frac{k^2}{l}$$

jako čtvrtou geometrickou úměrnou. Jestliže $e > f$, je $\varepsilon = +1$, a $k^2 = e^2 - f^2$; jestliže však $f > e$, pak je $\varepsilon = -1$ a $k^2 = f^2 - e^2$. Pro $\varepsilon = +1$ je $0 \leq \beta < 90^\circ$, pro $\varepsilon = -1$ je $90^\circ < \beta \leq 180^\circ$. Úhel β zjistíme z pravouhlého trojúhelníka XYZ , kde platí $\frac{XY}{XZ} = \frac{m}{l}$ (pro $\varepsilon = -1$ zjistíme úhel $\beta' = 180^\circ - \beta$). Známe-li úhel β , sestrojíme trojúhelník ABC (*sus*) a doplníme na čtyřúhelník $ABCD$.

Důkaz plyne z rozboru.

D i s k u s e. Jedinou podmínkou, aby se dal sestrojit trojúhelník ABC je, aby platilo $|\cos \beta| < 1$. Musí tedy platit [vztah (2)] jednak

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd} < 1,$$

čili $(a - b)^2 < (c + d)^2$, jednak

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2ab + 2cd} > -1,$$

čili $(a + b)^2 > (c - d)^2$.

Bude-li tato podmínka splněna, budeme moci sestrojít trojúhelník ABC a rovněž trojúhelník ACD .

S h r n u t í. Platí-li $|a - b| < c + d$ a $a + b > |c - d|$, má úloha právě jedno řešení. Neplatí-li, nemá řešení vůbec.

P o z n á m k a r e d a k c e. Tuto úlohu lze řešit několika způsoby, což se také objevilo v řešeních našich čtenářů. Otiskujeme jen řešení, jehož užila většina soutěžících.

3. Najděte všechna celá čísla x , pro něž je trojčlen $x^2 + 2x + 46$ roven druhé mocnině prvočísla.

Josef Holubář

Řešil Felix Koschin, 2. tř. SVVŠ, Praha 1, Hellichova 3:

Označme z prvočíslo vyhovující úloze. Potom platí rovnost

$$x^2 + 2x + 46 = z^2. \quad (1)$$

Trojčlen na levé straně rovnosti (1) můžeme upravit na tvar

$$x^2 + 2x + 46 = (x + 1)^2 + 45, \quad (2)$$

kde x jsou hledaná celá čísla. Místo čísla x zavedeme sem celé číslo $x' = x + 1$. Po dosazení z rovnosti (2) do (1) dostáváme

$$x'^2 + 45 = z^2$$

a odtud

$$(x' + z)(x' - z) = -45.$$

Čísla x' a z jsou čísla celá, tedy i jejich rozdíl a součet jsou čísla celá. Čísla $(x' + z)$ a $(x' - z)$ tvoří dvojici celých čísel, jejichž součin je -45 . Všechny takové dvojice jsou:

a) $-1, 45$; b) $1, -45$; c) $-3, 15$; d) $3, -15$; e) $-5, 9$; f) $5, -9$.

Dosadíme-li tyto dvojice za čísla $(x' + z)$ a $(x' - z)$ v dvojím uspořádání, dospějeme k těmto výsledkům:

a) $x' = 22, z = -23$; $x' = 22, z = 23$;

b) $x' = -22, z = 23$; $x' = -22, z = -23$;

c) $x' = 6, z = -9$; $x' = 6, z = 9$;

d) $x' = -6, z = 9$; $x' = -6, z = -9$;

e) $x' = 2, z = -7$; $x' = 2, z = 7$;

f) $x' = -2, z = 7$; $x' = -2, z = -7$

Požadavku, aby z bylo prvočíslo, vyhovují jen dvojice

$$x' = 22, z = 23; x' = -22, z = 23; x' = 2, z = 7 \text{ a } x' = -2, z = 7.$$

† Dosadíme-li nyní do $x = x' - 1$, zjistíme, že všechna čísla x , která vyhovují požadavku úlohy, jsou jen tato celá čísla x :

$$21, -23, 1 \text{ a } -3.$$

Nakonec provedeme zkoušku:

$$21^2 + 2 \cdot 21 + 46 = 441 + 42 + 46 = 529 = 23^2;$$

$$(-23)^2 + 2(-23) + 46 = 529 - 46 + 46 = 529 = 23^2;$$

$$1^2 + 2 \cdot 1 + 46 = 1 + 2 + 46 = 49 = 7^2 ;$$

$$(-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 46 = 9 - 6 + 46 = 49 = 7^2$$

Tím je úloha řešena.

6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \dots + (n-1)^{10} + n^{10} = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66}.$$

František Klauz

(Došlo 17 řešení)

Řešil Josef Daneš, 3.d roč. SVVŠ, Praha 9:

Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ je vzorec zřejmě správný. Nechť daný vztah platí pro nějaké přirozené číslo n . Dokážeme, že platí i pro $n + 1$. Tím bude dokázána platnost pro všechna přirozená čísla. Označme

$$L = \frac{n^{11}}{11} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66} + (n+1)^{10} = \frac{n^{11}}{11} +$$

$$+ \frac{n^{10}}{2} + \frac{5n^9}{6} - n^7 + n^5 - \frac{n^3}{2} + \frac{5n}{66} + (n^{10} + 10n^9 + 45n^8 + 120n^7 +$$

$$+ 210n^6 + 252n^5 + 210n^4 + 120n^3 + 45n^2 + 10n + 1) = \frac{n^{11}}{11} +$$

$$+ \frac{3n^{10}}{2} + \frac{65n^9}{6} + 45n^8 + 119n^7 + 210n^6 + 253n^5 + 210n^4 + \frac{239n^3}{2} +$$

$$+ 45n^2 + \frac{665n}{66} + 1$$

a dále

$$P = \frac{(n+1)^{11}}{11} + \frac{(n+1)^{10}}{2} + \frac{5(n+1)^9}{6} - (n+1)^7 + (n+1)^5 -$$

$$- \frac{(n+1)^3}{2} + \frac{5(n+1)}{66} = \frac{n^{11}}{11} + \left(\frac{11}{11} + \frac{1}{2}\right)n^{10} + \left(\frac{55}{11} + \frac{10}{2} + \frac{5}{6}\right)n^9 +$$

$$+ \left(\frac{165}{11} + \frac{45}{2} + \frac{45}{6}\right)n^8 + \left(\frac{330}{11} + \frac{120}{2} + \frac{180}{6} - 1\right)n^7 +$$

$$+ \left(\frac{462}{11} + \frac{210}{2} + \frac{420}{6} - 7\right)n^6 + \left(\frac{462}{11} + \frac{252}{2} + \frac{630}{6} - 21 + 1\right)n^5 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{330}{11} + \frac{210}{2} + \frac{630}{6} - 35 + 5 \right) n^4 + \\
& + \left(\frac{165}{11} + \frac{120}{2} + \frac{420}{6} - 35 + 10 - \frac{1}{2} \right) n^3 + \\
& + \left(\frac{55}{11} + \frac{45}{2} + \frac{180}{6} - 21 + 10 - \frac{3}{2} \right) n^2 + \\
& + \left(\frac{11}{11} + \frac{10}{2} + \frac{45}{6} - 7 + 5 - \frac{3}{2} + \frac{5}{66} \right) n + \\
& + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} - 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{5}{66} \right) = \frac{n^{11}}{11} + \frac{3n^{10}}{2} + \frac{65n^9}{6} + \\
& + 45n^8 + 119n^7 + 210n^6 + 253n^5 + 210n^4 + \frac{239n^3}{2} + \\
& + 45n^2 + \frac{665n}{66} + 1.
\end{aligned}$$

Vidíme, že $I = P$. Tím je úloha řešena.

7. Vyšetřiti, pro která x má význam logaritmus výrazu $\frac{z+1}{z-1}$, v němž

$$z = \frac{x^4 - 25x^2 + 72}{72}.$$

Josef Kotyk

(Došlo 27 řešení)

Řešil Jan Švejda, 2.e roč. SVVŠ, Praha 3, Sladkovského 8:
Jestliže

$$z = \frac{x^4 - 25x^2 + 72}{72},$$

je

$$z + 1 = \frac{x^4 - 25x^2 + 144}{72}$$

a

$$z - 1 = \frac{x^4 - 25x^2}{72};$$

daný výraz

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{x^4 - 25x^2 + 144}{x^4 - 25x^2}$$

lze postupně uvést v tvar schopný logaritmování

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{(x^2-9) \cdot (x^2-16)}{x^2 \cdot (x^2-25)} = \frac{(x+3) \cdot (x-3) \cdot (x+4) \cdot (x-4)}{x^2 \cdot (x+5) \cdot (x-5)},$$

takže žádaný logaritmus bude

$$\begin{aligned} \log \frac{z+1}{z-1} &= \log(x+3) + \log(x-3) + \log(x+4) + \\ &+ \log(x-4) - 2 \log x - \log(x+5) - \log(x-5). \end{aligned}$$

Logaritmy, o něž běží, mají význam pro x , jež vyhovují nerovnostem

$$\begin{aligned} x+5 > 0, \quad x+4 > 0, \quad x+3 > 0, \quad x > 0, \quad x-3 > 0, \\ x-4 > 0, \quad x-5 > 0. \end{aligned}$$

Společným řešením těchto nerovností jsou všechna $x > 5$.

Pro tato x má tedy význam také logaritmus předloženého výrazu.

P o z n á m k a. Způsobem, který vylíčil žák Jan Švejda, lze podati úplněji tato vyjádření žádaného logaritmu

$$y = \log \frac{z+1}{z-1} = \log \frac{x^4 - 25x^2 + 144}{x^4 - 25x^2}$$

- I. $y = \log(x+3) + \log(x-3) + \log(x+4) + \log(x-4) - 2 \log x - \log(x+5) - \log(x-5)$ pro $x > 5$;
- II. $y = \log(x+3) + \log(x-3) + \log(x+4) + \log(-x+4) - 2 \log x - \log(x+5) - \log(-x+5)$ pro $3 < x < 4$;
- III. $y = \log(-x+3) + \log(-x-3) + \log(-x+4) + \log(-x-4) - 2 \log(-x) - \log(-x+5) - \log(-x-5)$ pro $x < -5$;
- IV. $y = \log(-x+3) + \log(-x-3) + \log(x+4) + \log(-x+4) - 2 \log(-x) - \log(x+5) - \log(-x+5)$ pro $-4 < x < -3$.

Aby uvažované logaritmy měly význam, musíme o jejich základu (basi) b dále předpokládat, že $b > 0, b \neq 1$.

Deskriptivní geometrie:

4. Jsou dány body A, B rovnoběžkové kružnice k_1 a body C, D rovnoběžkové kružnice k_2 kulové plochy. Sestrojte kulovou plochu a na ní bod, v němž kružnice $k = (A, B, C)$ protne podruhé kružnici k_2 .

Ota Setzer

(Došlo 15 řešení)

Řešil Jaroslav Zemánek, 2.c roč. SVVŠ, Praha 5:

Kulová plocha κ , která obsahuje dané body A, B, C, D , má střed v bodě S , pro nějž platí $SA = SB = SC = SD$. Bod S je tedy společným bodem rovin souměrnosti úseček AB, CD, AC . Obráceně, jestliže bod S je společný rovinám souměrnosti úseček AB, CD, AC , pak $SA =$

$= SB = SC = SD$. Střed hledané kulové plochy je S a poloměr SA , čímž je první část úlohy vyřešena.

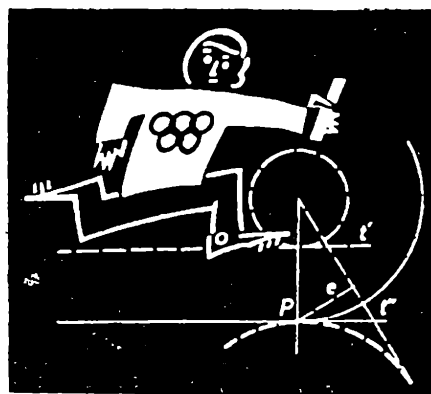
Roviny kružnic k_1, k_2 jsou podle předpokladu spolu rovnoběžné. Rovina ρ kružnice k je protíná proto ve dvou rovnoběžných přímkách $AB \parallel CE$, kde bod E je hledaný druhý průsečík kružnic k, k_2 . Určíme jej jako průsečík kružnice k_2 s přímkou vedenou bodem C rovnoběžně s přímkou AB .

D i s k u s e.

a) Přímký AB, CD jsou rovnoběžné; pak v případě, že lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný, má úloha nekonečně mnoho řešení (roviny souměrnosti úseček AB, CD splynou); v případě, že není rovnoramenný neexistuje řešení (roviny souměrnosti jsou rovnoběžné).

b) Přímký AB, CD jsou mimoběžné, úloha je jednoznačná.

Matematická olympiáda



Přípravné úlohy I. kola

XIII. matematické olympiády

(Řešení druhé trojice úloh se odevzdá učiteli matematiky do 10. prosince 1963)

Kategorie A

4. Určete všechny dvojice reálných čísel x, y , které splňují nerovnosti

$$|\sin(x + y + \frac{1}{2}\pi)| \geq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi.$$

V rovině pravouhlých souřadnic x, y pak zobrazte všechna tato řešení.

5. Jsou-li $b, n > 2$ přirozená čísla, potom číslo $b^{n+4} - b^n$ je dělitelné číslem 120. Dokažte.

(Viz poznámku u úlohy 5 kat. B.)

6. Je dán lichoběžník $MNQP$, kde $MN > PQ$. Uvnitř úsečky PQ zvolme body A, B tak, aby platilo $PA = QB$, a sestrojme po řadě průsečíky X, Y dvojic přímek MP, NB a NQ, MA .

Vyšetřte geometrické místo středů úseček XY

Kategorie B

4. Je dán trojúhelník ABC o stranách délek a, b, c .

Vypočtete vzdálenosti středu C' strany AB od čtyř bodů, ve kterých se přímky AB dotýkají kružnice vepsané a kružnice vně vepsané danému trojúhelníku.

5. Vypočtete vzorce pro všechna přirozená čísla, jejichž druhá mocnina dělena patnácti má za zbytek (v oboru celých nezáporných čísel) číslo: a) 9; b) 7. Pozn. Lze užít věty: Jsou-li n, d přirozená čísla, potom lze najít celá nezáporná čísla k, z tak, že platí $n = kd + z$, kde $0 \leq z < d$.

6. Udejte, pro které trojice reálných čísel x, y, z nemá výraz

$$V = \frac{(x - y)(y - z)(z - x)}{(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}$$

smysl a rozhodněte o hodnotě výrazu pro ostatní trojice reálných čísel x, y, z .

Kategorie C

4. V rovině je dán dutý úhel $\sphericalangle MON$ a vně tohoto úhlu je dán bod P . Na polopřímkách OM, ON sestrojte po řadě body X, Y tak, aby bod Y byl středem úsečky PX .

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

5. Rozhodněte, které z celých čísel od 0 do 11 nedostaneme jako zbytek při dělení (v oboru celých nezáporných čísel) druhé mocniny přirozeného čísla dvanácti. (Viz poznámku ¹⁾ na konci.)

6. Řešte rovnici:

$$\text{a) } \left| \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \right| = \frac{x - 3}{x + 4};$$

$$\text{b) } \left| \frac{x^2 + 2px + p^2}{x^2 - p^2} \right| = \frac{x + p}{x + 4},$$

kde p je dané číslo.

Kategorie D

4. Narýsujte trojúhelník ABC , jestliže je $BC = 5$ cm, $CA = 12$ cm, $AB = 13$ cm. Označme X bod tohoto trojúhelníka, který splňuje tyto požadavky: Vzdálenost bodu X

- (1) od bodu A je větší než od bodu B ;
- (2) od přímky CA je větší než od přímky BC ;
- (3) od přímky BC je větší než od přímky AB .

Vyšetřte, jaký útvar vyplní všechny body X uvedených vlastností. Tvrzení odůvodněte.

5. Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a dvě její různé sečny $p \parallel q$.

Narýsujte kružnici m , která se dotýká obou přímek p, q a kružnice k . Rozhodněte o řešitelnosti úlohy.

6. Výraz

$$V = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

je roven nule pro jediné číslo x ; dokažte. Zároveň udejte všechna čísla x , pro která tento výraz: a) je kladný; b) je záporný; c) nemá smysl.

Soutěžní úlohy I. kola XIII. roč. MO

(První trojice úloh, termín k odevzdání: 20. prosince 1963)

Kategorie A

1. Udejte všechna přirozená čísla n , pro která číslo $N = n^8 - n^2$ není dělitelné číslem 504.

2. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, o jehož základně AB platí $AB = 2BC = 2CD$. Uvnitř lichoběžníka nad úsečkou CD jako přeponou sestrojíme pravoúhlý trojúhelník CDE , pro jehož úhel ω při vrcholu C platí $30^\circ < \omega < 60^\circ$. Označme F, G paty kolmic po řadě vedených body A, B k přímkám DE, CE . Vypočtěte poměr obsahů obrazce $ABGEF$ a lichoběžníka $ABCD$ užitím úhlu ω a vyšetřte, kdy je tento poměr minimální.

3. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník ABC , jehož základna AB je menší než rameno. Sestrojte uvnitř úseček CA, CB po řadě body X, Y a v polorovině XYC bod Z tak, aby platilo

$$\triangle XYZ \cong \triangle ABC$$

Vyšetřte geometrické místo bodů Z .

Kategorie B

1. Šesticiferné přirozené číslo, které je v dekadické soustavě zapsáno ve tvaru $(xyxyxy)$, kde x, y jsou některé z číslic $0, 1, 2, \dots, 9$, nemá většího prvočinitele než 97. Dokažte.

2. V rovině je dán lichoběžník $ABCD$ s větší základnou AB .

Sestrojte přímkou $p \parallel AB$ takovou, že úsečky AD, AC, BD, BC ji protínají po řadě v navzájem různých bodech M, N, P, Q tak, že platí $MN = NP = PQ$.

3. Užitím výpočtu sestrojte trojúhelník ABC o obvodu 130 mm, který má tu vlastnost, že dotykové body kružnice jemu vepsané dělí strany AB, AC v obou případech v poměru $1 : 3$. Vypočtěte poměr stran trojúhelníka ABC .

Kategorie C

1. V rovině pravoúhlých souřadnic x, y zobrazte množinu všech bodů $A \equiv [x, y]$, o jejichž souřadnicích platí zároveň všechny tři nerovnosti:

$$|x - y| \leq 1, |x + y| \leq 1, |x| + |y| \leq 1.$$

2. Jsou dány kružnice k_1, k_2 o společné tětivě PQ , která odděluje jejich středy.

Najděte na kružnici k_1 bod A a na kružnici k_2 bod B tak, aby bod Q ležel uvnitř úsečky AB a aby platilo $\sphericalangle APQ = \sphericalangle BPQ$.

3. V rovině je dán trojúhelník ABC . Užitím výpočtu určete mezi body A, B bod D takový, aby se kružnice vepsané trojúhelníkům ACD a BCD dotýkaly přímky CD v témže bodě.

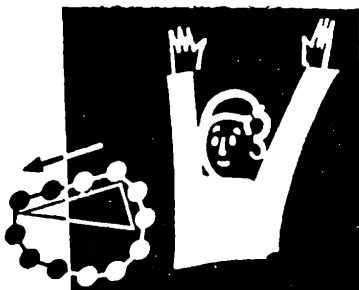
1. Najděte všechna přirozená čísla n , pro která je číslo $10^n + 8$ dělitelné číslem 72.

2. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky 1. Uvažujeme dva kruhy o poloměrech délky 1 a středech A, C . Nazveme M obrazec, který se skládá z bodů společných oběma kruhům, a dále V obrazec, složený z těch bodů, které náležejí alespoň jednomu z obou kruhů.

Vypočtete v procentech, jakou částí obsahu obrazce V je obsah obrazce M .

3. Je dán trojúhelník ABC .

Sestrojte body X, Y tak, aby bod X ležel na straně CA a bod Y na straně CB a aby platilo $XY \parallel AB, AX + BY = XY$



Fyzikální zajímavosti

Inž. Dušan Říman, Praha:

Paprsky smrti a paprsky naděje

(Dokončení)

Krátce po válce byl proveden pokus s odrazem vln od Měsíce, v letech 1959–60 byly zachyceny radarové odezvy od Venuše. Radiolokátory sledují dráhy umělých družic, astronomové zachycují stále dokonalejšími přístroji záření Slunce, planet, stálic i jiných galaxií. Výkony vysílačů se zvyšují přechodem na stále nižší vlnové délky a používáním velmi úzkých paprskových svazků o veliké hustotě energie. Soudobá letecká a námořní doprava, umělé družice a pronikání člověka do vesmíru by byly nemožné bez radaru. Z hledaných paprsků smrti se staly paprsky naděje. Ale...

V r. 1953 začaty v Americe pokusy užívající úzkého svazku radarových vln ultravysokého kmitočtu a zkoumán jejich účinek na živé organismy. Králík vystavený silnému elektromagnetickému poli zhynul po 75 vteřinách. Imperialisté ovšem žádají výzkum nových „nejmodernějších“ zbraní s úzkým svazkem energie, jako protiváhu mezikontinentálních střel. A odborníci se snaží využít objevu, jenž byl původně určen pro zcela jiné účely. Jsou to molekularní čili kvantové zesilovače, objevené r. 1958 a určené původně k zesílení nesmírně slabých signálů kosmických a meziplanetárních

sond. Jeden z jejich objevitelů C. H. Townes je nazval *masery*³⁾ podle počátečních písmen názvu Microwave Amplifier based on Stimulated Emission of Radiation, což značí: Mikrovlnný zesilovač založený na vybuzeném emisním záření. Masery mohou pracovat na velmi vysokých frekvencích (od 300 MHz), ale lze jejich principu užít také v optické oblasti elektromagnetických vln; takový optický maser se pak nazývá *lasser*³⁾ (Light Amplifier..., světelný zesilovač).

Místo rezonanční dutiny mikrovlnného maseru má laser dvě sousedící zrcadla, z nichž jedno určitou část dopadajících paprsků propouští. Mezi oběma zrcadly může nastat rezonance světelných vln, jejichž vlnová délka je rovna vzdálenosti obou zrcadel (anebo její polovině, třetině atd.). Mezi zrcadly je aktivní prostředí, tj. plyn nebo krystal dotovaný cizími atomy, např. rubín s chromem. V něm se vytvoří dva různé energetické stavy atomů, jichž rozdíl odpovídá kmitočtu, na kterém laser pracuje. Atomy spontánně přecházejí z vyššího energetického stavu do nižšího vyzáří rozdíl energií jako nekoherentní zásvity v různých směrech. Jakmile však některý z těchto atomů vyzáří světlo takové vlnové délky, jež odpovídá rezonančnímu jevu, potom pole rezonancí vzniklé vytvoří mohutné záření aktivního prostředí mezi zrcadly. Tím vzniká koherentní elektromagnetická vlna, jejíž část proniká průchodným

³⁾ M a s e r vyslov mejsr; l a s e r vyslov lejsr.

zrcadlem a vytváří ostrý svazek koherentního světla, téměř jako bodový zdroj. Tento velmi úzký - např. jen 1 mm průměru - svazek se v ovzduší poněkud rozptyluje, ale ve vakuu má téměř nulové ztráty. Soustředí-li se světelná energie laseru ještě dalekohledem (který na světelných kmitočtech pracuje jako směrová vysílací anténa), lze např. dalekohledem o průměru 4 cm vytvořit na Měsíci světelnou skvrnu průměru jen asi 300 metrů.

Hustota energie v tak úzkém svazku je pak ohromná. Je-li výstupní výkon laseru, pracujícího na vlnové délce 0,7 mikronu, jen 10 [kWh], pak ve středu svazku dopadá na [1 m²] plochy výkon 10¹⁶ wattů, což je zhruba stonásobně než je výkon vyzářený z 1 [m²] slunečního povrchu. Celkový výkon Slunce je totiž 38 · 10²² [kW] a to při velikosti povrchu Slunce S = 6 · 10¹² [km²] dává plošnou hustotu výkonu slunečního povrchu 6,24 · 10⁷ [Wm⁻²].

Úzkých svazků světelné energie vybuzené v laserech se již pokusně užívá k velmi jemnému obrábění miniaturních součástek, k vrtání, chirurgickým operacím a hlavně v kosmické radiokomunikaci a k pokusům o přenos energie na velké vzdálenosti. Odhaduje se, že světelný svazek laseru s kmitočtem 4 · 10¹⁴ [Hz] by mohl - až budou odstraněny obtíže modulace paprsku - přenášet současně přes 300 000 televizních signálů.

Ve vojenských kruzích vzbudily možnosti použití paprsků smrti značnou pozornost, ale jsme jisti,

že země tábora míru nezůstávají nepřipraveny. Na západě se všeobecně soudí, že fantastické nové zbraně, o kterých mluvil s. Chruščov ve svém nedávném projevu, jsou vlastně zbraně s úzkým svazkem energie a že by tedy Sovětský svaz opět Ameriku předstihl.



Objev maseru a laseru byl tak nový a revoluční, že dnes ani nelze ještě předvídat všechny ohromné možnosti jejich využití. Doufejme, že to bude využití mírové a že z paprsků naděje se nikdy nestanou paprsky smrti.

Různé

K a r e l D r á b e k, ČVUT, Praha:

K výročí smrti prof. Rudolfa Skuherského

Před sto léty, dne 9. října 1863, zemřel Rudolf Skuherský, první profesor deskriptivní geometrie na Českém stavovském polytechnickém ústavu v Praze, z něhož vzniklo dnešní České vysoké učení technické.

Rudolf Skuherský se narodil 23. dubna 1828 v Opočně, kde byl jeho otec lékařem. Studoval nejdříve na gymnasiu v Hradci Králové a v Broumově, později na pražské (dvoutřídní) reálce a ve studijním roce 1844/45 na Královském českém stavovském technickém ústavu v Praze. Odtud odešel do šlechtických služeb; vrátil se však studovat na podzim v roce 1848. Studoval velmi pilně; zvláště si oblíbil deskriptivní geometrii. Aby získal lepší přípravu, odešel roku 1849 na vídeňskou polytechniku (stavební směr). Ve Vídni uveřejnil

r. 1850 dvě vědecké práce a na jejich základě se stal od 1. října 1851 asistentem, kterým byl do 20. listopadu 1852.

Výnosem ze dne 17. ledna 1850 byly schváleny pro pražskou vysokou školu čtyři profesury. Vedle deskriptivní geometrie byla to (tzv. vyšší) matematika, analytická chemie a paleontologie. Na návrh profesorského sboru byl dne 7. listopadu 1852 jmenován Rudolf Skuherský prvním profesorem deskriptivní geometrie. Ujal se ihned přednášek a cvičení. Přednášel denně jednu hodinu a k tomu byly vždy dvě hodiny cvičení. Studenti museli vypracovat téměř 50 rysů formátu 530 mm × 370 mm. Porovnáním hodin pro deskriptivní geometrii zjistíme, že dnes se musí studenti naučit požadovaný rozsah, který je téměř stejný jako v době

prof. Skuherského přibližně za polovinu času (ačkoliv ještě před několika léty byla situace v tomto směru pro dnešek podstatně lepší) a cvičení je pouze čtvrtinou tehdejší doby. Toto snížení počtu hodin ovšem je nutné vzhledem k požadavkům dneška.



Obr. 1. Prof. Rudolf Skuherský
1828—1863

Prof. Skuherský vedle toho konal ještě mimořádně výklady o praktickém použití deskriptivní geometrie (v rozsahu 3 hodin přednášek a 4 hodin cvičení) a o perspektivě (1 hodina v letním semestru). Vykládal tak jasně a poutavě, že studenti si velmi oblíbili studium deskriptivní geometrie. Po provedené systemizaci byl dne 16. srpna 1854 jmenován řádným profesorem. Nebyl však profesorem zahleděným úzce do své práce, nýbrž viděl život kolem sebe a snažil se pomoci zejména nemajetným

studentům techniky. Podařilo se mu založit fond, který měl od začátku svou samosprávu a z něho byly těmto studentům poskytovány zdarma obědy. Po smrti Skuherského byl nazván jeho jménem. Fond působil až do 17. listopadu 1939, kdy okupanti uzavřeli české vysoké školy.



Obr. 2. Hrob prof. R. Skuherského
na Olšanských hřbitovech v Praze

Prof. Skuherský se zajímal i o český politický a hospodářský život. Jako zvolený poslanec zemského sněmu prosazoval zlepšení výuky zvláště na pražské polytechnice. S přáteli oživil práci Průmyslové jednoty, ve které prosadil české vedení a sám převzal náročnou funkci jednatele.

Po vyhlášení rovnoprávnosti jazyka českého s německým chtěli již v roce 1860/61 někteří docenti přednášet česky. Protože se jim tento požadavek nezdařil, začal sám podle svého hesla „P ř í m á c e s t a n e j k r a t š í“ v roce

1861 přednášet česky pro 156 studentů prvního ročníku, přednášky pro 63 studentů žádajících německé přednášky ponechal svému asistentovi. Tento důležitý krok uspil vnitřní rozdělení Královského českého polytechnického zemského ústavu v Praze (jak se nazývala vysoká škola od roku 1861/62) a v roce 1869 pak úplné rozdělení, které na universitě bylo provedeno až v roce 1882.

Život tohoto energického muže, který se staral jak o školu a studenty, tak o české politické a hospodářské problémy, byl náhle ukončen, když ve svých 35 letech během prázdninového pobytu ve Vy-

sočanech podlehl tehdy nevyhlášené zákeřné nemoci — záškrtu.

Prof. Skuherský napsal ještě další dvě význačné práce, které se zabývají tzv. pravouhloú rovnoběžnou perspektivou, v nichž uvedl metodu, která měla nahradit pravouhloú axonometrii. Jeho metoda snadného získávání názorných obrázků je mnohem jednodušší než je pravouhlá axonometrie a bylo by ji možno i dnes po malé obměně použít v technické praxi, jak ukázal prof. František Kadeřávek v knize Úvod do dějin rýsování a zobrazovacích nauk, ČSAV Praha 1954, str. 34 až 39.

Josef Daneš, studující MFF KU, Praha:

Pátá mezinárodní matematická olympiáda

Ve dnech 5. až 13. července 1963 proběhla v Polsku V. mezinárodní matematická olympiáda (dále stručně V. MMO). Této soutěže se zúčastnilo osm států: Bulharsko, ČSSR, Jugoslávie (poprvé v historii matematických mezinárodních olympiád), Maďarsko, NDR, Polsko, Rumunsko a SSSR. Každý stát byl zastoupen osmi studenty, kteří představovali nejúspěšnější účastníky domácích soutěží jednotlivých zemí. Na V. MMO byla přítomna čtyři děvčata (jedno u ČSSR, dvě z Jugoslávie jako soutěžící a jedno z Bulharska jako náhradnice).

Československá delegace odcestovala z Prahy 4. července a přibyla do hlavního města Polska Varšavy v pátek 5. července ráno. Ubytování bylo zajištěno v internátu nedaleko budovy Technikum kolejowe. Ostatní delegace dojely do Varšavy ještě téhož dne. Vedoucím naší výpravy byl doc. J. Vyšín (MFF KU) a pedagogickým průvodcem F. Zítek, CSc. (MÚ ČSAV).

Dopoledne 5. 7. provedl s. Zítek československou delegaci po Varšavě. Odpoledne jsme strávili se s. Zítkem v parku Bielanech na pokraji Varšavy. V sobotu 6. 7. dopoledne zhlédli účastníci při autobusové projížďce pamětihodnosti Varšavy, odpoledne společně navštívili Palác vědy a kultury. V neděli všichni účastníci V. MMO kromě polských studentů, kteří již setrvali v „olympijském“ městě Vratislavi, se rekreovali v jistém parku nedaleko Varšavy. Mezitím se ve dnech 5. až 7. 7. třikrát sešla mezinárodní komise v čele s prof. Straszewiczem; komise schválila předběžně stručný program V. MMO a vybrala soutěžní úlohy.

V pondělí 8. 7. odjeli zahraniční účastníci do Vratislavi, kde byli ubytováni

v internátu *I n s p e k c e p r á c e*, ležícím v příjemném parku. Týž den večer byli účastníci obeznámeni v hrubých rysech s programem až do odjezdu a zároveň jim byly poskytnuty základní údaje o podmínkách soutěže. V úterý dopoledne řešili soutěžící první trojici úloh. Hned po prvním dnu se ukázalo, že českoslovenští žáci nestačí na mezinárodní úroveň (např. s výbornými žáky ze SSSR je vůbec nelze srovnávat). Plný počet bodů za řešení první úlohy získal jediný náš soutěžící, za řešení druhé úlohy pouze dva žáci a za třetí úlohu nikdo! Ve třetí úloze používali naši žáci zcela neplatných vět, takže čtyři žáci zde nedostali ani jediný bod.

Středa byla volným dnem a účastníci jí využili k prohlídce města.

O den později jsme řešili další trojici úloh. Zde se jen utvrdilo, co napověděl první den soutěže. Někteří naši žáci velmi slabě ovládali středoškolskou matematiku, nezvládli dokonce ani obyčejnou eliminaci *n e z n á m é p ř i ř e š e n í s o u s t a v y r o v n i c*. Při řešení úlohy č. 4 nikdo z našich nedosáhl plného počtu bodů a dva ani jednoho bodu. Při řešení úlohy č. 5 jen jeden Čechoslovák dosáhl plného počtu bodů a opět čtyři žáci nedostali ani bod! V poslední úloze nikdo z našich nezískal plný počet bodů.

V pátek 12. 7. byl na programu celodenní výlet na *S t o l o v o u h o r u*.

V sobotu v odpoledních hodinách byly ve vratislavské radnici slavnostně předány diplomy a upomínky na V. MMO. Již předtím obdrželi studenti upomínkové dárky od rumunské (umělecké předměty), polské a sovětské delegace (brožurky z národních olympiád a sbírky příkladů). Slavnostní závěrečné zasedání krátce uvedl prof. Iwaszkiewicz. Potom promluvil prof. Sikorski o pojetí a významu matematiky. Za matematiky města Bratislavi vystoupil prof. Knaster. Na závěr znovu promluvil prof. Iwaszkiewicz.

Českoslovenští žáci odjeli zpět do vlasti dne 14. července.

Přirozeně se vyskytuje otázka, jak obstálo naše družstvo v mezinárodní konkurenci. Musíme říci, že *š p a t n ě*; dvě ceny a celkový počet 151 bodů představuje hubený výsledek, ještě horší než vloni na IV. MMO. Musíme si uvědomit, že umístění našeho družstva na V. MMO jistě nestaví naše pedagogy do příjemného světla. Další příčinou neúspěchu byl nedostatečně odpovědný přístup některých našich studentů k řešení úloh (např. používání nepravdivých vět, o jejichž platnosti samotní řešitelé neměli jistotu, nebo dokonce riskování „buď platí anebo ne“). Dalším poučením pro ÚV MO v ČSSR by mělo být to, že narychlo provedené soustředění našich účastníků V. MMO nemělo valný účinek stejně jako pro IV. MMO.

V. MMO skončila a brzy začne XIII. MO v ČSSR, aby prvních osm nejlepších středoškoláků-matematiků reprezentovalo ČSSR na VI. MMO, která se patrně bude konat v SSSR nebo v Bulharsku. Přeji našemu příštímu družstvu, aby na VI. MMO čestněji reprezentovalo československé školství a matematiku, než se to podařilo nám.

Texty úloh, zadaných na V. MMO

V závorce je uveden stát, který úlohu zadal a maximální možný bodový zisk na té které úloze.

1. p í s e m n á p r á c e

1. Najděte všechny reálné kořeny rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

kde p je reálný parametr, (ČSSR, 6).

2. Je dán bod A a úsečka BC . Určete geometrické místo všech bodů v prostoru, které jsou vrcholy pravých úhlů, jejichž jedno rameno obsahuje bod A a druhé rameno má s úsečkou BC společný aspoň jeden bod, (SSSR, 7).

3. Konvexní n -úhelník, jehož po sobě následující strany mají délky a_1, a_2, \dots, a_n , má tyto vlastnosti:

a) všechny jeho vnitřní úhly jsou shodné;

b) pro délky stran platí nerovnosti $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$.

Pak je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Dokažte, (Maďarsko, 7).

2. písemná práce

4. Určete všechna řešení x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 soustavy rovnic

$$x_5 + x_2 = yx_1$$

$$x_1 + x_3 = yx_2$$

$$x_2 + x_4 = yx_3$$

$$x_3 + x_5 = yx_4$$

$$x_4 + x_1 = yx_5$$

kde y je parametr, (SSSR, 6).

5. Dokažte, že platí

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}, \text{ (NDR, 6).}$$

6. Soutěže se zúčastnilo 5 žáků A, B, C, D, E . Kdosi předpověděl, že výsledné umístění bude $ABCDE$. Tato předpověď se však nesplnila. Žádný soutěžící nebyl na předpověděném místě a žádná dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících nebyla předpověděna správně.

Kdosi jiný předpověděl umístění $DAECB$. Tato předpověď byla správnější: Právě dva soutěžící byli na předpověděných místech a právě dvě dvojice bezprostředně za sebou následujících soutěžících byly předpověděny správně.

Určete, jaké bylo skutečné výsledné umístění, (Maďarsko, 8).

Poznámka. I. cena: za 35–39 bodů,

II. cena: za 28–34 bodů,

III. cena: za 21–27 bodů.

Bodové hodnocení jednotlivých žáků

Země	Žák číslo								Bodů celkem	Počet získaných cen		
	1	2	3	4	5	6	7	8		prvních	druhých	třetích
SSSR	27 ₃	35 ₁	30 ₂	39 ₁	29 ₂	39 ₁	38 ₁	34 ₂	271	4	3	1
Maďarsko	33 ₂	23 ₃	26 ₃	29 ₂	25 ₃	34 ₂	32 ₂	32 ₂	234	—	5	3
Rumunsko	18	16	27 ₃	25 ₃	31 ₂	16	37 ₁	21 ₃	191	1	1	3
Jugoslávie	2	16	27 ₃	36 ₁	31 ₂	15	7	28 ₂	162	1	2	1
ČSSR	35 ₁	15	20	15	15	14	14	23 ₃	151	1	—	1
Bulharsko	26 ₃	17	10	19	18	22 ₃	21 ₃	12	145	—	—	3
NDR	12	13	22 ₃	14	23 ₃	17	21 ₃	18	140	—	—	3
Polsko	20	19	14	16	7	14	21 ₃	23 ₃	134	—	—	2

Poznámka. Index značí cenu, např. index 3 třetí cenu.

(Dokončení)

Chcete rozumět staroměstskému orloji?

Istě jste již stáli před staroměstským orlojem v očekávání, až odbije celá hodina a figurky apoštolů se dají do pohybu. Napadlo vás však při této příležitosti, že vedle této nevinné podívané lze na pražském orloji pozorovat i celou řadu jiných zajímavých věcí?

Máte-li zájem poučit se, co všechno můžete na orloji zjišťovat, přečtěte si v letošním 5. čísle časopisu Vesmír zajímavý článek J. Dvořáka „Co ukazuje staroměstský orloj“. Budete překvapeni, co všechno můžete na tomto pozoruhodném přístroji sledovat. Namátkou uvedu např. určování slunečního a hvězdného času, určení kalendářního dne, východu a západu Slunce, Měsíce i všech souhvězdí zvěrokruhu atd. Kromě těchto technických zajímavostí se seznámíte i s historií pražského orloje.

—mk—

MATEMATIKA A FYZIKA V ČS. TELEVIZI

Jazykové kursy v rozhlase mají už dlouholetou tradici a jejich přenesení do televize nečinilo též mnoho obtíží. Naproti tomu však neměla Čs. televize žádné zkušenosti s kursy matematickými a fyzikálními, a tak bylo jejich uvedení ve školním roce 1962/63 vlastně jen pokusem. Jak čtenáři jistě vědí, vysílala naše televize v uplynulém školním roce dva kursy z učiva základní devítileté školy: jeden kurs matematický a jeden fyzikální. Každý z nich měl 18 lekcí, přičemž matematiku připravoval kolektiv autorů z Prahy a fyziku obdobný kolektiv z Bratislavy. Kdo sledoval tento první ročník matematického a fyzikálního vysílání v Čs. televizi, má jistě k oběma kursům řadu připomínek a výhrad. Přes to se však za tento rok nahromadily určité zkušenosti s matematickým a televizním vysíláním a oba autorské kolektivy doufají, že jich budou moci využít v budoucnu. Ve vysílání matematických a fyzikálních kursů bude totiž Čs. televize pokračovat i ve školním roce 1963—64. Bližší informace o obou kursech najdete např. v týdeníku Československý rozhlas a televize.

J. S.

KNIHOVNIČKA ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

Právě vyšel 6. svazek této knihovničky, určené pro účastníky soutěže Matematická olympiáda. Je to od *dr. Rudolfa Výborného* Matematická indukce. Vydalo nakladatelství Mladá fronta r. 1963, stran 64, cena 2 Kčs.

Naše čtenáře dále upozorňujeme na to, že koncem kalendářního roku vyjdou ve 2. vydání tyto tři brožury z této knihovničky: Šedivý, Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách (2,60 Kčs); Hradecký a kol., Několik úloh z geometrie jednoduchých těles (3 Kčs); Šisler-Jarník, O funkcích (1,80 Kčs). Vedle toho vyjdou podle plánu tyto dva svazky: Šedivý, Podobná zobrazení; Váňa, O rovnicích s parametrem (asi do konce ledna 1964).

R. Z.

VÝSTAVA ELEKTRICKÝCH MĚŘICÍCH PŘÍSTROJŮ

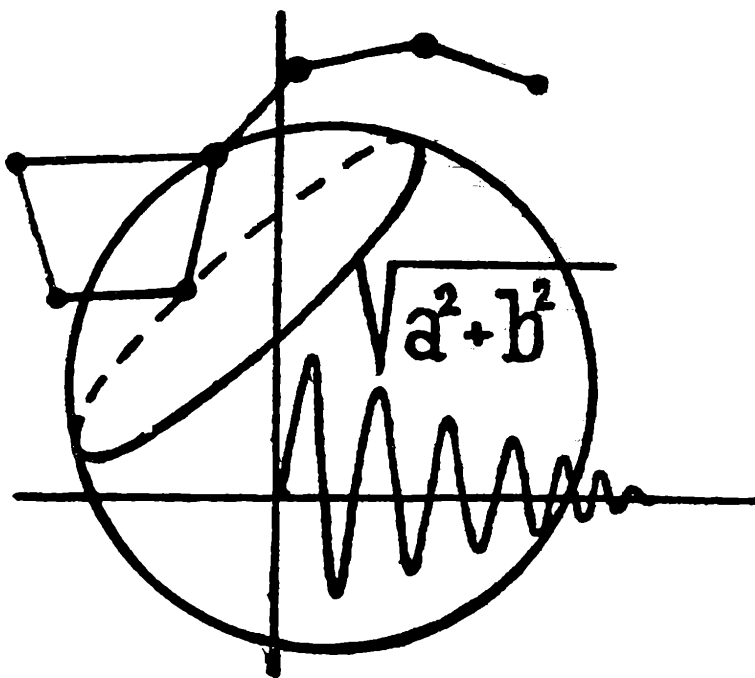
Ve výstavní síni národního podniku Učební pomůcky v Praze 1, Národní třída 20, pořádá tento podnik spolu s podnikem Metra Blansko výstavu elektrických měřicích přístrojů.

Výstava potrvá od 2. do 31. října 1963 a je otevřena denně mimo pondělí od 10 do 18 hodin, v neděli od 9 do 13 hodin. Vstup je volný.

M. M.

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



3

ROČ. 42

1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Listopad 1963

Číslo 3

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

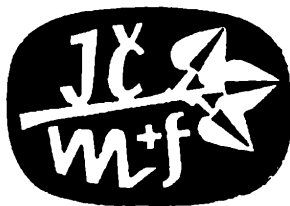
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; OSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

L. Galev, Sofie: Množiny s algebraickými operacemi	97
Inž. O. Lacina: O jednom způsobu definice funkce	101
F. Kuřina: Pravoúhlá axonometrie	105
M. Čechová: Geometrické zobrazení kulovými plochami	112
+ Doc. V. Rudolf: Skládání pohybů	116
J. Horský: Základy teorie relativity	121
Soutěž Rozhledů	127
Matematická olympiáda	129
J. Daneš: Pátá mezinárodní matematická olympiáda (Dokončení)	131
J. Sedláček, CSc: Jak probíhal XII. ročník matematické olympiády	132
P. Bartoš: O meraní výšky egyptských pyramid před 2500 rokmi	134
mk: Úloha z kombinatoriky	138
J. S.: Řešení úlohy o ornamentu	138
T. Szebényi: Spomienka na tvorcu seizmologie	141
Recenze	144
V. Chvátal: Matematika na horách	3. a 4. str. obálky

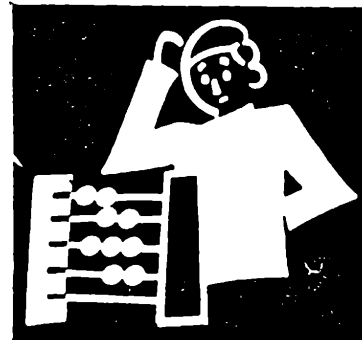


Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. O. Hömig. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.

A-16*31576

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1963.

Matematika



Ljuben Galev,
Vysoká škola technická, Sofie:

Množiny s algebraickými operacemi

(Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální)

V matematice je málo pojmů starších než pojem *algebraické operace*. Dávným a známým příkladem algebraických operací jsou čtyři základní početní výkony: sčítání, násobení, odčítání a dělení. Dostí úplný systém pravidel pro počítání s celými kladnými čísly najdeme dokonce v nejstarších dochovaných památkách týkajících se matematiky egyptské a babylonské. Než dosáhla algebra svého dnešního stavu, prošla dlouhou a křivolakou cestou.

Již z dětství známe množinu (souhrn, soubor) E celých nezáporných čísel $0, 1, 2, 3, \dots$. Jako žáci základní školy jsme se seznámili s množinami sudých čísel $0, 2, 4, 6, \dots$ (tuto množinu označíme E_2), čísel $0, 3, 6, 9, \dots$ dělitelných třemi (označíme E_3), čísel $0, 4, 8, 12, \dots$ dělitelných čtyřmi (označíme E_4), čísel $0, 5, 10, 15, \dots$ dělitelných pěti (označíme E_5) a jinými. Množina E_2 je podmnožinou (tj. částí) množiny E , protože každé sudé číslo je zároveň celé nezáporné; je tedy číslem náležejícím do množiny E . Rovněž je jasné, že i množiny E_3, E_4 a E_5 jsou podmnožinami množiny E . Kromě toho je množina E_4 podmnožinou množiny E_2 , protože každé číslo dělitelné čtyřmi je též sudé, tj. náleží množině E_2 sudých čísel.

V tomto článku jsou probrány některé pojmy moderní algebry, které mohou být ilustrovány příklady z množiny E a jejích podmnožin.

Celá nezáporná čísla množiny E a jejích podmnožin se nazývají *prvky* E , respektive prvky příslušné podmnožiny.

V množině E celých nezáporných čísel jsou ještě ze školy známy výkony sčítání, násobení a umocňování. Součet nebo součin dvou prvků množiny E je rovněž prvkem z E , např. $7 + 8 = 15$, $7 \cdot 8 = 56$, protože jak 7 a 8 , tak i 15 a 56 jsou celá nezáporná čísla.

Mocnina, jejíž základ a exponent jsou celá nezáporná čísla, je též rovna celému nezápornému číslu, tj. jak základ a exponent, tak i mocnina jsou prvky množiny E .

Je-li v určité množině dán předpis, kterým každé dvojici prvků této množiny je přiřazen třetí prvek téže množiny, říkáme, že v této množině je definována algebraická operace. Sčítání, násobení a umocňování jsou algebraické operace v množině celých nezáporných čísel E . Operace je označována jistým znakem, který se klade mezi dva dané prvky, např. znak „+“ pro operaci sčítání, znak „.“ pro operaci násobení. Kromě těchto znaků se užívají i znaky jiné. Znak „.“ pro násobení se užívá velmi často i pro jiné operace. V takovém případě se říká, že operace je dána v multiplikativním tvaru a výsledek se nazývá součin. Často se k označování některé operace užívá i znak „+“ pro sčítání. V takovém případě říkáme, že operace je dána v aditivním tvaru.

Algebraická operace se definuje (zadáva) buď předpisem, nebo prostě tabulkou, v níž jsou dány součiny každé dvojice prvků. Např. tabulka pro sčítání, tabulka pro násobení, které jsme si zapamatovali z dětství, zcela určují tyto dvě operace.

Operace v množině je asociativní, jestliže pro libovolné tři prvky A, B, C množiny platí

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ v multiplikativním tvaru,}$$

nebo

$$(A + B) + C = A + (B + C) \text{ v aditivním tvaru.}$$

Je zřejmé, že operace sčítání a násobení celých nezáporných čísel jsou asociativní. Nechtě však $A \cdot B$ označuje mocninu A^B , tj. $A \cdot B = A^B$. Pak $(2 \cdot 3) \cdot 2 = (2^3)^2 = 2^6$, ale $2 \cdot (3 \cdot 2) = 2^3$. Z tohoto příkladu je vidět, že umocňování není asociativní operace.

V našem článku budou nadále uvažovány pouze asociativní operace.

Algebraická operace v určité množině je komutativní, jestliže pro každé dva prvky A, B této množiny platí

$$A \cdot B = B \cdot A \quad \text{v multiplikativním tvaru,}$$

nebo

$$A + B = B + A \quad \text{v aditivním tvaru.}$$

Sčítání a násobení celých nezáporných čísel jsou zřejmě komutativní operace, zatímco umocňování není komutativní, protože (užijeme-li pro operaci umocňování znaku „.“) $2 \cdot 3 = 2^3$ a $3 \cdot 2 = 3^2$.

V dalším se uvažují pouze komutativní operace.

Říkáme, že k algebraické operaci v dané množině existuje operace inverzní, jestliže pro libovolné dva prvky A, B z této množiny můžeme vždycky nalézt prvek X téže množiny tak, že $A \cdot X = B$. K operacím sčítání a násobení neexistují v množině E operace inverzní, protože nelze najít celá nezáporná čísla X, Y , pro která by platilo $7 + X = 2, 7 \cdot Y = 2$.

Algebraická operace v dané množině připouští krácení, jestliže pro libovolné tři prvky A, B, X této množiny vždy z $A \cdot X = B \cdot X$ plyne $A = B$. Sčítání a násobení v E připouštějí krácení (jen pro násobení

musíme z E odstranit číslo 0), protože z $A + X = B + X$, nebo $A \cdot Y = B \cdot Y$ ($Y \neq 0$) vždy plyne $A = B$.

Každá algebraická operace může mít jednu nebo více výše uvedených vlastností, může však mít i jiné vlastnosti.

Množina, která obsahuje alespoň jeden prvek a v níž je zavedena asociativní algebraická operace, se nazývá *pologrupa*. Tato operace nemusí být komutativní; my se však v dalším budeme zabývat jen případem, kdy je komutativní.

Množina E celých nezáporných čísel 0, 1, 2, 3, ... je pologrupou pro operaci sčítání. Pro tutéž operaci jsou pologrupami i její podmnožiny E_2 (násobky dvou), E_3 (násobky tří), E_4 (násobky čtyř), E_5 (násobky pěti) atd.

Neprázdna podmnožina K pologrupy P (tj. K obsahuje aspoň jeden prvek) se nazývá její *podpologrupou*, jestliže K je pologrupou vzhledem k algebraické operaci v P . Pro sčítání v množině E jsou podmnožiny E_2, E_3, E_4, E_5 podpologrupami, protože součet dvou celých nezáporných čísel je dělitelný určitým číslem právě tehdy, je-li tímto číslem dělitelný každý z obou sčítanců. Kromě toho je pro sčítání v E podmnožina E_4 podpologrupou podpologrupy E_2 pologrupy E .

Rovněž pro operaci násobení je množina E pologrupou a její podmnožiny E_2, E_3, E_4, E_5 jsou podpologrupami. Kromě toho je součin jakéhokoliv celého nezáporného čísla s číslem sudým též číslo sudé. To se krátce označuje takto: $E \cdot E_2 = E_2$.

Neprázdna podmnožina I pologrupy P se nazývá *ideálem* na P , jestliže součin kteréhokoliv prvku z P s prvkem z I je prvkem z I , tj. $P \cdot I$ je částí I . Z toho vyplývá, že E_2 je ideálem na E vzhledem k násobení v E . Ideály na E vzhledem k násobení jsou i E_3, E_4 a E_5 . Množina obsahující pouze jediný prvek 0 je ideál, protože součin je roven nule, jestliže aspoň jeden ze součinitelů je nula, tj. $E \cdot 0 = 0$.

Součet a součin dvou jednociferných čísel je jednociferné nebo dvouciferné číslo. Dohodněme se, že v součtu nebo součinu dvou jednociferných čísel ponecháme pouze číslo označující jednotky. Např.

$$\begin{array}{ll} 4 + 2 = 6, & 3 \cdot 2 = 6, \\ 7 + 8 = 5, & 6 \cdot 6 = 6, \\ 3 + 7 = 0, & 4 \cdot 5 = 0. \end{array}$$

‡ Takto zavedené operace „sčítání“ a „násobení“ jsou odlišné od těch, na které jsme zvyklí. Při nové definici je součet a součin dvou jednociferných čísel rovněž číslo jednociferné. To znamená, že množina K_{10} složená z prvků 0, 1, ..., 9 je pologrupou pro obě nové algebraické operace „sčítání“ a „násobení“. Snadno se přesvědčíme, že obě tyto operace jsou asociativní a komutativní. Platí pro ně též jak distributivní zákon

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$$

tak i všechny identity, ve kterých se vyskytují operace sčítání a násobení, např.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2,$$

$$(A + B)(X + Y) = A \cdot X + B \cdot X + A \cdot Y + B \cdot Y.$$

Algebraické operace na množinách s konečným počtem prvků se s výhodou zadávají tabulkou. Tabulka, jíž se operace zadává, se nazývá **C a y l e y h o t a b u l k a**.

Uvedme tabulky pro zmíněné nové operace

		„Sčítání“											„Násobení“								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9			1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	2	4	6	8	0	2	4	6	8		
3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	3	6	9	2	5	8	1	4	7		
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	4	8	2	6	0	4	8	2	6		
5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	5	0	5	0	5	0	5	0	5		
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	6	2	8	4	0	6	2	8	4		
7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	7	4	1	8	5	2	9	6	3		
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8	6	4	2	0	8	6	4	2		
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1		

Tyto dvě tabulky dostaneme snadno z tabulek pro sčítání a násobení, které si pamatujeme z dětství, jestliže v nich ponecháme pouze cifru označující jednotky v každém součtu nebo součinu. Množina K_{10} prvků $0, 1, \dots, 9$ s uvedeným „násobením“ je velmi zajímavá pologrupa. V této pologrupě, jak je vidět z její tabulky pro „násobení“, existují „zvláštní“ součiny.

$$2 \cdot 6 = 2, \quad 4 \cdot 6 = 4, \quad 8 \cdot 6 = 8.$$

Prvek B se nazývá **j e d n o t k o u p r v k u A** a prvek A se nazývá **n u l o u p r v k u B** , jestliže

$$A \cdot B = A.$$

Z uvedené definice plyne, že prvek 6 je jednotkou prvků $2, 4, 6$ a tyto jsou nulami prvků 6 (rozumí se v pologrupě K_{10} s výše zavedenou operací „násobení“).

Prvek se nazývá **j e d n o t k o u p o l o g r u p y**, jestliže je jednotkou všech jejích prvků. Prvek je **n u l o u p o l o g r u p y**, je-li nulou všech jejích prvků.

Prvek 0 je nulou a prvek 1 jednotkou pologrupy K_{10} s algebraickou operací „násobení“.

Táž tabulka pro „násobení“ v K_{10} ukazuje, že existují prvky různé od nuly, jejichž součin se přesto rovná nule

$$2 \cdot 5 = 0, \quad 4 \cdot 5 = 0, \quad 6 \cdot 5 = 0, \quad 8 \cdot 5 = 0.$$

Takové prvky se nazývají **d ě l i t e l é n u l y**. Existují rovněž

idempotentní prvky, tj. takové, jejichž čtverec je roven témuž prvku

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1, \quad 5 \cdot 5 = 5, \quad 6 \cdot 6 = 6.$$

Jak je zřejmé z Cayleyho tabulky pro „násobení“ v K_{10} , tvoří množina prvků 0, 2, 4, 6, 8 podpologrupu a ideál množiny K_{10} . Podpologrupu a ideál množiny K_{10} tvoří též prvky 0, 5. Prvek 0 tvoří nulový ideál množiny K_{10} .

Z Cayleyho tabulky pro operaci „sčítání“ v K_{10} je vidět, že inverzní operace „odčítání“ vždy existuje. Například

$$2 - 5 = 7, \text{ protože } 7 + 5 = 2;$$

$$0 - 3 = 7, \text{ protože } 7 + 3 = 0;$$

$$4 - 8 = 6, \text{ protože } 6 + 8 = 4.$$

Obecně platí, že pro libovolné dva prvky A a B vždy existuje jediný prvek X téže pologrupy, pro který

$$A + X = B.$$

Prvek X se v tomto případě nazývá opačným k A vzhledem k B . Uvedená rovnost je v aditivním tvaru. Její multiplikatívni zápis je

$$A \cdot X = B.$$

(Pokračování)

Inž. Otakar Lacina, ČKD-Praha:

O jednom způsobu definice funkce

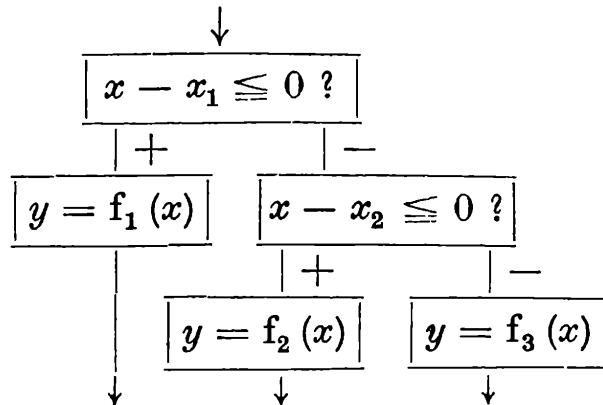
V Rozhledech matematicko-fyzikálních č. 3. a č. 4. z roku 1962 byl uveřejněn článek Stanislava Trávníčka O jednom způsobu definice funkce. V tomto příspěvku jsou uvedeny některé skutečnosti, které zmíněný článek doplňují, a to praktické použití odvozených vztahů, odvození dalšího vztahu s příkladem a poukaz na další možnost použití výsledků.

1. Využití odvozených vztahů

Výhodu vyjádření závislosti definovaných několika funkcemi s různými obory platnosti jednou rovnicí lze využít při návrhu programu pro samočinné číslicové počítačové stroje. Uvedené funkce se běžně programují logickými funkcemi, kterými se rozhodne, podle které rovnice má být žádaná hodnota vypočtena. Například závislost definovanou

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{pro } x \leq x_1 \\ f_2(x) & \text{pro } x_1 < x \leq x_2 \\ f_3(x) & \text{pro } x > x_2 \end{cases}$$

lze řešit blokovým schématem



Z uvedeného blokového schématu vyplývá, že použitím vyjádření vztahu pomocí jedné rovnice se může v řadě případů podstatně zjednodušit program výpočtu, zmenšit počet nutných instrukcí a zkrátit strojní čas, zvláště proto, že výpočet absolutní hodnoty je jednou z instrukcí samočinných počítačích strojů. Výhoda vynikne zejména tehdy, prochází-li se během výpočtu podprogramem pro výpočet závislosti několikrát, například při řešení diferenciálních rovnic při každém integračním kroku.

2a) Odvození dalšího vztahu

Podobně jako byl odvozen vztah pro vyjádření průběhu složeného ze tří přímk, můžeme odvodit vztah pro vyjádření průběhu složeného ze dvou přímk.

Je dána funkce definovaná

$$f_1(x) = k_1 x + q_1 \quad (x \leq x_0),$$

$$f_2(x) = k_2 x + q_2 \quad (x \geq x_0).$$

Podle věty V. 1. uvedeného článku

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} (k_1 x + q_1 + k_2 x + q_2) = \frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x + q_1 + q_2],$$

$$\beta(x) = \frac{1}{2} (k_1 x + q_1 - k_2 x - q_2) = \frac{1}{2} (k_1 - k_2)(x - x_0).$$

Protože v bodě $x = x_0$ je

$$f_1(x_0) = f_2(x_0),$$

$$k_1 x_0 + q_1 = k_2 x_0 + q_2,$$

$$q_1 - q_2 = - (k_1 - k_2) x_0.$$

Podle věty V. 2. bude

$$y = \frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x + q_1 + q_2] - \frac{1}{2} (k_1 - k_2)(x - x_0) \frac{|x - x_0|}{x - x_0}$$

a po zkrácení

$$y = \frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x + q_1 + q_2] - \frac{1}{2} (k_1 - k_2) |x - x_0|.$$

Kontrola výsledku

$$x_0 = -\frac{q_1 - q_2}{k_1 - k_2}.$$

Pokud je $(x - x_0) > 0$, je možno psát

$$y = \frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x + q_1 + q_2] - \frac{1}{2} (k_1 - k_2)(x - x_0),$$

$$y = \frac{1}{2} (k_1 x + k_2 x + q_1 + q_2 - k_1 x + k_2 x - q_1 + q_2),$$

$$y = k_2 x + q_2$$

Pokud je $(x - x_0) < 0$, je možno psát

$$y = \frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x + q_1 + q_2] + \frac{1}{2} (k_1 - k_2)(x - x_0),$$

$$y = \frac{1}{2} (k_1 x + k_2 x + q_1 + q_2 + k_1 x - k_2 x + q_1 - q_2),$$

$$y = k_1 x + q_1$$

Pro $(x - x_0) = 0$ je možno psát

$$y = \frac{1}{2} [(k_1 + k_2)x_0 + q_1 + q_2],$$

$$y = \frac{1}{2} k_1 x_0 + \frac{1}{2} k_2 x_0 + \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{2} q_2 = \frac{1}{2} (k_1 x_0 + q_1) + \frac{1}{2} (k_2 x_0 + q_2).$$

Protože v místě $x = x_0$ platí $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, výsledek souhlasí.

2b) *Příklad pro odstavec 2a)*

Průběh úbytku napětí na větvi polovodičového usměrňovače lze přibližně vyjádřit závislostí

$$\Delta u_y = \begin{cases} \frac{n_s}{k n_p} \cdot R_z \cdot i & \text{pro } i \leq \frac{k n_p U_{ph}}{R_z - R_{dif}} \\ n_s U_{ph} + \frac{n_s}{k n_p} \cdot R_{dif} \cdot i & \text{pro } i \geq \frac{k n_p U_{ph}}{R_z - R_{dif}}, \end{cases}$$

kde značí: Δu úbytek na větvi usměrňovače ve voltech,
 i proud větvi usměrňovače v ampérech,
 R_z závěrný odpor jednoho ventilu v ohmech,
 R_{dif} diferenciální odpor jednoho ventilu v ohmech,
 U_{ph} prahové napětí ve voltech,
 n_s počet sériově spojených ventilů,
 n_p počet paralelně spojených ventilů,
 k činitel respektující nerovnoměrné rozdělení proudu.

Porovnání s odvozenými vztahy

$$k_1 = \frac{n_s}{k n_p} R_z \quad q_1 = 0 ,$$

$$k_2 = \frac{n_s}{k n_p} R_{dif} \quad q_2 = n_s U_{ph} ,$$

$$x_0 = \frac{k n_p U_{ph}}{R_z - R_{dif}}$$

Dosazení do výsledku

$$\Delta u = \frac{1}{2} \left[\frac{n_s}{k n_p} (R_z + R_{dif}) i + n_s U_{ph} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{n_s}{k n_p} (R_z - R_{dif}) \left| i - \frac{k n_p U_{ph}}{R_z - R_{dif}} \right|$$

Pro určité zapojení větve usměrňovače bude

$$\Delta u = [A i + B] - |C i - D|$$

Tento výsledek je pro některé výpočty výhodnější než zadaný vztah.

3. Možnost dalšího využití odvozených vztahů

Vztahů odvozených v uvedeném článku lze použít i pro vyjádření některých periodických funkcí. Uvedme příklad:

Jednocestně usměrněná sinová funkce je definována

$$y = \begin{cases} \sin \omega t & \text{pro } 2k\pi \leq \omega t \leq (2k+1)\pi , \\ 0 & \text{pro } (2k+1)\pi \leq \omega t \leq 2(k+1)\pi . \end{cases}$$

Pro vyjádření volíme

$$f_1(\omega t) = \sin \omega t ,$$

$$f_2(\omega t) = 0 ,$$

$$\alpha(\omega t) = \frac{1}{2} \sin \omega t ,$$

$$\beta(\omega t) = \frac{1}{2} \sin \omega t ,$$

$$\varphi(\omega t) = -\sin \omega t .$$

Podle věty V. 1. je

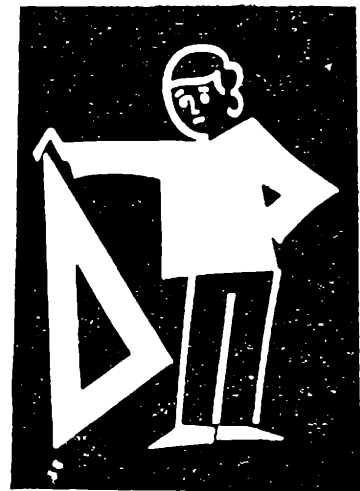
$$y = \frac{1}{2} \cdot \sin \omega t + \frac{1}{2} \sin \omega t \frac{|\sin \omega t|}{\sin \omega t} , \quad \omega t \neq k \cdot \pi .$$

Po krácení dostaneme

$$y = \frac{1}{2} (\sin \omega t + |\sin \omega t|) ,$$

platné pro každé ωt .

Deskriptivní geometrie



František Kuřina, PI, Hradec Králové:

Pravoúhlá axonometrie

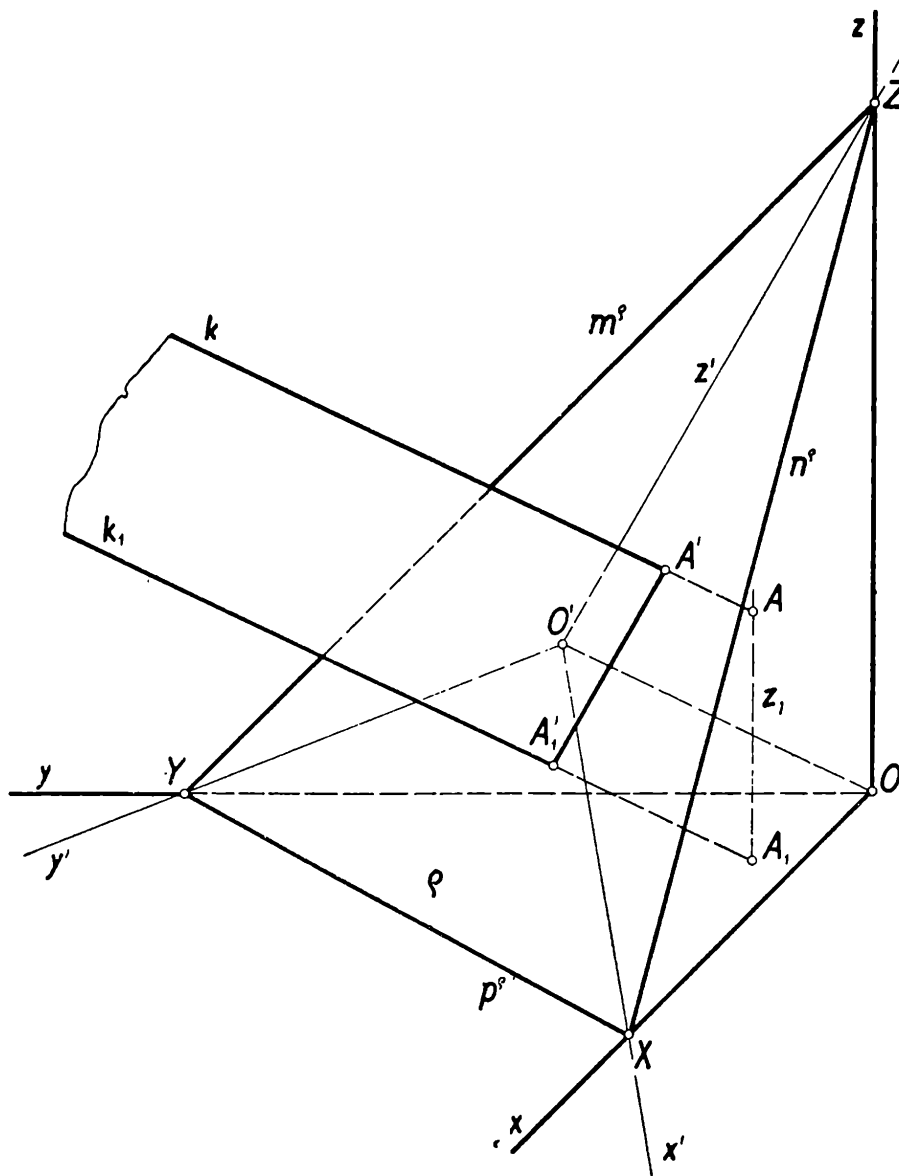
V technické praxi velmi často potřebujeme zobrazit těleso (obyčejně prostorový útvar, který můžeme abstraktně chápat jako geometrický útvar) do roviny. Studium různých zobrazovacích metod se zabývá deskriptivní geometrie. Úkolem tohoto článku je podat přehlednou informaci o tzv. pravoúhlé axonometrii.

Všichni znáte ze školy pravoúhlé promítání na jednu či na dvě průmětny. V praxi se obvykle zobrazují tělesa „v přirozené poloze“, např. „průčelná poloha“ tělesa, které spočívá na „vodorovné“ rovině. Potom ovšem jsou jejich pravoúhlé průměty do vodorovné a svislé průmětny málo názorné. Chceme-li ponechat tělesa „v přirozené poloze“ a získat názornější obrazy, umístíme průmětnu do „obecné“ polohy a aby se zachovala jednoduchost konstrukcí, budeme do takovéto průmětny promítat pravoúhle.

Formulujme nyní přesněji výše naznačené myšlenky.

Nechť x , y , z jsou tři přímky po dvou navzájem kolmé, které procházejí bodem O . Označme roviny $xy \equiv \pi$, $yz \equiv \mu$, $zx \equiv \nu$. Nechť ρ je libo-

volná rovina, která neobsahuje bod O , ale protíná přímky x, y, z pořadě v bodech X, Y, Z (obr. 1). Pravoúhlý průmět bodu A do roviny ρ nazýváme *axonometrický průmět bodu A* a značíme např. A' . Je-li A_1 pravoúhlý průmět bodu A do roviny π , nazveme jeho axonometrický průmět A'_1 *axonometrickým půdorysem bodu A* . Je-li A_2 pravoúhlý průmět bodu A do roviny ν , nazveme jeho axonometrický průmět A'_2 *axonometrickým nárysem bodu A* .

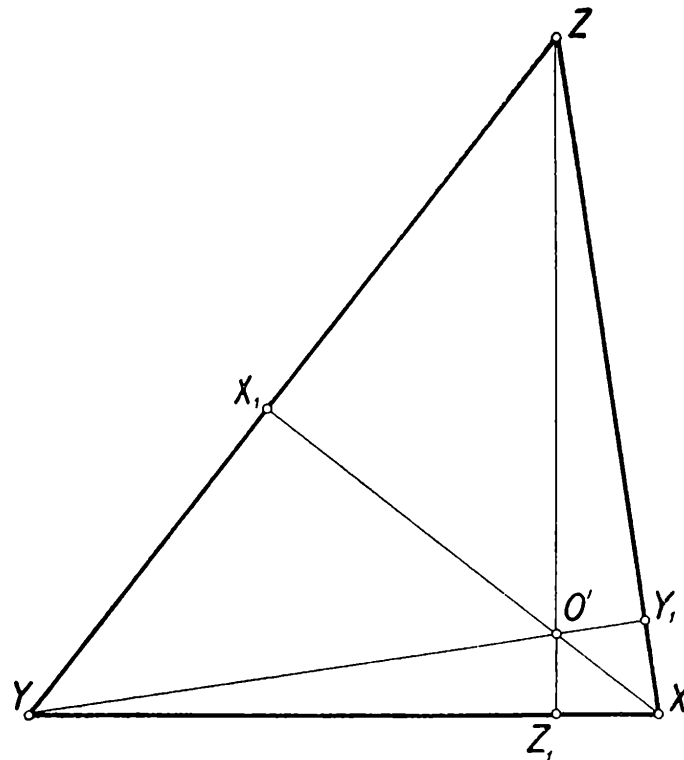


Obr. 1

Zobrazení, ve kterém každému bodu A v prostoru je přiřazen bod A' v rovině ρ popsáním způsobem, se nazývá *pravoúhlá axonometrie*. Rovina ρ se nazývá *axonometrická průmětna*, trojúhelník XYZ *axonometrický trojúhelník*. Přímky $XY \equiv p^e$, $YZ \equiv m^e$, $XZ \equiv n^e$ (průsečnice roviny ρ a rovin π, μ, ν) jsou tzv. *axonometrické stopy rovin π, μ, ν* .

Protože pravoúhlá axonometrie je pravoúhlé promítání, můžeme na ni aplikovat všechny poučky známé o pravoúhlém promítání ze stereo-

metrie. Zřejmě libovolnému bodu prostoru je přiřazen jediný axonometrický průmět. Protože $A A_1 \parallel z \equiv O Z$ je $A' A'_1 \parallel z' \equiv O' Z$. Axonometrickým průmětem není bod v prostoru určen; je však určen např. svým axonometrickým průmětem A' a axonometrickým půdorysem A'_1 . Skutečně. Označíme-li σ rovinu $O'ZO$, k kolmici k ρ incidentní s bodem A' , k_1 kolmici k ρ incidentní s bodem A'_1 , je $kk_1 \parallel \sigma$, neboť je $k \parallel OO'$, $A'_1 A' \parallel z'$. Existuje jediný průsečík $k_1 \cdot \pi \equiv A_1$ (obr. 1). Přímka z_1 rovnoběžná se z vedená bodem A_1 náleží rovině kk_1 a v ní existuje jediný průsečík $A \equiv z_1 \cdot k$.



Obr. 2

Je-li v prostoru zaveden pravoúhlý souřadný systém o osách x, y, z , volíme obyčejně rovinu ρ tak, aby všechny souřadnice bodů X, Y, Z byly kladné.

Všimněme si některých vlastností axonometrického trojúhelníka XYZ . Platí věta:

Axonometrický trojúhelník XYZ libovolné pravoúhlé axonometrie je vždy ostroúhlý.

D ů k a z. Označme velikosti úseček $XO = x, YO = y, ZO = z, XY = p, XZ = n, YZ = m$. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelníky $\triangle XOZ, \triangle YOZ, \triangle XOY$ dostaneme

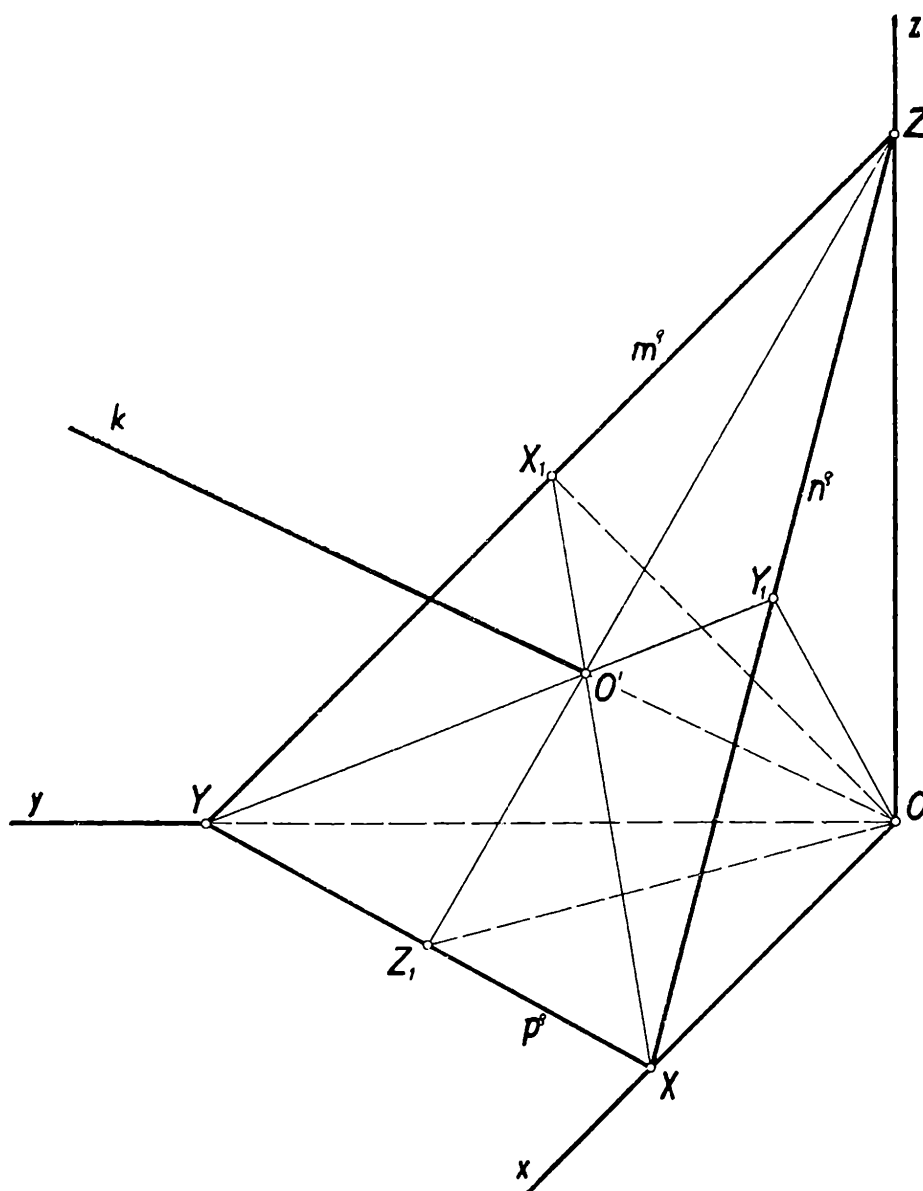
$$\begin{aligned} m^2 &= y^2 + z^2 \\ p^2 &= x^2 + y^2 \\ n^2 &= x^2 + z^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Podle kosinové věty pro $\triangle XYZ$ platí (označme $\sphericalangle XZY = \varphi$)

$$p^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos \varphi.$$

Po dosazení podle (1) a po úpravě máme $2z^2 = 2mn \cdot \cos \varphi$. Je tedy $\cos \varphi > 0$ a $\varphi < 90^\circ$. Zcela stejně lze odvodit i pro zbývající úhly trojúhelníka XYZ , že jsou ostré.

Podle konstrukce je $XY \perp OZ$ a $XY \parallel \rho$. Podle poučky o pravoúhlém průmětu pravého úhlu je $O'Z \perp XY$. Je tedy $O'Z$ výška axonometrického trojúhelníka XYZ . Analogicky i pro zbývající výšky. Platí tedy věta:



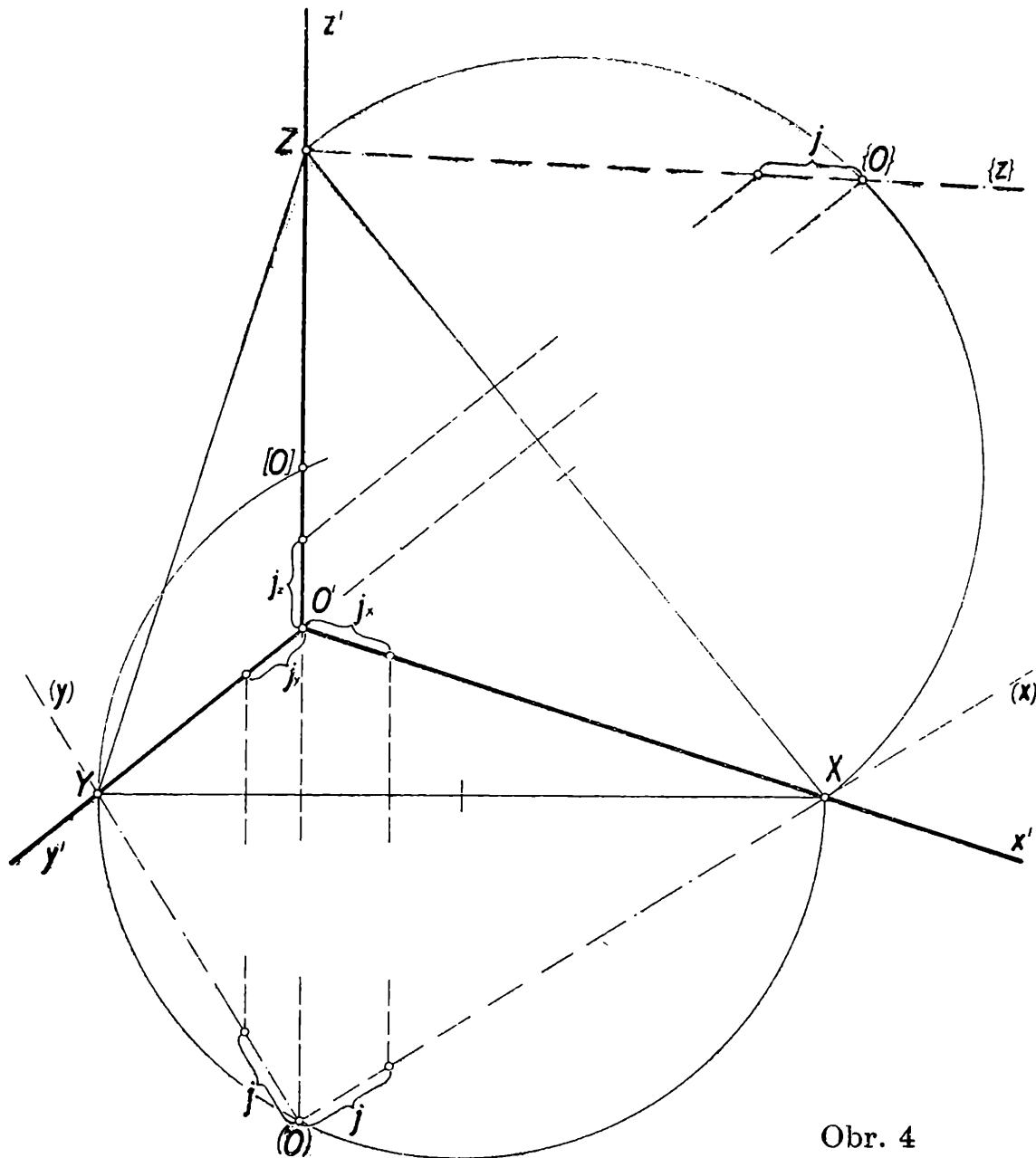
Obr. 3

Výšky axonometrického trojúhelníka jsou axonometrickými průměty souřadnicových os. Průsečík výšek axonometrického trojúhelníka je axonometrickým průmětem počátku.

Platí i obráceně:

Každý ostroúhlý trojúhelník lze považovat za axonometrický trojúhelník pravoúhlé axonometrie. Výšky tohoto trojúhelníka jsou axonometrickými průměty souřadných os, průsečík výšek je axonometrický průmět počátku.

Poloha os x, y, z je volbou axonometrického trojúhelníka určena v prostoru, až na souměrnost podle roviny XYZ , jednoznačně.



Obr. 4

D ů k a z. Trojúhelník XYZ je libovolný ostroúhlý trojúhelník, O' je průsečík jeho výšek; X_1, Y_1, Z_1 jsou pořadě paty jeho výšek na YZ, XZ, XY . Označme velikosti úseček $ZO' = z_1, O'Z_1 = z_2, YO' = y_1, O'Y_1 = y_2, XO' = x_1, O'X_1 = x_2$ (obr. 2).

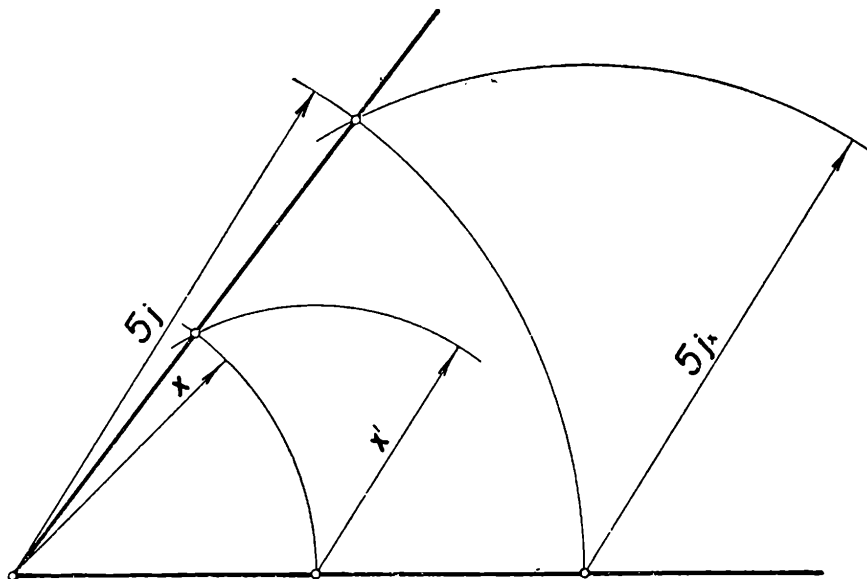
Protože $\triangle XZ_1O' \sim \triangle ZX_1O'$ a $\triangle YZ_1O' \sim \triangle ZY_1O'$ platí

$$\frac{z_2}{x_1} = \frac{x_2}{z_1}, \quad \frac{z_2}{y_1} = \frac{y_2}{z_1}.$$

Všimněme si v dalším konstrukci obrazu bodu v axonometrii, je-li dán axonometrický trojúhelník a poloha bodu v prostoru je určena pravouhlými souřadnicemi x_0, y_0, z_0 .

Zřejmě jednotky měření délek na osách x, y, z se pravouhlým promítáním zkracují do jednotek j_x, j_y, j_z . Jejich velikosti snadno zjistíme otočením rovin π a ν do roviny ρ kolem příslušných stop. Konstrukce je zřejmá z obr. 4 (užijeme ovšem výhodně Thaletovy věty).

Otočení roviny π do roviny ρ lze provést s dvojím výsledkem; jednou přejde bod O do bodu $[O]$ poloroviny XYO' , podruhé do bodu (O) poloroviny opačné.

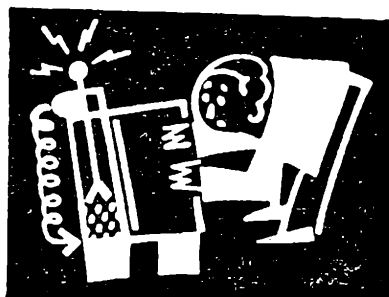


Obr. 6

Sestrojíme-li měřítko M_x, M_y, M_z pro jednotlivé osy (odtud vzniklo i označení tohoto druhu promítání) podle zkrácených jednotek, lze axonometrický průmět bodu $A(x_0; y_0; z_0)$ sestavit způsobem zřejmým na obr. 5, kde je zobrazen bod $A(4; 2; 3,5)$.

Protože obvykle souřadnice bodů nebo rozměry zobrazovaného tělesa - nejsou celá čísla, používá se pro zkrácení na jednotlivých osách redukčního úhlu podle obr. 6, kde je provedena redukce souřadnice x na x' (pro $x = 5$). Sestrojení redukčního úhlu (obr. 6) pro axonometrii z obr. 4: $x = X(O), x' = XO'$. Zdůvodnění této konstrukce přenechávám čtenáři.

Pro praxi jsou důležité různé metody rychlého sestavování axonometrických průmětů těles. O jedné z nich, tzv. Wunderlichově, pojednal L. Granát v článku *Jednoduché zobrazovací metody* (Rozhledy roč. 38, str. 170).



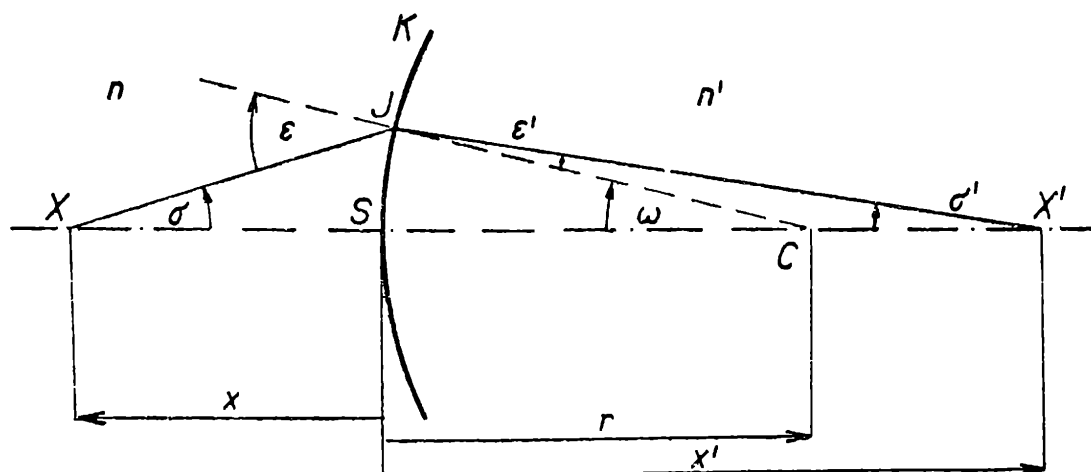
Marie Čechová, PU, Olomouc:

Geometrické zobrazení kulovými plochami

Studijní text k V. roč. FO, k úloze 6 kat. A.

1. Zobrazení kulovou plochou

1.1 *Zobrazení bodu kulovou plochou.* Naším úkolem je určit polohu obrazu bodu X , který leží na optické ose kulové plochy K (obr. 1). Kulová plocha K o poloměru r je rozhraním mezi dvěma homogenními izotropními prostředími o indexech lomu n, n' . Paprsky, které vycházejí z bodu X v paraxiálním prostoru, se po lomu na ploše K protínají v jednom bodě X' , který je obrazem bodu X . Ze všech paprsků, které se účast-



Obr. 1

ní zobrazení, vybereme dva. Pro jednoduchost si zvolíme jeden paprsek totožný s optickou osou. Takový paprsek je kolmý na lámavou plochu a při průchodu lámavou plochou nemění směr. Druhý paprsek zvolíme libovolně v paraxiálním prostoru tak, že svírá s optickou osou velmi malý úhel σ . Paprsek dopadá na kulové rozhraní pod úhlem ϵ , láme se pod úhlem ϵ' a protíná optickou osu v bodě X' , který je obrazem bodu X .

V paraxiálním prostoru jsou také úhly ϵ a ϵ' velmi malé, a proto zákon lomu pro ně platí ve tvaru

$$\frac{\sin \epsilon}{\sin \epsilon'} \doteq \frac{\epsilon}{\epsilon'} = \frac{n'}{n}, \quad (1)$$

kde úhly ε a ε' měříme v radiánech.

V trojúhelníku XCJ platí

$$\omega + \sigma = \varepsilon. \quad (2)$$

Ze vztahu (1) a (2) vyloučíme ε

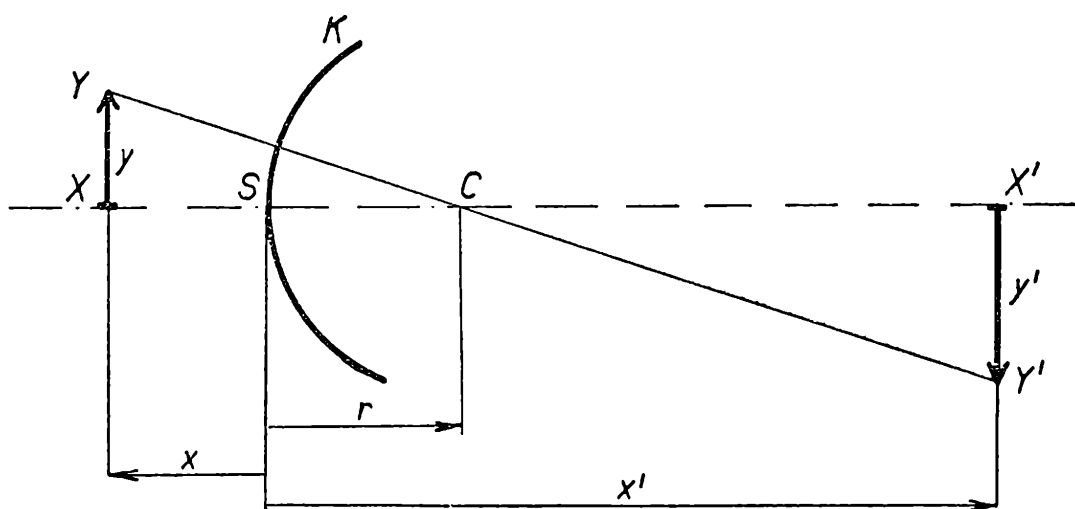
$$\omega + \sigma = \frac{n'}{n} \varepsilon' \quad (3)$$

ε' určíme ze vztahu pro úhly v trojúhelníku $X'CJ$

$$\varepsilon' = \omega - \sigma'$$

a dosadíme do vztahu (3)

$$n(\omega + \sigma) = n'(\omega - \sigma') \quad (4)$$



Obr. 2

Poněvadž je úhel σ velmi malý, můžeme oblouk \widehat{SJ} považovat za úsečku kolmou k optické ose a vyjádřit velikosti úhlů σ , ω , σ' měřené v radiánech jejich tangenty

$$\sigma = \frac{SJ}{r}, \quad \omega = \frac{SJ}{x}, \quad \sigma' = \frac{SJ}{x'}.$$

Tyto hodnoty dosadíme do vztahu (4) a rovnici dělíme číslem vyjadřujícím délku SJ . Dostáváme

$$\frac{n}{x} + \frac{n'}{x'} = \frac{n' - n}{r} \quad (5)$$

Vztah (5) je vrcholová zobrazovací rovnice pro kulovou plochu.

Příklad. Pro $n = 1$, $n' = 1,516$, $r = 35,0$ mm, $x = 100$ mm, vypočítáme $x' = 319$ mm.

1.2. *Příčné zvětšení.* Příčné zvětšení definujeme v rovině kolmé k optické ose.

Mějme úsečku XY kolmou k optické ose (obr. 2). Obraz bodu X je bod

X' ležící na ose ve vzdálenosti x' od vrcholu plochy, která odpovídá zobrazovací rovnici (5). Koncový bod Y' leží také na kolmici k optické ose a jeho polohu určíme užitím paprsku procházejícího středem C kulové plochy. Označme délky

$$XY = y, \quad X'Y' = y',$$

pak příčné zvětšení β definujeme vztahem

$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (6)$$

Z podobnosti trojúhelníků XCY a $X'CY$ platí

$$\frac{y'}{y} = \frac{x' - r}{x + r}.$$

Do tohoto vztahu dosadíme za r ze zobrazovací rovnice (5)

$$r = \frac{x x' (n' - n)}{n x' + n' x}.$$

Po jednoduché úpravě dostáváme pro příčné zvětšení vztah

$$\beta = \frac{n x'}{n' x}. \quad (7)$$

Jestliže bereme v úvahu orientaci úseček x a x' od počátečního bodu S , má β znaménko $-$, je-li obraz převrácený a znaménko $+$, je-li obraz přímý.

2. Zobrazení soustavou k kulových ploch

Soustava kulových ploch, jejichž středy křivosti leží na optické ose, se nazývá *centrovaná soustava*.

Při zobrazování bodu X_1 soustavou k centrovaných kulových ploch postupujeme obecně takto: Nejprve bod X_1 zobrazíme první kulovou plochou do bodu X'_1 . Dále považujeme obraz $X'_1 \equiv X_2$ za předmět a zobrazíme jej druhou kulovou plochou v bodě X'_2 . Podobně zobrazíme bod $X'_2 \equiv X_3$ třetí kulovou plochou atd., až ke k -té kulové ploše. Obraz X'_k je pak obrazem bodu X_1 při zobrazování soustavou k kulových ploch.

2.1. *Zobrazení soustavou dvou kulových ploch.* Jsou dány dvě centrované kulové plochy K_1, K_2 o poloměrech r_1 a r_2 , vzdálené od sebe na optické ose o délku d . Plochy jsou rozhraními tří optických prostředí n_1, n_2, n (obr. 5). Máme určit obraz bodu X_1 , který leží na optické ose.

Najdeme nejprve obraz X'_1 bodu X_1 , který vytvoří plocha K_1 . Jeho vzdálenost x'_1 od vrcholu S_1 určíme podle vztahu (5), který podle zvoleného označení má tvar

$$\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x'_1} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}.$$

Odtud vypočítáme vzdálenost

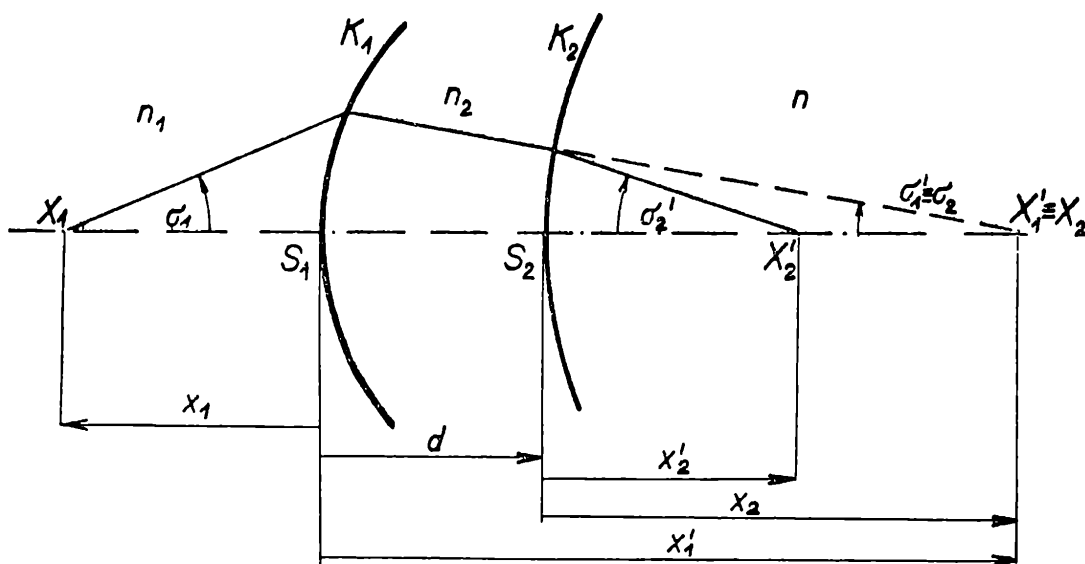
$$x'_1 = \frac{r_1 n_2 x_1}{n_2 x_1 - n_1 (x_1 + r_1)}. \quad (8)$$

Nyní zobrazíme bod $X'_1 \equiv X_2$ plochou K_2 . Jeho vzdálenost x'_2 od vrcholu S_2 určíme podle vztahu (5), který podle zvoleného označení má tvar

$$\frac{n_2}{x_2} + \frac{n}{x'_2} = \frac{n - n_2}{r_2},$$

přítom $x_2 = x'_1 - d$. Odtud vypočítáme vzdálenost

$$x'_2 = \frac{r_2 n (x'_1 - d)}{n (x'_1 - d) - n_2 (x'_1 - d + r_2)}. \quad (9)$$



Obr. 3

Do tohoto vztahu dosadíme za x'_1 z rovnice (8).

2.2 *Příčné zvětšení.* Jestliže úsečka y_1 má počátek v bodě X_1 a je kolmá k optické ose, je jejím obrazem při zobrazení plochou K_1 úsečka délky y'_1 v bodě X'_1 . Tato úsečka je předmětem y_2 při zobrazení druhou kulovou plochou K_2 a jejím obrazem je úsečka y'_2 . Příčné zvětšení soustavy tedy je

$$\beta = \frac{y'_2}{y_1}.$$

Podle vztahu (7) je zvětšení pro první plochu

$$\beta_1 = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{y_2}{y_1},$$

odtud určíme

$$y_1 = \frac{y_2}{\beta_1}.$$

Podobně zvětšení pro druhou plochu je

$$\beta_2 = \frac{y_2'}{y_2}.$$

Odtud určíme

$$y_2' = \beta_2 y_2.$$

Výsledné příčné zvětšení je tedy

$$\beta = \beta_2 y_2 \cdot \frac{\beta_1}{y_2} = \beta_1 \beta_2. \quad (10)$$

Výsledné příčné zvětšení se rovná součinu zvětšení na jednotlivých kulových plochách. To platí obecně i pro soustavu k lámavých kulových ploch.

Dosadíme-li ze vztahu (7) do rovnice (10), dostaneme pro příčné zvětšení soustavy dvou kulových ploch

$$\beta = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{x_1' x_2'}{x_1 x_2}.$$

Literatura:

J. Fuka - B. Havelka, *Optika*, SPN Praha 1961.

B. N. Begunov, *Geometričeskaja optika*, Izd. Mosk. Univ. 1961.

† Doc. Vladimír Rudolf, PU, Olomouc:

Skládání pohybů

Studijní text pro první kolo V ročníku FO kategorie C

V přírodě, ve vědě, i v technické praxi nastává často případ, že těleso koná současně dva i více pohybů. Ve skutečnosti ovšem koná jen jeden pohyb, který považujeme za složený z jednotlivých pohybů.

Příkladem skládání pohybů je přechod napříč lodí, která je unášena proudem (obr. 1). Předpokládejme nejprve, že loď stojí. Pak by osoba přešla z místa O napříč do místa A za určitou dobu t (obr. 1a). Za tuto dobu se loď, je-li unášena proudem, posune z polohy (1) do polohy (2) (obr. 1b), takže bod O přejde do místa B . Chůzi na jedoucí lodi znázorňuje obr. 1c. Oba pohyby se překládají, aniž by se navzájem ovlivňovaly. Osoba se dostane za dobu t do bodu C . Do tohoto bodu by se dostala i tehdy, kdyby se oba pohyby konaly nikoli současně, ale po sobě, a to v libovolném pořadí. Trvalo by to ovšem dvojnásobnou dobu $2t$.

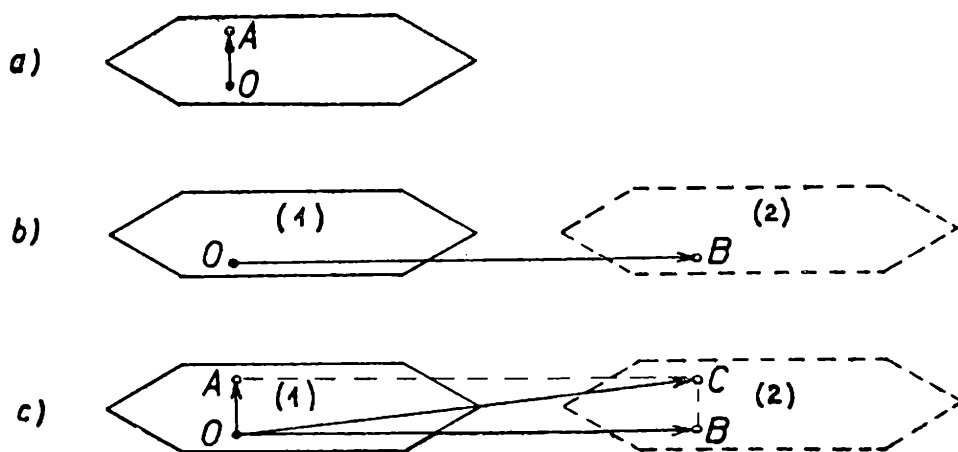
Na základě zkušeností a pokusů byla odvozena *věta o nezávislosti pohybů*:

Koná-li těleso současně několik pohybů, pak se tyto pohyby překládají, aniž by se vzájemně ovlivňovaly.

Tuto větu poprvé vyslovil Galilei.

Věta o nezávislosti pohybů se nedá matematicky dokázat, ale přesto ji považujeme za správnou, neboť všechny důsledky z ní plynoucí se shodují se zkušeností.

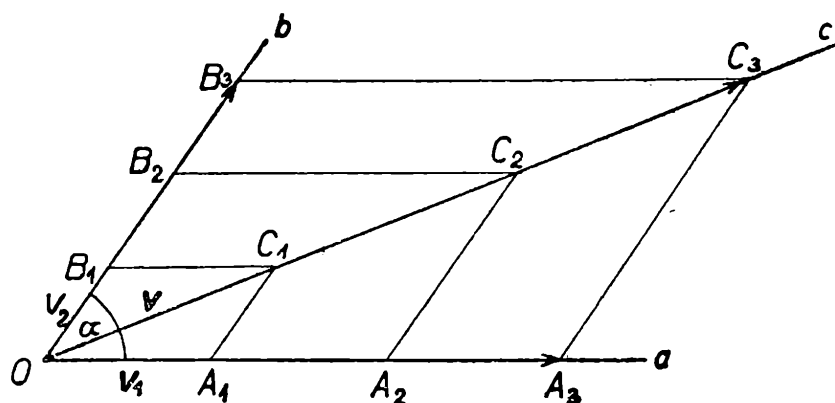
V dalším se omezíme na příklady skládání dvou pohybů.



Obr. 1

1. Skládání dvou pohybů přímočarých rovnoměrných

Jsou-li oba částečné pohyby přímočaré rovnoměrné, je i výsledný pohyb přímočarý rovnoměrný. Plyne to snadno z obr. 2. Výsledná rychlost \mathbf{v} je dána vektorovým součtem rychlostí \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 dílčích pohybů. Graficky je vektor výsledné rychlosti znázorněn úhlopříčkou \mathbf{OC}_1 v rovnoběžníku rychlostí $OA_1C_1B_1$.



Obr. 2

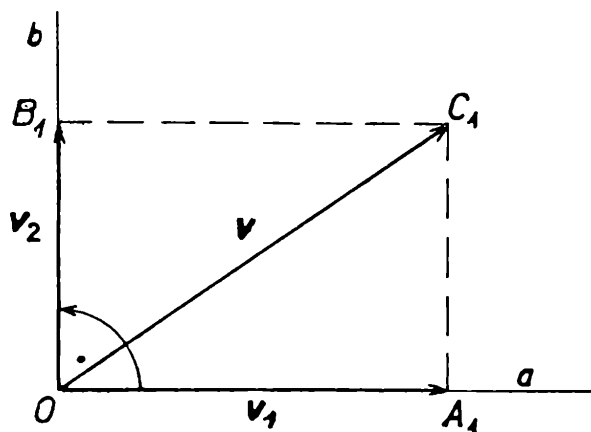
Ve zvláštním případě, kdy oba vektory jsou téhož směru ($\alpha = 0^\circ$), je velikost výsledné rychlosti rovna aritmetickému součtu obou částečných rychlostí $v = v_1 + v_2$. Dějí-li se oba pohyby proti sobě ($\alpha = 180^\circ$), je velikost výsledné rychlosti rovna rozdílu velikostí obou částečných

rychlostí. Takový pohyb koná např. člověk, který přechází rovnoměrným pohybem ve vagóně vlaku, jedoucího rovnoměrně po přímé trati, a to buďto ve směru jízdy, nebo proti směru jízdy vlaku.

Jsou-li oba pohyby k sobě kolmé, určíme velikost výsledné rychlosti výpočtem podle Pythagorovy věty $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ (obr. 3).

2. Skládání dvou pohybů přímočarých rovnoměrně zrychlených

Kdyby konal hmotný bod jen přímočarý rovnoměrně zrychlený pohyb po přímce a , byly by jeho polohy na konci jednotlivých sekund A_1, A_2, A_3 , tak, že pro úseky drah platí (obr. 4).



Obr. 3

$$OA_1 : OA_2 : OA_3 = 1 : 4 : 9$$

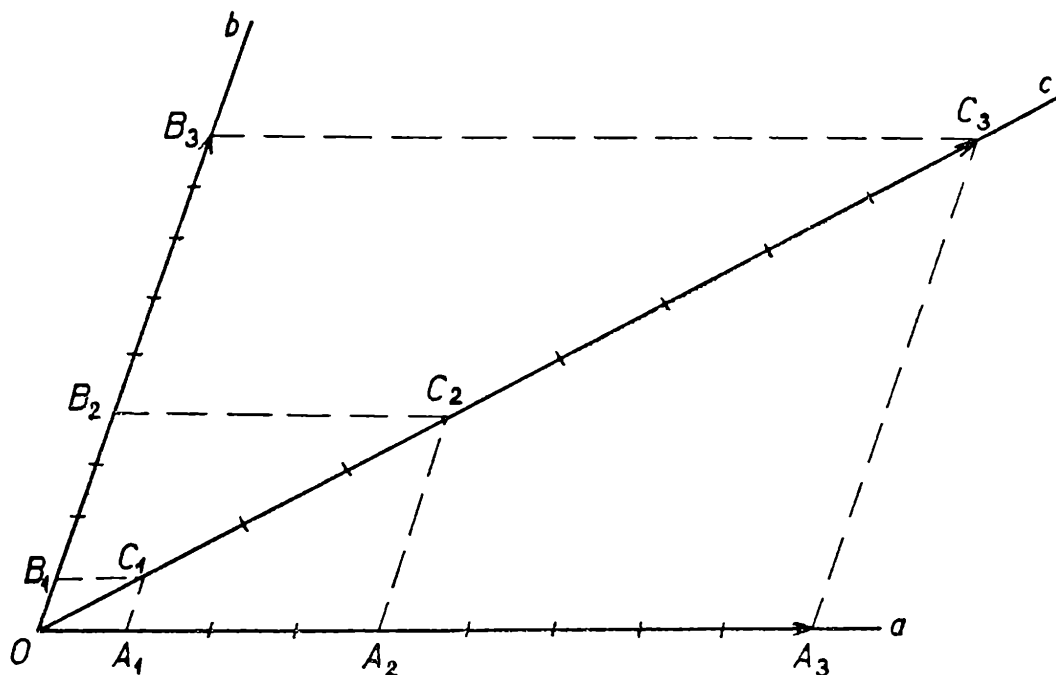
Podobně pro polohy na přímce b na konci jednotlivých sekund platí

$$OB_1 : OB_2 : OB_3 = 1 : 4 : 9$$

Koná-li hmotný bod oba rovnoměrně zrychlené pohyby současně, pohybuje se po přímce c . Jeho polohy na konci jednotlivých sekund jsou C_1, C_2, C_3, \dots . Z podobnosti rovnoběžníků plyne také

$$OC_1 : OC_2 : OC_3 = 1 : 4 : 9$$

Koná-li těleso současně dva přímočaré rovnoměrně zrychlené pohyby, je výsledný pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený.



Obr. 4

3. Vrh svislý vzhůru

Předpokládejme, že těleso je vrženo počáteční rychlostí v_0 svisle vzhůru. Kdyby na ně nepůsobila přitažlivá síla Země a odpor vzduchu, pohybovalo by se tímto směrem stálou rychlostí, konalo by setrvačností rovnoměrný přímočarý pohyb svisle vzhůru. Působením přitažlivé síly Země koná těleso současně volný pád, tj. pohyb rovnoměrně zrychlený ve směru svislém dolů se zrychlením $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Vyloučíme-li odpor vzduchu, koná těleso výsledný pohyb složený z přímočarého pohybu rovnoměrného ve směru svislém vzhůru rychlostí v_0 a rovnoměrně zrychleného pohybu s rychlostí gt ve směru svislém dolů. Lze tedy jeho výslednou rychlost vyjádřit

$$v = v_0 - gt$$

Rychlosti pohybu ubývá přímo úměrně s časem; těleso koná přímočarý pohyb rovnoměrně způzděný. Za dobu t vykoná dráhu

$$s = v_0 t - \frac{g t^2}{2}.$$

Poněvadž rychlosti ubývá s časem, stoupá těleso jen po určitou dobu t_1 , kdy jeho rychlost nabude hodnoty nulové. V tomto okamžiku platí

$$v_0 - g t_1 = 0$$

Z této rovnice vypočítáme dobu stoupaní tělesa

$$t_1 = \frac{v_0}{g}.$$

Za tuto dobu dosáhne těleso největší výšky

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Po dosažení této výšky klesá těleso volným pádem a dopadne na zemi za dobu t_2 , kterou můžeme určit z rovnice dráhy volného pádu

$$s = \frac{g t^2}{2},$$

jestliže dosadíme

$$s = s_1 = \frac{v_0^2}{2g}, t = t_2,$$

vypočítáme pro

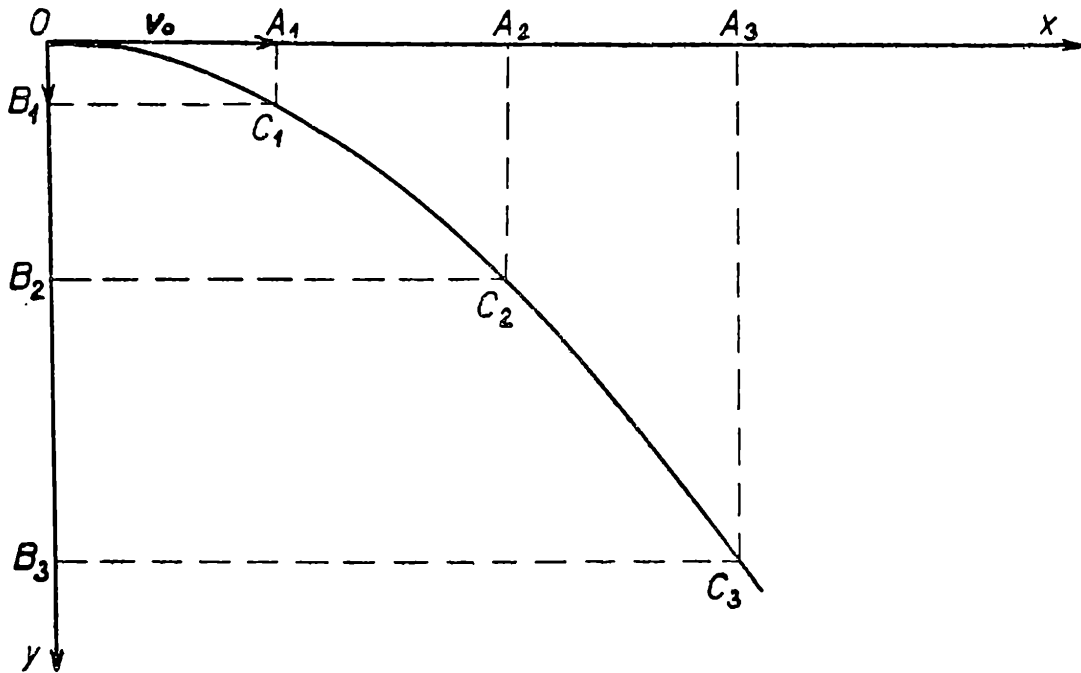
$$t_2 = \frac{v_0}{g}; t_2 = t_1.$$

Kdyby bylo těleso z výšky h vrženo počáteční rychlostí svisle dolů, konalo by částečné pohyby stejného druhu jako v předešlém případě, avšak vektory jejich rychlostí by byly souhlasně orientované. Výsledná rychlost je

$$v = v_0 + g t .$$

Rychlosti přibývá přímo úměrně s časem, těleso koná přímočarý pohyb rovnoměrně zrychlený. Za dobu t vykoná dráhu

$$s = v_0 t + \frac{g t^2}{2}$$



Obr. 5

4. Vrh vodorovný

V tomto případě je těleso vrženo ve výšce h nad povrchem Země rychlostí v_0 ve směru vodorovném. Kdyby na těleso nepůsobila tíhová síla, konalo by v tomto směru pohyb přímočarý rovnoměrný. Působením tíhové síly těleso současně volně padá. Oba pohyby se skládají; výslednou polohu tělesa na konci jednotlivých sekund najdeme graficky (obr. 5). Na ose x jsou naznačeny polohy tělesa na konci jednotlivých sekund, kdyby konalo jen setrvačný pohyb ve směru vodorovném A_1, A_2, A_3 ,

$$x = v_0 t ;$$

na ose y jsou vyznačeny polohy tělesa na konci jednotlivých sekund při volném pádu B_1, B_2, B_3 ,

$$y = \frac{g t^2}{2} .$$

Z grafu je patrné, že dráha pohybu je křivka. Je to část paraboly. Počáteční bod dráhy O se nazývá vrchol paraboly. Porovnáme-li úseky dráhy vykonané za jednotlivé sekundy a vymezené body C_1, C_2, C_3, \dots , zjistíme, že se jejich délka zvětšuje; těleso koná zrychlený pohyb. Obě rovnice dovolují určit polohu tělesa v libovolném čase t od počátku pohybu.

Rychlost, které těleso dosáhlo za dobu t od počátku pohybu, lze určit složením rychlosti v_0 ve směru vodorovném a rychlosti volného pádu gt ve směru svislém dolů. Poněvadž obě složky rychlosti jsou k sobě kolmé, lze určit velikost výsledné rychlosti podle Pythagorovy věty (obr. 6)

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

Podle obr. 6 platí pro úhel α výsledné rychlosti se svislým směrem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{g t}.$$

Známe-li počáteční rychlost v_0 , můžeme tento úhel určit podle tabulek pro libovolný čas t .

O p r a v a. V minulém čísle Rozhledů v článku Dr. J. Nátera budiž na str. 72 správně $F_t = \sigma l$.

J a n H o r s k ý, PFPU, Brno:

Základy teorie relativity

Úvod.

V zářijovém čísle časopisu *Annalen der Physik* z r. 1905 se objevila práce prostého názvu *Elektrodynamice těles v pohybu*, kterou napsal Albert Einstein, tehdy šestadvacetiletý, téměř neznámý fyzik. V ní Einstein poprvé formuloval základní myšlenky a vztahy nové fyzikální teorie - *speciální teorie relativity*. Dnes se již *speciální teorie relativity* i *obecná teorie relativity*, kterou Einstein vytvořil v r. 1916, staly úhelným kamenem současné fyziky. Moderní fyzika je bez teorie relativity nemyslitelná právě tak, jako bez představy o atomové struktuře hmoty či teorie elektromagnetického pole. Teorie relativity je středem zájmu nejen vědeckých pracovníků, ale také širokého okruhu lidí s nejrůznějším vzděláním hlavně proto, že je s ní spojen radikální přelom i přestavba staletími vytvořených představ o vlastnostech prostoru, času i pohybu.

Výsledky teorie relativity jsou někdy tak překvapující, že vzbuzují až nedůvěru v samu opodstatněnost teorie relativity. Ten, kdo chce teorii relativity dobře rozumět a chce v ní pracovat, musí alespoň v hrubých rysech znát historii jejího vzniku, a především musí dobře pochopit kinematiku teorie relativity. Proto obsahem tohoto článku jsou kapitoly, které v přijatelné formě seznamují čtenáře se vznikem teorie relativity i její kinematikou. Pečlivé prostudování článku usnadní zájemcům další studium této náročné, avšak velmi krásné fyzikální teorie. Závěrem článku se čtenář seznámí se zajímavým důsledkem teorie relativity, tzv. *časovým paradoxem*.

I. Princip relativity v mechanice. Hypotéza éteru

Je obecně známo, že mluvíme-li o pohybu tělesa, musíme vždy říci, ve které vztažné soustavě jeho pohyb určujeme. Vyslovíme-li nyní Newtonův princip setrvačnosti, že totiž každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo pohybu rovnoměrném přímočarém, pokud není nuceno vnějšími silami svůj stav změnit, poznáme okamžitě, že formulace není přesná, neboť se neříká, vzhledem k čemu má těleso setrvávat v klidu nebo pohybu rovnoměrně přímočarém. Newton sám má na mysli platnost principu setrvačnosti vzhledem k pevným bodům, tzv. *absolutního prostoru*, o kterém říká:

Absolutní prostor zůstává svou povahou a bez vztahu k jakémukoli vnějšímu předmětu vždy stejný a nepohyblivý.

Absolutnímu prostoru přiřadil Newton také absolutní čas, který „... plyne sám o sobě a svou povahou bez vztahu k jakémukoli vnějšímu předmětu stejnoměrně“ Jinak řečeno Newton vyšel z předpokladu, že objektivně existuje nekonečný třírozměrný prostor, v němž platí euklidovská geometrie a v němž objektivně plyne čas.

Z hlediska mechaniky lze všechny vztažné soustavy rozdělit do dvou skupin podle toho, zda v nich platí či neplatí princip setrvačnosti. *Vztažné soustavě*, ve které Newtonův princip setrvačnosti platí, se říká *inerciální vztažná soustava*, ostatní vztažné soustavy se nazývají *neinerciální*. Z definice inerciální vztažné soustavy vyplývá, že každá inerciální soustava je vzhledem k absolutnímu prostoru buď v klidu, nebo pohybu rovnoměrném a přímočarém. Je velmi důležité si uvědomit, že v mnoha případech lze během dostatečně krátkých časových intervalů považovat i neinerciální vztažné soustavy za inerciální, takže je např. možné v časovém intervalu několika vteřin považovat i Zemi za inerciální vztažnou soustavu.

Již v sedmnáctém století, když byla fyzika ještě v počátcích, konal Galileo Galilei významné, i když vesměs jednoduché pokusy na

lodi, rovnoměrně se pohybující. Domníval se, že pokusy budou probíhat jinak, když loď rovnoměrně popluje a jinak, když bude vůči Zemi v klidu. Shledal však, že všechny pokusy probíhají v obou případech stejně, takže pomocí jich nemohl dokázat, zda se loď pohybuje, nebo je v klidu. Výsledek Galileových pokusů připouští významné zobecnění, neboť pokusy trvaly vždy jen několik vteřin a byly tedy prováděny v inerciální soustavě.

Tak jsme dospěli k principu relativity v mechanice: žádnými mechanickými pokusy prováděnými v dané inerciální soustavě nelze zjistit, zda je inerciální soustava v klidu či pohybu; stručněji: mechanické pokusy probíhají ve všech inerciálních soustavách stejně.

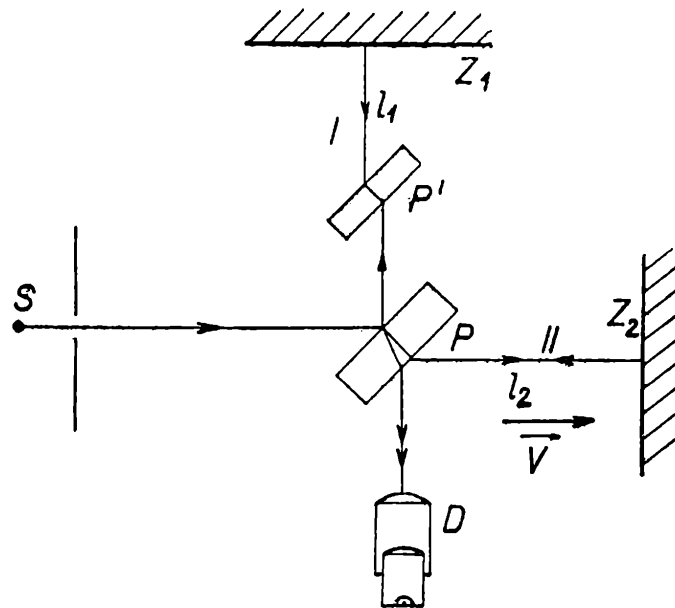
Odtud snadno vyplývá, že nevíme-li předem, je-li inerciální soustava K v absolutním klidu a inerciální soustava K' že se pohybuje absolutní rychlostí v , nemůžeme to dokázat žádnými mechanickými pokusy. Mechanika nemůže tedy sama stanovit absolutní pohyb tělesa, i když to bylo její základní otázkou. Může pouze zkoumat pohyby relativní.

Hypotéza o absolutním prostoru a čase se koncem minulého století ve fyzice značně upevnila zásluhou některých úspěchů hypotézy *světelného éteru* - hmotného prostředí umožňujícího přenos energie mezi tělesy ve vesmíru a vyplňujícího absolutní prostor v Newtonově pojetí. Éter byl tedy nositelem elektromagnetických vln. Věřilo se, že pohyb éteru má na šíření světla podobný vliv jako silný vítr na šíření zvuku. Je-li absolutní prostor vyplněn klidným éterem prostupujícím všemi tělesy, pak absolutní pohyb tělesa je jeho pohybem vzhledem k éteru. Existovala proto určitá naděje, že bude možno absolutní pohyb zjistit, na což poprvé upozornil *Maxwell* v roce 1878. Ten také navrhl způsob, jak jej zjistit pomocí optických přístrojů. V roce 1881 byla experimentální technika již tak vyspělá, že se *Maxwellovu* myšlenku podařilo uskutečnit neobyčejně přesnými pokusy *Michelsonovými*.

II. Experimentální základy speciální teorie relativity

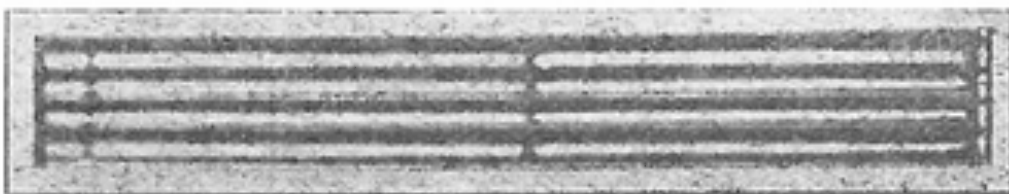
Řekli jsme již, že se obtížného úkolu ujal *Albert Michelson*, jehož pokus nyní popíšeme, neboť má obrovský význam k pochopení vzniku speciální teorie relativity. Světelný paprsek ze zdroje S (obr. 1) dopadá na planparalelní destičku P (stejným písmenem je označen i bod dopadu paprsku) s postříbřenou stěnou, částečně se odráží (paprsek I) a dopadá na zrcadlo Z_1 (stejným písmenem je označen i bod dopadu paprsku), částečně se lomí (paprsek II) a dopadá na zrcadlo Z_2 . Paprsek I se potom od zrcadla Z_1 odráží, projde destičkou P a dopadá do dalekohledu. Podobnou cestu vykoná i paprsek druhý, který se odráží od

zrcadla Z_2 , od postříbřené destičky P a dopadá opět do dalekohledu, v jehož zorném poli se objeví soustava rovnoběžných, pravidelných světlých a tmavých čar, která se nazývá *interferenčním obrazcem* (obr. 2). Protože první paprsek prochází destičkou P jednou, zatímco druhý



Obr. 1. Princip Michelsonova pokusu.

tříkrát, vložila se prvnímu paprsku do cesty planoparalelní destička P' stejně silná jako P . Nechť je nyní směr šíření druhého paprsku rovnoběžný se směrem pohybu Země. Předpokládejme dále, že rychlost šíření světla v klidném éteru je c a Země se vzhledem k éteru pohybuje rychlostí v . Světelný paprsek vyslaný ze Země ve směru jejího pohybu se tedy vzhledem k Zemi pohybuje rychlostí $v_1 = c - v$, zatímco paprsek



Obr. 2. Interferenční proužky v Michelsonově přístroji.

vyslaný opačným směrem se vzhledem k Zemi pohybuje rychlostí $v_2 = c + v$. Čas t_2 potřebný k tomu, aby světelný paprsek urazil dráhu od destičky P k zrcadlu Z_2 se snadno spočte

$$t_2 = \frac{l_2}{c - v} + \frac{l_2}{c + v} = \frac{2 l_2}{c^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Složitější je však výpočet času t_1 pro první paprsek, neboť za dobu

potřebnou k tomu, aby paprsek dospěl od destičky P k zrcadlu Z_1 , posune se destička P z polohy P_1 do polohy P_2 . Má-li se tedy první paprsek po odrazu na zrcadle vrátit k destičce, musí proběhnout dráhy P_1Z_1 a Z_1P_2 . To však jsou strany rovnoramenného trojúhelníka (obr. 3) o výšce $Z_1O = l_1$, jehož základnou je dráha planpáralelní destičky v čase, který potřebovalo světlo k proběhnutí dráhy $P_1Z_1P_2$. Označíme-li jej t_1 , máme

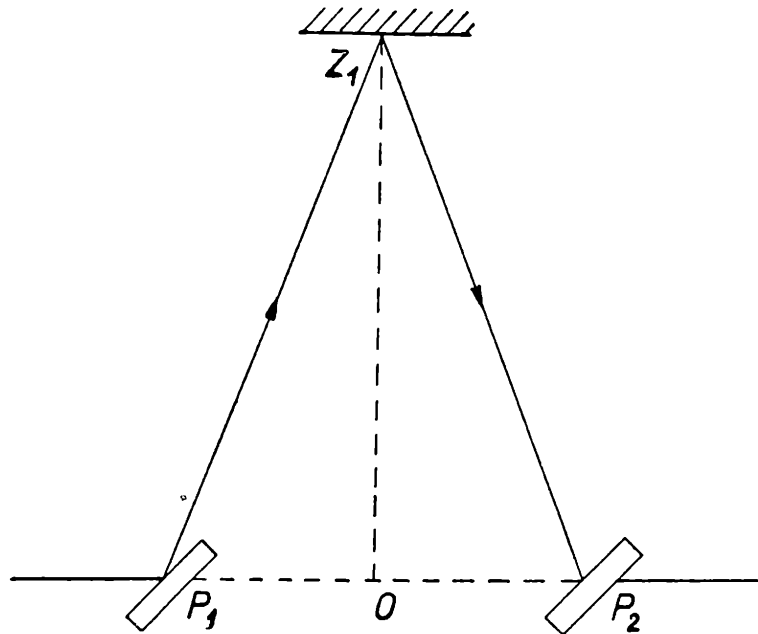
$$P_1P_2 = vt_1; \quad P_1O = \frac{vt_1}{2}; \quad P_1Z_1 + Z_1P_2 = ct_1$$

a protože

$$P_1Z_1 = P_2Z_1,$$

je

$$P_1Z_1 = \frac{ct_1}{2}.$$



Obr. 3. Chod paprsků v interferometru unášeném Zemí.

Podle Pythagorovy věty obdržíme dále

$$\overline{P_1Z_1}^2 = \overline{Z_1O}^2 + \overline{OP_1}^2,$$

čili

$$c^2t_1^2 = 4l_1^2 + v^2t_1^2$$

Odtud konečně dostáváme

$$t_1 = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Časový rozdíl

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2 l_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2 l_2}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

s kterým se oba paprsky setkávají v bodě T , se projeví posunutím interferenčních proužků na jednu stranu. Celý přístroj nyní otočíme kolem vertikální osy o 90° . Tím se samozřejmě zaměnily úlohy drah TZ_1 a TZ_2 . Bylo-li v předchozím případě $t_1 > t_2$, je tomu nyní obráceně, takže pro příslušný časový rozdíl $\Delta t'$, se kterým se oba paprsky setkají v bodě T , máme

$$\Delta t' = \frac{2 l_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{2 l_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Interferenční proužky se posunou na druhou stranu. Výsledný časový rozdíl způsobující výsledné posunutí interferenčních proužků je tedy roven

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \frac{2 (l_1 + l_2)}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right]$$

Uvážíme-li, že rychlost pohybu Země kolem Slunce činí přibližně $30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, takže

$$\frac{v^2}{c^2} \sim 10^{-8},$$

můžeme veličiny stojící ve výrazu pro δt v hranatých závorkách rozložit pomocí (přibližných) vzorců

$$(1 - a)^{-\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{1}{2} a; \quad (1 - a)^{-1} \doteq 1 + a; \quad a \ll 1$$

Obdržíme tak

$$\delta t = \frac{l_1 + l_2}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2}.$$

V Michelsonových a Morleyových pokusech se mnohonásobným odrazem získal součet

$$l_1 + l_2 \sim 10 \text{ m},$$

a tedy

$$\delta t \sim 3 \cdot 10^{-16} \text{ s}.$$

Odtud snadno získáváme pro poměr $c \cdot \delta t$ k délce světelné vlny hodnotu

M 4–6, 8, 10 (1–3, 7, 9), F 2–6, G 3 (4); Štefan Porubský, SPŠ, Zvolen - M 4, 10 (3); Peter Prešnajdr, SVVŠ, Sered' - M 2, 4–6, 8, 10 (1, 3, 7, 9), F 1–6, G 1, 3, 4 (2); Jindřich Procházka, SVVŠ, Čelákovice - M 4, 5, 8, 9 (1–3, 7, 10), F 2, 4, 6 (1, 3, 5), G 1–4; Pavel Rödling, SVVŠ, Chomutov - M 1, 3, 8, 9 (3, 7, 10); Helena Szénásyová, SVVŠ, Zvolen - M 3, 5, 10 (2, 4, 7, 8); Ivan Šimerka, SVVŠ, Mladá Boleslav - M 4–6, 8–10 (2, 7), F 1, 5, 6 (3), G 4; Drahomíra Šimková, SVVŠ, Znojmo - M 2, 4–6, 8, 9 (1, 3, 7), F 2, 4–6 (3) G 1, 3, 4; Richard Špíšek, SVVŠ, Brno - M 3, 6 (4, 7, 8); Jan Švejda, SVVŠ, Praha 3 - M 2, 3, 6, 7 (8); Karel Trégl, SVVŠ, Rožnov p. R. - M 1, 3, 4, 6, 8–10 (2, 5, 7), G 3 (1, 4); Lubomír Vašek, SVVŠ, Gottwaldov - M 3, 4, 6, 10 (1, 2, 7), F 1–6, G 1, 3, 4; Karel Vazač, SVVŠ, Písek - M 3, 9, 10 (7, 8); Jan Veselý, SVVŠ, Praha 6 - M 2–5, 8–10 (7), G 2–4 (1); Jiří Vocílka, SVVŠ, Znojmo - M 2–5, 9 (7), F 1–6, G 1, 3, 4 (2); Jaroslav Zemánek, SVVŠ, Praha 5 - M 1, 2, 4–6, 8–10 (3, 7), F 1–6, G 2–4.

Matematika:

10. Mezi čísla 1951 až 2000 najděte všechny dvojice prvočísel, jejichž rozdíl je 4.

Jan Vyšín

(Došlo 23 řešení)

Autorovo řešení:

Označme p menší z obou hledaných prvočísel; větší z prvočísel je pak $p + 4$. Číslo p lze napsat právě v jednom z tvarů 4α , $4\alpha + 1$, $4\alpha + 2$, $4\alpha + 3$, kde α je přirozené číslo, $\alpha > 400$. Čísla 4α , $4\alpha + 2$ jsou však složená; zbývají možnosti $4\alpha + 1$, $4\alpha + 3$. Číslo α lze napsat právě v jednom z tvarů 3β , $3\beta \pm 1$, kde β je přirozené číslo, $\beta > 100$. Hledaná dvojice má tedy některý z tvarů

$$12\beta + 1, 12\beta + 5; 12\beta \pm 4 + 1, 12\beta \pm 4 + 5; \\ 12\beta + 3, 12\beta + 7; 12\beta \pm 4 + 3, 12\beta \pm 4 + 7.$$

Z těchto 6 možností snadno vyloučíme 4; např. vyloučíme $12\beta + 4 + 1$, $12\beta + 4 + 5$, neboť druhé číslo je složené. Zůstanou jen dvě možnosti

$$p = 12\beta + 1 \text{ nebo } p = 12\beta + 7.$$

Číslo β lze napsat právě v jednom z tvarů 5γ , $5\gamma \pm 1$, $5\gamma \pm 2$. Odtud dostaneme tyto dvojice:

$$60\gamma + 1, 60\gamma + 5; 60\gamma \pm 12 + 1, 60\gamma \pm 12 + 5; \\ 60\gamma \pm 24 + 1, 60\gamma \pm 24 + 5; 60\gamma + 7, 60\gamma + 11; \\ 60\gamma \pm 12 + 7, 60\gamma \pm 12 + 11; 60\gamma \pm 24 + 7, 60\gamma \pm 24 + 11.$$

Jako prve snadno zjistíme, že možná řešení jsou jedině v tvaru

$$60\gamma + 7, 60\gamma + 13, 60\gamma + 19, 60\gamma + 37, 60\gamma + 43, 60\gamma + 49. \quad (1)$$

Uvážíme-li, že pro p platí $1951 \leq p \leq 1995$, dostaneme, že $60\gamma = 1920$ nebo $60\gamma = 1980$.

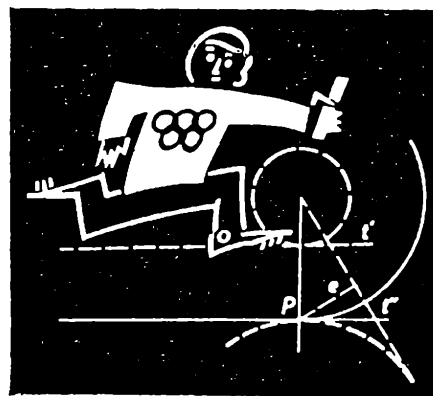
S použitím (1) dostaneme tato možná řešení:

1957, 1961; 1963, 1967; 1969, 1973; 1987, 1991; 1993, 1997. Avšak čísla 1969, 1991 mají dělitele 11, číslo 1957 má dělitele 19, číslo 1967 má dělitele 7. Zbývá tedy jediné možné řešení 1993, 1997.

Dokážeme-li známým způsobem, že tato dvě čísla jsou prvočísla, je úloha rozřešena.

Poznámka autora: Zkuste si řešit obdobným způsobem úlohu, např. pro interval (199 950, 200 000).

Matematická olympiáda



Soutěžní úlohy I. kola XIII. ročníku MO

(Druhá trojice úloh - termín k odevzdání: 29. 2. 1964)

Kategorie A

4. V rovině je dáno n bodů, z nichž žádné tři neleží v téže přímce.

Dokažte, že lze najít kružnici, která obsahuje alespoň tři z daných bodů, a přitom žádný z daných bodů neleží uvnitř této kružnice.

5. Jsou dány dvě kvadratické nerovnosti

$$\left. \begin{aligned} x^2 + p_1x + q_1 &< 0, \\ x^2 + p_2x + q_2 &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

kde p_1, p_2, q_1, q_2 jsou daná reálná čísla a platí $q_1 < 0, q_2 < 0$. Dokažte tuto větu:

Jestliže dané nerovnosti nemají společné řešení, potom platí

$$(p_2 - p_1)(p_1q_2 - p_2q_1) \leq (q_1 - q_2)^2. \quad (2)$$

Udejte příklad čtyř čísel p_1, p_2, q_1, q_2 tak, aby platila nerovnost (2) a aby nerovnosti (1) měly společné řešení.

6. Je dán rotační kužel, jehož podstava má poloměr 1 a jehož strana má od roviny podstavy odchylku 2ω , kde $\omega < \frac{1}{4}\pi$. Kuželi je vepsaná koule K , která se dotýká pláště kužele i podstavy.

Dále je sestrojeno n shodných koulí, o nichž platí:

(1) Každá z nich se dotýká pláště a podstavy kužele i koule K (vnější dotyk).

(2) Každá z nich se dotýká dvou z těchto n koulí.

Najděte vztah mezi čísly ω a n a zjistěte, pro která n a ω může tato situace nastat.

Kategorie B

4. V rovině je dáno 6 různých bodů této vlastnosti: každá čtveřice z nich vybraná obsahuje alespoň tři body, které leží v přímce.

Dokažte, že alespoň 5 z daných šesti bodů leží v přímce.

5. Najděte všechna celá čísla x , pro něž výraz

$$-6x^2 + 167x + 4823$$

je roven:

- prvočíslu,
- co nejmenšímu přirozenému číslu,
- co největšímu přirozenému číslu.

6. Jsou dány rovnice

$$\begin{aligned}x^2 - x - 1 &= 0, \\x^2 + px - 1 &= 0,\end{aligned}$$

kde p je dané reálné číslo.

Dokažte, že obě rovnice mají reálné kořeny a vyšetřte, jak jsou tyto kořeny uspořádány podle velikosti, jestliže parametr p probíhá všechna reálná čísla.

Kategorie C

4. Najděte všechna celá čísla x , pro která je výraz

$$V = \frac{6(x^2 - 3px - x + 3p)}{x^3 - 3px^2 - x + 3p}$$

roven celému číslu.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k danému celému číslu p .

5. Žák měl najít objem kváдру z jeho daných rozměrů, což byla přirozená čísla. Když žák objem vypočetl, zjistil, že dojde k témuž výsledku, když sečte všechny tři rozměry.

Ukažte, že pomocí těchto údajů lze s jediným výsledkem vypočítat rozměry daného kváдру.

6. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou AB délky 1 a kladné číslo d . Světelný paprsek vyslaný z bodu X , který leží mezi body A , B , se odrazí na odvěsni BC v bodě Y a dopadne právě do středu M odvěsny AC .

Sestrojte bod X tak, aby délka $XY + YM$ paprsku měla délku d .

Proveďte diskusi vzhledem k číslu d .

Kategorie D

4. Rozhodněte, který ze zlomků

$$\frac{5\ 555\ 555\ 553}{5\ 555\ 555\ 557} \quad \frac{6\ 666\ 666\ 664}{6\ 666\ 666\ 669}$$

je větší.

5. Klempířská pájka je slitina cínu a olova. Jeden druh pájky obsahuje 25 % cínu a druhý druh 60 %. Smíšením obou druhů pájek a přidáním 2 kg čistého olova máme vyrobit 10 kg pájky obsahující 30 % cínu.

Kolik kilogramů každého druhu pájky musíme přitom užít?

6. Rovnoběžník $ABCD$ s ostrým úhlem při vrcholu A má strany $AB = 21$ cm, $AD = 13$ cm a jeho výška $DE \perp AB$ má délku 12 cm. Označme F patu výšky $DF \perp BC$.

Vypočtem dokažte, že body E , F padnou po řadě dovnitř stran AB , BC , a dále vypočtete délky obou úseček BD a EF .

Josef Daneš, studující MFF KU, Praha:

Pátá mezinárodní matematická olympiáda

(Dokončení)

Na závěr připojujeme abecední seznam odměněných žáků.

1. cena: F. Dacar (FNRJ), J. Daneš (ČSSR), M. Maloletkin, R. Sarkisjan, A. Tolpygo, A. Zajcev (všichni SSSR), L. Zsido (RLR).
2. cena: I. Boljevski (FNRJ), P. Fazekas (MLR), V. Fišman (SSSR), L. Gerencsér, L. Lovász (oba MLR), G. Lusztig (RLR), J. Pelikán (MLR), P. Petek (FNRJ), S. Smirnov (SSSR), F. Szidarovszky (MLR), A. Zvjagincev (SSSR).
3. cena: K. Andrejev (SSSR), S. Bilčev (BLR), G. Gorradi (MLR), G. Eckstein (RLR), G. Gančev (BLR), S. Grigorescu (RLR), U. Küchler (NDR), E. Makai, A. Mate (oba MLR), M. Mršević (FNRJ), R. Riedel (NDR), H. Schwarz (NDR), T. Spircu (RLR), H. Toruńczyk, B. Wajnryb (oba PLR), V. Zajmov (BLR), J. Zemánek (ČSSR).

Vážení čtenáři: žáci, učitelé i odpovědní pracovníci vedoucích školních úřadů, zamyslete se nad skutečnostmi tohoto článku.

Redakce.

Jak probíhal

XII. ročník matematické olympiády

Rozhledy matematicko-fyzikální přinášejí každým rokem touto dobou zprávu o tom, jak v uplynulém roce probíhala na našich školách matematická olympiáda. Tentokrát si chceme všimnout už dvánáctého ročníku této celostátní soutěže, který odpovídá školnímu roku 1962–63.

V uplynulém ročníku byla MO organizována podle stejných zásad jako v ročnících předcházejících. Studenti, kteří se soutěže účastnili, měli po ruce jako pomocný studijní materiál čtyři brožurky knihovny Škola mladých matematiků, která vychází v nakladatelství Mladá fronta. V průběhu XII. ročníku MO vyšel svazek pátý, věnovaný nerovnostem; jeho autorem je Fr. Veselý. Také náš časopis vychází soutěžícím vstříc a zařazuje do svého programu pravidelnou rubriku s názvem Matematická olympiáda.

Jak známo, je celá soutěž rozdělena do čtyř kategorií označovaných písmeny A, B, C, D (podle třídy, kterou řešitel ve škole navštěvuje). Druhé kolo MO se v uplynulém ročníku konalo zvlášť pro kategorie A, B, C a zvlášť pro kategorii D. Tři vyšší kategorie (A, B, C) soutěžily v neděli dne 7. dubna 1963 dopoledne, zatímco kategorie D, ve které pracují naši nejmladší olympionikové, se sešla

k druhému kolu v neděli dne 21. dubna 1963 dopoledne. Pro kategorie B, C, D druhým kolem každoročně končí celé soutěžení, kdežto nejstarší olympionikové z kategorie A mají ještě celostátní třetí kolo. V některých krajích uspořádaly krajské výbory MO na závěr uplynulého ročníku jako obvykle besedu s řešiteli, s jejich rodiči a učiteli i s širší veřejností. Tak např. krajský výbor MO v Praze uspořádal slavnostní závěr pražského kola XII. ročníku MO dne 29. května 1963 ve Sladkovského sále Obecního domu. Na této slavnosti byli odměněni vítězové druhého kola kategorií A, B, C. Za redakci našeho časopisu se této slavnostní besedy zúčastnil vedoucí redaktor doc. dr. Miroslav Menšík, který též promluvil ke shromážděným studentům o našich Rozhledech.

Celostátní třetí kolo MO se v uplynulém školním roce konalo v sobotu 1. června 1963 dopoledne na Vysoké škole zemědělské v Brně. Tentýž den odpoledne byla uspořádána na Vysoké škole zemědělské v Brně tradiční beseda s účastníky třetího kola MO a se širší veřejností. Naše čtenáře budou jistě zajímat texty čtyř úloh, které řešili účastníci třetího kola. Uvádíme je zde proto pro Vaši informaci v plném znění.

1. V kvádru $ABCD A'B'C'D'$ (kde $ABCD$ je obdélník a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) je $AA' = d$,
 $\sphericalangle ABD' = \alpha$, $\sphericalangle A'D'B = \beta$.

Vypočítejte oba zbývající rozměry kvádru, jestliže je dáno číslo d a oba ostré úhly α , β . Stanovte podmínky řešitelnosti.

2. Dané sudé přirozené číslo $2k$ rozložte v součet dvou nesoudělných přirozených čísel x , y tak, aby součin xy byl co největší.

3. V rovině je dána přímka MN . Uvažujme dvojici kružnic k_1 , k_2 , které se dotýkají přímky MN po řadě v bodech M , N a přitom se navzájem dotýkají vně. Označme X střed úsečky PQ , kde P , Q jsou dotykové body druhé společné vnější tečny kružnic k_1 , k_2 .

Najděte geometrické místo bodů X pro všechny dvojice kružnic uvedených vlastností.

4. Jsou dány dvě kvadratické rovnice

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= 0, \\x^2 + cx + d &= 0\end{aligned}$$

s reálnými koeficienty.

Najděte nutné a postačující podmínky mezi koeficienty daných rovnic pro to, aby obě rovnice měly jeden společný *kladný* kořen a aby zbývající kořen první rovnice byl větší než zbývající kořen druhé rovnice.

Závěrem uveřejňujeme též pořadí vítězů XII. ročníku matematické olympiády. Společná místa, na kterých se umístilo současně několik řešitelů, jsou uváděna v abecedním pořádku:

- 1.*Josef D a n e š, 3.d roč. SVVŠ, Praha 9 - Vysočany, nám. Lidových milicí 19.
2. Vladimír P o h á n k a, 3.e roč. SVVŠ, Bratislava, Novohradská ul.
3. Vladimír S o u č e k, 3. roč. SVVŠ, Praha 5, Na Zatlance 11.
- 4.*Zdeněk J i r á k, 3.b roč. SVVŠ J. K. Tyla, Hradec Králové.

5.*Drahomíra Š i m k o v á, 3.d roč. SVVŠ, Znojmo, nám. Komenského 4.

6. až 8:

Jan B l a t á k, 3.d roč. SVVŠ, Přerov, Komenského ul. 29.

Josef K a r á s e k, 3. roč. SVVŠ Česká Lípa.

*Jaroslav Z e m á n e k, 2.c roč. SVVŠ, Praha 5 Smíchov, Na Zatlance 11.

9. až 10.:

Vladislav K o c b a c h, 3.e roč. SVVŠ, Praha 7, Dimitrovovo nám. 34.

Zdeněk V í t, 3.a roč. SVVŠ, Praha 2 Vinohrady, W.

Piecka 2.

11. až 14.:

Miloš B o ů e k, 3.b roč. SVVŠ, Bytča, Revolučná ul.

*Richard L e d n i c k ý, 3.a roč. SVVŠ, Nový Bohumín.

Pavel Ř e h á k, 4.a roč. SPŠ jaderné techniky, Praha 2, Ječná 30.

Jiří V o r l í č e k, 3.b roč.

SVVŠ, Praha 2 - Vinohrady, W. Piecka 2.

15. Jan V r b í k, 3.a roč. SVVŠ, Vyškov, Komenského 1.

16. až 18.:

Miroslav B a r t ů š e k, 3.d roč. SVVŠ, Brno, Lerchova 63.

Karel S a n d l e r, 3.a roč. SVVŠ, Česká Třebová, Tyršovo nám.

František Š e f r n a, 3. roč. SVVŠ, Blatná.

Redakce Rozhledů blahopřeje všem těmto vítězům i ostatním úspěšným řešitelům XII. ročníku MO. Věříme, že se s těmito studenty i v dalších letech často setkáme v souvislosti s matematikou.

Žáci označení * jsou také řešiteli soutěže Rozhledů matematicko-fyzikálních.



Matematické zábavy

P a v e l B a r t o š, Bratislava:

O meraní výšky egyptských pyramíd pred 2500 rokmi

V peknej knižke nedávno zomrelého docenta dr. Františka Baladu, ktorá pod názvom *Z dejín elementárnej matematiky* vyšla v roku 1959 (SPN, Praha), sa dočítame, že prvé geometrické poznatky vznikli v Egypte, Mezopotámii a inde pred viac než 4000 rokmi. Dochovali sa o tom i písomné záznamy na babylonských hlinených doštičkách a egyptských papyrusoch. Boli to praktické poučky, týkajúce sa staviteľstva, merania polností, výpočty objemu obilných sýpok apod., odvodené zo skúseností a pozorovaní. Neboli nijako dokazované, lebo neexistovala ešte nijaká matematická teória, z ktorej by mohli vyplývať. Niektoré z nich - napr. že obsah rovnoramenného trojuholníka sa rovná polovičnému súčinu základne a ramena - dokonca ani neboli správne.

Tieto praktické vedomosti vytvorili potom podklad pre vybudovanie geometrie ako vedeckého systému. Stalo sa tak v starom Grécku, kde počínajúc VII. storočím pr. n. l. starogrécki filozofovia z praktických geometrických poznatkov egyptských a babylonských vytvorili pomerne dokonalý vedecký systém, ktorý nazývame geometriou.

Ako prvý priekopník tohoto budovania geometrie ako vedeckého systému sa uvádza *Tales z Miletu* (žil asi v rokoch 624—548 pr. n. l.), ktorý prvý prevádzal samostatné geometrické logické úvahy. Máme o ňom už trochu určitejšie zprávy, i keď nevieme rozlíšiť, ktoré vedomosti nazbieral na svojich cestách a ktoré objavil sám. Mnohé vety, ktoré sa mu dnes prisudzujú, boli známe už skôr, alebo objavené až pozdejšie.

Tak sa mu prisudzuje dôkaz vety o súčte uhlov v trojuholníku, ďalej znalosť určenosti trojuholníka podľa vety *usu*. Je známe, že určoval vzdialenosť lode od brehu pomocou hĺbkového uhla, pod ktorým ju bolo vidieť z veže známej výšky. Je však veľmi pravdepodobné, že zvláštna vlastnosť obvodových uhlov v polkruhu, vyslovená v tzv. Talesovej vete, bola už v jeho dobe a pravdepodobne i predtým všeobecne známa.

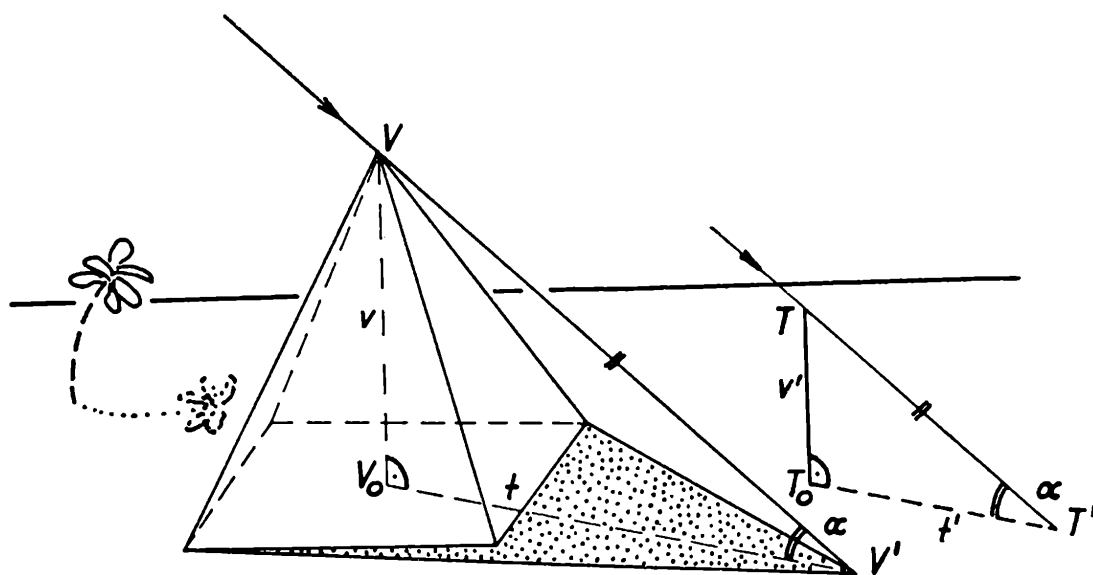
Tiež mal asi už základné vedomosti o podobnosti trojuholníkov a podľa niektorých údajov vedel určiť výšku v pyramídy tak, že zmeral dĺžku t jej tieňa a súčasne dĺžku t' tieňa zvislej tyče známej výšky v' . Situácia je vyznačená na obr. 1. Keďže trojuholníky VV_0V' , TT_0T' sú podobné (súc pravoúhle - predpokladáme v okolí vodorovný terén - a zhodujú sa v uhle $\alpha = \sphericalangle VV_0V' = \sphericalangle TT_0T'$, ktorý značí výšku Slnka nad obzorom), platí rovnosť pomerov

$$\frac{v}{v'} = \frac{t}{t'}$$

odkiaľ

$$v = v' \frac{t}{t'}$$

J. I. Perelman v svojej *P ú t a v e j g e o m e t r i i* (slovenský preklad z ruského originálu vydala Práca, Bratislava v roku 1953) udáva, že Tales určil výšku najvyššej pyramídy v Egypte z dĺžky jej tieňa v takom čase, v ktorom sa dĺžka tieňa rovná výške predmetu, a to na základe vlastnosti rovnoramenného pravouhlého trojuholníka. Takýto príhodný okamžik vraj zistil pomocou vlastného tieňa, a to bol podľa súčasných správ jediný prípad, keď mal človek z vlastného tieňa nejaký užitok... V tomto prípade teda $v' = t'$ a preto tiež $v = t$. V takomto čase je výška Slnka nad obzorom 45° .



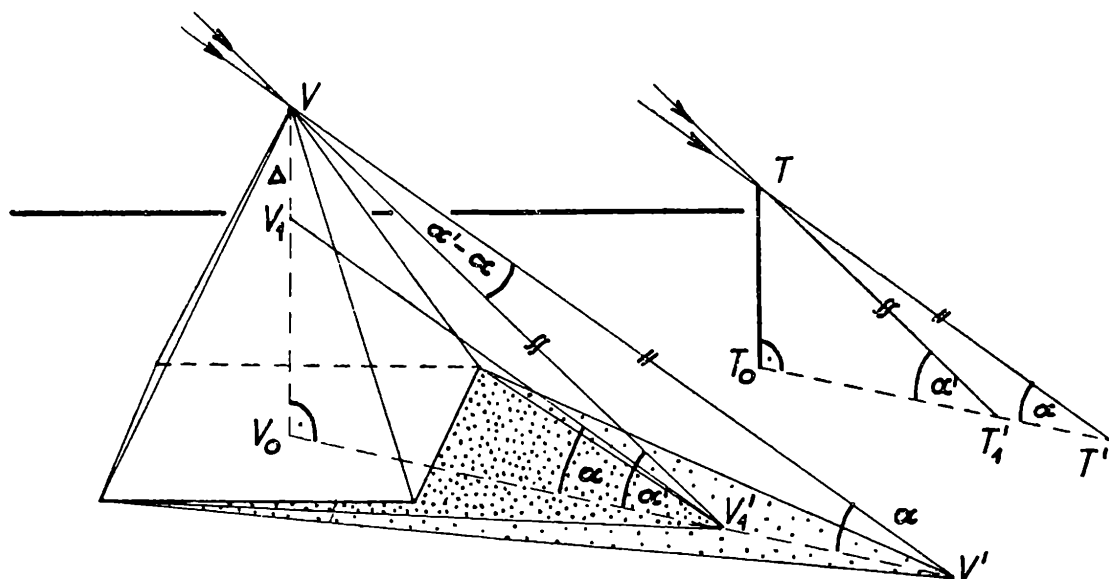
Obr. 1

Talesova metoda tieňa nie je bezvýznamná ani teraz. Môžeme ňou určovať výšku stromu, budov, ak si nenárokujeme veľkú presnosť výsledku merania. ňou sa určujú aj výšky vrchov na Mesiaci. O nedostatkoch tejto metódy píše J. I. Perelman v cit. knižke. Spomína ne-

rovnosť terénu a hlavne existenciu polotieňa. Tieň nie je ostro ohraničený, lež je predĺžený polotieňom, ktorý sa postupne rozplýva. Tomu je na príčine rozľahlosť svetelného zdroja. Najvyšší bod slnečného kotúča ohraničuje najkratší a jeho najnižší bod najdlhší tieň. Polotieň je práve medzi koncovými bodmi týchto dvoch tieňov a nie je možné určiť, kde presne začína, ani kde končí pre jeho postupnú rozplývavosť. Preto v meraní dĺžky tieňa robíme vždy chybu a tak robíme chybu aj v meraní výšky predmetu.

Chceme sa orientovať o veľkosti tejto chyby a pritom ukážeme, že Talesovo meranie pri 45stupňovej výške Slnka bolo čo najvýhodnejšie. Či si toho bol Tales aj vedomý, nemôžno ovšem tvrdiť.

Na obr. 2 máme vyznačené tak plné tieňe, ako aj polotieňe. Body V_1, T_1 značia koncové body plného tieňa (uhol $\sphericalangle VV_1V_0 = \sphericalangle TT_1T_0 = \alpha'$ je výška horného okraja Slnka) a V', T' sú koncové body polotieňa ($\sphericalangle VV'V_0 = \sphericalangle TT'T_0 = \alpha$ je výška dolného okraja Slnka). Ako je známe, vidíme slnečný kotúč pod zorným uhlom $0,5^\circ$ a teda $\alpha' = \alpha + 0,5^\circ$ (na obr. 2 je uhol $\alpha' - \alpha$ značne väčší k vôli zreteľnosti).



Obr. 2

Predpokladajme, že sme meranie urobili za najmenej priaznivých okolností, že sme totiž odmerali len plný tieň pyramídy V_0V_1 , kým tieň tyče (kde je polotieň, súc kratší, zreteľnejší) aj s celým polotieňom T_0T' . Určíme si maximálnu chybu tohoto merania. Teraz trojuholník podobný trojuholníku TT_0T' nebude trojuholník VV_0V_1 , ale trojuholník $V_1V_0V_1'$, kde $\sphericalangle V_1V_0V_1' = \alpha < \alpha'$ a potom z podobnosti nám výjde výška $V_1V_0 < VV_0$. Chyba je $VV_1 = \Delta$. Určíme jej veľkosť.

Z trojuholníka VV_0V_1' dostaneme

$$\sin \alpha' = \frac{VV_0}{VV_1'}$$

odkiaľ

$$v = VV_0 = VV_1' \sin \alpha' \quad (1)$$

Ďalej z trojuholníka VV_1V_1' podľa sínusovej vety

$$\Delta \quad VV_1' = \sin(\alpha' - \alpha) \sin(90^\circ + \alpha), \quad (2)$$

lebo

$$\sphericalangle VV_1'V_1 = \alpha' - \alpha$$

a

$$\begin{aligned} \sphericalangle VV_1V_1' &= 180^\circ - \sphericalangle V_1VV_1' - \sphericalangle V_1V_1'V = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \alpha') - (\alpha' - \alpha) = 90^\circ + \alpha. \end{aligned}$$

Z (2) plynie

$$\Delta = VV_1' \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\cos \alpha} \quad (3)$$

a teda podľa (1) a (3) je relatívna chyba merania

$$\frac{\Delta}{v} = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin \alpha' \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin 0,5^\circ}{\sin(\alpha + 0,5^\circ) \cos \alpha} = \frac{2 \sin 0,5^\circ}{\sin(2\alpha + 0,5^\circ) + \sin 0,5^\circ}$$

O správnosti posledného kroku sa presvedčíme, keď na súčet sínusov v menovateli použijeme známy vzťah

$$\sin \gamma + \sin \delta = 2 \sin \frac{\gamma + \delta}{2} \cos \frac{\gamma - \delta}{2}$$

Ak chceme teraz nájsť výšku Slnka, pri ktorej bude táto chyba minimálna, musíme hľadať maximálnu hodnotu menovateľa, lebo čitateľ je konštantný a tak čitateľ ako aj menovateľ sú čísla kladné. Avšak funkcia

$$\sin(2\alpha + 0,5^\circ) + \sin 0,5^\circ$$

nadobudne najväčšej hodnoty, keď $\sin(2\alpha + 0,5^\circ) = 1$, čiže keď

$$2\alpha + 0,5^\circ = 90^\circ$$

odkiaľ plynie

$$\alpha = 44^\circ 45'$$

To je výška dolného okraja Slnka v tomto prípade minimálnej chyby, horný jeho okraj má výšku $\alpha' = 44^\circ 45' + 30' = 45^\circ 15'$ a stred slnečného kotúča má výšku 45° nad obzorom.

Výsledok potvrdzuje, že Tales konal toto meranie za najpriaznivejších okolností. Chyba merania, pochádzajúca z existencie polotieňa, je v tomto optimálnom prípade

$$\frac{\Delta}{v} = \frac{2 \sin 30'}{1 + \sin 30'} = \frac{2 \cdot 0,0087}{1 + 0,0087} \doteq 0,0174$$

a teda relatívna chyba v percentách činí 1,74 %.

Prirodzene, ako každé fyzikálne meranie, i toto je zafaržené ešte

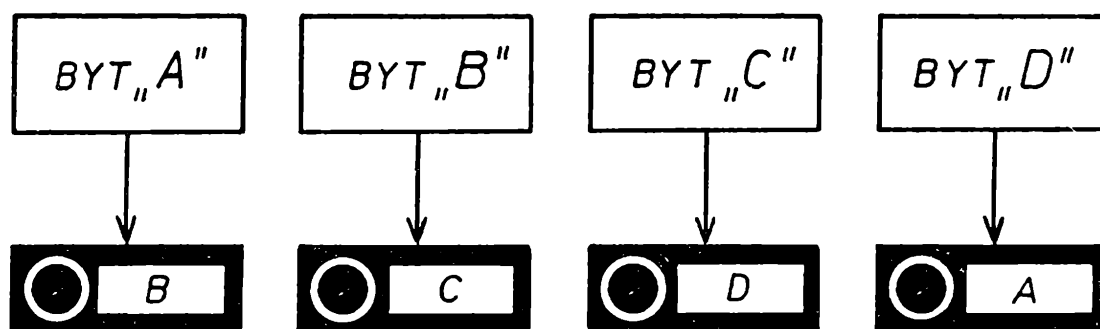
dalšími chybami merania dĺžok tieňov a tyče, ktoré pochádzajú z nedokonalosti meracích prístrojov a pozorovania. Neudáva sa, ako odmeral Tales dĺžku tieňa pyramídy, ktorého jeden koncový bod (V_0) je neprístupný. Pouvažujte o tom, ako by ste si tu poradili a napíšte o tom redakcii.

Možno, že Tales vykonal toto meranie desať rokov pred svojou smrťou, a tak je tomu teraz práve 2500 rokov...

Veru hrdé jubileum matematickej vedy!

Úloha z kombinatoriky

U vchodu do domu jsou čtyři tlačítka, která jsou spojena se zvonky umístěnými ve čtyřech různých bytech A , B , C , D . Při hromadném označování tlačítek jmenovkami majitelů bytů došlo však k omylu. Jmenovky byly nedopatřením zaměněny tak, že ani jeden zvonek nebyl správně označen. Jaký byl výsledek, to vidíte na obrázku.



Vaším úkolem je zjistit *všechny zbývající případy, při nichž není ani jedno tlačítko označeno správným štítkem*. Při řešení nezapomeňte na zdůvodnění, že možnosti, které naleznete, jsou skutečně všechny.

Možná, že se vám podaří vhodně formulovat a řešit úlohu i pro větší počet zvonků.

Zašlete nám svá řešení. Seznam úspěšných řešitelů uveřejníme.

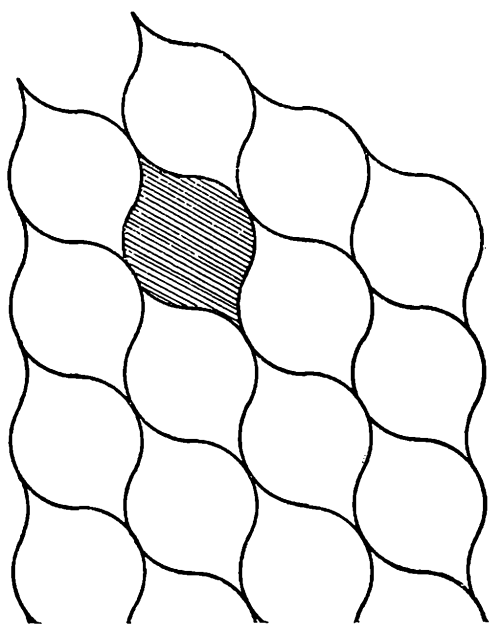
-mk-

Řešení úlohy o ornamentu

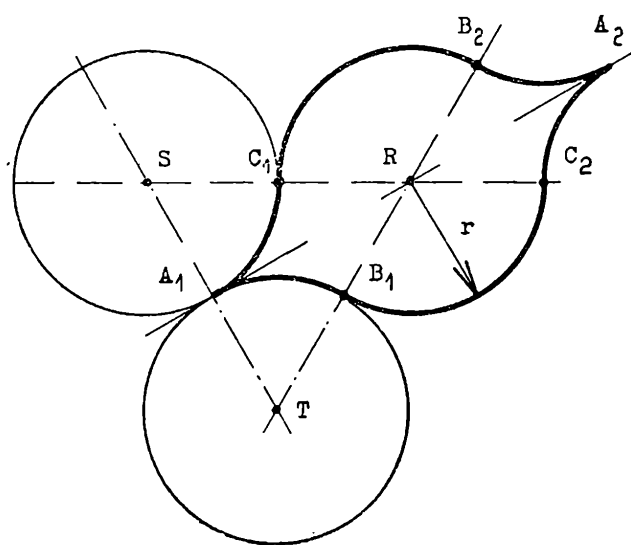
Rozhledy matematicko-fyzikální přinesly v 8. čísle (roč. 41) na str. 382 jednu úlohu o ornamentu, na kterou se do naší redakce sešla řada řešení. Uvádíme nejprve seznam čtenářů, kteří nám zaslali svůj příspěvek k této úloze o ornamentu; seznam je seřazen v abecedním pořadí:

Hynek Biederman, SVVŠ Rokycany; Marie Brabcová, SVVŠ Znojmo; Bohuslav David, SVVŠ Vysoké Mýto; Ivan Davidovič, SPŠS Praha 5; Jaroslav Fér, SVVŠ Poděbrady; Věra Florianová, Praha 6; Richard Hájek, SPŠS Prostějov; Ludmila Hejdenková, SVVŠ Frýdlant n/Ostr.; Karel Jerie, SVVŠ Nová Paka; Marta Kubišová, SVVŠ Nitra; Pavla Literová, SVVŠ Semily; Petr Ludvík, ZDŠ Praha 3; Jan May, SVVŠ Praha 8; Vlastislav Mazal, SPŠS Prostějov; Danica Melišová, SVVŠ Nitra; Milada Popelková; Štefan Porubský, SPŠ Zvolen; Ján Potočiar, Bytčica (okr. Žilina); Zdeněk Slanina, ZDŠ Brno; Jan Souček, SVVŠ Praha 4; Miloš Šidlichovský, Liberec; Vlasta Šohajová, SVVŠ Pacov; J. Šulc, Bakov n/Jiz.; J. Štěpánová, ZDŠ Dobřichovice; František Vacek, PŠS Písek; František Vejvara, SPŠ stavební - Plzeň; Jaromír Volný, SVVŠ Znojmo; Jarmila Vymazalová, SPŠS Prostějov; Miluše Zahálková, SPŠS Prostějov; Gabriel Zemanovič, SVVŠ Zl. Moravce.¹⁾

Vraťme se znova k textu úlohy o ornamentu. Měli jsme zde (pomocí poloměru r) vypočítat obvod a obsah jisté části roviny, jejíž obrázek byl otištěn v 8. čísle minulého ročníku. Pro snazší informaci čtenářů otiskujeme zde znova tento obrázek.



Obr. 1



Obr. 2

¹⁾ Při této příležitosti žádáme všechny řešitele, aby příště u každého svého příspěvku uváděli čitelně vždy celé své jméno, bydliště a případně i školu, kterou navštěvují. Usnadní nám to zpracovávání celého došlého materiálu a zamezí se tím též nedopatření. Mezi došlými řešeními úlohy o ornamentu bylo několik příspěvků, kde tyto údaje nebyly úplné - jeden řešitel (ze Žďáru n/S.) se pod svůj příspěvek zapomněl dokonce podepsat a nemohli jsme jej tedy ani zařadit do výše uvedeného seznamu řešitelů.

Nyní uvedme řešení, jehož autorem je *František Vacek z PŠS v Písku*.
 Ř e š e n í. Obsah ornamentu je možno složit z kruhu a dvou „výběžků“, které jsou ohraničeny oblouky

$$\widehat{A_1B_1} \text{ a } \widehat{A_1C_1}, \widehat{A_2B_2} \text{ a } \widehat{A_2C_2}$$

Vypočteme obsah rovnostranného trojúhelníka *STR*. Platí

$$P = r^2 \sqrt{3}.$$

Do tohoto rovnostranného trojúhelníka nám zasahují svou plochou $\frac{3}{6}$ čili $\frac{1}{2}$ obsahu kruhu. Zbylá plocha trojúhelníka je jeden výběžek ornamentu. Jeho obsah je tedy

$$r^2 \sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2}.$$

Oba výběžky mají obsah

$$2r^2 \sqrt{3} - \pi r^2$$

Nyní obsah těchto dvou výběžků přičteme k obsahu kruhu a dostaneme obsah celého ornamentu

$$2r^2 \sqrt{3} - \pi r^2 + \pi r^2 = 2r^2 \sqrt{3}.$$

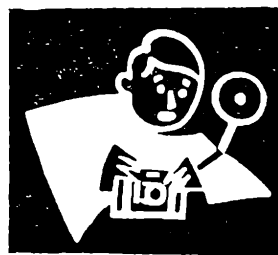
Obvod ornamentu se skládá z obvodu celého kruhu (o poloměru r) a jedné třetiny obvodu tohoto kruhu. Obvod našeho ornamentu je proto

$$2\pi r + \frac{2\pi r}{3} = \frac{8\pi r}{3}.$$

To je tedy řešení úlohy o ornamentu. Závěrem ještě jednu poznámku o tom, čím je tato úloha zajímavá. Ornamenty, které jsme zde studovali, pokrývají celou rovinu tak, jako např. čtverce pokrývají čtverečkovaný papír. Této vlastnosti jsme si už všimli při zadávání úlohy v 8. čísle minulého ročníku. Vedle toho je tu však ještě jedna zajímavost, na kterou upozorňuje řešitel *Ivan Davidovič z SPŠS v Praze 5*: Při výpočtu obsahu ornamentu vypadlo z úvahy číslo π , takže obsah je možno vyjádřit bez Ludolfova čísla. Tato okolnost jistě mnohým čtenářům připomíná klasické *Hippokratovy měsíčky* sestrojené nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka. Součet obsahů těchto dvou měsíčků (omezených kruhovými oblouky) je roven obsahu uvažovaného pravoúhlého trojúhelníka — můžeme jej tedy rovněž vypočítat bez čísla Ludolfova²⁾.

J. S.

²⁾ Podrobněji o Hippokratových měsíčcích viz např. knihu F. Balady, *Z dějin elementární matematiky*, str. 188.



T i b o r S z e b é n y i, Bratislava:

Spomienka na tvorcu seizmológie

Zemetrasenia, ktoré nastali v neďávnej minulosti v Chile, Iráne, Taliansku atď. vyvolali rozruch u celej svetovej verejnosti. Seizmografy na rôznych miestach našej Zeme spoľahlivo a okamžite zmerali intenzitu týchto zemetrasení. Veda, ktorá skúma tieto zemetrasenia - seizmológia, je však jednou z mladých vied. Pozrime sa trochu na životné osudy a dielo jej tvorcu **B o r i s a B o r i s o v i č a G o l i c y n a**.

B. B. Golicyn sa narodil 2. marca 1862 v Petrohrade; bol potomkom kniežaťa Michaila Michajloviča Golicyna, spolupracovníka Petra Veľkého. Ako 14-ročný vstúpil do Námorného učilišťa v Petrohrade, kde v roku 1880 zložil záverečné skúšky najlepšie zo všetkých absolventov. V tom istom roku uskutočnil svoju prvú zahraničnú plavbu na fregate „Vojvoda z Edinburgu“, na ktorú bol menovaný ako dôstojník. Počas plavby sa Golicyn neustále venoval štúdiu exaktných vied. Jeho záujem o vedecké poznatky ho viedol k tomu, že sa vrátil na jeseň v roku 1881 do Petrohradu s úmyslom pokračovať v štúdiach. Golicyn sa preto

v zime 1881—1882 pripravoval na skúšky, na Nikolajevsku námornú akadémiu. Náhla choroba, tuberkulóza, ho však prinútila odísť na liečenie do Florencie, kde zotrval dva roky až do úplného vyzdravenia. Počas liečenia sa zapísal do školy sociálnych náuk, kde navštevoval prednášky z histórie, práv, fyziky a chémie. V tej dobe začal pracovať vedecky a v Technickom ústave pod vedením prof. Bartoliho previedol svoje prvé výskumné práce.

Na jeseň roku 1884 sa Golicyn vrátil do Petrohradu a začal študovať na Námornej akadémii. Po ukončení akadémie roku 1886 sa Golicyn rozhodol opustiť povolanie námorného dôstojníka a venovať sa vedeckej práci. Jeho túžbou bolo dostať sa na fyzikálno-matematickú fakultu Petrohradskej univerzity. Keďže na Petrohradskú univerzitu prijímali len absolventov klasického gymnázia, univerzita žiadala od neho vykonanie skúšok z celej gymnaziálnej látky. Golicyn nechcel stratiť čas prípravou ku skúškam, odiešiel preto na univerzitu do Strassburgu, ktorá takéto požiadavky nemala.

V roku 1890 Golicyn obhájil

v Strassburgu svoju doktorskú dizertačnú prácu na tému *O zákone Daltonovom*, za čo mu bol udelený vyšší stupeň doktorského diplomu *summa cum laude* - s vyznamenaním. Skutočný obsah tejto práce je však ďaleko širší ako je jej názov. Golicyn nielen že skúmal Daltonov zákon pre čisté látky a zmesi, ale tiež sledoval vlastnosti látok nachádzajúcich sa v kritickom stave. Dokázal, že Daltonov zákon, podľa ktorého úhrnný tlak zmesi plynov a pár sa rovná súčtu tlakov jednotlivých plynov a pár, vždy neplatí. Určil, v ktorých prípadoch platia odchýlky od tohto zákona. Po obhájení dizertácie sa Golicyn vrátil do Ruska a začal pôsobiť na Moskovskej univerzite.

Najväčšiu dôležitosť z prác v molekulovej fyzike majú Golicynove práce venované kritickému stavu látky. V svojich prácach *O kritickovej teplote* (1890), *O stave látky v blízkosti kritického bodu* (1893) Golicyn napríklad vypracoval jednoduchý spôsob ukazujúci neustále zmeny hustoty telies v kritickom stave, metódu určenia hustoty nasýtených pár pri vysokej teplote atď.

Na jar roku 1893 Golicyn predložil fyzikálno-matematickej fakulte Moskovskej univerzity dizertáciu *Štúdiá matematickej fyziky* na získanie vedeckej hodnosti magistra fyziky. V tejto práci skúmal obecné vlastnosti dielektrík z hľadiska mechanickej teórie a žiarivú energiu. Druhá časť tejto dizertačnej práce, v kto-

rej sa Golicyn zaoberal teplotou žiarivej energie vyvolala ostrú kritiku zo strany jeho oponentov, medzi ktorými boli aj Stoletov a Timirjazev. Hoci táto kritika bola nesprávna, musel Golicyn stiahnuť svoju prácu.

V roku 1894 bol Golicyn menovaný za vedúceho Fyzikálneho kabinetu Akadémie vied. Začal sa zaoberať čisto fyzikálnymi prácami a vytvoril pozoruhodnú štúdiu Dopplerovho princípu, ktorý niečo predtým experimentálne zistil Belopolskij aj v optike.

Hlavný význam Golicynových prác spočíva v jeho výskumoch *seizmometrických*. Nemecký vedec Wiechert už na začiatku XX. storočia ukázal, že zemetrasenia, ktoré závisia na náhlých presunoch hornín podmienených deformáciou zemskej kôry, vyvolávajú v pružných vrstvách Zeme vlny, šíriace sa rýchlosťou niekoľkých tisíc metrov za sekundu. Štúdium seizmických vln ukázalo, ako v každom pružnom telese môžu byť tieto vlny dvojakého druhu: pozdĺžne vlnenie častíc pružného telesa a priečne vlnenie častíc vzhľadom k smeru pohybu. Tieto vlny vzniklé v určitom bode zemskeho povrchu prebiehajú zemskou kôrou a ďalej vnútornými časťami zemskeho telesa. Prinášajú takto na rôzne miesta Zeme, ležiace ďaleko od miesta zemetrasenia zprávu o katastrofe, ktorá postihla určitá miesto zemskeho povrchu. Pritom sa vlny na svojej ceste lámu, odrážajú a pohlcujú.

Prvé prístroje, ktorými bolo možné registrovať zemetrasenia,

seizmografy, zostrojil už Wiechert, ale jeho přístroje boli velmi drahé a nepraktické, pretože ich váha sa pohybovala až okolo 10 tun. Přístroje, ktoré skonštruoval Golicyn, boli podstatne lacnejšie, takže sa mohli používať v širokom meradle. Súčasne s konštrukciou a stavbou nových seizmografov rozpracoval Golicyn teóriu týchto přístrojov a metódy určenia ich konštantných parametrov určujúcich dynamické a elektrické vlastnosti samotných přístrojov.

Koncem novembra 1906 Golicyn zriadil v Pulkovskom observatóriu seizmickú stanicu, ktorej hlavným cieľom bolo sledovať a porovnávať rozličné typy seizmografov. V priebehu prvých 40 dní bolo zaregistrovaných 14 zemetrasení, pričom sa potvrdila prednosť seizmografov zhotovených Golicynom. Jeho přístroje sa nachádzajú dnes v seizmických staniaciach na celom svete.

Golicyn správne usúdil, že pre rozvoj seizmológie je nutné vytvoriť sieť seizmických staníc, jednotne organizovaných. Predpokladal, že je lepšie mať menší počet dobre vybavených staníc s kvalifikovaným personálom, ako väčší počet nedostatečne zriadených. Seizmickú službu zorganizoval v Rusku nasledovne: vytvoril sieť skladajúcu sa zo šiestich seizmických staníc I. triedy, vybavených přístrojmi pre registráciu vzdialených zemetrasení a z desiatich seizmických staníc II. triedy, vybavených přístrojmi pre zápis blízkych a miestnych zemetrasení. Centrálnou seizmic-

kou stanicou bolo už zmienené Pulkovské observatórium, v ktorom podľa Golicynových návrhov bolo postavené špeciálne podzemné laboratórium.

Veľkú dôležitosť majú Golicynove práce aj v teoretickej seizmológii. Rozoberá otázky týkajúce sa rýchlosti šírenia povrchových seizmických vln, koeficientu pohlcovania seizmickej energie, hĺbky ohniska zemetrasenia. Vyše štyristo Golicynových originálnych prác venovaných převážne seizmológii, bolo publikovaných v rozličných vedeckých časopisoch.

Svojimi zásluhami vo vede dosiahol Golicyn hodnosť akademika ruskej Akadémie vied, čestného doktora fyzikálno-matematických vied Manchesterskej univerzity (1910), člena Švajčiarskej spoločnosti fyzikálnych a prírodných vied (1911). V roku 1911 bol Golicyn v Manchestru zvolený za prezidenta Medzinárodnej seizmickej asociácie na trojročné obdobie, čo bolo najväčším ocenením jeho zásluh. Nasledujúca konferencia Asociácie sa mala konať roku 1914 v Petrohrade, ale vojna tomu zabránila.

Začiatkom I. svetovej vojny na Golicynov návrh bola vytvorená Vojensko-meteorologická správa, ktorú sám viedol až do posledných dní svojho života.

Zomrel 17. mája 1916. Veda si bude vždy spomínať na Borisa Borisoviča Golicyna - tvorca seizmológie, ako na človeka neoblomnej vôle a neskrotnej energie.



Jiří Dvořák Alois Švec

Technické křivky

Ke studiu této knihy je třeba znát základy analytické geometrie v rovině a v prostoru a počátky diferenciálního a integrálního počtu. Tyto pomocné disciplíny jsou stručně zopakovány v první části knihy. Při výkladu o rovinných křivkách se začíná přímkou, jejíž rovnice jsou uvedeny v různých tvarech, pak následují kuželoosečky se svými základními rovnicemi. Je tu proveden také rozbor rovnice druhého stupně. Pro ostatní algebraické a transcendentní rovinné křivky jsou uvedeny jejich nejjednodušší vlastnosti, z prostorových křivek pouze šroubovice. Pro tzv. empirické křivky jsou podány přibližné konstrukce, kterých se užívá pro tyto křivky.

Druhá část knihy obsahuje konstrukce těžiště různých rovinných křivek a grafickou derivaci a integraci funkce, jejíž graf je znám.

Ve třetí části jsou uvedeny základy kinematické geometrie neproměnného útvaru s určením vazby bodu a tělesa v rovině. Ze základních pohybů je vyložen po-

hyb eliptický, konchoidální a cykloidální. Použití je ukázáno na přímovodech, při návrzích mechanismů pro vytvoření určité křivky a v teorii ozubených kol.

Knihu je třeba číst velmi pozorně a zároveň je nutno kreslit si vlastní obrázky, neboť výklad vzhledem k rozsahu je velmi stručný. Přesto, že některé části vzhledem k titulu knihy by v knize nemusely být (např. stať o těžišti a grafických metodách), jiné by mohly být probrány důkladněji (např. vlastnosti různých rovinných křivek), a že knize lze vytknout celou řadu nedostatků ve stylizaci i metodice, nehledíme-li přitom ještě k velkému množství tiskových chyb, může být přečtení knihy užitečné pro ty čtenáře, kteří chtějí později studovat na strojních fakultách vysokých škol.

Knihla vyšla ve Státním nakladatelství technické literatury v Praze 1962, jako 26. svazek II. řady Polytechnické knihovny. Má 232 strany, 181 obrázků a její cena je brož. 8,— Kčs.

Karel Drábek

Úspěchy mezinárodních matematických olympiád jsou pro naše „závodníky“ rok od roku nepříznivější. Počet řešitelů MO klesá. Úroveň průměrných žáků v matematice a fyzice je neuspokojivá. Kde je chyba? Ve způsobu výuky, v osnovách, v žácích samotných?

Na tuto otázku nelze odpovědět ihned. Jistě je však možno odstranit všechny překážky a připravit tak lepší podmínky pro rozvoj naší matematiky a fyziky. Takový byl zřejmě názor ÚV MO

přehled celého tématu pak doplnila řada příkladů, zaměřených na konkrétní problémy. Přednášky však daly posluchačům ještě něco víc. Tak třeba výklad o harmonickém pohybu (k jeho vlastnostem došel přednášející s. Simerský jinou cestou než na střední škole) doplnil krátký pohled na hudební akustiku. S. Říman, CSc, dospěl ke stavové rovnici plynů na základě kinetické energie molekul a rovnicí adiabaty dokázal podobným způsobem. Přitom se mu jednoduchý

MATEMATIKA NA HORÁCH

a FO, když padlo rozhodnutí uspořádat od 16. června do 6. července 1963 na Richtrových boudách v Krkonoších soustředění úspěšných řešitelů kategorie B MO a FO.

Sešlo se jich padesát. Úkolů pro nastávající tři týdny bylo dost. Pevný základ pro další studium vyžadoval důkladné prohloubení středoškolské látky. Podchycení zájmu o budoucí vědeckou práci volalo však po zajímavých tématech, která by zpřístupnila vrcholné problémy dnešní matematiky i fyziky.

Režim dne uspokojil oba požadavky. Dopoledne bylo vyhrazeno přednáškám s náměty spíše středoškolskými. Aby se však neopakovalo jen zvládnuté učivo, probírali přednášející látku v intencích moderní vědy a z vyššího hlediska než na střední škole. Systematický

obrat, „vypůjčený“ z vyšší matematiky, podařilo dokonale objasnit všem posluchačům. Někde se obsah přednášek úplně odchýlil od školských osnov. S. Dlouhý při řešení Appoloniových úloh obohatil matematické znalosti posluchačů o metodu kruhové inverze. S. Kleczek, CSc., ukázal ve své přednášce další skupenství hmoty, vznik nových světů, přesně zdůvodnil na první pohled náhodnou křivku chemického složení vesmíru a večer svůj výklad doplnil diapozitivy a filmem.

Večerní besedy se staly exkurzemi do světa moderní vědy a zabavily matematiku i fyziku pověr o jejich suchopárnosti. Velký zájem mezi řešiteli vzbudila teorie množin i problém kontinua a pro kardinální čísla skoro zapomněli na jídlo.

Akademik Novák zaujal hned v první besedě kromě toho i jinými otázkami: matematickou teorií populace, lingvistiky a zmínkou o pomoci pařížských matematiků kriminalistice. Posluchače nadchly příklady ryze exaktních úvah o plánování chovatelství, stejně jako postupů, které by dnes třeba usvědčily autora Rukopisů Václava Hanku.

Jestliže si někdo pod pojmem Lobačevského geometrie představoval uměle vykonstruovaný příklad odtržený od života, určitě svůj názor změnil. S. Dlouhý ve své besedě ukázal, jak v mnoha bodech vyhovuje tato geometrie pohledu člověka na svět mnohem lépe než geometrie Euklidova.

Fyziku jako dobrodružství poznání ukázal ve své besedě o spektrálních čarách Balmerovy série a Bohrově modelu atomu s. Říman, CSc. Nejenže strhl všechny přítomné lícením, jak mizivými prostředky lze při skutečné touze po vědění dosáhnout světového objevu, ale sám našel cestu, kterou šel při svém objevu Balmer a kterou odvodil Bohr své na první pohled dogmatické postuláty.

Poslední beseda měla nádech trochu čapkovský. S. doc. Menšík nás seznámil s tím, jak se dělá odborný časopis, v tomto případě Rozhledy.

Kdo se domnívá, že účastníci soustředění žili jen matematikou a fyzikou, je na omylu. Smíchu bylo dost, a protože nejenom čísly živ je člověk, nezapomněli ani na jídlo. Hráli odbíjenou, nohejbal, koupali se a chodili na výlety. A že

i matematika se dá spojit s humorem, dokazuje tvrzení jednoho z účastníků, přijaté pod názvem Vojtíškova věta: Součin všech velkých písmen abecedy se rovná nule. Důkaz je jednoduchý: Každé číslo násobené nulou se rovná nule a mezi činiteli se vyskytuje 0.

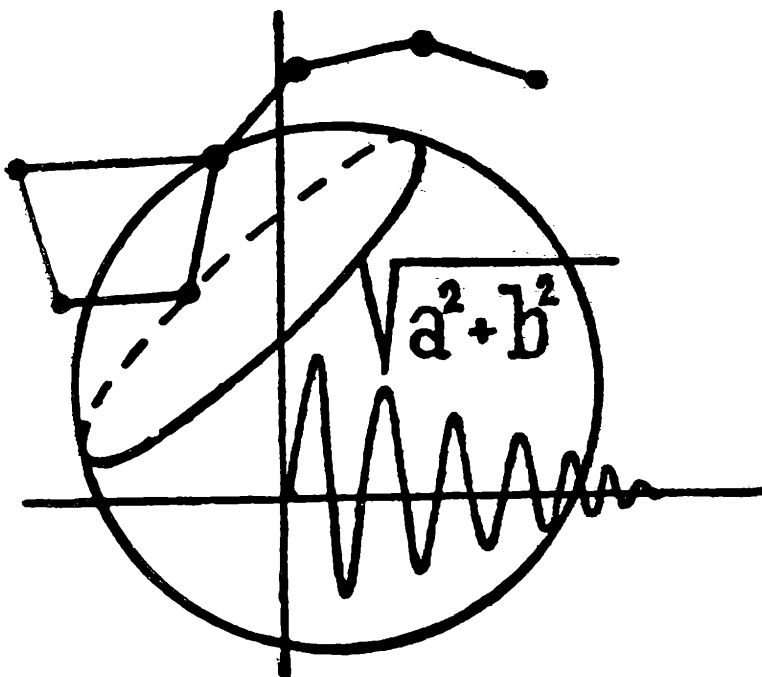
A pak přišlo závěrečné hodnocení. Všichni měli řadu připomínek i návrhů. Mnozí by chtěli lépe organizovaný odpolední program. Je sice pravda, že po této stránce nebylo soustředění materiálně zajištěno (míč a síť na odbíjenou patřily k inventáři Richtrových bud), ale při dobré vůli by se mohla náplň volného času rozšířit kromě vycházek i o další akce. Závažnou otázkou je i organizace olympiád samotných. V přípravných kolech se věnuje řešitelům všemožná péče, ale sotva odevzdají poslední úlohu II. kola, zájem o ně končí. Nanejvýš se dozvědí své pořadí, ačkoli by se zájem o další ročníky jistě zvýšil po individuálním zhodnocení všech příkladů a upozornění na vady a nedostatky v řešení i formulaci.

Celkově se soustředění všem líbilo jak po stránce náplně přednášek, tak i krásného prostředí. Tři neděle strávené na Richtrových boudách budou pro všechny jistě trvalou vzpomínkou. A nejen to - budou i pobídkou k intenzivní práci v příštím ročníku olympiády i k dalšímu studiu a snad někdy i k vědecké práci.

Václav Chváta I,
PŠ stavební, Plzeň

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



4

ROČ. 42

1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Prosinec 1963

Číslo 4

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VUT, Brno; doc. dr. *Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; *Miloš Jelínek*, VÚP, Praha; prof. dr. *Josef Korous*, VŠD, Žilina; prof. *Emil Kraemer*, KU, Praha; doc. dr. *Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; CSc. *Evžen Říman*, ČVUT, Praha; CSc. *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; CSc. *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. *Václav Šindelář*, ÚNM, Praha; prof. dr. *Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

J. Zapletal: O jedné vlastnosti kořenů kvadratické rovnice	145
L. Galev, Sofie: Množiny s algebraickými operacemi (Dokončení)	148
Inž. dr. E. Reich: Řešení trojúhelníka	151
O. Jeništa: Konstrukce druhého ohniska kuželosečky	157
O. Lepil: Hallův jev	162
J. Fiamčík: Metóda určenia koeficienta restitúcie	166
P. Pospíšil: Hmota elektronu a její měření	169
J. Horský: Základy teorie relativity (Pokračování)	175
Řešení úloh loňské soutěže rozhledů (Pokračování)	180
J. Eliaš: Kalendár a matematika	185
F. Komurka: Půl století materiálu budoucnosti	188
Recenze	189
J. Hroník: Cvičíme na přijímací pohovory	190
M. Zelenka: Rusko-český slovník	190

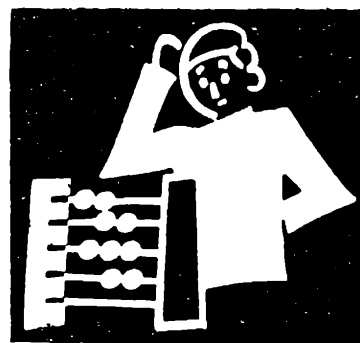
a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. O. Hö nig. Titulní obrázky: V. Fencel, studující FS.

A-16*31609

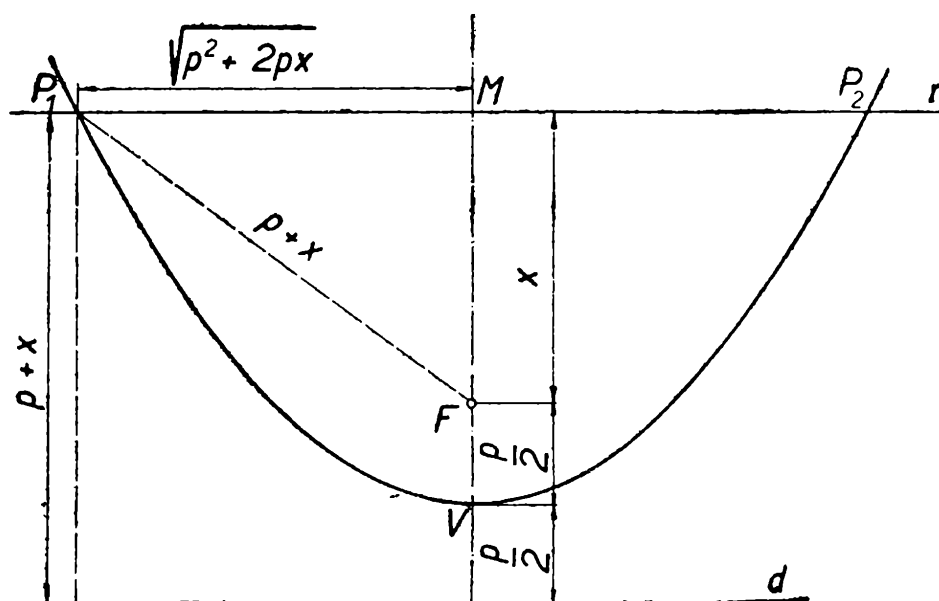
© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1963.



Josef Zapletal, VUT, Brno:

O jedné vlastnosti kořenů kvadratické rovnice

Čtenáři jistě dovedou řešit kvadratickou rovnici různými metodami, například pomocí vzorců, popřípadě graficky. Ve svém příspěvku pojednávám o řešení kvadratické rovnice užitím výsledků článku in ž. Eduarda Krieglsteina, Užití diferenciálního počtu, který byl otištěn v pátém a šestém čísle, ročníku 1961–1962 tohoto časopisu. Nejdříve si všimněme určité vlastnosti paraboly, určené parametrem p a řídicí přímkou d .



Obr. 1

Nechť je dána parabola o parametru p s řídicí přímkou d . Rovnoběžně s přímkou d položme přímkou r tak, aby protla danou parabolu v bodech P_1, P_2 a osu paraboly v bodě M (obr. 1).

Vzdálenost ohniska od bodu M označme x . Potom vzdálenost bodů P_1 a P_2 od přímky řídicí je $p + x$. Z definice paraboly platí $P_1F = P_2F = p + x$. Délka úsečky $P_1M = P_2M = \sqrt{p^2 + 2px}$. Vzdálenost bodu M od vrcholu paraboly je $VM = \frac{p}{2} + x$. Pro speciální volbu

parametru $p = \frac{1}{2}$ platí

$$P_1M = \sqrt{VM}, P_2M = \sqrt{VM} \quad (1)$$

Zvolme nyní libovolnou normovanou kvadratickou funkci

$$y = x^2 + mx + n.$$

Grafem takové funkce je parabola o parametru $p = \frac{1}{2}$, jejíž osa je rovnoběžná s osou y .

Vypočtíme extrémní hodnoty této funkce. Hledejme nejprve stacionární body, tj. body, v nichž je první derivace rovna nule.

$$y' = 2x + m, \quad 2x + m = 0, \quad x = -\frac{m}{2}.$$

Funkce má jediný stacionární bod $x = -\frac{m}{2}$. Protože druhá derivace funkce y v bodě $x = -\frac{m}{2}$ je

$$y'' = 2,$$

a tudíž kladná, má daná kvadratická funkce v bodě $x = -\frac{m}{2}$ minimum. Tuto vlastnost můžeme zjistit také z grafu funkce. Hodnota dané funkce v bodě $x = -\frac{m}{2}$ je $-\frac{m^2}{4} + n$.

Protněme nyní graf dané kvadratické funkce přímkou, kolmou k ose grafu, ve vzdálenosti $\frac{m^2}{4} - n$ od její minimální hodnoty. Tato přímka je totožná s osou x . Hledejme průsečíky této přímky s danou funkcí (obr. 2).

Pro délky úseček VM^0 , $P_1^0M^0$ a $P_2^0M^0$ platí podle (1)

$$P_1^0M^0 = \sqrt{VM^0}, \quad P_2^0M^0 = \sqrt{VM^0},$$

ale

$$VM^0 = \frac{m^2}{4} - n,$$

tudíž

$$P_1^0M^0 = \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}, P_2^0M^0 = \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}.$$

Souřadnice x bodu $M^0 = -\frac{m}{2}$, tudíž bod P_1^0 má souřadnici

$$-\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$$

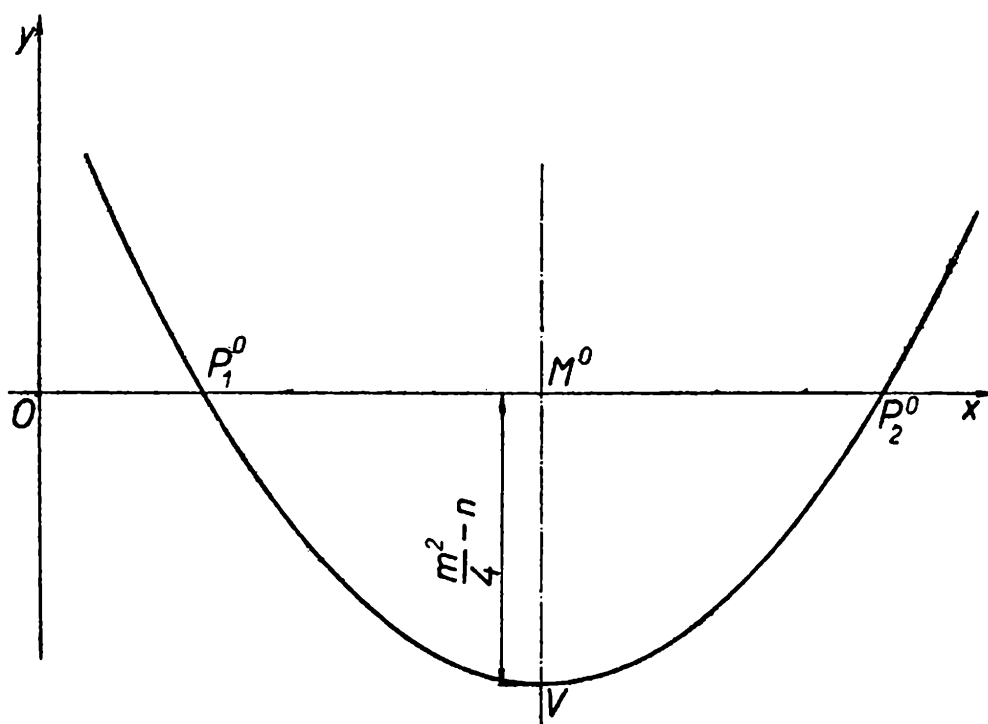
a podobně bod P_2^0 má souřadnici x

$$-\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}.$$

Můžeme si snadno ověřit, že takto nalezená čísla jsou kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + mx + n = 0. \quad (3)$$

Tak jsme našli řešení kvadratické rovnice, aniž jsme použili algebraických vztahů. Celou úvahu můžeme shrnout takto:



Obr. 2

I. Řešit rovnici $x^2 + mx + n = 0$, pro jejíž kořeny platí

$$x_{1,2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - n},$$

znamená určit souřadnice průsečíků kvadratické funkce $y = x^2 + mx + n$ s přímkou $y = 0$.

II. Kořeny kvadratické rovnice (3) určíme tak, že najdeme stacionární bod příslušné kvadratické funkce (2) a k této hodnotě připočteme a odečteme odmocninu ze záporně vzaté extrémní hodnoty dané funkce.

P o z n á m k a. Ze vzorce pro řešení kvadratických rovnic je zřejmé, že tvrzení (II) platí i v případě komplexních kořenů.

Příklad. Řešte rovnici

$$21x^2 + 62x - 55 = 0.$$

Danou rovnici musíme nejdříve normovat

$$x^2 + \frac{62}{21}x - \frac{55}{21} = 0,$$

tudíž

$$y = x^2 + \frac{62}{21}x - \frac{55}{21}$$

je příslušná kvadratická funkce. Určeme stacionární bod

$$y' = 2x + \frac{62}{21} = 0, \quad x = -\frac{31}{21}.$$

Hodnota funkce y v bodě o souřadnici $x = -\frac{31}{21}$ je

$$\begin{aligned} \frac{31^2}{21^2} - 2 \frac{31^2}{21^2} - \frac{55}{21} &= \frac{-31^2 - 55 \cdot 21}{21^2} = \frac{-961 - 1155}{441} = \\ &= \frac{-2116}{441} = -\frac{46^2}{21^2}. \end{aligned}$$

Kořeny rovnice tedy jsou

$$x_{1,2} = -\frac{31}{21} \pm \frac{46}{21} = \begin{cases} \frac{5}{7} \\ -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Ljuben Galev, Vysoká škola technická, Sofie:

Množiny s algebraickými operacemi

(Dokončení)

Pologrupa se nazývá *gr u p o u*, jestliže pro každé dva prvky A a B v pologrupě existuje prvek X , který je opačný k A vzhledem k B . Množina K_{10} s operací „sčítání“ je grupa.

Množina R obsahující aspoň jeden prvek, na níž jsou definovány dvě (komutativní) algebraické operace (první nazveme sčítání a píšeme

v aditivním tvaru, druhou nazveme násobení a zapisujeme v multiplikačním tvaru) se nazývá (komutativní) okruh, jestliže je grupou vzhledem k první z těchto algebraických operací a pologrupou vzhledem k druhé a platí-li pro tyto operace distributivní zákon $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$. Množina K_{10} je grupou pro operaci „sčítání“ a pologrupou pro operaci „násobení“. Množina K_{10} s operacemi v ní zavedenými je tedy okruhem. Tento okruh dostaneme, jestliže při dělení celých nezáporných čísel deseti ponecháme pouze nezáporné zbytky. Prvek 0 představuje kterýkoliv prvek množiny E_{10} (tj. čísel 0, 10, 20, 30, ...), prvek 1 představuje kterýkoliv prvek množiny čísel, která při dělení deseti dávají zbytek 1 (tj. čísel 1, 11, 21, ...); prvek 2 představuje kterýkoliv prvek množiny čísel, která při dělení deseti dávají zbytek 2 (tj. čísel 2, 12, 22, 32, ...) atd.

Jiný okruh R_8 se získá z nezáporných zbytků při dělení celých nezáporných čísel osmi. Tento komutativní okruh obsahuje prvky 0, 1, 2, ..., 7. Cayleyho tabulky obou algebraických operací v něm zavedených jsou

„Sčítání“								„Násobení“							
	1	2	3	4	5	6	7		1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	0	1	1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	0	1	2	2	4	6	0	2	4	6
3	4	5	6	7	0	1	2	3	3	6	1	4	7	2	5
4	5	6	7	0	1	2	3	4	4	0	4	0	4	0	4
5	6	7	0	1	2	3	4	5	5	2	7	4	1	6	3
6	7	0	1	2	3	4	5	6	6	4	2	0	6	4	2
7	0	1	2	3	4	5	6	7	7	6	5	4	3	2	1

V uvedeném okruhu R_8 tvoří prvky 0, 2, 4, a 6 ideál I_6 . Jiný ideál I_4 je tvořen prvky 0 a 4. A konečně prvek 0 tvoří nulový ideál I_0 okruhu R_8 .

I v tomto okruhu R_8 existují dělitelé nuly $2 \cdot 4 = 0$, $4 \cdot 6 = 0$. Kromě toho obsahuje R_8 i nilpotentní prvky, tj. takové, jejichž některá mocnina je rovna nule

$$2^3 = 2^2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 0, \quad 4^2 = 4 \cdot 4 = 0.$$

Zajímavá je rovněž skutečnost, že rovnice $x^2 = 1$ má čtyři kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$ (v R_8).

Množina K_7 nezáporných zbytků 0, 1, ..., 6, získaných při dělení celých nezáporných čísel sedmi, s danými dvěma algebraickými operacemi „sčítání“ a „násobení“ (v K_7) nám přináší nové vlastnosti. Podívejme se do jejich Cayleyho tabulek

„Sčítání“							„Násobení“						
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0	1	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	0	1	2	2	4	6	1	3	5
3	4	5	6	0	1	2	3	3	6	2	5	1	4
4	5	6	0	1	2	3	4	4	1	5	2	6	3
5	6	0	1	2	3	4	5	5	3	1	6	4	2
6	0	1	2	3	4	5	6	6	5	4	3	2	1

Množina K_7 je grupa vzhledem k první algebraické operaci „sčítání“, protože pro libovolné dva prvky A a B množiny K_7 existuje jediný prvek X z K_7 , pro nějž $A + X = B$. To znamená, že inverzní operace „odčítání“ vždy existuje. Grupa je v aditivním tvaru. Proto se říká, že K_7 je aditivní grupa vzhledem ke sčítání. Jednotkou této aditivní grupy je prvek 0, protože pro libovolný prvek z K_7 je $A + 0 = A$.

Odstraníme-li z K_7 prvek 0, je nová množina G_7 prvků 1, ..., 6 grupou vzhledem k druhé operaci „násobení“, protože pro libovolné dva prvky A a B z G_7 existuje vždy jediný prvek X z G_7 , pro nějž $A \cdot X = B$. Grupa G_7 je v multiplikativním tvaru. Proto se říká, že G_7 je multiplikativní grupa.

Okruh, ve kterém prvky různé od nuly tvoří komutativní grupu vzhledem k operaci násobení, se nazývá těleso.

Množina K_7 prvků 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 s danými v ní dvěma operacemi „sčítání“ a „násobení“ je těleso. Kterýkoliv prvek této množiny vzatý sedmkrát jako sčítanec dává prvek 0. Proto říkáme, že K_7 je těleso s charakteristikou 7.

Nezáporné zbytky při dělení celých nezáporných čísel prvočíslem p tvoří množinu, která s výše definovanými operacemi „sčítání“ a „násobení“ je tělesem s charakteristikou p . Např. nezáporné zbytky při dělení prvočíslem 5 tvoří těleso charakteristiky 5. Nezáporné zbytky pro libovolné složené číslo (ne prvočíslo!) k tvoří okruh. Např. okruhem je i množina nezáporných zbytků 0, 1, 2, 3 vzniklých při dělení celých nezáporných čísel číslem 4.

Zajímavé je těleso nezáporných zbytků při dělení číslem 2. Toto těleso obsahuje pouze dva prvky 0 a 1. Jeho aditivní grupa má tabulku pro „sčítání“ $1 + 1 = 0$. Multiplikativní grupa tohoto tělesa má pouze jeden prvek 1, a tabulka pro „násobení“ je $1 \cdot 1 = 1$. Z tabulky pro „sčítání“ je vidět, že těleso má charakteristiku 2, protože $0 + 0 = 0$, $1 + 1 = 0$.

Existuje mnoho algebraických operací tvaru výše uvedeného „sčítání“ a „násobení“. Pro každé přirozené číslo větší než jedna dostaneme nové dvě operace. A jak málo je operací, které známe!

Přesto však jsme ukázali alespoň malou část z toho množství, jímž se zabývá moderní algebra. Na jednoduchých příkladech podmnožin množiny celých nezáporných čísel jsme ukázali některé základní pojmy, které jsou předmětem studia moderní algebry, některé základní důležité a zajímavé vlastnosti jak množin, tak i jejich prvků.

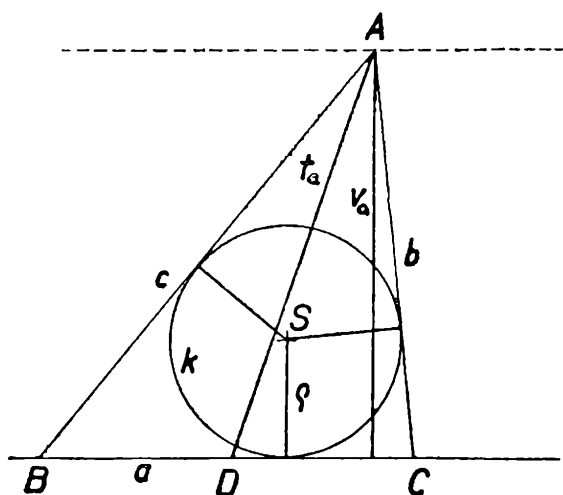
Přeložili Praga Přidalová a Miloslav Zelenka

Inž. dr. Emil Reich, Praha:

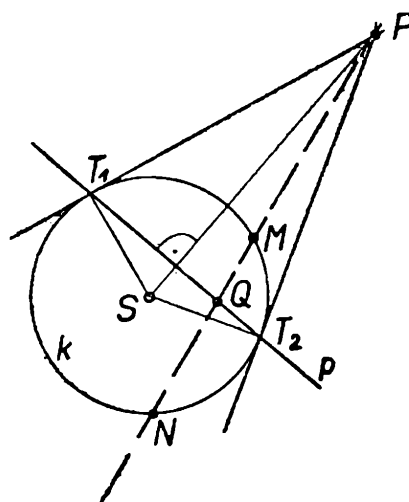
Řešení trojúhelníka

V Rozhledech č. 3, roč. 1962/63 str. 104—107 uveřejnili K. Drábek a J. B. Pavlíček článek Řešení úlohy z konstrukcí trojúhelníka, v němž sestavují trojúhelník, je-li dána výška v_a , těžnice t_a a poloměr ρ vepsané kružnice (obr. 1).

O této úloze¹⁾ jsem se zmínil J. B. Pavlíčkovi a on je prvním z mých známých, který ji vyřešil po 20 letech jiným způsobem než já. Uvádím zde své řešení.



Obr. 1

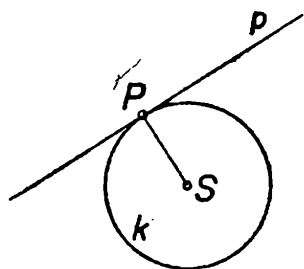


Obr. 2

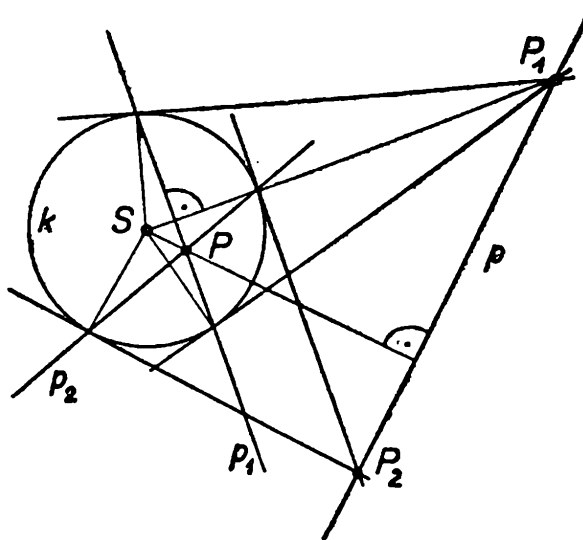
Uvědomuji si, že před válkou se žáci již na střední škole seznámili s pojmem poláry, a proto jsem mohl své řešení ukázat studentům z průmyslovky. Vždy v neděli jsem se s nimi scházel a jednou mne překvapili shora uvedenou úlohou.

¹⁾ Úloha byla uvedena např. v knize F. J. Brockmann, *Materialien zu Dreiecks-konstruktionen*, Lipsko, 1889.

Abyste však řešení, které je dále udáno, mohli rozumět i vy, dnešní středoškoláci, je zapotřebí, abych vysvětlil některé věty z projektivní geometrie (přesné důkazy nepodávám). Řekněme si nejdříve, co je polára bodu P ke kružnici k .

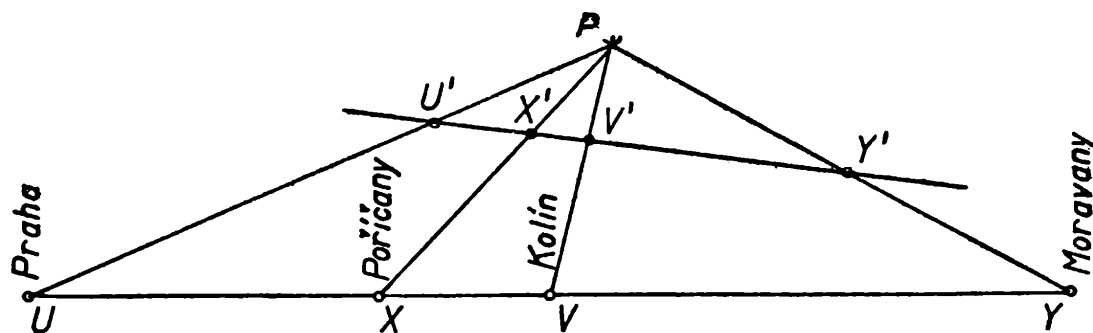


Obr. 3



Obr. 4

Je-li bod P vně kružnice k , pak polára p bodu P ke kružnici k je spojnice dotykových bodů T_1 a T_2 tečen, vedených z bodu P ke kružnici k . Bod P je pól em poláry p (obr. 2). Polára je kolmá na spojnici pólu se středem kružnice. Leží-li bod P na kružnici k , je jeho polárou p tečna kružnice k , sestrojena v bodě P (obr. 3), bod P je pól em přímky p .



Obr. 5

Je-li bod P uvnitř kružnice k , vedeme bodem P dvě přímky p_1, p_2 a konstruujeme k těmto dvěma polárám póly P_1 a P_2 . Spojnice pólů P_1 a P_2 je polárou bodu P (obr. 4), bod P je pól em přímky p . Stačí jedna přímka p_1 a jeden pól P_1 , uvážíme-li, že polára p je kolmá na spojnici SP .

Pohybuje-li se nějaký bod po přímce p , pak jeho polára prochází stále týmž bodem P .

S tím úzce souvisí pojem harmonické čtveřiny bodů nebo přímek.



Začneme s trojicí bodů. Jsou-li U, V, X tři vzájemně různé body na téže přímce (obr. 5), pak podíl vzdáleností

$$\frac{UX}{VX} = \lambda_X$$

se nazývá dělicí poměr bodu X vzhledem k bodům U, V . Přitom vzdálenosti zde měříme orientovaně, tj. probíháme-li příslušnou úsečku např. zleva doprava, označíme vzdálenost kladným číslem, v opačném případě záporným číslem. Je tedy např. $UX = -XU$, neboť symbol UX značí délku příslušné úsečky měřenou tak, že postupujeme od bodu U k bodu X ; symbol XU značí tutéž délku měřenou v opačném smyslu, totiž tak, že postupujeme od bodu X k bodu U . Snadno zjistíte, že leží-li bod X vně úsečky UV , je

$$\lambda_X > 0,$$

leží-li bod X uvnitř úsečky UV je

$$\lambda_X < 0$$

Mysleme si nyní, že na naší přímce je dán ještě čtvrtý bod $Y \neq V$; jeho dělicí poměr k těmže dvěma bodům UV je pak

$$\frac{UY}{VY} = \lambda_Y.$$

O čtyřech bodech $UVXY$ na téže přímce pak říkáme, že tvoří *harmonickou čtveřinu*, když podíl dělicích poměrů je roven -1 :

$$\mu = \lambda_X : \lambda_Y = -1$$

Pozor při tom na přesné pořadí uvedených čtyř bodů.

Jinými slovy: body U, V, X, Y tvoří harmonickou čtveřinu tehdy a jen tehdy, když je

$$\lambda_X = -\lambda_Y,$$

čili když je

$$\frac{\frac{UX}{VX}}{\frac{UY}{VY}} = -1$$

Číslo μ (podíl dělicích poměrů) se nazývá *dvojpoměr čtyř bodů* U, V, X, Y .

Můžeme tedy říci: dvojpoměr čtyř bodů je roven -1 tehdy a jen tehdy, když tyto body tvoří čtveřinu harmonickou.

Představujeme-li si např. jako „bod“ U Prahu, bod V Kolín, bod X Poříčany, pak musí bod Y představovat Moravany, aby tato čtveřina

byla harmonická. Je totiž

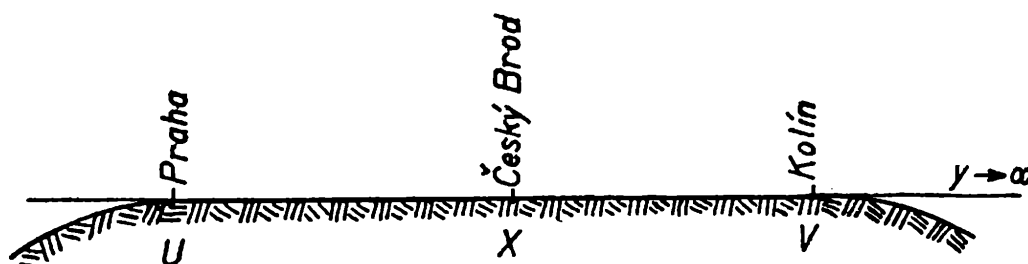
$$\begin{aligned} UV &= \text{Praha—Kolín} &= 60 \text{ km} , \\ UX &= \text{Praha—Poříčany} &= 40 \text{ km} , \\ XV &= \text{Poříčany—Kolín} &= 20 \text{ km} . \end{aligned}$$

Vzdálenost Poříčan ku Praze je dvakrát tak velká jako vzdálenost Poříčan ke Kolínu.

$$\begin{aligned} UY &= \text{Praha—Moravany} = 120 \text{ km} \\ VY &= \text{Kolín—Moravany} = 60 \text{ km} \end{aligned}$$

Vzdálenost Moravan ku Praze je *také* dvakrát tak velká jako jejich vzdálenost ke Kolínu. Proto „body“ Praha, Kolín, Poříčany, Moravany tvoří harmonickou čtveřinu.

Pojem dvojpoměru čtyř bodů na přímce zavádí se v geometrii i tehdy, když některý ze zkoumaných bodů je v „nekonečnu“, čili, jak se odborně říká, když je to bod nevlastní. Blíží-li se v naší harmonické čtveřině např. bod X ke středu úsečky UV , pak bod Y se zřejmě vzdaluje stále více od bodu U i V . Splyne-li pak bod X se středem úsečky UV , říkáme, že bod Y je nevlastní, je v „nekonečnu“.



Obr. 6

Zůstaňme ještě u našeho příkladu: Český Brod je stejně vzdálen od Prahy jako od Kolína. Hledejme bod, který má *také* stejnou vzdálenost od Prahy jako od Kolína, ale leží vně úsečky Praha—Kolín. To je pak jedině bod nevlastní, tedy bod v „nekonečnu“, který nemůže na teoretickém prodloužení této trati nahradit ani některá hvězda,²⁾ ačkoliv její vzdálenost od Prahy i od Kolína je prakticky stejná (obr. 6).³⁾

V projektivní geometrii se dále dokazuje, že dvojpoměr čtyř bodů se promítáním nemění. Tvoří-li zvláště body U, V, X, Y harmonickou čtveřinu, pak říkáme, že také přímky, které z libovolného bodu P (neležícího na přímce UV) promítají tyto čtyři body, tvoří harmonickou čtveřinu přímek (viz stále obr. 5). Protne-li je další přímka, nepro-

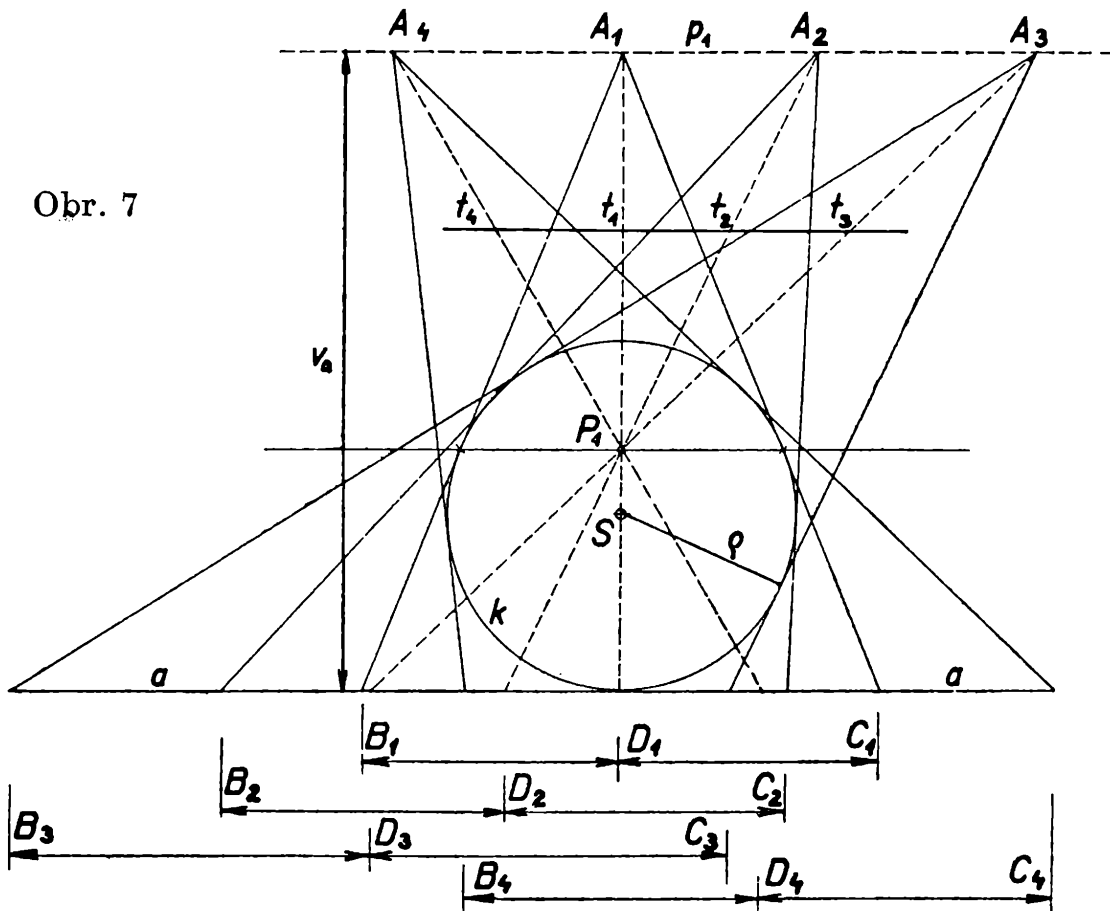
²⁾ Považujeme-li spojnicí Praha—Kolín za přímku, tak si musíme uvědomit, že její prodloužení se záhy odkloní od zemského povrchu, neboť míří do vesmíru.

³⁾ Tyto čtyři body, totéž Praha—Kolín—Č. Brod a bod v nekonečnu tvoří opět harmonickou čtveřinu.

cházející bodem P , v bodech U', V', X', Y' , tvoří tyto čtyři body opět harmonickou čtveřinu.

Vztah harmonické čtveřiny bodů a pojmů pól s polárou u kružnice je dán touto větou: Předpokládáme, že pól P neleží na kružnici k a označme písmenem p jeho poláru k této kružnici; vedu-li libovolnou sečnu kružnice bodem P a označíme-li její průsečíky s kružnicí písmenou M, N a její průsečík s polárou p písmenem Q , pak body P, Q, M, N , tvoří harmonickou čtveřinu (obr. 2).

Důkazy všech těchto vět i podrobný výklad pojmů zde užitých najdete např. v knize K. Havlíček: Úvod do projektivní geometrie kuželoseček, SNTL, Praha 1956.



Obr. 7

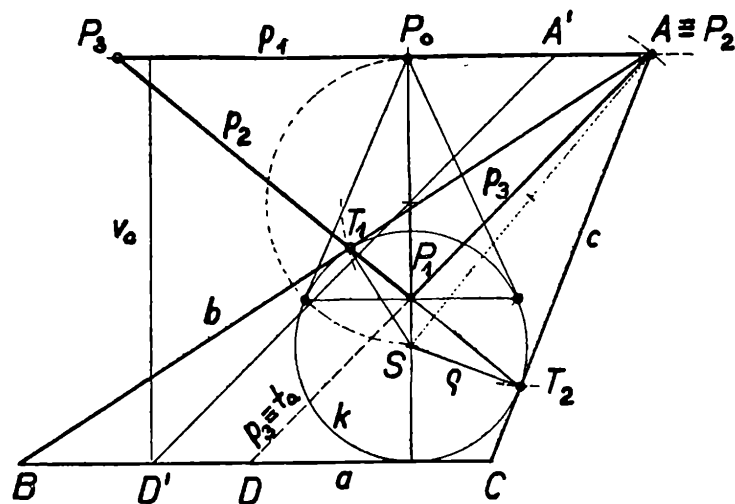
Vraťme se nyní k naší původní úloze. Jakmile mi byla předložena, ihned jsem večer nakreslil (obr. 7) dvě rovnoběžky ve vzdálenosti v_a , totiž přímku a a přímku p_1 , dále kružnici k o poloměru ρ , která se dotýkala základny a . Bodem A jsem pohyboval po přímce p_1 . Zpozoroval jsem, že všechny tečny t_a různých poloh bodů A (A_1, A_2, A_3, A_4) jdou bodem P_1 . Přímka p_1 je polárou bodu P_1 ! Byl to výsledek teprve druhého dne, neboť přestože vím, že je třeba rýsovat přesně, při prvním náčrtu jsem tak neučinil, a proto trvalo zjištění této vlastnosti dva dny.

⁴⁾ Viz např. článek M. Valešové, Dvojpoměr, Rozhledy, roč. 38, č. 7.

Pak jsem hledal důkaz. Říká se: Když si nevíš s důkazem rady, použij analytické geometrie. Ta ukázala skutečně správnost mé domněnky.

Řešení úlohy je nyní zřejmé (obr. 8). Narýsujeme přímku a , dále ve vzdálenosti v_a rovnoběžku k ní p_1 a v libovolném bodě přímky a kružnici o poloměru ρ , která se jí dotýká. Určíme bod P_o , tj. průsečík přímky p_1 s kolmicí vedenou k přímce p_1 ze středu kružnice S . Sestrojíme z P_o tečny ke kružnici. Spojnice jejich dotykových bodů T_1, T_2 je polára p_2 bodu P_o a její průsečík s kolmicí na p_1 ze středu S je hledaný pól P_1 přímky p_1 . Bodem P_1 vedeme nyní tečnici t_a , jejíž délka je dána; k tomu stačí kdekoli sestroit přímku $A'D'$ rovnoběžek a a p_1 o této délce. Hledaná tečnice je s ní rovnoběžná a prochází bodem P_1 .

Průsečík tečnice s přímkou p_1 je ovšem bod A , jeden vrchol hledaného trojúhelníka. Z něho vedeme ke kružnici k obě tečny a to jsou již další strany b, c hledaného trojúhelníka, jež vytínají na základně a další jeho vrcholy B, C .



Obr. 8

Ale důkaz mne ještě neuspokojil - dumal jsem a třetí den mi blesklo hlavou: polára, harmonická čtveřina! Honem rýsovací prkno, přesně rýsovat - a tu je výsledek (obr. 8):

Bod P_1 je pólem poláry p_1 ke kružnici k .

Bod $A \equiv P_2$ je pólem poláry p_2 ; přitom polára p_2 protíná kružnici k v bodech T_1, T_2 .

Dvě poláry p_1 a p_2 se protnou v bodě P_3 , který je pólem přímky $p_3 \equiv t_a$, spojující póly P_1 a P_2 .

Trojúhelník $P_1 P_2 P_3$ je zajímavý. Jeho vrcholy jsou póly a protější strany jsou jim odpovídající poláry. Je to tzv. p o l á r n í t r o j ú h e l n í k kružnice k . Proto body P_3, P_1, T_1, T_2 tvoří harmonickou čtveřinu, která se promítá z bodu $A \equiv P_2$ na přímku a rovněž do harmonické čtveřiny bodů.

Jelikož jsou přímky p_1 a a rovnoběžné, je projekce bodu P_3 nevlastním

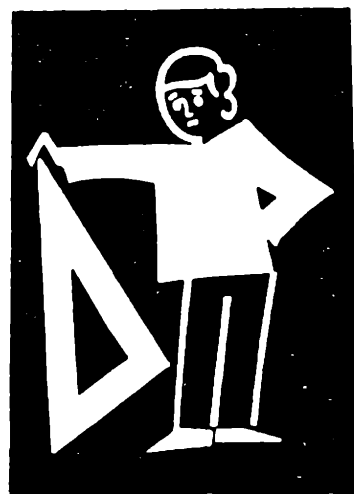
bodem. Jemu odpovídající bod D pŕlí proto vzdálenost ostatních dvou bodů B a C . Tím je AD těžnicí, což jsme měli dokázat.

Při řešení této úlohy jsem našel větu, kterou jsem dříve neznal: Kružnici vepsanou trojúhelníku ABC označme k a přímku vedenou bodem A rovnoběžně s protější stranou BC označme p_1 (obr. 8); potom těžnice t_a prochází pólem P_1 přímky p_1 ke kružnici k . Snad některý čtenář sdělí, kde se setkal s touto větou.

Deskriptivní geometrie

Oldřich Jeništa, ČVUT, Praha:

Konstrukce druhého ohniska kuželosečky



Najít druhé ohnisko F_2 elipsy, která je dána třemi tečnami t_1, t_2, t_3 a jedním ohniskem F_1 , je úloha jednoduchá a celkem známá. Je důsledkem

v ě t y 1: Geometrickým místem bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejich tečen je kružnice (tzv. řídicí) opsaná z druhého ohniska poloměrem rovným délce hlavní osy (2a).¹⁾

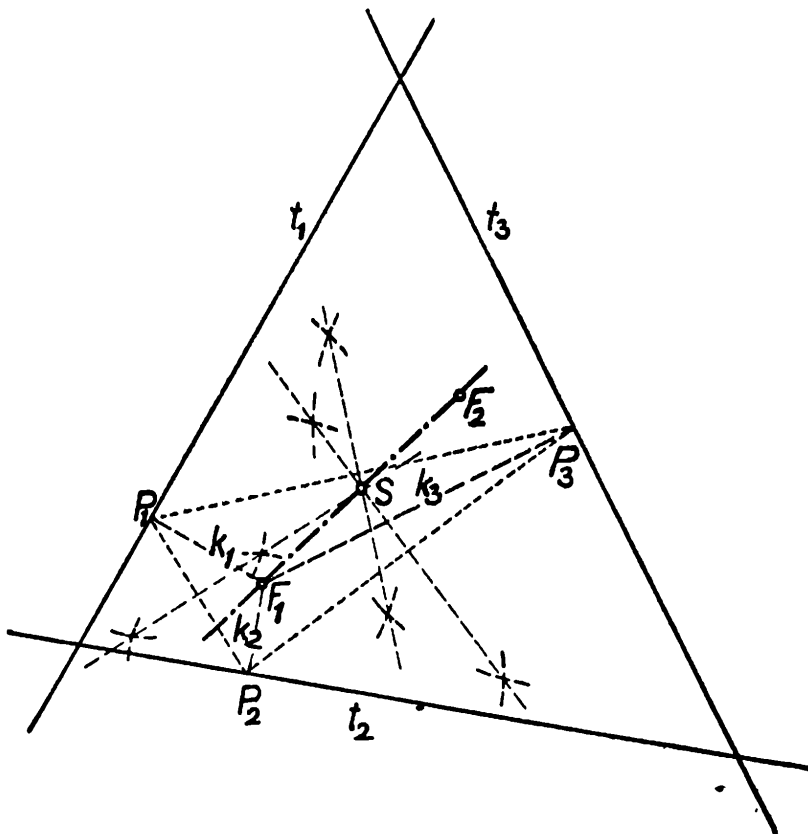
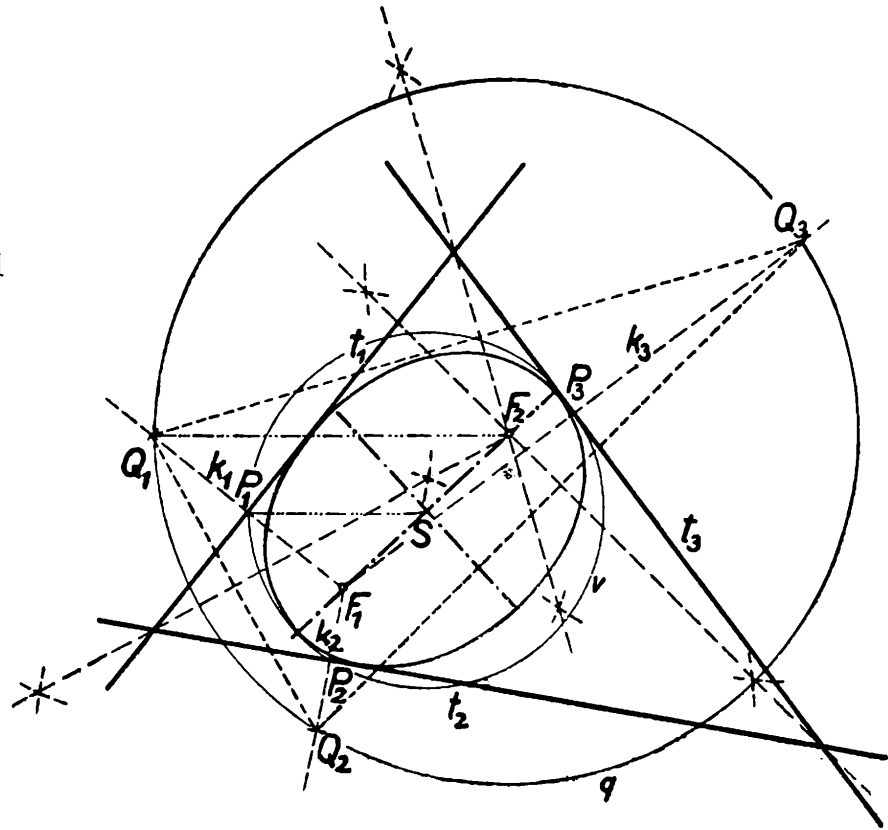
Vylučme nejprve případ, že by dané ohnisko F_1 mělo od všech tří daných tečen t_1, t_2, t_3 stejnou vzdálenost (tento případ je projednán v poznámce na konci článku). Konstrukci pro danou úlohu provedeme takto (obr. 1):

Sestrojíme souměrně sdružené body Q_1, Q_2, Q_3 k ohnisku F_1 podle daných tečen t_1, t_2, t_3 . Tyto body jsou na kolmicích z ohniska F_1 na tečny t_1, t_2, t_3 . Jsou-li $P_1 \equiv k_1 \cdot t_1, P_2 \equiv k_2 \cdot t_2, P_3 \equiv k_3 \cdot t_3$ průsečíky těchto kolmic k_1, k_2, k_3 s tečnami (tzv. paty kolmic), je $Q_1P_1 = P_1F_1, Q_2P_2 = P_2F_1, Q_3P_3 = P_3F_1$. Řídicí kružnice q je pak určena třemi body Q_1, Q_2, Q_3 a stačí proto sestrojiti dvou z os úseček Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_1 , abychom dostali hledané druhé ohnisko F_2 .

¹⁾ Viz např. Kounovský-Vyčichlo, *Deskriptivní geometrie*, Praha 1959, NČSAV, V. vydání, str. 239.

K omezení hlavní osy elipsy použijeme
 v ě t y 2 Geometrickým místem pat kolmic sestrojěných ohnisky elipsy
 na její tečny je kružnice (tzv. vrcholová) opsaná nad její hlavní osou jako
 průměrem.²⁾

Obr. 1

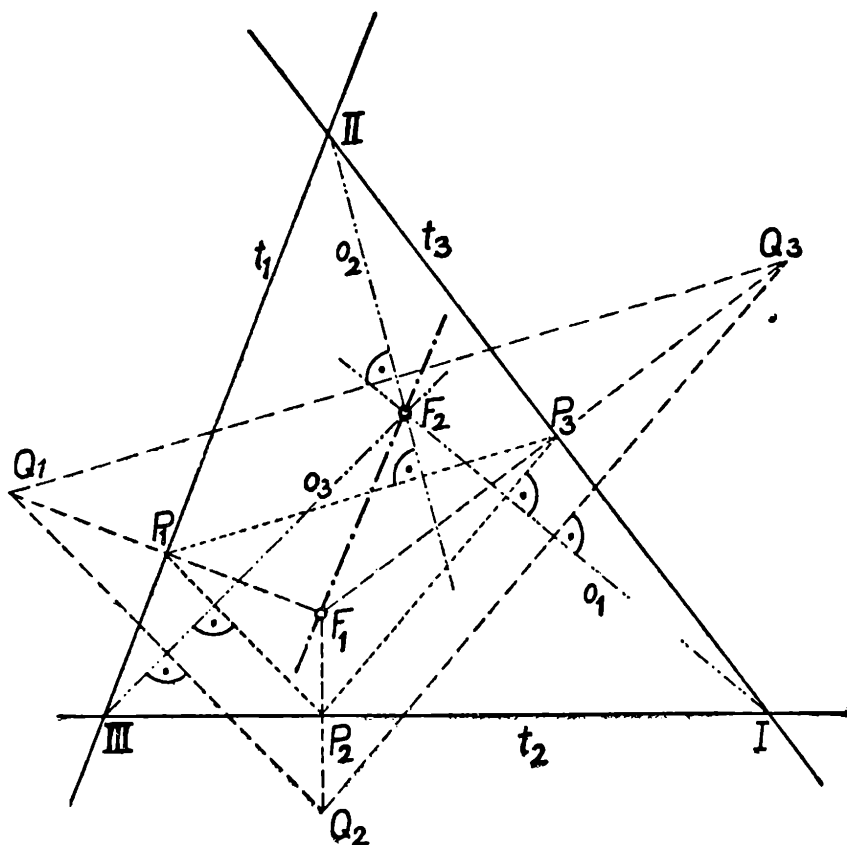


Obr. 2

²⁾ Viz tamtéž, str. 240.

Poloměr této vrcholové kružnice v je tedy rovný hlavní poloose a . Střed elipsy S pólí úsečku F_1F_2 a pak např. SP_1 (nebo SP_2 , příp. SP_3) je rovno hlavní poloose a . Vedlejší osa je osou souměrnosti úsečky F_1F_2 a omezíme ji body C, D , pro které platí $F_1C = F_1D = a$ (nebo $F_2C = F_2D = a$).

Není-li některý ze sestrojených bodů Q_1, Q_2, Q_3 na nákrese, není možné sestrojít potřebné dvě osy úseček Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_1 . V tomto případě lze použít věty 2 a určit střed S elipsy a na hlavní ose F_1S stanovit druhé ohnisko z podmínky $SF_1 = SF_2$ (obr. 2).



Obr. 3

Rozřešíme však úlohu přímo (tj. najdeme druhé ohnisko F_2) i v případě, že nejen některý z bodů Q_1, Q_2, Q_3 souměrně sdružených s ohniskem F_1 podle tečen t_1, t_2, t_3 elipsy, ale i když třeba všechny tyto body jsou nepřístupné. Provedeme nejprve tuto úvahu (obr. 3):

Protože

$$F_1P_1 = P_1Q_1 = \frac{1}{2}F_1Q_1,$$

$$F_1P_2 = P_2Q_2 = \frac{1}{2}F_1Q_2,$$

$$F_1P_3 = P_3Q_3 = \frac{1}{2}F_1Q_3,$$

jsou pak podobné trojúhelníky

$$\triangle F_1 P_1 P_2 \sim \triangle F_1 Q_1 Q_2 ,$$

$$\triangle F_1 P_2 P_3 \sim \triangle F_1 Q_2 Q_3 ,$$

$$\triangle F_1 P_3 P_1 \sim \triangle F_1 Q_3 Q_1$$

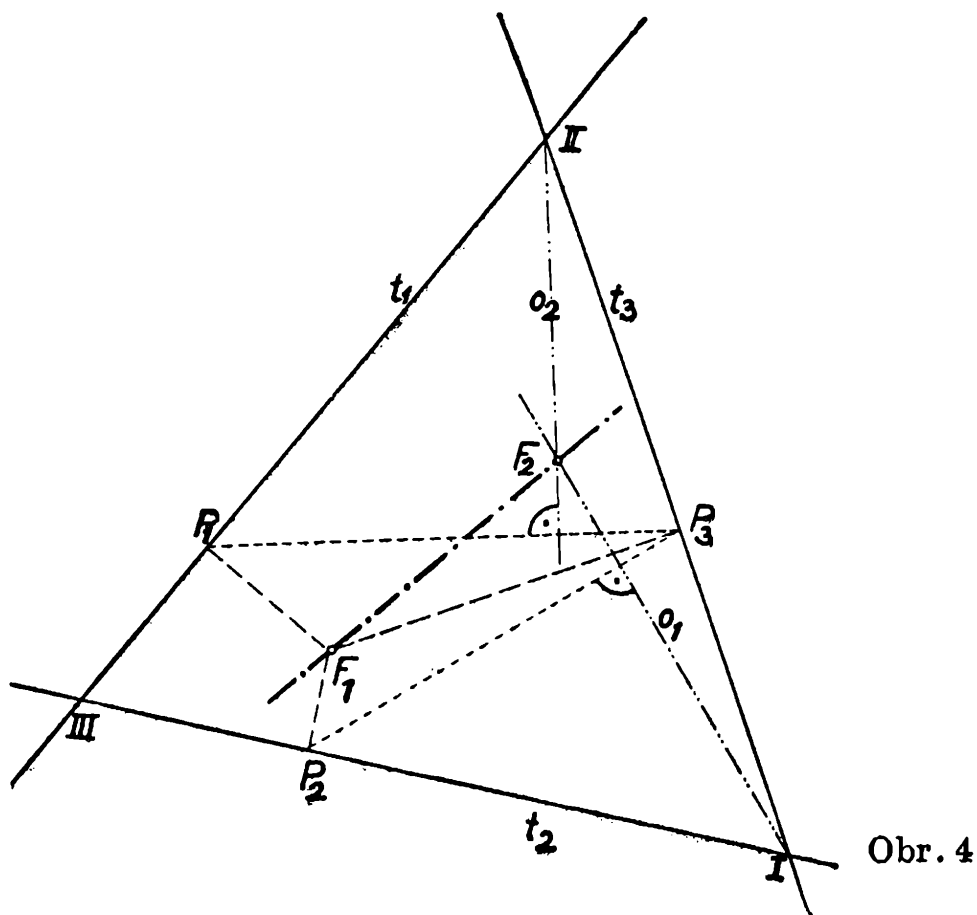
stejnolehlé pro střed stejnolehlosti v bodě F_1 , a proto

$$P_1 P_2 \parallel Q_1 Q_2 ,$$

$$P_2 P_3 \parallel Q_2 Q_3 ,$$

$$P_3 P_1 \parallel Q_3 Q_1$$

Ohnisko F_2 je průsečíkem os úseček $Q_1 Q_2$, $Q_2 Q_3$, $Q_3 Q_1$. Označme o_3 osu úsečky $Q_1 Q_2$ a obdobně označme o_1 (příp. o_2) osu úsečky $Q_2 Q_3$ (příp. $Q_3 Q_1$). Pak na základě vlastnosti osy úsečky je $o_3 \perp Q_1 Q_2$ a poněvadž $Q_1 Q_2 \parallel P_1 P_2$, musí také $o_3 \perp P_1 P_2$ a obdobně i $o_1 \perp P_2 P_3$, $o_2 \perp P_3 P_1$.



Dále platí

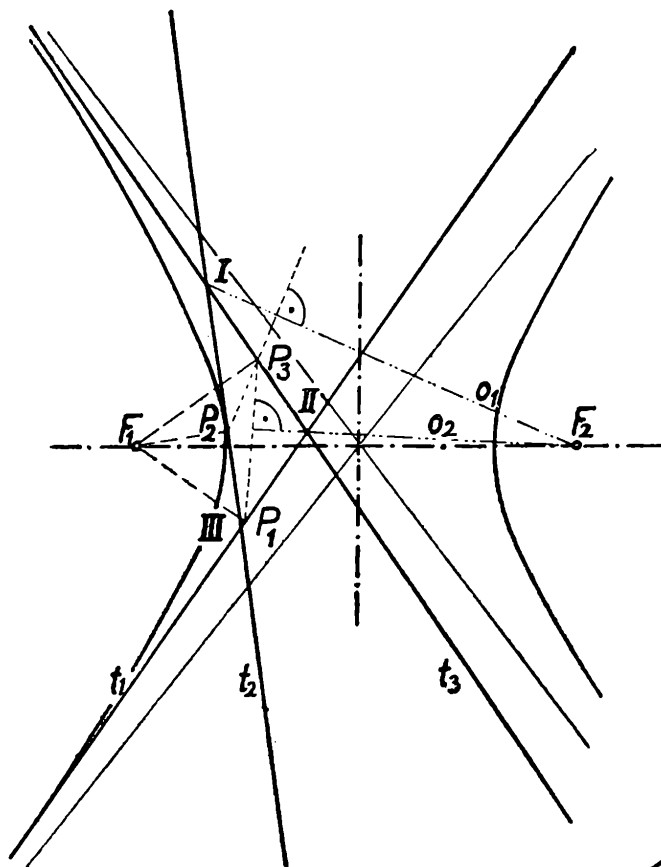
v ě t a 3 Osa o_3 prochází průsečíkem tečen $t_1 \cdot t_2 \equiv III$ kolmo na spojnici $P_1 P_2$.

(Stejně $I \equiv t_2 \cdot t_3 \in o_1 \perp P_2 P_3$, $II \equiv t_3 \cdot t_1 \in o_2 \perp P_3 P_1$.)

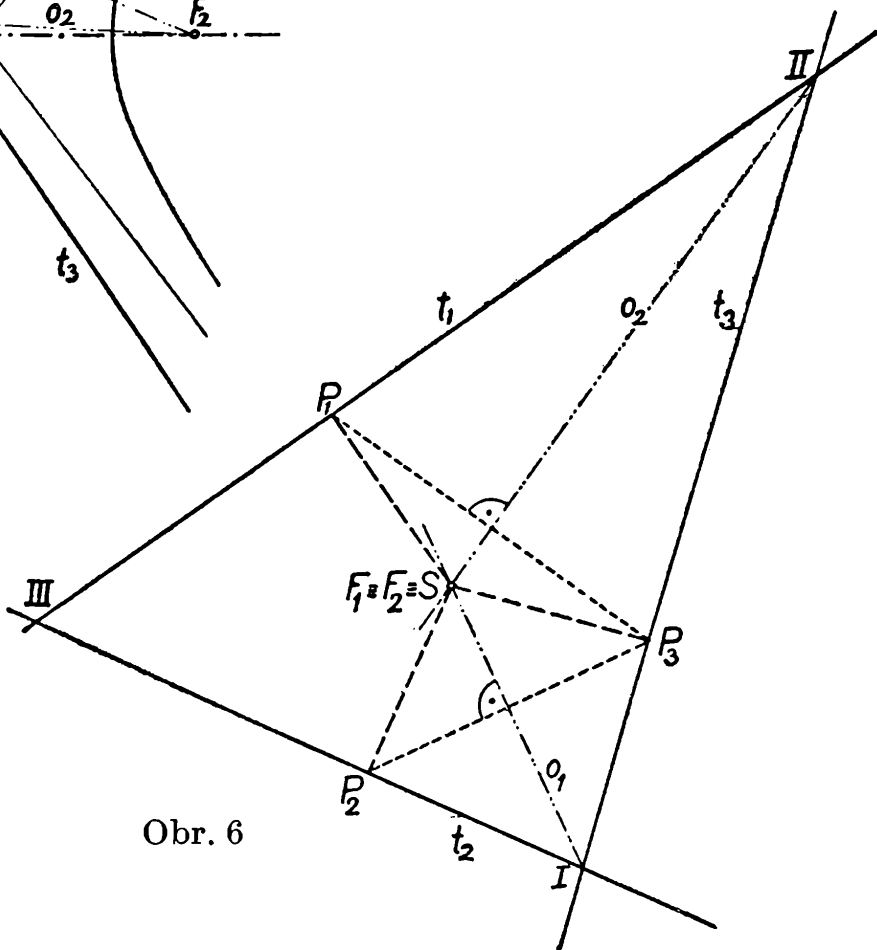
Za tohoto stavu nepotřebujeme ovšem bodů Q_1 , Q_2 , Q_3 a můžeme úlohu vyřešit, i když tyto body padnou mimo náčrt. Stačí nám proto znát jen paty P_1 , P_2 , P_3 kolmic spuštěných ze známého ohniska F_1 na dané tečny t_1 , t_2 , t_3 a mimo to ještě dva z průsečíků tečen, tedy dva z bodů $I \equiv t_2 \cdot t_3$, $II \equiv t_3 \cdot t_1$, $III \equiv t_1 \cdot t_2$.

Úlohu řešíme tudíž takto (obr. 4):

Z ohniska F_1 spustíme kolmice na tečny t_1, t_2, t_3 a obdržíme jejich paty P_1, P_2, P_3 . Přímky o_1, o_2, o_3 vedené postupně body $I \equiv t_2 \cdot t_3$, $II \equiv t_3 \cdot t_1$, $III \equiv t_1 \cdot t_2$ kolmo na spojnice P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 se protínají v druhém ohnisku F_2 elipsy. Je samozřejmé, že k dosažení výsledku stačí sestrojít jen dvě z oněch tří přímek o_1, o_2, o_3 .



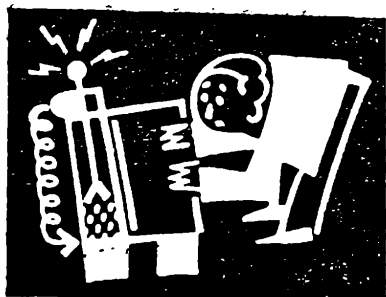
Obr. 5



Obr. 6

Konstrukce, která byla dokázána pro elipsu, jak se snadno přesvědčíme platí i pro hyperbolu (obr. 5). Text k obr. 4 platí zde beze změny.

P o z n á m k a. Zabývejme se ještě dříve vyloučeným případem, kdy ohnisko F_1 je stejně vzdáleno od tečen t_1, t_2, t_3 . Postupujeme-li stejně jako v obr. 4, zjistíme, že hledané ohnisko je $F_2 \equiv F_1$. Dostaneme tedy kružnici o středu $S \equiv F_1 \equiv F_2$ (obr. 6).



Oldřich Lepil, Gottwaldov:

Hallův jev

Ze zkušenosti víme, že některé látky - většinou kovy - umožňují přenos elektrické energie, jsou dobrými vodiči elektrického proudu, kdežto jiné látky - izolátory prakticky elektrický proud nevedou. Elektronová teorie se snaží vysvětlit tyto podstatné rozdíly ve vlastnostech látek jednotnou představou o existenci volných nositelů elektrického náboje ve vodičích a vázaného náboje v izolátorech. U kovových vodičů jsou těmito volně pohyblivými náboji elektrony. Avšak další studium pevných látek, především polovodičů, ukázalo, že elektrony nemusejí být jediným nositelem proudu v pevných látkách.

Bylo tedy třeba potvrdit experimentálně základní předpoklady elektronové teorie o volných nositelích proudu ve vodičích i polovodičích a nalézt metodu, jejíž pomocí by bylo možné rozhodnout, jaký druh nositele proudu v látce převládá.

Dnes existuje celá řada pokusných důkazů pro představy elektronové teorie. Většina z nich je založena na silovém působení elektrického a magnetického pole na pohybující se nositele náboje. Proto se nejdříve podívejme, jaké síly působí v elektrickém a magnetickém poli na vodič, jímž protéká proud.

1. Vodič v elektrickém a magnetickém poli

Za předpokladu, že se nositelé elektrického náboje mohou ve vodiči volně pohybovat, dojde ke vzniku elektrického proudu účinkem sil elektrického pole, do něhož vodič vložíme. Pro silový účinek elektrického pole, na náboj Q je rozhodující intenzita pole, definovaná vztahem

$$E = \frac{F_e}{Q}.$$

Elektrické pole ve vodiči vytvoříme připojením vnějšího zdroje elektrického napětí U . Jestliže má vodič délku l , vznikne na vodiči potenciální spád $\frac{U}{l}$, který je roven intenzitě elektrického pole, takže můžeme psát

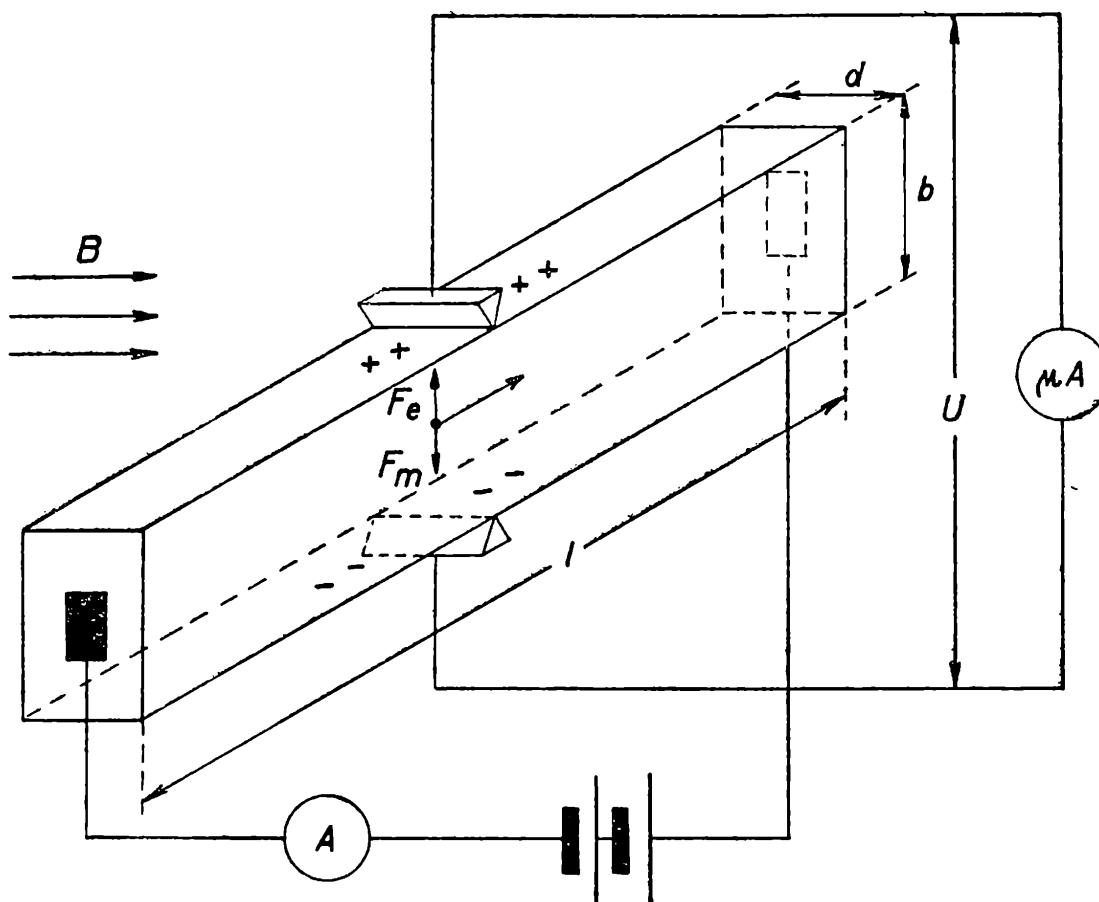
$$\frac{U}{l} = \frac{F_e}{Q}$$

a síla, která na volný náboj ve vodiči působí, je

$$F_e = \frac{q U}{b}. \quad (1)$$

Silové účinky magnetického pole určuje magnetická indukce B , která je definována silou, působící na vodič jednotkové délky, protékáný jednotkovým proudem

$$B = \frac{F_m}{I l},$$



Obr. 1. K výkladu Hallova jevu.

takže na vodič protékáný proudem I působí síla

$$F_m = B I l \quad (2)$$

Tato síla je kolmá jak ke směru proudu, tak ke směru vektoru magnetické indukce.

2. Hallův jev

Vložíme-li vodivou destičku, jíž protéká proud, do magnetického pole tak, že jsou indukční čáry magnetického pole kolmé ke směru proudu, tekoucího destičkou (obr. 1), jsou proudící volné náboje vychylovány ve

směru působící síly magnetického pole F_m , tj. napříč k podélné ose destičky. Tím dojde k nerovnoměrnému rozložení volných nábojů napříč destičkou a tak proto vzniká příčné elektrické pole, jehož silové působení je namířeno proti silovému působení magnetického pole.

Rovnováha (a tedy ustálený stav) nastane tehdy, když platí

$$F_e = F_m \quad (3)$$

Této rovnováze odpovídá určité příčné napětí U , které můžeme citlivým galvanometrem změřit.

Dosadíme-li do rovnice (3) z rovnic (1) a (2), dostaneme

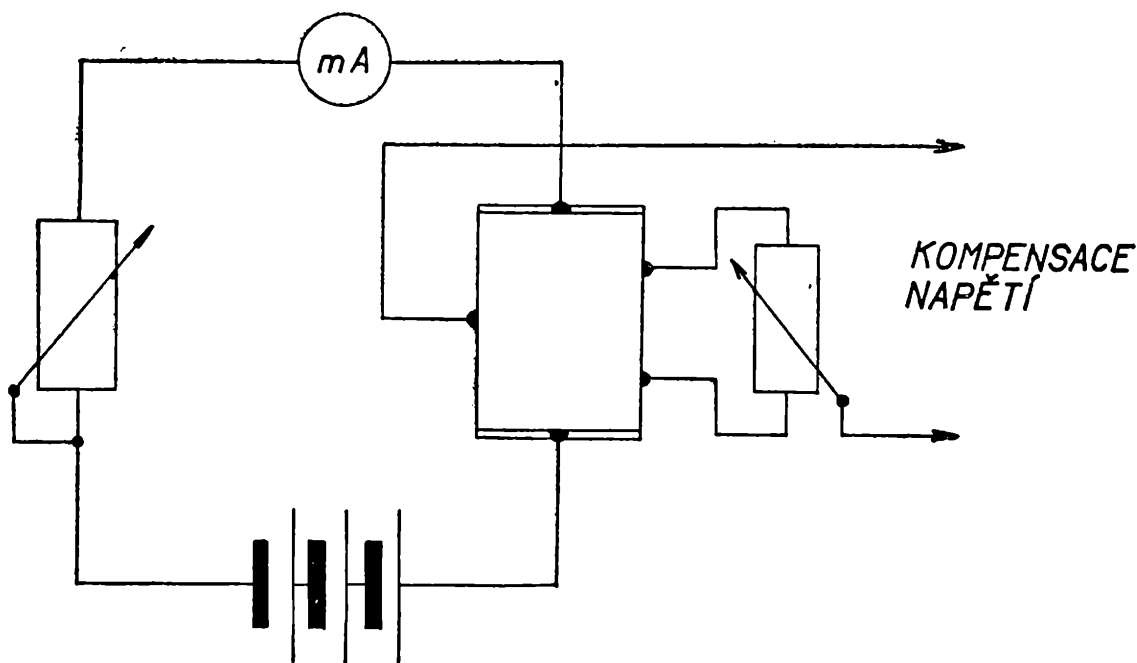
$$\frac{Q U}{b} = B I l . \quad (4)$$

Považujeme-li za volné nositele náboje elektrony s nábojem $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C a označíme-li počet volných nábojů v objemové jednotce vodiče n , je celkový náboj v objemu destičky ($V = b d l$)

$$Q = n e b d l ,$$

kde d je tloušťka destičky.

Rovnici (4) pak můžeme upravit pro výpočet příčného napětí U



Obr. 2. Princip gaussmetru.

$$U = \frac{1}{n e} \cdot \frac{B I}{d} . \quad (5)$$

Zlomek $\frac{1}{n e}$ je pro daný materiál destičky konstantní a nazývá se

Hallova konstanta. Je důležitou konstantou pro posouzení vodivosti materiálu. Experimentální potvrzení platnosti vztahu (5) měřením příčného napětí U je jedním z nejvýznamnějších důkazů správnosti představ elektronové teorie o existenci volných elektrických nábojů ve vodiči i představ o tom, že elektrický proud je dán uspořádaným pohybem těchto nábojů. Jsou-li volnými náboji elektrony, jejichž náboj známe, můžeme měření Hallovy konstanty určovat také koncentrací volných elektronů ve vodiči.

Za předpokladu, že je nositelem proudu jen elektron, muselo by mít příčné napětí u všech vodivých materiálů stejný směr. Avšak u řady látek - zejména polovodičů - bylo naměřeno napětí opačné polarity. To svědčí o tom, že přenos elektrické energie tímto materiálem není zprostředkován elektrony, ale částicemi opačného náboje.

Elektronová teorie vysvětluje tuto vlastnost polovodičů existencí tzv. *děr*, které umožňují vedení proudu tak, že se v nich elektrony zachycují, díry se přemísťují opačným směrem než elektrony a chovají se vlastně jako kladné částice.

3. Praktické užití Hallova jevu

Hallův jev však nemá význam pouze jako důkaz správnosti elektronové teorie a pro určení typu vodivosti polovodičů, ale našel významné uplatnění v elektrotechnické praxi při konstrukci mnoha různých přístrojů.

Tak byl například vytvořen přístroj pro měření magnetické indukce - *gaussmetr*. Princip přístroje je naznačen schématem na obr. 2. Malá destička z polovodivého materiálu (arsenidu india nebo germania) je upravena do tvaru sondy, která se vsune do měřeného magnetického pole. Protéká-li destičkou konstantní proud, je Hallovo napětí podle vztahu (5) závislé pro danou destičku pouze na magnetické indukci pole. Stupnici přístroje pak lze ocejchovat přímo v jednotkách B .

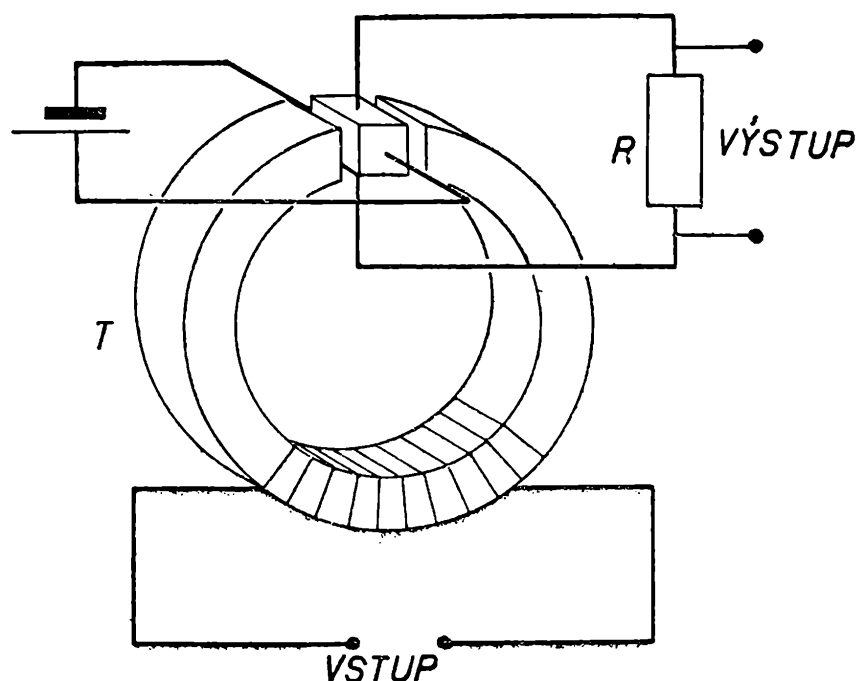
Aby nebylo měření zkresleno potenciálním spádem, který by vznikl tehdy, kdyby nebyly přívody pro měření napětí připojeny k destičce přesně proti sobě, jsou z jedné strany sondy přívody dva a potencio-
metrem je nastaveno příčné napětí (před vložením sondy do magnetického pole) na nulu.

Jiným zajímavým příkladem aplikace je *zesilovač* na principu Hallova jevu. Jeho myšlenka je patrná z obr. 3. Zesilovaný signál je přiváděn do vinutí ferromagnetického toroidu se vzduchovou mezerou T , vyrobeného z magneticky měkkého materiálu. Do vzduchové mezery toroidu je vložena destička z antimonidu india s potřebnými kontakty pro vytvoření proudu a snímání Hallova napětí.

Zesilovaný signál vytváří ve vzduchové mezeře toroidu proměnné magnetické pole a na polovodičové destičce, protékané stejnosměrným proudem, vzniká napětí stejného průběhu, avšak zesílené. Toto napětí je

pak snímáno ze zatěžovacího odporu R . Hodnoty zesílení lze regulovat proudem, který protéká destičkou.

Podobně jsou konstruovány *miniaturní wattmetry*, v nichž se využívá toho, že Hallovo napětí je úměrné součinu dvou proměnných veličin $I \cdot B$. Je-li proud, tekoucí Hallovo sondou, úměrný napětí na spotřebiči a magnetická indukce v mezeře toroidu je úměrná proudu tekoucímu obvodem spotřebiče, je Hallovo napětí úměrné výkonu elektrického proudu v obvodu.



Obr. 3. Princip zesilovače.

Vedle uvedených použití Hallova jevu se ještě celá řada dalších aplikací jako měření magnetického pole Země, bezkontaktní měření proudu ve vodičích, konstrukce generátoru apod.

Popsaný fyzikální jev, objevený roku 1879 fyzikem Halle m, je zajímavým příkladem toho, jak může pouhý experimentální důkaz fyzikální teorie vést k využití v technické praxi.

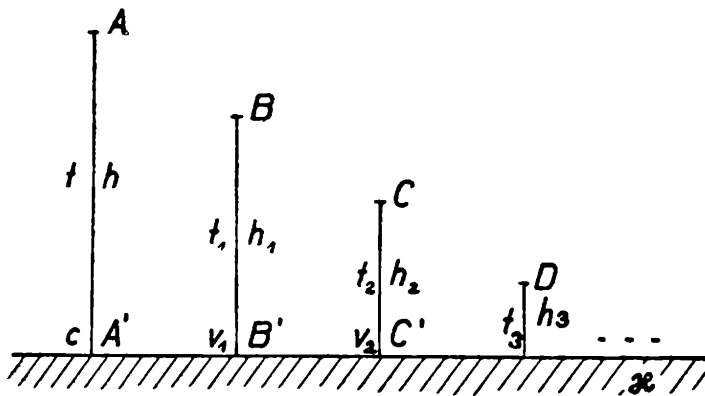
J o z e f F i a m č í k, PF, Košice:

Metóda určenia koeficienta restitúcie

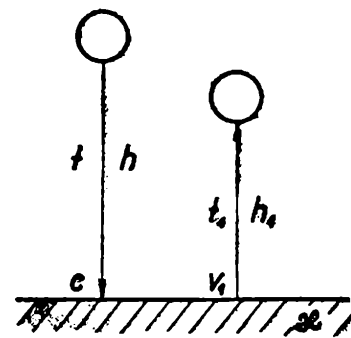
Ak necháme voľne padnúť gulôčku z nejakej výšky na vodorovnú rovinu, potom po dopade a odraze (na tejto rovine) gulôčka nezaujme pôvodnú výšku z ktorej spadla; dôjde k premene energie na deformačnú prácu a vznik tepla. Vlastnosť gulôčky približiť sa k pôvodnej polohe,

z ktorej bola voľne pustená, závisí od materiálu, z ktorého je guľôčka zhotovená ako aj od materiálu roviny, na ktorú táto dopadla - hovoríme, že závisí od *koeficienta restitúcie* (viz v zpruživosti) k ; keď $k = 1$ hovoríme o dokonale pružných telesách, keď $k = 0$ hovoríme o nepružných telesách. Pokusme sa určiť koeficient restitúcie, keď guľôčka voľne padne z výšky h na vodorovnú rovinu x a nech sa na tejto rovine pohybuje takto: po dopade na vodorovnú rovinu (bod A') odrazí sa do výšky h_1 (bod B), z tejto výšky po dopade na vodorovnú rovinu (bod B') odrazí sa do výšky h_2 (bod C) atď. a celý dej nech sa odohráva za čas τ .

Schematicky je tento pohyb zobrazený na obr. 1, kde c je dopadová rýchlosť guľôčky v bode A' ; t, t_1, t_2, \dots, t_n časy dopadov; pohyb prebieha v priamke.



Obr. 1



Obr. 2

Pre vyšetřovaný pohyb môžeme napísať nasledujúcu rovnicu pre časy dopadov guľôčky na vodorovnú rovinu

$$t + 2 t_1 + 2 t_2 + \dots + 2 t_n = \tau. \quad (1)$$

Dvojnásobkom časov t_1, t_2, \dots, t_n je vystihnutá tá skutočnosť, že guľôčka sa odrazí a dopadne na vodorovnú rovinu za ten istý čas. Celý dej nech prebieha v čase τ , za ktorý sa guľôčka zastaví, t. j. jej rýchlosť bude rovná nule.

Pre rýchlosť v_1 platí

$$v_1 = - \sqrt{2 g h_1}$$

$$v_1 = - k c = - k \sqrt{2 g h}. \quad 1)$$

Po malej úprave dostaneme

$$\text{Analogicky odtiaľ plynie } k^2 = h_1 : h \quad (1a)$$

$$h_n = k^2 \cdot h_{n-1}$$

1) Tento vzťah najde čitateľ odvodený napr. v knihe: Horák-Krupka-Šindelář, *T e c h n i c k á f y s i k a*, 3. vydanie, str. 346.

Guľôčka pri dopade na vodorovnú rovinu odrazí sa rýchlosťou c zmenšenou v pomere k (opačným smerom ako je smer rýchlosti c , viď obr. 2).

Na základe (1a) môžeme ďalej písať

$$h_n = k^{2n} \cdot h \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1b)$$

Pretože vyšetřovaný pohyb pokladáme za rovnomerné zrýchlený a na základe vzťahov (1a) a (1b) môžeme pre časy dopadov guľôčky na vodorovnú rovinu písať

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}, \quad t_n = \sqrt{\frac{2h_n}{g}} \quad (1c)$$

Dosadíme za h_1, h_2, \dots, h_n vzťahy plynúce z (1b), dostaneme

$$t_1 = k \cdot t, \quad t_2 = k^2 \cdot t, \quad t_n = k^n \cdot t$$

Dosadením do (1) dostaneme

$$\begin{aligned} t + 2kt + 2k^2t + \dots + 2k^nt &= \tau \\ t[1 + 2k(1 + k + k^2 + \dots + k^n)] &= \tau \end{aligned} \quad (1d)$$

Čísla $1, k, k^2, \dots, k^n$ tvoria geometrický konvergentný rad ($k < 1$). Potom (1d) má tvar

$$t \left(1 + \frac{2k}{1-k} \right) = \tau$$

Odtiaľ určíme k

$$k = \frac{\tau - t}{\tau + t}.$$

Koeficient restitúcie si môžeme teda vypočítať (nakolko poznáme τ , $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a t určíme z (1c))

$$k = \frac{\tau \sqrt{g} - \sqrt{2h}}{\tau \sqrt{g} + \sqrt{2h}}.$$

Uvedenú metódu môžeme použiť k meraniu vzpruživosti rôznych látok - k zisteniu tzv. *dynamické pružnosti*. Za tým účelom vezmeme vzorku tejto hmoty v tvare doštičky a necháme naň dopadnúť ocelovú guľôčku z výšky h , zmeriame čas a vypočítame k podľa (2). Ako bolo teoreticky zdôvodnené a experimentálne potvrdené pri ráze veľmi pružného telesa s telesom poddajným je vzpruživosť prakticky daná väčším telesom.

Pre úplnosť poznamenajme, že medzi inými, ktorí sa zaoberali teoretickou a praktickou stránkou problému rázu (Galilei, Newton, Hertz a iní) patrí aj profesor Karlovej univerzity **J a n M a r e k** (1639). Podrobnejšie o jeho práci dozviete sa v knihe *D ě j i n y e x a k t n í c h v ě d v ě s k ý c h z e m í c h* (str. 79).

Pokladám si za milú povinnosť aj touto cestou poďakovať sa prof. dr. **Vl. Hájkovi** za pomoc pri zostavovaní tohto článku.

Hmota elektronu a její měření

Hmota je důležitou charakteristickou veličinou elektronu. Tak zvaná *klidová hmota*¹⁾, to jest hmota pomalu se pohybujícího elektronu; jeho rychlost je daleko menší než rychlost světla - nepřesahuje 2 % rychlosti světla, je $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg. Je vidět, že hmota elektronu je velmi malá a může se projevit teprve při zrychlení pohybu elektronu v elektrickém a magnetickém poli. Proto metody na určení hmoty elektronu jsou založeny na vyšetřování jeho pohybu v elektrickém a magnetickém poli²⁾.

Zkoumáním pohybu elektronu v elektrickém a magnetickém poli lze zjistit podíl $\frac{e}{m}$, jenž se nazývá *specifický náboj* elektronu. Je to elektrický náboj připadající na jeden kilogram hmoty elektronů. Ze znalosti náboje elektronu a specifického náboje elektronu vypočítáme jeho hmotu pomocí vztahu pro specifický náboj.

Z. Horák, F. Krupka a V. Šindelář v knize *Technická fyzika* na str. 1035 uvádějí hodnotu specifického náboje elektronu zjištěnou pro urychlující elektrické napětí 100 V

$$\frac{e}{m_0} = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Pomocí této hodnoty můžeme ihned určit hmotu elektronu, když náboj elektronu je roven $1,602 \cdot 10^{-19}$ C. Platí, že

$$m_0 = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{1,759 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}} = 9,107 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

Experimentálně bylo zjištěno, že specifický náboj elektronu se zmenšuje s rostoucí rychlostí elektronu. Je to způsobeno tím, že se vzrůstem rychlosti elektronu roste velikost jeho setrvačných účinků - jeho hmota, a náboj zůstává stálý. Při velkých rychlostech elektronů je nutno na tuto skutečnost přihlížet a zjišťovat závislost hmoty na rychlosti.

¹⁾ Hmotu je nutno chápat jako míru setrvačných a gravitačních účinků materiálních objektů. Čím má částice (těleso) větší hmotu, tím má větší setrvačnost v klidu a v pohybu a je také více přitahována gravitačním polem Země. Čím se tedy těleso rychleji pohybuje, tím má větší setrvačnost a tím i hmotu. (Podle nového názvosloví má být správněji *hmotnost*. Red.)

²⁾ Zákonitosti pohybu elektronu v elektrickém a magnetickém poli byly již popsány v článku *Elektronová optika*, 40. roč. (1961—62), čís. 2,3 a 4 tohoto časopisu.

Vzorec udávající závislost hmoty na rychlosti jeho pohybu se nazývá vzorec Lorentz - Einsteinův a má tvar

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1)$$

V předcházejícím vztahu (1) značí m hmotu částice nebo tělesa (v našem případě elektronu) za pohybu, m_0 značí jejich tzv. klidovou hmotu, v značí rychlost jejich pohybu, c je rychlost světla a β označuje poměr $\frac{v}{c}$.

Pro částice pohybující se rychlostí v malou proti rychlosti c světla, (ve vakuu) ze vztah (1) nahradit přibližným výrazem zanedbáním čtvrté a vyšší mocniny zlomku $\frac{v}{c}$ v binomickém rozvoji. Platí, že

$$\frac{m_0}{m} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Výraz $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ v binomickém rozvoji nabývá tvaru

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{8} \frac{v^4}{c^4} - \frac{1}{16} \frac{v^6}{c^6} +$$

Zanedbáním čtvrté a vyšší mocniny zlomku $\frac{v}{c}$ máme přibližný vztah

$$\frac{m_0}{m} \doteq 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2},$$

takže lze psát, že pro rychlost malou vzhledem k rychlosti světla je

$$m \doteq \frac{m_0}{1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2)$$

Je-li rychlost elektronu daleko menší než rychlost světla (tj. platí $v \ll c$) můžeme zlomek $\frac{v}{c}$ ve vztahu (2) zanedbat a psát, že $m \doteq m_0$.

Změna hmoty se prakticky neprojeví.

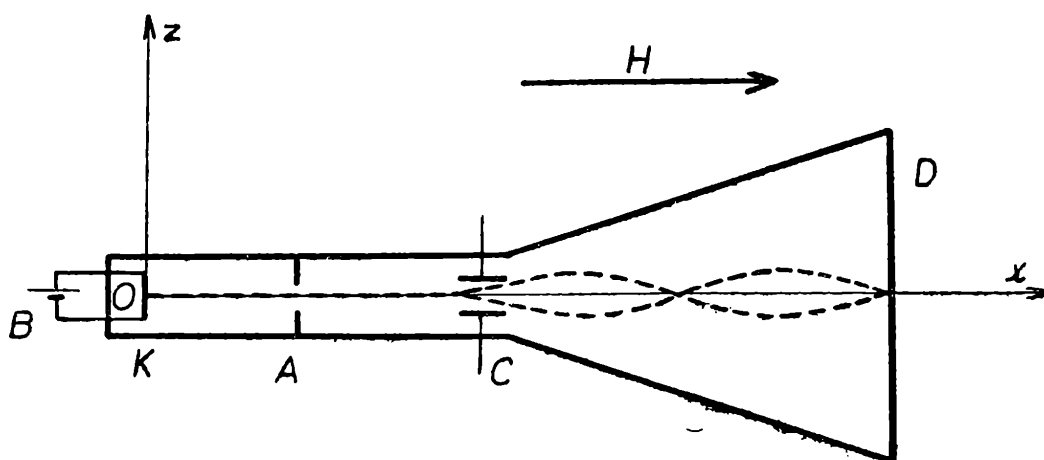
Je tedy nutno vždy současně s udáním hmoty elektronu udat i jeho rychlost (nebo urychlující elektrické napětí mezi elektrodami, kde se elektron pohybuje), neboť rychlost elektronů v daná vztahem (3) souvisí s urychlujícím elektrickým napětím U za předpokladu, že počáteční rychlost v_0 elektronu je rovna nule.

Pro experimentální zjišťování specifického náboje elektronu a tím

i jeho hmoty existuje celá řada metod. V tomto článku bude popsána metoda Buschova.

Buschova metoda zjišťování poměru $\frac{e}{m}$ je založena na fokusování (soustředování) svazku elektronů podélným magnetickým polem. Princip Buschovy metody je patrný z obr. 1. Elektrony uvolněné žhavou katodou K, umístěnou uvnitř vyčerpané trubice (obrazovky), procházejí otvorem v anodě A. Mezi katodou K a anodou A je vloženo urychlující napětí U . Takto vytvořený svazek elektronů dosáhne určité rychlosti v . Kinetická energie elektronu

$$W = \frac{m v^2}{2}$$



Obr. 1

se dá také vyjádřit vztahem $W = e U$. Tedy platí

$$\frac{m v^2}{2} = e U$$

Rychlost v , kterou nabyl elektron průchodem mezi katodou K a anodou A, vypočítáme z předcházející rovnosti

$$v = \sqrt{\frac{2 e U}{m}}. \quad (3)$$

Tento vzorec můžeme pokládat za přesný jen pro elektrony, jejichž rychlost nepřesahuje 2 % světelné rychlosti.

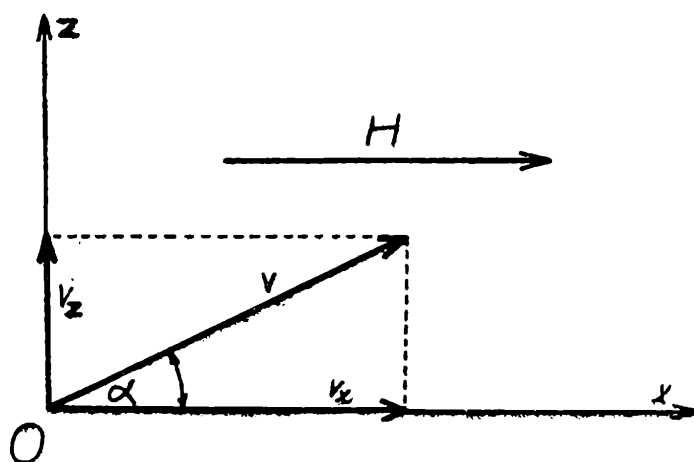
Svazek elektronů, letící rychlostí v , pak projde mezi deskami kondenzátoru C, mezi nimiž je proměnné elektrické pole. Účinkem tohoto pole se elektrony v různých časových okamžicích odchýlí o různý úhel α od osy x přístroje. Mezi kondenzátorem C a fluorescenčním stínítkem D se budí podélné homogenní (stejnorodé) magnetické pole cívkou, do jejíž dutiny se vkládá trubice obrazovky. Rychlost, kterou elektrony

vletí do magnetického pole pod úhlem α , rozložíme na svislou složku v_z a vodorovnou složku v_x (obr. 2). K složce v_z bude magnetické pole H kolmé a způsobí, že elektrony se začnou rovnoměrně pohybovat po kružnici s poloměrem r , jehož velikost se dá vypočítat z podmínky, že při pohybu elektronu po kružnici je síla $F = B e v_z$, kterou magnetické pole působí na elektron, v rovnováze s odstředivou silou

$$F' = \frac{m v_z^2}{r},$$

tedy

$$\frac{m v_z^2}{r} = B e v_z.$$



Obr. 2

Poloměr kružnice vypočteme z předcházející rovnosti

$$r = \frac{m v_z}{e B}, \quad (4)$$

kde $v_z = v \sin \alpha$. Doba jednoho oběhu elektronu po kružnici je dána vztahem

$$T = \frac{2 \pi r}{v_z}.$$

Dosadíme-li do vzorce pro dobu oběhu³⁾ elektronu za poloměr r vztah (4), dostaneme

$$T = 2 \pi \frac{m}{e} \frac{1}{B}. \quad (5)$$

³⁾ Vztah pro dobu oběhu bodu při rovnoměrném pohybu kruhovém je odvozen např. v knize J. B. Slavíka a kol., *Základy fyziky I*, str. 110 (ČSAV Praha, 1961).

Vlivem složky $v_x = v \cos \alpha$ se budou elektrony posunovat rovnoměrně přímočaře ve směru osy x . Složením obou pohybů vznikne v homogenním magnetickém poli pohyb po šroubovici; na obr. 1 jsou čárkovane naznačeny jen zjednodušené dráhy dvou elektronů. Doba T potřebná k tomu, aby elektron opsal jeden závit šroubovice je dána vztahem (5). Doba T nezávisí na rychlosti elektronu, ani na jejím směru. Je dána jen magnetickou indukcí podélného magnetického pole B a specifickým nábojem $\frac{e}{m}$. Poloměr šroubovice určíme rovnicí (4).

Protože doba oběhu elektronu nezávisí na rychlosti elektronů, fokusují se elektrony různých rychlostí po čase T do jednoho bodu na ose x . Během doby nT , kde n je celé kladné číslo, dosáhnou elektrony vzdálenosti l podél osy x a fokusují se do středu stínítka D . Pro vzdálenost l platí

$$l = v_x n T = 2 \pi \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{B} n v \cos \alpha .$$

Za rychlost v dosadíme vztah (3) a dostaneme

$$l = 2 \pi \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{B} n \cos \alpha \sqrt{\frac{2 e U}{m}} .$$

Umocněním obou stran dvěma obdržíme

$$l^2 = 8 \pi^2 \frac{m}{e} \cdot \frac{1}{B^2} \cdot n^2 \cos^2 \alpha U$$

Z této rovnice plyne vzorec pro specifický náboj elektronu

$$\frac{e}{m} = \frac{8 \pi^2 U}{l^2 B^2} n^2 \cos^2 \alpha U \quad (6)$$

Pro praktické měření poměru $\frac{e}{m}$ a tím i m je nutno si vzorec (6) poněkud upravit. Položíme $n = 1$; při měření to poznáme podle toho, že při zvětšování intenzity H podélného magnetického pole se ve středu stínítka obrazovky objeví ostrý světelný bod, nastane první fokusace do bodu, který je ve středu stínítka obrazovky. Pro malé úhly α položíme $\cos \alpha = 1$; mezi vychylovací destičky kondenzátoru C zavedeme malé střídavé napětí vzhledem k stejnosměrnému napětí anodovému, které pohyb elektronu urychluje. Výraz (6) bude mít nyní tvar

$$\frac{e}{m} = \frac{8 \pi^2 U}{l^2 B^2} . \quad (7)$$

K zjištění magnetické indukce B užijeme vzorce pro intenzitu homo-

genního magnetického pole, vytvořeného uvnitř dutiny cívky poloměru a a délky d

$$H = \frac{N I}{\sqrt{d^2 + 4 a^2}}, \quad (8)$$

kde N je počet závitů cívky a I velikost protékajícího proudu cívkou. Odvození vztahu (8) je uvedeno např. v knize J. Fuka, B. Havelka, *Elektromagnetické pole*, str. 259 (SPN Praha, 1958).

Pro magnetickou indukci pole platí

$$B = \mu_r \mu_0 H. \quad (9)$$

Elektrony se pohybují ve vakuu, tedy relativní permeabilita $\mu_r = 1$, permeabilita vakua

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Wb^2}{m^2 N} \right]$$

Dosazením vztahu (8) do (9) za předpokladu, že $\mu_r = 1$, obdržíme

$$B = \mu_0 \frac{N I}{\sqrt{d^2 + 4 a^2}}. \quad (10)$$

Zavedeme-li vztah (10) do vztahu (7) a vyčíslíme-li

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{Wb^2}{m^2 N} \right],$$

dostaneme

$$\frac{e}{m} = \frac{U (d^2 + 4 a^2) \cdot 10^{14}}{2 l^2 N^2 I^2}, \quad (11)$$

což je upravený vzorec pro zjišťování specifického náboje elektronu Buschovou metodou. Hledaná hmota elektronu je nyní dána vzorcem

$$m = e \frac{2 l^2 N^2 I^2}{U (d^2 + 4 a^2) \cdot 10^{14}}. \quad (12)$$

Na pravé straně rovnice (12) jsou veličiny, jež lze zjistit. Jimi je tedy hmota m elektronu určena.

K měření je možno použít obrazovky, na kterou je nasunuta cívka pro buzení magnetického pole⁴⁾. Změnou proudu v cívce měníme intenzitu magnetického pole v obrazovce, změnou anodového napětí obrazovky měníme rychlost pohybu elektronů, malé střídavé napětí k vychylování dráhy elektronů se přivádí na horizontální destičky obrazovky. Elektrony se získají ze stejnoměrně žhavené katody.

⁴⁾ Měření se dá provést s použitím upravené obrazovky 7QR20, popsané v časopise *Přírodní vědy ve škole* (čís. 5, roč. VI., str. 438).

Literatura.

- J. Fuka, B. Havelka, Elektromagnetické pole (SPN Praha, 1958);
G. P. Harnwell and J. J. Livingood, Experimental Atomic Physics (New York and London, 1933);
Z. Horák, Úvod do molekulové a atomové fyziky (SNTL Praha, 1955);
E. V. Špolskij, Atomová fyzika I (SNTL Praha, 1957);
W. Weizel, Elektronen Atome Moleküle (Berlin Leipzig, 1950).

Jan Horský, PFFU, Brno:

Základy teorie relativity

(Pokračování)

V hypotéze světelného éteru nebylo zřejmě něco v pořádku, takže na počátku XX. století stáli fyzikové před velkým problémem, jak vysvětlit negativní výsledky všech pokusů, které měly dokázat pohyb Země vzhledem k éteru. Odmítnout hypotézu éteru nebylo možné, neboť byly známy jevy, které bylo možno uspokojivě vysvětlit jen na základě hypotézy světelného éteru. Mezi ně patřily hlavně dva jevy: *aberrace světla* a *strhování světla průhledným, pohybujícím se prostředím*.

Všimněme si pro jednoduchost pouze prvního z nich, který objevil již v r. 1725 *Bradley*. Představme si, že pozorujeme dalekohledem velmi vzdálenou stálici *S*, která leží pro jednoduchost v ose ekliptiky, tj. na přímce procházející Sluncem a kolmé k rovině zemské dráhy kolem Slunce. Světelný paprsek projde rychlostí *c* dalekohledem za čas *t* (obr. 4). Za tuto dobu urazí dráhu *c . t* a Země s dalekohledem se posune rychlostí *v* o dráhu *v . t*. Paprsek vstoupivší do objektivu *O* narazí na stěnu a okulárem nevyjde. Následkem pohybu Země uchyluje se světlo od osy dalekohledu a této úchylce říkáme *aberrace*. Chceme-li stálici *S* skutečně vidět, musíme dalekohled sklonit o úhel *α* (aberační úhel) proti pohybu Země, aby paprsek probíhal stále v ose dalekohledu. Pro aberační úhel dostáváme jednoduchý vztah

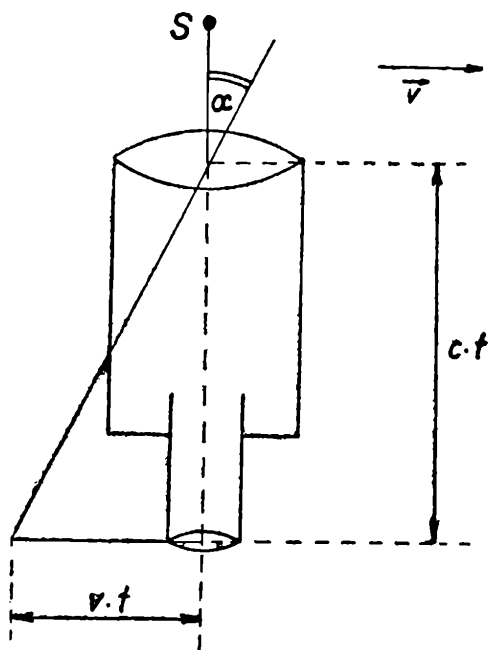
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v \cdot t}{c \cdot t} = \frac{v}{c},$$

z něhož po dosazení příslušných veličin obdržíme

$$\alpha \doteq 20,5''$$

Takto vypočtený úhel zcela souhlasí s pozorováním, což je potvrzením toho, že éter je v klidu k pohybující se Zemi. Kdyby se totiž pohyboval s ní, a tedy i s dalekohledem, zůstával by paprsek stále v ose dalekohledu, bez ohledu na pohyb Země. Prosté odmítnutí hypotézy éteru nemohlo tedy přinést žádné řešení.

Řešení nepřinesla ani hypotéza o strhování éteru. Podle ní je éter pohybující se Zemí strhován tak, že při povrchu Země je rychlost Země vůči éteru nulová. Hypotézu o strhování éteru bylo nutno zamítnout, neboť její podrobný matematický rozbor ukázal, že předpoklady, z nichž vychází, si navzájem odporují.



Obr. 4. Aberace světla.

Posledním neúspěšným pokusem fyziky před vznikem speciální teorie relativity, pokoušejícím se vysvětlit experimentálně nahromaděné poznatky, byla Lorentzova elektronová teorie, jejímž předmětem bylo studium elektronů pohybujících se v éteru. Protože Lorentz pracoval s hypotézou éteru a klasickými Newtonovými představami o prostoru a čase, navedl vysvětlit některé ze základních pokusů, a tak se jeho ucelená teorie dostala do velkých nesnází.

Vycházejí z těchto skutečností, rozšířil r. 1905 Albert Einstein Galileův princip relativity na všechny fyzikální procesy, neboť

ze všech pokusů vyplývalo, že nijak nelze zjistit pohyb inerciální soustavy. Tak se stal Einsteinův princip relativity, jehož smyslem je, že všechny fyzikální procesy probíhají ve všech inerciálních soustavách stejně, jedním ze dvou hlavních pilířů speciální teorie relativity.

Druhým základním principem je princip nezávislosti rychlosti světla, který lze formulovat takto:

Světlo se šíří ve všech inerciálních soustavách vakuem stejnou rychlostí, nezávislou na pohybovém stavu zdroje, z něhož je vysíláno.

Na základě dlouholetého poctivého studia podařilo se Albertu Einsteinovi, jako prvnímu člověku na světě, oprostit se od vžitých starých představ o pohybu těles, prostoru a čase a vytvořit tak novou fyzikální teorii. Nelze však zapomínat na to, že teorie relativity vznikla zcela zákonitě, jako nutný stupeň ve vývoji fyziky, neboť tento problém již dozrál, jak to výstižně řekl sám její tvůrce.

III. Galileova a Lorentzova transformace

Vraťme se ještě na okamžik ke klasické mechanice a pokusme se najít i matematickou formulaci klasického principu relativity. Nechť K a K' jsou dvě inerciální souřadné soustavy (obr. 5) a nechť se soustava K' pohybuje vzhledem k soustavě K relativní rychlostí v . Najdeme nejprve vzorce spojující souřadnice hmotného bodu N v soustavách K a K' . Z obrázku okamžitě vyplývají dva vztahy

$$\begin{aligned} y &= y', \\ z &= z' \end{aligned}$$

a mezi souřadnicemi x a x' existuje zřejmě jednoduchý vztah

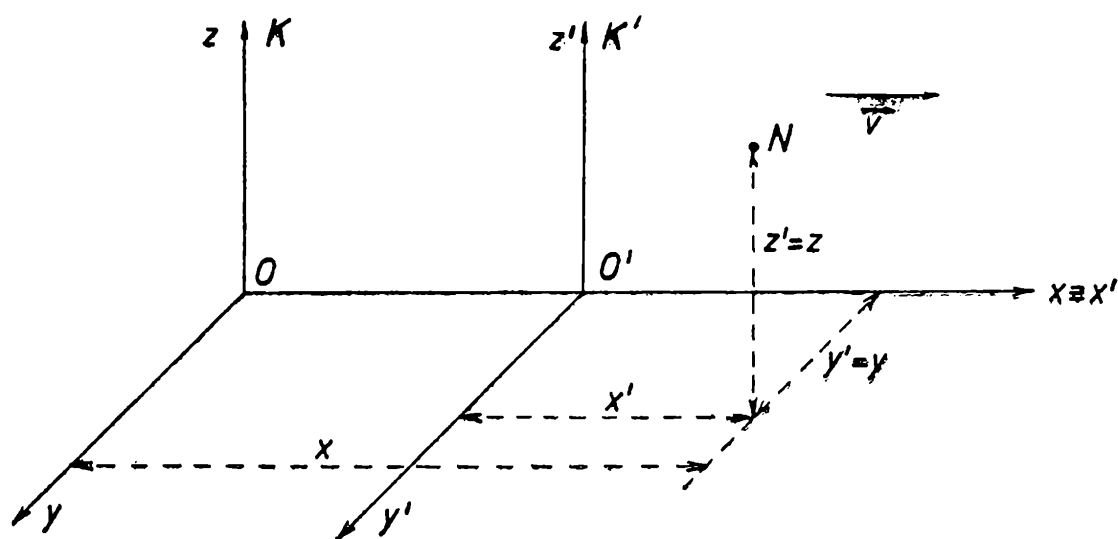
$$x = x' + OO'$$

Jestliže v počáteční časový okamžik počátky obou soustav splývají, je OO' dráha, kterou urazil počátek O' za čas t , tedy

$$x = x' + vt,$$

neboť

$$OO' = v \cdot t.$$



Obr. 5. Galileova a Lorentzova transformace

Stala-li se nějaká událost v bodě N o souřadnicích x, y, z v čase t , můžeme již snadno nalézt její prostorové souřadnice v soustavě K' , a to pomocí hořejších vztahů. Neznáme však dosud, jaká bude časová souřadnice t' v soustavě K' , tj. kdy se daná událost stane v soustavě K' . Odpověď je však snadná, neboť čas je podle klasických představ veličinou absolutní, a tedy nezávislou na volbě souřadné soustavy, takže časová transformační rovnice má jednoduchý tvar

$$t = t'$$

Čtyři transformační vztahy, které jsme nyní našli, tj. vztahy

$$\begin{aligned}x &= x' + vt', \\y &= y', \\z &= z', \\t &= t'\end{aligned}$$

se nazývají *Galileovou transformací*. Lehce dokážeme, že vzdálenost mezi dvěma body je stejná v soustavě K i K' a že také časový okamžik mezi dvěma událostmi je stejný ve všech Galileovských souřadných systémech. Napišme Galileovy transformační vztahy pro dvě události, které v příslušných transformačních vztazích rozlišíme pomocí indexů, takže pro první událost platí

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 - vt_1, \\y'_1 &= y_1, \\z'_1 &= z_1, \\t'_1 &= t_1,\end{aligned}$$

a pro druhou

$$\begin{aligned}x'_2 &= x_2 - vt_2, \\y'_2 &= y_2, \\z'_2 &= z_2, \\t'_2 &= t_2.\end{aligned}$$

Nechť nyní souřadnice (x'_1, y'_1, z'_1) značí počátek tyče rovnoběžné se směrem pohybu soustavy K' a nacházející se v ní v klidu. Druhý konec tyče nechť má souřadnice (x'_2, y'_2, z'_2) , takže pro délku tyče l_0 v soustavě K' platí obecně známý vztah (podle Pythagorovy věty)

$$l_0 = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}.$$

Délku téže tyče v soustavě K najdeme jednoduše užitím transformačních rovnic Galileových. Protože délku určitého objektu měříme v témže časovém okamžiku, tj.

$$t_1 = t_2,$$

obdržíme postupným odčítáním prvních tří rovnic první soustavy a z prvních tří rovnic druhé soustavy tyto vztahy

$$\begin{aligned}x'_2 - x'_1 &= x_2 - x_1, \\y'_2 - y'_1 &= y_2 - y_1, \\z'_2 - z'_1 &= z_2 - z_1,\end{aligned}$$

které dosazením do výrazu pro délku tyče l_0 dávají

$$\begin{aligned}l_0 &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = \\&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l,\end{aligned}$$

kde l je délka tyče v soustavě K . Dokázali jsme tak, že délka je v obou

souřadných soustavách stejná a je tedy v klasické fyzice veličinou absolutní.

Jak je tomu s časovým intervalem mezi dvěma událostmi? Odpověď na položenou otázku najdeme velmi snadno. První událost, která se stala v čase t'_1 , nechť představuje rozsvícení světelného zdroje, druhou událostí je jeho zhasnutí v časovém okamžiku t'_2 . Světelný zdroj nechť je v soustavě K' v klidu. Časový interval po který zdroj svítí v soustavě K' zřejmě je

$$T_0 = t'_2 - t'_1.$$

Užitím čtvrté transformační rovnice Galileovy transformace získáme z předchozího vztahu výraz pro časový interval, po který svítí zdroj v soustavě K

$$T = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = T_0.$$

Odtud vyplývá, že časový interval mezi dvěma událostmi je v klasické fyzice také veličinou absolutní. Snadno bychom mohli nyní dokázat užitím jednoduchých znalostí z diferenciálního počtu¹⁾, že Newtonovy pohybové rovnice zachovávají svůj tvar při přechodu z jedné inerciální soustavy do druhé, že tedy platí v soustavě K

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

a v soustavě K'

$$m' \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \vec{F}'$$

Tato vlastnost Newtonových rovnic, to je zachování jejich formy po provedení dané transformace souřadnic, se nazývá kovariance uvedených rovnic vůči Galileově transformaci. V tom spočívá matematická formulace klasického principu relativity.

Velký vliv na rozvoj nových poznatků vedoucích přímo ke vzniku speciální teorie relativity měla bezesporu elektrodynamika, zabývající se teorií elektromagnetického pole. V druhé polovině devatenáctého století J. C. Maxwell dokázal, že proměnné pole elektrické vzbuzuje proměnné pole magnetické a naopak. Tuto závislost potom formuloval v rovnicích, kterým se dnes říká *rovnice Maxwellovy* a které jsou stejně jako rovnice Newtonovy rovnicemi diferenciálními. Maxwell dále určil rychlost, jakou se v prostoru šíří elektromagnetické vlny a dokázal, že je rovna rychlosti šíření světla. Tento závěr jej přivedl k elektromagnetické teorii světla, podle které je světlo elektromagnetickým vlněním s určitou vlnovou délkou. Ukázalo se, že Maxwellovy rovnice nejsou kovariantní vůči Galileově transformaci. Soudilo se proto, že pro

¹⁾ Karel Havlíček, Diferenciální počet pro začátečníky. Praha 1962.

elektromagnetické děje princip relativity neplatí. Z toho důvodu byl potom proveden již známý optický pokus Michelsonův, z jehož záporného výsledku vyplynula nutnost přijetí principu relativity za obecně platný.

Máme nyní dvě možnosti. Buď prohlásíme Maxwellovy rovnice za nesprávné a budeme hledat jiné rovnice popisující proměnné elektromagnetické pole, které by byly vůči Galileově transformaci kovariantní, nebo Maxwellovy rovnice podržíme a budeme hledat takovou transformaci souřadnic, vůči které budou kovariantní. Ukázalo se, že nová transformace se bude lišit od Galileovy jen nepatrně a že stejně nepatrně budou i změny v rovnicích Newtonových.

Takovou transformaci našel již Lorentz, který však nepochopil jejímu fyzikálnímu smyslu. Ten jí dal až Einstein, který ukázal, že se uvedené transformační vztahy odvodí z principu stálé světelné rychlosti.

(Pokračování)



Řešení úloh

Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů

(Pokračování)

Matematika:

9. V rovině jsou dány rovnoběžky a, b, c , přímka s s nimi různoběžná a mimo ně bod G . Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, jehož vrchol A leží na přímce a , vrchol B na přímce b , vrchol C na přímce c a kromě toho: α) jeho střed S leží na přímce s nebo β) strana EF prochází bodem G (popř. v prodloužení).

Ota Setzer

(Došlo 22 řešení.)

Řešil Karel Vazač, II. b SVVŠ, Písek.

Nejprve sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AC a vrcholovém úhlu 120° tak, aby body A, B, C ležely po řadě na přímkách a, b, c . Ramena tohoto trojúhelníka jsou dvě strany pravidelného šestiúhelníka $ABCDEF$, který z trojúhelníka ABC snadno doplníme. Uvedený trojúhelník ABC sestrojíme takto: Na přímce b zvolíme libovolný bod B ; kolem něho otočíme přímku c o 120° v kladném smyslu do polohy c_1 nebo v záporném smyslu do polohy c'_1 . Bod C přejde při tomto otočení v bod $A \equiv a \cdot c_1$, resp. $A' \equiv a \cdot c'_1$. Rovnostranný trojúhelník nad stranou AB , resp. $A'B$ doplníme na pravidelný šestiúhelník o střed S resp. S' . Přitom přímka $SS' \equiv s' \parallel a \parallel b \parallel c$.

α) Průsečík přímek s a s' je bod S_1 , střed hledaných šestiúhelníků. K jejich konstrukci stačí posunout dříve nalezené šestiúhelníky $ABCDEF$, resp. $A'B'C'D'E'F'$ o vektor \vec{SS}_1 , resp. $\vec{S'S}_1$.

β) Bodem G vedme rovnoběžku g s danými přímkami a, b, c ; označme $X \equiv g \cdot EF$, $X' \equiv g \cdot E'F'$. Šestiúhelníky $ABCDEF$ a $A'B'C'D'E'F'$ posuneme o vektor \vec{XG} , resp. $\vec{X'G}$.

D i s k u s e. Pro různé přímky a, b, c existují vždy dva šestiúhelníky $ABCDEF$ a tím i dvě řešení dané úlohy. Výjimku činí případ, kdy vzdálenosti vnitřní rovnoběžky k oběma vnějším jsou v poměru $-\frac{1}{2}$ nebo -1 , kdy pro α) existuje jediné řešení.

Fyzika:

1. Trestuhodný cestující bezohledně vyhodil láhev z rychlíku, jedoucího plnou rychlostí po vodorovném přímém náspu. Láhev dopadla rychlostí $v = 26,6$ [m . s⁻¹] na vodorovné pole v místě vzdáleném o délku $s = 30$ [m] ve směru pohybu vlaku a v kolmé vzdálenosti $y = 12$ [m] od trati. Veličiny y a s značí vodorovné vzdálenosti místa dopadu od svislého průmětu místa vyhození. Předpokládejte, že láhev byla vyhozena vodorovným směrem kolmo na trať a zanedbejte odpor vzduchu.

a) Jak velká je výška h místa, odkud láhev byla vyhozena nad polem?

b) Jakou rychlostí c_1 byla láhev vodorovně a kolmo na trať vyhozena?

c) Jakou rychlostí c_2 se pohyboval rychlík? Převeďte na [km . h⁻¹]!

Rozhodněte, zda oba výsledky vyhovují zadání!

(Pokyn: Kladte $g = 9,8$ [m . s⁻²].)

Evžen Říman

(Došlo 19 řešení.)

Riešil Peter Prešnajder, 3. tr. SVŠ, Sereď.

Pre pohyb ľaši pozdĺž trati platí

$$s = c_2 t . \quad (1)$$

Pre jej pohyb kolmo na trať platí

$$y = c_1 t . \quad (2)$$

Okrem toho nastáva voľný pád tj.

$$h = \frac{1}{2} g t^2 , \quad (3)$$

$$v_t = g t , \quad (4)$$

kde v_t je rýchlosť telesa smerom nadol v čase t od vyhodenia.

Výsledná rýchlosť dopadu v vznikla zložením rýchlostí c_1, c_2, v_t , ktorých smery sú na seba kolmé. Preto pre veľkosti síl je

$$v^2 = c_1^2 + c_2^2 + v_t^2 \quad (5)$$

Dosaďme sem $c_2 = \frac{s}{t}$ z (1), $c_1 = \frac{y}{t}$ zo vzťahu (2) a vzťah (4): Po úprave dostaneme bikvadratickú rovnicu s neznámou t , ktorá znie

$$g^2 t^4 - v^2 t^2 + s^2 + y^2 = 0 \quad (6)$$

Pretože úlohe vyhovujú iba kladné časy, dostaneme riešením

$$t_{1,2} = \frac{1}{2g} \sqrt{2(v^2 \pm \sqrt{v^4 - 4g^2(s^2 + y^2)}} \quad (7)$$

Výšku h určíme dľa (3), rýchlosti c_1 a c_2 dľa (1) a (2).

Numerický výpočet: Dosadením daných hodnôt do (7) dostaneme

$$t_1 \doteq 2,3079 \text{ [s]} \quad t_2 \doteq 1,4286 \text{ [s]}$$

Prvý prípad dáva výpočtom dľa (3), (1), (2) výsledky

$$h = 26,1 \text{ [m]}; \quad c_1 = \frac{y}{t_1} = 5,2 \text{ [m s}^{-1}\text{]}; \quad c_2 = \frac{s}{t} = 13 \text{ [m s}^{-1}\text{]} = \\ = 46,8 \text{ [km h}^{-1}\text{]} .$$

Druhý prípad dáva dosadením $t_2 = 1,4286 \text{ [s]}$ výsledky:

$$h' = 10 \text{ [m]} \quad c'_1 = 8,4 \text{ [m s}^{-1}\text{]} \quad c'_2 \doteq 21,0 \text{ [m s}^{-1}\text{]} = 75,6 \text{ [km h}^{-1}\text{]} .$$

Prvé výsledky nevyhovujú, lebo je nepravdepodobné, že by násyp bol vysoký $26,1 \text{ [m]}$ a rýchlik pri plnej rýchlosti išiel iba rýchlosťou $46,8 \text{ [km h}^{-1}\text{]}$.

2. Cyklista akrobat, vážící i s kolom 72 [kg] , projíždí kruhovou dráhu poloměru $r = 2,4 \text{ [m]}$, která leží ve svislé rovině (tzv. kolo smrti). V nejnižším místě má rychlost $v_1 = 13,3 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$. Tření a odpor vzduchu zanedbejme. a) Jak velikou rychlost v_2 má v nejvyšším bodě své dráhy (poloha střemhlav)?

b) Jak velikou tlakovou silou (F_1 resp. F_2) působí cyklista na podlahu v nejnižším, resp. nejvyšším místě své dráhy?

c) Která je minimální rychlost v_0 , kterou by ještě mohl mít v nejvyšším místě své kruhové dráhy?

d) Písmenem α označte úhel, který svírá spojnice středu kruhu a těžiště cyklisty se svislým průměrem kruhové dráhy a najděte obecný vztah pro závislost v cyklisty na velikosti úhlu α !

Tíhové zrychlení kladte $g = 9,8 \text{ [m s}^{-2}\text{]}$.

Evžen Říman

(Došlo 16 řešení.)

Řešil Jindřich Procházka, 3. r. SVVŠ, Čelákovice.

Označení veličin a dané hodnoty: $r = 2,4 \text{ [m]}$ je vzdálenost těžiště od středu dráhy (neboť pohyb tělesa se děje tak, jakoby hmota byla soustředěna v těžišti); $m = 72 \text{ [kg]}$ = hmota jezdce s kolom; $v_1 = 13,3 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$ je rychlost v nejnižším bodě dráhy; v_2 je příslušná rychlost v bodě nejnižším; v_0 je minimální rychlost v nejvyšším bodě; v je rychlost cyklisty v libovolném bodě dráhy; F_1 je síla, která působí na jezdce v nejnižším bodě; F_2 je síla působící v nejvyšším bodě.

a) Platí zákon o zachování energie: Pohybová energie v nejnižším bodě $\left(\frac{1}{2} m v_1^2\right)$ je rovna součtu pohybové energie v bodě nejvyšším $\left(\frac{1}{2} m v_2^2\right)$ a polohové energie ($2 m g r$), tedy $\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + 2 m g r$, z toho plyne

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 4 g r} = \sqrt{82,81} = 9,1 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$$

Dimenzionální správnost vzorce je zřejmá.

b) Tlaková síla v nejvyšším resp. nejnižším bodě má dvě složky: odstředí-

vou $\left(\frac{m v^2}{r}\right)$ a váhovou ($m g$); platí tedy

$$F_1 = \frac{m v_1^2}{r} + m g = 6\,012,3 \text{ [N]}; \quad F_2 = \frac{m v_2^2}{r} - m g = 1\,778,7 \text{ [N]}.$$

c) Při minimální rychlosti (v_0) cyklisty je odstředivá síla rovná váze, čili

$$\frac{m v_0^2}{r} = m g \Rightarrow v_0 = \sqrt{g r} = \sqrt{23,52} = 4,85 \text{ [m s}^{-1}\text{]}$$

d) V nejnižším místě má cyklista jediné pohybovou energii $\left(\frac{1}{2} m v_1^2\right)$; v libovolném místě, jehož průvodič je od průvodiče nejnižšího bodu odchýlen o úhel α , je těžiště cyklisty o délku $h = r (1 - \cos \alpha) = 2 r \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ výše než v nejnižším bodě. Má tedy zde cyklista jak energii pohybovou $\frac{1}{2} m v^2$, kde v značí rychlost v uvažovaném bodě, tak energii polohovou $m g h$. Tedy podle zákona o zachování energie platí

$$\frac{1}{2} m v^2 + 2 m g r \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} m v_1^2$$

Řešením této rovnice podle neznámé v obdržíme hledaný vztah

$$v = \sqrt{v_1^2 - 4 g r \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

4. Automobil jede do mírného táhlého kopce rychlostí $c_1 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jede-li totéž vozidlo se stejného kopce zpět, pak při stejném výkonu motoru bude mít stálou rychlost vyšší, a to $c_2 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Máme vypočítat, jakou rychlostí c_0 by se uvedené vozidlo, rovněž při stejném výkonu, pohybovalo po vodorovné silnici.

Pozn. S ohledem na malý úhel sklonu vozovky (při jízdě do kopce a zpět) a nepřilíš rozdílné rychlosti vozidla uvažujeme třecí sílu ve všech třech případech stejnou.

Václav Šindelář

(Došlo 16 řešení.)

Řešil Jaroslav Zemánek, II. c, SVVŠ, Praha 5.

Nechť auto vlivem tažné síly F motoru se pohybuje rovnoměrně rychlostí v a za dobu t nechť urazí dráhu s . Pro výkon P motoru platí

$$P = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v,$$

takže je

$$F = \frac{P}{v}. \quad (1)$$

Na naše auto působí tři síly: váha G auta, tření T a tažná síla F motoru, jehož výkon je P . Stoupání uvažovaného kopce označme α .

Jede-li auto do kopce, motor vyvíjí sílu

$$F_1 = T + G \cdot \sin \alpha,$$

z čehož vzhledem k (1) plyne

$$\frac{P}{c_1} = T + G \cdot \sin \alpha . \quad (2)$$

Jede-li auto s kopce, motor vyvíjí sílu

$$F_2 = T - G \cdot \sin \alpha ,$$

z čehož vzhledem k (1) plyne

$$\frac{P}{c_2} = T - G \cdot \sin \alpha . \quad (3)$$

Jede-li auto po vodorovné silnici, motor vyvíjí sílu

$$F_3 = T ,$$

takže vzhledem k (1) platí

$$\frac{P}{c_0} = T \quad (4)$$

Ze vztahů (2), (3), (4) plyne

$$\frac{P}{c_1} + \frac{P}{c_2} = 2 \cdot \frac{P}{c_0} ,$$

a tedy platí

$$c_0 = \frac{2c_1 c_2}{c_1 + c_2} . \quad (5)$$

Pro dané hodnoty dá vzorec (5) výsledek

$$c_0 = 8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}] .$$

5. Kolikrát se zvětší celková povrchová energie, rozprášíme-li vodní kapku poloměru $r_1 = 0,3 \text{ cm}$ na drobné kapičky o poloměrech $r_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$? Jaká bude hodnota celkové povrchové energie po rozprášení, je-li povrchové napětí vody za určitých podmínek $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$? Přitom víme, že plošná hustota energie je rovna povrchovému napětí.

Václav Šindelář

(Došlo 16 řešení)

Řešil Zdeněk Jiráček, III. B, SVVŠ, Hradec Králové.

Z velké kapky se vytvoří

$$n = \frac{\frac{4}{3} \pi r_1^3}{\frac{4}{3} \pi r_2^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

kapiček.

Ze vztahu

$$\frac{W}{s} = \sigma ,$$

kde $\frac{W}{s}$ je plošná hustota energie, vyplývá povrchová energie kapky $W_1 =$

$= 4 \pi r_1^2 \sigma$ a celková povrchová energie kapiček $W_2 = n \cdot 4 \pi r_2^2 \sigma$.

Celková povrchová energie se zvýší x krát.

$$x = \frac{n \cdot 4 \pi r_2^2 \sigma}{4 \pi r_1^2 \sigma} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \cdot \frac{4 \pi r_2^2 \sigma}{4 \pi r_1^2 \sigma} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{3 \cdot 10^{-1}}{3 \cdot 10^{-6}} = 10^5 .$$

Celková povrchová energia se tedy zvýší 100 000krát.

$$W_2 = n \cdot 4 \pi r_2^2 \sigma = \frac{r_1^3 \cdot 4 \pi \sigma}{r_2} = \frac{3^3 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 \cdot 4 \pi \cdot 7,3 \text{ N} \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2},$$

$$W_2 = 0,082 56 \text{ J}$$

Hodnota celkové povrchové energie po rozprášení bude 0,082 56 J.



Matematické zábavy

J o z e f E l i a š, Bratislava:

Kalendár a matematika

Často potrebujeme vedieť, na ktorý deň v týždni pripadla, alebo pripadne nejaká historická udalosť. Existuje niekoľko metód, ako to môžeme zistiť. V tomto článku uvidíme dve metódy, z ktorých jedna používa kalendár a druhá nie.

Metóda, ktorá používa kalendár. Pri tejto metóde budeme musieť najskôr určiť, na ktorý deň týždňa pripadne 25. december daného roku. Najskôr ukážeme pravidlo, ako určíme, na ktorý deň týždňa pripadne 25. december daného roku. Pravidlo dokážeme najskôr pre juliánsky kalendár, pomocou ktorého potom dokážeme pravidlo aj pre gregoriánsky kalendár. Toto pravidlo sa však môže používať iba pre dátumy od 1. marca. Pre dátumy v januári a vo februári berieme do úvahy 25. december predchádzajúceho roku, ktorý pripadne na ten istý deň, ako deň po ňom nasledujúceho 1. januára. Robíme to preto, aby sme neurobili chybu, ktorá by mohla vzniknúť pri priestupnom roku.

Označme c deň 25. decembra v roku Y . Podľa tabuliek [2] zistíme, že v roku 1 Nový rok pripadol na sobotu. Teda 25. decembra roku 0 pripadlo tiež na sobotu. Keby nebolo priestupných rokov, mohli by sme nájsť deň 25. decembra roku Y určením zvyšku delenia $Y : 7$. Deň týždňa každého dátumu sa každý rok posunie o jeden, pretože zvyšok delenia $365 : 7$ je 1. V priestupných rokoch sa posunie o 2. Počet p priestupných rokov predchádzajúcich Y nájdeme podľa vzorca

$$p = \frac{Y - z}{4},$$

kde z je zvyšok delenia $Y : 4$. Teda c nájdeme ako zvyšok delenia

$$\left(Y + \frac{Y - z}{4}\right) : 7, \quad (1)$$

zvyšok c .

Ak uvážime, že

$$\frac{Y - z}{4}$$

je celé číslo, pretože od Y sme odčítali zvyšok z , môžeme k delencu v (1) pripočítať násobok

$$\frac{7(Y - z)}{4},$$

zvyšok c zostane nezmenený. Dostaneme

$$\left(Y + \frac{8Y - 8z}{4}\right) : 7,$$

zvyšok c , alebo

$$(Y + 2Y - 2z) : 7, \quad (2)$$

zvyšok c .

Ak pridáme k delencu v (2) znovu $7(Y - z)$, dostaneme

$$(10Y - 9z) : 7,$$

zvyšok c , alebo

$$[10(Y - z) + z] : 7, \quad (3)$$

zvyšok c .

Tým sme dokázali pre určenie dňa 25. XII. roku Y v juliánskom kalendári toto pravidlo: Ak je daný rok priestupným rokom, zvyšok c dostaneme tak, že pripíšeme k číslu roka Y nulu a výsledok delíme siedmimi. Ak je daný rok Y obyčajný, zvyšok dostaneme tak, že pridáme rozdiel medzi najbližším predchádzajúcim priestupným rokom a daným rokom Y k desaťnásobku najbližšieho predchádzajúceho priestupného roku a výsledok delíme siedmimi. Zvyšok delenia c je číslo dňa, pričom sobote priradíme zvyšok 0, nedeli 1, pondelku 2, utorku 3, stredu 4, štvrtku 5 a piatku 6.

Kalendár gregoriánsky bol zavedený 15. X. 1582 zanedbaním 10 dní po juliánskom dátume 4. X. Od toho času prídavkový deň sa nepridáva v rokoch deliteľných 100-mi, okrem rokov deliteľných 400-mi. Roky 1700, 1800, 1900 sú teda obyčajné roky. Všeobecne rozdiel medzi juliánskym a gregoriánskym kalendárom je 13 dní. V terajšom storočí podľa gregoriánskeho kalendára 25. XII. odpovedá 12. XII. juliánskeho kalendára. Ak 25. XII. v juliánskom kalendári pripadne na štvrtok, potom 12. XII. pripadne na piatok. Ak používame pre nájdenie dňa 25. XII. pravidiel juliánskeho kalendára, musíme pridať jeden deň, aby sme našli deň 25. XII. gregoriánskeho kalendára.

Označme g opravu, ktorú treba pridať dňu 25. XII. v juliánskom kalendári, aby sme dostali deň 25. XII. gregoriánskeho kalendára. Deň 25. XII. gregoriánskeho kalendára zistíme podľa vzorca

$$[10(Y - z) + z + g] : 7, \quad (4)$$

zvyšok c .

Ak vydelíme Y stomi, získame storočia C a zvyšok Z . Potom

$$Y = 100C + Z$$

Potom vzorec (4) bude mať tvar

$$[1000C + 10(Z - z) + z + g] : 7,$$

zvyšok c .

Ak odčítame od delenca násobok siedmich 1001 g , dostaneme

$$[1000C + 10(Z - z) + z - 1000g] : 7,$$

zvyšok c , alebo

$$[1000(C - g) + 10(Z - z) + z] : 7, \quad (5)$$

zvyšok c .

Pre gregoriánsky kalendár, pri určení dňa c , musíme odpočítať od čísla storočí: 1 pre roky, ktoré začínajú rokom 1900, 2 - od 1800, 3 - od 1700 a 4 od roku 1582. Jednotka sa odpočítava od roku 1900 do 2099, lebo pridávajúci deň nie je odpustený v roku 2000. Pravidlo je teda podobné ako pri juliánskom kalendári.

Ak chceme vedieť, ktorý deň týždňa pripadá na daný dátum, zistíme najskôr, na ktorý deň pripadá 25. XII. daného roku. Potom zistíme, na ktorý deň pripadne 25. XII. a daný dátum v kalendári pre ľubovoľný rok. Ak 25. december roku daného dátumu je o p dní neskoršie ako 25. XII. v kalendári z ľubovoľného roku, potom aj deň týždňa pripadajúci na daný dátum je o p dní pozdejší ako je deň dátumu v používanom kalendári z ľubovoľného roku.

Uvedme niekoľko príkladov na uvedenú metódu.

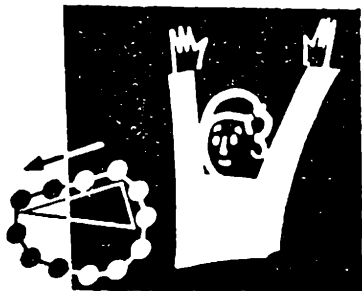
Príklad 1. Ktorý deň týždňa bude 1. I. 2000?

Riešenie. Vieme, že 1. januára je toho istého dňa ako 25. decembra predchádzajúceho roku. Stačí teda určiť, na ktorý deň pripadne 25. XII. 1999. Podľa (5) zvyšok delenia $18\,963 : 7$ je 0, teda 1. januára 2000 bude v sobotu.

Príklad 2. Ktorý deň týždňa bolo 13. IV. 1955?

Riešenie. Deň určíme pomocou kalendára z roku 1962. Lahko zistíme, že 25. XII. 1962 bolo v utorok. Podľa (5) zvyšok delenia $18\,523 : 7$ je 1. Teda 25. XII. 1955 bolo v nedeľu, t.j. o päť dní neskoršie ako 25. XII. 1962. 13. IV. 1962 bolo v piatok, teda 13. IV. 1955 bolo o päť dní neskoršie, t.j. v stredu.

(Pokračování)



Fyzikální zajímavosti

Půl století materiálu budoucnosti

Již před půl stoletím byly oceli s obsahem chromu 9,8 % studovány Hadfieldem, jenž zjistil jejich odolnost vůči agresivním chemikáliím, což Monnartz vysvětloval jejich pasivitou. Oceli s vyšší přísadou chromu se zabývalo mnoho metalurgů, z nichž uvádíme nejvýznačnější: Mauermann (Phönix), Strauss (Krupp), Hummelberger (Poldina huť) a Brearly (Sheffield). Na jaře 1913 Mauermann provedl tavbu oceli se 7,28 % chromu a 9,68 % niklu, která podobně jako Straussova ocel se 6,25 % chromu a 20 % niklu do značné míry odolávaly korozi. Mimo to byla podána v Německu patentní přihláška na ocel obdobného složení pod jménem „Pasel“, za níž stál Krupp. Také Hummelberger vyrobil na sklonku r. 1912 ocel s malou přísadou chromu a 10 % niklu, jež do jisté míry vzdorovala korozi. Avšak potíže s tepelným zpracováním těchto ocelí a zvláště jejich obtížné obrábění (nebyla tehdy známa rychlořezná ocel a tvrdokovy) zavinily, že tyto oceli nebyly patentovány a přihláška „Pasel“ byla dokonce odvolána. Tím se stalo, že Brearly, který již v roce 1912 přišel na to, že se vzrůstajícím procentem přísady chromu roste odolnost chromové oceli vůči korozi, vyrobil na začátku r. 1913 prakticky první upotřebitelnou nerezavějící ocel o složení 9 až 16 % chromu a 1 až 2 % niklu, na niž obdržel v r. 1915 patent, kdežto Krupp dostal teprve roku 1918 patent na ocel, vzdorující korozi. Dnes se nejrozšířenější nerezavějící oceli o složení 18 % chromu a 8 % niklu vyrábí ročně přes 3 milióny t. Počet výrobků z nerezavějící oceli ustavičně roste a kromě chemického, potravinářského, atomového a naftového průmyslu, proniká do ene getiky, dopravy a stavebnictví, i do domácností. Počet aparatur z nerezavějící oceli nebo aspoň jejich nejdůležitějších složek ustavičně roste. Jako ve stavebnictví se od kování přešlo již na obkládání budov plechem z nerezavějící oceli, tak dnes v letectví nejrychlejší trysková letadla jsou místo z hliníku, stavěna z nerezavějící oceli. V energetice nerezavějící oceli s dalšími stabilizačními přísadami umožnily stavbu plynových turbin a parních turbin s nadkritickým provozním tlakem páry. Přidáním malého množství dalších přísad jako jsou kobalt, molybden, titan, hliník a niob a tepelným zpracováním v podobě ohřevu na 480 °C po dobu 13 hodin, získá se ocel o nejvyšší pevnosti v tahu 220 kp/mm², jež skýtá v dopravě a energetice nové možnosti rozvoje.

František Komurka



Karel Havlíček:

Integrální počet pro začátečníky

Při výkladu základů integrálního počtu použil autor stejné metody jako ve své knize *Diferenciální počet pro začátečníky*. Znamená to tedy, že vždy začíná úvahy příkladem, a pak teprve následuje teorie, přičemž opět důkazy jsou provedeny pouze tehdy, stačí-li k tomu prostředky střední, popř. odborné školy, nebo ze základů diferenciálního počtu. Proto nemůže čtenář knihu studovat dříve, dokud se neseznámí s těmito základy.

Výklad je proveden po metodické stránce poněkud jinak, než je tomu v obvyklých učebnicích o integrálním počtu (viz např. V. Jarník, *Integrální počet I*). Začíná se totiž kapitolou o neurčitém integrálu, tedy nejdříve se čtenář naučí mechanismu integrování různých funkcí (zvláště metodě per partes a metodě substituční). Vedle toho je vyložen princip integrování racionálních funkcí rozkladem v částečné zlomky a některých jiných speciálních funkcí. Ve druhé kapitole se autor zabývá určitým integrálem,

jeho definicí a souvislostí s neurčitým integrálem a z toho plynoucími metodami pro výpočet.

Třetí kapitola obsahuje použití určitého integrálu v praxi, např. v geometrii (obsahy rovinných oborů, délka oblouku křivky, objem a obsah rotačního tělesa) a ve staticce (určení statického momentu a těžiště).

Kniha je velmi dobře napsána a její přečtení před vstupem na vysoké školy technického směru bude velmi užitečné pro žáky nejvyšších tříd středních a odborných škol. Je jen škoda, že kniha vyšla až za rok po vydání *Diferenciálního počtu pro začátečníky*, protože současné vydání obou knih by splnilo daleko více úkol, který byl pro obě knihy vytčen, neboť je velmi pravděpodobné, že bude vždy jedna z nich na knižním trhu rozebrána.

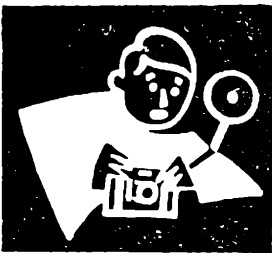
Kniha obsahuje 114 příkladů podrobně propočtených v textu a 172 příkladů k procvičení, ke kterým jsou vzadu uvedeny výsledky s případným návodem, jde-li o obtížnější příklad. Velmi správné je

upozornění autora na to, že metod pro integrování nelze používat zcela mechanicky, jak patrně z příkladu na str. 154—156. Čtenáři jsou také připraveni na možnost různých výsledků podle použité metody nebo substituce.

Kniha je 29. svazkem II. řady Polytechnické knihni-

ce, kterou vydává společně s Čs. společnostmi pro šíření politických a vědeckých znalostí Státní nakladatelství technické literatury v Praze, 1963. Má 244 stran, 20 obrázků a stojí brožovaná 9,50 Kčs.

Karel Drábek



Různé

Jaromír Hroník, stav. inž., VUT, Brno:

Cvičíme na přijímací pohovory

Předkládám vám několik ukávek příkladů k procvičování látky z matematiky pro přijímací pohovory na vysoké školy technického směru v Brně. V závorce jsou uvedeny výsledky.

1. Upravte složený zlomek $\frac{\frac{0,2}{3,5}}{\frac{0,04}{2,8}}$. (4)

2. Zkraťte zlomek $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - 1}$. $\left(\frac{1}{x+1}\right)$

3. Znásobte $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) \cdot \frac{ab}{a+b}$. $(a+b)$

4. Řešte rovnice $(1-x)^2 - (x-1)^2 = 1 + \frac{3x}{4}$. $\left(x = -\frac{4}{3}\right)$

5. $\frac{3x+7}{6 \cdot (x^2-1)} - \frac{9}{x^2-1} = \frac{2}{1-x}$. $\left(x = \frac{7}{3}\right)$

6. $\sqrt{x+11} = 1 + \sqrt{x}$. $(x = 25)$

7. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{l} x - 2y = 3a - 2 \\ x + y = 1 \end{array} \quad (x = a, y = 1 - a)$$

8.

$$\begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3 \\ \frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4 \end{array} \quad (x = 3, y = 4)$$

9. Určete intervaly, pro které je splněna nerovnost:

$$x^2 - x - 6 \geq 0. \quad (-\infty, -2 >, < 3, \infty)$$

10. Rovnice $x^2 - 2x + q = 0$ má jeden kořen $x_1 = \frac{7}{2}$. Určete druhý

kořen a absolutní člen $q!$ $\left(x_2 = -\frac{3}{2}, q = -\frac{21}{4}\right)$

11. Který mnohoúhelník má 20 úhlopříček? (Osmiúhelník)

12. Upravte: $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{a}}$. $\left(\sqrt[12]{\frac{1}{a}}\right)$

13. Vypočtete číslo x z rovnice:

$$\log_{10} x = -\frac{2}{3}. \quad \left(x = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)$$

14. Definujte pojem logaritmu a vyložte pravidla při logaritmování.

15. Strany trojúhelníka tvoří aritmetickou posloupnost; jeho obvod je 27 cm. Určete strany, znáte-li, že nejkratší strana má se k nejdelší jako 1 : 2. (6, 9, 12)

16. O které číslo se musí zvětšit daná tři čísla 2, 10, 34, abychom dostali geometrickou posloupnost. ($x = 2$)

17. Sestrojte trojúhelník, je-li daná strana $c = 7$ cm a dvě těžnice $t_a = 7,5$ cm, $t_b = 4,5$ cm.

18. Sestrojte trojúhelník, je-li dán poloměr kružnice opsané $r = 3,5$, těžnice $t_c = 4,5$ a úhel $\gamma = 60^\circ$. Návod: užití věty o středovém a obvodovém úhlu.

19. Sestrojte spojnici daného bodu s nepřístupným průsečíkem dvou různoběžek.

20. Do kruhové výseče vepište kružnici.

21. Sestrojte kružnici, která prochází pevným bodem a dotýká se další kružnice v daném bodě.

22. Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem a dotýká se dvou přímek.

23. Vypočtete poloměr (případně sestrojte střed) kružnice vepsané do románského okna. (obr. 1) $\left(r = \frac{a}{3}\right)$

24. Vypočtete poloměr kružnice příslušející kruhové úseči, když známe výšku úseče $v = 2$ a délku tětivy $t = 24$. $(r = 37)$

25. Určete vzdálenost vrcholu obdélníka o stranách a, b od jeho úhlopříčky. Užijte Euklidových vět. $\left(x = \frac{ab}{u}\right)$

26. Určete $\cos \alpha$, víme-li, že $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. $\left(\cos \alpha = \frac{12}{13}\right)$

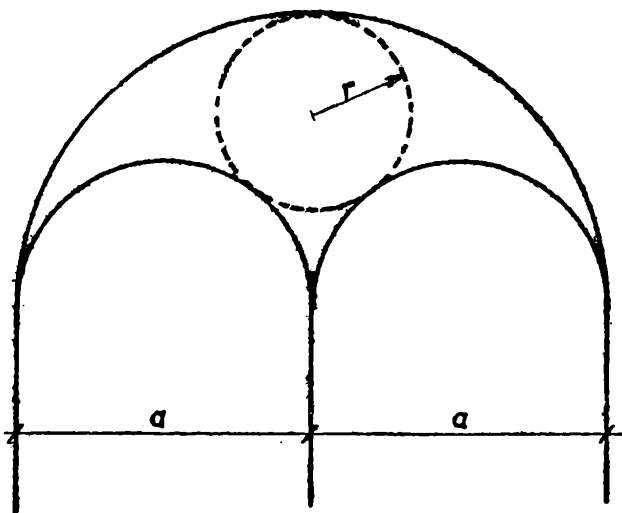
27. V trojúhelníku je dán obsah $S = 12$ a dvě strany $a = 6, b = 8$. Určete úhel jimi sevřený.

$$(\gamma = 30^\circ \text{ nebo } 150^\circ)$$

28. Definujte goniometrické funkce a jejich vzájemné vztahy.

29. V trojúhelníku jsou dány tři strany $a = 1, b = 2, c = \sqrt{7}$. Určete úhel γ . $(\gamma = 120^\circ)$

30. Určete obsah lichoběžníka, známe-li obě základny $z_1 = 100, z_2 = 40$ a úhly při delší základně $\alpha = 45^\circ, \beta = 60^\circ$ $(S \doteq 2670)$



Obr. 1

31. Dokažte správnost identity $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

32. Určete všechny úhly, které vyhovují rovnici

$$\cos 2x = \sin x$$

$$(x_1 = 30^\circ + n 360^\circ, x_2 = 150^\circ + n 360^\circ, x_3 = 270^\circ + n 360^\circ)$$

33. Určete rozměry válce, je-li dán jeho objem 108π a plášť 72π .

$$(r = 3, v = 12)$$

34. Jaký úhel svírá povrchová přímka s podstavou rotačního kužele, jestliže jeho plášť se rovná dvojnásobné základně? $(\alpha = 60^\circ)$

35. Určete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací pravidelného šestiúhelníka o straně a kolem úhlopříčky vedené středem šestiúhelníka. $(V = \pi a^3)$

36. Jak vypočítáte objem a povrch koule a jejích částí?

37. Vyložte pojem faktoriálu, kombinačního čísla a binomické věty.

Požádali jsme podle vašich přání pracovníky několika vysokých škol o zaslání ukázkových příkladů, abyste byli alespoň trochu informováni, jaké příklady se asi mohou vyskytnout při přijímacích pohovorech. Redakce

Na žádost mnoha čtenářů rozhodla se redakce Rozhledů začít od tohoto čísla otiskovat slovníček matematických výrazů ve světových jazycích. Za nejpotřebnější pro mladé čtenáře, kteří chtějí rozšiřovat své vědomosti též četbou cizí matematické literatury, považujeme slovník rusko-český, a proto jím otiskování zahajujeme. Celá tato část bude otištěna přibližně v průběhu jednoho ročníku Rozhledů. Potom bude následovat část česko-ruská a pak slovníček německý, anglický, eventuálně francouzský. Vzhledem k zaměření časopisu omezíme se při výběru slov na ty výrazy, s nimiž se může čtenář setkat při studiu středoškolské látky z matematiky a deskriptivní geometrie. Pro úsporu místa neuvádíme výrazy, které lze najít v běžných slovnících, jako např. číslůvky základní, řadové apod.

Slovníček

matematických výrazů

Uvádíme však slova, která sice jsou běžná v hovorové řeči, ale o jejichž tvaru a významu v matematice by mohl být čtenář na pochybách, např. *убывающий*, *грань* atp. V některých případech, kdy to z tvaru slova nebo shodnosti s češtinou není zcela zřejmé, označujeme u podstatných jmen též rod. Redakce

■ A ■

абсолютный
абстрагировать
абстрактный

абсурд
абсцисса
азбука
азимут
аксиома
аксиоматический
аксонометрия
алгебра
алгоритм
алфавит
алфавитный порядок
анализ построения
аналитический
аналогичный
аннулировать
апофема

апликаата
аппроксимация
аргумент комплексного числа
аргумент функции
арифметика
аркус

absolutní
abstrahovat
abstraktní
nesmysl, absurdum
souřadnice x
azbuka, ruská abeceda
azimut
axiom
axiomatický
axonometrie
algebra
algoritmus
abeceda (latinská)
abecední pořadí
analýza konstrukce, rozbor
analytický
podobný, analogický
anulovat, zrušit
výška boční stěny pravidelného
jehlanu
souřadnice z
přibližná hodnota, aproximace
amplituda komplexního čísla
argument funkce
aritmetika
arkus, oblouk

асимптота
ассоциативный
аффинита
аффинный

asymptota
asociativní
afinita
afinní

Б

база
бегунок
безгранично
безразмерный
бесконечно
бесконечно удаленный
бесконечный
бином
биномиальная теорема
биссектриса
боковая поверхность
боковая грань
большой круг на шару
бросать игральную кость

základ
běžec na logaritmickém pravítku
neomezeně
bezrozměrný
nekonečně
nevlastní
nekonečný
dvočlen
binomická věta
osa (úhlu, kvadrantu)
plášť
bočná stěna, pobočná stěna
hlavní kružnice
vrhat, házet hrací kostkou

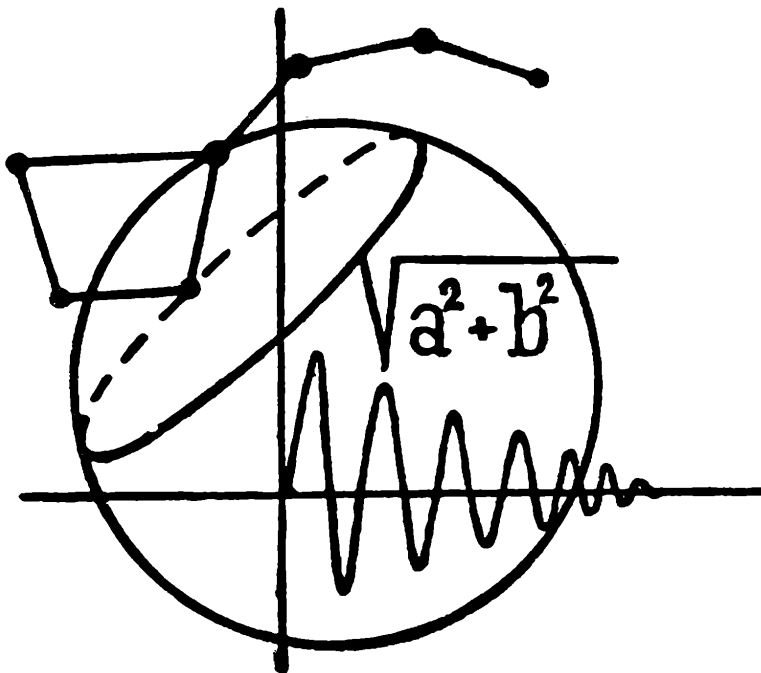
В

введение
вдвое
вектор
величина
вероятность
вероятный
вертикаль, ζ .
вертикальная проекция
вторая вертикальная проекция
вертикальный
верхний
вершина
вершинные углы
вес
вести
весь
ветвь
вещественный
взаимно
взаимный
вид
винт
винтовая поверхность
включительно
невписанная окружность
внешний
внутренний
внутренность
вогнутый
возвести, возводить в степень

úvod, zavedení
dvakrát
vektor
veličina, velikost
pravděpodobnost
pravděpodobný
svislice
nárys
bokorys
svislý
horní
vrchol
vrcholové úhly
váha
vésti, spustiti
všechn
větev (např. hyperboly)
reálný
navzájem, vzájemně
vzájemný
tvar, způsob, druh
závit
plocha šroubová
včetně
připsaná kružnice
vnější
vnitřní
vnitřek
konkávní
umocnit, umocňovat

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



5

ROČ. 42
1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKALNI

nositel vyznamení Za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Leden 1964

Číslo 5

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

Inž. M. Špačková: Statistika proniká na všechna pracoviště	193
Doc. dr. M. Menšík: Snelliova úloha	197
F. Kuřina: Z geometrie trojúhelníka	202
O. Lepil: Vláknové světlovody	205
Prof. dr. V. Santholzer: Neobvyklé fyzikální jevy po nukleárních výškových pokusech	209
Doc. inž. dr. R. Servít: Stabilita ve stavební praxi	212
J. Horský: Základy teorie relativity (Pokračování)	215
Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů	217
J. Vlčková: Opakujte si fyziku pro přijímací pohovory na stavební fakultu v Brně	227
T. Szebényi: M. V. Ostrogradskij	229
J. Eliáš: Kalendár a matematika (Dokončení)	232
J. Sedláček, CSc. Dopravní problémy a matematika	238
M. Zelenka: Rusko-český slovník	3. a 4. str. obálky



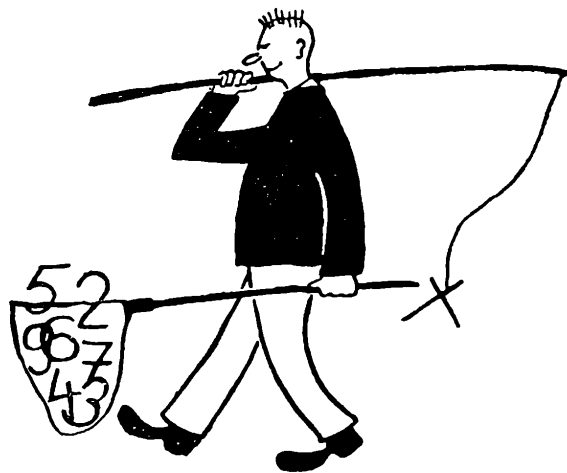
Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: dr. O. Hönl. Titulní obrázky: M. KOŠAR, studující FS.

A-16*41007

Matematika

Inž. Miloslava Špačková,
ČVUT, Praha:

Statistika proniká na všechna pracoviště



Disciplina politicostatistica to byl oficiální název nauky, zabývající se soupisy obyvatelstva a jeho majetku u kulturních národů již několik století před naším letopočtem. Dnešní pojem *statistika* má s původním označením společné již jen jméno. Je to rozsáhlý vědní obor, který nejen slouží přírodním a technickým vědám, ale stává se i zakladatelem dalších vědních oborů např. kybernetiky, biometriky apod. Zasahuje do všech odvětví našeho průmyslu jako statistická kontrola jakosti a regulace výrobních podmínek a stává se tak stopařem nejakostní výroby. Aby všechny tyto důležité problémy v průmyslu strojírenském, hutním, chemickém, potravinářském, textilním, v zemědělství, lesnictví, lékařství, fyzice a chemii mohly být úspěšně řešeny, bylo třeba dát statistice, která pracovala zatím jen na základě zkušeností, solidnější základ, a to matematický. Tak vznikla asi před padesáti lety *matematická statistika*, jejíž podstata je v teorii pravděpodobnosti.

Teorie pravděpodobnosti se zabývá studiem matematických zákonitostí, které jsou dílem náhody. Takovými klasickými náhodnými jevy, vykazujícími určitou zákonitost, je házení hracími kostkami nebo mincemi, míchání karet apod. Ve fyzice platí zákon, že plyn uzavřený v nádobě jakéhokoliv tvaru, působí na stěny všude stejným tlakem. Tento zákon platí proto, že jednotlivé molekuly se pohybují zcela náhodně. Výroba určité součástky je náhodným jevem, neboť její přesný tvar je ovlivněn řadou náhodných vlivů během výrobního procesu. Pokusy prováděné ve výzkumu, které mají dát odpověď na řešené problémy, jsou náhodnými pokusy, neboť za stále stejných podmínek při opakování závisí jejich výsledek pouze na náhodě.

Než se podíváme po pracovištích našich statistiků, bude ovšem potřeba trochu se seznámit s jejich pracovním aparátem a osvojit si některé potřebné termíny z teorie pravděpodobnosti.

N á h o d n ý j e v. Jev A , který vždy nastává při uskutečnění stejných podmínek, nazývá se *jevem jistým*. *Jev nemožný* je takový jev, který

nenastane při žádné realizaci stejných podmínek. Jev A se nazývá *náhodným*, jestliže při opakované realizaci podmínek (opakováním náhodných pokusů) může nastat ale nemusí. Při házení hrací kostkou padne vždy menší počet ok než 7 - jev jistý; nepadne nikdy desítka - jev nemožný a může padnout např. dvojka - jev náhodný.

P r a v d ě p o d o b n o s t j e v u. Jevy A a B jsou *disjunktní* (neslučitelné, vylučující se), jestliže nemohou nastat současně. Jevy A a B jsou stejně možné, jestliže každý z nich může nastat (může být výsledkem pokusu). Celkový jev A se rozpadá na dílčí jevy A_1, A_2, \dots, A_n , příznivé jevu A .

Pokusem budiž hod hrací kostkou. Celkovým jevem A je třeba sudý počet ok. Tento jev se rozpadá na dílčí jevy A_2, A_4, A_6 , které představují padnutí dvou, čtyř a šesti ok. To jsou jevy příznivé jevu A . Všech možných případů, které mohou nastat při házení jednou kostkou, je 6, tzn. padnutí jednoho, dvou až šesti ok.

Pravděpodobnost jevu A bude $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Klasická definice pravděpodobnosti, jak ji podal matematik Laplace zní:

Může-li určitý jev vykázat n (přirozené číslo) různých vzájemně se vylučujících výsledků, které jsou stejně možné a jestliže m z těchto výsledků má nevyhnutelně za následek realizaci určitého jevu A , kdežto zbylých $(m-n)$ výsledků ji vylučuje, potom pravděpodobnost jevu A položíme rovnou číslu $\frac{m}{n}$ a značíme $P(A) = \frac{m}{n}$.

Č e t n o s t. Sledujeme-li pohlaví narozených dětí v záznamech některé nemocnice v časovém sledu, dostáváme tuto posloupnost případů:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ch	d	ch	d	d	ch	ch	ch	d	ch	d	d	d	ch	ch	d
0	1	1	2	3	3	3	3	4	4	5	6	7	7	7	8

Prvý řádek znamená pořadové číslo narozeného dítěte, druhý značí, zda šlo o děvče (d) či chlapce (ch), ve třetím řádku je celkový počet narozených děvčat. Třetí řádek vlastně udává *četnost* (počet příznivých případů) narozených děvčat z odpovídajícího počtu všech narozených dětí (počet možných případů).

Jaká je nyní pravděpodobnost narození děvčete? Vidíme, že narozením každého dítěte se počet případů příznivých i možných mění a že dostáváme následující čísla

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10}, \frac{5}{11}, \frac{6}{12}, \frac{7}{13}, \frac{7}{14}, \frac{7}{15}, \frac{8}{16}.$$

Jsou to *četnosti relativní*¹⁾ a je ze světových statistik známo, že vezme-li nekonečně mnoho případů, budou se relativní četnosti pro narození

¹⁾ *Relativní četnost* je poměr počtu případů příznivých určitému jevu k počtu všech možných případů v daném pokuse.

děvčete stále více blížit hodnotě 0,49, kterou v tomto případě označujeme za pravděpodobnost. Je to statistická definice pravděpodobnosti a vyslovil ji Mises:

Pravděpodobnost je limita relativních četností jevu počítaných při jednotlivých pokusech, roste-li počet případů nade všechny meze.

Provedme následující pokus, který bude opakován stokrát za stále stejných podmínek. Házíme 6 stejných mincí a sledovaným jevem (pozorovaným znakem) je počet rubů, které se objeví při jednom hodu. Výsledky pokusu jsou v tab. 1.

Tabulka 1

Počet rubů	0	1	2	3	4	5	6	
Četnosti absolutní	3	8	20	32	25	10	2	celkem 100
Četnosti relativní	0,03	0,08	0,20	0,32	0,25	0,10	0,02	celkem 1

Tak např. čísla v pátém sloupci říkají, že se pětadvacetkrát objevily 4 ruby a relativní četnost objevení se 4 rubů při stokrát opakovaném pokusu je 0,25. Až sem experiment, nyní však uvažujme pouze teoreticky.

Při hodu jednou mincí se může objevit rub jednou nebo vůbec ne. Při hodu dvěma mincemi se může objevit rub na obou, nebo na žádné minci, nebo na první minci rub, na druhé líc a opačně. Celkem mohou nastat čtyři případy. Budeme-li pracovat se stále větším počtem mincí, dojdeme k tabulce 2.

Poslední řádek udává relativní četnosti (teoretické),²⁾ které jsme získali bez nutného provedení pokusů, bez nichž se klasická ani statistická definice pravděpodobnosti neobejde. Srovnáme-li poslední řádky tabulek 1 a 2 vidíme, že se relativní četnosti (teoretické v tab. 2 a experimentální v tab. 1) liší. Čím však bude větší počet pokusů ($n \rightarrow \infty$), tím více se budou pozorované četnosti z pokusů blížit teoretickým, které je možné označit za pravděpodobnosti.

Tak na základě zákona velkých čísel vznikla moderní axiomatická definice pravděpodobnosti, jejímž zakladatelem je sovětský matematik Kolmogorov. Jedna z důležitých vět nám říká, že při hodně velkém počtu

²⁾ V tab. 2 pro pokus házení 6 mincemi je možných 64 případů. Je-li jevem A padnutí 6 rubů, potom případ příznivý tomuto jevu je právě jeden. Relativní četnost je tedy $\frac{1}{64} = 0,016$.

případů můžeme téměř s jistotou tvrdit, že relativní četnost se blíží pravděpodobnosti, což symbolicky zapíšeme

$$P \left\{ \left| \frac{n(A)}{n} - P(A) \right| < \varepsilon \right\} \rightarrow 1 \text{ pro } n \rightarrow \infty \quad (1)$$

a čteme: Pravděpodobnost, že se relativní četnost $\frac{n(A)}{n}$ nebude lišit od pravděpodobnosti jevu A o více než předem zvolené libovolně malé kladné číslo ε se blíží jistotě, jestliže n roste nade všechny meze.

Tabulka 2

Počet rubů	0	1	2	3	4	5	6	
Četnost při hodu 1 mincí	1	1						celkem 2 případy
2 mincemi	1	2	1					4 případy
3 mincemi	1	3	3	1				8 případů
4 mincemi	1	4	6	4	1			16 případů
5 mincemi	1	5	10	10	5	1		32 případů
6 mincemi	1	6	15	20	15	6	1	64 případů
Relativní četnosti pro 6 mincí	0,016	0,094	0,234	0,312	0,234	0,094	0,016	

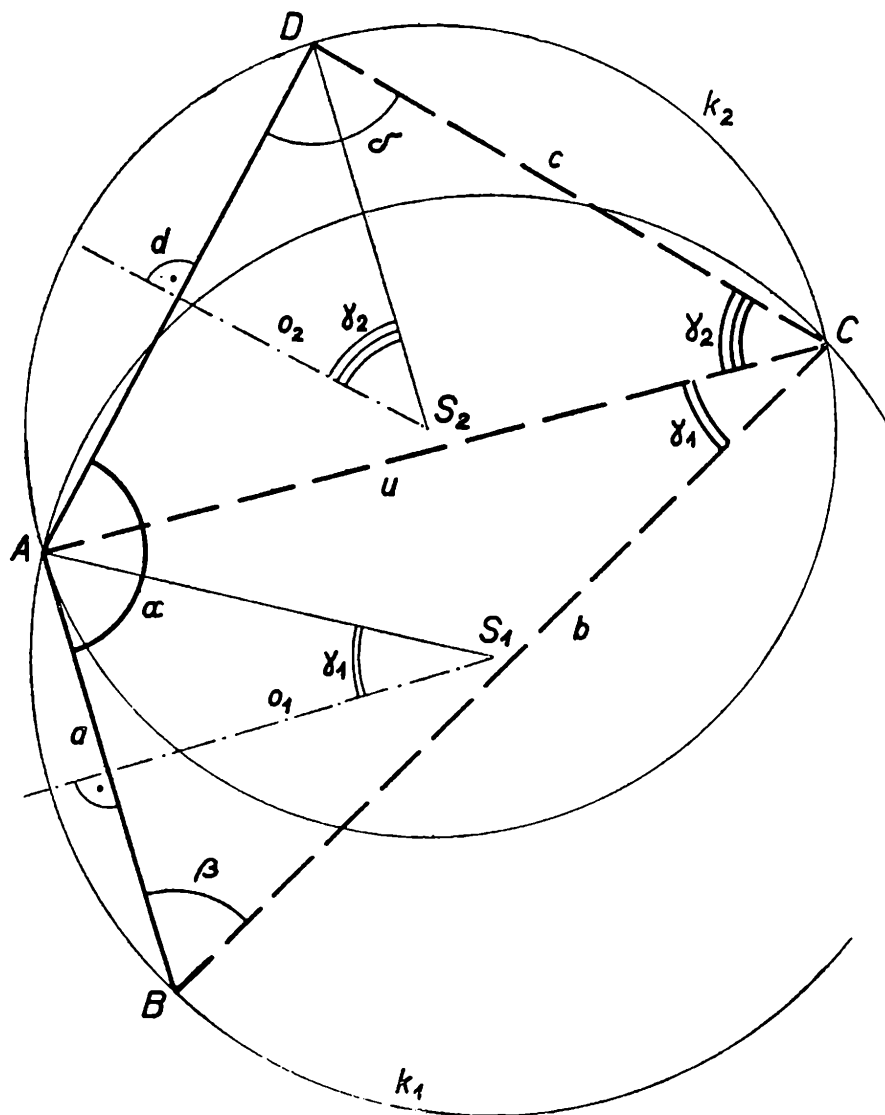
N á h o d n é v e l i č i n y. Vraťme se opět k tabulce 2. První řádek udává obor všech možných hodnot, kterých může určitá veličina nabývat, poslední řádek pravděpodobnost výskytu každé z nich. Pomocí obou definujeme *náhodnou veličinu*, která je určena oborem všech možných hodnot a pravděpodobnostmi, s kterými se uvedené hodnoty mohou uskutečnit. Značíme ji řeckými písmeny ξ , η , ζ , zapisujeme takto $P(\xi = 2) = 0,234$ a čteme: Pravděpodobnost, že náhodná veličina ξ nabude právě hodnoty 2 se rovná 0,234, což při pokusu se šesti mincemi znamená pravděpodobnost, že padnou 2 ruby. Tato náhodná veličina může nabývat pouze celočíselných hodnot a nazývá se *rozpojitá* (diskretní). Náhodná veličina, nabývající jakýchkoliv hodnot v určitém intervalu, se nazývá *spojitá*.

(Pokračování)

Snelliova úloha

K dotazu čtenáře R. G. z Olomouce podáváme řešení úlohy:

Vypočítejte rozměry čtyřúhelníka $ABCD$, jsou-li dány jeho strany $a = AB$, $d = AD$ a úhly $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\gamma_1 = \sphericalangle ACB$ a $\gamma_2 = \sphericalangle ACD$ (obr. 1).



Obr. 1

V zeměměřické praxi lze úlohu vyslovit také takto:

Stanovte vzdálenosti bodu C od tří daných bodů A , B , D , jsou-li dány úhly γ_1 , γ_2 , v nichž se z bodu C jeví úsečky AB a AD , a je-li dán úhel α sevřený těmito úsečkami.

Touto úlohou, zvanou též *problém čtyř bodů* nebo *zpětné protínání*, zabývali se matematici již téměř před čtyřmi sty léty. Její správné trigonometrické řešení podal poprvé r. 1617 holandský matematik a fyzik Snellius van Roijen z Leydenu (1651–1626), též zvaný Willebrord Snell, vrstevník Keplera a Tycha Brahe, ve spise *Eratostrhenes batavus, de terrae ambitus vera quantitate*.

Později úlohu řešilo mnoho geometrů, mezi nimi i člen francouzské akademie Laurent Pothenot (vyslov Potnó) (1660–1732) v pojednání *Problème de géométrie pratique: Trouver la position d'un lieu que l'on ne peut voir des principaux points d'où l'on observe* (1692). Po něm proto bývá někdy tato úloha neprávem zvana úlohou Pothenotovou.

V dalším uvedeme její grafické a trigonometrické řešení, úlohu však lze řešit také užitím analytické geometrie v pravouhlých souřadnicích.

1. *Grafické řešení* je přirozeně - jako každá grafická konstrukce - pouze přibližné, někdy je nespolehlivé nebo dokonce nemožné. Pro praktickou zeměměřickou potřebu se ho neužívá.

Geometrické místo bodů C, \dots v rovině, z nichž vidíme úsečku AB v daném úhlu γ_1 , je oblouk kružnice k_1 , opsané nad úsečkou AB tak, že příslušný středový úhel $\sphericalangle AS_1B = 2\gamma_1$ (obr. 1). Sestrojíme tedy symetralu o_1 úsečky AB a na ní bod S_1 tak, aby $\sphericalangle AS_1B = 2\gamma_1$. Podobně sestrojíme kružnici k_2 o středu S_2 nad úsečkou AD ; je to geometrické místo bodů, z nichž se tato úsečka jeví v úhlu γ_2 . Průsečík C kružnic k_1, k_2 je hledaným bodem.

Ke středům S_1, S_2 souměrně položené body S'_1, S'_2 podle úseček AB , resp. AD jsou středy kružnic k'_1, k'_2 , jejichž body vyhovují též dané podmínce, avšak průsečík $C' \equiv k'_1 \cap k'_2$ nevyhovuje, má-li být čtyřúhelník $ABC'D$ konvexní. V případě, že je připuštěn i čtyřúhelník konkávní $ABC'D$, je $\alpha' = 360^\circ - \alpha$. Příklad, kdy je $k_1 \equiv k_2$ nelze řešit, což tedy znamená, že body A, B, C, D nesmějí ležet na téže kružnici.

Na obr. 1 je provedeno grafické řešení pro $a = 80$ m, $d = 100$ m, $\alpha = 135^\circ$, $\gamma_1 = 30^\circ$, $\gamma_2 = 45^\circ$; měřítko 1 : 2000.

2. *Trigonometrické řešení*. Abychom mohli tuto úlohu řešit početně, musíme si odvodit některé trigonometrické vztahy.

Známe vzorce pro funkce součtu a rozdílu dvou úhlů

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y.\end{aligned}$$

Z nich sečtením získáme

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$$

a odečtením

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y.$$

(1)

Položme za $x + y = \beta$ a za $x - y = \delta$, pak sečtením dostaneme

$$x = \frac{\beta + \delta}{2}$$

a odečtením

$$y = \frac{\beta - \delta}{2}.$$

Dosazením do (1) je

$$\sin \beta + \sin \delta = 2 \sin \frac{\beta + \delta}{2} \cos \frac{\beta - \delta}{2}$$

$$\sin \beta - \sin \delta = 2 \cos \frac{\beta + \delta}{2} \sin \frac{\beta - \delta}{2}.$$

Dělením těchto rovnic vznikne

$$\frac{\sin \beta - \sin \delta}{\sin \beta + \sin \delta} = \operatorname{tg} \frac{\beta - \delta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta + \delta}{2}. \quad (2)$$

Nyní se vraťme k dané úloze. Z trojúhelníků ABC a ACD vyjádříme sinovou větou

$$u = \frac{a \sin \beta}{\sin \gamma_1} = \frac{d \sin \delta}{\sin \gamma_2}$$

Odtud získáme poměr

$$\frac{\sin \beta}{\sin \delta} = \frac{d \sin \gamma_1}{a \sin \gamma_2}, \quad (3)$$

jehož velikost známe; ten považujeme za tangentu jakéhosi úhlu ω , tedy

$$\frac{\sin \beta}{\sin \delta} = \operatorname{tg} \omega. \quad (4)$$

Současně víme, že

$$\beta + \delta = 360^\circ - (\alpha + \gamma_1 + \gamma_2). \quad (5)$$

V goniometrické rovnici (4) od obou stran jednotku odečteme

$$\frac{\sin \beta}{\sin \delta} - 1 = \operatorname{tg} \omega - 1$$

a přičteme

$$\frac{\sin \beta}{\sin \delta} + 1 = \operatorname{tg} \omega + 1,$$

a pak obě rovnice dělíme

$$\frac{\sin \beta - \sin \delta}{\sin \beta + \sin \delta} = \frac{\operatorname{tg} \omega - 1}{\operatorname{tg} \omega + 1}. \quad (6)$$

Podle vzorce (2) bude

$$\frac{\sin \beta - \sin \delta}{\sin \beta + \sin \delta} = \operatorname{tg} \frac{\beta - \delta}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta + \delta}{2}. \quad (7)$$

Dosazením (7) do rovnice (6) je

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \delta}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta + \delta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \omega - 1}{\operatorname{tg} \omega + 1}. \quad (8)$$

Podle známého vzorce

$$\operatorname{tg} (x - y) = \frac{\sin (x - y)}{\cos (x - y)} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

dostaneme pro $\operatorname{tg} y = 1$ (tj. $y = 45^\circ$) pravou stranu rovnice (8), a je tedy konečně

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \delta}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta + \delta}{2} = \operatorname{tg} (\omega - 45^\circ). \quad (9)$$

Z rovnice (3) vypočteme úhel ω a dosadíme do rovnice (9), kam též dosadíme z rovnice (5) za $\beta + \delta$. Řešením rovnice (9) zjistíme $\beta - \delta = \varepsilon$ a sečtením s rovnicí (5) vypočteme úhel β , odečtením úhel δ .

Podle sinové věty je dále

$$u = \frac{a \sin \beta}{\sin \gamma_1},$$

$$b = \frac{a \sin [180^\circ - (\beta + \gamma_1)]}{\sin \gamma_1} = \frac{a \sin (\beta + \gamma_1)}{\sin \gamma_1}, \quad (10)$$

$$c = \frac{d \sin [180^\circ - (\delta + \gamma_2)]}{\sin \gamma_2} = \frac{d \sin (\delta + \gamma_2)}{\sin \gamma_2}.$$

Provedme si číselný příklad pro $a = 80$ m, $d = 100$ m, $\alpha = 135^\circ$, $\gamma_1 = 30^\circ$, $\gamma_2 = 45^\circ$.

Podle (3) a (4) je

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{100 \sin 30^\circ}{80 \sin 45^\circ} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{8}$$

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{tg} \omega = 0,69897 \\ + 0,15052 \\ \hline 10,84949 - 10 \\ - 0,90309 \\ \hline 9,94640 - 10 \end{array}$$

$$\omega = 41^\circ 28' 24''.$$

Z (5) vypočteme

$$\beta + \delta = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$$

a dosadíme do (9)

$$\operatorname{tg} \frac{\beta - \delta}{2} \cdot \operatorname{cotg} 75^\circ = \operatorname{tg} -3^\circ 31' 36''$$

Ježto $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, můžeme rovnici přepsat ve tvaru

$$\operatorname{tg} \frac{\delta - \beta}{2} \cdot \operatorname{cotg} 75^\circ = \operatorname{tg} 3^\circ 31' 36''$$

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{tg} \frac{\delta - \beta}{2} = 8,78979 - 10 \\ + 10,57195 - 10 \\ \hline 9,36174 - 10 \end{array}$$

$$\frac{\delta - \beta}{2} = 12^\circ 57' 11''$$

Podle (5) je

$$\frac{\beta + \delta}{2} = 75^\circ$$

Sečtením vyjde $\delta = 87^\circ 57' 11''$,

odečtením $\beta = 62^\circ 2' 49''$.

Úhlopříčku a strany čtyřúhelníka vypočítáme z rovnic (10)

$$u = \frac{80 \cdot \sin 62^\circ 2' 49''}{\sin 30^\circ} = 160 \cdot \sin 62^\circ 2' 49''$$

$$\begin{array}{r} \log u = 2,20412 \\ + 9,94613 - 10 \\ \hline = 12,15025 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log u = 2,15025 \\ u = 141,34 \text{ m.} \end{array}$$

Dále je

$$\begin{aligned} b &= \frac{80 \cdot \sin (62^\circ 2' 49'' + 30^\circ)}{\sin 30^\circ} = 160 \cdot \sin 92^\circ 2' 49'' = \\ &= 160 \cdot \sin 87^\circ 57' 11'' \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \log b = 2,20412 \\ + 9,99972 - 10 \\ \hline = 12,20384 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log b = 2,20384 \\ b = 159,90 \text{ m,} \end{array}$$

a konečně

$$c = \frac{100 \cdot \sin (87^{\circ} 57' 11'' + 45^{\circ})}{\sin 45^{\circ}} = \frac{100 \cdot \sin 132^{\circ} 57' 11''}{\sin 45^{\circ}} =$$
$$= \frac{100 \cdot \sin 47^{\circ} 2' 49''}{\sin 45^{\circ}}$$

$$\begin{array}{r} \log c = 2,00000 \\ + 9,86446 - 10 \\ \hline 11,86446 - 10 \\ - 9,84949 + 10 \\ \hline \end{array}$$

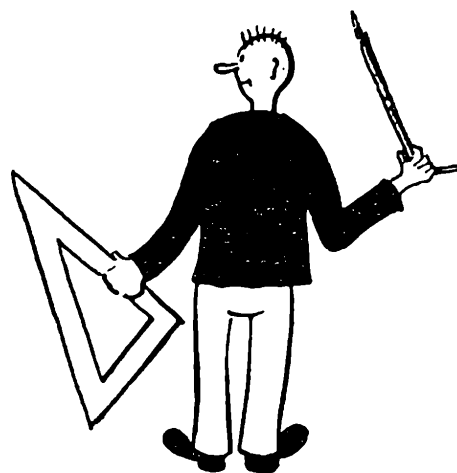
$$\begin{array}{r} \log c = 2,01497 \\ c = 103,51 \text{ m.} \end{array}$$

Pokuste se také provést výpočet na logaritmickém pravítku. Porovnejte pak dosaženou přesnost a pracovní časy.

Deskriptivní geometrie

František Kuřina, PI, Hradec Králové:

Z geometrie trojúhelníka



Tento článek je v první části pokračováním článku stejného názvu od Viléma Lampartera z 8. čísla 40. ročníku Rozhledů. Cílem článku je ukázat na jisté geometrické problematice, jak zcela odlišnými způsoby lze studovat tytéž geometrické vlastnosti rovinných útvarů.

V trojúhelníku ABC (obr. 1) označme středy stran AB , BC , AC po řadě N , L , M a paty výšek S , P , R . Průsečík výšek označme V_1 a středy úseček V_1A , V_1B , V_1C označme po řadě X_1 , Y_1 , Z_1 . Body L , Y_1 , N , X_1 , M , Z_1 v tomto pořadí jsou vrcholy šestiúhelníka.

V citovaném článku je dokázána věta:

Protější strany šestiúhelníka $LY_1NX_1MZ_1$ jsou shodné a navzájem rovnoběžné.

Platí však silnější tvrzení.

Protější strany tohoto šestiúhelníka jsou protějšími stranami obdélníka.

Podle citované věty totiž platí

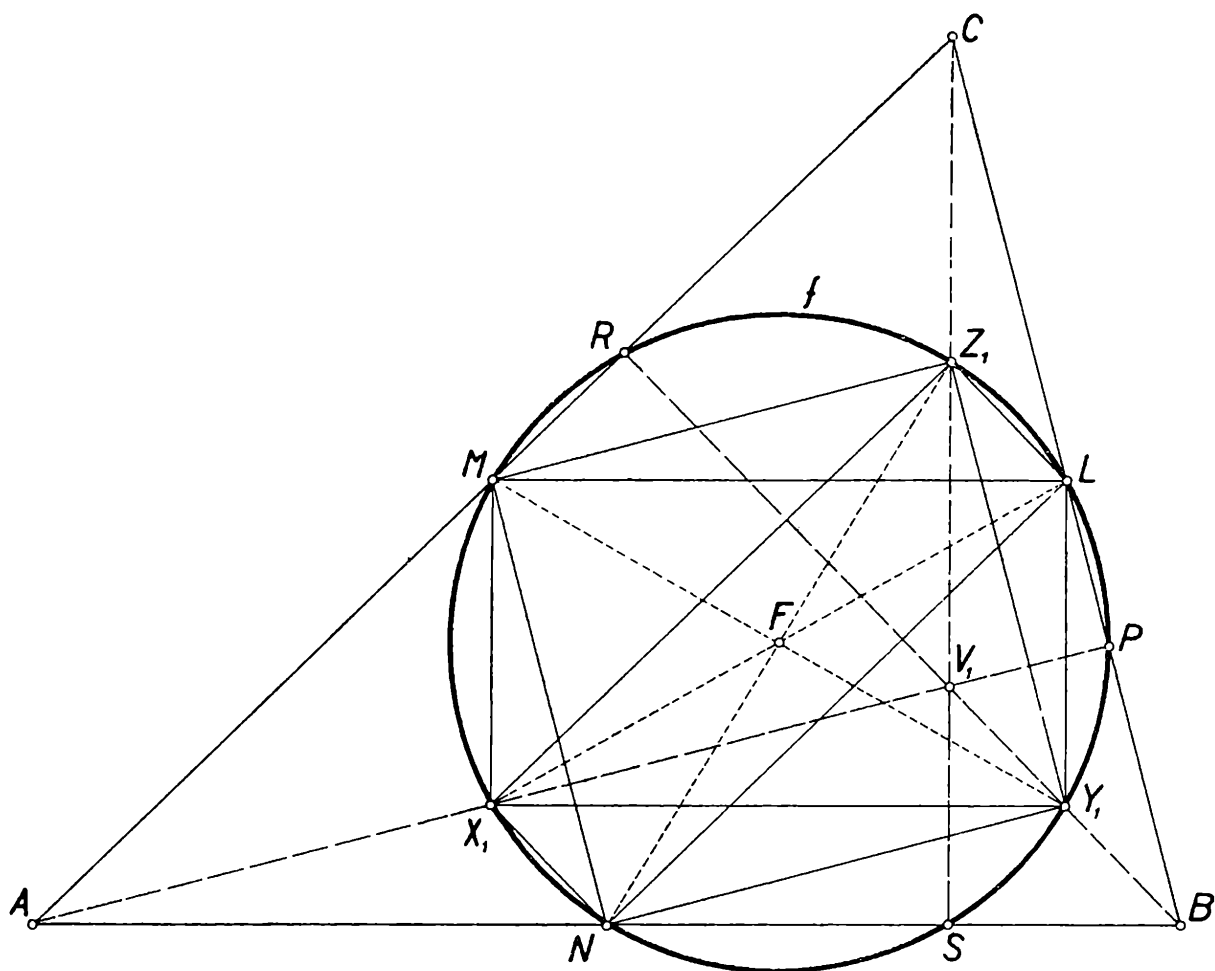
$$MX_1 \parallel CV_1 \parallel LY_1, MX_1 = LY_1.$$

Protože ML je střední příčka trojúhelníka ABC , CV_1 jeho výška ke straně AB je

$$ML \parallel AB, V_1C \perp AB.$$

Proto je $MX_1 \perp ML$ a čtyřúhelník MX_1Y_1L je obdélníkem.

Důkaz pro druhé dvojice stran šestiúhelníka je stejný.



Obr. 1

Uvažujme kružnici $f \equiv (F, \rho)$, která je opsána obdélníku MX_1Y_1L . Tato kružnice je opsána jak obdélníku NX_1Z_1L (jeho úhlopříčka LX_1 je jejím průměrem), tak obdélníku NY_1Z_1M (jeho úhlopříčka NZ_1 je jejím průměrem). Kružnice f je tedy opsána šestiúhelníku $LY_1NX_1MZ_1$. Nejen to. Paty výšek trojúhelníka ABC jsou vrcholy pravých úhlů $\sphericalangle X_1PL$, $\sphericalangle Y_1RM$, $\sphericalangle Z_1SN$, jejichž ramena procházejí koncovými body průměrů X_1L , Y_1M , Z_1N kružnice f . Body P , R , S jsou tedy rovněž body kružnice f .

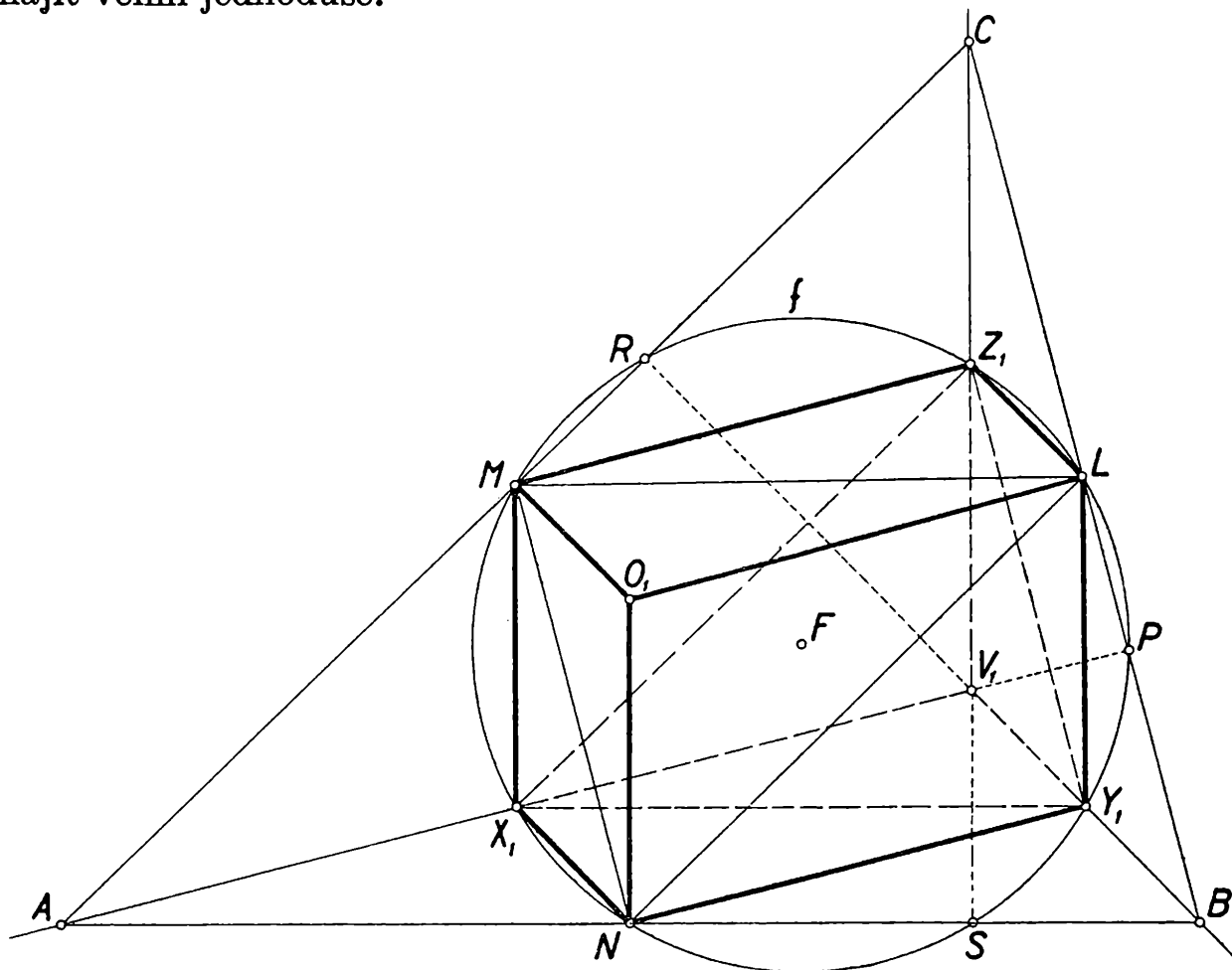
Tím jsme podali méně známý důkaz známé věty o tzv. kružnici devíti bodů trojúhelníka:

Kružnice $f \equiv (F, \rho)$, která prochází středy N , L , M stran trojúhelníka,

prochází i patami S, P, R jeho výšek a středy X_1, Y_1, Z_1 úseček V_1A, V_1B, V_1C .

Uvedený důkaz nevyžaduje žádné znalosti přesahující učivo ZDŠ. Připomeňme, že jsme potřebovali znát jen vlastnosti střední příčky trojúhelníka a základní vlastnosti obdélníka.

Narýsujeme-li do obrázku trojúhelníka ABC (obr. 2) osy jeho stran a střed O_1 kružnice jemu opsané, připomene nám šestiúhelník $LY_1NX_1MZ_1$ obrys obrazu kváдру. Je přirozená otázka, zda studovaná věta o kružnici devíti bodů není důsledkem nějakých stereometrických vztahů. Ukažme, že pro ostroúhlý trojúhelník ABC lze tyto vztahy najít velmi jednoduše.



Obr. 2

Předpokládám, že čtenář zná základní polohové a metrické vlastnosti geometrie v prostoru a základy pravoúhlé axonometrie¹⁾, zvláště pak větu:

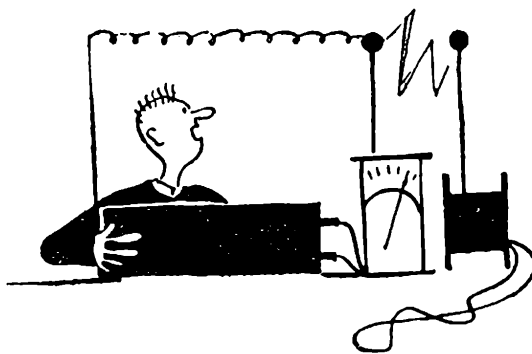
Libovolný ostroúhlý trojúhelník ABC lze pokládat za axonometrický trojúhelník pravoúhlé axonometrie. Výšky tohoto trojúhelníka jsou axonometrickými obrazy souřadných os, průsečík výšek je axonometrickým obrazem počátku.

(Pokračování)

¹⁾ František Kuřina, *P r a v o ú h l á a x o n o m e t r i e*, Rozhledy matematicko-fyzikální, letošní roč. 42, č. 3.

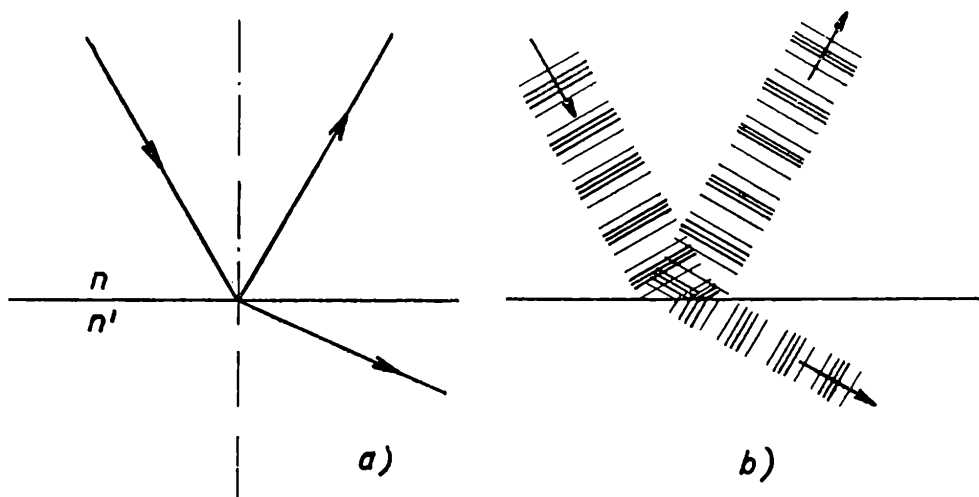
Fyzika

Oldřich Lepil, Gottwaldov:



Vláknové světlovody

Základními zákony geometrické (paprskové) optiky jsou zákon odrazu a zákon lomu (Snelliův). Oba tyto zákony se uplatňují v nejjednodušším případě tehdy, dopadá-li světelný paprsek na rozhraní dvou prostředí různé optické hustoty.¹⁾



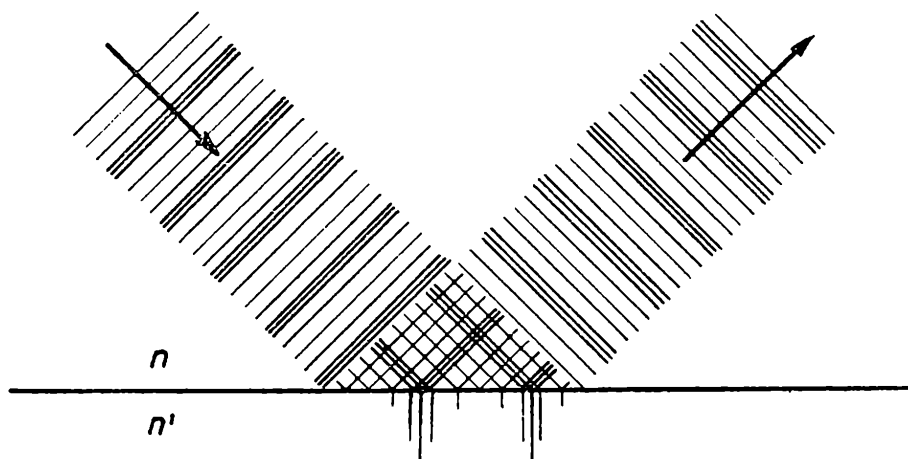
Obr. 1. Chod světla rozhraním dvou prostředí.

Uvažujme, že se paprsek šíří prostředím opticky hustším (index lomu n) a dopadá na rozhraní s prostředím řidším (index lomu n'). Světlo se od rozhraní částečně odráží a částečně láme (obr. 1a). Poněvadž se paprsek láme od kolmice, je zřejmé, že při určitém úhlu dopadu ε (mezný úhel) dosáhne úhel lomu největší hodnoty 90° a nastane jev *úplného odrazu*. Úplný odraz pak nastává pro všechny úhly dopadu α , pro které platí $\alpha \geq \varepsilon$. Ze zákona lomu pro mezný úhel plyne

$$\sin \varepsilon = \frac{n'}{n}.$$

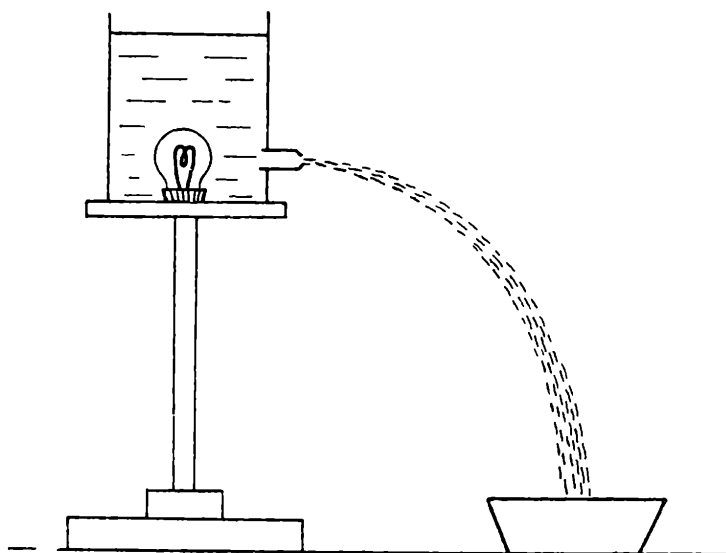
¹⁾ Pojem optické hustoty nesmíme ztotožňovat s pojmem hustoty látkové. Opticky hustší rozumíme látku s větším indexem lomu. Např. benzen má větší index lomu než voda, je opticky hustší, avšak smícháme-li jej s vodou, vyplave na povrch, neboť má menší hustotu než voda.

Prakticky veškerá světelná energie se při úplném odrazu šíří od rozhraní původním prostředím ve směru paprsku odraženého podle zákona odrazu.



Obr. 2. Vlnový výklad úplného odrazu.

Takto popisuje úplný odraz paprsková optika. Podívejme se však na tento zajímavý jev z hlediska optiky vlnové, vycházející z poznatku, že světlo je příčné elektromagnetické vlnění. Na rozhraní, uvažovaném v předcházejícím výkladu, se dopadající vlnění rozpadá ve vlnění odražené a vlnění, které se láme do řidšího prostředí (obr. 1b). Čím větší bude úhel dopadu, tím více se bude zmenšovat úhel



Obr. 3. Pokus na úplný odraz.

mezi rovinnými vlnoplochami lomeného vlnění a kolmicí k rozhraní, až při mezním úhlu kolmice s vlnoplochou splyne. Při dalším zvětšení úhlu dopadu lomená vlna nezaniká, ale podstatně se mění. Z obvyklé rovinné vlny se stává vlna nestejnorodá (obr. 2).

Základní vlastností této nestejnorodé vlny je, že její amplitudy s rostoucí vzdáleností od rozhraní velmi rychle ubývá a ve vzdálenosti délky vlny je již amplituda prakticky rovna nule. Poněvadž velikost amplitudy vlnění určuje intenzitu vlnění, v našem případě světelného, znamená to jakoby světlo „prosakovalo“ do nepatrné vrstvičky opticky řidšího prostředí. Současně to znamená, že se část energie vlnění šíří podél rozhraní obou prostředí.

Tento poznatek vlnové optiky o pronikání světla do určité hloubky opticky řidšího prostředí při úplném odrazu byl dokázán experimentálně. Má-li řidší prostředí např. schopnost fluorescence, lze pozorovat, že tenká vrstva v blízkosti rozhraní fluoreskuje, avšak intenzity fluorescenčního záření se vzdáleností od rozhraní rychle ubývá.

Jev úplného odrazu můžeme demonstrovat celou řadou zajímavých a efektních pokusů. Jeden z nich je naznačen na obr. 3. Vytéká-li voda otvorem z neprůsvitné nádoby, v níž svítí pod hladinou vody žárovka, pozorujeme v temné místnosti, jakoby vodní paprsek zářil. Světlo mění směr podle směru toku vodního paprsku. Tento poutavý efekt nenalezl dlouho žádného vážnějšího užití; uplatnil se jen v různých reklamních prostředcích a svítidlech. Teprve v poslední době se objevily v odborném tisku zprávy o konstrukci přístrojů, v nichž je využito šíření světla v tenkém vlákne.

Je zřejmé, že ve vodním paprsku se vlastně světlo šíří mnoha úplnými odrazy na rozhraní mezi vodním paprskem a okolním vzduchem, takže výsledný efekt je takový, jakoby se světlo nešířilo přímočaře, ale sledovalo zakřivenou dráhu vodního paprsku.

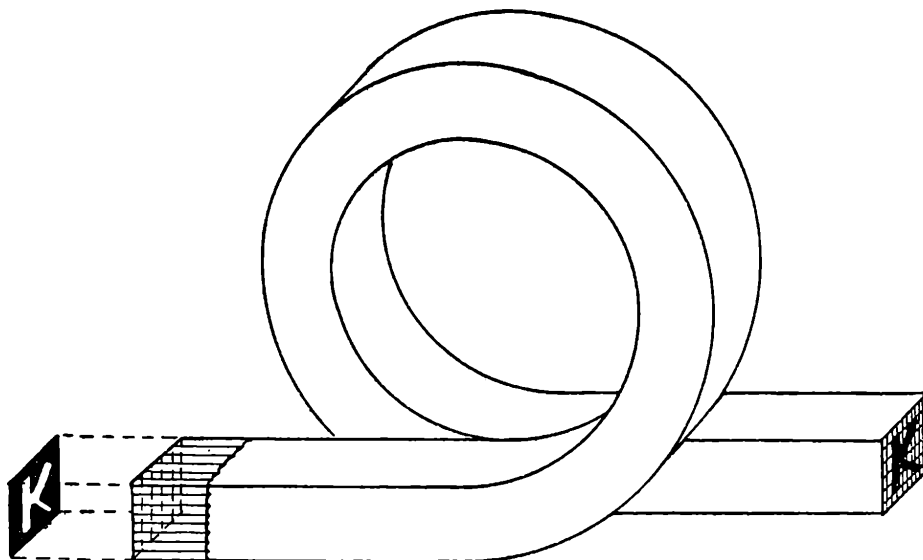
Na základě tohoto jevu sestrojil před několika lety profesor Fyzikálního ústavu ná technice v Göteborgu H. W a l l m a n ohebnou trubici, pomocí které lze přenášet obraz po libovolně zakřivené dráze. Princip tohoto, mohli bychom říci „*vláknového světlovodu*“,²⁾ je zřejmý z obr. 4. Trubice pro přenos světla je tvořena velkým počtem tenkých skleněných vláken, jimiž se může světlo šířit úplnými odrazy podobně jako vodním paprskem.

Dopadá-li na vstup svazku vláken světlo z nějakého předmětu, prochází každým vláknem světelný tok takové intenzity, jaká odpovídá intenzitě osvětlení počátku vlákna, a takto bude opět zářit i konec vlákna. Zářící konce vláken tak vlastně vytvoří obraz předmětu, složený z jednotlivých zářících bodů. Je ovšem nutné, aby rozložení vláken na začátku odpovídalo rozložení na konci trubice. Není-li tomu tak, je obraz zašifrován v chaoticky rozložené body, čehož lze ovšem v praxi rovněž využít.

²⁾ Podobně jako vlnovody pro přenos energie elektromagnetickými vlnami delších vlnových délek než světlo.

Výroba vláken světlovodu není nijak jednoduchá. Aby bylo zobrazení předmětu provedeno s dostatečnou rozlišovací schopností, je především nutné, aby byl počet vláken co největší a jejich průřez naopak co nejmenší. Např. v původní trubici prof. Wallmana bylo 31 245 vláken na 1 cm^2 průřezu trubice a tloušťka jednoho vlákna byla $50 \mu\text{m}$ ($1 \mu\text{m} = 10^{-3} \text{ mm}$). To znamená, že průměr vláken je jen několikrát větší než délka světelné vlny. Avšak ani tyto předpoklady počtu a průměru vláken nepostačují k tomu, aby nastal přenos obrazu.

Jak jsme si již řekli v úvodu, proniká při úplném odrazu světlo do vrstvy opticky řidšího prostředí tloušťky, odpovídající vlnové délce světla. Při velikém počtu vláken světlovodu by vzdálenosti mezi povrchy vláken byly menší než tato kritická tloušťka, světlo by přecházelo z jednoho vlákna do druhého a přístroj by nepracoval. Proto jsou vlákna navzájem opticky izolována.



Obr. 4. Princip vláknového světlovodu.

Každé vlákno má jádro ze skla o vyšším indexu lomu, které je pokryto povlakem ze skla o nižším indexu lomu. Úplný odraz pak nastává na rozhraní obou druhů skel, světelné vlnění proniká jen do malé hloubky povlaku a dotyk vláken nemá vliv na chod světelných paprsků.

Vlákna se vyrábějí tak, že se skleněná tyč ze skla o vyšším indexu lomu vsune do skleněné trubice s nižším indexem lomu a v tavicí peci se z tyče vytahují tenká vlákna. Rychle chladnoucí vlákno může být navíjeno na otáčivý buben. Byla vyřešena i technologie tažení mnohonásobných vláken, vyráběných tažením ze svazku tyčí s obalovými trubicemi. Takové vlákno obsahuje až 300 jednotlivých vláken, uspořádaných velmi pravidelně.

Praktické použití popsaných světlovodů je velmi široké, takže vzniká samostatný obor pro jejich aplikace - *vláknová optika*.

Významné užití našly vláknové světlovody v lékařství při konstrukci tzv. *endoskopu*, přístroje k prohlížení různých dutin v těle (žaludku, plic, střev apod.). Zvláště výhodné je, že lze použít části vláken k přenosu světla do dutiny a části opět k přenosu obrazu z dutiny.

Je-li svazek vláken tažen při výrobě nesouměrně, mají vlákna kuželovitý tvar a při přenosu lze získat zvětšený nebo zmenšený obraz. Prochází-li světlo od širšího k užšímu konci svazku, soustředí se světlo do užšího průřezu a na konci dojde ke koncentraci světelné energie.

Jiným příkladem je již zmíněné šifrování obrazu. K zakódování a opětnému dekodování je třeba vytvořit svazek vláken, která neprobíhají rovnoběžně, ale jsou v určitých místech navzájem propletena. Zpravidla se vytvoří svazek jediný, na jehož začátku a konci jsou vlákna uspořádána souhlasně, avšak ve střední části jsou vlákna chaoticky překřížena. Po rozříznutí svazku v této střední části vzniknou svazky dva, z nichž prvního lze užít k zakódování obrazu, kdežto druhý může sloužit k dekodování obrazu získaného např. fotografováním výstupu prvního svazku.

Nebudeme se podrobně zabývat všemi aplikacemi vláknových světlovodů. Připomeneme si ještě, že čím menší je průměr vláken, tím zřetelněji vystupuje vlnová povaha světla, takže rozložení intenzity světla ve vlákně není určováno pouze zákony paprskové optiky, ale vznikají interferenční jevy obdobné šíření elektromagnetických mikrovln (vlnových délek 3 až 10 cm) ve vlnovodech. Na výstupní straně i uvnitř vláken vznikají kmitny a uzly světelného vlnění a vyzařovací diagram je obdobný jako u mikrovlnných antén.

Je zajímavé, že obdobné interferenční úkazy byly nalezeny i na sítnici lidského oka. Můžeme se tedy domnívat, že rovněž sítnice je podobným vláknovým světlovodem, využívajícím dokonale světelné energie k zobrazování s vysokou rozlišovací schopností.

Prof. dr. Vilém Santholzer, KU, Hradec Králové:

Neobvyklé fyzikální jevy po nukleárních výškových pokusech

Výškové pokusy jsou nukleární pokusné výbuchy ve výšce alespoň několika desítek km. V r. 1958 provedli Američané pět výškových pokusů. Dva nad Johnstonovým ostrovem v Tichém oceáně, v poměrně nevelkých výškách 30 až 50 km, avšak ráže po jedné megatuně, tj. energie každého výbuchu odpovídala energii uvolněné výbuchem 10^6 tun

tritolu. Další tři výškové pokusy ráže 1 až 2 kilotuny, tzv. operace *Argus*, byla provedena v jižní oblasti Atlantického oceánu ve výši asi 500 km. Nukleární hlavice byly do těchto výšek dopraveny raketami.

V r. 1962 odpálily Američané nad Johnstonovým ostrovem nálož 20 megatun ve výši 800 km. Světelná záře byla vidět nejen na Havajských ostrovech (1300 km na SV.), ale také v mnohem vzdálenější Austrálii. Po výbuchu se projevíly dočasné poruchy rádiového spojení v celém Tichomoří. Ve výši asi 600 km se vytvořil umělý *radiační pás*, jehož záření by bylo nebezpečné pro nechráněné kosmonauty po dobu asi jednoho roku. Záření zničilo sluneční baterie dvou amerických a jedné britsko-americké družice, takže spojení s nimi bylo navždy přerušeno.

Před výbuchem nad Johnstonovým ostrovem protestovali v USA i v Anglii někteří odborníci proti výškovým pokusům, jejichž následky mohly by podstatně změnit přirozený stav vysokých vrstev atmosféry, narušit chod mnohaletých vědeckých pozorování a brzdit i výzkum kosmu. Krátce po tom vydal Sovětský svaz prohlášení, v němž se uvádí, že nukleární výbuchy tohoto typu rozšiřují nenáviděné zbrojení i do kosmického prostoru.

Po výškových pokusech se vyskytly některé zcela neobvyklé fyzikální jevy. Nukleární výbuch především je zdrojem obrovského množství nabitých částic, elektronů a iontů. Ve velkých výškách nad Zemí se tyto částice pohybují stejně jako ve vakuu. Vstupuje-li elektron do magnetického pole Země (do pole geomagnetického) ve směru kolmém na směr pole, pohybuje se v dráze kruhové. Vstupuje-li elektron do magnetického pole s rychlostí šikmou ke směru pole, pohybuje se ve šroubovici. To je příčinou vzniku *radiačního pásu*, zvaného také *magnetická past*. Již při výbuchu ráže jedné kilotuny vzniká 10^{23} částic beta rychlosti 0,98 c (rychlosti světla). Tyto rychlé elektrony se pohybují spirálovitými drahami podél siločar geomagnetického pole a dostávají se i do dalekých oblastí nad druhou zemskou polokoulí.

Intenzita geomagnetického pole vzrůstá s přibližováním k zemskému povrchu. Na základě věty o zachování magnetického momentu dá se odvodit, že úhel, jímž je určen sklon šroubovice k magnetickému poli, vzrůstá s přibližováním elektronu k Zemi a může dosáhnout i 90° . V těchto oblastech mohou se elektrony dostat i do protisměru a pohybovat se nazpět nad stejnou polokoulí, odkud původně přicházely. Částice, které se nedostávají do protisměru, nemohou zůstat v magnetické pasti a pohlcují se v nižších vrstvách ovzduší.

Výška radiačního pásu nad Zemí závisí od magnetické šířky nukleárního výbuchu. Nad Johnstonovým ostrovem byla střední výška pásu 600 km, v našich šířkách by byla asi 12 km. S přibližováním k magnetickému pólu blížila by se k nekonečné hodnotě, tj. částice by se již nevracely na zemský povrch.

Následkem závislosti geomagnetického pole na výšce uplatňuje se také posouvání drah nabitých částic; dráhy elektronů se posouvají na východ, kladných částic na západ. Radiační pás se tak postupně rozšiřuje vějířovitě nad celou zeměkoulí. Čím je výška pásu větší, tím déle trvá oběh částic kolem Země.

Hustota energie v radiačním pásu po výbuchu megatonové pumy je asi 10^4 krát větší než přirozená hustota energie ve vysokých vrstvách ovzduší.

Pohyb částic beta (rychlých elektronů) po výbuchu nad Johnstonovým ostrovem podél siločar geomagnetického pole směrem k jihu byl prokázán také světélkováním nad ostrovy Samoa a Fidži, ve vzdálenosti více než 4000 km. Světélkování bylo typu polárních září, které jsou v těchto oblastech neobvyklé. Purpurová, počáteční barva byla také neobvyklá, neboť polární záře mají charakteristickou barvu žlutozelenou.

Výškové výbuchy měly za následek *změnu struktury ionosféry*. Různorodým způsobem ionizované oblasti značně rozptylovaly rádiové vlny až do pásma krátkovlnného. Po výbuchu bylo dočasně přerušeno spojení s loděmi a letadly a vyskytly se i jiné nesnáze. Např. severní skupina Cookových ostrovů, kde lékařská pomoc je často naléhavá a odvislá na rádiovém spojení, byla na čas úplně odříznuta. Pro meteorologické předpovědi v těchto oblastech chyběly potřebné údaje, nebylo možno poslouchat rozhlasové pořady, na to si stěžovali i četní radioamatéři, a tím se vlastně připojili k boji za zákaz nukleárních zkoušek.

Poruchy v radionavigačním systému objevily se až v USA, např. na leteckých linkách do San Franciska. Pozorovatelé zjistili silně zvětšené *pohlcování rádiových vln* v ionosféře. Vyskytly se též *fázové rozdíly*, které by mohly způsobit značné chyby při radiolokaci.

Neobvyklým jevem jsou také *umělé poruchy geomagnetického pole*, které se projevíly zanedlouho po výbuchu a trvaly až 20 min. Poruchy byly asi stejného řádu jako poruchy přírodní, takže po opakovaných výškových pokusech by narušily vědecká pozorování. Vysvětlení umělých poruch je dáno *diamagnetismem plazmy* (silně ionizované oblasti) v blízkosti výbuchu. Stejný účinek jako diamagnetické plazma měl by *magnetický dipól*, který by narušil geomagnetické pole (v blízkosti středu výbuchu je pole úplně zrušeno).

Následkem zabrzdění plazmy na okraji oblasti výbuchu, kde hustota energie elektricky nabitých částic je rovna hustotě energie geomagnetického pole, vzniká ještě další velmi zajímavý jev: nízkofrekvenční elektromagnetická vlna, tzv. *magnetohydrodynamická vlna* frekvence řádově 1 Hz (při operaci Argus byla 0,5 až 3 Hz). Registrace *nízkofrekvenčního signálu* (např. na Azorských ostrovech) umožnila stanovit rychlost jeho šíření 700 až 2000 km s⁻¹.

Přesto, že uvedené výbuchy byly prováděny ve velkých výškách

nad Zemí, vyskytovaly se při nich i *vlny seismické*, vzniklé na povrchu Země nárazem *vlny akustické*. Po výbuchu nad Johnstonovým ostrovem byly registrovány ve vzdálenosti 1300 km na Havajských ostrovech, ale také v New Yorku (9300 km).

Megatunový výškový výbuch je také zdrojem obrovského množství *paprsků rentgenových*. Čím větší je teplota hmoty, tím se maximum záření posunuje na stranu kratších vlnových délek. Zahřáté těleso vydává nejprve červené světlo (asi při 525 °C), s rostoucí teplotou postupně se vysílají paprsky kratších vlnových délek. Pro teploty milióny stupňů při nukleárním výbuchu jsou to již i paprsky rtg. vlnových délek řádově angströmů. Ve směru do kosmického prostoru paprsky rtg. se šíří do vzdálenosti větší než je vzdálenost Země—Slunce, směrem k zemskému povrchu však jen asi na 50 až 60 km od Země. Paprsky gama z výškového výbuchu pronikají do 20 km nad Zemí; daly by se však snadno registrovat i na Měsíci. Paprsky rtg. vznikají vyzařováním z prvopočátečního žhavého oblaku, kdežto paprsky gama vznikají při štěpení nukleární nálože.

Doc. inž. dr. Radim Servít, ČVUT, Praha:

Stabilita ve stavební praxi

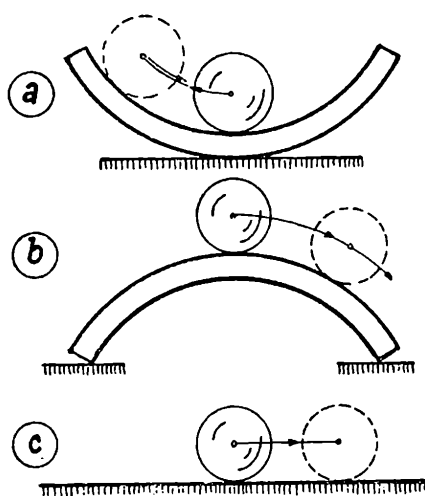
Co je vlastně stabilita? Než se pokusíme tento pojem definovat, řekněme si něco o něm.

Slovo je odvozeno od latinského slovesa *stare*, které znamená státi. Stabilní je tedy něco, co - pokud možno pevně - stojí. Mechanika rozeznává totiž tři druhy rovnováhy: *stabilní*, *labilní* (vratkou) a *indiferentní*.

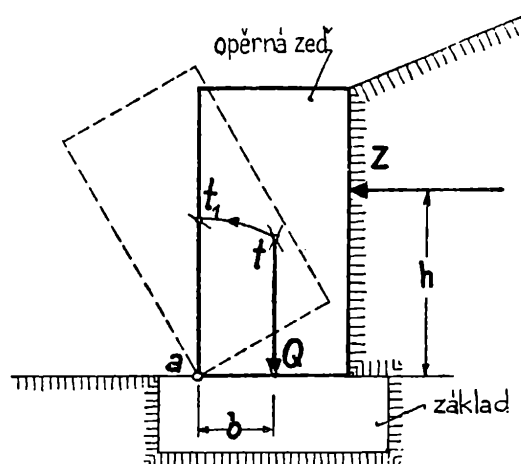
Když se nad tím zamyslíme, je to vlastně dosti podivuhodné. Řekneme-li totiž o nějakém předmětu, že je v rovnováze, máme současně představu klidu, v němž se ten předmět nachází vzhledem ke svému okolí. Zdálo by se tedy, že je jedno, jaká tato rovnováha je, jen když je vůbec.

Takové nazírání by ovšem bylo velmi povrchní. Nám totiž záleží také na tom, zdali rovnováha bude zachována nejen v daném okamžiku, nýbrž i v budoucnosti, kdy těleso může být vystaveno náhodným účinkům vychylujícím jej z původního rovnovážného stavu. Zajímá nás, jak na takové náhodné účinky bude těleso reagovat. Chceme-li si tyto otázky přiblížit příkladem, tedy: Co se stane s továrním kominem, když se do něho opře vítr? Zůstane i nadále v rovnováze?

V mechanice tzv. p e v n ý c h t ě l e s (tj. těles jiného než kapalného či plynného skupenství) je znám dobrý příklad rozlišující stabilní, labilní a indiferentní rovnováhu. Je znázorněn na obr. 1. Koule v případě a) je v rovnováze stabilní, neboť po vychýlení z rovnovážné polohy na dně misky se znovu do této polohy vrací. V případě b) naopak ovšem koule vychýlená z labilní rovnovážné polohy na vnější straně misky, obrácené dnem vzhůru se do původní polohy nevrací a padá. Konečně v případě c) koule ležící na vodorovné desce po vychýlení z původní polohy zaujme polohu jinou, opět rovnovážnou je tedy v rovnováze indiferentní.



Obr. 1. Stabilní, labilní a indiferentní rovnováha tuhého tělesa.



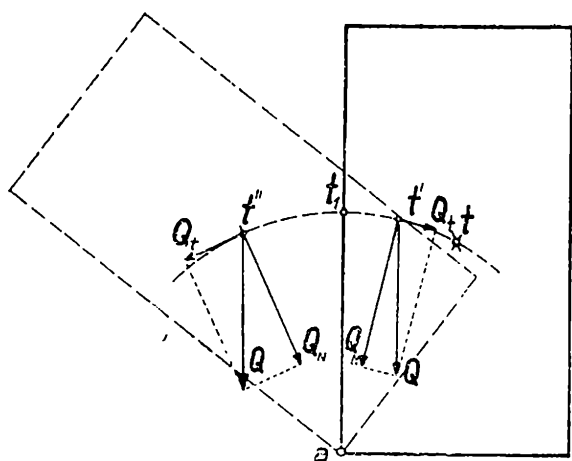
Obr. 2. Zjednodušené schéma stability opěrné zdi.

Popsaný příklad koule je sice dobrý pro získání správného názoru o rozlišení pojmu různých druhů rovnováhy, sotva však najde praktické uplatnění ve stavební praxi. Otázka stability pevných těles je ovšem ve stavebnictví velmi závažná. Máme přirozeně zájem na tom, aby naše konstrukce byly stabilní. Jdeme ve svých požadavcích dokonce ještě o krok dále a nepřipouštíme ani, aby nastala jakákoliv výchylka z rovnovážné, byť stabilní polohy.

Tak např. opěrná zeď, zjednodušeně znázorněná v řezu na obr. 2, zachycuje tlaky zeminy, která se opírá o její rub. Výsledná tlaková síla je na obrázku znázorněna šipkou Z . Předpokládejme, že tření působící ve spáře mezi samotnou zdí a jejím základem je dostatečně veliké, aby zabránilo posunutí ve směru působení síly Z . V tom případě stačí brát v úvahu pouze otáčivý účinek této síly, který se snaží zeď překloupat pootočením kolem hrany, která je v řezu patrna jako bod a . Tomuto překloupení brání otáčivý účinek vlastní váhy samotné zdi, která působí v jejím těžišti t jako svislá síla Q .

Otáčivý účinek síly měříme ve *statice* (tj. v nauce o rovnováze sil) tzv. *statickým momentem*, který je definován součinem působící síly a její kolmé vzdálenosti od bodu otáčení (tu jmenujeme *ramenem síly*). Je tedy statický moment zemního tlaku Z vzhledem k bodu a dán součinem $Z \cdot h$ a statický moment váhy zdi Q k témuž bodu součinem $Q \cdot b$. Všimněme si však, že oba otáčivé účinky jsou navzájem opačného smyslu. Kdyby absolutní hodnota obou statických momentů byla stejně velká, tj. kdyby platila rovnice

$$Z \cdot h = Q \cdot b,$$



Obr. 3. Pohyb těžiště a působení složek vlastní váhy při překocení opěrné zdi.

byla by ještě rovnováha. Všimněme si, co se stane, změní-li se velikost síly Z na hodnotu $Z_1 > Z$ za předpokladu, že váha Q i ramena h a b zůstávají stejné. Zemní tlak Z je totiž jediná z uvedených čtyř veličin, o níž lze předpokládat, že se může náhodně měnit. V takovém případě tedy přestává výše uvedená rovnice platit, rovnováha je porušena a zeď se začne překlápět kolem hrany a . Přitom se těžiště t posouvá po kružnici se středem v a . Na obr. 3 je podrobněji znázorněno, že přitom můžeme váhu Q v těžišti rozložit na dvě složky, z nichž jedna Q_N smě-

řuje do středu otáčení a a druhá Q_T má směr tečny ke kružnici. Složka Q_N nevyvozuje otáčivý účinek; její statický moment k bodu a je totiž nulový, poněvadž do tohoto bodu směřuje. Otáčivý účinek je tedy vyvozen pouze složkou Q_T . Pokud těžiště stoupá, působí složka Q_T otáčivý účinek takového smyslu, že se snaží otočit zdi do původní polohy. To znamená, že po eventuálním zmenšení síly Z_1 na původní hodnotu Z nebo na hodnotu ještě menší, skutečně zeď zpátky dosedne na základ. To právě charakterizuje stabilní rovnováhu. Jakmile těžiště t při otáčení kolem hrany a přestoupí nejvyšší bod kružnice, byť i jen zcela nepatrně, změní se smysl otáčivého účinku složky Q_T (obr. 3) a zeď se už nevrátí do původní polohy, ani když se tlak Z zmenší nebo i vůbec odstraní; nastane překocení celé konstrukce. Při přechodu nejvyššího bodu dráhy těžiště se tedy změnila rovnováha na labilní.

My ovšem, jak už naznačeno, nemůžeme připustit, aby vůbec i při náhodném zvýšení síly Z — nastal jakýkoliv pohyb. Žádáme tedy, aby původní poloha zdi byla, lze-li se tak vyjádřit, víc než stabilní, čili, jak říkáme, aby měla určitou *bezpečnost proti překocení*. Toho docílíme tím, že váhu zdi Q a rameno b uděláme tak

velké, aby otáčivý účinek síly Q vzhledem ke hraně a byl větší (a to třeba trojnásobně i čtyřnásobně) než otáčivý účinek předpokládané velikosti zemního tlaku Z k téže hraně.

Z uvedeného příkladu je vidět, že otázka stability je ve stavebních konstrukcích velmi důležitá a dále, že její vyšetřování může i v jednoduchých případech konstrukcí být dosti složité. Je totiž třeba vzpomenout, že jsme případ stability opěrné zdi zjednodušili co nejvíce. Kromě toho ovšem v jiných případech je nutno provádět vyšetřování stability tuhých těles z jiných hledisek, často podstatně různých od popsaného případu.

(Pokračování)

J a n H o r s k ý, PFPU, Brno:

Základy teorie relativity

(Pokračování)

Mějme proto inerciální soustavy K a K' a napišme rovnice pro šíření světla v soustavě K i K' . Světelný zdroj nechť je umístěn v průsečíku O souřadných os x, y, z a světelný signál nechť je z něho vyslán v čase $t = 0$, takže světlo za čas t urazí dráhu $c \cdot t$. Tato vzdálenost je spojena se souřadnicemi bodu, kam dospělo světlo za čas t vztahem

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

neboli

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0, \quad (1)$$

což je v pravouhlých souřadnicích rovnice plochy kulové o středu O a poloměru $c \cdot t$ (jak plyne z Pythagorovy věty). V soustavě K' se světlo šíří stejnou rychlostí c , takže platí

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \quad (2)$$

Z předchozích rovnic plyne, že čas t' v soustavě K' se liší od času t v soustavě K , neboť položíme-li $t' = t$, obdržíme

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

tj. jedna a tatáž koule (čelo světelné vlny v okamžiku $t' = t$) by musela mít dva různé středy (počátky souřadné soustavy K a K'), což je absurdní²⁾. V klasické fyzice tato absurdnost neexistuje, neboť rychlost světla v soustavě K' není rovna c . Ze vztahů (1) a (2) dále vyplývá, že jejich levé strany mají stejnou hodnotu, tj. výraz

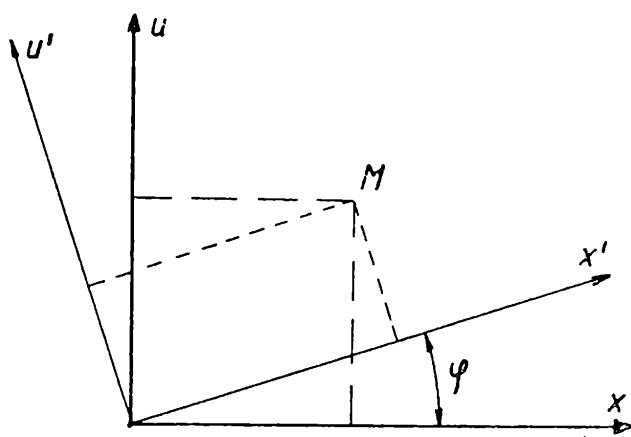
$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

²⁾ Absurdní (latinsky) = nemyslitelné.

musí být invariantem³⁾. Předpokládáme-li opět, že platí $y \equiv y'$ a $z \equiv z'$, vede naše původní úloha k tomu, abychom našli všechny transformace souřadnic, které nechávají invariantním rozdíl dvou čtverců $x^2 - c^2t^2$. Zavedeme-li substituci $u = ict$ (kde $i = \sqrt{-1}$), pak

$$x^2 - c^2t^2 = x^2 + u^2,$$

takže hledaná transformace musí nyní ponechávat invariantním součet dvou čtverců. Uvažujme proto dvě pravoúhlé soustavy souřadnic S a S' s totožnými počátky a osami otočenými o úhel φ (obr. 6). Odtud také vyplývají vztahy pro přechod od souřadnic x, u , k souřadnicím x', u'



$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + u \sin \varphi, \\ u' &= u \cos \varphi - x \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Protože zřejmě platí

$$x'^2 + u'^2 = x^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + u^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = x^2 + u^2,$$

je součet dvou kvadrátů vzhledem k této transformaci invariantní. Abychom našli ještě význam parametru φ , poznamenejme, že pro $x' = 0$ máme

$$x = vt = \frac{v}{ic} u.$$

Obr. 6.

Rotace pravoúhlých souřadnic.

Dosazením právě obdrženého výrazu do prvního z transformačních vztahů obdržíme

$$\operatorname{tg} \varphi = i \frac{v}{c},$$

odkud podle známých vzorců z trigonometrie

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

máme

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \sin \varphi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

³⁾ Invariantní (latinsky) = neproměnný.

Transformační vztahy (3) lze tedy po dosazení psát ve tvaru

$$x' = \frac{x + i \frac{v}{c} u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad u' = \frac{u - i \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Vrátíme-li se ještě od pomocné proměnné u k proměnné t , máme konečně

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} (3')$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} (3'')$$

To je hledaná *Lorentzova transformace*, která zřejmě pro rychlosti $v \ll c$ přechází v Galileovu. Je zajímavé na závěr kapitoly si všimnout, proč Lorentz své transformaci neporozuměl, i když ji objevil. Veličinu t' nepovažoval totiž za čas plynoucí v soustavě K' , nýbrž jen za pomocnou veličinu, mající čistě formální smysl, nazýval ji *místním časem*.

(Pokračování)

Řešení úloh

Řešení úloh loňské soutěže Rozhledů



Fyzika:

3. Železný kotouč (hustoty $s = 7850$ [kg · m⁻³] o průřezu $S = 80$ [cm²] a výšce $h = 7,53$ [cm] plove na rtuti (hustoty $s_1 = 13\,550$ [kg · m⁻³]) v nádobě průřezu $S_0 = 230$ [cm²]. Určete a) Jak hluboko h_1 je kotouč ponořen do rtuti? b) Jak vysokou vrstvu vody ($s_2 = 1000$ [kg · m⁻³]) nutno do nádoby

přilít, aby celý kotouč byl ponořen? Jaký je objem přilité vody? c) O kolik procent své výšky se kotouč vynořil ze rtuti po přilítí vody?

Evžen Říman

(Došlo 18 řešení.)

Řešil Jaroslav Zemánek, třída 2. c, SVVŠ v Praze 5 - Smíchov, Na Zatlance.

a) Váha kotouče je $G = s S h g$. Ponořená část kotouče vytlačuje množství rtuti o váze $G_1 = s_1 S h_1 g$. Podle zákona o plování platí $G = G_1$, takže

$$s S h g = s_1 S h_1 g, \text{ z čehož } h_1 = \frac{s}{s_1} h. \quad (1)$$

b) Přilejeme-li do nádoby vrstvu vody výšky h_2 , aby celý kotouč byl ponořen, pak hloubky ponoření kotouče do rtuti je h'_1 a platí $h'_1 + h_2 = h$. Tíha rtuti, která je vytlačena ponořenou částí kotouče je $G' = s_1 S h'_1 g = s_1 S (h - h_2) g$. Tíha vytlačené vody je $G'' = s_2 S h_2 g$. Platí zase

$$s S h g = s_1 S (h - h_2) g + s_2 S h_2 g,$$

z čehož hledaná výška vodní vrstvy je

$$h_2 = \frac{s_1 - s}{s_1 - s_2} h. \quad (2)$$

Objem V přilité vody je

$$V = S_0 h_2 - S h_2 = (S_0 - S) \frac{s_1 - s}{s_1 - s_2} h \quad (3)$$

c) Po přilítí vody se kotouč vynořil ze rtuti o výšku $x = h_1 - h'_1 = h_1 - (h - h_2) = h_1 + h_2 - h$, takže dosazením vztahů (1) a (2) dostaneme po snadné úpravě

$$x = \left(\frac{s}{s_1} + \frac{s_1 - s}{s_1 - s_2} - 1 \right) h = \frac{s_2 (s_1 - s)}{s_1 (s_1 - s_2)} h.$$

Hledaný poměr (procentový) je poměr veličiny x k celé výšce kotouče h čili

$$p = \frac{x}{h} = \frac{s_2 (s_1 - s)}{s_1 (s_1 - s_2)}. \quad (4)$$

N u m e r i c k ý v ý p o č e t. Protože dimenzionální správnost je zřejmá, obdržíme dosazením daných číselných hodnot do vzorců (1), (2), (3) a (4) výsledky:

$$h_1 \doteq 4,36 \text{ [cm]}; \quad h_2 \doteq 3,42 \text{ [cm]}; \quad V \doteq 513 \text{ [cm}^3\text{]};$$

$$p = 0,0335 (= 33,5 \%)$$

6. Chronometer s mosadzným kyvadlom má správny chod pri teplote $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Máme vypočítat, o koľko bude meškať za 24 hodín, ak sa teplota v miestnosti, v ktorej je chronometer umiestnený, zvýši na $t_1 = +20^\circ\text{C}$. Dĺžkovú tepelnú rozťažnosť (tj. koeficient dĺžkovej tepelnej rozťažnosti) mosadze berieme rovný $\alpha = 19 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$ a v uvažovanom teplotnom rozsahu ju pokladajme za stálu.

Václav Šindelář

(Došlo 18 řešení.)

Řešil Peter Prešnajder, III. tř. SVŠ, Sereď.

Označme pri teplote $t_0 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ dĺžku chronometra l_0 . Doba kmitu kyvadla pri dĺžke l_0 bude

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}. \quad (1)$$

Ak je v miestnosti, kde je chronometer umiestnený, teplota $t = +20\text{ }^\circ\text{C}$, chronometer sa predĺži na dĺžku l_1 . Pre l_1 platí:

$$l_1 = l_0 (1 + \alpha t_1). \quad (2)$$

Doba kmitu T_1 , keď chronometer bude mať kyvadlo dĺžky l_1 , potom bude

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}};$$

za l_1 dosadíme vzťah (2)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0 (1 + \alpha t_1)}{g}}.$$

Rovnicu (3) delíme rovnicou (1):

$$\frac{T_1}{T_0} = \sqrt{1 + \alpha t_1} \quad (4)$$

Pomer $\frac{T_1}{T_0}$ udáva v akom pomere budú doby kmitov na chronometri pri teplote t_1 a t_0 .

Čas, aký ukáže chronometer za určité obdobie, bude k času v skutočnosti práve v obrátenom pomere $\frac{T_0}{T_1}$, lebo koľkokrát sa zväčší doba kmitu, toľkokrát menej kmitov za určitý čas chronometer vykoná. Preto pomer času $T_d = 24\text{ hodín} = 86\,400\text{ s}$ k času T , ktorý ukáže chronometer, bude

$$\frac{T}{T_d} = \frac{T_0}{T_1},$$

za $\frac{T_0}{T_1}$ dosadíme z rovnice (4):

$$\frac{T}{T_d} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha t_1}}$$

čiže za čas T_d ukáže chronometer čas T :

$$T = \frac{T_d}{\sqrt{1 + \alpha t_1}}. \quad (5)$$

Čas T' , tj. čas, o koľko za čas T_d chronometer bude meškať, bude sa rovnať rozdielu časov T_d a T :

$$T' = T_d - T,$$

po dosadení T z rovnice (5) bude

$$T' = T_d - \frac{T_d}{\sqrt{1 + \alpha t_1}} = T_d \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha t_1}} \right).$$

Dosadíme číselné hodnoty:

$$\begin{aligned} \alpha &= 19 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}, \\ t_1 &= + 20 \text{ }^\circ\text{C}, \\ T_d &= 24 \text{ hod} = 86\,400 \text{ s}. \end{aligned}$$


Chromometer za čas T_d , ak sa teplota zvýši na teplotu t_1 , zmešká o čas T' :

$$T' = 86\,400 \text{ s} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 19 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1} 20 \text{ }^\circ\text{C}}} \right) \doteq 16,4 \text{ s}$$

Deskriptivní geometrie:

1. Pravidelnému čtyřstěnu lze vepsat čtyři shodné kulové plochy tak, aby se každá z nich dotýkala tří stěn čtyřstěnu a aby se všechny kulové plochy dotýkaly navzájem. a) Dokažte toto tvrzení. b) Sestrojte půdorys a nárys čtyřstěnu ($a = 10 \text{ cm}$) i kulových ploch. c) Vypočtete velikost poloměru kulových ploch.

Josef Holubár

(Došlo 13 řešení) 

Řešil Zdeněk Jiráček, 3. roč. SVVŠ, Hradec Králové:

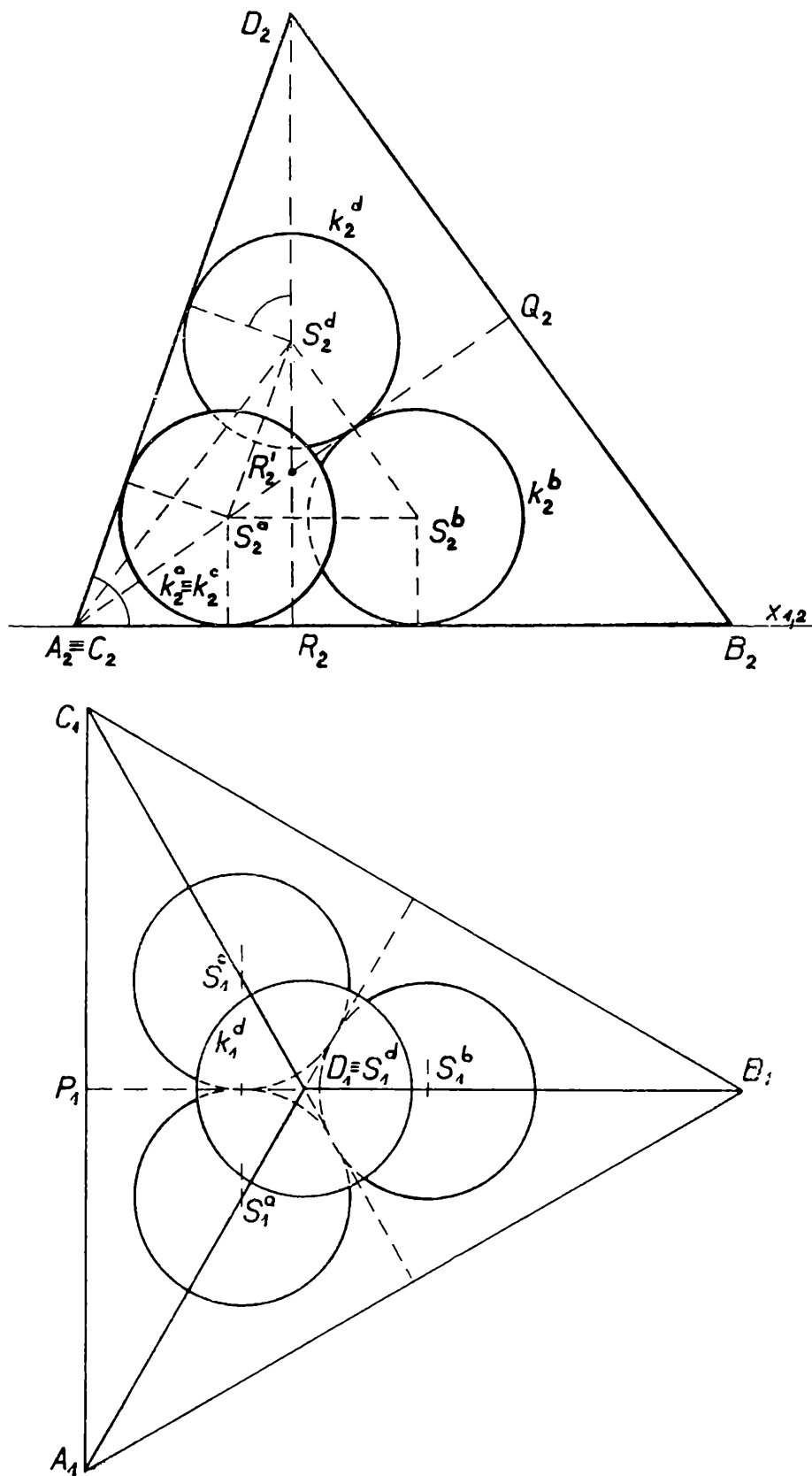
a) Nechť jsou dány čtyři shodné kulové plochy $\kappa^k \equiv (S^k, \rho)$, kde k značí postupně písmena a, b, c, d ; nechť se tyto plochy navzájem dotýkají. Potom platí: $S^a S^b = S^a S^c = S^a S^d = S^b S^c = S^b S^d = S^c S^d = 2\rho$. Z toho vyplývá, že těleso $S^a S^b S^c S^d$ je pravidelný čtyřstěn. Ke každým třem koulím můžeme sestavit společnou tečnou rovinu vně tělesa $S^a S^b S^c S^d$, rovnoběžnou s rovinou určenou středy koulí, kterých se dotýká, a která má od těchto středů vzdálenost ρ . Vzniklé čtyři roviny omezují těleso $ABCD$, které je podobné tělesu $S^a S^b S^c S^d$, jak vyplývá z rovnoběžnosti uvažovaných stěn. Těleso $ABCD$ je tedy opět pravidelný čtyřstěn, kterému jsou vepsány čtyři koule o stejném poloměru velikosti ρ . Tím je dokázáno, že také naopak lze pravidelnému čtyřstěnu $ABCD$ vepsat čtyři shodné koule, jak byly popsány v textu úlohy.

b) Položíme-li stěnu, např. ABC daného čtyřstěnu $ABCD$ do půdorysny a hranu, např. AC do polohy kolmé k ose x , sestrojíme půdorys a nárys čtyřstěnu $ABCD$ a kulových ploch κ^k takto (obr. 1):

Půdorysem čtyřstěnu je rovnostranný trojúhelník $A_1 B_1 C_1$ ($A_1 B_1 = a$); půdorysem D_1 vrcholu D je střed tohoto trojúhelníka. Nárysem stěn ABC, ACD jsou úsečky $A_2 B_2 = A_2 D_2 \left(= B_1 P_1 = \frac{a}{2} \sqrt{3} \right)$ a nárysem hrany BD je úsečka $B_2 D_2 = a$.

Nyní sestrojíme nárys koulí κ^b a κ^d . Jejich obrysy jsou shodné kružnice k_2^b, k_2^d o poloměru ρ , které se vně dotýkají, neboť středná $S^b S^d$ koulí κ^b, κ^d je rovnoběžná s nárysnou. Společná vnitřní tečna kružnic k_2^b, k_2^d je výška $A_2 Q_2$ trojúhelníka $A_2 B_2 D_2$. Přitom kružnice k_2^d se dotýká přímkou $A_2 D_2, A_2 Q_2$ a má střed S_2^d na $D_2 R_2$, kde bod R_2 je nárys paty

výšky čtyřstěnu $ABCD$ sestrojené k stěně ABC . Snadno tedy sestrojíme k_2^d a pak hned k_2^b , kružnici, která se dotýká k_2^d na A_2Q_2 . Kružnice k_2^a, k_2^c , obrysy nárysu koulí κ^a, κ^c , splývají a mají poloměr ρ ; tato kružnice se dotýká stran A_2B_2, A_2D_2 trojúhelníka $A_2B_2D_2$. Protože kružnice $k_2^a \equiv k_2^c$ je shodná s k_2^b a s k_2^d , je tím určena. Potom ještě doplníme



Obr. 1

půdorysy všech čtyř koulí. Přitom obrys půdorysu koule κ^d je kružnice k_1^d o poloměru ϱ a středu $S_1^d \equiv D_1$; obrysy půdorysů koulí $\kappa^a, \kappa^b, \kappa^c$ jsou kružnice o poloměru ϱ , které se po dvou vně dotýkají v bodech ležících na výškách trojúhelníka $A_1B_1C_1$.

c) Na obr. 1 je $A_2B_2 = A_2D_2 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, $B_2D_2 = a$, $S_2^bS_2^d = 2\varrho$. Označme $D_2R_2 = v$, $S_2^dR_2' = v'$. Platí

$$\frac{a}{2\varrho} = \frac{v}{v'} \quad (1)$$

Protože je

$$v = \varrho + v' + \frac{\varrho}{\cos \alpha},$$

kde

$$\cos \alpha = \frac{A_2R_2}{A_2D_2} = \frac{1}{3} \quad 1)$$

a pro v' z trojúhelníka $R_2'S_2^bS_2^d$ vychází

$$v' = 2\varrho \cos \frac{\alpha}{2} = 2\varrho \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \varrho \sqrt{6},$$

je dále

$$v = \varrho \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{6} + 3 \right) = \frac{1}{3} \varrho (12 + 2\sqrt{6})$$

Podle (1) potom platí

$$\frac{a}{2\varrho} = \frac{12 + 2\sqrt{6}}{2\sqrt{6}},$$

a tedy

$$\varrho = a \frac{\sqrt{6}}{12 + 2\sqrt{6}} = a \frac{\sqrt{6}(12 - 2\sqrt{6})}{120} = \frac{a}{10} (\sqrt{6} - 1)$$

Je-li a velikost hrany pravidelného čtyřstěnu, mají uvažované koule poloměr velikosti

$$\varrho = \frac{a}{10} (\sqrt{6} - 1)$$

2. Je dán čtyřboký pravidelný jehlan takový, že mu lze vepsat pět shodných koulí. První čtyři se dotýkají podstavy a každá z nich se dotýká dvou sousedních pobočných stěn jehlanu a dvou sousedních koulí, pátá koule se dotýká všech čtyř pobočných stěn jehlanu a všech předchozích čtyř koulí. a) Určete podmínku, kdy lze v čtyřbokém pravidelném jehlanu

1) $\alpha = \sphericalangle B_2A_2D_2$ určuje velikost odchylky stěn pravidelného čtyřstěnu.

sestrojit uvedených pět koulí. b) Vypočtete velikost poloměru těchto koulí. c) Sestrojte půdorys a nárys takového jehlanu s pěti uvedenými koulemi.

Josef Holubář

(Došlo 12 řešení)

Řešil Jindřich Procházka, 3. roč. SVVŠ, Čelákovice:

a) Mějme čtyři shodné koule o středech S^1, S^2, S^3, S^4 a poloměru velikosti r . Nechť tyto středy tvoří vrcholy čtverce o straně rovné $2r$. Sestrojme pátou kouli tak, aby se dotýkala předešlých čtyř a měla poloměr velikosti r . Její střed S^5 bude od bodů S^1, S^2, S^3, S^4 vzdálen právě $2r$. Nyní je již patrné, že body S^1, S^2, S^3, S^4, S^5 tvoří vrcholy pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož podstavné a pobočné hrany jsou shodné. Proto i pravidelný čtyřboký jehlan, jemuž je pět zmíněných koulí vepsáno, bude mít podstavné a pobočné hrany shodné.

D ů k a z. Vedme společnou tečnou rovinu π čtyř koulí o středech S^1, S^2, S^3, S^4 tak, aby neprotínala kouli o středu S^5 a dále čtyři společné tečné roviny ρ, σ, τ, μ pořadě trojic koulí o středech $S^1, S^2, S^5; S^2, S^3, S^5; S^3, S^4, S^5; S^4, S^1, S^5$ opět tak, aby žádnou ze zbývajících koulí neprotínaly. Roviny $\pi, \rho, \sigma, \tau, \mu$ omezují jehlan $ABCDV$ zřejmě podobný jehlanu $S^1S^2S^3S^4S^5$ s hranami rovnoběžnými s hranami tohoto jehlanu a navzájem shodnými. Tato vlastnost jehlanu $ABCDV$ je pak nutnou i postačující podmínkou pro existenci našich pěti shodných koulí, jak vyplývá z rovnoběžnosti stěn a hran jehlanu $ABCDV$ s příslušnými stěnami a hranami jehlanu $S^1S^2S^3S^4S^5$.

b) Platí (obr. 2)

$$a = 2r + 2x, \quad x = r \operatorname{cotg} \gamma \quad (1)$$

Dále je

$$\cos 2\gamma = \frac{a}{2} : \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} \gamma &= \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}} = \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Proto je

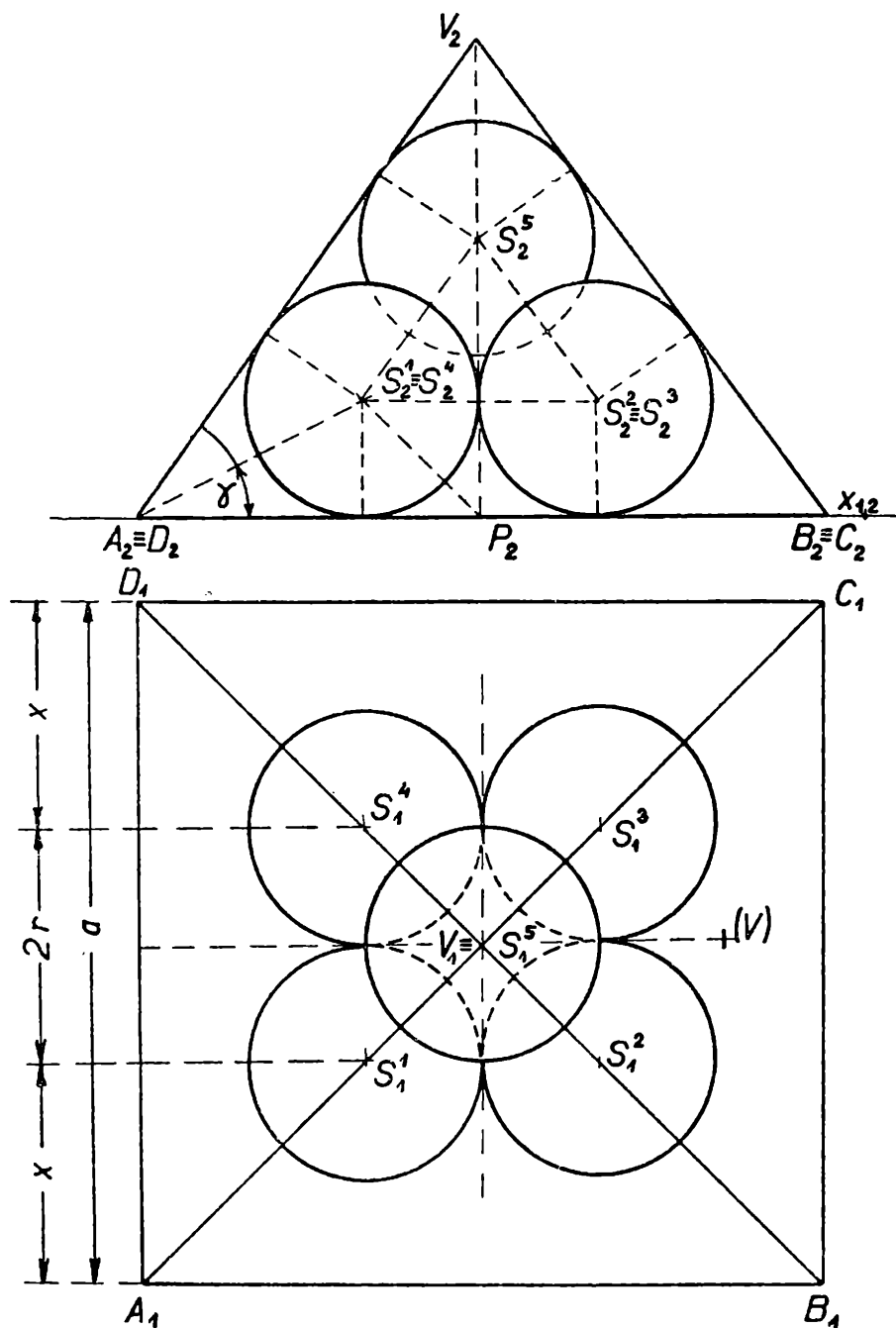
$$x : r = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

¹⁾ 2γ je velikost odchylky rovin pobočných stěn jehlanu od roviny podstavy.

Po dosazení do (1) dostáváme

$$a = 2r + r(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = r(2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

$$r = \frac{a}{2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}).$$



Obr. 2

Velikost r poloměru kulových ploch je

$$r = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

c) Půdorysem jehlanu $ABCDV$ je čtverec $A_1B_1C_1D_1$ ($A_1B_1 = a$) a V_1

jeho střed. Narys jehlanu je rovnoramenný trojúhelník s vrcholy $A_2 \equiv D_2$, $B_2 \equiv C_2$, V_2 , kde $A_2B_2 = a$, $A_2V_2 = B_2V_2 = \frac{a}{2} \sqrt{3}$ (obr. 2).

Nyní sestrojíme narys koule se středy $S^1 = (S^4)$ a $S^2 (S^3)$. Jejich obrysy jsou shodné kružnice o poloměru r , vepsané do trojúhelníka $A_2P_2V_2$ a $P_2B_2V_2$. Obrys narysu koule se středem S^5 je kružnice shodná s předšlými a dotýká se polopřímek V_2A_2 , V_2C_2 ; tím je určena.

Snadno už doplníme půdorys pěti našich koulí.

Závěr soutěže Rozhledů

Abecední seznam úspěšných řešitelů soutěže 41. ročníku Rozhledů matematicko fyzikálních, nositele vyznamenání Za zásluhy o výstavbu, byl otištěn v č. 4 letošního ročníku.

Redakce přihlédla za spolupráce autorů k počtu a jakosti zaslaných řešení a stanovila toto pořadí vítězných řešitelů.

Absolutní vítězové:

1. Zdeněk Jiráček, SVVŠ, Hradec Králové
2. Jaroslav Zemánek, SVVŠ, Praha 5
3. Peter Prešnajdr, SVVŠ, Sereď
4. Jindřich Procházka, SVVŠ, Čelakovice
5. Josef Daneš, SVVŠ, Praha 9
6. Ladislav Forgáč, SVVŠ, Prešov
7. Drahomíra Šimková, SVVŠ, Znojmo.

V jednotlivých kategoriích jsou nejlepší

v m a t e m a t i c e :

1. Josef Daneš, SVVŠ, Praha 9
2. Zdeněk Jiráček, SVVŠ, Hradec Králové
3. Jaroslav Zemánek, SVVŠ, Praha 5
4. Karel Trégl, SVVŠ, Rožnov pod R.;

v d e s k r i p t i v n í g e o m e t r i i :

1. Jindřich Procházka, SVVŠ, Čelakovice
2. Oto Kopál, SVVŠ, Partizánské
3. Jiří Vocílka, SVVŠ, Znojmo;

v e f y z i c e

1. Jindřich Procházka, SVVŠ, Čelakovice
2. Zdeněk Jiráček, SVVŠ, Hradec Králové
3. Jiří Vocílka, SVVŠ, Znojmo.



Zdeněk Jiráček,
absolutní vítěz

Redakce blahopřeje těmto řešitelům k dosaženému úspěchu.

Současně otiskujeme jejich fotografie. Knižní odměny, zakoupené z prostředků Ministerstva školství a kultury byly jim již zaslány.

O. S. M. M.



J. Zemánek



P. Prešnajdr



J. Procházka



J. Daneš



L. Forgáč



D. Šimková



K. Trégl



O. Kopál



J. Vocílka

Různé



Jarmila Vlčková, VUT, Brno:

Opakujte si fyziku pro přijímací pohovory na stavební fakultu v Brně

Zopakujte si převodní vztahy mezi desetinnými násobky a díly měrových jednotek délkových, plošných, objemových a u jednotek pro hmotu. Např. $1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$, $1 \text{ kg} = 10^3 \text{ g}$ apod. Zopakujte si předpony, které vyjadřují díly a násobky hlavních jednotek: Např. $1 \text{ kJ} = 10^3 \text{ J}$, $1 \mu\text{A} = 10^{-6} \text{ A}$ apod.

1. Jakou rychlostí jelo vozidlo, které za 10 minut ujelo 7500 m?
(45 km h⁻¹)
2. Průměrná rychlost turisty je 4,5 km h⁻¹. Kolik metrů ujede za 6 minut? Za jak dlouho ujede 750 m? Vyjádřete rychlost pohybu v m s⁻¹.
3. Vlak se rozjíždí po dobu 30 s a nabude rychlosti $v = 12 \text{ m s}^{-1}$. Jaké bylo zrychlení pohybu? Uvažujte pohyb jako rovnoměrně zrychlený. Jakou trať ujel vlak při rozjíždění? Jaká byla průměrná rychlost během těchto 30 sekund? Jaká byla konečná rychlost pohybu?
(0,4 m s⁻²; 180 m; 6 m s⁻¹; 43,2 km h⁻¹)
4. Jakou silou je přitahováno k Zemi těleso hmoty 10 kg? Jakou silou tlačí toto těleso na podložku?
(10 kp \doteq 100 N)
5. Těleso se pohybuje přímočaře rovnoměrně zrychleně se zrychlením $a = 2 \text{ cm s}^{-2}$ po vodorovné rovině bez tření. Hmotu tělesa je 2 kg. Jaká síla působí pohyb?
(0,04 N \doteq 0,004 kp)
6. Těleso o hmotě 2 kg je udržováno v rovnoměrném pohybu po vodorovné rovině silou 0,4 N. Jaký je součinitel vlečného tření mezi podložkou a tělesem?
(0,02)
7. Těleso má hmotu 10 kg a pohybuje se po podložce. Součinitel vlečného tření mezi tělesem a podložkou je 0,1. Jaká je síla tření na vodorovné podložce a jaká je při sklonu podložky 45°?
(10 N; $5\sqrt{2} \text{ N}$)
8. Kolik koní je výkon 12 kW?
9. Motor má staré označení výkon 80 koní. Kolik je to kW?
10. Jakou práci vykoná motor o výkonu 10 kW, když pracuje 1 hod.?
(10 kWh = 36 MJ)
11. Těleso o hmotě 100 g je hozeno svisle vzhůru a dostoupí výše 5 m. Jakou potenciální energii bude mít v nejvyšším bodě? Jaký druh a jak velká energie byla tělesu dodána při vrhu?
(5 J; kinetická energie 5 J)
12. Na zátku o ploše 2 cm², která uzavírá kapalinu v nádobě, působí síla 20 kp. Jaký tlak vznikne v kapalině vlivem této síly?
(10⁶ N m⁻²)
13. Nádobka má dno 2 dm² a v ní je voda do výšky 3 dm. Jaký je hydro-

statický tlak na dno a jaká je tlaková síla vody na dno? Jaký bude tlak na dno a celková tlaková síla shora na dno, je-li nad vodou vzduch?

(3000 N m⁻²; 60 N; 103 000 N m⁻²; 2060 N \doteq 206 kp)

14. Jakou hmotu má koule objemu 1 dm³, plave-li ve vodě ponořená do poloviny? (0,5 kg)

15. Průřez vodovodního potrubí je asi 12 dm² a za hodinu proteče 480 m³ vody. Jakou rychlostí teče voda? Jaká je hmota vody proteklé za hodinu? (4 km h⁻¹; 480 t)

16a. Proč se zahřívá hustilka při čerpání vzduchu do pneumatik? Proč se zahřívá mnohem méně při nízkém tlaku v pneumatice nebo při čerpání do volného prostoru?

16b. Proč hustí automobilisté pneumatiky v létě na menší tlak než v zimě?

17. O kolik se prodlouží drát 3 m dlouhý o průřezu 0,5 mm², na který působí ve směru délky síla $F = 50$ N, je-li modul pružnosti v tahu materiálu $E = 2\,000\,000$ kp cm⁻². (1,5 mm)

18. Kolik energie je třeba k ohřátí 2 kg vody o 10 deg (teplotních stupňů)? (20 kcal = 83 kJ)

19. K ochlazení 1 kg oceli ze 620 na 20 °C bylo odebráno 66 kcal tepla. Jaké je měrné teplo oceli? (0,11 kcal kg⁻¹ deg⁻¹ = 456 J kg⁻¹ deg⁻¹)

20. V kterém bodě musí být upnuta vodorovná 2 m dlouhá tyč, aby byla v rovnováze, jestliže na jejích koncích působí rovnoběžné síly 30 N a 20 N? (1,2 m od menší síly)

21. Na koncích hřídele 50 kp těžkého jsou setrvačníky 100 kp a 150 kp těžké. Kde bude těžiště této soustavy? Vzdálenost těžišť setrvačnicků je 72 cm. (30 cm od těžšího setrvačnicku)

22. Kolotoč má 15 otáček za min.; jaká je úhlová rychlost pohybu? Jakou obvodovou rychlostí se pohybuje jezdec, je-li jeho vzdálenost od osy otáčení 4 m? Jakou dostředivou silou působí sedadlo kolotoče na jezdce, který má hmotu 50 kg? (1,57 s⁻¹; 6,28 m s⁻¹; 492 N)

23. Vzduchem se šíří vlnění rychlostí 340 m s⁻¹, toto vlnění vzniklo zvučící ladičkou o kmitočtu 440 Hz. Jaká je délka vlny šířícího se vlnění? (77 cm)

24. Vodorovný paprsek se odrazí na rovinném zrcadle a jde pak svisle dolů. Jaký úhel svírá zrcadlo s vodorovnou rovinou? (45°)

25. Jakou ohniskovou vzdálenost má kulové zrcadlo o poloměru 4 cm? Kde bude obraz a jaký bude, je-li předmět ve středu křivosti zrcadlicí plochy?

26. Jaká je optická mohutnost spojky, jejíž ohnisková vzdálenost je $f = 20$ cm? (5 dioptrií)

27. Z diapozitivu o straně 8 cm chceme projektorem s objektivem $f = 100$ mm získat obraz o straně dlouhé 2 m. Jak daleko od promítací plochy musíme postavit projektor? (2,6 m)

28. V kině je objektiv promítacího přístroje vzdálen 20 m od promítací stěny. Chceme získat 200násobné zvětšení. Jakou ohniskovou vzdálenost musí mít objektiv? (Asi 100 mm)

29. Jakou silou F na sebe působí proton a elektron ve vodíkovém atomu, je-li náboj protonu $e = 1,609 \cdot 10^{-19}$ C a vzdálenost obou částic je $r = 5,3 \cdot 10^{-2}$ nm (= nanometrů, nesprávně milimikronů); permitivita vakua $\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12}$ F m⁻¹. (F m⁻¹ = C² N⁻¹ m⁻² = 9,5 · 10⁻⁹ N)

30. Jak velký bude náboj desky kondenzátoru, jehož kapacita je 0,1 μF a připojené napětí ke kondenzátoru je 200 V. (2 · 10⁻⁵ C = 20 μC)

31. Kondenzátor se vzduchovým dielektrikem, má kapacitu 2 pF; jakou bude mít kapacitu též kondenzátor se slídovým dielektrikem, jehož relativní permitivita $\epsilon_r = 6$? (Kapacita se 6krát zvětší)

32. Dva kondenzátory o kapacitách $C_1 = 0,1 \mu\text{F}$ a $C_2 = 0,2 \mu\text{F}$ jsou spojeny paralelně a připojeny k napětí 100 V. Jaká je kapacita soustavy? Jaké je napětí na jednotlivých kondenzátorech U_1 a U_2 a jaké jsou náboje na každém kondenzátoru Q_1 a Q_2 i na celé soustavě Q ?
 $(C = 0,3 \mu\text{F}; U_1 = U_2 = 100 \text{ V}; Q_1 = 10^{-5} \text{ C}; Q_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ C}; Q = 3 \cdot 10^{-5} \text{ C})$

33. Žehlička má na štítku údaj 220 V, 800 W; jaký proud prochází žehličkou? Jaký odpor má topný drát žehličky? Kolik bychom platili za spotřebovanou elektrickou energii, kdybychom pracovali se žehličkou 5 hodin a 1 kWh by stála 0,60 Kčs? Kolik tepla se vyvine v žehličce při 5 hodinovém žehlení?
 $(3,6 \text{ A}; 60,5 \Omega; 2,4 \text{ Kčs}; 14,4 \text{ MJ})$

34. V elektrickém rozvodu s napětím 220 V v bytě jsou pojistky na 6 A. Mohou být současně zapjaty 3 žárovky 40 W, 2 žárovky 60 W, žehlička 800 W a radio 60 W? Jak jsou spotřebiče zapojeny, aby měl každý potřebných 220 V?
 $(\text{Celkový proud je } 5 \text{ A}; \text{zapojení spotřebičů paralelně})$

36. Projekční lampa potřebuje napětí 43 V a proud 6 A. Jaký odpor musíme předřadit do série, abychom mohli lampu připojit na síť o napětí 220 V?
 $(29,5 \Omega)$

37. Cívkou, jejíž indukčnost je $L = 400 \text{ mH}$, prochází střídavý proud $I = 0,2 \text{ A}$ o frekvenci 50 Hz. Jakou reaktanci (tj. induktivní odpor) klade cívka a jaké je na ní napětí? Resistanci, tj. ohmický odpor cívky zanedbáme.
 $(125,6 \Omega; 25 \text{ V})$

38. Jaký proud bude procházet obvodem s kondenzátorem o kapacitě $0,2 \mu\text{F}$, je-li připojen na střídavé napětí 220 V s frekvencí 50 Hz? Jaké bude max. napětí na kondenzátoru a jaký bude max. proud?
 $(0,01 \text{ A}; 220 \sqrt{2} \text{ V}; 0,01 \sqrt{2} \text{ A})$

39. Primární cívka transformátoru má 600 závitů a je připojena na napětí 220 V. Sekundární cívka má 30 závitů. Jaké je napětí na sekundáru?
 (11 V)

40. Jakou frekvenci má kmitavý obvod, který se skládá z kondenzátoru o kapacitě 500 pF a z cívky o indukčnosti 4 mH ?
 $(\text{Asi } 3560 \text{ Hz})$

T i b o r S z e b é n y i, Bratislava:

M. V. Ostrogradskij

Michal Vasiljevič Ostrogradskij narodil sa 24. septembra 1801 v dedinke Pašenaja v Poltavskej gubernii. Ako 9-ročný odišiel do penzionátu pri Poltavskom gymnáziu. Želaním jeho otca bolo aby sa stal vojakom, čo bolo aj túžbou mladého Ostrogradského. Preto v roku 1816 odišiel do Petrohradu aby sa zapísal

do gardového pluku. No však na zásah jedného z jeho príbuzných sa Ostrogradskij v roku 1817 zapísal na Charkovskú univerzitu, čo rozhodlo o jeho ďalšom osude. Keďže Ostrogradskij ešte dlho sníval o vojenskej službe, učil sa spočiatku zle. Keď sa však presťahoval koncom druhého ročníka k univerzitnému profesorovi matemati-

ky Pavlovskému, rozhovory s ním prebudili v ňom záujem o matematiku a už behom krátkeho času udivoval svojho profesora svojim veľkým talentom.

Charkovskú univerzitu Ostrogradskij skončil v roku 1820. Rektor univerzity Osipovskij mu za úspešné skončenie navrhol udeliť prvú vedeckú hodnosť - kandidáta. Reakčná časť profesorského sboru však dosiahla, že Ostrogradskému bol odňatý diplom o ukončení univerzity, odôvodňujúc to jeho volnomyšlienkarstvom a nenavštevovaním hodín náboženstva. Táto nespravodlivosť ho neodradila, ale povzbudila ho len k ďalšej práci.

V roku 1822 odišiel do Paríža, kde navštevoval prednášky najlepších francúzskych matematikov a fyzikov: Ampéra, Cauchyho, Laplace a iných. Už v roku 1825 sa Cauchy pochvalne vyjadril o kratšej práci Ostrogradského, týkajúcej sa výpočtu integrálov. V roku 1826 predložil Parížskej akadémii vied svoju prvú prácu z hydrodynamiky *O vlnivom pohybe kvapaliny vo valcovej nádobe*, ktorá bola publikovaná v jej časopise. Odvodil v nej obecné vyjadrenie rýchlosti pohybu ťažkej kvapaliny vo valcovej nádobe a stanovil metódu určenia týchto rýchlostí na základe počiatočného tvaru voľného povrchu kvapaliny a počiatočných rýchlostí. Touto prácou si Ostrogradskij získal pevné miesto vo vedeckom svete. V Paríži sa venoval nielen vedeckej práci, ale finančné ťažkosti ho prinútili vyučovať v kolégiu Henricha IV.

V novembri roku 1827 sa vrátil do Ruska, do Petrohradu, kde bol pomerne veľmi rýchlo vymenovaný za akademika a profesora matematiky a mechaniky. V Petrohrade sa naďalej venoval svojej vedeckej činnosti a pedagogickej práci. Zomrel 1. januára 1862 v Poltave, cestou z jeho bydliska do Petrohradu.

Ostrogradskij sa zaoberal matematickou fyzikou, matematickou analýzou, algebrou, teóriou pravdepodobnosti, analytickou a nebeskou mechanikou. Venoval niekoľko prác teórii pružnosti, teórii tepla a gravitačnej teórii. Ostrogradskij s rovnakým úspechom pracoval vo všetkých oblastiach, často predbiehajúce svojich ostatných európskych kolegov.

Najväčšiu pozornosť venoval Ostrogradskij analytickej mechanike. Svojimi prácami v tejto oblasti sa stal zakladateľom ruskej školy analytických mechanikov. Už Lagrange v svojej *Analytickej mechanike* (1788) systematicky prepracoval metódy použitia princípu virtuálnych posunutí na riešenie statických a dynamických úloh. Ostrogradskij venoval princípu virtuálnych posunutí nasledovné práce:

O becné poznámky o momentoch síl (1834), *O okamžitých posunutíach sústav podrobných premenným podmienkám* (1838) a *O princípe virtuálnych rýchlostí a zotrvačnej sile* (1841), v ktorých doplnil a rozvinul analytické metódy mechaniky.

Z ďalších diel Ostrogradského si zaslúžia pozornosť *O integráloch obecných rovníc dynamiky* (1848) a *Pojednanie o obcej teórii rázu* (1854). Ostrogradskij odvodil aj dôležitý vzorec matematickej analýzy pre výpočet n -násobného integrálu. Dokázal, že ľubovoľný n -násobný integrál možno previesť na $(n-1)$ násobný.

Ostrogradskij sa zaoberal aj prácami z balistiky, ktoré vznikli z podnetu veliteľstva ruského delostrelectva. Sú to: *Poznámka o pohybe guľovej strely v odporovom prostredí*, *Pojednanie o pohybe guľovej strely vo vzduchu* a *Tabuľky ku ľahčeniu výpočtu dráhy telesa v odporovom prostredí*. V prvých dvoch prácach sa Ostrogradskij zaoberal problémom ťažiska a rotácie guľovej strely, ktorých geometrické a hmotné ťažisko nie je totožné. Týmto problémom sa už predtým zaoberal Poisson, ktorý však zjednodušene predpokladal totožnosť geometrického a hmotného ťažiska.

Je potrebné sa zmieniť aj o zápornom stanovisku Ostrogradského k neukleidovskej geometrii Lobačevského. Ostrogradskému ako akademikovi petrohrskej Akadémie vied bola daná k recenzii Lobačevského práca *O základoch geometrie* (O načaloch geometrii), ktorá bola vydaná po častiach v časopise Kazaňskej univerzity v rokoch 1829-1830. Lobačevského práca se nestretla s veľkým porozumením u vtedaj-

šieho vedeckého sveta. Veď jeho súčasníci nazývali túto prácu „satirom na geometriu,“ „karikatúrou geometrie“ a pod. Ani Ostrogradskij sa nedokázal povzniesť nad rozpory medzi Eukleidovskou a neeukleidovskou geometriou Lobačevského. Citujme aspoň niekoľko viet z Ostrogradského recenzie, ktorou nielenže znevažuje myšlienky Lobačevského, ale aj napáda samotnú osobnosť autora. „Autor, ako sa zdá, si postavil ako cieľ písať tak, aby mu nebolo vôbec rozumieť... Všetko, čo som pochopil z geometrie p. Lobačevského, je viac ako podprimerné... Všetko, čo som nepochopil, bolo zrejme špatne vyložené... kniha p. rektora Lobačevského je poškvrenená chybou, je nedbalo napísaná a nezaslúhuje si teda pozornosti Akadémie.“

Pri hodnotení Ostrogradského ako pedagóga, je nutné spomenúť, že prednášal v Inštitúte inžinierov dopravných ciest, v Pedagogickom inštitúte, v Námornom sbore, v Michailovskej delostreleckej akadémii a dlhšiu dobu pôsobil ako hlavný pozorovateľ vyučovania matematiky v kadetských sboroch. Ostrogradskij sa vždy usiloval oboznámiť poslucháčov s poslednými úspechmi matematiky. Tak napr. v Inštitúte inžinierov dopravných ciest prednášal o Abelových prácach v oblasti algebraických funkcií a o iných výsledkoch vedeckej činnosti zahraničných matematikov. Úroveň jeho prednášok na technických vysokých školách bola značne vyššia ako na univerzitách, kde vychovávali špe-

cialistov-matematikov. Toto sa nemohlo zaobiť bez výsledkov. Mnohí žiaci Ostrogradského sa stali neskôr profesormi na univerzitách, technických a vojenských vysokých školách.

Panaev, jeden z jeho poslucháčov, napísal v svojich spomienkách o Ostrogradskom: „Skutočným pôžitkom bolo ho počúvať a čítať jeho diela. Bol nielen veľkým matematikom, ale aj filozofom-geometrom, ktorý vedel nadchnúť poslucháča. Zrozumiteľnosť a stručnosť jeho výkladov boli obdivuhodné; dokázal nimi upútať pozor-

nosť poslucháčov. Všetkými spôsobmi sa staral, aby ho poslucháči sledovali a mohli mu porozumieť.“

Za svoje vedecké zásluhy Ostrogradskij bol zvolený za akademika Petrohradskej, Turínskej, Rímskej, Americkej akadémie a bol členom-korešpondentom Parížskej Akadémie vied. Snáď najvyššiu ho charakterizoval N. E. Žukovskij: „V prácach Ostrogradského nás priťahuje jednota analýzy, základná myšlienka, ktorá je tak široká, ako sú široké priestranstvá jeho vlasti.“



Matematické zábavy

Jozef Eliaš, Bratislava:

Kalendár a matematika

(Dokončení)

Príklad 3. Ktorý deň týždňa bolo 27. III. 1208?

Riešenie. Deň určíme pomocou kalendára z roku 1963. V kalendári zistíme, že 25. XII. 1963 bude v stredu. Podľa (5) deň, na ktorý pripadne 25. XII. 1208 určíme tak, že zistíme zvyšok delenia $12\ 080 : 7$. Zvyšok je 5, teda 25. XII. 1208 bolo vo štvrtok, t.j. o jeden deň neskôr ako 25. XII. 1963. V kalendári z roku 1963 bolo 27. marca v stredu. Teda deň týždňa, na ktorý pripadlo 27. III. 1208 bol o jeden deň neskôr, t.j. vo štvrtok.

Metóda po častiach roka. Pri tejto metóde musíme vyjadriť dané dátumy pomocou dátumov tých mesiacov, v ktorých sa začínajú ročné obdobia, t.j. marca, júna, septembra a decembra. Dátumy pre január a február vyjadríme pomocou dátumov decembra predchádzajúceho roka. Pri metóde môžu byť čísla mesiacov len jednociferné a preto miesto čísla 12 pre december používame číslo 2. Číslo roku musí byť napísané ako štvorciferné číslo, tak napr. miesto roku 32 budeme písať 0032.

Metódu dokážeme najskôr pre juliánsky kalendár a potom pre gregoriánsky. Dôkaz urobíme pre jednotlivé ročné obdobia.

V kalendári, v ktorom je 25. dec. vo štvrtok, 1. marca je v sobotu. Posledný deň februára je v piatok. Posledný deň februára môžeme nazvať nulovým dňom marca. Tento je o jeden deň neskoršie ako deň 25. decembra. Ak označíme c deň 25. decembra, potom deň w dátum D marca môžeme nájsť podľa vzorca

$$(c + 1 + D) : 7, \quad (6)$$

zvyšok w , alebo

$$[10(Y - z) + z + 1 + D] : 7, \quad (7)$$

zvyšok w .

Ak pridáme k delencu v (7) násobok siedmich $999\,999 D + 299\,999$, dostaneme

$$[1\,000\,000 D + 300\,000 + 10(Y - z) + z] : 7, \quad (8)$$

zvyšok w .

Ak je 25. decembra vo štvrtok, potom posledný deň v máji (nulový deň júna) je v sobotu, t.j. o dva dni neskoršie. Ak k delencu vo vzorci

$$(c + 2 + D) : 7,$$

zvyšok w , pridáme násobok siedmich $999\,999 D + 599\,999$, dostaneme

$$[1\,000\,000 D + 600\,000 + 10(Y - z) + z] : 7, \quad (9)$$

zvyšok w .

V kalendári, v ktorom je 25. decembra vo štvrtok, nulový deň septembra (posledný deň v auguste) a nulový deň decembra (posledný deň novembra) pripadne na nedeľu, teda o tri dni neskoršie ako 25. XII.

Ak pridáme do vzorca $(c + 3 + D) : 7$, zvyšok w , postupne tieto násobky siedmich $999\,999 D + 899\,997$ a $999 D + 199\,997$,

dostaneme

$$\text{zvyšok } w \text{ a } [1\,000\,000 D + 900\,000 + 10(Y - z) + z] : 7, \quad (10)$$

$$[1\,000\,000 D + 200\,000 + 10(Y - z) + z] : 7, \quad (11)$$

zvyšok w .

Pomocou vzorcov (8), (9), (10) a (11) môžeme určiť deň daného dátumu pre jednotlivé mesiace, v ktorých začínajú ročné obdobia. Dokázali sme tým nasledujúce pravidlo:

Deň týždňa, ktorý pripadne na daný dátum v juliánskom kalendári priestupného roka nájdeme tak, že napíšeme všetky tri čísla dátumu spolu, k tomuto číslu pripíšeme nulu. Číslo, ktoré sme takto dostali, delíme siedmimi. Zvyšok delenia je číslo hľadaného dňa. Ak rok v dátume je obyčajný, pripíšeme k číslam dňa a mesiaca číslo najbližšieho predchádzajúceho priestupného roka a pridáme k tomu číslu nulu. K tomuto číslu pripočítame rozdiel medzi obyčajným rokom a najbližším predchádzajúcim priestupným rokom. Číslo, ktoré sme takto dostali, delíme siedmimi. Zvyšok delenia je číslo hľadaného dňa, pričom zvyškom sú priradené dni ako v prvej metóde.

Metódu dokážeme ešte pre gregoriánsky kalendár. V kalendári, v ktorom 25. decembra je vo štvrtok, 1. marca je v sobotu. Nulový deň marca je v piatok, o deň neskoršie ako deň 25. decembra. Ak deň 25. decembra označíme c , potom deň w dátumu D marca môžeme nájsť podľa vzorca

$$(c + 1 + D) : 7,$$

zvyšok w , alebo

$$[1000(C - g) + 10(Z - z) + z + 1 + D] : 7,$$

zvyšok w .

Ak pridáme k delencu násobok siedmich

$$999\,999\,D + 299\,999,$$

dostaneme

$$[1\,000\,000\,D + 300\,000 + 1000(C - g) + 10(Z - z) + z] : 7, \quad (12)$$

zvyšok w .

Ak 25. december je vo štvrtok, potom nulový deň júna je v sobotu, t. j. o dva dni neskoršie. Ak k delencu vo vzorci

$$(c + 2 + D) : 7,$$

zvyšok w pridáme násobok siedmich

$$999\,999\,D + 599\,992,$$

dostaneme

$$[1\,000\,000\,D + 600\,000 + 1000(C - g) + 10(Z - z) + z] : 7, \quad (13)$$

zvyšok w .

V kalendári, v ktorom 25. decembra je vo štvrtok, nulový deň septembra a nulový deň decembra pripadajú na nedeľu, t. j. o tri dni neskoršie. Ak pridáme delencu vo vzorci

$$(c + 3 + D) : 7$$

po poriadku násobky siedmich

$$999\,999\,D + 899\,997 \text{ a } 999\,999\,D + 199\,997,$$

dostaneme

$$[1\,000\,000\,D + 900\,000 + 1000(C - g) + 10(Z - z) + z] : 7, \quad (14)$$

zvyšok w ,

$$[1\,000\,000\,D + 200\,000 + 1000(C - g) + 10(Z - z) + z] : 7, \quad (15)$$

zvyšok w .

Písmená C , g , Z majú ten istý význam ako pri prvej metóde.

Pomocou vzorcov (12), (13), (14) a (15) môžeme v gregoriánskom kalendári určiť deň daného dátumu pre jednotlivé mesiace, v ktorých začínajú ročné obdobia.

Pravidlo pre určenie dňa v gregoriánskom kalendári je úplne analogické pravidlu v juliánskom kalendári, iba od čísla storočí odčítame opravu g ako v prvej metóde.

Uvedme si príklady na uvedenú metódu.

Príklad 4. Ktorý deň týždňa nášho kalendára bol 18. IX. 1944?

Riešenie. Podľa (14) musíme určiť zvyšok delenia $18\ 918\ 440 : 7$. Zvyšok je dve, teda 18. IX. 1944 bolo v pondelok.

Príklad 5. Ktorý deň týždňa nášho kalendára bolo 9. V. 1945?

Riešenie. Deň 9. mája môžeme uvažovať ako 70. marca. Podľa (12) musíme určiť zvyšok delenia $70\ 318\ 441 : 7$. Zvyšok je 3, teda 9. V. 1945 bolo v stredu.

Príklad 6. Ktorý deň týždňa bude 1. I. 2000?

Riešenie. 1. januára roku 2000 je ako 32. decembra 1999. Podľa (15) musíme určiť zvyšok delenia $32\ 218\ 963 : 7$. Zvyšok je 0, teda 1. I. 2000 bude v sobotu.

Príklad 7. Ktorý deň týždňa bolo 27. III. 1208?

Riešenie. Podľa (8) musíme nájsť zvyšok delenia $27\ 312\ 080 : 7$. Zvyšok je 5, teda 27. III. 1208 bolo vo štvrtok.

Ak chceme vedieť, na ktorý deň týždňa pripadol daný dátum pred naším letopočtom, musíme odčítať rok od roku 7001 a potom previesť hľadanie zvyšku ako v predchádzajúcich metódach. Prečo je potrebné odpočítať daný rok od roku 7001 a nie 7000? V juliánskom kalendári sa tie isté dni opakujú každých 28 rokov a teda i po roku 7000. Historici odpúšťajú rok 0 a označujú rok predchádzajúci roku 1 číslom -1 . Astronómovia rok 1 pred naším letopočtom označujú 0, rok 2 pred naším letopočtom označujú -1 .

Príklad 8. Octavián Augustus sa narodil 23. IX. 63 pred naším letopočtom. Ktorý deň týždňa to bolo?

Riešenie. Najskôr vypočítame $7001 - 63 = 6938$. Teraz určíme deň týždňa podľa druhej metódy. Podľa (10) musíme určiť zvyšok delenia $2\ 396\ 362 : 7$. Zvyšok je 4, teda Octavián Augustus sa narodil v stredu.

Príklad 9. P. Vergilius Maro zomrel 21. XI. 19 pred naším letopočtom. Ktorý deň týždňa to bolo?

Riešenie. Rozdiel $7001 - 19 = 6982$. Teraz určíme podľa druhej metódy deň týždňa 21. XI. 6982. Podľa (10) určíme zvyšok delenia $82\ 969\ 802 : 7$. Zvyšok je 6, teda P. V. Maro zomrel v piatok.

Príklad 10. Ktorý deň týždňa bol začiatok židovského kalendára, ktorého dátum je 7. X. 3761 pred naším letopočtom?

Riešenie. Najprv vypočítame rozdiel $7001 - 3761 = 3240$. Teraz určíme podľa druhej metódy, ktorý deň týždňa bolo 7. X. 3240. Podľa (10) treba určiť zvyšok delenia $37\ 932\ 400 : 7$. Zvyšok je 2, teda židovský kalendár začínal v pondelok.

Literatúra:

[1] *J. Mayr:* Dni tygodnia i matematyka, Wiadomości matematyczne, IV, 1. 1960.

[2] *Matematické a fyzikálne tabuľky*, SPN Bratislava 1955.

Dopravní problémy a matematika

Toto pojednání má za úkol informovat čtenáře o problematice tzv. lineárního programování, jehož nejvýraznějším příkladem je dopravní (transportní) problém.

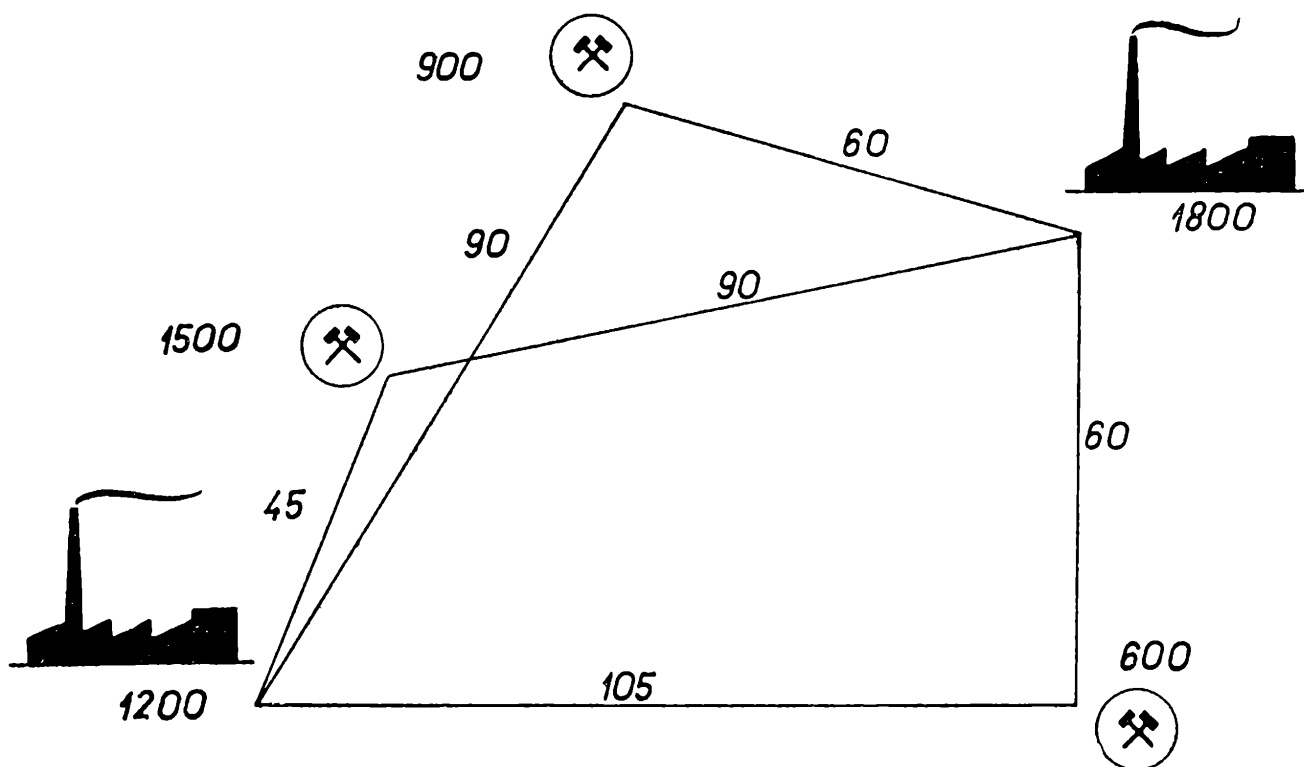
Sledujeme-li rozvoj některých vědních oborů v průběhu zhruba posledních dvou desetiletí, vidíme, že jsou rozvíjeny a studovány ty partie, jimiž na sebe navazují obory zdánlivě poněkud odlehlé. Tento rozvoj hraničních otázek je dobře patrný také v matematice, která ostatně už od dávných dob byla vydatným nástrojem v různých vědách přírodních, v technice apod. V současné době se ukazuje, že matematika má uplatnění ještě mnohem širší, a tak dnes pronikají její metody nejen do lékařství a biologie, ale i do ekonomie, věd společenských a jazykovědy. Velmi často se tu ukáže, že matematické metody, které na první pohled neměly vůbec žádný vztah k aplikacím a které jsou matematikům dobře známé třeba už po desítky let, zapadnou zcela přirozeně do řešení některého nového problému matematice dosti vzdáleného. Z toho je vidět, že je třeba neustále rozvíjet matematiku v celé její šíři, neboť i vyloženě teoretická odvětví této vědy, jakými jsou např. teorie čísel, topologie, teorie grup a svazů apod., která pěstujeme jaksi „do zásoby“, dají možná v budoucnu velmi užitečné výsledky.

V tomto příspěvku si všimneme spolupráce, která se asi od druhé světové války rozvíjí mezi matematiky a ekonomy. Půjdeme trochu do historie, abychom našli prototyp zajímavé úlohy, která se později stala podkladem dalších zkoumání a podnítila též rozvoj matematických metod. Během druhé světové války utrpěly mocnosti, které stály proti Hitlerovu Německu, dosti značné ztráty lodní tonáže a také okupace některých přístavů německými vojsky nutila vedoucí pracovníky spojeneckého zásobování k tomu, aby co nejehospodárněji využívali všech lodí i všech zbývajících přístavů. Bylo třeba co nejpřesněji znát množství dopravních prostředků i velikost možného nákladu a podrobně prozkoumat možnosti dopravy mezi jednotlivými přístavy a příslušnými místy určení. Při této příležitosti byla navržena a poprvé též prakticky vyzkoušena nová metoda, které dnes říkáme *m e t o d a l i n e á r n í h o p r o g r a m o v á n í*.

Dopravní problém, který se tak zrodil za válečných událostí, má ovšem význam daleko širší a je proto zajímavé a užitečné zabývat se touto problematikou i za mírových podmínek. Uvedme velmi zjedno-

dušený příklad, z něhož bude patrné o jakou problematiku se jedná. Poznamenejme ovšem, že náš příklad, v němž popíšeme problém rozvozu uhlí mezi třemi doly a dvěma továrnami, je trochu primitivní, neboť v praxi stojíme vždy před otázkami daleko složitějšími. Zjednodušení jsme však zvolili proto, aby bylo do této problematiky lépe vidět.

Na mapě, kterou schematicky zachycuje obr. 1, vidíme tři uhelné doly, které jsou tam vyznačeny zkříženými kladívky v kroužku. Kromě toho znázorňuje obr. 1 též dvě továrny, pro něž jsme tam zvolili rovněž názornou siluetu. V každém dolu se vytěží za určité plánovací období jisté množství uhlí a toto množství je na naší mapě též uvedeno u každého ze tří dolů číslem, které může značit počet vytěžených tun, vagónů apod. (čísla jsou 600, 900 a 1500). Každá z továren požaduje v uvažovaném období jistou dodávku uhlí, jak je patrné z čísel 1800 a 1200.



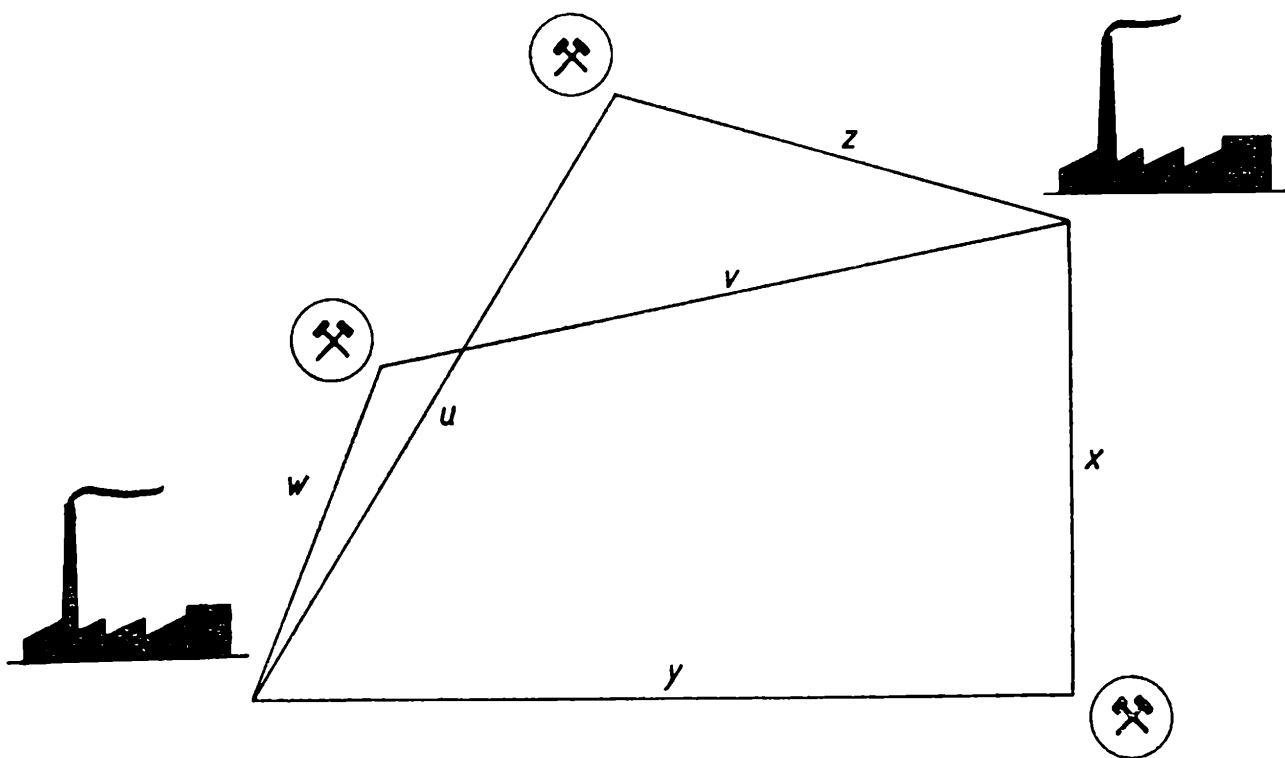
Obr. 1

Příklad je tak volen, že těžba dolů právě kryje spotřebu továren ($600 + 900 + 1500 = 1800 + 1200$). Z naší mapy jsou patrné také vzdálenosti (v kilometrech), které musíme překonávat při dopravě uhlí z dolů do továren. Otázka nyní zní: Jak máme naplánovat rozvoz uhlí, chceme-li, aby se zbytečně neplýtvalo časem, pohonnými hmotami ani penězi.

Uvidíme hned, že se tato otázka při matematické formulaci převádí na úlohu, ve které se vyšetřuje soustava několika algebraických rovnic 1. stupně o několika neznámých. Přitom nebudeme hledat všechna řešení této soustavy, nýbrž zajímat nás bude jisté o p t i m á l n í ř e š e n í, totiž takové, které odpovídá nejlacinější dopravě na uvedeném plánu.

Máme tedy sestavit návrh dopravy pro jedno plánovací období. Označme (zatím neznámá) množství uhlí, která navrhujeme v uvažovaném plánovacím období dopravovat, po řadě písmeny x, y, z, u, v, w . Tato písmena jsme pro názornost připsali k jednotlivým cestám (obr. 2). Součet $x + y$ je zřejmě roven celkové těžbě dolu, do něhož vedou cesty označené x, y , tedy $x + y = 600$. Spotřebu uhlí v jedné z našich továren můžeme vyjádřit součtem $x + z + v$, takže platí $x + z + v = 1800$. Provedeme-li obdobné úvahy ještě v dalších případech, dostáváme tuto soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= 600, \\ z + u &= 900, \\ v + w &= 1500, \\ x + z + v &= 1800, \\ y + u + w &= 1200. \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 2

Sestavili jsme tedy soustavu pěti rovnic o šesti neznámých. Z úlohy o dopravě uhlí ovšem vyplývá, že čísla x, y, z, u, v, w nemohou být záporná. Vedle toho žádáme, aby doprava byla co nejlevnější; matematicky můžeme tento požadavek vyjádřit tím, že žádáme, aby výraz

$$F = 60x + 105y + 60z + 90u + 90v + 45w$$

byl co nejmenší¹⁾.

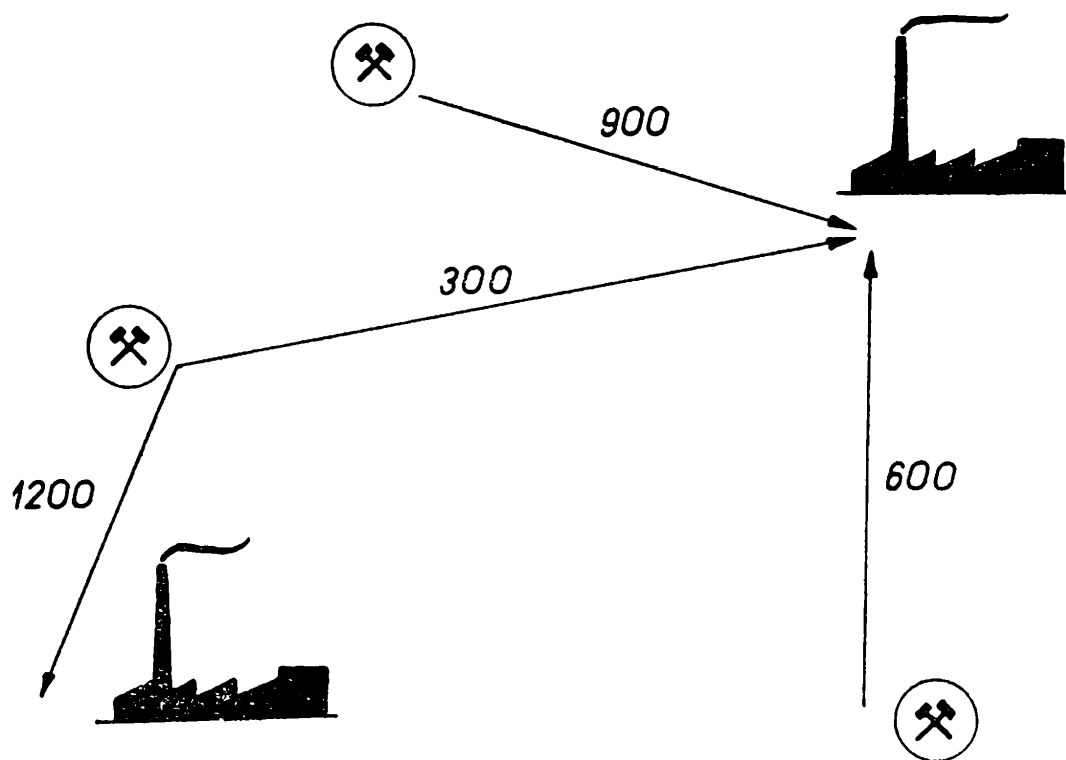
¹⁾ Uvědomte si, že např. $60x$ je součin délky cesty a nákladu po ní dopravovaného, takže $60x$ je zřejmě úměrné ceně, kterou musíme za dopravu po této cestě zaplatit.

Zopakujme si tedy stručně: Hledáme takové řešení soustavy (1), v němž jsou všechna čísla x, y, z, u, v, w kladná nebo rovná nule a pro něž dále výraz F nabývá nejmenší hodnoty.

Pohybujeme se tedy zatím zcela v rámci středoškolské matematiky a čtenář si jistě sám najde odpověď na naši otázku. Přenecháme tedy tento úkol čtenáři jako snadné cvičení²⁾ a řekneme si jen výsledek:

Doprava bude nejehospodárnější, jestliže se budou dopravovat po jednotlivých cestách náklady $x = 600, y = 0, z = 900, u = 0, v = 300, w = 1200$. Konečný návrh je patrný též z obr. 3.

Metody středoškolské matematiky ovšem nestačí k tomu, aby zvládly složitější dopravní problémy, které před nás staví praxe. V takových případech se obvykle vyskytuje daleko větší počet výrobních center, která produkují určitá množství výrobků a obvykle pracujeme též s velkým množstvím center spotřebních, která čekají na dodávku vý-



Obr. 3

robků. Tu selhávají už prostředky středoškolské matematiky a na první pohled - z názoru - nebývá někdy patrné, jak najít optimální řešení. V lineárním programování, do něhož tyto dopravní problémy zahrnujeme, se pak používá metod složitějších. Patří sem zejména metoda simplexová, která využívá znázornění dané soustavy rovnic v obecnějším prostoru a aplikují se rovněž moderní technické prostředky (matematické stroje), aby při výpočtech uspořily čas.

²⁾ Čtenář ovšem může pokračovat v četbě tohoto pojednání, aniž cvičení řeší.

Z prvních matematických pojednání, která jsou věnována dopravnímu problému a lineárnímu programování, je dlužno jmenovat práci L. F. Hitchcocka z roku 1941 a článek L. Kantoroviče z roku 1942. Také v naší republice se řada pracovníků zabývá touto problematikou. Po druhé světové válce byl to zejména prof. dr. František Nožička, který navrhl některé metody pro řešení dopravního problému. Jeho práce z tohoto oboru studovali též Z. Pokorný a Z. Sedmidubský z Ústavu matematických strojů ČSAV a navrhli jednoúčelový analogový přístroj na řešení dopravního problému³⁾.

Mezinárodní ohlas si získaly též práce československých matematiků J. A. Brhama, J. Bílého, M. Fiedlera a F. Nožičky, které vyšly v posledních letech v časopise Чехословацкий математический журнал.

Poslední tři ze jmenovaných autorů použili při řešení dopravního problému tzv. teorie grafů, která už po několik desetiletí je horlivě pěstována na celém světě pro účely zcela jiné.

Při výčtu úspěšných prací československých vědeckých pracovníků v oboru lineárního programování nesmíme zapomenout ani na přístupně psanou knihu našeho ekonoma J. Habra. Habrovo Lineární programování vyšlo v Praze r. 1959 a již r. 1960 vytiskli v Moskvě jeho ruský překlad.

Řekli jsme si již, že použití matematických strojů může podstatně zkrátit čas potřebný k numerickým výpočtům při řešení dopravního problému. Tak např. při řešení jistého dosti obsáhlého problému trvaly výpočty celý týden; když pracovníci mohli použít elektronkového stroje, byl výpočet proveden během dvou až pěti minut. A. S. Barsov se v jedné své práci zmiňuje o dopravním problému, který řešili v Moskvě na stroji Strela. Měl se zde navrhnout nejúspornější plán rozvozu stavebního písku z 10 center, v nichž byl písek uskladněn. Písek se rozvážel na 230 moskevských stavenišť; ukázalo se, že doprava organizovaná podle vypočteného programu bude mnohem úspornější než doprava, kterou do té doby prováděli „zkusmo“. Jen za jednu dekádu měsíce června 1958 se tak ušetřilo asi 11 % finančních nákladů.

Popsali jsme zatím nejjednodušší variantu dopravního problému a nyní si řekneme ještě několik slov o doplňkových podmínkách, které se k problému často připojují. V základní variantě jsme mlčky předpokládali, že dopravované zboží je možno v libovolném poměru rozdělit; to je ovšem předpoklad, který je např. pro uhlí splněn jen částečně, pro jiné druhy není pak vůbec správný (např. doprava velkých strojových dílců).

(Pokračování)

³⁾ Přístroj je popsán v článku, který oba autoři zařadili do sborníku *Stroje na zpracování informací VI* z roku 1958, str. 239.

Slovníček

matematických výrazů

возрастать	růst, zvětšovat se
возрастающий	rostoucí
вокруг	kolem, v blízkosti
вообще	obecně, vůbec
восьмая часть	osmina
восьмерка	osmička
восстановить, восстанавливать	vztyčit, vést
восходящие степени	rostoucí mocniny
вписанный	vepsaný
вписанный угол	obvodový úhel
вращаться	rotovat, otáčet se
вращение	otáčení, pootočení, rotace
время	čas
вследствие	v důsledku, protože platí
вспомогательный	pomocný
всякий	každý
выбирать единицу	volit jednotku
выбор, выборка	volba, výběr
вывести	odvodit
вывод	odvození, závěr
выводить	odvodit, odvozovat
выделять	oddělit, vyznačit, vydělit
вымеривать	vyměřovat, měřit
вынести за скобки	vytknout ze závorky
выполнимый	proveditelný
выполнять	splňovat (podmínky), provést (na- значенý výkon)
выпуклый	konvexní
выражение	výraz
выраженный	vyjádřený
выражать	vyjadřovat
вырождаться	rozpadnout se, degenerovat
высота	výška
высшая алгебра	vyšší algebra
высчитывать	čítat, vyčíslovat
вытекать	vyplývat, plynout
вычеркивать	vyškrtnout
вычисление	výpočet
вычислительный	výpočtový, numerický, početní
вычислять	vypočítat (numericky)

вычитаемое
вычитание
вычитать
вычисление

menšitel (při odčítání)
odčítání
odčítat
počet, výpočet

Г

геодезия
геометрическая интерпретация
геометрическое место точек
геометрия аналитическая, Евклида,
занимательная, начертательная
гипербола
гипотенуза
гонометрия
горизонт
горизонтальный
градус
граница
грань
график
графическое изображение

geodezie
geometrické znázornění, interpre-
tace
geometrické místo bodů
geometrie analytická, euklidovská,
zajímavá, deskriptivní
hyperbola
přepona
goniometrie
horizont
vodorovný, horizontální
stupeň
hranice, mez
stěna (geometrického tělesa)
graf
grafické znázornění

Д

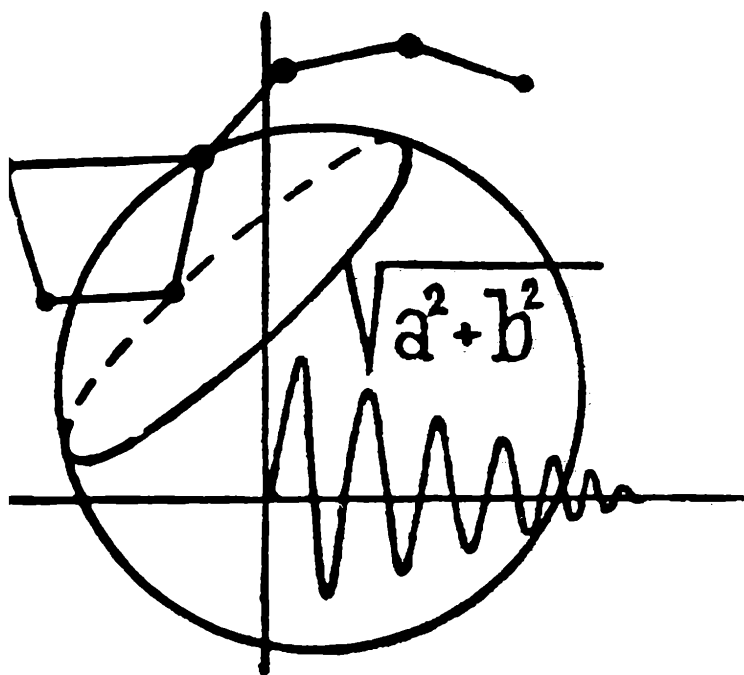
данные
двадцатигранник
дважды
двенадцатигранник
движок
двоичная система
двойной
двугранный угол
двучлен
действие
действительный
деление
делимое
делимость чисел
делитель, общий наибольший
делитель
дельтоид
делящийся на два
десятиугольник
десятичный
десятичный знак
десятая доля
диагональ, ж.
диаграмма
диаметр
дискриминант

dané (určující) prvky
dvacetistěn
dvakrát
dvanáctistěn
posuvná část logaritmického pra-
vítka
dvojková soustava (číselná)
dvojný, dvojitý
klín
dvojčlen
operace (algebraická apod.)
reálný, skutečný
dělení
dělenec
dělitelnost čísel
dělitel, největší společný dělitel
deltoid
dělitelný dvěma
desetiúhelník
desetinný
desetinné místo
desetina
úhlopříčka
diagram
průměr
diskriminant

(Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



6

ROČ. 42

1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Únor 1964

Číslo 6

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

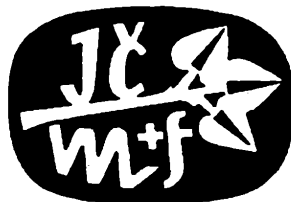
Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

Dr. R. Klötzler: Jednoduchá geometrická konstrukce hlavních os setrvačnosti	241
Doc. J. Schmidtmayer: Množina — jeden ze základních nástrojů moderní matematiky	245
Inž. V. Seifert: Kvadratura kruhu	248
Inž. J. Hroník: Jak určíme minimum funkce	253
Inž. M. Špačková: Statistika proniká na všechna pracoviště (Pokračování)	257
F. Kuřina: Z geometrie trojúhelníka (Dokončení)	262
J. Švandrlík: Řešení úloh o ploše kulové užitím mocnosti bodu ke kulové ploše	264
J. Mída: Fermatův princip	268
Doc. inž. dr. R. Servít: Stabilita ve stavební praxi (Pokračování)	272
J. Horský: Základy teorie relativity (Pokračování)	275
CSc. J. Sedláček: Dopravní problémy a matematika (Dokončení)	281
M. M.: Úloha o krychli	282
M. M.: Skládanka	283
J. Furthnerová-Schmidtmayerová: Kdo chová zebra a kdo pije vodu	283
J. Kotyk: Galileo Galiei	284
M. Zelenka: Rusko-český slovník	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Košar, studující FS.

A-04*41044



Dr. rer. nat. habil Rolf Klötzler,
Vysoká škola stavební, Lipsko:

Jednoduchá geometrická konstrukce hlavních os setrvačnosti

Psáno pro Rozhledy matematicko-fyzikální

Při výpočtech rotační energie těles se ve fyzice setkáváme s důležitým pojmem *moment setrvačnosti*. Máme-li místo tělesa soustavu n hmotných bodů M_i [x_i, y_i] ležících v rovině (přičemž $i = 1, 2, 3, \dots, n$), jejichž pravoúhlé souřadnice jsou x_i a y_i a příslušná hmota je m_i , pak (hmotným) momentem setrvačnosti této soustavy vzhledem k přímce p rozumíme výraz

$$J_p = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

v němž r_i udává vzdálenost bodu M_i od přímky p .

Snadno nahlédneme, že hodnota momentu setrvačnosti závisí na poloze přímky p vůči soustavě hmotných bodů; v praxi je velmi důležité, abychom ze všech přímek, které procházejí daným bodem T , vyhledali ony přímky, pro něž moment J_p je největší anebo nejmenší. Tyto přímky se nazývají *hlavní osy setrvačnosti* (soustavy hmotných bodů vzhledem k bodu T).

Pro dva hmotné body (tedy pro $n = 2$) lze hlavní osy setrvačnosti najít snadno, leží rovnoběžně, resp. kolmo ke spojnici $M_1 M_2$. Pro více než dva hmotné body je již značně obtížnější najít tyto osy čistě geometricky. Lze však pomocí diferenciálního počtu snadno dokázat, že osa x je hlavní osou setrvačnosti tehdy a jen tehdy, platí-li

$$m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + \dots + m_n x_n y_n = 0$$

čili

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i = 0.$$

Jestliže body M_i o stejné hmotě leží ve vrcholech pravidelného mnoho-

úhelníka, pak kterákoliv přímka, těžištěm mnohoúhelníka procházející, je hlavní osou setrvačnosti.

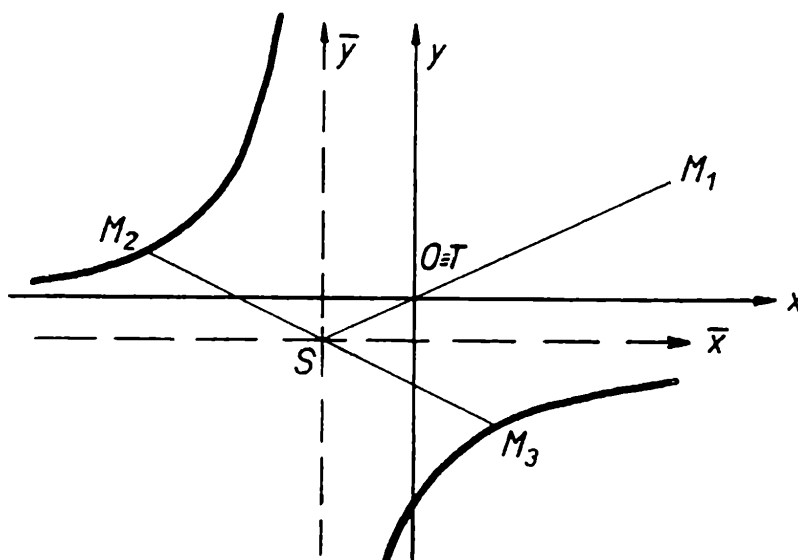
Ukážeme nyní, jak pomocí těchto dvou vět lze jednoduchými prostředky analytické geometrie konstruktivně najít hlavní osy setrvačnosti vzhledem k těžišti T rovinné soustavy tří bodů majících stejnou hmotu m .

Předpokládejme zatím, že souřadnicová soustava je položena tak, aby její počátek O splýval s těžištěm T dané soustavy tří bodů M_1, M_2, M_3 a že osa x je hlavní osou setrvačnosti.

Pak musí podle hořejší věty platit

$$m \sum_{i=1}^3 x_i y_i = 0, \text{ čili } x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 \quad (1)$$

Ježto počátek O je jak jsme předpokládali v těžišti T soustavy, musí kromě toho platit¹⁾



Obr. 1

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (2)$$

a

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0. \quad (3)$$

Vyjádříme-li ze (2) a (3) veličiny x_2, y_2 , resp. x_3, y_3 , obdržíme dosazením do (1) rovnice

$$x_1 y_1 + x_3 y_3 + (y_1 + y_3)(x_1 + x_3) = 0,$$

resp.

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + (y_1 + y_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

¹⁾ Souřadnice těžiště soustavy hmotných bodů se určují podle vzorců

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}, \quad y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

Protože zde je $m_1 = m_2 = m_3$, dále $x_T = 0, y_T = 0$, plyne z toho hořejší podmínka. (Poznámka redakce.)

To znamená, že body M_2 a M_3 splňují při daném M_1 rovnici

$$x_1 y_1 + x y + (y_1 + y)(x_1 + x) = 0,$$

čili

$$2 x y + y_1 x + x_1 y + 2 x_1 y_1 = 0 \quad (4)$$

Z toho naopak plyne: Splňují-li souřadnice bodů M_2 a M_3 rovnici (4) a současně také (2) a (3), je tím současně splněna podmínka (1).

Vztah (4) je rovnicí rovnoosé hyperboly, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné k osám x a y a jejímž středem je bod S , neboť vztah (4) je zřejmě ekvivalentní s rovnicí

$$2 \left(x + \frac{x_1}{2} \right) \left(y + \frac{y_1}{2} \right) + \frac{3}{2} x_1 y_1 = 0,$$

resp.

$$\bar{x} \bar{y} + \frac{3}{4} x_1 y_1 = 0$$

kde

$$\bar{x} = x + \frac{x_1}{2}, \quad \bar{y} = y + \frac{y_1}{2}$$

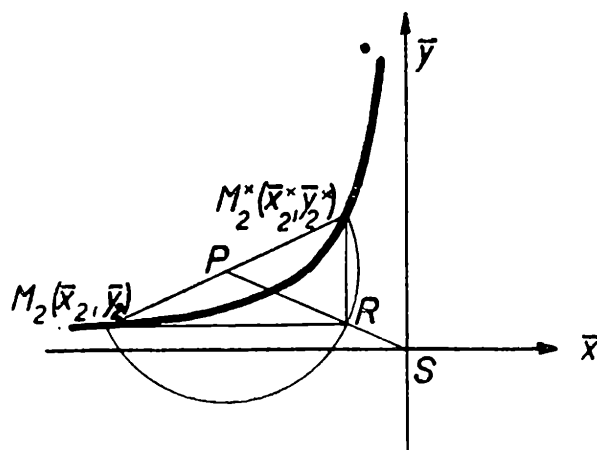
Body M_2 a M_3 tedy leží na této hyperbole (obr. 1).

Abychom pro daný libovolný $\triangle M_1 M_2 M_3$ našli asymptoty této hyperboly, stačí najít dvě různé bodové dvojice, které splňují jak podmínky (2) a (3), tak také rovnici (4), tj. $M_2, M_3; M_2^*, M_3^*$.

Takovou další bodovou dvojicí M_2^*, M_3^* jsou (podle poznámky v úvodu) ony body, které spolu s daným bodem M_1 tvoří rovnostranný trojúhelník o středě S .

Jsou-li body M_2, M_3 totožné s body M_2^*, M_3^* , je beztak každá osa jdoucí těžištěm T hlavní osou setrvačnosti, takže můžeme považovat body M_2^* a M_3^* za novou bodovou dvojici.

Vedeme-li bodem M_2^* rovnoběžku k ose \bar{y} a bodem M_2 rovnoběžku k ose \bar{x} (obr. 2), pak průsečík R těchto rovnoběžek leží podle elementární věty o rovnoosé hyperbole na spojnici bodu S s půlicím bodem P úsečky $M_2 M_2^*$.

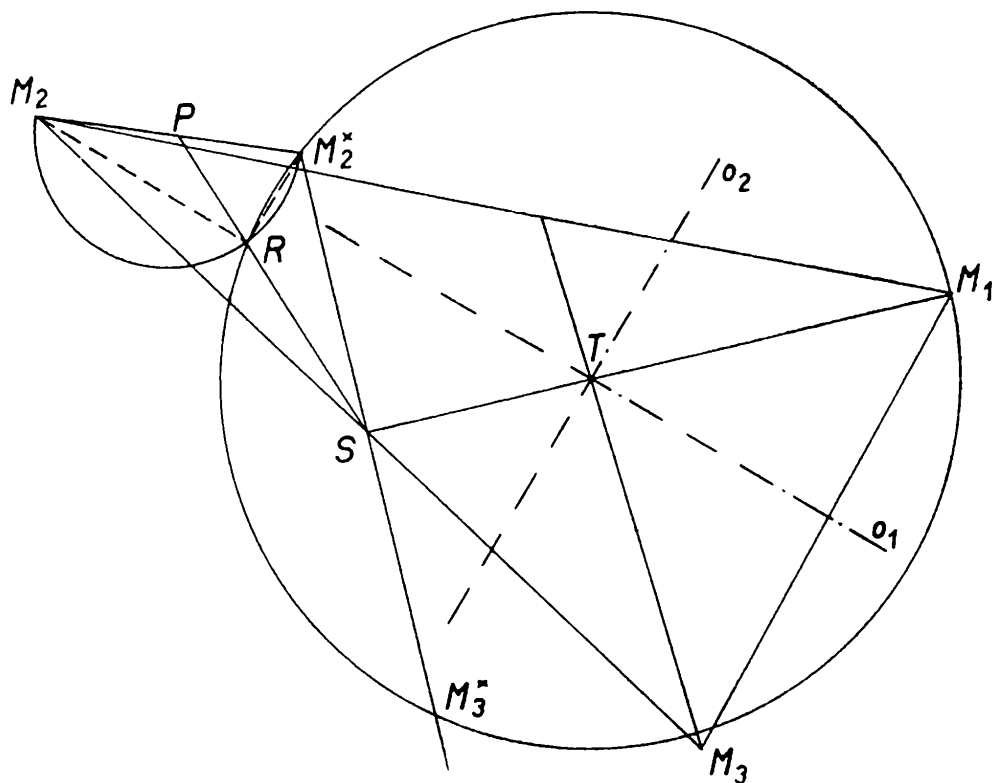


Obr. 2

Shrňme horejší vývody o metodě, podle které lze jen kružidlem a pravítkem sestavit hlavní osy setrvačnosti procházející těžištěm T tří hmotných bodů, takto:

1. Dány jsou hmotné body M_1, M_2, M_3 . Sestrojíme bod S jako půlicí bod úsečky M_2M_3 a bod T jako těžiště trojúhelníka $M_1M_2M_3$ (obr. 3).

2. Sestrojíme rovnostranný trojúhelník $M_2^*M_3^*M_1$, jehož těžištěm je rovněž T . (Bod M_2^* leží na téže straně od přímky TS jako M_2 .)



Obr. 3

3. Sestrojíme nad úsečkou $M_2M_2^*$ jakožto průměrem Thaletovu kružnici a určíme průsečík R , v němž tato kružnice protíná spojnicí půlicího bodu P úsečky $M_2M_2^*$ s bodem S .

4. Sestrojíme bodem T hlavní osy setrvačnosti $o_1 \parallel RS$, $o_2 \perp RS$ jak znázorněno na obr. 3.

Závěrem nutno podotknout, že tato konstrukce dává také hlavní osy setrvačnosti tzv. *plošného momentu setrvačnosti* trojúhelníka $M_1M_2M_3$.

Přeložil E v ž e n Ř í m a n, CSc.

Množina - jeden ze základních nástrojů moderní matematiky

Snad jste již zaslechli nebo v matematické literatuře viděli slovo *množina*. Při prvním setkání působí toto slovo dosti nezvykle. Bylo by však chybou podlehnout prvnímu ne právě příjemnému dojmu. Množina je totiž velmi užitečný nástroj matematiky, a čím dříve se s ním ten, kdo má zájem o matematiku seznámí, tím lépe. V tomto článku si ukážeme, jak množinová terminologie umožňuje vyjádřit stručnou a přehlednou matematickou řečí i takové skutečnosti, které mají velmi praktický a zdánlivě zcela nematematický smysl.

Množinou rozumíme soubor jakýchkoli věcí vybraných podle jisté zásady. Jednotlivé věci do množiny patřící pak nazýváme prvky oné množiny. Množiny budeme označovat velkými písmeny, např. M , N , L .

Pro lepší pochopení uvedené definice množiny si uvedme několik názorných příkladů.

Příklad 1. Označme M_1 množinu všech čísel přicházejících v úvahu ve Sportce. Pak čísla 1, 2, 3, ..., 48, 49 jsou prvky množiny M_1 . Je jich celkem 49.

Příklad 2. Označme M_2 množinu všech číselných šestic, které mohou být vylosovány v jednom týdnu ve Sportce. Prvky množiny M_2 jsou pak celé šestice čísel, jako např. (1, 19, 21, 33, 39, 47), nebo (16, 17, 29, 39, 41, 44) atd. Takových různých šestic je celkem 13 983 816 (uměli byste zdůvodnit proč?). A tak není divu, že první pořadí je velmi vzácné.

Příklad 3. Řekněme, že M_3 je množina všech elektrických spotřebičů (kromě svítidel) v jedné domácnosti. Prvky množiny budou tentokrát např.: pračka, vařič, robot, žehlička.

Příklad 4. Označme M_4 množinu všech bodů vyplňujících čtverec o straně $a = 4$ cm. Jednotlivé body uvnitř čtverce nebo na jeho obvodě jsou prvky množiny M_4 .

Uvedené příklady ukazují, že množina může mít konečný počet prvků (*konečná množina*), jako např. množiny M_1 , M_2 , M_3 , nebo nekonečně mnoho prvků (*nekonečná množina*), jako M_4 . Příklad 3. připouští ještě další možnost: není-li v domácnosti žádný elektrický spotřebič (např. kdesi na samotě, kde jediným podobným zařízením je žehlička, ale na dřevěné uhlí), nemá množina M_3 žádný prvek. Pak říkáme, že taková množina je *prázdná* a označujeme ji symbolem \emptyset .

Skutečnost, že věc a je prvkem množiny M , vyjadřujeme stručně takto: $a \in M$ (a čteme: a je prvkem množiny M , nebo a patří do množiny M apod.).

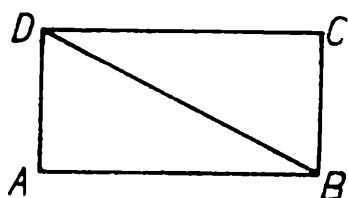
Může se ovšem stát, že každý prvek jedné množiny, např. N , je i prvkem jiné množiny, např. M . Pak říkáme, že množina N je částí množiny M , nebo že N je podmnožinou množiny M ; stručné vyjádření: $N \subset M$.

Příklad 5. Množina všech herců Národního divadla v Praze je podmnožinou všech herců v ČSSR.

Příklad 6. Množina všech výtisků populárních knih Julia Vernea a méně populárních učebnic matematiky pro střední školy všeho druhu vydaných v kalendářním roce 1962 v ČSSR je podmnožinou množiny všech výtisků z knižní produkce v témž období v ČSSR.

Příklad 7. Množina 20 krásných jahod z bulharské konzervy z r. 1962 je podmnožinou množiny všech jahod podrobených v r. 1962 v Bulharsku konzervárenskému zpracování.

Příklad 8. Množina bodů vyplňujících trojúhelník ABD je částí množiny bodů vyplňujících obdélník $ABCD$ (obr. 1).



Obr. 1

Ve zvláštním případě se může stát, že každý prvek množiny N je také prvkem množiny M a obráceně, každý prvek množiny M je prvkem množiny N . Pak říkáme, že množiny M a N jsou si rovny; označení $M = N$.

Příklad 9. Označme M množinu všech sudých přirozených čísel nikoli větších než 10. Označme N množinu všech celých čísel, jejichž polovina jsou rovny právě prvním pěti přirozeným číslům. Pak zřejmě $M = N$.

Seznámíme se ještě se dvěma pojmy nepostradatelnými při práci s množinami. Jsou to: *sjednocení* a *průnik dvou množin*.

Sjednocením (také *součtem*) S dvou množin M a N nazýváme množinu všech prvků, které patří buď do množiny M , nebo do množiny N . Označení $S = M \cup N$ nebo $S = M + N$.

Je zřejmé, že některé prvky množiny S mohou patřit jak do M , tak do N .

Příklad 10. Množinu M tvoří čísla 1, π , 4, $\sqrt{61}$, 19, množinu N tvoří čísla 3, 4, 5, 6, 18, 19, 100. Pak všechny prvky množiny $S = M \cup N$ jsou čísla 1, 3, π , 4, 5, 6, $\sqrt{61}$, 18, 19, 100.

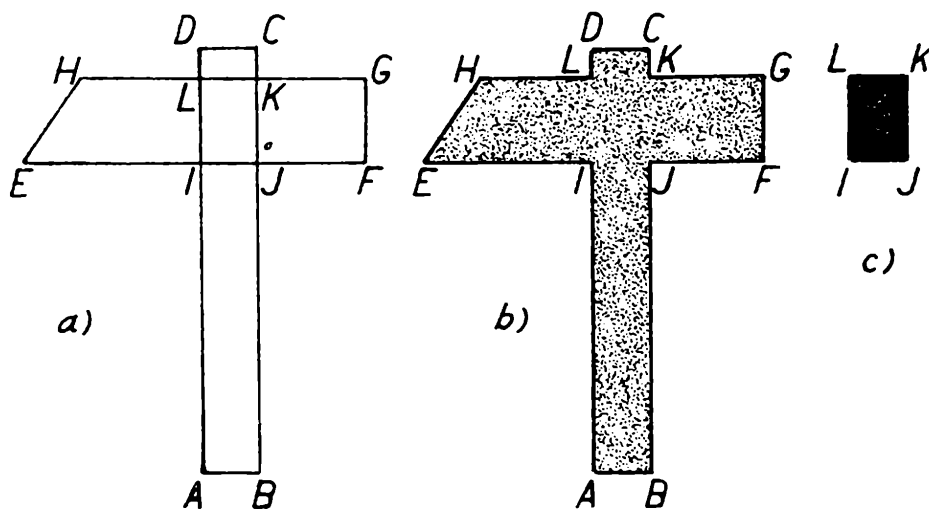
Příklad 11. Dohodněme se, že množinu M tvoří žáci a žákyně třídy 11a (je tam třeba 21 žáků a 16 žákyně). Podobně množinu N tvoří děvčata ze tříd 11a a 11b (je jich 16 a 14). Pak do množiny $S = M \cup N$ patří všichni, kdo chodí do třídy 11a a děvčata ze třídy 11b (tj. celkem $37 + 14 = 51$ osob).

Příklad 12. Označme M nekonečnou množinu bodů vyplňujících obdélník $ABCD$ a podobně N nekonečnou množinu bodů vyplňujících lichoběžník $EFGH$ (obr. 2a). Pak $S = M \cup N$ je nekonečná množina bodů vyplňujících útvar $ABJFGKCDLHEI$ připomínající siluetu kladívka (obr. 2b).

Průnikem (také součinem) P dvou množin M a N nazýváme množinu všech prvků, které patří zároveň do množiny M i do množiny N . Označení: $P = M \cap N$ nebo $P = M \cdot N$.

Příklad 13. Průnikem množin M a N z příkladu 10 je dvojice čísel 4, 19. Průnikem množin M a N z příkladu 11 je množina 16 žáků z třídy 11a. Průnikem množin M a N z příkladu 12 je nekonečná množina bodů vyplňujících obdélník $IJKL$ (obr. 2c).

Příklad 14. Nechť M značí nekonečnou množinu všech bodů trojúhelníku ABC , N nechť značí nekonečnou množinu všech bodů úsečky DE a L nekonečnou množinu bodů úsečky FG (obr. 3). Pak zřejmě $P_1 = M \cap N = E$, tj. průnik P_1 se redukuje na jediný bod E , kdežto $P_2 = M \cap L = \emptyset$, tj. průnik P_2 je množina prázdná.



Obr. 2

Důležitými množinami jsou *intervaly* reálných čísel zobrazované úsečkami na ose reálných čísel. Označme proměnné reálné číslo x a připomeňme základní symboliku a terminologii:

uzavřený interval $\langle a, b \rangle \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ (obr. 4a),
 otevřený interval $(a, b) \Leftrightarrow a < x < b$ (obr. 4b),
 polouzavřený interval $\langle a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$ (obr. 4c),
 polouzavřený interval $(a, b \rangle \Leftrightarrow a < x \leq b$ (obr. 4d).

Uvedeme nyní několik příkladů na sjednocení a průniky intervalů. Intervaly, jakožto nekonečné množiny bodů, budeme označovat písmenem J . Zobrazujte si situace z příkladů 15 až 19!

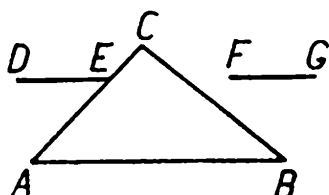
Příklad 15. Dáno: $J_1 = \langle 4; 26 \rangle$, $J_2 = (11; 39)$. Pak $S = J_1 \cup J_2 = \langle 4; 39 \rangle$, $P = J_1 \cap J_2 = (11; 26 \rangle$.

Příklad 16. Dáno: $J_1 = (-13; 47 >$, $J_2 = (0; 15)$. Pak $S = J_1 \cup J_2 = J_1$, $P = J_1 \cap J_2 = J_2$, neboť $J_2 \subset J_1$.

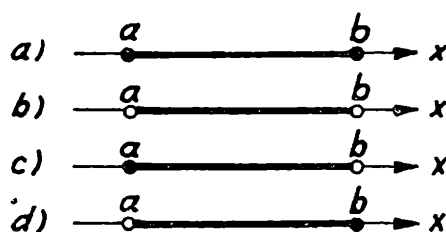
Příklad 17. Dáno: $J_1 = (-\infty; 3 >$, $J_2 = < 3; 4)$. Pak $S = (-\infty; 4)$, $P = 3$.

Příklad 18. Dáno: $J_1 = < 1; 9)$, $J_2 = < 9; 14)$. Pak $S = < 1; 14)$, $P = \emptyset$.

Příklad 19. Dáno: $J_1 = (-1; 3 >$, $J_2 = (4; 10)$. Pak $S = [(-1; 3 >, (4; 10)]$, $P = \emptyset$.



Obr. 3



Obr. 4

Elementární pojmy z teorie množin, jimiž jsme se zabývali v tomto článku, jsou výhodnou vyjadřovací pomůckou, např. při řešení nerovností. Konkrétní použití, zejména v souvislosti s v tomto článku stručně uvedenými poznámkami o intervalech, si ukážeme v článku jiném.

Inž. V á c l a v S e i f e r t, Praha:

Kvadratura kruhu

Již od dob starověkých filosofů jsou v matematice některé problémy, které nemohou být nikdy vyřešeny. Jedním takovým problémem je kvadratura kruhu, tj. geometrickými prostředky přeměnit kruh ve čtverec o stejném obsahu. I když každému, kdo se o matematiku trochu zajímá, je naprosto jasno, že tento problém vyřešit nelze, pokoušela se již řada matematických adeptů o najetí konstrukce, která by se tomuto problému co nejvíce přiblížila. Také já jsem se zabýval touto otázkou, a protože výsledek této mé zábavy je poměrně přesný, předkládám tuto *přibližnou konstrukci*.

Jak je patrné z nákresu konstrukce, můžeme postupovat takto:

1. Určíme bod D tak, že $SD = \frac{r}{2}$ a z tohoto bodu spustíme kolmici na přímkou AC . Tato kolmice protne kružnici k_1 v bodě E a přímkou AC v bodě F .

2. Rovnoběžka s AB vedená z bodu C protne rovnoběžku s osou SC vedenou z bodu D v bodě G .

Považujeme-li bod S za počátek souřadnicové soustavy, můžeme psát rovnici přímky

$$DE \equiv y = x - \frac{r}{2},$$

rovnici kružnice

$$k_1 \equiv y^2 + x^2 = r^2.$$

Řešením těchto rovnic dostaneme

$$x^2 - x r + \frac{r}{4} + x^2 = r^2,$$

$$8 x^2 - 4 r x - 3 r^2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{4 r \pm \sqrt{16 r^2 + 96 r^2}}{16},$$

neboli

$$x_E = \frac{r}{4} (1 + \sqrt{7})$$

Po dosazení této hodnoty do kružnice rovnice

$$k_2 \equiv \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + (y - r)^2 = 4 r^2$$

dostaneme

$$y^2 - 2 r y - \frac{r^2}{8} (20 + \sqrt{7}) = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{2 r \pm \sqrt{4 r^2 + \frac{r^2}{4} (20 + \sqrt{7})}}{2} = r \left(1 \pm \sqrt{\frac{28 + \sqrt{7}}{8}}\right)$$

je tedy

$$x_H = \frac{r}{4} (1 + \sqrt{7}); \quad y_H = r \left(1 - \sqrt{\frac{28 + \sqrt{7}}{8}}\right)$$

Položíme-li

$$\frac{1 + \sqrt{7}}{4} = a,$$

$$1 - \sqrt{\frac{28 + \sqrt{7}}{8}} = b,$$

takže

$$H \left(\frac{a r}{4}; b r \right);$$

a ježto je

$$F\left(\frac{3r}{4}; \frac{r}{4}\right),$$

bude rovnice přímky

$$FH \equiv y - \frac{r}{4} = \frac{br - \frac{r}{4}}{ar - \frac{r}{4}} \left(x - \frac{3r}{4}\right),$$

$$y = \frac{4b - 1}{4a - 3} \left(x - \frac{3r}{4}\right) + \frac{r}{4}$$

Dosadíme-li $y = 0$ (pro bod I), obdržíme

$$4bx - x - 3rb + \frac{3r}{4} - \frac{3r}{4} + ar = 0,$$

$$x_I = r \frac{a - 3b}{1 - 4b}$$

Rovnice přímky CI bude

$$y - r = \frac{-r}{r \frac{a - 3b}{1 - 4b}} x$$

a rovnice přímky DE

$$y = x - \frac{r}{2}$$

Řešením těchto rovnic dostaneme souřadnice bodu J

$$x - \frac{3r}{2} = \frac{x(4b - 1)}{a - 3b},$$

$$x(a - 7b + 1) = \frac{3r}{2}(a - 3b)$$

$$x_J = \frac{3}{2} r \frac{a - 3b}{a - 7b + 1}$$

Dále můžeme psát

$$\overline{JF^2} = 2(x_F - x_J)^2,$$

$$\overline{JF^2} = 2 \left(\frac{3}{4} r - \frac{3}{2} r \frac{a - 3b}{a - 7b + 1} \right)^2$$

$$\overline{JF^2} = 2 \left(\frac{3}{4} r \frac{1 - b - a}{a - 7b + 1} \right)^2$$

Z pravouhlých trojúhelníků JFC a ACL plyne

$$\overline{AL}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CL}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CJ}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CF}^2 + \overline{JF}^2$$

a po dosazení dostaneme

$$\overline{AL}^2 = 2r + \left(\frac{3}{4} r \sqrt{2}\right)^2 + \frac{9}{8} r^2 \left(\frac{1-b-a}{a-7b+1}\right)^2$$

Položíme-li

$$\left[2 + \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \left(\frac{1-b-a}{a-7b+1}\right)^2\right] = c^2,$$

je

$$\overline{AL}^2 = \overline{AM}^2 = c^2 r^2$$

Provedeme-li nyní vyčíslení a dosazení do získaných vzorců, zjistíme

$$a = \frac{1 + \sqrt{7}}{4} = 0,911\,437\,827\,766\,2$$

$$b = 1 - \sqrt{\frac{28 + \sqrt{7}}{8}} = -0,957\,222\,243\,612$$

$$c^2 = \left[2 + \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \left(\frac{1-b-a}{a-7b+1}\right)^2\right] = 3,141\,589\,353\,588\,062\,27$$

$$\overline{AM}^2 = c^2 r^2 = 3,141\,589\,35 r^2$$

Z toho plyne, že \overline{AM}^2 se již značně blíží obsahu kruhu. Další konstrukce slouží proto již jen k zmenšení nepřesnosti.

Dále platí
délka úsečky

$$SO = \frac{2r - AM}{2} = r \left(1 - \frac{c}{2}\right),$$

rovnice kružnice

$$k_3 \equiv x^2 + (y - r)^2 = r^2,$$

$$x^2 + y^2 = 2ry,$$

rovnice přímky

$$OP \equiv x = r \left(1 - \frac{c}{2}\right)$$

Řešením těchto rovnic dostaneme souřadnice bodu P

$$r^2 \left(1 - c + \frac{c^2}{4}\right) + y^2 = 2ry,$$

$$y^2 - 2ry + r^2 \left(1 - c + \frac{c^2}{4}\right) = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 - 4r^2 \left(1 - c + \frac{c^2}{4}\right)}}{2} = r \left(1 \pm \sqrt{c - \frac{c^2}{4}}\right),$$

$$y_P = r \left(1 - \sqrt{c - \frac{c^2}{4}}\right) \quad x_P = r \left(1 - \frac{c}{2}\right)$$

(Pokračování)

J a r o m í r H r o n í k, stav. inž., VUT, Brno:

Jak určíme minimum funkce

V technické praxi je často nutné stanovit nejmenší hodnotu nějaké funkční závislosti. Jak jsem již ukázal v článku *V y b r a n é ú l o h y o m i n i m e c h* v *Rozhledech* čís. 10, roč. 41 (1962–63), lze stanovení minima některých funkcí určit na základě nerovnosti, že aritmetický průměr dvou kladných čísel je vždy větší případně roven jejich geometrickému průměru. V tomto článku si ukážeme aplikace dalších nerovností k stanovení minima funkce.

Je-li $a > 0$, $b > 0$, pak platí nerovnost

$$a + b \geq \frac{4ab}{a + b}, \quad (1)$$

kde znaménko rovnosti nastává jen v tom případě, když $a = b$.

D ů k a z.

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0,$$

čili

$$(a - b)^2 \geq 0.$$

Je vidět, že na levé straně je čtverec reálného čísla, který je vždy kladný. Dále je zřejmé, že znaménko rovnosti nabývá platnosti tehdy a jen tehdy, když $a = b$.

Ukažme si nyní jakým způsobem lze užít této nerovnosti k řešení jedné fyzikální úlohy.

P ř í k l a d 1. Jak daleko je třeba umístit předmět od tenké čočky ohniskové délky f , aby vzdálenost jeho obrazu od předmětu byla nejkratší?

Vzdálenost předmětu od obrazu označme

$$l = a + b,$$

kde a je vzdálenost předmětu od čočky a b je vzdálenost čočky od obrazu. Z optiky je známo, že pro čočku nepatrné tloušťky platí vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (2)$$

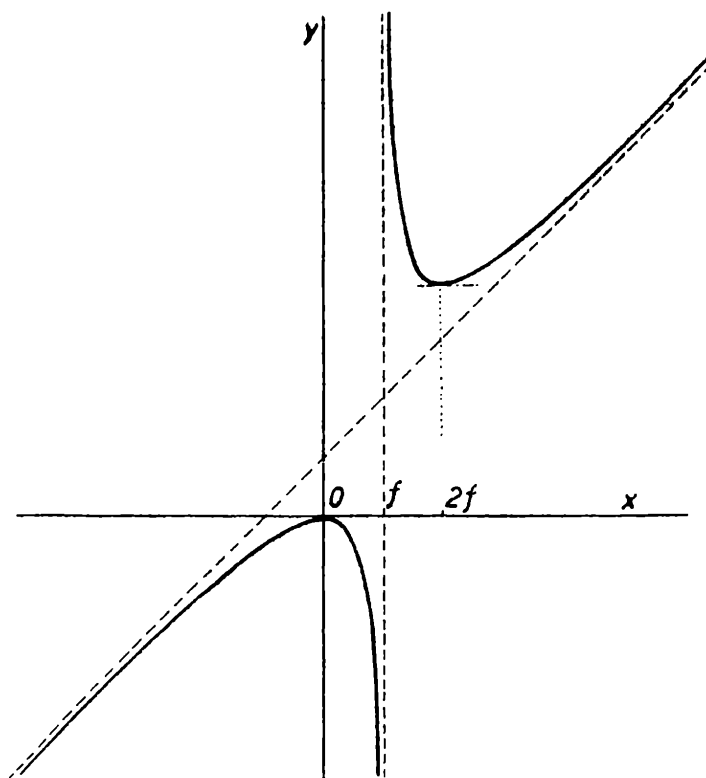
z toho

$$f = \frac{ab}{a + b}.$$

Užijme nerovnost (1).

Pak

$$a + b \geq 4f,$$



$$f(x) = \frac{x^2}{x-f}$$

Obr. 1

Součet $a + b$ bude vzhledem k pravé straně nerovnosti nejmenší jen tehdy, když nastane rovnost. A rovnost nastane, jak již bylo dokázáno, jen v případě $a = b$. Tudíž

$$2a = 4f.$$

z toho

$$a = 2f \quad \text{rovněž} \quad b = 2f,$$

pak

$$l_{\min} = 4f$$

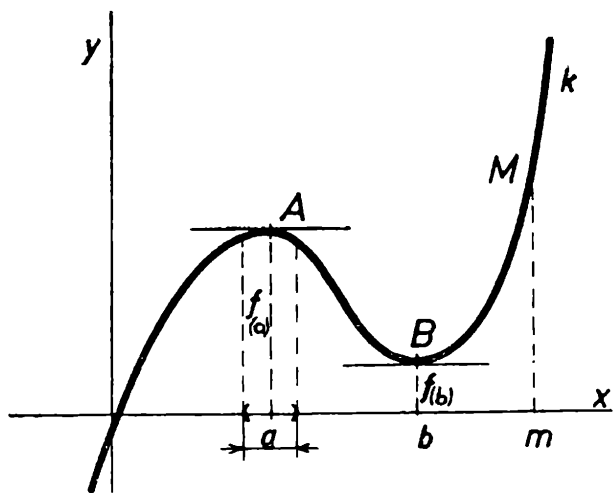
Zavedeme-li místo veličiny a proměnnou x , potom z rovnice (2) vyplývá, že $b = \frac{xf}{x-f}$ Úloha vede na funkci

$$f(x) = x + \frac{xf}{x-f},$$

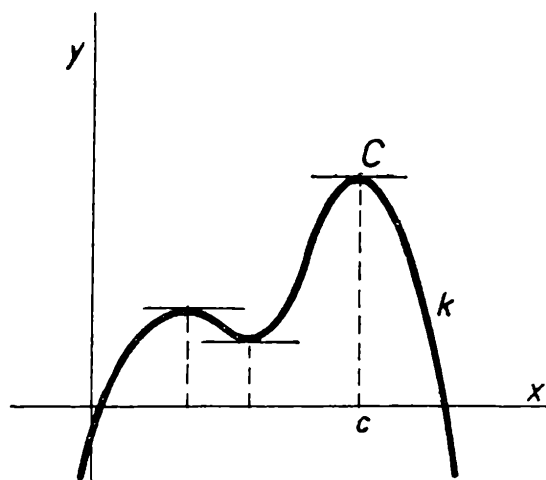
neboli

$$f(x) = \frac{x^2}{x-f}$$

kde f na pravé straně je kladná konstanta. Jak je vidět z obrázku, je lokální minimum¹⁾ této funkce právě v bodě $x = 2f$.



Obr. 2



Obr. 3

¹⁾ Funkce $y = f(x)$ má pro $x = a$ tzv. lokální maximum, jestliže tam má největší funkční hodnotu vzhledem k bodům v dostatečně malém okolí, tj. přesněji jestliže $f(a) > f(x)$ pro všechna $x \neq a$ z nějakého intervalu, obsahujícího bod o souřadnici x rovné a (viz obr. 1). To znamená, že na křivce k , která funkci $y = f(x)$ zobrazuje v pravoúhlých souřadnicích, má bod $A[a, f(a)]$ největší souřadnici y vzhledem k okolním bodům. Přitom však mohou existovat na této křivce i body o větších souřadnicích y než má bod A (např. bod M na obr. 1).

Obdobně má funkce $y = f(x)$ pro $x = b$ lokální minimum, jestliže souřadnice y bodu B [tj. $f(b)$] je nejmenší vzhledem k bodům křivky k z okolí bodu B .

V bodech, kde má funkce $y = f(x)$ lokální maximum nebo minimum (souhrnně lokální extrém), má křivka k tečnu rovnoběžnou s osou x (pokud tam ovšem tečna existuje).

Absolutním maximem pak rozumíme takový bod křivky k , jehož souřadnice y je největší vzhledem ke všem ostatním bodům grafu funkce $y = f(x)$; např. na obr. 2 nastává absolutní maximum pro $x = c$, tj. na křivce k má bod C souřadnici y větší než kterýkoliv jiný bod této křivky.

Podobně na obr. 3 má bod D souřadnici y menší než kterýkoliv jiný bod na křivce k , a proto říkáme, že pro $x = d$ má funkce $y = f(x)$ absolutní minimum.

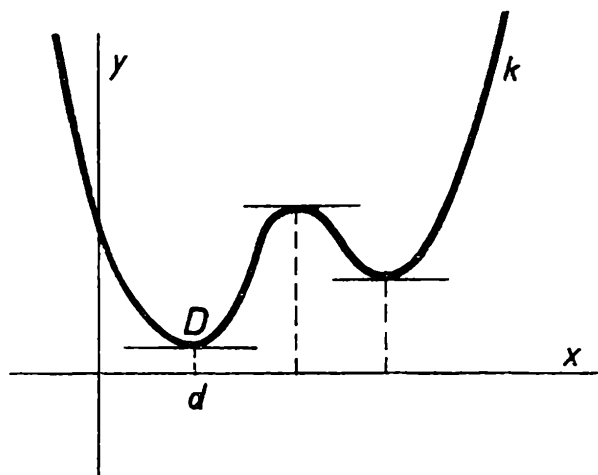
Redakce

Všimněme si ještě další nerovnosti

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{a + b}{2} \sqrt{2} \quad (3)$$

Znaménko rovnosti nastává opět jen v jediném případě, když $a = b$. Důkaz si mohou čtenáři snadno provést sami. Po vhodných úpravách dospěje se opět ke vztahu

$$(a - b)^2 \geq 0$$



Obr. 4

Příklad 2. Určete rozměry pravoúhlého trojúhelníka, který má při konstantním součtu odvěsen nejkratší přeponu.

Označíme-li součet odvěsen $a + b = k$, pak podle předcházející nerovnosti (3) platí

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{k}{2} \sqrt{2}$$

Levá strana nerovnosti, představující délku přepony, může nabýt vzhledem k pravé straně nejmenší hodnoty pouze v tom případě, když nerovnost přejde v rovnost. To nastane tehdy a jen tehdy, když $a = b$. Tudíž

$$a \sqrt{2} = \frac{k}{2} \sqrt{2}$$

čili

$$a = \frac{k}{2} \quad b = \frac{k}{2}$$

Dostáváme trojúhelník rovnoramenný o přeponě $c_{\min} = a\sqrt{2}$.

Jelikož $b = k - a$, pak po zavedení proměnné x místo veličiny a vychází, že řešení úlohy spočívá v určení minima funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + (k - x)^2}$, neboli $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2kx + k^2}$, kde $k > 0$. Toto minimum (v tomto případě *a b s o l u t n í*) nastává v bodě $x = \frac{k}{2}$.

Stanovení minima případně maxima funkce řešíme obecně ve vyšší matematice derivacemi. Co je to derivace funkce, její význam a užití, nalezne čtenář např. v sérii článků inž. Kriegelsteina, které vyšly v Rozhledech roč. 39 (čís. 7, 8, 9, 10) a roč. 40 (čís. 5, 6, 8). Odkazují zde na větu o lokálních extrémech funkce citovanou v Rozhledech roč. 40, čís. 6 (1961—62):

Má-li funkce $f(x)$ v určitém bodě c první derivaci $f'(c) = 0$ a druhou derivaci $f''(c) \neq 0$, pak pro $f''(c) > 0$ nastává v bodě c lokální minimum; pro $f''(c) < 0$ nastává v bodě c lokální maximum.

Proveďme řešení prvního příkladu podle této věty.

Stanovíme první a druhou derivaci funkce $f(x) = \frac{x^2}{x-f}$

$$f'(x) = \frac{x(x-2f)}{(x-f)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2f^2}{(x-f)^3}$$

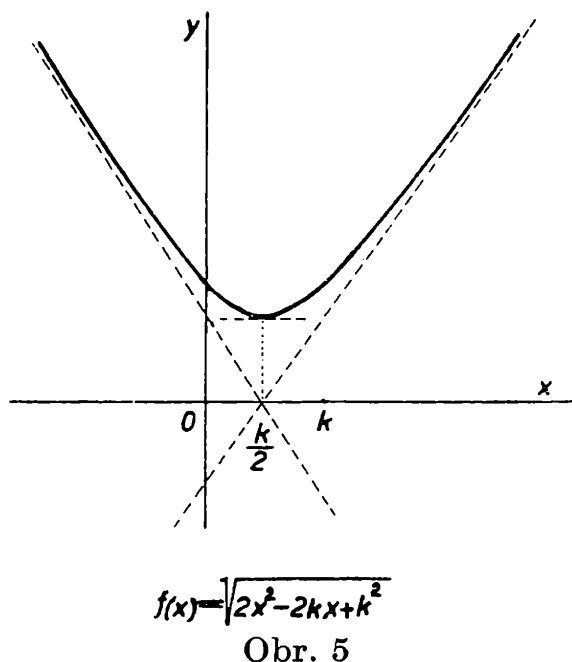
Položíme-li první derivaci rovnu nule, obdržíme dva kořeny

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2f.$$

Dosadíme-li tyto kořeny do druhé derivace vychází

$$f''(0) = -\frac{2}{f} \quad f''(2f) = \frac{2}{f}$$

Podle citované věty o lokálních extrémech nastává v bodě 0 lokální maximum a v bodě $2f$ lokální minimum. Podobným způsobem bychom mohli řešit i druhý příklad.



Inž. Miloslava Špačková, ČVUT, Praha:

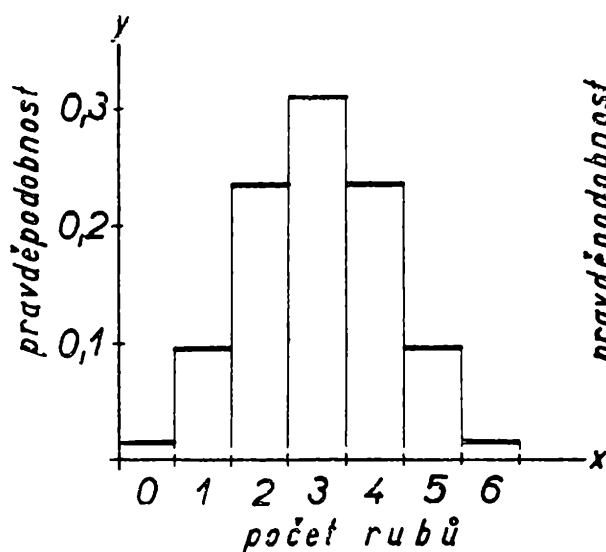
Statistika proniká na všechna pracoviště

(Pokračování)

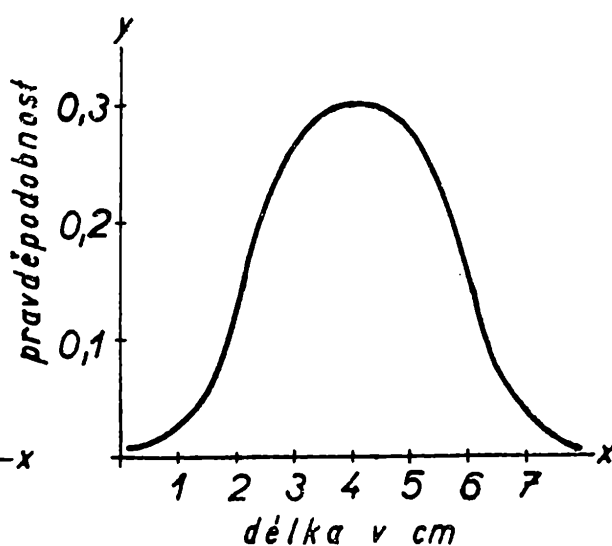
Rozdělení pravděpodobností. Podívejme se na obr. 1a, kde jsou na ose x naneseny hodnoty první řádky tabulky 2 a na ose pořadnic příslušné pravděpodobnosti z posledního řádku. Tento obrázek zvaný *histogram* znázorňuje *rozdělení* (rozložení, hustotu) *pravděpodobností*, které vlastně také definuje náhodnou veličinu. V případě spojité náhodné veličiny nazýváme rozdělení pravděpodobností *frekvenční* (pravděpodobností) *funkcí* a značíme $f(x)$. Příklad frekvenční funkce je na obr. 1b.

Distribuční funkce. V praktických případech se často vyskytuje otázka, jaká bude pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnot menších, případně rovných než předem daná hodnota. Odpověď

podává *distribuční funkce* $F(x)$, kterou dostaneme postupným sečítáním jednotlivých pravděpodobností.



Obr. 1a. Histogram rozdělení pravděpodobností při hodu šesti mincemi.



Obr. 1b. Frekvenční funkce spojité náhodné veličiny.

Rozlišujeme správně pravděpodobnost, že při hodu šesti mincemi padnou právě dva ruby (z tab. 2). $P(\xi = 2) = 0,234$, méně než 2 ruby $P(\xi < 2) = 0,110$ a nejvýš 2 ruby $P(\xi \leq 2) = 0,344$ (z tab. 3). Pravděpodobnost, že padne nejvýše šest rubů, tzn. $P(\xi \leq 6) = 1$. Je to jistota, protože určitě některý z případů nastat musí.

Tabulka 3

Počet rubů	0	1	2	3	4	5	6
Distribuční funkce	0,016	0,110	0,344	0,656	0,890	0,984	1,000

Z obrázků 2a a 2b, kde jsou distribuční funkce příslušné rozdělení pravděpodobností z obrázků 1a a 1b, dobře vidíme platnost vztahů

$$P(\xi < x_n) = F(x_n) = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$$

$$P(x_k \leq \xi < x_n) = F(x_n) - F(x_k)$$

Statistická indukce. Byli jste vyvoláni, vypočítali jste bezvadně pouze jeden příklad a vaše matematické vědomosti byly oceněny výbornou. Koupili jste jenom $\frac{1}{2}$ kg jablek a prohlásili, že v samoobsluze mají všechna jablka ošklivá. U lékaře vám odebrali jediný cm^3 krve a v nálezů stálo, že jste chudokrevný. Všude, na každém kroku se setkáváte s tím, že z nepatrného celku se usuzuje na celý soubor podobných

prvků, z evše obecněji se závěry (někdy i neoprávněně), získané z omezeného počtu pozorování. Tvoří se tzv. *indukční závěry*, které ovšem neplatí s naprostou jistotou. Pomocí pravděpodobnosti můžeme stupeň nejistoty měřit a tak statistické indukční závěry můžeme považovat za přesné.

Z á k l a d n í s o u b o r, n á h o d n ý v ý b ě r. Chceme-li zjistit svítivost žárovky, bezpečnost padáku, pevnost sváru apod., musíme provést zkoušky, při nichž se výrobek zničí. Je třeba znát cukernatost určitého druhu cukrovky, a přece je nemožné zničit celou úrodu laboratorními zkouškami. Docházíme k tomu, že veškeré informace o původním, tj. *základním souboru*, musíme získat pomocí statistické indukce z náhodně vybraných menších celků - *náhodných výběrů*. Je logické, že náhodný výběr bude tím lépe vystihovat základní soubor, čím bude jeho rozsah n větší, na druhé straně ovšem hospodářská stránka nás nutí dělat pokud možno malé výběry.

I n t e r v a l s p o l e h l i v o s t i. Dostaneme-li do rukou nějaký výsledek, bude nás zcela určitě zajímat, byl-li získán pomocí dvou prvků nebo dvou tisíc prvků a zcela určitě budeme věřit více výsledku, který je průměrem velkého počtu a jehož pravděpodobnost realizace je hodně blízká 1.

Jevy, jejichž pravděpodobnost je menší než $\frac{1}{2}$, považujeme za málo pravděpodobné. Při zpracovávání výsledků z praxe pracujeme obvykle s pravděpodobnostmi 0,90 nebo 0,95, popříp. 0,99 podle závažnosti případu. Znamená to, že tvrzení, které vyslovíme s pravděpodobností 0,95 bude platit v pětadevadesáti případech ze sta, a jen v pěti ze sta (tzn. každé dvacáté) se zmýlíme. Tak pomocí pravděpodobnosti zaručujeme přesnost, resp. spolehlivost výsledku. Určujeme pravděpodobnou chybu výsledku a pomocí ní potom *interval spolehlivosti*. Prohlásíme-li, že průměrný hektarový výnos pšenice je $28,4 \text{ q} \pm 0,2 \text{ q}$ s pravděpodobností $P = 0,90$, znamená to, že při 100 měřeních zjistíme, že u devadesáti případů se bude hektarový výnos pohybovat v mezích 28,2 q až 28,6 q a u deseti bude vně stanoveného intervalu.

P r ů m ě r, s m ě r o d a t n á o d c h y l k a. *Náhodný výběr* je jakýmsi zmenšeným obrazem základního souboru. Náhodné veličiny, počítané pomocí náhodného výběru nazýváme *charakteristiky*; mění se při každém výběru. Jim odpovídající konstantní hodnoty základního souboru nazýváme *parametry* a značíme je řeckými písmeny μ , σ . Charakteristiky mají povahu náhodných veličin a mají určité rozdělení pravděpodobností. Nejběžněji užívané charakteristiky jsou *aritmetický průměr* \bar{x} a *rozptyl* s^2 , resp. *směrodatná odchylka* s . Jim odpovídající hodnoty parametrů základního souboru jsou aritmetický průměr μ , rozptyl σ^2 a směrodatná odchylka σ .

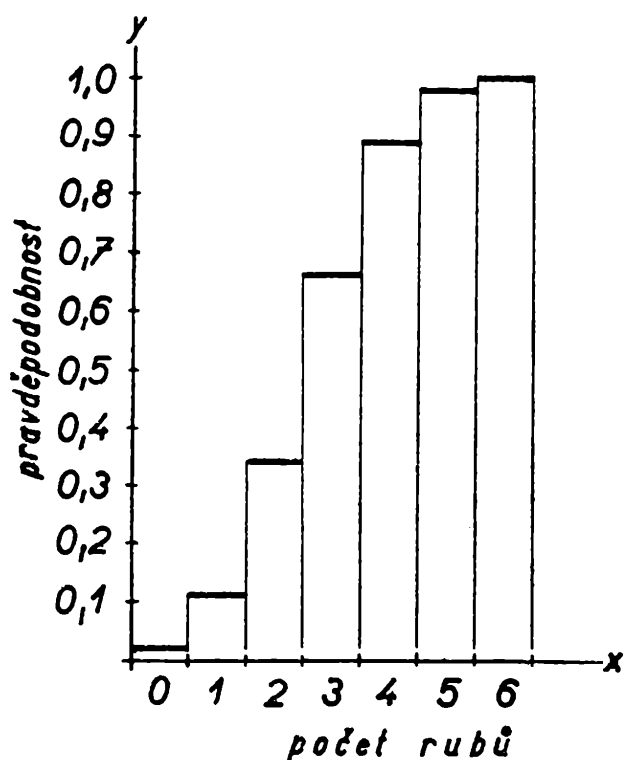
Způsob jejich výpočtu je většinou znám. Pro aritmetický průměr n

hodnot platí

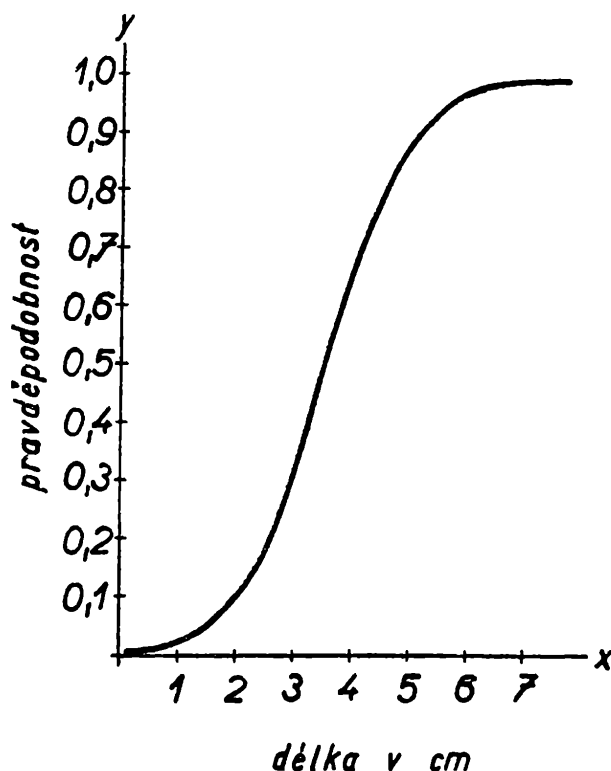
$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n),$$

pro rozptyl

$$s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2].$$



Obr. 2a. Distribuční funkce při hodu šesti mincemi.



Obr. 2b. Distribuční funkce spojitě náhodné veličiny.

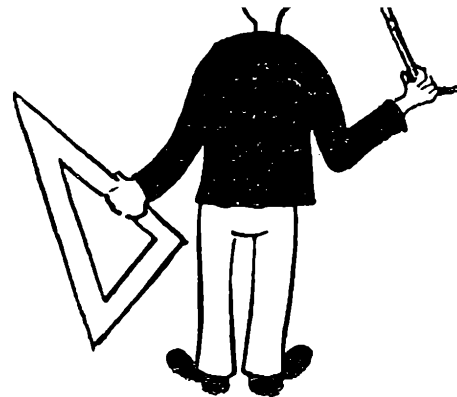
Tak např. pro hodnoty 8, 9, 10, 11, 12 je $\bar{x}_1 = 10$, pro hodnoty 0, 5, 10, 15, 20 je $\bar{x}_2 = 10$. Průměr je v obou případech stejný, charakterizuje pouze střední hodnotu, ale neříká nic bližšího o datech, z nichž byl vypočten. Tuto informaci nám podá rozptyl, což je průměr dvojnásobí odchylek od aritmetického průměru. V našich případech

$$s_1^2 = \frac{1}{5} (4 + 1 + 0 + 1 + 4) = 2, \quad s_2^2 = 50$$

Odmocnina rozptylu se nazývá *směrodatnou odchylkou* a je mírou pro rozptýlení hodnot kolem průměru. V našem případě $s_1 = 1,41$, $s_2 = 7,07$.

(Pokračování)

Deskriptivní geometrie



František Kuřina, PI, Hradec Králové:

Z geometrie trojúhelníka

(Dokončení)

Je dán libovolný ostroúhlý trojúhelník ABC . Považujme tento trojúhelník za axonometrický a sestrojme axonometrický obraz V_1 počátku V a obrazy V_1A , V_1B , V_1C souřadných os. Trojúhelníky ABV , BCV , ACV jsou pravoúhlé. Sestrojme v každém z nich střední příčky různoběžné s přeponou. V trojúhelníku ABV tak sestrojíme obdélník $XNYV$, jehož axonometrickým obrazem je rovnoběžník $X_1NY_1V_1$ v označení zavedeném na začátku článku. Stejně sestrojíme obdélníky $XVZM$, $YVZL$. Roviny MXN , NYL , MZL mají společný bod O . Podle konstrukce je $XNYVMOLZ$ kvádr. Axonometrický obraz bodu O je střed O_1 kružnice opsané trojúhelníku ABC . Axonometrická průmětna $\alpha \equiv \equiv ABC$ je totožná s rovinou LMN . V dalším píšme pro stručnost místo axonometrický obraz bodu (pravoúhlý průmět do roviny α) stručně průmět bodu atp.

Z vlastností kvádru vyplývá, že čtyřúhelníky $XYLM$ a $NXZL$ jsou obdélníky. Proto rovina XYZ je rovnoběžná s rovinou LMN a platí

$$\triangle XYZ \cong \triangle LMN$$

Označme (obr. 3) $g \equiv (G, \rho)$ kružnici opsanou trojúhelníku XYZ ; k kolmici k rovině XYZ v bodě G ; $F \equiv k \cdot \alpha$ průmět G do roviny α ; J , K středy stran LM , XY obdélníka $XYLM$; H , E středy stran XZ , NL obdélníka $NXZL$; I společný střed obdélníků $XYLM$ a $XZLN$; τ_1 rovinu kolmou k XY středem K (τ_1 prochází i body I , J); τ_2 rovinu kolmou k XZ středem H (τ_2 prochází i body I , E); ϵ je znak pro incidenci bodů a rovin atp.

Platí

$k \equiv \tau_1 \cap \tau_2$, $I \in k$, (neboť $I \in \tau_1$, $I \in \tau_2$);

FJ je osa strany ML $\triangle LMN$ (neboť $FJ \in \tau_1$, $\tau_1 \perp ML$);

FE je osa strany NL $\triangle LMN$ (neboť $FE \in \tau_2$, $\tau_2 \perp NL$).

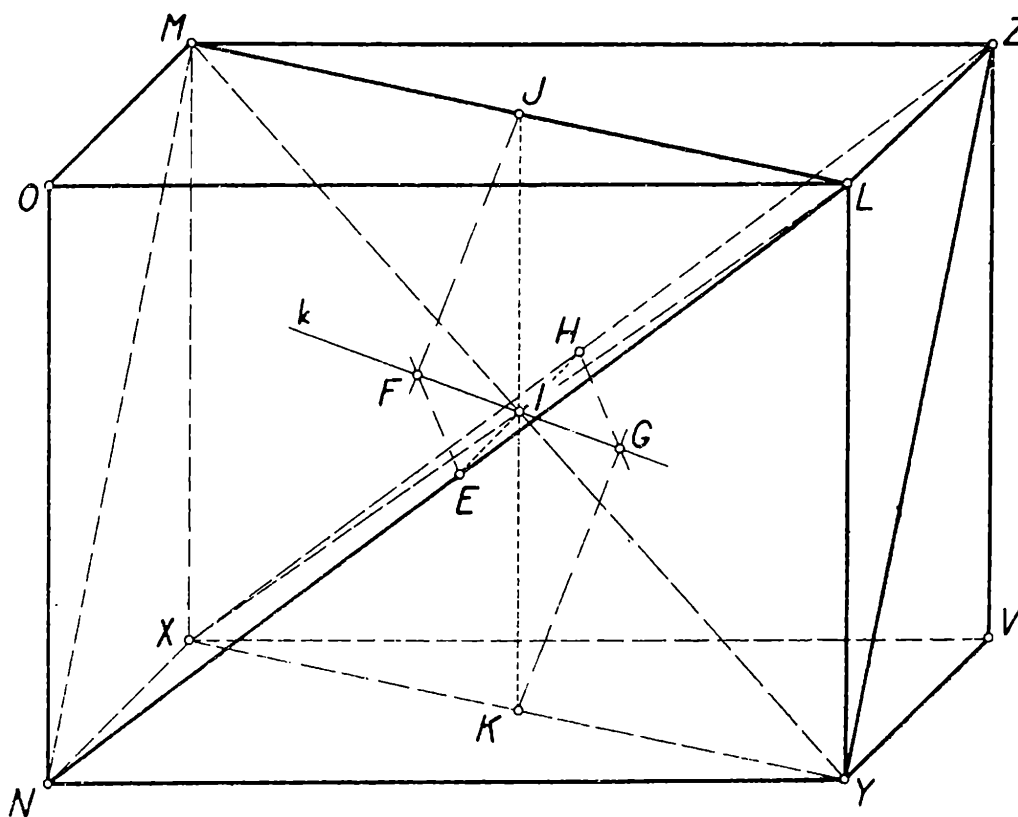
Je tedy F středem kružnice $f \equiv (F, \rho)$ opsané $\triangle LMN$. Protože $\triangle LMN \cong \triangle XYZ$ a jejich roviny jsou rovnoběžné, je průmětem kružnice g kružnice f opsaná $\triangle LMN$.

Tím jsme dokázali:

Kružnice opsaná $\triangle LMN$ obsahuje i body X_1, Y_1, Z_1 (průměty vrcholů trojúhelníka XYZ).

Protože střed I úsečky MY má průmět ve středu F kružnice f , je MY_1 průměrem a pata R výšky ke straně AC náleží rovněž kružnici f . Analogicky pro zbývající paty výšek trojúhelníka ABC .

Pro ostroúhlý trojúhelník je tím dokázána věta o kružnici devíti bodů na základě stereometrických úvah. Lze ji dokázat analogicky i pro tupoúhlý trojúhelník? Tupoúhlý trojúhelník ABC nelze považovat za axonometrický trojúhelník, ale například za trojúhelník označený v obr. 2 jako trojúhelník ABV_1 (je-li $\sphericalangle ACB$ tupý). Nechť si čtenář jako cvičení dokáže studovanou poučku i v tomto případě. Uvažte dále, že pro pravoúhlý trojúhelník je tvrzení studované věty zcela evidentní.



Obr. 3

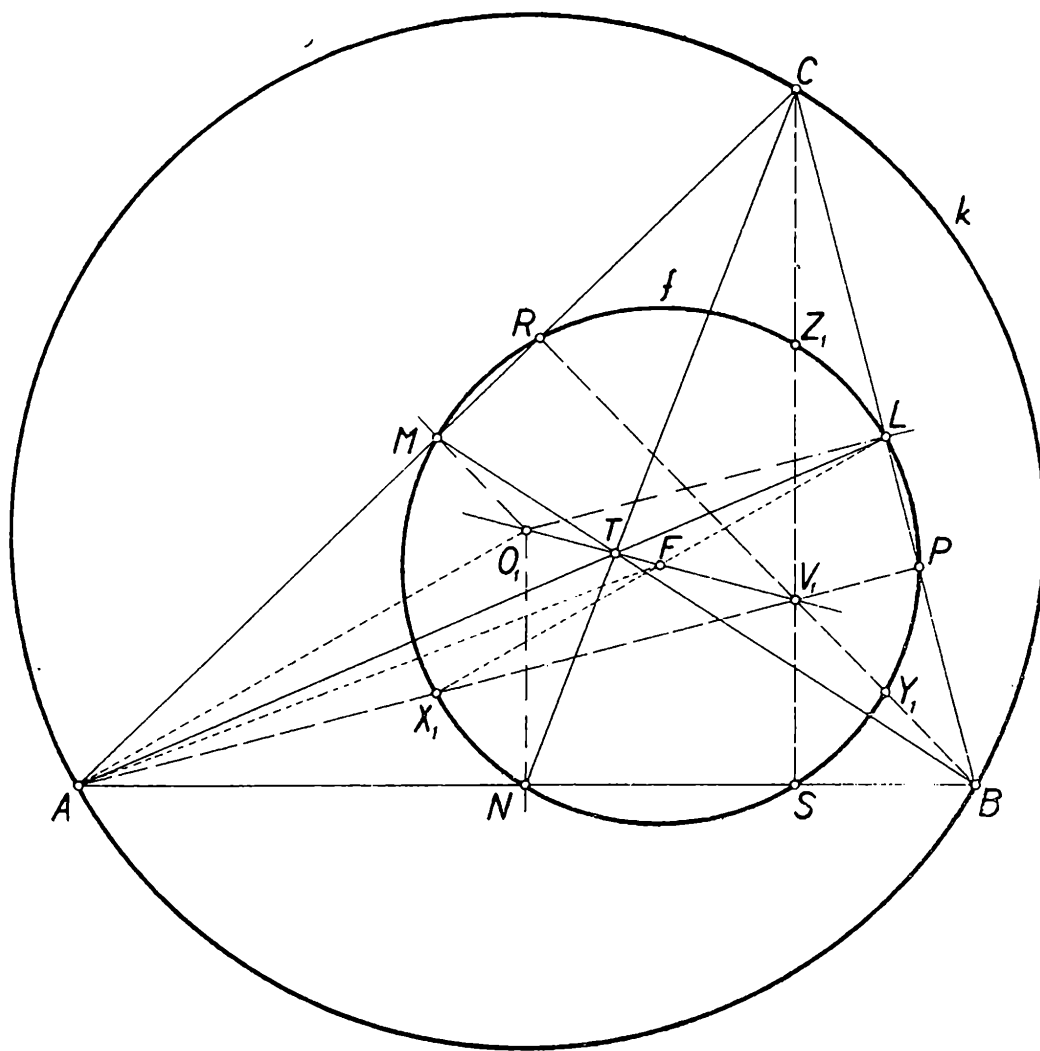
Obyčejně se studují vlastnosti kružnice devíti bodů s použitím stejnolehlosti. Ukažme si tento způsob důkazu, který vyžaduje znalost definice a základních vlastností stejnolehlosti, zvláště pak vět:

a) *Obrazem úsečky AB je ve stejnolehlosti $H \equiv (S, \kappa)$ (S je střed, κ koeficient stejnolehlosti) úsečka $A'B'$ s AB souhlasně rovnoběžná pro $\kappa > 0$, nesouhlasně rovnoběžná pro $\kappa < 0$. Pro velikost $A'B'$ platí: $A'B' = |\kappa| \cdot AB$.*

b) *Je dána stejnolehlost $H_1 \equiv (S_1, \kappa)$ a kružnice $k \equiv (O, r)$. Obrazem kružnice k ve stejnolehlosti H_1 je kružnice $k' \equiv (O', |\kappa| \cdot r)$. Existuje stejnolehlost $H_2 \equiv (S_2, -\kappa)$, která převádí kružnici k rovněž v kružnici k' .*

Ponechme označení zavedené na začátku článku. Navíc označme T těžiště trojúhelníka ABC (obr. 4).

Ve stejnolehlosti $H_1 \equiv \left(T; -\frac{1}{2}\right)$ je obrazem bodu A bod L (stručně $A \rightarrow L$), $B \rightarrow M$, $C \rightarrow N$. Protože obrazem výšky ke straně BC je osa strany BC a stejně i pro druhé výšky, je obrazem V_1 střed O_1 kružnice $k \equiv (O_1, r)$ opsané trojúhelníku ABC . Bod T leží tedy mezi body V_1 , O_1 a platí $TO_1 = \frac{1}{2} V_1T$. Podle věty b) je obrazem kružnice k ve stejno-



Obr. 4

lehlosti H_1 jistá kružnice $f \equiv \left(F, \frac{r}{2}\right)$, f prochází body L, M, N , pro její střed F platí $TF = \frac{1}{2} TO_1$, F leží mezi T, V_1 . Zřejmě pro velikost úseček platí $V_1F = FO_1$, F je mezi V_1, O_1 . Podle věty b) existuje kromě stejnolehlosti H_1 stejnolehlost $H_2 \equiv \left(S_2, \frac{1}{2}\right)$, která rovněž převádí kružnici k v kružnici f . V H_2 platí $O_1 \rightarrow F$, $FO_1 = FS_2$, F je mezi O_1, S_2 .

Platí tedy $S_2 \equiv V_1$. Ve stejnolehlosti $H_2 \equiv \left(V_1, \frac{1}{2}\right)$ přejde $A \rightarrow X_1$, $B \rightarrow Y_1$, $C \rightarrow Z_1$. Body X_1, Y_1, Z_1 jsou body kružnice f .

Podle věty a) je obrazem úsečky AO_1 ve stejnolehlosti H_1 úsečka LF , ve stejnolehlosti H_2 úsečka X_1F . Úsečky LF, X_1F jsou shodné a nesouhlasně rovnoběžné. X_1L je tedy průměrem kružnice f . Proto leží pata P výšky trojúhelníka ABC na f . Analogicky se dokáže, že i paty R, S jsou body kružnice f .

Závěrem upozorňuji na článek Josefa Langra ze 4. čísla 37. ročníku Rozhledů, kde je poučka o kružnici devíti bodů dokázána použitím trigonometrie.

J a n Š v a n d r l í k, Hořovice:

Řešení úloh o ploše kulové užitím mocnosti bodu ke kulové ploše

Současný rozsah osnov matematiky na středních školách nezahrnuje probírání jedné ze zajímavých vlastností kružnice a kulové plochy, a to mocnost bodu ke kružnici a kulové ploše. Nezahrnuje proto ani řešení těch úloh v rovině a prostoru, k jejichž řešení se využívá pojmu mocnosti.

Chtěl bych tuto mezeru částečně vyplnit tímto článkem, především pro ty žáky našich škol, kteří si chtějí své znalosti rozšířit a prohloubit.

Na závěr článku rozřeším podrobně jednu z úloh o ploše kulové. K jejímu řešení je nutná znalost pojmu mocnost bodu ke kulové ploše. Podobné úlohy pak předkládám čtenáři jako cvičení.

Přípravná část

Úkolem přípravné části je dokázat příslušné věty, jichž se v závěru používá k řešení úloh o ploše kulové. Článkem navazuji na znalost základních vztahů prostorové geometrie, především vlastností plochy kulové, jako: vzájemná poloha přímky a plochy kulové, roviny a plochy kulové, vlastnosti množin středů kulových ploch dané vlastnosti (procházejících dvěma různými body, dotýkajících se daných dvou rovin). Předpokládám také znalost pojmu *m o c n o s t b o d u k e k r u ž n i c i*. Tomuto pojmu byl věnován např. článek Jaroslava Šedivého v roč. 40 (1961–62), číslo 5, str. 207 tohoto časopisu. Přidržím se způsobu označení zavedeného ve zmíněném článku a pro úplnost uvádím definici a dvě z vět týkajících se mocnosti bodu ke kružnici (bez důkazu) přibližně v tom znění, jak je uvádí onen článek.

Definice 1. Mocností bodu X ke kružnici $k \equiv (S, r)$, $r > 0$, nazýváme číslo

$$m(X, k) = \overline{SX}^2 - r^2.$$

Poznámka 1. Pro zjednodušení úvah je účelné připustit též $r = 0$, popřípadě též $SX = 0$, tj. $S \equiv X$; mluvíme pak krátce o nulové kružnici (kružnici nulového poloměru), popř. o nulové úsečce.

Věta 1. Budiž dána kružnice $k \equiv (S, r)$, $r > 0$. Pak platí:

- a) Každý bod X má k dané kružnici jedinou mocnost;
- b) nejmenší mocnost k dané kružnici má její střed S , a to $m(S, k) = -r^2$;
- c) vnější body kružnice k mají mocnost kladnou a obráceně;
- d) body kružnice k mají mocnost nulovou a obráceně;
- e) vnitřní body kružnice k mají mocnost zápornou a obráceně;
- f) je-li X vnějším bodem k a T bod dotyku tečny vedené z bodu X ke k , je $m(X, k) = \overline{XT}^2$;
- g) množinou bodů X , jež mají ke k danou mocnost $m(X, k) \geq -r^2$, je kružnice $k' \equiv (S, r' = \sqrt{m(X, k) + r^2})$.

Věta 2. Budiž dána kružnice $k \equiv (S, r)$, $r > 0$ a bod X ; vedeme-li bodem X libovolnou sečnu protínající kružnici k v bodech A, B , platí $|m(X, k)| = XA \cdot XB$.

Poznámka 2. Obě věty jsou dokázány v uvedeném článku.

V dalším rozšíříme pojem mocnosti na situaci v prostoru. Mluvíme pak o mocnosti bodu ke kulové ploše v prostoru.

Definice 2. Mocností bodu X prostoru ke kulové ploše $\kappa \equiv (S, r)$ nazýváme číslo $M(X, \kappa) = \overline{SX}^2 - r^2$. (Je-li vyloučen omyl, píšeme zkráceně místo $M(X, \kappa)$ jen $M(X)$).

Věta 3. Nechť je v prostoru dána kulová plocha $\kappa \equiv (S, r)$. Pak platí:

- a) Každý bod X prostoru má k dané kulové ploše jedinou mocnost;
- b) vnitřní body kulové plochy mají mocnost zápornou a obráceně (nejmenší mocnost má střed S a to $M(S) = -r^2$);
- c) vnější body kulové plochy mají mocnost kladnou a obráceně;
- d) pro každý bod X kulové plochy je $M(X) = 0$ a obráceně;
- e) je-li X vnějším bodem κ a T bod dotyku tečny vedené z bodu X ke κ , je $M(X) = \overline{XT}^2$;
- f) množinou bodů X , jež mají ke κ danou mocnost $M(X) \geq -r^2$, je kulová plocha $\kappa' \equiv (S, r' = \sqrt{M(X) + r^2})$.

Důkaz. a) Každému bodu X je přiřazeno jediné číslo SX (velikost úsečky SX), a proto také jediné číslo $M(X) = \overline{SX}^2 - r^2$,

b) pro každý vnitřní bod X kulové plochy κ je $0 \leq SX < r \Rightarrow \overline{SX}^2 < r^2 \Rightarrow M(X) < 0$. Velikost (hodnota) čísla $M(X)$ závisí při daném r jen na vzdálenosti SX a bude proto nejmenší pro $S \equiv X$; v takovém případě je $M(X)_{\min} = -r^2$.

Obráceně: Je-li $M(X) = \overline{SX}^2 - r^2 < 0$, je $\overline{SX}^2 < r^2 \Rightarrow SX < r$, ale to znamená, že X je vnitřní bod kulové plochy κ ;

c), d) dokáže se podobně jako tvrzení b);

e) body S, X, T určují pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu T . Podle Pythagorovy věty je $\overline{XT}^2 = \overline{XS}^2 - r^2 = M(X, \kappa)$;

f) toto tvrzení je nutno dokázat ve dvou částech:

$$\alpha/M(X) = \overline{SX}^2 - r^2 \Rightarrow \overline{SX}^2 = M(X) + r^2 \geq 0 \Rightarrow SX = \sqrt{M(X) + r^2} \\ \Rightarrow X \in \kappa'(S, r')^1,$$

$$\beta/X \in \kappa' \Rightarrow SX = r' = \sqrt{M(X) + r^2} \Rightarrow r'^2 = \overline{SX}^2 = M(X) + r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{SX}^2 - r^2 = M(X, \kappa).$$

V ě t a 4. Nechť je dána kulová plocha $\kappa \equiv (S, r)$, $r > 0$ a bod X . Vedeme-li bodem X libovolnou sečnu protínající κ v bodech A, B , platí $XA \cdot XB = |M(X)|$.

D ů k a z Budeme rozlišovat dva případy:

1. nechť $X \equiv S$; potom $SX = 0$, a proto $M(X) = -r^2$; současně však $XA = XB = r$, a proto $XA \cdot XB = r^2 = |-r^2| = |M(X)|$;

2. nechť $X \neq S$ a nechť s, s' jsou libovolné dvě různé sečny procházející bodem X a protínající κ po řadě v bodech A, B, A', B' . Rovina ρ , v níž leží obě sečny, a tedy také všechny body X, A, B, A', B' , protíná κ v kružnici k' (má totiž s kulovou plochou κ více než jeden společný bod) a platí proto (z mocnosti $m(X, k')$ bodu X ke kružnici k')

$$XA \cdot XB = XA' \cdot XB' \quad (1)$$

Zbývá ještě dokázat, že hodnota uvedeného součinu je rovna $|M(X, \kappa)| = |\overline{SX}^2 - r^2|$. Jsou-li však s, s' dvě různé sečny, neprochází alespoň jedna z nich středem S , to znamená, že určuje s bodem S jedinou rovinu δ , protínající κ v hlavní kružnici $k \equiv (S, r)$. Nechť je to sečna s , jejíž společné body s κ jsou A, B . Pak však platí (podle vět o mocnosti bodu ke kružnici k)

$$XA \cdot XB = |m(X, k)| = |\overline{SX}^2 - r^2| = |M(X, \kappa)|. \quad (2)$$

Spojením vztahů 1, 2 dostáváme, že pro libovolnou sečnu platí

$$XA \cdot XB = |M(X, \kappa)|,$$

neboť s, s' byly dvě libovolné sečny.

P o z n á m k a 3. Je-li X vnějším bodem κ a je-li T dotykový bod libovolné tečny vedené z bodu X ke κ , je vidět geometrický význam čísla $M(X, \kappa)$. Platí totiž $M(X) > 0 \Rightarrow |M(X)| = M(X) = \overline{XT}^2 \Rightarrow XA \cdot XB = |M(X)| = M(X) = \overline{XT}^2$.

¹⁾ Znak \in znamená, že (v tomto případě) bod X je na kulové ploše κ' .

V ě t a 5. Nechť je dána rovina τ a uvnitř jednoho z obou poloprostorů dva různé body A, B tak, že $AB \nparallel \tau$, $AB \times \tau \equiv P$. Pak množinou dotykových bodů T kulových ploch dotýkajících se roviny τ a procházejících současně body A, B je kružnice $l \equiv (P, \bar{r} = \sqrt{PA \cdot PB})$ v rovině τ .

D ů k a z. Tvrzení věty 5 (stejně jako každé věty týkající se množiny bodů dané vlastnosti) dokážeme ve dvou krocích:

a) dokážeme, že dotykový bod T každé z kulových ploch procházející body A, B a dotýkající se současně roviny τ leží na kružnici l .

b) dokážeme, že každý z bodů T kružnice l je dotykovým bodem jedné z kulových ploch procházejících body A, B . Tuto část dokážeme tak, že takovou kulovou plochu sestrojíme.

D ů k a z tvrzení a). Nechť $\kappa \equiv (S, r = SA = SB)$ je libovolná z kulových ploch dané vlastnosti a T nechť je její dotykový bod s rovinou τ .

Zřejmě platí $r = SA = SB = ST > 0$, $ST \perp \tau$, $T \neq P$ (jinak spor, neboť přímka AB by měla s κ tři různé společné body $A, B, T \equiv P$, což není možné).

To však znamená $ST \perp PT$, a tedy trojúhelník STP je pravouhlý s pravým úhlem při vrcholu T .

Podle Pythagorovy věty je pak

$$\overline{PT}^2 = \overline{PS}^2 - \overline{ST}^2 = \overline{PS}^2 - r^2.$$

Protože P je vnější bod κ (jinak spor), je podle předcházejících vět a poznámky 3

$$M(P, \kappa) = |M(P, \kappa)| = PA \cdot PB = \overline{PT}^2.$$

Odtud dostáváme, že

$$PT = \sqrt{PA \cdot PB} = \text{konst.} \Rightarrow T \in l \equiv (P, \bar{r} = \sqrt{PA \cdot PB}).$$

D ů k a z tvrzení b). Zvolme libovolný bod $T \in l$. Dokážeme, že existuje kulová plocha $\kappa \equiv (S, r)$ taková, že se dotýká roviny τ v bodě T a prochází současně body A, B . Sestrojíme $\kappa \equiv (S, r)$, která se dotýká roviny τ v bodě T a prochází bodem A . Pak platí $ST \perp \tau$, $S \in q \perp \tau$, $T \in q$ a navíc $ST = SA = r$.

Zbývá dokázat, že také $B \in \kappa \equiv (S, r)$, tj. že $SB = SA = ST = r$. To dokážeme nepřímou:

Předpokládejme, že bod B není bodem sestrojené kulové plochy $\kappa \equiv (S, r = SA)$. Tento předpoklad znamená, že přímka $PA \equiv PB \equiv AB$ je buď tečnou κ a má s ní společný jediný bod A , nebo je sečnou κ a protíná ji ještě v bodě C , $C \neq B$, $C \neq A$. Případ, že by PA byla nesečnou odpadá, neboť má s κ společný bod A . Ukážeme, že ani jeden z uvedených případů nemůže nastat.

Případ první by znamenal $\overline{PA}^2 = \overline{PT}^2$ podle V3, V4, P3, což je spor s předpokladem, že $\overline{PT}^2 = PA \cdot PB \neq \overline{PA}^2$, neboť $PA \neq PB$.

Případ druhý by znamenal $\overline{PT}^2 = PA \cdot PC$ podle V3, V4, P3, což je

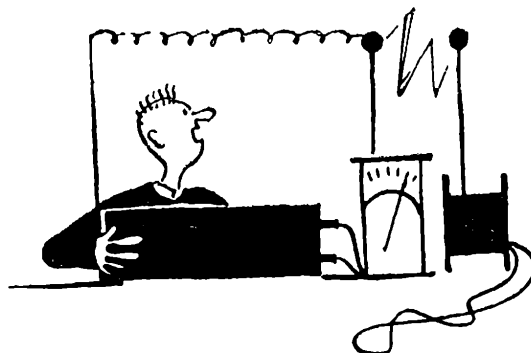
spor s předpokladem, že $\overline{PT}^2 = PA \cdot PB \neq PA \cdot PC$, neboť $PC \neq PB$.

Předpoklad, že bod B není bodem $\kappa \equiv (S, r = SA = ST)$, vede v obou možných případech ke sporu a musí proto platit, že bod B je bodem $\kappa \equiv (S, r = SA)$, což jsme chtěli dokázat.

(Pokračování)

Fyzika

Jiří Mída, Brandýs nad Labem:



Fermatův princip

Zabývejme se průchodem světla rovinným rozhraním ρ dvou opticky různých prostředí. Předpokládejme, že každé z těchto prostředí je opticky stejnorodé a izotropní. Rychlost světla v prostředí stejnorodém a izotropním je ve všech směrech a ve všech bodech stejně veliká. Označme rychlost v jednom z nich v_1 a ve druhém v_2 . V souladu s tímto značením mluvíme potom o prvním a druhém prostředí.

Zvolme si uvnitř prvního prostředí bod A_1 a uvnitř druhého bod A_2 tak, aby přímka A_1A_2 nebyla kolmá k rozhraní. V bodě A_1 umístíme světelný zdroj a budeme hledat dráhu světla šířícího se z bodu A_1 prvním prostředím a po projití rozhraním druhým prostředím do bodu A_2 . Bod této dráhy ležící na rozhraní označme B_0 . Části dráhy A_1B_0 a B_0A_2 jsou úsečky, neboť stejnorodým prostředím se světlo šíří přímočaře. Dráha, která spojuje body A_1 a A_2 , se skládá ze dvou úseček, které mají společný krajní bod B ležící v rozhraní; zbývající krajní bod je u jedné A_1 a u druhé A_2 . Tyto křivky nazýváme *přípustnými drahami* světla z bodu A_1 do bodu A_2 . Každá z nich je jednoznačně určena bodem B ležícím v rozhraní.

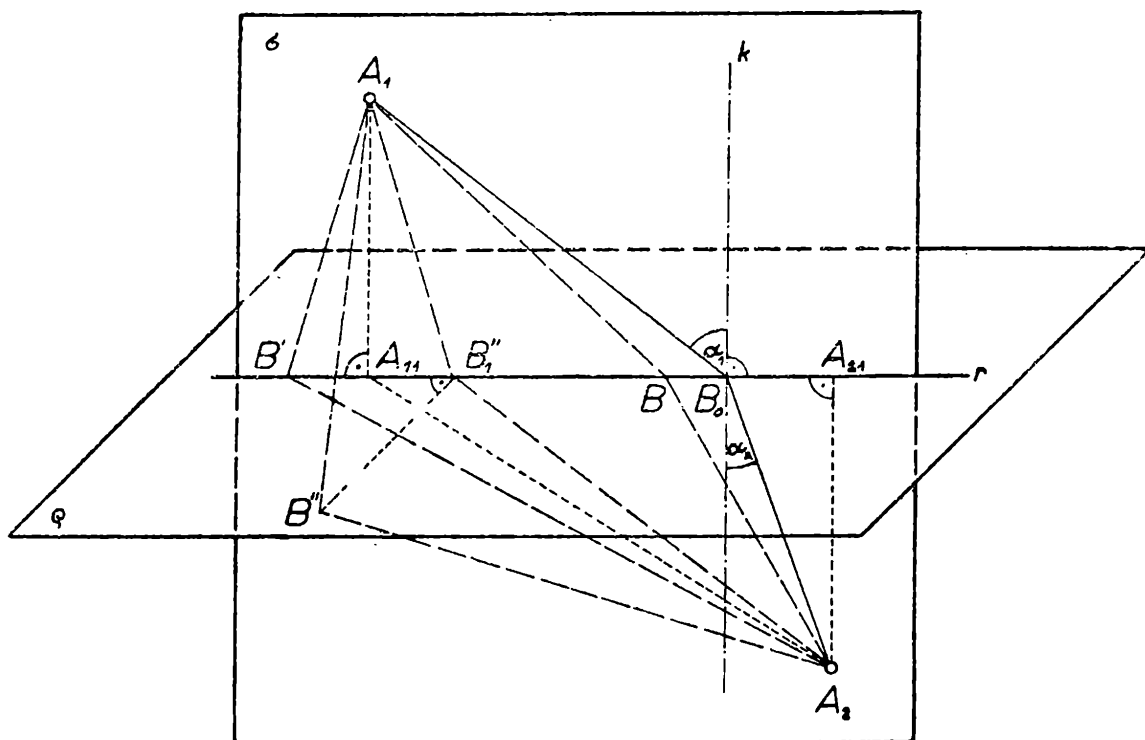
Skutečná dráha světla je samozřejmě přípustnou drahou. Je jisté na místě otázka, čím se liší skutečná dráha od ostatních přípustných drah. Nejdříve však musíme skutečnou dráhu blíže popsat. Podle známého zákona pro lom světla (paprsek lomený zůstává v rovině dopadu) obsahuje v tomto případě rovina dopadu σ bod A_2 . V rovině dopadu samozřejmě leží bod A_1 a kolmice dopadu, tj. přímka k kolmá k rozhraní a procházející bodem B_0 . Z uvedeného plyne, že skutečná dráha světla se nalézá v rovině, která je kolmá k rozhraní a obsahuje body A_1 a A_2 . Bod B_0 může ležet jedině na průsečnici r této roviny s roz-

hraním. Polohu bodu B_0 omezíme jenom na část přímky r . Z Huygensova výkladu lomu plyne, že dopadající a lomený paprsek leží v navzájem opačných polorovinách určených kolmicí dopadu. Jestliže označíme A_{11} patu kolmice vedené z bodu A_1 na přímku r , podobně A_{21} patu kolmice z bodu A_2 na r , potom bod B_0 je vnitřním bodem úsečky $A_{11}A_{21}$. Dále jak známo platí zákon Snelliův

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

jenž lze psát také ve tvaru

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} - \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = 0, \quad (1)$$



Obr. 1

kde α_1 je úhel dopadu a α_2 úhel odrazu (obr. 1).

Nechť bod B leží uvnitř úsečky $A_{11}B_0$ nebo $B \equiv A_{11}$. Podle kosinové věty v $\triangle A_1B_0B$ platí

$$\overline{A_1B}^2 = \overline{A_1B_0}^2 + \overline{B_0B}^2 - 2 A_1B_0 \cdot B_0B \cos (90^\circ - \alpha_1).$$

Pro každé α_1 je $\cos (90^\circ - \alpha_1) = \sin \alpha_1$. Dále je $0 < \alpha_1 < 90^\circ$, takže $0 < B_0B \cdot \sin \alpha_1 < B_0B$.

Tudíž

$$\overline{A_1B}^2 > \overline{A_1B_0}^2 + (\overline{B_0B} \cdot \sin \alpha_1)^2 - 2 A_1B_0 \cdot (B_0B \sin \alpha_1),$$

takže vzhledem k nerovnostem

$$B_0B \sin \alpha_1 < B_0B \leq A_{11}B_0 < A_1B_0$$

platí

$$A_1B > A_1B_0 - B_0B \cdot \sin \alpha_1$$

Světlo se z bodu A_1 do bodu B rozšíří za dobu $\frac{A_1B}{v_1}$, pro níž tedy platí

$$\frac{A_1B}{v_1} > \frac{A_1B_0}{v_1} - B_0B \frac{\sin \alpha_1}{v_1}, \quad (2)$$

kde $\frac{A_1B_0}{v_1}$ je doba, za níž světlo dorazí z bodu A_1 do bodu B_0 .

Uvažujme v $\triangle A_2B_0B$ kosinovou větu

$$\overline{BA_2^2} = \overline{B_0A_2^2} + \overline{B_0B^2} - 2 B_0A_2 \cdot B_0B \cos (90^\circ + \alpha_2)$$

Jelikož $0 < \alpha_2 < 90^\circ$, je $0 < B_0B \sin \alpha_2 < B_0B$. Přihlédneme-li dále k tomu, že $\cos (90^\circ + \alpha_2) = -\sin \alpha_2$, dostáváme

$$\overline{BA_2^2} > \overline{B_0A_2^2} + (B_0B \sin \alpha_2)^2 + 2 B_0A_2 \cdot (B_0B \sin \alpha_2),$$

takže

$$BA_2 > B_0A_2 + B_0B \sin \alpha_2.$$

Z bodu B do bodu A_2 dorazí světlo za dobu $\frac{BA_2}{v_2}$, pro níž tedy platí

$$\frac{BA_2}{v_2} > \frac{B_0A_2}{v_2} + B_0B \frac{\sin \alpha_2}{v_2}, \quad (3)$$

kde $\frac{B_0A_2}{v_2}$ je doba, za níž se světlo rozšíří z bodu B_0 do bodu A_2 . Po přípustné dráze dané bodem B by se světlo z bodu A_1 do bodu A_2 rozšířilo za dobu $\frac{A_1B}{v_1} + \frac{BA_2}{v_2}$, pro kterou podle (2) a (3) platí

$$\frac{A_1B}{v_1} + \frac{BA_2}{v_2} > \frac{A_1B_0}{v_1} + \frac{B_0A_2}{v_2} - B_0B \left(\frac{\sin \alpha_1}{v_1} - \frac{\sin \alpha_2}{v_2} \right)$$

Po přihlednutí k (1) dostáváme

$$\frac{A_1B}{v_1} + \frac{BA_2}{v_2} > \frac{A_1B_0}{v_1} + \frac{B_0A_2}{v_2} \quad (4)$$

Jaký je fyzikální význam nerovnosti (4)? Říká, že doba, za níž by se světlo rozšířilo z bodu A_1 do bodu A_2 po přípustných drahách, jejichž bod B je vnitřním bodem úsečky $A_{11}B_0$, nebo jejím krajním bodem A_{11} , je vždy delší než skutečná doba, za níž se světlo rozšíří z A_1 do A_2 .

Platí tento závěr jen pro právě uvedené přípustné dráhy? Zvolme si bod B' ležící uvnitř opačné polopřímky k polopřímce $A_{11}B_0$. Úsečka A_1B' je přeponou v pravoúhlém $\triangle B'A_{11}A_1$, tudíž

$$A_1B' > A_1A_{11} \quad (5)$$

Trojúhelník $A_{11}A_{21}A_2$ je také pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A_{21} , takže $\sphericalangle A_2A_{11}A_{21}$ je ostrý a tudíž $\sphericalangle B'A_{11}A_2 = 180^\circ - \sphericalangle A_2A_{11}A_{21}$ je tupý, tj. $\triangle B'A_{11}A_2$ je tupouhlý a platí

$$B'A_2 > A_{11}A_2. \quad (6)$$

Podle (5) a (6) platí

$$\frac{A_1B'}{v_1} + \frac{B'A_2}{v_2} > \frac{A_1A_{11}}{v_1} + \frac{A_{11}A_2}{v_2}$$

Bod B může splynout s bodem A_{11} , takže podle (4) je

$$\frac{A_1B'}{v_1} + \frac{B'A_2}{v_2} > \frac{A_1B_0}{v_1} + \frac{A_2B_0}{v_2}. \quad (4')$$

Vlastnost vyjádřená nerovností (4) tedy platí pro všechny přípustné dráhy, jejichž bod B je vnitřním bodem polopřímky B_0A_{11} . Postupem, který jsme užili pro důkaz tohoto tvrzení, se dokáže, že (4) platí i pro přípustné dráhy, jejichž body B leží uvnitř polopřímky B_0A_{21} .

Zabývejme se dosud nevyšetřovanými přípustnými drahami. Zvolme si bod B'' ležící v rovině ρ , ale nikoli na přímce r . Označme B_1'' pravoúhlý průmět bodu B'' do roviny σ . Z kolmosti rovin ρ a σ plyne, že bod B_1'' leží na jejich průsečnici r . Platí

$$A_1B'' > A_1B_1'', \quad B''A_2 > B_1''A_2 \quad (7)$$

Bod B_1'' leží na přímce r , tudíž pro něj platí (4), vyjma $B_1'' \equiv B_0$, kdy je nutno ve (4) znamení nahradit rovnítkem. Vzhledem k nerovnostem (7) platí tedy pro bod B''

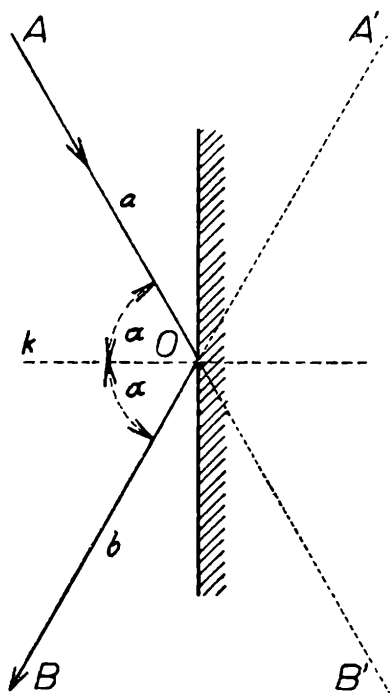
$$\frac{A_1B''}{v_1} + \frac{B''A_2}{v_2} > \frac{A_1B_0}{v_1} + \frac{B_0A_2}{v_2} \quad (4'')$$

Tím jsme vlastnost (4) dokázali pro každou přípustnou dráhu, pokud $B \not\equiv B_0$. Kdyby se tedy světlo šířilo po přípustných drahách, potom skutečná dráha by byla ta přípustná dráha, po níž by se světlo nejrychleji rozšířilo z bodu A_1 do bodu A_2 .

Vlastnost skutečné dráhy světla, k níž jsme právě došli, vyplývá z *Fermatova principu*, který formuloval francouzský matematik *Pierre Fermat* (1601—1665) takto:

Světlo se šíří z bodu A_1 do bodu A_2 po takové křivce, že doba potřebná k proběhnutí světla po této křivce je vzhledem k dobám nutným k proběhnutí světla po libovolných křivkách jiných, které spojují body A_1 a A_2 , minimální.

V tomto pojetí pochází princip přímo od Fermata. Později se ukázalo, že existují i případy, kdy je tato doba naopak největší možná, a že konečně lze nalézt i takové případy, kdy není tato doba ani minimální, ani maximální. Chceme-li formulovat Fermatův princip tak, aby platil vždy, je k tomu nutno užít prostředků poměrně málo známého variačního počtu. Právě proto se obvykle uvádí Fermatův princip v jednoduchém původním pojetí, se kterým se také ve většině případů vystačí.



Obr. 2

v níž leží na obr. 2 zrcadlo. Důkaz naleznete též ve 3. svazku Školy mladých matematiků, který napsal Jaroslav Šedivý a jmenuje se Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách.

Souvislosti Fermatova principu a zákona odrazu se dotýká poslední věta čl. 70 v pokusné učebnici fyziky pro 10. ročník JSS: Lze dokázat, že dráha ab je nejkratší ze všech drah, které vzniknou spojením kteréhokoli bodu zrcadla Z s body A a B na přímkách a a b (obr. 2). Pokuste se tento důkaz provést pomocí osové souměrnosti podle přímky,

Doc. inž. dr. Radim Servít, ČVUT, Praha:

Stabilita ve stavební praxi

(Pokračování)

Zmíníme se právě aspoň ještě o jednom případě stability, který je prakticky nesmírně důležitý a jehož historie řešení je velmi zajímavá. Od předcházejícího se podstatně liší tím, že ztráta stability konstrukce se projeví změnou jejího tvaru. (V předchozím případě šlo o pohyb konstrukce jako celku, beze změny tvaru.)

Jde o vyšetřování stability tělesa ve tvaru poměrně dlouhého přímého hranolu, které je namáháno na obou koncích silami působícími jako tlaky ve směru jeho osy. Tělesům tohoto tvaru říkáme ve statice stavebních konstrukcí *přímé pruty* a mluvíme tedy o vyšetřování stability *osově tlačeného přímého prutu*.

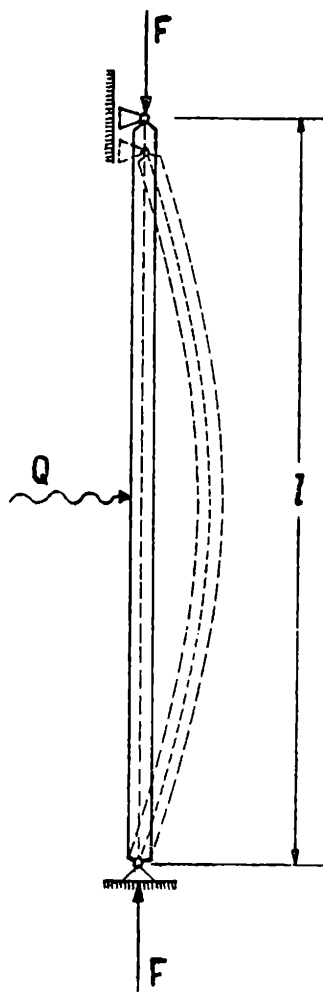
Osově tlačенý prut se může porušit v podstatě dvojím způsobem. Není-li příliš štíhlý, je pravděpodobné, že se účinkem tlaku prostě rozdrťí. Při větších štíhlostech se prut poruší tím, že se nejprve ohne, čili, jak říkáme, vybočí z přímého tvaru a teprve pak nastane porušení, ne však už rozdrčením, nýbrž zlomením. Tento druhý druh porušení je důsledkem ztráty stability přímého prutu, o níž nyní budeme hovořit.

Mějme tedy na mysli dostatečně štíhlý prut, schématicky znázorněný na obr. 4. Tam je naznačen jednak původní přímý tvar prutu, jednak jeho ohnutý tvar po vybočení.

Pokud jde o štíhlost prutu, měříme ji tzv. štíhlostním poměrem, tj. podílem jeho teoretické délky l a jistou funkcí jeho průřezových rozměrů, kterou nazýváme poloměrem setrvačnosti¹⁾. Čím větší je tedy štíhlostní poměr, tím větší je tedy štíhlost prutu.

Co se vlastně děje s prutem osově tlačným, zvyšujeme-li postupně osový tlak? Jak se projeví jeho ztráta stability? Při malých hodnotách F se prut deformuje pouze stlačením; zůstává přímý a tento jeho přímý tvar je stabilní. O tom se můžeme přesvědčit např. tím, že jej na okamžik jednorázově zatížíme příčně působícím břemenem Q , na obr. 4 naznačeným vlnitou šipkou. Uděláme-li to, prut se ovšem ohne, jakmile však příčný náraz pomine, prut se rozkmitá a za malou chvíli se znovu ustálí v původním přímém tvaru. Je to téměř doslova tak, jako když drkneme prstem na strunu kytary nebo jiného podobného nástroje; jediný rozdíl je v tom, že struna je natažena, kdežto náš prut je tlačěn.

Zvyšujeme-li dále osový tlak, neděje se na první pohled nic, prut



Obr. 4. Stabilita štíhlého osově tlačného prutu.

¹⁾ Pro čtenáře znalé základů statiky uvádíme, že poloměr setrvačnosti i je dán odmocninou podílu průřezového momentu setrvačnosti J a plochy průřezu S , tedy

$$i = \sqrt{\frac{J}{S}}.$$

zůstává přímý, jen se stále více stlačuje. Použijeme-li však příčného nárazu, zjistíme, že překročením určité hodnoty osově síly F se prut po příčném nárazu vychýlí, ohne, avšak do původní přímé polohy se už nevrátí. Jeho přímý tvar už tedy není stabilní, nýbrž labilní. Stabilní se stala jiná forma rovnováhy ohnutý tvar prutu. Hodnota osově tlaku, jejímž překročením prut stabilitu přímého tvaru ztrácí, nazývá se **k r i t i c k é b ř e m e n o**.

Hodnotu kritického břemene v závislosti na podélných příčných rozměrech prutu, na druhu materiálu, z něhož je prut vyroben a také na způsobu uložení jeho konců určil už v XVIII. století velký matematik **L e o n h a r d E u l e r**, který neplodnější část svého života strávil na tehdejší slavné petrohradské akademii věd v Rusku. Eulerovy práce jsou dodnes velmi významné v nejrůznějších odvětvích matematiky i mechaniky. Byl to na svou dobu nesmírně vyspělý a vědecky odvážný génius. Pracoval neúnavně až do konce života; ve svých posledních letech oslepl, takže své práce musil diktovat. Jen ten, kdo se vyzná ve sférách vyšší matematiky, dovede ocenit, co znamená tvořit matematické práce a nevidět před sebou napsané rovnice, vzorce atd. K tomu je zapotřebí geniality i opravdového hrdinství.

Euler odvodil své matematické vztahy pro ohyb a stabilitu přímých prutů za předpokladu, že jde o pruty, které jsou vyrobeny z materiálu dokonale pružného, pro který navíc platí tzv. **H o o k e ů v** (čti: hukův) **z á k o n**.

D o k o n a l á p r u ž n o s t materiálu se projeví v tom, že jeho deformace způsobené vnějšími silami (zatížením) libovolné velikosti, beze zbytku zmizí, jakmile velikost působících sil klesne na nulu. Při prostém tahu nebo tlaku tedy se protažený, popřípadě stlačený prut zkrátí, popřípadě prodlouží na svou původní délku. Typicky pružným materiálem je kaučuk, který se ovšem pro nosné konstrukce nehodí. Avšak i jiné materiály jsou pružné, zejména ocel, a dokonce i beton. Nejsou však pružné dokonale, nýbrž jen částečně; to značí, že po odtížení se vrátí ke svému původnímu tvaru neúplně, část deformace zůstane trvale i po odtížení.

Anglický fyzik **Robert Hooke** objevil v XVII. století zákon, podle kterého je deformace tuhých těles úměrná síle, která ji působí. Prakticky to znamená např. zase pro tah nebo tlak: zvětší-li se osová síla dvojnásobně či trojnásobně, zvětší se též protažení dvojnásobně či trojnásobně atd. Hookeův zákon neplatí ovšem vždy zcela přesně. Pro některé materiály (jako ocel) platí až do určité maximální velikosti působící vnější síly. Pro jiné neplatí vůbec a jen přibližně jej lze pro malá zatížení použít; tak je tomu například u betonu.

Všimněme si dobře, že v Eulerově řešení ohybu a stability osově tlačенého prutu je předpokládána neomezená pružnost a současně neomezená platnost Hookeova zákona. Euler totiž jednak nemohl mít

ještě takové znalosti o vlastnostech materiálů, jaké máme dnes, ale bez ohledu na to, je metoda zjednodušování skutečností, které vytvořením svých předpokladů použil, metodou, jež se ve vědeckém bádání uplatňuje dosud a nutně se musí uplatňovat i v budoucnu. Zkrátka, kdyby dnes někdo se všemi znalostmi o vlastnostech materiálů, jež má dnešní věda k dispozici, měl řešit Eulerovu úlohu o ohybu a stabilitě tlačných prutů, nemohl by, alespoň v první fázi řešení, postupovat jinak než Euler.

Kromě toho při odvození své kritické síly Euler nepřihlížel ke štíhlosti prutu. Abychom pochopili, jaké měly Eulerovy zjednodušující předpoklady praktické důsledky, musíme si ještě uvědomit, v jakém vztahu je Eulerovo kritické břemeno k velikosti osového tlaku, který způsobí porušení prutu. Především konstatujeme, že tyto dvě velikosti osových sil nejsou totožné. Dále je třeba si uvědomit, že překročení kritického břemene u štíhlých prutů ještě neznamená jeho porušení, aspoň ne teoreticky. Řekněme však po pravdě, že už velmi nepatrné překročení kritického břemene ohne prut po vybočení natolik, že se zlomí. Konečně u prutů malých štíhlostí - tedy poměrně tlustých je kritické břemeno značně veliké. Než ho osový tlak při svém postupném růstu dosáhne, rozdrtí se prut - aniž by vybočil - prostým tlakem.

(Pokračování)

J a n H o r s k ý, PFPU, Brno:

Základy teorie relativity

(Pokračování)

IV. Zkracování délky a zpomalování času. V soustavě K nechť se opět nachází tyč (položená do osy OX), která je pro změnu v této soustavě v klidu, takže její délku označíme

$$l_0 = x_2 - x_1$$

Abychom změřili její délku v soustavě K' , pohybující se vzhledem k soustavě K rychlostí v , musíme najít rozdíl souřadnic jejího pravého a levého konce

$$l = x'_2 - x'_1$$

v jeden a tentýž časový okamžik podle hodin v soustavě K' Zapišme Lorentzovy transformační vztahy pro souřadnice konce tyče

$$x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a odečteme od druhé rovnice první, přičemž vezmeme v úvahu $t'_1 = t'_2$, takže

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

neboli

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4)$$

V protikladu ke klasické fyzice, ve které je délka absolutní veličinou, má v teorii relativity jedna a tatáž tyč různou délku v různých soustavách souřadnic. Největší délku má tyč v té soustavě souřadnic, ve které se nachází v klidu. Představme si nyní dvě rovnoběžné tyče A a B stejné délky, které jsou v klidu vzhledem k soustavě K . Nechť se tyč B začne pohybovat ve směru své délky rychlostí v , zatím co tyč A zůstává v klidu. S tyčí B spojíme druhou inerciální soustavu K' . Z předchozího vzorce vyplývá, že z hlediska soustavy K je délka tyče B menší než délka tyče A , která zůstává v klidu. Z hlediska soustavy K' však plyne, že délka tyče B je větší než délka tyče A , neboť v soustavě K' je tyč B v klidu a tyč A se pohybuje rychlostí $-v$. O žádný protiklad nejde, jak by se na první pohled mohlo zdát, neboť jde v podstatě o dva různé způsoby měření délky tyče. Jestliže měříme délky obou tyčí a užíváme měřítek a hodin soustavy K' , je délka tyče B větší než délka tyče A , užíváme-li při měření měřítek i hodin soustavy K , bude tyč B kratší než tyč A . Odtud vyplývá, že tak častá otázka, „která z délek je skutečná délka tyče“, je právě tak nesmyslná, jako se ptát, ukazujeme-li na kousek chleba, jestli to je chléb, nebo das Brot, či the bread.

Protože v denním životě, technice i astronomii, jde vesměs o rychlosti nesrovnatelně menší než je rychlost světla, platí přibližně

$$l \cong l_0$$

tj. pro pomalu se pohybující inerciální soustavy je délka veličinou absolutní. Tím se objasňuje i to, že vzorec relativistického zkrácení délek nebyl dosud experimentálně ověřen.

Přejdeme nyní k časovému intervalu v teorii relativity a uvažujme proto opět dvě inerciální souřadné soustavy K a K' , přičemž soustava K' se vzhledem k soustavě K pohybuje rychlostí v . V soustavě K' nechť se nacházejí v klidu hodiny. Všimněme si dvou událostí, které nastaly v tom místě, kde se nacházejí hodiny (například začátek a konec oběhu hodinové ručičky na ciferníku). Časový interval, který uběhl mezi těmito dvěma událostmi, je v soustavě K' roven $T_0 = t'_2 - t'_1$. Najdeme časový

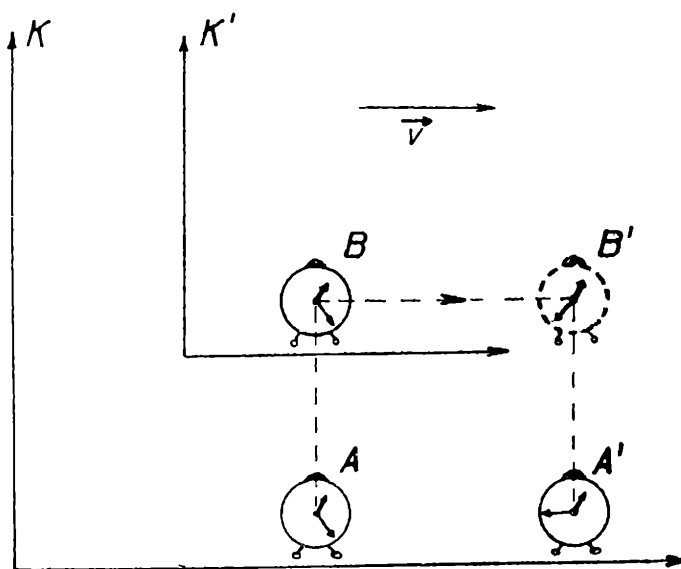
interval $T = t_2 - t_1$ mezi týmiž událostmi v soustavě K . Vzorce Lorentzovy transformace dávají

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Protože v soustavě K' jsou hodiny v klidu, tj. $x'_1 = x'_2$, obržime odečtením první rovnice od druhé

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{neboli} \quad T_o = T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5)$$

Z právě uvedeného vztahu vyplývá, že v teorii relativity je časový interval mezi touž dvojicí událostí různý v různých souřadných sousta-



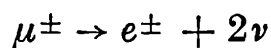
Obr. 7. Srovnání chodu pohybujících se hodin.

vách, a není tedy veličinou absolutní jako v klasické fyzice. Představme si nyní dvoje synchronizované hodiny A a B , které jsou v soustavě K v klidu. Hodiny B nechtě se začnou pohybovat rovnoměrně rychlostí v , hodiny A nechtě zůstanou dále v klidu. S hodinami B spojíme druhou inerciální soustavu K' . Z posledního vztahu vyplývá, že z hlediska soustavy K' se hodiny A zpožďují ve srovnání s hodinami B . Vzhledem k soustavě K se však hodiny A nacházejí v klidu, zatím co hodiny B se pohybují, takže vzhledem k této soustavě se budou zpožďovat hodiny B . Tato dvě tvrzení jsou jen zdánlivě protikladná, jak se nejlépe přesvědčíme z následující úvahy. Abychom mohli stanovit, že se hodiny B v soustavě K' zpožďují vzhledem k hodinám A v soustavě K , musíme postupovat takto: Nechtě v určitý časový okamžik hodiny B v K' minou hodiny

A v soustavě K a v tento okamžik nechtě ukazují stejné údaje. Pro srovnání rychlosti chodu hodin v K i K' musíme znovu srovnat časové údaje pohybujících se hodin B v K' s hodinami v K . To však již samozřejmě nebudou ony hodiny A , nýbrž jiné hodiny A' , kolem kterých v daný okamžik proletí hodiny B (obr. 7). Přitom jsme zjistili, že hodiny B v K' se zpozdily ve srovnání s hodinami v K . Odtud vyplývá, že pro srovnání chodu hodin v dvou soustavách souřadnic je třeba několika hodin v jedné soustavě a pouze jedny v druhé soustavě, vždy se zpozdí ty hodiny, které se srovnávají s různými hodinami v druhé souřadné soustavě. Čas, který ukazují hodiny pohybující se s daným objektem, se nazývá jeho vlastní čas T_0 a s tím časem. Výše uvedený vzorec vyjadřuje vlastní čas T_0 pomocí času T plynoucího v soustavě K , vzhledem ke které se uvažuje pohyb. Jak je z tohoto vzorce vidět, vlastní čas pohybujícího se objektu je vždy menší než odpovídající časový interval v klidné soustavě, stejně jako vztah pro relativistické zkrácení délky přechází výraz (5) pro rychlosti $v \ll c$ v klasický vztah

$$T \cong T_0$$

Je tedy časový interval pro pomalu se pohybující soustavy přibližně veličinou absolutní. Proto v denním životě relativistické zpomalování času pohybujících se hodin nehraje žádnou roli. Avšak na rozdíl od vzorce pro relativistické zkrácení délek byl vztah (5) experimentálně ověřen. Kosmické paprsky dopadající na Zemi z vesmíru se v poměrně malé výšce skládají převážně z druhotných částic tzv. μ -mesonů, které vznikly po složitých jevech v zemské atmosféře. Hmota μ -mesonů je přibližně 206krát větší než hmota elektronů. Rychlosti μ -mesonů jsou různé, od velmi malých až bezmála k světelné rychlosti, což je velmi výhodné. V přírodě existují μ -mesony s oběma znaménky elektrického náboje μ^+ i μ^- . Jak se ukázalo, μ -mesony jsou nestálé částice a rozpadají se na elektron či positron a dvě lehké částice neutrino podle schématu



Měří-li se střední doba života μ -mesonů, měří se podle hodin v soustavě spojené se Zemí, a nikoliv podle hodin pohybujících se spolu s mesony, takže jejich střední doba života τ musí záviset na rychlosti mesonu podle již známého vztahu

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ve kterém τ_0 značí střední dobu života klidného mesonu. Protože v proudu mesonů existují částice s různými rychlostmi, je třeba pro měření střední doby života získat proud mesonů o stejné rychlosti; toho však experimentální technika dovede docílit s dostatečnou přesností. Lze tedy naměřit střední dobu života mesonů τ pro různé rychlosti, takže experi-

mentální potvrzení posledního vzorce spočívá v prověření vztahu

$$\tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \tau_0 = \text{konst}$$

Pokus dokázal, že v mezích experimentálních chyb je tento vztah splněn dostatečně přesně. Tak byla experimentálně prověřena jedna ze základních pouček teorie relativity, pojednávající o relativitě časových úseků mezi dvěma událostmi.

V. Relativistický zákon skládání rychlostí. Relativnost současnosti. Nechť u značí rychlost hmotného bodu rovnoměrně se pohybujícího vzhledem k soustavě K a u' nechť značí rychlost téhož bodu v soustavě K' , přičemž se K' vzhledem ke K pohybuje rovnoměrnou rychlostí v . Dělíme-li první rovnici ze systému (3'') rovnicí třetí, obdržíme

$$\frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{x'v}{c^2}} = \frac{v + \frac{x'}{t'}}{1 + \frac{x'}{t'} \cdot \frac{v}{c^2}},$$

protože však $\frac{x}{t} = u_x$, $\frac{x'}{t'} = u'_x$, lze předchozí vzorec psát ve tvaru

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u_x \cdot \frac{v}{c^2}}$$

Stejným způsobem najdeme i vzorce pro druhé dvě projekce rychlosti

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + u_x \cdot \frac{v}{c^2}} \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + u'_x \cdot \frac{v}{c^2}}.$$

Uvedené vztahy se nazývají relativistickým zákonem skládání rychlostí. Při rychlostech $v \ll c$ lze přibližně psát

$$1 + \frac{u_x v}{c^2} \approx 1, \quad \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 1$$

takže z relativistického zákona pro skládání rychlosti plyne okamžitě tzv. klasický zákon skládání rychlostí

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z, \end{aligned}$$

který lze snadno odvodit z Galileovy transformace.

Pro jednoduchost nyní uvažujeme pouze ten případ, že částice v K' se pohybuje pouze ve směru osy x' rychlostí $u' = u'_x = c$; v soustavě K je tedy její rychlost rovna

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c,$$

takže rychlost světla c je limitní rychlostí. Bude-li se částice v K' pohybovat rychlostí menší než je rychlost světla, např.

$$u' = u'_x = c - \alpha \quad (\alpha > 0)$$

a bude-li se K' vzhledem ke K pohybovat rychlostí

$$v = c - \beta \quad \beta > 0$$

pak rychlost téže částice vzhledem ke K bude

$$u = \frac{(2c - \alpha - \beta)c}{2c - \alpha - \beta + \frac{\alpha\beta}{c}} < c$$

takže součet dvou rychlostí, z nichž každá je menší než c , je vždy menší než c . Součet dvou rychlostí, z nichž jedna je rovna c a druhá je menší, je roven c .

Závěrem tohoto odstavce se zabývejme „pobuřujícím“ důsledkem teorie relativity - relativností současnosti. Nechť v soustavě K' nastaly v jistý okamžik t' dvě události v bodech x'_1 a x'_2 . Z hlediska klasické fyziky jsou dvě současné události v jisté inerciální soustavě současnými i v ostatních inerciálních soustavách, takže současnost je v klasické fyzice pojmem absolutním. Jinak je tomu však v teorii relativity. Uvažujme opět inerciální soustavu K vzhledem ke které se K' pohybuje rovnoměrnou rychlostí v v kladném směru osy x . V soustavě K nechť první událost nastala v časovém okamžiku

$$t_1 = \frac{t' + \frac{x'_1 c}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a druhá událost v okamžiku

$$t_2 = \frac{t' + \frac{x'_2 c}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

takže obě události nastaly zřejmě současně v K' . V soustavě K však

současné nejsou, neboť

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} \frac{(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Pojem současnosti je tedy v teorii relativity pojmem relativním. Jedinou, avšak velmi důležitou výjimkou je případ, kdy dvě současné události proběhnou na stejném místě, tj. v časovém okamžiku t' a v bodě x' . V soulase s předchozím vztahem budou takové události absolutně současné.

(Pokračování)

Matematické zábavy



Jiří Sedláček, CSc., Praha:

Dopravní problémy a matematika

(Dokončení)

Dopravní prostředky se rovněž při naší první variantě příliš nevyužily - vracely se s prázdnou. Konečně si musíme uvědomit, že jsme zde vůbec nepočítali s tím, že dopravní cesty mají obvykle omezenou kapacitu: Buď se cesty používá ještě k dopravě jiného druhu, nebo je doprava velkého nákladu po některé cestě zvláště drahá, nebo technický stav cesty je neuspokojivý apod. Všechny tyto podmínky se dají obvykle dobře vyjádřit matematicky, avšak řešení je pak dosti složité⁴).

Zatím jsme si všímali dopravního problému jako jednoho výrazného příkladu lineárního programování, avšak tento obor má uplatnění daleko širší. Při programování výroby se vyskytuje řada úloh, v nichž se hledá minimalizace výrobních nákladů, maximalizace zisku, minimalizace spotřeby materiálu nebo dílů, které jsou úzkým profilem apod. Také některé směšovací a osevňovací problémy lze řešit metodou lineárního programování a výslovně bychom se zde chtěli zmínit o tzv. výživo-
v o v é m p r o b l é m u, kterým se u nás r. 1954 zabýval V. V e-

⁴) Problém omezených kapacit uvažovali r. 1956 L. R. F o r d a D. R. F u l k e r s o n.

l í m s k ý⁵⁾. V této poslední úloze je dán určitý soubor potravin a u každé z nich je uvedeno, kolik obsahuje výživových činitelů (např. kalorií, glycidů, tuků, bílkovin, vápníku, železa, vitamínů atd.). Cena každé potraviny je známá a můžeme proto snadno vypočítat, kolik živin v jednotlivých potravinách dostaneme za peněžní jednotku (táž živina je v různých potravinách různě drahá). Předpis správné výživy nám určuje, kolik živin potřebuje člověk ve své stravě; úkolem je zjistit, kterými potravinami získáme tyto doporučené dávky co nejlaciněji. Zde je nutno ovšem upozornit, že výsledky, ke kterým nás vede výpočet, není možno aplikovat zcela mechanicky, neboť jde o výživu člověka. Mohlo by se totiž snadno stát, že jídelníček sestavený podle tohoto předpisu bude jednotvárný a malá rozmanitost v jídle bude sama odporovat požadavkům správné výživy. Výpočet je ovšem dobrou pomůckou, např. pro lékaře, pracovníky potravinářského průmyslu a může posloužit též jako vodítko při tvorbě cen.

Končíme toto informační pojednání o jednom oboru, který v posledních letech zajímal jak matematiky a ekonomy, tak i pracovníky jiných oborů. Seznámili jsme se zde jen ukázkově s problematikou, která se v tomto oboru vyskytla, metody řešení jsme však zde nemohli zevrubněji popisovat. Čtenáře, kteří by se s problematikou chtěli seznámit do hloubky, musíme zde odkázat na některou z publikací, o nichž jsme mluvili v tomto pojednání.

Úloha o krychli

Úlohy vyžadující prostorové úvahy se netěší velké pozornosti naší mládeže a v případě potřeby si s nimi řešitelé nevědí rady. Potvrdilo se to znovu při matematické olympiádě.

Pokuste se proto rychle řešit početně i stereometricky tuto snadnou úlohu:

Na prodloužené hraně AD krychle $ABCDEFGH$ (AE je jednou její hranou) sestrojte bod K tak, aby $AK \doteq AD$. Určete velikost úhlu $\omega = \sphericalangle CEK$.

Text úlohy si sami doplňte obrázkem a zašlete nám rychle řešení na redakční adresu Praha 2, Trojanova 13. Za dva měsíce otiskneme seznam správných řešitelů.

M. M.

⁵⁾ Jeho práce s názvem Přepočítání nákladových a cenových relací na hlavní výživové faktory je v závěrečné zprávě Výzkumného ústavu pro mechanizaci a ekonomiku potravinářského průmyslu v Praze (rok 1954).

Skládanka

Vystřihněte si z papíru čtverec $ABCD$. Stranu AB rozpulte bodem E . Nyní přehněte část čtverce tak, aby vrchol C se kryl s vrcholem E . Vypočítejte, jaký úhel svírá strana čtverce CD v této své nové poloze s původní polohou strany CD .

Řešení zašlete do konce tohoto měsíce redakci na adresu Praha 2, Trojanova 13. Jména správných řešitelů otiskneme asi za dva měsíce. Řešitelé z 3. roč. SVVŠ a 3. a 4. ročníku odborných škol jsou ze soutěže vyloučeni.

M. M.

Kdo chová zebrou a kdo pije vodu?

Předkládáme vám hádanku, která už zcestovala kus světa. Přejímáme ji z polského časopisu *Przekroj*, který ji asi přetiskl zase z francouzského *Facteur X*. Nic víc zatím nebudeme říkat.

K rozluštění správné odpovědi stačí soustavné využití podkladů obsažených v pěti základních předpokladech a v sedmnácti pokynech, které jsou uvedeny v dalším textu.

Protože každý cvik ve správném myšlení je přínosem pro myšlení v matematice, neváháme dát tuto hádanku čtenářům *Rozhledů*.

Při luštění si zkontrolujte, kolik času uplyne od okamžiku, kdy dočtete úplné zadání úlohy, do nalezení odpovědí na obě otázky. Doufáme, že to bude pod 20 minut.

Původní text je jen poněkud obměněn. Nespoléhejte na to, že by např. druh nápoje apod. odpovídal běžným představám o národních zálibách obyvatel jednotlivých domků.

V některém příštím čísle uveřejníme řešení a možná i něco z vašich dopisů, napíšete-li nám, jak dlouho a jakým způsobem jste dospěli k výsledku.

Základní předpoklady k řešení úlohy:

- I. Každý domek má jinou barvu.
- II. V každém domku bydlí muž jiné národnosti.
- III. V každém domku se pije jiný oblíbený nápoj.
- IV. V každém domku je oblíben jiný sport resp. se nesportuje vůbec.
- V. V každém domku se pěstuje jiný druh zvířat.

Pokyny:

1. Je pět domků.
2. Angličan bydlí v červeném domku.
3. Španěl chová psa.
4. Káva se pije v zeleném domku.
5. Polák pije vodku.
6. Zelený domek stojí vpravo vedle domku bílého (z hlediska pozorovatele domků).
7. Fotbalista pěstuje hlemýždě.
8. Ve žlutém domku bydlí cyklista.
9. Mléko se pije v prostředním domku.
10. V prvním domku bydlí Nor.
11. Nesportovec bydlí vedle domku, v němž je chována liška.
12. Domek cyklisty sousedí s domkem, v němž je chován kůň.
13. Zápasník pije pomerančovou šťávu.
14. Japonec je hokejista.
15. Nor bydlí vedle modrého domku.
16. V jednom domku se pije voda.
17. V jednom domku je chována zebra.

Otázky zní: A. Kdo vlastní zebra?

B. Kdo pije vodu?

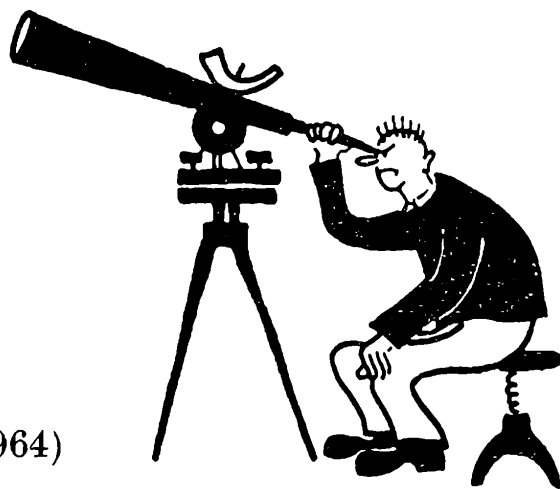
J. Furthnerová-Schmidtmayerová

Astronomie

Josef Kotyk, Pardubice:

Galileo Galilei

(1564—1964)



Řetěz slavných vědeckých pracovníků Koperník - Kepler - Newton¹⁾ by nebyl úplný bez důležitého článku, kterým je věhlasný italský badatel *Galileo Galilei*, průkopník moderní vědy, zakladatel nových metod ve fyzice, astronom a filosof, za revoluce ve světovém názoru neohrožený stoupenec a obránce heliocentrického učení Koperníkova.

Galileo Galilei se narodil před 400 lety dne 15. února 1564 v Pise. Studoval nejprve lékařství, záhy však se oddal matematice

¹⁾ Viz mé články: Nicolaus Copernicus (Rozhledy, roč. 23, čís. 1), Johannes Kepler (Rozhledy, roč. 27, čís. 4), Zapomenuté výročí Newtonovo (Rozhledy, roč. 26, čís. 1).

a přírodním vědám. Již roku 1589, teprve 25letý, stal se profesorem matematiky na universitě ve svém rodišti. V letech 1592 až 1610 působil na universitě v Padově, potom opět v Pise. Když však roku 1632 vydal dílo *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico e Copernicano* (Rozhovor o obou hlavních soustavách světových Ptolemaiově a Koperníkově) a dokazoval správnost názoru heliocentrického, dostal se do sporu s církví a trávil zbytek svého života v odloučení od světa v Arcetri u Florencie. Když oslepl, přesídlil do Florencie, kde 8. ledna 1642 zemřel.

Galilei se zabýval hlavně studiem mechanických pohybů a jejich zákonů. Položil základy dnešní mechaniky.

Názory o pohybech byly v době, o níž píší, velmi nejasné, v podstatě stále starověké, jak se o nich dovídáme ze spisů slavného řeckého filosofa Aristotela.²⁾ Pohyby se dělily na přirozené a vynucené. Přirozeným pohybem byl např. volný pád. Aristoteles učil, že kámen vypuštěný z ruky se chová tak, jak mu přísluší vzhledem k jeho povaze: padá, jako vypuštěný pták letí. Vynuceným pohybem byl např. vrh tělesa. Hodíme-li kámen do výše, stoupá, činí tedy něco, co domněle není v jeho přirozené povaze; okolní částice vzduchu udělují mu prý nové a nové nárazy a zvedají jej. K studiu fyziky je proto u Aristotela třeba přistupovat ve světle biologie; přírodní jevy byly popisovány jako děje na organismech. Podle výroku Aristotelova jsou pohyby zvířat srozumitelnější než pohyby kamenů. Tento „organický“ názor na přírodní dění byl však v době, kdy vědění bylo ještě na nízkém stupni vývoje, lidskému citění celkem blízký.

Fyziku animistické nebo animisticko-antropomorfní periody likvidoval Galilei. V jeho osobě a díle se odráží velmi zřetelný přechod od organického nazírání na fyziku k nazírání mechanistickému. Názvu *mechanistická*³⁾ dostalo se však Galileiho (a Newtonově) fyzice teprve později, když mechanika dostoupila takového pokroku, že předstihla ostatní kapitoly fyziky. Z počátku byla s oblibou zvána fyzikou *matematickou*. Tuto okolnost nejlépe zdůraznil sám Galilei ve spise *Il Saggiatore* (1623) slovy:

„Filosofie je napsána ve veliké knize, jež leží před našima očima otevřena; myslím přírodu. Neporozumíme jí však, jestliže dříve neporozumíme řeči a nepoznáme písmo, jímž je psána

²⁾ Aristoteles ze *Stageiry* (384 až 322 před n. l.), žák Platonův a vychovatel Alexandra Velikého, byl největší učenec starého věku. Jeho dílo, snůška veškeré učenosti řecké, bylo také ještě střednímu věku vrcholem všeho vědění a základem všeho tehdejšího myšlení.

³⁾ V podrobnostech viz můj článek o *Helmholtzovi* v *Rozhledech*, roč. 40, zvláště pak stať II „*Mechanistická fyzika*“ v č. 6.

Je napsána v jazyce matematickém a písmeny jsou trojúhelníky, kruhy a jiné geometrické obrazce, bez jejichž prostřednictví je člověku nemožno porozumět byť i jedinému slovu.“

Také Boyle,⁴⁾ jenž už jako 14letý hoch za pobytu ve Florencii četl s nadšením spisy Galileiho, prohlásil: „Matematika je abeceda řeči, kterou k nám promlouvá příroda. Té řeči se však začalo rozumět teprve v našem století, kdy se ukázalo, že právě ryze matematické myšlení nejlépe vystihuje zákonitosti, jimiž se přírodní dění řídí.“

Galilei se nespokojil ve fyzice tedy pouhým rozumováním, jak to činili Aristotelovi následovníci. Z učenců starého věku byl mu dobrým vzorem slavný Archimédes,⁵⁾ matematický badatel o přírodě, zakladatel statiky. Úkol Galileiho je však náročnější. Nejde mu o matematické vyjádření pouhých vztahů rovnováhy, nýbrž vztahů pohybových. Jestliže před ním se fyzikové zabývali silami, zvláště silou tíže, jen v případech statických, Galilei první studoval problém pohybu těles vlivem této síly. Středem jeho zájmu je na prvním místě ovšem otázka, jak se věci pohybují, tvar dráhy, rychlost pohybu, jeho zrychlení apod. (kinematika). K formulaci základních principů dynamiky Galilei nedospěl.⁶⁾

Přírodní úkazy pozorujeme buď přímo v přírodě, nebo si je sami účelně připravíme vhodnými experimenty. Opíráme se tedy o zkušenost. Průkopníkem fyziky jako vědy empirické byl právě Galilei. Dějiny nás učí, že prvé počátky badatelské práce, založené na experimentu, se sice objevují v 15. a 16. stol. také již u Leonarda da Vinci⁷⁾ a Simona Stevina,⁸⁾ avšak teprve Galilei začal důsledně užívat pokusné metody.

⁴⁾ Robert Boyle (1627–91), anglický fyzik, objevil roku 1660 zákon po něm zvaný, že napětí uzavřeného množství plynu je při stálé teplotě nepřímo úměrné jeho objemu. Roku 1663 se stal členem Royal Society.

⁵⁾ Archimédes ze Syrakus (287–212 před n. l.), starověký matematik a fyzik, první vypočítal obvod a obsah kruhu, metodou zv. vyčerpávací (sčítáním nekonečné řady) dokonce i obsah parabolické úseče, objevil zákon o rovnováze na rovnoramenné páce, v hydromechanice zákon po něm nazvaný, vynalezl kladkostroj aj.

⁶⁾ V podrobnostech viz jeho knihu *Discorsi e dimonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638).

⁷⁾ Leonardo da Vinci (1452–1519), italský umělec, geometr a inženýr, zabýval se pohybem na nakloněné rovině, třením ve strojích, teorií mechanismů a dospěl k přesvědčení o nemožnosti perpetua mobile. Vymýšlel také již modely letadel.

⁸⁾ Simon Stevin (1548–1620), holandský fyzik, objevil vztah mezi vahou tělesa spočívajícího na nakloněné rovině a tlakem na tuto rovinu, rovnoběžník sil aj. Obvyklý způsob, jak stanovit úvahou velikost vztlaku, jenž působí na těleso ponořené do tekutiny, pochází v podstatě rovněž od něho.

Galilei přikročil k vědeckému probádání zákonů přírody, které bylo založeno na pokusech a matematickém myšlení. Pozoroval např., že při volném pádu rychlost zřejmě vzrůstá. Předpokládal, že rychlosti přibývá přímo úměrně s časem, tedy zákonitost $v = g \cdot t$ a vyvozoval z toho důsledky. Graficky odvodil, že dráha volného pádu je pak přímo úměrná dvojmuči času. Po provedení pokusů a měření shledal, že za dobu 2, 3, 4krát delší byla dráha při pohybu vykonaná 4, 9, 16krát delší. Tím byla správnost učiněného předpokladu potvrzena a zároveň dokázáno, že volný pád - i pohyb tělesa volně puštěného po nakloněné rovině⁹⁾ je pohyb rovnoměrně zrychlený. Galilei vyvrátil také Aristotelovu domněnku, že těžší těleso padá rychleji než lehčí; ve vakuu padají všechna tělesa se stejným zrychlením a dopadají se stejné výše ve stejné době. Při studiu pohybu na nakloněné rovině Galilei poznal princip „virtuálních rychlostí“, v případě mezním pak, kdy rovina má polohu vodorovnou, dospěl k zákonu setrvačnosti. Pohotově poukázal zároveň na význam setrvačnosti při pohybech vržených těles, jež opisují parabolickou dráhu. Vrh, pohyb kyvadla¹⁰⁾ aj. podařilo se mu jednoduchými matematickými zákony popsat tak, že mohl z počátečního stavu předpovídat jejich průběh. Isochronních kyvů navrhoval Galilei i prakticky použít k měření času.

Když studoval počátky dynamiky, zabýval se Galilei také změnami pohybu hmoty a jejich příčinami. Dospěl k závěru, že ke změně pohybu je třeba síly. Nabyl přesvědčení, že je možno pohyb určit, jsou-li známy hmoty těles a síly, jež na ně působí. Upozornil také na zkušenost dnes všeobecně známou, že těleso, které koná několik pohybů současně, nabývá takové výsledné polohy, jako kdyby je konalo jednotlivě, po sobě a nezávisle na jejich pořadí (princip nezávislosti pohybů). Pokračuje v činnosti zakladatele teorie strojů Archiméda, dospěl k „zlatému pravidlu mechaniky“ (zákonu o zachování práce), pomocí něhož vypracoval teorii strojů jednoduchých i složitějších.

Galileo Galilei byl však všestranný badatel. Málo se připomíná, že pracoval se zdarem také v hydromechanice, akustice, termice a optice. Shledal např., že výška tónu závisí jen na kmitočtu znějícího zdroje. Roku 1597 sestrojil první termoskop (vzduchový, bez stupnice), roku 1594 vodní lis, zdokonalený teprve o 200 let později Angličanem Bramahem. Věděl, že těleso ponořené do tekutiny se stává zdánlivě lehčím; již jeho první vědecká práce, kterou dokončil 22letý, se týká hydrostatických vah, kterých k zjištění tomu používal. S úspěchem určo-

⁹⁾ Ke studiu pohybu těles na nakloněné rovině a jeho zákonitostí užíváme známého žlábkového padostroje Galileiho.

¹⁰⁾ Vzájemnou přeměnu obou druhů mechanické energie lze ukázat kyvadlem Galileiho. Viz Fyziku pro 9. postupný ročník (1954), str. 96, obr. 66.

val též specifickou hmotu látek. Tvrzení, že rychlost světla má hodnotu nekonečně velikou, přijímal s nedůvěrou; věřil, že je konečná a zjišťoval to opětne i pokusy; výsledek byl však záporný. S pohotovostí génia tušil, že vhodné příležitosti k měření by mohla poskytnout zejména pozorování astronomická,¹¹⁾ k tomu bylo jen třeba oko náležitě vyzbrojit. Doba zrála však už k novému vynálezu.

Počátkem roku 1608 zvěděl Galilei, že v Holandsku byl roku 1604 sestaven dalekohled. Z neobyčejného zájmu o věc dovtípil se z kusých zpráv základní myšlenky jeho zařízení a již na podzim roku 1609 dalekohled samostatně sestavil Dalekohled zv. holandský - kde je objektivem spojka okulárem rozptylka označujeme proto zpravidla také jménem Galileiho.¹²⁾ V prvních měsících roku 1610 zahájil Galilei památná astronomická pozorování,¹³⁾ jež vzbudila záhy obdiv všeho vzdělaného světa. „Jeho oči,“ sám řekl, „spatřily více než oči kteréhokoli smrtelníka kdy předtím.“ Objevy jím učiněné, shrnuté v Galileiho díle *Nuntius Siderius* (Hvězdný posel, 1610) znamenaly začátek vítězného boje¹⁴⁾ za právo člověka vědecky zkoumat přírodu.

Tehdy také když Galilei objevil svým dalekohledem vysoké hory, pohoří, horská pásma a kruhové valy na Měsíci, psal mu Kepler:¹⁵⁾ „Zaopatři ještě povoz nebo loď přizpůsobenou nebeskému prostoru; pak se naleznou již lidé, které ani ty daleké pustiny nebes neodstraší . . .“

Ano, Kepler věděl, že přijde čas, kdy člověk se odpoutá od Země a otevře dveře do Kosmu. Kepler věřil lidstvu. Věřil, že to dokáže.

Také Galilei sdílel tuto víru. Jako symbol věčně neukojené touhy člověka po pravdě označil vtipně - asymptotu. Jí se rovněž týká jeho klasický výrok: „*Accedens non conveniam.*“ „Přibližuji se, a přece nedostihnu.“

¹¹⁾ První úspěšná měření toho druhu vykonal 33 let po smrti Galileiho dánský hvězdář Ole Römer, když se roku 1675 zabýval v Paříži pozorováním zatmění Jupiterových měsíců, které objevil Galilei.

¹²⁾ Viz např. Fyziku pro 10. postupný ročník (1954), str. 231, obr. 181.

¹³⁾ V našem časopise je podrobně vylíčil Oldřich Lepil v článku 350 roků dalekohledu v astronomii, Rozhledy, roč. 38, čís. 8.

¹⁴⁾ Čtenářům je znám z dějepisu. Viz také učebnici Astronomie (1954), čl. 65 Vynález dalekohledu a Galileiovy objevy a čl. 66 Boj církve proti vládě (?), str. 82 až 85.

¹⁵⁾ Johannes Kepler (1571–1630), dvorní matematik císaře Rudolfa II., objevil tři po něm nazvané zákony, jimiž přesně vyložil kinematiku pohybů planetárních; viz můj článek Johannes Kepler v Rozhledech, roč. 27, čís. 4. Roku 1611 navrhl také nový typ dalekohledu.

Slovníček

matematických výrazů

дискуссия	diskuse, rozbor (úlohy)
длина	délka
добавить, добавлять	přidat, připojit
додекаэдр	dvanáctistěn
доказать	dokázat
доказательство	důkaz
доля	část, díl, podíl
дополнительный	doplňkový (úhel)
допустить	připustit (předkládat)
достаточный	postačující
достигать, достигнуть	dosáhnout, dosahovat
дробное число	číslo lomené
дробь, ž.	zlomek
дробь десятичная, периодическая	zlomek desetinný, periodický, řetězová
цепная	
дуга	oblouk (křivky)
дуга круга	kruhový oblouk

Е

Евклид, теорема Евклида	Euklides, Euklidova věta
единица	jednotka
единица измерения	jednotka míry
единственный	jednoznačný, jediný
единый	jediný

З

зависеть	záviset
зависимость	závislost
зависимость математическая, обратная, прямая	závislost matematická, nepřímá, přímá
задавать, задать	udat, zadat
задание	zadání
заданная величина	daná veličina
задача	úloha, problém
заключать в скобки	dát do závorek
заключать равные углы	svírat stejné úhly
заключение	závěr (úvah)
заключаться	býti obsažen

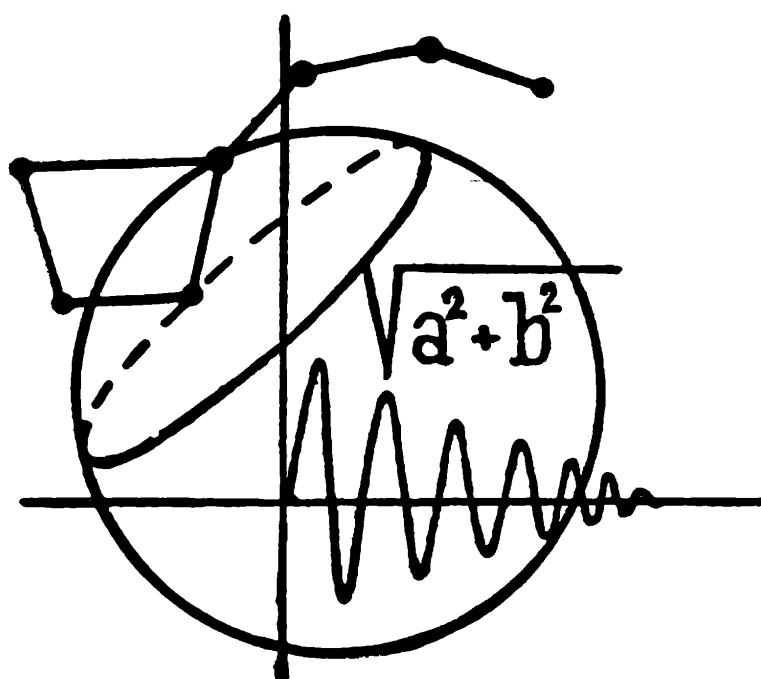
замена	záměna, substitute, dosazení, nahrazení
заменить x через y	dosadit y za x
занимать	zaujímat (prostor)
заниматься	zabývat se, studovat
запятая	desetinná čárka
затем	pak, potom
заштрихованный	vyšrafovaný
звено	strana lomené čáry, článek (řetězu)
звездочка	hvězdička
землемерие	zeměměřictví
знак	znamení, znak
знак радикала	odmocnítko
знакомый	známý
знаменатель	jmenovatel
знаменатель геометрической последовательности	kvocient geometrické posloupnosti
знание	znalost
значение	hodnota, význam
среднее арифметическое значение	aritmetický průměr
знакопеременный ряд	alternující řada
значит	tedy
знак равенства	rovnítko
значок	index

И

избегать, избежать	vyhnouti se (chybě, omylu)
избыток	zbytek
известный	známý
извлекать, извлечь корень	odmocňovat, odmocnit
изгиб	ohyb
излагать, изложить	vykládat, vyložit
изложение	výklad
изменение	změna
измерение	měření, změření, rozměr, dimense
изображать	znázorňovat, zobrazovat
изображение	obraz, nákres, znázornění
изучать, изучить	zkoumat, studovat
именно	právě
импликация	implikace
инверсия	inverze (např. kruhová)
индекс	index
индукция математическая	matematická indukce
интервал	interval (zpravidla otevřený)
искажение	zkreslení, deformace
искать	hledat
исключать, исключить	vyločit, eliminovat
исключение	vyločení, výjimka
исключительно	výjimečně
искомый	hledaný
исполнить, исполнять	provést, provádět
испытание	zkoumání, zkouška
исследовать	vyšetřit, prozkoumat (Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



7

ROČ. 42

1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Březen 1964

Číslo 7

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korous, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

P. Kršňák: O viacrozmerných priestoroch	289
S. Horák: Menelaova věta a její použití	291
O. Lanta: Eulerova přímka	294
Inž. M. Špačková: Statistika proniká na všechna pracoviště (Pokračování)	296
Inž. V. Scifert: Kvadratura kruhu (Dokončení)	301
K. Drábek: Pól a polára kružnice	304
J. Švandrlík: Řešení úloh o ploše kulové užitím mocnosti bodu ke kulové ploše (Dokončení)	309
V. Kolesnikov: Měření rychlosti světla pomocí Kerrova článku	312
Doc. inž. dr. R. Servít: Stabilita ve stavební praxi (Dokončení)	315
J. Horský: Základy teorie relativity (Dokončení)	318
P. Adamov: Eppur si muove	321
CSc. L. Sehnal: Umělé družice v r. 1963	324
E. K.: Viděli jste už někdy tři Slunce?	327
O. S.: Šest spisovatelů cestuje	328
J. Hnilíčková Fenclová: Jsou vaše znalosti fyzikálních pojmů neformální?	329
B. K.: Stavební fakulta ČVUT svým budoucím studentům	331
M. M.: Kam na techniku?	334
J. Glivický: Sovětské časopisy o vztazích matematiky k umění	335
J. Sedláčková: Další svazek Školy mladých matematiků	336
Z. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Kořář, studující FS.

A-04*41099

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1964.

Matematika



P a v e l K r š ň á k, P. I., Banská Bystrica:

O viacrozmerných priestoroch

Dost' často sa stretávame s nepochopením a nesprávnym vysvetľovaním pojmu priestoru väčšej dimenzie (rozmeru) ako tri. Problém viacrozmerných priestorov je často posudzovaný tak, že je to čistý výmysel matematikov len preto, aby pestovali matematiku pre matematiku. Vyskytujú sa aj také názory, že matematika touto disciplínou sa odtrháva od reálneho sveta a poskytuje vhodnú pôdu pre rôzne fantastické uzávery. Tieto a iné nesprávne názory na viacrozmerný priestor môžu prevládať u toho, kto o viacrozmerom priestore nie je dôkladnejšie informovaný a čo viacej, nepozná veľké praktické použitie tejto disciplíny matematiky.

S problémom viacrozmerných priestorov začali sa geometri hlbšie zaoberať najmä v druhej polovici minulého storočia a začiatkom tohoto storočia. Aj túto disciplínu matematiky postihol obdobný osud ako mnohé iné disciplíny matematiky, ktoré nemali hneď bezprostredného použitia. Totiž o túto disciplínu nejavila záujem širšia vedecká verejnosť a jej uzávery ostali nepovšimnuté. Záujem o túto disciplínu a jej ďalšie rozvitie možno pozorovať až vtedy, keď fyzici vo svojich teóriách začali používať s veľkým úspechom niektoré uzávery z teórie viacrozmerných priestorov.

Základným pojmom pre vyšetřovanie n -rozmerného priestoru je pojem vektor, ktorý definujeme nasledovne:

Definícia 1. *Usporiadanú skupinu n čísel tvaru (a_1, a_2, \dots, a_n) voláme n -členný vektor. Jednotlivé čísla zo skupiny (a_1, a_2, \dots, a_n) voláme zložky vektora.*

Vektor budeme označovať $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Ak všetky zložky vektora sú nulové, potom hovoríme o **n u l o v o m v e k t o r e**.

Pre počítanie s vektormi platia tieto vzťahy:

Nech sú dané dva vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,
 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$,

potom definujeme:

1. rovnosť vektorov, čiže $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, keď platí

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_n = b_n;$$

2. súčet vektorov

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \quad a_n + b_n);$$

3. súčin reálneho čísla c s vektorom \mathbf{a} , čiže

$$c \cdot \mathbf{a} = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \quad c \cdot a_n).$$

Pojem n -rozmerného priestoru. Všeobecne je známe, že na orientovanej priamke p s pevne zvoleným bodom P (počiatok), každý bod A jednoznačne určíme jedným číslom a_1 . Je zrejmé, že musíme mať zvolenú jednotkovú úsečku. Číslo a_1 voláme súradnicou bodu A . Nič nezmení na veci, ak číslo a_1 nazveme zložkou *jednočlenného vektora* \mathbf{a} , ktorý môžeme napísať v tvare $\mathbf{a} = (a_1)$. Teda vektor $\mathbf{a} = (a_1)$ jednoznačne určí polohu bodu na priamke, ktorú často voláme *jednorozmerný priestor*.

V *rovine*, v ktorej je zavedená pravouhlá súradnicová sústava, každý bod A jednoznačne určíme usporiadanou dvojicou čísel (a_1, a_2) . Čísla a_1, a_2 voláme *súradnice bodu* A . Túto usporiadanú skupinu (a_1, a_2) môžeme prehlásiť za *dvojčlenný vektor*, ktorý označíme $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Teda vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ jednoznačne určí polohu bodu v rovine, ktorú často voláme *dvojrozmerný priestor*.

Obdobne usporiadaná skupina troch čísel (a_1, a_2, a_3) jednoznačne určí bod v *trojrozmernom priestore*. Túto usporiadanú skupinu (a_1, a_2, a_3) nazveme *trojčlenný vektor* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Teda $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ jednoznačne určí polohu bodu v našom reálnom priestore, ktorý často voláme *trojrozmerný priestor*.

Ďalej uvažujme usporiadanú skupinu štyroch čísel (a_1, a_2, a_3, a_4) , čiže vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Hovoríme, že vektor \mathbf{a} jednoznačne určuje polohu bodu v *štvorrozmernom priestore*.

Obdobne vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \quad a_n)$, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo, určuje polohu bodu v *n -rozmernom priestore*. Ovšem bod určený vektorom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \quad a_n)$, kde $n \geq 4$, nemá obdobný odraz v realite ako v prípadoch keď $n = 1, 2, 3$.

Doteraz sme pomocou usporiadanej skupiny čísel určovali polohu bodu na priamke, v rovine alebo v priestore. Hneď uvidíme, že usporiadanou skupinou čísel je možné určiť aj iné geometrické útvary než sú body.

Uvažujme napríklad *krúžnicu* o rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

kde m, n sú súradnice jej stredu S , r je polomer. V tomto prípade usporiadaná skupina troch čísel (m, n, r) jednoznačne určí *kružnicu* v rovine. Teda štúdium *kružníc* môžeme previesť na štúdium usporiadaných trojíc čísel (m, n, r) . Z toho vidíme, že *kružnicu* v rovine môžeme určiť usporia-

danou trojicou čísel právě tak, ako polohu bodu v trojrozmernom priestore. Hovoríme preto, že kružnice v rovine tvoria trojrozmerný priestor a každú kružnicu voláme jednoducho bodom v tomto priestore.

Uvažujme ďalej plochu guľovú o rovnici

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2,$$

kde m, n, p sú súradnice jej stredu S a ktorej polomer je r . V tomto prípade usporiadaná štvorica čísel (m, n, p, r) jednoznačne určí p l o c h u g u ľ o v ú (polohu stredu a polomer). Teda štúdium plôch guľových môžeme previesť na štúdium usporiadanej štvorice čísel (m, n, p, r) . Z tohoto vidieť, že plochy guľové môžeme určiť štvoricou čísel práve tak, ako body štvorrozmerného priestoru. Teda všetky plochy guľové v našom reálnom priestore tvoria štvorrozmerný priestor a každú plochu guľovú môžeme považovať za bod štvorrozmerného priestoru.

Na tomto príklade je vidieť, že bod štvorrozmerného priestoru má odraz v reálnom priestore a to v ploche guľovej.

Pre zaujímavosť uvádzame, že kuželosečku je možné uvažovať ako bod päťrozmerného priestoru a to z toho dôvodu, že päť prvkov (napr. body alebo dotyčnice kuželosečky spolu v počte päť) jednoznačne určí kuželosečku.

(Pokračování)

Stanislav Horák ml., Praha:

Menelaova věta a její použití

V 1. století n. l. žil v Alexandrii řecký matematik Menelaos. Jemu vděčíme za větu, která má jeho jméno. A této větě je věnován tento článek. Dříve než ji vyslovíme, řekneme si něco o orientovaných úsečkách.

Máme-li přímku p a na ní dva různé body A, B , můžeme jít po přímce p buď tak, že nejprve projdeme bodem A a pak bodem B . Nebo jdeme po přímce tak, že nejprve projdeme bodem B a teprve potom bodem A . Říkáme, že se na přímce můžeme pohybovat ve dvou vzájemně opačných smyslech. Jednomu smyslu říkáme kladný, druhému záporný. Kladný a záporný smysl přisuzujeme i úsečkám na přímce a říkáme, že např. úsečky AB, BA jsou opačně orientované. To zapíšeme takto

$$AB = -BA, \text{ nebo jinak } AB + BA = 0.$$

O orientovaných úsečkách na téže přímce platí

$$AB + BC = AC \text{ čili } AB + BC + CA = 0.$$

Ještě by zbývalo určit, který z obou smyslů přímky p prohlásíme za kladný a který za záporný. Tato otázka nás však nemusí nijak znepokojovat, neboť uvidíme, že nám vždy půjde buď o součin nebo podíl dvou orientovaných úseček. Součin (podíl) dvou souhlasně orientovaných úseček je kladný, opačně orientovaných úseček, záporný.

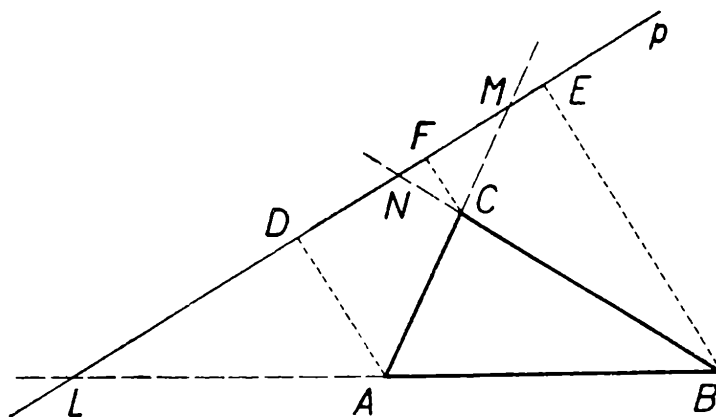
Ještě si připomeneme důležitou **P a s c h o v u v ě t u**

Přímka, která neprochází žádným vrcholem trojúhelníku, má se stranami trojúhelníku společně právě dva různé body (rozumí se vnitřní body stran), nebo nemá se stranami trojúhelníka žádný společný bod.

Po tomto úvodě můžeme přistoupit k vlastnímu článku.

Menelaova věta 1. *Mějme dán trojúhelník ABC a přímku p , která neprochází žádným jeho vrcholem, ale protíná přímky AB , AC , BC pořadě v bodech L , M , N ; pak platí (všechny úsečky jsou orientované)*

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{AM} = 1. \quad (1)$$



Obr. 1a.

D ů k a z. V obr. 1a, b je dán trojúhelník ABC a přímka p , která neprochází žádným jeho vrcholem. S ohledem na Paschovu větu mohou nastat dva různé případy. Buď dva z bodů L , M , N jsou vnitřní (obr. 1a) a další je vnější, nebo všechny tři jsou vnější (obr. 1b). Avšak v obou případech je výraz na levé straně rovnice (1) kladný.

Z vrcholů A , B , C spustíme na přímku p kolmice a jejich paty označme postupně D , E , F . Trojúhelníky ADL , BEL jsou podobné, a proto platí

$$\frac{AL}{BL} = \frac{AD}{BE}$$

Podobně z podobnosti trojúhelníků BEN , CFN plyne

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BE}{CF}$$

a z podobnosti trojúhelníků CFM , ADM dostaneme

$$\frac{CM}{AM} = \frac{CF}{AD}$$

Získané tři rovnice vynásobíme

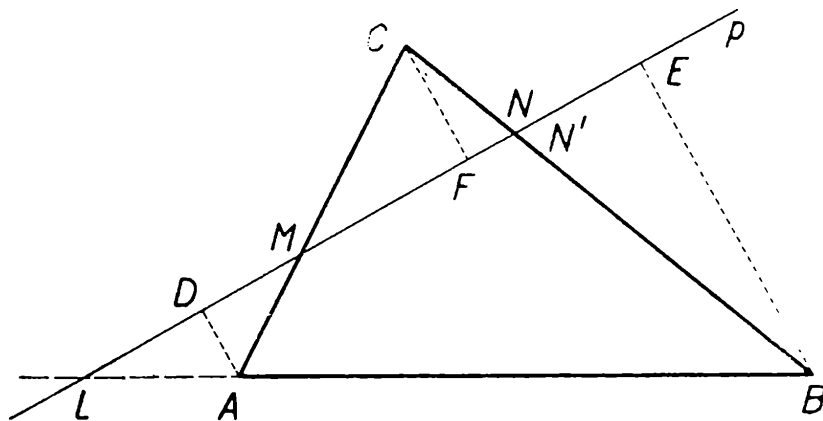
$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{AM} = \frac{AD}{BE} \cdot \frac{BE}{CF} \cdot \frac{CF}{AD} = 1$$

Tím jsme dokázali Menelaovu větu, ale platí i obrácená věta:

Věta 2. *Mějme dán trojúhelník ABC a tři různé body L, M, N , rozdílné od vrcholů daného trojúhelníka a ležící pořadě na přímkách AB, AC, BC . Necht platí*

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{AM} = 1, \quad (2)$$

kde úsečky na levé straně jsou orientované. Potom body L, M, N leží v téže přímce.



Obr. 1b.

D ů k a z. Poněvadž jde o orientované úsečky a výraz na levé straně rovnice (2) je roven 1, tj. je kladný, pak může podle Paschovy věty nastat jedna z těchto možností: a) dva z bodů L, M, N jsou vnitřní body stran trojúhelníka ABC a třetí je vnější, nebo b) všechny tři body jsou vnější. Spojme nyní body L, M přímkou p (obr. 1).

Přímka p protne přímku BC v bodě N' . Pro trojúhelník ABC a přímku p platí věta 1

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BN'}{CN'} \cdot \frac{CM}{AM} = 1. \quad (2')$$

Podle předpokladu však platí rovnice (2). Poněvadž pravé strany rovnic (2), (2') se sobě rovnají, rovnají se sobě i levé strany

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BN'}{CN'} \cdot \frac{CM}{AM} = \frac{AL}{BL} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{AM}$$

Po úpravě obdržíme

$$\frac{BN'}{CN'} = \frac{BN}{CN}$$

Tato rovnice je však splněna právě tehdy, když $N \equiv N'$, to však znamená, že body L, M, N leží v přímce, jak jsme měli dokázat.

(Pokračování)

Oldřich Lanta, Ostrava:

Eulerova přímka

Trojúhelník je nejjednodušší mnohoúhelník v rovině a není proto divu, že jeho vlastnosti byly velmi podrobně studovány. Ke každému trojúhelníku jsou přidruženy různé body, přímky, kružnice a kuželosečky. My si promluvíme o *Eulerově přímce*. Dokážeme si tuto větu:

V trojúhelníku leží těžiště T , střed O opsané kružnice a průsečík V_1 výšek na přímce zvané Eulerova přímka. Na ní leží střed F kružnice devíti bodů. Body F, O mají stejný poměr vzdáleností od bodů V_1, T .

Než přistoupíme k důkazu této poučky, zopakujeme si základní vlastnosti *kružnice devíti bodů*, o nichž jste se dočetli v mém článku (Rozhledy matematicko-fyzikální č. 4, roč. 1962/63). Kružnice devíti bodů prochází těmito body: středy stran trojúhelníka (v obr. 1 to jsou body L, M, N), patami výšek (P, R, S) a body X_1, Y_1, Z_1 , které půlí úseky výšek mezi ortocentrem a vrcholy.

Nyní můžeme přistoupit k důkazu.

Těžnice AL půlí úsečku MN čili stranu trojúhelníka LMN , BM půlí stranu LN a CN půlí LM . Proto těžnice trojúhelníka ABC jsou zároveň těžnicemi trojúhelníka LMN . Jinak řečeno, oba tyto trojúhelníky mají společné těžiště T . Můžeme dokonce říci, že T je středem stejnolehlosti trojúhelníků ABC a LMN ; koeficient stejnolehlosti je $2:1$. V této stejnolehlosti si vzájemně odpovídají kružnice opsané uvažovaným trojúhelníkům. Střed jedné je O , druhé F a přímka OF pak nutně prochází středem stejnolehlosti, tj. společným těžištěm T . Tím máme dokázáno, že body O, T, F leží v přímce, kterou označíme e . Poněvadž koeficient stejnolehlosti je $2:1$, platí

$$OT : FT = 2 : 1. \quad (1)$$

V uvedené stejnolehlosti si vzájemně odpovídají i průsečíky výšek (tzv. ortocentra) trojúhelníků ABC, LMN . Ortocentrum prvního trojúhelníka je V_1 a druhého O . I jejich spojnice prochází středem stejnolehlosti T . Proto body V_1, O, T leží v přímce, kterou označíme e' . Ale přímky e, e' mají společné dva různé body T a O a proto nutně splývají;

tedy $e \equiv e'$. Tím jsme dokázali, že jmenované čtyři body leží v jediné přímce. Zároveň je patrné, že

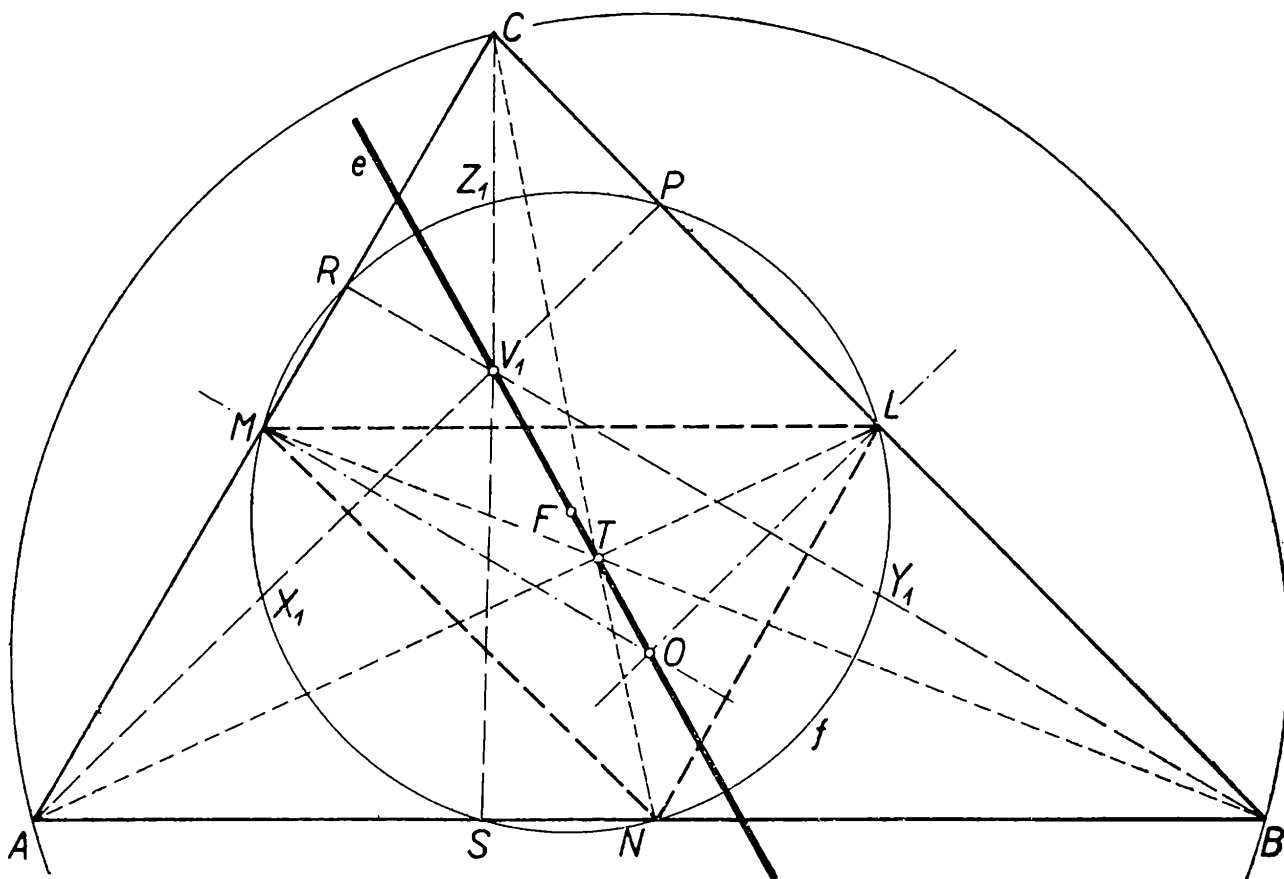
$$TV_1 : OT = 2 : 1 \quad (2)$$

Zbývá dokázat, že

$$V_1F : TF = V_1O : TO$$

Podle rovnic (1), (2) plyne

$$FT = \frac{1}{2} \cdot OT, \quad TV_1 = 2 \cdot OT \quad (3)$$



Obr. 1

Z obr. 1 dále vyplývá

$$V_1F = V_1T - FT = \frac{3}{2} \cdot OT, \quad V_1O = V_1T + TO = 3 \cdot OT \quad (4)$$

Z rovnic (3) a (4) již dostáváme

$$V_1F : FT = 3 : 1, \quad V_1O : TO = 3 : 1,$$

čímž důkaz proveden.

Cvičení.

Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány dva z těchto bodů: ortocentrum, střed opsané kružnice, těžiště a pak ještě a) střed jedné strany, b) přímka, na níž leží jedna strana trojúhelníka, c) pata jedné výšky, d) jeden vrchol.

Statistika proniká na všechna pracoviště

(Pokračování)

Čebyševova nerovnost. Chceme-li zjistit, zda určitý výběr, charakterizovaný hodnotami \bar{x} a s^2 pochází z určitého základního souboru s parametrem μ , užíváme k výpočtu *Čebyševovy nerovnosti*. Téže nerovnosti použijeme i při rozhodování o rozsahu (velikosti) náhodného výběru. Čebyšev za jistých předpokladů odvodil, že pravděpodobnost toho, že se průměr náhodného výběru a základního souboru od sebe prakticky neliší, je větší (popříp. rovna) než určitá hodnota, vypočtená pomocí výběrového rozptylu, rozsahu výběru a maximální přípustné odchylky.

$$P(|\bar{x} - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{s^2}{n\varepsilon^2}. \quad (2)$$

Tento zápis čteme: Pravděpodobnost, že se výběrový průměr \bar{x} a průměr základního souboru μ od sebe liší o méně než předem dané, libovolně malé číslo $\varepsilon > 0$, je větší než jedna méně hodnota zlomku, v jehož čitateli je výběrový rozptyl a ve jmenovateli n -násobek dvojmoci daného čísla ε .

Binomické rozdělení pravděpodobností. Uvažujme takový příklad. V osudí je 100 kuliček, z nichž je 10 černých a 90 bílých. Potáhneme celkem třikrát po jedné kuličce, zjistíme její barvu a vrátíme zpět. Je jasné, že pravděpodobnost vytažení černé kuličky je 0,1, pravděpodobnost vytažení bílé je 0,9. Jaká však je pravděpodobnost, že v oněch třech vytažených kuličkách budou právě 2 černé, přičemž nám nezáleží na tom, v jakém pořadí byly vytaženy? Tuto otázku pomůže vyřešit *binomické rozdělení*, které předpokládá základní soubor rozsahu N (u nás 100 kuliček), v němž jsou prvky se znakem A (v našem případě černé kuličky) a prvky bez tohoto znaku (kuličky bílé). Náhodné veličiny se znakem A mají pravděpodobnost p (0,1), beze znaku $q = 1 - p$ (0,9). Bereme-li náhodně po sobě n prvků (u nás 3 kuličky) a každý vybraný prvek opět vracíme, potom pravděpodobnost, že vybereme x prvků se znakem A (2 černé kuličky) a současně $(n - x)$ prvků bez tohoto znaku (1 kulička bílá) je dána výrazem

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad (3)$$

kde výraz

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! (n-x)!}$$

a

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 1$$

je počet všech možností, jak lze vybrat x prvků při n tazích. Pro náš případ je to $\binom{3}{2} = 3$. Prvé dvě kuličky budou černé, třetí bílá, nebo první bílá a zbylé černé, nebo první černá, druhá bílá a poslední černá. Potom tedy pravděpodobnost, že při výběru 3 kuliček budou dvě černé je podle výrazu (3)

$$\binom{3}{2} 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,027$$

Hodnota distribuční funkce, tj.

$$F(3) = P(\xi < 3) = \binom{3}{0} 0,1^0 \cdot 0,9^3 + \binom{3}{1} 0,1 \cdot 0,9^2 + \\ + \binom{3}{2} 0,1^2 \cdot 0,9 = 0,729 + 0,243 + 0,027 = 0,999$$

říká, že v 999 případech z 1000 bude mezi třemi vytaženými kuličkami jedna, dvě, nebo žádná černá.

Normální (Laplace - Gaussov) rozdělení pravděpodobnosti je nejdůležitějším rozdělením pro spojitou náhodnou veličinu ξ . Jeho frekvenční funkce je dána výrazem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

kde $\pi \doteq 3,14$ je číslo Ludolfovo, $e \doteq 2,72$ je základ přirozených logaritmů, μ průměr a σ směrodatná odchylka. Křivka má zvonovitý tvar a je symetrická kolem průměru. Plocha ohraničená křivkou a osou x se rovná jedné plošné jednotce (obr. 3). Distribuční funkce $F(x_0)$, která vznikne postupným sčítáním jednotlivých hodnot frekvenční funkce až do $f(x_0)$, nám udává pravděpodobnost, že náhodná veličina ξ nabude hodnoty menší, popříp. rovné x_0 . Velmi výhodné je zavedení normované (směrodatné) proměnné

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (5)$$

Po dosazení do výrazu (4) pro frekvenční funkci, jestliže $\mu = 0$ a $\sigma = 1$, dostáváme jednoduchý tvar

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (6)$$

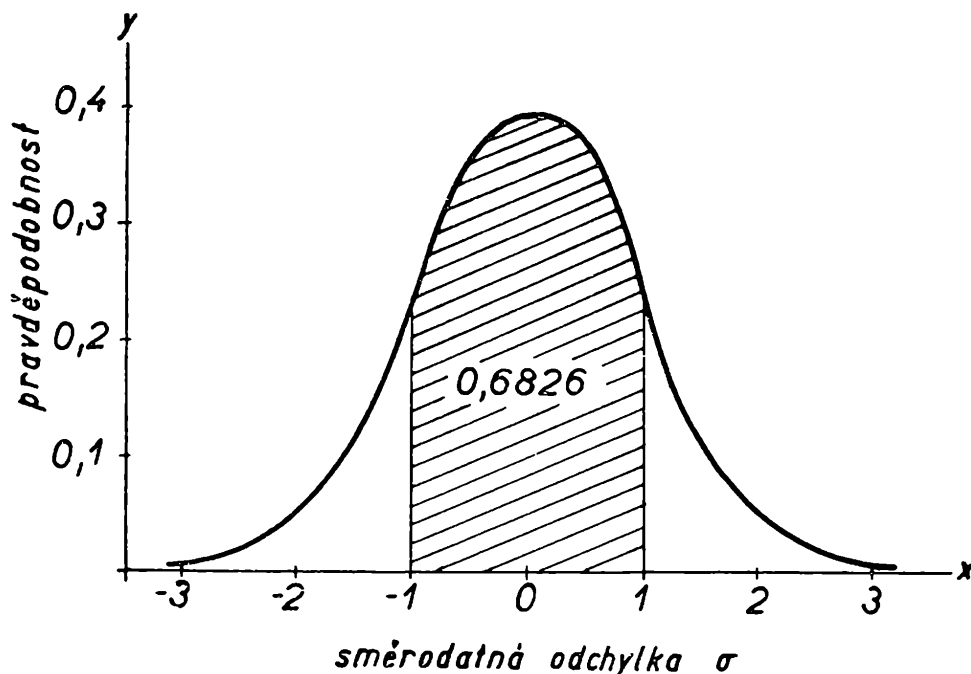
Hodnoty distribuční funkce takto normalizované veličiny t , tzn.

$$F(t) = P(\zeta \leq t)$$

udávají pravděpodobnost, že nějaká náhodná veličina ζ nabude nejvýše hodnoty t . Normované normální rozdělení značíme

$$N(0; 1), \text{ tzn. } N(\mu = 0; \sigma^2 = 1) \quad (7)$$

a jeho hodnoty jsou uvedeny ve všech statistických tabulkách, nenormované normální rozdělení označíme $N(\mu; \sigma^2)$.



Obr. 3. Normální rozdělení $N(0; 1)$ a interval jedné směrodatné odchylky (vyčárkováno)

Máme-li stanovit ~~pravděpodobnost~~, že náhodná veličina ζ nabude hodnoty $t = 0$, dostaneme dosazením do výrazu (6)

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,3989,$$

pro $t = 1$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} = 0,2412 \text{ atd.}$$

Tabulky normálního rozdělení $N(0; 1)$ [výraz (7)] uvádějí pro různé hodnoty t příslušné funkce $F(t)$.

Tabulka 4.

t	Distribuční funkce $F(t)$
0	0,5000
1	0,8413
2	0,9772
3	0,9986

Jak již bylo řečeno, je celá plocha obr. 3 rovna jedné jednotce. Je-li $F(1) = P(\zeta \leq 1) = 0,8413$, což značí pravděpodobnost, že náhodná veličina ζ nabude hodnoty menší nebo rovné jedničce, je potom

$$P(\zeta > 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

Tato hodnota nám představuje plochu zvonovité křivky vpravo od 1, a protože se jedná o křivku symetrickou, jsou zajisté oba útvary vně intervalu $(-1; +1)$ stejné a $P(\zeta \leq -1) = F(-1) = 0,1587$. Dohromady tvoří 0,3174 celkové plochy a na obr. 3 je to nešrafovaná část. Šrafovanou část dostaneme jako $1 - 0,3174 = 0,6826$. Tutéž hodnotu stanovíme podle definice

$$P(-1 \leq \zeta \leq 1) = F(1) - F(-1) = 0,8413 - 0,1587 = 0,6826 \quad (8)$$

Znamená to pravděpodobnost, že náhodná veličina ζ s rozdělením $N(0; 1)$ bude v intervalu $(-1; 1)$ a analogicky, že náhodná veličina ξ s rozdělením $N(\mu; \sigma^2)$ bude v intervalu

$$(\mu - \sigma; \mu + \sigma)$$

Stejným způsobem vypočteme (pomocí hodnot v tabulce 4)

$$P(-2 \leq \zeta \leq 2) = 0,9772 - 0,0228 = 0,9544, \quad (9)$$

$$P(-3 \leq \zeta \leq 3) = 0,9986 - 0,0014 = 0,9972. \quad (10)$$

Vidíme, že v souboru s normálním rozdělením pravděpodobností $N(\mu; \sigma^2)$ bude

$$\begin{aligned} 68,3 \% \text{ prvků v intervalu } \mu \pm 1 \sigma; \\ 95,4 \% \text{ prvků v intervalu } \mu \pm 2 \sigma; \\ 99,7 \% \text{ prvků v intervalu } \mu \pm 3 \sigma \end{aligned} \quad (11)$$

Kromě pravděpodobnosti, že náhodná veličina bude uvnitř daného intervalu, užíváme často pravděpodobnosti, že bude vně tohoto intervalu a tuto pravděpodobnost značíme α . Ve výrazu (11) je pro první řádek $\alpha = 0,317$, pro druhý $\alpha = 0,046$ a pro třetí řádek $\alpha = 0,003$. To znamená, např. pro poslední případ, že 0,3 % hodnot bude vně intervalu určeného průměrem a trojnásobkem směrodatné odchylky.

Praxe nám ovšem staví problém obráceně. Předepíše určitou pravděpodobnost a ptá se, v jakém intervalu bude výsledek. Je tedy dána $1 - \alpha = P(-t_\alpha \leq \zeta \leq t_\alpha)$ a hledáme příslušné t_α . Například pro $P = 0,95 = 1 - \alpha$, a tedy $\alpha = 0,05$ hledáme interval $(-t_{0,05}; +t_{0,05})$. Hodnota distribuční funkce $P(\zeta \leq t_{0,05}) = F(t_{0,05}) = 0,975$ a k ní najdeme v tabulkách normované distribuční funkce $N(0; 1)$ odpovídající hodnotu $t_{0,05} = 1,96$. Podobně pro $P = 0,99$, tzn. $\alpha = 0,01$ je $F(t_{0,05}) = 0,995$ a odpovídající $t_{0,05} = 2,58$. Tyto dvě hodnoty $P = 0,95$ a $P =$

= 0,99 jsou v praxi nejčastěji užívány. Prvým případem znamená, že náhodná veličina ξ nabude hodnoty uvnitř intervalu

$$(\mu - 1,96 \sigma ; \mu + 1,96 \sigma) \text{ s pravděpodobností } 0,95 = P,$$

druhým případem, že náhodná veličina nabude hodnoty vně intervalu

$$(\mu - 2,58 \sigma ; \mu + 2,58 \sigma) \text{ s pravděpodobností } 0,01 = \alpha.$$

Ozbrojení znalostí nejzákladnějších statistických termínů, podíváme se na některé průmyslové a výzkumné úkoly.

Příklad 1. Do výrobního podniku přicházejí velké dodávky železných tyčí, u nichž se vzhledem k dalšímu zpracování vyžaduje průměr 30 mm s povolenou tolerancí ± 2 mm. Naším prvním úkolem je stanovit takový rozsah náhodného výběru, aby s pravděpodobností ne menší než 0,95 zaručil požadované veličiny. Pomocí Čebyševovy nerovnosti - výraz (2) a po experimentálním zjištění směrodatné odchylky $s = 2,8$ mm dostaneme

$$P(|\bar{x} - 30| \leq 2) \geq 1 - \frac{2,8^2}{n \cdot 2^2}$$

Pro výraz na pravé straně požadujeme, aby byl větší, popřípadě rovný hodnotě 0,95, tedy

$$1 - \frac{2,8^2}{n \cdot 2^2} \geq 0,95$$

Řešením této nerovnosti dostáváme

$$\frac{2,8^2}{n \cdot 2^2} \leq 0,05$$

a konečně hodnotu

$$n \geq 39,2.$$

Vezmeme ke kontrole tedy 40 tyčí.

Dalším úkolem je zajistit náhodnost výběru. Tyče jsou ve svazcích po 10 kusech, prvá dodávka obsahuje 100 takových svazků. Máme tyto možnosti. Napíšeme čísla 1 až 100 na papírky a po zamíchání vytáhneme 4, např. s čísly 7, 10, 32, 98. Při přejímce zboží sedmý, desátý, dvaatřicátý a osmadvadesátý svazek nepůjdou do skladu, ale k technické kontrole. Tato metoda zaručení náhodnosti se nedá použít při velkých dodávkách, a proto zde používáme tabulek náhodných čísel. Otevřeme na libovolné stránce a najdeme tam např. čísla 3617, 5597, 9108, 8677 atd. Protože potřebujeme pouze čísla dvouciferná, odečteme stovky a vybereme ke kontrole svazky 17, 97, 8 a 77.

Jedná-li se např. o náhodný výběr z dodávky obilí v pytlích, je třeba se řídit úředním ustanovením, které říká: *Při dodávkách do 10 pytlů se odebere z každého pytle vzorek po 150 g, při dodávkách do 20 pytlů*

se odebere 10 vzorků po 150 g z různých pytlů, při partiích do 50 pytlů se odebere 15 vzorků atd. Takto odebrané vzorky se smíchají a stejnoměrně rozprostřou. Celek se rozdělí na 5 dílů, z nichž náhodně 3 se opět smíchají; tato směs tvoří konečný vzorek.

Zajímavá je také technika náhodného výběru v zemědělství. Kovový čtverec nebo kruh se známým obsahem klademe na různá místa v poli (kraje, rohy, střed), vysekáme a smícháním dostáváme výsledný vzorek, ze kterého odhadujeme potřebné charakteristiky na určité rozloze, např. výnosnost na ha, počet škůdců ve m² půdy, množství napadeného obilí v m², průměrnou délku stébel apod.

(Pokračování)

Inž. Václav Seifert, Praha:

Kvadratura kruhu

(Dokončení)

Z trojúhelníku OPA vyplývá

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 = r^2 \left(1 - 2 \sqrt{c - \frac{c^2}{4}} + c - \frac{c^2}{4} \right) + \frac{c^2 r^2}{4} = \\ &= r^2 \left(1 + c - 2 \sqrt{c - \frac{c^2}{4}} \right).\end{aligned}$$

Pro jednodušší výpočet uvažujme nyní počátek souřadnicové soustavy v bodě O . Pak bude rovnice kružnice k_4

$$x^2 + \left[y - r \left(1 - \sqrt{c - \frac{c^2}{4}} \right) \right]^2 = r^2 \left(1 + c - 2 \sqrt{c - \frac{c^2}{4}} \right)$$

a po úpravě

$$x^2 + y^2 - 2 r y \left(1 - \sqrt{c - \frac{c^2}{4}} \right) - \frac{c^2 r^2}{4} = 0$$

Položíme-li zatím rovnici přímky OR

$$y = m x$$

a tuto hodnotu dosadíme do rovnice kružnice k_4 , dostaneme

$$x^2 + m^2 x^2 - 2 r m x \left(1 - \sqrt{c - \frac{c^2}{4}} \right) - \frac{c^2 r^2}{4} = 0$$

Řešením této kvadratické rovnice získáme souřadnice bodů V a T

$$x_{1,2} = r \frac{2m \left(1 - \sqrt{c - \frac{c^2}{4}}\right) \pm \sqrt{4m^2 \left(1 - 2\sqrt{c - \frac{c^2}{4}} + c - \frac{c^2}{4}\right) + c^2(1+m^2)}}{2(1+m^2)}$$

Po dosazení do rovnice

$$y = mx,$$

$$y_{1,2} = rm \frac{2m \left(1 - \sqrt{c - \frac{c^2}{4}}\right) \pm \sqrt{4m^2 \left(1 - 2\sqrt{c - \frac{c^2}{4}} + c - \frac{c^2}{4}\right) + c^2(1+m^2)}}{2(1+m^2)}$$

Protože $x_{1,2}$ a $y_{1,2}$ jsou souřadnice bodů T a V , platí

$$\begin{aligned} \overline{TV}^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \\ &= r^2 \frac{\left[4m^2 \left(1 - 2\sqrt{c - \frac{c^2}{4}} + c - \frac{c^2}{4}\right) + c^2(1+m^2)\right] \cdot (1+m^2)}{(1+m^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\overline{TV}^2 = r^2 \frac{4m^2 \left(1 - 2\sqrt{c - \frac{c^2}{4}} + c\right) + c^2}{1+m^2}$$

Pro výpočet neznámé m se opět vrátíme do souřadnicové soustavy s počátkem v bodě S . Pak rovnice přímky

$$AG \equiv y = -2(x - r),$$

rovnice přímky

$$FR \equiv y = \frac{r}{4},$$

řešením těchto rovnic zjistíme, že

$$x_W = r - \frac{r}{8}$$

a pak platí

$$\frac{ZU}{\frac{r}{4}} = \frac{ZW}{BS + x_W} = \frac{\frac{cr}{2} - \frac{r}{8}}{2r - \frac{r}{8}},$$

$$ZU = \frac{r}{4} \cdot \frac{4c - 1}{15}$$

Z trojúhelníka UZR vyplývá

$$\overline{ZR}^2 = c^2 r^2 - \frac{r^2}{16} \cdot \frac{16c^2 - 8c + 1}{225} = \frac{r^2}{16} \left(16c^2 - \frac{16c^2 - 8c + 1}{225} \right),$$

a protože

$$m = \frac{OZ}{ZR},$$

bude

$$m^2 = \frac{\overline{OZ}^2}{\overline{ZR}^2} = \frac{\frac{r^2}{16}}{\frac{r^2}{16} \left(16c^2 - \frac{16c^2 - 8c + 1}{225} \right)}$$

$$m^2 = \frac{225}{3584c^2 + 8c - 1}$$

Po dosazení a vyčíslení

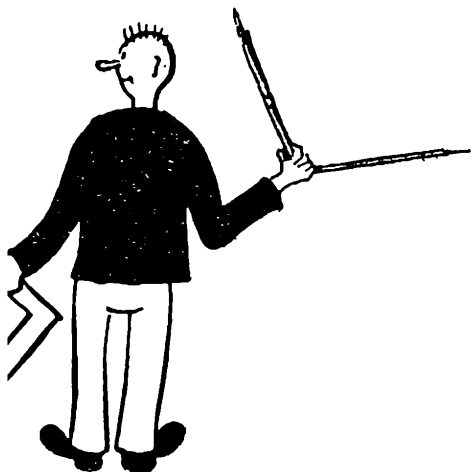
$$m^2 = 0,019\,959\,638$$

a obsah čtverce

$$\overline{TV}^2 = r^2 \frac{4m^2 \left(1 - 2 \sqrt{c - \frac{c^2}{4} + c} \right) + c^2}{1 + m^2} = 3,141\,592\,653\,933\,04 \cdot r^2$$

Protože obsah tohoto čtverce by se měl rovnat πr^2 , kde $\pi = 3,141\,592\,653\,589\,79$, je čtverec podle této konstrukce větší o $0,000\,000\,000\,343\,25 \cdot r^2$. To představuje nepřesnost o $0,000\,000\,011\%$.

Pro lepší názornost ještě uvádím, že při provádění kvadratury kruhu o poloměru 1 km, by podle této konstrukce vznikla *ch y b a* v jeho obsahu o $3,4 \text{ cm}^2$ a v délce jeho strany pouze o $0,000\,1 \text{ mm}$.



Deskriptivní geometrie

Doc. Karel Drábek, ČVUT, Praha;

Pól a polára kružnice

Uvažujme kružnici k ve středovém tvaru

$$k(x, y) \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad (1)$$

která má střed S v počátku pravoúhlého systému souřadnic (obr. 1) a zvolme libovolně bod $P[x_1, y_1]$, o kterém zatím předpokládejme, že neleží na kružnici k . Sestrojme bodem P opět libovolně přímku r tak, aby protínala kružnici k ve dvou (různých a reálných) bodech A, B .¹⁾

Na přímce r sestrojme bod Q tak, aby dvojpoměr²⁾

$$(ABPQ) = -1 \quad \left(\text{tj. aby } \frac{\frac{AP}{BP}}{\frac{AQ}{BQ}} = -1 \right)$$

Jsou-li x_2, y_2 souřadnice bodu Q , pak souřadnice libovolného bodu X přímky r (nebo jinak řečeno, parametrické rovnice přímky r) jsou

$$x = (x_1 + tx_2) : (1 + t); \quad y = (y_1 + ty_2) : (1 + t), \quad (2)$$

¹⁾ Pro bod P ležící uvnitř kružnice k je požadovaný předpoklad splněn pro všechny přímky, které jím procházejí. Pro bod P vně kružnice k je podmínka splněna jen pro ty přímky, které leží uvnitř úhlu $\sphericalangle 1TP^2T$ (obr. 1), kde $1T, 2T$ jsou body dotyku tečen $1t, 2t$ sestavených z bodu P k dané kružnici. Lze se však snadno početně přesvědčit o tom, že všechny dále prováděné úvahy platí i v případě, že přímka r je nesečnou kružnice k , jestliže body s komplexními souřadnicemi, které získáme při řešení kvadratické rovnice (1) a lineární rovnice (pro přímku r), prohlásíme za (imaginární) průsečíky přímky r a kružnice k .

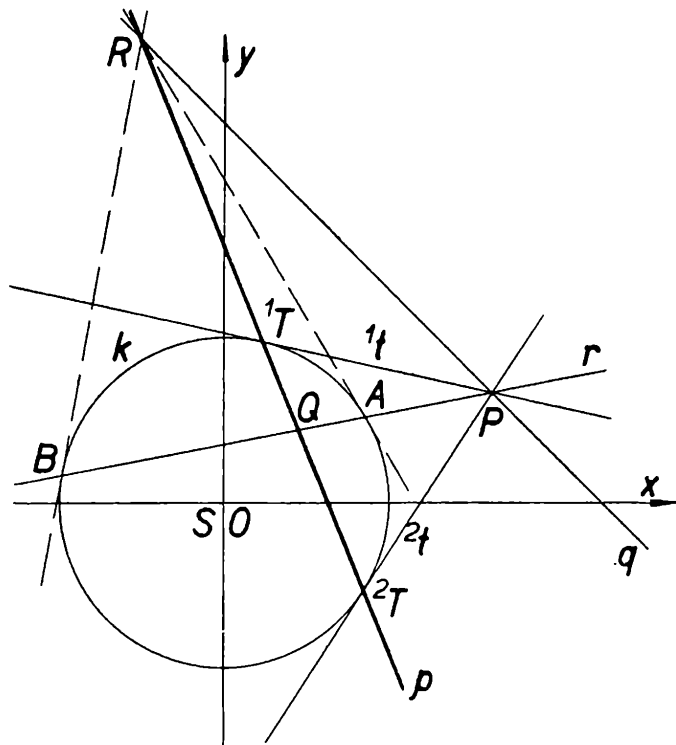
²⁾ O dvojpoměru čtyř bodů na přímce, příp. o dvojpoměru čtyř přímek ve svazku a jeho vlastnostech, viz článek M. Valešové, Dvojpoměr. Rozhledy (38), 1959–60, str. 308–315. Body A, B, P, Q na přímce, mající dvojpoměr $(ABPQ) = -1$, se nazývají harmonické.

kde $t \neq -1$ je parametr určující bod X přímky $r \equiv PQ$.³⁾

Abychom určili průsečíky A, B přímky (2) s kružnicí (1), musí být po dosazení z rovnice (2) do rovnice (1)

$$k(x_1, y_1) + 2t(x_1x_2 + y_1y_2 - r^2) + t^2 k(x_2, y_2) = 0 \quad (3)$$

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme parametry t_3, t_4 , které určují hledané průsečíky A, B . Pro tyto parametry odvodíme dále vztah $t_3 + t_4 = 0$.



Obr. 1.

Parametr bodu P je $t_1 = 0$, pro bod Q pak hodnota parametru t_2 (v absolutní hodnotě) roste nade všechny meze. Protože $(ABPQ) = -1$, je také $(A_x B_x P_x Q_x) = -1$, kde A_x, B_x, P_x, Q_x jsou pravoúhlé průměty bodů A, B, P, Q do osy x souřadnic. Z toho plyne pro kořeny t_3, t_4 kvadratické rovnice (3) po vyčíslení dvojpoměru bodů A_x, B_x, P_x, Q_x

$$t_3 : t_4 = -1, \text{ čili } t_3 + t_4 = 0$$

³⁾ Jsou-li $M_1 [x_1, y_1], M_2 [x_2, y_2]$ dva různé body přímky p a stanovíme-li pro její libovolný bod $M [x, y]$ rozdíly souřadnic (jako na obr. 1a), plyne z podobných trojúhelníků MM_0M_1, M_2M_0M

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = t; \quad (y - y_1) : (y_2 - y) = t,$$

odkud po úpravě dostaneme rovnice (2), kterým říkáme *parametrické rovnice přímky*. Měníme-li totiž parametr t (přičemž $t \neq -1$), dostaneme všechny (vlastní) body přímky p .

Je-li bod M vně úsečky M_1M_2 , dostaneme stejné parametrické rovnice jako v případě, že bod M je uvnitř této úsečky.

Vyloučením t z rovnic (2) dostaneme rovnici přímky ve známém tvaru $ax + by = c$.

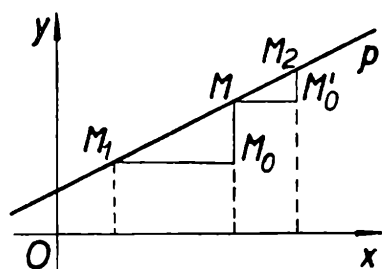
Důsledkem získaného vztahu pro parametry bodů A, B je rovnice

$$x_1x_2 + y_1y_2 - r^2 = 0 \quad (4)$$

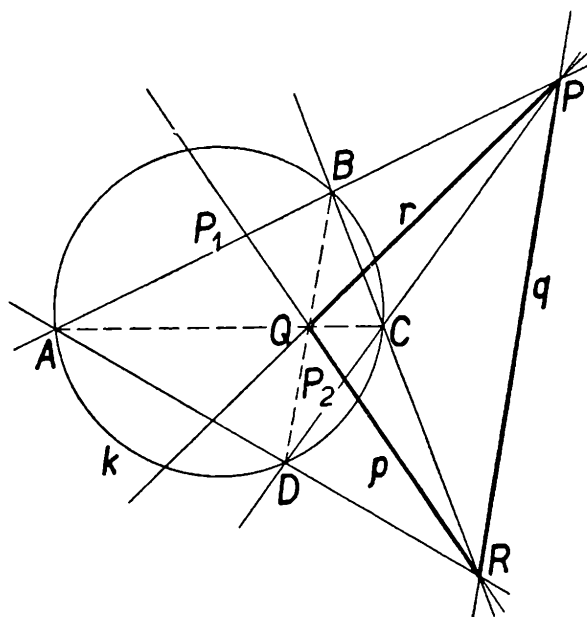
Měníme-li polohu přímky r tak, aby tvořila svazek s vrcholem v bodě P , pak bod Q je bodem přímky p , která má rovnici

$$xx_1 + yy_1 - r^2 = 0. \quad (5)$$

Přímku p nazýváme polárou bodu P vzhledem ke kružnici k , bod P pak pólem přímky p vzhledem ke kružnici k .



Obr. 1a.



Obr. 2.

Z rovnice (4) vidíme, že se její tvar nemění, když navzájem zaměníme oba body P, Q , a tedy:

1. Jestliže jeden bod leží na poláře druhého bodu, pak druhý bod leží na poláře prvního bodu.

Tak v obr. 1 přímka $p \equiv QR$ je polára bodu P , přímka $q \equiv PR$ polára bodu Q a přímka $r \equiv PQ$ polára bodu R . Každé dva body P, Q , které splňují podmínku věty 1 nazýváme *sduženými póly*, příslušné poláry p, q pak *sduženými polárami*.

Potom lze definovat poláru p bodu P jako *geometrické místo sdužených pólů k danému bodu P vzhledem k průsečíkům kružnice na přímkách vedených bodem P* .

Z toho plyne jednoduchá konstrukce poláry p daného bodu P , jestliže použijeme harmonické vlastnosti úplného čtyřrohu (obr. 2) vyjádřené větou:⁴⁾

2. *Diagonální strana $p \equiv QR$ úplného čtyřrohu A, B, C, D (kde $Q \equiv AC \cdot BD, R \equiv AD \cdot BC$) protíná strany AB, CD , které procházejí dia-*

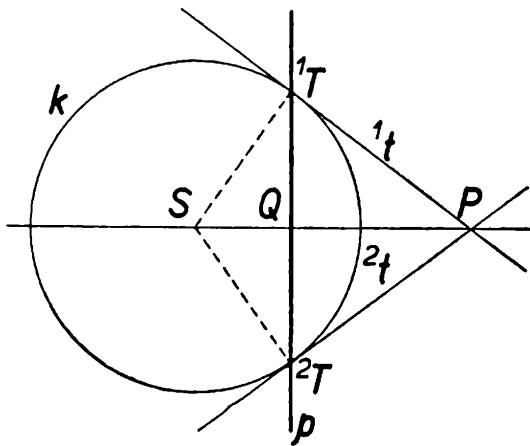
⁴⁾ Viz již zmíněný článek M. Valešové.

gonálním bodem P v bodech P_1, P_2 , které s bodem P a příslušnými vrcholy čtyřrohu tvoří harmonickou čtveřinu.

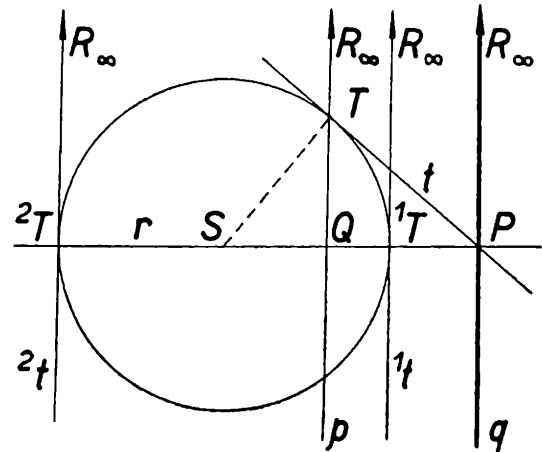
Z konstrukce v obr. 2 plyne:

3. Polára p vnějšího bodu P ke kružnici k je sečnou této kružnice, polára q vnitřního bodu Q kružnice k je její nesečnou.

Všimněme si teď dříve vyloučeného případu, tj. zvolme nyní bod P na kružnici k . Potom rovnice (4) je totožná s rovnicí tečny v bodě ke kružnici k^5). Tedy:



Obr. 3.



Obr. 4.

4. Polára bodu P , který leží na dané kružnici k , je tečnou ke kružnici v tomto bodě.

Uvažujme nyní vnější bod P ke kružnici k (obr. 3), sestrojme jeho poláru a stanovme její průsečíky $^1T, ^2T$ s kružnicí k . Poláry v bodech $^1T, ^2T$ jsou podle věty 4 tečny $^1t, ^2t$ ke kružnici k , které podle věty 1 musí procházet bodem P , z čehož plyne jednoduchá konstrukce poláry p (pro vnější bod P). Tato úvaha má za následek větu:

5. Polára bodu P ke kružnici je kolmá na spojnici daného bodu a středu kružnice.

Větu jsme vyslovili obecně, správnost máme ověřenu zatím jen pro vnější body kružnice. Pro bod na kružnici je věta zřejmá, pro vnitřní body to geometricky ukážeme později. Jinak analyticky je celá záležitost patrna, napíšeme-li rovnici přímky PS , tj. (v naší volbě útvarů) rovnici

$$xy_1 - yx_1 = 0,$$

z které plyne důkaz věty 5 pro jakoukoliv polohu bodu $P \neq S$.

⁵⁾ Viz např. článek E. Kraemera, O analytické geometrii v rovině. Rozhledy (38), 1959–60, str. 437–441, nebo učebnici Geometrie pro 3. ročník SVVŠ.

Z rovnice poláry a z konstrukce v obr. 2 plyne dále vzájemně jednoznačný vztah mezi pólem P a jeho polárou p . Je-li polára p sečnou kružnice k , sestrojíme snadno obrácenou konstrukcí (obr. 3) její pól P .

Jestliže ve zvláštním případě (obr. 4) polára r prochází středem S kružnice k (a je tedy jejím průměrem), jsou obě tečny 1t , 2t rovnoběžné. V tomto případě říkáme, že pól je nevlastním bodem R_∞ směru 1t (nebo 2t) kolmého na poláru r .⁶⁾

Z věty 1 se pak snadno ověří (při rozšíření naší roviny o nevlastní body a nevlastní přímku), že polára středu S kružnice k je nevlastní přímka roviny této kružnice.

Doplníme nyní geometrický důkaz věty 5 pro případ, že daný bod Q , jehož poláru chceme sestrojít, je vnitřním bodem kružnice k (obr. 4). K tomu sestrojíme bodem Q přímku p kolmou na spojnici $r \equiv QS$ a určíme její pól P . Pól přímky r je nevlastní bod R_∞ přímky p . Bod Q je průsečíkem polár p , r , proto musí polára q procházet bodem P i bodem R_∞ , tedy $q \parallel p$, tj. $q \perp QS$.

Z konstrukce v obr. 3 (nebo v obr. 4) plyne:

6. Pro součin (orientovaných) vzdáleností sdružených pólů P , Q , ležících na polopřímce kružnice k , od jejího středu S platí

$$\vec{SP} \cdot \vec{SQ} = r^2$$

Trojúhelník PQR (obr. 2), ve kterém každé dva vrcholy jsou sdružené póly (a každé dvě strany jsou sdružené poláry) a v němž je každý vrchol pólem protější strany (a každá strana polárou protějšího vrcholu), se nazývá *polárním trojúhelníkem* dané kružnice k .

Polární trojúhelník PQR kružnice k (obr. 2) má dva své vrcholy vně a jeden uvnitř kružnice. Průsečík výšek v tomto trojúhelníku (podle věty 5) je středem S kružnice k . Střed S kružnice neleží uvnitř polárního trojúhelníku (nebyla by splněna podmínka věty 6), a proto je polární trojúhelník kružnice tupouhlý.

Cvičení.

V úlohách 1) až 3) sestrojte kružnici, pro kterou je dán:

- 1) Pól P , polára p a bod A .
- 2) Pól P , polára p a tečna t . Dokažte si nejdříve správnost vztahu $(t^1tpq) = -1$, kde q je spojnice bodu $R \equiv p \cdot t$ s bodem \bar{P} , 1t druhá tečna z bodu R ke kružnici k .
- 3) Polární trojúhelník PQR (tupouhlý).
- 4) Ke kružnici k sestrojte poláru p rovnoběžnou s daným směrem s , je-li její pól P na dané přímce v .⁷⁾

⁶⁾ O nevlastních bodech a přímkách viz více v článku K. Havlíčka, *Nevlastní elementy v geometrii*. Rozhledy (35), 1957, str. 19–23.

⁷⁾ Viz článek J. Glivický, *Poznámka k jedné úloze z konstrukcí trojúhelníka*. Rozhledy č. 7, 1962–63, str. 302.

Řešení úloh o ploše kulové užitím mocnosti bodu ke kulové ploše

(Dokončení)

Užití mocnosti bodu ke kulové ploše k řešení konstruktivních úloh

Jednu z úloh vyřešíme podrobně i s připojením grafického řešení v Mongeově projekci. Dvě obdobné úlohy předkládáme pak čtenáři jako samostatné cvičení.

Ú l o h a. Jsou dány dvě různoběžné roviny ${}^1\tau$, ${}^2\tau$ s průsečnicí r a dále uvnitř jednoho ze čtyř klínů určených těmito rovinami dva různé body A , B tak, že $AB \nparallel r$. Sestrojte kulovou plochu $\kappa \equiv (S, r)$, dotýkající se obou rovin ${}^1\tau$, ${}^2\tau$ a procházející současně body A , B .

P o z n á m k a 4. Pro přesnost vyjadřování si připomeňme, že slovy „sestrojit kulovou plochu požadovaných vlastností“ rozumíme určit její střed a poloměr. Sestrojením tedy vůbec nemíníme grafické řešení.

P o z n á m k a 5. Příklad $AB \parallel r$, tj. případ, kdy by přímka AB byla rovnoběžná s oběma rovinami ${}^1\tau$, ${}^2\tau$ vylučujeme, neboť v takovém případě lze úlohu řešit jednoduše stejnolehlostí, bez použití mocnosti bodu ke kulové ploše. Rovněž vylučujeme případ ${}^1\tau \parallel {}^2\tau$, neboť pak bychom pro hledanou kulovou plochu měli další podmínku - totiž její poloměr, který by byl roven poloviční vzdálenosti obou rovin ${}^1\tau$, ${}^2\tau$ - a úloha by byla přeurčena.

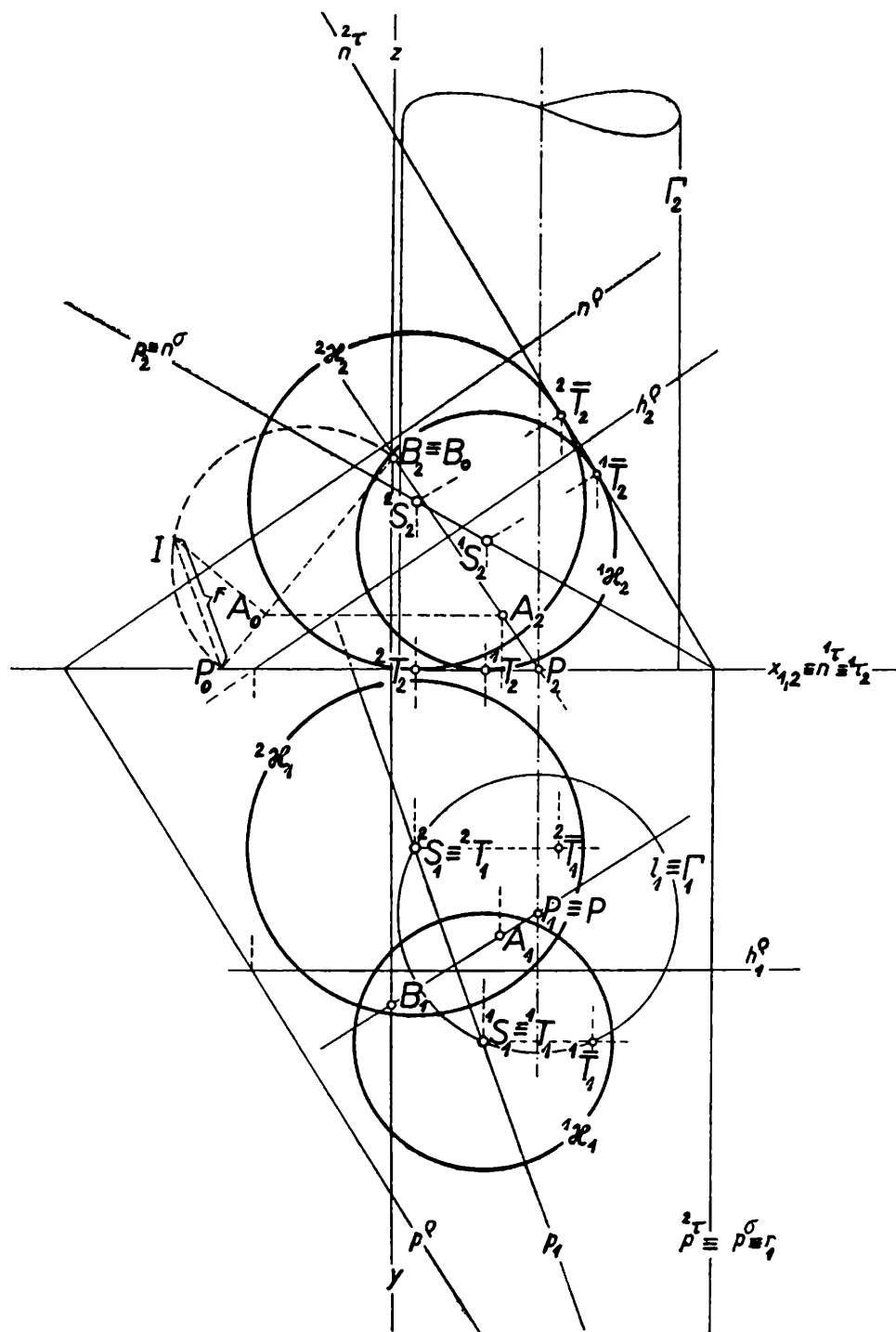
Ř e š e n í ú l o h y. (Označení zvolme tak, že $AB \nparallel {}^1\tau$). I. **R o z b o r.** Předpokládejme, že existuje $\kappa \equiv (S, r)$ požadovaných vlastností. Pak platí:

1. $S \in \varrho$, kde ϱ je rovina souměrnosti úsečky AB ;
2. $S \in \sigma$, kde σ je rovina souměrnosti rovin ${}^1\tau$, ${}^2\tau$;
3. označíme-li $P \equiv AB \times {}^1\tau$ a dále T dotykový bod κ a roviny ${}^1\tau$, je $P \neq T$ - jinak spor, neboť přímka AB by měla s κ tři různé společné body A , B , $T \equiv P$. Přímka PT je pak tečnou κ ;
4. podle V3, V4, P3 je $PA \cdot PB = PT^2$ a navíc $SA = SB = ST = r$, $ST \equiv q \perp {}^1\tau$.

II. **K o n s t r u k c e.** 1. Sestrojíme rovinu ϱ z rozboru, tj. množinu M_1 středů kulových ploch procházejících body A , B ;

2. sestrojíme rovinu σ z rozboru, tj. množinu M_2 středů kulových ploch dotýkajících se rovin ${}^1\tau$, ${}^2\tau$. Sestrojíme ovšem tu z obou rovin souměrnosti rovin ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, která prochází vnitřkem toho klínu (určeného rovinami ${}^1\tau$, ${}^2\tau$), v němž leží body A , B ;

3. v rovině ${}^1\tau$ sestrojíme kružnici $l \equiv (P, r = \sqrt{PA \cdot PB})$, tj. množinu M_3 dotykových bodů T , těch kulových ploch, které procházejí body A, B a dotýkají se současné roviny ${}^1\tau$, podle věty 5;



Obr. 1.

4. sestrojíme rotační válcovou plochu Γ s řídicí kružnicí l , jako množinu M_4 středů těch kulových ploch, které se dotýkají roviny ${}^1\tau$ v bodech kružnice l ;

5. společný bod S rovin ρ , δ a zmíněné válcové plochy - tj. společný bod množin M_1 , M_2 , M_4 - je již středem hledané kulové plochy; její poloměr je pak $r = SA = SB$.

III. D ů k a z. Dokážeme, že bod S z konstrukce (pokud existuje; o existenci rozhodneme v diskusi) splňuje všechny vlastnosti středu hledané kulové plochy. Podle věty 5 (důkaz věty) a kroků 1, 3, 4, 5 konstrukce je bod S středem kulové plochy, která prochází body A , B a dotýká se současně roviny ${}^1\tau$. Její poloměr je $r = SA = SB$. Protože však podle kroku 2. konstrukce je bod S také bodem roviny σ souměrnosti rovin ${}^1\tau$, ${}^2\tau$, dotýká se kulová plocha $\kappa \equiv (S, r = SA)$ také roviny ${}^2\tau$.

IV. D i s k u s e. 1. Je-li $\rho \parallel \sigma$, $\rho \not\equiv \sigma$, nemá úloha ž á d n é ř e š e n í neboť množiny M_1 , M_2 nemají společných bodů.

2. Je-li $\rho \equiv \sigma$ má úloha n e k o n e č n ě m n o h o ř e š e n í, neboť válcová plocha Γ z konstrukce a rovina $\rho \equiv \sigma$ mají nekonečně mnoho společných bodů S , z nichž každý je (viz důkaz) středem jedné z hledaných kulových ploch. Příklad, že by válcová plocha Γ a rovina ρ neměly společné body, nemůže nastat. To by totiž znamenalo, že $\rho \perp {}^1\tau$, čili $AB \parallel {}^1\tau$, což je spor s předpokladem, že $AB \not\parallel {}^1\tau$.

3. Je-li $\rho \not\parallel \sigma$, $\rho \times \sigma \equiv p$, mohou nastat (podle vzájemné polohy přímky p a válcové plochy Γ) tyto případy:

a) Přímka p a válcová plocha Γ nemají společných bodů. Pak úloha nemá ž á d n é ř e š e n í;

b) přímka p a válcová plocha Γ mají právě jeden společný bod S (přímka p leží v tečné rovině válcové plochy Γ , ale není její površkou). Pak úloha má j e d i n é ř e š e n í [$\kappa \equiv (S, r = SA = SB)$];

c) přímka p a válcová plocha Γ mají právě dva různé společné body 1S , 2S . Pak úloha má d v ě r ů z n á ř e š e n í [${}^1\kappa \equiv ({}^1S, {}^1r = {}^1SA = {}^1SB)$, ${}^2\kappa \equiv ({}^2S, {}^2r = {}^2SA = {}^2SB)$].

Příklad, že by přímka p a válcová plocha Γ měly nekonečně mnoho společných bodů, tj. že by přímka p byla jednou z površek válcové plochy Γ , nemůže nastat, neboť by to opět vedlo ke sporu s předpokladem $AB \not\parallel {}^1\tau$.

Grafické řešení úlohy je provedeno na připojeném obrázku v Mongeově projekci pro ${}^1\tau \equiv \pi$, ${}^2\tau (6; \infty; 10)$, $A (0; 6; 3; 4)$, $B (2; 5; 1)$.

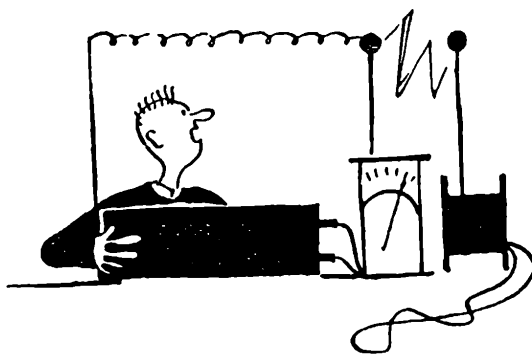
Cvičení

1. Jsou dány tři body A , B , C tak, že neleží v přímce, tj. určují jedinou rovinu ω a dále, nechť je dána přímka t tak, že $t \not\parallel \omega$. Sestrojte kulovou plochu $\kappa \equiv (S, r)$ procházející body A , B , C a dotýkající se přímky t .

2. Je dána rovina τ a uvnitř jednoho z obou poloprostorů určených touto rovinou dva různé body A , B , přičemž bod A leží na přímce $t \not\parallel \tau$. Sestrojte kulovou plochu $\kappa \equiv (S, r)$, která se dotýká roviny τ , přímky t v bodě A a prochází současně bodem B .

Fyzika

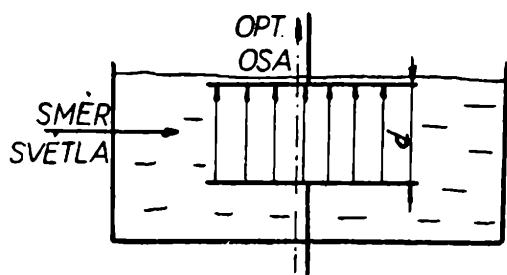
Vladislav Kolesnikov,
Olomouc:



Měření rychlosti světla pomocí Kerrova článku

Hodnota rychlosti světla je univerzální fyzikální konstanta, která má velký význam v teoretické i experimentální fyzice. Byla již několikrát změřena s větší nebo menší přesností, a to jak přímými, tak i nepřímými metodami.

Do roku 1675 byla považována rychlost světla za hodnotu nekonečně velikou. První, kdo považoval rychlost světla za konečnou, byl Galileo Galilei. Navrhl též měřicí metodu a v roce 1667 byly konány první pokusy, avšak bezúspěšně. První úspěšná metoda byla astronomická metoda Olafa Römera (čti Remera). Z dalších možno uvést astronomickou metodu Bradleyovu (čti Bredlyovu), pak metody terestrické, které při měření nepoužívaly nebeských těles, jako Fizeauovu (čti Fizóovu), Foucaultovu (čti Fúkoltovu), Michelsonovu (čti Majklsonovu), Karolus-Mittelstaedtovu (čti Karolus Mitlštedtovu), dále Andersonovu (čti Andrsonovu) a Rose-Dorseyovu (čti Rous-Dorsiovu).



Obr. 1.

Metody Andersonova a Karolus-Mittelstaedtova využívají k měření rychlosti světla Kerrova článku. Další měření pomocí tohoto článku provedli r. 1940 Huetel (čti Hetl) a v roce 1948 až 1950 Bergstrand (čti Bergstrand).

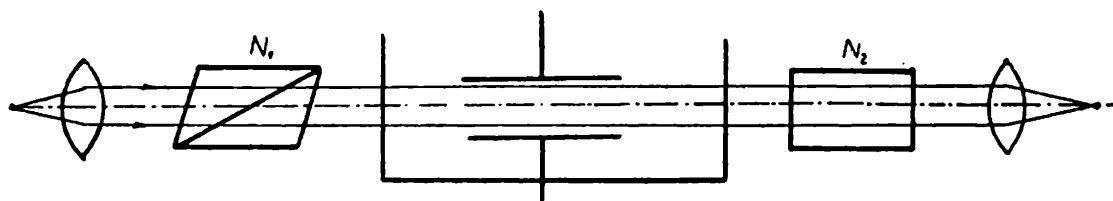
Zmiňme se stručně o principu Kerrova článku a jedné z metod měření rychlosti světla, která se zakládá na jeho použití. Uvedme metodu Karolus-Mittelstaedtovu.

Kerrův článek je založen na jevu, že látky pevné i kapalné se stávají v elektrickém poli dvojlomnými. Značný dvojlom se získává u kapalin, speciálně u nitrobenzenu nebo sirouhlíku. Tento jev objevil r. 1875 Kerra, a proto se nazývá Kerrův elektrooptický efekt. Kerrův článek je kyveta, v níž je nitrobenzen a uvnitř jsou vsunuty des-

ky kondenzátoru ve vzdálenosti asi 0,1 mm. Nitrobenzen mezi deskami kondenzátoru se stává v elektrickém poli dvojlomným a chová se jako jednoosý krystal s optickou osou rovnoběžnou se směrem elektrického pole (obr. 1).

Takto upravená kyveta je vložena mezi dva zkřížené nikoly N_1 , N_2 (obr. 2). Není-li na deskách kondenzátoru napětí, nebude světlo procházet touto soustavou, poněvadž zkřížené nikoly způsobí jeho vymizení. Vložíme-li však na desky kondenzátoru určité napětí, začne světlo procházet soustavou. Světelný paprsek prochází kolmo k elektrickému poli intenzity E (obr. 1). Úkaz je způsoben tím, že kapalina se stává vlivem elektrického pole dvojlomnou a oba paprsky, řádný a mimořádný, mají po výstupu z kapaliny fázový rozdíl

$$\Delta\varphi = K d E^2 ,$$



Obr. 2.

kde K je Kerrova konstanta, kladná pro obě uvedené kapaliny, d je tloušťka kapalinové vrstvy a E je intenzita elektrického pole.

Pro nitrobenzen při 20 °C je $K = 2,44 \cdot 10^{-6} \text{mV}^{-2}$ (SI).

Kerrův efekt se vysvětluje orientačním účinkem vnějšího elektrického pole na anizotropní dipólové molekuly kapaliny. Doba, během níž se stačí molekuly nitrobenzenu orientovat vlivem vnějšího elektrického pole, je 10^{-9} s. Za tutéž dobu se molekuly stačí také dezorientovat při přerušení elektrického pole, čímž dvojlom mizí. Tyto velmi malé časové intervaly, v nichž vzniká nebo mizí dvojlom, způsobují, že Kerrova článku je možno použít jako světelné uzávěrky prakticky bez setrvačnosti.

Tohoto efektu využili v r. 1928 Karolus-Mittelstaedt k měření rychlosti světla. Schéma zařízení je patrné z obr. 3.

Jsou to dva Kerrovy články, z nichž každý je umístěn mezi zkříženými nikoly. Na oba články K_1 a K_2 je vloženo synchronizované střídavé napětí o určitém kmitočtu ν . Světlo které projde ze zdroje první soustavou K_1 , se odráží na zrcadle Z a dopadá na druhou soustavu K_2 . Jestliže za dobu τ , kterou světlo potřebuje, aby proběhlo dráhu $2d$ od první sou-

stavy k zrcadlu a k druhé soustavě, klesne potenciální rozdíl na deskách kondenzátoru na nulu, způsobí poslední nikol soustavy K_2 vymizení světla.

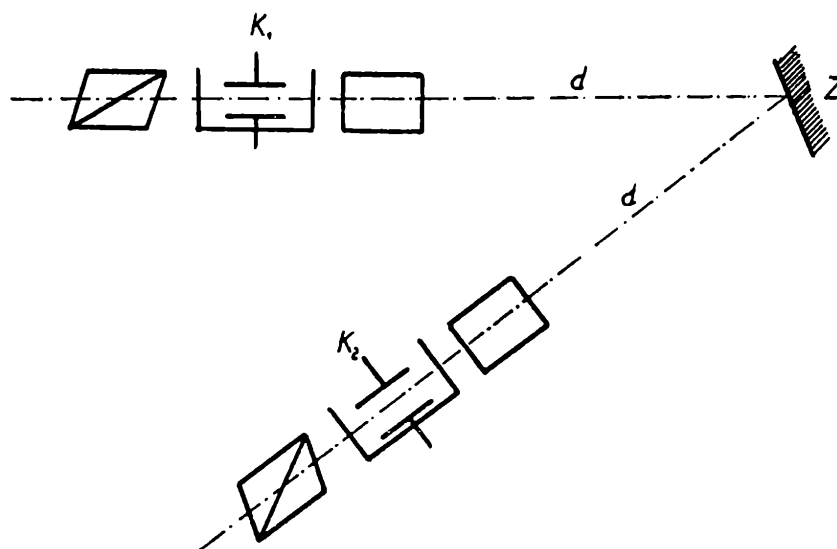
V tomto případě pak platí

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{1}{4\nu}$$

$$\tau = \frac{2d}{c}.$$

Porovnáním obou vztahů plyne pro rychlost světla

$$\frac{1}{4\nu} = \frac{2d}{c}, \text{ a z toho } c = 8d\nu$$



Obr. 3.

Karolus-Mittelstaedt naměřili touto metodou $c = (299\,786 \pm 20) \text{ kms}^{-1}$.

Výhoda této metody spočívá v tom, že není třeba velkých vzdáleností. Stačí vzdálenost 3 m od zdroje světla do Kerrova článku. Obdobné uspořádání aparatury měl Anderson, který měřil rychlost světla na Harvardské universitě v létech 1937 až 1941. Za nejpřesnější hodnotu rychlosti světla je udávána $c = (299\,793 \pm 0,3) \text{ km s}^{-1}$, kterou naměřil v r. 1953 Froom (čti Frúm).

Rychlost světla je důležitá fyzikální konstanta. Z teorie relativity vyplývá, že je pro látku nedosažitelná; rychlost větší není možná vůbec.

Stabilita ve stavební praxi

(Dokončení)




V době, kdy Euler budoval svou teorii, používalo se jako stavebního materiálu pro tláčené pruty (sloupy) převážně kamene, zdiva, méně už dřeva. Sloupy byly velmi málo štíhlé, takže zkušenost zdánlivě odporovala Eulerově teorii, neboť zkoušené sloupy se drtily při mnohem menších tlacích, než předpovídal Euler. Stavitelé, kteří působili v létech po Eulerově smrti, nepoužívali tedy jeho teorie a ta upadla postupně téměř v zapomenutí.

Teprve v XIX. století v souvislosti s rozvojem průmyslu a hlavně dopravy, přišla Eulerova teorie opět ke cti. Začalo se totiž ve větší míře používat ke konstrukčním účelům litiny a později i oceli. Tím bylo umožněno vytvářet tláčené prvky štíhlejší. Poněvadž kritická břemena takových prutů jsou menší než mezní hodnoty tlaků určované jen s ohledem na rozdrčení, došlo právě v důsledku nedbání Eulerovy teorie ke katastrofám. Při pátrání po příčinách byla vytažena i Eulerova teorie a řadou zkoušek ověřeno, že Euler měl pravdu - ovšem v určitém oboru štíhlostních poměrů. Byla tedy Eulerova teorie uplatňována pro štíhlostní poměry větší, než je jistý mezní poměr. Hodnota tohoto mezního poměru byla dána takovými rozměry prutu, při kterých Eulerovo kritické břemeno i velikost tlaku, kterým se prut drtil, nabývaly stejných hodnot.

Za této situace došlo na přelomu XIX. a XX. století k několika velkým katastrofám, způsobeným nesprávným použitím Eulerovy teorie štíhlých tláčených vzpěr. Z nich stačí jmenovat jen např. v r. 1891 zřícení nevelkého železničního mostu na švýcarské Jura-Simplonské dráze nedaleko Basileje, při které zahynulo 74 cestujících přejíždějícího osobního vlaku. Je také možno jmenovat katastrofu hamburského plynojemu, k níž došlo koncem r. 1909 a při které přišlo o život 20 lidí. Obě katastrofy (a řada dalších) byly způsobeny především chybami ve výpočtu stability tláčených prutů. Zejména zřícení plynojemu v Hamburku je poučné z hlediska použitelnosti Eulerovy teorie. Bylo totiž už dříve známo (a dokázali to zejména badatelé Tetmajer a Jasiňskij), že hranicí pro použitelnost Eulerova vzorce pro kritické břemeno není mezní štíhlostní poměr rozhraničující malé štíhlosti, při nichž se prut poruší dříve prostým tlakem (tj. rozdrtí) než dosáhne břemeno kritické hodnoty, a větší štíhlosti, při nichž nejprve dojde ke ztrátě stability prutu (vybočení), a pak teprve k porušení (zlomením),

nýbrž že hranici použitelnosti Eulerova vzorce je třeba hledat již u vyšších štíhlostních poměrů.

Zdůvodnění této skutečnosti je v tom, že existuje řekněme obor jistých, středních štíhlostních poměrů. Pruty jim odpovídající se sice neporušují rozdrčením (prostým tlakem), nýbrž zlomením po ztrátě stability, avšak jejich kritické břemeno je menší než hodnota vypočtená podle Eulera. Příčinou toho je okolnost, že při zmíněných štíhlostech dosahuje kritické břemeno hodnot, jež vyvolávají v prutu (ještě nevybočeném) stlačení, které už není úměrné působícímu tlaku podle Hookeova zákona. Není tedy splněn jeden ze základních předpokladů, na nichž je Eulerova teorie vybudována a je tedy třeba ji v těchto případech nahradit jinou. Na to právě ukázal kromě jiných také ruský inženýr Jasiňskij a bylo to potvrzeno četnými zkouškami.

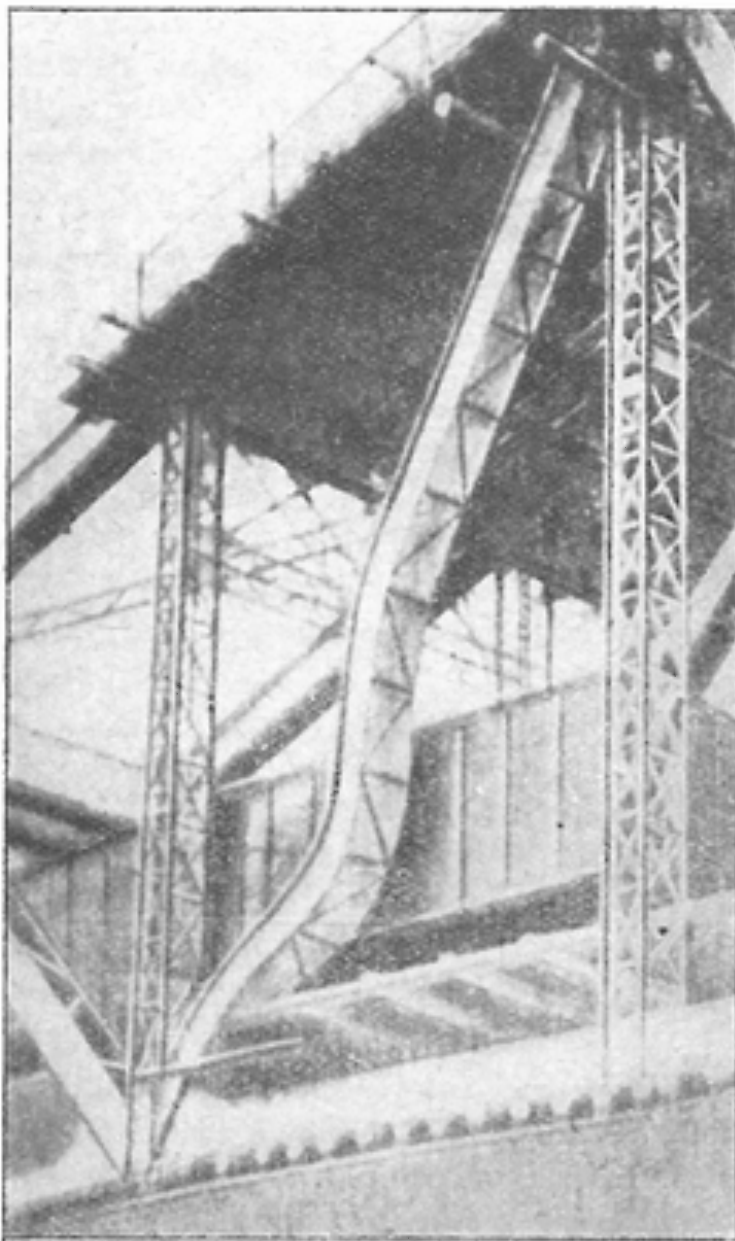
Štíhlostní poměr	malý	střední	velký
O porušení rozhoduje	pevnost materiálu	ztráta stability	
Prut se poruší	rozdrčením	zlomením po vybočení	
Hookeův zákon po dosažení kritického břemene	—	už neplatí	ještě platí
Eulerova teorie	—	neplatí	platí
			

Obr. 5. Přehled stabilitního problému osově tlačенého prutu.

Při výpočtu podpor hamburského plynojemu bylo mylně použito Eulerova vzorce právě při střední štíhlosti a kritické břemeno pokládáno za více než dvojnásobně menší než skutečně bylo.

Kromě toho v tomto případě i v několika dalších nebylo dbáno okolnosti, že ocelový prut podpory plynojemu nebyl tvořen jediným válcovaným nosníkem, nýbrž byl složen ze dvou.

Takovéto skládání prutů, nutné pro silně namáhané vzpěry, dále snižuje velikost kritického břemene. To se projevilo tragicky zejména v r. 1907 při zřícení velikého ocelového mostu v Quebecku (Kanada). Most má rozpětí hlavního pole přes 500 m a už během stavby se zřítíl dvakrát.



Obr. 6. Tlačená mostní vzpěra po vybočení. (Snímek poruchy Mozyrského mostu přes Pripet v SSSR. Podle F. D. Dmitrijeva: Kručenija inženěrných sooruzenij, Moskva 1953.)

Zatímco příčinou druhé katastrofy byla technická chyba při montáži, první katastrofa, při níž zahynulo 74 lidí, jak se vyšetřováním ukázalo, byla zaviněna nesprávným výpočtem tlačených prutů v příhradové konstrukci. Pruty, dostatečně štíhlé, byly počítány podle Eulerova vzorce. Přesto však nastalo u nich vybočení, a tím zřícení ještě nehotové konstrukce.

┌ Jak vypadá vybočení tlačného prutu ve skutečnosti, ukazuje obr. 5. Je to fotografie poruchy na M o z y r s k é m m o s t ě přes Pripet z r. 1925 v SSSR.

Problém stability tlačných prutů je mnohem složitější, než bylo možno uvést v tomto krátkém pojednání.

Jde mimo jiné např. o to, že většina prutů, u nichž teoreticky počítáme s osovým působením tlakové síly, je ve skutečnosti tlačena mimořádně. To značí, že směr tlaku vlivem nepřesnosti osazení a nedokonalosti výroby samotného prutu se neztotožňuje s jeho osou. To má ovšem vliv nejen na velikost kritického břemene, nýbrž to i znovu a jinak vymezuje sám jeho pojem, odlišně od toho, co bylo dříve uvedeno.

Konečně poznamenejme, že otázky stabilitní se zdaleka neomezují na výpočet tlačných prutů. Změna druhu rovnováhy rozhoduje o únosnosti stěnových nosníků, skořepinových konstrukcí, rámových konstrukcí atd. Prostě, stabilitní problémy tvoří dnes samostatnou oblast statiky stavebních (i strojních) konstrukcí, a to oblast, která zdaleka ještě není uzavřena a je teoreticky velmi náročná.

Eulerův génus však dodnes ozařuje cesty, jimiž se ubírají mnozí badatelé, kteří v této oblasti pracují a ukazují jim, jak je třeba nedogmaticky spojovat ryzí a pravdivou teorii s každodenní praxí.

J a n H o r s k ý, PFPU, Brno:

Základy teorie relativity

(Dokončení)

VI. Zpomalení procesů v kosmických raketách. V dnešní době, kdy první kosmonauti obletěli Zemi a připravují se k průkopnickým letům na jiné planety, se často diskutuje o zpomalování času v kosmických raketách, o omládnutí astronautů a podobně. Takové otázky přirozeně nabývají dnes svého oprávnění, a proto si jich v posledním odstavci tohoto článku všimneme důkladněji a podrobněji. Uvažujme proto o kosmické raketě, která vykonala cestu vesmírem a vrátila se zpět na Zemi. Nechtě doba po kterou byla raketa na cestě byla měřena dvěma stejnými hodinami na Zemi a v raketě. Časový interval, který ukázaly hodiny na Zemi, označme T_Z a časový interval, který ukázaly hodiny v raketě, označme T_R . Poněvadž hodiny jsou realizovány každým periodickým procesem, vyjadřuje vztah mezi veličinami T_Z a T_R vztah mezi průběhem procesů na Zemi a odpovídajících procesů v raketě. Provedme nejprve častou úvahu opírající se o speciální teorii relativity. Raketa nechtě se

pohybuje rychlostí rovnou čtyřem pětinaám rychlosti světla do vzdálenosti čtyř světelných let od Země a zpět. Podle speciální teorie relativity výpočet intervalů T_Z a T_R provedeme tak, že Zemi i raketu považujeme za inerciální vztažné soustavy a aplikujeme vztah (5). Doba T_Z plyne z jednoduchého vztahu

$$2s = v \cdot T_Z ,$$

kde s je dráha, kterou urazí světlo za čtyři roky a v je rychlost rakety $\left(v \sim \frac{4}{5} c \right)$ Odtud plyne, že

$$T_Z = 10 \text{ let} .$$

Dobu T_R potom snadno vypočteme ze vztahu

$$T_R = T_Z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 6 \text{ let}$$

Přišli jsme tak k závěru, že od okamžiku startu rakety do jejího návratu ukáží hodiny na Zemi deset let, kdežto v raketě pouze šest let. Je tento výsledek správný? Při výpočtu T_Z a T_R jsme předpokládali, že jde o rovnoměrný pohyb rakety, což zřejmě není ani zdaleka splněno, neboť raketa startuje se značným zrychlením, v polovině dráhy mění směr pohybu a přistává pohybem zpomaleným. Provedená úvaha nebyla tedy přesná, a to v tom smyslu, že vypočítané hodnoty neodpovídají skutečným podmínkám letu. Ukažme však, že naše úvaha byla i principiálně chybná. To však není nic obtížného, neboť chyba je zřejmá. Ignorovali jsme totiž rozdíl mezi inerciální a neinerciální souřadnou soustavou. Nelze totiž ani v hrubém přiblížení považovat souřadnou soustavu spojenou s raketou za soustavu inerciální a nelze tedy na podobné otázky aplikovat výsledky speciální teorie relativity. K jednoznačnému vyřešení této otázky však vede teorie gravitace, která je jádrem obecné teorie relativity. Hlavním výsledkem teorie gravitace je zjištění, že průběh fyzikálních procesů, kterým je podroben nějaký hmotný objekt a rovněž fyzikální a geometrické veličiny charakterizující tento objekt závisí na gravitačním poli, ve kterém se objekt nachází a na rychlosti, kterou se v tomto poli pohybuje. Teorie gravitace je v současné době jedinou fyzikální teorií, s jejíž pomocí lze hledat odpovědi na otázky týkající se kosmických letů. Teorie gravitace beroucí v úvahu gravitační pole vede vždy k jednoznačnému výsledku. Raketa, která letí ze Země a vrací se na ni zpět, se pohybuje nerovnoměrným pohybem v nehomogenním gravitačním poli. Ze vzorců, které teorie gravitace dává, lze vypočítat údaje hodin pohybujících se nerovnoměrně v gravitačním poli. Ukazuje se, že hodiny v silnějším gravitačním poli jdou pomaleji než v poli slabším. Vliv gravitačního pole je však velmi malý. Například, ukázaly-li by

hodiny na Slunci jeden rok, ukázaly by hodiny umístěné v raketě, která by unikla z gravitačního pole Sluneční soustavy asi o jednu minutu více, přičemž neuvažujeme pohyb rakety. Mnohem výraznější je závislost průběhu procesů, kterým je podroben nějaký objekt na jeho rychlosti v gravitačním poli. Uvažme pro ilustraci raketu, která letí ze Země a pohybuje se působením stálé síly. Podle relativistické mechaniky se taková raketa pohybuje rovnoměrným pohybem po přímce, a to tak, že její rychlost stále vzrůstá, nedosáhne však nikdy rychlosti světla. Po zdoluhavém výpočtu obdržíme jistý výraz spojující čas, který ukazují hodiny v raketě s časem, který ukazují hodiny na Zemi. Tento vztah je však mnohem složitější než obdobný výraz plynoucí ze speciální teorie relativity a nemůžeme se jím proto podrobněji zabývat. Uvažovaná raketa se vzdaluje od Země např. 153 pozemských dnů s počátečním zrychlením $a = 30 \text{ m s}^{-2}$, takže by dosáhla rychlosti $v = \frac{4}{5} c$ a stejnou dobu

necht se pohybuje inverzním pohybem zpomaleným, takže po 306 dnech by se ocitla vzhledem k Zemi v klidu. Týmž způsobem by pokračovala cestou zpět. Z již připomenutého vzorce, který dává teorie gravitace vyplývá, že po návratu této rakety z její cesty vesmírem, která by trvala 612 pozemských dnů, by hodiny v raketě ukazovaly méně než 500 dní. I když tyto výsledky nemusí číselně odpovídat skutečnosti, kvalitativně jsou velmi pravděpodobné. Poznamenejme, že rozdílnost dob T_R a T_Z se projevuje tím více, čím déle raketa letí, takže po návratu rakety z cesty vesmírem, která by trvala asi 400 pozemských let, by hodiny v raketě ukazovaly méně než 8 let při stejných počátečních podmínkách jako v předešlé úloze. Rozdílnost dob T_R a T_Z se často nazývá časová paradoxa, i když tento termín není vhodný, neboť o žádné skutečné protiklady nejde.

Závěr je tedy takový, že čas v raketě plyne pomaleji než na Zemi, nebo přesněji, že procesy v raketě probíhají pomaleji než odpovídající procesy na Zemi. Jedná se zřejmě o procesy fyzikální, ovšem fyzikální procesy přímo podmiňují procesy chemické a biologické. Zpomalí-li se tedy v raketě průběh fyzikálních procesů, musí se zpomalit i průběh příslušných procesů chemických a biologických. Biologické projevy jsou však projevem života organismů. Z tohoto hlediska je tedy zcela přirozené, že organismy v kosmické raketě mohou žít déle než stejné organismy na Zemi. Domněnka o tom, že lidé v raketě mohou přežít několik pozemských generací, je tedy opodstatněná a bude patrně s konečnou platností ověřena až budou zkonstruovány anihilační rakety, pohybující se rychlostmi srovnatelnými s rychlostí světla. Bude to nové vítězství vědy, které odhalí lidem nevídané možnosti při pronikání do hlubin vesmíru i v uspořádání jejich života.

Z á v ě r. Je jisté, že tento článek nemohl podat soustavný a úplný výklad základních myšlenek a výsledků speciální teorie relativity. Bylo

by však postačující, kdyby alespoň v několika mladých lidech probudil touhu po hlubším poznání velkých a krásných myšlenek, které lidstvu a vědě odkázal Albert Einstein.

Literatura

a) Úvodní:

J. I. Sokolovskij, *Teoria relativity*. Osveta, 1962.
B. G. Kuzněcov, *Ei n š t e i n*. Akadēmija nauk SSSR, 1962.

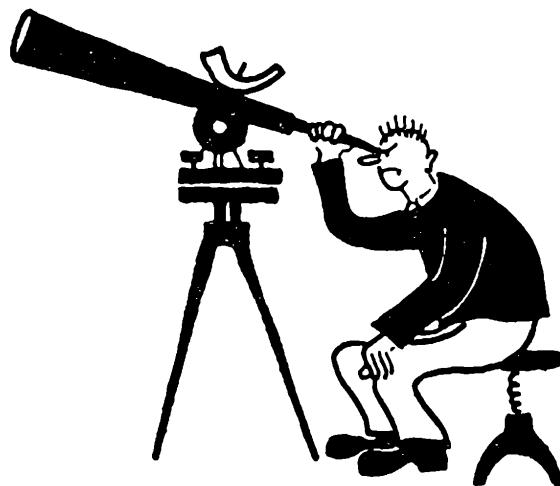
b) Pokročilá:

M. A. Tonnela, *Osnovy elektromagnetisma i teorii
o t n o s i t ě l n o s t i*. Izd. inostr. literat., 1962.

Astronomie

P a v e l A d a m o v :

Eppur si muove



22. júna 1633 vo veľkej sieni dominikánov v Santa Maria sopra Minerva v Ríme končí sa proces, ktorý ostáva navždy škvrnou v dejinách vedy. Končí sa odprisahaním, ktoré musel vykonať zničený starec Galileo Galilei pod hrozbou mučenia a strašnej smrti slovami hlboko urážajúcimi ľudskú dôstojnosť:

Ja, Galileo Galilei, menovaný, som odprisahal, slúbil tak, ako bolo uvedené, na dôveryhodnosť toho vlastnou rukou som podpísal túto listinu a prečítal som ju slovo za slovom v Ríme v kláštore Minerva dnešný deň 20. júna.

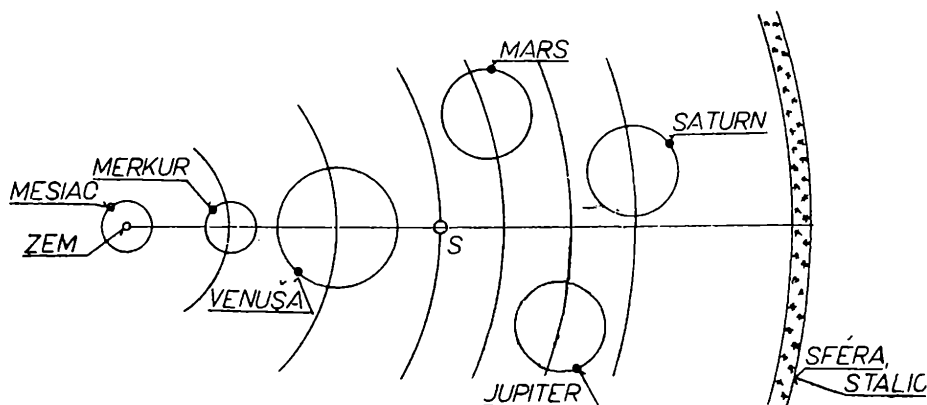
Ľudová tradícia hovorí, že len čo sa Galileo zdvihol z pokľaknutia, dupol nohou a vraj zašeptal *Eppur si muove* a predsa sa točí.

Desať rokov pracoval Galileo Galilei na rukopise, kým mohol napísať na titulnú stranu názov svojho diela:

DIALOG
di Galileo Galilei Linceo

...
sopra i due
Massimi sistemi del mondo
Tolomaico e Copernicano.

Dialóg o dvoch najväčších systémoch sveta, ptolemaiovskom a kopernikovskom je celoživotným dielom Galileo Galileia, dielom, v ktorom sa vďaka svojim neúnavným pozorovaniam a vlastným astronomicko-fyzikálnym objavom mohol plne zastať sa Koperníkovho učenia proti Ptolemaiovej geocentrickej sústave. Ptolemaiova sústava vysvetľovala pohyby planét veľmi zložitým spôsobom. (Claudius Ptolemaios 2. st. n.l.). V zjednodušenej schéme (obr. 1) uprostred vesmíru je nehybná Zem. Planety sú usporiadané v tomto poradí: Mesiac, Merkur, Venúša, Slnko, Mars, Jupiter a Saturn. Vesmír je obmedzený sférou stálic. V tejto zjednodušenej schéme obieha Slnko a Mesiac po jednoduchej kružnici, ostatné planety obiehajú po kružniciach zvaných deferent a epicyklus. Celý vesmír tj. všetky planéty a sféra stálic sa otáča okolo Zeme raz za deň. Planéty konajú vlastné pohyby proti smeru denného pohybu sféry stálic.



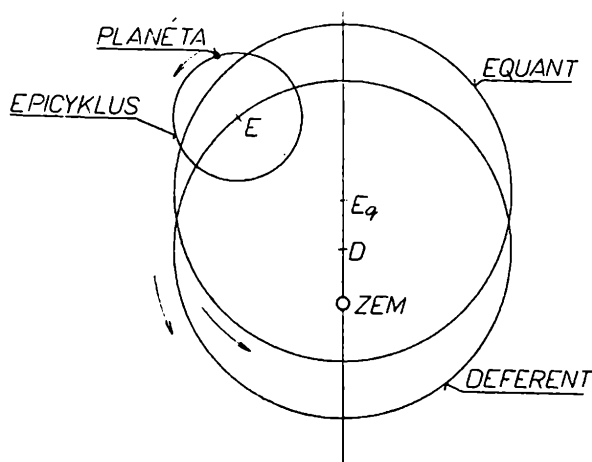
Obr. 1. Zjednodušená schéma Ptolemaiovej sústavy.

Zdánlivé nepravidelné pohyby planét spôsobili tzv. prvú a druhú nerovnosť. Z dnešného hľadiska prvá nerovnosť sa prejavuje nerovnomerným pohybom planéty po elipse. Ptolemaiova sústava vysvetľovala prvú nerovnosť tak, že „strednému miestu“ planéty dala obiehať po kružnici zvanej *d e f e r e n t* (obr 2). Nehybná Zem bola umiestnená excentricky v tejto kružnici. Symetricky voči Zemi podľa stredu deferentu bol stred kružnice zvanej *e q u a n t*. Voči tomu bodu obiehalo „stredné miesto“ planéty rovnomerne, teda po deferentu nerovnomerne. Vlastná planéta obiehala rovnomerne v rovnakom zmysle po kružnici zvanej *e p i c y k l u s*. Doba obehu v deferentu bola u vonkajších planét zhruba totožná

s obehom planéty okolo Slnka, obeh v epicyklu trval u vonkajších planét jeden rok. U vnútorných planét trval obeh v deferentu jeden rok, obeh v epicyklu sa rovnal dnešnému synodickému obehu planéty okolo Slnka.

Druhá nerovnosť javí sa z dnešného hľadiska ako odraz pohybu Zeme okolo Slnka. Počas roka je zdánlivý pohyb Zeme raz rýchlejší, inokedy pomalší, až dochádza k spätnému pohybu planéty voči jej „strednému miestu“.

Napriek všetkej zložitosti Ptolemaiova sústava po doplnení a prevedení nutných opráv umožňovala pomerne so značnou presnosťou výpočet polohy planéty. Predsa však nebolo možné, aby si veda nepovšimla jej vážne nedostatky. O nich však nechajme rozprávať samotného Galileu Galileiho uvedením úryvku z Dialogu:



Obr. 2. Schéma pohybu planéty.

Simplicio: A akéže to neobyčajné chyby väzia v Ptolemaiovom systéme?...

Salviati: U Ptolemaia sa stretávame s chorobami, na ktoré nájdeme lieky u Koperníka. Predovšetkým či všetky filozofické školy neuznávajú za jeho obzvlášť slabý bod predpoklad, že nejaké teleso pohybujúce sa od prírody kruhovým pohybom nepravidelne sa pohybuje okolo svojej osi a pravidelne okolo inej osi? A predsa takéto znetvorené pohyby stretávame v systéme Ptolemaiovom - zatiaľ čo u Koperníka sa všetky dejú neustále okolo svojej osi. V Ptolemaiovom systéme sa musia pripisovať nebeským telesám opačné pohyby a musí sa pripustiť, že všetky sa pohybujú z východu na západ a súčasne zo západu na východ. U Koperníka všetky otáčky nebeských telies majú jeden a ten istý smer - zo západu na východ. A čo poviem o pohybe planét: raz rýchlejšie a raz pomalšie, ale občas sa úplne zadržujú a potom na dosť veľkom úseku sa pohybujú opačne? Aby tento jav objasnil, zavádza Ptolemaios veľa epicyklov, prispôsobujúc ich jeden za druhým ku každej planéte na základe akýchsi zle sformovaných pravidiel pohybu - zatiaľ čo pri neobyčajne prostom pohybe zeme zmiznú všetky. Či sami nepoviete, pán Simplicio, že je to najväčší nezmysel Ptolemaiovho systému, v ktorom každej planéte sa pripisuje jej vlastná dráha, jedna nad druhou, to že často treba opakovať, že Mars umiestnený nad sférou Slnka zostupuje, blížiac sa viac k Zemi ako slnečná guľa, a o niečo neskôr sa znova vznáša ponadto isté slnko neobyčajne vysoko? A predsa tieto podrobné nezmysly odstraňuje len a jedine - jednoduchý ročný pohyb zeme.

„Jediná vec, ktorú nemožno zničiť na svete je pravda“ platia v plnej miere aj na Galileo Galileia, vedca, ktorý hľadal pravdu, aby pomohol ľudstvu na ceste ovládania vesmíru.

Literatúra.

1. Galileo Galilei, Dialóg o dvoch systémoch sveta V preklade Dr. Mikuláša Pažitku, SAV, Bratislava.
2. Erich Schönebeck, Galileo Galilei, Slovenské vydavateľstvo politickej literatúry, Bratislava 1962.
3. Kolektív, Dějiny exaktních věd v českých zemích. ČSAV, Praha, 1961
4. Z. Horský - M. Plavec, Poznávání vesmíru. Orbis, Praha 1962.

Ladislav Sehnal, CSc., Ondřejov:

Umělé družice v r. 1963

V dnešním přehledu umělých družic uvádíme tělesa, vypuštěná na oběžné dráhy kolem Země v loňském roce, 1963. Opět jsme do tabulky zanesli pouze ty družice, které mají výzkumný a vědecký charakter - družice vojenské a špionážní neuvádíme. Celkem je popsáno 34 družic, avšak vypuštěno bylo 55 těles. Při každém úspěšném pokusu o vyslání nějaké družice do vesmíru však neobíhá kolem Země jenom samotná družice, ale na oběžnou dráhu se dostanou také jiná tělesa, např. poslední stupeň nosné rakety, různé zlomky obalu družice apod. Všechna tato tělesa jsou sledována, radarově nebo i opticky, pokud je to možné, až do jejich zániku v hustých vrstvách zemské atmosféry. Z tzv. situačních zpráv, které jsou čas od času vydávány a popisují dráhy všech umělých těles, vypuštěných do vesmíru, bylo možno zjistit, že ke konci r. 1963 se kolem Země pohybovalo přesně 200 objektů, většinou ovšem bezvýznamných zbytků nosných raket a ochranných obalů družic. Při vypuštění družice Explorer 19 dne 19. prosince 1963 se na oběžnou dráhu dostalo např. 5 takových těles a při vypuštění družice Transit 4 (29. 6. 1961) dokonce 203 - většina z nich ale brzy zanikla.

V loňském roce byl počet úspěšných pokusů o vypuštění družice poprvé menší, než v roce předcházejícím (bylo to 72 družic). Kvalitativně ale byla nová tělesa opět lepší a hodnotnější než dříve. Nosné rakety také většinou vypouštěly na oběžné dráhy každá již několik družic a ne pouze jednu. Např. spolu s družicí Lofti 2 z 15. 6. byly též vypuštěny toutéž raketou ještě družice Greb 5 a Radose s podobným určením (výzkum záření mimo zemskou atmosféru), ale v poněkud jiných drahách.

S přibývajícím počtem umělých družic a také i vzhledem k jejich rostoucí váze se rovněž zvětšuje možnost nalezení zbytků velké družice, po jejím průletu atmosférou. První takový úspěšný nález byl učiněn 5. září 1962 ve Spojených Státech, kde ve státě Wisconsin dopadly

Datum vy- puštění 1963	Název	Váha kg	Doba oběhu min	Výška perigea km	Sklon dráhy
14. 2.	Syncom 1, USA	39	1 425,5	34 392	33,3
21. 3.	Kosmos 13, USA	—	89,8	192	64,9
2. 4.	Luna 4, SSSR	1422	42 000,0	90 000	65,0
3. 4.	Explorer 17, USA	184	96,4	255	57,6
13. 4.	Kosmos 14, USA	—	92,1	252	48,95
22. 4.	Kosmos 15, USA	—	89,8	160	65,0
28. 4.	Kosmos 16, USA	—	90,4	194	65,0
7. 5.	Telstar 2, USA	79,4	225,05	974	42,7
9. 5.	Midas 6, USA	2000,0	166,5	3 604	87,4
15. 5.	Mercury 9, USA	1370,0	88,7	161	32,5
22. 5.	Kosmos 17, USA	—	94,8	260	49,0
24. 5.	Kosmos 18, USA	—	89,4	196	65,0
14. 6.	Vostok 5, SSSR	4730	88,3	162	64,9
15. 6.	Lofti 2a, USA	—	95,7	171	69,9
16. 6.	Transit, USA	724	99,8	724	89,9
16. 6.	Vostok 6, SSSR	4713	88,3	168	65,1
19. 6.	Tiros 7, USA	133	97,4	649	58,2
28. 6.	GRS, USA	99,3	102,1	411	49,7
19. 7.	Midas 7, USA	2000	168	3 670	88,4
26. 7.	Syncom 2, USA	39	1 454	35 584	33,0
6. 8.	Kosmos 19, USA	—	92,1	267	49,0
28. 8.	SRS, USA	61	107,4	1 075	89,9
17. 9.	TRS, USA	2,0	2 329	220	36,8
18. 10.	Kosmos 20, USA	—	89,5	205	64,9
1. 11.	Let 1, SSSR	—	94,0	339	58,9
11. 11.	Kosmos 21, USA	—	88,5	182	64,8
16. 11.	Kosmos 22, USA	—	90,3	192	64,9
27. 11.	Explorer 18, USA	64	5 666	192	33,3
27. 11.	Centaur 2, USA	4620	107,7	547	30,3
5. 12.	Transit, USA	—	106,8	1 057	89,9
13. 12.	Kosmos 23, USA	—	92,9	240	49,0
19. 12.	Kosmos 24, USA	—	90,5	204	65,0
19. 12.	Explorer 19, USA	7	115,9	590	78,6
21. 12.	Tiros 8, USA	119	99,3	691	58,5

do ulic města Manitowoc zbytky sovětské družice Sputnik 4, vypuštěné 14. května 1960. Také u nás byl v loňském roce učiněn podobný nález, avšak definitivní potvrzení o kosmickém původu tělesa nemohlo být zajištěno. V USA je pro zjišťování zbytků družic, dopadlých na zemský povrch, organizován dokonce zvláštní program, přiřazený k programu hledání meteoritů, tj. přirozených nebeských těles.

V seznamu družic za loňský rok můžeme číst ze známých názvů především jména Kosmos. Jedenáct těchto družic, vypuštěných v r. 1963 měří různé parametry vysoké atmosféry, záření, geofyzikální a astronomické údaje. Podobného charakteru je také družice Explorer 17, měřící hustotu a složení zemské atmosféry. Explorer 18 měří kosmické záření

a tzv. „sluneční vítr“, Explorer 19 je kulová družice, velmi lehká, o průměru 365 cm, tvořená lehkou umělou hmotou (obal), jejímž účelem je studium hustot atmosféry v různých zeměpisných šířkách.

Různé druhy záření studují rovněž i jiné družice, např. SRS („Solar Radiation Satellite“), TRS, GRS. Výzkum tohoto typu je programem mnoha družic; je tomu tak jistě i proto, že kosmické záření je činitelem, který má velký vliv na kosmonauty, obíhající v kosmických lodích kolem Země.

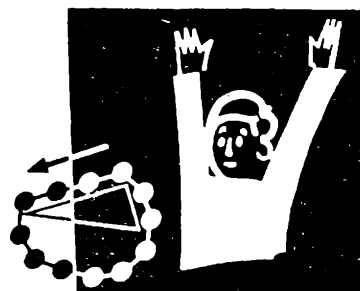
Spojovací technika byla obohacena o další pomocníky - je jím především družice Telstar 2 a nově též družice Syncom 1 a 2. To jsou družice, které obíhají kolem Země jednou za 24 hodin, měly by tedy zachovávat stále stejnou polohu nad jistou oblastí zemského povrchu. U první družice nebyla však oběžná doba příliš přesně dodržena, takže družice se ze své počáteční polohy brzy vychýlila. Druhý pokus byl úspěšný a družici se podařilo stabilizovat.

Meteorologové mají opět nové družice Tiros 7 a Tiros 8. Pokus s raketou Centaur 2 vynesl na oběžnou dráhu velmi těžké zkušební těleso, které má být později nahrazeno aparaturou, schopnou přistání na Měsíci. Technika kosmických letů byla velmi úspěšně studována v případě sovětské družice Let 1, která byla první družicí, schopnou samostatného manévrování v kosmickém prostoru. Družice na povely se Země několikrát změnila svou dráhu - to je základní předpoklad k úspěšnému vyřešení problému setkání dvou družic ve vesmíru a sestrojení mohutné oběžné stanice kolem Země.

Nejzávažnější byly opět pokusy s kosmickými tělesy, schopnými nést člověka na oběžné dráze. V tomto ohledu znamenaly velký pokrok dvě sovětské kosmické lodi Vostok 5 a Vostok 6, z nichž na první startoval V. Bykovskij a na druhé první žena-kosmonautka, V. Těreškovová. Kosmonaut V. Bykovskij byl mimo Zemi celkem 5 dní a V. Těreškovová 3 dny. Američané rovněž vypustili svého dalšího kosmonauta, G. Coopera v kabině Mercury 9, která se též nazývala Faith 7.

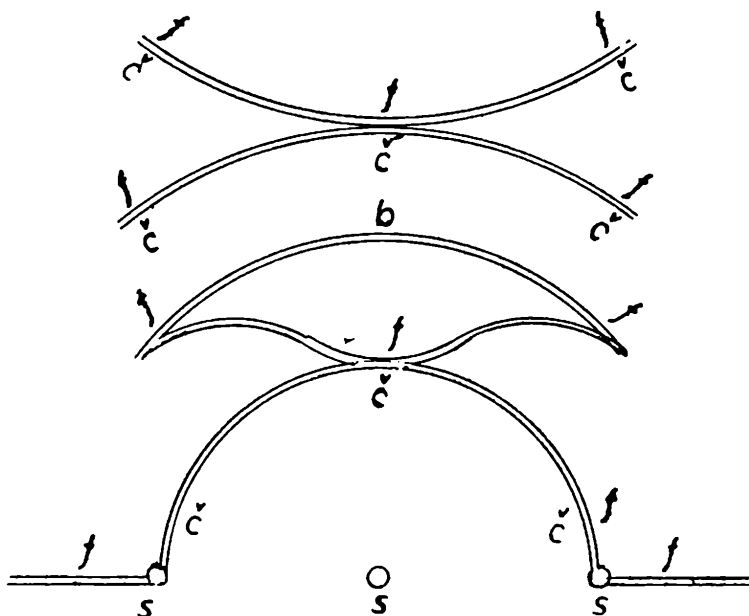
Z výsledků minulého roku je možno usoudit, že kosmonautika již překonala stadium různých technických „dětských nemocí“, které mnohdy zmařily vůbec vyslání družice do vesmíru. Úkoly, které si dnes kosmonautika klade, jsou již odlišného charakteru - nejde jen o pouhé úspěšné vypuštění družice, ale o vypuštění družice vysoké kvality a vědecké a technické hodnoty a zajištění spolehlivosti práce jejích přístrojů. Středem snah ale opět zůstává let člověka kolem Země a popřípadě již i k Měsíci - a přípravy k tomuto úkolu jsou již v plném proudu.

Fyzikální zajímavosti



Viděli jste už někdy tři Slunce?

Nejde o utopii jako v románě *Planeta tří sluncí*, nýbrž o přírodní jev, který se vyskytuje i u nás, zřídka sice, ale který byl již popsán a vysvětlen, jakmile byly známy zákony lomu a ohybu světla. V srpnu r. 1960 jsem pozoroval tento jev v Konstantinových Lázních, a to přibližně tak, jak je vyobrazen v obr. 1. V r. 1963 jsem jej viděl přibližně v téže podobě ve Františkových Lázních. V obou případech prosvítalo slunce řídkou mlhou a přitom vznikly bělavé duhy, u nichž bylo možno zjistit spektrální barvy jen při bedlivějším pozorování. Uvedme si zde vysvětlení těchto jevů jak je čteme v *Silozpytu čili fyzice* od Josefa Smetany z r. 1842. V této učebnici fyziky, vydané před více než 120 roky, čteme na str. 42:



Obr. 1.

*Twárné*¹⁾ slunce a měsíce²⁾. Při kalném a studeném povětrj³⁾ ukazuge⁴⁾ se někdy vedlé slunce nebo měsíce wje sluncí nebo měsjců,

¹⁾ w = v; *twárné* = vedlejší, ²⁾ j = í, ³⁾ *povětrj* = počasí, ⁴⁾ g = f,

genžto twárné slunce a twárné měsíce slowau⁵⁾. Obyčegně ležj w kruhu swětlém, wodorowném, barewným kolem slunečnjm nebo měsječnjm přepaženém, w gehož průřezu tato obludná⁶⁾ slunce a měsíce se nacházejj, gsauce často dlauhými ohony od slunce prawého odvrácenými opatřena. Někdj ležj také w gasném kruhu swisném⁷⁾, což pak gako slaup ohnivý se obgewuge.

Také wýgew⁸⁾ tento Fraunhofer ohybem paprsků swětla na pokragjch bublinek mlhowých a hlatinek⁹⁾ ledowých na vzduchu nakupených wylkládá, úkazy podobnými uměle wytwořenými nauku swau podporuge. Když se totiž djwáme na slunce dalekohledem, gehož předmětnice¹⁰⁾ kryta gest sklem pozlaceným, tenjčkými čárkami rovnoběžnými nestegných od sebe dálek porytým; spatřjme ge w podobě oblauku wodorowného, kdjž čárky ležj prostopádně¹¹⁾, gasného a bezbarewného; w podobě slaupu takowého ale, kdjž čárky na skle wodorowné gsau. Když tedy paprsky slunečnj mezi bublinkami parnjmi tak pronikagj, gako mezi čárkami neprozračnými, prostopádně stogjcimi, tehdy se ohýbagj tak, že se oblauk wodorowný slunci na šjřku stegný spatřuge; kdjž se to však děge gako při čárkách wodorowných, tu slaup gasný wzhůru stogjcj wíděti gest. Tam, kde oblauk onen kolo slunečné nebo měsječné řeže, musj stékánjm swětla obau mjsto neygasnějšj wzniknauti, gakoby tehdy giné slunce neb měsje tam stál a gelikož se oblauk gasný wodorowný gestě přes tato mjsta průřeznj dále táhne, tehdy twárné slunce neb měsje tau stranau w gasné ohony se prodlužugj.

E. K.



Matematické zábavy

Šest spisovatelů cestuje

Z francouzského časopisu *Le facteur X* jsme převzali tuto zábavnou úlohu:

Pánové Baron, Dupont, Martin, Renaud, Servier a Voisin cestují vlakem v oddělení, jež má šest míst. Všichni jsou spisovatelé: esejista, historik, zeměpisec, romanopisec, dramatik a básník. Každý z nich čte dílo některého spolucestujícího.

1. Renaud čte esej;
2. Martin čte knihu svého protějška;
3. Baron nečte knihu svého protějška;

⁵⁾ au = ou, ⁶⁾ obludná = zdánlivá, ⁷⁾ swisném = swislém, ⁸⁾ wýjew = jev, ⁹⁾ hlatinek = krystalků, ¹⁰⁾ předmětnice = objektiv, ¹¹⁾ prostopádně = swisle.

4. Dupont sedí mezi esejistou a zeměpiscem;
5. Servier je sousem dramatikovým;
6. esejista a historik sedí proti sobě;
7. Voisin čte drama;
8. Dupont je švakrem romanopisce;
9. Renaud je v rohu;
10. Renaud nemá rád historii;
11. Voisin sedí proti romanopisci;
12. Servier čte zeměpisčovu knihu;
13. Baron nečte historii.

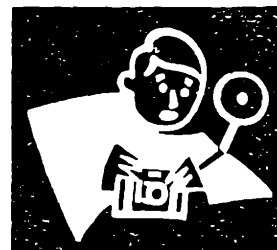
Nyní se tážeme: Jaké je umístění našich šesti cestujících v oddělení, jaký je jejich obor a co právě čtou.

Odpovědi zašlete co nejdříve redakci Rozhledů, Praha 2, Trojanova 13.

O. S.

Různé

Jitka Hniličková - Fenclová, PI Praha:



Jsou vaše znalosti fyzikálních pojmů neformální?

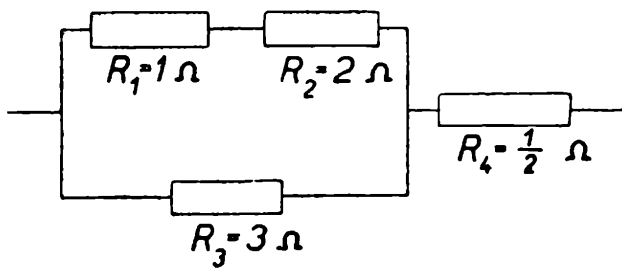
Je známo, že mnohé vědomosti, které získávají žáci ve fyzice na ZDŠ a SVVŠ, jsou jen formální. Žáci jich nedovedou užít ani při řešení praktického příkladu, ani při studiu dalších partií fyziky. Tento formalismus se projevuje např. tím, že žák zná matematickou formulaci fyzikálního zákona (vzorec), neumí však zákon vyslovit větou. Někdy dokonce ani nezná význam jednotlivých písmen ve vzorci. Někdy zná vzorec, ale neumí pomocí něho vyřešit slovně zadaný příklad. Jindy zná správné slovní znění fyzikálního zákona, ale neprovede správnou fyzikální úvahu. Takové formální znalosti jsou téměř bezcenné a jak ukazují vědecké výzkumy, velmi rychle se zapomínají.

Formalismu ve vědomostech se někdy neubrání ani nadaný žák. Vy sami si můžete ověřit své znalosti na otázkách, které následují. Jsou to otázky písemné práce, která byla zadávána žákům II. a III. ročníků SVVŠ při výzkumu formalismu ve vyučování fyzice a mají ukázat znalost základních pojmů nauky o elektrickém proudu. Otázky byly úmyslně zvoleny jen průměrně obtížné, záleží však na jakosti odpovědi. Ně-

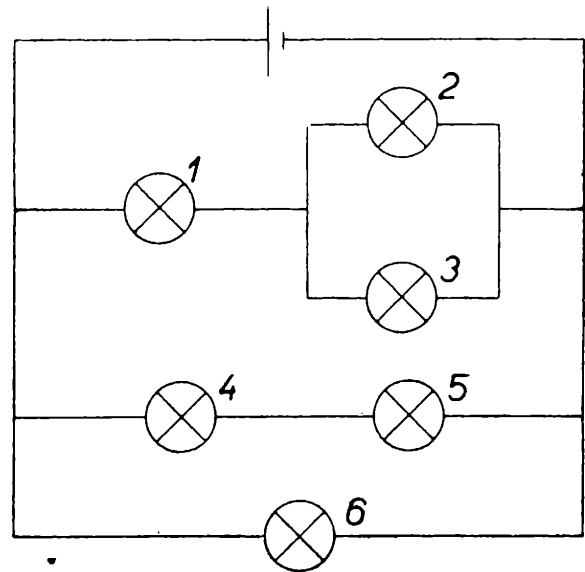
kteře zvolené otázky jsou zadávány např. při přijímacích pohovorech na některých vysokých školách v SSSR. Správné odpovědi na uvedené otázky a jejich rozbor budou uveřejněny v příštím čísle.

Pokud budete řešit následující otázky, zachovávejte tato pravidla:

- a) Otázky zodpovídejte v daném pořadí a odpovědi zapisujte.
- b) Odpovězte na všechny části otázky. Když je v otázce požadováno vysvětlení, napište jasně jeho formulaci.
- c) Změřte čas, který jste spotřebovali na vyřešení celé práce (i s přečtením otázek).
- d) Pracujte souvisle a samostatně. Nepoužívejte žádných pomůcek, podváděli byste sami sebe.



Obr. 1.



Obr. 2.

Otázky zkoušky:

1. Zapište vzorcem a vyslovte větou Ohmův zákon pro část obvodu i pro uzavřený obvod.

2. Mezi body AB jednoduchého elektrického obvodu je zapojen vodič, na jehož koncích je napětí 30 [V] a kterým protéká proud 3 [A]. Jaký proud jím bude protékat, zvýšíme-li napětí na vodiči na 50 [V]?

3. Elektrický obvod se skládá z článku o elektromotorickém napětí 1,5 [V] a o vnitřním odporu 0,12 Ω a z vnějšího odporu 1,28 Ω. Určete svorkové napětí a proud v obvodu.

4. Jak se mění napětí na svorkách zdroje při zvětšování vnějšího odporu? Vysvětlete!

5. Nakreslete sériové a paralelní zapojení dvou vodičů a zapiště, jaký je v obou případech výsledný odpor a jaký vztah platí pro napětí na jednotlivých vodičích. (Odpor přívodních drátů zanedbejte.)

6. Vypočítejte výsledný odpor zapojení v obr. 1.

7. V zapojení v obr. 2 se v žárovce 1 přepálí vlákno. Které žárovky budou pak ještě svítit? Vysvětlete.

8. Napětí zdroje v obr. 2 je 6 V a zapojené žárovky mají všechny stejný odpor. Jaké napětí je na žárovce 6, 4 a 1, mají-li přívodní dráty zanedbatelný odpor?

(Pokračování)

Stavební fakulta ČVUT svým budoucím studentům

V letošním roce konají se přijímací pohovory na stavební fakultě ČVUT v Praze až koncem června. To však neznamená, že ti z vás, kteří se chtějí ucházet o studium na této fakultě, mohou se oddávat libému snění o tom, že na přípravu mají ještě spoustu času. Zejména studující na průmyslovkách, kteří měli matematiku a fyziku jen na počátku svého studia, měli by si předepsanou středoškolskou látku z těchto předmětů důkladně zopakovat a případné mezery doplnit, pokud je ještě čas. Také ty, kdož chtějí studovat při zaměstnání a od maturity je dělí již řádka let, upozorňujeme na nutnost opakování.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie na stavební fakultě ČVUT připravila letos typové příklady z matematiky, jež mají usnadnit přípravu k pohovorům, a rozešle je uchazečům o studium. Pozor však, nedomnívejte se, že jen tyto a žádné jiné příklady či otázky můžete u přijímacího pohovoru dostat! Ovládáte-li však bezpečně látku, jež je v těchto příkladech obsažena, jistě vás nepřivede z míry ani jiná úloha s obdobnou problematikou.

Otiskujeme ukázky těchto příkladů i s výsledky a doufáme, že přijdou vhod i těm, kdo se připravují ke studiu na jiných fakultách vysokých škol technických.

I. Aritmetika

1. Převedte na jednoduché zlomky v základním tvaru, popřípadě na čísla smíšená:

a)

$$\frac{(1\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}) - (2\frac{1}{5} - 3\frac{2}{3})}{\frac{7}{2} - 2\frac{1}{2}} ;$$

b)

$$\frac{rs - 1}{r - s} \text{ pro } r = -\frac{1}{2}, s = \frac{4}{5}.$$

$$\left(\text{a) } \frac{403}{60} ; \text{ b) } \frac{14}{13} \right)$$

2. Najděte všechna řešení rovnice: $|x + 1| + |x - 1| = 2x$.
(Všechna $x \geq 1$)

3. Zjednodušte:

a)

$$\frac{4 + 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{2}}{2 - \sqrt[3]{2}} ;$$

b)

$$\frac{\frac{x+y}{x-y} - 1}{\frac{x+y}{x-y} + 1};$$

c)

$$\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}.$$

(a) $3 + \sqrt[3]{4}$; b) $\frac{y}{x}$ pro $x \neq y$, $x \neq 0$; c) n pro $n \geq 2$ nebo $n < -2$)

4. Upravte na základní tvar komplexní čísla: a) $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$;

$$\text{b) } \frac{2+3i}{3+4i} + \frac{3-4i}{2-3i} \quad \left(\text{a) } 2i; \quad \text{b) } \frac{38}{325}(18+i) \right)$$

5. Vypočítejte: $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8$ (1)

6. Řešte nerovnosti: a) $|x+1| > x$; b) $\frac{5-2x}{x-7} > 3$.

(a) Nerovnost platí pro všechna x . b) $5\frac{1}{5} < x < 7$)

7. Určete všechna čísla, která vyhovují současně daným dvěma nerovnostem: $3x-4 < 2(2x-3)$; $\frac{5x+2}{3} > 2x + \frac{3-x}{2}$ (Pro všechna $x > 5$).

8. Řešte rovnici:

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}} - \frac{\frac{x}{a}}{2\left(\frac{x}{a} + 1\right)} = 0. \quad (x = 2a)$$

9. K výrobě porcelánu je zapotřebí 5 váhových dílů kaolinu, $2\frac{1}{5}$ dílu křemene a $\frac{1}{5}$ dílu sádry. Jaké množství jednotlivých druhů materiálů je nutno připravit k výrobě 210 kg porcelánu? (141,9 kg kaolinu, 62,4 kg křemene, 5,7 kg sádry; zaokrouhлено).

10. Z místa A vyjede cyklista rychlostí 12 km za hod. směrem do místa C. Z místa B, vzdáleného 36 km od A v opačném směru než C, vyjede automobil $\frac{1}{2}$ hod. po cyklistovi rychlostí 40 km za hod. rovněž směrem k C. V jaké vzdálenosti od místa A předjede automobilista cyklistu, jedou-li oba stálou rychlostí? (Ve vzdálenosti 24 km.)

11. Řešte soustavy rovnic: a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$ $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 5$;

b) $ax - by = 3(a^2 - b^2)$; $x + y = 2(a + b)$. (a) $x = \frac{1}{6}$, $y = 1$;

b) $x = 3a - b$, $y = 3b - a$, $a + b \neq 0$.)

12. Jak se změní obsah P obdélníka, zkrátí-li se jedna jeho strana o 2 % a druhá se prodlouží o 7 %? (Nový obdélník má obsah 1,0486 P.)

13. Určete k tak, aby rovnice $x^2 + 2kx\sqrt{k^2 - 3} + 4 = 0$ měla právě jeden kořen! ($k = \pm 2$ nebo $k = \pm i$)

14. Řešte rovnici:

$$\frac{x-2}{x-1} - 2\frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

($x = -1$; nemůže být $x = 1$ ani $x = 2$.)

15. Řešte iracionální rovnice (v obou reálných čísel):

a) $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{a}{x}$; b) $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x-7} = \sqrt{2x+1}$.

(a) $x = \pm a$; b) vyhovuje jen $x = 4$)

16. Řešte soustavy rovnic: a) $x^2 + y^2 = 2(xy + 2)$; $x + y = 6$;

b) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 7$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 25$. (a) $x_1 = 4$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$;

b) $x_1 = \frac{1}{3}$, $y_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{4}$, $y_2 = -\frac{1}{3}$)

17. Bez tabulek určete $\log(\sqrt[3]{1000})^{-\frac{3}{2}}$. ($-\frac{9}{4}$)

18. Řešte rovnici: $\log(x+5) - \log(x-4) = \log(3x-5) - \log(x-3)$. ($x = 7$; kořen $x = \frac{5}{2}$ nevyhovuje dané rovnici)

19. Řešte rovnice: a) $(\frac{2}{5})^{3x-11} = (\frac{5}{3})^{3-7x}$;

b) $2^x \cdot 3^{3x} = 4^{x-1}$. (a) $x = -2$; b) $x = -\frac{\log 4}{\log 13,5}$)

20. Rozhodněte, pro která x konvergují následující řady a stanovte jejich součet: a) $1 - \sin x + \sin^2 x - \dots$ b) $1 + \cotg x + \cotg^2 x + \dots$

(a) pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), $s = \frac{1}{1 + \sin x}$; b) pro $\frac{\pi}{4} +$

$+ k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $s = \frac{1}{1 - \cotg x}$

21. Najděte součet všech přirozených dvojciferných čísel. (4905)

22. Určete šestý člen rozvoje $(2x - y)^{10}$. ($-8064 x^5 y^5$)

23. Řešte rovnici: $\left(\frac{x-1}{x-2}\right) - \left(\frac{x-2}{x-4}\right) = 1$ ($x = 5$)

II. Planimetrie

24. Sestrojte společné tečny dvou daných kružnic! (Konstrukce společných tečen vyplývá z konstrukce tečen z bodu ke kružnici o poloměru $r = r_1 + r_2$, resp. $r = r_1 - r_2$, je-li $r_1 > r_2$ a jsou-li r_1 a r_2 poloměry obou daných kružnic.) (Pokračování)

Kam na techniku?

Na našich vysokých školách technických můžete studovat:

Architekturu, pozemní stavitelství, inženýrské stavitelství, zeměměřické inženýrství a ekonomiku a organizaci stavebnictví na ČVUT v Praze, VUT v Brně a SVŠT v Bratislavě (na fakultách stavebních). Studium předpokládá dobré znalosti matematiky, deskriptivní geometrie, rýsování a smysl pro grafické vyjadřování.



Strojní inženýrství na strojních fakultách ČVUT v Praze, VŠSE v Plzni, VSŠT v Liberci, VUT v Brně, SVŠT v Bratislavě, VŠT v Košicích a VŠB v Ostravě (fakulta báňského strojnictví). Studium předpokládá dobré znalosti matematiky, fyziky, deskriptivní geometrie, rýsování a základů chemie.

Elektrotechnické inženýrství na elektrotechnických fakultách ČVUT v Praze, VŠSE v Plzni, VUT v Brně a SVŠT v Bratislavě. Studium předpokládá dobré znalosti matematiky, fyziky, deskriptivní geometrie, rýsování a základů chemie.

Jaderné inženýrství, technickou a jadernou fyziku na ČVUT v Praze (fakulta technické a jaderné fyziky). Studium předpokládá výborné znalosti matematiky, chemie a zvláště fyziky. Na této fakultě nebude však ještě ve stud. roce 1962—63 zavedeno dálkové ani večerní studium. Na VŠCHT v Praze je možno studovat těžkou jadernou chemií.

Horní inženýrství a inženýrskou geologii na VŠB v Ostravě (fakulta hornicko-geologická), VŠT v Košicích (fakulta hornická). Studium předpokládá dobré znalosti matematiky, fyziky a geologie.

Hutní inženýrství na VŠB v Ostravě (fakulta hutnická) a VŠT v Košicích. Studium vyžaduje dobrou přípravu z matematiky, fyziky a dobré znalosti chemie.

Chemicko-technologické inženýrství na VŠCHT v Praze a v Pardubicích, SVŠT v Bratislavě (fakulta chemická). Studium předpokládá znalosti chemie, fyziky, matematiky a zručnost, potřebnou k experimentální práci chemické a k základnímu fyzikálnímu měření.

Dopravní inženýrství na VŠD v Žilině. Studium předpokládá znalosti matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie.

Zemědělské inženýrství na VŠZ v Praze, Brně a Nitře. Studium předpokládá dobré znalosti biologie a chemie.

Lesní inženýrství na VŠZ v Praze (pouze studium při zaměstnání), VŠZ v Brně (fakulta lesnická), VŠLD (vysoká škola lesnicko-dřevařská) ve Zvolenu. Studium předpokládá dobré znalosti biologie (hlavně botaniky), matematiky, fyziky a chemie.

M. M.

Oprava. V minulém č. 6 opravte si v poznámce na str. 255 číslování obr. 1, 2, 3 na obr. 2, 3, 4.

Recenze

Sovětské časopisy o vztazích matematiky k umění



Časopis *Literaturnaja gazeta* (26. 2. 1963) přinesl podrobný referát o společném sněmování literárních vědců, matematiků, psychologů, inženýrů a fyziologů, konaném v leningradském domě inženýrů. Setkání vědců s umělci mělo ten účel, aby jedni seznámili druhé s posledními objevy svého oboru, aby překročili hranice své úzké specializace a hledali syntézu pomáhající jak spisovatelům, tak i vědcům ozřejmit

nové jevy, které přinesla současnost. Projev známého sovětského matematika akademika A. N. Kolmogorova byl velmi zajímavý. A. N. Kolmogorov se pokusil proniknout do podstaty hudebnosti a rytmické struktury verše statistickými metodami teorie pravděpodobnosti. Řečník dovozoval, že objevil u každého básníka, ať je to Bagrickij, Jevtušenko, Blok, Něk-rasov či Majakovskij to, co odpovídá matematické zákonitosti a mů-

že být zjišťováno analytickými metodami.

Ve sborníku *V o p r o s y j a z y k o z n a n í j a* (1962 - 3. str. 62 až 74) je otištěna stať A. N. Kolmogorova a A. M. Kondratova, *R i t m i k a p o e m M a j a k o v s k o g o*, v níž autoři analyzují zákonitosti básnické mluvy Majakovského skladby *L j u b l j u* (napsané v r. 1922), s použitím matematických metod.

Druhý z autorů zmíněné stati A. M. Kondratov vydal loni knížku *M a t e m a t i k a i p o e z i j a* (Moskva Znanije 1962, 48 str.), která se zabývá některými vztahy umění a matematiky.

Využití matematických metod v uměleckých dílech bylo věnováno vědecké shromáždění uspořádané koncem září 1961 v Gorkém universitou a Domem vědců (referát ve sborníku *V o p r o s y j a z y k o z n a n í j a* 1962 -1. str. 161-165). Sjezd byl zahájen přednáškou akademika Kolmogorova: *K o m b i n a t o r i k a, s t a t i s t i k a a t e o r i e p r a v d ě p o d o b n o s t i v p o e t i c e*, v níž dovozoval, jak je možno využitím matematických metod i počtu pravděpodobnosti stanovit základní zákonitosti ve verších, vyjádřit normu i odchylku od ní.

Josef Glivický

Další svazek Školy mladých matematiků

Naši čtenáři jistě dobře znají malé knížky, které pro účastníky matematické olympiády vydává Ústřední výbor MO a Ústřední výbor ČSM v nakladatelství Mladá fronta. Brožury, které mají společný název *Š k o l a m l a d ý c h m a t e m a t i k ů*, jsou na obálce označeny výraznými písmeny MO a slouží našim studentům jako pomocná literatura při jejich účasti v soutěži. Počátkem školního roku 1963-64 vyšel již 6. svazek této edice, který pod názvem *M a t e m a t i c k á i n d u k c e* napsal Rudolf Výborný. Na 64 stránkách

tu najdeme řadu příkladů z algebry i geometrie, které jsou rozřešeny přímo v textu. Jsou tu však též cvičení k probrané látce, přičemž u obtížnějších případů najde čtenář výsledek nebo stručný návod v závěru knížky. Brožurka je doplněna historickými poznámkami, vysvětlivkami a seznamem literatury k dalšímu studiu.

Výborného knížku, která stojí 2 Kčs, můžeme doporučit nejen účastníkům MO, nýbrž i všem středoškolským studentům, kteří se zajímají o matematiku.

Jiřina Sedláčková

Slovníček

matematických výrazů

исследуемый

исход

исходный

исходные данные

исчезновение

исчисление

исчислить, исчислять

итог, подвести итог

vyšetřovaný, zkoumaný

konec, výsledek

výchozí, počáteční

(původní) dané prvky

anulování, zmizení

počet, počítání

vypočítat

úhrn, shrnouti

K

какой-либо, какой-нибудь

картинка

касание

касательная

касаться

катет

качество

квадрат

квадратный

колебание

количество

коллинеация

кольцо, круговое кольцо

комбинаторика

комбинаторный

комплексный

конец

конечное множество

коническое сечение

контур падающей тени

контур собственной тени

конус

конусообразный

концентрический

координата

корень

корень квадратный, кубический,

n-ой степени

корпус

libovolný

obrázek

dotyk, styk

tečna

dotýkat se, týkat se

odvėsna

vlastnost, kvalita

čtverec, kvadrát, dvojmoc

čtvercový, čtvereční

chvění, kývání, oscilace, vlnění

množství, kvantita

kolineace

prsten, mezikruží

kombinatorika

kombinatorický

komplexní

konec

konečná množina

kuželosečka

mez vrženého stínu

mez vlastního stínu

kužel

kuželovitý

soustředný

souřadnice

kořen (rovnice), odmocnina

druhá, třetí, n-tá odmocnina

pevná část logaritmického pravítka

косеканс
косинус
косоугольный
косой угол
котангенс
коэффициент
коэффициент подобия
крайний, по крайней мере
кратное, общее наименьшее кратное
кратный
кривая
кривая замкнутая, направляющая,
образующая, пересечения, плоская,
пространственная
кривизна
круг
круглый
круговой
куб
кубический

kosekans
kosinus
kosoúhlý
kosý úhel
kotangens
koeficient, součinitel
poměr, charakteristika podobnosti
krajní, aspoň
násobek, nejmenší společný násobek
násobný
křivka
křivka uzavřená, řídící, tvořící, prů-
sečná, rovinná, prostorová

křivost
kruh
kulatý, okrouhlý, oblý
kruhový
krychle
krychlový

Л

лежать
декало
лемма
либо... либо...
линейка, логарифмическая линейка
линейная единица
линейное уравнение
линия,
линия горловая, замкнутая, образу-
ющая, пересечения, средняя, уровня
лишь только, лишь
логарифм десятичный, натуральный
логарифмировать
ломаная (линия)
луч, главный луч
любой
лягушачья перспектива

ležet
křivítko
pomocná věta
buď... anebo...
pravítko, logaritmické pravítko
délková jednotka
lineární rovnice
čára, křivka
křivka hrdelní, uzavřená, tvořící, prů-
sečná, střední příčka, vrstevnice
jak jen, pouze
logaritmus dekadický, přirozený
logaritmovat
lomená čára
paprsek, hlavní paprsek
libovolný
žabí perspektiva

М

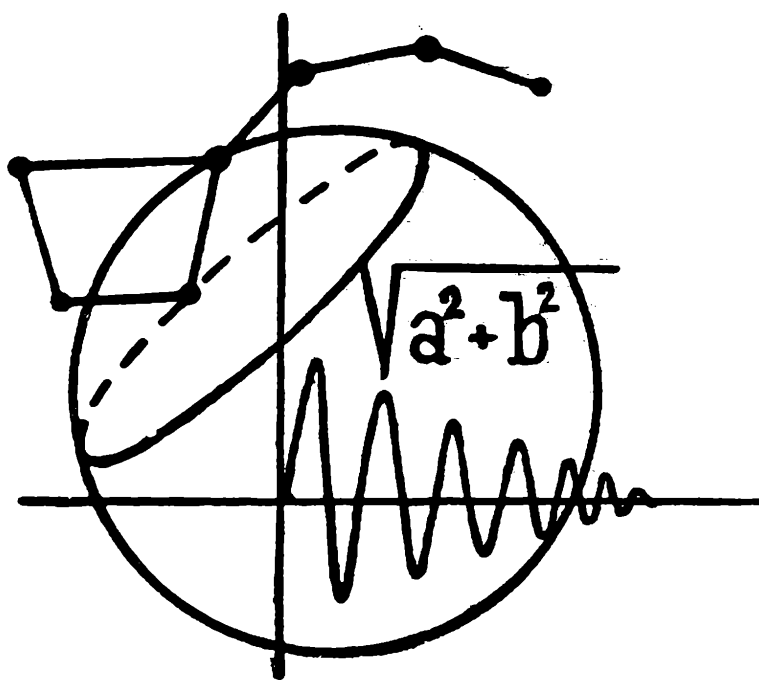
мантисса
масштаб
математика
математический
медиана
мельчайший
менее
мера, радианная мера, по крайней
мере
мерение

mantisa
měřítko
matematika
matematický
těžnice
nejjemnější, nejdrobnější
méně
míra, oblouková míra, aspoň
měření, vyměřování

(Pokračování)

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



8

ROČ. 42

1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamení Za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Duben 1964

Číslo 8

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VUT, Brno; doc. dr. *Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník *Miloš Jelínek*, VÚP, Praha; prof. dr. *Josef Korous*, VŠD, Žilina; prof. *Emil Kraemer*, KU, Praha; doc. dr. *Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; CSc. *Evžen Říman*, ČVUT, Praha; CSc. *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; CSc. *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. *Václav Šindelář*, ÚNM, Praha; prof. dr. *Ján Vanovič*, UK, Bratislava; *František Vencálek*, SPŠ, Praha.

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

F. Janeček: Trigonometrické odvození Heronova vzorce .	337
P. Kršňák: O viacrozmerých priestoroch (Dokončení) .	342
S. Horák ml.: Menelaova věta a její použití (Dokončení) .	345
Inž. M. Špačková: Statistika proniká na všechna pracoviště (Dokončení)	351
E. Cifka: Průsečíky přímky s parabolou	354
A. Skyva: Vakuum	358
I. Kraus - Z. Maršák: Elastické a plastické deformace těles	361
J. Rux: Jiný způsob výpočtu druhé mocniny	366
Prof. E. Kašpar: Přemýšlejme o fyzikálních paradoxech	368
J. Dubský: Jedenáctý ročník matematické olympiády	371
J. Kotyk: Heinrich Hertz	373
Prof. J. Brejcha: Studentské chyby v matematice	377
J. Hniličková-Fenclová: Jsou vaše znalosti fyzikálních pojmů neformální? (Pokračování)	382
M. M.: Novinky literatury — Přírodní vědy	384
M. Zelenka: Rusko-český slovník	3. a 4. obálky

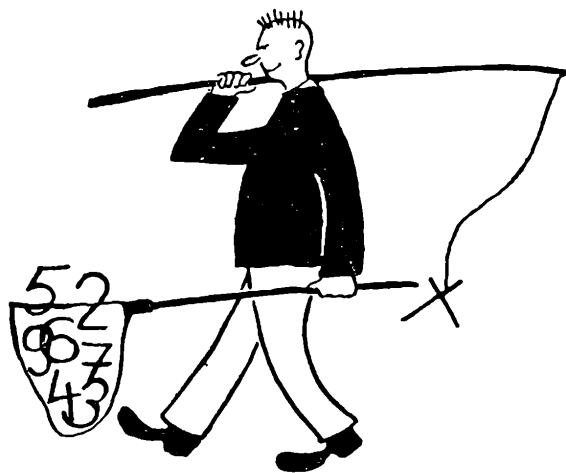


Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Košar, studující FS.

A-04*41159

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1964.

Matematika



František Janeček, Broumov:

Trigonometrické odvození Heronova vzorce

V 1. čísle tohoto časopisu roč. 1962–63, podal Pavel Kršňák planimetrický důkaz Heronova vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka, známe-li jeho strany. Uvedeme nyní trigonometrický důkaz tohoto vzorce.

P o m o c n á v ě t a 1. Pro poloviční úhly trojúhelníka platí

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}. \quad (1)$$

D ů k a z. Z kosinové věty dostaneme

$$2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2.$$

K oběma stranám rovnice přičteme $2ab$. Po úpravě dostáváme

$$2ab(1 + \cos \gamma) = (a+b)^2 - c^2$$

Výraz v závorce na levé straně je roven $2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}$, takže předchozí rovnice nabude tvaru

$$4ab \cos^2 \frac{\gamma}{2} = (a+b+c)(a+b-c).$$

Je tedy

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}},$$

neboť $\frac{\gamma}{2}$ je ostrý úhel a tedy $\cos \frac{\gamma}{2} > 0$.

Přidáme-li v rovnici

$$-2ab \cos \gamma = c^2 - b^2 - a^2$$

k oběma stranám $2ab$, dostáváme po úpravě

$$2ab(1 - \cos \gamma) = c^2 - (a - b)^2$$

Podle vzorců pro funkce polovičního úhlu je

$$1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Předchozí rovnice má pak tvar

$$4ab \sin^2 \frac{\gamma}{2} = (c + a - b)(c + b - a),$$

takže je

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(c + a - b)(c + b - a)}{4ab}},$$

neboť $\sin \frac{\gamma}{2} > 0$.

Zavedme nyní obvyklé označení $2s = a + b + c$, kde s je poloviční obvod trojúhelníka; dostáváme

$$s - a = \frac{b + c - a}{2}, \quad s - b = \frac{a + c - b}{2}, \quad s - c = \frac{a + b - c}{2}$$

a předchozí vztahy nabudou tak tvaru

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}, \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s - c)}{ab}}.$$

Tím je věta dokázána.

V ě t a 1. *Heronův vzorec.*

$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \quad (\text{x})$$

kde P je obsah trojúhelníka, a, b, c jeho strany a

$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

D ů k a z. Obsah trojúhelníka, jak známo, je dán vzorcem

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma. \quad (2)$$

Použitím vzorce $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, upravíme výraz (2)

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Dosadíme-li za $\sin \frac{\gamma}{2}$ a $\cos \frac{\gamma}{2}$ z rovnic (1), dostaneme

$$P = ab \sqrt{\frac{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}{(ab)^2}} = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)},$$

jak se mělo dokázat.

☛ Uvedeme ještě jiný způsob trigonometrického důkazu tohoto vzorce. Nejprve dokážeme:

P o m o c n á v ě t a 2. Jestliže α, β, γ jsou úhly trojúhelníka, potom

$$\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} = \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} \cdot \cotg \frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

D ů k a z. V trojúhelníku je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$, takže $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$ a

$$\cotg \frac{\gamma}{2} = \tg \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right).$$

Výraz $\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2}$ upravme postupně takto:

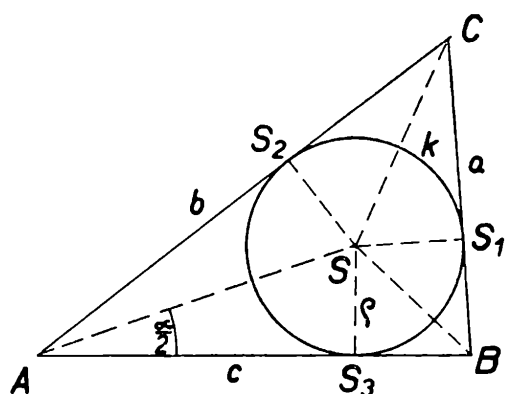
$$\begin{aligned} \cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} &= \cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \tg \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\tg \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\tg \frac{\beta}{2}} + \frac{\tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2}}{1 - \tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2}} = \\ &= \left(\tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2}\right) \left[\frac{1}{\tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{1 - \tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2}} \right] = \\ &= \left(\tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2}\right) \frac{1}{\tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2} (1 - \tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2})} = \\ &= \frac{1}{\tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\tg \frac{\alpha}{2} + \tg \frac{\beta}{2}}{1 - \tg \frac{\alpha}{2} \tg \frac{\beta}{2}} = \frac{1}{\tg \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\tg \frac{\beta}{2}} \cdot \tg \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \\ &= \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Přikročíme nyní k vlastnímu důkazu věty 1. Budiž ABC trojúhelník, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ jeho strany, ρ poloměr kružnice k jemu vepsané a $2s$ jeho obvod. Označme S_1, S_2, S_3 body, ve kterých se kružnice k dotýká přímkou BC , resp. AC , resp. AB a S střed kružnice k (obr. 1). Položme

$$x = AS_3, \quad y = BS_1, \quad z = CS_2.$$

Poněvadž tečny vedené z bodu ke kružnici mají stejnou délku (délka tečny t vedené z bodu P ke kružnici je rovna velikosti úsečky PQ , kde Q je dotykový bod tečny t), platí také

$$x = AS_2, \quad y = BS_3, \quad z = CS_1.$$



Obr. 1

Je tedy

$$\begin{aligned} a &= BC = BS_1 + CS_1 = y + z, \\ b &= AC = AS_2 + CS_2 = x + z, \\ c &= AB = AS_3 + BS_3 = x + y \end{aligned} \quad (4)$$

Sečtením těchto rovnic obdržíme

$$a + b + c = 2(x + y + z),$$

tj.

$$\begin{aligned} 2s &= 2(x + y + z), \\ s &= x + y + z. \end{aligned} \quad (5)$$

Poněvadž

$$x = x + y + z - (y + z),$$

vyplývá ze vztahů (5) a (4)

$$x = s - a. \quad (6)$$

Poněvadž úhel $\sphericalangle SAS_3 = \frac{a}{2}$, plyne z pravoúhlého trojúhelníka AS_3S

$$\cotg \frac{a}{2} = \frac{AS_3}{SS_3} = \frac{s - a}{\rho} \quad (7)$$

Cyklickou záměnou odvodíme ze vztorce (7)

$$\cotg \frac{\beta}{2} = \frac{s - b}{\rho} \quad \cotg \frac{\gamma}{2} = \frac{s - c}{\rho}$$

Platí tedy

$$\cotg \frac{a}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} = \frac{s - a + s - b + s - c}{\rho} =$$

$$= \frac{3s - (a + b + c)}{\rho} = \frac{3s - 2s}{\rho},$$

tj.

$$\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} = \frac{s}{\rho}. \quad (8)$$

Dále je

$$\cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2} = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{\rho^3} \quad (9)$$

Poněvadž (podle pomocné věty 2)

$$\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} + \cotg \frac{\gamma}{2} = \cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \cotg \frac{\gamma}{2},$$

vyplývá ze vztahů (8) a (9)

$$\frac{s}{\rho} = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{\rho^3}$$

Z této rovnice vypočteme

$$\rho^2 = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}. \quad (10)$$

Poněvadž $\rho = \frac{P}{s}$, lze rovnici (10) psát ve tvaru

$$\frac{P^2}{s^2} = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s},$$

z čehož již snadno plyne Heronův vzorec.

P o z n á m k a. Vzorec pro obsah P ve větě 1 se nazývá Heronův podle matematika Herona z Alexandrie (100 let př. n. l.). Skutečným objevitelem tohoto vzorce je však patrně Archimédes.

Trojúhelníky (kosouhlé), jejichž strany i obsah jsou vyjádřeny celými čísly, nazývají se někdy *trojúhelníky Heronovy*. Jsou to např. trojúhelníky

$a = 4$	13	11	13	13	13	16	25	25	25
$b = 13$	14	13	20	30	37	25	39	33	52
$c = 15$	15	20	21	37	40	39	56	52	63
$P = 24$	84	66	126	180	240	120	420	330	630

Z Heronova vzorce odvodíme snadno vzorec pro obsah rovnostranného trojúhelníka.

V ě t a 2. Obsah rovnostranného trojúhelníka o straně a se vypočte podle vzorce

$$P = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \quad (11)$$

D ů k a z. Je-li strana rovnostranného trojúhelníka a , je $s = \frac{3}{2} a$

$$a \quad s - a = s - b = s - c = \frac{a}{2}$$

Heronův vzorec má pak tvar

$$P = \sqrt{\frac{3}{2} a \left(\frac{a}{2}\right)^3} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}, \text{ což jsme měli dokázat.}$$

Užitím Heronova vzorce vypočteme rovněž obsah lichoběžníku, jsou-li dány základny a, c a ramena b, d . Proveďte jako cvičení! Dostanete výsledek

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{a-c} \sqrt{(a+b-c+d)(-a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)}.$$

P a v e l K r š ň á k, P. I., Banská Bystrica:

O viacrozmerých priestoroch

(Dokončení)

Ukázali sme niekoľko príkladov viacrozmerých priestorov. Teraz vyslovíme matematickú definíciu tzv. *lineárneho* (afinného) *priestoru*, ktorá nám poskytne jednotiacie hľadisko na rôzne objekty, ktoré môžu byť prvkami (bodmi) priestoru určitej dimenzie.

Definícia 2. Množina M , vektorov $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_n$, sa volá *lineárny* (afinný) *priestor*, ak sú splnené podmienky:

- Každým dvom prvkom $\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j$ ($i \neq j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$) je priradený prvok \mathbf{m}_k , ktorý voláme súčtom prvkov $\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j$.
- Každému prvku \mathbf{m}_i a ľubovoľnému číslu p je priradený prvok $p \cdot \mathbf{m}_i$, ktorý voláme násobkom prvku \mathbf{m}_i a čísla p .
- Podmienky a), b) vyhovujú požiadavkám:

$$\text{I. 1. } \mathbf{m}_i + \mathbf{m}_j = \mathbf{m}_j + \mathbf{m}_i \quad (\text{zákon komutatívny}).$$

2. $(\mathbf{m}_i + \mathbf{m}_j) + \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_i + (\mathbf{m}_j + \mathbf{m}_k)$ (zákon asociatívny).
3. Existuje tzv. nulový prvok \mathbf{O} , pre ktorý je splnený vzťah $\mathbf{m}_i + \mathbf{O} = \mathbf{m}_i$ (pre každé i).
4. Pre každé \mathbf{m}_i existuje opačný prvok, ktorý označujeme $-\mathbf{m}_i$ tej vlastnosti, že platí $\mathbf{m}_i + (-\mathbf{m}_i) = \mathbf{O}$.

II. 1. $1 \cdot \mathbf{m}_i = \mathbf{m}_i$.

2. $a \cdot (b \cdot \mathbf{m}_i) = (a \cdot b) \cdot \mathbf{m}_i$.

III. 1. $(a + b) \cdot \mathbf{m}_i = a \cdot \mathbf{m}_i + b \cdot \mathbf{m}_i$.

2. $a \cdot (\mathbf{m}_i + \mathbf{m}_j) = a \cdot \mathbf{m}_i + a \cdot \mathbf{m}_j$.

Pre definovanie rozmeru lineárneho priestoru s uvedenými pojmami a vzťahmi nevystačíme. Skorej než pristúpime k definícii n -rozmerného priestoru zavedieme pojmy *lineárnej kombinácie*, *lineárnej závislosti* a *nezávislosti* vektorov.

Definícia 3. Nech k je prirodzené číslo a nech $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ je k rôznych vektorov lineárneho priestoru L . Hovoríme, že vektor $\mathbf{a}_0 \in L$ (čítame \mathbf{a}_0 je z lineárneho priestoru L) je lineárnou kombináciou daných k vektorov, ak existuje k čísel c_1, c_2, \dots, c_k z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly takých, že je splnená rovnica

$$\mathbf{a}_0 = c_1 \cdot \mathbf{a}_1 + c_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + c_k \cdot \mathbf{a}_k.$$

Miesto toho, že vektor \mathbf{a}_0 je lineárnou kombináciou vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ hovoríme tiež, že vektory $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sú lineárne závislé.

Definícia 4. Vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sú lineárne závislé, ak je splnená rovnosť

$$c_1 \cdot \mathbf{a}_1 + c_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + c_k \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{O}, \quad (1)$$

kde aspoň jedno $c_i \neq 0$.

Ak rovnosť (1) je splnená len v tom prípade, že sú všetky $c_i = 0$, potom hovoríme, že vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sú lineárne nezávislé.

Teraz už môžeme vysloviť definíciu rozmeru lineárneho priestoru.

Definícia 5. Lineárny priestor L sa volá n -rozmerný, ak existuje v ňom n lineárne nezávislých vektorov a nie je v ňom už väčší počet lineárne nezávislých vektorov.

Príklad. Dokážeme, že vektory $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 1, 1, 2)$ sú lineárne nezávislé.

Riešenie. Musíme skúmať za akých podmienok je splnená relácia

$$c_1 \cdot \mathbf{a}_1 + c_2 \cdot \mathbf{a}_2 + c_3 \cdot \mathbf{a}_3 + c_4 \cdot \mathbf{a}_4 = \mathbf{O}.$$

Dosadením za $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ dostaneme

$$c_1 \cdot (1, 0, 1, 0) + c_2 \cdot (0, 1, 0, 1) + c_3 \cdot (1, 0, 0, 0) + c_4 \cdot (0, 1, 1, 2) = \mathbf{O}.$$

Ak prevedieme násobenie vektorov číslami c_i a tieto potom sčítame, dostaneme

$$(c_1 + c_3, c_2 + c_4, c_1 + c_4, c_2 + 2c_4) = (0, 0, 0, 0).$$

Porovnaním súradnic týchto vektorov dostaneme rovnice

$$c_1 + c_3 = 0, c_2 + c_4 = 0, c_1 + c_4 = 0, c_2 + 2c_4 = 0.$$

Tieto rovnice sú splnené len za predpokladu, že $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, preto vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ sú lineárne nezávislé, teda môžeme o nich povedať, že určujú štvorrozmerný lineárny priestor.

Poznámka. Ak budeme skúmať tri trojčlenné vektory $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1)$ ľahko zistíme, že tieto sú lineárne nezávislé. Každý iný trojčlenný vektor je ich lineárnou kombináciou. Preto tieto vektory určujú trojrozmerný priestor. Obdobnú vlastnosť majú vektory $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Tieto určujú štvorrozmerný priestor.

Použitie viacrozmerného priestoru. Pohybom bodu v trojrozmernom priestore dostávame obecnú nejakú krivku. Analogicky hovoríme o pohybe bodu v n -rozmernom priestore. Sledujme teraz nasledovnú úvahu v štvorrozmernom priestore.

Povedali sme, že bod štvorrozmerného priestoru je určený štvorčlenným vektorom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Usporiadaná skupina štyroch čísel a_1, a_2, a_3, a_4 jednoznačne určí aj plochu guľovú v trojrozmernom priestore.

Z toho dôvodu, že plocha guľová je charakterizovaná tou istou usporiadanou skupinou štyroch čísel ako bod štvorrozmerného priestoru, môžeme vlastnosti krivky k , ktorá vzniká pohybom bodu v štvorrozmernom priestore prenášať napr. na vlastnosti tzv. kanálovej plochy, ktorá vzniká tým, že sa stred plochy guľovej pohybuje po nejakej krivke. Teda štúdium vlastností kanálových plôch, ktoré majú veľký praktický význam, môžeme prenášať na štúdium krivky k v štvorrozmernom priestore.

Viacrozmerné priestory často používame ako prostriedok zobrazovania funkčných závislostí určitých veličín. Napríklad, reálnu funkciu jednej premennej $y = f(x)$ zobrazujeme čiarou v rovine. Reálnu funkciu dvoch premenných $z = f(x, y)$ zobrazujeme ako plochu v trojrozmernom priestore. Ak máme prípad funkcie viacej než dvoch premenných, túto zobrazujeme ako tzv. *nadplochu* v niektorom viacrozmernom priestore.

Viacrozmerné priestory neslúžia len matematike. Dnešná moderná fyzika plne využíva pojmy a uzávery teórie viacrozmerných priestorov. Veľké použitie prejavuje sa v kvantovej mechanike, teórii relativity, v štatistickej fyzike atď.

Záverom ukážeme v čom obyčajne väzí nesprávne chápanie pojmu viacrozmerných priestorov. Je to v tom, že si ľudia pod pojmom priestor

predstavujú len náš skutočný reálny trojrozmerný priestor v ktorom žijeme, resp. vedia si predstaviť priestor s menším počtom rozmerov a to jednorozmerný a dvojrozmerný. Ovšem matematika pojem priestor zo- všeobecnila pre svoje účely a pre praktické použitie iným vedám a po- uživa tento názov pre najrozličnejšie množiny rôznych útvarov, ktoré volá body tohoto priestoru. Napr. množina všetkých gúl trojrozmerného priestoru sú body štvorrozmerného priestoru. N -rozmerné priestory ($n \geq 4$) sú len modelom zobrazujúcim určité matematické alebo iné javy a vzťahy. V skutočnosti však takéto priestory v tom poňatí, ako v bež- nom živote chápeme náš trojrozmerný priestor v ktorom žijeme, ne- existujú. Pre veľké použitie n -rozmerných priestorov, ako sme ich za- viedli definíciami 1—5, nemožno ich zavrňovať a nesprávne vysvetľovať. Predpokladáme, že ak by matematika nahradila pojmy viacrozmerný priestor a jeho rozmer inými názvami a pritom by teóriu týchto priesto- rov a jej výsledky používala tak isto ako aj dnes, nebolo by žiadnych pomýlených názorov najmä zo strany nematematikov a stratili by mož- nosť existovania aj špekulácie zo strany idealistických filozofov.

Stanislav Horák ml., Praha:

Menelaova vĕta a její použití

(Dokonĕení)

Obrácené Menelaovy vĕty se s vĕhodou používá pro dŭkaz toho, že tři body leží v pŕímce. To si ukážeme na pŕíkladech.

Pŕíklady.

1. Mĕjme rŭznostranný trojúhelník ABC . Osy jeho vnĕjších ŭhlŭ protnou protĕjší strany (na prodloužení) ve tŕech bodech, které leží v pŕímce. Dokaŕte!

D ŭ k a z. V obr. 2a je dán trojúhelník ABC a pŕímka CL je osa vnĕjšího ŭhlu pŕi vrcholu C . Bod L , který je pŕŭseĕíkem této osy s pŕím- kou AB , je stejně vzdálen od pŕímek CA , CB . Oznaĕíme-li h vzdálenost bodu L od tĕchto pŕímek a v_c výšku trojúhelníka ABC na stranu AB , je možné obsah P_1 trojúhelníka ACL vypoĕítat dvĕma zpŭsoby

$$P_1 = \frac{1}{2} AL \cdot v_c, \quad P_1 = \frac{1}{2} AC \cdot h$$

Odtud plyne

$$AL \cdot v_c = AC \cdot h. \quad (\text{I})$$

Podobně je možné vyjádřit obsah P_2 trojúhelníka BCL :

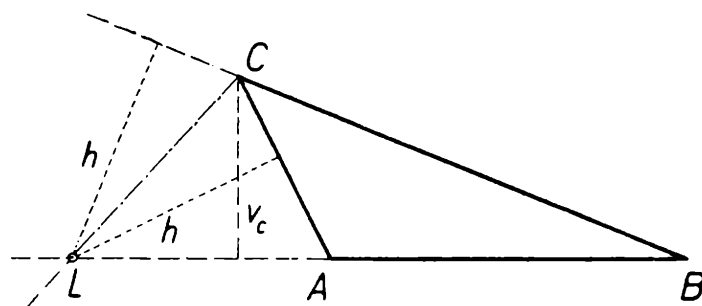
$$P_2 = \frac{1}{2} BL \cdot v_c, \quad P_2 = \frac{1}{2} BC \cdot h,$$

z čehož opět dostaneme

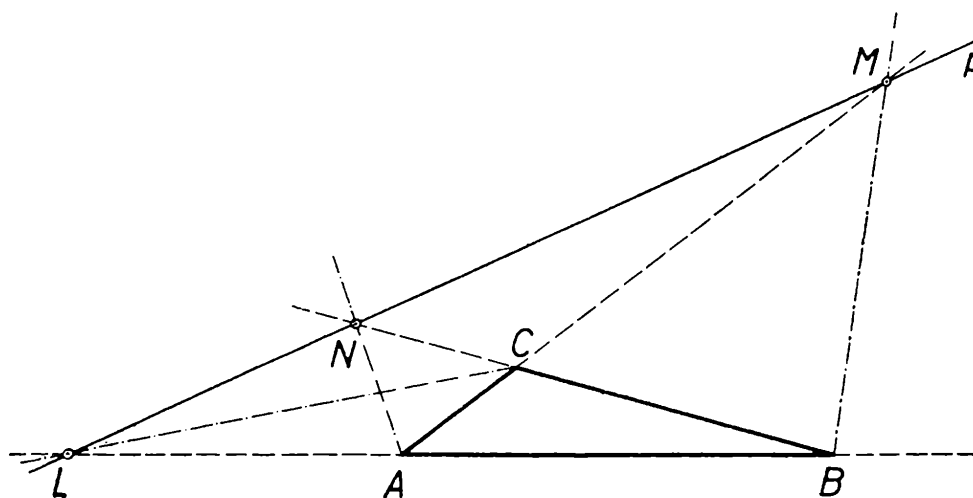
$$BL \cdot v_c = BC \cdot h. \quad (\text{II})$$

Dělením rovnic (I), (II) obdržíme

$$\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}. \quad (\text{III})$$



Obr. 2a



Obr. 2b

Podobně z trojúhelníků BAN a CAN bychom obdrželi

$$\frac{BN}{CN} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{IV})$$

a z trojúhelníků CBM , ABM

$$\frac{CM}{AM} = \frac{BC}{AB}. \quad (\text{V})$$

Rovnice (III), (IV), (V) mezi sebou vynásobíme

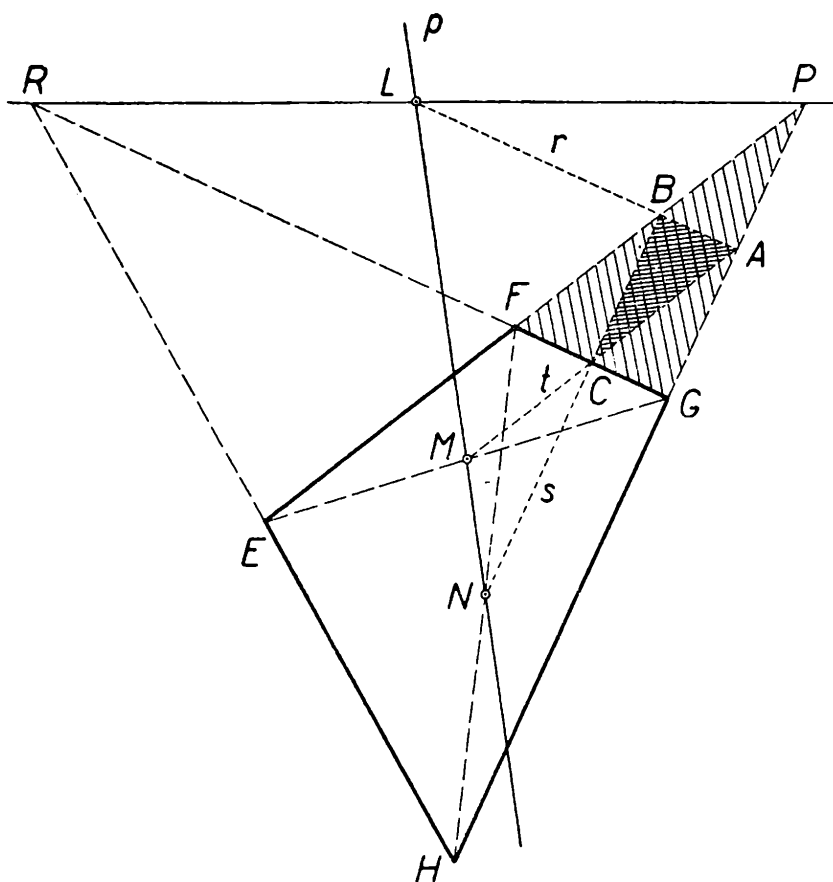
$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{AM} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1,$$

a tím je důkaz v podstatě proveden. Podle věty (2) leží body L , M , N v přímce, neboť nejsou vnitřními body stran daného trojúhelníka.

2. Mějme různoběžník $EFGH$, jehož různoběžné strany EF , GH a EH , FG se protínají v bodech P , R . Dokažte, že střed úsečky PR a středy M , N úhlopříček EG , FH leží v přímce p .

D ů k a z (obr. 3). Bodem L vedme rovnoběžku r s přímkou FG . Ta protne přímky EP , HP v bodech B , A . Přímka r je pro trojúhelníky RFP , RGP střední příčka. Proto

$$GR = 2 \cdot AL, \quad FR = 2 \cdot BL. \quad (2,1)$$



Obr. 3

Bodem B vedme rovnoběžku s s přímkou HP . Ta je střední příčkou v trojúhelnících HGF a HPF a proto prochází bodem N . Platí pak

$$GH = 2 \cdot CN \quad PH = 2 \cdot BN \quad (2,2)$$

kde C je průsečík přímky s s přímkou GR .

Přímka $t \equiv AC$ je v důsledku předešlého střední příčkou v trojúhelnících EGP , FGP . Prochází tedy bodem M a platí

$$EP = 2 \cdot AM, \quad EF = 2 \cdot CM \quad (2,3)$$

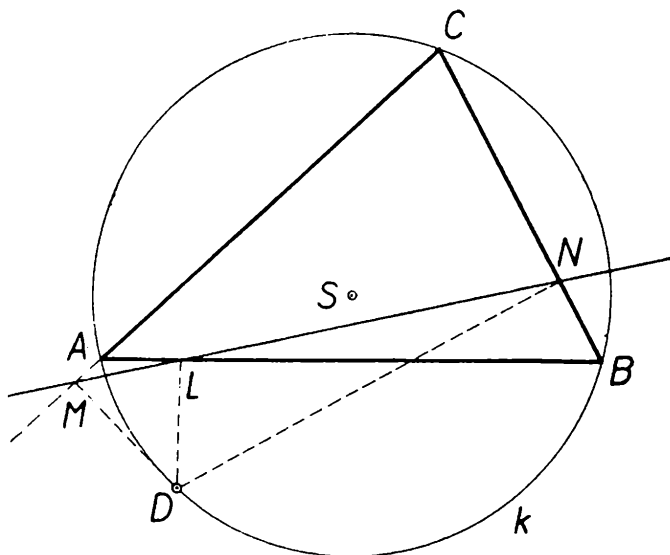
Body H, E, R leží v přímce, a proto vzhledem k trojúhelníku FGP platí Menelaova věta (žádný z nich není vnitřním bodem strany trojúhelníka FGP)

$$\frac{GR}{FR} \cdot \frac{FE}{PE} \cdot \frac{PH}{GH} = 1.$$

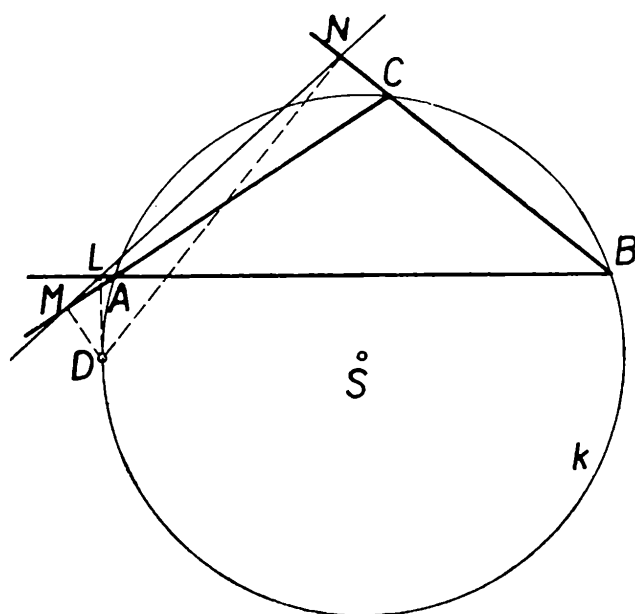
Do této rovnice dosadíme z rovnic (2,1), (2,2), 2,3). Tím dostaneme

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{CM}{AM} \cdot \frac{BN}{CN} = 1$$

Tato rovnice podle obrácené Menelaovy věty říká, že body L, M, N jsou body jediné přímky, což jsme měli dokázat. (Opět si připomeneme, že L, M, N jsou vesměs vnější body stran trojúhelníka ABC .)



Obr. 4a



Obr. 4b

3. Danému trojúhelníku ABC opišme kružnici k . Na ní zvolme bod D různý od vrcholů trojúhelníka a z něho spustíme kolmice na strany trojúhelníka. Jejich paty označíme L, M, N . Body L, M, N leží v přímce, které říkáme *Simsonova přímka*.

D ů k a z. Mohou tu nastat dvě možnosti; buď dva z bodů L, M, N jsou vnitřní a další je vnější, nebo všechny tři jsou vnější (obr. 4a a 4b).

Nejprve si všimněme, že

$$\triangle CMD \sim \triangle BLD,$$

neboť oba jsou pravoúhlé a shodují se ještě v úhlech $\sphericalangle MCD, \sphericalangle LBD$ (jsou úhly obvodové nad týmž obloukem). Proto platí

$$\frac{CM}{BL} = \frac{MD}{LD}. \quad (3,1)$$

Podobně z podobnosti trojúhelníků BND , AMD vyplývá

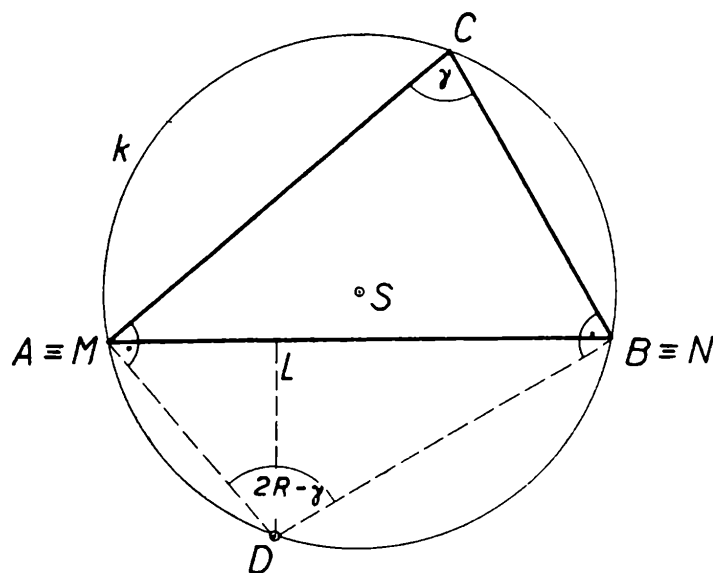
$$\frac{BN}{AM} = \frac{ND}{MD} \quad (3,2)$$

a z podobnosti trojúhelníků ALD , CND obdržíme

$$\frac{AL}{CN} = \frac{LD}{ND} \quad (3,3)$$

Znásobením posledních tří rovnic dostaneme

$$\frac{CM}{BL} \cdot \frac{BN}{AM} \cdot \frac{AL}{CN} = \frac{MD}{LD} \cdot \frac{ND}{MD} \cdot \frac{LD}{ND} \cdot$$



Obr. 5

Pravá strana této rovnice je rovna jedné, a proto je rovna jedné i levá strana. Tu ještě upravíme

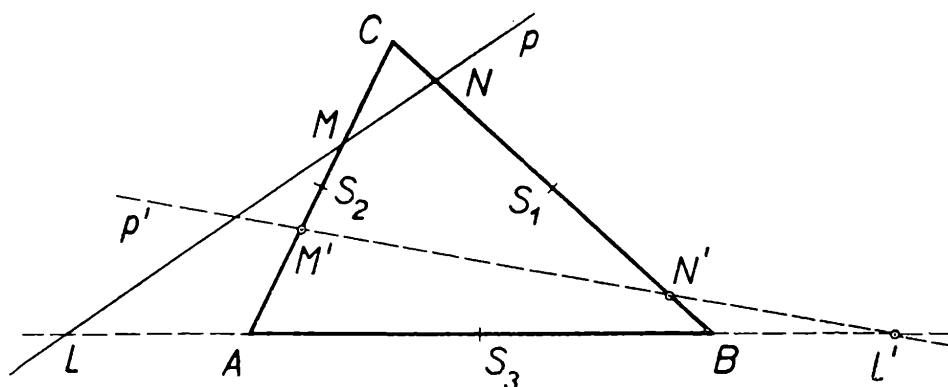
$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CM}{AM} = 1$$

Podle obrácené Menelaovy věty vyjadřuje tato rovnice podmínku pro to, aby body L , M , N ležící na stranách trojúhelníka ABC , ležely v jedné přímce.

Pro úplnost důkazu se zmíníme ještě o případě, kdy bod D je krajním bodem průměru CS (nebo AS , či BS). Potom $M \equiv A$ (obr. 5) a zároveň i $B \equiv N$, což plyne z toho, že úhly $\sphericalangle CDM$, $\sphericalangle CDN$ jsou pravé. Poněvadž bod L leží na AB splývá Simsonova přímka se stranou AB (nebo BC , či AC).

P o z n á m k y. O Simsonově přímce existuje bohatá literatura. Jen námátkou uvedeme dva problémy týkající se Simsonovy přímky. V jakém vztahu jsou Simsonovy přímky krajních bodů téhož průměru; jakou křivku obalují Simsonovy přímky všech bodů opsané kružnice.

Některé věty, vyjadřující, že tři body leží v přímce, se nedokazují pomocí Menelaovy věty, nýbrž užitím Simsonovy věty. V této souvislosti si připomeneme příklad, který je vám hodně blízký. Víte, že paty kolmic spuštěných z ohniska paraboly na její tečny, leží na přímce - na vrcholové tečně. Mějme tři (různé) tečny paraboly; ty tvoří trojúhelník. Paty kolmic, spuštěných z ohniska na tyto tečny, leží na vrcholové přímce. Podle obrácené Simsonovy věty (tu jsme nedokazovali) ohnisko paraboly leží na kružnici opsané trojúhelníku utvořenému z tečen paraboly. Podle toho snadno sestrojíme parabolu, jsou-li dány její čtyři tečny.



Obr. 6

Cvičení.

1. Přímka p neprocházející žádným vrcholem trojúhelníka ABC protíná jeho strany AB , BC , AC v bodech L , M , N . K bodu L sestrojme bod L' souměrně sdružený podle strany AB , k bodu N bod souměrně sdružený bod N' podle středu strany BC a podobně na straně AC sestrojíme bod M' . Dokažte, že body L' , M' , N' leží v přímce (obr. 6).

2. O orientovaných úsečkách na přímce platí

$$a) \frac{MB \cdot MC}{AB \cdot AC} + \frac{MC \cdot MA}{BC \cdot BA} + \frac{MA \cdot MB}{CA \cdot CB} = 1 ;$$

$$b) \overline{MA}^4 \cdot BC + \overline{MB}^3 \cdot CA + \overline{MC}^3 \cdot AB + (MA + MB + MC) BC \cdot CA \cdot AB = 0.$$

Dokažte!

O p r a v a. Na str. 325 minulého čísla má být Kosmos, SSSR, místo Kosmos, USA.

Statistika proniká na všechna pracoviště

(Dokončení)

Příklad 2. V sérii 20 000 výrobků bylo zjištěno 1000 zmetků. Pravděpodobnost, že vybereme zmetek, je tedy

$$\frac{1000}{20\,000} = 0,05 = p$$

a představuje vlastně průměrný podíl zmetků v sérii. Vezmeme náhodný výběr o 20 výrobcích a ptáme se na pravděpodobnost, že se v něm objeví právě jeden zmetek. Pomocí binomického rozdělení [výraz (3)] vypočteme

$$\binom{20}{1} 0,05 \cdot 0,95^{19} = 0,377$$

Pro možnost výskytu libovolného počtu zmetků v uvedeném výběru dostáváme pravděpodobnosti, které jsou v této tabulce:

Tabulka 5

Počet zmetků x ve výběru rozsahu $n = 20$	Rozdělení pravděpodobností	Distribuční funkce $F(x)$
0	0,358	0,358
1	0,377	0,735
2	0,189	0,924
3	0,060	0,984
4	0,013	0,997
20	0,000	1,000

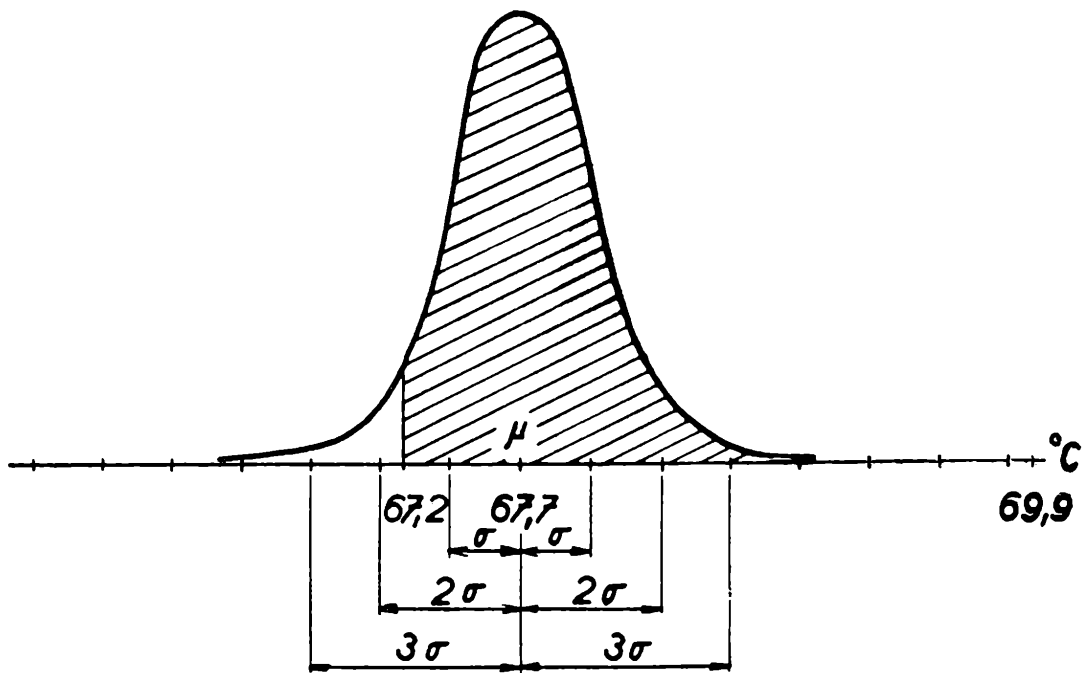
Tato tabulka 5 nám pro danou hodnotu $\alpha = 0,05$ a $n = 20$ poskytuje potřebné informace. Ve statistických tabulkách jsou uvedeny řady dalších tabulek pro různé hodnoty α a nejrůznější hodnoty n .

Vypočteme-li průměr a směrodatnou odchylku, což u binomického rozdělení je jednoduché, neboť $\bar{x} = np$ a $s = \sqrt{npq}$, dostaneme pro náš příklad

$$\bar{x} = 20 \cdot 0,05 = 1 \text{ a } s = \sqrt{20 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = 0,97 \doteq 1.$$

Použijeme-li tyto hodnoty ke stanovení 95% intervalu spolehlivosti [pomocí výrazu (9)], tzn. užijeme dvojnásobku směrodatné odchylky, potom $\bar{x} \pm 2s = 1 \pm 2 \cdot 1$. Dostáváme tedy výsledek, že ve výběru 20 výrobků budou s pravděpodobností $P = 0,95$ (v pěti případech ze sta se zmýlíme) 1 ± 2 zmetky, tedy že se může objevit žádný, jeden, dva nebo tři zmetky.

Pomocí tabulky 5 dostaneme pro případ nejvýše tři zmetků ve výběru o 20 výrobcích pravděpodobnost 0,984, tzn., že jen ve dvou případech ze sta bude naše tvrzení mylné. Protože teprve pro $n \rightarrow \infty$ přechází binomické rozdělení v normální, vznikla nepřesnost ve výpočtu poměrně malou hodnotou $n = 20$.



Obr. 4. Normální rozdělení $N(67,7; 0,09)$. Požadovaný obor je vyčárkován.

Příklad 3. Při výrobě určité látky se žádá, aby bod tuhnutí byl v mezích 67,2 až 69,9 °C. Z velkého množství zkoušek byl zjištěn průměrný bod tuhnutí 67,7 °C s odchylkou 0,3 °C. Máme stanovit % výrobků, které budou mimo předepsané meze. Můžeme předpokládat, že rozdělení bodu tuhnutí bude probíhat podle Laplace-Gaussovy křivky a označíme je $N(67,7; 0,3^2)$ - obr. 4. Protože k výpočtu chceme použít statistických tabulek normovaného rozdělení $N(0; 1)$, musíme zjistit pomocí výrazu (5) příslušné hodnoty horní a dolní meze t_H a t_D

$$t_H = \frac{69,9 - 67,7}{0,3} = 7,33$$

a

$$t_D = \frac{67,2 - 67,7}{0,3} = -1,67$$

Ve statistických tabulkách najdeme hodnoty distribučních funkcí

$$P(\xi \leq 67,2) = P(\zeta \leq -1,67) = F(-1,67) = 1 - F(1,67) = 0,0475$$

a

$$P(\xi > 69,9) = P(\zeta > 7,33) = 1 - F(7,33) \doteq 0,$$

protože

$$F(7) = 0,999\ 999\ 99.$$

Při dodávkách bude 4,75 % výrobků s nižším bodem tuhnutí než 67,2 °C a téměř žádný s vyšším bodem tuhnutí než 69,9 °C.

Příklad 4. Při biologické kontrole nějakého léčiva se zkoušená látka podává skupině 11 zvířat a standardní (vyzkoušená, známá) látka druhé skupině 10 zvířat. Máme odhadnout, zda zkoušená látka má dostatečnou účinnost, chceme-li zaručit pravděpodobnost tvrzení 0,9544 a zjistili jsme tyto charakteristiky:

standardní léčivo	$\bar{x} = 17,7$	$s^2 = 2,76$	$s = 1,66$,
zkoušené léčivo	$\bar{x} = 16,6$	$s^2 = 1,19$	$s = 1,09$

Když účinnost standardu je 100 %, potom účinnost zkoušeného léčiva je y % a přímou úměrou dostaneme, že $y = 93,7$ %. 95% interval spolehlivosti pro standard podle výrazu (9) je $17,7 \pm 2 \cdot 1,66$, tzn. 14,4 až 21, pro zkoušenou látku $16,6 \pm 2 \cdot 1,09$, tzn. 14,4 až 18,8. Interval spolehlivosti zkoušené látky spadá do intervalu standardní látky, a proto můžeme prohlásit, že obě látky mají prakticky stejnou účinnost, přesto že zkoušené léčivo je slabší.

V laboratoři zkusíme obsah určité látky v nějakém vzorku dvěma metodami. Naším úkolem je rozhodnout o přesnosti obou metod a navrhnout vhodnější z nich. Metodou A provedeme na vzorku 10 analýz, právě tak metodou B a určíme rozptyl výsledků, neboť ten je vlastně charakteristikou přesnosti. Metodou matematické statistiky zjistíme, že obě metody jsou prakticky stejně přesné. Volbu jedné z nich musíme tedy učinit podle jiného kritéria, např. nákladnosti nebo obtížnosti.

Do podniku došel materiál od dvou dodavatelů. Protože se jedná o stejný materiál ke stejnému zpracování, je požadavkem skladu i evidence sloučení obou dodávek. Rozhodnutí, zda se obě dodávky neliší, provedeme pomocí matematické statistiky na základě zjištěných průměrů a rozptylů. Zjistíme-li, že rozdíl mezi oběma dodávkami nutno považovat za statisticky významný, nedovolíme jejich sloučení.

Stav vody v komárenském přístavu je zcela jistě ovlivněn vodním stavem v Bratislavě. Pomocí matematické statistiky zjistíme míru (těsnost) tohoto vlivu a určíme, jakým způsobem tato závislost probíhá, takže můžeme potom předem odhadovat podle vodního stavu Bratislavy stav vody na dalších úsecích řeky.

Podobných příkladů je mnoho a matematická statistika pomáhá úspěšně řešit problémy všech našich pracovišť.

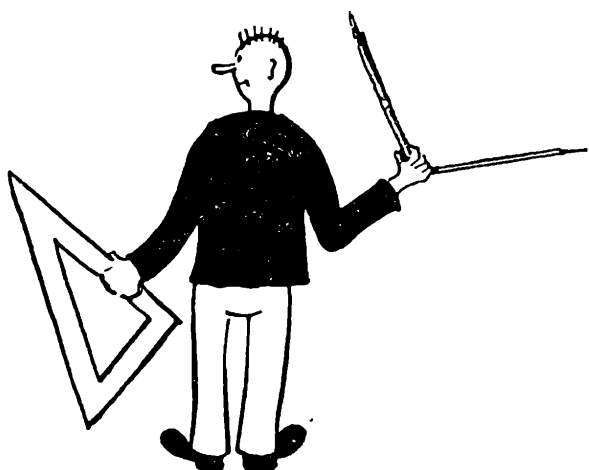
Literatura

Janko J., Jak vytváří statistika obrazy světa a života, JČMF, Praha 1948.

Janko J., Statistické tabulky, NČSAV, Praha 1958.

Gnedenko B. V., Kurs teorii verojatnostej, Moskva 1950.

Felix M. Bláha K., Matematicko statistické metody v chemickém průmyslu, SNTL, Praha 1962.



Deskriptivní geometrie

Edvard Cífk a, Praha:

Průsečíky přímky s parabolou

Parabolu můžeme definovat také jako geometrické místo středů kružnic, které procházejí bodem F a dotýkají se přímky d (bod F je pak ohniskem a přímka d , neincidentní s bodem F , je řídicí přímkou paraboly). Této definici uijeme při sestrojování průsečíků přímky p s parabolou danou ohniskem a přímkou řídicí d .

a) *Řešení užitím mocnosti bodu ke kružnici:*¹⁾

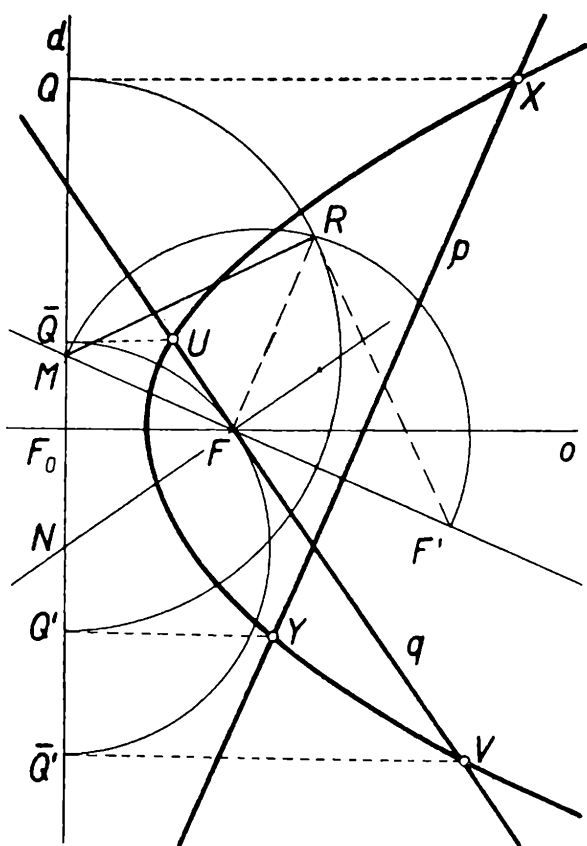
Řešením bude takový bod X přímky p , že kružnice o středu X a poloměru XF se dotýká řídicí přímky d . Předpokládejme, že přímka p není kolmá k řídicí přímce d ; pak kolmice vedená ohniskem F k p protne d v bodě M a p v bodě středu kružnice jdoucí bodem F (v obr. nenarýsovaná) a F' souměrným k F podle p . Mocnost bodu M vzhledem k takové kružnici (a tedy také ke shora uvažované hledané kružnici dotýkají se řídicí přímky d) je $t^2 = MF$. MF , kde t je délka tečny sestrojené z bodu M k hledané kružnici. Tuto délku sestrojíme podle Euklidovy věty a nanese ji od bodu M na řídicí přímku d do bodů Q, Q' , které jsou body dotyku hledaných kružnic a jejich středy X, Y jsou pak na kolmicích v těchto bodech k řídicí přímce d a na přímce p (obr. 1).

¹⁾ S tímto pojmem se může čtenář blíže seznámit v článku Stanislava Horáka, Mocnost bodu ke kružnici, Rozhledy (35), 1957, str. 14-19, 60-63, nebo ve stejnojmenném článku Jaroslava Šedivého, Rozhledy (40), 1961-62, str. 207-212.

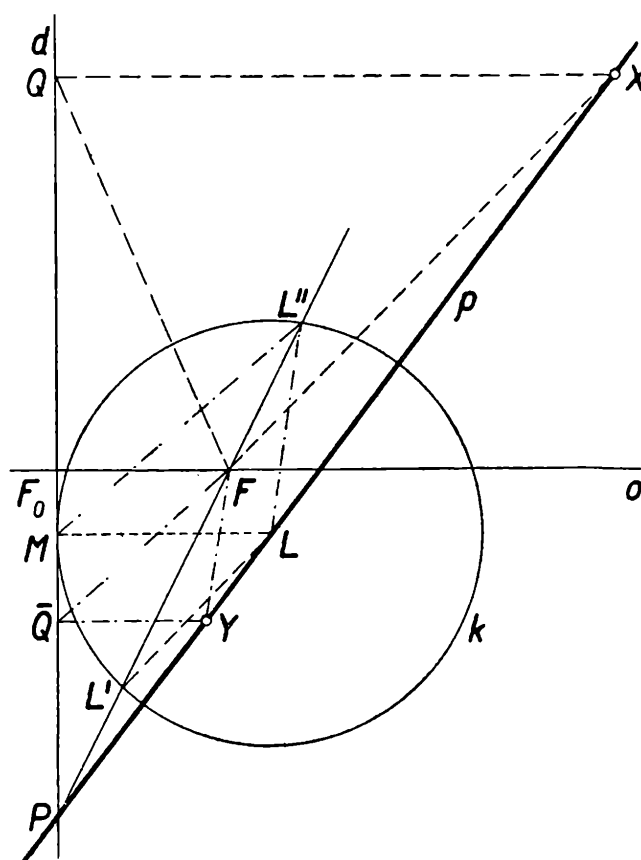
Výsledky jsou dva, jsou-li body F, F' v polorovině (d, F) , jeden, je-li F' na d , tj. přímka p je pak tečnou paraboly, nebo žádný, jsou-li body F, F' v různých polorovinách určených přímkou d .

Prochází-li přímka q ohniskem (viz znovu obr. 1), jsou vždy dva výsledky a konstrukce se zjednoduší, protože hledané kružnice jsou určeny v tomto případě tečnou d a další tečnou $FN \perp q$ s bodem dotyku F .

Je-li přímka $p \perp d$, nelze použít popsané konstrukce. V tomto případě určíme (jediný) průsečík pomocí vlastnosti tečny paraboly (užitím věty o geometrickém místu bodů souměrně sdružených k ohnisku podle tečen paraboly). Je-li přímka $p \parallel d$, určíme průsečíky pomocí ohniskové definice paraboly.



Obr. 1

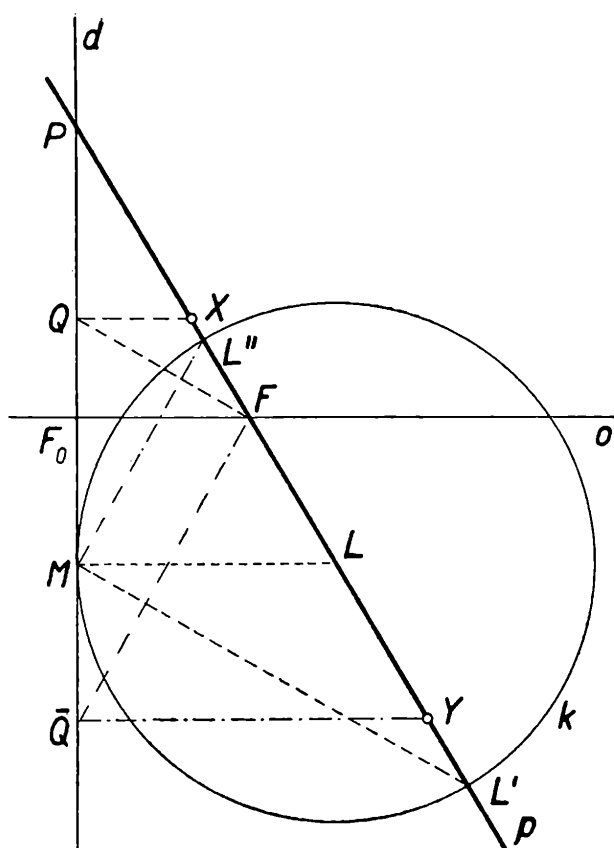


Obr. 2a

b) Řešení užitím stejnolehlosti (obr. 2a):

Průsečík řídicí přímky d dané paraboly o ohnisku F s přímkou p označme P . Zvolme na p libovolně bod L . Jeho vzdálenost od přímky d je LM . Na přímce PF určíme body L', L'' jako průsečíky s kružnicí o středu L a poloměru LM . Potom rovnoběžky ohniskem F s přímkami LL', LL'' , protnou přímku p v hledaných průsečících X, Y .

Správnost konstrukce plyne ze stejnolehlostí trojúhelníků $FXQ, L'LM$ příp. $FYQ, L''LM$, pro společný střed stejnolehlosti v bodě P .



Průsečíky jsou tedy dva, jestliže kružnice o středu v bodě L a poloměru LM protne přímku PF . Je zřejmo, že to záleží na tom, zda úhel LPF_0 (kde F_0 je pata kolmice sestrojené z bodu F na řídicí přímku d), je-li bod L zvolen v polorovině (d, F) , nebo jeho výplněk do 180° , není-li L v této polorovině, je větší než polovina úhlu FPM . Obdobně pro jediné, příp. žádné řešení.

Konstrukce lze použít i v případě, že přímka p prochází ohniskem (viz obr. 2b). V tomto případě je $FQ \parallel ML'$, $FQ \parallel L'M$.

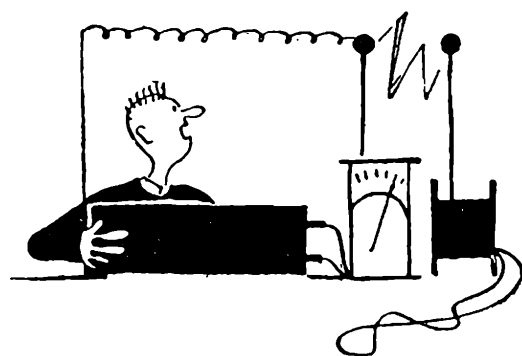
Konstrukce nepoužíváme opět v případě, že $p \parallel d$, nebo $p \perp d$.

Obr. 2b

Fyzika

Alois Skýva, P. U., Olomouc:

Vakuum



1. Úvod

Neustálý rozvoj vědy a techniky zasahuje do života každého z nás. V rozhlasových besedách o kosmonautice slyšíme o tom, že v hermeticky uzavřené kabině kosmonauta je udržován normální tlak. V okolí kosmické lodi je tlak vzduchu velmi nízký, takže vzduch klade pohybující se kosmické lodi malý odpor. Poněvadž ve vědecké praxi mluvíme o vakuu v nějakém prostoru tehdy, je-li v tomto prostoru tlak vzduchu podstatně menší než nor-

mální barometrický tlak (760 torr), slyšíme, že kosmická loď pohybující se kosmickým prostorem je obklopena vakuem.

Pracujeme-li v hutích, setkáme se také se slovem vakuum. Přetavováním kovů ve vakuu získáme tyto kovy v daleko čistší formě. Kovy zba-vené cizích příměsí nacházejí potom široké uplatnění na příklad v elektro-technickém průmyslu, kde slovo vakuum již několik desítek let není neznámým pojmem. Ve většině radiopřijímačů se užívá elektronek, z jejichž skleněné nebo kovové baňky je vyčerpán vzduch. Je v nich tedy vakuum. Ostatně i v žárovkách je vakuum.

Ani chemie a moderní lékařství se dnes už neobejde bez vakua.

2. Vývěvy

Vývěvy jsou zařízení, která slouží k odčerpávání plynu z uzavřeného prostoru, tj. k vytvoření vakuu.

Jejich činnost bývá založena na platnosti zákona Boyle - Mariotta. Tento zákon, který odvodil Boyle a experimentálně potvrdil Mariotte zní

$$p V = \text{const.}, \text{ nebo } p = \frac{\text{const.}}{V}.$$

Tlak neměnicího se množství plynu je při stálé teplotě nepřímo úměrný jeho objemu.

Čerpaný prostor se zpravidla připojuje k vývěvě pomocí skleněné nebo kovové trubice a gumové hadice. Tím čerpaný prostor, i uvnitř vývěvy, vytvoří jediný prostor. Prostor uvnitř vývěvy se periodicky zvětšuje, a proto dochází k poklesu tlaku plynu v čerpaném prostoru podle zákona Boyle-Mariottova. Pišme jej ve tvaru

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Je-li $V_2 > V_1$, je nutně $p_2 < p_1$.

Poněvadž děj probíhá periodicky

$$p_2 V_1 = p_3 V_2$$

a ze stejných důvodů je $p_3 < p_2$.

Dostáváme tedy nakonec

$$p_1 > p_2 > p_3 > p_4 > p_5 > p_6 > p_7 > p_8 > p_9 > p_{10}$$

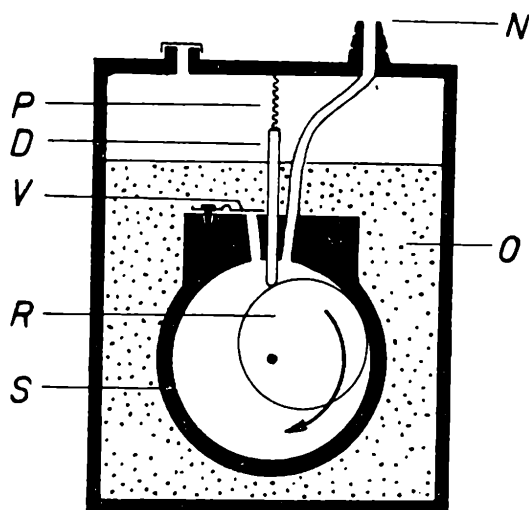
při čemž

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p_m,$$

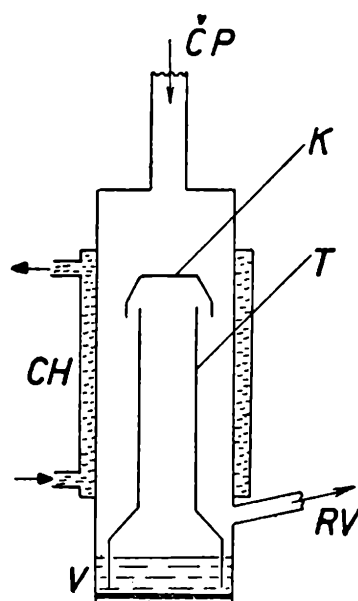
kde p_m nazýváme *mezním tlakem čerpaného zařízení*. Je to nejnižší tlak, na který můžeme prostor vyčerpát danou vývěvou. Tento tlak může být vlivem netěsnosti, nebo vlivem plynů a par uvolňovaných stěnami čerpané nádoby vyšší než mezní tlak vývěvy. *Mezním tlakem vývěvy* rozumíme

nejnižší tlak, kterého lze uvažovanou vývěvou dosáhnout v čerpaném objemu, v němž nejsou netěsnosti ani zdroje plynů nebo par.

Vývěva založená na tomto principu je schematicky znázorněna na obr. 1. Je to jeden z typů rotačních vývěv, u nichž dochází k opakovanému zvětšování a zmenšování pracovního prostoru vývěvy rotujícím tělesem. Po dobu zvětšování pracovního prostoru vývěvy je prostor spojen s čerpaným objemem, po dobu zmenšování se plyn obsažený v pracovním prostoru stlačuje na tlak vyšší než 1 at. a výstupním ventilem se vytlačuje do atmosféry. Nevyhnutelné malé mezery mezi pevnými a pohyblivými částmi vývěvy se utěsňují tím, že se zařízení ponoří do oleje. Tento typ vývěv nazýváme *rotačními olejovými vývěvami*.



Obr. 1. Schéma rotační olejové vývěvy: N - nasávací otvor; R - excentrický rotor; S - stator; V - výstupní ventil; D - plochý píst; P - pružina přitlačující píst k rotoru; O - olej.



Obr. 2. Jednostupňová difúzní vývěva: ČP - čerpaný prostor; K - tryska; T - trubka přivádějící páru k trysce; V - varník; RV - k rotační vývěvě; CH - chladičí plášť.

Mezní tlak rotačních olejových vývěv bývá obvykle 10^{-2} až 10^{-3} torr. K dosažení nižších tlaků se používá dvoustupňového uspořádání, ve kterém jsou spojeny dvě vývěvy do série. Tak lze dosáhnout tlaků 10^{-4} až 10^{-5} torr. Rotační olejové vývěvy, které se dnes vyrábějí, mají většinou dvoustupňové uspořádání.

Pokud potřebujeme dosáhnout ještě lepšího vakua, používáme *difúzních vývěv rtuťových nebo olejových*. Pracují na jiném principu. V nich dochází ke strhování molekul plynu difundujících z čerpaného prostoru do prostoru vývěvy proudící parou Hg nebo oleje. Takto stržené molekuly plynu jsou potom odsávány zpravidla rotační olejovou vývěvou, zatím co páry Hg nebo oleje kondenzují na chladiči vývěvy. Schéma difúzní vývěvy je na obr. 2. Difúzní vývěvy se zpravidla konstruují vícestupňové

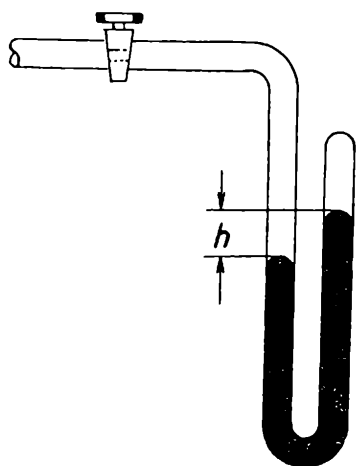
a lze s nimi dosáhnout tlaků 10^{-8} torr. Používá se jich vždy ve spojení s rotačními vývěvami, neboť dříve nežli lze uvést difúzní vývěvu do chodu, je třeba rotační vývěvou vyčerpát prostor na tlak 10^{-4} torr¹⁾

K dalšímu zlepšení tlaků získaných difúzními vývěvami se užívá buď tzv. *getrů* nebo *iontových vývěv*.

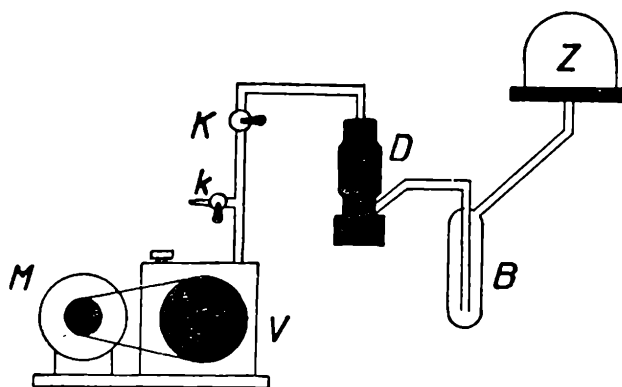
3. Vakuoměry

Vakuoměry slouží k měření tlaku v čerpaném prostoru. Obyčejným *rtuťovým manometrem* nemůžeme měřit tlaky menší než několik milimetrů rtuťového sloupce (obr. 3).

K měření nižších tlaků od 10 torr do 10^{-3} torr se nejčastěji užívá *Piraniho vakuoměru*. Odpor drátu závisí na jeho teplotě. Teplota drátu při stálém proudu drátem závisí na množství tepla předávaného drátem



Obr. 3. Rtuťový manometr: *h* - rozdíl hladin udávající tlak.



Obr. 4. Schéma vakuové aparatury: M - motor; V - rotační vývěva; D - difúzní vývěva; Z - čerpaný prostor; B - vymrazovací baňka; K - kohout na oddělení difúzní a rotační vývěvy; k - napouštěcí kohout.

okolnímu plynu. Množství tepla předávaného drátem okolnímu plynu závisí na tlaku plynu. To je princip Piraniho vakuoměru.

Piraniho vakuoměr není absolutní a musí být tedy ocejchován porovnáním například s *kompresním vakuoměrem Mac Leodovým*, který umožňuje měřit tlaky do 10^{-5} torr. Pro měření tlaků do 10^{-7} torr se užívá *Penningova vakuoměru*, do tlaku 10^{-9} torr *ionizačního vakuoměru*.

Hrubou indikaci tlaku umožňuje výbojka. Tvar doutnavého výboje závisí totiž při daném napětí a vzdálenosti elektrod na tlaku plynu ve výbojce. Umožňuje určit tlak ovšem jen řádově v rozmezí 10 torr až 10^{-3} torr.

¹⁾ 1 torr je jednotka nahrazující tzv. milimetr Hg (mm Hg) za předepsaných podmínek.

Přiložíme-li výstupní elektrodu Teslova transformátoru ke skleněné části čerpaného zařízení, rozsvítí se plyn i bez zvláštních elektrod. Pomocí barvy a tvaru výboje lze opět řádově určovat tlak v rozmezí 1 torr až 10^{-3} torr. Na tom jsou založeny *zkoušečky vakua*. V návodu přiloženém ke zkoušečce je uvedeno, jak závisí barva a tvar výboje na tlaku plynu v čerpaném prostoru. Při tlaku kolem 10^{-3} torr světélkuje pouze sklo proti místu, kde bylo přiloženo napětí vysokého kmitočtu.

4. Vakuová aparatura

Vakuová aparatura je tvořena zpravidla rotační olejovou vývěvou, difúzní rtuťovou nebo olejovou vývěvou, tzv. vymrazovačkou, vakuoměrem a soustavou kohoutů a trubic. K ní se potom vhodným způsobem připojí čerpaný prostor. Na obr. 4 je schéma vakuové aparatury. Na vymrazovací baňku se při čerpání s difúzní vývěvou nasazuje Dewarova nádoba s kapalným vzduchem, nebo jiným silně chladicím prostředkem. Tím se zabraňuje pronikání rtuťových nebo olejových par z difúzní vývěvy do čerpaného prostoru.

Při práci s vakuovou aparaturou nesmíme zapomínat na to, že dříve než uvedeme do chodu difúzní vývěvu, musíme celou aparaturu vyčerpát rotační olejovou vývěvou na tlak 10^{-3} až 10^{-4} torr. Při vypínání vakuové aparatury vypínáme difúzní vývěvu první, rotační olejovou vývěvou čerpáme potom ještě tak dlouho, dokud difúzní vývěva nezchladne. Po zchlazení difúzní vývěvy ji otočením kohoutu oddělíme od rotační olejové vývěvy. Rotační vývěvu vypneme a napustíme do ní vzduch, aby se nám olej přetlakem okolního vzduchu nevtačil z rotační vývěvy do aparatury.

Všechny vnitřní plochy vakuové aparatury musí být dokonale zbaveny vody, mastnoty a jiných nečistot. Jinak nedosáhneme lepšího vakua, ani po velmi dlouhém čerpání. Kohouty vakuové aparatury, pokud jsou skleněné, se mažou jen velmi tence speciálním vakuovým mazem. Otáčíme jimi vždycky zvolna a druhou rukou je lehce přidržujeme, abychom tak zmírnili mechanické namáhání ostatních částí aparatury, s nimiž jsou spojeny.

5. Laboratorní ukázky

a) Do čerpaného prostoru pod skleněným zvonem umístíme nafouklou gumovou blánu. Při čerpání se objem této blány zvětšuje. Přetlakem vzduchu v bláně dochází k jejímu roztahování.

b) Pomocí vakuové zkoušečky sledujeme změny světélkování plynu při čerpání aparatury a zároveň pozorujeme údaje vakuoměru.

c) Čerpaný prostor úmyslně znečistíme mastnotou, vodou atd. Srovnáváme vakuum získané v aparatuře po stejné době čerpání s vakuem dosaženým v čisté aparatuře.

6. Závěr

Setkáváme se s výrazy *nízké vakuum*, *vysoké vakuum*, *ultravakuum*. Dělení vakua na jednotlivé stupně není zcela jednotné. Zpravidla o nízkém vakuu hovoříme při tlaku 1 až 10 torr, o vysokém vakuu při tlaku 10^{-5} až 10^{-6} torr a o ultravysokém vakuu při tlacích menších jak 10^{-7} torr.

Bližší podrobnosti o vakuové fyzice a vakuové technice naleznete ve speciální literatuře (kterou redakce na požádání sdělí).

I v o K r a u s, Z l a t ě k M a r š á k, ČVUT, Praha:

Elastické a plastické deformace těles

Elastickou deformací nazveme takovou změnu rozměrů těles, která zcela vymizí, jakmile odstraníme síly způsobující tuto deformaci. Elastické vlastnosti těles jsou popisovány tzv. *elastickými konstantami* (např. *modul pružnosti*, *mez pevnosti*, *modul torze* apod.), které můžeme pro dané těleso určit z grafu závislosti deformace na napětí. Na obr. 1 je několik takových křivek pro deformaci délky tyče z různých materiálů, na kterou působí jednostranný tah.

Ve většině případů existuje v oboru nižších napětí interval, ve kterém platí známý *Hookův zákon*

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E},$$

kde l je původní délka, Δl absolutní prodloužení této délky l , σ napětí¹⁾ a E *modul pružnosti v tahu* - též *Youngův* (čti *Jáňgův*) *modul*.²⁾ Zavedeme-li poměrné prodloužení $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, možno Hookův zákon psát ve tvaru

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

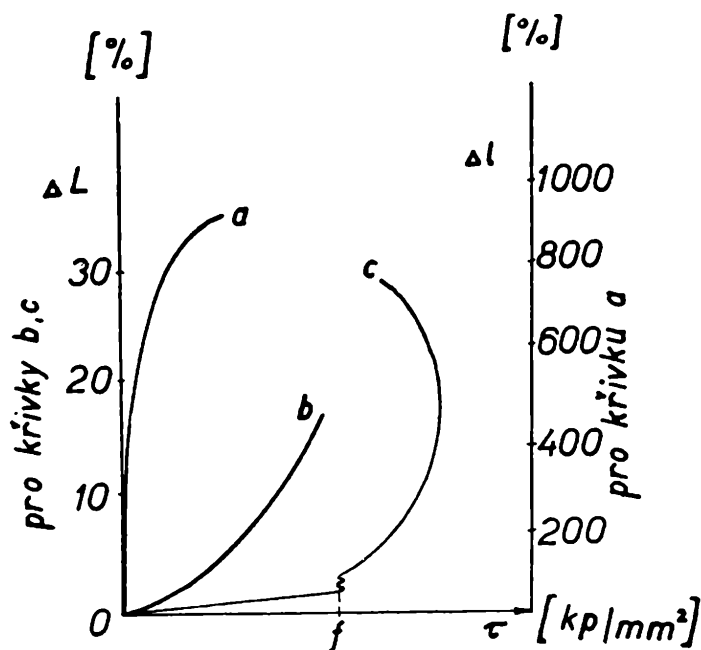
Horní mez napětí tohoto intervalu nazýváme *mezí úměrnosti*. Zvyšováním napětí nad mez úměrnosti se může těleso i nadále elasticky de-

¹⁾ N a p ě t í m rozumíme sílu, která působí kolmo na jednotku plochy průřezu, kolmého ke směru působící síly.

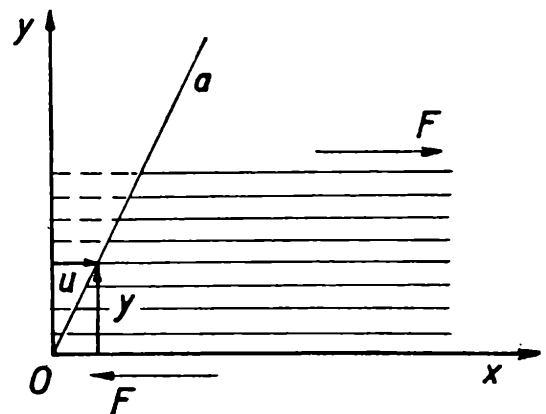
²⁾ T h o m a s Y o u n g (1773—1829), anglický lékař a fyzik.

formovat; deformace se však již neřídí Hookovým zákonem. Při určitém napětí těleso zůstane již trvale zdeformováno, i když působící síly odstraníme. Této mezní hodnotě napětí říkáme *mez elasticity* nebo též *mez kluzu*. Na obr. 1 je pro případ ocelové tyče tato mez označena f . Překročením meze elasticity nastává plastická deformace tělesa.

U některých látek se křivka napětí v oboru plastických deformací charakteristicky odchyluje zpět k malým napětím (na obr. 1 pro případ ocelové tyče). Tento důležitý jev je důsledkem kluzného procesu strukturních elementů. Nazývá se *zpevnění* a lze ho pozorovat zvláště u krystalických látek. Studium zpevnění umožnilo hluboký pohled do vnitřní struktury mnoha látek.



Obr. 1. Závislost délkového prodloužení Δl v % na napětí σ pro a) gumu, b) umělé hedvábí, c) ocel.



Obr. 2. Deformace těles smykem.

Je známo, že každá deformace délky tělesa je doprovázena též změnou průřezu kolmého na délku. Měrou této deformace je *relativní příčné zkrácení* η (může být kladné či záporné). Podle Hookova zákona jsou jak relativní příčné zkrácení, tak i relativní změna délky úměrné napětí. Obě tyto veličiny jsou si proto úměrné i navzájem. Konstantně úměrnosti se říká *Poissonovo číslo* (čti Poasonovo)³⁾ a označuje se μ , čili platí

$$\varepsilon = \mu^{-1} \cdot \eta$$

Podléhá-li těleso všestranným tlakům či tahům (např. hydrostatický tlak) a napětí jsou v oboru elasticity, je způsobována všestranná kompre-

³⁾ D e n i s P o i s s o n (1781–1840), francouzský matematik a fyzik.

se tělesa, jejíž velikost vyjadřujeme *elastickým odporem* tělesa. Elastický odpor κ vyjadřujeme poměrem změny objemu dV ke změně tlaku dp .

Youngův modul pro *izotropní* nebo *kvasiizotropní*⁴⁾ tělesa je s uvedenými konstantami κ a μ ve vztahu

$$E = 3 \left(\frac{1 - 2\mu}{\kappa} \right) = 2G(1 + \mu), \quad (1)$$

kde G je *modul smyku* (viz dále). Pro látky, u nichž při prodloužení nenastává žádné zúžení průřezu, je $\mu = 0,5$. Tento případ nastává vlivem úplně volné pohyblivosti molekul jako je tomu např. u kapalin. E je pro kapaliny rovno nule (kapaliny jsou nestlačitelné) a je-li κ konečné číslo, musí být $(1 - 2\mu) = 0$, a tedy $\mu = 0,5$. To je ve shodě s experimentálními výsledky (tab. 1). Konstanta μ se tím více blíží hodnotě 0,5, čím více je charakter látky podobný kapalině.

Poissonovo číslo μ pro různé materiály

Materiál	Hodnota μ
ocel	0,270
sklo	0,245
ebonit	0,390
olovo	0,400
kaučuk	0,500
želatina	0,500

Stává se, že působením síly rovnoběžné s povrchem tělesa, nebo s tečnou v některém bodě jeho povrchu (takovým silám říkáme *tangenciální*), se nebude těleso deformovat všude stejně. Velikost deformace bude záležet na poloze, ve které budeme deformaci uvažovat (obr. 2). V tomto případě je vhodné deformaci charakterizovat vzájemným posu-

⁴⁾ Elastické vlastnosti *izotropního* tělesa jsou ve všech směrech stejné. Příkladem *kvasiizotropních* těles jsou např. kovy, skládající se z mikroskopických krystalů obecně orientovaných zcela náhodně. Navenek se jeví materiál jako látka elasticky izotropní, i když elastické vlastnosti jednotlivých krystalů jsou anizotropní - v různých směrech jsou různé.

nem jednotlivých rovnoběžných rovin vůči sobě přesněji tangentou úhlu γOa :

$$\gamma = \frac{u}{y} ;$$

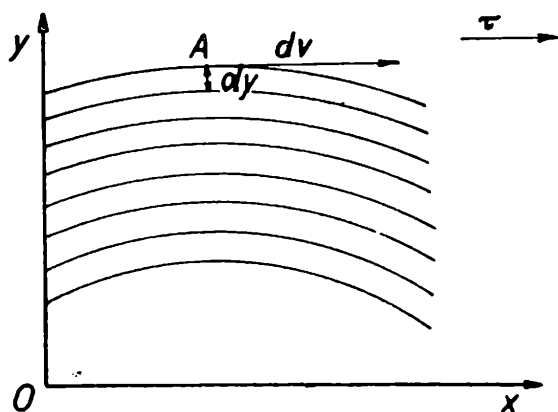
γ nazýváme *poměrné posunutí* nebo *zkos*.

Jestliže je deformace smykem dokonale elastická, bude poměrné posunutí úměrné smykovému napětí. To vyjadřujeme vztahem obdobným Hookovu zákonu

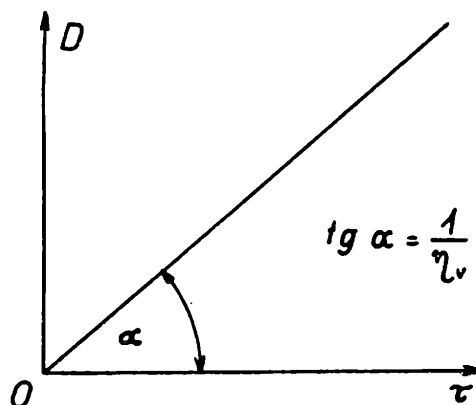
$$\gamma = \frac{\tau}{G} ,$$

kde τ je smykové napětí a G je konstanta analogická modulu elasticity E . Nazýváme ji *modulem pružnosti ve smyku* a s E souvisí vztahem (1).

Dále ukážeme, jakým způsobem znázorňujeme závislost deformace na napětí u látek „d o k o n a l e p l a s t i c k ý c h“, to je u těch, u nichž je elastická deformace vzhledem k plastické zanedbatelná (u materiálů jako je olovo, jíly, smůla . . .). Přesněji řečeno, mez skluzu u těchto látek je rovna nule. Takovou látkou je *ideální kapalina*, a proto se seznámíme na této látce se základními pojmy plastické deformace těles.



Obr. 3. Prouděčáry laminárního proudění kapaliny.



Obr. 4. Graf závislosti plastické deformace D na napětí τ pro čistě viskozni kapalinu.

Nechť kapalina proudí obecně rychlostí v . V nejjednodušším případě při *laminárním*⁵⁾ proudění je možné přírůstek rychlostí obou paralelních

⁵⁾ Myšlené čáry vytvořené proudícími částicemi kapaliny se nazývají *prouděčáry*. Prouděčarami můžeme prokládat myšlené plochy. Jestliže prouděčáry jsou křivky paralelní, pak nazýváme proudění kapaliny prouděním *laminárním*. Jestliže prouděčáry mají nějaké společné vlastní body (to nastane, když v kapalině jsou patrné víry), je proudění *turbulentní* (vířivé). Turbulentní proudění nastane z laminárního zvýšením rychlosti nad určitou mez.

ploch kapaliny, přepočtený na jednotku vzdálenosti ve směru kolmém na rychlost kapaliny (obr. 3) vyjádřit ve tvaru

$$\frac{dv}{dy} = \Phi \tau = \frac{1}{\eta_v} \tau \quad (2)$$

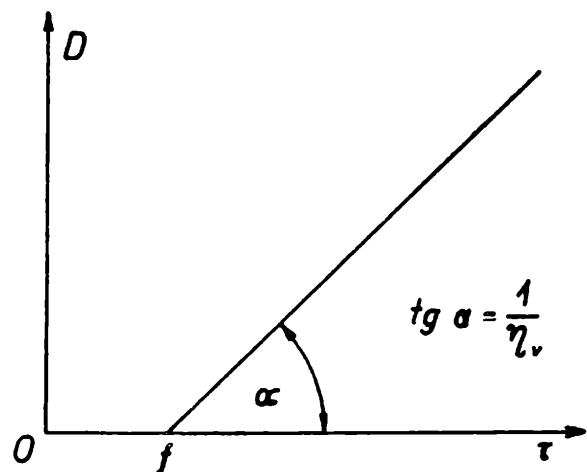
kde dv je přírůstek rychlosti, dy vzdálenost dvou uvažovaných rovin, τ smykové napětí a $\Phi = \frac{1}{\eta_v}$ je konstanta úměrnosti.

Rovnice (2) udává přímou úměrnost mezi $\frac{dv}{dy}$ a napětím τ . Grafem této závislosti je diagram používaný při studiu plastických deformací látek (obr. 4). (U reálných kapalin můžeme skutečně pozorovat uvedenou úměrnost. Takové kapaliny nazýváme *Newtonovské*, *čistě viskózní* nebo též *jednoduché*.) Koeficient úměrnosti Φ se nazývá *tekutost* či *fluidita*. V praxi se používá reciproké hodnoty Φ , nazývané *dynamická viskozita* $\eta_v = \Phi^{-1}$. Definice viskozity, kterou zavedl Maxwell, zní:

Viskozita látky se měří tangenciální silou, která musí působit na jednotku plochy proložené proudovými čarami a vzdálené od druhé paralelní plochy o jednotku délky, aby se tyto plochy pohybovaly s jednotkovou relativní rychlostí, je-li prostor mezi rovinami vyplněn viskózní hmotou.

Je-li tangenciální síla působící na jednotku plochy rovna $1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, vzdálenost mezi rovinami 1 m , je hodnota viskozity rovna 10 poise .⁵⁾ Pro vodu o teplotě $20 \text{ }^\circ\text{C}$ je η_v přibližně 1 centipoise ($100 \text{ centipoise} = 1 \text{ poise}$). Vedle této dynamické viskozity se zavádí také *kinematická viskozita* ν definovaná jako η_v/ρ , kde ρ je hustota kapaliny. Jednotka kinematické viskozity se nazývá *stokes*.⁶⁾

Jestliže má daná látka nenulovou mez kluzu, bude třeba vynaložit jistou část smykového napětí k překonání vnitřních elastických pnutí. To znamená, že nejprve působí smyková napětí až do hodnoty meze kluzu f (obr. 5) a plastická deformace nastane až pro $\tau > f$.



Obr. 5. Graf závislosti plastické deformace D na napětí τ pro reálné těleso.

⁵⁾ *P o i s e* (čti poáz) jednotka viskozity, pojmenována po francouzském fyzikovi *J e a n P o i s e u i l l e o v i* (1799–1869); značka P.

⁶⁾ Jednotka *s t o k e s* pojmenována po irském fyzikovi *s i r G e o r g e S t o k e s o v i* (1819–1903). Značka této jednotky je St.

Každé z čísel a^2 , b^2 , c^2 , $2ab$, $2ac$, $2bc$ je buďto číslo jednociferné nebo dvojciferné.

Trojčiferné číslo umocníme tedy tímto způsobem.

1. Každou číslici umocníme na druhou a píšeme vedle sebe do prvního řádku. Při tom druhé mocniny čísel 1, 2, 3 píšeme ve tvaru 01, 04, 09 tak, abychom umocněním každé cifry dostali dvojciferné číslo.

2. Do druhého řádku napíšeme dvojnásobný součin první číslice s druhou a vedle dvojnásobný součin druhé číslice s třetí. V případě, že tento dvojnásobný součin je číslo jednociferné napíšeme vždy před něj nulu. (Například $2 \cdot 1 \cdot 3 = 06$ a podobně.) Začínáme psát o jedno místo vpravo.

3. Do třetího řádku napíšeme dvojnásobný součin první číslice s třetí. Stejně jako v druhém řádku musí být tento součin ve tvaru dvojciferného čísla a píšeme opět o jedno místo vpravo. Celý postup jasně vynikne na konkrétních příkladech.

$$\begin{array}{r} 563^2 \\ \hline 253609 \\ 6036 \\ 30 \\ \hline 316969 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 121^2 \\ \hline 010401 \\ 0404 \\ 02 \\ \hline 14641 \end{array}$$

Stejným způsobem postupujeme při umocňování víceciferných čísel.

$$\begin{array}{r} 3485^2 \\ \hline 09166425 \\ 246480 \\ 4840 \\ 30 \\ \hline 12145225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75276^2 \\ \hline 4925044936 \\ 702002884 \\ 287024 \\ 9860 \\ 84 \\ \hline 5666476176 \end{array}$$

Někdy se stane, že dvojnásobný součin dvou čísel je číslo trojčiferné. Připočteme tedy první cifru k cifře předcházející.

Vše je opět jasné na příkladu:

$$\begin{array}{r} 378^2 \\ \hline 094964 \\ 4212 \\ 1 \\ 48 \\ \hline 142884 \end{array}$$

Výhody tohoto způsobu výpočtu druhé mocniny zvláště vyniknou u víceciferných čísel. Jeho výhody by se daly shrnout takto: Je rychlejší, má přehlednější zápis a snáze se pamatuje.

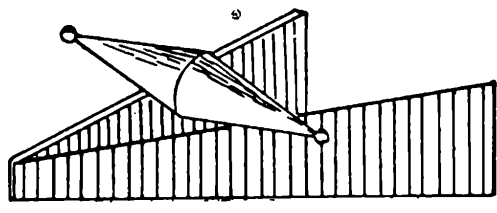
Fyzikální zajímavosti

Prof. Emil Kašpar, K. U., Praha

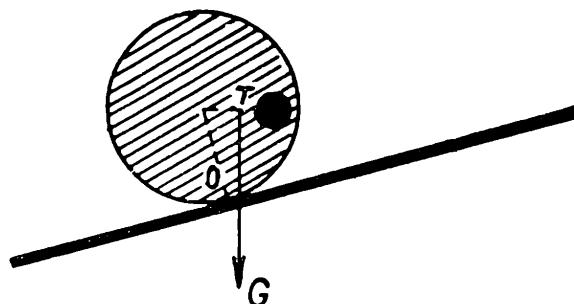


Přemýšlejme o fyzikálních paradoxech

Pro objevování zákonitostí, jimiž se řídí dění v přírodě, měla a mají velký význam *paradoxa*. Paradoxními jevy nazýváme úkazy, které odporují běžné zkušenosti nebo poznávanému fyzikálnímu zákonu. Při vzniku paradoxního jevu jsme obvykle překvapeni. Čekáme totiž, že se uskuteční určitý děj, ale proti očekávání nastane děj zcela opačný. Všichni známe gravitační zákon, podle něhož se všechna hmotná tělesa přitahují. Z tohoto zákona není výjimky. Jistě by nás překvapilo, kdyby se neživé těleso, např. oblázek, sám od sebe začal pohybovat směrem svislým vzhůru, nebo kdybychom postavili krychli na vrchol a krychle by se nepřekotila.



Obr. 1. Stoupající dvojkužel.



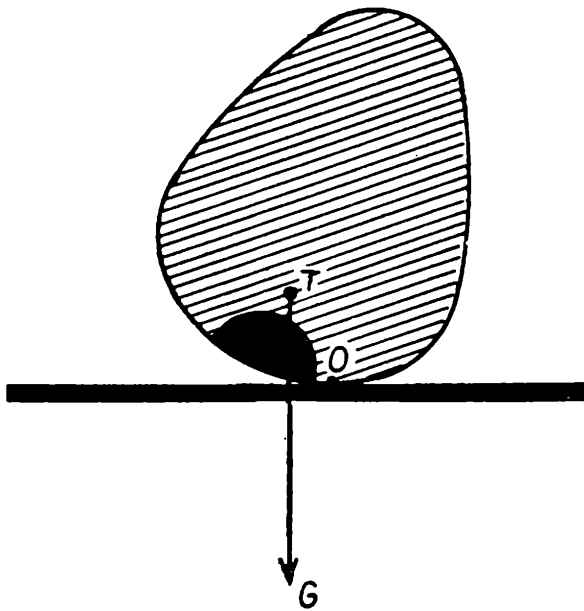
Obr. 2. Váha G způsobí otáčení válce kolem okamžité osy otáčení o , a to ve stejném smyslu, jaký má moment síly G vzhledem k ose o .

Na poutích se někdy prodává hračka v tvaru krychlové krabice, kterou lze postavit na vrchol, a krychle setrvává v této poloze. Tento jev, povrchně pozorovaný, je jistě paradoxní. Ale víme-li, že je krychle dutá a že se v ní otáčí setrvačnický, nepřekvapí nás chování krychle, stejně jako nás nepřekvapí skutečnost, že se roztočený vlček nebo káča udrží na vrcholu a nepřevrhne se, dokud jsou otáčky dostatečně vysoké. Tento jev sám o sobě je stejně podivuhodný, je nám však běžný.

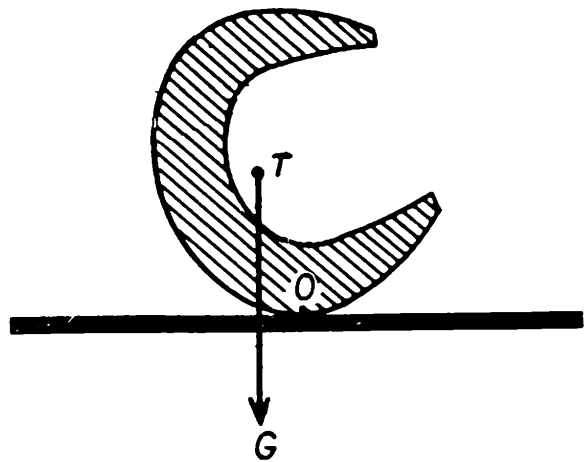
Ve školních kabinetech nalezneme leckde přístroj, nazvaný *stoupající dvojkužel*. Položíme-li dvojkužel na dolní okraje nakloněné roviny, kterou tvoří dvě lichoběžníkové dřevěné desky (obr. 1), „stoupá“ dvojkužel směrem k horním koncům obou desek. Tento překvapující

pokus je založen na optickém klamu: kužel stoupá jen zdánlivě, jeho těžiště při pohybu ve skutečnosti klesá.

Na stejném fyzikálním principu je založen pokus s válcem, který se pootočí na nakloněné rovině tak, že jeho osa stoupá (obr. 2). V tomto případě je válec nehomogenní, v jeho těleso je vložena těžká kovová tyč, a to do takové polohy, že těžiště při pohybu proti spádu nakloněné roviny ve skutečnosti stoupne. Tento pokus, podobně jako pokus s t z v. K o l u m b o v ý m v e j c e m (obr. 3), n e p ř e k o t n o u m i s k o u (obr. 4) apod., je založen na zákoně, že těleso v tíhovém poli Země přechází samovolně do polohy, v níž je jeho těžiště nejnižší a v níž má nejmenší gravitační polohovou energii.



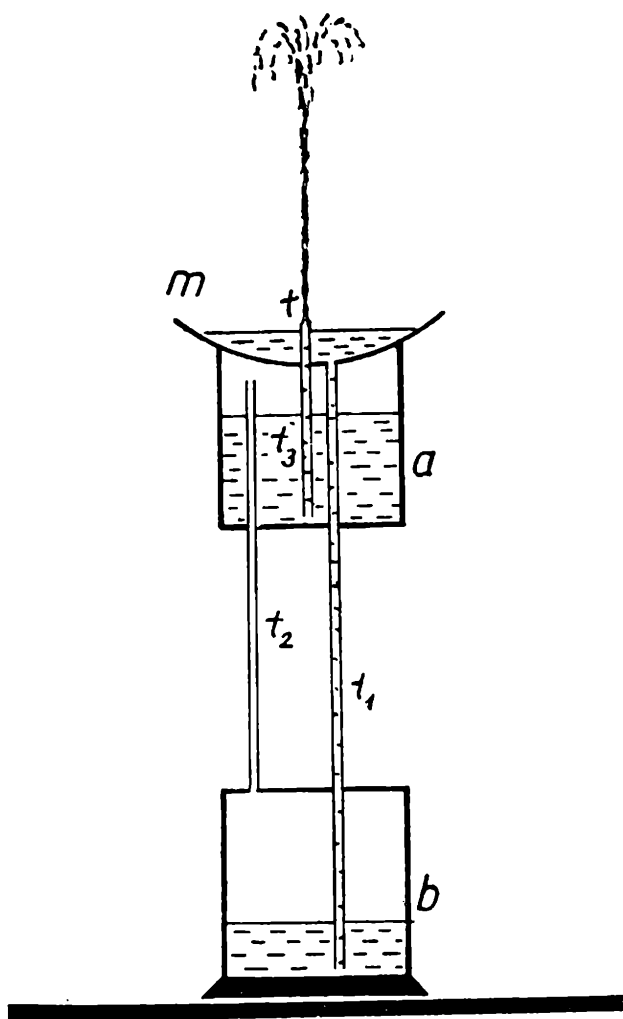
Obr. 3. Účinkem momentu síly G vzhledem k ose o se Kolumbovo vejce otočí vždy tak, že stojí na špičce. Těžiště tělesa je posunuto do polohy T pomocí vložené olověné čočky (vyznačené černě).



Obr. 4. Silné stěny u dna nepřekotné misky jsou proto, aby těžiště misky bylo blízko dna. Vnější stěna misky má takový tvar, aby moment síly (váhy) G vzhledem k okamžité ose o stácel misku do svislé polohy.

I tzv. H e r o n o v o z ř í d l o (obr. 5) je založeno na podobném zákoně. Soustava spojených těles je v tíhovém poli Země uváděna samovolně do takového pohybu, při němž těžiště soustavy klesá. Přístroj je složen ze dvou neprodyšně uzavřených nádob, umístěných nad sebou. Do mísy m nalejeme vodu, která stéká trubicí t_1 do nádoby b . K našemu překvapení počne z trysky t stříkat voda do výše. Příčinou úkazu je okolnost, že z nádoby b je vytlačován vzduch tlakem sloupce vody v trubici t_1 trubicí t_2 do nádoby a . Přetlakem vzduchu, který působí shora na hladinu vody v nádobě a , je voda vytlačována trubicí t_3 a stříká tryskou t . I když voda stříká výše, než byla její původní poloha, klesá při pokuse těžiště vody v přístroji jako celku. Na konci pokusu přetekla voda z mísy m do nádoby b . Také voda, která vyproudila z nádoby a tryskou, stekla do nádoby b .

Z našich příkladů vidíme, že nejde-li o optický nebo jiný klam, vzniká zdánlivě paradoxní výsledek proto, že skrytě působí jiný fyzikální zákon, jehož účinek je v nějakém smyslu opačný, než je původně očekávaný děj. Chceme-li přijít na kloub paradoxním jevům, musíme velmi dobře rozumět pravému významu fyzikálních zákonitostí a jejich uplatnění u pozorovatelných dějů. Na znalostech fyzikálních zákonů, o nichž prostý lid nic nevěděl, bylo jistě založeno mnoho kouzel a zázraků starověkých čarodějů, věstců, proroků a kněží, kteří si tak udržovali svou moc.



Obr. 5. Heronovo zřídlo.

Není vyloučeno, že biblickému vyprávění o chůzi po vodě nebo rozeštoupení moře, aby zástup mohl suchou nohou projít, předcházela skutečná událost, podobná situaci, vyobrazené na obr. 6. Na snímku jde muž „vodou“, která se před ním rozeštupuje. Ve skutečnosti je pozorovaná vodní hladina pouhý optický klam, *fata morgana*, která je způsobena lomem světla nad rozehřátou písčitou zemí. Při chůzi „vodou“ jsou vzduchové vrstvy promíchávány, podmínky pro vznik zrcadlení v místě chůze jsou porušeny, a tak vzniká dojem, jako by se vodní hladina měnila v suchou zemi nebo jako by se rozestupovala.

Mohli bychom uvést další zajímavé a vzácné přírodní úkazy, které se zakládají na optickém klamu. Pro nás však je důležitá skutečnost, že nezvyklý nebo překvapující, neočekávaný jev vzbuzuje naši pozornost, ba často nás i vzruší. Vzpomeňme na mýtické výklady polární záře,

komet, neobvyklých konstelací hvězd atp. Je zcela přirozené, že v nás vzniká touha po vysvětlení neobvyklého jevu, po nalezení zákonitostí, jimiž se řídí. Časté úkazy nevzbuzují tolik naši pozornost. Je přece stejně podivuhodné, že všechny předměty padají k zemi, a přece to nikoho neudivuje, protože to považuje za samozřejmé. Stejně tak je podivuhodné, že míč, který vrhneme, se pohybuje v témže směru i po zaniknutí síly, kterou na míč působíme. Teprve když poprvé spatříme, jak se letící *bumerang* vrací zpět ke svému majiteli, vznikne moment překvapení, „vrtá nám to mozky“, proč se těleso nechová tak, jak jsme zvyklí. Chceme odkrýt zákonitosti, které nám dosud nebyly známy. V tom je

veliká hodnota paradox a paradoxních jevů. Pomáhají odhalovat nové zákonitosti nebo jejich uplatnění za jiných než obvyklých podmínek. To je cesta, která vede často i vědecké pracovníky velmi účinně k novým závažným objevům.



Obr. 6. Jezero je optickým klamem, vznikajícím lomem světla na vrstvách vzduchu nad zahřátým písčítým povrchem Země. V pozadí zleva kráčí chodec „do jezera“. Před ním a za ním se zdánlivě vytváří ostrá kosa pevné země. Ve skutečnosti jsou při chůzi promíchávány vrstvy vzduchu, takže se poruší podmínky pro vznik zrcadlení ve vzduchu. Podle učebnice *Phy s i k* 1 0 V U W, Berlín.

(Pokračování)

Recenze

J a r o m í r D u b s k ý, Praha:

Jedenáctý ročník matematické olympiády



Koncem listopadu 1963 vyšla ve Státním pedagogickém nakladatelství aktualita, která má tradiční význam pro účastníky matematické olympiády.

Jako už v předchozím ročníku jsou i tentokrát jejími autory dva

z prvních inspirátorů, průkopníků a organizátorů této soutěže u nás a později i v mezinárodním měřítku: Jan Vyšín, docent Karlovy university v Praze a Rudolf Zelenka, vědecký pracovník Matematického ústavu ČSAV.

Jedenáctý ročník dokumentuje začátek již druhého desetiletí soutěže, která má pro rozvoj současného stavu matematiky na našich základních devítiletých, středních i odborných školách mimořádný význam. Ze žactva všech těchto škol se rekrutují účastníci soutěže a oni také jsou hlavními odběrateli a čtenáři této každoročně vycházející instrukční publikace. Brožura má oživit a prohloubit zájem studujících o důležitou matematickou soutěž a poskytnout vzorová řešení úloh jednotlivých kategorií jako návod usnadňující přístup k nově zahájenému ročníku. Vedle toho pomáhá koncentrovat naše mladé, nadané matematiky, z nichž jsou později vybíráni kandidáti pro účast na mezinárodních matematických olympiádách.

Vnitřním uspořádáním navazuje brožura na svou loňskou předchůdkyni. Je rozčleněna do čtyř kapitol. Začíná popisem průběhu XI. ročníku soutěže, účasti jednotlivých krajů a typů škol. Přehlednost publikace zvyšují čtyři tabulky, v nichž najdeme všechny pro soutěž potřebné a ilustrující ukazatele. V této části je uvedeno i pořadí sedmnácti vítězů XI. ročníku MO, z nichž prvních osm bylo delegováno na IV. mezinárodní matematickou olympiádu. Závěrem naznačuje ústřední výbor matematické olympiády některé cesty, které pomohou zvyšovat zájem a získávat lásku naší mládeže k matematice, která má pro rozvoj socialistického národního hospodářství zásadní, ba přímo životně důležitý význam.

Druhá kapitola uvádí texty přípravných úloh pro I. kolo olympiády ve všech čtyřech kategoriích.

Třetí kapitola je jádrem celé publikace, obsahuje řešení příkladů všech tří soutěžních kol v kategoriích A až D. Každé řešení je přesné, vyčerpává všechny podmínky dané úlohy a je i názornou ukázkou vzorového metodického postupu. Některé příklady, nebo alespoň některá z alternativních řešení, celkem asi v rozsahu celé jedné třetiny této kapitoly jsou uvedeny ve slovenském jazyku. Byly přeloženy J. Moravčíkem. Řešení geometrických úloh (z naší i z mezinárodní olympiády) jsou doplněna 45 pérovkami, které byly tentokrát s odbornou přesností a instruktivní názorností provedeny J. Mikulčákem.

Čtvrtá, závěrečná kapitola je věnována Mezinárodní olympiádě. V rámci oslav 100. jubilea založení Jednoty čs. matematiků a fyziků byla v r. 1962 uspořádána IV. MMO v naší vlasti. K vyvrcholení celé akce, jímž byla vlastní soutěž, došlo v Českých Budějovicích ve dnech 11. a 12. července. Mezinárodní olympiáda probíhala po organizační i ideo-politické stránce velmi úspěšně a splnila všechny cíle, pro něž došlo k jejímu uspořádání. Méně radostné se však ukázaly pro nás její výsledky v porovnání s ostatními účastníky, neboť naše konečné umístění nás zařazuje až do druhé poloviny mezi sedmi socialistickými zeměmi, které se na čtvrté MMO utkaly. Dělíme se totiž až o čtvrté místo s Polskou lidovou republikou. Na

prvním místě je Maďarsko, na druhém Sovětský svaz a na třetím Rumunsko. Slabší výsledky než my má jenom Bulharsko a Německá demokratická republika.

Důsledky našeho nepříznivého umístění se budou muset v příštích letech projevit jak v přístupu k výuce matematiky a v pečlivém prověření současných osnov, tak i v náročnosti našich příštích matematických národních olympiád.

Jako první nesporný úkol vyplývá pro nás soustavné a cílevědomé zvyšování péče o naše mladé, matematicky talentované kádry ze všech druhů a stupňů škol.

Brožurku XI. ročníku matematické olympiády dostanete v prodejnách n.p. Kniha po 4.— Kčs. Knížka má kapesní formát, který z ní činí i po technické stránce skutečně praktickou příručku. Obsahuje celkem 155 stran.

Jaromír Dubský

Různé

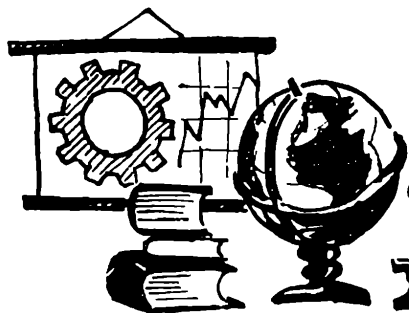
Josef Kotyk, Pardubice:

Heinrich Hertz

(1857—1894)

Již několikrát jsme měli příležitost vylíčit čtenářům vědecké snahy a zásluhy učenců, kteří razili fyzikálnímu bádání nové dráhy a stali se přímými intelektuálními původci dnešní vyspělé techniky, A. M. A m p è r e a (1775—1836), M. F a r a d a y e (1791—1867), J. C. M a x w e l l a (1831—1879) aj.¹⁾ Zejména pojem silového pole, zavedený Maxwellem, se velmi osvědčil. Děje označované společným názvem e l e k t r o m a g-

¹⁾ Viz autorovy články v Rozhledech roč. 28, čís. 1, str. 1, roč. 28, čís. 4, str. 65 a roč. 29, čís. 5, str. 129.



n e t i c k é, bylo možno jeho užitím vykládat úplněji, jednodušeji a názorněji než dříve. Závěry Maxwellovy teorie elektromagnetického pole vyznívaly však v odvážná tvrzení, ba přímo v předpovědi, jež nebylo možno v té době experimentálně ověřit. Problém čekal na epochální pokusy jiného slavného fyzika, jemuž připadl úkol dílo Maxwellovo ověřit a dovršit Heinricha Hertze (1857 až 1894). Od jeho smrti uplyne letos 70 let. Tato okolnost a mimořádný význam badatele, jenž tak úspěšně zasáhl do vývoje fyziky, nás nutí,

abychom se ještě také zabývali jeho vědeckou činností.

Střídavý proud vysoké frekvence působí podle Maxwellových představ v okolním dielektriku rychlé změny magnetického a elektrického pole. Maxwell učil, že elektromagnetické rozrušky se šíří od vodiče prostorem v podobě elektromagnetického vlnění, jež prý má všechny vlastnosti vlnění světelného. To by



v důsledcích znamenalo možnost sloučit rozsáhlé obory fyziky, nauku o magnetismu, elektřině a světle v jeden celek. Nalézt mechanický výklad Maxwellovy teorie, jak žádala doba, se však nepodařilo. Trval proto stále pro onu dobu charakteristický pocit, že něco podstatného chybí, aby se elektromagnetickým dějům správně rozumělo. Do této složité situace zasáhl Hertz, mladý profesor fyziky na vysoké škole technické v Karls-

ruhe, jenž prohlásil: „Na tom, zdali se rovnice Maxwellovy teorie dají interpretovat mechanicky, vůbec nezáleží; rozhodující je, že můžeme z nich odvodit důsledky, které lze mechanickými prostředky zkoumat.“ Spekulace o světelném éteru, tak charakteristické pro fyziku minulého století,²⁾ Hertz zavrhl. Podle něho stačí znát zákony elektromagnetických a optických dějů. Jejich mechanický výklad nemůže prý již přinést nic nového. Není pak náhodné, že existenci elektromagnetického vlnění potvrdil právě Hertz klasickými pokusy v letech 1886 až 1887.

Při svých pokusech vycházel Hertz ze zkušeností, které v letech 1858 a 1859 učinil F e d d e r s e n³⁾, jenž při vybíjení kondenzátoru pozoroval jednotlivé jiskry v otáčivém zrcadle a shledal, že se rozloží ve veliké množství jisker, které následují velmi rychle za sebou, a to střídavě, opačnými směry. Tento výboj má tedy charakter oscilace. Ve výbojovém okruhu vznikají elektrické oscilace neboli kmity, které slábnou (oscilace tlumené). Kmity v leydenských lahvích, jimiž Hertz z počátku budil silové pole, byly ovšem příliš pomalé. Avšak již v roce 1886 se mu podařilo vyvolat oscilace asi 100× rychlejší, pravidelné a dostatečně silné, v neuzavřených drátech, na

²⁾ V podrobnostech viz autorův článek Huygensova teorie světla v Rozhledech roč. 38, čís. 7, str. 327.

³⁾ Wilhelm Feddersen (1832—1918), profesor fyziky v Lipsku.

jejichž koncích se nalézaly malé kapacity. Silové pole vyšetřoval Hertz pomocí drátů, stočených do kružnice nebo do čtverce. Jejich konce tvořily jiskřiště, v němž elektromagnetickou indukcí vyvolával jiskření.

V době, kdy Hertz konal své pokusy, bylo známo elektromagnetické vlnění postupné, šířící se podél drátu. K tomu, aby potvrdil vývody Maxwellovy teorie, bylo však třeba experimentálně dokázat, že elektromagnetické vlnění se může šířit také prostředím s permitivitou ϵ

a permeabilitou μ rychlostí $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

Konstantu c stanovil poprvé Weber⁴⁾ tak, že vybil kondensátor známé kapacity přes galvanometr a určil jeho výchylku. Dostal hodnotu, která je v mezích pozorovacích chyb rovna rychlosti světla ve vakuu $3 \cdot 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Vzduchoprázdným prostorem, v němž $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ ⁵⁾, šíří se elektromagnetické vlnění tedy rychlostí světla. Vskutku již v roce 1888 studoval Hertz šíření elektromagnetických vln v prostoru mezi dvěma dráty nebo deskami a v prostoru uvnitř kovové trubice shledal, že vlnění se šíří převážně v okolí vodiče, nikoli ve vodiči samém. Zjistil také, že zdroj nevyzařuje vlnění jediné délky, nýbrž i vlnění kratších délek. Své pokusy opakoval potom úspěšněji s decimetrovými vlnami.

⁴⁾ Wilhelm Weber (1804 až 1891), spolupracovník Gaussův v Göttingen.

⁵⁾ Uvedené hodnoty se rozumějí v dřívější neracionalizované soustavě CGS.

Čtenáře bude ještě zajímat, jaké bylo technické zařízení, s nímž Hertz pracoval.⁶⁾ Otevřený oscilátor Hertzův sestával z dvou válcových mosazných tyčí, končících kuličkami, které tvořily jiskřiště. Rezonátor se skládal původně ze dvou půlmetrových drátů, jejichž konce byly velmi blízko u sebe. Později Hertz rezonátor různě měnil. S úspěchem použil k pokusům parabolických zrcadel. Do ohniska jednoho z nich umístil jiskřiště, napájené induktorem, do ohniska druhého zrcadla pak jiskřiště, které se dalo rozvírat mikrometrickým šroubem. Kdykoli přeskočila jiskra v jiskřišti vysílače, objevila se jiskérka i v jiskřišti přijímače, jenž byl na druhém konci místnosti. Zrcadlení parabolickým zrcadlem bylo tak účinné, že Hertz si k dalším pokusům připravil velký asfaltový hranol a dokázal zákon odrazu (úhel odrazu se rovná úhlu dopadu), zákon lomu (poměr sinu úhlu dopadu a sinu úhlu lomu má hodnotu stálou, rovnou indexu lomu),⁷⁾ interferenci a dokonce i polarizaci elektromagnetického vlnění. Při pokusech pozoroval, že kovové předměty působí stínění. Ukázal, že kovy elektromagnetické vlnění pohlcují, kdežto jiné látky (např. papír, dřevo) je propouštějí. Shoda rychlosti elektromagnetických vln ve vzduchu (vakuu)

⁶⁾ Podrobnosti vylíčil sám Hertz v díle *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft* (Lipsko, 1892).

⁷⁾ Absolutní (prostý) index lomu je roven druhé odmocnině hodnoty dielektrické konstanty ϵ .

s rychlostí světla potvrdila, že mezi obojím vlněním není vskutku podstatného rozdílu; rozdíly jsou jen v délce vlny, jsou tedy toliko kvantitativní. Tak mohla být konečně vědecky založena elektromagnetická teorie světla.⁸⁾

Jméno Hertzovo se stalo rázem slavným, jeho pokusy vzbudily veliký rozruch po celém světě a byly všude znovu a znovu opakovány. Bylo zkoušeno zejména buzení Hertzových vln různé délky. Zatím co jedni pracovali na dalším vědeckém výzkumu elektromagnetického vlnění, druzí usilovali již o využití Hertzova objevu k uskutečnění bezdrátové (jiskrové) telegrafie. Hertz sám na podněty praktického rázu nereagoval, spatřuje ve svých zdařilých pokusech zatím jen experimentální potvrzení Maxwellovy teorie. Dokladem toho zůstanou slova, jež pronesl roku 1889, právě deset let po Maxwellově smrti, u příležitosti svého jmenování profesorem fyziky na universitě v Bonnu:⁹⁾ „Maxwellova teorie se konečně stala lidsky řečeno jistotou.“

⁸⁾ Viz Hertzovo dílo *Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität* (Bonn, 1889).

⁹⁾ V Bonnu pracoval Hertz jako nástupce Clausiův zejména v mechanice (pohyb hmotného bodu podrobeného vazbám, Hertzův princip aj.). Tam povstalo také jeho dílo *Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhang* (1894), které vyšlo až po jeho smrti a jehož některé myšlenky byly provedeny teprve v gravitační teorii Einsteinově.

Když dosáhl tak významných výsledků a ve své době i překvapujících, byl Hertz za své vynikající práce záhy zahrnut členstvím četných vědeckých společností a jinými poctami. Osud mu však nedopřál těšit se dlouho ze získané slávy. Hertz onemocněl zhoubnou chorobou kostí a poměrně mlád, 37letý, zemřel. Studium jeho spisů¹⁰⁾ dokazuje, že byl vzácnou osobností, snad poslední veliký fyzik, jenž byl zároveň teoretikem i experimentátorem. Název hertz, mezinárodně přijatý pro jednotku frekvence, zůstane pak ve všech jazycích trvalým uctěním jeho zásluh a nehynoucí památky.

Cvičení

1. Vlnová délka, s kterou Hertz roku 1886 při svých slavných pokusech pracoval, měřila 66 cm.¹¹⁾ Vypočítejte dobu kmitovou a kmitočet!

2. Jaká je délka dipólu ve vodě ($\epsilon = 81$), je-li naladěn na tytéž kmitoty jako ve vzduchu?

3. Dipól, naladěný v petroleji ($\epsilon = 2$), má (nejmenší možnou) délku 4 dm. Vypočítejte frekvenci elektromagnetického vlnění ve vzduchu!

4. Jak se změní směr elektromagnetického vlnění, dopadá-li ze vzduchu na hladinu vodní ($\epsilon = 81$) pod úhlem 60° ?

¹⁰⁾ Heinrich Hertz, *Gesammelte Werke I.—III.*, Lipsko 1894.

¹¹⁾ Cituji článek Jar. Šafránka, *Zásluhy ruských badatelů o rozvoj radiotechniky v Rozhledech*, roč 31, čís. 2, str. 56.

Prof. Josef Brejcha, VUT, Brno:

Studentské chyby v matematice

Nutným předpokladem jakéhokoli vyučování, zejména pro vyučování matematice je bezpečná znalost látky, která příslušnému vyučování předchází a o niž se vyučování opírá. V I. ročníku vysokých škol je to látka, již si studenti přinesou ze škol cyklu předcházejícího a která má pro vyučovací proces zásadní význam. Dalo by se říci, že tato předběžná příprava by v matematice měla splňovat asi tyto požadavky:

1. Žáci středních škol přinesou s sebou zásobu základních matematických pojmů, pochopení jejich podstaty a platnosti v rozsahu, daném příslušnými středoškolskými učebnicemi; zvládnou bezpečně a jasně všechny početní operace a věty, s nimiž se na střední škole seznámili.

2. Mají dostatečnou zásobu běžných základních vzorců, dostatečnou zručnost v provádění běžných algebraických operací, popřípadě numerických výpočtů.

Mezi nejdůležitější partie středoškolské látky, zvláště nutné pro úvodní vyučování matematice na Vysoké škole technické bezesporně patří:

1. Úpravy výrazu s mocninami a odmocninami.

2. Operace s mnohočleny, zvláště rozklady, operace se zlomky.

3. Řešení soustav rovnic lineárních a soustav rovnic kvadratických o dvou neznámých, jednoduché rovnice iracionální, exponenciální, logaritmické a goniometrické.

4. Znalost základních vlastností elementárních funkcí a jejich průběhu na základě optického názoru pomocí grafu.

5. Nejdůležitější základní věty i konstrukce planimetrické a hlavní věty trigonometrické.

Praxe na všech vysokých školách ale ukazuje, že ne vždy jsou splněny tyto nutné podmínky; ukazuje, že základní znalosti studentů nejsou jednolité, vykazují někdy značné mezery a že je neustále třeba bojovat s různými studentskými nedostatky a věcnými chybami, které se často vyskytují, a to některé i v povážlivém měřítku.

Konglomerát věcných chyb, s nimiž se běžně setká jak středoškolský, tak i vysokoškolský učitel matematiky, je velmi rozsáhlý; některé z nich uvedu v dalším testu, a to podle pravděpodobných příčin subjektivního charakteru jejich vzniku.

Velmi často se vyskytují chyby, jejichž příčiny tkví v nejasnostech o funkci čísel 0, 1 v součtu nebo v součinu, v zaměňování funkce čísel 0, 1 v těchto výrazech. Téměř běžně se stává, že studenti počítají

$$a \cdot 0 = a, \quad \frac{a}{0} = 0, \quad \text{též } \frac{a}{0} = 1, \quad \text{resp. } \frac{a}{0} = a.$$

Rozklad výrazu $ax + bx + x$ nabývá ve velmi mnoha případech tvaru

$$ax + bx + x = x(a + b).$$

Hlavní příčinou těchto chyb je jistě okolnost, že nula hraje při sčítání tutéž roli jako jednička při násobení, a proto studenti, kteří matematické pojmy přijímají hlavně sluchově (auditivně) a bez patřičného porozumění jejich vzájemným vztahům a matematickým operacím, přicházejí velmi často do rozpaků a nejistoty při provádění početních výkonů, kde se nula a jednička aditivně a multiplikativně vyskytují. O nejasnostech v porozumění i základním výkonům početním, zejména tam, kde výsledkem početního výkonu je nula nebo jednička, svědčí i velmi hojná záměna výrazů

„ruší se“ a „krátí se“.

Zkušenost ukazuje, že operace „krátí se“ je mnohem častější než operace „ruší se“. „Krátí“ se opačné členy zejména v delších algebraických výrazech, „krátí se“ shodné aditivní členy na obou stranách rovnice, krátí se ovšem i ve zlomcích, a to zcela regulérně i neregulérně. Vyskytnou se i případy, kdy student spojí pojem krácení ve správném smyslu s pojmem „krácení“, jehož výsledkem je nula; vynikajícího výkonu dosáhl při přijímacím pohovoru na strojní fakultě VUT v Brně ve stud. roce 1961/62 student kategorickým prohlášením:

Zlomek $\frac{\sqrt{2}}{2}$ lze krátit dvěma a nezbude nic.

Krácení zlomků, resp. počítání se zlomky vůbec, je dalším bohatým zdrojem nejrůznějších chyb. Požaduje-li se anulování zlomku, nebo je-li položena otázka, kdy má daný zlomek smysl, jeví studenti veliké rozpaky nad tím, zda se musí anulovat čitatel či jmenovatel; celkem běžnou záležitostí je krácení v součtu typu

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a + b}{c + d},$$

ba vyskytne se i krácení podle vzoru

$$\frac{a + c}{b + c} = \frac{a}{b}$$

Dosti běžnou chybou je dále rozklad zlomku, v jehož jmenovateli je součet, na zlomky o jmenovatelích, rovných jednotlivým členům součtu, tj. chyby typu

$$\frac{a + b + c}{m + n + p} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}$$

Tyto chyby se často vyskytují tam, kde zlomek uvedeného typu má určitou roli v současné jiné další početní operaci.

Sem patří dále časté chyby, vznikající zejména při řešení rovnic, chyby typu

$$ax = b, \quad x = \frac{a}{b}, \quad x = b - a \text{ při } a \neq 0, b \neq 0.$$

Kuriosity vznikají zejména tehdy, je-li $b = 0$, kdy též v důsledku zá-
kovských nejasností o číslech 0 a 1 vznikají časté chyby, např.

$$ax = 0, \quad x = -a, \text{ nebo } x = \frac{a}{0}, \text{ popřípadě i } x = \frac{0}{a} = 1.$$

Obtíže působí též formální úpravy a přepisy zlomků, např.

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$$

nebo přepisy součinu do tvaru zlomku, např. $ab = \frac{b}{\frac{1}{a}} = \frac{a}{\frac{1}{b}}$ a to zase

hlavně v příkladech, kde úspěšný výpočet je podmíněn užitím některého uvedeného obratu.

Všecky takovéto chyby svědčí o tom, že student nemá jasno o funkci čitatele a jmenovatele zlomku, že nemá jasno, zda daný algebraický výraz je součin nebo součet, že studentům působí obtíže globální chápání algebraických výrazů.

Až překvapivě častá je chyba

$$\sqrt{a^2 \pm b^2} = a \pm b, \text{ ba i } \sqrt{a^3 \pm b^3} = a^{\frac{3}{2}} \pm b^{\frac{3}{2}},$$

vyskytující se zase zejména v písemných samostatných studentských pracích a tam, kde tato odmocnina je součástí případného dalšího početního výkonu.

Hlavní příčinou těchto chyb je zřejmě nejistota a nejasnosti o rozdílech mezi výrazy $a^2 \pm b^2$, $(a \pm b)^2$, které mnohým studentům jsou pouze součástí jakéhosi vzorcového materiálu, zatěžujícího pouze paměť, izolovaného od jakýchkoli souvislostí se základními početními výkony. Vznik uvedené chyby podporuje pravděpodobně fakt, že výraz $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ student snadno zamění za výraz $\sqrt{a^2} \pm \sqrt{b^2}$, vzhledem k tomu, že význam symbolů $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{b^2}$ nepůsobí zvláštních obtíží a chyba se dost sugestivně nabízí.

Je vůbec s podivem, jak často se ve vyučovací praxi i na vysoké škole vyskytují záměny výrazů

$$(a \pm b)^2 \text{ s výrazy } a^2 \pm b^2;$$

nejčastěji se setkáváme s chybami

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\ a^2 + b^2 &= (a + b)(a + b).\end{aligned}$$

K rozkladu $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ je třeba připomenouti, že mnohý student, který celkem hladce rozložil

$$x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$$

upadne do beznadějných rozpaků, požaduje-li se formální rozklad dvojčlenu, např. $5x^2 - 3$.

Velkou záhadou zůstávají neustále rozklady výrazů $a^n \pm b^n$ pro n přirozené > 2 . Je možno říci, že tyto rozklady jsou pro značnou část studentů operacemi zcela neznámými; zde jsou běžnými chyby typu

$$\begin{aligned}a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 - b^2) \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a - b)^2 \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a - b)^2\end{aligned}$$

Tyto chyby vznikají pravděpodobně tak, že na základě správných i nesprávných představ o vzniku a funkci výrazů

$$a^2 - b^2, (a \pm b)^2$$

se student snaží o jejich bezprostřední aplikaci i na rozklad formálně stejně vypadajících výrazů $a^n - b^n$, $n > 2$; v celém procesu převládá patrně zraková složka a uvedené chyby jsou pak výsledkem jakéhosi, na této zrakové složce založeného odhadu toho, co by nejpravděpodobněji mohlo vyjít jako správný výsledek.

Rozklady algebraických výrazů jsou vůbec choulostivou záležitostí. Už i vytýkání společného činitele bývá pro mnohé studenty dost vážným problémem; většina z nich si vůbec neuvědomuje, že se vlastně jedná jen o určitý způsob zápisu dělení jednočlenem. To je ovšem třeba uvědomit si zvláště v případě, je-li třeba úpravy podle vzoru

$$a + b = a \left(1 + \frac{b}{a} \right).$$

Najdou se i studenti, kteří tvrdí, že zápis podobného druhu vůbec nikdy neviděli.

Při postupném vytýkání, spojeném popřípadě s formálními úpravami rozkládaného algebraického výrazu, vznikají často chyby nedodržováním závorkových pravidel; píšou se závorky tam, kde jich není třeba, vynechávají se tam, kde být musí. Takové komplikace vznikají hlavně tam, kde se upravuje např. část rozkládaného výrazu vytknutím činitele - 1; jsou ovšem ve většině případů zaviněny nepozorností nebo opomenutím, ale zkušenost ukazuje, že i na úrovni abiturienta střední školy se vyskytnou případy, že student nemá bezpečně jasno o rozdílu mezi výrazy typu

$$(a + b)(c + d), (a + b)c + d, a + b(c + d).$$

Rozklady algebraických výrazů, kde je nutno použít několika početních výkonů, po případě několik úprav, bývají obtížným problémem i pro lepší studenty.

Mnoho hořkých chvil způsobují učitelé i další chyby, vznikající zaměňováním funkčních znaků za multiplikatívny symboly, popřípadě záměnou početních výkonů s funkcemi za početní operace s argumenty. Tak často slyšíme, že

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha + \sin \beta, \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha,\end{aligned}$$

ba dokonce a dosti často rovnici typu $\sin x = a$ řešíme bez obtíží kořenem

$$x = \frac{a}{\sin} !$$

Velkým problémem u pojmu funkce je pojem definičního oboru. Ví-li student celkem bezpečně, že např. funkce $f(x)$ je definována v jistém oboru, např. pro $-1 \leq x \leq 1$, neznamená to naprosto, že by určil definiční obor funkce např. $f\left(\frac{x-1}{2}\right)$, tj. že by tento obor samostatně určil nerovnostmi

$$-1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$$

Tato studentská nemohoucnost aplikovat obecný poznatek na speciální případ vyskytuje se i u běžných funkcí, jako např. funkcí goniometrických a logaritmických; zvláště logaritmická funkce je v tomto i v jiných ohledech kapitolou samou pro sebe. Běžně slyšíme při přijímacích pohovorech, i při zkouškách i ve cvičeních, „že logaritmus čísla nemůže být záporný“; velké procento studentů si vůbec neví rady s řešením rovnice

$$\log_a x = b,$$

i když za a i b dosadíme zvláštní čísla, a to často i tehdy, odříká-li student bezpečně definici logaritmu. Zdá se, že znalost definice nestačí, aby průměrný student rozřešil správně uvedenou logaritmickou rovnici, bylo by snad třeba cvičením na příslušném stupni řešení zmechanizovat tak, aby rovnice

$$\log_a x = b, \quad x = a^b$$

se ve vědomí studenta vybavovaly současně stejně a řekněme i stejně formálně, jako např. rovnice $x^n = a, \quad x = \sqrt[n]{a}$ a bez další duševní práce.

(Pokračování)

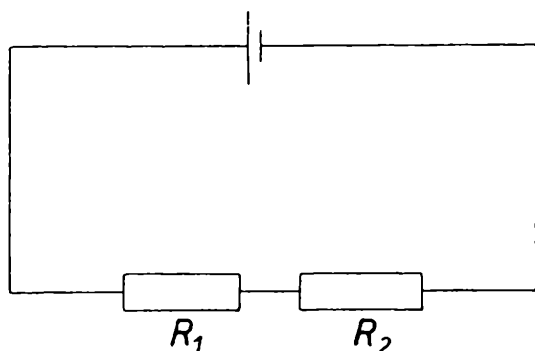
Jsou vaše znalosti fyzikálních pojmů neformální?

(Pokračování)

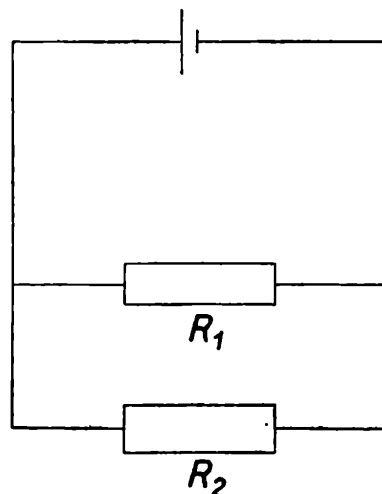
V minulém čísle byly uvedeny otázky výzkumu formalismu ve znalostech základních pojmů nauky o elektrickém proudu. Správné odpovědi na otázky jsou tyto:

1. Pro část obvodu

$$I = \frac{U}{R}.$$



Obr. 1



Obr. 2

Proud procházející vodičem je při stálém odporu přímo úměrný napětí na vodiči a při stálém napětí nepřímo úměrný odporu vodiče.

Pro uzavřený obvod

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Proud v uzavřeném obvodu je přímo úměrný elektromotorickému napětí zdroje (při stálém odporu) a nepřímo úměrný součtu vnějšího a vnitřního odporu (při stálé *emf*, dříve značeném též *ems*).

2. Odpořem bude protékat proud 3,3 [A].

3. Proud v okruhu je 1,07 [A]. Svorkové napětí je 1,37 [V].

4. Napětí na svorkách zdroje se zvětšuje.

Vysvětlení. Z Ohmova zákona pro celý obvod plyne $E = RI + rI$, odtud platí pro svorkové napětí $U = E - rI$. Elektromoto-

rické napětí zdroje E i jeho vnitřní odpor r zůstávají při změně vnějšího odporu konstantní. Mění se jenom proud, který pro vzrůstající R se blíží k nule, jak plyne opět z Ohmova zákona pro celý obvod. Protože výraz rI klesá, výraz $E - rI$ roste. Proto svorkové napětí U při zvětšování vnějšího odporu roste a blíží se hodnotě E .

5. Zapojení sériové (obr. 1)

$$R = R_1 + R_2$$

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 : U_2 = R_1 : R_2.$$

Zapojení paralelní (obr. 2)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$U_1 = U_2 = U$$

6. Výsledný odpor je 2Ω .

7. Svítit budou žárovky č. 4, 5, 6.

Vysvětlení. Roztavené vlákno žárovky 1 přerušilo proud jdoucí do žárovky 2 a 3. Žárovky 4, 5, 6 zůstaly vodivě spojeny se zdrojem.

8. Na žárovce 6 je napětí 6 V; na žárovce 4 je napětí 3 V; na žárovce 1 je napětí 4 V.

K vypracování písemné práce je potřeba 30—45 minut.

Práci si můžete sami opravit a zhodnotit podle těchto pravidel:

1. Odpověď na každou jednotlivou otázku zařadte do jedné z těchto skupin a označte:

Odpověď správná (S).

Odpověď neúplná nebo nepřesná (M).

Odpověď nesprávná nebo chybějící (N).

Při tomto roztrídění se zamýšlejte nad svou odpovědí a písmenem S hodnoťte jen odpověď ve všech částech úplnou a správnou. Do skupiny M zařadte odpovědi č. 1, 3, 5, 8, které jsou alespoň z poloviny správné. Odpovědi č. 2 a 6, když jste udělali chybu v numerickém výpočtu a odpovědi č. 4 a 7, když jste odpověděli správně bez vysvětlení nebo s vysvětlením nepřesným, pokud jste odpověď jenom neodhadli. Ve všech zbývajících případech označte odpověď písmenem N.

2. Dále zhodnoťte zvláště skupinu čtyř otázek týkajících se Ohmova zákona a zvláště skupinu druhou. Znalost obou základních poznatků označte takto:

a) Znalost neformální (NF), když ve skupině čtyř otázek byly všechny zodpovězeny správně, nebo tři správně a jedna neúplně. Tedy typy SSSS a SSSM.

b) Neznalost nebo znalost jen formální (F) v tom případě, když ze čtyř uvedených odpovědí byly dvě, nebo více, odpovědi nesprávné. Tedy např. typ SMNN.

c) Ve všech ostatních případech označte znalost základního pojmu jako přechodný typ (P).

Hodnocení, ke kterému jste dospěli, ukazuje vaše znalosti. Vyskytuje-li se ve vaší práci typ P, máte sklon k povrchnosti. Jestliže se ve vaší práci vyskytl typ F, jsou vaše znalosti jen formální.

3. Podle uvedeného hodnocení můžete také provést klasifikaci práce běžnými školskými měřítky:

Výborně: Typ NF, NF.

Chvalitebně: Typ NF, P.

Dobře: Typ P, P nebo NF, P.

Dostatečně: Typ P, F.

Nedostatečně: Typ F, F.

Takové zhodnocení má význam pro vás samotné. Obecnou platnost mu nemůžete přisoudit, protože nikomu nedokážete, za jakých podmínek jste úlohy řešili a protože s hodnocením vědomostí nemáte dost zkušeností.

Svůj výsledek můžete srovnat s výsledkem téže písemné práce, která byla zadána III. ročníku SVVŠ v době, kdy žáci měli přes půl roku odstupe od doby, kdy látku probírali v II. ročníku. Z 29 prací bylo podle uvedených zásad hodnoceno 9 výborně, 6 chvalitebně, 6 dobře, 7 dostatečně a 1 nedostatečně. V některých třídách, kde byl prováděn výzkum, naopak ani jedna práce nemohla být hodnocena výborně nebo chvalitebně.

Pokud jste při vypracování uvedené práce nedosáhli nejlepších výsledků, můžete si svoje znalosti zlepšit tím, že příslušné partie fyziky znovu prostudujete, domyslíte každý zákon i každou větu, naučíte se přesně formulovat i zapsat zákony, nakreslíte několik schémat a vyřešíte řadu praktických příkladů. Pokuste se o to! Jak se vám podařilo zkvalitnit vědomosti, ověříte si na obdobné písemné práci, která bude uveřejněna v příštím čísle.

(Pokračování)

Novinky literatury — Přírodní vědy

Státní knihovna ČSSR - Univerzitní knihovna v Praze, vydává od ledna 1964 bibliografické časopisy *Novinky literatury Přírodní vědy* ve čtyřech specializovaných řadách:

1. m a t e m a t i c k o - f y z i k á l n í (matematika, fyzika, geodézie, topografie, teoretická geofyzika, astronomie);
2. c h e m i c k á ;
3. g e o l o g i c k o - g e o g r a f i c k á (geologie, užitá geofyzika, meteorologie, zeměpis, kartografie);
4. b i o l o g i c k á .

Časopisy přinášejí výběr novinůk zahraniční knižní přírodově-

decké literatury z vědeckých knihoven ČSSR a některých dalších knihoven. Bibliografické záznamy jsou zčásti anotované. Řady vycházejí 10krát ročně, předplatné pro řadu matematicko-fyzikální a geologicko-geografickou činí 30,— Kčs (rozsah čísla 48 stran), pro řadu chemickou a biologickou 20,— Kčs (rozsah čísla 32 stran).

Objednávky a předplatné přijímá Poštovní novinový úřad ústřední administrace PNS, Jindřišská 14, Praha 1. Lze také objednat u každého poštovního úřadu nebo doručovatele. Objednávky do zahraničí vyřizuje Poštovní novinový úřad - vývoz tisku, Štěpánská 27, Praha 1.

M. M.

Slovníček

matematických výrazů

меридиан	poledník, meridián
метод, m.	metoda
минимум функции	minimum funkce
минута	minuta
мнимый	imaginární
многогранник	mnohostěn
многогранный угол	mnohohran
многократный	mnohonásobný
многоугольник, неправильный	opis- mnohoúhelník, nepravidelný, tečno-
санный, правильный	vý, pravidelný
многочлен	mnohočlen
множество	množina
множимое	násobenec
множитель	násobitel, činitel, faktor
модель, ž.	model, vzor
модуль	modul, absolutní hodnota

H

набросок	náčrt
наглядность	názornost
наибольший	největší
найденный	nalezený
наименьший	nejmenší
наклонная	přímka kosá
наличие	přítomnost, výskyt, existování
наложение поверхности	rozvinutí plochy
наложить	rozvinout (plochu), klásti (podmín- ky)
направление	směr
направленный	orientovaný, mající směr
направить, направлять	dáti směr
натуральное число	přirozené číslo
начало	počátek
начальный	počáteční
n -гранник, n -угольник	n -stěn, n -úhelník
неверно	nesprávně
независимость	nezávislost
независимый	nezávislý
неизвестная x	neznámá x

необходимое условие
необходимо и достаточно
неограниченный
неподвижный
непрерывный
неприводимый
неприменимый
неравенство
несобственный
несовместная система
несоизмеримые величины
несократимая дробь
нечетный
нижний
никакой
никогда
нормаль, \hat{z} .
нормальный
нуль, m ., приравнять нулю

nutná podmínka
je nutné a stačí
neomezený
pevný, nepohyblivý
spojitý
nerozložitelný
nepoužitelný
nerovnost
nevlastní
neřešitelná soustava
nesouměřitelné veličiny
nezkratitelný zlomek
lichý
dolní
žádný
nikdy
normála
normální, kolmý
nula, položit rovno nule

О

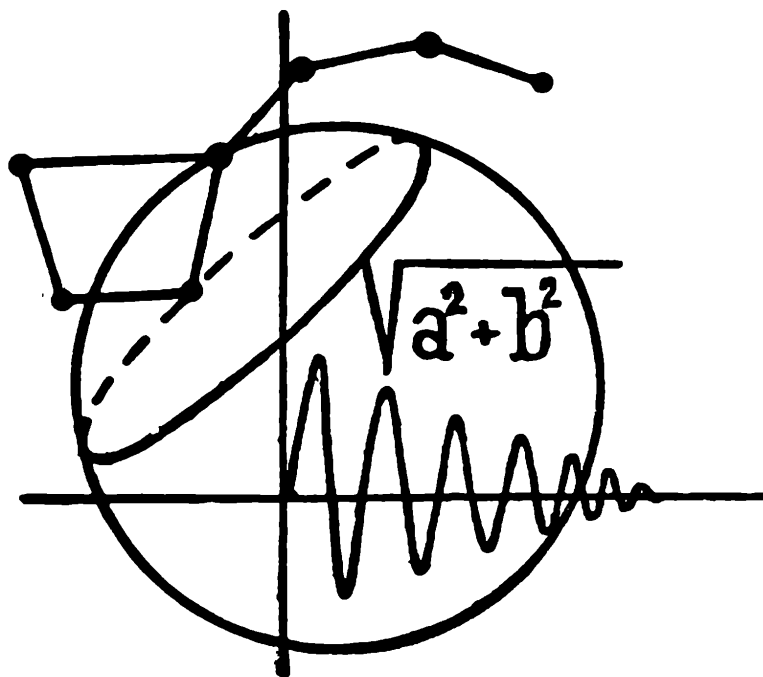
обладать свойством
область
обнаруживать, обнаружить
обобщение
обозначать, обозначить
оборот
обоснование
образ
образец
образовать
образующая
обратимый
обратная величина, теорема
обратное число
обратно пропорционально
обращаться
обращение левой стороны уравнения
в нуль
общепринятое обозначение
общий
общность
обязательно
объем
огибающая
ограничиваться; ограничиться
одинаковый
однозначно
однородный
означать
около
окрестность точки
округление

míti vlastnost
oblast
odhalit, odkrýt, objevit
zobecnění
označovat, označit
obrat, otočení
zdůvodnění
obraz, tvar, způsob, metoda
vzor, model
tvořit
tvořící přímka
obratitelný
převrácená hodnota, věta
číslo opačné
nepřímo úměrné
zacházet (něčím), proměňovat se,
přejít
anulování rovnice
všeobecně užívané označení
obecný (tvar), společný (bod)
obecnost
nutně
objem
obálka
omezit se
stejný, týž
jednoznačně
homogenní
označovat
asi
okolí bodu
zaokrouhlení

{ Pokračování }

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



9

ROČ. 42
1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Květen 1964

Číslo 9

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

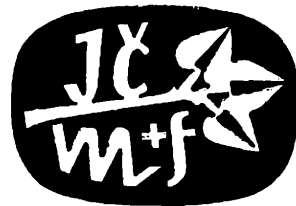
Redakční rada: *Jaroslav Bejsta*, ZDŠ, Praha; *Petr Benda*, VUT, Brno; doc. dr. *Josef Dibelka*, ČVUT, Praha; *Stanislav Horák*, ČVUT, Praha; doc. *Jaroslav Chudý*, ČVUT, Praha; *zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek*, VÚP, Praha; *prof. dr. Josef Korous*, VŠD, Žilina; *prof. Emil Kraemer*, KU, Praha; doc. dr. *Cyril Palaj*, VŠDL, Zvolen; CSc. *Evžen Říman*, ČVUT, Praha; CSc. *Jiří Sedláček*, ČSAV, Praha; CSc. *Ladislav Sehnal*, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. *Václav Šindelář*, ÚNM, Praha; *prof. dr. Ján Vanovič*, UK, Bratislava;

František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

F. Hradecký: O určitém vztahu u obecného trojúhelníka	385
S. Horák ml.: Věta Cevova a její použití	389
V. Kos: Mechanizace při sestavování statistik	394
J. Šubr: Některé vlastnosti aritmetické posloupnosti přirozených čísel	399
Doc. K. Drábek: Konstrukce druhého ohniska kuželosečky	400
J. Pospíšil: Kapkový model atomového jádra	404
CSc. E. Říman: Spektrum — řeč atomů	409
J. Šedivý: Geometrická hádanka	413
O. S.: Jediné vážení	414
M. M.: Úloha o krychli	415
M. M.: Skládanka	416
J. Furthnerová-Schidtmayerová: Kdo chová zebrou a kdo pije vodu	417
Prof. dr. E. Kašpar: Přemýšlejme o fyzikálních paradoxech (pokračování)	419
J. Stejskal: Hloubka ostrosti	423
Prof. J. Brejcha: Studentské chyby v matematice (dokončení)	427
J. Hnilíčková-Fenclová: Jsou vaše znalosti fyzikálních pojmů neformální? (dokončení)	429
Recenze	431
Redakce hovoří	432
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,- Kčs; cena jednotlivého čísla 2,- Kčs. Tiskne Mír, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: *zasl. učitel dr. O. Hönig*. Titulní obrázky: *M. Kořář*, studující FS.

A-04*41207

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1964.

Matematika



František Hradecký, Praha:

O určitém vztahu u obecného trojúhelníka

(K článku s. Oldřicha Jeništy uveřejněném v 6. čísle 41. roč. tohoto časopisu)

V uvedeném článku je podán početní důkaz věty, kterou lze formulovat též takto:

Středy D, E, F (resp. D', E', F') rovnostranných trojúhelníků sestrojených nad stranami libovolného trojúhelníka ABC jsou vrcholy dvou rovnostranných trojúhelníků.

Provedeme důkaz této věty, k němuž užijeme jen vlastností podobných trojúhelníků.

I. Nechť D, E, F jsou středy rovnostranných trojúhelníků BHC, CKA, ALB , sestrojených vně trojúhelníka ABC nad jeho stranami (obr. 1).

Snadno nahlédneme, že platí

$$\triangle ABH \sim \triangle FBD \text{ (su) ,}$$

neboť

$$\sphericalangle ABH = \sphericalangle FBD ; \sphericalangle ABF = \sphericalangle DBH = 30^\circ ,$$

$$AB : BC = FB : BD ; \left(FB = \frac{1}{\sqrt{3}} AB ; BD = \frac{1}{\sqrt{3}} BC \right) .$$

Pak bude

$$FD = \frac{FB}{AB} \cdot AH = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot AH \quad (1)$$

Dále je

$$\triangle ACH \sim \triangle ECD \text{ (su) ,}$$

neboť

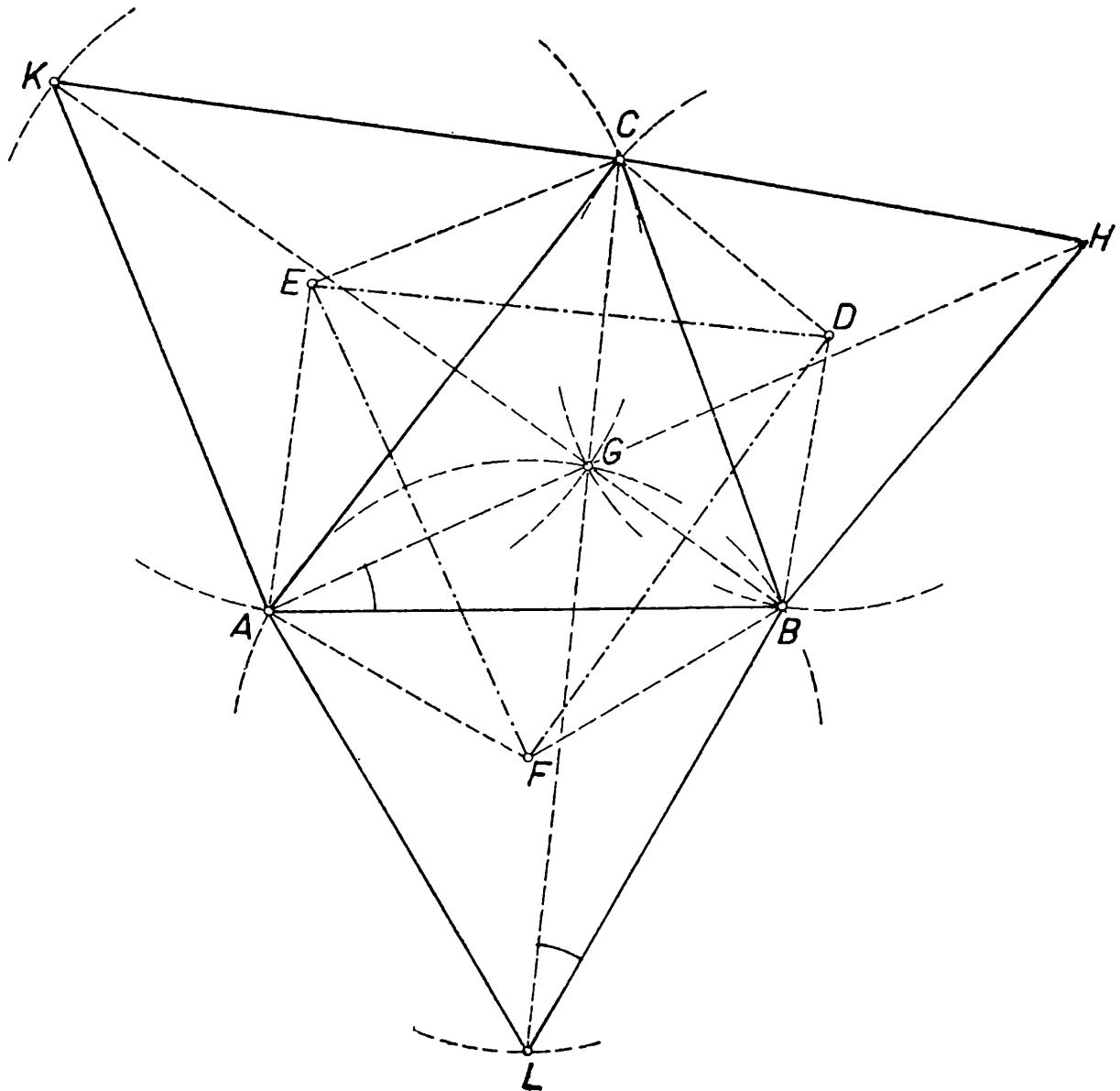
$$\sphericalangle ECD = \sphericalangle ACH \text{ a} \\ AC : AH = EC : CD$$

Pak však

$$ED = \frac{EC}{AC} \cdot AH = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot AH \quad (2)$$

Z podobných trojúhelníků FAE , LAC plyne stejným způsobem

$$EF = \frac{1}{\sqrt{3}} CH = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot AH, \quad (3)$$



Obr. 1

neboť $CL = AH$, což plyne ze shodných trojúhelníků $\triangle LBC = \triangle ABH$ (sus). Ze vztahu (1), (2), (3) dostaneme

$$DE = EF = FD$$

tj. trojúhelník DEF je rovnostranný.

II. Jsou-li D' , E' , F' středy rovnostranných trojúhelníků BCH' , $CK'A$, $AL'B$ nad stranami trojúhelníka ABC , ale ležících v týchž polorovinách

vyřazených stranami jako trojúhelník ABC , je důkaz úplně analogický (obr. 2)

$$\triangle ABH' \sim \triangle F'BD' \text{ (su)},$$

neboť

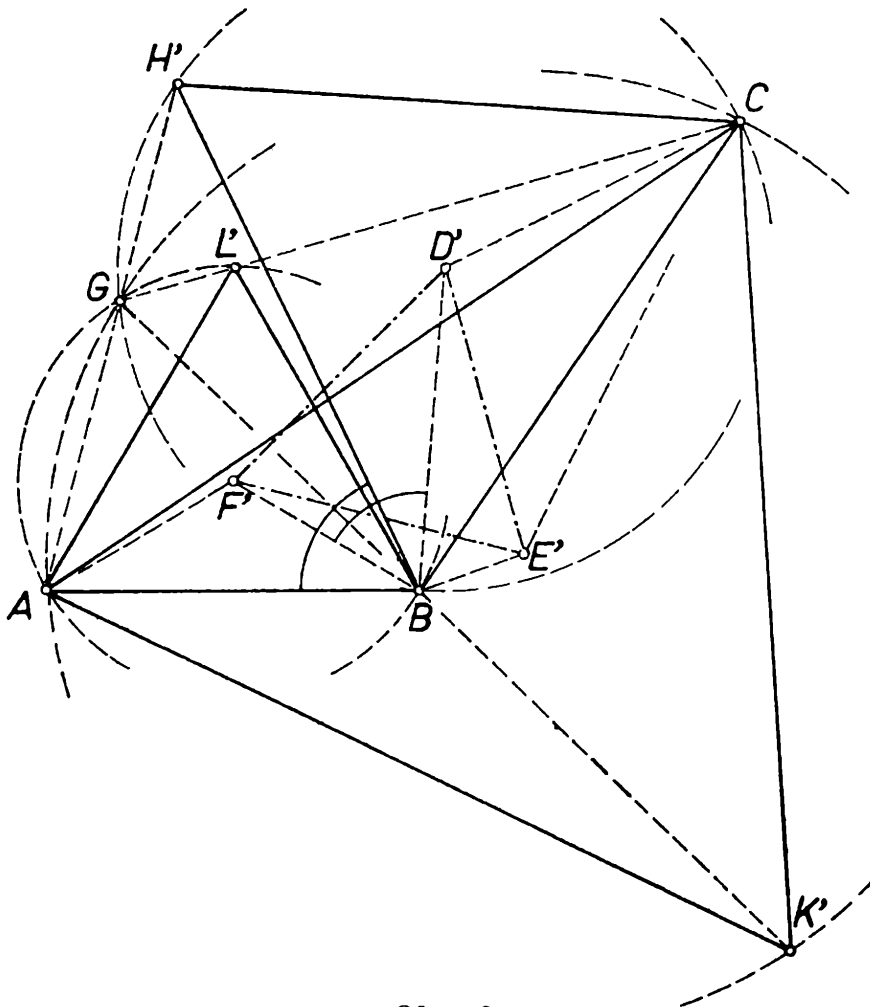
$$\sphericalangle ABH' = \sphericalangle F'BD' \quad \sphericalangle ABF' = \sphericalangle D'BC = 30^\circ$$

a

$$AB : BC = BF' : BD'$$

Pak platí

$$F'D' = \frac{F'B}{AB} \cdot AH' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot AH' \quad (1')$$



Obr. 2

Z podobných trojúhelníků ACH' , $E'CD'$ dostaneme

$$E'D' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot AH' \quad (2')$$

Z podobných trojúhelníků $F'AE'$, $L'AC'$ plyne jako v případě I)

$$E'F' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot CH' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot AH' \quad (3')$$

Je tedy opět

$$D'E' = E'F' = F'D'$$

tj. trojúhelník $D'E'F'$ je rovnostranný.

Z uvedeného seskupení rovnostranných trojúhelníků obdržíme ještě další zajímavé vlastnosti.

1. Ze shodných trojúhelníků $\triangle ABH \cong \triangle LBC$ (*sus*) a trojúhelníků (obr. 1) $\triangle BAK \cong \triangle LAC$ (*sus*) plyne

$$AH = CL = BK.$$

2. Označme G průsečík přímek AH a CL . Zřejmě platí

$$\sphericalangle BAG = \sphericalangle BLG \text{ a } \sphericalangle ABL = \sphericalangle AGL = 60^\circ$$

Leží tedy bod G na kružnici opsané trojúhelníku ABL a $\sphericalangle AGB = 120^\circ$, $\sphericalangle LGB = 60^\circ$. Podobně $\sphericalangle KAC = \sphericalangle KGC = 60^\circ$. *

Z toho plyne, že body B, G, K leží v přímce. Protínají se tudíž přímky AH, BK, CL v jednom bodě.

Týž důkaz platí i pro případ, že trojúhelníky BCH', CAK', ABL' (obr. 2) leží v opačných polorovinách, tj. v případě II).

Tím jsme dokázali větu:

Jsou-li ABL, BCH, ACK rovnostranné trojúhelníky sestavené nad stranami libovolného trojúhelníka ABC , pak přímky AH, CL, BK se protínají v jednom bodě. Tímto bodem procházejí kružnice opsané uvedeným rovnostranným trojúhelníkům.

V tomto článku jsme se zabývali větou, která platí pro libovolný trojúhelník. Podobná věta platí pro libovolný rovnoběžník s tím rozdílem, že místo rovnostranných trojúhelníků sestrojíme nad jeho stranami čtverce.

Středy S_i (resp. S'_i) ($i = 1, \dots, 4$) čtverců sestavených nad stranami libovolného rovnoběžníku $ABCD$ jsou vrcholy dvou čtverců, které jsou s daným rovnoběžníkem soustředné.

Důkaz této věty lze provést analogickým způsobem, jak bylo zde uvedeno.

Věta Cevaova a její použití

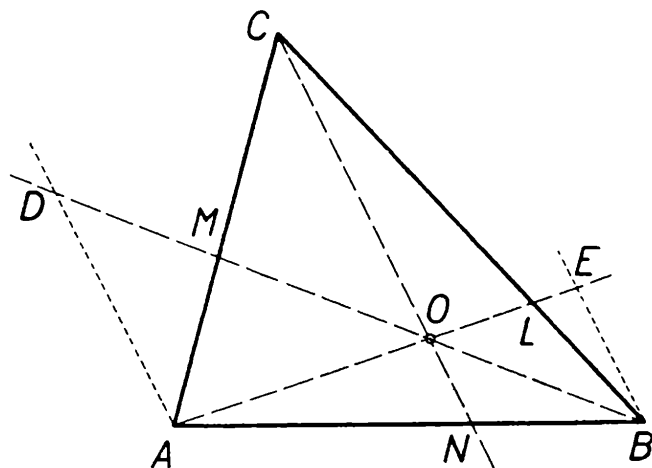
V r. 1698 uveřejnil ve spise *De lineis rectis*. . milánský matematik Giovanni Ceva (čti Čeva) větu, která nyní má jeho jméno a je v geometrii trojúhelníku velmi důležitá. Je to věta obdobná Menelaově větě. A této větě je věnován tento článek.

Tak jako v článku o Menelaově větě, i zde uvažujeme jen orientované úsečky.

V.1. Mějme dán trojúhelník ABC a bod O , který neleží na žádné jeho straně (ani na jejich prodloužení). Předpokládejme, že přímky AO , BO , CO protnou strany trojúhelníku po řadě v bodech L , M , N . Potom platí

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = -1 \quad (1)$$

Důkaz. (Obr. 1a, b.) Jak z obr. 1a, b je patrné, mohou nastat dva případy. Buď jeden z bodů L , M , N je vnitřním bodem strany a druhé dva body jsou vnějšími (tj. leží na prodloužení stran), nebo všechny tři body jsou vnitřními body stran. Důkaz provedeme pro případ, že bod O leží uvnitř daného trojúhelníku a potom body L , M , N jsou vnitřní body stran. Poněvadž jde o orientované úsečky, je v obou případech součin na levé straně rovnice (1) záporný.



Obr. 1a

Vrcholy A , B vedme přímky rovnoběžné s CN . Rovnoběžka jdoucí A je přímkou BO prořata v bodě D a rovnoběžka jdoucí B je přímkou AO prořata v bodě E . O trojúhelnících ANO , ABE snadno zjistíme, že jsou podobné (dokonce stejnohlelé), a proto

$$AN : AB = NO : BE . \quad (2)$$

Také trojúhelníky BNO a BAD jsou podobné, a tudíž platí

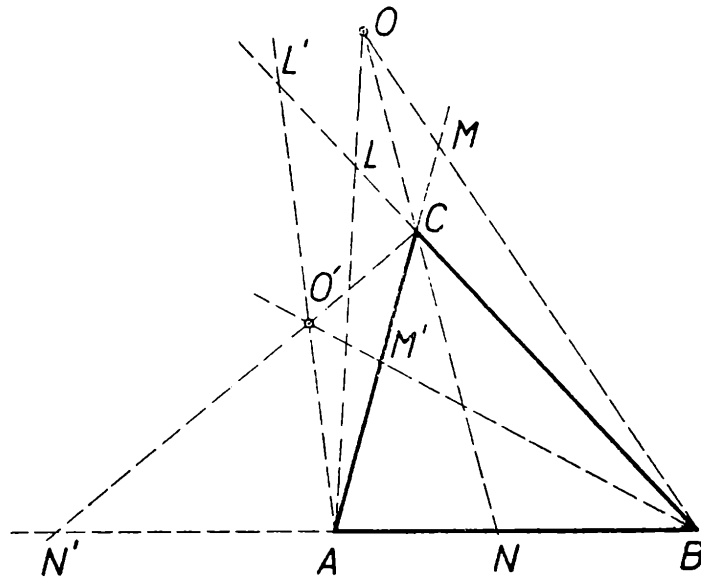
$$BN : BA = NO : AD \quad (3)$$

Z rovnic (2) a (3) dělením obdržíme

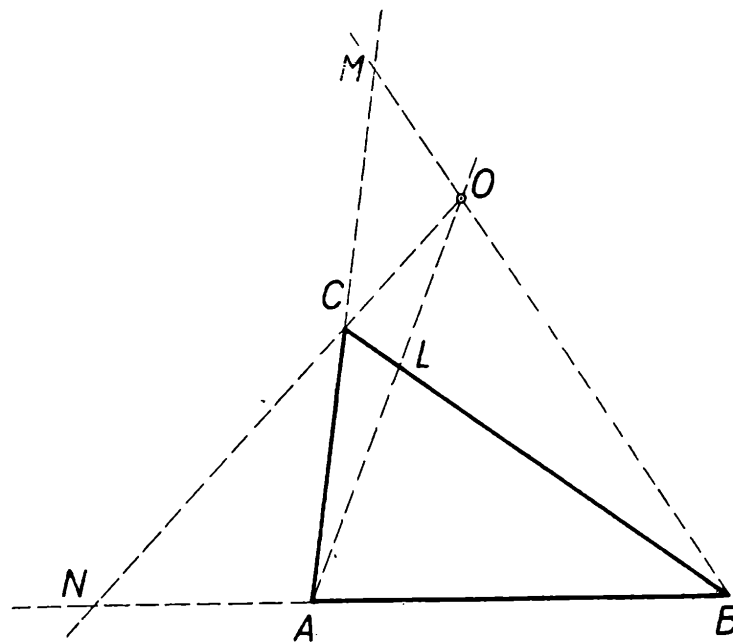
$$\frac{AN}{BN} = - \frac{AD}{BE} . \quad (4)$$

Stejným způsobem z podobných trojúhelníků MCO , MAD dostaneme

$$\frac{CM}{AM} = \frac{CO}{AD} \quad (5)$$



Obr. 1b



Obr. 2a

a z podobných trojúhelníků BLE , CLO plyne

$$\frac{BL}{CL} = \frac{BE}{CO} \quad (6)$$

Znásobením rovnic (3), (4), (5) dojdeme k větě V. 1.

Pro úplnost důkazu měli bychom ještě uvažovat případy, kdy bod O je vnějším bodem trojúhelníku ABC . Tu jsou myslitelné dvě možnosti,

z nichž jedna je v obr. 1b znázorněna bodem O a druhá bodem O' .

Pro geometrii je důležitější věta obrácená, která zní:

V. 2. Je dán trojúhelník ABC a body L, M, N ležící po řadě na stranách trojúhelníku ABC , a to tak, že o bodech L, M, N platí

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = -1 \quad (1')$$

Potom přímky AL, BM, CN buď procházejí týmž bodem O nebo jsou rovnoběžné.

D ů k a z. Budeme předpokládat, že L je vnitřním bodem strany BC a body M, N jsou vnější body stran AC, AB .

a) Předpokládejme, že přímky AL, BM jsou různoběžné a protínají se v bodě O . Přímka CO protne AB v bodě N' . Podle věty V. 1 platí (obr. 2a)

$$\frac{AN'}{BN'} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = -1.$$

Porovnáme-li tuto rovnici s rovnicí (1'), vidíme, že platí

$$\frac{AN'}{BN'} = \frac{AN}{BN},$$

což není jinak možné, než že

$$N' \equiv N$$

b) Předpokládejme nyní, že přímky AL, BM jsou rovnoběžné (obr. 2b). Trojúhelníky CMB, CAL jsou stejnohlelé, a proto

$$CM : AM = CB : LB,$$

což přepsáno dává

$$\frac{CM}{AM} = \frac{CB}{LB} = -\frac{CB}{BL}. \quad (7)$$

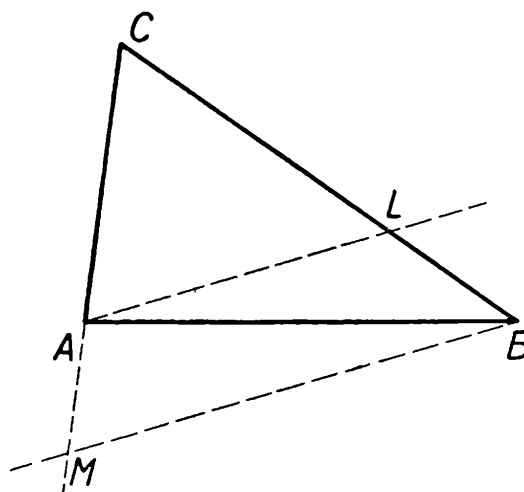
Dosadíme do rovnice (1') a po zkrácení obdržíme

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{CB}{CL} = 1.$$

Rovnici ještě upravíme

$$AN : BN = LC : BC$$

Z této úměry již vyplývá rovnoběžnost přímek AL, NC , což jsme měli dokázat.



Obr. 2b

Ceovoy věty užíváme při důkazech, že tři přímky procházejí jedním bodem, jak si ukážeme na několika příkladech.

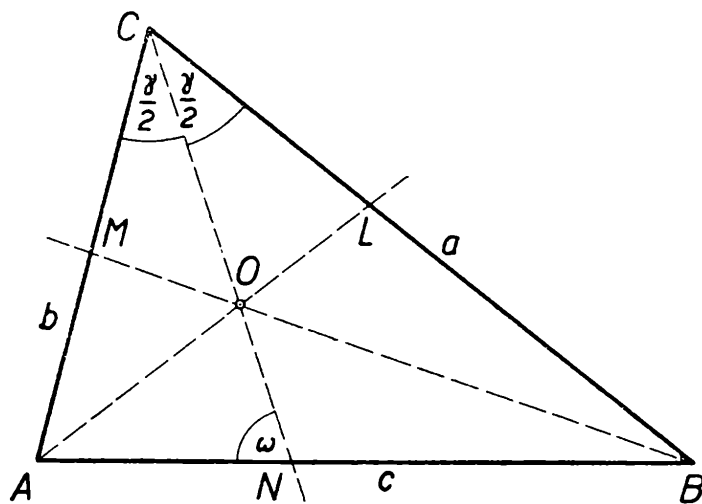
1. Osy vnitřních úhlů v trojúhelníku procházejí jedním bodem.

Důkaz. V obr. 3 je dán trojúhelník ABC . Osy jeho vnitřních úhlů protínají protější strany po řadě v bodech L , M , N , které jsou vnitřními body stran trojúhelníku, a proto

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = 1$$

Ostrý úhel, který svírá osa úhlu γ se stranou c , označme ω . Pomocí sinové věty z trojúhelníku ANC vypočítáme (při obvyklém označení prvků v trojúhelníku)

$$AN = b \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \omega}.$$



Obr. 3

A podobně z trojúhelníku BNC plyne

$$BN = a \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \omega}.$$

Poměr

$$AN : BN = b : a.$$

Podobným způsobem dospěli bychom ke vztahům

$$\begin{aligned} BL : CL &= c : b, \\ CM : AM &= a : c. \end{aligned}$$

Proto

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{AM} = 1$$

Z věty V. 2 pak plyne správnost vyslovené věty.

2. Výšky v trojúhelníku procházejí jediným bodem.

Důkaz. V obr. 4 je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Jeho výšky protínají strany trojúhelníku v bodech L, M, N , které jsou vnitřními body stran trojúhelníku ABC . Z pravoúhlých trojúhelníků ACN, BCN dostaneme

$$AN = b \cdot \sin \alpha,$$

$$BN = a \cdot \sin \beta$$

Stejně z pravoúhlých trojúhelníků ABL, ACL plyne

$$BL = c \cdot \sin \beta,$$

$$CL = b \cdot \sin \gamma$$

a ještě z trojúhelníků ABM, CBM obržíme

$$AM = c \cdot \sin \alpha,$$

$$CM = a \cdot \sin \gamma$$

Utvoříme-li známý součin poměrů z orientovaných úseček, dostaneme -1 , což podle V. 2 znamená, že výšky procházejí jediným bodem.

Čtenáři přenechávám případ trojúhelníku tupouhlého, v němž průsečík výšek je vně trojúhelníka, paty dvou výšek leží na prodloužení stran a pata třetí výšky je vnitřním bodem strany.

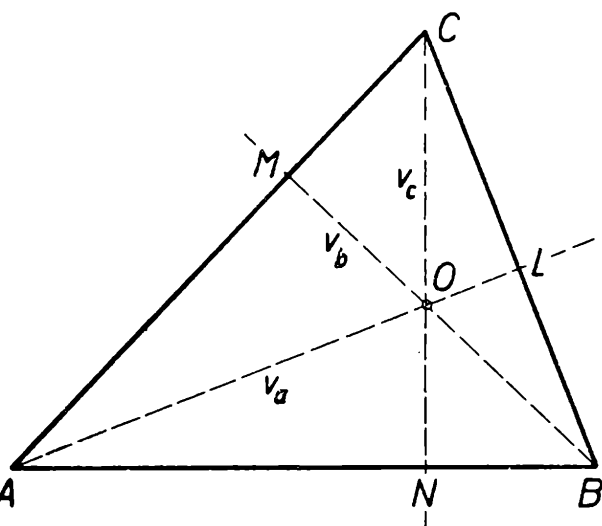
3. Trojúhelníku ABC vepišme kružnici. Body A dotyku na stranách BC, AC, AB označme pořadě L, M, N . Potom přímky AL, BM, CN procházejí jediným bodem G . Tomuto bodu říkáme *Gergonnův*¹⁾ bod (čti Žergonův).

Důkaz. (Obr. 5.) Je ihned patrné, že

$$AN = AM,$$

$$BL = BN$$

$$CM = CL$$

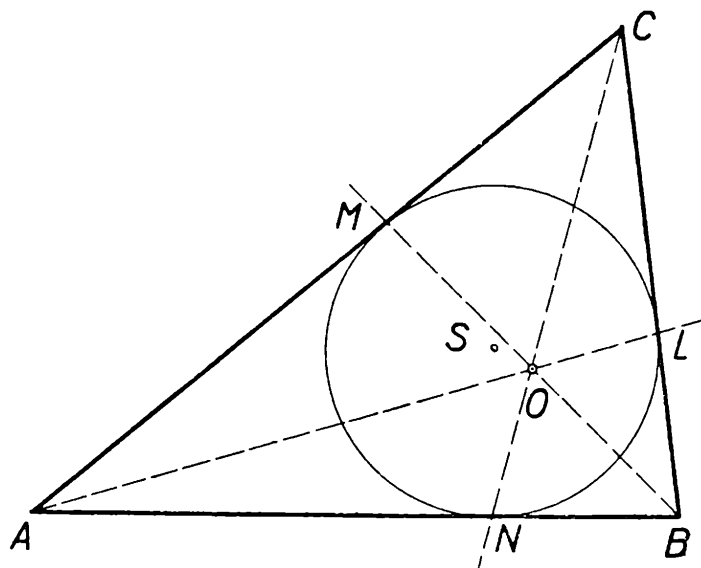


Obr. 4

¹⁾ G e r g o n n e (Žergon) byl profesorem v Montpellier (Monpelié) ve Francii.

Poněvadž body L , M , N jsou vesměs vnitřními body stran, je součin poměrů orientovaných úseček roven -1 a v důsledku poučky V.2, je uvedená věta správná.

2. Uvedenou větu můžeme i vyslovit pro kružnice vně vepsané.



Obr.

Cvičení.

1. Dokažte, že těžnice procházejí jediným bodem (těžištěm).
2. Osy stran trojúhelníku PQR procházejí jediným bodem. Pro důkaz použijte trojúhelníku ABC , jehož vrcholy jsou středy stran daného trojúhelníka a v němž uvažované osy jsou výškami.

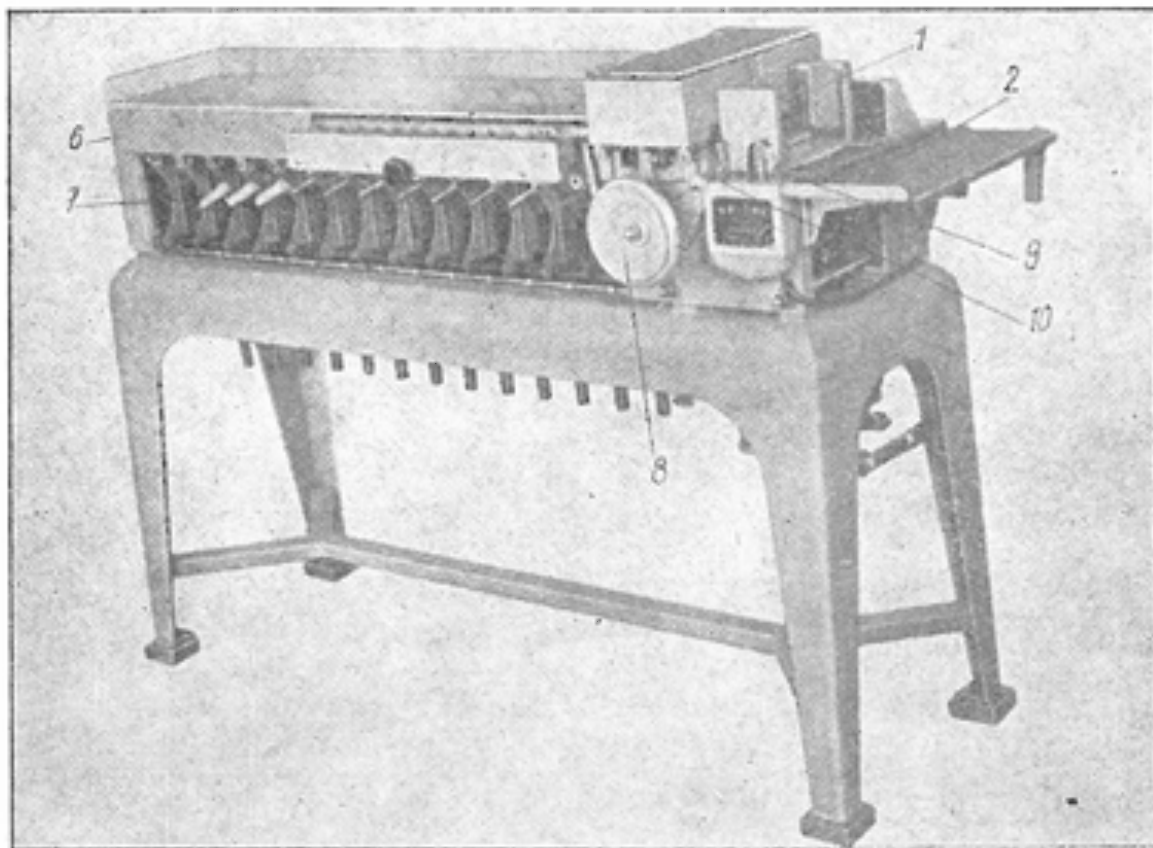
V l a d i m í r K o s, Lázně Bělohrad:

Mechanizace při sestavování statistik

Už jste někdy jeli kolem „statistického úřadu“ (oficiální název: Ústřední úřad státní kontroly a statistiky - ÚÚSKS) v Praze-Karlíně, Sokolovská třída? Možná, že vás napadla prostá otázka, jaký význam má tento úřad pro naše národní hospodářství. Čím se zabývají stovky zaměstnanců v desítkách kanceláří této budovy? A správnou odpověď jste asi nedostali. Přiblížit vám úkoly a poslání statistiky je cílem tohoto příspěvku.

Ve statistickém úřadě v Karlíně jsou vlastně dva samostatné podniky, ÚÚSKS a Ústředna mechanizované evidence - ÚME. Zaměřme se nyní alespoň zběžně na práci v ÚME. V tomto podniku se nezpracovávají zdaleka jen údaje populárního sčítání lidu. Stálými zákazníky ÚME jsou velké pražské závody a podniky, jako např. Pražský průmysl masný, v nichž by se neobešli bez moderních výpočetních metod

Údaje na štítky děrují operátorky, děrovačky, na děrovacích strojích. Děrovací stroj má klávesnici s devíti číslicemi, které lze děrovat do všech sloupců štítku. Tento stroj je obdobou psacího stroje, místo psaní písmen však dělá pravidelné kruhové otvory, díry, odtud děrování. O účelu děrování je pojednáno dále. Pravíme, že údaje na štítku jsou kódovány.¹⁾



Obr. 2. Třidič. 1. podávací zásobník. 2. srovnávací stolek. 6. rozdělovač s přepínačem. 7. odkládací přihrádky. 8. ruční kolečko pro ruční pohon stroje. 9. spouštěcí tlačítko. 10. vypínač chodu stroje.

Na štítek „Stěhování 1961“ se děrují tyto údaje: kraj přistěhování, okres přistěhování, pohlaví, rok narození, povolání, rodinný stav, národnost, příchod, staré bydliště, nové bydliště. Všechny tyto údaje se ovšem děrují smluvenými číselnými znaky.

Vraťme se k našemu úkolu. Máme-li zjistit, kolik lidí se vystěhovalo ze Středočeského kraje, musíme roztrždit štítky podle krajů. Znak kraje budiž ve sloupcích 1 a 2. Středočeský kraj nechť má ve sloupci 2 jedničku, Východočeský dvojku, Severočeský trojku atd. Podle úlohy má-

¹⁾ K ó d o v á t znamená zapsat zkoumané vlastnosti daného objektu smluvenými značkami nebo smluveným způsobem (zde číslicemi na určitých místech.). Účelem je nabýt lepšího a rychlejšího přehledu o zaznamenaných vlastnostech, než by tomu bylo, kdybychom si činili zápisy běžným způsobem. Při d e k ó d o v á n í převádíme opačně kódované záznamy do běžného způsobu vyjadřování. Pozn. redakce

me oddělit štítky, které mají ve sloupci 2 jedničku. A tu se dostáváme k další důležité operaci ve statistické praxi, a to ke t ř í d ě n í.

S tříděním se setkáváme všichni v každodenním životě, aniž si tuto činnost blíže uvědomujeme. Všimněte si třeba průvodčího v tramvaji, jak si ukládá peníze do brašny. Do jedné přihrádky dává desetníky, do druhé pětadvacetníky, do další koruny, tj. třídí mince podle určitého znaku, podle jejich hodnoty. V hospodářském životě je takových případů daleko více, a proto začal člověk uvažovat o konstrukci stroje, který by tuto činnost dělal daleko rychleji a přesněji za něho.

U souprav strojů na děrné štítky třídí štítky stroj zvaný třídič. Třídič *A r i t m a 2 0 0* pracuje elektromechanicky, rychlostí asi 24 000 průchodů za hodinu (obr. 2).

Štítky se třídí podle naděrovaných znaků. Do stroje přicházejí podávacím zásobníkem, kam je dává operátor srovnané a zatíží je těžítkem. Zásobník je asi na 700 štítků. K rozlišení štítků podle znaků v určitém sloupci slouží o h m a t á v a c í z a ř í z e n í. Ohmatávací zařízení se skládá ze dvou ohmatávacích desek uložených nad sebou, z unášecích kotoučů, zářázky štítků a ohmatávacího vozíku. Vozík má ohmatávací koš s dvanácti ohmatávacími jehlami (šest pro horní a šest pro dolní polovinu štítku). Po uvolnění se jím dá pohybovat po uvolňovacích tyčích a nařídít jehly na kterýkoli tříděný sloupec štítku.

Do ohmatávacího zařízení jsou štítky podávány pohyblivým ohmatávacím nožem. Mezi deskami se štítek na zlomek vteřiny zastaví. V této době jej ohmátne 6 (u staršího typu až 12 štítků) ohmatávacích jehel a převody bowdenu způsobí načasování mechanismu pro otevření výhybky nad příslušnou přihrádkou podle čísla vyděrovaného ve štítku.

Štítek je dále unášen transportním mechanismem po své dráze. Přijde-li před „svou“ výhybku, ta se otevře a vypustí štítek do příslušné odkládací přihrádky. Nemá-li štítek ve tříděném sloupci nic naděrované, proběhne celou drahou rozvodu štítků a padne přes stále otevřenou poslední výhybku do poslední nečíslované přihrádky „odpad“.

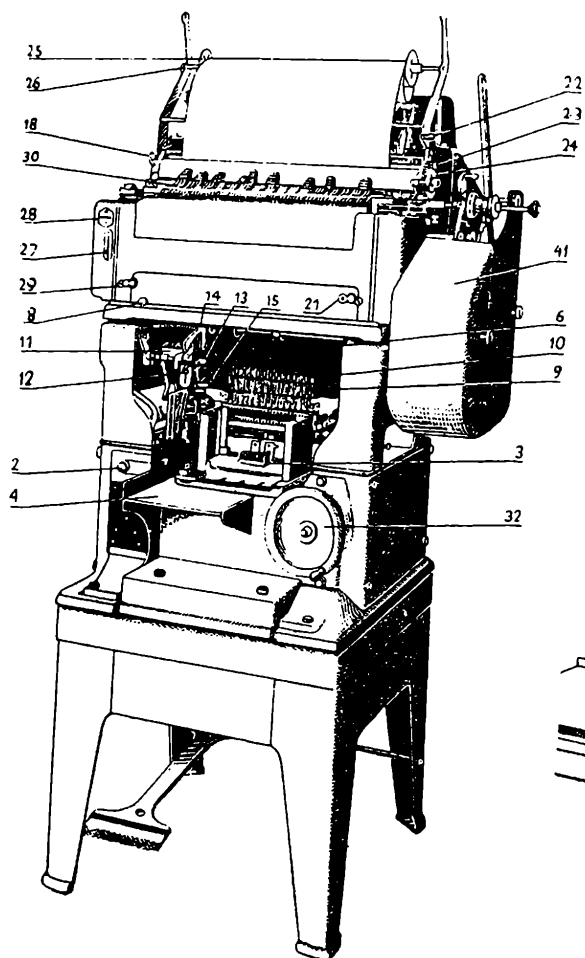
Většina třídičů má jedno nebo dvě pětimístná počítadla, která ukazují počet průchodů, tj. kolik štítků prošlo strojem.

Třídič roztřídí tedy štítky s čísly 0 až 9 a štítky v tom sloupci neděrované, celkem do jedenácti skupin. Stroj je konstruován tak, aby samočinně pracoval bez přerušení, pokud obsluha doplňuje další štítky do podávacího zásobníku a odebírá roztříděné štítky z odkládacích přihrádek. Roztříděné štítky můžeme vybírat z jednotlivých přihrádek za chodu stroje, jinak se stroj při naplnění kterékoli přihrádky samočinně zastaví.

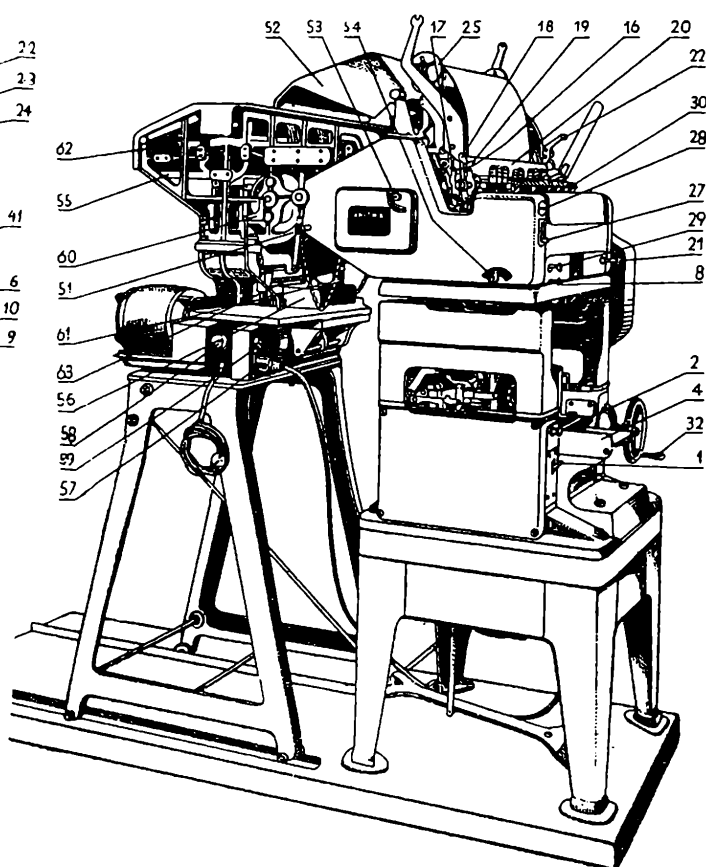
Přejděme opět k naší úloze. Oddělili jsme tedy štítky se znakem 1 ve sloupci 2. Stačilo by tyto štítky spočítat, a tím by byl náš úkol splněn. V praxi se však vyskytují úkoly složitější. Ve sloupcích 41 až 45 by byly třeba děrovány výdaje za stěhování a my bychom měli zjistit, kolik činily

tyto výdaje ve Středočeském kraji celkem. To by znamenalo dekódovat¹⁾ opticky hodnoty výdajů na všech štítcích, napsat je a sečíst. To by však u miliónových souborů trvalo velmi dlouho a situace by byla v době, kdy by byl znám výsledek, již zcela jiná.

K dekódování údajů na štítcích a k jejich opsání na dlouhé role papíru, kde každá řádka odpovídá jednomu štítku, a k sečítání hodnot ze štítků slouží t a b e l a č n í s t r o j e (obr. 3). Do nich se vkládají seříděné štítky. Stroj je opisuje a sečítá položky. Tabelátor zpracuje asi 6 000 štítků za hodinu. Při změně ve zvoleném sloupci vypíše stroj částečný výsledek - t o t a l nebo celkový výsledek - g r a n d t o t a l (zkratky T a GT). To si blíže vysvětlíme.



Obr. 3. Tabelační stroj.
Pohled z předu.



Obr. 4. Tabelační stroj. Boční pohled.

V naší sestavě bychom si nastavili total ve sloupci 2. To znamená, že za posledním štítkem s jedničkou ve sloupci 2 by stroj vypsal součet položek ve sloupcích 41 až 45. Pak by podle třídění následovaly ve sloupci 2 dvojky, trojky atd. Kdyby se vinou třídění „přípletla“ mezi jedničky třeba dvojka, vypsal by stroj total za první částí jedniček, potom za samotnou „dvojku“ a pak na konci ostatních jedniček. Abychom dostali správný total za jedničky, museli bychom oba částečné totaly sečíst

A kdyby pak byly „jedničky“ promíchány větším počtem jiných čísel, dalo by dost práce nabýt správný výsledek. Z toho vidíme, jak důležité je třídění pro zpracování celé sestavy.

Po tabelaci máme sestavu přehledně natištěnu na roli a můžeme jen číst výsledky, které potřebujeme. Avšak tak je tomu jen v ideálním případě. U většiny sestav bývá řada chyb, ať jsou to chyby strojové, chyby osobní (operátor zapomene zařadit některý štítek), nebo chyby v děrování.

Hledáním chyb a zjišťováním skutečných výsledků se zabývá výsledná kontrola, štáb zkušených a spolehlivých pracovníků. Od nich jde sestava přímo k zákazníkovi.

Tak se mohou třeba v Pražském průmyslu masném dovědět, kolik kterého druhu masa prodali za poslední období, kolik za ně utržili, jak splnili plán, jaké budou mít platy a prémie.

I když jsem se o mnoha problémech při zpracování dřevných štítků nezmínil (násobení, alfabetní děrovače, reproduktory aj.) a jiných jsem se dotkl jen letmo, snažil jsem se osvětlit otázku statistiky v našem národním hospodářství. Tím jsem se snažil opravit zcela chybné mínění mnoha lidí o statistice, že je to věc sama pro sebe, která připravuje lidi o čas a o peníze.

J i ř í Š u b r t, PI, Praha:

Některé vlastnosti aritmetické posloupnosti přirozených čísel

V soutěžních úlohách *M a t e m a t i c k é o l y m p i á d y* byl v kategorii A před časem uveden tento příklad:

Jestliže (nekonečná) aritmetická posloupnost přirozených čísel obsahuje třetí mocninu přirozeného čísla, potom obsahuje nekonečné množství takových mocnin. Dokažte!

V těchto řádcích se budeme zabývat obdobnou problematikou a dokážeme tuto větu:

J e d á n a a r i t m e t i c k á p o s l o u p n o s t s p r v n í m č l e n e m a_1 a s d i f e r e n c í d ; p ř i t o m j s o u a_1 , d p ř i r o z e n á č í s l a a p l a t í $d = a_1 - 1$.

Dále je dáno přirozené číslo p . Potom v aritmetické posloupnosti existuje člen $a_n = a_1^p$

D ů k a z. Pro n -tý člen dostáváme

$$a_n = n a_1 - n + 1.$$

Máme tedy rozhodnout, zda existuje přirozené číslo n tak, že platí

$$a_1^p = na_1 - n + 1$$

Takové číslo zřejmě existuje, neboť z poslední rovnice plyne (pro $a_1 \neq 1$)

$$n = \frac{a_1^p - 1}{a_1 - 1} = a_1^{p-1} + a_1^{p-2} + a_1^{p-3} + \dots + a_1 + 1$$

Pro $a_1 = 1$ je výsledek rovněž zřejmý. Tím je důkaz proveden.

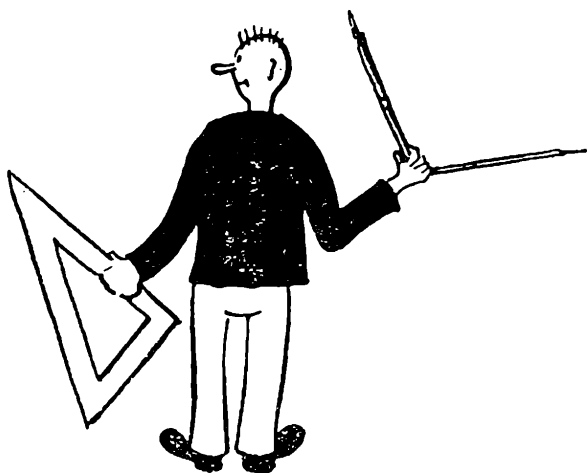
Čtenář si může pro ilustraci vypočítat numerický příklad.

Volte třeba $a_1 = 7$, (tj. $d = 6$) a $p = 4$. Pak jde o aritmetickou posloupnost s členy: 7, 13, 19, 25, 31, 37, ..., v níž

$$n = \frac{7^4 - 1}{6} = 400$$

$$a_{400} = 7 + 399 \cdot 6 = 2401$$

Člen a_{400} je čtvrtou mocninou členu a_1 ; platí totiž $a_{400} = 2401 = 7^4$.



Deskriptivní geometrie

Doc. Karel Drábek, ČVUT, Praha:

Konstrukce druhého ohniska kuželosečky

Obyčejně se při konstrukci druhého ohniska středové kuželosečky určené ohniskem a příslušným počtem bodů a tečen (v celkovém počtu tří) používá věty o geometrickém místě souměrně sdružených bodů Q k danému ohnisku podle tečen kuželosečky, nebo věty o geometrickém místě pat P kolmic sestrojovaných z ohniska na tečny kuželosečky. V obou případech je nutné sestrojení kružnice (řídící nebo vrcholové) z daných podmínek.

Je-li dáno ohnisko F_1 a tři tečny t_1, t_2, t_3 , nelze konstrukce použít v případě, že některé body Q (nebo P) nejsou na nákrese¹⁾ (viz např. polohu těchto tří tečen v obr. 3).

¹⁾ Tuto úlohu jiným způsobem řešil ve stejnojmenném článku Oldřich Jeništa, viz Rozhledy (42) 1963—64, str. 157.

K řešení předložené úlohy budeme potřebovat tuto pomocnou větu:
Součin orientovaných vzdáleností ohnisek středové kuželosečky od její libovolné tečny je konstantní.

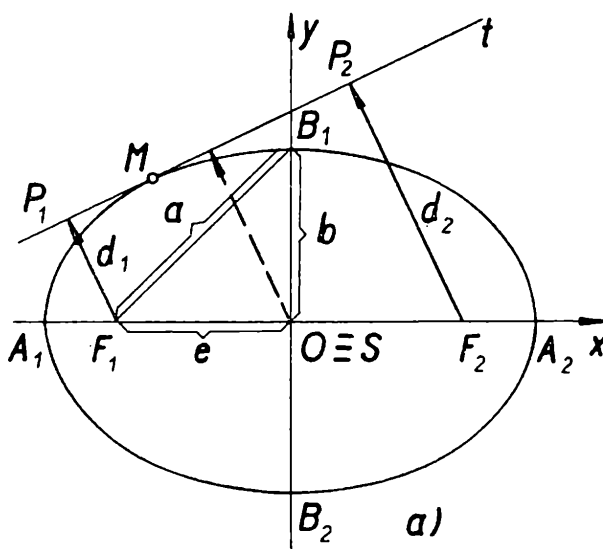
Důkaz provedeme užitím analytické geometrie. Systém souřadnic zvolme tak, aby rovnice kuželosečky (obr. 1) měla tvar

$$b^2x^2 + \varepsilon a^2y^2 = a^2b^2, \quad (1)$$

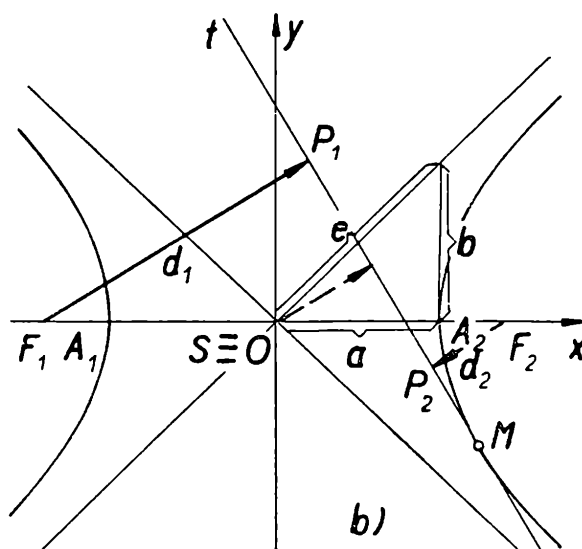
kde $\varepsilon = +1$ v případě elipsy, $\varepsilon = -1$, je-li daná kuželosečka hyperbola (tj. počátek souřadnic je středem kuželosečky a osa x je totožná s hlavní osou; délka hlavní poloosy a , vedlejší b).

Rovnice tečny ke kuželosečce (1) v jejím bodě $M [x_1; y_1]$ je

$$b^2xx_1 + \varepsilon a^2yy_1 = a^2b^2 \quad (2)$$



Obr. 1a



Obr. 1b

Důkaz. Přímka $y = kx + q$ protíná kuželosečku (1) v bodech, pro jejichž souřadnice x dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 (b^2 + \varepsilon a^2k^2) + 2 \varepsilon a^2kqx + \varepsilon a^2q^2 - a^2b^2 = 0.$$

Je-li daná přímka tečnou, musí být diskriminant této kvadratické rovnice roven nule, tedy (po úpravě)

$$D = a^2b^2 (b^2 + \varepsilon a^2k^2 - \varepsilon q^2) = 0.$$

Je-li potom $[x_1; y_1]$ příslušný bod dotyku tečny $y = kx + q$ a kuželosečky (1), plyne z požadavku $D = 0$ v důsledku $q = y_1 - kx_1$ kvadratická rovnice pro k ve tvaru (po úpravě)

$$\varepsilon k^2 (a^2 - x_1^2) + 2 \varepsilon kx_1y_1 + b^2 - \varepsilon y_1^2 = 0,$$

jejímž řešením je

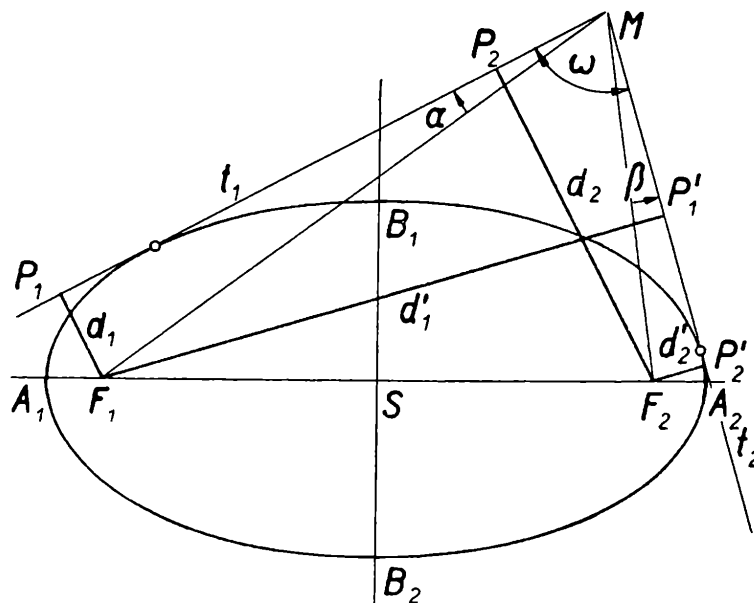
$$k_{1,2} = -\frac{x_1y_1}{a^2 - x_1^2} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = k.$$

Pak rovnice tečny o vypočtené směrnici k , která prochází bodem $[x_1; y_1]$ kuželosečky (1) je dána právě rovnicí (2), za předpokladu, že daný bod není hlavním vrcholem.

Jsou-li potom $F_1 [-e; 0]$, $F_2 [e; 0]$ ohniska kuželosečky (1) a označíme-li d_1, d_2 jejich orientované vzdálenosti²⁾ od zvolené tečny (2), je

$$d_1 = \frac{-b^2(ex_1 + a^2)}{\pm \varepsilon \sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}, \quad d_2 = \frac{b^2(ex_1 - a^2)}{\pm \varepsilon \sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}$$

Přitom platí současně horní, příp. dolní znaménko. Snadno se přesvědčíme o tom, že v případě elipsy jsou obě orientované vzdálenosti kladné, v případě hyperboly jsou vzdálenosti opačných znamének.



Obr. 2

Pro součin vzdáleností dostaneme

$$d_1 d_2 = \frac{-b^4(e^2x_1^2 - a^4)}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} \quad (3)$$

Protože bod $M [x_1; y_1]$ leží na kuželosečce, platí

$$a^2y_1^2 = \varepsilon b^2(a^2 - x_1^2),$$

takže

$$b^4x_1^2 + a^4y_1^2 = b^4x_1^2 + \varepsilon a^2b^2(a^2 - x_1^2) = b^2x_1^2(b^2 - \varepsilon a^2) + \varepsilon a^4b^2.$$

²⁾ Orientace je provedena způsobem obvyklým v analytické geometrii: Určíme nejdříve vzdálenost počátku O od dané přímky a orientujeme ji směrem od počátku k přímce. Vzdálenost d bodu od přímky orientujeme rovněž směrem od bodu k přímce (viz v obr. 1 vyznačenou orientací šipkami). Potom je vzdálenost bodu od přímky kladná (záporná), jsou-li obě zmíněné vzdálenosti stejně (opačně) orientovány.

Víme, že pro elipsu, příp. pro hyperbolu, platí \mathbb{F}

$$e^2 = a^2 - b^2, \text{ příp. } e^2 = a^2 + b^2$$

což zapíšeme jednou rovnicí ve tvaru, kterého pak dále použijeme

$$b^2 - \varepsilon a^2 = -\varepsilon e^2$$

Potom

$$b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2 = -\varepsilon b^2 (e^2 x_1^2 - a^4),$$

tedy ze (3) dostaneme

$$d_1 d_2 = \varepsilon b^2$$

P o z n á m k a. Z uvedené pomocné věty jako důsledek plyne: *Součin orientovaných vzdáleností ohniska od dvou rovnoběžných tečen (středové) kuželosečky je konstantní.*³⁾

Tohoto důsledku lze použít např. pro konstrukci elipsy dané ohniskem, tečnou s bodem dotyku a velikostí vedlejší poloosy.

Z uvedené pomocné věty dostaneme nyní větu, které pak použijeme jako základ řešení naší úlohy:

Spojnice průsečíku tečen středové kuželosečky s oběma ohnisky svírají s tečnami stejné (opačně orientované) úhly.

D ů k a z (v obr. 2 je zakreslen případ elipsy). Označme ω úhel tečen t_1, t_2 a určíme paty P_1, P'_1 kolmic sestrojených z ohniska F_1 na obě tečny t_1, t_2 , příp. paty P_2, P'_2 kolmic sestrojených z ohniska F_2 na tyto tečny.

Potom podle naší pomocné věty platí

$$d_1 d_2 = d'_1 d'_2. \quad (4)$$

Je-li

$$\alpha = \sphericalangle F_1 M P_1$$

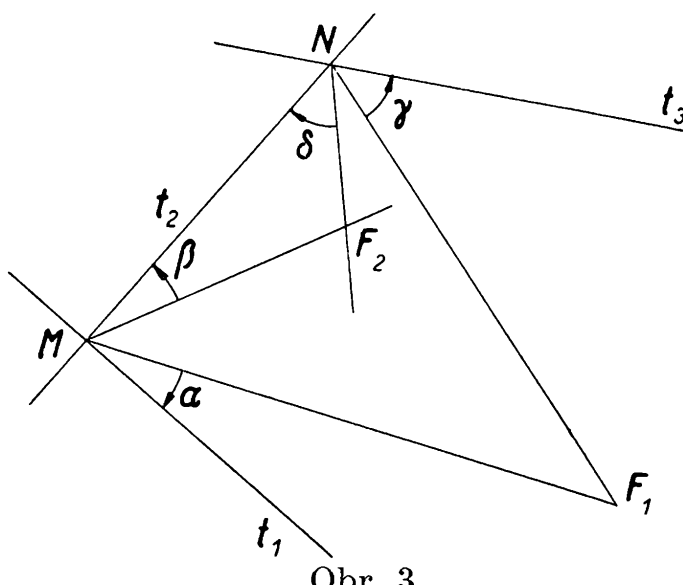
a

$$\beta = \sphericalangle F_2 M P'_2$$

je

$$\begin{aligned} d_1 &= F_1 M \sin \alpha, & d_2 &= F_2 M \sin (\omega \pm \beta), \\ d'_1 &= F_1 M \sin (\omega \mp \alpha), & d'_2 &= F_2 M \sin \beta, \end{aligned}$$

³⁾ V tomto případě se jedná o tzv. *mocnost bodu ke kružnici* (tj. o mocnost ohniska k vrcholové kružnici). Viz o tom např. Stanislav Horák, *Mocnost bodu ke kružnici*, *Rozhledy* (35) 1957, str. 14 a 60, nebo Jaroslav Šedivý, *Mocnost bodu ke kružnici*, *Rozhledy* (40), 1961–62, str. 207.



takže po dosazení do (4) máme

$$\sin \alpha \sin (\omega \mp \beta) = \sin \beta \sin (\omega \mp \alpha),$$

přičemž pro elipsu platí znaménko $-$, pro hyperbolu znaménko $+$.

Po úpravě dostaneme

$$\sin \omega \sin (\alpha - \beta) = 0.$$

Protože tečny t_1, t_2 jsou různoběžné, je $\sin \omega \neq 0$, a proto

$$\sin (\alpha - \beta) = 0,$$

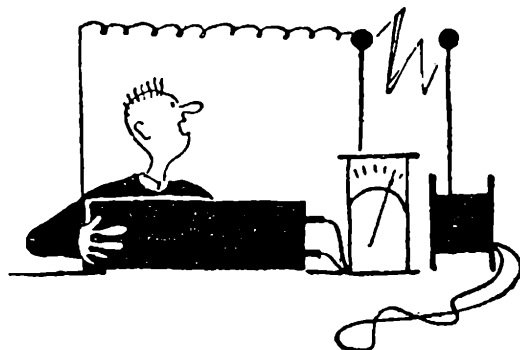
odkud

$$\alpha - \beta = 0, \text{ tj. } \alpha = \beta$$

Případ $\alpha - \beta = 180^\circ$ nemůže nastat, protože α i β jsou úhly v pravoúhlém trojúhelníku.

Výsledku této věty použijeme při řešení předložené úlohy za předpokladu, že aspoň dva ze tří průsečíků daných tečen $t_1 t_2, t_2 t_3$ jsou na nákrese (v obr. 3 jsou to body $M \equiv t_1 \cdot t_2, N \equiv t_2 \cdot t_3$). Úhel α tečny t_1 a průvodiče $F_1 M$ se rovná (opačně orientovanému) úhlu β tečny t_2 a průvodiče $F_2 M$. Podobně pro úhel γ tečny t_3 a průvodiče $F_1 N$ a úhel δ tečny t_2 a průvodiče $F_2 N$. Po určení druhého ohniska F_2 je již další konstrukce kuželosečky snadná.

Fyzika



J a r o s l a v P o s p í š i l, Olomouc:

Kapkový model atomového jádra

1. Úvod

Atomové jádro má složitou strukturu a jevy, které se v něm odehrávají, jsou také složité. Neexistuje přesná teorie atomového jádra, která by dostatečně vysvětlila všechny procesy uvnitř jádra a všechny jeho vlastnosti. Spokojujeme se tím, že zavádíme zjednodušenou představu jádra zvanou *model atomového jádra*.

S rozvojem jaderné fyziky vzniklo několik modelů atomových jader (např. model slupkový, optický, kapkový aj.). Každý model vystihuje jen určitou oblast vlastností jader a jaderných procesů.

Názorný a zajímavý model atomového jádra je tzv. *kapkový model atomového jádra*. I když tento model představuje jen přiblížení skutečných poměrů v jádře, lze pomocí něho bez znalosti podstaty jaderných sil získat rovnici pro výpočet vazebné energie jádra atomu, nebo jeho hmoty jako funkce atomového a hmotového čísla. Pomocí kapkového modelu atomového jádra lze též vysvětlit štěpení těžkých atomových jader, jejich stabilitu apod.

V dalším bude zdůvodněn kapkový model atomového jádra, podána jeho charakteristika a uvedeny příklady jeho použití.

2. Zavedení kapkového modelu atomového jádra a jeho charakteristika

Atomové jádro je charakterizováno vazebnou energií E . Je to energie, kterou bychom museli dodat jádru atomu, kdybychom je chtěli roztržít až na jednotlivé volné částice, nebo energie, která by se uvolnila při hypotetickém pochodu, při kterém by se vytvořilo určité jádro atomu z příslušného počtu protonů a neutronů. Tato energie je ekvivalentní úbytku ΔM hmoty atomového jádra, zvanému *hmotový defekt*. Velikost vazebné energie lze vypočítat z Einsteinova vztahu

$$E = \Delta M \cdot c^2, \quad (1)$$

kde E je velikost vazebné energie, c je rychlost světla a ΔM je hmotový defekt.

Označíme-li písmenem M_j hmotu jádra atomu zjištěnou experimentálně, pak hmotový defekt ΔM je dán vzorcem

$$\Delta M = Z \cdot M_p + (A - Z) M_n - M_j, \quad (2)$$

kde Z je atomové číslo, A je hmotové číslo, M_p je hmota protonu a M_n je hmota neutronu.

Po dosazení vztahu (2) do (1) je vazebná energie, vyjádřená v MeV (tj. v miliónech elektronvoltů čili v megaelektronvoltech), dána výrazem

$$E = 931 [Z M_p + (A - Z) M_n - M_j],$$

kde $M_p = 1,007\,58$ h. j.¹⁾, $M_n = 1,008\,93$ h. j. a M_j je hmota jádra izotopu v h. j.

Koeficient stěsnání $f = \frac{E}{A}$, tj. střední hodnota vazebné

¹⁾ V jaderné fyzice se hmoty vyjadřují v jednotce, zvané *hmotová jednotka* (v článku je užito zkratky h. j.). Hmotová jednotka je hmota 1/16 hmoty atomu kyslíku (h. j. = $1,662 \cdot 10^{-27}$ kg). Podle Einsteinova vztahu $E = \Delta M \cdot c^2$ odpovídá h. j. energii 931 miliónů elektronvoltů (931 MeV). Elektronvolt je jednotka energie v atomové fyzice. Energii jednoho elektronvoltu získá elektron, projde-li potenciálním rozdílem 1 V. Platí, že $1 \text{ eV} \doteq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

energie na jeden nukleon v jádře (na částici v jádře), kolísá u většiny prvků mezi 7,5 až 8,6 MeV. Je tedy vazebná energie rozdělena zhruba rovnoměrně na jednotlivé nukleony v jádře. Ze vztahu (2) a z měření plyne, že závislost hmotového defektu, a tedy podle vzorce (1) i vazebné energie jádra na hmotovém čísle, je přibližně lineární.

Z uvedeného lze učinit závěr, že mezi nukleony působí přitažlivé jaderné síly krátkého dosahu, které se prakticky uplatňují jen mezi dvěma sousedními nukleony, kdežto pro vzdálenější částice jsou tak malé, že k nim nemusíme přihlížet. Z této vlastnosti vnitrojaderných sil plyne, že připojením dalších částic vzroste vazebná energie právě v poměru zvětšení počtu těchto částic.

Jaderné síly, které působí vedle elektrických sil coulombovských, mají stejnou povahu pro všechny nukleony, nezávisí na náboji částic, jsou to síly přitažlivé a způsobují stabilitu atomového jádra. Bylo zjištěno, že jejich dosah (tj. tzv. poloměr atomového jádra) je dán výrazem

$$R = 1,5 \cdot 10^{-15} A^{\frac{1}{3}} \text{ m}, \quad (3)$$

kde R je poloměr jádra s hmotovým číslem A . Poloměr jádra je tedy úměrný třetí odmocnině z hmotového čísla, takže objem jádra je přímo úměrný hmotovému číslu A , tj. také skutečné hmotě jádra. To znamená, že všechna atomová jádra jsou v podstatě tvořena stejnorodými částicemi, tj. neutrony a protony a mají přibližně stejnou hustotu. Poměr hmoty jádra k objemu jádra je takřka stálý. Hustota v jádře atomu nezávisí tedy na počtu nukleonů.

Uvedené vlastnosti atomového jádra připomínají některé vlastnosti kapky kapaliny, a to vedlo N. Bohra, J. Frenkela a řadu jiných vědců k představě atomového jádra jako kapky kapaliny ke kapkovému modelu atomového jádra.

Kapkový model atomového jádra je založen na představě jádra jako kapky nestlačitelné jaderné nukleární kapaliny, jejíž molekuly jsou nukleony. Tyto nukleony jsou k sobě poutány kohezními silami velmi malého dosahu (jiného charakteru než kohezní síly mezi molekulami obyčejné kapaliny, jako je např. voda), jejichž potenciální energie je úměrná objemu jádra. Je tedy tato potenciální energie obdobná objemové energii obyčejné kapaliny a je částečně kompenzována kinetickou energií nukleonů, obdobnou tepelné energii obyčejné kapaliny. Obě energie jsou úměrné objemu, a tedy také vzhledem ke stálé hustotě atomového jádra, hmotě jádra. Jádro má kromě objemové energie také energii povrchovou, která má původ v nerovnováze mezi silami působícími na povrchové nukleony. Tato energie roste úměrně s povrchem jádra, tedy s třetí odmocninou čtverce jeho hmotového čísla. Jaderná kapalina má na rozdíl od obyčejné kapaliny ještě energii elektrostatickou, která vzniká elektrostatickou odpudivou silou mezi protony.

3. Výpočet vazebné energie atomového jádra na základě kapkového modelu

Představy kapkového modelu atomového jádra se využívá při odvozování vzorce pro výpočet vazebné energie libovolného atomového jádra ze známých hodnot atomového čísla Z a hmotového čísla A prvku. Tento vzorec je zčásti odvozen z experimentálně ověřených faktů o vlastnostech jaderných sil, zčásti obsahuje několik konstant, jejichž hodnoty se určují empiricky. Proto se nazývá *poloempirickým vzorcem* (též *semiempirickým vzorcem*).

Jaderné síly, které se podobají silám působícím v kapce, působí jen v malém okruhu, takže na každý nukleon působí silná přitažlivost jen přímých sousedů, kdežto vzdálenější nukleony na sebe přímo nepůsobí. Ve vzorci pro vazebnou energii jádra je přitahování vyjádřeno kladným členem, který je úměrný počtu nukleonů v jádře. energii přitahování, která roste úměrně s hmotovým číslem, lze tedy vyjádřit vztahem

$$E_1 = u_1 A,$$

kde u je konstanta.

Předpokládáme-li, že energie přitahování je úměrná hmotovému číslu, pak mlčky připoůštíme, že vzájemné působení je u všech nukleonů stejné. Ve skutečnosti však musíme mít na zřeteli, že na částice na povrchu kapky působí jen sousedé uvnitř polokoule, zatímco na částice uvnitř působí okolní částice ze všech stran. Proto je zřejmé, že vazebná energie částic na povrchu je menší než vazebná energie částic uvnitř. Tato skutečnost vede k nutnosti zmenšit energii přitahování o tzv. *efekt povrchového napětí*, který je způsoben příčinami podobnými těm, které vyvolávají povrchové napětí v obyčejné kapalině. Kapka jaderné kapaliny má povrchovou energii E_2 úměrnou velikosti povrchu kapaliny. Předpokládáme-li, že jádro-kapka má tvar koule a označíme-li povrchovou energii na 1 cm^2 jako σ , dostaneme

$$E_2 = 4 \pi R^2 \sigma$$

Po dosazení vztahu (3) za poloměr R , po umocnění a vynásobení obdržíme výraz

$$E_2 = 9 \pi \sigma 10^{-30} A^{\frac{2}{3}}$$

Konstantní veličiny v předcházejícím vzorci shrneme v jednu konstantu u_2 , takže velikost efektu povrchového napětí, který působí proti energii přitahování (proto znaménko minus), je

$$E_2 = - u_2 A^{\frac{2}{3}}$$

Statistika výskytu stabilních jader ukazuje, že nejstabilnější jsou jádra, jejichž počet protonů je přibližně roven počtu neutronů, tj. $Z \doteq \frac{A}{2}$. Většina jader však, zejména těžších, má přebytek neutronů nad protony. Tento přebytek je nutný k tomu, aby přitažlivé síly

neutron neutron a neutron proton mohly kompenzovat elektrostatické odpuzování mezi protony. Zároveň však vzniká také jistá nestabilita následkem toho, že přebývající neutrony zabírají jistý počet jaderných hladin neobsahujících protony. Převaha neutronů nad protony v jádře naznačuje, že odhad energie přitahování je příliš veliký. Příslušnou opravu lze provést zavedením tzv. izotopového členu E_3 , který se vyjadřuje vztahem

$$E_3 = -u_3 \frac{(A - 2Z)^2}{A},$$

kde u_3 je konstanta a $(A - 2Z)$ je míra převahy neutronů nad protony v jádře.

Uvedené tři členy dávají v součtu energii přitahování v jádře. Mezi protony však ještě existuje energie odpuzování vyvolaná souhlasnými elektrickými náboji protonů. Při malém množství protonů je coulombovská odpudivost, tj. odpudivost daná Coulombovým zákonem, zanedbatelná proti jaderným silám, ale u těžších jader se již uplatňuje, neboť coulombovské síly mají mnohem větší poloměr dosahu než jaderné síly (coulombovské síly klesají nepřímo úměrně se čtvercem vzdálenosti, zatímco jaderné síly klesají se vzdáleností značně rychleji). Každý proton tedy elektrostaticky působí na všechny ostatní. Úhrnná energie coulombovských sil je úměrná $\frac{1}{2} Z(Z - 1)$, nebo při $Z \gg 1$ je úměrná Z^2 . Výpočet ukazuje, že energie elektrostatického odpuzování v jádře, které obsahuje Z protonů, je po dosažení vztahu (3) a po úpravě se rovná

$$E_4 = \frac{e^2}{10 \pi \epsilon_0} Z^2 A^{-1} \quad ^2)$$

kde e je náboj protonu ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) a ϵ_0 je dielektrická konstanta vakuu ($\epsilon_0 = 8,859 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$)

Součinitel $\frac{e^2}{10 \pi \epsilon_0}$ znamená energii elektrostatického odpuzování jádra prvku, jehož $Z = 1$ a $A = 1$ (tj. pro vodík). Po vyčíslení tohoto součinitele dostaneme energii vyjádřenou v joulech, která pomocí vztahu $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ je číselně vyjádřena hodnotou

$$\frac{e^2}{10 \pi \epsilon_0} = 0,585 \text{ MeV}$$

kterou označíme písmenem u_4 .

²⁾ Výpočet energie elektrostatického odpuzování je matematicky náročnější a vyžaduje znalosti integrálního počtu. Proto je zde uveden jen výsledný vztah. Výpočet energie elektrostatického odpuzování je uveden např. v knize L. Drška, B. Klimeš, J. B. Slavík, *Základy atomové fyziky* na str. 392.

Oprava, vyjadřující coulombovské odpuzování protonů, je nyní dána vztahem

$$E_4 = - u_4 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \quad (4)$$

Při vyvozování poloempirického vzorce je třeba vzít v úvahu vliv sudého nebo lichého počtu protonů, nebo neutronů v jádře. Statistika výskytu stabilních izotopů v přírodě ukazuje, že nejvíce je těch izotopů, jejichž jádra obsahují sudý počet protonů a sudý počet neutronů. Značně méně je izotopů se sudým počtem protonů a lichým počtem neutronů nebo naopak. Téměř vůbec neexistují izotopy s lichým počtem protonů i neutronů.

Přehledně je skutečný počet stabilních izotopů tento (N značí počet neutronů):

(Pokračování)

E v ž e n Ř í m a n, C S c, Praha:

Spektrum řeč atomů

I. Balmerův objev

(Námět besedy s účastníky kursu FO dne 20. 6. 1963 na Richtrových boudách v Krkonoších)

Mnohý, kdo přistupuje ke studiu nového oboru fyziky, bývá překvapen bohatostí pouček a faktů, které se mu systematicky předkládají v plné šíři s nečekanými podrobnostmi a důsledky. Na mladého adepta působí až tísnivě, čte-li nové poučky, aniž by se dověděl, jak onen učenec na svou teorii přišel, neboť vědci zřídka dávají nahlédnout do své duševní dílny. K povzbuzení těch, kteří pochybují o svých schopnostech vytvořit podobné teorie, snažme se retrospektivně vylíčit vznik několika slavných objevů.

Jednoho dne r. 1884 obrátil se profesor basilejské university H a g e n b a c h na tamního docenta deskriptivní geometrie J. J. B a l m e r a¹⁾ se žádostí o pomoc při řešení problému, který dělal fyzikům potíže. Vylíčil mu podstatu věci asi takto: Fyzikové zkoumají spektrální složení světla, jaké vysílají různé prvky, zvláštními přístroji (spektrometry), jimiž měří vlnovou délku vyzařovaných „zásvitů“, které nazývají spektrální čáry. Vlnovou délku λ těchto čar, kterou je vlastně přesně stanovena barva vysílaného světla, dovedeme změřit s velikou přesností až na

¹⁾ J o h a n n J a c o b B a l m e r (* 1. 5. 1825, † 12. 3. 1898 v Basileji ve Švýcarsku) byl profesorem matematiky na vyšší dívčí škole v Basileji a od r. 1865 do r. 1890 docentem deskr. geometrie na universitě tamtéž.

6 platných míst, takže přesnost spektroskopických měření předčí přesnost při vážení. Nejpřesněji jsou proměřeny 4 spektrální čáry vodíku o vlnových délkách $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, které jsou uvedeny v připojené tabulce I. Převrácená hodnota b vlnové délky se nazývá v l n o č e t, jednotkou je $[\text{m}^{-1}]$, resp. $[\text{cm}^{-1}]$, takže platí

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Vlnočet je číselně roven počtu vln na dráze jednoho metru, resp. centimetru. Vlnočty $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ uvažovaných vodíkových čar jsou vypočteny ve sloupci 4. tabulky I.

Tabulka I. Spektrální čáry vodíku

Označení (dnešní)	Barva	Vlnová délka [Å] = 10^{-10} [m]	Vlnočet $\sigma = \frac{1}{a}$ [cm ⁻¹]
H _α	červená	$\lambda_1 = 6562,8$ [Å]	$\sigma_1 = 15\,237$ [cm ⁻¹]
H _β	modrozelená	$\lambda_2 = 4861,3$ [Å]	$\sigma_2 = 20\,570$ [cm ⁻¹]
H _γ	fialová	$\lambda_3 = 4340,5$ [Å]	$\sigma_3 = 23\,039$ [cm ⁻¹]
H _δ	fialová	$\lambda_4 = 4101,7$ [Å]	$\sigma_4 = 24\,380$ [cm ⁻¹]

Záslužným činem by bylo najít nějakou závislost buď pro λ nebo pro σ , neboť dosud není známo, zda vůbec, a jak spolu souvisí. Objasnění této záhady a nalezení nějakého empirického vzorce by umožnilo značný pokrok fyzikálního bádání. Potud Hagenbach.

Balmer se zprvu díval na věc skepticky. Kdo ví, co ti fyzikové naměřili! A ostatně kde stojí psáno, že ona čísla jsou tvořena pravidelně podle nějakého matematického pravidla? Ale přece mu to nedalo. Mozkové buňky matematika podráždí každý záhadný problém.

Začal zkoumat čísla λ_1 až λ_4 , resp. jejich reciproké hodnoty σ_1 až σ_4 , uvedené ve sloupci 3. a 4. tabulky I.²⁾ načež se rozhodl vyšetřovat jenom vlnočty σ , neboť jejich hodnoty stoupají.

Záhadné vlnočty byly 15 237 ; 20 570 ; 23 039 ; 24 380 ;
jejich první difference 5 333 2 469 1 241
jejich druhé difference — 2 864 — 1 228

Tvořil první a druhé difference vždy dvou sousedních členů, pak zkoušel, zda čísla netvoří geometrickou posloupnost, znázorňoval nalezená čísla graficky, vypočítával jejich logaritmy, odmocniny atd. Avšak týdny ubíhaly, a výsledek nebyl žádný. Rodina pozorovala jeho zamyšlenost a posluchači se divili, že opravy písemných prací trvají nyní nepřiměřeně dlouho. Začátkem úspěchu bylo Balmerovo zjištění, že poměr

²⁾ Užitý postup se dnes v matematice nazývá: Určení obecného členu posloupnosti, dané několika počátečními členy.

vlnočtu σ_4 σ_1 je velmi přibližně dán zlomkem $\frac{8}{5}$, neboť

$$\sigma_4 : \sigma_1 = 24\,380 : 15\,237 \doteq 1,600\,05 = \frac{8}{5} \quad (1)$$

Brzy nato našel další dva racionální poměry

$$\sigma_2 : \sigma_1 = 20\,570 : 15\,237 \doteq 1,350\,003 = \frac{27}{20} \quad (2)$$

$$\sigma_3 : \sigma_2 = 23\,039 : 20\,570 \doteq 1,120\,03 = \frac{28}{25} \quad (3)$$

Balmer ovládal hudební akustiku a znal pokusy Pythagorovy se strunami. Proto prvý nalezený zlomek (1) ho přivedl na myšlenku, že vlnočty vodíkových čar jsou obdobou stupnice tónů (neboť $\frac{8}{5}$ v hudbě je interval zv. malá sexta). Ovšem další poměry (2) a (3) ukázaly, že fakta spektroskopická jsou jiná.

Nalezené vztahy (1), (2), (3) umožnily Balmerovi vyjádřit vlnočty σ_4 , σ_2 a σ_3 pomocí vlnočtu σ_1 , neboť

$$\sigma_4 = \frac{8}{5} \sigma_1 ; \sigma_2 = \frac{27}{20} \sigma_1 ; \sigma_3 = \frac{28}{25} \sigma_2 = \frac{28}{25} \cdot \frac{27}{20} \sigma_1 \quad ^3)$$

S vítězným úsměvem napsal Balmer výsledek ve tvaru

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4 = 1 : \frac{27}{20} : \frac{28 \cdot 27}{500} : \frac{8}{5} \quad (4)$$

Ale ještě nebylo vyhráno. Bylo třeba najít obecný předpis, podle kterého jsou na pravé straně tvořeny zlomky. Aby zmenšil hodnoty druhého a třetího čitatele, násobil pravou stranu vztahu (4) zlomkem $\frac{1}{36}$ čímž vzniklo

$$\frac{1}{36} : \frac{3}{80} : \frac{7 \cdot 3}{500} : \frac{2}{45}$$

Aby zmenšil třetího jmenovatele, násobil pěti, takže poměr (4) se změnil na

$$\frac{5}{36} : \frac{3}{16} : \frac{21}{100} : \frac{2}{9}$$

Zlomky jsou sice nyní v tzv. základním tvaru (tj. čísel a jmenovatel jsou nesoudělná čísla) a mají ve jmenovateli č t v e r c e čísel 6, 4, 10 a 3, ale druhý a čtvrtý zlomek nějak nezapadají do celkového postupu. Avšak stačilo druhý rozšířit čtyřmi a čtvrtý šestnácti, čímž bylo

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 : \sigma_4 = \frac{5}{36} : \frac{12}{64} : \frac{21}{100} : \frac{32}{144} \quad (5)$$

Pochopitelně, že Balmer zajásal, když viděl pravidelnost jmenovatelů (6^2 , 8^2 , 10^2 , 12^2) a čísel (pravidelně rostoucí difference $12 - 5 = 7$

³⁾ Čísel je úmyslně ponechán nevynásobený (kvůli dalším úpravám). Čtenář získá mnoho, bude-li všechny další výpočty samostatně provádět a kontrolovat.

21 — 12 = 9 ; 32 — 21 = 11) a po třech dnech (a patrně též probdělých nocích) přišel na konečnou úpravu

$$\frac{5}{36} = \frac{5}{9 \cdot 4} = \frac{9 - 4}{9 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9}; \quad \frac{12}{64} = \frac{16 - 4}{16 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16};$$

$$\frac{21}{100} = \frac{25 - 4}{25 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{25}; \quad \frac{32}{144} = \frac{36 - 4}{36 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{36} \quad (6)$$

Tím byl daný problém rozřešen a hledaná zákonitost nalezena. Vztah (5) lze nahradit čtyřmi rovnicemi

$$\sigma_1 = \frac{5}{36} R; \quad \sigma_2 = \frac{12}{64} R; \quad \sigma_3 = \frac{21}{100} R; \quad \sigma_4 = \frac{32}{144} R, \quad (7)$$

kde R vypočteme⁴⁾ dosazením hodnot ze sloupce 4, tabulky I do těchto rovnic a určením aritmetického průměru (neboť jde o čísla získaná měřením, tedy nepřesná), abychom našli nejpravděpodobnější hodnotu.

Ještě je třeba v rovnicích (7) nahradit zlomky úpravou podle (6). A tak hlásí Balmer r. 1885 fyzikálnímu světu překvapující zprávu:

Vlnočty prvních čtyř spektrálních čar vysílaných vodíkem vyhovují vzorcům

$$\sigma_1 = R \frac{5}{36} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \quad \sigma_2 = R \frac{12}{64} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right)$$

$$\sigma_3 = R \frac{21}{100} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) \quad \sigma_4 = R \frac{32}{144} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2} \right),$$

čili obecně:

$$\sigma_n = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(2+n)^2} \right), \quad (8)$$

kde $n = 1, 2, 3, 4$ značí pořadové číslo čáry a konstanta $R \doteq 109\,708$ [cm⁻¹].

Vztah (8) je právě onen slavný **Balmerův vzorec**. Vlnočty jemu vyhovující tvoří tzv. **Balmerovu sérii** čar. Číslo R nazýváme dnes **Rydbergův vlnočty** podle fyzika **Rydberga**, který r. 1895 objevil, že R má obdobnou důležitost také pro spektra jiných prvků, především pro prvky alkalické.

Objev Balmerův zpočátku nebyl doceněn. Někteří celou věc považovali za „hříčku přírody“, ale dnes vidíme, že byl východiskem pronikavých úspěchů atomistiky, které začínají teorií **Bohrovou**.

⁴⁾ $R = \frac{36}{5} \sigma_1 = \frac{36}{5} \cdot 15\,237 = 109\,706,40$; $R = \frac{64}{12} \sigma_2 = \frac{64}{12} \cdot 20\,570 = 109\,706,67$; $R = \frac{100}{21} \sigma_3 = \frac{100}{21} \cdot 23\,039 = 109\,709,52$; $R = \frac{144}{32} \sigma_4 = 109\,710,00$. Součet výsledků je 438 832,59. Průměrná hodnota tedy je $R = \frac{1}{4} \cdot 438\,832,59 = 109\,708$ [cm⁻¹].

Jediné vážení — řešení

Před časem jsme otiskli v této rubrice úlohu:

V každé z 9 krabic je 27 koulí. Výrobce tvrdí, že koule váží po 11 dkg. Při výrobě se však objevily zmetky o váze 97 g, resp. 99 g. Víme, že krabice obsahuje jen koule téže váhy. Jediným vážením na váze s maximálním zatížením do 5 kg, mající dělení po 1 g, rozhodněte, zdali všechny krabice obsahují jen samé správné koule nebo zdali se v jedné z nich (v které?) vyskytují zmetky (kterého druhu?). Dvě nebo více vadných krabic nepřicházejí v úvahu.

Z došlých řešení otiskujeme řešení *dr. Mil. Hlaváčka z Prahy-Strašnic*.

Krabice očíslováme 1 až 9 a vezmeme z 1. krabice 1 kouli, z 2. krabice 2 koule, z 3. krabice 3 koule atd., až z 9. krabice 9 koulí. Všech 45 vyňatých koulí najednou zvážíme.

Kdyby všechny krabice obsahovaly jen správné koule, váhy by ukázaly číslo zakončené nulou, totiž $45 \cdot 110 \text{ g} = 4950 \text{ g}$. Avšak také obráceně: Kdyby se na vahách ukázalo číslo zakončené nulou, byly by všechny koule správné. Jestliže by totiž některá krabice obsahovala zmetky à 97 g (resp. 99 g), ubylo by z 4950 g tolikrát 13 g (resp. 11 g), kolik těch zmetkových koulí jsme do souhrnu dali. Avšak žádný násobek (1. až 9.) čísla 13 (resp. 11) nekončí nulou, tedy ani rozdíl 4950 a toho násobku. V žádném z obou případů by tedy váhy nemohly ukazovat číslo zakončené nulou.

Dejme tomu nyní, že by váhy ukázaly číslo zakončené 1. Byly by tu dvě možnosti. Buď jsme z 3. krabice vzali 3 koule à 97 g, nebo z 9. krabice 9 koulí à 99 g. Zřejmě platí:

Ukazují-li váhy $4950 \text{ g} - 13 \text{ g} \cdot 3$, nastává možnost první, tedy 3. krabice obsahuje zmetky à 97 g, ukazují-li $4950 \text{ g} - 11 \text{ g} \cdot 9$, nastává možnost druhá, tedy 9. krabice obsahuje zmetky à 99 g.

O b e c n ě Ukážou-li váhy $4950 \text{ g} - 13 \text{ g} \cdot k$, obsahuje k -tá krabice zmetky à 97 g, ukážou-li $4950 \text{ g} - 11 \text{ g} \cdot m$, obsahuje m -tá krabice zmetky à 99 g.

Rovnost $13k = 11m$ (neboli dvojí řešení) nemůže nastat, $k \leq 9$, $m \leq 9$ a čísla 13 a 11 jsou nesoudělná.

Správná řešení dále zaslali:

Jiří Kostelecký z Prahy 7; Ladislav Kratochvíl z Brna; Eva Matoušková z Prahy-Vinohrad; Břetislav Modr z Prahy-Smíchova; Jana Náhůnková z Třešti; Jiří Otýpka z Poděbrad.

O. S.

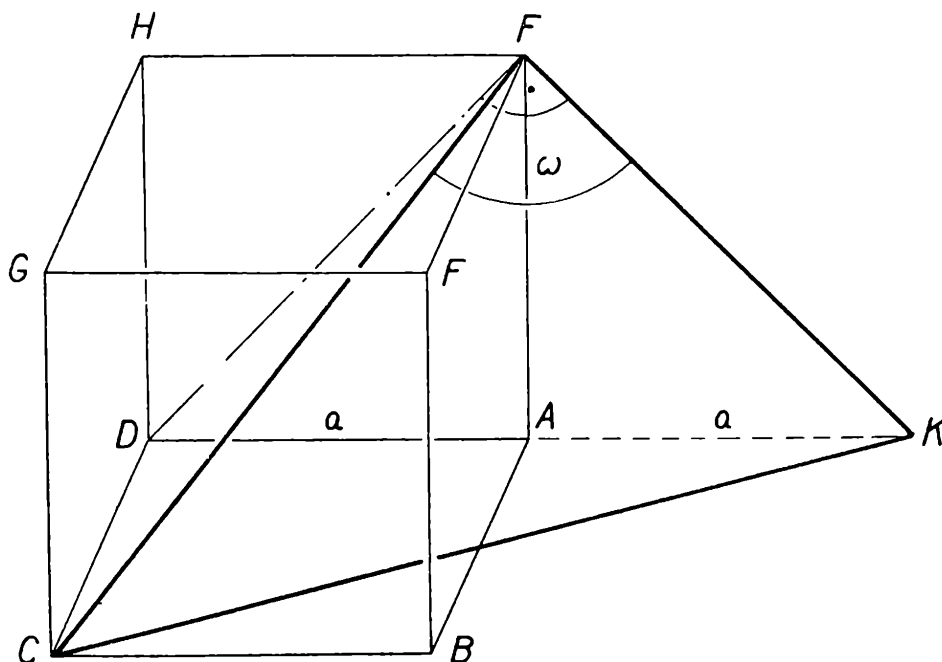
Úloha o krychli — řešení

V letošním č. 6 našeho časopisu byla uvedena úloha:

Na prodloužené hraně AD krychle $ABCDEFGH$ (AE je jednou její hranou) sestrojte bod K tak, aby $AK = AD$. Určete úhel $\omega = \sphericalangle CEK$ (obr. 1).

Řešení. Hranu krychle označme a . Pak CK je přeponou pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách a a $2a$, tedy $CK = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$. Dále EK je úhlopříčkou čtverce, proto $EK = a\sqrt{2}$. Konečně CE je tělesovou příčkou krychle, tudíž $CE = a\sqrt{3}$.

1. Je vidět, že strany trojúhelníka CEK vyhovují Pythagorově větě $\overline{CK}^2 = \overline{EK}^2 + \overline{CE}^2$, čili $5a^2 = 2a^2 + 3a^2$, tedy $\omega = 90^\circ$. Úloha je jednoznačná.



Obr. 1

2. Můžeme též užít kosinové věty:

$$5a^2 = 2a^2 + 3a^2 - a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} \cos \omega,$$

odtud

$$\cos \omega = 0$$

$$\omega = 90^\circ$$

3. Z deskriptivní geometrie víme, že pravý úhel se pravoúhle promítá jako pravý, je-li alespoň jedno rameno s průmětnou rovnoběžné nebo v ní leží. Pravoúhlý průmět tělesové příčky krychle CE do stěnové roviny $ADHE$ je $DE \perp EK$, ježto trojúhelník DEK je pravoúhlý rovnoramenný.

Rameno EK úhlu CEK přímo leží v průmětně $ADHE$ a průmět ED druhého ramene CE je k němu kolmý. Proto je tedy v prostoru $\sphericalangle CEK = 90^\circ$.

Správná řešení zaslali:

Baláž Dušan, II. B SVŠ, Ružomberok; Cigáňová Ludmila, II. B SVŠ, Ružomberok; Čápek Karel dr., Praha 6; Čižmárik Ján, II. SVŠ, Prešov; Čunderlík Lubomír, II. B SVŠ, Ružomberok; Dejčmarová Jana, IV. C SPŠ, Most; Golis Lubomír, II. B SVŠ, Ružomberok; Handlír Jiří, II. A SPŠE, Brno; Holý Ivan, I. A SVVŠ, Nový Bydžov; Chajda Ivan, II. D SVVŠ, Přerov; Chovanec Kristián, I. SVŠ, Turčianske Teplice; Ilavská Zora, II. A SVŠ, Ružomberok; Iša František, I. B SVVŠ, Brno; Kašík Matěj, Rapotín 371; Knápek Petr, II. A SVVŠ, Hodonín; Kocich Bohumír, OU NHKG-F2, Frýdek; Kovařík Pavel, I. D SPŠ staveb., Praha 7; Langhammer Antonín, Ostrov n. Ohří; Maršík Jaroslav, II. A SZTŠ, Mladá Boleslav; Mederly Peter, I. D SVŠ, Prievidza; Mrázová Helena, IV. SPŠ stroj., Praha-Karlín; Mrázová Zuzana, II. E SVŠ, Ružomberok; Munzarová Helena II. A SVVŠ, Karlovy Vary; Neužil Vladislav, II. A, SVVŠ, Praha-Vršovice; Pavlíková Marta, II. B SVŠ, Ružomberok; Piroh Ferdinand, II. B SVŠ, Ružomberok; Priehradský Roman, II. SVŠ, Bratislava; Putera Ján, II. B SVŠ, Ružomberok; Rodl Vladimír, III. A SVVŠ, Praha; Souček Jan, Praha 4; Stančoková Elena, II. A SVŠ, Ružomberok; Straka Radovan, II. B SVVŠ, Krnov; Sumková Marie, I. SVVŠ, Blovice; Šauer Jaroslav, I. C SVVŠ Šumperk; Trnovský Karol, II. B SVŠ, Ružomberok; Vejvoda Pavel, 2r. učeň, Praha 8, Čimická 76, Vikizály Ladislav, II. B SVŠ, Ružomberok; Vodrážková Sylva, III. E SVVŠ, Ostrava 1; Žalda František, II. B SVVŠ, Frýdlant v Č.; Žatkuliaková Jana, II. B SVŠ, Ružomberok; Žerebák Jozef, II. B SVŠ, Ružomberok; (Pechouš Jiří, II. A SVVŠ, Písek).

M. M.



Skládanka — řešení

V letošním č. 6 našeho časopisu byla uvedena úloha:

Vystříhnete si z papíru čtverec $ABCD$. Stranu AB rozpulte bodem E . Nyní přehněte část čtverce tak, aby vrchol C se kryl s vrcholem E . Vypočítejte, jaký úhel svírá strana čtverce CD v této své nové poloze s původní polohou strany CD (obr. 2).

Řešení. Z obrázku vidíme, že při přehnutí části čtverce je délka $EF = EC$ a tedy $\triangle FGE \cong FGC$, kde $\frac{\alpha}{2} = \sphericalangle FGC$. Ježto je $CB \perp CD$

a $CE \perp FG$, je $\sphericalangle ECB = \frac{\alpha}{2}$ Odtud

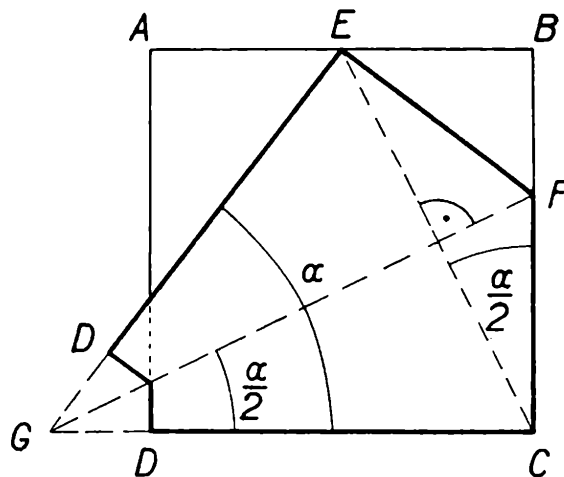
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2}$$

Dále

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,00\ 000 \\ - 0,30\ 103 \\ \hline 9,69\ 897 - 10 \end{array}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 26^{\circ} 33' 54''$$

$$\alpha = 53^{\circ} 7' 48''$$



Obr. 2

Správná řešení zaslali:

Baláž Dušan, II. B SVŠ, Ružomborek; Čižmárik Ján, II. SVŠ, Prešov; DUBY Tomáš, I. O SPŠE, Bratislava (nejlepší řešení); Handlíř Jiří, II. A SPŠE, Brno; Chajda Ivan, II. D SVVŠ, Přerov; Chovanec Kristián, I. SVŠ, Turčianské Teplice; Kašík Matěj, Rapotín 371; Knápek Petr, II. A SVVŠ, Hodonín; Kovařík Pavel, I. D SPŠ staveb., Praha 7; Mederly Peter, I. D SVŠ, Prievidza; Mrázová Iva, I. SPŠ stroj., Praha-Karlín; Rysán Karel, II. D SPŠ stroj., Praha 5 (nejlepší řešení); Straka Radvan, II. B SVVŠ, Krnov; Šauer Jaroslav I. C SVVŠ, Šumperk; Vacek František, II. C SPŠS, Písek; Vejvoda Pavel, 2. r. učeň, Praha 8, Čimická 76; Vikizály Ladislav, II. B SVŠ, Ružomberok; Žerebák Jozef, II. B SVŠ, Ružomberok; (Holý Ivan, I. A SVVŠ, Nový Bydžov).

M. M.

Kdo chová zebra a kdo pije vodu — řešení

V krátké době po vyjití 6. čísla Rozhledů začaly docházet dopisy prvních řešitelů. Není naší vinou, že během výroby 6. čísla byla hádanka publikována také v našem denním tisku (výrobní lhůta časopisu jsou dva měsíce). K vašim dopisům se vrátíme později.

Zatím přinášíme nástin jednoho z možných postupů při hledání správných odpovědí. Sledování jednotlivých kroků si usnadníme, načrtneme-li

si na list papíru 5krát 6 políček v pěti sloupcích a šesti řádcích. Do políček v prvním řádku napíšeme pořadová čísla domků, tj. 1 až 5. V dalších řádcích si budeme poznamenávat postupně: národnost, barvu, nápoj, sport, zvíře.

Z číslovaných pokynů tehdy otištěných využijeme nejprve těch, které dávají přímo dílčí výsledky. Na ně pak navážeme dalšími, které vedou nejprv ke dvěma či více variantám.

Pokyn číslo:

- 1 V prvním řádku očíslováme 1 až 5.
- 9 Ve třetím domku se pije mléko.
- 10 V prvním domku bydlí Nor.
- 15 Druhý domek je modrý.
- 6 Dvě alternativy: 5. domek zelený a 4. domek bílý, nebo 4. zelený a 3. bílý.
- 4 Káva se pije v 5. nebo ve 4. domku.
- 2 Červený pak může být jen 1. nebo 3. domek, Ale v 1. je Nor, takže Angličan může být jen ve 3. domku. Proto nemůže být 3. domek bílý. Podle pokynu 6 je pak bílý 4. domek, zelený 5. domek. V něm se také pije káva. Na první domek pak zbývá žlutá barva.
- 8 Cyklista bydlí ve žlutém, tj. v prvním domku.
- 12 Kůň je chován ve 2. domku.

Ze zbývajících pokynů plynou převážně podmínky spojující vždy dva údaje. Jejich umístění do domků je alternativní a je třeba hledat kombinace, které si navzájem neodporují.

- 3 Španěl a pes jsou buď ve 4. nebo v 5. domku.
- 5 Polák a vodka jsou ve 2. nebo ve 4. domku.
- 7 Fotbalista a hlemýždi jsou ve 3. nebo ve 4. nebo v 5. domku.
- 14 Japonec a hokej se týkají 2. nebo 4. nebo 5. domku.
- 13 Zápasník a pomerančová šťáva se týkají 2. nebo 4. domku.
- 11 Bude splněno, bude-li nespportovec ve 2. až 5. domku a přitom liška ve správném sousedním 1. nebo 3. až 5. domku.

Z těchto podmínek lze vyvozovat postupně asi tyto závěry:

Voda se nepije v domcích 2. až 5., *pije se tedy v 1.* Ze zvířat tam pak musí být liška. V sousedním 2. domku musí žít nespportovec. Do téhož domku patří dvojice Polák-vodka. Ve 3. domku je dvojice fotbal-hlemýždi. Ve 4. domku dvojice pomerančová šťáva-zápasník, Španěl-pes. V 5. domku dvojice Japonec-hokej. *Zbývá zebra v 5. domku.*

J. Furthnerová-Schmidtmayerová

Fyzikální zajímavosti

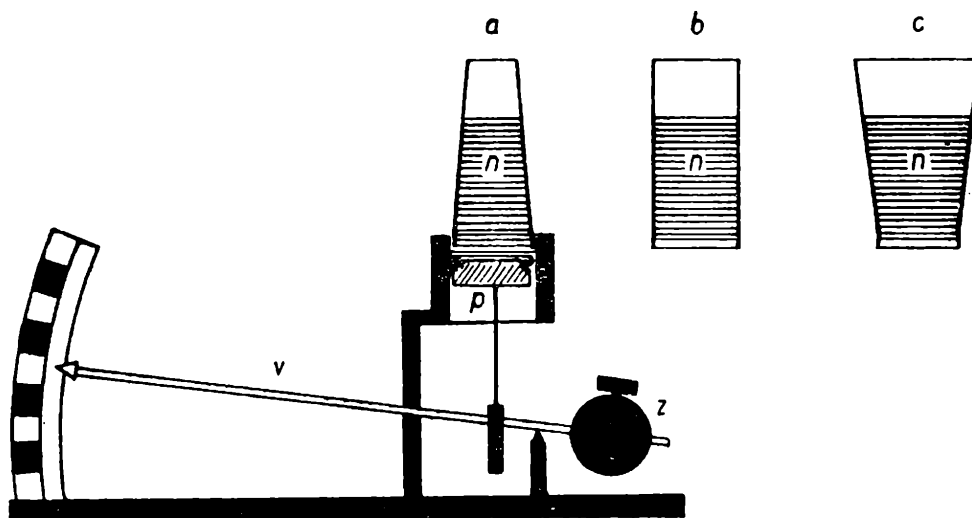


Prof. Emil Kašpar, K. U., Praha.

Přemýšlejme o fyzikálních paradoxech

(Pokračování)

Ukažme si na příkladě, jak paradoxa pomáhají objasňovat fyzikální zákonitosti. Velmi známé je hydrostatické paradoxon. Bývalo obsahem každé středoškolské učebnice fyziky. Ve škole však nemůže být probíráno tak obšírně, jak by si zasloužilo. Hydrostatické paradoxon se předvádí pokusem na přístroji, který je v řezu schematicky zobrazen na obr. 7. Skutečné provedení přístroje ukazuje obr. 8. Ve válcové nádobě se posouvá svisle píst p jako pohyblivé dno. Píst je na horním obvodu opatřen drážkou, do níž se vpraví prstenec rtuti. Rtuť jednak zajišťuje, že se píst pohybuje bez tření, jednak zadržuje vodu, kterou nad píst přiléváme, aby neprotekla kolem pláště pístu dolů. Píst se opírá



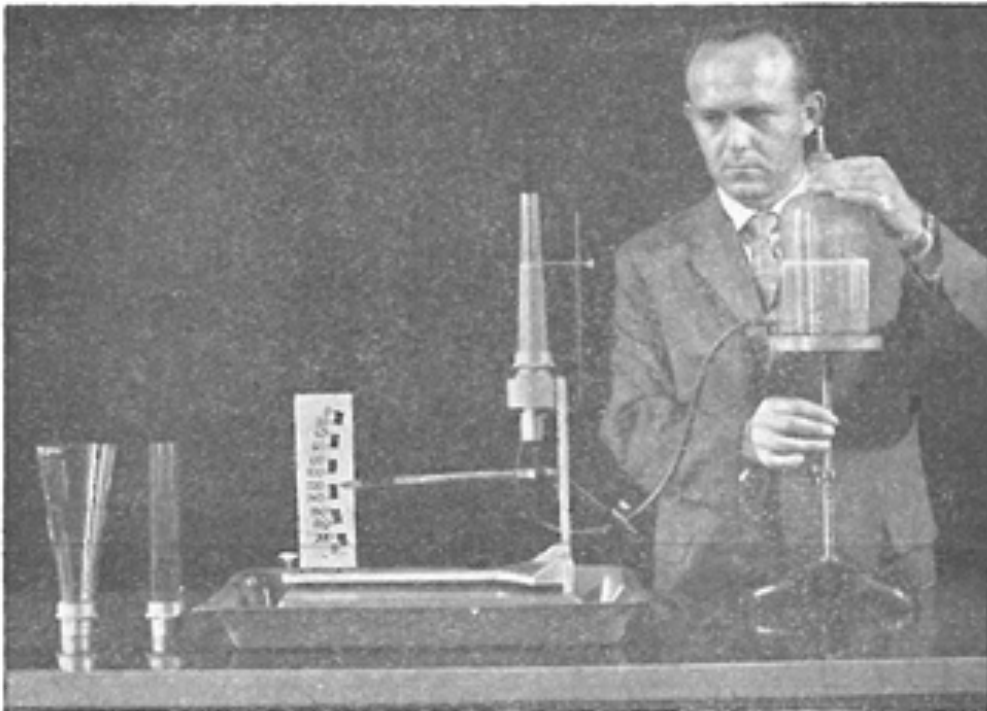
Obr. 7. Schematický řez přístrojem pro demonstraci tlakové síly na dno a hydrostatického paradoxu.

kovovou tyčinkou o vahadlo v nerovnoramenných vah. Váha pístu a tlaková síla kapaliny, která působí na horní podstavu pístu jako na dno, jsou vyvažovány posuvným závažím z na jednom rameni vahadla. Druhé rameno má tvar ukazatele. Jestliže při prázdné nádobě n nastavíme ukazatele na dílek O a pak naplníme nádobu nad pístem vodou, vychýlí se ukazatel k dílu stupnice, který udává právě tlakovou sílu kapaliny na pohyblivé dno. Nádoby n jsou výměnné a mají různý tvar (obr. 7a, b, c).

Vlastním obsahem hydrostatického paradoxu je jev, který předvedeme takto: Nejprve použijeme nádoby tvaru válce (*b*) a ukážeme, že tlak na dno je právě roven tíze vody nad pístem (váhu této vody určíme např. před pokusem zvážením na vahách). Jestliže pak vyměňujeme nádoby *n* a napustíme vodu do stejné výše nade dnem, ukáže ukazatel pokaždé stejnou tlakovou sílu na dno. Přitom váha (tíha) vody v nádobě (*c*) je větší než tlaková síla na dno, kdežto v nádobě (*a*), která se zúžuje směrem nahoru, je tlaková síla na dno větší než je tíha vody v nádobě. Tento paradoxní výsledek vyvolává otázky:

1. Je-li nádoba s vodou položena na misku vah, proč je tíha vody jiná než tlaková síla, kterou působí voda na dno nádoby?

2. Kde se vzal rozdíl tlakové síly na dno a tíhy vody u nádoby, která se zúžuje směrem nahoru?



Obr. 8. Pokus s přístrojem pro demonstraci tlakové síly na dno.

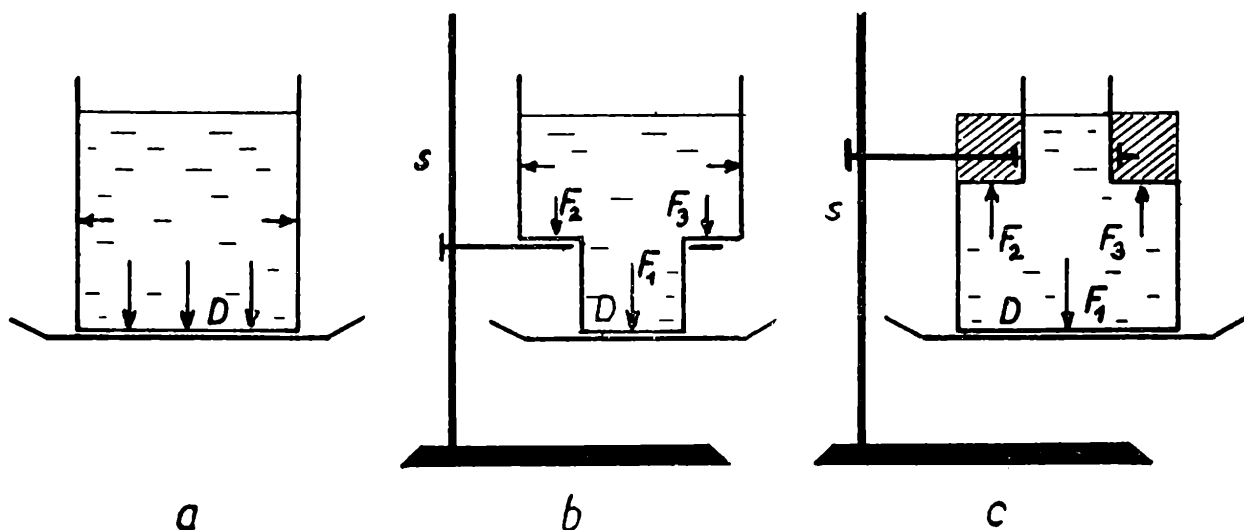
Již geniální francouzský matematik **Blaise Pascal** (čti Bléz Paskal, 1623—1662) objevil zákony tlaku kapaliny v nádobě a předvedl proslulý pokus, při němž byl roztržen sud tlakem poměrně malého množství vody. K sudu byla připevněna vysoká úzká trubice, kterou byla do sudu nalévána voda. Když byl sud naplněn a voda vystoupila v trubici do určité výše, dosáhla tlaková síla na stěny sudu takové hodnoty, že obruče sudu praskly.

K 1. otázce lze odpovědět takto: Tíha vody, kterou vážíme v nádobě, položené na misku vah, je rovna výslednici všech sil, kterými působí voda na stěny nádoby. Proto jen v případě,

že dno je vodorovné a ostatní vnitřní stěny nádoby svislé, je váha vody rovna tlakové síle na dno (obr. 9b). Vodorovné tlakové síly na svislé stěny nemají totiž žádnou nenulovou složku do svislého směru. Kdyby měla nádoba tvar podle obr. 9a, pak by tlaková síla na dno byla F_1 , ale při vážení nádoby s vodou bychom zjistili, že je váha (tíha) vody rovna

$$G = F_1 + F_2 + F_3 .$$

Účinek sil F_2 a F_3 je tu přenášen na misku vah pevnými stěnami. Kdyby se nám podařilo změřit jen tlakovou sílu F_1 , působící na dno D , zjistili bychom, že je menší než váha vody v nádobě. Tlakovou sílu F_1 na dno D bychom mohli změřit např. tak, že bychom dno uvolnili od bočních stěn nádoby a spojili je s nimi volnou nepružnou blanou, která zabraňuje, aby voda nevytekla, ale nezabraňuje pohybu dna. Nádobu bez dna bychom pak musili upevnit na zvláštní stojan s , a tak kompenzovat síly



Obr. 9. K výkladu rozdílnosti tlakové síly na dno a tíhy kapaliny v nádobě.

F_2 a F_3 (a váhu nádoby). Dáme-li nádobě tvar podle obr. 9c, pak je tlaková síla na dno F_1 , ale váha (tíha) vody v nádobě je rovna

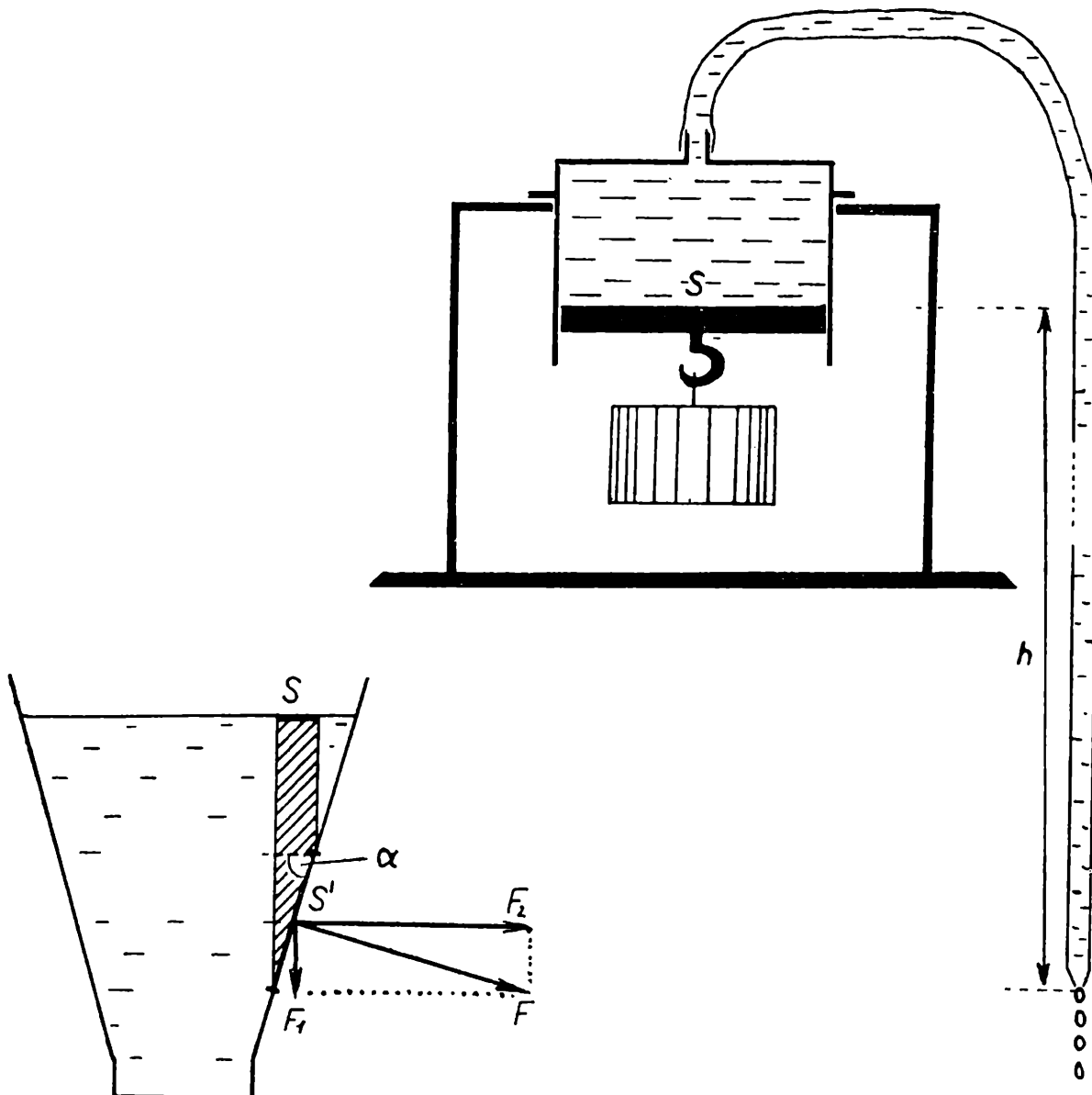
$$G = F_1 - F_2 - F_3 .$$

Účinek sil F_2 a F_3 je přenášen pevnými stěnami i na misku vah, a proto je naměřená váha vody menší než tlaková síla na dno F_1 . Síly F_2 a F_3 působí na stěny nádoby směrem vzhůru. Kdybychom měřili tlakovou sílu na dno uvolněné od stěn, musili bychom opět nádobu bez dna uchytnout do stojanu. Síly F_2 a F_3 , působící směrem nahoru, by mohly způsobit dokonce pohyb nádoby směrem nahoru.

Z obr. 9c je zároveň zřejmé, že tíhu vody v nádobě lze určit jako rozdíl váhy vody $G_1 = F_1$ (která by byla v nádobě s plochou dna D a se svislými válcovými stěnami, v níž by voda sahala do stejné výše jako v původní nádobě) a tíh $G_2 = F_2$ a $G_3 = F_3$ vody, která by měla objem, vyznačený v obr. 9c šrafováním.

Méně jednoduché je ukázat, jakým způsobem přispívá k tíze tlaková síla, působící na šikmou stěnu. Na obr. 10 je v řezu znázorněna nádoba s šikmou stěnou. Sloupec vody výšky h a velmi malém průřezu velikosti S působí kolmo na šikmou plošku velikosti S' tlakovou silou

$$F = p \quad S' = h \rho g \cdot S'$$



Obr. 10. Tlaková síla F na šikmou stěnu má svislou složku F_1 rovnou právě tíze svislého sloupce kapaliny nad šikmou stěnou.

Obr. 11. Schematický řez přístrojem, jímž je těžké břemeno zvedáno při vytékání vody dlouhou svislou trubicí.

Tíha sloupce vody je rovna

$$G = h \rho g \cdot S$$

Mezi velikostmi plošky S a S' je vztah $S = S' \cos \alpha$, kde význam úhlu α je z obrázku zřejmý. Dále platí, že tíha sloupce vody je

$$G = h \rho g \cdot S' \cdot \cos \alpha = F \cdot \cos \alpha . \quad (1)$$

Z obr. 10 odvodíme, že svislá složka tlaku F je rovna

$$F_1 = F \cos \alpha \quad (2)$$

Ze srovnání (1) a (2) plyne

$$F_1 = G,$$

tj. svislá složka tlakové síly na šikmou plošku je rovna právě váze svislého sloupce vody nad danou ploškou.

A nakonec ještě jeden zajímavý pokus. Obraťme Pascalův pokus se sudem tak, že sud umístíme nahoře a z něho vedeme trubicí svisle dolů. Je-li trubice dostatečně dlouhá, můžeme dosáhnout v sudě značného podtlaku. Můžeme např. sestavit přístroj, který je v řezu zobrazen na obr. 11. Je to v podstatě obrácený válec, v němž se vzduchotěsně pohybuje píst. Válec je naplněn vodou, která odtéká svislou trubicí, ústící horní stěnou do válce. Podle volby velikosti průřezu pístu a hloubky ústí trubice pod úrovní pístu lze dosáhnout značně velké nosné síly pístu. Tak např. při $h = 8$ m a $S = 4$ dm² by mohl přístroj udržet v rovnováze břemeno

$$F = h \rho g \cdot S = 8 \cdot 1000 \cdot 9,8 \cdot 0,04 \text{ N} \doteq 3140 \text{ N} \doteq 320 \text{ kp}$$

O něco menší břemeno by tedy mohl zvedat. Při zvednutí břemene o 1 dm by vytekly pouze 4 l, tj. 4 kg vody. Zvedli jsme silou 4 kp břemeno 320 kp do výše 1 dm. Ale na „paradoxa“ tohoto druhu jsme zvyklí, neboť i u jednoduchých strojů lze malými silami zvedat velká břemena.

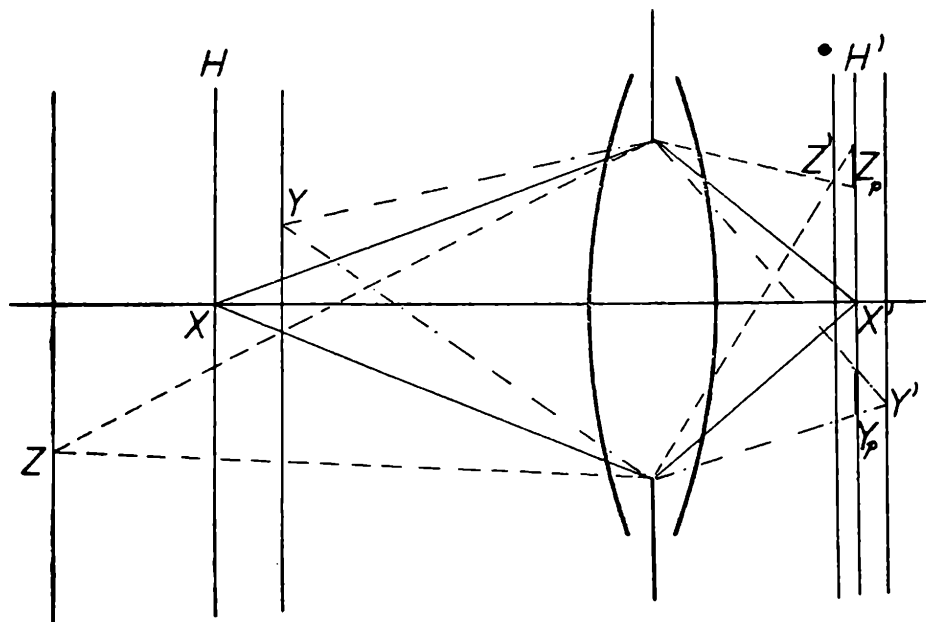
J i ř í S t e j s k a l, Praha:

Hloubka ostrosti

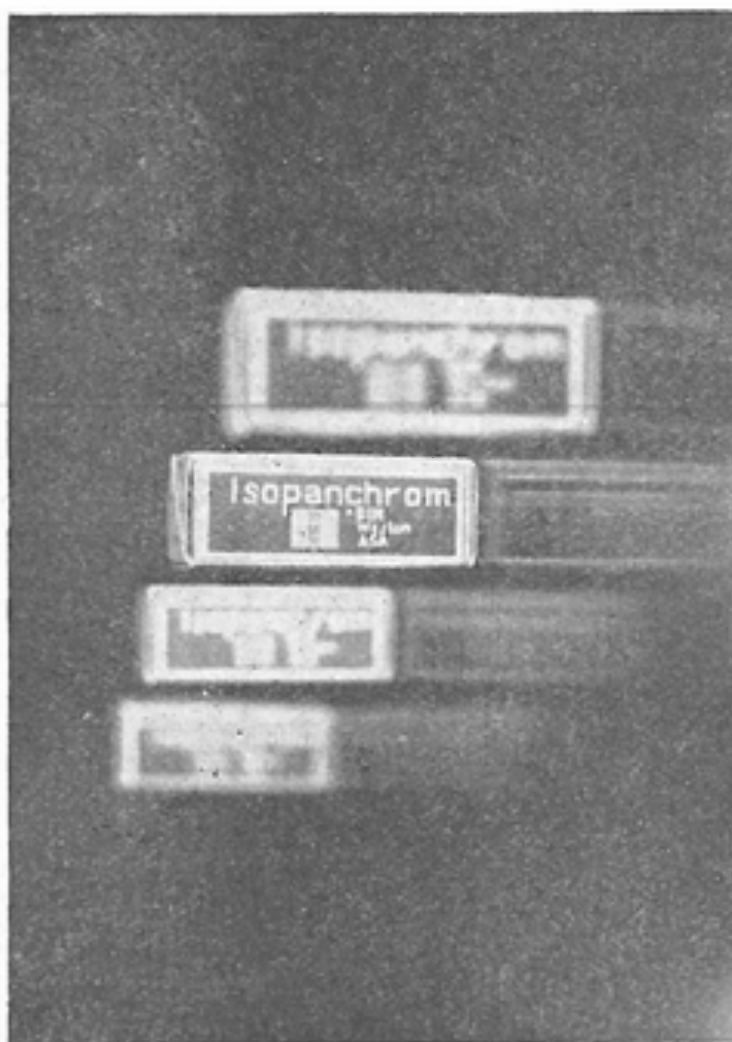
Pojem hloubky ostrosti je jedním ze základních pojmů fotografické optiky. Je to prostor, ve kterém se jeví všechny předměty zobrazené objektivem ostré od popředí do pozadí.

Víme, že obraz každého bodu je vytvořen přibližně kuželovitým svazkem paprsků. Podstavou kužele je otvor objektivu, jeho vrcholem není však bod, ale ploška, kterou nevyloučíme ani kdybychom měli objektiv bez optických vad.

Na obr. 1 vidíme princip hloubky ostrosti. Jsou na něm zobrazeny body X , Y , Z předmětu. Je zaostřeno na bod X , bod Y tvoří popředí, bod Z pozadí. Při zaostřování na bod X vytvoří se jeho obraz X' v hlavní obrazové rovině H' . Body Y , Z se však nezobrazí v rovině H' jako body, ale vytvoří tzv. rozptylovou plošku Y_p , Z_p . Tyto plošky vidíme



Obr. 1. Princip hloubky ostrosti.



Obr. 2. Malá hloubka ostrosti - použito clonového čísla 2,8.

v některých případech jako neostrost. Lidské oko má tu vlastnost, že do určité hranice velikosti rozptylové plošky (dovolené velikosti rozptylového kroužku) o průměru d , vnímá plošku jako bod a neostrost se mu nejeví. Tento prostor, ve kterém se body Y , Z budou jevit ještě ostré, nazýváme *hloubkou ostrosti*.

Na rozsah hloubky ostrosti má vliv volba *clonového čísla c* objektivu. Objektivy kreslí nejostřeji při určitém clonovém čísle, neboť korekce vad objektivu je pro svou nákladnost prováděna pro okolí



Obr. 3. Velká hloubka ostrosti - použito clonového čísla 16.

objektivu, které je blízké jeho optické ose. Použijeme-li tedy pro zobrazení předmětu vyššího clonového čísla, ostrost kresby obrazu vzroste (obr. 2 a 3).

Je však známo, že při extrémním zvyšování clonového čísla ostrost obrazu opět klesá. Tato neostrost je způsobena ohybem světla. Pro praxi je možné brát za optimální to clonové číslo, které je asi o 2 stupně vyšší než světelnost objektivu.

Uvažujme nyní případ, kdy je objektiv zaostřen na nekonečno.

V tomto případě je zobrazen ostře i prostor v určité vzdálenosti před objektivem. Zaostríme-li na určitou mezní vzdálenost tak, že ještě předměty v nekonečnu se budou jevit ostré, přiblíží se hloubka ostrosti ještě více k přístroji. Tato mezní vzdálenost má velký význam pro výpočet hloubky ostrosti a nazývá se *hyperfokální vzdálenost*.

Hyperfokální vzdálenost H vypočteme přibližně podle vzorce

$$H = \frac{f^2}{c \cdot d},$$

kde f je ohnisková vzdálenost objektivu, c použitá clona, d rozptylový kroužek.

Máme-li vypočtenou hyperfokální vzdálenost pro jednotlivé clony, můžeme pro přední a zadní hranice ostrosti použít těchto vzorců

$$a_p = \frac{H \cdot a}{H + a}$$

a

$$a_z = \frac{H \cdot a}{H - a},$$

kde a_p je přední hranice ostrosti, a_z je zadní hranice ostrosti, a vzdálenost, na kterou zaostrujeme.

Příklad. Vypočtete hloubku ostrosti pro objektiv ohniskové vzdálenosti $f = 50$ mm, při zaostrění na vzdálenost $a = 3$ m, při cloně $c = 5,6$. Nejprve vypočteme hyperfokální vzdálenost pro rozptylový kroužek

$$d = \frac{f}{1000},$$

tedy

$$H = \frac{f^2}{c \cdot d} = \frac{1000 \cdot f}{c} = \frac{1000 \cdot 50}{5,6} \doteq 8928 \text{ [mm]}.$$

Nyní vypočteme přední a zadní mez hloubky ostrosti

$$a_p = \frac{H \cdot a}{H + a} = \frac{8928 \cdot 3000}{8928 + 3000} \doteq 2245 \text{ [mm]},$$

$$a_z = \frac{H \cdot a}{H - a} = \frac{8928 \cdot 3000}{8928 - 3000} \doteq 4518 \text{ [mm]}.$$

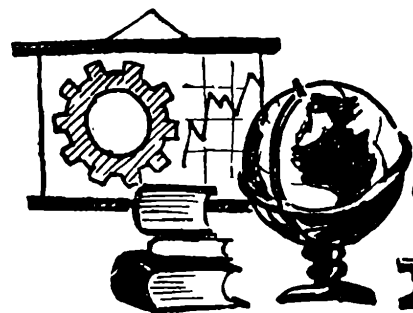
Většina fotografických přístrojů má přímo na přístroji zvláštní zařízení, které hloubku ostrosti přímo ukazuje, s přesností postačující pro běžné fotografování.

Různé

Prof. Josef Brejcha, VUT, Brno:

Studentské chyby v matematice

(Dokončení)



Další nesnáze s logaritmem nuly, logaritmem jedné, s čísly, jejichž logaritmem je nula nebo jednička, s grafem logaritmické funkce a mnohdy i s početními operacemi s logaritmy zná jistě každý, ať středoškolský či vysokoškolský učitel matematiky.

Je ovšem nutno podotknout, že zmechanizování určitého početního procesu a z něho plynoucí pokles pozornosti - může být naopak příčinou podstatných a dosti častých chyb, nebo může mít podstatný podíl na vzniku těchto chyb.

Velmi běžně a ve velikém procentu řeší studenti kvadratickou nerovnost, danou jako rozdíl čtverců, např. nerovnost $4x^2 - 1 \geq 0$ v důsledku analogie a bezmyšlenkovité aplikace se zmechanizovaným řešením ryze kvadratické rovnice jistě a rychle:

$$4x^2 \geq 1,$$

$$x^2 \geq \frac{1}{4},$$

$$x_{1,2} \geq \pm \frac{1}{2}$$

na konec ovšem s velkým překvapením, že výsledek se ukáže pouze napolo správným a obvykle s neschopností vysvětlit, proč formálně správný početní postup vede k zdánlivým nesrovnalostem a rozporům, jež se občas vyskytnou při řešení některých konkrétních otázek.

V partiích středoškolského učiva, týkajícího se práce s mocninami, vyskytují se často chyby typu

$$2 \cdot 3^x = 6^x, 2^x \cdot 2^y = 4^{x+y}$$

Lze se domnívat, že tato chyba pramení v okolnosti, že student bezmyšlenkovitě a formálně spojí od dětství zmechanizovaný proces malé násobilky s rovněž zmechanizovaným užitím pravidla o násobení mocnin. Celý početní výkon reprodukuje se pak pouze slovně, rutina potlačuje

téměř úplně funkcionální myšlení. O správnosti této domněnky snad svědčí fakt, že s chybami tohoto druhu se setkáváme téměř výhradně v případech, že základem násobených mocnin jsou čísla zvláštní; při obou základech, tj. při základech obecných i zvláštních, vyskytují se např. při řešení i velmi jednoduchých rovnic exponenciálních, poměrně dosti často chyby typu

$$2^{x \pm y} = 2^x \pm 2^y,$$

které ukazují, že vyučovací praxe musí při nacvičování násobení mocnin dbát nejen na příklady typu $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, nýbrž i na příklady typu $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, neboť dosti časté chyby ukazují, že výměna stran identity $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ není pro všechny studenty samozřejmou záležitostí.

V tomto výčtu věcných chyb je nutno zmínit se ještě o chybách, které vznikají např. nesprávným psaním rovnic jako

$$3 \cdot 4 = 12 \cdot 5 = 60,$$

nezřetelným písmem, nedodržováním vžitých pravidel o způsobu zápisu, např. pro psaní zlomků (napřed zlomková čára, zejména u zlomků složených), pro psaní funkčních symbolů ($r \cotg \alpha$ nikoli $\cotg \alpha r$) a podobně.

Kromě uvedených chyb, u nichž se lze aspoň domýšlet jejich pravděpodobných subjektivních příčin, setkává se naše školská praxe ovšem i s chybami, kdy i lepší studenti z ničeho nic najednou změni znaménko, dělí - místo aby násobili, násobí jednu stranu rovnice, druhou nikoli; všechny tyto chyby lze ovšem vysvětlit okamžitou osobní dispozicí, rozčilením, snahou po úspěšném a rychlém zakončení řešení daného problému, složeného z jednoduchých, studentu jasných, běžných početních výkonů, popřípadě snahou po postižení a provedení co nejvíce jednoduchých početních výkonů najednou. Takové chyby odstraní obvykle student sám, ať už bez, či po upozornění ze strany učitele; ovšem typické chyby, o nichž se zmiňuje tento článek, i když mohou výjimečně vzniknout z nervosity, trémy, rozčilení, signalisují ve většině případů vážné nedostatky v základních vědomostech a znalostech bezpodmínečně nutných pro další úspěšné studium.

Oprava. V č. 7 na str. 297 má mít výraz (5) tvar $t = \frac{x - \mu}{\sigma}$ a ve výrazu

(6) je exponent $-\frac{t^2}{2}$. Uprostřed str. 298 vynechte slovo „pravděpodobnost“ ve větě „Máme-li...“. Na str. 300 (uprostřed) má být $P(|\mu - 30| \leq 2)$..

Jsou vaše znalosti fyzikálních pojmů neformální?

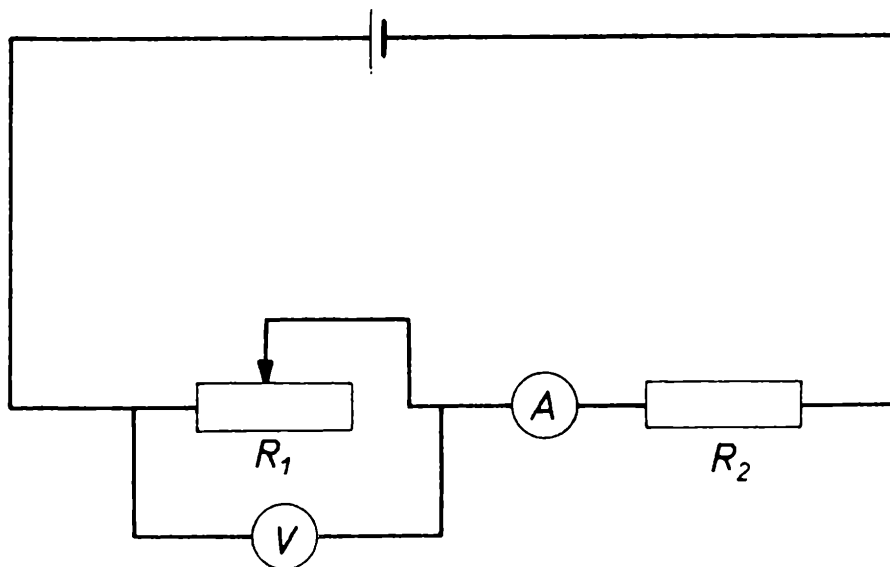
(Dokončení)

Je možné, že jste při vypracování předchozí písemné práce zjistili některé své nedostatky a snažili se je odstranit. Výsledek vaší snahy vám ukáže vypracování obdobné písemné práce, která při normálních podmínkách dává stejný obraz o vědomostech jako práce první.

Na otázky odpovídejte podle stejných zásad jako poprvé.

Otázky.

1. Zapište vzorcem a vyslovte větou Ohmův zákon pro část obvodu i pro uzavřený obvod!



Obr. 1

2. Jak se změní výchylka ampérmetru a voltmetru v zapojení v obr. 1, když zmenšíme odpor R_1 ? Vysvětlete! (Odpor R_2 je stálý a představuje také odpor přívodních drátů.)

3. Na zdroj o elektromotorickém napětí 12 V a vnitřním odporu 1 Ω zapojíme postupně reostaty o odporu 2 Ω a odporu 6 Ω . Jaký proud protéká reostatem a jaké je napětí na jeho koncích v obou případech?

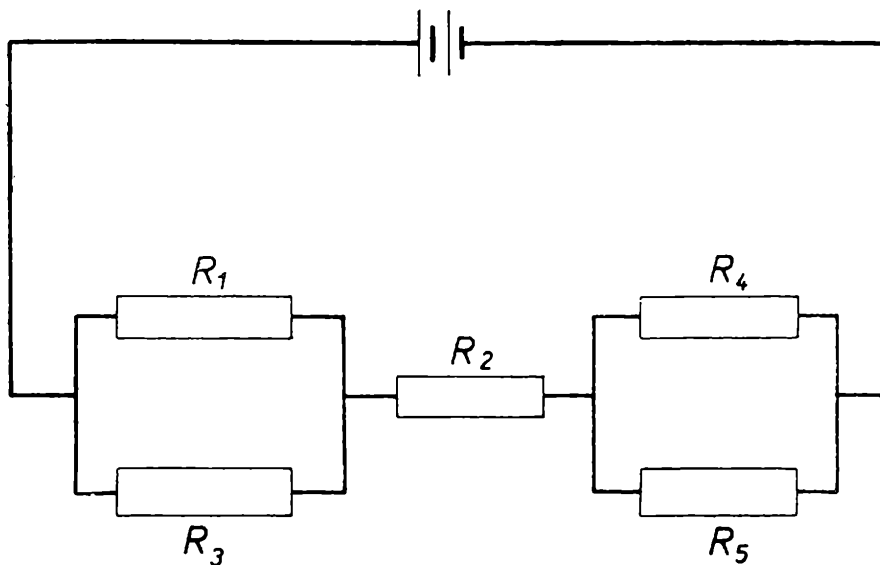
4. Z Ohmova zákona vyjádřete obecně odpor vodiče (větou i vzorcem)!

5. Nakreslete sériové a paralelní zapojení dvou vodičů a zapište, jaký je v obou případech výsledný odpor a jaký vztah platí pro napětí na jednotlivých vodičích! (Odpor přívodních drátů zanedbejte!)

6. Do elektrické sítě o napětí 120 V je třeba vložit do série 5 žárovek, každou na napětí 12 V. Odpor každé žárovky je 20 Ω. Určete, jaký předřadný odpor je třeba vložit do série se žárovkami a jaký proud potom žárovkami protéká!

7. Vypočítejte výsledný odpor zapojení v obr. 2! Všechny odpory mají stejnou hodnotu 6 Ω.

8. V obvodu v obr. 2 je zapojena baterie o napětí 12 V. Zapojené odpory mají všechny stejnou hodnotu, odpor přívodních drátů zanedbáváme. Jaké je napětí na odporu R_1 , R_2 , R_3 ?



Obr. 2

Správné odpovědi.

1. a 5. Jako v minulé písemné práci.

2. Výchylka ampérmetru se zvětší. Výchylka voltmetru se zmenší. Vysvětlení. Použijeme Ohmova zákona pro celý obvod. Ve vztahu

$I = \frac{E}{R + r}$ se zmenšil vnější odpor R , hodnoty E a r jsou stálé.

Proto vzrostlo I . Podobná úvaha platí pro napětí na odporu R_1 :

$$U = R_1 I = R_1 \frac{E}{R_1 + R_2 + r} = \frac{E}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{r}{R_1}}$$

Se zmenšujícím se R_1 zmenšuje se také U .

3. Při odporu 2 je $I = 4$ A, $U = 8$ V.

Při odporu 6 je $I' = 1,7$ A, $U' = 10,3$ V.

4. $R = \frac{U}{I}$ Odpor vodiče je konstantní poměr napětí na vodiči

a proudu protékajícího vodičem.

6. Do obvodu je třeba vložit odpor 100 Ω.

Žárovkami protéká proud 0,6 A.

7. Výsledný odpor zapojení je 12Ω .

8. Na odporu R_1 je napětí 3 V; na R_2 je 6 V; na R_3 je 3 V.

Písemnou práci zhodnoťte podle dříve uvedených pravidel. Pozor na odpověď 4. Označte ji jako nesprávnou (N), je-li formulována asi takto: **O d p o r j e p ř í m o ú m ě r n ý n a p ě t í.**

Dopadlo hodnocení vaší písemné práce tentokrát lépe? Jestliže ne, zamyslete se nad uvedenými základními pojmy ještě jednou.

Snažte se, aby všechny znalosti, které ve fyzice získáte, byly neformální. Jen takové rozvinou vaše fyzikální myšlení, které vám pomůže s daleko menší námahou studovat fyziku i řešit technické problémy.

Recenze

K a r e l R e k t o r y s a spolupracovníci:



Přehled užité matematiky

Koncem října vyšla ve Státním nakladatelství technické literatury v Praze objemná kniha (má 1040 stran, 404 obrázků a stojí váz. 82,— Kčs), ve které je obsažena - až na některé nové vyvíjející se části, např. programování, nebo některé velmi speciální části - v přehledu matematika, kterou potřebuje dnešní technická praxe. V jednotlivých partiích (rozdělených do 35 kapitol) jsou vždy uvedeny příslušné definice, věty (bez důkazů - ty najde čtenář v citované literatuře, jejíž abecední seznam je na konci knihy) a řada příkladů.

Přesto, že kniha je určena širokému okruhu čtenářů, kteří se již setkali s matematikou na vysoké škole, mohou všichni žáci našich středních a odborných škol číst prvních 6 kapitol knihy a k tomu kap. 10, až na některé závěrečné odstavce kapitoly, které vyžadují hlubších znalostí z matematiky. Po seznámení se základy diferenciálního a integrálního počtu je možné číst téměř celou polovinu knihy, tj. prvních 11 kapitol a k tomu kap. 13.

Doporučuji studovat tuto část knihy v tomto pořadí: Nejdříve kap. 1 a 3, kde je aritmetika, algebra, geometrie, potom kap. 5 a 6 (analytická geometrie v rovině a v prostoru) a dále kap. 10, 11 a 13 kde jsou uvedeny posloupnosti, diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné. Po přečtení těchto kapitol je třeba se vrátit ke kap. 2, tj. ke goniometrickým a hyperbolickým funkcím a funkcím k nim inverzním, potom ke kap. 4 a 7A (rovinné křivky a vektorová algebra). Obtížnější ke studiu jsou kap. 7B, 8 a 9 obsahující vektorovou analýzu, tenzorový počet

a diferenciální geometrii. Dnešní technická praxe - hlavně elektrotechnika a fyzika - používá jako početního aparátu právě tenzorového počtu, který usnadňuje výpočty a činí je velmi přehlednými; např. v teorii relativity, ať speciální nebo obecné, by se výpočty snad ani nedaly jednodušeji provádět.

Se zbývajícími kapitolami knihy se seznámí žáci ze středních a odborných škol většinou teprve po příchodu na vysokou technickou školu, s některými, již značně specializovanými, dokonce až po absolvování vysoké školy. Z toho je patrné, že tato kniha umožňuje poznat budoucím inženýrům - ať stavebním, strojním nebo elektrotechnickým - tu matematiku, které se budou učit na vysoké škole a kterou budou při své práci stále více potřebovat.

K. D.

Redakce hovoří

Vážení čtenáři!



Znovu všechny upozorňujeme, že redakce neprodává jednotlivá čísla našeho časopisu, ani nemá (až na nepatrné výjimky) k dispozici starší čísla nebo čísla starších ročníků. Podobné objednávky provádí: **Prodejna Poštovní novinové služby, Praha 1, Příkopy 22.** Jinak běžné objednávky i předplatné vyřizuje Poštovní novinová služba na vašem místním poštovním úřadu nebo poštovní doručovatel.

Každé číslo *Rozhledů* matematicko-fyzikálních vychází v měsíci, jak je udáno na druhé stránce obálky v rozmezí asi od 10. do 30. toho měsíce. Redakce nemá vůbec žádného vlivu na distribuci, tedy neurgujte u nás dřívější dodání jednotlivých čísel. Informace tomu odporující, které jsou často dávány našim čtenářům na poštovním úřadu, pramení z neznalosti příslušného zaměstnance.

Všechna přání a stížnosti týkající se doručování adresujte místní Poštovní novinové službě a teprve když vám nebude vyhověno, postupte písemnou stížnost nám, abychom ji zaslali na příslušná místa.

Pamatujte na včasné objednání příštího ročníku 1964/65, jehož 1. číslo vyjde opět v září. Jinak se může stát, že vám budou *Rozhledy* doručovány až od druhého nebo dalšího čísla. Dodání těchto chybějících čísel činí velké potíže a právě v nich jsou otiskovány příklady matematické a fyzikální olympiády.

Žádáme proto zejména ředitelství škol a učitele-členy JČMF, aby provedli nábor předplatitelů *Rozhledů* matematicko-fyzikálních pokud možno ještě před letními prázdninami.

Slovníček

matematických výrazů

округлять	zaokrouhlovat
окружность, внеписанная , вписанная , горловая, описанная	kružnice připsaná, vepsaná, hrdlová, opsaná
октаэдр	osmistěn
операция	výkon (početní), operace
определение	definice, určení
определенный	definovaný, určitý
определять	definovat, určit
опускать, опустить	spustit (kolmici)
опыт	pokus
ордината	souřadnice y
оригинал	vzor (při zobrazení)
ортогональный	pravoúhlý
ортоцентр	průsečík výšek trojúhelníka
освещать	osvětlit
освещение	osvětlení
осесимметричный	souměrný podle osy
основа	základ
основание	základ (mocniny), základna, pod- stava, pata kolmice
основание верхнее, нижнее	základna horní, dolní; podstava hor- ní, dolní
основный	základní
особенно	zvlášť, zejména
особенность	zvláštnost, singularita
особенный	zvláštní, singulární
остаток	zbytek
остроугольный	ostroúhlý
острый	ostrý
осуществлять	uskutečnit, provést, realizovat
ось, ξ .	osa
ось абсцисс, ординат	osa x , y
отвлеченный	абстрактní
откладывать, отложить	nanášet, nanést
отклонение	odchylka
отложить отрезок	nanést úsečku
относительно	vzhledem
относительный	relativní
относиться	míti se k...

отношение; по отношению
относящийся
отображение
отождествить, отождествлять
отрезок, *m.*
отрицательный
отсекающий
отсутствие
отыскать
оценивать, оценить
оценка
очертание
очертить, очерчивать
ошибка

poměr, vztah; vzhledem
vztahující se
zobrazení
ztotožnit
úsečka, dílek
záporný
vytínající
nepřítomnost, nevyskytnutí se
vyhledat, najít
odhadovat
odhad, ocenění
obrys
narýsovat
chyba

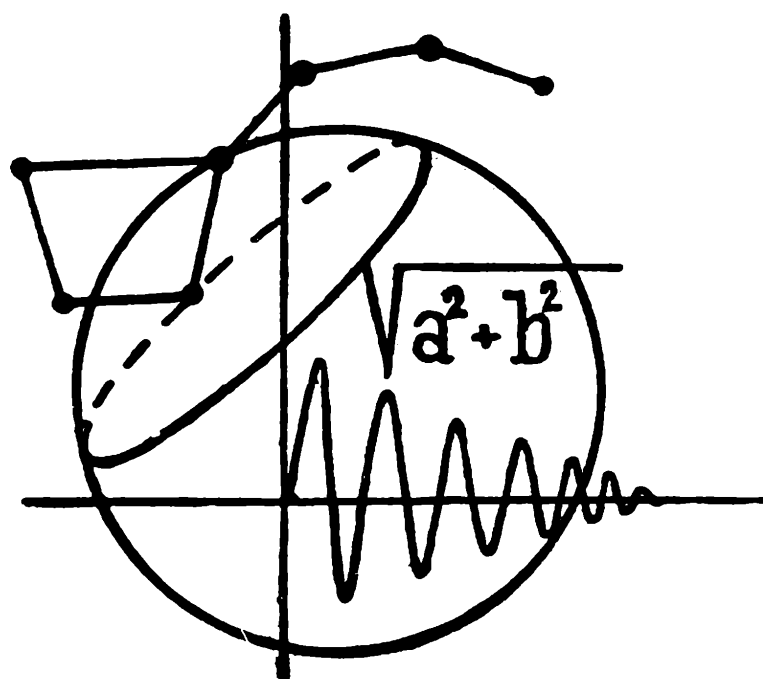
П

пара точек
парабола
параболический
параболоид, — вращения
параметр
параллелепипед, прямоугольный
параллелограм, прямоугольный
параллельно, параллельный
параллель, *ž.*
переменная
перемещать, переместить
перемещение
перемножать, перемножить
перемножение
перенести
перенос, параллельный перенос
перенумеровать
пересекать, пересечь
пересечение; плоское пересечение
пересекающиеся прямые
перестановка членов
перестановка из n элементов
перестановка из n элементов по k
переход
перечислить, перечислять
период
периодический
периметр
перпендикулярно, перпендикулярный
перпендикуляр, *m.*
перпендикуляр опущенный на сторону
перспектива военная, лягушачья
перспективное подобие
пирамида
планиметрия
плоский
плоскость

dvojice bodů
parabola
parabolický
paraboloid, rotační paraboloid
parametr
rovnoběžnostěn, kvádr
rovnoběžník, obdélník
rovnoběžně, rovnoběžný
rovnoběžka (na rotační ploše)
proměnná
přemísťovat, posunovat
přemístění, posunutí, translace
vynásobit (mezi sebou)
vynásobení
přenést
translace, rovnoběžné posunutí
očíslovat
protínat, protnout
řez, průsek, průnik; rovinný řez
různoběžky
záměna členů
permutace z n prvků
variace k —té třídy z n prvků
přechod
přepočítat
perioda
periodický
obvod
kolmo, kolmý
kolmice
kolmice spuštěná na stranu
vojenská, žabí perspektiva
perspektivita
jehlan
planimetrie
rovinný
rovina

rozhledy

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ



10

ROČ. 42

1963-64

ČASOPIS PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL
VŠEOBECNĚ VZDĚLÁVACÍCH A ODBORNÝCH

ROZHLEDY MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

nositel vyznamenání Za zásluhy o výstavbu

Ročník 42

Červen 1964

Číslo 10

Vedoucí redaktor doc. dr. *Miroslav Menšík*, ČVUT - Praha

Výkonný redaktor doc. *Ota Setzer*, ČVUT - Praha

Redakční rada: Jaroslav Bejsta, ZDŠ, Praha; Petr Benda, VUT, Brno; doc. dr. Josef Dibelka, ČVUT, Praha; Stanislav Horák, ČVUT, Praha; doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha; zasl. škol. pracovník Miloš Jelínek, VÚP, Praha; prof. dr. Josef Korouš, VŠD, Žilina; prof. Emil Kraemer, KU, Praha; doc. dr. Cyril Palaj, VŠDL, Zvolen; CSc. Evžen Říman, ČVUT, Praha; CSc. Jiří Sedláček, ČSAV, Praha; CSc. Ladislav Sehnal, ČSAV, Ondřejov; inž. dr. Václav Šindelář, ÚNM, Praha; prof. dr. Ján Vanovič, UK, Bratislava; František Vencálek, SPŠ, Praha

Redakce: Praha 2, Trojanova 13, telef. 244529

OBSAH

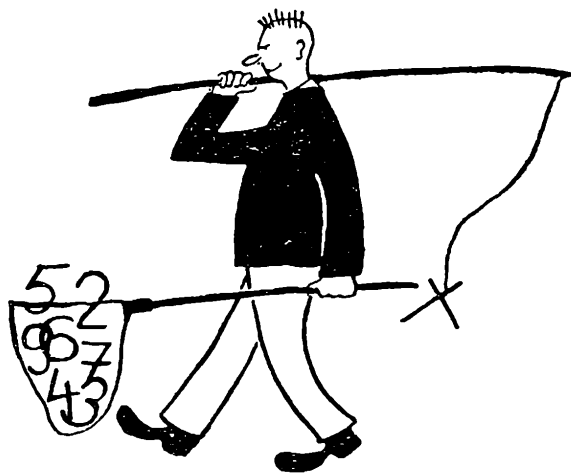
J. Schmidtmayer: Nerovnosti s absolutními hodnotami	433
O. Jeništa: O určitém vztahu u obecného trojúhelníka	439
P. Kunderová: Evolventa kružnice na atletické dráze	442
CSc. E. Říman: Spektrum — řeč atomů	444
J. Mída: O kolíčkovém reostatu	448
Inž. Z. Kos: Měření srážek a zpracování srážkových úhrnů	451
J. Pospíšil: Kapkový model atomového jádra {Dokončení}	458
Prof. dr. E. Kašpar: Potíže s oponou — a také někdy s prádlem	464
Prof. DrSc. A. Kotzig: Riešenie úloh zo zaujímavostí okolo jednej hry	469
O. S.: Šest spisovatelů cestuje — řešení	473
M. Koman: Záhada běžeckého závodu rozřešena	474
J. F. S.: Kdo pije vodu a chová zebrou — řešení	476
M. Zelenka: Slovníček matematických výrazů	3. a 4. str. obálky



Vychází desetkrát do roka. Roční předplatné 20,— Kčs; cena jednotlivého čísla 2,— Kčs. Tiskne Mir, novin. závody, nár. pod., závod 3, Václavská ul. 12, Praha 2. Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Informace o předplatném podá a objednávky přijímá každá pošta i doručovatel. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS, ústřední sklad expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Jazyková úprava: zasl. učitel dr. O. Hönig. Titulní obrázky: M. Košar, studující FS.

A-04*41241

© Státní pedagogické nakladatelství, n. p. v Praze. 1964.



Doc. Josef Schmidtmayer,
ČVUT, Praha:

Nerovnosti s absolutními hodnotami

V závěru článku *Množina jeden ze základních nástrojů moderní matematiky* (v č. 1 tohoto ročníku) bylo řečeno, že elementární pojmy z teorie množin se výhodně uplatní např. při řešení nerovností.

V tomto článku si všimneme *lineárních nerovností*, v nichž se vyskytují *absolutní hodnoty* (lineárních) dvojčlenů nebo jednočlenů obsahujících neznámou, v dalším textu stručněji: nerovnosti s absolutními hodnotami.¹⁾ Důvodem je skutečnost, že postupy pro řešení takových nerovností bývají někdy dosti nepřehledné, takže studenti považují neprávem a zbytečně nerovnosti s absolutními hodnotami za těžko zvládnutelné téma, jemuž je nejlépe se vyhnout, pokud je to možné.

Pokusíme se jednak zapsat celý postup řešení přehledněji než bývá zvykem (způsobem spíše techničtějším, formulářovým), jednak, jak již bylo slíbeno, vyjádřit řešení tak, že s výhodou použijeme množinové symboliky a terminologie. Přitom však matematické myšlení nesmí být nahrazeno bezduchým formalismem.

Dříve než přistoupíme k řešení nerovností, dokážeme si jisté užitečné pravidlo. V nerovnostech, které budeme řešit, se vyskytnou výrazy typu $mx + n$, $p + qx$, kde m , n , p , q jsou reálné konstanty, $m \neq 0$, $q \neq 0$, x je neznámá. Přehledné vyjadřování uvedených absolutních hodnot je hlavním zdrojem obtíží a neurovnanosti ve výpočtových postupech. Situace je tím svízelnější, čím větší je počet výrazů s absolutními hodnotami v řešené nerovnosti. Naznačené obtíže se podstatně zmenší, budeme-li důsledně dbát tohoto pravidla:

¹⁾ Připomeňme si definici absolutní hodnoty $|c|$ reálného čísla c : pro $c < 0$ je $|c| = -c$, pro $c = 0$ je $|c| = 0$, pro $c > 0$ je $|c| = c$. Důsledkem této definice je např. platnost vztahu $|c| = |-c|$.

Mějme výrazy $|mx + n|$, resp. $|p + qx|$, kde m, n, p, q jsou reálné konstanty, $m \neq 0, q \neq 0$. Pak platí:

1. Výraz $|mx + n|$, resp. $|p + qx|$, lze vždy psát ve tvaru $|ax + b|$, kde $a > 0$.

2. Jestliže ve výrazu $|ax + b|$ je $a > 0$, je

$$|ax + b| = \begin{cases} -ax - b & \text{pro } x < -\frac{b}{a}, \\ 0 & \text{pro } x = -\frac{b}{a}, \\ ax + b & \text{pro } x > -\frac{b}{a}. \end{cases}$$

D ů k a z.

1. Je-li $m > 0$, resp. $q > 0$, je tvrzení zřejmé. Pak totiž $a = m$, resp. $a = q$.

Je-li $m < 0$, resp. $q < 0$, lze vyjádřit (plyne z vlastnosti absolutní hodnoty $|c| = |-c|$) výraz: $|mx + n| = |-mx - n|$, resp. $|p + qx| = |-qx - p|$ tj. opět ve tvaru $|ax + b|$, kde $a = -m > 0$, resp. $a = -q > 0$.

2. Zřejmě $|ax + b| = 0$ platí právě jen když $ax + b = 0$, tj. když $x = -\frac{b}{a}$; přitom předpokládáme $a > 0$.

Zvolme nyní libovolné $x < -\frac{b}{a}$, tj. $x = -\frac{b}{a} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Pak

$$ax + b = a \left[-\frac{b}{a} - \varepsilon \right] + b = -b - a\varepsilon + b = -a\varepsilon < 0, \text{ neboť podle předpokladů je } a > 0, \varepsilon > 0. \text{ Jelikož tedy } ax + b < 0, \text{ je } |ax + b| = -ax - b \text{ pro všechna } x < -\frac{b}{a}.$$

Zvolme konečně libovolné $x > -\frac{b}{a}$, tj. $x = -\frac{b}{a} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Pak

$$ax + b = a \left[-\frac{b}{a} + \varepsilon \right] + b = -b + a\varepsilon + b = a\varepsilon > 0. \text{ Jelikož tedy } ax + b > 0, \text{ je } |ax + b| = ax + b \text{ pro všechna } x > -\frac{b}{a}.$$

Praktické důsledky uvedeného pravidla pro řešení nerovností s absolutními hodnotami lze objasnit stručně a názorně takto:

1. Vyskytnou-li se v dané nerovnosti výrazy jako např. $|3x - 7|$, $|-6x + 1|$, $|3 - 9x|$, $|-5 + 6x|$, $|-1 - 9x|$ apod., pak nejprve celou nerovnost přepíšeme, přičemž jednotlivé uvedené výrazy nahradíme takto (kromě prvního výrazu, kde není důvodů ke změně): $|3x - 7|$, $|6x - 1|$, $|9x - 3|$, $|6x - 5|$, $|9x + 1|$ apod.

2. Vyjadřujeme-li v další fázi výpočtu tyto absolutní hodnoty, pak „mezníkem“ pro různá vyjádření je ta hodnota neznámé x , pro niž je daný výraz roven nule (tj. je to nulový bod lineárního dvojčlenu nebo jednočlenu uzavřeného v symbolech absolutní hodnoty). Konkrétně v případě posledního příkladu jde o číslo dané podmínkou

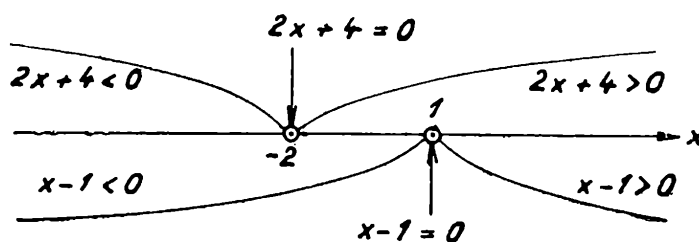
$$9x + 1 = 0, \text{ tj. } x = -\frac{1}{9}.$$

Pak platí

$$|9x + 1| = \begin{cases} -9x - 1 & \text{pro } x < -\frac{1}{9}, \\ 0 & \text{pro } x = -\frac{1}{9}, \\ 9x + 1 & \text{pro } x > -\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Takový „rozpis“ je nutno připravit pro každou absolutní hodnotu v nerovnosti vystupující.

Po tomto objasnění můžeme přistoupit k řešení nerovnosti. Pro větší názornost vysvětlíme celý postup na konkrétním příkladu.



Obr. 1

Příklad 1. Řešit nerovnost

$$|2x + 4| \geq 7 + |1 - x|.$$

Ř e š e n í. Danou nerovnost nejprve upravíme tak, že na pravé straně ponecháme jen známý konstantní člen (číslo 7).

Ve smyslu bodu 1 horního pravidla pak nahradíme danou nerovnost ekvivalentní nerovností, tj. nerovností mající tatáž řešení jako nerovnost daná,

$$|2x + 4| - |x - 1| \geq 7 \tag{1}$$

Pak stanovíme nulové body obou lineárních dvojčlenů z levé strany nerovnosti (1)

$$\begin{aligned} 2x + 4 = 0 &\Rightarrow x = -2, \\ x - 1 = 0 &\Rightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Podle bodu 2 horního pravidla je absolutní hodnota každého lineárního

dvojčlenu z levé strany nerovnosti (1) rovna tomuto dvojčlenu pro čísla x ležící vpravo od nulového bodu příslušného dvojčlenu (obr. 1), a je rovna (-1) -násobku tohoto dvojčlenu pro čísla x ležící vlevo od nulového bodu příslušného dvojčlenu.

Tab. 1

	Vstupní podmínka	$ 2x + 4 $	$ x - 1 $	$\frac{ 2x - 4 }{ x - 1 } \geq 7$	Závěrečná podmínka	Částečné řešení
	s_1	s_2	s_3	$s_4 (s_2 - s_3 \geq 7)$	s_5	$s_6 (s_1 \cap s_5)$
r_1	$x < -2$	$-2x - 4$	$1 - x$	$\frac{-2x - 4}{1 - x} \geq 7$	$x \leq -12$	$x \leq -12$
r_2	$x = -2$	0	3	$0 - 3 \geq 7$	$-3 \geq 7$	neexistuje
r_3	$-2 < x < 1$	$2x + 4$	$1 - x$	$\frac{2x + 4}{1 - x} \geq 7$	$x \geq \frac{4}{3}$	neexistuje
r_4	$x = 1$	6	0	$6 - 0 \geq 7$	$6 \geq 7$	neexistuje
r_5	$1 < x$	$2x + 4$	$x - 1$	$\frac{2x + 4}{x - 1} \geq 7$	$x \geq 2$	$2 \leq x$
r_6	Úplné řešení: $x \in (U s_6)$, tj. $x \in [(-\infty; -12 >; < 2; +\infty)]$					

Tyto skutečnosti vyjádříme přehledně v tab. 1 o šesti řádcích a šesti sloupcích. V ní je celý postup řešení nerovnosti (1) shrnut. Řádky r_1 až r_5 odpovídají jednotlivým úsekům, ve které se číselná osa x rozpadla vytčením nulových bodů -2 a 1 . Jsou to úseky (zaznamenané ve sloupci s_1 jako „vstupní“ podmínky) $x < -2$, $x = -2$, $-2 < x < 1$, $x = 1$, $1 < x$. Pro každý tento dílčí úsek je třeba řešit nerovnost (1) zvlášť; tj. je třeba vyjádřit absolutní hodnoty z nerovnosti (1) (děje se tak ve sloupcích s_2 a s_3), dosadit tato vyjádření do nerovnosti (1) (děje se ve sloupci s_4) a takto vzniklé nerovnosti upravit na nejjednodušší tvar. Obsahují-li tyto nerovnosti neznámou x , je třeba vyjádřit podmínku pro toto x (ve sloupci s_5). Tak dostáváme „závěrečné“ podmínky. V každém řádku musí být splněna současně podmínka vstupní i závěrečná.

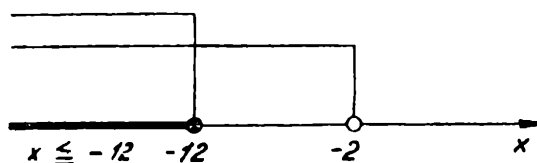
Z množinového hlediska je tedy příslušné částečné řešení (s_6) průnikem množin ze sloupců s_1 a s_5 v témž řádku. V našem příkladě existuje částečné řešení jen v řádku r_1 (viz také obr. 2) a v řádku r_5 (obr. 3).

Úplné řešení nerovnosti (1), a tedy také nerovnosti dané, je zřejmě množina všech těch čísel x , která patří do kteréhokoli částečného řešení

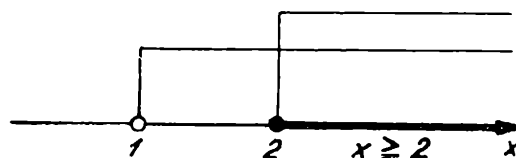
ve sloupci s_6 . Z množinového hlediska jde o *sjednocení* všech částečných řešení, jak je vyjádřeno různými způsoby v řádku r_6 .

Řešení dané nerovnosti (viz také obr. 4) je tedy každé číslo x ze dvou polouzavřených intervalů $(-\infty; -12] \cup [2; \infty)$, v množinové symbolice

$$x \in (-\infty; -12] \cup [2; \infty)$$

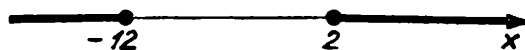


Obr. 2



Obr. 3

P o z n á m k a k v y p l ň o v á n í t a b u l k y 1. Po vyznačení jednotlivých úseků číselné osy ve sloupci s_1 záleží nejvíce na správném vyplnění sloupců s_2 a s_3 . Dodržíme-li dříve naznačený postup, umožní horní pravidlo prosté a bezpečné vyplnění sloupců s_2 a s_3 . Např. ve sloupci s_2 (pro dvojčlen $2x + 4$) vyplňujeme (nulou) nejprve řádek r_2 odpovídající nulovému bodu dvojčlenu $2x + 4$. (Podobně ve sloupci s_3 , kde bude nula v řádku r_4 .) Jsou-li hodnoty x ve sloupci s_1 uspořádány vzestupně s rostoucím indexem řádku, jsou ve sloupci s_2 v řádcích před (nad) nulovým řádkem (zde jde jen o první řádek) dvojčleny $-2x - 4$, kdežto v řádcích za (pod) nulovým řádkem dvojčleny $2x + 4$. Samozřejmě tam, kde řádek odpovídá jedinému bodu, je pouze příslušná hodnota dvojčlenu (určité číslo).



Obr. 4

Známe-li tedy dobře matematické zdůvodnění postupu, lze vylíčeným způsobem rychle a hlavně bezpečně a přehledně řešit nerovnosti obsahující i větší počet výrazů s absolutními hodnotami. Dbejme však, abychom se neomezili jen na jistý formální postup, ale abychom si vždy zároveň uvědomovali jeho matematické jádro.

Nakonec uvedeme zcela stručně ještě jeden příklad s větším počtem absolutních hodnot:

P ř í k l a d 2. Řešte nerovnost

$$|2x + 7| - 5|x| + |12 - 3x| \leq 2|x - 1| + 4.$$

Ř e š e n í. Nerovnost upravíme nejprve na tvar

$$|2x + 7| - 5|x| - 2|x - 1| + |3x - 12| \leq 4 \quad (2)$$

Tab. 2

	Vstupní podmínka	$ 2x + 7 $	$ x $	$ x - 1 $	$ 3x - 12 $	$-2 x - 1 + 3x - 12 \leq 4$	Závěrečná podmínka	Částečné řešení	
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	$s_6 (s_2 - 5s_3 - 2s_4 + s_5 \leq 4)$	s_7	$s_8 (s_1 \cap s_7)$	
r_1	$x < -\frac{7}{2}$	$-2x - 7$	$-x$	$1 - x$	$12 - 3x$	$-2x - 7 + 5x - 2 + 2x + 12 - 3x \leq 4$	$x \leq \frac{1}{2}$	$x < -\frac{7}{2}$	
r_2	$x = -\frac{7}{2}$	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{45}{2}$	$0 - \frac{35}{2} - \frac{18}{2} + \frac{45}{2} \leq 4$	$-4 \leq 4$	$x = -\frac{7}{2}$	
r_3	$-\frac{7}{2} < x < 0$	$2x + 7$	$-x$	$1 - x$	$12 - 3x$	$2x + 7 + 5x - 2 + 2x + 12 - 3x \leq 4$	$x \leq -\frac{13}{6}$	$-\frac{7}{2} < x \leq -\frac{13}{6}$	
r_4	$x = 0$	7	0	1	12	$7 - 0 - 2 + 12 \leq 4$	$17 \leq 4$	neexistuje	
r_5	$0 < x < 1$	$2x + 7$	x	$1 - x$	$12 - 3x$	$2x + 7 - 5x - 2 + 2x + 12 - 3x \leq 4$	$\frac{13}{4} \leq x$	neexistuje	
r_6	$x = 1$	9	1	0	9	$9 - 5 - 0 + 9 \leq 4$	$13 \leq 4$	neexistuje	
r_7	$1 < x < 4$	$2x + 7$	x	$x - 1$	$12 - 3x$	$2x + 7 - 5x - 2x + 2 + 12 - 3x \leq 4$	$\frac{17}{8} \leq x$	$\frac{17}{8} \leq x < 4$	
r_8	$x = 4$	15	4	3	0	$15 - 20 - 6 + 0 \leq 4$	$-11 \leq 4$	$x = 4$	
r_9	$4 < x$	$2x + 7$	x	$x - 1$	$3x - 12$	$2x + 7 - 5x - 2x + 2 + 3x - 12 \leq 4$	$-\frac{7}{2} \leq x$	$4 < x$	
r_{10}	Úplné řešení: $x \in (U s_8)$, tj. $x \in [(-\infty; -\frac{13}{6}) \cup (\frac{17}{8}; +\infty)]$								

a určíme nulové body jednotlivých lineárních dvojčlenů

$$2x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2},$$

$$x = 0,$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1,$$

$$3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

Podrobný výpočet je v tabulce 2. Řešením nerovnosti (2) a tedy také nerovnosti dané je každé číslo x z dvojice polouzavřených intervalů

$$\left(-\infty \quad -\frac{13}{6} > \quad < \frac{17}{8}; \infty\right), \text{ v množinové symbolice}$$

$$x \in \left(-\infty \quad -\frac{13}{6} > \cup < \frac{17}{8}; \infty\right)$$

Oldřich Jeništa, ČVUT, Praha:

O určitém vztahu u obecného trojúhelníka

Na 81. straně 24. ročníku *Rozhledů matematicko-přírodovědeckých* uvedl inž. Josef Langr zajímavý vztah u obecného trojúhelníka. Sestrojíme-li totiž nad jednotlivými stranami obecného trojúhelníka ABC rovnoramenné trojúhelníky tak, že strany AB , BC , CA jsou jejich základnami a úhel jejich ramen je vždy 120° , pak vrcholy D , E , F takto vzniklých rovnoramenných trojúhelníků tvoří rovnostranný trojúhelník.

Ve svém článku na str. 248 tohoto ročníku *Rozhledů matematicko-fyzikálních* jsem se zabýval jedním způsobem důkazu uvedeného poznatku inž. Langra. Uvedl jsem, že vztah se dá dokázat několika způsoby a že mnou uvedený důkaz vystačí s vědomostmi ze střední školy. Snad má poznámka o možnosti několika způsobů důkazu vztahu přiměla některé čtenáře, že o věci uvažovali a kladné výsledky svých úvah mi sdělili. Velmi zajímavý je způsob řešení, který mi zaslal doc. Jaroslav Chudý, ČVUT, Praha.

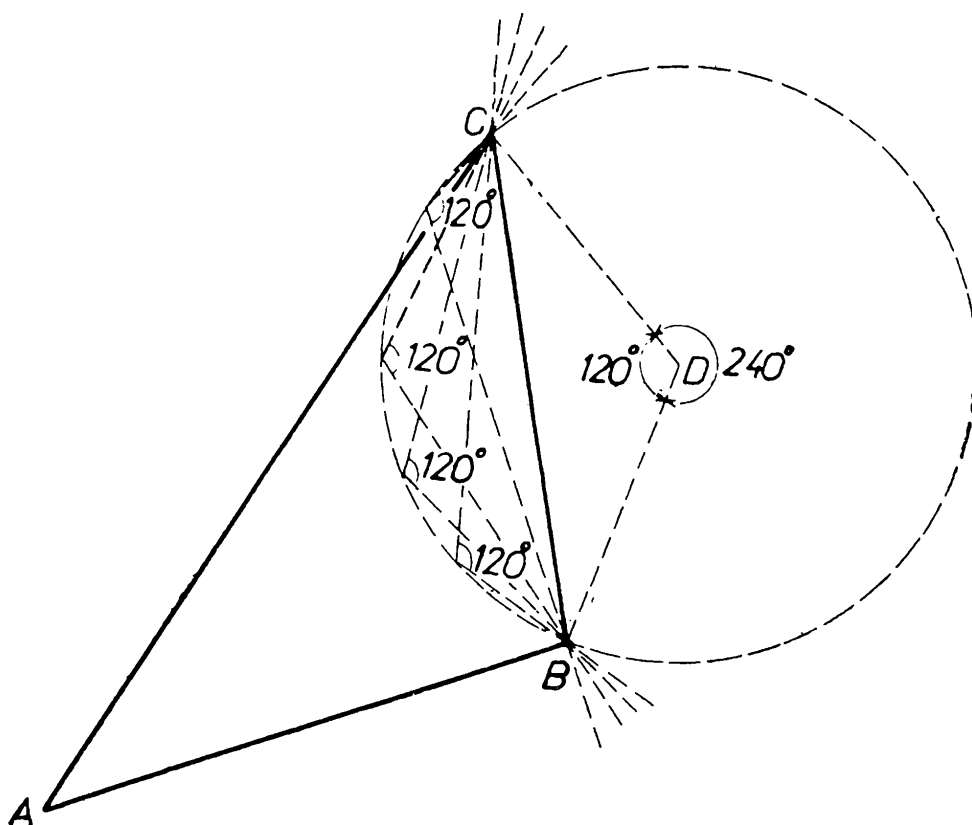
Na rozdíl od mého řešení, které je založeno na dokázání, že strany trojúhelníka DEF jsou si navzájem rovny, dokazuje doc. Chudý rovnostrannost trojúhelníka DEF na základě vzájemné rovnosti jeho vnitřních úhlů.

Sestrojíme např. z bodu D jako středu kružnici, procházející body B a C (obr. 1). Strana BC trojúhelníka ABC je tětivou v sestrojené kruž-

nici a dělí ji na dva kruhové oblouky. Menší oblouk, který je na opačné straně tětiny BC než je střed D kružnice, je geometrickým místem bodů, z nichž je strana BC vidět pod zorným úhlem 120° .

D ů k a z. Jestliže dutý úhel ramen BD a CD rovnoramenného trojúhelníka BCD má být 120° , pak vypuklý úhel těchto ramen je 240° . Tento vypuklý úhel je středovým úhlem nad tětinou BC , a tudíž obvodový úhel nad toutéž tětinou je poloviční, tedy 120° .

Rovněž z bodu E jako středu lze sestavit kružnici, procházející body C a A . Strana CA trojúhelníka ABC je tětinou v této kružnici a opět lze dokázat, že menší kruhový oblouk nad touto tětinou je geometrickým místem bodů, z nichž je strana CA vidět pod zorným



Obr. 1

úhlem 120° . Průsečík S obou sestavených kružnic (obr. 2) je tudíž bod, z něhož je jak strana BC , tak i strana CA vidět pod zorným úhlem 120° . Platí tedy

$$\sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 120^\circ$$

Jak velký je úhel ASB ? Je zřejmé, že

$$\sphericalangle BSC + \sphericalangle ASC + \sphericalangle ASB = 360^\circ$$

Dosadíme-li do této rovnice známé již hodnoty, obdržíme

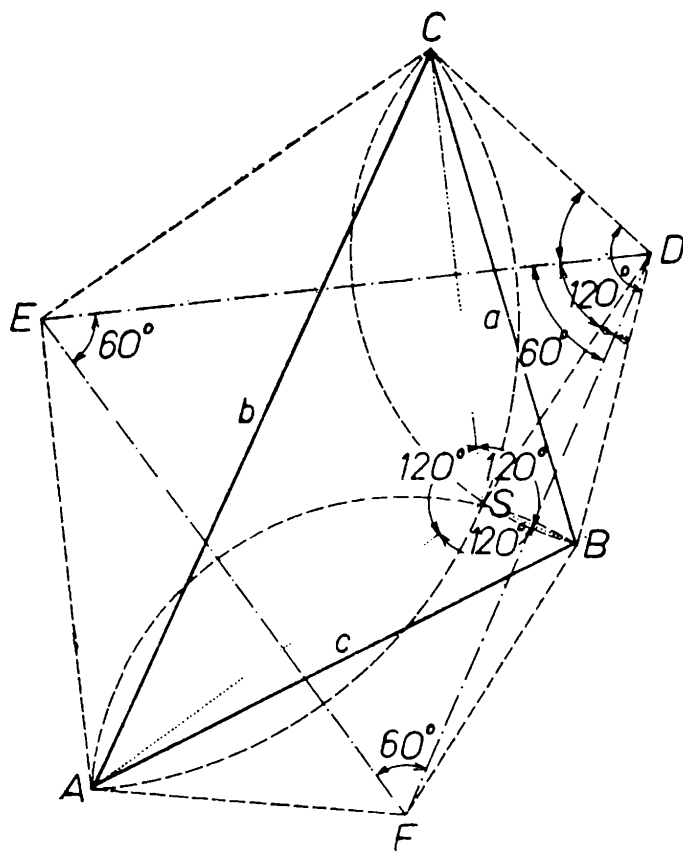
$$120^\circ + 120^\circ + \sphericalangle ASB = 360^\circ,$$

takže

$$\sphericalangle ASB = 120^\circ$$

Z toho ovšem plyne, že z bodu S je každá ze tří stran trojúhelníka ABC vidět pod zorným úhlem 120° , takže bodem S musí procházet i kružnice, sestavená z bodu F jako středu a procházející body A a B trojúhelníku ABC .

Dvě kružnice se mohou navzájem protínat nejvýše ve dvou bodech. Jestliže se kružnice, které jsme v naší úloze sestrojili z bodů D, E, F jako středů nad stranami a, b, c , daného obecného trojúhelníka ABC , navzájem protínají v bodě S a poněvadž se již vždy dvě a dvě z těchto kružnic protínají ještě postupně v bodech A, B, C , nemohou se již protnout v žádném dalším bodě. Lze tedy konstatovat, že uvnitř trojúhelníka ABC existuje právě jen jeden bod S , z něhož jsou vidět strany trojúhelníka pod týmž úhlem $\omega = 120^\circ$.



Obr. 2

Bod S má však ještě jednu zajímavou a pro naši úlohu důležitou vlastnost. Bod S leží jednak na kružnici, sestavené z bodu E jako středu bodem A , jednak na kružnici sestavené z bodu F jako středu bodem A , takže $EA = ES$ a $FA = FS$, z čehož plyne, že bod S je souměrný s bodem A podle strany EF trojúhelníka DEF .

Obdobně pak platí také

$$FB = FS \text{ a } DB = DS,$$

$$\text{i } DC = DS \text{ a } EC = ES,$$

takže bod S je souměrný k bodům A, B, C podle jednotlivých stran trojúhelníka DEF .

Z této souměrnosti pak vyplývá, že strana DE pólí $\sphericalangle CDS$ a strana DF pólí $\sphericalangle BDS$. Jestliže jsme učinili $\sphericalangle BDC = 120^\circ$, pak $\sphericalangle EDF = 60^\circ$. Obdobně ovšem i $\sphericalangle DEF = 60^\circ$ a $\sphericalangle EFD = 60^\circ$, takže

$$\sphericalangle FDE = \sphericalangle DEF = \sphericalangle EFD = 60^\circ$$

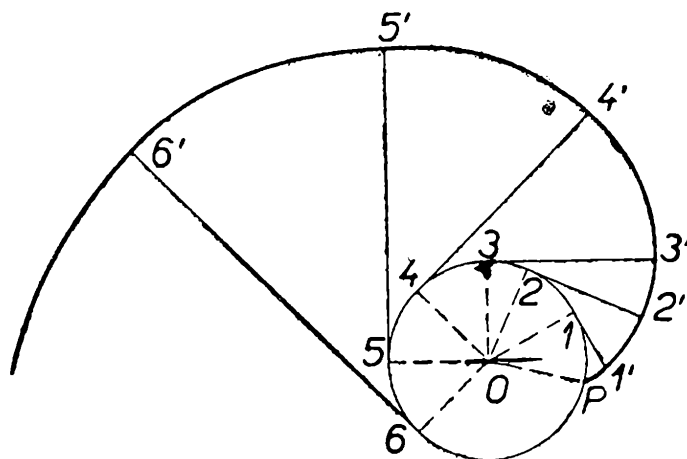
Trojúhelník DEF má tedy všechny vnitřní úhly rovné 60° , je to tudíž trojúhelník rovnostranný.

P a v l a K u n d e r o v á, Olomouc:

Evoluta kružnice na atletické dráze

Každý z čtenářů zná atletickou běžeckou dráhu. Jedna z čar, které jsou na ní zakresleny, je zajímavá křivka nazývaná *evolventa kružnice*. Jak vypadá tato křivka?

Mějme dánu kružnici a představme si, že na jejím obvodu je navinuta nit; pro lepší představu necht' je tato kružnice řídicí kružnicí rotační válcové plochy. Při odvíjení opíše volný konec napnuté niti



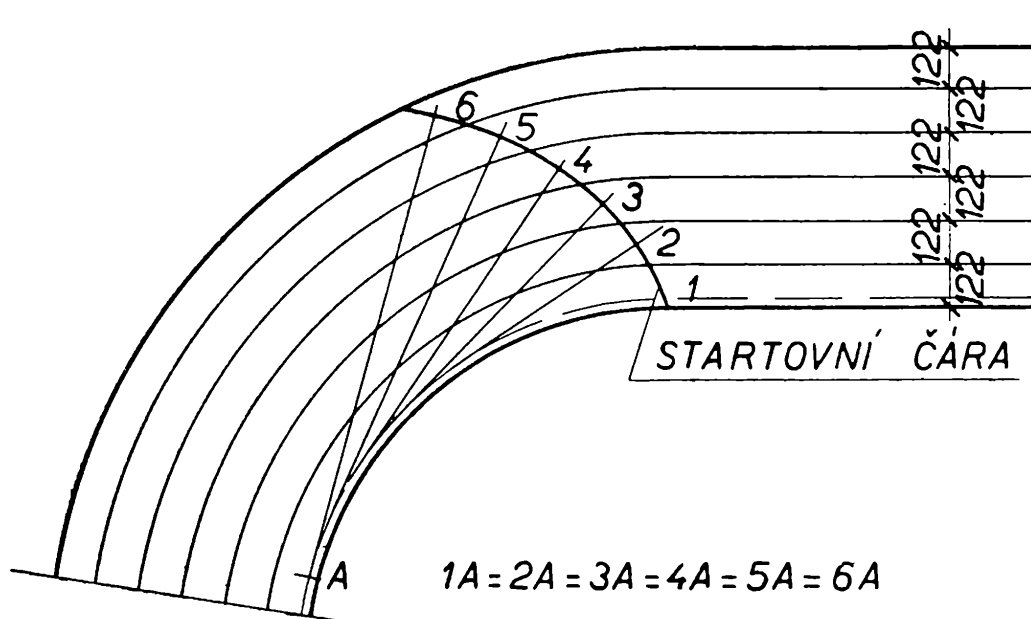
Obr. 1

evolventu kružnice (obr. 1). Každému bodu kružnice (označen 1, 2, 3, ...) odpovídá jediný bod na evolventě (označen 1', 2', 3', ...) a délka odvinuté části niti (např. 33') je rovna délce oblouku kružnice, na němž byla navinuta ($P3$). Je zřejmé, že v každém okamžiku odvíjení je nit tečnou ke kružnici. Bod P nazýváme počátek evolventy. Protože konec niti může být v libovolném bodě kružnice, může být libovolný bod kružnice počátkem evolventy. Každá kružnice má tedy nekonečně mnoho evolvent, které jsou ovšem navzájem shodné.

Jak bylo řečeno v úvodu, setkáme se s evolventou kružnice na atletické běžecké dráze. Atletická dráha je oválná, má dvě rovinky a dvě polokruhové zatáčky. Závodní dráha má délku 400 m (dráha se měří

ve vzdálenosti 30 cm od vnitřního obrubníku). Je-li poloměr polokruhových oblouků (od středu k vnitřnímu okraji dráhy) $r = 31,54$ m, je součet délek rovinek stejný jako součet délek zatáček.

Start ke všem běhům delším než 1000 m (s výjimkou běhu na 1500 m) je v místech, kde rovinka přechází do zatáčky, tedy v oblouku. Závodníci startují ze společné startovní čáry a neběží v drahách. Jistě jste si všimli, že se závodníci snaží ihned po startu dostat k vnitřnímu okraji dráhy; to proto, že běh v oblouku znamená ve vnější dráze nevýhodné prodloužení trati. Závodník proto po startu běží ze svého místa na startovní čáře přímočaře k vnitřnímu okraji dráhy, a to po tečně k oblouku vnitřního obrubníku.



Obr. 2

Tvar startovní čáry pro tyto běhy musí být takový, aby všichni závodníci proběhli stejně dlouhou trať. Správná startovní čára má tedy tvar evolventy kružnice. Skutečně (obr. 2) první závodník na vnitřním okraji dráhy běží po oblouku $1A$ a délka jeho dráhy musí být stejná jako délka dráhy druhého běžce, třetího atd., i běžce, který vybíhá od vnějšího okraje dráhy a běží přímočaře po dráze $6A$. Pořadatelé musí kreslit takovou startovní čáru provazem dlouhým asi 23 m, který navinou na vnitřní obrubník dráhy. Volný konec napnutého provazu kreslí při odvíjení žádanou křivku.



E v ž e n Ě í m a n, CSc, Praha:

Spektrum — řeč atomů

II. Bohrovův výklad Rydbergovy konstanty

Vyložili jsme si v minulém článku, jak se Balmerovi podařilo najít empirický vztah

$$\sigma_{s,n} = R \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{(s+n)^2} \right), \quad (9)$$

pro vlnočty (σ) spektrálních čar vysílaných atomem vodíku: kde $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ je číslo série; $n =$ přirozené číslo $= 1, 2, 3, 4, 5,$ je pořadové číslo čáry v oné sérii.

Průměrná hodnota Rydbergova vlnočtu (určená ze spektroskopicky proměřených čtyř čar Balmerovy série byla, jak jsme viděli, $R = 109\,708$ [cm^{-1}]. Dnes se považuje pro vodík za nejpřesnější hodnota $R_H = 109\,677,58$ [cm^{-1}], zjištěná z přesných spektroskopických měření H o u s t o n o v ý c h.

Odkud tato číselná hodnota vznikla, nemohl Balmer, ani tehdejší fyzikové vůbec zjistit. Pokusme se to najít postupem podle dánského fyzika N i e l s e B o h r a.

Teprve začátkem tohoto století, kdy byly vytvořeny určitější představy o stavbě atomu, byl zaveden pojem elektronu jako malé hmotné částice o nepatrné hmotě m_e , která nese záporný (tzv. elementární) náboj e a vznikla důležitá, tzv. kvantová teorie; tehdy se mohlo zdařit teoretické odvození Rydbergovy konstanty R .

Dne 14. prosince 1900 přednášel německý fyzik M a x P l a n c k v berlínské akademii věd a ukázal, že řada obtíží v teorii záření absolutně černého tělesa se odstraní, zavede-li se předpoklad, že zářivá energie může být vydávána (a také přijímána) jen po celistvých kvantech¹⁾, která jsou úměrná kmitočtu ν uvažovaného záření. Energie takového kvanta je tedy dána vztahem

$$W = h \cdot \nu \text{ [J ; Js, s}^{-1}\text{]}, \quad (10)$$

¹⁾ Roku 1905 vyložil Einstein pomocí kvantové teorie tzv. fotoelektrický jev: Jedno světelné kvantum (Einsteinem nazvané „foton“) o energii $h \cdot \nu$ vyrazí dopadem na destičku z alkalického kovu jeden elektron.

kde ν (jednotka $[s^{-1}]$) je kmitočet záření; $h = 6,624 \cdot 10^{-34} [J s]$ je konstanta (dnes zvaná *Planckova*).

Niels Bohr použil k teoretickému určení Rydbergovy konstanty postupu zv. *dimenzionální analýza*.

Dimenzionální analýza se zakládá na větě: Obě strany každé fyzikální rovnice musí mít stejný rozměr²⁾, tj. musí být vyjádřeny součinem týchž základních jednotek.

Jako příklad uvažujme sílu F , jejíž jednotkou je newton $= [N] = [kg m s^{-2}]$, což zapíšeme symbolicky pomocí lomené závorky³⁾

$$\{O\} = [N] = [kg m s^{-2}],$$

což čteme: Jednotkou veličiny F je $[N]$, čili $[kg m s^{-2}]$.

Ať prohlédneme kterýkoliv vzorec pro sílu, musí jeho pravá strana vždy mít rozměr $[kg m s^{-2}]$. Uvažujme zákon síly $F = m a$. Hmotu m má jednotku (čili rozměr) $[kg]$, zrychlení a jednotku $[m s^{-2}]$, součin tedy dává $[kg m s^{-2}]$. Odstředivá síla závisí na hmotě m , rychlosti v a poloměru zatáčky r . Protože pro kteroukoliv sílu musí vyjít jednotka $[kg m s^{-2}]$, je zřejmé, že vzorec musí obsahovat hmotu pouze v první mocnině, aby vyšel $[kg^1]$, ale rychlost ve druhé mocnině, jinak nedostaneme $[s^{-2}]$. Avšak součin $m v^2$ má jednotku $[kg m^2 s^{-2}]$, takže je jasné, že poloměr zatáčky r musí být ve jmenovateli, tj. mít exponent -1 , čili platí $F_{\text{odstř.}} = \frac{m v^2}{r}$. Zkoumejme nyní, jak odstředivá síla závisí na hmotě m , poloměru zatáčky r a době oběhu T . Snadno

nahlédneme, že hledaný vztah bude obsahovat součin $\frac{m r}{T^2}$. Tentokrát nám vyšel vzorec sice dimenzionálně správný, ale jak známe z mechaniky, neúplný; chybí v něm číselná konstanta $4\pi^2$, která je bezrozměrná. Zde jsme se setkali s nepříjemnou potíží, že hodnoty bezrozměrných konstant nelze zjistit dimenzionální analýzou. Uvidíme dále, že to v praxi nevádí, známe-li pro danou veličinu nějaké hodnoty, získané třeba přibližným měřením.

Prvým krokem při dimenzionální analýze je vždy stanovení, na kterých jiných veličinách uvažovaná veličina je závislá, což je mnohdy značně obtížné. Nevíme, kolik času Bohr potřeboval, než uhodl správně

²⁾ V tomto článku jsou rozměry veličin vyjadřovány součinem základních jednotek. Jsou ovšem i jiné způsoby vyjadřování rozměrů, např. součinem symbolů pro základní veličiny nebo pouhou posloupností exponentů u těchto symbolů. *Poznámka red.*

³⁾ V tomto článku budeme fyzikální jednotky dávat do hranaté závorky, aby se zabránilo nedorozumění. Tedy m = hmota, $[m]$ = metr, s = dráha, $[s]$ = sekunda, g = tíhové zrychlení, $[g]$ = gram atd.

nou sestavu veličin. My však si zde řekneme výslednou sestavu Bohrových veličin:

1. Protože vysílané spektrální čáry souvisí nějak s pohybem elektronů, musí vzorec pro R obsahovat hmotu elektronu m_e a jeho náboj e .

2. Protože kladně nabitě jádro (o náboji $+e$) se přitahuje s elektronem (negatronem o náboji $-e$) podle Coulombova zákona, musí vzorec pro R obsahovat také konstantu ϵ_0 .

3. Zkoumá se jev záření, kde musí platit kvantová teorie; proto se bude vyskytovat Planckova konstanta h .

4. Záření se šíří ve vakuu rychlostí zhruba $3 \cdot 10^8$ [m s⁻¹], bude tedy ve hledaném vzorci asi též veličina c .

5. Kromě toho může ovšem hledaný vzorec obsahovat nějakou bezrozměrnou konstantu, kterou označme K a kterou najdeme dodatečně.

Hodnoty všech předpokládaných veličin a jejich dimenze jsou:

hmota elektronu	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ [kg]; $\{m_e\} = [\text{kg}^{+1}]$,
náboj elektronu	$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ [A s]; $\{e\} = [\text{s A}]$,
influenční konstanta	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ [m ⁻³ kg ⁻¹ A ² s ⁴]; $\{\epsilon_0\} =$ $= [\text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{A}^2 \text{s}^4]$,
Planckova konstanta	$h = 6,624 \cdot 10^{-34}$ [J s]; $\{h\} = [\text{m}^2 \text{kg}^1 \text{s}^{-1}]$,
rychlost světla ve vakuu	$c = 3 \cdot 10^8$ [m s ⁻¹]; $\{c\} = [\text{m s}^{-1}]$

Hledanou veličinou je *Rydbergův vlnčet* $R \doteq 1,09708 \cdot 10^7$ [m⁻¹], jejíž rozměr je $\{R\} = [\text{m}^{-1}]$

Nechť hledaný vzorec pro R obsahuje veličinu m s exponentem x , veličinu e s exponentem y , dále ϵ_0 s esponentem z , veličinu h s exponentem u a veličinu c s exponentem v . Bezrozměrná konstanta K budiž v první mocnině. Pak Rydbergův vlnčet je vyjádřen vztahem

$$K \cdot m^x \cdot e^y \cdot \epsilon_0^z \cdot h^u \cdot c^v = R. \quad (11)$$

Dosadíme-li do (11) jednotky všech veličin, platí

$$[\text{kg}]^x \cdot [\text{A s}]^y \cdot [\text{m}^{-3} \text{kg}^{-1} \text{A}^2 \text{s}^4]^z \cdot [\text{m}^2 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-1}]^u \cdot [\text{m s}^{-1}]^v = \text{m}^{-1},$$

což po odmocnění a sloučení exponentů dá dimenzionální rovnici

$$[\text{m}]^{3z+2u+v} \cdot [\text{kg}]^{x-z+u} \cdot [\text{s}]^{y+4z-u-v} \cdot [\text{A}]^{y+2z} = [\text{m}^{-1}]. \quad (12)$$

Na levé straně je metr s exponentem $3z + 2u + v$, na pravé straně je metr s exponentem -1 . Tyto exponenty si musí být rovny; musí tedy platit rovnice $3z + 2u + v = -1$

Kilogram, sekunda, ani ampér na pravé straně nejsou, proto musí být exponenty levé strany vesměs rovny nule, čili

$$x - z + u = 0, \quad y + 4z - u - v = 0, \quad y + 2z = 0$$

Máme řešit soustavu čtyř rovnic o 5 neznámých. Algebraicky může daná soustava mít nekonečný počet řešení, ale fyzikálně bude vyhovovat jenom jediné, které najdeme takto: Jednu neznámou (např. v) přehodíme

na pravou stranu (jako bychom ji považovali za známou). Vznikne tak soustava rovnic

$$\begin{array}{rcl} & -3z + 2u & = -1 - v \\ x & -z + u & = 0 \\ y & +4z - u & = v \\ y & +2z & = 0 \end{array} \quad (13)$$

kterou rozřešíme (třeba sčítací metodou). Jak si snadno ověříte, vyjde

$$x = 1; \quad y = 2 - 2v; \quad z = -1 + v; \quad u = -2 + v. \quad (14)$$

Neznámá v značí exponent, s kterým se v hledaném vzorci vyskytne rychlost světla c . Podle našich zkušeností může ve fyzikálních vzorcích mít rychlost světla exponent buď celistvý (kladný, nulový neb záporný), nebo také lomený ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ apod.). Proto nastane namáhavé určování, který ze vzniklých vzorců je správný. Náhodou je náš případ jednoduchý.

Dosadí- me-li do (14)	vyjde řešení,	což dosazeno do (11), dává jako možný vzorec vztah	
$v = 0$	$x = 1; y = 2;$ $z = -1; u = -2;$	$R = K \frac{m e^2}{\epsilon_0 h^2}$	(15,1)
$v = +1$	$x = 1; y = 0;$ $z = 0; u = -1;$	$R = K \frac{m c}{h}$	(15,2)
$v = -1$ atd.	$x = 1; y = 4;$ $z = -2; u = -3;$	$R = K \frac{m e^4}{\epsilon_0^2 h^3 c}$	(15,3)

Nyní nezbývá než dosazováním daných hodnot za $m, e, \epsilon_0, h, c, R$ zjišťovat, který ze vzorců (15,1), (15,2), (15,3) aspoň řádově vyhovuje. Bohrovi se zdařilo již snadno zjistit, že je to vzorec třetí, který píšme ve tvaru

$$\frac{R}{K} = \frac{m e^4}{\epsilon_0^2 h^3 c}$$

Logaritmičkový výpočet

$$\begin{array}{rcl} \log m_e & = & 0,95\ 933 - 31 \\ 4 \log e & = & 0,81\ 864 - 76 \\ \hline \log \text{čitatele} & = & 21,77\ 797 - 127 \\ 2 \log \epsilon_0 & = & 1,89\ 428 - 24 \\ 3 \log h & = & 2,46\ 336 - 102 \\ \log c & = & 8,47\ 712 \\ \hline \log \text{jmenovatele} & = & 12,83\ 476 - 126 \\ \log \frac{R}{K} & = & 7,94\ 321 \end{array}$$

dal pro hodnoty uvedené výše výsledek:

$$\frac{R}{K} = 8,7742 \cdot 10^7 [\text{m}^{-1}] = 8,7742 \cdot 10^5 [\text{cm}^{-1}] = 8 \cdot 1,0968 \cdot 10^5 [\text{cm}^{-1}],$$

což je téměř přesně 8krát větší hodnota, než je empirická Balmerova $1,09708 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$. Je tedy konstanta $K = \frac{1}{8}$ Bohrov vzorec pro Rydbergův vlnčet tedy zní

$$R = \frac{1}{8} \frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^3 c} \quad (16)$$

Vzhledem k nepřesným daným hodnotám (pro m_e , e , h , ...), jak je vidět z hořejšího, je Bohrov vzorec pro R číselně ověřen přímo skvěle.

Tím se Bohrovi podařilo dimenzionální analýzou odvodit teoreticky prvou část Balmerova vzorce (9), totiž Rydbergův vlnčet.

Na tomto nádherném Bohrově úspěchu dimenzionální analýzy jsme se přesvědčili, jak cenná a přitom jednoduchá³⁾ je tato metoda fyziky. Nepotřebujeme vůbec znát teorii zkoumaného jevu; stačí vědět, které veličiny mají vliv na jeho průběh, načež řešením několika rovnic a substitucí známých hodnot se pokoušíme najít příslušný fyzikální vzorec. Na procvičení této metody je na konci článku vhodná úloha.

Zbývá ještě teoreticky vyvodit celý Balmerův vzorec pomocí známých fyzikálních zákonů (včetně kvantové teorie). Způsob, jakým to Bohr provedl, seznáme později.

J i ř í M í d a, Brandýs n. L.

O kolíčkovém reostatu

Proud v elektrickém obvodu můžeme měnit zvyšováním nebo snižováním odporu v obvodu. Zařízení, kterým to provádíme, se nazývá reostat. Někdy je však třeba znát, jak velký odpor byl reostatem do obvodu zapojen. Pro tento účel je určen k o l í č k o v ý r e o s t a t. Skládá se z řady cívek a na každé cívce je navinut odporový drát s přesně známým odporem. Všechny cívky (obr. 1) jsou zapojeny za sebou tak, že cívku zařadíme do obvodu vytažením kolíčku a z obvodu ji vyřadíme zasunutím kolíčku; příslušná cívka je kolíčkem zkratována. Na obrázku jsou do obvodu zařazeny jen cívky s odpory R_2 a R_3 .

⁴⁾ Současně vidíme, jak je vysoce užitečné znát jednotky (rozměry) nejdůležitějších fyzikálních veličin (v , a , m , F , A , P , p , Q , E , U , I , R , C , H , B , Φ , λ , ν apod.).

Mějme kolíčkový reostat s n cívkami. Každý odpor, který na něm nastavíme, potom určíme podle vztahu

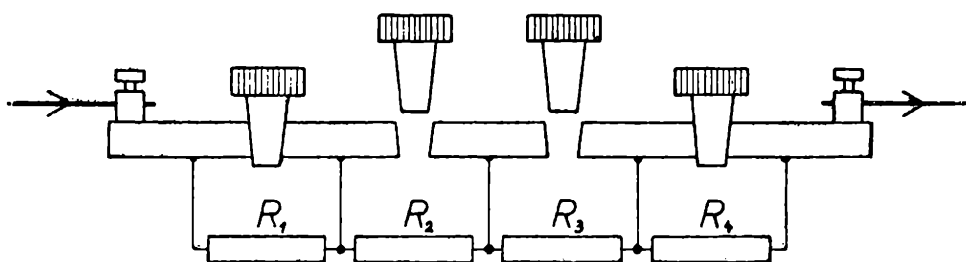
$$R = x_1 \cdot R_1 + x_2 \cdot R_2 + x_3 \cdot R_3 + \dots + x_n \cdot R_n, \quad (1)$$

kde R_i je odpor i -té cívky ($i = 1, 2, \dots, n$), při čemž $x_i = 0$, je-li kolíček příslušný k i -té cívce (dále již stručně i -tý kolíček) zasunut, $x_i = 1$, jestliže je i -tý kolíček vyjmut. Kolíčky a segmenty, k nimž jsou připojeny cívky, jsou masivní a zhotovené obvykle z mosazi, takže lze jejich odpor zanedbat.

Podle vztahu (1) je tudíž zařazený odpor určen uspořádanou n -ticí

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

kde x_i je buď 0 nebo 1. Takových různých n -tic je 2^n . Důkaz tohoto tvrzení provedeme úplnou indukcí. Pro nejmenší možné n , tj. pro $n = 1$, tvrzení platí - jsou dvě možnosti: (0) a (1). Nechť tvrzení platí pro jedno určité n , tj. příslušných n -tic je 2^n . Všechny různé uspořádané $(n + 1)$ -tice dostaneme, když ke každé n -tici připojíme jednou 0 a podruhé 1. Tudíž $(n + 1)$ -tic je dvakrát více než n -tic, tj. $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Důkaz matematickou indukcí je proveden.



Obr. 1

Na kolíčkovém reostatu o n -cívkách lze tedy nastavit nejvýše 2^n různých hodnot. Mezi tyto hodnoty je však započítán i odpor příslušející k n -tici skládající se ze samých nul, kdy všechny kolíčky jsou zasazeny a odpor reostatu je roven nule. Různých nenulových hodnot lze tedy na kolíčkovém reostatu nastavit nejvýše $2^n - 1$.

Odporů v ohmech bývají na kolíčkovém reostatu s ohledem na vyjadřování čísel v desítkové soustavě sestaveny buď podle této soustavy

$$0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 1, 2, 3, 4; 10, 20, 30, 40; 100, 200, 300, 400, \quad (2)$$

nebo

$$0,1; 0,2; 0,2; 0,5; 1, 2, 2, 5; 10, 20, 20, 50; 100, 200, 200, 500. \quad (3)$$

Každá z užívaných soustav má 16 cívek a je umožněno zařadit kterýkoliv odpor od $0,1 \Omega$ do 1111Ω po jednotlivých desetínách ohmu. Na reostatu lze tudíž nastavit 11 110 různých nenulových hodnot. Avšak

$$2^{16} - 1 = 65\,536 - 1 = 65\,535,$$

takže zdaleka není využito všech možností. Pro nastavení některých odporů na uvedených kolíčkových reostatech existuje totiž několik způsobů.

Lze vůbec sestavit takový kolíčkový reostat, který by měl n cívek a bylo by na něm možno nastavit $2^n - 1$ různých nenulových odporů? Přidejme ještě další podmínku. Chceme sestavit reostat, na němž by bylo možno nastavit při n cívkách všechny odpory dané přirozenými čísly počínaje 1Ω do $(2^n - 1) \Omega$.

Nejjednodušší reostat by byl pro $n = 1$. V tom případě nejvyšší hodnota je $2^1 - 1 = 1$. V tomto případě reostat obsahuje jedinou cívku o odporu 1Ω .

Nyní předpokládejme, že jsme našli reostat o k cívkách, který vyhovuje našemu požadavku, tj. lze na něm nastavit všechny odpory lišící se o 1Ω počínaje 1Ω a konče $(2^k - 1)$ ohmy. Přidejme další cívku tak, abychom umožnili i nastavení odporu $2^k \Omega$. Jestliže nemá být možné nastavit nějaký odpor do $(2^k - 1)$ ohmů dvěma způsoby, musí být odpor přidané cívky větší než $(2^k - 1)$ ohmů. Z toho tedy plyne, že přidaná cívka má odpor právě $2^k \Omega$. Protože lze na reostatu bez cívky $2^k \Omega$ nastavit odpory

$$1, 2, 3, \dots, 2^k - 1 \text{ ohmů ,}$$

je možno nastavit pomocí cívky $2^k \Omega$ vedle odporu $2^k \Omega$ i odpory

$$2^k + 1, 2^k + 2, 2^k + 3, \dots, 2^k + (2^k - 1) \text{ ohmů .}$$

Platí

$$2^k + (2^k - 1) = 2^{k+1} - 1$$

Podařilo se nám tedy přidáním cívky $2^k \Omega$ při zvětšení počtu cívek na $k + 1$ dosáhnout nastavitelnosti odporů od 1Ω po 1Ω do $(2^{k+1} - 1)$ ohmů.

Reostat o 2 cívkách vznikne z reostatu o jedné cívce 1Ω přidáním cívky 2Ω , reostat o 3 cívkách z reostatu o 2 cívkách přidáním cívky 4Ω atd. Při n cívkách se tedy jedná o soustavu cívek s odpory

$$1, 2, 4, \dots, 2^{n-1} \text{ ohmů .} \quad (4)$$

Použijeme-li vztahu (1), pak na kolíčkovém reostatu užívajícím soustavy (4) platí pro nastavený odpor

$$R = x_n \cdot 2^{n-1} + x_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \dots + x_3 \cdot 2^2 + x_2 \cdot 2^1 + x_1 \cdot 2^0, \quad (5)$$

kde x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nabývá hodnoty 1 nebo 0, podle vytažení nebo zasunutí i -tého kolíčku. Zápis (5) ukazuje, že napíšeme-li čísla x_i způsobem

$$(x_n x_{n-1} \dots x_3 x_2 x_1),$$

dostaneme zápis odporu R ve dvojkové soustavě. Tento výsledek odpovídá charakteru problému; polohou kolíčku lze vyjádřit jen dvě číslice:

0 a 1. Proto se přece užívá dvojkové soustavy u elektronkových počítačích strojů. Tam jsou také právě dvě možnosti: obvodem buď proud prochází (číslíce 1), nebo neprochází (číslíce 0).¹⁾

Jestliže budeme požadovat nastavitelnost odporů po $0,1 \Omega$ od $0,1 \Omega$, pak uijeme n cívek s odpory

$$1, 2, 4, \dots, 2^{n-1} \text{ desetin ohmu,}$$

tj.

$$0,1; 0,2; 0,4; \dots; 0,1 \cdot 2^{n-1} \text{ ohmů} \quad (6)$$

Chceme-li užívat reostat v rozsahu $0,1 \Omega$ až 1111Ω , pak vystačíme se 14 prvními cívkami soustavy (6). Rozsah však bude až do $0,1 (2^{14} - 1) = 1638,3 \Omega$.

Inž. Zdeněk Kos, Praha:

Měření srážek a zpracování srážkových úhrnů

Sražené páry z ovzduší, jako jsou déšť, sníh, kroupy, rosa apod., se v meteorologii nazývají srážky. Bez srážek, a tedy bez vody, by vůbec nebyl možný život na souši. Srážky mají přímý vliv na řadu lidských činností, zejména na zemědělství. Nedostatek srážek znamená v mnoha oblastech nízké úrody a snížení životní úrovně, někde i katastrofální hladomory. Nadbytek srážek naopak vyvolává povodně. Množství srážek však není ještě samo o sobě rozhodující, nýbrž je třeba, aby srážky byly také vhodně rozděleny.

Množství srážek se většinou udává v milimetrech. Rozumí se tím výška, kam by sahala srážková voda (u pevných srážek po rozpuštění) na vodorovném povrchu, když vyloučíme ztráty výparem, vsakem a odtokem. Srážkové výšky určujeme s přesností maximálně na desetinu milimetru. Přístroje na měření srážek se nazývají deštoměry (ombrometry) (obr. 1). Jsou to válcové nádoby se svislými stěnami (obr. 1), které zachycují srážky a odvádějí je do sběrné nádoby. Tam jsou srážky uchovávány a měří se většinou jednou denně.

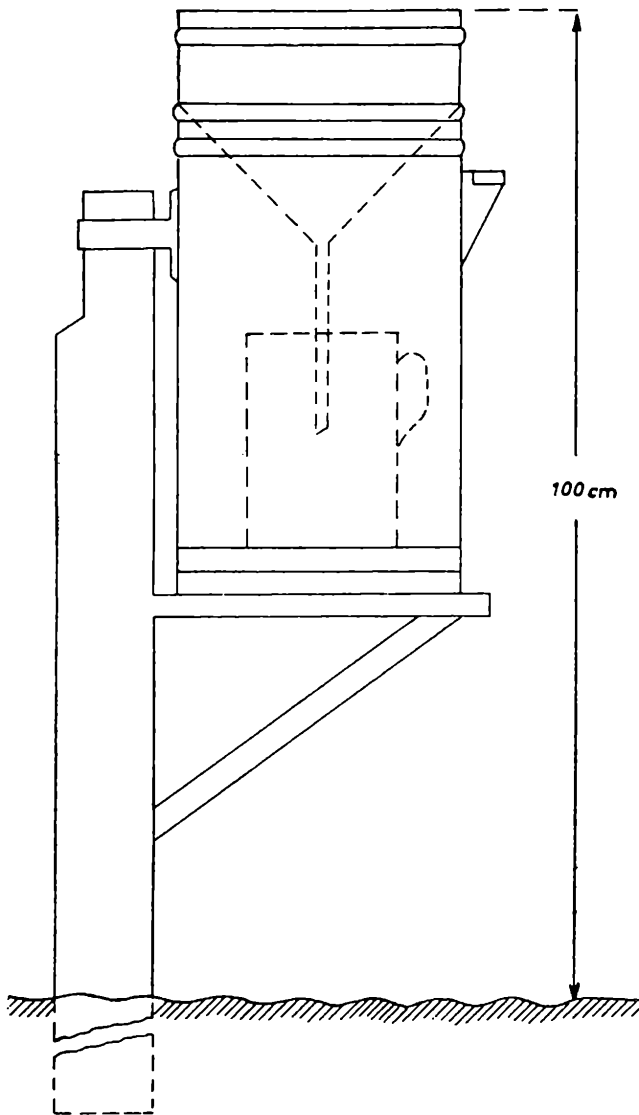
Na těžko přístupných místech, kde jde hlavně o celkové množství srážek za delší období, používá se tzv. totalizátor (obr. 2). Srážková voda je v totalizátoru chráněna před zmrznutím vhodnou příměsí (např. chlorkalcium) a před výparem vazelínovým olejem.

Časový průběh srážek, čili srážková intenzita, se zjišťuje zapisujícími deštoměry čili ombrografy. Rostoucí srážková výška se registruje pomocí plováku, jehož pohyb se přenáší na zapisující

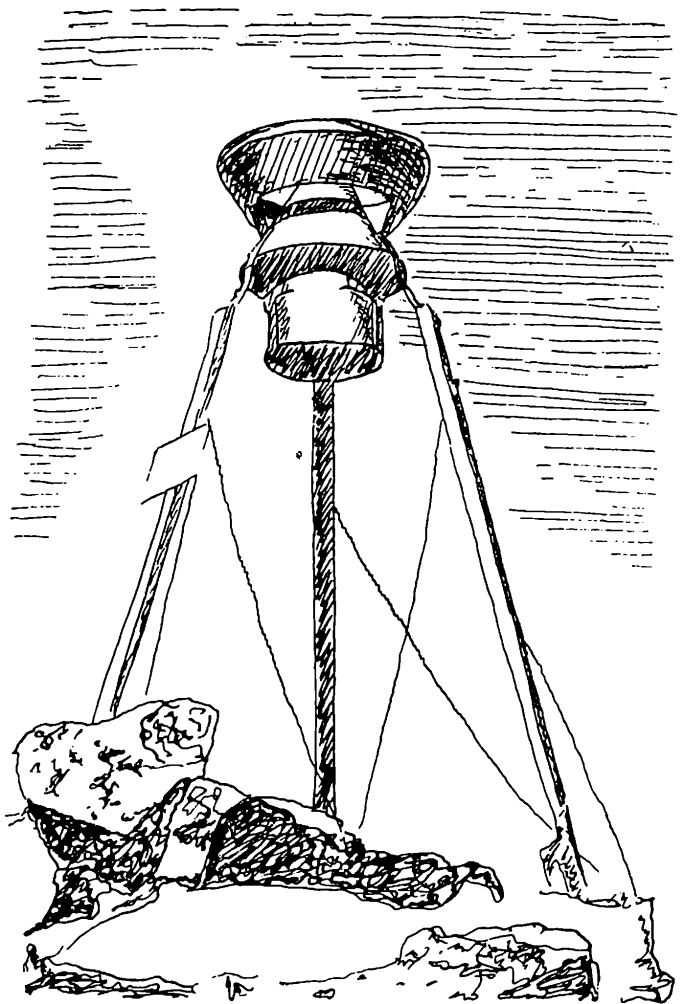
¹⁾ O číselných soustavách pojednává blíže článek inž. J. Klíra: Číselné soustavy, v 1. čísle Rozhledů matematicko-fyzikálních, ročník 1960—61.

pero, které je zaznamenává na registrační pásku rovnoměrně se otáčející.

Záznamy srážek jsou pro přímé využití v plánovací a projekční praxi nepřehledné. Nelze přímo z nich odvozovat velikosti prvků vodohospodářských zařízení. Záznamy o srážkách je nutno nejdříve zpracovat. Cílem tohoto zpracování je nahradit tato měření, čili tzv. statistický soubor, několika málo údaji, které by celý statistický soubor dobře charakterizovaly. Používáme přitom metod statistiky a matematické statistiky¹). Srážky se měří denně; tyto hodnoty se sčítají v každém



Obr. 1. Dešťoměr.



Obr. 2. Totalizátor.

měsíci a z takto zjištěných měsíčních srážkových úhrnů hledáme aritmetický průměr za dlouhé období. Dále se zjišťují nejvyšší a nejnižší úhrny srážek v jednotlivých měsících, průměry srážek za rok, za vegetační období (duben—září), zjišťuje se průměrný počet dnů se srážkami 0,1 mm a více, 1,0 mm a více, 10,0 mm a více, rovněž v jednotlivých měsících.

¹) Viz Inž. M. Špačková, Statistika proniká na všechna pracoviště, Rozhledy matematicko-fyzikální, č. 5, 6, 7 letošního ročníku 42.

Některé obory vodního hospodářství vyžadují však podrobnější znalosti o srážkových úhrnech. Tak např. pro plánování a navrhování závlah chceme vědět, jaká je pravděpodobnost, že ve vegetačním období spadne určité množství srážek nebo méně. Zbytek až do celé vláhy, kterou spotřebuje plodina za vegetační období, je třeba doplnit uměle, tj. závlahou.

Setkali jsme se s pojmem *p r a v d ě p o d o b n o s t i* a je třeba, abychom si jej blíže osvětlili. Uvedeme nejdříve tzv. klasickou definici pravděpodobnosti, protože je názorná, i když má jisté nedostatky.

Pravděpodobností jevu A se nazývá číslo p

$$0 \leq p \leq 1, \quad (1)$$

pro které platí

$$p = \frac{m}{n}, \quad (2)$$

kde m je počet případů příznivých, tj. kdy jev A nastal, n je počet případů možných. Z rovnice (2) plyne, že pravděpodobnost jistého jevu je rovna jedné, pravděpodobnost nemožného jevu je rovna nule.

Tato definice je omezena na případy, kdy n je konečné číslo. Pro případy, že $n \rightarrow \infty$, je nutno užívat tzv. statistické určení pravděpodobnosti, kdy za pravděpodobnost se bere hodnota *t e o r e t i c k é* neboli *i d e á l n í r e l a t i v n í f r e k v e n c e*, tj. číslo, ke kterému se relativní frekvence blíží, když n roste. Relativní frekvence h je poměr počtu případů i pokusů, ve kterých jev A nastal, k celkovému počtu N provedených pokusů (resp. měření) čili číslo

$$h = \frac{i}{N} \quad (3)$$

V našem případě, kdy zpracováváme srážkové úhrny za vegetační období, je i počet roků, kdy je srážkový úhrn za vegetační období x roven nebo menší než srážková výška x_i mm, čili pro $x \leq x_i$, N je počet roků, za něž máme měřené hodnoty.

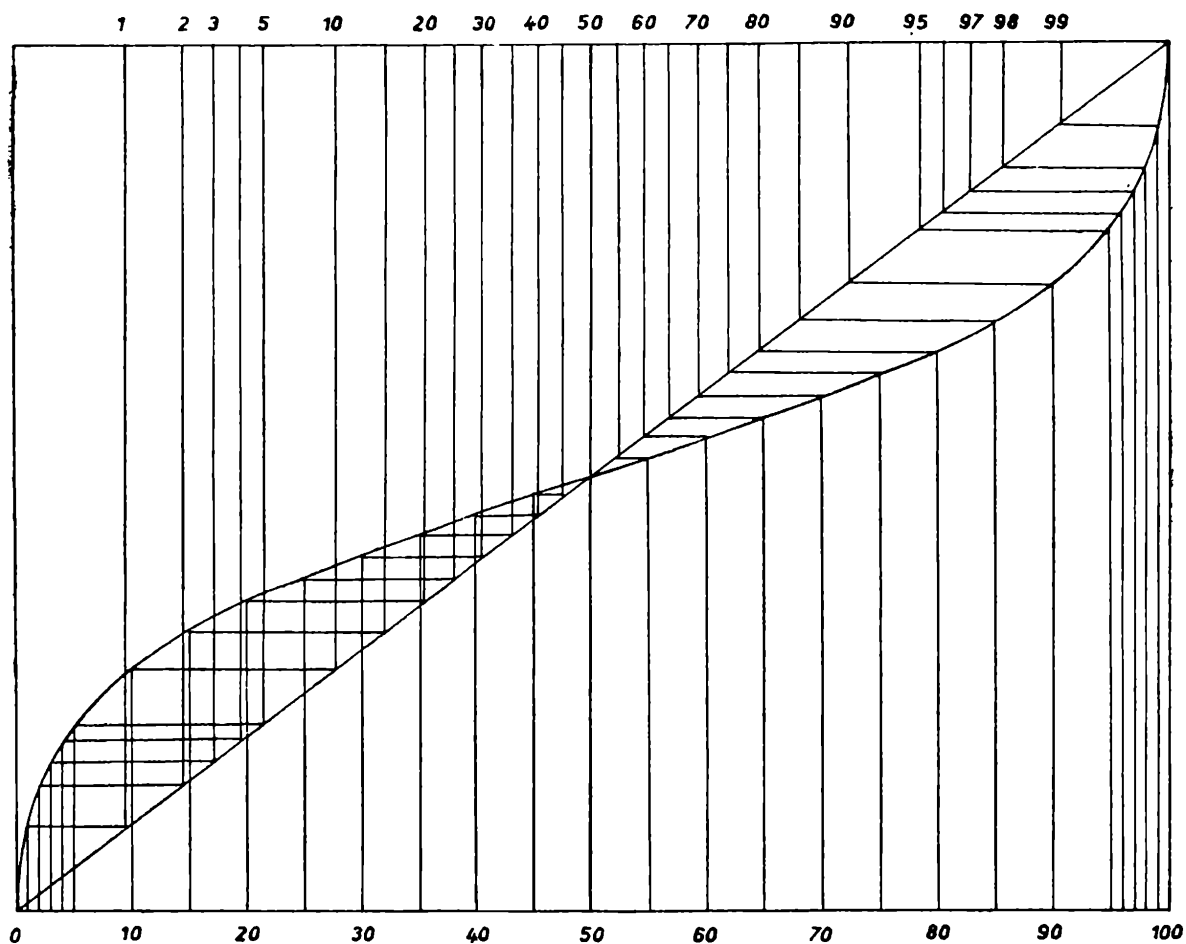
Je patrné, že číslo i , a tedy i relativní frekvence h , závisí při určitém pevném N na velikosti srážkového úhrnu x_i . Můžeme tedy určit součtový frekvenční polygon těmito rovnicemi

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \text{ pro } x < x_i \\ h(x) &= \frac{i}{n} \text{ pro } x_i < x \leq x_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ h(x) &= 1 \text{ pro } x \geq x_n; \end{aligned} \quad (4)$$

dostáváme tak stupňovitou čáru. Když se číslo n zvětšuje, délky jednotlivých stupňů se zkracují a polygon se blíží plynule křivce, jejíž pořadnice $p(x)$ nám udává pravděpodobnost, že zkoumaná veličina - v našem případě srážkový úhrn za vegetační období - bude menší nebo roven úsečce

x . Abychom si konstrukci této křivky usnadnili, upravíme nejdříve součtový frekvenční polygon. V bodě $x = x_i$ se $h(x)$ mění skokem z hodnoty $\frac{i-1}{n}$ na $\frac{i}{n}$. Tuto úsečku nahradíme bodem $\frac{i-1/2}{n}$, který tento stupeň půlí.

Při podrobnějším studiu pomocí teorie pravděpodobnosti se ukazuje, že křivka, kterou bychom dostali ze součtového frekvenčního polygonu pro $n \rightarrow \infty$, je tzv. Gaussova křivka normálního rozdělení (obr. 3). Sestrojení této křivky si podstatně usnadníme, když body $\frac{i-1/2}{n}$ vyneseme v tzv. pravděpodobnostní stupnici, tj. stupnici, která převádí součtovou křivku normálního rozdělení na přímku (obr. 3). Nejjednodušší je sestrojení této stupnice na zá-



Obr. 3. Gaussova křivka a konstrukce pravděpodobnostní sítě.

kladě hodnot podle tab. I nebo hodnot jim úměrných. Protože je to stupnice souměrná, uvádíme pouze jednu její polovinu měřenou od hodnoty 50 %.

Postup při zpracování vegetačních úhrnů srážek je tento: chronologické tabulky, kde jsou srážky uspořádány podle let, jak jsou mě-

Tab. I. Souřadnice pravděpodobnostní stupnice

$p \%$ $a \text{ mm}$	50 0	55 13	60 26	65 39	70 53	75 68	80 84	85 104
$p \%$ $a \text{ mm}$	90 128	95 164	96 175	97 188	98 206	99 233	99,5 258	99,9 310

řeny (tab. II), sestrojíme tab. III, kde jsou srážkové úhrny uspořádány se-
stupně a každé srážkové výšce x_i s pořadovým číslem i je přiřazeno číslo
 $h(x) = \frac{i - 1/2}{n}$ a tyto body vyneseny na pravděpodobnostní papír
- $h(x)$ v pravděpodobnostní stupnici, x_i v lineární stupnici. Těmito body
proložíme zkusmo přímku tak, aby se k těmto bodům co nejvíce přimy-

Tab. II. Úhrn vegetačních srážek za duben — září
Roudnice n. L. (1911 — 60)

Rok	Srážkový úhrn	Rok	Srážkový úhrn
1911	205	1936	464
1912	451	1937	388
1913	395	1938	382
1914	329	1939	503
1915	360	1940	401
1916	393	1941	404
1917	221	1942	201
1918	354	1943	200
1919	269	1944	248
1920	304	1945	376
1921	218	1946	387
1922	396	1947	116
1923	293	1948	302
1924	333	1949	290
1925	401	1950	342
1926	474	1951	325
1927	327	1952	194
1928	307	1953	303
1929	243	1954	487
1930	286	1955	330
1931	367	1956	324
1932	356	1957	338
1933	244	1958	335
1934	267	1959	186
1935	256	1960	222

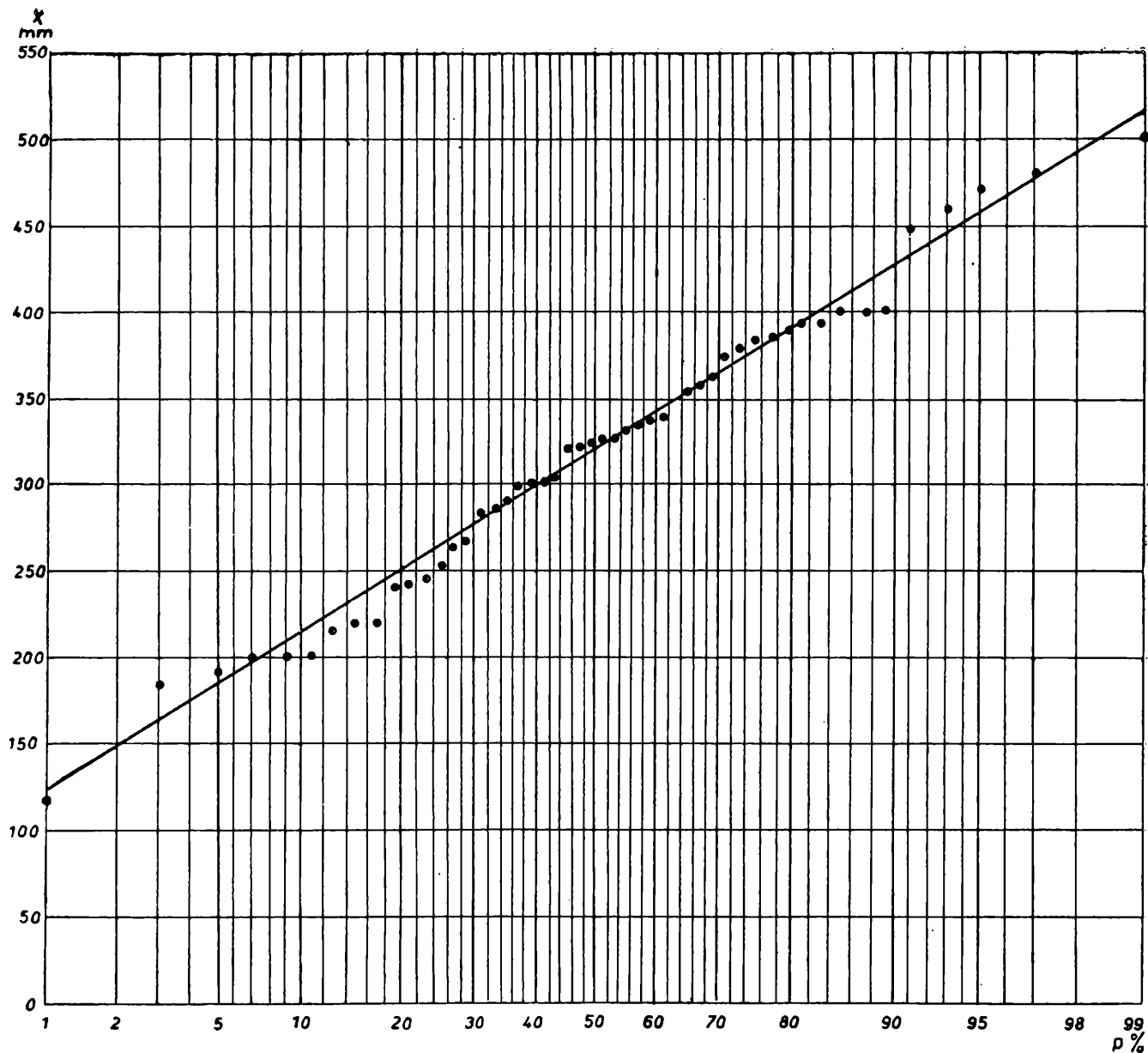
Tab. III. Uspořádané srážkové úhrny za vegetační období
Roudnice n. L. (1911—60)

i	$\frac{i - 1/2}{n}$	Veget. srážk. úhrn	i	$\frac{i - 1/2}{n}$	Veget. srážk. úhrn
1	1	116	26	51	329
2	3	186	27	53	330
3	5	194	28	55	333
4	7	200	29	57	335
5	9	201	30	59	338
6	11	205	31	61	342
7	13	218	32	63	354
8	15	221	33	65	356
9	17	222	34	67	360
10	19	243	35	69	367
11	21	244	36	71	376
12	23	248	37	73	382
13	25	256	38	75	387
14	27	267	39	77	388
15	29	269	40	79	393
16	31	286	41	81	395
17	33	290	42	83	396
18	35	293	43	85	401
19	37	302	44	87	401
20	39	303	45	89	404
21	41	304	46	91	451
22	43	307	47	93	464
23	45	324	48	95	474
24	47	325	49	97	487
25	49	327	50	99	503

kala. Na základě této přímky lze určit, jaká je pravděpodobnost, že se vyskytne srážka dané velikosti nebo menší (obr. 4).

Při návrhu závlah je však nutno znát, jaká je pravděpodobnost, že srážka určité velikosti bude větší než x_i , nebo že se jí bude rovnat. Protože víme, že případ: „srážková výška větší nebo rovna x_i a nebo menší“, je jistý, je pravděpodobnost, že srážková výška bude dané velikosti nebo větší, rovna hodnotě $z = 1 - p$. Hodnota z je tzv. z a b e z p e č e n í s r á ž k y. Čím se volí větší zabezpečení, tím musí být rozměry závlahových zařízení větší a stavba bude tudíž dražší. Při menším zabezpečení je sice stavba levnější, ale ve velmi suchých letech není možno dodat závlahou potřebné množství vody a výnosy zavlažovaných plodin nižší. Používá se tedy většinou zabezpečení 75 až 80 %, kdy dostáváme pro stavbu nejekonomičtější ukazatele.

Na tomto jednoduchém případě jsme si ujasnili, jaký význam má měření srážek pro závlahovou praxi. Použitím měření srážkových výšek je



Obr. 4. Pravděpodobnost p , že srážkový úhrn za vegetační období bude x nebo menší.

však mnohem rozsáhlejší např. při navrhování nádrží sloužících k zásobení pitnou nebo užitkovou vodou, při boji s povodněmi a v neposlední řadě při snaze člověka aktivně zasahovat do tohoto meteorologického prvku - uměle vyvolávat srážky.

Kapkový model atomového jádra

(Dokončení)

Přehledně je skutečný počet stabilních izotopů tento (N značí počet neutronů):

Z sudé, N sudé	162
Z sudé, N liché	56
Z liché, N sudé	52
Z liché, N liché .	4

Teoretický výklad, proč převládá první typ izotopů, je ten, že při zaplňování nižších energetických hladin jádra³⁾ mají neutrony i protony snahu zaplnit tyto hladiny páry, jež dávají nejstabilnější skupiny, podobně jako je tomu u elektronů v obalu jádra atomu. Úzký vztah mezi rozšířením izotopů a stabilitou jader je nesporný. Tato skutečnost se v poloempirickém vzorci vyjadřuje zavedením další opravy. Tvar opravy závisí na paritě počtu protonů a neutronů. Zvýšená stabilita u jader sudo-sudých je způsobena kompenzací spinů⁴⁾ nukleonů, která se může uskutečnit, když je počet neutronů i počet protonů sudý. Proto u sudo-sudého jádra vzniká dodatečný kladný příspěvek k vazebné energii, kdežto při lichu-lichém jádře, tj. když protony i neutrony v jádře mají nekompensované spiny, existuje člen pocházející od záporného (odpudivého) účinku spinů.

Empirické úvahy založené na stanovení vazebné energie z hmot izotopů nasvědčují tomu, že příspěvek spinového efektu lze vyjádřit výrazem

$$\delta = \pm \frac{u_5}{A^{\frac{3}{4}}},$$

kde $\delta = +\frac{u_5}{A^{\frac{3}{4}}}$ platí pro sudo-sudá jádra, $\delta = -\frac{u_5}{A^{\frac{3}{4}}}$ platí pro jádra lichu-lichá. Pro jádra sudo-lichá (lichu-sudá) je $u_5 = 0$, a tedy spinový efekt se neuplatní; proto je $\delta = 0$.

Sečtením jednotlivých členů přispívajících k vazebné energii jádra

³⁾ Nukleony v jádře mohou mít jen určité energie, zvané energetické hladiny jádra.

⁴⁾ Spin (vrt) je veličina charakterizující rotaci částic kolem vlastní osy (existuje kladný i záporný spin částic).

atomu dostaneme pro úhrnnou vazebnou energii \bar{E} vztah

$$E = u_1 A - u_2 A^{\frac{2}{3}} - u_3 \frac{(A - 2Z)^2}{A} - u_4 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \delta. \quad (5)$$

Z pěti konstant poloempirického vzorce pro vazebnou energii lze určit z elektrostatické teorie pouze konstantu u_5 , a to jsme již provedli. Ostatní konstanty je třeba stanovit empiricky.

Konstantu u_3 můžeme určit z podmínky maxima vazebné energie pomocí derivace vztahu (5) podle Z při konstantním A . Dá se zjistit, že maximum vazebné energie musí vyhovovat rovnici

$$4 u_3 \frac{A - 2Z}{A} = 2 u_4 \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} \quad (6)$$

Rovnice (6) udává vztah mezi hmotovým číslem A a atomovým číslem Z pro nejstabilnější jádra, neboť tato jádra mají mít při daném hmotovém čísle největší vazebnou energii. Konstanta u_4 je známa, takže konstantu u_3 dostaneme, když do (6) dosadíme číselné hodnoty za A a Z .

Neexistuje však jediná konstanta u_3 , která by dávala správnou hodnotu pro všechna hmotová a atomová čísla, takže nezbyvá než se spokojit s kompromisním řešením a uvažovat střední hodnotu konstant u_3 , které jsme z rovnice (6) vypočetli.

Známe-li hodnoty konstant u_3 a u_4 , můžeme hodnoty konstant u_1 a u_2 určit ze známých vazebných energií, které plynou z hmot izotopů libovolného páru licho-sudých jader, protože pro tato jádra je $\delta = 0$.

Hodnotu konstanty u_5 lze odhadnout z vazebné energie sudo-sudých jader, právě tak jako ze stálých licho-lichých jader, kterých je velmi málo a mají malá hmotová čísla.

Dosadíme-li vypočtené konstanty do rovnice (5), dostaneme vzorec pro vazebnou energii E vyjádřenou v MeV:

$$E = 14,0 A - 13 A^{\frac{2}{3}} - 19,3 \frac{(A - 2Z)^2}{A} - 0,585 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \delta, \quad (7)$$

kde $\delta = \pm \frac{33}{A^{\frac{3}{4}}}$ nebo $\delta = 0$ podle typu atomového jádra.

Vliv různých členů poloempirického vzorce na výpočet vazebné energie atomového jádra lze zhodnotit z připojené tabulky I. V ní jsou vypočteny hodnoty jednotlivých členů poloempirického vzorce v MeV u jádra prvku s malým, středním i velkým hmotovým číslem (${}_{20}\text{Ca}^{40}$, ${}_{47}\text{Ag}^{107}$, ${}_{92}\text{U}^{238}$). Pro srovnání jsou v tabulce také uvedeny experimentální hodnoty úhrnné vazebné energie těchto izotopů, jak vyplynuly z příslušných hmot. Z tabulky vidíme, že přesto, že hodnoty konstant v poloempirickém vzorci pro vazebnou energii jsou udány pouze nejvýše na tři platná místa, je souhlas vyčíslených hodnot s experimentálními uspokojivý.

Tabulka I.

	${}_{20}\text{Ca}^{40}$	${}_{47}\text{Ag}^{107}$	${}_{92}\text{U}^{238}$
Přitažlivost nukleonů	560	1500	3330
Povrchový efekt	-152	-293	-501
Izotopový efekt	0	-30,6	-236
Elektrostatické odpuzování	-68,4	-272	-779
Spinový efekt	3,2	0	0,5
Hodnota vazebné energie	343	904	1790
Naměřená hodnota vazebné energie	341	907	1785
Vazebná energie na jeden nukleon	8,5	8,4	7,5

Uvedených výsledků lze použít k vysvětlení jevu, že existuje pouze omezená oblast stability atomových jader, pokud jde o poměr počtu neutronů a protonů. Hodnota tohoto poměru se mění od 1,00 u jader s malými hmotovými čísly do 1,56 u jader s velkými hmotovými čísly. Vzhledem k tomu, že přitažlivé jaderné síly proton-proton, proton-neutron a neutron-neutron jsou přibližně stejné, lze očekávat, že jádro bude stabilní, pokud poměr počtu neutronů k počtu protonů bude blízký jedné. To je přibližně splněno u jader s malými hmotovými čísly.

Avšak se vzrůstem atomového čísla, jak je patrné ze vztahu (4), značně vzrůstá elektrostatické odpuzování protonů, neboť elektrostatické síly jsou v porovnání s jadernými silami dalekého dosahu a jejich účinkem každý proton odpuzuje všechny ostatní protony a sám je odpuzován všemi ostatními protony v jádře.

Aby stabilita zůstala zachována i u těžších jader, musí být v jádrech větší počet neutronů než protonů na překonání rostoucího odpuzování protonů. Přitažlivé síly nukleon-nukleon, které tím přibudou, částečně vykompenzují vzrůstající odpuzování protonů. Proto je poměr počtu neutronů k počtu protonů u stabilních těžkých jader větší než jedna.

Přesto se projevuje jisté omezení počtu neutronů, které jsou s to vytvořit stabilní jádro. Převaha neutronů nad protony vede k jisté nestabilitě, která je vyjádřena tzv. *i z o t o p o v ý m č l e n e m*. Tato okolnost určuje horní hranici stability pro poměr počtu neutronů k počtu protonů. Dolní hranice počtu neutronů je naopak dána tím, že zvětšený počet protonů také přispívá k nestálosti, protože se zvětší elektrostatické odpuzování. Tím lze objasnit poznatek, že oblast stability atomových jader je poměrně úzká, pokud jde o poměr počtu neutronů k počtu protonů.

4. Výpočet atomové hmoty

Poloempirický vzorec (5) se také uvádí ve tvaru, z něhož lze určit atomovou hmotu M prvku s daným hmotovým číslem A a atomovým číslem Z .

První dva členy vzorce pro výpočet atomové hmoty budou představovat součet hmot Z atomů vodíku a $(A - Z)$ neutronů

$$M_0 = M_H \cdot Z + M_n (A - Z).$$

Uvedený součet bude menší o ekvivalentní hmotu vazebné energie atomového jádra, takže tvar poloempirického vzorce pro výpočet atomové hmoty bude tento

$$M = M_H Z + M_n (A - Z) - u'_1 A + u'_2 A^{\frac{2}{3}} + u'_3 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + u'_4 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - \delta. \quad (8)$$

Velikost konstant $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, u'_5$ ve vztahu (8) lze např. zjistit přepočtením konstant u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 vyjádřených v MeV ve vzorci (7), víme-li, že 1 h. j. \doteq 931 MeV.

Po dosazení hodnot $M_H = 1,00812$ h. j., $M_n = 1,00893$ h. j. a přepočtením zjištěných konstant $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, u'_5$ do (8), bude mít po úpravě poloempirický vzorec tvar

$$M = 0,99389 A - 0,00081 Z + 0,01396 A^{\frac{2}{3}} + 0,02073 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + 0,00063 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - \delta, \quad (9)$$

přičemž $\delta = 0$ platí pro lichá A , $\delta = -\frac{0,03544}{A^{\frac{3}{4}}}$ platí pro lichá Z a lichá N , $\delta = +\frac{0,03544}{A^{\frac{3}{4}}}$ platí pro sudá Z a sudá N .

Poloempirický vzorec (9) dává dostatečně přesné hodnoty atomových hmot prvků, které dobře souhlasí s hodnotami zjištěnými měřeními.

5. Vysvětlení štěpení atomových jader pomocí kapkového modelu

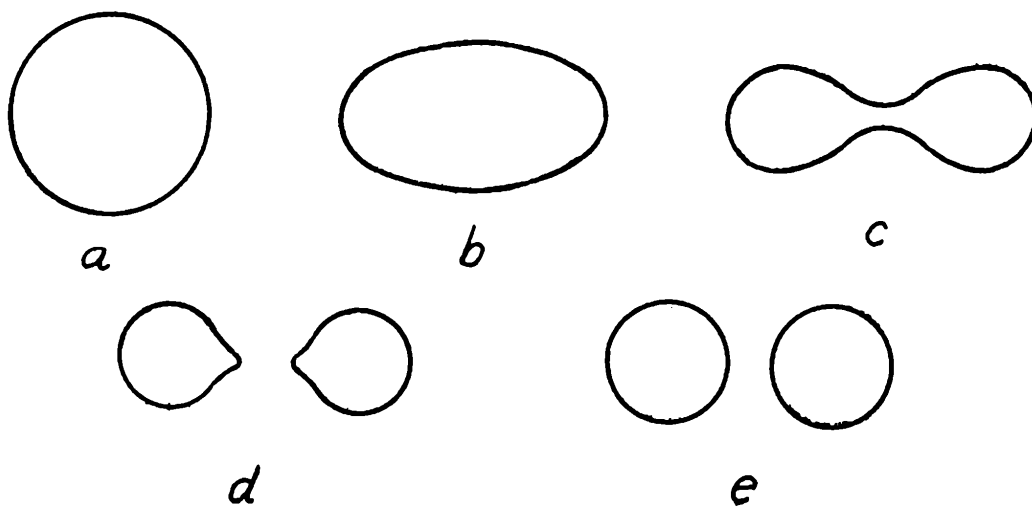
Na základě kapkového modelu atomového jádra lze zjednodušeně vysvětlit mechanismus štěpení jader.

Kapka obyčejné kapaliny může být působením vnější síly uvedena do oscilací. Během oscilací bude kapka procházet různými stavy, z nichž některé jsou vyznačeny na obr. 1.

Kapka obyčejné kapaliny, která má na počátku kulový tvar (a) se účinkem vnější síly začne protahovat a nabude zhruba tvaru elipsoidu (b). Je-li působící vnější síla malá, nepřekoná sílu povrchového napětí kapky a kapka nabude svého původního tvaru. Bude-li však defor-

mační energie dostatečně velká, pak kapka již nenabude svého původního kulového tvaru, ale nabude tvaru podle obr. 1c. V tomto stavu je již velká pravděpodobnost, že se kapka rozštěpí na dvě menší kapky, které jsou zpočátku trochu deformovány (*f*), později však nabudou kulového tvaru (*e*).

Budeme-li předpokládat, že jádro atomu je kapka jaderné kapaliny, lze štěpení jádra vysvětlit podobně jako dělení kapky obyčejné kapaliny. Když ostřelované jádro pohltí neutron, vznikne složené jádro. *E x c i t a č n í e n e r g i e* složeného jádra (vzbuzená energie složeného jádra) je rovna vazebné energii jádra, zvětšené o kinetickou energii neutronu před zachycením. Účinkem nadbytečné energie se složené jádro rozkmitá tak, že se střídavě roztahuje (zředuje) a stahuje (zhuš-



Obr. 1

tuje). Přitom bude procházet stavy podobným stavu *b* na obr. 1. Bude-li dodaná energie malá, jaderné síly přivedou jádro zpět do jeho původního kulového tvaru a přebytek energie se uvolní emitováním nějaké elementární částice nebo fotonu. Získá-li však jádro atomu zachycením neutronu energii dostatečnou k tomu, aby nabylo tvaru *c*, pak coulombovské elektrostatické síly mezi kladnými náboji na obou koncích překonají poměrně malou vazebnou jadernou sílu, jež působí v místě spojující obě části jádra atomu. Soustava přejde rychle do stavu *d* a pak do stavu *e*. Jádro atomu se tedy rozštěpí na dvě samostatná jádra, která se od sebe rozletí. Energie, kterou je třeba dodat jádru, aby se deformovalo do tvaru *c*, se nazývá *a k t i v a č n í*. Získá-li jádro aktivační energii, potom za předpokladu, že hmota jádra je větší než hmota odštěpků, dojde jistě k rozštěpení atomového jádra.

Vzhledem k přímé úměrnosti mezi objemem jádra a jeho hmotou lze předpokládat, že jádro při deformaci z tvaru koule na elipsoid nezmění svůj objem. Změna vazebné energie je potom podmíněna

pouze dvěma z pěti činitelů, o nichž jsme se zmínili při odvozování poloempirického vzorce, a to povrchovým napětím a elektrostatickým odpuzováním. Vliv povrchového napětí se zvyšuje deformací jádra, protože se zvětšuje povrch, současně se však zmenšuje elektrostatické odpuzování, neboť náboje se od sebe vzdalují.

Bude-li ε parametr, který určuje míru deformace jádra atomu, určí se potřebná deformační energie E podle vzorce

$$E_d = \varepsilon^2 \left(5,2 A^{\frac{2}{3}} - 0,117 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \right) \quad (10)$$

První člen v závorce vyjadřuje vliv povrchového napětí a druhý člen vliv elektrostatického odpuzování.

Bude-li energie deformace daná vztahem (10) nulová nebo záporná, bude se kulové jádro štěpit samovolně. Podmínka pro spontánní štěpení z (10) je

$$0,117 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \geq 5,2 A^{\frac{2}{3}},$$

nebo po úpravě

$$\frac{Z^2}{A} \geq 44,4. \quad (11)$$

Budeme-li uvažovat prvek s hmotovým číslem 260, u kterého je již možné samovolně štěpení, pak z nerovnosti (11) plyne, že jádro, které má být stabilní proti štěpení, může mít maximální hodnotu atomového čísla asi 107,4. Lze však předpokládat, že stabilní jádra mohou existovat do atomového čísla 125, k čemuž vede přesnější výpočet.

Energii deformace můžeme považovat za míru aktivační energie štěpení jádra, takže vztah (10) můžeme napsat ve tvaru

$$E_a \doteq A^{\frac{2}{3}} \left(5,2 - 0,117 \frac{Z^2}{A} \right).$$

U prvků s velkým hmotovým číslem je $A^{\frac{2}{3}}$ téměř konstantní, a proto aktivační energie bude se vzrůstem $\frac{Z^2}{A}$ klesat. Například pro Pu²³⁹ má

poměr $\frac{Z^2}{A}$ hodnotu 37,0, pro U²³² hodnotu 36,4, pro U²³⁵ hodnotu 36,0

a pro U²³⁸ je $\frac{Z^2}{A} = 35,5$. V tomto pořadí prvků bude vzrůstat aktivační energie štěpení. Z výpočtů založených na kapkovém modelu vyplývá, že aktivační energie složeného jádra, vzniklého zachycením neutronu izotopem U²³⁵ je asi 6,5 MeV a při zachycení v U²³⁸ je přibližně 7,0 MeV.

Uvedené úvahy o samovolném štěpení atomových jader platí pro

nestabilní atomová jádra. U stabilních nebo téměř stabilních jader existuje také určitá pravděpodobnost spontánního štěpení.

6. Závěr

Kapkovým modelem nelze vysvětlit např. spin a některé další vlastnosti atomových jader. K jejich vysvětlení se používá jiných modelů.

Literatura.

- J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, Theoretische Kernphysik (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1959).
L. Drška, B. Klimeš, J. B. Slavík, Základy atomové fyziky (NČSAV Praha, 1958).
S. Glasstone, M. C. Eddlund, Základy teorie jaderných reaktorů (SNTL Praha, 1958).
Z. Horák, Úvod do molekulové a atomové fyziky (SNTL Praha, 1955).
P. E. Nemirovskij, Sovremennye modeli atomnogo jadra (Moskva, 1960).
E. V. Špolskij, Atomová fyzika II (SNTL Praha, 1954).



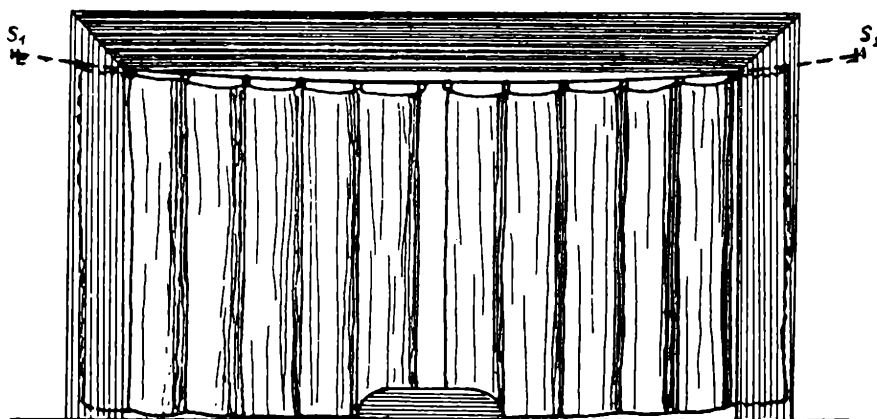
Fyzikální zajímavosti

Prof. Dr. Emil Kašpar, KU, Praha:

Potíže s oponou - a také někdy s prádlem

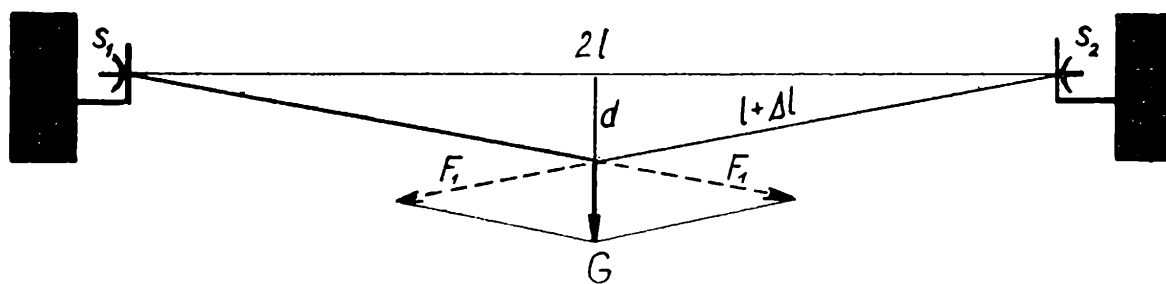
Vzpomínám si na příhodu, která je příkladem, jak se někdy vyskytne nečekaně záhada, která nás donutí přemýšlet, a to fyzikálně přemýšlet. Podstata problému byla tato. Stavěli jsme si ochotnické divadlo, přičemž jsme si mnoho zařízení upravili a zhotovili svépomocí, aniž jsme přitom počítali brigádnické hodiny. Řešili jsme také otázku, jak zavěsit co nejúčelněji těžkou látkovou oponu, která se měla stahovat a rozevírat do stran. Oponu jsme opatřili na horním okraji kroužky, které byly navlečeny na ocelové lano. Lano bylo napjato mezi závěsnými skobami s_1 , s_2 (obr. 1). Opona však byla těžká, a tak se při jejím zatažení lano proneslo

tak hluboko, že jak lano, tak horní okraj opony s kroužky bylo vidět ze strany hlediště. Pronesení lana bylo třeba nějak odstranit, jednak aby horní okraj opony s lanem byl skryt za stropem proscenia, jednak bylo třeba zvednout a vyrovnat dolní okraj opony, která se při zatahování příliš ploužila po zemi. První myšlenka, která nás napadla byla, že zvětšíme napětí lana. Vždyť každý z nás byl snad svědkem toho, jak pradelna napne šňůru, která se příliš pronáší pod tíhou mokrého prádla, a to tak, že konec šňůry otočí kolem závěsného háku. Tím šňůru poněkud zkrátí



Obr. 1

a ta se více napne. Někdy to pomůže, takže dlouhé prádlo nesahá až na zem. Naše ocelové lano bylo napínáno na koncích šrouby, takže bylo poměrně snadné zvyšovat napětí lana na velmi vysokou hodnotu, a to tak, až lano „zvonilo“. K našemu údivu byl výsledek tohoto úsilí zcela nepatrný: střed lana zůstával pod tíhou opony stále stejně hluboko. Pomohli jsme si sice tím, že jsme lano uprostřed upevnili na stěnu nad proscením, ale tím jsme si nevysvětlili fyzikální problém: proč nám nepomohlo větší napětí lana, ač pradelně (někdy) pomůže?



Obr. 2

Opona „znala“ lépe zákon pružnosti než my. Abychom si tento podivuhodný rozpor vysvětlili, zjednodušíme si úvahu takto: Nechť je břemeno váhy (tíhy) G zavěšeno uprostřed ocelového lana délky $2l$, které je vodorovně napjato mezi dvěma skobami s_1, s_2 (obr. 2). Působením břemena G se střed lana pronese o délku d . Síla, kterou je lano napínáno, budiž F . Tato síla je způsobena tím, že jsme prázdné lano napjali mezi skobami pomocí šroubů s_1 a s_2 . Složku této síly (kterou jsme

lano zpočátku napjali) do směru obou polovic lana nazvěme F_0 . Dalším příspěvkem síly F jsou složky břemena G do směru lana. Tyto složky označíme F_1 . Platí tedy pro úhrnnou napínající sílu

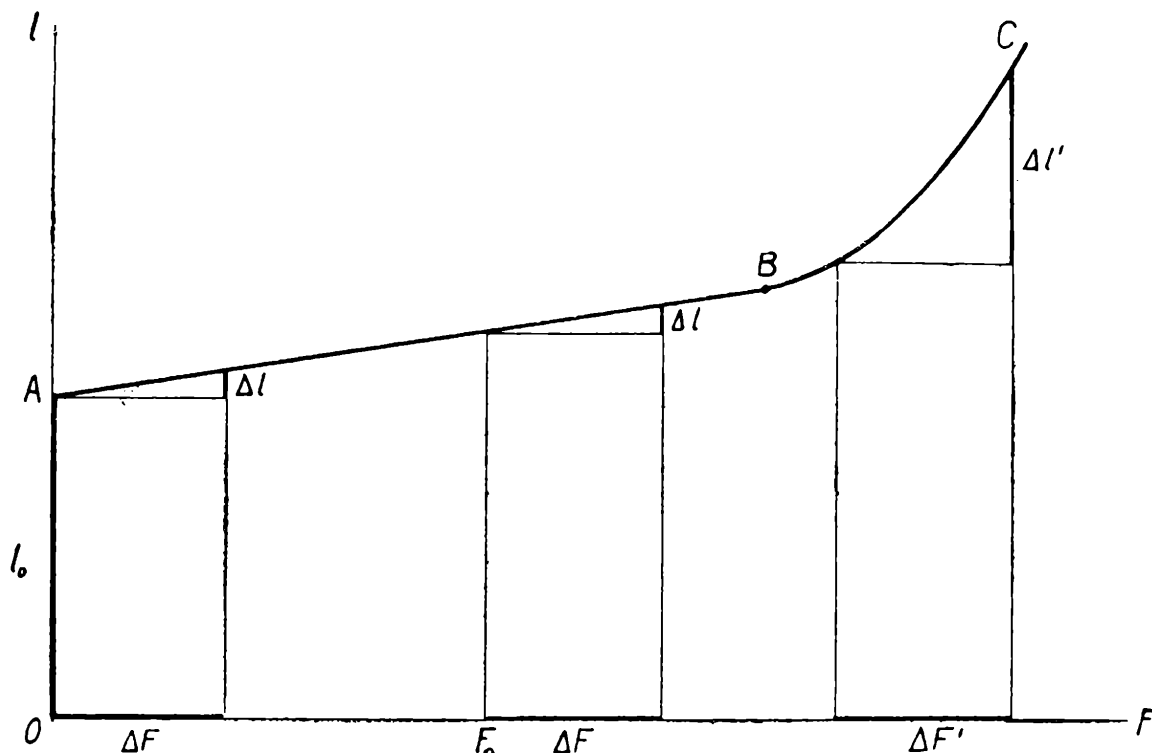
$$F = F_0 + F_1$$

Při pronesení lana působí též jeho vlastní váha (tíha). Ale ta má malý účinek proti účinku břemena G a síly F_0 , a proto ji zanedbáme.

K vysvětlení problému nám poslouží diagram závislosti prodloužení délky lana na napínající síle. Víme, že prodloužení lana je až do určité velikosti síly přímo úměrné napínající síle, tj. platí Hookův zákon pružnosti

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{l}{S} \cdot F, \quad (1)$$

kde Δl je prodloužení lana délky l a průřezu plochy S , způsobené silou F . Konstanta E se nazývá m o d u l p r u ž n o s t i v t a h u.



Obr. 3

Teprve když napínající síla překročí hodnotu, nazvanou m e z p r u ž n o s t i (přesněji řečeno: mez pružnosti měříme silou přepočítanou na jednotkový průřez - napětím), lano se prodlužuje při zvětšování síly víc, než by odpovídalo přímé úměrnosti. Závislost délky lana na napínající síle je schematicky znázorněna na obr. 3. Na obrázku je pro lepší názornost zvětšování lana přehnáno. Zůstaňme ve svých úvahách v oblasti sil (část křivky AB), při nichž je délka lana lineárně závislá na napínající síle F . V tomto oboru můžeme u obr. 3 vyčíst hned tyto dvě zvláštnosti:

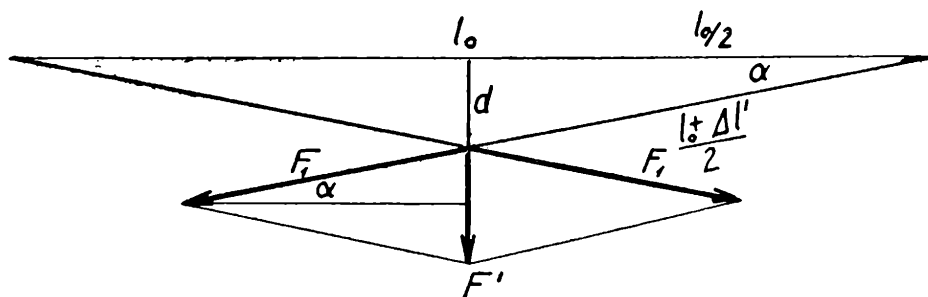
a) Prodloužení Δl lana, které mělo původní délku l_0 a bylo napjato silou F_0 , způsobené přírůstkem síly ΔF nezávisí na předpínající síle F_0 , tj. je stejně veliké při stejném zvětšení síly ΔF , ať je síla F jakkoli velká (zůstáváme v mezích pružnosti).

b) Prodloužení Δl nezávisí na délce lana (pokud tato délka vznikla z původní délky l_0 a změnila-li se původní délka l_0 působením jen síly F_0 (nezměnila-li se např. zvětšením teploty ap.).

A zde máme vysvětlení naší záhady s oponou. Stejně prodloužení Δl lana má za následek stejné pronesení d lana. Proto bylo u opony pronesení tíhou opony vždy stejné, i když jsme lano předpínali pomocí šroubů jakkoli vysoko.

Bylo dokonce nebezpečí, že přílišným napínáním lana situaci ještě zhoršíme. Kdybychom totiž překročili mez pružnosti a dostali bychom se do oblasti, vyznačené na obr. 3 úsekem křivky BC , pak by se lano prodloužilo účinkem přírůstkem síly $\Delta F' = \Delta F$ mnohem více, jak vidíme z obrázku (prodloužení $\Delta l'$), než způsobí stejně veliký přírůstek síly ΔF v oblasti pružnosti.

A jak je to se šňůrou na prádlo. Ještě zbývá vysvětlit, proč si může pradlena pomoci tím, že otočí lano kolem háku. Vysvětlení je zřejmě v tom, že šňůra na prádlo není zpočátku úplně natažena. Tak se stává, že počáteční pronesení šňůry je zvětšováno tím, že délka šňůry je poněkud větší než vzdálenost háků. Kdyby šňůra byla již zpočátku napjata, nemohlo by další napínání šňůry odstranit její pronášení pod tíhou prádla.



Obr. 4

Jak s tím souvisí trhání drátů námrazou. Velikost složek F_1 svislé síly G , které mají směr obou půl lana, závisí na pronesení lana. Z obr. 2 lze vyčíst, že čím je pronesení menší, tím jsou složky F_1 napínající lano větší. V tom je též jedna z příčin, proč se v zimě trhají elektrická vedení i účinkem poměrně malé námrazy. Dráty vedení jsou v letních měsících značně proneseny, ale v zimě jsou při nízkých teplotách kratší. Tato okolnost má za následek, že účinek tíhy námrazy je veliký.

Tak dostáváme také vysvětlení podivuhodného jevu, že můžeme lano prodloužit působením příčné síly mnohem více, než působilme-li na ně ve směru délky. Představme si, že ocelové lano má délku 1 m a průřez 1 mm²

a je napínáme silou 1 kp. Dosadíme-li do vztahu (1), kde $E = 20\,000$ kp mm⁻², dostaneme prodloužení $\Delta l = 0,05$ mm. Kdybychom však totéž lano napjali vodorovně a na obou koncích upevnili, pak stejná síla 1 kp, působící uprostřed lana kolmo k jeho délce, by vyvolala prodloužení 0,7 mm, tj. asi 14krát větší.¹⁾

Lano by nemělo žádnou pevnost, kdyby bylo z látky dokonale tuhé. Z předešlého vidíme, že čím menší je pronesení lana, tím větší jsou složky síly (působící kolmo na lano), které působí ve směru délky lana. Je to zřejmé též z obr. 4, z něhož vidíme, že čím menší je úhel α , tím větší jsou složky F_1 . Odtud plyne velmi důležitý důsledek, že pružnost látek má podstatný vliv na jejich pevnost, např. na odolnost lana proti přetržení. Představme si myšlený případ, že by látka, z níž je lano zhotoveno, byla dokonale tuhá, a tedy nepružná. V tom případě by stačila i nepatrná příčná síla k tomu, aby se napjaté lano přetrhlo. Kdybychom totiž natáhli lano vodorovně a zatížili např. uprostřed břemenem G , pak by složky i velmi nepatrné síly G do směru délky lana byly nekonečně veliké, neboť pronesení lana d by bylo nulové. Stačila by např. vlastní tíha lana k tomu, aby se přetrhlo.

Z tohoto posledního příkladu vidíme, jak musíme být opatrní při provádění myšlených úvah, popř. při volbě podmínek pro zjednodušené fyzikální úvahy. Některé zdánlivě přijatelné podmínky by mohly vést k závěrům, které jsou v rozporu s jevy, probíhajícími za přirozených podmínek. Stejná opatrnost je na místě, zavádíme-li některé abstraktní pojmy, např. absolutně tuhé těleso apod.

¹⁾ Poznámka pro toho, kdo se nebojí počítání. Určíme si prodloužení ocelového drátu, jestliže na něj působí stejná síla jednou podélně a podruhé příčně. K tomu si zvolíme drát z ocele ($E = 20\,000$ kp. mm⁻²), který má na počátku pokusu délku $l_0 = 1$ m a příčný řez plochu $S = 1$ mm².

Síla působí podélně. Drát upevníme na horním konci a na dolní konec zavěsíme závaží, působící silou 1 kp. Prodloužení je pak dáno Hookovým zákonem (1), do kterého dosadíme

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{l_0}{S} \cdot F = \frac{1}{20\,000} \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0,05 \text{ mm} . \quad (2)$$

Síla působí příčně. Nyní upevníme drát na obou koncích tak, aby byl napjat ve vodorovné poloze a uprostřed zavěsíme závaží, působící silou $F' = 1$ kp (obr. 4). V tomto případě označíme prodloužení $\Delta l'$. Počítáme např. takto

$$\Delta l' = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_1 l_0}{S} , \quad (3)$$

kde

$$F_1 = \frac{F'}{2 \sin \alpha} , \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \frac{l_0}{l_0 + \Delta l'} . \quad (5)$$

Text úlohy:

Igor a Milan si dohodli jednu hru s dvadsaťjeden guľičkami. Pri hre odoberali striedavo z nádoby určitý počet guľičiek a vyhral ten, ktorý hral naposledy. Aby bola hra zaujímavejšia, sťažili si pravidlá hry ešte ďalšími podmienkami. Na tri lístky si napísali skupiny čísel¹⁾:

A	B	C
1, 2, 6	1, 3, 5	2, 3, 4

Igor začína hru tým, že si vybral jeden z lístkov. Čísla napísané na lístku vyjadrovali počty guľičiek, ktoré smel v priebehu hry v jednotlivých ťahoch z nádoby odobrať. Potom si podobne Milan zvolil pomocou jedného z dvoch lístkov, ktoré ešte ostali, svoje ťahy.

Potom už Igor urobil v rámci svojich možností prvý ťah. Nato odpovedal Milan odobraním guľičiek zo zbytku. Počet ním odobraných guľičiek opäť súhlasil s niektorým číslom na jeho lístku. Potom ťahal zase Igor a tak sa striedali, pokiaľ ten, ktorý bol na ťahu mal vôbec ešte možnosť urobiť ťah. Ako sme už povedali na začiatku, vyhral ten, ktorý ťahal posledný.

Keď oba kamaráti niekoľkokrát opakovali opísanú hru, povšimli si, že ten kto začína skoro vždy prehrá. Zamysleli sa nad vecou a zistili, že skutočne druhý hráč má možnosť zaistiť si víťazstvo, a to vždy, keď sa v hre riadi podľa určitých strategických pravidiel.

Z toho vyplývajú pre našich čitateľov dve úlohy:

1. (Jednoduchšia.) Opíšte strategické pravidlá, ktorých sa musí druhý hráč pridržať, aby si vynútil víťazstvo.

2. (Zložitejšia, pre náročnejších čitateľov.) Zistite, aký bude výsledok hry, ak stav guľičiek v nádobe po prvom ťahu môže začínajúci hráč voľiť ľubovoľne, a to až po voľbe skupiny ťahov svojho súpera.

Dokážeme, že Milan (druhý hráč) môže pri rozumnej hre vždy vyhrať v tom prípade, že Igor (prvý hráč) nemôže svojím prvým ťahom do cieľiť, aby stav guľičiek v nádobe činil nula, jedna, alebo päť guľičiek.

Predovšetkým opíšme, ako má správne postupovať Milan pri voľbe možností ťahu:

Prípado	Ak si Igor zvolí ťahy	Potom si Milan má voľiť ťahy
1.	A	C
2.	B	A
3.	C	B

Definujme si teraz množiny M_i , N_i pre $i = 1, 2, 3$ takto:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \{1, 2, 3, 6, 7, 11\} ; N_1 = \{0, 1, 5\} \\
 M_2 &= \{1, 3, 5\} ; N_2 = \{0\} \\
 M_3 &= \{2, 3, 4\} ; N_3 = \{0\}
 \end{aligned}$$

¹⁾ Všimnite si, že súčet na každom lístku sa rovná deviatim a že deväť na troch rôznych sčítancov iným spôsobom už rozložiť nemožno.

Lahko sa možno presvedčiť, že v každom zo skúmaných troch prípadov platí toto: ak číslo a udávajúce počet guľičiek v nádobe pred ťahom Igora nepatrí v i -tom prípade ($i = 1, 2, 3$) do množiny M_i , potom o čísle $b = a - t$, ktoré udáva počet guľičiek v nádobe po ľubovoľnom možnom ťahu Igora t , platí: b nepatrí do množiny N_i . Platnosť uvedeného tvrdenia pre prípad $i = 2, 3$ je zrejmá, o množine M_1 však platí zrejme toto: číslo z patrí do M_1 práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako súčet $z = x + y$, kde x patrí do N_1 a y patrí do množiny Igorových ťahov, tj. do množiny $\{1, 2, 6\}$. Z toho vyplýva platnosť tvrdenia aj pre $i = 1$.

Množiny M_i, N_i majú však aj túto ďalšiu (pre našu hru rozhodujúcu) vlastnosť: ak v prípade i -tom číslo b (udávajúce počet guľičiek v nádobe pred ťahom Milana) nepatrí do N_i , potom Milan môže urobiť v rámci svojich možností ťahu aspoň jeden taký ťah t' , že o čísle $a' = b - t'$ (udávajúcim počet guľičiek v nádobe po ťahu Milana) bude platiť: a' nepatrí do M_i .

O tom, že množiny M_i, N_i skutočne majú uvedenú vlastnosť, nás ľahko presvedčia nasledujúce tabuľky, ktoré pre jednotlivé prípady ($i = 1, 2, 3$) predstavujú súčasne pre Milana návod, ako má správne hrať.

Pr í p a d 1. (Milanove ťahy sú 2, 3, 4; b je ľubovoľné celé nezáporné číslo nepatriace do $N_1 = \{0, 1, 5\}$; $a' = b - t'$ nepatrí do $M_1 = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$):

$i = 1$	$b =$	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	$b > 13$
	$t' =$	2	3	4	2	2	4	4	2	2	4	4	$t' = 2$
	$a' =$	0	0	0	4	5	4	5	8	9	8	9	$a' > 11$

Pr í p a d 2. (Milanove ťahy sú 1, 2, 6; b je ľubovoľné celé nezáporné číslo nepatriace do $N_2 = \{0\}$; $a' = b - t'$ nepatrí do $M_2 = \{11, 3, 5\}$):

$i = 2$	$b =$	1	2	3	4	5	6	7	$b > 7$
	$t' =$	1	2	1	2	1	6	1	$t' = 2$
	$a' =$	0	0	2	2	4	0	6	$a' > 5$

Pr í p a d 3. (Milanove ťahy sú 1, 3, 5; b je ľubovoľné celé nezáporné číslo nepatriace do $N_3 = \{0\}$; $a' = b - t'$ nepatrí do $M_3 = \{12, 3, 4\}$):

$i = 3$	$b =$	1	2	3	4	5	$b > 5$
	$t' =$	1	1	3	3	5	$t' = 1$
	$a' =$	0	1	0	1	0	$a' > 4$

Predstavme si teraz, že hra prebieha podľa opísaných pravidiel, pričom ide o i -ty prípad voľby ťahov. Nech číslo a_j (resp. b_j) značí počet guľičiek v nádobe pred j -tym ťahom Igora (resp. Milana) a nech o číse a_1 platí: a_1 nepatrí do M_i . Podľa toho, čo sme uviedli o množinách M_i, N_i , číslo b_1 nepatrí do N_i . Potom ale Milan môže hrať podľa uvedenej tabuľky a môže teda docieľiť toho, aby a_2 nepatrilo do M_i ; čiže: b_2 nebude patriť do N_i . Všeobecne: ak a_k nepatrí do M_i , potom b_k nepatrí do N_i a pri správnej hre Milana a_{k+1} nepatrí do M_i . Potom ale b_{k+1} nepatrí do N_i . Ak teda a_1 nepatrí do M_i , potom žiadne z čísel b_1, b_2, \dots pri správnej hre Milana nebude patriť do N_i . Pretože nula patrí do všetkých troch množín N_1, N_2, N_3 a okrem toho v prípade $i = 1$ (tj. keď Milanove ťahy sú 2, 3, 4) aj číslo jedna patrí do N_1 , nemôže sa stať, že by Milan nemal možnosť ťahu. Je zrejmé, že hra nemôže sa skončiť „nerozhodne“, preto platí: ak a_1 nepatrí do M_i , potom Milan pri uvedenom spôsobe hry vždy vyhrá. Obdobne platí: ak b_1 nepatrí do N_i , potom vyhrá Milan. Množiny N_1, N_2, N_3 obsahujú len tieto čísla: 0, 1, 5. To znamená, že ak Igor nemôže prvým ťahom znížiť počet guľičiek na 0, 1 alebo 5 (alebo tiež: ak Igor môže počet guľičiek po svojom prvom ťahu určiť síce ľubovoľne, ale s tým obmedzením, že tento počet nerovná sa žiadnemu z čísel 0, 1, 5), potom musí vždy Igor pri správnej hre Milana prehrať. To dokazuje naše tvrdenie.

Dôkaz tvrdenia práve vykonaný obsahuje riešenie oboch úloh.

Na záver niekoľko poznámok. Nejedného z čitateľov mohla prekvapiť skutočnosť, že prý hráč (Igor) vždy prehrá, ačkoľvek si prvý vyberá skupinu ťahov (teda vyberá si ju bez obmedzenia spôsobeného tým, že by si pred ním už partner vybral svoju skupinu ťahov a že jemu by ostali už len dve z troch možností voľby) a okrem toho má možnosť až na malé obmedzenie ľubovoľne stanoviť počet guľičiek v nádobe pred prvým ťahom druhého hráča (Milana), a to až potom, keď už vie akú si Milan zvolil skupinu ťahov. Ako vysvetliť tento „prekvapujúci“ výsledok? Predovšetkým takto: o tom, či voľba tej-ktorej skupiny je výhodná, rozhodne až to, akú skupinu si zvolil partner. Tak A je výhodná skupina, ak si partner zvolil B ; B je výhodná, ak partner volil C ; C je výhodná skupina, ak partner volil A . Preto skutočnosť, že Igor si prvý vyberá skupinu ťahov, nie je žiadna výhoda. Ba naopak: je to veľká nevýhoda, ktorú potom už nevyváži ani tá ináč nesporná výhoda spočívajúca v možnosti skoro úplne voľne stanoviť číslo b_1 .

Šest spisovatelů cestuje - řešení

Pánové Baron, Dupont, Martin, Renaud, Servier a Voisin cestují vlakem v oddělení, jež má šest míst. Všichni jsou spisovatelé: esejista, historik, zeměpisec, romanopisec, dramatik a básník. Každý z nich čte dílo některého spolucestujícího.

1. Renaud čte esej;
2. Martin čte knihu svého protějška;
3. Baron nečte knihu svého protějška;
4. Dupont sedí mezi esejistou a zeměpiscem;
5. Servier je sousedem dramatikovým;
6. Esejista a historik sedí proti sobě;
7. Voisin čte drama;
8. Dupont je švakrem romanopisce;
9. Renaud je v rohu;
10. Renaud nemá rád historii;
11. Voisin sedí proti romanopisci;
12. Servier čte zeměpisecovu knihu;
13. Baron nečte historii.

Nyní se ptáme: Jaké je umístění našich šesti cestujících v oddělení, jaký je jejich obor a co právě čtou.

Na předchozí úlohu, převzatou z francouzského časopisu *Le facteur X*, jsme dostali mnoho řešení z celé republiky. Někteří řešitelé uvádí jen správný výsledek, jiní se pokusili i o zdůvodnění. Potěšující je zájem žáků nižších tříd SVVŠ a dokonce i studujících základní devítileté střední školy.

Výsledné řešení:

Místo č.	1	2	3
Jméno Obor Kniha	Renaud romanopisec esej	Martin dramatik báseň	Servier historik zeměpis
Jméno Obor Kniha	Voisin zeměpisec drama	Dupont básník historie	Baron esejista román
Místo č.	4	5	6

Správná jsou ovšem i řešení souměrná podle středních příček našeho obdélníka.

Správná řešení zaslali do uzávěrky tohoto čísla (hvězdičkou označení řešitelé připojili i postup řešení):

Kamila Nosálová, 7. tř. ZDŠ, Ban. Bystrica; *Bohuslav Sivák*, 7.c ZDŠ, Zvolen; *Krista Brantová*, 8. tř. ZDŠ, Praha 3 (za matematický kroužek); *Bohuna Konečná*, 9. tř. ZDŠ, Brno; * *Zdeněk Kašík*, 9.c ZDŠ, Jeseník; *Zdenka Teplá*, I.B SVVŠ, Chrudim; *Miloslav Soukeník*, I. tř. SVVŠ, Havlíčkův Brod; *František Musil*, I.A SVVŠ Kladno; *Pavel Slouka*, I. tř. SVVŠ, Šumperk; *Zdeněk Manoušek*, I. tř. SPŠS, Brno; * *Tomáš Duby*, I. tř. SPŠS, Bratislava; *Vladimír Nedělka*, I.A SVVŠ, Praha 7; *Karla Müllerová*, I.D SVVŠ, Přerov; *Bedřich Hladík*, I. tř. SVVŠ, Praha 5; *Ivan Chajda*, II.D SVVŠ, Přerov; *Jaroslav Hustý*, II. tř. SVVŠ, Šumperk; *František Žalda*, II. tř. SVVŠ, Liberec; *Vladislav Kaleta*, II.B SVVŠ Český Těšín; *Ivan Rádl*, II. tř. SVVŠ, Kolín; *Miluše Trnková*, II.B SVVŠ, Mor. Krumlov; *Marta Humlová*, I.A SVVŠ, Broumov; *Miloš Horák*, II.A SVŠ, Nitra; * *Danica Melišová*, II.H SVŠ, Nitra; * *Radovan Straka*, II.B SVVŠ, Krnov; *Jan Souček*, II. tř. SVVŠ, Praha 4; *Ján Sýkora*, II.D SVŠ, Ban. Bystrica; *Zdenka Saláková*, III. tř. SVVŠ, Soběslav; *Jaroslav Nešetřil*, III.C SVVŠ, Rakovník; *Karel Šlechta*, III.B SVVŠ, Boskovice; *Marie Rothová*, SVVŠ, Praha 8; *Dušan Novotný*, SVVŠ, Nový Jičín; *Jiří Kolář*, SZTŠ, Telč; *Věra Kutílková*, KU, Praha; *Miroslav Souček*, Nový Bohumín; *Candida Petráňová*, Mníšek pod Brdy; *Jan Holec*, Tábor; *Marie Kejvalová*, Litoměřice; *František Šmaus*, Rokycany; *Andrea Schillerová*, Praha 6; *Vladimír Dušek*, Lanškroun; *Anna Valková*, Košice; *Karel Jílek*, Bohušovice (Svitavy); *František Adamec*, Kostelec n. Orli.; *Ladislav Vančata*, Karlovy Vary; *Helena Polcarová*, Velké Meziříčí; *František Daněk*, VUT, Brno; *Ján Zaic*, II. tř. SVŠ, Košice; * *Marta Kubišová*, II.B SVŠ, Nitra; *Karel Bednařík*, III.A SVVŠ, Český Brod; *Antonín Křemeček*, Ostroh.

O. S.

M i l a n K o m a n, Praha:

Záhada běžeckého závodu rozřešena

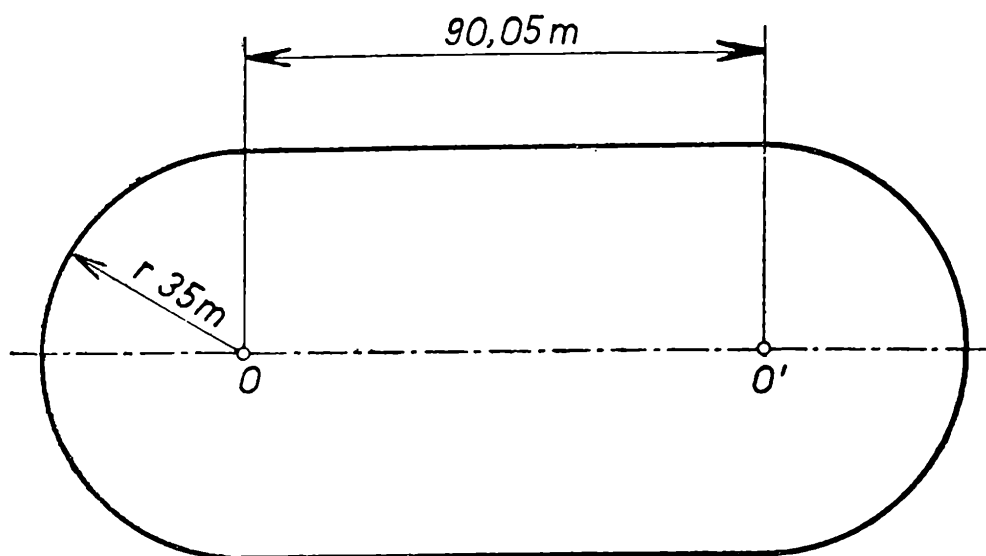
V minulém ročníku našeho časopisu jsme v 9. čísle uveřejnili ze sportovního prostředí úlohu, kterou můžeme zopakovat stručně takto:

Běžec na dráze znázorněné na obr. 1 uběhl vzdálenost 10 000 m průměrnou rychlostí $20\,000\text{ m h}^{-1}$. Přesto jeho dosažený čas byl nepatrně kratší než 30 minut (přesně o 0,2 sekundy). Vaším úkolem bylo záhadu vysvětlit.

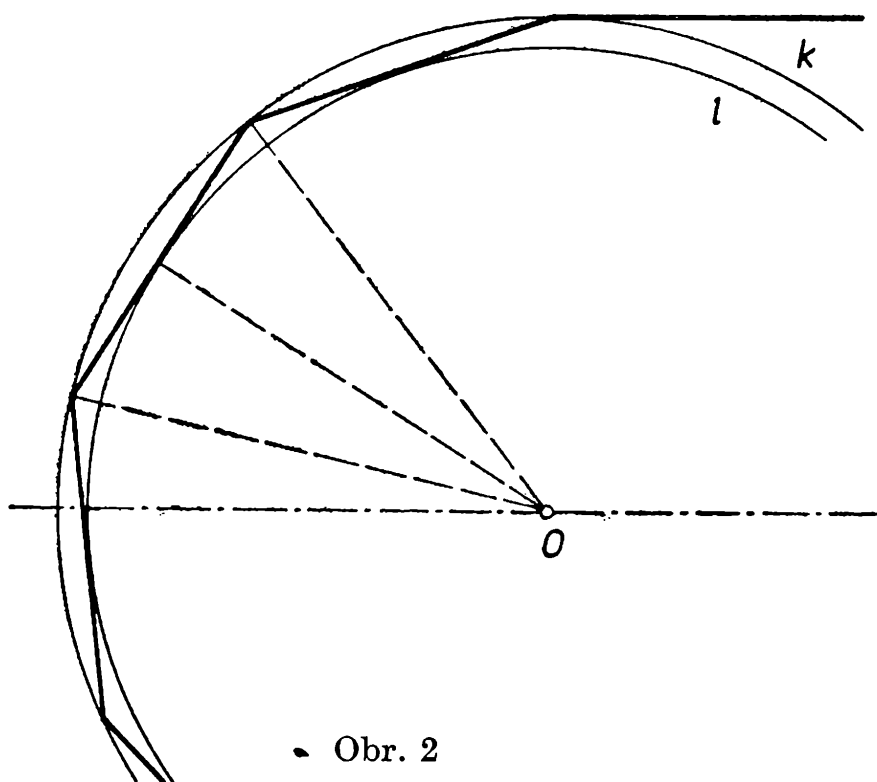
Třebaže je řešení velmi jednoduché, *nedošla redakci ani jedna odpověď*.

V čem spočívá ta zdánlivá záhada? Běžecká dráha se skládá ze dvou úseků rovných a ze dvou úseků křivočarých. „Záhadu“ rozřešíme, všimneme-li si podrobněji právě zakřivených částí. Protože běžec se nemůže po odrazu pohybovat ve vzduchu po oblouku běžecké dráhy, ale po těživách této dráhy (viz schematický obr. 2), uběhne ve skutečnosti o něco méně než 10 000 m. V tom je jednoduché vysvětlení.

Trochu obtížnější je výpočet. Užijeme-li k výpočtu čtyřmístných nebo pětimístných tabulek, chybu nezjistíme. Teprve šestimístné tabulky odhalí zmíněný rozdíl 0,2 vteřiny. Chybu však můžeme přibližně odhadnout i bez šestimístných tabulek. Jak jsme již řekli, běžec se



Obr. 1



• Obr. 2

pohybuje místo po oblouku kružnice k po obvodu pravidelného n -úhelníku vepsaného této kružnici. Poměrně snadno určíme také poloměr kružnice l vepsané tomuto n -úhelníku. Obvod pravidelného mnohoúhelníku je pak přibližně roven aritmetickému průměru délek kružnic k, l .

Na závěr si uvedeme ještě jednu podobnou úlohu:

Záhada cyklistického závodu. Po neklopené dráze znázorněné na obr. 1 se pohybují cyklisté. Přemýšlivý divák, který závod sledoval usoudil, že přední kola všech cyklistů se během závodu otočila víckrát než zadní kola. Dovedete to také odůvodnit?

Abychom vám řešení trochu usnadnili, poradíme vám. Prohlédněte si stopy, které po sobě zanechá jedoucí kolo.

Kdo pije vodu a kdo chová zebrou — řešení

Redakci došlo 16 správných odpovědí. Jména řešitelů uvádíme ve třech skupinách: A (s podrobným vylíčením postupu), B (jen výsledky), C (hlavní výsledky správně, v ostatních malé nepřesnosti). Polovina z nich udala čas potřebný k řešení. Byl v průměru 20 minut.

A. *Tomáš Duby*, SPŠE, Bratislava; *Jiří Handlíř*, SPŠE, Brno; *Josef Hrdlička*, SVVŠ, Brno; *Petr Mederly*, SVŠ, Prievidza; *Jan Natšín*, SVŠ, Ružomberok; *Jitka Opřátková*, SVVŠ, Rakovník; *Jarmila Přímanová*, SVVŠ, Plzeň; *Radovan Straka*, SVVŠ, Krnov; *Karol Trnovský*, SVŠ, Ružomberok.

B. *Jana Dejčmarová*, SPŠ, Most; *Zdeněk Kašlík*, ZDŠ, Jeseník, okr. Šumperk; *Mária Mončeková*, ZDŠ (zájm. kroužek) Chtelnice, okr. Trnava; *Pavel Vejvoda*, učeň elektromontér, Praha 8—Kobylisy; *Sylva Vodrážková*, SVVŠ Ostrava; *Ondřej Waldmann*, SVVŠ, Ostrava.

C. *Daniela Svobodová*, SVVŠ, Praha 5—Smíchov.

Děkujeme za srdečné dopisy některých luštitelů ze skupiny A (např. s. Opřátkové a s. Přímanové) a všem luštitelům přejeme mnoho zdaru do další práce.

J. M. F.

* * *

Matematicko-fyzikální fakulta Karlovy university uspořádá od školního roku 1964/65 dvouletý *postgraduální kurs teoretické fyziky* pro absolventy vysokých škol technického zaměření. Podrobnosti sdělí katedra teoretické fyziky výše uvedené fakulty, Praha 2, Ke Karlovu 3.

* * *

Přejete-li si, aby vám od září byly Rozhledy matematicko-fyzikální doručovány pravidelně od prvního čísla, objednejte si je u místního poštovního úřadu (Poštovní novinové služby) již nyní. Žádáme též ředitelství škol, aby hromadné objednávky byly provedeny co nejdříve.

Ředakce

Slovníček

matematických výrazů

плоскость горизонта, изображения, касательная, комплексная, нормальная, опорная, ориентированная, проекций, секущая, симметрии	rovina obzorová, zobrazovací, tečná, komplexní, normálová, opěrná, orientovaná, promítací (nebo průmětná), sečná, souměrnosti
площадь	obsah
повернутый	sklopený, překlopený, pootočený
повернуть	sklopit, překlopit, pootočit
поверхностный	plošný, povrchový
поверхность	plocha
поверхность вращения, коническая, пирамидальная, призматическая, развертывающаяся, цилиндрическая, шаровая	plocha rotační, kuželová, jehlanová, hranolová, rozvinutelná, válcová, kulová
по-видимому	zřejmě
поворачивать	otáčet
поворот	otočení
повысить	povýšit, umocnit
погрешность	chyba, nepřesnost
подбирать, подобрать	volit, vybrat
подбор	volba, výběr
подвижной, подвижный	pohyblivý
поделить	vydělit
подкасательная	subtangenta
подкоренное выражение, число	odmocněnec
поднормаль	subnormála
подобие	podobnost
подобные треугольники	podobné trojúhelníky
подставить, подставлять	dosadit, udělat substituci
подстановка, круговая подстановка	substituce, cyklická záměna
подсчет	sčítání, výpočet
подсчитать	spočítat
подсчитывать	počítat
подчинить, подчинять	podrobit (podmínce)
показатель	exponent, index
показатель степени, корня	mocnitel (exponent), odmocnitel
полином	polynom
полностью	zcela, úplně
полный четырехугольник	úplný čtyřstran, čtyřroh
половина	polovina

положение взаимное	vzájemná poloha
положительно, положительный	kladně, kladný
полоса	pás
полуплоскость	polorovina
полупространство	poloprostor
полупрямая	polopřímka
полушарие	polokoule
получать	získávat, obdržet
полюс	pól
понятие	pojem
поправка	oprava
порождать	vytvářet, tvořit
порядок	řád, stupeň
последовательно	postupně, důsledně
последовательность	posloupnost, pořadí
поставить в соответствие	přiřadit
постановка задачи	zadání (formulace) úlohy
постоянная	konstanta
постоянно	stále
построить	sestrojít
построение	konstrukce
по часовой стрелке	ve smyslu pohybu hodinové ručičky
почленно	člen po členu, každý člen s každým členem
пояс	pás
правило	pravidlo
правильный	pravidelný, správný
предел	mez, limita, hranice
предложение	věta, tvrzení
предполагать	předpokládat
предположение	předpoklad
предыдущий	předcházející
пренебрегать	zanedbávat
преобразование	transformace, zobrazení úprava
прибавлять	přičítat
приближенное значение с избытком, с недостатком	hodnota zaokrouhlená nahoru, dolů
приближенное число	číslo přibližné
приближенный	přibližný
приблизительно	přibližně
прибор	nástroj, aparát
приведение	uvezení, redukce
приведенное квадратное уравнение	normální tvar kvadratické rovnice
приводимый	rozložitelný
прием	způsob, metoda
призма, ж.	hranol
признак	znak, kritérium
прикладная математика	aplikovaná matematika
приложение	aplikace, použití, dodatek
пример	příklad
принимать	nabývat
принимать значения	nabýt hodnoty
принимать приращение	zvětšit se
проверить	prověřit, zkontrolovat, verifikovat
прогрессия	posloupnost